第 5 节 圆中最值问题（★★★）

内容提要

圆中的最值问题一般有两种处理方法：几何法、代数法.

1．几何法：五个基本模型（下述 r 均为圆 C 的半径）

①模型 1：如图 1，M 为圆 C 外一定点，P 为圆 C 上的动点，则 $|MC|-r\le|PM|\le|MC|+r$，当 P 分别位于图中 P_1 和 P_2 处时，左右两边分别取等号.

②模型 2：如图 2，M 为圆 C 内一定点，P 为圆 C 上的动点，则 $\begin{cases}|PM|+|CM|\ge|PC|\\|PM|-|CM|\le|PC|\end{cases}$，所以 $\begin{cases}|PM|\ge|PC|-|CM|=r-|CM|\\|PM|\le|PC|+|CM|=r+|CM|\end{cases}$，故 $r-|CM|\le|PM|\le r+|CM|$，当 P 分别位于图中 P_1 和 P_2 处时，左右两边分别取等号.

③模型 3：如图 3，设直线 l 与圆 C 相离，圆心 C 到直线 l 的距离为 d，则圆上动点 P 到直线 l 的距离的取值范围为 $[d-r,d+r]$，其中 $d-r$ 和 $d+r$ 分别在图中的 P_1、P_2 处取得.

④模型 4：如图 4，设直线 l 与圆 C 相交，圆心 C 到直线 l 的距离为 d，则圆上动点 P 到直线 l 的距离的最大值在 P_0 处取得，且最大值为 $d+r$.

⑤模型 5：如图 5，过圆 C 内一定点 P 作圆的弦，则最长的弦为圆的直径，那最短的弦呢？我们知道弦长 $L=2\sqrt{r^2-d^2}$，所以要使 L 最小，则需 d 最大，此时的弦应与 PC 垂直，如图中的 AB，因为若弦不与 PC 垂直，如图中的 $A'B'$，则圆心到弦 $A'B'$ 的距离 d 是图中阴影三角形的一条直角边，必定小于斜边 PC，而对于弦 AB，圆心 C 到它的距离即为 $|PC|$，所以当弦垂直于 PC 时，d 最大，弦长 L 最小.

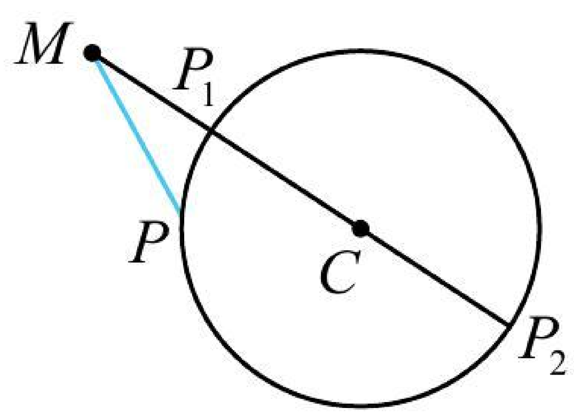


图1

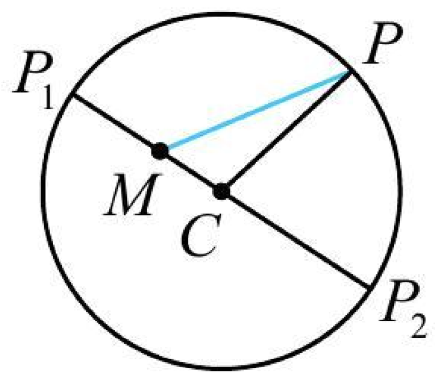


图2

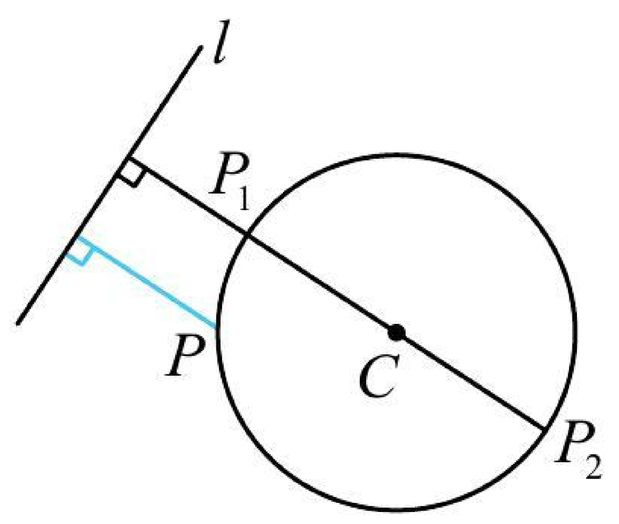


图3

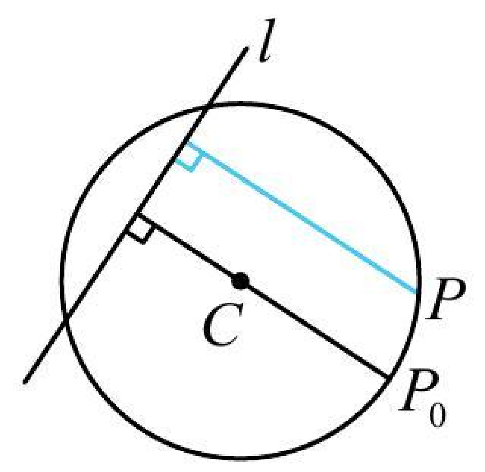


图4

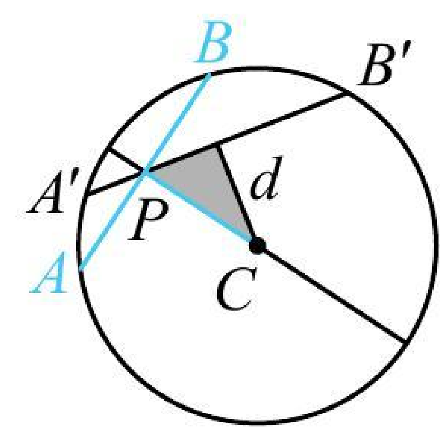
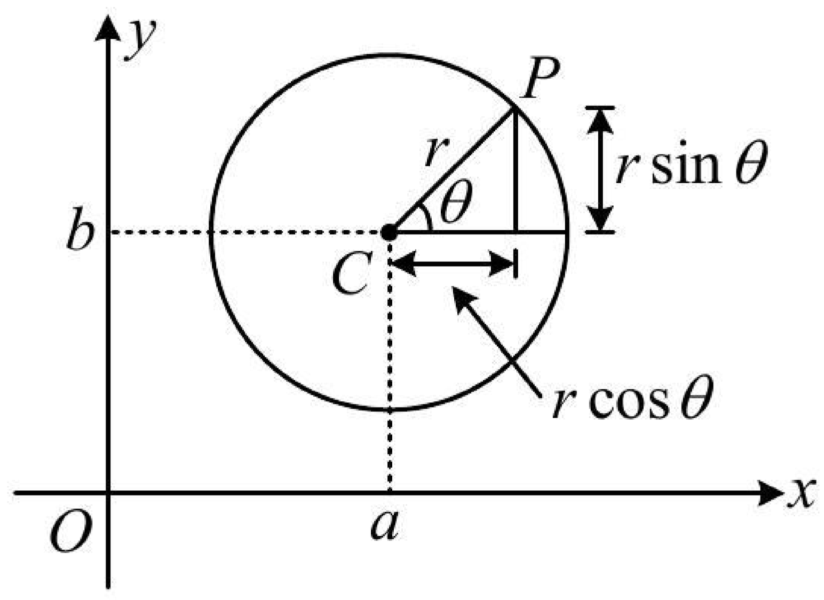


图5

2．代数法：设圆 $C:(x-a)^2+(y-b)^2=r^2(r>0)$，可将其方程变形成 $(\frac{x-a}{r})^2+(\frac{y-b}{r})^2=1$，在三角函数那部分，我们知道 $\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$，所以可据此进行三角换元，令 $\begin{cases}\dfrac{x-a}{r}=\cos\theta\\\dfrac{y-b}{r}=\sin\theta\end{cases}$，从而 $\begin{cases}x=a+r\cos\theta\\y=b+r\sin\theta\end{cases}$，故对于圆 C 上的动点 P，可将其坐标设为 $(a+r\cos\theta,b+r\sin\theta)$（这种设法中 θ 的几何意义可参考下图），将求最值的目标表示成关于 θ 的三角函数，借助三角函数求最值.



典型例题

类型Ⅰ：圆上动点与定点距离的最值问题

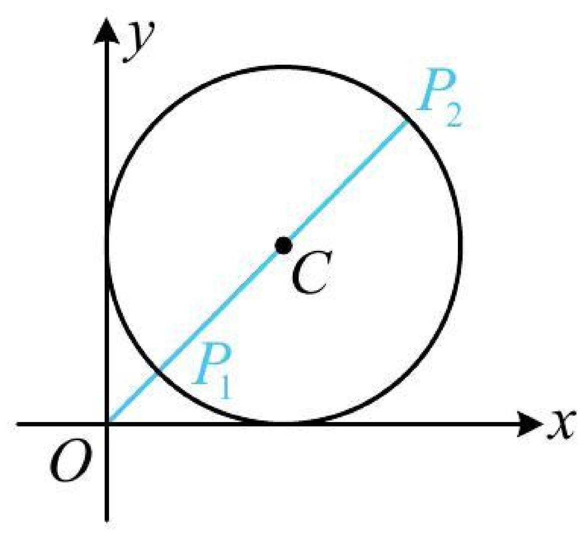
【例 1】设 P 为圆 $C:(x-1)^2+(y-1)^2=1$ 上的动点，O 为原点，则 $|OP|$ 的取值范围为_____.

解析：如图，原点 O 在圆 C 外，属内容提要中的模型 1，

$|OP|$ 的最小值在 P_1 处取得，最大值在 P_2 处取得，由题意，$C(1,1)$，圆 C 的半径 $r=1$，

所以 $|OC|=\sqrt{2}$，从而 $|OP_1|=|OC|-r=\sqrt{2}-1$，$|OP_2|=|OC|+r=\sqrt{2}+1$，故 $|OP|\in[\sqrt{2}-1,\sqrt{2}+1]$.

答案：$[\sqrt{2}-1,\sqrt{2}+1]$



【变式】（2020・北京卷）已知半径为 1 的圆经过点 $(3,4)$，则其圆心到原点的距离的最小值为（　　）

（A）4　（B）5　（C）6　（D）7

解析：本题圆心是动点，先求出圆心的运动轨迹，设圆心为 $P(x,y)$，记 $Q(3,4)$，

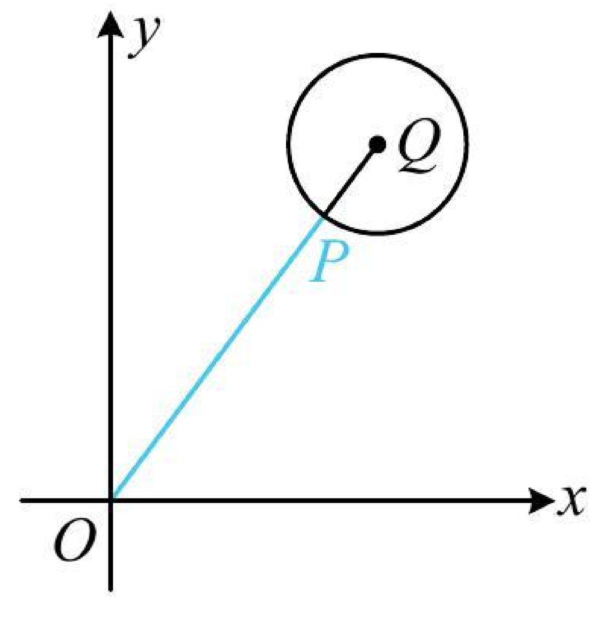
由题意，$|PQ|=\sqrt{(x-3)^2+(y-4)^2}=1$，所以 $(x-3)^2+(y-4)^2=1$，

故圆心可在以 $Q(3,4)$ 为圆心，1 为半径的圆上运动，

原点在该圆外，属内容提要中的模型 1，$|OP|$ 最小的情形如图所示，

因为 $|OQ|=\sqrt{3^2+4^2}=5$，所以圆心 P 到原点距离的最小值为 $|OQ|-1=4$.

答案：A



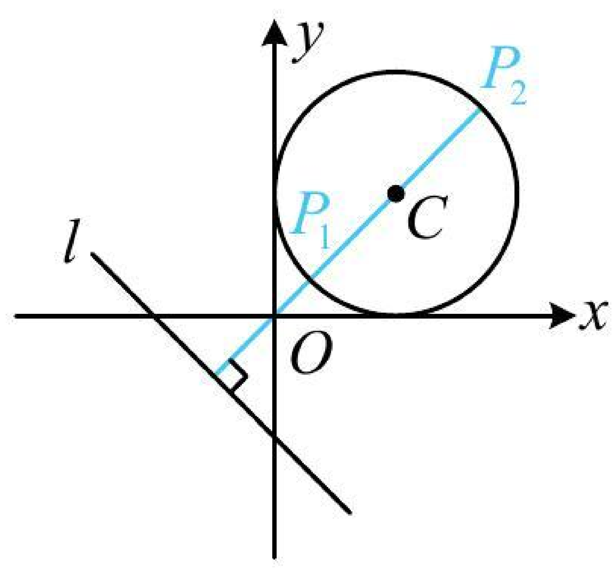
类型Ⅱ：圆上动点与直线的距离最值问题

【例 2】若 P 为圆 $C:(x-1)^2+(y-1)^2=1$ 上的动点，则点 P 到直线 $l:x+y+1=0$ 的距离的取值范围为_____.

解析：如图，直线 l 与圆 C 相离，属内容提要中的模型 3，P 到 l 距离最小、最大的情形如图中 P_1、P_2，

圆心 $C(1,1)$ 到直线 l 的距离 $d=\dfrac{|1+1+1|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$，所以点 P 到直线 l 的距离的取值范围为 $[\dfrac{3\sqrt{2}}{2}-1,\dfrac{3\sqrt{2}}{2}+1]$.

答案：$[\dfrac{3\sqrt{2}}{2}-1,\dfrac{3\sqrt{2}}{2}+1]$



【变式 1】（2018 •新课标III卷）直线 $x+y+2=0$ 分别与 x 轴、y 轴交于 A、B 两点，点 P 在圆 $(x-2)^2+y^2=2$ 上，则 ΔABP 的面积的取值范围是（　　）

（A）$[2,6]$　　（B）$[4,8]$　　（C）$[\sqrt{2},3\sqrt{2}]$　　（D）$[2\sqrt{2},3\sqrt{2}]$

解析：在 $x+y+2=0$ 中令 $x=0$ 得 $y=-2$，令 $y=0$ 得 $x=-2$，所以 $A(-2,0)$，$B(0,-2)$，故 $|AB|=2\sqrt{2}$，

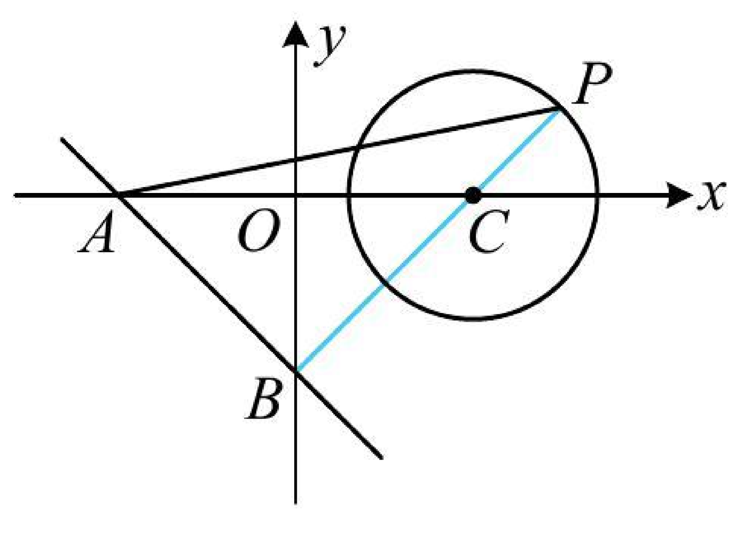
记 ΔABP 的 AB 边上的高为 h，则 $S_{\Delta ABP}=\dfrac{1}{2}|AB|\cdot h=\sqrt{2}h$，

下面先分析 h 的范围，如图，直线 AB 与圆 C 相离，属内容提要中的模型 3，

圆心 $C(2,0)$ 到直线 AB 的距离 $d=\dfrac{|2+2|}{\sqrt{1^2+1^2}}=2\sqrt{2}$，当 P 在圆 C 上运动时，

有 $d-r\le h\le d+r$，所以 $\sqrt{2}\le h\le 3\sqrt{2}$，故 $2\le S_{\Delta ABP}=\sqrt{2}h\le 6$.

答案：A



【反思】本题也可设点 P 的坐标为 $(2+\sqrt{2}\cos\theta,\sqrt{2}\sin\theta)$，用三角的方法来求 h 的取值范围，不妨试试.

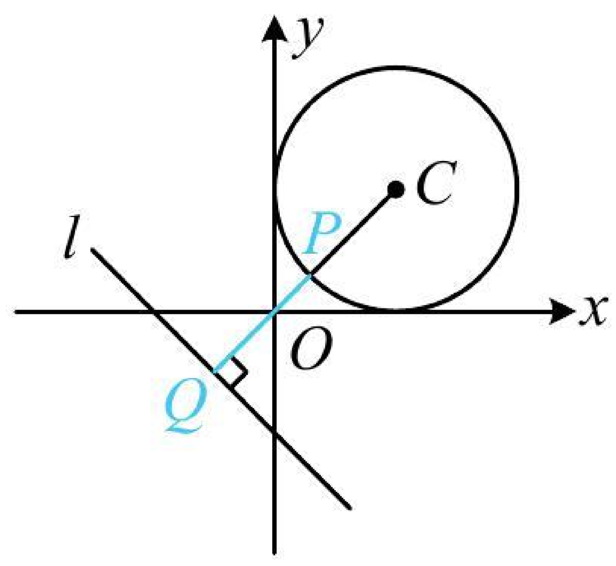
【变式 2】设 P 为圆 $C:(x-1)^2+(y-1)^2=1$ 上的动点，Q 为直线 $l:x+y+1=0$ 上的动点，则 $|PQ|$ 的最小值为_____.

解析：如图，对于圆 C 上任意的点 P，Q 在 l 上运动，总有当 $PQ\perp l$ 时，$|PQ|$ 最小，

所以问题等价于求点 P 到直线 l 距离的最小值，直线 l 与圆 C 相离，可按内容提要中的模型 3 处理，

圆心 $C(1,1)$ 到直线 l 的距离 $d=\dfrac{|1+1+1|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}\Rightarrow|PQ|_{\min}=d-r=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}-1$.

答案： $\dfrac{3\sqrt{2}}{2}-1$



【变式 3】设点 P 是函数 $y=-\sqrt{4-(x-1)^2}$ 图象上任意一点，点 $Q(2a,a-3)(a\in\mathbf{R})$，则 $|PQ|$ 的最小值为（　　）

（A）$\dfrac{8\sqrt{5}}{5}-2$　　（B）$\sqrt{5}$　　（C）$\sqrt{5}-2$　　（D）$\dfrac{7\sqrt{5}}{5}-2$

解析： 直接代两点间距离公式较复杂，于是画图来看，所给函数解析式有根号，先平方去根号，

$y=-\sqrt{4-(x-1)^2}\Rightarrow y^2=4-(x-1)^2\Rightarrow(x-1)^2+y^2=4(y\le 0)$，所以点 P 在如图所示的半圆 C 上运动，

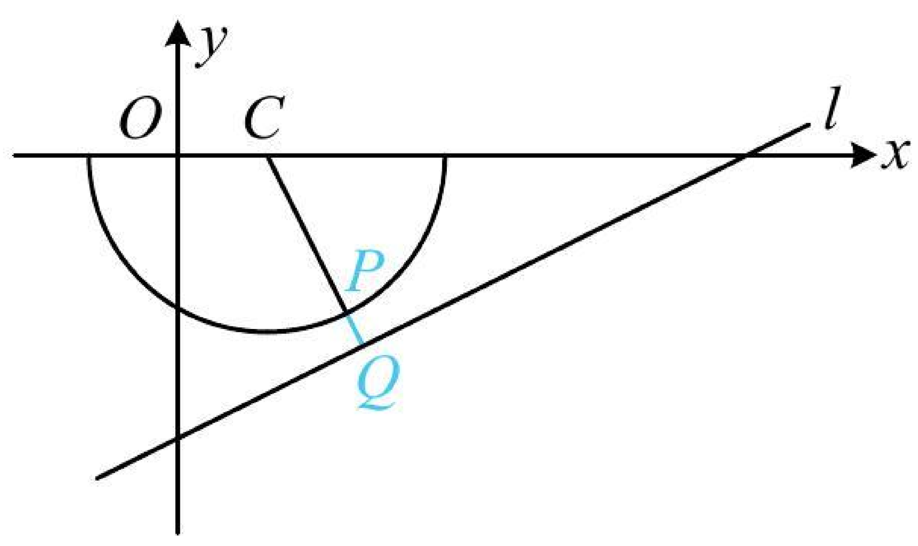
点 Q 的坐标含参，是动点，先消去参数看看点 Q 的运动轨迹，设 $Q(x,y)$，则 $\begin{cases}x=2a & ①\\ y=a-3 & ②\end{cases}$，

由②得 $a=y+3$，代入①整理得：$x-2y-6=0$，所以 Q 是直线 $l:x-2y-6=0$ 上的动点，

对半圆上任意的点 P，Q 在 l 上运动，总有当 $PQ\perp l$ 时，$|PQ|$ 最小，故可按内容提要的模型 3 处理，

如图，点 $C(1,0)$ 到直线 l 的距离 $d=\dfrac{|1-6|}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}$，所以 $|PQ|_{\min}=\sqrt{5}-2$.

答案： C



【反思】当点 P 的坐标含参时，例如 $P(f(a),g(a))$，则可设 $P(x,y)$，由 $\begin{cases}x=f(a)\\ y=g(a)\end{cases}$ 消去参数 a 得到关于 x 和 y 的方程，从而找到点 P 的运动轨迹.

类型Ⅲ：圆内过定点的弦长最值

【例 3】（2020 •新课标Ⅰ卷）设圆 $x^2+y^2-6x=0$，过点 $(1,2)$ 的直线被该圆截得的弦的长度的最小值为（　　）

（A）1　　（B）2　　（C）3　　（D）4

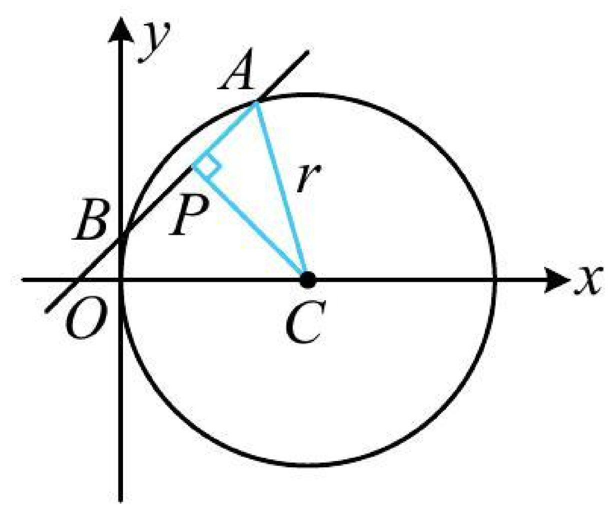
解析： $x^2+y^2-6x=0\Rightarrow(x-3)^2+y^2=9$，所以圆心为 $C(3,0)$，半径 $r=3$，

记 $P(1,2)$，过点 P 的弦为 AB，因为 $1^2+2^2-6\times1=-1<0$，所以点 P 在圆 C 内，

故可按内容提要中的模型 5 处理，如图，当弦 $AB\perp PC$ 时，$|AB|$ 最小，

因为 $|PC|=\sqrt{(1-3)^2+(2-0)^2}=2\sqrt{2}$，所以 $|AB|_{\min}=2\sqrt{r^2-|PC|^2}=2$.

答案：B



【变式】若直线 $l:kx+y-k=0$ 与圆 $C:x^2+y^2-4x-2y-3=0$ 交于 A、B 两点，则 ΔABC 的面积的最大值为（　　）

（A）4　（B）8　（C）$2\sqrt{3}$　（D）$4\sqrt{3}$

解析： $x^2+y^2-4x-2y-3=0\Rightarrow(x-2)^2+(y-1)^2=8$，所以圆心为 $C(2,1)$，半径 $r=2\sqrt{2}$，

直线 l 含参，先看看是否过定点，$kx+y-k=0\Rightarrow k(x-1)+y=0\Rightarrow$ 直线 l 过定点 $P(1,0)$，

如图，可用 $|AB|$ 和点 C 到直线 AB 的距离 d 求 ΔABC 的面积，而 $|AB|$ 与 d 有关，故面积可用 d 表示，

因为 $|AB|=2\sqrt{r^2-d^2}=2\sqrt{8-d^2}$，所以 $S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}|AB|\cdot d=\frac{1}{2}\times2\sqrt{8-d^2}\cdot d=\sqrt{(8-d^2)d^2}$ ①，

于是得先求 d 的范围，d 的最小值显然为 0，最大值呢，根据内容提要模型 5，应在 $AB\perp PC$ 时取得，

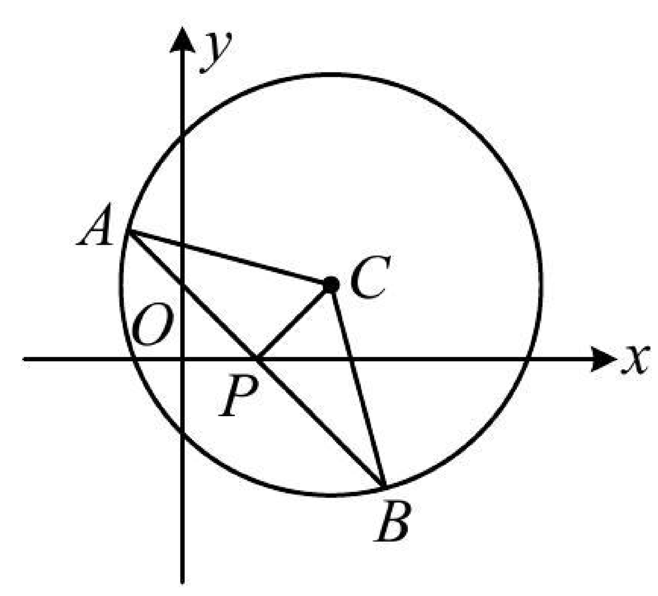
因为 $d_{\max}=|PC|=\sqrt{(2-1)^2+(1-0)^2}=\sqrt{2}$，所以 $d\in[0,\sqrt{2}]$，

从式①来看，只需把 d^2 换元成 t，就可将根号内化为二次函数求区间最值，

令 $t=d^2$，则 $S_{\Delta ABC}=\sqrt{(8-t)t}=\sqrt{16-(t-4)^2}$，且 $t\in[0,2]$，函数 $\varphi(t)=16-(t-4)^2(0\le t\le2)$ 在 $[0,2]$ 上 $\nearrow$，

所以 $\varphi(t)_{\max}=\varphi(2)=12$，故 $(S_{\Delta ABC})_{\max}=2\sqrt{3}$.

答案：C



【反思】圆中涉及弦长、面积等相关的范围问题都可以考虑转化成圆心到直线的距离 d 的范围来处理.

类型Ⅳ：三角换元求最值

【例 4】已知圆 $O:x^2+y^2=4$，点 $P(x,y)$ 是圆 O 上一点.

（1）$x-y$ 的取值范围是_____；（2）$|x+\sqrt{3}y-5|$ 的最小值是_____.

解析：（1）点 P 在圆 O 上运动，可将 P 的坐标设为三角形式，转化为三角函数求最值或范围，

设 $\begin{cases}x=2\cos\theta\\ y=2\sin\theta\end{cases}$，则 $x-y=2\cos\theta-2\sin\theta=2\sqrt{2}\cos(\theta+\frac{\pi}{4})$，由 $-1\le\cos(\theta+\frac{\pi}{4})\le 1$ 得 $-2\sqrt{2}\le x-y\le 2\sqrt{2}$.

（2）由（1）可得 $|x+\sqrt{3}y-5|=|2\cos\theta+2\sqrt{3}\sin\theta-5|=\left|4\sin(\theta+\frac{\pi}{6})-5\right|=5-4\sin(\theta+\frac{\pi}{6})$，

因为 $-1\le\sin(\theta+\frac{\pi}{6})\le 1$，所以当 $\sin(\theta+\frac{\pi}{6})=1$ 时，$|x+\sqrt{3}y-5|$ 取得最小值 1.

答案：（1）$[-2\sqrt{2},2\sqrt{2}]$；（2）1

【反思】涉及圆上动点的最值问题，可考虑用三角换元将求最值的目标表示成关于 θ 的三角函数来分析.

强化训练

1．（★★）已知 O 为原点，P 为圆 $C:(x-1)^2+(y-b)^2=1(b>0)$ 上的动点，若 $|OP|$ 的最大值为 3，则 b 的值为（　　）

（A）1　（B）$\sqrt{2}$　（C）$\sqrt{3}$　（D）2

2．（2022 • 西安模拟 • ★★）已知半径为 2 的圆过点 $(5,12)$，则其圆心到原点的距离的最小值为（　　）

（A）10　（B）11　（C）12　（D）13

3．（2022 • 西安模拟 • ★★）圆 $C:x^2+y^2-4x-4y-10=0$ 上的点 P 到直线 $l:x+y-14=0$ 的最大距离与最小距离之和为（　　）

（A）30　（B）18　（C）$10\sqrt{2}$　（D）$5\sqrt{2}$

4．（2022 • 大通三模 • ★★★）已知点 M、N 分别在圆 $C:(x-3)^2+(y-1)^2=4$ 和直线 $l:4x-3y+t=0$ 上运动，若 $|MN|$ 的最小值为 7，则 t 的值为（　　）

（A）36　（B）37　（C）-45　（D）-54 或 36

5．（2022 • 天津模拟 • ★★★）设曲线$C: x=\sqrt{1-(y-1)^2}$上的点 P 到直线$l: x-y-2=0$的距离的最大值为 a，最小值为 b，则$a-b$的值为（　　）

（A）$\sqrt{2}$　（B）$2-\frac{\sqrt{2}}{2}$　（C）2　（D）$\frac{\sqrt{2}}{2}+1$

6．（★★★）已知 P 为圆$O: x^2+y^2=2$上的动点，点$A(m,m-3)(m\in \mathbf{R})$，则$|PA|$的最小值为（　　）

（A）1　（B）2　（C）$\frac{\sqrt{2}}{2}$　$x-y-3=0$（D）$\frac{3\sqrt{2}}{2}$

7．（2022 • 昆明模拟 • ★★★）在圆$M: x^2+y^2-4x+2y-4=0$内，过点$O(0,0)$的最长弦和最短弦分别是 AC 和 BD，则四边形 $ABCD$ 的面积为（　　）

（A）24　（B）12　（C）10　（D）8

8．（2021 • 北京卷 • ★★★）已知直线$y=kx+m$（m 为常数）与圆$x^2+y^2=4$交于 M，N，当 k 变化时，若$|MN|$的最小值为 2，则$m=$（　　）

（A）± 1　（B）$\pm\sqrt{2}$　（C）$\pm\sqrt{3}$　（D）± 2

9．（2022 • 北京模拟 • ★★★）已知直线$l: ax+by=1$，若 l 上有且仅有一点 P，使得以 P 为圆心，1 为半径的圆过原点 O，则$a-b$的最大值为（　　）

（A）$\sqrt{2}$　（B）$2\sqrt{2}$　（C）2　（D）1