第 3 节 抛物线小题的综合运算（★★★）

内容提要

本节主要涉及三类抛物线有关的小题：

1．简单的运算求值：一些抛物线小题中，我们可以联立直线和抛物线去求交点坐标，用坐标参与运算，也可以结合图形的几何特征来解决问题.

2．抛物线上的动点问题：设点 P 在抛物线 $y^2=2px(p>0)$ 上运动，点 P 的坐标常用两种设法.

①设 $P(x_0,y_0)$，这种设法引入了 2 个变量，没有体现点 P 在抛物线上，可用 $y_0^2=2px_0$ 建立变量间的关系.

②设 $P(\frac{y_0^2}{2p},y_0)$，这种设法只引入 1 个变量，已经体现了点 P 在抛物线上，单动点问题用此设法往往比较方便.

3．设而不求韦达定理：设直线 l 与抛物线 C 交于 A，B 两点，由此产生的诸多问题中，需要将直线 l 与抛物线 C 的方程联立，但联立后我们往往不去解方程组，求交点 A，B 的坐标，而是消去 y（或 x）整理得出关于 x（或 y）的一元二次方程，结合韦达定理来计算一些目标量，如数量积、斜率、弦长、面积等.

典型例题

类型Ⅰ：简单的运算求值问题

【例 1】（2020・新课标Ⅲ卷）设 O 为坐标原点，直线 $x=2$ 与抛物线 $C:y^2=2px(p>0)$ 交于 D，E 两点，若 $OD\perp OE$，则 C 的焦点坐标为（　　）

（A）$(\frac{1}{4},0)$　　（B）$(\frac{1}{2},0)$　　（C）$(1,0)$　　（D）$(2,0)$

解法 1：如图，$OD\perp OE$ 可用斜率翻译，求斜率需要 D，E 坐标，联立直线 $x=2$ 和抛物线可求得坐标，

联立 $\begin{cases}x=2\\y^2=2px\end{cases}$ 解得：$y=\pm2\sqrt{p}$，所以 $D(2,2\sqrt{p})$，$E(2,-2\sqrt{p})$，

因为 $OD\perp OE$，所以 $k_{OD}\cdot k_{OE}=\frac{2\sqrt{p}}{2}\times\frac{-2\sqrt{p}}{2}=-1$，解得：$p=1$，故 C 的焦点为 $(\frac{1}{2},0)$.

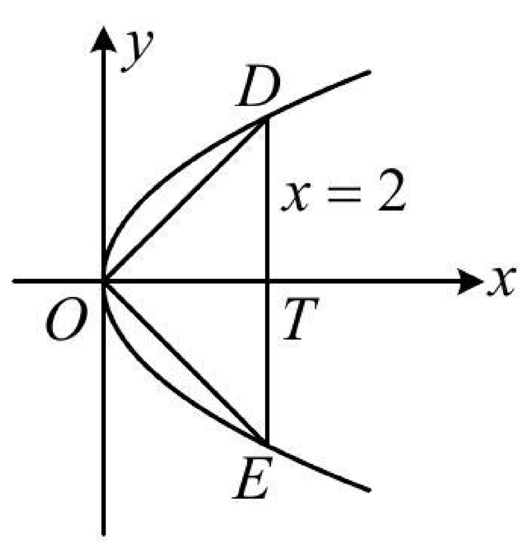
解法 2：如图，观察发现由 ΔDOE 的几何特征可分析出点 D 坐标，代入抛物线方程也能求 p，

设直线 $x=2$ 与 x 轴交于点 T，则 $|OT|=2$，由题意，$OD\perp OE$，

结合对称性可得 ΔDOE 为等腰直角三角形，ΔDOT 也为等腰直角三角形，所以 $|DT|=|OT|=2$，

从而点 D 的坐标为 $(2,2)$，代入 $y^2=2px$ 得：$2^2=2p\cdot2$，解得：$p=1$，故 C 的焦点为 $(\frac{1}{2},0)$.

答案：B



【反思】在简单的抛物线求值问题中，用直线的方程、点的坐标等直接翻译已知条件可以解决问题，但若能结合条件的几何特征分析，往往计算量更小.

【例 2】（2021·新高考Ⅰ卷）已知 O 为坐标原点，抛物线 $C:y^2=2px\,(p>0)$ 的焦点为 F，P 为 C 上一点，PF 与 x 轴垂直，Q 为 x 轴上一点，且 $PQ\perp OP$. 若 $|FQ|=6$，则 C 的准线方程为_____.

解法 1：如图，由 $PF\perp x$ 轴和 $|FQ|=6$ 可分别求出 P，Q 的坐标，再翻译 $PQ\perp OP$ 即可建立方程求 p，

由题意，$F(\frac{p}{2},0)$，将 $x=\frac{p}{2}$ 代入 $y^2=2px$ 解得：$y=\pm p$，不妨设 $P(\frac{p}{2},p)$，$|FQ|=6\Rightarrow Q(\frac{p}{2}+6,0)$，

因为 $PQ\perp OP$，所以 $k_{OP}\cdot k_{PQ}=\dfrac{p}{\frac{p}{2}}\cdot\dfrac{p}{\frac{p}{2}-(\frac{p}{2}+6)}=-1$，解得：$p=3$，故 C 的准线方程为 $x=-\frac{3}{2}$.

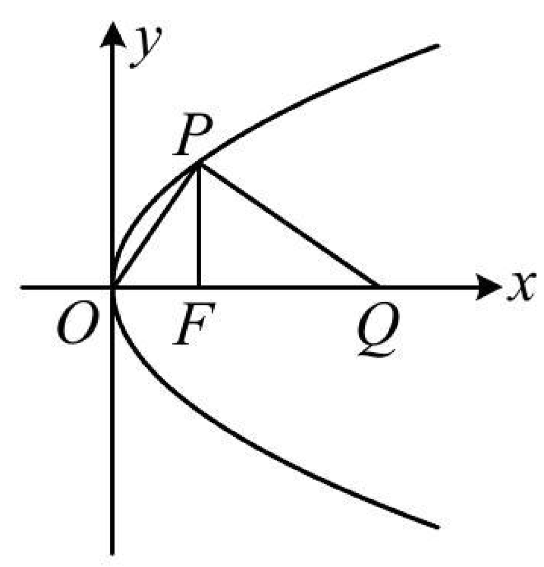
解法 2：如图，$|OF|$，$|PF|$ 都好求，$|FQ|$ 又已知，可直接抓住 $\angle POF=\angle FPQ$ 建立方程求解 p，

由题意，$F(\frac{p}{2},0)$，将 $x=\frac{p}{2}$ 代入 $y^2=2px$ 解得：$y=\pm p$，所以 $|PF|=p$，

因为 $PQ\perp OP$，$PF\perp OQ$，所以 $\angle POF+\angle OPF=\angle FPQ+\angle OPF=90^\circ$，故 $\angle POF=\angle FPQ$，

所以 $\tan\angle POF=\tan\angle FPQ$，从而 $\dfrac{|PF|}{|OF|}=\dfrac{|FQ|}{|PF|}$，即 $\dfrac{p}{\frac{p}{2}}=\dfrac{6}{p}$，解得：$p=3$，故 C 的准线方程为 $x=-\frac{3}{2}$.

答案：$x=-\frac{3}{2}$



类型Ⅱ：动点类问题

【例 3】已知 A 是抛物线 $y=x^2$ 上的点，点 $B(0,2)$，则 $|AB|$ 的最小值为（　　）

（A）$\frac{1}{2}$　（B）$\frac{\sqrt{3}}{2}$　（C）$\frac{7}{4}$　（D）$\frac{\sqrt{7}}{2}$

解析：A 是抛物线上的动点，可根据其方程设单变量形式的坐标，用于计算 $|AB|$，

由题意，可设 $A(x_0,x_0^2)$，则 $|AB|=\sqrt{(x_0-0)^2+(x_0^2-2)^2}=\sqrt{x_0^4-3x_0^2+4}=\sqrt{(x_0^2-\frac{3}{2})^2+\frac{7}{4}}$，

所以当 $x_0=\pm\frac{\sqrt{6}}{2}$ 时，$|AB|$ 取得最小值 $\frac{\sqrt{7}}{2}$.

答案：D

【反思】对于抛物线上的动点问题，可先设动点坐标（设法参考内容提要），并用该坐标计算题目中求最值的量，再借助函数、不等式等方法来求解最值.

【变式】抛物线 $y^2=2px(p>0)$ 上任意一点 P 到点 $M(5,0)$ 的距离的最小值为 4，则 p 的值为_____.

解析：若将点 P 的坐标设为 $P(\frac{y_0^2}{2p},y_0)$，则求得的 $|PM|$ 的结果较复杂，于是设双变量的形式，

设 $P(x_0,y_0)$，则 $|PM|=\sqrt{(x_0-5)^2+(y_0-0)^2}=\sqrt{x_0^2-10x_0+25+y_0^2}$ ①，

有 x_0 和 y_0 两个变量，可利用抛物线方程来消元，因为点 P 在抛物线上，所以 $y_0^2=2px_0$，

代入式①入可得 $|PM|=\sqrt{x_0^2-10x_0+25+2px_0}=\sqrt{x_0^2-(10-2p)x_0+25}$，$x_0\ge 0$，

设 $f(x)=x^2-(10-2p)x+25(x\ge 0)$，则 $|PM|=\sqrt{f(x)}$，

由于 p 是未知量，所以求 $f(x)$ 的最小值需讨论对称轴 $x=5-p$ 和区间 $[0,+\infty)$ 的位置关系，

当 $5-p\ge 0$ 时，$0<p\le 5$，如图 1，$f(x)_{\min}=f(5-p)=(5-p)^2-(10-2p)(5-p)+25=25-(5-p)^2$，

因为 $|PM|_{\min}=4$，所以 $f(x)_{\min}=16$，令 $25-(5-p)^2=16$，解得：$p=2$ 或 8（不满足 $0<p\le 5$，舍去）；

当 $5-p<0$ 时，$p>5$，如图 2，$f(x)_{\min}=f(0)=25$，所以 $|PM|_{\min}=5$，不合题意；

综上所述，p 的值为 2.

答案：2

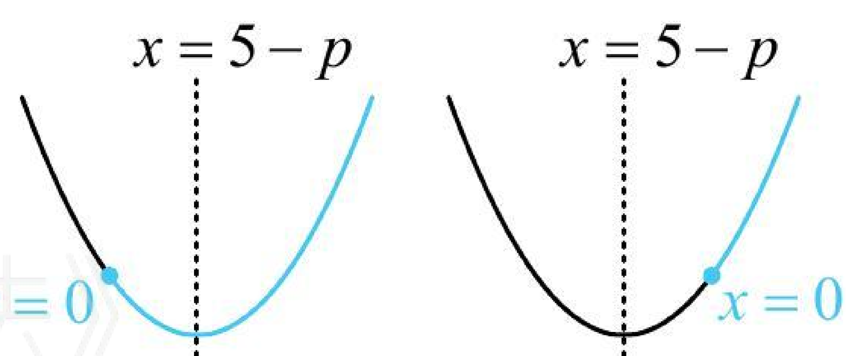


图1　图2

【例 4】设 O 为坐标原点，点 $A(0,4)$，动点 P 在抛物线 $x^2=4y$ 上，且位于第二象限，M 是线段 PA 的中点，则直线 OM 的斜率的取值范围是（　　）

（A）$(2,+\infty)$　（B）$[2,+\infty)$　（C）$(-\infty,-2)$　（D）$(-\infty,-2]$

解法 1：点 P 在抛物线上运动，可将其坐标设为单变量的形式，由题意，可设 $P(a,\frac{a^2}{4})$，其中 $a<0$，

因为 M 是 PA 中点，所以 $M(\frac{a}{2},\frac{a^2}{8}+2)$，故 $k_{OM}=\dfrac{\frac{a^2}{8}+2}{\frac{a}{2}}=\dfrac{a^2+16}{4a}=\dfrac{1}{4}(a+\dfrac{16}{a})$，

虽然 a 和 $\frac{16}{a}$ 积为定值，但这两项均为负，不能直接用均值不等式，可先添负号，化负为正，

所以 $k_{OM}=\dfrac{1}{4}(a+\dfrac{16}{a})=-\dfrac{1}{4}[(-a)+\dfrac{16}{-a}]\le-\dfrac{1}{4}\times 2\sqrt{(-a)\cdot\dfrac{16}{-a}}=-2$，

当且仅当 $-a=\dfrac{16}{-a}$，即 $a=-4$ 时取等号，所以 k_{OM} 的取值范围是 $(-\infty,-2]$.

解法 2：涉及中点，想到中位线，题干只有 M 一个中点，所以再构造一个中点出来，

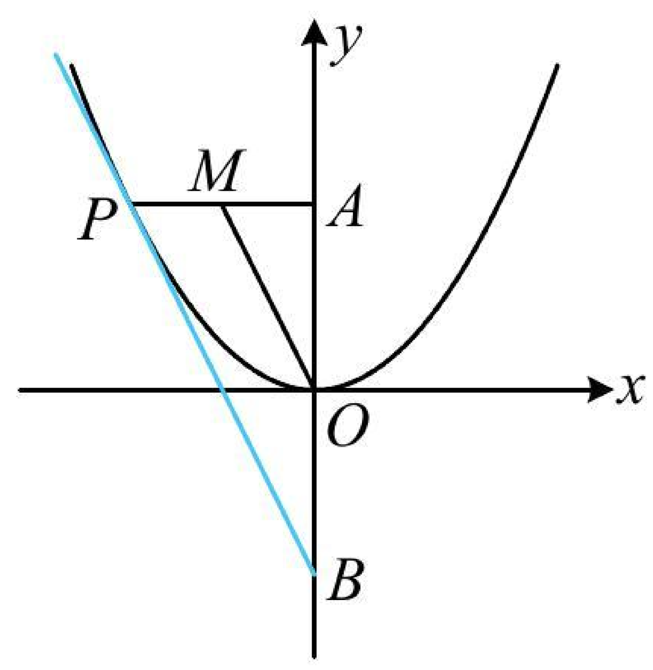
如图，记 $B(0,-4)$，则 O 为 AB 的中点，又 M 为 PA 的中点，所以 $OM/\!/PB$，故 $k_{OM}=k_{PB}$，

于是只需求当 P 运动时，k_{PB} 的取值范围，如图所示的相切的情形即为 k_{PB} 最大的情况，

设图中切线 PB 的方程为 $y=kx-4$，代入 $x^2=4y$ 整理得：$x^2-4kx+16=0$，

判别式 $\Delta=(-4k)^2-4\times1\times16=0$，解得：$k=\pm2$，由图可知 $k=-2$，所以 $k_{PB}\in(-\infty,-2]$，故 $k_{OM}\in(-\infty,-2]$.

答案：D



【例 5】已知 ΔABC 的三个顶点都在抛物线 $y^2=4x$ 上，F 为抛物线的焦点，若 $\overrightarrow{AF}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$，则 $\left|\overrightarrow{AF}\right|+\left|\overrightarrow{BF}\right|+\left|\overrightarrow{CF}\right|=$（　　）

（A）3　（B）6　（C）9　（D）12

解析：由 $\overrightarrow{AF}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$ 可建立坐标关系，$\left|\overrightarrow{AF}\right|,\left|\overrightarrow{BF}\right|,\left|\overrightarrow{CF}\right|$ 也能用 A,B,C 的横坐标来算，故设坐标，

由题意，$F(1,0)$，设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，$C(x_3,y_3)$，

则 $\overrightarrow{AF}=(1-x_1,-y_1)$，$\overrightarrow{AB}=(x_2-x_1,y_2-y_1)$，$\overrightarrow{AC}=(x_3-x_1,y_3-y_1)$，

因为 $\overrightarrow{AF}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$，利用横坐标相等有 $1-x_1=\frac{1}{3}(x_2-x_1+x_3-x_1)$，整理得：$x_1+x_2+x_3=3$，

故 $\left|\overrightarrow{AF}\right|+\left|\overrightarrow{BF}\right|+\left|\overrightarrow{CF}\right|=(x_1+1)+(x_2+1)+(x_3+1)=(x_1+x_2+x_3)+3=6$.

答案：B

【总结】可发现设点的方式要由题目来定，当设单变量形式复杂时，就考虑双变量（如例 3 变式）；而涉及抛物线上的点到焦点的距离时，常根据前面小节用过的方法，即用定义转到与准线的距离（如例 5）.

类型III：设直线，联立，韦达

【例 6】已知过点 $P(4,0)$ 的动直线 l 与抛物线 $C:y^2=2px(p>0)$ 交于点 A 和 B，且 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=0$，其中 O 为原点，则 $p=$_____.

解析：$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$ 可用 A，B 的坐标来算，于是设坐标，

设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，则 $\overrightarrow{OA}=(x_1,y_1)$，$\overrightarrow{OB}=(x_2,y_2)$，所以 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=x_1x_2+y_1y_2$ ①，

涉及 x_1x_2 和 y_1y_2，可再设直线的方程，并代入抛物线方程，结合韦达定理来算，

直线 l 不与 y 轴垂直，可设其方程为 $x=my+4$，代入 $y^2=2px$ 消去 x 整理得：$y^2-2pmy-8p=0$，

判别式 $\Delta=4p^2m^2+32p>0$ 恒成立，由韦达定理，$y_1y_2=-8p$，

再算 x_1x_2，可以用点在线上（即 $\begin{cases}x_1=my_1+4\\x_2=my_2+4\end{cases}$）化为 y_1 和 y_2 来算，但用点在抛物线上来算更简单，

因为 A，B 在抛物线上，所以 $y_1^2=2px_1$，故 $x_1=\dfrac{y_1^2}{2p}$，同理，$x_2=\dfrac{y_2^2}{2p}$，

所以 $x_1x_2=\dfrac{y_1^2}{2p}\cdot\dfrac{y_2^2}{2p}=(\dfrac{y_1y_2}{2p})^2=16$，代入①得：$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=16-8p$，

由题意，$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=0$，所以 $16-8p=0$，故 $p=2$.

答案：2

【反思】设直线与抛物线交于 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$ 两点，若要用到 x_1+x_2，x_1x_2，y_1+y_2，y_1y_2 这些量，我们常把直线和抛物线联立得到一个关键方程，用韦达定理来算它们，而不是通过求 A，B 的坐标来算.

【例 7】过点 $M(2,0)$ 的直线 l 与抛物线 $C:y^2=4x$ 交于 A，B 两点，O 为原点，若 ΔAOB 的面积为 $4\sqrt{3}$，则直线 l 的方程为_____.

解析：如图，可将 ΔAOB 拆成上下两个小三角形来算面积，以 OM 为公共底，高之和为 $|y_1-y_2|$，于是想到联立直线和抛物线，结合韦达定理推论来算，

由题意，直线 l 不与 y 轴垂直，可设其方程为 $x=my+2$，设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，

$S_{\Delta AOB}=\dfrac{1}{2}|OM|\cdot|y_1-y_2|=\dfrac{1}{2}\times2\times|y_1-y_2|=|y_1-y_2|$ ①，

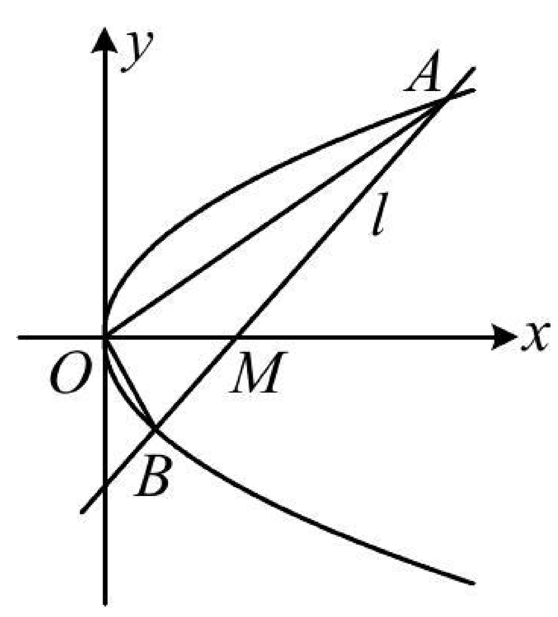
联立 $\begin{cases}x=my+2\\y^2=4x\end{cases}$ 消去 x 整理得：$y^2-4my-8=0$，判别式 $\Delta=(-4m)^2-4\times1\times(-8)=16m^2+32$，

由韦达定理推论，$|y_1-y_2|=\dfrac{\sqrt{\Delta}}{|1|}=\sqrt{16m^2+32}=4\sqrt{m^2+2}$，代入①得：$S_{\Delta AOB}=4\sqrt{m^2+2}$，

由题意，$S_{\Delta AOB}=4\sqrt{3}$，所以 $4\sqrt{m^2+2}=4\sqrt{3}$，解得：$m=\pm1$，

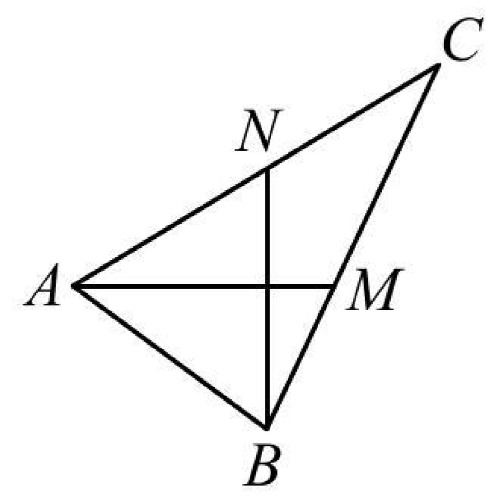
故直线 l 的方程为 $x=\pm y+2$，即 $x\pm y-2=0$.

答案：$x\pm y-2=0$



【反思】①如图，设 AM 和 BN 分别为水平线和竖直线，在解析几何中，除了用 $S=\dfrac{1}{2}\times$底$\times$高来算 ΔABC 的面积外，还常用 $S=\dfrac{1}{2}|AM|\cdot|y_B-y_C|=\dfrac{1}{2}|BN|\cdot|x_A-x_C|$ 来算；②韦达定理推论：设 x_1，x_2 是一元二次方程

$ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$的两个解，则$|x_1-x_2|=\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=\sqrt{(-\frac{b}{a})^2-4\cdot\frac{c}{a}}=\sqrt{\frac{b^2-4ac}{a^2}}=\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}$.



【例 8】(2022 •新高考Ⅰ卷)(多选)已知 O 为坐标原点，点 $A(1,1)$ 在抛物线 $C:x^2=2py(p>0)$ 上，过点 $B(0,-1)$ 的直线交 C 于 P、Q 两点，则（　　）

（A）C 的准线为 $y=-1$　（B）直线 AB 与 C 相切　（C）$|OP|\cdot|OQ|>|OA|^2$　（D）$|BP|\cdot|BQ|>|BA|^2$

解析： A 项，点 $A(1,1)$ 在抛物线 C 上 $\Rightarrow 1^2=2p\cdot 1\Rightarrow p=\frac{1}{2}\Rightarrow C$ 的准线为 $y=-\frac{1}{4}$，故 A 项错误；

B 项，如图，可用导数求出抛物线在点 A 处的切线方程，再验证点 B 是否在该切线上即可，

$x^2=y\Rightarrow y'=2x\Rightarrow y'|_{x=1}=2\Rightarrow$ 抛物线 C 在点 A 处的切线方程为 $y-1=2(x-1)$，整理得：$y=2x-1$，

经检验，点 $B(0,-1)$ 在该切线上，所以直线 AB 与 C 相切，故 B 项正确；

C 项，$|OP|$ 和 $|OQ|$ 可用 P，Q 的坐标来算，故先设坐标，设 $P(x_1,x_1^2)$，$Q(x_2,x_2^2)$，

则 $|OP|\cdot|OQ|=\sqrt{x_1^2+x_1^4}\cdot\sqrt{x_2^2+x_2^4}=\sqrt{x_1^2x_2^2(1+x_1^2)(1+x_2^2)}=\sqrt{x_1^2x_2^2(1+x_1^2+x_2^2+x_1^2x_2^2)}$ ①，

式①可通过设直线的方程，并与抛物线联立，结合韦达定理来计算，

由题意，直线 PQ 的斜率存在，可设其方程为 $y=kx-1$，代入 $x^2=y$ 消去 y 整理得：$x^2-kx+1=0$，

判别式 $\Delta=k^2-4>0\Rightarrow|k|>2$，由韦达定理，$x_1+x_2=k$，$x_1x_2=1$，

代入式①可得 $|OP|\cdot|OQ|=\sqrt{2+x_1^2+x_2^2}=\sqrt{2+(x_1+x_2)^2-2x_1x_2}=|k|>2$，

又 $|OA|^2=2$，所以 $|OP|\cdot|OQ|>|OA|^2$，故 C 项正确；

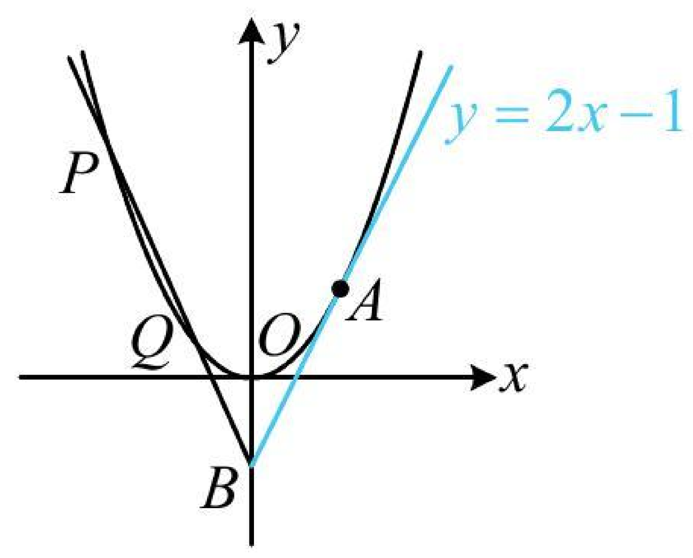
D 项，已知点 B，用弦长公式算 $|BP|$ 和 $|BQ|$ 较方便，由题意，$|BP|=\sqrt{1+k^2}\cdot|0-x_1|=\sqrt{1+k^2}\cdot|x_1|$，

同理，$|BQ|=\sqrt{1+k^2}\cdot|x_2|$，所以 $|BP|\cdot|BQ|=\sqrt{1+k^2}\cdot|x_1|\cdot\sqrt{1+k^2}\cdot|x_2|=(1+k^2)|x_1x_2|$，

将 C 项得到的 $|k|>2$ 和 $x_1x_2=1$ 代入上式可得 $|BP|\cdot|BQ|=1+k^2>5$，

又 $|BA|^2=(0-1)^2+(-1-1)^2=5$，所以 $|BP|\cdot|BQ|>|BA|^2$，故 D 项正确.

答案： BCD



【反思】弦长公式：设直线 l 的斜率为 k，$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$ 是 l 上任意两点，则 $|AB|=\sqrt{1+k^2}\cdot|x_1-x_2|$.

强化训练

1.（★★）已知 O 为坐标原点，垂直于抛物线 $C:y^2=2px(p>0)$ 的对称轴的直线 l 交 C 于 A，B 两点，$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=0$，且 $|AB|=4$，则 $p=$（　　）

（A）4　（B）3　（C）2　（D）1

2.（2022 • 镇远模拟 • ★★）已知 A，B 是抛物线 $C:y^2=4x$ 上关于 x 轴对称的两点，D 是 C 的准线与 x 轴的交点，若直线 BD 与 C 的另一个交点是 $E(4,4)$，则直线 AE 的方程为（　　）

（A）$2x-y-4=0$　（B）$4x-3y-4=0$　（C）$x-2y+4=0$　（D）$4x-5y+4=0$

3.（2022 • 上饶模拟 • ★★）已知抛物线 $y^2=2px(p>0)$ 的焦点为 $F(1,0)$，则抛物线上的动点 N 到点 $M(3p,0)$ 的距离的最小值为（　　）

（A）4　（B）6　（C）$2\sqrt{5}$　（D）$4\sqrt{5}$

4.（2022 • 湖北模拟改 • ★★★）已知 F 为抛物线 $y^2=2x$ 的焦点，$A(x_0,y_0)(x_0\neq 0)$ 为抛物线上的动点，点 $B(-1,0)$，则 $\dfrac{2|AB|}{\sqrt{4|AF|-2}}$ 的最小值为（　　）

（A）$\dfrac{1}{2}$　（B）$\sqrt{2}$　（C）$\sqrt{6}$　（D）$\sqrt{5}$

5.（2022 • 唐山一模 • ★★★）（多选）已知直线 $l:x=my+4$ 和抛物线 $C:y^2=4x$ 交于 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$ 两点，O 为原点，直线 OA，OB 的斜率分别为 k_1，k_2，则（　　）

（A）y_1y_2 为定值　（B）k_1k_2 为定值　（C）y_1+y_2 为定值　（D）k_1+k_2+m 为定值

6.（2022 • 哈尔滨模拟 • ★★★）直线$l: y=x-2$与抛物线$C: y^2=2x$交于 A，B 两点，线段 AB 的中垂线与 x 轴交于点 D，O 为原点，则四边形 $OADB$ 的面积为_____.

7.（2022 • 长沙月考 • ★★★★）已知直线$l: x-2y+1=0$与抛物线$C: y^2=4x$交于 A，B 两点，与 x 轴交于点 D，N 为 B 关于 x 轴的对称点，则 ΔDAN 的面积为_____.

8.（2022 • 北京模拟 • ★★★★）设 A，B 是抛物线 $y^2=2x$ 上的两个不与原点 O 重合的动点，且 $OA\perp OB$，则$|OA|\cdot|OB|$的最小值是（　　）

（A）$\frac{5}{4}$　（B）4　（C）8　（D）64

9.（2022 • 新高考Ⅱ卷 • ★★★★）（多选）已知 O 为坐标原点，过抛物线$C: y^2=2px(p>0)$的焦点 F 的直线与 C 交于 A、B 两点，点 A 在第一象限，点$M(p,0)$，若$|AF|=|AM|$，则（　　）

（A）直线 AB 的斜率为$2\sqrt{6}$　（B）$|OB|=|OF|$　（C）$|AB|>4|OF|$　（D）$\angle OAM+\angle OBM<180^{\circ}$