第 1 节 向量的基本运算（★★）

强化训练

1．（★）（多选）设 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 是两个向量，则下列命题正确的是（　　）

（A）若 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$，则存在唯一实数 λ，使 $\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}$

（B）若向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 所在的直线是异面直线，则向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 一定不共面

（C）若 $\boldsymbol{a}$ 是非零向量，则 $\dfrac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}$ 是与 $\boldsymbol{a}$ 同向的单位向量

（D）若 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 都是非零向量，则“$\dfrac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}+\dfrac{\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|}=\boldsymbol{0}$”是“$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 共线”的充分不必要条件

答案： CD

解析： A 项，当 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$，$\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$ 时，满足 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$，但不存在实数 λ，使 $\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}$，故 A 项错误；

B 项，向量可以平移，所以任意两个向量都是共面的，故 B 项错误；

C 项，首先，$\dfrac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}=\dfrac{1}{|\boldsymbol{a}|}\boldsymbol{a}$，因为 $\dfrac{1}{|\boldsymbol{a}|}>0$，所以 $\dfrac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 同向；其次，$\left|\dfrac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}\right|=\left|\dfrac{1}{|\boldsymbol{a}|}\boldsymbol{a}\right|=\dfrac{1}{|\boldsymbol{a}|}\cdot|\boldsymbol{a}|=1$；故 C 项正确；

D 项，若 $\dfrac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}+\dfrac{\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|}=\boldsymbol{0}$，则 $\boldsymbol{b}=-\dfrac{|\boldsymbol{b}|}{|\boldsymbol{a}|}\boldsymbol{a}$，所以 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 共线，充分性成立；若 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 共线，我们知道 $\dfrac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}$ 和 $\dfrac{\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|}$ 分别表示与 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 同向的单位向量，所以当 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 同向时，$\dfrac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}+\dfrac{\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|}$ 是方向与 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 相同，且长度为 2 的向量，从而 $\dfrac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}+\dfrac{\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|}\neq\boldsymbol{0}$，必要性不成立；故 D 项正确.

2．（2023 • 临汾模拟 • ★）已知 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 是不共线的两个向量，$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}+5\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{BC}=-2\boldsymbol{a}+8\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{CD}=3\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}$，则（　　）

（A）A，B，C 三点共线　　（B）A，B，D 三点共线

（C）B，C，D 三点共线　　（D）A，C，D 三点共线

答案： B

解析： A 项，要判断 A,B,C 三点是否共线，可判断 $\overrightarrow{AB}$ 和 $\overrightarrow{BC}$ 是否共线，由题意，$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}+5\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{BC}=-2\boldsymbol{a}+8\boldsymbol{b}$，二者 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的系数不成比例，所以 $\overrightarrow{AB}$ 和 $\overrightarrow{BC}$ 不共线，从而 A，B，C 三点不共线，故 A 项错误；

B 项，由题意，$\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}=(-2\boldsymbol{a}+8\boldsymbol{b})+(3\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}+5\boldsymbol{b}=\overrightarrow{AB}$，所以 $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{BD}$ 共线，

从而 A，B，D 三点共线，故 B 项正确；同理可得 C、D 两项错误.

3．（2023 • 新高考Ⅱ卷 • ★★）已知向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 满足 $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=\sqrt{3}$，$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$，则 $|\boldsymbol{b}|=$_____.

答案： $\sqrt{3}$

解析： 条件涉及两个模的等式，想到把它们平方来看，

由题意，$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|^2=\boldsymbol{a}^2+\boldsymbol{b}^2-2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=3$ ①，

又$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$，所以$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|^2=|2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|^2$，

故$\boldsymbol{a}^2+\boldsymbol{b}^2+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=4\boldsymbol{a}^2+\boldsymbol{b}^2-4\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$，

整理得：$\boldsymbol{a}^2-2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$，

代入①可得$\boldsymbol{b}^2=3$，即$|\boldsymbol{b}|^2=3$，所以$|\boldsymbol{b}|=\sqrt{3}$.

4．（★★）（多选）下列命题正确的是（　　）

（A）$||\boldsymbol{a}|-|\boldsymbol{b}||\le|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|\le|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$

（B）若$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$为非零向量，且$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$，则$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$

（C）$|\boldsymbol{a}|-|\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|$是$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$共线的充要条件

（D）若$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$为非零向量，且$||\boldsymbol{a}|-|\boldsymbol{b}||=|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$，则$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$同向

答案：ABD

解析：涉及模的问题，考虑将其平方来看，A 项，$||\boldsymbol{a}|-|\boldsymbol{b}||\le|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|\le|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|\Leftrightarrow||\boldsymbol{a}|-|\boldsymbol{b}||^2\le|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|^2\le(|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|)^2$

$\Leftrightarrow|\boldsymbol{a}|^2+|\boldsymbol{b}|^2-2|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\le|\boldsymbol{a}|^2+|\boldsymbol{b}|^2+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}\le|\boldsymbol{a}|^2+|\boldsymbol{b}|^2+2|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\Leftrightarrow-|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\le\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\cdot\cos\theta\le|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|$ ①，

其中θ为$\boldsymbol{a}$和$\boldsymbol{b}$的夹角，因为$-1\le\cos\theta\le1$，$|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\ge0$，所以式①成立，故 A 项正确；

B 项，因为$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$，所以$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|^2=|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|^2$，从而$\boldsymbol{a}^2+\boldsymbol{b}^2+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}^2+\boldsymbol{b}^2-2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$，故$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$，

又$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$为非零向量，所以$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$，故 B 项正确；

C 项，若$|\boldsymbol{a}|-|\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|$，则$(|\boldsymbol{a}|-|\boldsymbol{b}|)^2=|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|^2$，所以$|\boldsymbol{a}|^2+|\boldsymbol{b}|^2-2|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}|^2+|\boldsymbol{b}|^2+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$，整理得：$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=-|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|$，

即$|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\cdot\cos\theta=-|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|$，此时$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$中至少有一个为零向量或$\theta=\pi$，均满足$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$共线，充分性成立，

若$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$共线，当它们同向且都为非零向量时，$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|\ne|\boldsymbol{a}|-|\boldsymbol{b}|$，必要性不成立，故 C 项错误；

D 项，将$||\boldsymbol{a}|-|\boldsymbol{b}||=|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$平方可得$|\boldsymbol{a}|^2+|\boldsymbol{b}|^2-2|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}|^2+|\boldsymbol{b}|^2-2|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\cdot\cos\theta$，所以$\cos\theta=1$，故$\theta=0^\circ$，

所以$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$同向，故 D 项正确.

5．（2022•西安模拟•★）已知向量$|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|=2$，$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$的夹角为$\frac{\pi}{4}$，且$(\lambda\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})\perp\boldsymbol{a}$，则实数$\lambda=$_____.

答案：$\sqrt{2}$

解析：涉及向量垂直，用数量积为 0 处理，

因为$(\lambda\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})\perp\boldsymbol{a}$，所以$(\lambda\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}-\boldsymbol{a}^2=\lambda|\boldsymbol{b}|\cdot|\boldsymbol{a}|\cdot\cos\frac{\pi}{4}-|\boldsymbol{a}|^2=\lambda\times2\times2\times\frac{\sqrt{2}}{2}-2^2=0$，解得：$\lambda=\sqrt{2}$.

6．（★★）若向量$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$满足$3\boldsymbol{a}+4\boldsymbol{b}+5\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$，$|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{c}|=1$，则$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=$_____.

答案：$-\frac{3}{5}$

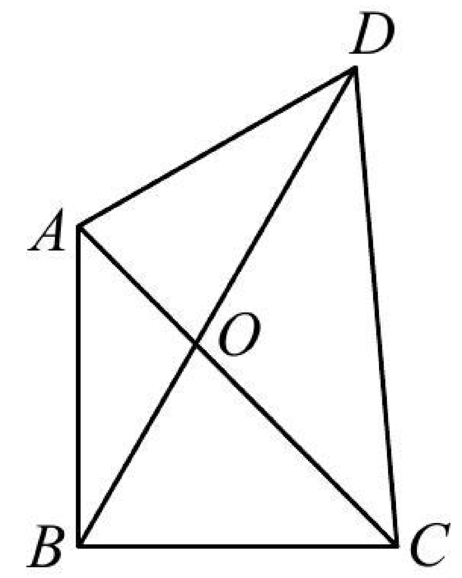
解析：将所给的向量等式移项，平方即可产生$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$和$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}$，

$3\boldsymbol{a}+4\boldsymbol{b}+5\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}\Rightarrow -5\boldsymbol{c}=3\boldsymbol{a}+4\boldsymbol{b}\Rightarrow 25|\boldsymbol{c}|^2=9|\boldsymbol{a}|^2+16|\boldsymbol{b}|^2+24\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$，结合 $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{c}|=1$ 可得 $25=25+24\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$，所以 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$，

同理，由 $3\boldsymbol{a}+4\boldsymbol{b}+5\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$ 可得 $-4\boldsymbol{b}=3\boldsymbol{a}+5\boldsymbol{c}$，同时平方可求得 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}=-\frac{3}{5}$，所以 $\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}=-\frac{3}{5}$.

7．（★★★）如图，已知平面四边形 $ABCD$ 中，$AB\perp BC$，$AB=BC=AD=2$，$CD=3$，AC 与 BD 交于点 O，记 $I_1=\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$，$I_2=\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}$，$I_3=\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OD}$，则（　　）

（A）$I_1<I_2<I_3$　（B）$I_1<I_3<I_2$　（C）$I_3<I_1<I_2$　（D）$I_2<I_1<I_3$



答案：C

解析：具体计算 I_1，I_2，I_3 较麻烦，可结合图形，用数量积定义分析角度和长度关系，得到它们的大小，

由图可知 $\angle AOB=\angle COD$，且它们为钝角，$\angle BOC$ 为锐角，所以 $I_1=\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=|\overrightarrow{OA}|\cdot|\overrightarrow{OB}|\cdot\cos\angle AOB<0$，

$I_2=\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}=|\overrightarrow{OB}|\cdot|\overrightarrow{OC}|\cdot\cos\angle BOC>0$，$I_3=\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OD}=|\overrightarrow{OC}|\cdot|\overrightarrow{OD}|\cdot\cos\angle COD<0$，故 I_2 最大，

再比较 I_1 和 I_3，可观察图形，看看 $|OA|$ 与 $|OC|$，$|OB|$ 与 $|OD|$ 的大小关系，

由图可知，$|OA|<|OC|$，$|OB|<|OD|$，所以 $|OA|\cdot|OB|<|OC|\cdot|OD|$，又 $\cos\angle AOB=\cos\angle COD<0$，

所以 $|OA|\cdot|OB|\cdot\cos\angle AOB>|OC|\cdot|OD|\cdot\cos\angle COD$，即 $I_1>I_3$，故 $I_3<I_1<I_2$.

【反思】本题若要进一步分析 $\angle AOB$ 为钝角的原因，可过 B 作 AC 的中垂线来看，由 $AD<CD$ 得出点 D 在该中垂线的上方，故 $\angle AOB$ 为钝角.

8．（2022•天津卷•★★★★）在 ΔABC 中，$\overrightarrow{CA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{CB}=\boldsymbol{b}$，$D$ 是 AC 中点，$\overrightarrow{CB}=2\overrightarrow{BE}$，试用 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 表示 $\overrightarrow{DE}$ 为_____；若 $\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{DE}$，则 $\angle ACB$ 的最大值为_____.

答案：$-\frac{1}{2}\boldsymbol{a}+\frac{3}{2}\boldsymbol{b}$；$\frac{\pi}{6}$

解析：如图，由题意，$\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CE}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{CA}+\frac{3}{2}\overrightarrow{CB}=-\frac{1}{2}\boldsymbol{a}+\frac{3}{2}\boldsymbol{b}$，

可发现 $\angle ACB$ 是 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的夹角，它们的数量积会产生 $\cos\angle ACB$．而 $\angle ACB$ 最大即 $\cos\angle ACB$ 最小，故把 $\overrightarrow{AB}$ 也用 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 表示，再用数量积翻译 $\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{DE}$，解出 $\cos\angle ACB$，

$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CA}=\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$，因为 $\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{DE}$，所以 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{DE}=(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})\cdot(-\frac{1}{2}\boldsymbol{a}+\frac{3}{2}\boldsymbol{b})=\frac{1}{2}\boldsymbol{a}^2+\frac{3}{2}\boldsymbol{b}^2-2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$

$=\frac{1}{2}|\boldsymbol{a}|^2+\frac{3}{2}|\boldsymbol{b}|^2-2|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\cdot\cos\angle ACB=0$，故 $\cos\angle ACB=\frac{|\boldsymbol{a}|^2+3|\boldsymbol{b}|^2}{4|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|}=\frac{1}{4}(\frac{|\boldsymbol{a}|}{|\boldsymbol{b}|}+\frac{3|\boldsymbol{b}|}{|\boldsymbol{a}|})\geq\frac{1}{4}\times 2\sqrt{\frac{|\boldsymbol{a}|}{|\boldsymbol{b}|}\cdot\frac{3|\boldsymbol{b}|}{|\boldsymbol{a}|}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，

当且仅当 $\frac{|\boldsymbol{a}|}{|\boldsymbol{b}|}=\frac{3|\boldsymbol{b}|}{|\boldsymbol{a}|}$ 时取等号，此时 $|\boldsymbol{a}|=\sqrt{3}|\boldsymbol{b}|$，所以 $\cos\angle ACB$ 的最小值为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$，故 $\angle ACB$ 的最大值为 $\frac{\pi}{6}$.