第 4 节 圆与圆的位置关系（★★☆）

强化训练

1．（2022·十堰模拟·★★）当圆 $C:x^2+y^2-4x+2ky+2k=0$ 的面积最小时，圆 C 与圆 $O:x^2+y^2=1$ 的位置关系是_____.

答案：相交

解析：圆的面积最小即半径最小，先把圆 C 化为标准方程，看看半径何时最小，

$x^2+y^2-4x+2ky+2k=0\Rightarrow(x-2)^2+(y+k)^2=k^2-2k+4\Rightarrow$ 圆 C 的半径 $r=\sqrt{k^2-2k+4}=\sqrt{(k-1)^2+3}$，

故当 $k=1$ 时，r 最小，此时圆 C 的圆心为 $C(2,-1)$，半径 $r=\sqrt{3}$，

又圆 O 的圆心为 $O(0,0)$，半径 $r'=1$，所以 $|OC|=\sqrt{5}$，

因为 $\sqrt{3}-1<\sqrt{5}<\sqrt{3}+1$，所以 $|r-r'|<|OC|<r+r'$，故两圆相交.

2．（2022·新余模拟·★★）已知圆 $C:x^2+y^2-2ax+a^2-1=0$ 与圆 $O:x^2+y^2=4$ 有且仅有两条公切线，则正实数 a 的取值范围是（　　）

（A）$(0,1)$　　（B）$(0,3)$　　（C）$(1,3)$　　（D）$(3,+\infty)$

答案：C

解析：公切线条数可翻译成两圆的位置关系，两圆有两条公切线 $\Leftrightarrow$ 两圆相交，

可由 $|r_1-r_2|<|OC|<r_1+r_2$ 来求 a 的范围，先计算 $|OC|$，

$x^2+y^2-2ax+a^2-1=0\Rightarrow(x-a)^2+y^2=1$，所以圆 C 的圆心为 $(a,0)$，半径 $r_1=1$，圆 O 的半径 $r_2=2$，

由题意，$a>0$，所以 $|OC|=a$，故 $|r_1-r_2|<|OC|<r_1+r_2$ 即为 $1<a<3$.

3．（★★）若圆 $O:x^2+y^2=1$ 与圆 $C:x^2+y^2-2\sqrt{3}x-2y+m=0$ 相切，则实数 m 的值为_____.

答案：3 或 -5

解析：由题意，圆 O 的圆心为原点，半径 $r_1=1$，$x^2+y^2-2\sqrt{3}x-2y+m=0\Rightarrow(x-\sqrt{3})^2+(y-1)^2=4-m$，

所以圆 C 的圆心为 $C(\sqrt{3},1)$，半径 $r_2=\sqrt{4-m}(m<4)$，从而 $|OC|=\sqrt{(\sqrt{3})^2+1^2}=2$，

两圆相切，有外切和内切两种情况，需分别考虑，

若两圆外切，如图 1，应有 $|OC|=r_1+r_2$，所以 $2=1+\sqrt{4-m}$，解得：$m=3$；

若两圆内切，如图 2，应有 $|OC|=r_2-r_1$，所以 $2=\sqrt{4-m}-1$，解得：$m=-5$；

综上所述，实数 m 的值为 3 或 -5.

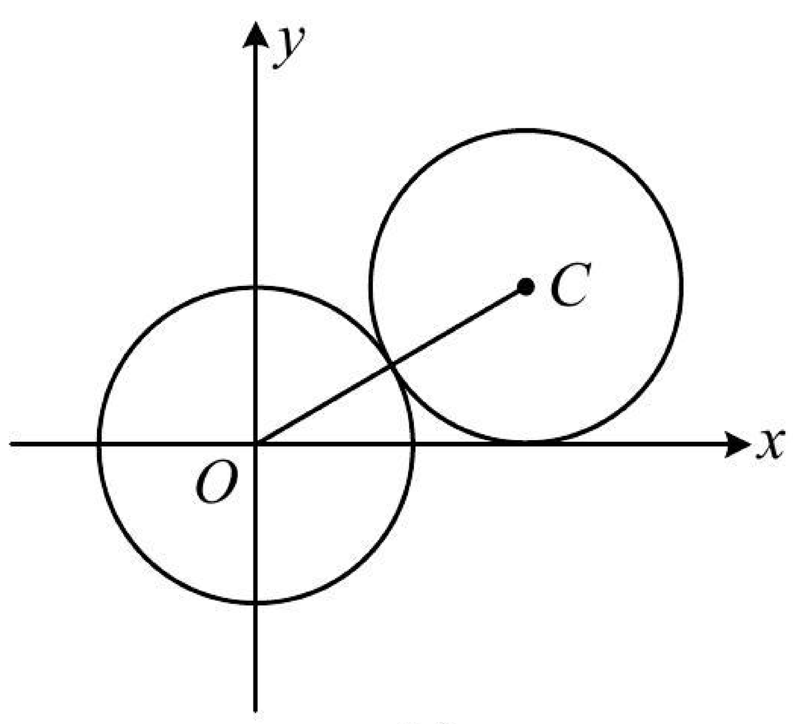


图1

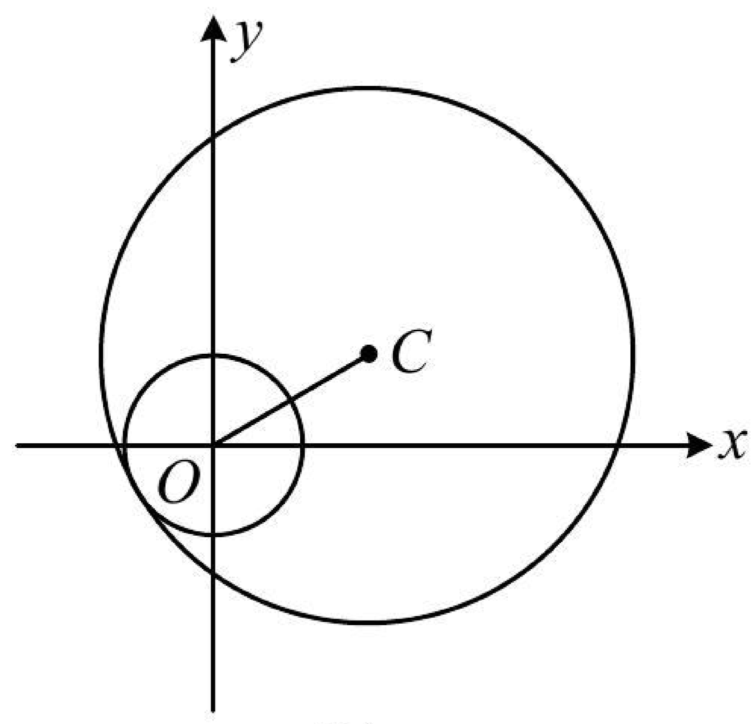


图2

4.（★★）已知圆 $C_1: x^2+y^2-kx-2y=0$ 和圆 $C_2: x^2+y^2-2ky-2=0$ 相交，则圆 C_1 和圆 C_2 的公共弦所在的直线过的定点是（　　）

（A）$(2,2)$　　（B）$(2,1)$　　（C）$(1,2)$　　（D）$(1,1)$

答案：B

解析：求出两圆公共弦所在直线的方程，即可找到定点，

由两圆方程作差得：$-kx-2y+2ky+2=0$，整理得：$k(2y-x)+(2-2y)=0$，

令 $\begin{cases}2y-x=0\\2-2y=0\end{cases}$ 解得：$\begin{cases}x=2\\y=1\end{cases}$，所以两圆公共弦所在直线过定点 $(2,1)$.

5.（★★★）已知圆 $C_1: x^2+y^2-2x+4y+4=0$，圆 $C_2: x^2+y^2+x-y-m^2=0(m>0)$，若圆 C_2 平分圆 C_1 的圆周，则正数 m 的值为（　　）

（A）3　（B）2　（C）4　（D）1

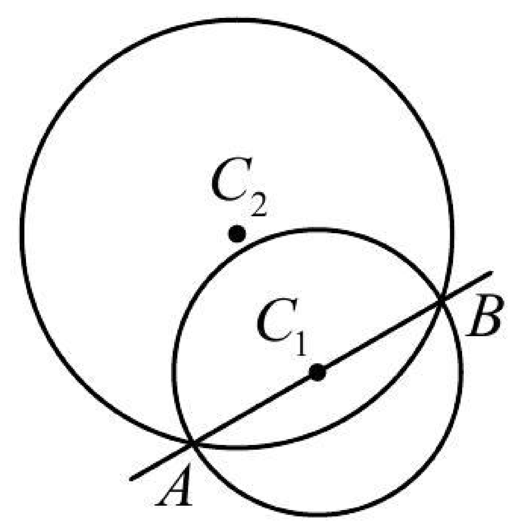
答案：A

解析：$x^2+y^2-2x+4y+4=0 \Rightarrow (x-1)^2+(y+2)^2=1$，所以圆 C_1 的圆心为 $C_1(1,-2)$，

如图，圆 C_2 平分圆 C_1 的圆周，即两圆的公共弦 AB 过 C_1，于是先求公共弦方程，

用两圆方程作差整理得公共弦所在直线的方程为 $3x-5y-4-m^2=0$，

将 $C_1(1,-2)$ 代入上式可得：$3-5\times(-2)-4-m^2=0$，结合 $m>0$ 可得 $m=3$.



6.（★★★）已知圆 $M:(x-2)^2+(y-2)^2=8$，圆 $N:(x-3)^2+(y-3)^2=2$，若直线 l 与圆 M 和圆 N 都相切，则直线 l 的方程为_____.

答案：$x+y-8=0$

解法 1：公切线的条数由两圆的位置关系决定，故先判断两圆的位置关系，确定公切线有几条，

由题意，$M(2,2)$，$N(3,3)$，$r_1=2\sqrt{2}$，$r_2=\sqrt{2} \Rightarrow |MN|=\sqrt{(3-2)^2+(3-2)^2}=\sqrt{2}=|r_1-r_2| \Rightarrow$ 两圆内切，

所以两圆有且仅有 1 条公切线，如图中的 l，显然 l 的斜率存在，设其方程为 $y=kx+b$，即 $kx-y+b=0$，

可利用圆心 M、N 到 l 的距离等于各自的半径来建立方程组求解 k 和 b，

所以$\begin{cases}\dfrac{|2k-2+b|}{\sqrt{k^2+1}}=2\sqrt{2} & ① \\ \dfrac{|3k-3+b|}{\sqrt{k^2+1}}=\sqrt{2} & ②\end{cases}$，从而$|2k-2+b|=2|3k-3+b|$，

故$2k-2+b=2(3k-3+b)$或$2k-2+b=-2(3k-3+b)$，整理得：$b=4-4k$或$b=-\dfrac{8}{3}k+\dfrac{8}{3}$，

若$b=4-4k$，代入①解得：$k=-1$，所以$b=8$，故公切线l的方程为$y=-x+8$，即$x+y-8=0$；

若$b=-\dfrac{8}{3}k+\dfrac{8}{3}$，代入①整理得：$17k^2+2k+17=0$，无解；

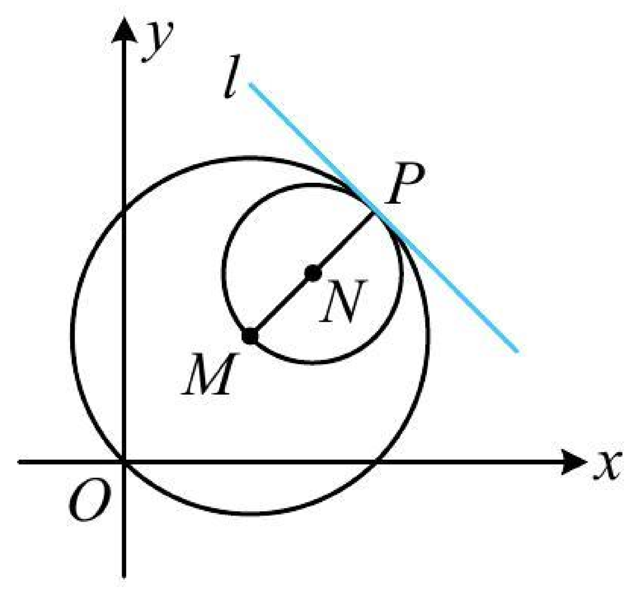
综上所述，直线l的方程为$x+y-8=0$.

解法 2：判断两圆位置关系的过程同解法 1，要求l的方程，也可由$MN\perp l$求斜率，再求点P的坐标，

直线MN的斜率$k=\dfrac{3-2}{3-2}=1$，所以公切线l的斜率为-1，

直线MN的方程为$y-2=x-2$，即$y=x$，联立$\begin{cases}y=x \\ (x-2)^2+(y-2)^2=8\end{cases}$解得：$\begin{cases}x=4 \\ y=4\end{cases}$或$\begin{cases}x=0 \\ y=0\end{cases}$，

由图可知$P(4,4)$，所以直线l的方程为$y-4=-(x-4)$，整理得：$x+y-8=0$.



【反思】求公切线，除了设$y=kx+b$，用两圆圆心到公切线距离等于各自半径建立方程组解k和b的方法外，在两圆内切的条件下，也可直接求切点和斜率.

7.（2020 • 浙江卷 • ★★★）设直线$l:y=kx+b(k>0)$，圆$C_1:x^2+y^2=1$，$C_2:(x-4)^2+y^2=1$，若直线l与C_1、C_2都相切，则$k=$_____，$b=$_____.

答案：$\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，$-\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

解析：先画图看两圆的位置关系，如图，两圆相离，有 4 条公切线，

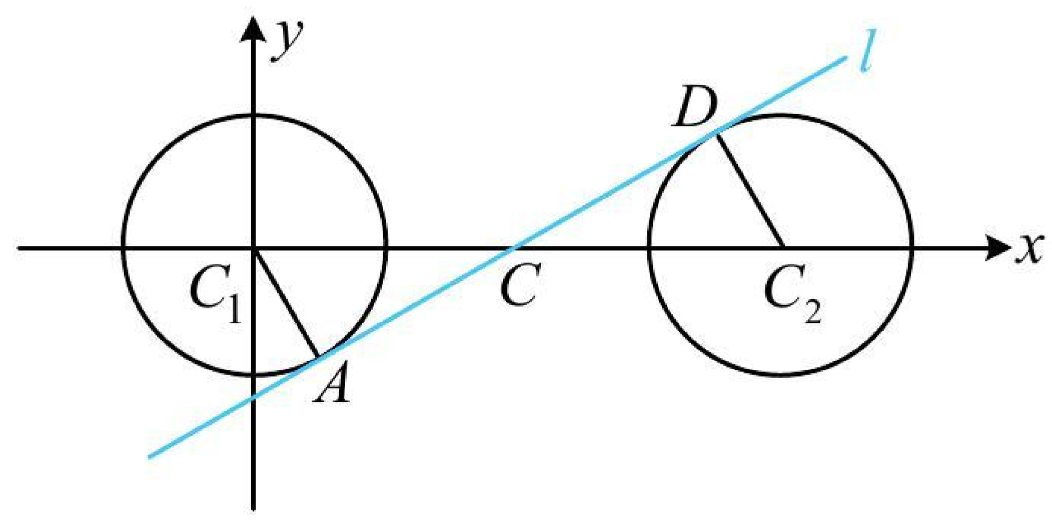
又$k>0$，所以我们要求的是图中蓝线，注意到$k=\tan\angle DCC_2$，故尝试算出ΔDCC_2的三边长，快速求出k，

如图，$\begin{cases}\angle CAC_1=\angle CDC_2=90^\circ \\ \angle ACC_1=\angle DCC_2 \\ |AC_1|=|DC_2|=1\end{cases}\Rightarrow\Delta ACC_1\cong\Delta DCC_2$，所以$|CC_1|=|CC_2|$，故$C$为$C_1C_2$中点，

由题意，$C_1(0,0)$，$C_2(4,0)$，所以$|CC_2|=2$，从而$|CD|=\sqrt{|CC_2|^2-|DC_2|^2}=\sqrt{3}$，

故直线l的斜率$k=\tan\angle DCC_2=\dfrac{|DC_2|}{|CD|}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，此时若再求出$C$的坐标，就可写出$l$的方程，求得$b$，

由 C 为 C_1C_2 中点知 $C(2,0)$，所以 l 的方程为 $y=\frac{\sqrt{3}}{3}(x-2)$，即 $y=\frac{\sqrt{3}}{3}x-\frac{2\sqrt{3}}{3}$，故 $b=-\frac{2\sqrt{3}}{3}$.



【反思】本题当然也可由 C_1、C_2 到 l 的距离都等于 1 来建立方程组求解 k 和 b，但此法计算量大，所以在图形比较特殊的情况下，运用几何关系来计算公切线更简单.

8.（★★★）若圆 $C_1:x^2+y^2+2\sqrt{m}x+m-4=0(m>0)$ 和 $C_2:x^2+y^2-4\sqrt{n}y-1+4n=0(n>0)$ 恰有三条公切线，则 $\frac{1}{m}+\frac{1}{n}$ 的最小值为（　　）

（A）$\frac{1}{9}$　　（B）$\frac{4}{9}$　　（C）1　　（D）3

答案：C

解析：$x^2+y^2+2\sqrt{m}x+m-4=0\Rightarrow(x+\sqrt{m})^2+y^2=4\Rightarrow C_1(-\sqrt{m},0)$，半径 $r_1=2$，

$x^2+y^2-4\sqrt{n}y-1+4n=0\Rightarrow x^2+(y-2\sqrt{n})^2=1\Rightarrow C_2(0,2\sqrt{n})$，半径 $r_2=1$，

要求 $\frac{1}{m}+\frac{1}{n}$ 的最小值，可先把公切线的条数翻译成两圆的位置关系，寻找 m 和 n 满足的条件，

两圆有三条公切线 $\Rightarrow$ 两圆外切 $\Rightarrow|C_1C_2|=r_1+r_2$，

又 $|C_1C_2|=\sqrt{(-\sqrt{m}-0)^2+(0-2\sqrt{n})^2}=\sqrt{m+4n}$，所以 $\sqrt{m+4n}=3$，故 $m+4n=9$，

接下来可用常数代换法凑成积为定值，利用均值不等式来求 $\frac{1}{m}+\frac{1}{n}$ 的最小值，

$$\frac{1}{m}+\frac{1}{n}=\frac{9}{9m}+\frac{9}{9n}=\frac{m+4n}{9m}+\frac{m+4n}{9n}=\frac{1}{9}+\frac{4n}{9m}+\frac{m}{9n}+\frac{4}{9}=\frac{4n}{9m}+\frac{m}{9n}+\frac{5}{9}\geq 2\sqrt{\frac{4n}{9m}\cdot\frac{m}{9n}}+\frac{5}{9}=1,$$

当且仅当 $\frac{4n}{9m}=\frac{m}{9n}$ 时取等号，结合 $m+4n=9$ 可得此时 $m=3$，$n=\frac{3}{2}$，所以 $\frac{1}{m}+\frac{1}{n}$ 的最小值为 1.