第 4 节 向量的坐标运算与建系运用（★★★）

内容提要

本节归纳与平面向量坐标运算有关的题型.

1．坐标运算规则

①加减法：设 $\boldsymbol{a}=(x_1,y_1)$， $\boldsymbol{b}=(x_2,y_2)$，则 $\boldsymbol{a}\pm\boldsymbol{b}=(x_1\pm x_2,y_1\pm y_2)$；

②数乘：设 $\boldsymbol{a}=(x,y)$， $\lambda\in\mathbf{R}$，则 $\lambda\boldsymbol{a}=(\lambda x,\lambda y)$；

③两点连线向量坐标：设 $A(x_1,y_1)$， $B(x_2,y_2)$，则 $\overrightarrow{AB}=(x_2-x_1,y_2-y_1)$；

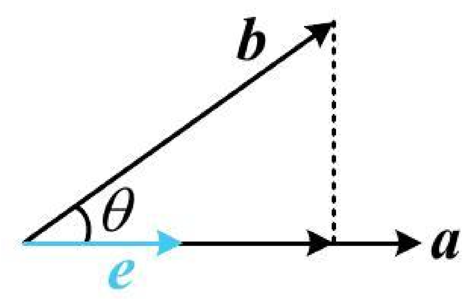
④数量积：设 $\boldsymbol{a}=(x_1,y_1)$， $\boldsymbol{b}=(x_2,y_2)$，则 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=x_1x_2+y_1y_2$；

⑤模：设 $\boldsymbol{a}=(x,y)$，则 $|\boldsymbol{a}|=\sqrt{x^2+y^2}$；

⑥向量共线坐标公式：设 $\boldsymbol{a}=(x_1,y_1)$， $\boldsymbol{b}=(x_2,y_2)$，则 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}\Leftrightarrow x_1y_2=x_2y_1$；

⑦投影向量计算公式：如图，$\boldsymbol{e}$ 为与 $\boldsymbol{a}$ 同向的单位向量，则 $\boldsymbol{b}$ 在 $\boldsymbol{a}$ 上的投影向量为 $(|\boldsymbol{b}|\cos\theta)\boldsymbol{e}$，由于 $\boldsymbol{e}=\dfrac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}$，

所以 $(|\boldsymbol{b}|\cos\theta)\boldsymbol{e}=(|\boldsymbol{b}|\cos\theta)\dfrac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}=\dfrac{|\boldsymbol{b}|\cos\theta}{|\boldsymbol{a}|}\boldsymbol{a}=\dfrac{|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\cos\theta}{|\boldsymbol{a}|^2}\boldsymbol{a}=\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}|^2}\boldsymbol{a}$.



2．向量几何问题中的建系方法：在一些几何图形中研究向量问题，若用几何的方法来求解不易，可考虑建系，用向量的坐标运算来解决问题.

3．向量代数问题中的建系方法：有时题干直接给出几个向量的模、夹角、数量积等条件，没有图形，我们也可以考虑把这些向量放到坐标系下，设出它们的坐标，用向量的坐标运算来解决问题.

典型例题

类型Ⅰ：向量的坐标运算

【例 1】已知平面向量 $\boldsymbol{a}=(3,4)$， $\boldsymbol{b}=(-k,2)$，若 $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})/\!/k\boldsymbol{a}$，则实数 $k(k\neq 0)$ 的值为（　　）

（A）$-\dfrac{1}{2}$　　（B）$\dfrac{1}{2}$　　（C）$-\dfrac{3}{2}$　　（D）$\dfrac{3}{2}$

解析：有坐标，翻译向量平行用 $x_1y_2=x_2y_1$，由题意， $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(3-k,6)$， $k\boldsymbol{a}=(3k,4k)$，

因为 $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})/\!/k\boldsymbol{a}$，所以 $(3-k)\cdot 4k=3k\cdot 6$，解得： $k=-\dfrac{3}{2}$ 或 0，又 $k\neq 0$，所以 $k=-\dfrac{3}{2}$.

答案：C

【例 2】（2022・新高考Ⅱ卷）已知向量 $\boldsymbol{a}=(3,4)$，$\boldsymbol{b}=(1,0)$，$\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+t\boldsymbol{b}$，若 $<\boldsymbol{a},\boldsymbol{c}>=<\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}>$，则实数 $t=$（　　）

（A）-6　　（B）-5　　（C）5　　（D）6

解析：涉及向量的夹角，考虑夹角余弦公式，由题意， $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+t\boldsymbol{b}=(3+t,4)$，因为 $<\boldsymbol{a},\boldsymbol{c}>=<\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}>$，

所以 $\cos<\boldsymbol{a},\boldsymbol{c}>=\cos<\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}>$，从而 $\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}}{|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{c}|}=\frac{\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}}{|\boldsymbol{b}|\cdot|\boldsymbol{c}|}$，故 $\frac{3(3+t)+16}{5|\boldsymbol{c}|}=\frac{3+t}{|\boldsymbol{c}|}$，所以 $\frac{3(3+t)+16}{5}=3+t$，解得：$t=5$.

答案：C

【例 3】已知向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 满足 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=10$， $\boldsymbol{b}=(-3,4)$，则 $\boldsymbol{a}$ 在 $\boldsymbol{b}$ 上的投影向量为（　　）

（A）$(-6,8)$　　（B）$(6,-8)$　　（C）$(-\frac{6}{5},\frac{8}{5})$　　（D）$(\frac{6}{5},-\frac{8}{5})$

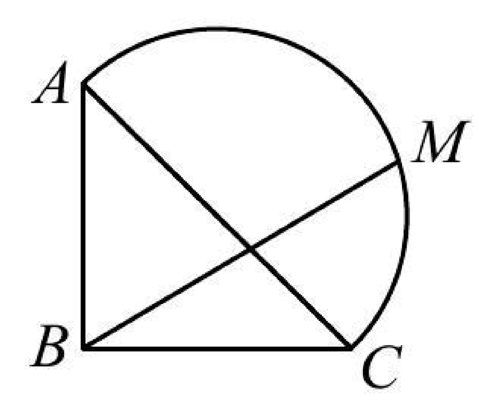
解析：算投影向量，可代内容提要 1 中的公式⑦，$\boldsymbol{a}$ 在 $\boldsymbol{b}$ 上的投影向量为 $\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|^2}\boldsymbol{b}=\frac{10}{(-3)^2+4^2}(-3,4)=(-\frac{6}{5},\frac{8}{5})$.

答案：C

类型Ⅱ：向量几何问题中的建系方法

【例 4】如图，在 ΔABC 中，$\angle ABC=90^{\circ}$，$AB=BC=1$，以 AC 为直径的半圆上有一点 M，$\overrightarrow{BM}=\lambda\overrightarrow{BC}+\sqrt{3}\lambda\overrightarrow{BA}$，则 $\lambda=$（　　）

（A）$\frac{\sqrt{3}+1}{4}$　　（B）$\frac{\sqrt{3}+1}{2}$　　（C）$\frac{\sqrt{3}}{2}$　　（D）$\sqrt{3}$



解析：用几何方法分析不易，图形比较特殊，可考虑建系，用向量的坐标运算来解决问题，

建立如图所示的平面直角坐标系，则 $B(0,0)$， $A(0,1)$， $C(1,0)$，AC 中点为 $N(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$， $|AC|=\sqrt{2}$，

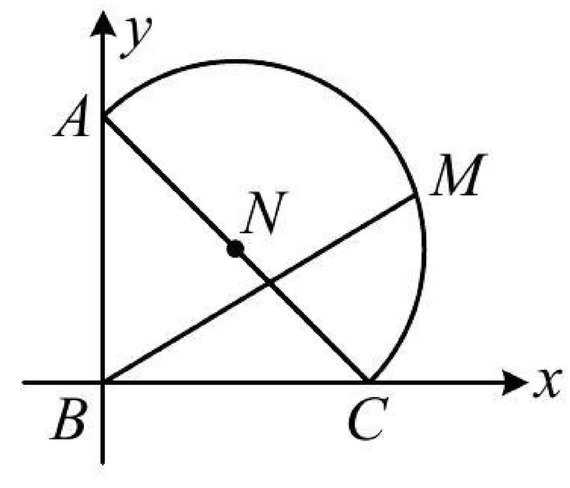
所以图中半圆的方程为 $(x-\frac{1}{2})^2+(y-\frac{1}{2})^2=\frac{1}{2}$ ①，

设 $M(x,y)$，则 M 的坐标满足方程①，且 $\overrightarrow{BM}=(x,y)$，而 $\lambda\overrightarrow{BC}+\sqrt{3}\lambda\overrightarrow{BA}=\lambda(1,0)+\sqrt{3}\lambda(0,1)=(\lambda,\sqrt{3}\lambda)$，

因为 $\overrightarrow{BM}=\lambda\overrightarrow{BC}+\sqrt{3}\lambda\overrightarrow{BA}$，所以 $\begin{cases}x=\lambda\\y=\sqrt{3}\lambda\end{cases}$，代入①可得 $(\lambda-\frac{1}{2})^2+(\sqrt{3}\lambda-\frac{1}{2})^2=\frac{1}{2}$，解得：$\lambda=\frac{\sqrt{3}+1}{4}$ 或 0，

当 $\lambda=0$ 时 M 与 B 重合，不在所给的半圆上，所以 $\lambda=\frac{\sqrt{3}+1}{4}$.

答案：A



【反思】遇到特殊图形（如直角三角形，等腰、等边三角形，平行四边形，圆等），建系可将思维量较大的几何问题转化为流程化处理的坐标运算问题.

【例5】(2021 •上海卷)在ΔABC中，D为BC中点，E为AD中点，则以下结论：①存在ΔABC，使得$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CE}=0$；②存在$\Delta ABC$，使得$\overrightarrow{CE}\,/\!/\,(\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CA})$；它们成立的情况是（　　）

（A）①成立；②成立　（B）①成立；②不成立　（C）①不成立；②成立　（D）①不成立；②不成立

解析：垂直、平行关系都容易通过坐标运算来判断，故考虑建系. ΔABC形状虽未定，但依然可尝试建系，一般取一条边为x轴，例如将BC放x轴上，BC中点为原点. A位置不确定，故把A的坐标设成变量，

建立如图所示的平面直角坐标系，不妨设$B(-1,0)$，$C(1,0)$，$A(2x,2y)$，$y\neq 0$，则$E(x,y)$，

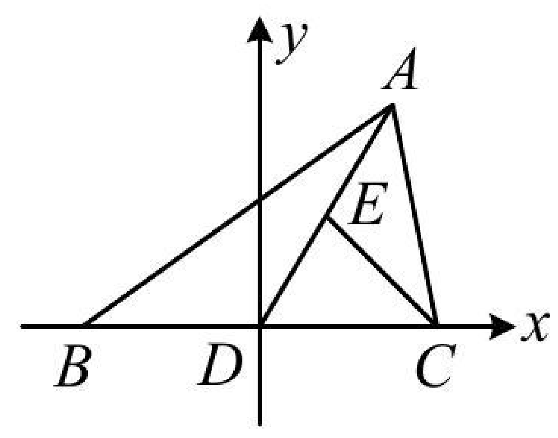
所以$\overrightarrow{AB}=(-1-2x,-2y)$，$\overrightarrow{CE}=(x-1,y)$，故$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CE}=(-1-2x)(x-1)-2y^2=-2[(x-\frac{1}{4})^2+y^2-\frac{9}{16}]$，

上式可以为0，例如，当$x=\frac{1}{4}$，$y=\frac{3}{4}$时，$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CE}=0$，故①成立；

$\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CA}=(-2,0)+(2x-1,2y)=(2x-3,2y)$，若$\overrightarrow{CE}\,/\!/\,(\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CA})$，则$(x-1)\cdot 2y=(2x-3)y$，

因为$y\neq 0$，所以约去y可得：$2(x-1)=2x-3$，此方程无解，故②不成立.

答案：B



【反思】即使不是特殊图形，有时也可考虑建系来解决问题；对于未定的图形，把坐标设成变量即可.

类型Ⅲ：向量代数问题中的建系方法

【例6】已知单位向量$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$的夹角为60°，若向量$\boldsymbol{c}$满足$|\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}+3\boldsymbol{c}|\leq 3$，则$|\boldsymbol{c}|$的最大值为_____.

解析：没图直接分析不易，而$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$的长度夹角均已知，容易搬进坐标系，故用坐标翻译条件，

设$\boldsymbol{a}=(1,0)$，$\boldsymbol{b}=(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2})$，$\boldsymbol{c}=(x,y)$，不难验证满足$|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|=1$，且$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$的夹角为$60^\circ$，

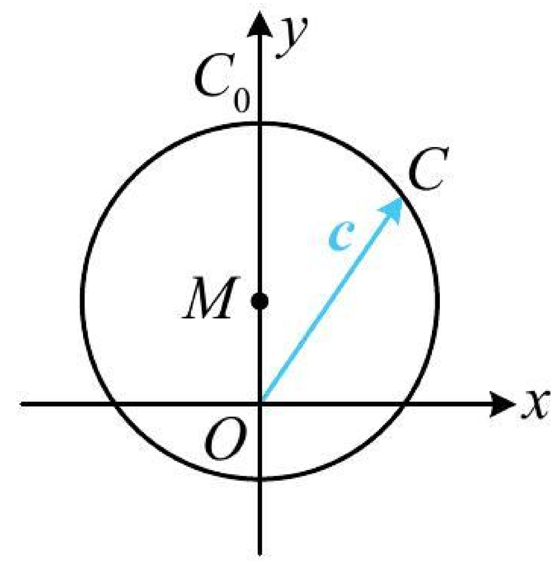
此时$\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}+3\boldsymbol{c}=(3x,3y-\sqrt{3})$，所以$|\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}+3\boldsymbol{c}|\leq 3$即为$\sqrt{9x^2+(3y-\sqrt{3})^2}\leq 3$，化简得：$x^2+(y-\frac{\sqrt{3}}{3})^2\leq 1$ ①，

有了x，y满足的关系，就找到了$\boldsymbol{c}$的终点轨迹，可画图分析$|\boldsymbol{c}|$的最大值，

由①知$\boldsymbol{c}$可以看成从原点O出发，指向圆面$M:x^2+(y-\frac{\sqrt{3}}{3})^2\leq 1$上动点$C$的向量，如图，

因为$|OM|=\frac{\sqrt{3}}{3}$，所以$|\boldsymbol{c}|$的最大值为$1+\frac{\sqrt{3}}{3}$，此时点C与图中C_0重合.

答案：$1+\frac{\sqrt{3}}{3}$



【反思】有时题干没给图形，也可考虑设向量的坐标，把条件翻译为坐标关系，再来解决问题.

【变式】已知平面向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 满足 $|\boldsymbol{a}|=1$，$\cos<\boldsymbol{a},\boldsymbol{c}>=\dfrac{1}{2}$，$\boldsymbol{b}^2-4\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+3=0$，则 $|\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}|$ 的最小值是（　　）

（A）$\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$　　（B）$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　（C）$\sqrt{3}$　　（D）$\sqrt{3}-1$

解析：所给条件为代数形式，较抽象，但长度与夹角条件容易搬进坐标系，故考虑用坐标翻译条件，

不妨设 $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{OA}=(1,0)$，$\cos<\boldsymbol{a},\boldsymbol{c}>=\dfrac{1}{2}\Rightarrow<\boldsymbol{a},\boldsymbol{c}>=\dfrac{\pi}{3}$，所以可设 $\boldsymbol{c}=\overrightarrow{OC}$，且终点 C 在射线 $y=\sqrt{3}x(x>0)$ 上，

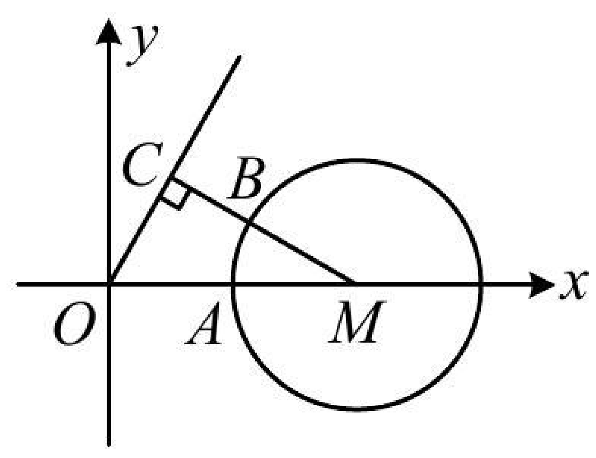
设 $\boldsymbol{b}=\overrightarrow{OB}=(x,y)$，由 $\boldsymbol{b}^2-4\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+3=0$ 可得 $x^2+y^2-4x+3=0$，配方得：$(x-2)^2+y^2=1$ ①，

条件已翻译完毕，现在可把上述坐标化的结果画到图形中来看，

由①知点 B 可在图中的圆 M 上运动，且 $|\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}|=|\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC}|=|\overrightarrow{CB}|$，显然如图所示即为 $|\overrightarrow{CB}|$ 最小的情形，

因为 $M(2,0)$ 到射线 $y=\sqrt{3}x(x>0)$ 的距离 $|MC|=|OM|\sin\angle MOC=2\sin60^{\circ}=\sqrt{3}$，所以 $|\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}|_{\min}=\sqrt{3}-1$.

答案：D



强化训练

1.（2023·乌鲁木齐模拟·★）已知向量 $\boldsymbol{a}=(2,3)$，$\boldsymbol{b}=(-1,2)$，若 $m\boldsymbol{a}+n\boldsymbol{b}(mn\neq0)$ 与 $\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}$ 共线，则 $\dfrac{m}{n}=$（　　）

（A）$-\dfrac{1}{2}$　　（B）$\dfrac{1}{2}$　　（C）-2　　（D）2

2.（2023·新高考Ⅰ卷·★）已知向量 $\boldsymbol{a}=(1,1)$，$\boldsymbol{b}=(1,-1)$，若 $(\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b})\perp(\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b})$，则（　　）

（A）$\lambda+\mu=1$　　（B）$\lambda+\mu=-1$　　（C）$\lambda\mu=1$　　（D）$\lambda\mu=-1$

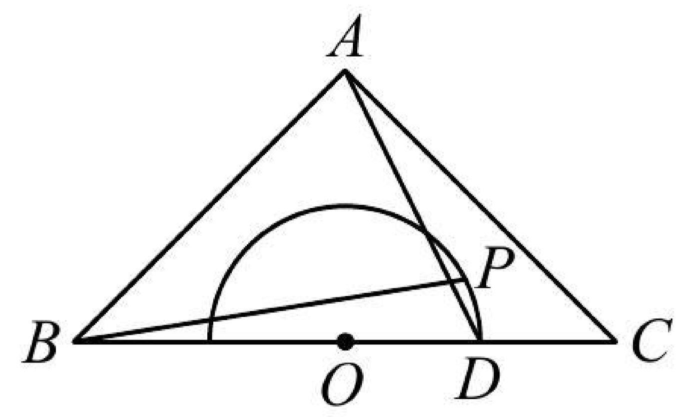
3.（2022·上海模拟·★★）在ΔABC中，$\angle A=90^{\circ}$，$AB=AC=2$，点M为边AB的中点，点P在边BC上，则$\overrightarrow{MP}\cdot\overrightarrow{CP}$的最小值为_____.

4.（★★★）已知向量$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$满足$|\boldsymbol{a}|=4$，$\boldsymbol{b}$在$\boldsymbol{a}$上的投影向量与$\boldsymbol{a}$反向且长度为2，则$|\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}|$的最小值为_____.

5.（2022·北京模拟·★★★）已知向量$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$满足$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{2}$，$|\boldsymbol{b}|=1$，$<\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}>=\dfrac{\pi}{4}$，$(\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a})\cdot(\boldsymbol{c}-\boldsymbol{b})=0$，则$|\boldsymbol{c}|$的最大值是（　　）

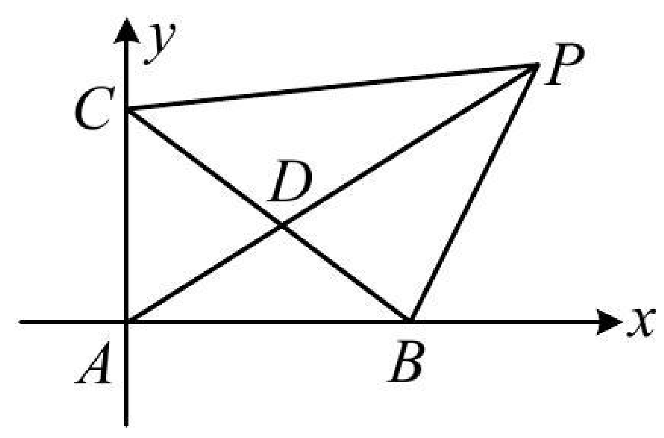
（A）$\sqrt{2}-1$　（B）$\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$　（C）$\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$　（D）$\sqrt{2}+1$

6.（2022·天津模拟·★★★）如图，直角三角形ABC中，$AB=AC$，$BC=4$，O为BC的中点，以O为圆心，1为半径的半圆与BC交于点D，P为半圆上任意一点，则$\overrightarrow{BP}\cdot\overrightarrow{AD}$的最小值为_____.



7.（2020·江苏卷·★★★★）在ΔABC中，$AB=4$，$AC=3$，$\angle BAC=90^{\circ}$，D在边BC上，延长AD到

P，使 $AP=9$，若 $\overrightarrow{PA}=m\overrightarrow{PB}+(\frac{3}{2}-m)\overrightarrow{PC}$（$m$ 为常数），则 CD 的长度是_____.



8．（2022·浙江卷·★★★★）设点 P 在单位圆的内接正八边形 $A_1A_2\cdots A_8$ 的边 A_1A_2 上，则 $\overrightarrow{PA_1}^2+\overrightarrow{PA_2}^2+\cdots+\overrightarrow{PA_8}^2$ 的取值范围是_____.