模块五 抛物线与方程

第 1 节 抛物线定义、标准方程及简单几何性质（★☆）

强化训练

1．（★）抛物线 $x=-y^2$ 的焦点坐标为_____.

答案：$(-\frac{1}{4},0)$

解析：先化标准方程，$x=-y^2\Rightarrow y^2=-x$，所以抛物线开口向左，且 $2p=1$，故 $p=\frac{1}{2}$，

所以抛物线的焦点坐标为 $(-\frac{1}{4},0)$.

2．（★）若抛物线 C 的顶点在原点，准线方程为 $y=-\frac{1}{4}$，则抛物线 C 的标准方程为_____.

答案：$x^2=y$

解析：先判断开口，抛物线 C 的准线方程为 $y=-\frac{1}{4}\Rightarrow$ 开口向上，可设其方程为 $x^2=2py(p>0)$ ①，

《一数•高考数学核心方法》

则其准线方程为 $y=-\frac{p}{2}$，与 $y=-\frac{1}{4}$ 对比可得 $-\frac{p}{2}=-\frac{1}{4}$，所以 $p=\frac{1}{2}$，代入①得 C 的方程为 $x^2=y$.

3．（2021•新高考Ⅱ卷•★）抛物线 $y^2=2px(p>0)$ 的焦点到直线 $y=x+1$ 的距离为 $\sqrt{2}$，则 $p=$（　　）

（A）1　　（B）2　　（C）$2\sqrt{2}$　　（D）4

答案：B

解析：$y=x+1\Rightarrow x-y+1=0$，由题意，焦点 $(\frac{p}{2},0)$ 到直线 $x-y+1=0$ 的距离 $d=\frac{\left|\frac{p}{2}+1\right|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\sqrt{2}$，

结合 $p>0$ 可解得：$p=2$.

4．（★）顶点在原点，对称轴为坐标轴的抛物线 C 经过点 $A(2,2)$，则 C 的方程为_____.

答案：$y^2=2x$ 或 $x^2=2y$

解析：抛物线过点 $A(2,2)$，有如图所示的两种情况，下面分别考虑，

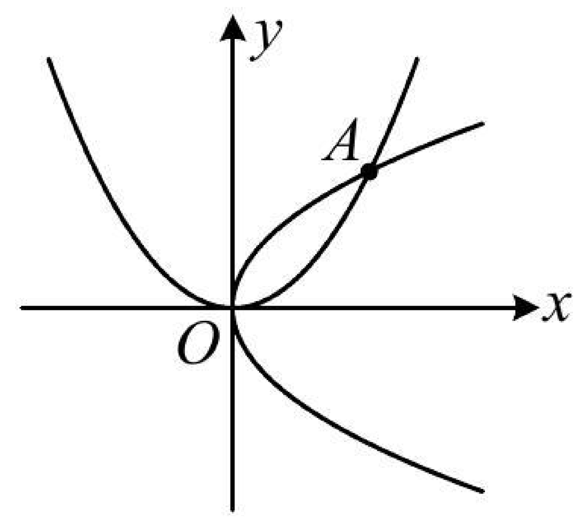
若开口向右，可设抛物线 C 的方程为 $y^2=2px(p>0)$，

将点 $A(2,2)$ 代入可得：$2^2=2p\cdot 2$，解得：$p=1$，所以 C 的方程为 $y^2=2x$；

若开口向上，可设抛物线 C 的方程为:$x^2=2my(m>0)$，

将点 $A(2,2)$ 代入可得：$2^2=2m\cdot 2$，解得：$m=1$，所以 C 的方程为 $x^2=2y$；

综上所述，C 的方程为 $y^2=2x$ 或 $x^2=2y$.



5．（2022 • 上海模拟 • ★★）已知点 F 为抛物线 $y^2=2px(p>0)$ 的焦点，点 P 在抛物线上且横坐标为 8，O 为原点，若 ΔOFP 的面积为 $2\sqrt{2}$，则该抛物线的准线方程为_____.

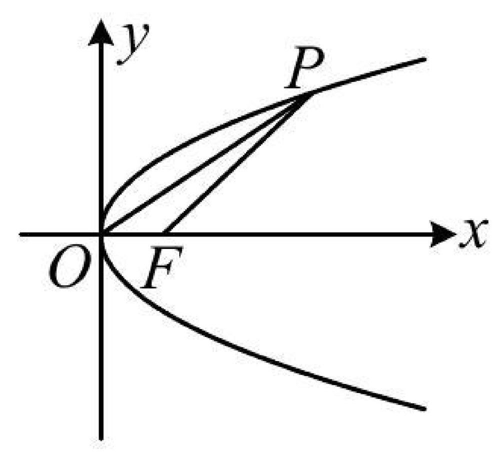
答案： $x=-1$

解析： 如图，给了点 P 的横坐标，可代入抛物线的方程求其纵坐标，并用它计算 ΔOFP 的面积，

由题意，$F(\frac{p}{2},0)$，$|OF|=\frac{p}{2}$，$x_P=8\Rightarrow y_P^2=2px_P=16p\Rightarrow y_P=\pm4\sqrt{p}$，

所以 $S_{\Delta OFP}=\frac{1}{2}|OF|\cdot|y_P|=\frac{1}{2}\times\frac{p}{2}\times4\sqrt{p}=p\sqrt{p}$，又 $S_{\Delta OFP}=2\sqrt{2}$，所以 $p\sqrt{p}=2\sqrt{2}$，故 $p=2$，

所以抛物线的准线方程为 $x=-1$.



6．（2022 • 广东模拟 • ★★）已知点 $A(m,2)$ 为抛物线 $C:y^2=2px(p>0)$ 上一点，过 A 作 C 的准线的垂线，垂足为 B，若 ΔAOB 的面积为 2，其中 O 为原点，则 p 等于（　　）

《一数·高考数学核心方法》

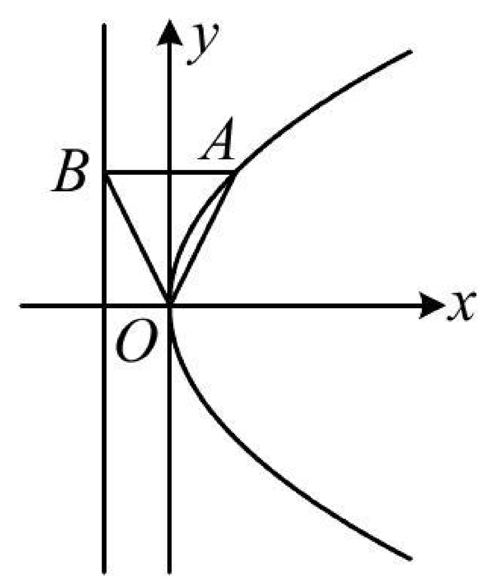
（A）$\frac{1}{2}$　（B）1　（C）2　（D）4

答案： C

解析： 如图，以 AB 为底来计算 ΔAOB 的面积，高即为 A 的纵坐标，先算 $|AB|$，

由题意，抛物线 C 的准线为 $x=-\frac{p}{2}$，所以 $|AB|=m+\frac{p}{2}$，由题意，$S_{\Delta AOB}=\frac{1}{2}(m+\frac{p}{2})\times2=m+\frac{p}{2}=2$ ①，

求 p 还差一个方程，可将 A 代入抛物线方程，又点 A 在 C 上，所以 $2^2=2pm$ ②，由①②解得：$p=2$.



7．（2022 • 北京模拟 • ★★★）已知点 $Q(2\sqrt{2},0)$ 及抛物线 $x^2=4y$ 上一动点 $P(x,y)$，则 $y+|PQ|$ 的最小值是（　　）

（A）$\frac{1}{2}$　（B）1　（C）2　（D）3

答案：C

解析：如图，直接分析 $y+|PQ|$ 的最小值不易，可考虑把 y 凑成 $y+1$，用定义转化为 $|PF|$ 再看，

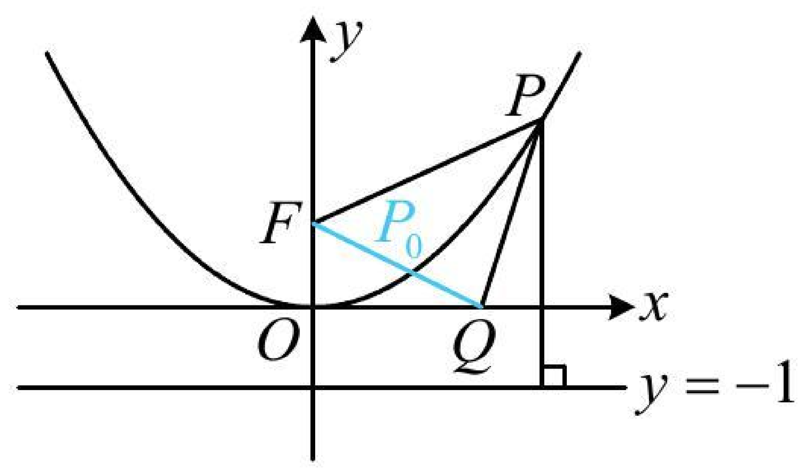
抛物线的焦点为 $F(0,1)$，准线为 $y=-1$，由抛物线定义，$|PF|=y+1$，所以 $y=|PF|-1$，

故 $y+|PQ|=|PF|-1+|PQ|=|PF|+|PQ|-1$ ①，

由三角形两边之和大于第三边可得 $|PF|+|PQ|\geq|FQ|$，

结合①可得 $y+|PQ|\geq|FQ|-1=\sqrt{(2\sqrt{2}-0)^2+(0-1)^2}-1=2$，

当且仅当 P 与图中 P_0 重合时取等号，所以 $(y+|PQ|)_{\min}=2$.



8．（2023·扬州模拟·★★★）已知抛物线 $C_1:y^2=8x$，圆 $C_2:(x-2)^2+y^2=1$，点 $M(1,1)$，若 A，B 分别是 C_1，C_2 上的动点，则 $|AM|+|AB|$ 的最小值为_____.

答案：2

解析：如图，A、B 都是动点，可先取定 A，考虑 B 在圆 C_2 上运动，

《一数•高考数学核心方法》

由图可知，$|AB|\geq|AC_2|-1$，所以 $|AM|+|AB|\geq|AM|+|AC_2|-1$ ①，

再求 $|AM|+|AC_2|$ 的最小值，直接分析不易，注意到 $C_2(2,0)$ 恰好是抛物线的焦点，故又可用抛物线定义将 $|AC_2|$ 转化为 A 到准线的距离来看，

如图，作 $AP\perp$ 准线 $x=-2$ 于 P，$MQ\perp$ 准线于 Q，由抛物线定义，$|AC_2|=|AP|$，

代入①可得 $|AM|+|AB|\geq|AM|+|AP|-1\geq|MQ|-1=3-1=2$，

当且仅当 B 为线段 AC_2 与圆的交点，且 A 为线段 QM 与抛物线交点时两个不等号同时取等号，

所以 $|AM|+|AB|$ 的最小值为 2.