# 第 2 节 距离公式（★★）

## 强化训练

1．（★）若直线 $l_1: x+my+1=0$ 和直线 $l_2: 2x-y-1=0$ 平行，则它们之间的距离为_____.

**答案**：$\dfrac{3\sqrt{5}}{5}$

**解析**：已知两直线平行，可先由 $A_1B_2=A_2B_1$ 求出 $m$，

因为 $l_1 // l_2$，所以 $1\times(-1)=2m$，解得：$m=-\dfrac{1}{2}$，

所以 $l_1$ 的方程为 $x-\dfrac{1}{2}y+1=0$，

要代公式算 $l_1$ 与 $l_2$ 的距离，先把系数调整为一致，

$l_1: 2x-y+2=0$，故所求距离 $d=\dfrac{|2-(-1)|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\dfrac{3\sqrt{5}}{5}$.

2．（★★）已知 $A(1,1)$，$B(4,3)$，$C(-2,0)$，则 $\Delta ABC$ 的面积为_____.

**答案**：$\dfrac{3}{2}$

**解析**：已知 $A$，$B$，$C$ 的坐标求面积，不妨由两点距离公式算 $|AB|$，作为底边，点 $C$ 到直线 $AB$ 的距离作为高，



由题意，$|AB|=\sqrt{(1-4)^2+(1-3)^2}=\sqrt{13}$，又 $k_{AB}=\dfrac{3-1}{4-1}=\dfrac{2}{3}$，

所以直线 $AB$ 的方程为 $y-1=\dfrac{2}{3}(x-1)$，即 $2x-3y+1=0$，

故点 $C$ 到直线 $AB$ 的距离 $d=\dfrac{|2\times(-2)-3\times 0+1|}{\sqrt{2^2+(-3)^2}}=\dfrac{3}{\sqrt{13}}$，

所以 $S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{2}|AB|\cdot d=\dfrac{1}{2}\times\sqrt{13}\times\dfrac{3}{\sqrt{13}}=\dfrac{3}{2}$.

3．（★★）经过原点 $O$，且与 $A(1,2)$ 和 $B(-2,4)$ 两点距离相等的直线 $l$ 的方程为_____.

**答案**：$6x+y=0$ 或 $2x+3y=0$

**解法 1**：已知一个点求直线的方程，可设斜率，先考虑斜率不存在的情形，

当 $l$ 的斜率不存在时，其方程为 $x=0$，经检验，$A$，$B$ 两点到 $l$ 的距离不相等，不合题意；

当 $l$ 的斜率存在时，设其方程为 $y=kx$，即 $kx-y=0$，由题意，$\dfrac{|k-2|}{\sqrt{k^2+1}}=\dfrac{|-2k-4|}{\sqrt{k^2+1}}$，解得：$k=-6$ 或 $-\dfrac{2}{3}$，

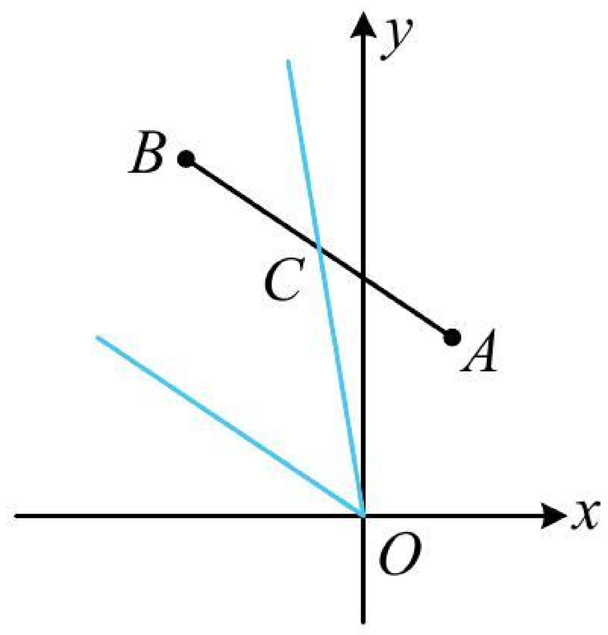
所以直线 $l$ 的方程为 $6x+y=0$ 或 $2x+3y=0$.

**解法 2**：也可画图分析，如图，满足条件的直线 $l$ 有平行于 $AB$ 和过 $AB$ 中点两种情况，

由题意，$AB$ 中点为 $C(-\dfrac{1}{2},3)$，当 $l$ 过点 $C$ 时，其方程为 $y=-6x$，即 $6x+y=0$；

当 $l // AB$ 时，$k_{AB}=\dfrac{2-4}{1-(-2)}=-\dfrac{2}{3}$，所以 $l$ 的方程为 $y=-\dfrac{2}{3}x$，即 $2x+3y=0$，

综上所述，直线 $l$ 的方程为 $6x+y=0$ 或 $2x+3y=0$.




4.（★★）设直线 $l:3x-4y+2m=0$ 与直线 $l':6x-my+1=0$ 平行，则点 $A(a^2,3a)$ 到 $l$ 的距离的最小值为（　　）

（A）$\dfrac{4}{5}$　（B）1　（C）$\dfrac{6}{5}$　（D）$\dfrac{7}{5}$

**答案**：A

**解析**：条件有两直线平行，可由 $A_1B_2=A_2B_1$ 求参数 $m$，

因为 $l // l'$，所以 $3\times(-m)=6\times(-4)$，故 $m=8$，经检验，$l$ 与 $l'$ 不重合，所以 $l$ 的方程为 $3x-4y+16=0$，

从而点 $A$ 到 $l$ 的距离 $d=\dfrac{|3a^2-4\times 3a+16|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=\dfrac{|3a^2-12a+16|}{5}=\dfrac{|3(a-2)^2+4|}{5}=\dfrac{3(a-2)^2+4}{5}$，

故当 $a=2$ 时，$d$ 取得最小值 $\dfrac{4}{5}$.



5.（2020•新课标III卷•★★）点 $(0,-1)$ 到直线 $y=k(x+1)$ 的距离的最大值为（　　）

（A）1　（B）$\sqrt{2}$　（C）$\sqrt{3}$　（D）2

**答案**：B

**解法 1**：有点的坐标和直线的方程，可代公式把所求距离用 $k$ 表示，再分析最值，

$y=k(x+1)\Rightarrow kx-y+k=0$，所以点 $(0,-1)$ 到该直线的距离

$$d=\frac{|-(-1)+k|}{\sqrt{k^2+(-1)^2}}=\frac{|k+1|}{\sqrt{k^2+1}}=\sqrt{\frac{(k+1)^2}{k^2+1}}=\sqrt{\frac{k^2+1+2k}{k^2+1}}=\sqrt{1+\frac{2k}{k^2+1}},$$

根号里面有“$\dfrac{\text{一次函数}}{\text{二次函数}}$”的结构，可同除以 $k$，用均值不等式求最值，但需讨论 $k$ 的正负，

当 $k\le 0$ 时，$\dfrac{2k}{k^2+1}\le 0$，所以 $d\le 1$；

当 $k>0$ 时，$d=\sqrt{1+\dfrac{2}{k+\dfrac{1}{k}}}\le\sqrt{1+\dfrac{2}{2\sqrt{k\cdot\dfrac{1}{k}}}}=\sqrt{2}$，当且仅当 $k=\dfrac{1}{k}$，即 $k=1$ 时取等号；

综上所述，所求距离的最大值为 $\sqrt{2}$.

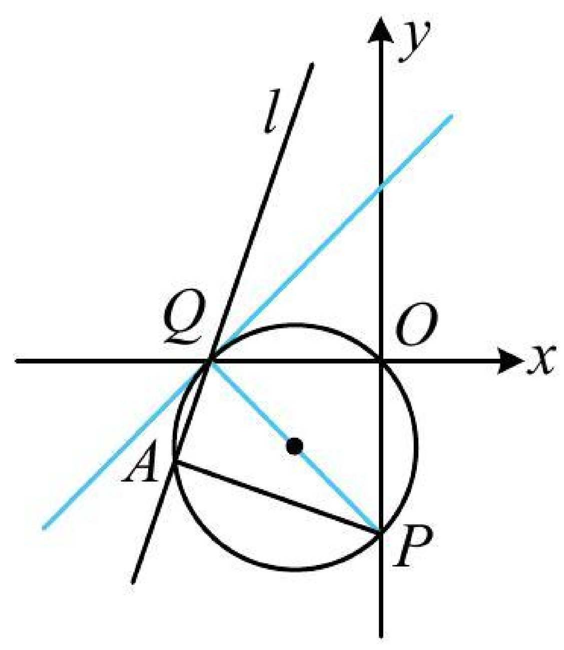
**解法 2**：观察发现直线过定点，故也可考虑画图分析距离的最大值，先在图中把该距离作出来，

记直线 $y=k(x+1)$ 为 $l$，则 $l$ 过定点 $Q(-1,0)$，记 $P(0,-1)$，如图，作 $PA\perp l$ 于 $A$，

我们就是要分析 $|PA|$ 的最大值，因为 $P$ 是定点，所以找 $A$ 的轨迹，

注意到当 $l$ 绕点 $Q$ 旋转的过程中，始终有 $PA \perp AQ$，所以点 $A$ 在以 $PQ$ 为直径的圆上运动，

故当 $A$ 与 $Q$ 重合时，$|AP|$ 取得最大值，且最大值为 $|PQ| = \sqrt{2}$.




6.（★★★）已知实数 $x$，$y$ 满足 $x^2+y^2=1$，则 $|x+y+2|$ 的取值范围是_____.

**答案：**$[2-\sqrt{2}, 2+\sqrt{2}]$

**解析：**看到 $|x+y+2|$，想到点到直线的距离公式，但还缺分母部分，于是凑分母，

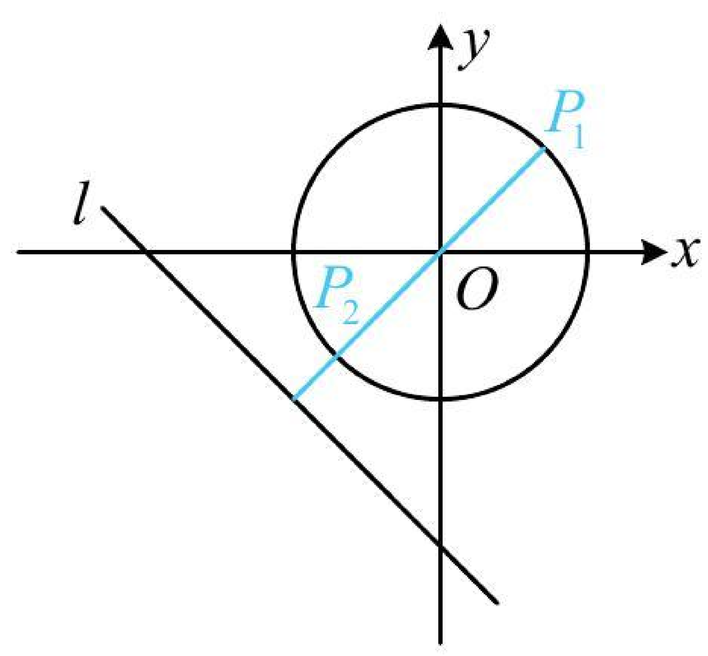
$|x+y+2| = \sqrt{2} \cdot \dfrac{|x+y+2|}{\sqrt{1^2+1^2}}$，记 $d = \dfrac{|x+y+2|}{\sqrt{1^2+1^2}}$，则 $|x+y+2| = \sqrt{2}d$，

其中 $d$ 表示动点 $P(x,y)$ 到定直线 $l: x+y+2=0$ 的距离，先画图看看，

因为 $x$，$y$ 满足 $x^2+y^2=1$，所以点 $P$ 可在如图所示的单位圆上运动，

由图可知，$d$ 的最大、最小值分别在 $P_1$，$P_2$ 处取得，原点 $O$ 到直线 $l$ 的距离为 $\dfrac{|2|}{\sqrt{1^2+1^2}} = \sqrt{2}$，

所以 $d_{\min} = \sqrt{2}-1$，$d_{\max} = \sqrt{2}+1$，故 $|x+y+2| = \sqrt{2}d \in [2-\sqrt{2}, 2+\sqrt{2}]$.




**【反思】**①求 $|Ax+By+C|$ 的最值，可将其凑成 $\sqrt{A^2+B^2} \cdot \dfrac{|Ax+By+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$，转化为点 $(x,y)$ 到直线 $Ax+By+C=0$ 的距离来分析；②本题也可用三角换元来做.