Inhaltsverzeichnis

1 Vorbereitungen

Das folgende wollen wir am Ende erhalten:

$$\frac{1}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|} = \frac{1}{r_>} \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{r_<}{r_>}\right)^l \frac{4\pi}{2l+1} \sum_{m=-l}^{l} Y^*_{lm}(\vartheta_2, \varphi_2) \cdot Y_{lm}(\vartheta_1, \varphi_1) = \frac{1}{r_>} \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{r_<}{r_>}\right)^l P_l(\cos\alpha)$$

Was steht in dieser Gleichung? Wir haben zwei Vektoren:

$$\begin{aligned} \vec{r}_1 &= (x_1, y_1, z_1)^T \in \mathbb{R}^3 \\ \vec{r}_2 &= (x_2, y_2, z_2)^T \end{aligned}$$

Erklärung der Polarkoordinaten:

$$\begin{aligned} r_1 = |\vec{r}_1| &= \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \\ r_2 = |\vec{r}_2| &= \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2} \\ x_1 &= r_1 \sin\vartheta_1 \cos\varphi_1 \\ y_1 &= r_1 \sin\vartheta_1 \sin\varphi_1 \\ z_1 &= r_1 \cos\vartheta_1 \end{aligned}$$

Man führt als verkürzende Schreibweisen ein:

$$\begin{aligned} r_> &= \max\{r_1, r_2\} \\ r_< &= \min\{r_1, r_2\} \end{aligned}$$

- $Y_{lm}(\vartheta, \varphi)$ ist eine (komplexwertige) **Kugelflächenfunktion**.
- $P_l(\cos\alpha) = \frac{4\pi}{2l+1} \sum_{m=-l}^{l} Y^*_{lm}(\vartheta_2, \varphi_2) \cdot Y_{lm}(\vartheta_1, \varphi_1)$ ist ein **Legendrepolynom**.
- Hierbei ist α der Winkel zwischen den Vektoren $\vec{r}_1$ und $\vec{r}_2$.

Literatur

Die meisten dieser Bücher sind fast nur noch in der Bibliothek, auf Flohmärkten und Dachböden erhältlich.

- Zur theoretischen Elektrodynamik
  - John David Jackson: „Classical Electrodynamics“ (Standardwerk; englische Ausgabe ist empfehlenswerter)
  - Greiner: „Klassische Elektrodynamik“ (alle Beispiele haarklein ausgeführt)
  - Landau/Lifschitz: „Klassische Feldtheorie“ (Band 2; die Landau/Lifschitz-Reihe ist eines der besten Theoriekompendia)
  - Purcell: „Berkeley Physics Course“ (dünne A4-Bände; dieses ist der blaue)
  - Becker/Sauto: „Theorie der Elektrodynamik“ (Vorkriegstextbuch; keine Kaufempfehlung, aber wenn man es schon da hat...)

- Zur Mathematik
  - Chun Wa Wong: „Introduction to Mathematical Physics“ / „Mathematische Physik“
  - Morsen/Fischbach: „Methods of Theoretical Physics“ (Band 1 und 2; teuer, aber richtig gut)
  - Maigenon/Murphy: „The Mathematics for Physics and Chemistry“ / „Die Mathematik für Physik und Chemie“ (wenn man den kriegen kann, immer her damit)
  - Courant/Hilbert: „Methoden der mathematischen Physik“ (altmodisch, aber gut)
- Die drei wichtigsten – Mehr braucht man nicht bis zur Promotion.
  - Arfken/Weber: „Mathematical Methods for Physicists“ („International Edition“)
  - Sadri Hassani: „Mathematical Physics“
  - Riley/Hobson/Bence: „Mathematical Methods for Physicists“ (gibt es auch mit Lösungsbuch)

2 Motivation

Das Potential einer Ladung im Koordinatenursprung ist

$$\Phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q}{r}$$

Hierbei ist

$$q = ze \quad \text{mit} \quad z \in \mathbb{Z}$$

die Ladung mit der Elementarladung e. Definiere

$$\tilde{\Phi}(\vec{r}) := \frac{\widetilde{q}}{r} := \frac{z}{r}\frac{e}{\sqrt{4\pi\varepsilon_0}}$$

Dann ist die Kraft zwischen zwei Ladungen gegeben durch

$$\vec{F} = \frac{q_1 q_2}{r^2} \cdot \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} = \frac{\widetilde{q}_1\widetilde{q}_2}{r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}$$

Für eine Ladung, die nicht am Koordinatenursprung liegt, ist

$$\begin{aligned} \Phi(\vec{r}) &= \tfrac{1}{|\vec{r}-\vec{r}_0|} \\ &= q \cdot \tfrac{1}{|\vec{r}-\vec{r}_0|} \\ &= q \cdot \tfrac{1}{\sqrt{\langle \vec{r}-\vec{r}_0, \vec{r}-\vec{r}_0 \rangle}} \\ &= q \cdot \tfrac{1}{\sqrt{\vec{r}^2 + \vec{r}_0^2 - 2 \cdot |\vec{r}| \cdot |\vec{r}_0| \cdot \cos\alpha}} \end{aligned}$$

Hierbei ist α der Winkel zwischen $\vec{r}$ und $\vec{r}_0$. Für $r > r_0$ ist

$$\Phi(\vec{r}) = \frac{q}{r} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{r_0}{r}\right)^2 - 2\frac{r_0}{r}\cos\alpha}} = \frac{q}{r\sqrt{1+x}} \qquad \text{mit} \qquad x = \left(\frac{r_0}{r}\right)^2 - 2\frac{r_0}{r}\cos\alpha$$

Entwicklung in Taylor-Reihe für nicht zu große x:

$$\begin{aligned} \Phi(\vec{r}) &= \tfrac{q}{r} \cdot \sum_{\nu=0}^{\infty} \tfrac{1}{\nu!} \left(\tfrac{\partial}{\partial x}\right)^{\nu} \cdot \tfrac{1}{\sqrt{1+x}}\Big|_{x=0} \\ &= \tfrac{q}{r} \cdot \left[1 - \tfrac{1}{2} \cdot (1+x)^{-3/2}\Big|_{x=0} x + \tfrac{1}{2}\left(-\tfrac{1}{2}\right)\left(-\tfrac{3}{2}\right)(1+x)^{-5/2}\Big|_{x=0} \cdot x^2 + \ldots\right] \\ &= \tfrac{q}{r} \cdot \Big[1 - \tfrac{1}{2} \cdot (-2) \cdot \tfrac{r_0}{r} \cdot \cos\alpha - \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{r_0}{r}\right)^2 + \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{3}{4} \cdot (-2)^2 \cdot \left(\tfrac{r_0}{r}\right)^2 \cdot \cos^2\alpha \\ &+ \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{3}{4} \cdot \left(\tfrac{r_0}{r}\right)^4 + \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{3}{4} \cdot 2 \cdot (-2) \cdot \left(\tfrac{r_0}{r}\right)^3 \cdot \cos\alpha + \ldots\Big] \\ &= \tfrac{q}{r} \cdot \sum_{\nu=0}^{\infty} \left(\tfrac{r_0}{r}\right)^{\nu} \cdot (\text{Polynom im } \cos\alpha)_{\text{zum Index } \nu} \end{aligned}$$

In die Taylorreihe eingesetzt wurde $x = -2\frac{r_0}{r} \cdot \cos\alpha + \left(\frac{r_0}{r}\right)^2$.

ν	$P_\nu(\cos\alpha)$
0	1
1	$\cos\alpha$
2	$-\frac{1}{2} + \frac{3}{2}\cos^2\alpha$
$\vdots$	$\vdots$

Das Potential einer Ladung in $\vec{r}_0$ ist also

$$\Phi(\vec{r}) = \frac{q}{|\vec{r} - \vec{r}_0|} = \frac{q}{r} \cdot \sum_{\nu=0}^{\infty} \left(\frac{|r_0|}{|r|}\right)^{\nu} P_\nu(\cos\alpha)$$

Das gilt auch für $\vec{r}_0 = \vec{0}$. Dann ist $\Phi(\vec{r}) = \frac{q}{r}$. Hier war $|\vec{r}| > |\vec{r}_0|$.

$$\frac{1}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|} = \frac{1}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|} = \frac{1}{r_>} \sum_{\nu=1}^{\infty} \left(\frac{r_<}{r_>}\right)^{\nu} \cdot P_\nu(\cos\alpha)$$

Die Reihe

$$\Phi(\vec{r}) = \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_0|} = \frac{q}{r} \cdot \sum \left(\frac{r_0}{r}\right)^{\nu} \cdot P_\nu(\cos\alpha)$$

und ihre Verwandten heißen **Multipolentwicklungen**.

Warum heißt das „Multipolentwicklung“? Betrachte dazu eine Punktladung q am Punkt $\vec{r}_1$ und eine Ladung $-q$ am Punkt $\vec{r}_2$. Der Mittelpunkt ist dann $\frac{1}{2} \cdot (\vec{r}_1 + \vec{r}_2)$.
Das Potential ist dann

$$\Phi(\vec{r}) = \frac{q}{|\vec{r} - \vec{r}_1|} + \frac{-q}{|\vec{r} - \vec{r}_2|} = q \cdot \left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_1|} - \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_2|}\right)$$

Zum Auflösen benutze folgende Koordinatentransformation:

$$\begin{aligned} \widetilde{\vec{r}} &= \vec{r} - \tfrac{1}{2} \cdot (\vec{r}_1 + \vec{r}_2) \\ \widetilde{\vec{r}_1} &= \vec{r}_1 - \tfrac{1}{2} \cdot (\vec{r}_1 + \vec{r}_2) = \tfrac{1}{2} \cdot (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \\ \widetilde{\vec{r}_2} &= \vec{r}_2 - \tfrac{1}{2} \cdot (\vec{r}_1 + \vec{r}_2) = \tfrac{1}{2} \cdot (\vec{r}_2 - \vec{r}_1) = -\widetilde{\vec{r}_1} \end{aligned}$$

Damit:

$$\begin{aligned} \Phi(\vec{r}) &= q \cdot \left(\frac{1}{|\widetilde{\vec{r}} - \widetilde{\vec{r}_1}|} - \frac{1}{|\widetilde{\vec{r}} - \widetilde{\vec{r}_2}|}\right) \\ &= q \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{\widetilde{r}^2 + \widetilde{r}_1^2 - 2 \cdot \widetilde{r} \cdot \widetilde{r}_1 \cdot \cos\alpha}} - \frac{1}{\sqrt{\widetilde{r}^2 + \widetilde{r}_1^2 + 2 \cdot \widetilde{r} \cdot \widetilde{r}_1 \cdot \cos\alpha}}\right) \\ &= q \cdot \left(\frac{1}{\widetilde{r}} \cdot \sum_{\nu=0}^{\infty} \left(\frac{\widetilde{r}_1}{\widetilde{r}}\right)^{\nu} \cdot P_\nu(\cos\alpha) - \frac{1}{\widetilde{r}} \cdot \sum_{\nu=0}^{\infty} \left(\frac{\widetilde{r}_1}{\widetilde{r}}\right)^{\nu} \cdot (-1)^{\nu} \cdot P_\nu(\cos\alpha)\right) \qquad (*) \end{aligned}$$

Denn man kann folgende Entwicklung anwenden:

$$\begin{aligned} \frac{q}{|\vec{r} - \vec{r}_0|} &= \frac{q}{r} \cdot \Big[1 - \tfrac{1}{2} \cdot (-2) \cdot \tfrac{r_0}{r} \cdot \cos\alpha - \tfrac{1}{2} \cdot \left(\tfrac{r_0}{r}\right)^2 \\ &+ \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{3}{4} \cdot (-2)^2 \cdot \left(\tfrac{r_0}{r}\right)^2 \cdot \cos^2\alpha + \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{3}{4} \cdot \left(\tfrac{r_0}{r}\right)^4 \\ &+ \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{3}{4} \cdot 2 \cdot (-2) \cdot \left(\tfrac{r_0}{r}\right)^3 \cdot \cos^2\alpha + \ldots\Big] \end{aligned}$$

Davon sind Sie bitte überzeugt! Aus $(*)$ folgt nun:

$$\begin{aligned} \Phi(\vec{r}) &= \frac{q}{r} \cdot \left(\sum_{\nu=0}^{\infty} \left(\frac{\widetilde{r}_1}{\widetilde{r}}\right)^{\nu} P_\nu(\cos\alpha) - \sum_{\nu=0}^{\infty} \left(\frac{\widetilde{r}_1}{\widetilde{r}}\right)^{\nu} (-1)^{\nu} P_\nu(\cos\alpha)\right) \\ &= \frac{2q}{\widetilde{r}} \left(P_1(\cos\alpha) \cdot \frac{\widetilde{r}_1}{\widetilde{r}} + P_3(\cos\alpha) \left(\frac{\widetilde{r}_1}{\widetilde{r}}\right)^3 + \ldots\right) \end{aligned}$$

Hier kommen nur die P_ν für ungerade ν vor! Für $\widetilde{r}_1 \ll \widetilde{r}$ kann man bis auf den ersten alle Terme vernachlässigen.

$$\Phi(\vec{r}) = \frac{2q}{\widetilde{r}} \cdot \frac{\widetilde{r}_1}{\widetilde{r}} \cdot P_1(\cos\alpha)$$

Der Term mit P_1 heißt „Dipolterm“, da er bei der Betrachtung von Dipolen aus großer Entfernung ausreicht. Heben sich die Ladungen bei $\vec{r}_1$ und $\vec{r}_2$ nicht gegenseitig auf, muss man noch den P_0-Term betrachten. Dieser heißt „Monopolterm“.

Aufgabe: Quadrupol

> Berechnen Sie das Potential eines Quadrupols. Das ist ein Quadrat, in dessen Ecken abwechselnd Ladungen q und $-q$ angeordnet sind.

Beim Quadrupol dominiert der P_2-Term. So setzt sich die Reihe fort:

Der Term ...	... dominiert beim ...
P_0	Monopol
P_1	Dipol
P_2	Quadrupol
P_3	Oktopol
P_4	Hexadekupol

Wir betrachten eine Ladungsverteilung $\varrho(\vec{r})$. Dann ist in einem Volumen

$$\iiint \varrho(\vec{r})\ \mathrm{d}^3\vec{r}' = Q$$

die Gesamtladung. Das Potential $\Phi(\vec{r})$ ist noch gesucht.

$$\begin{aligned}
\Phi(\vec{r}) &= \sum_{n=1}^{N} \frac{q_n}{|\vec{r}-\vec{r}_n|} \\
&= \iiint \frac{\varrho(\vec{r}')\ \mathrm{d}^3 r'}{\left|\vec{r}-\vec{r}'\right|} \\
&= \frac{1}{r} \iiint \varrho(\vec{r}') \cdot \left[\sum_{\nu=0}^{\infty} \left(\frac{r'}{r}\right)^{\nu} P_\nu(\cos\alpha)\right]\ \mathrm{d}^3 r'
\end{aligned}$$

Jetzt verändert sich auch α, der Winkel zwischen $\vec{r}$ und $\vec{r}'$. Wir zeigen später, dass gilt:

$$P_l(\cos\alpha) = \frac{4\pi}{2l+1} \cdot \sum_{m=-l}^{l} Y^*_{lm}(\vartheta', \varphi') \cdot Y_{lm}(\vartheta, \varphi)$$

Geht man in Polarkoordinaten über mit dem Integrationsmaß

$$\mathrm{d}^3 r' = \mathrm{d}\Omega\ \mathrm{d}r' = \left(r'\right)^2 \sin\vartheta'\ \mathrm{d}\vartheta'\ \mathrm{d}\varrho'\ \mathrm{d}r' = \left(r'\right)^2\ \mathrm{d}(\cos\vartheta)'\ \mathrm{d}\varrho'\ \mathrm{d}r'$$

(ohne Beachtung der Vorzeichen)

$$\begin{aligned}
\Phi(\vec{r}) &= \frac{1}{r} \iiint \varrho(\vec{r}') \cdot \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{r'}{r}\right)^{l} \cdot \frac{4\pi}{2l+1} \cdot \sum_{m=-l}^{l} Y^*_{lm}(\vartheta', \varphi') \cdot Y_{lm}(\vartheta, \varphi) \cdot \left(r'\right)^2\ \mathrm{d}(\cos\vartheta)'\ \mathrm{d}\varrho'\ \mathrm{d}r' \\
\Phi(\vec{r}) &= \frac{1}{r} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{4\pi}{2l+1} \cdot \frac{1}{r^l} \cdot Y_{lm}(\vartheta, \varphi) \cdot \underbrace{\iiint \varrho(\vec{r}') \cdot \left(r'\right)^l \cdot Y^*_{lm}(\vartheta', \varphi') \cdot \left(r'\right)^2\ \mathrm{d}(\cos\vartheta)'\ \mathrm{d}\varrho'\ \mathrm{d}r'}_{\text{keine Abhängigkeit von } \vec{r}}
\end{aligned}$$

Man nennt

$$\begin{aligned}
q^*_{lm} &= \iiint \varrho(\vec{r}')\, (r')^l\, Y^*_{lm}(\vartheta', \varrho')\ \mathrm{d}^3 r' \\
q_{lm} &= \iiint \varrho(\vec{r}')\, (r')^l\, Y_{lm}(\vartheta', \varrho')\ \mathrm{d}^3 r'
\end{aligned}$$

Multipolmomente einer Ladungsverteilung. Speziell heißt ein solches q für $l = 0$ Monopolmoment (und ist bis auf einen Faktor, die Gesamtladung, bestimmt), und für $l = 1$ Dipolmoment (mit 3 Komponenten für $m = -1, 0, 1$) und für

$l = 0$	Monopolmoment	(mit einer Komponente, bis auf einen Faktor, die Gesamtladung, bestimmt)
$l = 1$	Dipolmoment	(mit drei Komponenten für $m = -1, 0, 1$)
$l = 2$	Quadrupolmoment	(mit fünf Komponenten für $m = -2, -1, 0, 1, 2$)

3 Legendrepolynome

3.1 Erzeugendenfunktion

$$\frac{1}{\sqrt{1-tx+t^2}} = \sum_{l=0}^{\infty} t^l \cdot P_l(x)$$

Diese Gleichung[1] heißt **Erzeugendenfunktion** und wird mit $E(x,t)$ bezeichnet. Woher der Name?

$$\begin{aligned}
\tfrac{1}{l!} \cdot \tfrac{\mathrm{d}^l}{\mathrm{d}t^l} E(x,t)\Big|_{t=0} &= \tfrac{1}{l!} \cdot \tfrac{\mathrm{d}^l}{\mathrm{d}t^l} \sum_{\nu=0}^{\infty} A^{\nu} P_{\nu}(x)\Big|_{t=0} \\
&= \tfrac{1}{l!} \cdot \Big[\underbrace{0+\ldots+0}_{\text{für } \nu<l} + l! \cdot P_l(x) + (l+1)\cdot 2t^1 P_{l+1}(x) + (l+2)(l+1)\cdots 3t^2 P_{l+2}(x)\Big]_{t=0} \\
&= \tfrac{1}{l!} \cdot [0 + l! \cdot P_l(x) + 0 + 0 + \ldots] \\
&= P_l(x)
\end{aligned}$$

Damit ist:

$$P_l(x) = \frac{1}{l!} \cdot \frac{\mathrm{d}^l}{\mathrm{d}t^l}\left[\frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}}\right]_{t=0}$$

Betrachte spezielle P_l:

$$\begin{aligned}
P_0 &= 1 && = 1 \\
P_1 &= \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \tfrac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}}\Big|_{t=0} = \left(-\tfrac{1}{2}\right) \cdot (-2x) && = x \\
(*) &= 1 \cdot \left(-\tfrac{1}{2}\right) \cdot \tfrac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}} \cdot (-2x+2t)\Big|_{t=0} && \\
P_2 &= \tfrac{1}{2!} \tfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} \tfrac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}}\Big|_{t=0} = \tfrac{1}{2!} \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(*)\big|_{t=0} = \ldots && = \tfrac{3}{2}x^2 - \tfrac{1}{2} \\
P_3 &= \tfrac{1}{3!} \tfrac{\mathrm{d}^3}{\mathrm{d}t^3} \tfrac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}}\Big|_{t=0} = \tfrac{1}{3} \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(*) && = \tfrac{1}{2}(5x^3 - 3x)
\end{aligned}$$

3.2 Differentialgleichung

Es gibt Funktionen mit

$$\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(1-x^2)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} - \frac{m^2}{1-x^2} + C\right] P_l^m(x) = (1-x^2) \cdot \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} P_l^m(x) - 2x \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} P_l^m(x) - \frac{m^2}{1-x^2} \cdot P_l^m(x) + C \cdot P_l^m(x) = 0$$

In der Klammer steht ein selbstadjungierter Differentialoperator. Die Gleichung heißt **Legendre'sche Differentialgleichung** für $m = 0$.

Satz: Die Eigenwerte eines selbstadjungierten Differentialoperators bilden eine Basis des Funktionenraumes. (Das ist die Grundlage zum Beispiel für die Fouriertransformation.) Daher kann man jede Funktion als Legendre-Polynom darstellen.

Herleitung der Differentialgleichung aus der Erzeugenden.

[1] Wenn man mit $\frac{1}{r_>}$ multipliziert, x mit $\cos\alpha$ und t mit $\frac{r_<}{r_>}$ ersetzt, erhält man die bereits oben benutzte Gleichung.

(A) Wir differenzieren $E(x,t)$ nach x.

$$\begin{aligned}
\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}E(x,t) &= \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(1-2tx+t^2\right)^{-1/2} \\
&= -\tfrac{1}{2}\sqrt{1-2tx+t^2}^{-3/2}\cdot(-2t) \\
&= \tfrac{t}{(1-2xt+t^2)}(1-2xt+t^2)^{-1/2} \\
&= \tfrac{t}{(1-2xt+t^2)}\cdot E(x,t) \\
&= \tfrac{t}{(1-2xt+t^2)}\sum_{l=0}^{\infty} t^l\cdot P_l(x)
\end{aligned}$$

Alternativ rechnet man mit der rechten Seite:

$$\begin{aligned}
\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}E(x,t) &= \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sum_{l=0}^{\infty} t^l\cdot P_l(x) \\
&= \sum_{l=0}^{\infty} t^l\cdot \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}P_l(x)
\end{aligned}$$

$$(1-2xt+t^2)\cdot\sum_{l=0}^{\infty} t^l\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}P_l(x) - t\cdot\sum_{l=0}^{\infty} t^l\cdot P_l(x) = 0$$

Sortiere nach Potenzen von t:

$$\sum_{l=0}^{\infty} t^l\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}P_l(x) - 2x\cdot\sum_{l=0}^{\infty} t^{l+1}\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}P_l(x) - \sum_{l=0}^{\infty} t^{l+1}\cdot P_l(x) + \sum_{l=0}^{\infty} t^{l+2}\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}P_l(x) = 0$$

Mit $l=n+1$ im ersten, $l=n$ im zweiten und dritten sowie $l=n-1$ im letzten Teil:

$$\begin{aligned}
0 &= \sum_{n=1}^{\infty} t^{n+1}\cdot\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}P_{n+1}(x) - 2x\cdot\sum_{n=1}^{\infty} t^{n+1}\cdot\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}P_n(x) - \sum_{n=1}^{\infty} t^{n+1}\cdot\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}P_n(x) + \sum_{n=1}^{\infty} t^{n+1}\cdot\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}P_n(x) \\
&+ t\cdot\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}P_1(x) + t^0\cdot\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}P_0(x) - 2xt\cdot\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}P_0(x) - t\cdot P_0(x) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} t^{n+1}\cdot\left[\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}P_{n+1}(x) - 2x\cdot\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}P_n(x) - P_n(x) + \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}P_{n-1}(x)\right] \\
&+ \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}P_0(x) + t\cdot\left[\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}P_1(x) - 2x\cdot\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}P_0(x) - P_0(x)\right]
\end{aligned}$$

Das muss für alle t gelten. Setzen wir $t=0$ ein, sehen wir, dass $P_0 = \text{const.}$ sein muss. Aus E sieht man: $P = \mathbb{1}$.
$\ldots = 0\ \forall t$ gilt genau dann, wenn $[\ldots]_1$ und $[\ldots]_2 \equiv 1$

Betrachte die erste Klammer:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}P_1(x) = P_0(x)$$

und die zweite Klammer

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}P_{n+1}(x) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}P_{n+1}(x) = 2x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}P_n(x) + P_n(x) \qquad (**)$$

Nun leiten wir E nach t ab:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}E(x,t) = -\frac{1}{2}\frac{-2x+2t}{(1-2tx+t^2)^{3/2}} = \frac{x-t}{1-2xt+t^2}E(x,t) = \frac{x-t}{1-2tx+t^2}\sum_{l=0}^{\infty} t^l\cdot P_l(x) = \sum_{l=0}^{\infty} l\cdot P_l(x)\cdot t^{l-1}$$

Rechnung mit den letzten beiden Termen:

$$\sum_{l=1}^{\infty} l\cdot P_l(x)\cdot t^{l-1} - \sum_{l=1}^{\infty} 2xl\cdot P_l(x)\cdot t^{l-1+1} + \sum_{l=1}^{\infty} l\cdot P_l(x)\cdot t^{l-1+2} - \sum_{l=0}^{\infty} x\cdot P_l(x)\cdot t^l + \sum_{l=0}^{\infty} P_l(x)\cdot t^{l+1} = 0$$

Transformieren der Grenzen (vlnr): $n = l-1$, $n = l$, $n = l+1$, $n = l$ und $n = l+1$ um jeden Summanden auf die selbe Potenz von t zu bekommen.

$$\sum_{n=1}^{\infty} t^n(n+1)P_{n+1}(x) - \sum_{n=1}^{\infty} t^n 2xnP_n(x) + \sum_{n+2}^{\infty} t^n(n-1)P_{n-1}(x) - \sum_{n=1}^{\infty} t^n xP_n(x) + \sum_{n=1}^{\infty} t^n P_{n-1}(x) = 0 + t_0P_1(x) - xP_0(x)$$

(dritte Summand = 0 für $n = 1$)

$$t_0P_1(x) - xP_0(x) + \sum_{n=1}^{\infty} t^n \left[(n+1)P_{n+1}(x) - 2xnP_n(x) + (n-1)P_{n-1}(x) - xP_1(x) + P_{n-1}(x)\right] = 0 \;\forall t$$

Zusammenfassen der Summanden:

$$P_1(x) - x\cdot P_0(x) + \sum_{n=1}^{\infty} t^n \cdot \left[(n+1)\cdot P_{n+1}(x) - 2xn\cdot P_n(x) + (n-1)\cdot P_{n-1}(x) - x\cdot P_n(x) + P_{n-1}(x)\right] = 0 \;\forall t$$

Betrachte nun $t = 0 :\Rightarrow P_1(x) = x\cdot P_0(x)$. Die Eckige Klammer liefert:

$$\overset{(n\to l)}{\Rightarrow} \boxed{(2l+1)xP_l(x) = (l+1)P_{l+1}(x) + lP_{l-1}(x)}$$

Auflösen nach $P_{1+l}(x)$:

$$(l+1)P_{l+1}(x) = (2l+1)xP_l(x) - lP_{l-1}(x)$$

Damit kann man die Reihe konstuieren, wenn man zwei aufeinanderfolgende Gleider kennt (Rekursionsformel).

Zum Beispiel P_2 aus P_0 und P_1 mit $(l = 1)$:

$$\begin{aligned}(1+1)P_2(x) &= (2\cdot 1+1)xP_1(x) - 1P_0(x)\\ P_2(x) &= \tfrac{1}{2}\cdot 3x^2 - \tfrac{1}{2}\end{aligned}$$

Weiter mit der eingeboxten Funktion. Die zeitliche Ableitung

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\boxed{\cdots} = (2l+1)P_l(x) + (2l+1)x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}P_l(x) = (l+1)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}P_{l+1}(x) + l\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}P_{l-1}(x)$$

das ganze mal 2:

$$2(2l+1)\cdot P_l(x) + 2(2l+1)\cdot x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\cdot P_l(x) = 2\cdot(l+1)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}P_{l+1}(x) + 2l\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}P_{l-1}(x)$$

$-(2l+1)(**)$ ranaddieren:

$$-(2l+1)(**) - 2(2l+1)\cdot P_l(x) - (2l+1)\cdot x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\cdot P_l(x) = -(2l+1)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}P_{l+1}(x) + (2l+1)\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}P_{l-1}(x)$$

$$= 0 + (2l+1)P_l(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}P_{l+1}(x) - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}P_{l-1}(x)$$

einmal $+(**)$

$$= 0 + (2l+2)P_l(x) + 2x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}P_l(x) = 2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}P_{l+1}(x) - 0$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}P_{l+1}(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}P_l(x) + (l+1)P_l(x)$$

Übergang $l \to l-1$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}P_l(x) = x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}P_{l-1}(x) + lP_{l-1}(x) \qquad (\substack{*\\**})$$

und $-(**)$

$$= (2l)P_l(x) - 2x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}P_l(x) = 0 - 2 \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}P_{l-1}(x)$$

$$\Leftrightarrow \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}P_{l-1}(x) = x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}P_l(x) - lP_l(x) \qquad \binom{**}{**}$$

Aus $\left(\begin{smallmatrix}**\\**\end{smallmatrix}\right) \cdot x$:

$$x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}P_l(x) = x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}P_l l - 1(x) + xlP_l(x)$$

Subtrahiert man diesen Ausdruck von $\binom{*}{**}$ erhält man:

$$(1-x^2)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}P_l(x) = lP_{l-1}(x) - xlP_l(x)$$

Rekursionsformel für die Ableitung

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} - 2x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}P_l(x) + (1-x^2)\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}P_l(x) = l\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}P_{l-1}(x) - lP_l(x) - xlP_l(x)$$

erster Summand rechte Seite:

$$\binom{**}{**} : lx\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}P_l(x) - l^2P_l(x)$$

Es folgt

$$\Rightarrow (1-x^2)\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}P_l(x) - 2x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}P_l(x) = -l^2P_l(x) - lP_l(x)$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(1-x^2)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} + l(l+1) = 0$$

Die anfängliche Legendre-Differentialgleichung wird also erfüllt mit $c = l(l+1)$.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(1-x^2)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}P_l(x) + l(l+1)P_l(x) = 0$$

Differentialgleichung für Legendrepolynome

3.3 Lösung der Differentialgleichung

$$\left\{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(1-x^2)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} + c\right\}P(x) = 0$$

$$\left\{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(1-x^2)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right\}P(x) = cP(x) = \tilde{c} \cdot P(x)$$

Ähnlichkeit zur Matrizenrechnung: $A\vec{x} = \lambda\vec{x}$

Ansatz:

$$P(x) = \sum_{\lambda=0}^{\infty} a_\lambda x^{\lambda+s}$$

$a_0 \neq 0, s \geq 0 \Rightarrow P(x) \in C^0(0) \in C^0[-1,1]$ weil $P_l(\cos\alpha) \in P[-1,1]$

Wenn wir das einsetzen bekommen wir:

$$\begin{aligned}
\left\{\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(1-x^2)\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}+c\right\}P(x)\overset{!}{=}0 &= \left\{(1-x^2)\tfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}-2x\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}+c\right\}P(x)\\
&= \left\{(1-x^2)\tfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}-2x\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}+c\right\}\sum_{\lambda=0}^{\infty}a_\lambda x\lambda-s=0\\
0 &\overset{!}{=} \sum_{\lambda=0}^{\infty}a_\lambda(\lambda+s)(\lambda+s-1)x^{\lambda+s-2}-a_\lambda(\lambda+s)(\lambda+s-1)x^{\lambda+s-2+2}\\
&- 2a_\lambda(\lambda+s)x^{\lambda+s-1+1}+ca_\lambda x^{\lambda+s}
\end{aligned}$$

$$\sum_{\lambda=0}^{\infty}a_\lambda(\lambda+s)(\lambda+s-1)x^{\lambda+s-1}=a_0s(s-1)x^{s-\lambda}+a_1(s+1)(1+s-1)x^{s-1}+\sum_{\lambda=0}^{\infty}a_\lambda(\lambda+s)(\lambda+s-1)x^{\lambda+s-2}$$

setze $\widetilde{\lambda}=\lambda-2$ in der Summe

$$\sum_{\widetilde{\lambda}=0}^{\infty}a_{\widetilde{\lambda}+2}(xt\lambda+s+2)(\widetilde{\lambda}+s+1)x^{\widetilde{\lambda}+s}\Rightarrow$$

$$\begin{aligned}
0 &= \sum_{\lambda=0}^{\infty}x^{\lambda+s}\cdot\Big[(\lambda+s+2)\cdot(\lambda+s+1)\cdot a_{\lambda+2}-(\lambda+s)\cdot(\lambda+s-1)\cdot a_\lambda-2\cdot(\lambda+s)\cdot a_\lambda+c\cdot a_\lambda\Big]\\
&+ a_0\cdot s\cdot(s-1)\cdot x^{s-2}+a_1\cdot(s+1)\cdot s\cdot x^{s-1}\ \forall x
\end{aligned}$$

Das geht (für feste x, s und a_λ) nur, wenn $[\cdots]=0\ \forall\lambda$ und

$$\begin{aligned}
a_0\cdot s\cdot(s-1) &= 0 \qquad (1)\\
a_1\cdot(s+1)\cdot s &= 0 \qquad (2)
\end{aligned}$$

Aus (1) folgt

$$s=0 \text{ oder } s=1$$

Aus (2) folgt

$$s=0 \text{ oder } s=-1 \text{ oder } a_1=0$$

$s=-1$ entfällt, da die Funktion dann nicht mehr stetig wäre. Also ist $s=0$ oder $s=1$ und $a_1=0$. Auch die Klammer soll verschwinden:

$$0=a_{\lambda+2}\cdot(\lambda+s+2)\cdot(\lambda+s+1)-a_\lambda\cdot\Big[(\lambda+s)\cdot(\lambda+s-1)-2\cdot(\lambda+s)+c\Big]$$

$$\boxed{a_{\lambda+2}=a_\lambda\cdot\frac{(\lambda+s)\cdot(\lambda+s+1)-c}{(\lambda+s+2)\cdot(\lambda+s+1)}}$$

Im Falle $s=0$ ergeben sich zwei unabhängige Ketten $a_0\to a_2\to a_4\to\ldots$ und $a_1\to a_3\to a_5\to\ldots$

Wir haben a_0. Dann ist:

$$\begin{array}{rcl|rcl}
a_2 &=& a_0\cdot\left(-\frac{c}{2}\right) & a_3 &=& a_1\cdot\frac{2-c}{6}\\
a_4 &=& a_2\cdot\frac{6-c}{12} & a_5 &=& a_3\cdot\frac{12-c}{20}\\
a_4 &=& a_0\cdot\left(-\frac{c}{2}\right)\cdot\frac{6-c}{12} & a_5 &=& a_1\cdot\frac{2-c}{6}\cdot\frac{12-c}{20}
\end{array}$$

Im Falle $s=1$ ist $a_1=0$ und damit auch alle a_λ für ungerade λ.

$$\begin{aligned}
a_2 &= a_0\cdot\tfrac{2-c}{6}\\
a_4 &= a_2\cdot\tfrac{12-c}{20}
\end{aligned}$$

Diese Kette stimmt mit der für $s = 0$ überein, denn es ist egal, ob man schreibt:

$$\sum \ldots = a_0 x^{0+1} + a_2 x^{2+1} + a_4 x^{4+1} \qquad (s = 1, a_1 = 0)$$

oder

$$\sum \ldots = a_1 x^1 + a_3 x^3 + a_5 x^5 \qquad (s = 0, a_1 \neq 0)$$

Vereinbarung: Wir setzen $\boxed{s = 0}$. Dann haben wir zwei Lösungen, die a_λ für gerade Indizes und die für ungerade Indizes. Das Polynom ergibt sich damit zu

$$\boxed{P(x) = a_0 \cdot \left[1 - \frac{c}{2} \cdot x^2 + \frac{c}{2} \cdot \frac{c-6}{12} \cdot x^4 + \ldots\right] + a_1 \cdot \left[x + \frac{2-c}{6} \cdot x^3 + \frac{2-c}{6} \cdot \frac{12-c}{20} \cdot x^5 + \ldots\right]}$$

Wir haben also eine unendliche Summe:

$$P(x) = \ldots + a_\lambda \cdot x^\lambda + a_{\lambda+2} \cdot x^{\lambda+2} + \ldots$$

Das ist nicht schlimm, solange die Summe zumindest auf $[-1, 1]$ konvergiert. Aber tut sie das überhaupt? Wir benutzen das Quotientenkriterium:

$$\frac{a_{\lambda+2} \cdot x^{\lambda+2}}{a_\lambda \cdot x^\lambda} = \frac{\lambda \cdot (\lambda+1) - c}{(\lambda+2) \cdot (\lambda+1)} \cdot x^2 \xrightarrow{\lambda \to \infty} \frac{\lambda^2}{\lambda^2} \cdot x^2 = x^2$$

Das heißt, jeder Term ist x^2-mal zu groß wie der vorige. Die Summe konvergiert folglich für $|x| < 1$ und divergiert für $|x| > 1$. Was ist bei $|x| = 1$? Wir benutzen den **Gauß'schen Konvergenztest**:

Ist $u_n > 0$ für alle endlichen n, ist außerdem $\frac{u_n}{u_{n+1}} = 1 + \frac{h}{n} + \frac{B(n)}{n^2}$ und ist zudem $B(n)$ beschränkt, d.h. es existiert ein beliebiges k mit $B(n) < k < \infty$, dann konvergiert $\sum u_i$ für $h > 1$ und divergiert für $h \leq 1$. Sei also $|x| = 1$ und $\lambda \equiv 2\mu$. Der Quotient aus zwei aufeinanderfolgenden Reihengliedern ist dann

$$\frac{a_{2\mu+2}}{a_{2\mu}} = \frac{2\mu \cdot (2\mu+1) - c}{(2\mu+2) \cdot (2\mu+1)} = \frac{a_{\mu+1}}{a_\mu}$$

Bilde den Kehrwert:

$$\frac{a_\mu}{a_{\mu+1}} = \frac{(2\mu+1) \cdot (2\mu+2)}{2\mu \cdot (2\mu+1) - c} \xrightarrow{\mu \to \infty} \frac{2\mu+2}{2\mu} = 1 + \frac{1}{\mu}$$

Vergleich mit Gauß: $B(n = 0) < k < \infty$, aber $h = 1$, also divergiert die Summe für $|x| = 1$.

Wir hatten:

$$a_{\lambda+2} = \frac{\lambda \cdot (\lambda+1) - c}{(\lambda+2) \cdot (\lambda+1)} \cdot a_\lambda$$

Was ist, wenn es ein λ gibt mit $\lambda \cdot (\lambda+1) - c = 0$? Dann verschwänden $a_{\lambda+2}$ und alle weiteren Glieder, und die Reihe würde natürlich konvergieren.

Wir können uns mit einer **Abbruchbedingung** retten: Die Reihe konvergiert für $|x| = 1$ nur, wenn $0 = \frac{\lambda \cdot (\lambda+1) - c}{(\lambda+2) \cdot (\lambda+1)}$ für irgendein λ ist, das heißt:

$$\boxed{c = n \cdot (n+1) \quad \text{mit} \quad n \in \mathbb{N}_0}$$

Gestern stand an der Tafel:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(1 - x^2)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}P_l(x) + l \cdot (l+1) \cdot P_l(x) = 0$$

Wir waren dann von $l \cdot (l+1)$ zu c übergegangen. Jetzt zeigt uns die Reihe, dass nur für c der obigen Form die Reihe im gewünschten Bereich konvergiert. Außerdem muss entweder a_0 oder a_1 (entsprechend dem λ) auch Null sein. Also kommen in der Reihe nur endlich viele gerade oder endlich viele ungerade Potenzen vor.

Für $l = 0$ ist $P_0(x) = a_0$. Außerdem ist $P_l(1) = 1\ \forall l$. Dies legen wir als Konvention fest, da es nicht möglich ist, aus der Differentialgleichung die freie Konstante festzulegen.

Für $l = 1$ ist $P_1(x) = a_1 \cdot x = x$ und $P_2(x) = 1 - \frac{6}{2} \cdot x^2$ (d.h. $l = 2$). Mit $x = 1$ kommt -2 raus, d.h. man muss mit $-\frac{1}{2}$ multiplizieren. $\Rightarrow P_2(x) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(1 - x^2)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}P(x) = k \cdot P(x) \quad \text{mit} \quad k = -l \cdot (l + 1) \quad \text{mit} \quad l \in \mathbb{N}$$

Nur dann sind $|P_l(1)|$ und $|P_l(-1)|$ endlich.

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} |\Psi(x)|^2 \, \mathrm{d}x < \infty$$

4 Einiges zu Differentialgleichungen und ihren Lösungen in der Physik

4.1 Motivation

Zum Beispiel:

$$\begin{aligned}
\text{Laplace-Gleichung im feldfreien Raum:} &\quad \Delta\Psi(\vec{x}) = \tfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\Psi(\vec{x}) + \tfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}y^2}\Psi(\vec{x}) + \tfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}z^2}\Psi(\vec{x}) = 0 \\
\text{Poisson-Gleichung:} &\quad \Delta\Psi(\vec{x}) = -\tfrac{\varrho}{\varepsilon_0} \\
\text{Helmholtz-Gleichung für Wellenausbreitung:} &\quad \Delta\Psi(\vec{x}) + k^2 \cdot \Psi(\vec{x}) = 0 \\
\text{Diffusionsgleichung:} &\quad \Delta\Psi(\vec{x}) - k^2 \cdot \Psi(\vec{x}) = 0 \\
\text{stationäre Schrödinger-Gleichung:} &\quad \Delta\Psi(\vec{x}) + V(\vec{x}) \cdot \Psi(\vec{x}) - E \cdot \Psi(\vec{x}) = 0
\end{aligned}$$

Mit $V(|\vec{x}|)$ kann man verallgemeinern:

$$\Delta\Psi(\vec{x}) + V(|\vec{x}|) \cdot \Psi(\vec{x}) + C\Psi(\vec{x}) = 0$$

$V(|\vec{x}|$ ist kugelsymmetrisch (von der Behandlung möglicher anderer Symmetrien sehen wir erstmal ab, denn die Kugelsymmetrie ist die häufigste) und C eine Konstante. Oben standen für c zum Beispiel E, k^2, $-k^2$ und 0. In Kugelkoordinaten:

$$\begin{aligned}
x &= r \cdot \sin\vartheta \cdot \cos\varphi \\
y &= r \cdot \sin\vartheta \cdot \sin\varphi \\
z &= r \cdot \cos\vartheta
\end{aligned}$$

Der Laplace-Operator transformiert sich wie folgt:

$$\Delta = \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}y^2} + \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}z^2} = \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2 \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\right) + \frac{1}{r^2 \sin\vartheta} \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\vartheta}\left(\sin\vartheta \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\vartheta}\right) + \frac{1}{r^2 \sin^2\vartheta} \cdot \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\varphi^2}$$

Wir wollen jetzt diese Differentialgleichung in Kugelkoordinaten lösen:

$$\Delta\Psi + V(r) \cdot \Psi + C \cdot \Psi = 0$$

Der Ansatz ist

$$\Psi(\vec{r}) = R(r) \cdot Y(\vartheta, \phi)$$

Damit ergibt sich aus der Differentialgleichung:

$$\begin{aligned}
& \tfrac{1}{r^2} \cdot \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2 \cdot \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\right) R(r) \cdot Y(\vartheta, \varphi) + \tfrac{1}{r^2 \sin\vartheta} \cdot \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\vartheta}\left(\sin\vartheta \cdot \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\vartheta}\right) R(r) \cdot Y(\vartheta, \varphi) + \tfrac{1}{r^2 \sin^2\vartheta} \cdot \tfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\varphi^2} R(r) \cdot Y(\vartheta, \varphi) \\
+ \; & V(r) \cdot R(r) \cdot Y(\vartheta, \varphi) + C \cdot R(r) \cdot Y(\vartheta, \varphi) = 0
\end{aligned}$$

Wir sortieren nach Termen, die zu den Ableitungen passen:

$$\begin{aligned}
& Y(\vartheta, \varphi) \cdot \left[\tfrac{1}{r^2} \cdot \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2 \cdot \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\right) R(r) + V(r) \cdot R(r) + C \cdot R(r)\right] \\
= \; & -\tfrac{1}{r^2} \cdot R(r) \cdot \left[\tfrac{1}{\sin\vartheta} \cdot \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\vartheta}\left(\sin\vartheta \cdot \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\vartheta}\right) Y(\vartheta, \varphi) + \tfrac{1}{\sin^2\vartheta} \cdot \tfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\varphi^2} Y(\vartheta, \varphi)\right]
\end{aligned}$$

Multipliziere mit $\frac{-r^2}{R(r)\cdot Y(\vartheta,\varphi)}$:

$$\begin{aligned} & -\left[\tfrac{1}{R(r)}\cdot\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2\cdot\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\right)R(r)+r^2\cdot V(r)+r^2\cdot C\right] \\ = & \ \tfrac{1}{Y(\vartheta,\varphi)}\cdot\left[\left(\tfrac{1}{\sin\vartheta}\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\vartheta}\left(\sin\vartheta\cdot\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\vartheta}\right)\right)Y(\vartheta,\varphi)+\left(\tfrac{1}{\sin^2\vartheta}\cdot\tfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\varphi^2}\right)Y(\vartheta,\varphi)\right] \end{aligned}$$

Wir haben die Radialvariable und die Winkelvariablen voneinander getrennt. Die angestrebte Lösung soll im gesamten Raum gültig sein, d.h. für alle r, ϑ, φ. Wenn man die ϑ und φ festhält und r bewegt, muss die Gleichung immer erfüllt sein, ebenso andersrum. Deshalb müssen beide Terme konstant sein, diese nennen wir $-\lambda$.

Das $-\lambda$ heißt **Separationskonstante**. Es gilt also:

$$-\lambda=\frac{1}{Y(\vartheta,\varphi)}\cdot\left[\frac{1}{\sin\vartheta}\cdot\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta\cdot\frac{\partial}{\partial\vartheta}\right)Y(\vartheta,\varphi)+\frac{1}{\sin^2\vartheta}\cdot\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}Y(\vartheta,\varphi)\right]$$

Wir machen einen Produktansatz:

$$Y(\vartheta,\varphi)=\Theta(\vartheta)\cdot\Phi(\varphi)$$

Man setze ein und beachte, auf was die Ableitungesoperatoren wirken.

$$0=\lambda\cdot\Theta(\vartheta)\cdot\Phi(\varphi)+\frac{\Phi(\varphi)}{\cancel{\Theta(\vartheta)\cdot\Phi(\varphi)}}\frac{1}{\sin\vartheta}\cdot\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta\cdot\frac{\partial}{\partial\vartheta}\right)\Theta(\vartheta)-\frac{\Theta(\vartheta)}{\cancel{\Theta(\vartheta)\cdot\Phi(\varphi)}}\cdot\frac{1}{\sin^2\vartheta}\cdot\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\Phi(\varphi)$$

Eigentlich würde man, wie oben gekennzeichnet, die Faktoren im Nenner von links heranmultiplizieren, damit sich die Formel vereinfacht. Dies machen wir jedoch nicht, stattdessen multiplizieren wir zusätzlich $\sin^2\vartheta$ heran.

$$\begin{aligned} 0 &= \tfrac{1}{\Theta(\vartheta)}\cdot\sin\vartheta\cdot\tfrac{\partial}{\partial\vartheta}(\sin\vartheta\cdot\tfrac{\partial}{\partial\vartheta})\Theta(\vartheta)+\lambda\cdot\sin^2\vartheta+\tfrac{1}{\Phi(\varphi)}\cdot\tfrac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\Theta(\vartheta) \\ -\tfrac{1}{\Phi(\varphi)}\cdot\tfrac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\Theta(\vartheta) &= \tfrac{1}{\Theta(\vartheta)}\cdot\sin\vartheta\cdot\tfrac{\partial}{\partial\vartheta}(\sin\vartheta\cdot\tfrac{\partial}{\partial\vartheta})\Theta(\vartheta)+\lambda\cdot\sin^2\vartheta=\text{const.}=\nu\quad\forall\vartheta,\varphi \end{aligned}$$

Wir haben nun eine Differentialgleichung von drei Variablen zu einem System von drei Gleichungen von einer Variablen entkoppelt, zum Preis von zwei Separationskonstanten. Die Differentialgleichungen für φ und ϑ lauten: (Dies sind die allgemeinen Differentialgleichungen für kugelsymmetrische Potentiale!)

$$\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\Phi(\varphi)=-\nu\cdot\Phi(\varphi)\quad\text{und}\quad\frac{1}{\sin\vartheta}\cdot\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta\cdot\frac{\partial}{\partial\vartheta}\right)\Theta(\vartheta)+\left(\lambda-\frac{\nu}{\sin\vartheta}\right)\Theta(\vartheta)=0$$

Die erste Gleichung hat eine wohlbekannte Form:

$$\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\Phi(\varphi)+\nu\cdot\Phi(\varphi)=0\quad\Rightarrow\quad\Phi(\varphi)=A\cdot\sin(\sqrt{\nu}\varphi)+B\cdot\cos(\sqrt{\nu}\varphi)\quad\text{für}\quad\nu\neq0$$

Mit $z=a+ib$ und $z^*=a-ib$:

$$\begin{aligned} z &= r\cdot\mathrm{e}^{i\varphi} \\ &= \sqrt{a^2+b^2}\cdot\mathrm{e}^{i\varphi}\quad\text{mit}\quad\tan\varphi=\tfrac{b}{a}\quad\text{für } b>0 \\ &= \sqrt{a^2+b^2}\cos\varphi+i\cdot\sqrt{a^2+b^2}\sin\varphi \end{aligned}$$

Denn es ist:

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^{i\varphi} &= \cos\varphi+i\cdot\sin\varphi \\ &= 1+\tfrac{(i\varphi)^2}{1!}+\tfrac{(i\varphi)^2}{2!}+\tfrac{(i\varphi)^3}{3!}+\tfrac{(i\varphi)^4}{4!}+\tfrac{(i\varphi)^5}{5!}+\ldots \\ &= \left(1+\tfrac{(i\varphi)^3}{3!}+\tfrac{(i\varphi)^5}{5!}+\ldots\right)+\left(\tfrac{(i\varphi)^2}{2!}+\tfrac{(i\varphi)^4}{4!}+\ldots\right) \end{aligned}$$

Die geraden Exponenten ergeben die Cosinusreihe, die ungeraden die Sinusreihe. Damit ist

$$\begin{aligned} \cos\varphi &= \tfrac{\mathrm{e}^{i\varphi}+\mathrm{e}^{-i\varphi}}{2} \\ \sin\varphi &= \tfrac{\mathrm{e}^{i\varphi}-\mathrm{e}^{-i\varphi}}{2i} \end{aligned}$$

Damit gehen wir vom $\mathbb{R}$ in den $\mathbb{C}$ über. (Reellwertige Funktionen sind nur ein Spezialfall der komplexwertigen Funktionen.)

$$\Phi(\varphi) = A \cdot \mathrm{e}^{i\sqrt{\nu}\varphi} + B \cdot \mathrm{e}^{-i\sqrt{\nu}\varphi}$$

Man zeigt leicht, dass dies eine Lösung der obigen Differentialgleichung ist, mit

$$\frac{\partial}{\partial\varphi}\mathrm{e}^{i\sqrt{\nu}\varphi} = i\sqrt{\nu}\mathrm{e}^{i\sqrt{\nu}\varphi} \quad \text{und} \quad \frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\mathrm{e}^{i\sqrt{\nu}\varphi} = -\nu\mathrm{e}^{i\sqrt{\nu}\varphi}$$

Im Spezialfalle $\nu = 0$ ist

$$\Phi(\varphi) = A + b\varphi \quad \text{und} \quad \frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} = 0$$

Die Physik fordert Periodizität der Funktion $\Phi(\varphi)$ mit der Periode 2π. Ist das so?

Für $\nu = 0$ muss $B = 0$ sein. Andernfalls muss $\sqrt{\nu} \in \mathbb{N}$ sein, denn nur dann ist $\sin(n\varphi) = \sin(n\varphi + 2\pi)$. Alle physikalischen Lösungen der Differentialgleichung von Φ können also durch einen ganzzahligen Parameter m beschrieben werden:

$$\Phi_m(\varphi) = C \cdot \mathrm{e}^{im\varphi} = C\left(\cos(m\varphi) + i\sin(m\varphi)\right) \qquad \text{mit} \qquad m = \pm\sqrt{\nu}$$

Wir wählen C so, dass die Lösung **normiert** ist. Das bedeutet im Allgemeinen:

$$1 = \int\limits_{\substack{\text{Defin.-}\\\text{bereich}}} |f(x)|^2 \, \mathrm{d}x$$

Im Komplexen ist

$$z^2 = |a + ib|^2 = z \cdot z^* = (a + ib) \cdot (a - ib) = a^2 + i \cdot ab + i(-i) \cdot b^2 - i \cdot ab = a^2 + b^2$$

Wie ist das mit Funktionen, die $\mathbb{R}$ in $\mathbb{C}$ abbilden? In unserem Falle wird $\varphi \mapsto \mathrm{e}^{im\varphi}$ abgebildet.

$$\int\limits_0^{2\pi} \varphi^2(x) \cdot f(x) \, \mathrm{d}x = \int\limits_0^{2\pi} |f(x)|^2 \, \mathrm{d}x \stackrel{!}{=} 1$$

Allgemein ist:

$$\langle f, g \rangle = \int\limits_{\substack{\text{Defin.-}\\\text{bereich}}} f^*(x) \cdot g(x) \, \mathrm{d}x$$

In unserem Fall:

$$1 \stackrel{!}{=} \int\limits_0^{2\pi} \Phi_m^*(\varphi) \cdot \Phi_m(\varphi) \, \mathrm{d}\varphi = \int\limits_0^{2\pi} C^2 \mathrm{e}^{im\varphi} \cdot \mathrm{e}^{-im\varphi} \, \mathrm{d}\varphi = \int\limits_0^{2\pi} C^2 \, \mathrm{d}\varphi = C^2 \cdot 2\pi$$

Also wird die Funktion durch $C = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ normiert:

$$\Phi_m(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \mathrm{e}^{im\varphi}$$

Mit $m = 0$ haben wir die Konstante A ermittelt.

$$\Phi_0(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$

Nun wenden wir uns der Gleichung für Θ zu.

$$\frac{1}{\sin\vartheta} \cdot \frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta \cdot \frac{\partial}{\partial\vartheta}\right)\Theta(\vartheta) + \left(\lambda - \frac{\nu}{\sin^2\vartheta}\right)\Theta(\vartheta) = 0$$

Wieder setzen wir $\nu = m^2$, denn ν ist auf beiden Seiten fest und stellt ein Bindeglied zwischen beiden Differentialgleichungen dar. Wir wenden eine Variablentransformation an: $x \equiv \cos\vartheta$, $\sin\vartheta = \sqrt{1-\cos^2\vartheta} = \sqrt{1-x^2}$

$$\frac{\partial}{\partial\vartheta} = \frac{\partial}{\partial\sin\vartheta} \cdot \frac{\partial\cos\vartheta}{\sin\vartheta} = -\sin\vartheta \cdot \frac{\partial}{\partial\sin\vartheta}$$

Einsetzen

$$-\frac{\sin\vartheta}{\sin\vartheta} \cdot \frac{\partial}{\partial\sin\vartheta}\left(-\sin\vartheta \cdot \sin\vartheta \cdot \frac{\partial}{\partial\sin\vartheta}\right)\Theta(\vartheta) - (\lambda - \frac{m^2}{\sin^2\vartheta})\Theta(\vartheta) = 0$$

und vereinfachen

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left((1-x^2) \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)\widetilde{\Theta}(x) + (\lambda - \frac{m^2}{1-x^2})\widetilde{\Theta}(x) = 0$$

Eine ähnliche Gleichung hatten wir schon mal bei den Legendre-Polynomen. Der Hauptunterschied ist der Term mit m^2. Die Legendre-Polynome sind also für $m = 0$ die Lösung für $\Theta(\cos\vartheta)$.

Ob dem das Spaß macht?

Zusammenfassung

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(1-x^2)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}P_l(x) + \lambda P_l(x) = 0 \quad \text{mit} \quad \lambda = l \cdot (l+1), l \in \mathbb{N}$$

Die P_l kennen wir schon.

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\varphi^2}\Phi(\varphi) + m^2\Phi(\varphi) = 0$$

Wird gelöst durch $\Phi_m(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{im\varphi}$

$$\frac{-m^2}{1-x^2}$$

4.2 Lineare Algebra im Funktionenraum

$$A\vec{x} = \lambda\vec{x}$$

$\vec{x}$ ist ein Vektor aus einem Vektorraum, A ist ein Matrix-Operator, der im Allgemeinen linear ist, also

$$A(\alpha\vec{x} + \beta\vec{y}) = \alpha A\vec{x} + \beta A\vec{y}$$

Hierbei sind α, β Zahlen aus dem Körper, der dem Vektorraum zugrunde liegt. (Dies ist eine Terminologie, die aber nicht so wichtig sind.)

TOLL

Ein Vektorraum hat die Dimension n, wenn es höchstens n linear unabhängige Vektoren gibt. Die Menge $\{x_i : i \in I\}$ heißt linear unabhängig, wenn gilt:

$$\sum_i a_i x_i = 0 \Leftrightarrow a_I = 0$$

Die Abbildung $h : V \times V \to \mathbb{R}$ (allg. $\mathbb{K}$) bzw. $h : \psi, \varphi \mapsto h(\varphi, \psi)$ heißt **hermitesche Form**, wenn für alle $\varphi, \psi \in V$ gilt:

- $h(\varphi, \psi) = h^*(\psi, \varphi)$ und $h(\varphi, \alpha\psi) = \alpha h(\varphi, \psi)$
- $h(\alpha\varphi, \psi) = \alpha^* h(\varphi, \psi)$ für $\alpha \in \mathbb{K}$
- $h^*(\psi, \alpha\varphi) = (\alpha h(\psi, \varphi))^* = \alpha^* h^*(\psi, \varphi) = \alpha^* h(\varphi, \psi)$
- $h(\varphi, \psi_1 + \psi_2) = h(\varphi, \psi_1) + h(\varphi, \psi_2)$
- Wenn $h(\varphi, \varphi) \geq 0$ und $= 0$ genau für $\varphi = 0$, dann heißt h **Skalarprodukt**.

Wiederholung

$$\Delta\psi(\vec{r}) + f(|\vec{r}|) \cdot \psi(\vec{r}) + k \cdot \psi(\vec{r}) = 0$$

In Polarkkordinaten konnten wir separieren:

$$\psi(\vec{r}) = R(r) \cdot Y(\vartheta, \varphi)$$

Hierbei haben wir erneut zerlegt:

$$Y(\vartheta, \varphi) = \Theta(\vartheta) \cdot \Phi(\varphi)$$

Damit ist

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\varphi^2}\Phi(\varphi) + m^2 \cdot \Phi(\varphi) = 0$$

Die Physik fordert Periodizität mit der Periode 2π, das heißt:

$$\Phi(\varphi) = \Phi(\varphi + 2\pi) \quad \forall\varphi \quad \Rightarrow \quad m \in \mathbb{Z}$$

Als Lösung fanden wir

$$\Phi(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \mathrm{e}^{im\varphi}$$

Für ϑ hatten wir diese Differentialgleichung gefunden:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\cos\vartheta}\left(1 - \cos^2\vartheta\right)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\cos\vartheta}\Theta(\cos\vartheta) + \left(\lambda - \frac{m^2}{1 - \cos^2\vartheta}\right)\Theta(\cos\vartheta) = 0$$

Für $m \equiv 0$ und $\cos\vartheta \equiv x$ kamen wir unter der Bedingung $\lambda = l(l+1)$ auf die Legendrepolynome.

Unser Ziel ist $P_l(x)$. Jetzt werden wir sehen, dass

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(1 - x^2)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \quad (+\text{const.})$$

ein selbstadjungierter Differentialoperator ist.

der Körper $\mathbb{K}$ ist unserem Falle $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$. Für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ist eine Hamilton'sche Form h immer eine Bilinearform, denn dann ist $h^* = h$. Wenn $h(\varphi, \varphi) \geq 0$ und $h(\varphi, \varphi) = 0$ mit $\varphi = 0$ zusammenfällt, dann ist h ein Skalarprodukt.

Beispiel für eine Operation, die wie ein Skalarprodukt aussieht, aber keines ist

$$\varphi \equiv (c \cdot t, x_1, x_2, x_3)$$

ist ein Weltpunkt (mit Zeit- und Raumkoordinaten). Das dazu wichtige Produkt ist die Minkowski-Metrik:

$$h(\varphi, \varphi) = c^2 \cdot t^2 - (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)$$

Für $h(\varphi, \varphi) > 0$ ist φ zeitartig. Mit $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$ folgt $h(\varphi_1 - \varphi_2, \varphi_1 - \varphi_2) > 0$. Ist $h(\varphi, \varphi) = 0$, so heißt φ lichtartig, für $h(\varphi, \varphi) < 0$ ist φ raumartig.

Für ein Skalarprodukt kann man immer eine Norm definieren:

$$|\cdot|_n : V \to \mathbb{K} \quad \text{mit} \quad |\varphi|_n = \sqrt{h(\varphi,\varphi)}$$

Für jedes Skalarprodukt kann man die Dreieckungleichung zeigen:

$$|\varphi + \psi| \leq |\varphi| + |\psi|$$

Und für das Skalarprodukt gilt die Cauchy-Schwarz-Ungleichung:

$$|h(\varphi,\psi)| \leq |\varphi| \cdot |\psi| \quad \forall \varphi,\psi \in V$$

Sei V nun ein Vektorraum mit Skalarprodukt und $\{\varphi_n\} \subset V$. Dann ist $\{\varphi_n\}$ eine Cauchy-Folge, wenn

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists N(\varepsilon) : \forall n, r > N(\varepsilon) : |\varphi_n - \varphi_r| < \varepsilon$$

Ein Vektorraum, in dem jede Cauchy-Folge konverigiert, ist ein vollständiger Raum. Ein vollständiger Raum mit Skalarprodukt heißt Hilbertraum.

$\mathbb{R}^n$ ist ein Hilbertraum für $n < \infty$. Die Menge $\left\{f \in C^0[a,b], \mathbb{C}\right\} = \{f : [a,b] \to \mathbb{C}, f \text{ stetig}\}$ mit

$$h(f,g) := \langle f|g\rangle = \int\limits_a^b f^*(x) \cdot g(x)\,\mathrm{d}x$$

ist ein Vektorraum mit Skalarprodukt mit unendlicher Dimension, jedoch kein Hilbertraum, da man Cauchy-Folgen von Funktionen konstruieren kann, die gegen nicht-stetige Funktionen konvergieren.

Zur Notation: Die Schreibweise $\langle f|g\rangle$ wird als „Bracket“ (engl. geschweifte Klammer) gelesen. f heißt kurz „Bra“, g wird „Ket“ genannt, denn „Bra“ + „Ket“ = „Bra(c)ket“. Diese Notation stammt aus der Quantenmechanik.

Gibt es denn noch andere Hilberträume? Ja, L_2 ist ein Hilbertraum. Dies ist der Raum der „quadrat-integrablen Funktionen“. Das heißt, dass

$$\int\limits_a^b f^*(x) \cdot f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_a^b |f(x)|^2 < \infty$$

Als Grenzen sind auch $a, b = \pm\infty$ möglich. Statt $[a,b]$ kann man also auch den gesamten $\mathbb{R}$ nehmen.

$$\langle\varphi|\psi\rangle = \int\limits_{\mathbb{R}^3} \varphi^*(\vec{x}) \cdot \psi(\vec{x})\,\mathrm{d}\vec{x}$$

Hilberträume sind separabel, das heißt, es existiert eine Menge $M \subset V$, die in V dicht liegt:

$$\forall \varepsilon > 0, \varphi \in V : \exists \varphi_m \in M : |\varphi - \varphi_m| < \varepsilon$$

In $\mathbb{R}$ sind das zum Beispiel die rationalen Zahlen. Zur Vollständigkeit: Eine Cauchy-Folge von Elementen aus M hat immer einen Grenzwert in V. Man kann zeigen, dass alle unendlichdimensionalen Hilberträume isomorph zu L_2 sind.

$\{\varphi_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ heißt Orthogonalsystem, falls $\langle\varphi_\lambda|\varphi_\mu\rangle = 0$ ist für alle $\lambda \neq \mu$. Ist allgemeiner $\langle\varphi_\lambda|\varphi_\mu\rangle = \delta_{\lambda\mu}$, so spricht man von einem Orthonormalsystem. Eine linear unabhängige Menge $\{\psi_\lambda\} \subset V$ heißt

Basis, wenn alle $\varphi \in V$ darstellbar sind als $\varphi = \sum\limits_{\lambda \in \Lambda} a_\lambda \cdot \psi_\lambda$. In unendlichdimensionalen Vektorräumen geht man von der Summe zum Integral über, dann ist

$$\varphi = \int a(\lambda) \cdot \psi(\lambda, a)\, \mathrm{d}\lambda$$

Wenn für alle Basisvektoren $\langle \psi_\lambda | \psi_\mu \rangle = \delta_{\lambda\mu}$ ist, ist es eine Orthonormalbasis. Dann ist

$$\begin{aligned} \langle \psi_\mu | \varphi \rangle &= \langle \psi_\mu | \textstyle\sum_\lambda a_\lambda \cdot \psi_\lambda \rangle \\ &= \textstyle\sum_\lambda a_\lambda \cdot \langle \psi_\mu | \psi_\lambda \rangle \\ &= \textstyle\sum_\lambda a_\lambda \cdot \delta_{\lambda\mu} \\ \langle \psi_\mu | \varphi \rangle &= a_\mu \end{aligned}$$

Im L_2 und in Physikbüchern heißt die Basis „vollständiges Funktionensystem“.

Vollständigkeitsrelation im L_2: Sei

$$f(x) = \sum_\lambda a_\lambda \cdot \psi_\lambda(x)$$

Setze $a_\lambda = \int \psi_\lambda^*(y) f(y)\, \mathrm{d}y$ ein.

$$f(x) = \sum_\lambda \int f(y) \cdot \psi_\lambda^*(y) \cdot \psi_\lambda(x)\, \mathrm{d}y = \int f(y) \cdot \left(\sum_\lambda \psi_\lambda^*(y) \cdot \psi_\lambda(x) \right) \mathrm{d}y$$

Offensichtlich ist die Summe die δ-Funktion. Es ist also:

$$f(x) = \int f(y) \cdot \delta(x-y)\, \mathrm{d}y$$

$$\boxed{\delta(x-y) = \sum_\lambda \psi_\lambda^*(x) \cdot \psi_\lambda(y)}$$

Vollständigkeitsrelation für Basen im L_2

4.3 Selbstadjungierte Operatoren

$$A\vec{x} = \vec{y} \quad \text{mit} \quad \vec{x}, \vec{y} \in V$$

A ist ein Operator, $A(\varphi(x)) = \psi(x)$ mit $\varphi(x), \psi(x) \in V$. In Vektorräumen mit Skalarprodukt sind **adjungierte Operatoren** definiert. Für diese muss für alle φ, ψ gelten:

$$\langle \varphi | A\psi \rangle = \left\langle A^+ \varphi | \psi \right\rangle$$

Hierbei ist A^+ zu A adjungiert. Für Matrizen im $\mathbb{R}^n$ ist „adjungiert“ = „transponiert“. Im $\mathbb{C}^n$: „adjungiert“ = „transponiert“ + „komplex konjugiert“. Falls $A^+ = A$, dann ist A selbstadjungiert. Falls $A^+ = A$, heißt A **selbstadjungiert** oder **hermitesch**. Bei reellen Matrizen ist das gleichbedeutend mit Symmetrie. Im Komplexen muss $A^T = A^*$ sein. (Daraus folgt, dass alle Hauptdiagonalelemente reell sein müssen.)

$\varphi \in V$ mit $\varphi \neq 0$ ist ein Eigenvektor zum Eigenwert λ eines Operators A, wenn $A\varphi = \lambda\varphi$. Es gibt in L_2 Operatoren ohne Eigenwert, zum Beispiel $A = x$. Eigenwerte hat zum Beispiel $B = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$, denn $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \mathrm{e}^{ikx} = ik \cdot \mathrm{e}^{ikx}$, also ist e^{ikx} ein Eigenvektor von B zum Eigenwert ik des Operators $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$.

1. Selbstadjungierte Operatoren haben nur reelle Eigenwerte, denn für $A\varphi = \lambda\varphi$ gilt:
$$\begin{aligned} \langle\varphi|A\varphi\rangle &= \langle\varphi|\lambda\cdot\varphi\rangle = \lambda\cdot\langle\varphi|\varphi\rangle \\ \langle A\varphi|\varphi\rangle &= \langle\varphi|A\varphi\rangle^* = \lambda^*\cdot\langle\varphi|\varphi\rangle \end{aligned}$$
   Also ist $\lambda = \lambda^*$.
2. Bei selbstadjungierten Operatoren sind Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten orthogonal. Für $A\varphi = \lambda\varphi$ und $A\psi = \mu\psi$ gilt:
$$\begin{aligned} \langle\psi|A\varphi\rangle &= \lambda\cdot\langle\psi|\varphi\rangle \\ \langle A\psi|\varphi\rangle &= \mu\cdot\langle\psi|\varphi\rangle \end{aligned}$$
   Beide Skalarprodukte sind gleich , also ist $\lambda = \mu$ oder $\langle\psi|\varphi\rangle = 0$.
3. $\dim V < \infty$ wird in der linearen Algebra behandelt, für $\dim V = \infty$ gilt: $\{a\}_\lambda$, die maximale Menge linear unabhängiger Eigenvektoren eines selbstadjungierten Operators, ist eine Basis.

4.4 Ist der legendre'sche Differentialoperator selbstadjungiert?

Falls ja $\Rightarrow$ Auf $[-1,1]$ können alle quadratintegrablen Funktionen durch ein Legendrepolynome ausgedrückt werden.

Der Beweis wird durch Nachrechnen geführt.
$$A = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(1-x^2)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} + c = (1-x^2)\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} - 2xdquotx + c$$
Zu zeigen:
$$\langle g|A\,f\rangle = \langle A\,g|f\rangle\ \forall f,g\in L_2[-1,1]$$
(auf $(-1,1)\in C^2$)

Konstante als erstes vernachlässigen, denn
$$\langle g|\text{const.}\cdot f\rangle = \langle\text{const.}\cdot g|f\rangle$$
Also ist zu zeigen: (da reell: $(1-x^2)^* = (1-x^2)$)
$$\int\limits_{-1}^{1} g^*\left[(1-x^2)\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}f(x) - 2x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x) + \cancel{cf(x)}\right]\,\mathrm{d}x \overset{!}{=} \int\limits_{-1}^{1}\left[(1-x^2)\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}g^*(x) - 2x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}g^*(x) + \cancel{cg^*(x)}\right]$$
mit einer reellen Konstante c

Einschub Partielle Integration:
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(f(x)g(x)) = \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x)\right)g(x) + f(x)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}g(x)$$
und
$$\int\limits_a^b \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(f(x)g(x))\,\mathrm{d}x = \int\limits_a^b\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x)\right)g(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_a^b f(x)\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}g(x)\right)\,\mathrm{d}x$$
Damit gilt:
$$\boxed{\int\limits_a^b f(x)\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}g(x)\right)\,\mathrm{d}x = f(x)g(x)\Big|_a^b - \int\limits_a^b\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x)\right)g(x)\,\mathrm{d}x}$$

Nun zerlegen wir das Integral

$$\int_{-1}^{1} g^*(x)\left[(1-x^2)\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}f(x)\right]\,\mathrm{d}x + \int_{-1}^{1} g^*(x)\left[-2x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right]f(x)\,\mathrm{d}x$$

$$\overset{\text{(PI)}}{=} g^*(x)(1-x^2)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x)\Big|_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[(1-x^2)\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}g^*(x)\right]\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x)\,\mathrm{d}x$$

$$+\,g^*(x)(-2x)f(x)\Big|_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[-2xg^*(x)\right]f(x)\,\mathrm{d}x = \left(\begin{smallmatrix}*\\ **\end{smallmatrix}\right)$$

$$\left(\begin{smallmatrix}*\\ **\end{smallmatrix}\right) \overset{\text{(PI)}}{=} -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[(1-x^2)g^*(x)\right]f(x)\Big|_{-1}^{1} \qquad (A)$$

$$+\int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\left[(1-x^2)g^*(x)\right]f(x)\,\mathrm{d}x \qquad (B)$$

$$+g^*(x)(-2x)f(x)\Big|_{-1}^{1} \qquad (C)$$

$$-\int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[-2xg^*(x)\right]f(x)\,\mathrm{d}x \qquad (D)$$

Betrachte (A)

$$(1-x^2)\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}g^*(x)\right]f(x)\Big|_{-1}^{1} = 0$$

Betrachte (B)

$$2xg^*(x)\Big|_{-1}^{1} = -C$$

Übrig bleibt (D)

$$\left(\begin{smallmatrix}*\\ **\end{smallmatrix}\right) = \cancel{\int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[-2xg^*(x)\right]f(x)\,\mathrm{d}x} + \int_{-1}^{1} \frac{\partial}{\partial x}\left[(1-x^2)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}g^*(x)\right]f(x)\,\mathrm{d}x - \cancel{\int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[(-2x)g^*(x)\right]f(x)\,\mathrm{d}x}$$

$$= \int_{-1}^{1}(1-x^2)\left[\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}g^*(x)\right]f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{-1}^{1}(-2x)\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}g^*(x)\right]f(x)\,\mathrm{d}x$$

Legendre'sche Differentialoperator ist selbstadjungiert.

Alle $f \in L_2[-1,1]$ kann man schreiben als

$$f(x) = \sum_{\lambda=0}^{\infty} a_\lambda P_\lambda(x) \quad \text{mit} \quad a_\lambda = \int_{-1}^{1} P_\lambda^*(y)f(y)\,\mathrm{d}y$$

$\neq$ gilt nur wenn: $\int_{-1}^{1} P_l(x)\cdot P_m(x) = \delta_{lm}$. in Wirklichkeit ist dies $=$ const. $\cdot\,\delta_{lm}$.

$P_l(1) = 1$ nach Definition

$$\int\limits_{-1}^{1} P_0^2(x)\ \mathrm{d}x = \int\limits_{-1}^{1} 1\ \mathrm{d}x = 2$$

$$\int\limits_{-1}^{1} P_1^2(x)\ \mathrm{d}x = \int\limits_{-1}^{1} x^1\ \mathrm{d}x = \frac{1}{3}x^3\Big|_{-1}^{1} = \frac{2}{3}$$

Was ist $\int\limits_{-1}^{1} P_l(x)P_l(x)\ \mathrm{d}x = ?$

5 Alternative Darstellung der Legendre-Polynome

Formel von Rodriguez

$$P_l(x) = \frac{1}{2^l l!} \cdot \frac{\mathrm{d}^l}{\mathrm{d}x^l}(x^2-1)^l$$

5.1 Normierung das Legendre-Polynome

Lösen duch Partelle Integration und Ableitung, bis alles nicht benötigte weg ist. Das gilt

$$\int\limits_{-1}^{1} x^P P_l(x)\,\mathrm{d}x = 0 \quad \text{für } p < l$$

denn

$$\int\limits_{-1}^{1} x^P \frac{\mathrm{d}^l}{\mathrm{d}x^l}(x^2-1)^l\,\mathrm{d}x = \underbrace{x^P \frac{\mathrm{d}^{l-1}}{\mathrm{d}x^{l-1}}(x^2-1)^l\Big|_{-1}^{1}}_{=0} - \int\limits_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} x^P \frac{\partial^{l-1}}{\partial x^{l-1}}(x^2-1)^l\,\mathrm{d}x$$

nur $l-1$ Ableitungen für l-mal (x^2-1), damit wird nach Einsetzen der Grenzen ein Faktor Null.

$$\sim \int\limits_{-1}^{1} x^{P-1} \frac{\partial^{l-1}}{\partial x^{l-1}}(x^2-1)^l\,\mathrm{d}x$$

p-mal:

$$= \int\limits_{-1}^{1} \text{const.} \cdot \frac{\mathrm{d}^{l-1}}{\mathrm{d}x^{l-1}}(x^2-1)^l\,\mathrm{d}x = \text{const.} \cdot \frac{\mathrm{d}^{l-(p+1)}}{\mathrm{d}x^{l-(p+1)}}(x^2-1)^l\Big|_{-1}^{1}$$

solange $p < l$ überlebt $\lim(x^2-1)$ ohne $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ davor $\Rightarrow \ldots = 0$

damit ist auch gezeigt:

$$\int\limits_{-1}^{1} P_l(x) P_P(x)\,\mathrm{d}x = 0 \text{ für } p \neq l$$

Also (oEdA) $p < l$

$$P_P(x) = a_P x^P + a_{P-2} x^{p-2} + a_{P-4} x^{P-4} + \ldots$$

$$\int\limits_{-1}^{1} P_l(x) P_l(x)\,\mathrm{d}x = \left(\frac{1}{2^l l!}\right)^2 = \int\limits_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}(x^2-1)^l \frac{\partial^l}{\partial x^l}(x^2-1)^l\,\mathrm{d}x$$

$$= \left(\frac{1}{2^l l!}\right)^2 \left(\frac{\partial^{l-1}}{\partial x^{l-1}}(x^2-1)^l\right)\left(\frac{\mathrm{d}^l}{\mathrm{d}x^l}(x^2-1)^l\right)\Big|_{-1}^{1} + (-1)^l \left(\frac{1}{2^l l!}\right)^l \int_{-1}^{1} \left(\frac{\partial^{l-1}}{\partial x^{l-1}}(x^2-1)^l\right)\left(\frac{\partial^{l+1}}{\partial x^{l+1}}(x^2-1)^l\right) \mathrm{d}x \dots$$

p- mal partiell

$$\left(\frac{1}{2^l l!}\right)^2 (-1)^l \int_{-1}^{1} (x^2-1)^l \frac{\mathrm{d}^{2l}}{\mathrm{d}x^{2l}}(x^2-1)^l \,\mathrm{d}x$$

$$= \left(\frac{1}{2^l l!}\right)^2 (-1)^l \int_{-1}^{1} (x^2-1)^l \left(\frac{\partial^{2l}}{\partial x^{2l}} x^{2l}\right) \mathrm{d}x$$

alle anderen sind $\frac{\partial^{2l}}{\partial x^{2l}} x^P$ für $p < 2l$

$$= \left(\frac{1}{2^l l!}\right)^2 (-1)^l (2l)! \int_{-1}^{1} (x-1)^l (x+1)^l \,\mathrm{d}x$$

$$= \left(\frac{1}{2^l l!}\right)^2 (2l)! \int_{-1}^{1} (1-x)^l (1+x)^l \qquad (**)$$

mit partieller Integration.

$$= \left(\frac{1}{2^l l!}\right)^2 (2l)!(1-x)^l \frac{1}{l+1}(1+x)^{l+1}\Big|_{-1}^{1} - (-1)\left(\frac{1}{2^l l!}\right)^2 (2l)! \int_{-1}^{1} (1-x)^{l-1}(1+x)^{l+1}\frac{l}{l+1}\,\mathrm{d}x$$

und weitere partielle Integration bis

$$\left(\frac{1}{2^l l!}\right)^2 (2l)! \underbrace{\frac{l \dots 1}{(l+1)\dots 2l}}_{= \frac{l! \cdot l!}{2l!}} \int_{-1}^{1} (1+x)^{2l} \,\mathrm{d}x$$

$$\left(\frac{1}{2^l \cancel{l!}}\right)^2 \cancel{(2l)!} \frac{\cancel{l! \cdot l!}}{\cancel{2l!}} \frac{1}{2l+1}(1+x)^{2l+1}\Big|_{-1}^{1}$$

$$= \frac{1}{2^{2l}} \cdot \frac{1}{2l+1} = \frac{2}{2l+1}$$

Zurüch zu den Koeffizienten:

$$f(x) = \sum_{\lambda=0}^{\infty} a_\lambda P_\lambda(x)$$

$$\int_{-1}^{1} P_\mu(y) f(y)\,\mathrm{d}y = \sum_{\lambda=0}^{\infty} a_\lambda \int_{-1}^{1} P_\mu(y) f(y)\,\mathrm{d}y = a_\mu \frac{2}{2\mu+1}$$

$$a_\lambda = \frac{2\lambda+1}{2} \int_{-1}^{1} P_\lambda(x) f(x)\,\mathrm{d}x \neq \int_{-1}^{1} P_\lambda(x) f(x)\,\mathrm{d}x$$

5.2 Herleitung der Formel von Rodriguez

Umschreiben als unendliche Reihe.

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{m!}{n!(m-n)!}x^n$$

denn

$$\frac{m!}{(m-n)!} = m(m-1)\ldots(m-n+1)$$

Die gilt auch für $m < 0, m \in \mathbb{R}$. Wir brauchen $m = -\frac{1}{2}$

$$(1+x)^{-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{-\frac{1}{2}\cdot -\frac{3}{2}}{2!}x^2 + \ldots$$

mit

$$\frac{1}{2!}\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{5}{2}\right)\left(-\frac{7}{2}\right)\ldots}{\left(-\frac{5}{2}\right)\left(-\frac{7}{2}\right)\left(-\frac{9}{2}\right)\ldots}$$

im allgemeinen ist

$$\frac{1}{n!}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-1\right)\left(-\frac{1}{2}-2\right)\ldots\left(-\frac{1}{2}-n+1\right) = \frac{1}{n!}\left(-\frac{1}{2}\right)^n (1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (2n-1))$$

$$\frac{1}{n!}(-1)^n \cdot \frac{1}{2^n} \cdot \frac{(2n)!}{2^n n!}$$

Wir haben

$$(1+x)^{-\frac{1}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{2^{2n}}\frac{(2n!)}{n!\cdot n!}x^n$$

Sei $x \equiv -2xt + t^2$ wie in der Erzeugendenfunktion.

$$\frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{2^{2n}}\frac{(2n)!)}{(n!)^2}(-1)^n(2xt-t^2)^n$$

Wiederholung

Die Formel von Rodriguez besagte:

$$P_l(x) = \frac{1}{2^l \cdot l!}\cdot\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^l}(x^2-1)^l$$

Durch einige Umformungen kamen wir im Beweis zunï¿½chst auf

$$(1-2xt+t^2)^{-\frac{1}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \cdot \frac{1}{2^{2n}} \cdot \frac{(2n!)}{(n!)^2}\cdot(-2xt+t^2)^n$$

Aus dem binomischen Satz folgt

$$(a-b)^n = \sum_{k=0}^{\infty}\binom{n}{k}a^{n-k}\cdot(-1)^k \cdot b^k \quad \text{mit} \quad \binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!\cdot k!}$$

Dies setzen wir in obige Gleichung ein.

$$
\begin{aligned}
(1-2xt+t^2)^{-\frac{1}{2}} &= \sum_{n=0}^{\infty} \tfrac{1}{2^{2n}} \cdot \tfrac{(2n!)}{(n!)^2} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cdot \tfrac{n!}{(n-k)! \cdot k!} \cdot 2x^{n-k} \cdot t^{n-k} \cdot t^{2k} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \cdot \tfrac{(2n)!}{2^{2n} \cdot n! \cdot k! \cdot (n-k)!} (2x)^{n-k} \cdot t^{n+k}
\end{aligned}
$$

Betrachte allgemein eine Summe

$$\sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} a_{pq}$$

und dazu das folgende Schema

	$p=0$	$p=1$	$p=2$	$p=3$	$\cdots$
$q=0$	a_{00}	a_{10}	a_{20}	a_{30}	$\cdots$
$q=1$	a_{01}	a_{11}	a_{21}	a_{31}	$\cdots$
$q=2$	a_{02}	a_{12}	a_{22}	a_{32}	$\cdots$
$q=3$	a_{03}	a_{13}	a_{23}	a_{33}	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

Sei nun $q \equiv k \geq 0$ und $p \equiv n-k$, $n \geq k$. Wir gehen also zu $\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} a_{n-k,k}$ ï¿½ber. Wir nummerieren die Elemente im obigen Schema wie folgt durch:

	$p=0$	$p=1$	$p=2$	$p=3$	$\cdots$
$q=0$	1	2	4	7	$\cdots$
$q=1$	3	5	8	12	$\cdots$
$q=2$	6	9	13	18	$\cdots$
$q=3$	10	14	19	25	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

Was aber bei $q \equiv m \geq 0$ und $p \equiv l-2m$, $m \leq \frac{l}{2}$, also $\sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{[l/2]} a_{l-2m,m}$? (Hierbei ist $\left[\frac{l}{2}\right]$ der ganzzahlige Anteil an der positiven Zahl $l/2$, also alles, was vor dem Komma steht.)

	$p=0$	$p=1$	$p=2$	$p=3$	$\cdots$
$q=0$	1	2	3	5	$\cdots$
$q=1$	4	6	8		$\cdots$
$q=2$	9				$\cdots$
$q=3$					$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

(Es ist so wie vorher mit diagonalen Linien, nur sind diese flacher.)

Mit dem zweiten Nummerierungsschema gehen wir ï¿½ber von $\sum_{n=0}^{\infty} \to \sum_{l=0}^{\infty}$ und $\sum_{k=0}^{n} \to \sum_{m=0}^{[l/2]}$. Mit $q = m = k$ und $p = l - 2m = n - k$

$$(1-2xt+t^2)^{-\frac{1}{2}} = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{[l/2]} (-1)^m \cdot \frac{(2l-2m)!}{2^{2l-2m} \cdot m! \cdot (l-m)! \cdot (l-2m)!} \cdot (2x)^{l-2m} \cdot t^l$$

Frï¿½her hatten wir die Legendre-Erzeugenden in der Form

$$E(x,t) = \frac{1}{\sqrt{1-2xt-t^2}} = \sum_{l=0}^{\infty} P_l(x) t^l$$

geschrieben. Kombinieren wir nun beides, so fï¿½hrt uns dies zu

$$P_l(x) = \sum_{m=0}^{[l/2]} (-1)^m \cdot \frac{(2l-2m)!}{2^l \cancel{\cdot 2^{l-2m}} \cdot m! \cdot (l-m)! \cdot (l-2m)!} \cdot x^{l-2m} \cancel{\cdot 2^{l-2m}}$$

Dies ist eine weitere geschlossene Darstellung der Legendre-Polynome.

$$P_l(x) = \sum_{m=0}^{[l/2]} (-1)^m \frac{1}{2^l \cdot m! \cdot (l-m)!} \cdot \frac{\mathrm{d}^l}{\mathrm{d}x^l} x^{2l-2m}$$

Hierbei ist

$$\frac{\mathrm{d}^l}{\mathrm{d}x^l} x^{2l-2m} = (2l-2m) \cdot (2l-(2m+l)) \cdots (l-2m+1) \cdot x^{l-2m} = \frac{(2l-2m)!}{(l-2m)!} \cdot x^{l-2m}$$

und somit

$$P_l(x) = \frac{1}{2^l \cdot l!} \cdot \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)^l \sum_{m=0}^{l} \frac{(-1)^m \cdot l!}{m! \cdot (l-m)!} \cdot x^{2l-2m}$$

Dieser Umformungsschritt ist nicht so eindeutig. Hier haben wir

1. mit $l!$ erweitert
2. $\frac{\partial^l}{\partial x^l}$ aus der Summe herausgezogen
3. Summationsindex hochgesetzt – Darf man das? Ja, denn fï¿½r $m > \frac{l}{2}$ ist $2l - 2m < l$ und somit $\frac{\mathrm{d}^l}{\mathrm{d}x^l} x^{2l-2m} = 0$, d.h. die Ableitung verschwindet.

$$P_l(x) = \frac{1}{2^l \cdot l!} \cdot \frac{\mathrm{d}^l}{\mathrm{d}x^l} \sum_{m=0}^{l} \frac{(-1)^m \cdot l!}{m! \cdot (l-m)!} \cdot x^{2l-2m} = \frac{1}{2^l \cdot l!} \cdot \frac{\mathrm{d}^l}{\mathrm{d}x^l} (x^2-1)^l$$

Damit ist der Beweis erbracht.

6 Kugelflï¿½chenfunktion

6.1 Ableitung der zugeordneten Legendre-Polynome

$$\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(1-x^2)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}+\left(l\cdot(l+1)-\frac{m^2}{1-x^2}\right)\right]P_l^m(x)=0$$

Um diese Lï¿½sungen P_l^m zu finden, rechnen wir die P_l aus:

$$(1-x^2)\cdot\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}P_l(x)-2x\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}P_l(x)+l\cdot(l+1)\cdot P_l(x)=0$$

Dies wird m-mal differenziert. Beachte:

$$\frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}x^m}\left[f(x)\cdot g(x)\right]=\sum_{s=0}^{m}\binom{m}{s}\cdot\frac{\mathrm{d}^{m-s}}{\mathrm{d}x^{m-s}}f(x)\cdot\frac{\mathrm{d}^s}{\mathrm{d}x^s}g(x)$$

Wir wenden dies an, mit $g=-2x$ und $f=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}P_l(x)$. Aus $l\cdot(l+1)$ machen wir $l\cdot(l+1)\cdot\frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}x^m}P_l(x)$. Fï¿½r $s=0$ ist

$$\begin{aligned}
\tfrac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}x^m}\left[-2x\cdot\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}P_l(x)\right] &= -2x\cdot\tfrac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}x^m}\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}P_l(x)-2\cdot(1)\cdot m\tbinom{1}{\cdot}\tfrac{\mathrm{d}^{m-1}}{\mathrm{d}x^{m-1}}\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}P_l(x)+m\tbinom{2}{\cdot}\tfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}(-2x)\tfrac{\mathrm{d}^{m-2}}{\mathrm{d}x^{m-2}}\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}P_l(x)\\
&= -2x\cdot\tfrac{\partial^{m+1}}{\partial x^{m+1}}P_l(x)-2m\cdot\tfrac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}x^m}P_l(x)
\end{aligned}$$

Dies war das zweite Glied der m-ten Ableitung. Der erste Term ergibt

$$\frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}x^m}\left[(1-x^2)\cdot\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}P_l(x)\right]=(1-x^2)\cdot\frac{\mathrm{d}^{m+2}}{\mathrm{d}x^{m+2}}P_l(x)-2xm\cdot\frac{\mathrm{d}^{m-1+2}}{\mathrm{d}x^{m-1+2}}P_l(x)-2\frac{m(m-1)}{2!}\cdot\frac{\mathrm{d}^{m-2+2}}{\mathrm{d}x^{m+2-2}}P_l(x)$$

Insgesamt lautet die Ableitung:

$$0=\frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}x^m}\left[\ldots\right]=(1-x^2)\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\left[\frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}x^m}P_l(x)\right]-2x(m+1)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}x^m}P_l(x)\right]+\left[l(l+1)-2m-m(m-1)\right]\frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}x^m}P_l(x)\qquad(*)$$

Der Ansatz lautet:

$$\begin{aligned}
\widetilde{P}_l(x) &= (1-x^2)^{m/2}\cdot\tfrac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}x^m}P_l(x)\\
\tfrac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}x^m}P_l(x) &= (1-x^2)^{-m/2}\cdot\widetilde{P}_l(x)\\
\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\tfrac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}x^m}P_l(x)\right] &= -\tfrac{m}{2}\cdot(1-x^2)^{-m/2-1}\cdot(-2x)\cdot\widetilde{P}_l(x)+(1-x^2)^{-m/2}\cdot\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\widetilde{P}_l(x)\\
&= (1-x^2)^{-m/2}\cdot\left[\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\widetilde{P}_l(x)+\tfrac{mx}{1-x^2}P_l(x)\right]\\
\tfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\left[\tfrac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}x^m}P_l(x)\right] &= (-1)^2\cdot(\tfrac{m}{2})\cdot(\tfrac{m}{2}+1)\cdot(1-x^2)^{-m/2-2}\cdot(-2x)\cdot(-2x)\cdot\widetilde{P}_(x)\\
&- \tfrac{m}{2}\cdot(1-x^2)^{-m/2-2}\cdot(-2)\cdot\widetilde{P}_l(x)-\tfrac{m}{2}\cdot(1-x^2)^{-m/2-1}\cdot(-2x)\cdot\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\widetilde{P}_l(x)\\
&- \tfrac{m}{2}\cdot(1-x^2)^{-m/2-1}\cdot(-2x)\cdot\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\widetilde{P}_l(x)+(1-x^2)^{-m/2}\cdot\tfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\widetilde{P}_l(x)\\
&= (1-x^2)^{-m/2}\cdot\left[\tfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\widetilde{P}_l(x)+\tfrac{2mx}{1-x^2}\cdot\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\widetilde{P}_l(x)+\tfrac{m}{1-x^2}\cdot\widetilde{P}_l(x)+\tfrac{m(m+1)x^2}{1-x^2}\cdot\widetilde{P}_l(x)\right]
\end{aligned}$$

in $(*)$ einsetzen:

$$
\begin{aligned}
0 \quad &= \quad (1-x^2)^{-m/2} \cdot \Bigg[\underbrace{(1-x^2) \cdot \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} \widetilde{P}_l(x)}_{=:A} + \underbrace{(1-x^2) \cdot \frac{2mx}{1-x^2} \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \widetilde{P}_l(x)}_{=:B} \\
&+ \quad \underbrace{(1-x^2) \cdot \frac{m}{1-x^2} \cdot \widetilde{P}_l(x)}_{=:C} + \underbrace{(1-x^2) \cdot \frac{m \cdot (m+2) \cdot x^2}{(1-x^2) \cdot (1+x^2)} \cdot \widetilde{P}_l(x)}_{=:D} \\
&- \quad \underbrace{2x \cdot (m+1) \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \widetilde{P}_l(x)}_{=:E} - \underbrace{\frac{2(m+1) \cdot mx^2}{1-x^2} \cdot \widetilde{P}_l(x)}_{=:F} + \underbrace{[l(l+1) - m(m+1)]\, \widetilde{P}_l(x)}_{=:G} \Bigg]
\end{aligned}
$$

Fasse die Koeffizienten von C, D, F und G zusammen:

$$
\begin{aligned}
& m + \tfrac{m \cdot (m+2)}{1-x^2} - \tfrac{2 \cdot (m+1) \cdot mx^2}{1-x^2} + l \cdot (l+1) - m \cdot (m+1) \\
= \quad & l \cdot (l+1) + \tfrac{m - mx^2 + m^2x^2 + 2mx^2 - 2m^2x^2 - 2mx^2 - m^2 - m - m^2x^2 - mx}{1-x^2} \\
= \quad & l \cdot (l+1) - \tfrac{m^2}{1-x^2}
\end{aligned}
$$

Insgesamt:

$$
0 = (1-x^2)^{-m/2} \cdot \left[(1-x^2) \cdot \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} \widetilde{P}_l(x) - 2x \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \widetilde{P}_l(x) + l \cdot (l+1) - \frac{m^2}{1-x^2} \cdot \widetilde{P}_l(x) \right]
$$

Dies beschreibt die Lï¿½sung fï¿½r zugeordnete Legendre-Polynome.

$$
P_l^m(x) \equiv \widetilde{P}_l(x) = (1-x^2)^{m/2} \frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}x^m} P_l(x)
$$

lï¿½st die Differentialgleichung unter der Bedingung $0 \leq m \leq l$ (denn wenn man zu oft ableitet, bleibt nichts mehr ï¿½brig). Mit

$$
P_l(x) = \frac{1}{2^l \cdot l!} \cdot \frac{\mathrm{d}^l}{\mathrm{d}x^l} (x^2-1)^l
$$

kï¿½nnen wir dies kï¿½rzer schreiben:

$$
P_l^m(x) = \frac{1}{2^l \cdot l!} \cdot (1-x^2)^{m/2} \cdot \frac{\mathrm{d}^{l+m}}{\mathrm{d}x^{l+m}} (x^2-1)^l
$$

Es kann auch $0 \geq m \geq -l$ sein. Zum Beispiel ist $m < 0$ bei den Potentialen Φ erlaubt. Was ist aber P_l^{-m}? Wir wollen zeigen, dass gilt:

$$
P_l^{-m}(x) = (-1)^m \cdot \frac{(l-m)!}{(l+m)!} \cdot P_l^m(x)
$$

Erster Schritt:

$$\begin{aligned}
\tfrac{\mathrm{d}^{l+m}}{\mathrm{d}x^{l+m}}(x^2-1)^l &= \tfrac{\mathrm{d}^{l+m}}{\mathrm{d}x^{l+m}}\left[(x-1)^l(x+1)^l\right] \\
&= \sum_{s=0}^{l+m} \cdot \tbinom{l+m}{s} \cdot \tfrac{\mathrm{d}^{l+m-s}}{\mathrm{d}x^{l+m-s}}(x-1)^l \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}(x+1)^l \\
&= \tbinom{l+m}{s} \cdot 0 + \tbinom{l+m}{m-1} \cdot 0 \cdots + \tbinom{l+m}{m} \cdot \tfrac{\mathrm{d}^{l+m-m}}{\mathrm{d}x^{l+m-m}}(x-1)^l \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}(x+1)^l + \dots \\
&+ \tbinom{l+m}{l} \cdot \tfrac{\mathrm{d}^{l+m-1}}{\mathrm{d}x^{l+m-1}}(x-1)^l \tfrac{\mathrm{d}^l}{\mathrm{d}x^l}(x+1)^l + \tbinom{l+m}{l+1} \cdot 0 + \cdots \tbinom{l+m}{l+m} \cdot 0 \\
&= \tfrac{(l+m)!}{m! \cdot l!} \cdot l! \cdot (x-1)^0 \cdot [l \cdots (l+m-1)] \cdot (x+1)^{l-m} \\
&+ \tfrac{(l+m)!}{(m+1)! \cdot (l-1)!} \cdot \tfrac{l!}{1!} \cdot (x-1)^1 \cdot \tfrac{l!}{(l-m-1)!} \cdot (x+1)^{l-m-1} \\
&+ \tfrac{(l+m)!}{(m+2)!(l-2)!} \cdot \tfrac{l!}{2!} \cdot (x-1)^2 \cdot \tfrac{l!}{(l-m-2)!} \cdot (x+1)^{l-m-2} + \dots \\
&+ \tfrac{(l+m)!}{l! \cdot [l-(l-m)]!} \cdot \tfrac{l!}{(l-m)!} \cdot (x-1)^{l-m} \cdot \tfrac{l!}{0!} \cdot (x+1)^{(l-m)-(l-m)} \\
&= (l+m)! \cdot \tfrac{l! \cdot l!}{m! \cdot l! \cdot 0! \cdot (l-m)!} \cdot (x-1)^0 \cdot (x+1)^{l-m} \\
&+ (l+m)! \cdot \tfrac{l! \cdot l!}{(m+1)! \cdot (l-1)! \cdot 1! \cdot (l-m-1)!} \cdot (x-1)^1 \cdot (x+1)^{l-m-1} \\
&+ (l+m)! \cdot \tfrac{l! \cdot l!}{(m+2)! \cdot (l-2)! \cdot (l-m-2)! \cdot 2!} \cdot (x-1)^2 \cdot (x+1)^{l-m-2} \\
&+ (l+m)! \cdot \tfrac{l! \cdot l!}{l! \cdot [l-(l-m)]! \cdot (l-m)! \cdot 0!} \cdot (x-1)^{l-m} \cdot (x+1)^{(l-m)-(l-m)}
\end{aligned}$$

Wiederholung

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(1-x^2)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}P_l(x) + \left(l \cdot (l+1) - \frac{m^2}{1-x^2}\right) \cdot P_l^m(x) = 0$$

$$(\Delta + f(r) + k)\,\Psi(\vec{r}) = 0$$

Durch zweimalige Separation der Variablen erhielten wir

$$\Psi(\vec{r}) = R(r) \cdot Y(\vartheta, \varphi) = R(r) \cdot \Theta(\vartheta) \cdot \Phi(\varphi)$$

Hierbei sind $l \in \mathbb{N}_0$ und $m \in \mathbb{Z}$. Als Lösungen hatten wir gefunden:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\cos\vartheta}(1-\cos^2\vartheta)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\cos\vartheta} \cdot \widetilde{\Theta}(\cos\vartheta) + \left(l \cdot (l+1) - \frac{m^2}{1-\cos^2\vartheta}\right) \cdot \widetilde{\Theta}(\cos\vartheta) = 0$$

und

$$\Phi(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \mathrm{e}^{im\varphi} \qquad \text{mit} \qquad m \in \mathbb{Z}$$

Für die Polynomfunktion galt:

$$\widetilde{P}_l(x) = (1-x^2)^{m/2} \cdot \frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}x^m} P_l(x) \equiv P_l^m(x) \qquad \text{mit} \qquad 0 \le m \le l$$

oder nach der Formel von Rodriguez:

$$P_l(x) = \frac{1}{2^l \cdot l!} \cdot \frac{\mathrm{d}^l}{\mathrm{d}x^l}(x^2-1)^l \quad \Rightarrow \quad P_l^m(x) = \frac{1}{2^l \cdot l!} \cdot (1-x^2)^{m/2} \cdot \frac{\mathrm{d}^{l+m}}{\mathrm{d}x^{l+m}}(x^2-1)^l$$

Man kann allgemein zeigen, dass $-l \le m \le l$ sein muss. DieLö

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(1-x^2)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}P_l^m(x) + \left(l \cdot (l+1) - \frac{m^2}{1-x^2}\right) P_l^m(x) = 0$$

Wir wollten zeigen, dass gilt:

$$P_l^{-m}(x) = (-1)^m \cdot \frac{(l-m)!}{(l+m)!} \cdot P_l^m(x)$$

Dabei war:

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}^{l+m}}{\mathrm{d}x^{l+m}}(x^2-1)^l &= (l-m)! \cdot \tfrac{l!\cdot l!}{m!\cdot l!\cdot 0!\cdot (l-m)!} \cdot (x-1)^0 \cdot (x+1)^{l-m} \\
&+ (l+m)! \cdot \tfrac{l!\cdot l!}{(m+1)!\cdot (l-1)!\cdot 1!\cdot (l-m-1)!} \cdot (x-1)^1 \cdot (x+1)^{l-m-1} \\
&+ (l+m)! \cdot \tfrac{l!\cdot l!}{(m+2)!\cdot (l-2)!\cdot 2!\cdot (l-m-2)!} \cdot (x-1)^1 \cdot (x+1)^{l-m-2} \\
&\vdots \\
&+ (l+m)! \cdot \tfrac{l!\cdot l!}{(m+(l-m))!\cdot (l-(l-m))!\cdot (l-m)!\cdot (l-m-(l-m))!} \cdot (x-1)^{l-m} \cdot (x+1)^{(l-m)-(l-m)}
\end{aligned}$$

Der Vorfaktor im letzten der $l-m+1$ Terme ist gerade mit dem im ersten identisch.

Zur Ableitung zerlegen wir passend und wenden die Leibnizsche Produktformel an:

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}^{l-m}}{\mathrm{d}x^{l-m}}(x^2-1)^l &= \frac{\mathrm{d}^{l-m}}{\mathrm{d}x^{l-m}}\left[(x-1)^l \cdot (x+1)^l\right] \\
&= \sum_{s=1}^{l-m} \binom{l-m}{s} \cdot \frac{\mathrm{d}^{l-m+s}}{\mathrm{d}x^{l-m+s}}(x-1)^l \frac{\mathrm{d}^s}{\mathrm{d}x^s}(x+1)^l \\
&= \tfrac{(l-m)!}{0!\cdot(l-m)!} \cdot l \cdot (l+1) \cdots \tfrac{l-(l-m)+1}{l\cdots(m+1)} \cdot (x-1)^{l-(l+m)} \cdot (x+1)^l \\
&+ \tfrac{(l-m)!}{1!\cdot(l-m-1)!} \cdot \tfrac{l!}{(m+1)!} \cdot (x-1)^{m+1} \cdot \tfrac{l!}{(l-1)!} \cdot (x+1)^{l-1} \\
&+ \tfrac{(l-m)!}{2!\cdot(l-m-2)!} \cdot \tfrac{l!}{(m+2)!} \cdot (x-1)^{m+2} \cdot \tfrac{l!}{(l-2)!} \cdot (x+1)^{l-2} \\
&\vdots \\
&+ \tfrac{(l-m)!}{(l-m)!\cdot 0!} \cdot \tfrac{l!}{(m+(l-m))!} \cdot (x-1)^l \cdot \tfrac{l!}{(l-(l-m))!} \cdot (x+1)^{l-(l-m)}
\end{aligned}$$

Umsortieren:

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}^{l-m}}{\mathrm{d}x^{l-m}}(x^2-1)^l &= (x-1)^m \cdot (x+1)^m \cdot (l-m)! \cdot \Big[\tfrac{l!\cdot l!}{0!\cdot(l-m)!\cdot m!\cdot l!} \cdot (x+1)^0 \cdot (x+1)^{l-m} \\
&+ \tfrac{l!\cdot l!}{1!\cdot(l-m-1)!\cdot(m+1)!\cdot(l-1)!} \cdot (x-1)^1 \cdot (x+1)^{l-m-1} \\
&+ \tfrac{l!\cdot l!}{2!\cdot(l-m-2)!\cdot(m+2)!\cdot(l-2)!} \cdot (x-1)^2 \cdot (x+1)^{l-m-2} \\
&\vdots \\
&+ \tfrac{l!\cdot l!}{(l-m)!\cdot l!\cdot l!\cdot m!} \cdot (x-1)^{l-m} \cdot (x+1)^0\Big]
\end{aligned}$$

Man sieht *sofort*, dass gilt:

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}^{l-m}}{\mathrm{d}x^{l-m}}(x^2-1)^l &= \tfrac{(l-m)!}{(l+m)!} \cdot (x^2-1)^m \cdot \tfrac{\mathrm{d}^{l+m}}{\mathrm{d}x^{l+m}}(x^2+1)^l \\
&= (-1)^m \cdot (1-x^2)^{m/2} \cdot (1-x^2)^{m/2} \cdot \tfrac{(l-m)!}{(l+m)!} \cdot \tfrac{\mathrm{d}^{l+m}}{\mathrm{d}x^{l+m}}(x^2-1)^l \\
(1-x^2)^{-m/2} \cdot \frac{\mathrm{d}^{l-m}}{\mathrm{d}x^{l-m}}(x^2-1)^l &= (-1^m) \cdot \tfrac{(l-m)!}{(l+m)!} \cdot (1-x^2)^{m/2} \cdot \tfrac{\mathrm{d}^{l+m}}{\mathrm{d}x^{l+m}}(x^2-1)^l \\
2^l \cdot l! P_l^{-m} &= (-1)^m \cdot \tfrac{(l-m)!}{(l+m)!} \cdot P_l^m(x) \cdot 2^l \cdot l!
\end{aligned}$$

Daraus folgt für P_l^{-m}:

$$\boxed{P_l^{-m}(x) = (-1)^m \cdot \frac{(l-m)!}{(l+m)!} \cdot P_l^m(x)}$$

Wie sehen diese P_l^m eigentlich aus?

$$P_l^m(x) = (1-x^2)^{m/2} \frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}x^m} P_l(x) \quad \text{und} \quad P_l^{-m}(x) = (-1)^m \frac{(l-m)!}{(l+m)!} P_l^m(x)$$

$$\begin{aligned}
P_0^0(x) &= 1 = P_0(x) \\
P_1^0(x) &= x = P_1(x) \\
P_1^1(x) &= \sqrt{1-x^2} \cdot \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} P_1(x) = \sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-\cos^2\vartheta} = \sin\vartheta \\
P_1^{-1}(x) &= (-1) \cdot \tfrac{(1-1)!}{(1+1)!} \cdot \sqrt{1-x^2} = -\tfrac{1}{2} \cdot \sqrt{1-x^2} = -\tfrac{1}{2}\sin\vartheta \\
P_2^0(x) &= P_2(x) = \tfrac{3}{2}x^2 - \tfrac{1}{2} \\
P_2^1(x) &= \sqrt{1-x^2} \cdot \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} P_2(x) = \sqrt{1-x^2} \cdot 3x = 3\sin\vartheta \cdot \cos\vartheta \\
P_2^{-1}(x) &= (-1)\tfrac{(2-1)!}{(2+1)!} \cdot 3x \cdot \sqrt{1-x^2} = -\tfrac{1}{2} \cdot x \cdot \sqrt{1-x^2} = -\tfrac{1}{2} \cdot \sin\vartheta \cdot \cos\vartheta \\
P_2^2(x) &= (1-x^2) \cdot \tfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} P_2(x) = (1-x^2) \cdot 3 = 3 \cdot \sin^2\vartheta \\
P_2^{-2}(x) &= (-1)^2 \cdot \tfrac{0!}{(2+2)!} \cdot 3(1-x^2) = \tfrac{1}{8} \cdot (1-x^2) = \tfrac{1}{8} \cdot \sin^2\vartheta
\end{aligned}$$

Es gibt auch noch die Erzeugendenfunktion $E(x,t)$:

$$\frac{2m!}{2^m \cdot m!} \cdot \frac{(1-x^2)^{m/2}}{(1-2tx+t^2)^{m+1/2}} = \sum_{s=0}^{\infty} P_{s+m}^m(x) l^s$$

> *„However, because of its more cumbersome form and lack of any [...] physical application, it is seldom used.“*

Es gibt auch Rekursionsformeln:

$$(2l+1) \cdot (1-x^2)^{m/2} \cdot P_l^m(x) = P_{l-1}^{m+1}(x) - P_{l+1}^{m+1}(x)$$

Der Beweis wird über Differentiation von

$$(2l+1) \cdot P_l(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} P_{l+1}(x) - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} P_{l-1}(x)$$

geführt.

6.2 Parität und Orthogonalität

Die **Parität** ist das Verhalten bei Raumspiegelung.

$$P_l(-x) = (-1)^l \cdot P_l(x)$$

Bei $P_2(x) = 3^2 \cdot x^2 - 1/2$ ist $P(x) = P(-x)$, dieses Verhalten heißt **gerade Parität**. Bei $P_1(x) = x$ hingegen ist $P(-x) = -P(x)$, dies heißt **ungerade Parität**. Allgemein gilt:

$$P_l(-x) = (-1)^l \cdot P_l(x) \quad \text{und} \quad P_l^m(x) = (1-x^2)^{m/2} \cdot \frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}x^m} P_l(x)$$

Somit liefert $\frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}x^m}$ zusätzlich ein $(-1)^m$. Es ist also

$$P_l^m(-x) = (-1)^{l+m} \cdot P_l^m(x)$$

Aufgrund der Konstruktion der P_l gilt

$$|P_l(\pm 1)| = 1 \quad \text{und} \quad |P_l^m(\pm 1)| = 0 \quad \text{für} \quad m \neq 0$$

Zur Orthogonalität: Wir wissen, dass

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} P_l(x) \cdot P_k(x)\,\mathrm{d}x &= \tfrac{2}{2l+1}\delta_{kl} \\
\int_{-1}^{1} P_p^m(x) \cdot P_q^m(x)\,\mathrm{d}x &= S_{pq} \cdot \tfrac{2}{2p+1} \cdot \tfrac{(p+m)!}{(p-m)!}
\end{aligned}$$

Der Beweis für P_l^m geht ähnlich wie für P_l, nur viel länglicher. Im folgenden ist $p \neq q$ und o.B.d.A. $p < q$.

$$\int\limits_{-1}^{1} P_p^m(x) \cdot P_q^m(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2^{p+q} \cdot p! \cdot q!} \cdot \int\limits_{-1}^{1} \underbrace{(1-x^2)^{m/2}(1-x^2)^{m/2}}_{=(1-x^2)^m=(-1)^m\cdot(x^2-1)^m} \cdot \frac{\mathrm{d}^{p+m}}{\mathrm{d}x^{p+m}}(x^2-1) \cdot \frac{\mathrm{d}^{q+m}}{\mathrm{d}x^{q+m}}(x^2-1)^q\,\mathrm{d}x$$

Integriere q-mal partiell. Die Randterme verschwinden wegen $x^2-1=0$ für $x = \pm 1$.

$$= (-1)^{m+q} \frac{(-1)^m}{2^{m+q} \cdot p! \cdot q!} \cdot \int\limits_{-1}^{1} (x^2-1)^q \cdot \frac{\mathrm{d}^{1+m}}{\mathrm{d}x^{1+m}} \cdot \left((x^2-1)^m \frac{\mathrm{d}^{p+m}}{\mathrm{d}x^{p+m}}(x^2-1)^p \right)\,\mathrm{d}x$$

Wir wollen sehen, dass das für $p < q$ negativ ist.

$$\begin{aligned}
(x^2-1)^q &= \tfrac{\mathrm{d}^{q+m}}{\mathrm{d}x^{q+m}} \left[(x^2-1)^m \cdot \tfrac{\mathrm{d}^{p+m}}{\mathrm{d}x^{p+m}}(x^2-1)^p \right] \\
&= (x^2-1)^q \cdot \sum_{k=1}^{q+m} \tfrac{(q+m)!}{k!(m-k)!} \cdot \tfrac{\mathrm{d}^{q+m-k}}{\mathrm{d}x^{q+m-k}}(x^2-1)^m \cdot \tfrac{\mathrm{d}^{p+m+k}}{\mathrm{d}x^{p+m+k}}(x^2-1)^p
\end{aligned}$$

Die höchste auftretende Potenz in $(x^2-1)^m$ ist x^{2m}, daher ist $q+m-k \leq 2m$ sonst verschwindet die Ableitung dieses Termes. Analog muss $p+m+k \leq 2p$ sein. Fasst man beides zusammen, so erhält man

$$\begin{aligned}
q+p+2m &\leq 2p+2m \\
q+p &\leq 2p
\end{aligned}$$

Damit ist das Kroneker-Symbol bewiesen. Es gibt auch Orthoganalitätsrelationen, aber die brauchen wir nicht, denn in der Physik ist

$$\int\limits_{\Omega} = \int\limits_{0}^{2\pi} r \cdot \sin\vartheta\,\mathrm{d}\vartheta \int\limits_{0}^{2\pi} \mathrm{d}\varphi$$

Mit einer Funktion $\Theta(\vartheta) \cdot \Phi(\varphi) = P_l^m(\cos\vartheta) \cdot \Phi_m(\varphi)$ steht da so etwas wie

$$\int\limits_{0}^{2\pi} \int\limits_{-1}^{1} P_l^m(\cos\vartheta) \cdot \Phi_m^*(\varphi) \cdot P_x^{m'}(\cos\vartheta) \Phi_{m'}(\varphi)\,\mathrm{d}\cos\vartheta\,\mathrm{d}\varphi$$

und $\delta_{mm'}$ schon in der Integration über Φ, also

$$\int\limits_{0}^{2\pi} \Phi_{m'}^*(\varphi) \cdot \Phi_m(\varphi)\,\mathrm{d}\varphi = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{0}^{\pi} \mathrm{e}^{-im\varphi} \mathrm{e}^{im'\varphi}\,\mathrm{d}\varphi = \delta_{mm'}$$

Wir hatten gezeigt:

$$\int\limits_{-1}^{1} P_l^m(\cos\vartheta) \cdot P_k^m(\cos\vartheta)\,\mathrm{d}\cos\vartheta = \delta_{kl} \frac{2}{2l+1} \cdot \frac{(l+m)!}{(l-m)!}$$

$$\Rightarrow \widehat{P}_l^m(\cos\vartheta) = \sqrt{\frac{2l+1}{2} \cdot \frac{(l-m)!}{(l+m)!}} \cdot P_l^m(\cos\vartheta) \cdot \int\limits_{-1}^{1} \widehat{P}_l^m(\cos\vartheta) \cdot \widehat{P}_l^m(\cos\vartheta)\,\mathrm{d}\cos\vartheta = \delta_{lk}$$