第 4 节 高考中椭圆常用的二级结论（★★★）

内容提要

解析几何中存在无数的二级结论，本节筛选出了一些在高考中比较常用的椭圆二级结论，记住这些结论可适当缩短解题时间.

1．焦点三角形面积公式：如图 1，设 P 是椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 上一点，$F_1(-c,0)$，$F_2(c,0)$ 分别是椭圆的左、右焦点，$\angle F_1PF_2=\theta$，则 $S_{\Delta PF_1F_2}=c|y_P|=b^2\tan\dfrac{\theta}{2}$.

证明：一方面，ΔPF_1F_2 的边 F_1F_2 上的高 $h=|y_P|$，所以 $S_{\Delta PF_1F_2}=\dfrac{1}{2}|F_1F_2|\cdot h=\dfrac{1}{2}\times 2c\times|y_P|=c|y_P|$；

另一方面，记 $|PF_1|=m$，$|PF_2|=n$，则由椭圆定义，$m+n=2a$ ①，

在 ΔPF_1F_2 中，由余弦定理，$|F_1F_2|^2=|PF_1|^2+|PF_2|^2-2|PF_1|\cdot|PF_2|\cdot\cos\angle F_1PF_2$，

所以 $4c^2=m^2+n^2-2mn\cos\theta=(m+n)^2-2mn-2mn\cos\theta=(m+n)^2-2mn(1+\cos\theta)$ ②，

将式①代入式②可得：$4c^2=4a^2-2mn(1+\cos\theta)$，所以 $mn=\dfrac{4a^2-4c^2}{2(1+\cos\theta)}=\dfrac{2b^2}{1+\cos\theta}$，

故 $S_{\Delta PF_1F_2}=\dfrac{1}{2}mn\sin\theta=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{2b^2}{1+\cos\theta}\cdot\sin\theta=b^2\cdot\dfrac{\sin\theta}{1+\cos\theta}$

$=b^2\cdot\dfrac{2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}{2\cos^2\frac{\theta}{2}}=b^2\tan\dfrac{\theta}{2}$.

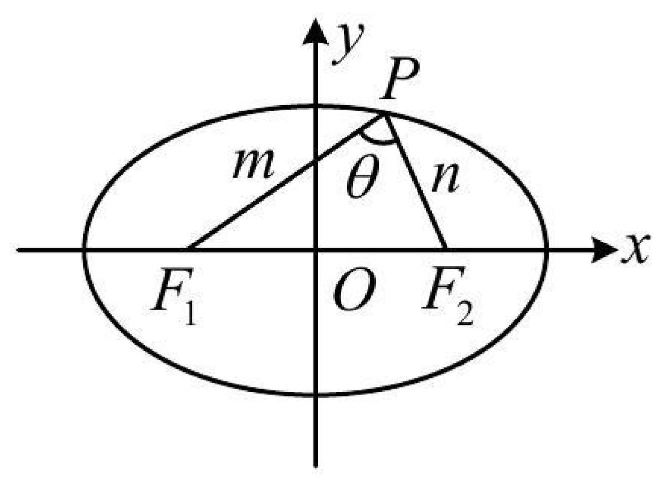


图1

2．焦半径公式：设椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左、右焦点分别为 F_1，F_2，点 $P(x_0,y_0)$ 为椭圆上任意一点，则左焦半径 $|PF_1|=a+ex_0$，右焦半径 $|PF_2|=a-ex_0$，其中 e 为椭圆的离心率.

证明：$F_1(-c,0)$，设 $P(x_0,y_0)$，则 $|PF_1|=\sqrt{(x_0+c)^2+y_0^2}$ ①，

因为点 P 在椭圆上，所以 $\dfrac{x_0^2}{a^2}+\dfrac{y_0^2}{b^2}=1$，故 $y_0^2=b^2-\dfrac{b^2}{a^2}x_0^2$，代入①得：$|PF_1|=\sqrt{x_0^2+2cx_0+c^2+b^2-\dfrac{b^2}{a^2}x_0^2}$

$=\sqrt{(1-\dfrac{b^2}{a^2})x_0^2+2cx_0+a^2}=\sqrt{\dfrac{c^2}{a^2}x_0^2+2cx_0+a^2}=\sqrt{(\dfrac{c}{a}x_0+a)^2}=\left|\dfrac{c}{a}x_0+a\right|=|a+ex_0|$，

因为 $0<e<1$，$-a\le x_0\le a$，所以 $a+ex_0>0$，故 $|PF_1|=a+ex_0$；同理可证 $|PF_2|=a-ex_0$.

3．基于椭圆第三定义的斜率积结论：如图 2，设 A，B 分别是椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左、右顶点，P

是椭圆上不与 A，B 重合的任意一点，则 $k_{PA}\cdot k_{PB}=-\dfrac{b^2}{a^2}$.

注：上述结论中 A，B 是椭圆的左、右顶点，可将其推广为椭圆上关于原点对称的任意两点，如图 3，只要直线 PA，PB 的斜率都存在，就仍然满足 $k_{PA}\cdot k_{PB}=-\dfrac{b^2}{a^2}$，下面给出证明.

证明：设 $A(x_1,y_1)$，$P(x_2,y_2)$，则 $B(-x_1,-y_1)$，所以 $k_{PA}\cdot k_{PB}=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\cdot\dfrac{y_2+y_1}{x_2+x_1}=\dfrac{y_2^2-y_1^2}{x_2^2-x_1^2}$ ①，

因为点 A 在椭圆上，所以 $\dfrac{x_1^2}{a^2}+\dfrac{y_1^2}{b^2}=1$，故 $y_1^2=b^2(1-\dfrac{x_1^2}{a^2})=-\dfrac{b^2}{a^2}(x_1^2-a^2)$，同理 $y_2^2=-\dfrac{b^2}{a^2}(x_2^2-a^2)$，

所以 $y_2^2-y_1^2=-\dfrac{b^2}{a^2}(x_2^2-a^2-x_1^2+a^2)=-\dfrac{b^2}{a^2}(x_2^2-x_1^2)$，代入①得：$k_{PA}\cdot k_{PB}=-\dfrac{b^2}{a^2}$；

在上述条件中令 $A(-a,0)$，$B(a,0)$，即得内容提要第 3 点的特殊情况下的结论.

4．中点弦斜率积结论：如图 4，AB 是椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的一条不与坐标轴垂直且不过原点的弦，M 为 AB 中点，则 $k_{AB}\cdot k_{OM}=-\dfrac{b^2}{a^2}$，此结论可用下面的点差法来证明.

证明：设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，$x_1\neq x_2$，$y_1\neq y_2$，因为 A、B 都在椭圆上，所以 $\begin{cases}\dfrac{x_1^2}{a^2}+\dfrac{y_1^2}{b^2}=1\\ \dfrac{x_2^2}{a^2}+\dfrac{y_2^2}{b^2}=1\end{cases}$，

两式作差得：$\dfrac{x_1^2-x_2^2}{a^2}+\dfrac{y_1^2-y_2^2}{b^2}=0$，整理得：$\dfrac{y_1-y_2}{x_1-x_2}\cdot\dfrac{y_1+y_2}{x_1+x_2}=-\dfrac{b^2}{a^2}$ ①，

注意到 $\dfrac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=k_{AB}$，$\dfrac{y_1+y_2}{x_1+x_2}=\dfrac{2y_M}{2x_M}=\dfrac{y_M}{x_M}=k_{OM}$，所以式①即为 $k_{AB}\cdot k_{OM}=-\dfrac{b^2}{a^2}$.

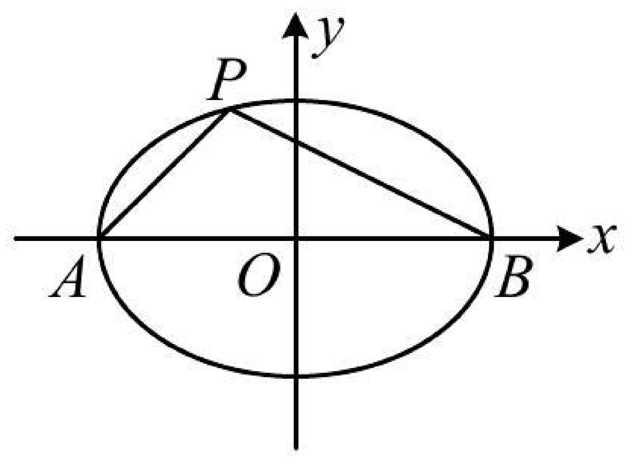


图2

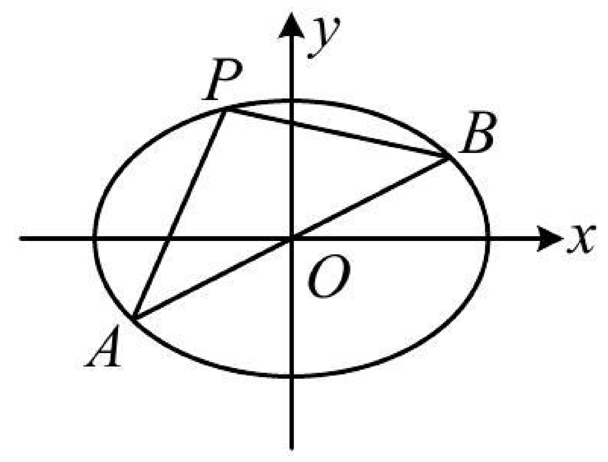


图3

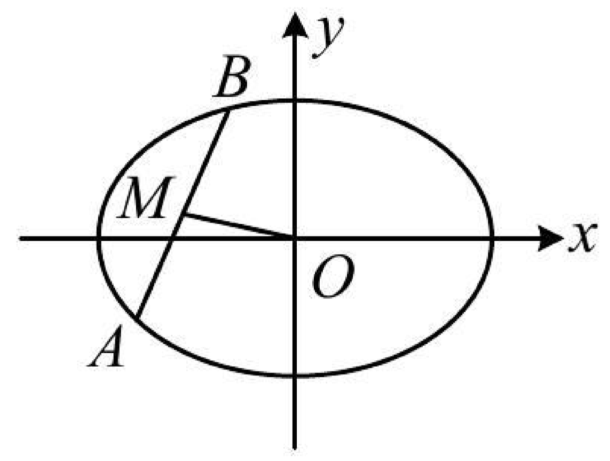


图4

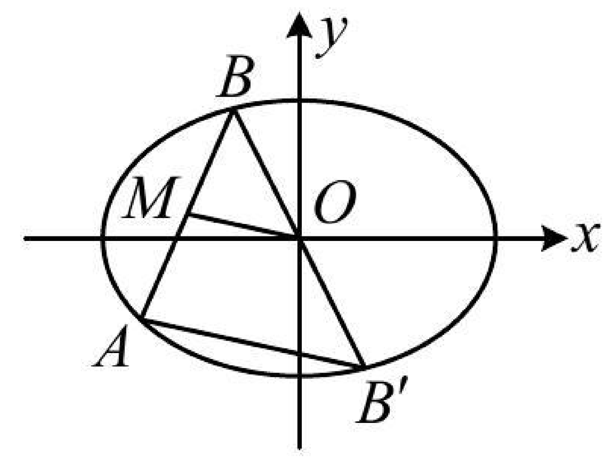


图5

注：中点弦结论和上面的第三定义斜率积结论的结果都是 $-\dfrac{b^2}{a^2}$，这是巧合吗？不是，两者之间有必然的联系. 如上面图 5，设 B' 为 B 关于原点的对称点，则 B' 也在该椭圆上，且 O 为 BB' 中点，结合 M 为 AB 中点可得 $OM/\!/AB'$，所以 $k_{AB}\cdot k_{OM}=k_{AB}\cdot k_{AB'}$，于是又回到了椭圆上的点 A 与椭圆上关于原点对称的 B 和 B' 的连线的斜率积.

典型例题

类型Ⅰ：焦点三角形面积

【例 1】设 F_1、F_2 是椭圆 $\dfrac{x^2}{8}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(0<b<2\sqrt{2})$ 的两个焦点，点 P 在椭圆上，$\angle F_1PF_2=60^\circ$，且 ΔF_1PF_2 的

面积为$\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$，则$b=$_____.

解析：给出$\angle F_1PF_2$，直接代公式$S=b^2\tan\dfrac{\theta}{2}$算焦点三角形面积，

因为$\angle F_1PF_2=60^{\circ}$，所以$S_{\Delta F_1PF_2}=b^2\tan 30^{\circ}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}b^2$，由题意，$S_{\Delta F_1PF_2}=\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$，所以$\dfrac{\sqrt{3}}{3}b^2=\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$，故$b=2$.

答案：2

【变式】设F_1，F_2是椭圆$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{2}=1$的左、右焦点，$P$是椭圆在第一象限上的一点，且$\angle F_1PF_2=60^{\circ}$，则点$P$的坐标为_____.

解析：给出$\angle F_1PF_2$，可由焦点三角形面积公式$S=c|y_P|=b^2\tan\dfrac{\theta}{2}$来建立方程求点$P$的纵坐标，

由题意，$a=2$，$b=\sqrt{2}$，$c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{2}$，设$P(x_0,y_0)(x_0>0,y_0>0)$，

则$S_{\Delta F_1PF_2}=c|y_0|=cy_0=b^2\tan\dfrac{\angle F_1PF_2}{2}$，所以$\sqrt{2}y_0=2\tan 30^{\circ}$，解得：$y_0=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$，

又点P在椭圆上，所以$\dfrac{x_0^2}{4}+\dfrac{y_0^2}{2}=1$，从而$x_0=\sqrt{4-2y_0^2}=\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$，故点$P$的坐标为$(\dfrac{2\sqrt{6}}{3},\dfrac{\sqrt{6}}{3})$.

答案：$(\dfrac{2\sqrt{6}}{3},\dfrac{\sqrt{6}}{3})$

【反思】从上面两道题可以看出，当题干给出$\angle F_1PF_2$时，可用$S_{\Delta PF_1F_2}=b^2\tan\dfrac{\theta}{2}$（其中$\theta=\angle F_1PF_2$）来算焦点三角形的面积；由$S_{\Delta PF_1F_2}=c|y_P|=b^2\tan\dfrac{\theta}{2}$还可以建立顶角$\theta$和$|y_P|$之间的等量关系.

类型Ⅱ：焦半径公式

【例2】椭圆$\dfrac{x^2}{6}+\dfrac{y^2}{2}=1$的左、右焦点分别为$F_1$、$F_2$，椭圆上的一点$P$满足$|PF_1|=3|PF_2|$，若$P$在第一象限，则点$P$的坐标为_____.

解析：条件涉及焦半径$|PF_1|$和$|PF_2|$，要求坐标，可用焦半径公式，由题意，$a=\sqrt{6}$，$c=2$，$e=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$，

设$P(x_0,y_0)(x_0>0,y_0>0)$，则由焦半径公式，$|PF_1|=\sqrt{6}+\dfrac{\sqrt{6}}{3}x_0$，$|PF_2|=\sqrt{6}-\dfrac{\sqrt{6}}{3}x_0$，

因为$|PF_1|=3|PF_2|$，所以$\sqrt{6}+\dfrac{\sqrt{6}}{3}x_0=3(\sqrt{6}-\dfrac{\sqrt{6}}{3}x_0)$，解得：$x_0=\dfrac{3}{2}$，

代入椭圆方程结合$y_0>0$可解得：$y_0=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$，故点P的坐标为$(\dfrac{3}{2},\dfrac{\sqrt{5}}{2})$.

答案：$(\dfrac{3}{2},\dfrac{\sqrt{5}}{2})$

【变式】（2019·新课标III卷）设 F_1、F_2 为椭圆 $C:\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{20}=1$ 的两个焦点，M 为 C 上一点且在第一象限，若 ΔMF_1F_2 为等腰三角形，则 M 的坐标为_____.

解法 1：由题意，$a=6$，$b=2\sqrt{5}$，$c=\sqrt{a^2-b^2}=4$，椭圆 C 的离心率 $e=\frac{c}{a}=\frac{2}{3}$，

题干给出 ΔMF_1F_2 为等腰三角形，应先判断谁是底，谁是腰，可通过比较三边的长来判断，

如图，点 M 在第一象限 $\Rightarrow |MF_1|>|MF_2|$，又 $|MF_1|+|MF_2|=2a=12$，所以 $|MF_2|<6$，

而 $|F_1F_2|=2c=8$，所以 $|MF_2|<|F_1F_2|$，故只能 $|MF_1|=|F_1F_2|=8$，

涉及焦半径 $|MF_1|$，可用焦半径公式来求 M 的坐标，

设 $M(x_0,y_0)(x_0>0,y_0>0)$，由焦半径公式，$|MF_1|=6+\frac{2}{3}x_0=8$，所以 $x_0=3$，

又点 M 在椭圆 C 上，所以 $\frac{x_0^2}{36}+\frac{y_0^2}{20}=1$，结合 $\begin{cases}x_0=3\\y_0>0\end{cases}$ 可得：$y_0=\sqrt{15}$，故 $M(3,\sqrt{15})$.

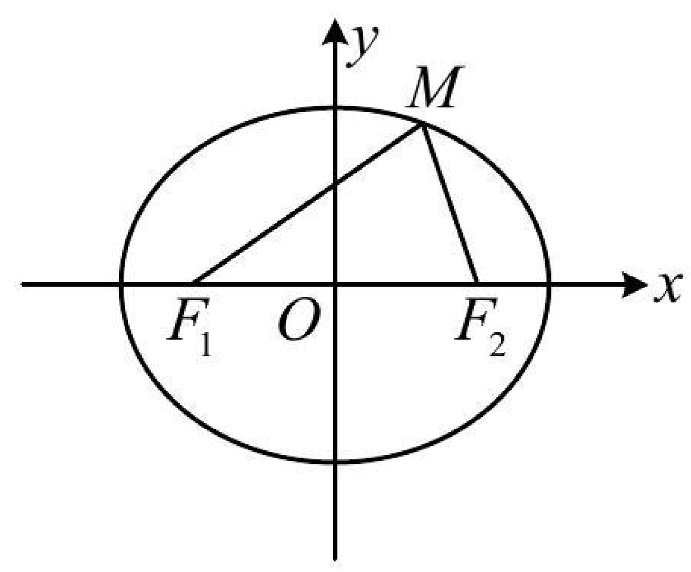
解法 2：得出 $|MF_1|=|F_1F_2|=8$ 的过程同解法 1，接下来也可用两点间距离来翻译 $|MF_1|=8$，

由题意，$F_1(-4,0)$，设 $M(x_0,y_0)(x_0>0,y_0>0)$，则 $|MF_1|=\sqrt{(x_0+4)^2+y_0^2}=8$ ①，

还差一个方程，可把点 M 代入椭圆方程来建立，因为 M 在椭圆 C 上，所以 $\frac{x_0^2}{36}+\frac{y_0^2}{20}=1$ ②，

联立①②，结合 $\begin{cases}x_0>0\\y_0>0\end{cases}$ 解得：$\begin{cases}x_0=3\\y_0=\sqrt{15}\end{cases}$，故 $M(3,\sqrt{15})$.

答案：$(3,\sqrt{15})$



类型III：第三定义、中点弦斜率积结论

【例 3】已知椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$，点 A、B 为长轴的两个端点，若在椭圆上存在点 P 使直线 AP 和 BP 的斜率之积 $k_{AP}\cdot k_{BP}\in(-\frac{1}{3},0)$，则椭圆 C 的离心率 e 的取值范围是_____.

解析：看到 $k_{AP}\cdot k_{BP}$，想到第三定义斜率积结论，由题意，$-\frac{1}{3}<k_{AP}\cdot k_{BP}=-\frac{b^2}{a^2}<0$，所以 $\frac{b^2}{a^2}<\frac{1}{3}$，

从而 $a^2>3b^2=3(a^2-c^2)$，故 $\frac{c^2}{a^2}>\frac{2}{3}$，所以 $e=\frac{c}{a}>\frac{\sqrt{6}}{3}$，又 $0<e<1$，所以 $\frac{\sqrt{6}}{3}<e<1$.

答案：$(\frac{\sqrt{6}}{3},1)$

【反思】椭圆中涉及两直线的斜率积，可考虑用第三定义斜率积结论.

【变式 1】（2022·全国甲卷）椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左顶点为 A，点 P、Q 均在 C 上，且关于 y 轴对称，若直线 AP、AQ 的斜率之积为 $\frac{1}{4}$，则 C 的离心率为（　　）

（A）$\frac{\sqrt{3}}{2}$　（B）$\frac{\sqrt{2}}{2}$　（C）$\frac{1}{2}$　（D）$\frac{1}{3}$

解法 1：条件涉及斜率积，可尝试用第三定义斜率积结论，如图，P，Q 关于 y 轴对称，不能直接用结论，但只需作其中一个关于 x 轴的对称点，就可产生关于原点对称的两点，

设点 Q 关于 x 轴的对称点为 Q'，则 P、Q' 关于原点对称，且 $k_{AQ'}=-k_{AQ}$ ①，

由椭圆第三定义斜率积结论的推广知 $k_{AP}\cdot k_{AQ'}=-\frac{b^2}{a^2}$，将式①代入得：$k_{AP}\cdot(-k_{AQ})=-\frac{b^2}{a^2}$，故 $k_{AP}\cdot k_{AQ}=\frac{b^2}{a^2}$，

又 $k_{AP}\cdot k_{AQ}=\frac{1}{4}$，所以 $\frac{b^2}{a^2}=\frac{1}{4}$，故 $a^2=4b^2=4(a^2-c^2)$，整理得：$\frac{c^2}{a^2}=\frac{3}{4}$，所以 C 的离心率 $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

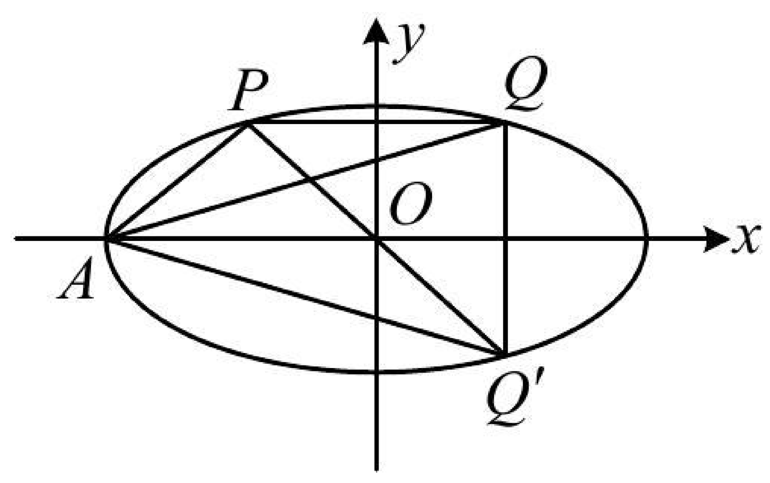
解法 2：也可直接设点的坐标来算 AP、AQ 的斜率积，设 $P(x_0,y_0)$，则 $Q(-x_0,y_0)$，

由题意，$A(-a,0)$，所以 $k_{AP}\cdot k_{AQ}=\frac{y_0}{x_0+a}\cdot\frac{y_0}{-x_0+a}=\frac{y_0^2}{a^2-x_0^2}$ ①，有 x_0，y_0 两个变量，可用椭圆方程消元，

因为点 P 在椭圆 C 上，所以 $\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}=1$，故 $y_0^2=b^2(1-\frac{x_0^2}{a^2})=\frac{b^2}{a^2}(a^2-x_0^2)$，

代入①得：$k_{AP}\cdot k_{AQ}=\frac{b^2}{a^2}$，接下来同解法 1.

答案：A



【变式 2】已知 M、N 是椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 上关于原点对称的两点，P 是椭圆 C 上的动点，直线 PM、PN 的斜率分别为 k_1、$k_2(k_1k_2\neq 0)$，若 $|k_1|+|k_2|$ 的最小值为 1，则椭圆 C 的离心率为_____.

解析：看到椭圆上的 M、N 关于原点对称，想到用第三定义斜率积结论建立 k_1 和 k_2 的关系，

由题意，$k_1k_2=-\frac{b^2}{a^2}$，所以 $|k_1|+|k_2|\geq 2\sqrt{|k_1|\cdot|k_2|}=2\sqrt{|k_1k_2|}=\frac{2b}{a}$，当且仅当 $|k_1|=|k_2|$ 时取等号，

所以 $|k_1|+|k_2|$ 的最小值为 $\frac{2b}{a}$，又 $|k_1|+|k_2|$ 的最小值为 1，所以 $\frac{2b}{a}=1$，

故 $a^2=4b^2=4(a^2-c^2)$，整理得：$\frac{c^2}{a^2}=\frac{3}{4}$，所以椭圆 C 的离心率 $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

答案： $\frac{\sqrt{3}}{2}$

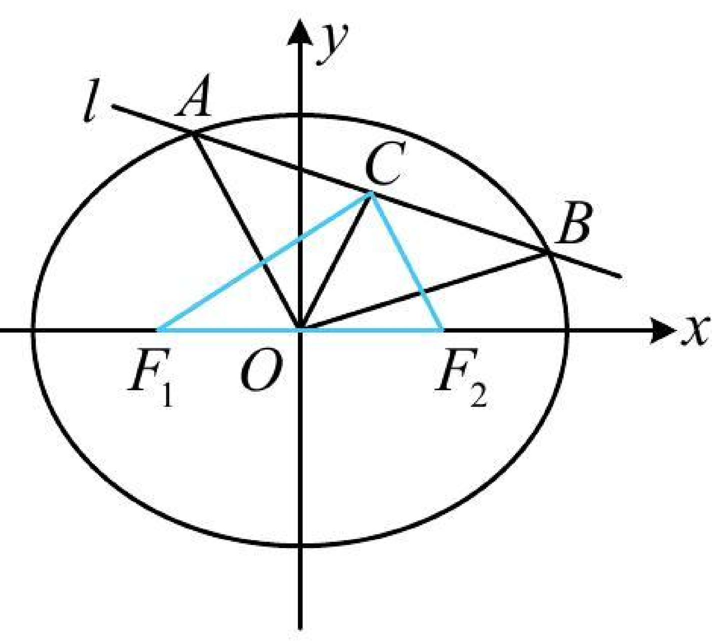
【例 4】直线 $l:x+3y-7=0$ 与椭圆 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{b^2}=1(0<b<3)$ 相交于 A，B 两点，椭圆的两个焦点分别为 F_1，F_2，线段 AB 的中点为 $C(1,2)$，则 ΔCF_1F_2 的面积为_____.

解析： 椭圆中涉及弦中点，想到中点弦斜率积结论，如图，$k_{OC}\cdot k_{AB}=-\frac{b^2}{9}$ ①，

$C(1,2)\Rightarrow k_{OC}=2$，$x+3y-7=0\Rightarrow y=-\frac{1}{3}x+\frac{7}{3}\Rightarrow k_{AB}=-\frac{1}{3}$，代入①可得 $2\times(-\frac{1}{3})=-\frac{b^2}{9}$，所以 $b^2=6$，

从而 $c=\sqrt{9-b^2}=\sqrt{3}$，故 $S_{\Delta CF_1F_2}=\frac{1}{2}|F_1F_2|\cdot|y_C|=\frac{1}{2}\times2\sqrt{3}\times2=2\sqrt{3}$.

答案： $2\sqrt{3}$



【反思】在椭圆中，涉及弦中点的问题都可以考虑用中点弦斜率积结论来建立方程，求解需要的量.

【变式】（2022•新高考Ⅱ卷）已知直线 l 与椭圆 $\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{3}=1$ 在第一象限交于 A、B 两点，l 与 x 轴、y 轴分别相交于 M、N 两点，且 $|MA|=|NB|$，$|MN|=2\sqrt{3}$，则直线 l 的方程为_____.

解析： 涉及直线与两条坐标轴的交点，不妨设直线的截距式方程，

设 $l:\frac{x}{m}+\frac{y}{n}=1$，则 $M(m,0)$，$N(0,n)$，因为 l 与椭圆的交点都在第一象限，所以 $m>0$，$n>0$，

接下来建立方程组求 m 和 n，先翻译 $|MN|=2\sqrt{3}$，因为 $|MN|=\sqrt{m^2+n^2}=2\sqrt{3}$，所以 $m^2+n^2=12$ ①，

$|MA|=|NB|$ 这一条件怎么用？直接计算 $|MA|$ 和 $|NB|$ 比较困难，于是画图来看，如图，$|MA|=|NB|$ 隐含了 MN 的中点也是 AB 的中点，涉及弦中点，可用中点弦斜率积结论，

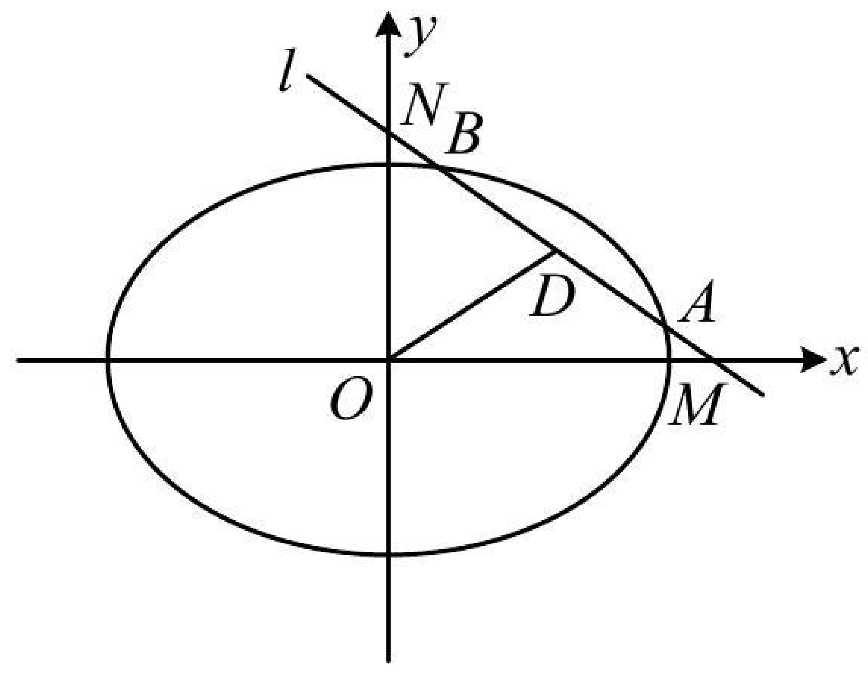
设 AB 中点为 D，则 $D(\frac{m}{2},\frac{n}{2})$，所以 $k_{OD}=\frac{n}{m}$，直线 l 的斜率 $k_{AB}=-\frac{n}{m}$，

由中点弦斜率积结论，$k_{OD}\cdot k_{AB}=\frac{n}{m}\cdot(-\frac{n}{m})=-\frac{1}{2}$，所以 $m^2=2n^2$ ②，

联立①②，结合 $m>0$，$n>0$ 可求得 $m=2\sqrt{2}$，$n=2$，

所以直线 l 的方程为 $\frac{x}{2\sqrt{2}}+\frac{y}{2}=1$，整理得：$x+\sqrt{2}y-2\sqrt{2}=0$.

答案： $x+\sqrt{2}y-2\sqrt{2}=0$



【反思】在高考中，弦中点除了直接给出之外，还可能隐含在长度相等、等腰、中垂线、外心等各种条件中，从这些条件中挖掘出弦中点，运用中点弦斜率积结论可以巧解问题.

强化训练

1.（★★）设 F_1，F_2 是椭圆 $\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{4}=1$ 的两个焦点，点 P 在椭圆上，$\angle F_1PF_2=30^{\circ}$，则 ΔPF_1F_2 的面积为_____.

2.（2023 •全国甲卷 •★★★）椭圆 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{6}=1$ 的两焦点为 F_1，F_2，O 为原点，P 为椭圆上一点，$\cos\angle F_1PF_2=\frac{3}{5}$，则 $|OP|=$（　　）

（A）$\frac{2}{5}$　（B）$\frac{\sqrt{30}}{2}$　（C）$\frac{3}{5}$　（D）$\frac{\sqrt{35}}{2}$

3.（★★）椭圆 $\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{2}=1$ 的左、右焦点分别为 F_1、F_2，点 P 在椭圆上，则 $|PF_1|\cdot|PF_2|$ 的取值范围为_____.

答案： $[2,6]$

4.（2022 • 全国模拟 • ★★★）已知 P 是椭圆 $C:\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{4}=1$ 在第一象限上的动点，F_1，F_2 分别是其左、

右焦点，O 是坐标原点，则 $\dfrac{|PF_1|-|PF_2|}{|OP|}$ 的取值范围是_____.

5.（2022 • 广西模拟 • ★★）已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左焦点为 F，过 F 作倾斜角为 45° 的直线与椭圆 C 交于 A、B 两点，若点 $M(-3,2)$ 是线段 AB 的中点，则椭圆 C 的离心率是（　　）

（A）$\dfrac{\sqrt{3}}{3}$　（B）$\dfrac{1}{2}$　（C）$\dfrac{2}{5}$　（D）$\dfrac{\sqrt{5}}{5}$

6.（2023 • 重庆模拟 • ★★★）已知点 $A(-5,0)$，$B(5,0)$，动点 $P(m,n)$ 满足直线 PA，PB 的斜率之积为 $-\dfrac{16}{25}$，则 $4m^2+n^2$ 的取值范围是（　　）

（A）$[16,100]$　（B）$[25,100]$　（C）$[16,100)$　（D）$(25,100)$

7.（2022 • 河北模拟 • ★★★★）已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的离心率为 $\dfrac{1}{2}$，A、B 是椭圆 C 的长轴端点，直线 $x=m(-a<m<a)$ 与椭圆 C 交于 P、Q 两点，记 k_1，k_2 分别为直线 AP 和 BQ 的斜率，则 $|k_1+4k_2|$ 的最小值为（　　）

（A）$\dfrac{3}{4}$　（B）$\sqrt{3}$　（C）$2\sqrt{3}$　（D）$4\sqrt{2}$

8.（2022 • 蚌埠模拟 • ★★★★）若椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{4}=1(a>2)$ 上存在 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)(x_1\neq x_2)$ 到点 $P(\dfrac{a}{5},0)$ 的距离相等，则椭圆 C 的离心率的取值范围是（　　）

（A）$(0,\dfrac{\sqrt{5}}{5})$　（B）$(\dfrac{\sqrt{5}}{5},1)$　（C）$(0,\dfrac{\sqrt{3}}{3})$　（D）$(\dfrac{\sqrt{3}}{3},1)$