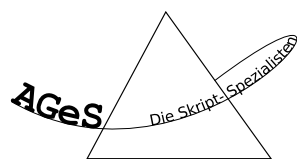


# LASERPHYSIK

nach den Vorlesungen von PD Dr. Stefan Grafström  
(Sommersemester 2009)

Herausgegeben von



Jeffrey Kelling  
Felix Lemke  
Stefan Majewsky

Stand: 23. September 2009

# Inhaltsverzeichnis

<b>Vorwort (zuerst lesen)</b>	<b>4</b>
<b>1 Einführung</b>	<b>5</b>
1.1 Stimulierte Emission . . . . .	5
1.2 Grundaufbau und Prinzip . . . . .	5
1.2.1 Eigenschaften von Laserlicht . . . . .	6
1.2.2 Geschichtliches . . . . .	6
<b>2 Atomphysikalische und quantenmechanische Grundlagen</b>	<b>7</b>
2.1 Die Einstein-Koeffizienten . . . . .	7
2.2 Wirkungsquerschnitte . . . . .	8
2.3 Übergangsarten . . . . .	8
2.4 Zusammenhang zwischen Übergangsrate und Einsteinkoeffizient/Wirkungsquerschnitt .	10
2.5 Linienform/-breite . . . . .	11
2.6 Sättigung . . . . .	13
2.7 Einige Anmerkungen . . . . .	14
2.8 Das klassische Oszillatormodell . . . . .	16
<b>3 Elektrodynamische Grundlagen</b>	<b>18</b>
3.1 Elektromagnetische Wellen . . . . .	18
3.2 Resonatorenmoden . . . . .	19
3.3 Ein bisschen Quantenelektrodynamik . . . . .	21
3.4 Laserresonatoren. Problemstellung . . . . .	22
3.5 Beispiel eines planparallelen Resonator . . . . .	22
3.6 Stabilität von optischen Resonatoren . . . . .	23
3.7 Modenstruktur . . . . .	25
3.7.1 Prinzipielle Vorgehensweise . . . . .	25
3.7.2 Symmetrischer konfokaler Resonator . . . . .	26
3.8 Gauß-Optik . . . . .	27
3.9 Laserspiegel . . . . .	27
<b>4 Der Laser: Wirkungsweise und Eigenschaften</b>	<b>28</b>
4.1 Herstellung der Inversion . . . . .	28
4.2 Laserbedingungen, Schwelle . . . . .	29
4.3 Ratengleichung des gekoppelten Systems: Resonator – aktives Medium . . . . .	30
4.4 Stationärer Zustand . . . . .	32
4.5 Ein- oder Mehrmodenbetrieb . . . . .	33
4.6 Transientes Verhalten, Pulsbetrieb . . . . .	34
4.6.1 Spiking, Relaxationsoszillationen . . . . .	34
4.6.2 Güteschalten (Q-Switching) . . . . .	35
4.6.3 Modenkopplung . . . . .	36

<b>5</b>	<b>Lasertypen</b>	<b>38</b>
5.1	Gaslaser . . . . .	38
5.1.1	He-Ne-Laser (Neutralatomlaser) . . . . .	38
5.1.2	Ar <sup>+</sup> -Laser (Ionenlaser) . . . . .	38
5.1.3	CO <sub>2</sub> -Laser (Moleküllaser) . . . . .	39
5.1.4	Excimer-Laser (Gaslaser) . . . . .	39
5.1.5	Weitere Gaslaser . . . . .	40
5.2	Farbstofflaser . . . . .	40
5.3	Feststofflaser . . . . .	41
5.3.1	Rubinlaser . . . . .	41
5.3.2	Nd-Laser . . . . .	41
5.3.3	Ti-Saphir-Laser . . . . .	41
5.3.4	Farbzentrenlaser . . . . .	41
5.4	Halbleiterlaser . . . . .	42
	<b>Stichwortverzeichnis</b>	<b>44</b>

# Vorwort

Bevor Ihr beginnt, mit diesem Skript zu arbeiten, möchten wir Euch darauf hinweisen, dass dieses Skript weder den Besuch der Vorlesung noch das selbstständige Nacharbeiten des Stoffes ersetzt. Wer das nicht verstanden hat, bei dem kann die Benutzung des Skriptes für Probleme insbesondere im Verständnis des Stoffes sorgen.

Das liegt daran, dass das Skript nicht als vorgekauter Wissensspeicher zu verstehen ist. Das hier ist eine Abschrift des Inhaltes, den die Vorlesung zu vermitteln versucht. Nicht enthalten sind zum Beispiel mündliche Kommentare des Professoren, auch wenn diese im individuellen Falle oft erst den Groschen fallen lassen.

Gut geeignet ist das Skript einfach gesagt als Wissensstütze, also zum Beispiel zum schnellen Nachschlagen; außerdem zum Wiederholen früheren Stoffes, sofern ein ausreichendes Grundverständnis vorhanden ist. Nach diesen einleitenden Worten wünschen wir Euch viel Spaß bei der Arbeit mit diesem Skript und viel Erfolg beim Studium!

Die AGeS-Redaktion  
[www.ages-skripte.org](http://www.ages-skripte.org)

P.S. Wir suchen immer Helfer, die unsere Skripte um neue Inhalte erweitern, Fehler suchen, oder das Layout ansprechender gestalten wollen. Wenn Ihr Lust habt, meldet Euch über unsere Webseite.

# 1 Einführung

Das Wort Laser steht für „Light Amplification by Stimulated Emission of Radiation“.

## 1.1 Stimulierte Emission

Wir betrachten die Energieabstände  $h \cdot \nu$  in der Atomhülle.  $N_1$  sei die Besetzungszahl im Grundzustand,  $N_2$  die der angeregten Zustandes. Das Elektron wird sich die meiste Zeit im Grundzustand befinden. Durch **Absorption** eines Photons kann es in den angeregten Zustand übergehen. Die Erfahrung zeigt, dass das Elektron spontan (**spontane Emission** in den Grundzustand zurückfällt, wobei ein Photon abgegeben wird. Es kann aber auch sein, dass die Emission durch ein anders Photon ausgelöst wird, **stimulierte Emission**. Danach hat man zwei Photonen.

Falls  $N_2 > N_1$  (**Inversion**) gilt, dass mehr stimulierte Emissionen stattfinden als Absorptionen. Durch diesen Effekt wird die Lichtwelle beim Durchgang durch ein Medium verstärkt.

In der Natur liegt ein thermisches Gleichgewicht vor, in dem gilt:

$$\frac{N_2}{N_1} = e^{-h \cdot \nu / kT} < 1$$

## 1.2 Grundaufbau und Prinzip

Zentral befindet sich das aktive Medium. Von außen wird nun Energie eingetragen. Das aktive Medium befindet sich seinerseits in einem optischen Resonator (zwischen zwei Spiegeln). Einer der Spiegel hat einen Reflexionkoeffizient gleich Eins, der andere kleiner Eins ( $\approx 0,99$ ).

Zu den einzelnen Bestandteilen und Prinzipien:

- **aktives Medium:** Es zeichnet sich vor allem durch einen guten Laserübergang aus, das heißt, es lässt sich gut invertieren. *Beispiele:* Gase wie He-Ne, Flüssigkeiten mit gelösten Farbstoffen, Festkörper wie NdYAG
- **Pumpen:** sorg dafür, dass  $N_2 > N_1$  ist. Dafür gibt es verschiedene Möglichkeiten:
  - Gasentladung
  - Strom durch einen pn-Übergang
  - Blitzlampe
  - ein anderer Laser
- **optischer Resonator:** Er besteht im einfachsten Fall aus zwei Spiegel. Man nutzt dabei die Rückkopplung.

Der Laser springt an, wenn die folgende Bedingung erfüllt ist (die Schwelle überschritten ist):

$$G \cdot V \geq 1$$

Es ist  $G$  der **Verstärkungsfaktor** pro Umlauf im Resonator.  $V$  ist der **Verlustfaktor** pro Umlauf im Resonator, z.B. durch Streuung, Beugung und Auskopplung

Irgendwann entsteht eine spontane Emission eines Photons. Dieses Photon kann dann stimulierte Emission auslösen. Nach der Emission sind zwei Photonen vorhanden, die ihrerseits weiter stimulieren können. Es entsteht also eine Lawine.

Natürlich nimmt beim Aufbau der Lawine die Inversion ab. Je geringer die Inversion ist, desto geringer ist der Verstärkungsfaktor. Dadurch stellt sich im stationären Betrieb ein Gleichgewicht ein. Der stationäre Betrieb, auch *continuous wave (c.w.)* genannt, läuft ohne externe Pulsung ab.

### 1.2.1 Eigenschaften von Laserlicht

- monochromatisches Licht (cw, im gepulsten Laser beschränkt die Heisenberg'sche Unschärfere-lation die Schärfe des Peaks im Energiespektrum)
- gut gebündelter Strahl (damit ist der Strahl auch gut gerichtet, lässt sich also gut fokussieren)
- zeitlich und räumlich kohärentes Licht (zeitliche Kohärenz: zwischen zwei Punkten entlang des Strahles besteht eine feste Phasenbeziehung, räumliche Kohärenz: zwischen zwei Punkten seitlich zum Strahlengang besteht eine feste Phasenbeziehung)
- hohe spektrale Intensität (die gesamte Leistung einer Glühlampe ist zwar größer, betrachtet man aber einen schmalen Bereich des Spektrums, so ist die Intensität des Lasers viel größer)
- u.U. kurze Pulse (bis auf wenige Schwingungen, dafür teilweise mit extremen Spitzenleistungen)
- u.U. durchstimmbare Frequenz

### 1.2.2 Geschichtliches

1917 wurde die stimulierte Emission von Einstein erklärt. 1928 erfolgt der Nachweis der negativen Absorption durch Ladenburg. Es folgten einige theoretische Arbeiten bis 1954 ein Vorläufer des Lasers („Maser“) im Mikrowellenbereich gebaut wurde (1969 Nobelpreis). Der erste Laser entstand 1960, gebaut von Maiman. 1961 beschäftigte sich Bloembergen mit der nichtlinearen Optik.

## 2 Atomphysikalische und quantenmechanische Grundlagen

### 2.1 Die Einstein-Koeffizienten

Ausgehend von den oben beschriebenen Niveaus findet man folgende Formeln:

- Absorption:

$$\left(\frac{dN_1}{dt}\right)_{\text{abs}} = \left(-\frac{dN_2}{dt}\right)_{\text{abs}} = -B_{12}N_1 \cdot \varrho_\nu(\nu_0)$$

$B_{12}$  ist der **Einsteinkoeffizient der Absorption**.  $\varrho_\nu(\nu_0) d\nu$  ist die Energie in dem Volumen  $[\nu_0, \nu_0 + d\nu]$ .

- spontane Emission:

$$\left(\frac{dN_1}{dt}\right)_{\text{spon}} = A \cdot N_2$$

$A$  ist der **Einsteinkoeffizient der Emission**. Falls die Atome sich selbst überlassen werden ( $\varrho_\nu = 0$ ) gilt:

$$\left(\frac{dN_2}{dt}\right)_{\text{tot}} = \left(\frac{dN_2}{dt}\right)_{\text{spon}} = -A \cdot N_2 \Rightarrow N_2 = N_2(0) \cdot e^{-A \cdot t}$$

Damit ist  $\tau = 1/A$  die mittlere Lebensdauer gegenüber dem spontanen Zerfall.

- stimulierte Emission:

$$\left(\frac{dN_2}{dt}\right)_{\text{stim}} = B_{21} \cdot N_2 \cdot \varrho_\nu(\nu_0)$$

Im stationären Zustand folgt:  $\left(\frac{dN_2}{dt}\right)_{\text{tot}} = 0$ .

- Insgesamt erhält man:

$$\begin{aligned} 0 &= -B_{12} \cdot N_1 \cdot \varrho_\nu(\nu_0) + A \cdot N_2 + B_{21} \cdot N_2 \cdot \varrho_\nu(\nu_0) \\ \Rightarrow \varrho_\nu(\nu_0) &= \frac{A \cdot N_2}{-B_{21} \cdot N_2 + B_{12} \cdot N_1} = \frac{A/B_{21}}{\frac{B_{12} \cdot N_1}{B_{21} \cdot N_2} - 1} \end{aligned}$$

Einstein ging davon aus, dass im thermischen Gleichgewicht das Planck- bzw. das Boltzmann-Gesetz gilt:

$$\begin{aligned} \varrho_\nu(\nu_0) &= \frac{8\pi \cdot h \nu_0^3}{c^3} \cdot \frac{1}{e^{h\nu_0/kT} - 1} \\ \frac{N_2}{N_1} &= e^{-h\nu_0/kT} \end{aligned}$$

Damit erhält man:

$$\begin{aligned} \frac{B_{12} \cdot N_1}{B_{21} \cdot N_2} &= e^{h\nu/kT} \Rightarrow B_{12} = B_{21} =: B \\ \frac{A}{B} &= \frac{8\pi \cdot h \nu_0^3}{c^3} \sim \nu_0^3 \end{aligned}$$

## 2.2 Wirkungsquerschnitte

Es sollen Lichtbündel durch ein Medium der Dicke  $dz$  und der Fläche  $\tilde{A}$  gehen. Wir beschreiben die Energiedichte durch die **Photonenflussdichte**  $F$ , also der Anzahl der Photon pro Fläche und Zeit (Intensität der Welle geteilt durch  $h\nu$ ). Hinter dem Medium ist die Photonenflussdichte  $F + dF$ . Die Energiedichte ist proportional zur Photonenflussdichte.

- Rate der Absorptionen im Zustand 1:

$$-\frac{1}{N_1} \cdot \left( \frac{dN_2}{dt} \right)_{\text{abs}} = B \cdot \varrho_\nu = \sigma_{12} \cdot F$$

Dimensionüberlegungen ergeben eine Einheit für  $\sigma$  von  $\text{m}^2$ .  $\sigma_{12}$  ist der **Absorptionsquerschnitt**.

- Rate der stimulierten Emission pro Atom im Zustand 2:

$$-\frac{1}{N_2} \cdot \left( \frac{dN_2}{dt} \right)_{\text{stim}} = B \cdot \varrho_\nu = \sigma_{21} \cdot F$$

$\sigma_{21}$  ist der **Emissionsquerschnitt**. Man stellt fest, dass gilt:

$$\sigma_{12} = \sigma_{21} = \sigma$$

Im weiteren sind  $N_1$  und  $N_2$  Anzahldichten pro Volumen. Damit entspricht  $N_1 \cdot \tilde{A} dz$  der Anzahl im Zustand 1, entsprechend für  $N_2$ . Rechnet man das pro eine Zeiteinheit ergeben sich  $\sigma \cdot F \cdot N_1 \cdot \tilde{A} dz$  absorbierte Photonen und  $\sigma \cdot F \cdot N_2 \cdot \tilde{A} dz$  stimuliert emittierte Photonen. Man erhält:

$$dF = \frac{\sigma \cdot F \cdot (N_2 - N_1) \cdot \tilde{A} dz}{\tilde{A}} \Rightarrow \frac{dF}{F} = \frac{dI}{I} = \sigma \cdot (N_2 - N_1) dz$$

Diese Differentialgleichung hat die Lösung:

$$F = F(0) \cdot e^{\gamma \cdot z} \quad \text{mit} \quad \gamma = \sigma \cdot (N_2 - N_1) = -\alpha$$

$\gamma$  ist der **Gewinnkoeffizient** und  $\alpha$  der **Absorptionskoeffizient**. Es ist  $\gamma > 0$ , wenn  $N_2 > N_1$  ist.

## 2.3 Übergangsarten

Der **Hamiltonoperator**  $\hat{\mathcal{H}}_0$  entspricht der Energie der Leuchtelektronen. Die Wellen im Medium müssen der Schrödingergleichung genügen, das heißt:

$$i\hbar \cdot \frac{d\psi}{dt} = \hat{\mathcal{H}}_0 \psi$$

Die Eigenwerte ergeben sich zu:

$$\psi_n(\vec{r}, t) = u_n(\vec{r}) \cdot e^{-iE_n \cdot t/\hbar} \quad \text{mit} \quad n = 1, 2$$

Wir betrachten die Observable  $\hat{O}$  und dessen Erwartungswert:

$$\langle \hat{O} \rangle = \int \psi_n^* \hat{O} \psi_n dV = \int u_n^* \cdot \hat{O} \cdot u_n dV$$



Man erkennt, dieser Zustand ist ein stationärer Zustand, da der Erwartungswert nicht von der Zeit abhängt.

Die Wechselwirkung mit einer elektromagnetischen Welle entspricht eine Störung. Zu Beschreibung betrachten wir den Fall  $d(\text{Atom}) \ll \lambda$ , was für sichtbares Licht immer gilt. Damit kann man sagen, dass die Wirkung des Feldes am Atom an jeder Stelle des Atoms gleich ist, das heißt, das Atom sieht ein homogenes Feld. Das Feld sei nun gegeben durch:

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \cdot \cos \omega t$$

Es entsteht ein **Wechselwirkungshamiltonoperator**  $\hat{\mathcal{H}}_1$ :

$$\hat{\mathcal{H}}_1 = -\vec{\mu} \cdot \vec{E} = e \cdot \vec{r} \cdot \vec{E} \cdot \cos \omega t$$

Hierbei ist  $\vec{\mu}$  das **Dipolmoment**.

Allgemein lässt sich ein Zustand darstellen aus der Linearkombination der beiden Basiszustände:

$$\psi(\vec{r}, t) = c_1(t) \cdot \psi_1(\vec{r}, t) + c_2(t) \cdot \psi_2(\vec{r}, t) \quad \text{mit} \quad |c_1|^2 + |c_2|^2 = 1$$

Diese Wellenfunktionen setzen wir in die Schrödingergleichung ein:

$$i\hbar \cdot \frac{d\psi}{dt} = i\hbar \cdot \left[ \frac{dc_1}{dt} \cdot \psi_1 + c_1 \cdot \frac{d\psi_1}{dt} + \frac{dc_2}{dt} \cdot \psi_2 + c_2 \cdot \frac{d\psi_2}{dt} \right] = (\hat{\mathcal{H}}_1 + \hat{\mathcal{H}}_2) \cdot (c_1 \cdot \psi_1 + c_2 \cdot \psi_2)$$

Jetzt verwenden wir, dass die einzelnen Wellengleichungen  $\psi_n$  auch die Schrödingergleichung erfüllen müssen:

$$i\hbar \cdot \left[ \frac{dc_1}{dt} \cdot \psi_1 + \frac{dc_2}{dt} \cdot \psi_2 \right] = \mathcal{H}_1 (c_1 \cdot \psi_1 + c_2 \cdot \psi_2)$$

Nun bildet man das Skalarprodukt mit  $\psi_1$  von links. Außerdem verwendet man:

$$\begin{aligned} \int \psi_n^* \psi_m dV &= \delta_{nm} & (i) \\ \psi_n^* \hat{\mathcal{H}}_1 \psi_m dV &= \vec{E}_0 \cos \omega t \cdot e^{-i(E_m - E_n)t/\hbar} \cdot \underbrace{\int u_n^* \cdot e \cdot \vec{r} u_m dV}_{= \vec{\mu}_{nm}} & (ii) \end{aligned}$$

$\vec{\mu}_{11}$  ist der Erwartungswert von  $\hat{\vec{\mu}}$  im Zustand 1, und der verschwindet wegen der Punktsymmetrie.  $\vec{\mu}_{12}$  ist das **Übergangsdipolmatrixelement**.

$$i\hbar \cdot \frac{dc_1}{dt} = c_2 \cdot \vec{\mu}_{12} \cdot \vec{E}_0 \cdot \cos \omega t \cdot e^{-i\omega_0 t}$$

Hierbei ist  $\hbar\omega_0 = E_2 - E_1$ . Nach einer weiteren Multiplikation mit  $\psi_2$  erhält man:

$$i\hbar \cdot \frac{dc_1}{dt} = c_1 \cdot \vec{\mu}_{21} \cdot \vec{E}_0 \cdot \cos \omega t \cdot e^{i\omega_0 t}$$

Man stellt fest, dass  $\vec{\mu}_{12} = \vec{\mu}_{21}$  gilt.

Weiter betrachten wir die Anfangsbedingungen  $c_1(0) = 1$  und  $c_2(0) = 0$ . Gesucht ist  $c_2(t)$ . Das lässt sich nicht einfach lösen, sondern man macht die Vereinfachung für kleine Wechselwirkungsenergien  $|\vec{\mu}_{12} \cdot \vec{E}_0|$ . Nun kann man die Reihenentwicklung ausführen. Für die  $n$ -te Näherung ersetzt man die  $c_1$  und  $c_2$  auf der rechten Seite durch  $(n-1)$ -Näherung. Die 0-te Näherung ergibt sich aus den Anfangsbedingungen. Damit ist Die erste Näherung ergibt  $\hbar \cdot \frac{dc_1}{dt} = 0$ , also  $c_1 = \text{const} = 1$ . Für  $c_2$  hat man:

$$i\hbar \cdot \frac{dc_2}{dt} = \vec{\mu}_{12}^* \cdot \vec{E}_0 \cdot \underbrace{\cos \omega t}_{= \frac{1}{2} \cdot (e^{i\omega t} + e^{-i\omega t})} \cdot e^{i\omega_0 t}$$

Diese Differentialgleichung lässt sich lösen und man erhält genähert:

$$c_2 = \frac{\vec{\mu}_{12}^* \cdot \vec{E}_0}{2\hbar} \cdot \left[ \frac{1 - e^{i(\omega_0 - \omega) \cdot t}}{\omega_0 - \omega} + \frac{1 - e^{i(\omega_0 + \omega) \cdot t}}{\omega_0 + \omega} \right]$$

Für  $\omega \approx \omega_0$  wird der erste Summand sehr groß und der zweite verschwindet.

$$|c_2|^2 = \frac{|\vec{\mu}_{12}^* \cdot \vec{E}_0|^2}{\hbar^2} \cdot \frac{\sin^2\left(\frac{\omega - \omega_0}{2} \cdot t\right)}{(\omega_0 - \omega)^2}$$

Man erkennt, dass die Breite des Hauptmaximums proportional zu  $1/t$  ist und die Höhe ist proportional zu  $t^2$ . Damit ist die Fläche proportional zu  $t$ . Für große Zeiten (das heißt: lange Wechselwirkungen) geht  $|c_2|^2$  in eine Deltafunktion über:

$$\frac{\sin^2\left(\frac{\omega - \omega_0}{2} \cdot t\right)}{(\omega_0 - \omega)^2} \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \frac{\pi}{2} \cdot t \cdot \delta(\omega - \omega_0) = \frac{t}{4} \cdot \delta(\nu - \nu_0)$$

Nun sind die Atome nicht mehr beliebig orientiert:

$$|\vec{\mu}_{12}^* \cdot \vec{E}_0|^2 \xrightarrow{\text{Mittelung}} \frac{1}{3} \cdot |\mu_{12}|^2 \cdot E_0^2$$

Als Ergebnis erhält man die **Übergangsrate**  $W$ :

$$W_{12} = \frac{|c_2|^2}{t} = \frac{\pi^2}{3\hbar^2} \cdot |\mu_{12}|^2 \cdot E_0^2 \cdot \delta(\nu - \nu_0)$$

Mit dieser Theorie kann man den spontanen Zerfall in der Grundzustand nicht beschreiben. Dadurch ist der spontane Zerfall ein Störeinfluss für diese Formeln. Ein weiterer Störeinfluss ist der Stoß des Atoms (etwa mit anderen Atomen oder Phononen). Damit ist die Wechselwirkungszeit begrenzt und die Deltafunktion geht in eine Verteilung  $g(\nu - \nu_0)$  über. Für diese Verteilung soll gelten:  $\int g \, d\nu = 1$ .

Wir haben nicht einmal vorausgesetzt, dass der eine Zustand höher ist, als der andere, das heißt, die Theorie gilt sowohl für die An- als auch für die Abregung. Also:

$$W_{12} = W_{21}$$

## 2.4 Zusammenhang zwischen Übergangsrate und Einsteinkoeffizient/Wirkungsquerschnitt

Einstein hat sich ein thermisches Lichtfeld vorgestellt, wie haben allerdings eine Welle einer konkreten Wellenlänge vorausgesetzt.

Betrachten wir die Energiedichte für monochromatisches Licht:

$$\frac{1}{2} \cdot \varepsilon_0 \varepsilon \cdot E_0^2$$

Für eine gewisse Spektrale breite ersetzt wir den Ausdruck durch  $\varrho_\nu \, d\nu$ . Weiterhin sei  $n$  der **Brechungsindex** mit  $n^2 = \varepsilon$ .

$$dW_{12} = \frac{2\pi^2}{3\hbar^2 \cdot \varepsilon_0 \cdot n^2} \cdot |\mu_{12}|^2 \cdot \varrho_\nu \, d\nu \cdot g(\nu - \nu_0)$$

Die Gesamtrate pro Atom im Zustand 1 sieht folgendermaßen aus:

$$-\frac{1}{N_1} \cdot \left( \frac{dN_1}{dt} \right)_{\text{abs}} = \int_{\text{alle } \nu} dW_{12}$$

Sei nun das Spektrum sehr breit im Vergleich zum atomaren Übergang. ( $\varrho_\nu \approx \varrho_\nu(\nu_0)$  über  $g$  hinweg)

$$-\frac{1}{N_1} \cdot \left( \frac{dN_1}{dt} \right)_{\text{abs}} = \underbrace{\frac{2\pi^2}{3h^2 \cdot \varepsilon_0 \cdot n^2} \cdot |\mu_{12}|^2}_{=B} \cdot \varrho_\nu(\nu_0)$$

Damit ist der Zusammenhang zu den Einsteinkoeffizienten hergestellt.

Nun betrachten wir die Intensität:

$$== \frac{c}{n} \cdot \varrho = \frac{1}{2} \cdot nc \cdot \varepsilon_0 \cdot E_0^2 \quad \text{und} \quad F = \frac{I}{h \cdot \nu}$$

Damit ergibt sich:

$$W_{12} = \underbrace{\frac{2\pi^2}{3h \cdot nc \cdot \varepsilon_0} \cdot |\vec{\mu}_{12}|^2 \cdot \nu \cdot g(\nu - \nu_0)}_{=\sigma(\nu)} \cdot F$$

Damit ist auch der Zusammenhang zu dem Wirkungsquerschnitt für die Wechselwirkung mit monochromatischem Licht hergestellt.

Von Einstein wissen wir:

$$A = \frac{8\pi \cdot h \cdot \nu_0^3}{(c/n)^3} \cdot B = \frac{16\pi^3 \cdot n \cdot \nu_0^3}{3c^3 \cdot \varepsilon_0 \cdot h} \cdot |\mu_{12}|^2 = \frac{1}{\tau_{\text{sp}}}$$

Typische Werte für  $|\mu_{12}|$  sind in der Größenordnung von  $e \cdot a_0$ , also  $e \cdot 0,5 \text{ \AA}$ . Sichtbares Licht hat  $h \cdot \nu_0 = 2 \text{ eV}$  mit  $\nu_0 = 5 \cdot 10^{14} \text{ Hz}$ . Damit ist  $\tau_{\text{sp}} \approx 10 \text{ ns}$ .

## 2.5 Linienform/-breite

Diese Eigenschaften sind identisch für alle drei Prozesse. Wir betrachten also zum Beispiel die spontane Emission.

1. Einfluss der Lebensdauer: Wir wissen, dass die Besetzungszahl abklingt.

$$N_Z \sim e^{-\Gamma_1 \cdot t} \sim I_{\text{abge}}$$

$I_{\text{abge}}$  ist die Intensität der abgestrahlten Welle. Das elektrische Feld ist aber proportional zu  $\exp(-\Gamma_1 \cdot t/2)$ . Es ergibt sich die sogenannte **Lorentz-Linie**.

$$g(\nu - \nu_0) = \frac{4}{\Gamma_1 \cdot (1 + 16\pi^2 \cdot (\nu - \nu_0)^2 / \Gamma_1^2)}$$

$\Gamma_1$  ist gegeben durch:

$$\Gamma_1 = \frac{1}{\tau_{\text{sp}}} + \frac{1}{\tau_{\text{nr}}} = \frac{1}{\tau}$$

$\tau_{\text{nr}}$  ist die Zerfallszeit eines nichterhaltenden Zerfalls (z.B. in Phononen). Weiterhin ergibt sich die **natürliche Linienbreite**  $\Delta\nu_{\text{nat}}$ .

$$\Delta\nu_{\text{nat}} = \frac{1}{2\pi \cdot \tau_{\text{sp}}}$$

2. Weiterhin betrachten wir den Einfluss der Deplatzierung auf die Linienform. Während eines Stoßes sieht das Leuchteletron ein leicht verändertes Potential. Aus diesem Grund sind die Niveaus und damit auch  $h\nu_0$  verschoben. Um einen Überblick zu bekommen schauen wir uns die **Stoßdauer**  $\Delta\tau_c$  an.

$$\Delta\tau_c = \frac{d_{\text{Atom}}}{v_{\text{atom}}} \approx 10 \cdot 10^{-13} \text{ s}$$

Diese Zeit ist viel größer als  $\nu_0^{-1}$ . Die Zeit zwischen den Stößen  $\tau_c$  beträgt:

$$\tau_c = \frac{\text{freie Weglänge}}{v_{\text{Atom}}} \stackrel{(\text{Lit.})}{=} \frac{1}{16 \cdot p \cdot a^2} \cdot \sqrt{\frac{M \cdot k_B T}{\pi}}$$

Hierbei sind  $a$  der Radius und  $M$  die Masse der Moleküle.

### Beispiel 2.1

Neon

Wir betrachten Neon bei  $p = 0,5$  Torr und  $T = 300$  K. Damit ergibt sich eine Zeit zwischen den Stößen von  $\tau_c = 5 \cdot 10^{-7}$  s, welche sehr viel größer als  $\Delta\tau_c$  ist.

Anschaulich kann man das sich so vorstellen, dass die Phase der Welle gestört wird. Die Welle vor dem Stoß passt also nicht mehr zur Welle nach dem Stoß. Man erhält mit diesen Phasensprüngen eine **Verbreiterung** um  $\Delta\nu_c$  des Frequenzspektrums.

$$\Delta\nu_c = \frac{1}{\pi \cdot \tau_c} = \frac{\Gamma_2}{\pi}$$

Es folgen ein paar typische Zahlenwerte.

- Gas:  $\approx 1$  MHz/Torr
- Flüssigkeit und Festkörper (Stöße mit Phononen und Elektronen):  $\tau_c \leq 1$  ps, das führt auf  $\Gamma_2 \gg \Gamma_1$

Die Einflüsse durch die Lebensdauer und durch Stöße lassen sich zusammenfassen:

$$\Delta\nu = \frac{\Gamma_1 + 2\Gamma_2}{2\pi} = \frac{\Gamma_{\text{tot}}}{\pi} \quad \text{mit} \quad \Gamma_{\text{tot}} = \Gamma_2 + \frac{\Gamma_1}{2}$$

Die Lorentzlinie lässt sich damit als  $g(0) = 2/\Gamma_{\text{tot}}$  schreiben.

Die war bisher also eine **homogene Verbreiterung**, bei der alle Atom das gleiche  $\nu_0$  haben. Jetzt folgt die **inhomogene Verbreiterung**. Hier hat man eine Überlagerung vieler Verbreiterung. Ausgelöst werden diese Verbreiterungen durch zwei Effekte.

1. Zum einen durch die **Dopplerverbreiterung** in Gasen. Ein Teilchen bewegt sich mit  $\vec{v}$ . In Richtung des Beobachters hat die Geschwindigkeit  $v_x$ . Damit ergibt sich die Verbreiterung aus:

$$\nu'_0 = \nu_0 \cdot \left(1 + \frac{v_x}{c}\right)$$

Um die Anzahl der Geschwindigkeitskomponenten herauszubekommen schauen wir uns die Anzahl der Atome im Intervall  $[v_x, v_x + dv_x]$  an. Die Anzahl geht proportional zu

$$\sim e^{-Mv_x^2/2kT} dv_x \sim e^{-Mc^2/2kT \cdot \left(\frac{\nu'_0 - \nu_0}{\nu_0}\right)^2} d\nu'_0$$

Die Exponentialfunktion ergibt die Verteilung  $\tilde{g}(\nu'_0 - \nu)$  der Mittenfrequenzen. Diese Verteilung entspricht einer Gaußverteilung. Die Halbwertsbreite ist bekannt:

$$\Delta\nu_D = \nu_0 \cdot \sqrt{\frac{8kT \cdot \ln 2}{M \cdot c^2}}$$

**Beispiel 2.2**

Neon

Wiederum betrachten wir Neon bei  $T = 300\text{ K}$ . Die Wellenlänge, die zum Übergang gehört beträgt  $\lambda_0 = 633\text{ nm}$ . Damit ergibt sich  $\Delta\nu_D = 1,7\text{ GHz}$ . Das ist ungefähr ein Zehntel der Linienbreite ohne Dopplereffekt. Das heißt, dieser Effekt ist ein sehr deutlicher Effekt innerhalb von Gasen.

Die Spektrallinie erhält wir aus der Faltung:

$$\int g(\nu - \nu'_0) \tilde{g}(\nu'_0 - \nu_0) d\nu'_0$$

Die entstehende Linie wird **Voigt-Linie** genannt. Sie ist eine relativ breite Verteilung der Mittelfrequenzen.

2. Weiterhin gilt besonders in Flüssigkeiten und Festkörpern, dass die Umgebung (Kristallfeld) von Atom zu Atom unterschiedlich ist. Das führt zu einer Verschiebung der Übergangsfrequenzen.

## 2.6 Sättigung

Wir betrachten noch einmal die Besetzungszahl:

$$\frac{dN_2}{dt} = (N_1 - N_2) \cdot \frac{I \cdot \sigma}{h \cdot \nu} - \frac{N_2}{\tau}$$

Wir führen zunächst einmal zwei Größen ein, zum einen die Differenz der Besetzungszahlen  $\Delta N = N_1 - N_2$  und die Gesamtzahl  $N_0 = N_1 + N_2 = \text{const.}$

$$\frac{d\Delta N}{dt} = - \left( \frac{2I \cdot \sigma}{h \cdot \nu} + \frac{1}{\tau} \right) \cdot \Delta N + \frac{N_0}{\tau}$$

- Sei  $I = \text{const.}$  ab  $t = 0$ . Die Besetzungszahländerung  $\Delta N$  nimmt exponentiell ab und nähert sich  $\Delta N_{\text{stat}}$  an. Die Zeitkonstante ist:

$$\left( \frac{2I \cdot \sigma}{h \cdot \nu} + \frac{1}{\tau} \right)^{-1}$$

Wir interessieren uns für den stationären Zustand:

$$\Delta N_{\text{stat}} = \frac{N_0}{1 + I/I_s} \quad \text{mit} \quad I_s = \frac{h\nu}{2I \cdot \sigma}$$

Hierbei ist  $I_s$  die Sättigung. Man beachte, dass stets  $\Delta N_{\text{stat}} > 0$  ist. Es ist also keine Inversion möglich. Ein Laser kann nie ein Zwei-Niveau-System sein.

- Sei nun  $I \gg I_s$  und  $N_1 \approx N_2$ . Wir stellen uns vor, dass wir eine dünne Scheibe unseres Materials haben. Diese beleuchten wir mit einem Strahl hoher Intensität  $I_P$  (**Pumpstrahl**) und einem Strahl niedriger Intensität  $I_A$  (**Abtaststrahl**). Wir messen die Absorption des Abtaststrahles:

– homogene Verbreiterung:

$$\alpha_A(\nu_A) = \sigma(\nu_A) \cdot \Delta N = \frac{\sigma(\nu_A) \cdot N_0}{1 + I_P \cdot \frac{2\sigma(\nu_A) \cdot \tau}{h \cdot \nu_P}}$$

Man stellt fest, je mehr Pumpstrahlintensität vorhanden ist, desto wenig wird vom Abtaststrahl absorbiert. Die Linienbreite ändert sich allerdings nicht. Das Medium wird quasi durchsichtig.

- homogene Verbreiterung: Man brennt ein Loch in das Spektrum. Das liegt an gesättigten Atomen, die  $\nu'_0$  in der Nähe von  $\nu_0$  haben.

Nun betrachten wir die Absorption des Pumpstrahles:

$$\alpha_P(\nu_P) = \frac{\sigma(\nu_P) \cdot N_0}{1 + I_P \cdot \frac{2\sigma(\nu_P) \cdot \tau}{h \cdot \nu_P}}$$

Man erkennt, dass die Absorption in der Mitte der Linie am stärksten ist, also wird die Linie verbreitert und abgesenkt. Es entsteht die sogenannte **sättigungsverbreiterte Linie**.

$$\Delta\nu = \frac{\Gamma_{\text{tot}}}{\pi} \cdot \sqrt{1 + \frac{I_P}{I_{so}}} \quad \text{mit} \quad I_{so} = \frac{h \cdot \nu_0}{2\sigma(\nu_0) \cdot \tau}$$

Wiederum interessiert uns der stationäre Fall:

$$(N_1 - N_2) \cdot \frac{I}{h\nu} \cdot \sigma = \frac{N_2}{\tau} \xrightarrow{\text{Sättigung}} \frac{N_0}{2\tau}$$

Links steht die Nettozahl der pro Zeiteinheit absorbierten Photonen.

## 2.7 Einige Anmerkungen

Anmerkungen:

- Bedeutung von  $\vec{\mu}_{12}$ . Sei die Wellenfunktion gegeben durch:

$$\psi = c_1 \cdot u_1(\vec{r}) \cdot e^{-iE_1 \cdot t/\hbar} + c_2 \cdot u_2(\vec{r}) \cdot e^{-iE_2 \cdot t/\hbar}$$

Der Erwartungswert von  $\vec{\mu}$  ist:

$$\langle \vec{\mu} \rangle = \int \psi^* e\vec{r} \psi \, dV = \underbrace{|c_1|^2 \cdot \vec{\mu}_{11} + |c_2|^2 \cdot \vec{\mu}_{22}}_{=0} + c_1^* c_2 \cdot \vec{\mu}_{12} \cdot e^{-i\omega_0 \cdot \hbar} + c_1 c_2^* \cdot \vec{\mu}_{21} \cdot e^{i\omega_0 \hbar}$$

Die hinteren zwei Summanden bilden ein oszillierendes Dipolmoment mit der Frequenz  $\omega_0$ .  $\vec{\mu}_{12} \neq 0$  bedeutet, dass die Superposition von  $\psi_1$  und  $\psi_2$  ein dynamisches Dipolmoment hat. Das beschreibt die Wechselwirkung mit Licht.

- Erlaubte/nicht erlaubte Übergänge. Falls  $\vec{\mu}_{12} \neq 0$  ist, gibt es ein elektrisches Dipolmoment. Sonst sind diese Momente verboten.  $\psi = c_1 \psi_1 + c_2 \psi_2$  kann auch ein oszillierendes magnetisches Dipolmoment oder ein höheres elektrisches oder magnetisches Moment haben. Typisch sind:

$$\begin{aligned} \mu_{\text{el}} &= ea_0 = \frac{4\pi \cdot \epsilon_0 \cdot \hbar^2}{em} \\ \mu_{\text{mg}} &= \mu_B = \frac{e\hbar}{2m} \end{aligned}$$

Das Verhältnis zu den Übergangsraten:

$$\left( \frac{\mu_{\text{mg}}}{\mu_{\text{el}}} \right)^2 = \left( \frac{\alpha_s}{2} \right)^2 = \left( \frac{1}{2 \cdot 137} \right)^2 \approx 10^{-5}$$

Hierbei ist  $\alpha_s$  die Sommerfeld'sche Feinstrukturkonstante. Man erkennt, dass der magnetische Dipolübergang vernachlässigbar ist.

- Zusammenhang zwischen  $\sigma_{12}(\nu_0) - |\mu_{12}|^2$  und  $\tau_{sp} - |\mu_{12}|^2$ . Damit lässt sich ein Zusammenhang zwischen  $\sigma_{12}(\nu_0)$  und  $\tau_{sp}$  herstellen:

$$\sigma_{12}(\nu_0) = \frac{\lambda_0^2}{2\pi} \cdot \frac{1}{2\tau_{sp} \cdot \Gamma_{\text{tot}}} \quad \text{mit} \quad \lambda_0 = \frac{c}{n\nu_0}$$

In einem ungestörtem Atom ist  $\Gamma_{\text{tot}} = \Gamma_1/2 = 1/2\tau_{sp}$  und damit:

$$\sigma_{12}(\nu_0) = \frac{\lambda_0^2}{2\pi}$$

Dieser Wert ist riesig im Vergleich zum eigentlichen Atomradius. Im Festkörper hat einen viel kleineren Wirkungsquerschnitt, da  $\Gamma_{\text{tot}} \gg 1/2\tau_{sp}$ . Unter Umständen ist  $\sigma_{12}$  im Bereich weniger Angström.

- Entartete Zustände. Zum Beispiel könnte man im Zustand 1 zwei Subniveaus und im Zustand 2 drei Subniveaus haben. Dann sind die Entartungsfaktoren  $g_1 = 2$  und  $g_2 = 3$ . Jetzt sind im Prinzip alle Übergänge möglich. Für jedes Zustandpaar kann man die Zustandsraten aufstellen:

$$W_{12}^{ij} = W_{21}^{ij}$$

Zudem kann man für jeden Zustand eine Lebensdauer  $\tau_{sp}^{ij}$  angeben. Wir machen die Annahme, dass alle Subzustände gleichbesetzt sind. Damit gilt für die Zustände  $N_1/g_1$  und  $N_2/g_2$ . Es gilt im thermischen Gleichgewicht, die folgende Relation für die Absorption, da bei einer Entartung alle Subniveaus die selbe Energie haben.

$$-\left(\frac{dN_1}{dt}\right)_{\text{abs}} = \sum_{ij} W_{12}^{ij} \cdot \frac{N_1}{g_1}$$

Betrachtet man eine Gesamtzustand, dann folgt:

$$-\left(\frac{dN_1}{dt}\right)_{\text{abs}} = W_{12} \cdot N_1$$

Damit erkennt man (analog für die stimulierte Emission):

$$W_{12} = \frac{1}{g_1} \cdot \sum_{ij} W_{12}^{ij} \quad \text{und} \quad W_{21} = \frac{1}{g_2} \cdot \sum_{ij} W_{21}^{ij} = \frac{g_1}{g_2} \cdot W_{12}$$

Ganz ähnlich folgt der Wirkungsquerschnitt:

$$\sigma_{21} = \frac{g_1}{g_2} \cdot \sigma_{12}$$

Es fehlt nur noch die Betrachtung der spontanen Emission:

$$-\left(\frac{dN_2}{dt}\right)_{\text{spon}} = \sum_{ij} \frac{1}{\tau_{sp}^{ij}} \cdot \frac{N_2}{g_2} \stackrel{!}{=} A \cdot N_2 \quad \Rightarrow \quad A = \frac{1}{g_2} \cdot \sum_{ij} \frac{1}{\tau_{sp}^{ij}}$$

Der für den Laser wichtige **Gewinnkoeffizient** lautet:

$$\gamma = \sigma_{21} \cdot N_2 - \sigma_{12} \cdot N_1 = \sigma_{21} \cdot \left(N_2 - \frac{g_2}{g_1} \cdot N_1\right)$$

Einen Nettogewinn (Inversion) hat man bei  $\gamma > 0$ , also muss gelten:

$$\frac{N_2}{g_2} > \frac{N_1}{g_1}$$

## 2.8 Das klassische Oszillatormodell

Wir stellen uns ein Atomrumpf vor, um den das Leuchtelektron kreist. Durch ein äußeres elektrisches Feld haben die Ladungsschwerpunkte einen Abstand von  $x$ . Wir haben also eine Rückstellkraft, die für kleine  $x$  linear mit dem Abstand geht.

$$F \sim -D \cdot x = -m \cdot \omega_0^2 \cdot x$$

Wir schreiben die Bewegungsgleichung auf:

$$\ddot{x} + \Gamma_1 \dot{x} + \omega_0^2 x = -\frac{e \cdot E}{m}$$

Wenn man das Feld abschaltet ( $E = 0$ ) schwingt das System mit der Amplitude und Energie:

$$|x_0| \sim e^{-\Gamma_1/2 \cdot t} \quad \text{und} \quad \frac{1}{2} D \cdot |x_0|^2 \sim e^{-\Gamma_1 \cdot t}$$

$\Gamma_1$  ist die **Abklingkonstante** der Energie.

Nun haben wir pro Volumen  $N_0$  Oszillatoren. Wir stellen uns vor, dass anfänglich alle in Phase schwingen. Die Polarisation, also das Dipolmoment pro Volumen, addiert sich dann einfach auf. Die Amplitude sei dann  $|P_0|$ . Zum Zeitpunkt  $t = 0$  ist:

$$|P_0| = N_0 \cdot e \cdot |x_0|$$

Zu einem späteren Zeitpunkt ist es zu Stößen mit anderen Atomen gekommen, so dass viele der Oszillatoren nicht mehr in Phase sind. Es tragen also nur noch die Atome zum Gesamtdipolmoment bei, die noch nicht gestoßen haben. Die Anzahl der Atome, die noch nicht gestoßen haben lautet:

$$N'_0 = N_0 \cdot e^{-t/\tau_c} \quad \text{mit} \quad \frac{1}{\tau_c} = \Gamma_2$$

Damit ergibt sich ein neues Dipolmoment von:

$$|P_0| = N'_0 \cdot e \cdot |x_0| \sim e^{-\Gamma_{\text{tot}} \cdot t} \quad \text{mit} \quad \Gamma_{\text{tot}} = \Gamma_2 + \frac{\Gamma_1}{2}$$

Die Abklingkonstante  $\Gamma_{\text{tot}}$  beschreibt die Zerfall der Polarisation des Mediums.

Wir wollen nun eine Differentialgleichung für die Polarisation  $P$  aufstellen. Dazu multiplizieren wir die anfängliche Bewegungsgleichung mit  $-eN_0$ . Zudem ersetzen wir  $\Gamma_1/2$  mit  $\Gamma_{\text{tot}}$ .

$$\ddot{P} + 2\Gamma_{\text{tot}} \cdot \dot{P} + \omega_0^2 P = \frac{N_0 e^2 \cdot E}{m}$$

Nun sei das elektrische Feld gegeben durch:

$$E = E_0 \cdot \cos \omega t = \text{Re} (E_0 \cdot e^{-i\omega t})$$

Die stationäre Lösung ergibt sich zu:

$$P = \text{Re} (P_0 \cdot e^{-i\omega t}) \quad \text{mit} \quad P_0 = \frac{N_0 e^2 \cdot E}{m} \cdot \frac{1}{\omega_0^2 + \omega^2 - 2i\omega \cdot \Gamma_{\text{tot}}} = \varepsilon_0 \cdot \chi \cdot E_0$$

$\chi$  lässt sich aufteilen in einen Real- und Imaginärteil:  $\chi = \chi' + i\chi''$ . Damit kann man schreiben:

$$P'_0 = \varepsilon_0 \cdot \chi' \cdot E_0 \quad \text{und} \quad P''_0 = \varepsilon_0 \cdot \chi'' \cdot E_0$$



Der erste Term schwingt in Phase, der zweite ist um  $90^\circ$  verschoben.

In einem Laser ist es normalerweise so, dass die verstärkenden Atome in geringer Konzentration in ein Wirtsmedium eingebettet sind. Dieses Medium hat eine **Suszeptibilität**  $\chi_m$  mit:

$$\varepsilon_m = 1 + \chi_m \quad \text{und} \quad n = \sqrt{\varepsilon_m}$$

Im Idealfall absorbiert das Wirtsmedium kein Licht.

Der Brechungsindex des Gesamtsystems ergibt sich aus:

$$\bar{n} = \sqrt{1 + \chi_m + \chi} = \sqrt{n^2 + \chi} \approx n + \frac{\chi}{2n}$$

Ist die Konzentration gering gilt  $|\chi| \ll n^2$  und dann können wir die obige Taylorentwicklung als Näherung nehmen. Wir führen  $\bar{n} = \tilde{n} + i\chi$  ein:

$$\tilde{n} = n + \frac{\chi'}{2n} \quad \text{und} \quad \chi = \frac{\chi''}{2n}$$

Was passiert nun, wenn eine elektromagnetische Welle durch das Medium läuft? Für die Welle soll gelten:

$$k = \bar{n} \cdot \frac{\omega}{c} \quad \Rightarrow \quad E \sim e^{-(kz - \omega t)} = e^{-\kappa \cdot \omega / c \cdot z} \cdot e^{i(\tilde{n} \cdot \omega / c \cdot z - \omega t)}$$

Für die Intensität folgt daraus:

$$I \sim |E|^2 \sim e^{-2\kappa \cdot \omega / c \cdot z} = e^{-\alpha z}$$

Das letzte „=“ folgt aus vorherigen Betrachtungen. Nun können wir also einen Zusammenhang für  $\alpha$  finden:

$$\alpha = 2\kappa \cdot \frac{\omega}{c} = \frac{\chi'' \cdot \omega}{nc} \sim \chi'$$

Das Ziel der folgende Überlegungen ist es, einen Ausdruck mit dem klassischen Oszillator herzuleiten, der der quantenmechanischen Betrachtung sehr ähnlich ist. Mit der klassischen Elektrodynamik besagt, dass ein schwingender Dipol Energie abstrahlt, mit einer Rate:

$$\frac{\omega_0^2 e^2 \cdot n}{6\pi \cdot \varepsilon_0 \cdot c^3 \cdot m} = \frac{1}{\tau_{\text{sp}}}$$

Dieser Ausdruck entspricht der spontanen Emission. Wir schreiben nun den Absorptionskoeffizienten für  $\omega_0$ :

$$\alpha(\omega_0) = \chi''(\omega_0) \cdot \frac{\omega_0}{nc} = 3N_0 \cdot \frac{\lambda_0^2}{2\pi} \cdot \frac{1}{2\tau_{\text{sp}} \cdot \Gamma_{\text{tot}}}$$

Der Vergleich mit dem früheren Ergebnis  $\alpha(\omega_0) = (N_1 - N_2) \cdot \sigma(\nu_0)$  ist sehr ähnlich zum unserem jetzigen Ergebnis, wenn man beachtet:

$$\sigma_{\text{sp}} = \frac{\lambda_0^2}{2\pi} \cdot \frac{1}{2\tau_{\text{sp}} \cdot \Gamma_{\text{tot}}}$$

Entscheidend ist allerdings der Unterschied durch den Vorfaktor. Wenn wir klassisch rechnen wollen müssen wir also folgendes machen:

- Ersetzung von  $N_0$  durch  $N_1 - N_2$
- Multiplikation mit  $1/3$ , da die Atome regellos platziert sind.
- Verwendung für  $1/\tau_{\text{sp}}$  den quantenmechanischen Ausdruck  $\sim \nu_0^3 \cdot |\mu_{12}|^2$ .

# 3 Elektrodynamische Grundlagen

## 3.1 Elektromagnetische Wellen

Wir betrachten eine Zeitabhängigkeit, die wie folgt gegeben ist:

$$E_x = \tilde{E}_x \cdot \cos(\omega t - \varphi) = \operatorname{Re} (E_{x0} \cdot e^{-i\omega t}) \quad \text{mit} \quad E_{x0} = \tilde{E}_x \cdot e^{i\varphi}$$

$E_{x0}$  ist die komplexe Amplitude, die sowohl die Amplitude als auch die Phase enthält. Man schreibt nun einfach:

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \cdot e^{i\omega t} \quad \text{und} \quad \vec{B} = \vec{B}_0 \cdot e^{-i\omega t}$$

Wir benutzen im Folgenden:

- $\varrho_{\text{frei}} = 0$  und  $\vec{j}_{\text{frei}} = 0$
- $\frac{\partial}{\partial t} \dots \rightarrow -i\omega \dots$
- $\vec{D}_0 = \varepsilon_0 \vec{E}_0 + \vec{P}_0 = \varepsilon_0 \cdot (1 + \chi) \cdot \vec{E}_0$
- $\vec{H}_0 = \vec{B} / \mu_0 \mu$

Weiterhin machen wir zwei Annahmen:

- $\varepsilon$  sei ein Skalar und unabhängig vom Ort.
- $\mu = 1$

Wir schreiben nun die Maxwellgleichungen hin:

- (i)  $\vec{\nabla} \cdot \vec{E}_0 = 0$
- (ii)  $\vec{\nabla} \cdot \vec{B}_0 = 0$
- (iii)  $\vec{\nabla} \times \vec{E}_0 = i\omega \cdot \vec{B}_0$
- (iv)  $\vec{\nabla} \times \vec{B}_0 = -i\omega \cdot \frac{n^2}{c^2} \cdot \vec{E}_0$

Wir haben zu Vereinfachung  $n^2 = \varepsilon$  und  $\mu_0 \varepsilon_0 = 1/c^2$  genutzt. Jetzt bilden wir die Rotation von (iii), und wenden die anderen Beziehungen mit an:

$$(\vec{\nabla}^2 + k^2) \vec{E}_0 = 0 \quad \text{mit} \quad k^2 = \left( \frac{n \cdot \omega}{c} \right)^2$$

*Helmholtz-Gleichung*

Die speziellen Lösungen dieser Gleichungen sind ebene Wellen:

$$\vec{E}_0 = \vec{E}_{00} \cdot e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} \quad \text{und} \quad \vec{B}_0 = \vec{B}_{00} \cdot e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}}$$

Es muss hierbei  $|\vec{k}| = k = \omega \cdot n/c$  gelten. Aus (i) folgt  $\vec{k} \vec{E}_{00} = 0$  und aus (ii) folgt  $\vec{k} \vec{B}_{00} = 0$ . Weiterhin ist mit (iii)  $\vec{k} \times \vec{E}_{00} = \omega \vec{B}_{00}$ . Damit erhält man sofort:

$$|\vec{B}_{00}| = \frac{|\vec{E}_{00}|}{c/n}$$

Wir erkennen damit folgende Eigenschaften:

- $\vec{E}$  und  $\vec{B}$  sind senkrecht auf  $\vec{k}$  (transversal). Es existieren zwei linear unabhängige Lösungen zu jedem  $\vec{k}$  (**Polarisation**)
- $\vec{k}$ ,  $\vec{E}$  und  $\vec{B}$  bilden ein rechtshändiges Dreibein
- $\vec{E}$  und  $\vec{B}$  sind in Phase (solange der Brechungsindex reell ist).
- Die Phasengeschwindigkeit ist  $v_{\text{ph}} = c/n$

Eine beliebige Lösung ist eine Superposition von ebenen Wellen. Damit erhält man ein **Fourierintegral**. An Grenzflächen kommen Randbedingungen hinzu:

$$E_{||}, D_{\perp}, B_{\perp} \text{ und } H_{||} \text{ sind stetig}$$

Wir betrachten stehende Wellen, die man erhält, wenn man gegenläufige Wellen gleicher Amplitude überlagert. Nehmen wir an, die elektrischen Felder stimmen überein. Da  $\vec{k}$  der Wellen entgegengesetzt ist und die Felder ein rechtshändiges Dreibein bilden müssen ist auch das Magnetfeld entgegengesetzt.

$$\begin{aligned} \vec{E}'_0 &= \frac{1}{2} \vec{E}_{00} \cdot e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} + \frac{1}{2} \vec{E}_{00} \cdot e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}} = \vec{E}_{00} \cdot \cos \vec{k} \cdot \vec{r} \\ \vec{B}'_0 &= \frac{i}{2i} \vec{B}_{00} \cdot e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} - \frac{i}{2i} \vec{B}_{00} \cdot e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}} = \vec{B}_{00} \cdot e^{i\pi/2} \cdot \sin \vec{k} \cdot \vec{r} \end{aligned}$$

Man erkennt, dass die stehenden Wellen immer Knoten und Bäuche. Allerdings das elektrische Feld räumlich und zeitlich um  $\pi/2$  zum Magnetfeld verschoben.

## 3.2 Resonatorenmoden

Ein **optischer Resonator** ist ein von spiegelnden Flächen (teilweise) umgebener Raumbereich. Ein ideales Metall würde vollständig das Licht reflektieren. Daraus ergeben sich die Randbedingungen:

$$E_{||} = 0 \quad \text{und} \quad B_{\perp} = 0$$

Diese Randbedingung führt dazu, dass nur für bestimmte  $\omega$  die Helmholtz-Gleichung eine Lösung hat. Diese  $\omega$  sind die **Resonatormoden**. Jede Mode besitzt ein  $\omega$  und eine räumliche Feldverteilung. Die Moden bilden dann den vollständigen Lösungssystem.

## Hohlraumresonator

Wir stellen uns einen rechteckigen Kasten vor mit den Längen  $s_x = a$ ,  $s_y = b$  und  $s_z = c$ . Der Ansatz für die stehende Welle lautet:

$$\begin{aligned} E_{0x} &= e_x \cdot \cos k_x x \cdot \sin k_y y \cdot \sin k_z z \\ E_{0y} &= e_y \cdot \sin k_x x \cdot \cos k_y y \cdot \sin k_z z \\ E_{0z} &= e_z \cdot \sin k_x x \cdot \sin k_y y \cdot \cos k_z z \end{aligned}$$

Man stellt fest, dass diese Gleichung die Helmholtz-Gleichung lösen, falls gilt:

$$k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = \frac{\omega^2}{c^2}$$

Weiterhin kann man die erste Maxwellgleichung nutzen:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E}_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{e} \cdot \vec{k} = 0$$

Jetzt betrachten wir noch die Randbedingungen, und zwar für alle sechs Flächen und stellen fest, dass sie automatisch für die Flächen mit  $x = 0$ ,  $y = 0$  und  $z = 0$  erfüllt sind. Die anderen Flächen liefern:

$$\begin{aligned} x = a &\Rightarrow k_x \cdot a = l \cdot \pi \\ y = b &\Rightarrow k_y \cdot b = n \cdot \pi \\ z = c &\Rightarrow k_z \cdot c = m \cdot \pi \end{aligned}$$

Damit erkennt man die Eigenfrequenzen:

$$\omega_{lmn}^2 = c^2 \cdot \left[ \left( \frac{l\pi}{a} \right)^2 + \left( \frac{m\pi}{b} \right)^2 + \left( \frac{n\pi}{c} \right)^2 \right]$$

Man sucht nun die erlaubten  $\vec{k}$ -Werte für die Eigenfrequenzen. Diese liegen auf den Punkten eines rechtwinkligen Gitters mit den Gitterkonsten  $\pi/a$ ,  $\pi/b$  und  $\pi/c$ . Damit kann man die Modendichte berechnen. Wir suchen die Moden, dessen Frequenz kleiner einer Frequenz  $\nu$  sind. Das sind alle Gitterpunkte in einer Kugel (eigentlich nur im positiven Oktanten) mit dem Radius  $2\pi\nu/c$ . Da die Gitterpunkte konkret verteilt sind, muss man eigentlich noch überprüfen, ob die betreffenden Punkt am Rand noch in der Kugel liegen. Hat man aber genügend Gitterpunkt, so kann man die Verteilung als homogen annehmen. Damit ist die Anzahl der Gitterpunkte:

$$N_\nu = \frac{\frac{1}{8} \cdot \frac{4}{3} \pi \cdot \left( \frac{2\pi\nu}{c} \right)^3}{\frac{\pi}{a} \cdot \frac{\pi}{b} \cdot \frac{\pi}{c}} = \frac{8\pi \cdot \nu^3}{3c^3} \cdot V \quad \text{mit} \quad V = abc$$

Die Modendichte ist die Anzahl der Moden pro Frequenzintervall  $d\nu$  und pro Volumen:

$$\mathcal{N} = \frac{1}{V} \cdot \frac{dN_\nu}{d\nu} = \frac{8\pi \cdot \nu^2}{c^3} \sim \nu^2$$

Diese Gleichung gilt auch für andere Hohlraumresonatoren, solange deren Volumen groß genug ist.

### 3.3 Ein bisschen Quantenelektrodynamik

Wir stellen uns ein elektrisches Feld in einem Hohlraum vor. Jetzt entspricht jede Mode einem harmonischem Oszillator.  $E$  und  $B$  sind analog zu Ort  $x$  und Impuls  $p$ . Die Energieeigenwerte sind bekannt:

$$E_q = \left(q + \frac{1}{2}\right) \cdot h\nu \quad \text{mit} \quad q \in \mathbb{N}_0$$

Hierbei ist  $q$  die Photonenzahl. Die Nullpunktsenergie erhält man für  $q = 0$ , also im Vakuum:

$$E_{\text{vak}} = \frac{1}{2} h \cdot \nu$$

Im thermischen Gleichgewicht sind die Moden mit einer mittleren Zahl von Photonen besetzt, welche nach der Bose-Einstein-Verteilung bestimmt ist:

$$\langle q \rangle = \frac{1}{e^{h\nu/k_B T} - 1}$$

Wir nehmen an, wir haben ein sichtbares Photon mit  $h\nu = 2 \text{ eV}$  und  $k_B T = 1/40 \text{ eV}$ . Dann ist  $\langle q \rangle \approx e^{-80}$ , also sehr klein.

Wir suchen die Energie im Intervall  $[\nu, \nu + d\nu]$  pro Volumen:

$$\tilde{\varrho}_\nu d\nu = \left(\langle q \rangle + \frac{1}{2}\right) \cdot h\nu \cdot \mathcal{N} d\nu = \left[ \underbrace{\frac{8\pi \cdot h\nu^3}{c^3} \cdot \frac{1}{e^{h\nu/k_B T} - 1}}_{=\varrho_\nu} + \underbrace{\frac{1}{2} \cdot \frac{8\pi \cdot h\nu^3}{c^3}}_{=\varrho_{0\nu}} \right] d\nu$$

Hierbei sind  $\varrho_\nu$  die Energie nach Planck und  $\varrho_{0\nu}$  ein Term durch **Vakuumfluktuationen**.

Für die spontane Emission haben wir kennengelernt:

$$\left(\frac{dN_2}{dt}\right)_{\text{spo}} = A \cdot N_2 = B_{21} \cdot \frac{8\pi \cdot h\nu_0^3}{c^3} \cdot N_2 = 2B_{21} \cdot \varrho_{0\nu}(\nu_0) \cdot N_2$$

Der spontane Zerfall ist also nicht spontan, sondern durch die Vakuumfluktuation stimuliert. Die Nullpunktsschwingung hat die Energie eines halben Photons. Durch den Faktor „2“ hat sie aber die Wirkung eines ganzen Photons.

Wir betrachten die Wechselwirkung mit *einer* einzigen Mode:

$$\left(\frac{dN_2}{dt}\right)_{\text{spo+stim}} \approx N_2 \cdot (q + 1)$$

Die „1“ kommt aus der Wirkung der Vakuumfluktuation und ergänzt die stimulierte Emission.

$$\left(\frac{dN_1}{dt}\right)_{\text{abs}} \approx N_1 \cdot q$$

Die Vakuumfluktuation hat keinen Einfluss auf die Absorption.

### 3.4 Laserresonatoren. Problemstellung

Wir betrachten einen offenen Resonator. Der Abstand der Spiegel sei  $L$  und die Höhe der Spiegel sei  $2a$ . Typischerweise sind  $a$  und  $L \gg \lambda$ . Dadurch, dass der Resonator offen ist muss man beachten:

- Beugungsverluste treten auf.
- nur achsnahe Strahlen haben einen kleinen Verlust.

Ein Laser hat auch immer ein halbdurchlässigen Spiegel, bei dem weitere Verluste auftreten. Wir stellen uns im folgenden die Fragen:

- Welche Konsequenz haben die Verluste?
- Wann ist ein Laser stabil?
- Wie ist die Eigenfrequenz und die Feldverteilung der Moden?

### 3.5 Beispiel eines planparallelen Resonator

Dieser einfache Resonator wird auch als **Resonator!Fabry-Perot** bezeichnet. Eine Seite der Wand sei verspiegelt. Links von der Wand sei ein einfallendes Feld  $E_i$  und ein reflektiertes Feld  $E_r$ . Auf der anderen Seite sei das transmittierte Feld  $E_t$ .

$$r = \frac{E_r}{E_i} \quad \text{und} \quad t = \frac{E_t}{E_i}$$

Diese Größen beschreiben das Verhältnis der Wellen, die von innen nach außen gehen, analog folgen gestrichene Größen  $r'$  und  $t'$  für Licht, dass von außen nach innen geht. Wegen der Umkehrbarkeit des Lichtwegen und für ein Verlustfreies Medium gilt:

$$|t|^2 = |t'|^2 \quad \text{und} \quad |t|^2 + |r|^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad |r|^2 = |r'|^2$$

Jetzt bauen wir einen zweiten Spiegel ein und lassen genau senkrecht von außen Licht einfallen. Die einfallende Welle  $E_{in}$  wird teilweise reflektiert  $r_1$ . Der transmittierte Teil wird an der anderen Wand wiederum reflektiert  $r_2$  und transmittiert  $t_2$ . Die transmittierte Welle bezeichnen wir mit  $E_1$ . Der reflektierte Teil kann an der ersten Wand entweder reflektiert oder transmittiert werden. Dadurch kann man also die Welle im Resonator mehrmals hin- und herlaufen lassen. Bei jedem durchlauf wird die Welle geschwächt und erhält eine Phasenverschiebung. Die Welle, die einmal hin- und hergegangen ist nennen wir  $E_2$ , die die dreimal hin- und hergegangen ist, ist  $E_3$  und so weiter.

$$\begin{aligned} E_t &= E_1 + E_2 + E_3 + \dots = E_{in} \cdot t_1' t_2 \cdot e^{ik \cdot L} + E_{in} \cdot t_1' \cdot r_2 \cdot r_1 \cdot t_2 \cdot e^{ik \cdot 3L} + \dots \\ &= E_{in} \cdot t_1' t_2 \cdot e^{ikL} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (r_2 r_1 \cdot e^{i2k \cdot L})^n \\ &= E_{in} \cdot e^{ik \cdot L} \cdot \frac{t_1' t_2}{1 - r_1 r_2 \cdot e^{i2k \cdot L}} \end{aligned}$$

Nun verwenden wir:

$$\tilde{R}_1 = |r_1|^2 \quad \text{und} \quad \tilde{R}_2 = |r_2|^2 \quad \text{und} \quad |t_1'|^2 = 1 - \tilde{R}_1 \quad \text{und} \quad |t_2|^2 = 1 - \tilde{R}_2$$

Damit folgt für die Transmission:

$$T = \frac{|E_t|^2}{|E_{in}|^2} = \frac{(1 - \tilde{R}_1) \cdot (1 - \tilde{R}_2)}{\left(1 - \sqrt{\tilde{R}_1 \tilde{R}_2}\right)^2 + 4 \cdot \sqrt{\tilde{R}_1 \tilde{R}_2} \cdot \sin^2 \phi/2}$$

Hierbei ist  $\phi$  die Phasenverzögerung pro Umlauf. Es gilt  $\phi = 2kL$ , falls  $r_1$  und  $r_2$  reell sind. Es gilt außerdem  $k = 2\pi\nu/c$ .

Die Eigenfrequenzen folgen aus der Resonanzbedingung:

$$\phi = 2\pi \cdot m \quad \Rightarrow \quad \nu_m = \frac{cm}{2L} \quad \Rightarrow \quad L = m \cdot \frac{\lambda_m}{2}$$

Der Modenabstand, auch genannt **freier Spektralbereich**, ist  $\Delta\nu_{FSR} = \nu_{m+1} - \nu_m = c/2L$ . Damit erhält man die **Frequenzunschärfe**:

$$\Delta\nu_T \approx \Delta\nu_{FSR} \cdot \frac{1 - \sqrt{\tilde{R}_1 \tilde{R}_2}}{\pi \cdot \sqrt[4]{\tilde{R}_1 \tilde{R}_2}}$$

## 3.6 Stabilität von optischen Resonatoren

### Matrixmodelle der geometrischen Optik

Der Strahl an einem Punkt wird beschrieben durch den Abstand  $r$  von der optischen Achse und dem Winkel  $\Theta$  zu der optischen Achse.  $\Theta$  entspricht in der paraxialen Näherung der Steigung  $r'(z)$ . Die optischen Elemente entsprechen einer linearen Transformation:

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

#### Beispiel 3.1 Hohlspiegel

Der sphärische Spiegel kann als Linse mit  $f = R/2$  angenommen werden. (Linse wird auf den ausgeteilten Folien erklärt).

In diesem und in den anderen Beispielen gilt:

$$AD - BC = 1$$

Die Abfolge von optischen Elementen ergibt:

$$\begin{pmatrix} r_2 \\ r_2' \end{pmatrix} = \dots M_3 M_2 M_1 \cdot \begin{pmatrix} r_1 \\ r_1' \end{pmatrix}$$

### Stabilitätsanalyse

Die Frage ist, ob ein achsnaher Strahl achsnah bleibt. Dazu betrachten wir einen Umlauf in dem Resonator, mit der Gesamtmatrix und dem anfänglichen Strahl:

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{r}_0 = \begin{pmatrix} r_0 \\ r_0' \end{pmatrix}$$

Nach  $n$  Umläufen hat man  $\vec{r}_n = M^n \cdot \vec{r}_0$ . Schreibe nun:

$$\vec{r}_0 = c_a \vec{r}_a + c_b \vec{r}_b$$

$\vec{r}_a$  und  $\vec{r}_b$  sind die Eigenvektoren von  $M$ ,  $\lambda_a$  und  $\lambda_b$  die zugehörigen Eigenwerte.

$$\vec{r}_n = c_a \lambda_a^n \cdot \vec{r}_a + c_b \lambda_b^n \cdot \vec{r}_b$$

Es sind also noch die Eigenwerte zu bestimmen:

$$\det(M - \lambda \mathbf{1}) = 0 \quad \Rightarrow \quad (A - \lambda) \cdot (D - \lambda) - BC = 0 \quad \stackrel{(AD-BC=1)}{\Rightarrow} \quad \lambda^2 - \lambda \cdot (A + D) + 1 = 0$$

Damit sind die Eigenwerte:

$$\lambda_{a/b} = m \pm \sqrt{m^2 - 1} \quad \text{mit} \quad m := \frac{A + D}{2}$$

Damit folgt sofort  $\lambda_a \lambda_b = 1$ .



Nun hat man zwei Fälle zu unterscheiden:

- (i)  $-1 \leq m \leq 1$ : es gibt ein  $\Theta$ , sodass  $m = \cos \Theta$

$$\lambda_{a/b} = \cos \Theta \pm i \sin \Theta = e^{\pm i\Theta}$$

Damit ist der Strahl nach  $n$  Umläufen:

$$\vec{r}_n = c_a \cdot e^{im\Theta} \vec{r}_a + c_b \cdot e^{-im\Theta} \vec{r}_b = \vec{r}_0 \cdot \cos(n\Theta) + \vec{s}_0 \cdot \sin(n\Theta) \quad \text{mit} \quad \vec{s}_0 = i \cdot (c_a \vec{r}_a - c_b \vec{r}_b)$$

$\vec{r}_n$  oszilliert als Funktion von  $n$ . Das heißt, der Strahl geht nie weit von der optischen Achse weg, sondern schwingt nur um sie herum. Damit ist der Resonator **stabil**.

- (ii)  $|m| > 1$ :  $\lambda_{a/b}$  sind reell. Dann gibt es ein  $\Theta$ , sodass:

$$\lambda_a = \pm e^{\Theta} \quad \Rightarrow \quad \lambda_b = \pm e^{-\Theta}$$

Dann ergibt sich für den Strahl:

$$\vec{r}_n = c_a \cdot e^{n\Theta} \vec{r}_a + c_b \cdot e^{-n\Theta} \vec{r}_b$$

Eine der beiden Exponentialfunktionen divergiert. Damit ist der Resonator **instabil**.

Ein Resonator mit sphärischen Spiegeln entspricht optisch einer Anreihung von Linsen mit dem Abstand  $L$ , der dem Spiegelabstand entspricht. Ein Umlauf ist damit gleichzusetzen mit dem Durchgang durch drei Linsen. In die Transformationsmatrix gehen die Spiegel (Terme mit  $R$ ), als auch der freie Raum (Terme mit  $L$ ) mit ein.

$$M = \begin{pmatrix} 1 & L \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2/R_2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & L \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2/R_1 & 1 \end{pmatrix}$$

Man findet  $m = 2g_1 \cdot g_2 - 1$  mit  $g_i = 1 - L/R_i$ . Daraus leitet man die Stabilitätsbedingung des optischen Resonators ab:

$$\boxed{-1 \leq m \leq 1 \quad \Leftrightarrow \quad 0 \leq g_1 g_2 \leq 1}$$

Für eine planparallel Resonator gilt  $g_1 = g_2 = 1$ , er ist also der Grenzfall für die Stabilität.

## 3.7 Modenstruktur

### 3.7.1 Prinzipielle Vorgehensweise

$x_i$  und  $y_i$  sind die Koordinaten  $P_i$  des  $i$ -ten Spiegels. Nun sei  $U_1(x_1, y_1)$  die Amplitudenverteilung auf dem Spiegel  $S1$ . Dann gilt nach dem **Huygenschen Prinzip** auf dem Spiegel  $S2$ :

$$U_2(P_2) = \int U_1(P_1) \cdot \underbrace{K(P_1, P_2)}_{(*)} dS_1$$

(\*) ist die Elementarwelle. Die **Beugungstheorie von Kirschhoff und Fresnel** besagt:

$$K(P_1, P_2) = -\frac{ik}{2\pi} \cdot \frac{e^{ik \cdot r}}{r} \cdot \frac{1 + \cos \Theta}{2} \quad \text{mit} \quad k = \frac{\omega}{c}$$

Wir rechnen in der paraxialen Näherung, das heißt  $\cos \Theta \approx 1$ . Dann ist:

$$K(P_1, P_2) = K(r) = -\frac{ik}{2\pi} \cdot \frac{e^{ik \cdot r}}{r}$$

Wir betrachten einen *symmetrischen* Resonator. Für die Resonatormode gilt nun, dass bei jedem Durchlauf (kein Umlauf) sich die Feldverteilung bis auf einen Faktor reproduziert.

$$\int U(x_1, y_1) \cdot K(r) \, dx_1 dy_1 = \sigma \cdot U(x_2, y_2)$$

Diese Gleichung ist eine **Integral-Eigenwertgleichung**. Der eigenwert ist eine komplexe Zahl mit:

$$\sigma = |\sigma| \cdot e^{i\phi/2}$$

$1 - |\sigma|^2$  stellt den Beugungsverlust dar und  $\phi/2$  ist die Phasenverzögerung pro Umlauf. Die Resonatorbedingung besagt wiederum, dass  $\phi = n \cdot 2\pi$  sein muss. Diese Bedingung ist nur für die Eigenfrequenzen erfüllt. Die Eigenfunktionen beschreiben die Feldverteilung auf dem Spiegel.

Wir führen die **Fresnel-Zahl**  $N$  ein:

$$N = \frac{a^2}{\lambda \cdot L}$$

Anschaulich: Wir stellen zwei planparallele Spiegel der Höhe  $2a$  vor. Licht, das den Spiegel 1 bestrahlt wird gebeugt und erreicht den Spiegel 2 teilweise nicht mehr. Es gibt Minima für bestimmte Einstrahlungswinkel  $\sin \alpha_n = n\lambda/2a$ . In höchster Ordnung, deren Zentrum noch Spiegel 2 trifft ist:

$$n_{\max} = \frac{2a}{\lambda} \cdot \sin \alpha_{\max} \approx \frac{2a}{\lambda} \cdot \frac{a}{L} = 2N$$

Eine hohe Fresnel-Zahl entspricht hohen Beugungsverlusten.

### 3.7.2 Symmetrischer konfokaler Resonator

Für einen symmetrischen konfokalen Resonator gilt  $R_1 = R_2 = L$ . Im Beugungsintegral der Elementarwelle  $\exp(ikr)/r$  macht man folgende Näherungen:

- im Nenner:  $r \approx L$
- $ikr \approx ikL - ik \cdot (x_1 x_2 + y_1 y_2)/L$  (ergibt sich nur für eine konfokale Anordnung)

Wir definieren neue Koordinaten:

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{x}{\sqrt{\lambda L}} = \sqrt{N} \cdot \frac{x}{a} \\ \eta &= \frac{y}{\sqrt{\lambda L}} = \sqrt{N} \cdot \frac{y}{a} \end{aligned}$$

Nun sieht die Eigenwertgleichung wie folgt aus:

$$-i \int_{-\sqrt{N}}^{\sqrt{N}} \int_{-\sqrt{N}}^{\sqrt{N}} U(\xi_1, \eta_1) \cdot e^{-2\pi i \cdot (\xi_1 \xi_2 + \eta_1 \eta_2)} \cdot e^{ik \cdot L} \, d\xi_1 d\eta_1 \stackrel{!}{=} \sigma \cdot U(\xi_2, \eta_2)$$

Wir machen einen Separationsansatz  $U(\xi, \eta) = U_\xi(\xi) \cdot U_\eta(\eta)$ . Damit erhält man zwei entkoppelte Integrale.

$$e^{-i\pi/4} \cdot \int_{-\sqrt{N}}^{\sqrt{N}} U_\xi(\xi_1) \cdot e^{-2\pi i \cdot \xi_1 \xi_2} \, d\xi_1 = \sigma \cdot U_\xi(\xi_2) \cdot e^{-ik \cdot L/2} \quad (*)$$

Völlig analog folgt  $U_\eta$ . Falls das Feld auf der optischen Achse konzentriert ist, muss man die Grenzen nach Unendlich. Dann bedeutet (\*):  $U_\xi$  ist bis auf einen Faktor seine eigene Fouriertransformierte.

### 3.8 Gauß-Optik

Die Divergenz lässt sich ausdrücken durch:

$$\Theta = \frac{\lambda}{\pi \cdot w_0}$$

Man führt eine **komplexen Radius**  $q$  ein:

$$\frac{1}{q(z)} = \frac{1}{R(z)} - i \cdot \frac{\lambda}{\pi w^2(z)}$$

Nun setzt man  $T(z)$  und  $w(z)$  ein und erhält:

$$q(z) = q_0 + z \quad \text{mit} \quad q_0 = i \cdot \frac{\pi w_0^2}{\lambda}$$

Es gilt  $\operatorname{Re} q = z$  und  $\operatorname{Re} 1/q = 1/R$ . Ein optisches Element kann transformiert werden:

$$q_2 = \frac{Aq_1 + B}{Cq_1 + D}$$

Das Beispiel einer Linse ist auf den ausgeteilten Folie zu finden.

### 3.9 Laserspiegel

Wie erreicht man  $\tilde{R} = 0,998$ ? Nach den Fresnelschen Formeln gilt:

$$r = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} \quad \text{und} \quad t = \frac{2n_1}{n_1 + n_2}$$

Für  $n_1 > n_2$  ist  $r > 0$  und es gibt keinen Phasensprung ( $\Delta\varphi_r = 0$ ). Für  $n_1 < n_2$  ist  $r < 0$ , also gibt es einen Phasensprung von  $\Delta\varphi_r = \pi$ . Stets ist  $t$  positiv.

Betrachten wir einen  $\lambda/4$ -Schichtstapel. Hierbei sind viele Schichten (abwechselnd hoher  $n_H$  und niedriger  $n_L$  Brechungsindex) auf einem Substrat (mit  $n_S$ ). Die optischen Dicken  $n \cdot l$  sind so gewählt, dass sie genau einer viertel Wellenlänge entsprechen:

$$n_L \cdot l_L = n_H \cdot l_H = \frac{\lambda}{4}$$

Dann sind alle reflektierten Spektren in Phase. Kontinuierliche Interferenzen erzeugen eine hohes Reflektionsvermögen. Bis auf technische Grenzen kann man also beliebig gut reflektieren.

Häufig möchte man aber auch, dass eine Oberfläche entspiegelt wird. Dazu gibt es zwei Möglichkeiten:

1. einzelne  $\lambda/4$ -Schicht mit  $n_L < n_S$ . Ideal ist  $n_L = \sqrt{n_S}$

Noch besser ist eine Vielfachschicht.

2. Ordne Grenzfläche in Brewsterwinkel an und verwende den  $p$ -Pol.

# 4 Der Laser: Wirkungsweise und Eigenschaften

## 4.1 Herstellung der Inversion

### Vierniveaulaser

Wir haben hier bei vier Niveaus, welche wir bezeichnen (von unten nach oben):  $g$  (Grundniveau),  $1$  (unteres Laserniveau, ULN),  $2$  (oberes Laserniveau, OLN) und  $3$ .

Der Laserübergang findet zwischen dem Niveau  $2$  zu  $1$  statt, welche den Abstand  $h\nu$  haben. Die Zeitkonstante für den Zerfall nennen wir  $\tau_{ij}$  beim Übergang von  $i$  zu  $j$ . Die Zeitkonstante für den stimulierten Übergang  $2$  zu  $1$  bezeichnen wir mit  $\tau := \tau_{21}$ .

Damit alle Übergänge funktionieren soll gelten:

$$\tau_{32}, \tau_{1g} \ll \tau$$

Dann kann man näherungsweise sagen, dass die Zustände  $3$  und  $g$  nicht besetzt sind:

$$N_1 \approx N_3 \approx 0$$

Stellen wir uns ein gepumptes Medium vor. Dann schicken wir eine Welle der Intensität  $I$  und der Frequenz  $\nu$  durch das Medium (in  $z$ -Richtung). Die Pumprate bezeichnen wir mit  $W_p$  und die Übergangsraten auf dem Laserübergang mit  $W_{12} = W_{21} = W$ . Weiterhin lässt sich schreiben:

$$W = \frac{I}{h\nu} \cdot \sigma \quad \text{und} \quad \dot{N}_2 = W_0 \cdot N_g - W \cdot N_2 - \frac{N_2}{\tau}$$

Zudem führen wir die gesamte Anzahlldichte  $N_0$  ein:

$$N_0 = N_g + N_1 + N_2 + N_3 = N_g + N_2$$

Im stationären Fall ( $\dot{N}_2 = 0$ ) erhalten wir:

$$N_2 = \frac{W_p \tau \cdot N_0}{W_0 \tau + 1 + I/I_s} \quad \text{mit} \quad I_s = \frac{h\nu}{\sigma \cdot \tau}$$

Die Inversion ist gegeben durch  $\Delta N = N_2 - N_1 = N_2$ .

Betrachten wir nun den Durchgang der Welle durch die Schicht  $dz$ .

$$dI = I \cdot \Delta N \cdot \sigma \, dz$$

Im Extremfall, für  $I \gg I_s$ , erreicht  $dI$  einen Maximalwert. Man spricht von einer **Gewinnsättigung**:

$$dI \rightarrow W_p \cdot N_0 \cdot h\nu \, dz$$

## Dreineiveaulaser

Dieser Laser sieht relativ ähnlich aus. Es gibt allerdings zwei Varianten. Zum einen kann das oberer Laserniveau mit dem Grundzustand zusammen fallen. Hier macht man die Annahme  $\tau_{32} \ll \tau$  und damit  $N_3 \approx 0$ .

$$\dot{N}_2 = W_p N_1 - W \cdot (N_2 - N_1) - \frac{N_2}{\tau} \quad \text{und} \quad N_0 = N_1 + N_2$$

Stationär betrachtet ergibt sich:

$$\Delta N = \frac{(W_p \tau - 1) \cdot N_0}{w_p \tau + 1 + I/I_s} \quad \text{mit} \quad I_s = \frac{h\nu}{2\sigma \cdot \tau}$$

Inversion ( $\Delta N > 0$ ) hat man (im Gegensatz zum Vireneiveaulaser) erst ab einer bestimmten Pumpleistung  $W_p > 1/\tau$ . Dann ist  $N_2 > N_0/2$ .

Für  $I \gg I_s$  hat man:

$$dI \rightarrow \left( W_p - \frac{1}{\tau} \right) \cdot \frac{N_0}{2} \cdot h\nu \, dz$$

Im Leerlauf ( $I = 0$ ) wird ein vorgegebenes  $\Delta N$  benötigt:

$$\begin{aligned} W_{p,4NL} &\approx \frac{1}{\tau} \cdot \frac{\Delta N}{N_0} \\ W_{p,3NL} &\approx \frac{1}{\tau} \end{aligned}$$

## 4.2 Laserbedingungen, Schwelle

Wir haben eine Resonator der Länge  $L$ , ein aktives Medium der Länge  $l$  innerhalb des Resonators. Die Veruste pro Umlauf bezeichnen wir mit  $v$ :

$$v = \tilde{R}_1 \tilde{R}_2 \cdot (1 - v_1) \cdot (1 - v_2) \cdot (1 - v_i) = e^{-\delta}$$

Hierbei beschreiben  $v_1$  und  $v_2$  die Verluste durch Beugung bei der Reflektion und  $v_i$  stellt interne Verluste dar. Den Gewinnfaktor pro Umlauf bezeichnen wir mit  $G$ :

$$G = \left( e^{\gamma \cdot l} \right)^2 \quad \text{mit} \quad \gamma = \Delta N \cdot \sigma$$

Es ist  $\gamma$  der Gewinnkoeffizient. Man stellt nun Bedingungen an den Laser:

(I)  $G \cdot v \geq 1$ , das heißt  $2\sigma \cdot \Delta N \cdot l \geq \delta$ . Die Schwelleninversion liegt also bei:

$$\Delta N_s = \frac{\delta}{2\sigma \cdot l}$$

(II) Es soll konstruktive Interferenz der Wellen mit sich selbst statt finden. Damit muss die Phase pro Umlauf ein Vielfaches von  $2\pi$  sein. Es ist also  $\nu$  die Eigenfrequenz des Resonators. Bei fester Transversalmode hat man einen äquidistanten Kamm von erlaubten Frequenzen.<sup>1</sup>  $L'$  ist die optische Resonatorlänge:

$$L' = n_a \cdot l + (L - l)$$

$n_a$  ist hierbei der Brechungsindex des aktiven Mediums.

---

<sup>1</sup>siehe dazu die ausgeteilten Folien

$\delta$  lässt sich durch  $\tau_\gamma$  ausdrücken. In einem passiven Resonator gilt:

$$q = q_0 \cdot e^{-t/\tau_\gamma} = q_0 \cdot e^{-\delta \cdot t / \Delta t}$$

$\Delta t$  ist die Zeit pro Umlauf, die sich aus  $\Delta t = 2L'/c$  ergibt. Damit ist:

$$\delta = \frac{2L'}{c \cdot \tau_\gamma} \Rightarrow \Delta N_s = \frac{L'/l}{c\sigma \cdot t_\gamma}$$

Bei einem Vierniveaulaser braucht man eine Schwellenpumprate:

$$W_{p,s} = \frac{1}{\tau} \cdot \frac{\Delta N_s}{N_0}$$

Sei nun anfänglich  $Gv > 1$ , damit ist  $\Delta N > \Delta N_s$ .  $I$  wächst also an. Das wiederum bedeutet, die Inversion nimmt ab. Irgendwann ist die Inversion soweit abgesunken, dass sie der Schwelleninversion entspricht ( $\Delta N = \Delta N_s$ ): Es hat sich ein Gleichgewicht eingestellt ( $Gv = 1$  und  $I = \text{const.}$ ).

### 4.3 Ratengleichung des gekoppelten Systems: Resonator – aktives Medium

Wir betrachten hier das Wechselspiel zwischen  $q$  und  $\Delta N$ . Dazu machen wir folgende Annahmen:

- Vierniveaulaser mit  $\Delta N = N_2$
- eine  $TEM_{00}$ -Mode
- konstante Modenphase

Die Dicke des Bündels in der Mitte des aktiven Mediums  $A$  sei  $2w_0$ . Untersuchen wir zwei gegenläufige Wellen mit je  $I = I_0 \cdot \exp(-2 \cdot (x^2 + y^2)/w_0^2)$ . Für  $\dot{N}_2$  und  $\dot{q}$  gilt nun:

$$\dot{N}_2 = W_p \cdot N_0 - \frac{2I}{h\nu} \cdot \sigma \cdot N_2 - \frac{N_2}{\tau} \quad \text{und} \quad \dot{q} = \int_A \frac{2I}{h\nu} \cdot \sigma \cdot N_2 \, dV + \dot{q}_{sp} - \frac{q}{\tau_\gamma}$$

$\dot{q}_{sp}$  resultiert aus der spontanen Emission. Nun nehmen wir an, dass  $N_2$  räumlich konstant ist. Wir führen das effektive Modenvolumen  $V_a$  im aktiven Medium ein:

$$V_a := \int_A \frac{I}{I_a} \, dV = \int_A e^{-2 \cdot \frac{x^2 + y^2}{w_0^2}} \, dV = \frac{\pi}{2} \cdot w_0^2 \cdot l$$

Damit kann man schreiben:

$$\dot{q} = \frac{2I_0}{h\nu} \cdot \sigma \cdot N_2 \cdot V_a + \dot{q}_{sp} - \frac{q}{\tau_\gamma}$$

Der Zusammenhang zwischen  $I_0$  und  $q$  ergibt sich wie folgt:

$$I = \frac{1}{2} \cdot \frac{dq}{dV} \cdot \frac{c}{n} \cdot h\nu$$

Der Differentialquotient ist die Photonendichte der nach rechts/links laufenden Welle. Damit ist:

$$q = \int_{\text{Res}} \frac{2I \cdot n}{c \cdot h\nu} \, dV = \frac{2I_0}{c \cdot h\nu} \cdot \underbrace{\int_{\text{Res}} n \cdot \frac{I}{I_0} \, dV}_{=: V}$$

Hierbei ist  $V$  das effektive Modenvolumen im Resonator.

$$V = n_a \cdot V_a + V_{\text{Rest}} = \frac{\pi}{2} \cdot w_0^2 \cdot L'$$

Man erhält also:

$$\dot{q} = \frac{\sigma c}{V} \cdot q \cdot N_2 \cdot V_a + \dot{q}_{sp} - \frac{1}{\tau_\gamma}$$

Die spontane Emission entspricht einem zusätzlichen Photon:

$$\dot{q} = \frac{\sigma c}{V} \cdot (q + 1) \cdot N_2 \cdot V_a - \frac{q}{\tau_\gamma}$$

Auf der Resonatorachse ( $x = y = 0$ ) gilt:

$$\dot{N}_2 = W_p \cdot N_0 - \frac{\sigma c}{V} \cdot q \cdot N_2 - \frac{N_2}{\tau}$$

Wir führen weitere Hilfsgrößen für eine bessere Darstellung ein: Seien  $n_2 = N_2 \cdot V_a$  und  $n_0 = N_0 \cdot V_a$  die effektiven Absolutzahlen. Weiterhin gilt  $K = \sigma c / V$  und  $R_p = W_p \cdot N_0$ . Dann erhält man:

$$\dot{n}_2 = R_p - K \cdot q \cdot n_2 - \frac{n_2}{\tau} \quad \text{und} \quad \dot{q} = K \cdot (q + 1) \cdot n_2 - \frac{q}{\tau_\gamma}$$

Dies sind nichtlineare gekoppelte Differentialgleichungen wegen  $q \cdot n_2$ .

Wir wollen uns nun die Bedeutung der Kopplungskonstante  $K$  klar machen. Dazu nehmen wir an, dass der Laserübergang eine homogenen verbreiterte Lorentz-Linie ist. Wir wissen, dass die Breite der Verteilung  $\Delta\nu = \Gamma_{\text{tot}} / \tau$  ist.

$$\sigma(\nu_0) = \frac{\lambda_0^2}{2\pi} \cdot \frac{1}{2 \cdot \tau_{sp} \Gamma_{\text{tot}}} = \frac{c^2}{4\pi^2 \cdot \nu_0^2} \cdot \frac{1}{\tau_{sp} \cdot \Delta\nu}$$

Für eine Mode bei  $\nu_0$  gilt:

$$\frac{1}{K} = \frac{V}{\sigma(\nu_0) \cdot c} = \frac{\pi}{2} \cdot \underbrace{\frac{8\pi \cdot \nu_0^2}{c^3} \cdot V \cdot \Delta\nu}_{=: M} \cdot \tau_{sp}$$

Der Faktor  $8\pi\nu_0^2/c^3$  ist die Modendichte des freien Raumes. Damit ist  $M$  die Anzahl der Moden im Volumen  $V$  im Intervall  $\Delta\nu$ .

#### Beispiel 4.1 Rechenbeispiel

Wir nehmen an  $\nu_0 = 5 \cdot 10^{14}$  Hz,  $\Delta\nu = 10^{11}$  Hz und  $V = 100 \text{ mm}^2$ . Dann ist  $M = 10^{10}$ . Wir stellen uns vor, dass ein Atom, welches sich im Resonator befindet, mit allen möglichen Moden reagiert, nicht nur die, die am Ende zum Laser-Licht beitragen.

An der Schwelle muss mit den Größen der letzten Vorlesung gelten:

$$n_{2,S} = \Delta N_S \cdot V_a = \frac{L'/l}{c\sigma \cdot \tau_\gamma} \cdot V_a = \frac{V}{c\sigma \cdot \tau_\gamma} = \frac{1}{K \cdot \tau_\gamma} = M \cdot \frac{\tau_{sp}}{\tau_\gamma}$$

Weiterhin ist:

$$R_{p,S} = W_{p,S} \cdot n_0 = \frac{n_{2,S}}{\tau}$$

Wir definieren folgende normierten Größen:

$$\eta = \frac{n_2}{n_{2,S}} \quad \text{und} \quad r = \frac{R_p}{R_{p,S}}$$

Damit können wir schreiben:

$$\dot{\eta} \cdot \tau = r - \eta \cdot \left(1 + \frac{\tau}{\tau_{sp}} \cdot \frac{q}{M}\right) \quad (*)$$

Sowie:

$$\dot{q} \cdot \tau_\gamma = (q + 1) \cdot \eta - q \quad (*)$$

Beide Gleichungen können wir am stationären Fall Null setzen.

## 4.4 Stationärer Zustand

Im stationären Bereich ist der Laser im **Continuous-Wave-Betrieb (cw)**. Mit den beiden Differentialgleichungen (\*) und (\*) des letzten Kapitels kann man schreiben<sup>2</sup>:

$$q = \frac{\tau_{sp}}{\tau} \cdot \frac{M}{2} \cdot \left[ r - 1 + \sqrt{(r - 1)^2 + 4 \cdot \frac{\tau}{\tau_{sp}} \cdot \frac{r}{M}} \right]$$

Man beobachtet eine abrupte Zunahmen von  $q$  an der Schwelle, da  $M \gg 1$  ist. Unterhalb der Schwelle ist  $q \ll M$ . Macht man diese Vereinfachung hat man:

$$(*) : \quad \eta \approx r \quad \text{und} \quad (*) : \quad q = \frac{\eta}{1 - \eta} = \frac{r}{1 - r}$$

Oberhalb der Schwelle, also bei  $q \gg 1$ , ist:

$$(*) : \quad \eta = \frac{q}{1 + q} \approx 1$$

Dieser Wert bleibt also konstant ( $n_2 = n_{2,S}$ ).

$$(*) : \quad q = \frac{\tau_{sp}}{\tau} \cdot M \cdot (r - 1)$$

Man erhält damit einen linearen Anstieg mit  $r$ .

Wir stellen uns die Frage: Wohin fließt die Energie?

(a) zugeführte Energie:  $P_p = R_p \cdot h\nu$  ist die nutzbare Pumpleistung.

(b) abgegeben:

(i) spontan:

$$P_{sp} = \frac{n_2}{\tau} \cdot h\nu$$

Für  $r < 1$  ist  $n_2 = r \cdot n_{2,S}$ , also

$$P_{sp} = r \cdot \frac{n_{2,S}}{\tau} \cdot h\nu = R_p \cdot h\nu = P_p$$

Im Fall  $r > 1$  gilt  $n_2 = n_{2,S}$ , und damit:

$$P_{sp} = R_{p,S} \cdot h\nu$$

Wir haben also eine konstante Pumprate.

<sup>2</sup>den grafischen Verlauf machen die aufgeteilten Folien klar



(ii) aus der Lasermode ausgekoppelt:

$$P_q = \frac{q}{\tau_\gamma} \cdot h\nu$$

Unterhalb der Schwelle ( $r < 1$ ) ist  $q = 0$ . Oberhalb der Schwelle ( $r > 1$ ) ist:

$$P_q = \frac{h\nu}{\tau_\gamma} \cdot \frac{\tau_{sp}}{\tau} \cdot M(r-1) = \frac{n_{2,S}}{\tau} \cdot h\nu \cdot (r-1) = (R_p - R_{p,S}) \cdot h\nu$$

Die gesamte Überschussleistung geht in die Lasermode.

Das aktive Medium strahlt anschaulich in alle Richtungen ab. Ist  $r < 1$  so nimmt die Abstrahlung immer mehr zu. Für  $r > 1$  passiert das nicht und im Spektrum sieht man einen sehr großen Peak bei der Modenfrequenz des Lasers. Im Vergleich zu dem Peak merkt man den Untergrund quasi nicht mehr.<sup>3</sup> Man stellt eine dramatische spektrale und räumliche Verschmälerung. Allerdings kann man ohne die expliziten Wellengleichungen nicht alle Merkmale beschreiben.

Nachdem wir wissen, wohin die Energie fließt, interessiert uns die Ausgangsleistung:

$$I_{\text{aus}} = I_0 \cdot (1 - \tilde{R}_2)$$

Wobei  $\tilde{R}_2$  das Reflektionsvermögen des aukoppelnden Spiegels ist. Der Klammerterm wird auch als **Auskoppelgrad** bezeichnet. Eine Erhöhung von  $1 - \tilde{R}_2$  bedeutet, dass  $I_0$  sinkt (die Schwelle wird erhöht), aber gleichzeitig wird aber auch mehr ausgekoppelt. Irgendwo gibt es also Optimum. Dieser Wert ist natürlich sehr stark vom Medium und von den internen Verlusten abhängig.

## 4.5 Ein- oder Mehrmodenbetrieb

Innerhalb des nutzbaren Spektrums (**Gewinnprofil**) liegen viele Moden. Die Frage ist nun, welche Moden laufen an und welche kann ich dann auch nutzen. Zunächst stellt man fest, dass eigentlich immer irgendwelche Moden nutzbar sind. Wir unterscheiden zwei Fälle:

- (a) Mode mit den gleichen „Futter“ leben: Die Mode mit den kleinsten Verlusten gewinnt. Man spricht hier von der **Modenkonkurrenz**.
- (b) Moden, die von unterschiedlichen „Futter“ leben: Diese Moden können koexistieren.

Die beiden Fälle kommen bei folgenden Spektraländerungen vor (siehe Folien):

- (a) eine rein homogene Verbreiterung
- (b) eine inhomogene Verbreiterung

Die daraus folgende Gewinn-Sättigung bedeutet in den beiden Fällen:

- (a) Gewinn-Profil wird insgesamt abgesenkt
- (b) spektrale Löcher im Gewinn-Profil

Nun ist es aber so, dass der Fall (b) auch bei einer homogenen Verbreiterung vorkommen kann. Dabei nutzt die in den Knoten gebliebene Inversion. Ohne besondere Maßnahmen hat mal meistens einen Mehrmodenbetrieb. Um einen Einmodenbetrieb zu bekommen muss man dafür sorgen, dass die nicht erwünschten Moden einen höheren Verlust haben (**Modenselektion**).

1. Selektion von Transversalmoden: Einfügen einer Blende

---

<sup>3</sup>siehe Dazu auch in den Folien

2. Selektion von Longitudinalmoden: Einfügen eines  $\nu$ -selektives Element ein.

An dieser Stelle werden ein paar frequenzselektive Elemente vorgestellt:

- Etalon (Fabry-Perot-Interferometer)<sup>4</sup>: verspiegelte Glasplatte, durchstimmbar über den Einfallswinkel
- Grobe Selektion: Prisma, Gitter und doppelbrechender Filter

Im Allgemeinen reicht eine ganz kleine Bevorzugung einer Mode, da die Schwelle so scharf ist.

Den Laser kann man innerhalb des Gewinnprofils durchstimmen. Dazu stimmt man das frequenzselektive Element durch. Zudem kann man die Resonatorlänge ändern, um die Modenfrequenzen mit zu verschieben. Damit kann man das Durchstimmen präzisieren.

Den räumlichen Lochraum vermeidet man mit einem Ringresonator. Alles zusammen ist ein Laser komplizierter als einfach zwei Spiegel.<sup>5</sup>

## 4.6 Transientes Verhalten, Pulsbetrieb

### 4.6.1 Spiking, Relaxationsoszillationen

Wir betrachten den Punkt 1<sup>6</sup>, bei dem gilt:

$$n_2 > n_{2,S} \Rightarrow G \cdot V > 1 \Rightarrow q \uparrow$$

Am Punkt 2 haben wir Gewinnsättigung, was bedeutet, dass  $n_2$  sinkt. Ab Punkt 3 ist  $n_2 < n_{2,S}$  und damit sinkt  $q$ . Bei 4 ist  $q$  soweit gesunken, dass der Aufbau von  $n_2$  durch Pumpen größer ist, als der Abbau durch stimulierte Emission. Damit steigt  $n_2$  wieder an und der Kreislauf beginnt von vorne. Das Auftreten ist anhängig von  $\tau$ ,  $\tau_\gamma$  und  $r$ . Im Allgemeinen ist diese Schwingung gedämpft und es findet ein Übergang in die Relaxationsoszillation statt.

Als Ansatz behauptet man:

$$n_2(t) = n_{2,0} + \Delta n_2(t) \quad \text{und} \quad q(t) = q_0 + \Delta q(t)$$

Es sei  $n_{2,0} \approx n_{2,S}$  und  $q_0$  die stationären Werte. Das setzen wir in die Ratengleichung ein. Dabei nutzen wir, dass die Größen  $\Delta n_2$  und  $\Delta q$  kleine Größen sind. Damit könne alle Terme vernachlässigt, die aus dem Produkt der beiden Größen bestehen. Man erhält ein lineares Differentialgleichungssystem, welches mit einem Exponentialansatz lösen lässt. Wir erhalten verschiedene Lösungsbereiche:

(i) Schwingfall: für  $\tau_\gamma/\tau < 4(r-1)/r^2$

$$\Delta q \sim e^{-t/\tau_R} \cdot e^{\pm i\omega_R \cdot t}$$

Das ist eine gedämpfte Schwingung mit:

$$\tau_R = \frac{2\tau}{r} \quad \text{und} \quad \omega_R = \sqrt{\frac{r-1}{\tau \cdot \tau_\gamma}}$$

<sup>4</sup>siehe Folien

<sup>5</sup>siehe Folie

<sup>6</sup>Abbildung „Entstehen eines Spikes“

Am Beispiel eines Nd-YAG-Lasers hat man  $r = 1,5$ ,  $\tau = 230 \mu\text{s}$  und  $\tau_\gamma = 30 \text{ ns}$ . Damit ergibt sich  $\tau_R = 307 \mu\text{s}$  und  $\omega_R = 2\pi/25 \mu\text{s}$ .

Ein HL-Laser hat  $r = 1,5$ ,  $\tau = 3 \text{ ns}$  und  $\tau_\gamma = 1,1 \text{ ps}$ . Man erhält damit die Werte  $\tau_R = 4 \text{ ns}$  und  $\omega_R = 2\pi/0,5 \text{ ns}$ .

- (ii) Kriechfall: für  $\tau_\gamma/\tau > 4(r-1)/r^2$ . Dieses Verhalten taucht zum Beispiel beim Gaslaser auf.

## 4.6.2 Güteschalten (Q-Switching)

Mit dieser Schaltung kann man den Verlust  $\delta$  zwischen „groß“ und „klein“ regeln. Pumpet man bei großen  $\delta$  erzeugt man ein großes  $\Delta N$ . Dann folgt ein schnelles freischalten des Resonators. Das führt zu einem riesen Lichtpuls.

Wie sieht die technische Realisierung einer solchen Schaltung aus?

- (a) **elektrooptische Schalter (EOM)**: Ein elektrooptischer Kristall wird mit Elektroden versehen, zwischen denen eine Spannung angelegt wird. Zusätzlich bringt man noch einen Polarisationsfilter in den Strahlengang.  $x$  und  $y$  sollen die Hauptachsen des elektrooptischen Kristalls sein. Bei geeigneter Spannung im kv-Bereich führt zu einer Doppelbrechung mit  $(n_x - n_y) \cdot d = \lambda/4$ . Dadurch hat man einen zweimaligen Durchgang, was einer  $\lambda/2$ -Platte entspricht. Da das pro Polarisation um  $90^\circ$  gekippt wird, wird das Licht durch den Filter geblockt. Die Freischaltung erfolgt durch Abschalten der Spannung (innerhalb von 10 ns möglich).
- (b) **akustooptischer Schalter (AOM)**<sup>7</sup>: Eine Schallwelle (um die 100 MHz) führt zu Beugungsverlusten aufgrund der  $n$ -Gitter.
- (c) rotierender Spiegel: Durch die mechanische Frequenz kann die Frequenz der Pulse geregelt werden.
- (d) sättigbarer Absorber (z.B. Farbstoff): Im Zweeniveausystem: Am Anfang hat das obere Niveau leer. Es wird also viel absorbiert ( $\Delta N$  hoch), und damit sind auch die Verluste  $\delta$  groß. Sobald  $\Delta N > \Delta N_S$  ist steigt  $q$ . Ab einem bestimmten Punkt ist der Absorber gesättigt, da sein oberes Niveau besetzt ist. Der Absorber wird quasi durchsichtig, da die Verluste sehr klein sind.  $q$  steigt sehr rasant an und verursacht einen hohen Puls.

(a) bis (c) ist aktives, (d) ist passives Güteschalten.

Weiterhin interessiert das **Zeitverhalten**.

- (a) Pumpen: Die Ratengleichung liefert (am Anfang hat man fast keine Photonen,  $q \approx 0$ ):

$$\dot{n}_2 = R_p - \frac{n_2}{\tau}$$

Man erhält einen Graphen der bei  $(0, R_p)$  beginnt und der dann bis  $\tau$  ansteigt. Sinnvoll ist es, die Pumpdauer im Bereich von  $\tau$  zu nutzen. Weiterhin muss  $\tau$  viel größer sein, als die Schaltzeit des Q-Switches. Geeignet wären z.B. Festkörperlaser mit  $\tau \geq 100 \mu\text{s}$  (ungeeignet sind He-Ne- oder  $\text{AL}^+$  Laser).

- (b) Pulsauf- und abbau:

$$\dot{q} = \frac{1}{\tau_\gamma} \cdot [(q+1) \cdot \eta - q] \quad \text{mit} \quad \eta = \frac{n_2}{n_{2,S}}$$

Wir vernachlässigen die 1 (für  $q \gg 1$ ).

<sup>7</sup>siehe Abbildung 5.30

In der Anfangsphase ist  $\eta = \eta_i = \text{const.}$  und damit:

$$q = q_i \cdot e^{t/\tau_i} \quad \text{mit} \quad \tau_i = \frac{\tau_\gamma}{\eta_i - 1}$$

Die Anstiegszeit bis  $q \approx q_0$  (stationärer Wert) bei  $10^8$  bis  $10^{12}$  Photonen ist im Bereich von  $t_A = (25 \pm 5)\tau_i$ .

Beim Abfall ist  $\eta \approx 0$ . Damit ist:

$$q \sim e^{-t/\tau_\gamma}$$

Typischerweise ergibt sich ein sehr steiler Anstieg und ein weniger steilerer Abstieg. Die Pulslänge ist größer als  $\tau_\gamma$ .<sup>8</sup> Es werden also Energien in  $100 \mu\text{s}$  hineingesteckt und in  $100 \text{ ns}$  wieder abgegeben.

### 4.6.3 Modenkopplung

Man möchte eine phasenstarre Superposition von Longitudinalmoden erreichen. Im ausgekoppelten Strahl gilt:

$$E(t) = \sum_m E_m \cdot e^{i\varphi_m} \cdot e^{i\omega_m \cdot t} \quad \text{mit} \quad \omega_m = \omega_0 \pm m \cdot \Delta\omega \quad \text{und} \quad \Delta\omega = 2\pi \cdot \frac{c}{2L'}$$

$\omega_0$  ist eine Frequenz in der Mitte des Gewinnspektrums.

**Beispiel 4.2**  $E_m = E_0$  für  $-N \leq m \leq N$ , 0 sonst

Es sei  $\varphi_m = \varphi_0$  für all Moden. Damit kann man die Phase und die Energie aus der Summe ziehen:

$$E_0 \cdot e^{i\varphi_0} \cdot e^{-i\omega_0 \cdot t} \cdot \sum_{m=-N}^N (e^{-i\Delta\omega \cdot t})^m = E_0 \cdot e^{-i(\omega_0 t - \varphi_0)} \cdot \frac{\sin((2N+1) \cdot \frac{\Delta\omega}{2} \cdot t)}{\sin(\frac{\Delta\omega}{2} \cdot t)}$$

Man erhält im Spektrum ( $I \sim |E|^2$ ) im Abstand von  $2L'/c$  hohe Peaks, dazwischen kleinere Maxima. Die Breite und die Höhe der großen Peaks ist:

$$\text{Breite} = \frac{4\pi}{(2N+1) \cdot \Delta\omega} \quad \text{und} \quad \text{Höhe} = (2N+1)^2 \cdot I_0 = (2N+1)^2 \cdot E_0^2$$

Die Intensität  $I$  ist periodisch. Es läuft ein Puls im Resonator um, von dem bei jedem Umlauf ein Teil ausgekoppelt wird. Der Abstand der ausgekoppelten Puls beträgt  $2L'$ . Die Pulslänge ist proportional zu  $1/[(2N+1) \cdot \Delta\omega]$ . Die Pulshöhe  $I_{\max} = (2N+1)^2 \cdot I_0$ , was identisch mit einer inkohärenten Superposition ist. Weiterhin gilt die Energie-Zeit-Unschärfe:

$$\delta t \cdot \delta \nu \geq K$$

$\delta t$  und  $\delta \nu$  sind die Halbwärtsbreiten der Puls im Spektrum.  $K = \text{const.}$  ist abhängig von der Form des Spektrums (Gaußform:  $K = 0,441$ ).

**Wichtig:** Es fehlt die Vorlesung vom 01.07.09

### Räumliche Kohärenz

Die räumliche Kohärenz misst man gewöhnlich mit einem Doppelspalt. Dazu werden die Spalte soweit voneinander entfernt, bis keine Interferenz mehr sichtbar ist. Dann vergleicht man die Felder im Abstand  $\Delta l$  quer zur Ausbreitungsrichtung. Das Laserlicht besteht aus *einer* Transversalmode, was dazu führt, dass es räumlich kohärent ist. Das hat gewisse Konsequenzen:

<sup>8</sup>siehe Abbildung 26.13 und 26.12

- Gerichtetheit
- Fokussierbarkeit

Um die Kohärenz zu Verbessern kann man mit Frequenzfiltern und Blenden die Eigenschaften verbessern. Würde man das allerdings mit weißen Licht machen, verbleibt fast keine Intensität mehr. Das ist der Vorteil des Lasers, der kohärentes Licht in hoher Intensität liefert.

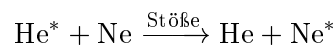
## 5 Lasertypen

### 5.1 Gaslaser

#### 5.1.1 He-Ne-Laser (Neutralatomlaser)

Das aktive Medium ist eine Mischung aus Überwiegend He (85 %) und Ne, allerdings findet der Übergang im Neon statt. Bei diesem Laser pumpt man elektrisch über Gasentladungen<sup>1</sup>.

- $\text{He } 1^1S_0$  (Grundzustand) geht mit Elektronenstößen in  $2^1S_0$  oder  $2^3S_1$  über. Diese Zustände sind metastabil (also langlebig), da der Übergang von  $S$  zu  $S$  elektronisch verboten ist.
- Allerdings überlagern sich Zustände im Helium und Neon, so dass durch Stöße ein Übergang zu einem Neon-Atom möglich sind. Es findet ein resonator Energieübertrag statt:



Im Neon sind die Zustände  $4s$  und  $5s$  bevölkert.

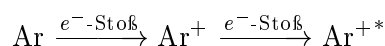
- Es kann zu verschiedenen Laserübergängen kommen, hier die wichtigsten:
  - $5s \rightarrow 4p$ : infrarot
  - $5s \rightarrow 3p$ : sichtbar
  - $4s \rightarrow 3p$ : sichtbar und infrarot

Es sind die Wellenlängen  $\lambda = 3,39 \mu\text{m}$ ,  $\lambda = 1,15 \mu\text{m}$  und  $\lambda = 633 \text{ nm}$  am wichtigsten. Der Laser hat folgende Eigenschaften:

- Wirkungsgrad  $\eta < 1 \%$
- Breite des  $G$ -Profils  $\Delta\nu_G \approx 1,4 \text{ GHz}$
- Leistung  $P$  bis  $100 \text{ mW}$

#### 5.1.2 $\text{Ar}^+$ -Laser (Ionenlaser)

Dieser Laser hat ionisiertes Argon als aktives Medium. Das Pumpen erfolgt wiederum über Gasentladungen. Es findet der Übergang wie folgt statt:



Dieser Vorgang ist zweistufig mit einer sehr hohen Stromdichte. Es entsteht ein heißes Plasma mit  $3000 \text{ K}$ . Es findet ein  $4p \rightarrow 4s$ -Übergang statt, wobei die Wellenlängen  $\lambda = 488 \text{ nm}$  und  $\lambda = 514,5 \text{ nm}$  am wichtigsten sind. Die Eigenschaften dieses Lasers sind:

---

<sup>1</sup>siehe Abb. 4-2

- Leistung bis 20 W
- Wirkungsgrad  $\eta < 1\%$
- starke Kühlung und Magnetfelder nötig, um das Plasma im Laser zu halten.
- Breite des Gewinnprofils  $\Delta\nu_G \approx 3,5\text{ GHz}$

### 5.1.3 CO<sub>2</sub>-Laser (Moleküllaser)

Das aktive Medium ist CO<sub>2</sub>, aber auch N<sub>2</sub> und He. Wiederum sorgen Gasentladungen für das Pumpen. Hier gibt es verschiedene Möglichkeiten:

- direkt von CO<sub>2</sub>(000)  $\xrightarrow{e^-\text{-Stoß}}$  CO<sub>2</sub>(001)
- Stoß zweiter Art mit Stickstoff: N<sub>2</sub>( $\nu = 0$ )  $\xrightarrow{e^-\text{-Stoß}}$  N<sub>2</sub>( $\nu = 1$ ) und anschließend N<sub>2</sub>( $\nu = 1$ ) + CO<sub>2</sub>(000)  $\rightarrow$  N<sub>2</sub>( $\nu = 0$ ) + CO<sub>2</sub>(001)

Es muss natürlich dafür gesorgt werden, dass sich das untere Laserniveau entleert:

- Stöße mit CO<sub>2</sub>(000) führen auf CO<sub>2</sub>(010)
- Stöße mit Helium entleeren den CO<sub>2</sub>(010)-Zustand

Der Laserübergang findet zwischen den Vibrationsniveaus des elektrischen Grundzustandes statt. Hierbei sind die wichtigen Wellenlängen  $\lambda = 10,6\text{ }\mu\text{m}$  und  $\lambda = 9,6\text{ }\mu\text{m}$ . Diese Energien sind jeweils durch Rotationsniveaus aufgespalten. Der Laser hat die Eigenschaften:

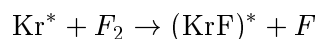
- $\Delta\nu_G \approx 100\text{ MHz}$
- Leistung  $P$  bis 100 kW (c.w.) und Pulse mit bis zu 100 kJ möglich
- $\eta \approx 20\%$

### 5.1.4 Excimer-Laser (Gaslaser)

Ein **Excimer** (excited dimer) ist Molekül, dass nur im angeregten Zustand gebunden ist. Trägt man die Energie über den Atomabstand auf, so hat man bei einem nicht gebunden Zustand eine exponentiell abfallende FUNKTION. Im gebundenen Zustand (verläuft über dem ungebundenen) bildet sich ein Energieminimum. Der Übergang findet nun vom Minimum des gebundenen Zustandes in den ungebundenen Zustand statt mit einer Halbwertszeit von  $\tau = 10\text{ ns}$  und  $\sigma = 10 \cdot 10^{-16}\text{ cm}^2$ . Das Molekül dissoziiert im Grundzustand, so dass das untere Laserniveau leer ist. Dieses Verhalten zeigt sich vor allem bei Edelgas- und Halogen-Lasern.

Ein Excimer kann über eine Gasentladung gebildet werden.

- durch einen Elektronenstoß wird z.B. Kr ionisiert ( $\text{Kr} \rightarrow \text{Kr}^+$  oder  $\text{Kr} \rightarrow \text{Kr}^*$ ), also  $e^- + \text{F}_2 \rightarrow \text{F}^- + \text{F}$
- Bildung eines Excimers:



Es kann dann  $\text{Kr}^+ + \text{F}^- + \text{M} \rightarrow (\text{KrF})^* + \text{M}$  ( $\text{M}$  dient nur der Impulserhaltung) gebildet werden.

Dieser Laser hat folgende Eigenschaften:

- gepulste Gasentladung, Reproduktionsrate bis 500 Hz
- $\eta \approx 2 - 4 \%$
- Anwendung z.B. in der Lithographie (Halbleiter-Induktion)

### 5.1.5 Weitere Gaslaser

1. Cu- ( $\lambda = 510,578 \text{ nm}$  und Au-Dampflaser ( $\lambda = 628 \text{ nm}$  und  $\lambda = 312 \text{ nm}$ )
2.  $\text{Kr}^+$ -Laser
3. He-Cd-Laser ( $\lambda = 325 \text{ nm}$  und  $\lambda = 442 \text{ nm}$ )
4. CO-Laser ( $\lambda = 5 \mu\text{m}$ )
5.  $\text{N}_2$ -Laser ( $\lambda = 337 \text{ nm}$ )

## 5.2 Farbstofflaser

Das aktive Medium ist in einem Farbstoff gelöst. Zum Niveau:

- zu unterst:  $S_0$  Singuletzustand
- angeregte Zustände  $S_1$ ,  $S_2$  usw.
- parallel sind angeregte Triplettzustände  $T_1$  und  $T_2$
- elektronische Zustände durch Vibrations- und Rotationszustände aufgespalten
- Anregung aus dem Grundzustand:  $S_1$  zu  $S_2$  (angeregter Vibrationszustand), dann Relaxation innerhalb von  $S_2$  in ps, Relaxation von  $S_2$  zu  $S_1$  im ns-Bereich und Relaxation innerhalb von  $S_1$
- Interkombination von  $S_2$  nach  $T_1$ , dann Relaxation von  $T_1$  nach  $S_1$  (spinverboten) in  $10^{-7} \text{ s}$  bis  $10^{-3} \text{ s}$ .
- Triplettabsorption: Übergang von  $T_1$  nach  $T_2$  (Energie genau passend zur emittierten Laserlichtenergie)

Weiterhin kommt es zu einer Stoßverbreiterung durch Stöße mit dem Lösungsmittel. Es entsteht ein Kontinuum, da die Peaks so dicht beieinander liegen, dass sie durch die Stoßverbreiterung zusammenfallen. Der Laser wird optisch gepumpt mittels eines Lasers oder einer Blitzlampe. Er hat das Problem der metastabilen Triplettzustände. Ohne weitere Maßnahmen würde er nur gepulst betrieben werden können. Für einen kontinuierlichen Betrieb pumpt man den Farbstoff mit hoher Geschwindigkeit ( $v > 10 \text{ m/s}$ ) um, so dass die Triplettzustände aus dem Resonator entfernt werden, bevor sie Energie aufnehmen können.

Diese Laser haben folgende Eigenschaften:

- breites Gewinnsspektrum, dadurch gut furchstimmbar (ja nach Farbstoff zwischen 20 und 90 nm)
- geeignet für fs-Pulse
- Wirkungsgrad um die 40 %



## 5.3 Feststofflaser

Das aktive Medium sind Fremdatom in einem Kristall oder Glas. Übergangsmetalle sind zum Beispiel  $\text{Cr}^{3+}$  und  $\text{Ti}^{3+}$  oder seltene Erden wie  $\text{Nd}^{3+}$  oder  $\text{Er}^{3+}$ . Die Laserübergang ist ein dipolverbortener Übergang in der  $3d$ - und  $4f$ -Schale. Dadurch ist die Lebensdauer  $\tau \geq 100 \mu\text{s}$ .

### 5.3.1 Rubinlaser

Dieser Laser war der erste Laser, der schon 1960 betrieben wurde. Das aktive Medium ist in diesem Fall  $\text{Cr}^{3+}$  in  $\text{Al}_2\text{O}_3$ . Der Laserübergang ist spin-, dipol- und paritätsverboten. Die Lebensdauer ist im Bereich von 3 ms. Dieser Laser ist ein Dreiniveaulaser. Der Pumpvorgang geschieht über eine Lampe.

### 5.3.2 Nd-Laser

Die Laser wird in der Praxis häufig eingesetzt. Das aktive Medium ist  $\text{Nd}^{3+}$  in:

- YAG:  $\text{Y}_3\text{Al}_5\text{O}_{12}$
- Glas
- und andere

In diesem Fall hat man einen Vierniveaulaser mit dem Laserübergang mit den  $4f$ -Elektronen. Die stärkste Linie im Spektrum liegt bei  $\lambda = 1,064 \mu\text{m}$  relativ unabhängig vom Wirtsmedium.

Die Breite des Gewinnsspektrums ist:

- YAG:  $\Delta\nu_G = 195 \text{ GHz}$ , homogen verteilt
- Glas:  $\Delta\nu_G = 6000 \text{ GHz}$ , im Wesentlichen inhomogen

Zum Pumpen verwendet man eine Lampe oder einen Halbleiterlaser. Der differentielle Wirkungsgrad liegt bei 1 bis 3 %. Häufig macht man eine Frequenzverdopplung und man erhält eine dominierte Wellenlänge von  $\lambda = 532 \text{ nm}$ .

### 5.3.3 Ti-Saphir-Laser

Das aktive Medium ist  $\text{Ti}^{3+}$  in  $\text{Al}_2\text{O}_3$ .  $\Delta\nu_G$  ist sehr groß, so dass man den Laser zwischen 670 bis 1070 nm durchstimmen kann. Auch hier sind fs-Pulse möglich. Das Pumpen erfolgt wiederum optisch über eine Lampe oder einen Laser.

### 5.3.4 Farbzentrenlaser

Das aktive Medium ist hier ein Farbzentrum in einem Alkalihalogenidkristall. Dieser Laser ist weit durchstimmbar, insgesamt ist der Bereich von 0,8 bis  $4 \mu\text{m}$  abgedeckt.

## 5.4 Halbleiterlaser

Streng genommen ist der Halbleiterlaser auch eine Festkörperlaser.

1. Licht wird im Halbleiter durch  $e$ - $h$ -Rekombination emittiert, was im vorwärtsgepolten p-n-Übergang realisierbar ist. Dieser Effekt ist nur effizient bei einer direkten Bandlücke, das heißt, das Energieminimum des Leitungsbandes liegt beim gleichen  $k$ -Wert wie das Maximum des Valenzbandes. Bei GaAs beträgt die Lücke ungefähr 1,42 eV. Bei einer indirekten Bandlücke (wie im Si) muss der Impuls durch ein Phonon ausgeglichen werden, wodurch die Übergangswahrscheinlichkeit wesentlich geringer ist.
2. Absorption/Emission in einem direkten Halbleiter: Die Übergangsraten sind wie erwartet gleich ( $W_{12} = W_{21}$ ). Über einen Gewinn oder Verlust entscheidet die Besetzung. Diese ist bestimmt durch die Fermistatistik. Zunächst betrachten wir noch einmal das Banddiagramm. Im Bereich der Extrima lassen sich die  $E$ - $k$ -Verläufe als Parabel nähern (Valenzband nach unten geöffnet, Leitungsband nach oben geöffnet). Die Energie des Valenzbandes sei  $E_1$ , die des Leitungsbandes  $E_2$ , deren Abstand ist  $h\nu$ , speziell am Extrum  $E_g$ . Die Zustandsdichten der Bänder sind Wurzelfunktionen (auseinander laufend). Der Absorptionskoeffizient ist damit:

$$\alpha_0 \sim \sqrt{h\nu - E_g}$$

Wir haben also auch hier einen Wurzelverlauf, der bei  $h\nu = E_g$  beginnt.

Im thermischen Gleichgewicht ist die Besetzung gemäß der Fermi-Dirak-Verteilung:

$$f(E) = \frac{1}{\exp\left(\frac{E-\xi}{k_B T}\right) + 1}$$

$\xi$  ist hierbei die Fermienergie. Die Injektion stellt ein Nichtgleichgewicht ein, sodass global die Verteilung nicht mehr gilt, aber in den einzelnen Bändern gilt immer noch die thermische Verteilung. Das liegt an der schnellen Thermalisierung (in ps) innerhalb der Bänder. Wir erhalten also zwei getrennte Fermiverteilungen mit  $\xi_v$  (Valenzband) und  $\xi_c$  (Leitungsband). Allgemein lautet dann der Absorptionskoeffizient:

$$\alpha = \alpha_0 \cdot \left[ f_v(E_1) \cdot (1 - f_c(E_2) - f_c(E_2)) \cdot (1 - f_v(E_1)) \right] = \alpha_0 \cdot \left[ f_v(E_1) - f_c(E_2) \right]$$

$\alpha < 0$  (Verstärkung) gilt, wenn  $f_v(E_1) < f_c(E_2)$  ist, also liegt Inversion vor. Das ist dann der Fall, wenn:

$$\xi_c - \xi_v > E_2 - E_1 = h\nu > E_g$$

$\xi_v$  und  $\xi_c$  müssen *in* den Bändern liegen.<sup>2</sup>

3. Erreichen der Bedingung  $\xi_c - \xi_v > E_g$ :

- zunächst hat man einen einfachen p-n-Übergang genutzt. Das funktioniert nur bei sehr hoher Dotierung, **entarteter Halbleiter** genannt. Das ist allerdings keine gute Lösung für die Praxis, da diese Methode sehr ineffizient ist.
- Die Lösung ist eine sogenannte **Doppelheterostruktur**. Man nimmt dazu zum Beispiel GaAs (zwischen n- und p-Schicht, kleiner als 1  $\mu\text{m}$ ) und dazu AlGaAs als n- bzw. p-Schicht. In dem Bereich des GaAs bleibt das Fermienergielevel auf der selben Höhe. In der kleinen GaAs-Zone hat man Inversion und Ladungsträgereinschluss. Das Laserlicht entsteht vorwiegend

<sup>2</sup>siehe ausgeteilte Blätter zum Halbleiterlaser

bei der Rekombination in der Zwischenschicht. Im AlGaAs gibt es keine Absorption des emittierten Lichtes.

Der Wirkungsquerschnitt eines solchen Lasers ist größer als 50 %. Die Materialien, die man verwendet sind binäre, tertiäre und quartäre Verbundhalbleiter.

#### 4. Bauformen:

- kantenemittierend: die Kristallflächen dienen als Spiegel
- vertikal emittierend: zusätzliche Spiegel

Zum Schluss sei noch erwähnt, dass dies natürlich noch nicht alles zum Thema Laser war. Aktuelle Forschung gibt es zum Beispiel im Gebiet der Freie-Elektronen-Laser.

# Stichwortverzeichnis

## A

Abklingkonstante .....	16
Absorption .....	5, 7
Absorptionskoeffizient .....	8
Absorptionsquerschnitt .....	8
Abtaststrahl .....	13
Anzahldichte .....	8
Auskoppelgrad .....	33

## B

Beugungstheorie von Kirschhoff und Fresnel	25
Brechungsindex .....	10

## C

Continous-Wave-Betrieb (cw) .....	32
-----------------------------------	----

## D

Dipolmoment .....	9
Doppelheterostruktur .....	42
Dopplerverbreiterung .....	12

## E

Einsteinkoeffizient	
der Absorption .....	7
der Emission .....	7
Emission	
spontan .....	5, 7
stimuliert .....	5, 7
Emissionsquerschnitt .....	8
Excimer .....	39

## F

Fermi-Dirak-Verteilung .....	42
Fermienergie .....	42
Fourierintegral .....	19
Frequenzunschärfe .....	23
Fresnel-Zahl .....	26

## G

Gewinnkoeffizient .....	8, 15
Gewinnprofil .....	33
Gewinnsättigung .....	28

## H

Halbleiter	
entarteter .....	42
Hamiltonoperator .....	8
der Wechselwirkung .....	9
Helmholtz-Gleichung .....	18f
Huygensches Prinzip .....	25

## I

Integral-Eigenwertgleichung .....	26
Inversion .....	5

## K

Koheränz	
raumlich .....	6
zeitlich .....	6
komplexer Radius .....	27

## L

Linie	
sättigungsverbreiterte .....	14
Linienbreite	
natürliche .....	11
Lorentz-Linie .....	11

## M

Mode	
Resonatormode .....	19
Modenkonkurrenz .....	33
Modenselektion .....	33

## P

Photonenflussdichte .....	8
Polarisation .....	19
Pumpen .....	35
Pumpstrahl .....	13

## R

Resonator	
Fabry-Perot .....	22
instabiler .....	25
optischer .....	19
stabiler .....	25

**S**

## Schalter

akustooptischer ..... 35

elektrooptischer ..... 35

## Spektralbereich

freier ..... 23

Stoßdauer ..... 12

Stoßverbreiterung ..... 12

Suszeptibilität ..... 17

**U**

Übergangsdipolmatrixelement ..... 9

Übergangsrate ..... 10

**V**

Vakuumfluktuation ..... 21

## Verbreiterung

homoge ..... 12

homogene ..... 13

inhomoge ..... 12, 14

Verlustfaktor ..... 6

Verstärkungsfaktor ..... 6

Voigt-Linie ..... 13

**Z**

Zeitverhalten ..... 35