第 3 节 椭圆中的设点设线方法（★★★☆）

强化训练

1.（2021·全国乙卷·★★）设 B 是椭圆 $C:\frac{x^2}{5}+y^2=1$ 的上顶点，P 在 C 上，则 $|PB|$ 的最大值为（　　）

（A）$\frac{5}{2}$　　（B）$\sqrt{6}$　　（C）$\sqrt{5}$　　（D）2

答案：A

解法 1：$|PB|$ 可用两点间距离公式算，故设点 P 的坐标，

由题意，$B(0,1)$，设 $P(x_0,y_0)$，则 $|PB|^2=x_0^2+(y_0-1)^2$ ①，

上式有 x_0 和 y_0 两个变量，可利用椭圆方程消元，x_0 只有平方项，故消 x_0，

由点 P 在椭圆 C 上可得 $\frac{x_0^2}{5}+y_0^2=1$，所以 $x_0^2=5-5y_0^2$，

代入①得：$|PB|^2=5-5y_0^2+y_0^2-2y_0+1=-4y_0^2-2y_0+6=-4(y_0+\frac{1}{4})^2+\frac{25}{4}$，$-1\le y_0\le 1$，

所以当 $y_0=-\frac{1}{4}$ 时，$|PB|^2$ 取得最大值 $\frac{25}{4}$，故 $|PB|_{\max}=\frac{5}{2}$.

解法 2：也可将点 P 的坐标设为三角形式，由题意，$B(0,1)$，可设 $P(\sqrt{5}\cos\theta,\sin\theta)$，

则 $|PB|=\sqrt{(\sqrt{5}\cos\theta)^2+(\sin\theta-1)^2}=\sqrt{5\cos^2\theta+\sin^2\theta-2\sin\theta+1}$，将 $\cos^2\theta$ 换成 $1-\sin^2\theta$，可统一函数名，

所以 $|PB|=\sqrt{5(1-\sin^2\theta)+\sin^2\theta-2\sin\theta+1}=\sqrt{-4\sin^2\theta-2\sin\theta+6}=\sqrt{-4(\sin\theta+\frac{1}{4})^2+\frac{25}{4}}$，

故当 $\sin\theta=-\frac{1}{4}$ 时，$|PB|$ 取得最大值 $\frac{5}{2}$.

2.（★★★）已知椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$，直线 $y=kx(k\in\mathbf{R})$ 与 C 的一个交点为 B，若 $|OB|$ 的取值范围是 $[b,2b]$，则椭圆 C 的离心率为（　　）

（A）$\frac{1}{2}$　　（B）$\frac{\sqrt{2}}{2}$　　（C）$\frac{\sqrt{3}}{2}$　　（D）$\frac{3}{4}$

答案：C

解析：B 在椭圆上运动，$|OB|$ 可通过设 B 的坐标来算，

设 $B(x_0,y_0)(x_0\ne 0)$，则 $|OB|=\sqrt{x_0^2+y_0^2}$ ①，

有 x_0，y_0 两个变量，可利用椭圆方程消元，

由 B 在椭圆上可得 $\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}=1$，所以 $y_0^2=b^2-\frac{b^2}{a^2}x_0^2$，

代入①得：$|OB|=\sqrt{x_0^2+b^2-\frac{b^2}{a^2}x_0^2}$

$=\sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2}x_0^2+b^2}=\sqrt{\frac{c^2}{a^2}x_0^2+b^2}$ ②，

因为$-a\le x_0\le a$且$x_0\ne 0$，所以$0<x_0^2\le a^2$，

代入②得：$b<|OB|\le\sqrt{c^2+b^2}=a$，又由题意，

$b<|OB|\le 2b$，所以$a=2b$，故$a^2=4b^2=4(a^2-c^2)$，

整理得：$\frac{c^2}{a^2}=\frac{3}{4}$，所以椭圆$C$的离心率$e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

【反思】本题其实是将一个好记的性质证明了一下：椭圆上动点到其中心的距离的取值范围是$[b,a]$.

3.（★★★）点P在椭圆$\frac{x^2}{4}+y^2=1$上运动，则当点P到直线$l:x+y-4=0$的距离最小时，点P的坐标为______.

答案：$(\frac{4\sqrt{5}}{5},\frac{\sqrt{5}}{5})$

解法1：P在椭圆上运动，可将其坐标设为三角形式，用于分析最值，

设$P(2\cos\theta,\sin\theta)$，则点$P$到直线$l$的距离$d=\frac{|2\cos\theta+\sin\theta-4|}{\sqrt{2}}=\frac{|\sqrt{5}\sin(\theta+\varphi)-4|}{\sqrt{2}}=\frac{4-\sqrt{5}\sin(\theta+\varphi)}{\sqrt{2}}$，

其中$\cos\varphi=\frac{\sqrt{5}}{5}$，$\sin\varphi=\frac{2\sqrt{5}}{5}$，所以当$\sin(\theta+\varphi)=1$时，$d$取得最小值，

目标是求d最小时点P的坐标，故可由$\sin(\theta+\varphi)=1$求出θ，代入所设的点P，

$\sin(\theta+\varphi)=1\Rightarrow\theta+\varphi=2k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})\Rightarrow\theta=2k\pi+\frac{\pi}{2}-\varphi$，所以$\cos\theta=\cos(2k\pi+\frac{\pi}{2}-\varphi)=\sin\varphi=\frac{2\sqrt{5}}{5}$，

$\sin\theta=\sin(2k\pi+\frac{\pi}{2}-\varphi)=\cos\varphi=\frac{\sqrt{5}}{5}$，故点$P$的坐标为$(\frac{4\sqrt{5}}{5},\frac{\sqrt{5}}{5})$.

解法2：先画图分析距离最小的情形，如图，$l'\,//\,l$，且l'与椭圆C相切于点P，

图中的点P到直线l的距离最小，要求该切点P，先设切线，并与椭圆联立，

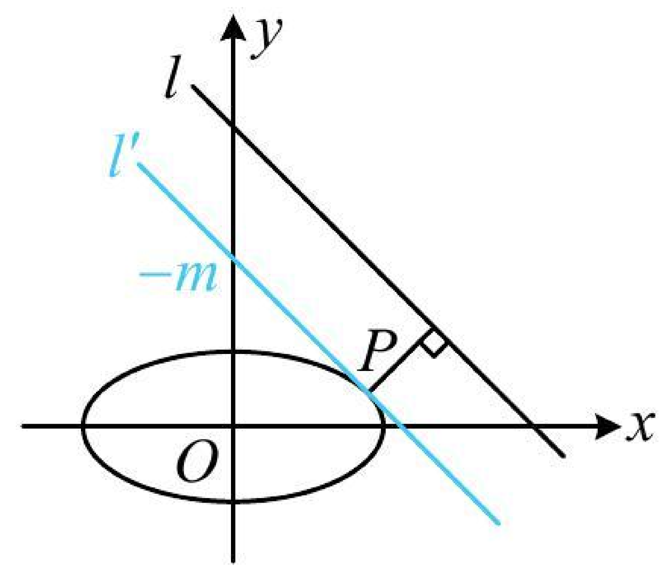
设图中$l':x+y+m=0$，联立$\begin{cases}x+y+m=0\\ \frac{x^2}{4}+y^2=1\end{cases}$消去$y$整理得：$5x^2+8mx+4m^2-4=0$ ①，

因为l'与椭圆相切，所以方程①的判别式$\Delta=64m^2-4\times5\times(4m^2-4)=0$，解得：$m=\pm\sqrt{5}$，

应取哪一个呢？可结合图形来看，$x+y+m=0\Rightarrow y=-x-m\Rightarrow l'$在$y$轴上截距是$-m$，

由图可知$-m>0$，所以$m<0$，故$m=-\sqrt{5}$，故l'的方程为$x+y-\sqrt{5}=0$ ②，

将$m=-\sqrt{5}$代入①解得：$x=\frac{4\sqrt{5}}{5}$，代入②可得$y=\frac{\sqrt{5}}{5}$，所以点P的坐标为$(\frac{4\sqrt{5}}{5},\frac{\sqrt{5}}{5})$.



4.（2022·沈阳模拟·★★★）已知椭圆 $C: x^2+4y^2=m(m>0)$ 的左、右焦点分别为 F_1， F_2，P 是椭圆 C 上的动点，若 $\overrightarrow{PF_1}\cdot\overrightarrow{PF_2}$ 的最小值为 -1，则 $\overrightarrow{PF_1}\cdot\overrightarrow{PF_2}$ 的最大值为（　　）

（A）4　（B）2　（C）$\frac{1}{4}$　（D）$\frac{1}{2}$

答案：D

解析：先把椭圆的方程化为标准方程，找到 a、b、c， $x^2+4y^2=m\Rightarrow\frac{x^2}{m}+\frac{y^2}{\frac{m}{4}}=1\Rightarrow a=\sqrt{m}$， $b=\frac{\sqrt{m}}{2}$，

所以 $c=\sqrt{a^2-b^2}=\frac{\sqrt{3m}}{2}$，故 $F_1(-\frac{\sqrt{3m}}{2},0)$， $F_2(\frac{\sqrt{3m}}{2},0)$， $\overrightarrow{PF_1}\cdot\overrightarrow{PF_2}$ 可用坐标来计算，于是设 P 的坐标，

设 $P(x_0,y_0)$，则 $\overrightarrow{PF_1}=(-\frac{\sqrt{3m}}{2}-x_0,-y_0)$， $\overrightarrow{PF_2}=(\frac{\sqrt{3m}}{2}-x_0,-y_0)$，

所以 $\overrightarrow{PF_1}\cdot\overrightarrow{PF_2}=(-\frac{\sqrt{3m}}{2}-x_0)(\frac{\sqrt{3m}}{2}-x_0)+(-y_0)^2=x_0^2+y_0^2-\frac{3m}{4}$ ①，有 x_0、 y_0 两个变量，可用椭圆方程消元，

点 P 在椭圆 C 上 $\Rightarrow x_0^2+4y_0^2=m\Rightarrow x_0^2=m-4y_0^2$，代入①整理得： $\overrightarrow{PF_1}\cdot\overrightarrow{PF_2}=\frac{m}{4}-3y_0^2$，

因为 $-\frac{\sqrt{m}}{2}\le y_0\le\frac{\sqrt{m}}{2}$，所以 $0\le y_0^2\le\frac{m}{4}$，故 $-\frac{m}{2}\le\frac{m}{4}-3y_0^2\le\frac{m}{4}$，即 $-\frac{m}{2}\le\overrightarrow{PF_1}\cdot\overrightarrow{PF_2}\le\frac{m}{4}$ ②，

由题意， $\overrightarrow{PF_1}\cdot\overrightarrow{PF_2}$ 的最小值为 -1，所以 $-\frac{m}{2}=-1$，解得： $m=2$，代入②知 $\overrightarrow{PF_1}\cdot\overrightarrow{PF_2}$ 的最大值为 $\frac{1}{2}$.

5.（2022·上海模拟·★★★★）已知定点 $A(a,0)(a>0)$ 到椭圆 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ 上的点的距离的最小值为 1，则 a 的值为_____.

答案：2 或 4

解析：设 $P(x,y)$ 为椭圆上一点，则 $|PA|^2=(x-a)^2+y^2$ ①，

上式中有 x 和 y 两个变量，可利用椭圆方程消元，y 只有平方项，故消 y，

因为点 P 在椭圆上，所以 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$，故 $y^2=4-\frac{4}{9}x^2$，

代入①得： $|PA|^2=x^2-2ax+a^2+4-\frac{4}{9}x^2=\frac{5}{9}x^2-2ax+a^2+4$，其中 $-3\le x\le 3$，

记 $f(x)=\frac{5}{9}x^2-2ax+a^2+4(-3\le x\le 3)$，因为 $|PA|_{\min}=1$ 且 $f(x)=|PA|^2$，所以 $f(x)_{\min}=1$，

下面求 $f(x)_{\min}$， $f(x)$ 的参数 $a>0$，求最值应分对称轴 $x=\frac{9a}{5}$ 在区间内和在区间右侧两种情况讨论，

当 $0<\frac{9a}{5}\le 3$ 时，$0<a\le\frac{5}{3}$，如图 1，$f(x)_{\min}=f(\frac{9a}{5})=\frac{5}{9}\cdot(\frac{9a}{5})^2-2a\cdot\frac{9a}{5}+a^2+4=4-\frac{4a^2}{5}$，

令 $4-\frac{4a^2}{5}=1$ 解得：$a=\pm\frac{\sqrt{15}}{2}$，均不满足 $0<a\le\frac{5}{3}$，舍去；

当 $\frac{9a}{5}>3$ 时，$a>\frac{5}{3}$，如图 2，$f(x)_{\min}=f(3)=\frac{5}{9}\times 3^2-2a\cdot 3+a^2+4=a^2-6a+9$，

令 $a^2-6a+9=1$ 解得：$a=2$ 或 4，均满足 $a>\frac{5}{3}$；

综上所述，a 的值为 2 或 4.

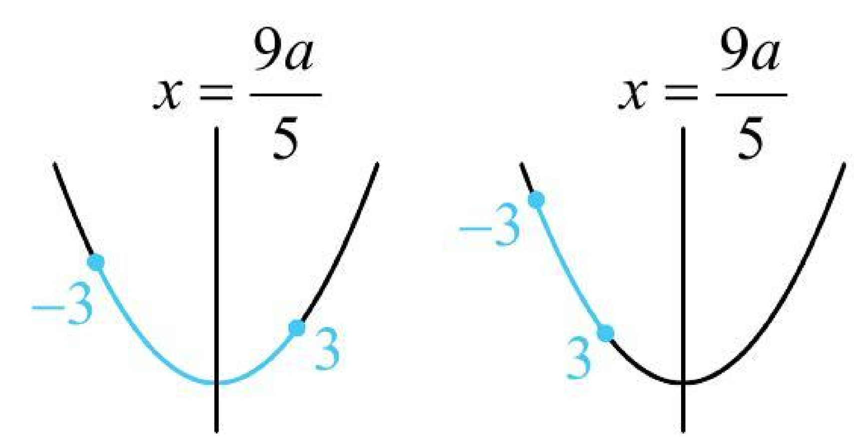


图1　　图2

6.（★★★）已知椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的焦距为 2，右顶点为 A，过原点且与 x 轴不重合的直线交 C 于 M、N 两点，线段 AM 的中点为 B，若直线 BN 经过 C 的右焦点，则椭圆 C 的方程为（　　）

（A）$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$　　（B）$\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{5}=1$　（C）$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{8}=1$　（D）$\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{32}=1$

答案：C

解法 1：由题意，椭圆的焦距 $2c=2$，所以 $c=1$，故 $a^2-b^2=1$ ①，

如图，接下来若设 M 的坐标，则 N、B 也能用 M 的坐标表示，

设 $M(x_0,y_0)(y_0\ne 0)$，则 $N(-x_0,-y_0)$，由题意，$A(a,0)$，右焦点 $F(1,0)$，所以 $B(\frac{a+x_0}{2},\frac{y_0}{2})$，

直线 BN 过右焦点可看成 B、F、N 三点共线，不妨考虑斜率存在的情形，用斜率相等来翻译，

由题意，B、F、N 三点共线，所以 $k_{BF}=k_{NF}$，故 $\frac{\frac{y_0}{2}}{\frac{a+x_0}{2}-1}=\frac{y_0}{x_0+1}$，约去 y_0 可解得：$a=3$，

代入①得：$b^2=8$，所以椭圆的方程为 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{8}=1$.

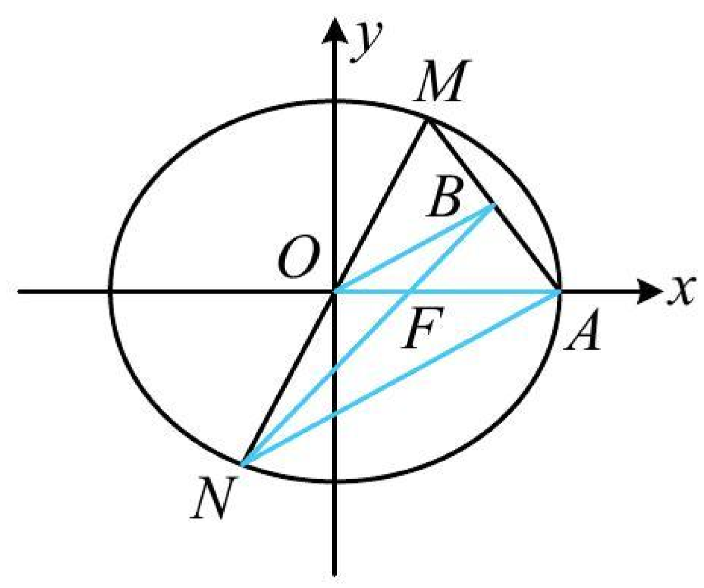
解法 2：记右焦点为 F，椭圆的焦距 $2c=2$，所以 $c=1$，故 $|OF|=1$，且 $a^2-b^2=1$ ①，

涉及中点，也可考虑构造中位线分析，如图，连接 OB，由对称性，O 为 MN 中点，

又 B 为 MA 中点，所以 $|OB|=\frac{1}{2}|AN|$，且 $OB\,//\,AN$，平行可产生相似三角形，进而分析相似比，

所以 $\Delta OBF\backsim\Delta ANF$，从而 $\frac{|OF|}{|AF|}=\frac{|OB|}{|AN|}=\frac{1}{2}$，故 $|AF|=2|OF|=2$，所以 $|OA|=3$，即 $a=3$，

代入①得：$b^2=8$，所以椭圆的方程为$\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{8}=1$.



【反思】A、B、C三点共线常用的翻译方法有：①翻译成$k_{AB}=k_{AC}$，但大题中出于严密性考虑，需讨论斜率不存在的情况；②翻译成$\overrightarrow{AB}\,//\,\overrightarrow{AC}$.

7．（2022 • 河南模拟 • ★★★★）已知椭圆$C:\dfrac{x^2}{18}+\dfrac{y^2}{9}=1$的上、下顶点分别为$A$和$B$，点$P(x_0,y_0)(x_0\neq 0)$在椭圆$C$上，若点$Q(x_1,y_1)$满足$AP\perp AQ$，$BP\perp BQ$，则$\dfrac{x_1}{x_0}=$（　　）

（A）$-\dfrac{1}{3}$　　（B）$-\dfrac{1}{2}$　　（C）$-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　　（D）$-\dfrac{2}{3}$

答案：B

解析：如图，点Q可以看成直线AQ和BQ的交点，于是写出这两条直线的方程，联立求交点，

由题意，$A(0,3)$，$B(0,-3)$，$k_{AP}=\dfrac{y_0-3}{x_0}$，$k_{BP}=\dfrac{y_0+3}{x_0}$，

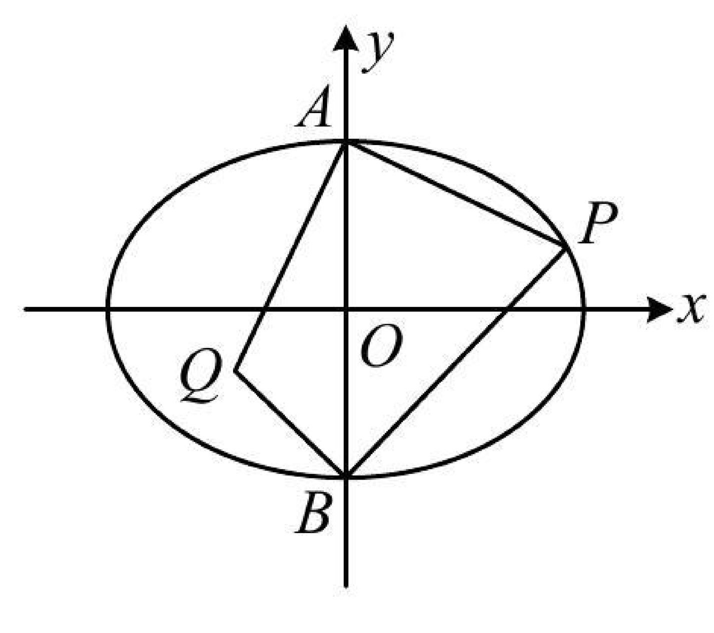
因为$AP\perp AQ$，$BP\perp BQ$，所以$k_{AQ}=-\dfrac{x_0}{y_0-3}$，$k_{BQ}=-\dfrac{x_0}{y_0+3}$，

从而直线AQ的方程为$y=-\dfrac{x_0}{y_0-3}x+3$，直线BQ的方程为$y=-\dfrac{x_0}{y_0+3}x-3$，

联立$\begin{cases}y=-\dfrac{x_0}{y_0-3}x+3\\ y=-\dfrac{x_0}{y_0+3}x-3\end{cases}$解得：$x=\dfrac{y_0^2-9}{x_0}$，故点$Q$的横坐标$x_1=\dfrac{y_0^2-9}{x_0}$，所以$\dfrac{x_1}{x_0}=\dfrac{y_0^2-9}{x_0^2}$　①，

要计算式①右侧的值，可利用椭圆方程来消元，

点P在椭圆C上$\Rightarrow\dfrac{x_0^2}{18}+\dfrac{y_0^2}{9}=1\Rightarrow x_0^2=2(9-y_0^2)$，代入①得$\dfrac{x_1}{x_0}=\dfrac{y_0^2-9}{2(9-y_0^2)}=-\dfrac{1}{2}$.



8．（2022 • 成都模拟 • ★★★★）过点$M(0,2)$且斜率为k的直线l与椭圆$C:\dfrac{x^2}{2}+y^2=1$交于不同的两点P

和 Q，若原点 O 在以 PQ 为直径的圆的外部，则 k 的取值范围是_____.

答案：$(-\sqrt{5},-\dfrac{\sqrt{6}}{2})\cup(\dfrac{\sqrt{6}}{2},\sqrt{5})$

解析：如图，原点 O 在以 PQ 为直径的圆外可翻译成 $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}>0$，于是设 P、Q 的坐标，计算 $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}$，

由题意，直线 l 的方程为 $y=kx+2$，设 $P(x_1,y_1)$，$Q(x_2,y_2)$，则 $\overrightarrow{OP}=(x_1,y_1)$，$\overrightarrow{OQ}=(x_2,y_2)$，

所以 $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}=x_1x_2+y_1y_2$，故可把直线 l 与椭圆联立，结合韦达定理来算 $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}$，

联立 $\begin{cases} y=kx+2 \\ \dfrac{x^2}{2}+y^2=1 \end{cases}$ 消去 y 整理得：$(2k^2+1)x^2+8kx+6=0$，

判别式 $\Delta=64k^2-4(2k^2+1)\times 6>0$，解得：$k<-\dfrac{\sqrt{6}}{2}$ 或 $k>\dfrac{\sqrt{6}}{2}$ ①，

由韦达定理，$x_1+x_2=-\dfrac{8k}{2k^2+1}$，$x_1x_2=\dfrac{6}{2k^2+1}$，

算 $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}$ 还要用到 y_1y_2，可利用点 P、Q 在直线 l 上转化为 x_1+x_2 和 x_1x_2 来算，

$$y_1y_2=(kx_1+2)(kx_2+2)=k^2x_1x_2+2k(x_1+x_2)+4=k^2\cdot\frac{6}{2k^2+1}+2k\cdot(-\frac{8k}{2k^2+1})+4=\frac{4-2k^2}{2k^2+1},$$

所以 $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}=x_1x_2+y_1y_2=\dfrac{10-2k^2}{2k^2+1}$，故 $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}>0$ 即为 $\dfrac{10-2k^2}{2k^2+1}>0$，解得：$-\sqrt{5}<k<\sqrt{5}$，

结合①可得 $-\sqrt{5}<k<-\dfrac{\sqrt{6}}{2}$ 或 $\dfrac{\sqrt{6}}{2}<k<\sqrt{5}$.