模块三 椭圆与方程

第 1 节 椭圆的定义、标准方程及简单几何性质（★★）

强化训练

1．（★★）椭圆 $\frac{y^2}{a^2}+\frac{x^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的右顶点为 $A(1,0)$，过其焦点且垂直于长轴的弦长为 1，则椭圆的方程为_____.

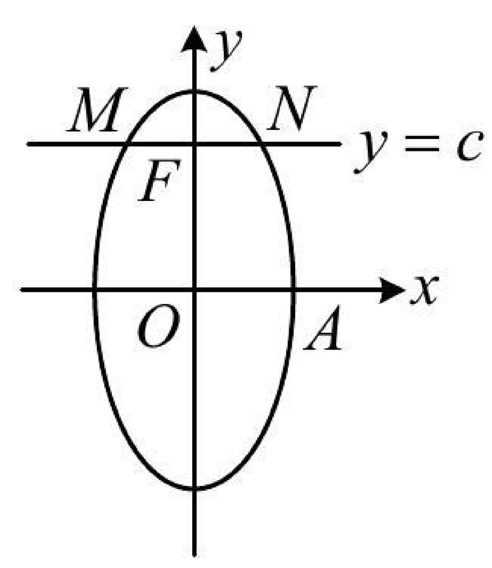
答案：$\frac{y^2}{4}+x^2=1$

解析：椭圆的焦点在 y 轴上，椭圆的右顶点为 $A(1,0)\Rightarrow b=1$，

椭圆的过焦点且垂直于长轴的弦是通径，可联立通径所在直线和椭圆的方程来求通径长，

如图，设 $F(0,c)$ 是椭圆的上焦点，联立 $\begin{cases} y=c \\ \frac{y^2}{a^2}+\frac{x^2}{b^2}=1 \end{cases}$ 消去 y 可得 $x^2=b^2(1-\frac{c^2}{a^2})=b^2\cdot\frac{a^2-c^2}{a^2}=\frac{b^4}{a^2}$，

所以 $x=\pm\frac{b^2}{a}$，故通径长 $|MN|=\frac{2b^2}{a}$，由题意，$\frac{2b^2}{a}=1$，所以 $a=2b^2=2$，故椭圆的方程为 $\frac{y^2}{4}+x^2=1$.



2．（★★）对称轴为坐标轴的椭圆经过 $P(-2\sqrt{3},1)$、$Q(\sqrt{3},-2)$ 两点，则椭圆的方程为_____.

答案：$\frac{x^2}{15}+\frac{y^2}{5}=1$

解析：本题未给椭圆焦点在哪个坐标轴，若讨论，则比较麻烦，可用待定系数法求解，

设椭圆的方程为 $Ax^2+By^2=1$，其中 $A>0$，$B>0$，且 $A\neq B$，

将 P、Q 两点代入可得：$\begin{cases} 12A+B=1 \\ 3A+4B=1 \end{cases}$，解得：$A=\frac{1}{15}$，$B=\frac{1}{5}$，所以椭圆的方程为 $\frac{x^2}{15}+\frac{y^2}{5}=1$.

【反思】不知道焦点在哪个坐标轴上时，可考虑将椭圆方程设为 $Ax^2+By^2=1(A>0,B>0,A\neq B)$.

3．（2023 •新高考Ⅰ卷 •★★）设椭圆 $C_1:\frac{x^2}{a^2}+y^2=1(a>1)$，$C_2:\frac{x^2}{4}+y^2=1$ 的离心率分别为 e_1，e_2，若 $e_2=\sqrt{3}e_1$，则 $a=$（　　）

（A）$\frac{2\sqrt{3}}{3}$　（B）$\sqrt{2}$　（C）$\sqrt{3}$　（D）$\sqrt{6}$

答案：A

解析：由题意，$e_1=\dfrac{\sqrt{a^2-1}}{a}$，$e_2=\dfrac{\sqrt{4-1}}{2}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，因为$e_2=\sqrt{3}e_1$，所以$\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}\cdot\dfrac{\sqrt{a^2-1}}{a}$，解得：$a=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.

4．（2022•衡水中学六调•★★）阿基米德（公元前 287 年至公元前 212 年）不仅是著名的物理学家，也是著名的数学家，他利用“逼近法”得到椭圆的面积除以圆周率等于椭圆的长半轴长与短半轴长的乘积. 若椭圆 C 的对称轴为坐标轴，焦点在 y 轴上，离心率为$\dfrac{\sqrt{7}}{4}$，面积为12π，则椭圆 C 的方程为（　　）

（A）$\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{16}=1$　　（B）$\dfrac{x^2}{3}+\dfrac{y^2}{4}=1$　　（C）$\dfrac{x^2}{18}+\dfrac{y^2}{32}=1$　　（D）$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{36}=1$

答案：A

解析：结合题干信息，把面积和离心率翻译成关于 a、b 的方程，求解即可，

由题意，设椭圆 C 的面积为 S，则$\dfrac{S}{\pi}=ab$，所以$S=\pi ab=12\pi$，故$ab=12$ ①，

椭圆 C 的离心率$e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}=\dfrac{\sqrt{7}}{4}$ ②，

联立①②解得：$a=4$，$b=3$，结合椭圆 C 的焦点在 y 轴上可得其方程为$\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{16}=1$.

5．（★★）已知ΔABC的周长是 8，且$B(-1,0)$，$C(1,0)$，则顶点 A 的轨迹方程是（　　）

（A）$\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{8}=1(x\neq\pm3)$　　（B）$\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{8}=1(x\neq0)$　　（C）$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1(y\neq0)$　　（D）$\dfrac{y^2}{4}+\dfrac{x^2}{3}=1(y\neq0)$

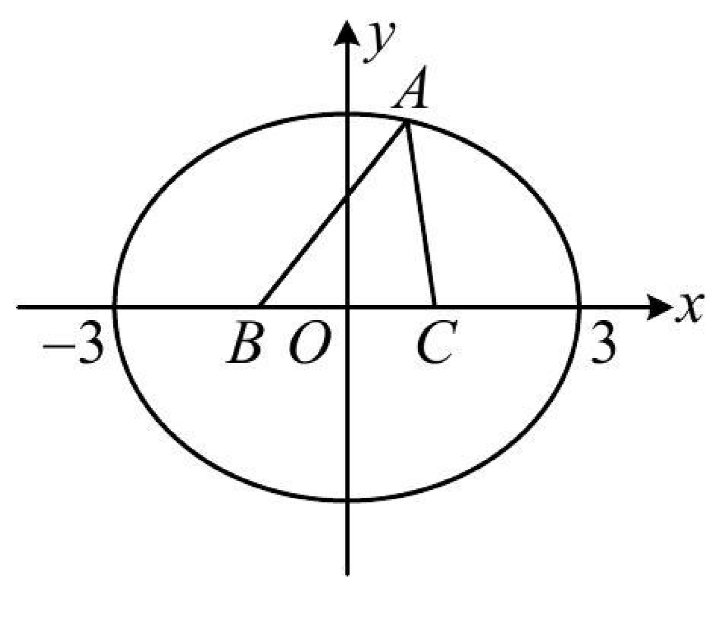
答案：A

解析：因为ΔABC的周长为 8，所以$|AB|+|AC|+|BC|=|AB|+|AC|+2=8$，故$|AB|+|AC|=6>|BC|$ ①，

点 A 到定点 B、C 的距离之和等于定长，所以点 A 的轨迹是以 B、C 为焦点的椭圆，

由①知$2a=6$，所以$a=3$，又由焦点 B、C 的坐标知$c=1$，所以$b^2=a^2-c^2=8$，

故椭圆的方程为$\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{8}=1$，如图，$A$、$B$、$C$ 要构成三角形，所以点 A 不能在 x 轴上，故$x\neq\pm3$，选 A.

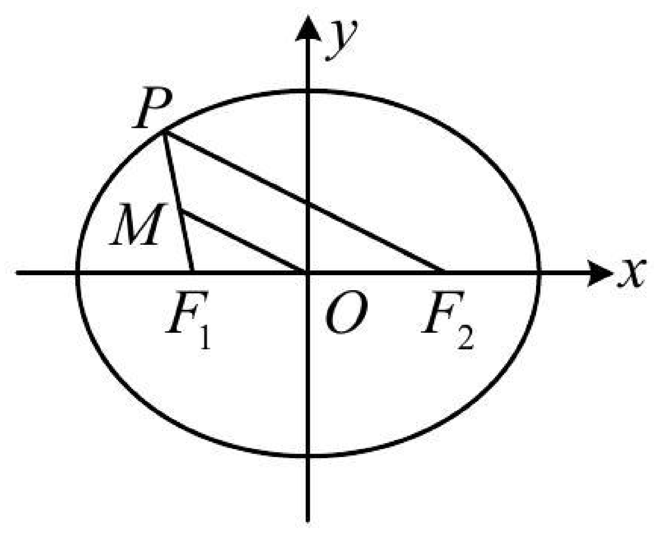


6．（★★）已知F_1、F_2是椭圆$\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{16}=1$的左、右焦点，$P$ 为椭圆上一点，M 为F_1P中点，$|OM|=3$，则$|PF_1|=$______.

答案：4

解析：涉及中点，可考虑中位线，如图，M 为PF_1中点，O 是F_1F_2中点，所以$|PF_2|=2|OM|=6$，

已知$|PF_2|$求$|PF_1|$，用椭圆定义即可，由题意，$a=5$，所以$|PF_1|+|PF_2|=2a=10$，故$|PF_1|=10-|PF_2|=4$.



【反思】椭圆隐藏的三个中点：O 是 F_1F_2、长轴、短轴的中点.

7.（★★）已知 F_1，F_2 为椭圆 $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$ 的两个焦点，过 F_1 的直线交椭圆于 A，B 两点，若 $|AF_2|+|BF_2|=12$，则 $|AB|=$_____.

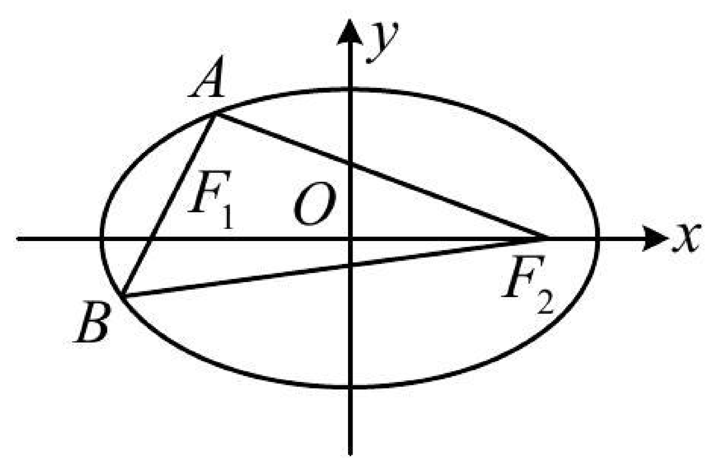
答案：8

解析：椭圆上的点到焦点的距离问题都可优先考虑椭圆定义，

由题意，$a=5$，因为 A、B 在椭圆上，所以 $\begin{cases}|AF_1|+|AF_2|=10\\|BF_1|+|BF_2|=10\end{cases}$，题干有 $|AF_2|+|BF_2|$，所以把两式相加，

故 $|AF_1|+|BF_1|+|AF_2|+|BF_2|=20$ ①，由图可知 $|AF_1|+|BF_1|=|AB|$，代入①得：$|AB|+|AF_2|+|BF_2|=20$，

又 $|AF_2|+|BF_2|=12$，所以 $|AB|=20-(|AF_2|+|BF_2|)=8$.



8.（★★★）设椭圆 $C:\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$ 的左、右焦点分别为 F_1、F_2，$A(1,1)$，P 为椭圆 C 上的动点，则 $|PA|+|PF_1|$ 的最大值为_____.

答案：5

解析：如图，直接观察 P 在何处时取得最值不易，可用椭圆定义将 $|PF_1|$ 转化为 $|PF_2|$ 再看，

由题意，$|PF_1|+|PF_2|=4$，所以 $|PF_1|=4-|PF_2|$，故 $|PA|+|PF_1|=|PA|+(4-|PF_2|)=|PA|-|PF_2|+4$ ①，

由三角形两边之差小于第三边知 $|PA|-|PF_2|\le|AF_2|$，结合①可得：$|PA|+|PF_1|\le|AF_2|+4$ ②，

当且仅当点 P 位于图中 P_0 处时取等号，因为 $A(1,1)$，$F_2(1,0)$，所以 $|AF_2|=1$，

代入②得：$|PA|+|PF_1|\le5$，故 $|PA|+|PF_1|$ 的最大值为 5.