第 1 节 向量的基本运算（★★）

内容提要

本节归纳与向量共线、向量数量积的定义、向量的模有关的小题，下面先梳理一些会用到的知识点.

1．共线向量定理：对于平面上任意两个向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}(\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0})$，$\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}\Leftrightarrow$ 存在唯一一个实数 λ，使得 $\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}$，且当 $\lambda>0$ 时，$\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 同向，当 $\lambda<0$ 时，$\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 反向.

2．数量积：设向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 θ，则 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\cdot\cos\theta$. 特别地，$\boldsymbol{a}^2=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{a}|\cdot\cos0^\circ=|\boldsymbol{a}|^2$，所以涉及模的问题，常考虑将模平方，与向量的数量积联系起来.

3．夹角余弦公式：设 θ 是非零向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 的夹角，则 $\cos\theta=\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|}$. 向量问题中涉及角度，常用该公式.

典型例题

类型Ⅰ：共线向量定理的应用

【例 1】已知向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 不共线，且 $\lambda\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}+(2\lambda-1)\boldsymbol{b}$ 的方向相反，则实数 λ 的值为（　　）

（A）1　（B）$-\dfrac{1}{2}$　（C）1 或 $-\dfrac{1}{2}$　（D）-1 或 $-\dfrac{1}{2}$

解析：方向相反属共线的情形，可用共线向量定理处理，

因为 $\lambda\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 和 $\boldsymbol{a}+(2\lambda-1)\boldsymbol{b}$ 方向相反，所以存在 $\mu<0$，使得 $\lambda\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\mu[\boldsymbol{a}+(2\lambda-1)\boldsymbol{b}]$，

整理得：$\lambda\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\mu\boldsymbol{a}+\mu(2\lambda-1)\boldsymbol{b}$，所以 $\begin{cases}\lambda=\mu\\1=\mu(2\lambda-1)\end{cases}$，解得：$\lambda=-\dfrac{1}{2}$ 或 1，又 $\lambda=\mu<0$，所以 $\lambda=-\dfrac{1}{2}$.

答案：B

【变式】设 $\vec{e}_1$，$\vec{e}_2$ 是两个不共线的向量，已知 $\overrightarrow{AB}=\vec{e}_1+k\vec{e}_2$，$\overrightarrow{BC}=5\vec{e}_1+4\vec{e}_2$，$\overrightarrow{DC}=-\vec{e}_1-2\vec{e}_2$，且 A，B，D 三点共线，则实数 $k=$_____.

解析：A，B，D 三点共线可用向量共线翻译，即存在 λ 使 $\overrightarrow{AD}=\lambda\overrightarrow{AB}$，故将 $\overrightarrow{AD}$ 和 $\overrightarrow{AB}$ 用 $\vec{e}_1$，$\vec{e}_2$ 表示，

由题意，$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{DC}=\vec{e}_1+k\vec{e}_2+5\vec{e}_1+4\vec{e}_2-(-\vec{e}_1-2\vec{e}_2)=7\vec{e}_1+(k+6)\vec{e}_2$，

因为 A，B，D 三点共线，所以 $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{AD}$ 共线，故存在实数 λ 使 $\overrightarrow{AD}=\lambda\overrightarrow{AB}$，

即 $7\vec{e}_1+(k+6)\vec{e}_2=\lambda\vec{e}_1+\lambda k\vec{e}_2$，所以 $\begin{cases}7=\lambda\\k+6=\lambda k\end{cases}$，解得：$k=1$.

答案：1

类型Ⅱ：模的常见处理方法

【例 2】已知 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 为单位向量，$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=1$，则 $|\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}|=$_____.

解析：看到模，先试试平方，由题意，$|\boldsymbol{a}|=1$，$|\boldsymbol{b}|=1$，$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=1$，所以 $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|^2=\boldsymbol{a}^2+\boldsymbol{b}^2-2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=2-2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=1$，

从而 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\dfrac{1}{2}$，故 $|\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}|^2=\boldsymbol{a}^2+9\boldsymbol{b}^2-6\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=10-6\times\dfrac{1}{2}=7$，所以 $|\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}|=\sqrt{7}$.

答案：$\sqrt{7}$

【变式】平面向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 满足 $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|=1$，对任意的实数 t，$\left|\boldsymbol{a}-\frac{1}{2}\boldsymbol{b}\right|\le|\boldsymbol{a}+t\boldsymbol{b}|$ 恒成立，则 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为_____；$|\boldsymbol{b}-t\boldsymbol{a}|$ 的最小值为_____.

解析：给了模的不等式，先试试平方去掉模，看能得到什么，

设 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 θ，因为 $\left|\boldsymbol{a}-\frac{1}{2}\boldsymbol{b}\right|\le|\boldsymbol{a}+t\boldsymbol{b}|$ 恒成立，所以 $\left|\boldsymbol{a}-\frac{1}{2}\boldsymbol{b}\right|^2\le|\boldsymbol{a}+t\boldsymbol{b}|^2$，

故 $\boldsymbol{a}^2+\frac{1}{4}\boldsymbol{b}^2-\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}\le\boldsymbol{a}^2+t^2\boldsymbol{b}^2+2t\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$，

结合 $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|=1$ 可得 $\frac{5}{4}-\cos\theta\le1+t^2+2t\cos\theta$，整理得：$t^2+(2\cos\theta)t+\cos\theta-\frac{1}{4}\ge0$ ①，

此为关于 t 的一元二次不等式恒成立问题，考虑判别式即可，不等式①应有 $\Delta=4\cos^2\theta-4\cos\theta+1\le0$，

即 $(2\cos\theta-1)^2\le0$，所以只能 $2\cos\theta-1=0$，故 $\cos\theta=\frac{1}{2}$，结合 $0\le\theta\le\pi$ 可得 $\theta=\frac{\pi}{3}$；

由条件得到了 θ，再求 $|\boldsymbol{b}-t\boldsymbol{a}|$ 的最小值，包含模优先考虑平方，发现可化为关于 t 的函数，

$|\boldsymbol{b}-t\boldsymbol{a}|^2=\boldsymbol{b}^2+t^2\boldsymbol{a}^2-2t\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=1+t^2-2t|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\cdot\cos\theta=t^2-t+1=(t-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}$，

所以当 $t=\frac{1}{2}$ 时，$|\boldsymbol{b}-t\boldsymbol{a}|^2$ 取得最小值 $\frac{3}{4}$，故 $|\boldsymbol{b}-t\boldsymbol{a}|_{\min}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

答案：$\frac{\pi}{3}$；$\frac{\sqrt{3}}{2}$

【总结】涉及模的问题，一般考虑将模平方，因为这样可以去掉模，以及沟通数量积、夹角.

类型III：数量积定义式的应用

【例 3】（2021•浙江卷）已知非零向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$，则“$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}$”是“$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$”的（　　）

（A）充分不必要条件　（B）必要不充分条件　（C）充要条件　（D）既不充分也不必要条件

解析：先看充分性，可将两个数量积用定义表示出来再分析，

设 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{c}$ 的夹角分别为 α，β，则 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}$ 即为 $|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{c}|\cdot\cos\alpha=|\boldsymbol{b}|\cdot|\boldsymbol{c}|\cdot\cos\beta$，所以 $|\boldsymbol{a}|\cdot\cos\alpha=|\boldsymbol{b}|\cdot\cos\beta$，不能得出 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$，故充分性不成立；而当 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$ 时，满足 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}$，所以必要性成立，故选 B.

答案：B

【反思】向量的数量积的运算满足分配律，但不能对向量约分，即不能在 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}$ 两端把 $\boldsymbol{c}$ 约掉.

【例 4】已知 $|\boldsymbol{a}|=4$，$|\boldsymbol{b}|=2$，$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 60°，若 $\boldsymbol{c}=2\boldsymbol{a}-k\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{d}=\boldsymbol{a}+k\boldsymbol{b}$，且 $\boldsymbol{c}\perp\boldsymbol{d}$，则 $k=$_____.

解析：$\boldsymbol{c}\perp\boldsymbol{d}$ 可用数量积翻译，由题意，$\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{d}=(2\boldsymbol{a}-k\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}+k\boldsymbol{b})=2\boldsymbol{a}^2+2k\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-k\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-k^2\boldsymbol{b}^2=0$ ①，

故只需求 $\boldsymbol{a}^2$，$\boldsymbol{b}^2$，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$，向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 既有长度，又有夹角，所以都能算，

由题意，$a^2=|a|^2=16$，$b^2=|b|^2=4$，$a\cdot b=|a|\cdot|b|\cdot\cos\theta=4\times2\times\cos60^{\circ}=4$，

代入①整理得：$-4k^2+4k+32=0$，解得：$k=\dfrac{1\pm\sqrt{33}}{2}$.

答案：$\dfrac{1\pm\sqrt{33}}{2}$

【反思】设 a，b 为非零向量，则 $a\perp b\Leftrightarrow a\cdot b=0$.

【例 5】（2021·新高考Ⅱ卷）已知向量 $a+b+c=0$，$|a|=1$，$|b|=|c|=2$，则 $a\cdot b+b\cdot c+c\cdot a=$_____.

解法 1：涉及三个向量的关系，且已知模长，考虑消去一个，常用移项再平方的方法，

由 $a+b+c=0$ 可得 $c=-a-b$，所以 $c^2=(-a-b)^2=a^2+b^2+2a\cdot b$，

又 $|a|=1$，$|b|=|c|=2$，所以 $4=1+4+2a\cdot b$，故 $a\cdot b=-\dfrac{1}{2}$，

同理，将 $b=-a-c$ 和 $a=-b-c$ 分别平方可得 $a\cdot c=-\dfrac{1}{2}$，$b\cdot c=-\dfrac{7}{2}$，

所以 $a\cdot b+b\cdot c+c\cdot a=-\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}-\dfrac{7}{2}=-\dfrac{9}{2}$.

解法 2：观察发现直接将 $a+b+c=0$ 平方，就会产生目标式 $a\cdot b+b\cdot c+c\cdot a$，

$a+b+c=0\Rightarrow(a+b+c)^2=|a|^2+|b|^2+|c|^2+2(a\cdot b+b\cdot c+c\cdot a)=9+2(a\cdot b+b\cdot c+c\cdot a)=0$，

所以 $a\cdot b+b\cdot c+c\cdot a=-\dfrac{9}{2}$.

答案：$-\dfrac{9}{2}$

【反思】给出三个向量的线性方程，可考虑移项再平方（解法 1），消去一个并产生另外两向量的数量积.

【例 6】若两个非零向量 a，b 满足 $|a+b|=|a-b|=2|a|$，则 $a-b$ 与 a 的夹角为_____.

解析：向量问题中涉及夹角，一般考虑夹角余弦公式，先算它们的数量积，看看还差什么，

不妨设 $|a+b|=|a-b|=2|a|=2k(k>0)$，则 $|a|=k$，所以 $(a-b)\cdot a=a^2-a\cdot b=k^2-a\cdot b$ ①，

故需计算 $a\cdot b$，可把 $|a+b|=|a-b|$ 平方，因为 $|a+b|=|a-b|$，所以 $|a+b|^2=|a-b|^2$，

从而 $a^2+b^2+2a\cdot b=a^2+b^2-2a\cdot b$，故 $a\cdot b=0$，代入①得：$(a-b)\cdot a=k^2$，

设 $a-b$ 与 a 的夹角为 $\theta(0\le\theta\le\pi)$，则 $\cos\theta=\dfrac{(a-b)\cdot a}{|a-b|\cdot|a|}=\dfrac{k^2}{2k\cdot k}=\dfrac{1}{2}$，结合 $0\le\theta\le\pi$ 可得 $\theta=\dfrac{\pi}{3}$.

答案：$\dfrac{\pi}{3}$

【反思】向量问题中涉及角度，一般用夹角余弦公式 $\cos\theta=\dfrac{a\cdot b}{|a|\cdot|b|}$ 来求.

强化训练

1．（★）（多选）设 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 是两个向量，则下列命题正确的是（　　）

（A）若 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$，则存在唯一实数 λ，使 $\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}$

（B）若向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 所在的直线是异面直线，则向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 一定不共面

（C）若 $\boldsymbol{a}$ 是非零向量，则 $\dfrac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}$ 是与 $\boldsymbol{a}$ 同向的单位向量

（D）若 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 都是非零向量，则“$\dfrac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}+\dfrac{\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|}=\boldsymbol{0}$”是“$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 共线”的充分不必要条件

2．（2023 • 临汾模拟 • ★）已知 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 是不共线的两个向量，$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}+5\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{BC}=-2\boldsymbol{a}+8\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{CD}=3\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}$，则（　　）

（A）A，B，C 三点共线　　（B）A，B，D 三点共线

（C）B，C，D 三点共线　　（D）A，C，D 三点共线

3．（2023 • 新高考Ⅱ卷 • ★★）已知向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 满足 $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=\sqrt{3}$，$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$，则 $|\boldsymbol{b}|=$_____.

.

4．（★★）（多选）下列命题正确的是（　　）

（A）$||\boldsymbol{a}|-|\boldsymbol{b}||\le|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|\le|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$

（B）若 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 为非零向量，且 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$，则 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$

（C）$|\boldsymbol{a}|-|\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|$ 是 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 共线的充要条件

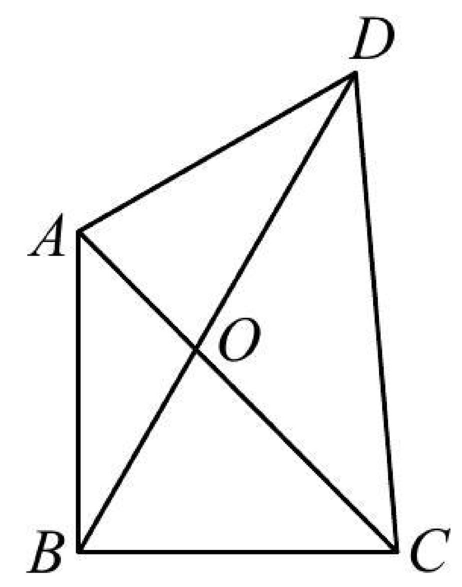
（D）若 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 为非零向量，且 $||\boldsymbol{a}|-|\boldsymbol{b}||=|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$，则 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 同向

5．（2022 • 西安模拟 • ★）已知向量 $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|=2$，$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 $\dfrac{\pi}{4}$，且 $(\lambda\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})\perp\boldsymbol{a}$，则实数 $\lambda=$_____.

6．（★★）若向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 满足 $3\boldsymbol{a}+4\boldsymbol{b}+5\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$，$|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{c}|=1$，则 $\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=$_____.

7．（★★★）如图，已知平面四边形 $ABCD$ 中，$AB\perp BC$，$AB=BC=AD=2$，$CD=3$，AC 与 BD 交于点 O，记 $I_1=\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$，$I_2=\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}$，$I_3=\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OD}$，则（　　）

（A）$I_1<I_2<I_3$　　（B）$I_1<I_3<I_2$　　（C）$I_3<I_1<I_2$　　（D）$I_2<I_1<I_3$



8．（2022 • 天津卷 • ★★★★）在 ΔABC 中，$\overrightarrow{CA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{CB}=\boldsymbol{b}$，$D$ 是 AC 中点，$\overrightarrow{CB}=2\overrightarrow{BE}$，试用 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 表示 $\overrightarrow{DE}$ 为_____；若 $\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{DE}$，则 $\angle ACB$ 的最大值为_____.