模块二 圆与方程

第 1 节 圆的方程（★☆）

内容提要

1．圆的方程

①标准方程：$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2(r>0)$，其中圆心为(a,b)，半径为r.

②一般方程：$x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$，其中$D^2+E^2-4F>0$.

2．求圆的方程常用三种方法：

①设一般式方程$x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$，建立关于系数D，E，F的方程组，解方程组. 当已知圆上三点时，常用这种方法.

②设圆心，利用圆心到圆上点的距离都等于半径建立方程求圆心. 已知圆心性质时常用此法.

③找圆心（弦的中垂线过圆心）、求半径.

3．点与圆的位置关系：设$P(x_0,y_0)$，圆$C:(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$（或$x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$），

①点P在圆C外$\Leftrightarrow(x_0-a)^2+(y_0-b)^2>r^2$（或$x_0^2+y_0^2+Dx_0+Ey_0+F>0$）；

②点P在圆C上$\Leftrightarrow(x_0-a)^2+(y_0-b)^2=r^2$（或$x_0^2+y_0^2+Dx_0+Ey_0+F=0$）；

③点P在圆C内$\Leftrightarrow(x_0-a)^2+(y_0-b)^2<r^2$（或$x_0^2+y_0^2+Dx_0+Ey_0+F<0$）.

典型例题

类型Ⅰ：圆的方程中的系数条件

【例 1】若方程$x^2+y^2+6x+m=0$表示一个圆，则m的取值范围是（　　）

（A）$(-\infty,9)$　　（B）$(-\infty,-9)$　　（C）$(9,+\infty)$　　（D）$(-9,+\infty)$

解析：用$D^2+E^2-4F>0$求解m的范围即可，方程$x^2+y^2+6x+m=0$表示圆$\Rightarrow 6^2-4m>0\Rightarrow m<9$.

答案：A

【变式】若点$P(-1,2)$在圆$C:x^2+y^2-2x+4y+k=0$的外部，则实数k的取值范围是（）

（A）$(-5,5)$　　（B）$(-15,5)$　　（C）$(-\infty,-15)\cup(5,+\infty)$　　（D）$(-15,2)$

解析：点$P(-1,2)$在圆C外部$\Rightarrow(-1)^2+2^2-2\times(-1)+4\times2+k>0$，解得：$k>-15$ ①，

还需考虑圆C的方程本身对k的要求，方程$x^2+y^2-2x+4y+k=0$表示圆，应有$(-2)^2+4^2-4k>0$，

解得：$k<5$，结合①可得$k\in(-15,5)$.

答案：B

【反思】当圆的方程中含参时，不要忘了考虑圆的方程本身对参数的要求.

类型Ⅱ：求圆的方程

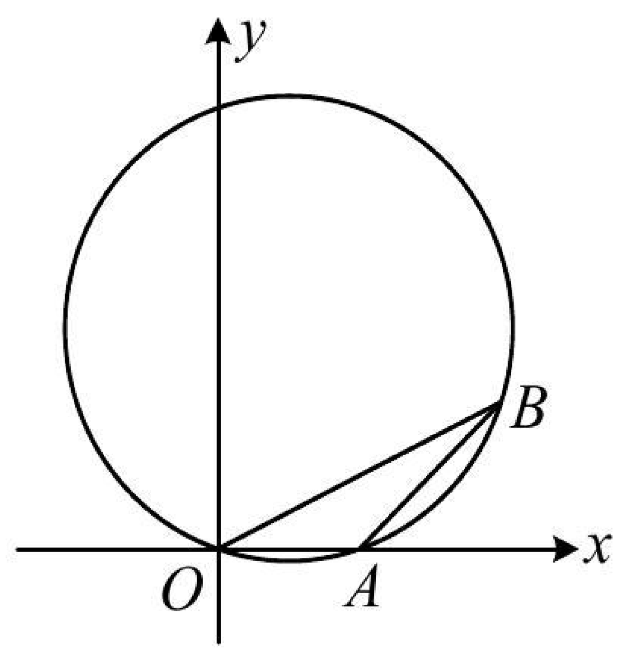
【例 2】已知$A(2,0)$，$B(4,2)$，O为原点，则ΔAOB的外接圆的方程为_____.

解析：如图，已知圆上三点，可设一般式方程，把点代入建立方程组求解系数，

设 ΔAOB 外接圆的方程为 $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$，将 A、B、O 的坐标代入可得 $\begin{cases}4+2D+F=0\\20+4D+2E+F=0\\F=0\end{cases}$，

解得：$\begin{cases}D=-2\\E=-6\\F=0\end{cases}$，所以 ΔAOB 外接圆的方程为 $x^2+y^2-2x-6y=0$.

答案： $x^2+y^2-2x-6y=0$



【例 3】（2022·全国甲卷）设点 M 在直线 $2x+y-1=0$ 上，点 $(3,0)$ 和 $(0,1)$ 均在⊙M 上，则⊙M 的方程为_____.

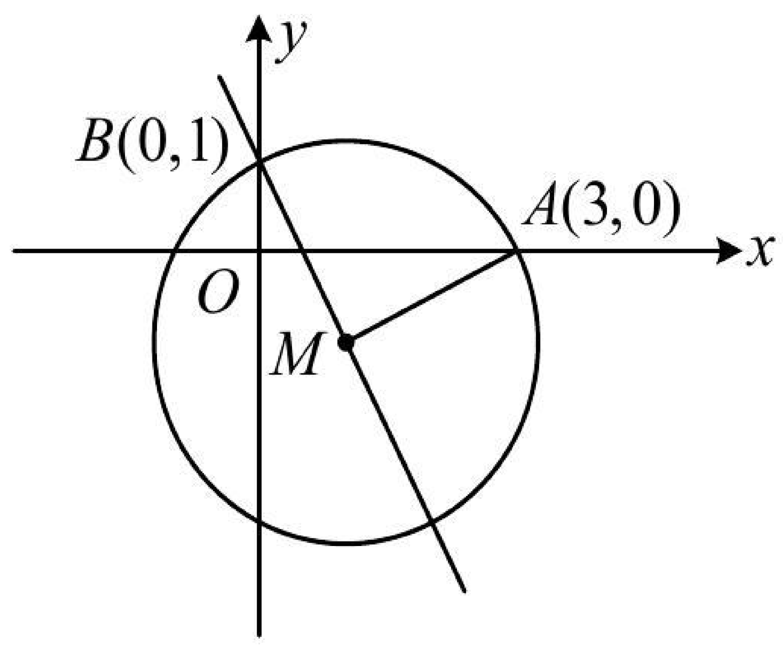
解析： $2x+y-1=0\Rightarrow y=1-2x$，由题意，圆心 M 在直线 $y=1-2x$ 上，故可设 $M(a,1-2a)$，

要求圆心坐标，可用 M 与所给圆上两点的距离相等来建立关于 a 的方程，

如图，$|MA|=|MB|$，所以 $\sqrt{(a-3)^2+(1-2a)^2}=\sqrt{a^2+[1-(1-2a)]^2}$，解得：$a=1$，故圆心为 $(1,-1)$，

半径 $r=|MA|=\sqrt{(1-3)^2+(-1-0)^2}=\sqrt{5}$，所以⊙$M$ 的方程为 $(x-1)^2+(y+1)^2=5$.

答案： $(x-1)^2+(y+1)^2=5$



【例 4】过点 $A(0,-1)$，且与直线 $l:x-y-3=0$ 相切于点 $B(2,-1)$ 的圆的方程为_____.

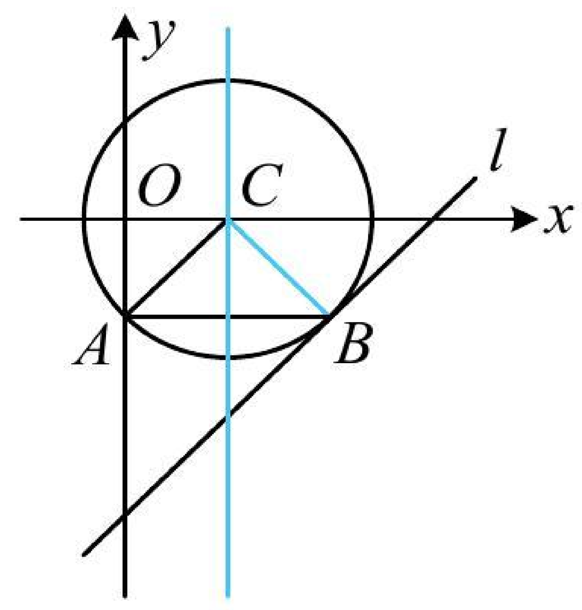
解析： 先找圆心，如图，圆心应在过 B 且与 l 垂直的直线上，也在 AB 的中垂线上，故圆心是它们的交点，

由题意，过 B 且与 l 垂直的直线为 $y-(-1)=-(x-2)$，即 $x+y-1=0$，

线段 AB 的中垂线为 $x=1$，联立 $\begin{cases}x+y-1=0\\x=1\end{cases}$ 解得：$\begin{cases}x=1\\y=0\end{cases}$，所以圆心为 $C(1,0)$，

半径 $r=|CA|=\sqrt{2}$，故所求圆的方程为 $(x-1)^2+y^2=2$.

答案： $(x-1)^2+y^2=2$



【总结】求圆的方程常用三种方法：①设圆的一般式方程，并建立关于系数的方程组，已知圆上三点常用此法；②利用圆上点到圆心距离为半径列方程，已知圆心坐标性质时常用此法；③利用弦的中垂线过圆心来找圆心，再求半径.

强化训练

1.（2022·广州三模·★）设甲：实数$a<3$；乙：方程$x^2+y^2-x+3y+a=0$是圆，则甲是乙的（　　）

（A）充分不必要条件　（B）必要不充分条件　（C）充要条件　（D）既不充分也不必要条件

2.（2022·西安模拟·★）已知$a\in\mathbf{R}$，方程$a^2x^2+(a+2)y^2+2x+8y+5a=0$表示圆，则圆心坐标是_____.

3.（2022·河南模拟·★★）已知点$A(1,2)$在圆$C:x^2+y^2+mx-2y+2=0$外，则实数m的取值范围是（　　）

（A）$(-3,-2)\cup(2,+\infty)$　（B）$(-3,-2)\cup(3,+\infty)$　（C）$(-2,+\infty)$　（D）$(-3,+\infty)$

4.（2022·全国乙卷·★）过四点$(0,0)$，$(4,0)$，$(-1,1)$，$(4,2)$中的三点的一个圆的方程为_____.

5.（★★）过点$A(1,-1)$，$B(-1,1)$，且圆心在直线$x+y-2=0$上的圆的方程为_____.

6.（2023·河南模拟改·★★）过$P(-2,-1)$且与两坐标轴都相切的圆的方程为_____.

7．（★★）已知点 $B(1,0)$，直线 $l:x=-1$，点 C 在 l 上，以 C 为圆心的圆与 y 轴的正半轴相切于点 A，若 $\angle BAC=120°$，则圆的方程为_____.

8.（2022 • 浙江模拟 • ★★★）在平面直角坐标系中，第一象限内的点 A 在直线 $l:y=2x$ 上，$B(5,0)$，以 AB 为直径的圆 C 与直线 l 的另一个交点为 D，若 $AB\perp CD$，则圆 C 的方程为_____.