第 3 节 直线相关的对称问题（★★☆）

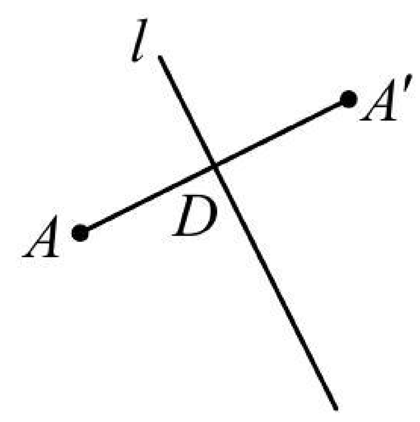
强化训练

1．（2022·南阳模拟·★）点 $A(1,2)$ 关于直线 $l:4x+2y-13=0$ 的对称点为_____.

答案：$(3,3)$

解析：设 A 关于 l 的对称点是 $A'(a,b)$，则 AA' 的中点为 $D(\frac{1+a}{2},\frac{2+b}{2})$，

如图，应有 $\begin{cases}4\times\dfrac{1+a}{2}+2\times\dfrac{2+b}{2}-13=0\text{(中点在}l\text{上)}\\ \dfrac{b-2}{a-1}\times(-2)=-1(AA'\perp l)\end{cases}$，解得：$\begin{cases}a=3\\b=3\end{cases}$，故 $A'(3,3)$.



2．（2022·北京模拟·★）直线 $l:3x-4y+5=0$ 关于点 $A(1,1)$ 对称的直线 l' 的方程为_____.

答案：$3x-4y-3=0$

解法 1：如图，关于点对称的两直线平行，所以两直线斜率相等，再找一个点即可，

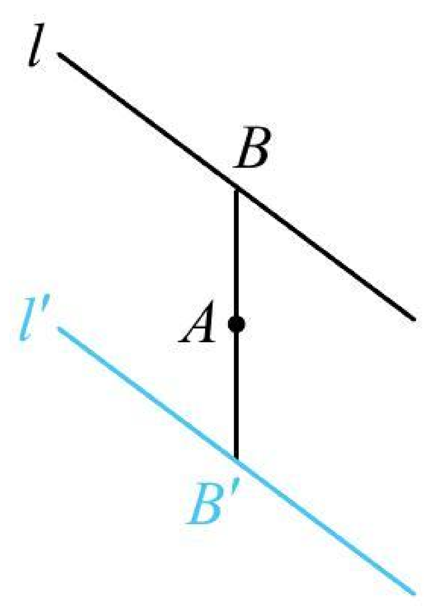
由题意，点 $B(1,2)$ 在 l 上，那么它关于点 A 的对称点 $B'(1,0)$ 在 l' 上，

又直线 l 的斜率为 $\frac{3}{4}$，所以 l' 的方程为 $y=\frac{3}{4}(x-1)$，整理得：$3x-4y-3=0$.

解法 2：也可设 B' 的坐标，通过 B' 关于 A 的对称点 B 在 l 上建立关于所设坐标的方程，

设 $B'(x,y)$ 是 l' 上任意一点，则它关于 A 的对称点 $B(2-x,2-y)$ 在直线 l 上，

代入直线 l 的方程可得 $3(2-x)-4(2-y)+5=0$，整理得：$3x-4y-3=0$，即 $l':3x-4y-3=0$.



3．（★）已知圆 $C:x^2+y^2+ax+by+1=0$ 关于直线 $l:x+y=1$ 对称的圆为 $O:x^2+y^2=1$，则 $a+b=$（　　）

（A）-2　　（B）±2　　（C）-4　　（D）±4

答案：C

解析：两圆关于 l 对称，则圆心 O 和 C 关于 l 对称，O 已知，可先求点 O 关于 l 的对称点，该点即为 C，l 的斜率为 -1，可按特殊情况处理，

$x+y=1 \Rightarrow \begin{cases} x=1-y \\ y=1-x \end{cases}$，将 $O(0,0)$ 代入此二式右侧可得 $\begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}$，所以圆心 O 关于直线 l 的对称点为 $C(1,1)$，

又 $x^2+y^2+ax+by+1=0 \Rightarrow (x+\frac{a}{2})^2+(y+\frac{b}{2})^2=\frac{a^2+b^2}{4}-1$，所以圆心 C 的坐标为 $(-\frac{a}{2},-\frac{b}{2})$，

从而 $\begin{cases} -\frac{a}{2}=1 \\ -\frac{b}{2}=1 \end{cases}$，故 $a=b=-2$，所以 $a+b=-4$.

4.（★）已知圆 $C: x^2+y^2-2x+4y=0$ 关于直线 $l: 2x+ay=0$ 对称，则 $a=$_____.

答案：1

解析：$x^2+y^2-2x+4y=0 \Rightarrow (x-1)^2+(y+2)^2=5 \Rightarrow$ 圆心为 $C(1,-2)$，

因为圆 C 关于直线 l 对称，所以圆心 C 在 l 上，故 $2\times1+a\times(-2)=0$，解得：$a=1$.

5.（★）直线 $l: x-y+1=0$ 关于 x 轴对称的直线 l' 的方程是（　　）

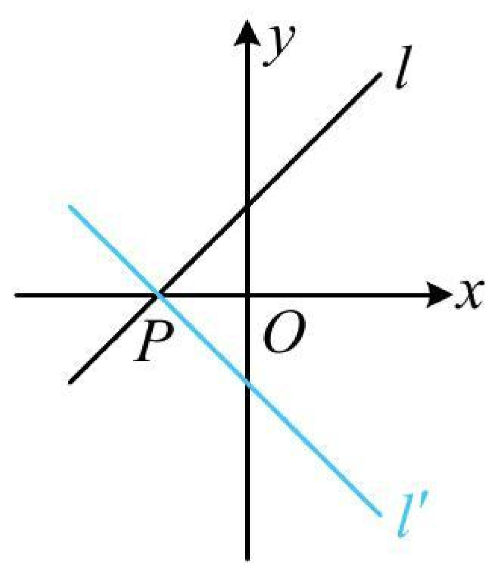
（A）$x+y-1=0$　（B）$x-y+1=0$　（C）$x+y+1=0$　（D）$x-y-1=0$

答案：C

解析：如图，直线 l' 过 l 与 x 轴的交点 P，且 l 和 l' 的斜率相反，

$\begin{cases} x-y+1=0 \\ y=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-1 \\ y=0 \end{cases} \Rightarrow P(-1,0)$，直线 l 的斜率为 1，所以直线 l' 的斜率为 -1，

故 l' 的方程为 $y=-[x-(-1)]$，整理得：$x+y+1=0$.



6.（★★）直线 $l_1: x-3y+3=0$ 关于 $l: x+y-1=0$ 的对称直线 l_2 的方程为_____.

答案：$3x-y+1=0$

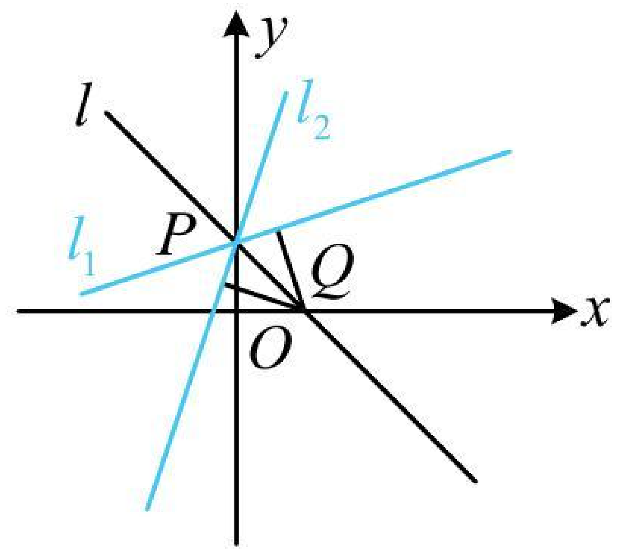
解析：如图，直线 l_2 过 l_1 与 l 的交点 P，先求点 P，$\begin{cases} x+y-1=0 \\ x-3y+3=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=1 \end{cases}$，所以 $P(0,1)$，

有一个点了，还差斜率，于是设斜率，并在 l 上另取一点 Q，由 Q 到 l_1 和 l_2 距离相等建立方程求斜率，

由图可知 l_2 的斜率存在，设其方程为 $y=kx+1$，即 $kx-y+1=0$ ①，

点 $Q(1,0)$ 在直线 l 上，所以 Q 到 l_1 和 l_2 的距离相等，故 $\frac{|1+3|}{\sqrt{1^2+(-3)^2}}=\frac{|k+1|}{\sqrt{k^2+(-1)^2}}$，解得：$k=3$ 或 $\frac{1}{3}$，

其中 $\frac{1}{3}$ 是 l_1 的斜率，舍去，所以 $k=3$，代入①整理得 l_2 的方程为 $3x-y+1=0$.



7．（2022·勃利模拟·★★★）设 $P(x,y)$ 为直线 $l:x-y=0$ 上的动点，则 $m=\sqrt{(x-2)^2+(y-4)^2}+\sqrt{(x+2)^2+(y-1)^2}$ 的最小值为（　　）

（A）5　（B）6　（C）$\sqrt{37}$　（D）$\sqrt{39}$

答案：C

解析：由 m 的形式想到距离之和，记 $M(2,4)$，$N(-2,1)$，则 $m=|PM|+|PN|$，

如图，M、N 在直线 l 的同侧，直接分析 $|PM|+|PN|$ 的最值不易，可将 M 对称到 l 的另一侧来看，

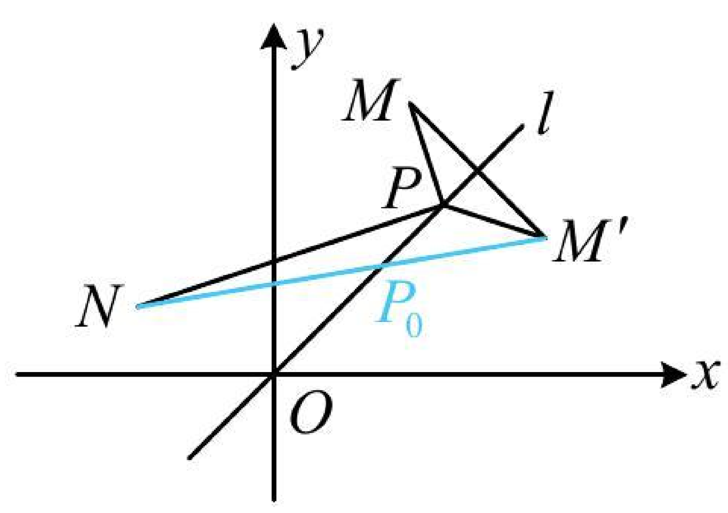
设 M' 为 M 关于 l 的对称点，则 $|PM|=|PM'|$，所以 $|PM|+|PN|=|PM'|+|PN|$，

由三角形两边之和大于第三边可得 $|PM'|+|PN|\ge|M'N|$，当且仅当 P 与图中 P_0 重合时取等号，

所以 $|PM|+|PN|$ 的最小值是 $|M'N|$，下面先求点 M' 的坐标，注意到 l 的斜率为 1，可按特殊情况处理，

$x-y=0\Rightarrow\begin{cases}x=y\\y=x\end{cases}$，将点 $M(2,4)$ 代入此二式的右侧可得 $\begin{cases}x=4\\y=2\end{cases}$，所以 $M'(4,2)$，

故 $|M'N|=\sqrt{(-2-4)^2+(1-2)^2}=\sqrt{37}$，即 $(|PM|+|PN|)_{\min}=\sqrt{37}$.



8．（2022·安徽模拟·★★★）已知点 R 在直线 $l:x-y+1=0$ 上，$M(1,3)$，$N(3,-1)$，则 $||RM|-|RN||$ 的最大值为（　　）

（A）$\sqrt{5}$　（B）$\sqrt{7}$　（C）$\sqrt{10}$　（D）$2\sqrt{5}$

答案：C

解析：如图，M、N 在 l 的两侧，直接分析 $||RM|-|RN||$ 的最大值不易，可考虑将 M 对称到 l 的另一侧，

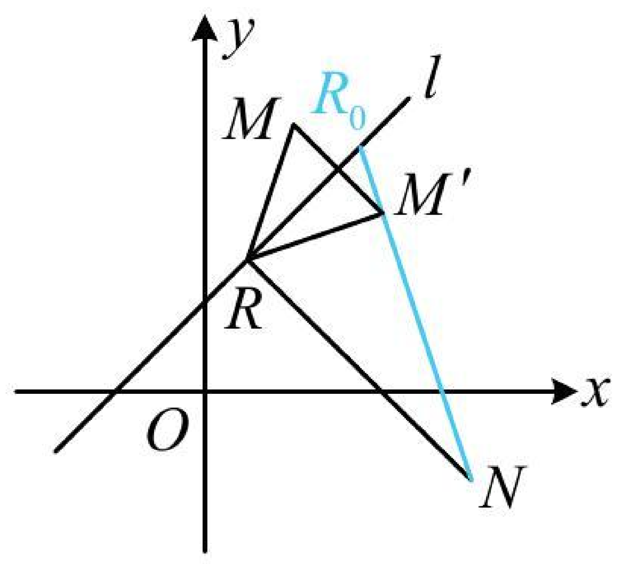
如图，设 M' 是 M 关于直线 l 的对称点，则 $|RM|=|RM'|$，所以 $||RM|-|RN||=||RM'|-|RN||$，

由三角形两边之差的绝对值小于第三边可得 $||RM'|-|RN||\le|M'N|$，当且仅当点 R 与图中 R_0 重合时取等号，

所以 $(||RM|-|RN||)_{\max}=|M'N|$，下面先求 M' 的坐标，注意到 l 的斜率为 1，可按特殊情况处理，

$x-y+1=0\Rightarrow\begin{cases}x=y-1\\y=x+1\end{cases}$，将 $M(1,3)$ 代入此二式的右侧可得 $\begin{cases}x=3-1=2\\y=1+1=2\end{cases}$，所以 $M'(2,2)$，

故 $|M'N|=\sqrt{(3-2)^2+(-1-2)^2}=\sqrt{10}$，即 $||RM|-|RN||$ 的最大值为 $\sqrt{10}$.



9.（2022 • 潍坊一模 • ★★★）（多选）已知圆 $C:x^2+(y-2)^2=1$，一条光线从点 $P(2,1)$ 发出，经 x 轴反射，下列结论中正确的是（　　）

（A）圆 C 关于 x 轴的对称圆为 $x^2+(y+2)^2=1$

（B）若反射光线平分圆 C 的周长，则入射光线所在的直线为 $3x-2y-4=0$

（C）若反射光线与圆 C 相切于点 A，与 x 轴交于点 B，则 $|PB|+|BA|=2$

（D）若反射光线与圆 C 的一个交点为 A，与 x 轴交于点 B，则 $|PB|+|BA|$ 的最小值为 $2\sqrt{3}-1$

答案：AB

解析：涉及入射光线与反射光线的对称问题，先把已知的点 P 和点 C 关于反射面的对称点作出来，如下列图中的 P' 和 C'，

A 项，由题意，$C(0,2)$，所以 $C'(0,-2)$，从而圆 C 关于 x 轴的对称圆为 $x^2+(y+2)^2=1$，故 A 项正确；

B 项，反射光线过圆心时平分周长，如图 1，入射光线所在直线即为直线 PC'，其斜率为 $\dfrac{-2-1}{0-2}=\dfrac{3}{2}$，

所以 PC' 的方程为 $y=\dfrac{3}{2}x-2$，整理得：$3x-2y-4=0$，故 B 项正确；

C 项，如图 2，因为 $|PB|=|P'B|$，所以 $|PB|+|BA|=|P'B|+|BA|=|P'A|=\sqrt{|P'C|^2-|AC|^2}$ ①，

由题意，$|AC|=1$，$P'(2,-1)$，所以 $|P'C|=\sqrt{(2-0)^2+(-1-2)^2}=\sqrt{13}$，

代入①可得 $|PB|+|BA|=2\sqrt{3}$；若 AB 与圆 C 相切于 y 轴右侧，$|P'A|$ 长度不变，故 C 项错误；

D 项，由 C 项的分析过程知 $|PB|+|BA|=|P'A|$，而 $|P'A|$ 最小的情形如图 3，此时 $|P'A|=|P'C|-1=\sqrt{13}-1$，

所以 $|PB|+|BA|$ 的最小值为 $\sqrt{13}-1$，故 D 项错误.

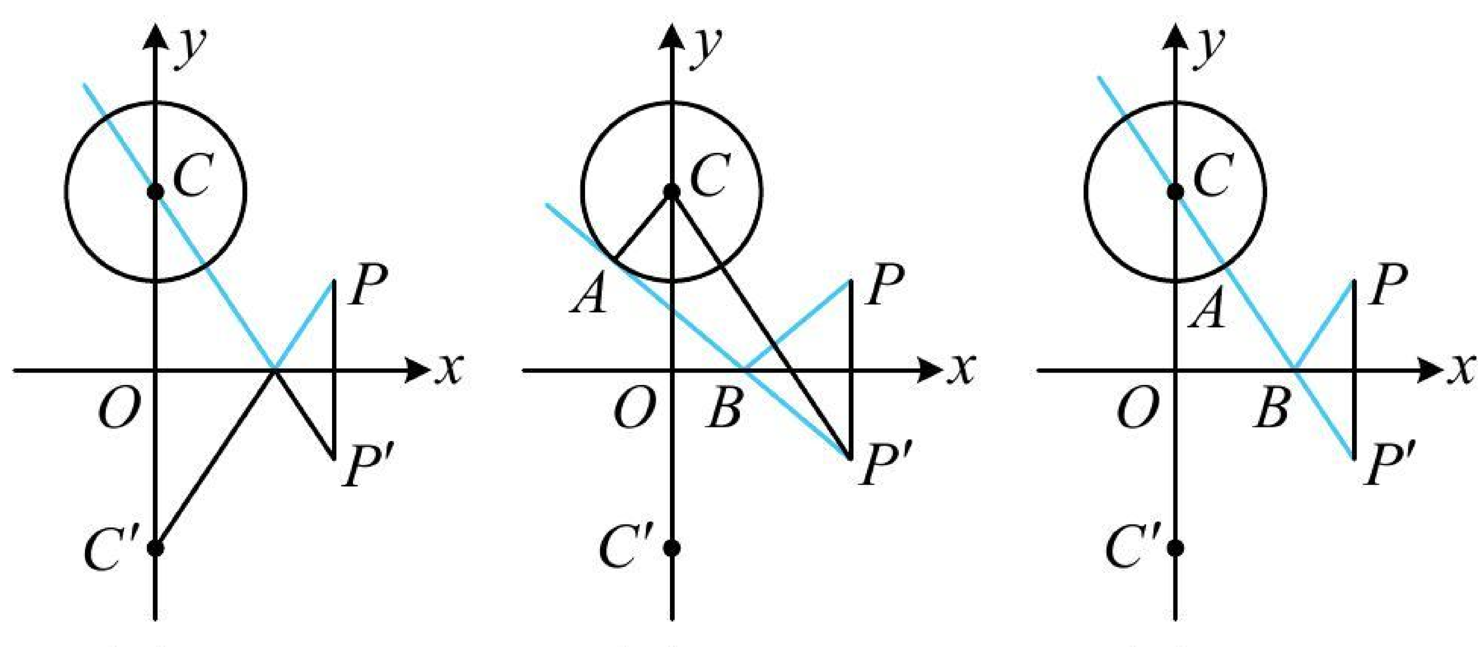


图1　　图2　　图3