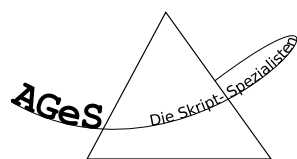


# ANALYSIS I BIS IV FÜR PHYSIKER

nach den Vorlesungen von Prof. Dr. Werner Timmermann  
(Wintersemester 2006/07 bis Sommersemester 2008)

Herausgegeben von



Jeffrey Kelling  
Felix Lemke  
Stefan Majewsky

Stand: 23. Oktober 2008

# Inhaltsverzeichnis

<b>Vorwort (zuerst lesen)</b>	<b>6</b>
<b>1 Mengen, Abbildungen</b>	<b>7</b>
1.1 Einführende Bemerkungen . . . . .	7
1.2 Mengenoperationen und -beziehungen . . . . .	7
1.2.1 Einige Kombinationen dieser Operationen . . . . .	8
1.2.2 Mengenproduktdefinitionen . . . . .	9
1.3 Relationen und Abbildungen . . . . .	10
1.3.1 Abbildungen und Funktionen . . . . .	11
1.3.2 Rechnen mit Funktionen . . . . .	12
<b>2 Die reellen Zahlen</b>	<b>14</b>
2.1 Die algebraische Struktur der reellen Zahlen . . . . .	14
2.2 Die Ordnungsstruktur der reellen Zahlen . . . . .	15
2.3 Die Vollständigkeit der reellen Zahlen . . . . .	15
2.3.1 Das Vollständigkeitsaxiom . . . . .	17
2.4 Folgerungen aus der Struktur der reellen Zahlen . . . . .	17
2.4.1 Folgerungen aus den Ordnungsaxiomen . . . . .	18
2.4.2 Metrische Struktur . . . . .	20
2.4.3 Dichtheitsaussagen . . . . .	20
2.5 Endliche und unendliche Mengen . . . . .	21
2.6 Potenzen mit rationalen Exponenten . . . . .	22
2.7 Die Symbole $\infty$ und $-\infty$ . . . . .	24
<b>3 Der Grenzwertbegriff</b>	<b>25</b>
3.1 Zahlenfolgen . . . . .	25
3.2 Exponential- und Logarithmusfunktion, allgemeine Potenzen . . . . .	30
3.2.1 Exponentialfunktion . . . . .	32
3.2.2 Logarithmusfunktion . . . . .	33
3.2.3 Allgemeine Potenzen . . . . .	33
3.3 Häufungswerte von Zahlenfolgen . . . . .	34
3.4 Unendliche Reihen (Zahlenreihen) . . . . .	35
3.4.1 Rechnen mit konvergenten Reihen . . . . .	36
3.5 Potenzreihen . . . . .	40
<b>4 Der metrische Raum, die Topologie des <math>\mathbb{R}^n</math></b>	<b>45</b>
4.1 Der Begriff des metrischen Raumes . . . . .	45
4.1.1 Konvergenz in metrischen Räumen . . . . .	46
4.2 Die Topologie des $\mathbb{R}^n$ . . . . .	50
4.3 Kompaktheit . . . . .	52

<b>5</b>	<b>Stetigkeit</b>	<b>55</b>
5.1	Begriff der Stetigkeit . . . . .	55
5.2	Grenzwerte von Funktionen und Abbildungen . . . . .	57
5.3	Eigenschaften stetiger Funktionen und Abbildungen . . . . .	59
5.4	Erweiterung des Stetigkeits- und Grenzwertbegriffes . . . . .	62
<b>6</b>	<b>Differentialrechnung</b>	<b>64</b>
6.1	Der Begriff der Ableitung . . . . .	64
6.2	Eigenschaften differenzierbarer Funktionen und Anwendungen . . . . .	70
6.2.1	Differentiationsregeln . . . . .	70
6.2.2	Mittelwertsätze und Anwendungen . . . . .	73
6.3	Taylorformel und Taylorscher Satz . . . . .	77
6.4	Lokale Extrema von Funktionen mehrerer Variablen . . . . .	80
6.5	Anfangsgründe der Vektoranalysis . . . . .	84
6.5.1	Richtungsableitung mit Gradient . . . . .	84
6.5.2	Felder, Divergenz, Rotation . . . . .	86
6.6	Lineare Differentialgleichungen n-ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten . . . . .	86
<b>7</b>	<b>Integralrechnung für Funktionen einer Variable (Riemann-Integral)</b>	<b>93</b>
7.1	Definition und erste Eigenschaften . . . . .	93
7.2	Hauptsatz (Fundamentalsatz) der Differential- und Integralrechnung . . . . .	100
7.3	Integrationsmethoden . . . . .	102
7.4	Typische Anwendungen des Riemann-Integrals . . . . .	106
7.5	Uneigentliche Integrale . . . . .	107
7.5.1	Unbeschränkte Integranden . . . . .	107
7.5.2	Unbeschränkte Integrationsintervalle . . . . .	109
7.6	Das Riemann-Stieltjes-Integral . . . . .	109
<b>8</b>	<b>Kurvenintegrale</b>	<b>116</b>
8.1	Wege und Kurven . . . . .	116
8.2	Weg- und Kurvenintegrale . . . . .	121
8.3	Gradientenfelder und Wegunabhängigkeit . . . . .	124
<b>9</b>	<b>Verschiedene Ergänzungen</b>	<b>128</b>
9.1	Gleichmäßige Konvergenz . . . . .	128
9.2	Bemerkungen zur Variationsrechnung . . . . .	132
9.2.1	Beispiele und Problemstellungen . . . . .	132
9.2.2	Euler-Lagrange-Gleichungen . . . . .	136
9.3	Umkehrabbildungen und implizite Funktionen . . . . .	139
9.4	Untermannigfaltigkeiten des $\mathbb{R}^n$ . . . . .	142
9.5	Extremwerte mit Nebenbedingungen . . . . .	147
<b>10</b>	<b>Integralrechnung für Funktionen mehrerer Variablen</b>	<b>149</b>
10.1	Definition des Riemannintegrals im $\mathbb{R}^n$ . . . . .	149
10.2	Allgemeine Eigenschaften des Integrals . . . . .	152
10.3	Satz von Fubini . . . . .	153
10.4	Koordinatentransformationen in Mehrfachintegralen . . . . .	155
<b>11</b>	<b>Integration auf Untermannigfaltigkeiten des <math>\mathbb{R}^n</math></b>	<b>158</b>
11.1	Integration skalarer Funktionen über Untermannigfaltigkeiten . . . . .	158

11.2	Orientierung von Mannigfaltigkeiten . . . . .	164
11.3	Differentialformen . . . . .	165
11.4	Integration von Differentialformen auf Mannigfaltigkeiten . . . . .	175
11.5	Der allgemeine Stokes'sche Integralsatz . . . . .	177
<b>12</b>	<b>Gewöhnliche Differentialgleichungen</b>	<b>182</b>
12.1	Terminologie und Problemstellungen . . . . .	182
12.2	Elementare Lösungsmethoden . . . . .	182
12.2.1	Differentialgleichungen mit getrennten Variablen . . . . .	182
12.2.2	Lineare Differentialgleichungen . . . . .	183
<b>13</b>	<b>Existenz- und Eindeutigkeitssätze</b>	<b>185</b>
13.1	Vorbereitungen, Banachscher Fixpunktsatz . . . . .	185
13.2	Der Satz von Picard-Lindelöf. Weitere Existenzsätze . . . . .	187
13.3	Fortsetzung von Lösungen . . . . .	189
<b>14</b>	<b>Lineare Systeme erster Ordnung</b>	<b>191</b>
14.1	Das allgemeine lineare System erster Ordnung . . . . .	191
14.2	Die Matrixexponentialfunktion . . . . .	194
14.3	Lineare Systeme erster Ordnung mit konstanten Koeffizienten . . . . .	198
14.4	Bemerkungen zur Stabilität von Lösungen . . . . .	200
<b>15</b>	<b>Bemerkungen zu Fourierreihen</b>	<b>203</b>
<b>16</b>	<b>Grundbegriffe partieller Differentialgleichungen</b>	<b>207</b>
<b>17</b>	<b>Parabolische partielle Differentialgleichungen</b>	<b>211</b>
17.1	1. Anfangs-Randwert-Problem für einen endlich langen Stab. Homogene Aufgabe . . .	211
17.2	1. Anfangs-Randwert-Problem für einen endlich langen Stab. Inhomogene Aufgabe . .	214
<b>18</b>	<b>Hyperbolische partielle Differentialgleichungen</b>	<b>215</b>
18.1	Die schwingende Saite . . . . .	215
18.1.1	Die d'Alembertsche Methode . . . . .	215
18.1.2	Die Fouriersche Methode . . . . .	217
18.1.3	Vergleich . . . . .	218
18.2	Bemerkungen zu den Maxwellschen Gleichungen . . . . .	219
18.3	Bemerkungen zur mehrdimensionalen Wellengleichung . . . . .	220
18.3.1	Eindimensionaler Fall . . . . .	221
<b>19</b>	<b>Elliptische partielle Differentialgleichungen</b>	<b>223</b>
19.1	Die dreidimensionale Aufgabe . . . . .	223
<b>20</b>	<b>Ausblick auf moderne Methoden zur Behandlung partieller Differentialgleichungen</b>	<b>228</b>
20.1	Der Begriff der Distribution . . . . .	228
20.2	Rechenoperationen mit Distributionen . . . . .	231
20.2.1	Ableitung von Distributionen . . . . .	231
20.2.2	Direktes Produkt von Distributionen . . . . .	232
20.2.3	Faltung von Funktionen und Distributionen . . . . .	233
20.3	Anwendung auf Differentialgleichungen . . . . .	234
20.3.1	Beispiel für eine schwache Lösung . . . . .	236
20.4	Bemerkungen zur Fouriertransformation . . . . .	239

<b>21 Hilberträume</b>	<b>247</b>
21.1 Wiederholung: Metrische und normierte Räume . . . . .	247
21.2 Hilberträume . . . . .	250
<b>22 Beschränkte lineare Operatoren</b>	<b>261</b>
22.1 Allgemeine Eigenschaften. Beispiele . . . . .	261
22.2 Der adjungierte Operator . . . . .	266
22.3 Das Spektrum . . . . .	271
<b>23 Kompakte Operatoren</b>	<b>279</b>
23.1 Definition. Erste Eigenschaften . . . . .	279
23.2 Spektraltheorie kompakter, selbstadjungierter Operatoren . . . . .	282
23.3 Der allgemeine Zustandsbegriff . . . . .	284
<b>24 Bemerkungen zum Spektraltheorem</b>	<b>287</b>
<b>25 Der Begriff der Holomorphie</b>	<b>294</b>
25.1 Wiederholung: Komplexe Zahlen. Komplexe Funktionen . . . . .	294
25.2 Differenzierbarkeit und Holomorphie . . . . .	294
<b>26 Integration holomorpher Funktionen</b>	<b>298</b>
26.1 Komplexe Kurvenintegrale . . . . .	298
26.2 Cauchyscher Integralsatz. Cauchysche Integralformel . . . . .	299
<b>27 Einige elementare Funktionen</b>	<b>308</b>
27.1 Exponentialfunktion und trigonometrische Funktionen . . . . .	308
27.2 Die Logarithmusfunktion . . . . .	310
<b>28 Einige Anwendungen der Cauchyschen Integralformel</b>	<b>312</b>
<b>29 Singularität holomorpher Funktionen</b>	<b>318</b>
29.1 Der Punkt $\infty$ . . . . .	318
29.2 Isolierte Singularitäten und Laurent-Entwicklung . . . . .	319
29.3 Der Residuensatz . . . . .	325
<b>30 Ergänzungen zur Funktionentheorie</b>	<b>333</b>
30.1 Analytische Fortsetzung . . . . .	333
30.2 Konforme Abbildungen . . . . .	336
30.2.1 Zum Primzahlsatz . . . . .	337

# Vorwort

Bevor Ihr beginnt, mit diesem Skript zu arbeiten, möchten wir vor allem den Studienanfängern eine wichtige Botschaft mitgeben: Dieses Skript ersetzt weder den Besuch der Vorlesung noch das selbstständige Nacharbeiten des Stoffes. Wer das nicht verstanden hat, bei dem kann die Benutzung des Skriptes im weiteren Studienverlauf für Probleme sorgen.

Wir weisen darauf hin, weil das Skript nicht als vorgekaufter Wissensspeicher zu verstehen ist. Das hier ist eine Abschrift des Inhaltes, den die Vorlesung zu vermitteln versucht. Nicht enthalten sind zum Beispiel mündliche Kommentare des Professoren, auch wenn diese im individuellen Falle oft erst den Groschen fallen lassen.

Nochmals möchten wir uns an die Studienanfänger wenden: Hoffentlich begreift Ihr genauso wie wir die ersten Semester Eures Studiums als Chance, Euren persönlichen Lernfluss zu finden. Das Studium verlangt in dieser Beziehung nach eigener Erfahrung wesentlich mehr von einem Studenten ab als eine Schule. Umso wichtiger ist es, herauszufinden, wie man möglichst viel Inhalt in möglichst kurzer Zeit aufnehmen, systematisieren und abspeichern kann.

Eines ist sicher: Das bloße Durchlesen des Skriptes reicht meistens nicht. Zur Aufnahme des Stoffes und für einen ersten Überblick reicht in den meisten Fällen das klassische Mitschreiben in der Vorlesung, bei wenigen auch das aufmerksame Zuhören. Zum Systematisieren ist der Besuch der Übungen und das Bearbeiten der Übungsaufgaben unerlässlich (auch wenn einige Erstsemester das immer wieder mal anders sehen, aber das gibt sich). Eine andere gute Idee ist oft auch die Bildung von eigenen kleinen Lehrgruppen von drei bis vier Personen, auch wenn man da aufpassen muss, sich nicht abzulenken.

Bevor wir abschweifen, fassen wir noch kurz zusammen, wofür dieses Skript wirklich geeignet ist: einfach gesagt als Wissensstütze, also zum Beispiel zum schnellen Nachschlagen; außerdem zum Wiederholen früheren Stoffes, sofern ein ausreichendes Grundverständnis vorhanden ist. Nach diesen einleitenden Worten wünschen wir Euch viel Spaß bei der Arbeit mit diesem Skript und viel Erfolg beim Studium!

Die AGeS-Redaktion  
[www.ages-skripte.org](http://www.ages-skripte.org)

P.S. Wir suchen immer Helfer, die unsere Skripte um neue Inhalte erweitern, Fehler suchen, oder das Layout ansprechender gestalten wollen. Wenn Ihr Lust habt, meldet Euch über unsere Webseite.

# 1 Mengen, Abbildungen

## 1.1 Einführende Bemerkungen

Verwende Großbuchstaben zur Bezeichnung von Mengen  $(A, B, \dots)$  sowie folgende Schreibweisen für Mengen:

- Beschreibung durch Elementliste:  $M = \{1, 2, 3\}$
- Beschreibung durch Elementeigenschaft:  $M = \{x : \text{Eigenschaft}\}$ , z.B.  $M = \{x : x \text{ durch } 3 \text{ teilbar}\}$
- leere Menge (enthält keine Elemente):  $\emptyset = \{\}$

### Bezeichnungen für spezielle Zahlenmengen

- natürliche Zahlen:  $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$
- natürliche Zahlen mit Null:  $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$
- ganze Zahlen:  $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$
- rationale Zahlen:  $\mathbb{Q} = \left\{\frac{x}{y} : x, y \in \mathbb{Z}\right\}$
- reelle Zahlen:  $\mathbb{R}$  (siehe Kapitel 2)
- komplexe Zahlen:  $\mathbb{C}$  (siehe Lineare Algebra, Kapitel 1.1)

Für Binomialkoeffizienten, vollständige Induktion und Summationszeichen siehe die 1. Übung.

## 1.2 Mengenoperationen und -beziehungen

- **Vereinigung:**

Für zwei Mengen  $A$  und  $B$  ist

$$A \cup B := \{x : x \in A \vee x \in B\}$$

Beispiel:  $A = \{1, 2, 3\}, B = \{2, 4, 7\} \Rightarrow A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 7\}$

Verallgemeinerung: Seien  $A_1, \dots, A_n$  Mengen, dann ist

$$\bigcup_{i=1}^n A_i := \{x : \exists i : 1 \leq i \leq n \wedge x \in A_i\}$$

- **Durchschnitt:**

Für zwei Mengen  $A$  und  $B$  ist

$$A \cap B := \{x : x \in A \wedge x \in B\}$$

Beispiel:  $A = \{1, 2, 3\}, B = \{2, 4, 7\} \Rightarrow A \cap B = \{2\}$

Verallgemeinerung: Seien  $A_1, \dots, A_n$  Mengen, dann ist

$$\bigcap_{i=1}^n A_i := \{x : \forall i : 1 \leq i \leq n \wedge x \in A_i\}$$

- **Disjunktheit:**

Zwei Mengen  $A$  und  $B$  heißen **disjunkt**, wenn gilt:  $A \cap B = \emptyset$ .

Mengen  $A_1, \dots, A_n$  heißen **paarweise disjunkt**, wenn gilt:

$$\forall k, l : 1 \leq k, l \leq n \wedge k \neq l : A_k \cap A_l = \emptyset$$

- **Differenz:**

Für zwei Mengen  $A$  und  $B$  ist

$$A \setminus B = \{x \in A : x \notin B\}$$

- **Inklusion von Mengen:**

Eine Menge  $A$  ist eine Teilmenge einer Menge  $B$ , wenn gilt:  $x \in A \Rightarrow x \in B$ . Man schreibt  $A \subset B$ . Also ist

$$A \subset B \Leftrightarrow \forall x \in A : x \in B$$

Eigenschaften der Inklusionsbeziehung:

1. Reflexivität:  $A \subset A$
2. Antisymmetrie:  $A \subset B \wedge B \subset A \Leftrightarrow A = B$
3. Transitivität:  $A \subset B \wedge B \subset C \Rightarrow A \subset C$

Um  $A = B$  zu zeigen, beweist man oft  $A \subset B$  und  $B \subset A$ .

- **Komplementbildung:**

Seien  $M$  und  $A \subset M$  Mengen. Dann ist das Komplement von  $A$  bzgl.  $M$  definiert als

$$C_M A = \{x \in M : x \notin A\} = M \setminus A$$

Belegen Sie zur Übung die folgenden Eigenschaften:

1.  $(C_M A) \cup A = M$
2.  $(C_M A) \cap A = \emptyset$
3.  $C_M (C_M A) = A$ , insbesondere  $C_M \emptyset = M$  und  $C_M M = \emptyset$

Wird  $CA$  ohne Index geschrieben, so ist  $C_X A$  gemeint, wobei  $X$  die Menge aller möglichen Elemente ist.

## 1.2.1 Einige Kombinationen dieser Operationen

- **Distributivgesetze:**

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$$

$$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$$

Allgemeine Formulierung für endlich viele Mengen:

$$\left( \bigcup_{i=1}^n A_i \right) \cap B = \bigcup_{i=1}^n (A_i \cap B)$$

$$\left( \bigcap_{i=1}^n A_i \right) \cup B = \bigcap_{i=1}^n (A_i \cup B)$$



- **De Morgansche Regeln:**

$$C_M \left( \bigcup_{i=1}^n A_i \right) = \bigcap_{i=1}^n (C_M A_i)$$

$$C_M \left( \bigcap_{i=1}^n A_i \right) = \bigcup_{i=1}^n (C_M A_i)$$

- **Mengenprodukt:**

Seien  $A$  und  $B$  nichtleere Mengen ( $A \neq \emptyset \wedge B \neq \emptyset$ ). Unter dem **kartesischen Produkt** von  $A$  und  $B$  versteht man die Menge

$$A \times B := \{(a, b) : a \in A \wedge b \in B\}$$

$A \times B$  ist die Menge der geordneten Paare von Elementen aus  $A$  und  $B$ .

Allgemeiner:  $A_1, \dots, A_n$  seien nichtleere Mengen, dann hat man zwei gleichwertige Möglichkeiten,  $A_1 \times \dots \times A_n$  zu bilden.

1. rekursive Definition:  $A_1 \times \dots \times A_n := (A_1 \times \dots \times A_{n-1}) \times A_n$

2.  $A_1 \times \dots \times A_n := \{(a_1, \dots, a_n) : a_1 \in A_1 \wedge \dots \wedge a_n \in A_n\}$

Dabei gilt:  $(a_1, \dots, a_n) = (b_1, \dots, b_n) \Leftrightarrow a_1 = b_1 \wedge \dots \wedge a_n = b_n$ . Also ist  $A_1 \times \dots \times A_n$  die Menge aller geordneten n-tupel mit Elementen aus  $A_1, \dots, A_n$ .

Als Beispiel zeigen wir die allgemeine Form des ersten Distributivgesetzes.

### Beweis

Wie oben angedeutet zeigen wir „linker Term  $\subset$  rechter Term“ und „linker Term  $\supset$  rechter Term“, woraus folgt: „linker Term = rechter Term“.

$$\begin{array}{ll} x \in \left( \bigcup_{i=1}^n A_i \right) \cap B & x \in \bigcup_{i=1}^n (A_i \cap B) \\ \Rightarrow x \in B \wedge x \in \left( \bigcup_{i=1}^n A_i \right) & \Rightarrow \exists j, 1 \leq j \leq n : x \in (B \cap A_j) \\ \Rightarrow \exists k, 1 \leq k \leq n : x \in B \wedge x \in A_k & \Rightarrow \exists j, 1 \leq j \leq n : x \in B \wedge x \in A_j \\ \Rightarrow \exists k, 1 \leq k \leq n : x \in (B \cap A_k) & \Rightarrow x \in B \wedge x \in \left( \bigcup_{i=1}^n A_i \right) \\ \Rightarrow x \in \bigcup_{i=1}^n (A_i \cap B) & \Rightarrow x \in \left( \bigcup_{i=1}^n A_i \right) \cap B \end{array}$$

■

## 1.2.2 Mengenproduktdefinitionen

Problem: Beide Definitionen des Mengenproduktes  $A_1 \times A_2 \times A_3$  scheinen inäquivalent.

$$A_1 \times A_2 \times A_3 = \{(a_1, a_2, a_3) : a_i \in A_i\}$$

$$A_1 \times A_2 \times A_3 = (A_1 \times A_2) \times A_3 = \{((a_1, a_2), a_3) : a_i \in A_i\}$$

Man definiert deshalb, dass Paare in geordneten Paaren aufgelöst werden können, also etwa:

$$((a_1, a_2), a_3) := (a_1, a_2, a_3)$$

### Beispiel 1.1

$$A = \{1, 2\}, B = \{1, 3\} \Rightarrow A \times B = \{(1, 1), (1, 3), (2, 1), (2, 3)\}$$

**Achtung:** Man unterscheide genau zwischen dem geordneten Tupel  $(a_1, \dots, a_n)$  und der Menge  $\{a_1, \dots, a_n\}$ . Zum Beispiel ist  $(1, 1)$  sinnvoll,  $\{1, 1\}$  aber sinnlos. Beachte außerdem, dass das Mengenprodukt nicht kommutativ ist:

$$(a, b) \neq (b, a) \Rightarrow A \times B \neq B \times A \text{ (aber } \{a, b\} = \{b, a\})$$

- Wenn  $A_i = A \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}$ , dann ist  $A \times \dots \times A = A^n$ .
- Sei  $M$  beliebig. Unter der **Potenzmenge**  $P(M)$  von  $M$  versteht man das System aller Teilmengen von  $M$ .

$$P(M) = \{A \subset M\}$$

- Hat  $A$   $n$  Elemente, so hat  $P(A)$   $2^n$  Elemente.

### Beispiel 1.2

$A = \{1, 2, 3\} \Rightarrow P(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\} \Rightarrow P(A)$  hat 8 Elemente.

## 1.3 Relationen und Abbildungen

Wir behandeln zwei wichtige Relationen und den Abbildungsbegriff.

### Definition 1.1

Sei  $A$  eine nichtleere Menge. Eine **Relation** auf oder in  $A$  ist eine Teilmenge  $R \subset A \times A$ .

#### Bemerkung

$(x, y) \in R$  schreibt man als  $xRy$  und sagt „ $x$  steht in Relation zu  $y$ “ (meist suggestivere Schreibweise).

### Beispiel 1.3                      Ordnungsrelationen

1. Sei  $A = \mathbb{N}$  (oder  $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ ).  $xRy \Leftrightarrow x \leq y$
  2. Sei  $M$  eine feste nichtleere Menge und  $A = P(M)$ . Für  $B, C \in P(M)$  ist  $BRC \Leftrightarrow B \subset C$ .
- Unterschied: Zwei Zahlen stehen immer in Relation zueinander, zwei Mengen nicht unbedingt.

### Definition 1.2                      Ordnungsrelation

Eine Relation  $\leq$  auf  $A$  heißt **Ordnungsrelation** oder einfach **Ordnung** (manchmal auch Halbordnung), wenn sie folgende Eigenschaften besitzt:

1. Reflexivität:  $\forall x \in A : (x, x) \in R$ , d.h.  $x \leq x$
2. Antisymmetrie:  $x \leq y \wedge y \leq x \Leftrightarrow x = y$
3. Transitivität:  $x \leq y \wedge y \leq z \Leftrightarrow x \leq z$

Eine Ordnung heißt **linear** oder **total**, wenn gilt:  $\forall x, y \in A : x \leq y \vee y \leq x$

Im obigen Beispiel ist die 1. Ordnung linear, die zweite jedoch nicht.

### Beispiel 1.4                      Äquivalenzrelation

In  $A = \mathbb{N}_0$  sei eine mit  $\sim$  bezeichnete Relation gegeben durch

$$a \sim b \Leftrightarrow a \equiv b \pmod{3}$$

Die rechte Seite bedeutet:  $a$  und  $b$  lassen bei Division durch 3 den gleichen Rest ( $a$  ist kongruent zu  $b$  zum Modul 3). Zum Beispiel:  $0 \sim 3$  (lies: „0 ist äquivalent zu 3“),  $1 \sim 10$ ,  $1 \sim 13$  und  $13 \sim 1$ , aber:  $1 \not\sim 8$ .

**Definition 1.3**

Eine Relation  $\sim$  auf  $A$  heißt **Äquivalenzrelation**, wenn sie folgende Eigenschaften besitzt:

1. Reflexivität:  $\forall x \in A : x \sim x$
2. Symmetrie:  $x \sim y \Leftrightarrow y \sim x$
3. Transitivität:  $x \sim y \wedge y \sim z \Leftrightarrow x \sim z$

Sei  $A$  fest, dann nennt man  $[x] := \{y \in A : x \sim y\}$  die zu  $x$  gehörende **Äquivalenzklasse**. Jedes  $y \in [x]$  heißt **Repräsentant** der Äquivalenzklasse.

**Beispiel 1.5**

Die im Beispiel 1.4 definierte Relation hat drei Äquivalenzklassen:

$$[0] = \{0, 3, 6, 9, 12, \dots\}$$

$$[1] = \{1, 4, 7, 10, 13, \dots\}$$

$$[2] = \{2, 5, 8, 11, 14, \dots\}$$

**1.3.1 Abbildungen und Funktionen**

Wir verwenden zuerst einen äußerst pragmatischen Begriff.

**Definition 1.4** Abbildung

Seien  $X, Y \neq \emptyset$ . Unter einer **Abbildung**  $f$  aus  $X$  in  $Y$  versteht man eine Vorschrift, die jedem  $x \in D(f) \subset X$  genau ein  $y \in Y$  zuordnet.

**Bemerkung**

Notation:  $D(f)$  und  $W(f) = \{y = f(x) \in Y : x \in D(f)\}$  sind Definitionsbereich und Wertebereich von  $f$ . Man schreibt für die Abbildung  $f : X \rightarrow Y$  und für die Abbildungsvorschrift  $f : x \mapsto y$ . (Wenn nicht explizit notiert, ist  $D(f) = X$ .)

Unterscheide streng zwischen der Abbildung  $f$  und dem Bild  $f(x)$  von  $x$ . Der Begriff „Abbildung“ wird oft als Synonym zum Begriff „Funktion“ verwendet, wir wollen beide Begriffe allerdings unterscheiden. (Der Begriff **Funktion** wird oft nur für Abbildungen auf Zahlenmengen verwendet.)

**Definition 1.5** Eigenschaften von Abbildungen

Eine Abbildung  $f$  heißt:

- **injektiv**, wenn  $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$  („Jedes  $y \in Y$  ist *höchstens* ein Bild.“)
- **surjektiv**, wenn  $W(f) = Y$  („Jedes  $y \in Y$  ist *mindestens* ein Bild.“)
- **bijektiv**, wenn  $f$  injektiv und surjektiv ist. („Jedes  $y \in Y$  ist *genau* ein Bild.“)

**Definition 1.6** Graph einer Abbildung

Unter dem **Graphen**  $G(f)$  versteht man die Menge  
 $G(f) = \{(x, f(x)) \in X \times Y : x \in D(f)\} \subset X \times Y$ .

Also zeichnet man nie eine Funktion, sondern immer den Graphen einer Funktion. Wir verwenden den Graphen für eine „exaktere“ Definition des Abbildungsbegriffes.

**Definition 1.7** Abbildung

Eine Abbildung aus  $X$  in  $Y$  ist eine Teilmenge  $f \subset X \times Y$  mit der Eigenschaft:  
 $(x, y_1), (x, y_2) \in f \Rightarrow y_1 = y_2$  (Jedem  $x \in X$  ist höchstens ein  $y \in Y$  zugeordnet.)

**Bemerkung**

$$\begin{aligned} f : x \mapsto y &\Leftrightarrow f(x) = y \Leftrightarrow (x, y) \in f \\ D(f) &= \{x \in X : \exists y \in Y : (x, y) \in f\} \\ W(f) &= \{y \in Y : \exists x \in X : (x, y) \in f\} \\ &\Rightarrow G(f) = f \end{aligned}$$

**Definition 1.8**

Unter der **identischen Abbildung** auf  $X$  versteht man die Abbildung  $id_X : X \rightarrow X$  mit  $id_X(x) = x \quad \forall x \in X$ .

**Definition 1.9**

Seien  $f : X \rightarrow Y$  eine Abbildung und  $A \in X$  (bzw.  $A \in D(f)$ ) eine nichtleere Menge.  
 Dann versteht man unter der **Einschränkung** von  $f$  auf  $A$ :  
 $f|_A : A \rightarrow Y, \quad f|_A : x \in A \mapsto f(x)$

**Beispiel 1.6**

Sei  $A \subset D(f)$ , dann heißt  $f(A) := \{f(x) : x \in A\}$  **Wertebereich** von  $f|_A$ .  
 Sei  $B \subset Y$ , dann heißt  $f^{-1}(B) := \{x \in X : f(x) \in B\}$  **Urbild** von  $B$  bzgl.  $f$ .

$f^{-1}$  selbst wird hier nicht definiert. Man sollte nicht sofort  $B \subset W(f)$  voraussetzen.

**Beispiel 1.7**

$X = \mathbb{R}^2, \quad f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $f(x, y) = x$   
 $f^{-1}$  existiert nicht, da  $f$  nicht injektiv ist. Trotzdem ist  $f^{-1}(B)$  definiert.

**Definition 1.10** Verkettung

Sei  $g : X \rightarrow Y, f : Y \rightarrow Z$ . Dann versteht man unter der **Verkettung**  $h := f \circ g$  die Abbildung

$$h : X \rightarrow Z \quad \text{mit} \quad h(x) = f(g(x))$$

**Definition 1.11** Umkehrabbildung

Sei  $f : X \rightarrow Y$  injektiv, dann wird die **Umkehrabbildung** oder **inverse Abbildung**  $f^{-1}$  wie folgt definiert:  $D(f^{-1}) = W(f)$  und  $\forall y \in D(f^{-1}) : f^{-1}(y) = x$  mit  $f(x) = y$   
 Also gilt  $\forall x \in D(f) : f^{-1}(f(x)) = x$  bzw.  $f^{-1} \circ f = id_{D(f)}$ .

Beachte:  $G(f) = \{(x, f(x)) : x \in D(f)\}$ , aber  $G(f^{-1}) = \{(f(x), x) : x \in D(f)\}$ .  
 Verwechsle auf keinen Fall  $f^{-1}$  und  $\frac{1}{f}$ . Letzteres ist nicht definiert.

**1.3.2 Rechnen mit Funktionen**

Seien  $f, g : X \rightarrow Y$  Abbildungen. Zu erklären sind:  $f + g, \lambda f (\lambda \in \mathbb{R}, \mathbb{C}), f \cdot g, \frac{f}{g}$ .

Wenn diese Operationen einen Sinn haben sollen, dann sollen sie punktweise erklärt werden.

$$(f + g)(x) := f(x) + g(x) \quad \text{u.s.w.}$$

Daraus folgt, dass die genannten Operationen in  $Y$  definiert sein müssen.

Spezialfall: Sei  $Y \subset \mathbb{R}$  oder  $Y \subset \mathbb{C}$ . Dann sind alle Operationen definiert, wobei  $\frac{f}{g}$  definiert ist  $\forall x \in X : g(x) \neq 0$ .

### Beispiel 1.8 Spezialfälle

- $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  - Funktion von  $n$  reellen Variablen
- $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$
- Folgen

### Definition 1.12 Folge

Eine Abbildung  $f$  von  $\mathbb{N}$  (oder  $\mathbb{N}_0, \mathbb{Z}$ ) in  $Y$  heißt **Folge** aus  $Y$  (oder in  $Y$  oder mit Elementen aus  $Y$ ).

#### Bemerkung

Notation:  $f(1) = y_1, f(2) = y_2, \dots; f = (y_n)$ . Also bezeichnet  $(y_n)$  die Folge und  $y_n$  das  $n$ -te Glied der Folge. Die Gleichheit wird elementweise definiert:

$$(y_n) = (z_n) \Leftrightarrow y_i = z_i \quad \forall i \in \mathbb{N} (\mathbb{N}_0, \mathbb{Z})$$

Auch mit Folgen lassen sich zu den gleichen Regeln wie oben Rechenoperationen durchführen.

Unterscheide bei Folgen streng die Folge  $(y_n)$  und den Wertebereich der Folge  $\{y_n : n \in \mathbb{N}\}$ . Diese Menge nennt man auch die **der Folge unterliegende Menge** und schreibt kurz  $\{y_n\}$ .

### Beispiel 1.9

$$(y_n) = (0, 1, 0, 1, 0, \dots) \Rightarrow \{y_n\} = \{0, 1\}$$

## 2 Die reellen Zahlen

Bis auf Modifikationen gibt es zwei Wege, um die Zahlenbereiche  $\mathbb{N}$ ,  $\mathbb{Z}$ ,  $\mathbb{Q}$ ,  $\mathbb{R}$ ,  $\mathbb{C}$  einzuführen.

1. axiomatische Beschreibung von  $\mathbb{N}$  /  $\mathbb{N}_0$  ( $\Rightarrow$  Peano-Axiome) und darauf basierend Konstruktion der anderen Zahlenbereiche
2. axiomatische Charakterisierung von  $\mathbb{R}$ , darin  $\mathbb{N}$ ,  $\mathbb{Z}$ ,  $\mathbb{Q}$  wiederfinden

Wir nehmen einen stark vereinfachten Weg und gehen davon aus, dass  $\mathbb{N}, \dots, \mathbb{R}$  bekannt sind.

$\mathbb{R}$  wird durch drei „Eigenschaften“ (genauer Axiomgruppen) charakterisiert: die algebraische Struktur, die Ordnungsstruktur und die Vollständigkeit.

### 2.1 Die algebraische Struktur der reellen Zahlen

Kurzform:  $\mathbb{R}$  ist ein Körper.

Das bedeutet, es existieren in  $\mathbb{R}$  zwei algebraische Operationen, die Addition (+) und die Multiplikation ( $\cdot$ ), mit den folgenden Eigenschaften (immer  $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$ ):

- (A1):  $a + b = b + a$
- (A2):  $a + (b + c) = (a + b) + c$
- (A3):  $\exists n \in \mathbb{R} : a + n = n + a = a$   
 $n$  ist das **neutrale Element** der Addition. Statt  $n$  schreibt man 0.
- (A4):  $\forall a \in \mathbb{R} : \exists x \in \mathbb{R} : a + x = x + a = 0$   
 $x$  ist das zu  $a$  **entgegengesetzte Element** bzgl. der Addition und wird mit  $-a$  bezeichnet.

#### Bemerkung

Die Eigenschaften (A1) und (A2) werden **Kommutativität** und **Assoziativität** genannt.

Das neutrale Element sowie das zu einem bestimmten Element entgegengesetzten Element sind eindeutig bestimmt.

Betrachtet man  $\mathbb{R}$  nur mit der Addition, so ist  $\mathbb{R}$  aufgrund der Axiome (A2) bis (A4) eine Gruppe und, weil (A1) gilt, sogar eine kommutative Gruppe (Abelsche Gruppe).

- (M1):  $a \cdot b = b \cdot a$
- (M2):  $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$
- (M3):  $\exists e \in \mathbb{R} : a \cdot e = e \cdot a = a$   
 $e$  ist das neutrale Element der Multiplikation. Forderung:  $e \neq 0$ . Statt  $e$  schreibt man 1.
- (M4):  $\forall a \in \mathbb{R}, a \neq 0 : \exists y \in \mathbb{R} : a \cdot y = y \cdot a = 1$   
 $y$  ist das zu  $a$  entg.ges. Element bzgl. der Multiplikation und wird mit  $a^{-1}$ ,  $\frac{1}{a}$  bezeichnet.

**Bemerkung**

Die Axiome (M1) bis (M4) sind die Analogien zu den Axiomen (A1) bis (A4) mit der Ausnahme, dass (M4) für  $a = 0$  nicht gilt.

$\mathbb{R} \setminus \{0\}$  ist bzgl. der Multiplikation eine kommutative Gruppe. Die 0 ist ausgeschlossen, da sie kein entgegengesetztes Element hat.

Die merkwürdige Bedingung  $n \neq e$  bzw.  $1 \neq 0$  garantiert, dass der triviale Fall  $(\{0\}, +, \cdot)$  ausgeschlossen wird. Ein Körper hat auf jeden Fall mindestens zwei Elemente.

Addition und Multiplikation werden durch das Distributivgesetz verknüpft:

- (D):  $\forall a, b, c \in \mathbb{R} : a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$

**Bemerkung**

Hat man eine Menge  $M$  mit zwei Operationen  $+$  und  $\cdot$ , so heißt  $M$  ein **kommutativer Ring**, wenn gelten: (A1-4), (M1-3), (D).

Zum Beispiel bildet die Menge  $A^{n \times n}$  aller  $(n, n)$ -Matrizen mit den Operationen  $+$  und  $\cdot$  einen nicht-kommutativen Ring (M1 gilt nicht.)

(A1-4), (M1-4) und (D) beschreiben die algebraische Struktur von  $\mathbb{R}$ .

## 2.2 Die Ordnungsstruktur der reellen Zahlen

In  $\mathbb{R}$  ist eine Ordnung  $<$  mit folgenden Eigenschaften definiert:

- (O1): Für  $a, b \in \mathbb{R}$  gilt genau eine der folgenden drei Beziehungen:  $(a < b) \vee (a = b) \vee (b < a)$
- (O2):  $a < b \wedge b < c \Rightarrow a < c$
- (O3):  $\forall c \in \mathbb{R} : a < b \Rightarrow a + c < b + c$
- (O4):  $\forall c \in \mathbb{R}, 0 < c : a < b \Rightarrow a \cdot c < b \cdot c$

**Bemerkung**

Die Eigenschaften (O1) und (O2) heißen **Trichotomie** und **Transitivität**, (O3) und (O4) beschreiben die **Monotonie**. Man benutzt  $a < b$  und  $b > a$  äquivalent. Führt man zudem das Symbol  $a \leq b$  mit  $a \leq b \Leftrightarrow a < b \vee a = b$ , dann ist  $\mathbb{R}$  mit der Relation  $\leq$  eine total geordnete Menge.

**Sprechweisen:**

- $a > 0$ : „a ist positiv.“
- $a \geq 0$ : „a ist nicht-negativ.“
- $a < 0$ : „a ist negativ.“
- $a \leq 0$ : „a ist nicht-positiv.“

Die bisherigen Eigenschaften (A), (M), (D), (O) besagen:  $\mathbb{R}$  ist ein **angeordneter Körper**.

## 2.3 Die Vollständigkeit der reellen Zahlen

Bis jetzt erfüllt auch  $\mathbb{Q}$  alle bisherigen Axiome. Aber: Es existiert kein  $x \in \mathbb{Q}$  mit  $x^2 = 2$ . Historisch hat es lange gedauert, die Vollständigkeit exakt zu formulieren. Es existieren mehrere äquivalente Möglichkeiten, das zu formulieren. Wir benötigen nun einige Begriffe.

**Definition 2.1** Beschränktheit, Schranken

Eine Menge  $M \subset \mathbb{R}$  heißt

- **nach oben beschränkt**, wenn  $\exists b \in \mathbb{R} : \forall x \in M : x \leq b$
- **nach unten beschränkt**, wenn  $\exists a \in \mathbb{R} : \forall x \in M : a \leq x$

Dann heißt  $a$  **untere Schranke** und  $b$  **obere Schranke** von  $M$ .

$M$  heißt **beschränkt**, wenn  $M$  nach oben und nach unten beschränkt ist.

**Bemerkung**

Wenn  $a$  untere Schranke von  $M$  ist, dann auch jedes  $a' < a$  (analog für obere Schranken).

**Definition 2.2** Minima und Maxima, Grenzen

Sei  $M \subset \mathbb{R}$ . Man sagt,  $M$  besitzt

- ein **Minimum**, wenn  $\exists c \in M : \forall x \in M : c \leq x$  ( $c$  heißt Minimum von  $M$ ,  $c = \min M$ )
- ein **Maximum**, wenn  $\exists C \in M : \forall x \in M : x \leq C$  ( $C$  heißt Maximum von  $M$ ,  $C = \max M$ )
- ein **Infimum** (untere **Grenze**, größte untere Schranke), wenn eine untere Schranke  $s \in \mathbb{R}$  von  $M$  existiert, sodass kein  $s' > s$  existiert, das ebenfalls untere Schranke ist. ( $s = \inf M$ )
- ein **Supremum** (obere Grenze, kleinste obere Schranke), wenn eine obere Schranke  $S \in \mathbb{R}$  von  $M$  existiert, sodass kein  $S' < S$  existiert, das ebenfalls obere Schranke ist. ( $S = \sup M$ )

**Bemerkung**

Man muss, um die Bezeichnungen zu rechtfertigen, zeigen, dass jede Menge je höchstens ein Minimum, Maximum, Infimum und Supremum besitzt.

**Satz 2.3**

1. Wenn  $M$  ein Supremum besitzt, ist es eindeutig bestimmt.
2.  $S = \sup M$   
 $\Leftrightarrow S$  ist obere Schranke von  $M \wedge \forall S' < S : \exists x \in M : S' < x$   
 $\Leftrightarrow S$  ist obere Schranke von  $M \wedge \forall \varepsilon > 0 : \exists x \in M : S - \varepsilon < x$

**Beweis**

Bei einer Wenn-Dann-Beziehung (Äquivalenz) müssen beide Richtungen gezeigt werden.

**Teilsatz 1:** Angenommen,  $S_1$  und  $S_2$  seien Suprema von  $M$  und es gelte  $S_1 \neq S_2$  (o.E.d.A.  $S_1 < S_2$ ). Aus  $S_2 = \sup M$  folgt:  $S_2$  ist obere Schranke von  $M$  und es existiert keine kleinere obere Schranke von  $M$ . Da aber  $S_1 < S_2$  und  $S_1 = \sup M$ , ist  $S_1$  eine obere Schranke von  $M$ , die kleiner als  $S_2$  ist. Also folgt aus  $S_1 \neq S_2$  ein Widerspruch. Es muss  $S_1 = S_2$  sein, was heißt, dass es nur ein Supremum  $S = S_1 = S_2$  gibt.

**Teilsatz 2:** Offenbar sind beide Formulierungen äquivalent. ( $S' = S - \varepsilon$  bzw.  $S - S' = \varepsilon$ ).

**„Hin“-Richtung:** Sei  $S$  Supremum und  $S' < S$ . Also ist  $S'$  (nach Supremumdefinition) keine obere Schranke von  $M$ . Daraus folgt (nach Def. der oberen Schranke):  $\exists x \in M : S' < x$

**„Rück“-Richtung:**  $S$  ist obere Schranke von  $M$  und es gilt  $\forall S' < S : \exists x \in M : S' < x$ . Daraus folgt, dass kein  $S' < S$  obere Schranke von  $M$  ist. Also ist  $S = \sup M$ .



Analog kann man die Eindeutigkeit von Minima, Maxima, Infima, sowie das Äquivalent zum Satz 2.3 für Infima zeigen. ■

#### Bemerkung

Nicht jede nach oben beschränkte Menge rationaler Zahlen hat ein Maximum oder Supremum.  
Nicht jede nach unten beschränkte Menge rationaler Zahlen hat ein Minimum oder Infimum.

#### Beispiel 2.1

$M_1 = \{x \in \mathbb{Q} : x^2 < 2\}$  hat in  $\mathbb{Q}$  weder ein Maximum noch ein Supremum.  
 $M_2 = \{-\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$  hat das Supremum 0, aber kein Maximum. ( $\inf M_2 = \min M_2 = -1$ )

### 2.3.1 Das Vollständigkeitsaxiom

- (V): Jede nichtleere, nach oben beschränkte Menge  $M \subset \mathbb{R}$  besitzt ein Supremum.

#### Bemerkung

$\exists \min M \Rightarrow \min M = \inf M$   
 $\exists \max M \Rightarrow \max M = \sup M$

#### Satz 2.4

Sei  $M \subset \mathbb{R}$  und  $-M := \{-x : x \in M\}$ . Dann gilt:

1.  $-M$  ist genau dann nach unten (oben) beschränkt, wenn  $M$  nach oben (unten) beschränkt ist.
2.  $c = \min M \Leftrightarrow -c = \max(-M)$
3.  $s = \sup M \Leftrightarrow -s = \inf(-M)$

Die Axiome (A), (M), (D), (O), (V) charakterisieren  $\mathbb{R}$  eindeutig. Das heißt:

- Die Axiome sind in sich schlüssig und widerspruchsfrei.
- $\mathbb{R}$  ist bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt.
- Es existiert tatsächlich eine Menge, die alle Axiome erfüllt.

## 2.4 Folgerungen aus der Struktur der reellen Zahlen

Wir zeigen exemplarisch zwei Folgerungen aus der **algebraischen** Struktur:

Zu jedem  $a \in \mathbb{R}$  existiert genau ein  $b \in \mathbb{R}$  mit  $a + b = 0$ . ( $b = -a$ )

#### Beweis

Angenommen, es existieren  $x, y \in \mathbb{R}$  mit  $a + x = 0 \wedge a + y = 0$ . Zu zeigen ist:  $x = y$ .

$$x \stackrel{(A3)}{=} x + 0 \stackrel{(a+y=0)}{=} x + a + y \stackrel{(A1)}{=} a + x + y \stackrel{(a+x=0)}{=} 0 + y \stackrel{(A3)}{=} y$$

$$\forall a \in \mathbb{R} : 0 \cdot a = 0$$

**Beweis**

$$\begin{aligned}
0 \cdot a &\stackrel{(A3)}{=} (0 + 0) \cdot a \stackrel{(D)}{=} 0 \cdot a + 0 \cdot a \quad (*) \\
0 &\stackrel{(A3)}{=} 0 \cdot a + (-0 \cdot a) \stackrel{(*)}{=} 0 \cdot a + (0 \cdot a + (-0 \cdot a)) \stackrel{(A3)}{=} 0 \cdot a + 0 \stackrel{(A3)}{=} 0 \cdot a
\end{aligned}$$

■

**2.4.1 Folgerungen aus den Ordnungsaxiomen**

1.  $a > 0 \Leftrightarrow -a < 0, a < 0 \Leftrightarrow -a > 0$
2.  $a \neq 0 \Leftrightarrow a^2 > 0$  (insbesondere:  $1^2 = 1 > 0 \stackrel{(O3)}{\Rightarrow} 2 > 1$ )
3.  $a > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{a} > 0, a < 0 \Leftrightarrow \frac{1}{a} < 0$
4.  $a < b \wedge c < 0 \Rightarrow ac > bc$  (insbesondere:  $a < b \Rightarrow -b < -a$ )
5.  $a < b < c < d \Leftrightarrow a + c < b + d$

**Beweis**

Zu 1.:  $a > 0 \stackrel{(O3)}{\Rightarrow} a + (-a) > 0 + (-a) \stackrel{(A3)}{\Rightarrow} 0 > -a \Rightarrow -a < 0$

■

**Beweis**

Zu 2.: Fallunterscheidung:

$$a > 0 \Rightarrow a \cdot a > 0 \cdot a \Rightarrow a^2 > 0 \text{ - Beweisende}$$

$$a < 0 \stackrel{(s.o.)}{\Rightarrow} (-a) > 0 \stackrel{(s.o.)}{\Rightarrow} (-a)^2 > 0 \quad (**)$$

Man zeigt  $-a = (-1) \cdot a$  und  $(-1)^2 = 1$ .

$$(**) \Rightarrow (-1)^2 \cdot (-a)^2 > 0 \Rightarrow 1 \cdot a^2 > 0 \Rightarrow a^2 > 0$$

Zu 3.: Für  $a > 0$ :  $1 > 0 \Rightarrow a \cdot a^{-1} > a \cdot 0 \Rightarrow a \cdot a^{-1} \cdot a^{-1} > a \cdot a^{-1} \cdot 0 \Rightarrow a^{-1} > 0$

■

**Lemma 2.5** Bernoulli'sche Ungleichung

Für  $x \in \mathbb{R}, x \geq 1, n \in \mathbb{N}$  gilt:  $(1+x)^n \geq 1+nx$

**Beweis**

Beweis durch vollständige Induktion:

**Induktionsanfang:**  $n = 1 \Rightarrow 1+x \geq 1+x \Rightarrow$  wahr

**Induktionsschritt:** Gelte 2.5 für  $n = m$  (Induktionsvoraussetzung). Für  $n = m+1$  gilt:  $(1+x)^{m+1} = (1+x)(1+x)^m \geq (1+x)(1+mx) = 1+mx+x+\underbrace{nx^2}_{\geq 0} \geq 1+(n+1)x$

■

**Definition 2.6** absoluter Betrag

Sei  $a \in \mathbb{R}$ . Setze  $|a| := \begin{cases} a & \text{falls } a \geq 0 \\ -a & \text{falls } a < 0 \end{cases}$

**Lemma 2.7**

Der absolute Betrag hat folgende Eigenschaften:

1.  $|a| \geq 0$ ,  $|a| = 0 \Leftrightarrow a = 0$  (Definitheit)
2.  $|-a| = |a|$
3.  $a \leq |a|$
4.  $|ab| = |a| |b|$  (Multiplikativität)
5.  $|a + b| \leq |a| + |b|$  (Dreiecksungleichung)
6.  $||a| - |b|| \leq |a - b|$
7.  $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$
8.  $|a| < c \Leftrightarrow -c < a < c$
9.  $|a - b| < c \Leftrightarrow b - c < a < b + c$

8. und 9. gelten analog für  $\leq$ .**Beweis**

2.  $|-a| = \begin{cases} -a & \text{falls } -a \geq 0 \\ a & \text{falls } -a < 0 \end{cases} = \begin{cases} -a & \text{falls } a \leq 0 \\ a & \text{falls } a > 0 \end{cases} = |a|$
5. Aus 2. und 3. folgt:  $a \leq |a| \wedge b \leq |b| \Rightarrow a + b \leq |a| + |b|$   
 $-a \leq |-a| = |a| \Rightarrow -a \leq |a|$  und analog  $-b \leq |b| \Rightarrow -a - b \leq |a| + |b|$   
 $|a + b| = \begin{cases} a + b & \text{falls } a + b \geq 0 \\ -a - b & \text{falls } a + b < 0 \end{cases} \leq |a| + |b|$
6.  $a = (a - b) + b \stackrel{(5)}{\Rightarrow} |a| \leq |a - b| + |b| \Rightarrow |a| - |b| \leq |a - b|$   
Analog ist  $|b| - |a| \leq |b - a| = |a - b| \Rightarrow \underline{-(|a| - |b|) \leq |a - b|}$ .  
Aus beiden Ergebnissen folgt die Behauptung.
8.  $|a| < c \Leftrightarrow -c < \underbrace{-|a|}_{\text{einer der Werte ist } a} < |a| < c \Leftrightarrow -c < a < c$
9. folgt sofort aus 8.

**Definition 2.8**

Intervalle

Seien  $a, b \in \mathbb{R}, a < b$ . Dann heißt

- $[a, b] := \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$  abgeschlossenes Intervall
- $(a, b) := \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$  offenes Intervall
- $[a, b) := \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$  rechtsseitig halboffenes Intervall
- $(a, b] := \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$  linksseitig halboffenes Intervall

mit den Endpunkten  $a$  und  $b$ .

**Definition 2.9**

$L = b - a$  ist die Länge jedes der obigen Intervalle.

Sei  $\varepsilon > 0$ , dann heißt  $U_\varepsilon(a) = \{x \in \mathbb{R} : a - \varepsilon < x < a + \varepsilon\} = (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$  die offene  $\varepsilon$ -Umgebung von  $a$ .

## 2.4.2 Metrische Struktur

**Definition 2.10**

Für beliebige  $a, b \in \mathbb{R}$  nennt man  $d(a, b) := |a - b|$  Abstand (bzw. Differenz) von  $a$  und  $b$ .

**Lemma 2.11**

Der so definierte Abstand hat folgende Eigenschaften:

- (ME1):  $d(a, b) \geq 0$ ,  $d(a, b) = 0 \Leftrightarrow a = b$  (Definitheit)
- (ME2):  $d(a, b) = d(b, a)$  (Symmetrie)
- (ME3):  $d(a, b) \leq d(a, c) + d(c, b)$  (Dreiecksungleichung)

**Beweis**

(ME1), (ME2) trivial. (ME3):  $d(a, b) = |a - c + c - b| \leq |a - c| + |c - b| = d(a, c) + d(c, b)$

Diese Eigenschaften sind Ausgangspunkt für die Eigenschaften eines sehr wichtigen Begriffs:

**Definition 2.12**

Sei  $M \neq \emptyset$  eine beliebige Menge und  $d : M \times M \rightarrow \mathbb{R}$  eine beliebige Abbildung mit den Eigenschaften (ME1), (ME2) und (ME3). Dann nennt man  $d$  eine Metrik in  $M$  und  $(M, d)$  einen metrischen Raum.

Achtung! In  $M$  muss überhaupt keine Struktur vorhanden sein, um einen metrischen Raum zu definieren.

Die Metrik in  $\mathbb{R}$  hat die zusätzliche Eigenschaft der Translationsinvarianz:

$$\forall a, b, c \in \mathbb{R} : d(a, b) = d(a + c, b + c)$$

## 2.4.3 Dichtheitsaussagen

**Satz 2.13**

Satz von Archimedes

Die Anordnung von  $\mathbb{R}$  ist archimedisch, d.h.  $\forall a \in \mathbb{R} : \exists n \in \mathbb{N} : a < n$

Mit anderen Worten:  $\mathbb{N}$  ist als Teilmenge von  $\mathbb{R}$  nicht nach oben beschränkt.

**Beweis**

Angenommen,  $\mathbb{N}$  wäre nach oben beschränkt, d.h.  $\exists S = \sup \mathbb{N}$  (Vollständigkeit!). Sei nun  $S' = S - \frac{1}{2}$ . Dann  $\exists n \in \mathbb{N} : S' < n$ . Also ist  $S - \frac{1}{2} < n \Rightarrow S < n + \frac{1}{2} < n + 1 \in \mathbb{N} \Rightarrow$  Widerspruch

Der Satz von Archimedes gilt auch in  $\mathbb{R}$ . Aus diesem Satz folgt der:

**Satz 2.14**

Satz von Eudoxos

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists m \in \mathbb{N} : \frac{1}{m} < \varepsilon \text{ und erst recht } \forall n > m : \frac{1}{n} < \varepsilon$$
**Beweis**

Angenommen, das wäre falsch. Also  $\exists \varepsilon > 0$ , für das es kein  $m \in \mathbb{N}$  mit  $\frac{1}{m} < \varepsilon$  gibt.

Also:  $\exists \varepsilon > 0 : \forall m \in \mathbb{N} : \frac{1}{m} \geq \varepsilon \Rightarrow$  Widerspruch mit 2.10

**Bemerkung**

In  $\mathbb{Q}$  bzw.  $\mathbb{R}$  gilt:  $a < b \Rightarrow a < \frac{a+b}{2} < b$ . Das heißt, zwischen zwei reellen (rationalen) Zahlen liegt immer mindestens eine weitere reelle (rationale) Zahl. Der nächste Satz sagt aus, wie  $\mathbb{Q}$  in  $\mathbb{R}$  liegt.

**Satz 2.15**

$$\mathbb{Q} \text{ liegt in } \mathbb{R} \text{ dicht. Das heißt: } \forall r \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0 : \exists q \in \mathbb{Q} : d(q, r) < \varepsilon$$
**Beweis**

Wähle zuerst  $m \in \mathbb{N}$  mit  $\frac{1}{m} < \varepsilon$  (siehe 2.12).

Nun reicht es, ein  $q \in \mathbb{Q}$  zu finden mit  $r - \frac{1}{m} < q < r + \frac{1}{m}$ , denn  $r - \varepsilon < r - \frac{1}{m} < q < r + \frac{1}{m} < r + \varepsilon$ .

Sei  $r > 0$  (der Fall  $r < 0$  wird analog behandelt). Nach Satz 2.11  $\exists n \in \mathbb{N} : n > m$ .

Die Menge aller  $n$  hat ein kleinstes Element, dieses sei  $n_0$ . Daraus folgt:  $n_0 - 1 \leq m < n$ . Setze  $q := \frac{n_0}{m}$ .  
 $q - \frac{1}{m} \leq r < q \Rightarrow q \leq r + \frac{1}{m} \wedge r - \frac{1}{m} < q \Rightarrow r - \frac{1}{m} < q \leq r + \frac{1}{m}$

Man kann noch mehr zeigen: In jedem Intervall  $(a, b)$  liegen sowohl rationale als auch irrationale Zahlen ( $\{\text{irrationale Zahlen}\} = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ ).

## 2.5 Endliche und unendliche Mengen

**Definition 2.16**

Zwei nichtleere Mengen  $A, B$  heißen gleichmächtig ( $A$  und  $B$  haben die gleiche Mächtigkeit), wenn es eine bijektive Abbildung  $f : A \rightarrow B$  gibt.

Man schreibt  $A \sim B$ . Die Gleichmächtigkeit ist eine Äquivalenzrelation.

**Definition 2.17**

Eine Menge  $M$  heißt endlich, wenn  $\exists n \in \mathbb{N} : M \sim \mathbb{N}_n := \{1, 2, \dots, n\}$ . Andernfalls heißt die Menge unendlich.

Die Menge heißt abzählbar (unendlich), wenn  $M \sim \mathbb{N}$  ist, und überabzählbar, wenn  $M$  weder endlich noch abzählbar ist.

Die Äquivalenzklassen gleichmächtiger Mengen nennt man Kardinalzahlen.

Bei endlichen Mengen  $M \sim \mathbb{N}_n$  ist  $n$  die Kardinalzahl von  $M$ . Man schreibt  $n = \text{card } M = |M|$ .

Die leere Menge wird als endliche Menge betrachtet:  $|\emptyset| := 0$ .

**Satz 2.18**

1. Cantor'sches Diagonalverfahren

$$\mathbb{Q} \text{ ist abzählbar, d.h. } \mathbb{Q} \sim \mathbb{N}.$$

**Beweis**

Konstruktives Beweisverfahren: Man ordne die positiven rationalen Zahlen in dieses Schema:

$$\begin{array}{cccccc}
 \frac{1}{1} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \dots \\
 \frac{2}{1} & \frac{2}{2} & \frac{2}{3} & \frac{2}{4} & \frac{2}{5} & \dots \\
 \frac{3}{1} & \frac{3}{2} & \frac{3}{3} & \frac{3}{4} & \frac{3}{5} & \dots \\
 \frac{4}{1} & \frac{4}{2} & \frac{4}{3} & \frac{4}{4} & \frac{4}{5} & \dots \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots
 \end{array} = \begin{array}{cccccc}
 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \dots \\
 2 & 1 & \frac{2}{3} & \frac{1}{2} & \frac{2}{5} & \dots \\
 3 & \frac{3}{2} & 1 & \frac{3}{4} & \frac{3}{5} & \dots \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots
 \end{array}$$

Dieses Schema wird nach **irgendeinem** Schema abgezählt. Man lässt alle Zahlen, die schon einmal vorkamen, weg. (Wenn etwa  $\frac{2}{1}$  gezählt wurde, wird  $\frac{4}{2}$  nicht mehr gezählt.)

Eine mögliche Abzählung ergibt:  $(1, 2, \frac{2}{2}, \frac{1}{2}, 3, \frac{3}{2}, \frac{3}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}, 4, \frac{4}{2}, \dots)$

Durch Auslassen doppelter Zahlen ergibt sich:  $(1, 2, \frac{1}{2}, 3, \frac{3}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}, 4, \dots) =: (r_1, r_2, \dots)$

Nun kann  $\mathbb{Q}$  auf  $\mathbb{N}$  wie folgt abgebildet werden:  $(0, r_1, -r_1, r_2, -r_2, r_3, -r_3, \dots) =: (f(1), f(2), f(3), \dots)$

$\Rightarrow \mathbb{Q} \sim \mathbb{N} \Rightarrow \mathbb{Q}$  ist abzählbar. ■

**Satz 2.19**

## 2. Cantor'sches Diagonalverfahren

$\mathbb{R}$  ist überabzählbar.

**Satz 2.20**

Die Menge  $F$  aller Folgen aus Nullen und Einsen ist nicht abzählbar.

**Bemerkung**

Hat man diesen Satz gezeigt, dann hat man offenbar auch gezeigt, dass folgende Menge  $M \subset \mathbb{R}$  nicht abzählbar ist.

$$M = \{0, \underbrace{x_1 x_2 x_3 \dots}_{\substack{\text{Dezimalzahl,} \\ \text{z.B. } 0,1101001\dots}} \mid \text{mit } x_i \in \{0, 1\}\} \text{ Daraus folgt, dass } \mathbb{R} \text{ nicht abzählbar ist.}$$

**Beweis**

Angenommen,  $F$  (die Menge aller Folgen mit Elementen aus  $\{0, 1\}$ ) wäre abzählbar, d.h.  $F$  könnte durchnummeriert werden. Sei im folgenden **irgendeine** Abzählung von  $F$  gegeben:

$$\begin{array}{ll}
 \mathbf{a}_1^{(1)}, a_2^{(1)}, a_3^{(1)}, \dots & 1. \text{ Folge} \\
 a_1^{(2)}, \mathbf{a}_2^{(2)}, a_3^{(2)}, \dots & 2. \text{ Folge} \\
 a_1^{(3)}, a_2^{(3)}, \mathbf{a}_3^{(3)}, \dots & 3. \text{ Folge}
 \end{array} \quad (*)$$

Hierbei ist  $a_i^{(k)}$  das  $i$ -te Element der  $k$ -ten Folge. Jetzt müssen wir nur eine Folge  $b = (b_1, b_2, \dots)$  finden mit  $b \in F$ , aber  $b$  kommt in  $(*)$  nicht vor. Daraus folgt ein Widerspruch, also ist  $F$  nicht abzählbar. Setze nun  $b_n = 1$  für  $a_n^{(n)} = 0$  und  $b_n = 0$  für  $a_n^{(n)} = 1$ . Angenommen,  $(b_n)$  käme im Schema an der  $k$ -ten Stelle vor. Dann ist aber  $b_k \neq a_k^{(k)} \Rightarrow$  Widerspruch ■

## 2.6 Potenzen mit rationalen Exponenten

Ziel: Für  $a > 0, r \in \mathbb{Q}$  soll  $a^r$  erklärt werden.

**Vorbemerkung:** Für  $n \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{N}$  ist  $a^n := \prod_{i=1}^n a$  und  $a^{-m} = \frac{1}{a^m}$ .

Sei  $r = \frac{q}{p} \in \mathbb{Q}$ . Man möchte setzen:  $a^r = \left(a^{\frac{1}{p}}\right)^q$ . Problem: Was ist  $a^{\frac{1}{p}}$ ?

O.E.d.A. sei  $p \in \mathbb{N}$  (Vorzeichen werden von  $q$  „abgefangen“). Wir zeigen die Existenz als Demonstrationsbeispiel für die Verwendung des Vollständigkeitsaxioms.

### Definition und Satz 2.21

Sei  $a > 0, p \in \mathbb{N}$ , dann besitzt die Gleichung  $x^p = a$  genau eine nichtnegative Lösung. Diese wird mit  $\sqrt[p]{a}$  bezeichnet und  $p$ -te **Wurzel** aus  $a$  genannt. Im Falle  $p = 2$  schreibt man statt  $\sqrt[p]{a}$  kürzer  $\sqrt{a}$ .

### Beweis

Mit  $a < b \wedge c < d \Rightarrow ac < bd$  ergibt sich  $x < y \Rightarrow xx < yy \Rightarrow x^3 < y^3 \Rightarrow \dots \Rightarrow x^p < y^p$  (L)

### Eindeutigkeit:

Angenommen,  $x_1$  und  $x_2$  seien zwei unterschiedliche Lösungen von  $x^p = a$ , o.E.d.A.  $x_1 < x_2$ . Dann ist  $x^p < y^p \Rightarrow a < y^p \Rightarrow$  Widerspruch: Wenn  $x$  Lösung ist, kann  $y$  nicht Lösung sein.  $\Rightarrow$  höchstens eine Lösung

**Existenz:** Natürlich sind nur  $p > 1$  interessant.

Betrachte  $M := \{y \in \mathbb{R} : y \geq 0, y^p < a\}$ .  $M \neq \emptyset$ , denn  $0 \in M$ .  $M$  ist nach oben beschränkt:

$$(1+a)^p \stackrel{\text{(Bernoulli)}}{>} 1+pa \stackrel{(p>1)}{>} a > y^p \Rightarrow \forall y \in M : (1+a)^p > y^p \stackrel{(L)}{\Rightarrow} 1+a > y$$

Also ist  $M$  durch  $1+a$  nach oben beschränkt. Also existiert nach (V)  $\sup M =: z$ . Wir zeigen  $z^p = a$ , indem wir  $z^p < a$  und  $z^p > a$  zum Widerspruch führen, woraus nach (O1) die Behauptung folgt.

### Fall 1: $z^p < a$

Finde  $m$  mit  $(z + \frac{1}{m})^p < a \Rightarrow z + \frac{1}{m} < y \Rightarrow$  Widerspruch zu  $z = \sup M$ . Benutze folgende Abschätzung:

$$(z + \frac{1}{n})^p = z^p + \frac{1}{n} \binom{p}{1} z^{p-1} + \dots + \frac{1}{n^p} \binom{p}{p} \leq \underbrace{\left( \text{ersetze alle } \frac{1}{n^i} \text{ durch } \frac{1}{n} \right)}_{=: c, \text{ unabhängig von } n} \leq z^p + \frac{1}{n} \left[ \binom{p}{1} z^{p-1} + \dots + \binom{p}{p} \right]$$

$$\text{Also ist } = z^p + \frac{1}{n}c \quad (*)$$

$$z^p < a \Rightarrow a - z^p > 0 \wedge c > 0 \Rightarrow \frac{c}{a-z^p} > 0$$

Nach Satz des Archimedes  $\exists m \in \mathbb{N} : m > \frac{c}{a-z^p} \Rightarrow z^p + \frac{c}{m} < a$ . Wende (\*) für  $n = m$  an:

$$(z + \frac{1}{m})^p \leq z^p + \frac{1}{m}c < a \Leftrightarrow z + \frac{1}{m} \in M \Leftrightarrow \text{Widerspruch}$$

### Fall 2: $z^p > a$

Intuitiv  $\exists n \in \mathbb{N} : (z - \frac{1}{n})^p > a \Rightarrow z - \frac{1}{n} \notin M$

Nach Supremumsdefinition existiert ein  $y \in M : z - \frac{1}{n} < y \Rightarrow$  Das wird zum Widerspruch geführt.

$$z - \frac{1}{n} < y \Rightarrow (z - \frac{1}{n})^p < y^p \wedge (z - \frac{1}{n})^p > a \Leftrightarrow y^p > a \Leftrightarrow \text{Widerspruch zu } y \in M$$

Wir zeigen:  $\exists z' < z : a < z'^p < z^p$ . Das ist (s.o.) ein Widerspruch.

$$(z - \frac{1}{n})^p = z^p (1 - \frac{1}{nz})^p \stackrel{\text{(Bernoulli)}}{>} z^p (1 - \frac{p}{nz}) \quad (\text{falls } z - \frac{1}{n} > 0 \Rightarrow n > \frac{1}{z})$$

$$\text{Wähle außerdem } n = \frac{p \cdot z^p}{z \cdot (z^p - a)} \Rightarrow z^p - a > \frac{p}{nz} z^p \Rightarrow z^p (1 - \frac{p}{nz}) > a \Rightarrow (z - \frac{1}{n})^p > a \Rightarrow \text{Widerspruch}$$



## 2.7 Die Symbole $\infty$ und $-\infty$

Es ist nützlich, zu  $\mathbb{R}$  zwei Symbole hinzuzunehmen:  $\infty$  ( $\equiv +\infty$ ) und  $-\infty$ . Diese beiden Symbole sind *keine* reellen Zahlen. Wir vereinbaren außerdem folgende Rechenregeln:

- $\forall x :$ 
  - $-\infty < x < \infty$
  - $x + \infty = \infty + x = \infty$
  - $x - \infty = -\infty + x = -\infty$
  - $\frac{x}{\infty} = \frac{x}{-\infty} = 0$
- $\forall x > 0 :$ 
  - $x \cdot \infty = \infty \cdot x = \infty$
  - $x \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot x = -\infty$
- $\forall x < 0 :$ 
  - $x \cdot \infty = \infty \cdot x = -\infty$
  - $x \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot x = \infty$

Ausdrücke wie  $\infty \cdot \infty$ ,  $\infty - \infty$  oder  $0 \cdot \infty$  werden nicht erklärt, da eine sinnvolle Definition nicht möglich ist. Sinnvollerweise vereinbart man aber:

- Wenn  $M \subset \mathbb{R}$  nicht nach oben beschränkt ist, setzt man  $\sup M := \infty$ .
- Wenn  $M \subset \mathbb{R}$  nicht nach unten beschränkt ist, setzt man  $\inf M := -\infty$ .

Das Vollständigkeitsaxiom wird davon nicht berührt, da  $\infty$  und  $-\infty$  keine reellen Zahlen sind.



# 3 Der Grenzwertbegriff

## 3.1 Zahlenfolgen

Im allgemeinen betrachten wir komplexe Zahlenfolgen  $(a_n), n \in \mathbb{N}$  oder  $n = k, k+1, \dots$

**Wiederholungen:**

- $M \subset \mathbb{C}$  heißt beschränkt, wenn  $\exists k > 0 : \forall z \in M : |z| \leq k$
- Jede endliche Teilmenge  $M \subset \mathbb{C}$  (d.h.  $M$  hat endlich viele Elemente) ist beschränkt.
- $(a_n)$  heißt beschränkt, wenn  $\exists k > 0 : \forall n \in \mathbb{N} : |a_n| \leq k$
- $U_\varepsilon(z_0) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < \varepsilon\}$  ist die  $\varepsilon$ -Umgebung um  $z_0 \in \mathbb{C}$  (entspricht in der grafischen Darstellung einem Kreis um  $z_0$  mit dem Radius  $\varepsilon$ )

### Definition 3.1

Eine Zahl  $a \in \mathbb{C}$  heißt Grenzwert (oder Limes) einer Folge  $(a_n)$ , wenn gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 : |a_n - a| < \varepsilon$$

Die Folge  $(a_n)$  heißt dann konvergent (gegen  $a$ ). Man schreibt:  $a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$  oder  $a_n \rightarrow a$ .

Eine Folge  $(a_n)$  mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$  heißt Nullfolge. Eine Folge, die nicht konvergiert, heißt divergent.

#### Bemerkung

Diskutieren Sie verschiedene Varianten und Formulierungen des Grenzwertbegriffes. Beispiele:

- $a_n \rightarrow a \Leftrightarrow a_n - a \rightarrow 0$  (Beweis!)
- $a_n \rightarrow a \Leftrightarrow$  In jeder  $\varepsilon$ -Umgebung von  $a$  liegen alle Folgenglieder bis auf endlich viele.

In der Definition ist es egal, ob man  $n \geq n_0$  oder  $n > n_0$  schreibt. Es kommt beim Nachweis der Konvergenz überhaupt nicht darauf an, das kleinste  $n_0$  zu finden, solange man für jedes  $\varepsilon$  irgendein  $n_0$  findet.

### Beispiel 3.1

$a_n = \frac{1}{n} \rightarrow 0$ , denn: Sei  $\varepsilon > 0$  gegeben. Dann gilt  $|a_n - a| = \left|\frac{1}{n} - 0\right| = \frac{1}{n} < \varepsilon$ , falls  $n > n_0$ , wobei  $n_0$  jede beliebige natürliche Zahl  $> \frac{1}{\varepsilon}$  sein kann, denn  $\frac{1}{n_0} < \varepsilon \wedge n > n_0 \Rightarrow \frac{1}{n} < \frac{1}{n_0} < \varepsilon$ .

### Beispiel 3.2

$b_n = (17, 2^{22}, -2000, 0, 0, 0, \dots) \rightarrow 0$  (offensichtlich)

### Beispiel 3.3

$a_n = (1, 0, 1, 0, \dots)$  ist divergent.

Angenommen,  $a$  wäre Grenzwert. Wenn  $a \neq 0, 1$ , dann  $\exists \varepsilon > 0 : 0, 1 \notin U_\varepsilon(a)$ . Also liegt in  $U_\varepsilon(a)$  kein Folgenglied. Wenn  $a = 0$  oder  $a = 1$ , wähle  $\varepsilon = \frac{1}{2}$ , dann liegen außerhalb von  $U_\varepsilon(a)$  unendlich viele Folgenglieder.

### Satz 3.2

Eindeutigkeitssatz

Der Grenzwert einer konvergenten Folge ist eindeutig bestimmt.

**Beweis**

Angenommen,  $a$  und  $b$  mit  $a \neq b$  wären Grenzwerte von  $(a_n)$ . Dann existiert ein  $\varepsilon > 0$  mit  $U_\varepsilon(a) \cap U_\varepsilon(b) = \emptyset$ . Weil  $a$  Grenzwert ist, liegen innerhalb von  $U_\varepsilon(a)$  unendlich viele Folgenglieder, innerhalb von  $U_\varepsilon(b)$  maximal endlich viele Folgenglieder. Also kann  $b$  nicht Grenzwert sein. (Widerspruch) ■

**Satz 3.3**

Jede konvergente Folge ist beschränkt.

**Beweis**

Kurzargumentation: Sei  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ . Wähle irgendein  $\varepsilon > 0$ . Dann liegen in  $U_\varepsilon(a)$  alle Folgenglieder bis auf endlich viele. Diese endlich vielen Folgenglieder bilden eine beschränkte Menge.  $U_\varepsilon(a)$  ist auch beschränkt, also ist die Folge insgesamt beschränkt. ■

Die Konvergenz komplexer Folgen lässt sich leicht auf die Konvergenz reeller Folgen zurückführen.

**Satz 3.4**

Sei  $(a_n)$  eine komplexe Folge mit  $a_n = b_n + ic_n$ . Dann gilt:  $a_n \rightarrow a = b + ic \Leftrightarrow b_n \rightarrow b \wedge c_n \rightarrow c$ .

**Satz 3.5** Rechenregeln für konvergente Folgen

Seien  $(a_n)$  und  $(b_n)$  konvergente Folgen mit  $a_n \rightarrow a$ ,  $b_n \rightarrow b$ . Seien  $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ . Dann gilt:

1.  $(\lambda a_n + \mu b_n)$  konvergiert gegen  $\lambda a + \mu b$ .
2.  $(a_n \cdot b_n)$  konvergiert gegen  $a \cdot b$ .
3.  $\forall n \in \mathbb{N} : b_n \neq 0 \wedge b \neq 0 \Rightarrow \left(\frac{a_n}{b_n}\right)_{n \geq k}$  konvergiert gegen  $\frac{a}{b}$ .

**Beweis**

1. und 3. sind Thema der Übungsaufgaben. Zu 2.:

**Kurzargumentation:**  $(a_n)$  ist konvergent, also beschränkt, d.h.  $\exists C : |a_n| < C$ . Gezeigt wird  $|a_n b_n - ab| \rightarrow 0$ .

$$\begin{aligned} |a_n b_n - ab| &= |a_n b_n - a_n b + a_n b - ab| \leq (\text{Dreiecksungl.}) \leq |a_n b_n - a_n b| + |a_n b - ab| \\ &= |a_n| |b_n - b| + |b| |a_n - a| \leq C \underbrace{|b_n - b|}_{\rightarrow 0} + |b| \underbrace{|a_n - a|}_{\rightarrow 0} \rightarrow 0 \end{aligned}$$

**Ausführlicher Beweis mit  $\varepsilon$  und  $n_0$ :**

Sei  $\varepsilon > 0$  gegeben.  $a_n \rightarrow a \Rightarrow |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2|b|}$  für  $n > n_1$ ,  $b \neq 0$ . Analog ist  $|b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2C}$  für  $n > n_2$ .

Sei  $n_0 > n_1, n_2 \Rightarrow \forall n > n_0 : |a_n b_n - ab| \leq (\text{siehe Kurzfassung}) \leq C |b_n - b| + |b| |a_n - a| < C \frac{\varepsilon}{2C} + |b| \frac{\varepsilon}{2|b|} = \varepsilon \Rightarrow |a_n b_n - ab| < \varepsilon \Rightarrow a_n b_n \rightarrow ab$  ■

Die folgenden Eigenschaften werden auch oft benutzt.

**Satz 3.6**

$(a_n), (b_n)$  seien reelle Folgen mit  $a_n \rightarrow a, b_n \rightarrow b$ . Dann gilt:

1.  $\forall n \in \mathbb{N} : a_n < b_n$  (oder  $a_n \leq b_n$ )  $\Rightarrow a \leq b$  (nicht  $a < b$ )
2. („Sandwich-Theorem“) Wenn  $a = b$  und  $(c_n)$  eine Folge mit  $a_n \leq c_n \leq b_n \forall n$  ist, dann  $c_n \rightarrow a$ .

**Beweis**

1.  $\forall \varepsilon > 0 : \exists n_0 : \forall n > n_0 : |a_n - a| < \varepsilon, |b_n - b| < \varepsilon$   
Das heißt:  $a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon$  und  $b - \varepsilon < b_n < b + \varepsilon$ .  
 $a - \varepsilon < a_n \leq b_n < b + \varepsilon \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 : a - b < 2\varepsilon \Rightarrow a - b \leq 0 \Rightarrow a \leq b$
2.  $a_n \leq c_n \leq b_n \Rightarrow c_n - a_n \leq b_n - a_n \rightarrow 0 \Rightarrow c_n - a_n \rightarrow 0$   
 $|c_n - a_n| = |c_n - a_n + a_n - a| \leq \underbrace{|c_n - a_n|}_{\rightarrow 0} + \underbrace{|a_n - a|}_{\rightarrow 0} \rightarrow 0 \Rightarrow c_n \rightarrow a$

**Satz 3.7**

Wichtige Beispiele für Grenzwerte

1.  $\forall p \in \mathbb{N} : \frac{1}{p^n} \rightarrow 0$
2.  $\forall a > 0 : \sqrt[n]{a} \rightarrow 1$
3.  $\sqrt[n]{n} \rightarrow 1$
4.  $\forall q \in \mathbb{C}, |q| < 1 : q^n \rightarrow 0$
5.  $\forall k \in \mathbb{N}, z \in \mathbb{C}, |z| > 1 : \frac{n^k}{z^n} \rightarrow 0$

**Beweis**

1.  $\forall \varepsilon > 0 : \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n > n_0 : \frac{1}{n} < \varepsilon^p \Rightarrow \frac{1}{p^n} < \varepsilon$
2. Fallunterscheidung: ( $a = 1$  ist trivial.)  
 $a > 1$ : Setze  $x_n = \sqrt[n]{a} - 1$  ( $\forall n : x_n > -1$ ).  
 $a = (1 + x_p)^n \geq (\text{Bernoulli}) \geq 1 + nx_n$   
 $\Rightarrow$  (mit  $x_n = 0$ )  $\Rightarrow 0 \leq x_n \leq \frac{a-1}{n} \leq \frac{a}{n} \rightarrow 0 \Rightarrow x_n \rightarrow 0 \Rightarrow \sqrt[n]{a} \rightarrow 1$   $a < 1$ :  $\frac{1}{a} > 1 \Rightarrow \sqrt[n]{a} = \left(\sqrt[n]{\frac{1}{a}}\right)^{-1} = \left(\frac{1}{\sqrt[n]{a}}\right)^{-1} \rightarrow \left(\frac{1}{1}\right)^{-1} = 1$
3. (analog zu 2.) Setze  $x_n = \sqrt[n]{n} - 1$  ( $x_n > 0$ ). Anwendung des binomischen Satzes:  
 $n = (1 + x_n)^n \geq 1 + \binom{n}{2} x_n^2$  (alle Teile bis auf den ersten und dritten werden weggelassen)  
 $n - 1 \geq \frac{n(n-1)}{2} x_n^2 \Rightarrow x_n \leq \frac{2}{\sqrt{n}} \rightarrow 0 \Rightarrow \sqrt[n]{n} - 1 \rightarrow 0 \Rightarrow \sqrt[n]{n} \rightarrow 1$
4. Sei  $q \neq 0$  ( $q = 0$  trivial). Setzt  $a := \frac{1-|q|}{|q|} > 0 \Rightarrow |q| = \frac{1}{1+a}$   
 $\Rightarrow (\text{Bernoulli}) \Rightarrow (1+a)^n \geq 1 + na > 0 \Rightarrow$   
 $0 \leq |q^n| = |q|^n = \frac{1}{(1+a)^n} \leq \frac{1}{1+na} \leq \frac{1}{na} \rightarrow 0 \Rightarrow |q|^n \rightarrow 0 \Rightarrow q^n \rightarrow 0$

Im folgenden werden einige wichtige Sätze behandelt, die Aussagen über die Konvergenz von Folgen machen, ohne den Grenzwert zu kennen.

**Definition 3.8**

Eine reelle Folge  $(a_n)$  heißt:

- monoton wachsend (fallend), wenn  $a_n \leq a_{n+1}$  ( $a_n \geq a_{n+1}$ )  $\forall n \in \mathbb{N}$
- streng monoton wachsend (fallend), wenn  $a_n < a_{n+1}$  ( $a_n > a_{n+1}$ )  $\forall n \in \mathbb{N}$

**Satz 3.9**

Sei  $(a_n)$  eine monotone und beschränkte reelle Folge, dann ist  $(a_n)$  konvergent.

- Wenn  $(a_n)$  monoton wachsend ist, ist  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \sup \{a_n\}$
- Wenn  $(a_n)$  monoton fallend ist, ist  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \inf \{a_n\}$

**Beweis**

Wir beweisen nur 1., 2. ist eine Analogie.

Sei  $a = \sup \{a_n\}$  (existiert gemäß Vollständigkeitsaxiom),  $\varepsilon > 0$  beliebig.

$\Rightarrow a_n \leq a \forall n$ . Nach Supremumsdefinition  $\exists n_0 \in \mathbb{N} : a - \varepsilon < a_{n_0}$

$\Rightarrow$  Monotonie (Sei  $n > n_0$ .)  $\Rightarrow a - \varepsilon < a_{n_0} \leq a_n \leq a < a + \varepsilon \Rightarrow a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon \Rightarrow a_n \rightarrow a$  ■

Der folgende Begriff ist sehr wichtig.

**Definition 3.10**

Sei  $(a_n)$  eine beliebige Folge und  $n_1 < n_2 < \dots$  eine streng monoton wachsende Folge natürlicher Zahlen. Dann nennt man die Folge  $(a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}} = (a_{n_1}, a_{n_2}, \dots)$  eine Teilfolge von  $(a_n)$ .

**Beispiel 3.4**

Sei  $(a_n) = (1, 0, 0, 2, 7, 4, 4, 3, 0, 0, 0, \dots)$ .

$(0, 7, 3, 0, 0, 0, \dots)$  ist eine Teilfolge von  $(a_n)$ ,  $(0, 7, 2, 3, 3, 0, 0, 0, \dots)$  jedoch nicht.

**Satz 3.11**

Jede Teilfolge einer gegen  $a$  konvergenten Folge konvergiert auch gegen  $a$ .

**Satz 3.12**

Satz von Bolzano-Weierstrass

Jede beschränkte Folge reeller oder komplexer Zahlen besitzt eine konvergente Teilfolge.

**Beweis**

Wir zeigen den Satz nur für reelle Folgen (der Beweis für komplexe Folgen ist eine Übungsaufgabe).

Da  $(a_n)$  beschränkt,  $\exists c, d \in \mathbb{R} : c \leq a_n \leq d$ .

**1. Schritt:**  $M = \{x \in \mathbb{R} : a_n > x \text{ für höchstens endlich viele } n \in \mathbb{N}\}$

Offenbar ist  $M$  nichtleer ( $d \in M$ ) und durch  $c$  nach unten beschränkt.

**2. Schritt:** Setze  $a := \inf M$ . Zeige: Es existiert eine gegen  $a$  konvergente Teilfolge.

**3. Schritt:** Sei  $\varepsilon > 0$  gegeben. Dann gilt:  $a + \varepsilon \in M$ ,  $a - \varepsilon \notin M$ , da alle  $x \in M$  erfüllen müssen:  $x \geq a$   
 $a - \varepsilon \notin M \Rightarrow \exists$  unendlich viele  $a_n$  mit  $a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon$  (\*)

**4. Schritt:** Die Teilfolge wird wie folgt gewählt, wobei (\*) auf verschiedene  $\varepsilon$  angewendet wird:

- $\varepsilon = 1 : a_{n_1}$  mit  $a - 1 < a_{n_1} < a + 1$
- $\varepsilon = \frac{1}{2} : a_{n_2}$  mit  $a - \frac{1}{2} < a_{n_2} < a + \frac{1}{2}$ ,  $n_2 > n_1$   
(möglich, da im Intervall unendlich viele Elemente liegen)

- $\varepsilon = \frac{1}{k} : a_{n_k}$  mit  $a - \frac{1}{k} < a_{n_k} < a + \frac{1}{k}$ ,  $n_k > n_{k-1} > \dots > n_2 > n_1$

$\Rightarrow (a_{n_k})$  ist eine Teilfolge von  $(a_n)$  und (nach Sandwichtheorem) gilt:  $a - \frac{1}{n} \rightarrow a \wedge a + \frac{1}{n} \rightarrow a \Rightarrow a_{n_k} \rightarrow a$  ■

### Satz 3.13 Cauchy-Kriterium

Eine Folge  $(a_n)$  komplexer Zahlen konvergiert genau dann, wenn gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists n_0 = n_0(\varepsilon) : \forall m, n > n_0 : |a_n - a_m| < \varepsilon \quad (CK)$$

#### Bemerkung

Dies ist das einzige notwendige und hinreichende Konvergenzkriterium.

#### Beweis

##### Notwendigkeit der Aussage:

Sei  $a_n \rightarrow a$  und  $\varepsilon > 0$  gegeben.  $\Rightarrow \exists n_0 : |a_k - a| < \frac{\varepsilon}{2} \forall k > n_0$

$$\Rightarrow \forall m, n > n_0 : |a_n - a_m| = |a_n - a + a - a_m| \leq |a_n - a| + |a - a_m| < \varepsilon$$

Das heißt:  $a_n \rightarrow a \Rightarrow (CK)$

##### Hinlänglichkeit der Aussage:

Wir zeigen: Wenn  $(CK)$  gilt, ist  $(a_n)$  beschränkt.

Betrachte zum Beispiel  $\varepsilon = 1$ , d.h.  $|a_m - a_n| < 1 \forall m, n > n_0 = n_0(1)$ .

Für  $m = n_0 + 1$ :  $|a_{n_0+1} - a_n| < 1 \forall n > n_0$

$$\Rightarrow |a_n| = |a_n - a_{n_0+1} + a_{n_0+1}| \leq |a_n - a_{n_0+1}| + |a_{n_0+1}| \leq 1 + |a_{n_0+1}|$$

Da  $a_1, \dots, a_n$  sicherlich beschränkt sind, ist die Folge  $(a_n)$  insgesamt beschränkt.

Nach Satz von Bolzano-Weierstrass existiert eine konvergente Teilfolge  $(a_{n_k})$  mit  $a_{n_k} \rightarrow a$ .

Dann gilt auch  $a_n \rightarrow a$ . Im folgenden der Beweis für diesen Schritt:

Sei  $\varepsilon > 0$  gegeben.  $\exists n_0 : \forall m, n > n_0 : |a_m - a_n| < \frac{\varepsilon}{2}$  (nach Cauchykrit.)

$\exists n_1 : \forall n_k > n_1 : |a_{n_k} - a| < \frac{\varepsilon}{2}$  (nach Konvergenz der Teilfolge)

$$\Rightarrow |a_n - a| = |a_n - a_{n_k} + a_{n_k} - a| \leq \underbrace{|a_n - a_{n_k}|}_{< \frac{\varepsilon}{2}, \text{ falls } n_1 n_k > n_2} + \underbrace{|a_{n_k} - a|}_{< \frac{\varepsilon}{2}, \text{ falls } n_k > n_2} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon \forall n > n_2$$

Hierbei ist  $n_2 = \max\{n_0, n_1\}$ . ■

#### Bemerkung

Die Notwendigkeit von CK benötigt nicht die Vollständigkeit von  $\mathbb{R}$  (bzw. von  $\mathbb{C}$ ), die Hinlänglichkeit hingegen schon.

Die Vollständigkeit von  $\mathbb{R}$  haben wir über das Supremumsprinzip definiert. Man kann allerdings alternativ formulieren:

**Eine Menge heißt vollständig, wenn jede Cauchyfolge mit Elementen aus dieser Menge einen Grenzwert besitzt.**

(Hierbei ist eine Cauchyfolge eine Folge, die das Cauchy Kriterium erfüllt.)

Nimmt man diese Definition der Vollständigkeit als Axiom von  $\mathbb{R}$ , kann man das Supremumsprinzip beweisen.

Der Beweis enthält folgende Aussage, die für sich von Interesse ist: Wenn  $(a_n)$  eine Cauchyfolge mit einer gegen  $a$  konvergenten Teilfolge ist, konvergiert auch  $a_n$  gegen  $a$ .

Wir wollen das Bisherige in einer Rekursionsformel für  $\sqrt{a}$  anwenden.

**Satz 3.14**

Sei  $a > 0$  und sei  $(x_n)$  wie folgt rekursiv definiert:

$$x_1 > 0 \text{ beliebig und } x_{n+1} = \frac{1}{2} \left( x_n + \frac{a}{x_n} \right) \text{ für } n \in \mathbb{N} \quad (*)$$

Dann ist  $(x_n)$  konvergent gegen  $\sqrt{a}$ .

**Beweis**

Wir zeigen:  $(x_n)$  ist monoton fallend und nach unten beschränkt.

**Beschränktheit:** Benutze Ungleichung „geometrisches Mittel  $\leq$  arithmetisches Mittel“

Mit  $y := \frac{a}{x_n}$  und  $x := x_n$  ist  $\sqrt{xy} \leq \frac{1}{2}(x + y)$ .

$$\Rightarrow \sqrt{a} \leq \frac{1}{2} \left( x_n + \frac{a}{x_n} \right) = x_{n+1} \Rightarrow x_n \text{ nach unten beschränkt zumindest ab } n = 2$$

**Monotonie:**  $a \leq x_n^2 \Rightarrow \frac{a}{x_n} \leq x_n \Rightarrow x_{n+1} = \frac{1}{2} \left( x_n + \frac{a}{x_n} \right) \leq \frac{1}{2}(x_n + x_n) = x_n$ .

Daher ist  $(x_n)$  monoton fallend.

Daraus folgt:  $(x_n)$  ist konvergent (Satz 3.9) gegen  $x$ .

$\Rightarrow$  Man kann in  $(*)$  auf beiden Seiten zum Grenzwert übergehen. Dabei gilt:  $x_n \rightarrow x \wedge x_{n+1} \rightarrow x$ .

$$x_{n+1} = \frac{1}{2} \left( x_n + \frac{a}{x_n} \right) \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \left( x_n + \frac{a}{x_n} \right) \Rightarrow x = \frac{1}{2} \left( x + \frac{a}{x} \right) \Rightarrow x = \frac{a}{x} \Rightarrow x = \sqrt{a}$$

**Bemerkung**

Wenn  $x_1$  rational ist, sind alle  $x_n$  rational. Also ist  $(x_n)$  eine rationale Cauchyfolge, jedoch oft (z.B. für  $a = 2$ ) ohne rationalen Grenzwert. Wie man sieht, ist  $\mathbb{Q}$  nicht vollständig.

## 3.2 Exponential- und Logarithmusfunktion, allgemeine Potenzen

Sei  $f : D(f) \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion, so heißt  $f$

- monoton wachsend bzw. fallend, wenn gilt:  $x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$  bzw.  $f(x) \geq f(y)$
- streng monoton wachsend (fallend), wenn  $x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$  bzw.  $f(x) > f(y)$

**Satz 3.15**

Betrachte die Folgen  $a_n = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$ ,  $b_n = \left(1 - \frac{x}{n}\right)^{-n}$ . Sei  $x \in \mathbb{R}$  fest und  $n_0$  so, dass  $n_0 > |x|$ . Dann gilt:

1.  $a_n \leq a_{n+1} \forall n \geq n_0$  (falls  $x \geq 0$ , gilt dieses  $\forall n$ )
2.  $b_n \geq b_{n+1}$
3.  $a_n \leq b_n \forall n \geq n_0$
4.  $\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) = 0$

Bezeichnet man mit  $I_n = [a_n, b_n]$  die entsprechenden Intervalle, bildet  $(I_n)$  eine sogenannte Intervallschachtelung, d.h.  $I_n \supset I_{n+1} \forall n$  und  $|I_n| = b_n - a_n \rightarrow 0$ .

**Beweis**

1. Für  $n_0 > |x|$  und  $n > n_0$  gilt:  $1 + \frac{x}{n} > 0$ . Definiert man  $h$  durch  $1 + h = \frac{1 + \frac{x}{n+1}}{1 + \frac{x}{n}}$ , d.h.  $h = -\frac{x}{n(n+1)(1 + \frac{x}{n})}$ , dann folgt  $1 + h > 0$ . Mit der Bernoulli'schen Ungleichung folgt:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\left(1 + \frac{x}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n} = \left(1 + \frac{x}{n}\right) \cdot (1 + h)^{n+1} \geq \left(1 + \frac{x}{n}\right) \cdot (1 + (n+1)h) = \left(1 + \frac{x}{n}\right) \cdot \left(1 - \frac{x}{1+\frac{x}{n}}\right) = 1.$$

Da  $a_n > 0$ , gilt also  $a_{n+1} \geq a_n$ .

2. Für  $n \geq n_0 > |x|$  ist  $1 - \frac{x}{n} > 0 \Rightarrow \frac{1}{b_n} = \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n = \left(1 + \frac{-x}{n}\right)^n =$  monoton wachsend (siehe 1.)  
Also ist  $(b_n)$  monoton fallend.

3.  $\frac{a_n}{b_n} = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \cdot \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n = \left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right)^n \leq 1 \stackrel{(b \geq 0)}{\Rightarrow} a_n \leq b_n$

4. Bernoulli anwenden:  $b_n - a_n = b_n \left(1 - \frac{a_n}{b_n}\right) = b_n \left(1 - \left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right)^n\right) \leq b_n \cdot \frac{x^2}{n} \leq b_{n_0} \cdot \frac{x^2}{n} \rightarrow 0$

■

$(a_n)$  und  $(b_n)$  sind monoton und beschränkt, also konvergent. Da  $b_n - a_n \rightarrow 0$ , haben beide Folgen denselben Grenzwert. Setze  $f(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{x}{n}\right)^{-n}$ .

### Lemma 3.16

Diese Funktion  $f$  hat die folgenden Eigenschaften:

1.  $f(0) = 1$
2.  $f(x+y) = f(x) \cdot f(y)$
3.  $f(x) > 0, f(-x) = \frac{1}{f(x)}$

### Beweis

1.  $f(0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{0}{n}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} 1^n = 1$

2.  $f(x+y) - f(x) \cdot f(y) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \left(1 + \frac{x+y}{n}\right)^n - \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \cdot \left(1 + \frac{y}{n}\right)^n \right]$

[...] hat die Gestalt:  $c^n - (ab)^n = (c - ab) \cdot \sum_{k=1}^n c^{n-k} (ab)^{k-1} \quad (*)$

Dabei ist  $|ab| \leq \left|1 + \frac{|x|}{n}\right| \cdot \left|1 + \frac{|y|}{n}\right|$  und  $|c| \leq 1 + \frac{|x|}{n} + \frac{|y|}{n} \leq \left(1 + \frac{|x|}{n}\right) \cdot \left(1 + \frac{|y|}{n}\right)$ .

Außerdem ist  $c - ab = -\frac{xy}{n^2}$ .

$\Rightarrow \left|c^{n-k} (ab)^{k-1}\right| \leq \left(1 + \frac{|x|}{n}\right)^{n-1} \cdot \left(1 + \frac{|y|}{n}\right)^{n-1} \leq \left(1 + \frac{|x|}{n}\right)^n \cdot \left(1 + \frac{|y|}{n}\right)^n \leq f(|x|) \cdot f(|y|)$

$\Rightarrow |[...]| \leq \frac{|x| \cdot |y|}{n^2} \cdot n \cdot f(|x|) \cdot f(|y|) = \frac{f(|x|) \cdot f(|y|) \cdot |x| \cdot |y|}{n} \rightarrow 0$

$f(x+y) - f(x) \cdot f(y) = 0 \Rightarrow f(x+y) = f(x) \cdot f(y)$

■

### Definition 3.17

Die **Euler'sche Zahl** ist  $e := f(1) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \approx 2,71828 \dots$

Für jede rationale Zahl  $x = \frac{m}{n}$ ,  $m, n \in \mathbb{N}$  ist  $f(x) = e^x$ .

### Beweis

Sei o.E.d.A.  $\frac{m}{n} > 0$  ( $\frac{m}{n} < 0$  trivial).

Dann gilt:  $e^m = f(1)^m \stackrel{(3.16.2)}{=} \underbrace{f(1 + \dots + 1)}_{m\text{-mal}} = f(m) = f(nx) = f(\underbrace{nx}_{n\text{-mal}}) = f(x + \dots + x) = f(x)^n$

$$\Rightarrow e^x = e^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{e^m} = \sqrt[n]{f(1)^m} = \sqrt[n]{f(x)^n} = f(x)$$

### 3.2.1 Exponentialfunktion

#### Definition 3.18

Die Funktion  $e^x := \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \forall x \in \mathbb{R}$  heißt **Exponentialfunktion**. Notation:  $\exp(x)$

#### Bemerkung

Man kann zeigen: Wenn  $r_n \rightarrow x$ ,  $r_n \in \mathbb{Q}$ ,  $x \in \mathbb{R}$ , dann ist  $e^{r_n} = f(r_n) \rightarrow f(x)$ .

#### Satz 3.19

1.  $e^0 = 1$
2.  $e^{x+y} = e^x \cdot e^y$
3.  $e^x \geq 1 + x$ , Gleichheit nur für  $x = 0$
4.  $x < y \Rightarrow e^x < e^y$
5.  $|x| < 1 \Rightarrow |e^x - 1| \geq \frac{|x|}{1-|x|}$  - Daraus folgt:  $x_n \rightarrow 0 \Rightarrow e^{x_n} \rightarrow 1$ , d.h.  $e^x$  ist stetig für  $x = 0$ .
6.  $e^x$  wächst stärker als jede Potenz von  $x$ . Genauer gilt für ein  $n \in \mathbb{N}$ :  $e^x > x^n \forall x > 4n^2$ .
7.  $\lim_{n \rightarrow \infty} e^{-n} = 0$

#### Beweis

3. Wenn  $x > -1$ , dann gilt nach (3.15.1):  $1 + x = \left(1 + \frac{x}{1}\right)^1 \stackrel{(\text{Monot.})}{\leq} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \leq e^x$ .  
Für  $x \leq -1$  ist ohnehin  $e^x > 0 \geq 1 + x$ .
4. Nach 3. gilt  $e^x > 1$  für  $x > 0$ . Wenn  $x < y$ , dann gilt:  $e^y - e^x = e^x (e^{y-x} - 1) > 0$ ,  
da  $y - x > 0 \Rightarrow e^{y-x} > 1$  und  $e^{y-x} > 0$ . Also  $e^y > e^x$ .
5. Nimmt man in (3.15.2)  $\left(b_n > b_{n+1}, b_n = \left(1 - \frac{x}{n}\right)^{-n}\right)$   $n_0 > 1$ , dann erhält man:  
 $\left(1 - \frac{x}{n}\right)^{-n}$  monoton fallend gegen  $e^x$ , also falls  $|x| < 1$ :  $e^x \leq \left(1 - \frac{x}{n}\right)^{-1} = \frac{x}{1-x}$   
Für  $x \geq 0$  ergibt sich die Behauptung unmittelbar:  $e^x - 1 \leq \frac{1}{1-x} - 1 = \frac{x}{1-x}$ .  
Für  $-1 < x < 0$  benutze 3.:  $1 - e^x \leq -x = x < \frac{|x|}{1-|x|}$
6. Sei  $x > 4n^2$ . Dann  $\sqrt{x} > 2n \Rightarrow \sqrt{x} \cdot \sqrt{x} > 2n \cdot \sqrt{x} \Rightarrow \frac{x}{2n} > \sqrt{x}$ .  
 $e^x > a_n \forall n \Rightarrow e^x > a_{2n} = \left(1 + \frac{x}{2n}\right)^{2n} > (1 + \sqrt{x})^{2n} \geq \sqrt{x}^{2n} = x^n$
7. Nach 3. gilt:  $e^n > 1 + n$  (für  $n \neq 0$ !)  $\Rightarrow e^{-n} < \frac{1}{n+1} \stackrel{(e^{-n} > 0)}{\Rightarrow} e^{-n} \rightarrow 0$



### 3.2.2 Logarithmusfunktion

#### Satz 3.20

Die Exponentialfunktion  $\exp : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$  ist bijektiv. Die Umkehrfunktion wird mit  $\log : x \mapsto \log(x)$  für  $x > 0$  bezeichnet und heißt **(natürliche(r)) Logarithmus(funktion)**. (Statt  $\log$  schreibt man auch  $\ln$ .)  $\log$  ist streng monoton wachsend.

#### Beweis

Da  $\exp$  streng monoton wachsend ist, muss  $\exp$  injektiv sein. Zeigen:  $\exp$  ist surjektiv auf  $\mathbb{R}_+ = (0, \infty)$ . Sei  $y > 0$ . Zeigen:  $\exists a \in \mathbb{R} : e^a = y$ . Betrachte dazu  $A := \{x \in \mathbb{R} : e^x < y\}$ .  $A \neq \emptyset$  und  $A$  ist nach oben beschränkt, denn  $x < e^x - 1$  (3.19.3), also  $x < e^x - 1 = y - 1$ . Also existiert ein Supremum  $a = \sup A$ . Zeigen:  $e^a = y$ . Nach der Supremumsdefinition:  $\forall x \in \mathbb{N} : \exists x_n \in A : a - \frac{1}{n} < x_n \leq a$ .

Aus Monotonie von  $\exp$  folgt:  $e^{a-\frac{1}{n}} < e^{x_n} < y < e^{a+\frac{1}{n}}$ .  $(a + \frac{1}{n} \notin A)$  (\*).

Aus (3.19.5) folgt:  $e^{a-\frac{1}{n}} = e^a e^{-\frac{1}{n}} \rightarrow e^a$ ,  $e^{a+\frac{1}{n}} \rightarrow e^a$ . Aus (\*) folgt (Sandwichtheorem):  $e^y = a$ .

**Monotonie von  $\log$ :** Angenommen, aus  $0 < x < y$  folgt  $\log y \leq \log x$ .

$\Rightarrow \exp(\log y) \leq \exp(\log x) \Rightarrow y \leq x \Rightarrow \text{Widerspruch} \Rightarrow (0 < x < y \Rightarrow \log x < \log y)$

■

Die folgenden Eigenschaften folgen direkt aus (3.19) und werden hier nicht explizit bewiesen.

#### Satz 3.21

Eigenschaften des natürlichen Logarithmus

1.  $e^{\log y} = y \ \forall y > 0$ ,  $\log e^x = x \ \forall x \in \mathbb{R}$  - Speziell:  $\log 1 = 0$ ,  $\log e = 1$ .
2.  $\log(ab) = \log a + \log b \ \forall a, b > 0$ ,  $\log\left(\frac{a}{b}\right) = \log a - \log b \ \forall a, b > 0$
3.  $\log(x^n) = n \log(x) \ \forall n \in \mathbb{N}$
4.  $\log(1+x) < x \ \forall x > -1, x \neq 0$
5. Der Logarithmus wächst langsamer als jede Linearfunktion  $x \mapsto cx$ .  
Genauer für  $n \in \mathbb{N}$  mit  $\frac{1}{n} < c$  ist  $\log x < \frac{x}{n} < c \ \forall x > 4n^2$

### 3.2.3 Allgemeine Potenzen

#### Definition 3.22

Für  $x > 0$ ,  $y \in \mathbb{R}$  setzen wir  $x^y := e^{y \cdot \log x}$ .

#### Bemerkung

Es gelten die üblichen Potenzgesetze:  $(xy)^r = x^r y^r$ ,  $(x^r)^s = x^{rs}$ ,  $x^{r+s} = x^r x^s$ .

#### Beweis

Wir zeigen, dass diese Definition für  $x > 0$ ,  $y \in \mathbb{Q}$  mit der bisherigen Definition kongruent ist.

Für  $y = \frac{m}{n} > 0$  gilt wegen  $\log x^m = m \log x$ :

$$n \log x^{\frac{m}{n}} = n \log(\sqrt[n]{x})^m = mn \log \sqrt[n]{x} = m \log(\sqrt[n]{x})^n = m \log x \Rightarrow \log x^{\frac{m}{n}} = \frac{m}{n} \log x \ \forall m, n \in \mathbb{N}.$$

Für  $y < 0$  benutze  $\log\left(\frac{1}{a}\right) = -\log a \Rightarrow$  Rest analog. Also:  $\log x^y = y \log x \Rightarrow x^y = e^{y \cdot \log x} \ \forall x \in \mathbb{R}_+, y \in \mathbb{Q}$ .

■

### 3.3 Häufungswerte von Zahlenfolgen

Wir wollen die Struktur divergenter Folgen etwas genauer untersuchen.

#### Definition 3.23

Sei  $a_n$  eine beliebige komplexe Folge. Die Zahl  $a \in \mathbb{C}$  heißt **Häufungswert** von  $(a_n)$ , wenn es eine Teilfolge  $(a_{n_k})$  von  $(a_n)$  gibt mit  $a_{n_k} \rightarrow a$ .

Die Menge aller Häufungswerte von  $(a_n)$  heißt dann  $H = H(a_n)$ . (Diese Menge aller Häufungswerte heißt manchmal auch **Limesmenge** von  $(a_n)$ .)

Unmittelbar aus der Definition folgt: (Beweisen Sie dieses Lemma als Übung!)

#### Lemma 3.24

$a \in H(a_n) \Leftrightarrow$  in jeder  $\varepsilon$ -Umgebung  $U_\varepsilon(a)$  liegen unendlich viele Glieder von  $(a_n)$ .

#### Beispiel 3.5

1.  $(a_n) = (0, 1, 0, 1, \dots) \Rightarrow H = \{0, 1\}$
2. Sei  $(a_n)$  irgend eine Durchnummerierung der rationalen Zahlen in  $(0, 1) \Rightarrow H(a_n) = [0, 1]$
3.  $(a_n) = (0, 1, 0, 2, 0, 3, \dots) \Rightarrow H = \{0\}$
4.  $(a_n) = (1, 2, 3, 4, \dots) \Rightarrow H = \emptyset$

#### Eigenschaften von Häufungswerten

Ist  $(a_n)$  durch  $C$  beschränkt, so ist jede Teilfolge mit  $C$  beschränkt:  $\forall a \in H(a_n) : |a| \leq C$ .

Ist  $(a_n)$  eine reelle Folge mit  $a_n \in (-C, C) \forall n$ , so gilt:  $H(a_n) \subset [-C, C] \Rightarrow \exists \inf H(a_n), \sup H(a_n)$ .

Setze  $\inf H(a_n) =: \alpha, \sup H(a_n) =: \beta$ . Dann gilt  $\alpha, \beta \in H(a_n)$  für reelle Folgen.

#### Beweis

Sei  $\varepsilon > 0$  beliebig gegeben. Nach der Infimumsdefinition gilt:  $\exists b \in H(a_n) : \alpha \leq b < \alpha + \varepsilon$

Wenn  $b = \alpha$ , folgt daraus unmittelbar die Behauptung. Wenn  $b \neq \alpha$ , dann existiert ein  $\delta > 0$  mit:

$$\alpha \leq b - \delta < b < b + \delta < \alpha + \varepsilon$$

Nach Lemma liegen in der  $\delta$ -Umgebung  $U_\delta(b)$  unendlich viele  $a_n$ .

$\Rightarrow$  In  $U_\varepsilon(\alpha)$  liegen auch unendlich viele Folgenglieder  $\Rightarrow \alpha \in H(a_n)$ . ■

Diese Überlegungen fasst der folgende Satz zusammen.

#### Definition und Satz 3.25

Jede reelle beschränkte Folge besitzt einen größten und einen kleinsten Häufungswert. Der größte Häufungswert heißt **limes superior** (oberer Limes). Man schreibt  $\limsup a_n$ . Der kleinste Häufungswert heißt **limes inferior** (unterer Limes). Man schreibt  $\liminf a_n$ . Kurzschreibweise:  $\overline{\lim} a_n, \underline{\lim} a_n$

#### Satz 3.26

Eine reelle Folge  $(a_n)$  konvergiert genau dann (gegen  $a$ ), wenn gilt:  $\liminf a_n = \limsup a_n (= a)$

Der Beweis dieses Satzes ist eine Übung. Nützlich ist folgender Sprachgebrauch:

**Definition 3.27**

Eine reelle Folge  $(a_n)$  heißt

- divergent gegen  $\infty$ , wenn gilt:  $\forall C > 0 : \exists n_0 : a_n > C \forall n > n_0$
- divergent gegen  $-\infty$ , wenn gilt:  $\forall C > 0 : \exists n_0 : a_n < -C \forall n > n_0$

In beiden Fällen nennt man  $(a_n)$  bestimmt divergent.

Wenn  $(a_n)$  nicht nach oben (bzw. unten) beschränkt ist, dann setzt man  $\limsup a_n = \infty$  bzw.  $\liminf a_n = -\infty$ .

**3.4 Unendliche Reihen (Zahlenreihen)**

Wir wenden den Grenzwertbegriff zur Untersuchung unendlicher Reihen an. Mit der ersten Definition soll dem Ausdruck  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$  ein Sinn gegeben werden.

**Definition 3.28**

1. Sei  $(a_k)$  eine unendliche Folge komplexer Zahlen. Dann heißt die Folge  $(s_n)$  der **Partialsommen**  $s_n := \sum_{k=0}^n a_k$  **unendliche Reihe** mit den Reihengliedern  $a_k$ . Man schreibt  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$  oder  $a_1 + a_2 + \dots$
2. Die unendliche Reihe heißt **Konvergent**, wenn die Folge der Partialsummen konvergiert. Der Grenzwert  $s := \lim s_n$  heißt **Summe** der unendlichen Reihe. Man schreibt  $s = \sum_{k=0}^{\infty} a_k$  oder einfach  $s = \sum a_k$ .
3. Wenn  $(s_n)$  divergiert, heißt die unendliche Reihe **divergent**.

**Bemerkung**

Manchmal beginnt die Summation bei einer unendlichen Reihe nicht bei  $k = 0$ , sondern bei  $k = l > 0$ .

Um mit dem Begriff arbeiten zu können, formulieren wir jetzt das Konvergenzkriterium, das Cauchy-kriterium und das Monotoniekriterium.

**Satz 3.29**

1.  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k = s \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 : \exists n_0(\varepsilon) : \forall n > n_0 : |s - s_n| < \varepsilon$   
 $\Leftrightarrow \left| \sum_{k=0}^{\infty} a_k - \sum_{k=0}^n a_k \right| = \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k \right| < \varepsilon \Leftrightarrow \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k \rightarrow 0 \text{ für } n \rightarrow \infty$
2.  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$  konvergent  $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 : \exists n_0(\varepsilon) : \forall m, n > n_0 : |s_n - s_m| < \varepsilon$   
 $\Leftrightarrow \text{o.E.d.A. } m < n \Leftrightarrow \left| \sum_{k=0}^n a_k - \sum_{k=0}^m a_k \right| < \varepsilon \Leftrightarrow \left| \sum_{k=m+1}^n a_k \right| < \varepsilon, \text{ d.h. } \forall p \in \mathbb{N}, m > n_0 : \left| \sum_{i=1}^p a_{m+i} \right| < \varepsilon$
3. Seien alle  $a_n \geq 0$ . Dann ist  $(s_n)$  **monoton wachsend** und es gilt:  
 $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$  ist konvergent  $\Leftrightarrow (s_n)$  ist nach oben beschränkt

**Bemerkung**

Der Ausdruck  $\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k$  heißt **Reihenrest**. Aus dem Cauchy Kriterium folgt der folgende Satz.

**Satz 3.30** notwendiges Konvergenzkriterium

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \text{ konvergent} \Rightarrow a_n \rightarrow 0 \quad (\text{bzw. } a_n \not\rightarrow 0 \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} a_k \text{ nicht konvergent})$$

**Beweis**

Wende Cauchy Kriterium für  $p = 1$  an:

$$\sum a_k \text{ konvergent} \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 : \exists n_0(\varepsilon) : \forall m > n_0 : \left| \sum_{i=1}^1 a_{m+i} \right| = |a_{m+1}| < \varepsilon \Leftrightarrow a_n \rightarrow 0.$$

**Beispiel 3.6** Geometrische Reihe

Sei  $a_n = q^n$  mit  $q \in \mathbb{C}$ . Dann ist  $s_n = \sum_{k=0}^n q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$  (hier ohne Beweis).

Da  $q^n \rightarrow 0$  nur für  $|q| < 1$ , ist  $\sum_{k=0}^{\infty} q^k$  für  $|q| \geq 1$  nicht konvergent. Für  $|q| < 1$  ist:  $\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-q^{n+1}}{1-q} = \frac{1}{1-q}$

**Beispiel 3.7** Harmonische Reihe - Beispiel, dass  $a_n \rightarrow 0$  kein hinreichendes Kriterium ist

Sei  $a_n = \frac{1}{n}$ , dann  $a_n \rightarrow 0$ , aber  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots \rightarrow \infty$ , da Cauchy-Kriterium verletzt:

$$|s_{2n} - s_n| = \underbrace{\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n}}_{n \text{ Summanden, alle } \geq \frac{1}{2n}} \geq n \cdot \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}$$

Die Summe von  $n$  bis  $2n$  wird mit steigenden  $n$  nicht beliebig klein, sondern ist immer größer als  $\frac{1}{2}$ .

**3.4.1 Rechnen mit konvergenten Reihen**

- Wenn  $\sum a_k = a$ ,  $\sum b_k = b$ ,  $\lambda \in \mathbb{C}$ , dann ist  $\sum (\lambda a_k + b_k) = \lambda a + b$ .  
Die Menge aller konvergenten Reihen bildet also einen  $\mathbb{C}$ -Vektorraum.
- Wenn  $\sum a_k$  konvergiert, dann darf man in der Summe beliebig Klammern setzen, ohne die Konvergenz zu ändern. Allerdings darf man keine Klammern wegnehmen.  
Zum Beispiel ist  $(1-1) + (1-1) + (1-1) + \dots$  konvergent,  $1-1+1-1+1-1+\dots$  jedoch divergiert.
- Multiplikation und Umordnung von Reihen erfordern einen stärkeren Konvergenzbegriff:

**Definition 3.31**

Man sagt,  $\sum a_k$  **konvergiert absolut**, wenn  $\sum |a_k|$  konvergiert. Wenn  $\sum a_k$  konvergiert, aber  $\sum |a_k|$  divergiert, heißt  $\sum a_k$  auch **nicht absolut konvergent** oder **bedingt konvergent**.

**Satz 3.32** Allgemeine Dreiecksungleichung

Eine absolut konvergente Reihe ist konvergent. Es gilt:  $|\sum a_k| \leq \sum |a_k|$

**Beweis**

Cauchy-Kriterium: Wenn  $|a_k|$  konvergiert, gilt:  $\forall \varepsilon > 0 : \exists n_0 : \forall p \in \mathbb{N}, n > n_0 : |a_{n+1}| + \dots + |a_{n+p}| < \varepsilon$ .

Mit der Dreiecksungleichung ist:  $|a_{n+1} + \dots + a_{n+p}| \leq |a_{n+1}| + \dots + |a_{n+p}| < \varepsilon$ .  
Also ist das Cauchy-Kriterium auch für die Ausgangsreihe erfüllt. ■

**Beispiel 3.8** Aus Konvergenz folgt nicht unbedingt absolute Konvergenz.

Sei  $a_k = \frac{(-1)^k}{k}$ . Dann ist  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = -1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \dots$  konvergent (Beweis folgt).  
 $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k| = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots$  ist jedoch divergent (harmonische Reihe).

**Definition 3.33**

Sei  $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  eine bijektive Abbildung. Dann nennt man  $\sum_{k=1}^{\infty} a_{\varphi(k)}$  eine **Umordnung** von  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ .

**Satz 3.34** Der erste Teilsatz ist der Riemann'sche Umordnungssatz.

1. Seien  $a_n \in \mathbb{R}$ . Wenn  $\sum a_k$  konvergiert, aber nicht absolut, dann existiert  $\forall S \in \mathbb{R} \cup \{\infty, -\infty\}$  eine Umordnung  $\sum a_{\varphi(k)}$  mit  $\sum a_{\varphi(k)} = S$ .
2. Wenn  $\sum a_k$  absolut konvergiert und  $\sum a_k = s$ , dann ist  $\sum a_{\varphi(k)} = s \forall \varphi$ .  
Umgekehrt: Wenn jede Umordnung konvergiert, konvergiert  $\sum a_k$  absolut.

Multiplikation unendlicher Reihen - Worin besteht das Problem?

Man möchte  $(a_1 + \dots + a_n) \cdot (b_1 + \dots + b_n)$  ausmultiplizieren und dann aufsummieren. Dabei entsteht ein Schema der Art

$$\begin{array}{cccc} a_0 b_0 & a_0 b_1 & a_0 b_2 & \cdots \\ a_1 b_0 & a_1 b_1 & a_1 b_2 & \cdots \\ a_2 b_0 & a_2 b_1 & a_2 b_2 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{array} \quad (*)$$

Aufsummieren von  $(*)$  heißt:  $(*)$  abzählen. Jede Art dieses Abzählens liefert eine Produktreihe.

Sinnvoller Wunsch: Wenn  $\sum a_n = a \wedge \sum b_n = b$ , dann soll jede Produktreihe gegen  $ab$  konvergieren.

**Satz 3.35**

Seien  $\sum a_n$  und  $\sum b_n$  absolut konvergent mit  $\sum a_n = a$  und  $\sum b_n = b$ , dann konvergiert jede ihrer Produktreihen absolut und zwar gegen  $a \cdot b$ .

Die üblichste und wichtigste Form der Produktreihe ist die sogenannte **Cauchy'sche Produktreihe**, die entsteht, wenn man  $(*)$  „diagonal“ aufsummiert, d.h. man fasst so zusammen:

$$c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \dots + a_{n-1} b_1 + a_n b_0 = \sum_{j=0}^n a_j b_{n-j}$$

Dann ist  $\sum a_n \cdot \sum b_n = a \cdot b = \sum c_n$ . (Die  $c_n$  entstehen zum Beispiel bei Multiplikation von Polynomen.) Für die Konvergenz von  $\sum c_n = ab$  reicht es auch, wenn nur eine der beiden Folgen absolut konvergiert.

**Satz 3.36** Leibniz-Kriterium

Strebt  $(a_n)$  *monoton* gegen Null, dann konvergiert die alternierende Reihe  $\sum (-1)^n a_n = a_0 - a_1 + a_2 - \dots$

**Beweis**

Aus der Monotonie folgt: Alle  $a_n$  haben dasselbe Vorzeichen. O.E.d.A.  $a_n > 0 \forall n$ . Anwendung des Cauchy-Kriteriums für die Folge  $(s_n)$  der Partialsummen:

$$|s_{n+p} - s_n| = (-1)^{n+1} [a_{n+1} - a_{n+2} + \dots + (-1)^{p-1} a_{n+p}]$$

**Fall 1:  $p$  ist gerade:**  $[\dots] = (a_{n+1} - a_{n+2}) + \dots + (a_{n+p-1} - a_{n+p})$

Da  $a_n \rightarrow 0$  monoton, ist jeder dieser Summanden  $> 0$ . Also ist  $[\dots] > 0$ . Setze die Klammern nun anders:

$$0 < [\dots] = a_{n+1} - (a_{n+2} + a_{n+3}) - \dots - (a_{n+p-2} - a_{n+p-1}) - a_{n+p} < a_{n+1}$$

$$\Rightarrow |s_{n+p} - s_n| < a_{n+1} \quad \forall p \in \mathbb{N} \Rightarrow s_{n+p} - s_n \rightarrow 0 \Rightarrow (s_n) \text{ ist Cauchyfolge.}$$

**Fall 2:  $p$  ist gerade:** Analoge Abschätzung liefert, dass  $|s_{n+p} - s_n| < a_{n+1}$ . ■

**Satz 3.37**

Sei  $\sum_n (-1)^n a_n$  eine alternierende Reihe mit der monotonen Folge  $a_n \rightarrow 0$  und  $a_n > 0$ .

Dann gilt die folgende Abschätzung für den Reihenrest:  $\left| \sum_{k=n+1}^{\infty} -1^k a_k \right| < a_{n+1}$ .

**Beweis**

Im obigen Beweis wurde gezeigt:  $|s_{n+p} - s_n| < a_{n+1}$ . Für  $p \rightarrow \infty$  ist:

$$s_{n+p} \rightarrow s = \sum_{k=1}^{\infty} -1^k a_k \Rightarrow |s - s_n| = \left| \sum_{k=1}^{\infty} -1^k a_k - \sum_{k=1}^n -1^k a_k \right| = \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} -1^k a_k \right| \leq a_{n+1}$$
■

**Satz 3.38**

## Majoranten- und Minorantenkriterium

$\sum a_n, \sum b_k$  seien unendliche Reihen mit nichtnegativen Gliedern. Sei  $a_n \leq b_n$  zumindest  $\forall n > N \in \mathbb{N}$ . Dann heißt  $\sum b_k$  **Majorante(nreihe)** für  $\sum a_n$  und  $\sum a_n$  **Minorante(nreihe)** für  $\sum b_k$ . Es gilt:

1. Wenn  $\sum b_k$  konvergiert, konvergiert auch  $\sum a_n$ .
2. Wenn  $\sum a_n$  divergiert, divergiert auch  $\sum b_k$ .

**Beweis**

Offenbar folgt 2. aus 1. Deshalb beweisen wir hier nur 1.

$\sum b_n$  konvergent  $\Leftrightarrow$  Folge der zugehörigen Partialsummen  $(s_n)$  ist monoton wachsend und beschränkt:  
 $\lim s_n = s = \sum b_n \quad (s_n \leq s \quad \forall n \in \mathbb{N})$

Für die Folge  $(t_n)$  der Partialsummen von  $(a_n)$  gilt:  $(t_n)$  ist monoton wachsend und  $t_n \leq s_n$ .

Wenn man o.E.d.A.  $a_k \leq b_k \quad \forall k \in \mathbb{N}$  annimmt, ist  $t_n \leq s_n \leq s \quad \forall n \in \mathbb{N}$ .

Also ist  $(t_n)$  auch beschränkt und damit konvergent. ■

## Bemerkung

Dieses Kriterium wird häufig so angewendet:  $\sum a_k$  ist eine beliebige Reihe und  $(b_k)$  eine Folge mit  $b_k \geq 0$  und  $|a_k| \leq b_k \quad \forall k$ . Wenn  $\sum b_k$  konvergiert, konvergiert auch  $\sum |a_k|$ , also konvergiert  $\sum a_k$  absolut. Um das Kriterium effektiv anwenden zu können, benötigt man viele konvergente Vergleichsreihen, etwa:

- geometrische Reihen  $\sum q^n$
- Dirichletreihen  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$  (konvergieren für  $\alpha > 1$ , divergieren für  $\alpha \leq 1$ )

Um die Konvergenz der Dirichletreihen zu beweisen, verwendet man den folgenden Satz.

**Satz 3.39** Cauchy'scher Verdichtungssatz

Sei  $(a_n)$  monoton fallend mit  $a_n \geq 0 \forall n \in \mathbb{N}$ . Dann gilt:

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ ist konvergent} \Leftrightarrow \sum_{k=0}^{\infty} 2^k a_{2^k} = a_1 + 2a_2 + 4a_4 + \dots \text{ ist konvergent}$$

**Beweis**

Es genügt, zu zeigen, dass beide Folgen der Partialsummen gleichzeitig beschränkt (d.h. konvergent) oder unbeschränkt (d.h. divergent) sind. Sei  $s_n = a_1 + \dots + a_n$  und  $t_k = a_1 + 2a_2 + 4a_4 + \dots + 2^k a_{2^k}$ .

Sei  $n < 2^k$ . Dann gilt wegen Monotonie:  $s_n \leq a_1 + (a_2 + a_3) + (a_4 + \dots + a_7) + \dots + (a_{2^{k-1}} + \dots + a_{2^k-1}) \leq a_1 + 2a_2 + 4a_4 + \dots + 2^k a_{2^k} = t_k \Rightarrow s_n \leq t_k$  für  $n < 2^k$ .

Für  $n > 2^k$  gilt andererseits:  $s_n \geq a_1 + a_2 + (a_3 + a_4) + \dots + (a_{2^{k-1}+1} + \dots + a_{2^k}) \geq \frac{1}{2}a_1 + a_2 + 2a_4 + \dots + 2^{k-1}a_{2^k} = \frac{1}{2}t_k \Rightarrow s_n \geq \frac{1}{2}t_k$  für  $n > 2^k$ . ■

**Beispiel 3.9** Anwendung auf die Dirichletreihen

Sei  $a_n = \frac{1}{n^\alpha}$ . Dann ist  $2^k a_{2^k} = 2^k \cdot \left(\frac{1}{2^k}\right)^\alpha = \left(\frac{1}{2}\right)^{\alpha-1} = \left(\frac{1}{2^{\alpha-1}}\right)^k$ .  
 $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^{\alpha-1}}\right)^k$  konvergiert als geometrische Reihe genau dann, wenn  $0 \leq \frac{1}{2^{\alpha-1}} < 1 \Rightarrow \alpha > 1$   
 Also konvergiert  $a_n$  genau dann, wenn  $\alpha > 1$ .

**Satz 3.40** Wurzelkriterium

Sei  $\sum a_k$  mit  $a_k \in \mathbb{C}$  eine unendliche Reihe.

1. Wenn ein  $\vartheta \in (0, 1)$  existiert, sodass gilt:  $\sqrt[n]{|a_n|} \leq \vartheta \forall n \in \mathbb{N}$ , dann ist  $\sum a_n$  absolut konvergent. (Es reicht, die Beschränktheit des Wurzeltermes ab einem festen  $N \in \mathbb{N}$  zu zeigen.)

2. Gilt  $\sqrt[n]{|a_n|} \geq 1 \forall n \in \mathbb{N}$ , dann divergiert  $\sum a_n$ .

**Darstellung des Kriteriums in Limesform:** Sei  $\limsup \sqrt[n]{|a_n|} =: A$ . Dann gilt:

3.  $0 \leq A < 1 \Rightarrow \sum a_n$  konvergiert absolut.

4.  $A > 1 \Rightarrow \sum a_n$  divergiert.

5. Für  $A = 1$  ist keine eindeutige Aussage möglich.

(Man kann  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} =: A$  setzen, wenn dieser Grenzwert existiert.)

**Beweis**

Zu 1.:  $\sqrt[n]{|a_n|} \leq \vartheta \Rightarrow |a_n| \leq \vartheta^n \Rightarrow$  Die geometrische Reihe  $\sum \vartheta^n$  ist eine konvergente Majorante für  $\sum |a_k|$ , d.h.  $\sum |a_k|$  konvergiert absolut.

Zu 2.:  $\sqrt[n]{|a_n|} \geq 1 \Rightarrow |a_n| \geq 1 \Rightarrow (a_k)$  ist keine Nullfolge, also divergiert  $\sum |a_k|$ .

3. und 4. werden nicht hier, sondern in den Übungsaufgaben behandelt.

Zu 5.: Für  $\sum \frac{1}{n}$  und  $\sum \frac{(-1)^n}{n}$  gilt:  $\sqrt[n]{|n|} \rightarrow 1$ , die erste Reihe ist aber divergent, die zweite konvergent. ■

**Beispiel 3.10**

1.  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\log n)^n}$  ist konvergent denn  $\sqrt[n]{|n|} = \frac{1}{\log n} \rightarrow 0$ .
2.  $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots = \sum_{i=1}^{\infty} \left( \frac{1}{2^i} + \frac{1}{3^i} \right)$  konvergiert,  
denn  $\lim \sqrt[n]{|a_n|}$  existiert nicht (Idealfall), aber  $\overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{\sqrt{2}} < 1$

**Satz 3.41** Quotientenkriterium

1.  $\sum a_n$  mit  $a_n \in \mathbb{C}$ . Wenn  $\exists \vartheta \in (0, 1)$  mit  $\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \leq \vartheta \forall n$  (bzw.  $\forall n > N \in \mathbb{N}$ ), dann konvergiert  $\sum a_n$  absolut.
2. Ist  $\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \geq 1 \forall n$  (bzw.  $\forall n > N \in \mathbb{N}$ ), so divergiert  $\sum a_n$ .  
**Darstellung des Kriteriums in Limesform:** Sei  $\lim \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = A$ . Dann gilt:
  3.  $A < 1 \Rightarrow \sum a_n$  konvergiert absolut.
  4.  $A > 1 \Rightarrow \sum a_n$  divergiert.
  5. Für  $A = 1$  ist keine eindeutige Aussage möglich.

**Beweis**

Analog zum Wurzelkriterium:

$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \leq \vartheta \Rightarrow a_{n+1} \leq \vartheta |a_n| \leq \vartheta^2 |a_n| \leq \dots \leq \vartheta^n |a_n|$  - geometrische Reihe als konvergente Majorante

**Bemerkung**

Man kann das Quotientenkriterium auch mit  $\overline{\lim}$  und  $\underline{\lim}$  darstellen. Dann gilt:

- $\overline{\lim} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < 1 \Rightarrow$  absolute Konvergenz
- $\underline{\lim} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| > 1 \Rightarrow$  Divergenz

Das Wurzelkriterium ist stärker als das Quotientenkriterium.

## 3.5 Potenzreihen

**Definition 3.42**

Seien  $a_n \in \mathbb{C}$ ,  $a \in \mathbb{C}$ ,  $n = 0, 1, \dots$ . Unter einer **Potenzreihe** (PR) in  $z - a$  (oder nach Potenzen von  $(z - a)$ ) mit den Koeffizienten  $a_n$  versteht man die unendliche Reihe  $\sum_{k=0}^{\infty} a_n (z - a)^n$  (1)

(Wie üblich wird vereinbart:  $(z - a)^0 := 1$ , auch für  $z = a$ .)

Ziel: Bestimme alle  $z \in \mathbb{C}$ , für die (1) konvergiert.



**Beispiel 3.11**

Jede PR (1) konvergiert für  $z = a$ . Gibt es Reihen, die nur für  $z = a$  konvergieren?  
 $a_n$  muss so schnell wachsen, dass keine Nullfolge von  $(z - a)^n$  das Wachstum kompensieren kann.

1.  $\sum_{n=0}^{\infty} n^n (z - a)^n$  kann aufgrund des Wurzelkriteriums nur für  $z = a$  konvergieren:  

$$\sqrt[n]{n^n (z - a)^n} = n(z - a) \rightarrow \infty \quad \forall z \neq a$$
2.  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-a)^n}{n!}$  konvergiert für alle  $z \in \mathbb{C}$  aufgrund des Quotientenkriteriums:  

$$\left| \frac{(z-a)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{(z-a)^n} \right| = \frac{|z-a|}{n+1} \rightarrow 0 \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

Wie sieht außer in diesen Extremfällen die Menge aller  $z$ , für die (1) konvergiert, aus? Die Menge ist (in der grafischen Darstellung) immer kreisförmig, wie aus dem folgenden Satz unmittelbar folgt.

**Lemma 3.43**

1. Die PR (1) möge für ein  $z_0 \neq a$  konvergieren. Dann konvergiert (1) absolut für alle  $z \in \mathbb{C}$  mit  $|z - a| < |z_0 - a|$ .
2. Die PR (1) möge für ein  $z_1$  divergieren. Dann divergiert (1) auch für alle  $z$  mit  $|z - a| > |z_1 - a|$ .

**Beweis**

2. folgt aus 1. Zu 1.: Wenn  $\sum a_n (z_0 - a)^n$  konvergiert, dann gilt  $a_n (z_0 - a)^n \rightarrow 0$ . Also ist  $a_n (z_0 - a)^n$  beschränkt,

zum Beispiel  $|a_n (z_0 - a)^n| \leq M \quad \forall n$ . Sei nun  $|z - a| < |z_0 - a|$ . Also ist  $q := \frac{|z-a|}{|z_0-a|} < 1$ .

$$|a_n (z - a)^n| = \left| a_n \frac{|z - a|^n}{|z_0 - a|^n} |z_0 - a|^n \right| \leq |a_n| |z_0 - a|^n \cdot \left| \frac{|z - a|^n}{|z_0 - a|^n} \right| \leq M q^n$$

Aufgrund der konvergenten Majorante  $Mq^n$  konvergiert  $\sum a_n (z - a)^n$  absolut. ■

**Definition und Satz 3.44**

Die PR  $\sum a_n (z - a)^n$  (1) möge nicht nur für  $z = a$  und auch nicht für alle  $z$  konvergieren. Dann existiert eine positive Zahl  $\varrho$  mit der Eigenschaft:

- $\forall z, |z - a| < \varrho \Rightarrow$  (1) ist für  $z$  konvergent.
- $\forall z, |z - a| > \varrho \Rightarrow$  (1) ist für  $z$  divergent.
- $\forall z, |z - a| = \varrho \Rightarrow$  Die Konvergenz muss näher untersucht werden.

$\varrho$  heißt **Konvergenzradius** der Potenzreihe. Der Kreis um  $a$  mit dem Radius  $\varrho$  heißt **Konvergenz-kreis** der PR (1). Konvergiert (1) nur für  $z = a$ , so setze  $\varrho := 0$ . Konvergiert (1) für alle  $z$ , so setze  $\varrho := \infty$ .

**Bemerkung**

Werden Potenzreihen nur im Reellen betrachtet, wird aus dem Konvergenz-kreis das Konvergenzintervall (z.B.  $(a - \varrho, a + \varrho)$ , der Typ des Intervalls muss näher untersucht werden).

**Beweis**

Sei  $M := \{r > 0 : \exists z \in \mathbb{C}, |z - a| = r : (1) \text{ konvergiert für } z\}$ .  $M \neq \emptyset$ , denn PR konvergiert nicht nur für  $z = a$ .  $M$  ist nach oben beschränkt, denn PR konvergiert nicht für alle  $z$ , d.h.  $\exists z_1 : \text{PR divergiert}$

für  $z_1$ . Aufgrund des Lemmas gehören alle  $S$  mit  $|z_1 - a| < S$  nicht zu  $M$ .

Setze  $\varrho := \sup M$ . Dann hat  $\varrho$  alle Eigenschaften des Satzes.

1. (Wende Supremumsdefinition an.) Sei  $z$  so, dass  $|z - a| < \varrho$ , d.h.  $\exists r \in M : |z - a| < r < \varrho$ . Dann  $\exists z_0 : |z_0 - a| = r$  und PR konvergent für  $z_0$ . Also konvergiert die PR für  $z$ .
2. Sei  $z$  so, dass  $|z - a| > \varrho$ , d.h.  $\exists r (\notin M) : |z - a| > r > \varrho \Rightarrow \forall z_2$  mit  $|z_2 - a| = r$  folgt aus dem Lemma, dass die PR für  $z_2$  divergent ist.

■

### Beispiel 3.12

Gesucht ist  $\varrho$  der Potenzreihe  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$  (d.h.  $a = 0, a_n = \frac{1}{n}, n > 1$ )

Anwendung des Wurzelkriteriums:  $\sqrt[n]{\left|\frac{z^n}{n}\right|} = \frac{|z|}{\sqrt[n]{n}} \rightarrow |z| \Rightarrow \varrho = 1$ , da PR für  $|z| < 1$  konvergent

Für  $|z| = 1$  muss das Verhalten näher untersucht werden:  $z = 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  divergent;  $z = -1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$  konvergent

Also ist das Konvergenzintervall  $[-1, 1)$ .

### Beispiel 3.13

#### Kurzbeispiele

$\sum_{n=1}^{\infty} n z^n \Rightarrow \varrho = 1$  (z.B. Wurzelkriterium),  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2} \Rightarrow \varrho = 1$

Aus dem Wurzelkriterium folgt:  $\limsup \sqrt[n]{|a_n (z - a)^n|} = |z - a| \cdot \limsup \sqrt[n]{|a_n|} \begin{cases} > 1 & \Rightarrow \text{Divergenz} \\ < 1 & \Rightarrow \text{Konvergenz} \end{cases}$

### Satz 3.45

Für die Potenzreihe  $\sum_n a_n (z - a)^n$  setze  $l := \limsup \sqrt[n]{|a_n|}$ . Dann gilt:

- $l = 0 \Rightarrow \varrho = \infty, l = \infty \Rightarrow \varrho = 0$
- $0 < l < \infty \Rightarrow \varrho = \frac{1}{l}$

### Satz 3.46

#### Rechnen mit Potenzreihen

Seien  $\sum a_n (z - a)^n, \sum b_n (z - a)^n$  zwei PR mit den Konvergenzradien  $\varrho_1$  und  $\varrho_2$ . Ferner seien  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ .

- Die Potenzreihe  $\sum (\alpha a_n + \beta b_n) (z - a)^n$  hat den Konvergenzradius  $\varrho \geq \min \{\varrho_1, \varrho_2\}$  und:  
 $\forall z, |z - a| < \min \{\varrho_1, \varrho_2\} : \alpha (\sum a_n (z - a)^n) + \beta (\sum b_n (z - a)^n) = \sum (\alpha a_n + \beta b_n) (z - a)^n$
- Sei  $c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}$ . Dann hat die PR  $\sum c_n (z - a)^n$  den Konvergenzradius  $\varrho \geq \min \{\varrho_1, \varrho_2\}$  und:  
 $\forall z, |z - a| < \min \{\varrho_1, \varrho_2\} : (\sum a_n (z - a)^n) (\sum b_n (z - a)^n) = \sum c_n (z - a)^n$

### Beweis

Folgt unmittelbar aus den Rechenregeln für Zahlenfolgen.

■

Es folgt ein fundamentaler Begriff.

**Definition 3.47**

Sei  $f$  wie folgt definiert:  $f : \{z : |z - a| < \varrho\} \rightarrow \mathbb{C}, z \mapsto \sum_n a_n (z - a)^n$ , wobei  $\varrho$  der Konvergenzradius der Potenzreihe  $f(z)$  sei.

Dann heißt  $f$  **analytische Funktion**. (Wenn  $a_n, a, z \in \mathbb{R}$ , heißt  $f$  reell analytische Funktion.)

**Satz 3.48** Identitätssatz für Potenzreihen und analytische Funktionen

Seien  $\sum c_n (z - a)^n$  und  $\sum d_n (z - a)^n$  zwei Potenzreihen mit den Konvergenzradien  $\varrho_1, \varrho_2 > 0$ . Sei ferner  $(z_i)$  eine Folge mit den Eigenschaften:

1.  $0 < |z_i - a| < \min\{\varrho_1, \varrho_2\}$ ,  $\lim z_i = a$   
(alternative Formulierung:  $|\lim z_i - a| < \min\{\varrho_1, \varrho_2\}$ )
2.  $\sum c_n (z_i - a)^n = \sum d_n (z_i - a)^n \quad \forall i$

Dann sind beide Potenzreihen gleich, d.h.  $c_n = d_n \quad \forall n$ .

Mit anderen Worten: Wenn zwei analytische Funktionen auf einer Punktfolge aus dem gemeinsamen Definitionsbereich übereinstimmen (Punkt 2) und diese Punktfolge innerhalb dieses Definitionsbereiches konvergiert (Punkt 1), sind beide Funktionen gleich.

Zum Beweis verwenden wir das folgende Lemma.

**Lemma 3.49**

Sei  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - a)^n$  eine Potenzreihe mit dem Konvergenzradius  $\varrho > 0$  und der Summe  $f(z)$ . Sei  $(z_i)$  eine Folge mit  $\lim z_i = a$ ,  $|z_i - a| < \varrho$ . Dann gilt:  $\lim_{i \rightarrow \infty} f(z_i) = a_0$ .

Kurz:  $\lim_{i \rightarrow \infty} \sum_n a_n (z_i - a)^n = a_0$  für  $\lim_{i \rightarrow \infty} z_i = a$

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^N a_n (z_i - a)^n = \lim_{N \rightarrow \infty} \lim_{i \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^N a_n (z_i - a)^n = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^N a_n \underbrace{\lim_{i \rightarrow \infty} (z_i - a)^n}_{=0 \text{ für } n \neq 0} = \lim_{N \rightarrow \infty} a_0 = a_0$$

Die Gleichheit der ersten zwei Terme ist zu zeigen. Der Satz sagt also etwas über die Vertauschung von Grenzprozessen aus.

**Beweis** zum Lemma

$$\lim_{i \rightarrow \infty} z_i = a \Rightarrow \exists n_1 : |z_i - a| < \frac{\varrho}{2} \quad \forall i > n_1$$

Ferner sei  $M$  so gewählt, dass gilt:  $M > \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \left(\frac{\varrho}{2}\right)^{n-1} = \frac{2}{\varrho} \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \left(\frac{\varrho}{2}\right)^n$ .

Sei  $\varepsilon > 0$  gegeben. Dann  $\exists n_2 : |z_i - a| < \frac{\varepsilon}{M} \quad \forall i > n_2$ .

Setze  $n_0 := \max\{n_1, n_2\}$ . Dann gilt:  $\forall i > n_0 : |f(z_i) - a_0| = \left| (z_i - a) \sum_{n=1}^{\infty} a_n (z_i - a)^{n-1} \right|$

$$\leq |z_i - a| \cdot \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \cdot |z_i - a|^{n-1} \leq \frac{\varepsilon}{M} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \left(\frac{\varrho}{2}\right)^{n-1} \leq \frac{\varepsilon}{M} \cdot M = \varepsilon$$

■

**Beweis** zum Satz

Betrachte den Fall  $z_i \rightarrow a$ , also  $z_i - a \rightarrow 0$ .

Sei  $a_n := c_n - d_n$  und die PR  $\sum_n a_n (z - a)^n$  mit dem Konvergenzradius  $\varrho = \min\{\varrho_1, \varrho_2\}$ .

$\Rightarrow \sum_n a_n (z_i - a)^n = 0 \quad \forall n$ . Induktiv wird gezeigt:  $a_n = 0 \quad \forall n$ .

Für  $n = 0$  ist  $\lim_{i \rightarrow \infty} \underbrace{\sum a_0 (z_i - a)^0}_{=0} = a_0 \Rightarrow a_0 = 0$ .

Sei gezeigt:  $a_0 = a_1 = \dots = a_{k-1} = 0$ . Dann gilt für  $n = k$ :

$$\sum_{n=k}^{\infty} a_n (z_i - a)^n = 0 = a_k (z_i - a)^k + a_{k+1} (z_i - a)^{k+1} + \dots$$

$$\Rightarrow 0 = (z_i - a)^k \cdot \sum_{n=0}^{\infty} a_{k+n} (z_i - a)^n \Rightarrow \left( \text{beachte: } 0 < |z_i - a| \Rightarrow \text{Div. durch } (z_i - a)^k \neq 0 \right)$$

$$\Rightarrow 0 = \sum_{n=0}^{\infty} a_{k+n} (z_i - a)^n \stackrel{(\text{Lemma})}{\Rightarrow} 0 = \lim_{i \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^{\infty} a_{k+n} (z_i - a)^n = (0\text{-tes Glied}) = a_k = 0$$

■

# 4 Der metrische Raum, die Topologie des $\mathbb{R}^n$

## 4.1 Der Begriff des metrischen Raumes

**Definition 4.1** Wiederholung aus 2.4

Sei  $M \neq \emptyset$ . Eine Abbildung  $d : M \times M \rightarrow \mathbb{R}$  heißt **Metrik** von  $M$ , wenn  $\forall x, y, z \in M$  gilt:

- (ME1):  $d(a, b) \geq 0, d(a, b) = 0 \Leftrightarrow a = b$  (Definitheit)
- (ME2):  $d(a, b) = d(b, a)$  (Symmetrie)
- (ME3):  $d(a, b) \leq d(a, c) + d(c, b)$  (Dreiecksungleichung)

Das Paar  $(M, d)$  heißt dann **metrischer Raum**.

Sei  $(M, d)$  ein metrischer Raum und  $A \subset M, A \neq \emptyset$ . Dann ist  $(A, d|_A)$  ein metrischer Raum und  $d|_A$  heißt die von  $d$  in  $A$  **induzierte Metrik**.

**Beispiel 4.1**

Sei  $M \neq \emptyset$  beliebig. Die **diskrete Metrik**  $d$  in  $M$  ist gegeben durch  $d(x, y) = \begin{cases} 0, & x = y \\ 1, & x \neq y \end{cases}$ .

Beachte: In einer Menge können sehr viele verschiedene Metriken existieren.

**Definition 4.2**

Sei  $V$  ein  $\mathbb{K}$ -Vektorraum. Eine Abbildung  $\|\cdot\| : V \rightarrow \mathbb{R}$  heißt **Norm**, wenn  $\forall x, y \in V, \lambda \in \mathbb{K}$  gilt:

- (N1):  $\|x\| \geq 0, \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$  (Definitheit)
- (N2):  $\|\lambda \cdot x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$  (Homogenität)
- (N3):  $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$  (Dreiecksungleichung)

Das Paar  $(V, \|\cdot\|)$  heißt dann **normierter Raum**.

**Lemma 4.3**

Sei  $(V, \|\cdot\|)$  ein normierter Raum. Dann wird durch  $d(x, y) = \|x - y\|$  eine Metrik in  $V$  definiert.  $d$  heißt **durch die Norm induzierte Metrik**.

**Beispiel 4.2** Zahlen, d.h.  $M = \mathbb{C}, M = \mathbb{R}, M = \mathbb{Q}, \dots$

Durch  $d : (x, y) \mapsto |x - y|$  ist eine Metrik definiert. In  $\mathbb{R}$  und  $\mathbb{C}$  ist  $x \mapsto |x|$  auch eine Norm.

**Beispiel 4.3** $V = \mathbb{R}^n$  und  $V = \mathbb{C}^n$  mit  $n \in \mathbb{N}$ 

$$V = \mathbb{R}^n = \{(x_1, \dots, x_n) : x_i \in \mathbb{R}\} \Rightarrow \|x\| := \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$$

$$V = \mathbb{C}^n = \{(z_1, \dots, z_n) : z_i \in \mathbb{C}\} \Rightarrow \|z\| := \sqrt{|z_1|^2 + \dots + |z_n|^2}$$

Beweis von (N1) und (N2) trivial, (N3) ist schwieriger und wird vertagt.

Diese Normen heißen auch **euklidische Normen** (sie kommen von einem Skalarprodukt, siehe eines der nächsten Kapitel).

**Beispiel 4.4**

Sei  $B[a, b]$  die Menge aller reell- oder komplexwertigen beschränkten Funktionen auf  $[a, b]$ . Das heißt,  $f$  ist auf  $[a, b]$  beschränkt  $\Rightarrow \exists c > 0 : |f(x)| \leq c \forall x \in [a, b]$ .

Dann ist durch  $\|f\| := \sup_{x \in [a, b]} |f(x)|$  eine Norm definiert. (Das Infimum kann nicht benutzt werden, da sonst (N1) nicht gelte. Das Nullelement von  $B[a, b]$  ist hierbei  $f_0 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto 0$ .

Aufgrund der Rechenregeln für den Betrag kann man leicht zeigen, dass  $\|f\|$  eine Norm ist.

**Beispiel 4.5**

Sei  $l^\infty := \{(x_n) \in \mathbb{C} : (x_n) \text{ beschränkt}\}$ . Dann ist  $\|x\| := \sup_n |x_n|$  eine Norm (Beweis ebenfalls einfach).

**Beispiel 4.6**

Matrizen

Sei  $M_n(\mathbb{K})$  oder kurz  $M_n$  die Menge aller  $(n, n)$ -Matrizen mit Elementen aus  $\mathbb{K}$ , also  $M_n(\mathbb{K}) = \mathbb{K}^{n \times n}$ . Dann sind folgende Abbildungen Normen:

1.  $\|A\|_1 := \max_{i,j} |a_{ij}|$  - größtes Element
2.  $\|A\|_2 := \sqrt{\sum_{i,j=1}^n |a_{ij}|^2}$  - euklidische Norm
3.  $\|A\|_3 := \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$  - größte Quersumme einer Zeile („Zeilensumme“)
4.  $\|A\|_4 := \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^n |a_{ij}|$  - größte Quersumme einer Spalte („Spaltensumme“)

### 4.1.1 Konvergenz in metrischen Räumen

**Definition 4.4**

Sei  $(M, d)$  ein metrischer Raum.

1. Eine Folge  $(x_n) \subset M$  **konvergiert** gegen  $x \in M$ , wenn gilt:  
 $\forall \varepsilon > 0 : \exists n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 : d(x, x_n) < \varepsilon$  (Verwende die üblichen Schreibweisen.)
2. Eine Folge  $(x_n) \subset M$  heißt **Cauchy-Folge**, wenn gilt:  
 $\forall \varepsilon > 0 : \exists n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall m, n \geq n_0 : d(x_m, x_n) < \varepsilon$
3.  $(M, d)$  heißt **vollständig**, wenn jede Cauchy-Folge  $(x_n)$  aus  $M$  gegen ein  $x \in M$  konvergiert.

Wie in  $\mathbb{R}$  und  $\mathbb{C}$  zeigt man:

**Satz 4.5**

Sei  $(M, d)$  ein metrischer Raum.

1. Der Grenzwert einer konvergenten Folge aus  $M$  ist eindeutig bestimmt.
2. Jede konvergente Folge aus  $M$  ist eine Cauchy-Folge.

## Bemerkung

Nach Definition gilt die Umgekehrung von Punkt 2 nur in vollständigen Räumen. Bisher kennen wir nur primitive Beispiel unvollständiger Räume, zum Beispiel  $\mathbb{Q}$ .

In einem normierten Raum  $(V, |||)$  gilt  $x_n \rightarrow x \Leftrightarrow |||x_n - x||| \rightarrow 0$  aufgrund der durch die Norm induzierten Metrik.

**Definition 4.6**

Eine Menge  $B \subset (M, d)$  heißt **beschränkt**, wenn:  $\forall a \in M : \exists K = K(a, B) > 0 : d(a, b) \leq K \forall b \in B$

Mit anderen Worten:  $B$  ist beschränkt, wenn für jeden Punkt  $a$  aus  $M$  die Menge  $B$  vollständig in (je nach Mengentyp) einem Intervall, Kreis, einer Kugel oder (im Allgemeinen) einer  $\varepsilon$ -Umgebung um  $a$  liegt.

**Satz 4.7**

1.  $B \subset M$  ist genau dann beschränkt, wenn die Bedingung aus der Def. für ein festes  $a_0 \in M$  erfüllt ist.
2. Sei  $(V, |||)$  ein normierter Raum. Dann ist  $B \subset V$  genau dann beschränkt, wenn gilt:  
 $\exists C > 0 : |||x||| \leq C \forall x \in B \quad (*)$

**Beweis**

**Zu 1.:** Von links nach rechts nach Definition erfüllt.

Zeigen, dass aus Beschränktheit für  $a_0 \in M$  Beschränktheit  $\forall a \in M$  folgt.

Sei  $d(a_0, b) \leq K \forall b \in B$ . Dann gilt für ein beliebiges  $a \in M$  und  $\forall b \in B$ :

$$d(a, b) \leq d(a, a_0) + \underbrace{d(a_0, b)}_{\leq K} \leq \underbrace{d(a, a_0)}_{=K(a, B)} + K$$

■

**Beweis**

**Zu 2.:** Beachte  $d(x, y) = |||x - y|||$ , d.h. in  $(*)$  steht:  $d(x, 0) \equiv |||x||| \leq C \forall x \in B$

Nach 1. folgt mit  $a_0 = 0 \in V$  die Behauptung.

■

**Satz 4.8**

Jede konvergente Folge  $(a_n)$  aus  $M$  ist beschränkt.

**Beweis**

Analog zu Zahlenfolgen: Sei  $x_n \rightarrow x$ . Setze (gemäß Satz 4.7, Punkt 1)  $a_0 = x$ . Für  $\varepsilon = 1$  gilt:  $\exists n_0 : \forall n \leq n_0 : d(x, x_n) < 1 \Rightarrow \forall n : d(x, x_n) \leq \max\{1, d(x, x_1), \dots, d(x, x_{n_0-1})\} = \text{konst.}$  Also ist  $(x_n)$  beschränkt.

■

**Definition 4.9** Umgebungen

Sei  $(M, d)$  ein metrischer Raum und  $a \in M$ .

1. Eine Menge  $U_\varepsilon(a) = \{x \in M : d(x, a) < \varepsilon\}$  heißt  **$\varepsilon$ -Umgebung** von  $a$ .
2. Eine Menge  $U \subset M$  heißt **Umgebung** von  $a$ , wenn gilt:  $\exists U_\varepsilon(a) \subset U$ .

**Bemerkung**

Jede Obermenge einer Umgebung von  $a$  ist wieder Umgebung von  $a$ .

Eine Umgebung braucht weder zusammenhängend noch um  $a$  zentriert zu sein.

Mit Umgebungen werden sehr wichtige Typen von Mengen definiert.

**Definition 4.10**

Sei  $(M, d)$  ein metrischer Raum.

1.  $O \subset M$  heißt **offen**, wenn  $\forall x \in O$  eine Umgebung  $U(x) \subset O$  existiert.  
( $\Leftrightarrow \forall x \in O : \exists \varepsilon = \varepsilon(x) > 0 : U_\varepsilon(x) \subset O$ )
2.  $A \subset M$  heißt **abgeschlossen**, wenn  $M \setminus A$  offen ist.

Man setzt sinnvollerweise, dass die leere Menge offen ist (da „für alle Elemente von  $\emptyset$ “ die Bedingung für Elemente offener Mengen erfüllt ist). Achtung: Eine Menge kann sowohl offen als auch abgeschlossen sein.

**Beispiel 4.7**

Sei  $M := [-1, 1] \cup (2, 3]$  und  $X := [-1, 1]$ .

$X$  ist offen! (Achtung: Die  $\varepsilon$ -Umgebungen von  $-1$  und  $1$  in  $M$  können nur in  $M$  liegen.)

Gleichzeitig ist  $X$  abgeschlossen, da  $M \setminus X = (2, 3]$  offen ist.

**Definition 4.11**

Sei  $(M, d)$  ein metrischer Raum und  $B \subset M$ .

1.  $x \in M$  heißt **Häufungspunkt** von  $B$ , wenn in jeder Umg. von  $x$  Punkte  $y \in B$  liegen mit  $y \neq x$ .
2.  $y \in B$  heißt **innerer Punkt** von  $B$ , wenn es eine Umgebung  $U(y) \subset B$  gibt.
3.  $z \in M$  heißt **Randpunkt** von  $B$ , wenn jede Umg.  $U(z)$  Punkte aus  $B$  und aus  $M \setminus B$  enthält.
4.  $a \in B$  heißt **isolierter Punkt** von  $B$ , wenn  $a$  kein Häufungspunkt von  $B$  ist.  
Das heißt, es existiert eine Umgebung  $U(a)$ , sodass gilt:  $U(a) \cap B = \{a\}$

Randpunkte und isolierte Punkte von  $B$  bilden zusammen die **Berührungspunkte** von  $B$ .

**Beispiel 4.8**

Sei  $M = \mathbb{R}$  und  $B = \{0\} \cup [1, 2]$ .

- Häufungspunkte:  $[1, 2]$
- innere Punkte:  $(1, 2)$
- Randpunkte:  $\{0, 1, 2\}$
- isolierte Punkte:  $\{0\}$



**Satz 4.12**

Eine Teilmenge  $A \subset M$  ist genau dann abgeschlossen, wenn jeder Häufungspunkt von  $A$  zu  $A$  gehört.

**Beweis**

**Hinrichtung:** Sei  $A$  abgeschlossen und  $x \notin A$ . Da  $A$  abgeschlossen ist, ist  $M \setminus A$  offen, und da  $x \in M \setminus A$ , existiert ein  $U(x) \subset M \setminus A$ , also ist  $U(x) \cap A$  leer und  $x$  kein Häufungspunkt von  $A$ .

**Rückrichtung:** Mögen alle Häufungspunkte von  $A$  zu  $A$  gehören. Ein Punkt  $x \in M \setminus A$  ist kein Häufungspunkt, also existiert ein  $U(x)$  mit  $U(x) \cap A = \emptyset \Rightarrow U(x) \subset M \setminus A$ . Da für jedes  $x \in M \setminus A$  ein solches  $U(x)$  existiert, ist  $M \setminus A$  offen. ■

## Bemerkung

Problem: Sind  $\emptyset$  und  $M$  offen oder abgeschlossen? Wir wissen bereits:  $M$  ist offen (folgt aus Definition). Außerdem gehören alle Häufungspunkte von  $M$  zu  $M$  (da nur  $M$  betrachtet wird). Also ist  $M$  abgeschlossen.  $\emptyset$  ist offen (folgt aus Definition, siehe oben). Da  $M$  offen ist, ist  $\emptyset$  abgeschlossen. Aufgrund des obigen Satzes **setzt** man  $\emptyset$  als offen und  $M$  als abgeschlossen.

**Satz 4.13**

Sei  $A \subset M$ ,  $x \in M$ . Dann sind äquivalent:

1.  $x$  ist Häufungspunkt von  $A$ .
2. Jede Umgebung von  $x$  enthält unendlich viele Punkte von  $A$ .
3.  $\exists (a_n) \subset A : a_n \rightarrow x, a_n \neq x \forall n$

**Beweis**

**Aus 3. folgt 1.:** In jeder Umgebung von  $x$  liegen unendlich viele Folgenglieder, also unendlich viele von  $x$  verschiedene Punkte von  $A$ . Also ist  $x$  ein Häufungspunkt von  $A$ .

**Aus 1. folgen 2. und 3.:** Sei  $x$  ein Häufungspunkt von  $A$ . Definieren induktiv eine Folge  $0 < \varepsilon_n \rightarrow 0$ . Nun definieren wir induktiv eine Folge  $a_n \rightarrow a$ ,  $a_m \neq a_n \forall m \neq n$ ,  $a_n \neq x \forall n$ ,  $a_n \in U_{\varepsilon_n} \cap A$ .

Sei nun  $U(x)$  beliebig. Sei  $\varepsilon_1 > 0$  so, dass  $U_{\varepsilon_1}(x) \subset U(x)$ .

Da  $x$  ein Häufungspunkt von  $A$  ist,  $\exists a_1 \in U_{\varepsilon_1}(x) \cap A$ ,  $a_1 \neq x$ .

Seien nun  $\varepsilon_1 > \varepsilon_2 > \dots > \varepsilon_n > 0$  und  $a_1, \dots, a_n$  gewählt wie oben gefordert.

Wir wählen  $\varepsilon_{n+1}$  und  $a_{n+1}$  wie folgt: Setze  $\varepsilon_{n+1} := \frac{d(x, a_n)}{2}$ ,  $a_{n+1} \in U_{\varepsilon_{n+1}} \cap A$ ,  $a_{n+1} \neq x$ .

Also gilt  $\varepsilon_n \rightarrow 0$  und  $a_n$  erfüllt alle der geforderten Eigenschaften, insbesondere  $a_n \rightarrow x$ .

Dann sind 2. und zugleich 3. erfüllt, da für die unendliche Menge  $\{a_n\} = \{a_i : i \in \mathbb{N}\}$  gilt:

$\{a_n\} \subset A$ ,  $\{a_n\} \subset U_{\varepsilon_1}(x)$ ,  $\{a_n\} \subset U(x)$

**Aus 2. folgt 3.:** Sei  $\varepsilon_n$  eine beliebige Folge mit  $0 < \varepsilon_n \rightarrow 0$ ,  $\varepsilon_1 > \varepsilon_2 > \dots > 0$ . In  $U_{\varepsilon_1}(x)$  liegen unendlich viele Elemente aus  $A$ . Wähle  $a_1 \in U_{\varepsilon_1}(x) \cap A$ . Seien nun  $a_1, \dots, a_n$  gewählt, mit  $a_i \neq x$ ,  $a_i \neq a_j \forall i, j$ .

$U_{\varepsilon_{n+1}}(x)$  enthält unendlich viele Elemente aus  $A \Rightarrow \exists a_{n+1} \in U_{\varepsilon_{n+1}}(x) \cap A$ ,  $a_{n+1} \neq x$ ,  $a_{n+1} \neq a_i$  mit  $1 \leq i \leq n$ . Dann ist  $a_n \rightarrow x$ . ■

## 4.2 Die Topologie des $\mathbb{R}^n$

Das Wort „Topologie“ stammt von den topologischen Räumen, einer Obermenge der metrischen Räume.

In  $\mathbb{R}^n$  bzw.  $\mathbb{C}^n$  wird durch  $\langle x, y \rangle := \sum_{k=1}^n x_k y_k$  bzw.  $\langle x, y \rangle := \sum_{k=1}^n \overline{x_k} y_k$  ein **Skalarprodukt** definiert, das sogenannte **Standardskalarprodukt**. Jedes Skalarprodukt (d.h. eine Abbildung  $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{R} (\mathbb{C})$ ;  $V$  ist ein beliebiger Vektorraum) hat folgende definierenden Eigenschaften:

- (SP1):  $\langle x, x \rangle \geq 0, = 0 \Leftrightarrow x = 0$  (positive Definitheit)
  - (SP2):  $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$  (Symmetrie)
  - (SP3):  $\langle x, \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 \rangle = \alpha_1 \langle x, y_1 \rangle + \alpha_2 \langle x, y_2 \rangle$  (Linearität in der 2. Komponente)
- Aus (SP2) und (SP3) folgt die konjugierte Linearität in der 1. Komponente:  
 $\langle \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2, y \rangle = \overline{\langle y, \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 \rangle} = \overline{\alpha_1 \langle y_1, x \rangle + \alpha_2 \langle y_2, x \rangle} = \overline{\alpha_1} \overline{\langle y_1, x \rangle} + \overline{\alpha_2} \overline{\langle y_2, x \rangle} = \overline{\alpha_1} \langle x, y_1 \rangle + \overline{\alpha_2} \langle x, y_2 \rangle$

### Bemerkung

Es ist eine Vereinbarung, ob man das Skalarprodukt in der 1. oder 2. Komponente als linear definiert. In der Physik wird die Linearität in der 2. Komponente gesetzt (so wie oben), in der Mathematik in der 1. Komponente. Für  $\mathbb{R}^n$  ist das Skalarprodukt in beiden Komponenten linear, da  $\overline{\alpha} = \alpha$ .

Hat man ein Skalarprodukt  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ , so wird durch  $\|x\| := \langle x, x \rangle^{\frac{1}{2}}$  eine Norm definiert, die durch  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  induzierte Norm. In  $\mathbb{R}^n$  ist also  $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$ , für  $\mathbb{C}^n$  gilt  $\|z\| = \sqrt{|x_1|^2 + \dots + |x_n|^2}$ . Der Beweis der Eigenschaften (N1) und (N2) sind einfach, für die Dreiecksungleichung benötigt man einen fundamentalen Satz.

### Satz 4.14 Cauchy-Schwarz'sche Ungleichung

Für jedes Skalarprodukt (und die induzierte Norm) gilt:  $|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|$ .

Speziell gilt für  $\mathbb{R}^n$  bzw.  $\mathbb{C}^n$ :  $\left| \sum_{i=1}^n \overline{x_i} y_i \right| \leq \sqrt{|x_1|^2 + \dots + |x_n|^2} \cdot \sqrt{|y_1|^2 + \dots + |y_n|^2}$

Für den Beweis siehe die Vorlesung über Lineare Algebra. Dann zeigt man leicht, dass  $\|\cdot\|$  die Dreiecksungleichung erfüllt.

### Beweis

$$\begin{aligned} \|x + y\|^2 &= \langle x + y, x + y \rangle = \langle x, x \rangle + \langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle + \langle y, y \rangle = \langle x, x \rangle + (\langle x, y \rangle + \overline{\langle x, y \rangle}) + \langle y, y \rangle \\ &\leq \|x\|^2 + 2|\langle x, y \rangle| + \|y\|^2 \stackrel{(\text{C.S.U.})}{\leq} \|x\|^2 + 2\|x\| \cdot \|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2 \end{aligned}$$

Für den nächsten Satz benötigen wir folgende Abschätzung in  $\mathbb{R}^n$  bzw.  $\mathbb{R}^n$ . Dabei sei  $1 \leq i \leq n$  beliebig (bei (1) wurde jeder Summand durch das Maximum ersetzt).

$$|x_i - y_i| \leq \|x - y\| = \sqrt{\sum_{k=1}^n |x_k - y_k|^2} \stackrel{(1)}{\leq} \sqrt{n \cdot \max_{1 \leq k \leq n} |x_k - y_k|^2} = \sqrt{n} \cdot \max_{1 \leq i \leq n} |x_k - y_k| \quad (*)$$

### Satz 4.15

Die Räume  $\mathbb{R}^n$  und  $\mathbb{C}^n$  sind bzgl. der induz. Metrik  $d(x, y) = \|x - y\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i - y_i|^2}$  vollständig.

**Beweis**

Hier aus Platzgründen nur für  $\mathbb{R}^n$  (der Beweis für  $\mathbb{C}^n$  läuft völlig analog).

Sei  $(x^{(k)})$  eine Cauchyfolge.  $(x^{(k)}) = (x_1^{(k)}, \dots, x_n^{(k)})$  und  $\forall \varepsilon > 0 : \exists n_0 : \|x^{(k)} - x^{(l)}\| < \varepsilon \forall k, l > n_0$

Anwendung von (\*) (linke Seite):  $|x_i^{(k)} - x_i^{(l)}| \leq \|x^{(k)} - x^{(l)}\| < \varepsilon \forall k, l > n_0, 1 \leq i \leq n$

Also ist die Koordinatenfolge  $(x_i^{(k)})$  eine Cauchyfolge in  $\mathbb{R} \forall i = 1, \dots, n$ .

Da  $\mathbb{R}$  vollständig ist,  $\exists x_i = \lim_{k \rightarrow \infty} x_i^{(k)}$ . Also ist jede Koordinatenfolge konvergent.

Sei  $x = (x_1, \dots, x_n)$ . Wir zeigen  $x^{(k)} \rightarrow x$  in  $\mathbb{R}^n$ . Benutze (\*) (rechte Seite):

$$0 \leq \|x^{(k)} - x\| \leq \sqrt{n} \underbrace{\max_{1 \leq i \leq n} |x_i^{(k)} - x_i|}_{\text{Maximum von } n \text{ Nullfolgen}} \rightarrow 0 \Rightarrow \|x^{(k)} - x\| \rightarrow 0 \Rightarrow x^{(k)} \rightarrow x$$

**Folgerung 4.16**

Eine Folge  $(x^{(k)})$  aus dem  $\mathbb{R}^n/\mathbb{C}^n$  konvergiert genau dann gegen  $x = (x_1, \dots, x_n)$ , wenn die Koordinatenfolgen  $(x_i^{(k)})$  gegen  $x_i$  konvergieren ( $i = 1, \dots, n$ ).

Unser nächstes Ziel ist der Satz von Bolzano-Weierstraß für  $\mathbb{R}^n$ .

**Satz 4.17**

## Intervallschachtelung

Sei  $(I_n)$  eine Intervallfolge  $I_n = [a_n, b_n]$  mit  $I_{n+1} \subset I_n$  und  $\underbrace{|b_n - a_n|}_{\text{Länge von } I_n} \rightarrow 0$ . Es ex. genau ein  $a \in \bigcap_n I_n$ .

**Beweis**

$I_1 \subset I_2 \subset I_3 \subset \dots \Rightarrow (a_n)$  ist monoton wachsend und (z.B. durch  $b_1$ ) nach oben beschränkt,  $(b_n)$  ist monoton fallend und (z.B. durch  $a_1$ ) nach unten beschränkt. Also sind beide Folgen konvergent, d.h.  $\exists \lim a_n, \lim b_n$  und (da  $b_n - a_n \rightarrow 0$ ), ist  $\lim a_n = \lim b_n =: a$ . Die Existenz folgt aus  $a_n \leq a \leq b_n \forall n \Rightarrow a \in I_n \forall n$ . Eindeutigkeit (Kurzform): Gebe es zwei Zahlen  $a^{(1)}$  und  $a^{(2)}$ , die die Bedingung des Satzes erfüllen. Dann müsste die Länge aller Intervalle größer als  $|a^{(1)} - a^{(2)}|$  sein, was aber ein Widerspruch zur Konvergenz ist.

Unter einem abgeschlossenen Quader  $Q \in \mathbb{R}^n$  versteht man  $Q := \{x = (x_1, \dots, x_n) : a_i \leq x_i \leq b_i, i = 1, \dots, n\}$ . Dabei sind die  $a_i$  und  $b_i$  fest vorgegeben. Das heißt mit  $I_i := [a_i, b_i]$ :  $Q = I_1 \times \dots \times I_n$ .

Der Durchmesser des Quaders sei die Länge der Raumdiagonale:  $d(Q) := \sqrt{\sum_{i=1}^n (b_i - a_i)^2}$

**Satz 4.18**

## Quaderschachtelung

Eine **Quaderschachtelung** ist eine Folge  $Q^{(k)}$  von Quadern mit  $Q^{(k+1)} \subset Q^{(k)} \forall k$  und  $d(Q^{(k)}) \rightarrow 0$ . Dann existiert genau ein  $x^0 \in \mathbb{R}^n$  mit  $x^0 \in \bigcap_k Q^{(k)}$ .

**Beweis**

Eindeutigkeit einfach. Zeigen Existenz. Aus den Voraussetzungen folgt:

Die  $I_i^{(k)}$  mit  $I_i^{(k)} = \{x \in \mathbb{R} : a_i^{(k)} \leq x_i \leq b_i^{(k)}\}$ ,  $i = 1, \dots, n$  bilden eine Intervallschachtelung.

Das heißt, es existiert genau ein  $x_i^0$  mit  $x_i^0 \in \bigcap_k I_i^{(k)} \Rightarrow x^0 = (x_1^0, \dots, x_n^0) \in \bigcap_k Q^{(k)}$ .

**Satz 4.19**Satz von Bolzano-Weierstraß in  $\mathbb{R}^n$ Jede unendliche beschränkte Menge  $B \subset \mathbb{R}^n$  besitzt einen Häufungspunkt.**Beweis**Benutze die sogenannte „Löwenfangmethode“ (der Einfachheit halber hier nur für  $\mathbb{R}^2$ ).

$B$  ist beschränkt, also existiert ein Quadrat  $Q^{(1)}$  mit  $B \subset Q^{(1)}$ . Wir vierteilen nun  $Q^{(1)}$  und erhalten vier gleichgroße Teilquadrate. Da  $B$  unendlich ist, existiert (mindestens) ein Teilquadrat, das unendlich viele Elemente aus  $B$  enthält. Dieses sei  $Q^{(2)}$ .  $Q^{(2)}$  wird wiederum geviertelt und so weiter.

Auf diese Weise erhalten wir eine Quadratschachtelung  $Q^{(1)} \supset Q^{(2)} \supset Q^{(3)} \supset \dots$  mit  $d(Q^{(k)}) = \frac{1}{2}d(Q^{(k-1)}) = \dots = \frac{1}{2^{k-1}}d(Q^{(1)}) \rightarrow 0$ .

Nach Satz 4.18 existiert genau ein  $x^0 \in \bigcap_k Q^{(k)}$ . Zu zeigen:  $x^0$  ist ein Häufungspunkt.

Sei  $U_\varepsilon(x^0)$  die  $\varepsilon$ -Umgebung von  $x^0$ . Da  $d(Q^{(k)}) \rightarrow 0$ , existiert ein  $k_0$  mit  $Q^{(k_0)} \subset U_\varepsilon(x^0)$ . Die linke Menge, und dadurch die rechte Menge, enthält unendlich viele Elemente aus  $B$ . Also ist  $x^0$  Häufungspunkt von  $B$ . ■

Mit der gleichen Methode zeigt man:

**Satz 4.20**Sei  $(b_n)$  eine beschränkte Folge aus  $\mathbb{R}^n$ . Dann besitzt  $(b_n)$  eine konvergente Teilfolge.**Bemerkung**Die Sätze 4.19 und 4.20 gelten auch in  $\mathbb{C}^n$ .

## 4.3 Kompaktheit

**Definition 4.21**Sei  $(M, d)$  ein metrischer Raum.

- Unter einer **offenen Überdeckung** einer Menge  $A \subset M$  versteht man eine Familie (unendlich große Menge von Mengen)  $\underline{\mathcal{O}}$  von offenen Mengen  $\mathcal{O}$  mit  $A \subset \bigcup_{\mathcal{O} \in \underline{\mathcal{O}}} \mathcal{O}$ .
- Man sagt:  $\underline{\mathcal{O}}$  enthält eine **endliche Teilüberdeckung**  $\mathcal{O}_1, \dots, \mathcal{O}_n \in \underline{\mathcal{O}}$ , wenn gilt:  $A \subset \bigcup_{i=1}^n \mathcal{O}_i$ .

**Definition 4.22**Sei  $(M, d)$  ein metrischer Raum. Eine Menge  $K \subset M$  heißt

- **kompakt**, wenn *jede* offene Überdeckung von  $K$  eine endliche Teilüberdeckung enthält.
- **folgenkompakt**, wenn *jede* Folge  $(x_n) \subset K$  eine Teilfolge  $(x_{n_k})$  enthält mit  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} \in K$ .

**Bemerkung**

In den Anwendungen bestehen die Teilmengen der offenen Überdeckungen häufig als Umgebungen (spezieller Art) der Punkte aus  $K$ .

**Beispiel 4.9**

$A = (0, 1] \subset \mathbb{R}$  ist nicht kompakt. Zum Beweis muss eine offene Überdeckung ohne endliche Teilüberdeckung  $\supset A$  gefunden werden. Hier ist die Kreativität grenzenlos.

Sei  $\mathcal{Q} = \{(\frac{1}{2}, 2), (\frac{1}{4}, \frac{1}{2}), (\frac{1}{n}, 1) \text{ mit } n = 2, 3, 4, \dots\}$ . Diese offene Überdeckung von  $M$  enthält keine endliche Teilüberdeckung  $\supset A$ .

**Beispiel 4.10**

$B = [0, 1] \subset \mathbb{R}$  ist kompakt. Den Beweis führt man per Widerspruch: Angenommen,  $B$  sei nicht kompakt. Dann existiert eine offene Überdeckung  $\mathcal{Q}$ , die keine endliche Teilüberdeckung enthält. Halbiere  $B$  zu  $[0, \frac{1}{2}]$  und  $[\frac{1}{2}, 1]$ , eines dieser Teilintervalle lässt sich nicht durch endlich viele Mengen aus  $\mathcal{Q}$  überdecken, dieses sei  $I_1$ .  $I_1$  wird wiederum halbiert und  $I_2$  gewählt und so weiter. Es entsteht eine Intervallschachtelung  $(I_n)$  aus abgeschlossenen Intervallen mit  $l(I_n) = 2^{-n}$  und kein  $I_n$  lässt sich durch endlich viele Mengen aus  $\mathcal{Q}$  überdecken. Wegen Satz 4.17 existiert genau ein  $x \in I_n \forall n$ . Natürlich existiert ein  $\mathcal{O} \in \mathcal{Q}$  mit  $x \in \mathcal{O}$ . Da  $\mathcal{O}$  offen ist, existiert ein  $\varepsilon > 0$  mit  $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subset \mathcal{O}$ . Wähle  $n$  so groß, dass  $2^{-n} < \varepsilon$ , dann ist  $I_n \subset (x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subset \mathcal{O}$ . Also wird  $I_n$  sogar von nur einer Menge aus  $\mathcal{O}$  überdeckt: Widerspruch!

**Beispiel 4.11**

$A = (0, 1] \subset \mathbb{R}$  ist nicht folgenkompakt. Zum Beispiel hat  $(a_n) = (\frac{1}{n})$  keine in  $I$  konvergente Teilfolge.

**Beispiel 4.12**

$B = [0, 1] \subset \mathbb{R}$  ist folgenkompakt. Sei  $(x_n) \subset [0, 1]$  beliebig. Dann (Satz B-WS) existiert eine konvergente Teilfolge  $(x_{n_k})$ , also  $x_{n_k} \rightarrow x \in \mathbb{R} \Rightarrow x \in H(x_n) = [0, 1]$  (da  $[0, 1]$  abgeschlossen).

**Beispiel 4.13**

$\mathbb{R}$  ist nicht kompakt (obgleich abgeschlossen). Betrachte die Mengenfamilie  $(n - \frac{3}{4}, n + \frac{3}{4}) \forall n \in \mathbb{Z}$ . Diese überdeckt  $\mathbb{R}$ , enthält jedoch keine endliche Teilüberdeckung von  $\mathbb{R}$ .

**Satz 4.23**

Jede kompakte Teilmenge  $K$  eines metrischen Raumes ist beschränkt und abgeschlossen.

**Bemerkung**

Achtung: Die Umkehrung gilt nicht (unbedingt).

**Beweis****Beschränktheit:**

Betrachte die offene Überdeckung  $\mathcal{U} = \{U_1(x) : x \in K\} = \{\{y \in M : d(x, y) < 1\} : x \in K\}$  von  $K$ .  $K$  ist kompakt, also existieren endlich viele  $x_1, \dots, x_n$  mit  $U_1(x_1) \cup \dots \cup U_1(x_n) \supset K$ .

Sei nun  $y \in M$  fest und  $c := \max\{d(y, x_1), \dots, d(y, x_n)\}$ . Eine Kugel um  $y$  mit dem Radius  $c$  umhüllt alle  $x_i$ . Eine Kugel um  $y$  mit einem Radius  $r \geq c + 1$  umhüllt die 1-Umgebungen aller  $x_i$  und damit auch die Menge  $K$ , d.h.  $U_r(y) \subset K \Rightarrow K$  ist beschränkt.

**Abgeschlossenheit:** Angenommen, es existiert ein Häufungspunkt  $x \notin K$  von  $K$ . Zu jedem  $y \in K$  existieren offene Umgebungen  $U(y)$  (Umgebung um  $y$ ),  $V_y(x)$  (Umgebung um  $x$ ) mit  $U(y) \cap V_y(x) = \emptyset$ . Die Menge aller  $U(y)$  ist eine offene Überdeckung von  $K$ .

Da  $K$  kompakt ist, existiert eine endliche Teilüberdeckung, also existieren  $y_1, \dots, y_n$  mit  $K \subset \bigcup_{i=1}^n U(y_i)$ .

Betrachte die zugehörigen Umg.  $V_{y_i}(x)$  ( $1, \dots, n$ )  $\Rightarrow V := \bigcap_{i=1}^n V_{y_i}(x)$  ist eine offene Umg. von  $x$ .

Es gilt:  $V \cap U(y_i) = \emptyset \forall i = 1, \dots, n \Rightarrow V \cap \underbrace{\left( \bigcup_{i=1}^n U(y_i) \right)}_{\supset K} = \emptyset \Rightarrow V \cap K = \emptyset \Rightarrow \text{Widerspruch} \Rightarrow \text{Jeder}$   
Häufungspunkt von  $K$  ist Element von  $K$ .  $\Rightarrow K$  ist abgeschlossen. ■

**Satz 4.24**

Jede unendliche Teilmenge  $B$  eines kompakten metrischen Raumes  $(M, d)$  besitzt einen Häufungspunkt.

**Beweis**

Angenommen,  $B$  hat keinen Häufungspunkt, d.h.  $x \in M$  existiert eine Umgebung  $U(x)$  mit  $U(x) \cap B = \emptyset$  oder  $U(x) \cap B = \{x\}$ . Dann ist  $\{U(x) : x \in M\}$  eine offene Überdeckung von  $M$ . Da  $M$  kompakt ist, existiert eine endliche Teilüberdeckung  $U(x_1), \dots, U(x_m)$  von  $M$ .

$$B = B \cap M = B \cap \left( \bigcup_{i=1}^m U(x_i) \right) = \bigcup_{i=1}^m \underbrace{(B \cap U(x_i))}_{\text{entweder } \emptyset \text{ oder } \{x_i\}} \subset \{x_1, \dots, x_m\} \Rightarrow B \text{ ist endlich} \Rightarrow \text{Widerspruch}$$

**Satz 4.25**

Sei  $(M, d)$  ein metrischer Raum und  $K \subset M$ . Dann ist  $K$  genau dann kompakt, wenn  $K$  folgenkompakt ist. (Also fallen in metrischen Räumen beide Kompaktheitsbegriffe zusammen.)

**Beweis**

„Folgenkompaktheit  $\Rightarrow$  Kompaktheit“ ist schwierig (siehe Literatur). **Kompaktheit  $\Rightarrow$  Folgenkompaktheit:** Sei  $(x_n) \subset K$  (soll heißen:  $x_n \in K \forall n \in \mathbb{N}$ ). Wenn  $\{x_n\}$  endlich ist, ist es einfach, aus  $(x_n)$  eine in  $K$  konvergente Teilfolge auszuwählen, denn ein  $x_{n_0}$  muss in  $(x_n)$  unendlich oft vorkommen. Wähle als Teilfolge dann einfach die konstante Teilfolge  $(x_{n_k})$  mit  $x_{n_k} = x_{n_0} \forall k$ .

Sei nun  $\{x_n\}$  unendlich. Nach Satz 4.24, angewendet auf den komplexen Raum  $(K, d)$ , existiert ein Häufungspunkt  $x$  von  $(x_n)$ . Damit existiert eine Folge  $(y_n)$  aus Elementen von  $\{x_n\}$  mit  $y_n \rightarrow x$ . (Beachte: Die  $y$  sind irgendwelche der  $x$ .) Jetzt muss man sich noch überlegen (durch Betrachten der Indizes, wie man  $(y_n)$  als Teilfolge von  $(x_n)$  wählen kann. Da  $K$  abgeschlossen (als kompakte Teilmenge), muss  $x \in K$  sein. ■

Die für uns wichtigste Charakterisierung kompakter Mengen aus  $\mathbb{R}^n$  bzw.  $\mathbb{C}^n$  enthält der...

**Satz 4.26**

Eine Teilmenge  $A \subset \mathbb{R}^n$  (bzw.  $\mathbb{C}^n$ ) ist genau dann kompakt, wenn sie beschränkt und abgeschlossen ist.

**Beweis**

Die Hin-Richtung folgt aus Satz 4.23, die Rück-Richtung der Äquivalenz ist der Satz von Bolzano-Weierstraß (unendlich beschränkt  $\Rightarrow \exists$  Häufungspunkt  $\xrightarrow{(\text{abgeschlossen})} \dots \Rightarrow$  kompakt). ■

# 5 Stetigkeit

## 5.1 Begriff der Stetigkeit

Aus der Schule ist Stetigkeit wie folgt bekannt.

1. Sei  $f : D(f) \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion.  $f$  heißt in  $x_0 \in D(f)$  stetig, wenn gilt:  
 $\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta = \delta(\varepsilon, x_0) : \forall x \in D(f), |x - x_0| < \delta : |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$
2.  $f$  heißt in  $x_0 \in D(f)$  stetig, wenn gilt:  $\forall (x_n) \subset D(f), x_n \rightarrow x_0 : f(x_n) \rightarrow f(x_0)$
3. „Grenzwert = Funktionswert“, d.h. „ $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ “ (basiert auf 1. und 2.)

Wir definieren Stetigkeit allgemein wie folgt:

**Definition 5.1** Stetigkeit

Sei  $f$  eine Abbildung des metrischen Raumes  $(X, \varrho)$  in den metrischen Raum  $(Y, \sigma)$ .  $f$  heißt **stetig** in  $x_0 \in X$ , wenn zu jeder Umgebung  $V$  von  $f(x_0)$  eine Umgebung  $U$  von  $x_0$  gibt mit  $f(U) \subset V$ . Kurz:

$$\forall V(f(x_0)) : \exists U(x_0) : f(U(x_0)) \subset V(f(x_0))$$

$f$  heißt auf  $X$  **stetig**, wenn  $f$  in jedem Punkt von  $X$  stetig ist.

**Bemerkung**

1. Die Stetigkeit ist eine lokale Eigenschaft (Punkteigenschaft) einer Abbildung.
2. In Definition 5.1 ist automatisch  $D(f) = X$ . Wir werden später  $D(f) \subsetneq X$  betrachten. (Dabei sind nur unwesentliche Modifikationen nötig.)
3. Denkt man an die Definition der Umgebung eines Punktes (d.h.  $W$  ist Umgebung von  $z \Leftrightarrow W$  enthält eine gewisse Kugel um  $z$ ), erhält man die folgende äquivalente Definition.

**Satz 5.2**

Eine Abbildung  $f : X \rightarrow Y$  ( $X, Y$  wie in 5.1) ist genau dann in  $x_0$  stetig, wenn gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta = \delta(\varepsilon, x_0) > 0 : \forall x \in D(f) : [\varrho(x, x_0) < \delta \Rightarrow \sigma(f(x), f(x_0)) < \varepsilon]$$

**Satz 5.3**

Eine Abbildung  $f : X \rightarrow Y$  ( $X, Y$  wie in 5.1) ist genau dann in  $x_0$  stetig, wenn  $x_n \rightarrow x_0 \Rightarrow f(x_n) \rightarrow f(x_0)$

Das heißt:  $f$  in  $x_0$  stetig  $\Leftrightarrow [\varrho(x_0, x_n) \rightarrow 0 \Rightarrow \sigma(f(x_0), f(x_n)) \rightarrow 0]$

**Beweis**

**Hin-Richtung:** (Sei  $f$  im Sinne von 5.1 definiert.) Sei  $V$  eine beliebige Umgebung von  $f(x_0)$  und  $U$  eine solche Umgebung von  $x_0$ , dass gilt:  $f(U) \subset V$ . Sei  $x_n \rightarrow x_0 \Rightarrow \exists n_0 : x_n \in U \forall n > n_0 \Rightarrow f(x_n) \in V \forall n > n_0 \Rightarrow f(x_n) \rightarrow f(x_0)$

**Rück-Richtung:** Möge gelten:  $x_n \rightarrow x_0 \Rightarrow f(x_n) \rightarrow f(x_0)$ . Angenommen,  $f$  sei nicht stetig in  $x_0$ . Dann existiert eine Umgebung  $V$  von  $f(x_0)$ , für die für alle Umgebungen  $U$  von  $x_0$  gilt:  $f(U) \not\subset V$ . Betrachte  $\forall n$  die spezielle Umgebung  $U_{\frac{1}{n}}(x_0) \Rightarrow f\left(U_{\frac{1}{n}}(x_0)\right) \not\subset V$ , d.h.  $\forall n : \exists x_n \in U_{\frac{1}{n}}(x_0) : f(x_n) \notin V$ .

Also hat  $x_n$  die Eigenschaft  $x_n \rightarrow x_0$ , aber  $f(x_n) \notin V \forall n \Rightarrow f(x_n) \not\rightarrow f(x_0) \Rightarrow$  Widerspruch

### Satz 5.4

$f : X \rightarrow Y$  ist genau dann stetig, wenn das Urbild offener (abgeschl.) Mengen offen (abgeschl.) ist.

#### Bemerkung

Unter stetigen Abbildungen muss das Bild einer offenen (abgeschl.) Menge nicht offen (abgeschl.) sein.

### Beispiel 5.1

Sei  $y_0 \in Y$  fest. Betrachte  $f(x) := y_0 \forall x \in X$ . Die Menge  $\{y_0\}$  ist stets abgeschlossen, jedoch bilden auch offene Mengen  $O \subset X$  in  $\{x_0\}$  ab.

Wir werden nun einige Funktionen auf Stetigkeit untersuchen.

### Beispiel 5.2

$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2$  ist stetig für alle  $x \in \mathbb{R}$  (analog in  $\mathbb{C}$ ).

Beweis mit der Folgencharakterisierung:  $x_n \rightarrow x_0 \Rightarrow x_n \cdot x_n \rightarrow x_0 \cdot x_0 \Leftrightarrow x_n^2 \rightarrow x_0^2$

### Beispiel 5.3

$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} -1 & x < 0 \\ 1 & x \geq 0 \end{cases}$  ist stetig für alle  $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ . Für  $x = 0$ :  $(x_n) = (1, -1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \dots) \rightarrow 0$ , aber  $(f(x_n)) = (1, -1, 1, -1, \dots)$

### Beispiel 5.4

#### Dirichlet-Funktion

$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$  ist in keinem Punkt stetig.

Sei  $x_0 \in \mathbb{R}$  beliebig, wähle (z.B.)  $\varepsilon = \frac{1}{2}$ . Dann existiert kein  $\delta$  mit  $|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \frac{1}{2}$ , denn: Sei  $x_0$  rational, dann liegt in jeder Umgebung  $U_\delta(x_0)$  ein irrationales  $x$  mit  $|f(x) - f(x_0)| = 1 \not< \frac{1}{2}$ . Analog für irrationale  $x_0$ .

### Beispiel 5.5

Sei  $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^k$  mit  $m, k \in \mathbb{N}$  beliebig. Diese Abbildung hat die Gestalt  $f = (f_1, \dots, f_k)$  mit den Koordinatenfunktionen  $f_i : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}, i = 1, \dots, k$ . Sei  $x = (x_1, \dots, x_m)$  und  $y = (y_1, \dots, y_k)$ . Dann ist  $f(x) = (f_1(x_1, \dots, x_m), \dots, f_k(x_1, \dots, x_m)) = (y_1, \dots, y_k)$ .

Sei zum Beispiel  $m = 2, k = 3, f(x_1, x_2) := \begin{pmatrix} x_1^2 + x_2 \\ \sin x_1 \cdot \tan x_2 \\ x_1^3 \cdot x_2^{97} \end{pmatrix} = (y_1, y_2, y_3)$ . Stetigkeit in einem Punkt

$x^{(0)} = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}) \in D(f)$  heißt: Für jede Folge  $(x^{(n)}) \subset D(f)$  mit  $x^{(n)} \rightarrow x^{(0)}$  gilt  $f(x^{(n)}) \rightarrow f(x^{(0)})$ . Ausführlich:

$x^{(n)} = \begin{pmatrix} x_1^{(n)} \\ x_2^{(n)} \\ x_3^{(n)} \end{pmatrix} \rightarrow x^{(0)} = \begin{pmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \\ x_3^{(0)} \end{pmatrix} \Leftrightarrow x_i^{(n)} \rightarrow x_i^{(0)}, i = 1, \dots, n$  (koordinatenweise Konvergenz; Standardmetrik!).

Daraus muss folgen:

$f(x^{(n)}) = \begin{pmatrix} f_1(x_1^{(n)}, \dots, x_m^{(n)}) \\ \vdots \\ f_k(x_1^{(n)}, \dots, x_m^{(n)}) \end{pmatrix} \rightarrow f(x^{(0)}) = \begin{pmatrix} f_1(x_1^{(0)}, \dots, x_m^{(0)}) \\ \vdots \\ f_k(x_1^{(0)}, \dots, x_m^{(0)}) \end{pmatrix} \Leftrightarrow f(x_1^{(n)}, \dots, x_m^{(n)}) \rightarrow f(x_1^{(0)}, \dots, x_m^{(0)}),$   
 $i = 1, \dots, n$  (wiederum koordinatenweise Konvergenz).



**Satz 5.5**

Eine Abbildung  $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^k$  ist genau dann in  $x^{(0)}$  stetig, wenn alle Koordinationenfunktionen  $f_1, \dots, f_k$  in  $x^{(0)}$  stetig sind.

**Spezialfall:** Lineare Abbildungen  $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^k$  sind immer  $\forall x \in \mathbb{R}^m$  stetig.

**Beispiel 5.6** Stetigkeit von Potenzreihen

Sei  $f(z) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n |z - a|^n$ ,  $z \in U_\rho(a)$  (offener Konvergenzkreis)

Dann gilt:  $f$  ist stetig  $\forall z \in U_\rho(a) = D(f)$ . Mit Lemma 3.49 ist ein Spezialfall schon gezeigt: Wenn  $z_n \rightarrow a$ , dann  $f(z_n) \rightarrow f(a) = a_0$ .

Der allgemeine Fall wird nicht hier bewiesen, sondern fällt später bei einem Fundamentalsatz ab (siehe gleichmäßige Konvergenz).

**Bemerkung**

1. Sei jetzt  $f : X \rightarrow Y$ , aber  $D(f) \subsetneq X$ . Was bedeutet Stetigkeit in  $x_0 \in D(f)$ ?  
Es ändert insofern nichts, als  $D(f)$  wieder ein metrischer Raum ist und  $f : D(f) \rightarrow Y$  auf Stetigkeit untersucht wird. Wichtige Übung: Formulieren Sie den Stetigkeitsbegriff für diesen Fall. Zum Beispiel für Folgen: Sei  $x_0 \in D(f)$  und  $(x_n) \subset D(f)$ .  $x_n \rightarrow x_0 \Rightarrow f(x_n) \rightarrow f(x_0)$ .
2. Beachte: Jedes  $f$  ist in jedem isolierten Punkt  $x_0$  des Definitionsbereiches stetig, da die einzigen Folgen  $(x_n) \subset D(f)$  mit  $x_n \rightarrow x_0$  diejenigen sind, für die ab einem  $N \in \mathbb{N}$  gilt:  $x_n = x_0 \forall n \geq N$ .  
Bsp.:  $f(x) = \begin{cases} 1 & x \in [1, 2] \\ 2 & x \in \{3\} \end{cases}$

## 5.2 Grenzwerte von Funktionen und Abbildungen

Sei  $f : D(f) \subset X \rightarrow Y$  stetig und  $x_0 \notin D(f)$ . Kann man  $f(x_0)$  so zusätzlich definieren, dass die entstehende Abbildung in  $x_0$  stetig wird. Genauer: Definiere eine Abbildung  $\tilde{f}$  so, dass sie stetig ist

und gilt:  $\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & x \in D(f) \\ ? & x = x_0 \end{cases}$ .

Im einfachsten Falle ist  $x_0$  ein isolierter Punkt von  $D(f) \cup \{x_0\}$ , d.h. es existiert eine Umgebung  $U(x_0)$  mit  $U(x_0) \cap D(f) = \emptyset$ . Setze  $\tilde{f}(x_0) = y_0 \in Y$  beliebig, da  $f$  wie bereits gesehen auf jeden Fall in  $x_0$  stetig ist.

Schwieriger ist es, wenn  $x_0$  Häufungspunkt von  $D(f)$  ist. Dann muss man garantieren:

$\forall (x_n) \subset D(f), x_n \rightarrow x_0 : f(x_n) \rightarrow y_0$  für ein festes  $y_0$ .

**Beispiel 5.7**

1.  $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ ,  $x_0 = 0$
2.  $f(x) = \sin \frac{1}{x}$ ,  $x_0 = 0$
3.  $f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$ ,  $(x_0, y_0) = (0, 0)$

Unabhängig von der obigen Fortsetzungsproblematik definieren wir:

**Definition 5.6**

Seien  $(X, \rho)$  und  $(Y, \sigma)$  metrische Räume,  $f : D(f) \subset X \rightarrow Y$  und  $x_0$  ein Häufungspunkt von  $D(f)$ .

Man sagt,  $f$  hat in  $x_0$  den **Grenzwert**  $y$ , wenn gilt:  $\forall (x_n) \subset D(f), x_n \rightarrow x_0 : f(x_n) \rightarrow y$

Notation:  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = y$  oder ausführlich  $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \in D(f)}} f(x) = y$

**Beispiel 5.8**

Sei  $f(x) = \sin \frac{1}{x}$ . Existiert  $\lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x}$ ? Durch geeignete Wahl von Folgen  $(x_n)$  mit  $x_n \rightarrow 0$  findet man zum Beispiel:

- $\left(f\left(x_n^{(1)}\right)\right) = (1, 1, 1, 1, \dots) \rightarrow 1$
- $\left(f\left(x_n^{(2)}\right)\right) = (-1, -1, -1, -1, \dots) \rightarrow -1$
- $\left(f\left(x_n^{(3)}\right)\right) = (1, -1, 1, -1, \dots)$  ist divergent

Wie man sofort sieht, existiert  $\lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x}$  nicht. Also ist  $f$  an  $x = 0$  nicht stetig ergänzbar.

**Satz 5.7**

Es liege die in Definition 5.6 beschriebene Situation vor. Dann gilt:

- Wenn der Grenzwert  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$  existiert, ist er eindeutig bestimmt.
- $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = y \Leftrightarrow$  Für alle Umgebungen  $V(y)$  existiert eine Umgebung  $U(x_0)$  mit  $f(x) \in V(y) \forall x \in U(x_0) \cap D(f)$   
Mit anderen Worten:  $\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \forall x \in D(f) : \varrho(x, x_0) < \delta \Rightarrow \sigma(f(x), f(y)) < \varepsilon$
- Sei  $x_0 \in D(f)$  und  $x_0 \in H(D(f))$ . Dann ist  $f$  in  $x_0$  genau dann stetig, wenn  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ .

Übung: Beweisen Sie diesen Satz (mit Blick auf die verschiedenen Formulierungen von Stetigkeit)!

Die eingangs formulierte Fortsetzungsproblematik hat folgende Lösung:

Sei  $x_0 \notin D(f)$ ,  $x_0 \in H(D(f))$  und  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) =: y$ , dann ist  $\tilde{f}$  def. durch  $\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & x \in D(f) \\ y & x = x_0 \end{cases}$ .

**Beispiel 5.9**

Sei  $f(x) = \frac{\sin x}{x}$  und  $x_0$ . Mit  $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots$  ist  $f(x) = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \dots$ .

Also ist  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} =$  (man beachte die Stetigkeit der Potenzreihe in  $x_0 = 0$ )  $= 1 - 0 + 0 - \dots = 1$ .

$$\Rightarrow \tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & x \in D(f) \\ y & x = x_0 \end{cases}$$

**Beispiel 5.10**

Sei  $f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$  und  $(x_0, y_0) = (0, 0)$ . Betrachte die folgenden Nullfolgen:

$$a_n = \left(\frac{1}{n}, 0\right), b_n = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) \Rightarrow f(a_n) = \frac{\frac{1}{n} \cdot 0}{\frac{1}{n^2} + 0} = 0 \rightarrow 0 \wedge f(b_n) = \frac{\frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^2}} = \frac{1}{2} \rightarrow \frac{1}{2}$$

Da der Grenzwert  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$  nicht existiert, kann  $f$  nicht stetig ergänzt werden.

## 5.3 Eigenschaften stetiger Funktionen und Abbildungen

### Satz 5.8

Sei  $X$  ein metrischer Raum. Mit  $C(X)$  (**algebraischer Teil**) bezeichnen wir die Menge aller stetigen Funktionen aus  $X$  mit Werten aus  $\mathbb{K}$  (d.h.  $\mathbb{R}$  oder  $\mathbb{C}$ ).

1.  $C(X)$  ist eine Algebra, d.h.  $C(X)$  ist ein Vektorraum über  $\mathbb{K}$  und ein Ring. Mit anderen Worten, für  $f, g \in C(X)$  und  $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$  gilt:  $\alpha f + \beta g \in C(X) \wedge f \cdot g \in C(X)$ , es gelten Assoziativ- und Kommutativgesetze (auch für die Multiplikation) sowie das Distributivgesetz.
2. Wenn  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ , gilt  $f \in C(X) \Leftrightarrow \bar{f} \in C(X)$ . Dabei ist  $\bar{f}(x) = \overline{f(x)} \forall x \in X$ .
3. In allen Punkten  $x \in X$  mit  $g(x) \neq 0$  ist  $\frac{f}{g}$  stetig.

#### Bemerkung

Dieser Satz gilt auch für die Menge aller Funktionen  $f : Y \rightarrow \mathbb{K}$ , wobei  $Y$  eine beliebige Menge ist. Stetigkeit wird dabei nicht verlangt (da i.A. keine Metrik vorhanden ist).

### Beweis

Trivial:  $x_n \rightarrow x (x_n, x \in X) \Rightarrow f(x_n) \rightarrow f(x), g(x_n) \rightarrow g(x) \xrightarrow[\text{Grenzwerte}]{\text{Rechenregeln}}$  Behauptung

### Satz 5.9

Stetigkeit zusammengesetzter Funktionen

Seien  $f : X \rightarrow Y$  und  $g : Y \rightarrow Z$  Abbildungen und  $X, Y, Z$  metrische Räume. Ist  $f$  in  $x_0$  und  $g$  in  $f(x_0)$  stetig, dann ist  $h := g \circ f$  in  $x_0$  stetig.

### Beweis

$$x_n \rightarrow x_0 \xrightarrow{(f \text{ stetig})} f(x_n) \rightarrow f(x_0) \xrightarrow{(g \text{ stetig})} g(f(x_n)) \rightarrow g(f(x_0)) \Leftrightarrow h(x_n) \rightarrow h(x_0)$$

### Satz 5.10

Sei  $X$  ein metrischer Raum,  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  stetig und  $f(x_0) > 0$ . Dann existiert eine Umgebung  $U(x_0)$  mit  $f(x) > 0 \forall x \in U(x_0)$ .

### Beweis

Da  $f(x_0) > 0$ , existiert eine Umgebung  $V(f(x_0))$  mit  $y > 0 \forall y \in V(f(x_0))$ . Aufgrund der Stetigkeit von  $f$  existiert eine Umgebung  $U(x_0)$  mit  $f(U(x_0)) \subset V(f(x_0))$ . Diese erfüllt die geforderte Bedingung.

Eventuell aus der Schule bekannt: Sei  $f$  stetig auf  $[a, b]$ .

1.  $f$  beschränkt
2.  $f$  hat ein Minimum und ein Maximum (d.h. Inf. und Supr. werden angenommen)
3.  $f$  nimmt jeden Wert zwischen Minimum und Maximum an  
(oder:  $f(a) < 0, f(b) > 0 \Rightarrow \exists c \in (a, b) : f(c) = 0$ )

Wir werden die Frage beantworten, welche Eigenschaften von  $[a, b]$  diese Beziehungen (für stetige  $f$ ) implizieren.

**Satz 5.11** Stetiges Bild kompakter Mengen

Seien  $X, Y$  metrische Räume,  $f : X \rightarrow Y$  stetig und  $K \subset X$  kompakt. Dann ist  $f(K) \subset Y$  kompakt.  
Kurz: Jedes stetige Bild kompakter Mengen ist kompakt.

**Beweis**

Sei  $(y_n) \subset f(K)$ . Zeigen:  $\exists (y_{n_k}) : y_{n_k} \rightarrow y \in f(K)$ . Es ist  $y_n = f(x_n)$  mit  $x_n \in K$ . Da  $K$  kompakt ist,  $\exists (x_{n_k})$  mit  $x_{n_k} \rightarrow x \in K$ . Da  $f$  stetig ist, gilt:  $f(x_{n_k}) \rightarrow f(x) \in f(K)$ .  $f(x_{n_k}) = y_{n_k}$

Daraus folgen unmittelbar die nächsten beiden Sätze.

**Satz 5.12**

Sei  $f : X \rightarrow Y$  stetig. Wenn  $K \subset X$  kompakt ist, ist  $f(K)$  beschränkt. Spezialfälle:

1. Sei  $f : K \rightarrow \mathbb{C}$  stetig.  $K$  kompakt  $\Rightarrow f$  beschränkt
2.  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  oder  $\mathbb{C}$  stetig  $\Rightarrow f$  beschränkt

**Bemerkung**

$[a, b]$  ist kompakt. Die Beschränktheit eines Intervalls reicht nicht.  
Beispiel:  $f : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{1}{x}$  ist stetig, aber unbeschränkt.

**Satz 5.13**

Sei  $K \subset X$  kompakt und  $f : X \rightarrow Y$  stetig. Dann hat  $f$  auf  $K$  ein Minimum und ein Maximum, das heißt:

$$\exists x_0, x_1 \in K : f(x_0) = \sup_{x \in K} f(x) = \max_{x \in K} f(x) \wedge f(x_1) = \inf_{x \in K} f(x) = \min_{x \in K} f(x)$$

**Beweis**

$f(K)$  ist abgeschlossen und beschränkt (weil kompakt  $\subset \mathbb{R}$ ), also  $\exists \sup_{x \in K} f(x) = y_0$ .

Da  $f(K)$  abgeschlossen ist, ist  $y_0 \in f(K) \Rightarrow \exists x_0 \in K : f(x_0) = y_0$ .

Analog für Infimum und Minimum.

**Bemerkung**

Maximum und Minimum müssen natürlich nicht eindeutig sein, d.h. (z.B. für das Maximum) es können mehrere

$x_0^{(1)}, \dots, x_0^{(n)} \in K$  existieren mit  $f(x_0^{(1)}) = \dots = f(x_0^{(n)}) = y_0$ .

Wenn  $f$  beschränkt, aber  $K$  nicht kompakt ist, muss kein Maximum oder Minimum existieren.

**Beispiel 5.11**

$f : (0, 1) \subset \mathbb{R}, x \mapsto 2x \Rightarrow f$  hat weder Maximum noch Minimum:  $f((0, 1)) = (0, 2)$

Aber:  $\inf_{x \in (0, 1)} 2x = 0$  und  $\sup_{x \in (0, 1)} 2x = 2$ .

**Definition 5.14**

Seien  $(X, \varrho)$  und  $(Y, \sigma)$  metr. Räume. Eine Abbildung  $f : X \rightarrow Y$  heißt auf  $X$  **gleichmäßig stetig**, wenn gilt:  $\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \forall x_1, x_2 \in X : \varrho(x_1, x_2) < \delta \Rightarrow \sigma(f(x_1), f(x_2)) < \varepsilon$

**Bemerkung**

Aus gleichmäßiger Stetigkeit folgt Stetigkeit. Also ist die gleichmäßige Stetigkeit ein stärkerer Begriff.

**Beispiel 5.12**

Sei  $f(x) = \frac{1}{x}$  auf  $[a, b]$  mit  $a > 0$  definiert. Dann ist  $f$  gleichmäßig stetig, denn: Sei  $\varepsilon > 0$  gegeben.  
 $|f(x_1) - f(x_2)| = \left| \frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2} \right| = \frac{|x_1 - x_2|}{x_1 x_2} = \frac{|x_1 - x_2|}{a^2} \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$ , falls  $|x_1 - x_2| < \delta$  und  $\delta = a^2 \varepsilon$ .

**Beispiel 5.13**

Betrachte das gleiche  $f$  auf  $(0, 1)$  oder  $(0, \infty)$ . Dann ist  $f$  nicht gleichmäßig stetig.  
 Angenommen,  $f$  wäre gleichmäßig stetig. Wähle  $\varepsilon = 1$ . Angenommen,  $\exists \delta > 0 : |x_1 - x_2| < \delta \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < 1$ .  
 Wähle  $x_1 = \frac{\delta}{1+\delta}$  und  $x_2 = \frac{\delta}{2(1+\delta)}$ . Dann gilt  $|x_1 - x_2| < \delta$ , aber  $|f(x_1) - f(x_2)| = \left| \frac{1+\delta-2(1+\delta)}{\delta} \right| = \frac{1+\delta}{\delta} > 1$ .

**Satz 5.15**

Jede auf einer kompakten Menge (oder einem kompakten metrischen Raum)  $K$  definierte stetige Abbildung  $f : K \rightarrow Y$  ist auf  $K$  gleichmäßig stetig.

**Beweis**

Sei  $\varepsilon > 0$  gegeben:  $\forall x \in K : \exists \delta_x > 0 : f(U_{\delta_x}(x)) \subset U_{\frac{\varepsilon}{2}}(f(x))$ . Dann ist  $\left\{ U_{\frac{\delta_x}{2}}(x) : x \in K \right\}$  eine offene Überdeckung von  $K$ . Da  $K$  kompakt ist, existieren  $x_1, \dots, x_n \in K$ , sodass die Mengen  $U_{\frac{\delta_{x_1}}{2}}(x_1), \dots, U_{\frac{\delta_{x_n}}{2}}(x_n)$   $K$  bereits überdecken. Setze  $\delta := \min \left\{ \frac{1}{2}\delta_{x_1}, \dots, \frac{1}{2}\delta_{x_n} \right\}$ . Betrachte nun beliebige  $x \in K$  sowie  $y \in U_\delta(x)$ .  
 Dann ist für ein  $k: x \in U_{\frac{1}{2}\delta_{x_k}}(x_k)$ . Mithin gilt:  $\varrho(y, x_k) \leq \varrho(y, x) + \varrho(x, x_k) < \delta + \frac{1}{2}\delta_{x_k} \leq \delta_{x_k}$ , also  $y \in U_{\delta_{x_k}}(x_k)$ . Somit gilt  $U_\delta(x) \subset U_{\delta_{x_k}}(x_k)$ , insbesondere  $x \in U_{\delta_{x_k}}(x_k)$ . Das heißt:  $\sigma(f(x), f(x_k)) < \frac{\varepsilon}{2}$ , also  $f(U_\delta(x)) \subset f(U_{\delta_{x_k}}(x_k)) \subset U_{\frac{\varepsilon}{2}}(f(x_k)) \subset U_\varepsilon(f(x))$ . ■

Wir haben bereits zwei der drei bekannten Eigenschaften auf die Kompaktheit zurückführen können. Die dritte Eigenschaft hängt nicht mit der Kompaktheit von  $[a, b]$  zusammen!

**Beispiel 5.14**

Sei  $K = [1, 2] \cup [3, 4]$  und  $f(x) = \begin{cases} -1 & x \in [1, 2] \\ 1 & x \in [3, 4] \end{cases}$   
 $K$  ist kompakt und  $f$  stetig auf  $K$ , jedoch nimmt  $f$  keine Werte zwischen  $-1$  und  $1$  an.

Die entscheidende Eigenschaft ist der *Zusammenhang* von  $D(f)$  (siehe 12. Übungsaufgabe).

**Satz 5.16**

Sei  $f$  auf  $[a, b]$  stetig,  $f(a) < 0$  und  $f(b) > 0$  (oder umgekehrt). Dann existiert (mindestens) ein  $c \in (a, b)$  mit  $f(c) = 0$ .

**Beweis**

Sei  $M := \{x_1 \in [a, b] : f(x) < 0 \forall x \in [a, x_1]\}$ .  $M$  ist durch  $b$  nach oben beschränkt und  $M \neq \emptyset$ . Also  $\exists \sup M =: c$ . Zeigen:  $f(c) = 0$ .

Angenommen,  $f(c) < 0$ . Nach Satz 5.10  $\exists \delta > 0$ , sodass  $f$  im gesamten Intervall  $(c - \delta, c + \delta)$  noch  $< 0$  ist. Also ist  $f$  in  $[a, c + \delta)$  negativ, also auch in  $[a, c + \frac{\delta}{2}]$ , d.h.  $c + \frac{\delta}{2} \in M$   
 $\Rightarrow$  Widerspruch zu  $c = \sup M$ ! Analog für  $f(c) > 0$ . ■

**Satz 5.17** Zwischenwertsatz

Sei  $f$  auf  $I = [a, b]$  stetig (und reellwertig), sei  $g := \min_{x \in I} f(x)$  und  $G := \max_{x \in I} f(x)$ .  
 Dann gilt:  $\forall h \in [g, G] : \exists c = c(h) : f(c) = h$ . (Mit anderen Worten:  $[g, G] \subset W(f)$ .)

**Beweis**

Nach 5.13  $\exists a_1, b_1 \in I : f(a_1) = g, f(b_1) = G$ . Betrachten  $\bar{f} = f|_{[a_1, b_1]}$  (o.E.d.A.  $a_1 < b_1$ ).

Betrachte nun  $g$  mit  $g(x) = \bar{f}(x) - h$ . Dann ist  $g$  auf  $[a_1, b_1]$  stetig.

$\Rightarrow g(a_1) = g - h < 0, g(b_1) = G - h > 0$  für  $h \in (g, G)$ .

Nach 5.16 existiert ein  $c \in (a_1, b_1)$  mit  $g(c) = 0 \Rightarrow f(c) = h$ .

**Satz 5.18** Stetigkeit der Umkehrfunktion

Sei  $f$  auf  $[a, b]$  streng monoton wachsend und stetig. Dann ist  $f^{-1}$  in  $[f(a), f(b)]$  streng monoton wachsend und stetig. (Analog für streng monoton fallende  $f$ , dann mit  $[f(b), f(a)]$ .)

**Beweis**

Da  $f$  streng monoton wachsend ist, ist  $f$  injektiv,  $f(a) < f(b)$ ,  $f(a), f(b) \in W(f)$ ,  $f(a) = \min f$  und  $f(b) = \max f$ . Also ist nach 5.17  $W(f) = [f(a), f(b)] \Rightarrow f$  ist bijektiv von  $[a, b]$  auf  $[f(a), f(b)]$ .

Betrachte nun  $y_0 \in (f(a), f(b))$ . (Randpunkte dann analog.) Sei  $x_0 \in (a, b)$  mit  $f(x_0) = y_0$ . Sei  $(y_n) \subset [f(a), f(b)]$  und  $y_n \rightarrow y_0$ . Zeigen:  $\underbrace{f^{-1}(y_n)}_{=: x_n} \rightarrow f^{-1}(y_0) = x_0$ . Angenommen,  $x_n \not\rightarrow x_0$ .

Das heißt,  $\exists \varepsilon > 0$ , sodass unendlich viele  $x_{n_k} \notin (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ . O.E.d.A.  $x_{n_k} < x_0 - \varepsilon$ . Wegen der Monotonie gilt:  $y_{n_k} = f(x_{n_k}) < f(x_0 - \varepsilon) < f(x_0) = y_0$ . Widerspruch:  $y_{n_k} \rightarrow y_0$ , aber  $y_{n_k} \leq \underbrace{f(x_0) - \varepsilon}_{\text{Schranke}} < y_0$ .

## 5.4 Erweiterung des Stetigkeits- und Grenzwertbegriffes

**Definition 5.19**

1.  $f$  heißt im Punkt  $x_0 \in D(f)$  ( $f : D(f) \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ )
  - **rechtsseitig stetig**, wenn gilt:  $\forall (x_n) \subset D(f), x_n > x_0$  und  $x_n \rightarrow x_0 : f(x_n) \rightarrow f(x_0)$
  - **linksseitig stetig**, wenn gilt:  $\forall (x_n) \subset D(f), x_n < x_0$  und  $x_n \rightarrow x_0 : f(x_n) \rightarrow f(x_0)$
2.
  - Sei  $x_0$  ein Häufungspunkt der Menge  $M_r(x_0) := \{x \in D(f) : x > x_0\}$ .  $f$  hat in  $x_0$  den **rechtsseitigen Grenzwert**  $A$ , wenn gilt:  $\forall (x_n) \subset M_r(x_0), x_n \rightarrow x_0 : f(x_n) \rightarrow A$ .
  - Sei  $x_0$  ein Häufungspunkt der Menge  $M_l(x_0) := \{x \in D(f) : x < x_0\}$ .  $f$  hat in  $x_0$  den **linksseitigen Grenzwert**  $a$ , wenn gilt:  $\forall (x_n) \subset M_l(x_0), x_n \rightarrow x_0 : f(x_n) \rightarrow a$ .

Man schreibt:  $\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) = a, \lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x) = A$ .

**Bemerkung**

Man schreibt  $\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) = f(x_0)$  bei linksseitiger und  $\lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x) = f(x_0)$  bei rechtsseitiger Stetigkeit. Normalerweise ist  $D(f)$  ein Intervall und  $M_l(x)$  sowie  $M_r(x)$  damit überflüssig.

Wir definieren zwei Prototypen von unendlichen Grenzwerten (alle anderen Varianten analog):

- $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty \Leftrightarrow \forall (x_n) \subset D(f), x_n \neq x_0, x_n \rightarrow x_0 : f(x_n) \rightarrow \infty$
- $D(f)$  sei nach oben unbeschränkt:  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A \Leftrightarrow \forall (x_n) \subset D(f), x_n \rightarrow \infty : f(x_n) \rightarrow A$

**Definition 5.20** Klassifikation der Unstetigkeitsstellen

$f$  sei in einem Häufungspunkt von  $x_0 \in D(f)$  unstetig.

1. Wenn  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$  existiert, nennt man  $x_0$  eine **hebbare Unstetigkeit**. Dann kann man  $f$  in  $x_0$  so (re)definieren  $\Rightarrow f(x_0) := A$ , sodass eine an  $x_0$  stetige Funktion entsteht.  
Wenn  $\exists \lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x) = A_l, \lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x) = A_r$  mit  $A_l \neq A_r$ , dann sagt man,  $f$  hat an  $x_0$  einen **Sprung** (der Höhe  $|A_l - A_r|$ ).  
Hebbare Unstetigkeiten und Sprungstellen heißen **Unstetigkeiten erster Art**.
2. Wenn  $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = \infty$  an der Unstetigkeitsstelle  $x_0$  ist oder ein einseitiger Grenzwert von  $x_0$  nicht existiert, dann heißt  $x_0$  **Unstetigkeit zweiter Art**.

Man möchte häufig das Wachstum zweier Funktionen in einem Punkt oder im Unendlichen vergleichen.

**Beispiel 5.15**

1.  $\sqrt{x^3 + 1}$  geht schneller  $\rightarrow \infty$  als  $x + 4$
2.  $x^3$  geht für  $x \rightarrow 0$  schneller  $\rightarrow 0$  als  $3x$
3.  $\log x$  geht für  $x \rightarrow \infty$  langsamer  $\rightarrow \infty$  als  $x^c \forall c > 0$ .
4.  $\sqrt{x^2 + 5} \approx x$  für  $x \rightarrow \infty$
5.  $\sin x \approx x$  für  $x \rightarrow 0$

Diese Situationen werden durch die **Landau-Symbole**  $o$  („kleines Oh“) und  $O$  („großes Oh“) exakt erfasst.

**Definition 5.21** Landau-Symbole

- Gilt für Funktionen  $f, g$ :  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$  bzw.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$  bzw.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$ , so schreibt man  $f(x) = o(g(x))$  für  $x \rightarrow x_0$  bzw.  $x \rightarrow \infty$  bzw.  $x \rightarrow -\infty$ .
- Gilt für Funktionen  $f, g$ :  $\left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| \leq K$  in einer (kleinen) Umgebung von  $x_0$  bzw. für  $x > C$  bzw. für  $x < -C$  für ein gewisses  $C > 0$ , so schreibt man  $f(x) = O(g(x))$  für  $x \rightarrow x_0$  bzw.  $x \rightarrow \infty$  bzw.  $x \rightarrow -\infty$ .

Dabei sollen  $f, g$  immer dort definiert sein, wo die entsprechenden Ausdrücke betrachtet werden.

**Beispiel 5.16**

1.  $x + 4 = o(\sqrt{x^3 + 1})$  für  $x \rightarrow \infty$  (d.h.  $\frac{x+4}{\sqrt{x^3+1}} \rightarrow 0$  für  $x \rightarrow \infty$ )
2.  $x^3 = o(3x)$  für  $x \rightarrow 0$  (d.h.  $\frac{x^3}{3x} = \frac{1}{3}x^2 \rightarrow 0$  für  $x \rightarrow 0$ )
3.  $\log x = o(x^c)$  für  $x \rightarrow \infty, c > 0$
4.  $\sqrt{x^2 + 5} = O(x)$  für  $x \rightarrow \infty$  (d.h.  $\frac{\sqrt{x^2+5}}{x} = \sqrt{1 + \frac{5}{x^2}} \rightarrow 1 \Leftrightarrow \left| \sqrt{1 + \frac{5}{x^2}} \right| \leq K, x > C$ )
5.  $\sin x = O(x)$  für  $x \rightarrow 0$  (d.h.  $\frac{\sin x}{x}$  in der Nähe von  $x = 0$  beschränkt)
6.  $\sin x = O(1)$  für  $x \rightarrow \infty$  (d.h.  $\sin x$  auf  $\mathbb{R}$  beschränkt)

# 6 Differentialrechnung

## 6.1 Der Begriff der Ableitung

### Definition 6.1

Wir betrachten  $f : D(f) \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ .

1.  $f$  heißt in  $x_0 \in D(f)$  **differenzierbar**, wenn gilt:

$$\exists \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \neq 0}} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \neq x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} =: f'(x_0) \quad (6.1)$$

Man nennt  $f'(x_0)$  **Ableitung** von  $f$  in  $x_0$  und schreibt auch  $\frac{df}{dx}(x_0)$ . Wenn  $f \forall x_0 \in A \subset D(f)$  differenzierbar ist, so heißt  $f$  in  $A$  differenzierbar.

2. Wenn  $\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} =: f'_l(x_0)$  bzw.  $\lim_{x \rightarrow x_0 + 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} =: f'_r(x_0)$  existiert, heißt  $f$  an  $x_0$  **linksseitig** bzw. **rechtsseitig differenzierbar**.

### Bemerkung

Die Differenzierbarkeit ist wie die Stetigkeit eine lokale Eigenschaft.

$f$  ist differenzierbar  $\Leftrightarrow f$  ist links- und rechtsseitig differenzierbar und  $f'_l(x_0) = f'_r(x_0) (= f'(x_0))$

### Beispiel 6.1

$$\begin{aligned} \text{Sei } f(x) = x^n \Rightarrow f'(x_0) = nx_0^{n-1}. \text{ Beweis: } \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} &= \frac{(x_0+h)^n - x_0^n}{h} = \frac{\binom{n}{1}x_0^{n-1} \cdot h + \binom{n}{2}x_0^{n-2} \cdot h^2 + \dots + \binom{n}{n}h^n}{h} \\ &= nx_0^{n-1} + \underbrace{\binom{n}{2}x_0^{n-2} \cdot h + \dots + \binom{n}{n}h^{n-1}}_{\rightarrow 0} \rightarrow nx_0^{n-1} \end{aligned}$$

### Beispiel 6.2

Sei  $f(x) = |x|$ . Für alle  $x \neq 0$  ist  $f$  natürlich differenzierbar, für  $x = 0$  jedoch nicht:

$$\begin{aligned} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \frac{|h|}{h} &\rightarrow \begin{cases} 1 & h \rightarrow 0 + 0 \\ -1 & h \rightarrow 0 - 0 \end{cases} \\ \Rightarrow f'_r(0) = 1, f'_l(0) = -1 &\Rightarrow f'(0) \text{ existiert nicht.} \end{aligned}$$

Im Hinblick auf Ableitungen von  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  ist folgende Umformulierung der Differenzierbarkeit nützlich:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) \Leftrightarrow \frac{f(x) - f(x_0) - f'(x_0) \cdot (x - x_0)}{x - x_0} \rightarrow 0 \text{ für } x \rightarrow x_0$$



**Satz 6.2** Weierstraß'sche Zerlegungsformel

Eine Funktion  $f$  ist in  $x_0$  genau dann differenzierbar, wenn eine Zahl  $a = a(x_0)$  existiert mit:

$$f(x) = f(x_0) + a \cdot (x - x_0) + r(x, x_0) \quad (6.2)$$

$$\text{mit } r(x, x_0) = o(x - x_0), \text{ d.h. } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{r(x, x_0)}{x - x_0} = 0 \quad (6.3).$$

$a$  ist durch diese Bedingung eindeutig bestimmt:  $a = f'(x_0)$ .

**Beweis**

Hin-Richtung ( $f$  stetig  $\Rightarrow$  (6.2, 6.3)): Siehe oben mit  $r(x, x_0) = f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)$ .

Rück-Richtung: Wenn (6.2, 6.3) gelten, dann:  $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = a + \frac{r(x, x_0)}{x - x_0} \rightarrow a$  für  $x \rightarrow x_0$

- Die durch die Gleichung  $y = f(x_0) + a(x - x_0)$  bestimmte Gerade heißt **Tangente** an den Graphen von  $f$  im Punkt  $(x_0, f(x_0))$ .
- Ein wesentlicher Gesichtspunkt bei (6.2) besteht darin,  $a$  nicht als Zahl anzusehen, sondern als lineare Abbildung von  $\mathbb{R}$  nach  $\mathbb{R}$  zu betrachten.

**Satz 6.3** Differenziationsregeln

Seien  $f, g$  in  $x_0$  differenzierbar,  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$  (bzw.  $\mathbb{C}$ ).

1.  $\lambda f + \mu g$  ist in  $x_0$  differenzierbar,  $(\lambda f + \mu g)'(x_0) = \lambda f'(x_0) + \mu g'(x_0)$
2. Produktregel:  $f \cdot g$  ist in  $x_0$  differenzierbar,  $(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0)$
3. Quotientenregel:  $\frac{f}{g}$  ist in  $x_0$  differenzierbar  $\Leftrightarrow g(x_0) \neq 0$ ,  $\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0) \cdot g(x_0) - f(x_0) \cdot g'(x_0)}{g(x_0)^2}$
4. Kettenregel: Ist  $f$  in  $x_0$  und  $F$  in  $y_0 = f(x_0)$  differenzierbar, dann ist  $F \circ f$  in  $x_0$  differenzierbar,  $(F \circ f)'(x_0) = F'(y_0) \cdot f'(x_0) = F'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)$ .
5. Ableitung der Umkehrfunktion: Sei  $f$  stetig und streng monoton in  $I = (a, b)$ , d.h.  $f^{-1}$  existiert, ist stetig und monoton. Wenn für ein  $x_0 \in I$  die Ableitung  $f'(x_0)$  existiert und  $f'(x_0) \neq 0$  ist, dann ist  $f^{-1}$  in  $y_0 = f(x_0)$  differenzierbar und es gilt:  $(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}$

**Bemerkung**

Diesen Satz wollen wir hier nicht beweisen. Die Beweise sind zum Teil Übungsaufgaben und auf jeden Fall aus der Schule bekannt.

Aus den Punkten 1 und 2 folgt: Die auf  $(a, b)$  differenzierbaren Funktionen bilden einen Vektorraum und eine Algebra.

**Beispiel 6.3** Kettenregel

Sei  $F(y) = \sin y$  und  $f(x) = x^3$ , also  $(F \circ f)(x) = \sin x^3$ . Dann ist  $(F \circ f)'(x) = (\sin x^3)' = \cos x^3 \cdot 3x^2$ .

**Beispiel 6.4** Umkehrfunktion

Sei  $f(x) = e^x$ , also  $f^{-1}(y) = \log y$ . Da  $f'(x) = e^x$ , ist  $(\log y)' = (f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))} = \frac{1}{e^{\log y}} = \frac{1}{y}$ .

Vorsicht: Die Formel für die Ableitung der Umkehrfunktion könnte man wie folgt herleiten.

$$y = f(f^{-1}(y)) \xrightarrow{\text{Kettenregel}} 1 = f'(f^{-1}(y)) \cdot (f^{-1})'(y) \Rightarrow (f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$$

Dabei geht man aber fälschlicherweise von der Differenzierbarkeit von  $f^{-1}$  aus. Trotzdem eignet sich diese Beziehung als Merkhilfe.

Wir definieren zusätzlich zur ersten Ableitung höhere Ableitungen: Wenn  $f$  in  $U(x_0)$  differenzierbar, dann ist  $f'(x)$  in  $U(x_0)$  erklärt. Wenn  $f'$  in  $x_0$  differenzierbar, dann heißt  $(f')'(x_0) =: f''(x_0) =: f^{(2)}(x_0) =: \frac{d^2 f}{dx^2}(x_0)$  **2. Ableitung** von  $f$  an  $x_0$ . Analog wird induktiv die  $n$ -te Ableitung  $f^{(n)} = \frac{d^n f}{dx^n}(x_0)$  erklärt.

Nun soll  $f'(x_0)$  für  $f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  erklärt werden. Dazu benötigen wir die folgende Definition.

**Definition 6.4** Partielle Ableitung

Sei  $G \subset \mathbb{R}^m$  offen,  $f: G \rightarrow \mathbb{R}$  eine gegebene Funktion und  $x^0 = (x_1^0, \dots, x_m^0) \in G$ . Wenn

$$\exists \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_1^0, \dots, x_{l+1}^0, x_l^0 + h, x_{l+1}^0, \dots, x_m^0) - f(x_1^0, \dots, x_l^0, \dots, x_m^0)}{h} = A,$$

heißt  $f$  an  $x^0$  partiell nach  $x_l$  differenzierbar und  $A$  heißt partielle Ableitung von  $f$  nach  $x_l$  an  $x^0$ :  $A = \frac{\partial f}{\partial x_l}(x^0) = D_l f(x^0) = \partial_l f(x^0) = f_{x_l}(x^0)$   
(Das heißt, der obige Grenzwert wird längs der  $l$ -ten Koordinatenachse betrachtet.)

**Bemerkung**

Um  $\frac{\partial f}{\partial x_l}$  in der Praxis zu berechnen, wird nach  $x_l$  so abgeleitet, als wäre  $f$  nur eine Funktion von  $x_l$ . Die anderen Variablen werden wie Parameter behandelt. Höhere partielle Ableitungen werden wiederum induktiv als partielle Ableitungen partieller Ableitungen erklärt.

**Beispiel 6.5**

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2) &= x_1 \cdot \cos(x_1 \cdot x_2) + x_1, \quad x = (x_1, x_2) \\ \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2) &= \cos(x_1 x_2) + x_1 \cdot (-\sin(x_1 x_2)) \cdot x_2 + 1 = \cos(x_1 x_2) - x_1 x_2 \cdot \sin(x_1 x_2) + 1 \\ \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2) &= -x_1^2 \sin(x_1 x_2) \end{aligned}$$

Höhere partielle Ableitungen werden nun in offensichtlicher Weise erklärt. Zum Beispiel:

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x_2 \partial x_1^2}(x_1, x_2) = \frac{\partial}{\partial x_2} \left( \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \frac{\partial}{\partial x_1} f \right) \right) (x_1, x_2)$$

**Beispiel 6.6**

$$\begin{aligned} \text{Sei } f(x_1, x_2) &= x_1 e^{x_2}. \\ \text{Erste partielle Ableitungen von } f: \quad \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2) &= e^{x_2} & \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2) &= x_1 e^{x_2} \\ \text{Zweite partielle Ableitungen von } f: \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x_1, x_2) &= 0 & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(x_1, x_2) &= x_1 e^{x_2} \\ \text{Gemischte zweite partielle Ableitungen von } f: & & & \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(x_1, x_2) &= \frac{\partial}{\partial x_2} \left( \frac{\partial f}{\partial x_1} \right) (x_1, x_2) = e^{x_2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(x_1, x_2) &= \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \frac{\partial f}{\partial x_2} \right) (x_1, x_2) = e^{x_2} \end{aligned}$$

**Satz 6.5** Satz von Schwarz

Seien  $f: G \rightarrow \mathbb{R}$  sowie  $k$  und  $l$  so, dass die zweiten partiellen Ableitungen  $\frac{\partial^2 f}{\partial x_l \partial x_k}, \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_l}$  für alle  $x \in G$  existieren und stetig sind. Dann sind beide Ableitungen in ganz  $G$  gleich. (Analog für höhere Ableitungen.)

(Kurz: Es kommt auf Reihenfolge der partiellen Ableitungen nicht an!)

Sprechweisen und Bezeichnungen:

- Sei  $G \subset \mathbb{R}^m$  offen. Dann heißt  $f : G \rightarrow \mathbb{R}$  in  $G$  **stetig differenzierbar**, wenn alle ersten partiellen Ableitungen von  $f$  existieren und in  $G$  stetig sind.  $f$  heißt in  $G$  **k-mal stetig differenzierbar**, wenn alle partiellen Ableitungen bis einschließlich k-ter Ordnung in  $G$  existieren und stetig sind.
- Der Vektorraum der k-mal stetig differenzierbaren Funktionen in  $G$  heißt  $C^k(G)$ .

### Definition 6.6 Ableitung

Sei  $G \subset \mathbb{R}^m$  offen und  $f : G \rightarrow \mathbb{R}^n$ .  $f$  heißt in  $x^0 \in G$  **(total) differenzierbar**, wenn eine **lineare Abbildung**  $A = A(x^0) : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  existiert, so dass  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|f(x^0+h) - f(x^0) - Ah\|}{\|h\|} = 0$  (6.4)  
 $A(x^0) =: Df(x^0) =: df(x^0) =: f'(x^0)$  heißt **(Fréchet-)Ableitung** oder **totales Differential** von  $f$  an  $x^0$ .  $f$  heißt in  $G$  differenzierbar, wenn  $f$  an allen  $x^0 \in G$  differenzierbar ist.

Im linken Term sind  $h, o \in \mathbb{R}^m$ , rechts ist  $0 \in \mathbb{R}$ . Die Norm im Zähler ist eine Funktion  $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , die Norm im Nenner bildet  $\mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$  ab. Beachte:  $h$  muss so klein sein, dass  $x^0 + h \in G$ . Das ist möglich, da  $G$  offen ist.

Es folgen einige äquivalente Formulierungen zur Differenzierbarkeit (vgl. Gleichung 6.2):

$f$  ist in  $x^0$  genau dann differenzierbar, wenn es eine lineare Abbildung  $A : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  gibt mit

$$\lim_{x \rightarrow x^0} \frac{\|f(x) - f(x^0) - A(x - x^0)\|}{\|x - x^0\|} = 0 \quad (6.4a)$$

$$\text{bzw. } f(x) = f(x^0) + A(x - x^0) + r(x, x^0) \quad (6.4b)$$

wobei  $r(x, x^0) \in \mathbb{R}^n$ ,  $r(x, x^0) = o(\|x - x^0\|)$  für  $x \rightarrow x^0$ , d.h.  $\lim_{x \rightarrow x^0} \frac{r(x, x^0)}{\|x - x^0\|} = 0 \in \mathbb{R}^n$ .

Mit  $h$ :  $f(x^0 + h) = f(x^0) + Ah + r(h)$ ,  $r(h) = o(\|h\|)$  ( $h \rightarrow 0$ )

$$\frac{f(x) - f(x^0) - A(x - x^0)}{\|x - x^0\|} = \frac{r(x, x^0)}{\|x - x^0\|} \rightarrow 0 \in \mathbb{R}^n \quad \hat{=} (6.4a)$$

Manchmal ist es günstig, zu schreiben:  $r(x, x^0) =: \|x - x^0\| \cdot R(x, x^0)$  mit  $R(x, x^0) \in \mathbb{R}^n$  und  $R(x, x^0) \rightarrow 0$  für  $x \rightarrow x^0$  (6.5).

### Satz 6.7

1. Wenn  $f$  an  $x^0$  differenzierbar ist, ist  $f$  an  $x^0$  stetig.
2. Wenn  $f$  an  $x^0$  differenzierbar ist, ist die Ableitung  $f'(x^0)$  eindeutig bestimmt.

### Beweis

1. Eine Übungsaufgabe war: Jede lineare Abbildung  $B : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  ist  $\forall x \in \mathbb{R}^m$  stetig (\*).

$$f(x) - f(x^0) = (6.4b, 6.5) = \underbrace{A(x - x^0)}_{= Ax - Ax^0 \xrightarrow{(*)} 0} + \|x - x^0\| \cdot R(x, x^0) \rightarrow 0 \text{ für } x \rightarrow x^0$$

2. wird aus den folgenden Betrachtungen zur Berechnung von  $f'(x^0)$  folgen.

Wie bestimmt man  $f'(x^0)$ ? Wir suchen bzgl. der Standardbasis  $e_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$  in  $\mathbb{R}^m$  und  $\mathbb{R}^n$  die zugehörige Matrixdarstellung  $f'(x^0) = A = (a_{ij})$ ,  $i, j = 1, \dots, n$ .

Dazu benutze (6.4b) in der Formulierung mit  $h$ :

$$f = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix} \Rightarrow f(x^0 + h) - f(x^0) = \begin{pmatrix} f^1(x^0 + h) - f^1(x^0) \\ \vdots \\ f^n(x^0 + h) - f^n(x^0) \end{pmatrix} = Ah + r(h) = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^m a_{1j} h_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^m a_{nj} h_j \end{pmatrix} + r(h) \quad (6.6)$$

Dividiere (6.6) durch  $\|h\|$  und beachte:  $\frac{r(h)}{\|h\|} \rightarrow 0$  für  $h \rightarrow 0$ . Dann ergibt sich für die  $k$ -te Komponente:

$$\frac{1}{\|h\|} \left[ f_k(x^0 + h) - f_k(x^0) - \sum_{j=1}^m a_{kj} h_j \right] \rightarrow 0$$

Wähle nun spezielles  $h \rightarrow 0$ :  $h := t \cdot e_l$ , also  $\|h\| = |t|$  ( $h \rightarrow 0$  längs  $l$ -ter Koordinatenachse).

$$\Rightarrow \frac{1}{|t|} [f_k(x^0 + te_l) - f_k(x^0) - a_{kl}t] \rightarrow 0 \text{ für } t \rightarrow 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{t} [f_k(x^0 + te_l) - f_k(x^0) - a_{kl}t] \rightarrow 0 \text{ für } t \rightarrow 0$$

Mit allen Koordinaten:  $a_{kl} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f_k(x_1^0, \dots, x_l^0 + t, \dots, x_m^0) - f_k(x_1^0, \dots, x_m^0)}{t} = \frac{\partial f_k}{\partial x_l}(x^0)$

### Satz 6.8

Sei  $G \subset \mathbb{R}^m$  offen und  $f : G \rightarrow \mathbb{R}^n$  in  $x^0 \in G$  differenzierbar. Dann existieren alle partiellen Ableitungen  $\frac{\partial f_k}{\partial x_l}(x^0)$  und bzgl. der Standardbasen in  $\mathbb{R}^m$  bzw.  $\mathbb{R}^n$  gilt

$$Df(x^0) = f'(x^0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x^0) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_m}(x^0) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(x^0) & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_m}(x^0) \end{pmatrix} = \left( \frac{\partial f_k}{\partial x_l}(x^0) \right) =: \frac{\partial (f_1, \dots, f_n)}{\partial (x_1, \dots, x_m)}(x^0) \quad (6.7)$$

Die obige Matrix heißt **Jacobi-Matrix** von  $f$  an  $x^0$ . Eine weitere Bezeichnung:  $\det D(f(x^0)) = \frac{D(f_1, \dots, f_n)}{D(x_1, \dots, x_m)}$

Die Herleitung dieses Satzes zeigt auch die Eindeutigkeit der Ableitung  $A$  von  $f$  an  $x^0$ .

**Beispiel 6.7**

## Spezialfälle

1.  $m = n = 1 \Rightarrow f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \Rightarrow$  übliche Ableitung
2.  $m = 1, n$  beliebig. Da partielle Ableitungen bei Funktionen einer Variable mit üblichen Ableitungen zusammenfallen, ergibt sich:

$$f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ \vdots \\ f_n(x) \end{pmatrix} \Rightarrow f'(x) = \begin{pmatrix} f'_1(x) \\ \vdots \\ f'_n(x) \end{pmatrix}$$

Anwendung: Später werden wir Abbildungen  $(a, b) \ni t \mapsto x(t) \in \mathbb{R}^n$  als Kurve in  $\mathbb{R}^n$  denken. Die Ableitung  $x'(t_0)$  wird Tangentenvektor an der Kurve  $t \mapsto x(t)$  im Punkt  $x(t_0)$  (zum Zeitpunkt  $t_0$ ) genannt.  $(x'(t_0) \hat{=}$  Geschwindigkeitsvektor)

3.  $m$  beliebig,  $n = 1 : f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R} \Rightarrow f(x) = f(x_1, \dots, x_m) \Rightarrow f'(x^0) = Df(x^0) = \left( \frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_m} \right) \Big|_{x=x^0} \Rightarrow$  lineare Abbildung  $\mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$  (Lineare Abbildungen aus einem Vektorraum in  $\mathbb{R}/\mathbb{C}$  heißen **linear funktional**.)

$$\nabla f = \text{grad } f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_m} \end{pmatrix}$$

4. **Gegenbeispiel:** Die Existenz der partiellen Ableitungen von  $f$  an  $x^0$  sichert noch nicht die Existenz der Ableitung von  $f$  an  $x^0$ :

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} \frac{x_1 x_2}{x_1^2 + x_2^2} & (x_1, x_2) \neq (0, 0) \\ 0 & x_1 = x_2 = 0 \end{cases}$$

$f$  ist an  $(0, 0)$  nicht stetig, aber  $\frac{\partial f}{\partial x_1}(0, 0) = \frac{\partial f}{\partial x_2}(0, 0) = 0$ .  $f$  ist an  $(0, 0)$  nicht differenzierbar. (Beweis selber führen!) Das positive Resultat dieser Beispiele fasst der folgende Satz zusammen.

**Satz 6.9**

Sei  $G \subset \mathbb{R}^m$  offen,  $x^0 \in G$  und  $f : G \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Wenn alle ersten partiellen Ableitungen  $\frac{\partial f_k}{\partial x_i}$  (in  $x^0$ ) existieren und (in  $x^0$ ) stetig sind, dann existiert auch  $f'(x^0)$ .

Es folgt eine Bemerkung zu häufig benutzten Schreibweisen.

Sei  $G \subset \mathbb{R}^m$  offen und  $f : G \rightarrow \mathbb{R}$  eine differenzierbare Funktion (in  $G$ ),  $f(x) = f(x_1, \dots, x_m)$ . Dann heißt der Ausdruck

$$df := \sum_{i=1}^m \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i \quad (6.8)$$

**totales Differential** von  $f$  bzw.

$$df(x^0) := \sum_{i=1}^m \frac{\partial f}{\partial x_i}(x^0) dx_i \quad (6.8a)$$

**totales Differential** von  $f$  an  $x^0$ . Was sollen (6.8) und (6.8a) bedeuten und wo ist der Zusammenhang mit  $f'(x^0)$  ( $= df(x^0)$ )? Insbesondere: Was sind die  $dx_i$ ?

Seien  $p_i : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$  die  $i$ -ten Koordinatenfunktionen  $p_i(x_1, \dots, x_m) = x_i$  (= Projektion auf die  $i$ -te Koordinatenachse) mit:

$$p_i(x) = x_i \Rightarrow p_i(\lambda x + \mu y) = \lambda x_i + \mu y_i = \lambda p_i(x) + \mu p_i(y)$$

$p_i$  ist eine lineare Abbildung  $\Rightarrow dp_i(x^0) = p_i \forall x^0$ . Ausgerechnet ergibt sich:

$$dp_i(x^0) = \left( \frac{\partial p_i}{\partial x_1}(x^0), \dots, \frac{\partial p_i}{\partial x_m}(x^0) \right) = (0, \dots, 0, \overset{i}{1}, 0, \dots, 0)$$

Wie wirkt diese lineare Abbildung?  $dp_i(x^0)x = x_i$  für ein beliebiges  $x_i \in \mathbb{R}$ . Also lässt man häufig  $x^0$  weg, weil  $dp_i$  gar nicht von  $x^0$  abhängt und man schreibt vereinfacht statt  $p_i$  einfach  $x_i$ . Dann kann man  $\forall h \in \mathbb{R}^m$  schreiben:

$$df(x^0)h = \sum_{i=1}^m \frac{\partial f}{\partial x_i}(x^0)h_i = \sum_{i=1}^m \frac{\partial f}{\partial x_i}(x^0) \underbrace{dx_i(h)}_{=h_i} = \left( \sum_{i=1}^m \frac{\partial f}{\partial x_i}(x^0)dx_i \right) (h)$$

$$df(x^0) = \sum_{i=1}^m \frac{\partial f}{\partial x_i}(x^0)dx_i$$

Später am Ende des zweiten Semesters wird (6.8) als Differentialform wieder auftauchen.

#### Bemerkung

Höhere partielle Ableitungen sind schon erklärt. Höhere Ableitungen kann man auch „strukturell“ erklären: Statt linearer entstehen multilineare Abbildungen. (Es existiert ein Zusammenhang mit dem Begriff des Tensors.)

## 6.2 Eigenschaften differenzierbarer Funktionen und Anwendungen

### 6.2.1 Differentiationsregeln

#### Satz 6.10 Allgemeine Differentiationsregeln

Seien  $f, g : G \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  in  $x^0 \in G$  differenzierbar und  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ .

1.  $\lambda f + \mu g$  ist in  $x^0$  differenzierbar und  $D(\lambda f + \mu g)(x^0) = \lambda Df(x^0) + \mu Dg(x^0)$
2. **Produktregel** ( $n = 1!$ ):  $f \cdot g$  ist in  $x^0$  differenzierbar und  $D(f \cdot g)(x^0) = g(x^0)Df(x^0) + f(x^0)Dg(x^0)$
- Quotientenregel** ( $n = 1!$ ):  $\frac{f}{g}$  ist in  $x^0$  differenzierbar und  $D\left(\frac{f}{g}\right)(x^0) = \frac{g(x^0)Df(x^0) - f(x^0)Dg(x^0)}{g(x^0)^2}$

#### Beweis

1. wie bei einer Variablen (Übung: Formulieren Sie diesen Beweis!)
2. Produktregel: Verwende (6.4b) in der Formulierung mit  $h$ :

$$F(x^0 + h) - F(x^0) = F'(x^0) \cdot h + r(h)$$

Angewendet auf  $f, g$  und  $f \cdot g$ :

$$f(x^0 + h)g(x^0 + h) - f(x^0)g(x^0) = \underbrace{[f(x^0) + f'(x^0)h + r_1(h)]}_{=f(x^0+h)} \cdot \underbrace{[g(x^0) + g'(x^0)h + r_2(h)]}_{=g(x^0+h)} - f(x^0)g(x^0)$$

(geeignet zusammenfassen)

$$= [f(x^0)g'(x^0) + g(x^0)f'(x^0)] h + r(h)$$

mit  $r(h) = [f(x^0) + f'(x^0)h] r_2(h) + [g(x^0) + g'(x^0)h] r_1(h) + r_1(h)r_2(h) + (f'(x^0))(g'(x^0))$ .

Beachte:  $r(h) \in \mathbb{R}$ . Zu zeigen:  $r(h) = o(\|h\|)$ , d.h.  $\frac{r(h)}{\|h\|} \rightarrow 0$  für  $h \rightarrow 0$ . Für die ersten Summanden

von  $r(h)$  ist das einfach. Beachte dabei  $\frac{r_1(h)}{\|h\|} \rightarrow 0$ ,  $\frac{r_2(h)}{\|h\|} \rightarrow 0$  und für jede lineare Abbildung  $B : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  gilt:  $\|By\| \leq C \|y\|$ ,  $C = C(B)$ .

$$\frac{|f(x^0) + f'(x^0)h| \cdot |r_2(h)|}{\|h\|} \leq \underbrace{|f(x^0)|}_{=const.} \underbrace{\frac{|r_2(h)|}{\|h\|}}_{\rightarrow 0} + \underbrace{\frac{|f'(x^0)h| \cdot |r_2(h)|}{\|h\|}}_{\leq \frac{C\|h\| \cdot |r_2(h)|}{\|h\|} = C|r_2(h)| \rightarrow 0} \rightarrow 0$$

Analog für den zweiten und dritten Summand. Für den vierten Summanden gilt:

$$|f'(x^0)h| |g'(x^0)h| \leq C_1 \|h\| C_2 \|h\| \Rightarrow \frac{|f'(x^0)h| |g'(x^0)h|}{\|h\|} \leq C_1 C_2 \|h\| \rightarrow 0$$

Also  $\frac{r(h)}{\|h\|} \rightarrow 0$ . Daraus folgt die Produktregel.

■

#### Bemerkung

Aus 1. folgt:

- Die in  $G \in \mathbb{R}^m$  differenzierbaren Funktionen  $f : G \rightarrow \mathbb{R}^n$  bilden einen Vektorraum.
- Die Ableitung  $D$  ist eine lineare Abbildung, da  $D(\lambda f + \mu g) = \lambda Df + \mu Dg$ .

#### Satz 6.11 Verallgemeinerte Kettenregel

Seien (mit geeigneten Definitionsbereichen)  $g : G \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  in  $x^0 \in G$  und  $f : H \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$  in  $y^0 = g(x^0) \in H$  differenzierbar, wobei  $G, H$  offene Mengen sind. Dann ist  $F := f \circ g$  in  $x^0$  differenzierbar und es gilt:

$$(DF)(x^0) = D(f \circ g)(x^0) = (Df)(y^0) \cdot (Dg)(x^0)$$

Die zugehörigen Jacobimatrix ist

$$\frac{\partial(F_1, \dots, F_k)}{\partial(x_1, \dots, x_m)}(x^0) = \frac{\partial(f_1, \dots, f_k)}{\partial(y_1, \dots, y_n)}(y^0) \cdot \frac{\partial(g_1, \dots, g_n)}{\partial(x_1, \dots, x_m)}(x^0)$$

#### Bemerkung

Mit  $f \circ g = F : G \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^k$  ergibt sich für  $(DF)(x^0)$ :

$$\left. \begin{array}{l} (Dg)(x^0) : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n \\ (Df)(y^0) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k \end{array} \right\} \Rightarrow (DF)(x^0) : \mathbb{R}^m \xrightarrow{\text{linear}} \mathbb{R}^k$$

#### Beweis

Nach Voraussetzung gilt:

$$\begin{aligned} g(x^0 + h) &= g(x^0) + g'(x^0)h + \|h\| \cdot R_1(h) \text{ mit } R_1(h) \rightarrow 0 \text{ für } h \rightarrow 0 \\ f(y^0 + k) &= f(y^0) + f'(y^0)k + \|k\| \cdot R_2(k) \text{ mit } R_2(k) \rightarrow 0 \text{ für } k \rightarrow 0 \end{aligned}$$

Wir machen Gebrauch davon, dass wir die Freiheit haben, wie  $k \rightarrow 0$  realisiert wird. Dazu setzen wir  $k := g'(x^0) \cdot h + \|h\| \cdot R_1(h)$  ( $\in \mathbb{R}^n$ ). Wenn  $h \rightarrow 0$ , dann auch  $k \rightarrow 0$ ! Damit folgt:

$$\begin{aligned}
(f \circ g)(x^0 + h) &= f(g(x^0 + h)) = f(g(x^0)) + f'(y^0) [g'(x^0)h + \|h\| R_1(h)] + \|k\| R_2(k) \\
&= f(g(x^0)) + f'(y^0) \cdot g'(x^0)h + \|h\| \underbrace{\left[ f'(y^0) \cdot R_1(h) + \frac{\|k\|}{\|h\|} R_2(k) \right]}_{=: R(h)}
\end{aligned}$$

Zu zeigen:  $R(h) \rightarrow 0$  für  $h \rightarrow 0$ . Zunächst gilt:

$$\begin{aligned}
\|k\| &\leq \|g'(x^0)h\| + \|h\| \cdot \|R_1(h)\| \leq \text{benutze Stetigkeit der linearen Abbildung } g'(x^0) \\
&\leq C \|h\| + \|h\| \cdot \|R_1(h)\| \Rightarrow \frac{\|k\|}{\|h\|} \leq C + \|R_1(h)\| \quad (*)
\end{aligned}$$

Wenn  $h \rightarrow 0$ , dann gilt aber:

1.  $R_1(h) \rightarrow 0 \Rightarrow f'(y^0) \cdot R_1(h) \rightarrow 0$  (mit Stetigkeit von  $f'(y^0)$ )
2.  $k \rightarrow 0 \Rightarrow R_2(k) \rightarrow 0 \Rightarrow \frac{\|k\|}{\|h\|} R_2(k) \rightarrow 0$

Insgesamt ergibt sich  $R(h) \rightarrow 0$  für  $h \rightarrow 0$ . Damit ist der 1. Teil des Satzes gezeigt. Der 2. Teil, das Produkt der Jacobi-Matrizen, ergibt sich unmittelbar, da das Hintereinanderausführen linearer Abbildungen der Multiplikation der entsprechenden Matrizen entspricht. ■

### Beispiel 6.8

$$m = n = k = 2$$

$$g = \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} g_1(x_1, x_2) = x_1 x_2 \\ g_2(x_1, x_2) = x_1 + x_2 \end{matrix} \quad f = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} f_1(y_1, y_2) = \sin y_1 + \cos y_2 \\ f_2(y_1, y_2) = y_1 \cdot \cos y_2 \end{matrix}$$

Die Funktion  $F = f \circ g$  ist also von der Gestalt:

$$F = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} F_1(x_1, x_2) = f_1(g_1(x_1, x_2), g_2(x_1, x_2)) = \sin(x_1 x_2) + \cos(x_1 + x_2) \\ F_2(x_1, x_2) = f_2(g_1(x_1, x_2), g_2(x_1, x_2)) = x_1 x_2 \cdot \cos(x_1 + x_2) \end{matrix}$$

Gesucht:  $F'(x) = f'(g(x))'$ . Man kann entweder einfach  $DF(x)$  bestimmen oder die Kettenregel anwenden.

Dazu muss man zuerst  $(Df)(y)$  und  $(Dg)(x)$  bestimmen.

$$f'(y) = \begin{pmatrix} \cos y_1 & -\sin y_2 \\ \cos y_2 & -y_1 \sin y_2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad g'(x) = \begin{pmatrix} x_2 & x_1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$F'(x) = (f \circ g)'(x) = (Df \cdot Dg)(x) = \begin{pmatrix} x_2 \cos(x_1 x_2) - \sin(x_1 + x_2) & x_1 \cos(x_1 x_2) - \sin(x_1 + x_2) \\ x_2 \cos(x_1 + x_2) - x_1 x_2 \sin(x_1 + x_2) & x_1 \cos(x_1 + x_2) - x_1 x_2 \sin(x_1 + x_2) \end{pmatrix}$$

### Beispiel 6.9

Sehr wichtiger Fall der Kettenregel:  $m=k, n=1$

$$f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(y) = f(y_1, \dots, y_m), \quad g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m, \quad g(x) = \begin{pmatrix} g_1(x) \\ \vdots \\ g_m(x) \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad F(x) = f(g_1(x), \dots, g_m(x))$$

$$F'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x) = \left( \frac{\partial f}{\partial y_1}(g(x)), \dots, \frac{\partial f}{\partial y_m}(g(x)) \right) \cdot \begin{pmatrix} g'_1(x) \\ \vdots \\ g'_m(x) \end{pmatrix} = \frac{\partial f}{\partial y_1}(g(x)) \cdot g'_1(x) + \dots + \frac{\partial f}{\partial y_m}(g(x)) \cdot g'_m(x)$$



**Beispiel 6.10** „Implizite Differentiation“ - Formale Betrachtung

$f$  sei eine Funktion von 2 Variablen ( $f(y_1, y_2)$ ) und  $\varphi : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ . Es sei  $f(x, \varphi(x)) = 0 \forall x \in (a, b)$ . Gesucht ist  $\varphi'(x)$ . Anwendung des obigen Beispiels: Betrachte  $g : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^2$  mit  $g(x) = \begin{pmatrix} x \\ \varphi(x) \end{pmatrix}$ .

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}, (f \circ g)(x) = f(x, \varphi(x)) = 0 \forall x \in (a, b) \\ 0 &= \frac{\partial f}{\partial y_1} g'_1(x) + \frac{\partial f}{\partial y_2} g'_2(x) = \frac{\partial f}{\partial y_1}(x, \varphi(x)) \cdot 1 + \frac{\partial f}{\partial y_2}(x, \varphi(x)) \cdot \varphi'(x) \\ \varphi'(x) &= \frac{\frac{\partial f}{\partial y_1}(x, \varphi(x))}{\frac{\partial f}{\partial y_2}(x, \varphi(x))} = \frac{f_{y_1}(x, \varphi(x))}{f_{y_2}(x, \varphi(x))} \quad (6.13) \end{aligned}$$

**Bemerkung**

1. Diese Problematiken werden uns im Kapitel über „implizite Funktionen“ genauer beschäftigen.
2. In (6.13) muss der Nenner von 0 verschieden sein.
3. Häufig wird diese Betrachtung angewendet, wenn man eine Gleichung der Form  $f(x, y) = 0$  nach  $y$  auflösen möchte. Dann wird  $y = y(x) =: \varphi(x)$ , dann will man auf  $\varphi'$  die Gleichung (6.13) anwenden.

**Achtung:**  $\varphi : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  muss auch wirklich existieren!

**Beispiel 6.11** In diesen beiden Fällen existiert  $\varphi(x)$  nicht.

Sei  $f(x, y) = 1 + x^2 + y^2 = 0$ . Wende formal (6.13) an. Dann ist  $y'(x) = \varphi'(x) = -\frac{x}{y}$ . Beachte: Dies ist **Unsinn**, da  $f(x, y) = 0$  in  $\mathbb{R}$  nicht lösbar ist.  $\Rightarrow y'(x) = \varphi'(x) = -\frac{x}{y}$  Unsinn!  $f(x, y) = 0$  nie zu erfüllen.  
 Anderes Beispiel: Sei  $f(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$ , also  $y = \sqrt{1 - x^2}$  und  $y' = -\frac{x}{y} = \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}$   
 Formal erfüllt der Punkt  $(1, 0)$  die Gleichung  $f(1, 0) = 0$ , aber  $y'(1)$  existiert nicht.

**6.2.2 Mittelwertsätze und Anwendungen****Satz 6.12** Satz von Rolle

Sei  $f$  in  $[a, b]$  stetig, in  $(a, b)$  differenzierbar und  $f(a) = f(b) = 0$ . Dann  $\exists c \in (a, b) : f'(c) = 0$ .

**Beweis**

Gelte o.E.d.A.  $f \neq 0, \exists x_0 \in (a, b) : f(x_0) > 0$ . Dann sei  $G = \sup_{x \in [a, b]} f(x) > 0$ . Nach Sätzen über stetige Funktionen gilt:  $G < \infty$  und  $\exists c : f(c) = G$ . Wir behaupten  $f'(c) = 0$  und betrachten dazu den Differenzenquotienten  $q(c, h) := \frac{f(c+h) - f(c)}{h}$ . Für kleine  $h$  gilt:  $f(c) \geq f(c+h)$ . Außerdem existiert  $\lim_{h \rightarrow 0} q(c, h) = f'(c)$ , da  $f$  in  $(a, b) \ni c$  differenzierbar ist.

$$\left. \begin{aligned} h > 0 &\Rightarrow q(c, h) \leq 0 \Rightarrow f'(c) \leq 0 \\ h < 0 &\Rightarrow q(c, h) \geq 0 \Rightarrow f'(c) \geq 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow f'(c) = 0$$

■

**Satz 6.13** Mittelwertsatz

Sei  $f$  in  $[a, b]$  stetig, in  $(a, b)$  differenzierbar. Dann existiert ein  $c \in (a, b)$  mit  $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ .

**Beweis**

durch Zurückführung auf Satz von Rolle

Betrachte die Hilfsfunktion  $g$  mit  $g(x) := f(x) - f(a) - \frac{x-a}{b-a}(f(b) - f(a))$ . Dann ist  $g(a) = 0$  und  $g(b) = 0$ , d.h.  $g$  erfüllt die Vorbedingungen des Satzes von Rolle. Also  $\exists c \in (a, b) : g'(c) = 0$ . Man erhält:

$$0 = g'(c) = f'(c) - \frac{1}{b-a}(f(b) - f(a)) \Rightarrow f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b-a}$$

**Bemerkung**

1.  $c$  ist i. A. nicht eindeutig bestimmt.
2. Der Satz von Rolle gilt auch für  $f(a) = f(b) \neq 0$ . Zum Beweis muss man einfach  $f$  um  $f(a) = f(b)$  verschieben.
3. Eine Umformung des Mittelwertsatzes ergibt sich, indem man  $c$  anders beschreibt:  $\exists \vartheta \in (0, 1)$  mit  $c = a + \vartheta(b-a)$  (etwa  $\vartheta = \frac{c-a}{b-a}$ )
4. Dann lautet der Mittelwertsatz wie folgt:  $\exists \vartheta \in (0, 1) : f(b) - f(a) = f'(a + \vartheta(b-a)) \cdot (b-a)$ .

**Satz 6.14**

## Quotientenmittelwertsatz

Seien  $f, g$  in  $[a, b]$  stetig, in  $(a, b)$  differenzierbar und  $g'(x) \neq 0 \forall x \in (a, b)$ . Dann gilt:

$$\exists c \in (a, b) : \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

Achtung: Das  $c$  ist im Zähler und Nenner dasselbe.

**Beweis**

Aus dem MWS und  $g'(x) \neq 0 \forall x \in (a, b)$  folgt  $g(b) - g(a) \neq 0$ . Wende den Satz von Rolle auf

$$h(x) = f(x) - f(a) - \frac{g(x) - g(a)}{g(b) - g(a)}(f(b) - f(a))$$

an. Also ist  $h(a) = h(b) = 0 \Rightarrow \exists c \in (a, b) : h'(c) = 0$ . Daraus folgt durch Auflösen nach  $\frac{f'(x)}{g'(x)}$  der Satz. ■

Eine Anwendung ist die folgende sehr wichtige Regel.

**Satz 6.15**

## Regel von de l'Hospital

Seien  $f, g$  in  $[a, b]$  stetig, in  $(a, b)$  differenzierbar,  $f(a) = g(a) = 0$  und  $g'(x) \neq 0 \forall x \in (a, b)$ . Dann gilt:

$$\lim_{x \rightarrow a+0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a+0} \frac{f(x)}{g(x)} = A$$

**Beweis**

Aus dem Satz von Rolle und  $g(a) = 0, g'(x) \neq 0 \forall x \in (a, b)$  folgt:  $g(x) \neq 0 \forall x \in (a, b)$ . Wähle nun eine Folge  $(x_n)$  mit  $a < x_n < b$  und  $x_n \rightarrow a + 0$ . Auf die Intervalle  $[a, x_n]$  wende jeweils den Quotientenmittelwertsatz an.

$$\exists c_n \in (a, x_n) : \frac{f(x_n)}{g(x_n)} = \frac{f(x_n) - f(a)}{g(x_n) - g(a)} = \frac{f'(c_n)}{g'(c_n)} \rightarrow A$$

Die Konv. ergibt sich aus  $x_n \rightarrow a + 0 \Rightarrow c_n \rightarrow a + 0$ . Oben sieht man, dass  $\lim_{x \rightarrow a+0} \frac{f(x)}{g(x)} = A$ . ■

**Bemerkung**

Diese Regel hat sehr viele Modifikationen.

1.  $A$  kann  $\pm\infty$  sein.  $a$  kann ebenfalls  $-\infty$  sein. Der Satz gilt in diesem Falle analog mit  $\lim_{x \rightarrow b-0} \dots$ . Auch  $b = \infty$  ist möglich.
2. Statt  $f(a) = g(a) = 0$  reicht  $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow a+0} g(x) = 0$  (dasselbe für  $\infty$ ).
3. Gegebenenfalls muss man die Regel mehrfach anwenden, wenn man  $\lim_{x \rightarrow \dots} \frac{f'(x)}{g'(x)}$  noch nicht bestimmen kann.

**Beispiel 6.12**

$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{\alpha x}}{x} (= \frac{\infty}{\infty} = \text{n. def.})$  Betrachte die Ableitungen:  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\alpha e^{\alpha x}}{1} = \infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{\alpha x}}{x} = \infty$

Der Einfachheit halber schreibt man zwischen beiden Grenzwerten ein Gleichheitszeichen, auch wenn noch nicht gesichert ist, ob die Grenzwerte existieren.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{1} = 0$$

Gegebenenfalls muss man erst umformen, bevor man die Regel anwenden kann.

$$\lim_{x \rightarrow 0+0} x^x = \lim_{x \rightarrow 0+0} e^{x \log x}$$

Betrachten den Exponenten:  $\lim_{x \rightarrow 0+0} x \log x = \lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{\log x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0+0} -x = 0$   
 $\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0+0} e^{x \log x} = e^0 = 1$

Die folgenden Begriffe sind bereits aus der Schule bekannt.

**Definition 6.16**

Sei  $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  und  $x_0 \in (a, b)$

1.  $f$  hat in  $x_0$  ein **lokales (relatives) Extremum**, wenn es eine Umgebung  $U(x_0)$  gibt, für die gilt:
  - für relative Minima:  $f(x) > f(x_0) \forall x \in U(x_0) \setminus \{x_0\}$
  - für relative Maxima:  $f(x) < f(x_0) \forall x \in U(x_0) \setminus \{x_0\}$
2.  $f$  hat in  $x_0$  einen **Wendepunkt**, wenn in  $x_0$  ein lokales Extremum der Ableitung  $f'$  vorliegt.

Im folgenden Satz sei  $f$  in  $[a, b]$  so oft differenzierbar, wie es im Satz gebraucht wird.

**Satz 6.17**

1.  $f$  ist in  $(a, b)$  genau dann monoton wachsend (fallend), wenn  $f'(x) \geq 0$  ( $f'(x) \leq 0$ )  $\forall x \in (a, b)$ .
2.  $f$  ist in  $(a, b)$  genau dann streng monoton wachsend (fallend), wenn  $f$  in  $(a, b)$  monoton wachsend (fallend) ist und *kein* Teilintervall  $I \subset (a, b)$  existiert, für das gilt:  $f'(x) = 0 \forall x \in I$ .

**Beweis**

Alle Teilbeweise sind ähnlich. Wir zeigen 1. für wachsende Monotonie.

**Hin-Richtung:** Betrachte  $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \forall x_0 \in (a, b)$ . Für  $h > 0$  ist  $f(x_0+h) - f(x_0) \geq 0$ , für  $h < 0$  ist  $f(x_0+h) - f(x_0) \leq 0$ . Also ist  $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \geq 0 \Rightarrow f'(x_0) \geq 0$ .

**Rück-Richtung:** Sei  $a < x_1 < x_2 < b$ . Wende den Mittelwertsatz auf  $[x_1, x_2]$  an:

$$f(x_2) - f(x_1) = \underbrace{f'(x_1 + \vartheta(x_2 - x_1))}_{\in [x_1, x_2]} \cdot \underbrace{(x_2 - x_1)}_{\geq 0} \geq 0 \Rightarrow f(x_2) \geq f(x_1)$$



**Bemerkung**

Zu 2.: In einzelnen Punkten darf die Ableitung verschwinden.  $f(x) = x^3$  zum Beispiel ist streng monoton wachsend, aber  $f'(0) = 0$ .

**Satz 6.18**

Sei  $f$  in  $(a, b)$  zweimal stetig differenzierbar und  $x_0 \in (a, b)$ .

1. notwendige Bedingung für relative Extrema:  $f'(x_0) = 0$   
 hinreichende Bedingung für relative Minima:  $f'(x_0) = 0 \wedge f''(x_0) > 0$   
 hinreichende Bedingung für relative Maxima:  $f'(x_0) = 0 \wedge f''(x_0) < 0$
2. notwendige Bedingung für Wendepunkte:  $f''(x_0) = 0$   
 hinreichende Bedingung für Wendepunkte:  $f''(x_0) = 0 \wedge f'''(x_0) \neq 0$

Man kann weitere Bedingungen aufschreiben (unter Einbeziehung höherer Ableitungen), etwa für relative Extrema:  $f'(x_0) = \dots = f^{(n-1)}(x_0) = 0 \wedge f^{(n)}(x_0) \neq 0$

Im Folgenden wird der Mittelwertsatz für Funktionen mehrerer Variablen diskutiert.

**Satz 6.19****Mittelwertsatz**

Sei  $G \subset \mathbb{R}^m$  offen,  $f : G \rightarrow \mathbb{R}$  differenzierbar und  $x^0, x^0 + h \in G$  so, dass auch noch die Verbindungsstrecke zwischen  $x^0$  und  $x^0 + h$  in  $G$  liegt. Dann gilt:

$$\exists \vartheta \in (0, 1) : f(x^0 + h) = f(x^0) + \sum_{i=1}^m \frac{\partial f}{\partial x_i}(x^0 + \vartheta h) \cdot h_i$$

**Bemerkung**

Vergleiche diesen Mittelwertsatz mit dem Mittelwertsatz für eine Variable:

$$f(b) - f(a) = f'(a + \vartheta(b-a)) \cdot (b-a) \Rightarrow \text{mit } a = x^0 \text{ und } b = x^0 + h \Rightarrow f(x^0 + h) = f(x^0) + f'(x^0 + \vartheta h) \cdot h$$

**Beweis**

Zurückführung auf den Mittelwertsatz für Funktionen einer Variablen

Setze  $g : [0, 1] \rightarrow G, g(t) = x^0 + th$  (also ist  $W(g)$  die Verbindungsstrecke zwischen  $x^0$  und  $x^0 + h$ ) und  $\varphi = f \circ g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, \varphi(t) = f(x^0 + th)$ .  $\varphi$  ist in  $[0, 1]$  differenzierbar. Mit Kettenregel ist:

$$\varphi'(t) = f'(g(t)) \cdot g'(t)$$

Wende den Mittelwertsatz auf  $\varphi$  und  $[0, 1]$  an.

$$\begin{aligned} \exists \vartheta \in (0, 1) : \frac{\varphi(1) - \varphi(0)}{1 - 0} &= \varphi'(0 + \vartheta(1 - 0)) = \varphi'(\vartheta) \\ \varphi'(t) &= f'(g(t)) \cdot \underbrace{g'(t)}_{=h} = \left( \frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_m} \right)(g(t)) \cdot h \end{aligned}$$

Also insgesamt:

$$\underbrace{f(x^0 + h)}_{=\varphi(1)} = \underbrace{f(x^0)}_{=\varphi(0)} + \sum_{i=1}^m \frac{\partial f}{\partial x_i}(x^0 + \vartheta h) \cdot h_i$$

■

**Bemerkung**

1. Mit dem Mittelwertsatz kann man den Satz von Schwarz zeigen.
2. **Achtung:** Für Abbildungen  $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  gilt ein ähnlicher Satz nicht, aber es existieren sogenannte Schrankensätze. Man kann die Differenz der Funktionswerte durch die Ableitung abschätzen. (Dafür brauchen wir Hilfsmittel aus der Integralrechnung.)

## 6.3 Taylorformel und Taylorscher Satz

Motivation: Sei  $f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + \dots + a_n(x - x_0)^n$ , wobei  $x_0 \in \mathbb{R}$  fest und  $x \in \mathbb{R}$  beliebig gegeben. Wodurch sind die  $a_i$  bestimmt?

Aus dem Fundamentalsatz der Algebra folgt: Die  $a_i$  sind bestimmt durch die Funktionswerte an  $(n+1)$  Stellen.

Betrachte eine beliebig oft differenzierbare analytische Funktion  $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$  für ein  $x$  aus dem Konvergenzintervall der Potenzreihe. Unmittelbar folgt:  $a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$

Umgekehrt: Sei  $f \in C^\infty(a, b)$ , also in  $(a, b)$  beliebig oft differenzierbar. Bilde formal:

$$a_n := \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \text{ für ein } x_0 \in (a, b) \text{ und } \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$$

Konvergiert diese Potenzreihe? Wenn ja, hat dann ihre Summe etwas mit  $f(x)$  zu tun? Ja, manchmal.

**Theorem 6.20** Taylorformel für Funktionen einer Variablen

Sei  $I = (a, b)$ ,  $f \in C^{n+1}(I)$ . Dann gilt für alle  $x, x_0 \in I$ :

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(x_0 + \vartheta(x - x_0))}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1} \quad (6.14)$$

mit einem  $\vartheta \in (0, 1)$ , wobei  $\vartheta = \vartheta(x, x_0)$ . Dabei heißt

- $R_n(x, x_0) := \frac{f^{(n+1)}(x_0 + \vartheta(x - x_0))}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$  **Restglied der Taylorformel** in der Lagrange-Form
- $T_n(x, x_0) := f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$   **$n$ -tes Taylorpolynom** von  $f$  an  $x_0$

### Bemerkung

1. Die Darstellung als  $f(x) = T_n(x, x_0) + R$  mit einem beliebigen Rest wäre witzlos, denn das gilt immer.  
(Setze  $R := f(x) - T_n(x, x_0)$ .) Das Wertvolle an (6.14) besteht in der expliziten Beschreibung des Restgliedes.
2. Es existieren noch andere Darstellungen des Restes (siehe Literatur / spätere Übungen).
3. Für  $n = 0$  ist (6.14) der Mittelwertsatz.
4. (6.14) heißt:  $f$  wird durch  $T_n$  mit Fehler  $R_n$  approximiert.

**Beispiel 6.13** **Warnung** vor Fehlinterpretationen

1.  $f(x) = (x - x_0)^n \Rightarrow T_n(x, x_0) = 0, R_n(x, x_0) = (x - x_0)^{n+1}$
2.  $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$

Dieser Fall ist noch schlimmer.  $f$  ist beliebig oft differenzierbar  $\forall x \in \mathbb{R}$ . Für  $x_0 = 0$  erhält man:  $f^{(n)}(0) = 0 \forall n$ . Das heißt, dass  $T_n(x, x_0) = 0 \forall n$ . Alle Informationen über  $f(x \neq 0)$  stecken im Restglied, also wird  $f$  durch  $T_n$  ganz schlecht „approximiert“. Mit anderen Worten: Eine beliebig oft differenzierbare Funktion muss sich durchaus nicht in eine Potenzreihe entwickeln lassen.

**Beweis** des Theorems

Seien  $n, x, x_0$  fest. Trivialerweise existiert ein  $\varrho \in \mathbb{R}$  mit:

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + \frac{(x - x_0)^{n+1}}{(n+1)!} \varrho \quad (6.15)$$

Natürlich ist  $\varrho = \varrho(x, x_0)$ . Wir bestimmen  $\varrho$  geschickt und betrachten dazu

$$F(t) := f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(t)}{k!} (x - t)^k - \frac{(x - t)^{n+1}}{(n+1)!} \varrho \quad (6.16)$$

Hierbei liegt  $t$  in dem Intervall  $I_1$  mit den Grenzen  $x$  und  $x_0$ .  $F$  ist in  $I_1$  stetig differenzierbar und aufgrund von (6.15) und (6.16) ist  $F(x) = F(x_0) = 0$ . Nach Satz von Rolle existiert ein  $\vartheta \in (0, 1)$  mit  $F'(x_0 + \vartheta(x - x_0)) = 0$ .

$$F'(t) = 0 - \underbrace{f'(t)}_{\text{für } k=0} - \sum_{k=1}^n \left[ \frac{f^{(k+1)}(t)}{k!} (x - t)^k + \frac{f^{(k)}(t)}{k!} k \cdot (x - t)^{k-1} \right] + \frac{(x - t)^n}{n!} \varrho$$

Beachte, dass sich in der Summe fast alles weghebt.

$$= -\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!} (x - t)^n + \frac{(x - t)^n}{n!} \varrho \Rightarrow F'(x_0 + \vartheta(x - x_0)) = 0 \Rightarrow \underline{\varrho = f^{(n+1)}(x_0 + \vartheta(x - x_0))}$$

Im Idealfall ist  $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x, x_0) = 0$ .

**Satz 6.21**

Satz über die Taylorentwicklung von Funktionen einer Variable

Sei  $I$  ein offenes Intervall um  $x_0$  und  $f \in C^\infty(I)$ . Dann hat  $f$  für  $x \in I$  genau dann die Taylorentwicklung

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k \quad (6.17),$$

wenn das Restglied  $R_n(x)$  in der Taylorformel gegen 0 geht für  $n \rightarrow \infty$ . (6.17) heißt Taylorreihe von  $f$  an  $x_0$ .

**Beweis**

Wenn  $R_n \rightarrow 0$ , wird aus (6.14) die Taylorreihe. Wenn (6.17) gilt, dann hat (6.14) die Gestalt:

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + \underbrace{\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k}_{\text{Rest} \rightarrow 0, \text{ weil Reihe konvergiert}}$$

**Bemerkung**

1. Wenn (6.17) gilt, sagt man: „ $f$  ist an  $x_0$  in eine Taylorreihe entwickelbar“. Funktionen, die durch Potenzreihen bzw. Taylorreihen darstellbar sind, heißen **analytisch** (siehe Kapitel 3.4). Wenn  $f$  gegeben ist durch

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k \text{ mit } x, x_0 \in I,$$

dann ist die Potenzreihe auch genau die Taylorreihe von  $f$  an  $x_0$ , also:  $a_k = \frac{f^{(k)}}{k!}$ .

2. **Achtung:** „Analytisch“ ist stärker als „beliebig oft differenzierbar“ (siehe zum Beispiel  $e^{-\frac{1}{x^2}}$ ).
3. Um zu zeigen, dass  $R_n \rightarrow 0$ , muss man das Verhalten der Ableitungen von  $f$  kontrollieren.  
**Günstiger Fall:**  $|f^{(n)}(x)| \leq \alpha C^n \forall x \in I$  mit  $\alpha, C > 0$  fest  
 $\Rightarrow |R_n(x)| = \frac{|f^{(n+1)}(x_0 + \vartheta(x-x_0))|}{(n+1)!} \cdot |(x-x_0)^{n+1}| \leq \frac{\alpha \cdot C}{(n+1)!} \cdot |x-x_0|^{n+1} \rightarrow 0$  für  $n \rightarrow \infty$

**Beispiel 6.14**

Sei  $f(x) = \frac{1}{1-x}$  in einem Intervall  $I$  um 0 mit  $1 \notin I$ . Gesucht ist die Taylorreihe an  $x_0 = 0$ .  
 $\frac{1}{1-x}$  ist gerade die Summe der geometrischen Reihe  $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ . Dies ist auch die gesuchte Taylorreihe.  
 Zum eigenen Üben: Zeigen Sie, dass das Restglied der Taylorformel für  $n \rightarrow \infty$  gegen 0 geht.

**Beispiel 6.15**

Exponentialfunktion (analog für Sinus und Cosinus)

Sei  $f(x) = e^x$  und  $x_0 = 0$ . Wir verwenden hier nur  $(e^x)^{(n)} = e^x \Rightarrow f^{(n)}(0) = 1 \forall n$ .  
 Daraus ergibt sich die Taylor-Entwicklung  $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ , wenn  $R_n(x, 0) \rightarrow 0$  für  $n \rightarrow \infty$ .  

$$R_n(x, 0) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \underbrace{f^{(n+1)}(x_0 + \vartheta(x-x_0))}_{x_0=0} = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^{\vartheta x} \rightarrow 0$$

Jetzt wollen wir die Taylorformel für Funktionen mehrerer Variablen finden. Das einzige wirkliche Problem ist geschicktes Aufschreiben. Dies soll an einer Funktion zweier Variablen demonstriert werden.

Sei  $x^0 = (x_1^0, x_2^0)$  und  $x^0 + h = (x_1^0 + h_1, x_2^0 + h_2)$ . Außerdem setzen wir  $\frac{\partial}{\partial x_i} = D_i$ , also zum Beispiel  $\frac{\partial f}{\partial x_i} = D_i f$ .  $f$  sei in der offenen Menge  $G \subset \mathbb{R}^2$  definiert und hinreichend oft stetig differenzierbar. Für hinreichend kleine  $\|h\|$  liegen  $x^0, x^0 + h$  und die Verbindungsstrecke zwischen diesen Vektoren ganz in  $G$ .

Analog zum Beweis der MWS definieren wir  $g(t) := f(x^0 + th)$   $t \in [0, 1], g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ , also  $g(0) = f(x^0)$  und  $g(1) = f(x^0 + h)$ . Wir werden  $g', \dots, g^{(k)}$  geschickt aufschreiben und auf  $g$  (eine Funktion einer Variablen) die Taylorformel anwenden.

Kettenregel:  $g'(t) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x^0 + th) \cdot \frac{\partial(x_1^0 + th_1)}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x_2}(x^0 + th) \cdot \frac{\partial(x_2^0 + th_2)}{\partial t}$   
 $g'(t) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x^0 + th) \cdot h_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(x^0 + th) \cdot h_2 = D_1 f \cdot h_1 + D_2 f \cdot h_2 = (h_1 \cdot D_1 + h_2 \cdot D_2) f$

Hierbei sind  $D_1 f$  und  $D_2 f$  wiederum Funktionen von  $x^0 + th$ , weshalb sich analog ergibt:  
 $g''(t) = h_1(D_1 f)' + h_2(D_2 f)' = h_1[h_1 D_1(D_1 f) + h_2 D_2(D_1 f)] + h_2[h_1 D_1(D_2 f) + h_2 D_2(D_2 f)]$   
 $g''(t) = [h_1^2 D_1^2 + h_1 h_2 D_1 D_2 + h_1 h_2 D_2 D_1 + h_2^2 D_2^2] f = (h_1 D_1 + h_2 D_2)^2 f$

Durch Induktion zeigt man  $g^{(k)}(t) = (h_1 D_1 + h_2 D_2)^k f(x^0 + th)$ . Hierbei vereinbaren wir:  $(h_1 D_1 + h_2 D_2)^0 f = f$ . Sei nun  $f \in C^{n+1}(G) \Rightarrow g \in C^{n+1}([0, 1])$ . Wende die Taylorformel für  $g$  an  $t = 0$  an. Dann existiert ein  $\vartheta \in (0, 1)$ :

$$\underbrace{g(1)}_{\cong f(x^0+h)} = g(0) + g'(0) + \frac{g''(0)}{2!} + \dots + \frac{g^{(n)}(0)}{n!} + \frac{g^{(n+1)}(\vartheta)}{(n+1)!}$$

$$\Rightarrow f(x^0 + th) = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} (h_1 D_1 + h_2 D_2)^k f(x^0) + \frac{1}{(n+1)!} (h_1 D_1 + h_2 D_2)^{n+1} f(x^0 + \vartheta h)$$

**Theorem 6.22**

Taylorformel für Funktionen mehrerer Variablen

Sei  $G \subset \mathbb{R}^m$  offen und  $f \in C^{n+1}(G)$ . Die Punkte  $x^0$ ,  $x^0 + h$  und die Verbindungsstrecke zwischen diesen Punkten liege in  $G$ . Dann existiert ein  $\vartheta \in (0, 1)$ :

$$f(x^0 + h) = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} (h_1 D_1 + \dots + h_m D_m)^k f(x^0) + \underbrace{\frac{1}{(n+1)!} (h_1 D_1 + \dots + h_m D_m)^{n+1} f(x^0 + \vartheta h)}_{\text{Restglied}} \quad (6.18)$$

Für kleine  $n$  ergeben sich wichtige Spezialfälle. Für  $n = 0$  ist (6.18) der Mittelwertsatz:

$$\begin{aligned} f(x^0 + h) &= f(x^0) + (h_1 D_1 + \dots + h_m D_m) f(x^0 + \vartheta h) \\ &= f(x^0) + \sum_{i=1}^m \frac{\partial f(x^0 + \vartheta h)}{\partial x_i} h_i = f(x^0) + \langle (f'(x^0 + \vartheta h))^T, h \rangle \end{aligned} \quad (6.19)$$

Für  $n = 1$  folgt:

$$f(x^0 + h) = f(x^0) + \langle (f'(x^0))^T, h \rangle + \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^m \frac{\partial^2 f(x^0 + \vartheta h)}{\partial x_j \partial x_k} h_j h_k \quad (6.20)$$

**Bemerkung**

1. Wenn das Restglied gegen 0 geht, erhält man eine Taylorreihe, also eine Potenzreihe mit mehreren Variablen.
2. Die Matrix  $H(x) := \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k} \right)_{j,k}$  der zweiten Ableitungen von  $f$  heißt Hesse-Matrix.  
(6.20) kann so geschrieben werden:  $f(x^0 + h) = f(x^0) + \langle f'(x^0)^T, h \rangle + \frac{1}{2} \langle Hh, h \rangle$

$$H_{jk} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}, (Hh)_k = \sum_j H_{kj} h_j \Rightarrow \langle Hh, h \rangle = \sum_k (Hh)_k h_k = \sum_{j,k} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k} h_j h_k$$

**Beispiel 6.16**

Entwickle  $f(x, y) = e^{x+y} \sin xy$  an  $(0, 1)$  bis zur dritten Ordnung. Man kann alle dritten Ableitungen ausrechnen und in (6.18) einsetzen *oder* auf bekannte Reihen zurückgreifen und dann ausmultiplizieren.

$$e^{x+y} = 1 + (x+y) + \frac{(x+y)^2}{2!} + \dots \quad \sin(xy) = xy - \frac{(xy)^3}{3!} + \dots$$

**6.4 Lokale Extrema von Funktionen mehrerer Variablen****Definition 6.23**

Sei  $G \subset \mathbb{R}^m$  offen und  $f : G \rightarrow \mathbb{R}$ . Man sagt,  $f$  hat an  $x^0 \in G$  ein **lokales/relatives Extremum**, wenn eine Umgebung  $U = U(x^0) \subset G$  existiert, sodass  $\forall x \in U$  gilt:

- für lokale Minima:  $f(x) \geq f(x^0)$
- für lokale Maxima:  $f(x) \leq f(x^0)$

Punkte aus  $G$ , in denen  $f'$  verschwindet, heißen **kritische** oder **stationäre Punkte**, d.h.  $x^0$  ist kritisch, wenn  $f'(x^0) = 0$ . Dabei ist 0 die lineare Abbildung  $x \mapsto 0$ .



**Satz 6.24** Notwendige Bedingung

$f$  sei wie in 6.23 definiert und möge partielle Ableitungen nach allen Variablen besitzen. Wenn  $x^0$  ein lokales Extremum von  $f$  ist, dann gilt  $f_{x_k}(x^0) = 0$  mit  $k = 1, \dots, m$ .

Falls  $f'(x^0)$  existiert (z.B. weil  $\frac{\partial f}{\partial x_k}$  für alle  $k$  stetig ist), dann heißt das, dass  $f'(x^0) = 0$ .  $x^0$  ist also ein kritischer Punkt von  $f$ .

**Beweis**

Trick: Betrachte die Hilfsfunktionen  $g_k$  mit  $k = 1, \dots, m$ , die definiert sind als

$$g_k(x) = f(x_1^0, \dots, x_{k-1}^0, x, x_{k+1}^0, \dots, x_m^0)$$

Die  $g_k$  sind Funktionen einer Variablen, die jeweils an  $x_k^0$  ein relatives Extremum haben.

Daraus folgt für die notwendige Bedingung:  $0 = \frac{\partial g_k}{\partial x}(x_k^0) \hat{=} \frac{\partial f}{\partial x_k}(x^0)$

Für die Formulierung hinreichender Bedingungen benötigen wir Kenntnisse aus der linearen Algebra.

**Definition 6.25**

Sei  $A = (a_{ij})$  eine symmetrische Matrix, d.h. alle Eigenwerte von  $A$  sind reell. Wir benutzen in  $\mathbb{R}^m$  das Standardskalarprodukt. Beachte:  $\langle Ax, x \rangle = \sum_{j,k} a_{jk} x_j x_k$ .  $A$  heißt

- **positiv definit**, wenn  $\langle Ax, x \rangle > 0 \ \forall x \in \mathbb{R}^m \setminus \{0\}$
- **negativ definit**, wenn  $\langle Ax, x \rangle < 0 \ \forall x \in \mathbb{R}^m \setminus \{0\}$
- **indefinit**, wenn  $\exists x, y \in \mathbb{R}^m : \langle Ax, x \rangle > 0 \wedge \langle Ay, y \rangle < 0$

**Satz 6.26** aus der linearen Algebra

1. Für  $A$  sind äquivalent:
  - (a)  $A$  ist positiv definit.
  - (b) Alle Eigenwerte von  $A$  sind größer als 0.
  - (c)  $\exists C > 0 : \langle Ax, x \rangle \geq C \|x\|^2 \ \forall x \in \mathbb{R}^m \quad \left( \Leftrightarrow \left\langle A \frac{x}{\|x\|}, \frac{x}{\|x\|} \right\rangle \geq C \ \forall x \in \mathbb{R}^m \setminus \{0\} \right)$
2. Für  $A$  sind äquivalent:
  - (a)  $A$  ist negativ definit.
  - (b) Alle Eigenwerte von  $A$  sind kleiner als 0.
  - (c)  $\exists C > 0 : \langle Ax, x \rangle \leq -C \|x\|^2 \ \forall x \in \mathbb{R}^m$
3.  $A$  ist genau dann indefinit, wenn es sowohl positive als auch negative Eigenwerte gibt.

**Beweis**

Für den ganzen Beweis siehe die Lineare-Algebra-Vorlesung.

Wir zeigen 1. (b)  $\Rightarrow$  (c). Seien  $\lambda_1, \dots, \lambda_m$  Eigenwerte von  $A$  und  $f_1, \dots, f_m$  eine Orthonormalbasis aus den zugehörigen Eigenvektoren.

$$x = x_1 \cdot f_1 + \dots + x_m \cdot f_m \Rightarrow Ax = x_1 \cdot Af_1 + \dots + x_m \cdot Af_m = x_1 \lambda_1 f_1 + \dots + x_m \lambda_m f_m$$

$$\langle Ax, x \rangle = \langle x_1 \lambda_1 f_1 + \dots + x_m \lambda_m f_m, x_1 \cdot f_1 + \dots + x_m \cdot f_m \rangle = \lambda_1 x_1^2 + \dots + \lambda_m x_m^2 \geq \min_{i=1, \dots, m} \lambda_i \|x\|^2$$

**Satz 6.27**

## Hinreichende Bedingungen

Sei  $f \in C^2(G)$  und  $x^0 \in G$  eine kritische Stelle, d.h.  $f'(x^0) = 0$ . Mit  $H(x^0) := \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}(x^0) \right)$  sei die Hesse-Matrix von  $f$  an  $x^0$  bezeichnet. Dann gilt:

- Ist  $H(x^0)$  positiv definit, so hat  $f$  an  $x^0$  ein (echtes) lokales Minimum.
- Ist  $H(x^0)$  negativ definit, so hat  $f$  an  $x^0$  ein (echtes) lokales Maximum.
- Ist  $H(x^0)$  indefinit, so hat  $f$  an  $x^0$  kein lokales Extremum.

**Beweis**

Wir beschränken uns auf den Fall, dass  $H(x^0)$  positiv definit ist. Die anderen Fälle folgen völlig analog. Benutze nun die Taylorformel (6.19) und beachte hierbei, dass  $f'(x^0) = 0$ .  $f(x^0 + h) = f(x^0) +$

$$\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^m \frac{\partial^2 f(x^0 + \vartheta h)}{\partial x_i \partial x_j} h_i h_j$$

$$f(x^0 + h) = f(x^0) + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^m \frac{\partial^2 f(x^0)}{\partial x_i \partial x_j} h_i h_j + \underbrace{\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^m \left( \frac{\partial^2 f(x^0 + \vartheta h)}{\partial x_i \partial x_j} - \frac{\partial^2 f(x^0)}{\partial x_i \partial x_j} \right) h_i h_j}_{=: R(h)}$$

$$f(x^0 + h) = f(x^0) + \frac{1}{2} \langle H(x^0)h, h \rangle + R(h)$$

$$\text{Umschreiben ergibt: } \frac{f(x^0 + h) - f(x^0)}{\|h\|^2} = \frac{1}{2\|h\|^2} \langle H(x^0)h, h \rangle + \underbrace{\frac{R(h)}{\|h\|^2}}_{=: r(h)} \quad (*)$$

wir zeigen, dass ein  $\delta > 0$  existiert, sodass für alle  $h$  mit  $\|h\| < \delta$  die linke Seite von (\*) positiv ist. Es gilt aufgrund der Dreiecksungleichung :

$$|r(h)| \leq \frac{1}{2} \sum_{i,j} \left| \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x^0 + \vartheta h) - \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x^0) \right| \frac{|h_i| \cdot |h_j|}{\|h\|^2} \leq \frac{1}{2} \sum_{i,j} \left| \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x^0 + \vartheta h) - \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x^0) \right|$$

Dieser Ausdruck konvergiert für  $h \rightarrow 0$  gegen 0, da  $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$  an  $x^0$  stetig ist.

Dass  $H(x^0)$  positiv definit ist, bedeutet:  $\exists C > 0 : \left\langle H(x^0) \frac{h}{\|h\|}, \frac{h}{\|h\|} \right\rangle \geq C > 0$  (\*\*). Also existiert ein  $\delta > 0$ , für das für alle  $h$  mit  $\|h\| < \delta$  gilt:  $x^0 + h \in G$  und  $|r(h)| < \frac{C}{2}$ , d.h.  $-\frac{C}{2} < r(h) < \frac{C}{2}$ . Aus (\*), (\*\*) folgt also, dass für  $\|h\| < \delta$  gilt:

$$\frac{f(x^0 + h) - f(x^0)}{\|h\|^2} \geq \frac{1}{2}C + r(h) > \frac{1}{2}C - \frac{1}{2}C = 0$$

Das heißt, in der Umgebung  $U(x^0) = \{x : \|x - x^0\| < \delta\}$  gilt:

$$\underbrace{f(x)}_{\cong f(x^0 + \vartheta h)} - f(x^0) > 0$$

■

**Beispiel 6.17**

1.  $f(x, y) := x^3 + y^3 - 3xy$ ,  $f_x = 3x^2 - 3y$ ,  $f_y = 3y^2 - 3x$ . Dann sind  $(0, 0)$  und  $(1, 1)$  kritische Punkte.  
Bilden der Ableitungen:  $f_{xx} = 6x$ ,  $f_{xy} = f_{yx} = -3$ ,  $f_{yy} = 6y$

Die Hessematrizen lauten:  $H(x, y) = \begin{pmatrix} 6x & -3 \\ -3 & 6y \end{pmatrix}$   $H(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$   $H(1, 1) = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$

Da  $H(0, 0)$  indefinit ist, liegt an diesem kritischen Punkt kein lokales Extremum von  $f$  vor.

$H(1, 1)$  hingegen ist mit den Eigenwerten 3 und 9 positiv definit, also gibt es an  $(1, 1)$  ein lokales Minimum von  $f$ .

2.  $f(x, y) = x^2 - y^2$  hat nur den kritischen Punkt  $(0, 0)$  einzige kritische Stelle.

Da  $H(0, 0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$  indefinit sind, liegt dort kein Minimum an  $f$  vor.

3.  $f(x, y) = x^3 - y^3$  hat den kritischen Punkt  $(0, 0)$ . Das Kriterium versagt:

$H(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ , aber an  $(0, 0)$  liegt (wie man leicht sieht) kein lokales Extremum von  $f$  vor.

## 6.5 Anfangsgründe der Vektoranalysis

### 6.5.1 Richtungsableitung mit Gradient

Sei  $G \subset \mathbb{R}^m$  offen und  $f : G \rightarrow \mathbb{R}, x^0 \in G$ . Um  $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x^0)$  zu bilden, betrachtet man den Differenzenquotienten  $x \rightarrow x^0$  längs der  $i$ -ten Koordinatenachse. Sei nun  $v = (v_1, \dots, v_m)^T$  ein Vektor, der eine Richtung repräsentiert.

**Definition 6.28**

Sei  $v \in \mathbb{R}^m$  fest. Wenn der Grenzwert

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x^0 + tv) - f(x^0)}{t} \quad (6.21)$$

existiert, heißt er **Richtungsableitung** von  $f$  in Richtung  $v$  im Punkt  $x^0$ . Für  $\|v\| = 1$  nennt man den Grenzwert Richtungsableitung von  $f$  nach  $v$  im Punkt  $x^0$ . In diesem Falle schreibt man  $(D_v f)(x^0)$ ,  $D_v f(x^0)$  oder  $\frac{\partial f}{\partial v}(x^0)$ .

**Satz 6.29**

Sei  $f$  in  $x^0$  differenzierbar, dann existiert in  $x^0$  die Ableitung in jeder Richtung  $v$  und es gilt:

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x^0) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x^0) \cdot v_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_m}(x^0) v_m = f'(x^0)v \quad (6.22)$$

Das heißt, die lineare Abbildung  $f'(x^0)$  wird auf  $v$  angewendet. (Das Ergebnis ist eine Zahl.)

**Beweis**

Zurückführung auf Funktionen einer Variablen

Sei  $\varphi(t) := f(x^0 + tv)$ . (6.21) bedeutet:  $\varphi'(0)$  wird betrachtet. Da  $f$  differenzierbar ist, kann die Kettenregel angewendet werden.

$$\varphi'(0) = \frac{\partial f}{\partial v}(x^0) = \sum_{i=1}^m \frac{\partial f}{\partial x_i}(x^0) \cdot v_i = \left( \frac{\partial f}{\partial x_1}(x^0), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_m}(x^0) \right) v$$

**Folgerung 6.30**

Einfachste Variante der Gradientendefinition

In  $\mathbb{R}^m$  sei  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  das Standardskalarprodukt,  $(e_i)$  die Standardorthonormalbasis,  $f$  und  $x^0$  wie oben. Dann existiert ein eindeutig bestimmter Vektor  $w \in \mathbb{R}^m$  mit

$$f'(x^0)v = \frac{\partial f}{\partial v}(x^0) = \langle w, v \rangle \quad \forall v \in \mathbb{R}^m \quad (\|v\| = 1)$$

$w$  heißt **Gradient** von  $f$  an  $x^0$ . Man schreibt  $w = \text{grad } f(x^0)$ .

Im Falle des Standardskalarproduktes und bezüglich  $(e_i)$  ist also:

$$\text{grad } f(x^0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x^0) \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_m}(x^0) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m$$

$$f'(x^0) \in L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}) \equiv (\mathbb{R}^m)' \equiv (\mathbb{R}^m)^*$$

$(\mathbb{R}^m)'$  bzw.  $(\mathbb{R}^m)^*$  heißt **Dualraum** zu  $\mathbb{R}^m$  bzw. **Raum der linearen Funktionale**.

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x^0) = \langle \text{grad } f(x^0), v \rangle \quad (6.23)$$

**Folgerung 6.31** Anspruchsvollere Variante der Gradientendefinition

Sei  $\langle \cdot, \cdot \rangle'$  ein beliebiges Skalarprodukt in  $\mathbb{R}^m$  und  $f$  und  $x^0$  wie oben. Dann existiert ein eindeutig bestimmter Vektor  $w \in \mathbb{R}^m$  mit  $f'(x^0)v = \langle w, v \rangle' \forall v \in \mathbb{R}^m$ .

$w$  heißt **Gradient** von  $f$  an  $x^0$  bzgl.  $\langle \cdot, \cdot \rangle'$ . Man schreibt manchmal  $w = \text{grad}_{\langle \cdot, \cdot \rangle'} f(x^0)$ .

$f'(x^0)v$  hängt überhaupt nicht von  $\langle \cdot, \cdot \rangle'$  ab, aber  $w$ .

**Satz 6.32**

Sei  $f : G \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$  in  $x^0 \in G$  stetig differenzierbar.

1. Ist  $\text{grad } f(x^0) = 0 (\in \mathbb{R}^m)$ , so verschwinden alle Richtungsableitungen.
2. Ist  $\text{grad } f(x^0) \neq 0$ , so gibt es unter allen Richtungsableitungen  $\frac{\partial f}{\partial v}(x^0)$  (also  $\|v\| = 1$ ) eine größte, nämlich in Richtung des Gradienten, d.h. für  $v = \frac{\text{grad } f(x^0)}{\|\text{grad } f(x^0)\|}$  ist  $\frac{\partial f}{\partial v}(x^0) = \|\text{grad } f(x^0)\|$ .  
Sprachgebrauch: grad zeigt in Richtung des größten Anstiegs.

**Beweis**

1. Folgt unmittelbar aus der Gradientendefinition.
2. Anwendung der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung  $|\langle a, b \rangle| \leq \|a\| \cdot \|b\|$

$$\left| \frac{\partial f}{\partial v}(x^0) \right| = |\langle \text{grad } f(x^0), v \rangle| \leq \|\text{grad } f(x^0)\| \cdot \underbrace{\|v\|}_{=1} = \|\text{grad } f(x^0)\|$$

$$\Rightarrow -\|\text{grad } f(x^0)\| \leq \frac{\partial f}{\partial v}(x^0) \leq \|\text{grad } f(x^0)\|$$

$$\text{Für } v = \frac{\text{grad } f(x^0)}{\|\text{grad } f(x^0)\|} \text{ ist } \frac{\partial f}{\partial v} = \left\langle \text{grad } f(x^0), \frac{\text{grad } f(x^0)}{\|\text{grad } f(x^0)\|} \right\rangle = \|\text{grad } f(x^0)\|$$

■

## Der Nabla-Operator

$$\nabla = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x_m} \end{pmatrix}, \quad \nabla f(x^0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x^0) \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_m}(x^0) \end{pmatrix} = \text{grad } f(x^0)$$

## 6.5.2 Felder, Divergenz, Rotation

Sei  $G \subset \mathbb{R}^m$  offen.

- Eine Abbildung  $\varphi : G \rightarrow \mathbb{R}$  heißt **skalares Feld** in  $G$ .
- Eine Abbildung  $v : G \rightarrow \mathbb{R}^m$  heißt **Vektorfeld** in  $G$ .

Die Stetigkeit und Differenzierbarkeit von Feldern ist bereits erklärt. Im folgenden sei  $\mathbb{R}^m$  mit dem Standardskalarprodukt und der Standard-Orthonormalbasis  $(e_i)$  versehen. Wenn  $\varphi$  ein skalares Feld in  $G$  ist, dann ist  $\text{grad } \varphi$  ein Vektorfeld in  $G$ .

Allgemein heißt  $\varphi$  **Potential** zum Vektorfeld  $v$ , wenn gilt:

$$v = \text{grad } \varphi \text{ oder (v.a. in der Physik) } v = -\text{grad } \varphi$$

Später werden wir sehen, wie man zu gegebenem  $v$  ein Potential bestimmen kann.

Sei  $v$  ein stetig differenzierbares Vektorfeld in  $G$ , dann heißt das skalare Feld

$$\text{div } v := \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \dots + \frac{\partial v_m}{\partial x_m}$$

**Divergenz** oder **Quellenfeld** von  $v$ . Wenn  $\text{div } v = 0$ , heißt  $v$  **quellenfrei**.

### Beispiel 6.18

Sei  $B$  ein magnetisches Feld. Ist  $\text{div } B = 0$ , dann heißt das, dass keine magnetischen Ladungen existieren.

Sei jetzt  $m = 3$  und  $v$  ein in  $G$  stetig differenzierbares Vektorfeld. Dann heißt das Vektorfeld

$$\text{rot } v = \left( \frac{\partial v_3}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_3} \right) e_1 + \left( \frac{\partial v_1}{\partial x_3} - \frac{\partial v_3}{\partial x_1} \right) e_2 + \left( \frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \right) e_3$$

**Rotation** des Vektorfeldes  $v$ . Ein Vektorfeld  $v$  mit  $\text{rot } v = 0$  heißt **wirbelfrei**.

$$\text{Eselsbrücke: } \text{rot } v = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$$

Mit dem Nablaoperator vereinfachen sich die Formeln für Gradient, Divergenz und Rotation:

$$\text{grad } \varphi = \nabla \varphi$$

$$\text{div } v = \nabla \cdot v = \langle \nabla, v \rangle = \sum_i \frac{\partial v_i}{\partial x_i}$$

$$\text{rot } v = \nabla \times v$$

## 6.6 Lineare Differentialgleichungen n-ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten

Unter einer **linearen Differentialgleichung** (DGL)  $n$ -ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten versteht man eine Gleichung der Form

$$x^{(n)} + a_{n-1}x^{(n-1)} + \dots + a_1\dot{x} + a_0x = f \quad (1)$$

Für  $f = 0$  erhält man die zu (1) gehörende **homogene** DGL

$$x^{(n)} + \dots + a_1 \dot{x} + a_0 x = 0 \quad (1_{\text{hom}})$$

Hierbei sind  $a_i, f \in \mathbb{R}/\mathbb{C}$  gegeben.  $x$  ist eine mindestens stetige Funktion.

$$x = x(t) \text{ und } x^{(n)} = \frac{d^n x}{dt^n} \quad (\text{häufig ist } t \text{ die Zeit})$$

Unter einer **Lösung** von (1) bzw.  $(1_{\text{hom}})$  versteht man eine  $n$ -fach stetig differenzierbare reellwertige (bzw. komplexwertige) Funktion, definiert auf einem  $t$ -Intervall  $I \subset \mathbb{R}/\mathbb{C}$ , sodass (1) für alle  $t \in I$  erfüllt ist.

Unter einem **Anfangswertproblem** (AWP) an der Stelle  $t_0$  versteht man folgende Aufgabe: Gesucht ist eine Lösung von (1), die auf einem Intervall  $I$  definitert ist, sodass für ein fest vorgegebenes  $t_0 \in I$  die folgenden Anfangsbedingungen erfüllt sind:

$$x(t_0) = x_0, \dot{x}(t_0) = x_1, \dots, x^{(n-1)}(t_0) = x_{n-1}$$

Dabei sind  $x_1, \dots, x_{n-1}$   $n$  vorgegebene Zahlen. Ein Anfangswertproblem ist also eine Differentialgleichung  $n$ -ter Ordnung mit  $n$  Anfangsbedingungen.

### Beispiel 6.19

Schwingungsgleichung für eine eindimensionale Schwingung

$$m\ddot{x}(t) + d\dot{x}(t) + cx(t) = F(t)$$

Dabei ist  $m$  die Masse,  $d$  der Dämpfungsfaktor,  $c$  die Federkonstante und  $F$  die äußere Anregung. Umgeschrieben:

$$\ddot{x}(t) + 2k\dot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = f(t) \text{ mit } 2k = \frac{d}{m} \geq 0, \omega_0^2 = \frac{c}{m} > 0, f = \frac{F}{m}$$

### Typische Aufgabenstellungen:

- Existenz von Lösungen von (1) bzw.  $(1_{\text{hom}})$
- Struktur der Menge aller dieser Lösungen
- Existenz und Eindeutigkeit der Lösung des AWP

Es ist günstig, (1) bzw.  $(1_{\text{hom}})$  in kompakterer Form aufzuschreiben. Abkürzung:  $D = \frac{d}{dt}$

$$(1), (1_{\text{hom}}) : \underbrace{D^n x + a_{n-1} D^{n-1} x + \dots + a_1 D x + a_0 x}_{=P(D)x - \text{Polynom}} = f \text{ bzw. } 0$$

$$P(D) = D^n + a_{n-1} D^{n-1} + \dots + a_1 D + a_0$$

$$\Rightarrow P(D)x = 0 \quad (2) \quad (\hat{=} (1_{\text{hom}}))$$

Hierbei sind  $D : x \mapsto \frac{dx}{dt}$  und  $D^k : x \mapsto \frac{d^k x}{dt^k}$  lineare Abbildungen, die Funktionen auf Funktionen abbilden.

Was bedeutet in dieser Symbolik, dass (1) bzw.  $(1_{\text{hom}})$  **lineare** DGL sind?:  $P(D)$  ist eine lineare Abbildung.

$P(D)(\lambda x + y) = \lambda P(D)x + P(D)y$  für zwei  $n$ -mal stetig differenzierbare Funktionen  $x, y$  und  $\lambda \in \mathbb{R}/\mathbb{C}$

### Lemma 6.33

Die Menge aller Lösungen der homogenen DGL (2) bzw.  $(1_{\text{hom}})$  bildet einen Vektorraum.

**Beweis**

Seien  $x, y$  Lösungen (d.h.  $P(D)x = P(D)y = 0$ ) und  $\lambda \in \mathbb{C}$ . Daraus folgt:

$$P(D)(\lambda x + y) = \lambda P(D)x + P(D)y = 0 \Rightarrow \lambda x + y \text{ ist Lösung}$$

■

$x \equiv 0$  ( $\Leftrightarrow x(t) = 0 \forall t \in I$ ) heißt **triviale Lösung** von (2). Es gilt außerdem das **Superpositionsprinzip**:

1. Die Lösungen von (2) bilden einen Vektorraum.
2. Wenn  $x, y$  Lösungen von (1) sind, dann ist  $x - y$  Lösung von  $(1_{\text{hom}})$ :

$$P(D)x = P(D)y = f \Rightarrow P(D)(x - y) = P(D)x - P(D)y = 0$$

3. Sei  $x_{\text{inh}}$  eine beliebige, aber feste Lösung von (1). Dann gilt: Jede beliebige Lösung von (1) hat die Form  $x = x_{\text{inh}} +$  beliebige Lösung der homogenen DGL  $(1_{\text{hom}})$ .

Welche Dimension hat der Lösungsraum von  $(1_{\text{hom}})$ ? Wenn er endlichdimensional ist, wie findet man eine Basis? Diese beiden Fragen können völlig befriedigend beantwortet werden. Dazu wird das zu  $P(D)$  gehörende charakteristische Polynom betrachtet. Dieses hat die Form  $p(\lambda)$ , d.h.

$$p(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0 \quad (3)$$

Dieses Polynom muss auf Nullstellen und deren Vielfachheit untersucht werden.

## Einige Bemerkungen zu Polynomen

1. **Fundamentalsatz der Algebra:** Jedes Polynom  $p$  vom Grade  $n \geq 1$  hat in  $\mathbb{C}$  mindestens eine Nullstelle.
2. Aus (1) folgt: Jedes Polynom  $n$ -ten Grades hat in  $\mathbb{C}$  genau  $n$  Nullstellen, wenn man jede Nullstelle mit ihrer Vielfachheit zählt.  $\lambda_0$  hat als Nullstelle die Vielfachheit  $\alpha_0 \geq 1$ , wenn

$$p(\lambda) = (\lambda - \lambda_0)^{\alpha_0} \cdot q(\lambda) \text{ mit } q(\lambda_0) \neq 0$$

Hilfsbetrachtung: Für jede Nullstelle  $\lambda_0$  von  $p$  existiert ein Polynom  $r$  mit  $p(\lambda) = (\lambda - \lambda_0)r(\lambda)$ .

**Beweis**

Wende folgende Beziehung an:

$$\lambda^k - \lambda_0^k = (\lambda - \lambda_0)(\lambda^{k-1} + \lambda^{k-2}\lambda_0 + \dots + \lambda\lambda_0^{k-2} + \lambda_0^{k-1}) \quad (*)$$

Wenn  $p(\lambda_0) = 0$ , dann gilt:

$$p(\lambda) = p(\lambda) - p(\lambda_0) = (\lambda^n - \lambda_0^n) + a_{n-1}(\lambda^{n-1} - \lambda_0^{n-1}) + \dots + a_1(\lambda - \lambda_0)$$

Setze  $(*)$  für alle  $(\lambda^k - \lambda_0^k)$  ein. Daraus folgt  $p(\lambda) = (\lambda - \lambda_0)r(\lambda)$ .

■

Betrachtet man die Nullstellen einschließlich ihrer Vielfachheit:  $\mu_1, \dots, \mu_n$ , so hat jedes  $p$  die Darstellung

$$p(\lambda) = (\lambda - \mu_1)(\lambda - \mu_2) \dots (\lambda - \mu_n)$$



Andere Zerlegung: Seien  $\lambda_1, \dots, \lambda_k$  die paarweise verschiedenen Nullstellen von  $p$  mit den Vielfachheiten  $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ , dann gilt offenbar

$$p(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{\alpha_1} (\lambda - \lambda_2)^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot (\lambda - \lambda_k)^{\alpha_k}$$

Spezialfall:  $p$  habe nur reelle Koeffizienten. Trotzdem kann  $p$  komplexe Nullstellen haben, aber: Wenn  $\lambda_0 \in \mathbb{C}$  eine Nullstelle von  $p$  mit der Vielfachheit  $\alpha_0$  ist, dann ist auch  $\overline{\lambda_0} \in \mathbb{C}$  eine Nullstelle von  $p$  mit der Vielfachheit  $\alpha_0$ . Das ist für die Anwendungen auf DGL wichtig! („Man kann dadurch komplexe Lösungen vermeiden.“)

**Satz 6.34** Partialbruchzerlegung

Sei  $R = \frac{P}{Q}$  mit den Polynomen  $P$  und  $Q$ , wobei  $\deg P < \deg Q$ . O.E.d.A. sei der höchste Koeffizient von  $Q = 1$ .  $Q$  habe die Nullstellen  $x_1, \dots, x_k$  mit den Vielfachheiten  $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ , also:

$$Q = (x - x_1)^{\alpha_1} \cdot \dots \cdot (x - x_k)^{\alpha_k}$$

Dann hat  $R$  folgende Darstellung:

$$\begin{aligned} R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} &= \frac{A_1^1}{(x - x_1)} + \frac{A_2^1}{(x - x_1)^2} + \dots + \frac{A_{\alpha_1}^1}{(x - x_1)^{\alpha_1}} + \\ &+ \frac{A_1^2}{(x - x_2)} + \dots + \frac{A_{\alpha_2}^2}{(x - x_2)^{\alpha_2}} + \dots + \frac{A_1^k}{(x - x_k)} + \dots + \frac{A_{\alpha_k}^k}{(x - x_k)^{\alpha_k}} \end{aligned}$$

Zur Lösung von (2) verwenden wir den Ansatz  $x(t) = e^{\lambda t}$ . Durch Einsetzen in (2) und Dividieren durch  $e^{\lambda t}$  entsteht die Gleichung  $p(\lambda) = 0$ .

Die gesuchten Nullstellen von  $p$  seien  $\lambda_1, \dots, \lambda_m$  mit den Vielfachheiten  $k_1, \dots, k_m$ . Aus der Partialbruchzerlegung von  $\frac{1}{p(\lambda)}$  erhält man folgende Darstellung:

$$\frac{1}{p(\lambda)} = \frac{1}{(\lambda - \lambda_1)^{k_1} \dots (\lambda - \lambda_m)^{k_m}} = \frac{q_1(\lambda)}{(\lambda - \lambda_1)^{k_1}} + \dots + \frac{q_m(\lambda)}{(\lambda - \lambda_m)^{k_m}}$$

Wenn man beide Seiten mit  $p(\lambda)$  multipliziert, gilt also  $\forall \lambda \in \mathbb{C}$ :

$$1 = q_1(\lambda)p_1(\lambda) + \dots + q_m(\lambda)p_m(\lambda) \text{ mit } p_i(\lambda) = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^m (\lambda - \lambda_j)^{k_j}$$

Für  $\lambda$  setzen wir nun  $D$  ein: (1 entspricht der identischen Abbildung  $I$ )

$$Ix = \underbrace{q_1(D)p_1(D)x}_{=:x_1} + \dots + \underbrace{q_m(D)p_m(D)x}_{=:x_m} \quad (4)$$

$x, x_1, \dots, x_m$  sind  $(C^\infty)$ -Funktionen von  $t$ . Sei nun  $x$  eine Lösung von (2), d.h.  $p(D)x = 0$ . Dann gilt:

$$(D - \lambda_l I)^{k_l} x_l = \underbrace{(D - \lambda_l I)^{k_l} q_l(D)p_l(D)x}_{=:x_l} = q_l(D) \underbrace{p(D)x}_{=0} = 0$$

Das heißt, jedes  $x_l$  aus der Zerlegung (4) erfüllt die Teilgleichung  $(D - \lambda_l I)^{k_l} x_l = 0$  (5)

Umgekehrt erfüllt jede Lösung  $x$  von (5) (d.h.  $(D - \lambda_l I)^{k_l} y = 0, y = y(t)$ ) auch (2), denn

$$p(D)y = p_l(D) \underbrace{(D - \lambda_l I)^{k_l} y}_{=0} = 0$$

Diese Überlegungen fasst der folgende Satz zusammen.

**Satz 6.35**

Sei  $p(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{k_1} \dots (\lambda - \lambda_m)^{k_m}$  die Produktdarstellung des charakteristischen Polynoms zu (2). Dann ist jede Summe bzw. Linearkombination von Lösungen der Teilgleichung (5) auch Lösung von (2). Umgekehrt wird jede Lösung von (2) als Summe von Lösungen von (5) erhalten. Man hat also nur eine Gleichung der folgenden Art zu lösen:

$$(D - \lambda I)^m x = 0 \text{ mit } \lambda \in \mathbb{C}, m \in \mathbb{N} \quad (6)$$

Ein wichtiger Schritt dazu ist in folgendem Lemma enthalten:

**Lemma 6.36**

Für eine beliebige Funktion  $x \in C^\infty(\mathbb{R})$  gilt:

$$D^m(e^{\alpha t} x(t)) = e^{\alpha t} (D + \alpha I)^m x(t) \text{ mit } t \in \mathbb{R}$$

**Beweis** durch vollständige Induktion über  $m$

Für  $m = 1$  ergibt sich mit der Produktregel:

$$D e^{\alpha t} x(t) = \alpha e^{\alpha t} x + e^{\alpha t} \dot{x} = e^{\alpha t} (\dot{x} + \alpha x) = e^{\alpha t} (D + \alpha I)x$$

Nun sei die Gleichung für  $m$  gezeigt.

$$\begin{aligned} D^{m+1}(e^{\alpha t} x) &= D[D^m(e^{\alpha t} x)] = (\text{Induktionsvoraussetzung}) = D(e^{\alpha t} (D + \alpha I)^m x) = (\text{Produktregel}) \\ &= D(e^{\alpha t}) \cdot (D + \alpha I)^m x + e^{\alpha t} D(D + \alpha I)^m x = \alpha \cdot e^{\alpha t} (D + \alpha I)^m x + e^{\alpha t} (D + \alpha I)^{m+1} D x \\ &= e^{\alpha t} (D + \alpha I)^m (D + \alpha I) x = e^{\alpha t} (D + \alpha I)^{m+1} x \end{aligned}$$

■

$x$  genügt genau dann der Gleichung (6), wenn  $e^{-\lambda t} (D - \lambda I)^m x = 0$  (reine Multiplikation mit  $e^{-\lambda t}$ ). Wegen des vorigen Lemmas ist dies genau dann der Fall, wenn

$$D^m(e^{-\lambda t} x(t)) = 0 \quad (7)$$

(7) ist aber einfach zu lösen.

$$D^m y(t) = 0 \Rightarrow D(D^{m-1} y) = 0 \Rightarrow D^{m-1} y = c_{m-1} \Rightarrow D^{m-2} y = c_{m-1} t + c_{m-2}$$

$y(t) \hat{=} e^{-\lambda t} x(t)$

Insgesamt:  $y(t) = c_0 + c_1 t + \dots + c_{m-1} t^{m-1}$  Also hat die Lösung von (7) die Form

$$x(t) = e^{\lambda t} (c_0 + c_1 t + \dots + c_{m-1} t^{m-1})$$

mit beliebigen Konstanten  $c_1, \dots, c_{m-1}$ .

**Satz 6.37** Zusammenfassung

Seien  $\lambda_1, \dots, \lambda_m$  die Nullstellen des charakteristischen Polynoms  $p$  von (2) mit den Vielfachheiten  $k_1, \dots, k_m$ . Damit erhält man sämtliche Lösungen der Differentialgleichung (2) als Linearkombination von Lösungen der folgenden Gestalt:

$$\left. \begin{array}{cccc} e^{\lambda_1 t} & te^{\lambda_1 t} & \dots & t^{k_1-1} e^{\lambda_1 t} \\ \vdots & & & \\ e^{\lambda_m t} & te^{\lambda_m t} & \dots & t^{k_m-1} e^{\lambda_m t} \end{array} \right\} \quad (8)$$

Da die Menge dieser Lösungen (8) linear unabhängig (als Funktion auf  $\mathbb{R}$ ) ist, ist die Dimension des Lösungsraumes von (2) genau  $n$ . Die Lösungen sind aus  $C^\infty(\mathbb{R})$ .

Der Beweis für den folgenden Satz ist schwieriger (siehe Kapitel zu gewöhnlichen DGL):

**Satz 6.38**

Jedes zu (2) gehörende Anfangswertproblem ist eindeutig lösbar.

**Bemerkung**

Die Nullstellen des charakteristischen Polynoms können auch komplex sein. Hat  $p$  reelle Koeffizienten, so taucht mit jeder komplexen Nullstelle  $\lambda$  der Vielfachheit  $k$  auch  $\bar{\lambda}$  mit gleicher Vielfachheit  $k$  als Nullstelle auf. Zusammen mit dem Superpositionsprinzip erlaubt das, komplexe Lösungen zu vermeiden.

Das System (8) (die Basis des Lösungsraumes) heißt auch **Fundamentalsystem von Lösungen** von (2). Bezeichnet man die Lösungen (8) mit  $x_1, \dots, x_n$ , dann nennt man  $x = c_1 x_1 + \dots + c_n x_n$  ( $c_k \in \mathbb{R}$  beliebig) **allgemeine Lösung** von (2).

Die Lösungen der inhomogenen DGL (1) unterliegen wieder dem Superpositionsprinzip: Wenn  $y_1, y_2$  Lösungen von (1) (inhomogen) sind, dann ist  $x = y_1 - y_2$  Lösung der homogenen Differentialgleichung. Also ist die allgemeine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung gleich einer speziellen Lösung der inhomogenen Differentialgleichung plus der allgemeinen Lösung der homogenen Differentialgleichung.

**Beispiel 6.20**

Anfangswertproblem:  $\ddot{x} - 3\dot{x} + 2x = 0$  mit  $x(0) = -1$  und  $\dot{x}(0) = 3$

1. Ansatz:  $x(t) = e^{\lambda t} \Rightarrow$  charakteristisches Polynom:  $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0 \Rightarrow$  Nullstellen:  $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2$
2. Allgemeine Lösung:  $x(t) = c_1 e^t + c_2 e^{2t}$
3. Lösung des Anfangswertproblems ( $\hat{=}$  Bestimmung  $c_1, c_2$ ):

$$\left. \begin{array}{rcl} x(0) = c_1 + c_2 & = & -1 \\ \dot{x}(0) = c_1 + 2c_2 & = & 3 \end{array} \right\} \Rightarrow c_1 = -5, c_2 = 4 \Rightarrow x(t) = -5e^t + 4e^{2t}$$

**Beispiel 6.21**

Gesucht ist eine allgemeine Lösung von  $\ddot{x} - 2\dot{x} + x = 0$ . Mit  $x(t) = e^{\lambda t}$  ergibt sich das charakteristische Polynom  $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$  mit der doppelten Nullstelle  $\lambda_{1,2} = 1$ . Das Fundamentalsystem ist also von der Gestalt  $e^t, te^t$ . Die allgemeine Lösung ist damit  $x(t) = c_1 \cdot e^t + c_2 \cdot te^t$

**Beispiel 6.22**

Wir suchen die allgemeine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung  $\ddot{x} - 3\dot{x} + 2x = 4t + 1$  und die Lösung des Anfangswertproblems:  $x(0) = \frac{7}{2}, \dot{x}(0) = 1$ . Die zugehörige homogene DGL wurde bereits gelöst und lautet

$$x_h(t) = c_1 e^t + c_2 e^{2t}$$

Wir benötigen eine spezielle Lösung  $x_s$  der inhomogenen Differentialgleichung. Unser Ansatz hat dazu die gleiche Struktur wie die rechte Seite der DGL, d.h. wir suchen  $x_s(t) = at + b$ , also  $\dot{x}_s(t) = a$  und  $\ddot{x}_s(t) = 0$ . Dies setzen wir ein:

$$\begin{aligned} -3a + (2at + b) &= 4t + 1 \\ 2at + 2b - 3a &= 4t + 1 \end{aligned}$$

Der Koeffizientenvergleich liefert:

$$\begin{aligned} t^1 : \quad & 2a = 4 \Rightarrow a = 2 \\ t^0 : \quad & 2b - 3a = 1 \Rightarrow b = \frac{7}{2} \end{aligned}$$

-6

Also lautet die allgemeine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung:

$$x(t) = x_s(t) + x_h(t) = \left(2t + \frac{7}{2}\right) + c_1 e^t + c_2 e^{2t}$$

Anfangswertproblem:  $\left. \begin{aligned} x(0) &= \frac{7}{2} + c_1 + c_2 \\ \dot{x}(0) &= 1 = 2 + c_1 + c_2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow c_1 = 1, c_2 = -1$

**Bemerkung**

Wenn die rechte Seite einer inhomogenen DGL von der Form  $f(t) = \sin t$  ist, dann kann man den folgenden Ansatz versuchen:

$$y_0(t) = a \cdot \sin t + b \cdot \cos t$$

Dieser Ansatz muss aber modifiziert, wenn ein sogenannter „Resonanzfall“ vorliegt.

**Beispiel 6.23**

Umwandeln eines komplexen Fundamentalsystems in ein reelles

Die homogene DGL  $\ddot{x} + x = 0$  hat das charakteristische Polynom  $\lambda^2 + 1 = 0$  und damit die Nullstellen  $\lambda_1 = i$  und  $\lambda_2 = -i$ . Das komplexe Fundamentalsystem ist also:

$$\begin{aligned} x_1(t) &= e^{it} = \cos t + i \sin t \\ x_2(t) &= e^{-it} = \cos t - i \sin t \end{aligned}$$

Mit dem Superpositionsprinzip erhält man das reelle Fundamentalsystem:

$$\begin{aligned} x'_1(t) &= \frac{1}{2}(x_1(t) + x_2(t)) = \cos t \\ x'_2(t) &= \frac{1}{2i}(x_1(t) - x_2(t)) = \sin t \end{aligned}$$

# 7 Integralrechnung für Funktionen einer Variable (Riemann-Integral)

Es existieren verschiedene Zugänge zum Riemann-Integral. Das Vorgehen ist pragmatisch ohne jeden Detailbeweis. Das Riemann-Integral genügt für fast alle praktischen Belange, ist aber für theoretische Belange unzureichend. In diesem Fall muss man das Lebesgue-Integral verwenden.

## 7.1 Definition und erste Eigenschaften

### Definition 7.1

1. Eine Fkt.  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  heißt **Treppenfunktion**, wenn es Zahlen  $a_0 < a_1 < \dots < a_n$  gibt mit
  - a)  $f$  ist konstant in den offenen Intervallen  $(a_i, a_{i+1})$ ,  $i = 0, 1, \dots, n-1$
  - b)  $f(x) = 0 \ \forall x \notin [a_0, a_n]$ .
2. Eine Funktion  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  heißt **Treppenfunktion** auf  $[a, b]$ , wenn es eine Zerlegung  $\mathcal{Z} : a = a_0 < a_1 < \dots < a_n = b$  von  $[a, b]$  gibt, so dass obige Eigenschaft a) erfüllt ist.

#### Bemerkung

1. Die erwähnten Konstanten für die Intervalle  $(a_i, a_{i+1})$  müssen nicht voneinander verschieden sein.
2. Die Funktionswerte von  $f$  in den Intervallendpunkten  $a_k$  sind beliebig.
3. Ist  $f$  eine Treppenfunktion, dann auch  $c \cdot f \ \forall c \in \mathbb{R}$ .

### Beispiel 7.1

Sei  $I$  ein beliebiges Intervall. Dann ist die charakteristische Funktion dieses Intervalls  $\chi_I(x) = \begin{cases} 1 & x \in I \\ 0 & x \notin I \end{cases}$  eine Treppenfunktion (auf dem abgeschlossenen Intervall  $\bar{I}$ ).

Nützlich ist folgender Gleichheitsbegriff: Zwei Treppenfunktionen  $f, g$  heißen **fast überall gleich**, wenn für alle bis auf endlich viele  $x \in \mathbb{R}$   $f(x) = g(x)$  gilt. Man schreibt:  $f = g$  f.ü. (Achtung: In der Lebesgue'schen Integrationstheorie wird ein allgemeinerer Begriff von „fast überall“ benutzt.)

Sei nun  $f$  eine Treppenfunktion auf  $[a, b]$  bezüglich der Zerlegung  $\mathcal{Z}$  (siehe Definition 7.1) mit:

$$f(x) = \begin{cases} c_k & x \in (a_{k-1}, a_k), k = 1, \dots, n \\ 0 & x \notin [a, b] \end{cases}$$

Dann ist fast überall  $f = \sum_{k=1}^n c_k \chi_{I_k}$ ,  $I_k = (a_{k-1}, a_k)$ .

**Bemerkung**

Die Darstellung einer Treppenfunktion (f.ü.) als solch ein  $f$  ist keineswegs eindeutig.

**Lemma 7.2**

Die Menge  $T(a, b)$  der Treppenfunktionen auf  $[a, b]$  bildet eine Algebra über  $\mathbb{R}$ , d.h. für  $f, g \in T(a, b)$  und  $c \in \mathbb{R}$  sind  $f + g, c \cdot f, f \cdot g$  wieder in  $T(a, b)$ .

**Definition 7.3** Integral einer Treppenfunktion

Sei  $f \in T(a, b)$  und sei  $f$  bezüglich einer Zerlegung  $\mathcal{Z} : x_0 = a < x_1 < \dots < x_n = b$  gegeben durch

$$f := \sum_{k=1}^n c_k \chi_{I_k} \quad \text{mit} \quad I_k = (x_{k-1}, x_k)$$

Dann **setzt** man:  $\int_a^b f(x) dx := \sum_{k=1}^n c_k (x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^n c_k l(I_k)$ .

Hierbei ist  $l(I_k)$  die Länge der Intervalls  $I_k$ . Diese ist gleich für alle Sorten von Intervallen (offen, halboffen, abgeschlossen).

Damit die Definition sinnvoll ist, muss man zeigen, dass sie von der jeweiligen Darstellung von  $f$  (insbesondere von der Zerlegung) unabhängig ist. Allgemein zeigt man: Wenn  $f = g$  f.ü. in  $[a, b]$ , dann

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b g(x) dx.$$
**Satz 7.4** Eigenschaften des Integrals von Treppenfunktionen

Seien  $f, g \in T(a, b)$  und  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ . Dann gilt:

1.  $\int_a^b \underbrace{(\lambda f + \mu g)(x)}_{=\lambda f(x) + \mu g(x)} dx = \lambda \cdot \int_a^b f(x) dx + \mu \int_a^b g(x) dx$
2.  $f(x) \leq g(x) \text{ f.ü.} \Rightarrow \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$
3.  $\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx \leq (b-a) \cdot \max_{x \in [a, b]} |f(x)|$

**Beweis**

**Beweisidee zu 1.:** Zu  $f$  und  $g$  gehören die Zerlegung  $\mathcal{Z}$  und  $\mathcal{Z}'$ . Wir betrachten die Verfeinerung beider Zerlegungen:  $\mathcal{Z}'' = \mathcal{Z} \cup \mathcal{Z}'$ . Betrachte dann eine neue Darstellung von  $f$  und  $g$  jeweils bzgl.  $\mathcal{Z}''$ . Dann ist  $\lambda f + \mu g$  einfach zu bilden.

**Zu 3.:** Nach Definition gilt für  $f = \sum_k c_k \chi_{I_k}$ :

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| = \left| \sum_k c_k l(I_k) \right| \leq \underbrace{\sum_k |c_k| \cdot l(I_k)}_{\int_a^b |f(x)| dx} \leq \sum_k \max_{x \in [a, b]} |f(x)| \cdot l(I_k) = \max_{x \in [a, b]} |f(x)| \cdot (b-a)$$



**Bemerkung**

Die Abbildung  $T(a, b) \ni f \mapsto \int_a^b f(x) dx \in \mathbb{R}$  ist also eine lineare Abbildung  $T(a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ , d.h. ein lineares Funktional aus  $T(a, b)$ . Außerdem gilt nach 2.: Wenn  $f \geq 0$  f.ü., dann ist  $\int_a^b f(x) dx \geq 0$ . Das heißt,  $f \mapsto \int_a^b f(x) dx$  ist ein lineares positives Funktional auf  $T(a, b)$ .

Nun wollen wir dieses Funktional unter Erhaltung der Linearität und Positivität auf einen möglichst großen Vektorraum von Funktionen fortsetzen. Dafür gibt es einige Varianten. Wir benutzen diejenige, die zum Riemann-Integral führt.

**Definition 7.5** Ober- und Unterintegral

Sei  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  eine beliebige beschränkte Funktion. Dann nennt man:

$$\int_a^{b*} f(x) dx := \inf \left\{ \int_a^b h(x) dx : h \in T(a, b), f \leq h \right\} \quad \text{Oberintegral von } f$$

$$\int_{a*}^b f(x) dx := \sup \left\{ \int_a^b g(x) dx : g \in T(a, b), g \leq f \right\} \quad \text{Unterintegral von } f$$

Beide Mengen  $\{\dots\}$  sind nicht leer, denn da  $f$  beschränkt ist, existiert  $C, D \in \mathbb{R}$  mit  $C \leq f(x) \leq D \forall x \in [a, b]$  und  $h \equiv D$  bzw.  $g \equiv C$  sind Treppenfunktionen aus  $\{\dots\}$ .

**Beispiel 7.2**

1. Wenn  $f$  eine Treppenfunktion ist, dann gilt natürlich:  $\int_a^b f(x) dx = \int_{a*}^b f(x) dx = \int_a^{b*} f(x) dx$
2. Sei  $f$  die Dirichletfunktion auf  $[0, 1]$ .  $\int_a^{b*} f(x) dx = 1, \int_{a*}^b f(x) dx = 0$

**Satz 7.6** Eigenschaften von Ober- und Unterintegral

Für alle beschränkten  $f, g$  auf  $[a, b]$  gilt:

1.  $\int_{a*}^b f(x) dx \leq \int_a^{b*} f(x) dx$
2.  $\int_a^{b*} (f(x) + g(x)) dx \leq \int_a^{b*} f(x) dx + \int_a^{b*} g(x) dx$  (Subadditivität)  
 $\int_a^{b*} \lambda f(x) dx = \lambda \int_a^{b*} f(x) dx$  mit  $\lambda \geq 0$
3.  $\int_{a*}^b (f(x) + g(x)) dx \geq \int_{a*}^b f(x) dx + \int_{a*}^b g(x) dx$  (Superadditivität)  
 $\int_{a*}^b \lambda f(x) dx = \lambda \int_{a*}^b f(x) dx$  mit  $\lambda \geq 0$
4. Für  $\lambda < 0$  gilt:  $\int_a^{b*} \lambda f(x) dx = \lambda \int_{a*}^b f(x) dx$  und  $\int_{a*}^b \lambda f(x) dx = \lambda \int_a^{b*} f(x) dx$

**Beweis**

zu 2., Teil 1 (als Beispiel für das Beweisschema)

$$\int_a^{b*} f(x)dx = \inf \left\{ \int_a^b h_1(x)dx, h_1 \in T(a, b), h_1 \geq f \right\} =: \inf F$$

$$\int_a^{b*} g(x)dx = \inf \left\{ \int_a^b h_2(x)dx, h_2 \in T(a, b), h_2 \geq g \right\} =: \inf G$$

$$\int_a^{b*} (f(x) + g(x))dx = \inf \left\{ \int_a^b s(x)dx, s \in T(a, b), s \geq f + g \right\} =: \inf S$$

Aus  $h_1 \geq f, h_2 \geq g \Rightarrow h_1 + h_2 \geq f + g$  folgt:

$$\int_a^b (h_1 + h_2)dx \in S \Leftrightarrow F + G = \{\alpha + \beta : \alpha \in F, \beta \in G\} \subset S$$

$$\int_a^b (h_1 + h_2)dx = \underbrace{\int_a^b h_1 dx}_{\in F} + \underbrace{\int_a^b h_2 dx}_{\in G} \Rightarrow \inf S \leq \inf(F + G) = \inf F + \inf G$$

■

**Definition 7.7**

Riemann-Integral

Eine auf  $[a, b]$  beschränkte Funktion  $f$  heißt **Riemann-integrierbar** (R-integrierbar), wenn

$$\int_a^{b*} f(x)dx = \int_{a*}^b f(x)dx$$

Dann **setzt** man  $\int_a^b f(x)dx := \int_a^{b*} f(x)dx \left( = \int_{a*}^b f(x)dx \right)$ . Zusätzlich vereinbaren wir  $\int_a^a f(x)dx = 0$  und  $\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$ . Die Menge aller auf  $[a, b]$  R-integrierbaren Fkt. nennen wir  $R(a, b)$ .

**Bemerkung**

In  $\int_a^b f(x)dx$  bezeichnet  $x$  die Integrationsvariable. Diese ist völlig frei wählbar:  $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(s)ds = \dots$

**Beispiel 7.3**

Für die in Bsp. 7.2 besprochenen Funktionen gilt: Alle Treppenfunktionen sind R-integrierbar (d.h.  $T(a, b) \subset R(a, b)$ ), die Dirichletfunktion jedoch nicht.

**Satz 7.8**

Riemann'sches Integrabilitätskriterium

$$f \in R(a, b) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 : \exists g, h \in T(a, b), g \leq f \leq h : \int_a^b (h(x) - g(x))dx \leq \varepsilon \quad (7.1)$$

**Bemerkung**

Anschauliche Darstellung:  $f$  ist durch die Treppenfunktionen so eingeschlossen, dass der Inhalt zwischen den Graphen von  $g$  und  $h$  kleiner als  $\varepsilon$  ist.



**Beweis**

Hin-Richtung:

$$\int_a^{b_*} f(x) dx = \int_{a^*}^b f(x) dx \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \exists h \in T(a, b), h \geq f : \int_a^b f(x) dx + \frac{\varepsilon}{2} \geq \int_a^b h(x) dx \\ \exists g \in T(a, b), g \leq f : \int_a^b f(x) dx - \frac{\varepsilon}{2} \leq \int_a^b g(x) dx \end{array} \right\} \Rightarrow (7.1)$$

$$\text{Rück-Richtung: } \left\{ \begin{array}{l} \int_a^{b_*} f(x) dx \leq \int_a^b h(x) dx = \int_a^{b_*} h(x) dx \\ \int_{a^*}^b f(x) dx \geq \int_a^b g(x) dx = \int_{a^*}^b g(x) dx \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_a^{b_*} f(x) dx - \int_{a^*}^b f(x) dx \leq \int_a^b (h - g)(x) dx \stackrel{(7.1)}{\leq} \varepsilon \Rightarrow \int_a^{b_*} f(x) dx = \int_{a^*}^b f(x) dx \Rightarrow f \in R(a, b)$$

■

**Satz 7.9**

1. Jede auf  $[a, b]$  stetige Funktion ist R-integrierbar.
2. Jede auf  $[a, b]$  monotone Funktion ist R-integrierbar.

**Beweis**

zu 1.

Wir wenden an, dass stetige Funktionen auf kompakten Mengen (hier  $[a, b]$ ) gleichmäßig stetig sind. Sei  $\varepsilon > 0$  gegeben und  $\delta > 0$  so gewählt, dass gilt:  $|x - x'| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x')| < \varepsilon$

Zerlege nun  $[a, b]$  äquidistant mit den Intervallgrenzen  $x_k = a + k \cdot h$  mit  $k = 0, 1, \dots, N$ .  $N$  sei so groß, dass  $h := \frac{b-a}{N} < \delta$ .

Setze nun  $I_k := [x_k, x_{k+1}]$ ,  $m_k := \min_{x \in I_k} f(x)$ ,  $M_k := \max_{x \in I_k} f(x)$ . Also ist  $M_k - m_k \leq \frac{\varepsilon}{b-a}$ . Definiere nun zwei Treppenfunktionen:

$$\begin{array}{l} g \text{ mit } g(x) := m_k \quad \forall x \in [x_k, x_{k+1}), g(b) := f(b) \\ h \text{ mit } h(x) := M_k \quad \forall x \in [x_k, x_{k+1}), h(b) := f(b) \end{array}$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} g \leq f \leq h \\ h(x) - g(x) \leq \frac{\varepsilon}{b-a} \end{array} \right\} \Rightarrow \int_a^b (h(x) - g(x)) dx \leq \frac{\varepsilon}{b-a} \cdot (b-a) = \varepsilon$$

■

**Satz 7.10**Eigenschaften des Riemann-Integrals, Struktur von  $R(a, b)$ Seien  $f, g \in R(a, b)$  und  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ .

$$1. \lambda f + \mu g \in R(a, b) \text{ und } \int_a^b (\lambda f + \mu g) dx = \lambda \int_a^b f(x) dx + \mu \int_a^b g(x) dx$$

$$2. f \cdot g \in R(a, b)$$

Aus 1. und 2. folgt:  $f \mapsto \int_a^b f(x) dx$  ist ein lineares und positives Funktional auf  $R(a, b)$ .

$$3. f \leq g \Rightarrow \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$$

$$4. |f|, f^+, f^- \in R(a, b)$$

Hierbei ist  $f^+ : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} x & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$  und  $f^- : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} 0 & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$

$$5. \text{ Sei } a < c < b, \text{ dann } f \in R(a, b) \Leftrightarrow f \in R(a, c) \wedge f \in R(c, b) \text{ und } \int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$$

**Beweis****Zu 2.:** Beweis durch Fallunterscheidung

1. *Fall:* Seien  $f, g \geq 0$ ,  $|f(x)| \leq c$ ,  $|g(x)| \leq c$ . Sei  $\varepsilon > 0$  sowie  $s_1, s_2, u_1, u_2 \in T(a, b)$  so gegeben, dass  $s_1 \leq f \leq s_2$  und  $u_1 \leq g \leq u_2$ . O.E.d.A. sei  $0 \leq s_1 \leq s_2 \leq 2c$  und  $0 \leq u_1 \leq u_2 \leq 2c$  sowie  $\int_a^b (s_2 - s_1)(x) dx \leq \frac{\varepsilon}{4c}$  und  $\int_a^b (u_2 - u_1)(x) dx \leq \frac{\varepsilon}{4c}$ . Dann sind  $h_1 := s_1 - u_1$  und  $h_2 := s_2 - u_2$  auch Treppenfunktionen mit  $0 \leq h_1 \leq f \cdot g \leq h_2$  in  $[a, b]$ . Wir schreiben  $h_2 - h_1$  geschickt auf:

$$h_2 - h_1 = (s_2 - s_1)u_1 + s_2(u_2 - u_1) \leq 2c(s_2 - s_1) + 2c(u_2 - u_1)$$

$$\Rightarrow \int_a^b (h_2 - h_1)(x) dx \leq 2c \int_a^b (s_2 - s_1)(x) dx + 2c \int_a^b (u_2 - u_1)(x) dx \leq \varepsilon \Rightarrow f \cdot g \in R(a, b)$$

2. *Fall:* Seien  $f, g$  beliebig. Setze  $c_1 := \inf_{x \in [a, b]} f(x)$  und  $c_2 := \inf_{x \in [a, b]} g(x)$ . Dann sind  $F := f - c_1$  und  $G := g - c_2$  beide  $\geq 0$ .

$$\Rightarrow f \cdot g = (F + c_1)(G + c_2) = F \cdot G + c_2 F + c_1 G + c_1 c_2 \in R(a, b)$$

**Zu 3.:** Aus  $f \in R(a, b)$  und  $f \geq 0$  folgt:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^{b_*} f(x) dx = \inf \left\{ \int_a^b h(x) dx, h \in T(a, b), 0 \leq f \leq h \right\} \geq 0$$



**Satz 7.11**

Sei  $f \in R(a, b)$ . Dann gilt:

1.  $\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx \leq (b-a) \cdot \sup_{x \in [a,b]} |f(x)|$
2. Aus  $m \leq f(x) \leq M$  auf  $[a, b]$  folgt  $m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a)$ .

**Beweis**

1. Offenbar ist  $-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$ . Mit 7.10.2 folgt:

$$-\int_a^b |f(x)| dx \leq \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b |f(x)| dx \Leftrightarrow 1. \text{ Ungleichung}$$

Die zweite Ungleichung folgt dann mit  $|f(x)| \leq C := \sup_{x \in [a,b]} |f(x)| \Rightarrow \int_a^b |f(x)| dx \leq \int_a^b C dx = C(b-a)$

2. folgt sofort aus 7.10.3 mit  $\int_a^b m dx = m(b-a)$  und analog für  $M$ .

■

**Satz 7.12**

## Mittelwertsätze der Integralrechnung

1. *1. Mittelwertsatz:* Seien  $f, g \in R(a, b)$ ,  $g \geq 0$  auf  $[a, b]$ . Dann existiert ein  $\mu$  mit  $\inf_{x \in [a,b]} f(x) =: m \leq \mu \leq M := \sup_{x \in [a,b]} f(x)$  (7.2)  
sodass gilt:  $\int_a^b f(x)g(x) dx = \mu \int_a^b g(x) dx$  (7.3)
2. *2. Mittelwertsatz:* Sei  $f$  monoton und  $g$  stetig auf  $[a, b]$ . Dann existiert ein  $c \in [a, b]$  mit  $\int_a^b f(x)g(x) dx = f(a) \int_a^c g(x) dx + f(b) \int_c^b g(x) dx$ .

**Bemerkung**

Betrachte für 1. den Spezialfall  $g \equiv 1$ ,  $f \geq 0$ :  $\int_a^b f(x) dx = \mu \int_a^b 1 dx = \mu(b-a)$ .

Wenn  $f$  stetig ist, dann folgt aus dem Zwischenwertsatz:  $\exists \xi \in [a, b] : f(\xi) = \mu$ .

**Beweis**

1. Aus (7.2) folgt:  $m \cdot g(x) \leq f(x) \cdot g(x) \leq M \cdot g(x)$

$$\stackrel{(7.10.3)}{\Rightarrow} m \int_a^b g(x) dx \leq \int_a^b f(x)g(x) dx \leq M \int_a^b g(x) dx$$

1. *Fall:* Für  $\int_a^b g(x) dx = 0$  folgt aus (7.4):  $\int_a^b f(x)g(x) dx = 0$ , also ist (7.3) für alle  $\mu$  richtig.

2. *Fall:* Wenn  $\int_a^b g(x) dx > 0$ , setze  $\mu := \frac{\int_a^b f(x)g(x) dx}{\int_a^b g(x) dx}$ . Daraus folgt (7.3).

2. ist ein Nebenprodukt beim sogenannten Riemann-Stieltjes-Integral (siehe später).

## Alternativer Zugang zum R-Integral

Unser bisheriger Zugang ist nur für reellwertige Funktionen, nicht für komplexwertige, vektorwertige Funktionen, etc. geeignet. Sei  $\mathcal{Z} := \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\}$  eine Zerlegung von  $[a, b]$  und  $I_k := [x_k, x_{k+1}]$  und  $(\xi_k)$  ein System von Zwischenpunkten, d.h.  $\xi_k \in I_k$ . Bilde folgende Summen:

- Zwischensumme  $S(f, \mathcal{Z}) := \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)(x_{i+1} - x_i)$
- Obersumme  $O(f, \mathcal{Z}) := \sum_{i=0}^{n-1} \underbrace{\left( \sup_{x \in I_i} f(x) \right)}_{=: M_i} \cdot (x_{i+1} - x_i)$
- Untersumme  $U(f, \mathcal{Z}) := \sum_{i=0}^{n-1} \underbrace{\left( \inf_{x \in I_i} f(x) \right)}_{=: m_i} \cdot (x_{i+1} - x_i)$

Dann gilt mit unseren alten Begriffen:  $\int_a^{b*} f(x) dx = \inf_{\mathcal{Z}} O(f, \mathcal{Z})$ ,  $\int_{a*}^b f(x) dx = \sup_{\mathcal{Z}} U(f, \mathcal{Z})$

Mit den Zwischensummen gilt:  $f$  ist R-integrierbar genau dann, wenn für jede Zerlegungsfolge  $(\mathcal{Z}_n)$  mit  $\eta(I_n) = \text{größte Teilintervalllänge („Feinheit“ von } \mathcal{Z}_n \rightarrow 0$  gilt:  $S(f, \mathcal{Z}_n)$  hat für beliebige Zwischenpunktsysteme einen Grenzwert, welcher von  $\mathcal{Z}_n$  mit  $\eta(\mathcal{Z}_n) \rightarrow 0$  und von den Zwischenpunktsystemen unabhängig ist.

Dann gilt:  $\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} S(f, \mathcal{Z}_n)$ . Das Integral ist hierbei i.A. keine Zahl, sondern ein Element als dem Wertebereich  $W(f)$ .

## 7.2 Hauptsatz (Fundamentalsatz) der Differential- und Integralrechnung

Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung ist das wichtigste Instrument zur Berechnung von Integralen. Der folgende Satz ist dabei ein bedeutendes Teilresultat.

### Satz 7.13

1. Sei  $f \in R(a, b)$ . Dann ist  $F$ , definiert durch  $F(x) = \int_a^x f(t) dt$  für  $x \in [a, b]$  stetig und  $F(a) = 0$ .
2. Wenn  $f$  stetig ist, ist obiges  $F$  differenzierbar und es gilt  $F' = f$ .

#### Bemerkung

1.  $\int_a^x f(t) dt$  ist wohldefiniert!
2. Die Integration mit variabler oberer Grenze „verbessert“ also die Eigenschaften (Stetigkeit, Differenzierbarkeit) von  $f$ .

**Beweis**

Zweckmäßig ist folgende Bezeichnung:  $\langle c, d \rangle$  sei das abgeschlossene Intervall mit den Grenzen  $c$  und  $d$ , unabhängig von deren Ordnung. Also ist  $\langle c, d \rangle := \begin{cases} [c, d] & (c < d) \\ [d, c] & (c > d) \end{cases}$

**Zu 1.:**  $F$  ist in  $x$  stetig, denn

$$|F(x+h) - F(x)| = \left| \int_a^{x+h} f(t) dt - \int_a^x f(t) dt \right| = \left| \int_x^{x+h} f(t) dt \right| \leq \left( \sup_{t \in \langle x, x+h \rangle} |f(t)| \right) \cdot |h|$$

**Zu 2.:**  $f$  ist in  $x_0$  stetig, d.h.  $\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \forall x \in [a, b], |x - x_0| < \delta : |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$   
 Das bedeutet im Speziellen  $\forall t \in \langle x, x_0 \rangle : |f(t) - f(x_0)| < \varepsilon$  (da  $|t - x_0| < \delta$ )  $(*)$

Beachte ferner:

$$\int_{x_0}^x f(x_0) dt = f(x_0) \cdot (x - x_0) \text{ und } F(x) - F(x_0) = \int_a^x f(t) dt - \int_a^{x_0} f(t) dt = \int_{x_0}^x f(t) dt \quad (**)$$

$$\begin{aligned} \left| \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} - f(x_0) \right| &= \left| \frac{F(x) - F(x_0) - f(x_0)(x - x_0)}{x - x_0} \right| \stackrel{(**)}{=} \left| \frac{1}{x - x_0} \int_{x_0}^x [f(t) - f(x_0)] dt \right| \\ &\leq \left( \begin{array}{l} \text{für } |x - x_0| < \vartheta \\ \text{bzw. } t \in \langle x, x_0 \rangle \end{array} \right) \leq \left| \frac{1}{x - x_0} \right| \left| \int_{x_0}^x |f(t) - f(x_0)| dt \right| \leq \varepsilon \cdot \frac{|x - x_0|}{|x - x_0|} = \varepsilon \end{aligned}$$

$$\Rightarrow F'(x_0) = f(x_0)$$

**Bemerkung**

Wir haben sogar mehr gezeigt: In allen Punkten  $x_0 \in [a, b]$ , in denen  $f$  stetig ist, ist  $F$  differenzierbar und  $F'(x_0) = f(x_0)$ .

**Definition 7.14**

Eine Funktion  $F$  heißt **Stammfunktion** von  $f$  auf  $[a, b]$ , wenn  $F'(x) = f(x) \forall x \in [a, b]$ .

**Bemerkung**

Der Satz 7.13.2 besagt also: Stetige Funktionen besitzen eine Stammfunktion.

**Lemma 7.15**

Sei  $F$  auf  $[a, b]$  eine Stammfunktion von  $f$ .  $G : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  ( $G$  differenzierbar) ist genau dann Stammfunktion von  $f$ , wenn  $F - G = \text{const.}$  in  $[a, b]$ .

**Beweis**

Wenn  $F - G = c$  konstant ist, dann ist die Ableitung  $(F - G)' = F' - G' = 0$ , also  $F' = G' = f$ . Die Rückrichtung ergibt sich in völliger Analogie.

**Theorem 7.16**

Haupt-/ Fundamentalsatz der Differenzial- und Integralrechnung

Sei  $f$  auf  $[a, b]$  stetig und  $G$  eine beliebige Stammfunktion von  $f$ . Dann folgt:

$$\int_a^b f(t)dt = G(b) - G(a) =: G(x)|_a^b$$

**Beweis**

Seien  $f$  und  $F$  wie im Satz 7.13 (d.h.  $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ ), also ist  $F$  eine Stammfunktion von  $f$  und  $F(a) = 0$ .  $F$  ist Stammfunktion. Nach Lemma 7.15 gibt es ein  $c$ , sodass  $F(x) = G(x) + c$ . Da  $0 = F(a) = G(a) + c$ , ist  $c = -G(a)$ . Also ist  $F(b) = \int_a^b f(t)dt = G(b) + c = G(b) - G(a)$ . ■

**Diskussion der Ergebnisse**

1. Stetige Funktionen sind R-integrierbar und haben eine Stammfunktion, also kann das R-Integral nach dem Hauptsatz beschrieben werden.
2. Bei unstetigen Funktionen wird es problematisch:

**Beispiel 7.4**

$$f(x) = \begin{cases} 0 & -1 \leq x < 0 \\ 1 & 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

Natürlich ist  $f \in R(a, b)$ , denn  $\int_{-1}^1 f(x)dx = 1$  (aus Definition). Allerdings hat  $f$  auf  $[-1, 1]$  keine Stammfunktion  $F$ , denn es müsste gelten:  $F' = f$ . Dann wäre aber für  $F'$  der Zwischenwertsatz verletzt.

**Beispiel 7.5**

$$F(x) = \begin{cases} x\sqrt{x} \sin \frac{1}{x} & x > 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases} \quad \text{und} \quad f(x) = \begin{cases} \frac{3}{2}\sqrt{x} \sin \frac{1}{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} \sin \frac{1}{x} & x > 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

$F$  ist eine Stammfunktion von  $f$  in jedem Intervall  $[0, b]$  mit  $b > 0$ ,  $f$  ist aber nicht R-integrierbar in  $[0, b]$ , da  $f$  nicht beschränkt ist.

**Bezeichnungen**

Wenn  $f$  stetig ist und  $F$  eine Stammfunktion von  $f$  ist, dann schreibt man  $\int f(t)dt = F + C$  oder  $\int f(t)dt = F$  und nennt  $F$  bzw.  $\int f(t)dt$  **unbestimmtes Integral** von  $f$  (auf  $[a, b]$ ). Eigentlich ist das unbestimmte Integral (auf  $[a, b]$ ) die Gesamtheit aller Stammfunktionen von  $f$  (auf  $[a, b]$ ). Manchmal nennt man  $\int_a^b f(x)dx$  **bestimmtes Integral** und  $C$  **Integrationskonstante**.

**Warnung:** Man achte immer darauf, in welchen Intervallen die Betrachtungen gültig sind.

**7.3 Integrationsmethoden****Beispiel 7.6**

trivial

$$\text{Für } x > 0 \text{ ist } \int (x + \frac{1}{\sqrt{x}})^2 dx = \int (x^2 + 2\sqrt{x} + \frac{1}{x}) dx = \frac{x^3}{3} + \frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}} + \log x + C.$$

## Partielle Integration

Unter Ausnutzung der Produktregel  $(uv)' = u'v + uv'$  ist

$$\int (uv)' dx = \int u'v dx + \int uv' dx \Rightarrow \begin{cases} \int uv' dx = uv - \int u'v dx \\ \int u'v dx = uv - \int uv' dx \end{cases}$$

Für das Riemannintegral auf  $[a, b]$  ist etwa  $\int_a^b uv' dx = uv|_a^b - \int_a^b u'v dx$ .

### Beispiel 7.7 Stammfunktion des Logarithmus

Wir wenden einen Trick an. Für alle  $x > 0$  ist

$$\int \log x dx = \int 1 \cdot \log x dx = x \cdot \log x - \int x \cdot (\log x)' dx = x \cdot \log x - x + C$$

## Substitutionsregel

Diese Regel nutzt die Kettenregel  $F(u(x))' = (F \circ u)'(x) \cdot u'(x)$  für stetig differenzierbare  $F, u$ . Sei  $F$  eine Stammfunktion von  $f$ . Dann gilt:

$$\underbrace{\int (F \circ u)'(x) dx}_{=F(u(x))} = \int F'(u(x)) \cdot u'(x) dx = \int f(u(x)) \cdot u'(x) dx$$

Für das bestimmte Integral folgt:

$$\int_a^b f(u(x)) u'(x) dx = \int_a^b F(u(x))' dx = F(u(b)) - F(u(a)) = \int_{u(a)}^{u(b)} F(t) dt$$

Symbolisch ist  $u'(x) dx = \frac{du}{dx} dx = du$ .

### Beispiel 7.8

Wir bestimmen  $\int \frac{2x}{x^2+1} dx$  und das entsprechende bestimmte Integral in den Grenzen  $[1, 2]$  mithilfe der Substitutionsregel. Mit  $u(x) = x^2 + 1$  und  $f(z) = \frac{1}{z}$  ist  $f(u(x)) = \frac{1}{x^2+1}$  und  $u'(x) = 2x$ . Eine Stammfunktion von  $f$  ist  $F$  mit  $F(z) = \log z$  (für  $z > 0$ ).

$$F(u(x)) = \log(x^2 + 1), \text{ d.h. } \int \frac{2x}{x^2 + 1} dx = \log(x^2 + 1) + C \quad \forall x$$

Das bestimmte Integral ist

$$\int_1^2 \frac{2x}{1+x^2} dx = \int_{1+1^2=2}^{1+2^2=5} \frac{du}{u} = \log u|_2^5 = \log 5 - \log 2$$

## Alternative Formulierung der Substitution

Wir suchen  $\int_a^b f(x) dx$  und substituieren dazu  $x = u(t)$  mit der stetig differenzierbaren, bijektiven Funktion  $u : [\alpha, \beta] \rightarrow [a, b]$ .

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{u^{-1}(a)}^{u^{-1}(b)} f(u(t)) u'(t) dt$$

**Beispiel 7.9**

Das Integral  $\int_{-r}^r \sqrt{r^2 - x^2} dx$  ist zu bestimmen. Setze  $x := r \cdot \sin t$ , also  $dx = r \cdot \cos t dt$ .

$$\int_{-r}^r \sqrt{r^2 - x^2} dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{r^2 - r^2 \cdot \sin^2 t} \cdot r \cdot \cos t dt = r^2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt = \frac{\pi}{2} r^2$$

**Integration rationaler Funktionen**

Suche  $\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx$  für Polynome  $p$  und  $q$ .

1. *Schritt:* Wenn der Grad von  $P$  größer oder gleich dem Grad von  $Q$  ist, führt man zuerst eine Polynomdivision mit Rest durch. Es entsteht ein Polynom und eine neue rationale Funktion, dessen Zählergrad kleiner als der Nennergrad ist. Im folgenden können wir daher o.E.d.A. nur rationale Funktionen betrachten, für die diese Relation gilt.

2. *Schritt:* Jetzt wenden wir die Partialbruchzerlegung an. Seien  $x_1, \dots, x_k$  die Nullstellen von  $Q$  mit den Vielfachheiten  $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ , also  $Q(x) = (x - x_1)^{\alpha_1} \cdot \dots \cdot (x - x_k)^{\alpha_k}$ . Nach dem Satz über die Partialbruchzerlegung ist also

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1^1}{x - x_1} + \dots + \frac{A_{\alpha_1}^1}{(x - x_1)^{\alpha_1}} + \dots + \frac{A_1^k}{x - x_k} + \dots + \frac{A_{\alpha_k}^k}{(x - x_k)^{\alpha_k}}$$

**Beispiel 7.10**

Sei  $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{x+1}{x(x-1)^2}$ , also sind die Nullstellen von  $Q$   $x_1 = 0$  mit  $\alpha_1 = 1$  und  $x_2 = 1$  mit  $\alpha_2 = 2$ . Gemäß dem Satz über die Partialbruchzerlegung macht man folgenden Ansatz:

$$R(x) = \frac{x+1}{x(x-1)^2} = \frac{a}{x} + \frac{b}{(x-1)^2} + \frac{c}{x-1} \quad (1)$$

$a, b, c$  sind zu bestimmen. Hier führt immer **Koeffizientenvergleich** zum Ziel: Durch Multiplikation beider Seiten von (1) mit  $Q(x) = x(x-1)^2$  erhält man:

$$x+1 = a(x-1)^2 + bx + cx(x-1)$$

Nun bringt man alles auf eine Seite und ordnet nach den Potenzen von  $x$ :

$$(a+c)x^2 + (b-2a-c-1)x + (a-1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a-1=0 \\ b-2a-c-1=0 \\ a+c=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=2 \\ c=-1 \end{cases}$$

Es existieren viele verschiedene Methoden neben dem Koeffizientenvergleich, um Partialbruchzerlegung herzustellen.

$$\frac{x+1}{x(x-1)^2} = \frac{1}{x} + \frac{2}{(x-1)^2} + \frac{1}{x-1}$$

Es können auch komplexe Nullstellen von  $Q$  auftreten.



**Beispiel 7.11**

$$R(x) = \frac{1}{x(x^2+1)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+i} + \frac{c}{x-i}$$

$a, b, c$  ergeben sich durch Koeffizientenvergleich:  $a = 1, b = c = -\frac{1}{2}$ . Um die Integration zu vereinfachen, beseitigen wir komplexe Anteile.

$$R(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{2} \left( \frac{1}{x+i} + \frac{1}{x-i} \right) = \frac{1}{x} - \frac{1}{2} \left( \frac{x-i+x+i}{(x-i)(x+i)} \right) = \frac{1}{x} - \frac{x}{x^2+1}$$

Reelle Nullstellen bereiten in der Integration keine Probleme. Bei einer komplexen Nullstelle  $\lambda$  der Vielfachheit  $\alpha$  hat  $Q$  immer auch die Nullstelle  $\bar{\lambda}$  der Vielfachheit  $\alpha$  (da die Koeffizienten von  $Q$  reell sind). Es folgt:

$$\underbrace{(x-\lambda)(x-\bar{\lambda})}_{\geq 0 \forall x} = x^2 - (\lambda + \bar{\lambda})x + |\lambda|^2 = x^2 - (2 \operatorname{Re} \lambda)x + |\lambda|^2 =: x^2 + px + q$$

$$\Rightarrow [(x-\lambda)(x-\bar{\lambda})]^\beta = (x^2 + px + q)^\beta \quad \forall \beta$$

Indem man jeweils die Nenner  $(x-\lambda)^\beta$  und  $(x-\bar{\lambda})^\beta$  zusammenfasst, erhält man nur reelle Ausdrücke. In der Partialbruchzerlegung führt dies also auf Anteile der folgenden Art (mit reellen  $A_i$  und  $B_i$ ):

$$\frac{A_1 x + B_1}{x^2 + px + q} + \frac{A_2 x + B_2}{(x^2 + px + q)^2} + \dots + \frac{A_m x + B_m}{(x^2 + px + q)^m} \quad (+)$$

**Beweis**

Sei  $Q(x) = (x^2 + px + q)^m \cdot Q_1(x)$ , sodass  $Q_1(x)$  nicht mehr durch  $x^2 + px + q$  teilbar ist. Man kann zeigen, dass ein Polynom  $P_1(x)$  mit reellen Koeffizienten existiert, sodass

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x)}{(x^2 + px + q)^m Q_1(x)} = \frac{Mx + N}{(x^2 + px + q)^m} + \frac{P_1(x)}{(x^2 + px + q)^{m-1} Q_1(x)} \quad (*)$$

Die sukzessive Anwendung von  $(*)$  liefert den Anteil  $(+)$ . ■

**3. Schritt:** Integriert man nach Beseitigung komplexer Anteile die einzelnen Terme der Partialbruchzerlegung, so hat man Stammfunktionen der folgenden Art zu bestimmen:

1. Einfache reelle Nullstellen:

$$\int \frac{A}{x-a} dx = A \log |x-a| = \begin{cases} A \cdot \log(x-a) & x > a \\ A \cdot \log(a-x) & x < a \end{cases}$$

2. Mehrfache reelle Nullstellen: (Beachte  $x > a$  und  $x < a$ .)

$$\int \frac{A}{(x-a)^m} dx = -\frac{A}{m-1} \cdot \frac{1}{(x-a)^{m-1}} \quad (m > 1)$$

3. Einfache komplexe Nullstellen: (durch Substitution  $x + \frac{p}{2} = t$ )

$$\int \frac{Ax+B}{x^2+px+q} dx = \frac{A}{2} \log(x^2+px+q) + \frac{2B-Ap}{\sqrt{4q-p^2}} \arctan \frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}}$$

4. Mehrfache komplexe Nullstellen: (mit  $t = x + \frac{p}{2}$ ,  $a^2 = \frac{4q-p^2}{4}$ )

$$\int \frac{Ax + B}{(x^2 + px + q)^m} dx = -\frac{A}{2} \frac{1}{m-1} \cdot \frac{1}{(t^2 + a^2)^{m-1}} - \left(B - \frac{Ap}{2}\right) \int \frac{dt}{(t^2 - a^2)^m}$$

Das rechte Integral kann rekursiv berechnet werden.

#### Bemerkung

Hat man  $\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx$  berechnet, dann gilt diese Gleichung in allen Intervallen der  $x$ -Achse, die *keine* Nullstellen des Nennerpolynoms enthalten.

#### Beispiel 7.12

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{x+1}{x(x-1)^2} = \frac{1}{x} + \frac{2}{(x-1)^2} - \frac{1}{x-1} \Rightarrow \int \frac{x+1}{x(x-1)^2} dx = \log|x| + \frac{2}{x-1} - \log|x-1| + C$$

Hierin stehen alle Stammfunktionen in verschiedenen Intervallen, die weder 0 noch 1 enthalten.

## 7.4 Typische Anwendungen des Riemann-Integrals

Zu Anwendungen wie Arbeit im Kraftfeld oder Bogenlänge von Kurven siehe spätere Kapitel.

### Flächeninhalte

Sei  $M \subset \mathbb{R}^2$ . Was soll unter dem (2-dimensionalen) Inhalt von  $M$  (also dem Flächeninhalt) verstanden werden? Man postuliert dazu: Einfache Mengen  $Q$  (Quadrat, Rechtecke) sollten als Inhalt den elementargeometrischen Inhalt („Länge mal Breite“) haben. Solche  $Q$  nennt man **zweidimensionale Intervalle**. Den Inhalt von  $Q$  bezeichnet man als  $|Q|$ .

Dann bilde **Intervallsummen**  $M := \bigcup_{i=1}^n Q_i$  mit den Intervallen  $Q_i$ , sodass  $Q_i$  und  $Q_j$  für  $i \neq j$  *keine* gemeinsamen inneren Punkte haben. Dann ist  $|M| = \sum_{i=1}^n |Q_i|$ .

### Eigenschaften

1.  $M_1 \subset M_2 \Rightarrow |M_1| \leq |M_2|$  (Monotonie)
2. Wenn  $M = M_1 \cup M_2$ , wobei  $M_1$  und  $M_2$  keine gemeinsamen inneren Punkte haben, dann ist  $|M| = |M_1| + |M_2|$ .

Sei  $A \subset \mathbb{R}^2$  eine beliebige Menge. Was soll  $|A|$  sein? Betrachte alle Intervallsummen  $J, K$  mit  $J \subset A \subset K$ . Betrachte dann  $\sup_{J \subset A} |J|$  und  $\inf_{K \supset A} |K|$ . Wenn  $\sup_{J \subset A} |J| = \inf_{K \supset A} |K|$ , dann setzt man  $|A| := \sup_{J \subset A} |J| = \inf_{K \supset A} |K|$  und nennt  $A$  **quadrierbar** bzw. **Jordan-messbar**.

#### Beispiel 7.13

Eine Menge aus Punkten ist i.A. nicht Jordan-messbar:  $\inf_{K \supset A} |K| = 0$ ,  $\sup_{J \subset A} |J|$  existiert nicht.

#### Beispiel 7.14

Die Menge aller Punkte mit rationalen Koordinaten im Einheitsquadrat ist nicht Jordan-messbar:  $\inf_{K \supset A} |K| = 1$ ,  $\sup_{J \subset A} |J| = 0$  oder existiert nicht (je nach Supremumsdefinition).

Nun kann man den Inhalt einer Menge zwischen dem Graphen einer Funktion und der  $x$ -Achse bestimmen:

1.  $f(x) \geq 0 \forall x \Rightarrow |A| = \int_a^b f(x)dx$  - Die Intervallsummen entsprechen den Ober- und Untersummen.
2. Im allgemeinen ist  $|A| = \int_c^d |f(x)| dx = \int_c^d f^+(x)dx + \int_c^d f^-(x)dx$ .

## 7.5 Uneigentliche Integrale

Der Riemann'sche Integralbegriff wird auf unbeschränkte Integranden und Integrationsintervalle erweitert.

### 7.5.1 Unbeschränkte Integranden

**Definition 7.17** Unbeschränktheit des Integranden in einem Punkt des Integrationsintervalls

Für die Funktion  $f$  liege einer der folgenden drei Fälle vor:

- (a)  $f$  ist in  $(a, b]$  definiert und für alle  $\eta \in (0, b - a)$  in  $[a + \eta, b]$  Riemann-integrierbar.

$$\text{Ist } \lim_{\eta \rightarrow 0+0} \int_{a+\eta}^b f(x)dx = A, \text{ dann setzt man } \int_a^b f(x)dx := A.$$

- (b)  $f$  ist in  $[a, b)$  definiert und für alle  $\eta \in (0, b - a)$  in  $[a, b - \eta]$  Riemann-integrierbar.

$$\text{Ist } \lim_{\eta \rightarrow 0+0} \int_a^{b-\eta} f(x)dx = B, \text{ dann setzt man } \int_a^b f(x)dx := B.$$

- (c)  $f$  ist in  $[a, c) \cup (c, b]$  definiert und für alle  $\eta \in (0, \min\{c - a, b - c\})$  in  $[a, c - \eta]$  und  $[c + \eta, b]$  Riemann-integrierbar. Ist

$$\lim_{\eta \rightarrow 0+0} \int_a^{c-\eta} f(x)dx = C_1 \text{ und } \lim_{\eta \rightarrow 0+0} \int_{c+\eta}^b f(x)dx = C_2, \text{ dann setzt man}$$

$$\int_a^b f(x)dx := C_1 + C_2.$$

Die so definierten Integrale heißen **uneigentliche Integrale**. Wenn die angegebenen Grenzwerte existieren, dann sagt man, das uneigentliche Integral  $\int_a^b f(x)dx$  **konvergiert**. Falls  $\int_a^b |f(x)| dx$  konvergiert,

sagt man, dass das Integral  $\int_a^b f(x)dx$  **absolut konvergiert**.

#### Beispiel 7.15

Betrachte  $\int_a^b \frac{1}{(b-x)^\alpha} dx$  mit  $\alpha \in \mathbb{R}$ .  $\alpha \leq 0$  ist uninteressant, es liegt ein gewöhnliches R-Integral vor. Für  $\alpha > 0$  ist  $b$  kritisch. In  $[a, b - \eta]$  liegt stets Riemann-Integrierbarkeit vor.

**Fall 1:**  $\alpha = 1 \Rightarrow \int_a^{b-\eta} \frac{1}{b-x} dx = \log(b-x)|_a^{b-\eta} = \log(b-a) - \log \eta$ . Daher existiert  $\lim_{\eta \rightarrow 0+0} \int_a^{b-\eta} \frac{1}{b-x} dx$  nicht.

**Fall 2:**  $\alpha \neq 1 \Rightarrow \int_a^{b-\eta} \frac{1}{(b-x)^\alpha} dx = -\frac{1}{1-\alpha} (b-x)^{1-\alpha}|_a^{b-\eta} = -\frac{1}{1-\alpha} [\eta^{1-\alpha} - (b-a)^{1-\alpha}] \quad (*)$

Für  $\alpha < 1$  konvergiert die rechte Seite von  $(*)$  für  $\eta \rightarrow 0+0$  gegen  $\frac{1}{1-\alpha}(b-a)^{1-\alpha}$ . Für  $\alpha > 1$  divergiert das Integral.

$\Rightarrow$  Das Integral konvergiert für alle  $\alpha < 1$ .

Es folgt ein Beispiel für die Formulierung eines Konvergenzkriteriums.

**Satz 7.18**

Majorantenkriterium für uneigentliche Integrale

Für  $f, g$  liege einer der in Definition 7.17 beschriebenen Fälle vor. Ferner sei  $|f(x)| \leq g(x) \forall x \in D(f) = D(g)$ . Wenn  $\int_a^b g(x)dx$  konvergiert, dann konvergiert  $\int_a^b f(x)dx$  absolut.

**Beweis**

Als Beispiel wird der Fall b diskutiert.

Nach dem Cauchy Kriterium für Grenzwerte von Funktionen (mit  $\lim_{\eta \rightarrow 0+0} \int_a^{b-\eta} \dots$ ) gibt es für alle  $\varepsilon > 0$  ein  $\eta > 0$ , sodass für alle  $\eta_1, \eta_2 < \eta$  (o.E.d.A.  $\eta_2 < \eta_1$ ) gilt:

$$\left| \int_a^{b-\eta_2} g(x)dx - \int_a^{b-\eta_1} g(x)dx \right| = \left| \int_{b-\eta_1}^{b-\eta_2} g(x)dx \right| < \varepsilon$$

$$\left| \int_a^{b-\eta_2} f(x)dx - \int_a^{b-\eta_1} f(x)dx \right| = \left| \int_{b-\eta_1}^{b-\eta_2} f(x)dx \right| \leq \int_{b-\eta_1}^{b-\eta_2} |f(x)|dx \leq \int_{b-\eta_1}^{b-\eta_2} g(x)dx < \varepsilon$$

Nach dem Cauchy Kriterium existiert also  $\lim_{\eta \rightarrow 0+0} \int_a^{b-\eta} |f(x)|dx$ , also konvergiert  $\int_a^b f(x)dx$  absolut.

Der Fall c enthält für den Anfänger eine Falle.

**Beispiel 7.16**

Betrachte  $\int_{-a}^a \frac{1}{x} dx$  mit der kritischen Stelle  $c = 0$ .

$$\lim_{\eta \rightarrow 0+0} \left[ \int_{-a}^{-\eta} \frac{1}{x} dx + \int_{\eta}^a \frac{1}{x} dx \right] = \lim_{\eta \rightarrow 0+0} \left[ \log(-x) \Big|_{-a}^{-\eta} + \log x \Big|_{\eta}^a \right] = \lim_{\eta \rightarrow 0+0} (\log \eta - \log a + \log a - \log \eta) = 0$$

Das Integral ist *nicht* konvergent, denn nach Definition 7.17c müssten die **einzelnen** Grenzwerte  $\lim_{\eta \rightarrow 0+0} \int_{-a}^{-\eta} \frac{1}{x} dx$  und  $\lim_{\eta \rightarrow 0+0} \int_{\eta}^a \frac{1}{x} dx$  existieren, was nicht der Fall ist.

Dennoch hat diese Schlussfolgerung etwas für sich.

**Definition 7.19**

$f$  sei auf  $[a, c) \cup (c, b]$  definiert und auf jedem abgeschlossenen Teilintervall  $R$ -integrierbar. Falls  $\lim_{\eta \rightarrow 0+0} \left[ \int_a^{c-\eta} f(x)dx + \int_{c+\eta}^b f(x)dx \right] = A$  existiert, so definiert man  $A =: (H) \int_a^b f(x)dx =: \text{v.p.} \int_a^b f(x)dx$  und nennt (H) den **Cauchy'schen Hauptwert** (valeur principale) des uneigentlichen Integrals von  $f(x)$  über  $[a, b]$ .

**Beispiel 7.17**

$$(H) \int_{-a}^a \frac{1}{x} dx = 0$$

## 7.5.2 Unbeschränkte Integrationsintervalle

### Definition 7.20

Für  $f$  liege einer der folgenden Fälle vor:  $D(f) = [a, \infty)$ ,  $D(f) = (-\infty, b]$  oder  $D(f) = \mathbb{R}$ . In jedem Falle sei  $f$  über jedes komplette Teilintervall seines Definitionsbereiches R-integrierbar (d.h.  $f$  ist **lokal R-integrierbar**).

(a) Falls  $\lim_{\varrho \rightarrow \infty} \int_a^{\varrho} f(x) dx = A$ , setze  $\int_a^{\infty} f(x) dx := A$ .

(b) Falls  $\lim_{\varrho \rightarrow -\infty} \int_{\varrho}^b f(x) dx = B$ , setze  $\int_{-\infty}^b f(x) dx := B$ .

(c) Falls  $\lim_{\varrho \rightarrow \infty} \int_a^{\varrho} f(x) dx = C_1$  und  $\lim_{\varrho \rightarrow -\infty} \int_{\varrho}^a f(x) dx = C_2$  ( $\forall a \in \mathbb{R}$ ), setze  $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = C_1 + C_2$ .

Man sagt dann, dass die entsprechenden Integrale als uneigentliche Integrale **konvergieren**. Wenn die jeweiligen Integrale über  $|f(x)|$  konvergieren, dann heißen die uneigentlichen Integrale **absolut konvergent**. Für den Fall c ist wieder der **Cauchy'sche Hauptwert** definierbar: (H)  $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx =$

$$\lim_{\varrho \rightarrow \infty} \int_{-\varrho}^{\varrho} f(x) dx, \text{ falls dieser Limes existiert.}$$

### Beispiel 7.18

Zu berechnen ist  $\int_a^{\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx$  mit  $a > 0$ .

Für  $\alpha \neq 1$  ist  $\int_a^{\varrho} \frac{1}{x^\alpha} dx = \frac{1}{1-\alpha} \left[ \frac{1}{x^{\alpha-1}} \right]_a^{\varrho} = \frac{1}{1-\alpha} \left[ \frac{1}{\varrho^{\alpha-1}} - \frac{1}{a^{\alpha-1}} \right]$ . Dieser Grenzwert existiert nur für  $\alpha > 1$ , dann ist  $\int_a^{\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx = \frac{1}{\alpha-1} \cdot \frac{1}{\varrho^{\alpha-1}}$ .

Das Majorantenkriterium kann für unbeschränkte Integrationsintervalle fast wörtlich übernommen werden.

## 7.6 Das Riemann-Stieltjes-Integral

### Motivation

Auf der  $x$ -Achse liegen in den Punkten  $x_1, \dots, x_n$  Massen  $m_1, \dots, m_n$  mit der Gesamtmasse  $M = m_1 + \dots + m_n$ . Der Schwerpunkt ist  $X_s = \frac{1}{M} (m_1 \cdot x_1 + \dots + m_n \cdot x_n)$ . Nun möge im Intervall  $[a', b']$  irgendwie (kontinuierlich oder diskret) Masse verteilt sein. Gesucht ist der Schwerpunkt des Systems.

Dazu betrachten wir ein Intervall  $[a, b]$  mit  $a < a'$  und  $b' = b$ , und die Massenverteilungsfunktion  $m(x)$  mit  $m(a) = 0$ .  $m(x)$  = die in  $[a, x]$  enthaltene Masse und  $m(b) = M$ . (Dadurch wird wegen  $a < a'$  eine evtl. in  $a'$  liegende Masse richtig erfasst.) Für  $a \leq a_1 < b_1 \leq b$  ist  $m(b_1) - m(a_1)$  die in  $(a_1, b_1]$  enthaltene Masse.

Sei nun  $\mathcal{Z} = \{x_0 = a < x_1 < \dots < x_n = b\}$  eine Zerlegung von  $[a, b]$  und  $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$  mit  $x_{i-1} \leq \xi_i \leq x_i$  ein System von Zwischenpunkten von  $\mathcal{Z}$ . Dann scheint es natürlich zu sein, den Punkt

$$x_{\mathcal{Z}, \xi} := \frac{1}{M} \sum_{k=1}^n \xi_k (m(x_k) - m(x_{k-1})) \quad (7.5)$$

als Näherung für den Schwergp. zu betrachten. (7.5) erinnert an die Riemann'schen Zwischensummen.

Sei  $\mathcal{Z}$  eine Zerlegung von  $[a, b]$  und  $d(\mathcal{Z}) = \max_k |x_k - x_{k-1}|$  die **Feinheit** dieser Zerlegung. Eine Zerlegungsfolge  $(\mathcal{Z}_n)$  heißt **Zerlegungsnullfolge**, wenn  $d(\mathcal{Z}_n) \rightarrow 0$ .

### Definition 7.21

Seien  $f, g$  auf  $[a, b]$  definiert und reell.  $\mathcal{Z} = \{x_0 = a < x_1 < \dots < x_n = b\}$  sei eine Zerlegung von  $[a, b]$  und  $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$  mit  $\xi_k \in I_k = [x_{k-1}, x_k]$  ein Zwischenpunktsystem.

Unter der **Zwischensumme** (Riemann-Stieltjes-Summe) von  $f$  bzgl.  $g$  zur Zerlegung  $\mathcal{Z}$  und dem Zwischenpunktsystem  $\xi$  versteht man die Summe

$$\sigma_{f,g}(\mathcal{Z}, \xi) := \sum_{k=1}^n f(\xi_k) [g(x_k) - g(x_{k-1})]$$

$f$  heißt über  $[a, b]$  **R-integrierbar** bzgl.  $g$ , falls für jede Zerlegungsnullfolge  $(\mathcal{Z}_n)$  und beliebige  $\xi$  der Grenzwert  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_{f,g}(\mathcal{Z}_n)$  existiert. Dieser Grenzwert heißt **Riemann-Stieltjes-Integral** (RS-

Integral) von  $f$  bzgl.  $g$  über  $[a, b]$ . Man schreibt  $\int_a^b f(x) dg(x)$  oder kurz  $\int_a^b f dg$ .

### Rechenregeln für Riemann-Stieltjes-Integrale

Wir setzen voraus, dass die jeweiligen Integrale existieren. Das Riemann-Stieltjes-Integral ist in  $f$  und  $g$  linear, also

$$\int_a^b (\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2) dg = \alpha_1 \int_a^b f_1 dg + \alpha_2 \int_a^b f_2 dg \quad \text{und} \quad \int_a^b f d(\beta_1 g_1 + \beta_2 g_2) = \beta_1 \int_a^b f dg_1 + \beta_2 \int_a^b f dg_2$$

(Dies folgt direkt aus der Definition, da die Zwischensummen ebenfalls in  $f$  und  $g$  linear sind.) Außerdem lässt sich das Integrationsintervall zerteilen: Für  $a < c < b$  ist

$$\int_a^b f dg = \int_a^c f dg + \int_c^b f dg$$

Die partielle Integration kann analog formuliert werden: Wenn  $f$  bzgl.  $g$  integrierbar ist, dann auch  $g$  bzgl.  $f$  und es gilt

$$\int_a^b f(x) dg(x) = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b g(x) df(x)$$

### Beweis

Sei  $\mathcal{Z}$  eine Zerlegung von  $[a, b]$  und  $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$  ein Zwischenpunktsystem von  $\mathcal{Z}$ . Wir formen die Zwischensummen um. Dazu bilden wir mit  $\xi_0 := a$  und  $\xi_{n+1} = b$  eine neue Zerlegung mit den Zwischenpunkten  $x_i$  bilden.

$$\sum_{k=1}^n f(\xi_k) [g(x_k) - g(x_{k-1})] = - \sum_{k=0}^n g(x_k) [f(\xi_{k+1}) - f(\xi_k)] + g(b)f(b) - g(a)f(a) \quad (**)$$

Wenn  $(\mathcal{Z}_n)$  eine Zerlegungsnullfolge ist, dann bildet auch das zugehörige  $(\mathcal{Z}'_n)$  auch eine solche, da stets  $d(\mathcal{Z}'_n) \leq 2d(\mathcal{Z}_n)$  gilt. Das heißt, beide Seiten von  $(**)$  haben entweder gleichzeitig einen Limes oder nicht. Wenn der Limes existiert, gilt die angegebene Formel. ■

## Rückführung von RS-Integralen auf normale Integrale

Sei  $f \in R(a, b)$  und  $g \in C(a, b)$  (es reicht auch die Existenz und Riemann-Integrierbarkeit von  $g'$  in  $[a, b]$ ). Dann existiert  $\int_a^b f dg$  und es ist

$$\int_a^b f(x) dg(x) = \int_a^b f(x) g'(x) dx$$

Umgekehrt: Für  $f \in R(a, b)$  und stetiges  $h$  lässt sich  $\int_a^b f(x) h(x) dx$  als RS-Integral schreiben:

$$\int_a^b f(x) h(x) dx = \int_a^b f(x) dg(x) \text{ mit } g(x) = \int_a^x h(y) dy$$

### Beweis

Wir zeigen den ersten Teil. Dazu seien  $\mathcal{Z}, \xi$  wie üblich definiert. Mit dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung folgt (mit  $\eta_k \in (x_{k-1}, x_k)$ ):

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n f(\xi_k) [g(x_k) - g(x_{k-1})] &= \sum_{k=1}^n f(\xi_k) g'(\eta_k) (x_k - x_{k-1}) \\ &= \sum_{k=1}^n [f(\xi_k) - f(\eta_k)] g'(\eta_k) (x_k - x_{k-1}) + \sum_{k=1}^n f(\eta_k) g'(\eta_k) (x_k - x_{k-1}) \end{aligned}$$

Links steht die Zwischensumme  $\sigma_{f,g}(\mathcal{Z})$ , rechts als zweiter Summand die Riemann'sche Zwischensumme  $\sigma(fg', \mathcal{Z})$ . Setze nun  $M_k := \sup_{x \in [x_k, x_{k-1}]} f(x)$  und  $m_k := \inf_{x \in [x_k, x_{k-1}]} f(x)$ . Dann folgt aus obiger

Gleichung:

$$\begin{aligned} |\sigma_{f,g}(\mathcal{Z}) - \sigma(fg', \mathcal{Z})| &= \left| \sum_{k=1}^n (f(\xi_k) - f(\eta_k)) g'(\eta_k) (x_k - x_{k-1}) \right| \\ &\leq \sum_{k=1}^n |f(\xi_k) - f(\eta_k)| |g'(\eta_k)| (x_k - x_{k-1}) \leq c \cdot \sum_{k=1}^n (M_k - m_k) (x_k - x_{k-1}) =: r(\mathcal{Z}) \end{aligned}$$

Die letzte Summe entspricht der Differenz von Obersumme und Untersumme von  $f$  zur Zerlegung  $\mathcal{Z}$ . Da  $f \in R(a, b)$ , ist  $r(\mathcal{Z}_n) \rightarrow 0$  für jede Zerlegungsnullfolge  $(\mathcal{Z}_n)$ , d.h.  $\sigma_{f,g}(\mathcal{Z}_n) - \sigma(fg', \mathcal{Z}_n) \rightarrow 0$ . ■

## Fundamentalungleichung für Riemann-Stieltjes-Integrale

Für Riemannintegrale gilt:

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \left( \sup_{x \in [a, b]} |f(x)| \right) (b - a)$$

Betrachte nun die Riemann-Stieltjes-Zwischensummen:

$$\left| \sum_{k=1}^n f(\xi_k) [g(x_k) - g(x_{k-1})] \right| \leq \sup_{x \in [a, b]} |f(x)| \cdot \sum_{k=1}^n |g(x_k) - g(x_{k-1})| \quad (*)$$

Über die rechte Seite weiß man zunächst nichts. Damit führt (\*) sozusagen zu einer neuen Klasse von Funktionen.

### Definition 7.22

Eine Funktion  $g$  heißt **von beschränkter Variation** auf  $[a, b]$ , wenn es eine Konstante  $M > 0$  gibt, sodass für jede Zerlegung  $\mathcal{Z}$  von  $[a, b]$  gilt:

$$V(g, \mathcal{Z}) := \sum_{k=1}^n |g(x_k) - g(x_{k-1})| \leq M$$

Man nennt  $V_a^b(g) := \sup_{\mathcal{Z}} V(g, \mathcal{Z})$  die **totale Variation** (Totalvariation) von  $g$  auf  $[a, b]$ .

Direkt aus der Abschätzung (\*) erhält man den folgenden Satz.

### Satz 7.23

Sei  $f$  auf  $[a, b]$  beschränkt und  $g$  von beschränkter Variation auf  $[a, b]$ , sodass  $\int_a^b f dg$  existiert. Dann gilt:

$$\left| \int_a^b f(x) dg(x) \right| \leq \left( \sup_{x \in [a, b]} |f(x)| \right) \cdot V_a^b(g)$$

Die Menge aller Funktionen von beschränkter Variation ist groß: Alle Treppenfunktionen, alle monotonen Funktionen und alle stetig differenzierbaren Funktionen gehören dazu. Aber: Stetigkeit allein reicht nicht aus. Man kann zeigen:  $f$  ist von beschränkter Variation genau dann, wenn  $f$  als Differenz zweier monotoner Funktionen darstellbar ist.

**Beweis** zur Beschränktheit der Variation monotoner Funktionen  
Sei  $g$  (o.E.d.A.) monoton wachsend. Dann ist:

$$\sum_{k=1}^n \underbrace{|g(x_k) - g(x_{k-1})|}_{>0} = \sum_{k=1}^n [g(x_k) - g(x_{k-1})] = g(b) - g(a) = V_a^b(g)$$

■

### Satz 7.24 Existenzsatz für RS-Integrale

Wenn  $f$  stetig und  $g$  von beschränkter Variation auf  $[a, b]$  ist, dann existieren  $\int_a^b f dg$  und  $\int_a^b g df$ .

#### Bemerkung

- Für  $g(x) = x$  mit  $x \in [a, b]$  ist  $\int_a^b f dg = \int_a^b f dx$  ein gewöhnliches Riemann-Integral.
- Für  $g \equiv c$  auf  $[a, b]$  ist  $\int_a^b f dg = 0$ .



**Satz 7.25**

## Mittelwertsätze für RS-Integrale

1. (1. Mittelwertsatz) Wenn  $\int_a^b f dg$  existiert und  $f$  auf  $[a, b]$  beschränkt, dann gilt:

$$\exists \mu \in [\inf f, \sup f] : \int_a^b f dg = \mu [g(b) - g(a)] \quad (7.6)$$

Ist  $f$  stetig, dann existiert auf Grund des Zwischenwertsatzes ein  $c \in [a, b]$  mit

$$\int_a^b f dg = f(c) [g(b) - g(a)]$$

2. (2. Mittelwertsatz) Ist  $f$  monoton wachsend und  $g$  stetig auf  $[a, b]$ , dann existiert ein  $c \in [a, b]$  mit

$$\int_a^b f dg = f(a) \int_a^c dg + f(b) \int_c^b dg$$

**Beweis**

1. Mit  $m := \inf_{x \in [a, b]} f(x)$  und  $M := \sup_{x \in [a, b]} f(x)$  folgt natürlich  $m \leq f \leq M$ .

$$\int_a^b m dg = m \int_a^b dg = m [g(b) - g(a)] \leq \int_a^b f dg \leq \int_a^b M dg = M [g(b) - g(a)]$$

Hieraus folgt (7.6) direkt für  $\mu := \frac{\int_a^b f dg}{g(b) - g(a)}$ .

2. Wende partielle Integration an:

$$\int_a^b f dg = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b g df$$

Auf das letztere Integral wenden wir den ersten Mittelwertsatz an und beachten die Stetigkeit von  $g$ .

$$\begin{aligned} \exists c \in [a, b] : \int_a^b g df &= g(c) [f(b) - f(a)] \\ \Rightarrow \int_a^b f dg &= f(b)g(b) - f(a)g(a) - g(c) [f(b) - f(a)] \\ &= f(a) \cdot \underbrace{[g(c) - g(a)]}_{=\int_a^c dg} + f(b) \cdot \underbrace{[g(b) - g(c)]}_{=\int_c^b dg} \Rightarrow (7.7) \end{aligned}$$



Nun können wir auch den zweiten Mittelwertsatz der Integralrechnung (Satz 7.12) zeigen. Dieser lautete (mit monotonem  $f$  und stetigem  $g$ ):

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(a) \int_a^c g(x)dx + f(b) \int_c^b g(x)dx$$

### Beweis

Setze  $G(x) := \int_a^x g(t)dt$ . Da  $g$  stetig ist, ist  $G(x)$  in  $(a, b)$  differenzierbar, denn  $G' = g$ .  $f$  ist monoton, also von beschränkter Variation auf  $[a, b]$ , also existiert  $\int_a^b f dG$ .

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)g(x)dx &= \int_a^b f(x)G'(x)dx = \int_a^b f(x)dG(x) \\ &= f(a)[G(b) - G(a)] + f(b)[G(a) - G(b)] = f(a) \int_a^b g(x)dx + f(b) \int_b^a g(x)dx \end{aligned}$$

■

Sei  $f : I = [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine Funktion mehrerer Variablen, also  $f = (f_1, \dots, f_n)^T$ . Dann kann man über den Zugang zum Riemannintegral über Zwischensummen  $\int_a^b f(t)dt$  erklären als

$$\int_a^b f(t)dt = \left( \int_a^b f_1(t)dt, \dots, \int_a^b f_n(t)dt \right)^T$$

Also ist  $f$  R-integrierbar, wenn alle  $f_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) R-integrierbar sind.

### Satz 7.26

Dreiecksungleichung für Integrale

Sei  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  stetig. Dann gilt:

$$\left\| \int_a^b f(t)dt \right\| \leq \int_a^b \|f(t)\| dt$$

### Beweis

Seien  $\mathcal{Z} = \{a = t_0 < t_1 < \dots < t_m = b\}$  eine Zerlegung von  $[a, b]$  und  $t'_i$  entsprechende Zwischenwerte. Die Zwischensumme ist von der Gestalt

$$\sigma_f(\mathcal{Z}) = \sum_{i=1}^m f(t'_i)(t_i - t_{i-1})$$

Aus beiden Seiten betrachten wir die Norm und wenden rechts die Dreiecksungleichung an:

$$\|\sigma_f(\mathcal{Z})\| = \left\| \sum_{i=1}^m f(t'_i)(t_i - t_{i-1}) \right\| \leq \sum_{i=1}^m \|f(t'_i)(t_i - t_{i-1})\| = \sum_{i=1}^m \|f(t'_i)\| \cdot (t_i - t_{i-1})$$

Betrachte nun eine Zerlegungsnullfolge  $(\mathcal{Z}_n)$ , also konvergiert auf der linken Seite

$$\sigma_f(\mathcal{Z}_n) \rightarrow \int_a^b f(t) dt$$

und aufgrund der Stetigkeit der Norm ist

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\sigma_f(\mathcal{Z}_n)\| = \left\| \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_f(\mathcal{Z}_n) \right\| = \left\| \int_a^b f(t) dt \right\|$$

Also konvergiert für  $\mathcal{Z}_n$  die rechte Seite gegen  $\int_a^b \|f(t)\| dt$ .



# 8 Kurvenintegrale

## 8.1 Wege und Kurven

Der Kurvenbegriff ist schwierig. Man möchte zwischen dem „geometrischen“ Gebilde Kurve und dem „Entstehungsweg“ unterscheiden.

### Definition 8.1

1. Ein **Weg**  $(\varphi, I)$  in  $\mathbb{R}^n$  ist eine stetige Abbildung  $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  ( $I = [a, b]$ ). Die kompakte Bildmenge  $C := \varphi(I)$  heißt **Spur** des Weges  $\varphi$  und  $\varphi$  heißt auch **Parameterdarstellung** von  $C$ . Der Weg heißt **geschlossen**, wenn  $\varphi(a) = \varphi(b)$ , d.h. Anfangs- und Endpunkt von  $C$  stimmen überein.
2. Eine Teilmenge  $C \subset \mathbb{R}^n$  heißt **Kurve** ( $C^*$ -Kurve), wenn es einen injektiven ( $C^*$ -)Weg  $(\varphi, I)$  gibt, dessen Spur  $\varphi(I) = C$  ist.
3. Eine Kurve  $C$  heißt **glatt** oder **regulär**, wenn es eine zugehörige stetig differenzierbare Parameterdarstellung  $(\varphi, I)$  gibt mit  $\varphi'(t) \neq 0 \forall t \in I$ . Dieser Weg heißt auch glatt bzw. regulär.

### Bemerkung

1. Injektive Wege heißen auch **Jordanwege**, die zugehörigen Kurven **Jordankurven**. Man lässt bei geschlossenen Wegen und Kurven eine nicht injektive Stelle zu.
2. Wenn  $\varphi$  die Parameterdarstellung einer glatten Kurve ist, dann ist  $\varphi'(t)$  der Tangentialvektor an  $C$  in  $\varphi(t)$ .
3. *Zusammensetzen von Kurven und Wegen:* Seien  $(\varphi_k, I_k)$  mit  $k = 1, \dots, n$  gegebene Wege, sodass der Endpunkt von  $\varphi_l$  jeweils der Anfangspunkt von  $\varphi_{l+1}$  ist. Dann ist auf natürliche Weise ein Weg  $\varphi = \varphi_1, \dots, \varphi_n$  definiert. Für die zugehörigen Kurven  $C_k$  schreibt man  $C = C_1 \oplus \dots \oplus C_n$ . Meist kann man erreichen, dass  $\varphi$  auf einem Intervall  $I = I_1 \cup \dots \cup I_n$  definiert ist, die  $I_k$  keine inneren Punkte gemeinsam haben und  $\varphi$  insgesamt injektiv wird.
4. Ein Weg heißt **stückweise glatt**, wenn er bis auf endlich viele Punkte glatt ist. Dann kann man den Weg als Summe von glatten Wegen darstellen. Analog für die zugehörige Kurve.
5. Zur gleichen Kurve können natürlich viele (injektive) Wege gehören. Außerdem kann zu einer glatten Kurve durchaus eine nicht glatte Parameterdarstellung gehören.

### Vereinbarung

Wir benutzen den Begriff des Weges (bzw. der Parameterdarstellung), falls nicht anders gesagt, immer im Sinne injektiver Wege bzw. Parameterdarstellungen.

**Beispiel 8.1**

1. Seien  $A, B \in \mathbb{R}^n$  mit  $A \neq B$ . Die Strecke  $\overline{AB}$  ist eine glatte Kurve mit der Parameterdarstellung:

$$\varphi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n, \varphi(t) = A + t(B - A)$$

2. Polygonzüge sind stückweise glatte Kurven.
3. Graphen von Funktionen sind Kurven. Für  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  ist die Kurve  $C = G(f) = \{(t, f(t)) : t \in [a, b]\}$  der Graph von  $f$  mit der Parameterdarstellung  $\varphi(t) = (t, f(t))^T$ .
4. Durch  $t \mapsto (t \cos t, t \sin t)^T$  für  $t > 0$  ist die **Archimedische Spirale** definiert.
5. Der geschlossene Weg  $\varphi(t) = (\cos t, \sin t)^T$  mit  $I = [0, 2\pi]$  stellt den Einheitskreis dar.
6.  $\varphi(t) = (r \cos t, r \sin t, h \cdot t)^T$  ist die Parameterdarstellung einer Schraubenlinie.
7. Die Zykloidenkurve mit der Parameterdarstellung  $t \mapsto (t - \sin t, 1 - \cos t)^T$  ist nicht glatt, aber stückweise glatt.

**Parametertransformation**

Die gleiche Kurve kann verschiedene Parameterdarstellungen haben; das bedeutet anschaulich:  $C$  kann in unterschiedlichen Richtungen oder in verschiedenen Geschwindigkeiten durchlaufen werden.

**Definition und Satz 8.2**

Seien  $(\varphi, I)$  und  $(\psi, J)$  zwei Parameterdarstellungen derselben Kurve  $C$ , d.h.  $C = \varphi(I) = \psi(J)$ . Dann existiert genau eine stetige und streng monotone Bijektion  $h : J \rightarrow I$  mit  $\psi = \varphi \circ h$ . Sind  $\varphi, \psi$  glatt, dann ist  $h$  stetig differenzierbar und  $h' \neq 0$ .  $h$  nennt man dann auch **Parametertransformation** (zwischen den Parametrisierungen).

Zum Beweis setze  $h := \varphi^{-1} \circ \psi$ .

Die Menge aller Parameterdarstellungen (z.B. die stetig differenzierbaren) zerfällt in zwei Klassen. In jeder Klasse liegen alle diejenigen, für die das zugehörige  $h$  monoton wachsend ist ( $h' > 0$ ). Für  $\varphi, \psi$  aus verschiedenen Klassen ist  $h$  monoton fallend ( $h' < 0$ ).

**Definition 8.3**

Unter der **Orientierung** (bzw. dem Durchlaufsinne) von  $C$  versteht man die Festlegung auf eine dieser Äquivalenzklassen ( $\varphi \sim \psi \Leftrightarrow h$  monoton wachsend), die man dann **positive Parameterdarstellungen** nennt. Entsprechend nennt man Parametertransformationen  $h$  mit  $h' > 0$  **positiv**. Für  $h' < 0$  spricht man von der **Änderung des Durchlaufsinns**.

Wenn man eine Parameterdarstellung  $(\varphi, I)$  hat, kann man daraus eine Parameterdarstellung  $(\varphi^-, I)$  erhalten, die den Durchlaufsinne ändert:

$$I = [a, b] \Rightarrow \varphi^-(t) = \varphi(a + b - t) \quad \begin{pmatrix} \varphi^-(a) = \varphi(b) \\ \varphi^-(b) = \varphi(a) \end{pmatrix}$$

**Weg- und Kurvenlänge**

Wir beginnen mit dem Begriff der Weglänge (nicht nur für injektive Wege). Sei  $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  ein Weg und  $\mathcal{Z} = \{a = t_0 < t_1 < \dots < t_r = b\}$  eine Zerlegung von  $[a, b]$  mit den zugehörigen Punkten  $x^{(i)} = \varphi(t_i)$  im  $\mathbb{R}^n$ . Die Idee ist, den Weg durch einen Polygonzug  $P_{\mathcal{Z}}$  zu approximieren. Genauer: Der Weg wird auf  $[t_i, t_{i+1}]$  durch diejenige Funktion angenähert, die die Strecke zwischen  $x^{(i)}$  und  $x^{(i+1)}$  beschreibt. Die Länge des Polygonzuges wird dann wie folgt definiert:

$$L(P_{\mathcal{Z}}) := \sum_{i=1}^r \left\| x^{(i)} - x^{(i-1)} \right\| = \sum_{i=1}^r \left\| \varphi(t_i) - \varphi(t_{i-1}) \right\| \quad (8.1)$$

**Definition 8.4**

Unter der Länge  $L(\varphi)$  eines Weges  $(\varphi, [a, b])$  versteht man  $L(\varphi) := \sup_{\mathcal{Z}} L(P_{\mathcal{Z}})$ . Der Weg  $\varphi$  heißt **rektifizierbar**, wenn  $L(\varphi) < \infty$ .

Wir schreiben (8.1) ausführlich:

$$L(P_{\mathcal{Z}}) = \sum_{i=1}^r \sqrt{\sum_{j=1}^n |\varphi_j(t_i) - \varphi_j(t_{i-1})|^2}$$

Beachtet man die Abschätzung  $\sqrt{a_1^2 + \dots + a_n^2} \leq |a_1| + \dots + |a_n|$ , so gilt, wenn die Komponentenfunktionen  $\varphi_j$  von  $\varphi$  von beschränkter Variation sind:

$$\sum_{i=1}^r |\varphi_j(t_i) - \varphi_j(t_{i-1})| \leq L(P_{\mathcal{Z}}) \leq \sum_{j=1}^n \underbrace{\sum_{i=1}^r |\varphi_j(t_i) - \varphi_j(t_{i-1})|}_{\leq V_a^b(\varphi_j)} \quad \forall j \quad (*)$$

**Satz 8.5**

Der Weg  $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  ist genau dann rektifizierbar, wenn alle Komponentenfunktionen von  $\varphi$  von beschränkter Variation sind.

Das bedeutet insbesondere: Stetig differenzierbare (also auch glatte) Wege sind stets rektifizierbar. Natürlich ist die Summe bzw. die Einschränkung rektifizierbarer Wege wieder rektifizierbar.

**Weglängenfunktion**

Sei  $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  rektifizierbar. Definiere  $s : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_+$  wie folgt:

$$s(t) := \begin{cases} 0 & t = a \\ L(\varphi, [a, t]) = L(\varphi|_{[a, t]}) & t \in (a, b] \end{cases}$$

Das heißt,  $s(t)$  ist die Länge des auf  $[a, t]$  eingeschränkten Weges, insbesondere  $s(b) = L(\varphi)$ .

**Satz 8.6****Eigenschaften der Weglängenfunktion**

1. Ist  $(\varphi, [a, b])$  rektifizierbar, dann ist  $s$  monoton wachsend und stetig. Für injektives  $\varphi$  ist  $s$  streng monoton wachsend.
2. Wenn  $\varphi$  auf  $[a, b]$  stetig differenzierbar ist, dann ist  $s$  auf  $[a, b]$  stetig differenzierbar und es ist  $s'(t) = \|\varphi'(t)\|$ . Also gilt:

$$s(t) = \int_a^t \|\varphi'(\tau)\| d\tau = \int_a^t \sqrt{\varphi_1'(\tau)^2 + \dots + \varphi_n'(\tau)^2} d\tau$$

Insbesondere ist  $L(\varphi) = s(b) = \int_a^b \|\varphi'(\tau)\| d\tau$ . Diese Formel gilt auch noch für stückweise stetig differenzierbare Wege: Für  $\varphi = \varphi^{(1)} \oplus \dots \oplus \varphi^{(n)}$  ist  $L(\varphi) = L(\varphi^{(1)}) + \dots + L(\varphi^{(n)})$ .

**Beweis**

1. Die Monotonieaussagen lassen sich sehr leicht zeigen. Die Aussage über die Stetigkeit von  $s$  erfordert mehr Kenntnis über die Variation stetiger Funktionen.

*Satz:* Ist  $g$  auf  $[c, d]$  stetig und von beschränkter Variation, dann ist  $V_c^x(g)$  (die Variation von  $g$  auf  $[c, x]$ ) eine stetige Funktion von  $x$ .

2. Zuerst bemerken wir: Für alle  $[c, d] \subset [a, b]$  gilt natürlich  $\underbrace{\|\varphi(d) - \varphi(c)\|}_{\text{Länge von } \overline{\varphi(c)\varphi(d)}} \leq L(\varphi|_{[c,d]})$ . Dies nutzen

wir wie folgt: Sei  $t \in (a, b)$  und  $0 < h$  so, dass  $t + h < b$ . (Analog für  $h < 0, t + h > a$ .) Dann gilt:

$$\|\varphi(t+h) - \varphi(t)\| \leq (\text{s.o.}) \leq s(t+h) - s(t) \quad (8.3)$$

*Behauptung:*  $\frac{s(t+h)-s(t)}{h} \xrightarrow{h \rightarrow 0} \|\varphi'(t)\|$

Sei  $\mathcal{Z}$  eine beliebige Zerlegung von  $[a, b]$ . Wende die Dreiecksungleichung für Integrale aus Satz 7.26 an.

$$\begin{aligned} \|\varphi(t_k) - \varphi(t_{k-1})\| &= \left\| \int_{t_{k-1}}^{t_k} \varphi'(\tau) d\tau \right\| \leq \int_{t_{k-1}}^{t_k} \|\varphi'(\tau)\| d\tau \\ \Rightarrow L(P_{\mathcal{Z}}) &= \sum_{k=1}^n \|\varphi(t_k) - \varphi(t_{k-1})\| \leq \int_a^b \|\varphi'(\tau)\| d\tau \end{aligned}$$

Wir gehen zum Supremum über:  $L(\varphi) \leq \int_a^b \|\varphi'(\tau)\| d\tau$ , und wende die Betrachtungen auf  $\varphi|_{[t, t+h]}$  an. Dann folgt:

$$\left\| \frac{\varphi(t+h) - \varphi(t)}{h} \right\| \stackrel{(8.3)}{\leq} \underbrace{\frac{s(t+h) - s(t)}{h}}_{=\frac{1}{h}L(\varphi|_{[t, t+h]})} \leq \frac{1}{h} \int_t^{t+h} \|\varphi'(\tau)\| d\tau \quad (8.5)$$

Wende den Mittelwertsatz der Integralrechnung (Satz 7.12) mit  $g \equiv 1$  und  $f(\tau) = \|\varphi'(\tau)\|$  an:

$$\exists \xi = \xi(h), t \leq \xi(h) \leq t+h : \frac{1}{h} \int_t^{t+h} \|\varphi'(\tau)\| d\tau = \frac{\|\varphi'(\xi(h))\|}{h} \int_t^{t+h} 1 d\tau = \|\varphi'(\xi(h))\|$$

Für  $h \rightarrow 0$  geht  $\xi(h) \rightarrow t$  und aus (8.5) folgt unter Beachtung der letzten Gleichung und Anwendung des Sandwichtheorems:

$$\|\varphi'(t)\| \leq \lim_{h \rightarrow 0} \frac{s(t+h) - s(t)}{h} \leq \|\varphi'(t)\| \Rightarrow s'(t) = \|\varphi'(t)\|$$

■

Jetzt fragen wir: Was soll die Länge der Kurve  $C$  sein? Die Idee ist, eine Parameterdarstellung  $\varphi$  von  $C$  zu nehmen und die Länge von  $C$  gleich der Länge von  $\varphi$  zu *setzen*. Wie üblich muss man diese Definition rechtfertigen, d.h. hier die Unabhängigkeit der Länge von der Parameterdarstellung beweisen.

**Definition und Satz 8.7**

Sei  $\varphi$  eine beliebige Parameterdarstellung einer Kurve  $C$ . Unter der **Länge** von  $C$  versteht man  $L(C) := L(\varphi)$  ( $L(C)$  ist unabhängig von der gewählten Parameterdarstellung).  $C$  heißt **rektifizierbar**, wenn  $L(C) < \infty$ .

**Bemerkung**

1. Statt eines Beweises: Hat man stetige Wege  $\varphi, \psi$ , die  $C$  beschreiben, so folgt  $L(\varphi) = L(\psi)$  etwas mühsam über Zerlegungen und die Anwendung von Satz 8.3 über den Zusammenhang von  $\varphi$  und  $\psi$  über eine monotone Bijektion  $h$ . Es gilt stets:  $L(\varphi) = L(\varphi^-)$  für beliebige Wege  $\varphi$ , also ist insbesondere die Länge einer Kurve unabhängig von ihrer Orientierung.
2. Die Länge einer Kurve wird in offensichtlicher Weise auf zusammengesetzte Kurven übertragen:

$$C = C_1 \oplus \dots \oplus C_n \Rightarrow L(C) = L(C_1) + \dots + L(C_n)$$

3. Ist  $C$  stetig differenzierbar (d.h. es existiert eine stetig differenzierbare Parameterdarstellung  $\varphi$ ), dann gilt nach Satz 8.6:

$$L(C) = \int_a^b \|\varphi'(t)\| dt$$

**Beweis**

Zur Unabhängigkeit von der Parameterdarstellung für stetig differenzierbare  $\varphi$

Sei  $\psi = \varphi \circ h$  und  $t = h(u)$ , also ist  $\frac{dt}{du} = h'(u)$  sowie  $\psi(u) = \varphi(h(u)) = \varphi(t)$ . Wir betrachten o.E.d.A. den Fall, dass  $h$  monoton wachsend ist, also  $h' > 0$ . Durch Substitution und mit der Kettenregel ist:

$$\Rightarrow \int_a^b \|\varphi'(t)\| dt = \int_c^d \|\varphi'(h(u))\| \cdot h'(u) du$$

■

**Bemerkung**

4. Die Bogenlänge  $s$  wird häufig als „natürlicher“ Parameter bei der Parametrisierung von Kurven benutzt. Dies soll bedeuten: sei  $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine Parameterdarstellung von  $C$ .  $s : [a, b] \rightarrow [0, L(\varphi)]$  ist die stetig monoton wachsende und stetige Weglängenfunktion, die Umkehrfunktion zu  $s = s(t)$  sei  $t = t(s)$ . Dann definiere eine neue Parameterdarstellung  $\psi$  von  $C$ :  $\psi(s) := \varphi(t(s))$   
 $\varphi$  hat folgende Eigenschaften:
  - Ist  $\sigma$  die Weglängenfunktion zu  $\psi$ , dann  $\sigma(s) = s$ .
  - Falls  $\varphi$  stetig differenzierbar ist, dann auch  $\psi$  und es gilt  $|\sigma'(s)| \equiv \|\psi'(s)\| = 1$ , denn mit der Kettenregel folgt:  $\varphi(t) = \psi(s(t)) \Rightarrow \varphi'(t) = \psi'(s(t)) \cdot s'(t)$



## 8.2 Weg- und Kurvenintegrale

### Definition 8.8

Sei  $C$  eine rektifizierbare Kurve mit der Parameterdarstellung  $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  und  $f$  eine auf  $C$  definierte reellwertige Funktion (i.A. ist  $f$  in einer Umgebung von  $C$  definiert). Unter dem **skalaren Kurven- oder Wegintegral** von  $f$  über  $C$  versteht man das folgende RS-Integral, falls es existiert:

$$\int_C f(x) ds := \int_a^b f(\varphi(t)) ds(t) \quad (8.6)$$

Im Falle einer  $C^1$ -Kurve bzw. -Parameterdarstellung ist

$$\int_C f(x) ds = \int_a^b f(\varphi(t)) \|\varphi'(t)\| dt \quad (8.7)$$

Man nennt  $\|\varphi'(t)\| dt = ds$  das **skalare Bogenelement**.

#### Bemerkung

1. In der Regel ist  $f$  stetig. Dann existiert (8.6), da  $s$  monoton, also von beschränkter Variation, ist.
2. Man zeigt wieder: (8.6) ist unabhängig von der Parameterdarstellung und der Orientierung der Kurve.

### Eigenschaften von skalaren Kurvenintegralen

Sei  $C$  rektifizierbar. Die RS-Integrale über  $f, g$  mögen existieren.

- $\int_C [\lambda f(x) + \mu g(x)] ds = \lambda \int_C f(x) ds + \mu \int_C g(x) ds$
- $\left| \int_C f(x) ds \right| \leq L(C) \cdot \sup_{x \in C} |f(x)|$
- Integral über zusammengesetzte Kurven = Summe der Teilintegrale

### Anwendungen

1. Die Gesamtmasse einer Kurve ergibt sich bei geg. Belegungsdichte  $\varrho$  zu  $M = \int_C \varrho(x) ds$ .
2. Sei  $C$  mit der Dichte  $\varrho$  belegt. Gesucht: Schwerpunkt  $P = (P_1, \dots, P_n)^T$  der Kurve  $C$ .

$$p_i = \frac{1}{M} \int_C x_i \varrho(x_1, \dots, x_n) ds, \quad i = 1, \dots, n$$

3. Trägheitsmomente von Kurven

### Beispiel 8.2

Gegeben sei ein Parabelstück  $C: y^2 = 2x, 0 \leq x \leq 1$ . Diese sei mit Masse belegt:  $\varrho(x, y) = y$ . Gesucht: Gesamtmasse. Eine mögliche Parameterdarstellung ist  $\varphi_1(x) = x, \varphi_2(x) = \sqrt{2x} (= y), 0 \leq x \leq 1$ .

$$M = \int_C \varrho(x) ds = \int_0^1 y \sqrt{\varphi_1'(x)^2 + \varphi_2'(x)^2} dx = \int_0^1 \sqrt{2x} \sqrt{1 + \frac{1}{2x}} dx = \int_0^1 \sqrt{1 + 2x} dx = \frac{1}{3} (\sqrt{27} - 1)$$

Jetzt sollen vektorielle Kurvenintegrale betrachtet werden.

### Definition 8.9

1. Sei  $\varphi : I = [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  ein (nicht notwendigerweise injektiver) Weg und  $F = (F_1, \dots, F_n)^T$  ein stetiges Vektorfeld. Unter dem **vektoriellen Wegintegral** von  $F$  (längs  $\varphi$ ) versteht man folgendes RS-Integral:

$$\int_{\varphi} \langle F(x), dx \rangle = \int_{\varphi} (F_1 dx_1 + \dots + F_n dx_n) := \int_a^b \langle F(\varphi(t)), d\varphi(t) \rangle = \int_a^b \left[ \sum_{i=1}^n F_i(\varphi(t)) d\varphi_i(t) \right]$$

Ist  $\varphi \in C^1(I)$ , d.h.  $\varphi$  ist stetig differenzierbar, dann gilt:

$$\int_{\varphi} \langle F(x), dx \rangle = \int_a^b \left[ F_1(\varphi(t)) \cdot \varphi_1'(t) + \dots + F_n(\varphi(t)) \cdot \varphi_n'(t) \right] dt$$

2. Sei  $(C, \varphi)$  eine *orientierte* Kurve. Dann versteht man unter dem **vektoriellen Kurvenintegral** von  $F$  (längs  $C$ ) das Integral

$$\int_C \langle F(x), dx \rangle = \int_{\varphi} \langle F(x), dx \rangle$$

#### Bemerkung

Dieses RS-Integral kann man wieder als Grenzwert von Zwischensummen erhalten. Eine typische Zwischensumme sieht so aus: Sei  $\mathcal{Z} = \{a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b\}$  eine Zerlegung von  $[a, b]$  mit den Zwischenpunkten  $t'_k \in [t_{k-1}, t_k]$ .

$$\sigma_{F, \varphi}(\mathcal{Z}) = \sum_{j=1}^r \langle F(\varphi(t'_j)), \varphi(t_j) - \varphi(t_{j-1}) \rangle = \sum_{j=1}^r \sum_{k=1}^n F_k(\varphi(t'_j)) \cdot [\varphi_k(t_j) - \varphi_k(t_{j-1})] \quad (*)$$

### Eigenschaften vektorieller Kurvenintegrale

1. Sind  $F, G$  stetige Vektorfelder auf  $C$ , dann  $\int_C \langle \lambda F + \mu G, dx \rangle = \lambda \int_C \langle F, dx \rangle + \mu \int_C \langle G, dx \rangle$ .

2. Integral über zusammengesetzte Kurven = Summe der Teilintegrale

3.  $\left| \int_C \langle F, dx \rangle \right| \leq L(C) \cdot \sup_{x \in C} \|F(x)\|$  – Dies sieht man aus (\*), denn

$$\left| \sum_{j=1}^r \langle F(\varphi(t'_j)), \varphi(t_j) - \varphi(t_{j-1}) \rangle \right| \leq \sum_{j=1}^r |\dots| \leq (\text{CSU}) \leq \sum_{j=1}^r \|F(\varphi(t'_j))\| \cdot \|\varphi(t_j) - \varphi(t_{j-1})\|$$

Das heißt, für alle Zwischensummen  $\sigma_{F, \varphi}(\mathcal{Z})$  gilt

$$|\sigma_{F, \varphi}(\mathcal{Z})| \leq L(C) \cdot \sup_{x \in C} \|F(x)\| \Rightarrow \left| \int_C \langle f(x), dx \rangle \right| \leq L(C) \cdot \sup_{x \in C} \|F(x)\|$$

4. *Orientierungsabhängigkeit* vektorieller Kurvenintegrale: Seien  $\varphi, \psi$  zwei äquivalente Parameterdarstellungen der gleichen Kurve. Dann gilt:

$$\int_{\varphi} \langle F(x), dx \rangle = \int_{\psi} \langle F(x), dx \rangle \quad \text{und} \quad \int_{\varphi^-} \langle F(x), dx \rangle = - \int_{\varphi} \langle F(x), dx \rangle$$

**Beweis** für  $C^1$ -Parameterdarstellungen

Seien  $\varphi : [a, b] \rightarrow C$ ,  $\psi : [c, d] \rightarrow C$  und  $h : [a, b] \rightarrow [c, d]$ , sodass  $\psi = \varphi \circ h$ , also  $\psi(s) = \varphi(h(s))$ . Mit der Substitutionsvariable  $t = h(s)$  (da gleiche Orientierung, ist  $h(c) = a$  und  $h(d) = b$ ) ist  $s = h^{-1}(t)$  und daher  $\frac{ds}{dt} = \frac{1}{h'(s)}$ . Aus der Kettenregel folgt  $\psi'(s) = \varphi'(h(s)) \cdot h'(s)$ , also

$$\begin{aligned} \int_{\psi} \langle F, ds \rangle &= \int_c^d \langle F(\psi(s)), \psi'(s) \rangle ds = \int_c^d \langle F(\varphi(h(s))), (\varphi(h(s)))' \rangle ds = \int_a^b \langle F(\varphi(t)), \varphi'(t) \cdot h'(s) \rangle ds \\ &= \int_a^b \langle F(\varphi(t)), \varphi'(t) \cdot h'(s) \rangle \cdot \frac{1}{h'(s)} dt = \int_a^b \langle F(\varphi(t)), \varphi'(t) \rangle dt = \int_{\varphi} \langle F(x), dx \rangle \end{aligned}$$

■

5. *Zusammenhang vektorieller und skalarer Kurvenintegrale:*  $\varphi$  sei eine glatte Parameterdarstellung von  $C$  und  $F$  sei ein Vektorfeld.  $\varphi'(t) = (\varphi'_1(t), \dots, \varphi'_n(t))^T$  ist der Tangentialvektor an  $C$  in  $\varphi(t)$  und  $\vec{t}(t) = \frac{\varphi'(t)}{\|\varphi'(t)\|}$  ist der Tangentialeinheitsvektor. Zudem ist  $F_{\vec{t}}(x) := \langle F(x), \vec{t} \rangle$  die Tangentialkomponente von  $F$  und es ergibt sich

$$\begin{aligned} \int_{\varphi/C} \langle F(x), dx \rangle &= \int_a^b \langle F(\varphi(t)), \varphi'(t) \rangle dt = \int_a^b \left\langle F(\varphi(t)), \frac{\varphi'(t)}{\|\varphi'(t)\|} \right\rangle \underbrace{\|\varphi'(t)\| dt}_{=ds} \\ &= \int_a^b \langle F, \vec{t} \rangle ds = \int_a^b F_{\vec{t}} ds \end{aligned}$$

Die Orientierungsabhängigkeit steckt jetzt in  $F_{\vec{t}}$  bzw.  $\vec{t}$ .

### Beispiel 8.3

Berechnung der Arbeit  $A$  im Kraftfeld:  $A = \int_{\varphi/C} \langle F(x), dx \rangle$

**Vereinbarung:**  $\oint_C \langle F(x), dx \rangle$  heißt:  $C$  ist geschlossen und positiv orientiert.

## 8.3 Gradientenfelder und Wegunabhängigkeit

### Beispiel 8.4 zur Motivation

Berechne die Integrale  $J_k := \int_{\varphi_k} (y dx + (x - y) dy)$ ,  $k = 1, 2, 3$  über folgende Wege und Kurven:

$\varphi_1$ : von  $(0, 0)$  „geradlinig“ erst zu  $(1, 0)$ , dann zu  $(1, 1)$

$\varphi_2$ : von  $(0, 0)$  „geradlinig“ erst zu  $(0, 1)$ , dann zu  $(1, 1)$

$\varphi_3$ : von  $(0, 0)$  auf einer parabelförmigen Bahn zu  $(1, 1)$

Das Integral  $J_1$  wird berechnet (im Folgenden werden alle Parameterdarstellungen als  $(x(t), y(t))$  geschrieben). Die Parameterdarstellung für  $\varphi_1$  lautet für den ersten Abschnitt  $x = t, y = 0, t \in [0, 1]$  und für den zweiten Abschnitt  $x = 1, y = t, t \in [0, 1]$ . Das Integral  $J_1$  setzt sich also aus zwei Teilintegralen zusammen:

$$J_1 = \int_0^1 [0 \cdot 1 + (t - 0) \cdot 0] dt + \int_0^1 [t \cdot 0 + (1 - t) \cdot 1] dt = \int_0^1 (1 - t) dt = \frac{1}{2}$$

Analog ergibt sich für die anderen Integrale ebenfalls  $J_2 = J_3 = \frac{1}{2}$ . (Die Parameterdarstellung für  $\varphi_3$  ist:  $x = t, y = t^2$ .)

Nun berechne über dieselben Wege  $I_k := \int_{\varphi_k} [y dx + (y - x) dy] \Rightarrow I_1 = -\frac{1}{2}, I_2 = \frac{3}{2}, I_3 = \frac{1}{6}$ . Woran liegt das?

### Definition 8.10

Sei  $v = (v_1, \dots, v_n)^T$  ein stetiges Vektorfeld in einem Gebiet  $G \subset \mathbb{R}^n$  (d.h.  $G$  ist offen und zusammenhängend).

1.  $v$  heißt **Gradienten- oder Potentialfeld**, wenn ein skalar Feld  $U$  in  $G$  existiert, sodass  $v = \text{grad } U$ .  $U$  heißt **Stammfunktion** von  $v$  und  $W := -U$  heißt **Potential** des Vektorfeldes  $v$ .
2. Das Integral  $\int_{\varphi} \langle v, dx \rangle$  heißt in  $G$  **wegunabhängig**, wenn für zwei beliebige Punkte  $A, B \in G$  und jeden beliebigen in  $G$  verlaufenden stückweise glatten Weg  $\varphi$  das obige Integral denselben Wert hat. Symbolisch:  $\int_{\varphi} \langle v, dx \rangle = \int_A^B \langle v, dx \rangle$ . Eine äquivalente Formulierung ist: Jedes Integral über einen geschlossenen Weg  $\oint_{\varphi} \langle v, dx \rangle = 0$ . Vektorfelder  $v$ , für die  $\int_{\varphi} \langle v, dx \rangle$  wegunabhängig ist, heißen **konservativ**.
3. In völliger Analogie ergeben sich die Begriffe für Kurven.

Wann ist  $v$  ein Gradientenfeld und wann konservativ?

### Satz 8.11

Wenn  $v$  ein Gradientenfeld ist, dann ist die Stammfunktion bis auf eine Konstante (also eine konstante Funktion in  $G$ ) eindeutig bestimmt.

**Satz 8.12**

Ein stetiges Vektorfeld ist genau dann ein Gradientenfeld, wenn es konservativ ist. Genauer:

1. Wenn  $U \in C^1(G)$  (d.h.  $U$  ist in  $G$  stetig und besitzt stetige partielle Ableitungen 1. Ordnung) und für beliebige  $A, B \in G$  der Weg  $\varphi$  ein stückweise glatter Weg von  $A$  nach  $B$  ist, dann gilt:

$$\int_{\varphi} \langle \text{grad } U, dx \rangle = U(B) - U(A) \quad \left( \begin{array}{l} \Rightarrow \text{Gradientenfeld,} \\ \text{also konservativ} \end{array} \right)$$

2.  $v$  sei konservativ. Dann ist durch  $U(x) := \int_A^x \langle v(y), dy \rangle \quad (*)$

mit einem beliebigen, festen  $A \in G$  eine  $C^1(G)$ -Funktion definiert, sodass gilt:  $\text{grad } U = v$ .

**Beweis**

1. Sei  $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)^T : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ , sodass  $\varphi(a) = A, \varphi(b) = B$ . Mit der Kettenregel ist

$$\begin{aligned} \frac{dU(\varphi(t))}{dt} &= \frac{dU(\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t))}{dt} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial U}{\partial x_j}(\varphi(t)) \cdot \varphi'_j(t) = \langle \text{grad } U(\varphi(t)), \varphi'(t) \rangle \\ \Rightarrow \int_{\varphi} \langle \text{grad } U(x), dx \rangle &= \int_a^b \langle \text{grad } U(\varphi(t)), \varphi'(t) \rangle dt = \int_a^b \frac{dU(\varphi(t))}{dt} dt = U(B) - U(A) \end{aligned}$$

2. Ist das Integral wegunabhängig, dann ist die Funktion  $U$  durch den Stamm eindeutig definiert und man kann den Weg von  $A$  nach  $x$  beliebig wählen. Sei  $x_0 \in G$  fest und  $h$  so klein, dass die gesamte Strecke  $S = \overline{\varphi_0, \varphi_0 + h}$  mit der Parameterdarstellung  $\varphi(t) = x_0 + th, t \in [0, 1]$  ganz in  $G$  liegt. Vorbetrachtung:

$$\int_{\varphi} \langle v(x_0), dy \rangle = \int_0^1 \left\langle v(x_0), \underbrace{\varphi'(t)}_{=h} \right\rangle dt = \langle v(x_0), h \rangle \int_0^1 dt = \langle v(x_0), h \rangle \quad (**)$$

Die Wegunabhängigkeit des Integrals liefert:

$$\begin{aligned} U(x_0 + h) - U(x_0) &= \int_A^{x_0+h} \langle v, dy \rangle - \int_A^{x_0} \langle v, dy \rangle = \int_{x_0}^{x_0+h} \langle v, dy \rangle \\ \frac{|U(x_0 + h) - U(x_0) - \langle v(x_0), h \rangle|}{\|h\|} &\stackrel{(**)}{=} \frac{1}{\|h\|} \left| \int_{\varphi} \langle v(y), dy \rangle - \int_{\varphi} \langle v(x_0), h \rangle \right| \\ &= \frac{1}{\|h\|} \left| \int_{\varphi} \langle v(y) - v(x_0), dy \rangle \right| \leq \frac{1}{\|h\|} \cdot \sup_{y \in S} \|v(y) - v(x_0)\| \cdot \underbrace{L(S)}_{=\|h\|} = \sup_{y \in S} \|v(y) - v(x_0)\| \end{aligned}$$

Dieser Ausdruck geht für  $h \rightarrow 0$  gegen Null, da  $v$  stetig ist. Also ist  $U$  an  $x_0$  differenzierbar und  $U'(x_0) = v(x_0)^T = (v_1(x_0), \dots, v_n(x_0))$ . Daraus folgt die Behauptung  $v = \text{grad } U$ . ■

**Satz 8.13**

Sei  $v$  ein stetig differenzierbares Gradientenfeld in  $G$ . Dann erfüllt  $v$  folgende Integrabilitätsbedingungen in  $G$ :

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_k} = \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \text{ mit } 1 \leq i, k \leq n \quad (\text{IB})$$

**Beweis**

Einfache Anwendung des Satzes von Schwarz:

$$v = \text{grad } U \Rightarrow v_j = \frac{\partial U}{\partial x_j} \Rightarrow \frac{\partial v_i}{\partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{\partial U}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial U}{\partial x_k} = \frac{\partial v_k}{\partial x_i}$$

■

**Bemerkung**

Für  $n = 3$  bedeutet (IB):  $\text{rot } v = 0$ . (IB) sind **notwendige**, nicht hinreichende Bedingungen für Gradientenfelder.

**Beispiel 8.5**

Sei  $v(x, y) := \left( \frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2} \right)^T$  in einem ringförmigen Gebiet um  $(0, 0)$ . Es gilt (IB):  $\frac{\partial v_1}{\partial y} = \frac{\partial v_2}{\partial x}$ , aber es gilt *nicht immer*  $\oint_{\varphi} \dots = 0$ .

**Definition 8.14**

Eine Teilmenge  $M \subset \mathbb{R}^n$  heißt

1. **wegweise zusammenhängend** (bogenzusammenhängend), wenn es für je zwei beliebige Punkte  $A, B \in M$  einen Weg  $\varphi$  gibt, der ganz in  $M$  verläuft und der  $A$  und  $B$  verbindet.

$$\varphi : [a, b] \rightarrow M \text{ mit } \varphi(a) = A, \varphi(b) = B$$

2. **Gebiet**, wenn sie offen und (wegweise) zusammenhängend ist.
3. **einfach zusammenhängend**, wenn  $M$  zusammenhängend ist und jede ganz in  $M$  verlaufende geschlossene Kurve stetig auf einen Punkt zusammengezogen werden kann, ohne  $M$  zu verlassen.

**Beispiel 8.6**

Eine Kugeloberfläche im  $\mathbb{R}^3$  ist einfach zusammenhängend; die Oberfläche eines Torus ist zusammenhängend, aber nicht einfach.

**Bemerkung**

1. Letzteres ist eine sehr anschauliche Definition, exakte Formulierungen finden sich in der Literatur.
2. Man kann zeigen, dass die Begriffe „wegzusammenhängend“ und „zusammenhängend“ sind gleichwertig. (Ein metrischer Raum  $(M, d)$  heißt zusammenhängend, wenn er sich nicht als Vereinigung zweier nichtleerer, offener und disjunkter Teilmengen schreiben lässt.)
3. Für den Begriff „einfach zusammenhängend“ gibt es Abschwächungen:  $M \subset \mathbb{R}^n$  heißt **sternförmig**, wenn gilt:  $\exists S \in M : \forall A \in M : \overline{AS} \subset M$ .  $M$  heißt **konvex**, wenn gilt:  $\forall A, B \in M : \overline{AB} \subset M$ . Offensichtlich folgt aus Konvexität Sternförmigkeit, und sternförmige Mengen sind einfach zusammenhängend. Der große Unterschied ist: Konvexität und Sternförmigkeit sind geometrische Eigenschaften, einfaches Zusammenhängen ist hingegen eine topologische Eigenschaft. (Das heißt, sie bleibt bei stetigen Abbildungen erhalten.)

**Satz 8.15**

Sei  $G \subset \mathbb{R}^n$  ein einfach zusammenhängendes Gebiet und  $v$  ein stetig differenzierbares Vektorfeld in  $G$ . Dann ist  $\int_{\varphi} v$  genau dann wegunabhängig (also  $v$  konservativ), wenn  $(IB)$  erfüllt ist. (Für den speziellen Fall  $n = 3$  bedeutet dies, dass  $\operatorname{rot} v = 0$  in einfach zusammenhängenden Gebieten notwendig und hinreichend für die Konservativität von  $v$  ist.)

**Beweis**

Der Beweis ist sehr aufwändig, die allgemeine Form finden Sie in der Literatur (z. B. Wüst: Mathematik für Physiker). In der Regel wird der Satz für sternförmige  $G$  gezeigt. Sei o.E.d.A.  $G$  sternförmig bzgl. dem Ursprung  $O$  (d.h.  $S = 0$ ). Sei weiterhin  $x \in G$  beliebig und  $\varphi$  die geradlinige Verbindung von  $O$  nach  $x$ :  $\varphi(t) = tx$  mit  $t \in [0, 1]$ . Setze

$$U(x) := \int_{\varphi} \langle v(y), dy \rangle = \int_0^1 \left\langle v(tx), \underbrace{\varphi'(t)}_{=x} \right\rangle dt$$

Wir zeigen  $v = \operatorname{grad} U$ . Es ist

$$\langle v(tx), x \rangle = v_1(tx)x_1 + \dots + v_n(tx)x_n \text{ mit } v_i(tx) = v_i(tx_1, \dots, tx_n)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \langle v(tx, x) \rangle = v_1(tx) + \sum_{i=1}^n x_i \cdot t \cdot \frac{\partial v_i}{\partial x_1}(tx) \stackrel{(IB)}{=} v_1(tx) + \sum_{i=1}^n x_i \cdot t \cdot \frac{\partial v_1}{\partial x_i}(tx) = v_1(tx) + \langle \operatorname{grad} v_1(tx), tx \rangle$$

Außerdem gilt

$$\frac{d}{dt} (tv_1(tx)) = v_1(tx) + t \frac{d}{dt} v_1(tx) = v_1(tx) + \langle \operatorname{grad} v_1(tx), x \rangle$$

Also ist insgesamt

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \langle v(tx), x \rangle = \frac{d}{dt} (tv_1(tx)) \quad (*)$$

$$\frac{\partial U(x)}{\partial x_1} = \frac{d}{dx_1} \int_0^1 \langle v(tx), x \rangle dt \stackrel{(1)}{=} \int_0^1 \frac{d}{dx_1} \langle v(tx), x \rangle dt \stackrel{(*)}{=} \int_0^1 \frac{d}{dt} (tv_1(tx)) dt = [tv_1(tx)]_0^1 = v_1(x)$$

Bei (1) wurde von der Vertauschung von Grenzprozessen Gebrauch gemacht (siehe Kapitel 9.1). Völlig analog erhält man  $\frac{\partial U(x)}{\partial v_k} = v_k(x)$ .

■

## 9 Verschiedene Ergänzungen

### 9.1 Gleichmäßige Konvergenz

#### Definition 9.1

Sei  $M$  eine nichtleere Menge ( $M$  kann eine Teilmenge eines  $\mathbb{R}^n$ , ein metrischer Raum oder auch komplett beliebig sein) und  $(f_n)$  eine Folge komplexwertiger Funktionen, definiert auf  $M$ . Man sagt,  $(f_n)$  **konvergiert punktweise** gegen eine auf  $M$  definierte Funktion  $f$  (Schreibweise:  $f_n \rightarrow f$ ), wenn  $f_n(x) \rightarrow f(x) \forall x \in M$ , das bedeutet:

$$\forall \varepsilon > 0, x \in M : \exists n_0 = n_0(\varepsilon, x) : \forall n > n_0 : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

#### Beispiel 9.1

1. Auf  $M = [0, 1)$   $f_n(x) = x^n$  konvergiert  $f_n \rightarrow 0$ , d.h.  $f \equiv 0$  auf  $M$ .

2. Auf  $M = [0, 1]$  konvergiert  $f_n \rightarrow f$  mit  $f(x) = \begin{cases} 0 & x \in [0, 1) \\ 1 & x = 1 \end{cases}$

Die Grenzfunktion  $f$  ist (in  $x = 1$ ) unstetig, obwohl alle  $f_n$  stetig sind. Das drückt sich als eine Verletzung der Vertauschung von Grenzprozessen aus:

$$1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{x \rightarrow 1-0} f_n(x) \neq \lim_{x \rightarrow 1-0} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0$$

#### Beispiel 9.2

Auf  $M = \mathbb{R}$  konvergiert  $f_n(x) = \frac{1}{n} \sin(nx) \rightarrow 0$ , aber  $f_n(x) = \cos(nx)$  konvergiert nicht, d.h. es gilt *nicht*:

$$\frac{d}{dx} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{d}{dx} f_n(x)$$

#### Beispiel 9.3

Auf  $M = (0, 1]$  sei  $f_n$  gegeben durch  $f_n(x) = \begin{cases} n & x \in (0, \frac{1}{n}] \\ 0 & x \in (\frac{1}{n}, 1] \end{cases}$ . Also konvergiert  $f_n$  für alle  $x$  gegen Null. (Bei

$M = [0, 1]$  setze  $f_n(0) = 0$ .) Aber es ist  $\int_0^1 f_n(x) dx = 1 \forall n$ , das bedeutet

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x) dx \neq \int_0^1 \left[ \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \right] dx$$



Wie man sieht, ist die punktweise Konvergenz für die Vertauschung von Grenzprozessen völlig ungeeignet. Man braucht einen stärkeren Konvergenzbegriff.

### Definition 9.2

Seien  $M$  eine beliebige nichtleere Menge und  $f_n$  sowie  $f$  auf  $M$  definierte komplexwertige Funktionen. Man sagt,  $(f_n)$  **konvergiert gleichmäßig** auf  $M$  (Schreibweise:  $f_n \Rightarrow f$ ) gegen  $f$ , wenn gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists n_0 = n_0(\varepsilon) : \forall x \in M, n > n_0 : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

(Anders als bei der punktweisen Konvergenz muss  $n_0$  hier von  $x$  unabhängig sein.)

Natürlich gilt: Wenn  $f_n \Rightarrow f$ , dann  $f_n \rightarrow f$ . Die Umkehrung ist falsch (siehe Beispiel 9.3).

### Satz 9.3

Sei  $M \subset \mathbb{R}^n$  oder ein metrischer Raum und  $(f_n)$  eine Folge stetiger komplexwertiger Funktionen auf  $M$ . Wenn  $(f_n)$  gleichmäßig gegen eine Funktion  $f$  auf  $M$  konvergiert, dann ist  $f$  stetig. (Kurz: Die Stetigkeit bleibt bei gleichmäßiger Konvergenz erhalten.)

### Beweis

Zu zeigen: Sei  $x_0 \in M$  beliebig fest.  $f$  ist in  $x_0$  stetig, d.h.

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \forall x \in M : \|x - x_0\| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

Wähle  $\frac{\varepsilon}{3}$ -Argument für die Stetigkeit und Konvergenz von  $f_n$ :

$$f_n \rightarrow f : \exists n_0 : \forall x \in M : |f_{n_0}(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

$$f_n \text{ stetig: } \exists \delta > 0 : \|x - x_0\| < \delta \Rightarrow |f_{n_0}(x) - f_{n_0}(x_0)| < \varepsilon$$

Mit der Dreiecksungleichung ist

$$\|f(x) - f(x_0)\| \leq \|f(x) - f_{n_0}(x)\| + \|f_{n_0}(x) - f_{n_0}(x_0)\| + \|f_{n_0}(x_0) - f(x_0)\| < \varepsilon$$

■

Eine wichtige Folgerung ist dieses Theorem. Siehe dazu auch Satz 5.8.

### Theorem 9.4 $C(K)$ , topologischer Teil

Sei  $K \subset \mathbb{R}^n$  kompakt (oder ein kompakter metrischer Raum). Dann ist  $C(K)$ , die Menge der stetigen komplexwertigen Funktionen auf  $K$ , versehen mit der Supremumsnorm  $\|\cdot\|_\infty$  ( $\|f\|_\infty := \sup_{x \in K} \|f(x)\|$ ) ein vollständiger normierter Raum.

#### Bemerkung

$C(K)$  ist sogar eine  $C^*$ -Algebra. Dieser Begriff wird später definiert.

**Beweis**

In Kapitel 5.3 wurde gezeigt, dass  $C(K)$  ein Vektorraum und  $\|\cdot\|_\infty$  eine Norm ist. Es bleibt noch die Vollständigkeit. Vorbetrachtung: Was bedeutet  $f_n \rightarrow f$  mit der Supremumsnorm?

$$\|f_n - f\| = \sup_{x \in K} |f_n(x) - f(x)| \rightarrow 0 \text{ für } n \rightarrow \infty$$

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists n_0(\varepsilon) : \forall n \geq n_0 : \|f_n - f\|_\infty < \varepsilon$$

$$\forall n \geq n_0, x \in K : |f_n(x) - f(x)| \leq \|f_n - f\|_\infty, \text{ also } f_n \Rightarrow f$$

Man sieht nun leicht: Wenn  $f_n \Rightarrow f$ , dann  $f_n \xrightarrow{\|\cdot\|_\infty} f$ , denn

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists n_0(\varepsilon) : \forall n \geq n_0, x \in K : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \forall n \geq n_0 : \sup_{x \in K} |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon \Rightarrow f_n \xrightarrow{\|\cdot\|_\infty} f$$

Also ist die Konvergenz bzgl. der  $\|\cdot\|_\infty$  gleichwertig mit der gleichmäßigen Konvergenz. Sei nun  $(f_n)$  eine  $\|\cdot\|_\infty$ -Cauchyfolge, d.h.

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists n_0(\varepsilon) : \forall m, n \geq n_0 : \|f_n - f_m\| < \varepsilon \quad (*)$$

Zu zeigen: Es existiert ein  $f \in C(K)$  mit  $f_n \Rightarrow f$ . Wir finden einen Kandidaten für  $f$  mit

$$(*) \Rightarrow \forall m, n \geq n_0, x \in K : |f_n(x) - f_m(x)| \leq \|f_n - f_m\|_\infty < \varepsilon \quad (**)$$

Das heißt, die Zahlenfolge  $(f_n(x))$  ist für jedes  $x \in K$  eine Cauchyfolge in  $\mathbb{C}$ . Da  $\mathbb{C}$  vollständig ist, existiert  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) =: f(x)$ . ( $f$  ist der punktweise Limes von  $f_n$ .) Es verbleibt:

1.  $f_n \Rightarrow f$  – Dies sieht man aus  $(**)$  mit  $m \rightarrow \infty$ :  $\forall n \geq n_0, x \in K : |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$
2.  $f \in C(K)$  – Da alle  $f_n$  stetig sind, ist nach 9.3 auch  $f$  stetig.

■

**Satz 9.5**

Seien  $f_n \in R[a, b]$  und  $f_n \Rightarrow f$ . Dann ist  $f \in R[a, b]$  und es gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b \left( \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \right) dx = \int_a^b f(x) dx$$

**Beweis**

$f \in R[a, b]$  wird später gezeigt (siehe Lebesgue-Kriterium für die Integration von Funktionen mehrerer Variablen). Angenommen, wir wissen jetzt, dass  $f \in R[a, b]$  ist.

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f_n(x) dx - \int_a^b f(x) dx \right| &= \left| \int_a^b (f_n(x) - f(x)) dx \right| \leq \int_a^b |f_n(x) - f(x)| dx \\ &\leq \left( \sup_{x \in [a, b]} |f_n(x) - f(x)| \right) \cdot \int_a^b dx \leq (b - a) \cdot \sup_{x \in [a, b]} |f_n(x) - f(x)| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \end{aligned}$$

Also konvergiert  $\int_a^b f_n(x) dx \rightarrow \int_a^b f(x) dx$ .

Beim Vertauschen von Grenzwert und Ableitung gibt es eine Feinheit, zum Beispiel bei

$$f_n(x) = \underbrace{\frac{1}{n} \sin nx}_{\Rightarrow f \equiv 0} \quad \text{und} \quad f'_n(x) = \underbrace{\cos nx}_{\text{konv. nicht}}$$

Die Ableitungen  $f'_n$  müssen also auch konvergieren.

### Satz 9.6

Sei  $(f_n)$  eine Folge von auf  $[a, b]$  stetig differenzierbaren Funktionen, die punktweise gegen  $f$  konvergieren. Zudem konvergiere  $f'_n \Rightarrow g$ . Dann ist  $f$  auf  $[a, b]$  stetig differenzierbar und es gilt  $f' = g$ , also insgesamt

$$\frac{d}{dx} \left[ \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{d}{dx} f_n(x) \quad \forall x \in [a, b]$$

### Beweis

Da die  $f'_n$  stetig sind und gleichmäßig gegen  $g$  konvergieren, ist auch  $g$  stetig. Nach Satz 9.5 ist aufgrund der punktweisen Konvergenz der  $f_n$ :

$$\int_a^x g(t) dt = \int_a^x \left[ \lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(t) \right] dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^x f'_n(t) dt = \lim_{n \rightarrow \infty} [f_n(x) - f_n(a)] = f(x) - f(a)$$

Da  $g$  stetig ist, ist  $\int_a^x g(t) dt$  nach  $x$  differenzierbar, also auch  $f$  und es ergibt sich

$$\frac{d}{dx} \left[ \int_a^x g(t) dt \right] = \frac{d}{dx} [f(x) - f(a)] \Rightarrow g(x) = f'(x)$$

Den folgenden Satz gibt es in vielen Varianten.

### Satz 9.7

Ableitung eines Integrals nach einem Parameter

Sei  $f = f(s, t)$  auf  $Q := [a, b] \times [c, d]$  stetig und  $F(s) := \int_c^d f(s, t) dt$  eine Funktion auf  $[a, b]$ . Auf  $Q$  möge  $\frac{\partial f}{\partial s} =: g$  existieren und stetig sein. Dann ist  $F$  auf  $[a, b]$  differenzierbar und  $F'(s) = \int_c^d \frac{\partial f(s, t)}{\partial s} dt$ , insgesamt also

$$\frac{d}{ds} \int_c^d f(s, t) dt = \int_c^d \frac{\partial f(s, t)}{\partial s} dt$$

### Beweis

Sei  $s_0 \in (a, b)$ . Wende den Mittelwertsatz der Differentialrechnung an  $(0 < \vartheta(h, t) < 1)$ .

$$\frac{F(s_0 + h) - F(s_0)}{h} = \int_c^d \frac{f(s_0 + h, t) - f(s_0, t)}{h} dt = \int_c^d \frac{\partial f}{\partial s}(s_0 + \vartheta h, t) dt$$

$$= \int_c^d \frac{\partial f}{\partial s}(s_0, t) dt + \underbrace{\int_c^d \left[ \frac{\partial f}{\partial s}(s_0 + \vartheta h, t) - \frac{\partial f}{\partial s}(s_0, t) \right] dt}_{\rightarrow 0 \text{ für } h \rightarrow 0}$$

Das existiert, dass die Ableitung  $F'(s)$  existiert und es ist

$$F'(s) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(s_0 + h) - F(s_0)}{h} = \int_c^d \frac{\partial f}{\partial s}(s_0, t) dt$$

■

## 9.2 Bemerkungen zur Variationsrechnung

Die Variationsrechnung ist ein sehr umfangreiches Gebiet; hier können nur einfachste Ideen erklärt werden. (Sehr ausführlich wird das Thema zum Beispiel im Fischer/Kaul, Band 3, behandelt.)

### 9.2.1 Beispiele und Problemstellungen

1. Im  $\mathbb{R}^n$  seien zwei Punkte  $A, B$  gegeben. Gesucht ist diejenige Kurve  $C$ , die die kürzeste Entfernung zwischen  $A$  und  $B$  realisiert. (Natürlich weiß man, dass  $\overline{AB}$  gesucht ist.) Mathematisch sagt man: Es sind stückweise stetig differenzierbare Verbindungskurven gesucht. Zur Vereinfachung betrachten wir  $n = 2$  und suchen eine Kurve mit der Parameterdarstellung  $(x, y(x))$  mit  $x \in [a, b]$ .

Dann muss die Länge der Kurve  $l(y) = \int_a^b \sqrt{1 + y'(x)^2} dx$  minimal werden.

2. Johann Bernoulli löste 1696 das sogenannte *Brachistochrone-Problem*: Ein Massepunkt ruht in  $A$ , wird losgelassen und soll reibungsfrei in kürzester Zeit nach  $B$  gelangen. Gesucht ist die Form der Bahnkurve. Für die mathematische Formulierung sei o.E.d.A.  $A = (0, 0)$  und  $B = (x_0, y_0)$ . Die Bahnkurve ist eine Funktion  $y = y(x)$  mit  $y(0) = 0$  und  $y(x_0) = y_0$ . Außerdem ist die Anfangsgeschwindigkeit  $y'(0) = v(0) = 0$ . Da die Energie erhalten bleiben muss, gilt

$$E = E_{\text{kin}} + E_{\text{pot}} = \frac{m}{2} v^2 - mgy(x)$$

Da an  $(0, 0)$  die Energie  $E = 0$  ist, muss immer  $E = 0$  gelten:

$$\frac{m}{2} v^2 = mgy(x) \Rightarrow v = \sqrt{2gy(x)}$$

Sei  $s(x)$  die Bogenlänge des Kurvenstücks an  $(0, 0)$  bis  $(x, y(x))$ , also

$$s(x) = \int_0^x \sqrt{1 + y'(\xi)^2} d\xi$$

Andererseits ist  $v = \frac{ds}{dt}$ . Sei  $L$  die Gesamtlänge der Kurve und  $T$  die Gesamtdauer der Bewegung von  $A$  nach  $B$ .

$$T = T(y) = \int_0^T dt = \int_0^L \frac{1}{v} ds = \int_0^{x_0} \frac{1}{v} \frac{ds}{dx} dx = \int_0^{x_0} \sqrt{\frac{1 + y'(x)^2}{2gy(x)}} dx$$

3. In der Mechanik wird ein physikalisches System mit dem Prinzip der kleinsten Wirkung durch die Lagrangefunktion  $\mathcal{L}$  beschrieben.

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(t, q_i(t), \dot{q}_i(t))$$

Hierbei sind die  $q_i$  die verallgemeinerten Koordinaten und die  $\dot{q}_i$  die verallgemeinerten Geschwindigkeiten des Systems. Die Bewegung verläuft so (d.h. die  $q_i$  sind so), dass die Wirkung  $W(q_1, \dots, q_n)$  minimal wird.

$$W(q_1, \dots, q_n) = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(t, q_i(t), \dot{q}_i(t)) dt$$

Im Allgemeinen hat man bei dieser gewissen Klasse von Variationsaufgaben eine  $C^2$ -Funktion  $L$  auf einem Gebiet  $\Omega_L \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$ , ein Intervall  $[a, b] \subset \mathbb{R}$  und zwei Punkte  $A, B \in \mathbb{R}^m$ . Wir betrachten das folgende **Variationsintegral**:

$$\mathcal{L}(v) := \int_a^b L(x, v(x), v'(x)) dx = \int_a^b L(x, v, v') dx$$

auf der **Variations- oder Vergleichsklasse**  $V$  aller glatten Wege und Kurven

$$v : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^m \text{ mit } v(a) = A \text{ und } v(b) = B$$

für welche das Variationsintegral existiert. Die Menge aller glatten Wege und Kurven wird mit  $C^1([a, b], \mathbb{R}^m)$  oder, für  $m = 1$ , mit  $C^1([a, b])$  bezeichnet. In  $V$  kann man zwei Normen einführen:

- $\|u\|_{C^0} := \sup_{x \in [a, b]} \|u(x)\| = \sup_{x \in [a, b]} \sqrt{u_1^2(x) + \dots + u_m^2(x)}$
- $\|u\|_{C^1} := \|u\|_{C^0} + \|u'\|_{C^0}$

Dann gilt offenbar  $(\mathcal{L} : V \rightarrow \mathbb{R})$ :

$$D(\mathcal{L}) = \{v : (x, v(x), v'(x)) \in \Omega_L \forall x \in [a, b]\}$$

Da  $v$  und  $v'$  jeweils  $m$  Koordinaten haben, ist es günstig, folgende Bezeichnungen einzuführen:

- für Punkte aus  $\Omega_L$ :  $(x, v_1(x), \dots, v_m(x), v'_1(x), \dots, v'_m(x)) =: (x, y_1, \dots, y_m, z_1, \dots, z_m)$
- $L_x := \frac{\partial L}{\partial x}$ ,  $L_{y_k} := \frac{\partial L}{\partial y_k}$ ,  $L_{z_l} := \frac{\partial L}{\partial z_l}$  mit  $1 \leq k, l \leq m$
- $L_y := (L_{y_1}, \dots, L_{y_m})$  und  $\nabla_y L := L_y^T$  (Gradient von  $L$  bzgl. der  $y$ -Koordinate)
- $L_z := (L_{z_1}, \dots, L_{z_m})$  und  $\nabla_z L := L_z^T$
- $L_{yy} := (L_{y_k y_l})$ ,  $L_{yz} := (L_{y_k z_l})$ ,  $L_{zz} := (L_{z_k z_l})$   
 (( $m, m$ )-Matrizen aus den jeweiligen zweiten Ableitungen)

Wir definieren eine kompakte Formulierung für den folgenden Sachverhalt:  $v$  sei in einer hinreichend kleinen Umgebung von  $u$  bzgl. irgendeiner Norm  $\|\cdot\|$ :  $\|v - u\| \ll 1$ .

### Definition 9.8

Ein Funktional  $\mathcal{L} : V \rightarrow \mathbb{R}$  auf einer beliebigen Vergleichsklasse  $V \subset D(\mathcal{L})$  besitzt an der Stelle  $u \in V$  ein

1. **starkes lokales Minimum**, wenn  $\mathcal{L}(u) < \mathcal{L}(v) \forall v \in V$  mit  $\|u - v\|_{C^0} \ll 1$
2. **schwaches lokales Minimum**, wenn  $\mathcal{L}(u) < \mathcal{L}(v) \forall v \in V$  mit  $\|u - v\|_{C^1} \ll 1$

Jedes starke lokale Minimum ist auch ein schwaches lokales Minimum.

Nun suchen wir notwendige Bedingungen für das Vorliegen solcher lokaler Minima. Diese Bedingungen findet man durch folgendes Vorgehen (nach Euler): Zu jeder Variationsklasse  $V = \{v \in D(\mathcal{L}) : v(a) = A, v(b) = B\}$  betrachten wir den sogenannten **Variationsvektorraum**

$$\delta V = \{\varphi \in C^1([a, b], \mathbb{R}^m) : \varphi(a) = \varphi(b) = 0\}$$

Die Elemente aus  $\delta V$  heißen **Variationsvektoren**. Die Idee beim Aufsuchen notwendiger Bedingungen besteht im Folgenden: Wenn an  $u$  ein lokales Minimum vorliegt, dann wird  $\mathcal{L}(v)$  mit  $\mathcal{L}(u)$  nicht für beliebige  $v \in V$  verglichen, sondern es werden nur solche  $v$  berücksichtigt:

$$v = u + s\varphi \text{ mit } \varphi \in \delta V \text{ und } \|s\| \ll 1$$

Die Elemente  $\varphi \in \delta V$  haben folgende Eigenschaften:

1. Für alle  $v \in V$  und  $s \in \mathbb{R}$  haben  $v$  und  $v + s\varphi$  die gleichen Randwerte  $A$  und  $B$ :  

$$v(a) = \underbrace{v(a)}_{=A} + s \underbrace{\varphi(a)}_{=0} = A \text{ und } v(b) = v(b) + s\varphi(b) = B$$
2.  $v$  und  $v + s\varphi$  sind bzgl. der Normen  $\|\cdot\|_{C^0}$  und  $\|\cdot\|_{C^1}$  für  $|s| \ll 1$  hinreichend benachbart, insbesondere gilt wieder  $v + s\varphi \in V$ .

Das sieht man folgendermaßen: Die Menge  $K := \{(x, v(x), v'(x)) : x \in [a, b]\}$  ist eine kompakte Teilmenge der offenen Menge  $\Omega_L$ . Dann liegt natürlich auch eine Umgebung von  $K$  in  $\Omega_L$  (hier ohne Beweis), das heißt, es existiert ein  $r > 0$  mit:

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^{2m+1} : \|y - v(x)\| + \|z - v'(x)\| < r \forall x \in [a, b]\} \subset \Omega_L$$

Also ist  $v + s\varphi \in D(\mathcal{L})$ , falls  $|s| \cdot (\|\varphi(x)\| + \|\varphi'(x)\|) < r \forall x \in [a, b]$ , denn

$$\|v - (v + s\varphi)\|_{C^1} = \|v - (v + s\varphi)\|_{C^0} + \|v' - (v' + s\varphi')\|_{C^0} = |s| \cdot (\|\varphi\|_{C^0} + \|\varphi'\|_{C^0})$$

Bezüglich einer Minimumstelle  $u$  gilt also insbesondere  $\mathcal{L}(u) < \mathcal{L}(u + s\varphi)$  und somit

$$\left. \frac{d}{ds} \mathcal{L}(u + s\varphi) \right|_{s=0} = 0 \quad \text{und} \quad \left. \frac{d^2}{ds^2} \mathcal{L}(u + s\varphi) \right|_{s=0} \geq 0 \quad (*)$$

**Achtung:** (\*) beinhaltet nur notwendige Bedingungen, da nicht alle Variationsvektoren berücksichtigt wurden. Hinreichende Bedingungen sind viel komplizierter! Keinesfalls reicht  $\left. \frac{d^2}{ds^2} \mathcal{L}(u + s\varphi) \right|_{s=0} > 0$ . Im folgenden Satz werden die Ableitungen aus (\*) ausgerechnet und mit Bezeichnungen versehen.

**Satz 9.9**

Sei  $u \in V$  gegeben. Dann gilt für jedes  $\varphi \in \delta V$  und alle  $s$  mit  $|s| \ll 1$  (sodass  $u + s\varphi \in V$ ):

$$\begin{aligned}\delta\mathcal{L}(u)(\varphi) &:= \left. \frac{d}{ds} \mathcal{L}(u + s\varphi) \right|_{s=0} = \int_a^b [L_y(x, u, u')\varphi(x) + L_z(x, u, u')\varphi'(x)] dx \\ &= \int_a^b [\langle \nabla_y L, \varphi \rangle + \langle \nabla_z L, \varphi' \rangle] dx \quad (9.1)\end{aligned}$$

$$\delta^2\mathcal{L}(u)(\varphi) := \left. \frac{d^2}{ds^2} \mathcal{L}(u + s\varphi) \right|_{s=0} = \int_a^b [\langle \varphi, L_{yy}\varphi \rangle + 2\langle \varphi', L_{yz}\varphi \rangle + \langle \varphi', L_{zz}\varphi' \rangle] dx \quad (9.2)$$

Wenn  $u \in V$  sogar zweimal stetig differenzierbar ist, dann gilt für alle  $\varphi \in \delta V$ :

$$\delta\mathcal{L}(u)(\varphi) = \int_a^b \left\langle \left( \nabla_y L - \frac{d}{dx} \nabla_z L \right), \varphi(x) \right\rangle dx \quad (9.3)$$

**Bemerkung**

In (9.1) bedeutet (mit dem Standardskalarprodukt im  $\mathbb{R}^m$ )

$$L_y \cdot \varphi = (L_{y_1}, \dots, L_{y_m}) \cdot \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \dots \\ \varphi_m \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} L_{y_1} \\ \dots \\ L_{y_m} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \dots \\ \varphi_m \end{pmatrix} \right\rangle = \langle \nabla_y L, \varphi \rangle$$

Analog ist  $L_z \cdot \varphi' = \langle \nabla_z L, \varphi' \rangle$ . In (9.2) bedeutet

$$\langle \varphi, L_{yy}\varphi \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \dots \\ \varphi_m \end{pmatrix}, (L_{y_k y_l}) \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \dots \\ \varphi_m \end{pmatrix} \right\rangle$$

$(L_{y_k y_l})$  ist eine  $(m, m)$ -Matrix.

Die Linearform  $\delta\mathcal{L}(u) : \delta V \rightarrow \mathbb{R}, \varphi \mapsto \delta\mathcal{L}(u)(\varphi)$  heißt **erste Variation von  $\mathcal{L}$  an der Stelle  $u$** , die quadratische Form  $\delta^2\mathcal{L}(u) : \delta V \rightarrow \mathbb{R}, \varphi \mapsto \delta^2\mathcal{L}(u)(\varphi)$  heißt **zweite Variation von  $\mathcal{L}$  an der Stelle  $u$** . Es existieren verschiedene gleichwertige Symbole für die Variationen:

$$\delta\mathcal{L}(u)(\varphi) \equiv \delta\mathcal{L}(u, \varphi) \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi}(u)$$

Letzteres ist besonders in der Physik beliebt.

**Beweis**

Zu Satz 9.9

Aus dem Satz über die Differentiation von Parameterintegralen folgt

$$\begin{aligned}\frac{d}{ds} \int_a^b L(x, u + s\varphi, u' + s\varphi') dx &= \int_a^b \frac{\partial}{\partial s} L(x, u + s\varphi, u' + s\varphi') dx \\ \frac{\partial}{\partial s} L(x, u + s\varphi, u' + s\varphi') &= \underbrace{L_{y_1} \cdot \varphi_1 + \dots + L_{y_m} \cdot \varphi_m}_{L_y \cdot \varphi} + \underbrace{L_{z_1} \cdot \varphi'_1 + \dots + L_{z_m} \cdot \varphi'_m}_{L_z \cdot \varphi'}\end{aligned}$$

Daraus folgt (9.1) und, durch nochmaliges Differenzieren, (9.2). Wende nun auf den zweiten Summanden in (9.1) partielle Integration an und beachte, dass  $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$ :

$$\int_a^b L_z \varphi' dx = \int_a^b (L_{z_1} \varphi'_1, \dots, L_{z_m} \varphi'_m) dx = \underbrace{[L_z \varphi]_a^b}_{=0} - \int_a^b \left( \frac{d}{dx} L_z \right) \varphi dx \Rightarrow (9.3)$$

■

## 9.2.2 Euler-Lagrange-Gleichungen

Die Idee ist nun, die Variationsaufgabe auf die Lösung einer Differentialgleichung zurückzuführen. Aus (\*), d.h.  $\frac{d}{ds} \mathcal{L}(u + s\varphi)|_{s=0} = 0$ , folgt der folgende Satz.

### Satz 9.10

Jede starke oder schwache lokale Minimumstelle  $u$  von  $\mathcal{L} : V \rightarrow \mathbb{R}$  ist ein stationärer (kritischer) Punkt, d.h.  $\delta \mathcal{L}(u) = 0$ .

Für die Herleitung der Euler-Lagrange-Gleichungen sind einige Vorbereitungen nötig: Unter einer **Testfunktion** auf einem Gebiet  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  verstehen wir eine  $C^\infty$ -Funktion  $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , deren **Träger**

$$\text{supp } \varphi := \overline{\{x \in \mathbb{R}^n : \varphi(x) \neq 0\}}$$

kompakt ist und in  $\Omega$  liegt.

### Beispiel 9.4

Sei  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  gegeben durch  $f(x) = \begin{cases} 1 & x \in (0, 1) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$ , dann ist  $\text{supp } f = [0, 1]$ .

Der Vektorraum aller Testfunktionen auf  $\Omega$  wird mit  $C_c^\infty(\Omega)$  bezeichnet. Entsprechend bezeichnet  $C_c^\infty(\Omega, \mathbb{R}^m)$  den Vektorraum aller Testfunktionen  $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_m)$  mit  $\varphi_k \in C_c^\infty(\Omega)$  für  $k = 1, \dots, m$ . Es gibt beliebig viele „scharf lokalisierten“ Testfunktionen.

### Satz 9.11

Zu jeder (offenen) Kugel  $U_r(a) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - a\| < r\} \subset \mathbb{R}^n$  gibt es eine Testfunktion  $\varphi$  mit

$$\begin{aligned} \varphi &> 0 \text{ in } U_r(a) \\ \varphi &= 0 \text{ außerhalb } U_r(a) \\ \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) dx &= 1 \end{aligned} \quad (**)$$

#### Bemerkung

Da die Integration über  $\mathbb{R}^n$  noch nicht erklärt ist, soll die Normierungsbedingung lediglich zur Kenntnis genommen werden.

### Beweis

Die Funktion  $\psi$  mit  $\psi(t) = e^{-\frac{1}{t}}$  für  $t > 0$  und  $\psi(t) = 0$  für  $t \leq 0$  ist  $C^\infty$  auf  $\mathbb{R}$ . Bilde nun

$$\varphi : \varphi(x) = c \cdot \psi\left(r^2 - \|x - a\|^2\right), \quad c = \text{const.}$$



Es ist  $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$  und  $\varphi$  erfüllt die erste und zweite Bedingung des Satzes, durch geeignete Wahl von  $c$  kann man auch die dritte erfüllen. ■

**Satz 9.12** Fundamentallema der Variationsrechnung

Ist  $f : \mathbb{R}^n \supset \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  stetig und ist  $\int_\Omega f \cdot \varphi dx = 0$  für alle  $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ , so ist  $f = 0$ .

**Beweis**

Angenommen, es existiert ein  $a \in \Omega$  mit  $f(a) \neq 0$  (o.E.d.A sei  $f(a) > 0$ ), so existiert aufgrund der Stetigkeit von  $f$  eine kugelförmige Umgebung  $U_r(a)$  mit  $f(x) > \frac{1}{2}f(a)$  für alle  $x \in U_r(a)$ . Betrachte nun ein  $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$  mit den Eigenschaften (\*\*) aus Satz 9.11. Das ergibt einen Widerspruch:

$$0 = \int_\Omega f \cdot \varphi dx = \int_{U_r(a)} f \cdot \varphi dx > \frac{1}{2}f(a) \int_{U_r(a)} \varphi dx = \frac{1}{2}f(a) > 0$$

■

**Folgerung 9.13** Fundamentallema in der vektorwertigen Variante

Ist  $f : \mathbb{R}^n \supset \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$  stetig und ist  $\int_\Omega \langle f, \varphi \rangle dx > 0$  für alle  $\varphi \in C_c^\infty(\Omega, \mathbb{R}^m)$ , so ist  $f = 0$ .

**Beweis**

Dieses Lemma erhält man direkt aus dem vorherigen, indem man für  $k = 1, \dots, m$  die Funktion  $\varphi = c\psi e_k$  wählt, wobei die  $e_k$  die Einheitsvektoren des  $\mathbb{R}^m$  in der  $k$ -ten Koordinatenrichtung sind. ■

**Satz 9.14** Euler-Lagrange-Gleichungen

Eine  $C^2$ -Kurve  $u \in V$  liefert genau dann einen stationären Punkt von  $\mathcal{L} : V \rightarrow \mathbb{R}$ , wenn  $u$  die Euler-Lagrange-Gleichungen erfüllt:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left[ \frac{\partial L}{\partial z_k}(x, u(x), u'(x)) \right] &= \frac{\partial L}{\partial y_k}(x, u(x), u'(x)) \\ \text{Vektoriell: } \frac{d}{dx} [\nabla_z L(x, u, u')] &= \nabla_y L(x, u, u') \end{aligned} \quad (ELG)$$

Jede Lösung von (ELG) heißt **Extremal** von  $\mathcal{L}$  oder  $L$ .

**Beweis**

Nach (\*) und (9.3) gilt für alle Extremale  $u \in C^2$  und  $\varphi \in \delta V$ :

$$\delta \mathcal{L}(u)(\varphi) = \int_a^b \left\langle \nabla_y L(x, u, u') - \frac{d}{dx} [\nabla_z L(x, u, u')] , \varphi \right\rangle dx = 0$$

Nach dem Fundamentallema der V. folgen daraus die Gleichungen (ELG). Die Umkehrung ist trivial. ■

## Bemerkung

Die Euler-Lagrange-Gleichungen heißen oft nur Euler-Gleichungen und in der Mechanik nur Lagrange-Gleichungen (2. Art). Sie stellen notwendige Bedingungen für starke und schwache Maxima oder Minima. Hinreichende Bedingungen sind schwieriger. Meist ergibt sich die Hinlänglichkeit aber aus dem Kontext. Wir schreiben die ELG nochmals für  $m=1$  auf und verwenden die meist übliche Schreibweise: Die Differentiation erfolgt nicht nach  $y$  und  $z$ , sondern nach  $u$  und  $u'$ :

$$\frac{d}{dx} L_{u'} = L_u$$

Die linke Seite bedeutet ausführlich (mit der Kettenregel):

$$\frac{d}{dx} L_{u'}(x, u(x), u'(x)) = L_{u'x} + L_{u'u} u' + L_{u'u'} u''$$

## Einige Spezialfälle

Da wir in unseren Beispielen die Kurve ( $u$ ) meist durch folgende Parameterkoordinaten beschreiben haben, d.h. durch  $x$  und  $y(x)$ , benutzen wir jetzt  $L = L(x, y, y')$ .

1.  $L$  hänge nicht explizit von  $y$  ab. Dann lauten die ELG:

$$\frac{d}{dx} L_{y'} = L_y \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow L_{y'}(x, y') = \text{const.}$$

Kann man diese Gleichung explizit nach  $y'$  auflösen, erhält man  $y$  durch Integration.

2.  $L$  hänge nicht explizit von  $y'$  ab. Dann lauten die ELG:

$$L_y = L_y(x, y(x)) = 0$$

Kann man explizit nach  $y$  auflösen, hat man die Darstellung der Extrema.

3.  $L$  hänge nicht explizit von  $x$  ab (Bsp.: physikalisches System ohne explizite Zeitabhängigkeit). Dann ist

$$L(y, y') = y' L_{y'}(y, y')$$

ein sogenanntes **erstes Integral** der ELG, d.h. eine Größe, die längs jeder Extremalen konstant ist.

### Beweis

Zu zeigen ist, dass  $\frac{d}{dx} (L - y' L_{y'}) = 0$  ist, wenn  $y$  eine Extremale ist, d.h. die ELG gelten.

$$\frac{d}{dx} (L - y' L_{y'}) = [L_y y' + L_{y'y'} y''] - [y'' L_{y'} + y' L_{yy} y' + y' L_{y'y'} y''] = y' \underbrace{[L_y - y' L_{yy} - y'' L_{y'y'}]}_{=(ELG)=0} = 0$$



**Beispiel 9.5**

Lösung des ersten Beispiels am Anfang des Kapitels

Suche ein Minimum von  $\int_a^b \sqrt{1+y'(x)^2} dx$ , also ist  $L = \sqrt{1+y'^2}$ . Nach dem Spezialfall 1 ist

$$\frac{d}{dx} L_{y'} = 0 \Rightarrow L_{y'} = \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} \stackrel{!}{=} c = \text{const.}$$

Auflösen nach  $y'$  ergibt eine Geradengleichung

$$\frac{y'^2}{1+y'^2} = c^2 \Rightarrow y' = d := \pm \sqrt{\frac{y'^2}{1+y'^2}} \Rightarrow y = dx + c$$

## 9.3 Umkehrabbildungen und implizite Funktionen

**Problem 1**

Sei  $G \subset \mathbb{R}^m$  offen und  $f = (f_1, \dots, f_m)^T : G \rightarrow \mathbb{R}^m$  gegeben. Wann ist das eine eindeutige Abbildung, d.h. wann existiert  $f^{-1}$  mit  $f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = \text{id}$ ? Kann man die Ableitung  $(f^{-1})'$  bestimmen, ohne  $f^{-1}$  explizit zu kennen?

**Bemerkung**

Zur Erinnerung

1.  $f$  sei eine Funktion einer Variablen.  $f^{-1}$  existiert, wenn  $f' \neq 0$  ist. Die Ableitung ist  $(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)}$ .
2.  $A : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$  sei eine lineare Abbildung, gegeben durch eine Matrix  $\mathbf{A}$ .  $A^{-1}$  bzw.  $\mathbf{A}^{-1}$  existiert für  $\det \mathbf{A} \neq 0$ .

**Theorem 9.15**

Satz über die lokale Umkehrbarkeit von Abbildungen

Sei  $G \subset \mathbb{R}^m$  offen und  $f : G \rightarrow \mathbb{R}^m$   $k$ -mal stetig differenzierbar. Für  $x^0 \in G$  sei  $f'(x^0)$  invertierbar, also

$$\det f'(x^0) = \frac{D(f_1, \dots, f_m)}{D(x_1, \dots, x_m)}(x^0) = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_m} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_m} \end{pmatrix}_{x=x^0} \stackrel{!}{\neq} 0$$

Dann gilt:

1. Es existieren offene Umgebungen  $U = U(x^0)$  und  $V = V(y^0) = V(f(x^0))$ , sodass  $f$  eine eindeutige Abbildung von  $U$  auf  $V$  ist. ( $f$  bildet  $U$  bijektiv auf  $V$  ab.)
2. Die Umkehrabbildung  $g := (f|_U)^{-1}$  ist in  $V$   $k$ -mal stetig differenzierbar und es gilt: Die Ableitung  $g'(y)$  ist die zu  $f'(x)$ , genommen an  $x = g(y)$  inverse Matrix:  $g'(y) = [f'(g(y))]^{-1}$

Den Beweis finden Sie in der Literatur (z.B. Harro Heuser, „Lehrbuch der Analysis, Teil II“).

**Folgerung 9.16**

Satz über die offene Abbildung

Sei  $G \subset \mathbb{R}^m$  offen und  $f : G \rightarrow \mathbb{R}^m$  stetig differenzierbar. Außerdem sei  $f'(x)$  für alle  $x \in G$  invertierbar. Dann ist  $f(G)$  eine offene Menge. Ist  $f$  insgesamt eineindeutig (nicht nur lokal wie im vorhergehenden Theorem), dann ist  $f$  ein **Diffeomorphismus**, d.h.  $f^{-1}$  ist auch stetig differenzierbar.

**Beweis**

zum ersten Teil

Nach Theorem 9.15 gibt es zu jedem  $x^0$  zwei offene Umgebungen  $U = U(x^0)$  und  $V = V(f(x^0))$ , die

durch  $f$  eindeutig aufeinander abgebildet werden. Also existiert zu jedem Punkt  $y \in f(U)$  (d.h.  $y = f(x)!$ ) eine Umgebung (nämlich  $V$ ), die noch ganz in  $f(G)$  liegt, denn  $V = f(U) \subset f(G)$ . Das bedeutet:  $f(G)$  ist offen. ■

**Bemerkung**

zum zweiten Teil

In der Formulierung ist zu beachten: Aus den Vorgaben folgt zwar, dass  $f$  in jedem Punkt lokal invertierbar ist, nicht aber, dass  $f$  global invertierbar ist. Zum Beispiel ist  $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^2$  für alle  $x$  lokal eindeutig, aber nicht global.

Als Nächstes betrachten wir eine wichtige Anwendung des Theorems 9.15.

**Problem 2**

Betrachte  $F : G \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  und die Gleichung

$$F(x, y) = 0 \quad (1)$$

$$\text{Beispiele: } x^2 + y^2 - 1 = 0 \quad (2)$$

$$x^2 + y^2 + 1 = 0 \quad (3)$$

Sei  $M := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : F(x, y) = 0\}$ . Ist  $M$  nichtleer? Im Beispiel (2) ja, im Beispiel (3) nein. Ist  $M \neq \emptyset$ , dann sieht man folgendes: Wenn man  $x$  (oder  $y$ ) frei gewählt hat, dann kann man, um (1) zu erfüllen, das  $y$  (oder  $x$ ) nicht mehr frei wählen.  $y$  hängt also von  $x$  ab. Kann man diese Abhängigkeit beschreiben? Genauer: Kann man (1) „nach  $y$  auflösen“?

Das soll bedeuten: Existiert eine Funktion  $f$  auf einem Intervall  $(a, b)$ , sodass  $F(x, f(x)) = 0$  für alle  $x \in (a, b)$  ist? Wo liegt das Problem? Betrachte die Gleichung (2). Natürlich ist  $y = \pm\sqrt{1-x^2}$ , doch ohne zusätzliche Forderung ist es unmöglich, über das Vorzeichen zu entscheiden.

Es ist noch schlimmer: Sei  $[-1, 1]$  in zwei disjunkte Mengen  $X_1$  und  $X_2$  zerlegt, d.h.  $X_1 \cup X_2 = [-1, 1]$  und  $X_1 \cap X_2 = \emptyset$ . Setze

$$f(x) := \begin{cases} \sqrt{1-x^2} & x \in X_1 \\ -\sqrt{1-x^2} & x \in X_2 \end{cases}$$

Dieses  $f$  erfüllt  $x^2 + f(x)^2 = 1$ , ist jedoch im Allgemeinen nicht stetig!

**Präzisere Aufgabenstellung**

Ist die Menge  $M$  wenigstens lokal der Graph einer (stetigen oder hinreichend oft differenzierbaren) Funktion, d.h. sei  $(x_0, y_0) \in M$ , gibt es dann eine Umgebung  $U(x_0, f(x_0))$  mit  $U \cap M = \text{Graph von } f$ ?

**Heuristische Überlegung**

Sei  $(x_0, y_0) \in M$ . Die Taylorentwicklung von  $F$  an  $(x_0, y_0)$  ergibt:

$$F(x, y) = F(x_0, y_0) + \frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) + \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \cdot (y - y_0) + \text{Rest } R$$

Wir vernachlässigen  $R$  beachten  $F(x_0, y_0) = 0$  und lösen  $F(x, y) = 0$  nach  $y$  auf:

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) + \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \cdot (y - y_0) = 0$$

Das gilt (lokal), wenn  $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$ . Um nun alles für allgemeine Abbildungen formulieren zu können, führen wir einige Bezeichnungen ein.

Seien  $G \subset \mathbb{R}_x^p$  und  $H \subset \mathbb{R}_y^q$  nichtleere, offene Mengen.  $F : G \times H \rightarrow \mathbb{R}^q$  sei stetig differenzierbar.  $F$  besteht aus  $q$  Komponenten  $F_i(x, y) = F_i(x_1, \dots, x_p, y_1, \dots, y_q)$ . Betrachte die Gleichung  $F(x, y) = 0$ , d.h. das (i.A. nichtlineare) Gleichungssystem

$$\begin{aligned} F_1(x_1, \dots, x_p, y_1, \dots, y_q) &= 0 \\ &\vdots \\ F_q(x_1, \dots, x_p, y_1, \dots, y_q) &= 0 \end{aligned}$$

Wie kann man dieses Gleichungssystem „nach den  $y_1, \dots, y_q$  auflösen“?

**Theorem 9.17** Satz über implizite Funktionen

Sei  $F : G \times H \subset \mathbb{R}^{p \times q} \rightarrow \mathbb{R}^q$  stetig differenzierbar und  $(x^0, y^0) \in G \times H$  mit

1.  $F(x^0, y^0) = 0$
2.  $\frac{\partial F}{\partial y}(x^0, y^0) \equiv \frac{d(F_1, \dots, F_q)}{d(y_1, \dots, y_q)}(x^0, y^0)$  ist invertierbar

Dann existieren Umgebungen  $U = U(x^0) \subset G$  und  $V = V(y^0) \subset H$  und eine stetige Abb.  $f : U \rightarrow V$  mit

1.  $f(x^0) = y^0$  und  $F(x, f(x)) = 0 \quad \forall x \in U$  (Die Nullstellenmenge von  $F$  innerhalb von  $U \times V$  ist gerade der Graph von  $f$ .)
2.  $f'(x) = - \left( \frac{\partial F}{\partial y}(x, y) \right)^{-1} \cdot \frac{\partial F}{\partial x}(x, y) \quad (*)$

**Bemerkung**

Die  $f_i$  sind gerade die „ $y_i$  nach der Auflösung“. Die Formel  $(*)$  erhält man mit der Kettenregel:

$$F(x, f(x)) = 0 \quad \Rightarrow \quad 0 = \underbrace{\frac{dF}{dx}}_{F'} = \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} \cdot \underbrace{\frac{\partial f}{\partial x}}_{f'} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial F}{\partial y} f' = - \frac{\partial F}{\partial x} \quad \Rightarrow \quad f' = - \left( \frac{\partial F}{\partial y} \right)^{-1} \cdot \frac{\partial F}{\partial x}$$

**Beweis**

Das Konzept ist, das Theorem 9.15 auf eine geeignete Hilfsableitung anzuwenden. Sei

$$\Phi : G \times H \subset \mathbb{R}^{p \times q} \rightarrow \mathbb{R}^{p \times q} \quad \text{mit} \quad \Phi(x, y) = (x, F(x, y))$$

Auf  $\Phi$  könnte man 9.15 anwenden, da von  $\mathbb{R}^m$  auf  $\mathbb{R}^m$  ( $m = p + q$ ) abgebildet wird. Nach der ersten Voraussetzung ist  $\Phi(x^0, y^0) = (x^0, F(x^0, y^0)) = (x^0, 0)$ . Für  $\Phi$  zeigen wir nun die lokale Invertierbarkeit um  $(x^0, y^0)$  und bestimmen dazu die Ableitung an dieser Stelle. Da

$$\Phi = \Phi(x, y) = \Phi(x_1, \dots, x_p, F_1(x_1, \dots, x_p, y_1, \dots, y_q), \dots, F_q(x_1, \dots, x_p, y_1, \dots, y_q)),$$

ist die erste Zeile von  $\Phi'$  ein Spaltenvektor aus den Ableitungen der ersten Komponente von  $\Phi$ , also  $x_1$ , nach allen Variablen  $(x_1, \dots, x_p, y_1, \dots, y_q)$ . Die  $p$ -te Zeile besteht aus den Ableitungen der  $p$ -ten Komponente  $(x_p)$  nach allen Variablen. Für die  $(p+1)$ -te Zeile der Ableitung muss  $F_1(\dots)$  abgeleitet werden und so weiter.

$$\Phi'(x, y) = \left( \begin{array}{ccc|ccc} E_{pp} & & & 0 & & \\ \hline \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial x_p} & \frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial y_q} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial F_q}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial F_q}{\partial x_p} & \frac{\partial F_q}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial F_q}{\partial y_q} \end{array} \right) = \left( \begin{array}{ccc|ccc} E_{pp} & & & 0 & & \\ \hline \frac{\partial F}{\partial x} & & & \frac{\partial F}{\partial y} & & \end{array} \right)$$

An  $(x^0, y^0)$  ist  $\frac{dF}{dy}(x^0, y^0)$  invertierbar. Da auch  $E_{pp}$ , die  $p \times p$ -Einheitsmatrix, invertierbar ist, ist  $\Phi'$  insgesamt invertierbar. Damit gelten für  $\Phi$  die Voraussetzungen des Theorems 9.15, also ist  $\Phi$  in  $(x^0, y^0)$  lokal invertierbar und es existieren Umgebungen  $U' = U'(x^0, y^0)$  und  $V' = V'(\Phi(x^0, y^0)) = V'(x^0, 0)$ , sodass  $\Phi$  ein Diffeomorphismus von  $U'$  nach  $V'$  ist. Die Umkehrabbildung  $\Phi^{-1}$  hat eine zu  $\Phi$  analoge Struktur: Es existiert eine Abbildung  $\Psi : V' \rightarrow \mathbb{R}^q$  mit

$$\Phi^{-1}(\xi, \eta) = (\xi, \Phi(\xi, \eta)) \quad \forall (\xi, \eta) \in V'$$

Damit erhält man für  $(x, y) \in U'$ :

$$F(x, y) = 0 \Leftrightarrow \Phi(x, y) = (x, 0) \Leftrightarrow (x, y) = \Phi^{-1}(x, 0) \Leftrightarrow y = \Psi(x, 0)$$

Insbesondere ist  $y^0 = \Psi(x^0, 0)$ . Da  $\Phi$  stetig ist, existieren Umgebungen  $U = U(x^0)$  und  $V = V(y^0)$ , sodass aus  $x \in U$  folgt:  $y = \Psi(x, 0) \in V$ . Jetzt definieren wir  $f : U \rightarrow V$  durch  $f(x) := \Psi(x, 0)$ , damit ist  $f$  stetig differenzierbar und  $F(x, f(x)) = 0$ . ■

#### Bemerkung

Theorem 9.17 ist schon „optimal“ formuliert: Man weiß aus den Bezeichnungen schon, nach welchen Variablen man auflösen kann.

**Beispiel 9.6** Ausführliche Diskussion zu  $F(x, y) = x^2 + y^2 - 1$

Die Ableitungen sind  $F_x(x, y) = 2x$  und  $F_y(x, y) = 2y$ . Ist etwa  $(x^0, y^0) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ , dann ist  $F(x^0, y^0) = 0$  und  $F_x(x^0, y^0)$  sowie  $F_y(x^0, y^0) \neq 0$ . Man kann also sowohl nach  $x$  als auch nach  $y$  auflösen:  $x = \sqrt{1 - y^2}$  und  $y = \sqrt{1 - x^2}$ . An  $(x^0, y^0) = (1, 0)$  ist  $F_y(1, 0) = 0$  und  $F_x(1, 0) \neq 0$ , also muss man nach  $y$  auflösen.

## 9.4 Untermannigfaltigkeiten des $\mathbb{R}^n$

Wie kann man Kurven und Flächen im  $\mathbb{R}^3$  beschreiben und dies auf geeignete Teilmengen, sogenannte Mannigfaltigkeiten des  $\mathbb{R}^n$  verallgemeinern? Wir gehen so vor, dass man den abstrakten Mannigfaltigkeitsbegriff leichter erlernen kann.

Sei  $T \subset \mathbb{R}^k$  offen.  $\Phi : T \rightarrow \mathbb{R}^n$  heißt **regulär**, wenn  $\Phi$  injektiv und differenzierbar ist und

$$\Phi'(t) = \frac{\partial(\Phi_1, \dots, \Phi_n)}{\partial(t_1, \dots, t_k)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \Phi_1}{\partial t_1} & \dots & \frac{\partial \Phi_1}{\partial t_k} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial \Phi_n}{\partial t_1} & \dots & \frac{\partial \Phi_n}{\partial t_k} \end{pmatrix}$$

den Rang  $k$  hat.  $\Phi^{-1} : \Phi(T) \rightarrow T$  ist stetig.

#### Definition 9.18

Eine Teilmenge  $M \subset \mathbb{R}^n$  heißt  **$k$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit**, wenn folgendes gilt: Für jedes  $a \in M$  existieren offene Mengen  $U, V \subset \mathbb{R}^n$  mit  $a \in U$  und ein Diffeomorphismus  $\Psi : U \rightarrow V$ , sodass gilt:

$$\Psi(U \cap M) = V \cap \left( \mathbb{R}^k \times \{0_{n-k}\} \right) = \{y \in V : y_{k+1} = \dots = y_n = 0\}$$

Hierbei ist  $0_{n-k}$  das Nullelement des  $\mathbb{R}^{n-k}$ . Eine  $(n-1)$ -dimensionale UM heißt **Hyperfläche**.

**Bemerkung**

1. Beachte: Der Rang von  $\Psi'(x)$  ist  $n$  für alle  $x \in U$ .
2. Die Voraussetzung, dass  $\Psi$  ein Diffeomorphismus ist (denkbar wäre auch die Forderung nach einem Homöomorphismus, also einer in beiden Richtungen stetigen Abbildung), verhindert Pathologien.
3. Man kann für  $V$  o.E.d.A. ganz einfache Mengen nehmen, zum Beispiel Würfel, Kugeln oder auch den gesamten  $\mathbb{R}^n$ .

**Beispiel 9.7**

## Graphen

Sei  $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  stetig differenzierbar. Dann ist der Graph  $G(f) := \{(x, f(x)) : x \in (a, b)\}$  eine eindimensionale UM des  $\mathbb{R}^2$ . Zum Beweis setze  $U = V = (a, b) \times \mathbb{R}$ . Offenbar ist  $U$  eine offene Menge, die ganz  $G(f)$  enthält. Setze

$$\Phi(x, y) = (x, y - f(x)) \Rightarrow \Phi'(x, y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -f'(x) & 1 \end{pmatrix}$$

$\Phi'(x, y)$  ist stets invertierbar und es ist  $\Phi^{-1}(s, t) = (s, t + f(s))$ .

Allgemeiner: Sei  $U' \subset \mathbb{R}^n$  offen und  $f : U' \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}$  stetig differenzierbar. Analog zum Spezialfall ist  $G(f) = \{(x, f(x)) : x \in U'\}$  eine  $k$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit des  $\mathbb{R}^n$ .  $\Phi$  wird wie oben definiert und es ist

$$\Phi'(x, y) = \begin{pmatrix} E_k & 0 \\ -f'(x) & E_{n-k} \end{pmatrix}$$

Hierbei sind die  $E_k$  Einheitsmatrizen im entsprechenden  $\mathbb{R}^k$ .

**Beispiel 9.8**

## Einheitssphäre

$S_{n-1} := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|^2 = x_1^2 + \dots + x_n^2 = 1\}$  ist eine typische  $(n-1)$ -dimensionale Untermannigf. des  $\mathbb{R}^n$ .

**Satz 9.19**

## Weitere Charakterisierungen des Untermannigfaltigkeitsbegriffes

Sei  $1 \leq k \leq n-1$  und  $M \subset \mathbb{R}^n$ . Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

1.  $M$  ist eine  $k$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit des  $\mathbb{R}^n$ .
2. [Beschreibung durch Gleichungen]  $M$  ist eine lokale Nullstellenmenge bzw.  $M$  ist lokal durch Nebenbedingungen definiert, d.h. für alle  $a \in M$  existieren eine offene Umgebung  $U = U(a)$  und  $n-k$  stetig differenzierbare Funktionen  $f_j : U \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$M \cap U = \{x \in U : f_1(x) = \dots = f_{n-k}(x) = 0\} \quad \text{und} \quad \text{Rang} \frac{\partial (f_1, \dots, f_{n-k})}{\partial (x_1, \dots, x_n)} = n - k$$

(Das heißt, keine der Gleichungen  $f_i(x) = 0$  ist überflüssig.)

3. [Darstellung als Graph einer Abbildung] Für alle  $a \in M$  gibt es (nach evtl. Umnummerierung der Koordinaten) offene Umgebungen  $U' \subset \mathbb{R}^k$  von  $a' := (a_1, \dots, a_k)$  und  $U'' \subset \mathbb{R}^{n-k}$  von  $a'' := (a_{k+1}, \dots, a_n)$  sowie eine stetig differenzierbare Abbildung  $g : U' \rightarrow U''$  mit

$$M \cap (U' \times U'') = \{(x', x'') \in U' \times U'' : x'' = g(x')\} = \text{Graph}(g)$$

4. [Parameterdarstellung] Für alle  $a \in M$  existiert eine offene Umgebung  $U \subset \mathbb{R}^n$  von  $a$  und eine offene Menge  $T \subset \mathbb{R}^k$  sowie eine reguläre Abbildung  $\Phi : T \rightarrow \mathbb{R}^n$  mit

$$\Phi(T) = U \cap M (=: W)$$

**Beispiel 9.9**

Die Beschreibung durch Gleichungen kennt man aus der linearen Algebra.

1. Eine Ebene im  $\mathbb{R}^3$  wird durch  $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_4 = 0$  beschreiben, also ein  $f_1 = f$ .

$$\frac{\partial f}{\partial (x_1, x_2, x_3)} = (a_1, a_2, a_3)$$

Hierbei dürfen nicht alle  $a_1, a_2, a_3$  gleichzeitig Null sein, damit  $\text{Rang}(a_1, a_2, a_3) = 1$  ist.

2. Eine Gerade wird durch zwei Ebenengleichungen beschrieben und stellt damit den Schnitt zwischen den entsprechenden Ebenen dar:

$$\begin{aligned} f_1(x) &= a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_4 = 0 \\ f_2(x) &= b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 + b_4 = 0 \\ \frac{\partial (f_1, f_2)}{\partial (x_1, x_2, x_3)} &= \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Diese Matrix muss den Rang 2 haben, sonst sind die Ebenen parallel (bzw. sogar identisch).

**Definition 9.20**

Seien  $T$  und  $\Phi$  wie in Satz 9.19.4 definiert. Dann heißt  $(\Phi, T)$  lokale Parameterdarstellung von  $M$ . Mit  $\Psi := \Phi^{-1}$  (auf  $W := M \cap U$ ) heißt  $(\Psi, W)$  **Karte** um  $a$  und die  $(t_1, \dots, t_k) := \Psi(a)$  heißen **lokale Koordinaten** von  $a$ . Das Paar  $(\Phi, T)$  heißt auch **lokales Koordinatensystem** von  $M$  um  $a$ . Ein System von Karten, dass  $M$  überdeckt, heißt **Atlas** für  $M$ .

**Beweis**

für Satz 9.19

Aus 1. folgt 2.: Seien  $U, V$  und  $\Psi$  wie in Definition 9.18 erklärt. Setze  $f := (\Psi_{k+1}, \dots, \Psi_n) : U \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}$ .

$$M \cap U = \{x : f(x) = 0\} = \{x : \underbrace{f_1(x)}_{\Psi_{k+1}(x)} = \dots = \underbrace{f_k(x)}_{\Psi_n(x)} = 0\}$$

Da  $\Psi$  ein Diffeomorphismus ist, ist  $\text{Rang } \Psi'(x) = n$ , d.h. alle Zeilen von  $\Psi'$  sind linear unabhängig.

$$\text{Rang } f'(x) = \text{Rang} \begin{pmatrix} \frac{d}{dx_1} \Psi_{k+1}(x) & \cdots & \frac{d}{dx_k} \Psi_{k+1}(x) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{d}{dx_1} \Psi_n(x) & \cdots & \frac{d}{dx_k} \Psi_n(x) \end{pmatrix} = n - k$$

Aus 2. folgt 3.: Seien  $U$  und  $f$  wie in Satz 9.19.2 definiert, also  $M \cap U = \{x : f_1(x) = \dots = f_n(x) = 0\}$ .

Da  $\text{Rang } f'(x) = n - k$ , müssen  $n - k$  Spalten linear unabhängig sein; o.E.d.A. seien dies die letzten  $n - k$  Spalten. Betrachte folgende Aufteilung der Variablen  $x = (x_1, \dots, x_n)$ :

$$x' := (x_1, \dots, x_k) \quad \text{und} \quad x'' := (x_{k+1}, \dots, x_n)$$

$\frac{\partial (f_1, \dots, f_{n-k})}{\partial (x_{k+1}, \dots, x_n)}$  ist eine invertierbare Matrix. Nach dem Satz über implizite Funktionen kann man nach den letzten  $n - k$  Variablen auflösen, d.h. es existieren Umgebungen  $U'$  von  $a'$  und  $U''$  von  $a''$  und ein stetig differenzierbares  $g : U' \rightarrow U''$  [d.h.  $g = (g_1, \dots, g_{n-k})$  und  $g_i = g_i(x_1, \dots, x_n)$ ] mit  $f(x', g(x')) = 0 \forall x' \in U'$ .

$$(x', g(x')) \in M \cap U = M \cap (U' \times U'') = \{(x', g(x')) : x' \in U'\} = \text{Graph}(g)$$

Aus 3. folgt 4.: Seien  $U'$  und  $U''$  wie in 9.19.3 definiert sowie  $U := U' \times U''$  und  $T := U'$ . Setze  $\Phi : T \rightarrow \mathbb{R}^n$ :

$$\Phi(x') := (x', g(x')) = \text{Graph}(g) = M \cap U$$



Aus 4. folgt 1.: Dies ist die komplizierteste Implikation. Mehr auf einem der nächsten Übungsblätter. ■

#### Bemerkung

In 9.19.2 bedeutet  $\text{Rang } f' = n - k$  gerade, dass die Gradienten der  $f_j$  linear unabhängig sind.

#### Beispiel 9.10

1.  $M = S_{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n : x_1^2 + \dots + x_n^2 = 1\}$  ist natürlich die Nullstellenmenge einer einzigen Funktion  $f : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} = U \rightarrow \mathbb{R} = \mathbb{R}^{n-k}$  mit  $k = n - 1$  mit  $f(x) = \|x\|^2 - 1$ .
2. Seien  $0 < r < R$  fest gewählt.  $\Phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  sei gegeben durch

$$\Phi(\varphi, \vartheta) = \left( (R + r \cos \vartheta) \cos \varphi, (R + r \cos \vartheta) \sin \varphi, r \sin \vartheta \right)$$

mit  $\varphi, \vartheta \in [0, 2\pi]$ . (Aus Periodizitätsgründen reicht das.) Das entspricht (bei geeigneter Einschränkung von  $\varphi$  und  $\vartheta$ ) einer lokalen Parameterdarstellung eines Torus. Dieser Torus entsteht durch Rotation der Kreislinie

$$\mathbb{R} \ni \vartheta \mapsto (x(\vartheta), z(\vartheta)) = (R + r \cos \vartheta, r \sin \vartheta)$$

um die  $z$ -Achse. Wenn in der  $(x, z)$ -Ebene eine Kurve durch die Parameterdarstellung  $x = \varphi(u)$  und  $z = \psi(u)$  mit  $\varphi(u) \geq 0$  und  $\alpha \leq u \leq \beta$  gegeben ist und diese um die  $z$ -Achse rotiert, dann beschreibt jeder Kurvenpunkt einen Kreis mit dem Radius  $\varphi(u)$ . Also erhält man als „Parameterdarstellung“ der Rotationsfläche:

$$x = \varphi(u) \cos v, \quad y = \varphi(u) \sin v, \quad z = \psi(u) \quad \left( \begin{array}{l} 0 \leq v \leq 2\pi \\ \alpha \leq u \leq \beta \end{array} \right)$$

Wir formulieren eine wichtige Eigenschaft von Untermannigfaltigkeiten, die eine wesentliche Grundlage für eine allgemeine Mannigfaltigkeitsdefinition bildet.

#### Satz 9.21 Parametertransformation und Kartenwechsel

Seien  $M \subset \mathbb{R}^n$  eine  $k$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit und  $(W_1, \Psi_1)$  sowie  $(W_2, \Psi_2)$  zwei Karten um  $a \in M$  mit  $W := W_1 \cap W_2 \neq \emptyset$ . Dann sind die Bilder  $S_i := \Psi_i(W)$  offene Teilmengen der jeweiligen  $T_i := \Psi_i(W_i)$  und  $\tau := \Psi_2 \circ \Psi_1^{-1} : S_1 \rightarrow S_2$  ist ein Diffeomorphismus. (Entsprechend übertragen sich auch höhere Differenzierbarkeitseigenschaften von  $\Psi_1$  und  $\Psi_2$  auf  $\tau$ .) Die Abbildung  $\tau$  heißt **Kartenwechsel**.

## Tangentialräume an Untermannigfaltigkeiten

Wir benötigen im Folgenden Kurven(stücke) auf  $M$  durch  $a \in M$ . O.E.d.A. sei so ein Kurvenstück durch  $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$  gegeben, wobei  $\alpha(0) = a$  ist.

#### Definition 9.22

Sei  $M$  eine Untermannigfaltigkeit des  $\mathbb{R}^n$  und  $a \in M$ . Ein Vektor  $v \in \mathbb{R}^n$  heißt **Tangentialvektor** an  $M$  im Punkt  $a$ , wenn es eine stetig differenzierbare Kurve  $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$  gibt mit  $\alpha(0) = a$  und  $\alpha'(0) = v$ . Die Menge aller dieser Tangentialvektoren wird mit  $T_a(M)$  bezeichnet und heißt **Tangentialraum** an  $M$  im Punkt  $a$ .

Ein **Normalenvektor** von  $M$  in  $a$  ist ein Vektor  $w \in \mathbb{R}^n$  mit  $\langle w, v \rangle = 0 \quad \forall v \in T_a(M)$  (unter Verwendung des Standardskalarproduktes in  $\mathbb{R}^n$ ). Die Menge aller Normalenvektoren an  $M$  im Punkt  $a$  heißt  $N_a(M)$ .

**Satz 9.23**

## Eigenschaften des Tangential- und des Normalraumes

Sei  $M$  eine  $k$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit des  $\mathbb{R}^n$  und  $a \in M$ . Dann gilt:

1.  $T_a(M)$  ist ein  $k$ -dimensionaler Untervektorraum des  $\mathbb{R}^n$ . Eine Basis für  $T_a(M)$  erhält man so: Sei  $T \subset \mathbb{R}^k$  und  $\Phi : T \rightarrow M$  (vgl. Satz 9.19.4) mit  $\Phi(c) = a$  ein lokales Koordinatensystem für  $M$  um  $a$ . Dann bilden die Vektoren  $\frac{\partial \Phi}{\partial t_1}(c), \dots, \frac{\partial \Phi}{\partial t_k}(c)$  eine Basis von  $T_a(M)$ .
2.  $N_a(M)$  ist ein  $(n - k)$ -dimensionaler Vektorraum. Eine Basis für  $N_a(M)$  erhält man so: Sei  $f = (f_1, \dots, f_{n-k}) : U \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}$  stetig differenzierbar und  $a \in M \cap U$ , sodass (vgl. Satz 9.19.2)  $M \cap U = \{x : f(x) = 0\}$  und  $\text{Rang } \frac{\partial(f_1, \dots, f_{n-k})}{\partial(x_1, \dots, x_n)}(a) = n - k$ . Dann bilden die Vektoren  $\text{grad } f_j(a)$  mit  $1 \leq j \leq n - k$  eine Basis für  $N_a(M)$ .

**Bemerkung**

$N_a(M)$  ist per Definition trivialerweise ein Vektorraum. Man sieht aber zunächst überhaupt nicht, dass  $T_a(M)$  ein VR ist.

**Beweis**

Setze  $V := \text{lin} \left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial t_1}(c), \dots, \frac{\partial \Phi}{\partial t_k}(c) \right\}$  und  $W := \text{lin} \{ \text{grad } f_j(a) : 1 \leq j \leq n - k \}$ , also ist  $\dim V = k$  und  $\dim W = n - k$ . Wir zeigen:  $V \subset T_a(M)$  und  $W \subset N_a(M)$  – Dann folgt aus Dimensionsgründen und mit  $W \perp V$  die Gleichheit der jeweiligen Mengen.

1. Sei  $v \in V$ , d.h.  $v = \sum_{i=1}^k d_i \frac{\partial \Phi}{\partial t_i}(c)$ . Definiere folgende Kurve

$$\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}^n, s \mapsto \Phi(c + (d_1, \dots, d_k)s) = \Phi(c_1 + d_1s, c_2 + d_2s, \dots, c_k + d_k s)$$

Also ist  $\alpha$  ein Geradenstück um  $c$ . Die Kettenregel liefert:

$$\alpha'(0) = \underbrace{\sum_{i=1}^k d_i \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial t_i}}_{=v} \Rightarrow v \in T_a(M)$$

2.  $N_a(M)$  ist ein Vektorraum. Wir zeigen, dass alle  $\text{grad } f_j(a)$  in  $N_a(M)$  liegen, also  $W \subset N_a(M)$  gilt. Sei  $v \in T_a(M)$  und  $v = \alpha'(0)$  für eine geeignete Kurve  $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$  mit  $\alpha(0) = a$ .

$$\forall t \in (-\varepsilon, \varepsilon) : f(\alpha(t)) = 0 \Rightarrow f_j(\alpha(t)) = 0$$

Daraus folgt

$$0 = \frac{d}{dt} f_j(\alpha(t)) \Big|_{t=0} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(\alpha(0)) \cdot \alpha'_i(0) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(a) \cdot v_i = \langle \text{grad } f_j(a), v \rangle$$

Da  $v \in T_a(M)$  beliebig gewählt werden kann, ist  $\text{grad } f_j(a) \in N_a(M)$ .



## 9.5 Extremwerte mit Nebenbedingungen

### Beispiel 9.11

Gesucht ist der Punkt  $(x^0, y^0)$  auf der Geraden  $y - x - 1 = 0$ , der von  $(0, 0)$  den geringsten Abstand hat. Benutzt man das Quadrat des Abstandes, so soll  $x^2 + y^2$  minimal werden (man schreibt  $x^2 + y^2 \rightarrow \text{Min.}$ ). Man formuliert eine Nebenbedingung:  $g(x, y) := y - x - 1 = 0$ . Dieses kann man nach  $y$  auflösen:  $y = x + 1$  wird dann in  $f(x)$  eingesetzt:

$$x^2 + (x + 1)^2 \rightarrow \text{Min.}$$

Dies ist eine Extremwertaufgabe für Funktionen einer Variablen mit der Lösung  $x = -\frac{1}{2}$  (und  $y = \frac{1}{2}$ ).

Im Allgemeinen hat man Funktionen  $f, g : \mathbb{R}^2 \supset G \rightarrow \mathbb{R}$  und eine Menge  $M := \{(x, y) : g(x, y) = 0\}$ . Am Punkt  $(x^0, y^0) \in G$  liegt ein lokales Extremum unter der Nebenbedingung  $g = 0$  vor, wenn es eine Umgebung  $U(x^0, y^0)$  gibt, für die gilt:

$$\forall (x, y) \in G \cap M \cap U : \begin{cases} f(x, y) > f(x^0, y^0) & \text{(lokales Minimum)} \\ f(x, y) < f(x^0, y^0) & \text{(lokales Maximum)} \end{cases}$$

Die Umgebung  $U(x^0, y^0)$  ist dabei so gewählt, dass sie ganz in  $G$  liegt.

### Allgemeine Problemstellung

Die Funktionen  $f : \mathbb{R}^m \supset G \rightarrow \mathbb{R}$  und  $g : G \rightarrow \mathbb{R}^k$  ( $k < m$ ) seien stetig differenzierbar. Gesucht ist ein lokales Extremum von  $f$  unter der Bedingung  $g = 0$ , d.h. in der Menge

$$M = \{x \in \mathbb{R}^m : g(x) = 0\} = \{x \in \mathbb{R}^m : g_i(x) = 0, 1 \leq i \leq k\}$$

### Satz 9.24

Lagrange'sche Multiplikatorenregel

Seien  $f$  und  $g$  wie oben definiert. Zusätzlich gelte  $\text{Rang } \frac{\partial(g_1, \dots, g_k)}{\partial(x_1, \dots, x_m)}(x) = k \quad \forall x \in G$ .

Angenommen,  $f$  hat in  $c \in G$  ein lokales Extremum unter der Nebenbedingung  $g = 0$ . Dann existiert ein  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_k) \in \mathbb{R}^k$  mit

$$f'(c) = \sum_{j=1}^k \lambda_j g'_j(c) \quad (1)$$

Die  $\lambda_j$  heißen **Lagrange-Multiplikatoren**.

#### Bemerkung

1. Die Rangbedingung besagt, dass  $M$  eine  $k$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit des  $\mathbb{R}^m$  ist.
2. Zur Bestimmung einer möglichen Extremalstelle hat man gemäß diesem Satz also  $m+k$  Gleichungen für die Unbekannten  $c_1, \dots, c_m, \lambda_1, \dots, \lambda_k$  zu lösen:

$$g_l(c) = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial f}{\partial x_l}(c) = \sum_{j=1}^k \lambda_j \cdot \frac{\partial g_j}{\partial x_l}(c) \quad (l = 1, \dots, m)$$

### Beweis

Sei  $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$  eine beliebige Kurve mit  $\alpha(0) = c$ . Als Funktion von  $t$  betrachtet, hat  $f(\alpha(t))$  an  $t = 0$  lokales Extremum, also verschwindet dort  $f'(\alpha(t))$ . Mit der Kettenregel ist

$$0 = f'(\alpha(t))|_{t=0} = \sum_{i=1}^m \frac{df}{dx_i}(\underbrace{\alpha(0)}_c) \cdot \underbrace{\alpha'_i(0)}_{\text{Tangentenvektor an } c}$$

$$f\left(\underbrace{\alpha_1(t)}_{=x_1}, \dots, \underbrace{\alpha_m(t)}_{=x_m}\right) = \langle \text{grad } f(c), \alpha'(0) \rangle \Rightarrow \text{grad } f(x) \perp T_c(M) \Rightarrow \text{grad } f(x) \in N_c(M)$$

### Vorgehensweise

Definiere eine Hilfsfunktion  $H = f - \sum_{j=1}^k \lambda_j g_j$ . Dann sucht man ein lokales Extremum von  $H$  als Funktion von  $m+k$  Variablen  $(x_1, \dots, x_m, \lambda_1, \dots, \lambda_k)$ , also betrachtet man  $\frac{\partial H}{\partial x_i} = 0$  und  $\frac{\partial H}{\partial \lambda_j} = 0$ .

### Beispiel 9.12

Sei  $A = (a_{ij})$  eine symm.  $(n, n)$ -Matrix und  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  gegeben durch  $f(x) = f(x_1, \dots, x_n) := \sum_{i,j=1}^n a_{ij} x_i x_j$ . Gesucht ist nun das Maximum von  $f$  auf der Einheitssphäre, also  $g(x) = 1 - \|x\|^2 = 1 - \sum_{i=1}^n x_i^2 = 0$ . Damit ist

$$H(x_1, \dots, x_n, \lambda) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} x_i x_j - \lambda \left( 1 - \sum_{i=1}^n x_i^2 \right)$$

Die notwendigen Bedingungen für ein Extremum an  $(x^0, \lambda)$  lauten:

$$\frac{\partial H}{\partial x_i}(x^0, \lambda) = 2 \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j^0 + 2\lambda x_i^0 = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial H}{\partial \lambda}(x^0, \lambda) = 1 - \sum_{i=1}^n x_i^{02} = 0$$

Die letzte Gleichung ist gerade  $g(x) = 0$ . Fasst man die ersten  $n$  Gleichungen zusammen, so folgt  $2Ax^0 - 2\lambda x^0 = 0$  und damit  $Ax^0 = \lambda x^0$ . Das Maximum tritt also an einem (normierten)  $x^0$  auf, das der Eigenvektor zum größten Eigenwert der Matrix  $A$  ist.

Bemerkung

zu hinreichenden Bedingungen

**Ohne Nebenbedingungen:** Betrachte die Hessematrix zu  $f$ , also  $f''(x^0) = \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x^0) \right)$ .

$f$  hat an  $x^0$  ein Minimum (Maximum), wenn die Matrix  $f''(x^0)$  positiv (bzw. negativ) definit ist, also gilt:

$$\langle v, f''(x^0)v \rangle \geq 0 \quad \forall v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$$

**Mit Nebenbedingungen:** An  $c \in M$  liegt ein lokales Minimum (Maximum) vor, wenn gilt:

- (notwendig)  $\text{grad } H(c) = 0$
- (hinreichend)  $H''(c)$  ist auf  $T_c(M)$  positiv (negativ) definit.

# 10 Integralrechnung für Funktionen mehrerer Variablen

## 10.1 Definition des Riemannintegrals im $\mathbb{R}^n$

Sei  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$  (der Einfachheit halber werden alle  $x$  in Zeilen geschrieben). Ein abgeschlossenes Intervall  $I \subset \mathbb{R}^n$  wird durch feste  $a_i < b_i$  mit  $1 \leq i \leq n$  wie folgt definiert:

$$I := \{x \in \mathbb{R}^n : a_i \leq x_i \leq b_i, 1 \leq i \leq n\} = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n] \quad \text{und} \quad |I| := \prod_{i=1}^n (b_i - a_i)$$

ist der elementargeometrische **Inhalt** (bzw. das Volumen) von  $I$ . Dieser hängt nicht davon ab, ob man abgeschlossene oder offene Intervalle betrachtet. Wir betrachten **Zerlegungen**  $\mathcal{Z}$  von Intervallen  $I$ , aber nur solche der Form:

$$\mathcal{Z} = \mathcal{Z}_1 \times \dots \times \mathcal{Z}_n$$

Hierbei ist  $\mathcal{Z}_i$  eine Zerlegung von  $[a_i, b_i]$ . Also haben die Elemente von  $\mathcal{Z}$  die Form

$$J = J_1 \times \dots \times J_n \quad \text{mit} \quad J_i \in \mathcal{Z}_i$$

Die Zerlegungsintervalle von  $\mathcal{Z}$  werden von  $I_1$  bis  $I_k$  durchnummeriert.  $I_i$  und  $I_j$  haben für  $i \neq j$  keine innere Punkte gemeinsam. Dann gilt:

$$I = \bigcup_{j=1}^k I_j \quad \text{und} \quad |I| = \sum_{j=1}^k |I_j|$$

Die **Feinheit** von  $\mathcal{Z}$  wird als

$$d(\mathcal{Z}) = \max_{1 \leq j \leq k} d(I_j)$$

definiert. Hierbei ist  $d(I_j)$  der **Durchmesser** von  $I_j$ , das ist, der maximale Abstand zweier Punkte aus  $I_j$ , also die Länge der Raumdiagonale. Eine **Zerlegungsnullfolge** ist eine Zerlegungsfolge  $\mathcal{Z}_n$  mit  $d(\mathcal{Z}_n) \rightarrow 0$ . Ein **Zwischenpunktsystem** zu  $\mathcal{Z}$  ist

$$\xi = (\xi^1, \dots, \xi^k) \quad \text{mit} \quad \xi^i \in I_i$$

$f$  sei nun eine reellwertige Funktion mit  $D(f) \supset I$ . Die **Zwischensumme** von  $f$  zur Zerlegung  $\mathcal{Z}$  mit dem Zwischenpunktsystem  $\xi$  ist

$$\sigma(f, \mathcal{Z}, \xi) = \sum_{j=1}^k f(\xi^j) |I_j|$$

**Definition 10.1** Riemann-Integral

Sei  $I \subset \mathbb{R}^n$  ein (kompaktes) Intervall. Die Funktion  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  heißt auf  $I$  **Riemann-integrierbar**, wenn für jede Zerlegungsnullfolge  $(\mathcal{Z}^{(k)})$  (und zugehörige Zwischenpunktsysteme  $(\xi^{(k)})$ ) gilt:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sigma(f, \mathcal{Z}^{(k)}) \text{ existiert}$$

Dieser Grenzwert heißt **Riemann-Integral** von  $f$  über  $I$  und wird mit

$$\int_I f(x_1, \dots, x_n) dx_1, \dots, dx_n = \int_I f(x) dx$$

bezeichnet. Die Menge aller auf  $I$  R-integrierbaren Funktionen wird mit  $R(I)$  bezeichnet.

**Bemerkung**

Die Definition des R-Integrals über Ober- und Untersummen ist möglich, aber mühsamer.

**Definition 10.2**

1. Eine Menge  $M \subset \mathbb{R}^n$  hat das  $n$ -dimensionale **Lebesgue-Maß** (L-Maß) Null, wenn zu jedem  $\varepsilon > 0$  höchstens abzählbar viele Intervalle  $I_j \subset \mathbb{R}^n$  existieren, sodass gilt:  $M \subset \bigcup I_j$  (d.h. die  $I_j$  bilden eine Überdeckung von  $M$ ) und  $\sum_j |I_j| < \varepsilon$ .  $M$  heißt **Nullmenge**.
2. Sei  $E \subset \mathbb{R}^n$  beliebig. Man sagt, eine Eigenschaft  $P$  gilt **fast überall** in  $E$ , wenn die Menge der  $x \in E$ , für die  $P$  nicht gilt, eine Nullmenge ist.

**Bemerkung**

1. „fast überall“ (f.ü.) ist jetzt anders als beim eindimensionalen R-Integral definiert.
2. Im maßtheoretischen Sinne sind Nullmengen „kleine Mengen“.
3. Im Sinne der Definition 10.2.2 bedeutet „ $f$  ist in  $I$  überall stetig“, dass es eine Nullmenge  $M \subset I$  gibt, sodass  $f$  auf  $I \setminus M$  stetig ist. **Vorsicht:** Wenn  $I$  ein Intervall und  $M \subset I$  eine Nullmenge ist, dann muss dazu keineswegs eine Funktion  $f$  existieren, die auf  $I \setminus M$  stetig und auf  $M$  unstetig ist.

**Beispiel 10.1** Alle endlichen und alle abzählbaren Teilmengen von  $\mathbb{R}^n$  sind Nullmengen.

Sei  $\{x_n \in \mathbb{R}^n : n \in \mathbb{N}\}$  die abzählbare Menge und  $\varepsilon > 0$  vorgegeben. Wähle für jedes  $x_n$  ein Intervall  $I_n$  mit  $|I_n| < \frac{\varepsilon}{2^n}$ .

$$\{x_n : n \in \mathbb{N}\} \subset \bigcup_j I_j \quad \text{und} \quad \sum_j |I_j| < \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^j} = \varepsilon \cdot \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^j} = \varepsilon$$

**Beispiel 10.2** Natürlich gibt es viele überabzählbare Nullmengen.

Ein Teilstück der  $x$ -Achse im  $\mathbb{R}^2$ ,  $[a, b] \times \{0\}$  hat das zweidimensionale Lebesgue-Maß Null, jedoch nicht das eindimensionale. Sei  $I = [a, b] \times [-\delta, \delta] \supset [a, b]$ . Der Inhalt ist  $|I| = 2\delta(b-a) < \varepsilon$  für  $\delta < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$ . Auch die  $x$ -Achse als Teilmenge des  $\mathbb{R}^n$  hat das L-Maß Null. Es gibt auch überabzählbare Nullmengen im  $\mathbb{R}^1$ .

**Beispiel 10.3** Graphen von Funktionen

Sei  $I \subset \mathbb{R}^{n-1}$  ein kompaktes Intervall und  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  stetig. Dann ist der Graph  $G(f) \subset \mathbb{R}^n$  eine Nullmenge.

**Satz 10.3** Kriterium von Lebesgue

$f$  ist auf  $I$  genau dann R-integrierbar, wenn  $f$  beschränkt und auf  $I$  fast überall stetig ist.

**Beweis**

Dieser Beweis ist sehr länglich. Sie finden ihn auf der Webseite von Prof. Timmermann. ■

Damit sind alle stetigen Funktionen sowie beschränkte Funktionen mit nur abzählbar vielen Unstetigkeiten Riemann-integrierbar.

Wie geht man von Intervallen zu allgemeinen Teilmengen des  $\mathbb{R}^n$  als Integrationsbereichen über? Sei  $B \subset \mathbb{R}^n$  beschränkt, also existiert ein Intervall  $I$  mit  $B \subset I$ . Sei  $f$  auf  $B$  definiert. Wir setzen  $f$  auf  $I$  durch  $f(x) = 0$  für  $x \in I \setminus B$  fort und definieren mit der charakteristischen Funktion  $\chi_B$  des Intervalls  $B$ :

$$\int_B f(x) dx := \int_I (f \cdot \chi_B)(x) dx \quad \text{mit} \quad (f \cdot \chi_B)(x) = \begin{cases} f(x) & x \in B \\ 0 & x \in I \setminus B \end{cases}$$

$f$  und  $\chi_B$  müssten also fast überall auf  $I$  stetig sein.  $f$  sei auf  $B$  fast überall stetig. Beim Übergang zu  $f \cdot \chi_B$  können genau am Rand  $\partial B$  von  $B$  neue Unstetigkeitsstellen dazukommen. Das dürfen nicht zu viele sein! Daher ist folgende Definition plausibel.

**Definition 10.4**

Eine Menge  $B \subset \mathbb{R}^n$  heißt **zulässig**, wenn  $B$  beschränkt ist und der Rand  $\partial B$  eine Nullmenge des  $\mathbb{R}^n$  ist.

**Beispiel 10.4**

1. Alle gängigen Figuren im  $\mathbb{R}^2$  und  $\mathbb{R}^3$  (Kreise und Kugeln, Quadrate und Quader u.s.w.) sind zulässig.
2. Eine wichtige Klasse zulässiger Mengen ist folgende: Seien  $I \subset \mathbb{R}^{n-1}$  ein Intervall und  $f_1, f_2 : I \rightarrow \mathbb{R}$  stetig. Dann ist die Menge  $B = \{(x, z) : x \in I, f_1(x) \leq z \leq f_2(x)\}$  zulässig.
3.  $B = \{(x, y) : 0 \leq x, y \leq 1 \wedge x, y \in \mathbb{Q}\}$ , die Menge der rationalen Punkte im Einheitskreis ist nicht zulässig, denn der Rand von  $B$  (die Menge aller Punkte, für die in jeder Umgebung sowohl Punkte von  $B$  als auch aus  $\mathbb{R}^2 \setminus B$  liegen) ist das Einheitsquadrat.

**Lemma 10.5**

Die Vereinigung, der Durchschnitt und die Differenz endlich vieler zulässiger Mengen sind wieder zulässig.

Wir vereinbaren folgende Schreibweise: Sei  $B \subset \mathbb{R}^n$  eine beliebige Menge mit der charakteristischen Funktion  $\chi_B$ .  $f$  sei auf  $B$  definiert. Dann setzen wir

$$(f \cdot \chi_B)(x) = f(x) \cdot \chi_B(x) = \begin{cases} f(x) & x \in B \\ 0 & x \notin B \end{cases}$$

$f \cdot \chi_B$  steht also für diejenige Funktion, die  $f$  auf ganz  $\mathbb{R}^n$  fortsetzt, indem man außerhalb von  $B$  die Funktion zu Null macht.

**Definition 10.6**

Sei  $B \subset \mathbb{R}^n$  beliebig und  $f$  auf  $B$  definiert. Unter dem R-Integral von  $f$  über  $B$  versteht man

$$\int_B f(x) dx := \int_I (f \cdot \chi_B)(x) dx,$$

falls das rechtsstehende Integral existiert.  $I$  ist ein beliebiges Intervall, das  $B$  enthält.

**Satz 10.7**

Sei  $B \subset \mathbb{R}^n$  zulässig und  $f : B \rightarrow \mathbb{R}$ .  $f$  ist auf  $B$  genau dann R-integrierbar, wenn  $f$  auf  $B$  beschränkt und fast überall stetig ist.

**Beweis**

$f \cdot \chi_B$  hat im Vergleich zu  $B$  höchstens auf dem Rand  $\partial B$  zusätzliche Unstetigkeiten. Da  $\partial B$  eine Nullmenge ist, ist  $f \cdot \chi_B$  auf jedem Intervall  $I \supset B$  fast überall stetig (da  $f$  auf  $B$  fast überall stetig war). Daraus folgt die R-Integrierbarkeit mit dem Lebesgue-Kriterium.

Andersherum folgt aus der R-Integrierbarkeit von  $f$  auf  $B$  die von  $f \cdot \chi_B$  auf  $I \supset B$ . Nach dem Lebesgue-Kriterium ist  $f$  auf  $B$  beschränkt und  $f \cdot \chi_B$  ist fast überall stetig auf  $I$ , somit auch  $f$  auf  $B$ . ■

**Definition 10.8**

## Jordan-Inhalt

1. Sei  $B \subset \mathbb{R}^n$  zulässig. Dann wird der **Jordan-Inhalt**  $|B|$  von  $B$  definiert durch  $|B| := \int_B \chi_B(x) dx$ .
2. Eine Menge  $B \subset \mathbb{R}^n$  hat den Jordan-Inhalt Null (d.h.  $B$  ist eine **Jordan-Nullmenge**), wenn es zu jedem  $\varepsilon > 0$  endlich viele Intervalle  $I_1, \dots, I_k$  gibt mit

$$B \subset \bigcup_{j=1}^k I_j \quad \text{und} \quad \sum_{j=1}^k |I_j| < \varepsilon$$

**10.2 Allgemeine Eigenschaften des Integrals**

1.  $R(B)$  ist ein Vektorraum (sogar eine Algebra) und es gilt

$$\begin{aligned} \int_B (\lambda f + \mu g)(x) dx &= \lambda \int_B f(x) dx + \mu \int_B g(x) dx \\ f \geq 0 &\Rightarrow \int_B f(x) dx \geq 0 \end{aligned}$$

Das heißt: Die Abbildung  $f \mapsto \int_B f(x) dx$  ist ein positives lineares Funktional auf  $R(B)$ .

- 2.1. Aus der Positivität folgt:

$$f, g \in R(B) \wedge f \leq g \Rightarrow \int_B f(x) dx \leq \int_B g(x) dx$$

- 2.2. Für  $m \leq f \leq M$  und  $g \geq 0$  auf  $B$  ist

$$\begin{aligned} m \int_B 1 dx &\leq \int_B f(x) dx \leq M \int_B 1 dx \\ m \cdot |B| &\leq \int_B f(x) dx \leq M \cdot |B| \\ m \int_B g(x) dx &\leq \int_B f(x) g(x) dx \leq M \int_B g(x) dx \end{aligned}$$

Hieraus erhält man einen Mittelwertsatz: Sei  $m := \inf_{x \in B} f(x)$  und  $M := \sup_{x \in B} f(x)$ . Dann gilt:

$$\exists \alpha \in [m, M] : \int_B f(x) dx = \alpha \cdot |B|$$



Wenn  $f$  auf  $B$  stetig und  $B$  zusammenhängend ist, dann existiert ein  $x_0 \in B$  mit  $f(x_0) = \alpha$ , also

$$\int_B f(x) dx = f(x_0) \cdot |B|$$

3.1. Verschwindet  $f \in R(B)$  fast überall in  $B$ , so ist  $\int_B f(x) dx = 0$ . Zum Beweis: Sei  $I \supset B$ . Betrachte zum Integral von  $f \cdot \chi_B$  über  $I$  eine beliebige Zwischensumme, d.h.  $I = \bigcup I_j$  und  $\xi_j \in I_j$  mit  $f(\xi_j) = 0$ . (Solche  $\xi_j$  existieren in jedem  $I_j$ , denn  $f \cdot \chi_B$  ist fast überall in  $I$  stetig, also auch in jedem  $I_j$ , denn  $|I_j| > 0$ .) Also ist jede dieser Zwischensummen Null, also auch der Limes für jede Zerlegungsnullfolge.

3.2. Sind  $f, g \in R(B)$  fast überall in  $B$  gleich, so ist  $\int_B f(x) dx = \int_B g(x) dx$ . Zum Beweis wende 3.1. auf die fast überall verschwindende Funktion  $f - g$  an.

4.1. Additivität bzgl.  $B$ :  $B_1$  und  $B_2$  seien zulässig und  $f$  auf  $B_1 \cup B_2$  definiert. Dann gilt:

$$\int_{B_1 \cup B_2} f dx \text{ und } \int_{B_1 \cap B_2} f dx \text{ existieren} \Leftrightarrow \int_{B_1} f dx \text{ und } \int_{B_2} f dx \text{ existieren}$$

4.2. Für  $|B_1 \cap B_2| = 0$  ist  $\int_{B_1 \cup B_2} f dx = \int_{B_1} f dx + \int_{B_2} f dx$ .

Wenn  $A$  eine zulässige Jordan-Nullmenge ist (z.B.  $A = B_1 \cap B_2$ ), dann ist  $\int_A f dx = 0$ ; damit folgt

$$\int_{B_1 \cup B_2} f dx = \int_{B_1} f dx + \int_{B_2} f dx - \int_{B_1 \cap B_2} f dx$$

5. Falls  $\int_B f dx = 0$  und  $f \leq 0$  auf  $I \supset B$  (oder  $B$ ) ist, dann ist fast überall  $f = 0$ . Zum Beweis: Es genügt zu zeigen, dass  $f(a) = 0$  für jedes  $a \in I$ , in dem  $f$  stetig ist (denn dann ist fast überall  $f = 0$ ). Sei  $f(a) \geq 0$ , dann existiert eine Umgebung  $U(a)$  (o.E.d.A. ist diese so klein, dass sie ganz in  $I$  liegt) mit  $f(x) \geq c > 0 \forall x \in U(a)$  und es folgt für das Integral:

$$\int_I f dx = \int_{I \setminus U(a)} f dx + \int_{U(a)} f dx \geq \int_{U(a)} f dx \geq c \cdot |U(a)| > 0$$

Dies ist ein Widerspruch, also ist  $f$  an allen  $a$  mit  $f(a) \geq 0$  unstetig und somit an allen Nullstellen stetig.

## 10.3 Satz von Fubini

Dieser Satz ermöglicht die Berechnung von Integralen letztlich durch Zurückführung auf iterierte eindimensionale Integrale. Zum Satz gelangen wir durch eine Plausibilitätsbetrachtung für den  $\mathbb{R}^2$ .

Sei  $I = [a, b] \times [c, d] = X \times Y$ . Betrachte die Zerlegung  $\mathcal{Z} := \mathcal{Z}_x \times \mathcal{Z}_y$  wie bei der Definition des R-Integrals:

$$\mathcal{Z} = \{J_i \times K_l : J_i \in \mathcal{Z}_x, K_l \in \mathcal{Z}_y\}$$

Mit den Zwischenwerten  $(x_i, y_l) = z_{il} \in J_i \times K_l$  kann die Zwischensumme formuliert werden:

$$\sigma = \sum_{i,l} f(x_i, y_l) \cdot |J_i \times K_l| = \sum_{i,l} f(x_i, y_l) \cdot |J_i| \cdot |K_l| = \sum_i \left[ \sum_l f(x_i, y_l) \cdot |K_l| \right] \cdot |J_i|$$

$\Rightarrow$  In  $[\dots]$  steht die Zwischensumme zum Integral  $\int f(x, y) dy =: F(x)$ .

$\Rightarrow$  Die äußere Summe entspricht der Zwischensumme zu  $\int_X F(x) dx$ .

Summiert man zuerst über  $i$ , erhält man eine analoge Interpretation mit vertauschten freien Variablen  $(x, y)$ .

### Theorem 10.9 Satz von Fubini

Sei  $I = J \times K$  ein Intervall in  $\mathbb{R}^n$  mit den Intervallen  $J \subset \mathbb{R}^k$  und  $K \subset \mathbb{R}^l$  (also ist  $k + l = n$ ). Für eine stetige Funktion  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  gilt

$$\begin{aligned} \int_{J \times K} f(x, y) \underbrace{dx dy}_{=d(x, y)} &\equiv \int_{J \times K} f(x_1, \dots, x_k, y_1, \dots, y_l) dx_1, \dots, dx_k dy_1, \dots, dy_l \\ &= \int_J \left( \int_K f(x, y) dy \right) dx = \int_K \left( \int_J f(x, y) dx \right) dy \end{aligned} \quad (1)$$

Das soll bedeuten: Die unteren **iterierten Integrale** existieren und alle Integrale sind gleich.

#### Bemerkung

Vorsicht bei unstetigen Funktionen!

Dieser Satz gilt allgemein für integrierbare Funktionen, nicht nur für stetige. Dann muss man sich aber davon überzeugen, dass  $f(\cdot, y)$  und  $f(x, \cdot)$  integrierbar sind. Das braucht man, um  $F(x)$  bzw.  $F(y)$  überhaupt definieren zu können. Wenn  $f$  nur integrierbar ist, muss aus der Existenz der beiden iterierten Integrale nicht folgen, dass  $f$  insgesamt integrierbar ist.

Für praktische Rechnungen wird der Satz meist mehrfach angewendet, sodass man nur noch eindimensionale Integrale hat: Sei  $I = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : a_i \leq x_i \leq b_i\}$ . Dann ist

$$\int_I f(x) dx = \int_{a_1}^{b_1} \left[ \int_{a_2}^{b_2} \dots \left[ \int_{a_n}^{b_n} f(x_1, \dots, x_n) dx_n \right] dx_{n-1} \dots \right] dx_1$$

Natürlich kann man auch jede beliebige andere Reihenfolge nehmen, wenn dies die Berechnung vereinfacht.

### Beispiel 10.5 Anwendung des Satzes von Fubini

Gesucht ist das Integral der Funktion  $f(x, y, z) = z \cdot \sin(x + y)$  auf dem Intervall  $I = [0, \pi] \times [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \times [0, 1]$ .

$$\begin{aligned} \int_I f(x, y, z) dx dy dz &= \int_0^1 \left[ \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left( \int_0^\pi z \sin(x + y) dx \right) dy \right] dz = \int_0^1 \left[ \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} -z \cos(x + y) \Big|_0^\pi dy \right] dz \\ &= \int_0^1 \left[ \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} -z \underbrace{(\cos(\pi + y) - \cos y)}_{=-2 \cos y} dy \right] dz = \int_0^1 \left[ 2z \cdot \sin y \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \right] dz = \int_0^1 4z dz = 2 \end{aligned}$$

Eine anspruchsvollere Variante des Satzes von Fubini ist die folgende: Sei  $D \subset \mathbb{R}^{n-1}$  beschränkt (zum Beispiel ein Intervall) und  $\varphi_1, \varphi_2 : D \rightarrow \mathbb{R}$  stetig. Betrachte  $B := \{(x, y) : x \in D, \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)\}$  und eine Funktion  $f \in R(B)$ . Dann gilt:

$$\int_B f(x, y) dx dy = \int_D \left( \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy \right) dx$$

**Beweis**

Wir definieren einen Schnitt  $B_x$  von  $B$  über  $x$  als

$$B_x := \begin{cases} \{y \in \mathbb{R} : \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)\} & x \in D \\ \emptyset & x \notin D \end{cases}$$

Es ist  $\chi_B(x, y) = \chi_D(x) \cdot \chi_{B_x}(y)$ . Seien  $I_x$  und  $I_y$  Intervalle mit  $I_x \supset D$  und  $I_y \supset B_x \forall x \in D$ , also ist  $B \subset I_x \times I_y =: I$ . Nach Definition ist

$$\begin{aligned} \int_B f(x, y) dx dy &= \int_I (f \cdot \chi_B)(x, y) dx dy = \int_{I_x} \left( \int_{I_y} f(x, y) \chi_{B_x}(y) dy \right) \chi_D(x) dx \\ &= \int_{I_x} \left( \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy \right) \chi_D(x) dx = \int_D \left( \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy \right) dx \end{aligned}$$

■

**Beispiel 10.6**

$B \subset \mathbb{R}^2$  sei der Kreis um den Ursprung mit dem Radius  $R$ . Suche das Integral über  $y^2 \sqrt{R^2 - x^2}$  in diesem Bereich.  $B$  wird durch  $\varphi_1$  und  $\varphi_2$  mit  $\varphi_1(x) = \sqrt{R^2 - x^2}$  und  $\varphi_2(x) = -\sqrt{R^2 - x^2}$  begrenzt. Beachte, dass der Integrand in  $x$  und  $y$  gerade ist. (\*)

$$\begin{aligned} \int_B y^2 \sqrt{R^2 - x^2} dx dy &= \int_{-R}^R \left[ \int_{-\sqrt{R^2 - x^2}}^{\sqrt{R^2 - x^2}} y^2 \sqrt{R^2 - x^2} dy \right] dx \stackrel{(*)}{=} 4 \int_0^R \left[ \int_0^{\sqrt{R^2 - x^2}} y^2 \sqrt{R^2 - x^2} dy \right] dx \\ &= 4 \int_0^R \sqrt{R^2 - x^2} \left[ \frac{y^3}{3} \right]_0^{\sqrt{R^2 - x^2}} dx = \frac{4}{3} \int_0^R (R^2 - x^2)^2 dx = \dots = \frac{32}{45} R^5 \end{aligned}$$

Will man die Integrationsreihenfolge ändern, ist meist eine Skizze hilfreich, um die stetigen Randfunktionen zu finden. Eventuell muss das Integral in Teilintegrale zerlegt werden. Zum Beispiels ändere man in

$$\int_0^1 \left[ \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{1-x} f(x, y) dy \right] dx$$

die Integrationsreihenfolge. Dazu muss das Integral in zwei Teilintervalle ( $y \leq 0$  und  $y \geq 0$ ) zerlegt werden, weil  $x$  von 0 bis zu zwei verschiedenen Graphen läuft. Aus  $y = -\sqrt{1-x^2}$  wird  $x = \sqrt{1-y^2}$  und aus  $y = 1-x$  wird  $x = 1-y$ .

$$\int_0^1 \left[ \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{1-x} f(x, y) dy \right] dx = \int_{-1}^0 \left[ \int_0^{\sqrt{1-y^2}} f(x, y) dx \right] dy + \int_0^1 \left[ \int_0^{1-y} f(x, y) dx \right] dy$$

**10.4 Koordinatentransformationen in Mehrfachintegralen**

Seien  $B_x \subset \mathbb{R}^n$  und  $B_y \subset \mathbb{R}^n$  und  $\Phi : B_y \rightarrow B_x$  bijektiv. Es sei  $f$  auf  $B_x$  integrierbar.  $f$  wird mittels  $\Phi$  zu  $B_y$  „übertragen“:  $g := f \circ \Phi$  oder  $g(x) = f(\Phi(y)) \forall y \in B_y$ . Wie muss eine Fkt.  $F$  bzw.  $F(y)$  aussehen, damit gilt:

$$\int_{B_x} f(x) dx = \int_{B_y} F(y) dy$$

$F$  soll auch  $g$  enthalten, also ist  $F(y) = g(y)$  mal einen unbekannten Term. Dieser darf aber nur von  $\Phi$  abhängen, damit die obige Gleichung für alle Funktionen  $f$  gilt. Für die heuristische Betrachtung suchen wir den einfachsten Fall:  $\Phi$  sei sogar ein Diffeomorphismus und  $B_y$  ein Intervall  $I$  mit der Zerlegung  $I = \bigcup_j I_j$ :

$$B_x = \bigcup_j \Phi(I_j) \Rightarrow \int_{B_x} f(x) dx = \sum_j \int_{\Phi(I_j)} f(x) dx$$

Für stetige  $f$  existieren nach dem ersten Mittelwertsatz der Integralrechnung  $\xi_j = \Phi(\eta_j) \in \Phi(I_j)$  mit

$$\int_{\Phi(I_j)} f(x) dx = f(\xi_j) \cdot |\Phi(I_j)| = f(\Phi(\eta_j)) \cdot |\Phi(I_j)|$$

Das einzige Problem ist: Wie groß ist  $|\Phi(I_j)|$  im Vergleich um  $|I_j|$ ? Sei allgemein  $A$  eine jordanmessbare Menge, dann ist auch  $\Phi(A)$  jordanmessbar. Um eine Idee zu bekommen: Sei  $\Phi$  eine lineare Abbildung  $L$  und  $A$  sei ein Intervall  $I$ . Dann ist  $L(I)$  ein Parallelepipet. Man kann zeigen:

$$|L(I)| = (\det L) \cdot |I| = |\det \Phi'| \cdot |I|$$

Letzteres folgt aus der Gleichheit von Abbildung und Ableitung bei einer linearen Abbildung. Um die Klasse der Abbildung  $\Phi$  für die Koordinatentransformation näher zu bestimmen, benötigen wir den folgenden Begriff.

#### Definition 10.10 Lipschitzstetigkeit

Eine Abbildung  $\Psi : D \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^k$  heißt in  $D$  **lipschitzstetig**, wenn es eine Konstante  $L > 0$ , die sogenannte **Lipschitzkonstante**, gibt mit  $\|\Psi(y_1) - \Psi(y_2)\|_{\mathbb{R}^k} \leq L \cdot \|y_1 - y_2\|_{\mathbb{R}^m} \quad \forall y_1, y_2 \in D$ .

#### Bemerkung

1. Ist  $\Phi$  stetig differenzierbar, so ist  $\Phi$  automatisch auf jeder kompakten Teilmenge von  $B_y$  lipschitzstetig.
2. Offenbar folgt aus Lipschitzstetigkeit auch Stetigkeit, das heißt, die Lipschitzstetigkeit ist stärker als die normale Stetigkeit.

#### Beweis

Für  $y_n \rightarrow y \in \mathbb{R}^m$  geht  $\|y - y_n\|_{\mathbb{R}^m} \rightarrow 0$  und somit auch  $\|\Psi(y) - \Psi(y_n)\|_{\mathbb{R}^k} \leq L \cdot \|y - y_n\|_{\mathbb{R}^m} \rightarrow 0$ . Also konvergiert  $\Psi(y_n) \rightarrow \Psi(y)$ , also ist  $\Psi$  stetig. ■

**Theorem 10.11**

## Koordinatentransformation in Mehrfachintegralen

Seien  $B_y \subset \mathbb{R}^n$  offen und jordanmessbar und  $\Phi : B_y \rightarrow B_x \subset \mathbb{R}^n$  stetig differenzierbar, bijektiv und lipschitzstetig. Dann gelten die folgenden Aussagen:

1.  $B_x = \Phi(B_y)$  ist jordanmessbar.
2.  $f$  und  $F := (f \circ \Phi) \cdot |\det \Phi'|$  sind auf  $B_x$  bzw.  $B_y$  gleichzeitig riemannintegrierbar. Im Falle der Integrierbarkeit ist

$$\int_{B_x} f(x) dx = \int_{B_y} f(\Phi(y)) \cdot |\det \Phi'(y)| dy$$

Zusatz:

- (a) Jede jordanmessbare Fläche  $B \subset \overline{B_y}$  besitzt ein jordanmessbares  $C = \Phi(B)$  mit

$$|C| = |\Phi(B)| = \int_B |\det \Phi'(y)| dy$$

- (b) Die obigen Bedingungen für  $\Phi$  dürfen auf einer *Jordannullmenge* verletzt werden.

## Bemerkung

Der Zusatz ist für Anwendungen von fundamentalen Bedeutung, wenn man die üblichen Koordinatentransformationen, zum Beispiel Polar- oder Kugelkoordinaten, benutzen will.

**Beispiele für Anwendungen**

1. *Ebene Polarkoordinaten:* Betrachte den  $\mathbb{R}^2$  und  $\Phi(r, \varphi) = (r \cos \varphi, r \sin \varphi)^T$ .  $\Phi$  bildet den Streifen  $B := \{(r, \varphi) : r > 0, 0 < \varphi < 2\pi\}$  eineindeutig auf  $C := \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, 0) : x \geq 0\}$  ab. Natürlich schreibt man einfacher  $x = r \cos \varphi$  und  $y = r \sin \varphi$ .

$$\det \Phi'(r, \varphi) = \begin{vmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi \\ \sin \varphi & r \cos \varphi \end{vmatrix} = r > 0$$

$\Phi$  ist sogar ein Diffeomorphismus, ist also auf jeder kompakten Teilmenge von  $B$  lipschitzstetig.

*Anwendung:* Betrachte  $A := \{(x, y) : 0 \leq \alpha \leq \varphi \leq \beta < 2\pi, 0 \leq r \leq h(\varphi)\}$ , hierbei ist  $h \geq 0$  stetig. Gesucht ist der Flächeninhalt von  $\Phi(A)$ . Es ergibt sich die **Leibniz'sche Sektorformel**:

$$|\Phi(A)| = \int_{\Phi(A)} dx dy = \int_{\alpha}^{\beta} \left( \int_0^{h(\varphi)} \underbrace{\det \Phi'(r, \varphi)}_{=r} dr \right) d\varphi = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} h^2(\varphi) d\varphi$$

2. *Räumliche Polar- bzw. Kugelkoordinaten:* Betrachte den  $\mathbb{R}^3$  und

$$\Phi(r, \varphi, \vartheta) = (x, y, z)^T = (r \cos \varphi \sin \vartheta, r \sin \varphi \sin \vartheta, r \cos \vartheta)^T \quad \text{mit} \quad r \geq 0, 0 \leq \varphi < 2\pi, 0 \leq \vartheta < \pi$$

Es ist  $\det \Phi'(r, \varphi, \vartheta) = r^2 \sin \vartheta$ . Damit kann man sehr leicht etwa das Volumen einer Kugel berechnen.

# 11 Integration auf Untermannigfaltigkeiten des $\mathbb{R}^n$

Bei Kurvenintegralen konnte man über Funktionen oder über Vektorfelder integrieren. Im ersten Falle war die Orientierung nicht von Bedeutung, im zweiten Falle schon.

Wir wollen nun die Kenntnisse zu Kurvenintegralen auf  $k$ -dimensionale Untermannigfaltigkeiten des  $\mathbb{R}^n$  erweitern und insbesondere den  $k$ -dimensionalen Inhalt einer Untermannigfaltigkeit bestimmen. Wodurch werden in Analogie zu Kurven die Vektorfelder ersetzt? Was versteht man unter der Orientierung einer Untermannigfaltigkeit? Bei Untermannigfaltigkeiten hat man zudem zu beachten, dass man im Allgemeinen nur einen Satz von Karten, also *lokaler* Parameterdarstellungen hat. Wie gelangt man vom Lokalen zum Globalen?

Natürlich braucht man auch Integralsätze. Die zentrale Frage ist die nach dem Zusammenhang zwischen einem Integral über eine Untermannigfaltigkeit und dem Integral über den Rand der Untermannigfaltigkeit. Hier kommt wiederum die Frage auf, wie dieser Rand aussieht.

## 11.1 Integration skalarer Funktionen über Untermannigfaltigkeiten

Zunächst führen wir im  $\mathbb{R}^3$  eine Plausibilitätsbetrachtung durch. Sei  $M \subset \mathbb{R}^3$  eine zweidimensionale Untermannigfaltigkeit, zu deren Beschreibung eine Parameterdarstellung  $\Phi : T \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow M$  ( $\Phi(T) = M$ ) genügen möge.  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  sei stetig und das Integral von  $f$  über  $M$  gesucht. In Anlehnung an die Definition des Riemannintegrals würde man das Intervall  $T$  in Teilintervalle  $T_i$  zerlegen, in den zugehörigen  $M_i := \Phi(T_i)$  Zwischenpunkte  $\xi^i$  festlegen und versuchen, eine Zwischensumme aufzuschreiben:

$$\sigma = \sum_i f(\xi^i) |M_i|$$

Das einzige Problem ist: Was ist  $|M_i|$ ? Die Idee ist,  $M_i$  auf die Tangentialebene an  $M$  im Punkt  $\xi^i$  zu projizieren; es entsteht ein ebenes Flächenstück, das man gut zu messen hofft.

Genauer: Sei  $\xi = \Phi(t) = \Phi(t_1, t_2) \in M$ . Die Tangentialebene  $T$  an  $M$  in  $\xi$  wird von  $\Phi_{t_1}(t)$  und  $\Phi_{t_2}(t)$  aufgespannt. Betrachte nun ein Rechteck  $Q \in T$  mit den Seitenlängen  $\Delta t_1$  und  $\Delta t_2$ . Das Bild dieser Menge sei  $M' = \Phi(Q) \subset M$ .  $|M'|$  kann nun durch den Inhalt des von  $\Delta t_1 \Phi_{t_1}(t)$  und  $\Delta t_2 \Phi_{t_2}(t)$  aufgespannten Stückes der Tangentialebene approximiert werden:

$$|M'| = \|\Delta t_1 \Phi_{t_1}(t) \times \Delta t_2 \Phi_{t_2}(t)\| = \Delta t_1 \Delta t_2 \|\Phi_{t_1}(t) \times \Phi_{t_2}(t)\|$$

Mit diesen Erkenntnissen definieren wir *vorläufig* den Inhalt eines zweidimensionalen Flächenstückes im  $\mathbb{R}^3$  und das Integral einer Funktion über ein solches Flächenstück.

**Definition 11.1**

Sei  $T \subset \mathbb{R}^2$  offen und  $\Phi : T \rightarrow \Phi(T) =: M \subset \mathbb{R}^3$  die Parameterdarstellung einer zweidimensionalen Untermannigfaltigkeit. Weiterhin sei  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  stetig und beschränkt.

1. Unter dem **Inhalt** von  $M$  versteht man

$$|M| := \int_T \|\Phi_{t_1}(t) \times \Phi_{t_2}(t)\| dt_1 dt_2 \quad (11.1)$$

Man nennt  $dS := \|\Phi_{t_1}(t) \times \Phi_{t_2}(t)\| dt_1 dt_2 = dS(x)$  das zweidimensionale **Flächenelement** bzgl.  $\Phi$ .

2. Man setzt

$$\int_M f dS := \int_M f(x) dS(x) := \int_T f(\Phi(t)) \|\Phi_{t_1}(t) \times \Phi_{t_2}(t)\| dt_1 dt_2 \quad (11.2)$$

**Bemerkung**

Um die in (11.1) und (11.2) gegebenen Definitionen zu rechtfertigen, muss man zeigen, dass sie von der Parameterdarstellung unabhängig und zu den bekannten Inhalten einfacher Mengen kongruent sind. Außerdem müssen weitere vernünftige Forderungen an den Inhalt, zum Beispiel die Bewegungsinvarianz, erfüllt sein.

**Beispiel 11.1**

## Oberfläche der Einheitskugel

Sei  $S_1 := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ . Aus  $S_1$  entfernen wir die Nullstellenmenge

$$A := \{(x, 0, z) \in S_1 : x \geq 0\}$$

Für  $S_1 \setminus A$  hat man die Parameterdarstellung  $\Phi = (\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3) = (x, y, z)$  mit  $x = \cos \varphi \sin \vartheta$ ,  $y = \sin \varphi \sin \vartheta$  und  $z = \cos \vartheta$ . ( $\varphi$  und  $\vartheta$  sind also die Äquivalente zu  $t_1$  und  $t_2$ .) Die Ableitungen sind

$$\begin{aligned} \Phi_\varphi &= (-\sin \varphi \sin \vartheta, \cos \varphi \sin \vartheta, 0) \\ \Phi_\vartheta &= (\cos \varphi \cos \vartheta, \sin \varphi \cos \vartheta, -\sin \vartheta) \end{aligned}$$

Nach einiger Rechnung erhält man  $\|\Phi_\varphi \times \Phi_\vartheta\| = \sin \vartheta$  (positiv im gewählten Parameterbereich) und für den Inhalt

$$|S_1 \setminus A| = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sin \vartheta d\vartheta = 4\pi$$

$A$  ist eine Nullmenge und kann vernachlässigt werden, somit ist  $|S_1| = 4\pi$ .

Die Definition 11.1 kann so nicht auf  $k$ -dimensionale Untermannigfaltigkeiten des  $\mathbb{R}^n$  erweitert werden; das Vektorprodukt ist hier ungeeignet und für  $n \neq 3$  nicht definiert. Aus der Linearen Algebra, der Physik oder durch Nachrechnen weiß man aber

$$\|a \times b\|^2 = \langle a \times b, a \times b \rangle = \langle a, a \rangle \langle b, b \rangle - \langle a, b \rangle \langle b, a \rangle$$

Dies wenden wir auf  $a = \Phi_{t_1}$  und  $b = \Phi_{t_2}$  an:

$$\|\Phi_{t_1} \times \Phi_{t_2}\|^2 = \langle \Phi_{t_1}, \Phi_{t_1} \rangle \langle \Phi_{t_2}, \Phi_{t_2} \rangle - \langle \Phi_{t_1}, \Phi_{t_2} \rangle \langle \Phi_{t_2}, \Phi_{t_1} \rangle \stackrel{!}{=} \begin{vmatrix} \langle \Phi_{t_1}, \Phi_{t_1} \rangle & \langle \Phi_{t_1}, \Phi_{t_2} \rangle \\ \langle \Phi_{t_2}, \Phi_{t_1} \rangle & \langle \Phi_{t_2}, \Phi_{t_2} \rangle \end{vmatrix}$$

Die Matrix rechts heißt **Maßtensor**  $(g_{ij})$  mit  $g_{ij} = \langle \Phi_{t_i}, \Phi_{t_j} \rangle$ . Die Determinante wird meist mit  $g := \det(g_{ij})$  bezeichnet,  $(g_{ij})$  heißt auch **Gramsche Matrix** (zu  $\Phi'$ ) der Abbildung  $\Phi$ . In der Literatur

schreibt man auch  $(g_{ij}) = \gamma(\Phi')$ . Man rechnet nach, dass für Matrizen  $\mathbf{A}$  mit den Spalten  $a^i$  folgendes gilt:

$$\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A} = (\langle a^i, a^j \rangle)_{i,j}$$

Das heißt, für ein gegebenes  $\Phi$  ist

$$(g_{ij}(t)) = \Phi'^T(t) \cdot \Phi'(t) = \left( \left\langle \frac{\partial \Phi}{\partial t_i}, \frac{\partial \Phi}{\partial t_j} \right\rangle \right)_{i,j}$$

$$g(t) = \det(g_{ij})(t) = \det(\Phi'^T(t) \cdot \Phi'(t))$$

### Lemma 11.2

Sei  $A$  eine  $(n, k)$ -Matrix und  $B$  eine  $(k, k)$ -Matrix, dann gilt:

$$\sqrt{\det[(AB)^T \cdot (AB)]} = \sqrt{\det A^T A} \cdot |\det B|$$

### Beweis

$$\det[(AB)^T \cdot (AB)] = \det \underbrace{B^T}_{(k,k)} \underbrace{A^T A}_{(k,k)} \underbrace{B}_{(k,k)} = \underbrace{\det B^T}_{\det B} \cdot \det A^T A \cdot \det B = \det A^T A \cdot (\det B)^2$$

■

Nun soll das Integral einer Funktion über eine beliebige Mannigfaltigkeit definiert werden.

1. Fall: Die gesamte Mannigfaltigkeit kann durch *eine* Parameterdarstellung beschrieben werden.
2. Fall: Eine Parameterdarstellung reicht nicht.

### Wiederholung

Sei  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  (allgemein  $G \rightarrow \mathbb{R}$  mit offenem  $G \subset \mathbb{R}^n$ ). Unter dem **Träger**  $\text{supp } f$  versteht man die Menge  $\text{supp } f = \overline{\{x \in M : f(x) \neq 0\}}$ . Der Träger ist stets abgeschlossen.

### Beispiel 11.2

Sei  $[a, b]$  beliebig,  $[c, d] \subset [a, b]$  und  $f = \chi_{(c,d)}$ . Dann ist  $\text{supp } f = [c, d]$ .



**Definition 11.3**

Sei  $M \subset \mathbb{R}^n$  eine  $k$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit. Es liege einer der folgenden beiden Fälle vor:

1.  $M$  hat eine globale Parameterdarstellung  $\Phi : \mathbb{R}^k \supset T \rightarrow M$ .  $f$  sei auf  $M$ .
2.  $\Phi : T \rightarrow M$  sei eine lokale Parametrisierung.  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  habe einen kompakten Träger in  $\Phi(T)$  (d.h.  $\text{supp } f \subset \Phi(T)$  bzw.  $f \circ \Phi : T \rightarrow \mathbb{R}$  hat in  $T$  einen kompakten Träger).

Dann heißt  $f$  über  $M$  integrierbar, falls

$$f(\Phi(t)) \cdot \sqrt{g(t)} = f(\Phi(t)) \cdot \sqrt{\det \Phi'^T(t) \cdot \Phi'(t)} \quad (11.3)$$

über  $T$  integrierbar ist. In diesem Falle setzt man

$$\int_M f(x) \, dS(x) := \int_T f(\Phi(t)) \cdot \sqrt{g(t)} \, dt \quad (11.4)$$

Im Fall 1 definiert man den  $k$ -dimensionalen **Inhalt** von  $M$  mit

$$|M| := \int_T \sqrt{g(t)} \, dt$$

$dS(x)$  heißt **Oberflächenelement** und hat bezüglich einer Parametrisierung  $\Phi$  die Form

$$dS(x) = \sqrt{g(t)} dt = \sqrt{\det \Phi'^T(t) \cdot \Phi'(t)} \, dt$$

## Bemerkung

1. In jedem Fall muss die Unabhängigkeit von der Parameterdarstellung gezeigt werden.
2. Obige Definition kann leicht in folgender Hinsicht verallgemeinert werden:  $\Phi : T \rightarrow M$  sei eine lokale Parameterdarstellung mit  $\Phi(T) = V \subset M$ .  $f$  sei auf  $V$  stetig. Dann definiert man:

$$\int_V f(x) dS(x) := \int_T f(\Phi(t)) \cdot \sqrt{g(t)} \, dt$$

**Satz 11.4**

Sei  $M \subset \mathbb{R}^n$  eine  $k$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit mit den Parameterdarstellungen  $\Phi_j : T_j \rightarrow M$  (bzw.  $\Phi_j(T_j) = V \subset M$ ) für  $j = 1, 2$  (z.B. lokale Parameterdarstellungen).  $f$  sei auf  $M$  stetig (im Falle der lokalen Parametrisierung sei  $\text{supp } f \subset V$ ). Dann gilt:

$$\int_{T_1} f(\Phi_1(t)) \cdot \sqrt{g^{(1)}(t)} \, dt = \int_{T_2} f(\Phi_2(t)) \cdot \sqrt{g^{(2)}(t)} \, dt$$

Dabei ist  $g^{(j)}$  die zu  $\Phi_j$  gehörende Definition des metrischen Tensors.

**Beweis**

In Satz 9.21 haben wir (bei Kartenwechseln) festgestellt, dass  $h := \Phi_2^{-1} \circ \Phi_1 : T_1 \rightarrow T_2$  ein Diffeomorphismus ist. Wir benutzen letztlich die Transformationsformel für Mehrfachintegrale.

$$\begin{aligned} \Phi_1 &= \Phi_2 \circ h & \Phi_1(t) &= \Phi_2(h(t)) \\ \Phi_1' &= \Phi_2' \cdot h' & \Phi_1'(t) &= \Phi_2'(h(t)) \cdot h'(t) \end{aligned}$$

Wir wenden das Lemma 11.2 für  $A := \Phi'_2 : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$  und  $B := h' : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k$  an und erhalten

$$\sqrt{g^{(1)}(t)} = \sqrt{\det \Phi_1'^T \cdot \Phi_1'} = \sqrt{\det \Phi_2'^T \cdot \Phi_2' \cdot |\det h'|} \quad \text{mit} \quad \Phi_1'^T \cdot \Phi_1' = (\Phi_2'^T \cdot h') \cdot (\Phi_2' \cdot h')$$

Parametertransformation:  $s := h(t)$  mit  $h(T_1) = T_2$

$$\begin{aligned} \int_{T_1} f(\Phi_1(t)) \cdot \sqrt{g^{(1)}(t)} \, dt &= \int_{T_1} f(\Phi_2(h(t))) \cdot \sqrt{g^{(2)}(h(t))} \underbrace{|\det h'(t)| \, dt}_{=ds} \\ &= (\text{Transformationsformel}) = \int_{T_2} f(\Phi_2(s)) \cdot \sqrt{g^{(2)}(s)} \, ds \end{aligned}$$

Jetzt wird der zweite Fall behandelt: Für  $M$  gibt es nur eine lokale Parameterdarstellung. Wir müssen vom Lokalen zum Globalen übergehen.

### Definition und Satz 11.5

Sei  $K \subset \mathbb{R}^n$  kompakt. Seien  $U_1, \dots, U_k \subset \mathbb{R}^n$  offen und  $K \subset U_1 \cup \dots \cup U_k$ . Dann existieren Funktionen  $\varphi_1, \dots, \varphi_k \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$  (Vektorraum der unendlich oft differenzierbaren Funktionen im  $\mathbb{R}^n$  mit kompaktem Träger) mit

1.  $\text{supp } \varphi_j \subset U_j$  mit  $0 \leq \varphi_j \leq 1 \, \forall j = 1, \dots, k$
2.  $\sum_{j=1}^k \varphi_j(x) = 1 \, \forall x \in K$

Die  $\varphi_1, \dots, \varphi_k$  nennt man eine der **Überdeckung**  $U_1, \dots, U_k$  **untergeordnete Zerlegung (Partition)** der Eins auf  $K$ .

### Beweis

O.E.d.A. seien alle  $U_j$  beschränkt. Setze

$$K' := \bigcup_{j=1}^k U_j \quad \text{und} \quad U_0 := \mathbb{R}^n \setminus K$$

$K'$  ist natürlich kompakt. Für jedes  $x \in K'$  existiert ein  $r_x$  und ein  $j \in \{0, 1, \dots, k\}$  mit

$$K(x, 2r_x) := \{y \in \mathbb{R}^n : \|x - y\| < 2r_x\} \subset U_j$$

Dann bilden alle  $K(x, r_x)$  für  $x \in K'$  eine offene Überdeckung von  $K'$ . Da  $K'$  kompakt ist, überdecken bereits endlich viele dieser Kugeln  $K'$ :

$$\exists x_1, \dots, x_m \in K' : K' \subset \bigcup_{i=1}^m K(x_i, r_{x_i})$$

Für jede dieser  $K(x_i, r_{x_i})$  existiert ein  $g_i \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$  mit

$$g_i(x) = \begin{cases} 0 & x \notin K(x_i, r_{x_i}) \\ > 0 & x \in K(x_i, r_{x_i}) \end{cases} \Rightarrow \text{supp } g_i \subset K(x_i, 2r_{x_i})$$

Man erhält solche  $g_i$  durch „Strecken, Stauchen“ und Translation des „Standardhuts“:

$$g(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{1-\|x\|^2}} & \|x\| < 1 \\ 0 & \|x\| \geq 1 \end{cases} \Rightarrow g \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n) \quad \text{und} \quad \text{supp } g = \overline{K(0, 1)}$$

Abwandlung, damit der Träger in  $K(0, \varepsilon)$  liegt:

$$g(x) = \begin{cases} c_\varepsilon \cdot e^{-\frac{\varepsilon^2}{\varepsilon^2 - \|x\|^2}} & \|x\| < 1 \\ 0 & \|x\| \geq 1 \end{cases}$$

$c_\varepsilon$  ist hierbei so gewählt, dass  $\int_{\mathbb{R}^n} g(x) dx = 1$  ist. Für  $j = 0, 1, \dots, k$  sei nun

$$I_j := \{i \in \{1, \dots, m\} : K(x_i, 2r_{x_i}) \subset U_j\}$$

Definiere nun

$$\begin{aligned} \psi_j &= \sum_{i \in I_j} g_i \Rightarrow \text{supp } \psi_j \subset U_j \quad \text{für } j = 0, 1, \dots, k \\ \psi &= \sum_{j=0}^k \psi_j \\ \varphi_j &= \psi_j / \psi \quad \text{für } j = 1, \dots, k \end{aligned}$$

Beachte, dass  $\psi_0$  einen Träger in  $U_0$  hat, also ist  $\psi_0(x) = 0 \forall x \in K$ . Die  $\varphi_j$  erfüllen alle Bedingungen der Zerlegung der Eins:

$$\text{supp } \varphi_j \subset U_j \quad \text{und} \quad \sum_{j=1}^k \varphi_j(x) = \frac{\psi_1(x) + \dots + \psi_k(x)}{\underbrace{\psi_0(x) + \psi_1(x) + \dots + \psi_k(x)}_{=0}} = 1$$

Für alle  $x \notin \text{supp } \psi_j = \text{supp } \varphi_j$  setze natürlich  $\varphi_j(x) = 0$ .

■

Dies kann man auf kompakte Untermannigfaltigkeiten des  $\mathbb{R}^n$  anwenden: Dann überdecken endlich viele Karten die Untermannigfaltigkeit.

### Definition 11.6

Seien folgende Objekte gegeben:

- $M \subset \mathbb{R}^n$  sei eine  $k$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit und  $f$  definiert auf  $M$  mit kompaktem Träger.
- $\Phi_j : T_j \subset \mathbb{R}^k \rightarrow V_j \subset M$  für  $j = 1, \dots, m$
- $W_j \subset \mathbb{R}^n$  sei offen,  $W_j \cap M = V_j$  (siehe Definition der Untermannigfaltigkeit)
- $\varphi_1, \dots, \varphi_m \in C_c^\infty$  sei eine der Überdeckung  $W_1, \dots, W_m$  untergeordnete Zerlegung der Eins.

Dann setzen wir

$$\int_M f(x) dS(x) := \sum_{j=1}^m \int_{V_j} (\varphi_j \cdot f)(x) dS(x) \quad (11.5)$$

#### Bemerkung

Wo ist die kompakte Menge? Das sei  $\text{supp } f$ . Beachte:  $\varphi_j \cdot f \in C_c(M)$  und  $\text{supp}(\varphi_j \cdot f) \subset V_j$ . Damit sind die in (11.5) rechts stehenden Integrale bereits definiert.

$$\sum_j (\varphi_j \cdot f)(x) = f(x) \cdot \sum_j \varphi_j(x) = f(x)$$

Sei  $A \subset M$  und  $\chi_A$  sei über  $M$  integrierbar. Dann setze:

$$|A| := \int_M \chi_A(x) \, dS(x) = \int_A dS(x)$$

## 11.2 Orientierung von Mannigfaltigkeiten

Sei  $V$  ein  $k$ -dimensionaler Vektorraum mit den Basen  $\mathcal{B}_1 = (v_1, \dots, v_k)$  und  $\mathcal{B}_2 = (w_1, \dots, w_k)$ . Die Matrix  $\mathbf{A} = (a_{ij})$  sei definiert durch

$$\sum_j a_{ij} v_j = w_i \quad \text{für } i = 1, \dots, k$$

Dann heißen  $\mathcal{B}_1$  und  $\mathcal{B}_2$  **gleichorientiert**, wenn  $\det \mathbf{A} > 0$ . Dadurch ist eine Äquivalenzrelation in der Menge der Basen definiert. Es gibt genau zwei Äquivalenzklassen. Eine **Orientierung** in  $V$  festzulegen, heißt, eine Äquivalenzklasse auszuzeichnen und die darin liegenden Basen als **positiv orientiert** zu bezeichnen. Wir vereinbaren, dass die kanonischen Basen  $(e_1, \dots, e_n)$  des  $\mathbb{R}^n$  positiv orientiert seien.

Komplizierter ist die Orientierbarkeit und Orientierung von Untermannigfaltigkeiten des  $\mathbb{R}^n$ . Benutze dazu die Tangentialräume  $T_a(M)$ , um eine Orientierung einzuführen. Wie entstehen Basen in  $T_a(M)$ ?

Sei  $\Phi : T \subset \mathbb{R}^k \rightarrow M \subset \mathbb{R}^n$  eine Parameterdarst. und  $c \in T$  mit  $\Phi(c) = a \in M$ .  $T_a(M)$  hat die Basis

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t_1}(c), \dots, \frac{\partial \Phi}{\partial t_k}(c)$$

Das heißt:  $\Phi'(c)$  bildet  $\mathbb{R}^k$  eindeutig auf  $T_a(M)$  ab, und zwar so, dass

$$\Phi'(c)e_j = \frac{\partial \Phi}{\partial t_j}(c) \quad \text{für } j = 1, \dots, k$$

Wir nennen eine beliebige Basis  $(v_1, \dots, v_k)$  von  $T_a(M)$  **positiv orientiert**, wenn sie Bild einer positiv orientierten Basis des  $\mathbb{R}^k$  unter der linearen Abbildung  $\Phi'(c)$  ist. Mit anderen Worten:  $(v_1, \dots, v_k)$  ist in  $T_a(M)$  positiv orientiert, wenn

$$\left( (\Phi^{-1})'(a)v_1, \dots, (\Phi^{-1})'(a)v_k \right)$$

positiv orientiert ist.

### Definition 11.7

Eine Untermannigfaltigkeit  $M$  heißt **orientierbar**, wenn es eine lokal verträgliche Menge von Orientierungen der Tangentialräume an  $M$  gibt, d.h. es gibt ein System  $\mathcal{O}$  von  $(\Phi, T_\Phi)$  oder  $(h, W_h)$  mit

1.  $\bigcup_{W \in \mathcal{O}} W = M$  (d.h. die Karten bilden einen Atlas)
2. Seien  $V, W \in \mathcal{O}$  mit  $V \cap W \neq \emptyset$ , dann liefern  $(h, W)$  und  $(g, V)$  für alle  $a \in V \cap W$  die gleiche Orientierung von  $T_a(M)$ . Mit anderen Worten: Ist  $(b_1, \dots, b_k)$  eine beliebige Basis des  $T_a(M)$ , dann sind  $(g'(a)v_1, \dots, g'(a)v_k)$  und  $(h'(a)w_1, \dots, h'(a)w_k)$  in  $\mathbb{R}^k$  gleichorientiert.

Mitunter versteht man unter einer Orientierung auch ein maximales System  $\mathcal{O}$  mit obigen Eigenschaften.

Umformulierung: Seien  $U_1, U_2 \subset \mathbb{R}^m$  offen und  $f : U_1 \rightarrow U_2$  ein Diffeomorphismus.

- $f$  heißt **orientierungstreu**, wenn  $\det f'(x) > 0 \forall x \in U_1$ .
- $f$  heißt **orientierungsumkehrend**, wenn  $\det f'(x) < 0 \forall x \in U_1$ .

Seien  $\Phi_i : T_i \rightarrow W_i$  zwei Parametrisierungen bzw.  $(h_i, W_i)$  zwei Karten. Dann sind  $\Phi_2^{-1} \circ \Phi_1$  bzw.  $h_2 \circ h_1^{-1} : T_1 \subset \mathbb{R}^k \rightarrow T_2 \subset \mathbb{R}^k$  Diffeomorphismen (Kartenwechsel).  $(\Phi_2^{-1} \circ \Phi_1)'$  bzw.  $(h_2 \circ h_1^{-1})'$  sind linear invertierbare Abbildungen. Man nennt den Kartenwechsel orientierungserhaltend (bzw. gleichorientiert), wenn  $\det (h_2 \circ h_1^{-1})' > 0$ . Für  $W_1 \cap W_2 = \emptyset$  sind die Karten automatisch gleichorientiert.

### Lemma 11.8

Eine Untermannigfaltigkeit  $M \subset \mathbb{R}^n$  ist genau dann orientierbar, wenn es einen Atlas aus gleich orientierten Karten gibt.

**Beweis** in der Sprache der Parametrisierungen

Es ist  $\Phi_i : T_i \rightarrow W_i$  mit  $W_1 \cap W_2 \neq \emptyset$  und  $\Phi_1(t_1) = \Phi_2(t_2) = a \in W_1 \cap W_2$ . Setze  $f := \Phi_2^{-1} \circ \Phi_1$ , also ist  $\Phi_1 = \Phi_2 \circ f$  und somit  $\Phi_1' = \Phi_2' \cdot f'$ .  $\Phi_1$  und  $\Phi_2$  liefern genau dann im Punkt  $a$  dieselbe Orientierung, wenn  $\det f'(t_1) > 0$  ist. ■

Ein Spezialfall sind  $(n - 1)$ -dimensionale Untermannigfaltigkeiten des  $\mathbb{R}^n$ .

### Lemma 11.9

Sei  $M$  eine  $(n - 1)$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit des  $\mathbb{R}^n$ , dann existiert eine eindeutige Beziehung zwischen den Orientierg. von  $M$  und den stetigen Einheitsnormalenvektorfeldern auf  $M$ .

Dies wird wie folgt erreicht: Sei  $\mathcal{O}$  eine Orientierung auf  $M$  und  $a \in M$ . Dann hat  $T_a(M)$  die Dimension  $n - 1$ . In  $\mathbb{R}^n$  gibt es zwei auf  $T_a(M)$  orthogonale Einheitsvektoren ( $\uparrow$  und  $\downarrow$ ). Zu  $a$  möge eine Parametrisierung  $\Phi$  gehören mit  $\Phi(c) = a$ . Wähle den Einheitsnormalenvektor  $n(a)$  so, dass

$$(n(a), \Phi'(c)e_1, \dots, \Phi'(c)e_{n-1}) \quad (*)$$

im  $\mathbb{R}^n$  positiv orientiert ist. Dann erhält man ein Vektorfeld mit den gesuchten Eigenschaften. Wenn ein solches Vektorfeld existiert, ist durch  $(*)$  eine Orientierung auf  $M$  gegeben.

## 11.3 Differentialformen

Man kann Vektorfelder über Kurven integrieren:

$$\int_c \langle v, dx \rangle = \int_c (v_1 \cdot dx_1 + \dots + v_n \cdot dx_n)$$

Unser Ziel ist nun, diesen Zusammenhang auf Untermannigfaltigkeiten zu erweitern.

Sei  $V$  ein  $n$ -dimensionaler Vektorraum.  $V^*$  ist der Vektorraum der linearen Funktionale auf  $V$  (d.h. der linearen Abbildungen von  $V$  nach  $\mathbb{R}$ ). Leicht zeigt man:  $\dim V^* = \dim V$

Sei nun  $(e_1, \dots, e_n)$  irgendeine feste Basis in  $V$ . (In  $V$  existiert zunächst kein Skalarprodukt, also ist es sinnlos, über Orthonormalbasen zu reden.) Dann existiert genau eine Basis  $(e^1, \dots, e^n)$  mit

$$e^i(e_j) = \delta_j^i$$

$(e^1, \dots, e^n)$  heißt **duale Basis** zu  $(e_1, \dots, e_n)$ .

### Definition 11.10

Eine Abb.  $\alpha : \underbrace{V \times \dots \times V}_{r\text{-mal}} = V^r \rightarrow \mathbb{R}$  heißt **Multilinearform** (oder  $r$ -lin. Form über  $V$ ), wenn gilt:

$$\alpha(x_1, \dots, cx_i + dy_i, \dots, x_r) = c \cdot \alpha(x_1, \dots, x_i, \dots, x_r) + d \cdot \alpha(x_1, \dots, y_i, \dots, x_r) \quad \text{für } c, d \in \mathbb{R}$$

Das heißt,  $\alpha$  ist in jeder Komponente linear.

Der Vektorraum aller  $r$ -linearer Formen über  $V$  wird  $T_r(V)$  genannt.

Eine  $r$ -lineare Form über  $V$  nennt man auch  $r$ -fach **kovarianten Tensor** über  $V$ . (Entsprechend bezeichnet man eine  $r$ -lineare Form über  $V^*$  auch als  $r$ -fach **kontravarianten Tensor** über  $V$ .)

### Beispiele

- 1-lineare Formen sind gerade Elemente aus  $V^*$ .
- Skalarprodukte in  $V$  sind 2-lineare Formen.
- Seien  $f^1, \dots, f^r \in V^*$ . Definiere  $\alpha = f^1 \otimes \dots \otimes f^r$  durch

$$\alpha(x_1, \dots, x_r) = (f^1 \otimes \dots \otimes f^r)(x_1, \dots, x_r) := f^1(x_1) \cdot \dots \cdot f^r(x_r)$$

$\otimes$  heißt **Tensorprodukt**.  $\alpha$  ist eine  $r$ -lineare Form.

4. Sei  $(e_1, \dots, e_n)$  eine Basis von  $V$ .  $x \in V$  hat dann die Darstellung

$$x = \sum_{i=1}^n x^i e_i = x^i e_i \quad \text{mit } x^i \in \mathbb{R}$$

**Einstein'sche Summenkonvention:** Über doppelt auftretende obere und untere Indizes wird summiert. Zum Beispiel für  $x_1, \dots, x_r \in V$ :

$$x_j = x_j^i e_i = \sum_{i=1}^n x_j^i e_i$$

$$\alpha(x_1, \dots, x_n) := \det(x_j^i) = \begin{vmatrix} x_1^1 & \dots & x_n^1 \\ \vdots & & \vdots \\ x_1^n & \dots & x_n^n \end{vmatrix}$$

5. Verallgemeinerung von 4. für  $x_1, \dots, x_r \in V$  mit  $r > n$ :

$$\alpha(x_1, \dots, x_r) := \begin{vmatrix} x_1^1 & \dots & x_n^1 \\ \vdots & & \vdots \\ \cancel{x_1^i} & \dots & \cancel{x_n^i} \\ \vdots & & \vdots \\ x_1^r & \dots & x_n^r \end{vmatrix}$$

Streiche irgendwelche  $n - r$  Zeilen. Es bleiben Zeilen mit Indizes  $i_1 < i_2 < \dots < i_r$ . Dann bezeichnet man dieses  $\alpha$  etwa durch  $\alpha_{i_1 \dots i_r}$ .

**Definition und Satz 11.11**

Eine  $r$ -lineare Form  $\alpha \in T_r(V)$  heißt **alternierend** oder kurz  **$r$ -Form**, wenn eine der folgenden äquivalenten Bedingungen erfüllt ist:

1.  $\alpha^\pi = (\text{sign } \pi) \cdot \alpha$  mit  $\pi \in S_r$  (Menge aller Permutationen von  $\{1, \dots, r\}$ ,  $\text{sign } \pi$  ist das Vorzeichen von  $\pi$ , also  $+1$  bei gerader und  $-1$  bei ungerader Permutation)

$$\alpha^\pi(x_1, \dots, x_r) = \alpha(x_{\pi(1)}, \dots, x_{\pi(r)})$$

Mit anderen Worten: Bei Permutation der Argumente ändert sich nur das Vorzeichen.

$$\alpha(x_{\pi(1)}, \dots, x_{\pi(r)}) = (\text{sign } \pi) \cdot \alpha(x_1, \dots, x_r)$$

2.  $\alpha(x_1, \dots, x_r) = 0$ , wenn zwei Argumente gleich sind
3.  $\alpha(x_1, \dots, x_r) = 0$ , falls die  $x_1, \dots, x_r$  linear abhängig sind
4.  $\alpha(x_1, \dots, x_r)$  ändert das Vorzeichen, wenn zwei Elemente  $x_i$  und  $x_j$  vertauscht werden.

Die  $\alpha$  in den Beispielen 4 und 5 sind etwa  $r$ -Formen. Die Menge aller  $r$ -Formen nennen wir  $\bigwedge^r V^*$ .

**Fundamentalbeispiel**

Seien  $f^1, \dots, f^r \in V^*$ . Definiere  $\alpha = f^1 \wedge \dots \wedge f^r$  mit

$$(f^1 \wedge \dots \wedge f^r)(x_1, \dots, x_r) := \det(f^i(x_j)) = \begin{vmatrix} f^1(x_1) & \dots & f^1(x_r) \\ \vdots & & \vdots \\ f^r(x_1) & \dots & f^r(x_r) \end{vmatrix}$$

für  $x_i \in V$ . Beachte hierbei: Mit  $f^i = f^j$  wird  $f^1 \wedge \dots \wedge f^r = 0$ .

Wir wollen nun eine Basis für den Vektorraum  $\bigwedge^r V^*$  finden. (Dann ist auch  $\dim \bigwedge^r V^*$  klar.) Wie üblich sei  $(e_1, \dots, e_n)$  die Basis von  $V$  und  $(e^1, \dots, e^n)$  die dazu duale Basis in  $V^*$ . Betrachte den folgenden Hilfsraum:

$$A_r := \text{lin} \{e^{j_1} \wedge \dots \wedge e^{j_r} : 1 \leq j_1 < \dots < j_r \leq n\} \quad (11.6)$$

Ein typisches Element  $\alpha \in A_r$  hat offenbar die Gestalt:

$$\alpha = \sum_{j_1 < \dots < j_r} c_{j_1 \dots j_r} \cdot e^{j_1} \wedge \dots \wedge e^{j_r}$$

**Beispiel 11.3**

$$\alpha = 4 \cdot e^1 \wedge e^7 + 8 \cdot e^1 \wedge e^4 + 12 \cdot e^6 \wedge e^{20} - \text{Hier ist } r = 2 \text{ und } n \geq 20.$$

Nun definieren wir zwischen solchen  $r$ - bzw.  $s$ -Formen das **Keilprodukt** bzw. **äußere Produkt**.

$$\alpha = \sum_{j_1 < \dots < j_r} c_{j_1 \dots j_r} \cdot e^{j_1} \wedge \dots \wedge e^{j_r} \in A_r \quad \text{und} \quad \beta = \sum_{l_1 < \dots < l_s} d_{l_1 \dots l_s} \cdot e^{l_1} \wedge \dots \wedge e^{l_s} \in A_s$$

Auf  $\alpha$  und  $\beta$  wirkt die Operation  $\wedge : (A_r, A_s) \rightarrow A_{r+s}$  wie folgt:

$$\alpha \wedge \beta = \sum_{\substack{j_1 < \dots < j_r \\ l_1 < \dots < l_s}} c_{j_1 \dots j_r} d_{l_1 \dots l_s} \cdot e^{j_1} \wedge \dots \wedge e^{j_r} \wedge e^{l_1} \wedge \dots \wedge e^{l_s} \in A_{r+s} \quad (11.7)$$

**Beispiel 11.4**

Seien  $\alpha = 2 \cdot e^1 \wedge e^2$  und  $\beta = 3 \cdot e^1 + 4 \cdot e^2 + 5 \cdot e^3$ . Dann ist

$$\alpha \wedge \beta = (2 \cdot e^1 \wedge e^2) \wedge (3 \cdot e^1 + 4 \cdot e^2 + 5 \cdot e^3) = 6 \cdot \underbrace{e^1 \wedge e^2 \wedge e^1}_{=0} + 8 \cdot \underbrace{e^1 \wedge e^2 \wedge e^2}_{=0} + 10 \cdot e^1 \wedge e^2 \wedge e^3 = 10 \cdot e^1 \wedge e^2 \wedge e^3$$

**Lemma 11.12**

Eigenschaften des Keilproduktes

1. Bilinearität – Für  $\alpha \in A_r$ ,  $\beta \in A_s$  und  $c_i, d_i \in \mathbb{R}$  ist

$$\begin{aligned} (c_1 \alpha_1 + c_2 \alpha_2) \wedge \beta &= c_1 \cdot (\alpha_1 \wedge \beta) + c_2 \cdot (\alpha_2 \wedge \beta) \\ \alpha \wedge (d_1 \beta_1 + d_2 \beta_2) &= d_1 \cdot (\alpha \wedge \beta_1) + d_2 \cdot (\alpha \wedge \beta_2) \end{aligned}$$

2. Für  $\alpha \in A_r$  und  $\beta \in A_s$  ist

$$\alpha \wedge \beta = (-1)^{rs} \beta \wedge \alpha$$

3. Assoziativität – Für  $\alpha \in A_r$ ,  $\beta \in A_s$  und  $\gamma \in A_t$  ist

$$\alpha \wedge (\beta \wedge \gamma) = (\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma$$

**Beweis**

- Folgt direkt aus der Definition, da alle Komponenten linear sind.
- Aus der Definition folgt sofort für  $f^1, f^2 \in V^*$ :  $f^1 \wedge f^2 = -f^2 \wedge f^1$  (Vertauschung von Zeilen und Spalten in einer Determinante führt zum Vorzeichenwechsel). Generell liefert die Vertauschung zweier Elemente im Keilprodukt einen Vorzeichenwechsel. Um in

$$e^{j_1} \wedge \dots \wedge e^{j_r} \wedge e^{l_1} \wedge \dots \wedge e^{l_s}$$

das Element  $e^{l_1}$  nach vorne zu bringen, muss man insgesamt  $r$  Vertauschungen von  $e^{l_1}$  mit seinem jeweiligen Vorgänger vornehmen. Also ist

$$e^{j_1} \wedge \dots \wedge e^{j_r} \wedge e^{l_1} \wedge \dots \wedge e^{l_s} = (-1)^r \cdot e^{l_1} \wedge e^{j_1} \wedge \dots \wedge e^{j_r} \wedge e^{l_2} \wedge \dots \wedge e^{l_s}$$

Um alle Elemente  $e^{l_i}$  nach vorne zu bringen, benötigt man also  $r \cdot s$  Vertauschungen.

- Dieser Beweis ist einfach, erfordert aber viel Schreibarbeit. ■

**Satz 11.13**

Es ist  $A_r = \bigwedge^r V^*$  und  $\dim \bigwedge^r V^* = \binom{n}{r}$ . In Formel (11.6) ist  $\{\dots\}$  eine Basis für  $\bigwedge^r V^*$ .

**Beweis**

Die Form  $\alpha \in \bigwedge^r V^*$  ist wegen der Multilinearität eindeutig bestimmt, wenn man alle  $\alpha(e_{i_1}, \dots, e_{i_r})$  mit  $1 \leq i_k \leq n$  und  $1 \leq k \leq r$  kennt.

Da  $\alpha$  alterniert, genügt es, alle  $r$ -Tupel  $(e_{i_1}, \dots, e_{i_r})$  mit  $1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq n$  zu betrachten. Davon gibt es  $\binom{n}{r}$  Stück. Soviele Formen stehen auch in  $\{\dots\}$  in Formel (11.6). Wir zeigen, dass diese linear unabhängig sind. Sei also

$$\sum_{j_1 < \dots < j_r} c_{j_1 \dots j_r} \cdot e^{j_1} \wedge \dots \wedge e^{j_r} = 0 \quad (*)$$



Zu zeigen ist, dass alle  $c_{j_1 \dots j_r} = 0$  sind. Sei darin  $(j'_1, \dots, j'_r)$  ein festes  $r$ -Tupel und  $(k_1, \dots, k_{n-r})$  das dazu komplementäre  $(n-r)$ -Tupel (also die fehlenden  $n-r$  Zahlen). Aus (\*) folgt natürlich:

$$\sum_{j_1 < \dots < j_r} c_{j_1 \dots j_r} \cdot e^{j_1} \wedge \dots \wedge e^{j_r} \wedge e^{k_1} \wedge \dots \wedge e^{k_{n-r}} = 0$$

In dieser Summe ist nur der Summand mit  $e^{j'_1} \wedge \dots \wedge e^{j'_r} \wedge e^{k_1} \wedge \dots \wedge e^{k_{n-r}}$  ungleich Null. Es verbleibt

$$c_{j'_1 \dots j'_r} \cdot e^{j'_1} \wedge \dots \wedge e^{j'_r} \wedge e^{k_1} \wedge \dots \wedge e^{k_{n-r}} = 0 \quad \Rightarrow \quad c_{j'_1 \dots j'_r} = 0$$

#### Bemerkung

1. Die Darstellung  $\alpha = \sum_{j_1 < \dots < j_r} c_{j_1 \dots j_r} \cdot e^{j_1} \wedge \dots \wedge e^{j_r}$  nennt man **Standarddarstellung** von  $\alpha$ .
2. Aus diesem Satz erkennt man den Sinn der Notation  $\bigwedge^r V^* = V^* \wedge \dots \wedge V^*$ .

Die folgende Operation ist typisch für viele Situationen in der Mathematik.

#### Definition 11.14 Rücktransport, „Pullback“

Seien  $V$  und  $W$  reelle Vektorräume. Dann induziert die lineare Abbildung  $\varphi : V \rightarrow W$  eine lineare Abbildung  $\varphi^* : T_r(W) \rightarrow T_r(V) \forall r$  gemäß

$$(\varphi^* \alpha)(u_1, \dots, u_r) := \alpha(\varphi(u_1), \dots, \varphi(u_r)) \quad \text{mit} \quad \alpha \in T_r(W) \quad \text{und} \quad u_1, \dots, u_r \in V$$

Die  $r$ -lineare Form  $\varphi^* \alpha$  heißt **Pullback** von  $\alpha$  bzgl.  $\varphi$ . Es ist  $\varphi^* \alpha \in T_r(V)$  mit den Eigenschaften:

- $\varphi^*(\bigwedge^r W^*) = \bigwedge^r V^*$  – Das heißt,  $\varphi^*$  erhält das Alternierungsverhalten.
- $(\psi \circ \varphi)^* = \varphi^* \circ \psi^*$  für zwei lineare Abbildungen  $\varphi : V \rightarrow W$  und  $\psi : W \rightarrow X$
- $\varphi^*(\alpha \wedge \beta) = \varphi^* \alpha \wedge \varphi^* \beta$  für  $\varphi : V \rightarrow W$ ,  $\alpha \in \bigwedge^r V^*$  und  $\beta \in \bigwedge^s V^*$

Unser nächstes Ziel ist die Definition und Integration von Differentialformen auf Mannigfaltigkeiten. Wir wissen:  $M$  ist eine Mannigfaltigkeit, der für jedes  $p \in M$  ein Tangentialraum  $T_p M$  zugeordnet ist. Damit ist automatisch der dazu duale Raum  $(T_p M)^* =: T_p^* M$  gegeben.

Wir starten mit der Definition von Differentialformen in offenen Mengen  $U \subset \mathbb{R}^n$ .  $U$  sei eine  $n$ -dimensionale Mannigfaltigkeit, somit gilt für alle  $p \in U$ :

$$T_p U \cong \mathbb{R}^n \cong T_p^* U \cong (\mathbb{R}^n)^*$$

Hierbei heißt  $X \cong Y$ :  $X$  ist zu  $Y$  isomorph. Die Basis  $(e_1, \dots, e_n)$  im  $\mathbb{R}^n$  sei die Standardbasis.

#### Definition 11.15

1. Ein **Vektorfeld**  $v$  in  $U$  ist eine Abbildung  $v : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Genauer:  $p \in U \mapsto v(p) \in T_p U \cong \mathbb{R}^n$ .
2. Eine **Differentialform** vom Grade  $r$  in  $U$  ist eine Abbildung  $\omega : U \rightarrow \bigwedge^r (\mathbb{R}^n)^*$ .  
Genauer:  $p \in U \mapsto \omega(p) \in \bigwedge^r T_p^* U \cong \bigwedge^r (\mathbb{R}^n)^*$ .

Grob gesprochen ist  $\omega(p)$  für jedes  $p \in U$  eine  $r$ -Form. Die Menge aller Differentialformen vom Grade  $r$ , die ebenfalls kurz  $r$ -Formen genannt werden, bezeichnet man mit  $\Omega^r(U)$ .

Man sagt, eine Differentialform  $\omega \in \Omega^r(U)$  ist  $k$ -mal stetig differenzierbar, wenn für alle  $r$ -Tupel  $(v_1, \dots, v_r)$  mit  $v_i \in \mathbb{R}^n$  die Abb.  $U \ni p \mapsto \omega(p)(v_1, \dots, v_r) \in \mathbb{R}$   $k$ -mal stetig differenzierbar ist.

Differentialformen vom Grade Null sind Funktionen  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ .

## Koordinatendarstellung von Differentialformen

Seien  $x^1, \dots, x^n$  die kanonischen Koordinatenfunktionen in  $\mathbb{R}^n$  bzw. in  $U$ , also

$$x^i(p) = x^i(p^1, \dots, p^n) = p^i \quad \text{mit} \quad p = (p^1, \dots, p^n) \in \mathbb{R}^n$$

$dx^i$  seien die zugehörigen Koordinatendifferentiale.  $dx^i(p) = dx^i$  ist eine von  $p$  unabhängige lineare Abbildung  $dx^i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $dx^i(h) = h^i$  für  $h \in \mathbb{R}^n$ . (Hierbei ist  $dx^i$  die lineare Abbildung  $dx^i(p)$ , die auf  $h$  angewendet wird.) Im Speziellen ist

$$dx^i(e_j) = \delta_j^i$$

Das heißt,  $(dx^1, \dots, dx^n)$  ist gerade die duale Basis zur kanonischen Basis  $(e_1, \dots, e_n)$  des  $\mathbb{R}^n$ , also ist  $e^i = dx^i \in (\mathbb{R}^n)^*$ . In der Koordinatendarstellung entspricht  $dx^i$  einem Vektor  $(0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$  mit der 1 an der  $i$ -ten Stelle. Damit hat man für alle  $p$  eine Basis für  $\bigwedge^r T_p^* U \cong \bigwedge^r (\mathbb{R}^n)^*$ :

$$\{dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_r} : 1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq n\} \quad (11.8)$$

Damit hat man für jedes  $\omega \in \Omega^r(U)$  die Standarddarstellung

$$\omega = \sum_{i_1 < \dots < i_r} f_{i_1 \dots i_r} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_r} \quad (11.9)$$

mit eindeutig bestimmten Funktionen  $f_{i_1 \dots i_r} : U \rightarrow \mathbb{R}$ . Sind alle  $f_{i_1 \dots i_r}$   $k$ -mal stetig differenzierbar, ist auch  $\omega$   $k$ -mal stetig differenzierbar.

**Beispiel 11.5** für das Rechnen mit Koordinatendifferentialen

Sei $n = 2$ und $u = \begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ . Dann ist $(dx^1 \wedge dx^2)(u, v) = \begin{vmatrix} dx^1(u) & dx^1(v) \\ dx^2(u) & dx^2(v) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u^1 & v^1 \\ u^2 & v^2 \end{vmatrix}$ .
---

## Algebraische Rechenregeln für Differentialformen

Alle allgemeinen Operationen werden punktweise definiert:

1. Für  $\omega, \sigma \in \Omega^r(U)$  und  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  ist

$$(\omega + \sigma)(p) = \omega(p) + \sigma(p) \quad \text{und} \quad (f \cdot \omega)(p) = f(p) \cdot \omega(p) \quad \forall p \in U$$

2. Für  $\omega \in \Omega^r(U)$  und  $\tau \in \Omega^s(U)$ , dann ist  $\omega \wedge \tau \in \Omega^{r+s}(U)$  und es gilt

$$(\omega \wedge \tau)(p) = \omega(p) \wedge \tau(p)$$

Insbesondere gilt für  $f \in \Omega^0(U)$ :

$$f \wedge \omega = \omega \wedge f = f \cdot \omega$$

Man kann mit Differentialformen bereits rechnen, wenn man die Rechenregel

$$dx^i \wedge dx^j = -dx^j \wedge dx^i$$

beachtet. Insbesondere ist  $dx^i \wedge dx^i = 0$ .

## Die äußere Ableitung (Cartan'sche Ableitung) von Differentialformen

### Definition 11.16

1. Die **äußere Ableitung** einer 0-Form  $f \in C^k(U)$  ist

$$df := \sum_{k=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^k} dx^k = \frac{\partial f}{\partial x^k} dx^k \quad \text{gemäß Summenkonvention}$$

Dies ist das übliche Differential. Es ist  $f \in \Omega^0(U)$  und  $df \in \Omega^1(U)$ .

2. Sei  $\omega = \sum_{i_1 < \dots < i_r} f_{i_1 \dots i_r} \cdot dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_r}$ . Dann ist die äußere Ableitung  $d\omega \in \Omega^{r+1}(U)$  definiert durch

$$d\omega = \sum_{i_1 < \dots < i_r} df_{i_1 \dots i_r} \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_r}$$

Dies ist nicht die Standarddarstellung von  $d\omega$ ! Man schreibt statt  $d$  auch  $d_r$ , wenn man sich auf ein bestimmtes  $r$  bezieht.

### Standardbeispiele

1. Sei  $n = 2, r = 1$  und  $\omega = Pdx + Qdy$  ( $P$  und  $Q$  sind Funktionen von  $x$  und  $y$ ).

$$\begin{aligned} d\omega &= dP \wedge dx + dQ \wedge dy \\ &= \left( \frac{\partial P}{\partial x} dx + \frac{\partial P}{\partial y} dy \right) \wedge dx + \left( \frac{\partial Q}{\partial x} dx + \frac{\partial Q}{\partial y} dy \right) \wedge dy \\ &= \cancel{\frac{\partial P}{\partial x} \cdot dx \wedge dx} + \frac{\partial P}{\partial y} \cdot dy \wedge dx + \frac{\partial Q}{\partial x} \cdot dx \wedge dy + \cancel{\frac{\partial Q}{\partial y} \cdot dy \wedge dy} \\ &= \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \cdot dx \wedge dy \end{aligned}$$

Dies ähnelt dem Satz vom Gauss im  $\mathbb{R}^2$ :

$$\int_B \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \int_{\partial B} (Pdx + Qdy)$$

2. Sei  $\omega = \sum_{i=1}^n f_i dx^i$ , also ist  $d\omega = \sum_{i < j} \left( \frac{\partial f_j}{\partial x^i} - \frac{\partial f_i}{\partial x^j} \right) \cdot dx^i \wedge dx^j$ .

Betrachte für  $n = 3$  den Spezialfall  $\omega = Pdx + Qdy + Rdz$ .

$$d\omega = \left( \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \cdot dy \wedge dz + \left( \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \cdot dz \wedge dx + \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \cdot dx \wedge dy$$

Dies ist keine Standarddarstellung. Für ein Vektorfeld  $v = (P, Q, R)^T$  sind die Koeffizienten oben gerade die Komponenten von  $\text{rot } v$ . Die Formel ähnelt dem Satz von Stokes.

3. Sei  $n = 3$  und  $\omega = P \cdot dy \wedge dz + Q \cdot dz \wedge dx + R \cdot dx \wedge dy$ , dann ist

$$d\omega = \left( \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) \cdot dx \wedge dy \wedge dz$$

Diese Formel ähnelt dem Satz vom Gauss im  $\mathbb{R}^3$ .

**Satz 11.17** Eigenschaften der äußeren Ableitung

1. Die Funktion  $d_r : \Omega^r(U) \rightarrow \Omega^{r+1}(U)$  ist linear:

$$d(\lambda\omega + \mu\sigma) = \lambda \cdot d\omega + \mu \cdot d\sigma \quad \text{mit} \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R} \quad \text{und} \quad \omega, \sigma \in \Omega^r(U)$$

2. Für  $\omega \in \Omega^r(U)$  und  $\sigma \in \Omega^s(U)$  ist

$$d(\omega \wedge \sigma) = d\omega \wedge \sigma + (-1)^r \cdot \omega \wedge d\sigma$$

3. Für  $\omega \in \Omega^r(U)$  ist

$$d_{r+1}(d_r\omega) = 0$$

Allgemein ist  $d^2 = d \circ d = 0$ .

**Beweis**

Statt  $\omega = \sum_{i_1 < \dots < i_r} f_{i_1 \dots i_r} \cdot dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_r}$  schreiben wir im Folgenden kurz  $\omega = \sum_{|I|=r} f_I \cdot dx^I$ .  $I$  durchläuft alle  $r$ -Tupel  $(i_1, \dots, i_r)$  mit  $1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq n$ .

1. Folgt sofort aus der Definition.
2. Zuerst sei  $r = s = 0$ , also sind  $f, g \in C^1(U)$ . Beachte:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x}(f \cdot g) &= \frac{\partial f}{\partial x} \cdot g + f \cdot \frac{\partial g}{\partial x} \\ \Rightarrow d(f \wedge g) &\equiv d(fg) = (df)g + f(dg) = df \wedge g + f \wedge dg \end{aligned} \quad (11.10)$$

Nun sei allgemein  $\omega = \sum_{|I|=r} f_I \cdot dx^I$  und  $\sigma = \sum_{|J|=s} g_J \cdot dx^J$ .

$$\begin{aligned} d(\omega \wedge \sigma) &= d\left(\sum_{I,J} f_I \cdot g_J \cdot dx^I \wedge dx^J\right) \\ &= \sum_{I,J} d(f_I \cdot g_J) \wedge dx^I \wedge dx^J \\ &= \sum_{I,J} (g_J \cdot df_I + f_I \cdot dg_J) \wedge dx^I \wedge dx^J \\ &= \sum_{I,J} g_J \cdot df_I \wedge dx^I \wedge dx^J + f_I \cdot dg_J \wedge dx^I \wedge dx^J \\ &= \sum_{I,J} g_J \cdot df_I \wedge dx^I \wedge dx^J + (-1)^r \cdot f_I \cdot dx^I \wedge dg_J \wedge dx^J \\ &= d\omega \wedge \sigma + (-1)^r \cdot \omega \wedge d\sigma \end{aligned}$$

3. Der Beweis erfolgt durch Anwendung des Satzes von Schwarz. Zuerst sei  $r = 0$ : Für  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  ist  $df = \sum_i \frac{\partial f}{\partial x^i} \cdot dx^i$  und somit

$$d(df) = \sum_{i < j} \underbrace{\left( \frac{\partial}{\partial x^i} \frac{\partial f}{\partial x^j} - \frac{\partial}{\partial x^j} \frac{\partial f}{\partial x^i} \right)}_{=0} \cdot dx^i \wedge dx^j = 0$$

Nun sei allgemein  $\omega = \sum_{|I|=r} f_I \cdot dx^I$  und somit  $d\omega = \sum_{|I|=r} df_I \wedge dx^I$ . Unter Anwendung von 2. ist

$$\begin{aligned} d(d\omega) &= \sum_{|I|=r} d(df_I \wedge dx^I) \\ &= \sum_{|I|=r} \underbrace{d(df_I)}_{=0} \wedge dx^I - df_I \wedge d(dx^I) \end{aligned}$$

Auch der zweite Summand verschwindet wegen

$$d(dx^I) = d(1dx^I) = \underbrace{d(1)}_{=0} \wedge dx^I = 0$$

■

Sei  $U \subset \mathbb{R}^n$  offen.

1. Eine stetig differenzierbare  $k$ -Form  $\omega \in \Omega^k(U)$  heißt **geschlossen**, wenn  $d\omega = 0$ .
2. Eine stetige  $k$ -Form  $\omega \in \Omega^k(U)$  ( $k \geq 1$ ) heißt **exakt** oder **total**, wenn es eine stetig differenzierbare  $(k-1)$ -Form  $\sigma$  gibt mit  $d\sigma = \omega$ .

Der dritte Teil von Satz 11.17 besagt demnach, dass eine exakte  $k$ -Form immer geschlossen ist.

**Lemma 11.18** Lemma von Poincaré

Sei  $U \subset \mathbb{R}^n$  offen und sternförmig. Für eine stetig differenzierbare  $k$ -Form  $\omega$  in  $U$  mit  $k \geq 1$  gilt:

$$\omega \text{ ist geschlossen} \quad \Leftrightarrow \quad \omega \text{ ist exakt}$$

## Pullback (Rücktransport) von Differentialformen

Dies ist fundamental für die Integration von Differentialformen. Sei  $\varphi : V \subset \mathbb{R}^m \rightarrow U \subset \mathbb{R}^n$  eine glatte Abbildung zwischen offenen Mengen. Die Elemente von  $V$  seien als  $(t^1, \dots, t^m)$  bezeichnet, die von  $U$  heißen  $(x^1, \dots, x^n)$ . Also ist

$$\varphi(t) = \begin{pmatrix} \varphi^1(t^1, \dots, t^m) \\ \vdots \\ \varphi^n(t^1, \dots, t^m) \end{pmatrix}$$

Diese Abbildung  $\varphi$  induziert eine Abbildung  $\varphi^* : \Omega^r(U) \rightarrow \Omega^r(V)$  wie folgt: Für  $f \in \Omega^0(U)$  ist  $\varphi^*f = f \circ \varphi \in \Omega^0(V)$ .

**Definition 11.19**

Seien  $U, V$  und  $\varphi$  wie oben und  $\omega = \sum_{i_1 < \dots < i_r} f_{i_1 \dots i_r} \cdot dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_r} \in \Omega^r(U)$ . Dann heißt

$$\varphi^*\omega := \sum_{i_1 < \dots < i_r} (f_{i_1 \dots i_r} \circ \varphi) \cdot d\varphi^{i_1} \wedge \dots \wedge d\varphi^{i_r} \quad (11.11)$$

**Rücktransport** (Pullback) von  $\omega$  unter  $\varphi$ .

**Bemerkung**

Man berechnet  $\varphi^*\omega$ , indem man in (11.11) einsetzt:  $d\varphi^{i_k} = \sum_j \frac{\partial \varphi^{i_k}}{\partial t^j} \cdot dt^j$

**Beispiel 11.6**

Sei  $r = 1$ , also  $\omega = \sum_{j=1}^n f_j \cdot dx^j$ . Der Rücktransport von  $\omega$  bzgl. einem  $\varphi$  ist

$$\varphi^*\omega = \sum_{j=1}^n (f_j \circ \varphi) \cdot d\varphi^j = \sum_{j=1}^n \left( \sum_{i=1}^m f_j \circ \varphi \cdot \frac{\partial \varphi^j}{\partial t^i} \cdot dt^i \right)$$

Wähle ein beliebiges  $v = (v^1, \dots, v^m) \in \mathbb{R}^m$ . Mit  $\varphi' = \left( \frac{\partial \varphi^j}{\partial t^i} \right)$  ist

$$\begin{aligned} (\varphi^*\omega)(t)(v) &= \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m f_j(\varphi(t)) \cdot \frac{\partial \varphi^j}{\partial t^i}(t) \cdot dt^i(v) \\ &= \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m f_j(\varphi(t)) \cdot \frac{\partial \varphi^j}{\partial t^i}(t) \cdot v^i \\ &= \sum_{j=1}^n f_j(\varphi(t)) \cdot (\varphi'(t) \cdot v)^j \\ (\varphi^*\omega)(t)(v) &= \omega(\varphi(t))(\varphi'(t) \cdot v) \end{aligned}$$

Hier finden wir die folgenden Funktionen:

$$\begin{aligned} \varphi &: V \rightarrow U \\ \varphi'(t) &: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n \quad \text{linear} \\ \omega &\in \Omega^r(U) \\ \varphi^*\omega &\in \Omega^r(V) \end{aligned}$$

$$(\varphi^*\omega)(t)(v_1, \dots, v_r) = \omega(\varphi(t))(\varphi'(t) \cdot v_1, \dots, \varphi'(t) \cdot v_r)$$

Links steht die „neue“ Form, angewendet auf die ursprünglichen Vektoren. Rechts steht die „alte“ Form am Bildpunkt  $\varphi(t)$ , angewendet auf die Bildvektoren  $\varphi'(t)v_i$ .

**Satz 11.20** Eigenschaften von  $\varphi^*$ 

Seien  $U, V$  und  $\varphi$  wie oben. Außerdem seien  $\omega, \omega_1, \omega_2 \in \Omega^r(U)$ ,  $\sigma \in \Omega^s(U)$  und  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ .

1. Linearität:  $\varphi^*(\lambda \cdot \omega_1 + \mu \cdot \omega_2) = \lambda \cdot \varphi^*\omega_1 + \mu \cdot \varphi^*\omega_2$
2. Multiplikativität:  $\varphi^*(\omega \wedge \sigma) = \varphi^*\omega \wedge \varphi^*\sigma$
3. Vertauschbarkeit mit der äußeren Ableitung:  $d(\varphi^*\omega) = \varphi^*(d\omega)$
4. Kettenregel: Für offenes  $W \subset \mathbb{R}^p$  sowie ein stetig differenzierbares (oder glattes)  $\psi : W \rightarrow V$  ist

$$(\varphi \circ \psi)^*\omega = \psi^*(\varphi^*\omega)$$

**Beweis**

1, 2 und 4 folgen direkt aus der Definition.

3. Zunächst sei  $r = 0$ , also ist  $\omega = f : U \rightarrow \mathbb{R}$ .

$$\begin{aligned} d(\varphi^*f) &= d(f \circ \varphi) = df(\varphi^1(t^1, \dots, t^m), \dots, \varphi^n(t^1, \dots, t^m)) \\ &= \sum_{j=1}^m \frac{\partial (f \circ \varphi)}{\partial t^j} \cdot dt^j \\ &= \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial f}{\partial x^i} \circ \varphi \right) \frac{\partial \varphi^i}{\partial t^j} \cdot dt^j \\ &= \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial f}{\partial x^i} \circ \varphi \right) d\varphi^i \end{aligned}$$

Nun sei allgemein  $\omega = \sum_{|I|=r} f_I \cdot dx^I$ . Unter Anwendung von 2. ist

$$\begin{aligned}\varphi^*\omega &= \sum_I (f_I \circ \varphi) d\varphi^I \\ d(\varphi^*\omega) &= \sum_I d(f_I \circ \varphi) \wedge d\varphi^I \\ &= \sum_I \varphi^*(df_I) \wedge d\varphi^I \\ &= \sum_I \varphi^*(df_I) \wedge \varphi^*(dx^I) \\ &= \sum_I \varphi^*(df_I \wedge dx^I) \\ &= \varphi^*(d\omega)\end{aligned}$$

■

## 11.4 Integration von Differentialformen auf Mannigfaltigkeiten

Nun sollen  $k$ -Formen auf  $k$ -dimensionalen Untermannigfaltigkeiten des  $\mathbb{R}^n$  integriert werden. Der Ansatz ist, mit einer Parameterdarstellung die  $k$ -Form in den  $\mathbb{R}^k$  zurückzutransportieren. (Ein Spezialfall sind Vektorfelder, sprich 1-Formen.) Die Orientierung der Mannigfaltigkeit spielt nun eine wichtige Rolle (siehe Kurvenintegral).

Zuerst integrieren wir  $k$ -Formen im  $\mathbb{R}^k$ .

### Definition 11.21

Sei  $U \subset \mathbb{R}^k$  offen und  $\omega = f \cdot dx^1 \wedge \dots \wedge dx^k$  eine  $k$ -Form in  $U$  mit  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ .  $\omega$  heißt über die Teilmenge  $A \subset U$  **integrierbar**, wenn  $f$  über  $A$  im gewöhnlichen Riemannschen Sinne integrierbar ist. Man setzt dann

$$\int_A \omega := \int_A f(x) dx = \int_A f(x^1, \dots, x^k) dx^1 \dots dx^k \quad (11.13)$$

Bei der Integration spielt die Orientierung eine Rolle. Zunächst zeigen wir das folgende Lemma.

### Lemma 11.22

Seien  $U, V \subset \mathbb{R}^k$  offen und  $\varphi : U \rightarrow V$  ein Diffeomorphismus.  $\omega$  sei eine stetige  $k$ -Form auf  $V$  und  $A \subset U$  kompakt. Dann gilt:

$$\begin{aligned}\int_{\varphi(A)} \omega &= \int_A \varphi^*\omega && \text{falls } \varphi \text{ orientierungserhaltend ist, d.h. } \det \varphi' > 0 \text{ in } U \\ \int_{\varphi(A)} \omega &= - \int_A \varphi^*\omega && \text{falls } \varphi \text{ orientierungsumkehrend ist, d.h. } \det \varphi' < 0 \text{ in } U\end{aligned}$$

### Beweis

Für  $\omega = f \cdot dx^1 \wedge \dots \wedge dx^k$  ist (hier ohne Beweis)

$$\varphi^*\omega = (f \circ \varphi) \cdot d\varphi^1 \wedge \dots \wedge d\varphi^k \stackrel{!}{=} (f \circ \varphi) \cdot \det \varphi' \cdot dx^1 \wedge \dots \wedge dx^k$$

Damit folgt nach der Transformationsformel für Mehrfachintegrale

$$\int_{\varphi(A)} \omega = \int_{\varphi(A)} f(x) dx = \int_A f(\varphi(x)) \cdot |\det \varphi'(x)| dx = \int_A \varphi^* \omega \cdot \text{sign}(\det \varphi'(x))$$

■

Sei  $M$  eine  $k$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit des  $\mathbb{R}^n$ .  $\omega$  sei eine  $r$ -Form auf  $M$ , also eine Abbildung  $\omega : x \in M \mapsto \omega(x) \in \bigwedge^r T_x^* M$ , d.h.  $\omega(x)$  ist eine alternierende Multilinearform über dem Tangentialraum  $T_x M$ .

Am einfachsten ist es, wenn  $U \subset \mathbb{R}^n$  offen und  $M \subset U$  ist.  $\omega$  ist eine  $r$ -Form in  $U$ . Dann wird  $\omega$  auf  $M$  eingeschränkt. Für  $\omega = \sum_{i_1 < \dots < i_r} f_{i_1 \dots i_r} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_r}$  sind die  $f_{i_1 \dots i_r}$  in ganz  $U$  definiert, wenn aber nur für  $p \in M$  betrachtet. Obwohl  $\omega(p)$  dann für alle  $r$ -Tupel  $x_1, \dots, x_r \in \mathbb{R}^n$  definiert wäre, wird  $\omega(p)$  nur auf  $x_1, \dots, x_r \in T_p M$  angewendet. Da  $\dim T_p M = k$ , existieren nur für  $r \leq k$  nichttriviale Formen. Mit  $\Omega^r(M)$  soll die Menge aller  $r$ -Formen auf  $M$  bezeichnet werden.

Als nächstes soll  $\int_A \omega$  für  $\omega \in \Omega^k(M)$  definiert werden. Hierbei ist  $M$  eine  $k$ -dimensionale orientierte Untermannigfaltigkeit des  $\mathbb{R}^n$  und  $A \subset M$  kompakt. Die Definition geschieht in zwei Schritten:

1. Angenommen, es existiert eine positiv orientierte (d.h. orientierungserhaltende) lokale Parameterdarstellung  $\Phi : T \subset \mathbb{R}^k \rightarrow \Phi(T) \subset M$  mit  $A \subset \Phi(T)$ . Dann ist

$$\int_A \omega := \int_{\Phi^{-1}(A)} \Phi^* \omega \quad (11.14)$$

Analog zu Lemma 11.21 zeigt man, dass diese Definition von der Parameterdarstellung unabhängig ist, d.h. wenn  $\Phi_1 : T_1 \rightarrow \Phi_1(T_1) \supset A$  eine andere positiv orientierte Parameterdarstellung ist, dann gilt

$$\int_{\Phi^{-1}(A)} \Phi^* \omega = \int_{\Phi_1^{-1}(A)} \Phi_1^* \omega$$

2. Wenn  $A$  nicht in einem Kartengebiet enthalten ist, dann verwendet man wie in 11.1 die Zerlegung der Eins. Da  $A$  kompakt ist, ist  $A$  in der Vereinigung endlich vieler Kartengebiete enthalten. Also enthält die Zerlegung der Eins nur endlich viele Funktionen. Nach dem ersten Schritt ist das Integral von  $\omega$  über  $A$  dann durch eine endliche Summe definiert.

## Zusammenfassung

1. Sei  $T \subset \mathbb{R}^k$  offen,  $\omega = f \cdot dt^1 \wedge \dots \wedge dt^k \in \Omega^k(T)$  und  $B \subset T$  kompakt.

$$\int_B \omega := \int_B f(t) dt$$

Rechts steht ein R-Integral einer Funktion von  $k$  Variablen.

2. Sei  $U \subset \mathbb{R}^n$  offen,  $M \subset U$  eine  $k$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit,  $\omega \in \Omega^k(M)$  (genauer:  $\omega \in \Omega^k(U)$ , eingeschränkt auf  $M$ ) und  $A \subset M$  kompakt.



Fall (a) Es gibt eine positiv orientierte Parametrisierung  $\Phi : T \subset \mathbb{R}^k \rightarrow \Phi(T) \subset M$  mit  $A \subset \Phi(T)$ .

$$\begin{aligned}\omega &= \sum_{i_1 < \dots < i_k} f_{i_1 \dots i_k} \cdot dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} \\ \Phi^* \omega &= f \cdot dt^1 \wedge \dots \wedge dt^k && \text{(erklärt in } B := \Phi^{-1}(A)) \\ \int_A \omega &= \int_B \Phi^* \omega = \int_B f(t) dt\end{aligned}$$

Fall (b) Es gibt kein solches  $\Phi$ : Wende die Zerlegung der Eins an.

## 11.5 Der allgemeine Stokes'sche Integralsatz

Wir benötigen Mannigfaltigkeiten mit Rand, denn der Satz lautet für  $M$  mit dem Rand  $\partial M$ :

$$\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega$$

Der noch zu erklärende Rand einer Mannigfaltigkeit ist streng zu unterscheiden vom sogenannten topologischen Rand der Menge  $M$ . Diesen Rand kennen wir schon.

**Beispiel 11.7** für den Unterschied zwischen topologischem und Mannigfaltigkeitsrand

1.  $K$  sei eine abgeschlossene Kreisscheibe im  $\mathbb{R}^2$ . Deren topologischer Rand, die äußere Begrenzungslinie der Scheibe, ist auch deren Mannigfaltigkeitsrand. Dieselbe Scheibe als offene Menge hat denselben topologischen Rand, aber keinen Rand als Mannigfaltigkeit.
2.  $Z$  sei ein Zylinder im  $\mathbb{R}^3$  ohne oberen und unteren Deckel. Im topologischen Sinne ist der Rand von  $Z$  gerade  $Z$  selber. Als zweidimensionale Mannigfaltigkeit sind die Begrenzungslinien des oberen und unteren Deckels der Rand von  $Z$ .

Es muss also eine Definition des Randes einer Mannigfaltigkeit gefunden werden. Der gewünschte Rand soll eine Mannigfaltigkeit einer um 1 niedrigeren Dimension sein und bei einer orientierten Mannigfaltigkeit ebenfalls orientiert sein.

Wir setzen

$$\begin{aligned}\mathbb{R}_-^k &= \{(t^1, \dots, t^k) \in \mathbb{R}^k : t_1 \leq 0\} = \mathbb{R}_- \times \mathbb{R}^{k-1} \\ \partial \mathbb{R}_-^k &= \{(t^1, \dots, t^k) \in \mathbb{R}^k : t_1 = 0\} = \{0\} \times \mathbb{R}^{k-1}\end{aligned}$$

Eine Teilmenge  $T \subset \mathbb{R}_-^k$  heißt **offen bezüglich**  $\mathbb{R}_-^k$ , wenn eine offene Menge  $T' \subset \mathbb{R}^k$  existiert mit  $T = T' \cap \mathbb{R}_-^k$ . Das heißt,  $T$  ist entweder bereits offen oder lässt sich in  $\mathbb{R}^k \setminus \mathbb{R}_-^k$  so fortsetzen, dass eine offene Menge entsteht.

### Definition 11.23

Eine Menge  $M \subset \mathbb{R}^n$  heißt  **$k$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit mit Rand**, wenn es um jeden Punkt  $p \in M$  eine lokale Parameterdarstellung (bzw. Karte)

$$\Phi : T \rightarrow W = \Phi(T) \subset M \quad \text{mit} \quad p \in \Phi(T)$$

gibt, wobei  $T$  offen in  $\mathbb{R}_-^k$  sein muss. Der Punkt  $p$  heißt **Randpunkt** von  $M$ , wenn  $p = \Phi(t)$  mit  $t \in T \cap \partial \mathbb{R}_-^k$ , d.h.  $t = (0, t^2, \dots, t^k)$ . Die Menge aller Randpunkte von  $M$  wird mit  $\partial M$  bezeichnet. Parameterdarstellungen  $\Phi$  mit  $T \cap \partial \mathbb{R}_-^k \neq \emptyset$  heißen **randadaptiert** (analog für Karten  $(W, \Phi^{-1})$ ).

**Satz 11.24**

Sei  $M$  eine berandete Mannigfaltigkeit der Dimension  $k$ .

1.  $\partial M$  ist eine  $(k-1)$ -dimensionale Mannigfaltigkeit ohne Rand.
2. Ist  $M$  orientierbar, dann auch der Rand  $\partial M$  (und zwar in kanonischer Weise).

**Beweis**

hier nicht, nur das Konzept

Sei  $p \in \partial M$  und  $(\Phi, T)$  eine lokale Parameterdarstellung um  $p$ . Wir betrachten die Menge  $\hat{T} := \{u \in \mathbb{R}^{k-1} : (0, u) \in T\}$  mit  $\hat{\Phi}(u) = \Phi(0, u)$ . Dann ist  $(\hat{\Phi}, \hat{T})$  eine lokale Parameterdarstellung um  $p \in \partial M$  als  $(k-1)$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit. Für  $\partial M$  gibt es jetzt keine randadaptierten Parameterdarstellungen mehr, also ist  $\partial(\partial M) = \emptyset$ . ■

## Orientierung des Randes

„**Kanonische Orientierung**“ bedeutet, dass  $\partial M$  die im Folgenden beschriebene von  $M$  **induzierte Orientierung** trägt.

Sei  $p \in \partial M$  und  $(\Phi, T)$  eine randadaptierte Parameterdarstellung um  $p$ .  $\Phi$  soll immer in  $T$  (bzw. in  $T'$ , der Erweiterung von  $T$  auf  $\mathbb{R}^k$ ) stetig differenzierbar sein. Dann ist die Ableitung eine lineare Abbildung  $\Phi'(t) : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Den Vektor  $v = \Phi'(t)(e_1) \in T_p M$  nennt man **nach außen zeigend**. Wir nennen eine Basis  $(w_1, \dots, w_{k-1})$  von  $T_p(\partial M)$  **positiv orientiert**, wenn  $(v, w_1, \dots, w_{k-1})$  in  $T_p M$  positiv orientiert ist.

*Wichtiger Spezialfall:* Sei  $M = \mathbb{R}_-^k$ , dann ist  $\partial M = \partial \mathbb{R}_-^k$  die durch  $\{t : t^1 = 0\}$  beschriebene  $(k-1)$ -dimensionale Hyperebene. In jedem Punkt ist der äußere Normaleneinheitsvektor gerade  $e_1 = (1, 0, \dots, 0)$ . Der Rand  $\partial \mathbb{R}_-^k$  kann durch eine einzige Parameterdarstellung beschrieben werden:

$$\Phi : \begin{cases} \mathbb{R}^{k-1} & \rightarrow \partial \mathbb{R}_-^k \\ t = (t^1, \dots, t^{k-1}) & \mapsto (0, t^1, \dots, t^{k-1}) \end{cases}$$

Dann entspricht  $n = e_1$  der positiven Orientierung.

*Wiederholung:* Für Funktionen  $f$  definiert man den Träger

$$\text{supp } f := \overline{\{x \in D(f) : f(x) \neq 0\}}$$

**Beispiel 11.8**

Für  $f(x) := \begin{cases} 1 & x \in (a, b) \\ 0 & x \notin (a, b) \end{cases}$  ist  $\text{supp } f = [a, b]$ . Bei  $x = a$  und  $x = b$  verschwindet die Fkt. auch im Träger!

Analog setzt man für eine Differentialform  $\omega \in \Omega^k(M)$ :

$$\text{supp } \omega := \overline{\{p \in M : \omega(p) \neq 0\}}$$

Der nächste Satz ist der Satz von Stokes für den Halbraum  $\mathbb{R}_-^k$ . Der allgemeine Fall wird hierauf zurückgeführt.

**Satz 11.25**

Sei  $\omega \in \Omega^{k-1}(\mathbb{R}^k)$  mit kompaktem Träger. Dann gilt

$$\int_{\mathbb{R}_-^k} d\omega = \int_{\partial\mathbb{R}_-^k} \omega \quad (11.15)$$

**Beweis**

Sei  $\omega$  in der Standarddarstellung gegeben:

$$\omega = \sum_{j=1}^k (-1)^{j-1} \cdot f_j \cdot dx^1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx^j} \wedge \dots \wedge dx^k$$

Hierbei bedeutet  $\widehat{dx^j}$ , dass  $dx^j$  weggelassen wird.  $\omega$  hat einen kompakten Träger, d.h. es existiert eine kompakte Menge  $K \subset \mathbb{R}^k$ , außerhalb derer alle  $f_j$  verschwinden. Dann gilt:

$$d\omega = \left( \sum_{j=1}^k \frac{\partial f_j}{\partial x^j} \right) \cdot dx^1 \wedge \dots \wedge dx^k$$

Wir nehmen die oben beschriebene Parameterdarstellung  $\Phi$  für den Rand:

$$\Phi : \begin{cases} \mathbb{R}^{k-1} & \rightarrow \partial\mathbb{R}_-^k \\ t = (t^1, \dots, t^{k-1}) & \mapsto (0, t^1, \dots, t^{k-1}) \end{cases}$$

Dann ist

$$\Phi^* \omega = \sum_{j=1}^k (-1)^{j-1} \cdot (f_j \circ \Phi) \cdot d\Phi^1 \wedge \dots \wedge \widehat{d\Phi^j} \wedge \dots \wedge dx^k \quad (11.16)$$

Aus der Parameterdarstellung folgt sofort:

$$d\Phi^1 = 0 \quad \text{und} \quad d\Phi^j = dt^{j-1} \quad \text{für} \quad j = 2, \dots, k$$

Somit bleibt in (11.16) nur ein Summand:

$$(\Phi^* \omega)(t) = f_1(0, t^1, \dots, t^{k-1}) \cdot dt^1 \wedge \dots \wedge dt^{k-1}$$

Dies setzen wir in (11.14) (Integration von Differentialformen) ein.

$$\int_{\partial\mathbb{R}_-^k} \omega = \int_{\mathbb{R}^{k-1}} \Phi^* \omega = \int_{\mathbb{R}^{k-1}} f_1(0, t^1, \dots, t^{k-1}) dt^1 \dots dt^{k-1} \quad (11.17)$$

Damit haben wir den rechten Teil der Gleichung (11.15) beschrieben und betrachten nun den linken Teil. Beachte:  $\mathbb{R}_-^k = \mathbb{R}_- \times \mathbb{R}^{k-1}$ .

$$\int_{\mathbb{R}_-^k} d\omega = \int_{\mathbb{R}_- \times \mathbb{R}^{k-1}} \left( \sum_{j=1}^k \frac{\partial f_j}{\partial x^j} \right) dx^1 \dots dx^k$$

Außerhalb von  $K$ , also insbesondere im Unendlichen, verschwinden alle  $f_j$ .

$$\int_{\mathbb{R}_-} \frac{\partial f_1}{\partial x^1}(x^1, \dots, x^k) dx^1 = \int_{-\infty}^0 \frac{\partial f_1}{\partial x^1}(x^1, \dots, x^k) dx^1 = f_1(0, x^1, \dots, x^k) - 0$$

Für alle anderen Variablen gilt:

$$\int_{\mathbb{R}_-^k} \frac{\partial f_j}{\partial x^j} dx^1 \dots dx^k = \int_{\mathbb{R}_- \times \mathbb{R}^{k-2}} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial f_j}{\partial x^j} dx^j \right] dx^1 \dots \widehat{dx^j} \dots dx^k$$

Insgesamt bleibt nur der Anteil mit  $f_1$ .

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}_-^k} d\omega &= \int_{\mathbb{R}^{k-1}} f_1(0, x^2, \dots, x^k) dx^2 \dots dx^k \\ &= \int_{\mathbb{R}^k} f_1(0, t^1, \dots, t^{k-1}) dt^1 \dots dt^{k-1} \\ &= \int_{\partial \mathbb{R}_-^k} \omega \end{aligned}$$

■

### Theorem 11.26 Theorem von Stokes

Sei  $M$  eine orientierte  $k$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit des  $\mathbb{R}^n$  mit dem Rand  $\partial M$ , der die induzierte Orientierung trägt. Ferner sei  $\omega$  eine stetig differenzierbare  $(k-1)$ -Form auf  $M$  mit kompaktem Träger. Dann gilt:

$$\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega \quad (11.18)$$

#### Beweis

Wir nehmen zur Vereinfachung o.B.d.A. an, dass eine Paramterdarstellung  $\Phi : T \subset \mathbb{R}^k \rightarrow M$  mit  $\text{supp } \omega \subset \Phi(T)$  gibt. Ansonsten müsste man in geeigneter Weise mit der Zerlegung der Eins arbeiten.

Wir setzen den Rücktransport  $\Phi^*\omega$  (dessen Träger in  $T$  enthalten ist) auf ganz  $\mathbb{R}_-^k$  mit Null fort zu einer stetig differenzierbaren Differentialform. Da  $M$  berandet ist, gibt es für  $T$  zwei Möglichkeiten:

1.  $T$  ist offen in  $\mathbb{R}_-^k$  und  $T \cap \partial \mathbb{R}_-^k = \emptyset$  (d.h.  $\partial M \cap \Phi(T) = \emptyset$ )
2.  $T$  ist offen in  $\mathbb{R}_-^k$  und  $T \cap \partial \mathbb{R}_-^k \neq \emptyset$  (d.h.  $\partial M \cap \Phi(T) \neq \emptyset$ )

Im ersten Fall hat  $\text{supp } \omega$  mit  $\partial M$  keinen Schnitt, also ist in (11.15) das rechte Integral Null. Nach dem Beweis von Satz 11.24 ist auch die linke Seite Null. Im zweiten Fall gilt, da  $\Phi^*\omega$  auf ganz  $\mathbb{R}_-^k$  fortgesetzt wurde:

$$\int_M d\omega = \int_{\Phi(T)} d\omega = \int_T \Phi^*(d\omega)$$

Die äußere Ableitung kann man mit dem Rücktransport vertauschen.

$$= \int_T d(\Phi^*\omega) = \int_{\mathbb{R}_-^k} d(\Phi^*\omega) = \left( \begin{array}{c} \text{Satz} \\ 11.24 \end{array} \right) = \int_{\partial \mathbb{R}_-^k} \Phi^*\omega = \int_{\partial T} \Phi^*\omega = \int_{\Phi(\partial T)} \omega = \int_{\partial M} \omega$$

■

Den Stokesschen Satz kann man auch in anderen Varianten dargestellt werden, zum Beispiel: Sei  $M$  kompakt mit Rand und  $\omega$  eine stetig differenzierbare Form auf  $M$ . Dann gilt Formel (11.18).

## Die klassischen Integralsätze

1. Sei  $n = 2$  und  $k = 2$ .

$$\omega = P \cdot dx + Q \cdot dy \quad \Rightarrow \quad d\omega = \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \cdot dx \wedge dy$$

Daraus folgt der Satz von Gauß/Green/Stokes im  $\mathbb{R}^2$ :

$$\int_M \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \int_{\partial M} (P dx + Q dy)$$

2. Sei  $n = 3$  und  $k = 3$ .

$$\omega = P \cdot dy \wedge dz + Q \cdot dz \wedge dx + R \cdot dx \wedge dy \quad \Rightarrow \quad d\omega = \left( \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) \cdot dx \wedge dy \wedge dz$$

Daraus folgt mit (11.18) der Satz von Gauß im  $\mathbb{R}^3$ .

In der Physik zieht man eine andere Schreibweise vor: Sei  $\vec{v} = (P, Q, R)^T$  und  $d\vec{S} = dS \cdot \vec{n}$  ( $dS$  ist das übliche skalare Flächenelement und  $\vec{n}$  das äußere Normaleneinheitsfeld der Oberfläche).

$$\int_M \operatorname{div} \vec{v} dV = \int_{\partial M} \langle \vec{v}, d\vec{S} \rangle = \int_{\partial M} \langle \vec{v}, \vec{n} \rangle dS$$

3. Sei  $n = 3$  und  $k = 2$ .

$$\begin{aligned} \omega &= P \cdot dx + Q \cdot dy + R \cdot dz \\ \Rightarrow d\omega &= \left( \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \cdot dy \wedge dz + \left( \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \cdot dz \wedge dx + \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \cdot dx \wedge dy \end{aligned}$$

Daraus folgt mit (11.18) der Satz von Stokes im  $\mathbb{R}^3$ . In vektorieller Schreibweise lautet dieser:

$$\int_M \langle \operatorname{rot} \vec{v}, d\vec{S} \rangle = \int_M \langle \operatorname{rot} \vec{v}, \vec{n} \rangle dS = \int_{\partial M} \langle \vec{v}, dx \rangle = \int_{\partial M} \langle \vec{v}, \vec{t} \rangle ds$$

Hierbei ist  $\vec{t}$  das Tangentialvektorfeld an der Kurve  $\partial M$ .

# 12 Gewöhnliche Differentialgleichungen

## 12.1 Terminologie und Problemstellungen

Bei einer gewöhnlichen Differentialgleichung sind Funktionen einer Variablen gesucht. Im Gegensatz hierzu stehen die partiellen Differentialgleichungen, die Funktionen mehrerer Variablen beinhalten.

Sei  $F$  eine gegebene Funktion auf einem Gebiet  $G \subset \mathbb{R}^{n+2}$ . Für eine Funktion  $x = x(t)$  heißt

$$F(t, x, \dot{x}, \dots, x^{(n)}) = 0 \quad \forall t \in I \subset \mathbb{R} \quad (12.1)$$

**gewöhnliche Differentialgleichung**  $n$ -ter Ordnung in **impliziter Form**. Existiert ein  $f$  mit

$$x^{(n)} = f(t, x, \dot{x}, \dots, x^{(n-1)}) \quad \forall t \in I \subset \mathbb{R}, \quad (12.2)$$

so spricht man von einer gewöhnlichen Differentialgleichung  $n$ -ter Ordnung in **expliziter Form**.

Hat man  $k$  gesuchte Funktionen  $x_1, \dots, x_k$  und dazu (in der Regel)  $n$  Funktionen bzw. Gleichungen der Art (12.1) bzw. (12.2), so spricht man von einem **System gewöhnlicher Differentialgleichungen**.

Eine **Lösung** einer Differentialgleichung ist eine in einem *offenen Intervall*  $I$  definierte, hinreichend oft stetig differenzierbare Funktion  $x$ , die in diesem Intervall die Differentialgleichung erfüllt. Unter einem **Anfangswertproblem** (AWP) für (12.1) oder (12.2) versteht man folgende Aufgabe: Man bestimme eine Lösung von (12.1) bzw. (12.2), die den folgenden **Anfangsbedingungen** genügt.

$$x(t_0) = x_0 \quad \dot{x}(t_0) = x_1 \quad \dots \quad x^{(n-1)}(t_0) = x_{n-1}$$

Hierbei ist  $t_0 \in I$  ( $I$  heißt **Existenzintervall** der Lösung). Die  $x_1, \dots, x_{n-1}$  sind  $n$  vorgegebene Zahlen (Anfangswerte). Nach Hadamard spricht man von einem korrekt gestellten Problem, wenn das Anfangswertproblem eine eindeutige Lösung hat, die stetig von den Anfangswerten abhängt.

## 12.2 Elementare Lösungsmethoden

### 12.2.1 Differentialgleichungen mit getrennten Variablen

Betrachte  $\dot{x} = f(x) \cdot g(t)$  bzw. (andere Schreibweise)  $a(t) + b(x) \cdot \dot{x} = 0$ . Für  $f(x) \neq 0$  ist

$$\frac{\dot{x}}{f(x)} = g(t)$$

Sind  $F$  und  $G$  Stammfunktionen von  $1/f$  und  $g$ , dann ist die Differentialgleichung äquivalent zu

$$F(x) = G(t) + C \quad \text{mit} \quad C \in \mathbb{R},$$

denn wenn man dies nach  $t$  ableitet, erhält man

$$F'(x) \cdot \dot{x} = G'(t) \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{f} \cdot \dot{x} = g$$

Kann man die Gleichung  $F(x) = G(t) + C$  in einem offenen Intervall nach  $x$  auflösen, dann hat man eine (von  $C$  abhängige) Schar von Lösungen der Differentialgleichung gefunden. Die Lösung eines Anfangswertproblems läuft auf die Bestimmung von  $C$  hinaus.

**Beispiel 12.1**  $\dot{x} + t \cdot x^2 = 0$  mit Anfangswertproblem  $x(0) = 2$

$x \equiv 0$  ist eine Lösung der Differentialgleichung, nicht jedoch des Anfangswertproblems. Sei nun  $x \neq 0$ .

$$\begin{aligned} -\frac{dx}{x^2} &= t \cdot dt \\ &\downarrow \text{ (Stammfunktion) } \\ \frac{1}{x} &= \frac{1}{2}t^2 + C' \\ \Rightarrow x(t) &= \frac{2}{t^2 + C} \quad \text{mit} \quad C = 2C' \end{aligned}$$

Das Anfangswertproblem kann nun gelöst werden:

$$\begin{aligned} 2 = x(0) &= \frac{2}{0+C} \\ C &= 1 \\ x(t) &= \frac{2}{t^2+1} \end{aligned}$$

Ein anderes Anfangswertproblem wäre zum Beispiel  $x(0) = -2$ . Dann ist  $C = -1$  und somit

$$x(t) = \frac{2}{t^2 - 1} \quad \forall t \neq \pm 1$$

Diese Formel liefert im Sinne unserer Lösungsdefinition drei Lösungen der Differentialgleichung, nämlich jeweils in  $(-\infty, -1)$ ,  $(-1, 1)$  und  $(1, \infty)$ . Allerdings löst (wegen  $t_0 \in I$ ) nur eine dieser Lösungen auch das Anfangswertproblem, nämlich die zweite.

## 12.2.2 Lineare Differentialgleichungen

Eine lineare Differentialgleichung erster Ordnung ist von der Form

$$\dot{x} + f(t) \cdot x = g(t) \quad (12.3)$$

$f$  und  $g$  seien auf einem lokalen Intervall  $I$  definiert und mindestens stetig. Die Funktion  $g$  heißt **inhomogener Anteil**. Verschwindet dieser Anteil, so heißt die Gleichung **homogen**:

$$\dot{x} + f(t) \cdot x = 0 \quad (12.3h)$$

(12.3h) kann man durch Trennung der Variablen lösen: Sei  $F$  eine Stammfunktion von  $f$ .

$$\frac{dx}{x} = -f(t) \cdot dt \quad \Rightarrow \quad \log x = -F(t) + C'$$

Man unterscheide wegen des Logarithmus die Fälle  $x < 0$  und  $x > 0$ . Man erhält schließlich:

$$x(t) = C \cdot e^{-F(t)} = C \cdot e^{-\int f(t)dt} \quad (12.4)$$

$C$  kommt von  $C = e^{C'}$ , das Vorzeichen kann sich aber ändern, um dem Anfangswertproblem zu genügen. Die Lösung  $x = 0$  ist durch  $C = 0$  erfasst.

Die inhomogene Differentialgleichung (12.3) kann nun mittels **Variation der Konstanten** gelöst werden. Der Ansatz gleicht (12.4), jetzt ist aber  $C = C(t)$ .

$$\begin{aligned} x(t) &= C(t) \cdot e^{-F(t)} \\ \dot{x}(t) &= \dot{C}(t) \cdot e^{-F(t)} - C(t) \cdot \dot{F}(t) \cdot e^{-F(t)} \\ \dot{x}(t) &= \dot{C}(t) \cdot e^{-F(t)} - \textcolor{brown}{C}(t) \cdot f(t) \cdot \textcolor{brown}{e}^{-F(t)} \end{aligned}$$

Beachte (12.3):

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &\stackrel{!}{=} -f(t) \cdot \textcolor{brown}{x}(t) + g(t) \\ \Rightarrow \dot{C}(t) \cdot e^{-F(t)} &= g(t) \\ \dot{C}(t) &= g(t) \cdot e^{F(t)} \\ C(t) &= \int g(t) \cdot e^{F(t)} dt + D \end{aligned}$$

Damit lautet die Lösung von (12.3):

$$x(t) = \left( \int e^{F(t)} \cdot g(t) dt + D \right) \cdot e^{-F(t)} = D \cdot e^{-F(t)} + e^{-F(t)} \int e^{F(t)} \cdot g(t) dt \quad (12.5)$$

Bemerkung

Folgerungen

1. Man sieht aus (12.5) die Struktur der Lösung der inhomogenen Differentialgleichung:

$$\begin{aligned} &\text{allgemeine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung} \\ &= \text{allgemeine Lösung der homogenen Differentialgleichung} \\ &+ \text{spezielle Lösung der inhomogenen Differentialgleichung} \end{aligned}$$

Die spezielle Lösung lautet  $x_s(t) = e^{-F(t)} \int e^{F(t)} \cdot g(t) dt$ .

2. Für beliebige  $t_0 \in I$  und  $x_0 \in \mathbb{R}$  hat das Anfangswertproblem  $x(t_0) = x_0$  die Lösung

$$x(t) = e^{-\hat{F}(t)} \cdot \left[ x_0 + \int_{t_0}^t e^{\hat{F}(\tau)} \cdot g(\tau) d\tau \right] \quad \text{mit} \quad \hat{F}(t) = \int_{t_0}^t f(\tau) d\tau$$

3. Zum Superpositionsprinzip: Die Lösungen der homogenen Differentialgleichung bilden einen Vektorraum. Außerdem: Sind  $x_1$  und  $x_2$  Lösungen der inhomogenen Differentialgleichung, so ist  $x_1 - x_2$  eine Lösung der homogenen Differentialgleichung.

### Beispiel 12.2

$\dot{x} - 2t \cdot x = (2t - 1) \cdot e^t$  mit Anfangswertproblem  $x(0) = 2$

Die homogene Differentialgleichung  $\dot{x} - 2t \cdot x = 0$  wird durch  $x(t) = C \cdot e^{t^2}$  gelöst. Für die inhomogene Differentialgleichung verwenden wir deswegen den Ansatz  $x(t) = C(t) \cdot e^{t^2}$ .

$$\begin{aligned} = \dots = \dot{C}(t) &= e^{-t^2} \cdot (2t - 1) \cdot e^t = (2t - 1) \cdot e^{t-t^2} \\ C(t) &= -e^{t-t^2} + D \\ \stackrel{(\text{AWP})}{\Rightarrow} 2 &= D - 1 \Rightarrow D = 3 \end{aligned}$$

Bemerkung

zur Trennung der Variablen

$\dot{x}(t) = f(x) \cdot g(t)$  – Existiert ein  $x_1$  mit  $f(x_1) = 0$ , dann ist  $x$  mit  $x(t) = x_1 \forall t$  eine (konstante) Lösung der Differentialgleichung.



# 13 Existenz- und Eindeutigkeitssätze

## 13.1 Vorbereitungen, Banachscher Fixpunktsatz

*Wiederholung:* Sei  $(M, d)$  ein metrischer Raum.  $(M, d)$  heißt vollständig, wenn jede Cauchyfolge aus  $M$  einen Grenzwert in  $M$  besitzt. Das heißt: Ist  $(x_n)$  eine Cauchyfolge ( $d(x_n, x_m) \rightarrow 0$  für  $n, m \rightarrow \infty$ ), dann existiert ein  $x \in M$  mit  $d(x, x_n) \rightarrow 0$ . Eine Teilmenge  $A \subset M$  heißt abgeschlossen, wenn  $M \setminus A$  offen ist. Das heißt: Jeder Häufungspunkt von  $A$  gehört zu  $A$ .

Sei  $B \subset M$ . Eine Abbildung  $T : B \rightarrow B$  heißt **kontrahierend**, wenn es ein  $q \in [0, 1)$  gibt mit

$$d(Tx, Ty) \leq q \cdot d(x, y) \quad \forall x, y \in B$$

**Theorem 13.1** Banachscher Fixpunktsatz

Sei  $A$  eine abgeschlossene Teilmenge eines vollständigen metrischen Raumes  $(M, d)$  und  $T : A \rightarrow A$  eine kontrahierende Abbildung. Dann existiert *genau ein* Fixpunkt  $x_0 \in A$  für  $T$ , d.h.  $Tx_0 = x_0$ .

### Beweis

*Eindeutigkeit:* Seien  $x_0 \neq y_0$  zwei Fixpunkte, also ist  $Tx_0 = x_0$  und  $Ty_0 = y_0$ .

$$d(x_0, y_0) = d(Tx_0, Ty_0) \leq q \cdot d(x_0, y_0) < d(x_0, y_0) \quad \Rightarrow \quad x_0 = y_0$$

Dies ist ein Widerspruch zu  $x_0 \neq y_0$ .

*Existenz:* Der Beweis erfolgt konstruktiv durch das Verfahren der sukzessiven Approximation. Sei  $x_1 \in A$  ein beliebiger Startpunkt. Bilde nun eine Folge durch  $x_{n+1} := Tx_n$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ . Wir müssen zwei Behauptungen zeigen.

1. Die  $(x_n)$  ist eine Cauchyfolge. Im ersten Schritt betrachten wir benachbarte  $x_n$ .

$$\begin{aligned} d(x_{n+1}, x_n) &= d(Tx_n, Tx_{n-1}) &\leq q \cdot d(x_n, x_{n-1}) \\ &= q \cdot d(Tx_{n-1}, Tx_{n-2}) &\leq q^2 \cdot d(x_{n-1}, x_{n-2}) \\ \dots &\leq q^{n-1} \cdot d(x_2, x_1) \end{aligned}$$

Daraus folgt für beliebige  $m, n$  (o.E.d.A.  $m < n$ ):

$$\begin{aligned} d(x_n, x_m) &\leq \text{(mehrmalige Anwendung der Dreiecksungleichung)} \\ &\leq d(x_n, x_{n-1}) + d(x_{n-1}, x_{n-2}) + \dots + d(x_{m-1}, x_m) \\ &\leq \text{(mit obiger Abschätzung)} \\ &\leq (q^{n-2} + \dots + q^{m-1}) \cdot d(x_2, x_1) \\ &= q^{m-1} \cdot \underbrace{(1 + q + q^2 + \dots + q^{m-1})}_{\leq \text{Summe der geometr. Reihe}} \cdot d(x_2, x_1) \end{aligned}$$

und schließlich

$$d(x_n, x_m) \leq \frac{q^{m-1}}{1-q} \cdot d(x_2, x_1) \rightarrow 0 \quad \text{für } m, n \rightarrow \infty \quad (13.1)$$

Also ist  $(x_n)$  eine Cauchyfolge. Da  $M$  vollständig ist, existiert ein  $x_0 \in M$  mit  $x_n \rightarrow x_0$ . Da  $x_n \in A$  und  $x_0$  somit ein Häufungspunkt der abgeschlossenen Menge  $A$  ist, folgt  $x_0 \in A$ .

2.  $x_0$  ist ein Fixpunkt. Beachte:  $T$  ist (wie alle kontrahierende Abbildungen) stetig.

$$d(x_n, Tx_0) = d(Tx_{n-1}, Tx_0) \leq q \cdot d(x_{n-1}, x_0) \rightarrow 0$$

Somit ist  $Tx_0$  ein Grenzwert von  $(x_n)$ . Da auch  $x_0$  ein solcher ist und der Grenzwert eindeutig bestimmt ist, ist  $x_0 = Tx_0$ . ■

### Folgerung 13.2 Fehlerabschätzung

Für den Fehler der Approximation gilt:

$$d(x_m, x_0) \leq \frac{q^{m-1}}{1-q} \cdot d(x_2, x_1)$$

### Definition 13.3

Sei  $f : G \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion in den Variablen  $t$  und  $x$ . Man sagt,  $f$  ist in  $G$  bezüglich  $x$  **lipschitzstetig** (oder: genügt bezüglich  $x$  einer **Lipschitzbedingung**), wenn es ein  $L > 0$  gibt mit

$$|f(t, x_1) - f(t, x_2)| \leq L \cdot |x_1 - x_2| \quad \forall (t, x_1), (t, x_2) \in G$$

Unser Ziel ist ein Existenz- und Eindeutigkeitssatz für Anfangswertprobleme.

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}(t) &= f(t, x) \\ x(t_0) &= x_0 \end{aligned} \right\} \quad (13.2)$$

Wir wollen den Banachschen Fixpunktsatz anwenden. Die Idee ist, (13.2) in ein äquivalentes Problem umzuwandeln, das für die Anwendung des Fixpunktsatzes gut geeignet ist. Angenommen,  $x$  sei eine Lösung von (12.1) im Intervall  $J = [\alpha, \beta] \subset [a, b]$ . Für alle  $t \in J$  gilt dann:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= f(t, x(t)) \\ \int_{t_0}^t \dot{x}(t) \, dt &= \int_{t_0}^t f(s, x(s)) \, ds \\ x(t) - x_0 &= \int_{t_0}^t f(s, x(s)) \, ds \end{aligned}$$

Damit ist

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s)) \, ds \quad (13.3)$$

## 13.2 Der Satz von Picard-Lindelöf. Weitere Existenzsätze

### Theorem 13.4 Existenz- und Eindeutigkeitsatz von Picard-Lindelöf

Betrachte das Anfangswertproblem (13.2). Die Funktion  $f$  sei

1. auf dem Rechteck  $Q = \{(t, x) \in \mathbb{R}^2 : |t - t_0| \leq a \wedge |x - x_0| \leq b\}$  stetig
2. auf  $Q$  durch  $M$  beschränkt, d.h. es ist  $|f(t, x)| \leq M$  für alle  $(t, x) \in Q$ .
3. auf  $Q$  bezüglich  $x$  Lipschitzstetig mit der Lipschitzkonstante  $L$ .

Dann existiert genau eine Lösung des Anfangswertproblems (13.2). Genauer: Es existiert ein Intervall  $J = \{t \in \mathbb{R} : |t - t_0| \leq \sigma\}$ , auf dem genau eine Lösung existiert. Man kann wählen:

$$\sigma < \min \left\{ a, \frac{b}{M}, \frac{1}{L} \right\}$$

#### Bemerkung

Die genaue Abschätzung von  $\sigma$  ist nicht der wesentliche Punkt. Sie ergibt sich sofort aus dem Beweis.

#### Beweis

Wir wenden den Banachschen Fixpunktsatz wie folgt an: Der metrische Raum sei  $C(J)$ , dieser ist mit der Supremumsnorm vollständig.

$$A := \{x \in C(J) : \|x - x_0\| = \sup_{t \in J} |x(t) - x_0| \leq b\}$$

Zu der abgeschlossenen Menge  $A$  gehören nur solche stetigen Funktionen, die im Intervall  $J$  noch in  $Q$  verbleiben. Wir betrachten die folgende Abbildung  $T$  (siehe Formel (13.3)):

$$(Tx)(t) := x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s)) \, ds \quad \forall x \in A, t \in J$$

Genau dann, wenn  $x$  eine Lösung von (13.3) ist, ist  $x = Tx$ . Das heißt,  $x$  ist ein Fixpunkt von  $T$  und somit eine Lösung von (13.2). Zu zeigen sind:

1.  $T$  bildet  $A$  in  $A$  ab.

$$\begin{aligned} |(Tx)(t) - x_0| &= \left| \int_{t_0}^t f(s, x(s)) \, ds \right| \leq \int_{t_0}^t \underbrace{|f(s, x(s))|}_{\leq M} \, ds \leq M \cdot \underbrace{|t - t_0|}_{\leq \sigma} \leq b \\ \Rightarrow \|Tx - x_0\| &\leq b \end{aligned}$$

2.  $T$  ist kontraktiv: Seien  $x, y \in A$ .

$$\begin{aligned} |(Tx)(t) - (Ty)(t)| &\leq \int_{t_0}^t |f(s, x(s)) - f(s, y(s))| \, ds \\ &\leq \int_{t_0}^t L \cdot |x(s) - y(s)| \, ds \\ &\leq L \cdot \sup_{s \in J} |x(s) - y(s)| \cdot \int_{t_0}^t ds \\ &\leq L \cdot \|x - y\| \cdot |t - t_0| \leq q \cdot \|x - y\| \\ \Rightarrow \|Tx - Ty\| &\leq q \cdot \|x - y\| \end{aligned}$$

Wegen  $\sigma < 1/L$  ist  $0 < q = L \cdot \sigma < 1$ .

Damit ist der Banachsche Fixpunktsatz anwendbar. Folglich besitzt  $T$  genau einen Fixpunkt und somit (13.2) genau eine Lösung. Die Lösung könnte man (wie beim Beweis des Fixpunktsatzes) durch sukzessive Approximation finden. ■

Wir formulieren den Satz von Picard-Lindelöf auch für Differentialgleichungen und Differentialgleichungssysteme  $n$ -ter Ordnung.

1. Differentialgleichungen  $n$ -ter Ordnung mit Anfangswertproblem

$$\left. \begin{aligned} x^{(n)}(t) &= f(t, x, \dot{x}, \dots, x^{(n-1)}) \\ x(t_0) &= x_0 \quad \dots \quad x^{(n-1)}(t_0) = x_{n-1} \\ x_0, x_1, \dots, x_{n-1} &\in \mathbb{R} \text{ gegeben} \end{aligned} \right\} \quad (13.4)$$

2. Systeme von Differentialgleichungen  $n$ -ter Ordnung mit Anfangswertproblem: Sei  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_k)$  und  $\mathbf{f} = (f_1, \dots, f_k)$ . Die Ableitungen heißen  $\mathbf{x}^{(i)} = (x_1^{(i)}, \dots, x_k^{(i)})$ .

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{x}^{(n)}(t) &= \mathbf{f}(t, \mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, \dots, \mathbf{x}^{(n-1)}) \\ \mathbf{x}(t_0) &= \mathbf{x}_0 \quad \dots \quad \mathbf{x}^{(n-1)}(t_0) = \mathbf{x}_{n-1} \\ \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{n-1} &\in \mathbb{R}^k \text{ gegeben} \end{aligned} \right\} \quad (13.5)$$

3. Systeme *erster* Ordnung mit Anfangswertproblem

$$\left. \begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{f}(t, \mathbf{x}) \\ \mathbf{x}(t_0) &= \mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^k \end{aligned} \right\} \quad (13.6)$$

4. lineare Systeme erster Ordnung

$$\left. \begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}(t) \cdot \mathbf{x}(t) + \mathbf{b}(t) \\ \text{mit } \mathbf{A}(t) &= (a_{ij}(t)) \in \mathbb{R}^{k \times k} \end{aligned} \right\} \quad (13.7)$$

Für  $\mathbf{b}(t) = 0$  heißt das lineare System **homogen**, andernfalls **inhomogen**. Wenn  $\mathbf{A}$  nicht von  $t$  abhängt, ist (13.7) ein lineares System mit **konstanten Koeffizienten**.

Eine explizit gegebene Differentialgleichung bzw. Differentialgleichungssystem heißt **autonom**, wenn die rechte Seite nicht explizit von  $t$  abhängt.

5. Grob gesprochen benötigt man nur eine Theorie für Systeme erster Ordnung. (13.4) ist äquivalent zu folgendem System erster Ordnung:

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ &\vdots \\ \dot{x}_{n-1} &= x_n \\ \dot{x}_n &= f(t, x_1, \dots, x_n) \end{aligned} \right\} \quad (13.8)$$

Man hat also gesetzt:  $x_1 := x$ ,  $x_2 := \dot{x}$  bis  $x_n := x^{(n-1)}$ . Wie transformieren sich die Anfangswerte? Sei  $\mathbf{y}(t) = (y_1(t), \dots, y_n(t))$  eine Lösung des Systems mit den Anfangswerten

$$\mathbf{y}(t_0) = (y_1^0, \dots, y_n^0) = \mathbf{y}^0$$

Beachtet man, wie man (13.8) aus (13.4) und umgekehrt erhält, so ist  $\mathbf{y}(t)$  von folgender Gestalt:

$$\mathbf{y}(t) = (x(t), \dot{x}(t), \dots, x^{(n-1)}(t))$$

Hierbei ist  $x(t)$  eine Lösung von (13.4) mit den Anfangswerten  $x(t_0) = y_1^0$  bis  $x^{(n-1)}(t_0) = y_n^0$ .

Analog verwandelt man Systeme und Anfangswertprobleme  $n$ -ter Ordnung in Systeme bzw. Anfangswertprobleme erster Ordnung. Wir benötigen nun den Satz von Picard-Lindelöf in einer geeigneten Formulierung für Systeme erster Ordnung. Zur Formulierung bedarf es einer Lipschitzbedingung in „Vektorform“.

### Definition 13.5

Sei  $\mathbf{f} : G \subset \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n$  gegeben (Schreibweise:  $\mathbf{f}(t, \mathbf{x})$  mit  $x \in \mathbb{R}^n$ ).  $\mathbf{f}$  genügt in  $G$  bzgl.  $\mathbf{x}$  einer **Lipschitzbedingung** mit der **Lipschitzkonstante**  $L > 0$ , wenn gilt:

$$\|\mathbf{f}(t, \mathbf{x}) - \mathbf{f}(t, \mathbf{y})\| \leq L \cdot \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \quad \forall (t, \mathbf{x}), (t, \mathbf{y}) \in G$$

#### Bemerkung

Auf beiden Seiten ist  $\|\cdot\|$  eine Norm im  $\mathbb{R}^n$ . Es kann günstig sein, die euklidische Norm nicht zu wählen.

### Theorem 13.6

Das Anfangswertproblem  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(t, \mathbf{x})$  mit  $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}^0$  hat eine eindeutige lokale Lösung, wenn  $\mathbf{f}$

1. auf  $Q = \{(t, \mathbf{x}) \in \mathbb{R}^{n+1} : |t - t_0| \leq a, \|\mathbf{x} - \mathbf{x}^0\| \leq b\}$  stetig und somit beschränkt ist
2. in  $Q$  bezüglich  $\mathbf{x}$  einer Lipschitzbedingung genügt

#### Bemerkung

Sei  $G \subset \mathbb{R}^2$  offen,  $f$  stetig und bezüglich  $\mathbf{x}$  lipschitzstetig. Dann kann man  $Q$  in  $G$  beliebig wählen.

Bei der Betrachtung von Anfangswertproblemen wie (13.2) gilt: Je bessere Eigenschaften die rechte Seite, also die Funktion  $f$ , ist, desto bessere Eigenschaften hat auch die Lösung.

### Theorem 13.7

Betrachte das Anfangswertproblem (13.2).

1. *Existenzsatz von Peano:* Wenn  $f$  auf einem Rechteck um  $(t_0, x_0)$  stetig ist, existiert eine Lösung von (13.2). (Die Eindeutigkeit ist nicht garantiert.)
2. *Existenzsatz von Cauchy:* Sei  $f$  in einer Umgebung von  $(t_0, x_0)$  analytisch, d.h. in eine Potenzreihe entwickelbar:

$$f(t, x) = \sum_{k,l} b_{kl} \cdot (t - t_0)^k \cdot (x - x_0)^l$$

Dann existiert in einer Umgebung von  $t_0$  genau eine analytische Lösung von (13.2), also

$$x(t) = \sum_n a_n \cdot (t - t_0)^n$$

## 13.3 Fortsetzung von Lösungen

Der Nachteil der Betrachtung lokaler Lösungen ist, dass das Existenzintervall sehr klein sein kann. Die Lösung dieses Problems ist die Fortsetzung von Lösungen.

**Definition 13.8**

1. Sei  $x$  auf  $(c, d)$  eine Lösung des Anfangswertproblems (13.2). Wenn es ein Intervall  $(c', d') \supset (c, d)$  gibt und  $y$  eine Lösung von (13.2) ist, die auf  $(c', d')$  definiert ist und für die  $x(t) = y(t)$  für alle  $t \in (c, d)$  ist, dann heißt  $y$  **Fortsetzung** von  $x$ .
2. Eine Lösung heißt **maximal**, wenn sie keine Fortsetzung besitzt.

**Lemma 13.9**

Eindeutigkeit der Fortsetzung

Betrachte ein Rechteck  $Q$  und das Anfangswertproblem (13.2). Jedes Anfangswertproblem sei in  $Q$  eindeutig lösbar. Sei  $x$  eine Lösung des Anfangswertproblems (13.2) für  $(t_0, x_0) \in (c, d) \subset Q$ . Seien  $y_1$  und  $y_2$  zwei Fortsetzungen von  $x$  auf  $(c', d') \supset (c, d)$ . Dann gilt  $y_1(t) = y_2(t)$  für alle  $t \in (c', d')$ , d.h. wenn überhaupt Fortsetzungen existieren, dann eindeutige.

**Beweis**

Sei  $M = \{t \in [t_0, d'] : y_1(t) \neq y_2(t)\}$ . Diese Menge sei nichtleer (sonst sind wir schon fertig). Setze  $t_1 := \inf M$ . Natürlich gilt  $d \leq t_1$ . Für alle  $t_0 \leq t \leq t_1$  ist  $y_1(t) = y_2(t)$ . Da  $y_1$  und  $y_2$  stetig sind, muss auch  $y_1(t_1) = y_2(t_1) =: B$  gelten.

Betrachte nun das Anfangswertproblem  $\dot{x} = f(t, x)$  und  $x(t_1) = B$ . Da dieses Problem eindeutig lösbar ist, existiert in einer Umgebung von  $t_1$  genau eine Lösung. Also gilt  $y_1(t) = y_2(t)$  in einer Umgebung von  $t_1$ . Dies ist ein Widerspruch zur Wahl von  $t_1$ , weswegen die Menge  $M$  leer sein muss.

Analog argumentiert man bei linksseitigen Fortsetzungen. ■

**Satz 13.10**

Sei  $G \subset \mathbb{R}^2$  ein beschränktes Gebiet. In  $G$  möge  $f$  den Voraussetzungen des Existenz- und Eindeutigkeitssatzes von Picard-Lindelöf genügen (d.h. um jeden Punkt in  $G$  existiert ein Rechteck in  $G$ , in dem  $f$  die Voraussetzungen erfüllt). Dann gilt:

1. Es existiert genau eine maximale Lösung  $x_{\max}$  von (13.2).
2. Für  $x_{\max}$ , definiert auf  $(c, d)$  ist die Fortsetzung stets bis zum Rand möglich:

$$\begin{aligned} (c, u) \in \partial G & \quad \text{mit} \quad u := \lim_{t \rightarrow c+0} x_{\max}(t) \\ (d, v) \in \partial G & \quad \text{mit} \quad v := \lim_{t \rightarrow d-0} x_{\max}(t) \end{aligned}$$

**Satz 13.11**

Sei  $I = (a, b)$  und  $S = I \times \mathbb{R}$  ein Streifen.  $f$  sei auf  $S$  stetig und für jedes Intervall  $(a', b') \subset (a, b)$  existiere eine Lipschitzkonstante  $L'$  mit

$$|f(t, x) - f(t, y)| \leq L' \cdot |x - y| \quad \forall t \in I' \text{ und } x, y \in \mathbb{R}$$

Seien nun  $x$  und  $\hat{x}$  Lösungen der Differentialgleichung  $\dot{x} = f(t, x)$  zu den jeweiligen Anfangswerten  $x(t_0) = x_0$  und  $\hat{x}(t_0) = \hat{x}_0$ . Dann gilt für alle  $t \in I'$ :

$$|x(t) - \hat{x}(t)| \leq |x_0 - \hat{x}_0| \cdot e^{L' \cdot |t - t_0|}$$

# 14 Lineare Systeme erster Ordnung

## 14.1 Das allgemeine lineare System erster Ordnung

Wir betrachten in diesem Abschnitt folgendes System:

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_i &= \sum_{j=1}^n a_{ij}(t) \cdot x_j(t) + b_i(t) \quad \text{mit} \quad 1 \leq i \leq n \\ \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b} \end{aligned} \right\} \quad (14.1)$$

Das entsprechende Anfangswertproblem heiße  $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}^0$  mit  $t \in I := (a, b)$ . Die  $a_{ij}$  und  $b_i$  seien aus  $C(I)$ . Wir lassen auch komplexwertige Funktionen zu: Geht man dann zu Real- und Imaginärteil über, erhält man ein „reelles“ System doppelter Größe. Das zugehörige homogene System ergibt sich für  $\mathbf{b} = \mathbf{0}$ :

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} \quad (14.1h)$$

Im Satz von Picard-Lindelöf wäre also  $\mathbf{f}(t, \mathbf{x}) = \mathbf{A}(t)\mathbf{x} + \mathbf{b}(t)$ . Die Voraussetzungen des Satzes sind für  $t_0$  erfüllt, weil die rechte Seite stetig und bezüglich  $\mathbf{x}$  lipschitzstetig ist:

$$\|f(t, \mathbf{x}) - f(t, \mathbf{y})\| = \|\mathbf{A}(t)\mathbf{x} - \mathbf{A}(t)\mathbf{y}\| = \|\mathbf{A}(t)(\mathbf{x} - \mathbf{y})\| \leq \|\mathbf{A}(t)\| \cdot \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \leq L \cdot \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$$

Da die Menge der Lösungen von (14.1h) einen Vektorraum bildet (dies folgt sofort aus dem Superpositionsprinzip), wollen wir Aussagen über die Dimension und die Basen des Lösungsraumes treffen. Allerdings existiert kein allgemeines Verfahren zur Bestimmung von Lösungen von (14.1h) und (14.1).

Für Operationen mit dem Lösungsraum benötigen wir den folgenden Begriff:

### Definition 14.1

Die Vektorfunktionen  $\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_m : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  heißen im Intervall  $I$  **linear unabhängig**, wenn

$$c_1 \cdot \mathbf{y}_1 + \dots + c_m \cdot \mathbf{y}_m = \mathbf{0}$$

nur dann in  $I$  gelten kann, wenn  $c_1 = \dots = c_m = 0$  ist. Sonst heißen die  $\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_m$  **linear abhängig**.

#### Bemerkung

Hierbei ist  $\mathbf{0}$  ein Vektor, dessen Komponenten alle verschwinden. Die Gleichung muss für alle  $t \in I$  gelten.

### Beispiel 14.1

Für  $n = 1$  betrachte  $y_1(t) = t$ ,  $y_2(t) = t^2$  bis  $y_m(t) = t^m$ . Die  $y_i$  sind in jedem beliebigen Intervall linear unabhängig.

$$c_1 \cdot t + c_2 \cdot t^2 + \dots + c_m \cdot t^m = 0$$

Auf der linken Seite steht ein Polynom, welches (höchstens)  $m$  Nullstellen hat. Die Gleichung soll aber auf dem gesamten Intervall (also in überabzählbar vielen Punkten) verschwinden, weshalb es sich um das Nullpolynom handeln muss.

Seien  $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$  Lösungen von (14.1h). Dann heißt  $X(t) := (\mathbf{x}_1(t), \dots, \mathbf{x}_n(t))$  **Lösungsmatrix** und  $W(t) := \det X(t)$  ist die zugehörige **Wronski-Determinante**.

### Satz 14.2

Der Lösungsraum  $L$  des Systems (14.1h) ist  $n$ -dimensional.

#### Beweis

durch Anwendung des Existenz- und Eindeutigkeitsatzes

Seien  $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$  die Standard-Basisvektoren des  $\mathbb{R}^n$ ,  $t_0 \in I$  fest und  $\mathbf{x}_i$  für  $i = 1, \dots, n$  die Lösungen des Anfangswertproblems (14.1h) und  $\mathbf{x}_i(t_0) = \mathbf{e}_i$ . Zu zeigen ist:

1. Die  $\mathbf{x}_i$  sind in  $I$  linear unabhängig.

$$\begin{aligned} c_1 \cdot \mathbf{x}_1 + \dots + c_n \cdot \mathbf{x}_n &= \mathbf{0} \\ \text{Insbesondere: } c_1 \cdot \mathbf{x}_1(t_0) + \dots + c_n \cdot \mathbf{x}_n(t_0) &= \mathbf{0} \\ c_1 \cdot \mathbf{e}_1 + \dots + c_n \cdot \mathbf{e}_n &= \mathbf{0} \end{aligned}$$

2. Jede beliebige Lösung  $\mathbf{x}$  von (14.1h) lässt sich als Linearkombination der  $\mathbf{x}_i$  darstellen: Wir setzen  $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n)^T := \mathbf{x}(t_0)$ . Betrachte nun die folgende Lösung von (14.1h):

$$\mathbf{y} = a_1 \cdot \mathbf{x}_1 + \dots + a_n \cdot \mathbf{x}_n$$

Insbesondere ist  $\mathbf{y}(t_0) = a_1 \cdot \mathbf{e}_1 + \dots + a_n \cdot \mathbf{e}_n = \mathbf{x}(t_0)$ . Aus der Eindeutigkeit der Lösung des Anfangswertproblems folgt damit  $\mathbf{y} = \mathbf{x}$ .

■

Jede Basis des Lösungsraumes von (14.1h) heißt **Fundamentalsystem** von Lösungen. Die zugehörige Lösungsmatrix heißt **Fundamentalmatrix**.

### Satz 14.3

Seien  $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$  Lösungen von (14.1h) im Lösungsintervall  $I$ . Dann sind äquivalent:

1. Die  $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$  bilden ein Fundamentalsystem.
2. Die Wronski-Determinante verschwindet in  $I$  nie, d.h. für alle  $t \in I$  ist  $W(t) \neq 0$ .
3.  $W(t)$  verschwindet an einem Punkt in  $I$  nicht, d.h. es existiert ein  $t_0 \in I$  mit  $W(t_0) \neq 0$ .

#### Beweis

Aus 1. folgt 2.: Sei  $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$  ein Fundamentalsystem für (14.1h). Es sei  $W(t_1) = 0$  für ein  $t_1 \in I$ . Betrachte folgendes Gleichungssystem:

$$c_1 \cdot \mathbf{x}_1(t_1) + \dots + c_n \cdot \mathbf{x}_n(t_1) = \mathbf{0} \quad (*)$$

für die Unbekannten  $c_1, \dots, c_n$ . Da  $W(t_1)$ , die Determinante der Koeffizientenmatrix von (\*), verschwindet, existiert eine nichttriviale Lösung  $c'_1, \dots, c'_n$  von (\*). Dann ist  $\mathbf{y} = c'_1 \cdot \mathbf{x}_1 + \dots + c'_n \cdot \mathbf{x}_n$  eine Lösung mit dem Anfangswert  $\mathbf{y}(t_1) = \mathbf{0}$ . Da natürlich auch  $\mathbf{0}$ , der Vektor aus  $n$  Funktionen identisch Null, eine Lösung von (14.1h) mit dem Anfangswert  $\mathbf{0}(t_1) = \mathbf{0}$  ist, folgt wegen der Eindeutigkeit der Lösung des Anfangswertproblems  $\mathbf{y} = \mathbf{0}$ . Das würde bedeuten, dass die  $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$  linear abhängig sind. Das ist ein Widerspruch, folglich muss  $W(t_1) \neq 0$  sein.

Aus 2. folgt 3.: Das ist trivial. (Wenn etwas für alle  $t \in I$  gilt, dann auch für ein bestimmtes dieser  $t$ .)



Aus 3. folgt 1.: Sei  $\mathbf{x}$  eine beliebige Lösung von (14.1h). Wir zeigen:  $\mathbf{x}$  ist eine Linearkombination der  $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$ . Da  $W(t_0) \neq 0$  ist, hat das lineare Gleichungssystem

$$c_1 \cdot \mathbf{x}_1(t_0) + \dots + c_n \cdot \mathbf{x}_n(t_0) = \mathbf{x}(t_0) \neq 0$$

eine nichttriviale Lösung. Betrachte

$$\mathbf{y} = c_1 \cdot \mathbf{x}_1 + \dots + c_n \cdot \mathbf{x}_n - \mathbf{x}$$

$\mathbf{y}$  ist eine Lösung von (14.1h) mit dem Anfangswert

$$\mathbf{y}(t_0) = \underbrace{c_1 \cdot \mathbf{x}_1(t_0) + \dots + c_n \cdot \mathbf{x}_n(t_0)}_{=\mathbf{x}(t_0)} - \mathbf{x}(t_0) = 0$$

Wegen der Eindeutigkeit der Lösung des Anfangswertproblems ist  $\mathbf{y} = \mathbf{0}$  und somit

$$\mathbf{x} = c_1 \cdot \mathbf{x}_1 + \dots + c_n \cdot \mathbf{x}_n$$

■

#### Bemerkung

1. Das im Satz angegebene Kriterium für die lineare Unabhängigkeit der  $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$  gilt nur, wenn die  $\mathbf{x}_i$  die Lösung eines homogenen Systemes  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(t) \cdot \mathbf{x}$  sind.
2. Ist  $\mathbf{X}(t)$  eine Fundamentalmatrix, dann ist offenbar  $\mathbf{x}(t) = \mathbf{X}(t) \cdot \mathbf{c}$  für ein beliebiges  $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$  die allgemeine Lösung von (14.1h). Die Lösung des Anfangswertproblems  $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}^0$  ist

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{X}(t) \cdot \mathbf{X}(t_0)^{-1} \cdot \mathbf{x}^0$$

3. Es existiert kein allgemeines Verfahren zur Bestimmung von  $\mathbf{X}(t)$ .

#### Folgerung 14.4

1. Sei  $\mathbf{X}(t)$  eine Lösungsmatrix von (14.1h). Dann gilt:

$$\dot{\mathbf{X}}(t) = \mathbf{A}(t) \cdot \mathbf{X}(t)$$

2. Sei  $\mathbf{X}(t)$  eine aus differenzierbaren Vektorfunktionen  $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$  gebildete Matrix. Wenn für alle  $t \in I$  gilt, dass die obige Formel erfüllt ist und  $\mathbf{X}(t)$  nicht singulär ist, d.h.  $\det \mathbf{X}(t) \neq 0$ , dann ist  $\mathbf{X}(t)$  eine Fundamentalmatrix von (14.1h).

Zur Lösung des inhomogenen Systems (14.1) kann man wieder das Verfahren der Variation der Konstanten anwenden. Sei  $\mathbf{X}(t)$  eine Fundamentalmatrix zu (14.1h). Der Ansatz ist also

$$\begin{aligned} \mathbf{y}(t) &= \mathbf{X}(t) \cdot \mathbf{c}(t) \\ \dot{\mathbf{y}}(t) &= \dot{\mathbf{X}}(t) \cdot \mathbf{c}(t) + \mathbf{X}(t) \cdot \dot{\mathbf{c}}(t) \\ \dot{\mathbf{y}}(t) &= \mathbf{A}(t) \cdot \mathbf{X}(t) \cdot \mathbf{c}(t) + \mathbf{X}(t) \cdot \dot{\mathbf{c}}(t) \\ \dot{\mathbf{y}}(t) &= \mathbf{A}(t) \cdot \mathbf{y}(t) + \mathbf{X}(t) \cdot \dot{\mathbf{c}}(t) \\ \dot{\mathbf{y}}(t) &\stackrel{!}{=} \mathbf{A}(t) \cdot \mathbf{y}(t) + \mathbf{b}(t) \end{aligned}$$

Man erkennt durch Vergleich der letzten beiden Gleichungen

$$\begin{aligned} \mathbf{X}(t) \cdot \dot{\mathbf{c}}(t) &= \mathbf{b}(t) \\ \dot{\mathbf{c}}(t) &= \mathbf{X}(t)^{-1} \cdot \mathbf{b}(t) \\ \mathbf{c}(t) &= \int \mathbf{X}(s)^{-1} \cdot \mathbf{b}(s) \, ds \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{X}(t) \cdot \int \mathbf{X}(s)^{-1} \cdot \mathbf{b}(s) \, ds \end{aligned}$$

Sucht man eine Lösung des Anfangswertproblems  $\mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}^0$  zu (14.1), so folgt:

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{X}(t) \cdot \int_{t_0}^t \mathbf{X}(s)^{-1} \cdot \mathbf{b}(s) \, ds + \mathbf{y}^0$$

## Einordnung linearer Differentialgleichungen n-ter Ordnung in diese Betrachtungen

$$x^{(n)} + a_n(t) \cdot x^{(n-1)} + \dots + a_1(t) \cdot x = \begin{cases} f(t) & (14.2) \\ 0 & (14.2h) \end{cases}$$

Das zugehörige Anfangswertproblem zu dieser Differentialgleichung ist  $x(t_0) = x_1^0$  bis  $x^{(n-1)}(t_0) = x_n^0$ . Gemäß Formel (13.8) lässt sich dieses System mit  $x_1 := x$  umwandeln in

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ &\vdots \\ \dot{x}_{n-1} &= x_n \\ \dot{x}_n &= -[a_n \cdot x_n + \dots + a_1 \cdot x_1] + f(t) \end{aligned} \right\} \quad (14.3)$$

Das Anfangswertproblem ist eindeutig lösbar, wenn die  $a_i$  und  $f$  im betrachteten Intervall stetig sind. Die Lösung von (14.2h) und des Systems (14.3) hängen wie folgt zusammen: Ist  $x$  eine Lösung von (14.2h), dann ist  $\mathbf{x} := (x, \dot{x}, \dots, x^{(n-1)})^T$  eine Lösung von (14.3).

Die Wronski-Determinante kann nun auch für (14.2h) betrachtet werden: Seien  $y_1, \dots, y_n$  Lösungen von (14.2h).

$$W(t) = \det \begin{pmatrix} y_1 & \dots & y_n \\ \dot{y}_1 & \dots & \dot{y}_n \\ \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{pmatrix}$$

## 14.2 Die Matrixexponentialfunktion

*Motivation:* Die Lösung des Anfangswertproblems

$$\dot{x} = a \cdot x \quad \text{mit} \quad x(0) = x^0$$

ist  $x(t) = e^{at} \cdot x^0$ . Betrachte nun

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} \quad \text{mit} \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}^0$$

Hierbei ist  $A \in M_n(\mathbb{C}) = \mathbb{C}^{n \times n}$ . Es wäre schön, wenn man als Lösung angeben könnte:  $\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t} \cdot \mathbf{x}^0$ . Was ist  $e^{\mathbf{A}t}$ ? Eventuell ist

$$e^{\mathbf{A}t} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathbf{A}^k}{k!} \cdot t^k$$

Die Konvergenz dieser unendlichen Reihe ist gleichbedeutend damit, dass die Folge der zugehörigen Partialsummen  $s_n(t)$  in  $M_n(\mathbb{C})$  konvergiert. Wir betrachten die Konvergenz in  $M_n(\mathbb{C})$  nicht komponentenweise, sondern geschickter bezüglich einer passenden Norm. „Passend“ ist in diesem Fall jede Norm mit der folgenden Eigenschaft:

$$\|\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}\| \leq \|\mathbf{A}\| \cdot \|\mathbf{B}\|$$

Daraus folgt durch Induktion:

$$\|\mathbf{A}^k\| \leq \|\mathbf{A}\|^k$$

Eine solche Norm ist zum Beispiel

$$\|\mathbf{A}\| = \sum_{i,j=1}^n |a_{ij}|$$

Da  $M_n(\mathbb{C})$  ein  $n^2$ -dimensionaler Vektorraum ist, sind darin alle Normen äquivalent, d.h. wenn  $\|\cdot\|_1$  und  $\|\cdot\|_2$  zwei Normen sind, existieren  $c, d > 0$  mit

$$c \|\mathbf{A}\|_1 \leq \|\mathbf{A}\|_2 \leq d \|\mathbf{A}\|_1 \quad \forall \mathbf{A} \in M_n(\mathbb{C})$$

Die Konvergenz einer Folge bezüglich  $\|\cdot\|_1$  ist daher äquivalent zur Konvergenz bezüglich  $\|\cdot\|_2$ .

### Definition und Satz 14.5

Für jedes  $\mathbf{A} \in M_n(\mathbb{C})$  wird gesetzt:

$$e^{\mathbf{A}} := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathbf{A}^n}{n!}$$

Diese Reihe konvergiert bezüglich der folgenden Norm in  $M_n(\mathbb{C})$ :

$$\|\mathbf{A}\| = \sum_{i,j=1}^n |a_{ij}|$$

Die Abbildung  $\mathbf{A} \mapsto e^{\mathbf{A}}$  heißt **Matrixexponentialfunktion**.

### Beweis

Sei  $(S_n)$  die entsprechende Folge der Partialsummen, also

$$S_n := \sum_{k=0}^n \frac{\mathbf{A}^k}{k!}$$

Wir zeigen, dass  $(S_n)$  bezüglich  $\|\cdot\|$  eine Cauchyfolge ist (o.E.d.A. sei  $n > m$ ).

$$\|S_n - S_m\| = \left\| \sum_{k=m+1}^n \frac{\mathbf{A}^k}{k!} \right\| \leq \sum_{k=m+1}^n \left\| \frac{\mathbf{A}^k}{k!} \right\| \leq \sum_{k=m+1}^n \frac{\|\mathbf{A}\|^k}{k!} \rightarrow 0$$

für  $m, n \rightarrow \infty$ , weil die Reihe für  $e^{\|\mathbf{A}\|}$  natürlich konvergiert. Da  $M_n(\mathbb{C}) \cong \mathbb{C}^{n^2} \cong \mathbb{R}^{2n^2}$  ein endlichdimensionaler Vektorraum ist, sind alle Normen in  $M_n(\mathbb{C})$  äquivalent und der Raum  $M_n(\mathbb{C})$  vollständig, konvergiert  $(S_n)$ . Der Limes wird mit  $e^{\mathbf{A}}$  bezeichnet. Damit ist natürlich auch  $e^{\mathbf{A}t}$  für alle  $t \in \mathbb{R}$  erklärt. ■

### Bemerkung

Sei  $A$  eine Algebra (d.h. ein Vektorraum, in dem die Multiplikation erklärt ist) und gleichzeitig ein vollständig normierter Raum bezüglich einer Norm  $\|\cdot\|$ , für die  $\|a \cdot b\| \leq \|a\| \cdot \|b\|$  für alle  $a, b \in A$  gilt. Dann heißt  $A$  **Banachalgebra**. In  $A$  ist dann ebenfalls die Matrixexponentialfunktion wohldefiniert.

**Satz 14.6**

## Eigenschaften der Matrixexponentialfunktion

1. Ist  $[\mathbf{A}, \mathbf{B}] = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} - \mathbf{B} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{0}$ , dann ist  $e^{\mathbf{A}+\mathbf{B}} = e^{\mathbf{A}} \cdot e^{\mathbf{B}}$ .
2.  $e^{\mathbf{A}}$  ist stets invertierbar und es gilt:  $(e^{\mathbf{A}})^{-1} = e^{-\mathbf{A}}$ .
3. Für  $\mathbf{C} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}^{-1}$  ist  $e^{\mathbf{C}} = \mathbf{B} \cdot e^{\mathbf{A}} \cdot \mathbf{B}^{-1}$ .
4.  $\mathbf{B}$  habe Blockgestalt:

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{B}_1 & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & \mathbf{B}_k \end{pmatrix} \Rightarrow e^{\mathbf{B}} = \begin{pmatrix} e^{\mathbf{B}_1} & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & e^{\mathbf{B}_k} \end{pmatrix}$$

Hierbei sind die  $\mathbf{B}_i$  quadratische Matrizen (Spezialfall: Zahlen, d.h.  $\mathbf{B}$  ist eine Diagonalmatrix).

5.  $\|e^{\mathbf{B}}\| \leq e^{\|\mathbf{B}\|}$
6.  $\frac{d}{dt}e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{A} \cdot e^{\mathbf{A}t}$

**Beweis**

1. Da die Reihe für  $e^{\mathbf{A}}$  und  $e^{\mathbf{B}}$  bezüglich  $\|\cdot\|$  sogar absolut konvergiert, kann man die Cauchysche Produktreihe zur Bestimmung von  $e^{\mathbf{A}} \cdot e^{\mathbf{B}}$  bilden. Da  $\mathbf{A}$  und  $\mathbf{B}$  kommutieren, kann man  $(\mathbf{A} + \mathbf{B})^n$  mit dem binomischen Satz ausrechnen. (Kommutieren  $\mathbf{A}$  und  $\mathbf{B}$  nicht, wäre zum Beispiel  $(\mathbf{A} + \mathbf{B})^2 = \mathbf{A}^2 + \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{A} + \mathbf{B}^2 \neq \mathbf{A}^2 + 2 \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{B}^2$ .) Beachte  $\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}$ .

$$\begin{aligned} (\mathbf{A} + \mathbf{B})^n &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cdot \mathbf{A}^{n-k} \cdot \mathbf{B}^k \\ \frac{1}{n!}(\mathbf{A} + \mathbf{B})^n &= \sum_{k=0}^n \left( \frac{\mathbf{A}^{n-k}}{(n-k)!} \right) \cdot \left( \frac{\mathbf{B}^k}{k!} \right) \end{aligned}$$

Rechts steht das  $n$ -te Glied der Cauchyschen Produktreihe für  $e^{\mathbf{A}} \cdot e^{\mathbf{B}}$ . Summiert man von  $n = 0$  bis  $\infty$ , so erhält man  $e^{\mathbf{A}+\mathbf{B}} = e^{\mathbf{A}} \cdot e^{\mathbf{B}}$ .

2. Aus 1. folgt  $e^{\mathbf{A}} \cdot e^{-\mathbf{A}} = e^{\mathbf{A}-\mathbf{A}} = e^{\mathbf{0}} = \mathbf{E}$  und analog  $e^{-\mathbf{A}} \cdot e^{\mathbf{A}} = \mathbf{E}$ , also ist  $(e^{\mathbf{A}})^{-1} = e^{-\mathbf{A}}$ .
3. Es ist

$$\begin{aligned} \mathbf{C}^n &= (\mathbf{B} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}^{-1}) \cdot (\mathbf{B} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}^{-1}) \cdot \dots \cdot (\mathbf{B} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}^{-1}) \\ &= \mathbf{B} \cdot \mathbf{A} \cdot (\mathbf{B}^{-1} \cdot \mathbf{B}) \cdot \mathbf{A} \cdot (\mathbf{B}^{-1} \cdot \dots \cdot \mathbf{B}) \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}^{-1} \\ &= \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}^n \cdot \mathbf{B}^{-1} \\ e^{\mathbf{C}} &= \sum_n \frac{\mathbf{C}^n}{n!} = \sum_n \frac{\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}^n \cdot \mathbf{B}^{-1}}{n!} = \mathbf{B} \cdot \sum_n \frac{\mathbf{A}^n}{n!} \cdot \mathbf{B}^{-1} = \mathbf{B} \cdot e^{\mathbf{A}} \cdot \mathbf{B}^{-1} \end{aligned}$$

4. Folgt sofort aus

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{B}_1 & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & \mathbf{B}_k \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{B}^n = \begin{pmatrix} \mathbf{B}_1^n & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & \mathbf{B}_k^n \end{pmatrix}$$

- 5.

$$\|e^{\mathbf{A}}\| = \left\| \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{\mathbf{A}^k}{k!} \right\| = \left( \begin{array}{c} \text{Stetigkeit} \\ \text{der Norm} \end{array} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \sum_{k=0}^n \frac{\mathbf{A}^k}{k!} \right\| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{\|\mathbf{A}\|^k}{k!} = e^{\|\mathbf{A}\|}$$

6. Benutze die Definition der Ableitung und der Matrixexponentialfunktion.

$$\frac{e^{\mathbf{A}(t+h)} - e^{\mathbf{A}t}}{h} = \frac{e^{\mathbf{A}t}}{h} \cdot (e^{\mathbf{A}h} - \mathbf{E}) = \frac{e^{\mathbf{A}t}}{h} \cdot \left( \mathbf{E} + \mathbf{A}h + \frac{\mathbf{A}^2 h^2}{2!} + \dots - \mathbf{E} \right) = e^{\mathbf{A}t} \cdot \left( \mathbf{A} + \frac{\mathbf{A}^2 h}{2!} + \dots \right)$$

Für  $h \rightarrow 0$  verschwinden alle bis auf den ersten Summanden, es verbleibt als Ableitung  $\mathbf{A} \cdot e^{\mathbf{A}t}$ .

**Bemerkung**

$t \mapsto e^{\mathbf{A}t}$  bildet  $\mathbb{R} \rightarrow M_n(\mathbb{C})$  ab. Also ist  $(e^{\mathbf{A}t})_{t \in \mathbb{R}}$  eine einparametrische Gruppe von Matrizen. Das heißt:  $e^{\mathbf{A}s} \cdot e^{\mathbf{A}t} = e^{\mathbf{A}(s+t)}$ ,  $e^{\mathbf{A} \cdot 0} = \mathbf{E}$  (neutrales Element),  $(e^{\mathbf{A}t})^{-1} = e^{\mathbf{A}(-t)}$ .

Es gelingt nur in einfachen Fällen, die Reihe für  $e^{\mathbf{A}}$  tatsächlich zu summieren. Deshalb gibt es verschiedene Bestimmungsalgorithmen. Wir benutzen die Idee aus Satz 14.6.3: Sei  $\mathbf{A}$  gegeben. Angenommen, es existiert ein  $\mathbf{B}$ , für das  $\mathbf{C} := \mathbf{B}\mathbf{A}\mathbf{B}^{-1}$  eine einfache Gestalt hat, sodass  $e^{\mathbf{C}}$  leicht bestimmbar ist.

$$e^{\mathbf{C}} = \mathbf{B} \cdot e^{\mathbf{A}} \cdot \mathbf{B}^{-1} \quad \Rightarrow \quad e^{\mathbf{A}} = \mathbf{B}^{-1} \cdot e^{\mathbf{C}} \cdot \mathbf{B}$$

*Spezialfall:*  $\mathbf{A} = \mathbf{A}^* = \overline{\mathbf{A}}^T$  – Dann ist  $\mathbf{A}$  diagonalisierbar, d.h. es existiert eine unitäre Matrix  $\mathbf{U}$  ( $\mathbf{U}^* = \mathbf{U}^{-1}$ ), sodass  $\mathbf{C} = \mathbf{U}\mathbf{A}\mathbf{U}^{-1}$  Diagonalgestalt hat.

Allgemein kann man den folgenden Satz aus der linearen Algebra benutzen: Zu jeder Matrix  $A \in M_n(\mathbb{C})$  existiert eine invertierbare Matrix  $\mathbf{U}$ , sodass  $\mathbf{B} := \mathbf{U}\mathbf{A}\mathbf{U}^{-1}$  die folgende Blockgestalt hat:

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{J}_1 & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & \mathbf{J}_k \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \mathbf{J}_i = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ \mathbf{0} & & & \lambda \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad e^{\mathbf{B}} = \begin{pmatrix} e^{\mathbf{J}_1} & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & e^{\mathbf{J}_k} \end{pmatrix}$$

Die  $\mathbf{J}_i$  heißen **Jordankästchen**.  $\lambda$  ist einer der Eigenwerte von  $\mathbf{A}$ . In verschiedenen Kästchen können gleiche Eigenwerte stehen. Diese Darstellung von  $\mathbf{A}$  heißt **Jordansche Normalform**. Die Jordankästchen kann man als  $\mathbf{J} = \lambda \cdot \mathbf{E} + \mathbf{N}$  darstellen, wobei

$$\mathbf{N} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ \mathbf{0} & & & 0 \end{pmatrix}$$

ist.  $\mathbf{N}$  ist eine sogenannte **nilpotente Matrix**, d.h. es gibt ein  $r > 0$ , sodass  $\mathbf{N}^s = \mathbf{0}$  für alle  $s > r$  gilt. Multipliziert man  $\mathbf{N}$  mit sich selbst, so rücken die Einsen bei jeder Multiplikation eine Nebendiagonale nach oben, bis man  $\mathbf{0}$  erhält. Im obigen Fall ist  $\mathbf{N}^k = \mathbf{0}$ , deshalb bricht die Reihe in  $e^{\mathbf{N}}$  nach dem  $k$ -ten Glied ab.

$$e^{\mathbf{J}t} = e^{\lambda \mathbf{I}t} \cdot e^{\mathbf{N}t} = e^{\lambda t} \cdot e^{\mathbf{N}t} = e^{\lambda t} \cdot \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2!} & \cdots & \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} \\ & 1 & t & \cdots & \frac{t^{k-2}}{(k-2)!} \\ & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & & & & 1 \end{pmatrix} \quad (14.4)$$

Damit hat man  $e^{\mathbf{B}t}$  im Prinzip strukturell bestimmt.

## 14.3 Lineare Systeme erster Ordnung mit konstanten Koeffizienten

### Satz 14.7

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} \quad (14.5)$$

sei ein Differentialgleichungssystem mit  $\mathbf{A} \in M_n(\mathbb{C})$ . Dann ist für ein beliebiges  $t \in \mathbb{R}$  die Matrix  $\mathbf{X}(t) = e^{\mathbf{A}t}$  eine Fundamentalmatrix für (14.5).

### Beweis

Wir wenden die Folgerung 14.4.2 an:  $\mathbf{X}(t)$  ist natürlich invertierbar und außerdem ist

$$\dot{\mathbf{X}}(t) = (e^{\mathbf{A}t})' = \mathbf{A} \cdot e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{X}(t)$$

■

Um dies zu vereinfachen, wird zunächst für die Lösung von (14.5) ein Spezialfall behandelt.

### Satz 14.8

1. Ist  $\lambda$  ein Eigenwert von  $\mathbf{A}$  und  $\mathbf{c}$  ein zugehöriger Eigenvektor, dann ist  $\mathbf{x}(t) = e^{\lambda t} \cdot \mathbf{c}$  eine Lösung von (14.5).
2. Sind  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  Eigenwerte von  $\mathbf{A}$  mit zugehörigen Eigenvektoren  $\mathbf{c}_1, \dots, \mathbf{c}_n$ , dann ist

$$\mathbf{X}(t) = (e^{\lambda_1 t} \cdot \mathbf{c}_1, \dots, e^{\lambda_n t} \cdot \mathbf{c}_n)$$

eine Fundamentalmatrix für (14.5).

### Beweis

1.  $\dot{\mathbf{x}}(t) = e^{\lambda t} \cdot \lambda \cdot \mathbf{c} = e^{\lambda t} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{c} = \mathbf{A} \cdot (e^{\lambda t} \cdot \mathbf{c}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}(t)$

■

### Bemerkung

Im Allgemeinen ist  $\mathbf{X}(t) \neq e^{\mathbf{A}t}$ .

Sei  $\mathbf{A}$  gegeben und  $\mathbf{B} = \mathbf{U} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{U}^{-1}$  die zugehörige Jordansche Normalform. Dann gilt:  $\mathbf{x}$  ist eine Lösung von  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}$  genau dann, wenn  $\mathbf{y} := \mathbf{U} \cdot \mathbf{x}$  eine Lösung von  $\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{y}$  ist, denn:

$$\mathbf{U} \cdot \dot{\mathbf{x}} = \dot{\mathbf{y}} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{y} = \mathbf{U} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{U}^{-1} \cdot \mathbf{y} = \mathbf{U} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{U}^{-1} \cdot (\mathbf{U} \cdot \mathbf{x}) = \mathbf{U} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} \quad \Rightarrow \quad \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}$$

Eine typische Lösung  $\mathbf{y}$  von  $\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{U} \cdot \mathbf{y}$  hat die Form

$$\mathbf{y}(t) = e^{\lambda t} \cdot \left( \frac{t^{l-1}}{(l-1)!}, \dots, t, 1, 0, \dots, 0 \right)^T$$

Für ein Jordankästchen  $J_i \in M_i(\mathbb{R})$  gilt  $0 \leq l \leq r-1$ . Maximal läuft  $l$  von 0 bis zu einem Vielfachen von  $\lambda-1$ . Betrachte nun  $\mathbf{x} := \mathbf{U}^{-1} \cdot \mathbf{y}$ . Die Elemente von  $\mathbf{x}$  sind also Linearkombinationen der Elemente von  $\mathbf{y}$ , also

$$\mathbf{x} = e^{\lambda t} \cdot (P_1(t), \dots, P_n(t))$$

Dabei sind die  $P_i$  Polynome vom Grade  $\leq l-1$ . Der folgende Satz fasst alles zusammen.

**Satz 14.9**

Struktur der Lösungen von (14.5)

1. Seien  $\lambda_1, \dots, \lambda_k$  die paarweise verschiedenen Eigenwerte von  $\mathbf{A}$  mit den algebraischen Vielfachheiten  $n_1, \dots, n_k$  (den Vielfachheiten der  $\lambda_i$  als Nullstellen des charakteristischen Polynoms von  $\mathbf{A}$ ). Dann hat die allgemeine Lösung von  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}$  die Form

$$\mathbf{x}(t) = \sum_{j=1}^k e^{\lambda_j t} \mathbf{P}_j(t) \quad (14.6)$$

Hierbei sind die  $\mathbf{P}_j$  Vektoren aus Polynomen von  $t$  vom Grade  $\leq n_j - 1$ .

2. Reelle Form der allgemeinen Lösungen: Seien  $\mathbf{A} \in M_n(\mathbb{R})$  und  $\lambda_1, \dots, \lambda_m$  die reellen Eigenwerte von  $\mathbf{A}$  mit den Vielfachheiten  $n_1, \dots, n_m$  und  $(\lambda_{m+1}, \bar{\lambda}_{m+1}), \dots, (\lambda_{m+s}, \bar{\lambda}_{m+s})$  die paarweise konjugiert komplexen Eigenwerte mit den Vielfachheiten  $n_{m+1}, \dots, n_{m+s}$ . Die komplexen Werte seien als  $\lambda_k = \alpha_k + i\beta_k$  darstellbar. Dann hat die allgemeine Lösung von  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}$  die Form

$$\mathbf{x}(t) = \sum_{j=1}^m \mathbf{P}_j(t) \cdot e^{\lambda_j t} + \sum_{j=m+1}^{m+s} [\mathbf{Q}_j(t) \cdot \cos(\beta_j t) + \mathbf{R}_j(t) \cdot \sin(\beta_j t)] \cdot e^{\alpha_j t} \quad (14.7)$$

Hierbei sind die  $\mathbf{P}_j, \mathbf{Q}_j, \mathbf{R}_j$  Vektoren aus Polynomen von  $t$  vom Grade  $\leq n_j - 1$ .

Man kann die Formeln (14.6) und (14.7) als Ansatz benutzen, um die Koeffizienten der Polynome in  $\mathbf{P}_j, \mathbf{Q}_j, \mathbf{R}_j$  zu bestimmen. Bei der allgemeinen Lösung müssen  $n$  Koeffizienten frei bleiben; erst durch ein Anfangswertproblem sind alle Koeffizienten bestimmt.

**Beispiele**

1.  $\dot{x}_1 = x_1 + x_2$  und  $\dot{x}_2 = 4x_1 - 2x_2$  mit dem Anfangswertproblem  $\mathbf{x}(0) = (0, 5)^T$

Die Koeffizientenmatrix  $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$  hat die Eigenwerte  $-3$  und  $2$ . Der Lösungsansatz ist somit

$$\begin{aligned} x_1(t) &= A \cdot e^{-3t} + C \cdot e^{2t} & \dot{x}_1(t) &= -3A \cdot e^{-3t} + 2C \cdot e^{2t} \\ x_2(t) &= B \cdot e^{-3t} + D \cdot e^{2t} & \dot{x}_2(t) &= -3B \cdot e^{-3t} + 2D \cdot e^{2t} \end{aligned}$$

Dies setzen wir in die Differentialgleichungen ein. Da  $e^{-3t}$  und  $e^{2t}$  linear unabhängige Funktionen sind, kann man einen Koeffizientenvergleich machen und erhält die voneinander unabhängigen linearen Gleichungssysteme

$$\begin{aligned} -3A &= A + B & 2C &= C + D \\ -3B &= 4A - 2B & 2D &= 4C - 2D \end{aligned}$$

Hieraus folgt  $B = -4A$  und  $C = D$ , sodass die allgemeine Lösung lautet:

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = A \cdot e^{-3t} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix} + C \cdot e^{2t} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Hierbei ist  $(1, -4)^T$  ein Eigenvektor zum Eigenwert  $-3$  und  $(1, 1)^T$  ein Eigenvektor zum Eigenwert  $2$ . Das Anfangswertproblem kann nun gelöst werden:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix} + C \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} A = -1 \\ C = 1 \end{cases}$$

Als Lösung für das Anfangswertproblem haben wir also gefunden:

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot e^{-3t} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot e^{2t}$$

2.  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}$  mit  $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & -4 \end{pmatrix}$  Es ist beim Auftreten mehrerer Eigenwerte häufig günstig,

für jeden Eigenwert den zugehörigen Ansatz separat zu behandeln, denn die Koeffizienten der Polynome verschiedener Eigenwerte sind wie oben gesehen voneinander unabhängig.

Für  $\lambda_1 = 0$  mit der Vielfachheit  $n_1 = 1$  lautet der Ansatz wegen  $e^{\lambda_1 t} = 1$ :

$$\mathbf{x} = (a, b, c)^T \quad \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{0}$$

Einsetzen in das Differentialgleichungssystem liefert

$$\left. \begin{array}{l} -a + b = 0 \\ -b + 4c = 0 \\ a - 4c = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} b = a \\ c = \frac{a}{4} \end{array} \right\} \Rightarrow \mathbf{x} = a \cdot \left( 1, 1, \frac{1}{4} \right)^T$$

Für  $\lambda_2 = -3$  mit der Vielfachheit  $n_2 = 2$  machen wir den Ansatz

$$\mathbf{x} = e^{-3t} \cdot \begin{pmatrix} a_0 + a_1 \cdot t \\ b_0 + b_1 \cdot t \\ c_0 + c_1 \cdot t \end{pmatrix}$$

Diesen Ansatz setzen wir in das Gleichungssystem ein, machen einen Koeffizientenvergleich und lösen die entstehenden linearen Gleichungssysteme. Dabei verbleiben zwei Parameter  $b$  und  $c$  mit

$$\mathbf{x} = e^{-3t} \cdot \begin{pmatrix} c + b \cdot t \\ b - 2c - 2b \cdot t \\ c - b + b \cdot t \end{pmatrix}$$

Als Gesamtlösung folgt daraus

$$\mathbf{x}(t) = a \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix} + b \cdot \left[ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} \right] \cdot e^{-3t} + c \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot e^{-3t}$$

Hierbei ist

- der erste Vektor ein Eigenvektor zum Eigenwert  $\lambda_1 = 0$
- der letzte Vektor ein Eigenvektor zum Eigenwert  $\lambda_2 = -3$
- der zweite Vektor ein **Hauptvektor** zum Eigenwert  $\lambda_2 = -3$

Es gilt: Eigenvektor =  $(\mathbf{A} - \lambda_2 \cdot \mathbf{E}) \cdot \text{Hauptvektor}$

## 14.4 Bemerkungen zur Stabilität von Lösungen

Wir wollen uns mit den Anfangsgründen der sogenannten qualitativen Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen und insbesondere nichtlinearer Systeme befassen. Dazu betrachten wir **autonome** (d.h. nicht zeitabhängige) Systeme der folgenden Art:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) \quad \text{mit} \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}^0 \quad (14.8)$$



Hierbei ist  $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  ein stetig differenzierbares Vektorfeld. Nach Picard-Lindelöf haben alle Anfangswertprobleme eine lokale Lösung. Wir nehmen einmal an, dass jedes Anfangswertproblem eine *globale* Lösung für alle  $t \in \mathbb{R}$  hat. Diese Lösung bezeichnen wir mit  $\mathbf{x}(t, \mathbf{x}^0)$  bzw.  $\mathbf{x}(\cdot, \mathbf{x}^0)$ .

Wir interessieren uns jetzt weniger für die Abhängigkeit der Lösung von  $t$ , als viel mehr von  $\mathbf{x}^0$ . Für festes  $t \in \mathbb{R}$  entsteht dann eine Abbildung  $\varphi_t : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  mit  $\varphi_t(\mathbf{x}^0) = \mathbf{x}(t, \mathbf{x}^0)$ . Also haben wir eine einparametrische Familie  $(\varphi_t)_{t \in \mathbb{R}}$  von Abbildungen. Diese Familie hat die folgenden Eigenschaften:

$$\varphi_0 = \text{id}_{\mathbb{R}^n} \quad \text{und} \quad \varphi_{s+t} = \varphi_s \circ \varphi_t = \varphi_t \circ \varphi_s \quad \forall s, t \in \mathbb{R}$$

Also ist  $(\varphi_t)_{t \in \mathbb{R}}$  auch eine Gruppe. Der  $\mathbb{R}^n$  heißt **Phasenraum**,  $(\varphi_t)$  ist der **Fluss**. Man veranschaulicht sich die Lösungen von (14.8) häufig als die Kurven im Phasenraum, die als Lösungen auftreten können. Diese heißen **Trajektorien** oder **Orbits**. Die Gesamtheit aller Trajektorien heißt **Phasenportrait** des Systems. Wir interessieren uns jetzt für das Langzeitverhalten von Lösungen.

### Definition 14.10

Sei  $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  stetig differenzierbar. Betrachte

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) \quad (14.9)$$

1. Eine Lösung  $\hat{\mathbf{x}}$  von (14.9) heißt auf  $[0, \infty)$  **stabil** (im Sinne von Liapunov), wenn es zu jedem  $F > 0$  ein  $\delta > 0$  gibt, sodass jede Lösung  $\mathbf{x}$  von (14.9) mit  $\|\mathbf{x}(0) - \hat{\mathbf{x}}(0)\| < \delta$  auf ganz  $[0, \infty)$  existiert und für alle  $t \geq 0$  gilt:  $\|\mathbf{x}(t) - \hat{\mathbf{x}}(t)\| \leq F$
2. Eine Lösung  $\hat{\mathbf{x}}$  von (14.9) heißt **asymptotisch stabil**, wenn  $\hat{\mathbf{x}}$  stabil ist und für jede Lösung  $\mathbf{x}$  (wie im ersten Teil) gilt:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\hat{\mathbf{x}}(t) - \mathbf{x}(t)\| = 0$$

3. Eine Lösung, die nicht stabil ist, heißt **instabil**.

#### Bemerkung

1. Die Wahl der Norm in  $\mathbb{R}^n$  ist hierbei beliebig.
2. Die Definitionen besagen, dass die betrachteten Lösungen für alle  $t \geq 0$  (allgemeiner: für  $t \geq t_0$ ) existieren sollen.
3. Es gibt Systeme von Differentialgleichungen, die instabile Lösungen  $\hat{\mathbf{x}}$  haben, für die aber die Bedingung aus 14.10.2 trotzdem gilt.

Im Folgenden interessiert uns die Stabilität von **Gleichgewichtslösungen** von (14.9), d.h. Lösungen  $\mathbf{x} = \mathbf{a} = \text{const.}$  mit  $\mathbf{f}(\mathbf{a}) = 0$ . Dieses  $\mathbf{a}$  heißt Gleichgewichtslage, statischer oder kritischer Punkt. Zunächst betrachten wir Systeme mit konstanten Koeffizienten. Solch ein System  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}$  hat das Gleichgewicht  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ .

### Satz 14.11

Die Art des Gleichgewichtes  $\mathbf{0}$  von  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}$  ist durch die Eigenwerte  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  der Matrix  $\mathbf{A}$  wie folgt bestimmt:

1. Ist  $\text{Re } \lambda_k < 0$  für alle  $k$ , so ist  $\mathbf{0}$  asymptotisch stabil.
2. Gibt es ein  $k$  mit  $\text{Re } \lambda_k > 0$ , so ist  $\mathbf{0}$  instabil.
3. Im Falle  $\max_k \text{Re } \lambda_k = 0$  gilt:  $\mathbf{0}$  ist genau dann stabil, wenn für jedes  $k$  mit  $\text{Re } \lambda_k = 0$  die algebraische und die geometrische Vielfachheit von  $\lambda_k$  übereinstimmen.

**Beweis**

Sei  $\lambda = \alpha + i\beta$  ein Eigenwert mit der algebraischen Vielfachheit  $r$ , d.h.  $\lambda$  ist eine  $r$ -fache Nullstelle des charakteristischen Polynoms von  $A$ . Dann ist die zugehörige Lösung von  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}$  aus dem Fundamentalsystem die Form

$$\mathbf{x}(t) = e^{\alpha t} \cdot (\mathbf{P}(t) \cdot \cos \beta t + \mathbf{Q}(t) \cdot \sin \beta t)$$

Hierbei sind  $\mathbf{P}$  und  $\mathbf{Q}$  Polynome vom Grade  $\leq r - 1$ .

1. Für  $\alpha < 0$  konvergiert  $e^{-|\alpha|t} \cdot (\mathbf{P}(t) \cdot \cos \beta t + \mathbf{Q}(t) \cdot \sin \beta t) \rightarrow 0$  für  $t \rightarrow \infty$ , denn  $e^{-|\alpha|t} \rightarrow 0$  und die trigonometrischen Funktionen sind ohnehin durch 1 beschränkt. Wenn für alle Eigenwerte  $\operatorname{Re} \lambda_k < 0$  gilt, dann ist für alle Lösungen  $\|\mathbf{x}(t)\| \rightarrow 0$  für  $t \rightarrow \infty$ .

Dies ist nur ein Teil der asymptotischen Stabilität, die Stabilität kann man durch etwas genauere Abschätzung zeigen.

2. Gibt es ein  $k$  mit  $\operatorname{Re} \lambda_k > 0$ , so geht die zugehörige Lösung für  $t \rightarrow \infty$  gegen Unendlich.
3. Sei  $\alpha = 0$ , dann ist  $\mathbf{x}(t) = \mathbf{P}(t) \cdot \cos \beta t + \mathbf{Q}(t) \cdot \sin \beta t$ . Diese Lösung bleibt nur dann für alle Zeiten in der Nähe von  $\mathbf{0}$ , wenn  $\mathbf{P}$  und  $\mathbf{Q}$  konstante Vektoren sind. Das tritt genau dann ein, wenn es genauso viele linear unabhängige Eigenvektoren gibt (deren maximale Anzahl ist die geometrische Vielfachheit!), wie die algebraische Vielfachheit angibt.

■

Im nichtlinearen Fall  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$  sei wieder  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$  die Gleichgewichtslage. (Hat man die Gleichgewichtslage  $\mathbf{a}$ , so kann man von  $\mathbf{f}$  zu  $\mathbf{f} - \mathbf{a}$  übergehen.) Sei zudem  $\mathbf{f}$  jetzt hinreichend oft stetig differenzierbar. Die Jacobimatrix von  $\mathbf{f}$  an der Stelle  $\mathbf{0}$  sei  $\mathbf{f}'(\mathbf{0}) =: \mathbf{A}$ . Dann gilt analog zur Taylorformel:

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{g}(\mathbf{x}) \quad \text{mit} \quad \frac{\|\mathbf{g}(\mathbf{x})\|}{\|\mathbf{x}\|} \rightarrow 0 \quad \text{für} \quad \mathbf{x} \rightarrow \mathbf{0} \quad (14.10)$$

Für solche Systeme hängt das Stabilitätsverhalten von dem des zugehörigen **linearisierten Systems**  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}$  ab.

**Satz 14.12**

Betrachte  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$  und es möge (14.10) gelten. Die Eigenwerte von  $\mathbf{A}$  seien mit  $\lambda_k$  bezeichnet.

1. Ist  $\operatorname{Re} \lambda_k < 0$  für alle  $k$ , so ist  $\mathbf{0}$  asymptotisch stabil.
2. Gibt es ein  $k$  mit  $\operatorname{Re} \lambda_k > 0$ , so ist  $\mathbf{0}$  instabil.
3. Im Falle  $\max_k \operatorname{Re} \lambda_k = 0$  ist keine Aussage möglich.

Es gibt noch weitere Aussagen des asymptotischen Verhaltens von Differentialgleichungssystemen.

# 15 Bemerkungen zu Fourierreihen

Wir kennen Potenzreihen  $\sum_n a_n x^n$  und Entwicklungen von Funktionen  $f$  in Potenzreihen (Taylor-Reihen.) Die allgemeine Motivation liegt in mathematischen und physikalischen Problemen, zum Beispiel Differentialgleichungen. Die Lösungen dieser Probleme seien Funktionen  $f_n$ , welche mindestens linear unabhängig seien mögen. Nun möchte man für möglichst viele Lösungen  $f$  eine Darstellung der folgenden Form haben:

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} c_n f_n$$

Die  $(f_n)$  sind also eine Basis in einem geeigneten Vektorraum. Wir betrachten in diesem Kapitel spezielle Situationen: Nun seien die  $f_n$  Funktionen  $\cos nx$  und  $\sin nx$ . Unter einer **trigonometrischen Reihe** versteht man eine Reihe der Form

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cdot \cos nx + b_n \cdot \sin nx] \quad (15.1)$$

Der Faktor bei  $a_0$  ist eine nützliche Konvention. Wegen der Periodizität der  $\cos nx$  und  $\sin nx$  betrachten wir diese Reihe nur auf  $[-\pi, \pi]$  (manchmal nimmt man auch  $[0, 2\pi]$ ). Für alle  $x \in [-\pi, \pi]$ , für die (15.1) konvergiert, erhalten wir

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cdot \cos nx + b_n \cdot \sin nx]$$

Hierbei ist noch nicht festgelegt, in welchem Sinne die Reihe konvergieren soll (gleichmäßig, punktweise, evtl. noch anders). In welchem Zusammenhang stehen nun  $f$  und die  $a_n$  und  $b_n$ ? Hierfür brauchen wir das folgende Lemma.

## Lemma 15.1

Es bestehen die folgenden **Orthogonalitätsrelationen**.

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cdot \sin mx \, dx &= 0 \quad \forall m, n \in \mathbb{N}_0 \\ \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cdot \cos mx \, dx &= \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cdot \sin mx \, dx = \begin{cases} 0 & n \neq m \\ \pi & n = m \geq 1 \\ 2\pi & n = m = 0 \text{ für den Kosinus} \end{cases} \end{aligned} \quad (15.3)$$

In kompakterer Schreibweise ist  $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{imt} \cdot \overline{e^{int}} \, dt = \begin{cases} 1 & m = n \\ 0 & m \neq n \end{cases}$  für alle  $m, n \in \mathbb{Z}$ .

Um die Herkunft des Namens „Orthogonalitätsrelation“ zu verstehen, betrachten wir in  $C[-\pi, \pi]$  das Skalarprodukt

$$\langle f, g \rangle := \int_{-\pi}^{\pi} \overline{f(x)} \cdot g(x) \, dx$$

Angenommen,  $f(x)$  sowie  $f(x) \cdot \cos nx$  und  $f(x) \cdot \sin nx$  seien für alle  $n$  über  $[-\pi, \pi]$  riemannintegrierbar. Weiterhin sei es möglich, in (15.2) nach Multiplikation mit  $\cos nx$  und  $\sin nx$  die entsprechenden Reihen gliedweise zu integrieren.

$$f(x) \cdot \cos mx = \frac{a_0}{2} \cdot \cos mx + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cdot \cos nx \cdot \cos mx + b_n \cdot \sin nx \cdot \cos mx]$$

Bei der Integration von  $-\pi$  bis  $\pi$  nutzen wir die Orthogonalitätsrelationen aus und erhalten

$$\begin{aligned} \text{für } m = 0 : \quad & \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \, dx = \frac{a_0}{2} \cdot 2\pi \quad \Rightarrow \quad a_0 = \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \, dx \\ \text{für } m \geq 1 : \quad & \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot \cos mx \, dx = a_m \cdot \pi \quad \Rightarrow \quad a_m = \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot \cos mx \, dx \end{aligned}$$

Völlig analog geht man für den Sinus vor. Es ergeben sich die **Euler-Fourierschen Formeln**:

$$\begin{aligned} a_m &= \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot \cos mx \, dx \quad \text{für } m \geq 0 \\ b_m &= \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot \sin mx \, dx \quad \text{für } m \geq 1 \end{aligned} \quad (15.4)$$

### Satz 15.2

Die trigonometrische Reihe (15.1) sei auf  $[-\pi, \pi]$  gleichmäßig konvergent mit der Summe  $f$ . Dann gelten für die  $a_m$  und  $b_m$  die Euler-Fourierschen Formeln (15.4) und die  $a_m$  und  $b_m$  heißen **Fourierkoeffizienten** von  $f$ .

### Beweis

Dass die Reihe auf  $[-\pi, \pi]$  gleichmäßig konvergiert, bedeutet, dass die Folge der Partialsummen

$$\left( \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^N [a_n \cdot \cos nx + b_n \cdot \sin nx] \right)_{N \in \mathbb{N}}$$

für  $x \in [-\pi, \pi]$  gleichmäßig konvergiert. Die Partialsummen sind stetige Funktionen, also auch die Grenzfunktion  $f$ . Damit sind auch  $f(x) \cdot \cos nx$  und  $f(x) \cdot \sin nx$  stetig, also R-integrierbar. Wegen der gleichmäßigen Konvergenz darf man die unendliche Reihe gliedweise integrieren, daraus folgen die Euler-Fourierschen Formeln (siehe oben). ■

Nun betrachten wir den umgekehrten Standpunkt. Sei  $f$  eine auf  $[-\pi, \pi]$  R-integrierbare Funktion. Nach (15.4) kann man die  $a_n$  und  $b_n$  berechnen und die trigonometrische Reihe (15.1) bilden. Diese Reihe heißt **Fourierreihe** von  $f$ . Uns stellen sich folgende Fragen:

- Konvergiert diese Reihe überhaupt?
- Wenn ja, in welchem Sinne?
- Was hat die Summe mit  $f$  zu tun?

Im folgenden Satz stellen wir einige hinreichende Bedingungen für die Konvergenz der Fourierreihe von  $f$  gegen  $f$  zusammen. Vorher führen wir folgende Bezeichnungen ein:  $f$  heißt auf  $[a, b]$  **stückweise stetig**, wenn  $f$  auf  $[a, b]$  bis auf endlich viele Punkte stetig ist und in allen Punkten aus  $(a, b)$  der links- und rechtsseitigen Grenzwerte von  $f$  existieren (in  $a$  nur der rechts-, in  $b$  nur der linksseitige).

Sind  $f$  und  $f'$  auf  $[a, b]$  stetig, so sprechen wir hier von der **Glattheit** von  $f$ . Wenn  $f$  und/oder  $f'$  nur stückweise stetig ist, handelt es sich nur um **stückweise Glattheit**.

### Satz 15.3

1. Sei  $f$   $2\pi$ -periodisch und auf  $[-\pi, \pi]$  stückweise glatt. Dann konvergiert die Fourierreihe von  $f$  punktweise für alle  $x$ . Die Summe ist gleich  $f(x)$  für alle  $x$ , an denen  $f$  stetig ist, ansonsten  $\frac{1}{2} \cdot [f(x-0) + f(x+0)]$ .
2. Sei  $f$   $2\pi$ -periodisch, stetig und stückweise glatt, dann konvergiert die Fourierreihe von  $f$  in jedem beschränkten Intervall von  $\mathbb{R}$  gleichmäßig gegen  $f$ .

#### Bemerkung

Die Bedingungen in 15.3.1 können noch weiter abgeschwächt werden. Eine völlig befriedigende Theorie erhält man erst im Rahmen der Hilbertraumtheorie auf Grundlage der sogenannten  $L^2$ -Räume (den Räumen der quadratisch integrierbaren Funktionen).

## Beispiele

Unsere Beispielfkt. sind auf  $[-\pi, \pi]$  gegeben und werden auf dem  $\mathbb{R}$  mit der Periode  $2\pi$  fortgesetzt.

1.  $f(x) = x$  für  $x \in (-\pi, \pi)$  und  $f(\pm\pi) = 0$

$f$  ist ungerade, somit entsteht eine Sinusreihe, denn  $\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot \cos mx \, dx = \pi \cdot a_m = 0$ . Durch partielle Integration erhalten wir für  $m \geq 1$ :

$$\begin{aligned} b_m &= \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} x \cdot \sin mx \, dx \\ &= \frac{1}{\pi} \cdot \left[ \frac{\sin mx}{m^2} - \frac{x \cdot \cos mx}{m} \right]_{-\pi}^{\pi} \\ &= \frac{1}{\pi} \cdot \left( -\frac{\pi \cdot \cos m\pi}{m} - \frac{\pi \cdot \cos m\pi}{m} \right) \\ &= \frac{2}{m} \cdot (-1)^{m+1} \end{aligned}$$

Die Funktion wird also durch folgende Fourierreihe dargestellt:

$$f(x) = 2 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \cdot \sin nx \quad \text{für } x \in \mathbb{R}$$

Daraus lesen wir ab:

$$\sin x - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \dots = \begin{cases} \frac{x}{2} & x \in (-\pi, \pi) \\ 0 & x = \pm\pi \end{cases}$$

Speziell erkennt man durch die Reihe bei  $x = \pi/2$ :

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots = \frac{\pi}{4}$$

2.  $f(x) = |x|$  für  $x \in [-\pi, \pi]$

$f$  ist gerade, somit entsteht eine reine Cosinusreihe.

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} |x| \, dx = \frac{2}{\pi} \cdot \int_0^{\pi} x \, dx = \pi$$

$$\begin{aligned}
a_m &= \frac{2}{\pi} \cdot \int_0^{\pi} x \cdot \cos mx \, dx \\
a_m &= \frac{2}{\pi} \cdot \left[ \frac{\cos mx}{m^2} + \frac{x \cdot \sin mx}{m} \right]_0^{\pi} \\
a_m &= \frac{2}{\pi} \cdot \left( \frac{\cos m\pi}{m^2} - \frac{1}{m^2} \right) \\
a_m &= \begin{cases} 0 & m \text{ gerade} \\ -\frac{4\pi}{m^2} & m \text{ ungerade} \end{cases}
\end{aligned}$$

Somit ergibt sich die Fourierreihe

$$f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2} \quad \text{für } x \in \mathbb{R}$$

und wir lesen für  $x \in [-\pi, \pi]$  wiederum ab:

$$\cos x + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \dots = \frac{\pi^2}{8} - \frac{\pi}{4} \cdot |x|$$

Im Speziellen sehen wir bei  $x = 0$ :

$$1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots = \frac{\pi^2}{8}$$

In den Anwendungen liegt häufig kein Intervall der Länge  $2\pi$  vor. Dennoch ist die Entwicklung in eine Fourierreihe mit den **allgemeinen Orthogonalitätsrelationen** für  $\cos \frac{\pi \cdot nx}{p}$  und  $\sin \frac{\pi \cdot nx}{p}$  möglich. Diese gelten für jedes Intervall der Länge  $2p$ :

$$\int_d^{d+2p} \cos \frac{\pi \cdot nx}{p} \cdot \cos \frac{\pi \cdot mx}{p} \, dx = \int_d^{d+2p} \sin \frac{\pi \cdot nx}{p} \cdot \sin \frac{\pi \cdot mx}{p} \, dx = p \cdot \delta_{mn} \quad \text{für } m, n \neq 0$$

$$\int_d^{d+2p} \sin \frac{\pi \cdot nx}{p} \cdot \cos \frac{\pi \cdot mx}{p} \, dx = 0 \quad \forall m, n \in \mathbb{N}$$

Häufig hat man eine Funktion auf einem Intervall  $[0, l]$  gegeben. Dann kann man obige Formel auf die Situation  $d = -l$  und  $p = l$  anwenden, wenn man  $f$  auf  $[-l, 0]$  geeignet erweitert. Geeignete Erweiterungen sind zum Beispiel die gerade und die ungerade Fortsetzung, d.h.  $f$  wird so fortgesetzt, dass es in  $[-l, l]$  gerade bzw. ungerade ist.

# 16 Grundbegriffe partieller Differentialgleichungen

Eine Gleichung der Form

$$F\left(x_1, \dots, x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial^m u}{\partial x_n^{i_n} \dots \partial x_1^{i_1}}\right) = 0 \quad (16.1)$$

mit einer gesuchten Funktion  $u$  von  $n$  Variablen  $x_1, \dots, x_n$  heißt **partielle Differentialgleichung** (kurz PDE von englisch „partial differential equation“). Wir führen die folgenden Begriffe ein:

- **Ordnung:** höchste auftretende Ableitung ( $m$ )
- **Lösung:** Sei  $G \subset \mathbb{R}^n$  ein Gebiet. Jede Funktion  $u : G \rightarrow \mathbb{R}$ , die stetige partielle Ableitungen bis einschließlich  $m$ -ter Ordnung besitzt und (16.1) erfüllt, heißt Lösung oder genauer **klassische Lösung** von (16.1) im Gebiet  $G$ . Dieser Lösungsbegriff ist später zur Erarbeitung einer wirkungsvollen Theorie zu eng.
- **Lineare PDE:**  $F$  ist linear in  $u$  und allen Ableitungen, die Koeffizienten können von den  $x_i$  abhängen. (Wenn nicht, heißt die DGL linear mit **konstanten Koeffizienten**). Zum Beispiel für  $n = m = 2$ :

$$a_{11} \cdot u_{xx} + a_{12} \cdot u_{xy} + a_{22} \cdot u_{yy} + b_1 \cdot u_x + b_2 \cdot u_y + c \cdot u + d = 0$$

Alle Koeffizienten können von  $x$  und  $y$  abhängen.

- **Quasilineare PDE:** Es liegt Linearität nur in den höchsten Ableitungen vor. Ein Beispiel für  $n = m = 2$ :

$$a_{11} \cdot u_{xx} + a_{12} \cdot u_{xy} + a_{22} \cdot u_{yy} = 0$$

Alle Koeffizienten können von  $x, y, u, u_x$  und  $u_y$  abhängen.

## Beispiele für wichtige partielle Differentialgleichungen

1. *Schwingungsgleichung:*  $\square_a u = f$  mit  $\square_a = \frac{d^2}{dt^2} - a^2 \cdot \Delta$

$\square_a$  ist der d'Alembert-Operator und  $\Delta$  der Laplaceoperator. Je nachdem, ob dieser in ein, zwei oder drei Dimensionen vorliegt, spricht man von einer ein-, zwei- oder dreidimensionalen Wellengleichung.

- a) eindimensional (schwingende Saite):  $u_{tt} = a^2 \cdot u_{xx} + f$   
 $u(t, x)$  ist die Auslenkung der Saite zur Zeit  $t$  am Ort  $x$  und  $f$  ist eine äußere Anregung.
- b) zweidimensional (schwingende Membran):  $u_{tt} = a^2 \cdot (u_{xx} + u_{yy}) + f$
- c) dreidimensional (Ausbreitung elektromagn. Wellen):  $u_{tt} = a^2 \cdot (u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}) + f$

2. *Wärmeleitungsgleichung:*  $u_t = a^2 \cdot \Delta u + f$

$u(t, x)$  ist die Temperatur zum Zeitpunkt  $t$  am Ort  $x$ .

### 3. Stationäre Gleichungen ohne Abhängigkeit von $t$

- Laplace-Gleichung:  $\Delta u = 0$
- Poisson-Gleichung:  $\Delta u = -f$
- Helmholtz-Gleichung:  $\Delta u + k^2 \cdot u = -f/a^2$

Weitere Gleichungen aus der mathematischen Physik, zum Beispiel die Maxwellgleichungen und die Schrödingergleichung.

## Klassifikation partieller Differentialgleichungen zweiter Ordnung

Betrachte eine quasilineare PDE zweiter Ordnung:

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \cdot u_{x_i x_j} + F(x, u, u_{x_i}) = 0 \quad \text{mit} \quad x \in G \subset \mathbb{R}^n \quad (16.2)$$

Dieser PDE ordnen wir die symmetrische Matrix  $\mathbf{A}(x) = (a_{ij}(x))$  und die entsprechende quadratische Form

$$Q(y_1, \dots, y_n) := \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \cdot y_i \cdot y_j$$

zu. Für festes  $x$  ist  $Q$  eine aus der linearen Algebra bekannte quadratische Form.

### Beispiel 16.1

Zu der Differentialgleichung  $u_{xx} + 2x \cdot u_{xy} + y \cdot u_{yy} + u_x^2 - u \cdot u_y = 0$  gehört die symmetrische Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & x \\ x & y \end{pmatrix}$$

Man beachte, dass sich der Vorfaktor  $2x$  symmetrisch auf  $u_{xy}$  und  $u_{yx}$  aufteilt.

Mit  $\mathbf{A}$  können wir eine Hauptachsentransformation (sprich: Diagonalisierung) durchführen. Sind  $\lambda_i(x)$  die reellen Eigenwerte von  $\mathbf{A}(x)$ , dann wird  $Q$  transformiert in

$$Q^*(y_1, \dots, y_n) := \sum_{i=1}^n \lambda_i(x) \cdot y_i^2$$

### Definition 16.1

Die quasilineare PDE (16.2) heißt im Punkt  $x \in G$ :

- **elliptisch**, wenn alle Eigenwerte von Null verschieden sind und dasselbe Vorzeichen haben.
- **hyperbolisch**, wenn alle Eigenwerte von Null verschieden sind und bis auf genau einen dasselbe Vorzeichen haben.
- **ultrahyperbolisch**, wenn  $n \geq 4$  ist, alle Eigenwerte von Null verschieden sind und es je mindestens zwei positive und zwei negative Eigenwerte gibt.
- **parabolisch**, wenn mindestens ein Eigenwert Null ist.

Wenn (16.2) für alle  $x \in G$  einen bestimmten Typ hat, dann hat (16.2) den betreffenden Typ in  $G$ .



**Beispiel 16.2** im dreidimensionalen Raum

1. Die Wellengleichung hat die Eigenwerte 1,  $-1$ ,  $-1$  und  $-1$ . Sie ist somit hyperbolisch.
2. Die Wärmeleitungsgleichung hat die Eigenwerte 0,  $-1$ ,  $-1$  und  $-1$ . Sie ist somit parabolisch.
3. Die Laplacegleichung hat die Eigenwerte 1, 1 und 1. Sie ist somit elliptisch.

**Koordinatentransformation in partiellen Differentialgleichungen**

Für viele Betrachtungen ist es günstig, die betreffende Differentialgleichung auf eine einfache Gestalt (Normalform) zu transformieren. Dies soll an folgendem Beispiel demonstriert werden:

$$A \cdot u_{xx} + B \cdot u_{xy} + C \cdot u_{yy} = 0 \quad (16.3)$$

Hierbei sind  $A$ ,  $B$  und  $C$  Konstanten. Mit der linearen Koordinatentransformation

$$\begin{aligned} r &:= \alpha \cdot x + \beta \cdot y \\ s &:= \gamma \cdot x + \delta \cdot y \end{aligned} \quad \text{mit} \quad \det \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \neq 0 \quad (16.4)$$

werden die Variablen in (16.3) mithilfe der Kettenregel auf die Variablen  $r$  und  $s$  umgerechnet. Die Determinantenbedingung ist nötig, damit das Ergebnis zurücktransformiert werden kann.

$$\begin{aligned} u_x &= u_r \cdot r_x + u_s \cdot s_x = \alpha \cdot u_r + \gamma \cdot u_s \\ u_y &= u_r \cdot r_y + u_s \cdot s_y = \beta \cdot u_r + \delta \cdot u_s \\ u_{xx} &= \alpha^2 \cdot u_{rr} + 2\alpha\gamma \cdot u_{rs} + \gamma^2 \cdot u_{ss} \\ u_{xy} &= \alpha\beta \cdot u_{rr} + (\alpha\delta + \beta\gamma) \cdot u_{rs} + \gamma\delta \cdot u_{ss} \\ u_{yy} &= \beta^2 \cdot u_{rr} + 2\beta\delta \cdot u_{rs} + \delta^2 \cdot u_{ss} \end{aligned}$$

Einsetzen in (16.3) liefert

$$\begin{aligned} 0 &= (A \cdot \alpha^2 + B \cdot \alpha\beta + C \cdot \beta^2) \cdot u_{rr} \\ &+ (A \cdot \gamma^2 + B \cdot \gamma\delta + C \cdot \delta^2) \cdot u_{ss} \\ &+ [2A \cdot \alpha\gamma + B \cdot (\alpha\delta + \beta\gamma) + 2C \cdot \beta\delta] \cdot u_{rs} \end{aligned} \quad (16.5)$$

Man kann die Koeffizienten so wählen, dass die ersten Summanden in (16.5) verschwinden. Wähle zuerst  $\beta = \delta = 1$ . Dann erhält man die Bedingung

$$A \cdot \alpha^2 + B \cdot \alpha + C = 0 \quad \text{und} \quad A \cdot \gamma^2 + B \cdot \gamma + C = 0$$

Hier haben wir o.E.d.A. angenommen, dass  $A \neq 0$  ist. Sonst muss  $C \neq 0$  sein und man würde  $\alpha = \gamma = 1$  wählen. Für  $A = C = 0$  hätte (16.3) schon eine einfachere Form. Aus den obigen Bedingung erkennt man, dass  $\alpha$  und  $\gamma$  die Lösungen der quadratischen Gleichung  $A \cdot m^2 + B \cdot m + C = 0$  sein müssen. Wähle also etwa

$$\alpha := m_1 = \frac{-B + \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} \quad \text{und} \quad \gamma := m_2 = \frac{-B - \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} \quad (*)$$

Damit wird aus (16.5):

$$[2A \cdot m_1 \cdot m_2 + B \cdot (m_1 + m_2) + 2C] = 0$$

Nach dem Vietaschen Wurzelsatz gilt  $m_1 + m_2 = -B/A$  und  $m_1 \cdot m_2 = C/A$ . Damit kommen wir letztendlich auf

$$\frac{4AC - B^2}{A} \cdot u_{rs} = 0 \quad (16.6)$$

Also hängt jetzt alles von der Diskriminante der quadratischen Gleichung ab, und das sogar in zweierlei Hinsicht. Einerseits für die Klassifikation der Differentialgleichung, denn aus (16.3) folgt für die zugehörige Matrix und deren charakteristisches Polynom:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} A & \frac{B}{2} \\ \frac{B}{2} & C \end{pmatrix} \Rightarrow \lambda^2 - (A + C) \cdot \lambda + \frac{4AC - B^2}{4} = 0$$

Wiederum mit dem Vieta'schen Satz ist  $\lambda_1 \cdot \lambda_2 = \frac{4AC - B^2}{4}$ , somit ist die Differentialgleichung

- *elliptisch* für  $4AC - B^2 > 0$  (beide Eigenwerte haben das gleiche Vorzeichen)
- *hyperbolisch* für  $4AC - B^2 < 0$  (die Eigenwerte haben verschiedene Vorzeichen)
- *parabolisch* für  $4AC - B^2 = 0$  (mindestens ein Eigenwert verschwindet)

Desweiteren hat die Diskriminante natürlich Auswirkungen auf die Struktur der Lösung:

1. Für  $4AC - B^2 \neq 0$  vereinfacht sich die Differentialgleichung zu  $u_{rs} = 0$ . Dies kann man entweder nach  $r$  oder nach  $s$  integrieren und erhält  $u_r = g(r)$  und  $u_s = f(s)$ . Sind  $G(r)$  und  $F(s)$  Stammfunktionen dieser  $g(r)$  und  $f(s)$ , so folgt als Lösung  $u = G(r) + F(s)$ . In den Koordinaten  $x$  und  $y$  lautet die Lösung von (16.3) damit

$$u(x, y) = F(m_2 \cdot x + y) + G(m_1 \cdot x + y) \quad (16.7)$$

Dabei sind  $F$  und  $G$  beliebige, in  $G$  stetig differenzierbare Funktionen. War die PDE hyperbolisch, so haben wir zwei verschiedene  $m_1, m_2 \in \mathbb{R}$ . Im elliptischen Falle sind die Lösungen komplex und zueinander konjugiert, also  $m_2 = \overline{m_1}$ .

2. Im parabolischen Fall ( $4AC - B^2 = 0$ ) gibt es nur eine Doppellösung  $m = -\frac{B}{2A}$  für (16.6), somit ergibt sich nur  $0 = 0$ . Der Ausweg ist eine andere Koordinatentransformation. Statt (16.4) nehmen wir nun  $r := mx + y$  und  $s := x$ . Dann erhält man aus (16.5) mit  $\alpha = m$ ,  $\beta = \gamma = 1$  und  $\delta = 0$  unter der Bedingung  $A \cdot m^2 + B \cdot m + C = 0$ :

$$u_{ss} = 0$$

Hieraus folgt durch Integration erst  $u_s = G(r)$  und dann  $u = F(r) + s \cdot G(r)$ . Mit den Koordinaten  $x$  und  $y$  erhält man

$$u(x, y) = F(mx + y) + x \cdot G(mx + y) \quad (16.8)$$

### Beispiel 16.3

Wir betrachten die eindimensionale Schwingungsgleichung:

$$u_{tt} - a^2 \cdot u_{xx} = 0 \quad \text{mit} \quad a > 0$$

Statt  $u(x, y)$  haben wir nun  $u(t, x)$ . Es ist  $A = 1$ ,  $B = 0$  und  $C = -a^2$ . Die Lösungen der quadratischen Gleichung haben die Form  $m_1 = a$  und  $m_2 = -a$ . Diese Lösungen werden in (16.7) eingesetzt und man erhält die **D'Alembertsche Lösung der Schwingungsgleichung**:

$$u(t, x) = F(x - at) + G(x + at) \quad (16.9)$$

Aus den bisherigen Betrachtungen sieht man schon, dass in den Lösungen von PDE nicht beliebige Konstanten (wie bei gewöhnlichen DGL), sondern beliebige Funktionen auftauchen. Diese beliebigen Funktionen müssen dann durch Anfangs- bzw. Randbedingungen eindeutig bestimmt werden, wenn die Probleme eindeutig lösbar sind.

Im Folgenden behandeln wir typische PDE verschiedener Typen für konkrete Aufgabenstellungen.

# 17 Parabolische partielle Differentialgleichungen

Die **Wärmeleitungsgleichung**

$$u_t = a^2 \cdot \Delta u + f \quad (17.1)$$

beschreibt für einen Körper  $K$  die Temperaturverteilung  $u(x, t)$  in jedem Raumpunkt  $x = (x_1, x_2, x_3)$  zur Zeit  $t$ . Um diese Gleichung eindeutig zu lösen, braucht man zusätzliche Informationen. Typischerweise hat man eine Anfangsbedingung  $u(x, 0) = \varphi(x)$ .  $\varphi$  beschreibt eine vorgegebene Anfangstemperaturverteilung. Als weitere Randbedingungen nutzt man das Wechselspiel von  $K$  mit der Umgebung:

- Randbedingung 1. Art: **Dirichlet-Bedingung**

Die Temperatur auf der Oberfläche von  $K$  ist konstant oder mit vorgegebener Verteilung:

$$u(x, t) = u_0(x, t) \quad \forall x \in \partial K, t \geq 0 \quad (17.3)$$

- Randbedingung 2. Art: **Neumann-Bedingung**

Der Wärmefluss von der Oberfläche in die Umgebung ist vorgegeben:

$$\frac{\partial u}{\partial n}(x, t) = \Psi(x, t) \quad \forall x \in \partial K, t \geq 0 \quad (17.4)$$

$n$  ist die äußere Normale an  $\partial K$  in  $x$ .

- Randbedingung 3. Art: **gemischte Randbedingung**

$$\frac{1}{h} \cdot \frac{\partial u}{\partial n} + u = u_0 \quad \forall x \in \partial K, t \geq 0$$

$h$  ist die relative Wärmeübergangszahl.

Hat man Anfangs- und Randbedingungen, so spricht man von einem **Anfangs-Randwert-Problem** (ARWP) 1., 2. oder 3. Art (entsprechend der obigen Klassifikation von Randbedingungen).

## 17.1 1. Anfangs-Randwert-Problem für einen endlich langen Stab. Homogene Aufgabe

Ein homogener dünner Stab der Länge  $l$  mit isolierter Mantelfläche liegt im Intervall  $[0, l]$  auf der  $x$ -Achse. Der Wärmefluss gehe nur in  $x$ -Richtung. Die Funktion  $u(x, t)$  beschreibt die Temperatur am Ort  $x$  zur Zeit  $t$ . An den Enden  $x = 0$  und  $x = l$  wird der Temperaturverlauf vorgegeben. Wir lösen also die folgende Aufgabe:

$$\begin{array}{llll} \text{Differentialgleichung:} & u_t & = & a^2 \cdot u_{xx} + f(x, t) \quad \text{mit} \quad 0 \leq x \leq l \quad \text{und} \quad t \geq 0 \\ \text{Anfangsbedingung:} & u(x, 0) & = & \varphi(x) \quad \text{mit} \quad 0 \leq x \leq l \\ \text{Randbedingung:} & u(0, t) & = & \varphi_1(t) \\ & u(l, t) & = & \varphi_2(t) \end{array} \quad (17.6)$$

Als **Kompatibilitätsbedingungen** ergeben sich  $\varphi(0) = \varphi_1(0)$  und  $\varphi(l) = \varphi_2(0)$ . Wir lösen nun die homogene Aufgabe, d.h. wir setzen  $f = \varphi_1 = \varphi_2 \equiv 0$ . ( $\varphi \equiv 0$  ist sinnlos.) Die Lösung erfolgt nun im Wesentlichen in vier Schritten:

1. *Bestimmung der speziellen Lösungen von (17.6) durch den Separationsansatz*

$$\begin{aligned} u(x, t) &= X(x) \cdot T(t) \\ u_{xx}(x, t) &= X''(x) \cdot T(t) \\ u_t(x, t) &= X(x) \cdot T'(t) \end{aligned}$$

Diesen Ansatz setzen wir in (17.6) ein und erhalten:

$$\begin{aligned} X(x) \cdot T'(t) &= a^2 \cdot X''(x) \cdot T(t) \\ \frac{X''(x)}{X(x)} &= \frac{T'(t)}{a^2 \cdot T(t)} \end{aligned}$$

Die rechte Seite ist unabhängig von  $x$ , die linke unabhängig von  $t$ . Wenn man eine der Variablen  $x$  und  $t$  ändert, bleibt also eine (und damit auch die andere Seite) konstant. Es muss also gelten:

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T'(t)}{a^2 \cdot T(t)} = \lambda$$

$\lambda$  heißt **Separationsparameter**. Es entstehen zwei gewöhnliche Differentialgleichungen:

$$X''(x) - \lambda \cdot X(x) = 0 \quad \text{und} \quad T'(t) - a^2 \lambda \cdot T(t) = 0$$

Man spricht hierbei von **Eigenwertproblemen** (für die Differentialoperatoren  $d/dt$  und  $d^2/dx^2$ ). Wir unterscheiden nun drei Fälle:

- Für  $\lambda = 0$  ist  $X(x) = C_1 \cdot x + C_2$  und  $T(t) = C$ , also  $u(x, t) = C \cdot C_1 \cdot x + C \cdot C_2$ .
- Für  $\lambda > 0$  ist  $X(x) = A_1 \cdot e^{\sqrt{\lambda} \cdot x} + A_2 \cdot e^{-\sqrt{\lambda} \cdot x}$  und  $T(t) = e^{\lambda \cdot a^2 \cdot t}$ . Für  $T(t)$  haben wir den konstanten Vorfaktor weggelassen, da diese beim Übergang zu  $u$  sowieso in den  $A_i$  aufginge:

$$u(x, t) = \left( A_1 \cdot e^{\sqrt{\lambda} \cdot x} + A_2 \cdot e^{-\sqrt{\lambda} \cdot x} \right) \cdot e^{a^2 \lambda \cdot t}$$

- Für  $\lambda < 0$  wollen wir natürlich nur reelle Lösungen haben und erhalten deshalb

$$u(x, t) = \left[ A_1 \cdot \sin(\sqrt{-\lambda} \cdot x) + A_2 \cdot \cos(\sqrt{-\lambda} \cdot x) \right] \cdot e^{a^2 \lambda \cdot t}$$

Aus der Erfahrung wissen wir, dass, wenn die Temperatur bei  $x = 0$  und  $x = l$  auf Null gehalten wird, die Temperatur des gesamten Stabes für  $t \rightarrow \infty$  gegen Null geht. Diese Bedingung erfüllt nur  $\lambda < 0$ .

2. *Anpassung an die homogenen Randbedingungen*

Aus  $u(0, t) = A_2 \cdot e^{a^2 \lambda \cdot t} \stackrel{!}{=} 0$  folgt  $A_2 = 0$ . Die andere Randbedingung ergibt:

$$u(l, t) = A_1 \cdot \sin(\sqrt{-\lambda} \cdot l) \cdot e^{a^2 \lambda \cdot t} \stackrel{!}{=} 0$$

Da  $A_1 = 0$  sinnlos ist, muss der Sinus verschwinden und somit  $\sqrt{-\lambda} \cdot l$  ein ganzzahliges Vielfaches von  $\pi$  sein. Also hat  $\lambda$  die folgenden Möglichkeiten:

$$\lambda_n = -\frac{n^2 \pi^2}{l^2} \quad \text{mit} \quad n \in \mathbb{N}$$

Diese  $\lambda_n$  heißen **Eigenwerte** des Problems mit den zugehörigen **Eigenfunktionen**

$$u_n(x, t) = \sin \frac{n\pi \cdot x}{l} \cdot e^{-\frac{n^2 \pi^2 a^2}{l^2} \cdot t} \quad \text{mit} \quad n \in \mathbb{N}$$

## 3. Anpassung an die Anfangsbedingungen durch Reihenansatz

In der Regel erfüllen einzelne  $u_n$  oder endliche Linearkombinationen aus diesen die Anfangsbedingungen nicht. Der Ausweg ist ein Reihenansatz

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot u_n(x, t)$$

Wenn die Reihe gleichmäßig konvergiert, kann man gliedweise differenzieren.  $u$  erfüllt bereits die Differentialgleichung und die Randbedingungen, wir setzen also nun die Anfangsbedingungen ein:

$$u(x, 0) = \varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \sin \frac{n\pi \cdot x}{l}$$

Die  $a_n$  ermitteln wir über die Entwicklung von  $\varphi(x)$  in eine Fourierreihe. (Deshalb heißt diese Methode auch **Fourier-Methode**.) Mit den allgemeinen Orthogonalitätsrelationen erhält man

$$\int_0^l \varphi(x) \cdot \sin \frac{n\pi \cdot x}{l} dx = a_n \int_0^l \sin \frac{n\pi \cdot x}{l} \cdot \sin \frac{n\pi \cdot x}{l} dx = a_n \cdot \frac{l}{2}$$

Daraus folgt für die Koeffizienten der Reihe:

$$a_n = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(\xi) \cdot \sin \frac{n\pi \cdot \xi}{l} d\xi \quad (17.7)$$

Eine Fourierreihe entsteht, wenn  $\varphi$  stetig und (stückweise) stetig differenzierbar ist.

## 4. Probe, ob wirklich eine Lösung gefunden wurde; Untersuchung der Struktur der Lösung

In unserem Falle soll es genügen, die Lösung nur hinzuschreiben:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(\xi) \cdot \sin \frac{n\pi \cdot \xi}{l} d\xi \right] \cdot \sin \frac{n\pi \cdot x}{l} \cdot e^{-\frac{n^2 \pi^2 a^2}{l^2} \cdot t}$$

Man kann die Summe und das Integral vertauschen:

$$u(x, t) = \int_0^l \left[ \frac{2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{n\pi \cdot \xi}{l} \cdot \sin \frac{n\pi \cdot x}{l} \cdot e^{-\frac{n^2 \pi^2 a^2}{l^2} \cdot t} \right] \cdot \varphi(\xi) d\xi$$

Der Klammerterm wird mit  $G(x, \xi, t)$  bezeichnet und heißt **Greensche Funktion** des ersten ARWP.  $G$  ist unabhängig von der Anfangsbedingung  $\varphi$ . Insgesamt ergibt sich also die Lösung

$$u(x, t) = \int_0^l G(x, \xi, t) \cdot \varphi(\xi) d\xi$$

Man kann nun auch  $u(x, t) \rightarrow 0$  für  $t \rightarrow \infty$  nachweisen. Bleibt man bei der homogenen Differentialgleichung ( $f \equiv 0$ ), dann kann man ohne großen Aufwand zum Beispiel noch folgende RB behandeln:

1.  $u(0, t) = T_1$  und  $u(l, t) = T_2$  für  $t \geq 0$
2. isolierte Stabenden (d.h. kein Wärmefluss):  $u_x(0, t) = u_x(l, t) = 0$
3. Wärmekonvektion an einem Ende:  $u(0, t) = 0$  und  $u(l, t) + u_x(l, t) = 0$  für  $t \geq 0$

## 17.2 1. Anfangs-Randwert-Problem für einen endlich langen Stab. Inhomogene Aufgabe

Wir betrachten nun dieselbe Differentialgleichung mit  $f \neq 0$ , aber homogenen Anfangs- und Randbedingungen  $u(x, 0) = u(0, t) = u(l, t) = 0$ . Eine Methode zur Lösung ist die Variation der Konstanten. Wir kennen die Eigenfunktionen

$$u_n(x, t) = \sin \frac{n\pi \cdot x}{l} \cdot e^{-\frac{n^2 \pi^2 a^2}{l^2} \cdot t}$$

der homogenen Differentialgleichung und Randbedingungen. Jetzt machen wir den Ansatz

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n(t) \cdot u_n(x, t) =: \sum_{n=1}^{\infty} w_n(t) \cdot \sin \frac{n\pi \cdot x}{l} \quad (17.8)$$

Bei diesem Ansatz bleiben die homogenen Randbedingungen natürlich erhalten. Für die Anfangsbedingung erhält man jetzt

$$u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} w_n(0) \cdot \sin \left( \frac{n\pi}{l} \cdot x \right) \stackrel{!}{=} 0$$

Wir fordern also sinnvollerweise  $w_n(0) = 0$  und benutzen diese Bedingung später als Anfangsbedingung für  $w_n$ . Nun denken wir uns  $f$  als Funktion von  $x$  vom Intervall  $(0, l)$  ungerade fortgesetzt ( $t$  wird als Parameter betrachtet) und nach Sinusfunktionen entwickelt ( $f$  sei hierfür hinreichend gut):

$$f(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) \cdot \sin \left( \frac{\pi n}{l} \cdot x \right) \quad \text{mit} \quad f_n(t) = \frac{2}{l} \cdot \int_{-l}^l f(\xi, t) \cdot \sin \left( \frac{\pi n}{l} \cdot \xi \right) d\xi \quad (17.9)$$

(17.8) und (17.9) werden in die PDE eingesetzt. Nach formaler Rechnung folgt:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin \left( \frac{\pi n}{l} \cdot x \right) \cdot \left[ w_n'(t) + \left( \frac{\pi n a}{l} \right)^2 \cdot w_n(t) - f_n(t) \right] = 0$$

Dies ist erfüllt, wenn  $[\dots] = 0$  für alle  $n$  gilt. Es muss also für alle  $n$  das AWP

$$w_n'(t) + \left( \frac{\pi n a}{l} \right)^2 \cdot w_n(t) = f_n(t) \quad \text{und} \quad w_n(0) = 0$$

gelöst werden. Es folgt mit Variation der Konstanten und (17.9):

$$\begin{aligned} w_n(t) &= e^{-\left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 \cdot t} \cdot \int_0^t e^{\left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 \cdot \tau} \cdot f_n(\tau) d\tau \\ w_n(t) &= \int_0^t e^{-\left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 \cdot (t-\tau)} \cdot f_n(\tau) d\tau \\ w_n(t) &= \int_0^t \int_{-l}^l \frac{2}{l} \cdot e^{-\left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 \cdot (t-\tau)} \cdot \sin \left( \frac{\pi n}{l} \cdot \xi \right) \cdot f(\xi, \tau) d\xi d\tau \end{aligned}$$

Setze alles in (17.8) ein und vertausche die Summationsprozesse:

$$u(x, t) = \int_0^t \int_{-l}^l \left[ \frac{2}{l} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 \cdot (t-\tau)} \cdot \sin \left( \frac{\pi n}{l} \cdot \xi \right) \cdot \sin \left( \frac{\pi n}{l} \cdot x \right) \right] \cdot f(\xi, \tau) d\xi d\tau$$

Der Klammerausdruck entspricht der Greenschen Funktion  $G(x, \xi, t - \tau)$  des Problems mit zeitlich verschobenem Argument, welche unabhängig von  $f$  ist. Man hat damit die Darstellung

$$u(x, t) = \int_0^t \int_{-l}^l G(x, \xi, t - \tau) \cdot f(\xi, \tau) d\xi d\tau$$

# 18 Hyperbolische partielle Differentialgleichungen

## 18.1 Die schwingende Saite

$$u_{tt} - a^2 \cdot u_{xx} = f(x, t) \quad \text{mit} \quad t \geq 0 \quad (18.1)$$

Hierbei sei  $x$  aus einem endlichen oder einem unendlichen Intervall. Als Anfangsbedingungen haben wir Anfangsauslenkung und Anfangsgeschwindigkeit. Ob Randbedingungen vorliegen (1. bis 3. Art ist möglich), hängt davon ab, ob ein endliches oder ein unendliches Intervall betrachtet wird.

### 18.1.1 Die d'Alembertsche Methode

Im Kapitel 16 wurde für die homogene Differentialgleichung ( $f \equiv 0$ ) folgende Lösungsform gefunden:

$$u(x, t) = F(x - at) + G(x + at) \quad (18.2)$$

Hierbei sind  $F$  und  $G$  beliebige zweimal stetig differenzierbare Funktionen.

1. Betrachte das Problem auf ganz  $\mathbb{R}$ :

$$\begin{array}{ll} \text{Differentialgleichung:} & u_{tt} - a^2 \cdot u_{xx} = f(x, t) \quad \text{mit} \quad t \geq 0 \\ \text{Anfangsbedingungen:} & \begin{array}{l} u(x, 0) = \varphi(x) \\ u_t(x, 0) = \psi(x) \end{array} \end{array}$$

Zuerst setzen wir die erste Anfangsbedingung in (18.2) ein:

$$F(x) + G(x) = \varphi(x) \quad \Rightarrow \quad F'(x) + G'(x) = \varphi'(x) \quad (18.3)$$

Die zweite Anfangsbedingung liefert (durch Zeitableitung von (18.2), genommen bei  $t = 0$ ):

$$-a \cdot F'(x) + a \cdot G'(x) = \psi(x) \quad (18.4)$$

(18.3) und (18.4) bilden ein Differentialgleichungssystem für  $F$  und  $G$ . Es folgt

$$\begin{aligned} F'(x) &= \frac{1}{2} \cdot \left[ \varphi'(x) - \frac{1}{a} \cdot \psi(x) \right] \quad \Rightarrow \quad F(x) = \frac{1}{2} \cdot \left[ \varphi(x) - \frac{1}{a} \cdot \int_{x_0}^x \psi(\xi) \, d\xi \right] \\ G'(x) &= \frac{1}{2} \cdot \left[ \varphi'(x) + \frac{1}{a} \cdot \psi(x) \right] \quad \Rightarrow \quad G(x) = \frac{1}{2} \cdot \left[ \varphi(x) + \frac{1}{a} \cdot \int_{x_1}^x \psi(\xi) \, d\xi \right] \end{aligned}$$

Die erste Anfangsbedingung ist für  $x_0 = x_1$  erfüllt, die zweite ohnehin, da wir sie für die Lösung benutzt haben. Also gilt:

$$F(x - at) = \frac{1}{2} \cdot \left[ \varphi(x - at) - \frac{1}{a} \cdot \int_{x_0}^{x - at} \psi(\xi) \, d\xi \right] \quad \text{und} \quad G(x + at) = \frac{1}{2} \cdot \left[ \varphi(x + at) + \frac{1}{a} \cdot \int_{x_0}^{x + at} \psi(\xi) \, d\xi \right]$$

Die Lösung des Anfangswertproblems wird also gegeben durch

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{1}{2} \cdot [\varphi(x - at) + \varphi(x + at)] + \frac{1}{2a} \cdot \int_{x-at}^{x+at} \psi(\xi) \, d\xi \\ u(x, t) &= \frac{1}{2} \cdot [\varphi(x - at) + \varphi(x + at)] + \frac{1}{2a} \cdot [\Psi(x + at) - \Psi(x - at)] \end{aligned} \quad (18.5)$$

Hierbei ist  $\Psi$  eine Stammfunktion von  $\psi$ . Diese Darstellung, insbesondere die mit den Integralen, gestattet folgende Interpretation: Betrachte in der  $(x, t)$ -Ebene den festen Punkt  $(x_0, t_0)$ . Der Wert  $u(x_0, t_0)$  hängt nur von den Werten von  $\varphi$  und  $\psi$  im Intervall  $[x_0 - at_0, x_0 + at_0]$  ab. Dieses Intervall heißt **Abhängigkeitsintervall**. Umgekehrt hat das Intervall ein **Einflussgebiet** (das sind alle Punkte, in denen  $u(x, t)$  nur von den Werten von  $\varphi$  und  $\psi$  in diesem Intervall abhängt). Das Einflussgebiet ist genau das Dreieck, dass durch die Punkte  $(x_0 - at_0, 0)$ ,  $(x_0 + at_0, 0)$  und  $(x_0, t_0)$  beschrieben und durch die Geraden  $x = at + (x_0 - at_0)$  sowie  $x = -at + (x_0 + at_0)$  begrenzt wird. Diese Geraden heißen **Charakteristiken** der Wellengleichung.

Um später mit Lösungen der Wellengleichung in der Ebene oder im Raum vergleichen zu können, schreiben wir (18.5) um, indem wir den folgenden Mittelungsoperator einführen:

$$(M_{at}^1 g)(x) := \frac{1}{2at} \int_{x-at}^{x+at} g(\xi) \, d\xi$$

Aus (18.5) in der Darstellung mit dem Integral wird dann

$$u(x, t) = t \cdot (M_{at}^1 \psi)(x) + \frac{\partial}{\partial t} (t \cdot M_{at}^1 \varphi)(x)$$

2. Das Problem wird nun in  $[0, l]$  behandelt, die Saite sei an ihren Enden fest eingespannt.

$$\begin{aligned} \text{Differentialgleichung:} \quad & u_{tt} - a^2 \cdot u_{xx} = f(x, t) \quad \text{mit} \quad t \geq 0 \\ \text{Anfangsbedingungen:} \quad & u(x, 0) = \varphi(x) \\ & u_t(x, 0) = \psi(x) \\ \text{Randbedingungen:} \quad & u(0, t) = 0 \\ & u(l, t) = 0 \end{aligned}$$

Zur Lösung setzt man  $\varphi$  und  $\psi$  auf ganz  $\mathbb{R}$  periodisch fort und wendet dann (18.5) an. Zuerst folgen aus den Anfangs- und Randbedingungen Verträglichkeitsbedingungen:

$$u(0, 0) = \varphi(0) = 0 \quad \text{und} \quad u(l, 0) = \varphi(l) = 0$$

Die Randbedingung  $u(0, t) = 0$  liefert mit (18.5):

$$0 = \frac{1}{2} \cdot [\varphi(at) + \varphi(-at)] + \frac{1}{2a} \cdot [\Psi(at) - \Psi(-at)]$$

Das ist erfüllt, wenn  $\varphi$  ungerade,  $\Psi$  gerade und somit  $\psi$  ungerade ist. (Ableitungen gerader Funktionen sind immer ungerade und umgekehrt.) Die andere Randbedingung  $u(l, t) = 0$  liefert analog:

$$0 = \frac{1}{2} \cdot [\varphi(l + at) + \varphi(l - at)] + \frac{1}{2a} \cdot [\Psi(l + at) - \Psi(l - at)]$$

Benutzt man, dass  $\varphi$  ungerade und  $\Psi$  gerade ist, also

$$\varphi(l - at) = -\varphi(-l + at) \quad \text{und} \quad \Psi(l - at) = \Psi(-l + at)$$

so folgt

$$0 = \frac{1}{2} \cdot [\varphi(l + at) - \varphi(-l + at)] + \frac{1}{2a} \cdot [\Psi(l + at) - \Psi(-l + at)]$$

Das ist erfüllt, wenn  $\varphi$  und  $\Psi$  (und damit auch  $\psi$ ) periodisch mit der Periode  $2l$  sind. Die Lösung des Anfangs-Randwert-Problemes wird durch die Formel (18.5) gegeben, wenn man  $\varphi$  und  $\psi$  als ungerade Funktionen mit der Periode  $2l$  vom Intervall  $0 \leq x \leq l$  auf ganz  $\mathbb{R}$  fortgesetzt. Aus den Verträglichkeitsbedingungen folgt, dass die Randbedingungen automatisch erfüllt sind.



### 18.1.2 Die Fouriersche Methode

Betrachte das **homogene Anfangs-Randwert-Problem**:

$$\begin{array}{lll} \text{Differentialgleichung:} & u_{tt} - a^2 \cdot u_{xx} & = f(x, t) \quad \text{mit } t \geq 0 \\ \text{Anfangsbedingungen:} & u(x, 0) & = \varphi(x) \\ & u_t(x, 0) & = \psi(x) \\ \text{Randbedingungen:} & u(0, t) & = 0 \\ & u(l, t) & = 0 \end{array}$$

Die Lösung erfolgt mit der Fourierschen Methode analog zur Wärmeleitungsgleichung.

#### 1. Separationsansatz

$$u(x, t) = T(t) \cdot X(x)$$

Setzt man dies in die Differentialgleichung ein, trennt  $T$  und  $X$  und führt dann eine Separationskonstante ein, so erhält man zwei gewöhnliche Differentialgleichungen:

$$X''(x) - \lambda \cdot X(x) = 0 \quad \text{und} \quad T''(t) - \lambda a^2 \cdot T(t) = 0$$

Die erste hat die Lösung  $X(x) = C_1 \cdot e^{\sqrt{\lambda} \cdot x}$ , die zweite betrachten wir gleich.

#### 2. Anpassung an die Randbedingungen

Die Fälle  $\lambda = 0$  und  $\lambda > 0$  führen zu  $X \equiv 0$ . Eine nichttriviale Lösung ergibt sich nur für  $\lambda < 0$ :

$$X(x) = C_1 \cdot \cos(\sqrt{-\lambda} \cdot x) + C_2 \cdot \sin(\sqrt{-\lambda} \cdot x)$$

Aus der Randbedingung  $X(0) = 0$  folgt  $C_1 = 0$ . Wegen  $X(l) = 0$  muss  $\sin(\sqrt{-\lambda} \cdot l) = 0$  sein, folglich ist  $\sqrt{-\lambda} \cdot l = n\pi$  und somit  $\lambda = -n^2\pi^2/l^2$ . Es folgt

$$X(x) = C_2 \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{l} \cdot x\right)$$

Die Lösung von  $T''(t) - \lambda a^2 \cdot T(t) = 0$  mit obigem  $\lambda$  ist

$$T(t) = \hat{A}_n \cdot \cos\left(\frac{n\pi a}{l} \cdot t\right) + \hat{B}_n \cdot \sin\left(\frac{n\pi a}{l} \cdot t\right)$$

und insgesamt folgt für  $u(x, t)$  in Abhängigkeit von  $n$ :

$$u_n(x, t) = \left[ A_n \cdot \cos\left(\frac{n\pi a}{l} \cdot t\right) + B_n \cdot \sin\left(\frac{n\pi a}{l} \cdot t\right) \right] \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{l} \cdot x\right)$$

#### 3. Anpassung an die Anfangsbedingungen

Wieder verwenden wir einen Reihenansatz:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[ A_n \cdot \cos\left(\frac{n\pi a}{l} \cdot t\right) + B_n \cdot \sin\left(\frac{n\pi a}{l} \cdot t\right) \right] \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{l} \cdot x\right)$$

Aus den Anfangsbedingungen  $u(x, 0) = \varphi(x)$  und  $u_t(x, 0) = \psi(x)$  folgt

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{l} \cdot x\right) = \varphi(x) \quad \text{und} \quad \sum_{n=1}^{\infty} B_n \cdot \frac{n\pi a}{l} \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{l} \cdot x\right) = \psi(x)$$

Die Koeffizienten ergeben sich aus den Überlegungen zu Fourierreihen:

$$A_n = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(x) \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{l} \cdot x\right) dx \quad \text{und} \quad B_n = \frac{2}{n\pi a} \int_0^l \psi(x) \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{l} \cdot x\right) dx$$

Nun betrachten wir ein **inhomogenes Anfangs-Randwert-Problem**:

$$\begin{array}{ll} \text{Differentialgleichung:} & u_{tt} - a^2 \cdot u_{xx} = f(x, t) \quad \text{mit} \quad t \geq 0 \\ \text{Anfangsbedingungen:} & u(x, 0) = \varphi(x) \\ & u_x(x, 0) = \psi(x) \\ \text{Randbedingungen:} & u(0, t) = \psi_1(t) \\ & u(l, t) = \psi_2(t) \end{array}$$

Dazu unterscheiden wir in zwei Fälle.

1. Inhomogene Differentialgleichung und Randbedingungen sowie *homogene* Anfangsbedingungen

Benutze das Superpositionsprinzip in der folgenden Variante:

$$u(x, t) = u_1(x, t) + u_2(x, t)$$

$u_1$  ist die allgemeine Lösung der *homogenen* Differentialgleichung mit *inhomogenen* Anfangsbedingungen (welche wir bereits gefunden haben),  $u_2$  ist eine Lösung der *inhomogenen* Differentialgleichung mit *homogenen* Anfangsbedingungen (diese erhält man in Analogie zur Wärmeleitungsgleichung durch Variation der Konstanten).

2. Inhomogene Differentialgleichung und Randbedingungen sowie *inhomogene* Anfangsbedingungen

Der Trick ist, das Problem durch Einführung einer Hilfsfunktion auf eines mit homogenen Anfangsbedingungen zurückzuführen, welches man wie oben beschrieben lösen kann.

$$v(x, t) := u(x, t) - \left[ \psi_1(t) + \frac{x}{l} \cdot [\psi_2(t) - \psi_1(t)] \right]$$

$v$  erfüllt die homogenen Randbedingungen

$$v(0, t) = u(0, t) - \psi_1(t) = 0 \quad \text{und} \quad v(l, t) = u(l, t) - \psi_2(t) = 0$$

und die Anfangsbedingungen ändern sich zu

$$\begin{aligned} v(x, 0) &= \varphi(x) - \left[ \psi_1(0) + \frac{x}{l} \cdot [\psi_2(0) - \psi_1(0)] \right] =: \varphi^*(x) \\ v_t(x, 0) &= \psi(x) - \left[ \psi'_1(0) + \frac{x}{l} \cdot [\psi'_2(0) - \psi'_1(0)] \right] =: \psi^*(x) \end{aligned}$$

Wie ändert sich die Differentialgleichung?

$$\begin{aligned} v_{tt} &= u_{tt} - \left[ \psi''_1(t) + \frac{x}{l} \cdot [\psi''_2(t) - \psi''_1(t)] \right] \\ v_{tt} - a^2 \cdot v_{xx} &= f(x, t) - \left[ \psi''_1(t) + \frac{x}{l} \cdot [\psi''_2(t) - \psi''_1(t)] \right] =: f^*(x, t) \end{aligned}$$

Das allgemeine Problem kann also immer auf den obigen Spezialfall reduziert werden.

### 18.1.3 Vergleich

Die d'Alembertsche Methode eignet sich gut für numerische Rechnungen. Außerdem sind das Abhängigkeitsgebiet und die Ausbreitung von Störungen gut erkennbar.

Die Fourierrmethode mit ihrer Reihendarstellung einfacher Winkelfunktionen eignet sich gut für mathematische Operationen (z.B. Differentiation und Integration), und offenbart, wie sich verschiedene Schwingungen zu einer Auslenkungsfunktion überlagern.

## 18.2 Bemerkungen zu den Maxwellschen Gleichungen

Wir benutzen eine möglichst einfache Form, ohne zwischen  $\mathbf{B}$  und  $\mathbf{H}$  bzw.  $\mathbf{E}$  und  $\mathbf{D}$  zu unterscheiden.

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} + \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{H} = 0 \quad \text{und} \quad \operatorname{div} \mathbf{H} = 0 \quad (18.6a)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} - \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E} = 4\pi \cdot \mathbf{j} \quad \text{und} \quad \operatorname{div} \mathbf{E} = 4\pi \cdot \varrho \quad (18.6b)$$

Dabei sind  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{H}$  und die Stromdichte  $\mathbf{j}$  Vektorfelder sowie die Ladungsdichte  $\varrho$  ein Skalarfeld im  $\mathbb{R}^3$ . In (18.6a) blicken wir auf  $\operatorname{div} \mathbf{H} = 0$ . Da  $\operatorname{div} \operatorname{rot} \equiv 0$ , möchte man den Ansatz  $\mathbf{H} = \operatorname{rot} \mathbf{A}$  machen. (In einfach zusammenhängenden Gebieten impliziert aufgrund der Integrabilitätsbedingungen das Verschwinden der Divergenz die Existenz eines solchen Vektorfeldes.)  $\mathbf{A}$  ist das **Vektorpotential** zu  $\mathbf{H}$ .

Wenn  $\mathbf{A}_1$  und  $\mathbf{A}_2$  beide den obigen Ansatz erfüllen, d.h.  $\mathbf{H} = \operatorname{rot} \mathbf{A}_1 = \operatorname{rot} \mathbf{A}_2$ , so ist  $\operatorname{rot}(\mathbf{A}_1 - \mathbf{A}_2) = 0$ . Wiederum aus den Integrabilitätsbedingungen folgt die Existenz eines skalaren Feldes  $\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $\mathbf{A}_1 - \mathbf{A}_2 = \operatorname{grad} \varphi$ , also  $\mathbf{A}_1 = \mathbf{A}_2 + \operatorname{grad} \varphi$ .

Jetzt muss noch die Zeitabhängigkeit der ersten Gleichung aus (18.6a) erfüllt werden:  $\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{H}$ . Wegen  $\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{H} = \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{rot} \mathbf{A} = \operatorname{rot} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{A}$  erfüllt etwa  $\mathbf{E}_1 = -\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{A}$  die Gleichung (18.6a). Für jede andere Lösung  $\mathbf{E}_2$  muss also auch  $\operatorname{rot} \mathbf{E}_2 = \operatorname{rot} \mathbf{E}_1 = -\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{H}$  gelten. Somit ist auch  $\mathbf{E}$  nur bis auf den Gradienten eines skalaren Feldes  $V$  bestimmt.

$$\mathbf{E} = -\operatorname{grad} V - \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{A} \quad \text{und} \quad \mathbf{H} = \operatorname{rot} \mathbf{A} \quad (18.7)$$

Wie werden die Potentiale  $V$  und  $\mathbf{A}$  durch die Felder  $\mathbf{E}$  und  $\mathbf{H}$  festgelegt? Angenommen, man hat ein weiteres Paar  $(V', \mathbf{A}')$  mit entsprechenden Gleichungen. Also haben wir  $\operatorname{rot} \mathbf{A} = \operatorname{rot} \mathbf{A}' = \mathbf{H}$  und  $-\operatorname{grad} V - \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{A} = -\operatorname{grad} V' - \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{A}' = \mathbf{E}$ . Das gilt genau dann, wenn es ein differenzierbares Skalarfeld  $\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  gibt mit

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \operatorname{grad} \varphi \quad \text{und} \quad V' = V - \frac{\partial}{\partial t} \varphi \quad (18.8)$$

Die Tatsache, dass viele Paare  $(V, \mathbf{A})$  zugelassen sind, ist Ausdruck der **Eichinvarianz** der klassischen Elektrodynamik. Eine zusätzliche Bedingung an die Potentiale ist also möglich. Man nimmt die **Lorenzbedingung**:

$$\operatorname{div} \mathbf{A} + \frac{\partial}{\partial t} V = 0 \quad (18.9)$$

Was bedeuten (18.7) und (18.9) für die Funktion  $\varphi$ ? Es muss  $\operatorname{div} \mathbf{A}' + \frac{\partial}{\partial t} V' = 0$  gelten, also ist  $\operatorname{div} \mathbf{A} + \operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi + \frac{\partial}{\partial t} V - \frac{\partial^2}{\partial t^2} \varphi = 0$ . Daraus folgt eine homogene Wellengleichung:

$$\square \varphi = \frac{\partial^2}{\partial t^2} \varphi - \Delta \varphi = 0$$

Nun muss (18.6b) noch erfüllt werden. Mit (18.7) führen diese Gleichungen auf

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = -\operatorname{div} \operatorname{grad} V - \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \mathbf{A} = -\Delta V + \frac{\partial^2}{\partial t^2} V = \square V \stackrel{!}{=} 4\pi \varrho$$

Dies ist eine inhomogene Wellengleichung. Nun wollen wir die erste Gleichung in (18.6b) betrachten.

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} - \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E} = \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{A} - \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{A} - \Delta \mathbf{A} + \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{grad} V + \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{A}$$

Aufgrund der Lorenzbeziehung ist  $\text{grad div } \mathbf{A} = -\text{grad } \frac{\partial}{\partial t} v = -\frac{\partial}{\partial t} \text{grad } v$  und es verbleibt

$$\square \mathbf{A} = 4\pi \cdot \mathbf{j}$$

Schließlich folgt aus der Lorenzbeziehung auch noch die Kontinuitätsgleichung

$$\text{div } \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial t} \varrho = 0 \quad (18.10)$$

#### Bemerkung

zur Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen

Wenn man  $\varrho = \varrho(x, t)$ ,  $\mathbf{E}_0 = \mathbf{E}(x, 0)$ ,  $\mathbf{H}_0 = \mathbf{H}(x, 0)$  und  $\mathbf{j}$  vorgibt mit  $\text{div } \mathbf{H}_0 = 0$  und  $\text{div } \mathbf{E}_0 = 4\pi\varrho$  mit  $\varrho_0(x) = \varrho(x, 0)$  und wenn diese Anfangsdaten zum Beispiel beliebig oft differenzierbar sind, dann existiert eine eindeutige Lösung der Maxwellgleichungen.

Besonders ist, dass (18.6) acht Gleichungen für sechs Unbekannte sind. Trotzdem ist dieses System nicht überbestimmt, denn wenn  $\text{div } \mathbf{E} = 4\pi \cdot \varrho$  und  $\text{div } \mathbf{H} = 0$  für die Anfangsdaten gilt, dann auch für alle anderen Zeiten (hier ohne Beweis).

## 18.3 Bemerkungen zur mehrdimensionalen Wellengleichung

Wir behandeln nur die Wellengleichung im gesamten Raum ( $\mathbb{R}$ ,  $\mathbb{R}^2$  oder  $\mathbb{R}^3$ ).

### Dreidimensionaler Fall

$$\begin{aligned} \text{Differentialgleichung:} \quad u_{tt} - a^2 \cdot \Delta u &= f & \text{mit } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \quad \text{und} \quad t \geq 0 \\ \text{Anfangsbedingungen:} \quad u(\mathbf{x}, 0) &= \varphi(\mathbf{x}) \\ u_t(\mathbf{x}, 0) &= \psi(\mathbf{x}) \end{aligned} \quad (18.11)$$

Die Lösung für dieses Problem wird durch die **Poisson'sche Wellenformel** kompakt dargestellt:

$$u(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial}{\partial t} [t \cdot M_{at}^3 \varphi] + t \cdot M_{at}^3 \psi + \frac{1}{4\pi \cdot a^2} \cdot \iiint_{K_{at}} \frac{[f]}{r} dy_1 dy_2 dy_3 \quad (18.12)$$

Hierbei sind

- $K_{at} = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^3 : \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \leq at\}$  die Kugel um  $\mathbf{x}$  mit dem Radius  $at$
- $r = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$
- $[f](y_1, y_2, y_3, t) = f(y_1, y_2, y_3, t - r/a)$  eine retardierte Funktion
- $M_{at}^3 := \frac{1}{4\pi \cdot a^2 t^2} \cdot \iint_{\partial K_{at}} g \, dS$  ein Mittelungsoperator in *drei* Dimensionen

Die Formel (18.12) kann man unter Ausnutzung physikalischer Überlegungen herleiten, oder prüfen, ob durch (18.12) das Problem (18.11) gelöst wird. Wir nehmen die Lösungsformel einfach als gegeben hin. Unser Ziel ist es nun, für den homogenen Fall ( $f \equiv 0$ ) mit der **Hadamardschen Abstiegsmethode** Lösungsformeln für den  $\mathbb{R}^2$  und  $\mathbb{R}$  herzuleiten.

## Zweidimensionaler Fall

Seien  $\varphi$  und  $\psi$ , also auch  $u$ , nur von  $x_1$  und  $x_2$  abhängig. Wir finden zuerst eine Parametrisierung für

$$\begin{aligned}\partial K_{at} &= \left\{ \mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3) : \sqrt{\sum_{i=1}^3 (x_i - y_i)^2} = at \right\} \\ &= \left\{ \left( y_1, y_2, x_3 \pm \sqrt{a^2 t^2 - (x_1 - y_1)^2 - (x_2 - y_2)^2} \right) \right\}\end{aligned}$$

Aus Symmetriegründen beschränken wir uns auf die obere Halbkugel (daraus entsteht später ein Vorfaktor Zwei). Somit benötigen wir das Flächenelement für die Parametrisierung

$$(y_1, y_2) \mapsto \left( y_1, y_2, x_3 + \sqrt{a^2 t^2 - (x_1 - y_1)^2 - (x_2 - y_2)^2} \right)$$

Integriert wird dann über den Kreis  $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \leq at$  mit  $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$  und  $\mathbf{y} = (y_1, y_2)$ . Für diese Art von Parametrisierungen gilt

$$(s, t) \mapsto (s, t, h(s, t)) \quad \Rightarrow \quad dS = \sqrt{1 + h_s^2 + h_t^2} \, ds dt$$

Mit einfacher Rechnung folgt in unserem Falle

$$dS = \frac{at}{\sqrt{a^2 t^2 - (x_1 - y_1)^2 - (x_2 - y_2)^2}} \, dy_1 dy_2$$

Damit erhält man aus (18.12) unter Berücksichtigung des Faktors Zwei:

$$\begin{aligned}u(x_1, x_2, t) &= \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{2 \cdot at^2}{4\pi \cdot a^2 t^2} \cdot \iint_{\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\| \leq at} \frac{\varphi(y_1, y_2)}{\sqrt{\dots}} \, dy_1 dy_2 \right) + t \cdot \frac{2 \cdot at}{4\pi \cdot a^2 t^2} \cdot \iint_{\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\| \leq at} \frac{\psi(y_1, y_2)}{\sqrt{\dots}} \, dy_1 dy_2 \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \left( t \cdot \frac{1}{2\pi \cdot at} \cdot \iint_{K_{at}} \frac{\varphi(y_1, y_2)}{\sqrt{a^2 t^2 - \varrho^2}} \, dy_1 dy_2 \right) + t \cdot \frac{1}{2\pi \cdot at} \cdot \iint_{K_{at}} \frac{\psi(y_1, y_2)}{\sqrt{a^2 t^2 - \varrho^2}} \, dy_1 dy_2\end{aligned}$$

$$u(x_1, x_2, t) = \frac{\partial}{\partial t} (t \cdot M_{at}^2 \varphi) + t \cdot M_{at}^2 \psi \quad (18.13)$$

Hierbei sind

- $K_{at}$  der Kreis um  $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$  mit dem Radius  $at$
- $\varrho^2 = (x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2$
- $M_{at}^2 g(y_1, y_2) := \frac{1}{2\pi \cdot at} \cdot \iint_{K_{at}} \frac{g(y_1, y_2)}{\sqrt{a^2 t^2 - \varrho^2}} \, dy_1 dy_2$  ein Mittelungsoperator in *zwei Dimensionen*

### 18.3.1 Eindimensionaler Fall

Jetzt möge  $g$  nur von  $y_1$  abhängen. Dann kann man in der obigen Mittelwertbildung die Integration über  $y_2$  ausführen. In  $K_{at}$  ist

$$(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 = a^2 t^2 \quad \Rightarrow \quad y_2 = x_2 \pm \sqrt{a^2 t^2 - (x_1 - y_1)^2}$$

Analog zu oben kommt man auf einen Mittelungsoperator in einer Dimension:

$$\begin{aligned}M_{at}^1 g(y_1) &= \frac{1}{2\pi \cdot at} \cdot \iint_{K_{at}} \frac{g(y_1, y_2)}{\sqrt{a^2 t^2 - \varrho^2}} \, dy_1 dy_2 \\ &= \frac{1}{2\pi \cdot at} \cdot \int_{x_2 - \sqrt{\dots}}^{x_2 + \sqrt{\dots}} \int_{x_1 - at}^{x_1 + at} \frac{g(y_1)}{\sqrt{a^2 t^2 - \varrho^2}} \, dy_1 dy_2\end{aligned}$$

Beachte: Wir müssen  $\sqrt{a^2t^2 - (x_1 - y_1)^2 - (x_2 - y_2)^2}^{-1}$  über  $y_2$  integrieren. Diesen Term kann man mit  $b^2 = a^2t^2 - (x_1 - y_1)^2$  und  $z^2 = (y_2 - x_2)^2$  schreiben als

$$\int \frac{1}{\sqrt{b^2 - z^2}} dz = \arcsin \frac{z}{b}$$

Setzt man das in den Mittelungsoperator ein, so gilt

$$\begin{aligned} M_{at}^1 g(y_1) &= \left[ \frac{1}{2\pi \cdot at} \cdot \int_{x_1-at}^{x_1+at} g(y_1) dy_1 \right] \cdot \underbrace{\left[ \arcsin \frac{y_2 - x_2}{\sqrt{a^2t^2 - (x_1 - y_1)^2}} \right]_{x_2-\sqrt{\dots}}^{x_2+\sqrt{\dots}}}_{=\arcsin 1 - \arcsin(-1) = \pi} \\ M_{at}^1 g(y_1) &= \frac{1}{2at} \cdot \int_{x_1-at}^{x_1+at} g(y_1) dy_1 \end{aligned}$$

Mit (18.13) ergibt sich (wenn man beachtet, dass  $\varphi$  und  $\psi$  jetzt nur noch von  $y_1$  abhängen) die d'Alembertsche Lösungsformel (18.5).

## Interpretation

Wir betrachten in (18.13) und (18.12) nur den Fall  $f \equiv 0$ .  $a$  ist die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Welle und  $at$  die in der Zeit  $t$  zurückgelegte Strecke. Wir betrachten den Spezialfall, dass die Träger  $\text{supp } \varphi$  und  $\text{supp } \psi$  in einem beschränkten Gebiet  $G$  liegen, also kompakt sind.

Im Dreidimensionalen betrachten wir einen Punkt  $P$  mit den Koordinaten  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$  in der Formel (18.12). Die Integrale werden über  $\varphi$  und  $\psi$  über die Kugeloberfläche  $\partial K_{at}$  erstreckt. Sie liefern höchstens für solche Zeiten  $t$  einen Beitrag, wenn  $\partial K_{at}$  das Gebiet  $G$  schneidet, denn sonst verschwinden  $\varphi$  und  $\psi$ . Also gibt es Grenzen  $d$  und  $D$ , sodass die Integrale maximal für  $d \leq at \leq D$ , also im Zeitintervall  $[d/a, D/a]$  nicht verschwinden. Für  $t < d/a$  ist die in  $G$  lokalisierte Erregung, dargestellt durch  $\varphi$  und  $\psi$ , noch nicht in  $P$  angekommen. Für  $t > D/a$  ist die Erregung an  $P$  vorbei.

Betrachte die Situation umgekehrt: Sei  $E$  die Menge aller Punkte, in denen zu fester Zeit  $t_0$  die Erregung nicht verschwindet. Sei der Einfachheit halber  $\text{supp } \varphi = \text{supp } \psi = G$  eine Kugel mit dem Radius  $R_0$ . Um  $E$  zu bilden, betrachte alle Kugeloberflächen  $\partial K_{at_0} (Q \in G)$ .  $E$  hat als Begrenzung die Einhüllenden dieser Kugeloberflächen: Die äußere Einhüllende entspricht der Vorderfront, die innere der Hinterfront.

Fazit: Räumlich lokalisierte Erregungen rufen in jedem Raumpunkt eine zeitlich lokalisierte Erregung hervor. Die Wellenausbreitung erfolgt mit scharf begrenzter Vorder- bzw. Hinterfront. Die gewonnene Erkenntnis wird als **Huygenssches Prinzip** bezeichnet.

Im Zweidimensionalen gilt das Huygenssche Prinzip nicht, da man hier über die gesamte Kreisscheibe um  $\mathbf{x}$  integriert, nicht nur über deren Rand. Wenn  $G$  diese Kreisscheibe erst einmal berührt, tritt an  $\mathbf{x}$  für spätere Zeiten im Allgemeinen immer eine Erregung auf.

# 19 Elliptische partielle Differentialgleichungen

Wir betrachten die Poisson-Gleichung (Potentialgleichung)

$$\Delta u = f$$

bzw. die Laplace-Gleichung für  $f \equiv 0$ . Eine Zeit  $t$  kommt nicht vor, daher sind Randwertaufgaben typisch. Der zweidimensionale Fall ist eng mit der Theorie der Funktionen einer komplexen Variablen (Funktionentheorie) verbunden.

Als Sprachgebrauch führen wir ein: Sei  $G$  ein Gebiet.  $u \in C^2(G)$  heißt **harmonisch**, wenn  $\Delta u = 0$ .

## 19.1 Die dreidimensionale Aufgabe

Als Demonstrationsbeispiel nehmen wir eine Kugel in Kugelkoordinaten:

$$\begin{aligned} x &= r \cdot \sin \vartheta \cdot \cos \varphi & 0 \leq r \leq \varrho \\ y &= r \cdot \sin \vartheta \cdot \sin \varphi & \text{mit } 0 \leq \vartheta \leq \pi \\ z &= r \cdot \cos \vartheta & -\pi \leq \varphi \leq \pi \end{aligned}$$

Wir benötigen den Laplaceoperator in Kugelkoordinaten:

$$\Delta u = \frac{1}{r^2} \cdot \left[ \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \cdot \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{\sin \vartheta} \cdot \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left( \sin \vartheta \cdot \frac{\partial u}{\partial \vartheta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} \right] \quad (*)$$

Die letzten zwei Terme in der Klammer beschreiben den **Laplace-Beltrami-Operator** auf der Einheitssphäre.

Zuerst betrachten wir den Spezialfall, dass  $u$  in  $\Delta u = 0$  nur von  $r$  abhängt. Wir haben also eine kugelsymmetrische Lösung. Aus (\*) wird

$$0 = \frac{d}{dr} \left( r^2 \cdot \frac{du}{dr} \right) = r^2 \cdot \frac{d^2 u}{dr^2} + 2r \cdot \frac{du}{dr}$$

Setze zum Beispiel  $u' =: v$ . Es entsteht

$$\frac{v'}{v} = -\frac{2}{r}$$

und als Lösung erhält man

$$u(r) = \frac{C_1}{r} + C_2$$

Im nächsten Kapitel wird  $u(r) = \frac{1}{r}$  die Grundlösung der Potentialgleichung sein. Nun betrachten wir den allgemeineren Fall der Laplace-Gleichung, bei der  $u$  von allen Koordinaten  $r$ ,  $\vartheta$  und  $\varphi$  abhängen kann. Hierzu benötigt man zwei Separationsansätze. Der erste ist

$$u(r, \vartheta, \varphi) = R(r) \cdot Y(\vartheta, \varphi)$$

Einsetzen in die Differentialgleichung nach Multiplikation mit  $r^2$ :

$$r^2 \cdot R'' \cdot Y + 2r \cdot R' \cdot Y + R \cdot \left[ \frac{1}{\sin \vartheta} \cdot \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left( \sin \vartheta \cdot \frac{\partial Y}{\partial \vartheta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \cdot \frac{\partial^2 Y}{\partial \varphi^2} \right] = 0$$

Zur Separation wird durch  $R \cdot Y$  dividiert:

$$\frac{r^2 \cdot R'' + 2r \cdot R'}{R} = -\frac{1}{Y} \cdot \left[ \frac{1}{\sin \vartheta} \cdot \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left( \sin \vartheta \cdot \frac{\partial Y}{\partial \vartheta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \cdot \frac{\partial^2 Y}{\partial \varphi^2} \right] =: \lambda$$

Damit erhält man die beiden Differentialgleichungen:

$$r^2 \cdot R'' + 2r \cdot R' - \lambda \cdot R = 0 \quad (19.1)$$

$$\frac{1}{\sin \vartheta} \cdot \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left( \sin \vartheta \cdot \frac{\partial Y}{\partial \vartheta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \cdot \frac{\partial^2 Y}{\partial \varphi^2} + \lambda \cdot Y = 0 \quad (19.2)$$

(19.1) heißt **Eulersche Differentialgleichung**, diese behandeln wir später, wenn wir mehr Informationen über  $\lambda$  haben. Jetzt lösen wir (19.2). Dabei wollen wir nur Lösungen  $Y$ , die auf der Kugeloberfläche beschränkt sind und bzgl.  $\varphi$  die Periode  $2\pi$  haben, für die also insbesondere gilt:

$$|Y(0, \varphi)| < \infty \quad \text{und} \quad |Y(\pi, \varphi)| < \infty \quad \text{für} \quad \varphi \in [-\pi, \pi] \\ Y(\vartheta, \varphi + 2\pi) = Y(\vartheta, \varphi)$$

Solche Lösungen heißen **Kugelflächenfunktionen** (manchmal auch nur Kugelfunktionen). Die Lösungen dieses Problems ergeben sich in Form von harmonischen homogenen Polynomen nach Einschränkung auf die Einheitssphäre.

- Polynome nullten Grades: 1
- Polynome ersten Grades:  $x_1, x_2, x_3$
- Polynome zweiten Grades:  $x_1^2 - x_2^2, x_1^2 - x_3^2, x_2^2 - x_3^2, x_1 \cdot x_2, x_1 \cdot x_3, x_2 \cdot x_3$

Diese Funktionen sind jeweils homogen vom angegebenen Grade. Um die Kugelflächenfunktion weiter zu lösen, machen wir einen zweiten Separationsansatz: Mit  $Y(\vartheta, \varphi) = g(\vartheta) \cdot h(\varphi)$ . Einsetzen in (19.2) ergibt

$$\frac{h}{\sin \vartheta} \cdot \frac{d}{d\varphi} \left( \sin \vartheta \cdot \frac{dg}{d\vartheta} \right) + \frac{g}{\sin^2 \vartheta} \cdot \frac{d^2 h}{d\varphi^2} + \lambda \cdot gh = 0$$

Wir multiplizieren mit  $\sin^2 \vartheta / g \cdot h$  und trennen  $g$  und  $h$ .

$$\frac{\sin \vartheta}{g} \cdot \frac{d}{d\varphi} \left( \sin \vartheta \cdot \frac{dg}{d\vartheta} \right) + \lambda \cdot \sin^2 \vartheta = -\frac{1}{h} \cdot \frac{d^2 h}{d\varphi^2} =: \mu$$

Das sind zwei gewöhnliche Differentialgleichungen für  $g$  und  $h$ .

$$h'' + \mu \cdot h = 0 \quad \text{mit} \quad h(\varphi) = h(\varphi + 2\pi) \quad (19.3)$$

$$\sin \vartheta \cdot \frac{d}{d\varphi} \left( \sin \vartheta \cdot \frac{dg}{d\vartheta} \right) + (\lambda \cdot \sin^2 \vartheta - \mu) \cdot g = 0$$

Hier teilen wir durch  $\sin^2 \vartheta$ :

$$\frac{1}{\sin \vartheta} \cdot \frac{d}{d\varphi} \left( \sin \vartheta \cdot \frac{dg}{d\vartheta} \right) + \left( \lambda - \frac{\mu}{\sin^2 \vartheta} \right) \cdot g = 0 \quad (19.4)$$

Aus (19.3) folgen Informationen über  $\mu$ : Als Lösungen kommen  $\cos(\sqrt{\mu}\varphi)$  und  $\sin(\sqrt{\mu}\varphi)$  infrage. Wegen der Periodizität ist  $\sqrt{\mu} = m \in \mathbb{N}_0$ . Davon sind

$$\sin m\varphi \quad \text{und} \quad \cos m\varphi \quad \text{für} \quad m \in \mathbb{N} \quad (19.5)$$



linear unabhängige Lösungen. (19.4) wird durch Substitution gelöst:

$$t := \cos \vartheta \quad \Rightarrow \quad \frac{dt}{d\vartheta} = -\sin \vartheta \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{d\vartheta} = -\sin \vartheta \cdot \frac{d}{dt}$$

Setzt man dies in (19.4) ein, erhält man eine neue Funktion  $G = G(t)$  mit  $G(t) = G(\cos \vartheta) = g(\vartheta)$ :

$$\frac{d}{dt} \left[ (1-t^2) \cdot \frac{dG}{dt} \right] + \left( \lambda - \frac{\mu}{1-t^2} \right) \cdot G = 0 \quad \text{für} \quad -1 < t < 1 \quad (19.6)$$

Diese Differentialgleichung heißt

- für  $m = 0$  **Legendresche Differentialgleichung**
- für  $m \geq 1$  allgemeine Legendresche Differentialgleichung

### Satz 19.1

Die allgemeine Legendresche Differentialgleichung (19.6) hat genau für  $\lambda = n \cdot (n+1)$  mit  $n = m, m+1, \dots$  auf  $(-1, 1)$  beschränkte Lösungen. Diese werden folgendermaßen gegeben:

- für  $m = 0$  als **Legendresche Polynome**:

$$P_n(t) = \frac{1}{2^n \cdot n!} \cdot \frac{d^n}{dt^n} [(t^2 - 1)^n] \quad (19.7a)$$

- für  $m \geq 1$  als zugeordnete Legendresche Polynome:

$$P_n^m(t) = (1-t^2)^{m/2} \cdot P_n^{(m)}(t) \quad \text{mit} \quad P_n^{(m)}(t) = \frac{d^m P_n(t)}{dt^m} \quad (19.7b)$$

Die Lösungen von (19.2) setzen sich aus (19.5) und (19.7) wie folgt zusammen:

$$\begin{aligned} P_n^m(\cos \vartheta) \cdot \cos m\varphi & \quad \text{mit} \quad m \in \mathbb{N}_0 \\ P_n^m(\cos \vartheta) \cdot \sin m\varphi & \quad \text{mit} \quad m \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

Diese Funktionen haben folgende Eigenschaften:

1. Die Legendrepolynome bilden im Raum  $L^2[-1, 1]$  (grob: der Raum der Funktionen  $f$  auf  $[-1, 1]$  mit  $\int_{-1}^1 |f(x)|^2 dx < \infty$ ) ein vollständiges Orthogonalsystem (eine Orthogonalbasis).
2. Für jedes feste  $m \geq 1$  bilden die  $P_n^m$  mit  $n = m, m+1, \dots$  ein vollständiges Orthogonalsystem in  $L^2[-1, 1]$ .
3. Für jedes  $n$  existieren  $2n+1$  linear unabhängige Kugelflächenfunktionen der Ordnung  $n$ , welchen man der Übersichtlichkeit halber so schreibt:

$$\begin{aligned} \{Y_n^m(\vartheta, \varphi)\} &= \{P_n^m(\cos \vartheta) \cdot \cos m\varphi : m = 0, 1, \dots, n; \\ &\quad P_n^{-m}(\cos \vartheta) \cdot \sin(-m\varphi) : m = -1, -2, \dots, -n\} \end{aligned} \quad (19.8)$$

Für  $n \in \mathbb{N}_0$  und  $-n \leq m \leq n$  bilden die  $Y_n^m$  auf der Einheitssphäre ein vollständiges Orthogonalsystem.

Es bleibt noch die **Eulersche Differentialgleichung** (19.1) zu behandeln:

$$r^2 \cdot R'' + 2r \cdot R' - \lambda \cdot R = 0$$

Mit  $\lambda = n \cdot (n+1)$  ergeben sich die Lösungen:

$$R(r) = r^n \quad \text{und} \quad R(r) = \frac{1}{r^{n+1}} \quad \text{für} \quad n \in \mathbb{N}$$

Will man auf der Kugel beschränkte Lösungen, muss man  $R(r) = r^n$  nehmen.

## Beispiel

Wir betrachten eine Randwertaufgabe 1. Art (Dirichlet-Problem) für das Innere eines Kreises mit dem Radius  $\varrho$ . Wir benutzen Polarkoordinaten ( $x = r \cdot \cos \varphi$  und  $y = r \cdot \sin \varphi$ ):

$$\begin{aligned} \text{Differentialgleichung:} \quad & u_{rr} + \frac{1}{r} \cdot u_r + \frac{1}{r^2} \cdot u_{\varphi\varphi} = 0 \quad \text{für} \quad 0 < r < \varrho, -\pi < \varphi < \pi \\ \text{Randbedingung:} \quad & u(\varrho, \varphi) = f(\varphi) \quad \text{für} \quad -\pi < \varphi < \pi \end{aligned}$$

Setze  $f$  als  $2\pi$ -periodisch voraus, also muss  $u$  ähnliche Periodizitätseigenschaften haben:

$$u(r, -\pi) = u(r, \pi) \quad \text{und} \quad u_\varphi(r, -\pi) = u_\varphi(r, \pi)$$

Wir fordern, dass  $u$  für  $r \rightarrow 0+0$  endlich bleiben soll. Der Separationsansatz lautet  $u(r, \varphi) = R(r) \cdot H(\varphi)$ . Einsetzen und Trennung der Variablen führt auf die Differentialgleichungen

$$H'' + \lambda \cdot H = 0 \quad \text{mit} \quad H(\pi) = H(-\pi) \quad \text{und} \quad H'(\pi) = H'(-\pi) \quad (19.9)$$

$$r^2 \cdot R'' + r \cdot R' - \lambda \cdot R = 0 \quad \text{mit} \quad R(r) \text{ endlich für } r \rightarrow 0+0 \quad (19.10)$$

Aus (19.9) findet man wiederum Lösungen für  $\lambda = \lambda_n = n^2$ :

$$H_n(\varphi) = \begin{cases} \frac{a_0}{2} & n = 0 \\ a_n \cdot \cos n\varphi + b_n \cdot \sin n\varphi & n \geq 1 \end{cases}$$

Das  $1/2$  ist wieder eine Normierungskonstante (vgl. Fourierreihe). (19.10) wird durch

$$R_n(r) = c_n \cdot r^n \quad \text{mit} \quad n \in \mathbb{N}_0$$

Die Lösung der Randwertaufgabe erfolgt mit dem Ansatz

$$u(r, \varphi) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{\varrho}\right)^n \cdot (a_n \cdot \cos n\varphi + b_n \cdot \sin n\varphi) \quad (19.11)$$

Den Vorteil des Faktors  $\frac{1}{\varrho^n}$  sieht man beim Einsetzen der Randbedingung:

$$f(\varphi) = u(\varrho, \varphi) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cdot \cos n\varphi + b_n \cdot \sin n\varphi)$$

Ist  $f$  in eine Fourierreihe entwickelbar, so folgt

$$a_n = \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} f(\varphi') \cdot \cos n\varphi' \, d\varphi' \quad \text{mit} \quad n \in \mathbb{N}_0 \quad \text{und} \quad b_n = \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} f(\varphi') \cdot \sin n\varphi' \, d\varphi' \quad \text{mit} \quad n \in \mathbb{N}$$

Einsetzen in (19.11) liefert

$$u(r, \varphi) = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} f(\varphi') \, d\varphi' + \frac{1}{\pi} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{\varrho}\right)^n \cdot \left[ \int_{-\pi}^{\pi} f(\varphi') \cdot (\cos n\varphi \cdot \cos n\varphi' + \sin n\varphi \cdot \sin n\varphi') \, d\varphi' \right]$$

Unter Beachtung des Additionstheorems  $\cos(x - y) = \cos x \cdot \cos y + \sin x \cdot \sin y$  ist schließlich

$$u(r, \varphi) = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} f(\varphi') \cdot \left[ 1 + 2 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{\varrho}\right)^n \cdot \cos(n(\varphi - \varphi')) \right] d\varphi' \quad (**)$$

Es gilt der folgende Zusammenhang:

$$1 + 2 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} c^n \cdot \cos nx = \frac{1 - c^2}{1 - 2c \cdot \cos x + c^2} \quad \text{für } |c| < 1$$

Mit  $x := \varphi - \varphi'$  und  $c = r/\varrho$  kann man dies auf (\*\*) anwenden:

$$u(r, \varphi) = \frac{\varrho^2 - r^2}{2\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(\varphi')}{\varrho^2 - 2\varrho \cdot r \cdot \cos(\varphi - \varphi') + r^2} d\varphi' \quad (19.12)$$

Dies ist die **Poissonsche Integralformel** zur Lösung des inneren Dirichlet-Problems für den Kreis.

## 20 Ausblick auf moderne Methoden zur Behandlung partieller Differentialgleichungen

Die Idee ist, statt Differentialgleichungen Differentialoperatoren zu betrachten. Wenn zum Beispiel  $\Delta$  gegeben ist, so vermittelt  $\Delta$  eine lineare Abbildung von genügend oft differenzierbaren Funktionen in Funktionen.

Für praktische Anwendungen ist der bisherige Lösungsbegriff für Differentialgleichungen zu eng, etwa für die Behandlung von Punktladungen oder Massebelegungen von Flächen. Was ist zum Beispiel die für Punktladungen relevante „Delta-Funktion“?

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) \cdot f(x) \, dx = f(0)$$

Dazu brauchen wir einen neuen Begriff.

### 20.1 Der Begriff der Distribution

Zur heuristischen Motivation: Betrachte  $\int_{\mathbb{R}} f(x) \cdot \varphi(x) \, dx$ . Wenn  $f$  und  $\varphi$  beide „hinreichend gut“ sind, dann existiert dieses Integral. Wenn man  $f$  „verschlechtert“, muss man  $\varphi$  „verbessern“, damit das Integral noch existiert. Im besten Falle ist  $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ , d.h.  $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R})$  und  $\text{supp } \varphi := \overline{\{x : \varphi(x) \neq 0\}}$  ist kompakt, d.h. die Funktion  $\varphi$  ist unendlich oft differenzierbar und hat einen kompakten Träger. Solche  $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$  heißen **Grundfunktion** oder **Testfunktion**.

Sei  $f$  so, dass

$$T_f(\varphi) = \int_{\mathbb{R}} f(x) \cdot \varphi(x) \, dx \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$$

existiert.  $T_f$  ist eine *lineare Abbildung* von  $C_c^\infty(\mathbb{R})$  nach  $\mathbb{R}$ .  $C_c^\infty(\mathbb{R})$  ist offenbar ein Vektorraum, also ist  $T_f$  ein *lineares Funktional* auf  $C_c^\infty(\mathbb{R})$ . Für differenzierbare  $f$  folgt mit partieller Integration:

$$\int_{\mathbb{R}} f'(x) \cdot \varphi(x) \, dx = [f(x) \cdot \varphi(x)]_{-\infty}^{\infty} - \int_{\mathbb{R}} f(x) \cdot \varphi'(x) \, dx = - \int_{\mathbb{R}} f(x) \cdot \varphi'(x) \, dx$$

Wenn  $f$  nicht differenzierbar ist, kann man durch obige Gleichung eine verallgemeinerte Ableitung definieren. Bevor wir nun mit den eigentlichen Definitionen beginnen, führen wir die folgenden Bezeichnungen ein:

- $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$  ist ein Punkt.
- $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}_0^n$  ist ein **Multiindex** mit  $\alpha! = \alpha_1! \cdots \alpha_n!$  und  $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$ .

- Bereits bekannt sind  $D_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$  und  $D_i^k = \frac{\partial^k}{\partial x_i^k}$ , neu ist  $D^\alpha = D_1^{\alpha_1} \cdots D_n^{\alpha_n} = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}}$
- Multiindizes addiert man komponentenweise:  $\alpha + \beta = (\alpha_1 + \beta_1, \dots, \alpha_n + \beta_n)$ , es ist  $D^\alpha D^\beta = D^{\alpha+\beta}$ .

Wir betrachten den  $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ . Ein typisches Beispiel einer Funktion aus diesem Raum ist der „Hut“

$$f_\varepsilon(x) := \begin{cases} C_\varepsilon \cdot e^{-\frac{\varepsilon^2}{\varepsilon^2 - \|x\|^2}} & \|x\| < \varepsilon \\ 0 & \|x\| \geq \varepsilon \end{cases}$$

Hierbei ist  $C_\varepsilon$  so, dass  $\int_{\mathbb{R}^n} f_\varepsilon(x) dx = 1$  ist. Das folgende Lemma sichert die Existenz hinreichend vieler nützlicher Testfunktionen.

### Lemma 20.1

Zu jedem beschränkten Gebiet  $G \subset \mathbb{R}^n$  und  $\varepsilon > 0$  existiert ein  $g \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$  mit den Eigenschaften:

- $0 \leq g \leq 1$
- $g(x \in G_\varepsilon) = 1$  und  $g(x \notin G_{3\varepsilon}) = 0$

Hierbei ist  $G_\delta = \bigcup_{x \in G} K_\delta(x)$  (die Vereinigung der offenen Kugeln um die Punkte in  $G$  mit dem Radius  $\delta$ ) eine  **$\delta$ -Umgebung von  $G$** .

### Beweis

Mit der charakteristischen Funktion  $\chi$  von  $G_{2\varepsilon}$  konstruiert man  $g$ :

$$g(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \chi(y) \cdot f_\varepsilon(x - y) dy$$

Hierbei handelt es sich um eine Faltung:  $g = \chi * f_\varepsilon$  (dazu später mehr). ■

Der entscheidende Punkt ist nun die Konvergenz in  $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ .

### Definition 20.2

Unter dem **Schwartz-Raum**  $\mathcal{D} = \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$  versteht man den Vektorraum  $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ , versehen mit folgendem Konvergenzbegriff: Eine Folge  $(\varphi_n)$  aus  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$  konvergiert gegen  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$  genau dann, wenn gilt:

1. Es existiert eine kompakte Menge  $K \subset \mathbb{R}^n$  mit  $\text{supp } \varphi_n \subset K \forall n$ .
2. Für alle  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$  gilt:  $D^\alpha \varphi_n \Rightarrow D^\alpha \varphi$  (gleichmäßige Konvergenz in  $K$ ).

Analog definiert man für eine offene Menge  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  den Raum  $\mathcal{D}(\Omega)$ .

### Bemerkung

1. Diese Konvergenz ist insofern kompliziert, als dass es keine Metrik in  $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$  gibt, die diese Konvergenz erzeugt.
2. Diese Konvergenz hat besonders gute Eigenschaften: Die Vektorraumoperationen sind bezüglich dieser Konvergenz stetig, d.h. wenn  $\varphi_n \rightarrow \varphi$  und  $\psi_n \rightarrow \psi$  in  $\mathcal{D}$  und  $\lambda_n \rightarrow \lambda$  in  $\mathbb{R}$ , dann konvergieren auch  $\varphi_n + \psi_n \rightarrow \varphi + \psi$  und  $\lambda_n \cdot \varphi_n \rightarrow \lambda \cdot \varphi$ .
3.  $D^\alpha$  ist eine stetige lineare Abbildung von  $\mathcal{D}$  in sich, d.h. wenn  $\varphi_n \rightarrow \varphi$ , dann  $D^\alpha \varphi_n \rightarrow D^\alpha \varphi$ .

4. Wenn  $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ , dann ist  $M_f$  gegeben durch

$$(M_f \varphi)(x) := f(x) \cdot \varphi(x)$$

eine stetige lineare Abbildung von  $\mathcal{D}$  in sich.

5.  $\mathcal{D}$  ist vollständig.

### Definition 20.3

Unter einer **Distribution** oder **verallgemeinerten Funktion** versteht man ein stetiges lineares Funktional  $T$  auf  $\mathcal{D}$ . Die Menge aller Distributionen auf  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$  heißt  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)'$  oder kurz  $\mathcal{D}'$ .

Dass  $T$  stetig ist, heißt, dass für eine Folge  $(\varphi_n)$  mit  $\varphi_n \rightarrow \varphi$  (in  $\mathcal{D}$ ) gilt:  $T(\varphi_n) \rightarrow T(\varphi)$  (in  $\mathbb{R}^n$ ). Wendet man  $T$  auf  $\varphi$  an, so schreibt man gleichwertig:  $T(\varphi)$ ,  $T\varphi$  oder  $(T, \varphi)$ .

### Beispiel 20.1

Sei  $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ . Dies ist die Menge aller **lokal integrierbaren Funktionen**, d.h.  $\int_B |f(x)| \, dx < \infty$  für alle kompakten  $B \subset \mathbb{R}^n$ . Dann ist  $T_f$  mit  $T_f(\varphi) := \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \cdot \varphi(x) \, dx$  aus  $\mathcal{D}'$ .

Die Linearität zu beweisen, ist trivial. Bei der Stetigkeit genügt es, zu zeigen, dass aus  $\varphi_n \rightarrow 0$  (in  $\mathcal{D}$ ) folgt, dass  $T_f(\varphi_n) \rightarrow 0$  (in  $\mathbb{R}^n$ ) konvergiert. Dann gilt ähnliches auch im Allgemeinen: Aus  $\varphi_n \rightarrow \varphi$  folgt  $\varphi_n - \varphi \rightarrow 0$ , damit  $T_f(\varphi_n - \varphi) \rightarrow 0$ , wegen Linearität gilt auch  $T_f(\varphi_n) - T_f(\varphi) \rightarrow 0$  und endlich  $T_f(\varphi_n) \rightarrow T_f(\varphi)$ .

$\varphi_n \rightarrow 0$  bedeutet unter anderem, dass eine kompakte Menge  $K$  mit  $\text{supp } \varphi_n \subset K \, \forall n$  existiert und  $\varphi_n$  auf  $K$  gleichmäßig konvergiert. Dies heißt wiederum, dass  $\sup_{x \in K} |\varphi_n(x)| \rightarrow 0$  geht.

$$|T_f(\varphi_n)| = \left| \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \cdot \varphi_n(x) \, dx \right| \leq \int_K |f(x)| \cdot |\varphi_n(x)| \, dx \leq \sup_{x \in K} |\varphi_n(x)| \cdot \int_K |f(x)| \, dx$$

Distributionen, die sich auf diese Weise durch eine Funktion darstellen lassen, heißen **regulär** oder **vom Typ einer Funktion**, andernfalls **singulär**. Statt  $T_f$  kann man auch  $\{f\}$  schreiben.

### Beispiel 20.2

#### Dirac'sche $\delta$ -Distribution

$\delta_a$  wird gegeben durch  $\delta_a(\varphi) := \varphi(a)$ . Mit  $\delta$  wird  $\delta_0$  gemeint, also ist  $\delta(\varphi) = \varphi(0)$ .

Auch hier ist die Linearität einfach zu zeigen. Zur Stetigkeit: Gehe  $\varphi_n \rightarrow \varphi$  in  $\mathcal{D}$ , d.h.  $\text{supp } \varphi_n \subset K$  für alle  $n$  mit einem festen kompakten  $K$ . Dann konvergiert  $D^\alpha \varphi_n \rightarrow D^\alpha \varphi$  gleichmäßig in  $K$ , also auch insbesondere  $\varphi_n \rightarrow \varphi$  gleichmäßig in  $K$ . Damit konvergiert erst recht  $\varphi_n(x) \rightarrow \varphi(x)$  in  $K$ , und es ist auch  $\varphi_n(x) \rightarrow 0 = \varphi(x)$  außerhalb von  $K$ . Also konvergiert  $\varphi_n(x) \rightarrow \varphi(x)$  für alle  $x$ , insb. auch für  $x = a$ . Somit ist  $\delta(\varphi_n) \rightarrow \delta(\varphi)$ .

Es gibt keine lokal integrierbare Funktion  $f$  mit  $T_f = \delta$  bzw.  $\int_B f(x) \cdot \varphi(x) \, dx = \varphi(0)$  für alle  $\varphi \in \mathcal{D}$ .

### Beispiel 20.3

Maße sind auch Distributionen (wenn sie noch gewisse zusätzliche Eigenschaften haben).

$$T_f(\varphi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \cdot \varphi(x) \, dx$$

Diese Schreibweise hat einen wohlbestimmten Sinn. Sehr häufig braucht man die folgende *symbolische* Schreibweise, auch wenn es gar keine lokal integrierbare Funktion  $T(x)$  mit dieser Eigenschaft gibt:

$$T(\varphi) = \int_{\mathbb{R}^n} T(x) \cdot \varphi(x) \, dx$$

Insbesondere sind so bei der Delta-Distribution Schreibweisen wie  $\delta(x)$  oder  $\delta(x - x_0)$  üblich:

$$\delta(\varphi) = \int_{\mathbb{R}^n} \delta(x) \cdot \varphi(x) \, dx = \varphi(0)$$

## 20.2 Rechenoperationen mit Distributionen

1.  $\mathcal{D}$  ist ein Vektorraum.
2. Distributionen kann man im Allgemeinen nicht multiplizieren, aber: Sei  $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$  und  $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ . Dann kann man sinnvoll definieren, was  $f \cdot T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$  sein soll:

$$(f \cdot T)(\varphi) := T(f \cdot \varphi)$$

3. Neben der bereits bekannten Konvergenz in  $\mathcal{D}$  wird für Distributionen eine **schwache Konvergenz** definiert:  $T_n \rightarrow T$  gilt genau dann, wenn  $T_n(\varphi) \rightarrow T(\varphi) \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$  gilt. Bezüglich dieser Konvergenz ist  $\mathcal{D}'$  vollständig.

Man kann  $\mathcal{D}$  in  $\mathcal{D}'$  einbetten durch  $\varphi \rightarrow T_\varphi$  mit  $T_\varphi(\psi) = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) \cdot \psi(x) dx$ . Dann liegt  $\mathcal{D}$  in  $\mathcal{D}'$  dicht: Zu jedem  $T \in \mathcal{D}'$  existiert eine Folge  $(\varphi_n)$  aus  $\mathcal{D}$  mit  $T_{\varphi_n} \rightarrow T$  in  $\mathcal{D}'$ .

### 20.2.1 Ableitung von Distributionen

Sei  $T \in \mathcal{D}'$ . Dann wird  $S := D^\alpha T$  definiert durch

$$S(\varphi) = (D^\alpha T)(\varphi) := (-1)^{|\alpha|} \cdot T(D^\alpha \varphi)$$

Beachte, dass  $D^\alpha T$  ein Symbol ist, während  $D^\alpha \varphi$  wohldefiniert ist.  $S$  ist wieder eine Distribution und heißt **schwache Ableitung** (bzw. **Ableitung im distributionellen Sinne**) der Ordnung  $\alpha$  von  $T$ . Dass  $S \in \mathcal{D}'$  liegt, sieht man so: Natürlich ist  $S$  ein lineares Funktional auf  $\mathcal{D}$ . Sei  $\varphi_n \rightarrow \varphi$  in  $\mathcal{D}$ . Zu zeigen ist:  $S(\varphi_n) \rightarrow S(\varphi)$ . Wir wissen, dass  $D^\alpha \varphi_n \rightarrow D^\alpha \varphi$  in  $\mathcal{D}$  konvergiert (da die Abbildung  $D^\alpha$  stetig ist). Auch  $T$  ist stetig, also konvergiert  $T(D^\alpha \varphi_n) \rightarrow T(D^\alpha \varphi)$  in  $\mathbb{R}$ . Daraus folgt die Behauptung.

Die Ableitung hat folgende Eigenschaften:

1. Jedes  $T \in \mathcal{D}'$  ist beliebig oft differenzierbar.
2.  $D^\alpha(D^\beta T) = D^{\alpha+\beta} T = D^\beta(D^\alpha T)$
3. Für  $f \in C^\infty$  und  $T \in \mathcal{D}'$  gilt die **Leibnizsche Produktregel**:

$$D^\gamma(fT) = \sum_{\alpha+\beta=\gamma} \frac{\gamma!}{\alpha! \cdot \beta!} \cdot D^\alpha f \cdot D^\beta T$$

#### Beispiel 20.4

#### Ableitung der Heaviside-Funktion

Wir betrachten die Heaviside-Funktion

$$\Theta(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases}$$

Gesucht ist  $\Theta'$  im distributionellen Sinne:

$$\Theta'(\varphi) = -\Theta(\varphi') = - \int_{\mathbb{R}} \Theta(x) \varphi'(x) dx = - \int_0^\infty \varphi'(x) dx = - \varphi(x)|_0^\infty = \varphi(0) = \delta(\varphi)$$

Beachte, dass  $\varphi(x \rightarrow \infty)$  verschwinden muss, da  $\varphi$  lokal integrierbar ist. Damit ist  $\Theta' = \delta$ .

**Beispiel 20.5**

## Zur Dichtheit

Benutzt man die Dichtheit von  $\mathcal{D}$  in  $\mathcal{D}'$ , dann kann man viele Beispiele von Folgen  $(\varphi_n)$  aus  $\mathcal{D}$  angeben, die im schwachen Sinne gegen  $\delta$  konvergieren. Auch außerhalb von  $\mathcal{D}$  gibt es Beispiele:

- Die Funktionen  $f_n$  mit  $f_n(x) = \frac{n}{2} \cdot e^{-|x|/n}$  sind aus  $L^1_{loc}$ , aber nicht aus  $\mathcal{D}$ , da sie keinen kompakten Träger haben. Es konvergiert  $T_{f_n} \rightarrow \delta$  in  $\mathcal{D}'$ .
- Die Funktionen  $g_n$  mit  $g_n(x) = n$  für  $x \leq \frac{1}{2n}$  und  $g_n(x) = 0$  sonst haben zwar einen kompakten Träger, sind aber nicht differenzierbar und somit auch nicht aus  $\mathcal{D}$ . Sie konvergieren nicht gegen  $\delta$ .

**20.2.2 Direktes Produkt von Distributionen**

Die Physik verwendet Ausdrücke wie  $\delta(x) \cdot \delta(y) \cdot \delta(z)$ . Wie kann man dies formalisieren? Seien  $f$  und  $g$  lokal integrierbare Funktionen sowie  $\varphi, \psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ . Hiermit kann man  $\varrho$  mit  $\varrho(x, y) = \varphi(x) \cdot \psi(y)$  definieren, sprich  $\varrho = \varphi \otimes \psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$ .

Definiere nun die folgende Distribution:

$$\begin{aligned} S(\varphi, \psi) &:= \int_{\mathbb{R}^2} f(x)g(y) \cdot \varrho(x, y) \, dx dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} f(x)g(y) \cdot \varphi(x)\psi(y) \, dx dy \\ &= \int_{\mathbb{R}} f(x) \cdot \varphi(x) \, dx \cdot \int_{\mathbb{R}} g(y) \cdot \psi(y) \, dy \\ &= T_f(\varphi) \cdot T_g(\psi) \end{aligned}$$

Man schreibt  $S := T_f \otimes T_g$ . Offenbar ist  $S$  auch auf allen Funktionen  $\chi = \sum_{i=1}^n \varphi_i \otimes \psi_i$  (mit  $\varphi_i, \psi_i \in \mathcal{D}$  und  $n \in \mathbb{N}$ ) wohldefiniert:

$$S\chi = \sum_i T_f(\varphi_i) \cdot T_g(\psi_i)$$

Die Menge aller solchen  $\chi$  liegt in  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$  dicht. Obiges  $S$  ist dann auf ganz  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$  fortsetzbar, indem man definiert:

$$S\eta = (T_f \otimes T_g)\eta := \int_{\mathbb{R}^2} f(x)g(y) \cdot \eta(x, y) \, dx dy \quad \text{für } \eta \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$$

Das Produkt  $S = T_f \otimes T_g$  heißt **direktes Produkt** oder **Tensorprodukt** der Distributionen  $T_f$  und  $T_g$ . Allgemeiner seien  $S_x, T_y \in \mathcal{D}(\mathbb{R})'$  (die Indizes geben die Variable an, auf die sich die Distribution unten bezieht) und  $\eta \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$ . Dann ist  $S_x \otimes T_y$  wie folgt erklärt:

$$(S_x \otimes T_y)\eta := S_x(T_y\eta(x, y))$$

Genauer: Für jedes feste  $x$  ist die Funktion  $\eta(x, \cdot) \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ . Dann ist  $T_y$  anwendbar und es entsteht eine Funktion  $\varphi$  mit

$$\varphi(x) := T_y\eta(x, \cdot)$$

Dieses  $\varphi$  liegt in  $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ , somit hat  $(S_x \otimes T_y)\eta = S_x\varphi$  Sinn.

**Beispiel 20.6**

## Direktes Produkt von Delta-Distributionen

Es ist  $(\delta \otimes \delta)\eta = \eta(0, 0)$ , denn:

$$\delta(\eta(x, \cdot)) = \eta(x, 0) = \varphi(x) \quad \Rightarrow \quad (\delta \otimes \delta)\eta = \delta\varphi = \eta(0, 0)$$



### 20.2.3 Faltung von Funktionen und Distributionen

Seien  $g, h \in L^1(\mathbb{R})$ , also  $\int_{\mathbb{R}} |g(x)| \, dx < \infty$  und  $\int_{\mathbb{R}} |h(x)| \, dx < \infty$ . Die Faltung ist wie folgt erklärt:

$$f(x) := (g * h)(x) := \int_{\mathbb{R}} g(y) \cdot h(x - y) \, dy$$

Analog geht die Definition für  $g, h \in L^1(\mathbb{R}^n)$ . Auch  $f$  liegt in diesem Raum. Die Faltung wirkt in  $L^1(\mathbb{R}^n)$  wie eine Multiplikation. Man kann  $T_f$  bilden:

$$\begin{aligned} T_f \varphi &= \int_{\mathbb{R}^n} (g * h)(z) \cdot \varphi(z) \, dz \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \left[ \int_{\mathbb{R}^n} g(y) \cdot h(z - y) \, dy \right] \cdot \varphi(z) \, dz \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} g(y) \cdot \left[ \int_{\mathbb{R}^n} h(z - y) \cdot \varphi(z) \, dz \right] \, dy \\ (x := z - y) &= \int_{\mathbb{R}^n} g(y) \cdot \int_{\mathbb{R}^n} h(x) \cdot \varphi(x + y) \, dx \, dy \end{aligned}$$

Wir haben insgesamt

$$(g * h)(\varphi) := T_{g*h}(\varphi) = \int_{\mathbb{R}^{2n}} g(x) \cdot h(y) \cdot \varphi(x + y) \, dx \, dy \quad (20.2)$$

#### Bemerkung

Die Faltung von Funktionen ist eine Art Glättungs- bzw. Mittelungsprozess (vgl. Lemma 20.1).

Die Formel (20.2) suggeriert folgende Definition für die Faltung zweier Distributionen  $S_y$  und  $T_x$ :

$$(S_y * T_x)(\varphi) = S_y(T_x(\varphi(x + y)))$$

Das geht nicht, denn  $\tilde{\varphi}$  mit  $\tilde{\varphi}(x, y) = \varphi(x + y)$  ist keine Funktion mit kompaktem Träger: Ist zum Beispiel  $\varphi(0) \neq 0$ , so ist  $\tilde{\varphi}(x, -x) \neq 0$  für alle  $x$ .

Für beliebige  $S$  und  $T$  ist die Faltung nicht sinnvoll definierbar. Als Einschränkung benötigen wir den Begriff des Trägers für eine Distribution: Sei  $G \subset \mathbb{R}^n$  offen. Man sagt,  $T \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)'$  **verschwindet** in  $G$ , wenn gilt:  $T(\varphi) = 0$  für alle  $\varphi$  mit  $\text{supp } \varphi \subset G$ . Sei nun  $G_0$  die Vereinigung aller offenen  $G$ , in denen  $T$  verschwindet. (Dann ist  $G_0$  die größte offene Menge, in der  $G$  verschwindet.) Dann wird der **Träger** der Distribution  $T$  definiert durch

$$\text{supp } T := \mathbb{R}^n \setminus G_0$$

**Lemma 20.4** Lemma von du Bois und Reymond

Eine lokal integrierbare Funktion  $f$  verschwindet in der offenen Menge  $G \subset \mathbb{R}^n$  im distributionellen Sinne (d.h.  $T_f$  verschwindet in  $G$ ) genau dann, wenn  $f$  in  $G$  fast überall verschwindet.

Eine Distribution  $T$  heißt **finit**, wenn der Träger  $\text{supp } T$  kompakt ist.

**Beispiel 20.7**

$\delta$  und  $\delta_a$  sind finit, denn  $\text{supp } \delta = \{0\}$  bzw.  $\text{supp } \delta_a = \{a\}$ .

**Definition und Satz 20.5**

Sei  $S_x$  eine beliebige und  $T_y$  eine finite Distribution. Dann existiert die Faltung  $S_x * T_y \in \mathcal{D}(\mathbb{R}')$  und ist gegeben durch:

$$(S_x * T_y)\varphi := S_x \left[ T_y [\eta(y) \cdot \varphi(x+y)] \right] \quad \text{mit} \quad \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \quad (20.3)$$

$\eta$  ist eine beliebige Funktion aus  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ , die in einer Umgebung des Trägers von  $T$  identisch Eins ist.

**Bemerkung**

Man sieht, dass  $\eta T = T$  ist. Wie wirkt  $\eta T$ ? Es ist  $(\eta T)\psi = T(\eta\psi)$ . Der Sinn von  $\eta$  in (20.3) besteht darin, dass  $\eta(y) \cdot \varphi(x+y)$  als Funktion von  $y$  wieder in  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$  liegt.

Die Faltung hat folgende Eigenschaften:

1. Die Faltung ist kommutativ. (Das sieht man erst, wenn man die Faltung mittels direktem Produkt der Distributionen definiert.)
2. Für beliebiges  $T \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)'$  ist  $\delta * T = T * \delta = T$ , also ist  $\delta$  das neutrale Element der Faltung:

$$(T * \delta)(\varphi) = T \left[ \delta[\eta(y) \cdot \varphi(x+y)] \right] = T[\eta(0) \cdot \varphi(x+0)] = T[\varphi(x)] = T(\varphi)$$

3. Zum Zusammenspiel von Faltung und Ableitung: Es gilt

$$D^\alpha(S * T) = (D^\alpha S) * T = S * (D^\alpha T)$$

Das heißt insbesondere, dass, wenn  $S * T$  wohldefiniert ist, auch alle drei Terme in obiger Gleichung erklärt sind. Wir setzen also voraus, dass etwa  $T$  einen kompakten Träger hat. Es genügt, diese Beziehung für eine partielle Ableitung erster Ordnung zu zeigen:

$$\begin{aligned} \left[ \frac{\partial}{\partial x_j} (S * T) \right] \varphi &= -(S * T) \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \right) \\ &\stackrel{(20.3)}{=} -S \left[ T \left[ \eta(y) \cdot \frac{\partial \varphi(x+y)}{\partial x_j} \right] \right] = -S \left[ T \frac{\partial \eta(y) \cdot \varphi(x+y)}{\partial x_j} \right] \\ &\stackrel{(*)}{=} -S \left[ \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ T \left( \eta(y) \cdot \varphi(x+y) \right) \right] \right] = \frac{\partial}{\partial x_j} S \left[ T \left( \eta(y) \cdot \varphi(x+y) \right) \right] \\ &= \left( \frac{\partial S}{\partial x_j} * T \right) \varphi \end{aligned}$$

(\*) gilt für den Fall, dass  $T = T_f$  von einer Funktion  $f(y)$  erzeugt wird:

$$T \left( \frac{\partial \eta(y) \cdot \varphi(x+y)}{\partial x_j} \right) = \int f(y) \cdot \frac{\partial \eta(y) \cdot \varphi(x+y)}{\partial x_j} dy = \frac{\partial}{\partial x_j} \int f(y) \cdot \eta(y) \cdot \varphi(x+y) dy$$

Ein Spezialfall ist  $D^\alpha T = D^\alpha(T * \delta) = T * D^\alpha \delta$ . Ebenso ist  $D^\alpha T = \delta * D^\alpha T$ .

**20.3 Anwendung auf Differentialgleichungen**

$$L(x, D) := \sum_{|\alpha|=0}^m a_\alpha(x) \cdot D^\alpha \quad \text{mit} \quad L(x, D)\varphi = \sum_{|\alpha|=0}^m a_\alpha(x) \cdot D^\alpha \varphi$$

sei ein linearer Differentialoperator der Ordnung  $m$  mit Koeffizienten  $a_\alpha \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ , zum Beispiel der Laplace-Operator im  $\mathbb{R}^n$ :

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2} = \sum_{|\alpha|=0}^2 D^\alpha,$$

wobei nur  $\alpha$  von der Form  $\alpha^i = (0, \dots, 0, 2, 0, \dots, 0)$  betrachtet werden. Dann hat man:  $a_{\alpha^i} \equiv 1$  für die  $\alpha^i$  und sonst  $a_{\alpha} \equiv 0$ .

Sei  $T \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ . Dann gilt:

$$(L(x, D)T, \varphi) = (T, L^*(x, D)\varphi) \quad \text{mit} \quad L^*(x, D)\varphi = \sum_{|\alpha|=0}^m (-1)^{|\alpha|} D^{\alpha}(a_{\alpha}\varphi)$$

$L^*(x, D)$  nennt man den zu  $L(x, D)$  **formal adjungierten Differentialoperator**. Wie kommt man auf  $L^*$ ? Es genügt einen Summanden zu betrachten. Nach Definition der Multiplikation einer Distribution mit einer  $C^{\infty}$ -Funktion (hier  $a_{\alpha}$ ) ist

$$(a_{\alpha}(x) \cdot (D^{\alpha}T), \varphi) = (D^{\alpha}T)(a_{\alpha} \cdot \varphi) = (-1)^{|\alpha|} \cdot T(D^{\alpha}(a_{\alpha} \cdot \varphi)) = T((-1)^{|\alpha|} \cdot D^{\alpha}(a_{\alpha} \cdot \varphi))$$

### Definition 20.6

Unter einer **schwachen** (oder **verallgemeinerten**) **Lösung** der Differentialgleichung

$$L(x, D)u = S \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \quad (20.4)$$

in  $G$  versteht man jede Distribution  $T \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)'$  mit folgender Eigenschaft:

$$(L(x, D)T, \varphi) = S(\varphi) \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \text{ mit } \text{supp } \varphi \subset G$$

Das heißt, es gilt:

$$T(L^*(x, D)\varphi) = S(\varphi) \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \text{ mit } \text{supp } \varphi \subset G$$

Wenn speziell  $G = \mathbb{R}^n$  ist, dann sollen obige Gleichungen für alle  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$  gelten.

Man überzeugt sich relativ leicht von folgender Behauptung: Wenn es eine sogenannte klassische Lösung von (20.4) gibt, d.h. es existiert ein  $u \in C^{\infty}(G)$  mit  $L(x, D)u = S$ , dann ist  $S$  automatisch eine stetige Funktion. Identifiziert man dann  $u$  und  $T_u$ , dann ist diese klassische Lösung auch eine schwache Lösung. (Dann ist automatisch  $S$  durch eine stetige Funktion gegeben.)

### Lemma 20.7

Sei  $u$  eine verallgemeinerte Lösung von (20.4), sodass  $u$  eine reguläre Distribution ist, und  $u$  soll zu  $C^m(G)$  gehören.  $S$  möge zu  $C(G)$  gehören, und  $T_u$  erfülle also (20.4) im distributionellen Sinne. Dann ist dieses  $u$  zugleich eine klassische Lösung, d.h. die Gleichung (20.4) ist punktweise in  $G$  erfüllt.

#### Bemerkung

Die Betrachtungen vor dem Lemma besagen: Wenn  $u \in C^m(G)$  liegt,  $S = f$  eine stetige Funktion ist und  $u$  eine klassische Lösung ist, d.h. es gilt  $L(x, D)u(x) = f(x)$  für alle  $x \in G$ , dann gilt auch im distributionellen Sinne:  $L(x, D)T_u = T_f$ . Das Lemma besagt: Wenn  $u$  und  $f$  wie oben mit  $L(x, D)T_u = T_f$ , dann gilt auch punktweise  $L(x, D)u(x) = f(x)$  in  $G$ .

### Beweis

Betrachte die in  $G$  definierte stetige Funktion  $L(x, D)u - S$ . Die davon erzeugte Distribution hat folgende Eigenschaft: Wenn  $\text{supp } \varphi \subset G$ , dann ist  $T(\varphi) = 0$ , denn  $(L(x, D)u)(\varphi) = S(\varphi)$ . Wegen des Lemmas von du Bois und Reymond muss diese stetige Funktion  $L(x, D)u - S$  in  $G$  verschwinden, also gilt punktweise  $L(x, D)u(x) = S(x)$ .



**Definition 20.8**

Sei  $L(D) = \sum_{\alpha} a_{\alpha} \cdot D^{\alpha}$  ein linearer Differentialoperator mit konstanten Koeffizienten  $a_{\alpha}$ . Unter einer **Grund-** oder **Fundamentallösung** von  $L(D)$  versteht man eine Distribution  $T \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)'$  mit  $L(D)T = \delta$ .

Manchmal definiert man etwas allgemeiner:  $T$  heißt Grundlösung an der Stelle  $a \in \mathbb{R}^n$  (oder mit der Polstelle  $a$ ), wenn  $L(D)T = \delta_a$  ist.

**Bemerkung**

Grundlösungen sind nicht eindeutig bestimmt, denn wenn  $u$  die Gleichung  $L(D)u = 0$  erfüllt, dann ist natürlich auch  $T + u$  eine Grundlösung.

**Satz 20.9** Bedeutung der Grundlösungen

Wenn  $T$  eine Grundlösung zu  $L(D)$  und  $S \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)'$  ist, sodass  $R = T * S$  existiert, dann ist dieses  $R$  eine Lösung der Differentialgleichung  $L(D)u = S$ .

**Beweis**

Aufgrund der Rechenregeln für Ableitungen der Faltung gilt:

$$L(D)R = L(D)(T * S) = [L(D)T] * S = \delta * S = S$$

■

**20.3.1 Beispiel für eine schwache Lösung**

Sei  $f \in C(\mathbb{R})$ , dann ist  $u(x, t) = 1/2 \cdot [f(x + at) - f(x - at)]$  auf dem gesamten  $\mathbb{R}^2$  eine schwache Lösung des folgenden Anfangswertproblems:

$$\begin{aligned} \text{Differentialgleichung:} \quad & \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ \text{Anfangsbedingungen:} \quad & u(x, 0) = f(x) \\ & \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0 \end{aligned}$$

Beachte:  $f$  (und somit  $u$ ) ist im Allgemeinen nur stetig, nicht differenzierbar. Somit kann  $u$  keine starke Lösung sein.

**Beweis**

O.E.d.A. ist  $a = 1$ , also  $Lu = u_{xx} - u_{tt}$  und  $L = L^*$ . Sei  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$  beliebig fest, und  $r$  so, dass

$$\text{supp } \varphi \subset Q_1 = (-r, r) \times (-r, r).$$

Wir führen sogenannte charakteristische Koordinaten  $\xi$  und  $\eta$  ein. Die Koordinatentransformation ist:

$$h: \mathbb{R}_{\xi, \eta}^2 \rightarrow \mathbb{R}_{x, t}^2 \quad \text{mit} \quad h(\xi, \eta) = \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix} := \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} \xi + \eta \\ \xi - \eta \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad \begin{cases} \xi = x + t \\ \eta = x - t \end{cases}$$

Für die Transformation  $h$  gilt  $|\det h'| = 1/2$ . Es ist nun  $u(\xi, \eta) = 1/2 \cdot [f(\xi) + f(\eta)]$ . Man erhält:

$$h^{-1}(Q_1) \subset Q_2 = (-2r, 2r) \times (-2r, 2r)$$

Die Verkettung  $\psi := \varphi \circ h$  ist unendlich oft differenzierbar und  $\text{supp } \varphi \subset Q_2$ . Es gilt:

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \frac{\partial}{\partial \eta} \psi = \frac{1}{4} (L\phi) \circ h$$

Zum Beweis verwendet man die Kettenregel:

$$\begin{aligned}\psi(\xi, \eta) &= \varphi\left(\frac{1}{2} \cdot (\xi + \eta), \frac{1}{2} \cdot (\xi - \eta)\right) \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \psi &= \frac{\partial \varphi}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial \varphi}{\partial t} \cdot \frac{\partial t}{\partial \eta} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial t} \\ \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{\partial}{\partial \eta} \psi &= \frac{1}{4} \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{1}{4} \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial t} - \frac{1}{4} \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t \partial x} - \frac{1}{4} \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \\ \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{\partial}{\partial \eta} \psi &= \frac{1}{4} (L\phi) \circ h\end{aligned}$$

Jetzt wird die Gleichung für den Nachweis schwacher Lösungen gezeigt: Beachte  $L = L^*$ .

$$(Lu)(\varphi) = \int_{\mathbb{R}^2} Lu \cdot \varphi \, dx dt = \int_{\mathbb{R}^2} u \cdot L\varphi \, dx dt$$

Nach der Transformationsformel für Integralanwendungen gilt:

$$\begin{aligned}(Lu)(\varphi) &= \int_{Q_2} [f(\xi) + f(\eta)] \cdot \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} \psi(\xi, \eta) \, d\xi d\eta \\ (Lu)(\varphi) &= \int_{-2r}^{2r} f(\xi) \cdot \left[ \int_{-2r}^{2r} \frac{\partial^2}{\partial \psi} \xi \partial \eta \, d\eta \right] d\xi + \int_{-2r}^{2r} f(\eta) \cdot \left[ \int_{-2r}^{2r} \frac{\partial^2}{\partial \psi} \xi \partial \eta \, d\xi \right] d\eta\end{aligned}$$

Die Klammerausdrücke verschwinden, da die Stammfunktionen  $\frac{\partial \psi}{\partial \eta}$  und  $\frac{\partial \psi}{\partial \xi}$  auf den Integrationsgrenzen verschwinden, denn ihr abgeschlossener Träger liegt zwischen den Grenzen der offenen Menge  $Q_2$ . ■

## Wichtige Grundlösungen

**Satz 20.10** Satz von Malgrange-Ehrenpreis

Jeder lineare Differentialoperator  $L(D)$  mit konstanten Koeffizienten besitzt eine **Grundlösung**, also eine Distribution  $T \in \mathcal{D}'$  mit  $L(D)T = \delta$ .

Wir betrachten im  $\mathbb{R}$  den gewöhnlichen Differentialoperator:

$$L = L\left(D = \frac{d}{dx}\right) = \sum_{k=0}^m a_k \cdot \frac{\partial^k}{\partial x^k}$$

mit  $a_k \in \mathbb{R}$  und  $a_m = 1$ .

**Satz 20.11**

Man erhält eine Grundlösung für  $L$ , indem man zuerst das Anfangswertproblem

$$Lu = 0 \quad \text{mit} \quad u(0) = \dots = u^{(m-2)}(0) = 0 \quad \text{und} \quad u^{(m-1)}(0) = 1$$

löst. Dann ist  $T = T_f$  eine Grundlösung, wenn  $f$  gegeben ist durch

$$f(x) = u(x) \cdot \Theta(x) = \begin{cases} u(x) & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

**Beweis**

Aus der Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen folgt  $u \in C^\infty(\mathbb{R})$ . Es ist  $T_f = u \cdot T_\Theta$ , denn:

$$T_f(\varphi) = \int_{\mathbb{R}} f(x) \cdot \varphi(x) \, dx = \int_{\mathbb{R}} u(x) \cdot \Theta(x) \cdot \varphi(x) \, dx = T_\Theta(u \cdot \varphi) = u \cdot T_\Theta(\varphi)$$

Wir wissen, dass  $T'_\Theta = \delta$  ist. Außerdem ist (im distributionellen Sinne)  $u \cdot \delta = u(0) \cdot \delta$ , denn:

$$(u \cdot \delta)(\varphi) = \delta(u \cdot \varphi) = u(0) \cdot \varphi(0) = u(0) \cdot \delta(\varphi)$$

Jetzt müssen (im distributionellen Sinne) die Ableitungen von  $T_f$  bis zur  $m$ . Ordnung bestimmt werden. Unter Beachtung der Leibnizschen Produktregel (siehe Ableitung von Distributionen) gilt:

$$T'_f = (u \cdot T_0)' = u' \cdot T_0 + u \cdot T'_0 = u' \cdot T_0 + u \cdot \delta = u' \cdot T_0 + \underbrace{u(0)}_{=0} \cdot \delta = u' \cdot T_0$$

Für weitere Ableitungen folgt unter Beachtung der Anfangswertaufgabe analog:

$$\begin{aligned} T_f^{(k)} &= u^{(k)} \cdot T_0 \quad \text{für } k = 1, \dots, m-1 \\ T_f^{(m)} &= u^{(m)} \cdot T_0 + \delta \end{aligned}$$

Beachte nun  $Lu = 0$  und  $a_m = 1$ :

$$LT_f = {}^L u \cdot T_\Theta + \delta = \delta$$

■

Bei den partiellen Differentialoperatoren sollen (ohne Beweis) Grundlösungen für die wichtigsten Operatoren angegeben werden.

1. Der **Laplace-Operator**  $\Delta_n u = \delta$  hat im  $\mathbb{R}^n$  die Grundlösung  $T_n$  mit

$$T_2(x) = \frac{1}{2} \cdot \log \|x\| \quad T_3(x) = -\frac{1}{4\pi \cdot \|x\|} \quad T_n(x) = -\frac{1}{(n-2) \cdot \sigma_n \cdot \|x\|^{n-2}} \quad \text{für } n \geq 3$$

Hierbei ist  $\|x\|$  die euklidische Norm und  $\sigma_n$  der Flächeninhalt der Einheitskugel im jeweiligen  $\mathbb{R}^n$ . Der Beweis erfolgt die Berechnung uneigentlicher Integrale (aufgrund der Singularitäten von  $T_n$  als Funktion an  $x = 0$ ).

2. Der **Wärmeleitungsoperator**  $(\partial/\partial t - a^2 \cdot \Delta_n)u = \delta$  hat die Fundamentallösung  $T = T_f$  mit

$$f(x, t) = \frac{\Theta(t)}{(2a \cdot \sqrt{\pi \cdot t})^n} \cdot e^{-\frac{\|x\|^2}{4a^2 \cdot t}}$$

3. Beim **Wellenoperator**  $(\partial^2/\partial t^2 - a^2 \cdot \Delta_n)u = \delta$  sind die ersten Grundlösungen:

$$T_1(x, t) = \frac{1}{2} \cdot \Theta(at - |x|) \quad T_2(x, t) = \frac{\Theta(at - \|x\|)}{2\pi a \cdot \sqrt{a^2 t^2 - \|x\|^2}} \quad T_3(x, t) = \frac{\Theta(t)}{2\pi a} \cdot \delta(a^2 t^2 - \|x\|^2)$$

Es ist  $S_{at} = \{x : \|x\|^2 = a^2 t^2\}$ . Dann soll  $\delta(a^2 t^2 - \|x\|^2) = \delta_{S_{at}}$  sein und so wirken: Wenn  $\varphi$  gegeben ist mit  $\text{supp } \varphi \cap S_{at} = \emptyset$ , dann ist  $(\delta_{S_{at}}, \varphi) = 0$ . Ansonsten ist  $(\delta_{S_{at}}, \varphi) = \int_{S_{at}} \varphi \, dS$ , wobei  $dS$  das Flächenelement von  $S_{at}$  ist.

## 20.4 Bemerkungen zur Fouriertransformation

Die Räume  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$  sind in gewisser Hinsicht für die Fouriertransformation ungeeignet. Zur Erinnerung: Ist  $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n)$  ein Multiindex, so ist für  $x = (x_1, \dots, x_n)$  definiert:

$$x^\beta = x_1^{\beta_1} \cdots x_n^{\beta_n}$$

### Definition und Satz 20.12

Seien  $\alpha, \beta$  beliebige Multiindizes. Der **Schwartzraum**  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  ist der folgende Vektorraum:

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) := \left\{ f \in C^\infty(\mathbb{R}^n) : \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^\beta \cdot D^\alpha f(x)| < \infty \forall \alpha, \beta \right\} \quad (20.5)$$

Die Elemente von  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  heißen **schnell fallende Funktionen**.

Zu beweisen ist, dass  $\mathcal{S}$  ein Vektorraum ist.

### Beispiel 20.8 Einige schnell fallende Funktionen

1.  $C_c^\infty(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  (Zum Beweis muss man zeigen, dass stetige Funktionen auf kompakten Mengen beschränkt sind.)
2.  $e^{-\|x\|^2} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  – Zudem ist für ein Polynom  $p$  von  $x = (x_1, \dots, x_n)$  die Funktion  $e^{-\|x\|^2} \cdot p(x) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ .

Für Anwendungen ist es nützlich, äquivalente Charakterisierungen von  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  zu haben. Es gilt:

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) = \left\{ f \in C^\infty(\mathbb{R}^n) : \|f\|_k := \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \max_{|\alpha| \leq k} \left(1 + \|x\|^2\right)^k \cdot |D^\alpha f(x)| < \infty \forall k \in \mathbb{N}_0 \right\} \quad (20.6)$$

Die  $\|\cdot\|_k$  sind Normen auf  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ . In diesem Raum werden also abzählbar viele Normen betrachtet. Die Charakterisierung (20.6) führt zu einem Kriterium für die Zugehörigkeit von  $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$  zu  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ :

$$\forall \beta, m \in \mathbb{N} : \exists C > 0 : |D^\beta f(x)| \leq \frac{C}{(1 + \|x\|^2)^m} \quad (*)$$

**Beweis** der Äquivalenz von (\*) und der Bedingung in (20.6)

Aus (\*) folgt relativ einfach (20.6). Gelte umgekehrt (20.6).  $\beta$  mit  $|\beta| = \beta_1 + \dots + \beta_n =: l$  und  $m$  seien gegeben. (Wir betrachten  $l < m$ , der andere Fall verläuft analog.) Nach (20.6) gilt für  $k = m$ :

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^n} \max_{|\alpha| \leq m} \left(1 + \|x\|^2\right)^m \cdot |D^\alpha f(x)| =: C < \infty$$

Insbesondere gilt für alle  $x \in \mathbb{R}^n$  und obiges  $\beta$ :

$$\left(1 + \|x\|^2\right)^m \cdot |D^\beta f(x)| \leq C$$

■

Entsprechend beider Charakterisierungen des Raumes wird die Konvergenz in  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  wie folgt erklärt:

$$f_n \xrightarrow{\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)} f \Leftrightarrow x^\beta \cdot D^\alpha f_n(x) \xrightarrow[\text{gleichmäßig}]{\mathbb{R}^n} x^\beta \cdot D^\alpha f(x) \quad \forall \alpha, \beta$$

Das ist genau dann der Fall, wenn  $\|f_n - f\|_k \rightarrow 0$  für alle  $k \in \mathbb{N}_0$  konvergiert. Die folgenden Operationen sind in  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  stetig:

1. die Ableitung ( $f \mapsto D^\alpha f$  für beliebiges  $\alpha$ ) – Das heißt, dass, wenn  $f_n$  gegen  $f$  konvergiert, dann auch  $D^\alpha f_n \rightarrow D^\alpha f$  (beides in  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ ). Dafür muss man zeigen, dass für alle  $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  auch  $D^\alpha g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  liegt.
2. die Multiplikation mit einem beliebigen Polynom  $p$  von  $x$  ( $f \mapsto p \cdot f$ )

Ein wichtiger Unterschied zwischen  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$  und  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  liegt in der Multiplikation mit Funktionen. Während man ein  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$  mit einer beliebigen Funktion  $g \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$  multiplizieren kann, ohne  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$  zu verlassen, gilt das für  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  nicht mehr unbedingt. Zum Beispiel kann man mit  $\exp(\|x\|^2)$  im Allgemeinen nicht multiplizieren, ohne  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  zu verlassen. (Es gibt auch Ausnahmen, etwa ist  $\exp(-\|x\|^2) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  und  $\exp(\|x\|^2) \cdot \exp(-\|x\|^2) = 1 \notin \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ .)

Mit welchen Funktionen kann man immer multiplizieren? Sei der Raum der **polynombeschränkten Funktionen** definiert durch

$$\mathcal{O}_M(\mathbb{R}^n) = \left\{ f \in C^\infty(\mathbb{R}^n) : \forall \beta \exists m \in \mathbb{N}, C > 0 : \left| D^\beta \cdot f(x) \right| \leq C \cdot (1 + \|x\|^2)^m \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \right\}$$

Ein typisches Beispiel für ein  $f \in \mathcal{O}_M(\mathbb{R}^n)$  ist (für  $p \in \mathbb{R}^n$  und ein beliebiges Polynom  $q$ )

$$f(x) = e^{i \cdot \langle p, x \rangle} \cdot q(x)$$

$\mathcal{O}_M(\mathbb{R}^n)$  ist ein Vektorraum und heißt **Raum der Multiplikatoren** für  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ . Zur Rechtfertigung dieses Begriffes muss man zeigen, dass  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  in  $\mathcal{O}_M(\mathbb{R}^n)$  enthalten ist und für  $g \in \mathcal{O}_M(\mathbb{R}^n)$  und  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  das Produkt  $g \cdot f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  liegt.

Das folgende Lemma benötigen wir bei der Fouriertransformation:

### Lemma 20.13

Sei  $j \in \{1, \dots, m\}$  (und  $D_j = \partial/\partial x_j$ ).

1. Für  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  ist  $\int_{\mathbb{R}^n} D_j f(x) \, dx = 0$ .
2. Für  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  und  $g \in \mathcal{O}_M(\mathbb{R}^n)$  gilt:

$$\int_{\mathbb{R}^n} [D_j f(x)] \cdot g(x) \, dx = - \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \cdot [D_j g(x)] \, dx$$

### Beweis

Den Beweis zu Teil 1 schreiben wir (in Bezug auf uneigentliche Integrale) etwas verkürzt und betrachten der Einfachheit halber nur (o.E.d.A.)  $n = 2$  und  $j = 1$ .

$$\int_{\mathbb{R}^2} D_1 f(x) \, dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R \left[ \int_{-R}^R D_1 (f(x_1, x_2)) \, dx_1 \right] dx_2 = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R [f(R, x_2) - f(-R, x_2)] \, dx_2$$

Benutze die Charakterisierung (\*) der Funktionen aus  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$  für den Spezialfall  $\beta = (0, \dots, 0)$  (das ist ein Standardtrick) und  $m = 2$ . Es existiert ein  $C > 0$  mit

$$|f(\pm R, x_2)| \leq \frac{C}{(1 + R^2 + x_2^2)^2} \leq \frac{1}{R^2} \cdot \frac{C}{1 + x_2^2} \quad \Rightarrow \quad \left| \int_{-R}^R [f(R, x_2) - f(-R, x_2)] \, dx_2 \right| \leq \frac{2C}{R^2} \cdot \int_{-R}^R \frac{dx_2}{1 + x_2^2}$$

Da das Integral konvergiert, folgt für  $R \rightarrow \infty$ :

$$\left| \int_{\mathbb{R}^2} D_1 f(x) \, dx \right| \leq \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{2C}{R^2} \cdot \int_{-R}^R \frac{dx_2}{1 + x_2^2} = 0$$



Die zweite Aussage folgt aus der damit bewiesenen ersten, denn natürlich sind  $f \cdot g$ ,  $(D_j f) \cdot g$ ,  $f \cdot (D_j g)$  und  $D_j(f \cdot g)$  alle aus  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ . Mit der Produktregel gilt:

$$0 = \int_{\mathbb{R}^n} D_j(f \cdot g)(x) \, dx = \int_{\mathbb{R}^n} (D_j f)(x) \cdot g(x) \, dx + \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \cdot (D_j g)(x) \, dx$$

### Definition 20.14

Die auf  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  stetigen linearen Funktionale  $T$  heißen **temperierte Distributionen**. Der Raum dieser temperierten Distributionen wird mit  $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$  bezeichnet.

### Satz 20.15

Ein lineares Funktional  $T$  ist genau dann stetig auf  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ , wenn es ein  $k \in \mathbb{N}_0$  und ein  $C > 0$  gibt, sodass für alle  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  gilt:

$$|T(f)| \leq C \cdot \|f\|_k$$

#### Bemerkung

1. Stetigkeit heißt wieder: Wenn  $f_n \rightarrow f$  in  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ , dann konvergiert  $T(f_n) \rightarrow T(f)$  in  $\mathbb{C}$ .
2. Für jedes  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  kann man wieder die Distribution  $T_f$  mit

$$T_f(\varphi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \cdot \varphi(x) \, dx$$

betrachten. Das liefert nicht nur ein stetiges Funktional auf  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ , sondern auch auf  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ . (Das sind zwei Aussagen:  $T_f(\varphi)$  ist endlich für alle  $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  und  $T_f$  ist auf  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  stetig.) Man kann also wieder  $\mathcal{S}$  in  $\mathcal{S}'$  einbetten. In diesem Sinne gilt:

$$\mathcal{D} \subsetneq \mathcal{S} \subsetneq \mathcal{S}' \subsetneq \mathcal{D}'$$

3. Auch für jede Distribution  $T \in \mathcal{S}'$  kann man wieder die schwache Ableitung  $D^\alpha T$  bilden. Das ist nicht verwunderlich, weil ja auch  $T \in \mathcal{D}'$  liegt. Die Ableitung  $D^\alpha T$  liegt aber nicht nur in  $\mathcal{D}'$ , sondern auch (wie zu erwarten) in  $\mathcal{S}'$ .

### Beispiel 20.9

Die Delta-Distribution liegt in  $\mathcal{S}'$ , denn:

$$|\delta(f)| = |f(0)| \leq \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |f(x)| = \|f\|_0$$

Warum benötigt man neben  $\mathcal{D}'$  auch noch  $\mathcal{S}'$ ? Oder umgekehrt: Warum arbeitet man nicht nur mit dem „bequemerem“ Raum  $\mathcal{S}'$ ?

- Die jetzt zu definierende Fouriertransformation ist für  $\mathcal{S}$  bzw.  $\mathcal{S}'$  am besten zu definieren.
- $\mathcal{S}'$  reicht aber zur Behandlung von Differentialoperatoren nicht aus, weil manche Grundlösungen nur in  $\mathcal{D}'$  liegen.

**Definition 20.16**

Sei  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ . Unter der **Fouriertransformierten**  $F(f)$  bzw.  $\hat{f}$  versteht man folgende Funktion:

$$F(f)(p) \equiv \hat{f}(p) := \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \cdot \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \cdot e^{-i \cdot \langle p, x \rangle} dx \quad (20.7)$$

Unter der **inversen Fouriertransformierten**  $F^{-1}(f)$  bzw.  $\check{f}$  versteht man folgende Funktion:

$$F^{-1}(f)(x) \equiv \check{f}(x) := \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \cdot \int_{\mathbb{R}^n} f(p) \cdot e^{i \cdot \langle p, x \rangle} dp \quad (20.8)$$

**Bemerkung**

1. Der Faktor  $(2\pi)^{-n/2}$  ist bewusst aus Symmetriegründen so gewählt (anders als manchen Büchern).
2. Man muss sich noch davon überzeugen, dass die Integrale in (20.7) und (20.8) überhaupt existieren:

$$\begin{aligned} |\hat{f}(p)| &\leq \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \cdot \int_{\mathbb{R}^n} \underbrace{|e^{-i \cdot \langle p, x \rangle}|}_{=1} \cdot |f(x)| dx = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \cdot \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(1+\|x\|^2)^k} \cdot \underbrace{\left(1+\|x\|^2\right)^k \cdot |f(x)|}_{\leq C \quad [f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)]} dx \\ &\leq \frac{C}{(2\pi)^{n/2}} \cdot \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(1+\|x\|^2)^k} dx < \infty \end{aligned}$$

$\hat{f}$  existiert, da das letzte Integral konvergent ist. (Analog für  $\check{f}$ .)

3. Der Begriff „inverse Transformierte“ muss gerechtfertigt werden: Man muss zeigen, dass  $F^{-1}(F(f)) = F(F^{-1}(f)) = f$  ist. (Dies beinhaltet, dass  $F$  und  $F^{-1}$  von  $\mathcal{S}$  in sich abbilden (und mehr: die Abbildung ist sogar eineindeutig).

**Satz 20.17** Eigenschaften der Fouriertransformation

1.  $\hat{f}, \check{f} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  ( $\mathcal{S}$  wird in sich abgebildet)

2. Es gilt:

$$\begin{aligned} F(D_x^\alpha (x^\beta \cdot f))(p) &= i^{|\alpha|} \cdot i^{|\beta|} \cdot p^\alpha \cdot D_p^\beta F(f)(p) \\ F^{-1}(D_p^\alpha (p^\beta \cdot f))(x) &= (-i)^{|\alpha|} \cdot (-i)^{|\beta|} \cdot x^\alpha \cdot D_x^\beta F^{-1}(f)(x) \end{aligned} \quad (20.9)$$

Hierbei deuten die unteren Indizes von  $D_x$  und  $D_p$  die Ableitungsvariable an. Insbesondere ist:

$$\begin{aligned} F(x^\beta \cdot f)(p) &= i^{|\beta|} \cdot D_p^\beta F(f)(p) \\ F(D_x^\alpha f)(p) &= i^{|\alpha|} \cdot p^\alpha \cdot F(f)(p) \end{aligned} \quad (20.10)$$

Das heißt grob: Die Fouriertransformation überführt die Ableitung in die Multiplikation mit der Variable und umgekehrt.

**Beweis**

Es soll der Beweis nur angedeutet werden. Der wichtige Punkt ist, dass man die Ableitung in das Integral der Fouriertransformation hineinziehen kann. Zuerst muss man das uneigentliche Integral als  $\int_{K_r}$  mit  $r \rightarrow \infty$  schreiben. ( $K_r$  ist eine Kugel mit dem Radius  $r$ .) Das Integral darf man dann ableiten, und macht den Grenzübergang zum Schluss.

Der Übersichtlichkeit halber zeigen wir nur die Spezialfälle (20.10), aus diesen ergibt sich die erste Formel in (20.9) (die andere folgt analog).

$$\begin{aligned} [D_p^\beta F(f)](p) &= D_p^\beta \left[ \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \cdot \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \cdot e^{-i \cdot \langle x, p \rangle} dx \right] = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \cdot \int_{\mathbb{R}^n} D_p^\beta [f(x) \cdot e^{-i \cdot \langle x, p \rangle}] dx \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \cdot (-i)^{|\beta|} \cdot \int_{\mathbb{R}^n} x^\beta \cdot f(x) \cdot e^{-i \cdot \langle x, p \rangle} dx = (-i)^{|\beta|} \cdot F(x^\beta \cdot f)(p) \end{aligned}$$

Die zweite Formel beweist man durch mehrfache Anwendung von Lemma 20.13. Beachte, dass die Funktion  $x^\gamma \cdot e^{-i\langle x, p \rangle}$  für alle  $\gamma$  in  $\mathcal{O}_M$  liegt.

$$\begin{aligned} F(D_x^\alpha f)(p) &= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \cdot \int_{\mathbb{R}^n} (D_x^\alpha f)(x) \cdot e^{-i\langle x, p \rangle} dx = \frac{(-1)^{|\alpha|}}{(2\pi)^{n/2}} \cdot \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \cdot D_x^\alpha e^{-i\langle x, p \rangle} dx \\ &= \frac{(-1)^{|\alpha|} \cdot (-i)^{|\alpha|}}{(2\pi)^{n/2}} \cdot p^\alpha \cdot \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \cdot e^{-i\langle x, p \rangle} dx = i^{|\alpha|} \cdot p^\alpha \cdot F(f)(p) \end{aligned}$$

Nun können wir den ersten Teil des Satzes beweisen. Dass  $\hat{f}$  und  $\check{f}$  beliebig oft differenzierbar sind, ist einfach zu zeigen. Es fehlt noch die typische Schwartzraum-Eigenschaft. Mit (20.9) ist:

$$\left| p^\alpha \cdot D_p^\beta \hat{f}(p) \right| = \left| (-i)^{|\alpha|} \cdot (-i)^{|\beta|} \cdot F(D_x^\alpha (x^\beta \cdot f))(p) \right| \leq \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \cdot \int_{\mathbb{R}^n} \underbrace{\left| e^{-i\langle x, p \rangle} \right|}_{=1} \cdot \left| D_x^\alpha (x^\beta \cdot f(x)) \right| dx < \infty$$

Denn  $f$  und somit auch  $D_x^\alpha (x^\beta \cdot f)$  ist aus  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ , und für jedes  $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  ist  $\int_{\mathbb{R}^n} |g(x)| dx < \infty$ . Wenn für alle  $p \in \mathbb{R}^n$  gilt:  $\left| p^\alpha \cdot D_p^\beta \hat{f}(p) \right| < \infty$ , gilt das auch für das Supremum dieser Beträge. Damit ist  $\hat{f} \in \mathcal{S}$ . (Analog für  $\check{f}$ .)

■

Das Ziel ist nun, zu zeigen, dass  $F$  und  $F^{-1}$  tatsächlich zueinander invers sind. Den Beweis machen wir nur für  $n = 1$  und es soll uns genügen, die Beweisschritte nachzuvollziehen.

### Lemma 20.18

1. Für  $j(x) = \exp(-x^2/2)$  gilt  $F(j) = F^{-1}(j) = j$ .
2. Für  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$  und  $\varepsilon > 0$  seien  $f_\varepsilon$  und  $f^\varepsilon$  gegeben durch:

$$f_\varepsilon(x) := \frac{1}{\varepsilon} \cdot f\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \quad \text{und} \quad f^\varepsilon(x) := f(\varepsilon \cdot x)$$

Dann gilt  $F(f^\varepsilon) = F(f)_\varepsilon$  und  $F^{-1}(f_\varepsilon) = F^{-1}(f)^\varepsilon$ .

3. Für  $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$  gilt:

$$\begin{aligned} F(g \cdot F^{-1}(f)) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{\mathbb{R}} F(g)(x-p) \cdot f(p) dp \\ F^{-1}(g \cdot F(f)) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{\mathbb{R}} F^{-1}(g)(x-p) \cdot f(p) dp \end{aligned}$$

### Beweis

1. Folgende (häufig nützliche) Idee führt schnell zum Ziel. Es gilt:  $j'(x) = -x \cdot j(x)$  und  $j(0) = 1$ . Andererseits folgt aus Satz 20.17:

$$F(j')(p) = ip \cdot F(j)(p) \quad \text{und} \quad F(x \cdot j)(p) = i \cdot [F(j)'](p)$$

Daraus folgt durch Umstellen:

$$[F(j)'](p) = -p \cdot F(j)(p) \quad \text{sowie} \quad F(j)(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2/2} dx = 1$$

Das heißt, sowohl  $j$  als auch  $F(j)$  lösen das Anfangswertproblem  $g'(y) = -y \cdot g(y)$  mit  $y(0) = 1$ . Die Lösung dieses Problems ist eindeutig, somit ist  $j = F(j)$ .

2. Man zeigt zuerst, dass  $f_\varepsilon$  und  $f^\varepsilon$  in  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$  liegen, danach die eigentlichen Relationen mit einfacher Variablentransformation.
3. Diese Formeln folgen durch Vertauschung der Integrationsreihenfolgen, etwa:

$$\begin{aligned} F(g \cdot F^{-1}(f))(x) &= \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{\mathbb{R}} e^{-ixy} \cdot g(y) \cdot \left[ \int_{\mathbb{R}} e^{ipy} \cdot f(p) \, dp \right] dy \\ &= \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{\mathbb{R}} f(p) \cdot \left[ \int_{\mathbb{R}} e^{-i \cdot (x-p) \cdot y} \cdot g(y) \, dy \right] dp \end{aligned}$$

■

### Satz 20.19 Fourier-Umkehrformel

Die Fouriertransformation ist eine eindeutige, in beiden Richtungen stetige Abbildung des Schwartzraumes  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  auf sich. Es gilt:

$$F \circ F^{-1} = F^{-1} \circ F = \text{id}|_{\mathcal{S}}$$

#### Beweis

Der Stetigkeitsbeweis ist eine Übungsaufgabe. Die Umkehrformel wird in zwei Schritten gezeigt:

- Für alle  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  und  $\varepsilon \rightarrow 0$  konvergiert  $F^{-1}(j^\varepsilon \cdot F(f))(x) \rightarrow F^{-1}(F(f))(x)$ .
- Für alle  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  und  $\varepsilon \rightarrow 0$  konvergiert  $F^{-1}(j^\varepsilon \cdot F(f))(x) \rightarrow f(x)$ .

Daraus folgt der erste Teil der Umkehrformel unmittelbar, der zweite ergibt sich analog.

■

### Satz 20.20

Für alle  $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  gilt:

1.  $f * g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  und  $f * g = g * f$
2.  $F(f \cdot g) = (2\pi)^{n/2} \cdot F(f) * F(g)$  und  $F(f * g) = (2\pi)^{n/2} \cdot F(f) \cdot F(g)$

Jetzt wird die Fouriertransformation auf die temperierten Distributionen übertragen.

### Definition 20.21

Sei  $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ . Dann ist die Fouriertransformation  $F(T) \equiv \hat{T}$  definiert durch

$$F(T)(f) = T(Ff) = T(\hat{f})$$

#### Bemerkung

Da  $F$  den  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  in sich abbildet, ist  $T(Ff)$  definiert. Die Stetigkeit von  $F(T)$  folgt aus der von  $F$ :

$$g_n \xrightarrow{\mathcal{S}} g \quad \Rightarrow \quad Fg_n \xrightarrow{\mathcal{S}} Fg \quad \Rightarrow \quad T(Fg_n) \xrightarrow{\mathbb{R}^n} T(Fg) \quad \Rightarrow \quad FT(g_n) \xrightarrow{\mathbb{R}^n} FT(g)$$

Somit ist  $F(T)$  wieder eine temperierte Distribution.

**Satz 20.22**

1. Die Fouriertransformation auf  $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$  ist eine eindeutige, lineare Abbildung von  $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$  auf  $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ . Sie ist die Fortsetzung der Fouriertransformation auf  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ .
2. Für die Fouriertransformation gilt

$$D^\alpha (F(T)) = (-i)^{|\alpha|} \cdot F(x^\alpha T) \quad \text{und} \quad F(D^\alpha T) = i^\alpha \cdot x^\alpha \cdot F(T)$$

3. Für die inverse Fouriertransformation gilt

$$D^\alpha (F^{-1}(T)) = i^{|\alpha|} \cdot F^{-1}(x^\alpha T) \quad \text{und} \quad F^{-1}(D^\alpha T) = (-i)^\alpha \cdot x^\alpha \cdot F^{-1}(T)$$

**Bemerkung**

Zum ersten Punkt: Was heißt „Fortsetzung“? Sei  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ . Dann ist  $T_f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ . Bilde  $Ff \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  und damit eine weitere Distribution  $T_{Ff} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ . Es ist  $T_{Ff} = F(T_f)$ . Das heißt, die Fouriertransformation wurde auf  $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$  so definiert, dass sie zur Transformation auf  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  kompatibel ist.

Zum zweiten und dritten Punkt: Es liegen auch  $D^\alpha T$  und  $x^\alpha \cdot T$  in  $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ . (Die Formeln folgen sofort aus den Eigenschaften der Fouriertransformation in  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ ).

**Beispiel 20.10**

## Fouriertransformation der Delta-Distribution

$$Ff = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \cdot \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \cdot e^{-i \cdot \langle p, x \rangle} dx \quad \Rightarrow \quad (F\delta)(f) = \delta(Ff) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \cdot \int_{\mathbb{R}^n} [f(x) \cdot 1] dx$$

Somit ist

$$F\delta = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \cdot 1$$

Genauer:  $F\delta$  ist die reguläre Distribution  $T_{(2\pi)^{-n/2}}$ , die von dieser konstanten Funktion erzeugt wird. Mit der inversen Fouriertransformation folgt umgekehrt:

$$F(T_1) = (2\pi)^{n/2} \cdot \delta$$

## Anwendung der Fouriertransformation auf die Lösungen von Differentialgleichungen

Sei ein Polynom  $P$  gegeben durch  $P(\xi) := \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha \cdot \xi^\alpha$  mit  $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$ . Dann ist  $P(D)$  mit  $P(D)u := \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha \cdot D^\alpha u$  ein auf  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  definierter Differentialoperator. Nach der Anwendung der Fouriertransformation erhält man (mithilfe von Satz 20.22):

$$F(P(D)u)(p) = P(ip) \cdot F(u)(p)$$

Hat man nun eine Differentialgleichung der Form

$$P(D)u = f \quad \text{mit} \quad f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n), \quad (20.11)$$

so geht man zur Lösung formal so vor:

$$F(P(D)u) = P(ip) \cdot F(u) = F(f) \quad \Rightarrow \quad F(u) = \frac{F(f)}{P(ip)} \xrightarrow{F^{-1}} u = F^{-1} \left( \frac{F(f)}{P(ip)} \right)$$

Hierbei muss  $F(f)/P(ip)$  so sein, dass  $F^{-1}$  anwendbar ist.

**Beispiel 20.11**

## Laplace-Operator

Sei  $c > 0$ ,  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ . Betrachte die Differentialgleichung

$$(-\Delta + c^2) \cdot u = f$$

Wende die Fouriertransformation an:

$$(p_1^2 + \dots + p_n^2 + c^2) \cdot \hat{u}(p) = \hat{f}(p) \quad \Rightarrow \quad u = F^{-1} \left( \frac{\hat{f}(p)}{p_1^2 + \dots + p_n^2 + c^2} \right)$$

Dies wollen wir nur für  $n = 1$  näher betrachten. Sei  $v(x) = \exp(-c \cdot |x|)/2c$ . Was ist  $\hat{v}(p)$ ?

$$\hat{v}(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{\mathbb{R}} e^{-ipx} \cdot \frac{1}{2c} \cdot e^{-c \cdot |x|} \, dx$$

Das  $\exp(-ipx)$  kann man in  $\cos(ipx) - i \cdot \sin(ipx)$  zerlegen. Das  $\sin \cdot \exp$  fällt aus Symmetriegründen weg:

$$\hat{v}(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{c^2 + p^2}$$

Für die Lösung der Differentialgleichung  $-(d^2/dx^2 + c^2)u = f$  erhält man also mit den obigen Bezeichnungen:

$$\hat{u}(p) = \sqrt{2\pi} \cdot \hat{f}(p) \cdot \hat{v}(p) = F(f * v)(p) \quad \Rightarrow \quad u(x) = (f * v)(x) = \frac{1}{2c} \cdot \int_{\mathbb{R}} f(y) \cdot e^{-c \cdot |x-y|} \, dy$$

**Ergänzungen zur Delta-Distribution**

Wir finden verschiedene Regeln für die Delta-Distribution. Was bedeuten diese?

1.  $\delta(x^2 - a^2) = \frac{1}{2|a|} \cdot [\delta(x - a) + \delta(x + a)]$  – Was ist im Allgemeinen  $\delta(f(x))$ ?
2.  $\int \delta(z - x) \cdot \delta(x - a) \, dx = \delta(z - a)$
3. Was ist  $\int_a^b \delta(x) \, dx$ ? (Das kann man über eine Fallunterscheidung formulieren.)

# 21 Hilberträume

## 21.1 Wiederholung: Metrische und normierte Räume

Sei  $M \neq \emptyset$ . Eine Abbildung  $d : M \times M \rightarrow \mathbb{R}$  heißt **Metrik** in  $M$ , wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

- Definitheit:  $d(x, y) \geq 0$  und  $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
- Symmetrie:  $d(x, y) = d(y, x)$
- Dreiecksungleichung:  $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$

Dann heißt  $(M, d)$  ein **metrischer Raum**. In einem metrischen Raum kann man die Konvergenz von Folgen definieren.

- Eine Folge  $(x_n)$  aus  $M$  **konvergiert** bezüglich dieser Metrik  $d$  gegen  $x \in M$  genau dann, wenn gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0(\varepsilon) : \forall n > n_0(\varepsilon) : d(x, x_n) < \varepsilon$$

Man schreibt  $x_n \rightarrow x$  oder  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ .

- Eine Folge  $(x_n)$  aus  $M$  heißt **Cauchyfolge**, wenn gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0(\varepsilon) : \forall m, n > n_0(\varepsilon) : d(x_m, x_n) < \varepsilon$$

Natürlich ist jede konvergente Folge eine Cauchyfolge.

- $(M, d)$  heißt **vollständig**, wenn jede Cauchyfolge konvergiert.

Eine Teilmenge  $A \subset (M, d)$  heißt **dicht** in  $M$ , wenn gilt:

$$\forall x \in M, \varepsilon > 0 \exists a(x, \varepsilon) \in A : d(x, a) < \varepsilon$$

Äquivalent dazu ist die Aussage: Zu jedem  $x \in M$  existiert eine Folge aus  $A$ , die gegen  $x$  konvergiert.

### Satz 21.1

Jeder metrische Raum  $(M, d)$  besitzt eine Vervollständigung  $(\widetilde{M}, \widetilde{d})$ , d.h.

1. Der Raum  $(\widetilde{M}, \widetilde{d})$  ist vollständig.
2. Es existiert eine eindeutige Abbildung  $j$  von  $M$  nach  $\widetilde{M}$ , für die  $j(M)$  in  $(\widetilde{M}, \widetilde{d})$  dicht liegt.
3. Die Abbildung  $j$  ist **isometrisch**, d.h. für alle  $x, y \in M$  gilt  $d(x, y) = \widetilde{d}(j(x), j(y))$ .

$(\widetilde{M}, \widetilde{d})$  ist bis auf Isometrie eindeutig bestimmt.

Im Folgenden werden wir Vektorräume und lineare Abbildungen darin betrachten. Sei  $V$  ein Vektorraum über  $\mathbb{C}$  oder  $\mathbb{R}$ . (Im Folgenden wird implizit immer  $\mathbb{C}$  gewählt.) Eine Abbildung  $\|\cdot\| : V \rightarrow \mathbb{R}$  heißt **Norm**, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

- positive Definitheit:  $\|x\| \geq 0$  und  $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
- Homogenität:  $\|\lambda \cdot x\| = |\lambda| \cdot \|x\| \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$
- Dreiecksungleichung:  $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

Jede Norm induziert eine Metrik durch  $d(x, y) := \|x - y\|$ , also kann man prinzipiell bei jeder Metrik fragen, ob sie durch eine Norm induziert ist. Man muss aber beachten, dass nicht jeder metrischer Raum ein Vektorraum ist.

Ein *vollständiger normierter* Raum heißt **Banachraum**. Aus den Eigenschaften der Norm folgt, dass die Vektorraumoperationen in  $V$  stetig sind, d.h. wenn  $\lambda_n \rightarrow \lambda$  in  $\mathbb{C}$  sowie  $x_n \rightarrow x$  und  $y_n \rightarrow y$  in  $V$  konvergieren, dann folgt:

- $\lambda_n \cdot x_n \rightarrow \lambda \cdot x$
- $x_n + y_n \rightarrow x + y$

Häufig wird die folgende Abschätzung benötigt (vgl. Eigenschaften des absoluten Betrages in  $\mathbb{R}$ ):

$$|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

Daraus folgt, dass aus der Konvergenz  $x_n \rightarrow x$  auch die von  $\|x_n\| \rightarrow \|x\|$  folgt.

## Folgenräume

1.  $l^\infty = \{x = (x_n) : x_n \in \mathbb{C}, \{x_n\} \text{ beschränkt, d.h. } \exists C : \forall n : |x_n| \leq C\}$

Eine Norm ist durch  $\|x\| = \|x\|_\infty := \sup_n |x_n|$  definiert. Der Raum  $l^\infty$  ist vollständig, also ein Banachraum. Die folgenden wichtigen Unterräume werden mit derselben Norm betrachtet.

2.  $\mathbf{c} = \{(x_n) : (x_n) \text{ ist konvergent}\}$
3.  $\mathbf{c}_0 = \{(x_n) : x_n \rightarrow 0\}$
4.  $\mathbf{d} = \{(x_n) : \exists n_0((x_n)) : \forall n > n_0 : x_n = 0\}$  (Vektorraum aller abbrechenden Folgen)

$\mathbf{c}$  und  $\mathbf{c}_0$  sind *abgeschlossene* Unterräume von  $l^\infty$ . Weil  $l^\infty$  vollständig ist, sind auch  $\mathbf{c}$  und  $\mathbf{c}_0$  vollständig.

5. die  $l^p$ -Räume mit  $1 \leq p < \infty$

$$l^p = \left\{ (x_n) : \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty \right\} \quad \text{mit} \quad \|x\|_p := \left( \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p \right)^{1/p}$$

Alle  $l^p$ -Räume sind Banach-Räume.

**Beweis** dass  $l^p$  ein Vektorraum ist

Sei  $\lambda \in \mathbb{C}$  und  $(x_n) \in l^p$ , dann ist offensichtlich auch  $(\lambda \cdot x_n) = \lambda \cdot (x_n) \in l^p$ . Schwieriger ist der Nachweis, dass für  $x = (x_n)$  und  $y = (y_n) \in l^p$  auch  $x + y = (x_n + y_n) \in l^p$  ist.

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} |x_n + y_n|^p &\leq \sum_{n=1}^{\infty} (|x_n| + |y_n|)^p \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} (2 \cdot \max\{|x_n|, |y_n|\})^p = 2^p \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \max\{|x_n|^p, |y_n|^p\} \\ &\leq 2^p \cdot \sum_{n=1}^{\infty} (|x_n|^p + |y_n|^p) \leq 2^p \cdot (\|x\|_p^p + \|y\|_p^p) < \infty \end{aligned}$$



Diese Abschätzung liefert *nicht* die Dreiecksungleichung.

Die Dreiecksungleichung für Folgen hat einen speziellen Namen, man nennt sie auch **Minkowski-Ungleichung**: Für  $x, y \in l^p, 1 \leq p < \infty$  gilt:  $\|x + y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p$ . Diese Ungleichung folgt aus einer weiteren wichtigen Ungleichung:

**Satz 21.2** Hölder-Ungleichung für Folgen

1. Für  $x \in l^1, y \in l^\infty$  ist  $x \cdot y := (x_n \cdot y_n) \in l^1$  und es gilt  $\|x \cdot y\|_1 \leq \|x\|_1 \cdot \|y\|_\infty$ .
2. Für  $1 < p < \infty$  und  $q := p/(p-1)$ , also  $1/p + 1/q = 1$  gilt: Wenn  $(x_n) \in l^p$  und  $(y_n) \in l^q$ , dann ist  $(x_n \cdot y_n) \in l^1$  mit  $\|x \cdot y\|_1 \leq \|x\|_p \cdot \|y\|_q$ .

**Beweis** der ersten Ungleichung unter Anwendung eines wichtigen Schlussprinzips

$$\sum_{k=1}^n |x_k \cdot y_k| \leq \sup_k |y_k| \cdot \sum_{k=1}^n |x_k| \leq \|y\|_\infty \cdot \sum_{k=1}^\infty |x_k| = \|y\|_\infty \cdot \|x\|_1$$

Die Folge  $(\sum_{k=1}^n |x_k \cdot y_k|)$  ist monoton wachsend und nach oben beschränkt, also konvergent. Für  $n \rightarrow \infty$  ergibt sich der Grenzwert  $\|x \cdot y\|_1 \leq \|x\|_1 \cdot \|y\|_\infty$ . ■

## Funktionenräume

1. Sei  $K \subset \mathbb{R}^n$  kompakt.  $C(K)$  ist der Raum aller stetigen komplexwertigen Funktionen auf  $K$ . Eine Norm ist definiert durch

$$\|f\| = \|f\|_\infty := \sup_{x \in K} |f(x)|$$

$C(K)$  ist ein Banachraum. Die Konvergenz bezüglich  $\|\cdot\|_\infty$  ist genau die gleichmäßige Konvergenz in  $K$ .

2. Sei  $I = [a, b]$  oder  $I = (a, b)$  oder  $I$  ein (offener) Würfel in  $\mathbb{R}^n$  oder eine andere Menge. Dann ist

$$L^p(I) = \left\{ f : I \rightarrow \mathbb{C} : \int_I |f(x)|^p dx < \infty \right\} \quad \text{mit} \quad \|f\|_p := \left( \int_I |f(x)|^p dx \right)^{1/p}$$

Diese Definition bereitet Probleme:

- a) Nimmt man in der Definition das Riemann-Integral, sind diese Räume uninteressant, weil sie nicht vollständig sind. Man benötigt das Lebesgue-Integral.
- b) Hat man  $L^p(I)$  mit dem Lebesgue-Maß eingeführt, sind die Elemente von  $L^p(I)$  nicht einzelne Funktionen, sondern Äquivalenzklassen von Funktionen, die sich nur auf einer Menge vom Lebesgue-Maß Null unterscheiden.

Unser Dilemma ist, dass  $L^2$  für die praktischen Anwendungen, insbesondere die Quantenmechanik, fundamental ist.

## 21.2 Hilberträume

### Definition 21.3

Sei  $V$  ein Vektorraum über  $\mathbb{C}$ . Unter einem **Skalarprodukt** auf  $V$  versteht man eine Abbildung  $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{C}$  mit den Eigenschaften (für alle  $\varphi, \psi, \chi \in V$  und  $c \in \mathbb{C}$ ):

1. Definitheit:  $\langle \varphi, \varphi \rangle \geq 0$  und  $\langle \varphi, \varphi \rangle = 0 \Leftrightarrow \varphi = 0$
2. Distributionsgesetz:  $\langle \varphi, \psi + \chi \rangle = \langle \varphi, \psi \rangle + \langle \varphi, \chi \rangle$
3. Linearität im zweiten Glied:  $\langle \varphi, c \cdot \psi \rangle = c \cdot \langle \varphi, \psi \rangle$
4. konjugierte Symmetrie:  $\langle \varphi, \psi \rangle = \overline{\langle \psi, \varphi \rangle}$

$(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  heißt **unitärer Raum**.

#### Bemerkung

Aus der dritten und der vierten Eigenschaft folgt die konjugierte Linearität im ersten Glied:

$$\langle c \cdot \varphi, \psi \rangle = \bar{c} \cdot \langle \varphi, \psi \rangle$$

Aus der zweiten und vierten Eigenschaft folgt, dass das Distributionsgesetz in beiden Gliedern gilt:

$$\langle \varphi + \psi, \chi \rangle = \langle \varphi, \chi \rangle + \langle \psi, \chi \rangle$$

Die dritte Eigenschaft steht im Einklang mit den Gepflogenheiten der Physik (in vielen Mathematikbüchern ist hingegen das erste Glied linear).

### Beispiel 21.1

#### Wichtige unitäre Räume

- Im  $\mathbb{C}^n$  mit  $x = (x_1, \dots, x_n)$  und  $y = (y_1, \dots, y_n)$  setzt man

$$\langle x, y \rangle := \sum_{k=1}^n \bar{x}_k \cdot y_k$$

- Im  $l^2$  mit den Elementen  $x = (x_k)$  und  $y = (y_k)$  definiert man

$$\langle x, y \rangle := \sum_{k=1}^{\infty} \bar{x}_k \cdot y_k$$

- Für  $C[a, b]$  ist ein Skalarprodukt zwischen  $f, g \in C[a, b]$  gegeben durch

$$\langle f, g \rangle := \int_a^b \bar{f}(x) \cdot g(x) \, dx$$

- Im  $L^2[a, b]$  wird das Skalarprodukt genauso definiert, nur nimmt man kein Riemann-, sondern ein Lebesgue-Integral.

#### Bemerkung

Wir werden in Kürze sehen, dass (wie in der linearen Algebra) durch  $\|\varphi\| := \langle \varphi, \varphi \rangle^{1/2}$  eine Norm im unitären Raum  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  definiert wird.

Das Ziel ist jetzt, eine Orthonormalbasis in unitären Räumen zu definieren.

**Definition 21.4**

Sei  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  ein unitärer Raum.

1.  $\varphi, \psi \in V$  heißen **orthogonal**, wenn  $\langle \varphi, \psi \rangle = 0$  ist.
2. Eine Familie von Elementen  $(\varphi_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{A}}$  aus  $V$  ( $\mathcal{A}$  ist eine beliebige Indexmenge) heißt **Orthogonalsystem**, wenn  $\langle \varphi_\alpha, \varphi_\beta \rangle = 0$  ist für alle  $\alpha, \beta \in \mathcal{A}$  mit  $\alpha \neq \beta$ .
3.  $(\varphi_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{A}}$  heißt **Orthonormalsystem**, wenn  $\langle \varphi_\alpha, \varphi_\beta \rangle = \delta_{\alpha\beta}$  ist.

## Bemerkung

Der Standardfall für uns wird sein, dass  $\mathcal{A}$  eine abzählbare Menge ist.

**Satz 21.5** Verallgemeiner Satz des Pythagoras

Sei  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  ein unitärer Raum und  $(\varphi_i)_{i=1}^N$  ein endliches Orthonormalsystem. Dann gilt für alle  $\varphi \in V$ :

$$\|\varphi\|^2 := \langle \varphi, \varphi \rangle = \sum_{i=1}^N |\langle \varphi_i, \varphi \rangle|^2 + \left\| \varphi - \sum_{i=1}^N \langle \varphi_i, \varphi \rangle \cdot \varphi_i \right\|^2 \quad (21.2)$$

**Beweis**

Trivialerweise gilt:

$$\varphi = \underbrace{\sum_{i=1}^N \langle \varphi_i, \varphi \rangle \cdot \varphi_i}_{=: \psi} + \underbrace{\left( \varphi - \sum_{i=1}^N \langle \varphi_i, \varphi \rangle \cdot \varphi_i \right)}_{=: \chi}$$

Wir zeigen, dass  $\langle \psi, \chi \rangle = 0$  ist. In den beiden Vektoren sollten unterschiedliche Summationsindizes verwendet werden.

$$\begin{aligned} & \left\langle \sum_{i=1}^N \langle \varphi_i, \varphi \rangle \cdot \varphi_i, \varphi - \sum_{j=1}^N \langle \varphi_j, \varphi \rangle \cdot \varphi_j \right\rangle \\ &= \left\langle \sum_{i=1}^N \langle \varphi_i, \varphi \rangle \cdot \varphi_i, \varphi \right\rangle - \left\langle \sum_{i=1}^N \langle \varphi_i, \varphi \rangle \cdot \varphi_i, \sum_{j=1}^N \langle \varphi_j, \varphi \rangle \cdot \varphi_j \right\rangle \\ &= \sum_{i=1}^N \overline{\langle \varphi_i, \varphi \rangle} \cdot \langle \varphi_i, \varphi \rangle - \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \overline{\langle \varphi_i, \varphi \rangle} \cdot \langle \varphi_j, \varphi \rangle \cdot \underbrace{\langle \varphi_i, \varphi_j \rangle}_{=\delta_{ij}} \\ &= \sum_{i=1}^N |\langle \varphi_i, \varphi \rangle|^2 - \sum_{i=1}^N |\langle \varphi_i, \varphi \rangle|^2 = 0 \end{aligned}$$

Jetzt können wir  $\langle \varphi, \varphi \rangle$  berechnen:

$$\begin{aligned} \langle \varphi, \varphi \rangle &= \langle \psi + \chi, \psi + \chi \rangle = \langle \psi, \psi \rangle + \underbrace{\langle \psi, \chi \rangle}_{=0} + \underbrace{\langle \chi, \psi \rangle}_{=0} + \langle \chi, \chi \rangle \\ &= \|\psi\|^2 + \|\chi\|^2 \\ \|\psi\|^2 &= \langle \psi, \psi \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^N \langle \varphi_i, \varphi \rangle \cdot \varphi_i, \sum_{j=1}^N \langle \varphi_j, \varphi \rangle \cdot \varphi_j \right\rangle = (\text{s.o.}) = \sum_{i=1}^N |\langle \varphi_i, \varphi \rangle|^2 \end{aligned}$$

Daraus folgt die Behauptung ohne weiteren Aufwand. ■

**Folgerung 21.6** Besselsche Ungleichung

Sei  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  ein unitärer Raum und  $(\varphi_i)_{i=1}^N$  ein Orthonormalsystem. Dann gilt für alle  $\varphi \in V$ :

$$\sum_{i=1}^N |\langle \varphi_i, \varphi \rangle|^2 \leq \|\varphi\|^2 \quad (*)$$

Insbesondere folgt für ein abzählbares Orthonormalsystem  $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ : Die in  $(*)$  links stehenden Partialsummen zur unendlichen Reihe  $\sum_{i=1}^{\infty} |\langle \varphi_i, \varphi \rangle|^2$  sind monoton wachsend und durch  $\|\varphi\|^2$  nach oben beschränkt, also konvergiert die Reihe und wir haben folgende Abschätzung

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\langle \varphi_i, \varphi \rangle|^2 \leq \|\varphi\|^2$$

**Folgerung 21.7** Cauchy-Schwarzsche Ungleichung

In jedem unitärem Raum  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  gilt:

$$|\langle \varphi, \psi \rangle| \leq \|\varphi\| \cdot \|\psi\| \quad (21.3)$$

**Beweis**

Für  $\psi = 0$  ist (21.3) trivialerweise richtig (beide Terme verschwinden). Sei nun  $\psi \neq 0$ , dann setze  $\varphi_1 := \psi / \|\psi\|$ . Es ist  $\|\varphi_1\| = 1$ , also ist  $(\varphi_1)$  ein einelementiges Orthonormalsystem. Es gilt mit der Besselschen Ungleichung für ein beliebiges  $\varphi \in V$  (beachte:  $N = 1$ ):

$$|\langle \varphi_1, \varphi \rangle|^2 = \left| \left\langle \frac{\psi}{\|\psi\|}, \varphi \right\rangle \right|^2 \leq \|\varphi\|^2 \Rightarrow |\langle \psi, \varphi \rangle|^2 \leq \|\varphi\|^2 \cdot \|\psi\|^2$$

■

Im  $l^2$  ergibt die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung gerade die Höldersche Ungleichung für  $p = q = 2$ :

$$|\langle x, y \rangle| = \left| \sum_{i=1}^{\infty} \bar{x}_i y_i \right| \leq \left( \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2 \right)^{1/2} \cdot \left( \sum_{i=1}^{\infty} |y_i|^2 \right)^{1/2}$$

**Folgerung 21.8**

Sei  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  ein unitärer Raum. Dann ist  $\|\varphi\| := (\langle \varphi, \varphi \rangle)^{1/2}$  eine Norm auf  $V$ .

**Bemerkung**

1. Die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung gilt auch für Semi-Skalarprodukte, d.h. bei der positiven Definitheit muss  $\langle \varphi, \varphi \rangle = 0$  nicht nur bei  $\varphi = 0$  sein.
2. Hat man ein Skalarprodukt, dann hat man eine daraus abgeleitete Norm  $\|\cdot\| = \langle \cdot, \cdot \rangle^{1/2}$  und damit eine Metrik. Alle Aussagen in diesem unitären Raum über Konvergenz, Stetigkeit und so weiter beziehen sich immer auf diese induzierte Norm bzw. Metrik.

**Definition 21.9**

Ein *vollständiger* unitärer Raum heißt **Hilbertraum**.

In diesem Skript werden Hilberträume immer mit kalligrafierten Buchstaben  $(\mathcal{H}, \mathcal{K}, \dots)$  dargestellt.

## Bemerkung

1. Wenn  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  ein unvollständiger unitärer Raum ist, dann kann man ihn zu einem Hilbertraum  $(\mathcal{H}, \langle \cdot, \cdot \rangle')$  vervollständigen.  $V$  liegt dann dicht in  $\mathcal{H}$ . Daher heißen unvollständige unitäre Räume auch **Prähilberträume**.
2. Im Folgenden betrachten wir nur sogenannte **separable Hilberträume**, das heißt solche, in denen eine *abzählbare*, dichte Menge  $\{\psi_i\}$  existiert.

Sei  $V$  ein Vektorraum und  $\|\cdot\|$  eine Norm in  $V$ . Wann ist  $\|\cdot\|$  durch ein Skalarprodukt gegeben?

**Satz 21.10**

Eine Norm in einem Vektorraum  $V$  ist genau dann durch ein Skalarprodukt gegeben, wenn die Norm die sogenannte **Parallelogrammidentität** erfüllt:

$$\|\varphi + \psi\|^2 + \|\varphi - \psi\|^2 = 2 \cdot (\|\varphi\|^2 + \|\psi\|^2) \quad \forall \varphi, \psi \in V \quad (21.4)$$

Wenn diese Gleichung gilt, dann wird das Skalarprodukt eindeutig durch die sogenannte **Polarisationsidentität** gegeben:

$$\langle \varphi, \psi \rangle := \frac{1}{4} \cdot (\|\varphi + \psi\|^2 - \|\varphi - \psi\|^2 + i \cdot \|\varphi - i \cdot \psi\|^2 - i \cdot \|\varphi + i \cdot \psi\|^2) \quad (21.5)$$

## Bemerkung

1. Achtung: Wenn das Skalarprodukt als im ersten Faktor linear definiert wurde, ändern sich die markierten Vorzeichen in (21.5).
2. Die Notwendigkeit der obigen Bedingung, das heißt, dass (21.5) gilt, wenn die Norm durch ein Skalarprodukt gegeben ist, ist einfach zu beweisen, aber mühsam nachzurechnen. Die Hinlänglichkeit, das heißt, dass in (21.5) wirklich ein Skalarprodukt steht, ist aufwändig.

Nun wollen wir einen gegebenen Vektor  $\varphi \in \mathcal{H}$  in eine Projektion auf einen gegebenen Unterraum und das zugehörige orthogonale Komplement zerlegen. Ein wichtiger Schritt dazu ist der folgende Satz.

**Satz 21.11**

Sei  $\mathcal{H}$  ein Hilbertraum,  $K \subset \mathcal{H}$  eine abgeschlossene und konvexe Menge und  $\varphi_0 \in \mathcal{H}$ . Dann existiert genau ein  $\psi_0 \in K$  mit

$$\|\varphi_0 - \psi_0\| = \text{dist}(\varphi_0, K) := \inf_{\psi \in K} \|\varphi_0 - \psi\| \leq \|\varphi_0 - \varrho\| \quad \forall \varrho \in K \quad (21.6)$$

Anschaulich bedeutet das, dass es genau einen Punkt  $\psi_0 \in K$  gibt, der „am dichtesten“ an  $\varphi_0$  liegt. Außerdem gilt:

$$\text{Re} \langle \psi, \varphi_0 - \psi_0 \rangle \leq \text{Re} \langle \psi_0, \varphi_0 - \psi_0 \rangle \quad \forall \psi \in K \quad (21.7)$$

## Bemerkung

1. Dass  $K$  konvex ist, heißt: Wenn  $\varphi, \psi \in K$  und  $t \in [0, 1]$ , dann ist  $t \cdot \varphi + (1 - t) \cdot \psi \in K$  (die gesamte Verbindungsstrecke zwischen  $\varphi$  und  $\psi$  liegt in  $K$ ).
2. Für den Satz benötigt man beide Voraussetzungen an  $K$ : Wäre  $K$  nicht abgeschlossen, so gäbe es den geforderten Punkt  $\psi_0$  nicht, da kein  $\|\varphi_0 - \psi\|$  das Infimum annehmen würde (mit anderen Worten: es gäbe kein Minimum). Wäre  $K$  nicht konvex, wäre die Eindeutigkeit verletzt (man stelle sich zum Beispiel eine kreisförmige, innen hohle Menge vor, in deren Mittelpunkt  $\varphi_0$  liegt).
3. Eine typische Anwendung wird sein, dass  $K$  ein abgeschlossener Unterraum von  $\mathcal{H}$  ist.

**Beweis**

Sei  $d = \text{dist}(\varphi_0, K) = \inf_{\psi \in K} \|\varphi_0 - \psi\|$ . Aus der Infimumsdefinition folgt, dass es eine Folge  $(\psi_n)$  aus  $K$  gibt mit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\varphi_0 - \psi_n\| = d$$

Aus der Parallelogrammidentität (21.4) werden wir jetzt folgern, dass  $(\varphi_n)$  eine Cauchyfolge ist. Setze  $\varphi := \varphi_0 - \psi_m$  und  $\psi := \varphi_0 - \psi_n$  in (21.4) ein. Es folgt:

$$2 \cdot \|\varphi_0 - \psi_m\|^2 + 2 \cdot \|\varphi_0 - \psi_n\|^2 = \|2 \cdot \varphi_0 - \psi_m - \psi_n\|^2 + \|\psi_n - \psi_m\|^2 \quad (*)$$

Da  $K$  konvex ist, liegt mit  $\psi_n$  und  $\psi_m$  auch  $(\psi_n + \psi_m)/2$  in  $K$ .

$$\|2 \cdot \varphi_0 - \psi_m - \psi_n\| = 2 \cdot \left\| \varphi_0 - \frac{\psi_m + \psi_n}{2} \right\| \geq 2d$$

Die letzte Abschätzung ist richtig wegen der Definition von  $d$ . Aus  $(*)$  folgt also:

$$\begin{aligned} \|\psi_n - \psi_m\|^2 &= 2 \cdot \|\varphi_0 - \psi_m\|^2 + 2 \cdot \|\varphi_0 - \psi_n\|^2 - 4 \cdot \left\| \varphi_0 - \frac{\psi_m + \psi_n}{2} \right\|^2 \quad (21.8) \\ &\leq \underbrace{2 \cdot \|\varphi_0 - \psi_m\|^2}_{\rightarrow d^2} + \underbrace{2 \cdot \|\varphi_0 - \psi_n\|^2}_{\rightarrow d^2} - 4 \cdot d^2 \rightarrow 0 \quad \text{für } m, n \rightarrow \infty \end{aligned}$$

Das heißt, dass  $(\psi_n)$  eine Cauchyfolge ist, daher existiert, da  $\mathcal{H}$  vollständig ist, ein  $\psi_0 \in \mathcal{H}$  mit  $\psi_n \rightarrow \psi_0$ . Da  $(\psi_n)$  in der abgeschlossenen Menge  $K$  liegt, ist auch  $\psi_0 \in K$ .  $\psi_0$  erfüllt (21.6), damit ist die Existenz des  $\psi_0$  gezeigt.

Es ist noch die Eindeutigkeit zu zeigen: Sei  $\psi'_0 \in K$  ein weiteres Element, das (21.6) erfüllt, das heißt:  $\|\varphi_0 - \psi_0\| = \|\varphi_0 - \psi'_0\| = d$ . Analog zu (21.8) mit  $\psi'_0$  anstelle von  $\psi_m$  und  $\psi_0$  anstelle von  $\psi_n$  folgt:

$$\begin{aligned} \|\psi_0 - \psi'_0\| &= 2 \cdot \|\varphi_0 - \psi_0\|^2 + 2 \cdot \|\varphi_0 - \psi'_0\|^2 - 4 \cdot \left\| \varphi_0 - \frac{\psi_0 + \psi'_0}{2} \right\|^2 \\ &\leq 2 \cdot d^2 + 2 \cdot d^2 - 4 \cdot d^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \psi_0 = \psi'_0 \end{aligned}$$

Jetzt wird (21.7) gezeigt. Für  $\psi \in K$ ,  $t \in [0, 1]$  gilt, weil  $K$  konvex ist:

$$\psi_0 + t \cdot (\psi - \psi_0) = (1 - t) \cdot \psi_0 + t \cdot \psi \in K$$

Benutze folgende Gleichung:

$$\|a - b\|^2 = \langle a - b, a - b \rangle = \langle a, a \rangle - \langle a, b \rangle - \langle b, a \rangle + \langle b, b \rangle = \|a\|^2 + \|b\|^2 - 2 \cdot \text{Re} \langle a, b \rangle$$

Dann folgt aus (21.6), weil der Abstand von  $\varphi_0$  zu  $\psi_0$  kleiner ist als zu irgendeinem anderen  $\psi \in K$ :

$$\begin{aligned} \|\varphi_0 - \psi_0\|^2 &\leq \|\varphi_0 - [\varphi_0 + t \cdot (\psi - \psi_0)]\|^2 \\ &= \|(\varphi_0 - \psi_0) - t \cdot (\psi - \psi_0)\|^2 \\ &= \|\varphi_0 - \psi_0\|^2 + t^2 \cdot \|\psi - \psi_0\|^2 + 2t \cdot \text{Re} \langle \psi - \psi_0, \varphi_0 - \psi_0 \rangle \\ &\Rightarrow t \cdot \|\psi - \psi_0\|^2 - 2 \cdot \text{Re} \langle \psi - \psi_0, \varphi_0 - \psi_0 \rangle \geq 0 \end{aligned}$$

Für  $t \rightarrow 0$  folgt (21.7) nach einfacher Umformung. ■

Wir benutzen folgende Bezeichnungen:  $\mathcal{H}$  sei ein Hilbertraum und  $M \subset \mathcal{H}$  sei nichtleer.

$$M^\perp := \{\varphi \in \mathcal{H} : \varphi \perp M\} = \{\varphi \in \mathcal{H} : \forall \psi \in M : \langle \varphi, \psi \rangle = 0\}$$

$M^\perp$  heißt **Orthogonalraum** oder **orthogonales Komplement** von  $M$ . Das orthogonale Komplement ist stets ein abgeschlossener Unterraum von  $\mathcal{H}$  (unabhängig von der Struktur von  $M$ ). Offenbar gilt:

$$M^\perp = \bigcap_{\psi \in M} \{\psi\}^\perp = \bigcap_{\psi \in M} \{\varphi \in \mathcal{H} : \langle \varphi, \psi \rangle = 0\}$$

**Bemerkung**

Bei den folgenden Betrachtungen überlege man, wie die entsprechenden Aussagen im endlichdimensionalen Fall (siehe Lineare Algebra) gezeigt wurden.

**Satz 21.12** Projektionssatz

Sei  $\mathcal{H}$  ein Hilbertraum und  $\mathcal{L} \subset \mathcal{H}$  ein abgeschlossener Unterraum. Dann hat jedes  $\varphi \in \mathcal{H}$  eine eindeutige Darstellung

$$\varphi = \psi + \psi^\perp \quad \text{mit} \quad \psi \in \mathcal{L} \quad \text{und} \quad \psi^\perp \in \mathcal{L}^\perp$$

$\psi$  heißt **orthogonale Projektion** von  $\varphi$  auf  $\mathcal{L}$ . Durch die Zuordnung  $\varphi \mapsto \psi := P\varphi$  wird eine lineare Abbildung bzw. ein linearer Operator  $P$  definiert, der für alle  $\varphi \in \mathcal{H}$  die Eigenschaft hat:

$$\|P\varphi\| \leq \|\varphi\|$$

Dies werden wir später kurz als  $\|P\| \leq 1$  schreiben.

**Bemerkung**

Im Endlichdimensionalen würde man dieses  $\psi$  und  $\psi^\perp$  etwa mit Orthonormalbasen finden.

**Beweis**

Da  $\mathcal{L}$  konvex und abgeschlossen ist, kann der vorige Satz angewendet werden. Es existiert also genau ein  $\psi \in \mathcal{L}$  mit

$$\|\varphi - \psi\| = \text{dist}(\varphi, \mathcal{L}) =: d$$

Wir zeigen:  $\psi^\perp \in \mathcal{L}^\perp$ . Dazu wird (21.7) benutzt. Es gilt also wegen  $\varphi - \psi = \psi^\perp$ :

$$\text{Re} \langle \chi, \psi^\perp \rangle \leq \text{Re} \langle \psi, \psi^\perp \rangle \quad \forall \chi \in \mathcal{L}$$

Für alle  $c \in \mathbb{C}$  ist natürlich  $c \cdot \chi \in \mathcal{L}$ , also kann oben  $\chi$  durch  $c \cdot \chi$  ersetzt werden.

$$\text{Re} [c \cdot \langle \chi, \psi^\perp \rangle] \leq \text{Re} \langle \psi, \psi^\perp \rangle \quad \forall c \in \mathbb{C}, \chi \in \mathcal{L}$$

Da  $c$  beliebig gewählt werden kann, aber der linke Term trotzdem wie angegeben nach oben beschränkt bleibt, muss  $\langle \chi, \psi^\perp \rangle = 0$  und damit  $\psi^\perp \in \mathcal{L}^\perp$  sein.

Zur Eindeutigkeit: Sei  $\varphi = \psi + \psi^\perp = \psi' + \psi'^\perp$  mit  $\psi, \psi' \in \mathcal{L}$  und  $\psi^\perp, \psi'^\perp \in \mathcal{L}^\perp$ , dann ist:

$$\underbrace{\psi - \psi'}_{\in \mathcal{L}} = \underbrace{\psi^\perp - \psi'^\perp}_{\in \mathcal{L}'} \Rightarrow \begin{cases} \psi - \psi' = 0 \\ \psi^\perp - \psi'^\perp = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \psi = \psi' \\ \psi^\perp = \psi'^\perp \end{cases}$$

Denn 0 ist das einzige Element, das sowohl in  $\mathcal{L}$  als auch in  $\mathcal{L}'$  liegt.

Jetzt soll gezeigt werden, dass  $P$  linear ist, dass also gilt:  $P(c \cdot \varphi_1 + \varphi_2) = c \cdot P\varphi_1 + P\varphi_2$ . Mit einfacher Umformung ergibt sich:

$$c \cdot \varphi_1 + \varphi_2 = \underbrace{c \cdot P\varphi_1 + P\varphi_2}_{\in \mathcal{L}} + \underbrace{c \cdot (\varphi_1 - P\varphi_1) + (\varphi_2 - P\varphi_2)}_{\in \mathcal{L}^\perp}$$

Nach der Eindeutigkeitsaussage folgt, dass  $c \cdot P\varphi_1 + P\varphi_2$  die Projektion von  $c \cdot \varphi_1 + \varphi_2$  auf  $\mathcal{L}$  ist.

$P\varphi$  und  $\varphi - P\varphi$  sind also orthogonal, deshalb folgt mit dem Satz von Pythagoras die im Satz vermerkte Abschätzung durch:

$$\|\varphi\|^2 = \|P\varphi + (\varphi - P\varphi)\|^2 = \|P\varphi\|^2 + \|\varphi - P\varphi\|^2 \leq \|P\varphi\|^2$$

**Bemerkung**

zur Anwendung dieses Projektionssatzes auf die Zerlegung des Hilbertraumes bzw. weitere Konstruktionen mit Hilberträumen

Aus dem Projektionssatz folgt  $\mathcal{H} = \mathcal{L} \oplus \mathcal{L}^\perp$ , das heißt,  $\mathcal{H}$  ergibt sich als orthogonale direkte Summe von  $\mathcal{L}$  und  $\mathcal{L}'$ . Was heißt das?

Seien  $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2 \in \mathcal{H}$  zwei beliebige abgeschlossene Unterräume mit  $\mathcal{H}_1 \cap \mathcal{H}_2 = \{0\}$ . Dann ist die Menge

$$\mathcal{K} := \{\varphi_1 + \varphi_2 : \varphi_i \in \mathcal{H}_i\}$$

wieder ein Unterraum von  $\mathcal{H}$ .  $\mathcal{K}$  heißt **direkte Summe** von  $\mathcal{H}_1$  und  $\mathcal{H}_2$ , man schreibt  $\mathcal{K} := \mathcal{H}_1 + \mathcal{H}_2$ . Wegen  $\mathcal{H}_1 \cap \mathcal{H}_2 = \{0\}$  lässt sich jedes  $\psi \in \mathcal{K}$  *eindeutig* als  $\psi = \psi_1 + \psi_2$  mit  $\psi_i \in \mathcal{H}_i$  darstellen. Eine **orthogonale direkte Summe** liegt dann vor, wenn  $\mathcal{H}_1 \perp \mathcal{H}_2$  ist (die Bedingung  $\mathcal{H}_1 \cap \mathcal{H}_2 = \{0\}$  ist dann automatisch erfüllt). Man schreibt dann  $\mathcal{K} := \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2$ .

Seien nun  $(\mathcal{H}_1, \langle \cdot, \cdot \rangle_1), (\mathcal{H}_2, \langle \cdot, \cdot \rangle_2)$  zwei a priori unabhängige Hilberträume. Dann bilden wir einen neuen Hilbertraum  $(\mathcal{H}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  wie folgt:

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2 = \{(\varphi_1, \varphi_2) : \varphi_i \in \mathcal{H}_i\} \quad \text{und} \quad \langle \varphi, \psi \rangle := \langle \varphi_1, \psi_1 \rangle_1 + \langle \varphi_2, \psi_2 \rangle_2$$

Man kann die  $\mathcal{H}_i$  wie folgt in  $\mathcal{H}$  einbetten:

$$\begin{aligned} \varphi_1 \in \mathcal{H}_1 &\mapsto (\varphi_1, 0) \in \mathcal{H} \\ \varphi_2 \in \mathcal{H}_2 &\mapsto (0, \varphi_2) \in \mathcal{H} \end{aligned}$$

Man identifiziert also  $\mathcal{H}_1$  mit  $\{(\varphi_1, 0) : \varphi_1 \in \mathcal{H}_1\}$  und  $\mathcal{H}_2$  analog.  $\mathcal{H}_1$  und  $\mathcal{H}_2$  sind zueinander orthogonal, genauer ist  $\mathcal{H}_2 = \mathcal{H}_1^\perp$  und umgekehrt. Auf offensichtliche Weise definiert man die direkte Summe  $\mathcal{H}_1 \oplus \dots \oplus \mathcal{H}_n$  endlich vieler Hilberträume. Eine interessante Übungsaufgabe ist die Charakterisierung der direkten Summe unendlich vieler Hilberträume.

Unser Ziel ist es nun, Orthonormalbasen in Hilberträumen zu finden.

**Definition und Satz 21.13**

Für ein Orthonormalsystem  $(\varphi_n)$  eines Hilbertraumes  $\mathcal{H}$  sind folgende Bedingungen äquivalent:

1.  $\text{lin}\{\varphi_n : n \in \mathbb{N}\}$  ist dicht in  $\mathcal{H}$ .
2. Für alle  $\varphi \in \mathcal{H}$  gilt

$$\varphi = \sum_{n=1}^{\infty} \langle \varphi_n, \varphi \rangle \cdot \varphi_n = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N \langle \varphi_n, \varphi \rangle \cdot \varphi_n$$

3. Für alle  $\varphi \in \mathcal{H}$  gilt die **Parsevalsche Identität**:  $\|\varphi\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\langle \varphi_n, \varphi \rangle|^2$   
Die  $\langle \varphi_n, \varphi \rangle$  heißen **Fourierkoeffizienten** von  $\varphi$  bezüglich  $(\varphi_n)$ .

Besitzt das Orthonormalsystem  $(\varphi_n)$  diese Eigenschaften, so heißt es **Orthonormalbasis**.



## Bemerkung

1. Die Menge  $\text{lin}\{\varphi_n : n \in \mathbb{N}\}$  umfasst alle *endlichen* Linearkombinationen der  $\varphi_n$ .
2. Im Endlichdimensionalen ist Satz 21.13 uninteressant, da  $\text{lin}\{\varphi_n\} = \mathcal{H}$  für  $\dim \mathcal{H} = n$ .

**Beweis**

Man denke an Satz 21.3. Dort hatten wir folgende Konstellation:

$$\begin{aligned} \|\varphi\|^2 &= \sum_{k=1}^N |\langle \varphi_k, \varphi \rangle|^2 + \left\| \varphi - \sum_{k=1}^N \langle \varphi_k, \varphi \rangle \cdot \varphi_k \right\|^2 \quad (*) \\ \varphi &= \underbrace{\sum_{k=1}^N \langle \varphi_k, \varphi \rangle \cdot \varphi_k}_{=\psi} + \underbrace{\left( \varphi - \sum_{k=1}^N \langle \varphi_k, \varphi \rangle \cdot \varphi_k \right)}_{=\chi} \end{aligned}$$

Dann wurde gezeigt, dass  $\psi \perp \chi$  ist. Das heißt, dass  $\psi$  gerade die Projektion von  $\varphi$  auf den von  $\varphi_1, \dots, \varphi_N$  aufgespannten Unterraum  $\mathcal{H}_N$  ist. Also ist  $\psi = P_N \varphi$ . Dann gilt laut dem Projektionssatz:

$$\|\varphi - P_N \varphi\| = \text{dist}(\varphi, \mathcal{H}_N)$$

Aus 1. folgt 3.: Die lineare Hülle  $\text{lin}\{\varphi_n : n \in \mathbb{N}\}$  liegt dicht in  $\mathcal{H}$ , das heißt: Zu jedem  $\varphi \in \mathcal{H}$  und  $\varepsilon > 0$  existiert eine Linearkombination  $\psi := \sum_{k=1}^{n_0} c_k \cdot \varphi_k$  mit

$$\|\varphi - \psi\|^2 = \left\| \varphi - \sum_{k=1}^{n_0} c_k \cdot \varphi_k \right\|^2 < \varepsilon$$

Dann gilt offensichtlich für alle  $n > n_0$ :  $\varphi \in \mathcal{H}_{n_0} \subset \mathcal{H}_n$ . Nun folgt mit (\*):

$$0 \leq \|\varphi\|^2 - \sum_{k=1}^n |\langle \varphi_k, \varphi \rangle|^2 = \|\varphi - P_n \varphi\|^2 = \text{dist}^2(\varphi, \mathcal{H}_n) \leq \|\varphi - \psi\|^2 < \varepsilon$$

Diese Abschätzung gilt auch noch für  $n \rightarrow \infty$  und da  $\varepsilon > 0$  beliebig klein sein darf, folgt die Parsevalsche Identität.

Aus 3. folgt 2.: Wegen (\*) folgt:

$$\left\| \varphi - \sum_{k=1}^N \langle \varphi_k, \varphi \rangle \cdot \varphi_k \right\|^2 = \|\varphi\|^2 - \sum_{k=1}^N |\langle \varphi_k, \varphi \rangle|^2$$

Dieser Term geht für  $N \rightarrow \infty$  wegen der Voraussetzung gegen Null, also:

$$\varphi = \sum_{k=1}^{\infty} \langle \varphi_k, \varphi \rangle \cdot \varphi_k$$

Aus 2. folgt 1.: ist einfach zu zeigen, denn die Voraussetzung beinhaltet:

$$\sum_{k=1}^N \langle \varphi_k, \varphi \rangle \cdot \varphi_k \rightarrow \varphi$$

Das heißt, für  $\varepsilon > 0$  existiert ein  $n_0$ , für das gilt:

$$\left\| \varphi - \sum_{k=1}^{n_0} \langle \varphi_k, \varphi \rangle \cdot \varphi_k \right\| < \varepsilon$$

Das ist gerade die Anforderung für Dichtheit. ■

**Satz 21.14**

Jeder Hilbertraum besitzt eine Orthonormalbasis.

**Beweis**

In beliebigen Hilberträumen wird dieser Satz mithilfe des „Lemmas von Zorn“ bewiesen. (Grob gesprochen ersetzt das Lemma im nicht-abzählbaren Fall das Induktionsaxiom.) Einfacher geht es in separablen Hilberträumen, das heißt, es existiert eine abzählbare, dichte Menge  $\{\psi'_n : n \in \mathbb{N}\}$  in  $\mathcal{H}$ . Diese Menge wollen wir als Folge  $(\psi'_n)$  schreiben.

Nun bilden wir eine neue Folge  $(\psi_n)$ , indem wir nacheinander aus  $(\psi'_n)$  alle Elemente ausschließen, die Linearkombinationen der vorhergehenden sind (o.E.d.A. sei  $\psi'_1 = \psi_1 \neq 0$ ). Diese neue Folge  $(\psi_n)$  hat folgende zwei Eigenschaften:

- Endlich viele dieser  $\psi_k$  sind stets linear unabhängig.
- Es ist  $\text{lin}\{\psi_n : n \in \mathbb{N}\} = \text{lin}\{\psi'_n : n \in \mathbb{N}\}$ , diese Menge ist dicht in  $\mathcal{H}$ .

Auf  $(\psi_n)$  wird das **Schmidtsche Orthogonalisierungsverfahren** aus der Linearen Algebra angewendet:

1. Das erste Element ist  $\varphi_1 := \psi_1 / \|\psi_1\|$ , also die Normierung von  $\psi_1$ .
2. Das zweite Element  $\varphi_2$  ist die Normierung von  $\varphi'_2 := \psi_2 - \langle \varphi_1, \psi_2 \rangle \cdot \varphi_1$ , dem Anteil von  $\psi_2$ , der senkrecht auf  $\varphi_1$  steht.
3. Allgemein ist  $\varphi_n$  für  $n > 1$  die Normierung von  $\varphi'_n := \psi_n - \sum_{k=1}^{n-1} \langle \varphi_k, \psi_n \rangle \cdot \varphi_k$ .

Damit erhält man ein Orthonormalsystem  $(\varphi_n)$  mit  $\text{lin}\{\psi_i : 1 \leq i \leq n\} = \text{lin}\{\varphi_i : 1 \leq i \leq n\}$  für alle  $n$ , insbesondere ist  $\text{lin}\{\psi_i : i \in \mathbb{N}\} = \text{lin}\{\varphi_i : i \in \mathbb{N}\}$  und diese Menge ist dicht in  $\mathcal{H}$ . Also ist  $(\varphi_n)$  eine Orthonormalbasis gemäß Satz 21.13. ■

**Bemerkung**

1.  $\mathcal{H}$  ist genau dann separabel, wenn  $\mathcal{H}$  eine *abzählbare* Orthonormalbasis besitzt. (Gezeigt ist bis jetzt nur die eine Richtung in Form des Beweises zum Satz 21.13, die andere Richtung kann man sich leicht selbst überlegen.)
2. In einem separablen Hilbertraum ist jede Orthonormalbasis abzählbar; generell sind in jedem Hilbertraum alle Orthonormalbasen gleichmächtig. Die Mächtigkeit einer Orthonormalbasis (also aller Orthonormalbasen) nennt man die **Hilbertraumdimension** von  $\mathcal{H}$ .

Eine Orthonormalbasis im unendlichdimensionalen Hilbertraum ist keine Basis im Sinne der linearen Algebra, also keine **algebraische Basis**. Ist  $(\varphi_n)$  also eine Orthonormalbasis, dann kann man nicht alle  $\varphi \in \mathcal{H}$  als *endliche* Linearkombination von  $\varphi_n$  darstellen.

3. Eine Orthonormalbasis ist stets ein maximales Orthonormalsystem. Das heißt: Ist  $(\varphi_n)$  eine Orthonormalbasis, so folgt aus  $\langle \varphi, \varphi_n \rangle = 0 \forall n$  stets  $\varphi = 0$ .

Beachte: Ist  $\mathcal{D} \subset \mathcal{H}$  dicht mit  $\langle \varphi, \psi \rangle = 0$  für alle  $\psi \in \mathcal{D}$ , dann folgt  $\varphi = 0$ , denn dass  $\mathcal{D}$  dicht in  $\mathcal{H}$  ist, heißt, dass eine Folge  $(\psi_n)$  aus  $\mathcal{D}$  existiert, die gegen  $\varphi$  konvergiert. Dann ist  $\langle \varphi, \psi_n \rangle = 0$  für alle  $n$ , also verschwindet auch der Grenzwert:

$$0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \langle \varphi, \psi_n \rangle = \left\langle \varphi, \lim_{n \rightarrow \infty} \psi_n \right\rangle = \langle \varphi, \varphi \rangle \Rightarrow \varphi = 0$$

Der einzige problematische Punkt ist die zweite Umformung, bei der der Grenzwert in das Skalarprodukt gezogen wird. Das geht aber wegen:

$$|\langle \varphi, \psi_n \rangle - \langle \varphi, \varphi \rangle| = |\langle \varphi, \psi_n - \varphi \rangle| \leq \|\varphi\| \cdot \|\psi_n - \varphi\| \rightarrow 0$$

Diese Eigenschaft entspricht gerade der Stetigkeit des Skalarprodukts in der zweiten Komponente.

4. Wie in der linearen Algebra gilt: Ist  $(\psi_n)$  ein Orthonormalsystem in  $\mathcal{H}$ , dann kann man  $(\psi_n)$  immer zu einer Orthonormalbasis ergänzen.

Betrachte den von den  $(\psi_n)$  aufgespannten Unterraum  $\mathcal{H}_1$  von  $\mathcal{H}$ . Dann ist  $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_1^\perp$ . Nach unserem Satz besitzt auch der Hilbertraum  $\mathcal{H}_1^\perp$  eine Orthonormalbasis  $(\psi'_n)$ . Irgendeine Abzählung  $(\varphi_n)$  der Menge  $\{\psi_n\} \cup \{\psi'_n\}$  ist dann wieder eine Orthonormalbasis in  $\mathcal{H}$ .

Das folgende Resultat ist fundamental: Sei  $\mathcal{H}$  ein Hilbertraum. Dann ist  $\mathcal{H}'$  der Raum der linearen stetigen Funktione auf  $\mathcal{H}$ . Die Funktion  $f \in \mathcal{H}'$  bildet von  $\mathcal{H}$  nach  $\mathbb{C}$  ab und hat die folgenden Eigenschaften:

1.  $f$  ist linear, d.h.  $f(c \cdot \varphi + d \cdot \psi) = c \cdot f(\varphi) + d \cdot f(\psi)$  für alle  $c, d \in \mathbb{C}$  und  $\varphi, \psi \in \mathcal{H}$ .
2.  $f$  ist stetig, das heißt, wenn  $\varphi_n$  in  $\mathcal{H}$  gegen  $\varphi$  konvergiert, dann geht  $f(\varphi_n)$  in  $\mathbb{C}$  gegen  $f(\varphi)$ .

Wir werden später bei linearen Abbildungen von  $\mathcal{H}$  nach  $\mathbb{K}$  allgemein zeigen, dass die obige Stetigkeit äquivalent ist zu der Abschätzung:

$$|f(\varphi)| \leq C \cdot \|\varphi\| \quad \forall \varphi \in \mathcal{H} \quad \text{und} \quad C > 0 \text{ fest}$$

Ist diese Abschätzung erfüllt, so ist  $f$  stetig, denn wenn  $\varphi_n$  gegen  $\varphi$  konvergiert, dann auch  $f(\varphi_n)$  gegen  $f(\varphi)$  wegen:

$$|f(\varphi_n) - f(\varphi)| = |f(\varphi_n - \varphi)| \leq C \cdot \|\varphi_n - \varphi\| \rightarrow 0$$

### Beispiel 21.2 für lineare stetige Funktione auf $\mathcal{H}$

Sei  $\psi \in \mathcal{H}$  fest. Setze  $f_\psi(\varphi) := \langle \psi, \varphi \rangle$ . Dann ist  $f_\psi$  linear, und wegen der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung auch stetig:

$$|f_\psi(\varphi)| = |\langle \psi, \varphi \rangle| \leq \|\psi\| \cdot \|\varphi\|$$

Im folgenden Theorem werden wir sehen, dass es keine weiteren linearen stetigen Funktione auf  $\mathcal{H}$  gibt. In  $\mathcal{H}'$  definieren wir vorher eine Norm:

$$\|f\|' := \sup_{\|\varphi\| \leq 1} |f(\varphi)| \quad \forall f \in \mathcal{H}'$$

### Theorem 21.15 Satz von Riesz

Jedes  $f \in \mathcal{H}'$  hat die Form

$$f = f_\psi = \langle \psi, \cdot \rangle$$

mit einem eindeutig bestimmten  $\psi \in \mathcal{H}$ . Die Abbildung  $J : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}'$  mit  $\psi \mapsto f_\psi$  ist eine bijektive, konjugiert-lineare und isometrische Abbildung, das heißt:

$$\|\psi\| = \|J\psi\|' = \|f\|'$$

#### Bemerkung

Dass  $J$  konjugiert linear ist, heißt:

$$J(\varphi + \psi) = J\varphi + J\psi \quad \text{und} \quad J(c\varphi) = \bar{c} \cdot J\varphi \quad \forall c \in \mathbb{C} \text{ und } \varphi, \psi \in \mathcal{H}$$

### Beweis

Die Injektivität ist klar, denn  $J\varphi = f = 0$  heißt, dass  $f(\varphi) = \langle \psi, \varphi \rangle = 0$  für alle  $\varphi$  ist, woraus  $\psi = 0$  folgt. Es ist nur zu zeigen, dass  $J$  surjektiv ist, was der eigentliche Inhalt des Theorems ist.

Sei o.E.d.A.  $f \neq 0$  (für  $f = 0$  kann man  $\psi = 0$  wählen). Dann ist Kern  $f = \{\varphi \in \mathcal{H} : f(\varphi) = 0\}$  ein abgeschlossener Unterraum von  $\mathcal{H}$ . (Ein Unterraum ist es, weil  $f$  linear ist; die Abgeschlossenheit folgt aus der Stetigkeit von  $f$ , denn Kern  $f = f^{-1}(\{0\})$  und  $\{0\}$  ist abgeschlossen.)

Da  $f \neq 0$  ist, ist  $(\text{Kern } f)^\perp \neq \{0\}$ . Außerdem hat  $(\text{Kern } f)^\perp$  die Dimension 1. Sei nun  $\psi_0 \in (\text{Kern } f)^\perp$  mit  $\|\psi_0\| = 1$ . Dann sei ein Element  $\chi_\varphi$  mit  $\varphi \in \mathcal{H}$  gegeben durch:

$$\begin{aligned} \chi_\varphi &:= f(\psi_0) \cdot \varphi - f(\varphi) \cdot \psi_0 \\ \Rightarrow f(\chi_\varphi) &= f(\psi_0) \cdot f(\varphi) - f(\varphi) \cdot f(\psi_0) = 0 \\ \Rightarrow 0 &= \langle \psi, \chi_\varphi \rangle = \langle \psi_0, f(\psi_0) \cdot \varphi - f(\varphi) \cdot \psi_0 \rangle = f(\psi_0) \cdot \langle \psi_0, \varphi \rangle - f(\varphi) \cdot \underbrace{\langle \psi_0, \psi_0 \rangle}_{=1} \\ \Rightarrow f(\varphi) &= f(\psi_0) \cdot \langle \psi_0, \varphi \rangle \\ f(\varphi) &= \overline{\langle f(\psi_0), \psi_0 \rangle} \cdot \varphi \end{aligned}$$

Also gilt für alle  $\varphi \in \mathcal{H}$  mit  $\psi := \overline{f(\psi_0)} \cdot \psi_0$ :

$$f(\varphi) = \langle \psi, \varphi \rangle \quad \forall \varphi \in \mathcal{H}$$

Damit ist die Existenz eines  $\psi$  gezeigt (und implizit eine Konstruktionsvorschrift für  $\psi$  aus  $f$  erstellt worden). Es muss noch die Eindeutigkeit gezeigt werden: Sei  $f$  wie oben darstellbar mit  $\psi, \psi' \in \mathcal{H}$ , also  $f(\varphi) = \langle \psi, \varphi \rangle = \langle \psi', \varphi \rangle$ . Dann ist  $\langle \psi - \psi', \varphi \rangle = 0$  für alle  $\varphi$ , also ist  $\psi - \psi' = 0$ .

Jetzt werden die Eigenschaften von  $J$  untersucht. Seien  $\psi_1, \psi_2 \in \mathcal{H}$  beliebig und  $c \in \mathbb{C}$  beliebig:

$$\begin{aligned} J(\psi_1 + \psi_2)(\varphi) &= \langle \psi_1 + \psi_2, \varphi \rangle = \langle \psi_1, \varphi \rangle + \langle \psi_2, \varphi \rangle = J\psi_1(\varphi) + J\psi_2(\varphi) \\ J(c \cdot \psi_1)(\varphi) &= \langle c \cdot \psi_1, \varphi \rangle = \bar{c} \cdot \langle \psi_1, \varphi \rangle = \bar{c} \cdot J\psi_1(\varphi) \end{aligned}$$

Da die Äquivalenz von Funktionen punktweise definiert ist, folgt hieraus  $J(\psi_1 + \psi_2) = J\psi_1 + J\psi_2$  und  $J(c \cdot \psi_1) = \bar{c} \cdot J\psi_1$ . Zur Isometrie:

$$\|J\psi\|' = \|f_\psi\|' = \sup_{\|\varphi\| \leq 1} |f_\psi(\varphi)| = \sup_{\|\varphi\| \leq 1} |\langle \psi, \varphi \rangle| = \|\psi\|$$

Der letzte Schritt ist richtig, weil:

- $\|\psi, \varphi\| \leq \|\psi\| \cdot \|\varphi\| \leq \|\psi\|$ , also ist  $\{\langle \psi, \varphi \rangle : \|\varphi\| \leq 1\}$  durch  $\|\psi\|$  beschränkt.
- Für  $\varphi := \psi / \|\psi\|$  ist  $\langle \psi, \varphi \rangle = \|\psi\|$ , also muss dies mit obiger Beschränktheit das Supremum sein.

■

## 22 Beschränkte lineare Operatoren

### 22.1 Allgemeine Eigenschaften. Beispiele

Etliche Definitionen und Betrachtungen könnten auch in normierten bzw. Banachräumen durchgeführt werden. Als Vereinfachung betrachten wir aber stets nur lineare Operatoren im gleichen Hilbertraum (also in der Regel nicht zwischen verschiedenen Hilberträumen).

#### Definition 22.1

Ein **linearer Operator**  $A$  im Hilbertraum  $\mathcal{H}$  ist eine auf einem linearen Teilraum  $\mathcal{D}(A)$  definierte lineare Abbildung  $A : \mathcal{D}(A) \rightarrow \mathcal{H}$ . Es werden folgende Bezeichnungen eingeführt:

- $\mathcal{D}(A)$  heißt **Definitionsbereich** von  $A$ .
- $\text{im } A = \{A\varphi : \varphi \in \mathcal{D}(A)\}$  heißt **Wertebereich** von  $A$ .
- $\text{Kern } A = \{\varphi \in \mathcal{D}(A) : A\varphi = 0\}$  heißt **Kern** bzw. **Nullraum** von  $A$ .
- $G(A) = \{(\varphi, A\varphi) : \varphi \in \mathcal{D}(A)\} \subset \mathcal{H} \times \mathcal{H}$  heißt **Graph** von  $A$ .
- $A$  heißt **dicht definiert**, wenn  $\mathcal{D}(A)$  in  $\mathcal{H}$  dicht liegt.

#### Bemerkung

1. Der Begriff der Linearität ist wie üblich definiert, also  $A(c \cdot \varphi + d \cdot \psi) = c \cdot A\varphi + d \cdot A\psi$  für alle  $c, d \in \mathbb{C}$  und  $\varphi, \psi \in \mathcal{D}(A)$ .
2. Da wir *nur lineare* Operatoren betrachten, sprechen wir einfach von Operatoren.
3.  $A$  und  $\mathcal{D}(A)$  gehören *immer* zusammen!
4.  $G(A)$  ist ein linearer Unterraum von  $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$ .
5. Wir betrachten nur dicht definierte Operatoren; in den folgenden Sätzen wird im Allgemeinen  $\mathcal{D}(A) = \mathcal{H}$  sein.

### Beispiele

1. Sei der Operator  $Q$  gegeben durch  $(Qf)(x) := x \cdot f(x)$ . Das ist nur eine Vorschrift, wie der Operator formal wirken soll.  $Q$  wirkt auch linear. Um aus  $Q$  einen linearen Operator mit zu bestimmenden Eigenschaften zu machen, braucht man einen Raum, in dem er wirkt, und einen geeigneten Definitionsbereich. A priori ist diese Wahl nicht klar; sie hängt von der Aufgabenstellung ab.

Sei zum Beispiel  $\mathcal{H} = L^2[a, b]$  und  $\mathcal{D}(Q) = \mathcal{H}$ . Zu prüfen ist, ob  $Q$  von  $\mathcal{H}$  nach  $\mathcal{H}$  abbildet: Sei  $f \in L^2[a, b]$ . Liegt auch  $Qf \in L^2[a, b]$ ?

$$\int_a^b |Qf(x)|^2 dx = \int_a^b |x \cdot f(x)|^2 dx = \int_a^b |x|^2 \cdot |f(x)|^2 dx \leq \underbrace{\sup_{x \in [a, b]} |x|^2}_{< \infty} \cdot \underbrace{\int_a^b |f(x)|^2 dx}_{< \infty} < \infty$$

Für  $\mathcal{H} = L^2[a, b]$  ist durch  $Q$  und  $\mathcal{D}(Q) = \mathcal{H}$  also ein linearer Operator definiert. Aus obiger Herleitung kann man schon erahnen, dass das für  $\mathcal{H} = \mathcal{D}(Q) = L^2(\mathbb{R})$  nicht der Fall ist (der Beweis ist noch etwas schwieriger). Im  $L^2(\mathbb{R})$  gibt es für  $\mathcal{D}(Q)$  aber viele Varianten, zum Beispiel  $\mathcal{D}(Q) = C_c^\infty(\mathbb{R})$  oder  $\mathcal{D}(Q) := \mathcal{S}(\mathbb{R})$ . Der maximale Definitionsbereich ist offensichtlicherweise

$$\mathcal{D}(Q) = \left\{ f \in L^2(\mathbb{R}) : \int_{-\infty}^{\infty} |x \cdot f(x)|^2 dx < \infty \right\}$$

$Q$  ist der typische **Ortsoperator** der Quantenmechanik.

2. Sei  $P := 1/i \cdot d/dx$ , also  $Pf = f'/i$ . (Das  $1/i$  ist später von fundamentaler Bedeutung für die Eigenschaften des Operators.) Dieser Operator kann zum Beispiel im  $\mathcal{H} = L^2[a, b]$  benutzt werden, aber nie für  $\mathcal{D}(P) = \mathcal{H}$ , da nicht alle Elemente von  $\mathcal{H}$  differenzierbar sind. Möglich sind  $\mathcal{D}(P) = C^1[a, b]$ , der Raum der stetig differenzierbaren Funktionen auf  $[a, b]$ , oder auch

$$\mathcal{D}(P) = \{f \in L^2[a, b] : f' \text{ existiert und } f' \in L^2[a, b]\}$$

Für  $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R})$  sind möglich:  $\mathcal{D}(P) = C_c^\infty(\mathbb{R})$  oder  $\mathcal{D}(P) = \mathcal{S}(\mathbb{R})$  oder

$$\mathcal{D}(P) = \{f \in L^2(\mathbb{R}) : f' \text{ existiert und } f' \in L^2(\mathbb{R})\}$$

$P$  ist der typische **Impulsoperator** der Quantenphysik (bis auf einen Faktor  $\hbar$ ).

3. Sei  $\mathcal{H} = l^2$  und  $(a_n)$  eine beliebige Folge aus  $\mathcal{C}$ . Der Definitionsbereich für den Operator  $A$  sei

$$\mathcal{D}(A) = \{(x_n) \in l^2 : (a_n \cdot x_n) \in l^2\} = \left\{ (x_n) \in l^2 : \sum_{n=1}^{\infty} |a_n \cdot x_n|^2 < \infty \right\}$$

Der Operator  $A$  ist gegeben durch  $A(x_n) := (a_n \cdot x_n)$  für alle  $x = (x_n) \in \mathcal{D}(A)$ . Diese Operation entspricht gerade der Multiplikation des Spaltenvektors mit den Folgeelementen mit einer Diagonalmatrix:

$$\begin{pmatrix} a_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \cdot x_1 \\ \vdots \\ a_n \cdot x_n \end{pmatrix}$$

Deswegen heißt  $A$  **Diagonaloperator**.  $\mathcal{D}(A)$  liegt dicht in  $l^2$ , denn die abbrechenden Folgen liegen alle in  $\mathcal{D}(A)$ .

4. Die **Verschiebungsoperatoren** oder **Shift-Operatoren** sind für  $\mathcal{H} = \mathcal{D}(R) = \mathcal{D}(L) = l^2$  gegeben durch:

$$\begin{aligned} Rx = R(x_n) &:= (0, x_1, x_2, \dots) \\ Lx = L(x_n) &:= (x_2, x_3, \dots) \end{aligned}$$

Im endlichdimensionalen Fall ist es sinnvoll, von der Menge aller linearen Operatoren auf einem Vektorraum zu sprechen und Eigenschaften dieser Menge zu untersuchen. Im unendlichdimensionalen Fall gibt es für beliebige lineare Operatoren keine vernünftigen Sätze, wegen zu vieler pathologischer Fälle. Deswegen arbeitet man mit „vernünftigen“ Klassen linearer Operatoren.

Zur Wiederholung: Eine Teilmenge  $M \subset \mathcal{H}$  heißt beschränkt, wenn es ein  $D > 0$  gibt mit  $\|\varphi\| \leq D$  für alle  $\varphi \in M$ . Geometrisch gesprochen bedeutet das, dass  $M$  in einer hinreichend großen Kugel um den Mittelpunkt 0 mit dem endlichen Radius  $D$  liegt.

**Definition 22.2**

Sei  $A : \mathcal{D}(A) \rightarrow \mathcal{H}$  ein linearer Operator.  $A$  heißt:

- **beschränkt**, wenn  $A$  beschränkte Mengen aus  $M \subset \mathcal{D}(A)$  in beschränkte Mengen  $AM$  abbildet.
- **stetig**, wenn für eine beliebige Folge  $(\varphi_n)$  aus  $\mathcal{D}(A)$  gilt: Aus  $\varphi_n \rightarrow \varphi$  folgt  $A\varphi_n \rightarrow A\varphi$ . (Das ist eigentlich nur die Stetigkeit in  $\varphi$ ; diese Relation soll für alle  $\varphi \in \mathcal{D}(A)$  gelten.)

**Satz 22.3**

Sei  $A : \mathcal{D}(A) \rightarrow \mathcal{H}$  ein linearer Operator. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

1.  $A$  ist beschränkt.
2. Es existiert ein  $C > 0$  mit  $\|A\varphi\| \leq C \cdot \|\varphi\|$  für alle  $\varphi \in \mathcal{D}(A)$ .
3.  $A$  ist stetig (d.h. in jedem  $\varphi \in \mathcal{D}(A)$  stetig).
4.  $A$  ist in  $0 \in \mathcal{D}(A)$  stetig.

**Beweis**

Aus 3. folgt 4.: Das ist mehr als nur trivial.

Aus 2. folgt 3.: Sei  $\varphi \in \mathcal{D}(A)$  und  $(\varphi_n)$  eine Folge aus  $\mathcal{D}(A)$  mit  $\varphi_n \rightarrow \varphi$ .

$$\|A\varphi_n - A\varphi\| = \|A(\varphi_n - \varphi)\| \leq C \cdot \|\varphi_n - \varphi\| \rightarrow 0$$

Daraus folgt  $A\varphi_n \rightarrow A\varphi$ .

Aus 2. folgt 1.: Sei  $M \subset \mathcal{D}(A)$  beschränkt, also ist  $\|\varphi\| \leq D$  für alle  $\varphi \in M$ . Dann ist:

$$\|A\varphi\| \leq C \cdot \|\varphi\| \leq C \cdot D \quad \forall \varphi \in M$$

Deswegen ist auch  $AM$  beschränkt.

Aus 1. folgt 2.: Wir zeigen gleichzeitig, dass aus Aussage 4 die Aussage 2 folgt, indem gezeigt wird, dass, wenn Aussage 2 nicht gilt, die Aussagen 1 und 4 nicht gelten können. Wenn 2. nicht gilt, dann existiert zu jedem  $C > 0$  ein  $\varphi \in \mathcal{D}(A)$  mit  $\|A\varphi\| > C \cdot \|\varphi\|$ . Dies spezialisieren wir auf natürliche Zahlen ( $C = 1, 2, \dots$ ): Für alle  $n \in \mathbb{N}$  existiert ein  $\varphi_n \in \mathcal{D}(A)$  mit  $\|A\varphi_n\| > C \cdot \|\varphi_n\|$ . Betrachte nun die Folge  $(\psi_n)$  mit

$$\psi_n := \frac{\varphi_n}{\|\varphi_n\| \cdot \sqrt{n}} \in \mathcal{D}(A) \quad \Rightarrow \quad \|\psi_n\| = \frac{1}{\sqrt{n}} \rightarrow 0$$

Also geht  $\psi_n \rightarrow 0$  und  $\{\psi_n\}$  ist beschränkt, aber:

$$\|A\psi_n\| = \frac{\|A\varphi_n\|}{\|\varphi_n\| \cdot \sqrt{n}} > \frac{n \cdot \|\varphi_n\|}{\|\varphi_n\| \cdot \sqrt{n}} = \sqrt{n}$$

Also geht  $A\varphi_n \not\rightarrow 0$ , somit ist  $\{A\psi_n\}$  nicht beschränkt, was ein Widerspruch zu 1. und 4. ist.

■

Somit können in Zukunft Beschränktheit und Stetigkeit synonym verwendet werden.

## Bemerkung

Wenn  $A$  auf einem dichten Definitionsbereich  $\mathcal{D}(A)$  stetig ist, dann lässt sich  $A$  zu einem stetigen Operator auf ganz  $\mathcal{H}$  fortsetzen.

In Zukunft seien beschränkte Operatoren stets auf ganz  $\mathcal{H}$  definiert, falls nicht ausdrücklich etwas anderes gesagt wird. Mit  $\mathcal{B}(\mathcal{H})$  sei die Menge aller beschränkten/stetigen linearen Operatoren von  $\mathcal{H}$  in  $\mathcal{H}$  bezeichnet. In  $\mathcal{B}(\mathcal{H}) \ni T$  ist eine Norm gegeben durch:

$$\|T\| := \inf \{C > 0 : \|T\varphi\| \leq C \cdot \|\varphi\| \quad \forall \varphi \in \mathcal{H}\} \quad (22.1)$$

**Bemerkung**

Laut der Infimumsdefinition gilt für alle  $\varepsilon > 0$  und alle  $\varphi \in \mathcal{H}$ :  $\|T\varphi\| \leq (\|T\| + \varepsilon) \cdot \|\varphi\|$ . Für  $\varepsilon \rightarrow 0$  erhält man die sehr wichtige Abschätzung:

$$\|T\varphi\| \leq \|T\| \cdot \|\varphi\| \quad (22.2)$$

**Lemma 22.4**

Für  $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$  gilt:

$$\begin{aligned} \|T\| &= \sup \{\|T\varphi\| : \varphi \in \mathcal{H}, \|\varphi\| \leq 1\} \\ \|T\| &= \sup \{\|T\varphi\| : \varphi \in \mathcal{H}, \|\varphi\| = 1\} \\ \|T\| &= \sup \{\|T\varphi\| : \varphi \in \mathcal{H}, \|\varphi\| < 1\} \\ \|T\| &= \sup \{|\langle \psi, T\varphi \rangle| : \varphi, \psi \in \mathcal{H}, \|\varphi\| \leq 1, \|\psi\| \leq 1\} \end{aligned}$$

**Beweis**

Die 4 Suprema werden (von oben nach unten) mit  $N_1$  bis  $N_4$  bezeichnet. Zu zeigen ist  $N_1 = \dots = N_4 = \|T\|$ . Es gilt folgende (leicht selber beweisbare) Gleichung:

$$\sup_{\|\chi\| \leq 1} |\langle \varrho, \chi \rangle| = \|\varrho\|$$

Damit sieht man unmittelbar  $N_4 = N_1$ . Aus (22.2) folgt:

$$\|T\varphi\| \leq \|T\| \quad \forall \varphi : \begin{cases} \|\varphi\| \leq 1 \\ \|\varphi\| = 1 \\ \|\varphi\| < 1 \end{cases}$$

Also ist  $N_1, N_2, N_3 \leq \|T\|$ . Trivial ist zudem  $N_1 \geq N_2, N_3$  (da die Mengen in  $N_2$  und  $N_3$  Teilmengen der Menge in  $N_1$  sind). Wir zeigen nun  $N_3 \leq N_2$ : Für  $\varphi = 0$  ist  $\|T\varphi\| = 0 \leq N_2$ . Für  $0 < \|\varphi\| < 1$  betrachte  $\psi := \varphi / \|\varphi\|$ , also  $\|\psi\| = 1$ .

$$\|T\psi\| = \frac{1}{\|\varphi\|} \cdot \|T\varphi\| \leq \|T\varphi\| \quad \Rightarrow \quad N_2 \geq N_3$$

Insgesamt gilt also  $N_3 \leq N_2 \leq N_1 \leq \|T\|$ . Jetzt zeigen wir:  $\|T\| \leq N_3$ , dann ist der Beweis erbracht. Es sei o.E.d.A.  $T \neq 0$ , also  $\|T\| > 0$ . Wegen (22.1) existiert zu jedem  $\varepsilon \in (0, 1)$  ein  $\varphi \neq 0$  mit:

$$\|T\varphi\| > \underbrace{(1 - \varepsilon) \cdot \|T\|}_{< \|T\|} \cdot \|\varphi\|$$

Dann gilt für  $\psi := \frac{1}{(1+\varepsilon) \cdot \|\varphi\|} \cdot \varphi$  mit  $\|\psi\| < 1$ :

$$\|T\psi\| = \frac{1}{(1 + \varepsilon) \cdot \|\varphi\|} \cdot \|T\varphi\| > \frac{(1 - \varepsilon) \cdot \|\varphi\|}{(1 + \varepsilon) \cdot \|\varphi\|} \cdot \|T\| \quad \Rightarrow \quad N_3 \geq \|T\psi\| > \frac{1 - \varepsilon}{1 + \varepsilon} \cdot \|T\|$$

Für  $\varepsilon \rightarrow 0$  folgt  $N_3 \geq \|T\|$ . ■



**Satz 22.5**

$(\mathcal{B}(\mathcal{H}), \|\cdot\|)$  ist ein Banachraum, in dem zusätzlich gilt:

$$\|A \cdot B\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$$

**Beweis**

Mithilfe der Abschätzung (22.2) folgt die positive Definitheit sofort. Die Homogenität und die Dreiecksungleichung sind ebenfalls einfach. Zur Multiplikativität:

$$\|A \cdot B\| = \sup_{\|\varphi\| \leq 1} \|A(B\varphi)\| \leq (22.2) \leq \|A\| \cdot \sup_{\|\varphi\| \leq 1} \|B\varphi\| = \|A\| \cdot \|B\|$$

$\mathcal{B}(\mathcal{H})$  ist natürlich ein Vektorraum, denn Linearkombinationen stetiger linearer Abbildungen sind wieder stetig und linear. Zu zeigen ist noch, dass  $(\mathcal{B}(\mathcal{H}), \|\cdot\|)$  vollständig ist. Sei  $(T_n)$  eine  $\|\cdot\|$ -Cauchyfolge aus  $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ . Wir zeigen, dass es ein  $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$  gibt mit  $T_n \rightarrow T$  (bezüglich  $\|\cdot\|$ ).

$(T_n)$  ist eine Cauchyfolge, also gilt:  $\|T_n - T_m\| \rightarrow 0$  für  $m, n \rightarrow \infty$ . Damit ist für alle  $\varphi \in \mathcal{H}$  die Folge  $(T_n\varphi)$  eine Cauchyfolge in  $\mathcal{H}$ , denn:

$$\|T_n\varphi - T_m\varphi\| \leq (22.2) \leq \|T_n - T_m\| \cdot \|\varphi\| \rightarrow 0 \quad \text{für } m, n \rightarrow \infty$$

Da  $\mathcal{H}$  vollständig ist, existiert ein  $\psi \in \mathcal{H}$  mit  $T_n\varphi \rightarrow \psi$ . Definiere nun  $T$  durch  $T\varphi := \psi$ . An  $T$  stellen wir folgende Forderungen:

- $T$  muss linear sein.

$$T(a \cdot \varphi_1 + b \cdot \varphi_2) = \lim_{n \rightarrow \infty} T_n(a \cdot \varphi_1 + b \cdot \varphi_2) = \lim_{n \rightarrow \infty} [a \cdot T_n\varphi_1 + b \cdot T_n\varphi_2] = a \cdot T\varphi_1 + b \cdot T\varphi_2$$

- $T$  muss stetig sein. Da  $(T_n)$  eine Cauchyfolge ist, ist auch  $(\|T_n\|)$  eine Cauchyfolge, denn:

$$|\|T_n\| - \|T_m\|| \leq \|T_n - T_m\| \rightarrow 0 \quad \text{für } m, n \rightarrow \infty$$

Außerdem ist  $(\|T_n\|)$  beschränkt, d.h. es existiert ein  $K > 0$  mit  $\|T_n\| \leq K$  für alle  $n$ . Benutze die Stetigkeit der Norm:

$$\|T\varphi\| = \left\| \lim_{n \rightarrow \infty} T_n\varphi \right\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|T_n\varphi\| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \|T_n\| \cdot \|\varphi\| \leq K \cdot \|\varphi\|$$

Da Stetigkeit und Beschränktheit bei linearen Operatoren zusammenfallen, ist  $T$  also stetig.

- $T_n$  muss bezüglich  $\|\cdot\|$  gegen  $T$  konvergieren, also  $\|T_n - T\| \rightarrow 0$ . Sei  $\varepsilon > 0$  gegeben. Dann existiert ein  $n_0$ , sodass für alle  $m, n > n_0$  gilt:

$$\|T_n - T_m\| < \varepsilon \quad \Rightarrow \quad \|(T_n - T)\varphi\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|(T_n - T_m)\varphi\| \leq \varepsilon \cdot \|\varphi\|$$

Nach der Charakterisierung der Operatornorm ist  $\|T_n - T\| < \varepsilon$ , also konvergiert  $T_n \rightarrow T$ .

## Bemerkung

Betrachtet man lineare Operatoren, die von  $\mathcal{H}$  in einen anderen Raum  $\mathcal{K}$  abbilden, so muss  $\mathcal{K}$  vollständig sein. Die Vollständigkeit von  $\mathcal{H}$  braucht man für diesen Satz nicht.

**Beispiel 22.1** Integraloperatoren

Sei  $\mathcal{H} = L^2[a, b]$  und  $k \in C([a, b] \times [a, b])$ . Für  $\varphi \in L^2[a, b]$  setze

$$K\varphi : (K\varphi)(x) := \int_a^b k(x, y) \cdot \varphi(y) \, dy$$

$F \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$  heißt **endlichdimensional** oder **von endlichem Rang**, wenn  $\text{im } F$  endlichdimensional ist. Die Menge aller endlichdimensionalen Operatoren sei  $\mathcal{F}(\mathcal{H})$ .

**Beispiel 22.2** Endlichdimensionale Operatoren

Seien  $\varphi_1, \dots, \varphi_n, \psi_1, \dots, \psi_n \in \mathcal{H}$  beliebig fest. Setze:

$$F := \sum_{i=1}^n \langle \varphi_i, \cdot \rangle \cdot \psi_i$$

$F$  ist höchstens  $n$ -dimensional (die Dimension wird kleiner als  $n$ , wenn die  $\psi_1, \dots, \psi_n$  linear abhängig sind). Präzise formuliert ist  $\dim F = \dim \text{lin} \{\psi_1, \dots, \psi_n\}$ .

**Bemerkung**

zum inversen Operator

Wenn ein Operator  $A : \mathcal{D}(A) \rightarrow \text{im } A$  injektiv ist, d.h. (da  $A$  linear ist)  $\text{Kern } A = \{0\}$ , dann existiert ein inverser Operator  $A^{-1} : \text{im } A \rightarrow \mathcal{D}(A)$ , der wiederum linear ist. Aber:  $A^{-1}$  braucht weder dicht definiert noch auf  $\text{im } A$  stetig zu sein.

Ist  $A$  beschränkt und bijektiv (das heißt  $\text{im } A = \mathcal{H}$ ), dann ist  $A^{-1}$  automatisch beschränkt.

## 22.2 Der adjungierte Operator

Der Begriff des adjungierten Operators verallgemeinert die hermitesch konjugierte Matrix.

**Definition und Satz 22.6**

Zu jedem  $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$  existiert genau ein  $T^* \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$  mit

$$\langle \varphi, T\psi \rangle = \langle T^*\varphi, \psi \rangle \quad \forall \varphi, \psi \in \mathcal{H}$$

$T^*$  ist der zu  $T$  **adjungierte Operator**. Es gilt  $\|T^*\| = \|T\|$ .

**Beweis**

Zur Eindeutigkeit: Angenommen, es existieren  $S_1, S_2 \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$  mit  $\langle \varphi, T\psi \rangle = \langle S_1\varphi, \psi \rangle = \langle S_2\varphi, \psi \rangle$ . Dann ist (für alle  $\psi \in \mathcal{H}$ )  $\langle (S_1 - S_2)\varphi, \psi \rangle = 0$ , also ist (für alle  $\psi \in \mathcal{H}$ )  $(S_1 - S_2)\varphi = 0$ , also ist  $S_1 = S_2$ .

Zur Existenz: Für jedes feste  $\varphi \in \mathcal{H}$  und ein beliebiges  $\psi \in \mathcal{H}$  gilt:

$$|\langle \varphi, T\psi \rangle| \leq \|\varphi\| \cdot \|T\psi\| \leq \|\varphi\| \cdot \|T\| \cdot \|\psi\|$$

Also ist  $\psi \mapsto \langle \varphi, T\psi \rangle$  ein stetiges lineares Funktional. Nach dem Satz von Riesz existiert genau ein  $\psi^* \in \mathcal{H}$  mit  $\langle \varphi, T\psi \rangle = \langle \psi^*, \psi \rangle$ . Definiere  $T^*$  durch  $T^*\varphi = \psi^*$ .  $T^*$  ist linear wegen

$$\langle \varphi_{1,2}, T\psi \rangle = \langle \psi_{1,2}^*, \varphi \rangle = \langle T^*\varphi_{1,2}, \psi \rangle$$

Aus der Eindeutigkeit von  $\psi^*$  folgt nun einerseits:

$$\langle \varphi_1 + \varphi_2, T\psi \rangle = \langle T^*(\varphi_1 + \varphi_2), \psi \rangle$$

Andererseits gilt auch:

$$\langle \varphi_1, T\psi \rangle = \langle T^* \varphi_1, \psi \rangle \Rightarrow \langle \varphi_1 + \varphi_2, T\psi \rangle = \langle T^* \varphi_1 + T^* \varphi_2, \psi \rangle$$

Die Beschränktheit folgern wir aus dem Vergleich der Normen.

$$\|T^*\| = \sup_{\|\varphi\|, \|\psi\| \leq 1} |\langle \varphi, T^* \psi \rangle| = \sup_{\|\varphi\|, \|\psi\| \leq 1} |\langle T\varphi, \psi \rangle| = \|T\|$$

Wie bestimmt man  $T^*$ ? Häufig versucht man,  $T^*$  aus der Definition von  $T$  zu erraten. Dabei hilft die Eindeutigkeit von  $T$ .

### Beispiel 22.3

Gesucht ist  $R^*$ , wobei  $R$  der Rechtsshift im  $\ell^2$  ist:

$$Rx = R(x_n) = (0, x_1, x_2, \dots)$$

Gelte nun  $\langle x, Ry \rangle = \langle R^*x, y \rangle$ . Setze  $R^*x =: z$ .

$$\begin{aligned} \langle x, Ry \rangle &= \sum_{i=1}^{\infty} \bar{x}_i \cdot (Ry)_i = \bar{x}_1 \cdot 0 + \bar{x}_2 \cdot y_1 + \bar{x}_3 \cdot y_2 + \dots \\ \langle R^*x, y \rangle &= \bar{z}_1 \cdot y_1 + \bar{z}_2 \cdot y_2 + \dots \end{aligned}$$

Man liest  $z_1 = x_2, z_2 = x_3$  ab. Offensichtlicherweise ist  $R^* = L$ .

### Definition und Satz 22.7

$\mathcal{B}(\mathcal{H})$  ist bezüglich der Operatornorm und bezüglich der Abbildung  $T \mapsto T^*$  eine  **$C^*$ -Algebra** mit Einselement. Das heißt:

1.  $\mathcal{B}(\mathcal{H})$  ist eine **Algebra**, also ein Vektorraum mit Multiplikation in sich und Distributivgesetz.
2.  $\mathcal{B}(\mathcal{H})$  ist eine  **$*$ -Algebra**, denn  $T \mapsto T^*$  ist eine **Involution**:

$$(c \cdot A + B)^* = \bar{c} \cdot A^* + B^* \quad \text{und} \quad (A \cdot B)^* = B^* \cdot A^* \quad \text{und} \quad A^{**} = A$$

3.  $\mathcal{B}(\mathcal{H})$  ist eine **normierte Algebra**, d.h.  $\mathcal{B}(\mathcal{H})$  ist ein normierter Raum mit

$$\|A \cdot B\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$$

4. Die Norm erfüllt die  **$C^*$ -Eigenschaft**  $\|A^* \cdot A\| = \|A\|^2$ .
5. Der Einheitsoperator  $I$  ist das Einselement der Algebra:  $I \cdot A = A \cdot I = A$ .

#### Bemerkung

$\mathcal{B}(\mathcal{H})$  ist ein Banachraum und deswegen sogar eine Banachalgebra.

### Beweis

Der Beweis der ersten Aussage ist einfach, denn  $A \cdot B$  ist beschränkt, wenn  $A$  und  $B$  beschränkt sind. Die dritte Aussage haben wir schon gezeigt, die fünfte ist offensichtlich.

2. beruht wesentlich auf der eindeutigen Bestimmtheit des adjungierten Operators. Exemplarisch wird die zweite Relation betrachtet. Einerseits gilt:

$$\langle \varphi, (A \cdot B)\psi \rangle = \langle (A \cdot B)^* \varphi, \psi \rangle$$

Man kann auch anders umformen:

$$\langle \varphi, A(B\psi) \rangle = \langle A^* \varphi, B\psi \rangle = \langle B^*(A^* \varphi), \psi \rangle = \langle (B^* \cdot A^*) \varphi, \psi \rangle$$

Beide Relationen gelten für alle möglichen  $\varphi$  und  $\psi$ , daraus folgt die Behauptung.

4. wird mithilfe der dritten Aussage bewiesen.

$$\|T^* \cdot T\| \leq \|T^*\| \cdot \|T\| = \|T\| \cdot \|T\|$$

Zu zeigen ist die umgekehrte Abschätzung:

$$\|T^* \cdot T\| = \sup_{\|\varphi\| \leq 1} \|T^* T \varphi\| = \sup_{\|\varphi\|, \|\psi\| \leq 1} |\langle T^* T \varphi, \psi \rangle| \geq \sup_{\|\varphi\| \leq 1} |\langle T^* T \varphi, \varphi \rangle| = \sup_{\|\varphi\| \leq 1} |\langle T \varphi, T \varphi \rangle| = \|T\|^2$$

■

### Lemma 22.8

Sei  $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$  invertierbar in  $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ , d.h.  $T^{-1} \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ . Dann ist auch  $T^*$  in  $\mathcal{B}(\mathcal{H})$  invertierbar mit:

$$(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$$

#### Beweis

Betrachte die Adjunktion des Einheitsoperators:

$$I = T \cdot T^{-1} = T^{-1} \cdot T \quad \Rightarrow \quad I^* = (T^{-1})^* \cdot T^* = T^* \cdot (T^{-1})^* \stackrel{!}{=} I$$

Hieraus folgt, dass  $(T^{-1})^*$  gerade das Inverse von  $T^*$  sein muss (was aber gerade die Behauptung ist), denn wenn man beide in beliebiger Reihenfolge multipliziert, kommt man auf das Einselement.

■

Häufig benutzt werden die beiden folgenden Sätze.

### Satz 22.9

Sei  $\mathcal{H}$  ein komplexer Hilbertraum und  $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$  mit  $\langle T\varphi, \varphi \rangle = 0$  für alle  $\varphi \in \mathcal{H}$ , dann ist  $T \equiv 0$ .

#### Bemerkung

Im reellen Hilbertraum gilt dieser Satz nicht. Das klassische Gegenbeispiel ist die Drehung um  $90^\circ$  im  $\mathbb{R}^2$ .

#### Beweis

Wir zeigen, dass aus der Forderung folgt, dass  $\langle T\varphi, \psi \rangle = 0$  für alle  $\varphi, \psi \in \mathcal{H}$  ist, dann ist offensichtlich  $T \equiv 0$ , denn  $T\varphi$  steht auf allen Vektoren des Raumes senkrecht, muss also der Nullvektor sein.

Seien  $\varphi, \psi \in \mathcal{H}$  beliebig. Laut Voraussetzung gilt  $\langle T(\varphi + \psi), (\varphi + \psi) \rangle = 0$ . Aufgelöst verbleibt:

$$\langle T\varphi, \psi \rangle + \langle T\psi, \varphi \rangle = 0 \quad (*)$$

Nun ersetze  $\psi$  durch  $i \cdot \psi$ :

$$\begin{aligned} \langle T\varphi, i \cdot \psi \rangle + \langle T(i \cdot \psi), \varphi \rangle &= 0 \\ i \cdot \langle T\varphi, \psi \rangle - i \cdot \langle T\psi, \varphi \rangle &= 0 \\ \langle T\varphi, \psi \rangle - \langle T\psi, \varphi \rangle &= 0 \end{aligned}$$

Diese Gleichung kann man zu  $(*)$  addieren, man erhält  $\langle T\varphi, \psi \rangle = 0$ . ■

### Folgerung 22.10

Sei  $\mathcal{H}$  komplex und  $A, B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$  mit  $\langle A\varphi, \varphi \rangle = \langle B\varphi, \varphi \rangle$  für alle  $\varphi \in \mathcal{H}$ , dann ist  $A = B$ .

### Satz 22.11

Sei  $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ . Dann gilt:

$$(\operatorname{im} A)^\perp = \operatorname{Kern} A^* \quad \text{und} \quad (\operatorname{im} A^*)^\perp = \operatorname{Kern} A$$

#### Bemerkung

Es ist wichtig, wo das orthogonale Komplement steht. Zum Beispiel gilt in Analogie zur ersten Aussage nicht immer  $\operatorname{im} A = (\operatorname{Kern} A^*)^\perp$ , sondern  $\overline{\operatorname{im} A} = (\operatorname{im} A)^\perp{}^\perp = (\operatorname{Kern} A^*)^\perp$ , denn  $\operatorname{im} A$  muss nicht abgeschlossen sein.

### Beweis

Die zweite Beziehung folgt aus der ersten mit der Ersetzung  $A \rightarrow A^*$ .

$$\begin{aligned} (\operatorname{im} A)^\perp &= \{\psi \in \mathcal{H} : \langle \psi, \chi \rangle = 0 \ \forall \chi \in \operatorname{im} A\} \\ &= \{\psi \in \mathcal{H} : \langle \psi, A\varphi \rangle = 0 \ \forall \varphi \in \mathcal{H}\} \\ &= \{\psi \in \mathcal{H} : \langle A^*\psi, \varphi \rangle = 0 \ \forall \varphi \in \mathcal{H}\} \\ &= \{\psi \in \mathcal{H} : A^*\psi = 0\} = \operatorname{Kern} A^* \end{aligned}$$

### Definition 22.12

Klassifikation beschränkter Operatoren

Ein Operator  $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$  heißt:

- **selbstadjungiert**, wenn  $A = A^*$  ist.
- **positiv**, wenn  $\langle A\varphi, \varphi \rangle \geq 0$  für alle  $\varphi \in \mathcal{H}$  ist. (Das impliziert, dass  $\langle A\varphi, \varphi \rangle$  immer reell ist!)
- **unitär**, wenn  $A^* = A^{-1}$  ist.
- **normal**, wenn  $A^* \cdot A = A \cdot A^*$  ist.
- **Projektion**, wenn  $A^2 = A$  ist.
- **Orthogonalprojektion**, wenn  $A^2 = A$  und  $A = A^*$  ist. (Orthogonalprojektionen sind selbstadjungierte Projektionen.)
- **isometrisch** oder **Isometrie**, wenn  $\|A\varphi\| = \|\varphi\|$  für alle  $\varphi \in \mathcal{H}$  ist..
- **partiell isometrisch**, wenn es eine Zerlegung  $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2$  gibt mit:  $\operatorname{Kern} A = \mathcal{H}_2$  und  $A : \mathcal{H}_1 \rightarrow \mathcal{H}$  ist isometrisch. (Das heißt, der Operator verschwindet auf  $\mathcal{H}_2$  und bildet den  $\mathcal{H}_1$  isometrisch ab.)

Dann heißt  $\mathcal{H}_1$  **Anfangsbereich** von  $A$  und  $\operatorname{im} A$  heißt **Endbereich** von  $A$ .

#### Bemerkung

1. Selbstadjungierte und unitäre Operatoren sind selbstverständlich normal.

2. Diagonaloperatoren sind stets normal. Sie sind sogar selbstadjungiert, wenn die  $a_i$  reell sind.
3. Der Rechtsshiftoperator ist isometrisch. Der Linksshiftoperator ist partiell isometrisch.

## Bemerkungen zur Terminologie der Physiker

Die Quantenphysik kennt Zustände, Observable und Zeitentwicklungen eines physikalischen Systems:

- Im einfachsten Falle sind Zustände Einheitsvektoren in einem Hilbertraum. Zum Beispiel betrachtet man im  $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R})$  Wellenfunktionen  $\varphi \in \mathcal{H}$  mit  $\|\varphi\| = 1$ .
- Observable entsprechen stets selbstadjungierten Operatoren im entsprechenden Hilbertraum.

Das Problem liegt darin, dass nahezu alle Operatoren in der Quantenmechanik unbeschränkt sind. Für diese Operatoren ist der Begriff des adjungierten Operators etwas komplizierter und es gibt Unterschiede zwischen den Begriffen des symmetrischen und des selbstadjungierten Operators, die es bei beschränkten Operatoren nicht gibt.

### Definition und Satz 22.13

Sei  $T$  ein auf  $\mathcal{D}(T)$  dicht definierter Operator (d.h.  $\mathcal{D}(T)$  liegt in  $\mathcal{H}$  dicht). Sei weiterhin:

$$\mathcal{D}^* = \{\psi \in \mathcal{H} : \varphi \mapsto \langle \psi, T\varphi \rangle \text{ ist stetig auf } \mathcal{D}(T)\}$$

Dann existiert ein eindeutig bestimmter linearer Operator  $T^*$  mit  $\mathcal{D}(T^*) = \mathcal{D}^*$  und  $\langle T^*\psi, \varphi \rangle = \langle \psi, T\varphi \rangle$  für alle  $\varphi \in \mathcal{D}(T)$  und  $\psi \in \mathcal{D}^* = \mathcal{D}(T^*)$ . Dann heißt  $T^*$  der zu  $T$  **adjungierte Operator**.

#### Bemerkung

Die in der Definition von  $\mathcal{D}^*$  verwendete Abbildung  $\varphi \mapsto \langle \psi, T\varphi \rangle$  ist auf jeden Fall linear.

#### Beweis

Wäre  $T$  beschränkt, so hätte man  $|\langle \psi, T\varphi \rangle| \leq \|\psi\| \cdot \|T\varphi\| \leq \|\psi\| \cdot \|T\| \cdot \|\varphi\|$ . Dann wäre obiges lineares Funktional für alle  $\varphi \in \mathcal{H}$  stetig, also wäre  $\mathcal{D}^* = \mathcal{H}$ .

Wäre  $T$  unbeschränkt, dann bedeutet die Stetigkeit von  $\varphi \mapsto \langle \psi, T\varphi \rangle$ , dass eine (von  $\varphi$  abhängige) Konstante  $C > 0$  gibt mit  $|\langle \psi, T\varphi \rangle| \leq C \cdot \|\varphi\|$ .

Da  $\mathcal{D}(T)$  in  $\mathcal{H}$  dicht liegt, kann das stetig lineare Funktional  $\varphi \mapsto \langle \psi, T\varphi \rangle$  stetig auf ganz  $\mathcal{H}$  fortgesetzt werden. Nach Satz von Riesz existiert also genau ein  $\psi^*$  mit  $\langle \psi^*, \varphi \rangle = \langle \psi, T\varphi \rangle$  für alle  $\varphi \in \mathcal{D}(T)$  und  $\psi \in \mathcal{D}^*$ . Setze  $T^*\psi = \psi^*$ .

Wie im beschränkten Fall zeigt man die Linearität und Eindeutigkeit. Bei der Eindeutigkeit wird die Dichtheit von  $\mathcal{D}(T)$  benutzt. (Denn die oben verwendete Fortsetzung ist, da  $\mathcal{D}(T)$  in  $\mathcal{H}$  dicht liegt, auch eindeutig.)



Es gibt einige Probleme:

- Im beschränkten Falle war natürlich  $\mathcal{D}(T^*) = \mathcal{H}$ . Im unbeschränkten Falle muss  $\mathcal{D}(T^*)$  keineswegs dicht in  $\mathcal{H}$  sein. Im schlimmsten Fall ist  $\mathcal{D}(T^*) = \{0\}$ .
- Ist  $\mathcal{D}(T^*)$  dicht in  $\mathcal{H}$ , dann existiert  $T^{**}$  auf  $\mathcal{D}(T^{**})$ . Es gilt zwar  $\mathcal{D}(T) \subset \mathcal{D}(T^{**})$  (somit ist  $\mathcal{D}(T^{**})$  stets dicht in  $\mathcal{H}$ ), aber es muss nicht  $\mathcal{D}(T) = \mathcal{D}(T^{**})$  und  $T = T^{**}$  sein.

Um die Begriffe im Folgenden genau auseinander zu halten, benötigen wir eine neue Bezeichnung: Ein linearer Operator  $T$  heißt **Fortsetzung** des linearen Operators  $S$  (welcher umgekehrt **Einschränkung** von  $T$  heißt), wenn  $\mathcal{D}(S) \subset \mathcal{D}(T)$  ist und  $S\varphi = T\varphi$  für alle  $\varphi \in \mathcal{D}(S)$  ist. Man schreibt  $S \subset T$ . Weiterhin nennt man einen Operator  $T$

- **hermitesch**, wenn  $\langle T\psi, \varphi \rangle = \langle \psi, T\varphi \rangle$  für alle  $\varphi, \psi \in \mathcal{D}(T)$  gilt. Hierbei muss  $\mathcal{D}(T)$  nicht dicht zu sein. Hermitesche Operatoren bezeichnet man auch also **formal selbstadjungiert**.
- **symmetrisch**, wenn  $\mathcal{D}(T)$  dicht und  $T$  hermitesch ist. Es ist also  $T \subset T^*$ .
- **selbstadjungiert**, wenn  $T = T^*$  (und folglich  $\mathcal{D}(T)$  dicht in  $\mathcal{H}$  liegt). Der Unterschied zum symmetrischen Operator besteht darin, dass  $\mathcal{D}(T) = \mathcal{D}(T^*)$  ist.

Die Begriff des hermiteschen, symmetrischen und selbstadjungierten Operators sind also verschieden, werden aber insbesondere in der Physik meist synonym verwendet, weil Physiker sich im Allgemeinen nicht um Definitionsbereiche kümmern.

## 22.3 Das Spektrum

Es soll der Begriff des Eigenwertes verallgemeinert werden. Dann ist das Spektrum eines Operatoren im endlichdimensionalen Falle gewissermaßen die Menge der Eigenwerte.

### Definition 22.14

Sei  $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ .

1. Unter der **Resolventenmenge** von  $T$  versteht man:

$$\varrho(T) := \{ \lambda \in \mathbb{C} : (T - \lambda \cdot I)^{-1} \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) \}$$

Das heißt,  $T - \lambda \cdot I$  bildet den  $\mathcal{H}$  bijektiv auf sich selbst ab. Der beschränkte Operator  $R_\lambda(T) := (T - \lambda \cdot I)^{-1}$  heißt **Resolvente** von  $T$  im Punkt  $\lambda$ .

2. Das **Spektrum** von  $T$  ist die Menge  $\sigma(T) := \mathbb{C} \setminus \varrho(T)$ .

#### Bemerkung

- Der Begriff des Spektrums wurde 1906 von Hilbert eingeführt.
- Beachte:  $\lambda \in \varrho(T)$  heißt, dass  $(T - \lambda \cdot I)^{-1}$  existiert und ist auf ganz  $\mathcal{H}$  stetig.
- In manchen Büchern sind die Elemente der Menge mit anderem Vorzeichen definiert:  $R_\lambda(T) = (\lambda \cdot I - T)^{-1}$

**Satz 22.15**

1. Für  $\lambda, \mu \in \varrho(T)$  kommutieren  $R_\lambda(T)$  und  $R_\mu(T)$  und es gilt:

$$R_\lambda(T) - R_\mu(T) = (\lambda - \mu) \cdot R_\lambda(T) \cdot R_\mu(T) \quad (22.3)$$

2. Für  $|\lambda| > \|T\|$  ist  $\lambda \in \varrho(T)$ , und es gilt die **Neumannsche Reihenentwicklung**:

$$R_\lambda(T) = (T - \lambda \cdot I)^{-1} = - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{T^k}{\lambda^{k+1}} \quad (22.4)$$

Ferner hat man die Abschätzung:

$$\|R_\lambda(T)\| = \|(T - \lambda \cdot I)^{(-1)}\| \leq \frac{1}{|\lambda| - \|T\|} \quad (22.5)$$

3. Für ein beliebiges  $\lambda_0 \in \varrho(T)$  gilt: Falls  $|\lambda - \lambda_0| < \|R_{\lambda_0}(T)\|^{-1}$  konvergiert die folgende Reihe:

$$R_{\lambda_0}(T) \cdot \left( I + \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda - \lambda_0)^k \cdot R_{\lambda_0}(T)^k \right) \quad (22.6)$$

Diese Reihe ist gleich der Resolvente  $R_\lambda(T)$ . Mithin gehören diese  $\lambda$  zu  $\varrho(T)$ . Also ist  $\varrho(T)$  offen.

**Beweis**

1. Vertauscht man in (22.3) das  $\lambda$  und das  $\mu$ , so entsteht:

$$R_\mu(T) - R_\lambda(T) = (\mu - \lambda) \cdot R_\mu(T) \cdot R_\lambda(T)$$

Zusammen mit (22.3) folgt  $R_\lambda(T) \cdot R_\mu(T) = R_\mu(T) \cdot R_\lambda(T)$ . Das heißt, die Kommutativität folgt sofort aus (22.3). Diese Formel zeigen wir durch identische Umformung: (Betrachte die Operatoren  $R_\lambda$  und  $R_\mu$ , die von einer Teilmenge des  $\mathcal{B}(\mathcal{H})$  in diesen abbilden.)

$$\begin{aligned} R_\lambda - R_\mu &= R_\lambda \cdot \underbrace{(T - \mu \cdot I) \cdot R_\mu}_{=I} - \underbrace{R_\lambda \cdot (T - \lambda \cdot I)}_{=I} \cdot R_\mu \\ &= R_\lambda \cdot T \cdot R_\mu - \mu \cdot R_\lambda \cdot R_\mu - R_\lambda \cdot T \cdot R_\mu + \lambda \cdot R_\lambda \cdot R_\mu = (\lambda - \mu) \cdot R_\lambda \cdot R_\mu \end{aligned}$$

2. Wir zeigen zu erst, dass die Reihe in (22.4) bezüglich der Operatornorm konvergiert. Betrachte dazu die Partialsummen  $-1/\lambda \cdot \sum_{k=0}^n T^k/\lambda^k$ , welche eine Cauchyfolge bilden. Zum Beweis benutze die Dreiecksungleichung: (o.E.d.A. sei  $n > m$ )

$$\left\| -\frac{1}{\lambda} \cdot \sum_{k=0}^n \frac{T^k}{\lambda^k} + \frac{1}{\lambda} \cdot \sum_{k=0}^m \frac{T^k}{\lambda^k} \right\| = \frac{1}{|\lambda|} \cdot \left\| \sum_{k=m+1}^n \frac{T^k}{\lambda^k} \right\| \leq \frac{1}{|\lambda|} \cdot \sum_{k=m+1}^n \frac{\|T^k\|}{|\lambda|^k} \leq \frac{1}{|\lambda|} \cdot \sum_{k=m+1}^n \left( \frac{\|T\|}{|\lambda|} \right)^k$$

Wegen  $\|T\| < |\lambda|$  steht hinten ein Teil der konvergenten geometrischen Reihe. Dieser Ausdruck konvergiert für große  $m$  und  $n$  gegen Null, also existiert ein Operator

$$R := -\frac{1}{\lambda} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{T^k}{\lambda^k} = -\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda} \cdot \sum_{k=0}^n \frac{T^k}{\lambda^k}$$

Es ist noch zu zeigen, dass  $R = R_\lambda(T)$  ist. Das sehen wir durch  $R \cdot (T - \lambda \cdot I) = I$ .

$$(T - \lambda \cdot I) \cdot R = (T - \lambda \cdot I) \cdot \left[ -\sum_{k=0}^{\infty} \frac{T^k}{\lambda^{k+1}} \right] = -\sum_{k=0}^{\infty} \frac{T^{k+1}}{\lambda^{k+1}} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{T^k}{\lambda^k} = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{T^k}{\lambda^k} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{T^k}{\lambda^k} = \frac{T^0}{\lambda^0} = I$$



Analog folgt  $R \cdot (T - \lambda \cdot I) = I$ . Es fehlt noch die Abschätzung (22.5):

$$\|(T_\lambda \cdot I)^{-1}\| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\|T\|^k}{|\lambda|^{k+1}} = \frac{1}{|\lambda|} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \left( \frac{\|T\|}{|\lambda|} \right)^k = \frac{1}{|\lambda|} \cdot \frac{1}{1 - \frac{\|T\|}{|\lambda|}} = \frac{1}{|\lambda| - \|T\|}$$

Wie kommt man nun auf (22.4)? Wir machen eine rein formale Rechnung, die man eigentlich so nicht aufschreiben dürfte:

$$(T - \lambda \cdot I)^{-1} = \frac{1}{T - \lambda \cdot I} = -\frac{1}{\lambda} \cdot \frac{1}{I - \frac{T}{\lambda}} = -\frac{1}{\lambda} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \left( \frac{T}{\lambda} \right)^k$$

3. Die Reihenentwicklung (22.6) erhält man durch ähnliche Manöver:

$$\begin{aligned} (T - \lambda \cdot I)^{-1} &= \frac{1}{T - \lambda \cdot I} = \frac{1}{T - \lambda_0 \cdot I + \lambda_0 \cdot I - \lambda \cdot I} = \frac{1}{T - \lambda_0 \cdot I} \cdot \frac{1}{1 - \underbrace{\frac{\lambda - \lambda_0}{T - \lambda_0 \cdot I}}_{\|\cdot\| < 1}} \\ &= R_{\lambda_0} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \left( \frac{\lambda - \lambda_0}{T - \lambda_0 \cdot I} \right)^k = R_{\lambda_0} \cdot \left[ I + \sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{\lambda - \lambda_0}{T - \lambda_0 \cdot I} \right)^k \right] \end{aligned}$$

Analog zu den Betrachtungen in 2. folgt auch hier, dass die Reihe in (22.6) konvergiert, denn  $|\lambda - \lambda_0| < \|R_{\lambda_0}\|^{-1}$  bedeutet, dass  $\|(\lambda - \lambda_0) \cdot R_{\lambda_0}\| < 1$  ist, also kann die geometrische Reihe angewendet werden. Wir haben also einen konvergenten Operator:

$$S := R_{\lambda_0} \cdot \left[ I + \sum_{k=1}^{\infty} \left( (\lambda - \lambda_0)^k \cdot R_{\lambda_0}^k \right) \right]$$

Wiederum wird  $(T - \lambda \cdot I) \cdot S = I$  gezeigt. (Analog folgt  $S \cdot (T - \lambda \cdot I) = I$ .)

$$\begin{aligned} (T - \lambda \cdot I) \cdot S &= (T - \lambda_0 \cdot I) \cdot S - (\lambda - \lambda_0) \cdot S \\ &= \left[ I + \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda - \lambda_0)^k \cdot R_{\lambda_0}^k \right] - (\lambda - \lambda_0) \cdot R_{\lambda_0} \cdot \left[ I + \sum_{k=1}^{\infty} ((\lambda - \lambda_0)^k \cdot R_{\lambda_0}^k) \right] \\ &= I + \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda - \lambda_0)^k \cdot R_{\lambda_0}^k - (\lambda - \lambda_0) \cdot R_{\lambda_0} - \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda - \lambda_0)^{k+1} \cdot R_{\lambda_0}^{k+1} = I \end{aligned}$$

Die Behauptung, dass  $\varrho(T)$  offen ist, folgt nach der Definition der offenen Menge.

■

#### Bemerkung

Die Gleichung (22.6) besagt, dass die Abbildung  $\lambda \mapsto R_\lambda(T)$  eine analytische Abbildung von  $\varrho(T) \subset \mathbb{C}$  in  $\mathcal{B}(\mathcal{H})$  ist. Das heißt, die Resolvente lässt sich um jeden Punkt  $\lambda_0$  in eine Potenzreihe mit Potenzen von  $\lambda - \lambda_0$  mit Koeffizienten aus  $\mathcal{B}(\mathcal{H})$  entwickeln.

#### Satz 22.16

Sei  $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ . Dann ist  $\sigma(T)$  eine nichtleere kompakte Teilmenge des  $\mathbb{C}$  mit:

$$\sigma(T) \subset \{\lambda : |\lambda| \leq \|T\|\} \quad (*)$$

#### Beweis

Da  $\varrho(T)$  offen ist, ist  $\sigma(T)$  abgeschlossen. Da alle  $\lambda$  mit  $|\lambda| > \|T\|$  zu  $\varrho(T)$  gehören, folgt (\*), also ist  $\sigma(T)$  auch beschränkt und somit kompakt. Der eigentlich schwierige Teil des Beweises ist  $\sigma(T) \neq \emptyset$ . Den Beweis dafür werden wir in der Funktionentheorie kennenlernen.

**Beispiel 22.4**

Es können durchaus Punkte aus  $\{\lambda : |\lambda| \leq \|T\|\}$  zu  $\varrho(T)$  gehören.

Sei  $T = I$  mit  $\|T\| = 1$ . Es ist  $(T - \lambda \cdot I)^{-1} = (I - \lambda \cdot I)^{-1} = I/(1 - \lambda)$ . Dieser Operator existiert für alle  $\lambda \neq 1$ , also ist  $\sigma(T) = \{1\}$ .

Bevor wir weitere Beispiele für Spektren behandeln, wird  $\sigma(T)$  noch in disjunkte Teilmengen zerlegt. Hier muss man mit den uneinheitlichen Bezeichnungen in der Literatur vorsichtig sein.

**Definition 22.17**

Für  $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$  wird  $\sigma(T)$  in drei disjunkte Teilmengen zerlegt:

- Das **Punktspektrum** (die Menge der Eigenwerte) ist gegeben durch:

$$\sigma_P(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \exists \varphi \in \mathcal{H}, \varphi \neq 0 : T\varphi = \lambda \cdot \varphi\} = \{\lambda \in \mathbb{C} : (T - \lambda \cdot I) \text{ ist nicht injektiv}\}$$

- Das **stetige Spektrum**  $\sigma_c(T)$  umfasst alle  $\lambda \in \mathbb{C}$ , für die  $(T - \lambda \cdot I)\mathcal{H}$  in  $\mathcal{H}$  dicht liegt und  $(T - \lambda \cdot I)^{-1}$  auf  $(T - \lambda \cdot I)\mathcal{H}$  existiert, aber unbeschränkt ist.
- Das **Residualspektrum**  $\sigma_r(T)$  enthält alle  $\lambda \in \mathbb{C}$ , für die  $\lambda \notin \sigma_P(T)$  ist (also ist  $T - \lambda \cdot I$  injektiv) und  $(T - \lambda \cdot I)\mathcal{H}$  nicht in  $\mathcal{H}$  dicht liegt.

## Bemerkung

Für  $\lambda \in \sigma_P(T)$  sind zwei Fälle möglich:  $(T - \lambda \cdot I)\mathcal{H}$  liegt dicht oder nicht dicht in  $\mathcal{H}$ .

Der folgende Satz erleichtert oft die Bestimmung des Spektrums von Operatoren.

**Satz 22.18**

Für  $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$  gilt:

1.  $\sigma(T^*) = \overline{\sigma(T)}$ , damit ist  $\varrho(T^*) = \overline{\varrho(T)}$ .
2.  $(R_\lambda(T))^* = R_{\bar{\lambda}}(T^*)$
3. Für  $\lambda \in \sigma_P(T)$  ist  $\bar{\lambda} \in \sigma_P(T^*) \cup \sigma_r(T^*)$ .

Für  $\lambda \in \sigma_r(T)$  ist  $\bar{\lambda} \in \sigma_P(T^*)$ .

Für  $\lambda \in \sigma_c(T)$  ist  $\bar{\lambda} \in \sigma_c(T^*)$ .

**Beweis**

Für die ersten beiden Aussagen benutze  $(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$ , wobei  $A$  gerade die Resolvente ist:

$$R_\lambda(T)^* = [(T - \lambda \cdot I)^{-1}]^* = [(T - \lambda \cdot I)^*]^{-1} = [T^* - \bar{\lambda} \cdot I]^{-1} = R_{\bar{\lambda}}(T^*)$$

Aus dieser Beziehung folgt 2. und daraus 1. Die Behauptungen in 3. folgen alle nach dem gleichen Schema; wir zeigen die erste.

$$\lambda \in \sigma_P(T) \Rightarrow \text{im}(T^* - \bar{\lambda} \cdot I)^\perp = \text{Kern}(T - \lambda \cdot I) \neq \{0\}$$

Folglich kann  $(T^* - \bar{\lambda} \cdot I)\mathcal{H}$  nicht dicht sein, also ist  $\bar{\lambda} \in \sigma_P(T^*) \cup \sigma_r(T^*)$ .



## Spektrum von Diagonaloperatoren

Für eine beschränkte Folge  $(a_n)$  ist der Diagonaloperator  $A$  auf  $\mathcal{H} = l^2$  gegeben durch:

$$Ax = (a_n \cdot x_n)$$

$\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$  ist der Wertebereich der Folge  $n \mapsto a_n$ . Stets gilt, dass  $A$  normal ist.  $A$  ist zudem selbstadjungiert, wenn der Wertebereich der Folge  $(a_n)$  reell ist. Das Spektrum von  $A$  ist genau  $\sigma(A) = \overline{\{a_n : n \in \mathbb{N}\}}$ .

## Spektrum von Shiftoperatoren

Der Rechtsshift  $U$  und der Linksshift  $U^*$  sind auf  $\mathcal{H} = l^2$  gegeben durch:

$$\begin{aligned} Ux &= (0, x_1, x_2, \dots) \\ U^*x &= (x_2, x_3, \dots) \end{aligned}$$

Wir benutzen den Satz 22.18. Sei  $K := \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leq 1\}$ . Wegen  $\|U\| = \|U^*\| = 1$  ist  $\sigma(U), \sigma(U^*) \subset K$ . Betrachte zuerst die Eigenwerte beider Operatoren:

$$Ux = \lambda \cdot x \quad \Rightarrow \quad (0, x_1, x_2, \dots) = (\lambda \cdot x_1, \lambda \cdot x_2, \dots)$$

$\lambda = 0$  ist kein Eigenwert, denn es wird ein von Null verschiedener Eigenvektor gefordert. Sei also  $\lambda \neq 0$ . Wir vergleichen die Folgeelemente nacheinander:

$$\begin{aligned} 0 &= \lambda \cdot x_1 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 0 \\ x_1 &= \lambda \cdot x_2 \quad \Rightarrow \quad x_2 = 0 \end{aligned}$$

Durch vollständige Induktion folgt, dass das Eigenwertproblem nur durch  $x = 0$  erfüllt wird. Es gibt also keine Eigenwerte:

$$\sigma_p(U) = \emptyset \quad (22.7)$$

Jetzt untersuchen wir  $U^*$ . Das Eigenwertproblem lautet hier:

$$U^*x = \lambda \cdot x \quad \Rightarrow \quad (x_2, x_3, \dots) = (\lambda \cdot x_1, \lambda \cdot x_2, \dots)$$

Wiederum vergleichen wir die Folgen elementweise:

$$x_2 = \lambda \cdot x_1 \quad \Rightarrow \quad x_3 = \lambda \cdot x_2 = \lambda^2 \cdot x_1 \quad \Rightarrow \quad \dots \Rightarrow \quad x_n = \lambda^{n-1} \cdot x_1 \quad \Rightarrow \quad x = x_1 \cdot (1, \lambda, \lambda^2, \dots)$$

Hierbei ist  $x_1$  beliebig. Damit  $x \in l^2$  liegt, muss  $\sum_{n=0}^{\infty} |\lambda^n|^2 < \infty$  sein. Es folgt, dass  $|\lambda| < 1$  sein muss! Das Punktspektrum  $\sigma_p(U^*)$  ist also:

$$\sigma_p(U^*) = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| < 1\} \quad (22.8)$$

Da das Spektrum im Einheitskreis liegen muss (wegen der oben erwähnten Beschränkung durch die Norm von  $U^*$ ) und ein Spektrum immer eine abgeschlossene Menge ist, ist das Spektrum von  $U^*$  (und wegen Satz 22.18.1 auch das von  $U$ ) die gesamte abgeschlossene Einheitsphäre:

$$\sigma(U^*) = K \quad \Rightarrow \quad \sigma(U) = K \quad (22.9)$$

Jetzt wenden wir die erste Implikation aus Satz 22.18.3 auf  $U^*$  an.

$$\{\lambda : |\lambda| < 1\} \subset \sigma_p(U^{**}) \cup \sigma_r(U^{**}) = \underbrace{\sigma_p(U) \cup \sigma_r(U)}_{=\emptyset} \Rightarrow \{\lambda : |\lambda| < 1\} \subset \sigma_r(U)$$

Es ist also:

$$\sigma_r(U) = \{\lambda : |\lambda| < 1\} \quad (22.10)$$

(22.7), (22.9) und (22.10) zeigen:

$$\sigma_c(U) = \partial K = \{\lambda : |\lambda| = 1\} \quad (22.11)$$

Mit Satz 22.18.3 folgt:

$$\sigma_c(U^*) = \partial K \quad (22.12)$$

Und daraus ergibt sich noch:

$$\sigma_r(U^*) = \emptyset \quad (22.13)$$

## Struktur des Spektrums im $\mathbb{C}$

Ein notwendiges und hinreichendes Kriterium ist die Kompaktheit des Spektrums (sogar für das Spektrum des Diagonaloperators im  $\ell^2$ ).

### Satz 22.19

Sei  $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$  selbstadjungiert,  $\lambda \in \mathbb{C}$ .

1.  $\lambda \in \varrho(T) \Leftrightarrow \exists C > 0 : \|(T - \lambda \cdot I)\varphi\| \geq C \cdot \|\varphi\| \quad \forall \varphi \in \mathcal{H} \quad (22.14)$
2. Weyl'sches Kriterium:  $\lambda \in \sigma(T) \Leftrightarrow \exists(\varphi_n), \|\varphi_n\| = 1 : \|(T - \lambda \cdot I)\varphi_n\| \rightarrow 0$
3.  $\sigma(T) \subset \mathbb{R}$  und Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten stehen zueinander orthogonal.
4.  $\sigma_r(T) = \emptyset$

### Beweis

4.  $\lambda$  ist ein Eigenwert, also reell. Angenommen, es wäre  $\lambda \in \sigma_r(T)$ . Mit 22.17.3 ist  $\bar{\lambda} \in \sigma_p(T^* = T)$ . Wegen  $\lambda = \bar{\lambda}$  ist das ein Widerspruch, weil dann  $\lambda$  sowohl im Residualspektrum als auch im Punktspektrum liegen würde.

1. Sei  $\lambda \in \varrho(T)$ , d.h.  $(T - \lambda \cdot I)^{-1}$  beschränkt:

$$\|(T - \lambda \cdot I)^{-1} \cdot \psi\| \leq D \cdot \|\psi\| \quad \forall \psi \in \mathcal{H}$$

Setze  $\psi := (T - \lambda \cdot I)\varphi$  mit beliebigem  $\varphi \in \mathcal{H}$ . Dann ist:

$$\|\varphi\| \leq D \cdot \|(T - \lambda \cdot I)\varphi\|$$

Also gilt (22.14) mit  $C = 1/D$ . Jetzt zeigen wir die Rückrichtung: Es gelte also (22.14). Folglich ist  $(T - \lambda \cdot I)$  injektiv, also existiert  $(T - \lambda \cdot I)^{-1}$ . Somit ist  $\lambda \notin \sigma_p(T)$  (nach Definition). Zudem ist  $\lambda \notin \sigma_r(T)$ , denn das Residualspektrum ist leer. Es ist also entweder  $\lambda \in \sigma_c(T)$  oder  $\lambda \in \varrho(T)$ . In beiden Fällen muss  $(T - \lambda \cdot I)\mathcal{H}$  dicht in  $\mathcal{H}$  sein. Wir zeigen jetzt, dass  $\text{im}(T - \lambda \cdot I) = (T - \lambda \cdot I)\mathcal{H}$

abgeschlossen ist (und damit gerade  $\mathcal{H}$  ist). (Denn dann wäre das Inverse auf ganz  $\mathcal{H}$  definiert. Setze dann in (22.14)  $\varphi = (T - \lambda \cdot I)^{-1}\psi$  mit beliebigem  $\psi \in \mathcal{H}$ . Daraus folgt, dass  $(T - \lambda \cdot I)^{-1}$  beschränkt ist. Also wäre  $\lambda \in \varrho(T)$ .)

Wir zeigen also nun, dass  $\text{im}(T - \lambda \cdot I)$  abgeschlossen ist. Sei  $\psi_n = (T - \lambda \cdot I)\varphi_n \in \text{im}(T - \lambda \cdot I)$  und  $\psi_n \rightarrow \psi \in \mathcal{H}$ .  $(\psi_n)$  konvergiert, ist also eine Cauchyfolge. Es ist also  $\lim_{m,n \rightarrow \infty} \|\psi_n - \psi_m\| = 0$ .

$$\|\psi_n - \psi_m\| = \|(T - \lambda \cdot I)(\varphi_n - \varphi_m)\| \geq (22.14) \geq C \cdot \|\varphi_n - \varphi_m\|$$

Daraus sehen wir, dass  $(\varphi_n)$  auch eine Cauchyfolge und (wegen der Vollständigkeit von  $\mathcal{H}$  auch konvergent ist). Der Grenzwert heiße  $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n = \varphi$ . Da  $(T - \lambda \cdot I)$  stetig ist, folgt  $(T - \lambda \cdot I)\varphi_n \rightarrow (T - \lambda \cdot I)\varphi$  oder  $\psi_n \rightarrow \psi = (T - \lambda \cdot I)\varphi$ . Damit liegt das  $\psi \in \text{im}(T - \lambda \cdot I)$ .

2. Als erstes zeigen wir die Rückrichtung. Die Bedingung des Weylschen Kriteriums impliziert, dass  $T - \lambda \cdot I$  kein stetiges Inverses haben kann: Wenn  $(T - \lambda \cdot I)^{-1}$  stetig wäre, dann würde gelten:

$$(T - \lambda \cdot I)\varphi_n \rightarrow 0 \quad \Rightarrow \quad (T - \lambda \cdot I)^{-1}[(T - \lambda \cdot I)\varphi_n] = \varphi_n \rightarrow 0$$

Das ist wegen  $\|\varphi_n\| = 1$  nicht möglich. Jetzt die Hinrichtung: Da  $\sigma(T) = \sigma_p(T) \cup \sigma_c(T)$  (beachte 22.19.4), kann man beide Teile getrennt betrachten:

- Sei  $\lambda \in \sigma_p(T)$ , also existiert ein  $\varphi \neq 0$  (o.E.d.A.  $\|\varphi\| = 1$ ) mit  $T\varphi = \lambda \cdot \varphi$ , also  $(T - \lambda \cdot I)\varphi = 0$ . Dann erfüllt  $(\varphi_n)$  mit  $\varphi_n = \varphi \forall n$  die Bedingung des Satzes.
- Sei  $\lambda \in \sigma_c(T)$ , folglich ist  $(T - \lambda \cdot I)^{-1}$  unbeschränkt. Es muss also eine Folge  $(\psi_n)$  mit  $\psi_n \in \mathcal{D}((T - \lambda \cdot I)^{-1})$  existieren, damit ist  $\psi_n =: (T - \lambda \cdot I)\varphi'_n \in \text{im}(T - \lambda \cdot I)$  und  $\|\psi_n\| = 1$ . Außerdem sei  $\|(T - \lambda \cdot I)^{-1}\psi_n\| \rightarrow \infty$ , also  $\|\varphi'_n\| \rightarrow \infty$ . Setze  $\varphi_n := \varphi'_n / \|\varphi'_n\|$ , damit  $\|\varphi_n\| = 1$  wird. Zudem gilt:

$$\|(T - \lambda \cdot I)\varphi_n\| = \frac{\|(T - \lambda \cdot I)\varphi'_n\|}{\|\varphi'_n\|} = \frac{\|\psi_n\|}{\|\varphi'_n\|} = \frac{1}{\|\varphi'_n\|} \rightarrow 0$$

3. Der zweite Teil der Aussage wird in der linearen Algebra gezeigt. Sei  $\lambda = \alpha + i\beta$  mit  $\beta \neq 0$ . Wir zeigen  $\lambda \in \varrho(T)$  mittels der ersten Aussage.

$$\begin{aligned} \|(T - \lambda \cdot I)\varphi\|^2 &= \|(T\varphi - \alpha\varphi) - i\beta\varphi\|^2 \\ &= \langle (T\varphi - \alpha\varphi) - i\beta\varphi, (T\varphi - \alpha\varphi) - i\beta\varphi \rangle \\ &= \|(T - \alpha \cdot I)\varphi\|^2 + \beta^2 \cdot \|\varphi\|^2 \geq \beta^2 \cdot \|\varphi\|^2 \end{aligned}$$

Hierbei fallen die gemischten Glieder weg, weil  $T$  selbstadjungiert ist. Wegen der letzten Abschätzung liegt  $\lambda \in \varrho(T)$ . Also ist  $\sigma(T) \subset \mathbb{R}$ .

■

### Satz 22.20

Sei  $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$  selbstadjungiert. Dann gehört  $\|T\|$  oder  $-\|T\|$  zu  $\sigma(T)$ .

### Beweis

Sei  $r = \|T\| = \sup_{\|\varphi\| \leq 1} \|T\varphi\|$ . Daraus erkennt man, dass eine Folge  $(\varphi_n)$  existiert mit:

$$\|\varphi_n\| = 1 \quad \text{und} \quad \|T\varphi_1\| \leq \|T\varphi_2\| \leq \dots \quad \text{und} \quad \|T\varphi_n\| \rightarrow r$$

Betrachte nun eine neue Folge: (beachte, dass  $T$  selbstadjungiert ist)

$$\begin{aligned}
 \|(T^2 - r^2 \cdot I)\varphi_n\|^2 &= \langle (T^2 - r^2 \cdot I)\varphi_n, (T^2 - r^2 \cdot I)\varphi_n \rangle = \|T^2\varphi_n\|^2 - 2r^2 \cdot \langle \varphi_n, T^2\varphi_n \rangle + r^4 \cdot \|\varphi_n\|^2 \\
 &= \|T(T\varphi_n)\|^2 - 2r^2 \cdot \|T\varphi_n\|^2 + r^4 \leq \|T\|^2 \cdot \|T\varphi_n\|^2 - 2r^2 \cdot \|T\varphi_n\|^2 + r^4 \\
 &\rightarrow \|T\|^2 \cdot \|T\|^2 - 2r^2 \cdot \|T\|^2 + r^4 = 0
 \end{aligned}$$

Nach Weyl ist  $r^2 \in \sigma(T^2)$ , d.h.  $\|T\|^2 \in \sigma(T^2)$ . Deswegen hat  $T^2 - r^2 \cdot I = (T - r \cdot I)(T + r \cdot I)$  kein beschränktes Inverses, also entweder  $T + r \cdot I$  oder  $T - r \cdot I$ . Somit ist entweder  $r \in \sigma(T)$  oder  $-r \in \sigma(T)$ . ■

---

## 23 Kompakte Operatoren

### 23.1 Definition. Erste Eigenschaften

Zur Wiederholung: Eine Teilmenge  $M \subset \mathcal{H}$  heißt **kompakt**, wenn jede Folge  $(\psi_n) \subset M$  eine Teilfolge  $(\psi_{n_k})$  besitzt, die gegen ein Element *aus*  $M$  konvergiert.  $M$  heißt **relativ kompakt**, wenn  $\overline{M}$  kompakt ist. Das heißt: Jede Folge  $(\psi_n) \subset M$  enthält eine Teilfolge  $(\psi_{n_k})$ , die *in*  $\mathcal{H}$  konvergiert.

#### Definition 23.1 Kompakter Operator

Ein linearer Operator  $T : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  heißt **kompakt**, wenn er beschränkte Mengen in relativ kompakte Mengen abbildet. Äquivalent ist folgendes Kriterium: Jede beschränkte Folge  $(\psi_n) \subset \mathcal{H}$  enthält eine Teilfolge  $(\psi_{n_k})$ , für die  $(T\psi_{n_k})$  konvergiert. (Sprich:  $(T\psi_n)$  enthält eine konvergente Teilfolge.) Mit  $\mathcal{K}(\mathcal{H})$  sei die Menge der kompakten Operatoren auf  $\mathcal{H}$  bezeichnet.

#### Bemerkung

In  $\mathbb{C}^n$  bzw.  $\mathbb{R}^n$  sind kompakte Mengen dasselbe wie beschränkte und abgeschlossene Mengen. Im unendlichdimensionalen Hilbertraum gilt nur, dass kompakte Mengen immer beschränkt und abgeschlossen sind. Die andere Richtung der Implikation gilt nicht. (Ein sehr wichtiges Beispiel ist die Einheitskugel.)

#### Lemma 23.2

Kompakte Operatoren sind immer beschränkt:  $\mathcal{K}(\mathcal{H}) \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$ .

#### Beweis

Relativ kompakte Mengen sind stets beschränkt, denn: Wenn  $\mathcal{N}$  relativ kompakt, dann folgt, dass  $\overline{\mathcal{N}}$  kompakt und damit beschränkt ist. Deswegen ist  $\mathcal{N} \subset \overline{\mathcal{N}}$  auch beschränkt. Sei nun also  $M \subset \mathcal{H}$  beschränkt. Daraus folgt, dass  $TM$  relativ kompakt und damit beschränkt ist. Es ist also  $T$  beschränkt. ■

#### Lemma 23.3 Vereinfachter Beweis der Kompaktheit

Ein Operator  $T$  ist genau dann kompakt, wenn das Bild der Einheitskugel relativ kompakt ist.

#### Beweis

Die Bedingung ist notwendig, da da die Einheitskugel beschränkt ist. Ist die Bedingung auch hinreichend? Sei  $M$  eine beliebige beschränkte Menge. Dann existiert ein  $C > 0$  mit  $M \subset C \cdot \mathcal{K}$ . Folglich ist  $TM \subset T(C \cdot \mathcal{K}) = C \cdot T\mathcal{K}$ . Diese Menge ist relativ kompakt. Da Teilmengen relativ kompakter Mengen relativ kompakt sind, ist auch  $TM$  relativ kompakt. ■

**Definition und Satz 23.4**

Die kompakten Operatoren  $\mathcal{K}(\mathcal{H})$  bilden ein abgeschlossenes zweiseitiges **\*-Ideal** in  $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ . Das heißt:

1.  $\mathcal{K}(\mathcal{H})$  ist ein Vektorraum.
2. Abgeschlossenheit: Eine (gemäß der Operatornorm in  $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ ) konvergente Folge  $(T_n) \subset \mathcal{K}(\mathcal{H})$  konvergiert gegen ein  $T \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$ .
3. **Idealeigenschaft:** Für  $T \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$  und  $S \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$  sind  $TS, ST \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$ .
4. **Sterneigenschaft:** Für  $T \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$  ist  $T^* \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$ .
5. Zusätzlich gilt: Die Menge  $\mathcal{F}(\mathcal{H})$  der endlichdimensionalen Operatoren (sprich: Operatoren mit endlichdimensionalem Bild) ist eine Teilmenge von  $\mathcal{K}(\mathcal{H})$ , und liegt bezüglich der Operatornorm in  $\mathcal{K}(\mathcal{H})$  dicht:  $\overline{\mathcal{F}(\mathcal{H})}^{\|\cdot\|} = \mathcal{K}(\mathcal{H})$ .

**Bemerkung**

Aus 23.4.1 und 23.4.2 folgt, dass  $\mathcal{K}(\mathcal{H})$  (als abgeschlossener Teilraum eines Hilbertraumes) ein Banachraum ist. Wegen 23.4.3 ist  $\mathcal{K}(\mathcal{H})$  zudem eine Algebra.

**Beweis**

Nur die zweite Aussage ist etwas umfangreich.

1. Seien  $S$  und  $T$  aus  $\mathcal{K}(\mathcal{H})$ ,  $c \in \mathbb{C}$  und  $(\psi_n) \subset \mathcal{H}$  eine beliebige beschränkte Folge. Zu zeigen ist, dass es eine Teilfolge  $(\psi_{n_k})$  gibt, für die  $(c \cdot S + T)(\psi_{n_k})$  konvergiert. Weil  $S$  kompakt ist, existiert zunächst eine Teilfolge  $(\psi_{n_l}) =: (\varphi_l)$ , für die  $(c \cdot S\varphi_l)$  konvergiert. Da  $(\varphi_l)$  auch beschränkt und  $T$  kompakt ist, existiert eine Teilfolge  $(\varphi_{l_j})$  (welche auch eine Teilfolge von  $(\psi_n)$  ist!), für die  $(T\varphi_{l_j})$  konvergiert. Als Teilfolge einer konvergenten Folge konvergiert auch  $(cS\varphi_{l_j})$  und damit  $(c \cdot S + T)(\varphi_{l_j})$ . Somit ist  $c \cdot S + T$  kompakt.
2. Typisches **Diagonalargument:** Sei  $(\psi_n)$  eine beschränkte Folge mit (o.E.d.A.)  $\|\psi_n\| \leq 1$ . Da  $T_1$  kompakt ist, existiert eine Teilfolge  $(\psi_n^{(1)})$  von  $(\psi_n)$ , für die  $(T_1\psi_n^{(1)})$  konvergiert. Da  $(\psi_n^{(1)})$  beschränkt und  $T_2$  kompakt ist, existiert eine Teilfolge  $(\psi_n^{(2)})$  von  $(\psi_n^{(1)})$ , deren Bild bezüglich  $T_2$  konvergiert. Dieses Verfahren wird fortgesetzt. Man erhält ein Schema von Folgen(elementen):

$$\begin{array}{cccc}
 \psi_1^{(1)} & \psi_2^{(1)} & \psi_3^{(1)} & \dots \\
 \psi_1^{(2)} & \psi_2^{(2)} & \psi_3^{(2)} & \dots \\
 \psi_1^{(3)} & \psi_2^{(3)} & \psi_3^{(3)} & \dots \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \ddots
 \end{array}$$

Dieses Schema hat folgende Eigenschaft: Alle Folgen (in diesem Schema Zeilen) sind Teilfolgen von  $(\psi_n)$  und für  $k > l$  ist  $(\psi_n^{(k)})$  eine Teilfolge von  $(\psi_n^{(l)})$ . Betrachte nun die Diagonalfolge  $(\varphi_n) := \psi_n^{(n)}$  mit den Eigenschaften:

- (a)  $(\varphi_n)$  ist eine Teilfolge von  $(\psi_n)$ .
- (b) Für alle  $l$  ist  $(\varphi_n)$  ab dem Index  $l$  eine Teilfolge von  $(\psi_n^{(l)})$ .
- (c) Für alle  $r$  konvergiert die Folge  $(T_r\varphi_n)$ .

Zu zeigen ist, dass  $(T\varphi_n)$  konvergiert. Es gilt  $T_n \xrightarrow{\|\cdot\|} T$ . Sei also  $\varepsilon > 0$  gegeben und  $m$  so groß, dass  $\|T - T_m\| < \varepsilon/3$ . Wähle nun  $k_0$  so groß, dass  $\|T_m\varphi_k - T_m\varphi_l\| < \varepsilon/3$  für alle  $k, l > k_0$  (das ist gerade das Cauchy Kriterium).



Beachtet man nun  $\|\varphi_n\| \leq 1$  (denn es war  $\|\psi_n\| \leq 1$  für alle  $n$ ), dann gilt für alle  $k, l > k_0$ :

$$\begin{aligned} \|T\varphi_k - T\varphi_l\| &= \|(T - T_m)\varphi_k + (T_m\varphi_k - T_m\varphi_l) + (T_m - T)\varphi_l\| \\ &\leq \|(T - T_m)\varphi_k\| + \|T_m\varphi_k - T_m\varphi_l\| + \|(T_m - T)\varphi_l\| \\ &\leq \|T - T_m\| + \|T_m\varphi_k - T_m\varphi_l\| + \|T_m - T\| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon \end{aligned}$$

Damit ist  $(T\varphi_n)$  eine Cauchyfolge, also (weil  $\mathcal{H}$  vollständig ist) konvergent. Somit ist  $T$  kompakt.

3. Sei  $S \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ ,  $T \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$  und  $M \in \mathcal{H}$  beschränkt. Dann ist  $TM$  relativ kompakt und, weil  $S$  stetig ist, ist  $S(TM)$  auch relativ kompakt (in Analogie zum bereits bekannten Satz, dass stetige Bilder kompakter Mengen wieder kompakt sind).  $TS$  ist kompakt, weil aus der Beschränktheit von  $M$  folgt, dass  $SM$  beschränkt und damit  $T(SM)$  relativ kompakt ist.
4. Sei  $T \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$  und folglich  $T^* \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ , dann ist  $TT^*$  kompakt. Sei  $(\psi_n)$  eine beliebige beschränkte Folge, etwa  $\|\psi_n\| \leq C$ . Dann existiert eine konvergente Teilfolge  $(\psi_{n_k})$ . Diese Teilfolge ist insbesondere eine Cauchyfolge. Nun zeigen wir, dass  $(T^*\psi_{n_k})$  auch eine Cauchyfolge ist. Benutze die Cauchy-Schwarz-Ungleichung:

$$\begin{aligned} \|T^*\psi_{n_k} - T^*\psi_{n_l}\|^2 &= \langle T^*\psi_{n_k} - T^*\psi_{n_l}, T^*\psi_{n_k} - T^*\psi_{n_l} \rangle \\ &= \langle \psi_{n_k} - \psi_{n_l}, T^*T(\psi_{n_k} - \psi_{n_l}) \rangle \\ &\leq \|\psi_{n_k} - \psi_{n_l}\| \cdot \|T^*T(\psi_{n_k} - \psi_{n_l})\| \\ &\leq (\|\psi_{n_k}\| + \|\psi_{n_l}\|) \cdot \|T^*T(\psi_{n_k} - \psi_{n_l})\| \\ &\leq 2C \cdot \|T^*T(\psi_{n_k} - \psi_{n_l})\| \rightarrow 0 \quad (k, l \rightarrow \infty) \end{aligned}$$

5. Sei  $F \subset \mathcal{F}(\mathcal{H})$  und  $M \subset \mathcal{H}$  beschränkt. Damit ist  $FM$  eine beschränkte Teilmenge eines endlich-dimensionalen Raumes, nämlich des Wertebereiches von  $F$ , also relativ kompakt. Die Dichtheit wird aus Zeitgründen nicht bewiesen.

■

## Beispiele kompakter Operatoren

1. endlichdimensionale Operatoren  $T \in \mathcal{F}(\mathcal{H})$  (siehe Satz 22.4)
2. Ein Diagonaloperator  $A = \text{diag}(a_n)$  (etwa im  $l^2$ ) ist genau dann kompakt, wenn  $a_n \rightarrow 0$  geht.
3. **Integraloperatoren:** Auf  $\mathcal{H} = L^2[a, b]$  ist der Operator  $K$  gegeben durch

$$(Kf)(x) := \int_a^b k(x, y) \cdot f(y) \, dy$$

mit einer Funktion  $k$ , für die  $\int_a^b \int_a^b |k(x, y)|^2 \, dx dy < \infty$  gilt. Diese Funktion wird **Kern** genannt.

## 23.2 Spektraltheorie kompakter, selbstadjungierter Operatoren

### Satz 23.5

Sei  $T = T^* \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$ . Dann gilt:

1.  $0 \in \sigma(T)$
2. Für  $\lambda \in \sigma(T)$  mit  $\lambda \neq 0$  ist  $\lambda$  ein Eigenwert endlicher Vielfachheit.
3. Ist  $T$  nicht endlichdimensional, dann bilden die Eigenwerte eine Nullfolge.

### Beweis

1. Wäre  $0 \notin \sigma(T)$ , dann wäre  $T^{-1} \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ . Also wäre  $I = T \cdot T^{-1} \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$ . Das ist ein Widerspruch, denn der Einheitsoperator im unendlichdimensionalen Hilbertraum ist nicht kompakt, weil die (beschränkte) Einheitskugel auf die (nicht relativ kompakte) Einheitskugel abgebildet wird.
2. Sei  $0 \neq \lambda \in \sigma(T)$ . Nach dem Weyl-Kriterium existiert eine Folge  $(\varphi_n)$  mit  $\|\varphi_n\| = 1$  und  $(T - \lambda \cdot I)\varphi_n \rightarrow 0$ . Weil  $T$  kompakt ist, enthält  $(T\varphi_n)$  eine konvergente Teilfolge. Wir nehmen o.E.d.A. an, dass  $(T\varphi_n)$  selbst konvergiert. Folglich konvergiert auch  $((T - \lambda \cdot I)\varphi_n)$ . In der Darstellung

$$\varphi_n = \frac{1}{\lambda} \cdot [T\varphi_n - (T - \lambda \cdot I)\varphi_n]$$

sieht man, dass auch  $(\varphi_n)$  konvergiert. Wegen  $(T - \lambda \cdot I)\varphi_n \rightarrow 0$  ist:

$$\lim \varphi_n = \varphi = \lim \left( \frac{1}{\lambda} \cdot T\varphi_n \right) \quad \text{und} \quad \lim \|\varphi_n\| = \|\varphi\| = \lim \left\| \frac{1}{\lambda} \cdot T\varphi_n \right\|$$

Da  $T$  stetig ist, folgt  $T\varphi_n \rightarrow T\varphi = \lambda\varphi$ , das heißt  $\lambda \in \sigma_p(T)$ . Zu zeigen ist noch, dass  $\lambda$  eine endliche Vielfachheit hat. Angenommen,  $\lambda$  hätte eine unendliche Vielfachheit, d.h.  $\text{Kern}(T - \lambda \cdot I)$  ist unendlichdimensional. Auf  $\text{Kern}(T - \lambda \cdot I)$  eingeschränkt ist  $T = \lambda \cdot I$ .  $T$  ist kompakt, aber  $\lambda \cdot I$  ist (im Unendlichdimensionalen) nicht kompakt. Das ist ein Widerspruch.

3.  $T$  habe die Eigenwerte  $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ . Dann gilt:

$$T = \lambda_1 \cdot P_1 + \dots + \lambda_m \cdot P_m$$

Hierbei ist  $P_i$  die Projektion auf den Eigenraum zu  $\lambda_i$ . Zum Beweis: Sei  $\mathcal{H}_1 = \text{lin} \{P_1\mathcal{H}, \dots, P_m\mathcal{H}\} = P_1\mathcal{H} \oplus \dots \oplus P_m\mathcal{H}$  und  $\mathcal{H}_2 := \mathcal{H}_1^\perp$ , also  $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2$ . Wegen  $T = T^*$  gilt nicht nur  $T\mathcal{H}_1 \in \mathcal{H}_1$ , sondern auch  $T\mathcal{H}_2 \in \mathcal{H}_2$ . (Denn: Sei  $\varphi \in \mathcal{H}_1$  und  $\psi \in \mathcal{H}_2$ , dann ist  $\langle \varphi, T\psi \rangle = \langle T\varphi, \psi \rangle = 0$  wegen  $T\varphi \in \mathcal{H}_1$ .) Dann ist  $S := T|_{\mathcal{H}_2}$  auch ein selbstadjungierter kompakter Operator.  $S$  kann als Eigenwert nur 0 haben, also ist  $\|S\| = 0$  (nach Satz 22.20). Somit ist  $S = T|_{\mathcal{H}_2} = 0$ . Damit ist die Darstellung  $T = \lambda_1 \cdot P_1 + \dots + \lambda_m \cdot P_m$  bewiesen, denn auf  $\mathcal{H}_1$  gilt diese Darstellung natürlich, und auf  $\mathcal{H}_2$  verschwinden beide Seiten.

Sei nun  $\dim \mathcal{H} = \infty$ . Zu zeigen ist, dass 0 der einzige Häufungspunkt des Spektrums ist. Angenommen,  $\lambda \in \sigma(T)$  mit  $\lambda \neq 0$  wäre ein Häufungspunkt von  $\sigma(T)$ . Das heißt, es existiert eine Folge  $(\lambda_n) \subset \sigma(T)$  mit  $\lambda_n \rightarrow \lambda$ . Es existiert also wiederum ein Orthonormalsystem  $(\varphi_n)$  mit  $T\varphi_n = \lambda_n \cdot \varphi_n$ . Da  $T$  kompakt ist, existiert eine Teilfolge  $(\varphi_{n_k})$ , für die  $(T\varphi_{n_k})$  konvergiert. Nun gilt aber auch  $\lambda_{n_k} \rightarrow \lambda \neq 0$ , somit ist auch  $T\varphi_{n_k}/\lambda_{n_k}$  konvergent.

$$\frac{T\varphi_{n_k}}{\lambda_{n_k}} = \frac{\lambda_{n_k} \cdot \varphi_{n_k}}{\lambda_{n_k}} = \varphi_{n_k}$$

Das ist ein Widerspruch, denn  $(\varphi_{n_k})$  ist natürlich nicht konvergent. Somit hat  $T$  nur den Häufungspunkt  $0 \in \sigma(T)$  und die Folge der Eigenwerte ist abzählbar (eine überabzählbare Menge

kann nicht nur einen Häufungspunkt haben!). Also konvergiert die Folge der Eigenwerte gegen Null.

**Bemerkung**

Im Beweis wurde nirgends benutzt, dass  $\mathcal{H}$  separabel ist. Aus dem Beweis sieht man: Wenn  $T = T^*$  ist, dann hat  $T$  abzählbar viele Eigenwerte mit endlicher Vielfachheit. Somit wird im  $T$  auch nur von einem abzählbaren Orthonormalsystem aufgespannt, ist also separabel.

**Theorem 23.6** Spektraltheorem für selbstadjungierte kompakte Operatoren

Sei  $T \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$  selbstadjungiert, mit den von Null verschiedenen Eigenwerten  $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots\}$  (o.E.d.A. ist  $|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \dots$ ). Ferner sei  $P_i$  die Orthoprojektion auf den Eigenraum zu  $\lambda_i$ . Dann gilt:

$$T = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j \cdot P_j \quad (23.1)$$

Falls im  $T$  unendlichdimensional ist, konvergiert (23.1) bezüglich der Operatornorm.

**Beweis**

Der Beweis des ersten Teil verläuft analog zum Beweis zu Satz 23.5.3: Sei also  $\mathcal{H}_1 := \overline{\text{lin}\{P_i\mathcal{H} : i \in \mathbb{N}\}}$  und  $\mathcal{H}_2 := \mathcal{H}_1^\perp$ .  $P$  ist eine Orthoprojektion von  $\mathcal{H}$  auf  $\mathcal{H}_2$ . Dann gilt:

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2 \quad \text{und} \quad T\mathcal{H}_1 \subset \mathcal{H}_1$$

Für die rechte Aussage zeigt man zuerst einfach, dass  $T \text{lin}\{P_i\mathcal{H}\} \subset \text{lin}\{P_i\mathcal{H}\}$  gilt. Auch einfach beweisbar ist  $T\mathcal{H}_2 \subset \mathcal{H}_2$  und  $T|_{\mathcal{H}_2} = 0$ . Dann gilt:

$$I = P + \sum_i P_i$$

Die  $P_i$  sind dabei paarweise orthogonal. Wichtig ist, dass die Summe nicht im Sinne der Operatornorm konvergiert, sondern nur punktweise, d.h. für alle  $\varphi \in \mathcal{H}$  gilt:

$$\varphi = P\varphi + \sum_i P_i\varphi \quad \Rightarrow \quad T\varphi = \underbrace{TP\varphi}_{\in \mathcal{H}_2} + \underbrace{\sum_i TP_i\varphi}_{\in \mathcal{H}_1} = TP\varphi + \sum_i \lambda_i \cdot P_i\varphi$$

Wegen  $T|_{\mathcal{H}_2} = 0$  verschwindet der erste Term. Damit gilt (23.1) punktweise für jedes  $\varphi \in \mathcal{H}$ . Es muss noch gezeigt werden, dass die Operatorreihe gleichmäßig konvergiert. Sei nun  $\varphi \in \mathcal{H}$  mit  $\|\varphi\| \leq 1$  beliebig. Dann gilt, weil die  $\lambda_i \cdot P_i\varphi$  paarweise orthogonal sind:

$$\left\| \left( T - \sum_{i=1}^m \lambda_i \cdot P_i \right) \varphi \right\|^2 = \left\| \sum_{i=m+1}^{\infty} \lambda_i \cdot P_i\varphi \right\|^2 = \sum_{i=m+1}^{\infty} |\lambda_i|^2 \cdot \|P_i\varphi\|^2$$

Man beachte  $|\lambda_i| \geq |\lambda_j|$  für alle  $i \geq j$ :

$$\left\| \left( T - \sum_{i=1}^m \lambda_i \cdot P_i \right) \varphi \right\|^2 \leq |\lambda_{m+1}|^2 \cdot \sum_{i=m+1}^{\infty} \|P_i\varphi\|^2 \leq |\lambda_{m+1}|^2 \cdot \|\varphi\|^2 \leq |\lambda_{m+1}|^2$$

Also konvergiert  $\|(T - \sum_{i=1}^m \lambda_i \cdot P_i) \varphi\|^2 \rightarrow 0$  für  $m \rightarrow \infty$ . Da  $\varphi$  mit  $\|\varphi\| \leq 1$  beliebig war, konvergiert somit  $\|T - \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i \cdot P_i\| \rightarrow 0$  für  $m \rightarrow \infty$ .

**Folgerung 23.7** Hilbert-Schmidtscher Entwicklungssatz

Sei  $T \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$  selbstadjungiert. Dann existiert eine reelle Folge  $(\mu_j)$  (endlich oder Nullfolge) und ein Orthonormalsystem  $(\varphi_j) \subset \mathcal{H}$  mit:

$$T\varphi = \sum_i \mu_i \cdot \langle \varphi_i, \varphi \rangle \cdot \varphi_i \quad \forall \varphi \in \mathcal{H} \quad (23.2)$$

In Bra-Ket-Schreibweise lautet die Formel:  $T = \sum_i \mu_i \cdot |\varphi_i\rangle \langle \varphi_i|$ .

**Beweis**

Keine neue Idee, nur geschicktes Aufschreiben: Sei  $\dim(P_j\mathcal{H}) =: k_j$  und  $(\psi_1^j, \dots, \psi_{k_j}^j)$  eine Orthonormalbasis in  $P_j\mathcal{H}$ . Setze  $\mu_1^j = \dots = \mu_{k_j}^j := \lambda_j$ . Dann gilt also:

$$T\varphi = \sum_j \lambda_j \cdot P_j\varphi = \sum_j \lambda_j \cdot \sum_{k=1}^{k_j} \langle \psi_k^j, P_j\varphi \rangle \cdot \psi_k^j$$

Beachte  $\langle \psi_k^j, P_i\varphi \rangle = 0$  für alle  $i \neq j$ . Damit verbleibt:

$$T\varphi = \sum_j \lambda_j \cdot \sum_{k=1}^{k_j} \langle \psi_k^j, \varphi \rangle \cdot \psi_k^j = \sum_{j,k} \mu_k^j \cdot \langle \psi_k^j, \varphi \rangle \cdot \psi_k^j$$

Jetzt werden die  $\mu_k^j$  und gleichzeitig die  $\psi_k^j$  durchnummeriert. Es entstehen die Folgen  $(\mu_j)$  und  $(\varphi_j)$ . Damit enthält die Formel nur noch eine Summe, die dann genau die Struktur von (23.2) annimmt.

## 23.3 Der allgemeine Zustandsbegriff

Um ein physikalisches System zu beschreiben benötigt man mathematische Objekte/Begriffe zu Beschreibung von

- *Zustände*, in denen sich das System befinden kann
- *Observablen*, das heißt die beobachtbaren Größen des Systems
- *Zeitentwicklung* des Systems
- *Symmetrien* des Systems – Hier spielen Symmetriegruppen eine große Rolle.

In der Quantenmechanik hat sich das folgende mathematische Modell bewährt. Observable entsprechen selbstadjungierten (meist unbeschränkten) Operatoren in einem geeigneten (das heißt: dem System möglichst gut angepassten) Hilbertraum. In der Regel ist dies ein  $L^2(\mathbb{R}^n)$ , wobei das  $n$  etwas mit der Teilchenanzahl des Systems zu tun hat. Die Quantenmechanik betrachtet immer Systeme mit endlich vielen Freiheitsgraden. In der Physik hat man: Der Observablen  $A$  wird der Operator  $\hat{A}$  zugeordnet. (Oft verwendet man auch  $\overline{A}$ , aber das ist bei uns schon das Symbol für den Abschluss.) In der Mathematik hat man nur ein Symbol  $A$ .

Die einfachsten Zustände sind die sogenannten *Vektorzustände*; diese werden repräsentiert durch einen Einheitsvektor  $\varphi \in \mathcal{H}$  ( $\|\varphi\| = 1$ ). Der Zusammenhang zwischen Zuständen und Observablen ist gegeben durch den *Erwartungswert* der Observablen  $A = A^*$  im Zustand  $\varphi$ , der gegeben ist durch  $\langle \varphi, A\varphi \rangle$ .

Seien  $\varphi$  und  $\psi$  zwei Zustände. Dann kann man ein „Gemisch“ aus diesen Zuständen betrachten. Dann befindet sich das System mit der Wahrscheinlichkeit  $p$  im Zustand  $\varphi$  und mit der Wahrscheinlichkeit  $1 - p$  im Zustand  $\psi$ . Dann ist der Erwartungswert von  $A$  in diesem gemischten Zustand gegeben durch  $p \cdot \langle \varphi, A\varphi \rangle + (1 - p) \cdot \langle \psi, A\psi \rangle$ . Das Problem hierbei ist, dass es im Allgemeinen kein  $\chi \in \mathcal{H}$  mit  $\|\chi\| = 1$  (also keinen Vektorzustand) gibt, für den  $A$  diesen Erwartungswert annimmt.

Wie sollen also gemischte Zustände mathematisch beschrieben werden? Dazu benötigt man sogenannte *Dichtematrizen* (besser: *Dichteoperatoren*).

### Definition 23.8

Ein positiver selbstadjungierter kompakter Operator  $T$  heißt **nuklear** oder **Spurklasse-Operator**, wenn für eine Orthonormalbasis  $(\varphi_n)$  von  $\mathcal{H}$  gilt:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \langle \varphi_k, T\varphi_k \rangle < \infty$$

$T$  heißt **Dichteoperator** im Falle  $\sum_{k=1}^{\infty} \langle \varphi_k, T\varphi_k \rangle = 1$ .

#### Bemerkung

1. Den Begriff des Spurklasse-Operators kann man auch allgemeiner definieren, ohne einen positiven selbstadjungierten Operator zu fordern.
2. Im nächsten Satz werden wir sehen, dass der Begriff Dichteoperator korrekt definiert ist, also unabhängig von der Orthonormalbasis.

### Satz 23.9

1. Sei  $T \geq 0$  ein Spurklasseoperator. Dann gilt:  $\sum_k \langle \psi_k, T\psi_k \rangle$  hat für jede Orthonormalbasis  $(\psi_n)$  den gleichen Wert. Nimmt man als Orthonormalbasis die Basis  $(\varphi_n)$  der Eigenvektoren von  $T$  ( $T\varphi_n = \lambda_n \cdot \varphi_n$ ), dann gilt also:

$$\sum_k \lambda_k < \infty$$

Man nennt diesen Ausdruck die **Spur** von  $T$  und schreibt  $\text{Tr } T := \sum_k \lambda_k$ .

2. Sei  $T \geq 0$  ein Spurklasseoperator und  $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ . Dann ist  $AT$  und  $TA$  auch ein Spurklasseoperator, aber im Allgemeinen nicht größer Null. Außerdem hat

$$\text{Tr } AT = \sum_k \langle \psi_k, AT\psi_k \rangle = \text{Tr } TA$$

für jede Orthonormalbasis  $(\psi_k)$  den gleichen Wert. Insbesondere gilt:

$$\text{Tr } AT = \sum_k \lambda_k \langle \varphi_k, A\varphi_k \rangle$$

## Bemerkung

1. Die Dichteoperatoren sind also Operatoren  $T$  mit den Eigenwerten  $\lambda_k \geq 0$  und  $\text{Tr } T = \sum_k \lambda_k = 1$ . Damit hat  $T$  die folgende Darstellung (in normaler und in Bra-Ket-Schreibweise):

$$T = \sum_k \lambda_k \langle \varphi_k, \cdot \rangle \varphi_k = \sum_k \lambda_k \cdot |\varphi_k\rangle \langle \varphi_k|$$

2. Vektorzustände, das heißt: Zustände, die durch ein  $\varphi \in \mathcal{H}$  mit  $\|\varphi\| = 1$  beschrieben werden können, ordnen sich hier folgendermaßen ein: Betrachte die Orthoprojektion  $T := P_\varphi = \langle \varphi, \cdot \rangle \varphi = |\varphi\rangle \langle \varphi|$ . Dabei erhält man  $\text{Tr } T = 1$  und der Erwartungswert einer Observablen  $A$  im Zustand  $\varphi$  ist

$$\langle \varphi, A\varphi \rangle = \text{Tr } TA = \text{Tr } AT$$

Ein gemischter Zustand mit dem Erwartungswert  $p \cdot \langle \varphi, A\varphi \rangle + q \cdot \langle \psi, A\psi \rangle$  wird durch den folgenden Dichteoperator beschrieben:

$$T = p \cdot \langle \varphi, \cdot \rangle \varphi + q \cdot \langle \psi, \cdot \rangle \psi = p \cdot |\varphi\rangle \langle \varphi| + q \cdot |\psi\rangle \langle \psi|$$

*Zusammenfassung:* In der Quantenphysik werden Zustände durch Dichtematrizen, sprich: Dichteoperatoren ( $T$  mit  $T \geq 0$  und  $\text{Tr } T = 1$ ) beschrieben. Dabei ist  $\text{Tr } AT$  der Erwartungswert von  $A$  im Zustand, der durch  $T$  beschrieben wird. Für Vektorzustände (reine Zustände) ist  $T = \langle \varphi, \cdot \rangle \varphi$  und für gemischte Zustände hat das  $T$  eine ähnliche Struktur wie im obigen Beispiel:

$$T = \sum_k \lambda_k \langle \varphi_k, \cdot \rangle \cdot \varphi_k$$

Man sieht, dass gemischte Zustände Überlagerungen von Vektorzuständen sind.

3. Ist  $T$  ein Dichteoperator und  $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ , dann sind  $TA$  und  $AT$  nuklear und  $\text{Tr } AT = \text{Tr } TA$  ist wohldefiniert. Wenn aber – wie in der Quantenmechanik fast immer –  $A$  ein unbeschränkter Operator ist, dann können nicht beliebige Dichteoperatoren  $T$  mögliche Zustände repräsentieren. Man kann dann höchstens solche  $T$  nehmen, bei denen  $AT$  und  $TA$  wieder nuklear sind.
4. In der Quantenstatistik ist der wichtigste Zustand der sogenannte **Gibbs-Zustand**. Sei  $H = H^*$  der Hamiltonoperator des betrachteten Systems. Dann wird der Gibbs-Zustand wie folgt beschrieben:

$$T = \frac{e^{-\beta \cdot H}}{\text{Tr } e^{-\beta \cdot H}}$$

In  $\beta$  gehen die inverse Temperatur und die Boltzmann-Konstante ein. Das Problem: Was ist  $\exp(-\beta \cdot H)$  für das unbeschränkte  $H$ ?

## 24 Bemerkungen zum Spektraltheorem

Das Spektraltheorem ist das zentrale Theorem über selbstadjungierte und normale Operatoren im Hilbertraum. Der Ausgangspunkt der folgenden Betrachtungen sind zwei Fragenstellungen:

1. Wie kann man die Diagonalisierung selbstadjungierter Operatoren im endlichdimensionalen Raum beziehungsweise kompakter Operatoren im Hilbertraum auf beliebige selbstadjungierte/kompakte Operatoren verallgemeinern?
2. Wie kann man für möglichst viele Funktionen  $f$  einen Kalkül entwickeln, der  $f(T)$  für selbstadjungierte  $T = T^*$  liefert?

### Beispiel 24.1

Idee zu endlichdimensionalen Fällen

Sei  $T = T^*$  und  $T = \sum_{j=1}^k \lambda_j \cdot P_j$ .  $\lambda_j$  sind die paarweise verschiedenen Eigenwerte mit den paarweise orthogonalen Projektionen  $P_j$ . Was ist  $f(T)$ ? Für welche  $f$  lässt sich dieser Ausdruck bestimmen? Die einzige vernünftige Definition ist:

$$f(T) = \sum f(\lambda_j) \cdot P_j$$

Das geht für alle Funktionen  $f$ , die auf  $\sigma(T)$  definiert sind.  $f$  kann also etwa ein beliebiges Polynom sein, zum Beispiel  $p(z) = a_0 + a_1 \cdot z + \dots + a_n \cdot z^n$ . Dann ist  $p(T) = a_0 + a_1 \cdot T + \dots + a_n \cdot T^n$  für jeden Operator  $T$  wohldefiniert. Das heißt, für selbstadjungierte Operatoren  $T$  kann man  $p(T)$  bilden, ohne die Spektralzerlegung zu kennen.

Beim Übergang zum unendlichdimensionalen Fall treten mehrere Probleme auf. Problematisch bei selbstadjungierten Operatoren ist immer das stetige Spektrum (denn das sind keine Eigenwerte im engeren Sinne). Will man die Darstellung  $T = \sum_j \lambda_j \cdot P_j$  (für kompakte  $T$ ) verallgemeinern, so muss man die Summe durch ein Integral ersetzen.

Zur Motivation: Seien  $(P_j)$  paarweise verschiedene Orthoprojektionen mit  $I = \sum_j P_j$ . (Diese Reihe konvergiert nicht im Sinne der Operatornorm, sondern punktweise:  $\varphi = \sum_j P_j \varphi$ .) Aus solchen  $P_j$  werden Operatoren gebaut: Bilde mit der beschränkten Folge  $(\mu_j)$  die Summe  $\sum_j \mu_j \cdot P_j$ . Das liefert auf alle Fälle einen beschränkten Operator  $A$  im Sinne von:

$$A\varphi = \sum_j \mu_j \cdot P_j \varphi \quad (*)$$

Die  $\mu_j$  sind dann Eigenwerte von  $A$ .

### Definition 24.1

Sei  $\mathcal{H}$  ein Hilbertraum. Eine Familie  $(E(\lambda))_{\lambda \in \mathbb{R}}$  von Orthoprojektoren heißt **Spektralschar** (manchmal auch: **Zerlegung der Eins**), wenn gilt:

1.  $E(\cdot)$  ist monoton wachsend:  $E(\lambda) \leq E(\mu)$  für  $\lambda \leq \mu$  im Sinne von  $E(\lambda)\mathcal{H} \subset E(\mu)\mathcal{H}$ .
2. Es existieren  $m, M \in \mathbb{R}$  mit  $m \leq M$ , sodass  $E(\lambda) = 0$  für  $\lambda \leq m$  und  $E(\lambda) = I$  für  $\lambda \geq M$  ist. Man sagt, die Spektralschar ist auf  $[m, M]$  konzentriert.
3. Die Zuordnung  $\lambda \mapsto E(\lambda)$  ist rechtsseitig stetig, das heißt:  $E(\lambda) = E(\lambda + 0) = \lim_{\mu \rightarrow \lambda+0} E(\mu)$ . Auch diese Konvergenz ist nur punktweise, d.h. es ist  $E(\lambda)\varphi = \lim_{\mu \rightarrow \lambda+0} E(\mu)\varphi$  für alle  $\varphi \in \mathcal{H}$ .

## Bemerkung

1. Will man diese Theorie auch für unbeschränkte Operatoren entwickeln, so ersetzt man die zweite Bedingung durch:

$$\lim_{\lambda \rightarrow -\infty} E(\lambda)\varphi = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{\lambda \rightarrow \infty} E(\lambda)\varphi = \varphi \quad \forall \varphi \in \mathcal{H}$$

2. In der dritten Bedingung ist die Rechtsstetigkeit lediglich eine Vereinbarung. Man kann stattdessen auch linksseitige Stetigkeit fordern; dann ändert sich aber in Formeln mit der Spektralschar häufig etwas.
3. Beim Riemann-Stieltjes-Integral haben wir  $\int f dg$  für monoton wachsende Funktionen  $g$  betrachtet. Bei der Bildung der Riemann-Stieltjes-Zwischensumme haben wir Intervallen nicht die normale Länge, sondern eine „Masse“ zugeordnet. Das geht hier analog: Einem Intervall wird ein Projektor zugeordnet. Genauer geht das mit der rechtsseitigen Stetigkeit so:

$$\begin{aligned} \Delta = (\lambda, \mu] &\mapsto E(\Delta) := E(\mu) - E(\lambda) \\ \Delta = (\lambda, \mu) &\mapsto E(\Delta) := E(\mu - 0) - E(\lambda) \\ \Delta = [\lambda, \mu) &\mapsto E(\Delta) := E(\mu) - E(\lambda - 0) \\ \Delta = [\lambda, \mu] &\mapsto E(\Delta) := E(\mu) - E(\lambda - 0) \end{aligned}$$

(Damit diese Definitionen sinnvoll sind, muss man teilweise noch zeigen, dass Ausdrücke der Form  $E(\mu - 0)$  wieder Orthoprojektionen sind.) Insbesondere hat man also  $E(\{\mu\}) = E(\mu) - E(\mu - 0) = E(\mu + 0) - E(\mu - 0)$ . Sprungstellen in der Spektralschar sind typisch für Eigenwerte.

**Beispiel 24.2**

## Endlichdimensionaler Fall

$$T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

sei ein Operator in Matrixdarstellung. Die Projektoren auf die zugehörigen Eigenräume sind gegeben durch:

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad P_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad P_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Nun ist offensichtlich  $T = \lambda_1 \cdot P_1 + \lambda_2 \cdot P_2 + \lambda_3 \cdot P_3$ . Aus den  $P_j$  konstruiert man nun wie folgt das zu  $T$  gehörende Spektrum: (Es wird später klar, warum dieses Spektrum zu  $T$  gehört.)

$$E(\lambda) := \sum_{\substack{j=1..3 \\ \lambda_j \leq \lambda}} P_j$$

Man erhält eine Art Treppenfunktion, zum Beispiel für  $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$ :

$$E(\lambda) = \begin{cases} 0 & \lambda < \lambda_1 \\ P_1 & \lambda_1 \leq \lambda < \lambda_2 \\ P_1 + P_2 & \lambda_2 \leq \lambda < \lambda_3 \\ P_1 + P_2 + P_3 = I & \lambda \geq \lambda_3 \end{cases}$$

Das weitere Vorgehen orientiert sich an folgenden Kernfragen:

1. Wie integriert man bezüglich  $E(\lambda)$ , d.h. was sind  $\int \lambda dE(\lambda)$  und  $\int f(\lambda) dE(\lambda)$ ?
2. Wie findet man zu einem  $T = T^*$  eine Spektralschar  $E(\lambda)$ , für die gerade  $\int \lambda dE(\lambda) = T$  ist?



Wir betrachten nun einen beliebigen kompakten Operator  $T = T^*$  mit  $(\lambda_k)$  als Folge der Eigenwerte. Mit  $P_k$  ist wieder die Projektion auf den Eigenraum zu  $\lambda_k$  bezeichnet. Das Spektrum hat dann folgende Gestalt:

$$E(\lambda) = \begin{cases} \sum_{k, \lambda_k \leq \lambda} P_k & \lambda < 0 \\ I - \sum_{k, \lambda_k > \lambda} P_k & \lambda \geq 0 \end{cases}$$

Diese Schreibweise umgeht bis auf  $\lambda = 0$  unendliche Summen.

**Theorem 24.2** Integration bezüglich einer Spektralschar

Jede Spektralschar  $(E(\lambda))_{\lambda \in \mathbb{R}}$ , konzentriert auf  $[m, M]$ , entspricht genau einem selbstadjungierten Operator  $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ :

$$T = \int_{m-0}^M \lambda \, dE(\lambda) \quad (24.1)$$

Außerdem gilt für jede auf  $[m, M]$  gegebene Funktion  $f$ :

$$f(T) = \int_{m-0}^M f(\lambda) \, dE(\lambda) \quad (24.2)$$

Die Integrale (24.1) und (24.2) sind als Grenzwerte der entsprechenden Zwischensummen im Sinne der Operatornorm zu verstehen.

**Beweis**

Die Beweisidee ist, die üblichen (Riemann-Stieltjes-)Zwischensummen zu verwenden: Sei  $m_1 < m$ .

$$\mathcal{Z} = \{m_1 = \lambda_0 < \lambda_1 < \dots < \lambda_n = M\}$$

ist eine Zerlegung von  $[m_1, M]$  mit der Feinheit  $d(\mathcal{Z})$ , das ist: das Minimum der Längen der Intervalle  $\Delta_k := (\lambda_k, \lambda_{k+1}]$  (mit  $k = 0, 1, \dots, n-1$ ), welche beliebige wählbare Zwischenpunkte  $\lambda'_k \in \Delta_k$  enthalten. Nun ist die Zwischensumme:

$$S_{\mathcal{Z}} := \sum_{k=0}^{n-1} \lambda'_k \cdot [E(\lambda_{k+1}) - E(\lambda_k)] = \sum_{k=0}^{n-1} \lambda'_k \cdot E(\Delta_k)$$

Die Zwischensumme ist ein beschränkter selbstadjungierter Operator. Jetzt kann man zeigen, dass diese Zwischensumme für jede Zerlegungsnullfolge  $(\mathcal{Z}_n)$  (d.h.  $d(\mathcal{Z}_n) \rightarrow 0$ ) bezüglich der Operatornorm eine Cauchyfolge in  $\mathcal{B}(\mathcal{H})$  bildet. Da  $\mathcal{B}(\mathcal{H})$  bezüglich der Operatornorm vollständig ist, existiert ein Operator  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_{\mathcal{Z}_n} =: T$ . Das schreibt man natürlich in der Kurzform (24.1). Man muss  $m_1 < m$  wählen, weil für das Intervall  $(\lambda_0, \lambda_1]$  im Falle  $m_1 = m$  der Punkt  $m$ , das heißt der Orthoprojektor  $E(\{m\})$  nicht berücksichtigt würde. (24.2) erhält man analog durch die Betrachtung der Zwischensummen:

$$S_{\mathcal{Z}} = \sum_{k=0}^{n-1} f(\lambda'_k) \cdot E(\Delta_k)$$

■

## Bemerkung

1. Die in der Definition der Spektralschar auftretenden  $m$  und  $M$  können „optimal“ definiert werden:

$$m = \sup \{ \tilde{m} : E(\tilde{m}) = 0 \} \quad \text{und} \quad M = \inf \{ \tilde{M} : E(\tilde{M}) = I \}$$

2. In der Formulierung des Theorems gibt es eine Feinheit. Die Formel (24.2) kann in zweifacher Weise gelesen werden.

Zum einen kann man  $T$  durch (24.1) als Grenzwert der Zwischensummen erhalten. Da die Zwischensummen zu (24.2) wieder konvergieren, bezeichnet man den Limes sinnvollerweise mit  $f(T)$ .

Zum anderen kann man  $T$  aufgrund von (24.1) als bekannt voraussetzen. Dann ist für jedes Polynom  $p$  klar, was  $p(T)$  ist. Wenn  $p$  nur reelle Koeffizienten hat, dann ist  $p(T)$  selbstadjungiert. Nun kommt der **weierstraßsche Approximationssatz** ins Spiel: Jede auf einem kompakten Intervall  $I \subset \mathbb{R}$  stetige Funktion  $f$  ist der Grenzwert einer Folge von Polynomen (bzgl. der gleichmäßigen Konvergenz).

Es kann bewiesen werden, dass, wenn  $(p_n)$  auf  $[-\|T\|, \|T\|] \supset \sigma(T)$  gleichmäßig gegen  $f$  konvergiert, die Folge  $(p_n(T))$  bzgl. der Operatornorm eine Cauchyfolge in  $\mathcal{B}(\mathcal{H})$  ist. Das heißt, es existiert ein  $S \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$  mit  $p_n(T) \rightarrow S =: f(T)$ .

$$\begin{array}{ccc} p_n & \xrightarrow{\text{glm.}} & f \\ \downarrow & & (\downarrow) \\ p_n(T) & \xrightarrow{\|\cdot\|} & f(T) \end{array}$$

Dieser gesamte Kalkül ist insofern in sich stimmig, dass dieses obige  $S = f(T)$  mit dem  $f(T)$  aus (24.2) übereinstimmt.

3. Die Integrale in (24.1) und (24.2) haben auch eine Interpretation, die nahe am gewöhnlichen RS-Integral liegt. Die Monotonie der Spektralschar  $E(\lambda)$  bedeutet:

$$E(\lambda) \leq E(\mu) \quad \Rightarrow \quad \langle \varphi, E(\lambda)\varphi \rangle \leq \langle \varphi, E(\mu)\varphi \rangle$$

Allgemeiner gilt für zwei selbstadjungierte Operatoren  $A$  und  $B$ :

$$A \leq B \quad \Leftrightarrow \quad B - A \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \langle \varphi, A\varphi \rangle \leq \langle \varphi, B\varphi \rangle \quad \forall \varphi \in \mathcal{H}$$

Es gilt also  $\|E(\lambda)\varphi\| \leq \|E(\mu)\varphi\|$  für alle  $\varphi \in \mathcal{H}$  und  $\lambda \leq \mu$ . Daraus folgt wiederum, dass die Funktion  $\lambda \mapsto \|E(\lambda)\varphi\|^2$  eine reellwertige, monoton wachsende Funktion ist. Damit ist aber das folgende Integral als Riemann-Stieltjes-Integrale wohldefiniert:

$$\int_{m=0}^M \lambda \, d\|E(\lambda)\varphi\|^2 = \int_{m=0}^M \lambda \, d\langle \varphi, E(\lambda)\varphi \rangle \quad \forall \varphi \in \mathcal{H}$$

Das analoge Integral für (24.2) ist auch wohldefiniert. Mittels der Polarisationsidentität (21.5) folgt, dass auch das Integral

$$\int_{m=0}^M \lambda \, d\langle \varphi, E(\lambda)\psi \rangle \quad \forall \varphi, \psi \in \mathcal{H}$$

wohldefiniert ist. Jetzt zeigt man, dass die Abbildung  $\mathcal{H} \times \mathcal{H} \ni (\varphi, \psi) \rightarrow \int_{m=0}^M \lambda \, d\langle \varphi, E(\lambda)\psi \rangle$  eine stetige Sesquilinearform ist (d.h. die Abbildung ist in der ersten Komponente konjugiert linear und in der zweiten Komponente linear). Damit existiert nach dem Satz von Riesz (in einer bisher nicht behandelten Variante) ein selbstadjungierter Operator  $T$  mit  $\langle \varphi, T\psi \rangle = \int_{m=0}^M \lambda \, d\langle \varphi, E(\lambda)\psi \rangle$ . Das ist genau der Operator, den wir im Theorem dieser Spektralschar zugeordnet haben.

Jetzt haben wir zu jeder Spektralschar einen selbstadjungierten Operator. Man kann auch andersherum einem selbstadjungierten Operator eine Spektralschar zuordnen. Zur Formulierung des entsprechenden Theorems benötigen wir einen starken Konvergenzbegriff.

**Definition 24.3** Starke Operatorkonvergenz

Man sagt, eine Folge  $(T_n) \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$  **konvergiert stark** gegen  $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ , wenn  $T_n \varphi \rightarrow T \varphi$  für alle  $\varphi \in \mathcal{H}$  (bezüglich der Norm in  $\mathcal{H}$ ) ist.

**Theorem 24.4** Spektralzerlegung selbstadjungierter Operatoren

1. Zu jedem selbstadjungierten Operator  $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$  existiert genau eine Spektralschar  $(E(\lambda))$ , konzentriert auf  $[-\|T\|, \|T\|]$ , sodass im Sinne von Theorem 24.3 und den folgenden Bemerkungen die Gleichungen (24.1) und (24.2) gelten.
2. Die  $E(\lambda)$  sind Grenzwerte von Folgen von Polynomen im Sinne der starken Operatorkonvergenz.
3. Der Operator kommutiert mit der Spektralschar, und wenn ein Operator  $B$  mit  $T$  kommutiert, dann auch mit der Spektralschar:<sup>a</sup>

$$[E(\lambda), T] = 0 \quad \text{und} \quad [B, T] = 0 \quad \Rightarrow \quad [E(\lambda), B] = 0 \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

<sup>a</sup>Man sagt,  $E(\lambda)$  ist ein Bikommutant von  $T$ , und schreibt  $E(\lambda) \in \{T\}''$ .

**Beweis**

1. Erneut soll nur die Beweisidee aufgezeigt werden: Alle im Folgenden auftretenden Funktionen seien mindestens auf einem Intervall definiert, dass  $\sigma(T)$  enthält, etwa auf  $[-\|T\|, \|T\|]$ . Oben war schon beschrieben, dass  $p(T)$ ,  $f(T)$  und  $f$  stetig sind. Wenn  $g$  nur stückweise stetig ist und  $g(T)$  definiert werden soll, dann muss man die gleichmäßige Konvergenz (d.h. auch die Konvergenz bezüglich der Operatornorm) verlassen.

Es gilt: Sei  $g \geq 0$  stückweise stetig, sodass eine monoton fallende Folge stetiger Funktionen  $(f_n)$  existiert, die punktweise gegen  $g$  konvergiert. Dann ist  $(f_n(T))$  eine monoton fallende Folge selbstadjungierter Operatoren, und es existiert ein selbstadjungierter Operator  $g(T)$ , gegen den  $f_n(T)$  im Sinne der starken Operatorkonvergenz konvergiert. Ein Spezialfall für solche  $g$  ist:

$$e_\lambda(t) = \begin{cases} 1 & t \leq \lambda \\ 0 & t > \lambda \end{cases} \quad \text{mit} \quad \lambda \in \mathbb{R} \text{ beliebig}$$

Leicht findet man eine Folge  $(f_n)$  stetiger, monoton fallender Funktionen, die punktweise gegen  $e_\lambda$  konvergiert (indem man die Stufe bei  $t = \lambda$  abschrägt und für wachsende  $n$  immer steiler werden lässt). Wenn man  $e_\lambda$  nun so bildet, so erhält man ein  $E(\lambda)$  mit allen Eigenschaften einer Spektralschar.

2. Da jedes  $f_n$  ein Grenzwert einer Polynomfolge ist (im Sinne glm. Konvergenz) und  $e_\lambda$  der Grenzwert der  $f_n$  (im Sinne punktw. Konvergenz) ist, ist  $e_\lambda(T) = E(\lambda)$  der Grenzwert (im Sinne starker Operatorkonvergenz) von Polynomen in  $T$ .

■

Welcher Zusammenhang besteht zwischen Spektralschar und Spektrum? Wie kann die Spektralschar in der Quantenmechanik angewendet werden? Was passiert bei unbeschränkten Operatoren?

**Satz 24.5**

Sei  $T = T^* = \int_{m-0}^M \lambda \, dE(\lambda)$ . Dann gilt:

1.  $\mu$  liegt genau dann in  $\sigma(T)$ , wenn  $\mu$  in keinem Konstanzintervall der Spektralschar liegt.

$$\forall \varepsilon > 0 : E(\mu + \varepsilon) - E(\mu - \varepsilon) \neq 0$$

2.  $\mu$  ist genau dann ein Eigenwert, wenn  $E(\mu+0) - E(\mu-0) \neq 0$  ist. Der Projektor  $E(\{\mu\})$  projiziert dann genau auf den Eigenraum zu  $\mu$ . Die Eigenwerte entsprechen also den Sprungstellen der Spektralschar.

## Bemerkung

1. Die Charakterisierung von  $\mu \in \sigma(T)$  bedeutet also: Wenn  $\lambda \in \varrho(T)$ , dann existiert um  $\lambda$  ein Intervall  $(\lambda - \delta, \lambda + \delta) \subset \sigma(T)$ , in welchem die Spektralschar konstant ist. (Man beachte, dass die Resolventenmenge offen ist!)
2. Für  $\mu \in \sigma_p(T)$  ist  $E(\{\mu\}) \neq 0$ .

Zum Spektraltheorem sind noch einige Ergänzungen möglich:

1. Die Spektralzerlegung lässt sich allgemein für *normale* Operatoren beweisen: Wenn  $T$  normal ist, dann ist  $TT^* = T^*T$ . Also ist die folgende Darstellung möglich:

$$T = T_1 + i \cdot T_2 \quad \text{mit} \quad \begin{cases} T_1 := (T + T^*)/2 \\ T_2 := (T - T^*)/2i \end{cases}$$

Hierbei sind  $T_1$  und  $T_2$  selbstadjungiert und kommutieren miteinander. Nun konstruiert man aus  $E_1(\cdot)$  und  $E_2(\cdot)$  eine sogenannte Spektralschare in der Ebene. Man erhält:

$$T = T_1 + i T_2 = \int_{-a}^a x \, dE_1(x) \cdot \int_{-a}^a dE_2(y) + i \int_{-a}^a dE_1(x) \cdot \int_{-a}^a y \, dE_2(y) = \int_{-a}^a \int_{-a}^a z \, dE - 1(x) \, dE_2(y)$$

Diesen Ausdruck bekommt man als Zwischensummen folgender Art:

$$\sum_{k,l} z_{kl} \cdot E(\Delta_{kl}) = \sum_{kl} z_{kl} \cdot E_1(I_k) \cdot E_2(J_l)$$

Hierbei ist  $z_{kl} = x_{kl} + iy_{kl} \in \Delta_{kl}$  ein Zwischenpunkt und  $\Delta_{kl} = I_k \times J_l$  ein Rechteck aus einer Zerlegung von  $[-a, a] \times [-a, a]$ .  $a$  soll so gewählt sein, dass zum Beispiel  $-a < -\|T\|$ , also  $a > \|T\|$ . Mit anderen Worten:  $\sigma(T) \subset (-a, a) \times (-a, a)$ . Das oben genannte Spektralmaß  $E(\cdot)$  wird also so definiert, dass für ein Rechteck  $\Delta = I \times J$  mit  $\alpha < x \leq \beta$  ( $\hat{=} I$ ) und  $\gamma < y \leq \delta$  ( $\hat{=} J$ ) gesetzt wird:

$$E(\Delta = E_1(I) \cdot E_2(J) = (E_1(\beta) - E_1(\alpha)) \cdot (E_2(\delta) - E_2(\gamma))$$

Hierbei ist schon berücksichtigt, dass  $E_1$  und  $E_2$  rechtsseitig stetig sind, also bei links halboffenen Intervallen die obige Definition von  $E_1(I)$  und  $E_2(J)$  gerade korrekt ist.

2. Man kann auch für *unbeschränkte* selbstadjungierte (und in Analogie zu oben auch normale Operatoren) eine Spektralzerlegung erhalten: Auf  $\mathcal{D}(T)$  ist  $T = T^*$  definiert und unbeschränkt. Dann existiert eine Spektralschar  $\mathbb{R} \ni \lambda \mapsto E(\lambda)$  mit

$$T = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda \, dE(\lambda) \quad \text{im Sinne von} \quad \langle \varphi, T\varphi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda \, d\|E(\lambda)\varphi\|^2 \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(T)$$

### 3. Wahrscheinlichkeitstheoretischer Aspekt in der Quantenmechanik

Sei  $\Delta \subset \mathbb{R}$  ein beliebiges Intervall (oder eine andere geeignete Teilmenge) und  $\varphi \in \mathcal{H}$  mit  $\|\varphi\| = 1$ . Dann ist  $\|E(\Delta)\varphi\|^2$  die Wahrscheinlichkeit, bei Messung der Observablen  $T$  im Zustand  $\varphi$  einen Messwert aus  $\Delta$  zu erhalten. Im Falle  $\Delta \cap \sigma(T) = \emptyset$  verschwindet die Wahrscheinlichkeit.

4. Nicht behandelt werden hier insbesondere die Zeitentwicklung quantenmechanischer Systeme (zum Beispiel  $e^{i\mathcal{H}t}$  für den Hamiltonoperator  $\mathcal{H} = \mathcal{H}^*$ ) und der Zusammenhang zwischen Schrödinger-Bild und Heisenberg-Bild in der Quantenmechanik.

# 25 Der Begriff der Holomorphie

## 25.1 Wiederholung: Komplexe Zahlen. Komplexe Funktionen

Es sei  $\mathbb{C}$  der Körper der komplexen Zahlen. Wir ordnen  $\mathbb{C}$  immer die Gaußsche Zahlenebene  $\mathbb{R}^2$  zu.

$$z = x + iy \leftrightarrow (x, y)$$

Die **Funktionaltheorie** ist die Theorie der Funktionen  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ . Die exponentielle Darstellung der komplexen Zahlen sah wie folgt aus:

$$z = r \cdot e^{i\varphi} = r \cdot (\cos \varphi + i \sin \varphi) \quad \text{mit} \quad \begin{cases} x = r \cdot \cos \varphi & r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2} \\ y = r \cdot \sin \varphi & \varphi = \arg z \end{cases} \quad \text{mit} \quad -\pi < \varphi \leq \pi$$

Damit können wir die Potenzen von  $z$  einführen:

$$z^n = r^n \cdot e^{in\varphi} = r^n \cdot (\cos(n\varphi) + i \sin(n\varphi))$$

Die Gleichung  $w^n = z$  hat  $n$  verschiedene Lösungen:

$$w_k = \sqrt[n]{r} \cdot e^{i\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi k}{n}\right)} \quad \text{mit} \quad k = 0, 1, \dots, n-1$$

Eine Folge  $(z_n) \subset \mathbb{C}$  mit  $z_n = x_n + iy_n$  konvergiert genau dann gegen  $z = x + iy$ , wenn  $x_n \rightarrow x$  und  $y_n \rightarrow y$  konvergiert. Unendliche Reihen und Potenzreihen ergeben sich wie bereits bekannt.

Ein **Gebiet**  $G$  ist eine Teilmenge der komplexen Ebene, die offen und zusammenhängend ist. Offen bedeutet, dass für alle  $z \in G$  ein Kreis  $K$  um  $z$  existiert, mit  $K \subset G$ . Zusammenhängend heißt, dass für beliebige  $z_1, z_2 \in G$  stets eine stetige Kurve  $C \subset G$  existiert, die die Punkte  $z_1$  und  $z_2$  verbindet.

Komplexe Funktionen  $f$  bilden von  $G = D(f) \subset \mathbb{C}$  nach  $\mathbb{C}$  ab. Jedes solche  $f$  kann stets wieder als  $f = u + iv$  geschrieben werden:

$$f(z) = f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$$

$u$  und  $v$  sind reelle Funktionen zweier reeller Variablen.

### Beispiel 25.1 Exponentialfunktion

Die Funktion  $f(z) = e^z$  kann wegen  $e^z = e^{x+iy} = e^x \cdot (\cos y + i \sin y) = e^x \cdot \cos y + ie^x \cdot \sin y$  beschrieben werden durch  $u(x, y) = e^x \cos y$  und  $v(x, y) = e^x \sin y$ .

## 25.2 Differenzierbarkeit und Holomorphie

Sei im Folgenden stets  $G$  ein Gebiet in  $\mathbb{C}$ .

**Definition 25.1**

$f : G \rightarrow \mathbb{C}$  heißt im Punkt  $a \in G$  komplex (oder: im komplexen Sinne) **differenzierbar** mit der Ableitung  $f'(a)$ , wenn der folgende Grenzwert existiert:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} =: f'(a)$$

Das ist wieder äquivalent zu  $f(a+h) = f(a) + f'(a)h + o(h)$ .

Es gelten die üblichen Rechenregeln und Eigenschaften:

1. Summe, Produkt und Quotienten differenzierbarer Funktionen sind wieder differenzierbar und es gelten die üblichen Regeln.
2. Die Kettenregel für  $g : G \rightarrow G_1 \subset \mathbb{C}$ ,  $f : G_1 \rightarrow \mathbb{C}$  und  $f \circ g : G \rightarrow \mathbb{C}$  besagt, dass, wenn  $g$  in  $a$  und  $f$  in  $g(a)$  differenzierbar ist, dann ist auch  $f \circ g$  in  $a$  differenzierbar und es gilt:

$$(f \circ g)'(a) = f'(g(a)) \cdot g'(a)$$

Eine Variante ist, dass durch  $z : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  ein Intervall  $(a, b)$  auf eine Kurve  $C$  abgebildet wird. ( $z$  ist also eine Parameterdarstellung der Kurve.) Die Kurve liege im Definitionsbereich von  $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ . Ist  $z$  nach  $t$  in  $(a, b)$  und  $f$  in  $G$  differenzierbar, so gilt:

$$\frac{d}{dt} f(z(t)) = f'(z(t)) \cdot z'(t)$$

3. Aus Differenzierbarkeit folgt Stetigkeit.
4. Potenzreihen sind im Inneren ihres Konvergenzkreises beliebig oft komplex (d.h. gliedweise) differenzierbar.

**Beispiel 25.2**

1.  $f(z) = \bar{z}$
2.  $f(z) = \operatorname{Re} z$
3.  $f(z) = \operatorname{Im} z$

Alle diese Funktionen sind *nicht* komplex differenzierbar. Nummer 2 betrachten wir genauer:

$$\frac{f(z+h) - f(z)}{h} = \left( \begin{matrix} h = h_1 + ih_2 \\ z = x + iy \end{matrix} \right) = \frac{(x+h_1) - x}{h_1 + ih_2} = \frac{h_1}{h_1 + ih_2}$$

Der Grenzwert für  $h \rightarrow 0$  existiert nicht. Zum Beispiel ergibt sich bei Annäherung auf der imaginären Achse ( $h_1 = 0$  und  $h_2 \rightarrow 0$ ) der Grenzwert 0, während auf der reellen Achse der Grenzwert 1 entsteht.

**Definition 25.2**

Die Funktion  $f : G \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  heißt in  $a \in G$  **holomorph**, wenn es eine Umgebung  $U(a) \subset G$  gibt, in der  $f$  komplex differenzierbar ist.  $f$  heißt im Gebiet  $G$  holomorph, wenn  $f$  in jedem Punkt  $a \in G$  holomorph ist, das heißt  $f$  ist in jedem Punkt  $b \in G$  differenzierbar.

Der folgende Satz ist das erste fundamentale Resultat in der Funktionentheorie und zeigt einen ersten gravierenden Unterschied zum Reellen.

**Satz 25.3**

$f = u + iv : G \rightarrow \mathbb{C}$  ist im Punkt  $a = \alpha + i\beta$  genau dann komplex differenzierbar, wenn gilt:

1.  $u$  und  $v$  sind als Funktionen zweier reeller Variablen im Punkt  $(\alpha, \beta)$  differenzierbar.
2. Im Punkt  $(\alpha, \beta)$  sind die **Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen** erfüllt:

$$u_x = v_y \quad \text{und} \quad u_y = -v_x \quad (CR)$$

Dann gilt:  $f'(a) = u_x(\alpha, \beta) + iv_x(\alpha, \beta) = v_y(\alpha, \beta) - iu_y(\alpha, \beta)$ .

**Beweis**

Neben  $f = u + iv : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  betrachten wir noch  $F = (u, v)^T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , mit den Punkten  $a = \alpha + i\beta$  und  $\hat{a} = (\alpha, \beta)^T$ . Entsprechend ist  $h = h_1 + ih_2$  und  $\hat{h} = (h_1, h_2)^T$ . Dann ist 25.3.1 äquivalent dazu, dass  $F$  in  $\hat{a}$  differenzierbar ist, das heißt:

$$F(\hat{a} + \hat{h}) = F(\hat{a}) + A\hat{h} + o(\|\hat{h}\|)$$

Das  $A$  ist gerade die Jacobi-Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix} \Big|_{\hat{a}}$$

Jetzt wird die Definition der Differenzierbarkeit in der Weierstraßschen Variante benutzt.  $f$  ist komplex differenzierbar in  $a$  mit der Ableitung  $f'(a) = b + ic$  genau dann, wenn gilt:

$$f(a + h) = f(a) + f'(a) \cdot h + o(\|h\|)$$

Unter Benutzung der Darstellung von  $f$  durch  $u$  und  $v$  ist also:

$$u(\hat{a} + \hat{h}) + iv(\hat{a} + \hat{h}) = u(\hat{a}) + iv(\hat{a}) + (b + ic) \cdot (h_1 + ih_2) + o(\|\hat{h}\|)$$

Trennt man Real- und Imaginärteil, so kann man das schreiben als:

$$\begin{pmatrix} u(\hat{a} + \hat{h}) \\ v(\hat{a} + \hat{h}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u(\hat{a}) \\ v(\hat{a}) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b & -c \\ c & b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} + o(\|\hat{h}\|)$$

Durch Vergleich mit der ersten Gleichung in diesem Beweis sehen wir:

$$\begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix} \Big|_{\hat{a}} = \begin{pmatrix} b & -c \\ c & b \end{pmatrix}$$

Jetzt können wir das Ergebnis einfach ablesen:

$$\begin{aligned} b &= u_x(\alpha, \beta) = v_y(\alpha, \beta) \\ c &= -u_y(\alpha, \beta) = v_x(\alpha, \beta) \end{aligned}$$

Damit ist  $(CR)$  gezeigt. ■

Dieser Satz zeigt: Für komplexe Differenzierbarkeit reicht es nicht, dass Realteil und Imaginärteil (beliebig gut) differenzierbar sind: Die  $(CR)$  zeigen, dass ein innerer Zusammenhang zwischen Real- und Imaginärteil besteht. Wir müssen eine kleine Nuance beachten: Zunächst folgt aus der komplexen Differenzierbarkeit und der Existenz von  $u_x, u_y, v_x$  und  $v_y$  nicht die Stetigkeit der Ableitung. Später sehen wir jedoch, dass die Holomorphie von  $f$  auch die Differenzierbarkeit von  $u$  und  $v$  von beliebiger Ordnung impliziert. Damit ist auch  $f$  selbst beliebig oft differenzierbar.



**Bemerkung**

## Zusammenhang mit ebenen Strömungen/Vektorfeldern

Sei  $f$  in einem Gebiet  $G$  holomorph. Dann sind die Vektorfelder  $(u, -v)^T$  und  $(v, u)^T$  divergenzfrei und erfüllen die Integrabilitätsbedingung. Das entspricht genau der Aussage von  $(CR)$ .

Die Umkehrung lautet: Sei  $\vec{v} = (v_1, v_2)^T$  ein  $C^1$ -Geschwindigkeitsfeld einer inkompressiblen (also divergenzfreien) und wirbelfreien (also rotationsfreien) Strömung. Dann sind die Funktionen  $f := v_1 - iv_2$  und  $g := v_2 + iv_1$  im Gebiet der obigen Strömung holomorph. Hierbei ist die Rotation wie folgt erklärt: Betrachte  $\vec{v}$  als Strömung in  $\mathbb{R}^3$ , also  $\vec{v} := (v_1, v_2, 0)^T$ .

$$\text{rot } \vec{v} = (0, 0, (v_2)_x - (v_1)_y)$$

$\text{rot } \vec{v} = \text{div } \vec{v} = 0$  entspricht genau den Gleichungen  $(CR)$ .

# 26 Integration holomorpher Funktionen

## 26.1 Komplexe Kurvenintegrale

Kurvenintegrale im Komplexen werden analog zu Kurvenintegralen in  $\mathbb{R}^2$  behandelt.

### Bemerkung

### Wiederholung

Ein Weg ist eine stetige, injektive Abbildung  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ . Es ist  $\gamma(t) = z(t) = x(t) + iy(t)$  die Parameterdarstellung der zugehörigen Kurve  $\mathcal{C} = \gamma([a, b])$ . Fast immer setzt man zusätzlich voraus, dass  $\gamma$  (stückweise) stetig differenzierbar ist. Die Begriffe der Integration über  $\gamma$  und über  $\mathcal{C}$  benutzen wir synonym.

Gewöhnliche R-Integrale komplexwertiger Funktionen  $F$  einer reellen Variablen sehen wie folgt aus:

$$F(t) = G(t) + iH(t) \quad \text{mit} \quad t \in [a, b] \quad \Rightarrow \quad \int_a^b F(t) \, dt = \int_a^b G(t) \, dt + i \cdot \int_a^b H(t) \, dt$$

### Definition 26.1

Sei  $f = u + iv$  eine stetige Funktion im Gebiet  $G \subset \mathbb{C}$ .  $\gamma \in C^1([a, b])$  bilde  $[a, b] \rightarrow G$  ab, d.h.  $\mathcal{C} := \gamma([a, b])$  liegt in  $G$ . Unter dem **Integral** von  $f$  längs  $\mathcal{C}$  bzw. längs  $\gamma$  versteht man:

$$\int_{\gamma} f(z) \, dz = \int_{\mathcal{C}} f(z) \, dz := \int_a^b f(\gamma(t)) \cdot \dot{\gamma}(t) \, dt = \int_a^b f(z(t)) \cdot \dot{z}(t) \, dt$$

Benutzt man  $f = u + iv$  und  $z(t) = x(t) + iy(t)$ , so ergibt sich:

$$\int_{\mathcal{C}} f(z) \, dz = \int_a^b [u(x(t), y(t)) + iv(x(t), y(t))] \cdot [\dot{x}(t) + i\dot{y}(t)] \, dt$$

Lässt man nun die Variablen der Funktionen weg, so erhält man:

$$\int_{\mathcal{C}} f(z) \, dz = \int_a^b (u\dot{x} - v\dot{y}) \, dt + i \cdot \int_a^b (v\dot{x} + u\dot{y}) \, dt \quad (26.1)$$

Mit  $dz = dx + idy$  ist  $f(z) \, dz = (u + iv) \cdot (dx + idy)$  und man kann schreiben:

$$\int_{\mathcal{C}} f(z) \, dz = \int_{\mathcal{C}} (u \, dx - v \, dy) + i \int_{\mathcal{C}} (u \, dy + v \, dx) \quad (26.2)$$

Es gelten die üblichen Eigenschaften:

1. Linearität des Integrals bezüglich des Integranden  $f$
2. Verkettung von Kurven: Für  $\mathcal{C} = \mathcal{C}_1 \oplus \mathcal{C}_2$  ist  $\int_{\mathcal{C}} f \, dz = \int_{\mathcal{C}_1} f \, dz + \int_{\mathcal{C}_2} f \, dz$ . Damit ist das Integral auch für stückweise stetig differenzierbare Wege erklärt.
3. Das Integral  $\int_{\mathcal{C}} f \, dz$  ist von der Orientierung von  $\mathcal{C}$  bzw.  $\gamma$  abhängig. In unserer Definition ist  $\gamma$  also stets als orientiert zu betrachten:

$$\int_{\mathcal{C}} f(z) \, dz = - \int_{\mathcal{C}^-} f(z) \, dz$$

4. Standardabschätzung: Wenn  $|f(z)| \leq M$  auf  $C$ , dann gilt:

$$\left| \int_{\mathcal{C}} f(z) \, dz \right| \leq M \cdot L(\mathcal{C}) \quad \text{mit} \quad L(\mathcal{C}) = L(\gamma) = \int_a^b |\dot{z}(t)| \, dt = \int_a^b \sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2} \, dt$$

Diese Abschätzung hatten wir nur im Reellen. Im Komplexen sind Modifikationen nötig.

### Beispiel 26.1 Fundamentalebeispiel

Wir betrachten die Kurve  $\mathcal{C} = S_r(a)$ , also den Kreis um  $a$  mit dem Radius  $r$ . Gesucht ist das Integral:

$$\int_{\mathcal{C}} (z - a)^n \, dz \quad \text{mit} \quad n \in \mathbb{Z}$$

Eine Parameterdarstellung  $z(t)$  von  $\mathcal{C}$  ist:

$$z(t) := a + r \cdot e^{it} \quad \text{mit} \quad 0 < t \leq 2\pi$$

Für  $f(z) = (z - a)^n$  ist also  $f(z(t)) = r^n \cdot \exp(itn)$ . Außerdem ist  $\dot{z}(t) = ir \cdot \exp(it)$ . Jetzt können wir das Integral aufschreiben. Für  $n \neq -1$  ist:

$$\int_{\mathcal{C}} (z - a)^n \, dz = \int_0^{2\pi} f(z(t)) \cdot \dot{z}(t) \, dt = \int_0^{2\pi} ir^{n+1} \cdot e^{i(n+1)t} \, dt = \frac{r^{n+1}}{n+1} \cdot e^{i(n+1)t} \Big|_0^{2\pi} = 0$$

Der Fall  $n = -1$  muss gesondert betrachtet werden:

$$\int_{\mathcal{C}} \frac{dz}{z - a} = \int_0^{2\pi} \frac{ir \cdot e^{it}}{r \cdot e^{it}} \, dt = 2\pi \cdot i$$

Wie im Reellen kann das Kurvenintegral wegabhängig sein. Es resultieren zwei Probleme ( $f$  holomorph):

1. Sei  $G \subset \mathbb{C}$  offen. Man beschreibe alle geschlossenen Wege  $\mathcal{C}$  in  $G$  mit  $\int_{\mathcal{C}} f(z) \, dz = 0$ .
2. Wie muss  $G \subset \mathbb{C}$  beschaffen sein, damit  $\int_{\mathcal{C}} f(z) \, dz = 0$  für alle Kurven  $\mathcal{C}$  ist?

Wir werden auf beide Fragen Teilantworten geben. Im Vordergrund steht allerdings die zweite Frage.

## 26.2 Cauchyscher Integralsatz. Cauchysche Integralformel

Beide Aussagen sind die wichtigsten Grundlagen der Funktionentheorie.

**Theorem 26.2**

Cauchyscher Integralsatz für einfach zusammenhängende Gebiete

Sei  $G \subset \mathbb{C}$  ein beschränktes, einfach zusammenhängendes Gebiet.  $f$  sei in  $G$  holomorph. Dann gilt für jede in  $G$  liegende geschlossene Kurve  $\mathcal{C}$ :

$$\int_{\mathcal{C}} f(z) \, dz = 0$$

Insbesondere ist  $\int_{\mathcal{C}} f(z) \, dz$  wegunabhängig.

**Beweis**

Beweiskonzept

Wenn man zusätzlich fordert, dass  $f'$  in  $G$  stetig ist (das beinhaltet die stetige Differenzierbarkeit  $u$  und  $v$  in  $G$ ), dann ist der Beweis einfach. Betrachte dazu (26.2):

$$\int_{\mathcal{C}} f(z) \, dz = \int_{\mathcal{C}} (u \, dx - v \, dy) + i \int_{\mathcal{C}} (u \, dy + v \, dx)$$

Aus den Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen folgt für die beiden reellen Integrale die Wegunabhängigkeit, weil  $G$  einfach zusammenhängend ist. Ohne diese Forderung der stetigen Differenzierbarkeit erfolgt der Beweis i.A. in mehreren Schritten. Die größte Schwierigkeit ist der erste Schritt, da der Beweis hierzu aufwändig ist.

1. **Satz von Goursat:** Für beliebige Dreiecke  $\Delta \subset G$  ist  $\int_{\partial\Delta} f(z) \, dz = 0$ .
2. Nun verallgemeinert man auf  $\int_{\mathcal{P}} f(z) \, dz = 0$ , wobei  $\mathcal{P}$  ein ganz in  $G$  verlaufender, geschlossener Polygonzug ist. Zum Beweis zerlegt man das Polygon so in Dreiecke  $\Delta_1, \dots, \Delta_n$ , dass  $\mathcal{P} = \bigoplus_{i=1}^n \Delta_i$  ist. (Hierbei muss man unbedingt die Orientierung beachten, damit sich Teilgeraden innerhalb des Polygons wegheben.)
3. Zuletzt wird eine beliebige Kurve  $\mathcal{C}$  durch Polygonzüge approximiert: Zu beliebigen  $\varepsilon > 0$  approximiere  $\mathcal{C}$  durch ein  $\mathcal{P}(\varepsilon)$ , dass:

$$\left| \int_{\mathcal{C}} f(z) \, dz - \int_{\mathcal{P}} f(z) \, dz \right| < \varepsilon$$

■

Im folgenden führen wir Varianten und Verallgemeinerungen dieses Satzes ein.

**Theorem 26.2a**

Sei  $G$  ein beschränktes Gebiet und  $\mathcal{C} \subset G$  eine geschlossene Kurve.  $f$  sei auf  $\mathcal{C}$  stetig und im Inneren von  $\mathcal{C}$  holomorph. Dann gilt:

$$\int_{\mathcal{C}} f(z) \, dz = 0$$

**Bemerkung**

Spezialfall

Der Rand eines einfach zusammenhängenden Gebietes besteht aus unendlich vielen stetig differenzierbaren Kurvenstücken ohne gemeinsame innere Punkte.  $f$  sei in  $G$  holomorph mit auf dem Rand  $\partial G$  stetig. Dann gilt  $\int_{\partial G} f(z) \, dz = 0$ .

**Beweis**

Die Idee ist wieder, die Kurve  $\mathcal{C}$  durch Polygonzüge zu approximieren, die innerhalb von  $\mathcal{C}$  verlaufen und ggf. Eckpunkte auf  $\mathcal{C}$  haben. Dabei gibt es eine Feinheit: In den Eckpunkten liegt nur Stetigkeit vor. Dazu kann man eine Variante des Satzes von Goursat benutzen, die zulässt, dass  $f$  in einem Dreieckseckpunkt nur stetig ist.

■

**Theorem 26.2b**

Cauchyscher Integralsatz für mehrfach zusammenhängende Gebiete

Sei  $G$  ein beschränktes Gebiet, das von endlich vielen punktfremden, geschlossenen, stückweise stetig differenzierbaren Kurven  $\mathcal{C}_0, \dots, \mathcal{C}_n$  berandet wird. Die Kurven seien so orientiert, dass  $G$  zur Linken liegt. Die Funktion  $f$  sei in  $G$  holomorph und auf den  $\mathcal{C}_i$  stetig. Dann gilt:

$$\int_{\partial G} f(z) \, dz = \sum_{i=0}^n \int_{\mathcal{C}_i} f(z) \, dz = 0$$

**Bemerkung**

Man beachte, dass nun für  $G$  kein einfacher, sondern nur ein wegweiser Zusammenhang gefordert wird. Anschaulich kann die Menge also auch „Löcher“ enthalten, die durch zusätzliche Randkurven mit entsprechender Orientierung definiert sind.

**Beweis**

Beweisidee für einen Spezialfall

In der Menge liege nur ein „Loch“ vor, es handle sich anschaulich also um einen „Ring“. Wir stellen uns einen Schnitt von der äußeren Kurve  $\mathcal{C}_0$  bis zur inneren Kurve  $\mathcal{C}_1$  vor. Zur Berandung des Gebietes gehen wir zuerst  $\mathcal{C}_0$  ab, dann den Schnitt  $\mathcal{C}_s$  zu  $\mathcal{C}_1$ , dann  $\mathcal{C}_1$  selbst, und dann entlang des Schnittes  $\mathcal{C}_s$  zurück zu  $\mathcal{C}_0$ . Es entsteht ein einfach zusammenhängendes Gebiet, denn: Für einfachen Zusammenhang wird gefordert, dass jede geschlossene Kurve auf einen Punkt zusammengezogen werden kann, ohne  $G$  zu verlassen. Das ist jetzt möglich, da wir den „Ring“ an einer Stelle zerschnitten haben.

Auf das Gebiet  $G' = G \setminus \mathcal{C}_s$  mit der neuen Randkurve  $\mathcal{C}_0 \oplus \mathcal{C}_s \oplus \mathcal{C}_1 \oplus \mathcal{C}_s^-$  kann nun das Theorem 26.2a angewendet werden, welches zu  $\int_{\partial G'} f(z) \, dz = 0$  führt. Dabei wird der Schnitt  $\mathcal{C}_s$  zweimal in entgegengesetzter Richtung durchlaufen; die Integrale über  $\mathcal{C}_s$  heben sich also weg. Es bleibt:

$$\int_{\partial G} f(z) \, dz = \int_{\partial G'} f(z) \, dz = 0$$

Dieses Konzept kann man auf endlich viele „Löcher“ verallgemeinern, indem man alle Löcher mit Schnitten verbindet.

■

**Folgerung 26.3**

1. Sei  $G$  ein beschränktes Gebiet und  $f$  in  $G$  holomorph. Ferner seien  $\mathcal{C}_1$  und  $\mathcal{C}_2$  zwei geschlossene, ganz in  $G$  verlaufende, punktfremde, stückweise stetig differenzierbare Kurven, die sich stetig ineinander deformieren lassen. (Man sagt,  $\mathcal{C}_1$  und  $\mathcal{C}_2$  sind **homotop**.) Dann gilt, wenn beide Kurven im selben Sinn durchlaufen werden:

$$\int_{\mathcal{C}_1} f(z) \, dz = \int_{\mathcal{C}_2} f(z) \, dz$$

2. Seien  $G$  und  $f$  wie oben,  $a \in G$  und  $\mathcal{C}$  eine geschlossene Kurve in  $G$ , die im Inneren den Kreis  $K_r(a)$  enthält.  $\partial K_r(a) = S_r(a)$  und  $\mathcal{C}$  seien homotop und werden in gleicher Richtung durchlaufen. Dann gilt:

$$\int_{\mathcal{C}} \frac{f(z)}{(z-a)^n} \, dz = \int_{S_r(a)} \frac{f(z)}{(z-a)^n} \, dz \quad \text{für}$$

Insbesondere ist:

$$\int_{\mathcal{C}} \frac{1}{z-a} \, dz = \int_{S_r(a)} \frac{1}{z-a} \, dz = 2\pi \cdot i$$

**Beweis**

1. Wir haben ein Gebiet mit einigen „Löchern“.  $\mathcal{C}_1$  liegt in  $G$  und enthält  $\mathcal{C}_2$ , aber keine „Löcher“. Im zweiten Fall liegt dieselbe Situation vor, jedoch enthalten  $\mathcal{C}_1$  und  $\mathcal{C}_2$  eins der „Löcher“. Im ersten Fall folgt  $\int_{\mathcal{C}_1} f(z) \, dz = \int_{\mathcal{C}_2} f(z) \, dz$  sofort. Problematischer ist die zweite Situation, diese kann man aber mit einem Schnitt  $\mathcal{C}_s$  zwischen  $\mathcal{C}_1$  und  $\mathcal{C}_2$  entschärfen. Es entsteht ein einfach zusammenhängendes Gebiet, in dem  $f$  holomorph ist. Also kann man 26.2b auf den Rand  $\mathcal{C}_1 \oplus \mathcal{C}_s \oplus \mathcal{C}_2^-$  anwenden. (Die Orientierung von  $\mathcal{C}_2$  muss geändert werden, damit die umschlossene Menge zur Linken liegt.) Wiederum fallen Integrale über  $\mathcal{C}_s$  weg; wir erhalten:

$$\int_{\partial G'} f(z) \, dz = \int_{\mathcal{C}_1} f(z) \, dz + \int_{\mathcal{C}_2^-} f(z) \, dz = 0 \quad \Rightarrow \quad \int_{\mathcal{C}_1} f(z) \, dz = - \int_{\mathcal{C}_2^-} f(z) \, dz = \int_{\mathcal{C}_2} f(z) \, dz$$

2. Nun liege in  $G$  eine Kurve  $\mathcal{C}$  (die keine „Löcher“ umschließe) und darin der Kreis  $K_r(a)$  mit dem Rand  $S_r(a)$ . Betrachte  $\hat{G} := G \setminus \{a\}$ , dieses Gebiet ist nicht mehr einfach zusammenhängend. In  $\hat{G}$  ist die Funktion  $f(z)/(z-a)^n$  für  $n \in \mathbb{Z}$  holomorph. Alle Behauptungen folgen aus dem ersten Teil; den Wert des letzten Integrals hatten wir bereits im Beispiel 26.1 abgeleitet. ■

**Bemerkung**

Beim Cauchyschen Integralsatz 26.2 kann man weder den einfachen Zusammenhang noch die Beschränktheit weglassen. Für den einfachen Zusammenhang siehe das Fundamentalbeispiel 26.1. Die Erkenntnis, dass die Beschränktheit vital ist, ist problematischer. Diesen Punkt diskutieren wir bei der Einführung des Punktes „Unendlich“.

Analog zum Reellen kann der Begriff der Stammfunktion eingeführt werden.

**Definition 26.4**

Sei  $f$  eine in einer offenen Menge  $\mathcal{U} \subset \mathbb{C}$  stetige Funktion. Man nennt  $f$  in  $\mathcal{U}$  **integrabel**, wenn es eine in  $\mathcal{U}$  holomorphe Funktion  $F$  gibt mit  $F' = f$ .  $F$  heißt **Stammfunktion** von  $f$  (in  $\mathcal{U}$ ).

**Satz 26.5**

Eigenschaften der Stammfunktion

1. Sei  $G$  beschränkt und einfach zusammenhängend, und  $f$  in  $G$  holomorph. Für einen festen Punkt  $z_0 \in G$  ist das folgende  $F$  eine Stammfunktion von  $f$ :

$$F(z) := \int_{z_0}^z f(\zeta) \, d\zeta \quad \left( \begin{array}{l} \text{Integral längs einer beliebigen Kurve} \\ \mathcal{C} \subset G, \text{ die } z_0 \text{ und } z \text{ verbindet} \end{array} \right)$$

2. Zwei Stammfunktionen  $F_1$  und  $F_2$  von  $f$  unterscheiden sich nur um eine Konstante.
3. Ist  $F$  eine beliebige Stammfunktion von  $f$ , und  $\mathcal{C}$  eine Kurve in  $G$  mit dem Anfangspunkt  $z_1$  und dem Endpunkt  $z_2$ , dann gilt:

$$\int_{\mathcal{C}} f(\zeta) \, d\zeta = F(z_2) - F(z_1)$$

**Beweis**

Wir setzen zusätzlich voraus, dass  $u$  und  $v$  (aus der Darstellung  $f = u + iv$ ) stetig differenzierbar ist. (Dass  $f$  holomorph ist, impliziert ja nur totale Differenzierbarkeit von  $u$  und  $v$  sowie (CR).)

1. Mit  $f(z) = u(x, y) + i \cdot v(x, y)$  und  $d\zeta = dx + idy$  erhält man wieder die Formel (26.2):

$$F(z) = \int_{z_0}^z (u \, dx - v \, dy) + i \cdot \int_{z_0}^z (v \, dx + u \, dy)$$

Die beiden Vektorfelder  $(u, -v)^T$  und  $(v, u)^T$  erfüllen in  $G$  die Integrabilitätsbedingungen (siehe Potential zu Vektorfeldern in Kapitel 8.3) wegen der Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen. Also haben beide Vektorfelder stetig differenzierbare Potentiale  $U$  und  $V$ .

$$U(x, y) = \int_{z_0}^z (u \, dx - v \, dy) \quad \text{und} \quad V(x, y) = \int_{z_0}^z (v \, dx + u \, dy)$$

Es gilt weiterhin  $U_x = V_y = u$  und  $V_x = -U_y = v$ . Das heißt, dass  $F = U + iV$  stetig differenzierbar ist und die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen erfüllt; also ist  $F$  holomorph mit  $F' = U_x + iV_x = u + iv = f$ . Also ist  $F$  die gesuchte Stammfunktion.

2. Der Beweis geht genau wie im Reellen.
3. Wir nehmen die Punkte  $z_0, z_1$  und  $z_2$ . Ein Kurve  $\mathcal{C}$  verbindet  $z_1$  und  $z_2$ . Ein zweite Kurve läuft von  $z_1$  nach  $z_0$ , dann nach  $z_2$  und schließt mit  $\mathcal{C}^-$  wieder zu  $z_1$ . Sei  $F$  o.E.d.A. die Stammfunktion aus dem ersten Teil. Nach dem Integralsatz 26.2 gilt:

$$\int_{\mathcal{C}^-} f(z) \, dz + \int_{z_1}^{z_0} f(z) \, dz + \int_{z_0}^{z_2} f(z) \, dz = 0 \Rightarrow \int_{\mathcal{C}} f(z) \, dz = \int_{z_0}^{z_2} f(z) \, dz - \int_{z_0}^{z_1} f(z) \, dz = F(z_2) - F(z_1)$$

**Bemerkung**

Die Voraussetzungen im vorigen Satz sind eigentlich zu stark. (Sie werden benutzt, damit man besonders den Zusammenhang mit Potentialen sieht.) Man kann den Satz auch wie folgt abschwächen.

**Satz 26.5a**

Sei  $G$  ein Gebiet und  $f$  in  $G$  stetig. Für jede geschlossene Kurve  $\mathcal{C} \subset G$  sei  $\int_{\mathcal{C}} f(z) dz = 0$ . Dann hat  $f$  auf  $G$  eine Stammfunktion.

**Beweis**

$a \in G$  fest,  $z \in G$  beliebig. Sei  $\mathcal{C}_z$  eine Kurve, die  $a$  mit  $z$  verbindet. Setze:

$$F(z) := \int_{\mathcal{C}_z} f(\zeta) d\zeta = \int_a^z f(\zeta) d\zeta$$

Zu zeigen ist, dass  $F$  eine Stammfunktion von  $f$  ist, das heißt:  $F'(z_0) = f(z_0)$  für alle  $z_0 \in G$ . Für ein  $z$ , das hinreichend nah bei  $z_0$  liegt, liegt die Strecke  $\overline{z_0 z}$  ganz in  $G$ . Dann gilt für die folgende geschlossene Kurve:

$$\mathcal{C} = \mathcal{C}_z \oplus \overline{z_0 z} \oplus \mathcal{C}_{z_0} \subset G \quad \Rightarrow \quad \int_{\mathcal{C}} f(z) dz = 0$$

Dann gilt:

$$F(z) - F(z_0) = \int_{\mathcal{C}_z} f(z) dz - \int_{\mathcal{C}_{z_0}} f(z) dz = \int_{\overline{z_0 z}} f(z) dz$$

Das verbleibende Integral lässt sich einfach berechnen, da durch  $z(t) = z_0 + t \cdot (z - z_0)$  (auf  $[0, 1]$ ) eine Parameterdarstellung von  $\overline{z_0 z}$  vorliegt.

$$F(z) - F(z_0) = \int_0^1 f(z_0 + t \cdot (z - z_0)) \cdot (z - z_0) dt = (z - z_0) \cdot \underbrace{\int_0^1 f(z_0 + t \cdot (z - z_0)) dt}_{=: A(z)}$$

Hierdurch ist eine Funktion  $A : \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{R}$  definiert, für die  $A(z_0) = f(z_0)$  gilt. Wir zeigen, dass  $A$  in  $z_0$  stetig ist, denn dann folgt:

$$\lim_{z \rightarrow z_0} A(z) = A(z_0) \quad \Rightarrow \quad \frac{F(z) - F(z_0)}{z - z_0} = A(z) \quad \xrightarrow{(z \rightarrow z_0)} \quad A(z_0) = f(z_0) \quad \Rightarrow \quad F'(z_0) = f(z_0)$$

Es gilt:

$$|A(z) - A(z_0)| = \left| \int_0^1 f(z_0 + t(z - z_0)) dt - \int_0^1 f(z_0) dt \right| \leq \max_{0 \leq t \leq 1} |f(z_0 + t(z - z_0)) - f(z_0)| \cdot \underbrace{\int_0^1 dt}_{=1}$$

Da  $f$  stetig ist, wird der rechts stehende Ausdruck klein, wenn  $z$  nahe an  $z_0$  ist, also ist  $A$  stetig in  $z_0$ . ■

**Theorem 26.6**

## Cauchysche Integralformel

Sei  $G \subset \mathbb{C}$  ein beschränktes Gebiet,  $f$  in  $G$  holomorph und  $\mathcal{C} \subset G$  eine geschlossene Kurve, deren Inneres ganz in  $G$  liegt. Dann gilt für alle  $z$  im Inneren dieser Kurve:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \cdot \int_{\mathcal{C}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \quad (26.3)$$



**Beweis**

Sei  $K_r(z)$  ein Kreis im Inneren von  $\mathcal{C}$ , mit der Randkurve  $S_r(z)$ . Nach Folgerung 26.3.2 gilt:

$$\int_{\mathcal{C}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \int_{S_r(z)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \int_{S_r(z)} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} d\zeta + \underbrace{\int_{S_r(z)} \frac{f(z)}{\zeta - z} d\zeta}_{=2\pi i \cdot f(z)} \quad (*)$$

Das erste Integral können wir mithilfe der Kurvenlänge  $L(S_r(z)) = 2\pi r$  abschätzen. Zusätzlich nutzen wir aus, dass auf  $S_r(z)$  gilt:  $|1/(\zeta - z)| = 1/r = \text{const.}$

$$\left| \int_{S_r(z)} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} d\zeta \right| \leq \frac{1}{r} \cdot 2\pi r \cdot \sup_{\zeta \in S_r(z)} |f(\zeta) - f(z)| \xrightarrow{r \rightarrow 0} 0$$

In (\*) können wir nun  $r$  gegen Null gehen lassen und erhalten:

$$\int_{S_r(z)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = 2\pi i \cdot f(z)$$

■

**Theorem 26.6a**

## Allgemeine Cauchysche Integralformel

$G$  und  $f$  mögen die Voraussetzungen von Theorem 26.2b erfüllen. (Also:  $G \subset \mathbb{C}$  ist ein beschränktes Gebiet,  $f$  ist auf  $G$  holomorph und auf  $\partial G$  stetig.) Dann gilt:

$$\frac{1}{2\pi i} \cdot \int_{\partial G} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \begin{cases} f(z) & z \in G \\ 0 & z \notin \overline{G} \end{cases} \quad (26.4)$$

**Beweis**

Auch hier ist das Konzept, durch Schnitte zwischen Berandungskurven von  $G$  ein einfach zusammenhängendes Gebiet zu erzeugen.  $z$  soll auf keinem der Schnitte liegen.

- Für  $z \in G$  kann 26.6 angewendet werden.
- Für  $z \in \partial G$  ist keine allgemeine Aussage möglich.
- In dem Falle, das  $z \notin \overline{G}$  ist, ist der Integrand auf  $\partial G$  stetig und in  $G$  holomorph. Auch hier kann man die passende Variante des Cauchyschen Integralsatzes anwenden.

■

**Bemerkung**

zur Interpretation von (26.3) und (26.4)

Die Funktionswerte einer holomorphen Funktion sind durch die Werte auf dem Rand eindeutig bestimmt. Später werden wir sogar sehen, dass für zwei beliebige holomorphe Funktionen ein kleines Intervall oder sogar eine konvergente Punktfolge genügt, auf dem beide Funktionen gleich sind, damit die Funktionen insgesamt gleich sind.

**Beispiel 26.2**

## Anwendung zur Cauchyschen Integralformel

$$\int_{|z|=1/2} \frac{e^z}{z \cdot (1-z)^3} dz$$

ist zu berechnen. Hierbei ist  $e^z = \sum_{n=0}^{\infty} z^n/n!$  wieder die Exponentialfunktion, definiert als analytische Funktion mit unendlich großem Konvergenzradius. Analog definiert man  $\sin z$  und  $\cos z$  durch Potenzreihen. Diese Funktionen sind alle auf dem ganzen  $\mathbb{C}$  holomorph. Wir benutzen nun die Cauchysche Integralformel:

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \cdot \int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - a} d\zeta$$

Zur Anwendung in unserem Beispiel setzen wir  $a = 0$  sowie  $f(z) = e^z/(1-z)^3$  und integrieren über die Kurve  $C = S_{1/2}(0)$ .  $f(z)$  ist im Kreis  $S_{1/2}(0)$  natürlich holomorph.

$$f(0) = \frac{1}{2\pi i} \cdot \int_{S_{1/2}(0)} \frac{e^z}{z \cdot (1-z)^3} dz$$

Rechts steht bis auf den Divisor  $2\pi i$  genau das Integral, was wir suchen. Dessen Wert ist deswegen  $2\pi i$ .

Eine holomorphe Funktion ist beliebig oft differenzierbar. In Kapitel 28 wird auf anderem Wege gezeigt, dass  $f$  sogar analytisch ist. Der folgende Satz zeigt, analog zur reellen Variante, dass man Integration und Differentiation miteinander vertauschen kann.

**Satz 26.7**

Sei  $f$  eine Funktion von zwei komplexen Variablen  $w \in \mathcal{C}$  und  $z \in G$ , wobei  $\mathcal{C}$  eine kompakte Kurve in  $G$  ist.  $f$  sei in  $z$  und  $w$  stetig und für alle  $z \in G$  nach  $z$  stetig differenzierbar. Dann ist  $F(z) := \int_{\mathcal{C}} f(w, z) dw$  für alle  $z \in G$  komplex differenzierbar und es gilt:

$$F'(z) = \frac{dF}{dz} = \int_{\mathcal{C}} \frac{\partial f(w, z)}{\partial z} dw$$

Zum Beweis muss man den Differenzenquotienten direkt abschätzen.

**Theorem 26.8**

Cauchysche Integralformel für die Ableitungen einer holomorphen Fkt.

Jede in  $G$  holomorphe Funktion ist beliebig oft differenzierbar. Für  $z \in G$  und  $K_r(z) \subset G$  gilt dann:

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \cdot \int_{S_r(z)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta \quad \text{für } n \in \mathbb{N} \quad (26.5)$$

**Beweis**

für  $n = 1$ , Verallgemeinerung iterativ

Betrachte die Cauchysche Integralformel in der Form:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \cdot \int_{S_r(z)} \frac{f(w)}{w - z} dw$$

Das obige Integral erfüllt alle Voraussetzungen des Integranden in Satz 26.8. Der Integrand ist sogar beliebig oft nach  $z$  differenzierbar. Die Ableitung sieht wie folgt aus:

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \cdot \int_{S_r(z)} \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{f(w)}{w - z} \right) dw = \frac{1}{2\pi i} \cdot \int_{S_r(z)} \frac{f(w)}{(w - z)^2} dw$$



Es existiert eine Umkehrung des Cauchyschen Integralsatzes.

**Satz 26.9** Satz von Morera

Sei  $G \subset \mathbb{C}$  ein Gebiet und  $f$  in  $G$  stetig so, dass  $\int f(z) dz$  *lokal wegunabhängig* ist, das heißt: Zu jedem Punkt  $z_0 \in G$  gibt es einen Kreis  $K \subset G$  um  $z_0$ , in dem  $\int f(z) dz$  wegunabhängig ist. Dann ist  $f$  in  $G$  holomorph.

**Beweis**

Aus dem Satz 26.5 (allgemeine Variante) folgt, dass  $f$  in  $K$  eine Stammfunktion  $F$  besitzt, das heißt, dass  $F'(z) = f(z)$  für alle  $z \in K$  ist. Das heißt  $F$  ist in  $z_0$  (sogar in  $K$ ) holomorph, also ist auch  $f$  in  $z_0$  holomorph. Da  $z_0 \in G$  beliebig ist, ist  $f$  in ganz  $G$  holomorph. ■

---

## 27 Einige elementare Funktionen

Unproblematisch sind Polynome in  $z$  und rationale Funktionen. Die wichtigsten Beispiele holomorpher Funktionen sind die Potenzfunktionen.

### 27.1 Exponentialfunktion und trigonometrische Funktionen

Betrachte die bekannte Potenzreihe:

$$E(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \quad (27.1)$$

Diese Potenzreihe konvergiert in ganz  $\mathbb{C}$  und stellt dort eine holomorphe Funktion dar. Wir schreiben dann auch  $E(z) =: e^z$ . Wir wollen einige einfache Eigenschaften der Exponentialfunktion aufschreiben:

1.  $E'(z) = E(z)$  (durch gliedweise Differentiation von (27.1))
2.  $E(0) = 1$  (trivial)
3.  $E(z) \neq 0$  für alle  $z \in \mathbb{C}$  (nicht trivial)

Betrachte zum Beweis die Funktion  $f(z) := E(-z) \cdot E(w+z)$  mit einem beliebigen festen  $w \in \mathbb{C}$ . Mit der Produktregel und der Eigenschaft 1 erhält man:

$$f'(z) := -E(-z) \cdot E(w+z) + E(-z) \cdot E(w+z) = 0$$

$f$  ist konstant, der Wert dieser Konstante ergibt sich aus:

$$E(-z) \cdot E(w+z) = f(0) = E(w) \quad (27.2)$$

Für  $w = 0$  ist im Speziellen:

$$E(-z) \cdot E(z) = 1 \quad (27.3)$$

Dies gilt für alle  $z \in \mathbb{C}$ , somit muss  $E(z) \neq 0$  sein.

4. Es gilt das bekannte Exponentialgesetz:

$$E(z+w) = E(z) \cdot E(w) \quad (27.4)$$

Im Kapitel 3 wurde dies durch Reihenmultiplikation gezeigt. Mit (27.2) und (27.3) ist es einfacher:

$$E(-z) \cdot E(z+w) \stackrel{(27.2)}{=} 1 \cdot E(w) \stackrel{(27.3)}{=} E(-z) \cdot E(z) \cdot E(w)$$

5. Aus (27.3) folgt unmittelbar  $E(-z) = E(z)^{-1}$ .

Bevor wir weitere Eigenschaften untersuchen, werden die sin- und cos-Funktionen eingeführt.

$$\sin z := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \cdot z^{2n+1} \quad (27.5)$$

$$\cos z := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \cdot z^{2n} \quad (27.6)$$

Beide Funktionen sind auf dem gesamten  $\mathbb{C}$  konvergent und holomorph. Es gilt:

1.  $\sin(-z) = -\sin z$  und  $\cos(-z) = \cos z$
2.  $(\sin z)' = \cos z$  und  $(\cos z)' = -\sin z$

Aus den Formeln (27.5) und (27.6) erhält man:

$$\cos z + i \sin z = e^{iz} \quad (27.7)$$

Jetzt kann die Exponentialfunktion durch Sinus und Kosinus ausgedrückt werden. Umgekehrt gilt:

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \quad \text{und} \quad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \quad (27.8)$$

### Satz 27.1

#### Weitere Eigenschaften der Exponentialfunktion

1. Die einzigen Perioden der Exponentialfunktion  $E$  sind die Zahlen  $2k\pi i$  mit  $k \in \mathbb{Z}$ .
2. Der Wertebereich von  $E$  ist  $W(E) = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ . Genauer gibt es zu jedem  $w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$  genau ein  $z$  aus dem **Fundamentalstreifen**  $S := \{z \in \mathbb{C} : -\pi < \operatorname{Im} z \leq \pi\}$  der Exponentialfunktion mit  $E(z) = w$ .
3. Durch die Abbildung  $z \mapsto e^z$  wird das Innere von  $S$  eineindeutig (und konform) auf die längs der negativen reellen Achse aufgeschnittene komplexe Ebene  $\mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{R} : x \leq 0\}$  abgebildet.

### Beweis

1. Seien  $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$  mit  $E(z_1) = E(z_2)$ , also  $E(z_1 - z_2) = 1$ . Wir setzen  $w := z_1 - z_2 = x + iy$ . Es ist zu zeigen, dass  $w = 2k\pi i$  ist.

$$E(w) = e^w = e^x \cdot (\cos y + i \sin y) = 1 \quad \Rightarrow \quad e^x \cdot \cos y = 1 \quad \text{und} \quad e^x \cdot \sin y = 0$$

Somit muss  $\sin y = 0$  sein, das heißt  $y = l\pi$  mit  $l \in \mathbb{Z}$ . Zudem muss  $\cos y > 0$  sein (da sowohl  $e^x$  als auch das Produkt aus beiden positiv ist). Um dies zu erfüllen, muss  $l = 2k$  sein. Dann ist  $\cos y = 1$ , also  $e^x = 1$  und somit  $x = 0$ .

2. Aus 1. folgt, dass jeder Wert von  $E$  bereits in  $S$  angenommen wird. Um den Wertebereich zu finden, genügt es also, den Bereich  $S$  zu betrachten. Auf  $S$  ist  $E$  zudem injektiv, denn: Wenn es  $z_1, z_2 \in S$  gäbe mit  $E(z_1) = E(z_2)$ , dann müsste  $z_1 - z_2 = 2k\pi i$  sein. Damit beide Punkte in  $S$  liegen, muss  $k = 0$  sein, somit ist wieder  $z_1 = z_2$ . Zu zeigen:  $E$  bildet auf  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$  ab. Sei  $w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ . Dann existiert genau ein  $y \in [-\pi, \pi] \subset S$  mit  $y = \arg w$ . Setze  $x := \ln |w| \in \mathbb{R}$ . Dann gilt für  $z = x + iy$ :

$$E(z) = e^z = e^{x+iy} = e^{\ln|w|} \cdot (\cos y + i \sin y) = |w| \cdot e^{iy} = w$$

Jetzt müssen wir noch zeigen, dass die Null nicht zum Wertebereich gehört:

$$\forall z \in \mathbb{C} : |e^z| = |e^x| = e^x > 0 \quad \Rightarrow \quad 0 \notin W(E)$$

3. **Konformität** (Winkeltreue der Abbildung) liegt vor, da die Ableitung nirgends verschwindet (Beweis für diesen Satz hier nicht):

$$\forall z \in \mathbb{C} : (e^z)' = e^z \neq 0$$

Zum Beweis verbleiben die Aussagen über die Abbildung des Inneren von  $S$ . Jede zur  $x$ -Achse parallele Gerade  $\{x + iy_0 : x \in \mathbb{R}\}$  wird eineindeutig abgebildet auf einen vom Nullpunkt ausgehenden Strahl  $\{t \cos y_0 + it \sin y_0 : t = e^x > 0\}$ . Dabei werden die beiden Geraden für  $y = \pm\pi$  auf  $\{z : \operatorname{Re} z \leq 0, \operatorname{Im} z = 0\}$  abgebildet.



## 27.2 Die Logarithmusfunktion

Bei der Betrachtung der Umkehrfunktion treten typische Probleme auf, die zu ganz eigenständigen Teilgebieten der Funktionentheorie führen (siehe zum Beispiel: Riemannsche Flächen). Für einen Punkt  $w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$  definieren wir folgende Menge:

$$\operatorname{Log} w := E^{-1}(w) = \{z \in \mathbb{C} : E(z) = w\}$$

Das heißt, für  $z_0 \in \operatorname{Log} w$  ist  $\operatorname{Log} w = \{z_0 + 2k\pi i : k \in \mathbb{Z}\}$ . Wenn  $w = r \cdot e^{i\varphi}$ ,  $-\pi < \varphi \leq \pi$ , dann ist  $\operatorname{Log} w = \{\ln r + i\varphi + 2k \cdot i\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ . Zum Beispiel ist  $\operatorname{Log} 1 = \{2k\pi i : k \in \mathbb{Z}\}$ .

Allgemein würde man eine Funktion  $f$  als Umkehrfunktion von  $E$  bezeichnen, wenn  $E(f(z)) = z$  für alle  $z \neq 0$  ist. Folglich muss  $f(z) \in \operatorname{Log} z$  sein. Das Problem ist, dass es auf einem Gebiet  $G \subset \mathbb{C} \setminus \{0\}$  unendlich viele Funktionen gibt, die obige Gleichung erfüllen. Die meisten dieser Funktionen sind unstetig. Die Umkehrfunktion aber soll mindestens stetig sein.

### Definition 27.2

Unter einem **Zweig der Logarithmusfunktion** in einem Gebiet  $G \subset \mathbb{C} \setminus \{0\}$  versteht man eine in  $G$  stetige Funktion  $f$ , für welche  $f(z) \in \operatorname{Log} z$  für alle  $z \in G$  gilt. Die in  $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$  definierte Funktion

$$\operatorname{Ln} z = \ln r + i\varphi \quad \text{mit} \quad -\pi < \varphi < \pi \quad \text{und} \quad z = r \cdot e^{i\varphi}$$

heißt **Hauptzweig der Logarithmusfunktion**.

#### Bemerkung

Man definiert häufig  $\operatorname{Ln}$  auch für  $z \in \mathbb{R}_-$  durch  $\operatorname{Ln} z = \ln r + i\varphi = \ln r + i\pi$ .

Worin besteht der Witz dieser Definition? Um eindeutig eine in  $G$  stetige Funktion  $f$  mit  $f(z) \in \operatorname{Log} z$  zu definieren, muss man in der Lage sein, für  $z \in G$  das Argument  $\arg z$  so festzulegen, dass  $z \mapsto \arg z$  stetig wird. Betrachten wir den Hauptzweig, d.h. wir suchen die Werte in  $S$ . Angenommen, wir hätten  $z \in \mathbb{R}_-$  und betrachten die Umgebung  $U(z)$  und deren Bild. Dieses Bild ist in zwei Teile zerteilt, eines an der „Oberkante“ von  $S$  und eines an der „Unterkante“ von  $S$ .

Wir haben es in Zukunft immer mit dem Hauptzweig zu tun. Jeder Zweig  $f$  der Logarithmusfunktion ist in seinem Definitionsbereich holomorph mit  $f'(z) = 1/z$ . Die üblichen Logarithmusgesetze gelten im Komplexen nicht mehr. Wie im Reellen nutzt man die Logarithmusfunktion, um allgemeine Potenzen zu definieren: Für  $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$  setze

$$a^b = E(b \cdot f(a)) = e^{b \cdot f(a)}$$

Als Zahlenmengen hätte man  $\{a^b\} = e^{b \cdot \text{Log } a}$ . Wählt man den Hauptzweig  $f$  der Logarithmusfunktion, dann ist:

$$a^b = e^{b \cdot \ln a}$$

**Beispiel 27.1**

Zwei triviale Beispiele

- Für  $z = i$  ist  $r = 1$ ,  $\ln r = 0$  und  $\arg i = \pi/2$ . Damit ist  $\text{Ln } i = \ln r + i\varphi = i \cdot \pi/2$ .
- $3^i = e^{i \cdot \text{Ln } 3} = e^{i \cdot \ln 3}$

## 28 Einige Anwendungen der Cauchyschen Integralformel

### Lemma 28.1

Sei  $h : S_r(a) \rightarrow \mathbb{C}$  stetig. Dann besitzt die Funktion:

$$H(z) := \int_{S_r(a)} \frac{h(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

die beiden folgenden Reihenentwicklungen:

1. Im Innengebiet  $\{z : |z - a| < r\}$  ist

$$H(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot (z - a)^k \quad \text{mit} \quad a_k = \int_{S_r(a)} \frac{h(\zeta)}{(\zeta - a)^{k+1}} d\zeta \quad (28.1)$$

Diese Reihe konvergiert *gleichmäßig* in jedem Kreis  $\{z : |z - a| \leq r_1 < r\}$ .

2. Im Außengebiet  $\{z : |z - a| > r\}$  gilt:

$$H(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k}{(z - a)^k} \quad \text{mit} \quad b_k = - \int_{S_r(a)} h(\zeta) \cdot (\zeta - a)^{k-1} d\zeta \quad (28.2)$$

Diese Reihe konvergiert *gleichmäßig* in jeder Menge der Form  $\{z : |z - a| \geq r_2 > r\}$ .

**Beweis** durch Standardtrick mit der geometrischen Reihe

Sei  $z$  im Inneren, das heißt  $|z - a| < |\zeta - a| = r$ . Dann gilt:

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{(\zeta - a) - (z - a)} = \frac{1}{\zeta - a} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z-a}{\zeta-a}} = \frac{1}{\zeta - a} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \left( \frac{z-a}{\zeta-a} \right)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z-a)^k}{(\zeta-a)^{k+1}}$$

Diese Reihe konvergiert gleichmäßig, wie in 1. beschrieben. Damit kann man Integral und Summe vertauschen. Dann ist:

$$H(z) = \int_{S_r(a)} \frac{h(\zeta)}{\zeta - z} dz = \int_{S_r(a)} \left[ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{h(\zeta)}{(\zeta - a)^{k+1}} \cdot (z - a)^k \right] d\zeta = \sum_{k=0}^{\infty} \left[ \int_{S_r(a)} \frac{h(\zeta)}{(\zeta - a)^{k+1}} d\zeta \right] \cdot (z - a)^k$$

Im Außengebiet gilt  $|z - a| > |\zeta - a| = r$  und damit in Analogie zu innen:

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{(\zeta - a) - (z - a)} = -\frac{1}{z - a} \cdot \frac{1}{1 - \frac{\zeta-a}{z-a}} = -\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\zeta - a)^k}{(z - a)^{k+1}}$$





**Satz 28.2**

Jede in  $G$  holomorphe Funktion  $f$  besitzt innerhalb jedes Kreises  $K_r(a) \subset G$  eine Potenzreihenentwicklung:

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot (z - a)^k \quad (28.3)$$

Die Potenzreihe konvergiert im größten Kreis (dem **Konvergenzkreis**), der noch ganz in  $G$  liegt. Die Entwicklung (28.3) ist die **Taylorentwicklung** von  $f$  an  $a$  und es gilt:

$$a_k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!} \quad (28.4)$$

Insbesondere ist also jede holomorphe Funktion analytisch.

**Beweis**

Man wende das Lemma 28.1 auf die Funktion  $H = f/2\pi i$  an. Dann erhält man gemäß der Cauchyschen Integralformel:

$$2\pi i \cdot H(z) = f(z) = \frac{1}{2\pi i} \cdot \int_{S_r(a)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

Man erhält sofort die Gleichung (28.3). Die Koeffizienten  $a_k$  ergeben sich entweder aus der Formel für  $a_k$  in (28.1) und der Cauchyschen Integralformel für die Ableitungen, oder aus der Tatsache, dass man die Potenzreihe im Inneren gliedweise beliebig oft differenzieren kann. ■

**Bemerkung**

1. Auf dem Rand des Konvergenzkreises liegt mindestens ein Punkt, in dem die Funktion nicht holomorph ist. Wenn nicht, könnte man einen noch größeren Kreis wählen, der immer noch ganz in  $G$  liegt.
2. Wenn  $f$  in eine Potenzreihe entwickelt ist, welche den Konvergenzkreis  $K_R(z_0)$  besitzt, dann ist  $f$  auch an einem beliebigen  $z_1 \in K_R(z_0)$  entwickelbar. Die neue Potenzreihe hat den Konvergenzradius  $r$ , welchen man wie folgt abschätzen kann:

$$r \geq R - |z_1 - z_0|$$

**Beispiel 28.1** zum zweiten Bemerkungspunkt

Die reelle Funktion  $f$  mit  $f(x) = 1/(1 + x^2)$  lässt sich an  $x = 0$  entwickeln zu:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot x^{2n}$$

Der Konvergenzradius dieser Potenzreihe ist 1, was im Reellen unverständlich ist, schließlich ist  $f$  auf ganz  $\mathbb{R}$  definiert, also sollte  $f$  in jedem Punkt  $x_0 \in \mathbb{R}$  entwickelbar sein. Im Komplexen hingegen wird die Größe des Konvergenzradius sofort deutlich, da die Funktion bei  $z = -i$  und  $z = i$  Singularitäten hat. Wenn wir die Funktion nun in einem anderen Punkt  $x' \neq 0$  entwickeln, kann der Konvergenzradius so groß gewählt werden, dass  $z = -i$  und  $z = i$  gerade vom Konvergenzkreis ausgeschlossen sind. Damit kann man schrittweise jeden Punkt des  $\mathbb{C}$  (außer  $z = i$  und  $z = -i$ ) mit Potenzreihenentwicklungen von  $f$  versehen.

**Satz 28.3** Identitätssatz für holomorphe Funktionen (erste Fassung)

Sei  $f$  in  $G$  holomorph. Dann sind folgende Bedingungen äquivalent:

1.  $f \equiv 0$  in  $G$
2. Es existiert ein  $a \in G$  mit  $f^{(k)}(a) = 0$  für alle  $k = 0, 1, 2, \dots$
3. Es gibt eine Menge  $N \subset G$  mit mindestens einem Häufungspunkt in  $G$ , für die  $f \equiv 0$  auf  $N$  ist.

**Satz 28.3'** Identitätssatz für holomorphe Funktionen (zweite Fassung)

$f$  und  $g$  seien in  $G$  holomorph. Dann sind folgende Formulierungen äquivalent:

1.  $f = g$  in  $G$
2. Es existiert ein  $a \in G$  mit  $f^{(k)}(a) = g^{(k)}(a)$  mit  $k = 0, 1, 2, \dots$
3. Es gibt eine Menge  $N \subset G$  wie in Satz 28.3.3, sodass  $f(z) = g(z)$  für alle  $z \in N$  ist.

Die zweite Fassung folgt aus der Betrachtung von  $f - g$ .

**Beweis** zur ersten Fassung

Trivialerweise folgen aus 1. die anderen Behauptungen.

Aus 2. folgt 3.: Aus 3. folgt, bei Entwicklung um  $a$ :

$$f(z) = \sum_n a_n (z - a)^n$$

$z$  ist aus dem Konvergenzkreis. Nun ist aber nach 2.  $a_n = 0$  für alle  $n$ . Damit ist  $f = 0$  im Konvergenzkreis und es folgt 3.

Aus 3. folgt 2.: Nach der Voraussetzung existiert eine Folge  $(z_n)$  mit  $z_n \in N$ ,  $z_n \rightarrow a \in G$ ,  $z_n \neq a$  und  $f(z_n) = 0$ . Man kann  $f$  in  $a$  entwickeln:

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cdot (z - a)^k \quad (*)$$

Wir zeigen induktiv, dass alle  $a_n$  gleich Null sind, dann ist 2. erfüllt. Da  $f$  stetig ist, gilt:

$$a_0 = f(a) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(z_n) = 0$$

Seien nun  $a_0, a_1, \dots, a_{k-1} = 0$ . Dann ist

$$\begin{aligned} f(z) &= a_k \cdot (z - a)^k + a_{k+1} \cdot (z - a)^{k+1} + \dots \\ &= (z - a)^k \cdot (a_k + a_{k+1} \cdot (z - a) + \dots) \end{aligned}$$

Dann gilt für alle  $z_n$  mit  $n > n_0$  (so, dass  $z_n$  im Konvergenzkreis liegt):

$$0 = f(z_n) = (z_n - a)^k \cdot (a_k + a_{k+1} \cdot (z_n - a) + \dots)$$

Die erste Klammer ist ungleich Null, da die Folge  $(z_n)$  nur gegen  $a$  konvergiert, und damit ist:

$$0 = a_k + a_{k+1} \cdot (z_n - a) + \dots$$

Für  $n \rightarrow \infty$  folgt  $a_k = 0$ . Beachte, dass der obige rechte Term wieder eine holomorphe Funktion darstellt. Damit ist 2. gezeigt.

Aus 2. folgt 1.:  $G$  ist ein Gebiet, also eine offene und zusammenhängende Menge (das heißt: es gibt keine Darstellung  $G = G_1 \cup G_2$ , wobei  $G_1$  und  $G_2$  beide nichtleer, offen und disjunkt sind).

Die folgende Schlussweise wird häufig benutzt: Betrachte eine Eigenschaft  $E$ , die Punkte  $z \in G$  haben können oder nicht. Sei  $M = \{z \in G : z \text{ hat Eigenschaft } E\}$ . Wenn man von  $M$  zeigen kann, dass  $M$  nichtleer und gleichzeitig offen und in  $G$  relativ abgeschlossen ist (letzteres heißt: alle Häufungspunkte von  $M$ , die in  $G$  liegen, gehören auch zu  $M$ ), dann ist  $M = G$ .

Denn: Wäre  $M \neq G$ , dann wären  $M \neq \emptyset$  und  $G \setminus M = G_1$  beide nichtleer. Dann setzen wir  $G_2 := M$ . Dann gilt  $G = G_1 \cup G_2$  und  $G_1 \cap G_2 = \emptyset$ , wobei  $G_2$  offen und  $G_1$  (relativ) offen ist. Somit wäre  $G$  nicht zusammenhängend.

Dieses Schlussprinzip wenden wir nun wie folgt an:

$$M := \left\{ z \in G : f^{(k)}(z) = 0 \ \forall k = 0, 1, \dots \right\}$$

Diese Menge  $M$  ist nichtleer, denn  $a \in M$ .  $M$  ist relativ abgeschlossen, denn: Sei  $u \in G$  ein Häufungspunkt in  $M$ , d.h. es gibt eine Folge  $(u_n)$  aus  $M$  mit  $u_n \rightarrow u$ . Somit ist  $f^{(k)}(u_n) = 0$  für alle  $k$  und alle  $n$ . Da alle Ableitungen stetig sind, gilt für  $n \rightarrow \infty$ :  $f^{(k)}(u_n) \rightarrow f^{(k)}(u) = 0$ , also liegt  $u \in M$ . Es fehlt nur noch, dass  $M$  offen ist. Sei  $b \in M$ . Um  $b$  entwickeln wir  $f$  in eine Potenzreihe:

$$f(z) = \sum_k b_k \cdot (z - b)^k \quad \text{mit} \quad b_k = \frac{f^{(k)}(b)}{k!} = 0 \quad \forall k$$

Also ist  $f \equiv 0$  im ganzen (offenen) Konvergenzkreis um  $b$ . In diesem Kreis ist also  $f^{(k)}(z) = 0$ , also gehört der Konvergenzkreis zu  $M$ . Somit ist  $M$  (relativ) offen in  $G$ . Insgesamt ist also  $M = G$ , somit ist  $f \equiv 0$  in  $G$ . ■

Der Identitätssatz besagt also: Eine auf dem Gebiet  $G$  holomorphe Funktion  $f$  ist bereits eindeutig bestimmt, wenn man  $f$  auf einer (beliebig kleinen) Menge mit der Eigenschaft von  $N$  aus 28.3.3 kennt.

#### Folgerung 28.4 Eindeutige Fortsetzung aus dem Reellen

Es gibt höchstens eine holomorphe Funktion  $F$  in einem Gebiet  $G$ , die mit einer vorgegebenen reellen Funktion  $f$  auf einem Intervall  $(a, b) \subset G$  übereinstimmt. Wenn dieses  $f$  auf  $(a, b)$  reell-analytisch ist, dann existiert genau eine Fortsetzung.

#### Beweis

Der erste Teil ist einfach: Seien  $F_1$  und  $F_2$  zwei Fortsetzungen von  $f$ , dann wäre  $F_1|_{(a,b)} = F_2|_{(a,b)} = f$ . Dann folgt  $F_1 = F_2$  aus 28.3' (mit  $(a, b) = N$ ).

Zum zweiten Teil: Da holomorphe Funktionen analytisch sind, muss  $f$  notwendigerweise (reell-)analytisch sein. Nun sei  $f$  (reell-)analytisch: Zu jedem  $x_0 \in (a, b)$  existiert im Konvergenzkreis  $K_{r(x_0)}(x_0) \subset \mathbb{R}$  (welcher eigentlich ein Konvergenzintervall ist!) eine Potenzreihenentwicklung:

$$f(x) = \sum_n \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \cdot (x - x_0)^n$$

Definiere auf  $K_{r(x_0)}(x_0) \subset \mathbb{C}$  die Funktion:

$$F(x_0)(z) := \sum_n \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \cdot (z - x_0)^n$$

Diese Potenzreihe konvergiert in dem Kreis  $K_{r(x_0)}(x_0)$ . Seien nun  $x_1, x_2 \in (a, b)$  mit  $K_{r(x_1)}(x_1) \cap K_{r(x_2)}(x_2) \neq \emptyset$ . In diesem Schnitt liegt ein Teilintervall  $I$  von  $(a, b)$ . Dann gilt für alle  $x \in I$ :

$$F_{x_1}(x) = F_{x_2}(x) = f(x)$$

Nach dem Identitätssatz ist folglich  $F_{x_1}(z) = F_{x_2}(z)$  auf dem Durchschnitt der jeweiligen Konvergenzkreise (im  $\mathbb{C}$ ). Nun setzen wir:

$$G := \bigcup_{x \in (a, b)} K_{r_x}(x) \supset (a, b) \quad \text{und} \quad F(z) := F_x(z) \quad \text{für} \quad z \in K_{r_x}(x)$$

Die Funktion  $F$  ist holomorph in  $G$  und  $F|_{(a, b)} = f$ .

Damit sind etwa Funktionen wie  $e^z, \sin z, \dots$  die komplexen Fortsetzungen von  $e^x, \sin x, \dots$

#### Bemerkung

Wie steht es bezüglich der Fortsetzung mit dem Logarithmus? Was erhalten wir, wenn  $\ln x$  gemäß Folgerung 28.5 fortgesetzt wird? Wir erhalten den *Hauptwert/-zweig* der komplexen Logarithmusfunktion, denn auf  $(0, \infty)$  ist  $\ln x$  der Hauptwert und nach der Eindeutigkeit der Fortsetzung (Identitätssatz) muss also insgesamt der Hauptwert erhalten werden.

#### Definition 28.5

1. Eine Funktion  $f$  heißt **ganz**, wenn  $f$  in ganz  $\mathbb{C}$  holomorph ist. Das heißt: Die Potenzreihenentwicklung von  $f$  um ein beliebiges  $z_0 \in \mathbb{C}$  hat den Konvergenzradius  $r(z_0) = \infty$ .
2.  $f$  heißt **ganze rationale Funktion**, wenn  $f$  ein Polynom ist. Das heißt: Die Potenzreihenentwicklung von  $f$  um ein beliebiges  $z_0 \in \mathbb{C}$  hat nur endlich viele nicht verschwindende Glieder.
3.  $f$  heißt **ganze transzendente Funktion**, wenn  $f$  ganz, aber nicht ganz rational ist, das heißt  $f$  ist kein Polynom.

#### Satz 28.6

Satz von Liouville

Jede ganze beschränkte Funktion ist konstant.

#### Beweis

Sei  $|f(z)| \leq M$  für alle  $z \in \mathbb{C}$  und  $a \in \mathbb{C}$  beliebig. Wir betrachten wieder den Kreisring:

$$S_r(a) = \{z : |z - a| = r\} = \{z = a + r \cdot e^{it} : 0 \leq t \leq 2\pi\}$$

Mit der Cauchy'schen Integralformel erhält man die erste Ableitung:

$$\begin{aligned} f'(a) &= \frac{1}{2\pi \cdot i} \cdot \int_{S_r(a)} \frac{f(z)}{(z-a)^2} dz \\ \Rightarrow |f'(a)| &= \frac{1}{2\pi} \cdot \left| \int_0^{2\pi} \frac{f(a+r \cdot e^{it})}{r^2 \cdot e^{2i \cdot t}} \cdot ir \cdot e^{it} dt \right| \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \cdot \int_0^{2\pi} \frac{|f(a+r \cdot e^{it})|}{r^2} \cdot r dt \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \cdot M \cdot \frac{1}{r} \cdot 2\pi \\ &= \frac{M}{r} \xrightarrow{r \rightarrow \infty} 0 \end{aligned}$$

Damit ist  $f'(a) = 0$  für alle  $a \in \mathbb{C}$ , also ist  $f' = 0$  und somit  $f = \text{const.}$

**Bemerkung**

Dies ist ein drastischer Unterschied zum Reellen! Zum Beispiel ist  $f(x) = \sin x$  im ganzen  $\mathbb{R}$  analytisch, beschränkt, jedoch nicht konstant. Dies ist aber kein Widerspruch, denn  $f(z) = \sin z$  ist ganz, aber in  $\mathbb{C}$  unbeschränkt (zur Veranschaulichung schreibe  $\sin z = 1/2 \cdot (\exp(iz) - \exp(-iz))$ ).

Zur Veranschaulichung der Anwendungsfälle des Satzes von Liouville dient der folgende Satz.

**Satz 28.7** Fundamentalsatz der Algebra

Jedes nichtkonstante Polynom  $p$ , gegeben durch

$$p(z) = a_0 + a_1 \cdot z + \dots + a_n \cdot z^n \quad \text{mit} \quad a_i \in \mathbb{C}, a_n \neq 0, n > 0,$$

hat in  $\mathbb{C}$  mindestens eine Nullstelle.

**Beweis**

Angenommen,  $p$  hat keine Nullstelle, also  $p(z) \neq 0$  für alle  $z \in \mathbb{C}$ . Dann ist  $f = 1/p$  eine ganze Funktion. Zu zeigen ist, dass  $f$  in  $\mathbb{C}$  beschränkt ist. Dann folgt nach Liouville, dass  $f$  und damit auch  $p$  konstant ist. Das wäre ein Widerspruch zur Voraussetzung.

$$f(z) = \frac{1}{z^n \cdot \left(a_n + \frac{a_{n-1}}{z} + \dots + \frac{a_0}{z^n}\right)} \quad \Rightarrow \quad |f(z)| \xrightarrow{|z| \rightarrow \infty} 0$$

Das heißt zum Beispiel:  $|f(z)| < 1$  für ein  $|z| > R$  mit einem beliebigen  $R > 0$ . Da  $f$  stetig ist, ist  $f$  auf der kompakten Menge  $\{z : |z| \leq R\}$  beschränkt, das heißt  $f$  ist in  $\mathbb{C}$  beschränkt. ■

Eine zweite Anwendung des Satzes von Liouville der Beweis der Aussage, dass das Spektrum  $\sigma(T)$  für alle  $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$  nicht leer ist.

## 29 Singularität holomorpher Funktionen

### 29.1 Der Punkt $\infty$

$\mathbb{C}$  ist natürlich nicht kompakt. Für manche Betrachtungen ist das nachteilig. Der Ausweg ist die **Kompaktifizierung**. Um ein Bild für diese Kompaktifizierung zu bekommen, betrachten wir ein Modell für  $\mathbb{C}$ . Betrachte dazu im  $\mathbb{R}^3$  die Einheitssphäre  $E = S_1(0) = \{x = (x_1, x_2, x_3) : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}$ . Identifiziere  $\mathbb{C}$  mit der  $x_1$ - $x_2$ -Ebene.

Man führt jetzt vom Nordpol  $N = (0, 0, 1)$  aus die **stereographische Projektion**  $\pi$  aus. Das bedeutet: Sei  $P \in E$ , betrachte die Gerade durch  $N$  und  $P$  und nenne den Schnittpunkt mit der  $x_1$ - $x_2$ -Ebene  $\pi(P)$ . Umgekehrt:  $z = (x_1, x_2)$  in der  $x_1$ - $x_2$ -Ebene. Die Gerade durch  $z, N$  durchstößt  $E$  dann in einem eindeutig bestimmten Punkt  $\pi^{-1}(z) = P$ .

In einer Formel ausgedrückt: Sei  $z = x + iy$  und  $P = (x_1, x_2, x_3)$ . Dann kann man nachrechnen:

$$x_1 = \frac{2x}{1+x^2+y^2} \quad \text{und} \quad x_2 = \frac{2y}{1+x^2+y^2} \quad \text{und} \quad x_3 = \frac{x^2+y^2-1}{1+x^2+y^2}$$

$$x = \frac{x_1}{1-x_3} \quad \text{und} \quad y = \frac{x_2}{1-x_3}$$

$\pi$  ist eine eineindeutige Abbildung von  $E \setminus \{N\}$  auf  $\mathbb{C}$ .  $E$  ist natürlich kompakt. Man nehme zu  $\mathbb{C}$  einen Punkt hinzu, nenne ihn  $\infty$  und ordne  $\pi(N) = \infty$  zu. Man nennt  $\mathbb{C}_0 := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$  die **abgeschlossene Zahlenebene**. Im Kontext der Abbildung  $\pi : E \rightarrow \mathbb{C}_0$  nennt man  $E$  die **Riemannsche Zahlenkugel**.

Jetzt wollen wir  $\mathbb{C}_0$  zu einem kompakten Raum machen. Die Kompaktheitsdefinition erfordert die Definition von offenen Mengen in  $\mathbb{C}_0$ . Dann könne wir definieren:  $\mathbb{C}_0$  ist kompakt, weil jede Überdeckung durch offene Mengen eine endliche Teilüberdeckung enthält.

Offene Mengen kennt man, wenn man für jeden Punkt weiß, was Umgebungen sind, denn  $O$  ist offen, wenn zu jedem  $u \in O$  eine Umgebung  $V$  von  $u$  existiert mit  $V \subset O$ . Umgebungen von Punkten in  $\mathbb{C}$  sind wie üblich definiert. Typische Umgebungen von  $\infty$  sind:

$$U_r(\infty) = \{z \in \mathbb{C} : |z| > r\} \cup \{\infty\}$$

Allgemein ist  $U \subset \mathbb{C}_0$  eine Umgebung von  $\infty$ , wenn ein  $r > 0$  existiert mit  $U_r(\infty) \subset U$ . Man zeigt nun leicht:  $O \subset \mathbb{C}_0$  mit  $\infty \in O$  ist genau dann offen, wenn  $\mathbb{C}_0 \setminus O$  in  $\mathbb{C}$  kompakt ist. Dann zeigt man  $\mathbb{C}_0$  ist kompakt.

#### Bemerkung

Das Modell für diese **Einpunktkompaktifizierung** für  $\mathbb{R}$  wäre ein Kreis.

Wir stellen folgende Rechenregeln auf:

- $\frac{a}{0} := \infty$  und  $\frac{a}{\infty} := 0$
- $a + \infty = \infty + a = \infty$
- $a \cdot \infty = \infty \cdot a = \infty$  für  $a \neq 0$
- Nicht erklärt sind  $0 \cdot \infty$ ,  $\infty \cdot \infty$ ,  $\frac{\infty}{\infty}$  und  $\infty - \infty$ .

Um Funktionen  $f$  an  $\infty$  zu untersuchen, betrachtet man eine Hilfsfunktion  $f^*$  mit  $f^*(z) := f(1/z)$ , welche man dann an  $z = 0$  untersucht.

### Beispiel 29.1

Sei  $f(z) = \sin 1/z$ . Um die Stetigkeit zu zeigen setzt man:  $f^*(z) = \sin z$ . Diese Funktion ist stetig an  $z = 0$ , das heißt  $f$  ist stetig an  $\infty$ .

Zur Differenzierbarkeit: Ist  $f^*$  an  $z = 0$  differenzierbar, dann nennt man  $f$  an  $\infty$  differenzierbar. Der Wert  $f'(\infty)$  ist nicht definiert. (Manche Autoren setzen in solchen Fällen  $f'(\infty) := 0$ , wir nicht.)

## 29.2 Isolierte Singularitäten und Laurent-Entwicklung

Wichtig ist die Untersuchung des Verhaltens von Funktionen in der Umgebung von Punkten, in denen die Funktionen nicht holomorph sind.

### Beispiel 29.2 Typische Beispiele

Betrachte die Funktionen  $f_1(z) = (z^2 - 1)/(z + 1)$ ,  $f_2(z) = 1/z$  und  $f_3(z) = \exp(1/z)$ . Diese sind kritisch an den Punkten  $z = -1$  (für  $f_1$ ) und  $z = 0$  (für  $f_2$  und  $f_3$ ), jedoch das Verhalten der Funktion an der kritischen Stelle ist signifikant unterschiedlich.

### Theorem 29.1

Betrachte den Kreisring  $K(a, r, R) = \{z \in \mathbb{C} : 0 \leq r < |z - a| < R \leq \infty\}$ . (Die Extremfälle  $r = 0$  und  $R = \infty$  sollen mit eingeschlossen sein.) Die Funktion  $f$  sei in  $K(a, r, R)$  holomorph. Für  $r < \varrho < R$  seien definiert:

$$a_k := \frac{1}{2\pi i} \cdot \int_{S_\varrho(a)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{k+1}} d\zeta$$

Dann gilt:

1. Die  $a_k$  sind von  $\varrho$  unabhängig.
2. Für alle  $z \in K(a, r, R)$  gilt die **Laurent-Entwicklung** von  $f$  im Ringgebiet  $K(a, r, R)$ :

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot (z - a)^k + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_{-k}}{(z - a)^k} \quad (29.2)$$

Die Koeffizienten sind eindeutig bestimmt.

3. Beide Reihen in (29.2) konvergieren für alle  $z \in K(a, r, R)$  absolut. Sie konvergieren gleichmäßig in jeder kompakten Teilmenge von  $K(a, r, R)$ .

**Bemerkung**

Es ist nicht notwendig, dass  $f$  in  $a$  holomorph ist. Es ist auch keine Aussage darüber gemacht, wie sich  $f$  auf dem Rand  $\partial K(a, r, R)$  verhält. Häufig schreibt man (29.2) als eine einzelne Reihe:

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \cdot (z-a)^k$$

**Beweis**

Der Beweis der dritten Aussage steht in diversen Lehrbüchern.

1. Sei also  $r < r_1 < \varrho < R_1 < R$ . Wir betrachten jetzt das Gebiet  $K(a, r_1, R_1)$ . Die Funktion  $f(z)/(z-a)^{(k+1)}$  ist in  $\overline{K}(a, r_1, R_1)$  holomorph.

$$\int_{\partial K(a, r_1, R_1)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{(k+1)}} d\zeta = 0$$

Die Ränder der Menge  $K(a, r_1, R_1)$  müssen (wie immer) so orientiert sein, dass die Menge zur Linken liegt. Daraus folgt:

$$\int_{S_{r_1}(a)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{k+1}} d\zeta = \int_{S_{R_1}(a)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{k+1}} d\zeta$$

2. Sei  $z \in K(a, r, R)$  so, dass  $r_1 < |z-a| < R_1$ . Daraus folgt, dass  $f$  im abgeschlossenen Gebiet  $\overline{K}(a, r_1, R_1)$  holomorph ist und mit der Cauchyschen Integralformel folgt:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \cdot \int_{\partial K(a, r_1, R_1)} \frac{f(\zeta)}{\zeta-z} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \cdot \int_{S_{R_1}(a)} \frac{f(\zeta)}{\zeta-z} d\zeta - \frac{1}{2\pi i} \cdot \int_{S_{r_1}(a)} \frac{f(\zeta)}{\zeta-z} d\zeta$$

Jetzt wenden wir Lemma 28.1 wie folgt an: Im ersten Integral setzen wir  $h(\zeta) := f(\zeta)/2\pi i$ ,  $z$  liegt im Innengebiet. Wir erhalten die erste Reihe in (29.2). Das zweite Integral entspricht der Hilfsfunktion  $h(\zeta) := -f(\zeta)/2\pi i$ ,  $z$  liegt im Außengebiet; damit folgt die zweite Reihe aus (29.2). ■

Die Laurent-Entwicklung ist besonders interessant, wenn an der Stelle  $a$  eine sogenannte isolierte Singularität vorliegt.

**Definition 29.2**

Sei  $a \in \mathbb{C}_0$  und  $f$  eine Funktion, für die es eine Umgebung  $U(a)$  gibt, sodass  $f$  in der **punktierten Umgebung**  $U(a) \setminus \{a\}$  von  $a$  holomorph ist. Dann heißt  $a$  **isolierte Singularität** von  $f$ .

Bei den kritischen Punkten in den drei Ausgangsbeispielen liegen zum Beispiel isolierte Singularitäten vor. Wir wollen natürlich auch  $a = \infty$  in die Betrachtungen einbeziehen.

**Bemerkung**

Entwicklungen im Punkt  $\infty$

1. Potenzreihenentwicklung: Ist  $f$  in  $\infty$  holomorph, so ist  $g(w) := f(1/w)$  in  $w = 0$  holomorph, hat also eine Potenzreihenentwicklung, die im Inneren des Konvergenzkreises konvergiert. Wenn  $w$  im Inneren des Kreises ist, dann ist  $1/w$  im Äußeren des Kreises. Das heißt,  $f$  hat eine Entwicklung in der Form:

$$f(z) = a_0 + \frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \dots$$



Dabei ist  $z$  im Äußeren eines genügend großen Kreises (also einer Umgebung von  $\infty$ ). Beispielhaft betrachten wir die Funktion  $f(z) = \sin(1/z^2)$ . Gesucht ist die Entwicklung an  $z = \infty$ . Der umständliche Weg wäre:  $z = 1/w$  und damit die Reihe:

$$g(w) = \sin w^2 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \cdot w^{4k+2} \Rightarrow f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \cdot \frac{1}{z^{4k+2}}$$

Der einfachere Weg ist,  $\sin u$  aufzuschreiben und  $u = 1/z^2$  einzusetzen.

Ein Beispiel für nichtisolierte Singularitäten ist  $f(z) = 1/(\sin 1/z)$  mit den kritischen Punkten  $z_n = 1/(2\pi n)$ .

2. Laurent-Entwicklung: Sei  $a = \infty$  eine isolierte Singularität von  $f$ . Das heißt,  $f$  ist in einer punktierten Umgebung von  $\infty$  holomorph. Sei also  $G$  ein Gebiet, das  $\infty$  enthält. Sei  $K_r(0)$  der kleinste Kreis, sodass  $\mathbb{C} \setminus \overline{K_r(0)} \subset G$  ist. Dann kann man auf dieser Menge  $\mathbb{C} \setminus \overline{K_r(0)}$  das Theorem 29.1 (hier mit dem Extremfall  $R = \infty$ ) anwenden. In diesem Gebiet hat  $f$  dann die Entwicklung:

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{b_k}{z^k} + \sum_{k=1}^{\infty} b_{-k} \cdot z^k = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{b_k}{z^k}$$

Für die Koeffizienten gilt:

$$b_k = \frac{1}{2\pi i} \cdot \int_{S_\varrho(0)} f(z) \cdot z^{k-1} dz \quad \forall k \in \mathbb{Z}, \varrho > r$$

Zu diesen Termen gelangt man in der Praxis durch eine Hilfsfunktion  $g(z) = f(1/z)$ , die an 0 in eine Laurent-Reihe entwickelt und dann zurückschstituiert wird.

### Definition 29.3

1. Sei  $a \in \mathbb{C}$  eine isolierte Singularität von  $f$  mit der in  $K(a, r, R)$  gültigen Laurententwicklung:

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot (z-a)^k + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_{-k}}{(z-a)^k}$$

Dann heißt die erste Reihe **Nebenteil** der Laurententwicklung von  $f$  an  $a$ , die zweite Reihe ist der **Hauptteil**.

2. Ist  $a = \infty$  die isolierte Singularität von  $f$  mit der Laurent-Entwicklung

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{b_k}{z^k} + \sum_{k=1}^{\infty} b_{-k} \cdot z^k$$

Dann ist die erste Reihe der **Nebenteil** und die zweite Reihe ist der **Hauptteil**.

### Beispiel 29.3

Sei  $f(z) = 1/(1-z)$ . Singulär sind  $z = 1$  und  $z = \infty$ . Die Laurent-Entwicklung von  $z = 1$  ist:

$$f(z) = -\frac{1}{z-1}$$

An der Stelle  $z = \infty$  ergibt sich die Laurententwicklung aus der Hilfsfunktion:  $g(w) = f(1/w) = 1/(1-1/w) = w/(w-1)$ . Diese Funktion ist an  $w = 0$  holomorph, und die Laurententwicklung an  $z = \infty$  ist:

$$g(w) = -\frac{w}{1-w} = -w \cdot \sum_{k=0}^{\infty} w^k = -\sum_{k=0}^{\infty} w^{k+1} \Rightarrow f(z) = -\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{z^{k+1}}$$

Das steht im Einklang mit der Tatsache, dass  $g$  an  $w = 0$  holomorph ist.

**Bemerkung**

Ist  $a \in \mathbb{C}$  eine isolierte Singularität, so kann man stets die Laurent-Entwicklung in dem Kreisring  $\{z : 0 < |z - a| < R\}$  (für ein geeignetes  $R$ ) betrachten, das heißt: Es kann stets der Fall  $r = 0$  betrachtet werden.

**Definition 29.4** Klassifikation isolierter Singularitäten

Sei  $a \in \mathbb{C}_0$  eine isolierte Singularität von  $f$ . Dann nennt man  $a$ :

1. **hebbare Singularität**, wenn alle Koeffizienten des Hauptteils verschwinden:

$$a_{-k} = 0 \quad \text{bzw.} \quad b_{-k} = 0 \quad \forall k \geq 1$$

2. **Polstelle** der Ordnung  $k$ , wenn für die Koeffizienten des Hauptteils gilt:

$$\begin{aligned} a_{-k} &\neq 0 & \text{und} & & a_{-l} &= 0 & \forall l > k & & (a \in \mathbb{C}) \\ b_{-k} &\neq 0 & \text{und} & & b_{-l} &= 0 & \forall l > k & & (a = \infty) \end{aligned}$$

Polstellen heißen auch *außerwesentliche* Singularität.

3. **wesentliche Singularität**, wenn der Hauptteil unendlich viele von 0 verschiedene Glieder hat.

**Beispiele für isolierte Singularitäten**

1.  $z = -1$  ist eine isolierte Singularität der Funktion:

$$f(z) = \frac{z^2 - 1}{z + 1} = \frac{(z - 1) \cdot (z + 1)}{z + 1} = z - 1 = -2 + (z - (-1))$$

Das ist die Laurent-Entwicklung an der Stelle  $z = -1$ . Wir haben keinen Hauptteil, also liegt eine hebbare Singularität vor.

2. Betrachte  $f(z) = \sin z / z^2$  mit der isolierten Singularität  $z = 0$ . Zur Bestimmung der Laurent-Entwicklung an der Stelle  $z = 0$  nutzen wir die bekannte Reihenentwicklung des Sinus:

$$f(z) = \frac{1}{z^2} \cdot \left( z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} \mp \dots \right) = \frac{1}{z} - \frac{z}{3!} + \frac{z^3}{5!} \mp \dots$$

Der Hauptteil ist  $1/z$ , und damit liegt ein Pol erster Ordnung an der Stelle  $z = 0$  vor. Zum Vergleich: Die Funktion  $g(z) = \sin z / z$  hat an der Stelle  $z = 0$  eine hebbare Singularität.

3. Für Funktionen wie  $f(z) = e^{1/z}$  oder  $f(z) = \sin(1/z^2)$  liegen wesentliche Singularitäten an  $z = 0$  vor. Die Laurent-Entwicklungen sehen wie folgt aus:

$$\begin{aligned} e^{\frac{1}{z}} &= 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!} \cdot \underbrace{\left(\frac{1}{z}\right)^2}_{\text{Hauptteil}} + \dots \\ \sin \frac{1}{z^2} &= \underbrace{\frac{1}{z^2} - \frac{1}{3!} \cdot \frac{1}{z^6} + \dots}_{\text{Hauptteil}} \end{aligned}$$

4. Die Funktion  $f(z) = 1/z^7 - 1/z + 4 + z$  hat bei  $z = 0$  eine Polstelle siebter Ordnung. (Es ist nicht relevant, dass die Terme  $O(1/z^6)$  bis  $O(1/z^2)$  verschwinden; wichtig ist nur, dass nach  $O(1/z^7)$  keine weiteren Beiträge kommen.)

Die Art einer isolierten Singularität lässt sich durch das Verhalten der Funktion in einer Umgebung beschreiben.

**Satz 29.5** Satz von Riemann

Der Punkt  $a \in \mathbb{C}_0$  ist genau dann eine hebbare Singularität von  $f$ , wenn es eine Umgebung  $U(a)$  gibt, sodass  $f$  in  $U(a) \setminus \{a\}$  holomorph und beschränkt ist (das ist genau dann der Fall, wenn  $\lim_{z \rightarrow a} f(z)$  existiert und endlich ist). Durch

$$f^*(a) = \begin{cases} a_0 & a \neq \infty \\ b_0 & a = \infty \end{cases} \quad \text{und} \quad f^*(z \neq a) = f(z)$$

wird eine in  $a$  holomorphe Funktion definiert, die in  $a$  **fortgesetzte Funktion**. Hierbei ist  $a_0$  bzw.  $b_0$  der erste Koeffizient des Nebenteils der Laurent-Entwicklung von  $f$  an der Stelle  $z = a$ .

**Beweis** für den Fall  $a \in \mathbb{C}$  ( $a = \infty$  läuft analog)

Die Hin-Richtung ist einfach: Es liegt nur eine Potenzreihe (sprich: der Nebenteil der Laurent-Entwicklung) vor. Diese Potenzreihe konvergiert in einem Kreis  $K_r(a)$  und stellt dort eine holomorphe (also insbesondere stetige) Funktion dar. Diese Funktion ist somit in jeder Umgebung  $U(a)$  mit kompaktem Abschluss  $\overline{U(a)} \subset K_r(a)$  beschränkt. Diese Potenzreihe ist bereits die Funktion  $f^*$  (außerhalb von  $K_r(a)$  kann  $f^*$  durch  $f$  fortgesetzt werden).

Sei nun  $a \in \mathbb{C}$  und  $f$  in der punktierten Umgebung  $\{z : 0 < |z - a| < r\}$  holomorph und beschränkt, das heißt:  $|f(z)| \leq M$  für alle  $z \in U(a) \setminus \{a\}$ . Die Laurent-Entwicklung von  $f$  an der Stelle  $z = a$  ist:

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot (z - a)^k + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_{-k}}{(z - a)^k}$$

Für die Koeffizienten  $a_{-k}$  galt:

$$a_{-k} = \frac{1}{2\pi i} \cdot \int_{S_\varrho(a)} f(\zeta) \cdot (\zeta - a)^{k-1} d\zeta \quad \forall \varrho \in (0, r), k \in \mathbb{N}$$

Mit der Parametrisierung  $\zeta = a + \varrho \cdot e^{it}$  mit  $t \in [0, 2\pi]$  erhält man wie üblich:

$$|a_{-k}| = \left| \frac{1}{2\pi i} \cdot \int_0^{2\pi} f(\zeta) \cdot \varrho^{k-1} \cdot e^{it \cdot (k-1)} \cdot i\varrho \cdot e^{it} dt \right| \leq \frac{1}{2\pi} \cdot M \varrho^k \cdot \int_0^{2\pi} dt = M \cdot \varrho^k$$

Da  $\varrho > 0$  beliebig klein gewählt werden kann, folgt  $a_{-k} = 0$  für alle  $k \in \mathbb{N}$ . Da der Hauptteil also verschwindet, liegt an  $z = a$  eine hebbare Singularität vor. (Die Aussagen über  $f^*$  folgen nun sofort.) ■

**Satz 29.6**

Der Punkt  $a \in \mathbb{C}_0$  ist genau dann ein Pol einer holomorphen Funktion  $f$ , wenn gilt:  $\lim_{z \rightarrow a} |f(z)| = \infty$  ist. Das ist dann der Fall, wenn es zu jedem  $C > 0$  eine Umgebung  $U(a)$  gibt, in welcher  $|f(z)| > C$  für alle  $z \in U(a)$  gilt.

**Beweis** Beweisidee

Zur Hin-Richtung:  $a \in \mathbb{C}$  sei ein Pol der Ordnung  $k$  und  $C > 0$  gegeben. Die Laurent-Entwicklung an der Stelle  $z = a$  lautet:

$$f(z) = \frac{a_{-k}}{(z - a)^k} + \frac{a_{-k+1}}{(z - a)^{k-1}} + \dots + \text{Nebenteil} = \frac{a_{-k}}{(z - a)^k} \cdot \underbrace{\left( 1 + \frac{a_{-k+1}}{a_{-k}} \cdot (z - a) + \dots \right)}_{=h(z)}$$

Der Faktor  $h(z)$  ist in  $a$  holomorph und deswegen stetig, zudem gilt  $h(a) = 1$ . Somit existiert ein  $\delta > 0$ , für das die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

1.  $|h(z)| \geq 1/2$  für  $|z - a| < \delta$
2.  $|a_{-k}|/(2C + 1) \geq \delta^k$ , also  $|a_{-k}| \geq (2C + 1) \cdot \delta^k$

Dann gilt für alle  $z$  mit  $0 < |z - a| < \delta$ :

$$|f(z)| = \frac{|a_{-k}|}{|z - a|^k} \cdot |h(z)| \geq \frac{|a_{-k}|}{\delta^k} \cdot \frac{1}{2} \geq (2C + 1) \cdot \frac{1}{2} > C$$

Das heißt, dass für alle  $C > 0$  existiert eine Umgebung  $U(a) = \{z : |z - a| < \delta\}$  mit  $|f(z)| > C$  für alle  $z \in U(a) \setminus \{a\}$ .

Zur Umkehrung: Sei nun  $\lim_{z \rightarrow a} |f(z)| = \infty$ . Das heißt insbesondere: Es existiert eine Umgebung  $V(a)$ , sodass  $f$  in  $V(a) \setminus \{a\}$  nicht verschwindet. Auf dieser punktierten Umgebung kann somit die holomorphe Funktion  $1/f$  betrachtet werden, für welche  $\lim_{z \rightarrow a} 1/f(z) \rightarrow 0$  geht. Das heißt:  $z = a$  ist eine hebbare Singularität für die Funktion  $1/f$ , die sich deswegen holomorph in  $a$  fortsetzen lässt. (Diese fortgesetzte Funktion sei wieder mit  $1/f$  bezeichnet.) Es gibt also eine Darstellung in der Form:

$$\frac{1}{f(z)} = (z - a)^n \cdot g(z)$$

Die Funktion  $g$  ist in  $V(a)$  holomorph und verschwindet nicht in  $a$ . Auf alle Fälle ist  $n \geq 1$ , denn  $\lim_{z \rightarrow a} |f(z)| = \infty$  wäre sonst nicht erfüllt. Hieraus folgt:

$$f(z) = (z - a)^{-n} \cdot h(z)$$

Hierbei ist  $h = 1/g$  in einer Umgebung von  $a$  holomorph und ohne Nullstellen. Somit hat  $f$  an  $a$  eine Polstelle  $n$ -ter Ordnung.

Es verbleibt der Fall  $a = \infty$ , diesen behandelt man wieder mit der Betrachtung der Hilfsfunktion  $g(z) := f(1/z)$ , welche an  $z = 0$  eine Polstelle hat. Alles kann somit auf den vorigen Fall zurückgeführt werden. ■

#### Bemerkung

Die folgende Charakterisierung von Polstellen ist oft sehr nützlich.  $a$  ist eine Polstelle der Ordnung  $k$  genau dann, wenn gilt:

$$\exists \lim_{z \rightarrow a} f(z) \cdot (z - a)^k \neq 0$$

(Die Existenz beinhaltet insbesondere, dass der Grenzwert in  $\mathbb{C}$  liegt, was  $\infty$  ausschließt.) Dann beachte:

$$(z - a)^k \cdot f(z) = (z - a)^k \cdot \left( \frac{a_{-k}}{(z - a)^k} + \frac{a_{-k+1}}{(z - a)^{k-1}} + \dots \right) = a_{-k} + a_{-k+1} \cdot (z - a) + \dots \xrightarrow{z \rightarrow a} a_{-k}$$

#### Satz 29.7 Satz von Casorati und Weierstraß

Der Punkt  $a \in \mathbb{C}_0$  ist genau dann eine wesentliche Singularität der holomorphen Funktion  $f$ , wenn  $f$  in jeder beliebigen punktierten Umgebung von  $a$  jedem Wert aus  $\mathbb{C}_0$  beliebig nahe kommt. (Das heißt, das Bild jeder punktierten Umgebung  $U(a) \setminus \{a\} \subset D(f)$  unter  $f$  ist dicht in  $\mathbb{C}_0$ .)

#### Beweis Betrachte nur $\mathbb{C}$ .

Die Zielaussage der Hin-Richtung bedeutet: Für alle  $c \in \mathbb{C}$ ,  $\varepsilon > 0$  und die Umgebung  $U(a)$  (mit  $U(a) \setminus \{a\} \subset D(f)$ ) existiert ein  $z \in U(a) \setminus \{a\}$  mit  $|f(z) - c| < \varepsilon$ . (Das ist gerade die Dichtheit.)

Angenommen, dies ist falsch, das heißt: Es existiert ein  $c \in \mathbb{C}$  und ein  $\varepsilon > 0$ , sodass  $|f(z) - c| > \varepsilon$  für alle  $z \in U(a) \setminus \{a\}$  ist. Somit ist  $g(z) := 1/(f(z) - c)$  in der punktierten Umgebung  $U(a) \setminus \{a\}$  beschränkt. Also hat  $g$  in  $a$  eine hebbare Singularität und es existiert  $\lim_{z \rightarrow a} g(z) = b$ . Die Funktion  $f(z) = c + 1/g(z)$  hat an  $a$  also entweder eine hebbare Singularität ( $b \neq 0$ ) oder einen Pol ( $b = 0$ ). Dies ist ein Widerspruch.

Etwas schwieriger ist die Rückrichtung: Wenn  $f(U(a) \setminus \{a\})$  für alle  $U(a) \setminus \{a\}$  in  $\mathbb{C}$  dicht liegt, kann  $f$  natürlich auf keinem  $U(a) \setminus \{a\}$  beschränkt sein. Also ist  $a$  nicht hebbar. Aber auch  $\lim_{z \rightarrow a} |f(z)| = \infty$  ist nicht möglich, da in jeder Umgebung von  $a$  Punkte  $z$  liegen, für die  $|f(z)|$  beliebig nahe bei Null liegt. Somit ist  $a$  auch kein Pol. ■

### Beispiel 29.4

Die isolierte Singularität  $z = 0$  von  $f(z) = \exp(1/z)$  ist eine wesentliche Singularität, denn in jeder Umgebung von  $z = 0$  werden alle Funktionswerte, also alle  $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$  unendlich oft angenommen.

### Satz 29.8

Satz von Picard

$a \in \mathbb{C}_0$  ist genau dann eine wesentliche Singularität der holomorphen Funktion  $f$ , wenn  $f$  in jeder Umgebung von  $a$  jeden Wert aus  $\mathbb{C}$  – mit Ausnahme eventuell eines Punktes – unendlich oft annimmt.

#### Bemerkung

Der Beweis ist sehr aufwändig. Am Beispiel  $e^{1/z}$  sieht man, dass es einen Ausnahmepunkt geben kann (in diesem Falle  $a = 0$ ).

## 29.3 Der Residuensatz

### Definition 29.9

Sei  $a$  eine isolierte Singularität der holomorphen Funktion  $f$ .

- Für  $a \neq \infty$  sei  $f(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} a_k \cdot (z - a)^k$  die Laurent-Entwicklung an  $a$ . Dann ist der Koeffizient  $a_{-1} =: (\operatorname{Res} f)(a)$  das **Residuum** von  $f$  an  $a$ .
- Für  $a = \infty$  sei  $f(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} b_k \cdot z^{-k}$  die entsprechende Laurent-Entwicklung. Dann ist der Koeffizient  $-b_1 =: (\operatorname{Res} f)(a)$  das Residuum von  $f$  an  $\infty$ .

#### Bemerkung

Man beachte, dass im Falle  $a = \infty$  das Residuum ein Koeffizient (bis auf „–“) im *Nebenteil* der Laurent-Entwicklung ist, ansonsten jedoch ein Koeffizient des *Hauptteils*.

Ist  $f$  holomorph in  $a \in \mathbb{C}$ , so ist  $(\operatorname{Res} f)(a) = 0$ . Für  $a = \infty$  muss dies nicht der Fall sein, zum Beispiel ist für  $f(z) = 1/z$  das Residuum  $(\operatorname{Res} f)(\infty) = -1$ . Im Allgemeinen muss der Punkt  $\infty$  immer separat untersucht werden.

### Theorem 29.10

Einfachste Variante des Residuensatzes

Sei  $\mathcal{C}$  eine geschlossene stückweise glatte Kurve, die ein Gebiet  $G \subset \mathbb{C}_0$  berandet. In  $G$  und auch  $\mathcal{C}$  sei  $f$  holomorph bis auf eine isolierte Singularität  $a \in G$ . (Falls  $\infty \in G$ , dann sei  $a = \infty$ .) Wird  $\mathcal{C}$  so orientiert, dass  $G$  zur Linken liegt, dann gilt:

$$\int_{\mathcal{C}} f(z) \, dz = 2\pi i \cdot (\operatorname{Res} f)(a) \quad (29.3)$$

**Beweis**

Zunächst betrachten wir den Fall  $a \neq \infty$ . Wir wählen einen kleinen Kreis  $K \subset G$  um  $a$  mit der Randkurve  $S$ . Dann kann der Cauchysche Integralsatz angewendet werden:

$$\int_{\mathcal{C}} f(z) \, dz = \int_S f(z) \, dz$$

Die Laurent-Entwicklung von  $f$  an der Stelle  $a$  laute  $f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \cdot (z-a)^k$ ; sie konvergiert auf der kompakten Menge  $S$  gleichmäßig. Somit ist gliedweise Integration möglich.

$$\int_{\mathcal{C}} f(z) \, dz = \int_S f(z) \, dz = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \cdot \int_S (z-a)^k \, dz$$

Diese Integrale verschwinden außer für  $k = -1$ . In diesem Fall ist  $\int = 2\pi i$  (siehe Fundamentalbeispiel). Für das Integral verbleibt also:

$$\int_{\mathcal{C}} f(z) \, dz = 2\pi i \cdot a_{-1} = 2\pi i \cdot (\operatorname{Res} f)(a)$$

Jetzt sei  $a = \infty$ . Man erhält wieder:

$$\int_{\mathcal{C}} f(z) \, dz = \int_{S^-} f(z) \, dz$$

$S^-$  ist ein Kreis um Null mit der selben Richtung wie  $\mathcal{C}$ . Die Laurent-Entwicklung lautet:

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} b_k \cdot z^{-k}$$

Analog zum ersten Fall erhält man durch gliedweise Integration:

$$\int_{S^-} f(z) \, dz = \sum_{k=-\infty}^{\infty} b_k \int_{S^-} z^{-k} \, dz = b_1 \int_{S^-} \frac{1}{z} \, dz = b_1 \cdot (-2\pi i) = 2\pi i \cdot (\operatorname{Res} f)(\infty)$$

■

Diesen Satz benutzt man, um den allgemeinen Residuensatz zu zeigen:

**Theorem 29.11** Allgemeiner Residuensatz

Sei  $G \subset \mathbb{C}_0$  ein Gebiet, das von endlich vielen geschlossenen, stückweise glatten Kurven  $\mathcal{C}_1, \dots, \mathcal{C}_n$  ohne gemeinsame Punkte berandet wird. Die  $\mathcal{C}_i$  seien so orientiert, dass  $G$  zur Linken liegt.  $f$  sei auf den  $\mathcal{C}_i$  stetig und in  $G$  holomorph, bis auf endlich viele isolierte Singularitäten  $a_1, \dots, a_m$ . (Für  $\infty \in G$  sei  $\infty \in \{a_1, \dots, a_m\}$ ). Dann gilt:

$$\int_{\partial G} f(z) \, dz = \sum_{i=1}^n \int_{\mathcal{C}_i} f(z) \, dz = 2\pi i \cdot \sum_{k=1}^m (\operatorname{Res} f)(a_k) \quad (29.4)$$

**Beweis**

Man lege um jede der Singularitäten  $a_i$  ( $i = 1, \dots, m$ ) jeweils einen Kreis  $S_i$ , der einschließlich seines Inneren  $K_i$  ganz in  $G$  liegt und so orientiert ist, dass die Singularität  $a_i$  zur Linken liegt. (Für  $a_i = \infty$  sei  $K_i$  das Äußere von  $S_i$ .)

Damit ist  $G' = G \setminus \bigcup_{i=1}^m \overline{K_i}$  ein beschränktes Gebiet, das berandet wird von den  $\mathcal{C}_1, \dots, \mathcal{C}_n$  und  $S_1, \dots, S_m$ . Somit kann man den Cauchyschen Integralsatz auf  $G'$  anwenden.

$$0 = \sum_{i=1}^n \int_{\mathcal{C}_i} f(z) \, dz + \sum_{j=1}^m \int_{S_j^-} f(z) \, dz \quad \Rightarrow \quad \int_{\partial G} f(z) \, dz = \sum_{j=1}^n \int_{S_j} f(z) \, dz \stackrel{(29.3)}{=} 2\pi i \cdot \sum_{j=1}^m (\operatorname{Res} f)(a_j)$$

#### Bemerkung

Durch die spezielle Behandlung des Punktes  $z = \infty$  bei der Definition des Residuums konnte der Residuensatz konsistent formuliert werden, auch für den Fall  $\infty \in G$ .

Um den Residuensatz wirksam zur Berechnung von Integralen anwenden zu können, benötigt man Hilfsmittel und Erfahrung bei der Berechnung von Residuen.

1. Die Laurent-Entwicklung muss wenigstens so weit erzeugt werden, dass der Koeffizient von  $1/z$  bekannt ist (Hinweis: Einsatz bekannter Entwicklungen). Dies geht besonders bei Polen einfach.

#### Beispiel 29.5

Sei  $f(z) = (4z^3 + z + 1) \cdot \sin 1/z$ . Die Aufgabe ist, das Residuum zu bestimmen.  $z = 0$  ist eine wesentliche Singularität, denn dort lautet die Laurent-Entwicklung:

$$(4z^3 + z + 1) \cdot \sin \frac{1}{z} = (4z^3 + z + 1) \cdot \left( \frac{1}{z} - \frac{1}{3! \cdot z^3} + \frac{1}{5! \cdot z^5} - \dots \right)$$

Nach Ausmultiplizieren steht bei  $1/z$  der Koeffizient  $(\operatorname{Res} f)(z=0) = 1$ .

2. Wir unterscheiden drei Fälle: Zunächst habe  $f$  an  $a \in \mathbb{C}$  einen Pol erster Ordnung. Dann sieht die Laurent-Entwicklung wie folgt aus:

$$f(z) = \frac{a_{-1}}{z-a} + a_0 + a_1 \cdot (z-a) + \dots \quad \Rightarrow \quad (z-a) \cdot f(z) = a_{-1} + a_0 \cdot (z-a) + a_1 \cdot (z-a)^2 + \dots$$

Somit ist  $a_{-1} = \lim_{z \rightarrow a} (z-a) \cdot f(z)$ .

#### Beispiel 29.6

$$f(z) = \frac{z^3 + z^2 - 1}{(z-1) \cdot (z-2)}$$

Es gibt zwei isolierte Singularitäten bei  $z_1 = 1$  und  $z_2 = 2$ , also ist:

$$(\operatorname{Res} f)(1) = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1) \cdot f(z) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z^3 + z^2 - 1}{z-2} = \frac{1}{-1} = -1$$

Sei nun allgemein  $f = g/h$ , wobei  $g$  und  $h$  in  $a$  holomorph sind und  $h$  in  $a$  eine Nullstelle erster Ordnung hat. Damit hat  $f$  bei  $a$  einen Pol erster Ordnung.

$$(\operatorname{Res} f)(a) = \lim_{z \rightarrow a} \left[ (z-a) \cdot \frac{g(z)}{h(z)} \right] \stackrel{(h(a)=0)}{=} \lim_{z \rightarrow a} \frac{g(z)}{\frac{h(z)-h(a)}{z-a}} = \frac{g(a)}{h'(a)}$$

3. Man kann 1. weiter verallgemeinern:  $f$  habe an  $a \neq \infty$  eine Polstelle  $m$ -ter Ordnung. Dann erhält man:

$$(\operatorname{Res} f)(a) = \frac{1}{(m-1)!} \cdot \lim_{z \rightarrow a} \left( \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} (z-a)^m \cdot f(z) \right) \quad (*)$$

Der Pol  $m$ -ter Ordnung heißt:

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{a_{-m}}{(z-a)^m} + \frac{a_{-m+1}}{(z-a)^{m-1}} + \dots + \frac{a_{-1}}{(z-a)} + a_0 + \dots \\ (z-a)^m \cdot f(z) &= a_{-m} + a_{-m+1} \cdot (z-a) + \dots + a_{-1} \cdot (z-a)^{m-1} + a_0 \cdot (z-a)^m + \dots \end{aligned}$$

Das Residuum erhält man durch  $(m-1)$ -faches Ableiten.

## Beispiele zum Residuensatz

1.  $I = \int_{|z|=1} \frac{e^z}{z^4} dz$

Dieses Integral kann natürlich mit der Cauchyschen Integralformel für Ableitungen bestimmt werden ( $n=3$ ).

$$I = \frac{2\pi i}{3!} \cdot \left. \frac{d^3 e^z}{dz^3} \right|_{z=0} = \frac{\pi i}{3}$$

Weiter kann man das Integral auch mit dem Residuensatz berechnen. Dazu benötigt man das Residuum der Funktion an der isolierten Singularität  $a=0$ :

$$\frac{e^z}{z^4} = \frac{1}{z^4} + \frac{1}{z^3} + \frac{1}{2! \cdot z^2} + \frac{1}{3! \cdot z} + \dots \Rightarrow (\operatorname{Res} f)(0) = \frac{1}{3!} \Rightarrow I = \frac{\pi i}{3}$$

2.  $I = \int_{|z-2|=7} \left[ z^2 \cdot e^{1/z} + \frac{\cos z}{z^3 \cdot (z-\pi)^2} \right] dz = I_1 + I_2$

Das Teilintegral  $I_1$  hat eine wesentliche Singularität in  $a=0$ :

$$z^2 \cdot e^{1/z} = z^2 + z + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3! \cdot z} + \dots \Rightarrow (\operatorname{Res} f)(0) = \frac{1}{3!} \Rightarrow I_1 = \frac{\pi i}{3}$$

Beim Teilintegral  $I_2$  liegen zwei Singularitäten vor, ein dreifacher Pol bei  $a=0$  und ein zweifacher Pol bei  $a=\pi$ . Beide liegen im Kreis  $|z-2| < 7$ , müssen also bei der Integration berücksichtigt werden. Wir nehmen die Formel (\*) aus dem Spezialfall 3:

$$\begin{aligned} \left( \operatorname{Res} \frac{\cos z}{z^3 \cdot (z-\pi)^2} \right) (0) &= \frac{1}{2!} \cdot \left. \frac{d}{dz} \frac{\cos z}{(z-\pi)^2} \right|_{z=0} = \frac{6-\pi^2}{2\pi^4} \\ \left( \operatorname{Res} \frac{\cos z}{z^3 \cdot (z-\pi)^2} \right) (\pi) &= \frac{1}{2!} \cdot \left. \frac{d}{dz} \frac{\cos z}{z^3} \right|_{z=\pi} = \frac{3}{\pi^4} \\ I_2 &= 2\pi i \cdot \left[ \frac{6-\pi^2}{2\pi^4} + \frac{3}{\pi^4} \right] = i \cdot \frac{12-\pi^2}{\pi^3} \end{aligned}$$

## Berechnung reeller Integrale mit dem Residuensatz

Es ist ein Integral der folgenden Form zu berechnen:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \lim_{R_1, R_2 \rightarrow \infty} \int_{-R_1}^{R_2} f(x) dx$$

Falls dieser implizite Grenzwert nicht existiert, besteht die Möglichkeit, den Cauchyschen Hauptwert zu bestimmen, indem der Grenzprozess in beiden Richtungen synchronisiert wird:

$$(H) \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R f(x) dx$$



Der Trick besteht darin, die Integration in den  $\mathbb{C}$  zu übertragen und dort einen anderen Integrationsweg zu wählen. Um dieses Konzept zu verdeutlichen, wollen wir zunächst ein Beispiel diskutieren.

### Beispiel 29.7

Betrachtet wird das bekannte Integral:

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = \pi$$

Dieses Integral soll nun mithilfe des Residuensatzes bestimmt werden. Wir stellen uns zum einen die Kurve  $\mathcal{C}_1$  auf der reellen Achsen zwischen  $-R$  und  $R$  vor (die im Integral des Cauchyschen Hauptwertes vorkommt), zum anderen einen Halbkreis  $\mathcal{C}_2$ . Die Parameterdarstellungen lauten wie folgt:

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_1 : z(t) &= t & \text{mit } -R \leq t \leq R \\ \mathcal{C}_2 : z(t) &= R \cdot e^{it} & \text{mit } 0 \leq t \leq \pi \end{aligned}$$

Beide Kurven ergeben zusammen eine geschlossene Kurve  $\mathcal{C}$ . Beide Kurven sind so orientiert, dass die von  $\mathcal{C}$  eingeschlossene Fläche, von  $\mathcal{C}$  aus gesehen, immer zur Linken liegt.

An der Stelle  $z = i$  liegt eine Polstelle des Integranden vor. Man berechnet nun das Residuum:

$$\text{Res } f(i) = \lim_{z \rightarrow i} (z - i) \cdot \frac{1}{1 + z^2} = \frac{1}{2i}$$

Somit ergibt das Integral mit dem Residuensatz:

$$2\pi i \cdot \frac{1}{2i} = \pi = \int_{\mathcal{C}} \frac{1}{1+z^2} dz = \int_{-R}^R \frac{1}{1+x^2} dx + \int_{\mathcal{C}_2} \frac{1}{1+z^2} dz$$

Um auf das Integral über  $\mathcal{C}_1$  zu kommen, muss das Integral über  $\mathcal{C}_2$  berechnet werden:

$$\int_{\mathcal{C}_2} \frac{1}{1+z^2} dz = \int_0^\pi \frac{iR \cdot e^{it} dt}{1 + R^2 \cdot e^{2it}}$$

Wir schätzen das Integral ab:

$$\left| \int_{\mathcal{C}_2} \frac{1}{1+z^2} dz \right| \leq \pi \cdot \sup_{0 \leq t \leq \pi} \left| \frac{R}{1 + R^2 \cdot e^{2it}} \right| \leq \pi \cdot \sup_{0 \leq t \leq \pi} \left| \frac{1}{R \cdot e^{2it}} \right| \leq \frac{\pi}{R} \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0$$

Damit bleibt nur noch das reelle Integral übrig, dessen Wert damit zu  $\pi$  bestimmt wurde.

### Satz 29.12

Sei  $G \subset \mathbb{C}$  ein Gebiet, das die obere Halbebene einschließlich der reellen Achse enthält. Die Funktion  $f$  sei in  $G$  bis auf endlich viele Singularitäten  $a_1, \dots, a_m$  mit  $\text{Im } a_i > 0$  holomorph. Weiterhin sei  $\lim_{|z| \rightarrow \infty} |z \cdot f(z)| = 0$ . Dann gilt:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 2\pi i \cdot \sum_{k=1}^m (\text{Res } f)(a_k)$$

### Beweis

$\mathcal{C}$  wird wie im obigen Beispiel konstruiert (mit denselben Parametrisierungen). Dabei sei  $R$  so groß, dass die isolierten Singularitäten innerhalb von  $\mathcal{C}$  liegen.

$$2\pi i \cdot \sum_{k=1}^m (\text{Res } f)(a_k) = \int_{\mathcal{C}} f(z) dz = \int_{-R}^R f(x) dx + \int_0^\pi f(R \cdot e^{it}) \cdot iR \cdot e^{it} dt$$

Zu zeigen ist nur noch, dass das rechte Integral für  $R \rightarrow \infty$  verschwindet. Dies ergibt sich aus dem geforderten Grenzprozess:

$$|f(R \cdot e^{it}) \cdot iR \cdot e^{it}| = |z \cdot f(z)| \rightarrow 0$$

### Beispiel 29.8

Für eine gebrochenrationale Funktion  $r(x) = p(x)/q(x) \in \mathbb{R}$  suchen wir die Integrale:

$$I_c = \int_{-\infty}^{\infty} r(x) \cdot \cos x \, dx \quad \text{und} \quad I_s = \int_{-\infty}^{\infty} r(x) \cdot \sin x \, dx$$

Dazu betrachten wir  $\int_{\mathcal{C}} r(z) \cdot e^{iz} \, dz$  und zeigen, dass die Integration über  $\mathcal{C}_2$  nichts liefert, woraus folgt:

$$\int_{\mathcal{C}} r(z) \cdot e^{iz} \, dz \xrightarrow{R \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} r(x) \cdot e^{ix} \, dx$$

Von diesem Integral müssen dann Real- und Imaginärteil betrachtet werden.

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} r(x) \cdot \cos x \, dx &= \operatorname{Re} \left[ 2\pi i \cdot \sum_{k=1}^{\infty} (\operatorname{Res} r(z) \cdot e^{iz}) (a_k) \right] \\ \int_{-\infty}^{\infty} r(x) \cdot \sin x \, dx &= \operatorname{Im} \left[ 2\pi i \cdot \sum_{k=1}^{\infty} (\operatorname{Res} r(z) \cdot e^{iz}) (a_k) \right] \end{aligned}$$

Um diese Argumentation zu rechtfertigen, müssen wir (wie oben bereits angedeutet) noch zeigen, dass das Integral über  $\mathcal{C}_2$  verschwindet. Die Parametrisierung lautet:

$$z = R \cdot e^{it} = R \cdot (\cos t + i \cdot \sin t) \Rightarrow e^{iz} = e^{iR \cdot \cos t - R \cdot \sin t} \Rightarrow |e^{iz}| = e^{-R \cdot \sin t} = e^{-\operatorname{Im} z}$$

Um diesen Term zu behandeln, unterteilen wir  $\mathcal{C}_2$  in drei Bereiche.

$$\mathcal{C}_2 = \mathcal{A} \cup \mathcal{B} \quad \text{mit} \quad \mathcal{A} = \{z \in \mathcal{C}_2 : \operatorname{Im} z \geq h\} \quad \text{und} \quad \mathcal{B} = \{z \in \mathcal{C}_2 : \operatorname{Im} z < h\}$$

Man beachte, dass  $\mathcal{B}$  aus zwei disjunkten Teilen besteht. Im Folgenden sei der Grad von  $q$  größer als der von  $p$ , damit kann man  $|r(z)| \leq K/|z|$  abschätzen. Hieraus folgt:

$$\begin{aligned} \left| \int_{\mathcal{A}} r(z) \cdot e^{iz} \, dz \right| &\leq \frac{K \cdot e^{-h}}{r} \cdot \pi r = C_1 \cdot e^{-h} \\ \left| \int_{\mathcal{B}} r(z) \cdot e^{iz} \, dz \right| &\leq \frac{K}{r} \cdot 4h = C_2 \cdot \frac{h}{R} \\ \Rightarrow \left| \int_{\mathcal{C}_2} r(z) \cdot e^{iz} \, dz \right| &\leq C_1 \cdot e^{-h} + C_2 \cdot \frac{h}{R} \end{aligned}$$

Ob (\*) gilt, kommt auf die geeignete Wahl von  $h$  an. Gültig ist zum Beispiel  $h = \sqrt{R}$ .

## Weitere Beispiele

1. Wir betrachten das Integral

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x} \, dx$$

Die Konvergenz der Lösung ist in der Literatur (z.B. Fichtenholz II) aufgezeigt. Es wird die partielle Integration und die Konvergenz benutzt. Wir wollen das Integral jetzt mit den Mitteln

der komplexen Funktion ausrechnen. Man könnte zunächst den folgenden Ansatz probieren:

$$I = \operatorname{Im} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x} dx$$

Das geht aber nicht, da der Integrand hier einen Pol bei  $x = 0$  hat. Wir nehmen stattdessen den folgenden Integranden:

$$I = \operatorname{Im} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1 - e^{ix}}{x} dx$$

Dieser Integrand ist in  $x = 0$  holomorph. (Die Eins kann eingefügt werden, weil das  $x$  reell ist, somit geht die Eins nur in den Realteil des Integranden ein, der aber nicht betrachtet wird.) Wir berechnen von Hand das äquivalente Integral über die bekannte geschlossene Halbkreisurve:

$$\begin{aligned} 0 &= \operatorname{Im} \int_{\mathcal{C}} \frac{e^{iz}-1}{z} dz = \operatorname{Im} \int_{-R}^R \frac{e^{ix}}{x} dx + \operatorname{Im} \int_{\mathcal{C}_R} \frac{e^{iz}-1}{z} dz \\ \Rightarrow \int_{-R}^R \frac{e^{ix}}{x} dx &= \operatorname{Im} \int_{\mathcal{C}_R} \frac{1-e^{iz}}{z} dz = \operatorname{Im} \left[ \int_{\mathcal{C}_R} \frac{1}{z} dz - \int_{\mathcal{C}_R} \frac{e^{iz}}{z} dz \right] \end{aligned}$$

Das hintere Integral verschwindet für  $R \rightarrow \infty$ . Die Kurve  $\mathcal{C}_R$  können wir wie folgt parametrisieren:

$$z(t) = R \cdot e^{it} \quad \text{und} \quad dz = iR \cdot e^{it} \cdot dt \quad \text{mit} \quad 0 \leq t < \pi$$

Damit lässt sich das verbleibende Integral berechnen.

$$\int_{\mathcal{C}_R} \frac{1}{z} dz = \int_0^\pi \frac{iR \cdot e^{it}}{R \cdot e^{it}} dt = \pi i \quad \Rightarrow \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \pi \quad \Rightarrow \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \pi$$

Dieses Verfahren wollen wir verallgemeinern.

### Lemma 29.13

Sei  $a$  ein einfacher Pol von  $f$  und  $S_r^+(a) = \{z \in S_r(a) : \operatorname{Im} z \geq a\}$  der „obere“ Teil der Kreislinie  $S_r(a)$  mit der Parametrisierung  $\gamma_r : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{C}, t \mapsto a + r \cdot e^{it}$ . Dann gilt:

$$\lim_{r \rightarrow 0} \int_{S_r^+(a)} f(z) dz = \pi i \cdot (\operatorname{Res} f)(a)$$

### Beweis

$f$  hat in  $a$  einen einfachen Pol. In einer Umgebung von  $a$  gilt also:

$$f(z) = \frac{a-1}{z-a} + g(z)$$

Die hierdurch definierte Funktion  $g$  ist in  $a$  holomorph und deswegen auf der Integrationskurve beschränkt ( $|g(z)| \leq M$ ). Das Integral über  $S_r^+(a)$  kann wie folgt abgeschätzt werden:

$$\lim_{r \rightarrow 0} \left| \int_{S_r^+(a)} g(z) dz \right| \leq \lim_{r \rightarrow 0} M \cdot \pi \cdot r$$

Das Integral über  $f$  lautet nun wie folgt:

$$\int_{S_r^+(a)} f(z) \, dz = \int_{S_r^+(a)} \frac{a_{-1}}{z-a} \, dz = \int_0^\pi \frac{a_{-1}}{r \cdot e^{it}} \cdot ir \cdot e^{it} \, dt = \pi i \cdot a_{-1} = \pi i \cdot (\operatorname{Res} f)(a)$$

■

Wir betrachten nun eine neue Kurve  $\mathcal{C}$ :

$$\mathcal{C} = [-R, -r] \cup S_r^+(a) \cup [r, R] \cup \mathcal{C}_R$$

Das ist anschaulich die Randkurve der „oberen“ Hälfte eines Kreises. Wiederum nehmen wir den Integranden  $e^{iz}/z$ , für diesen wissen wir für  $R \rightarrow \infty$  und  $r \rightarrow 0$  bereits:

$$\int_{\mathcal{C}_R} \frac{e^{iz}}{z} \, dz \rightarrow 0 \quad \text{und} \quad \int_{\mathcal{C}} \frac{e^{iz}}{z} \, dz = 0$$

Desweiteren können wir das im vorigen Beispiel gesuchte Integral durch den folgenden Grenzprozess ausdrücken:

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x} \, dx = \lim_{r \rightarrow 0} \left( \int_{-\infty}^{-r} \frac{\sin x}{x} \, dx + \int_r^{\infty} \frac{\sin x}{x} \, dx \right) = \lim_{r \rightarrow 0} \operatorname{Im} \left( \int_{-\infty-r}^{-r} \frac{e^{ix}}{x} \, dx + \int_r^{\infty} \frac{e^{ix}}{x} \, dx \right)$$

Betrachten wir die Integration über  $\mathcal{C}$ , so sehen wir, dass die Summe dieser Integrale gleich der Differenz  $\int_{\mathcal{C}} - \int_{\mathcal{C}_R} - \int_{S_r^+(a)}$  ist. Die ersten beiden Integrale verschwinden. Es verbleibt:

$$I = \operatorname{Im} \left( \lim_{r \rightarrow 0} \int_{S_r^+(a)} \frac{e^{ix}}{x} \, dx \right) = \operatorname{Im} i\pi = \pi$$

# 30 Ergänzungen zur Funktionentheorie

## 30.1 Analytische Fortsetzung

### Definition 30.1

Seien  $G_1$  und  $G_2$  zwei nicht disjunkte Gebiete. In  $G_i$  sei die Funktion  $f_i$  holomorph und analytisch. Außerdem sind die Funktionen  $f_1$  und  $f_2$  auf ihrem gemeinsamen Definitionsbereich gleich:

$$f_1(z) = f_2(z) \quad \forall z \in G_1 \cap G_2$$

Dann ist die Funktion  $F$  mit

$$F(z) := \begin{cases} f_1(z) & z \in G_1 \\ f_2(z) & z \in G_2 \end{cases}$$

auf  $G := G_1 \cup G_2$  holomorph.  $F$  heißt **Fortsetzung** von  $f_1$  in  $G$ .

#### Bemerkung

Falls eine Fortsetzung existiert, ist sie aufgrund des Identitätssatzes eindeutig bestimmt.

Wir wollen folgende Probleme genauer betrachten:

1. Sei  $f$  im Gebiet  $G$  analytisch. Kann man  $f$  in ein größeres Gebiet  $G'$  analytisch fortsetzen?
2. Falls ja, gibt es ein Verfahren, um die Fortsetzung zu konstruieren?

Ein solches Verfahren gibt es, für bestimmte  $G$  und  $f$ , tatsächlich. Ein wichtiges Gegenbeispiel ist die Potenzreihe  $\sum_{n=1}^{\infty} z^{n!}$ , welche im Einheitskreis konvergiert und dort eine analytische Funktion darstellt, aber über keinen Randpunkt hinaus fortgesetzt werden kann. Den Hintergrund der Betrachtungen liegt in folgendem Satz.

### Satz 30.2 Hadamardscher Lückensatz

Sei  $g$  eine analytische Funktion mit folgender Darstellung: (Es werden nur die Potenzen mit von Null verschiedenen Koeffizienten betrachtet.)

$$g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot z^{n_k}$$

Wenn es ein  $\delta > 0$  gibt, sodass  $n_{k+1} - n_k \geq \delta \cdot n_k$  für fast alle  $k \in \mathbb{N}$  gilt, dann lässt sich  $f$  nicht über den Konvergenzkreis hinaus fortsetzen.

### Satz 30.3

Für alle Gebiete  $G \subset \mathbb{C}$  gibt es eine analytische Funktion  $f$ , die genau in  $G$  holomorph ist, die sich also nicht über  $G$  hinaus fortsetzen lässt.

Den Beweis hierzu findet man in der Literatur (Behnke/Sommer III, 8.27). Jetzt suchen wir ein Verfahren zur Bestimmung der Fortsetzung und stellen fest, dass es sogar mehrere gibt.

**Satz 30.4**

## Kleiner Schwarzscher Spiegelungssatz

Sei  $G$  ein Gebiet in der „oberen“ Halbebene  $H^+ = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0\}$ , zu dessen Rand  $\partial G$  ein endliches Intervall  $[a, b] \subset \mathbb{R}$  gehört. Das Integral  $(a, b)$  möge ein sogenannter **freier Randbogen** sein:

$$\forall x \in (a, b) \exists r > 0 : K_r(x) \cap H^+ \subset G$$

Die Funktion  $f$  sei holomorph in  $G$ , auf  $G \cup (a, b)$  stetig und auf  $(a, b)$  reell.  $G^-$  sei das durch Spiegelung von  $G$  an der reellen Achse entstehende Gebiet. Dann existiert eine analytische Fortsetzung  $F$  von  $f$  auf  $G \cup G^- \cup (a, b)$ .

**Beweis**

## Beweisidee

Man definiert die Fortsetzung wie folgt:

$$F(z) = \begin{cases} f(z) & z \in G \cup (a, b) \\ \overline{f(\overline{z})} & z \in G^- \end{cases}$$

Der Beweis der Analytizität von  $F$  ist sehr aufwändig. ■

Ein weiteres Fortsetzungsverfahren ist das sogenannte **Kreiskettenverfahren**. Hierfür sei  $f_1$  durch eine Potenzreihe gegeben:

$$f_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot (z - a)^n \quad \text{für } z \in K_r(a)$$

Sei  $b \in K_r(a)$ . Wir entwickeln  $f_1$  um  $b$ :

$$f_2(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \cdot (z - b)^n$$

Der Konvergenzkreis  $K_s(b)$  von  $f_2$  kann komplett in  $K_r(a)$  liegen (und mit seinem Rand die Peripherie von  $K_r(a)$  berühren). Es kann aber auch sein, dass der neue Konvergenzkreis über den ursprünglichen hinausragt. In  $K_r(a) \cap K_s(b)$  gilt natürlich  $f_1 \equiv f_2$ . Dann kann man eine neue (wiederum analytische) Funktion  $f$  in dem Gebiet  $K_r(a) \cup K_s(b)$  definieren:

$$f(z) = \begin{cases} f_1(z) & z \in K_r(a) \\ f_2(z) & z \in K_s(b) \end{cases}$$

Diese Art der Fortsetzung geschieht also durch Umordnung von Potenzreihen. Das Verfahren kann natürlich mehrfach angewendet werden, aber wie kann man diese Idee „richtig“ formulieren?

**Definition 30.5**

Sei mit  $P(z|c)$  eine Potenzreihe um  $c$  bezeichnet.

1. Zwei Potenzreihen  $P(z|a)$  und  $P(z|b)$  heißen **benachbart**, wenn ihre Konvergenzkreise einen nichtleeren Durchschnitt haben, auf welchem  $P(z|a) = P(z|b)$  gilt.
2. Eine endliche Folge  $(P(z|a_i))_{1 \leq i \leq n}$  von Potenzreihen heißt **Potenzreihenketten**, wenn  $P(z|a_i)$  und  $P(z|a_{i+1})$  für  $i = 1, \dots, n-1$  jeweils benachbart sind.
3. Sei  $\gamma : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{C}$  ein Weg in  $\mathbb{C}$ . Eine Potenzreihenketten  $(P(z|a_i))_{1 \leq i \leq n}$  heißt **Potenzreihenketten längs  $\gamma$** , wenn  $a_1 = \gamma(\alpha)$  sowie  $a_n = \gamma(\beta)$  gilt und wenn es eine Zerlegung  $\mathcal{Z} = \{I_1, \dots, I_n\}$  von  $[\alpha, \beta]$  in abgeschlossene Teilintervalle  $I_k$  gibt, sodass  $\gamma(I_k) \subset K_{r_k}(a_k)$  liegt. (Der Weg  $\gamma$  liegt also abschnittsweise in den Konvergenzkreisen der  $P(z|a_k)$ .)

Häufig liegen die Mittelpunkte  $a_k$  der Konvergenzkreise auf  $\mathcal{C} = \gamma([\alpha, \beta])$ . (Die Entwicklungspunkte werden also von der Kurve erzeugt.) Im Folgenden wird beschrieben, inwieweit Fortsetzungen längs einer Kurve  $\gamma$  mittels Potenzreihenketten von den Ketten und von  $\gamma$  unabhängig sind.

### Satz 30.6

Seien  $(P(z|a_i))_{1 \leq i \leq n}$  und  $(Q(z|a_j))_{1 \leq j \leq m}$  zwei Potenzreihenketten längs eines Weges  $\gamma$ . Wenn  $P(z|a_1) = Q(z|b_1)$  ist, dann gilt auch  $P(z|a_n) = Q(z|b_m)$  (jeweils auf dem gemeinsamen Konvergenzgebiet).

#### Beweis

#### Beweisidee

Man beachte  $\gamma(\alpha) = a_1 = b_1$  und  $\gamma(\beta) = a_n = b_m$ . Jetzt seien  $\{I_1, \dots, I_n\}$  und  $\{J_1, \dots, J_m\}$  die in der Definition beschriebenen Zerlegungen des Intervalls  $[\alpha, \beta]$ . Der Hauptbestandteil des Beweises besteht darin, die folgende Aussage zu zeigen:

(\*) Wenn  $I_k \cap J_l \neq \emptyset$ , dann sind  $P(z|a_k)$  und  $Q(z|b_l)$  benachbart.

Angenommen, (\*) gilt nicht für ein Paar  $(k, l)$  (wobei  $k + l$  möglichst klein ist). Für die Lage von  $I_k$  und  $J_l$  gibt es die zwei Möglichkeiten. Wir betrachten den Fall, dass  $J_l$  von  $I_k$  und  $I_{k-1}$  überdeckt wird. Es ist also  $I_{k-1} \cap I_k \cap J_l \neq \emptyset$ . (Beachte: Zwei aufeinanderfolgende  $I_k$  enthalten den gemeinsamen Randpunkt.) Diese Relation lässt sich auf die Konvergenzkreise übertragen:

$$A := K_{r_{k-1}}(a_{k-1}) \cap K_{r_k}(a_k) \cap K_{s_l}(b_l) \neq \emptyset$$

Da  $J_l \cap I_{k-1} \neq \emptyset$  und  $k + l$  minimal war, müssen  $P(z|a_{k-1})$  und  $Q(z|b_k)$  benachbart sein. Die Potenzreihen  $P(z|a_{k-1})$  und  $P(z|a_k)$  sind sowieso benachbart. Damit gilt in der offenen Menge  $A$ :

$$P(z|a_{k-1}) = Q(z|b_k) = P(z|a_l) \quad \forall z \in A$$

In der offenen Menge  $A$  können wir eine hinreichend große Menge (zum Beispiel eine Kreisscheibe) finden, um den Identitätssatz anwenden zu können. Insbesondere ist also  $P(z|a_k) = Q(z|b_l)$  für alle  $z \in K_{r_k}(a_k) \cap K_{s_l}(b_l)$ . Somit sind  $P(z|a_k)$  und  $Q(z|b_l)$  benachbart, dies ist also ein Widerspruch zur Annahme. Damit ist (\*) gezeigt.

Auf alle Fälle ist  $I_n \cap J_m \neq \emptyset$ , also sind  $P(z|a_n)$  und  $Q(z|b_m)$  benachbart. Da aber  $a_n = b_m$  ist, muss  $P(z|a_n) = Q(z|b_m)$  sein. ■

### Definition 30.7

Seien  $G_1 \subsetneq G \subset \mathbb{C}$  zwei Gebiete. Die Funktion  $f_1$  sei in  $G_1$  holomorph.  $f_1$  heißt in  $G$  **unbeschränkt fortsetzbar**, wenn längs jedes Weges  $\gamma$ , der in  $G_1$  beginnt und ganz in  $G$  verläuft, eine Potenzreihenkette existiert, deren erstes Glied die Potenzreihenentwicklung von  $f_1$  im Anfangspunkt von  $\gamma$  ist. Das letzte Glied der Kette heißt **Fortsetzung** von  $f_1$  längs  $\gamma$ . Die Fortsetzung ist von der gewählten Potenzreihenkette unabhängig.

Welches Problem taucht auf, wenn man die Unabhängigkeit von  $\gamma$  diskutieren will? Betrachte zum Beispiel den Logarithmus. Wähle zwei Wege  $\gamma_0$  und  $\gamma_1$  vom Punkt  $a$  zum Punkt  $b$  so, dass der Nullpunkt in dem von  $\gamma_0$  und  $\gamma_1$  umrandeten Gebiet liegt. Das Problem ist, dass man den einen Weg nicht stetig in den anderen deformieren kann und dabei im Definitionsbereich des Logarithmus bleiben kann. (Beachte  $0 \notin D(\log)$ .) Der entsprechende Begriff ist die sogenannte **Homotopie** von Wegen.

Seien  $\gamma_0, \gamma_1 : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ . Sie heißen **homotop**, wenn sie – anschaulich gesprochen – stetig ineinander deformiert werden können. Das heißt, es existiert eine stetige Abbildung  $\gamma : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$  mit:

1.  $\gamma_s := \gamma(s, \cdot)$  ist für alle  $s \in [0, 1]$  ein stetiger Weg.
2.  $\gamma$  überführt  $\gamma_0$  und  $\gamma_1$  ineinander:  $\gamma(0, \cdot) = \gamma_0$  und  $\gamma(1, \cdot) = \gamma_1$
3. Alle Kurven  $\gamma_s$  haben dieselben Endpunkte:  $\gamma_s(0) = a$  und  $\gamma_s(1) = b$

Entsprechend heißen  $\gamma_0$  und  $\gamma_1$  homotop in  $G$ , wenn für alle  $s$  gilt:  $\gamma_s[0, 1] \subset G$ .

Ein **entarteter Weg** ist  $\gamma_{p_0} : [0, 1] \rightarrow G$  mit  $\gamma_{p_0}(t) = p_0$  für alle  $t$ . (Die Kurve zu einem entarteten Weg ist also ein einzelner Punkt.) Sei nun  $\gamma$  ein geschlossener Weg in  $G$ , der bei  $p_0$  beginnt und endet.  $\gamma$  heißt auf  $p_0$  **zusammenziehbar**, wenn  $\gamma$  und  $\gamma_{p_0}$  homotop sind.

Nun ist der einfache Zusammenhang sauber definierbar: Ein Gebiet  $G$  heißt **einfach zusammenhängend**, wenn es in  $G$  ein  $p_0$  gibt, so dass alle geschlossenen Kurven in  $G$ , die in  $p_0$  beginnen und enden, auf  $p_0$  zusammenziehbar sind. (Man kann zeigen, dass die Definition von  $p_0$  unabhängig ist.)

### Satz 30.8 Monodromiesatz

Sei  $f_1$  in  $G_1$  holomorph und in  $G \supsetneq G_1$  unbeschränkt fortsetzbar. Seien  $\gamma_0$  und  $\gamma_1$  zwei homotope Wege, die  $a$  in  $G_1$  und  $b$  in  $G$  verbinden. Dann sind die Fortsetzungen von  $f_1$  längs  $\gamma_0$  und  $\gamma_1$  gleich.

### Satz 30.9

Die Funktion  $f_1$  sei im Gebiet  $G_1$  holomorph und in das Gebiet  $G \supsetneq G_1$  unbeschränkt fortsetzbar. Ist  $G$  einfach zusammenhängend, dann existiert eine analytische Fortsetzung  $f$  von  $f_1$  in  $G$ .

## 30.2 Konforme Abbildungen

Wann kann man zwei Gebiete  $G_0$  und  $G_1$  aus  $\mathbb{C}_0$  eineindeutig und konform aufeinander abbilden? Die Antwort folgt später. Zunächst sehen wir, dass man bereits mit einfachen Abbildungen viel bewerkstelligen kann. Wir betrachten die wichtige Klasse der gebrochen linearen Abbildungen (**Möbius-Transformationen**):

$$M(z) = \frac{az + b}{cz + d} \quad \text{mit} \quad ad - bc \neq 0$$

Die Umkehrabbildung ist dann:

$$M^{-1}(w) = \frac{dw - b}{-cw + a}$$

Die Funktion hat unendliche Funktionswerte:

$$M(z) = \infty \quad \Leftrightarrow \quad c \cdot z + d = 0 \quad \text{und außerdem} \quad M(\infty) = \begin{cases} \frac{a}{c} & c \neq 0 \\ 0 & c = 0 \end{cases}$$

Weiterhin hat  $M$  die folgenden Eigenschaften:

1.  $M$  bildet  $\mathbb{C}_0$  eineindeutig und konform auf sich ab.
2. Die Möbius-Transformationen  $M$  bilden bezüglich der Hintereinanderausführung eine Gruppe.

$$M_1 \circ M_2 = M \quad \text{mit} \quad \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

3. Möbius-Transformationen erhalten das Doppelverhältnis von Punkten. Seien  $u_1$  bis  $u_4$  vier voneinander verschiedene Punkte. Das Doppelverhältnis ist dann gegeben durch:

$$\text{DV}(u_1, u_2, u_3, u_4) = \frac{u_1 - u_3}{u_1 - u_4} \cdot \frac{u_2 - u_4}{u_2 - u_3}$$



Wenn man etwa  $u_4 = \infty$  wählt, dann setzt man:

$$DV(u_1, u_2, u_3, u_4) = \lim_{z \rightarrow 0} DV\left(u_1, u_2, u_3, \frac{1}{z}\right) = \frac{u_1 - u_3}{u_2 - u_3}$$

4. Seien  $z_1, z_2, z_3$  und  $w_1, w_2, w_3$  zwei Tripel von paarweise verschiedenen Punkten, dann existiert genau ein  $M$  mit:

$$M(z_i) = w_i \quad \text{mit} \quad 1 \leq i \leq 3$$

Um dies zu beweisen, betrachte  $M_1$  und  $M_2$  wie folgt:

$$M_1(z) = \frac{z - z_1}{z - z_3} \cdot \frac{z_2 - z_3}{z_2 - z_1} \quad \text{und} \quad M_2(z) = \frac{z - w_1}{z - w_3} \cdot \frac{w_2 - w_3}{w_2 - w_1}$$

Dann gilt  $M_1(z_1) = 0$ ,  $M_1(z_2) = 1$  und  $M_1(z_3) = \infty$  (für  $M_2$  analog mit den  $w_i$ ). Die gesuchte Abbildung erhält man dann als  $M = M_2^{-1} \circ M_1$ .

5.  $M$  bildet verallgemeinerte Kreise auf verallgemeinerte Kreise ab. (Verallgemeinerte Kreise sind Kreise in  $\mathbb{C}_0$ , also Kreise oder Geraden in  $\mathbb{C}$ .)

### Satz 30.10 Riemannscher Abbildungssatz

Sei  $G \subsetneq \mathbb{C}$  ein einfach zusammenhängendes Gebiet und  $z_0 \in G$ . Dann existiert eine eindeutige konforme Abbildung  $\varphi$  von  $G$  auf den offenen Einheitskreis  $K_1(0)$  mit  $\varphi(z_0) = 0$ .

### Folgerung 30.11

Seien  $G_0, G_1 \subsetneq \mathbb{C}$  einfach zusammenhängende Gebiete mit  $z_0 \in G_0$  und  $z_1 \in G_1$ . Dann existiert eine eindeutige konforme Abbildung  $\varphi$  von  $G_0$  auf  $G_1$  mit  $\varphi(z_0) = z_1$ .

#### Bemerkung

Man kann auch noch die Zuordnung der Ränder genauer beschreiben.

Wozu nützt dieser Satz? Wir betrachten ein Problem in einer Ebene (zum Beispiel eine Randwertaufgabe erster Ordnung für ein einfach zusammenhängendes Gebiet  $G$ ). Die Idee ist, dass Problem im Einheitskreis zu lösen, denn man kann  $G$  auf den Einheitskreis abbilden und die Lösung am Ende zurücktransformieren.

## 30.2.1 Zum Primzahlsatz

Sei  $\pi(x)$  die Anzahl der Primzahlen zwischen 0 und  $x$ . Wie kann man diese Zahl abschätzen?

### Satz 30.12 Primzahlsatz

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\pi(x)}{x / \ln x} = 1$$

Es ist doch erstaunlich, dass man diesen Satz mit den Mitteln der Funktionentheorie beweisen kann. (Den Beweis finden Sie in der Literatur.)