第 3 节 向量的分解与共线性质（★★★）

内容提要

本节归纳与平面向量基底表示有关的题型，下面先梳理涉及到的一些知识和结论.

1．平面向量基本定理：设 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 是平面内两个不共线的向量，则它们可以作为平面的一组基底（其中 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 叫做基向量），对平面内任意一个向量 $\boldsymbol{p}$，都存在唯一的一对实数 x，y，使 $\boldsymbol{p}=x\boldsymbol{a}+y\boldsymbol{b}$.

2．三点共线的充要条件：如图 1，A，B 是直线 l 上不同的两点，O 是直线 l 外一点，对于平面内任意的点 P，若 $\overrightarrow{OP}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}$，则 A，B，P 三点共线的充要条件是 $x+y=1$.

①特别地，当 P 为 AB 中点时，$x=y=\dfrac{1}{2}$，即 $\overrightarrow{OP}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{OA}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{OB}$，我们把这一结论称为向量中线定理.

②若已知 A，B，P 共线，且 $\overrightarrow{AP}=y\overrightarrow{AB}$，则 $\overrightarrow{OP}=(1-y)\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}$，用此结论可快速找到把 $\overrightarrow{OP}$ 用 $\overrightarrow{OA}$ 和 $\overrightarrow{OB}$ 表示的系数.

3．等和线定理：$\overrightarrow{OA}$ 和 $\overrightarrow{OB}$ 构成平面的一组基底，对于平面内的向量 $\overrightarrow{OP}$，设 $\overrightarrow{OP}=\lambda\overrightarrow{OA}+\mu\overrightarrow{OB}(\lambda,\mu\in\mathbf{R})$，若点 P 在直线 AB 上或在平行于 AB 的直线上运动，则 $\lambda+\mu$ 为定值，反之也成立. 如图 2，我们把直线 AB 及与 AB 平行的直线 l 称为等和线. 记 $\lambda+\mu=k$，则 $|k|=\dfrac{|OP|}{|OQ|}=\dfrac{|OA_1|}{|OA|}=\dfrac{|OB_1|}{|OB|}$.

①当等和线 l 恰为直线 AB 时，$k=1$，此时 A，P，B 三点共线，如图 1；

②当等和线 l 在 O 与直线 AB 之间时，$0<k<1$，如图 3；

③当直线 AB 在点 O 与等和线 l 之间时，$k>1$，如图 4；

④当等和线 l 过点 O 时，$k=0$；

⑤若点 O 在直线 AB 与等和线 l 之间，则 $k<0$，如图 5.

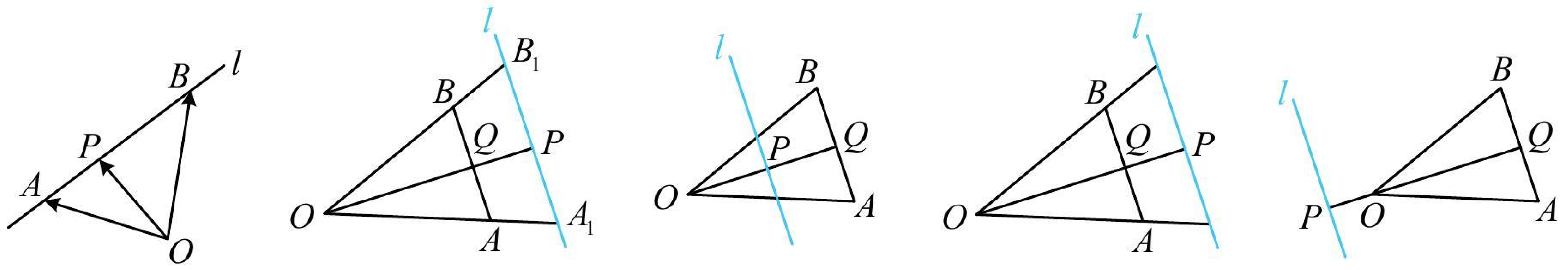


图1　　图2　　图3　　图4　　图5

典型例题

类型 Ⅰ：平面向量的基底表示

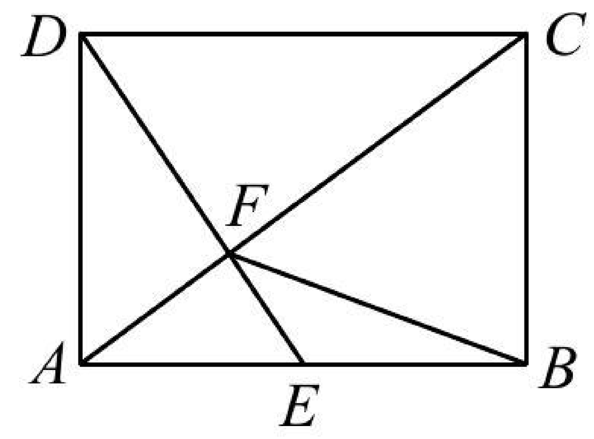
【例 1】已知矩形 $ABCD$ 中，E 为 AB 边中点，线段 AC 和 DE 交于点 F，则 $\overrightarrow{BF}=$（　　）

（A）$-\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AD}$　（B）$\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB}-\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AD}$　（C）$\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AB}-\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AD}$　（D）$-\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AD}$

解析：如图，$\overrightarrow{BF}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AF}=-\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AF}$ ①，要进一步把 $\overrightarrow{AF}$ 化为基底，需分析 F 在 AC 上的位置，

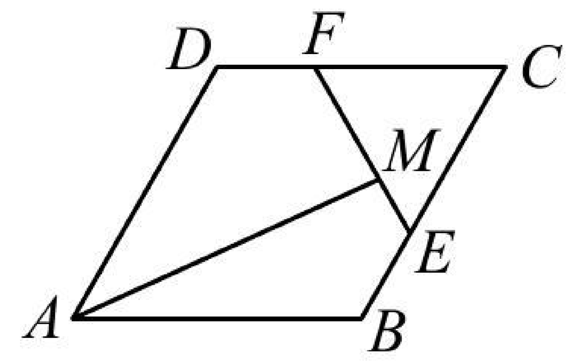
由 $\Delta AEF\backsim\Delta CDF$ 可得 $\dfrac{|AF|}{|FC|}=\dfrac{|AE|}{|CD|}=\dfrac{1}{2}$，所以 $\overrightarrow{AF}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AC}=\dfrac{1}{3}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD})$，代入①可得 $\overrightarrow{BF}=-\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AD}$.

答案：D



【反思】向量按基底分解的原则是尽量往容易化基底的向量转化，例如$\overrightarrow{BF}$还可按$\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CF}$等方式来化.

【变式1】如图，在平行四边形$ABCD$中，E，F分别为BC，CD上的点，$\overrightarrow{CE}=2\overrightarrow{EB}$，$\overrightarrow{CF}=2\overrightarrow{FD}$，若线段$EF$上存在一点$M$，使$\overrightarrow{AM}=x\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AD}(x\in\mathbf{R})$，则$x=$_____.



解析：由题意，我们需将$\overrightarrow{AM}$用$\overrightarrow{AB}$和$\overrightarrow{AD}$表示，由图知从A到M与基向量关联较强的路径是$A\to B\to E\to M$，

因为M在EF上，所以可设$\overrightarrow{EM}=\lambda\overrightarrow{EF}$，则$\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{EM}=\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AD}+\lambda\overrightarrow{EF}$

$=\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AD}+\lambda(\overrightarrow{EC}+\overrightarrow{CF})=\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AD}+\lambda(\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AD}-\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AB})=(1-\dfrac{2\lambda}{3})\overrightarrow{AB}+\dfrac{1+2\lambda}{3}\overrightarrow{AD}$ ①，

由题意，$\overrightarrow{AM}=x\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AD}$ ②，对比①②系数得：$x=1-\dfrac{2\lambda}{3}$，$\dfrac{1}{2}=\dfrac{1+2\lambda}{3}$，解得：$x=\dfrac{5}{6}$.

答案：$\dfrac{5}{6}$

【变式2】在平行四边形$ABCD$中，$\overrightarrow{BE}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{EC}$，$\overrightarrow{DF}=2\overrightarrow{FC}$，设$\overrightarrow{AE}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AF}=\boldsymbol{b}$，则$\overrightarrow{AC}=$（　　）

（A）$\dfrac{6}{7}\boldsymbol{a}+\dfrac{3}{7}\boldsymbol{b}$　（B）$\dfrac{3}{7}\boldsymbol{a}+\dfrac{6}{7}\boldsymbol{b}$　（C）$\dfrac{3}{4}\boldsymbol{a}+\dfrac{1}{3}\boldsymbol{b}$　（D）$\dfrac{1}{3}\boldsymbol{a}+\dfrac{3}{4}\boldsymbol{b}$

解析：如图，直接用$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$表示$\overrightarrow{AC}$较难，考虑换基底，注意到用$\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AD}$容易表示其它向量，故若设$\overrightarrow{AC}=x\boldsymbol{a}+y\boldsymbol{b}$，则只要把$\boldsymbol{a}$和$\boldsymbol{b}$也用$\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AD}$表示，就能与$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$比较系数，求出$x$，$y$，

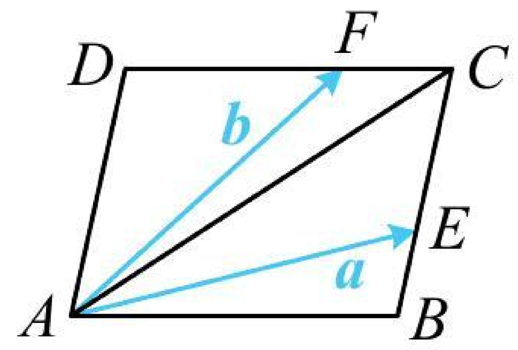
设$\overrightarrow{AC}=x\boldsymbol{a}+y\boldsymbol{b}$，由题意，$\boldsymbol{a}=\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AD}$，$\boldsymbol{b}=\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DF}=\overrightarrow{AD}+\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AB}$，

所以$\overrightarrow{AC}=x(\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AD})+y(\overrightarrow{AD}+\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AB})=(x+\dfrac{2y}{3})\overrightarrow{AB}+(\dfrac{x}{3}+y)\overrightarrow{AD}$ ①，

又因为$ABCD$为平行四边形，所以$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$，

与①比较可得$\begin{cases} x+\dfrac{2y}{3}=1 \\ \dfrac{x}{3}+y=1 \end{cases}$，解得：$\begin{cases} x=\dfrac{3}{7} \\ y=\dfrac{6}{7} \end{cases}$，所以$\overrightarrow{AC}=\dfrac{3}{7}\boldsymbol{a}+\dfrac{6}{7}\boldsymbol{b}$.

答案：B

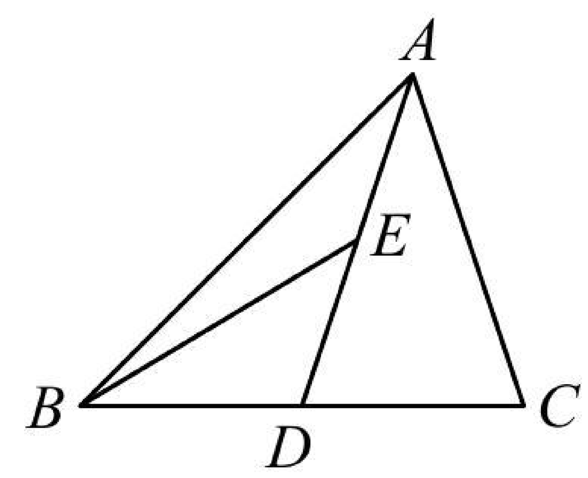


【反思】选择相同基底，按两种方法表示同一向量，通过对比系数构造方程是向量分解问题的一种手段.

类型Ⅱ：三点共线定理的应用

【例 2】如图，在ΔABC中，AD为BC边上的中线，E为AD的中点，则$\overrightarrow{EB}=$（　　）

（A）$\dfrac{3}{4}\overrightarrow{AB}-\dfrac{1}{4}\overrightarrow{AC}$　（B）$\dfrac{1}{4}\overrightarrow{AB}-\dfrac{3}{4}\overrightarrow{AC}$　（C）$\dfrac{3}{4}\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{4}\overrightarrow{AC}$　（D）$\dfrac{1}{4}\overrightarrow{AB}+\dfrac{3}{4}\overrightarrow{AC}$



解析：由题意，$\overrightarrow{EB}=\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{AB}=-\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AB}$ ①，其中$\overrightarrow{AD}$为中线向量，可用内容提要 2 的向量中线定理，

因为D为BC中点，所以$\overrightarrow{AD}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AC}$，代入①得：$\overrightarrow{EB}=-\dfrac{1}{2}(\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AC})+\overrightarrow{AB}=\dfrac{3}{4}\overrightarrow{AB}-\dfrac{1}{4}\overrightarrow{AC}$.

答案：A

【变式】设O为ΔABC的外心，若$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OM}$，则$M$是$\Delta ABC$的（　　）

（A）重心　（B）内心　（C）垂心　（D）外心

解析：等式涉及的向量起点都是O，可两两组合减少项数，例如可将$\overrightarrow{OA}$与$\overrightarrow{OB}$合并，$\overrightarrow{OC}$与$\overrightarrow{OM}$合并，

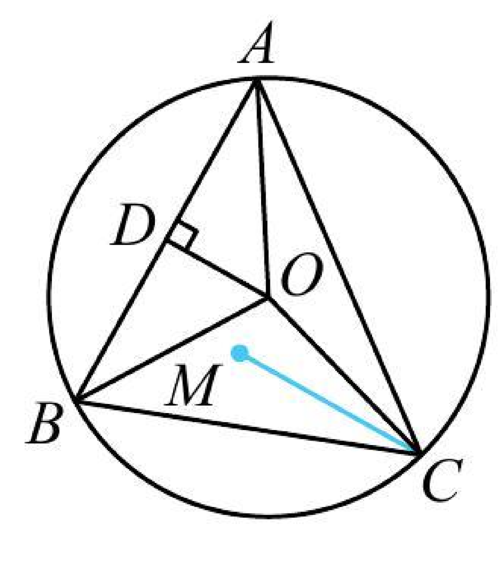
如图，设D为AB中点，则$OD\perp AB$，且$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=2\overrightarrow{OD}$，

因为$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OM}$，所以$2\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OM}$，

故$2\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{CM}$，结合$OD\perp AB$可得$CM\perp AB$，

同理可得$AM\perp BC$，$BM\perp AC$，所以M是垂心.

答案：C



【总结】①图形有中点可考虑使用向量中线定理（如例 2）；②当两个向量共起点时，可以考虑用向量中线定理合并向量，减少向量的个数（如例 2 的变式）.

【例 3】在 ΔABC 中，$\overrightarrow{AN}=\frac{1}{2}\overrightarrow{NC}$，$P$ 是 BN 上的一点，若 $\overrightarrow{AP}=(m+\frac{1}{3})\overrightarrow{AB}+\frac{1}{9}\overrightarrow{AC}$，则实数 $m=$（　　）

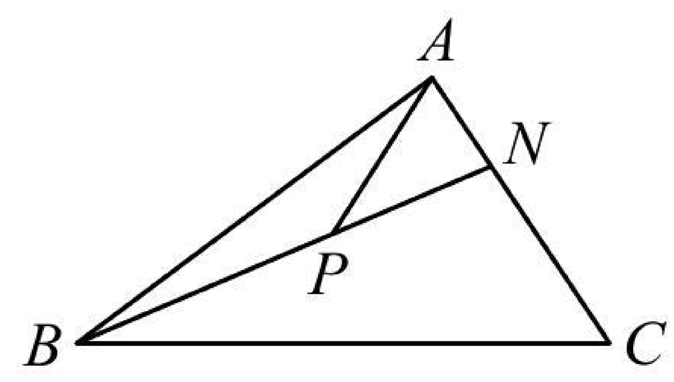
（A）$\frac{1}{9}$　　（B）$\frac{2}{9}$　　（C）$\frac{2}{3}$　　（D）$\frac{1}{3}$

解析：注意到第二个等式共起点 A，故若将其中的 $\overrightarrow{AC}$ 换成 $\overrightarrow{AN}$，就可用 B，P，N 三点共线构造方程，

因为 $\overrightarrow{AN}=\frac{1}{2}\overrightarrow{NC}$，所以 $\overrightarrow{AC}=3\overrightarrow{AN}$，代入 $\overrightarrow{AP}=(m+\frac{1}{3})\overrightarrow{AB}+\frac{1}{9}\overrightarrow{AC}$ 可得 $\overrightarrow{AP}=(m+\frac{1}{3})\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AN}$，

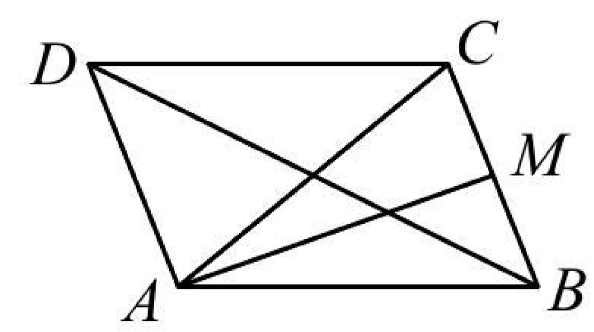
因为 B，P，N 三点共线，由内容提要 2，$m+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=1$，解得：$m=\frac{1}{3}$.

答案：D



【反思】向量问题中，可用三点共线的系数和为 1 构造方程，有时需通过转化，让起点相同终点共线.

【变式】如图，在平行四边形 $ABCD$ 中，M 是 BC 的中点，若 $\overrightarrow{AC}=\lambda\overrightarrow{AM}-\mu\overrightarrow{BD}$，则 $\lambda+\mu=$_____.

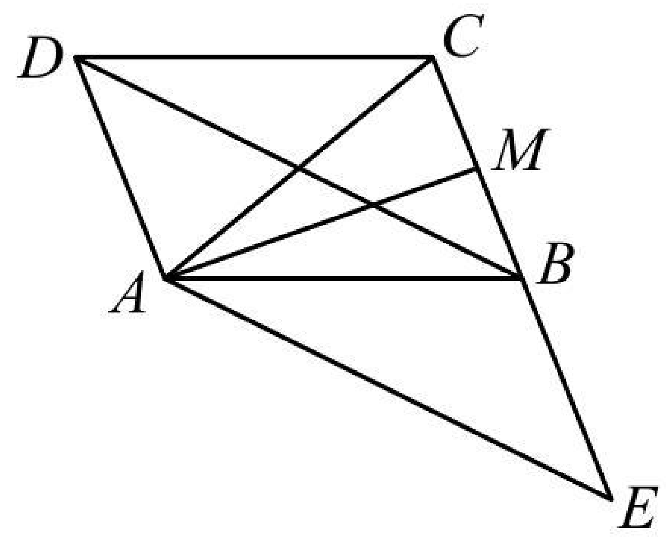


解析：$\overrightarrow{AC}$，$\overrightarrow{AM}$，$\overrightarrow{BD}$ 不共起点，可平移 $\overrightarrow{BD}$，使其共起点，再看能否用三点共线结论求系数和，

如图，延长 CB 至 E，使 $CB=BE$，则 BE 和 AD 平行且相等，所以四边形 $ADBE$ 是平行四边形，

故 $\overrightarrow{BD}=-\overrightarrow{AE}$，代入 $\overrightarrow{AC}=\lambda\overrightarrow{AM}-\mu\overrightarrow{BD}$ 得 $\overrightarrow{AC}=\lambda\overrightarrow{AM}+\mu\overrightarrow{AE}$，因为 C，M，E 三点共线，所以 $\lambda+\mu=1$.

答案：1



【反思】例 3 是由长度比例化为终点共线，而变式是通过平移使共起点，进而可用共线系数和结论.

类型Ⅲ：等和线的应用

【例 4】在正六边形 $ABCDEF$ 中，点 P 为 CE 上任意一点，若 $\overrightarrow{AP}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AF}$，则 $x+y=$_____.

解析：涉及向量基底表示的系数和问题，常可考虑用等和线速解，先找到系数和为 1 的等和线，

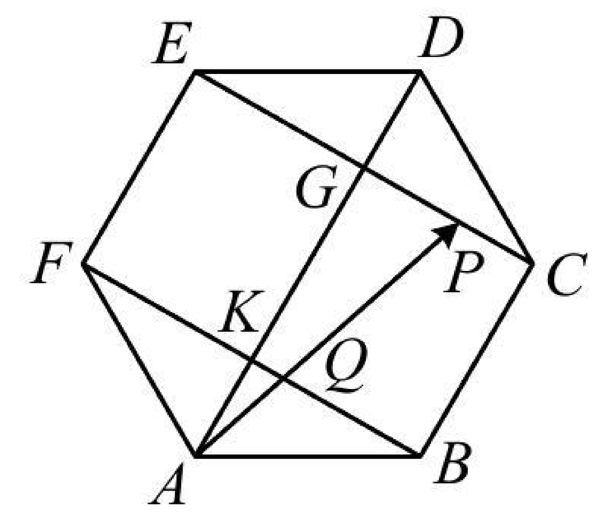
如图，BF 是系数和为 1 的等和线，在正六边形中，$CE // BF$，所以 CE 也是等和线，

故由内容提要 3 的等和线定理，$x+y=\dfrac{|AP|}{|AQ|}=\dfrac{|AG|}{|AK|}$ ①，

由正六边形几何性质可知 $AD\perp BF$，设 $|AB|=1$，则 $|AK|=|AB|\sin\angle ABK=1\times\sin 30^{\circ}=\dfrac{1}{2}$，

$|AG|=|AK|+|KG|=|AK|+|EF|=\dfrac{1}{2}+1=\dfrac{3}{2}$，所以 $\dfrac{|AG|}{|AK|}=3$，代入①得：$x+y=3$.

答案：3



【反思】基底表示的系数和问题可考虑用等和线速解，其核心是找基向量终点连线的平行线和求相似比.

强化训练

类型Ⅰ：向量的分解与共线

1.（2022 • 新高考Ⅰ卷 • ★）在 ΔABC 中，点 D 在边 AB 上，$BD=2DA$，记 $\overrightarrow{CA}=\boldsymbol{m}$，$\overrightarrow{CD}=\boldsymbol{n}$，则 $\overrightarrow{CB}=$（　　）

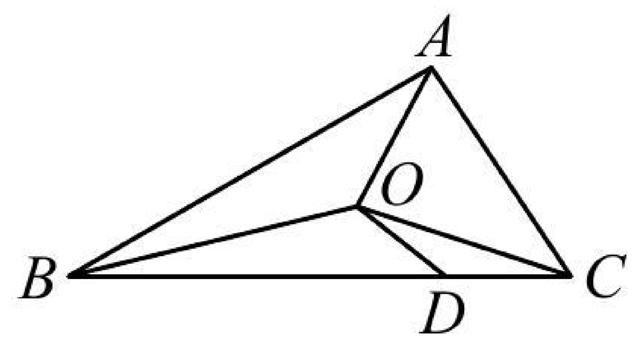
（A）$3\boldsymbol{m}-2\boldsymbol{n}$　（B）$-2\boldsymbol{m}+3\boldsymbol{n}$　（C）$3\boldsymbol{m}+2\boldsymbol{n}$　（D）$2\boldsymbol{m}+3\boldsymbol{n}$

2.（2023 • 广东模拟 • ★★）在平行四边形 $ABCD$ 中，E 为 AD 中点，F 为 BE 与 AC 的交点，则 $\overrightarrow{DF}=$（　　）

（A）$\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AD}$　（B）$\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB}-\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AD}$　（C）$\dfrac{1}{4}\overrightarrow{AB}+\dfrac{3}{4}\overrightarrow{AD}$　（D）$\dfrac{1}{4}\overrightarrow{AB}-\dfrac{3}{4}\overrightarrow{AD}$

3.（2022 •芜湖模拟 •★★★）如图，O 是 ΔABC 的重心，D 是边 BC 上一点，且 $\overrightarrow{BD}=3\overrightarrow{DC}$，$\overrightarrow{OD}=\lambda\overrightarrow{AB}+\mu\overrightarrow{AC}$，则 $\dfrac{\lambda}{\mu}=$（　　）

（A）$-\dfrac{1}{5}$　（B）$-\dfrac{1}{4}$　（C）$\dfrac{1}{5}$　（D）$\dfrac{1}{4}$



4.（2022 • 益阳模拟 • ★★）在如图所示的矩形 $ABCD$ 中，E，F 满足 $\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{EC}$，$\overrightarrow{CF}=2\overrightarrow{FD}$，$G$ 为 EF 的中点，若 $\overrightarrow{AG}=\lambda\overrightarrow{AB}+\mu\overrightarrow{AD}$，则 $\lambda\mu=$（　　）

（A）$\frac{1}{2}$　（B）$\frac{2}{3}$　（C）$\frac{3}{4}$　（D）2

5.（★★）已知 ΔABC 内接于圆 O，$\left|\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}\right|=\left|\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{CB}\right|$，若 P 为线段 OC 的中点，则 $\overrightarrow{OP}=$（　　）

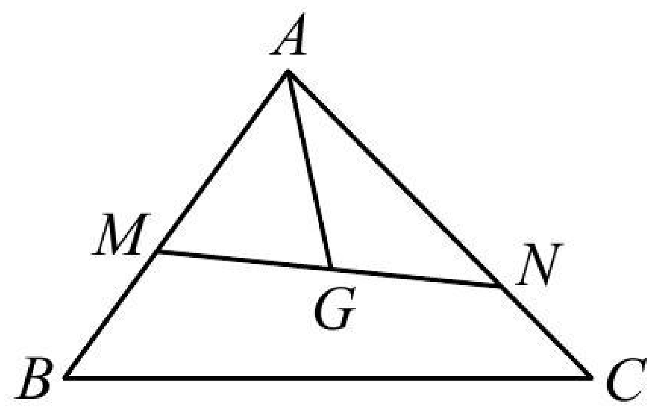
（A）$\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$　（B）$\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$　（C）$\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}-\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$　（D）$\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}-\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$

6.（2023 • 西安模拟 • ★★★）在平行四边形 $ABCD$ 中，$\overrightarrow{AE}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$，$\overrightarrow{CF}=\frac{1}{3}\overrightarrow{CD}$，则 $\overrightarrow{BA}=$（　　）

（A）$\frac{6}{5}\overrightarrow{AF}-\frac{9}{5}\overrightarrow{CE}$　（B）$\frac{2}{5}\overrightarrow{AF}-\frac{3}{5}\overrightarrow{CE}$　（C）$\frac{6}{5}\overrightarrow{AF}+\frac{9}{5}\overrightarrow{CE}$　（D）$\frac{2}{5}\overrightarrow{AF}+\frac{3}{5}\overrightarrow{CE}$

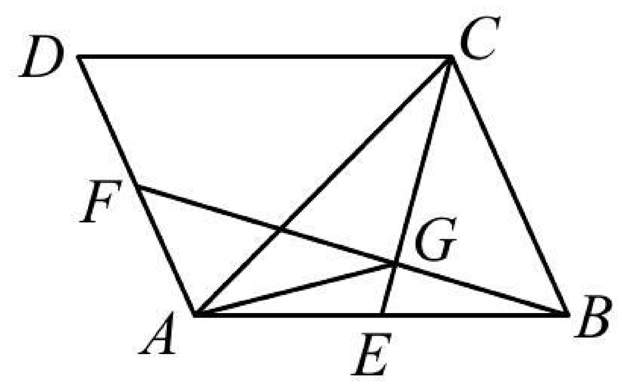
7.（2022 • 重庆模拟 • ★★★★）如图，已知点 G 是 ΔABC 的重心，过点 G 作直线分别与 AB，AC 两边交于 M，N 两点（M，N 与 B，C 不重合），设 $\overrightarrow{AB}=x\overrightarrow{AM}$，$\overrightarrow{AC}=y\overrightarrow{AN}$，则 $\frac{1}{x+1}+\frac{1}{y+1}$ 的最小值为（　　）

（A）$\frac{1}{2}$　（B）$\frac{2}{3}$　（C）$\frac{3}{4}$　（D）$\frac{4}{5}$



8．（2022 • 全国模拟 • ★★★★）在平行四边形 $ABCD$ 中，$\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{AE}$，$\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{FD}$，点 G 为 CE 与 BF 的交点，则 $\overrightarrow{AG}=$（　　）

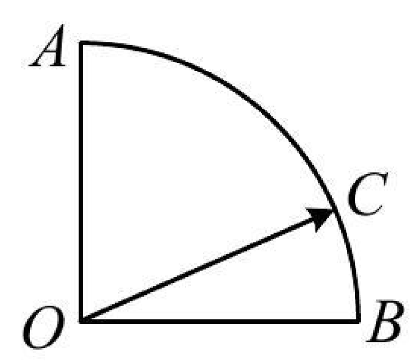
（A）$\frac{2}{5}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{5}\overrightarrow{AC}$　（B）$\frac{1}{5}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{5}\overrightarrow{AC}$　（C）$\frac{1}{5}\overrightarrow{AB}+\frac{4}{15}\overrightarrow{AC}$　（D）$\frac{3}{10}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{5}\overrightarrow{AC}$



点的位置.

类型 II：等和线的运用

9．（★★★）如图，在扇形 OAB 中，$\angle AOB=90^\circ$，C 为弧 AB 上的一个动点，若 $\overrightarrow{OC}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}$，则 $x+y$ 的最大值是_____.



10．（2023 • 山东模拟 • ★★★）已知等边三角形 ABC 的边长为 1，动点 P 满足 $\left|\overrightarrow{AP}\right|=1$，$\overrightarrow{AP}=\lambda\overrightarrow{AB}+\mu\overrightarrow{AC}$，则 $\lambda+\mu$ 的最小值为（　　）

（A）$-\sqrt{3}$　（B）$-\frac{2\sqrt{3}}{3}$　（C）0　（D）3