第 3 节 抽象函数问题（★★★）

强化训练

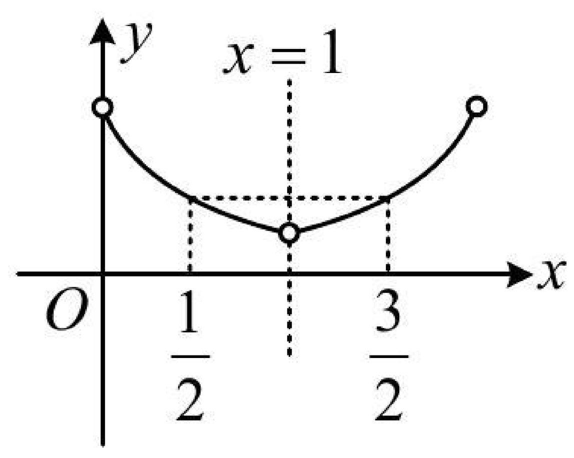
1.（2023 •黑龙江齐齐哈尔二模改 •★★）设函数 $f(x+1)$ 的图象关于 y 轴对称，且当 $x\in(0,1)$ 时，$f(x)=\mathrm{e}^{-x}$，则 $f(\frac{3}{2})=$_____.

答案： $\frac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}}$

解析： 将 $f(x)$ 左移 1 个单位，得到 $f(x+1)$ 的图象，该图象关于 y 轴对称 $\Rightarrow f(x)$ 的图象关于 $x=1$ 对称，

由于 $\frac{3}{2}$ 不在有解析式的 $(0,1)$ 上，故考虑用对称性将其化到 $(0,1)$ 上来求函数值，如图，

因为 $\frac{1}{2}$ 与 $\frac{3}{2}$ 关于 1 对称，所以 $f(\frac{3}{2})=f(\frac{1}{2})=\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}}$.



2.（2023 • 浙江模拟 • ★★）定义在 **R** 上的非常值函数 $f(x)$ 满足：$f(-x)=f(x)$，且 $f(2-x)+f(x)=0$，则 $f(x)=$_____.（请写出符合条件的一个函数 $f(x)$ 的解析式）

答案： $y=\cos\frac{\pi}{2}x$（答案不唯一）

解析： $f(-x)=f(x)\Rightarrow f(x)$ 为偶函数，其图象关于 y 轴对称 ①，

$f(2-x)+f(x)=0\Rightarrow f(x)$ 关于点 $(1,0)$ 对称 ②，

既有对称轴，又有对称中心的函数，可举三角函数，

因为 $f(x)$ 是偶函数，所以不妨先取 $f(x)=\cos\omega x$，

由对称轴和对称中心可推周期，进而求得 ω，

由①②可得 4 是 $f(x)$ 的周期，所以可取 $\omega=\frac{2\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$，故 $f(x)=\cos\frac{\pi}{2}x$.

3.（2022 • 黑龙江模拟 • ★★）定义在 **R** 上的奇函数 $f(x)$ 满足 $f(x+8)=f(-4-x)$，且当 $x\in[0,2]$ 时，$f(x)=1-3^x$，则 $f(2022)=$（　　）

（A）-8　　（B）-2　　（C）2　　（D）8

答案： D

解析： $f(x+8)=f(-4-x)\Rightarrow f(x)$ 关于 $x=2$ 对称，$f(x)$ 为奇函数 $\Rightarrow f(x)$ 关于原点对称，所以周期为 8，

故 $f(2022)=f(253\times 8-2)=f(-2)=-f(2)=-(1-3^2)=8$.

4.（2023•湖南模拟•★★）（多选）已知定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数 $f(x)$ 满足 $f(2+x)=f(-x)$，若 $f(1)=2$，则（　　）

（A） $f(x)$ 的图象关于直线 $x=1$ 对称

（B）4 为 $f(x)$ 的一个周期

（C） $f(2022)=0$

（D） $f(2023)=2$

答案：ABC

解析： $f(2+x)=f(-x)\Rightarrow f(x)$ 关于直线 $x=1$ 对称，

又 $f(x)$ 为奇函数，所以 $f(x)$ 关于原点对称，从而 $f(x)$ 的周期为 4，故 A 项、B 项正确；

由周期为 4 可得 $f(2022)=f(505\times 4+2)=f(2)$，

直接给值的有 $f(1)$，但用它无法求出 $f(2)$，而奇函数隐含了 $f(0)=0$，故分析 $f(2)$ 与 $f(0)$ 的关系，

在 $f(2+x)=f(-x)$ 中取 $x=0$ 可得 $f(2)=f(0)=0$，故 C 项正确；

又 $f(2023)=f(506\times 4-1)=f(-1)=-f(1)=-2$，故 D 项错误.

5.（2022•四川成都模拟•★★★）已知函数 $y=f(x)$ 满足 $f(4+x)-f(-x)=0(x\in\mathbf{R})$，且 $f(x)$ 在 $[2,+\infty)$ 上为减函数，则（　　）

（A） $f(\log_2 3)>f(\log_2 5)>f(3)$　（B） $f(\log_2 5)>f(\log_2 3)>f(3)$

（C） $f(\log_2 5)>f(3)>f(\log_2 3)$　（D） $f(\log_2 3)>f(3)>f(\log_2 5)$

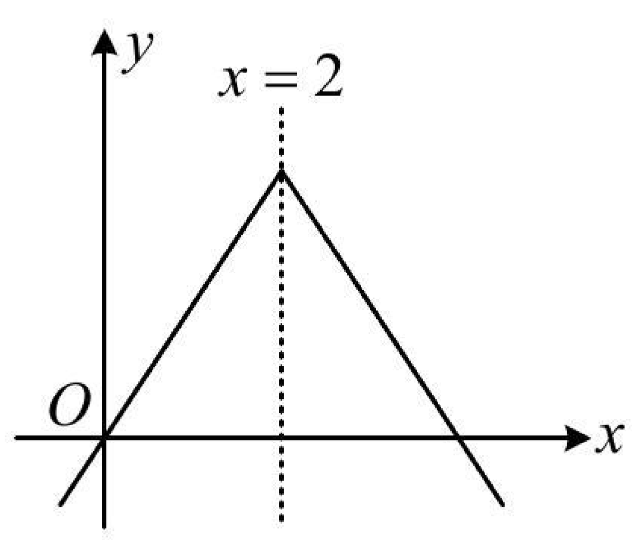
答案：B

解析： $f(4+x)-f(-x)=0\Rightarrow f(x)$ 的图象关于直线 $x=2$ 对称，

结合 $f(x)$ 在 $[2,+\infty)$ 上为减函数可得当自变量与 2 的距离越大时，函数值越小，如图，

而 $|\log_2 3-2|=\left|\log_2\frac{3}{4}\right|=\log_2\frac{4}{3}$， $|\log_2 5-2|=\log_2\frac{5}{4}$， $3-2=1$，

且 $\log_2\frac{5}{4}<\log_2\frac{4}{3}<1$，所以 $f(3)<f(\log_2 3)<f(\log_2 5)$.



6.（★★★）（多选）设 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数，且对任意的 $x\in\mathbf{R}$，都有 $f(x+2)=f(2-x)$，当 $x\in[0,2]$ 时， $f(x)=(\frac{1}{2})^{2-x}$，则（　　）

（A） $f(x)$ 是周期函数，且周期为 2

（B） $f(x)$ 的最大值是 1，最小值是 $\frac{1}{4}$

（C） $f(x)$ 在 $[2,4]$ 上单调递减，在 $[4,6]$ 上单调递增

（D）当 $x\in[2,4]$ 时， $f(x)=(\frac{1}{2})^{2-x}$

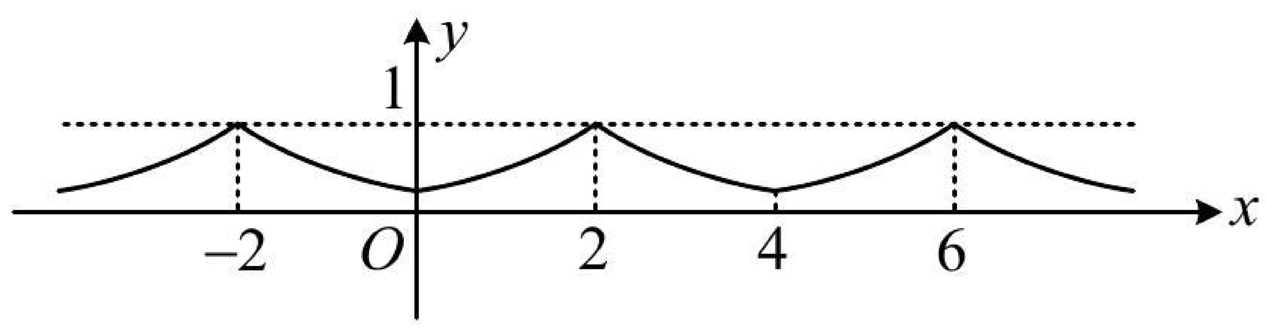
答案： BC

解析： A 项， $f(x)$ 是偶函数 $\Rightarrow f(x)$ 关于 $x=0$ 对称， $f(x+2)=f(2-x)\Rightarrow f(x)$ 关于 $x=2$ 对称，所以 $f(x)$ 是以 4 为周期的周期函数，故 A 项错误；

B 项，当 $x\in[0,2]$ 时， $f(x)=(\frac{1}{2})^{2-x}$，结合 $f(x)$ 是周期为 4 的偶函数可作出 $f(x)$ 的大致图象如图，由图可知 $f(x)_{\min}=f(0)=\frac{1}{4}$， $f(x)_{\max}=f(2)=1$，故 B 项正确；

C 项，由图可知 C 项正确；

D 项，由图可知 $f(x)$ 在 $[2,4]$ 上↘，而 $y=(\frac{1}{2})^{2-x}$ 在 $[2,4]$ 上↗，故 D 项错误.



7.（★★★★）已知函数 $f(x)=\ln(\sqrt{x^2+1}-x)+1$，定义域为 $\mathbf{R}$ 的函数 $g(x)$ 满足 $g(-x)+g(x)=2$，若函数 $y=f(x)$ 与 $y=g(x)$ 的图象的交点为 (x_1,y_1)， (x_2,y_2)，⋯， (x_5,y_5)，则 $\sum_{i=1}^{5}(x_i+y_i)=$（　　）

（A）0　（B）5　（C）10　（D）15

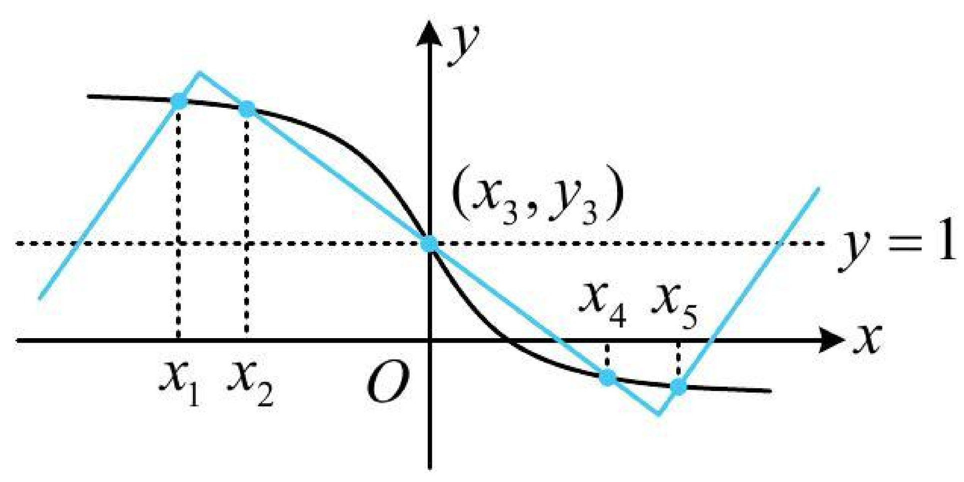
答案： B

解析： $g(x)$ 没给解析式，给的是 $g(-x)+g(x)=2$，只能得出对称性，所以也要研究 $f(x)$ 的对称性，

注意到 $y=\ln(\sqrt{x^2+1}-x)$ 为奇函数，其图象关于原点对称，所以 $f(x)$ 的图象关于点 $(0,1)$ 对称，

又 $g(-x)+g(x)=2$，所以 $g(x)$ 的图象也关于点 $(0,1)$ 对称，故 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的交点关于点 $(0,1)$ 对称，

所以两函数的草图如图，由图可知， $x_1+x_2+\cdots+x_5=0$， $y_1+y_2+\cdots+y_5=5$，所以 $\sum_{i=1}^{5}(x_i+y_i)=5$.

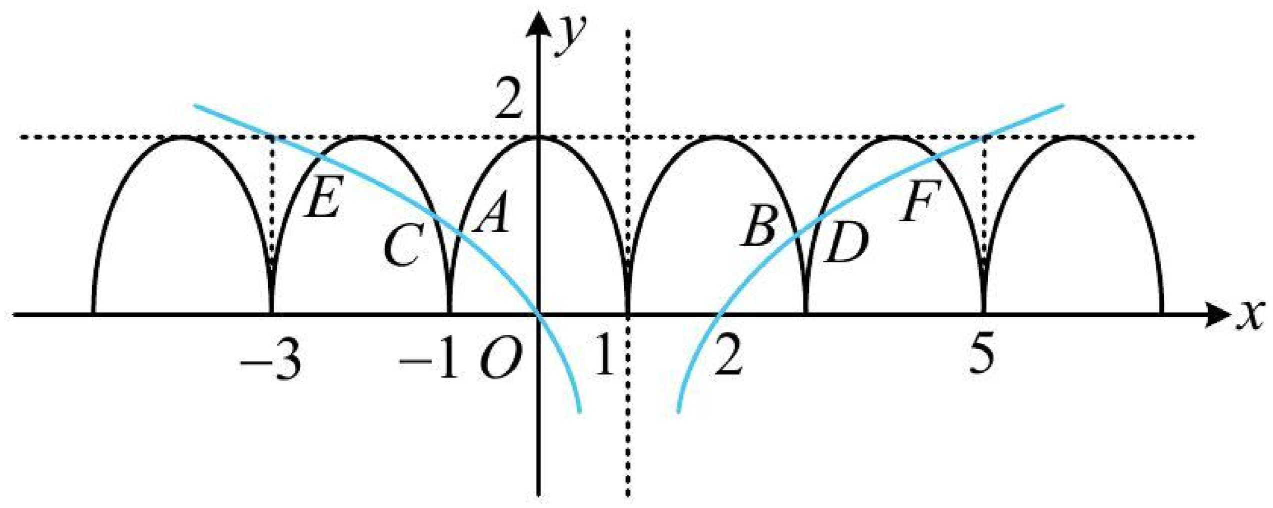


8.（2022•江苏模拟•★★★★）偶函数 $f(x)$ 满足 $f(x)=f(2-x)(x\in\mathbf{R})$，当 $x\in[0,1]$ 时， $f(x)=2-2x^2$，则函数 $g(x)=f(x)-2\log_4|x-1|$ 的所有零点之和为（　　）

（A）4　（B）6　（C）8　（D）10

答案： B

解析： $f(x)=f(2-x)\Rightarrow f(x)$的图象关于$x=1$对称，$f(x)$为偶函数$\Rightarrow f(x)$的图象关于$y$轴对称，所以$f(x)$的周期为 2，$g(x)=0\Leftrightarrow f(x)=2\log_4|x-1|$，作出图象如图，由图可知两图象有 6 个交点，且它们两两关于直线$x=1$对称，由图可知$\frac{x_A+x_B}{2}=1$，所以$x_A+x_B=2$，同理，$x_C+x_D=x_E+x_F=2$，故$g(x)$的零点之和为$x_A+x_B+x_C+x_D+x_E+x_F=6$.



9.（2021 • 全国甲卷 • ★★★★）设函数$f(x)$的定义域为 **R**，$f(x+1)$为奇函数，$f(x+2)$为偶函数，当$x\in[1,2]$时，$f(x)=ax^2+b$. 若$f(0)+f(3)=6$，则$f(\frac{9}{2})=$（　　）

（A）$-\frac{9}{4}$　　（B）$-\frac{3}{2}$　　（C）$\frac{7}{4}$　　（D）$\frac{5}{2}$

答案： D

解析： $f(x+1)$为奇函数$\Rightarrow f(x)$的图象关于点$(1,0)$对称，所以$f(1+x)=-f(1-x)$ ①，

$f(x+2)$为偶函数$\Rightarrow f(x)$的图象关于直线$x=2$对称，所以$f(2+x)=f(2-x)$，

从而$f(x)$是以 4 为周期的周期函数，所以$f(\frac{9}{2})=f(\frac{1}{2})$，

在$f(1+x)=-f(1-x)$中取$x=\frac{1}{2}$可得$f(\frac{1}{2})=-f(\frac{3}{2})$，所以$f(\frac{9}{2})=-f(\frac{3}{2})=-\frac{9}{4}a-b$，

需求出a和b才能得出答案，给了$[1,2]$上的解析式和$f(0)+f(3)=6$，所以计算$f(0)$和$f(3)$，需转化到$[1,2]$上来求，

在$f(1+x)=-f(1-x)$中取$x=1$可得$f(0)=-f(2)=-4a-b$，

在$f(2+x)=f(2-x)$中取$x=1$得$f(3)=f(1)=a+b$，所以$f(0)+f(3)=-3a=6$，故$a=-2$；

还得建立一个方程求b，注意到$f(x)$关于$(1,0)$对称，所以必有$f(1)=0$，下面给出理由，

在①中取$x=0$得$f(1)=-f(1)$，所以$f(1)=0$，而$f(1)=a+b$，所以$a+b=0$，结合$a=-2$可得$b=2$，

所以$f(\frac{9}{2})=-\frac{9}{4}a-b=\frac{5}{2}$.