# 第 2 节 椭圆的焦点三角形相关问题（★★★）

## 内容提要

椭圆上一点与两焦点形成的三角形称为焦点三角形，焦点三角形问题常用椭圆的定义求解，但除定义外，可能还需结合图形（如等腰、等边、直角三角形，矩形，平行四边形等）的几何性质才能求解问题，因此本节将归纳高考中椭圆常见的图形和几何条件的处理思路.

## 典型例题

**类型Ⅰ：焦点三角形中的特殊图形**

【例 1】设 $F_1$，$F_2$ 为椭圆 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ 的两个焦点，$P$ 为椭圆上一点，$\Delta PF_1F_2$ 为直角三角形，且 $|PF_1|>|PF_2|$，则 $\frac{|PF_1|}{|PF_2|}$ 的值为_____.

**解析：**焦点三角形问题优先考虑结合椭圆的定义求解，先给出椭圆的 $a$、$b$、$c$，

由题意，$a=3$，$b=2$，$c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{5}$，设 $|PF_1|=m$，$|PF_2|=n$，$m>n$，则 $m+n=2a=6$ ①，

$\Delta PF_1F_2$ 是直角三角形，可用勾股定理翻译，但需讨论谁是直角顶点，有图 1 和图 2 两种情况，

若为图 1，则 $m^2+n^2=|F_1F_2|^2=4c^2=20$ ②，

联立①②结合 $m>n$ 可解得：$m=4$，$n=2$，所以 $\frac{|PF_1|}{|PF_2|}=\frac{m}{n}=2$；



若为图 2，则 $n^2+|F_1F_2|^2=m^2$，即 $n^2+20=m^2$ ③，联立①③解得：$m=\frac{14}{3}$，$n=\frac{4}{3}$，故 $\frac{|PF_1|}{|PF_2|}=\frac{m}{n}=\frac{7}{2}$.

**答案：**2 或 $\frac{7}{2}$

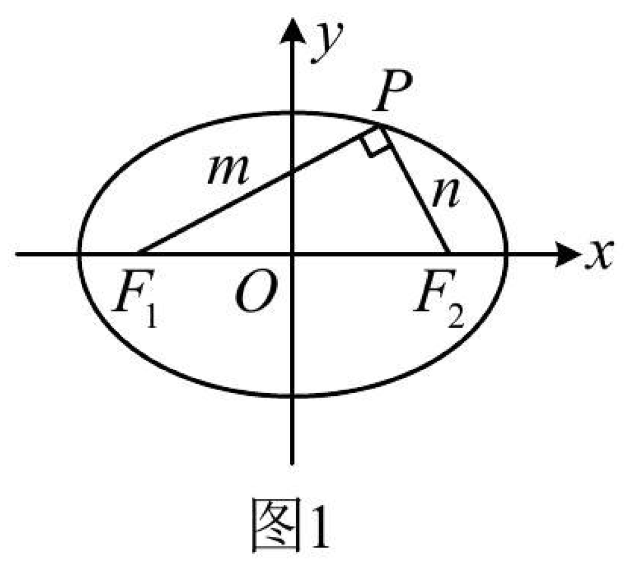



图1

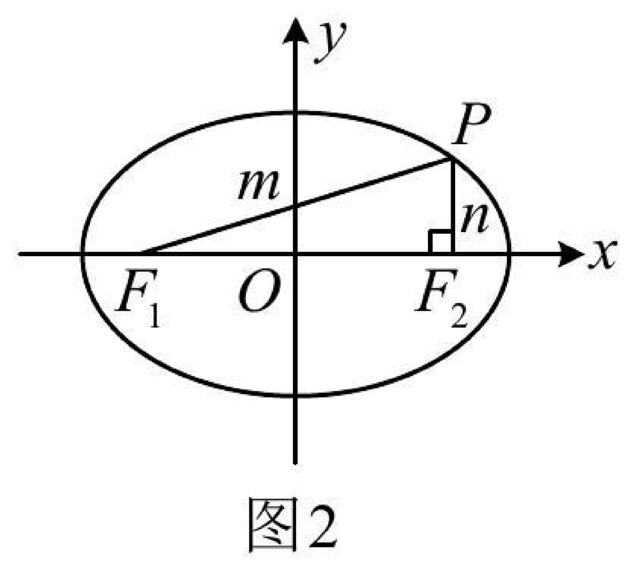



图2

【反思】解析几何小题中对直角的常见翻译方法有：①勾股定理；②斜率之积为 $-1$；③向量数量积等于 0；④斜边上的中线等于斜边的一半等. 选择合适的方法前应先预判计算量.

【变式】已知椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左、右焦点分别为 $F_1$、$F_2$，$P$ 为椭圆 $C$ 上一点，$O$ 为原点，若 $(\overrightarrow{OF_1}-\overrightarrow{OP})\cdot(\overrightarrow{OF_1}+\overrightarrow{OP})=0$，且 $|PF_1|=2|PF_2|$，则椭圆 $C$ 的离心率为_____.

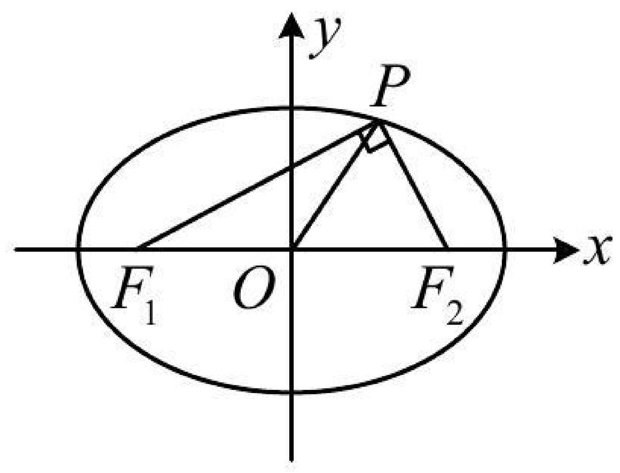
**解析：**椭圆 $C$ 的离心率 $e=\frac{c}{a}=\frac{2c}{2a}=\frac{|F_1F_2|}{|PF_1|+|PF_2|}$，故只需分析 $\Delta PF_1F_2$ 的三边比值，就可求得离心率，

题干的向量关系式可化简，先化简，$(\overrightarrow{OF_1}-\overrightarrow{OP})\cdot(\overrightarrow{OF_1}+\overrightarrow{OP})=0\Rightarrow|\overrightarrow{OF_1}|^2-|\overrightarrow{OP}|^2=0\Rightarrow|OF_1|=|OP|$，

所以$|OP|=\frac{1}{2}|F_1F_2|$，故$PF_1\perp PF_2$，接下来只需结合$|PF_1|=2|PF_2|$即可分析$\Delta PF_1F_2$的三边比值，

不妨设$|PF_2|=m$，则$|PF_1|=2m$，$|F_1F_2|=\sqrt{|PF_1|^2+|PF_2|^2}=\sqrt{5}m$，所以$e=\frac{|F_1F_2|}{|PF_1|+|PF_2|}=\frac{\sqrt{5}m}{m+2m}=\frac{\sqrt{5}}{3}$.

**答案**：$\frac{\sqrt{5}}{3}$




【反思】椭圆焦点三角形已知（或可求得）三边比值求离心率，用公式$e=\frac{|F_1F_2|}{|PF_1|+|PF_2|}$来算.

【例 2】已知$F_1$，$F_2$为椭圆$C:\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1$的两个焦点，过原点的直线交椭圆$C$于$P$，$Q$两点，且$|PQ|=|F_1F_2|$，则四边形$PF_1QF_2$的面积为_____.

**解析**：要求四边形$PF_1QF_2$的面积，先分析它的形状，由题意，$O$既是$PQ$中点，也是$F_1F_2$中点，

所以四边形$PF_1QF_2$是平行四边形，又$|PQ|=|F_1F_2|$，所以四边形$PF_1QF_2$是矩形，故$PF_1\perp PF_2$，



如图，四边形$PF_1QF_2$的面积即为$|PF_1|\cdot|PF_2|$，可结合椭圆定义，并用勾股定理翻译$PF_1\perp PF_2$来算，

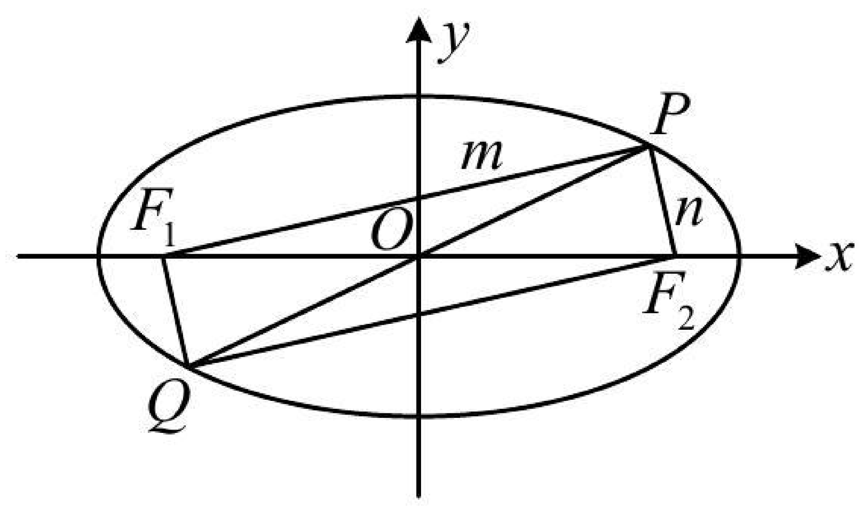
由题意，$a=4$，$b=2$，$c=\sqrt{a^2-b^2}=2\sqrt{3}$，$|F_1F_2|=2c=4\sqrt{3}$，

记$|PF_1|=m$，$|PF_2|=n$，则$\begin{cases}m+n=2a=8 & ①\\ m^2+n^2=|F_1F_2|^2=48 & ②\end{cases}$，

由②得：$(m+n)^2-2mn=48$ ③，

将①代入③可得：$64-2mn=48$，所以$mn=8$，故$S_{PF_1QF_2}=mn=8$.

**答案**：8




【反思】当题目出现过原点的直线与椭圆交于$P$，$Q$两点时，就隐含了四边形$PF_1QF_2$是平行四边形，若还满足对角线长度相等或某个顶角为$90°$，则为矩形.

**类型Ⅱ：定义与中点相关**

【例 3】已知点 $T(2\sqrt{2},-2)$ 在椭圆 $E:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 上，点 $M$ 与椭圆 $E$ 的焦点不重合，点 $M$ 关于椭圆 $E$ 的左、右焦点的对称点分别为 $A$ 和 $B$，若线段 $MN$ 的中点 $P$ 总在椭圆 $E$ 上，且 $|AN|+|BN|=16$，则椭圆 $E$ 的离心率为_____.

解析：先画图看看，如图，由题意，$F_1$ 是 $AM$ 中点，$F_2$ 是 $BM$ 中点，$P$ 是 $MN$ 中点，

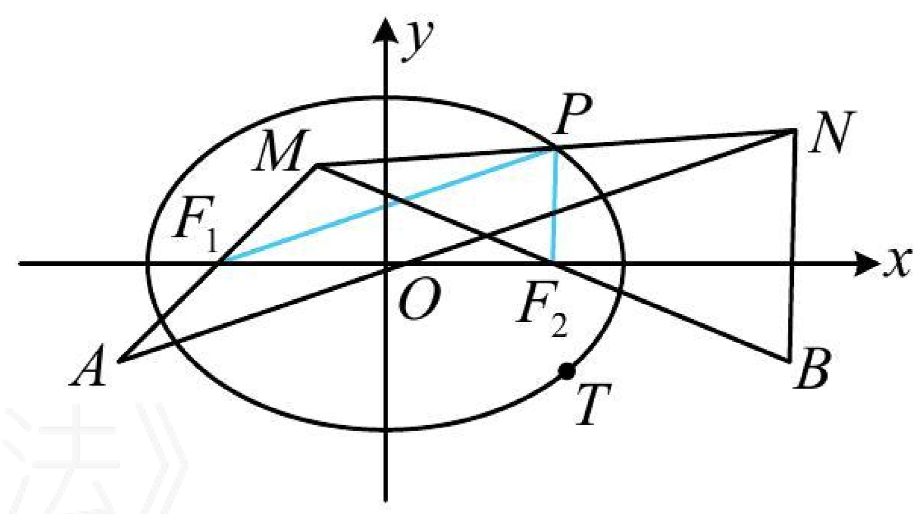
涉及中点，常考虑中位线，所以 $|PF_1|=\dfrac{1}{2}|AN|$，$|PF_2|=\dfrac{1}{2}|BN|$，故 $|PF_1|+|PF_2|=\dfrac{1}{2}(|AN|+|BN|)=8$，

又 $P$ 在椭圆 $E$ 上，所以 $|PF_1|+|PF_2|=2a$，从而 $2a=8$，故 $a=4$，

只需再把点 $T$ 代入椭圆，就可求得 $b$，又点 $T(2\sqrt{2},-2)$ 在椭圆 $E$ 上，所以 $\dfrac{8}{a^2}+\dfrac{4}{b^2}=1$，

结合 $a=4$ 可得 $b^2=8$，所以椭圆 $E$ 的离心率 $e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

答案：$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$






【反思】若条件中出现中点，尤其是涉及多个中点时，可考虑应用中位线的性质.

【变式】已知点 $P$ 在椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 上，$F_1$ 是椭圆的左焦点，线段 $PF_1$ 的中点在圆 $x^2+y^2=a^2-b^2$ 上，记直线 $PF_1$ 的斜率为 $k$，若 $k=\sqrt{3}$，则椭圆的离心率为（　　）

（A）$\sqrt{2}-1$　　（B）$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　（C）$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　　（D）$\dfrac{1}{2}$

解析：若设直线 $PF_1$ 的方程来做，则较为繁琐，不妨寻找焦点 $\Delta PF_1F_2$ 的几何性质，先用几何方式翻译题干的两个条件，如图，记 $PF_1$ 的中点为 $Q$，右焦点为 $F_2$，由图知 $k=\tan\angle PF_1F_2=\sqrt{3}\Rightarrow\angle PF_1F_2=\dfrac{\pi}{3}$，

注意到 $Q$ 在圆 $x^2+y^2=a^2-b^2$ 上，而 $a^2-b^2=c^2$，所以该圆恰好是以 $F_1F_2$ 为直径的圆，故 $QF_1\perp QF_2$，

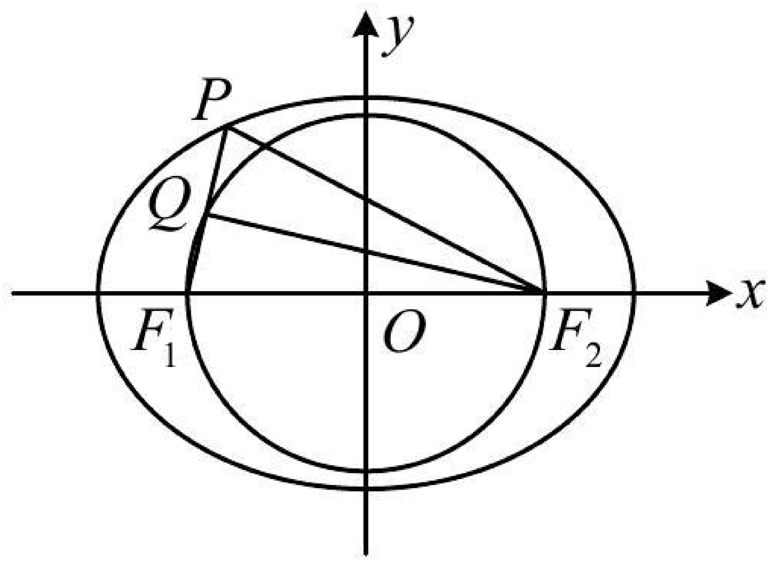
中点+垂直想到三线合一，再结合椭圆定义，则每条边长都可求，进而利用边长等量关系求出离心率，

由 $QF_1\perp QF_2$ 和 $Q$ 是 $PF_1$ 的中点可得 $\Delta PF_1F_2$ 是等腰三角形，所以 $|PF_2|=|F_1F_2|=2c$，

又 $P$ 在椭圆上，所以 $|PF_1|+|PF_2|=2a$，从而 $|PF_1|=2a-|PF_2|=2a-2c$，故 $|QF_1|=a-c$，

由 $\angle PF_1F_2=\dfrac{\pi}{3}$ 可得 $\cos\angle PF_1F_2=\dfrac{|QF_1|}{|F_1F_2|}=\dfrac{a-c}{2c}=\dfrac{1}{2}$，整理得：$e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{1}{2}$.

答案：D




【反思】中点除了可用于构造中位线之外，利用中线垂直于底边反推等腰三角形也是一种用法.

类型III：定义与解三角形相关

【例 4】已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左、右焦点分别为 $F_1$，$F_2$，$P$ 为 $C$ 上的一点，且 $\angle F_1PF_2=60^{\circ}$，$|PF_1|=3|PF_2|$，则椭圆 $C$ 的离心率为（　　）

（A）$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　（B）$\dfrac{\sqrt{7}}{4}$　（C）$\dfrac{\sqrt{13}}{4}$　（D）$\dfrac{3}{4}$

解析：看到 $|PF_1|$ 和 $|PF_2|$，想到椭圆定义，由题意，$\begin{cases}|PF_1|+|PF_2|=2a\\|PF_1|=3|PF_2|\end{cases}$，所以 $|PF_1|=\dfrac{3a}{2}$，$|PF_2|=\dfrac{a}{2}$，

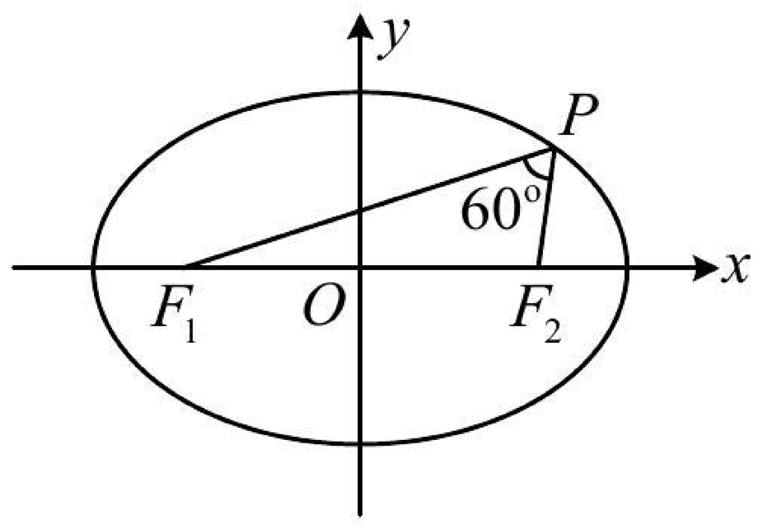
题干还给了 $\angle F_1PF_2$，可在 $\Delta PF_1F_2$ 中用余弦定理建立方程求离心率，

如图，由余弦定理，$|F_1F_2|^2=|PF_1|^2+|PF_2|^2-2|PF_1|\cdot|PF_2|\cdot\cos\angle F_1PF_2$，

所以 $4c^2=\dfrac{9a^2}{4}+\dfrac{a^2}{4}-2\times\dfrac{3a}{2}\times\dfrac{a}{2}\times\cos 60^{\circ}$，整理得：$\dfrac{c^2}{a^2}=\dfrac{7}{16}$，故离心率 $e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{7}}{4}$.



答案：B




【变式】已知 $F_1$，$F_2$ 为椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左、右焦点，椭圆的离心率为 $\dfrac{1}{2}$，$M$ 为椭圆上的一动点，则 $\angle F_1MF_2$ 的最大值为（　　）

（A）$\dfrac{\pi}{3}$　（B）$\dfrac{\pi}{2}$　（C）$\dfrac{2\pi}{3}$　（D）$\dfrac{3\pi}{4}$

解析：已知离心率，可找到 $a$、$b$、$c$ 的比值关系，$e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{1}{2}\Rightarrow a=2c$，所以 $b=\sqrt{a^2-c^2}=\sqrt{3}c$，

要求 $\angle F_1MF_2$ 的最大值，只需求 $\cos\angle F_1MF_2$ 的最小值，可在 $\Delta MF_1F_2$ 中用余弦定理推论来算，

设 $|MF_1|=m$，$|MF_2|=n$，则 $m+n=2a$　①，

又$|F_1F_2|=2c$，所以$\cos\angle F_1MF_2=\dfrac{|MF_1|^2+|MF_2|^2-|F_1F_2|^2}{2|MF_1|\cdot|MF_2|}=\dfrac{m^2+n^2-4c^2}{2mn}$，结合式①知接下来应对分子配方，

故$\cos\angle F_1MF_2=\dfrac{(m+n)^2-2mn-4c^2}{2mn}=\dfrac{4a^2-2mn-4c^2}{2mn}=\dfrac{2b^2-mn}{mn}=\dfrac{2b^2}{mn}-1$

$\ge\dfrac{2b^2}{(\frac{m+n}{2})^2}-1=\dfrac{2b^2}{a^2}-1=\dfrac{2\times3c^2}{4c^2}-1=\dfrac{1}{2}$，

当且仅当$m=n$时取等号，此时如图2，

所以$(\cos\angle F_1MF_2)_{\min}=\dfrac{1}{2}$，

又$\angle F_1MF_2\in[0,\pi)$，所以$\angle F_1MF_2$的最大值为$\dfrac{\pi}{3}$.

**答案：**A

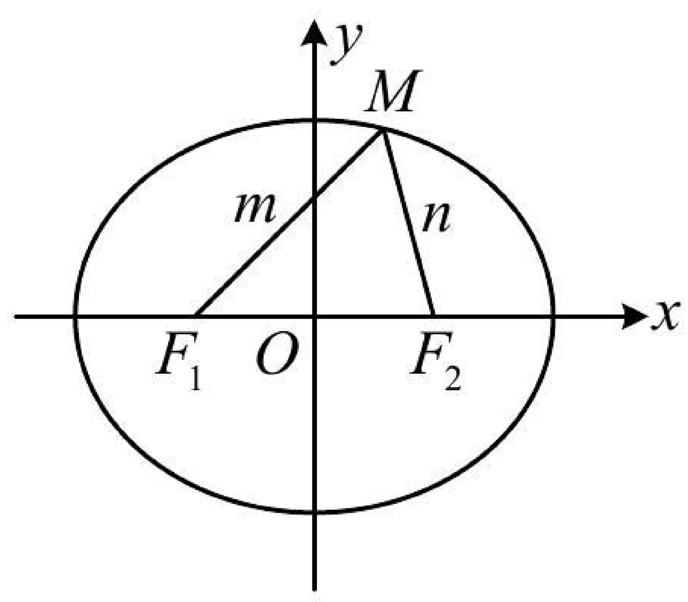


图1

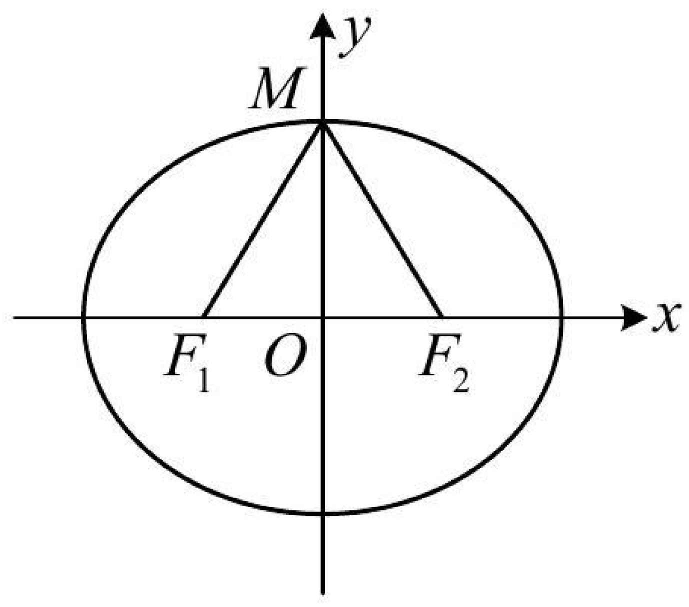


图2

【总结】①椭圆中涉及角度，常用余弦定理处理；②最大张角结论：当$M$在椭圆上运动时，$\angle F_1MF_2$的最大值必定在短轴端点处取得，如变式图2.

**类型Ⅳ：定义与综合几何性质**

【例5】(2019·新课标Ⅰ卷) 已知椭圆$C$的焦点为$F_1(-1,0)$、$F_2(1,0)$，过$F_2$的直线与$C$交于$A$、$B$两点，若$|AF_2|=2|F_2B|$，$|AB|=|BF_1|$，则$C$的方程为（　　）

(A) $\dfrac{x^2}{2}+y^2=1$　　(B) $\dfrac{x^2}{3}+\dfrac{y^2}{2}=1$　　(C) $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$　　(D) $\dfrac{x^2}{5}+\dfrac{y^2}{4}=1$

**解析：**$A$、$B$都在椭圆上，先利用椭圆的定义和已知的线段长度关系来研究有关线段的长，

设椭圆$C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$，设$|BF_2|=m$，则$|AF_2|=2m$，$|BF_1|=|AB|=3m$，

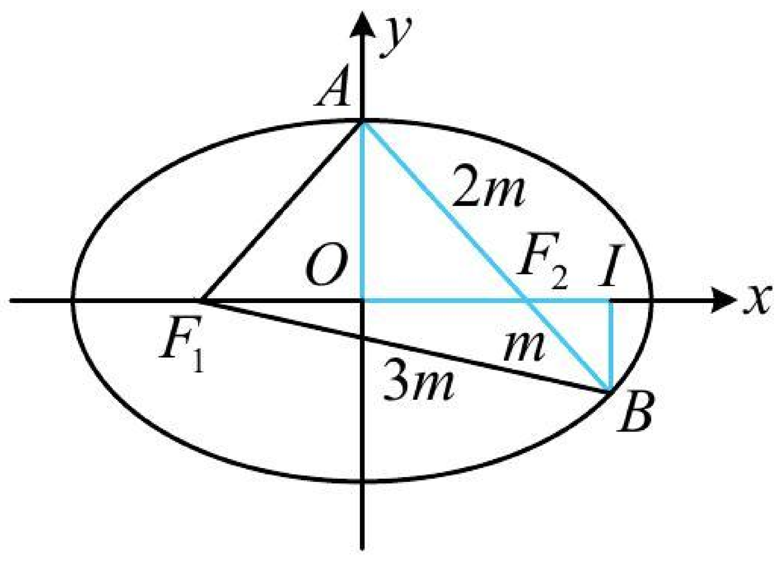
$|BF_1|+|BF_2|=4m=2a\Rightarrow m=\dfrac{a}{2}\Rightarrow|AF_2|=a$，故$A$为短轴端点，到此可写出$A$的坐标，而对于$|AF_2|=2|F_2B|$这种条件，常通过构造相似三角形，将斜边之比转化为直角边之比，进而写出点$B$的坐标，

如图，$A(0,b)$，$F_2(1,0)$，作$BI\perp x$轴于点$I$，则$\Delta AOF_2\backsim\Delta BIF_2$，所以$\dfrac{|F_2I|}{|OF_2|}=\dfrac{|BI|}{|OA|}=\dfrac{|BF_2|}{|AF_2|}=\dfrac{1}{2}$,

从而$|F_2I|=\dfrac{1}{2}|OF_2|=\dfrac{1}{2}$，$|OI|=|OF_2|+|F_2I|=\dfrac{3}{2}$，$|BI|=\dfrac{1}{2}|OA|=\dfrac{b}{2}$，故$B(\dfrac{3}{2},-\dfrac{b}{2})$，

代入$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$解得：$a^2=3$，故$b^2=a^2-1=2$，所以椭圆$C$的方程为$\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{2}=1$.

**答案**：B




【反思】当解析几何中出现共线线段比例式的时候，可以考虑利用相似化斜边比例为直角边比例.

【例 6】椭圆$C:\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{5}=1$的左、右焦点分别为$F_1$、$F_2$，过$F_1$作倾斜角为$\frac{\pi}{3}$的直线交椭圆于点$M$（$M$在$x$轴上方），连接$MF_2$，再作$\angle F_1MF_2$的角平分线$l$，点$F_2$在$l$上的投影为点$N$，$O$为原点，则$|ON|=$（　　）

（A）1　（B）$\frac{\sqrt{2}}{2}$　（C）$\frac{\sqrt{3}}{2}$　（D）$\frac{1}{2}$

**解析**：由题意，$a=3$，$b=\sqrt{5}$，$c=\sqrt{a^2-b^2}=2$，所以$|F_1F_2|=2c=4$，

如图，倾斜角为$\frac{\pi}{3}$这个条件怎么用？若用来写出直线$F_1M$的方程，并与椭圆联立求$M$的坐标，则计算量大，可考虑在$\Delta MF_1F_2$中用定义，结合余弦定理来分析$|MF_1|$和$|MF_2|$的长，

设$|MF_1|=m$，由椭圆定义，$|MF_1|+|MF_2|=2a=6$，所以$|MF_2|=6-|MF_1|=6-m$，

在$\Delta MF_1F_2$中，由余弦定理，$|MF_2|^2=|MF_1|^2+|F_1F_2|^2-2|MF_1|\cdot|F_1F_2|\cdot\cos\angle MF_1F_2$，

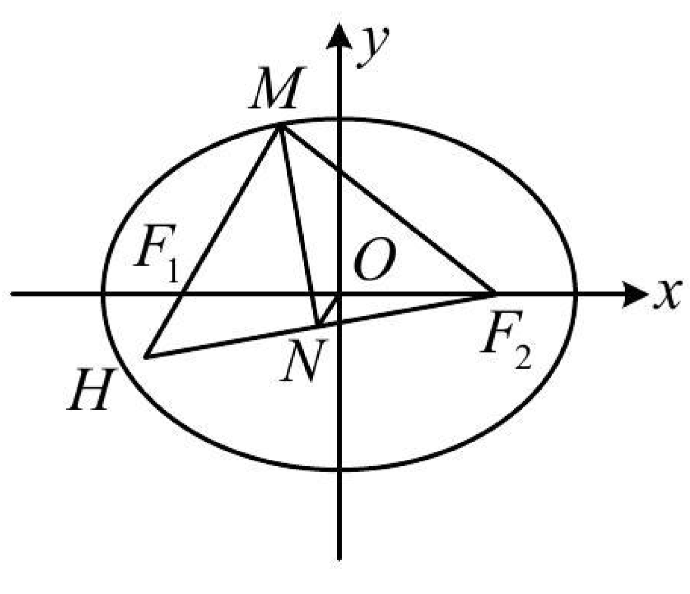
所以$(6-m)^2=m^2+16-2m\times4\times\cos\frac{\pi}{3}$，解得：$m=\frac{5}{2}$，所以$|MF_1|=\frac{5}{2}$，$|MF_2|=\frac{7}{2}$，

注意到$MN$是角平分线，且$MN\perp F_2N$，于是联想到等腰三角形三线合一，故构造一个等腰三角形，

延长$MF_1$和$F_2N$交于点$H$，则$MN$既是角平分线，又是垂线，所以$|MH|=|MF_2|=\frac{7}{2}$，且$N$是$HF_2$中点，

又$O$是$F_1F_2$的中点，所以$|ON|=\frac{1}{2}|HF_1|=\frac{1}{2}(|MH|-|MF_1|)=\frac{1}{2}\times(\frac{7}{2}-\frac{5}{2})=\frac{1}{2}$.

**答案**：D




【反思】遇到角平分线+垂线的情况，可考虑构造等腰三角形. 这种辅助线不常见，但可以留个印象.

【例 7】若 $P$ 是椭圆 $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{16}=1$ 上一点，$F_1$，$F_2$ 是椭圆的两个焦点，且 $\Delta PF_1F_2$ 的内切圆半径为 1，当 $P$ 在第一象限时，点 $P$ 的纵坐标为_____.

**解析**：由题意，$a=5$，$b=4$，$c=\sqrt{a^2-b^2}=3$，

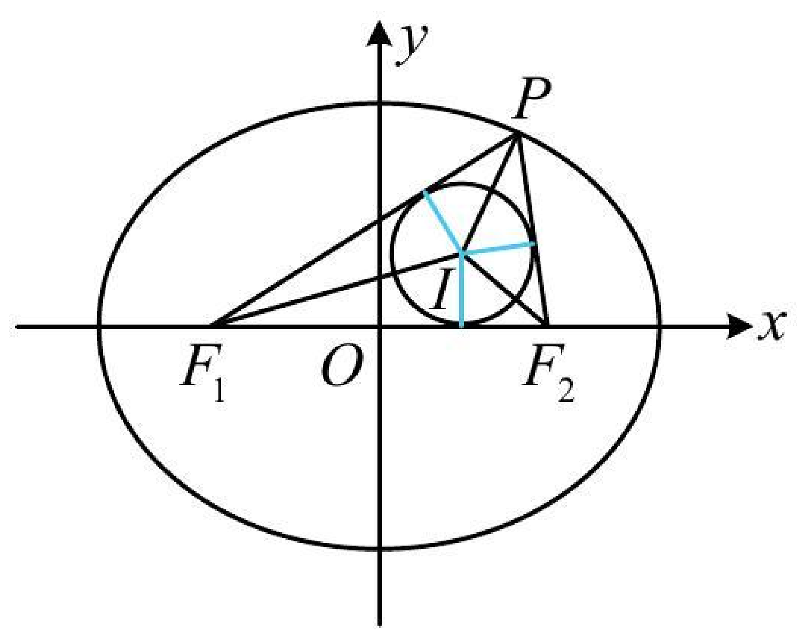
对于 $\Delta PF_1F_2$，已知内切圆半径 $r$，可联想到用公式 $S=\dfrac{1}{2}Lr$（证明过程见本题反思）求其面积，

$\Delta PF_1F_2$ 的周长 $L=|PF_1|+|PF_2|+|F_1F_2|=2a+2c=16$，所以 $S_{\Delta PF_1F_2}=\dfrac{1}{2}Lr=\dfrac{1}{2}\times16\times1=8$ ①，

我们也可用点 $P$ 的纵坐标和 $|F_1F_2|$ 来算 $\Delta PF_1F_2$ 的面积，从而建立方程求解点 $P$ 的纵坐标，

另一方面，$S_{\Delta PF_1F_2}=\dfrac{1}{2}|F_1F_2|\cdot y_P=\dfrac{1}{2}\times6\times y_P=3y_P$，结合式①可得 $3y_P=8$，故 $y_P=\dfrac{8}{3}$.

**答案**：$\dfrac{8}{3}$






**【反思】**解析几何中涉及内切圆，常见的思考方向有：①用公式 $S=\dfrac{1}{2}Lr$ 进行面积与半径的转化，此公式的推导如图 1，$S_{\Delta ABC}=S_{\Delta IAB}+S_{\Delta IAC}+S_{\Delta IBC}=\dfrac{1}{2}|AB|\cdot r+\dfrac{1}{2}|AC|\cdot r+\dfrac{1}{2}|BC|\cdot r=\dfrac{1}{2}(|AB|+|AC|+|BC|)r=\dfrac{1}{2}Lr$；②切线长对应相等，如图 1 中 $|AM|=|AN|$；③用角平分线性质定理，如图 2，由 $BI$ 和 $CI$ 分别为 $\angle KBA$ 和 $\angle KCA$ 的平分线知 $\dfrac{|AI|}{|IK|}=\dfrac{|AB|}{|BK|}=\dfrac{|AC|}{|CK|}$.

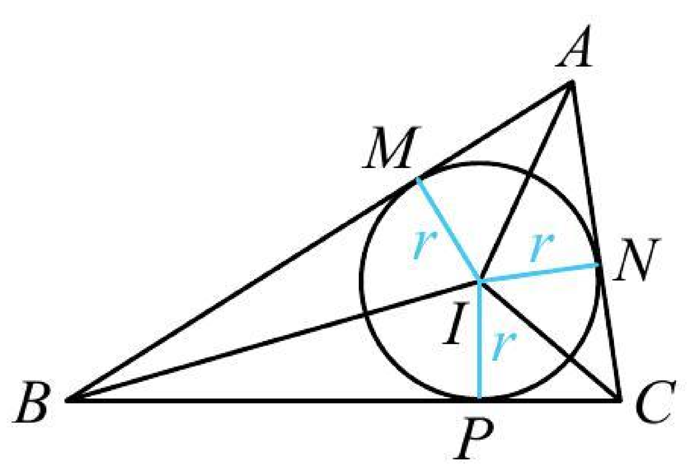



图1

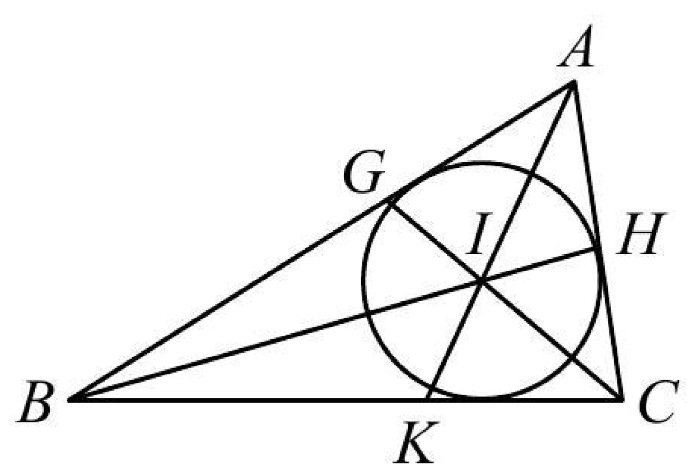



图2

## 强化训练

1.（2023 • 全国甲卷 • ★★）设 $F_1$，$F_2$ 为椭圆 $C:\dfrac{x^2}{5}+y^2=1$ 的两个焦点，点 $P$ 在 $C$ 上，若 $\overrightarrow{PF_1}\cdot\overrightarrow{PF_2}=0$，则 $|PF_1|\cdot|PF_2|=$（　　）

（A）1　（B）2　（C）4　（D）5

2．（2023 • 全国模拟 • ★★）设$F_1$，$F_2$分别为椭圆$\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$的左、右焦点，点$P$在椭圆上，若线段$PF_1$的中点$M$在$y$轴上，则$\dfrac{|PF_2|}{|PF_1|}$的值为（　　）

（A）$\dfrac{5}{13}$　（B）$\dfrac{4}{5}$　（C）$\dfrac{2}{7}$　（D）$\dfrac{4}{9}$

3．（2022 • 江西模拟 • ★★★）设椭圆$C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的左、右焦点分别为$F_1$、$F_2$，点$M$、$N$在$C$上，且$M$、$N$关于原点$O$对称，若$|MN|=|F_1F_2|$，$|NF_2|=3|MF_2|$，则椭圆$C$的离心率为_____.



4．（2022 • 福建质检 • ★★★）已知点$F_1$、$F_2$是椭圆$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的左、右焦点，过$F_2$的直线交椭圆于$A$、$B$两点，且$AF_1\perp AB$，$\dfrac{|AF_1|}{|AB|}=\dfrac{4}{3}$，则该椭圆的离心率是（　　）

（A）$\dfrac{2}{3}$　（B）$\dfrac{\sqrt{5}}{3}$　（C）$\dfrac{\sqrt{3}}{3}$　（D）$\dfrac{\sqrt{6}}{3}$

5．（2014 • 安徽卷 • ★★★）若$F_1$，$F_2$分别是椭圆$E:x^2+\dfrac{y^2}{b^2}=1(0<b<1)$的左、右焦点，过点$F_1$的直线交椭圆$E$于$A$，$B$两点，若$|AF_1|=3|F_1B|$，$AF_2\perp x$轴，则椭圆$E$的方程为_____.

6.（2022·长沙模拟·★★★）已知$F_1$，$F_2$是椭圆$C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的左、右焦点，点$A(0,b)$，点$B$在椭圆$C$上，且$\overrightarrow{AF_1}=2\overrightarrow{F_1B}$，$D$、$E$分别是$AF_2$、$BF_2$的中点，且$\Delta DEF_2$的周长为4，则椭圆$C$的方程为（　　）

（A）$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$　　（B）$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{3y^2}{8}=1$　　（C）$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{3y^2}{4}=1$　　（D）$x^2+\dfrac{3y^2}{2}=1$

7.（2019·浙江卷·★★★★）已知椭圆$\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{5}=1$的左焦点为$F$，点$P$在椭圆上且在$x$轴的上方，若线段$PF$的中点在以原点$O$为圆心，$|OF|$为半径的圆上，则直线$PF$的斜率是_____.

8.（2022·萍乡三模·★★★）设$F_1$，$F_2$是椭圆$C:y^2+\dfrac{x^2}{t}=1(0<t<1)$的焦点，若椭圆$C$上存在点$P$，满足$\angle F_1PF_2=120^\circ$，则$t$的取值范围是（　　）



（A）$(0,\dfrac{1}{4}]$　　（B）$[\dfrac{1}{4},1)$　　（C）$(0,\dfrac{\sqrt{2}}{2}]$　　（D）$[\dfrac{\sqrt{2}}{2},1)$

9.（2022·南宁模拟·★★★）已知$F$是椭圆$E:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的左焦点，过原点的直线$l$与椭圆$E$相交于$P$、$Q$两点，若$|PF|=5|QF|$，且$\angle PFQ=120^\circ$，则椭圆的离心率为（　　）

（A）$\dfrac{\sqrt{7}}{6}$　　（B）$\dfrac{1}{3}$　　（C）$\dfrac{\sqrt{21}}{6}$　　（D）$\dfrac{\sqrt{21}}{5}$

10．（2022 • 全国二模 • ★★★★）椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左焦点为 $F$，过原点 $O$ 的直线与椭圆交于 $P$、$Q$ 两点，若 $\angle PFQ=120^\circ$，$|OF|=\sqrt{3}$，$|OP|=\sqrt{7}$，则椭圆 $C$ 的离心率为（　　）

（A）$\frac{\sqrt{3}}{2}$　（B）$\frac{\sqrt{3}}{3}$　（C）$\frac{2\sqrt{3}}{3}$　（D）$\frac{\sqrt{6}}{3}$

11．（2022 • 湖北模拟 • ★★★★）已知 $F_1$，$F_2$ 是椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左、右焦点，点 $P$ 在椭圆 $C$ 的第一象限上，过 $F_2$ 作 $\angle F_1PF_2$ 的外角平分线的垂线，垂足为 $A$，$O$ 为原点，若 $|OA|=\sqrt{3}b$，则椭圆 $C$ 的离心率为_____.



12．（2022 • 新高考Ⅰ卷 • ★★★★）已知椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$，$C$ 的上顶点为 $A$，两个焦点为 $F_1$，$F_2$，离心率为 $\frac{1}{2}$，过 $F_1$ 且垂直于 $AF_2$ 的直线交 $C$ 于 $D$、$E$ 两点，$|DE|=6$，则 $\Delta ADE$ 的周长是_____.