模块六 解析几何大题基本思路（★★★☆）

内容提要

解析几何大题题型种类繁多，难度通常较高，系统性地归纳需要大量篇幅，本节我们先阐述解题的大致通用思路，用它能够应对一些较简单的解析几何大题. 诸多解析几何大题的解题流程是类似的，大致可分为以下四步（某些问题中 3，4 两步不一定都用到）.

1．引入参数：设出动点或动直线，刻画图形的运动过程. 如动点 P 可设为 (x_0,y_0)，若 P 在抛物线 $y^2=2px$ 上，则还可设为 $(\frac{y_0^2}{2p},y_0)$；动直线 l 可设为 $y=kx+b$ 或 $x=my+t$ 等.

2．条件翻译：翻译已知条件，建立所设参数间的关系，为下一步的消元或求范围做准备.

3．消元：利用韦达定理或由题目条件所得到的一些参数关系来消元.

4．求解：解决求值，求最值，求定值定点，证明等各类问题.

典型例题

类型Ⅰ：设动点引入参数

【例 1】已知椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左焦点为 $F(-2,0)$，右顶点为 $A(3,0)$.

（1）求 C 的方程；

（2）设 B 为 C 上异于左、右顶点的点，D 为线段 AB 的中点，O 为原点，直线 OD 与直线 $l:x=-\frac{9}{2}$ 交于点 E，求证：$AB\perp EF$.

解：（1）因为椭圆 C 的右顶点为 $A(3,0)$，所以 $a=3$，

又椭圆 C 的左焦点为 $F(-2,0)$，所以 $c^2=a^2-b^2=4$，从而 $b^2=a^2-4=5$，故 C 的方程为 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{5}=1$.

（2）（步骤 1：引入参数，如图，B 的运动导致 D，E 跟着动，B 是源头，故可设 B 的坐标）

设 $B(x_0,y_0)(x_0\neq\pm3)$，因为点 B 在椭圆 C 上，所以 $\frac{x_0^2}{9}+\frac{y_0^2}{5}=1$ ①，

（步骤 2：条件翻译，可由中点公式求出 D 的坐标，写出 OD 的方程，与 l 联立求 E，并求 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{EF}$，把它们全部用引入的参数来表示）

因为 D 为 AB 中点，所以 $D(\frac{x_0+3}{2},\frac{y_0}{2})$，故直线 OD 的方程为 $y=\frac{y_0}{x_0+3}x$，

与 $x=-\frac{9}{2}$ 联立可求得：$y=-\frac{9y_0}{2(x_0+3)}$，所以 $E(-\frac{9}{2},-\frac{9y_0}{2(x_0+3)})$，

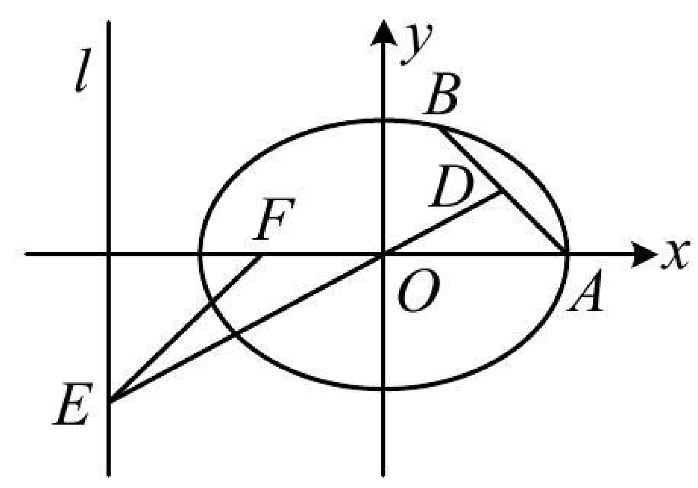
从而 $\overrightarrow{AB}=(x_0-3,y_0)$，$\overrightarrow{EF}=(\frac{5}{2},\frac{9y_0}{2(x_0+3)})$，故 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{EF}=\frac{5}{2}(x_0-3)+\frac{9y_0^2}{2(x_0+3)}$ ②，

（步骤 3：消元，式②中有 x_0 和 y_0 两个变量，要进一步计算，可结合式①来消元）

由①可得 $y_0^2=5(1-\frac{x_0^2}{9})=\frac{5}{9}(9-x_0^2)=\frac{5}{9}(3+x_0)(3-x_0)$，

代入②可得 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{EF}=\frac{5}{2}(x_0-3)+\frac{9y_0^2}{2(x_0+3)}=\frac{5}{2}(x_0-3)+\frac{9\times\frac{5}{9}(3+x_0)(3-x_0)}{2(x_0+3)}=\frac{5}{2}(x_0-3)+\frac{5}{2}(3-x_0)=0$，

（步骤 4：求解，由数量积等于 0 证得垂直）所以 $\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{EF}$，故 $AB\perp EF$.



类型Ⅱ：设动直线引入参数

【例 2】已知双曲线 $C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的一条渐近线方程为 $x-\sqrt{2}y=0$，焦点到渐近线的距离为 1.

（1）求 C 的方程；

（2）已知斜率为 $-\frac{1}{2}$ 的直线 l 与双曲线 C 交于 x 轴上方的 A，B 两点，O 为坐标原点，直线 OA，OB 的斜率之积为 $-\frac{1}{8}$，求 ΔAOB 的面积.

解：（1）因为双曲线 C 的一条渐近线为 $x-\sqrt{2}y=0$，即 $y=\frac{\sqrt{2}}{2}x$，所以 $\frac{b}{a}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，故 $a=\sqrt{2}b$ ①，

由题意，焦点 $(\pm c,0)$ 到渐近线的距离为 1，所以 $\frac{|\pm c|}{\sqrt{1^2+(-\sqrt{2})^2}}=1$，故 $c^2=a^2+b^2=3$ ②，

联立①②解得：$a=\sqrt{2}$，$b=1$，所以 C 的方程为 $\frac{x^2}{2}-y^2=1$.

（2）（步骤 1：引入变量，如图，l 是已知斜率的动直线，可设其方程）

由题意，直线 l 的斜率为 $-\frac{1}{2}$，故可设其方程为 $x=-2y+m$，

（步骤 2：条件翻译，需计算 $k_{OA}\cdot k_{OB}$，要设出 A，B 的坐标）

设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，则由题意，$k_{OA}\cdot k_{OB}=\frac{y_1}{x_1}\cdot\frac{y_2}{x_2}=\frac{y_1y_2}{x_1x_2}=-\frac{1}{8}$ ③，

（步骤 3：消元，利用韦达定理，将③中的 x_1x_2 和 y_1y_2 全部用引入的参数 m 来表示）

联立 $\begin{cases}x=-2y+m\\ \frac{x^2}{2}-y^2=1\end{cases}$ 消去 x 整理得：$2y^2-4my+m^2-2=0$，

判别式 $\Delta=(-4m)^2-4\times2\times(m^2-2)=8m^2+16>0$ 恒成立，由韦达定理，$y_1+y_2=2m$，$y_1y_2=\frac{m^2-2}{2}$ ④，

因为交点 A，B 都在 x 轴上方，所以 $\begin{cases}y_1+y_2>0\\ y_1y_2>0\end{cases}$，即 $\begin{cases}2m>0\\ \frac{m^2-2}{2}>0\end{cases}$，解得：$m>\sqrt{2}$，

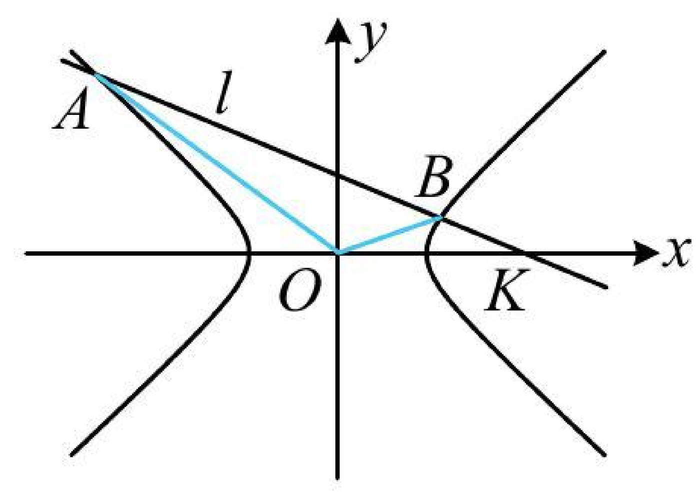
$x_1x_2=(-2y_1+m)(-2y_2+m)=4y_1y_2-2m(y_1+y_2)+m^2=4\times\dfrac{m^2-2}{2}-2m\cdot 2m+m^2=-m^2-4$ ⑤，

（步骤 4：求解，如图，可按 $S=\frac{1}{2}|OK|\cdot|y_1-y_2|$ 来算 ΔAOB 的面积）

将④⑤代入③可得：$\dfrac{\frac{m^2-2}{2}}{-m^2-4}=-\dfrac{1}{8}$，解得：$m=\pm2$，又 $m>\sqrt{2}$，所以 $m=2$ ⑥，

直线 l 与 x 轴的交点为 $K(m,0)$，$|y_1-y_2|=\dfrac{\sqrt{\Delta}}{|2|}=\dfrac{\sqrt{8m^2+16}}{2}=\sqrt{2m^2+4}$，

所以 $S_{\Delta AOB}=\dfrac{1}{2}|OK|\cdot|y_1-y_2|=\dfrac{1}{2}|m|\cdot\sqrt{2m^2+4}$，将式⑥代入可得 $S_{\Delta AOB}=2\sqrt{3}$.



【总结】在条件翻译的过程中，若要求的量能直接用参数表示，则直接计算，如例 1 中的 D，E 的坐标和直线 OD 的方程；若要求的量不方便直接用参数表示，则可通过韦达定理等方式间接地用参数表示，如例 2 中的 $k_{OA}\cdot k_{OB}$，这也是我们联立直线与曲线的方程，写出韦达定理的原因.

1．（2021•全国乙卷•★★★）已知抛物线 $C:y^2=2px(p>0)$ 的焦点 F 到准线的距离为 2.

（1）求 C 的方程；

（2）已知 O 为坐标原点，点 P 在 C 上，点 Q 满足 $\overrightarrow{PQ}=9\overrightarrow{QF}$，求直线 OQ 的斜率的最大值.

2．（2022•南京模拟•★★★）在平面直角坐标系 xOy 中，点 $A(-2,0)$，过动点 P 作直线 $x=-4$ 的垂线，垂足为 M，$\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AP}=-4$，记动点 P 的轨迹为曲线 E.

（1）求曲线 E 的方程；

（2）过点 A 的直线 l 交曲线 E 于不同的两点 B 和 C，若 B 为线段 AC 的中点，求直线 l 的方程.

3．（2022 • 昆明模拟 • ★★★★）过点$P(2,1)$的直线l与双曲线$C:\dfrac{x^2}{4}-y^2=1$交于A，B两点，O为原点.

（1）判断点P能否为线段AB的中点，说明理由；

（2）记直线OA，OB的斜率分别为k_1，k_2，若$k_1+k_2=\dfrac{2}{5}$，求直线l的方程.

4．（2022 • 南京模拟 • ★★★★）过点$D(-1,2)$的直线与抛物线$x^2=2py(p>0)$交于A，B两点.

（1）当A的坐标为$(-2,1)$时，求点B的坐标；

（2）已知点$P(0,2)$，若D为线段AB的中点，求ΔPAB面积的最大值.