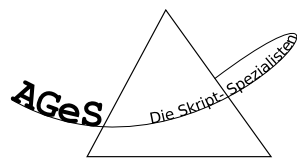


KONTINUUMSMECHANIK

nach den Vorlesungen von Dr. Jürgen Weißbarth
(Sommersemester 2008)

Herausgegeben von



Jeffrey Kelling
Felix Lemke
Stefan Majewsky

Stand: 23. Oktober 2008

Inhaltsverzeichnis

Vorwort (zuerst lesen)	3
0 Tensoren und ihre Darstellung	5
0.0.1 Vektoren	5
0.0.2 Tensoren	5
0.0.3 Dyadisches Produkt	6
0.0.4 Transponierter Tensor	6
0.0.5 Antisymmetrische Tensoren	6
0.0.6 Symmetrische Tensoren	7
0.0.7 Spur eines Tensors	7
0.0.8 Der Nabla-Operator	8
1 Grundlegende Begriffe und Grundgleichungen	9
1.1 Massendichte und Geschwindigkeitsfeld	9
1.2 Bewegungsgleichung (EULER-CAUCHY-Gl.). Spannungstensor	10
1.2.1 Struktur des Spannungstensors	11
1.3 Kontinuitätsgleichung, Bilanzgleichungen	12
1.3.1 Impulsbilanz	13
1.3.2 Energiebilanz	14
1.3.3 Diffusion	14
1.4 Allgemeine Klassifizierung deformierbarer Körper	15
1.5 Kinematik deformierbarer Körper	15
1.5.1 Kinematik des elastischen Körpers. Deformationstensor	16
1.5.2 Kinematik von Fluiden	19
1.6 Zusammenfassung: Grundgleichungen	20
2 Grundlagen der Thermodynamik	21
3 Flüssigkeiten und Gase (Fluide)	23
3.1 Hydrostatik	23
3.2 Ideale Fluide	25
3.2.1 Eulersche Gleichung	25
3.2.2 Bernoulli-Gleichung	26
3.2.3 Erhaltung der Zirkulation. HELMHOLTZsche Wirbelsätze	28
3.2.4 Potentialströmung inkompressibler Flüssigkeiten	30
3.3 Zähne Flüssigkeiten	32
3.3.1 Hagen-Poiseuille-Strömung	32
3.3.2 Ähnlichkeitsgesetze	34

Vorwort

Bevor Ihr beginnt, mit diesem Skript zu arbeiten, möchten wir Euch darauf hinweisen, dass dieses Skript weder den Besuch der Vorlesung noch das selbstständige Nacharbeiten des Stoffes ersetzt. Wer das nicht verstanden hat, bei dem kann die Benutzung des Skriptes für Probleme insbesondere im Verständnis des Stoffes sorgen.

Das liegt daran, dass das Skript nicht als vorgekauter Wissensspeicher zu verstehen ist. Das hier ist eine Abschrift des Inhaltes, den die Vorlesung zu vermitteln versucht. Nicht enthalten sind zum Beispiel mündliche Kommentare des Professoren, auch wenn diese im individuellen Falle oft erst den Groschen fallen lassen.

Gut geeignet ist das Skript einfach gesagt als Wissensstütze, also zum Beispiel zum schnellen Nachschlagen; außerdem zum Wiederholen früheren Stoffes, sofern ein ausreichendes Grundverständnis vorhanden ist. Nach diesen einleitenden Worten wünschen wir Euch viel Spaß bei der Arbeit mit diesem Skript und viel Erfolg beim Studium!

Die AGeS-Redaktion
www.ages-skripte.org

P.S. Wir suchen immer Helfer, die unsere Skripte um neue Inhalte erweitern, Fehler suchen, oder das Layout ansprechender gestalten wollen. Wenn Ihr Lust habt, meldet Euch über unsere Webseite.

Vorrede

Zur Motivation: Ein **Soliton** ist ein Wellenpaket, welches trotz Dispersion aufgrund nicht linearer Eigenschaften des Feldes nicht zerfließt. Beispiele sind Monsterwellen. Bei der Kernfusion stehen nicht-lineare Effekte der Nutzung im Weg, da sie die Eindämmung des Plasmas erschweren. Weitere Gebiete, auf denen die Kontinuumsmechanik von Bedeutung ist, sind Meteorologie und Geowissenschaften sowie Strömungstechnik.

Als Literatur werden Band 6 und 7 der Reihe „Theoretische Physik“ von Landau/Lifshitz empfohlen. Auch die Werke von Greiner und Sommerfeld sind zu empfehlen, für die Hydrodynamik insbesondere der Lortz.

0 Tensoren und ihre Darstellung

0.0.1 Vektoren

Im dreidimensionalen Raum haben wir eine **Orthonormalbasis** \vec{e}_i mit $i = 1, \dots, 3$ und ein Skalarprodukt, definiert durch $\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \delta_{ik}$. Einen beliebigen **Vektor** \vec{a} stellt man bezüglich der Basis als $\vec{a} = \sum_{i=1}^3 a_i \vec{e}_i$ dar. Wir benutzen die **Summenkonvention** und schreiben kurz $\vec{a} = a_i \vec{e}_i$ (tritt ein Index doppelt auf, wird über ihn summiert). Es gilt:

$$\begin{aligned}\vec{a} \cdot \vec{e}_k &= a_i \vec{e}_i \cdot \vec{e}_k = a_k \\ \Rightarrow \vec{a} &= (\vec{a} \cdot \vec{e}_i) \cdot \vec{e}_i\end{aligned}$$

Die rechte Operation muss eine Identität sein. Wir nennen diese **Einheitstensor** und schreiben:

$$\vec{a} = (\vec{a} \cdot \vec{e}_i) \cdot \vec{e}_i = \vec{a} \cdot (\vec{e}_i \circ \vec{e}_i) \equiv \vec{a} \cdot \hat{1}$$

Das **Skalarprodukt** ist kommutativ:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_i \vec{e}_i \cdot b_k \vec{e}_k = a_i \cdot b_k \cdot \delta_{ik} = a_i \cdot b_i \quad \Rightarrow \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$$

Schreibt man die Vektoren als Spaltenvektoren $\underline{a} = (a_1, a_2, a_3)^T$, so ist $\vec{a} \cdot \vec{b} = \underline{a}^T \cdot \underline{b}$.

0.0.2 Tensoren

Ein **Tensor** ist allgemein eine lineare Beziehung zwischen zwei Vektoren:

$$\begin{aligned}\vec{b} &= \vec{b}(\vec{a}) = \hat{T} \cdot \vec{a} \\ b_i &= \underbrace{\vec{e}_i \cdot \hat{T} \cdot \vec{e}_k}_{\equiv T_{ik}} \cdot a_k\end{aligned}$$

In Matrixschreibweise sieht die Beziehung so aus:

$$\underline{b} = \underline{T} \cdot \underline{a}$$

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$$

Ein Tensor ergibt sich aus seinen Komponenten mit den Basisvektoren und entsprechend seine Komponenten über die Basisvektoren:

$$\boxed{\hat{T} = T_{lm} \cdot \vec{e}_l \circ \vec{e}_m \quad \Leftrightarrow \quad T_{ik} = \vec{e}_i \cdot \hat{T} \cdot \vec{e}_k}$$

Komponenten des Tensors

Also ist $\hat{T} \in V \circ V$, wobei V der Raum der Vektoren ist. Für den Einheitstensor gilt:

$$\vec{a} = \hat{I} \cdot \vec{a} = \vec{a} \cdot \hat{I} \quad \Rightarrow \quad \hat{I} = \vec{e}_i \circ \vec{e}_i \quad \Rightarrow \quad I_{lm} = \delta_{lm}$$

0.0.3 Dyadisches Produkt

Wir definieren das **dyadische Produkt** zweier Vektoren:

$$\hat{T} \equiv \vec{a} \circ \vec{b} = \underbrace{a_i b_k}_{\equiv T_{ik}} \cdot \vec{e}_i \circ \vec{e}_k$$

Diesen Tensor kann man natürlich wieder zur Verknüpfung anderer Vektoren nutzen:

$$\begin{aligned} \vec{c}_1 &= \hat{T} \cdot \vec{d} = (\vec{a} \circ \vec{b}) \cdot \vec{d} = \vec{a} \cdot (\vec{b} \cdot \vec{d}) \parallel \vec{a} \\ \vec{c}_2 &= \vec{d} \cdot \hat{T} = \vec{d} \cdot (\vec{a} \circ \vec{b}) = (\vec{d} \cdot \vec{a}) \cdot \vec{b} \parallel \vec{b} \end{aligned}$$

Das dyadische Produkt ist nicht kommutativ: $\vec{a} \circ \vec{b} \neq \vec{b} \circ \vec{a}$.

0.0.4 Transponierter Tensor

Wir definieren noch den **transponierten Tensor** $\tilde{\hat{T}}$ analog zu einer einfachen Matrixtransposition:

$$\vec{b} = \hat{T} \cdot \vec{a} = \vec{a} \cdot \tilde{\hat{T}} \quad \Rightarrow \quad b_i = T_{ik} \cdot a_k = a_k \cdot \tilde{T}_{ki} \quad \Rightarrow \quad \tilde{T}_{ki} = T_{ik}$$

Hier drängt sich die Definition eines **symmetrischen Tensors** auf, für den $\tilde{\hat{T}} = \hat{T}$ gilt. Also ist $T_{ik} = T_{ki}$. Der Tensor hat dann im Dreidimensionalen statt 9 nur noch 6 unabhängige Komponenten. Von physikalischer Relevanz ist zudem der **antisymmetrische Tensor**, für den $\tilde{\hat{T}} = -\hat{T}$ ist, also ist $T_{ik} = -T_{ki}$. Hier müssen die Elemente der Hauptdiagonale verschwinden, wir haben im Dreidimensionalen also nur noch 3 unabhängige Komponenten.

Jeder Tensor lässt sich in einen symmetrischen und einen antisymmetrischen Teil zerlegen:

$$T_{ik} = \underbrace{\frac{1}{2} \cdot (T_{ik} + T_{ki})}_{\text{symmetrisch}} + \underbrace{\frac{1}{2} \cdot (T_{ik} - T_{ki})}_{\text{antisymmetrisch}} \equiv T_{(ik)} + T_{[ik]}$$

Man bedenke: Der symmetrische Tensor hat 6, der antisymmetrische 3 unabhängige Komponenten. Insgesamt haben wir wieder 9 unabhängige Komponenten.

0.0.5 Antisymmetrische Tensoren

Der antisymmetrische Tensor hat 3 unabhängige Komponenten. Kann man ihn durch einen Vektor darstellen? Ja, durch einen sogenannten **axialen Vektor** mittels des **vollständig antisymmetrischen Tensors 3. Stufe**:

$$\varepsilon_{ikl} = \begin{cases} +1 & (i, k, l) = (1, 2, 3) \text{ und zyklisch vertauscht} \\ -1 & (i, k, l) = (1, 3, 2) \text{ und zyklisch vertauscht} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Für einen antisymmetrischen Tensor \hat{A} ist nun

$$A_{ik} = \varepsilon_{ikl} \cdot \phi_l \quad \Leftrightarrow \quad \underline{A} = \begin{pmatrix} 0 & \phi_3 & -\phi_2 \\ -\phi_3 & 0 & \phi_1 \\ \phi_2 & -\phi_1 & 0 \end{pmatrix}$$

Die Komponenten des axialen Vektors $\vec{\phi}$ ergeben sich aus

$$\phi_m = \frac{1}{2} \cdot \varepsilon_{mnp} \cdot A_{np} \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\varphi} = \begin{pmatrix} A_{13} \\ A_{21} \\ A_{32} \end{pmatrix}$$

Für den vollständig antisymmetrischen Tensor 3. Stufe gilt:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{klm} \cdot \varepsilon_{mij} &= \delta_{ki} \cdot \delta_{lj} - \delta_{kj} \cdot \delta_{li} \\ \varepsilon_{klm} \cdot \varepsilon_{lmi} &= 2 \cdot \delta_{ki} \end{aligned}$$

Mithilfe dieses Tensors kann man das **Kreuzprodukt** zweier Vektoren definieren:

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} \quad \Leftrightarrow \quad c_i = \varepsilon_{ikl} \cdot a_k \cdot b_l$$

Um das Kreuzprodukt in höheren Dimensionen anwenden zu können, kann es mithilfe des folgenden Ansatzes verallgemeinert werden:

$$C_{mn} = \varepsilon_{mni} \cdot c_i = \varepsilon_{mni} \varepsilon_{ikl} \cdot a_k \cdot b_l = a_m \cdot b_n - a_n \cdot b_m \quad \Rightarrow \quad \widehat{C} = \vec{a} \circ \vec{b} - \vec{b} \circ \vec{a}$$

0.0.6 Symmetrische Tensoren

Gibt es eine Orthonormalbasis $(\vec{e}_{(i)})$, sodass für alle $i = 1, \dots, 3$ gilt:

$$\widehat{T} \cdot \vec{e}_{(i)} = \lambda_i \cdot \vec{e}_{(i)} \quad \text{mit} \quad \lambda_i \in \mathbb{R}$$

Sol ch eine Basis gibt es immer. Die $\vec{e}_{(i)}$ heißen **Eigenvektoren** und die λ_i heißen **Eigenwerte**. Man erhält die Eigenwerte aus der Lösung des Gleichungssystems:

$$(\widehat{T} - \lambda \cdot \widehat{I}) \cdot \vec{e} = 0$$

Dieses hat nichttriviale Lösungen, falls $\det(\widehat{T} - \lambda \cdot \widehat{I}) = 0$ ist. Man kann dann in die neue Orthonormalbasis $(\vec{e}_{(i)})$ wechseln:

$$\widehat{T} = \lambda_i \cdot \vec{e}_{(i)} \circ \vec{e}_{(i)} \quad \Rightarrow \quad \underline{T} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

0.0.7 Spur eines Tensors

Die **Spur** eines Tensors \widehat{T} erhält man gewissermaßen, indem man in der Komponentenschreibweise das dyadische durch das Skalarprodukt ersetzt:

$$\text{Sp } \widehat{T} = \text{Sp}(T_{ik} \cdot \vec{e}_i \circ \vec{e}_k) = T_{ik} \cdot \vec{e}_i \cdot \vec{e}_k = T_{ii}$$

Für einen hauptachsentransformierten Tensor gilt:

$$\text{Sp } \widehat{T} = \sum_i \lambda_i$$

0.0.8 Der Nabla-Operator

Der Nabla-Operator ist definiert als:

$$\vec{\nabla} \equiv \frac{\partial}{\partial \vec{r}} = \vec{e}_x \cdot \frac{\partial}{\partial x} + \vec{e}_y \cdot \frac{\partial}{\partial y} + \vec{e}_z \cdot \frac{\partial}{\partial z}$$

Im Folgenden werden partielle Ableitungen nach x_i kurz durch einen Index $;i$ dargestellt. Mit Nabla kann man die räumliche Ableitung eines skalaren Feldes $\phi(\vec{r})$ also so beschreiben:

$$\partial_l \phi = \phi_{;l} \equiv \vec{e}_l \cdot \vec{\nabla} \phi$$

Für Vektoren kann man zwei Operationen mit dem Nabla-Operator definieren:

$$\begin{aligned} \text{Divergenz:} \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{a} &= \partial_l a_l = a_{l;l} \\ \text{Vektorgradient:} \quad \vec{\nabla} \circ \vec{a} &= \partial_l a_k \cdot \vec{e}_l \circ \vec{e}_k = a_{k;l} \cdot \vec{e}_l \circ \vec{e}_k \end{aligned}$$

Bei der Anwendung des Nablaoperators auf Skalar-, Vektor- oder Tensorfelder ist die Ortsabhängigkeit der Basisvektoren in krummlinigen Koordinaten zu beachten.

1 Grundlegende Begriffe und Grundgleichungen

1.1 Massendichte und Geschwindigkeitsfeld

Wir beschreiben *kontinuierliche* Massenverteilungen unter Vernachlässigung der mikroskopischen Struktur, auch wenn mit infinitesimalen Elementen gerechnet wird.

$$V_{\text{atom}} \ll dV \ll V_0$$

Hierbei ist V_0 die charakteristische Größe des zu beschreibenden Systems. Geläufiger ist der äquivalente Begriff der **charakteristischen Länge**.

In der klassischen Mechanik werden die bewegten Teilchen durch Ortsvektoren $\vec{r}_i(t)$ individuell beschrieben. Die Kontinuumsmechanik beschreibt das Verhalten des Systems anonym: Jedem Ort- und Zeitpunkt (\vec{r}, t) (an welchem sich nicht notwendigerweise ein Teilchen befinden muss) werden bestimmte physikalische Größen $A(\vec{r}, t)$ zugeordnet. In dieser **Feldbeschreibung** (entwickelt von LEONHARD EULER) ist eine Beziehung $\vec{r}(t)$ sinnlos. Bei den Feldern kann es sich um Skalarfelder, Vektorfelder oder Tensorfelder handeln.

Ist im Folgenden von *Flüssigkeitsteilchen* die Rede, so sind damit Volumenelemente dV gemeint, die auch schon viele Atome enthalten.

(a) Massendichte

$$\varrho(\vec{r}, t) \quad | : \quad \varrho(\vec{r}, t) dV = dM$$

Hierbei ist dM die Masse, die sich zur Zeit t im Volumenelement dV am Ort \vec{r} befindet. Die Masse in einem endlichen Volumen V zur Zeit t erhält man durch

$$M_V(t) = \int_V \varrho(\vec{r}, t) dV$$

- (b) **Geschwindigkeitsfeld** $\vec{v}(\vec{r}, t)$ – Ist \vec{v} nicht von t abhängig, so heißt die durch $\vec{v}(\vec{r}, t) = \vec{v}(\vec{r})$ beschriebene Strömung **stationär**, man spricht von einer **laminaren Strömung**. Instationäre Strömungen bezeichnet man hingegen als **turbulent**.

Dieses Geschwindigkeitsfeld ist wiederum auch lokal über die vielen in dV enthaltenen Atome und Moleküle gemittelt. Thermische Bewegungen werden nicht berücksichtigt.

Eine grafische Darstellung eines Geschwindigkeitsfeldes ist das **Feldlinienbild**. Für feste Zeiten erhält man **Stromlinien**, an denen das Geschwindigkeitsfeld lokal eine Tangente darstellt. Die Beträge der Vektoren ergeben sich aus der Feldliniendichte. Beobachtet man ein bestimmtes Teilchen über eine längere Zeit, erhält man eine **Bahnkurve**.

Im stationären Falle stimmen die Stromlinien und die Bahnkurven überein. Ist das Geschwindigkeitsfeld instationär, so ändern sich die Stromlinien mit der Zeit, die Bahnkurve adaptiert die Änderung der Stromlinie.

Bei stationären Strömungen (allgemeiner: bei zeitunabhängigen Phänomenen) kann man **Stromröhren** bilden, deren Wände aus Stromlinien bestehen. Alle Teilchen in der Stromröhre können diese nicht verlassen.

- (c) Die **Massenstromdichte** $\vec{j}(\vec{r}, t) \cdot d\vec{S}$ ist die Masse, die während einer Zeit dt durch die Fläche $d\vec{S}$ strömt.

Interessant sind auch die Zeitableitungen dieser Felder:

1. *lokale* Zeitableitung:

$$\frac{\partial}{\partial t} \vec{v}(\vec{r}, t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{v}(\vec{r}, t + \Delta t) - \vec{v}(\vec{r}, t)}{\Delta t}$$

2. *substantielle* Zeitableitung: (Verfolgung eines bestimmten Teilchens)

$$\frac{d}{dt} \vec{v}(\vec{r}, t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{v}(\vec{r} + \vec{v}(\vec{r}, t) \cdot \Delta t, t + \Delta t) - \vec{v}(\vec{r}, t)}{\Delta t}$$

Dies ist die Beschleunigung eines Teilchens, wie man sie in der Newton'schen Bewegungsgleichung $d\vec{F} = dm \cdot \vec{a}$ einsetzen muss. Man kann $d\vec{v}/dt$ kürzer schreiben:

$$\boxed{\frac{d}{dt} \vec{v} = \frac{\partial}{\partial t} \vec{v} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \cdot \vec{v} = \frac{\partial}{\partial t} \vec{v} + \vec{v} \cdot (\vec{\nabla} \circ \vec{v})} = a$$

Der Tensor $\vec{\nabla} \circ \vec{v}$ heißt **Geschwindigkeitsgradient**. In Komponentenschreibweise sieht das Ganze folgendermaßen aus

$$\frac{d}{dt} v_i = \frac{\partial}{\partial t} v_i + v_k \cdot \partial_k v_i = \frac{\partial}{\partial t} v_i + v_k \cdot v_{i;k}$$

Es gilt allgemein für beliebige Felder A :

$$\frac{d}{dt} A = \frac{\partial}{\partial t} A + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \cdot A$$

1.2 Bewegungsgleichung (Euler-Cauchy-Gl.). Spannungstensor

Wir wenden die NEWTONschen Axiome auf das Massenelement ΔM , welches sich im Volumen ΔV befindet, an.

$$\Delta M \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} = [\rho \cdot \Delta V] \cdot \left[\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \cdot \vec{v} \right] = \Delta \vec{F}$$

$\Delta \vec{F}$ ist die Gesamtkraft auf ΔV . Die Summe aller äußeren Kräfte auf Teilchen i in dV kann in einer **Kraftdichte** \vec{f} summiert werden:

$$\sum_{i \in \Delta V} \vec{F}_i^{(a)} = \int_{\Delta V} \vec{f} dV = \vec{f} \cdot \Delta V$$

Für das „große“ Volumen ΔV kann man aufgrund des Mittelwertsatzes eine gemittelte Kraftdichte $\vec{f} \cdot \Delta V$ angeben. Die (wie oben angegeben) vernachlässigbaren inneren Kräfte sind Molekularkräfte mit kurzer Reichweite (in der Größenordnung von Atomlängen), die für die Kraftübertragung von Punkt zu

Punkt sorgen. Innerhalb des Volumens ΔV heben sich solche Molekularkräfte auf das Gesamtvolumen wegen *actio = reactio* auf. Man muss also die Teilchen in der Nähe der Oberfläche von ΔV untersuchen, denn nur diese geben einen Beitrag.

$$\int_{\Delta V} \vec{f}^{(i)} dV = \oint_{\partial(\Delta V)} d\vec{F}^{(i)}$$

Nach dem Satz von Gauss kann so eine Äquivalenz nur dann vorhanden sein, wenn der Integrand des Volumenintegrals eine Ableitung ist. Die abgeleitete Größe heißt:

$$\boxed{\hat{\sigma} \quad \text{mit} \quad \vec{f}^{(i)} = \vec{\nabla} \cdot \hat{\sigma}}$$

Spannungstensor

Die Integration ergibt dann

$$\oint_{\partial(\Delta V)} d\vec{F}^{(i)} = \oint_{\partial(\Delta V)} d\vec{S} \cdot \hat{\sigma} = \int_{\Delta V} \vec{\nabla} \cdot \hat{\sigma} dV = \Delta V \cdot \vec{\nabla} \cdot \hat{\sigma}$$

und es ergibt sich nach Einsetzen in die **Newtonsche** Bewegungsgleichung die

$$\boxed{\varrho \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} = \varrho \cdot \left[\frac{\partial}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} \right] \cdot \vec{v} = \vec{f} + \vec{\nabla} \cdot \hat{\sigma}}$$

Euler-Cauchy-Bewegungsgleichung

Diese Bewegungsgleichung ist nicht linear, damit gilt das lineare Superpositionsprinzip von Lösungen nicht, und man hat eine große Lösungsmannigfaltigkeit. Zum Beispiel kann eine laminare Strömung schnell in eine turbulente umschlagen, sofern sie keine stabile Lösung darstellt.

1.2.1 Struktur des Spannungstensors

Man kann vom Spannungstensor zum Spannungsvektor (als Funktion der Normalenrichtung des Oberflächenelementes) übergehen. Diesen Vektor kann man in eine Normal- und eine Tangentialkomponente zerlegen.

$$d\vec{F} = d\vec{S} \cdot \hat{\sigma} = dS \cdot \vec{\sigma}(\vec{n}) = dS \cdot (\sigma_n \cdot \vec{n} + \sigma_t \cdot \vec{t})$$

In zwei Dimensionen ist \vec{t} bei festem \vec{n} eindeutig, in drei Dimensionen muss man im Allgemeinen zwei Tangentialvektoren benutzen.

Der Spannungstensor ist **symmetrisch**. Das kann man beweisen, indem man benutzt, dass alle inneren Kräfte Zentralkräfte sind, also keinen Drehmomenteintrag verursachen. Betrachte dann ein kleines würfelförmiges Volumenelement dV , dann ist zum Beispiel:

$$\begin{aligned} M_z = \dot{L}_z &= \frac{d}{dt} (\Theta \cdot \vec{\omega})_z \\ \frac{\Delta l}{2} \cdot (\Delta l)^2 \cdot 2(\sigma_{xy} - \sigma_{yx}) + \Delta l \cdot f \cdot (\Delta l)^3 &= \frac{d}{dt} [\omega \cdot \varrho \cdot (\Delta l)^3 \cdot (\Delta l)^2] \end{aligned}$$

Die linke Seite ergibt sich als Summe von

- Wechselwirkungen mit den angrenzenden Volumenelementen: $\Delta l/2$ ist der „Hebelarm“; $(\Delta l)^2$ ist die Fläche, auf die die Spannung wirkt, $2 \cdot (\sigma_{xy} - \sigma_{yx})$ ist die wirkende Spannung (die Zwei kommt davon, dass man Ober- und Unterseite betrachtet). Man beachte, dass Komponenten σ_{ij} des Spannungstensors mit $i = j$ als Normalspannungen auf den Würfel aufgefasst werden können, während bei Scherspannungen $i \neq j$ ist. Nur die Scherspannungen sind für das Drehmoment interessant.
- äußeren Kräften: Δl ist der „Hebelarm“, und f ist die Kraftdichte, die bei Bezug auf das Volumenelement $(\Delta l)^3$ die äußere Kraft auf das Volumenelement ergibt.
- Auf der rechten Seite steht die Drehgeschwindigkeit, die Masse $\rho \cdot dV$, welche bei Multiplikation mit $(\Delta l)^2$ eine Abschätzung für das Trägheitsmoment ergibt.

Nun kann man $(\Delta l)^3$ kürzen:

$$(\sigma_{xy} - \sigma_{yx}) + \Delta l \cdot f = \frac{d}{dt} [\omega \cdot \rho \cdot (\Delta l)^2] \Rightarrow \sigma_{xy} - \sigma_{yx} \quad \text{für} \quad \Delta l \rightarrow 0$$

Beispiel 1.1

Bei dem folgenden **einachsigen Spannungszustand** könnte man denken, es treten nur Normalkräfte auf die Flächen auf.

$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Folgende Fälle sind möglich:

- Auf $d\vec{S}_1 = dS \cdot (1, 0, 0)^T$ wirkt $d\vec{F}_1 = \sigma_{11} \cdot d\vec{S}_1 \parallel d\vec{S}_1$.
- Auf $d\vec{S}_2 = dS \cdot (0, 1, 0)^T$ wirkt keine Kraft: $d\vec{F}_2 = 0$.
- Auf $d\vec{S}_3 = dS/\sqrt{2} \cdot (1, 1, 0)^T$ wirkt $d\vec{F}_3 = \sigma_{11} \cdot dS/\sqrt{2} \cdot (1, 0, 0)^T \nparallel d\vec{S}_3$. Hier tritt also eine Scherspannung auf.

Damit auf alle Flächenelemente nur Normalkräfte wirken, muss der Spannungstensor bis auf einen Faktor gleich dem Einheitstensor sein:

$$\hat{\sigma} = -p \cdot \hat{I}$$

p wird als **Druck** bezeichnet. Eine solche Situation tritt meistens bei Flüssigkeiten auf.

1.3 Kontinuitätsgleichung, Bilanzgleichungen

Nun wird die Massenerhaltung gefordert, welche nicht explizit in der Bewegungsgleichung enthalten ist. Betrachte die Masse m , die in einem *festen* Volumen V enthalten ist. Die Massenänderungen innerhalb und außerhalb von V müssen sich gerade aufheben.

$$\begin{aligned} \text{Änderung innen (in } V): \frac{\delta m_i}{\delta t} &= \frac{d}{dt} \int_V \rho(\vec{r}, t) dV = \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV \\ \text{Änderung außen: } \frac{\delta m_a}{\delta t} &= \oint_{\partial V} d\vec{S} \cdot \vec{j} = - \int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{j} dV \end{aligned}$$

Dabei ist $\vec{j} \equiv \rho \cdot \vec{v}$ die Massenstromdichte. Die Summe aus beidem muss verschwinden, es ergibt sich die lokale Form der Massenerhaltung:

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0}$$

Kontinuitätsgleichung

Das kann man weiter umformen:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} &= 0 \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \cdot \vec{v}) &= 0 \\ \left[\frac{\partial}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} \right] \rho + \rho \cdot (\vec{\nabla} \cdot \vec{v}) &= 0 \\ \frac{d\rho}{dt} + \rho \cdot (\vec{\nabla} \cdot \vec{v}) &= 0\end{aligned}$$

Betrachten wir nun ein **substantielles Volumen** δV , welches immer durch dieselben Teilchen gebildet wird und sich deswegen in Abhängigkeit vom Geschwindigkeitsfeld im Raum bewegen kann. Aus der eben gewonnenen Darstellung der Kontinuitätsgleichung wird dann:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \frac{\delta m}{\delta V} + \frac{\delta m}{\delta V} \cdot (\vec{\nabla} \cdot \vec{v}) &= 0 \\ \underbrace{\frac{1}{\delta V} \cdot \frac{d\delta m}{dt} - \frac{\delta m}{\delta V} \cdot \frac{1}{\delta V} \cdot \frac{d\delta V}{dt}}_{=0} + \frac{\delta m}{\delta V} \cdot \vec{\nabla} \cdot \vec{v} &= 0 \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{v} &= \frac{1}{\delta V} \cdot \frac{d\delta V}{dt}\end{aligned}$$

Die Größe rechts ist die relative Größenänderung des substantiellen Volumenelementes. Wenn sich dieses nicht mit der Zeit ändert, spricht man von **Inkompressibilität**. Dann ist laut obiger Gleichung $\text{div } \vec{v} = 0$. Man beachte, dass das nicht dasselbe ist wie $\rho = \text{const.}$. Allgemein ist die Konstanz der Massendichte eine stärkere Forderung, man erhält sie aus $\text{div } \vec{v} = 0$ nur, wenn man zusätzlich stationäre Verhältnisse ($\partial/\partial t \rightarrow 0$) fordert.

Bis jetzt haben wir die Euler-Cauchy-Gleichung und die Kontinuitätsgleichung. Wir wissen noch nichts über die genaue Natur, sprich: physikalische Beschreibung, des Spannungstensors. Nun sollen einige Bilanzgleichungen erstellt werden.

1.3.1 Impulsbilanz

$$\rho \cdot \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \rho \cdot (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \cdot \vec{v} - \vec{\nabla} \cdot \hat{\sigma} = \vec{f}$$

Den ersten Term schreiben wir mit der Produktregel um:

$$\frac{\partial(\rho \cdot \vec{v})}{\partial t} - \vec{v} \cdot \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \cdot (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \cdot \vec{v} - \vec{\nabla} \cdot \hat{\sigma} = \vec{f}$$

Das zweite Glied kann man mit der Kontinuitätsgleichung ersetzen:

$$\frac{\partial(\rho \cdot \vec{v})}{\partial t} + \vec{v} \cdot \left[\vec{\nabla} \cdot (\vec{v} \cdot \rho) \right] + \rho \cdot (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \cdot \vec{v} - \vec{\nabla} \cdot \hat{\sigma} = \vec{f}$$

Zusammengefasst ergibt sich:

$$\boxed{\frac{\partial(\rho \cdot \vec{v})}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \cdot \vec{v} \circ \vec{v} - \hat{\sigma}) = \vec{f}}$$

Impulsbilanz

Wir führen folgende Bezeichnungen ein:

- **Impulsdichte:** $\vec{g} = \rho \cdot \vec{v}$ – Interessanterweise fallen \vec{j} und \vec{g} zusammen.
- **Impulsstromdichte:** $\hat{\Pi} = \rho \cdot \vec{v} \circ \vec{v} - \hat{\sigma}$ – Dieser Tensor ist wieder symmetrisch.
- Die Kraftdichte \vec{f} kann als Rate der **Impulsproduktionsdichte** aufgefasst werden.

Nun verkürzt sich die Impulsbilanz zu:

$$\frac{\partial \vec{g}}{\partial t} = \vec{\nabla} \cdot \hat{\Pi} = \vec{f}$$

Bei Schreibung in Komponenten und Integration über ein raumfestes Volumen V ergibt sich:

$$\frac{\partial}{\partial t} \cdot \int_V \varrho \cdot v_i \, dV + \oint_{\partial V} dS_l \cdot \Pi_{li} = \int_V f_i \, dV$$

Die Drehimpulsbilanz erhält man aus „ $\vec{r} \times$ Impulsbilanz“.

1.3.2 Energiebilanz

Die Energiebilanz ergibt sich als „Bewegungsgleichung $\cdot \vec{v}$ “. Hierbei muss man genau aufpassen, worauf der Nablaoperator wirkt.

$$\begin{aligned} \varrho \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v} - \vec{\nabla} \cdot \hat{\sigma} \cdot \vec{v} &= \vec{f} \cdot \vec{v} \\ \varrho \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{\vec{v}^2}{2} \right) - \vec{\nabla} \cdot \hat{\sigma} \cdot \vec{v} &= -\vec{\nabla} \cdot \hat{\sigma} \cdot \vec{v} + \vec{f} \cdot \vec{v} \\ \varrho \cdot \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\vec{v}^2}{2} \right) + \varrho \cdot \vec{v} \cdot \vec{\nabla} \left(\frac{\vec{v}^2}{2} \right) - \vec{\nabla} \cdot \hat{\sigma} \cdot \vec{v} &= -\vec{\nabla} \cdot \hat{\sigma} \cdot \vec{v} + \vec{f} \cdot \vec{v} \\ \frac{\partial}{\partial t} \left(\varrho \cdot \frac{\vec{v}^2}{2} \right) + \frac{\vec{v}^2}{2} \cdot \vec{\nabla} (\varrho \cdot \vec{v}) - \varrho \cdot \vec{v} \cdot \vec{\nabla} \left(\frac{\vec{v}^2}{2} \right) - \vec{\nabla} \cdot \hat{\sigma} \cdot \vec{v} &= -\vec{\nabla} \cdot \hat{\sigma} \cdot \vec{v} + \vec{f} \cdot \vec{v} \\ \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\varrho \cdot \vec{v}^2}{2} \right) + \vec{\nabla} \cdot \left[\frac{\varrho \cdot \vec{v}^2}{2} \cdot \vec{v} - \hat{\sigma} \cdot \vec{v} \right] &= -\hat{\sigma} : (\vec{\nabla} \circ \vec{v}) + \vec{f} \cdot \vec{v} \end{aligned}$$

Der **Doppelpunkt** steht für die elementweise Multiplikation zweier Tensoren, also $\hat{a} : \hat{b} \equiv a_{ij} \cdot b_{ij}$.

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\varrho \cdot \frac{v^2}{2} \right) \cdot \partial_k \left[\varrho \cdot \frac{v^2}{2} \cdot v_k - \sigma_{kl} \cdot v_l \right] = -\sigma_{ij} \cdot v_{j,i} + f_m \cdot v_m$$

Der erste Term stellt die Änderung der **Dichte der kinetischen Energie** dar, der Term in Klammern ist die Ortsableitung der Summe aus **konjektivem Teil** (durch makroskopische Vorgänge) und **konduktivem Teil** (durch mikroskopische Vorgänge) der **Stromdichte der kinetischen Energie** dar. Rechts steht die **Leistungsdichte** durch innere Oberflächenkräfte sowie äußere Volumenkräfte. Die innere Leistung repräsentiert eine Umwandlung von kinetischer in innere Energie, also meist in Wärme.

1.3.3 Diffusion

Ein Tintentropf verteilt sich nach und nach in einem Wasserbecken. Sei c die Konzentration der Tinte, also ist $c \cdot dV$ die Zahl der Tintenteilchen in dV . Für die Tinte gilt die Kontinuitätsgleichung:

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{J}_{\text{diff}} = 0$$

Als Stromdichte kann man nicht $\vec{J}_{\text{diff}} = c \cdot \vec{v}$ betrachten, denn im Geschwindigkeitsfeld wurde schon viel zu viel gemittelt. Also machen wir einen phänomenologischen Ansatz, welcher den Ausgleichscharakter der Diffusion berücksichtigt.

$$\vec{J}_{\text{diff}} = -D \cdot \vec{\nabla} c$$

Hierbei ist D die noch nicht näher beschriebene **Diffusionskonstante** von Tintenteilchen in Wasser. In die Kontinuitätsgleichung eingesetzt verbleibt die Diffusionsgleichung.

$$\frac{\partial c}{\partial t} = D \cdot \Delta c$$

Diffusionsgleichung

Dies ist ein irreversibler nichtlinearer Prozess. Zur Untersuchung dieses Prozesses konstruierte FOURIER die berühmte FOURIERtransformation.

1.4 Allgemeine Klassifizierung deformierbarer Körper

Deformierbare Körper teilt man im Wesentlichen in **Flüssigkeiten** und **Festkörper** ein. Richten wir zunächst unser Augenmerk auf die Charakteristika von Flüssigkeiten.

- Flüssigkeiten haben schwache Kohäsionskräfte, deswegen ist die Festigkeit gegen Zugspannung äußerst gering. In der Praxis betrachtet man deshalb praktisch nur den Druck p .
- Die Tangentialspannung ist sehr klein, solange die relativen Geschwindigkeiten der Flüssigkeitsteilchen zueinander sehr klein sind. Die Flüssigkeit hat also eine geringe Zähigkeit. (In der Hydrostatik werden später alle Tangentialspannungen gleich Null gesetzt, der Spannungstensor hat also die Form $\hat{\sigma} = -p \cdot \hat{I}$.)
- Die bisherigen Eigenschaften treffen auch auf Gase zu, der Unterschied von Gasen zu Flüssigkeiten ist die größere Kompressibilität. Flüssigkeiten können in guter Näherung als inkompressibel angenommen werden.

Häufig werden Flüssigkeiten und Gase unter dem Oberbegriff der **Liquide** zusammengefasst. Bei der Beschreibung von Liquiden muss man substantielle Volumen und substantielle Zeitableitungen benutzen, da sich die Form eines Volumenelements bei Fortschreiten der Zeit ändern kann.

Wo liegen nun die Unterschiede zu den Festkörpern?

- Im Gegensatz zu den Liquiden haben Festkörper eine feste Gestalt; Verschiebungen der Teilchen sind meist klein (**kinematische Linearisierung**):

$$\frac{d\vec{v}}{dt} \approx \frac{\partial \vec{v}}{\partial t}$$

- Es existiert ein **natürlicher Zustand**, welcher im thermischen Gleichgewicht spannungsfrei ist.
- Äußere Kräfte verursachen eine Verformung relativ zum natürlichen Zustand, der neue Zustand ist mit Spannungen verbunden. Ein **elastischer Körper** kehrt *reversibel* in den natürlichen Zustand zurück, sobald die äußeren Kräfte weggenommen werden. Im Gegensatz hierzu stehen **plastische Verformungen**, die zu permanenten Versetzungen im Atomgitter führen.

Die Anschauung des natürlichen Zustandes und des elastischen Körpers ist eine Idealisierung, denn auch ohne äußere Kräfte existieren **innere Spannungen**, die auf Defekten im Festkörper (etwa Gitterfehler, Fremdatome) beruhen. Diese inneren Spannungen wollen wir vernachlässigen.

1.5 Kinematik deformierbarer Körper

Ziel ist nun die Beschreibung der Verformung, ohne Aussagen über die Ursache zu machen.

1.5.1 Kinematik des elastischen Körpers. Deformationstensor

Alle Verformungen sollen auf den natürlichen Zustand bezogen werden. Bei der Betrachtung des Abstandsvektors zweier materieller Punkte beziehungsweise dessen Änderung $\delta\vec{r} \rightarrow \delta\vec{r}$ wird die Translation abgespalten:

$$\begin{aligned}\delta\vec{r} &= \delta\vec{r} + \delta\vec{u} \\ \delta\vec{u}(\vec{r}) &= \vec{u}(\vec{r} + \delta\vec{r}) - \vec{u}(\vec{r}) \\ \text{Taylor: } \delta\vec{r} &= \delta\vec{r} + (\delta\vec{r} \cdot \vec{\nabla})\vec{u} = \delta\vec{r} \cdot \left(\hat{I} + \vec{\nabla} \circ \vec{u} \right) \\ \text{In Komponenten: } \delta x_k &= \delta x_l \cdot (\delta_{lk} + u_{k;l})\end{aligned}$$

Hierbei ist \vec{u} der **Verschiebungsvektor**, der Tensor $\hat{\beta} := \vec{\nabla} \circ \vec{u}$ wird als **Distorsionstensor** oder **Verschiebungstensor** bezeichnet. Der Verschiebungsvektor enthält:

- *starre Translationen* – Der Abstandsvektor zwischen materiellen Teilchen bleibt unverändert. Dann ist der entsprechende Anteil des Verschiebungsvektors räumlich konstant, der entsprechende Anteil des Verschiebungstensors verschwindet also.
- *starre Rotationen* – Hierbei ändern sich die Skalarprodukte verschiedener Abstandsvektoren $\delta\vec{r}$ nicht, nur deren Richtungen. Wir werden sehen, dass starre Rotationen durch den antisymmetrischen Anteil $\beta_{[kl]} = (\beta_{kl} - \beta_{lk})/2$ des Verschiebungstensors beschrieben werden.
- *reine Deformationen* (Dehnungen in paarweise orthogonalen Richtungen) – Diese ändern den Betrag und die relative Richtung der Abstandsvektoren. Wir werden sehen, dass reine Deformationen durch den symmetrischen Anteil $\beta_{(kl)} = (\beta_{kl} + \beta_{lk})/2$ des Verschiebungstensors beschrieben werden.

Um diese Aussagen zu beweisen, wird nun die Struktur des Verschiebungstensors diskutiert.

Reine Deformationen

Wir haben drei Teilchen. Der Abstandsvektor vom ersten zum zweiten Teilchen sei $\Delta\vec{r}$, vom ersten zum dritten Teilchen zeigt $\delta\vec{r}$. Was passiert mit dem Skalarprodukt dieser Vektoren bei einer Verformung?

$$\begin{aligned}\delta\vec{r} \cdot \Delta\vec{r} &= \delta x_i \cdot \Delta x_i = \delta x_k \cdot (\delta_{ki} + u_{i;k}) \cdot (\delta_{il} + u_{i;l}) \cdot \Delta x_l \\ &= \delta x_k \cdot \Delta x_l \cdot (\delta_{kl} + u_{k;l} + u_{l;k} + u_{i;k} \cdot u_{i;l}) \\ \delta\vec{r} \cdot \Delta\vec{r} - \delta\vec{r} \cdot \Delta\vec{r} &= \delta x_k \underbrace{(u_{k;l} + u_{l;k} + u_{i;k} \cdot u_{i;l})}_{\equiv 2 \cdot \varepsilon_{kl}}\end{aligned}$$

In der letzten Zeile steht die Änderung des Skalarproduktes der Abstandsvektoren, welche mithilfe des **Deformationstensors** $\hat{\varepsilon}$ beschrieben wird. Für langsame Verschiebungen ($u_{i;l} \ll 1$) ist:

$$\varepsilon_{kl} = \frac{1}{2} \cdot (u_{k;l} + u_{l;k} + u_{i;k} \cdot u_{i;l}) \approx \frac{1}{2} \cdot (u_{k;l} + u_{l;k}) = \beta_{(kl)}$$

Deformationen werden also, unter Anwendung der **geometrischen Linearisierung**, tatsächlich durch den symmetrischen Anteil des Verschiebungstensors beschrieben. Insgesamt gilt:

$$\boxed{\delta\vec{r} \cdot \Delta\vec{r} - \delta\vec{r} \cdot \Delta\vec{r} = 2 \cdot \delta\vec{r} \cdot \hat{\varepsilon} \cdot \Delta\vec{r}}$$

Untersuchen wir nun die Komponenten des Deformationstensors *in der linearen Theorie*:

- Diagonalkomponenten: $\delta \vec{r} = \Delta \vec{r} = \delta l_1 \cdot \vec{e}_1$ (o.E.d.A. Anordnung entlang x -Achse)

$$(\delta \bar{l}_1)^2 - (\delta l_1)^2 = 2 \cdot (\delta l_1)^2 \cdot \varepsilon_{11}$$

Den Abstandsvektor $\delta \bar{l}_1$ kann man zerlegen in die Basislänge δl_1 und die Änderung $\Delta \delta l_1$:

$$(\delta l_1)^2 + 2 \cdot \delta l_1 \cdot \Delta \delta l_1 + \underbrace{(\Delta \delta l_1)^2}_{\text{vernachlässigbar}} - (\delta l_1)^2 = 2 \cdot (\delta l_1)^2 \cdot \varepsilon_{11} \Rightarrow \varepsilon_{11} \approx \frac{\Delta \delta l_1}{\delta l_1}$$

Die Hauptdiagonale des Deformationstensors enthält also die relativen Längenänderungen der Abstandsvektoren parallel zur jeweiligen Achse. Allgemein gilt:

$$\boxed{\frac{\Delta \delta l_{|\vec{n}|}}{\delta l_{|\vec{n}|}} = \vec{n} \cdot \hat{\varepsilon} \cdot \vec{n}}$$

- Nichtdiagonalkomponenten: Sei zum Beispiel $\delta \vec{r} = \delta l_1 \cdot \vec{e}_1$ und $\Delta \vec{r} = \Delta l_2 \cdot \vec{e}_2$.

$$\begin{aligned} \delta \vec{r} \cdot \Delta \vec{r} - \underbrace{\delta \vec{r} \cdot \Delta \vec{r}}_{=0} &= 2 \cdot \delta l_1 \cdot \Delta l_2 \cdot \varepsilon_{12} \\ \delta \bar{l}_1 \cdot \Delta \bar{l}_2 \cdot \cos \underbrace{\vartheta_{12}}_{= \pi/2 - \gamma_{12}} &= 2 \cdot \delta l_1 \cdot \Delta l_2 \cdot \varepsilon_{12} \\ 2 \cdot \varepsilon_{12} &= \gamma_{12} \cdot \frac{\delta \bar{l}_1}{\delta l_1} \cdot \frac{\Delta \bar{l}_2}{\Delta l_2} = \gamma_{12} \cdot (1 + \varepsilon_{11}) \cdot (1 + \varepsilon_{22}) \end{aligned}$$

Die Terme mit $\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22} \ll 1$ können in der linearen Theorie vernachlässigt werden:

$$\boxed{\varepsilon_{12} \approx \frac{1}{2} \cdot \gamma_{12}}$$

Das γ_{12} entspricht der Winkeländerung zwischen materiellen Vektoren in x - bzw. y -Richtung.

Durch Hauptachsentransformation kann man zu einem Koordinatensystem mit Eigenvektoren von $\hat{\varepsilon}$ als Basis gelangen, in welchem der Deformationstensor nur Diagonalkomponenten hat. Diese Eigenvektoren erhält man aus der Gleichung:

$$\hat{\varepsilon} \cdot \vec{e} = \varepsilon \cdot \vec{e}$$

Was passiert bei einer Volumenänderung? Dazu betrachten wir ein kleines Volumenelement $\delta V = \delta l_1 \cdot \delta l_2 \cdot \delta l_3$:

$$\delta \vec{r}_1 \times \delta \vec{r}_2 = \delta \bar{l}_1 \cdot \delta \bar{l}_2 \cdot \underbrace{\sin \vartheta_{12}}_{=\cos \gamma_{12} \approx 1} \cdot \vec{e}_3$$

Das geänderte Volumenelement ist also:

$$\delta \bar{V} = \delta l_1 \cdot \delta l_2 \cdot \delta l_3 \cdot (1 + \varepsilon_{11}) \cdot (1 + \varepsilon_{22}) \cdot (1 + \varepsilon_{33}) = \delta V \cdot (1 + \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33} + O^2(\varepsilon))$$

Wir wollen eine Änderung betrachten:

$$\frac{\Delta \delta V}{\delta V} = \frac{\delta \bar{V} - \delta V}{\delta V} = \text{Sp } \hat{\varepsilon} = \varepsilon_{kk}$$

Man beachte, dass die Spur eines Tensors von der gewählten Basis unabhängig ist.

Ist ein System **scherungsfrei**, so treten überhaupt keine Winkeländerungen auf und die Nichtdiagonalelemente verschwinden, unabhängig von der gewählten Basis. Der Tensor hat dann die Form $\hat{\varepsilon} = \varepsilon_0 \cdot \hat{I}$. Hierdurch wird eine Zerlegung nahegelegt:

$$\varepsilon_{kl} = (\varepsilon_{kl} - \frac{1}{3} \cdot \delta_{kl} \cdot \varepsilon_{nn}) + \frac{1}{3} \cdot \delta_{kl} \cdot \varepsilon_{nn}$$

Zerlegung des Deformationstensors

Der hintere Anteil beschreibt eine scherungsfreie Deformation ohne Winkeländerung; der vordere Anteil ist eine Scherung ohne Volumenänderung (da die Spur des entsprechenden Tensors verschwindet).

Starre Rotationen

Wir haben den symmetrischen Teil des Verschiebungstensors $\vec{\nabla} \circ \vec{u}$ behandelt und wollen nun den asymmetrischen Anteil näher betrachten.

$$\delta\vec{r} - \delta\vec{r} = \delta\vec{r} \cdot \vec{\nabla} \circ \vec{u} = \frac{1}{2} \cdot \delta\vec{r} \cdot \left[\vec{\nabla} \circ \vec{u} + \vec{u} \circ \vec{\nabla} \right] + \frac{1}{2} \cdot \delta\vec{r} \cdot \left[\vec{\nabla} \circ \vec{u} - \vec{u} \circ \vec{\nabla} \right]$$

Der zweite Anteil beschreibt eine starre Rotation von $\delta\vec{r}$. Es entspricht einem doppelten Kreuzprodukt, welches zu $1/2 \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{u}) \times \delta\vec{r}$ gekürzt werden kann. Man erhält:

$$\delta\vec{r} - \delta\vec{r} = \hat{\varepsilon} \cdot \delta\vec{r} + \frac{1}{2} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{u}) \times \delta\vec{r}$$

$$\vec{\phi} = \frac{1}{2} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{u}$$

Drehwinkel der starren Rotation

Beispiel 1.2

Es sei $\vec{u} = (k \cdot y, 0, 0)$ mit $k \ll 1$ unser Verschiebungsvektor. Bildlich ist das eine einfache Scherung in y -Richtung (wobei die Achse bei $y = 0$ ortsfest ist). Wir zerlegen den Verschiebungstensor in symmetrischen und antisymmetrischen Anteil:

$$\vec{\nabla} \circ \vec{u} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & k/2 & 0 \\ k/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{=\hat{\varepsilon}} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -k/2 & 0 \\ k/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\vec{\phi}=(0,0,-k/2)}$$

Durch die reine Deformation entsteht:

$$\delta \vec{r}_{\varepsilon} = (\hat{I} + \hat{\varepsilon}) \cdot \delta \vec{r}$$

Wie transformiert sich ein Abstandsvektor in x -Richtung?

$$\delta \vec{r}_1 = \delta l_1 \cdot \vec{e}_1 \quad \Rightarrow \quad \delta \vec{r}_{\varepsilon,1} = \begin{pmatrix} 1 & k/2 & 0 \\ k/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \delta l_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \delta l_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ k/2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Die Länge in x -Richtung bleibt gleich, aufgrund der y -Komponente kommt es zu einer Winkeländerung. Analoge Effekte treten auf für Abstandsvektoren in y -Richtung:

$$\delta \vec{r}_2 = \delta l_2 \cdot \vec{e}_2 \quad \Rightarrow \quad \delta \vec{r}_{\varepsilon,2} = \delta l_2 \cdot \begin{pmatrix} k/2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Es tritt also sowohl in x - als auch in y -Richtung eine Winkeländerung um den Winkel $k/2$ auf. Insgesamt soll aber die Achse $y = 0$ ortsfest bleiben, weswegen die starre Rotation einen zusätzlichen Drehwinkel von $k/2$ eintragen muss.

Jetzt bestimmen wir mithilfe der Hauptachsentransformation die Eigenwerte und Eigenvektoren von $\hat{\varepsilon}$:

$$\vec{e}_{1,2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \pm 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{für} \quad \varepsilon_{1,2} = \pm \frac{k}{2} \quad \text{und} \quad \vec{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{für} \quad \varepsilon_3 = 0$$

Aus der Summe der Eigenwerte sieht man sofort, dass die Spur des Deformationstensors verschwindet.

1.5.2 Kinematik von Fluiden

Das Ziel ist, die zur Zeit $t + dt$ geschehenen Verformungen auf die Zeit t zu beziehen. Das Problem ist nämlich, dass wir hier keinen natürlichen Zustand als Bezugspunkt haben. Stattdessen nutzen wir das Geschwindigkeitsfeld:

$$\vec{r}(t + dt) = \vec{r}(t) + \vec{v}(\vec{r}, t) \cdot dt$$

Diese Beschreibung ist völlig äquivalent zu der Beschreibung von Festkörpern, wenn wir den Verschiebungsvektor ersetzen durch das Wegelement $\vec{v} \cdot dt$ (wobei dann wieder durch dt geteilt werden muss). Zur Beschreibung nutzen wir einen Deformationstensor \hat{d} und eine Rotationsachse $\vec{\omega}$.

$$\frac{d\delta \vec{r}}{dt} = \delta \vec{r} \cdot (\vec{\nabla} \circ \vec{v}) = \hat{d} \cdot \delta \vec{r} + \vec{\omega} \times \delta \vec{r}$$

Der Deformationstensor und die Rotationsachse ergeben sich aus:

$$\hat{d} = \frac{1}{2} \cdot \left[\vec{\nabla} \circ \vec{v} + \overset{\downarrow}{\vec{v}} \circ \vec{\nabla} \right] \quad \text{und} \quad \vec{\omega} = \frac{1}{2} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{v}$$

In Analogie zu den Festkörpern definiert man auch hier die Längenänderung wie folgt:

$$\frac{d}{dt} \frac{\delta l}{\delta l} = \vec{n} \cdot \hat{d} \cdot \vec{n}$$

Die Nichtdiagonalelemente des Deformationstensors beschreiben Winkeländerungen:

$$\frac{d}{dt} \gamma_{12} = 2d_{12}$$

Volumenänderungen werden durch die Divergenz des Geschwindigkeitsfeldes beschrieben:

$$\frac{d}{dt} \frac{\delta V}{\delta V} = \operatorname{div} \vec{v}$$

Zusammengefasst kann man formulieren:

$$\frac{d}{dt} \delta \vec{r} = \left(\delta \vec{r} \cdot \vec{\nabla} \right) \vec{v} = \delta \vec{r} \cdot \left(\vec{\nabla} \circ \vec{v} \right)$$

1.6 Zusammenfassung: Grundgleichungen

- Euler-Cauchy-Bewegungsgleichung

$$\varrho \cdot \left[\frac{\partial}{\partial t} \vec{v} + \vec{v} \cdot (\vec{\nabla} \circ \vec{v}) \right] = \vec{f} + \vec{\nabla} \cdot \hat{\sigma}$$

- Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\varrho \vec{v}) = 0$$

- eine Materialgleichung, die den Spannungstensor in Abhängigkeit von der Elastizität (Bezug auf $\hat{\varepsilon}$), Viskosität (Bezug auf \hat{d}), Massendichte oder auch Temperatur und der Alterung und Ermüdung des Materials (sprich: Zeitabhängigkeit) charakterisieren

Insgesamt ergäbe sich hieraus ein komplettes System von Differentialgleichungen. Wir müssen also „nur noch“ die Materialgleichung finden.

Wenn wir von Fluiden reden, spielt die Thermodynamik immer eine große Rolle. Deshalb gibt es hier dazu einen Einschub.

2 Grundlagen der Thermodynamik

- **1. Hauptsatz:** Änderungen der inneren Energie manifestieren sich durch Wärmeänderungen δQ und am/vom System verrichtete Arbeit δA . Diese beiden Änderungen sind Prozessgrößen, während die innere Energie eine Zustandsgröße darstellt.

$$dU = \delta Q + \delta A$$

Für Gase ist $\delta A = -p \cdot dV$.

- **2. Hauptsatz:** Die Entropie, deren Änderung der Quotient aus reversibel zugeführter Wärme und Temperatur ist, ist ebenfalls wieder eine Zustandsgröße:

$$dS = \frac{\delta Q_{\text{rev}}}{T} \geq \frac{\delta Q}{T}$$

Bei beliebigen Prozessen kann man die Entropie berechnen, wenn man den Prozess in einen reversiblen und einen irreversiblen Prozess zerlegt.) Bei einem irreversiblen Prozess findet immer eine Entropieerhöhung statt.

An und für sich ist der Carnot-Prozess der einzige Kreisprozess, der (theoretisch) reversibel geführt werden kann, denn bei den adiabatischen Teilen (ohne Wärmeänderung) findet keine Entropieänderung statt, und bei den isothermen Teilen kann man zwischen zwei Wärmebehältern gleicher Temperatur operieren, weswegen die Richtung des Prozesses frei wählbar ist.

- Für einen reversiblen Prozess kann man die ersten beiden Hauptsätze vereinigen zu der **Fundamentalgleichung** nach GIBBS:

$$dU = T \cdot ds + \delta A = T \cdot dS + \sum_{i=1}^n \alpha_i \cdot dA_i$$

Offenbar ist U nur abhängig von der Entropie S und den A_i . Diese Größen bezeichnet man als die **natürlichen Variablen**. Jetzt kann man das totale Differential bilden.

$$dU = \frac{\partial U}{\partial S} \cdot dS + \frac{\partial U}{\partial A_1} \cdot dA_1 + \dots + \frac{\partial U}{\partial A_n} \cdot dA_n \Rightarrow$$

Damit ergibt sich unter Beachtung von $\delta A = -p \cdot dV$:

$$T(S, V) = \frac{\partial U(S, V)}{\partial S} \quad \text{und} \quad p(S, V) = -\frac{\partial U(S, V)}{\partial V}$$

Beachtet man weiterhin, dass S wieder von T und V abhängt, ergibt sich die **thermische Zustandgleichung** $p = p(T, V)$. Damit ist das System vollständig beschrieben.

- Man nennt U auch thermodynamisches Potential. Als Potential ist U allerdings nur in Abhängigkeit von den natürlichen Variablen, der Entropie S und den A_i , darstellbar. Es folgt die **Maxwellrelation**:

$$-\left(\frac{\partial p}{\partial S}\right)_V = \frac{\partial^2 U}{\partial S \partial V} = \frac{\partial^2 U}{\partial V \partial S} = \left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_S$$

Betrachten wir das thermodynamische Potential am Beispiel von Gas:

$$dU(S, V) = T \cdot dS - p \cdot dV = [d(T \cdot S) - S \cdot dT] - p \cdot dV$$

Man definiert $F(T, V) = U - T \cdot S$ als **freie Energie**:

$$dF(T, V) = -S \cdot dT - p \cdot dV$$

Man sieht sofort:

$$S = -\frac{\partial F}{\partial T} \quad \text{und} \quad p = -\frac{\partial F}{\partial V}$$

Mit den gemischten Ableitungen der freien Energie erhält man die entsprechende Maxwellrelation mit F anstelle von U :

$$-\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V = \frac{\partial^2 F}{\partial T \partial V} = \frac{\partial^2 F}{\partial V \partial T} = -\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T$$

Jetzt führen wir spezifische Größen ein, die auf die Masse bezogen sind.

$$du = \delta q + \delta a = T \cdot ds - p \cdot dv = T \cdot ds - p \cdot d\left(\frac{1}{\varrho}\right) = T \cdot ds + \frac{p}{\varrho^2} \cdot d\varrho$$

Hierbei ist $v = \delta V / \delta M = 1 / \varrho$. Bekannt sein sollte die Relation:

$$c_p - c_v = \left[\left(\frac{\partial u}{\partial v} \right)_T + p \right] \cdot \left(\frac{\partial v}{\partial T} \right)_p \Rightarrow \left(\frac{\partial v}{\partial p} \right)_T \cdot \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_V = - \left(\frac{\partial v}{\partial T} \right)_p$$

3 Flüssigkeiten und Gase (Fluide)

Häufig wird dieses Kapitel mit Hydrodynamik überschrieben. Hier gilt $\sigma_t \ll \sigma_n$. Speziell bei idealen Flüssigkeiten oder im statischen Zustand ist $\sigma_t = 0$. Für $\sigma_t \neq 0$ haben wir es mit einer viskosen Flüssigkeit zu tun.

3.1 Hydrostatik

Es soll nun alles zeitunabhängig sein, also ist $\vec{v} = 0$ und (wie oben gesehen) $\sigma_t = 0$. Hieraus folgt sofort $\hat{\sigma} = -p \cdot \hat{I}$. Folglich sind Kraft und Flächennormale immer parallel.

$$d\vec{F} = \hat{\sigma} \cdot d\vec{S} = -p \cdot d\vec{S}$$

Die Divergenz des Spannungstensors ist:

$$\vec{\nabla} \hat{\sigma} = -\vec{\nabla} p$$

Damit ergibt sich folgende Bewegungsgleichung:

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial \vec{r}} p = \vec{f}}$$

Gleichgewichtsbedingung

Inkompressible Flüssigkeiten

Man sieht, dass es im Allgemeinen nur dann ein Gleichgewicht geben kann, falls \vec{f} ein eindeutiges Potential besitzt. Die Potentialfunktion lautet dann $\varphi = -p$.

$$\boxed{p + \varphi = \text{const.}}$$

Gleichgewichtsbedingung für Potentialkräfte

Auftrieb

Wir haben einen Körper mit dem Volumen V in einer Flüssigkeit. Es ergibt sich eine Auftriebskraft:

$$\vec{F}_A = \int_{\partial V} \hat{\sigma} \cdot d\vec{S} = - \int_{\partial V} p \cdot d\vec{S} = - \int_V \vec{\nabla} p \, dV$$

Die Kraft, die die Flüssigkeit auf den Körper ausgeübt wird, ist also gleich der Kraft, die auf die verdrängte Flüssigkeitsmenge ausgeübt würde.

$$\boxed{\vec{F}_A = - \int_V \vec{f} \cdot dV}$$

Archimedisches Prinzip

Inkompressible Flüssigkeiten

Für $\varrho = \text{const.}$ sollen verschiedene äußere Kräfte betrachtet werden:

- Die Schwerkraft $\vec{f} = \varrho \cdot \vec{g} = \varrho g \cdot \vec{e}_z$ wird durch das Potential $\varrho = -\varrho g \cdot z$ beschrieben. Aus der Gleichgewichtsbedingung folgt:

$$p = \varrho g \cdot z + p_0$$

Hierbei ist p_0 der Druck an der Flüssigkeitsoberfläche ($z = 0$).

- Haben wir zusätzlich eine Zentrifugalkraft (für $\vec{\omega} = \omega \cdot \vec{e}_z$), so gilt:

$$\vec{f}_C = -\varrho \cdot \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) = \frac{\partial}{\partial \vec{r}} \left(\frac{\varrho}{2} \cdot \omega^2 r_{\perp}^2 \right) \Rightarrow \Phi = -\varrho g \cdot z - \frac{\varrho}{2} \cdot \omega^2 r_{\perp}^2$$

Kompressible Flüssigkeiten

Jetzt ist nicht mehr $\varrho = \text{const.}$ Viele Kräfte haben die Gestalt $\vec{f} = \varrho \cdot \vec{k}$ mit der spezifischen Kraft \vec{k} . Damit ist $\vec{f} \cdot dV = \vec{k} \cdot dm$.

$$\vec{k} = \frac{1}{\varrho} \frac{\partial}{\partial \vec{r}} p$$

Gleichgewichtsbedingung für kompressible Flüssigkeiten

Es gilt $\vec{k} = -\vec{\nabla} \cdot \tilde{\varphi}$, dabei ist $\tilde{\varphi}$ eine potentielle Energie pro Massenanteil. Wir fragen uns: Kann man den rechten Term als Gradienten eines noch zu bestimmenden Feldes π darstellen? Dann würde in Analogie zu den obigen Betrachtungen gelten:

$$\pi + \tilde{\varphi} = \text{const.}$$

Zur Bestimmung des Feldes π benötigen wir eine eindeutige Beziehung $p = p(\varrho)$.¹ Dann gilt:

$$d\pi = \frac{1}{\varrho} \cdot dp \Rightarrow \pi(p) = \int_{p_0}^p \frac{dp'}{\varrho(p')}$$

Bemerkung

Das Feld π ergibt sich oft aus thermodynamischen Überlegungen:

- Im isothermen Gleichgewicht ist $\pi = g$ (spezifische freie Enthalpie), denn $dg = -s \cdot dT + 1/\varrho \cdot dp$.
- Im adiabatischen Gleichgewicht ist $\pi = w$ (spezifische Enthalpie), denn $dw = T \cdot ds + 1/\varrho \cdot dp$.

Daraus sehen wir, dass man nur ein Gleichgewicht erhalten kann, wenn die spezifische Kraft eine Potentialkraft ist und $p = p(\varrho)$ eindeutig sind.

Zum Beispiel hatten wir im Schwerfeld $\frac{\partial}{\partial \vec{r}} p = -\varrho \cdot g \vec{e}_z$ und damit $p = p(z)$. Die Dichte ist damit auch nur eine Funktion von z . In Analogie zur Thermodynamik war dann die Temperatur auch nur eine Funktion von z . Da in der Realität auch eine horizontale Temperaturänderung vorliegt, ist kein mechanisches Gleichgewicht möglich.

¹Diese Beziehung existiert auch.

Gibt es ein mechanisches Gleichgewicht ohne thermische Gleichgewicht, also $\vec{\nabla} p = \varrho \cdot \vec{g}$ mit $T \neq \text{const.}$? Mit der isotropen Zustandsgleichung erkennen wir, dass ein solches Gleichgewicht möglich ist. Aber ist dieses Gleichgewicht stabil? Dazu betrachten wir ein Flüssigkeitselement mit dem spezifischen Volumen $v(p, s) = 1/\varrho(p, s)$, wobei p der Druck und s die spezifische Entropie in der Höhe z sind. Jetzt steigt das Element adiabatisch auf. Wir erhalten $p' = p(z + \xi)$. Ein stabiles Gleichgewicht liegt vor, falls die resultierende Kraft rücktreibend ist, also falls das Volumenelement mit $v(p', s)$ (das hochverschobene Element) schwerer als $v(p', s')$ (das dort bereits vorhandene Volumenelement) ist. Die Bedingung ist:

$$v(p', s') - v(p', s) > 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dT}{dz} > -\frac{g}{c_p} \cdot \alpha \cdot T(z) \quad \text{mit} \quad \alpha = \frac{1}{v} \cdot \left(\frac{\partial v}{\partial T} \right)_p$$

Bei einem idealen Gas ist $\alpha \cdot T = 1$.

3.2 Ideale Fluide

Ideal bedeutet, dass es keine Energiedissipation gibt: Sowohl die innere Reibung als auch der Wärmeaustausch zwischen den Flüssigkeitsteilchen soll vernachlässigbar sein. Also soll die Bewegung adiabatisch sein, die Entropie jedes Flüssigkeitsteilchens ist also konstant. Mit der Kontinuitätsgleichung ergibt sich:

$$0 = \frac{ds}{dt} = \frac{\partial s}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} s \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \varrho \cdot s}{\partial t} + \vec{\nabla}(\varrho \cdot s \cdot \vec{v}) = 0$$

Meist einfacher zu rechnen ist $s(\vec{r}, t) = \text{const.}$, wie es bei isentropen Flüssigkeiten gilt. Laut der Thermodynamik gilt $dw = T \cdot ds + v \cdot dp = 1/\varrho \cdot dp$ und somit:

$$\vec{\nabla} w = \frac{1}{\varrho} \cdot \vec{\nabla} p$$

3.2.1 Eulersche Gleichung

Wir machen die Annahme, dass die Zustandsgleichung unabhängig vom Bewegungszustand ist. Dazu müssen wir von der allgemeinen Euler-Cauchy-Bewegungsgleichung ausgehen.

$$\boxed{\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{v} \stackrel{!}{=} \underbrace{-\frac{1}{\varrho} \cdot \vec{\nabla} p}_{=\vec{\nabla} w} + \vec{k}}$$

Dies ist eine partielle Differentialgleichung:

- erste Ordnung in der Zeit; es ist also eine Anfangsbedingung nötig: $\vec{v}(r, 0)$
- erste Ordnung im Ort; es ist eine Randbedingung nötig:
 1. Ist das Gefäß von einer Wand \mathcal{O} berandet, so wird $v_n|_{\mathcal{O}} = 0$ oder (bei bewegten Wänden) $v_n|_{\mathcal{O}} = u_n$ (Normalkomponente der Wandgeschwindigkeit) gefordert.
 2. Bei mehreren nichtmischenden Flüssigkeiten müssen v_n und p an der Grenzfläche stetig sein.

Bemerkung

Zur Umformung des Termes $(\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{v}$ kann man folgende Relation benutzen:

$$\vec{v} \times (\vec{\nabla} \times \vec{v}) = \vec{\nabla} \left(\frac{v^2}{2} \right) - (\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{v}$$

Dann kann man die Differentialgleichung durch Bilden der Rotation vereinfachen (es verschwindet die Potentialkraft \vec{k}).

Mithilfe dieser Vereinfachung folgt:

$$\frac{\partial}{\partial t} \vec{v} = -\vec{\nabla} \left(w + \frac{v^2}{2} \right) + \vec{v} \times (\vec{\nabla} \times \vec{v}) + \vec{k}$$

Wir bilden die Divergenz:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\vec{\nabla} \times \vec{v}) = \vec{\nabla} \times (\vec{v} \times (\vec{\nabla} \times \vec{v})) + \vec{\nabla} \times \vec{k}$$

Der hintere Term verschwindet, da $\vec{k} = -\vec{\nabla}\tilde{\varphi}$ ein Gradientenfeld ist.

Voraussetzungen	Euler-Gleichung	Erstes Integral
Stationäres, inkompress., wirbelfreies System	$0 = \vec{\nabla} \left(\frac{v^2}{2} + \frac{p}{\varrho} + \tilde{\varphi} \right)$	$\frac{\varrho}{2} \cdot v^2 + \varrho \cdot \tilde{\varphi} + p = \text{const.}$ (unabhängig von Ort und Zeit)
Stationäres, wirbelfreies System	$0 = \vec{\nabla} \left(\frac{v^2}{2} + w + \tilde{\varphi} \right)$	$v^2/2 + w + \tilde{\varphi} = \text{const.}$
Stationäres System	$0 = \vec{v} \cdot \vec{\nabla} \left(\frac{v^2}{2} + w + \tilde{\varphi} \right)$	$v^2/2 + w + \tilde{\varphi} = \text{const.}$ entlang der Bahnkurve (Stromlinie)
Wirbelfreies System $\vec{\nabla} \times \vec{v} = 0 \Rightarrow \vec{v} = \vec{\nabla}\Phi$	$0 = \vec{\nabla} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{(\vec{\nabla}\Phi)^2}{2} + w + \tilde{\varphi} \right)$	$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \cdot (\vec{\nabla}\Phi)^2 + w + \tilde{\varphi} = 0$ (bei passender Eichung $\Phi' = \Phi + f(t)$)

3.2.2 Bernoulli-Gleichung

Das erste Integral der Euler-Cauchy-Gleichung ergibt die **Bernoulli-Gleichung**. Diese soll für die verschiedenen Fälle diskutiert werden.

1. stationäre, inkompressible und wirbelfreie Strömung im Schwerfeld

$$\varrho \frac{v^2}{2} + \varrho \cdot g \cdot z + p = \text{const.}$$

Die Größe p wird als **statischer Druck** bezeichnet. Die vorderen beiden Terme werden als **Geschwindigkeitsdruck** und **Schweredruck** bezeichnet. Alle Druckanteile entsprechen einem Energieanteil: der Geschwindigkeitsdruck symbolisiert die kinetische Energie, der Schweredruck die potentielle Energie im Schwerfeld und der statische Druck die potentielle Energie aufgrund der Wechselwirkungen der Teilchen. Man sieht, dass die Bernoulli-Gleichung im Kern ein Energieerhaltungssatz ist. Kann man den Schweredruck vernachlässigen, so erhält man einen Gesamtdruck $p_0 = \varrho v^2/2 + p$. Diese Relation wird bei Druckbestimmungsmethoden ausgenutzt. Aus dieser Gleichung folgt auch das hydrodynamische Paradoxon.

2. Unterschiede zwischen inkompressiblen und kompressiblen Strömungen

Als Beispiel soll die Strömung durch ein Rohr betrachtet werden, dessen Durchmesser sich von S_0 zu S verringert. Wir suchen einen Zusammenhang zwischen dS und dV . (Das heißt: Wie ändert

sich die Geschwindigkeit, wenn sich der Rohrdurchmesser ändert?). Zunächst wird wieder eine stationäre Strömung betrachtet.

Im inkompressiblen Falle lautet die Kontinuitätsgleichung:

$$\vec{\nabla} \vec{v} = 0 \quad \Rightarrow \quad V \equiv v_0 \cdot S_0 = \text{const.}$$

Es ergibt sich ein konstanter Volumenstrom. Wir können das logarithmische Differential bilden.

$$0 = d(\ln V) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{dS}{S} = -\frac{dv}{v}}$$

Im kompressiblen Falle lautet die Kontinuitätsgleichung:

$$\vec{\nabla}(\varrho \vec{v}) = 0$$

Die Integration über ein Rohrstück V (nach Gaußschem Satz also über dessen Oberfläche) ergibt:

$$\varrho_0 v_0 \cdot S_0 = \varrho v \cdot S \equiv M = \text{const.}$$

Wir haben einen konstanten Massestrom, und können das logarithmische Differential bilden:

$$d(\ln M) = \frac{d\varrho}{\varrho} + \frac{dv}{v} + \frac{dS}{S} \stackrel{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dS}{S} = -\frac{dv}{v} - \frac{d\varrho(p, s)}{\varrho} = (ds = 0) = -\frac{dv}{v} - \underbrace{\left(\frac{\partial \varrho}{\partial p}\right)_s}_{=1/c^2} \cdot \frac{dp}{\varrho}$$

Hier kommt die Schallgeschwindigkeit c vor. Mit Hilfe der Bernoulli-Gleichung kann man auch schreiben:

$$\frac{v^2}{2} + w = \text{const.} \quad \Rightarrow \quad v dv + dw = v dv + \frac{dp}{\varrho} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{dS}{S} = -\frac{dv}{v} \cdot \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)}$$

Dieser Zusammenhang ist als **Hugoniot-Gleichung** bekannt. Im Vergleich zum vorherigen Ergebnis sehen wir, dass der kompressible Fall in den inkompressiblen übergeht für $v/c \ll 1$. Dieses Verhältnis wird als **Machzahl** bezeichnet. Was passiert, wenn man S vergrößert?

- kompressibles Verhalten: Im Unterschallbereich nimmt die Geschwindigkeit ab und der Druck steigt. Steigt die Strömungsgeschwindigkeit über die Schallgeschwindigkeit, so führt eine Querschnittsvergrößerung zu einer weiteren Geschwindigkeitssteigerung; der Druck fällt dann.
- inkompressibles Verhalten: Stets nimmt die Geschwindigkeit ab und der Druck steigt.

3. Nicht stationärer Fall

Durch τ und l seien eine charakteristische Zeit und Länge für die Änderung der Strömung gegeben. Nach Euler ist $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \sim -\frac{1}{\varrho} \cdot \vec{\nabla} p$, also ist die Nichtstationarität nur dann relevant, wenn beide Terme von vergleichbarer Dimension sind:

$$\frac{v}{\tau} \approx \frac{1}{\varrho} \cdot \frac{\Delta p}{l} \quad \Rightarrow \quad \Delta p \approx l \cdot \varrho \cdot \frac{v}{\tau} \quad \Rightarrow \quad \Delta \varrho \approx \left(\frac{ds}{dl}\right)_s \cdot \Delta p \approx \frac{\Delta p}{c^2} \approx \frac{l \cdot \varrho \cdot v}{\tau \cdot c^2} \approx \Delta \varrho$$

In der Kontinuitätsgleichung:

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \vec{\nabla}(\varrho \cdot v) = 0$$

muss, damit Inkompressibilität angenommen werden kann, der zweite Term dominant sein:

$$\frac{\Delta \varrho}{\tau} \ll \frac{\varrho v}{l} \quad \Rightarrow \quad \tau \gg l \quad \Rightarrow \quad \frac{\Delta \varrho}{\varrho v} \approx \frac{l}{\varrho v} \cdot \frac{l}{\tau} \cdot \frac{\varrho v}{c^2}$$

Es ergeben sich folgende Bedingungen für die Gültigkeit inkompressibler Rechnungen:

$$\tau \gg \frac{l}{c} \quad \text{und} \quad v \ll c$$

4. Energiebilanz der idealen Flüssigkeiten

Mit der Energiebilanz aus dem ersten Kapitel und der Annahme $\vec{f}(\vec{r}) = -\varrho \cdot \vec{\nabla} \tilde{\varphi}(\vec{r})$ erhält man:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\varrho}{2} \cdot v^2 + \varrho \cdot \tilde{\varphi} \right) + \vec{\nabla} \left(\frac{\varrho}{2} \cdot v^2 \cdot \vec{v} + p \cdot \vec{v} + \varrho \vec{v} \cdot \tilde{\varphi} \right) = p \cdot \vec{\nabla} \vec{v}$$

Auf der rechten Seite steht die Leistungsdichte der inneren Wechselwirkungen. Die erste Term der linken Seite entspricht dem bekannten Ausdruck für die kinetische und potentielle Energie. Betrachten wir eine innere Energie $u = u(s, 1/\varrho)$. Wegen $ds = 0$ ist

$$du = \frac{p}{\varrho^2} \cdot d\varrho \Rightarrow \varrho \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)_s = \frac{p}{\varrho} \cdot \frac{d\varrho}{dt} = \frac{p}{\varrho} \cdot \left(\underbrace{\frac{\partial \varrho}{\partial t}}_{-\vec{\nabla}(\varrho \vec{v})} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} \varrho \right) = -p \cdot \vec{\nabla} \vec{v}$$

Damit folgt für die substantielle Energiedichte $\varrho \cdot u$:

$$\frac{\partial \varrho u}{\partial t} + \vec{\nabla}(\varrho u \cdot \vec{v}) = -p \cdot \vec{\nabla} \vec{v}$$

Man erhält die Gleichung der Energieerhaltung in der lokalen Form:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\varrho}{2} \cdot v^2 + \varrho \cdot \tilde{\varphi} + \varrho \cdot u \right) + \vec{\nabla} \cdot \left[\varrho \vec{v} \cdot \left(\frac{v^2}{2} + u + \frac{p}{\varrho} + \tilde{\varphi} \right) \right] = 0$$

Diese Formel beschreibt die Erhaltung der Summe aus kinetischer, potentieller und innerer Energie. In der Stromdichte (rechter Term) steht die Enthalpie $w = u + p/\varrho$ anstelle der inneren Energie u , da der Term $p\vec{v}$ den konduktiven Anteil (Arbeit der Druckkräfte) beschreibt, während der Rest den konvektiven Anteil (infolge Bewegung transportierte Energie) der Stromdichte beschreibt. In dieser Gleichung ist über einige Umwege auch die Bernoulli-Gleichung enthalten.

3.2.3 Erhaltung der Zirkulation. Helmholtzsche Wirbelsätze

In diesem Abschnitt geht es um die Eigenschaften der Wirbelstärke $\vec{w} = 1/2 \cdot \text{rot } \vec{v}$, die die lokale starre Drehung der Flüssigkeiten beschreibt. Die Rotation kommt ursprünglich von der **Zirkulation** entlang einer Kurve C , die die Fläche S einschließt:

$$\Gamma_C := \oint_C \vec{v} \cdot d\vec{r} = \iint_S d\vec{S} \cdot \text{rot } \vec{v} = 2 \iint_S d\vec{S} \cdot \vec{w}$$

Wenn für alle endlichen Wege C in einem Gebiet G die Zirkulation Γ_C verschwindet, dann ist $\text{rot } \vec{v} = 0$ in ganz G . Die Umkehrung gilt nur in einfach zusammenhängenden Gebieten (d.h. jede Kurve C kann, ohne G zu verlassen, zu einem Punkt zusammengezogen werden, der wieder in G liegt.)

Beispiel 3.1 Zylindersymmetrisches Geschwindigkeitsfeld

Im zweidimensionalen Raum mit Polarkoordinaten ist:

$$\vec{v} = a/r \cdot \vec{e}_\varphi \Rightarrow \text{rot } \vec{v} = \vec{e}_z \cdot \frac{1}{r_\perp} \cdot \frac{d}{dr_\perp} (r_\perp \cdot v_\varphi) = 0 \quad \text{für } r \neq 0$$

Da die Punkte mit $r = 0$ aus dieser Rechnung ausgeschlossen sind, ist das Gebiet, auf dem die Rotation verschwindet, nicht einfach zusammenhängend. Betrachte nun einen kreisförmigen Weg im Abstand r um den Nullpunkt:

$$\Gamma_C = \int \vec{v} \cdot d\vec{r} = \int_0^{2\pi} \frac{a}{r_\perp} \cdot r_\perp d\varphi = 2\pi a \neq 0$$

Das Problem ist die Singularität der Zirkulation bei $(0,0) \in S(C)$. Die Wegunabhängigkeit von C liegt solange vor (d.h. der Weg C kann solange geändert werden), wie C diesselbe Singularität umschließt.

Relevant ist nun die Zeitableitung der Zirkulation. Die Zeitabhängigkeit kann nur in C stecken:

$$\frac{d}{dt}\Gamma_C = \frac{d}{dt} \left[\oint_C \vec{v} \cdot d\vec{r} \right] = \frac{d}{dt} \left[2 \cdot \int_S d\vec{S} \cdot \vec{\omega} \right] \quad (*)$$

Beachtet man die Änderung eines Teilstückes $\delta\vec{r}(t)$ der Kurve in der Zeit dt , so erhält man für die einzelnen Punkte von C eine Geschwindigkeit $v(\vec{r}, t)$:

$$-\vec{\nabla} w \frac{d}{dt} \delta\vec{r} = \lim_{dt \rightarrow 0} \frac{\delta\vec{r}(t+dt) - \delta\vec{r}(t)}{dt} = \lim_{dt \rightarrow 0} \frac{[\vec{v}(\vec{r} + \delta\vec{r}, t) - \vec{v}(\vec{r}, t)] \cdot dt}{dt} = (\delta\vec{r} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v}(\vec{r}, t)$$

Nun können wir, unter Zuhilfenahme der EULER-Gleichung für ideale Flüssigkeiten und Potentialkräfte, den zweiten Teil der obigen Gleichung (*) umschreiben:

$$\oint_{C(t)} \frac{d\delta\vec{r}}{dt} \cdot \vec{v} + \oint_{C(t)} \delta\vec{r} \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} = \oint_{C(t)} [(\delta\vec{r} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v}] \cdot \vec{v} + \oint_{C(t)} \delta\vec{r} \cdot \vec{\nabla} (w + \tilde{\varphi}) = \oint_{C(t)} \delta\vec{r} \cdot \vec{\nabla} \left(\frac{v^2}{2} \right) + \oint_{C(t)} \delta\vec{r} \cdot \vec{\nabla} (w + \tilde{\varphi}) = 0$$

Damit kann man zusammenfassen:

$$\boxed{\frac{d\Gamma_l}{dt} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \Gamma_l = \text{const.}}$$

THOMSON'scher Satz

Nun betrachten wir wieder die differentielle Form von (*):

$$2 \cdot \frac{d}{dt} \int_S \delta\vec{S} \cdot \vec{\omega} = 0$$

Wird S infinitesimal, so führt dies auf:

$$\boxed{\frac{d}{dt} \delta\vec{S} \cdot \vec{\omega} = 0}$$

Erster Helmholtz'scher Wirbelsatz

Das heißt, die Wirbelstärke bleibt bei der Strömung idealer Flüssigkeiten materiell erhalten. $\vec{\omega}$ ist somit in idealen Flüssigkeiten eine *konvektive Größe*. Das heißt, bei idealen Flüssigkeiten, kann $\vec{\omega}$ weder erzeugt noch vernichtet werden. Es folgt noch ein weiterer (trivialer) Satz.

$$\boxed{\vec{\nabla} \cdot \vec{\omega} = 0}$$

Zweiter Helmholtz'scher Wirbelsatz

$\vec{\omega}$ kann in idealen Flüssigkeiten nirgends beginnen oder enden. Das Fazit lautet: In idealen Flüssigkeiten könne keine Wirbel entstehen. Alle Flüssigkeiten wären in Ruhe, damit müsste also $\vec{\omega}$ immer gleich Null sein, das ist aber ein Paradoxon. Die Lösung des Paradoxons liegt darin, dass es keine wirklichen idealen Flüssigkeiten gibt, insbesondere haftet eine Flüssigkeit an deren Berandung und erzeugt damit Wirbel.

Bemerkung

Aus der Rotation der Eulergleichung erhielten wir:

$$\frac{\partial}{\partial t} \vec{\omega} = \vec{\nabla} \times (\vec{v} \times \vec{\omega}) = (\vec{\nabla} \cdot \vec{\omega}) \cdot \vec{v} - (\vec{\nabla} \cdot \vec{v}) \cdot \vec{\omega} = (\vec{\omega} \cdot \vec{\nabla}) \cdot \vec{v} - \vec{\omega} \cdot (\vec{\nabla} \cdot \vec{v}) - (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{\omega}$$

Da die Flüssigkeit inkompressibel ist, folgt:

$$\frac{d}{dt} \vec{\omega} = \vec{\nabla} \times (\vec{v} \times \vec{\omega}) = (\vec{\omega} \cdot \vec{\nabla}) \cdot \vec{v}$$

3.2.4 Potentialströmung inkompressibler Flüssigkeiten

Es gilt $\vec{k} = -\vec{\nabla} \cdot \tilde{\varphi}$. Wegen $\text{rot } \vec{v} = 0$ kann man das Geschwindigkeitsfeld als Gradientenfeld $\vec{v} = \vec{\nabla} \Phi$ darstellen. Aus der Inkompressibilität folgt $\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0$ und damit

$$\Delta \Phi(\vec{r}) = 0$$

Wann ist die Potentialströmung interessant?

- Strömung um stromlinienförmige Körper („Totwasserbereich“ hinter dem Körper ist klein)
- kleine Schwingungen eingetauchter Körper (Amplitude $a \ll$ charakteristische Länge l): merkliche Änderung der Geschwindigkeit v um die Geschwindigkeit des Körpers u , Frequenz $\omega \sim u/a$

$$\underbrace{\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}}_{\sim \omega \cdot u} + \underbrace{(\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v}}_{\sim u \cdot u/l} = -\vec{\nabla} w$$

Mit der obigen Abschätzung $a \ll l$ sieht man, dass der mittlere Term verschwindet. Es verbleibt $\partial \vec{v} / \partial t = -\vec{\nabla} w$ bzw. (nach Bildung der Rotation) $\partial \vec{\omega} / \partial t = 0$. Damit ist $\vec{\omega} = \text{const.}$ Es muss aber auch das Mittel der Geschwindigkeit \vec{v}^{f} verschwinden, damit auch das Mittel von $\vec{\omega}$, welches somit gleich Null ist.

Um die Laplace-Gleichung lösen zu können, benötigen wir eine Randbedingung:

$$\left. \frac{\partial \Phi}{\partial n} \right|_O = \vec{u}_n(\vec{R})$$

Die Richtungsableitung des Potentials muss auf dem Rand mit der Geschwindigkeit der Wände übereinstimmen. Dieses Problem ist vom NEUMANN-Typ und hat eine eindeutige Lösung. Aus der BERNOULLI-Gleichung folgt:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \vec{r}} \right)^2 + \frac{p}{\rho} + \tilde{\varphi} = 0$$

Damit erhält man das Druckfeld $p(\vec{r}, t)$. Da wir keine Retardierung in der Gleichung haben, ändert sich Φ immer simultan mit der Randbedingung (was in Anbetracht der Inkompressibilität logisch ist).

Beispiele für Potentialströmungen

1. $\Phi = \vec{v}_0 \cdot \vec{r}$. Damit ist $\vec{v} = \vec{v}_0$ eine homogene Strömung
2. $\Phi = -c/r$. Damit ist $\vec{v} = c/r^2 \cdot \vec{r}/r$ eine kugelsymmetrische Lösung. Bei $\vec{r} = 0$ liegt eine Punktquelle vor. Es gilt $\text{rot } \vec{v} = 0$ und $\text{div } \vec{v} = 0$ für $\vec{r} \neq 0$. Außerdem ist $\Delta \Phi = 4\pi c \cdot \delta(\vec{r})$, also muss $\vec{r} = 0$ ausgeschlossen werden. Der Strom durch eine Kugel mit dem Radius R :

$$I = \frac{\oint d\vec{S} \cdot \vec{v} dt}{dt} = 4\pi c$$

3. $\Phi = c \cdot \ln r_{\perp}/a$. Damit ist $\vec{v} = c/r_{\perp} \cdot \vec{e}_{\perp}$ eine zylindersymmetrische Lösung, also eine Linienquelle entlang der z -Achse. Es ist also $\text{rot } \vec{v} = 0$ und $\text{div } \vec{v} = 0$ für $r_{\perp} \neq 0$.
4. $\Phi = c \cdot \varphi$ ist eine andere zylindersymmetrische Lösung mit $\vec{v} = c/r_{\perp} \cdot \vec{e}_{\varphi} = c \cdot \vec{e}_z \times \vec{r}/r_{\perp}^2$. Die Stromlinien bilden konzentrische Kreise um die z -Achse. Es ist $\text{rot } \vec{v} = 0$ außer bei $r_{\perp} = 0$. Hierdurch ist ein in Richtung der z -Achse angeordneter Wirbelfaden beschrieben.

5. Die Linearität der Laplace-Gleichung erlaubt, mehrere Lösungen zu superpositionieren. Zum Beispiel ergibt sich eine Dipolströmung für eine Quelle und eine Senke, deren Abstand a gegen Null und deren Wirbelstärke c so gegen Unendlich geht, dass das Produkt $\vec{p} = c \cdot \vec{a}$ konstant bleibt. Das Potential lautet hier $\Phi = \vec{p} \cdot \vec{r}/r^3$.
6. Strömung um Kugel in asymptotisch homogener Strömung: Die Laplace-Gleichung wird um die Randbedingungen $\Phi(r \rightarrow \infty) = \vec{v}_0 \cdot \vec{r}$ und $\vec{r}/r \cdot \partial\Phi/\partial\vec{r}|_{\vec{r}=R\cdot\vec{e}_r} = 0$. Wir machen den Ansatz

$$\Phi = \vec{v}_0 \cdot \vec{r} + \vec{v}_0 \cdot \vec{r} \cdot f(r)$$

Nach Einsetzen in die Laplace-Gleichung und ein paar Umformungen folgt $f(r) = C/r^3$. Mit der zweiten Randbedingung folgt $C = R^3/2$ und insgesamt:

$$\Phi = (\vec{v}_0 \cdot \vec{r}) \cdot \left(1 + \frac{R^3}{2 \cdot r^3}\right) \Rightarrow \vec{v} = \vec{v}_0 + \frac{R^3}{2 \cdot r^3} \cdot \left[\vec{v}_0 - 3 \left(\vec{v}_0 \cdot \frac{\vec{r}}{r}\right) \cdot \frac{\vec{r}}{r}\right]$$

Der dynamische Druck auf die Kugel wird durch das Quadrat der Geschwindigkeit beschrieben:

$$v^2(r = R) = \frac{9}{4} \cdot v_0^2 \cdot \sin^2 \vartheta$$

Man sieht, dass bei $\vartheta = 0$ ein symmetrischer Staupunkt vorliegt. Der Gesamtdruck ist:

$$p(R, \vartheta) = p_0 + \frac{\rho v_0^2}{8} \cdot (9 \cos^2 \vartheta - 5)$$

Aufgrund der Symmetrie verschwindet aber die Gesamtkraft auf die Kugel. Das ist wieder ein Widerspruch zu den üblichen Erfahrungen.

7. Eine Strömung $\vec{v} \perp \vec{e}_z$ in einem unendlich langen Zylinder (also einem Rohr entlang der z -Achse) können auf ein zweidimensionales Problem zurückgeführt werden, also ist $\varphi = \varphi(r_\perp, \varphi)$. Das Laplace-Problem $\Delta\Phi = 0$ mit der Randbedingung $v_n(R, \varphi) = 0$ hat zwei mögliche Lösungen:

- Für die erste Möglichkeit der Randbedingung $v_r(\infty) = 0$ ergibt sich $\varphi_r = c \cdot \varphi$ und damit:

$$\vec{v}_r = \frac{c}{r_\perp} \cdot \vec{e}_\varphi \quad \text{und} \quad \Gamma = 2\pi \cdot c \neq 0 \quad \text{für} \quad r_\perp > R$$

Damit sieht man, dass die Zähigkeit oft nur in der dünnen Grenzschicht eine Rolle spielt: Bei dieser Lösung wird die verschwindende Relativgeschwindigkeit zwischen Körper und Flüssigkeit benutzt, innerhalb der Flüssigkeit jedoch vernachlässigt. Die Struktur von φ_r wird in der Praxis durch rotierenden Zylinder realisiert: $v_{\text{rel}}(R) = c/R = \Omega R$ und damit kennen wir $c = \Omega \cdot R^2$. Damit ergibt sich am Rand ein Druck und eine Kraft auf den Zylinder:

$$p(R) = p_0 - \frac{\rho}{2} \cdot \Omega^2 \cdot R^2 \quad \text{und} \quad \vec{F} = - \oint dS \cdot \vec{p} = 0$$

Wiederum wirkt keine Kraft auf den Zylinder.

- Die zweite mögliche Randbedingung ist $\vec{v}_d(\infty) = \vec{v}_0$ liefert

$$\varphi_d(r_\perp \rightarrow \infty) = \vec{v}_0 \cdot \vec{r}_\perp$$

Diese Struktur erinnert an einen Dipol, die Lösung erfolgt deswegen völlig analog zum bekannten elektrischen Dipol.

- Aus der Linearität der Laplacegleichung geht die Superposition hervor. Zum Beispiel ist auch $\varphi = \varphi_r + \varphi_d$ eine Lösung der Laplace-Gleichung (wenn auch nicht mit denselben Randbedingungen). Damit kennen wir das Strömungsfeld für einen rotierenden Zylinder mit homogener Anströmung. Es ergibt sich ein dynamischer Auftrieb (sprich eine Kraftdichte auf der Länge des Zylinders):

$$\frac{\vec{F}}{L} = -\varrho \cdot \vec{e}_z \times \vec{v}_0 \cdot \Gamma$$

KUTTA-JOUKOWSKY-Formel

Diese Formel gilt allgemein für eine Anströmung \vec{v}_0 , die um einen rotierenden Körper mit Γ zirkuliert. Warum aber gibt es auch bei nicht rotierenden Objekten, zum Beispiel Flugzeugflügeln, einen dynamischen Auftrieb? Sprich: Woher kommt die Zirkulation? Dazu braucht man die Zähigkeit realer Flüssigkeiten.

3.3 Zäh Flüssigkeiten

Speziell kann man die NAVIER-STOKES-Gleichung für inkompressible Flüssigkeiten ($\varrho = \text{const.}$ und $\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0$) formulieren:

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = -\vec{\nabla} \left(\frac{p}{\varrho} \right) + \frac{\eta}{\varrho} \cdot \Delta \vec{v}$$

Den Term $\eta/\varrho =: \nu$ wird **kinematische Zähigkeit** genannt. Was passiert, wenn man auf die Bewegungsgleichung die Rotation anwendet? Es entsteht:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} - \vec{v} \times (\vec{\nabla} \times \vec{v}) &= -\vec{\nabla} \left(\frac{\vec{v}^2}{2} + q + \tilde{\varphi} \right) + \frac{\eta}{\varrho} \cdot \Delta \vec{v} + \frac{1}{\varrho} \cdot \left(\varrho + \frac{\eta}{3} \right) \cdot \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{v}) \\ \frac{\partial}{\partial t} \vec{\omega} + \vec{\nabla} \times (\vec{\omega} \times \vec{v}) &= \frac{\eta}{\varrho} \cdot \Delta \vec{\omega} \end{aligned}$$

Der zweite Term ist die **Wirbelkonvektion** (durch materiellen Transport) und der rechte Term ist die **Wirbeldiffusion** (durch Verteilung). Wiederum gibt es im Inneren keine Produktion von Wirbeln, die Wirbel werden nur verteilt. (Das heißt insbesondere: Für $\omega(\vec{r}, 0) = 0$ ist auch $\omega(\vec{r}, t) = 0$.) Die Wirbel können nur an den Rändern, durch die nicht konservative Haftreibungskraft, entstehen.

3.3.1 Hagen-Poiseuille-Strömung

Wir wollen die stationäre, inkompressible, zähe Strömung durch ein Rohr beliebigen Querschnitts beschreiben ($\vec{f} = 0$). Das Rohr liege entlang der z -Achse von 0 bis L . Die Strömung kommt durch eine Druckdifferenz $\Delta p = p(0) - p(L)$ zustande.

Angenommen, die Strömung ist laminar, also $\vec{v} = v \cdot \vec{e}_z$. Aus $\text{div } \vec{v} = 0$ folgt $\partial v / \partial z = 0$, also $v = v(x, y)$. Der konvektive Term der Strömung verschwindet:

$$v_{i;k} \cdot v_k = 0$$

Terme, in denen \vec{v} quadratisch (oder mit noch höherer Potenz) eingeht, verschwinden, somit haben wir ein lineares Problem. Die NAVIER-STOKES-Gleichung reduziert sich auf:

$$\vec{\nabla} p = \eta \cdot \Delta \vec{v} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial y} = 0 \quad \Rightarrow \quad p = p(z)$$

Es verbleibt nur eine z -Abhängigkeit für den Druck:

$$\frac{dp}{dz} = \eta \cdot \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) v(x, y)$$

Ähnlich zum Separationsverfahren stellt man fest, dass diese Terme konstant sind: Ändert man nur x oder y , so bleibt die linke Seite konstant, also ist auch die rechte in x und y konstant; analog für z . Man erhält also zwei Gleichungen:

$$\frac{dp}{dz} = A \quad \text{und} \quad \eta \cdot \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) v(x, y) = A$$

Die erste Gleichung hat die folgende Lösung:

$$p(z) = A \cdot z + p(0) = p(0) - \frac{\Delta p}{L} \cdot z$$

Die zweite Gleichung reduziert sich auf:

$$\Delta_{(2)} v = \frac{A}{\eta} = -\frac{\Delta p}{\eta L} \quad \text{mit} \quad v|_{\text{Rand}} = 0$$

Nun betrachten wir den Spezialfall eines kreisförmigen Querschnittes: Dann kann $v(x, y)$ nur vom Rohrmittenabstand r_{\perp} abhängig sein. Für ein $\vec{v} = v(r_{\perp}) \cdot \vec{e}_z$ ergibt die Differentialgleichung:

$$\frac{1}{r_{\perp}} \cdot \frac{d}{dr_{\perp}} \left(r_{\perp} \cdot \frac{dv}{dr_{\perp}} \right) = -\frac{\Delta p}{\eta L}$$

Als Lösung ergibt sich formal:

$$v(r_{\perp}) = -\frac{\Delta p}{4\eta L} \cdot r_{\perp}^2 + C_1 \cdot \ln r_{\perp} + C$$

Es muss $C_1 = 0$ sein, da v stets endlich ist. Aus der Randbedingung folgt weiterhin C aus $v(R) = 0$. Damit verbleibt:

$$\vec{v}(r_{\perp}) = \frac{\Delta p}{4\eta L} \cdot (R^2 - r_{\perp}^2)$$

Bemerkung

Wir wollen einige Eigenschaften dieser Strömung beleuchten. Zur Rotation:

$$\vec{\nabla} \times \vec{v} = -\frac{\partial v_z}{\partial r_{\perp}} \cdot \vec{e}_{\varphi} = \frac{\Delta p}{2\eta L} \cdot r_{\perp} \cdot \vec{e}_{\varphi} \neq 0$$

Wieviel Masse fließt pro Zeiteinheit durch den Querschnitt?

$$Q = \iint \varrho \vec{v} \cdot d\vec{S} = 2\pi \cdot \int r_{\perp} \cdot v(r_{\perp}) dr_{\perp} = \frac{\pi}{8} \cdot \frac{\varrho}{\eta} \cdot \frac{\Delta p}{L} \cdot R^4 = \dots = 8\eta L \cdot \frac{\bar{v}}{R^2}$$

Wie stark ist die Kraft, die auf die Rohrwand wirkt?

$$d\vec{F} = \hat{\sigma}|_{r_{\perp}=R} \cdot d\vec{S} = (p \cdot \vec{e}_{\perp} - \hat{\sigma}' \cdot \vec{e}_{\perp}) \cdot dS \quad \text{mit} \quad \sigma'_{z,r_{\perp}} = \sigma'_{r_{\perp},z} = \eta \cdot \frac{\partial v}{\partial r_{\perp}}$$

Alle anderen Komponenten von $\hat{\sigma}'$ verschwinden. Es ist dann (in Komponentenschreibweise mit den Komponenten z , φ und r_{\perp} – in dieser Reihenfolge):

$$\hat{\sigma}' \cdot \vec{e}_{\perp} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \sigma'_{z,r_{\perp}} \\ 0 & 0 & 0 \\ \sigma'_{r_{\perp},z} & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma'_{z,r_{\perp}} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \parallel \vec{e}_z$$

Die Gesamtkraft ist:

$$\vec{F} = \int d\vec{F} = -\vec{e}_z \cdot \eta \int \frac{dv}{dr_{\perp}} dS$$

Das Flächenelement ist $dS = R d\varphi dz$ und die Gesamtoberfläche ist $S = 2\pi R \cdot L$.

$$\vec{F} = \Delta p \cdot \pi R^2 \cdot \vec{e}_z$$

Die Kraft auf die Rohrinneite infolge von Haftreibung ist also gleich der Gesamtkraft infolge der Druckdifferenz. Nur da sich diese beiden Kräfte gegenseitig aufheben, ist das Geschwindigkeitsprofil zeitlich konstant.

Neben der HAGEN-POISEUILLE-Strömung gibt es noch anderes einfaches Beispiel, die COUETTE-Strömung zwischen zwei konzentrisch angeordneten rotierenden Zylindern.

3.3.2 Ähnlichkeitsgesetze

Wir unterscheiden zwei Strömungstypen:

- Bewegung von Körper (bestimmter Gestalt) in Flüssigkeit (bzw. Anströmung von Körpern)
- Strömung zwischen bestimmten Wänden

Ein wichtiger Punkt ist die geometrische Ähnlichkeit von Körpern/Wänden: Einen zu einem bestimmten Körper ähnlichen Körper erhält man, indem man alle Lineardimensionen des Körpers mit einem festen Faktor multipliziert.

$$L_i^{(1)} = \lambda \cdot L_i^{(2)}$$

Ist die grundlegende Körpergestalt gegeben, so reicht somit nur eine Länge zur Spezifikation eines Körpers. Diese Dimension heißt **charakteristische Länge** l .

Nun betrachten wir zunächst stationäre Strömungen inkompressibler Flüssigkeiten ($\nu = \eta/\varrho$) ohne äußere Kräfte ($\vec{f} = 0$), und suchen das Geschwindigkeitsfeld \vec{v} sowie das Verhältnis p/ϱ , welches von der Form und Größe der umströmten Körper abhängig ist. Die Strömung wird vollständig beschrieben durch ν , l und u , welche wiederum zu einem dimensionslosen Parameter $\text{Re} = ul/\nu = \varrho ul/\eta$, der **Reynolds-Zahl**, zusammengefasst werden können. Anschaulich ist die Reynolds-Zahl das Verhältnis zwischen Trägheits- und Reibungskräften.