第 4 节 高考中椭圆常用的二级结论（★★★）

强化训练

1.（★★）设 F_1，F_2 是椭圆 $\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{4}=1$ 的两个焦点，点 P 在椭圆上，$\angle F_1PF_2=30^\circ$，则 ΔPF_1F_2 的面积为_____.

答案：$8-4\sqrt{3}$

解析：给出 $\angle F_1PF_2$，直接用 $S_{\Delta PF_1F_2}=b^2\tan\frac{\theta}{2}$ 求面积，

由题意，$S_{\Delta PF_1F_2}=4\tan 15^\circ=4\tan(60^\circ-45^\circ)=4\times\frac{\tan 60^\circ-\tan 45^\circ}{1+\tan 60^\circ\tan 45^\circ}=4\times\frac{\sqrt{3}-1}{1+\sqrt{3}}=8-4\sqrt{3}$.

2.（2023 •全国甲卷 •★★★）椭圆 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{6}=1$ 的两焦点为 F_1，F_2，O 为原点，P 为椭圆上一点，$\cos\angle F_1PF_2=\frac{3}{5}$，则 $|OP|=$（　　）

（A）$\frac{2}{5}$　（B）$\frac{\sqrt{30}}{2}$　（C）$\frac{3}{5}$　（D）$\frac{\sqrt{35}}{2}$

答案：B

解析：由题意，$a=3$，$b=\sqrt{6}$，$c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{3}$，

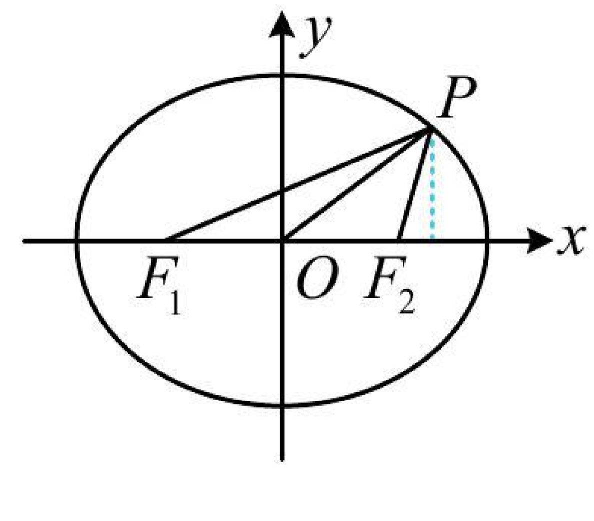
如图，已知 $\angle F_1PF_2$，可由焦点三角形面积公式求 $S_{\Delta PF_1F_2}$，而 $S_{\Delta PF_1F_2}=\frac{1}{2}|F_1F_2|\cdot y_P$，故可建立方程求 y_P，

记 $\angle F_1PF_2=\theta$，则由题意，$\cos\theta=\frac{3}{5}$，又 $\cos\theta=2\cos^2\frac{\theta}{2}-1$，所以 $2\cos^2\frac{\theta}{2}-1=\frac{3}{5}$，

结合 $\frac{\theta}{2}$ 为锐角可得 $\cos\frac{\theta}{2}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$，故 $\tan\frac{\theta}{2}=\frac{1}{2}$，所以 $S_{\Delta PF_1F_2}=b^2\tan\frac{\theta}{2}=3$，

又 $S_{\Delta PF_1F_2}=\frac{1}{2}|F_1F_2|\cdot|y_P|=\frac{1}{2}\times 2\sqrt{3}|y_P|=\sqrt{3}|y_P|$，所以 $\sqrt{3}|y_P|=3$，故 $|y_P|=\sqrt{3}$，

代入椭圆方程可求得 $|x_P|=\frac{3\sqrt{2}}{2}$，所以 $|OP|=\sqrt{x_P^2+y_P^2}=\frac{\sqrt{30}}{2}$.



3.（★★）椭圆 $\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{2}=1$ 的左、右焦点分别为 F_1、F_2，点 P 在椭圆上，则 $|PF_1|\cdot|PF_2|$ 的取值范围为_____.

答案：$[2,6]$

解析：涉及焦半径$|PF_1|$和$|PF_2|$，可用焦半径公式来算，

由题意，$a=\sqrt{6}$，$b=\sqrt{2}$，$c=\sqrt{a^2-b^2}=2$，椭圆的离心率$e=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$，

设$P(x_0,y_0)(-\sqrt{6}\le x_0\le\sqrt{6})$，则$|PF_1|=\sqrt{6}+\dfrac{\sqrt{6}}{3}x_0$，$|PF_2|=\sqrt{6}-\dfrac{\sqrt{6}}{3}x_0$，所以$|PF_1|\cdot|PF_2|=6-\dfrac{2}{3}x_0^2\in[2,6]$.

4.（2022·全国模拟·★★★）已知P是椭圆$C:\dfrac{x^2}{8}+\dfrac{y^2}{4}=1$在第一象限上的动点，$F_1$，$F_2$分别是其左、右焦点，$O$是坐标原点，则$\dfrac{|PF_1|-|PF_2|}{|OP|}$的取值范围是_____.

答案：$(0,\sqrt{2})$

解析：要求目标的范围，先设变量表示它. 由于有$|PF_1|$和$|PF_2|$，故考虑设P的坐标，用焦半径公式算它们，

由题意，$a=2\sqrt{2}$，$e=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，设$P(x_0,y_0)(0<x_0<2\sqrt{2})$，

则由焦半径公式，$|PF_1|=2\sqrt{2}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}x_0$，$|PF_2|=2\sqrt{2}-\dfrac{\sqrt{2}}{2}x_0$，

又$|OP|=\sqrt{x_0^2+y_0^2}$，所以$\dfrac{|PF_1|-|PF_2|}{|OP|}=\dfrac{\sqrt{2}x_0}{\sqrt{x_0^2+y_0^2}}=\sqrt{\dfrac{2x_0^2}{x_0^2+y_0^2}}$ ①，

有两个变量，可利用椭圆方程消元，y_0^2只出现一次，故消y_0^2，

因为P在椭圆C上，所以$\dfrac{x_0^2}{8}+\dfrac{y_0^2}{4}=1$，故$y_0^2=4-\dfrac{x_0^2}{2}$，

代入①得$\dfrac{|PF_1|-|PF_2|}{|OP|}=\sqrt{\dfrac{2x_0^2}{x_0^2+4-\dfrac{x_0^2}{2}}}=\sqrt{\dfrac{4x_0^2}{8+x_0^2}}$

$=\sqrt{\dfrac{4(x_0^2+8)-32}{8+x_0^2}}=\sqrt{4-\dfrac{32}{8+x_0^2}}$，

因为$0<x_0<2\sqrt{2}$，所以$0<x_0^2<8$，从而$2<\dfrac{32}{8+x_0^2}<4$，

故$0<\sqrt{4-\dfrac{32}{8+x_0^2}}<\sqrt{2}$，

所以$\dfrac{|PF_1|-|PF_2|}{|OP|}$的取值范围是$(0,\sqrt{2})$.

5.（2022·广西模拟·★★）已知椭圆$C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的左焦点为$F$，过$F$作倾斜角为$45^\circ$的直线与椭圆$C$交于$A$、$B$两点，若点$M(-3,2)$是线段$AB$的中点，则椭圆$C$的离心率是（　　）

（A）$\dfrac{\sqrt{3}}{3}$　（B）$\dfrac{1}{2}$　（C）$\dfrac{2}{5}$　（D）$\dfrac{\sqrt{5}}{5}$

答案：A

解析：涉及弦 AB 的中点，考虑中点弦斜率积结论，先计算直线 OM 和直线 AB 的斜率，

由题意，$k_{OM}=\dfrac{2-0}{-3-0}=-\dfrac{2}{3}$，$k_{AB}=\tan 45^{\circ}=1$，所以 $k_{OM}\cdot k_{AB}=-\dfrac{2}{3}$，

由中点弦斜率积结论，$k_{OM}\cdot k_{AB}=-\dfrac{b^2}{a^2}$，所以 $-\dfrac{b^2}{a^2}=-\dfrac{2}{3}$，故 $2a^2=3b^2=3(a^2-c^2)$，整理得：$\dfrac{c^2}{a^2}=\dfrac{1}{3}$，

所以椭圆 C 的离心率 $e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

6.（2023 •重庆模拟 •★★★）已知点 $A(-5,0)$，$B(5,0)$，动点 $P(m,n)$ 满足直线 PA，PB 的斜率之积为 $-\dfrac{16}{25}$，则 $4m^2+n^2$ 的取值范围是（　　）

（A）$[16,100]$　（B）$[25,100]$　（C）$[16,100)$　（D）$(25,100)$

答案：C

解析：看到 PA、PB 的斜率积为 $-\dfrac{16}{25}$，想到基于椭圆第三定义的斜率积结论，

由题意，点 P 在以 A，B 为左、右顶点的椭圆上，所以 $a=5$，又 $k_{PA}\cdot k_{PB}=-\dfrac{b^2}{a^2}=-\dfrac{16}{25}$，所以 $b^2=16$，

故点 $P(m,n)$ 在椭圆 $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{16}=1$ 上且不与 A，B 重合，所以 $\dfrac{m^2}{25}+\dfrac{n^2}{16}=1(m\neq\pm5)$，

可由此式反解出 n^2，代入 $4m^2+n^2$ 消去 n，故 $n^2=16-\dfrac{16}{25}m^2$，

所以 $4m^2+n^2=4m^2+16-\dfrac{16}{25}m^2=\dfrac{84}{25}m^2+16$ ①，

因为 $m\neq\pm5$，所以 $-5<m<5$，故 $0\le m^2<25$，结合①可得 $16\le 4m^2+n^2<100$.

7.（2022 • 河北模拟 • ★★★★）已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的离心率为 $\dfrac{1}{2}$，A、B 是椭圆 C 的长轴端点，直线 $x=m(-a<m<a)$ 与椭圆 C 交于 P、Q 两点，记 k_1，k_2 分别为直线 AP 和 BQ 的斜率，则 $|k_1+4k_2|$ 的最小值为（　　）

（A）$\dfrac{3}{4}$　（B）$\sqrt{3}$　（C）$2\sqrt{3}$　（D）$4\sqrt{2}$

答案：C

解析：给出离心率，可研究 a、b、c 的比值关系，$e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}=\dfrac{1}{2}\Rightarrow\dfrac{b^2}{a^2}=\dfrac{3}{4}$，

要求 $|k_1+4k_2|$ 的最小值，先找 k_1 和 k_2 的关系，如图，涉及椭圆上的点和左、右顶点，要分析斜率关系，想到第三定义斜率积结论，此处虽不能直接用，但可把 BQ 的斜率转化为 PB 的斜率再用，

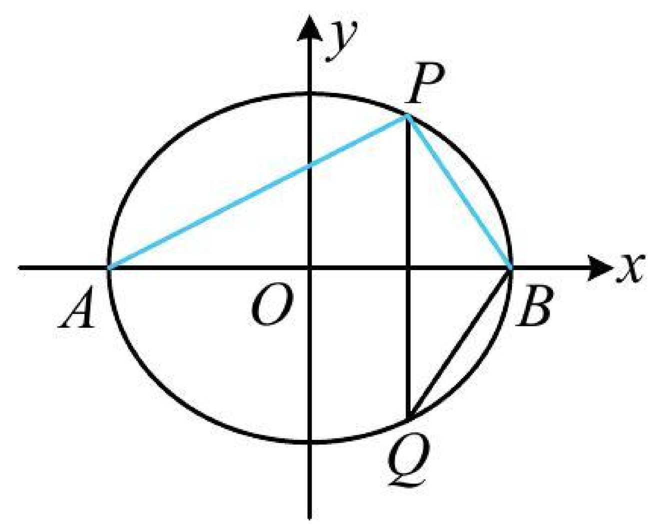
由对称性，$k_{PB}=-k_{BQ}=-k_2$，又 $k_{PA}\cdot k_{PB}=-\dfrac{b^2}{a^2}=-\dfrac{3}{4}$，所以 $k_1\cdot(-k_2)=-\dfrac{3}{4}$，故 $k_1k_2=\dfrac{3}{4}$，

接下来可用均值不等式求最小值，但此处 k_1，k_2 不一定为正，故先对 $|k_1+4k_2|$ 变形，

由 $k_1k_2>0$ 知 k_1， k_2 同号，所以 $|k_1+4k_2|=|k_1|+|4k_2|\ge 2\sqrt{|k_1|\cdot|4k_2|}=4\sqrt{|k_1k_2|}=2\sqrt{3}$，

当且仅当 $|k_1|=|4k_2|$ 时等号成立，结合 $k_1k_2=\frac{3}{4}$ 可得此时 $k_1=\sqrt{3}$， $k_2=\frac{\sqrt{3}}{4}$ 或 $k_1=-\sqrt{3}$， $k_2=-\frac{\sqrt{3}}{4}$，

所以 $|k_1+4k_2|$ 的最小值为 $2\sqrt{3}$.



8.（2022 • 蚌埠模拟 • ★★★★）若椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{4}=1(a>2)$ 上存在 $A(x_1,y_1)$， $B(x_2,y_2)(x_1\ne x_2)$ 到点 $P(\frac{a}{5},0)$ 的距离相等，则椭圆 C 的离心率的取值范围是（　　）

（A） $(0,\frac{\sqrt{5}}{5})$　　（B） $(\frac{\sqrt{5}}{5},1)$　　（C） $(0,\frac{\sqrt{3}}{3})$　　（D） $(\frac{\sqrt{3}}{3},1)$

答案：B

解析：如图，由 $|PA|=|PB|$ 想到中垂线，故涉及弦中点，考虑中点弦斜率积结论，先设中点坐标，

设 AB 中点为 $M(x_0,y_0)$，由题意，M 在椭圆内部，且不在坐标轴上，所以 $-a<x_0<a$ 且 $x_0\ne 0$， $y_0\ne 0$，

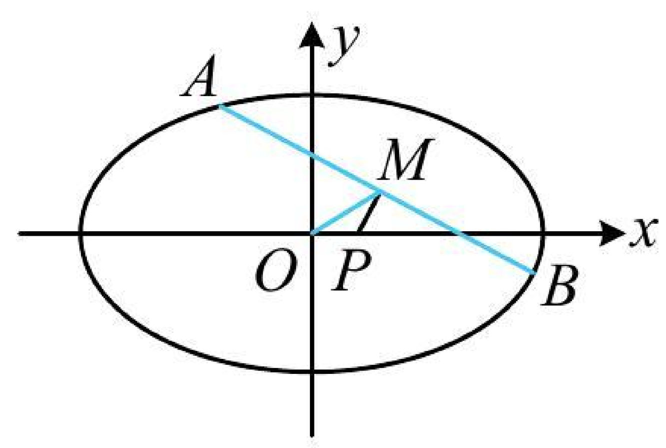
接下来先由斜率积结论建立 x_0 和 a 之间的关系，再结合 $-a<x_0<a$ 来求 a 的范围，

$k_{OM}=\frac{y_0}{x_0}$， $k_{PM}=\frac{y_0}{x_0-\frac{a}{5}}$，因为 PM 是 AB 的中垂线，所以 $k_{AB}=-\frac{x_0-\frac{a}{5}}{y_0}$，

由中点弦斜率积结论， $k_{OM}\cdot k_{AB}=\frac{y_0}{x_0}\cdot(-\frac{x_0-\frac{a}{5}}{y_0})=-\frac{4}{a^2}$，整理得： $x_0=\frac{a^3}{5(a^2-4)}$，

代入 $-a<x_0<a$ 可得： $-a<\frac{a^3}{5(a^2-4)}<a$，结合 $a>2$ 可得 $a>\sqrt{5}$，

所以椭圆 C 的离心率 $e=\frac{\sqrt{a^2-4}}{a}=\sqrt{\frac{a^2-4}{a^2}}=\sqrt{1-\frac{4}{a^2}}>\frac{\sqrt{5}}{5}$，又 $0<e<1$，所以 $\frac{\sqrt{5}}{5}<e<1$.



【反思】有时中点弦是隐含的，例如本题由 $|PA|=|PB|$ 联想到中垂线，故取 AB 中点，才发现有中点弦.