第 3 节 双曲线渐近线相关问题（★★★）

强化训练

1．（2022·南京模拟·★★）已知双曲线 $C:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的两条渐近线的夹角为 $\dfrac{\pi}{3}$，则此双曲线的离心率为_____.

答案：$\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$ 或 2

解析： 双曲线的渐近线为 $y=\pm\dfrac{b}{a}x$，它们的夹角为 $\dfrac{\pi}{3}$ 有如图 1 和图 2 所示的两种情况，下面分别考虑，

若为图 1，则 $\theta=\dfrac{\pi}{6}$，所以 $\dfrac{b}{a}=\tan\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，从而 $a=\sqrt{3}b$，故 $a^2=3b^2=3c^2-3a^2$，

整理得：$\dfrac{c^2}{a^2}=\dfrac{4}{3}$，所以离心率 $e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$；

若为图 2，则 $\theta=\dfrac{\pi}{3}$，所以 $\dfrac{b}{a}=\tan\dfrac{\pi}{3}=\sqrt{3}$，从而 $b=\sqrt{3}a$，故 $b^2=c^2-a^2=3a^2$，

《一数•高考数学核心方法》

整理得：$\dfrac{c^2}{a^2}=4$，所以离心率 $e=\dfrac{c}{a}=2$.

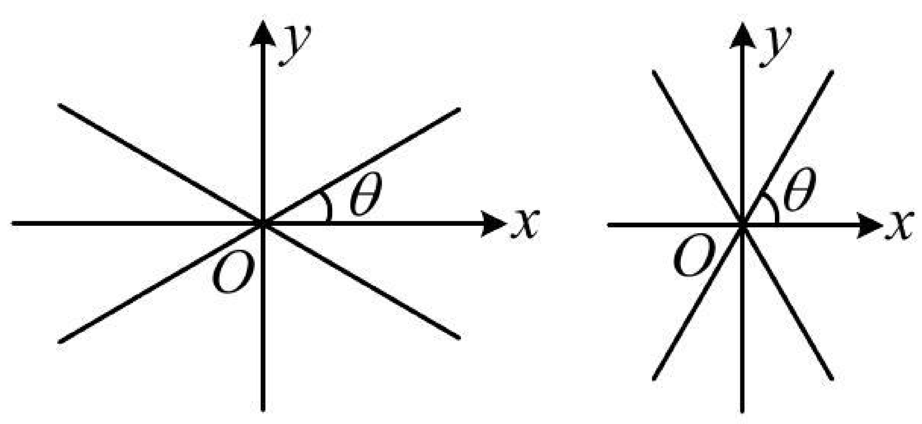


图1　　图2

【反思】两相交直线的夹角指的是它们形成的两对对顶角中较小的那一对.

2．（2022·南京模拟·★★）椭圆 $C_1:\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$ 与双曲线 $C_2:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的离心率之积为 1，则 C_2 的两条渐近线的倾斜角分别为（　　）

（A）$\dfrac{\pi}{6}$，$-\dfrac{\pi}{6}$　　（B）$\dfrac{\pi}{3}$，$-\dfrac{\pi}{3}$　　（C）$\dfrac{\pi}{6}$，$\dfrac{5\pi}{6}$　　（D）$\dfrac{\pi}{3}$，$\dfrac{2\pi}{3}$

答案：D

解析： 先求渐近线斜率，可通过离心率之积为 1 来寻找 a 和 b 的关系，

椭圆 C_1 的离心率 $e_1=\dfrac{\sqrt{4-3}}{2}=\dfrac{1}{2}$，双曲线 C_2 的离心率 $e_2=\dfrac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}$，由题意，$e_1e_2=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}=1$，

化简得：$\dfrac{b}{a}=\sqrt{3}$，所以 C_2 的渐近线斜率分别为 $\sqrt{3}$ 和 $-\sqrt{3}$，故其倾斜角分别为 $\dfrac{\pi}{3}$，$\dfrac{2\pi}{3}$.

3.（★★）已知直线$l: y=kx+m$和双曲线$C:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$，则“$k<-\dfrac{b}{a}$或$k>\dfrac{b}{a}$”是“直线 l 与双曲线 C 在同支有两个交点”的（　）

（A）充分不必要条件　（B）必要不充分条件　（C）充要条件　（D）既不充分也不必要条件

答案：B

解析：分析直线与双曲线的交点，可用渐近线来看，

先看充分性，如图 1 所示的直线 l 满足 $k>\dfrac{b}{a}$，但 l 与 C 没有交点，故充分性不成立；

再看必要性，如图 2，在 C 上任取一点 P，设 P 为 l 与 C 的一个交点，过 P 作渐近线的平行线l_1和l_2，由图可知要使直线 l 与 C 在同支有另一交点，则 l 只能在从l_1绕点 P 逆时针旋转至l_2的范围内扫动，

其斜率 k 必在$(-\infty,-\dfrac{b}{a})\cup(\dfrac{b}{a},+\infty)$上，所以必要性成立，故选 B.

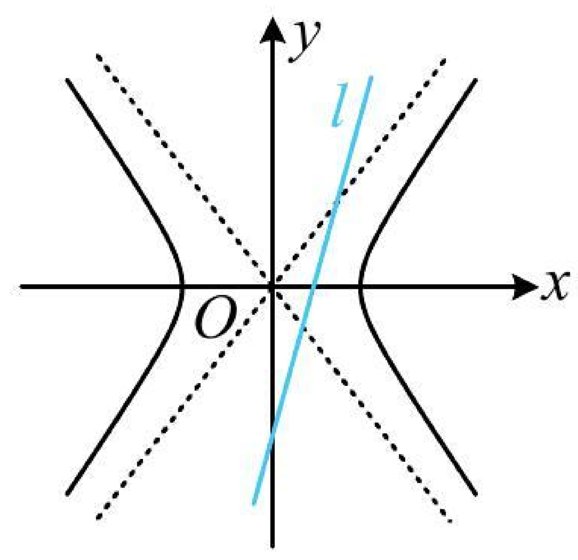


图1

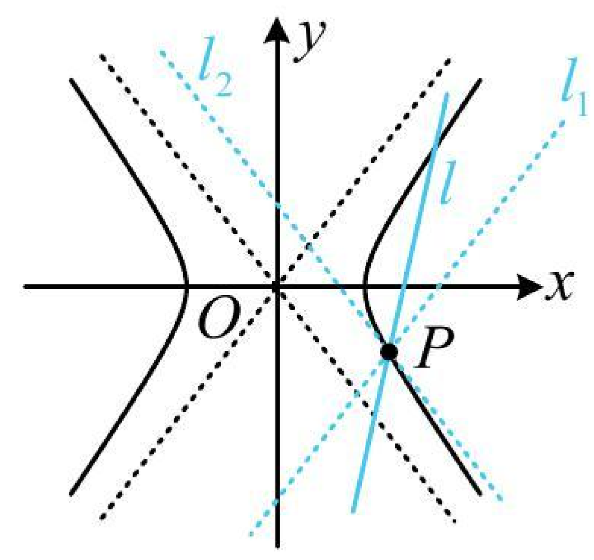


图2

4.（2020・新课标Ⅱ卷・★★★）设 O 为坐标原点，直线$x=a$与双曲线$C:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的两条渐近线分别交于 D，E 两点，若 ΔODE 的面积为 8，则 C 的焦距的最小值为（　）

（A）4　（B）8　（C）16　（D）32

答案：B

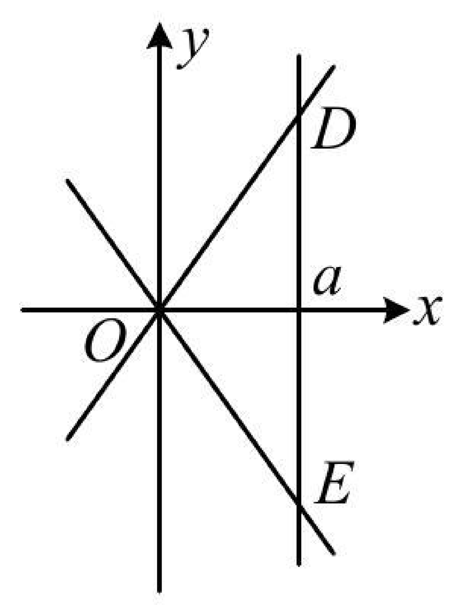
解析：由题意，双曲线 C 的焦距$2c=2\sqrt{a^2+b^2}$　①，

要求最值，得先找 a，b 的关系，给了$S_{\Delta ODE}$，如图，可通过联立方程求 D，E 坐标来算底边$|DE|$，高即为 a，

联立$\begin{cases}x=a\\ y=\pm\dfrac{b}{a}x\end{cases}$解得：$y=\pm b$，所以$|DE|=2b$，$S_{\Delta ODE}=\dfrac{1}{2}|DE|\cdot a=ab$，由题意，$S_{\Delta ODE}=8$，故$ab=8$，

在此条件下求①的最小值，可用不等式$a^2+b^2\ge 2ab$，

由①可得$2c=2\sqrt{a^2+b^2}\ge 2\sqrt{2ab}=8$，当且仅当$a=b=2\sqrt{2}$时取等号，所以焦距的最小值为 8.



5．（2022 • 天津卷 • ★★）已知抛物线 $y^2=4\sqrt{5}x$，F_1，F_2 分别是双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的左、右焦点，抛物线的准线过双曲线的左焦点 F_1，与双曲线的一条渐近线交于点 A，若 $\angle F_1F_2A=\dfrac{\pi}{4}$，则双曲线的标准方程为（　　）

（A）$\dfrac{x^2}{10}-y^2=1$　　（B）$x^2-\dfrac{y^2}{16}=1$　　（C）$x^2-\dfrac{y^2}{4}=1$　　（D）$\dfrac{x^2}{4}-y^2=1$

答案：C

解析：抛物线的准线 $x=-\sqrt{5}$ 过双曲线的左焦点 $F_1\Rightarrow$ 双曲线的半焦距 $c=\sqrt{5}\Rightarrow a^2+b^2=5$ ①，

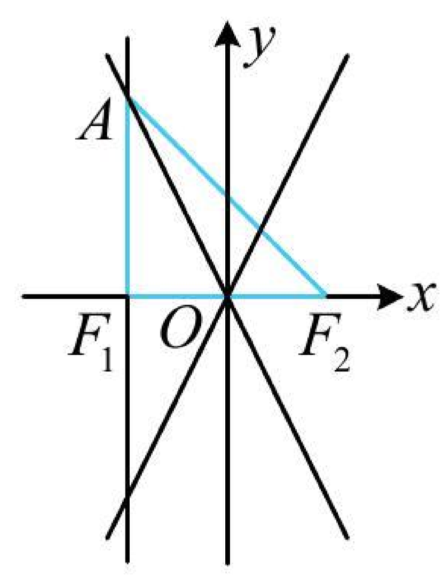
还差一个方程即可求出 a，b，可再翻译 $\angle F_1F_2A=\dfrac{\pi}{4}$ 这个条件，翻译成 $|AF_1|=|F_1F_2|$ 较简单，故算 $|AF_1|$，

如图，$\angle F_1F_2A=\dfrac{\pi}{4}\Rightarrow \Delta AF_1F_2$ 是等腰直角三角形，所以 $|AF_1|=|F_1F_2|=2\sqrt{5}$，故 $A(-\sqrt{5},2\sqrt{5})$，

点 A 在渐近线 $y=-\dfrac{b}{a}x$ 上，所以 $2\sqrt{5}=-\dfrac{b}{a}\cdot(-\sqrt{5})$ ②，

联立①②解得：$\begin{cases}a=1\\b=2\end{cases}$，故双曲线的方程为 $x^2-\dfrac{y^2}{4}=1$.

《一数•高考数学核心方法》



6．（2018 • 天津卷 • ★★★）已知双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的离心率为 2，过右焦点且垂直于 x 轴的直线与双曲线交于 A，B 两点. 设 A，B 到双曲线的同一条渐近线的距离分别为 d_1 和 d_2，且 $d_1+d_2=6$，则双曲线的方程为（　　）

（A）$\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{12}=1$　　（B）$\dfrac{x^2}{12}-\dfrac{y^2}{4}=1$　　（C）$\dfrac{x^2}{3}-\dfrac{y^2}{9}=1$　　（D）$\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{3}=1$

答案：C

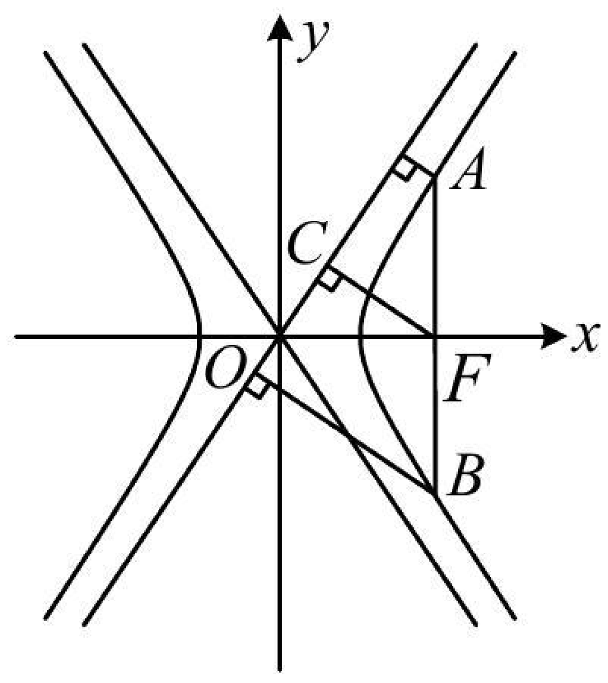
解析：如图，若能注意到 F 为 AB 中点，则可利用梯形的中位线将已知条件转化为 F 到渐近线的距离，注意到 ΔOFC 是特征三角形，所以 $|FC|$ 可快速求出，

由对称性，AB 中点为右焦点 F，$d_1+d_2=6\Rightarrow F$ 到渐近线的距离为 3，

而双曲线焦点到渐近线的距离为 b，所以 $b=3$，

又 $e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}=\dfrac{\sqrt{a^2+9}}{a}=2$，所以 $a=\sqrt{3}$，

故双曲线 C 的方程为 $\dfrac{x^2}{3}-\dfrac{y^2}{9}=1$.



7.（★★★）双曲线$C:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的右焦点为$F$，过$F$作一条渐近线的垂线$l$，垂足为$M$，若$l$与另一条渐近线的交点是$N$，且$\overrightarrow{MN}=5\overrightarrow{MF}$，则$C$的离心率为_____.

答案：$\dfrac{2\sqrt{10}}{5}$

解法1：如图，ΔMOF是C的特征三角形，先结合角平分线性质定理和$\overrightarrow{MN}=5\overrightarrow{MF}$求其它线段的长，

由题意，$|MF|=b$，$|OM|=a$，因为$\overrightarrow{MN}=5\overrightarrow{MF}$，所以$|MN|=5b$，$|FN|=4b$，

由渐近线的对称性，OF是$\angle MON$的平分线，所以$\dfrac{|OM|}{|ON|}=\dfrac{|MF|}{|FN|}=\dfrac{1}{4}$，故$|ON|=4|OM|=4a$，

接下来可利用$OM\perp MN$，由勾股定理建立方程求离心率，

在ΔMON中，$|OM|^2+|MN|^2=|ON|^2$，所以$a^2+25b^2=16a^2$，整理得：$3a^2=5b^2$，

所以$3a^2=5c^2-5a^2$，从而$\dfrac{c^2}{a^2}=\dfrac{8}{5}$，故离心率$e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{2\sqrt{10}}{5}$.

解法2：由题意，$|MF|=b$，$|OM|=a$，因为$\overrightarrow{MN}=5\overrightarrow{MF}$，所以$|MN|=5b$，

接下来也可抓住$\angle MON=2\angle MOF$，利用二倍角公式来建立方程求离心率，

记$\angle MOF=\theta$，则$\angle MON=2\theta$，由图可知$\tan\theta=\dfrac{|MF|}{|OM|}=\dfrac{b}{a}$，$\tan 2\theta=\dfrac{|MN|}{|OM|}=\dfrac{5b}{a}$，

因为$\tan 2\theta=\dfrac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$，所以$\dfrac{5b}{a}=\dfrac{2\cdot\frac{b}{a}}{1-\frac{b^2}{a^2}}$，整理得：$3a^2=5b^2$，所以$3a^2=5c^2-5a^2$，

整理得：$\dfrac{c^2}{a^2}=\dfrac{8}{5}$，故离心率$e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{2\sqrt{10}}{5}$.

解法3：由$MN\perp$一条渐近线可写出直线MN的方程，与两渐近线联立求M、N的坐标，将$\overrightarrow{MN}=5\overrightarrow{MF}$翻译成坐标关系建立方程求离心率，

如图，$F(c,0)$，渐近线OM、ON的方程分别为$y=\dfrac{b}{a}x$，$y=-\dfrac{b}{a}x$，

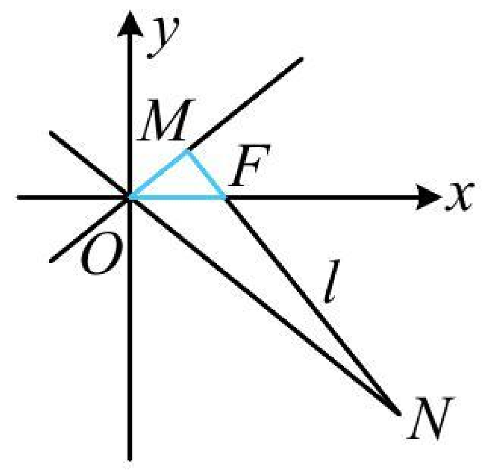
因为$l\perp OM$，所以l的方程为$y=-\dfrac{a}{b}(x-c)$，联立$\begin{cases} y=-\dfrac{a}{b}(x-c) \\ y=\dfrac{b}{a}x \end{cases}$解得：$y=\dfrac{ab}{c}$，即$y_M=\dfrac{ab}{c}$ ①，

联立$\begin{cases} y=-\dfrac{a}{b}(x-c) \\ y=-\dfrac{b}{a}x \end{cases}$解得：$y=-\dfrac{abc}{a^2-b^2}$，即 $y_N=-\dfrac{abc}{a^2-b^2}$ ②，

因为$\overrightarrow{MN}=5\overrightarrow{MF}$，所以$\overrightarrow{FN}=4\overrightarrow{MF}$，而$\overrightarrow{FN}=(x_N-c,y_N)$，$\overrightarrow{MF}=(c-x_M,-y_M)$，所以$y_N=-4y_M$ ③，

将①②代入③可得$-\dfrac{abc}{a^2-b^2}=-4\cdot\dfrac{ab}{c}$，整理得：$c^2=4a^2-4b^2$，所以$c^2=4a^2-4(c^2-a^2)$，

从而$5c^2=8a^2$，故$\dfrac{c^2}{a^2}=\dfrac{8}{5}$，所以离心率$e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{2\sqrt{10}}{5}$.



【反思】在双曲线的渐近线有关问题中，利用渐近线与其它直线或曲线联立求交点，往往计算量较大，可作为次选方案，首选分析几何关系求解.

8.（2022•珠海模拟•★★★）已知双曲线$C:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的左、右焦点分别为$F_1$，$F_2$，点$A$在$C$的过第二、四象限的渐近线$l$上，且$AF_2\perp l$，若$|BF_2|-|BF_1|=2a$，$\overrightarrow{F_2B}+2\overrightarrow{BA}=\vec{0}$，则$C$的离心率为（　　）

（A）$\sqrt{2}$　　（B）$\sqrt{5}$　　（C）$\sqrt{6}$　　（D）$2\sqrt{2}$

《一数•高考数学核心方法》

答案：B

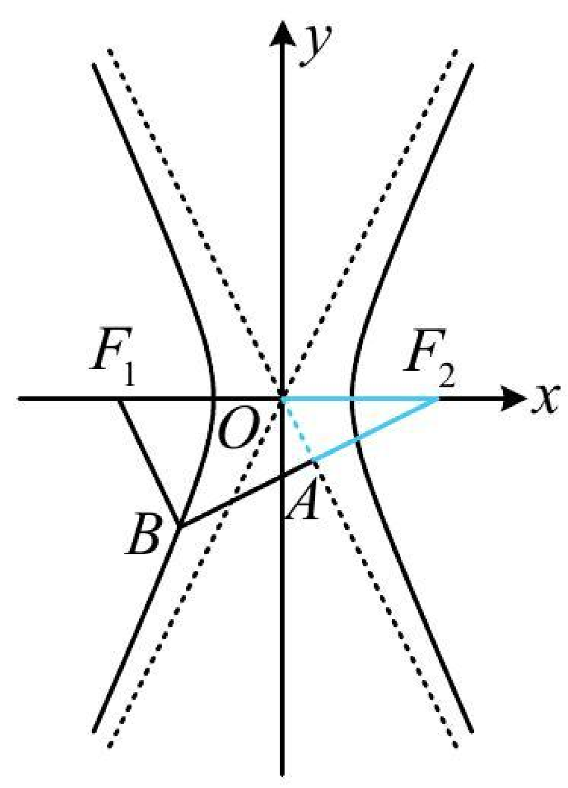
解析：由$\overrightarrow{F_2B}+2\overrightarrow{BA}=\vec{0}$可得$\overrightarrow{BF_2}=2\overrightarrow{BA}$，所以$A$为$BF_2$中点，

如图，ΔAOF_2是C的一个特征三角形，结合A为中点，可构造中位线，计算$|BF_1|$和$|BF_2|$，

在ΔAOF_2中，$|AF_2|=b$，$|OA|=a$，因为O是F_1F_2的中点，所以$|BF_1|=2|OA|=2a$，$|BF_2|=2|AF_2|=2b$，

代入题干的$|BF_2|-|BF_1|=2a$可得$2b-2a=2a$，所以$b=2a$，故$b^2=c^2-a^2=4a^2$，

整理得：$\dfrac{c^2}{a^2}=5$，所以C的离心率$e=\dfrac{c}{a}=\sqrt{5}$.



9.（2022•南昌模拟•★★★）双曲线$C:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的左、右焦点分别为$F_1$，$F_2$，在$C$的渐近线上存在一点$M$，使$\angle OMF_2=90°$，且$M$在第一象限，若$|MF_1|=3|MF_2|$，则$C$的离心率为______.

答案：$\dfrac{\sqrt{6}}{2}$

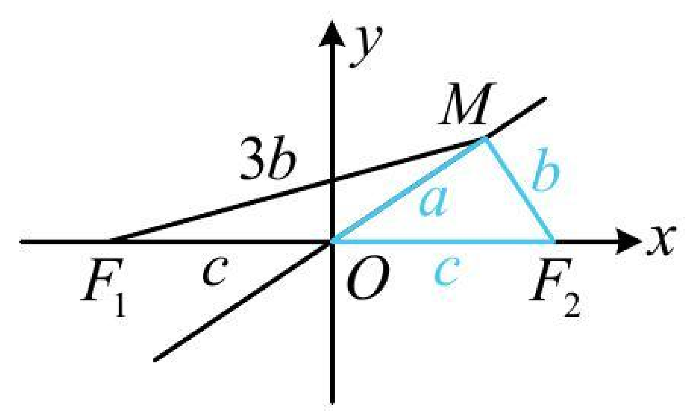
解析：如图，ΔMOF_2 是 C 的特征三角形，可由它的三边结合已知条件计算 $|MF_1|$，每边都用 a，b，c 表示后，可用双余弦法构造方程求离心率，

由题意，$|OM|=a$，$|MF_2|=b$，$|MF_1|=3|MF_2|=3b$，$|OF_1|=|OF_2|=c$，

由图可知 $\cos\angle MOF_2=\dfrac{|OM|}{|OF_2|}=\dfrac{a}{c}$，$\cos\angle MOF_1=\dfrac{|OM|^2+|OF_1|^2-|MF_1|^2}{2|OM|\cdot|OF_1|}=\dfrac{a^2+c^2-9b^2}{2ac}$，

因为 $\angle MOF_2=\pi-\angle MOF_1$，所以 $\cos\angle MOF_2=\cos(\pi-\angle MOF_1)=-\cos\angle MOF_1$，故 $\dfrac{a}{c}=-\dfrac{a^2+c^2-9b^2}{2ac}$，

整理得：$3a^2+c^2-9b^2=0$，所以 $3a^2+c^2-9(c^2-a^2)=0$，从而 $\dfrac{c^2}{a^2}=\dfrac{3}{2}$，故离心率 $e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$.



10．（2022•新安模拟•★★★）已知双曲线 $C:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的一条渐近线与圆 $A:(x-a)^2+y^2=b^2$ 交于 P，Q 两点，O 为原点，若 Q 为 OP 中点，则 C 的离心率为（　　）

（A）$\sqrt{2}$　　（B）$\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$　　（C）$\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$　　（D）$\sqrt{3}$

《一数•高考数学核心方法》

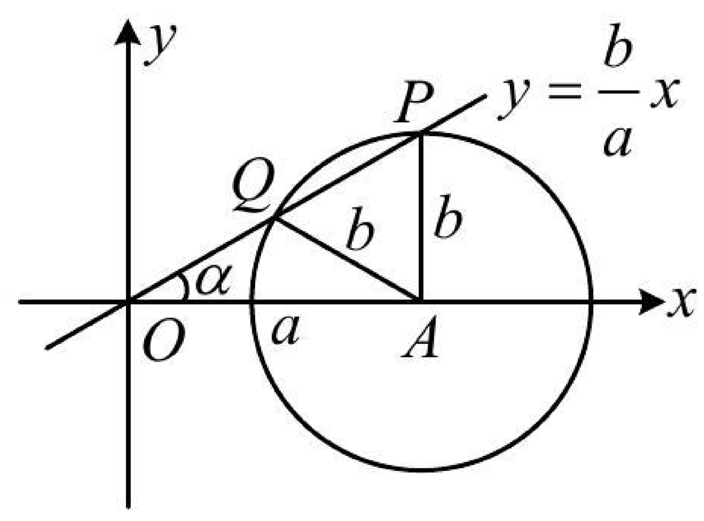
答案：C

解析：先画出图形，尝试通过分析图形的几何特征来建立方程求离心率，

如图，$|AP|=|AQ|=b$，$|OA|=a$，注意到 $\tan\angle POA=\dfrac{b}{a}=\dfrac{|PA|}{|OA|}$，结合图形可得 $PA\perp OA$，

又 Q 为 OP 的中点，所以 $|OP|=2|AQ|=2b$，接下来只需在 ΔPOA 中用勾股定理即可建立方程求离心率，

由 $|OA|^2+|PA|^2=|OP|^2$ 可得 $a^2+b^2=4b^2$，所以 $a^2=3b^2=3c^2-3a^2$，从而 $\dfrac{c^2}{a^2}=\dfrac{4}{3}$，故离心率 $e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.



11．（2022•赣州模拟•★★★★）设直线 $y=2x+t(t\neq 0)$ 与双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的两条渐近线交于 A，B 两点，若点 $P(4t,0)$ 满足 $|PA|=|PB|$，则该双曲线的渐近线的方程是（　　）

（A）$y=\pm 3x$　　（B）$y=\pm\sqrt{3}x$　　（C）$y=\pm\dfrac{1}{3}x$　　（D）$y=\pm\dfrac{1}{9}x$

答案：A

解析：如何翻译$|PA|=|PB|$？直接计算长度较麻烦，故设中点，用中线与底边垂直来翻译，

设A，B中点为Q，则$PQ\perp AB$，垂直可用斜率之积等于-1来翻译，故联立直线方程求交点A，B坐标，

如图，双曲线的渐近线为$y=\pm\dfrac{b}{a}x$，

联立$\begin{cases}y=2x+t\\ y=\dfrac{b}{a}x\end{cases}$解得：$\begin{cases}x=\dfrac{at}{b-2a}\\ y=\dfrac{bt}{b-2a}\end{cases}$，所以$A(\dfrac{at}{b-2a},\dfrac{bt}{b-2a})$，

联立$\begin{cases}y=2x+t\\ y=-\dfrac{b}{a}x\end{cases}$解得：$\begin{cases}x=-\dfrac{at}{b+2a}\\ y=\dfrac{bt}{b+2a}\end{cases}$，所以$B(-\dfrac{at}{b+2a},\dfrac{bt}{b+2a})$，故$AB$中点为$Q(\dfrac{2a^2t}{b^2-4a^2},\dfrac{b^2t}{b^2-4a^2})$，

因为$|PA|=|PB|$，所以$k_{PQ}\cdot k_{AB}=-1$，故$\dfrac{\dfrac{b^2t}{b^2-4a^2}-0}{\dfrac{2a^2t}{b^2-4a^2}-4t}\times 2=-1$，

整理得：$b^2=9a^2$，所以$\dfrac{b}{a}=3$，故渐近线为$y=\pm 3x$.

《一数•高考数学核心方法》