第 4 节 高考中双曲线常用的二级结论（★★☆）

内容提要

解析几何中存在无数的二级结论，本节筛选出了一些在高考中比较常用的双曲线二级结论，记住这些结论可适当缩短解题时间.

1．焦点三角形面积公式：如图 1，设 P 是双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 上一点，$F_1(-c,0)$，$F_2(c,0)$ 分别是双曲线的左、右焦点，$\angle F_1PF_2=\theta$，则 $S_{\Delta PF_1F_2}=c|y_P|=\frac{b^2}{\tan\frac{\theta}{2}}$.

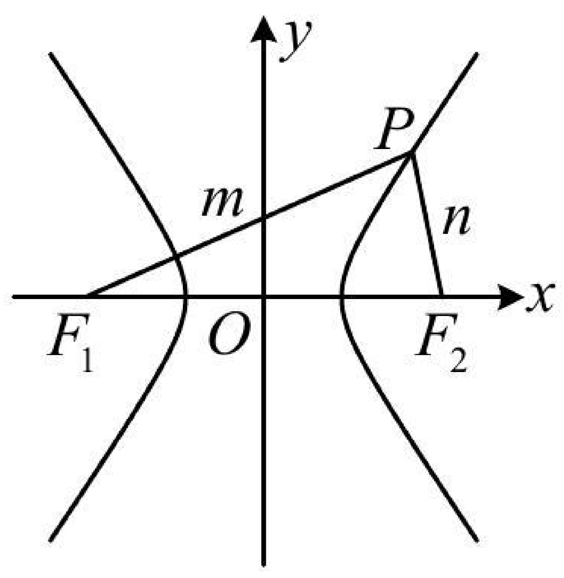


图1

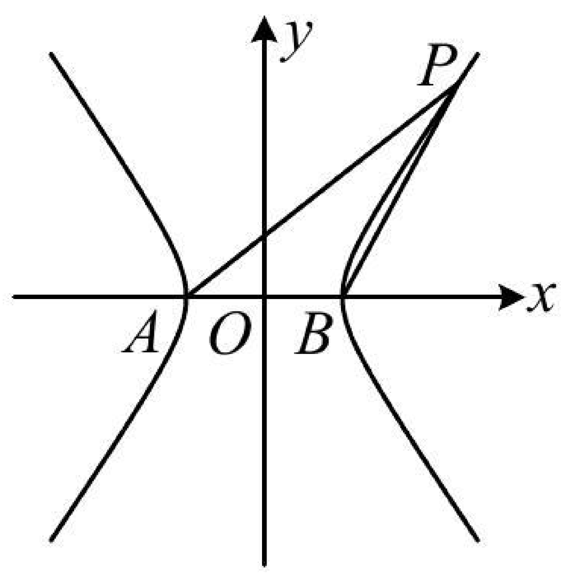


图2

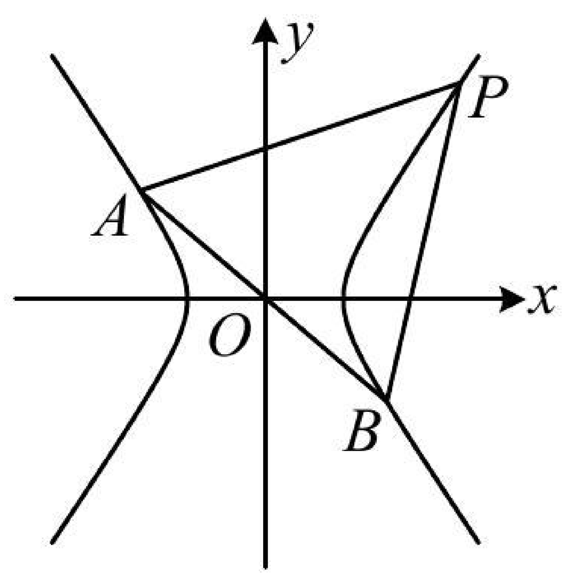


图3

证明：一方面，ΔPF_1F_2 的边 F_1F_2 上的高 $h=|y_P|$，所以 $S_{\Delta PF_1F_2}=\frac{1}{2}|F_1F_2|\cdot h=\frac{1}{2}\cdot 2c\cdot|y_P|=c|y_P|$；

另一方面，记 $|PF_1|=m$，$|PF_2|=n$，则 $|m-n|=2a$ ①，

在 ΔPF_1F_2 中，由余弦定理，$|F_1F_2|^2=|PF_1|^2+|PF_2|^2-2|PF_1|\cdot|PF_2|\cdot\cos\angle F_1PF_2$，

所以 $4c^2=m^2+n^2-2mn\cos\theta=(m-n)^2+2mn-2mn\cos\theta=(m-n)^2+2mn(1-\cos\theta)$ ②，

将式①代入式②可得：$4c^2=4a^2+2mn(1-\cos\theta)$，所以 $mn=\frac{4c^2-4a^2}{2(1-\cos\theta)}=\frac{2b^2}{1-\cos\theta}$，

故 $S_{\Delta PF_1F_2}=\frac{1}{2}mn\sin\theta=\frac{1}{2}\cdot\frac{2b^2}{1-\cos\theta}\cdot\sin\theta=b^2\cdot\frac{\sin\theta}{1-\cos\theta}=b^2\cdot\frac{2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}{2\sin^2\frac{\theta}{2}}=\frac{b^2}{\tan\frac{\theta}{2}}$.

2．基于双曲线第三定义的斜率积结论：如上图 2，设 A，B 分别是双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的左、右顶点，P 是双曲线上不与 A，B 重合的任意一点，则 $k_{PA}\cdot k_{PB}=\frac{b^2}{a^2}$.

注：上述结论中 A，B 是双曲线的左、右顶点，可将其推广为双曲线上关于原点对称的任意两点，如上图 3，只要直线 PA，PB 的斜率都存在，就仍然满足 $k_{PA}\cdot k_{PB}=\frac{b^2}{a^2}$，下面给出证明.

证明：设 $A(x_1,y_1)$，$P(x_2,y_2)$，则 $B(-x_1,-y_1)$，所以 $k_{PA}\cdot k_{PB}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\cdot\frac{y_2+y_1}{x_2+x_1}=\frac{y_2^2-y_1^2}{x_2^2-x_1^2}$ ①，

因为点 A 在双曲线上，所以 $\frac{x_1^2}{a^2}-\frac{y_1^2}{b^2}=1$，故 $y_1^2=b^2(\frac{x_1^2}{a^2}-1)=\frac{b^2}{a^2}(x_1^2-a^2)$，同理，$y_2^2=\frac{b^2}{a^2}(x_2^2-a^2)$，

所以 $y_2^2-y_1^2=\dfrac{b^2}{a^2}(x_2^2-a^2-x_1^2+a^2)=\dfrac{b^2}{a^2}(x_2^2-x_1^2)$，代入①得：$k_{PA}\cdot k_{PB}=\dfrac{b^2}{a^2}$；

在上述条件中令 $A(-a,0)$，$B(a,0)$，即得内容提要第 2 点的特殊情况下的结论.

3. 中点弦斜率积结论：如图 4，AB 是双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的一条不与坐标轴垂直且不过原点的弦，M 为 AB 中点，则 $k_{AB}\cdot k_{OM}=\dfrac{b^2}{a^2}$，此结论可用下面的点差法来证明.

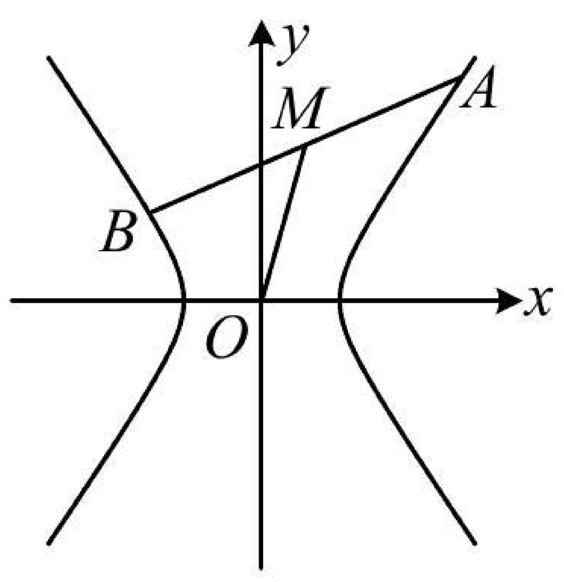


图4

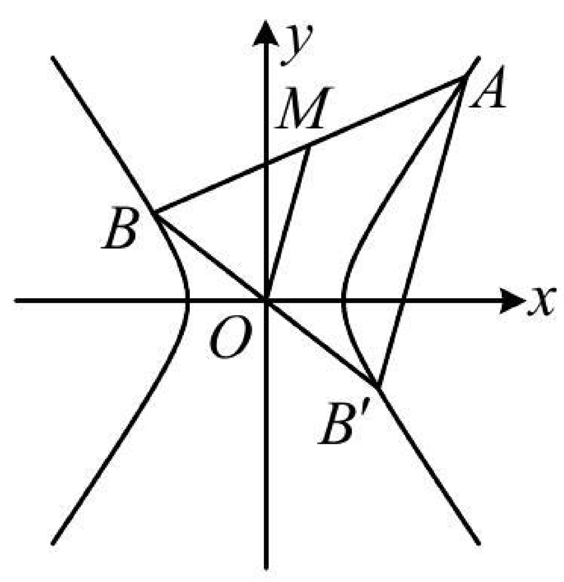


图5

证明：设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，$x_1\neq x_2$，$y_1\neq y_2$，因为 A、B 都在双曲线上，所以 $\begin{cases}\dfrac{x_1^2}{a^2}-\dfrac{y_1^2}{b^2}=1\\ \dfrac{x_2^2}{a^2}-\dfrac{y_2^2}{b^2}=1\end{cases}$，

两式作差得：$\dfrac{x_1^2-x_2^2}{a^2}-\dfrac{y_1^2-y_2^2}{b^2}=0$，整理得：$\dfrac{y_1-y_2}{x_1-x_2}\cdot\dfrac{y_1+y_2}{x_1+x_2}=\dfrac{b^2}{a^2}$ ①，

注意到 $\dfrac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=k_{AB}$，$\dfrac{y_1+y_2}{x_1+x_2}=\dfrac{2y_M}{2x_M}=\dfrac{y_M}{x_M}=k_{OM}$，所以式①即为 $k_{AB}\cdot k_{OM}=\dfrac{b^2}{a^2}$.

注：中点弦结论和上面的第三定义斜率积结论的结果都是 $\dfrac{b^2}{a^2}$，这是巧合吗？不是，两者之间有必然的联系. 如上图 5，设 B' 为 B 关于原点的对称点，则 B' 也在该双曲线上，且 O 为 BB' 中点，结合 M 为 AB 中点可得 $OM\,/\!/\,AB'$，所以 $k_{AB}\cdot k_{OM}=k_{AB}\cdot k_{AB'}$，于是又回到了双曲线上的点 A 与双曲线上关于原点对称的 B 和 B' 的连线的斜率积.

典型例题

类型Ⅰ：焦点三角形面积

【例 1】(2020・新课标Ⅰ卷)设 F_1，F_2 是双曲线 $C:x^2-\dfrac{y^2}{3}=1$ 的两个焦点，O 为原点，点 P 在 C 上且 $|OP|=2$，则 ΔPF_1F_2 的面积为（　　）

（A）7　（B）3　（C）$\dfrac{5}{2}$　（D）2

解法 1： 求焦点三角形面积可考虑代公式 $S=\dfrac{b^2}{\tan\frac{\theta}{2}}$，但本题未给 $\angle F_1PF_2$，故先看能不能求出它，

如图，双曲线 C 的半焦距 $c=\sqrt{1+3}=2\Rightarrow|F_1F_2|=4$，因为 $|OP|=2$，所以 $|OP|=\dfrac{1}{2}|F_1F_2|$，

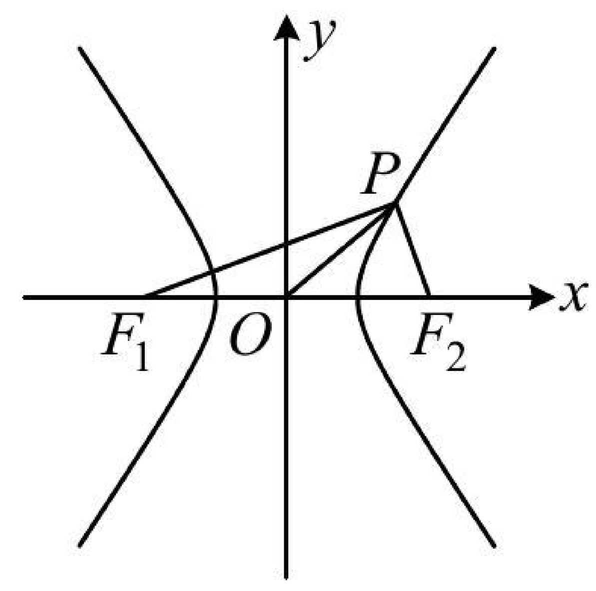
从而 $\angle F_1PF_2=90^\circ$，故 $S_{\Delta PF_1F_2}=\dfrac{b^2}{\tan\dfrac{\theta}{2}}=\dfrac{3}{\tan 45^\circ}=3$.

解法 2：也可考虑代公式 $S=c|y_P|$ 求 ΔPF_1F_2 的面积，于是先算 y_P，

因为 $|OP|=2$，所以 $\sqrt{x_P^2+y_P^2}=2$ ①，又点 P 在双曲线 C 上，所以 $x_P^2-\dfrac{y_P^2}{3}=1$ ②，

联立①②解得：$y_P=\pm\dfrac{3}{2}$，双曲线 C 的半焦距 $c=\sqrt{1+3}=2$，所以 $S_{\Delta PF_1F_2}=c|y_P|=3$.

答案：B



【变式】已知 F_1，F_2 是双曲线 $C:x^2-\dfrac{y^2}{3}=1$ 的左、右焦点，P 为双曲线 C 右支上的一点，$\angle F_1PF_2=120^\circ$，则点 P 的纵坐标为_____，$|PF_1|=$_____.

解析：给出 $\angle F_1PF_2$，可由 $S=\dfrac{b^2}{\tan\dfrac{\theta}{2}}$ 求出 ΔPF_1F_2 的面积，再由 $S=c|y_P|$ 解出 y_P，

由题意，双曲线 C 的半焦距 $c=2$，$S_{\Delta PF_1F_2}=\dfrac{b^2}{\tan\dfrac{\theta}{2}}=\dfrac{3}{\tan 60^\circ}=\sqrt{3}$，

又 $S_{\Delta PF_1F_2}=c|y_P|=2|y_P|$，所以 $2|y_P|=\sqrt{3}$，解得：$y_P=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}$；

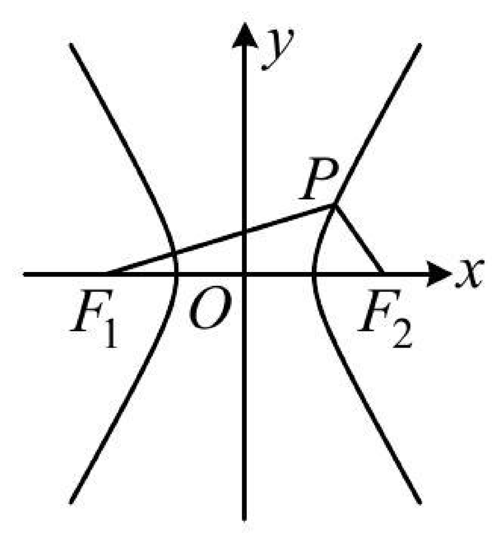
再求 $|PF_1|$，可联想到由双曲线定义和 ΔPF_1F_2 的面积各建立一个关于 $|PF_1|$ 和 $|PF_2|$ 的方程，求解即可，

如图，由双曲线定义，$|PF_1|-|PF_2|=2$ ①，

又 $S_{\Delta PF_1F_2}=\dfrac{1}{2}|PF_1|\cdot|PF_2|\cdot\sin\angle F_1PF_2=\dfrac{\sqrt{3}}{4}|PF_1|\cdot|PF_2|=\sqrt{3}$，所以 $|PF_1|\cdot|PF_2|=4$ ②，

由①可得 $|PF_2|=|PF_1|-2$，代入②整理得：$|PF_1|^2-2|PF_1|-4=0$，解得：$|PF_1|=1+\sqrt{5}$ 或 $1-\sqrt{5}$（舍去）.

答案：$\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，$1+\sqrt{5}$



【反思】从上面两道题可以看出，当题干给出$\angle F_1PF_2$时，可用$S_{\Delta PF_1F_2}=\dfrac{b^2}{\tan\frac{\theta}{2}}$（其中$\theta=\angle F_1PF_2$）来算焦点三角形的面积；由$S_{\Delta PF_1F_2}=c|y_P|=\dfrac{b^2}{\tan\frac{\theta}{2}}$还可以建立顶角$\theta$和$|y_P|$之间的等量关系.

类型Ⅱ：第三定义、中点弦斜率积结论

【例 2】设双曲线$C:\dfrac{x^2}{a^2}-y^2=1(a>0)$与直线$y=kx$交于$A$，$B$两点，$P$为$C$右支上的一动点，记直线$PA$，$PB$的斜率分别为$k_{PA}$，$k_{PB}$，$C$的左、右焦点分别为$F_1$，$F_2$，若$k_{PA}\cdot k_{PB}=\dfrac{1}{9}$，则下列说法正确的是（　　）

（A）$a=\sqrt{3}$

（B）双曲线C的渐近线方程为$y=\pm\sqrt{3}x$

（C）若$PF_1\perp PF_2$，则ΔPF_1F_2的面积为2

（D）双曲线C的离心率为$\dfrac{\sqrt{10}}{3}$

解析：由对称性可得A，B关于原点对称，又涉及斜率之积$k_{PA}\cdot k_{PB}$，故想到第三定义斜率积结论，

因为$k_{PA}\cdot k_{PB}=\dfrac{1}{a^2}=\dfrac{1}{9}$，所以$a=3$，从而双曲线$C$的渐近线方程为$y=\pm\dfrac{1}{3}x$，

离心率$e=\dfrac{\sqrt{a^2+1}}{a}=\dfrac{\sqrt{10}}{3}$，故 A 项和 B 项错误，D 项正确；

对于 C 项，求焦点三角形面积，代公式$S=\dfrac{b^2}{\tan\frac{\theta}{2}}$即可，

当$PF_1\perp PF_2$时，$\angle F_1PF_2=90^\circ$，所以$S_{\Delta PF_1F_2}=\dfrac{b^2}{\tan\frac{\theta}{2}}=\dfrac{1}{\tan 45^\circ}=1$，故 C 项错误.

答案：D

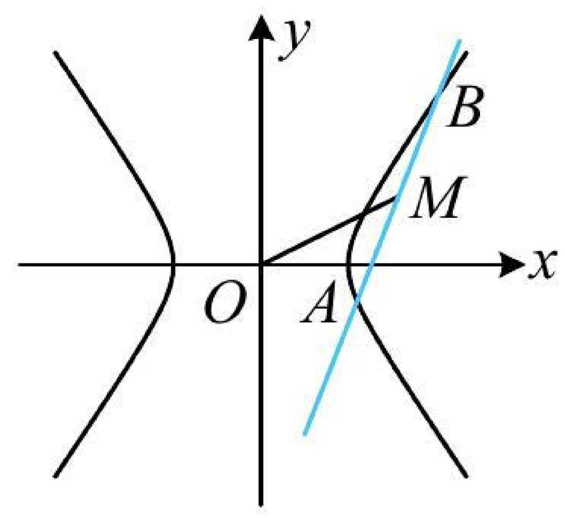
【反思】涉及双曲线$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$上的点$P$与双曲线上关于原点对称的$A$，$B$两点连线的斜率之积，考虑用第三定义斜率积结论$k_{PA}\cdot k_{PB}=\dfrac{b^2}{a^2}$，其推导方法请参考本节内容提要.

【例 3】已知A，B是双曲线$C:\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{y^2}{3}=1$上的两点，线段$AB$的中点是$M(2,1)$，则直线$AB$的方程为_____.

解析：涉及弦中点，想到中点弦斜率积结论，$M(2,1)\Rightarrow k_{AB}\cdot k_{OM}=k_{AB}\cdot\dfrac{1}{2}=\dfrac{3}{2}$，所以$k_{AB}=3$，

如图，直线AB过点M，故其方程为$y-1=3(x-2)$，整理得：$3x-y-5=0$.

答案：$3x-y-5=0$



【反思】在双曲线中，涉及弦中点的问题都可以考虑用中点弦斜率积结论来建立方程，求解需要的量.

【变式】已知双曲线$C:x^2-y^2=1$，过点$P(m,1)(m>0)$的直线l与双曲线C交于A、B两点，若P为线段AB的中点，则m的取值范围是_____.

解析：涉及弦中点，想到中点弦斜率积结论，由题意，$k_{AB}\cdot k_{OP}=k_{AB}\cdot\frac{1}{m}=1$，所以$k_{AB}=m$，

如图，直线l过点P，故其方程为$y-1=m(x-m)$，整理得：$y=mx+1-m^2$，

直线l是随m而变化的动直线，且应满足l与C有两个交点，于是联立方程用$\Delta>0$来求m的范围，

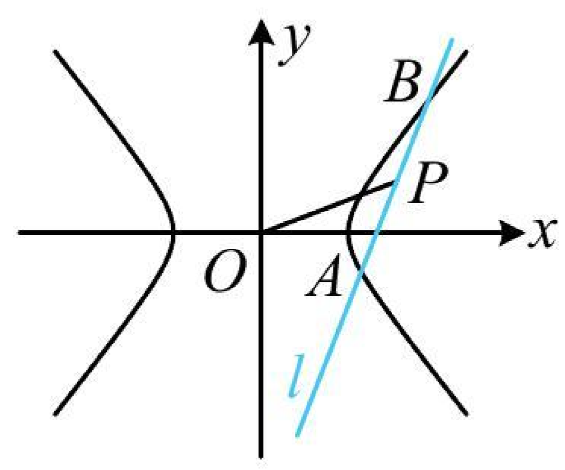
联立$\begin{cases}y=mx+1-m^2\\x^2-y^2=1\end{cases}$消去$y$整理得：$(1-m^2)x^2-2m(1-m^2)x+2m^2-2-m^4=0$，

因为直线l与双曲线C有2个交点，所以$\begin{cases}1-m^2\neq0 & ①\\\Delta=4m^2(1-m^2)^2-4(1-m^2)(2m^2-2-m^4)>0 & ②\end{cases}$，

由①可得$m\neq\pm1$，由②可得$(1-m^2)[m^2(1-m^2)-2m^2+2+m^4]=(1-m^2)(2-m^2)>0$，所以$m^2<1$或$m^2>2$，

结合$m>0$可得$0<m<1$或$m>\sqrt{2}$.

答案：$(0,1)\cup(\sqrt{2},+\infty)$



强化训练

1．（★）设F_1，F_2是双曲线$C:\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{5}=1$的左、右焦点，$P$为$C$上一点，若$PF_1\perp PF_2$，则$\Delta PF_1F_2$的面积为_____.

2．（2022 • 辽宁模拟 • ★★）设 F_1，F_2 是双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的左、右焦点，P 为双曲线右支上一点，若 $\angle F_1PF_2=90^{\circ}$，半焦距 $c=2$，$S_{\Delta PF_1F_2}=3$，则双曲线的两条渐近线的夹角为（　　）

（A）$\frac{\pi}{2}$　　（B）$\frac{\pi}{4}$　　（C）$\frac{\pi}{3}$　　（D）$\frac{\pi}{6}$

3．（2022 • 汉中模拟 • ★★）已知双曲线 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{b^2}=1(b>0)$ 的左焦点为 F，过 F 作斜率为 2 的直线与双曲线交于 A，B 两点，P 是 AB 中点，O 为原点，若直线 OP 的斜率为 $\frac{1}{4}$，则双曲线的离心率为（　　）

（A）$\frac{\sqrt{6}}{2}$　　（B）2　　（C）$\frac{3}{2}$　　（D）$\sqrt{2}$

4．（2022 • 长沙模拟 • ★★★）已知 $m+n=4$，点 $M(m,n)$ 是双曲线 $\frac{x^2}{8}-\frac{y^2}{2}=1$ 的一条弦 AB 的中点，则当 mn 取得最大值时，直线 AB 的方程为_____.

5．（★★★）已知 A，B 为双曲线 E 的左、右顶点，点 M 在 E 上，ΔABM 为等腰三角形，且顶角为 120°，则 E 的离心率为（　　）

（A）$\sqrt{5}$　　（B）2　　（C）$\sqrt{3}$（D）$\sqrt{2}$

6．（2022 • 吉林模拟 • ★★★★）已知直线 $l: y=kx(k\neq 0)$ 与双曲线 $C:\frac{x^2}{4}-y^2=1$ 相交于 P，Q 两点，$QH\perp x$ 轴于点 H，直线 PH 与双曲线 C 交于另一点 T，则下列选项中错误的是（　　）

（A）$-\frac{1}{2}<k<0$ 或 $0<k<\frac{1}{2}$　　（B）$k_{PT}=\frac{k}{2}$　　（C）$k_{PT}\cdot k_{QT}=\frac{1}{4}$　　（D）$k_{PQ}^2+k_{QT}^2$ 的最小值为 1