第 4 节 向量的坐标运算与建系运用（★★★）

强化训练

1.（2023·乌鲁木齐模拟·★）已知向量 $\boldsymbol{a}=(2,3)$，$\boldsymbol{b}=(-1,2)$，若 $m\boldsymbol{a}+n\boldsymbol{b}(mn\neq 0)$ 与 $\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}$ 共线，则 $\frac{m}{n}=$（　　）

（A）$-\frac{1}{2}$　（B）$\frac{1}{2}$　（C）-2　（D）2

答案：A

解法 1：由题意，$m\boldsymbol{a}+n\boldsymbol{b}=(2m-n,3m+2n)$，$\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}=(4,-1)$，

因为 $m\boldsymbol{a}+n\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}$ 共线，所以 $(2m-n)\cdot(-1)=4(3m+2n)$，整理得：$2m+n=0$，所以 $\frac{m}{n}=-\frac{1}{2}$.

解法 2：注意到 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 不共线，故也可把所给向量共线翻译成 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的系数成比例，找到 m 和 n 的关系，

因为 $m\boldsymbol{a}+n\boldsymbol{b}(mn\neq 0)$ 与 $\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}$ 共线，所以 $\frac{m}{1}=\frac{n}{-2}$，故 $\frac{m}{n}=-\frac{1}{2}$.

2.（2023·新高考Ⅰ卷·★）已知向量 $\boldsymbol{a}=(1,1)$，$\boldsymbol{b}=(1,-1)$，若 $(\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b})\perp(\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b})$，则（　　）

（A）$\lambda+\mu=1$　（B）$\lambda+\mu=-1$　（C）$\lambda\mu=1$　（D）$\lambda\mu=-1$

答案：D

解析：向量垂直可用数量积为 0 来翻译，此处可先求两个向量的坐标，再算数量积，但若注意到 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$，则会发现直接展开计算量更小，

因为 $(\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b})\perp(\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b})$，所以 $(\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}^2+(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\lambda\mu\boldsymbol{b}^2=0$ ①，

又 $\boldsymbol{a}=(1,1)$，$\boldsymbol{b}=(1,-1)$，所以 $\boldsymbol{a}^2=1^2+1^2=2$，$\boldsymbol{b}^2=1^2+(-1)^2=2$，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=1\times 1+1\times(-1)=0$，

代入①得：$2+2\lambda\mu=0$，所以 $\lambda\mu=-1$.

3.（2022·上海模拟·★★）在 ΔABC 中，$\angle A=90^\circ$，$AB=AC=2$，点 M 为边 AB 的中点，点 P 在边 BC 上，则 $\overrightarrow{MP}\cdot\overrightarrow{CP}$ 的最小值为_____.

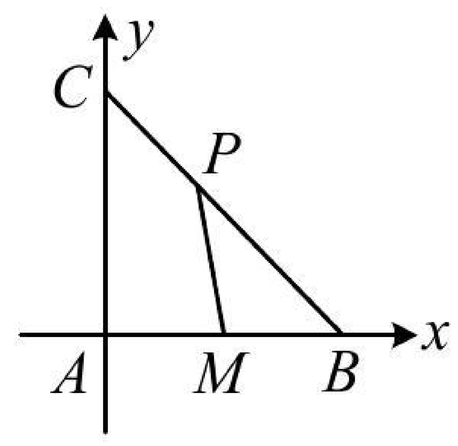
答案：$-\frac{9}{8}$

解析：图形为直角三角形，建系比较方便，建立如图所示的平面直角坐标系，则 $M(1,0)$，$C(0,2)$，

直线 BC 斜率为 -1，且过点 C，其方程为 $y=2-x$，所以可设 $P(x,2-x)$，$0\le x\le 2$，

从而 $\overrightarrow{MP}=(x-1,2-x)$，$\overrightarrow{CP}=(x,-x)$，故 $\overrightarrow{MP}\cdot\overrightarrow{CP}=(x-1)x+(2-x)(-x)=2x^2-3x=2(x-\frac{3}{4})^2-\frac{9}{8}$，

所以当 $x=\frac{3}{4}$ 时，$\overrightarrow{MP}\cdot\overrightarrow{CP}$ 取得最小值 $-\frac{9}{8}$.



4．（★★★）已知向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 满足 $|\boldsymbol{a}|=4$，$\boldsymbol{b}$ 在 $\boldsymbol{a}$ 上的投影向量与 $\boldsymbol{a}$ 反向且长度为 2，则 $|\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}|$ 的最小值为______.

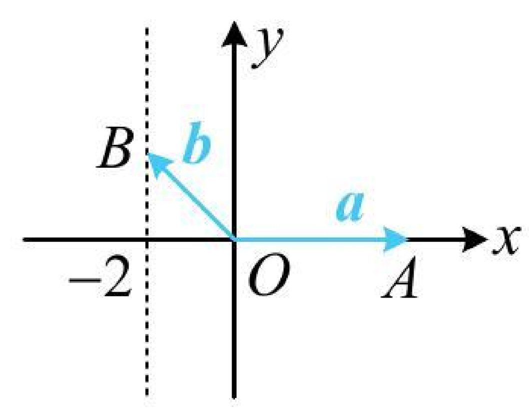
答案：10

解析：为了便于分析，把向量放到坐标系下，用坐标运算来解决问题，

如图，可设 $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{OA}=(4,0)$，$\boldsymbol{b}=\overrightarrow{OB}$，由 $\boldsymbol{b}$ 在 $\boldsymbol{a}$ 上的投影向量与 $\boldsymbol{a}$ 反向且长度为 2 知 B 在直线 $x=-2$ 上运动，

所以可设 $\boldsymbol{b}=(-2,y)$，其中 $y\in\mathbf{R}$，故 $|\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}|=|(4,0)-3(-2,y)|=|(10,-3y)|=\sqrt{100+9y^2}$，

所以当 $y=0$ 时，$|\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}|$ 取得最小值 10.



5．（2022•北京模拟•★★★）已知向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 满足 $|\boldsymbol{a}|=\sqrt{2}$，$|\boldsymbol{b}|=1$，$<\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}>=\dfrac{\pi}{4}$，$(\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a})\cdot(\boldsymbol{c}-\boldsymbol{b})=0$，则 $|\boldsymbol{c}|$ 的最大值是（　　）

（A）$\sqrt{2}-1$　　（B）$\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$　　（C）$\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$　　（D）$\sqrt{2}+1$

答案：C

解析：向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 已知长度和夹角，容易搬进坐标系，故设出 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 的坐标，用坐标翻译 $(\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a})\cdot(\boldsymbol{c}-\boldsymbol{b})=0$，

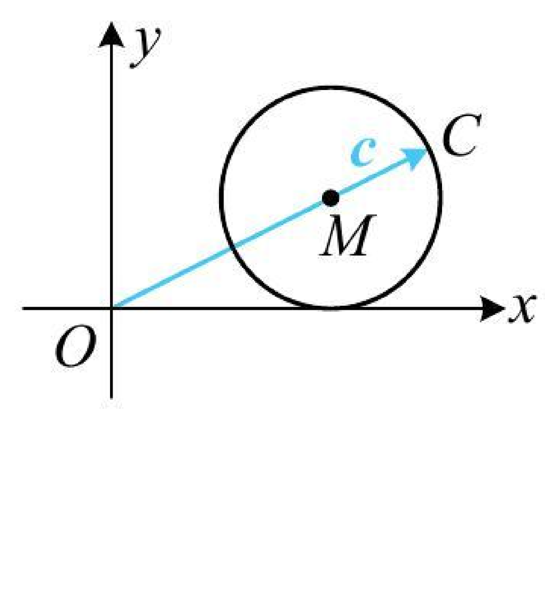
设 $\boldsymbol{b}=(1,0)$，$\boldsymbol{a}=(1,1)$，$\boldsymbol{c}=(x,y)$，满足 $|\boldsymbol{a}|=\sqrt{2}$，$|\boldsymbol{b}|=1$，$<\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}>=\dfrac{\pi}{4}$，此时 $\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a}=(x-1,y-1)$，$\boldsymbol{c}-\boldsymbol{b}=(x-1,y)$，

因为 $(\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a})\cdot(\boldsymbol{c}-\boldsymbol{b})=0$，所以 $(x-1)^2+(y-1)y=0$，整理得：$(x-1)^2+(y-\dfrac{1}{2})^2=\dfrac{1}{4}$，

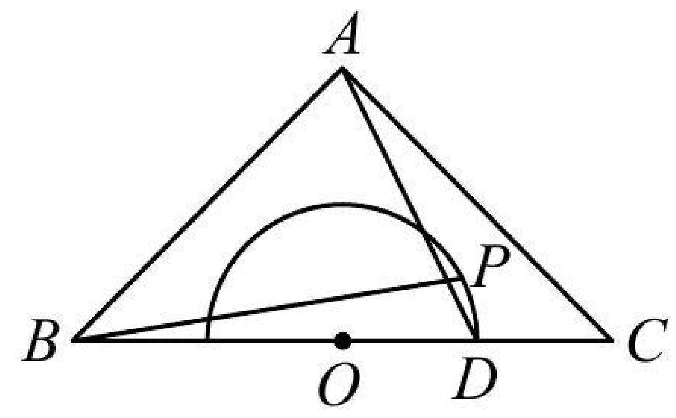
此方程为圆，可画图分析 $|\boldsymbol{c}|$ 的最大值，

记 $\boldsymbol{c}=\overrightarrow{OC}$，则终点 C 可在圆 $M:(x-1)^2+(y-\dfrac{1}{2})^2=\dfrac{1}{4}$ 上运动，如图，

因为 $|OM|=\sqrt{1^2+(\dfrac{1}{2})^2}=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$，所以 $|\boldsymbol{c}|_{\max}=|OM|+\dfrac{1}{2}=\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$.



6．（2022 • 天津模拟 • ★★★）如图，直角三角形 ABC 中，$AB=AC$，$BC=4$，O 为 BC 的中点，以 O 为圆心，1 为半径的半圆与 BC 交于点 D，P 为半圆上任意一点，则 $\overrightarrow{BP}\cdot\overrightarrow{AD}$ 的最小值为_____.



答案： $2-\sqrt{5}$

解析： 图形比较规整，容易建系，建立如图所示平面直角坐标系，则 $B(-2,0)$，$A(0,2)$，$D(1,0)$，

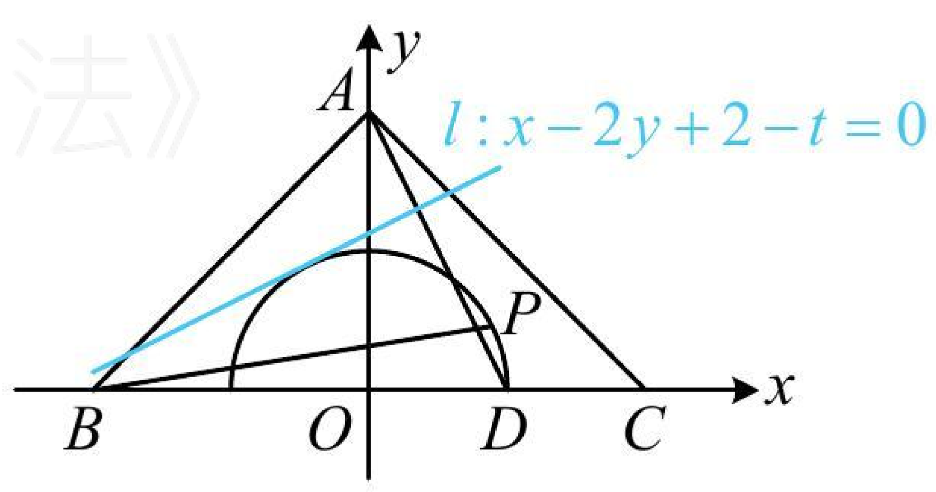
半圆的方程为 $x^2+y^2=1(y\ge 0)$ ①，设 $P(x,y)$，则 $\overrightarrow{BP}=(x+2,y)$，$\overrightarrow{AD}=(1,-2)$，所以 $\overrightarrow{BP}\cdot\overrightarrow{AD}=x+2-2y$，

设 $x+2-2y=t$，则 $x-2y+2-t=0$ ②，

要求 t 的最小值，可将式②看成直线 l 的方程，由于 $P(x,y)$ 同时满足方程①和②，所以直线 l 与半圆有交点，

直线 l 可化为 $y=\frac{1}{2}x+1-\frac{t}{2}$，所以 l 的纵截距为 $1-\frac{t}{2}$，故 t 最小等价于该纵截距最大，此时 l 与半圆相切，如图，

应有 $d=\frac{|2-t|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}=1$，解得：$t=2\pm\sqrt{5}$，由图可知 l 的纵截距为正，所以 $t=2-\sqrt{5}$，故 $(\overrightarrow{BP}\cdot\overrightarrow{AD})_{\min}=2-\sqrt{5}$.



7．（2020 • 江苏卷 • ★★★★）在 ΔABC 中，$AB=4$，$AC=3$，$\angle BAC=90^\circ$，D 在边 BC 上，延长 AD 到 P，使 $AP=9$，若 $\overrightarrow{PA}=m\overrightarrow{PB}+(\frac{3}{2}-m)\overrightarrow{PC}$（$m$ 为常数），则 CD 的长度是_____.

答案： 0 或 $\frac{18}{5}$

解析： 图形为直角三角形，建系比较方便，建立如图所示的平面直角坐标系，则 $A(0,0)$，$B(4,0)$，$C(0,3)$，

由题意，$\overrightarrow{PA}=m\overrightarrow{PB}+(\frac{3}{2}-m)\overrightarrow{PC}=m(\overrightarrow{PB}-\overrightarrow{PC})+\frac{3}{2}\overrightarrow{PC}=m\overrightarrow{CB}+\frac{3}{2}\overrightarrow{PC}$，

设 $P(x,y)$，则 $\overrightarrow{PA}=(-x,-y)$，$\overrightarrow{PC}=(-x,3-y)$，$\overrightarrow{CB}=(4,-3)$，所以 $\begin{cases}-x=4m-\frac{3}{2}x\\-y=-3m+\frac{3}{2}(3-y)\end{cases}$，故 $\begin{cases}x=8m\\y=9-6m\end{cases}$ ①，

又 $AP=9$，所以 $\sqrt{x^2+y^2}=9$，将①代入上式可求得：$m=0$ 或 $\frac{27}{25}$，

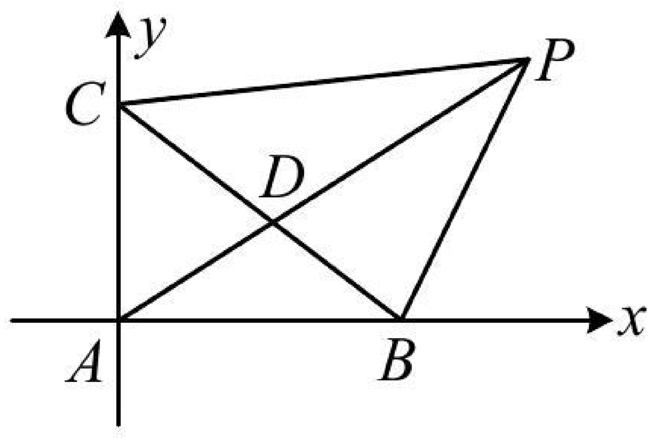
当 $m=0$ 时，代入①得：$\begin{cases}x=0\\y=9\end{cases}$，此时点 $P(0,9)$ 在 y 轴上，所以 D 与 C 重合，故 $CD=0$；

当 $m=\frac{27}{25}$ 时，代入①得：$\begin{cases}x=\frac{216}{25}\\y=\frac{63}{25}\end{cases}$，所以 $P(\frac{216}{25},\frac{63}{25})$，要求 CD，可先联立直线 AP 和 BC 的方程求 D 的坐标，

直线 AP 的方程为 $y=\frac{7}{24}x$，直线 BC 的方程为 $\frac{x}{4}+\frac{y}{3}=1$，联立两直线的方程可求得 $\begin{cases}x=\frac{72}{25}\\y=\frac{21}{25}\end{cases}$，

即 $D(\frac{72}{25},\frac{21}{25})$，所以 $CD=\sqrt{(\frac{72}{25}-0)^2+(\frac{21}{25}-3)^2}=\frac{18}{5}$；

综上所述，CD 的长度是 0 或 $\frac{18}{5}$.



8．（2022•浙江卷•★★★★）设点 P 在单位圆的内接正八边形 $A_1A_2\cdots A_8$ 的边 A_1A_2 上，则 $\overrightarrow{PA_1}^2+\overrightarrow{PA_2}^2+\cdots+\overrightarrow{PA_8}^2$ 的取值范围是_____.

答案：$[12+2\sqrt{2},16]$

解析：涉及单位圆与其内接正八边形，图形比较特殊，考虑建系来做，

如图，$A_1(0,1)$，$A_2(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2})$，$A_3(1,0)$，$A_4(\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2})$，$A_5(0,-1)$，$A_6(-\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2})$，$A_7(-1,0)$，$A_8(-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2})$，

直接计算目标式较复杂，观察结构特征，发现可将关于原点对称的两个组合计算，

设 $P(x,y)$，则 $\overrightarrow{PA_1}^2+\overrightarrow{PA_5}^2=x^2+(y-1)^2+x^2+(y+1)^2=2x^2+2y^2+2$，

$\overrightarrow{PA_2}^2+\overrightarrow{PA_6}^2=(x-\frac{\sqrt{2}}{2})^2+(y-\frac{\sqrt{2}}{2})^2+(x+\frac{\sqrt{2}}{2})^2+(y+\frac{\sqrt{2}}{2})^2=2x^2+2y^2+2$，

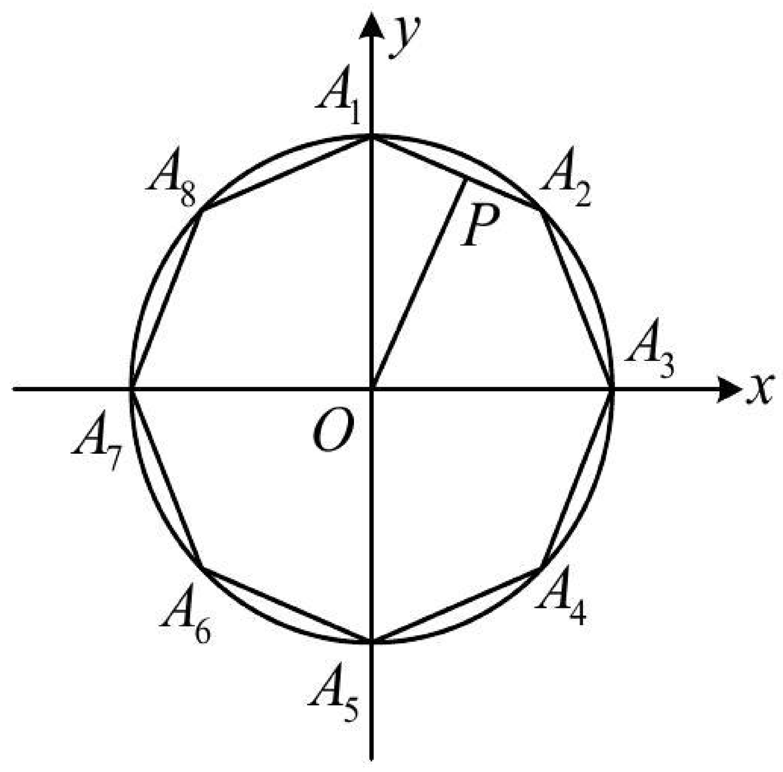
同理，$\overrightarrow{PA_3}^2+\overrightarrow{PA_7}^2=\overrightarrow{PA_4}^2+\overrightarrow{PA_8}^2=2x^2+2y^2+2$，所以 $\overrightarrow{PA_1}^2+\overrightarrow{PA_2}^2+\cdots+\overrightarrow{PA_8}^2=8(x^2+y^2)+8$，

要求上式的范围，可先单独分析 x^2+y^2 的范围，这部分是点 P 到原点距离的平方，

由图可知当 P 为 A_1A_2 中点时，$OP\perp A_1A_2$，$|OP|$ 取得最小值，且此时 $|OP|=|OA_1|\cos\angle A_1OP=\cos 22.5^\circ$，

所以 $(x^2+y^2)_{\min}=|OP|_{\min}^2=\cos^2 22.5^\circ=\frac{1+\cos 45^\circ}{2}=\frac{2+\sqrt{2}}{4}$，而 $|OP|_{\max}=|OA_1|=1$，所以 $(x^2+y^2)_{\max}=1$，

故 $\overrightarrow{PA_1}^2+\overrightarrow{PA_2}^2+\cdots+\overrightarrow{PA_8}^2$ 的最小值为 $8\times\frac{2+\sqrt{2}}{4}+8=12+2\sqrt{2}$，最大值为 16.


y
A1
A2
A8
P
A3
x
A7
O
A4
A6
A5