第 2 节 抛物线定义与几何性质综合问题（★★★）

内容提要

抛物线上的点到焦点的距离问题常用抛物线的定义求解，但除定义外，可能还需结合图形（如等腰、等边、直角三角形，矩形等）的几何性质才能求解问题，因此本节将归纳高考中抛物线常见的图形和几何条件的处理思路.

典型例题

类型Ⅰ：定义与特殊图形

【例 1】已知抛物线 $C: y^2 = 12x$ 的焦点为 F，准线为 l，点 A 在 C 上，且 $AB \perp l$ 于 B，若 $\angle FAB = \dfrac{2\pi}{3}$，则 $|BF| =$（　　）

（A）$2\sqrt{3}$　　（B）$4\sqrt{3}$　　（C）$\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$　　（D）$\dfrac{8\sqrt{3}}{3}$

解析： 如图，涉及抛物线上的点向准线作垂线，想到抛物线定义，

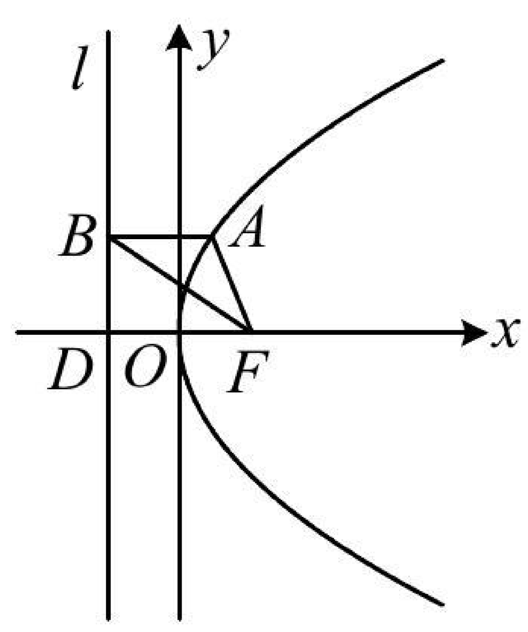
由题意，$|AB| = |AF|$，又 $\angle FAB = \dfrac{2\pi}{3}$，所以 $\angle ABF = \angle AFB = \dfrac{\pi}{6}$，

要求 $|BF|$，注意到 ΔBFD 为直角三角形且 $|FD|$ 已知，所以将条件转移到该三角形中来看，

记准线与 x 轴交于点 D，抛物线的焦点为 $F(3,0)$，准线为 $l: x = -3$，所以 $|FD| = 6$，

由 $\angle ABF = \dfrac{\pi}{6}$ 可得 $\angle DBF = \dfrac{\pi}{3}$，所以 $|BF| = \dfrac{|FD|}{\sin\angle DBF} = \dfrac{6}{\sin\dfrac{\pi}{3}} = 4\sqrt{3}$.

答案： B



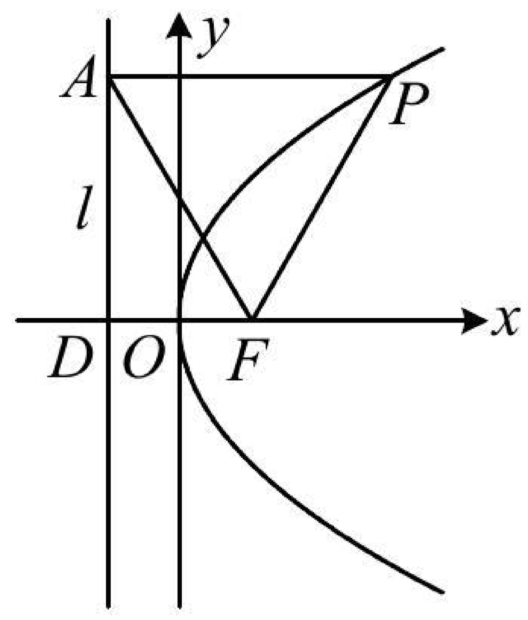
【反思】利用抛物线的定义可知，抛物线上的点 A 与焦点 F，以及点 A 在准线上的射影 B 所围成的三角形 ABF 是等腰三角形，且 FB 为 $\angle AFO$ 的角平分线.

【例 2】已知抛物线 $C: y^2 = 4x$ 的焦点为 F，准线为 l，点 P 在 C 上，$PA \perp l$ 于 A，若 $|PA| = |AF|$，则 $|AF| =$ ______.

解析： 如图，C 的焦点为 $F(1,0)$，准线为 $l: x = -1$，设 l 与 x 轴交于点 D，由抛物线定义，$|PA| = |PF|$，又 $|PA| = |AF|$，所以 ΔPAF 是正三角形，要算 $|AF|$，图中已知的长度只有 $|FD|$，故放到 ΔADF 中来看，

因为 $\angle PAF = 60^\circ$，所以 $\angle DAF = 30^\circ$，又 $|FD| = 2$，所以 $|AF| = \dfrac{|FD|}{\sin\angle DAF} = \dfrac{2}{\sin 30^\circ} = 4$.

答案：4



【变式】已知抛物线 $C:y^2=2px(p>0)$ 的焦点为 F，准线为 l，以 F 为圆心作圆与 C 交于 A，B 两点，与 l 交于 D，E 两点，$|AB|=|DE|=4\sqrt{3}$，则 $p=$______.

解析：如图，可尝试通过分析几何关系，求出点 A 的坐标，代入抛物线方程求 p，

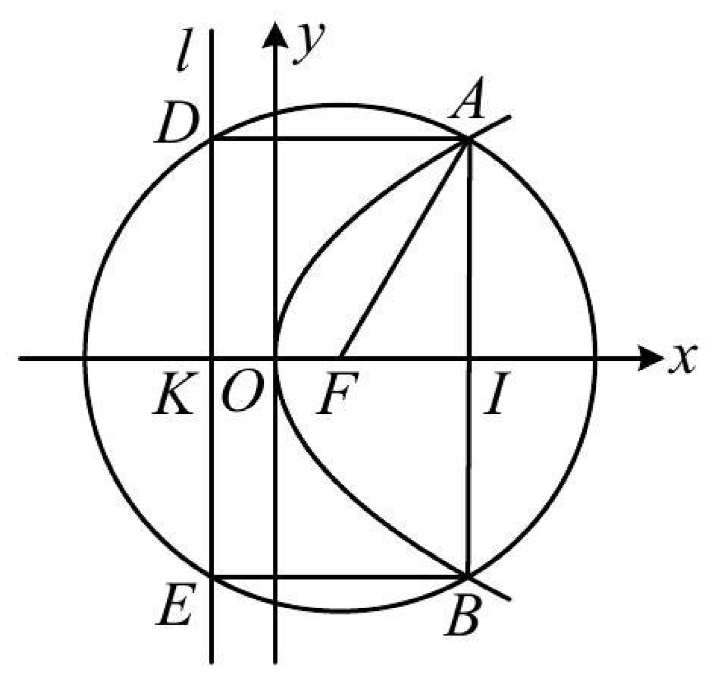
因为 $|AB|=|DE|=4\sqrt{3}$，所以 AB、DE 是同一圆中等长的弦，结合对称性可得四边形 $ABED$ 是矩形，

设准线 l 与 x 轴交于点 K，AB 与 x 轴交于点 I，则 $|KF|=p$，因为 $|AB|=|DE|$，所以 $|FI|=|KF|=p$，

故 $|OI|=|OF|+|FI|=\dfrac{3p}{2}$，又 $|AI|=\dfrac{1}{2}|AB|=2\sqrt{3}$，所以 $A(\dfrac{3p}{2},2\sqrt{3})$，

代入抛物线方程可得：$(2\sqrt{3})^2=2p\cdot\dfrac{3p}{2}$，解得：$p=2$.

答案：2



【例 3】已知抛物线 $E:y^2=2px(p>0)$ 的焦点为 F，点 A 是抛物线 E 的准线与坐标轴的交点，点 P 在抛物线 E 上，若 $\angle PAF=30^\circ$，则 $\dfrac{|PA|}{|PF|}=$______，$\sin\angle PFA=$______.

解析：涉及 $|PF|$，常用抛物线定义转化为 P 到准线的距离，

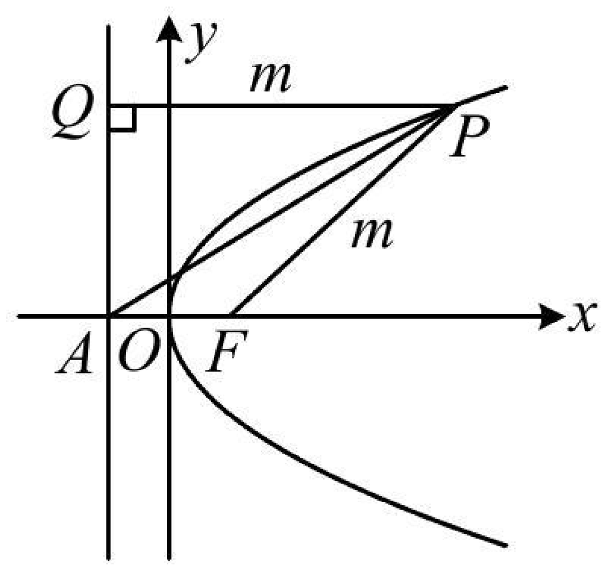
如图，作 $PQ\perp$ 准线于 Q，因为 $\angle PAF=30^\circ$，所以 $\angle PAQ=60^\circ$，设 $|PF|=m$，则 $|PQ|=m$，

所以 $|PA|=\dfrac{|PQ|}{\sin\angle PAQ}=\dfrac{m}{\sin 60^\circ}=\dfrac{2\sqrt{3}m}{3}$，故 $\dfrac{|PA|}{|PF|}=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$，

在 ΔPAF 中，PA 和 PF 所对的角恰好分别是 $\angle PFA$ 和 $\angle PAF$，故可用正弦定理求 $\sin\angle PFA$，

由正弦定理，$\dfrac{|PA|}{\sin\angle PFA}=\dfrac{|PF|}{\sin\angle PAF}$，所以 $\sin\angle PFA=\dfrac{|PA|\sin\angle PAF}{|PF|}=\dfrac{\frac{2\sqrt{3}m}{3}\times\frac{1}{2}}{m}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

答案：$\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$，$\dfrac{\sqrt{3}}{3}$



【变式】已知抛物线$C: y^2=2px(p>0)$的焦点为$F(1,0)$，准线与x轴交于点A，点M在第一象限且在抛物线C上，则当$\dfrac{|MF|}{|MA|}$取得最小值时，直线AM的方程为_____.

解析：涉及$|MF|$，想到用定义转化为M到准线的距离，如图1，作$MN\perp$准线于N，则$|MF|=|MN|$，

所以$\dfrac{|MF|}{|MA|}=\dfrac{|MN|}{|MA|}=\sin\angle MAN$，要使$\sin\angle MAN$最小，只需$\angle MAN$最小，此时的情形如图2，

图2中直线AM与抛物线相切，可联立方程用判别式$\Delta=0$求直线的方程，

抛物线C的准线为$x=-1$，所以$A(-1,0)$，故可设图2中切线AM的方程为$x=my-1$，

联立$\begin{cases}x=my-1\\ y^2=4x\end{cases}$消去$x$整理得：$y^2-4my+4=0$，

因为直线AM与抛物线相切，所以$\Delta=(-4m)^2-4\times1\times4=0$，解得：$m=\pm1$，

因为M在第一象限，所以$m=1$，故直线AM的方程为$x=y-1$，即$x-y+1=0$.

答案：$x-y+1=0$

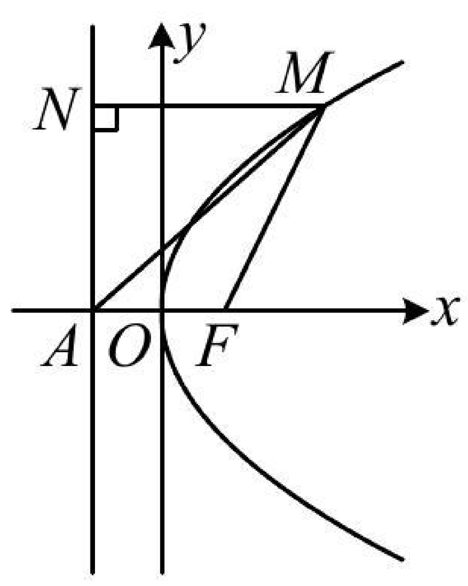


图1

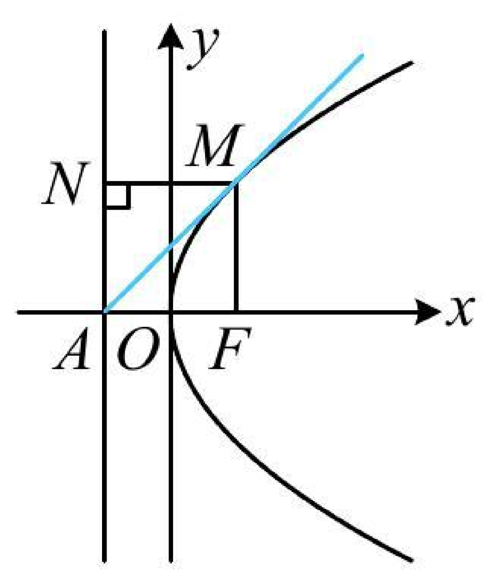


图2

类型Ⅱ：定义与线段比例、相似相关

【例4】设抛物线$y^2=4x$的焦点为F，不经过焦点的直线上有三个不同的点A，B，C，其中点A，B在抛物线上，点C在y轴上，B在线段AC上，则ΔBCF与ΔACF的面积之比是（　　）

（A）$\dfrac{|BF|-1}{|AF|-1}$　（B）$\dfrac{|BF|^2-1}{|AF|^2-1}$　（C）$\dfrac{|BF|+1}{|AF|+1}$　（D）$\dfrac{|BF|^2+1}{|AF|^2+1}$

解析：如图，两个三角形有相同的高（点F到直线AC的距离），故只需分析底边之比$\dfrac{|BC|}{|AC|}$. 选项中有$|AF|$

和$|BF|$，由此想到抛物线定义，故过 A，B 向准线作垂线，作出来就发现可用相似比来分析$\dfrac{|BC|}{|AC|}$，

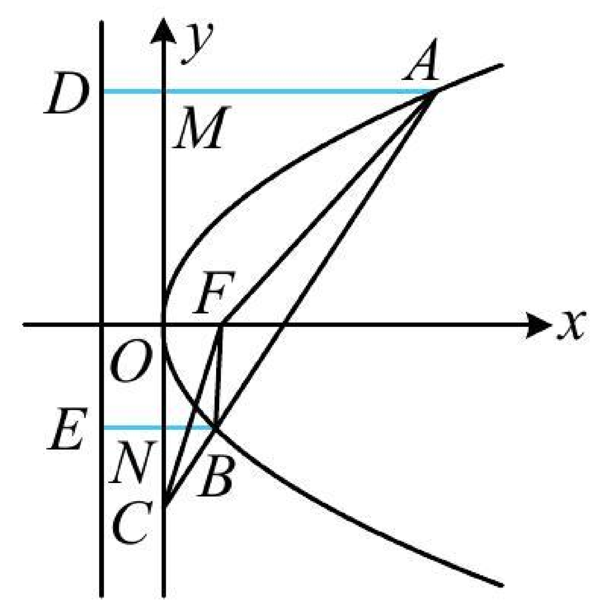
过 A，B 作抛物线准线 $x=-1$ 的垂线分别交 y 轴于 M，N，垂足分别为 D，E，则 $\Delta CBN \backsim \Delta CAM$，

所以 $\dfrac{|BC|}{|AC|}=\dfrac{|BN|}{|AM|}=\dfrac{|BE|-1}{|AD|-1}$ ①，

由抛物线定义，$|BE|=|BF|$，$|AD|=|AF|$，

代入①得：$\dfrac{|BC|}{|AC|}=\dfrac{|BF|-1}{|AF|-1}$，所以 $\dfrac{S_{\Delta BCF}}{S_{\Delta ACF}}=\dfrac{|BF|-1}{|AF|-1}$.

答案：A



【反思】抛物线中与焦点 F 有关的线段比例问题中，过抛物线上的点向准线作垂线，借助抛物线定义来分析图形的几何特征，是常规操作.

【变式 1】过抛物线 $y^2=2px(p>0)$ 的焦点 F 且斜率 $k>0$ 的直线交抛物线于 A，B 两点，交其准线 l 于点 C（B 在 F，C 之间），且 $|BC|=2|BF|$，$|AF|=12$，则直线 AB 的方程为_____.

解析：如图，作 $AA'\perp$准线于 A'，$BB'\perp$准线于 B'，设准线与 x 轴交于点 H，

先求直线 AB 的倾斜角 θ，可将$|BC|=2|BF|$转化为$|BB'|$和$|BC|$的关系，求得 $\angle CBB'$，该角等于 θ，

由抛物线定义，$|BF|=|BB'|$，代入$|BC|=2|BF|$可得$|BC|=2|BB'|$，所以 $\cos\angle CBB'=\dfrac{|BB'|}{|BC|}=\dfrac{1}{2}$，

故 $\angle CBB'=60^{\circ}$，又 $BB'\,//\,x$ 轴，所以 $\theta=60^{\circ}$，故直线 AB 的斜率 $k=\tan 60^{\circ}=\sqrt{3}$，

求直线 AB 的方程还差 F 的坐标，先求$|HF|$，可利用相似比转化为求$|AA'|$，

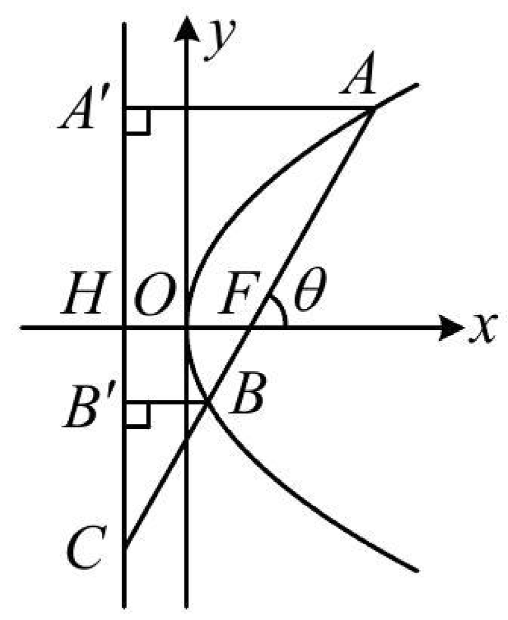
因为 $AA'\,//\,x$ 轴，所以 $\angle CAA'=\theta=60^{\circ}$，故$|AA'|=|AC|\cos\angle CAA'=\dfrac{1}{2}|AC|$ ①，

由抛物线定义，$|AA'|=|AF|$，代入①可得$|AF|=\dfrac{1}{2}|AC|$，所以 F 为 AC 中点，

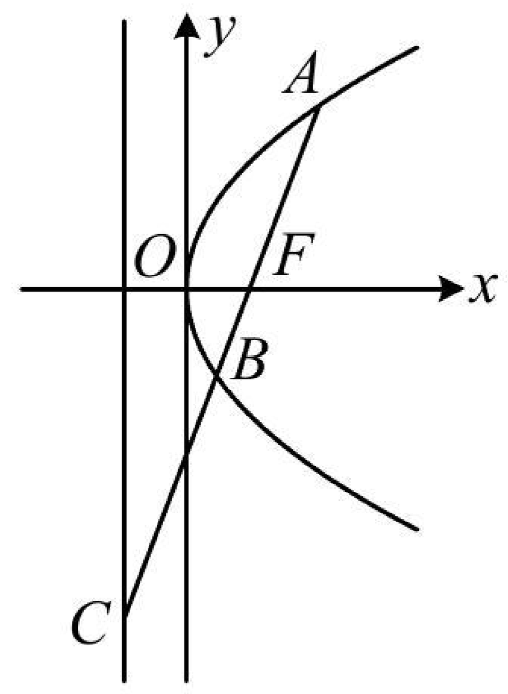
结合 $FH\,//\,AA'$ 可得$|FH|=\dfrac{1}{2}|AA'|=\dfrac{1}{2}|AF|=6$，所以 $F(3,0)$，

故直线 AB 的方程为 $y=\sqrt{3}(x-3)$，即 $y=\sqrt{3}x-3\sqrt{3}$.

答案：$y=\sqrt{3}x-3\sqrt{3}$



【变式 2】如图，过抛物线 $y^2=4x$ 的焦点 F 作直线与抛物线及其准线分别交于 A、B、C 三点，若 $\overrightarrow{FC}=4\overrightarrow{FB}$，则 $|AB|=$_____.



解析：抛物线的准线为 $x=-1$，焦点为 $F(1,0)$，设准线与 x 轴交于点 H，则 $|FH|=2$，

如图，作 $AA'\perp$准线于 A'，$BB'\perp$准线于 B'，则 $|AF|=|AA'|$，$|BF|=|BB'|$，

题干给出 $\overrightarrow{FC}=4\overrightarrow{FB}$ 这种线段比例式，可先设 $|BF|$，并求其它线段的长，再用相似比建立方程，

设 $|BF|=m$，则 $|BB'|=m$，因为 $\overrightarrow{FC}=4\overrightarrow{FB}$，所以 $|BC|=3|BF|=3m$，$|CF|=4m$，

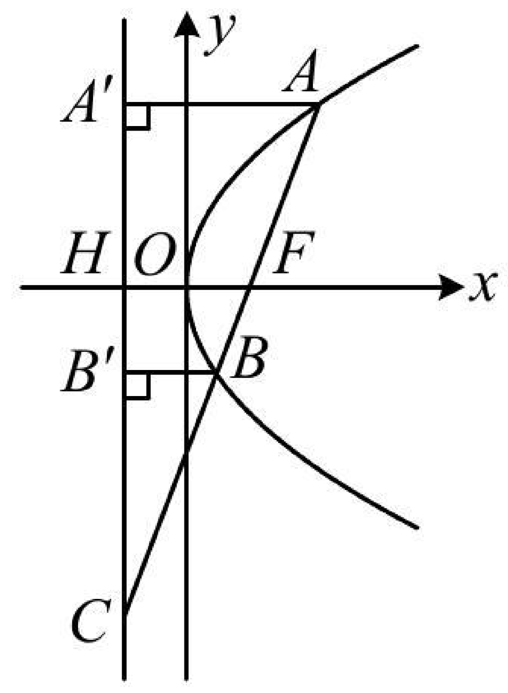
因为 $\Delta CBB'\backsim\Delta CFH$，所以 $\frac{|BB'|}{|FH|}=\frac{|BC|}{|CF|}$，即 $\frac{m}{2}=\frac{3m}{4m}$，解得：$m=\frac{3}{2}$，所以 $|BF|=\frac{3}{2}$，$|CF|=6$，

还需求出 $|AF|$，做法和求 $|BF|$ 类似，可设其为未知数，利用相似比来建立方程求解，

设 $|AF|=|AA'|=n$，则 $|AC|=|AF|+|CF|=n+6$，由 $\Delta CFH\backsim\Delta CAA'$ 可得 $\frac{|CF|}{|AC|}=\frac{|FH|}{|AA'|}$，

即 $\frac{6}{n+6}=\frac{2}{n}$，解得：$n=3$，所以 $|AF|=3$，故 $|AB|=|AF|+|BF|=3+\frac{3}{2}=\frac{9}{2}$.

答案：$\frac{9}{2}$



【反思】抛物线小题中出现未知长度的比例关系时，往往可设一段长，利用定义以及相似等几何性质求解

其它线段的长.

强化训练

1.（2022 • 合肥模拟 • ★★）已知抛物线$C:y^2=4\sqrt{3}x$的焦点为F，准线为l，过抛物线上一点P作准线的垂线，垂足为Q，若$\angle PFQ=60^\circ$，则$|PF|=$（　　）

（A）$4\sqrt{3}$　（B）$2\sqrt{3}$　（C）$\sqrt{3}$　（D）6

2.（2022 •岳阳模拟 •★★★）过抛物线$C:y^2=2px(p>0)$的焦点F且斜率$k>0$直线与C交于A，B两点，A在第一象限，过A作准线的垂线，垂足为H，若$\angle HFB$被x轴平分，则$k=$_____.

3.（2022 • 汕头模拟 • ★★★）已知抛物线$C:y^2=6x$的焦点为F，A为C上一点且在第一象限，以F为圆心，FA为半径的圆与抛物线C的准线交于M，N两点，且A，F，M三点共线，则$|AF|=$_____.

4.（2022 • 北京模拟 • ★★★）已知抛物线C的焦点为F，准线为l，过F的直线m与C交于点A和B，点A在l上的投影为D，若$|AB|=|BD|$，则$\dfrac{|AB|}{|AF|}=$（　　）

（A）$\dfrac{3}{2}$　（B）2　（C）$\dfrac{5}{2}$　（D）3

5.（2022 • 开平模拟 • ★★★）已知抛物线$C:y^2=16x$的焦点为F，M是C上一点，FM的延长线交y轴于点N，若$3\overrightarrow{FM}=2\overrightarrow{MN}$，则$|FN|=$_____.

6．（2022 • 河南模拟 • ★★★）过抛物线 $y^2=2px(p>0)$ 的焦点 F 的直线交抛物线于 A，B 两点，交其准线于点 C，若点 F 是 AC 的中点，且 $|AF|=4$，则 $|AB|=$_____.

7．（2022 • 巫山模拟 • ★★★）抛物线 $E:y^2=4x$ 的焦点为 F，过 F 的直线与 E 交于 A，B 两点，延长 FB 交 E 的准线 l 于点 C，过 A，B 作 l 的垂线，垂足分别为 M，N，若 $|BC|=2|BN|$，则 ΔAFM 的面积为（　　）

（A）$4\sqrt{3}$　（B）4　（C）$2\sqrt{3}$　（D）2

8．（2022 • 齐齐哈尔模拟 • ★★★★）已知抛物线 $C:y^2=2px(p>0)$ 的准线 $x=-1$ 与 x 轴交于点 A，F 为 C 的焦点，B 是 C 上第一象限内的一点，则当 $\dfrac{|BF|}{|AB|}$ 取得最小值时，ΔABF 的面积为（　　）

（A）2　（B）3　（C）4　（D）6

9．（2022 • 昆明模拟 • ★★★★）已知抛物线 $C:y^2=2px(p>0)$ 的焦点为 F，第一象限的 A，B 两点在抛物线上，且 $FA\perp AB$，$|AF|=7$，$|BF|=25$，若直线 AB 的倾斜角为 θ，则 $\cos\theta=$_____.

10．（2022 • 湖北模拟 • ★★★★）已知抛物线 C 的焦点为 F，点 A，B 在抛物线上，以 AB 为直径的圆过点 F，过线段 AB 的中点 P 作 C 的准线的垂线，垂足为 Q，则 $\dfrac{|PQ|}{|AB|}$ 的最大值为（　　）

（A）$\dfrac{1}{2}$　（B）$\dfrac{\sqrt{3}}{3}$　（C）$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　（D）1