第 2 节 椭圆的焦点三角形相关问题（★★★）

强化训练

1.（2023 • 全国甲卷 • ★★）设 F_1，F_2 为椭圆 $C:\dfrac{x^2}{5}+y^2=1$ 的两个焦点，点 P 在 C 上，若 $\overrightarrow{PF_1}\cdot\overrightarrow{PF_2}=0$，则 $|PF_1|\cdot|PF_2|=$（　　）

（A）1　（B）2　（C）4　（D）5

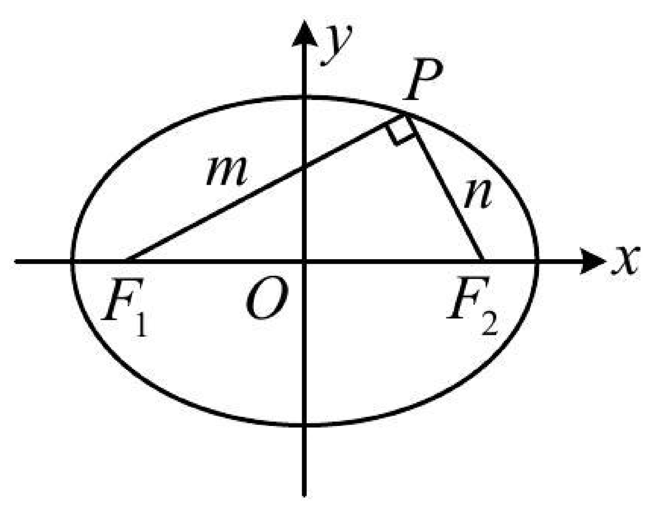
答案：B

解析：涉及 PF_1 和 PF_2，想到椭圆定义，由题意，$a=\sqrt{5}$，$b=1$，$c=\sqrt{a^2-b^2}=2$，$|F_1F_2|=2c=4$，

设 $|PF_1|=m$，$|PF_2|=n$，因为 $\overrightarrow{PF_1}\cdot\overrightarrow{PF_2}=0$，所以 $PF_1\perp PF_2$，结合椭圆定义可得 $\begin{cases}m+n=2a=2\sqrt{5} & ①\\ m^2+n^2=|F_1F_2|^2=16 & ②\end{cases}$，

怎样由①②求 mn？我们发现配方即可，

由②可得 $(m+n)^2-2mn=16$，将①代入可求得 $mn=2$.



2.（2023 • 全国模拟 • ★★）设 F_1，F_2 分别为椭圆 $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$ 的左、右焦点，点 P 在椭圆上，若线段 PF_1 的中点 M 在 y 轴上，则 $\dfrac{|PF_2|}{|PF_1|}$ 的值为（　　）

（A）$\dfrac{5}{13}$　（B）$\dfrac{4}{5}$　（C）$\dfrac{2}{7}$　（D）$\dfrac{4}{9}$

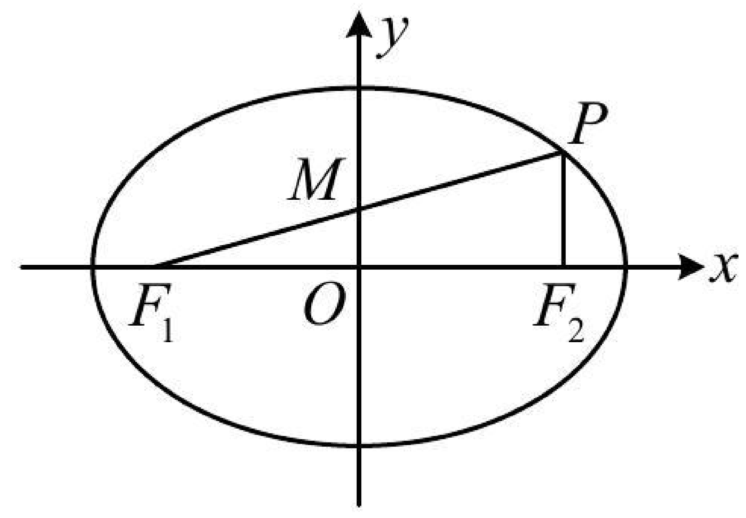
答案：C

解析：条件涉及中点，先看看有没有中位线，如图，PF_1 的中点 M 在 y 轴上，O 为 F_1F_2 的中点，

所以 $OM/\!/PF_2$，因为 $OM\perp x$ 轴，所以 $PF_2\perp x$ 轴，

我们发现 $|PF_2|$ 是半通径长，可代公式计算，$|PF_1|$ 可由椭圆定义来算，

$|PF_2|=\dfrac{b^2}{a}=\dfrac{4}{3}$，又 $|PF_1|+|PF_2|=2a=6$，所以 $|PF_1|=6-|PF_2|=\dfrac{14}{3}$，故 $\dfrac{|PF_2|}{|PF_1|}=\dfrac{2}{7}$.



3．（2022•江西模拟•★★★）设椭圆$C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的左、右焦点分别为$F_1$、$F_2$，点$M$、$N$在$C$上，且$M$、$N$关于原点$O$对称，若$|MN|=|F_1F_2|$，$|NF_2|=3|MF_2|$，则椭圆$C$的离心率为_____.

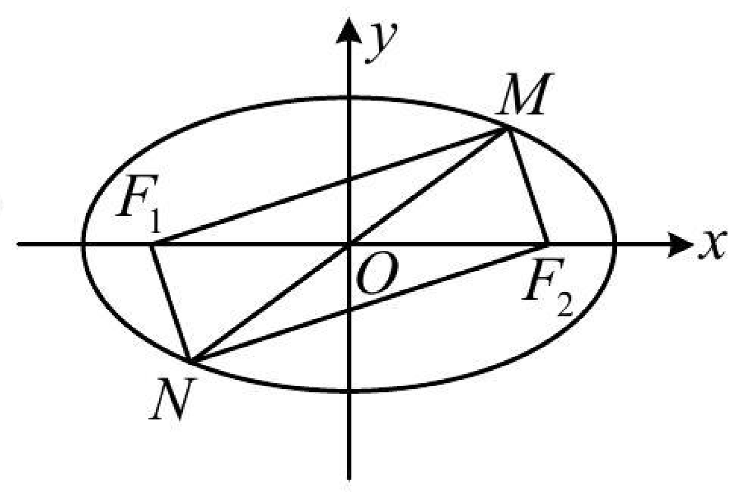
答案： $\dfrac{\sqrt{10}}{4}$

解析： 先由已知条件分析四边形MF_1NF_2的形状，如图，因为M、N关于原点对称，且$|MN|=|F_1F_2|$，所以四边形MF_1NF_2是矩形，故$MF_1\perp MF_2$，且$|MF_1|=|NF_2|$，

要求离心率，可把条件转换到ΔMF_1F_2中来，结合椭圆定义处理，

又$|NF_2|=3|MF_2|$，所以$|MF_1|=3|MF_2|$，可设$|MF_2|=m$，则$|MF_1|=3m$，

所以$|F_1F_2|=\sqrt{|MF_2|^2+|MF_1|^2}=\sqrt{10}m$，故椭圆$C$的离心率$e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{2c}{2a}=\dfrac{|F_1F_2|}{|MF_1|+|MF_2|}=\dfrac{\sqrt{10}m}{m+3m}=\dfrac{\sqrt{10}}{4}$.



4．（2022•福建质检•★★★）已知点F_1、F_2是椭圆$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的左、右焦点，过$F_2$的直线交椭圆于$A$、$B$两点，且$AF_1\perp AB$，$\dfrac{|AF_1|}{|AB|}=\dfrac{4}{3}$，则该椭圆的离心率是（　　）

（A）$\dfrac{2}{3}$　　（B）$\dfrac{\sqrt{5}}{3}$　　（C）$\dfrac{\sqrt{3}}{3}$　　（D）$\dfrac{\sqrt{6}}{3}$

答案： B

解析： 如图，ΔAF_1F_2和ΔBF_1F_2都是焦点三角形，可结合椭圆定义处理，先由已知条件设一下边长，

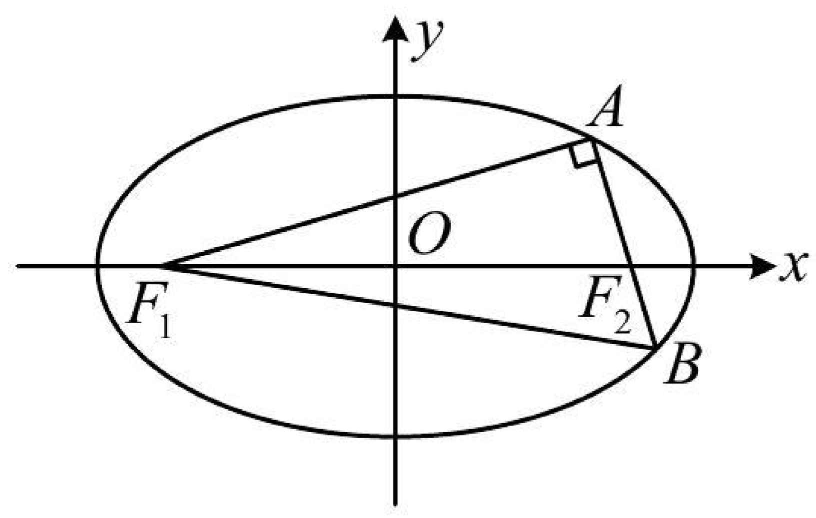
因为$\dfrac{|AF_1|}{|AB|}=\dfrac{4}{3}$，所以可设$|AF_1|=4m$，$|AB|=3m$，

因为$AF_1\perp AB$，所以$|BF_1|=\sqrt{|AF_1|^2+|AB|^2}=5m$，故$\Delta ABF_1$的周长$L=|AF_1|+|BF_1|+|AB|=12m$，

又$L=|AF_1|+|AF_2|+|BF_1|+|BF_2|=4a$，所以$12m=4a$，从而$m=\dfrac{a}{3}$，故$|AF_1|=\dfrac{4a}{3}$，$|AF_2|=2a-|AF_1|=\dfrac{2a}{3}$，

要求离心率，可到ΔAF_1F_2中用勾股定理来建立方程，

在 ΔAF_1F_2 中，$|AF_1|^2+|AF_2|^2=|F_1F_2|^2$，所以 $\dfrac{16a^2}{9}+\dfrac{4a^2}{9}=4c^2$，整理得：$\dfrac{c^2}{a^2}=\dfrac{5}{9}$，故离心率 $e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{5}}{3}$.



5．（2014 • 安徽卷 • ★★★）若 F_1，F_2 分别是椭圆 $E:x^2+\dfrac{y^2}{b^2}=1(0<b<1)$ 的左、右焦点，过点 F_1 的直线交椭圆 E 于 A，B 两点，若 $|AF_1|=3|F_1B|$，$AF_2\perp x$ 轴，则椭圆 E 的方程为_____.

答案： $x^2+\dfrac{3y^2}{2}=1$

解析： 如图，条件中有 $|AF_1|=3|F_1B|$，可用它构造相似三角形，通过相似比求点 B 的坐标，

由题意，长半轴长 $a=1$，作 $BM\perp x$ 轴于点 M，则 $\Delta BMF_1\backsim\Delta AF_2F_1$，所以 $\dfrac{|MF_1|}{|F_1F_2|}=\dfrac{|BM|}{|AF_2|}=\dfrac{|BF_1|}{|AF_1|}=\dfrac{1}{3}$ ①，

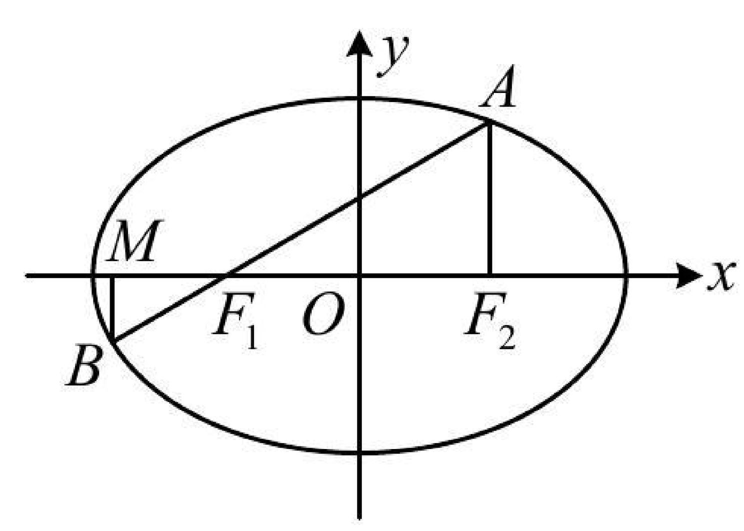
所以 $|MF_1|=\dfrac{1}{3}|F_1F_2|=\dfrac{2c}{3}$，$|OM|=|MF_1|+|OF_1|=\dfrac{5c}{3}$，故 $x_B=-\dfrac{5c}{3}$，

再通过求 $|BM|$ 算 y_B，由①知 $|BM|=\dfrac{1}{3}|AF_2|$，可联立直线 AF_2 和椭圆的方程来求 A 的纵坐标，得到 $|AF_2|$，

联立 $\begin{cases}x=c\\x^2+\dfrac{y^2}{b^2}=1\end{cases}$ 解得：$y=\pm b\sqrt{1-c^2}$，所以 $y_A=b\sqrt{1-c^2}$，又 $a=1$，所以 $1-c^2=a^2-c^2=b^2$，故 $y_A=b^2$，

所以 $|AF_2|=b^2$，结合①可得 $|BM|=\dfrac{b^2}{3}$，故 $B(-\dfrac{5c}{3},-\dfrac{b^2}{3})$，

代入椭圆方程得：$\dfrac{25c^2}{9}+\dfrac{b^2}{9}=1$，结合 $b^2+c^2=1$ 解得：$b^2=\dfrac{2}{3}$，所以椭圆 E 的方程为 $x^2+\dfrac{3y^2}{2}=1$.



6．（2022 • 长沙模拟 • ★★★）已知 F_1，F_2 是椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左、右焦点，点 $A(0,b)$，点 B 在椭圆 C 上，且 $\overrightarrow{AF_1}=2\overrightarrow{F_1B}$，$D$、$E$ 分别是 AF_2、BF_2 的中点，且 ΔDEF_2 的周长为 4，则椭圆 C 的方程为（　　）

（A）$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$　　（B）$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{3y^2}{8}=1$　　（C）$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{3y^2}{4}=1$　　（D）$x^2+\dfrac{3y^2}{2}=1$

答案： B

解析： 由 $\overrightarrow{AF_1}=2\overrightarrow{F_1B}$ 可求得点 B 的坐标，代入椭圆建立一个方程；

如图，作 $BG\perp x$ 轴于点 G，则 $\Delta AOF_1\backsim\Delta BGF_1$，所以 $\dfrac{|BG|}{|OA|}=\dfrac{|GF_1|}{|OF_1|}=\dfrac{|BF_1|}{|AF_1|}=\dfrac{1}{2}$，

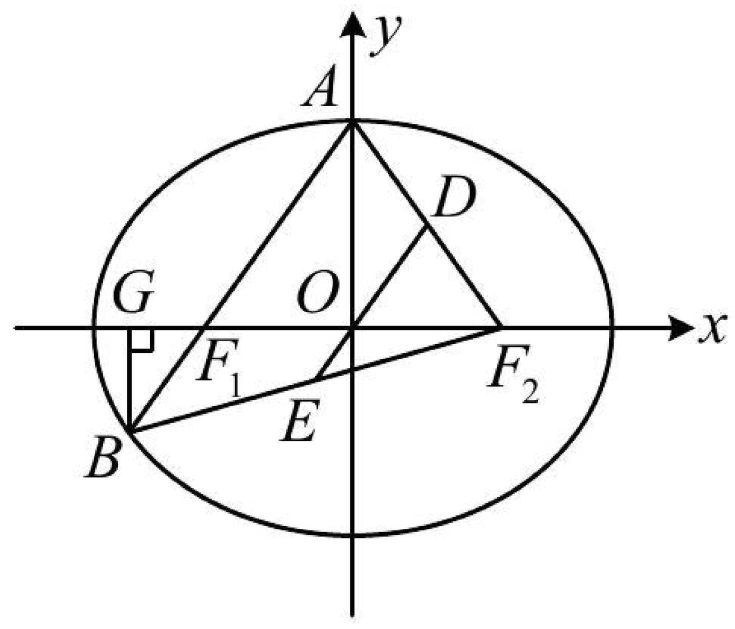
故 $|BG|=\dfrac{1}{2}|OA|=\dfrac{b}{2}$，$|GF_1|=\dfrac{1}{2}|OF_1|=\dfrac{c}{2}$，所以 $B(-\dfrac{3c}{2},-\dfrac{b}{2})$，代入椭圆方程整理得：$a^2=3c^2$ ①，

再来看 ΔDEF_2 的周长，可利用中点转化成 ΔABF_2 的周长，结合定义计算，

因为 D、E 分别是 AF_2、BF_2 的中点，所以 $|AB|=2|DE|$，$|AF_2|=2|DF_2|$，$|BF_2|=2|EF_2|$，

故 $|AB|+|AF_2|+|BF_2|=2(|DE|+|DF_2|+|EF_2|)=8$，又由椭圆定义，$|AB|+|AF_2|+|BF_2|=4a$，

所以 $4a=8$，故 $a=2$，代入①可求得 $c^2=\dfrac{4}{3}$，所以 $b^2=a^2-c^2=\dfrac{8}{3}$，故椭圆 C 的方程为 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{3y^2}{8}=1$.



7.（2019 • 浙江卷 • ★★★★）已知椭圆 $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{5}=1$ 的左焦点为 F，点 P 在椭圆上且在 x 轴的上方，若线段 PF 的中点在以原点 O 为圆心，$|OF|$ 为半径的圆上，则直线 PF 的斜率是_____.

答案：$\sqrt{15}$

解析：如图，涉及中点，可尝试构造中位线，由题意，$a=3$，$c=2$，

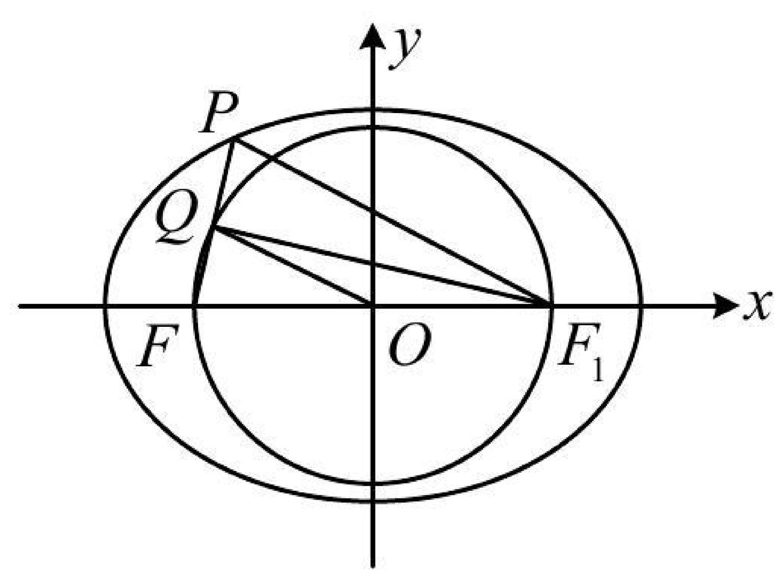
记右焦点为 F_1，PF 中点为 Q，因为 O 是 FF_1 的中点，所以 $|PF_1|=2|OQ|=4$，

有了 $|PF_1|$，就能求 $|PF|$，于是 ΔPFF_1 已知三边，可用余弦定理推论求 $\cos\angle PFF_1$，再求 $\tan\angle PFF_1$，

$|PF|+|PF_1|=2a\Rightarrow|PF|=2a-|PF_1|=6-4=2$，

又 $|FF_1|=2c=4$，所以 $\cos\angle PFF_1=\dfrac{|PF|^2+|FF_1|^2-|PF_1|^2}{2|PF|\cdot|FF_1|}=\dfrac{4+16-16}{2\times2\times4}=\dfrac{1}{4}$，

故 $\tan\angle PFF_1=\dfrac{\sin\angle PFF_1}{\cos\angle PFF_1}=\sqrt{15}$，即直线 PF 的斜率为 $\sqrt{15}$.



8.（2022 • 萍乡三模 • ★★★）设 F_1，F_2 是椭圆 $C:y^2+\dfrac{x^2}{t}=1(0<t<1)$ 的焦点，若椭圆 C 上存在点 P，满足 $\angle F_1PF_2=120^\circ$，则 t 的取值范围是（　　）

（A）$(0,\frac{1}{4}]$　（B）$[\frac{1}{4},1)$　（C）$(0,\frac{\sqrt{2}}{2}]$　（D）$[\frac{\sqrt{2}}{2},1)$

答案：A

解法 1：先把 $\angle F_1PF_2=120^{\circ}$ 的情形画出来，如图 1，在焦点三角形中，首先考虑椭圆定义，

设 $|PF_1|=m$，$|PF_2|=n$，由题意，椭圆的长半轴长 $a=1$，半焦距 $c=\sqrt{1-t}$，所以 $m+n=2a=2$ ①，

还有角度的条件，可在 ΔPF_1F_2 中用余弦定理，$|F_1F_2|^2=|PF_1|^2+|PF_2|^2-2|PF_1|\cdot|PF_2|\cdot\cos\angle F_1PF_2$，

所以 $4(1-t)=m^2+n^2-2mn\cos120^{\circ}$，故 $4(1-t)=m^2+n^2+mn$ ②，

要求 t 的范围，应建立关于 t 的不等式，结合式①知可对式②配方，用不等式 $mn\le(\frac{m+n}{2})^2$ 来实现，

所以 $4(1-t)=(m+n)^2-mn\ge(m+n)^2-(\frac{m+n}{2})^2=\frac{3(m+n)^2}{4}$，将式①代入可得 $4(1-t)\ge3$，故 $t\le\frac{1}{4}$，

当且仅当 $m=n=1$ 时取等号，又 $0<t<1$，所以 $t\in(0,\frac{1}{4}]$.

解法 2：也可直接用最大张角结论，当 P 在椭圆上运动时，$\angle F_1PF_2$ 的最大值在短轴端点处取得，

要使椭圆上存在点 P，满足 $\angle F_1PF_2=120^{\circ}$，只需图 2 所示的 $\angle F_1PF_2\ge120^{\circ}$ 即可，即图中 $\alpha\ge60^{\circ}$，

所以 $\cos\alpha=\frac{|OP|}{|PF_1|}=\frac{\sqrt{t}}{1}\le\frac{1}{2}$，结合 $0<t<1$ 可解得：$0<t\le\frac{1}{4}$.

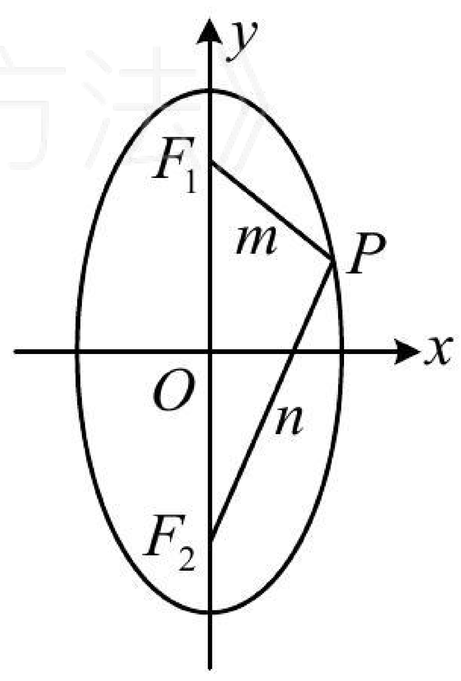


图1

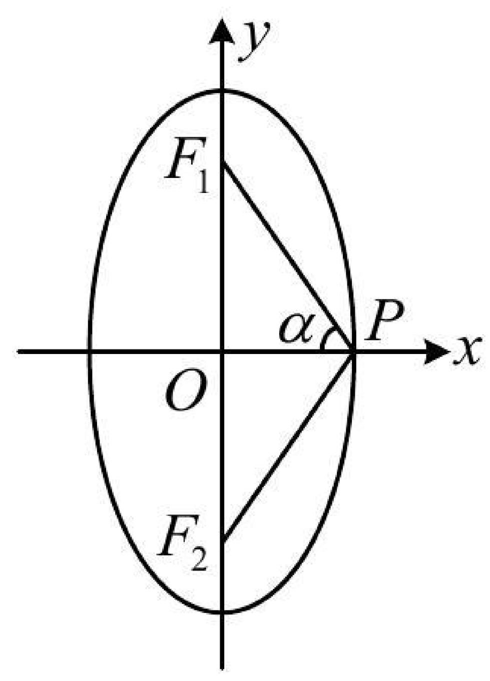


图2

9.（2022·南宁模拟·★★★）已知 F 是椭圆 $E:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左焦点，过原点的直线 l 与椭圆 E 相交于 P、Q 两点，若 $|PF|=5|QF|$，且 $\angle PFQ=120^{\circ}$，则椭圆的离心率为（　）

（A）$\frac{\sqrt{7}}{6}$　（B）$\frac{1}{3}$　（C）$\frac{\sqrt{21}}{6}$　（D）$\frac{\sqrt{21}}{5}$

答案：C

解析：看到过原点的直线与椭圆交于 P、Q 两点，想到与焦点构成平行四边形，

如图，设右焦点为 F'，则四边形 $PFQF'$ 为平行四边形，

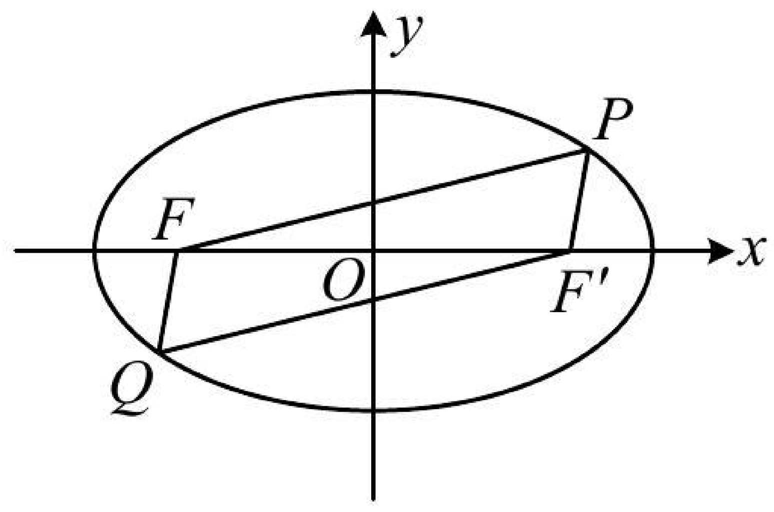
为了运用椭圆的定义，将条件转移到 $\Delta PFF'$ 中来，$|PF'|=|QF|$，又 $|PF|=5|QF|$，所以 $|PF|=5|PF'|$ ①，

由椭圆定义，$|PF|+|PF'|=2a$，结合①可得 $|PF|=\frac{5a}{3}$，$|PF'|=\frac{a}{3}$，

还剩 $\angle PFQ=120^{\circ}$ 这个条件没用，可据此求出 $\angle FPF'$，在 $\Delta PFF'$ 中由余弦定理建立方程求离心率，

$\angle FPF' = 180^{\circ} - \angle PFQ = 60^{\circ}$，$|FF'| = 2c$，由余弦定理，$|FF'|^2 = |PF|^2 + |PF'|^2 - 2|PF|\cdot|PF'|\cdot\cos\angle FPF'$，

所以 $4c^2 = \dfrac{25a^2}{9} + \dfrac{a^2}{9} - 2\times\dfrac{5a}{3}\times\dfrac{a}{3}\times\cos 60^{\circ}$，整理得：$\dfrac{c^2}{a^2} = \dfrac{7}{12}$，故离心率 $e = \dfrac{c}{a} = \dfrac{\sqrt{21}}{6}$.



10.（2022 • 全国二模 • ★★★★）椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的左焦点为 F，过原点 O 的直线与椭圆交于 P、Q 两点，若 $\angle PFQ = 120^{\circ}$，$|OF| = \sqrt{3}$，$|OP| = \sqrt{7}$，则椭圆 C 的离心率为（　　）

（A）$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　（B）$\dfrac{\sqrt{3}}{3}$　　（C）$\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$　　（D）$\dfrac{\sqrt{6}}{3}$

答案：B

解析：由对称性有 O 平分 PQ，想到结合 O 平分两焦点 F，F_1，可构造平行四边形，

如图，设椭圆 C 的右焦点为 F_1，则四边形 $PFQF_1$ 是平行四边形，设 $|PF| = m$，$|FQ| = n$，则 $|PF_1| = n$，

由椭圆定义，$|PF| + |PF_1| = m + n = 2a$ ①，

知道 $|OP|$ 和 $\angle PFQ$，可在 ΔPFQ 中用余弦定理建立关于 m 和 n 的方程，

$|OP| = \sqrt{7} \Rightarrow |PQ| = 2\sqrt{7}$，由余弦定理，$|PQ|^2 = |PF|^2 + |FQ|^2 - 2|PF|\cdot|FQ|\cdot\cos\angle PFQ$，

所以 $28 = m^2 + n^2 - 2mn\cos 120^{\circ} = m^2 + n^2 + mn = (m+n)^2 - mn$ ②，

将式①代入式②可得 $28 = 4a^2 - mn$，所以 $mn = 4a^2 - 28$ ③，

同理，知道 $|OF|$，$\angle FPF_1$ 也能求出，于是又到 ΔPFF_1 中用余弦定理，再建立关于 m 和 n 的方程，

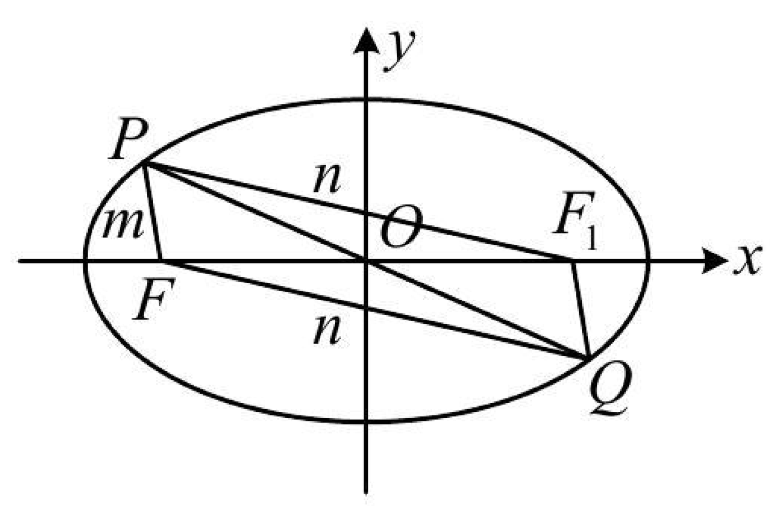
在 ΔPFF_1 中，$\angle FPF_1 = 180^{\circ} - \angle PFQ = 60^{\circ}$，$|FF_1| = 2|OF| = 2\sqrt{3}$，

由余弦定理，$|FF_1|^2 = |PF|^2 + |PF_1|^2 - 2|PF|\cdot|PF_1|\cdot\cos\angle FPF_1$，

所以 $12 = m^2 + n^2 - 2mn\cos 60^{\circ} = m^2 + n^2 - mn = (m+n)^2 - 3mn$，将式①代入可得 $12 = 4a^2 - 3mn$，

所以 $mn = \dfrac{4a^2}{3} - 4$，结合式③可得 $4a^2 - 28 = \dfrac{4a^2}{3} - 4$，解得：$a = 3$，

又由 $|OF| = \sqrt{3}$ 知 $c = \sqrt{3}$，所以椭圆 C 的离心率 $e = \dfrac{c}{a} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$.



11．（2022•湖北模拟•★★★★）已知F_1，F_2是椭圆$C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的左、右焦点，点$P$在椭圆$C$的第一象限上，过$F_2$作$\angle F_1PF_2$的外角平分线的垂线，垂足为$A$，$O$为原点，若$|OA|=\sqrt{3}b$，则椭圆$C$的离心率为_____.

答案：$\frac{\sqrt{6}}{3}$

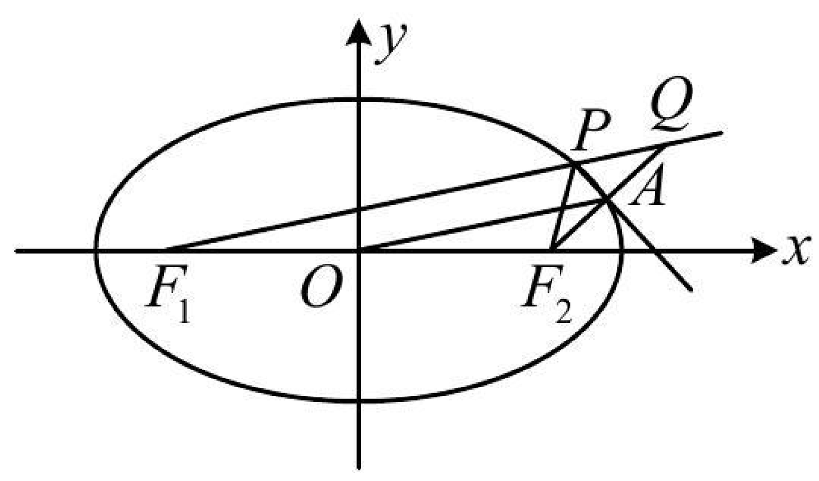
解析：看到向外角平分线作垂线，涉及角平分线+垂直，想到三线合一，可构造等腰三角形，

如图，设直线F_2A和F_1P交于点Q，由题意，PA是$\angle F_2PQ$的平分线，且$PA\perp F_2Q$，

所以$|PF_2|=|PQ|$，且A是F_2Q的中点，又O是F_1F_2的中点，所以$|F_1Q|=2|OA|=2\sqrt{3}b$，

另一方面，$|F_1Q|=|PF_1|+|PQ|=|PF_1|+|PF_2|=2a$，所以$2a=2\sqrt{3}b$，故$a=\sqrt{3}b$，

所以$a^2=3b^2=3(a^2-c^2)$，整理得：$\frac{c^2}{a^2}=\frac{2}{3}$，故椭圆$C$的离心率$e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{6}}{3}$.



12．（2022•新高考Ⅰ卷•★★★★）已知椭圆$C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$，$C$的上顶点为$A$，两个焦点为$F_1$，$F_2$，离心率为$\frac{1}{2}$，过$F_1$且垂直于$AF_2$的直线交$C$于$D$、$E$两点，$|DE|=6$，则$\Delta ADE$的周长是_____.

答案：13

解析：先由离心率分析a、b、c的关系，将变量归一化，

椭圆的离心率为$\frac{1}{2}\Rightarrow\frac{c}{a}=\frac{1}{2}\Rightarrow a=2c$，所以$b=\sqrt{a^2-c^2}=\sqrt{3}c$，

从而椭圆方程可化为$\frac{x^2}{4c^2}+\frac{y^2}{3c^2}=1$，且$|AF_1|=|AF_2|=a=2c=|F_1F_2|$，故$\Delta AF_1F_2$为正三角形，

如图，可由此求得直线DE的斜率，写出其方程，可与椭圆联立计算弦长$|DE|$，建立方程解c，

由题意，$DE\perp AF_2$，所以$\angle EF_1F_2=30^\circ$，从而直线DE的斜率为$\frac{\sqrt{3}}{3}$，

故其方程为$y=\frac{\sqrt{3}}{3}(x+c)$，即$x=\sqrt{3}y-c$，联立$\begin{cases}x=\sqrt{3}y-c\\ \frac{x^2}{4c^2}+\frac{y^2}{3c^2}=1\end{cases}$消去$x$整理得：$13y^2-6\sqrt{3}cy-9c^2=0$，

判别式$\Delta=(-6\sqrt{3}c)^2-4\times13\times(-9c^2)=(24c)^2$，所以$|DE|=\sqrt{1+(\sqrt{3})^2}\cdot\frac{\sqrt{(24c)^2}}{13}=\frac{48c}{13}$，

由题意，$|DE|=6$，所以$\frac{48c}{13}=6$，故$c=\frac{13}{8}$，

最后算ΔADE的周长，若通过求D、E的坐标来算$|AD|$和$|AE|$，则比较麻烦，结合图形的对称性会发现可

转化为ΔDEF_2来算周长，只需用椭圆的定义即可快速求出，

由ΔAF_1F_2是正三角形，DE过F_1且与AF_2垂直可知DE是AF_2的中垂线，所以$|AE|=|EF_2|$，$|AD|=|DF_2|$，

故ΔADE的周长$L=|AD|+|AE|+|DE|=|DF_2|+|EF_2|+|DE|=|DF_2|+|EF_2|+|DF_1|+|EF_1|=4a=8c=8\times\frac{13}{8}=13$.