第 2 节 抛物线定义与几何性质综合问题（★★★）

强化训练

1.（2022 • 合肥模拟 • ★★）已知抛物线 $C: y^2 = 4\sqrt{3}x$ 的焦点为 F，准线为 l，过抛物线上一点 P 作准线的垂线，垂足为 Q，若 $\angle PFQ = 60^\circ$，则 $|PF| =$（　　）

（A）$4\sqrt{3}$　　（B）$2\sqrt{3}$　　（C）$\sqrt{3}$　　（D）6

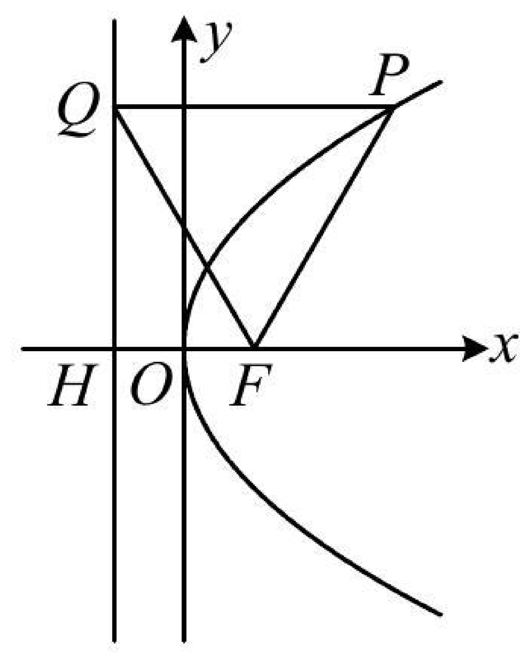
答案：A

解析：如图，抛物线 C 的焦点为 $F(\sqrt{3},0)$，准线为 $l: x = -\sqrt{3}$，记 l 与 x 轴交于点 H，则 $|FH| = 2\sqrt{3}$，

由抛物线定义，$|PQ| = |PF|$，又 $\angle PFQ = 60^\circ$，所以 ΔPFQ 为正三角形，

于是只需到 ΔHFQ 中求出 $|QF|$，即可得到 $|PF|$，因为 $\angle PQF = 60^\circ$，所以 $\angle HQF = 30^\circ$，

故 $|QF| = \dfrac{|FH|}{\sin\angle HQF} = \dfrac{2\sqrt{3}}{\sin 30^\circ} = 4\sqrt{3}$，结合 ΔPFQ 为正三角形可得 $|PF| = 4\sqrt{3}$.



2.（2022 •岳阳模拟 •★★★）过抛物线 $C: y^2 = 2px(p>0)$ 的焦点 F 且斜率 $k>0$ 直线与 C 交于 A，B 两点，A 在第一象限，过 A 作准线的垂线，垂足为 H，若 $\angle HFB$ 被 x 轴平分，则 $k =$_____.

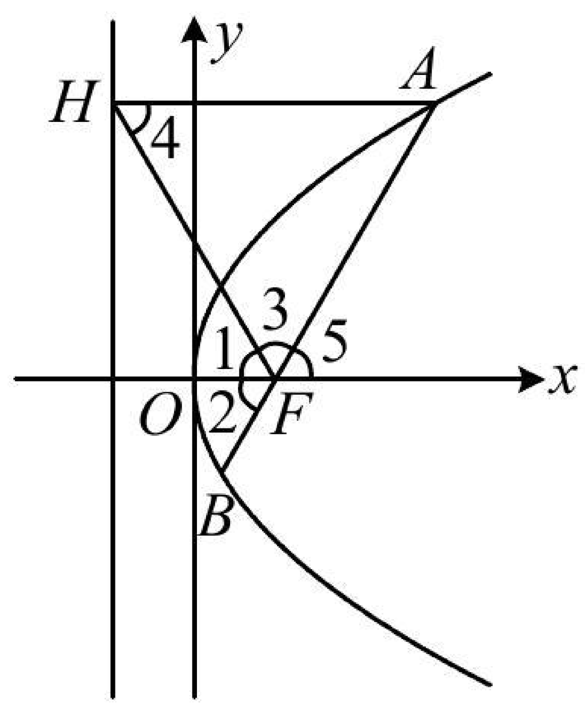
答案：$\sqrt{3}$

解析：要求直线 AB 的斜率，可尝试通过分析几何关系找倾斜角，

如图，因为 $\angle HFB$ 被 x 轴平分，所以 $\angle 1 = \angle 2$，又由抛物线定义，$|AH| = |AF|$，所以 $\angle 3 = \angle 4$，

因为 $AH // x$ 轴，所以 $\angle 1 = \angle 4$，故 $\angle 1 = \angle 2 = \angle 3 = \angle 4$，又 $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 180^\circ$，所以 $\angle 2 = 60^\circ$，

由图可知 $\angle 5 = \angle 2$，所以 $\angle 5 = 60^\circ$，故直线 AB 的斜率 $k = \tan 60^\circ = \sqrt{3}$.



3.（2022 • 汕头模拟 • ★★★）已知抛物线$C:y^2=6x$的焦点为F，A为C上一点且在第一象限，以F为圆心，FA为半径的圆与抛物线C的准线交于M，N两点，且A，F，M三点共线，则$|AF|=$_____.

答案：6

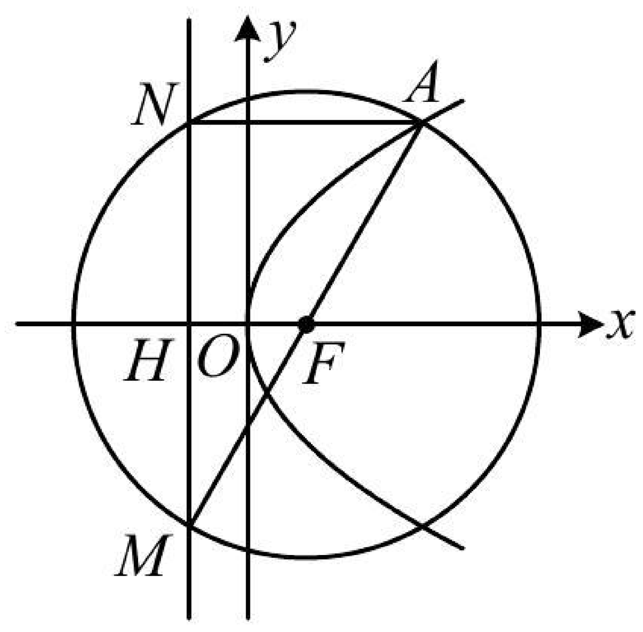
解析：如图，因为A，F，M三点共线，所以AM是圆的直径，

由直径可联想到圆心为中点、圆周角为直角，故F是AM中点，且$AN\perp MN$ ①，

设准线与x轴交于点H，则$FH\perp MN$，结合①可得$FH/\!/AN$，故$|AN|=2|FH|$，

由题意，抛物线的焦点为$F(\frac{3}{2},0)$，准线为$x=-\frac{3}{2}$，所以$|FH|=3$，故$|AN|=6$，

结合抛物线定义可得$|AF|=|AN|=6$.



4.（2022 • 北京模拟 • ★★★）已知抛物线C的焦点为F，准线为l，过F的直线m与C交于点A和B，点A在l上的投影为D，若$|AB|=|BD|$，则$\frac{|AB|}{|AF|}=$（　　）

（A）$\frac{3}{2}$　　（B）2　　（C）$\frac{5}{2}$　　（D）3

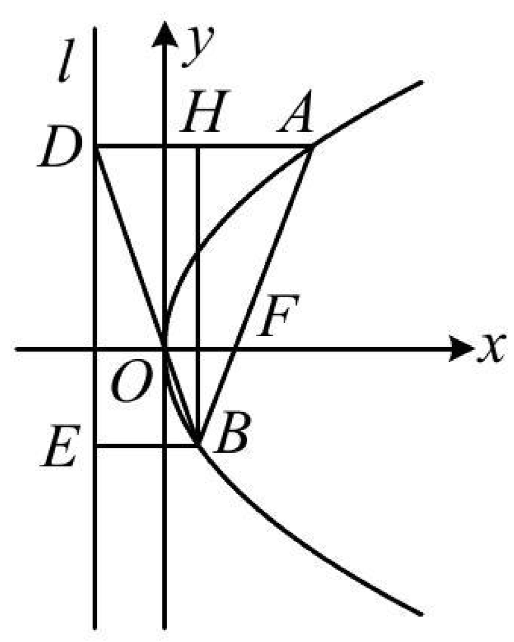
答案：A

解析：如图，作$BE\perp$准线于E，由抛物线定义，$\begin{cases}|BF|=|BE|\\|AF|=|AD|\end{cases}$，所以$\frac{|AB|}{|AF|}=\frac{|AF|+|BF|}{|AF|}=\frac{|AD|+|BE|}{|AD|}$ ①，

故接下来应寻找$|AD|$和$|BE|$的关系，条件中有$|AB|=|BD|$，想到取底边中点，

取AD中点H，连接BH，则$BH\perp AD$，所以$|BE|=|DH|=|AH|$，故$|AD|=2|BE|$，

代入①可得$\frac{|AB|}{|AF|}=\frac{2|BE|+|BE|}{2|BE|}=\frac{3}{2}$.



5.（2022 • 开平模拟 • ★★★）已知抛物线$C:y^2=16x$的焦点为F，M是C上一点，FM的延长线交y轴于点N，若$3\overrightarrow{FM}=2\overrightarrow{MN}$，则$|FN|=$_____.

答案：16

解析： 给出 $3\overrightarrow{FM}=2\overrightarrow{MN}$，可设 FM 的长，并用它表示其它线段的长，

抛物线的准线为 $x=-4$，焦点为 $F(4,0)$，如图，作 $MM'\perp$ 准线于 M'，交 y 轴于点 G，

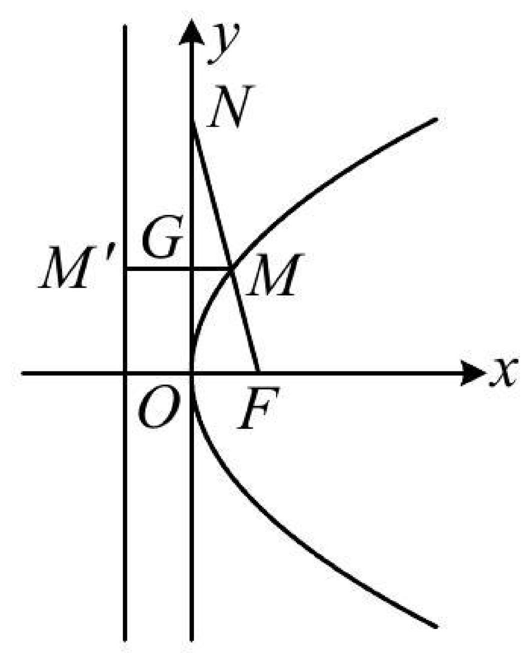
设 $|FM|=2m$，因为 $3\overrightarrow{FM}=2\overrightarrow{MN}$，所以 $\dfrac{|FM|}{|MN|}=\dfrac{2}{3}$，故 $|MN|=3m$，$|FN|=5m$ ①，

由抛物线定义，$|MM'|=|FM|=2m$，$|MG|=|MM'|-|M'G|=2m-4$，

从图形来看，可用相似比来建立关于 m 的方程，

因为 $GM /\!/ OF$，所以 $\dfrac{|GM|}{|OF|}=\dfrac{|MN|}{|FN|}$，

从而 $\dfrac{2m-4}{4}=\dfrac{3m}{5m}$，故 $m=\dfrac{16}{5}$，代入①得 $|FN|=16$.



6．（2022 • 河南模拟 • ★★★）过抛物线 $y^2=2px(p>0)$ 的焦点 F 的直线交抛物线于 A，B 两点，交其准线于点 C，若点 F 是 AC 的中点，且 $|AF|=4$，则 $|AB|=$_____.

答案： $\dfrac{16}{3}$

解析： 如图，已知 $|AF|$，只需求得 $|BF|$ 即可求出 $|AB|$，可先过 A，B 向准线作垂线，

作 $AA'\perp$ 准线于 A'，$BB'\perp$ 准线于 B'，则 $|AA'|=|AF|=4$，$|BB'|=|BF|$，

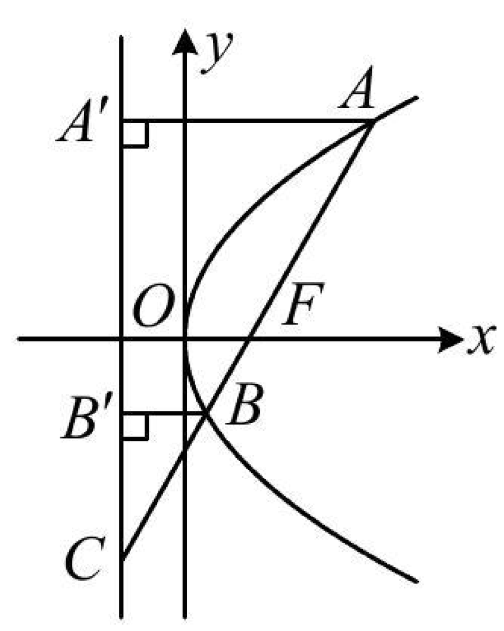
接下来我们可以设一段长，利用几何关系来分析其它有关线段的长，

设 $|BB'|=|BF|=m$，因为 F 是 AC 中点，所以 $|AC|=2|AF|=2|AA'|$，从而 $\cos\angle CAA'=\dfrac{|AA'|}{|AC|}=\dfrac{1}{2}$，

故 $\angle CAA'=60^\circ$，又 $BB' /\!/ AA'$，所以 $\angle CBB'=60^\circ$，故 $|BC|=\dfrac{|BB'|}{\cos\angle CBB'}=2m$，

所以 $|CF|=3m$，$|AC|=2|CF|=6m$，又 $|AC|=2|AF|=8$，所以 $6m=8$，故 $m=\dfrac{4}{3}$，即 $|BF|=\dfrac{4}{3}$，

所以 $|AB|=|AF|+|BF|=4+\dfrac{4}{3}=\dfrac{16}{3}$.



7.（2022·巫山模拟·★★★）抛物线$E:y^2=4x$的焦点为F，过F的直线与E交于A，B两点，延长FB交E的准线l于点C，过A，B作l的垂线，垂足分别为M，N，若$|BC|=2|BN|$，则ΔAFM的面积为（　　）

（A）$4\sqrt{3}$　　（B）4　　（C）$2\sqrt{3}$　　（D）2

答案：A

解析：如图，我们可以设AF和BF的长，结合定义求其它线段的长，再分析几何关系建立方程，

设$|AF|=m$，$|BF|=n$，则$|AM|=m$，$|BN|=n$，

因为$|BC|=2|BN|$，所以$|BC|=2n$，$|FC|=3n$，且$\cos\angle NBC=\frac{|BN|}{|BC|}=\frac{1}{2}$，故$\angle NBC=\frac{\pi}{3}$，

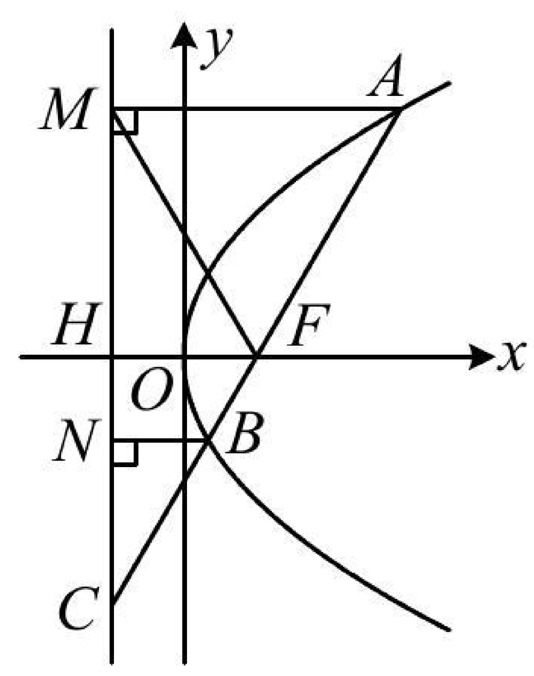
又$AM/\!/BN$，所以$\angle MAC=\frac{\pi}{3}$，从而$\cos\angle MAC=\frac{|AM|}{|AC|}=\frac{m}{m+3n}=\frac{1}{2}$，故$m=3n$，

找到m和n的关系，就能分析F在AC上的位置，结合$|FH|$是已知的，可由相似比求得$|AM|$，

由题意，抛物线的焦点为$F(1,0)$，准线为$l:x=-1$，所以$|FH|=2$，

由$m=3n$知$|AF|=|FC|$，所以F为AC中点，又$FH/\!/AM$，所以$|AM|=2|FH|=4$，

由$\angle MAC=\frac{\pi}{3}$和$|AM|=|AF|$知ΔAFM是正三角形，所以$S_{\Delta AFM}=\frac{1}{2}\times4\times4\times\sin\frac{\pi}{3}=4\sqrt{3}$.



8.（2022·齐齐哈尔模拟·★★★★）已知抛物线$C:y^2=2px(p>0)$的准线$x=-1$与x轴交于点A，F为C的焦点，B是C上第一象限内的一点，则当$\frac{|BF|}{|AB|}$取得最小值时，ΔABF的面积为（　　）

（A）2　　（B）3　　（C）4　　（D）6

答案：A

解析：抛物线的准线为$x=-1\Rightarrow p=2\Rightarrow$抛物线的方程为$y^2=4x$，其焦点为$F(1,0)$，$A(-1,0)$，

如图1，直接分析$\frac{|BF|}{|AB|}$的最小值不易，涉及$|BF|$，可用定义转化为P到准线的距离来看，

作$BD\perp$准线于D，则$|BF|=|BD|$，所以$\frac{|BF|}{|AB|}=\frac{|BD|}{|AB|}=\sin\angle BAD$，

要使$\sin\angle BAD$最小，只需$\angle BAD$最小，此时直线AB与抛物线相切，如图2. 可联立直线和抛物线用$\Delta=0$求解，

设切线AB的方程为$x=my-1$，联立$\begin{cases}x=my-1\\y^2=4x\end{cases}$消去$x$整理得：$y^2-4my+4=0$ ①，

因为直线 AB 与抛物线相切，所以方程①的判别式 $\Delta=(-4m)^2-4\times1\times4=0$，解得：$m=\pm1$，

代入①解得：$y=\pm2$，所以 $y_B=\pm2$，故 $S_{\Delta ABF}=\frac{1}{2}|AF|\cdot|y_B|=\frac{1}{2}\times2\times2=2$.

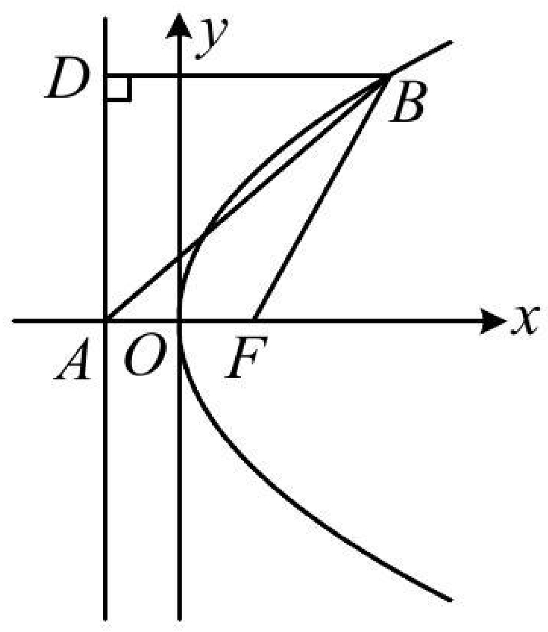


图1

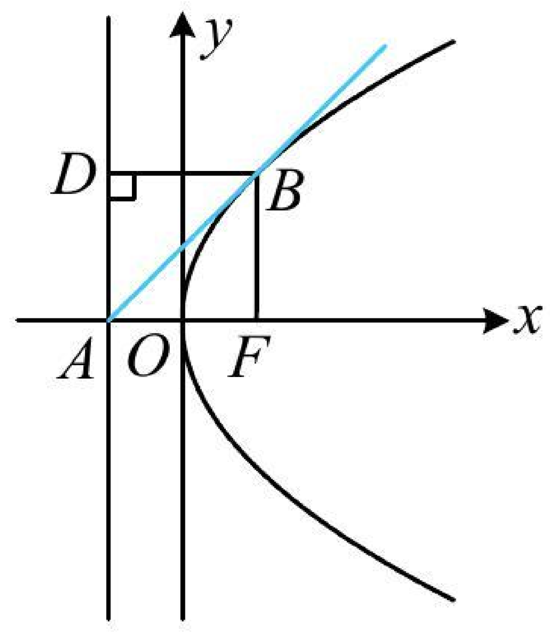


图2

9．（2022•昆明模拟•★★★★）已知抛物线 $C:y^2=2px(p>0)$ 的焦点为 F，第一象限的 A，B 两点在抛物线上，且 $FA\perp AB$，$|AF|=7$，$|BF|=25$，若直线 AB 的倾斜角为 θ，则 $\cos\theta=$_____.

答案： $\frac{3}{4}$

解法 1： 涉及 $|AF|$ 和 $|BF|$，考虑抛物线的定义，如图，作 $AA'\perp$ 准线于 A'，$BB'\perp$ 准线于 B'，

则 $|AA'|=|AF|=7$，$|BB'|=|BF|=25$，因为 $FA\perp AB$，所以 $|AB|=\sqrt{|BF|^2-|AF|^2}=\sqrt{25^2-7^2}=24$，

由图可知直线 AB 的倾斜角 $\theta=\angle ABB'$，于是构造一个直角三角形来求 $\angle ABB'$，

作 $AH\perp BB'$ 于 H，则 $|BH|=|BB'|-|B'H|=|BB'|-|AA'|=18$，所以 $\cos\angle ABH=\frac{|BH|}{|AB|}=\frac{3}{4}$，故 $\cos\theta=\frac{3}{4}$.

解法 2： 题干的条件也可用 A 和 B 的坐标来翻译，于是设坐标，

设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，则 $\begin{cases}|AF|=x_1+\frac{p}{2}=7 & ①\\ |BF|=x_2+\frac{p}{2}=25 & ②\end{cases}$，

又 $FA\perp AB$，所以 $|AB|=\sqrt{|BF|^2-|AF|^2}=\sqrt{25^2-7^2}=24$，故 $\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}=24$ ③，

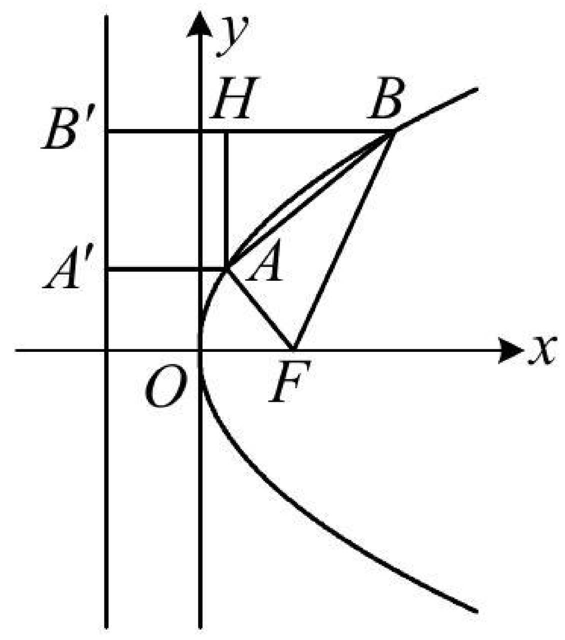
观察发现用①②作差可求得 x_2-x_1，代入③又可求出 y_2-y_1，故可先算 AB 的斜率 $\tan\theta$，再求 $\cos\theta$，

由②－①可得：$x_2-x_1=18$，代入③可得 $(y_2-y_1)^2=252$，

如图，由 $|BF|>|AF|$ 及 A、B 都在第一象限知 $y_2>y_1$，所以 $y_2-y_1=6\sqrt{7}$，

故 $\tan\theta=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{6\sqrt{7}}{18}=\frac{\sqrt{7}}{3}$，即 $\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{\sqrt{7}}{3}$，结合 $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ 可解得 $\cos\theta=\pm\frac{3}{4}$，

由图可知直线 AB 的倾斜角 θ 为锐角，故 $\cos\theta=\frac{3}{4}$.



10．（2022 • 湖北模拟 • ★★★★）已知抛物线 C 的焦点为 F，点 A，B 在抛物线上，以 AB 为直径的圆过点 F，过线段 AB 的中点 P 作 C 的准线的垂线，垂足为 Q，则 $\dfrac{|PQ|}{|AB|}$ 的最大值为（　　）

（A）$\dfrac{1}{2}$　　（B）$\dfrac{\sqrt{3}}{3}$　　（C）$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　　（D）1

答案：C

解析：如图，因为以 AB 为直径的圆过 F，所以 $FA\perp FB$，故 $|AB|=\sqrt{|AF|^2+|BF|^2}$，

而结合抛物线定义，$|PQ|$ 也可用 $|AF|$ 和 $|BF|$ 表示，所以把它们设为变量，分析 $\dfrac{|PQ|}{|AB|}$ 的最大值，

作 $PQ\perp$ 抛物线的准线于 Q，$AA'\perp$ 准线于 A'，$BB'\perp$ 准线于 B'，

设 $|AF|=m$，$|BF|=n$，则 $|AA'|=m$，$|BB'|=n$，$|PQ|=\dfrac{|AA'|+|BB'|}{2}=\dfrac{m+n}{2}$，$|AB|=\sqrt{m^2+n^2}$，

所以 $\dfrac{|PQ|}{|AB|}=\dfrac{m+n}{2\sqrt{m^2+n^2}}=\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{(m+n)^2}{m^2+n^2}}=\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{m^2+n^2+2mn}{m^2+n^2}}=\dfrac{1}{2}\sqrt{1+\dfrac{2mn}{m^2+n^2}}\le\dfrac{1}{2}\sqrt{1+\dfrac{2mn}{2mn}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，

当且仅当 $m=n$ 时取等号，故 $\dfrac{|PQ|}{|AB|}$ 的最大值为 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.