第 3 节 椭圆中的设点设线方法（★★★☆）

内容提要

1．若点 P 在椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 上运动，由此而产生的求最值（求范围）问题，设动点 P 的坐标并用它表示求最值的目标量是常用解法之一，动点 P 的设法主要有两种：

①设 $P(x_0,y_0)$，用该坐标表示的目标量往往有 x_0 和 y_0 两个变量，可利用 P 在椭圆上（即 $\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}=1$）来消元化单变量函数分析最值（范围）.

②利用 $\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$ 进行三角换元，可令 $\begin{cases}\frac{x}{a}=\cos\theta\\ \frac{y}{b}=\sin\theta\end{cases}$，则 $\begin{cases}x=a\cos\theta\\ y=b\sin\theta\end{cases}$，于是可设 $P(a\cos\theta,b\sin\theta)$，将求最值的目标量表示成关于 θ 的三角函数，再分析最值（范围）.

2．设直线 l 与椭圆 C 交于 A、B 两点，由此产生的诸多问题中，需要将直线 l 与椭圆 C 的方程联立，但联立后我们往往不去解方程组，求交点 A、B 的坐标，而是消去 y（或 x）整理得出关于 x（或 y）的一元二次方程，结合韦达定理来计算一些目标量，如数量积、弦长、面积等.

典型例题

类型Ⅰ：设点求最值方法

【例 1】已知椭圆 $\frac{y^2}{a^2}+x^2=1(a>1)$ 的离心率 $e=\frac{2\sqrt{5}}{5}$，P 为椭圆上的一个动点，$B(-1,0)$，则 $|PB|$ 的最大值为（　　）

（A）$\frac{3}{2}$　　（B）2　　（C）$\frac{5}{2}$　　（D）3

解法 1：由题意，椭圆的离心率 $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{a^2-1}}{a}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$，解得：$a=\sqrt{5}$，椭圆的方程为 $\frac{y^2}{5}+x^2=1$，

$|PB|$ 可用两点间的距离公式来算，于是设 P 的坐标，设 $P(x_0,y_0)$，则 $|PB|=\sqrt{(x_0+1)^2+y_0^2}$ ①，

有 x_0，y_0 两个变量，可结合椭圆方程消元，y_0 只有平方项，所以消 y_0，

因为点 P 在椭圆上，所以 $\frac{y_0^2}{5}+x_0^2=1$，故 $y_0^2=5-5x_0^2$，

代入①整理得：$|PB|=\sqrt{-4x_0^2+2x_0+6}=\sqrt{-4(x_0-\frac{1}{4})^2+\frac{25}{4}}$，其中 $-1\le x_0\le 1$，

所以当 $x_0=\frac{1}{4}$ 时，$|PB|$ 取得最大值 $\frac{5}{2}$.

解法 2：求 a 的过程同解法 1，接下来也可将点 P 的坐标设为三角的形式，

设 $P(\cos\theta,\sqrt{5}\sin\theta)$，则 $|PB|=\sqrt{(\cos\theta+1)^2+5\sin^2\theta}=\sqrt{\cos^2\theta+2\cos\theta+1+5\sin^2\theta}$ ①，

要求式①的最大值，可用 $\sin^2\theta=1-\cos^2\theta$ 化同名，

$|PB|=\sqrt{\cos^2\theta+2\cos\theta+1+5-5\cos^2\theta}=\sqrt{-4\cos^2\theta+2\cos\theta+6}=\sqrt{-4(\cos\theta-\frac{1}{4})^2+\frac{25}{4}}$，

所以当 $\cos\theta=\frac{1}{4}$ 时，$|PB|$ 取得最大值 $\frac{5}{2}$.

答案：C

【反思】椭圆上动点到定点的距离最值问题，常用两种做法：①设动点 P 的坐标为 (x_0,y_0)，利用椭圆方程消去目标式中只含平方项的变量，再求最值；②将动点 P 设为三角形式，用函数的方法求最值.

【变式】（2021・全国乙卷）设 B 是椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的上顶点，若 C 上的任意一点 P 都满足 $|PB|\le 2b$，则椭圆 C 的离心率的取值范围是（　　）

（A）$[\frac{\sqrt{2}}{2},1)$　　（B）$[\frac{1}{2},1)$　　（C）$(0,\frac{\sqrt{2}}{2}]$　　（D）$(0,\frac{1}{2}]$

解法 1：$|PB|\le 2b$ 恒成立，即 $|PB|_{\max}\le 2b$，所以先分析 $|PB|$ 的最大值，可设点 P 的坐标，

由题意，$B(0,b)$，设 $P(x_0,y_0)$，则 $|PB|^2=x_0^2+(y_0-b)^2$ ①，有两个变量，可利用椭圆的方程消元，

因为点 P 在椭圆 C 上，所以 $\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}=1$，故 $x_0^2=a^2-\frac{a^2}{b^2}y_0^2$，

代入①得：$|PB|^2=a^2-\frac{a^2}{b^2}y_0^2+y_0^2-2by_0+b^2=-\frac{c^2}{b^2}y_0^2-2by_0+a^2+b^2$，$-b\le y_0\le b$，

这个关于 y_0 的二次函数含参，直接求最值的话，需讨论区间 $[-b,b]$ 与对称轴的位置关系，较麻烦，但若注意到 $|PB|\le 2b$ 中的 $2b$ 恰好是短轴长，使 $|PB|$ 等于 $2b$ 的点 P 容易找到，则可简化分析过程，

当 P 为椭圆下顶点时，$|PB|=2b$，结合 $|PB|\le 2b$ 恒成立知 $|PB|$ 的最大值在下顶点处取得，

即当 $y_0=-b$ 时，$|PB|^2=-\frac{c^2}{b^2}y_0^2-2by_0+a^2+b^2$ 取得最大值，

可由此约束对称轴与区间的位置关系，建立不等式求离心率的范围，

上述关于 y_0 的二次函数的对称轴为 $y_0=-\frac{b^3}{c^2}$，如图 1，应有 $-b\ge-\frac{b^3}{c^2}$，

所以 $c^2\le b^2=a^2-c^2$，故 $\frac{c^2}{a^2}\le\frac{1}{2}$，结合 $0<e<1$ 可得 $e\in(0,\frac{\sqrt{2}}{2}]$.

解法 2：也可将点 P 的坐标设为三角形式，来分析 $|PB|$ 的最值，

设 $P(a\cos\theta,b\sin\theta)$，则 $|PB|^2=a^2\cos^2\theta+(b\sin\theta-b)^2=a^2\cos^2\theta+b^2\sin^2\theta-2b^2\sin\theta+b^2$，

为了统一函数名，将 $\cos^2\theta$ 换成 $1-\sin^2\theta$，

所以 $|PB|^2=a^2-a^2\sin^2\theta+b^2\sin^2\theta-2b^2\sin\theta+b^2=-c^2\sin^2\theta-2b^2\sin\theta+a^2+b^2$，

只需将 $\sin\theta$ 换元成 t，即可转化成二次函数分析最值，接下来的求解过程和解法 1 类似，

令 $t=\sin\theta$，则 $|PB|^2=-c^2t^2-2b^2t+a^2+b^2(-1\le t\le 1)$，

因为$|PB|\le 2b$，且当 P 为下顶点 $(0,-b)$ 时，$|PB|=2b$，此时$\begin{cases}\cos\theta=0\\ \sin\theta=-1\end{cases}$，即 $t=-1$，

所以上述关于 t 的二次函数应在 $t=-1$ 处取得最大值，

可由此约束对称轴与区间的位置关系，建立不等式求离心率的范围，

如图 2，应有 $-\dfrac{b^2}{c^2}\le -1$，所以 $c^2\le b^2=a^2-c^2$，故 $\dfrac{c^2}{a^2}\le\dfrac{1}{2}$，结合 $0<e<1$ 可得 $e\in(0,\dfrac{\sqrt{2}}{2}]$.

答案：C

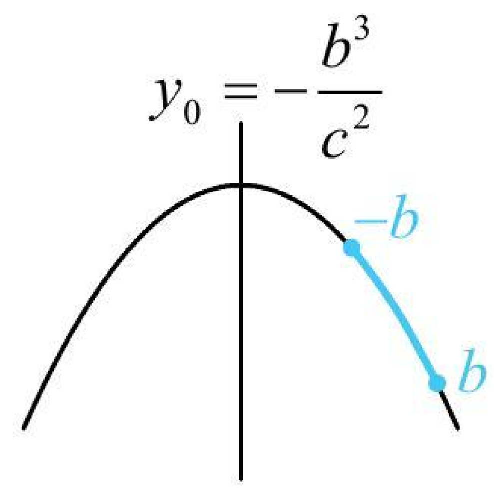


图1

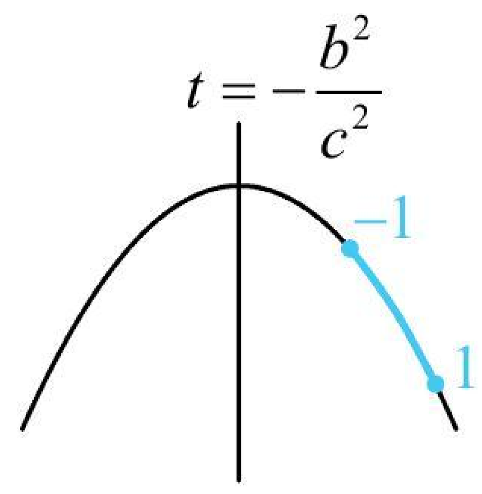


图2

【例 3】已知点 P 在直线 $l:x+y+7=0$ 上，点 Q 在椭圆 $C:\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{9}=1$ 上，则 $|PQ|$ 的最小值是_____.

解法 1：如图 1，若固定 Q，则无论点 Q 在何处，总有当 $PQ\perp l$ 时，$|PQ|$ 最小，故只需求点 Q 到直线 l 的距离的最小值，点 Q 在椭圆 C 上运动，可将其坐标设为三角形式，

设 $Q(4\cos\theta,3\sin\theta)$，则点 Q 到直线 l 的距离 $d=\dfrac{|4\cos\theta+3\sin\theta+7|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\dfrac{|5\sin(\theta+\varphi)+7|}{\sqrt{2}}=\dfrac{5\sin(\theta+\varphi)+7}{\sqrt{2}}$，

所以当 $\sin(\theta+\varphi)=-1$ 时，d 取得最小值 $\sqrt{2}$，故 $|PQ|_{\min}=\sqrt{2}$.

解法 2：也可从图形来看最值在何处取，如图 2，将 l 上移至恰好与椭圆 C 相切的位置，则该切点 Q 到直线 l 的距离即为 $|PQ|$ 的最小值，可先求出该切线的方程，用平行线间的距离公式算答案，

设图 2 中 $l':x+y+m=0$，联立$\begin{cases}x+y+m=0\\ \dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{9}=1\end{cases}$ 消去 y 整理得：$25x^2+32mx+16m^2-144=0$，

因为 l' 与椭圆 C 相切，所以判别式 $\Delta=(32m)^2-4\times25\times(16m^2-144)=0$，解得：$m=\pm5$，

由图可知 l' 在 y 轴上的截距 $-m<0$，所以 $m>0$，从而 $m=5$，故 $|PQ|_{\min}=\dfrac{|7-m|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\sqrt{2}$.

答案：$\sqrt{2}$

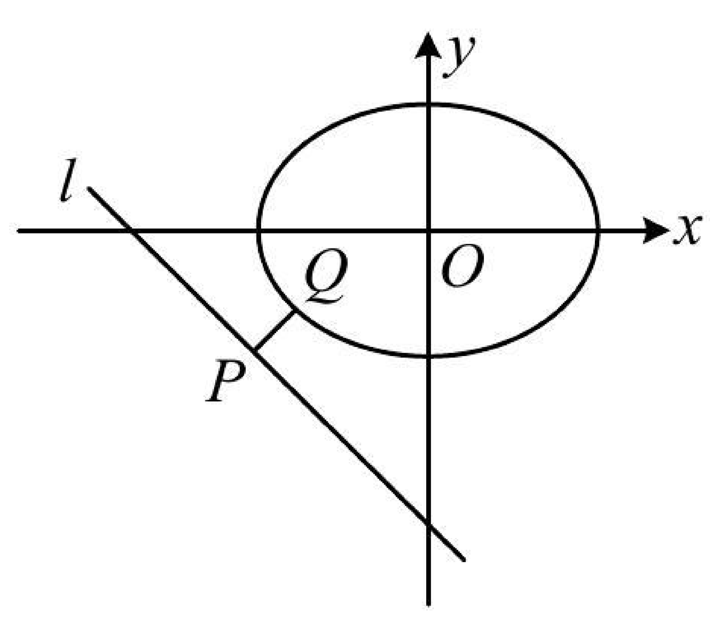


图1

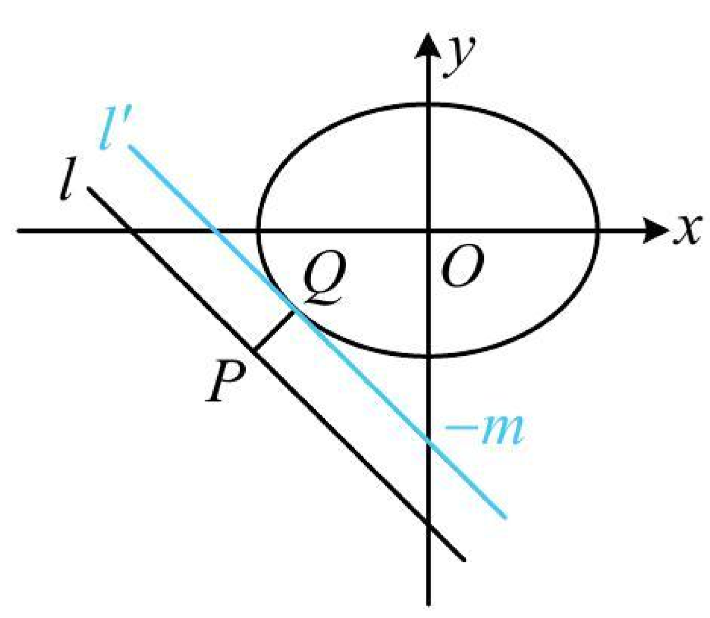


图2

【反思】①和例 1、例 2 不同，本题若将 Q 的坐标设为 (x,y)，则 $d=\frac{|x+y+7|}{\sqrt{2}}$，$x$ 和 y 都有一次项，利用椭圆方程消元不易，故而舍弃这种设法；②注意：有的题目条件较为隐蔽，要学会翻译，例如本题不给 l 的方程，换成给出 P 的坐标为 $(m,-m-7)$，也要发现点 P 在直线 $l:x+y+7=0$ 上.

【例 2】已知 F_1，F_2 是椭圆 $E:\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$ 的两个焦点，P 是椭圆 E 上任意一点，则 $\overrightarrow{F_1P}\cdot\overrightarrow{F_2P}$ 的取值范围是_____.

解析：设点 P 的坐标，即可表示 $\overrightarrow{F_1P}\cdot\overrightarrow{F_2P}$，设 $P(x,y)$，由题意，$F_1(-1,0)$，$F_2(1,0)$，

所以 $\overrightarrow{F_1P}=(x+1,y)$，$\overrightarrow{F_2P}=(x-1,y)$，故 $\overrightarrow{F_1P}\cdot\overrightarrow{F_2P}=(x+1)(x-1)+y^2=x^2+y^2-1$ ①，

有 x，y 两个变量，且都为平方项，可利用椭圆方程来消元，

因为点 P 在椭圆上，所以 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$，故 $y^2=3-\frac{3}{4}x^2$，代入①整理得：$\overrightarrow{F_1P}\cdot\overrightarrow{F_2P}=\frac{1}{4}x^2+2$，

因为 $-2\le x\le 2$，所以 $0\le x^2\le 4$，故 $2\le\overrightarrow{F_1P}\cdot\overrightarrow{F_2P}\le 3$.

答案：$[2,3]$

【反思】本题也可设三角形式的坐标，请自行尝试.

【总结】从类型 I 的这些题可以看出，涉及与椭圆上的动点有关的量（如数量积、距离等）的最值，都可设出动点坐标求解，具体设为 (x_0,y_0)，还是三角形式的坐标，因题而异.

类型Ⅱ：设点、设线翻译条件

【例 4】（2016 • 新课标Ⅲ卷）已知 O 为坐标原点，F 是椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左焦点，A，B 分别为 C 的左、右顶点，P 为 C 上一点，且 $PF\perp x$ 轴，过点 A 的直线 l 与线段 PF 交于点 M，与 y 轴交于点 E. 若直线 BM 经过 OE 的中点，则 C 的离心率为（　　）

（A）$\frac{1}{3}$　　（B）$\frac{1}{2}$　　（C）$\frac{2}{3}$　　（D）$\frac{3}{4}$

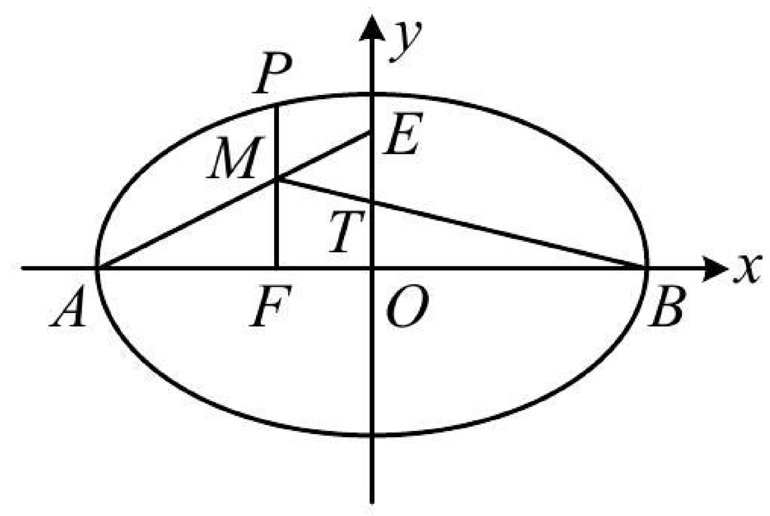
解析：如图，用几何的方法不易翻译已知条件，分析发现点 M 在线段 PF 上运动，只要设 M 的坐标，就能表示 E，T 的坐标，进而利用 B，T，M 三点共线建立方程求离心率，

不妨设 P 位于 x 轴上方，设 $M(-c,y_0)(y_0>0)$，则由 $\frac{|AF|}{|AO|}=\frac{|MF|}{|OE|}$ 得：$\frac{a-c}{a}=\frac{y_0}{|OE|}$，解得：$|OE|=\frac{ay_0}{a-c}$，

所以 $E(0,\frac{ay_0}{a-c})$，OE 中点为 $T(0,\frac{ay_0}{2(a-c)})$，

由题意，B，T，M 三点共线，所以 $k_{BT}=k_{BM}$，

即 $\frac{\frac{ay_0}{2(a-c)}}{-a}=\frac{y_0}{-c-a}$，化简得：$a=3c$，所以 $e=\frac{c}{a}=\frac{1}{3}$.



答案：A

【反思】①对于某些条件，几何方法不好翻译时，我们可考虑设点、设线，用坐标去翻译已知条件；②解析几何中三点共线常用斜率相等来翻译.

【例 5】过点 $P(0,2)$ 且斜率存在的直线 l 与椭圆 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1$ 交于不同的 A，B 两点，O 为坐标原点，若 $\angle AOB$ 为锐角，则直线 l 的斜率 k 的取值范围是_____.

解析：如图，A，O，B 不共线，故 $\angle AOB$ 为锐角 $\Leftrightarrow \overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}>0$，可设 A，B 的坐标来算 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$，

直线 l 方程为 $y=kx+2$，设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，则 $\overrightarrow{OA}=(x_1,y_1)$，$\overrightarrow{OB}=(x_2,y_2)$，$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=x_1x_2+y_1y_2$，

此时发现可把直线 l 与椭圆联立，结合韦达定理来算 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$，

联立 $\begin{cases}y=kx+2\\ \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1\end{cases}$ 消去 y 整理得：$(2k^2+1)x^2+8kx+4=0$，

判别式 $\Delta=64k^2-4(2k^2+1)\times4>0$，解得：$k<-\frac{\sqrt{2}}{2}$ 或 $k>\frac{\sqrt{2}}{2}$ ①，

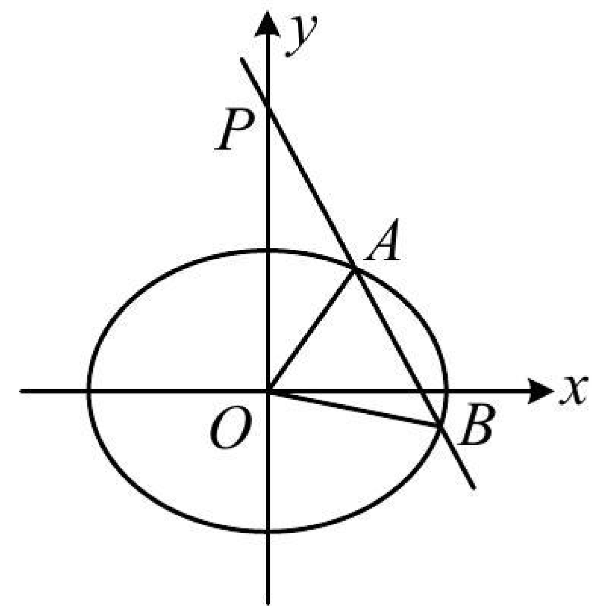
由韦达定理，$x_1+x_2=-\frac{8k}{2k^2+1}$，$x_1x_2=\frac{4}{2k^2+1}$，

算 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$ 还要用到 y_1y_2，可利用点在线上转化为 x_1+x_2 和 x_1x_2 来算，

$y_1y_2=(kx_1+2)(kx_2+2)=k^2x_1x_2+2k(x_1+x_2)+4=k^2\cdot\frac{4}{2k^2+1}+2k(-\frac{8k}{2k^2+1})+4=\frac{4-4k^2}{2k^2+1}$，

所以 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=x_1x_2+y_1y_2=\frac{8-4k^2}{2k^2+1}>0$，解得：$-\sqrt{2}<k<\sqrt{2}$，结合①可得 $k\in(-\sqrt{2},-\frac{\sqrt{2}}{2})\cup(\frac{\sqrt{2}}{2},\sqrt{2})$.

答案：$(-\sqrt{2},-\frac{\sqrt{2}}{2})\cup(\frac{\sqrt{2}}{2},\sqrt{2})$



【反思】①涉及直线与椭圆交于 A，B 两点，常设直线方程和交点坐标，把直线与椭圆联立消去 x 或 y，得到一个一元二次方程，但很多时候我们并不去解此方程，而是结合韦达定理来计算有关的量，这种设而不

求思想的应用非常广泛；②在解析几何中，$\angle AOB$ 为锐角常翻译成$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}>0$，$\angle AOB$ 为直角常翻译成$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=0$，$\angle AOB$ 为钝角常翻译成$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}<0$，再代入坐标运算，但需考虑 A，O，B 共线的情形.

强化训练

1．（2021・全国乙卷・★★）设 B 是椭圆 $C:\dfrac{x^2}{5}+y^2=1$的上顶点，P 在 C 上，则$|PB|$的最大值为（　　）

（A）$\dfrac{5}{2}$　　（B）$\sqrt{6}$　　（C）$\sqrt{5}$　　（D）2

2．（★★★）已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$，直线 $y=kx(k\in\mathbf{R})$与 C 的一个交点为 B，若$|OB|$的取值范围是$[b,2b]$，则椭圆 C 的离心率为（　　）

（A）$\dfrac{1}{2}$　　（B）$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　　（C）$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　（D）$\dfrac{3}{4}$

3．（★★★）点 P 在椭圆 $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$上运动，则当点 P 到直线 $l:x+y-4=0$的距离最小时，点 P 的坐标为_____.

4．（2022・沈阳模拟・★★★）已知椭圆 $C:x^2+4y^2=m(m>0)$的左、右焦点分别为 F_1，F_2，P 是椭圆 C 上的动点，若 $\overrightarrow{PF_1}\cdot\overrightarrow{PF_2}$ 的最小值为-1，则 $\overrightarrow{PF_1}\cdot\overrightarrow{PF_2}$ 的最大值为（　　）

（A）4　　（B）2　　（C）$\dfrac{1}{4}$　　（D）$\dfrac{1}{2}$

5．（2022・上海模拟・★★★★）已知定点 $A(a,0)(a>0)$到椭圆 $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$上的点的距离的最小值为 1，则 a 的值为_____.

6.（★★★）已知椭圆$C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的焦距为 2，右顶点为 A，过原点且与 x 轴不重合的直线交 C 于 M、N 两点，线段 AM 的中点为 B，若直线 BN 经过 C 的右焦点，则椭圆 C 的方程为（　　）

（A）$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$　　（B）$\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{5}=1$　　（C）$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{8}=1$　　（D）$\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{32}=1$

7.（2022 • 河南模拟 • ★★★★）已知椭圆$C:\frac{x^2}{18}+\frac{y^2}{9}=1$的上、下顶点分别为 A 和 B，点 $P(x_0,y_0)(x_0\neq 0)$ 在椭圆 C 上，若点 $Q(x_1,y_1)$ 满足 $AP\perp AQ$，$BP\perp BQ$，则 $\frac{x_1}{x_0}=$（　　）

（A）$-\frac{1}{3}$　　（B）$-\frac{1}{2}$　　（C）$-\frac{\sqrt{2}}{2}$　　（D）$-\frac{2}{3}$

8.（2022 • 成都模拟 • ★★★★）过点 $M(0,2)$ 且斜率为 k 的直线 l 与椭圆 $C:\frac{x^2}{2}+y^2=1$ 交于不同的两点 P 和 Q，若原点 O 在以 PQ 为直径的圆的外部，则 k 的取值范围是_____.