第 2 节 函数的单调性与奇偶性（★★☆）

强化训练

类型Ⅰ：单调性、奇偶性判断与求参

1．（2020·新课标Ⅱ卷·★）设函数 $f(x)=x^3-\frac{1}{x^3}$，则 $f(x)$（　　）

（A）是奇函数，且在 $(0,+\infty)$ 单调递增　　（B）是奇函数，且在 $(0,+\infty)$ 单调递减

（C）是偶函数，且在 $(0,+\infty)$ 单调递增　　（D）是偶函数，且在 $(0,+\infty)$ 单调递减

答案：A

解析：先看奇偶性，可用奇函数的和差结论判断，因为 $y=x^3$ 和 $y=\frac{1}{x^3}$ 都是奇函数，所以 $f(x)$ 为奇函数，

再判断单调性，可拆分成 $y=x^3$ 和 $y=-\frac{1}{x^3}$ 两部分来看，

由幂函数的性质，$y=x^3$ 在 $(0,+\infty)$ 上↗，$y=x^{-3}$ 在 $(0,+\infty)$ 上↘，所以 $y=-x^{-3}$ 在 $(0,+\infty)$ 上↗，

而 $f(x)=x^3-\frac{1}{x^3}=x^3+(-x^{-3})$，所以 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上↗，故选 A.

2．（2023·新高考Ⅰ卷·★★）设函数 $f(x)=2^{x(x-a)}$ 在区间 $(0,1)$ 单调递减，则 a 的取值范围是（　　）

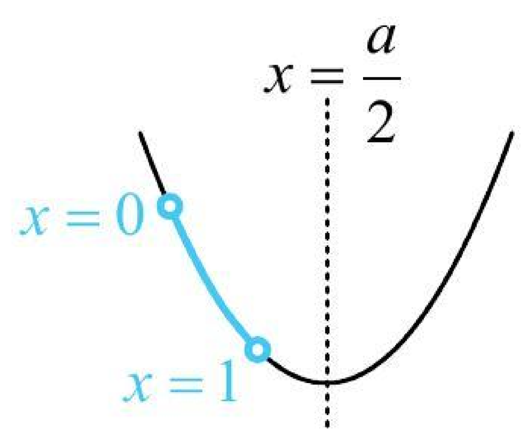
（A）$(-\infty,-2]$　（B）$[-2,0)$　（C）$(0,2]$　（D）$[2,+\infty)$

答案：D

解析：函数 $y=f(x)$ 由 $y=2^u$ 和 $u=x(x-a)$ 复合而成，可由同增异减准则分析单调性，

因为 $y=2^u$ 在 $\mathbf{R}$ 上↗，所以要使 $f(x)=2^{x(x-a)}$ 在 $(0,1)$ 上↘，只需 $u=x(x-a)$ 在 $(0,1)$ 上↘，

二次函数 $u=x(x-a)=x^2-ax$ 的对称轴为 $x=\frac{a}{2}$，如图，由图可知应有 $\frac{a}{2}\ge 1$，解得：$a\ge 2$.



3．（2023·广东韶关模拟·★★）已知 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数，且当 $x\ge 0$ 时，$f(x)=x^2+(a-1)x+a+1$，则 $f(-3)=$_____.

答案：-3

解析：给出的奇函数在 $x=0$ 处有定义，可先用 $f(0)=0$ 求出 a，由题意，$f(0)=a+1=0$，所以 $a=-1$，

从而当 $x\ge 0$ 时，$f(x)=x^2-2x$，故 $f(-3)=-f(3)=-(3^2-2\times 3)=-3$.

4．（2023·全国甲卷·★）若 $y=(x-1)^2+ax+\sin(x+\frac{\pi}{2})$ 为偶函数，则 $a=$_____.

答案：2

解析：所给解析式可化为 $y=x^2+(a-2)x+1+\cos x$，

各部分奇偶性都能判断，故用奇偶性的加减法结论处理，

因为 $y=x^2+1+\cos x$ 为偶函数，$y=(a-2)x$ 为奇函数，

所以要使二者之和为偶函数，只能 $a-2=0$，故 $a=2$.

5．（2022・河南模拟・★★）若函数 $f(x)=\ln(\sqrt{x^2+a}-x)$ 为奇函数，则 $a=$（　　）

（A）$\frac{1}{4}$　　（B）$\frac{1}{2}$　　（C）1　　（D）2

答案：C

解法 1：此处不确定 0 是否在定义域内，由 $f(0)=0$ 求 a 不严谨，可用奇函数的定义处理，

由题意，$f(-x)+f(x)=\ln(\sqrt{x^2+a}+x)+\ln(\sqrt{x^2+a}-x)=\ln[(\sqrt{x^2+a}+x)(\sqrt{x^2+a}-x)]=\ln a=0$，所以 $a=1$.

解法 2：在内容提要第 5 点中，我们归纳了 $y=\ln(\sqrt{x^2+1}\pm x)$ 为奇函数，与 $f(x)$ 对比即得 $a=1$.

6．（2023・新高考Ⅱ卷・★★）若 $f(x)=(x+a)\ln\frac{2x-1}{2x+1}$ 为偶函数，则 $a=$（　　）

（A）-1　　（B）0　　（C）$\frac{1}{2}$　　（D）1

答案：B

解法 1：偶函数可抓住定义 $f(-x)=f(x)$ 来建立方程求参，

因为 $f(x)$ 为偶函数，所以 $f(-x)=f(x)$，即 $(-x+a)\ln\frac{-2x-1}{-2x+1}=(x+a)\ln\frac{2x-1}{2x+1}$ ①，

而 $\ln\frac{-2x-1}{-2x+1}=\ln\frac{2x+1}{2x-1}=\ln(\frac{2x-1}{2x+1})^{-1}=-\ln\frac{2x-1}{2x+1}$，代入①得：$(-x+a)(-\ln\frac{2x-1}{2x+1})=(x+a)\ln\frac{2x-1}{2x+1}$，

化简得：$x-a=x+a$，所以 $a=0$.

解法 2：也可在定义域内取个特值快速求出答案，

因为 $f(x)$ 为偶函数，所以 $f(-1)=f(1)$，故 $(-1+a)\ln 3=(1+a)\ln\frac{1}{3}$ ①，

而 $\ln\frac{1}{3}=\ln 3^{-1}=-\ln 3$，代入①得：$(-1+a)\ln 3=-(1+a)\ln 3$，解得：$a=0$.

类型Ⅱ：奇函数+常数结论的应用

7．（★★）设 $f(x)$ 为定义在 **R** 上的奇函数，$g(x)=f(x)-1$，$g(1)=-2$，则 $g(-1)=$_____.

答案：0

解析：因为 $f(x)$ 为奇函数且 $g(x)=f(x)-1$，所以 $g(-x)+g(x)=f(-x)-1+f(x)-1=-2$，

故 $g(-1)+g(1)=-2$，又 $g(1)=-2$，所以 $g(-1)=-2-g(1)=0$.

8．（2022・四川乐山模拟・★★）设 $f(x)=|x|\sin x+1$，若 $f(a)=2$，则 $f(-a)=$_____.

答案：0

解析：设 $g(x)=|x|\sin x$，则 $g(x)$ 为奇函数，且 $f(x)=g(x)+1$，

所以 $f(a)+f(-a)=g(a)+1+g(-a)+1=2$，又 $f(a)=2$，所以 $f(-a)=2-f(a)=0$.

类型III：函数值不等式的解法

9．（2023·河北模拟·★）已知定义在 $[-1,3]$ 上的函数 $f(x)$ 满足对任意的 $x_1,x_2\in[-1,3]$ 且 $x_1\ne x_2$，都有 $[f(x_1)-f(x_2)](x_1-x_2)<0$，则不等式 $f(1-2x)\ge f(x+1)$ 的解集为（　　）

（A）$(-\infty,0]$　　（B）$[0,1]$　　（C）$[-1,0]$　　（D）$[0,+\infty)$

答案：B

解析：条件 $[f(x_1)-f(x_2)](x_1-x_2)<0$ 可翻译为 $f(x)$ 为减函数，故用单调性解不等式 $f(1-2x)\ge f(x+1)$，

由题意，$f(x)$ 是定义在 $[-1,3]$ 上的减函数，所以 $f(1-2x)\ge f(x+1)\Leftrightarrow\begin{cases}-1\le 1-2x\le 3\\-1\le x+1\le 3\\1-2x\le x+1\end{cases}$，解得：$0\le x\le 1$.

10．（2017·新课标Ⅰ卷·★★）奇函数 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递减，若 $f(1)=-1$，则满足 $-1\le f(x-2)\le 1$ 的 x 的取值范围是（　　）

（A）$[-2,2]$　　（B）$[-1,1]$　　（C）$[0,4]$　　（D）$[1,3]$

答案：D

解析：为了利用单调性解不等式，先把原不等式中的 -1 和 1 也化成 $f(x)$ 的某个函数值，

因为 $f(x)$ 为奇函数且 $f(1)=-1$，所以 $f(-1)=-f(1)=1$，从而 $-1\le f(x-2)\le 1$ 即为 $f(1)\le f(x-2)\le f(-1)$，

结合 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上↘可得 $-1\le x-2\le 1$，故 $1\le x\le 3$.

11．（2022·湖北五校联考·★★★）已知函数 $f(x)=\begin{cases}e^x,x\le 0\\x^2+2,x>0\end{cases}$，若 $f(|x|)>f(x^2-2)$，则实数 x 的取值范围为_____.

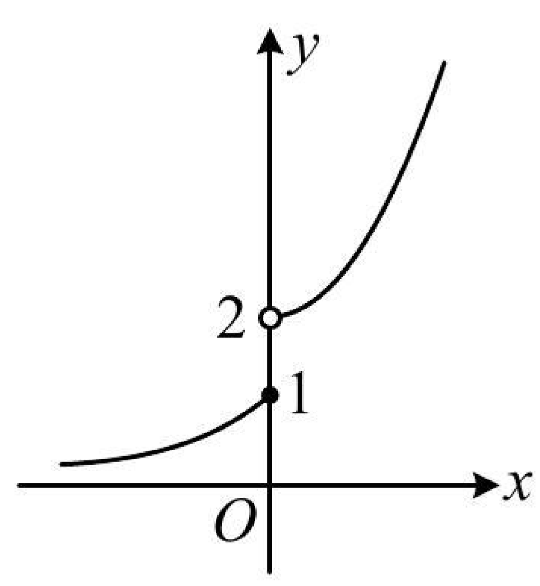
答案：$(-2,2)$

解析：看到函数值不等式 $f(|x|)>f(x^2-2)$，首先考虑判断单调性，此处为分段函数，可作图看单调性，

由题意，$f(x)$ 的大致图象如图所示，由图可知 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上↗，

所以 $f(|x|)>f(x^2-2)\Leftrightarrow|x|>x^2-2$，将 x^2 看成 $|x|^2$，移项可分解因式，

故 $(|x|+1)(|x|-2)<0$，因为 $|x|+1>0$，所以 $|x|<2$，解得：$-2<x<2$.



12．（2022·福建漳州模拟·★★★）已知函数 $f(x)=\begin{cases}2^x-1,x>0\\-1,x\le 0\end{cases}$，若 $f(3a-2)<f(a)$，则 a 的取值范

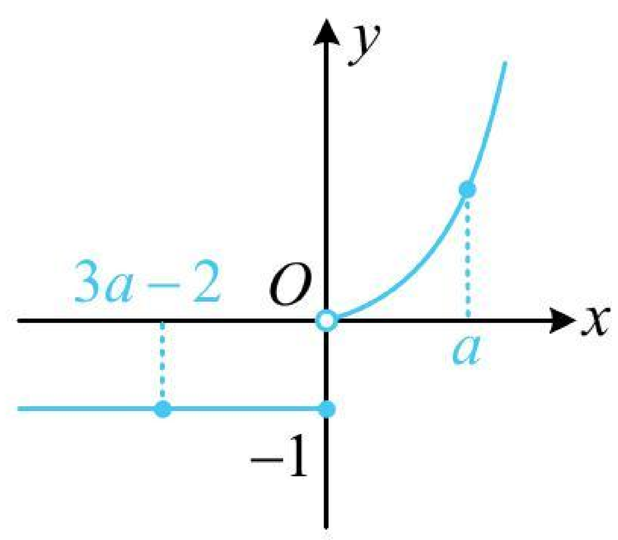
围为_____.

答案：$(0,1)$

解析：若代入解析式解 $f(3a-2)<f(a)$，则需讨论的情况较多，所以画图结合单调性分析，

函数 $f(x)$ 的大致图象如图，由图可知要使 $f(3a-2)<f(a)$，

只需 a 在 $(0,+\infty)$ 这一段，且 $3a-2$ 在 a 左侧，所以 $\begin{cases}a>0\\3a-2<a\end{cases}$，解得：$0<a<1$.



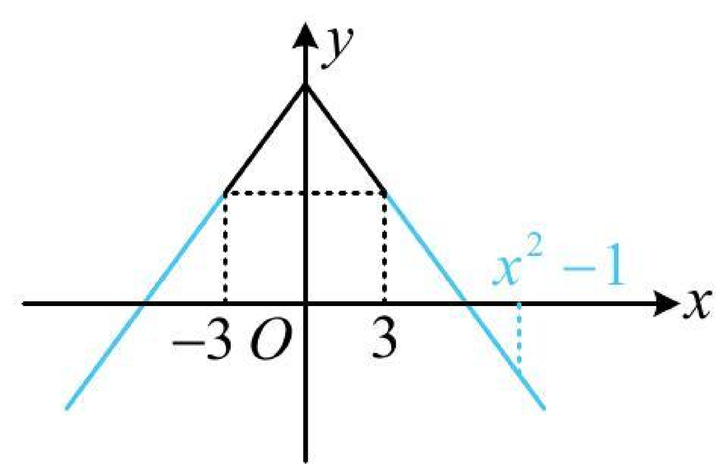
13．（★★）已知偶函数 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递减，则满足 $f(x^2-1)<f(3)$ 的 x 的取值范围是_____.

答案：$(-\infty,-2)\cup(2,+\infty)$

解析：偶函数给了 y 轴一侧的单调性，可画出草图，用图象来分析 $f(x^2-1)<f(3)$，

由题意，函数 $f(x)$ 的草图如图，可以看到，图象上离 y 轴越远的点，对应的函数值越小，

所以 $f(x^2-1)<f(3)$ 等价于 x^2-1 比 3 离 y 轴更远，即 $|x^2-1|>3$，解得：$x<-2$ 或 $x>2$.



14．（★★★）设 $f(x)=\ln(1+|x|)-\dfrac{1}{1+x^2}$，则使 $f(x^2-x)>f(2x-2)$ 成立的 x 的取值范围是（　　）

（A）$(-\infty,-2)\cup(2,+\infty)$　（B）$(-\infty,-2)\cup(0,2)$　（C）$(-2,2)$　（D）$(-\infty,-2)\cup(1,+\infty)$

答案：A

解析：$f(x)=\ln(1+|x|)-\dfrac{1}{1+x^2}$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数，

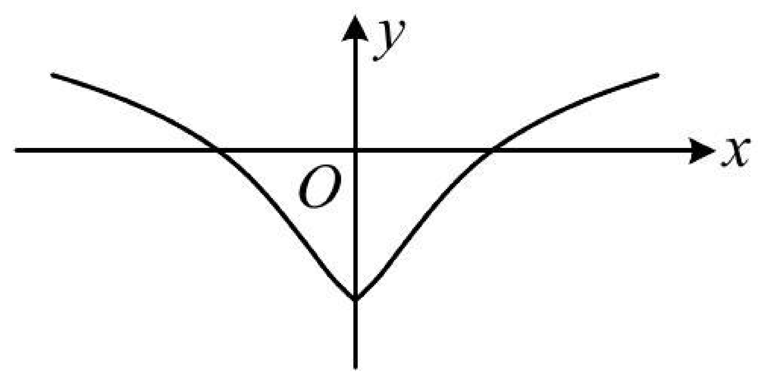
虽给了解析式，但将 $f(x^2-x)>f(2x-2)$ 代入解析式求解较麻烦，故考虑先判断 y 轴一侧的单调性，再画草图来看，此处要求导吗？其实不用，拆分分析即可，

当 $x\ge 0$ 时，$f(x)=\ln(1+x)-\dfrac{1}{1+x^2}$，而 $y=\ln(1+x)$ 和 $y=-\dfrac{1}{1+x^2}$ 都↗，所以 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上↗，

故 $f(x)$ 的草图如图，可以看到，图象上离 y 轴越远的点，对应的函数值越大，

所以 $f(x^2-x)>f(2x-2)\Leftrightarrow|x^2-x|>|2x-2|\Leftrightarrow|x(x-1)|>2|x-1|$，两端可约去 $|x-1|$，但需补充它不为 0，

从而 $\begin{cases}|x-1|\ne 0\\|x|>2\end{cases}$，故 $\begin{cases}x\ne 1\\x<-2或x>2\end{cases}$，所以 $x<-2$ 或 $x>2$.



15．（★★）已知 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数，且 $f(x)$ 为增函数，则不等式 $f(x)+f(1-4x)>0$ 的解集是（　　）

（A）$(1,+\infty)$　（B）$(\frac{1}{3},+\infty)$　（C）$(-\infty,\frac{1}{3})$　（D）$(-\infty,1)$

答案：C

解析：看到 $f(x)+f(1-4x)>0$ 这种结构，想到移项结合奇函数将负号拿进括号，利用单调性求解，

由题意，$f(x)+f(1-4x)>0 \Leftrightarrow f(x)>-f(1-4x)=f(4x-1)$，又 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上↗，所以 $x>4x-1$，故 $x<\frac{1}{3}$.

16．（2022·广东模拟·★★★）若定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递减，且 $f(2)=0$，则满足 $xf(x-1)\ge 0$ 的 x 的取值范围为（　　）

（A）$[-1,1]\cup[3,+\infty)$　（B）$[-3,-1]\cup[0,1]$　（C）$[-1,0]\cup[1,+\infty)$　（D）$[-1,0]\cup[1,3]$

答案：D

解析：不等式 $xf(x-1)\ge 0$ 左侧是两项之积，可讨论 x 的正负，并将其约掉，化简后再解，

由题意，函数 $y=f(x)$ 的大致图象如图所示，显然 $x=0$ 是不等式 $xf(x-1)\ge 0$ 的解；

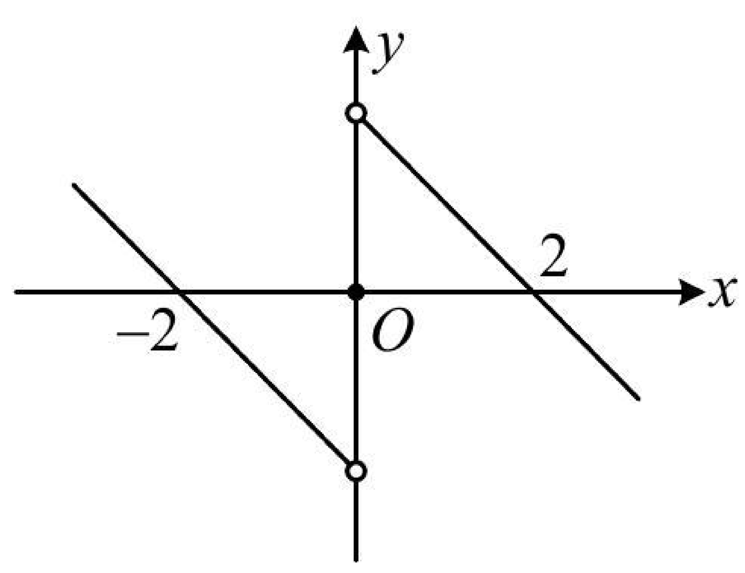
当 $x>0$ 时，$xf(x-1)\ge 0 \Leftrightarrow f(x-1)\ge 0$，由图可知应有 $x-1\le -2$ 或 $0\le x-1\le 2$，

解得：$x\le -1$ 或 $1\le x\le 3$，结合 $x>0$ 可得 $1\le x\le 3$；

当 $x<0$ 时，$xf(x-1)\ge 0 \Leftrightarrow f(x-1)\le 0$，由图可知应有 $-2\le x-1\le 0$ 或 $x-1\ge 2$，

解得：$-1\le x\le 1$ 或 $x\ge 3$，结合 $x<0$ 可得 $-1\le x<0$；

综上所述，所求 x 的取值范围为 $[-1,0]\cup[1,3]$.



17．（★★★）已知函数 $f(x)=\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}$，若 $f(\log_3 x)-f(\log_3\frac{1}{x})\le 2f(1)$，则 x 的取值范围为（　　）

（A）$[\frac{1}{3},1]$　（B）$[\frac{1}{3},3]$　（C）$[\frac{1}{3},+\infty)$　（D）$(0,3]$

答案：D

解析：注意到 $\log_3\frac{1}{x}=\log_3 x^{-1}=-\log_3 x$，所以先分析 $f(x)$ 是否为奇函数，若是，则负号可以拿出去，

由题意，$f(-x)=\mathrm{e}^{-x}-\mathrm{e}^x=-f(x)\Rightarrow f(x)$ 为奇函数，所以 $f(\log_3\frac{1}{x})=f(-\log_3 x)=-f(\log_3 x)$，

代入题干不等式化简得：$f(\log_3 x) \le f(1)$，于是又想到分析 $f(x)$ 的单调性，用单调性来解此不等式，

因为 $f'(x) = \mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x} > 0$，所以 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上↗，从而 $f(\log_3 x) \le f(1) \Leftrightarrow \log_3 x \le 1$，故 $0 < x \le 3$.