第 2 节 直线与圆的位置关系（★★）

强化训练

1.（2022 • 温州模拟 • ★）已知直线$kx-y+k-1=0$与圆$(x-2)^2+y^2=1$有两个不同的交点，则实数 k 的取值范围是（　　）

（A）$[-\frac{3}{4},0]$　　（B）$(0,\frac{3}{4})$　　（C）$[0,\frac{3}{4}]$　　（D）$(-\frac{3}{4},0)$

答案： B

解析： 直线与圆有两个交点可翻译成$d<r$，故先求 d，

圆心$(2,0)$到所给直线的距离$d=\frac{|2k+k-1|}{\sqrt{k^2+(-1)^2}}=\frac{|3k-1|}{\sqrt{k^2+1}}$，$r=1$，由题意，$\frac{|3k-1|}{\sqrt{k^2+1}}<1$，解得：$0<k<\frac{3}{4}$.

2.（2022 •西安模拟 •★★）圆$C:x^2+y^2-4x+2y+1=0$与直线$l:y-2tx+2t-1=0(t\in\mathbf{R})$的位置关系为（　　）

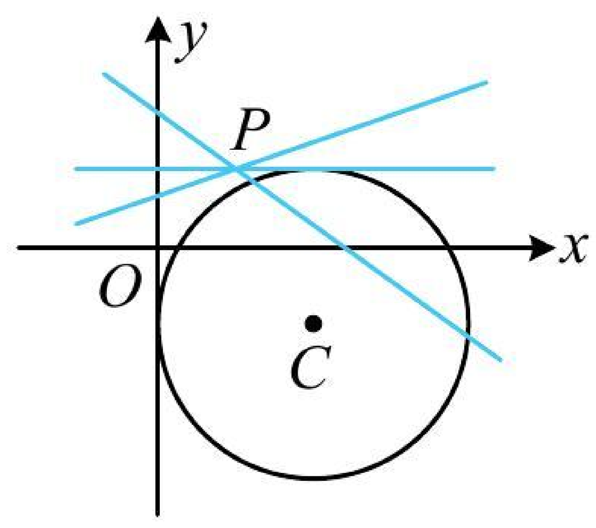
（A）相切　（B）相离　（C）相交　（D）与 t 有关

答案： D

解析： 直线含参，先看是否过定点，$y-2tx+2t-1=0\Rightarrow y-1-2t(x-1)=0\Rightarrow$直线 l 过定点 $P(1,1)$，

点 P 与圆 C 的位置关系决定直线 l 与圆 C 可能的位置关系，故将 P 代入圆 C 的方程来看，

因为$1^2+1^2-4\times1+2\times1+1=1>0$，所以点 P 在圆 C 外，如图，l 与圆 C 的位置关系不确定，与 t 有关.



【反思】对于定圆 C，当直线 l 绕定点 P 旋转时：①若 P 在圆 C 内，则直线 l 与圆 C 必定相交；②若 P 在圆 C 上，则直线 l 与圆 C 相切或相交；③若 P 在圆 C 外，则直线 l 与圆 C 相离、相切或相交均有可能.

3.（2022 •呼和浩特模拟 •★★）已知直线$l:x+3y+5=0$与圆$C:x^2+y^2+2x-4y-20=0$相交于 A、B 两点，若该圆的一条直径过弦 AB 的中点，则这条直径所在直线的方程为（　　）

（A）$3x+y+1=0$　（B）$3x-y+3=0$　（C）$3x-y+5=0$　（D）$x+3y-5=0$

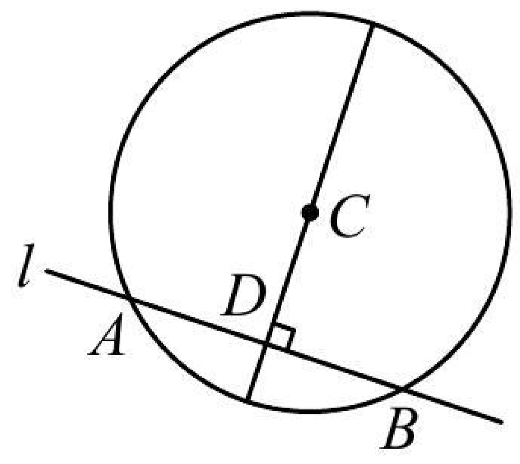
答案： C

解析： $x^2+y^2+2x-4y-20=0\Rightarrow(x+1)^2+(y-2)^2=25\Rightarrow$圆心为$C(-1,2)$，

有了一个点，求直线还差斜率，涉及弦中点，可由垂径定理构建垂直关系来算斜率，

如图，设 AB 中点为 D，则$CD\perp l$，$x+3y+5=0\Rightarrow y=-\frac{1}{3}x-\frac{5}{3}\Rightarrow$直线 l 的斜率为$-\frac{1}{3}$，

所以直线 CD 的斜率为 3，结合$C(-1,2)$可得直线 CD 的方程为$y-2=3[x-(-1)]$，整理得：$3x-y+5=0$.



4.（2020·天津卷·★★）已知直线 $x-\sqrt{3}y+8=0$ 和圆 $x^2+y^2=r^2(r>0)$ 相交于 A，B 两点，若 $|AB|=6$，则 r 的值为_____.

答案： 5

解析： 涉及弦长，用公式 $L=2\sqrt{r^2-d^2}$ 处理，先求 d，由题意，圆心到直线的距离 $d=\dfrac{|8|}{\sqrt{1^2+(-\sqrt{3})^2}}=4$，

所以 $|AB|=2\sqrt{r^2-d^2}=2\sqrt{r^2-16}$，因为 $|AB|=6$，所以 $2\sqrt{r^2-16}=6$，结合 $r>0$ 可得 $r=5$.

5.（★★）设圆 $C:x^2+y^2-2x-2y-2=0$，直线 l 过点 $(0,3)$ 且被圆 C 截得的弦长为 $2\sqrt{3}$，则 l 的方程为_____.

答案： $x=0$ 或 $3x+4y-12=0$

解析： $x^2+y^2-2x-2y-2=0\Rightarrow(x-1)^2+(y-1)^2=4$，所以圆 C 的圆心为 $(1,1)$，半径 $r=2$，

弦长 $L=2\sqrt{r^2-d^2}=2\sqrt{3}\Rightarrow$ 圆心 C 到 l 的距离 $d=1$，

l 过点 $(0,3)$，求方程还差斜率，先考虑斜率不存在的情况，

当 $l\perp x$ 轴时，其方程为 $x=0$，满足题意；

当 l 斜率存在时，设其方程为 $y=kx+3$，即 $kx-y+3=0$，

此时 $d=\dfrac{|k-1+3|}{\sqrt{k^2+(-1)^2}}=\dfrac{|k+2|}{\sqrt{k^2+1}}$，所以 $\dfrac{|k+2|}{\sqrt{k^2+1}}=1$，解得：$k=-\dfrac{3}{4}$，

故直线 l 的方程为 $y=-\dfrac{3}{4}x+3$，整理得：$3x+4y-12=0$.

6.（★★）圆 $C:x^2+y^2+2y-3=0$ 被直线 $l:x+y-k=0$ 分成长度之比为 $1:3$ 的两段圆弧，则实数 $k=$_____.

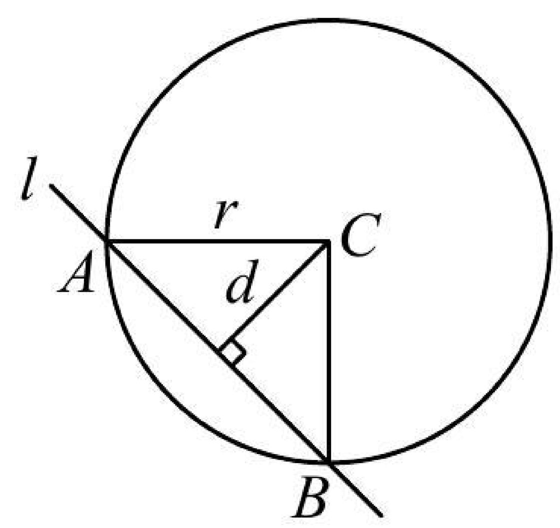
答案： -3 或 1

解析： $x^2+y^2+2y-3=0\Rightarrow x^2+(y+1)^2=4$，所以圆心为 $C(0,-1)$，半径 $r=2$，

两段圆弧的比例决定了圆心角，圆心角又与圆心到直线的距离 d 有关，故可由此求出 d，

如图，l 把圆 C 分成 $1:3$ 的两段圆弧 $\Rightarrow\angle ACB=90^\circ\Rightarrow\Delta ABC$ 为等腰直角三角形，所以 $d=\dfrac{\sqrt{2}}{2}r=\sqrt{2}$，

又 $d=\dfrac{|-1-k|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\dfrac{|1+k|}{\sqrt{2}}$，所以 $\dfrac{|1+k|}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$，解得：$k=-3$ 或 1.



7.（2022·洛宁月考·★★★）若关于 y 的方程 $y-b=\sqrt{1-y^2}$ 恰有 1 个实数解，则实数 b 的取值范围是（　　）

（A）$[-\sqrt{2},\sqrt{2}]$　（B）$[-1,\sqrt{2}]$　（C）$(-1,1]\cup\{\sqrt{2}\}$　（D）$(-1,1]\cup\{-\sqrt{2}\}$

答案：D

解析：我们习惯于用 x 表示方程的未知数，故不妨先把所给方程中的 y 都换成 x，

问题等价于关于 x 的方程 $x-b=\sqrt{1-x^2}$ 恰有 1 个实数解，

可数形结合，作出两边代数式对应的图象，即可转化为直线 $l: y=x-b$ 与曲线 $y=\sqrt{1-x^2}$ 恰有 1 个交点，曲线的方程带根号，先平方去根号，

$y=\sqrt{1-x^2}\Rightarrow y^2=1-x^2\Rightarrow x^2+y^2=1(y\ge 0)$，该方程表示单位圆的上半部分，可画图分析临界状态，

如图，满足条件的直线 l 可在 l_2（不可取）和 l_3（可取）之间，或恰好为 l_1，

注意到 $-b$ 是直线 l 在 y 轴上的截距，所以当直线 l 在 l_2 和 l_3 之间时，$-1\le -b<1$，故 $-1<b\le 1$；

直线 l_1 与半圆相切，$y=x-b\Rightarrow x-y-b=0$，所以原点到直线 l_1 的距离 $d=\dfrac{|-b|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=1$，解得：$b=\pm\sqrt{2}$，

由图可知，l_1 的纵截距为正 $\Rightarrow -b=\sqrt{2}\Rightarrow b=-\sqrt{2}$；

综上所述，实数 b 的取值范围是 $(-1,1]\cup\{-\sqrt{2}\}$.