第 6 节 隐圆问题（★★★）

强化训练

1．（2014·北京卷·★★★）已知圆$C:(x-3)^2+(y-4)^2=1$和两点$A(-m,0)$，$B(m,0)(m>0)$，若圆C上存在点P，使得$\angle APB=90^{\circ}$，则m的最大值为（　　）

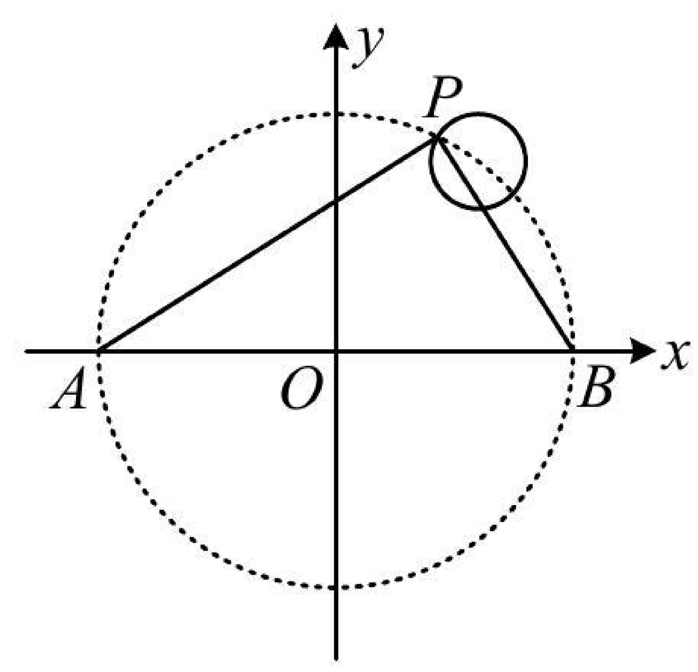
（A）7　（B）6　（C）5　（D）4

答案：B

解析：$\angle APB=90^{\circ}\Rightarrow$点$P$在以$AB$为直径的圆上，该圆的圆心为$O$，半径为$m$，

由题意，圆C和圆O有公共点，而圆心距$|OC|=\sqrt{3^2+4^2}=5$，

所以$|m-1|\le 5\le m+1$，解得：$4\le m\le 6$，故m的最大值为6.



2．（★★★）若圆$C:x^2+y^2-6x-6y-m=0$上有到点$P(-1,0)$的距离为1的点，则实数m的取值范围是（　　）

（A）$[-18,6]$　（B）$[-2,6]$　（C）$[-2,18]$　（D）$[4,18]$

答案：C

解析：$x^2+y^2-6x-6y-m=0\Rightarrow(x-3)^2+(y-3)^2=18+m\Rightarrow$圆心为$C(3,3)$，半径$r_1=\sqrt{18+m}(m>-18)$，

到点P的距离为1的点在圆$P:(x+1)^2+y^2=1$上，故问题等价于圆C与该圆有交点，可由此求m的范围，

圆P的半径$r_2=1$，圆心距$|PC|=\sqrt{(-1-3)^2+(0-3)^2}=5$，两圆有交点，所以$|r_1-r_2|\le|PC|\le r_1+r_2$，

故$\left|\sqrt{18+m}-1\right|\le 5\le\sqrt{18+m}+1$，此不等式右侧较为简单，先解右侧，

$5\le\sqrt{18+m}+1\Leftrightarrow\sqrt{18+m}\ge 4\Leftrightarrow 18+m\ge 16\Leftrightarrow m\ge -2$，再解左边，此时可判断出$\sqrt{18+m}-1>0$，

$\left|\sqrt{18+m}-1\right|\le 5\Leftrightarrow\sqrt{18+m}-1\le 5\Leftrightarrow\sqrt{18+m}\le 6\Leftrightarrow 18+m\le 36\Leftrightarrow m\le 18$，所以$-2\le m\le 18$.

3．（★★★）在平面直角坐标系xOy中，已知点$A(1,0)$，$B(4,0)$，若直线$x-y+m=0$上存在点P使得$|PB|=2|PA|$，则实数m的取值范围为_____.

答案：$[-2\sqrt{2},2\sqrt{2}]$

解析：A，B是定点，所以由$|PB|=2|PA|$可约束P的轨迹，故先求出轨迹方程，

设$P(x,y)$，因为$|PB|=2|PA|$，所以$\sqrt{(x-4)^2+y^2}=2\sqrt{(x-1)^2+y^2}$，整理得：$x^2+y^2=4$，

直线 $x-y+m=0$ 上存在点 P 使得 $|PB|=2|PA|$ 等价于直线 $x-y+m=0$ 与圆 $x^2+y^2=4$ 有交点，

所以 $\frac{|m|}{\sqrt{2}}\le 2$，解得：$-2\sqrt{2}\le m\le 2\sqrt{2}$.

4.（2022 •黄山模拟 •★★★★）已知点 $P(-3,0)$ 在动直线 $l:mx+ny-(m+3n)=0$ 上的投影为 M，若点 $N(2,\frac{3}{2})$，则 $|MN|$ 的最大值为（　　）

（A）1　（B）$\frac{3}{2}$　（C）2　（D）$\frac{11}{2}$

答案：D

解析：直线 l 含参，先看它是否过定点，$mx+ny-(m+3n)=0\Rightarrow m(x-1)+n(y-3)=0$，

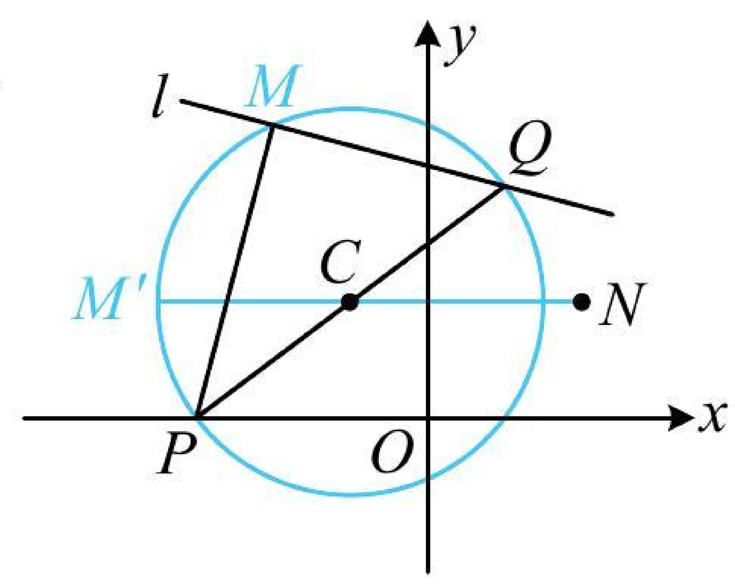
令 $\begin{cases}x-1=0\\y-3=0\end{cases}$ 可得：$\begin{cases}x=1\\y=3\end{cases}$，所以直线 l 过定点 $Q(1,3)$，

直线 l 绕定点 Q 旋转，于是画图看看，如图，$PM\perp MQ$，故 M 在以 PQ 为直径的圆上，

该圆的圆心为 $C(-1,\frac{3}{2})$，半径 $r=\frac{1}{2}|PQ|=\frac{1}{2}\sqrt{(-3-1)^2+(0-3)^2}=\frac{5}{2}$，

接下来就是圆上动点 M 与定点 N 的距离的最值问题了，图中 M' 处即为该距离最大的情形，

因为 $|CN|=\sqrt{(-1-2)^2+(\frac{3}{2}-\frac{3}{2})^2}=3$，所以 $|MN|_{\max}=|M'N|=|M'C|+|CN|=\frac{5}{2}+3=\frac{11}{2}$.



5.（2022 • 河南模拟 • ★★★★）已知点 $M(0,-a)$，$N(0,a)$，$a>0$，若圆 $C:(x-3)^2+(y+4)^2=9$ 上存在点 P 使得 $\angle MPN$ 为钝角，则 a 的取值范围是_____.

答案：$(2,+\infty)$

解析：钝角这种条件怎么翻译？我们知道直角可翻译成“圆上”，那钝角呢？翻译成“圆内”即可，

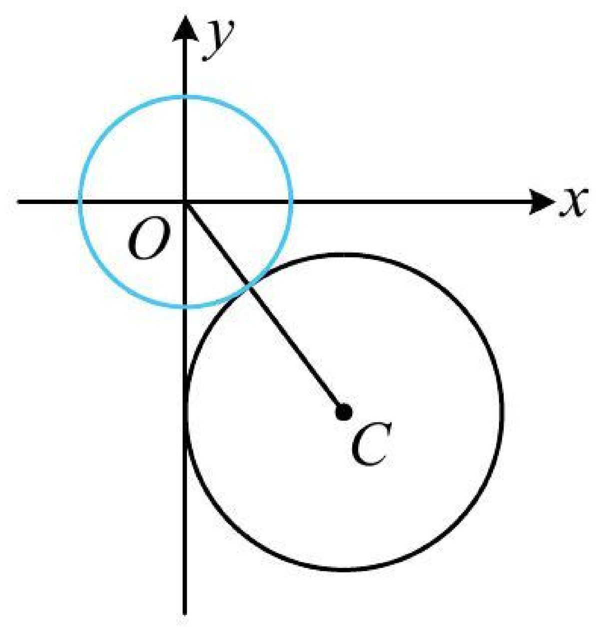
若 $\angle MPN$ 为钝角，则点 P 在以 MN 为直径的圆内，该圆的圆心为原点 O，半径 $r_1=a$，

这样问题就可表述为圆 C 上存在点 P 在上述圆 O 内部，先画图看看，

临界状态如图，两圆外切，因为圆 C 的圆心为 $C(3,-4)$，半径 $r_2=3$，所以 $|OC|=\sqrt{3^2+(-4)^2}=5$，

当两圆外切时，$|OC|=r_1+r_2$，即 $5=a+3$，解得：$a=2$，

由图可知，当 $a>2$ 时，圆 C 上有点在圆 O 内部，故 a 的取值范围是 $(2,+\infty)$.



【反思】对于以 MN 为直径的圆，如图，若 $\angle MP_1N$ 为直角，则点 P_1 在该圆上；若 $\angle MP_2N$ 为锐角，则点 P_2 在该圆外；若 $\angle MP_3N$ 为钝角，则点 P_3 在该圆内.