模块一 函数的概念与性质

第 1 节 函数概念（★☆）

强化训练

1.（★）函数 $y=\dfrac{\sqrt{4-x^2}}{\ln(x+1)}$ 的定义域为（ ）

（A）$[-2,2]$ （B）$(-1,2]$ （C）$(-1,0)\cup(0,2]$ （D）$(-1,1)\cup(1,2]$

答案：C

解析：由题意，$\begin{cases}4-x^2\ge 0\\ \ln(x+1)\ne 0\\ x+1>0\end{cases}$，解得：$-1<x<0$ 或 $0<x\le 2$.

2.（2023 • 吉林模拟 • ★）若函数 $f(x)$ 的定义域为 $[0,4]$，则函数 $g(x)=f(x+2)$ 的定义域为（ ）

（A）$[-2,2]$ （B）$[0,2]$ （C）$[2,6]$ （D）$[2,4]$

答案：A

解析：$f(x)$ 的定义域为 $[0,4]\Rightarrow f(x)$ 中，有 $0\le x\le 4$，

抽象函数定义域遵循括号范围恒不变原则，

所以在 $g(x)=f(x+2)$，有 $0\le x+2\le 4$，故 $-2\le x\le 2$，

所以函数 $g(x)=f(x+2)$ 的定义域为 $[-2,2]$.

3.（2022 • 四川遂宁期末 • ★★）若函数 $f(x+1)$ 的定义域为 $[-1,0]$，则 $f(\lg x)$ 的定义域为（ ）

（A）$[10,100]$ （B）$[1,2]$ （C）$[1,10]$ （D）$(0,1]$

答案：C

解析：$f(x+1)$ 的定义域为 $[-1,0]\Rightarrow -1\le x\le 0\Rightarrow 0\le x+1\le 1$，

因为括号范围恒不变，所以 $0\le \lg x\le 1$，从而 $1\le x\le 10$，故 $f(\lg x)$ 的定义域是 $[1,10]$.

4.（2023 • 宁夏银川模拟 • ★）已知 $f(\sqrt{x}-1)=x+1$，则函数 $f(x)$ 的解析式为（ ）

（A）$f(x)=x^2$ （B）$f(x)=x^2+1(x\ge 1)$ （C）$f(x)=x^2+2x+2(x\ge -1)$ （D）$f(x)=x^2-2x(x\ge -1)$

答案：C

解析：已知 $f(g(x))$ 求 $f(x)$，先将内层的 $g(x)$ 换元，

令 $t=\sqrt{x}-1$，则 $t\ge -1$，且 $x=(t+1)^2$，

所以 $f(\sqrt{x}-1)=x+1$ 即为 $f(t)=(t+1)^2+1=t^2+2t+2$，

将字母 t 换回成 x，即得 $f(x)$ 的解析式，

故 $f(x)=x^2+2x+2(x\ge -1)$.

5.（2022 • 陕西临潼一模 • ★★）已知 $f(x+1)=\ln x^2$，则 $f(x)=$（　　）

（A）$\ln(x+1)^2$　　（B）$2\ln(x+1)$　　（C）$2\ln|x-1|$　　（D）$\ln(x^2-1)$

答案：C

解析：设 $t=x+1$，则 $x=t-1$，$f(t)=\ln(t-1)^2$，

还可将 2 拿出来，但 $t-1$ 正负不定，故需加绝对值，

所以 $f(t)=2\ln|t-1|$，故 $f(x)=2\ln|x-1|$.

6.（2022 • 安徽模拟 • ★★）已知 $f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，且 $f(x)=2f(\frac{1}{x})+\ln x$，则 $f(x)=$_____.

答案：$\frac{\ln x}{3}$

解析：在 $f(x)=2f(\frac{1}{x})+\ln x$ 中将 x 换成 $\frac{1}{x}$ 可得 $f(\frac{1}{x})=2f(x)+\ln\frac{1}{x}$，所以 $\begin{cases} f(x)=2f(\frac{1}{x})+\ln x & ① \\ f(\frac{1}{x})=2f(x)+\ln\frac{1}{x} & ② \end{cases}$，

①$+2\times$②得：$f(x)+2f(\frac{1}{x})=2f(\frac{1}{x})+\ln x+4f(x)+2\ln\frac{1}{x}$，整理得：$f(x)=\frac{\ln x}{3}$.

7.（★★）函数 $f(x)=2^{x^2-2x}(0\le x\le 3)$ 的值域是_____.

答案：$[\frac{1}{2},8]$

解析：欲求 $f(x)$ 的值域，可将 x^2-2x 换元成 t，先求 t 的范围，

令 $t=x^2-2x$，则 $t=(x-1)^2-1$，且 $f(x)=2^t$，

因为 $0\le x\le 3$，所以 $-1\le t\le 3$，从而 $\frac{1}{2}\le 2^t\le 8$，故 $f(x)$ 的值域是 $[\frac{1}{2},8]$.

8.（2022 • 辽宁模拟 • ★★）函数 $y=\frac{x^2+x+1}{x^2-x+1}$ 的值域为_____.

答案：$[\frac{1}{3},3]$

解法 1：看到 $\frac{\text{二次函数}}{\text{二次函数}}$ 这种结构，想到将分子的平方项按分母的形式配凑，拆项化为 $\frac{\text{一次函数}}{\text{二次函数}}$，

由题意，$y=\frac{x^2+x+1}{x^2-x+1}=\frac{(x^2-x+1)+2x}{x^2-x+1}=1+\frac{2x}{x^2-x+1}$，

将 x 除到分母上，即可化为均值不等式模型，先考虑 $x=0$ 的情形，

当 $x=0$ 时，$y=1$；当 $x\ne 0$ 时，$y=1+\frac{2}{x+\frac{1}{x}-1}$，

因为 $x+\frac{1}{x}\le -2$ 或 $x+\frac{1}{x}\ge 2$，所以 $x+\frac{1}{x}-1\le -3$ 或 $x+\frac{1}{x}-1\ge 1$，

从而 $-\frac{2}{3}\le\frac{2}{x+\frac{1}{x}-1}<0$ 或 $0<\frac{2}{x+\frac{1}{x}-1}\le 2$，故 $\frac{1}{3}\le y<1$ 或 $1<y\le 3$，

综上所述，函数 $y=\frac{x^2+x+1}{x^2-x+1}$ 的值域为 $[\frac{1}{3},3]$.

解法 2：$y=\frac{x^2+x+1}{x^2-x+1}\Rightarrow y(x^2-x+1)=x^2+x+1$，整理得：$(y-1)x^2-(y+1)x+y-1=0$ ①，

当 $y=1$ 时，$x=0$；当 $y\ne 1$ 时，方程①可以看成关于 x 的一元二次方程，

其判别式 $\Delta=(y+1)^2-4(y-1)^2\ge 0$，解得：$\frac{1}{3}\le y\le 3(y\ne 1)$，

综上所述，函数 $y=\frac{x^2+x+1}{x^2-x+1}$ 的值域为 $[\frac{1}{3},3]$.

9.（2022・江苏模拟・★★）函数 $y=\frac{\sqrt{x^2+1}}{x^2+2}$ 的最大值为_____.

答案：$\frac{1}{2}$

解析：可将 $\sqrt{x^2+1}$ 看成关于 x 的一次表达式，将其换元成 t，

设 $t=\sqrt{x^2+1}$，则 $t\ge 1$，且 $y=\frac{\sqrt{x^2+1}}{x^2+2}=\frac{\sqrt{x^2+1}}{x^2+1+1}=\frac{t}{t^2+1}=\frac{1}{t+\frac{1}{t}}\le\frac{1}{2\sqrt{t\cdot\frac{1}{t}}}=\frac{1}{2}$，

当且仅当 $t=\frac{1}{t}$，即 $t=1$ 时取等号，此时 $x=0$，所以函数 $y=\frac{\sqrt{x^2+1}}{x^2+2}$ 的最大值为 $\frac{1}{2}$.

10.（2022・广西模拟・★★★）函数 $y=\frac{2x-1}{\sqrt{x-1}+1}$ 的最小值为_____.

答案：$2\sqrt{6}-4$

解析：解析式中分母这部分最复杂，将其整体换元，设 $t=\sqrt{x-1}+1$，则 $t\ge 1$，$x=(t-1)^2+1$，

所以 $y=\frac{2x-1}{\sqrt{x-1}+1}=\frac{2[(t-1)^2+1]-1}{t}=\frac{2t^2-4t+3}{t}=2t+\frac{3}{t}-4\ge 2\sqrt{2t\cdot\frac{3}{t}}-4=2\sqrt{6}-4$，

当且仅当 $2t=\frac{3}{t}$，即 $t=\frac{\sqrt{6}}{2}$ 时取等号，故函数 $y=\frac{2x-1}{\sqrt{x-1}+1}$ 的最小值为 $2\sqrt{6}-4$.