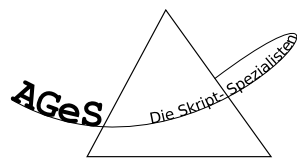


TEILCHEN- UND KERNPHYSIK

nach den Vorlesungen von Prof. Dr. Michael Kobel
(Wintersemester 2008/09)

Herausgegeben von



Jeffrey Kelling
Felix Lemke
Stefan Majewsky

Stand: 15. Dezember 2008

Inhaltsverzeichnis

Vorwort (zuerst lesen)	3
1 Einführung. Ziele. Motivation	4
2 Natürliche Einheiten	6
2.1 Planck-Einheiten	6
2.2 Heavyside-Lorentz-Einheiten („Natürliche Einheiten“)	7
2.3 Umrechnung zwischen SI- und natürlichen Einheiten	7
3 Streuprozesse	8
3.1 Wirkungsquerschnitt	8
3.2 Luminosität	9
3.3 Beschleuniger	11
3.4 Elastische Lepton-Nukleon-Streuung	11
3.4.1 Punktförmiges Target	12
3.4.2 Nicht punktförmiges Target	13
3.5 Inelastische Lepton-Nukleon-Streuung	14
3.5.1 Skalenverhalten und Partonen	16
3.5.2 Partonen-Dichtefunktionen	16
4 Theorie der Teilchenphysik	18
4.1 Dirac-Gleichung	18
4.1.1 Lösung für ruhende Teilchen	19
4.2 Allgemeine Lösung der Dirac-Gleichung	20
Stichwortverzeichnis	22

Vorwort

Bevor Ihr beginnt, mit diesem Skript zu arbeiten, möchten wir Euch darauf hinweisen, dass dieses Skript weder den Besuch der Vorlesung noch das selbstständige Nacharbeiten des Stoffes ersetzt. Wer das nicht verstanden hat, bei dem kann die Benutzung des Skriptes für Probleme insbesondere im Verständnis des Stoffes sorgen.

Das liegt daran, dass das Skript nicht als vorgekauter Wissensspeicher zu verstehen ist. Das hier ist eine Abschrift des Inhaltes, den die Vorlesung zu vermitteln versucht. Nicht enthalten sind zum Beispiel mündliche Kommentare des Professoren, auch wenn diese im individuellen Falle oft erst den Groschen fallen lassen.

Gut geeignet ist das Skript einfach gesagt als Wissensstütze, also zum Beispiel zum schnellen Nachschlagen; außerdem zum Wiederholen früheren Stoffes, sofern ein ausreichendes Grundverständnis vorhanden ist. Nach diesen einleitenden Worten wünschen wir Euch viel Spaß bei der Arbeit mit diesem Skript und viel Erfolg beim Studium!

Die AGeS-Redaktion
www.ages-skripte.org

P.S. Wir suchen immer Helfer, die unsere Skripte um neue Inhalte erweitern, Fehler suchen, oder das Layout ansprechender gestalten wollen. Wenn Ihr Lust habt, meldet Euch über unsere Webseite.

1 Einführung. Ziele. Motivation

Zunächst müssen wir einen wichtigen Begriff definieren.

Elementarteilchen

Quantenobjekt ohne permanente Substruktur

Ein Gegenbeispiel ist das Proton, welches aus drei Quarks zusammengesetzt ist. Elektronen hingegen sind Elementarteilchen (man hat bereits gezeigt, dass sie bis zu einer Auflösung von 10^{-19} m punktförmig sind). Dabei emittiert das Elektron jedoch ständig Photonen, die es kurz darauf wieder einfängt; es existieren also temporäre Substrukturen.

Die wichtigsten Eigenschaften eines Elementarteilchens sind

- im Hinblick auf die Wechselwirkungseigenschaften mit anderen Teilchen:
 - (nominelle) **Ruhmasse** m
 - **elektrische Ladung** Q
 - **schwache Ladung** I^w
 - **starke Ladung** bzw. **Farbladung**
 - **Spin** $J = 0, 1/2, 1, 3/2, 2$
 - Higgs-Teilchen: $J = 0$ (vermutet)
 - **Bausteinteilchen**: $J = 1/2$ (**Fermionen**: Quarks, Elektronen, Neutrinos, etc.)
 - **Wechselwirkungsteilchen**: $J = 1$ (**Bosonen**)
 - Gravitino: $J = 3/2$ (vermutet)
 - Graviton: $J = 2$ (vermutet)
 - Man geht davon aus, dass andere Werte für J nicht möglich sind.
 - im Hinblick auf Symmetrien der Wellenfunktion:
 - **Parität** $P = \pm 1$ (Symmetrie hinsichtlich der Raumspiegelung)
 - **Ladungskonjugation** $C = \pm 1$ (Symmetrie beim Übergang vom Teilchen zum Antiteilchen)
- Schreibweise für Spin, Parität und Ladungskonjugation: J^{PC} , also z.B. $\gamma 1^{--}$ für ein Photon
- Lebensdauer τ (Beziehung zur Ruhmasse mit Heisenbergscher Unschärferelation: $\Delta m \cdot \tau = \hbar$)

Die Grundlagenforschung im Bereich der Teilchenphysik untersucht die Grenzen der bekannten Grundgrößen:

- Zeit: Es wird angestrebt, auch Prozesse zu untersuchen, die 10^{-12} s nach dem Urknall stattgefunden haben. (Kurz nach dem Urknall hatten die Teilchen eine sehr hohe mittlere Energie. Um solche Prozesse zu untersuchen, benötigen wir also auch Teilchen mit sehr hoher Temperatur und damit sehr hoher Energie.)

- Raum: Gibt es mehr als drei Raumdimensionen?
- Materie: Kennen wir schon alle Elementarteilchen, welche Symmetrien bestimmen ihre Wechselwirkungen? Gibt es neue Symmetrien? Woher bekommen die Teilchen ihre Masse? Daran schließt sich die Frage an: Was ist überhaupt Masse?

Zu diesen Grundparametern des Universums gesellen sich die fundamentalen Kräfte und deren Austauscheteilchen:

- **starke Wechselwirkung (Gluonen)**
- **schwache Wechselwirkung (W- und Z-Bosonen, seltener: Weakonen)**
- **elektromagnetische Wechselwirkung (Photonen)**
- **Gravitation (Gravitonen)**

Wechselwirkungen entstehen aus Symmetrien in den Elementarteilchen. Zum Beispiel besteht (in der Anschauung der Farbladung) ein Neutron aus einem grünen up-Quark und einem blauen bzw. einem roten down-Quark. Stellt man sich die Farbladung als einen Vektor vor, hat das Neutron in der Summe eine Gesamtfarbladung von Null, was die hohe Stabilität des Quark-Verbundes erklärt.

Die Symmetrien erfordern immer masselose Teilchen. Die Masse entstand also ungefähr 10^{-10} s nach dem Urknall durch eine spontane Symmetriebrechung. Als Ursache dafür könnte ein Kopplung der Masse an ein Higgs-Hintergrundfeld.

Die bekannten Elementarteilchen unterteilt man in drei Familien:

Familie	1	2	3	Q	I_3^w	Farbladung
Quarks	up (u)	charm (c)	top (t)	+2/3	+1/2	r,g,b
	down (d)	strange (s)	bottom (b)	-1/3	-1/2	r,g,b
Leptonen	El.-Neutrino ν_1	M.-Neutrino ν_2	T.-Neutrino ν_3	0	+1/2	0
	Elektron e	Myon μ	Tauon τ	-1	-1/2	0

Die stabile Materie (Protonen, Elektronen und Neutronen) setzt sich aus Teilchen der ersten Familie zusammen. Alle anderen Teilchen sind instabil und entstehen nur bei hohen Energien, kamen also natürlich nur in den ersten Momenten nach dem Urknall vor. Ihre vergleichsweise hohe Masse erhalten Atome nur zu etwa einem Prozent aus der Ruhemasse ihrer Bausteine, und zu über 99 Prozent aus der Energie der Bindungen. Würde sich zum Beispiel die Elektronmasse ändern, gäbe es kaum einen Effekt auf die Atommassen und auf die Massendichte im Universum, aber einen riesigen Effekt auf das Verhalten der Materie. (Zum Beispiel hat die Rydberg-Konstante eine lineare Abhängigkeit von der Elektronmasse.)

2 Natürliche Einheiten

Ganz kurzgefasst wollen wir ein Einheitensystem wählen, in dem $\hbar = c = \varepsilon_0 = \mu_0 = 1$ gilt. Warum sollten wir das tun?

Naturkonstanten (z.B. $\varepsilon_0, c, G_N, k_B, \mu_0, e, m_e, \hbar$) kann man in mehrere Klassen aufteilen:

1. überflüssige Konstanten, die durch die menschliche Einheitenwahl bedingt sind
2. Konstanten, die als natürliche Skalen fungieren (also an standardisierte Messverfahren gekoppelt sind) – zum Beispiel das Kilogramm, das Meter und die Sekunde
3. wirkliche Naturkonstanten, die nicht aus anderen Konstanten herleitbar sind

Wir ordnen die oben genannten Konstanten beispielhaft ein: (Es gibt im Standardmodell noch zwanzig weitere Konstanten.)

1. $\varepsilon_0, \mu_0, k_B$
2. c, G_N, \hbar
3. m_e, e

Beispiel 2.1 zur Boltzmann-Konstante

In der Thermodynamik gilt $E = k_B \cdot T/2$ (pro Freiheitsgrad). Wählt man k_B nicht in der Einheit J/K , sondern in 1, kann man die Temperatur auch in Joule oder Elektronenvolt messen. (Dann entspricht ein Kelvin etwa 11000 eV, und die Zimmertemperatur ist etwa 25,3 meV.)

2.1 Planck-Einheiten

Im klassischen Einheitensystem haben wir Größen wie $\hbar = 6,6 \cdot 10^{-34} \text{ Js}$ und $G_N = 6,7 \cdot 10^{-34} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$. Was man sich auch merken sollte, ist, dass die Lichtgeschwindigkeit ausreichend mit $c = 3 \cdot 10^8 \text{ (m/s)}$ anzugeben ist.

Es lassen sich drei fundamentale Skalen bilden:

- Planck-Länge: $x_p = \sqrt{G_N \cdot \hbar / c^3} \approx 10^{-35} \text{ m}$
- Planck-Zeit: $t_p = x_p / c = \sqrt{G_N \cdot \hbar / c^5} \approx 10^{-43} \text{ s}$
- Planck-Energie: $E_p = \hbar / t_p = \sqrt{\hbar \cdot c^5 / G_N} \approx 10^9 \text{ J} \approx 10^{19} \text{ GeV}$

Aus letzterem ergibt sich sofort die Planck-Masse $M_p = E_p / c^2 = \sqrt{\hbar \cdot c / G_N} \approx 10^{-8} \text{ kg}$. Jenseits der Planckskalen endet unsere heutige Physik. **Planck-Einheiten** werden durch ein Hut dargestellt, zum Beispiel für Länge und Masse:

$$\hat{x} \equiv \frac{x}{x_p} \quad \text{und} \quad \hat{m} = \frac{m}{M_p}$$

In diesen Einheiten ist $\hat{x}_p = \hat{t}_p = \hat{E}_p = \hat{M}_p = 1$. Damit gilt für die ursprünglich zur Bildung der Planck-Skalen verwendeten Naturkonstanten: $c = \hbar = G_N = 1$

Das Problem mit diesen Einheiten ist, dass sie viel zu klein sind. Ein Atomdurchmesser wäre zum Beispiel $\hat{d} \approx 10^{25}$. Komfortabler wären Einheiten, die sich in den normalen Größenordnungen der Teilchenphysik bewegen, zum Beispiel:

- Teilchengröße: $x \approx 10^{-18} \dots 10^{-18} \text{ m}$
- Zerfallsdauer: $t \approx 10^{-12} \dots 10^{-24} \text{ s}$
- Massen: $m \approx 1 \cdot 1000 \text{ GeV}$

2.2 Heavyside-Lorentz-Einheiten („Natürliche Einheiten“)

Wir setzen $\hbar = c = 1$, zusätzlich auch $\mu_0 = \varepsilon_0 = k_B = 1$, *nicht* aber $G_N = 1$. Wir erhalten eine neue dritte fundamentale Skala, die Energie in GeV. Alle anderen Größen haben dann eine Einheit GeV^n , zum Beispiel:

- Energie, Impuls, Masse: $[E] = [p] = [M] = \text{GeV}$
- Länge, Zeit: $[x] = [t] = \text{GeV}^{-1}$ – Das folgt unmittelbar aus der Heisenberg-Unschärferelation.
- Kraft: $[F] = \text{GeV}^2$ – Das folgt aus $E = \int F \, ds$.

Beispiel 2.2 Feinstrukturkonstante

In SI-Einheiten ist $\alpha = \frac{e^2}{4\pi \cdot \varepsilon_0 \cdot \hbar \cdot c} \approx \frac{1}{137,036\dots}$. In natürlichen Einheiten verbleibt $\alpha = \frac{e^2}{4\pi}$, mit dem bekannten Wert für α folgt $e \approx 0,303\dots$. Wir werden sehen, dass die Elementarladung eine Wahrscheinlichkeit beschreibt.

2.3 Umrechnung zwischen SI- und natürlichen Einheiten

Man muss sich merken:

- (I) $c = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$ (ziemlich genau)
- (II) $\hbar \cdot c = 0,2 \text{ GeV} \cdot \text{fm}$ (sogar fast exakt)
- (III) $1 \text{ eV} = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2}$

Nun funktioniert die Umrechnung wie folgt:

1. Stimme Potenz von kg mit (III) ab.
2. Stimme Potenz von s mit (I) ab
3. Stimme Potenz von m mit (II) ab.

Beispiel 2.3 Umrechnung von $G_N \approx 7 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$

Wir gehen die Schritte durch: (Beachte im zweiten Schritt $c = 1$.)

1. $G_N = 7 \cdot 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{kg} \cdot \text{s}^2} \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} \frac{\text{kg} \cdot \text{m}^2}{\text{s}^2 \cdot \text{eV}} = 11 \cdot 10^{-26} \frac{\text{m}^5}{\text{s}^4}$
2. $G_N = 11 \cdot 10^{-26} \frac{\text{m}^5}{\text{s}^4} \cdot \frac{1}{\text{GeV}} \cdot \frac{c^4}{(3 \cdot 10^8 \text{ ms}^{-1})^4} = 1,4 \cdot 10^{-54} \frac{\text{m}}{\text{GeV}}$
3. $G_N = 1,4 \cdot 10^{-54} \frac{\text{m}}{\text{GeV}} \cdot \frac{\hbar c}{0,2 \text{ GeV} \cdot \text{fm}} = 0,7 \cdot 10^{-38} \text{ GeV}^{-2}$

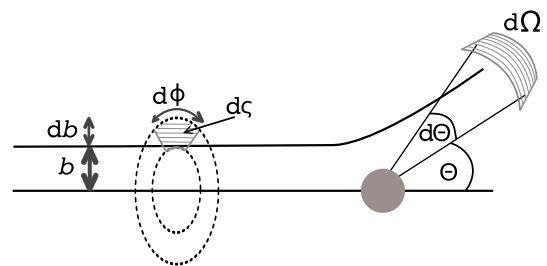
Am Rande: Anders ausgedrückt ist $G_N = 1/(1,2 \cdot 10^{19} \text{ GeV}^2) = 1/M_p^2$. Dies sieht man auch schneller aus $M_p = E_p/c^2 = \sqrt{\hbar c/G_N} = 1/\sqrt{G_N}$.

3 Streuprozesse

Streuprozesse sind ein Grundbestandteil der experimentellen Arbeit der Teilchenphysiker. Die Streuprozesse werden mit sehr hohen Energien ausgeführt, um eine möglichst hohe Auflösung zu erzielen (gemäß Heisenberg-Unschärferelation) und evtl. neue Teilchen zu erzeugen (nach $E = mc^2$).

3.1 Wirkungsquerschnitt

Man beschießt ein Target mit Projektilen und es gibt eine Wechselwirkung, z.B. eine elektrische Kraft, durch welche das Projektil abgelenkt wird. Es gibt einen variablen Stoßparameter b . Die Frage ist, wieviele Teilchen, die mit einem Stoßparameter $b \cdots b + db$ in dem Winkel $\varphi \cdots \varphi + d\varphi$ einfallen (also durch das Flächenelement $d\sigma = b \cdot db d\varphi$), durch das Raumwinkelement $d\varphi$ und $d\theta$ unter dem Ablenkwinkel θ gemessen werden (also auf dem Raumwinkelement $d\Omega = \sin \theta \cdot d\theta d\varphi$).



Klassisches Bild des Wirkungsquerschnittes

Die Eigenschaften des Targets stecken in der Winkelablenkung, das heißt: in $\frac{d\theta}{db}$. Da in der klassischen Mechanik die Relation $\theta(b)$ exakt bekannt ist, ergibt sich einfach:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left| \frac{b}{\sin \theta} \cdot \frac{db}{d\theta} \right|$$

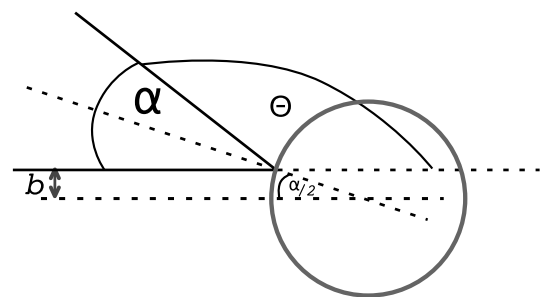
differentieller Wirkungsquerschnitt

Als einfaches Beispiel nehmen wir an, dass das Projektil und das Target eine harte Kugel ist.

$$b = R \cdot \sin \frac{\alpha}{2} = R \cdot \cos \frac{\theta}{2} \quad \Rightarrow \quad \frac{db}{d\theta} = -\frac{R}{2} \cdot \sin \frac{\theta}{2}$$

Damit ergibt sich:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{b}{\sin \theta} \cdot \frac{R}{2} \cdot \sin \frac{\theta}{2} = \frac{R^2}{2} \cdot \frac{\sin \frac{\theta}{2} \cdot \cos \frac{\theta}{2}}{2 \cdot \sin \frac{\theta}{2} \cdot \cos \frac{\theta}{2}} = \frac{R^2}{4}$$



Kugelförmiges Target

Wir können zudem den **totalen Wirkungsquerschnitt** definieren:

$$\sigma_{tot} = \int_{d\Omega} d\sigma = \int \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega = \int \frac{R^2}{4} d\Omega = R^2 \cdot \pi$$

In natürlichen Einheiten ist $[\sigma] = \text{m}^2 = 1/\text{GeV}$. Typisch für die Teilchenphysik sind hierfür fm^2 . Also führt man eine neue Einheit Barn ein:

$$100 \text{ fm}^2 = 1 \text{ b} = 10^{-28} \text{ m}^2$$

„Barn“ ist das englische Wort für Scheunentor, und diese Fläche entspricht in Teilchenphysikmaßstäben auch einem großen Scheunentor. (Typische Größen sind Nanobarn bis Femtobarn.)

Beispiel 3.1

Wir betrachten eine Proton-Proton-Kollision:

$$\sigma_{pp}(E_p = 10 \text{ GeV}) \approx 40 \text{ mb} \approx \text{fm}^2 \approx r_p^2$$

Für eine Neutrino-Proton-Kollision ergibt sich:

$$\sigma_{\nu p} \approx 70 \text{ fm}^2$$

Nur ein Teil von 10^{-12} der Neutrino-Energie wechselwirkt mit dem Proton (durch schwache Wechselwirkung).

Die typische Aufgabenstellung ist die Messung des differentiellen Wirkungsquerschnittes:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{\sin\theta} \cdot \frac{d\sigma}{d\theta d\varphi}(\theta, \varphi)$$

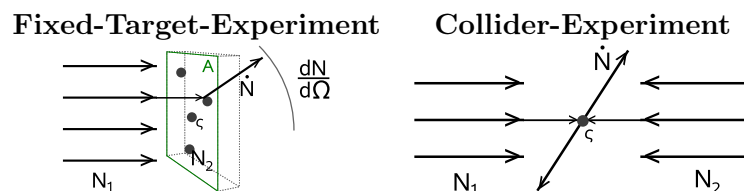
3.2 Luminosität

Messe die Anzahl \dot{N} der gestreuten Teilchen pro Zeitintervall, bzw. die differentielle Änderung $d\dot{N}/d\Omega$. Wie gelangt man damit zum differentiellen Wirkungsquerschnitt?

Luminosität eine dem experimentellen Aufbau immanente Größe \mathcal{L} mit:

$$\frac{d\dot{N}}{d\Omega} = \mathcal{L} \cdot \frac{d\sigma}{d\Omega} \quad \text{und} \quad \dot{N} = \mathcal{L} \cdot \sigma_{\text{tot}}$$

In der Praxis versucht man, eine möglichst hohe Luminosität zu erzielen, um auch möglichst kleine Wirkungsquerschnitte effizient und präzise messen zu können. Deshalb muss insbesondere die Luminosität sehr genau bestimmt werden. Man betrachtet zwei Fälle:



Zum Fixed-Target-Experiment: Insgesamt wird die Targetfläche A beschossen. Auf dieser Fläche befinden sich N_2 Teilchen (unter der Annahme eines dünnen Targets) mit dem einzelnen Wirkungsquerschnitt σ , also ist die Fläche $N_2 \cdot \sigma / A$ abgedeckt. Es ist sinnvoll, den einfallenden Fluss $\Phi = dN_1 / (dt \cdot A)$ zu definieren:

$$\dot{N} = \frac{dN_1}{dt} \cdot N_2 \cdot \frac{\sigma}{A} = \Phi \cdot N_2 \cdot \sigma$$

Mit der Dichte n_2 der Targetteilchen (nicht Massendichte, sondern Anzahldichte) ergibt sich hieraus:

$$\mathcal{L} = \Phi \cdot N_2 = \frac{dN_1}{dt} \cdot n_2 \cdot d$$

Zur praktischen Berechnung verwendet man:

$$\mathcal{L}_{\text{FT}} = \frac{dN_1}{dt} \cdot n_2 \cdot d$$

Beim Collider-Experiment verwendet man in der Praxis einen Beschleunigerring. Man schickt k Pakete mit der Frequenz $f = 1/T$ aufeinander. Der Fluss ergibt sich aus:

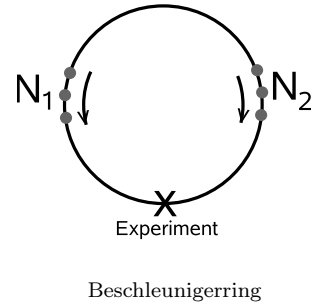
$$\Phi = k \cdot \frac{N_1 \cdot f}{A}$$

Hierbei ist A die Querschnittsfläche des Paketes, der sich aus den Ortsunschärfen Δ_x und Δ_y (Gaußsche Breiten) ergibt:

$$A = 4\pi \cdot \Delta_x \cdot \Delta_y$$

Wir definieren den Ladungsstrom $I_i = kf \cdot e \cdot N_i$, und erhalten damit:

$$\mathcal{L}_{\text{Coll}} = kf \cdot \frac{N_1 \cdot N_2}{A} = \frac{kf}{4\pi} \cdot \frac{N_1 N_2}{\Delta_x \cdot \Delta_y} = \frac{1}{4\pi \cdot e^2 \cdot k \cdot f} \cdot \frac{I_1 \cdot I_2}{\Delta_x \cdot \Delta_y}$$



Beispiel 3.2

Zahlenbeispiel

Im Fixed-Target-Experiment ergeben sich typische Werte von:

$$\frac{dN_1}{dt} \sim \frac{10^{12}}{s} \quad \text{und} \quad n_2 \approx 10^{24} \frac{1}{\text{cm}^3} \quad \text{und} \quad d = 1 \text{ mm} \quad \Rightarrow \quad \mathcal{L} = 10^{35} \frac{1}{\text{cm}^2 \cdot \text{s}}$$

Beim Colliderexperiment (hier: Large Electron Positron Collider) hatte man:

$$k = 4 \quad \text{und} \quad f = \frac{10^4}{s} \quad \text{und} \quad N_1 = N_2 = 3 \cdot 10^{11} \quad \text{und} \quad \begin{matrix} \Delta_x = 10^{-2} \text{ cm} \\ \Delta_y = 10^{-3} \text{ cm} \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad \mathcal{L} = 3 \cdot 10^{31} \frac{1}{\text{cm}^2 \cdot \text{s}}$$

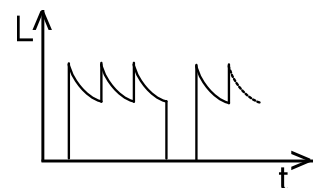
Dies ist der Nachteil der Colliderexperimente: Zwar kann man hier mit geringeren Beschleunigungsenergien hohe Schwerpunktsenergien erreichen, allerdings erreichen die Collider eine nicht so hohe Luminosität wie Fixed-Target-Experimente.

Die Luminosität \mathcal{L} wird meist in der anschaulicheren Einheit „je Picobarn und Tag“ angegeben:

$$[\mathcal{L}] = \frac{1}{\text{pb} \cdot \text{d}} \approx 10^{31} \frac{1}{\text{cm}^2 \cdot \text{s}}$$

Diese Einheit entspricht einem totalen Wirkungsquerschnitt von einem Picobarn, also einem Ereignis pro Tag. Man muss beachten, dass die Luminosität im Allgemeinen zeitabhängig ist. Die durch das Experiment insgesamt akquirierte Datenmenge wird in der integrierten Luminosität angegeben:

$$\left[\int \mathcal{L}(t) dt \right] = \text{pb}^{-1}$$

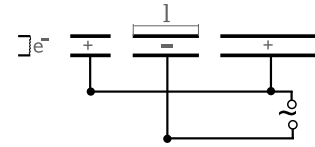


Luminosität im Collider

3.3 Beschleuniger

In der Teilchenphysik werden Energien im GeV- bis TeV-Bereich benötigt. Nur so erhält man sehr gute Auflösungen ($\Delta_x \approx \text{fm}$), massive Teilchen ($m \approx 100 \text{ GeV}$) und Zeiten aus dem kosmologischen Bereich ($t \lesssim 10^{-12} \text{ s}$). Man muss also iterativ beschleunigen:

- Der **Linearbeschleuniger** eine gerade Beschleunigungsstrecke aus einzelnen Rohren, zwischen denen eine Wechselspannung herrscht, sodass die Teilchen jeweils auf den Strecken zwischen den Rohren beschleunigt werden. Damit die Beschleunigungswirkung immer in dieselbe Richtung wirkt, legt eine Wechselspannung konstanter Frequenz ν_{HF} an, und vergrößert die Länge der einzelnen Segmente:

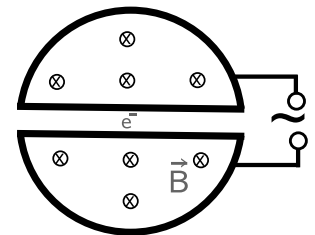


Linearbeschleuniger

$$l_i = \frac{v_i}{2\nu_{\text{HF}}} \sim \frac{\sqrt{i}}{\nu_{\text{HF}}} \quad \text{für} \quad v_i \ll c$$

Typisch erreicht man ungefähr fünf Megavolt pro Meter. Das sind sehr lange Strecken, wenn man TeV erreichen will. Also weicht man auf Kreisbahnen aus.

- Das **Zyklotron** ist im wesentlichen eine Anordnung aus zwei Halbkreisscheiben. Durch ein senkrecht zur Bewegung gerichtetes Magnetfeld wird das Teilchen auf einer Spiralbahn gehalten. Beschleunigt wird das Teilchen durch ein elektrisches Feld einer Wechselspannung. Jetzt hängt die Frequenz von der Geschwindigkeit ab: (Dies technisch zu realisieren, ist meist sehr schwierig.)



Zyklotron

$$\nu_{\text{HF}}(\gamma) = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{Q_e}{\gamma \cdot m} \cdot B$$

- Im **Synchrotron** ist stattdessen das Magnetfeld zeitveränderlich, um die Teilchen auf der Kreisbahn zu halten ($p(t) = e \cdot r \cdot B(t)$). Die Beschleunigung erfolgt durch Wechselfelder in Hohlraumresonatoren („Kavitäten“) mit einer konstanten Frequenz ν_{HF} .

Das Synchrotron dient als Beschleunigerring sowie als Speicherring und zudem als Collider. Das Größte derzeitige Zyklotron ist CERN mit 27 km Durchmesser.

- Weitere Beschleuniger sind Betatron (Anpassung des Magnetfeldes) und Microtron (Anpassung der Länge).

3.4 Elastische Lepton-Nukleon-Streuung

Elastische Streuung

Streuvorgang, bei dem sich die Teilchen nicht ändern:

$$A(p_A^\mu) + B(p_B^\mu) \rightarrow A(p_A^{\mu'}) + B(p_B^{\mu'})$$

Inelastische Streuung

Streuvorgang mit Änderung der Teilchen: $A + B \rightarrow X \neq A + B$

Ein wichtiges Beispiel ist die Elektron-Positron-Streuung:

$$e^+ + e^- \rightarrow \mu^+ + \mu^-$$

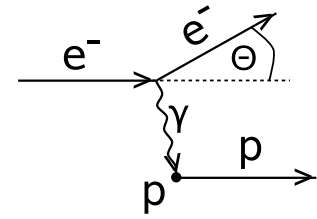
Manchmal werden Teilchen mit einem Teil der Stoßenergie angeregt, um dann andere Teilchen zu generieren, zum Beispiel:

$$\pi + p^+ \rightarrow \pi + (p^+)^* \rightarrow \pi + p^+ + \gamma$$

Lepton Elementarteilchen mit halbzahligen Spin $s = 1/2$, die nicht von starker Wechselwirkung erfasst sind (Elektron, Myon, Tauon, deren Neutrinos)

Nukleon in Atomkernen vorkommendes Elementarteilchen (Proton oder Neutron)

1964 haben Gell-Mann und Zweig die Hypothese aufgestellt, dass Nukleonen aus drei Quarks bestehen. Diese Behauptung wurde 1969 von Fridman, Keudau und Taylor durch Experimente am SLAC bestätigt. Bei der Streuung von Elektronen an einem Target wird das Elektron unter dem Einfluss der elektromagnetischen Wechselwirkung abgelenkt, die Impulserhaltung ist durch ein emittiertes Photon sichergestellt. Dieses Photon fungiert als Austauschteilchen, sein Impuls geht über in das Nukleon, welches dadurch aus seiner Ruhelage abgelenkt wird.



Elektron-Proton-Streuung

3.4.1 Punktförmiges Target

Man untersucht die Viererimpulse $p^\mu = (E, \vec{p})$ und $p'^\mu = (E', \vec{p}')$ des Elektrons sowie $P^\mu = (M, 0)$ und P'^μ des Protons, welches zu Beginn ruht. Das Photon hat einen Viererimpuls q^μ . Die Impulserhaltung ergibt:

$$q^\mu = p^\mu - p'^\mu \quad \text{und} \quad P'^\mu = P^\mu + q^\mu$$

Das Elektron wird unter dem Winkel Θ gestreut. Die charakteristische Größe der Streuung ist der **Impulsübertrag**:

$$q^2 := q^\mu q_\mu = \nu^2 - \vec{q}^2 = -4E \cdot E' \cdot \sin^2 \Theta / 2 < 0$$

Darin enthalten ist der Anteil hieran, der durch magnetische Wechselwirkung zustande kommt:

$$\tau = -\frac{q^2}{4M^2}$$

Man beachte, dass beide Größen vom Bezugssystem unabhängig sind.

Bemerkung

In der Literatur wird oft $Q^2 := -q^2$ definiert, um mit positiven Größen arbeiten zu können. Wir verwenden dieses Symbol nicht, zumal Q bereits für die elektrische Ladung benutzt wird.

Wir vergleichen die möglichen Streuungsarten:

- **Rutherford-Streuung:** Spin-0-Projektile, kann klassisch beschrieben werden:

$$b = \alpha \cdot \frac{Q_1 \cdot Q_2}{2E} \cdot \cot \frac{\Theta}{2} \quad \Rightarrow \quad \frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{b}{\sin \Theta} \cdot \frac{db}{d\Theta} = \left(\alpha \cdot \frac{Q_1 \cdot Q_2}{2E} \right)^2 \cdot \frac{1}{\sin^4(\Theta/2)}$$

Diese Gleichung gilt nur im rückstoßfreiem Fall, also $P' \approx P$.

- **Mott-Streuung:** Streuung eines Elektrons an einem Spin-1/2-Target (außer Elektron und Positron); Beschreibung benötigt Korrekturterme:

- Spin-Terme und Rückstoß-Terme:

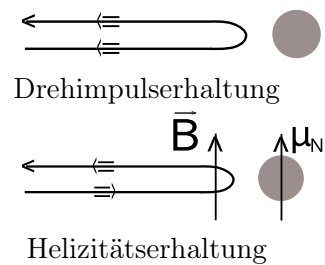
$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = (2\alpha \cdot Q_1 \cdot Q_2 \cdot E')^2 \cdot \frac{E'}{q^4 \cdot E} \cdot (\cos^2 \Theta/2 + 2\tau \cdot \sin^2 \Theta/2)$$

- Der $1/q^4$ -Term enthält $d\sigma/d\Omega \sim \sin^{-4}(\Theta/2)$. E'/E beschreibt den „Phasenraum“ bei einem Rückstoß.
- Ist $E' = 0$, so folgt aus $|\vec{p}| = 0$, dass das Phasenraumvolumen verschwindet. Weiterhin gilt:

$$E = E' \cdot \left(1 + \frac{2E}{M} \cdot \sin^2 \frac{\Theta}{2}\right)$$

Ein Prozess wird also rückstoßfrei, indem man entweder den Streuwinkel oder die Ausgangsenergie sehr klein macht, denn dann ist $E \approx E'$.

- Der Anteil $\cos^2 \Theta/2$ ist eigentlich $(1 - \beta^2 \cdot \sin^2 \Theta/2)$ für $\beta \rightarrow 1$. Die Drehimpulserhaltung besagt, dass der Spin vorher und nachher gleichgerichtet ist. Die Helizitätserhaltung würde allerdings das Gegenteil verlangen, wenn der Winkel 180° ist. Das funktioniert nur, wenn man die magnetische Wechselwirkung des Spins des Targets beachtet. Der Anteil der magnetischen Wechselwirkung ist proportional zu $(\mu_N \cdot B)^2$, aber auch proportional zu $(e^2/M^2) \cdot q^2 \approx \tau$.



- **Moller-Streuung:** Streuung eines Elektrons an einem Elektron
- **Bhabha-Streuung:** Streuung eines Elektrons an einem Positron

3.4.2 Nicht punktförmiges Target

Unsere Struktur besteht aus einer Ladungsverteilung mit der kugelsymmetrischen Ladungsdichte:

$$\varrho(\vec{r}) = Q \cdot e \cdot f(|\vec{r}|)$$

Der Wirkungsquerschnitt wird modifiziert zu:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{Mott}} \cdot |F(q^2)|^2$$

$F(q^2)$ ist der Formfaktor mit

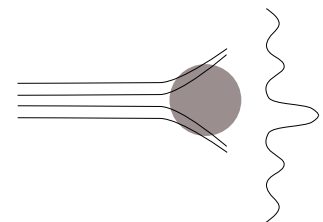
$$F(q^2) = \int f(r) \cdot e^{i\vec{q}\cdot\vec{r}} d^3r$$

Diese Definition ist auch im relativistischen Kontext gerechtfertigt, da bei kleinen Geschwindigkeiten $q^2 \approx |\vec{q}|^2$ ist.

Die Mottstreuung braucht einen elektrischen Formfaktor $G_E(q^2)$ mit $G_E(q^2 = 0) = 1$ und einen magnetischen Formfaktor $G_M(q^2)$ mit $G_M(q^2 = 0) = g/2$. Hierbei ist g definiert durch

$$\vec{\mu}_s = \frac{g}{2} \cdot \frac{e}{m} \cdot \vec{s}$$

Für punktförmige Teilchen ist $g = 2$. Für die Mottstreuung folgt unter Beachtung der Formfaktoren:



Streuung an nicht punktförmigem Target

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = (2\alpha \cdot Q_1 \cdot Q_2 \cdot E')^2 \cdot \frac{1}{q^4} \cdot \frac{E'}{E} \cdot \cos^2 \Theta/2 \cdot \left[\frac{G_E(q^2) + \tau \cdot G_M(q^2)}{1 + \tau} + 2\tau \cdot G_M(q^2) \cdot \tan^2 \frac{\Theta}{2} \right]$$

Rosenbluth-Formel

Nimmt man alles vor der eckigen Klammer als $(d\sigma/d\Omega)_0$ und trägt $(d\sigma/d\Omega)/(d\sigma/d\Omega)_0$ über $\tan^2(\Theta/2)$ auf, so erhält man eine Gerade.

Bereits 1956 hatte Hofstadter festgestellt, dass das Proton nicht punktförmig ist, denn es ist $G_M^p(q^2 = 0) = g_p/2 = 2,79 \neq 1$. Für das Neutron ist zudem $G_M^n(0) = g_n/2 = -1,91 \neq 0$, das heißt: Das Neutron ist zwar nach außen hin elektrisch neutral, enthält aber mehrere elektrische Ladungen, welche das magnetische Moment erzeugen.

Für das Proton ergibt sich ein Dipol-Formfaktor, was auf eine exponentiell abfallende Ladungsverteilung schließen lässt:

$$G_E^p(q^2) = \frac{G_M^p(q^2)}{g_p/2} = \frac{1}{\left(1 + \frac{|q^2|}{0,71 \text{ GeV}^2}\right)^2} \quad \text{und} \quad \varrho(r) = \varrho_0(r) \cdot e^{-\frac{r}{0,23 \text{ fm}}}$$

3.5 Inelastische Lepton-Nukleon-Streuung

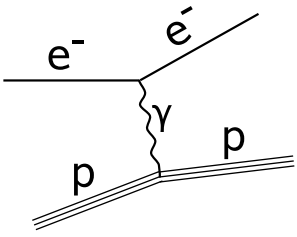
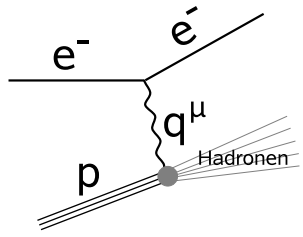
In den 1950ern hatte man eine große Menge von Elementarteilchen angehäuft (insb. Mesonen wie π , k , η , η' , ω und ϱ und Bosonen wie p , n , Λ , ε^0 und ε^\pm), wusste aber noch nicht, dass die meisten davon aus Quarks bestehen.

Meson Elementarteilchen, bestehend aus einem Quark und einem Antiquark

Baryon Elementarteilchen, bestehend aus drei Quarks oder drei Antiquarks

Bis auf das Proton sind alle instabil. Die Masse ist nur auf $\pm\Gamma = 1/\tau$ bestimmt, wobei τ die Lebensdauer des Teilchens ist. Das heißt, die Masse lässt sich nicht beliebig genau messen, da die Teilchen zerfallen.

Bei der unelastischen Streuung kombinieren die Quarks des Nukleons zu einem Hadronensystem.

<p style="text-align: center;">Elastische Streuung</p>  $\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right) = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{Mott}} \cdot \frac{E'}{E} \cdot [A(q^2) + B(q^2) \cdot \tan^2 \frac{\Theta}{2}]$	<p style="text-align: center;">Unelastische Streuung</p>  $\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right) = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{Mott}} \cdot \left[\frac{1}{\nu} \cdot F_2(x, q^2) + \frac{2}{M} \cdot F_1(x, q^2) \cdot \tan^2 \frac{\Theta}{2} \right]$
--	---

Die invariante Masse des bei der inelastischen Streuung entstehenden hadronischen Systems ist:

$$W^2 = P'^\mu P'_\mu =: P^2 = (P + q)^2 = P^2 + q^2 + 2P \cdot q$$

Die Größen p , p' , P , P' und q sollen Vierervektoren sein. (Also ist $P \cdot q$ zum Beispiel eine Kurzschreibweise für $P^\mu \cdot q_\mu$. Wenn nur der Dreiervektor des entsprechenden Impulses verwendet wird, wird dies durch einen Vektorpfeil gekennzeichnet.) Die Koeffizienten $F_{1,2}$ im Wirkungsquerschnitt enthalten neben q^2 nun noch eine andere Abhängigkeit:

Bjorken'sche Skalenvariable

invariante Größe $x := -\frac{q^2}{2P \cdot q} \stackrel{(\text{Labor})}{=} -\frac{q^2}{2M \cdot \nu}$ mit $0 \leq x \leq 1$

Damit lässt sich W neu schreiben:

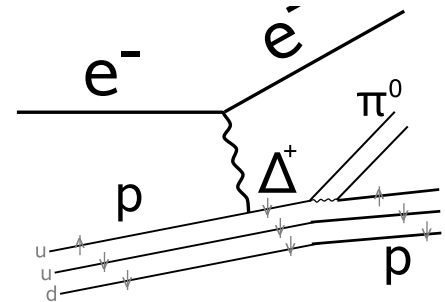
$$W^2 = M^2 + q^2 \cdot \left(1 - \frac{1}{x}\right)$$

Im Fall elastischer Streuung ist $W = M$ (somit $x = 1$), da das entstehende Hadronensystem wieder das Proton mit der Masse M ist. Bei inelastischer Streuung ist $W > M$ (somit $x < 1$), denn die Photonenenergie geht teilweise in Masseenergie über. Da die Photonenfrequenz über

$$\nu = -\frac{q^2}{2M \cdot x}$$

gegeben ist und im elastischen Fall $x = 1$ fest ist, muss die Frequenz ν eindeutig sein. Bei unelastischer Streuung ist dies nicht mehr der Fall. Daher resultiert auch die Abhängigkeit der $F_{1,2}$ im Wirkungsquerschnitt von der Skalenvariable x .

Messungen zeigen Strukturen in $d\sigma/(d\Omega \cdot dE)(W)$, sogenannte **Resonanzen**. Dies folgt aus dem Quarkmodell: Es muss natürlich der Spin erhalten bleiben; also kann zum Beispiel aus einem Proton ein Δ^+ -Teilchen werden, welches anschließend in ein Proton und ein Π^0 zerfällt. Die Teilchen kann man als ebene Wellen betrachten:



$$|\psi\rangle = A \cdot e^{i\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t} = A \cdot e^{i\vec{p} \cdot \vec{r}} \cdot e^{-iE \cdot t} = A \cdot e^{-ip^\mu \cdot x_\mu}$$

Im Ruhesystem des Δ^+ -Teilchens ist die Masse M_Δ eben die Energie, was wiederum der Kreisfrequenz ω entspricht. Genau wie in der Mechanik kann man nun erzwungene Schwingungen behandeln. Damit ist die Amplitude proportional zu:

$$A \sim \left| \frac{1}{\omega^2 - \omega_0^2 + i\gamma \cdot \omega_0} \right|^2 \sim \frac{1}{(\omega - \omega_0)^2 + \gamma^2 \cdot \omega_0^2}$$

Das teilchenphysikalische Analogon ist jetzt der Wirkungsquerschnitt:

$$\sigma \sim \left| \frac{1}{(W^2 - M_\Delta^2) + i\Gamma_\Delta \cdot M_\Delta} \right|^2 \sim \frac{1}{(W^2 - M_\Delta^2)^2 + \Gamma_\Delta^2 \cdot M_\Delta^2}$$

Bevor man die Theorie um die Quarks erweitert hat, hat man die Streuung als Δ -Resonanz bezeichnet. Heute erklärt man die Streuung mithilfe eines Δ -Baryons als Zwischenzustand mit einer Lebensdauer:

$$\tau = \frac{1}{\Gamma}$$

Beispiel 3.3

zur Lebensdauer

Sei $\Gamma_\Delta = 0,2 \text{ GeV}$. Anschaulich rechnet man das Ergebnis noch in die SI-Einheiten um.

$$\tau_\Delta = \frac{1}{0,12 \text{ GeV}} \cdot \frac{0,2 \text{ GeV} \cdot \text{fm}}{3 \cdot 10^{23} \text{ fm/s}} = 0,6 \cdot 10^{-23} \text{ s}$$

Eine weitere wichtige Bedeutung von x liegt im **Infinite-Momentum-Bezugssystem**: In diesem System bewegt sich das Proton mit großem Impuls, sodass alle transversalen Impulse, insbesondere auch

die Bewegungen der Quarks im Proton, vernachlässigt werden können. Hierbei ist x der Impulsanteil der Quarks („**Partonen**“) im Proton. Die unelastische Streuung am Proton ist dann eine elastische Streuung an einem der Partonen (Index P).

$$(P_P^\mu)^2 = \xi \cdot P^\mu \quad \text{und} \quad (P_P'^\mu)^2 + 2P_P \cdot q + q^2 \quad \text{mit} \quad P' = P + q$$

Umgestellt erhält man:

$$0 = 2P_P \cdot q + q^2 = 2\xi \cdot P \cdot q + q^2 \quad \Rightarrow \quad \xi = -\frac{q^2}{2P \cdot q} = x$$

Für die Auflösung solcher Streuprozesse gilt:

$$\Delta x \sim \frac{1}{\sqrt{|q^2|}} = \frac{1}{|q|}$$

Man braucht also wiederum hohe Energien, um kleine Strukturen aufzulösen. Bei der Rutherford-Streuung (1911) wurde das Proton noch als Punktmasse aufgelöst, Hofstadter konnte 1956 mit elastischer Streuung eine Ausdehnung feststellen. In den 60er-Jahren konnte man mit inelastischen Streuprozessen das Proton (Spin $s = 1/2$) in ein Δ^+ -Teilchen (Spin $s = 3/2$) verwandeln, wobei sich der Spin des Elektrons umkehrt. Durch tief unelastische Streuung bewiesen Feynman, Bjorken, Friedman, Kendau und Taylor um 1970 die Beschreibung des Protons als Konglomerat aus drei Quarks.

Für die beschleunigte inelastische Streuung ist der Formfaktor von x und q^2 abhängig, wobei $x = -q^2/2Pq$ ist. Wenn P_t klein ist, ist x der Impulsanteil der Partonen.

Bei der elastischen Streuung hängt der Formfaktor nur von q^2 ab:

$$F_{\text{Dipol}}(q^2) = \frac{1}{(1 + |q|^2/0,7 \text{ GeV})^2} \sim \frac{1}{q^4}$$

3.5.1 Skalenverhalten und Partonen

Sei M die typische beteiligte Masse, eine charakteristische Größe des Experimentes. Bjorken sagte voraus, dass im Falle $|q|^2 \gg M$ der Formfaktor von q^2 unabhängig wird, also $F(x, q^2) \rightarrow F(x)$. Man fand aber, dass dieses **Skaling** schon bei geringeren Massen auftritt, also bei $|q|^2 \approx M$. Folglich müssen die beteiligten Massen $m \ll M$ sehr klein sein, denn dann ist $|F(q^2)| = \text{const.}$, der Formfaktor ist also kugelsymmetrisch. Er sagt somit punktförmige Objekte voraus, die zunächst nur als Partonen bezeichnet wurden.

3.5.2 Partonen-Dichtefunktionen

Man weiß, dass die Streuung durch die elektromagnetische Wechselwirkung vermittelt wird. Den Formfaktor F_2 erhält man durch Summation über alle Partonen i :

$$F_2(x) = \sum_i Q_i^2 \cdot x \cdot f_i(x)$$

Hierbei ist Q_i die Partonenladung und f_i beschreibt die Häufigkeit des Partons i mit dem Impuls $x \cdot P$. Diese Verteilung ist normiert:

$$\int_0^1 \sum_i x \cdot f_i(x) dx = 1$$

Somit ist der Protonenimpuls die Summe aller Partonenimpulse.

Beispiel 3.4

Wir nehmen an, dass das Proton zu zwei Dritteln aus up-Quarks und zu einem Drittel aus down-Quarks besteht.

$$F_2^p(x) = x \cdot \left[\frac{4}{9} \cdot f_n(x) + \frac{1}{9} \cdot f_d(x) \right]$$

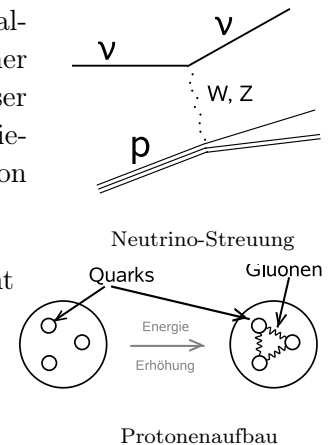
Nun kann man aber auch über die schwache Wechselwirkung streuen, also durch Austausch von w - bzw. z -Bosonen. Der Wechselwirkungspartner ist dann ein Neutrino. Die Theorie sagt voraus, dass der Formfaktor dieser Streuung um den Faktor $18/5$ größer ist. Der experimentelle Nachweis dieses Verhältnisses ist ein wichtiger Teil der Argumentation, dass das Proton tatsächlich aus zwei up-Quarks und einem down-Quark besteht.

Durch Erhöhung des Impulsübertrages q^2 könnte man im HERA-Experiment nachweisen, dass die Quarks ständig Gluonen austauschen. Dieser Nachweis gelang über die Überprüfung der Normierung, denn ohne Beachtung der Gluonen war:

$$\int_0^1 \sum_q x_q \cdot f_q(x) dx \approx 0,55$$

Wenn man durch höheren Impulsübertrag noch genauer auflöst, stellt man fest, dass ständig Paare aus Quarks und Antiquarks entstehen und verschwinden. Die ständig anwesenden Teilchen (u und d) nennt man **Valenz-Quarks**, die kurzzeitigen Teilchen heißen **See-Quarks**.

Durch den internen Aufbau hängt die Strukturfunktion doch wieder von q^2 ab. Nur für große x kann man diese Abhängigkeit vernachlässigen.



4 Theorie der Teilchenphysik

4.1 Dirac-Gleichung

Wie bereits in der Quantentheorie besprochen, werden die für die Bewegungsgleichung relevanten Größen wie folgt quantisiert:

klassisch	quantenmechanisch
E	$\hat{E} = i \cdot \frac{\partial}{\partial t}$
p	$\hat{p} = i \cdot \left(-\frac{\partial}{\partial x}, -\frac{\partial}{\partial y}, -\frac{\partial}{\partial z} \right)$
p^μ	$\hat{p}^\mu = i \cdot \left(\frac{\partial}{\partial t}, -\frac{\partial}{\partial x}, -\frac{\partial}{\partial y}, -\frac{\partial}{\partial z} \right) = i \cdot \frac{\partial}{\partial x_\mu} =: i \cdot \partial^\mu$

Zur Herleitung der Schrödinger-Gleichung wird die klassische Energie-Impuls-Beziehung quantisiert:

$$\frac{\vec{p}^2}{2m} = E \quad \Rightarrow \quad -\frac{1}{2m} \cdot \nabla^2 \Psi(x, t) = i \frac{\partial}{\partial t} \Psi(x, t)$$

In der relativistischen Mechanik erhält man analog aus $p^\mu \cdot p_\mu = E^2 - \vec{p}^2 = m^2$ die folgende wichtige Gleichung:

$$-\partial^\mu \partial_\mu \Psi(\vec{r}, t) = m^2 \cdot \Psi(\vec{r}, t)$$

Klein-Gordon-Gleichung

Diese Gleichung wird auch heute noch für Bosonen verwendet. Dirac erkannte aber, dass die Klein-Gordon-Gleichung bei Fermionen fälschlicherweise auf negative Wahrscheinlichkeiten führt. Also Lösung des Problems versuchte es, die Gleichung $p^\mu \cdot p_\mu - m^2 = 0$ zu linearisieren. Der Ansatz lautet wie folgt:

$$(\gamma^\kappa \cdot p_\kappa - m) \cdot (\gamma^\lambda \cdot p_\lambda - m) \stackrel{!}{=} p^\mu \cdot p_\mu - m^2$$

Daraus folgen für den neuen Vierervektor γ die Bedingungen:

$$\gamma^\kappa \cdot \gamma^\lambda = -\gamma^\lambda \cdot \gamma^\kappa \text{ für } \lambda \neq \kappa \quad \text{und} \quad (\gamma^0)^2 = 1 \quad \text{und} \quad (\gamma^1)^2 = (\gamma^2)^2 = (\gamma^3)^2 = -1$$

Dieses System wird nur durch **hyperkomplexe Zahlen** gelöst, deren einfachste Darstellung 4×4 -Matrizen sind. Zur kompakten Schreibung nutzen wir die zweidimensionale Einheitsmatrix sowie die Pauli-Spinmatrizen:

$$\mathbb{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Die Lösung für die Elemente von γ lautet nun wie folgt:

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & -\mathbb{1} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{pmatrix}$$

Für den Impuls ergibt sich dann:

$$\gamma^\kappa \cdot p^\kappa - m = 0$$

Die Quantisierung führt auf die Dirac-Gleichung:

$$(i \cdot \gamma^\mu \partial_\mu - m) \Psi = 0$$

Dirac-Gleichung für Fermionen

Ψ muss also auch ein vierkomponentiges Objekt sein. Der erste Term ist (für $\mu = 0$):

$$\left[i \cdot \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} - m \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \\ \Psi_3 \\ \Psi_4 \end{pmatrix} = 0$$

Man beachte, dass die γ^μ keine Vierervektoren sind, da sie sich unter Lorentz-Transformation *nicht* verändern. Die Wahrscheinlichkeitsverteilung Ψ hat vier Komponenten Ψ_1 bis Ψ_4 ; diese Indizes sind vier Freiheitsgrade, die nichts mit den Komponenten der Vierervektoren zu tun haben. Sie werden benötigt, weil Ψ auch eine 4×4 -Matrix ist.

4.1.1 Lösung für ruhende Teilchen

Es ist also $\vec{p} = 0$. Laut der Quantisierungsvorschrift ist damit auch $\partial \Psi / \partial \vec{x} = 0$:

$$\partial_1 \Psi = \partial_2 \Psi = \partial_3 \Psi = 0$$

Die Dirac-Gleichung liefert:

$$i \cdot \gamma^0 \partial_0 \Psi = m \cdot \Psi$$

$$i \cdot \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \\ \Psi_3 \\ \Psi_4 \end{pmatrix} = m \cdot \begin{pmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \\ \Psi_3 \\ \Psi_4 \end{pmatrix}$$

Dieses System aus vier Differentialgleichungen liefert die folgenden vier Basislösungen:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot e^{-imt} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot e^{-imt} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot e^{imt} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot e^{imt}$$

Natürlich ist jede Linearkombination dieser Basislösungen auch eine Lösung. Da die Dirac-Gleichung nur für Fermionen gilt, ist $s_z = \pm 1/2$. Diese Spins kann man den Lösungen zuordnen, also zum Beispiel $s_z = 1/2$ zur ersten Lösung und $s_z = -1/2$ zur zweiten Lösung. Man sieht, dass man, um alle Lösungen voneinander unterscheiden zu können, eine weitere solche Größe finden muss. Hierzu ermitteln wir die Energieeigenwerte der Lösungen:

$$E \cdot \Psi = \hat{E} \Psi = i \cdot \frac{\partial}{\partial t} \psi$$

Für die ersten beiden Lösungen ergibt sich die Energie $E = +m$, für die anderen beiden $E = -m$. Da negative Energien unmöglich sind, nahm man zunächst an, dass diese Lösungen physikalisch unsinnig sind. Dirac erklärte 1928, dass diese Lösungen sehr voll physikalisch sind; sie beschreiben Antiteilchen

mit umgekehrter Ladung. Nun kann man diesen Lösungen auch wieder Spins zuordnen. Insgesamt gehören zu den Lösungen also die folgenden Größen:

	$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot e^{-imt}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot e^{-imt}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot e^{imt}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot e^{imt}$
Spin	$s_z = \frac{1}{2}$	$s_z = -\frac{1}{2}$	$s_z = \frac{1}{2}$	$s_z = -\frac{1}{2}$
Energie	$E = m$	$E = m$	$E = -m$	$E = -m$

Die Diracsche Erklärung mithilfe des „Dirac-Sees“ ist heute überholt. Stattdessen nutzt man die Interpretation nach Feynman und Stückelberg: Für negative Lösungen wird der Viererimpuls umdefiniert:

$$p_{\text{phys}}^\mu = -p_{\text{Dirac}}^\mu$$

Somit geht die Energie $E = -m < 0$ in $-E = m > 0$ und der Impuls von \vec{p} zu $-\vec{p}$ über. Damit kehrt sich auch die Zeit um ($t \rightarrow -t$), sodass auch Antiteilchen eine *positive Energie* haben und sich in der Zeit *vorwärts* bewegen.

4.2 Allgemeine Lösung der Dirac-Gleichung

Die Lösungen der Dirac-Gleichung sind Eigenzustände des **Helizitätsoperators** \hat{h} , dessen Eigenwerte die Ausrichtung von \vec{s} bzgl. dem Impuls \vec{p} angeben. Die Richtung von \vec{p} wird dabei als Quantisierungsachse für den Spin gewählt, somit ist in dieser Richtung $s_p = \pm 1/2$:

$$h := \frac{\vec{p} \cdot \vec{s}}{|\vec{p}| \cdot |\vec{s}|} = \frac{s_p}{|s_p|} = \pm 1$$

Für die folgenden Ausführungen führen wir die folgenden Zweier-Spinoren als Abkürzungen ein:

$$\chi^{(1)} := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{für } n = +1 \quad \text{und} \quad \chi^{(2)} := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{für } n = -1$$

Ein freies Teilchen wird immer durch eine ebene Welle gelöst:

$$e^{-i \cdot p_\mu \cdot x^\mu} = e^{i \cdot (\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega \cdot t)}$$

Allgemein ergeben sich die Lösungen damit wie folgt:

Teilchen	Antiteilchen
$\Psi(x^\mu, p_\mu) = u(p_\mu) \cdot e^{-ip_\mu \cdot x^\mu}$	$\Psi(x^\mu, p_\mu) = v(p_\mu) \cdot e^{+ip_\mu \cdot x^\mu}$

Hierbei sind u und v der Teilchen- und der Antiteilchen-Spinor, die jeweils Viererspinoren sind.

$$u_{1,2} = \sqrt{E+m} \cdot \begin{pmatrix} \chi^{(1,2)} \\ \frac{\vec{p} \cdot \vec{\sigma}}{E+m} \cdot \chi^{(1,2)} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad v_{1,2} = \sqrt{E+m} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\vec{p} \cdot \vec{\sigma}}{E+m} \cdot \chi^{(1,2)} \\ \chi^{(1,2)} \end{pmatrix}$$

Hierbei ist $\vec{\sigma}$ eine Kurzschreibweise für alle Pauli-Spinmatrizen:

$$\vec{\sigma} = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$$

Beispiel 4.1

Ruhendes Teilchen

Wir wollen diese allgemeine Lösung mit den oben gefunden Basislösungen vergleichen. Dazu setzen wir $\beta \rightarrow 0$, $\vec{p} \rightarrow 0$ und $E \approx m$:

$$u_1 = \sqrt{2E} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad u_2 = \sqrt{2E} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad v_1 = \sqrt{2E} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad v_2 = \sqrt{2E} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Beispiel 4.2

Masseloses Teilchen

In diesem Fall geht $\beta \rightarrow 1$, der Impuls ist $\vec{p} = (0, 0, p)$ und die Energie $E \gg m$ sehr groß. Die Nebenrechnung ergibt zunächst:

$$\frac{\vec{p} \cdot \vec{\sigma}}{E + m} = \frac{p}{E} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Damit lautet die Lösung:

$$u_1 = \sqrt{E} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad u_2 = \sqrt{E} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad v_1 = \sqrt{E} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad v_2 = \sqrt{E} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Man sieht, dass hier (wie im Allgemeinen immer) die Komponenten dieses Vektors nicht klar zu Teilchen und Antiteilchen zugeordnet werden können. Weiterhin ist zu beachten, dass u_1 und v_1 zu voneinander unabhängigen Lösungen gehören, da die Exponentialfunktionen der Gesamtlösung verschiedene Vorzeichen haben.

Weiterhin charakterisieren $\begin{pmatrix} \uparrow \\ \downarrow \end{pmatrix}$ die Helizität.

adjungierter Spinor

$$\bar{u} = u^\dagger \cdot \gamma^0 \quad (\text{nicht verwechseln mit Überstrich-Notation für Antiteilchen})$$

Damit ist $j^\mu = \bar{\Psi} \cdot \gamma^\mu \cdot \Psi$ ein Vierervektor, die sogenannte **Viererstromdichte** $j^\mu = (\varrho, \vec{j})$. Die Helizität ist hingegeben bezugssystemabhängig. Wenn sich das Teilchen zum Beispiel mit $h = 1$ in x -Richtung bewegt und man das System so transformiert, dass es sich im neuen System in $-x$ -Richtung bewegt (man „überholt“ es sozusagen), dann ist der Spin immer noch in x -Richtung ausgerichtet, also wird $h = -1$. Um dieses Dilemma zu lösen, setzt man

$$\gamma^5 := i\gamma^0 \cdot \gamma^1 \cdot \gamma^2 \cdot \gamma^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und erhält eine neue, bezugssystemunabhängige Größe:

Chiralität positiv (also $+1$) im Falle $\gamma^5 \cdot u_R = u_R$, negativ (also -1) im Falle $\gamma^5 \cdot u_L = -u_L$

Die Chiralität hat kein eigenes Formelzeichen, man kennzeichnet sie wie oben durch Indizes L und R . Im Grenzfall großer Geschwindigkeiten ist die Chiralität identisch mit der Helizität h . Jeder Spinor lässt sich in Anteile positiver und negativer Chiralität aufteilen.

$$u_L := \frac{1}{2} \cdot (1 - \gamma^5)u \quad \text{und} \quad u_R := \frac{1}{2} \cdot (1 + \gamma^5)u$$

Stichwortverzeichnis

A

adjungierter Spinor 21

B

Baryon 14

Bausteinteilchen 4

Bjorken'sche Skalenvariable 15

Boson 4

 W-Boson 5

 Z-Boson 5

C

Chiralität 21

Collider 9

D

differentieller Wirkungsquerschnitt 8

E

Elastische Streuung 11

elektromagnetische Wechselwirkung 5

Elementarteilchen 4

F

Fermion 4

Fixed Target 9

G

Gluon 5

Gravitation 5

Graviton 5

H

Heavyside-Lorentz-Einheiten 7

Helizität 20

hyperkomplexe Zahlen 18

I

Impulsübertrag 12

Inelastische Streuung 11

Infinite-Momentum-Bezugssystem 15

L

Ladung

 elektrische 4

 Farbladung 4

 schwache 4

 starke 4

Ladungskonjugation 4

Lepton 5, 12

 Elektron 5

 Elektron-Neutrino 5

 Myon 5

 Myon-Neutrino 5

 Tauon 5

 Tauon-Neutrino 5

Linearbeschleuniger 11

Luminosität 9

M

Meson 14

N

Natürliche Einheiten 7

Naturkonstante 6

Nukleon 12

P

Parität 4

Parton 16

Photon 5

Planck-Einheiten 6

Planck-Skalen 6

Q

Quark 5

 bottom 5

 charm 5

 down 5

 See-Quark 17

 strange 5

 top 5

 up 5

 Valenz-Quark 17

R

Resonanz 15

Δ -Resonanz	15
Ruhmasse	4
S	
schwache Wechselwirkung.....	5
Skaling	16
Spin.....	4
Spinor	20
adjungierter Spinor.....	21
starke Wechselwirkung.....	5
Streuung	
Bhabha-Streuung	13
Moller-Streuung.....	13
Mott-Streuung	12
Rutherford-Streuung	12
Synchrotron	11
T	
totaler Wirkungsquerschnitt	8
V	
Viererstromdichte	21
W	
Weakon	5
Wechselwirkungsteilchen.....	4
Z	
Zyklotron	11