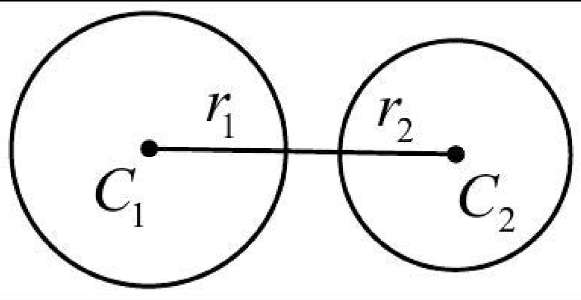
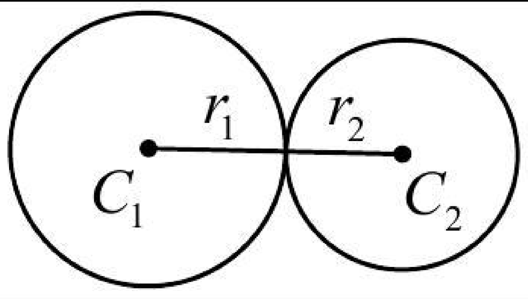
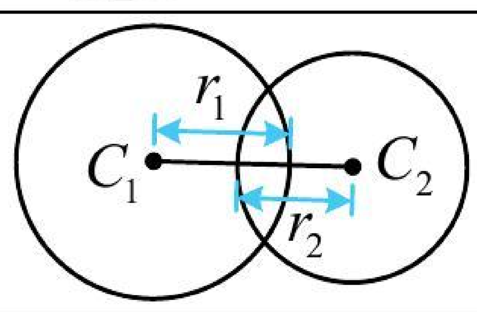
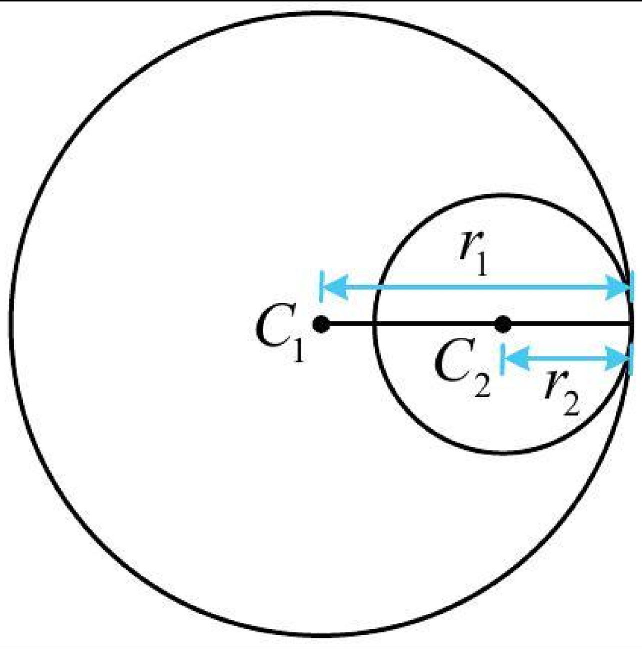
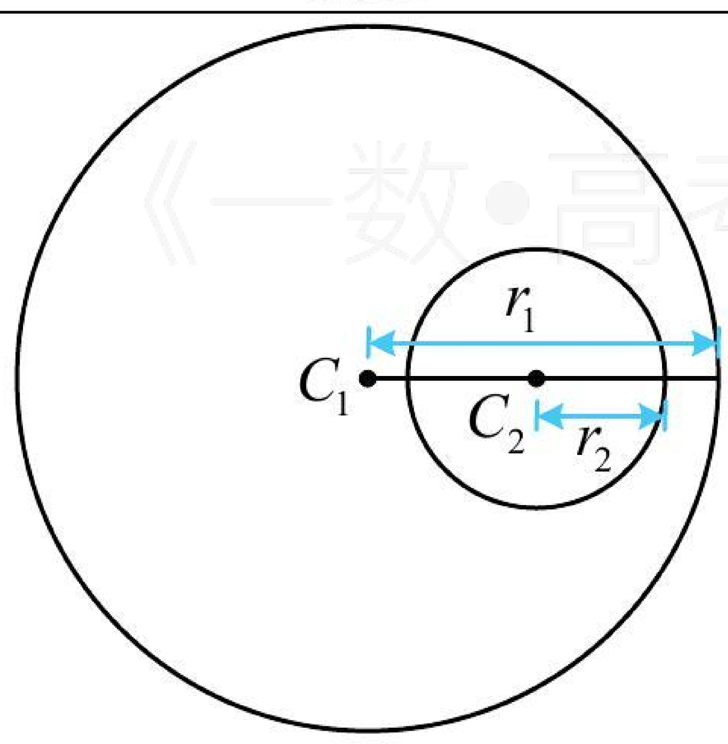
第 4 节 圆与圆的位置关系（★★☆）

内容提要

1．设圆 C_1 和圆 C_2 的半径分别为 r_1， r_2，则两圆的位置关系的判断方法如下表：

位置关系	图形	判断依据	交点个数	公切线条数
相离		$\lvert C_1C_2\rvert > r_1 + r_2$	无交点	4 条
外切		$\lvert C_1C_2\rvert = r_1 + r_2$	1 个	3 条
相交		$\lvert r_1 - r_2\rvert < \lvert C_1C_2\rvert < r_1 + r_2$	2 个	2 条
内切		$\lvert C_1C_2\rvert = \lvert r_1 - r_2\rvert$	1 个	1 条
内含		$\lvert C_1C_2\rvert < \lvert r_1 - r_2\rvert$	无交点	无公切线

2．公共弦方程：当两圆相交时，它们的公共弦所在直线的方程可用两圆方程作差消去平方项获得. 因为作差得到的必为直线方程，且两交点都满足该方程，故该方程即为公共弦的方程.

典型例题

类型Ⅰ：圆与圆的位置关系

【例 1】圆 $C: x^2 + y^2 - 2y = 0$ 与圆 $O: x^2 + y^2 = 4$ 的位置关系是（　　）

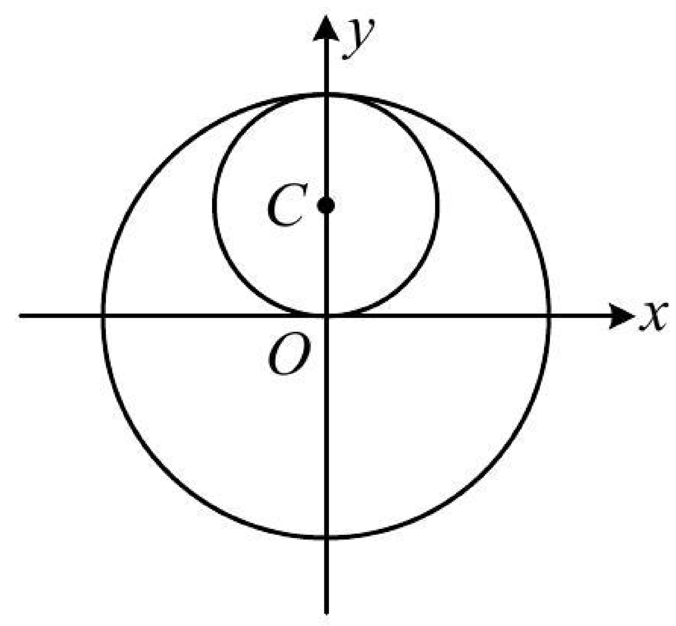
（A）内切　（B）相交　（C）外切　（D）内含

解析： 判断圆与圆的位置关系，只需计算圆心距，并与半径的和差比较，

$x^2 + y^2 - 2y = 0 \Rightarrow x^2 + (y-1)^2 = 1 \Rightarrow$ 圆 C 的圆心为 $C(0,1)$，半径 $r_1 = 1$，圆 O 的圆心为原点，半径 $r_2 = 2$，

所以圆心距 $\lvert OC\rvert = 1 = \lvert r_1 - r_2\rvert$，故两圆内切，如图.

答案： A



【变式 1】若圆 $C_1:(x-1)^2+(y-a)^2=4$ 与圆 $C_2:(x+2)^2+(y+1)^2=a^2$ 相交，则正实数 a 的取值范围是（　　）

（A）$(3,+\infty)$　　（B）$(2,+\infty)$　　（C）$(\frac{3}{2},+\infty)$　　（D）$(3,4)$

解析： 两圆相交等价于 $|r_1-r_2|<|C_1C_2|<r_1+r_2$，故先计算 $|C_1C_2|$，

由题意，$C_1(1,a)$，$r_1=2$，$C_2(-2,-1)$，$r_2=a$，所以 $|C_1C_2|=\sqrt{(-2-1)^2+(-1-a)^2}=\sqrt{a^2+2a+10}$，

因为两圆相交，所以 $|2-a|<\sqrt{a^2+2a+10}<2+a$，结合 $a>0$ 解得：$a>3$.

答案： A

【变式 2】已知圆 $C_1:(x-3)^2+(y+2)^2=1$ 与圆 $C_2:(x-7)^2+(y-1)^2=50-a$ 有且仅有一个公共点，则实数 a 的值为（　　）

（A）14　　（B）34　　（C）14 或 45　　（D）34 或 14

解析： 两圆有且仅有 1 个公共点，有外切和内切两种情况，故分别考虑，

由题意，$C_1(3,-2)$，$r_1=1$，$C_2(7,1)$，$r_2=\sqrt{50-a}(a<50)$，所以 $|C_1C_2|=\sqrt{(3-7)^2+(-2-1)^2}=5$，

若两圆外切，则 $|C_1C_2|=r_1+r_2$，即 $5=1+\sqrt{50-a}$，解得：$a=34$；

若两圆内切，则 $|C_1C_2|=|r_1-r_2|$，即 $5=|1-\sqrt{50-a}|$，所以 $1-\sqrt{50-a}=\pm5$，解得：$a=14$；

综上所述，实数 a 的值为 34 或 14.

答案： D

类型 II：两圆公切线有关问题

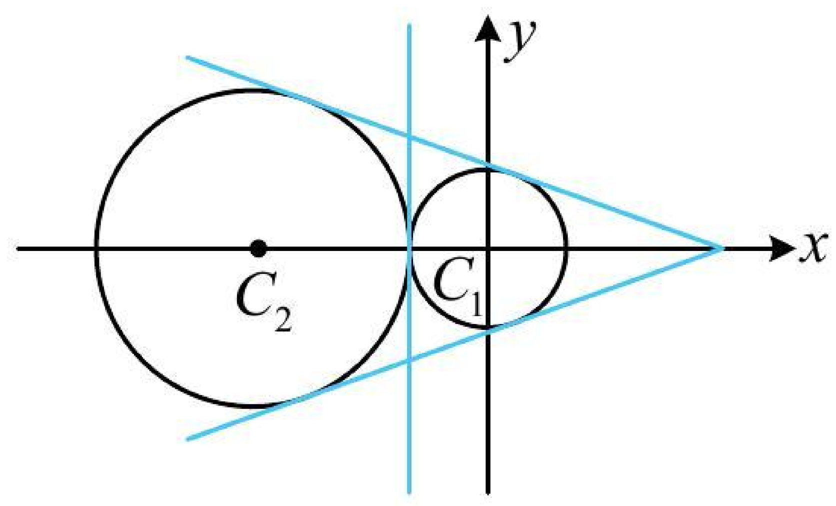
【例 2】两圆 $C_1:x^2+y^2=1$ 与 $C_2:(x+3)^2+y^2=4$ 的公切线的条数为（）

（A）1　　（B）2　　（C）3　　（D）4

解析： 两圆公切线的条数与两圆的位置关系有关，故先判断两圆的位置关系，

由题意，$C_1(0,0)$，$r_1=1$，$C_2(-3,0)$，$r_2=2$，所以 $|C_1C_2|=3=r_1+r_2$，故两圆外切，有 3 条公切线，如图.

答案： C



【反思】判断圆与圆公切线的条数，本质就是判断两圆的位置关系.

【变式 1】若圆 $C_1: x^2+y^2-2mx+m^2=4$ 和圆 $C_2: x^2+y^2+2x-4my=8-4m^2$ 没有公切线，则实数 m 的取值范围为_____.

解析：公切线条数可翻译成两圆的位置关系，因为圆 C_1 和 C_2 没有公切线，所以两圆内含，

于是由 $|C_1C_2|<|r_1-r_2|$ 来求 m 的范围， $x^2+y^2-2mx+m^2=4\Rightarrow(x-m)^2+y^2=4\Rightarrow C_1(m,0)$， $r_1=2$，

$x^2+y^2+2x-4my=8-4m^2\Rightarrow(x+1)^2+(y-2m)^2=9\Rightarrow C_2(-1,2m)$， $r_2=3$，

所以 $|C_1C_2|=\sqrt{(m+1)^2+(0-2m)^2}=\sqrt{5m^2+2m+1}$，故 $|C_1C_2|<|r_1-r_2|$ 即为 $\sqrt{5m^2+2m+1}<1$，解得：$-\frac{2}{5}<m<0$.

答案：$(-\frac{2}{5},0)$

【变式 2】已知圆 $C_1:(x+2a)^2+y^2=4$ 与圆 $C_2: x^2+(y-b)^2=1$ 只有一条公切线，若 $a,b\in\mathbf{R}$ 且 $ab\neq0$，则 $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}$ 的最小值为_____.

解析：要求 $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}$ 的最小值，得先寻找 a 和 b 的关系，可将公切线条数翻译成两圆的位置关系，

由题意， $C_1(-2a,0)$， $r_1=2$， $C_2(0,b)$， $r_2=1$，所以 $|C_1C_2|=\sqrt{4a^2+b^2}$，

因为 C_1 和 C_2 有 1 条公切线，所以两圆内切，故 $|C_1C_2|=|r_1-r_2|$，即 $\sqrt{4a^2+b^2}=1$，所以 $4a^2+b^2=1$，

在此基础上要求 $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}$ 的最小值，可使用"1 的代换"来凑成积为定值，由均值不等式求最小值，

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}=(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2})\cdot1=(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2})(4a^2+b^2)=4+\frac{b^2}{a^2}+\frac{4a^2}{b^2}+1=5+\frac{b^2}{a^2}+\frac{4a^2}{b^2}\geq5+2\sqrt{\frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{4a^2}{b^2}}=9,$$

当且仅当 $\frac{b^2}{a^2}=\frac{4a^2}{b^2}$，即 $a^2=\frac{1}{6}$， $b^2=\frac{1}{3}$ 时等号成立，所以 $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}$ 的最小值为 9.

答案：9

【例 3】（2022・新高考Ⅰ卷）写出与圆 $x^2+y^2=1$ 和 $(x-3)^2+(y-4)^2=16$ 都相切的一条直线的方程_____.

答案： $x=-1$（答案不唯一，也可填 $3x+4y-5=0$，或 $7x-24y-25=0$）

解析：两个圆如图，它们的半径分别为 1 和 4，圆心分别为原点 O 和 $M(3,4)$，

所以圆心距 $|OM|=\sqrt{3^2+4^2}=5=1+4$，从而两圆外切，故两圆共有三条公切线，如图中的 l_1， l_2， l_3，

求公切线可设斜率，先考虑斜率不存在的情况，结合图象显然可得 $x=-1$ 是其公切线，

本题只需填一条公切线，做到这里已经可以结束了，但我们把另外两条公切线也求一下，

若公切线的斜率存在，则可设其方程为 $y=kx+b$，即 $kx-y+b=0$ ①，

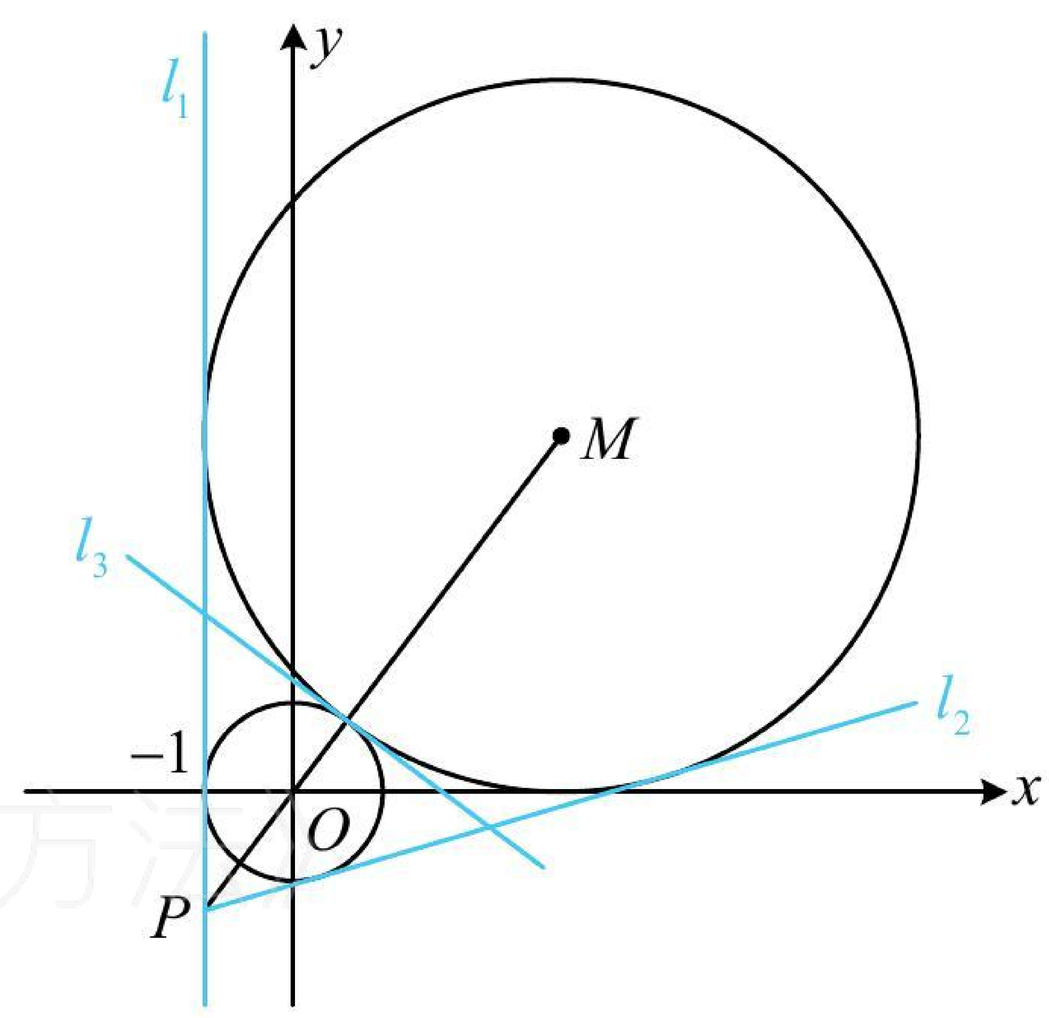
因为该直线与两圆都相切，所以 $\dfrac{|b|}{\sqrt{k^2+1}}=1$ ②，$\dfrac{|3k-4+b|}{\sqrt{k^2+1}}=4$，

故 $|3k-4+b|=4|b|$，所以 $3k-4+b=4b$ 或 $3k-4+b=-4b$，整理得：$b=k-\dfrac{4}{3}$ 或 $b=\dfrac{4}{5}-\dfrac{3}{5}k$，

若 $b=k-\dfrac{4}{3}$，代入②解得：$k=\dfrac{7}{24}$，所以 $b=-\dfrac{25}{24}$，代入①整理得：$7x-24y-25=0$；

若 $b=\dfrac{4}{5}-\dfrac{3}{5}k$，代入②解得：$k=-\dfrac{3}{4}$，所以 $b=\dfrac{5}{4}$，代入①整理得：$3x+4y-5=0$；

综上所述，与两圆都相切的直线有 $x=-1$，$7x-24y-25=0$，$3x+4y-5=0$，任选其一填入空格即可.



【反思】求两圆公切线方程的步骤：①判断两圆的位置关系，确定公切线条数；②设公切线方程为 $y=kx+b$（要讨论斜率不存在的情形）；③利用两圆圆心到公切线的距离等于各自半径，建立方程组求 k 和 b.

类型III：公共弦相关问题

【例 4】圆 $C_1:x^2+y^2=4$ 和圆 $C_2:(x-1)^2+(y-2)^2=9$ 交于 A、B 两点，则直线 AB 的方程为_____.

解析： $(x-1)^2+(y-2)^2=9\Rightarrow x^2+y^2-2x-4y-4=0$，联立 $\begin{cases}x^2+y^2=4 & ①\\ x^2+y^2-2x-4y-4=0 & ②\end{cases}$，

用① − ②可得：$2x+4y+4=4$，整理得公共弦 AB 的方程为 $x+2y=0$.

答案： $x+2y=0$

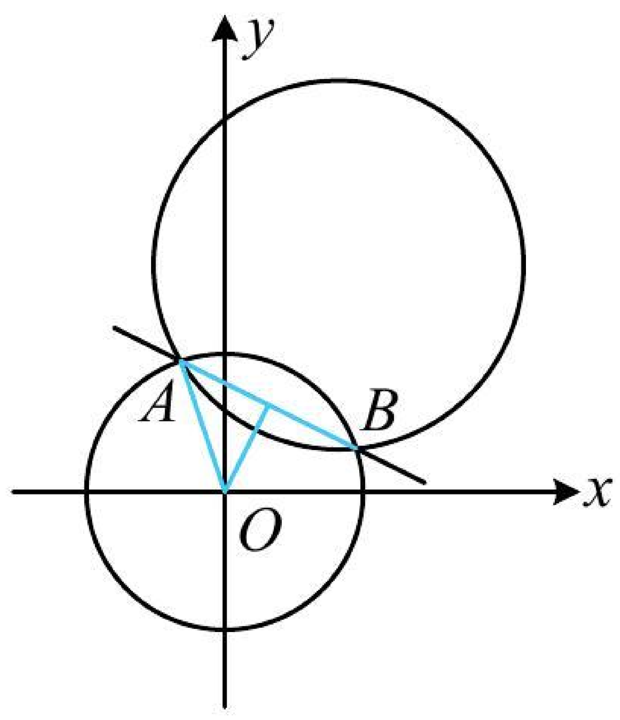
【反思】当两圆相交时，直接用两圆的方程作差，消去 x^2 和 y^2，化简即得两圆公共弦所在直线的方程.

【变式】若圆 $x^2+y^2=4$ 与圆 $x^2+y^2+2ax+4ay-9=0$ 相交，且公共弦长为 $2\sqrt{2}$，则 $a=$_____.

解析： 如图，把公共弦看成直线 AB 被圆 O 截得的弦，可用弦长公式 $L=2\sqrt{r^2-d^2}$ 来算，先求 AB 的方程，用两圆方程作差整理得直线 AB 的方程为 $2ax+4ay-5=0$，

点 O 到直线 AB 的距离 $d=\frac{|-5|}{\sqrt{(2a)^2+(4a)^2}}=\frac{\sqrt{5}}{2|a|}$，所以公共弦长 $|AB|=2\sqrt{4-\frac{5}{4a^2}}=2\sqrt{2}$，解得：$a=\pm\frac{\sqrt{10}}{4}$，经检验，均满足所给两圆相交.

答案： $\pm\frac{\sqrt{10}}{4}$



【反思】计算两圆的公共弦长，可先求公共弦所在直线的方程，再按直线被其中一个圆截得的弦长来算.

强化训练

1．（2022·十堰模拟·★★）当圆 $C:x^2+y^2-4x+2ky+2k=0$ 的面积最小时，圆 C 与圆 $O:x^2+y^2=1$ 的位置关系是_____.

2．（2022·新余模拟·★★）已知圆 $C:x^2+y^2-2ax+a^2-1=0$ 与圆 $O:x^2+y^2=4$ 有且仅有两条公切线，则正实数 a 的取值范围是（　　）

（A）$(0,1)$　（B）$(0,3)$　（C）$(1,3)$　（D）$(3,+\infty)$

3．（★★）若圆 $O:x^2+y^2=1$ 与圆 $C:x^2+y^2-2\sqrt{3}x-2y+m=0$ 相切，则实数 m 的值为_____.

4．（★★）已知圆 $C_1:x^2+y^2-kx-2y=0$ 和圆 $C_2:x^2+y^2-2ky-2=0$ 相交，则圆 C_1 和圆 C_2 的公共弦所在的直线过的定点是（　　）

（A）$(2,2)$　（B）$(2,1)$　（C）$(1,2)$　（D）$(1,1)$

5．（★★★）已知圆 $C_1: x^2+y^2-2x+4y+4=0$，圆 $C_2: x^2+y^2+x-y-m^2=0(m>0)$，若圆 C_2 平分圆 C_1 的圆周，则正数 m 的值为（　　）

（A）3　（B）2　（C）4　（D）1

6．（★★★）已知圆 $M:(x-2)^2+(y-2)^2=8$，圆 $N:(x-3)^2+(y-3)^2=2$，若直线 l 与圆 M 和圆 N 都相切，则直线 l 的方程为_____.

7．（2020·浙江卷·★★★）设直线 $l: y=kx+b(k>0)$，圆 $C_1: x^2+y^2=1$，$C_2:(x-4)^2+y^2=1$，若直线 l 与 C_1、C_2 都相切，则 $k=$_____，$b=$_____.

8．（★★★）若圆 $C_1: x^2+y^2+2\sqrt{m}x+m-4=0(m>0)$ 和 $C_2: x^2+y^2-4\sqrt{n}y-1+4n=0(n>0)$ 恰有三条公切线，则 $\frac{1}{m}+\frac{1}{n}$ 的最小值为（　　）

（A）$\frac{1}{9}$　（B）$\frac{4}{9}$　（C）1　（D）3