第 6 节 隐圆问题（★★★）

内容提要

本节归纳高考中几类常见的隐圆问题：

1．定长对定点：平面上到定点 $C(a,b)$ 的距离等于定长 r 的点 P 的轨迹是圆，如图 1.

2．定长对定角：

①平面上过两定点 A 和 B 的直线 l_1、l_2 互相垂直，则它们交点 P 的轨迹为圆，如图 2.

②平面上与两定点 A 和 B 所成视角为固定锐角或钝角的点的轨迹为一段圆弧，如图 3.

3．定长对定比（阿氏圆）：设 A 和 B 是平面内两定点，若点 P 满足 $\dfrac{|PA|}{|PB|}=\lambda(\lambda>0$ 且 $\lambda\neq1)$，则点 P 的轨迹是圆，该圆被称为阿氏圆，如图 4.

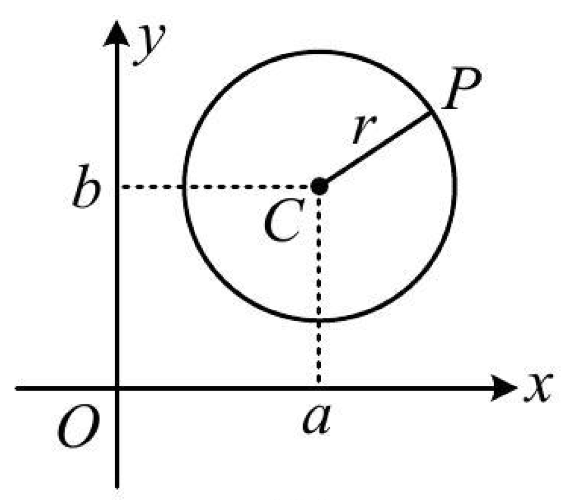


图1

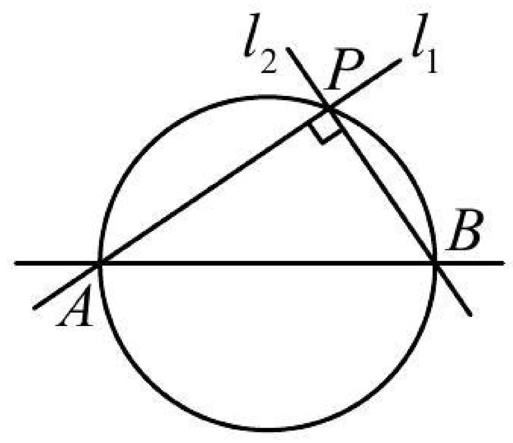


图2

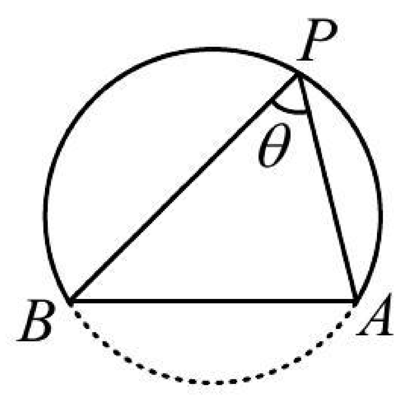


图3

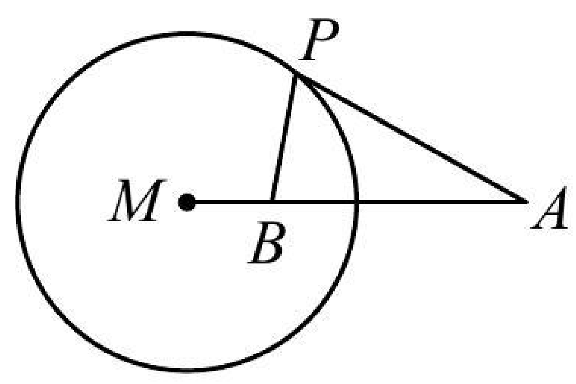


图4

典型例题

类型Ⅰ：定长对定点

【例 1】如果圆 $C:(x-a)^2+(y-1)^2=1$ 上存在两个点到原点 O 的距离为 2，则正实数 a 的取值范围是_____.

解析： 到原点的距离为 2 的点在圆 $O:x^2+y^2=4$ 上，故问题等价于圆 C 和圆 O 有两个交点，

由题意，圆 C 的圆心为 $C(a,1)$，半径 $r_1=1$，圆 O 的半径 $r_2=2$，所以 $|OC|=\sqrt{a^2+1}$，

两圆相交 $\Rightarrow|r_1-r_2|<|OC|<r_1+r_2\Rightarrow1<\sqrt{a^2+1}<3$，结合 $a>0$ 可解得：$0<a<2\sqrt{2}$.

答案： $(0,2\sqrt{2})$

【例 2】过圆 $C:(x-1)^2+y^2=1$ 外一点 P 作圆 C 的两条切线 PA，PB，切点分别为 A 和 B，若 $PA\perp PB$，则点 P 到直线 $l:x+y-4=0$ 的距离的最小值为_____.

解析： 先分析点 P 的运动轨迹，$\angle APB$ 的大小由 $|PC|$ 决定，故可由 $PA\perp PB$ 求得 $|PC|$，

如图，$PA\perp PB\Rightarrow\angle APC=45^\circ\Rightarrow\Delta PAC$ 是等腰直角三角形，所以 $|PC|=\sqrt{2}|AC|=\sqrt{2}$，

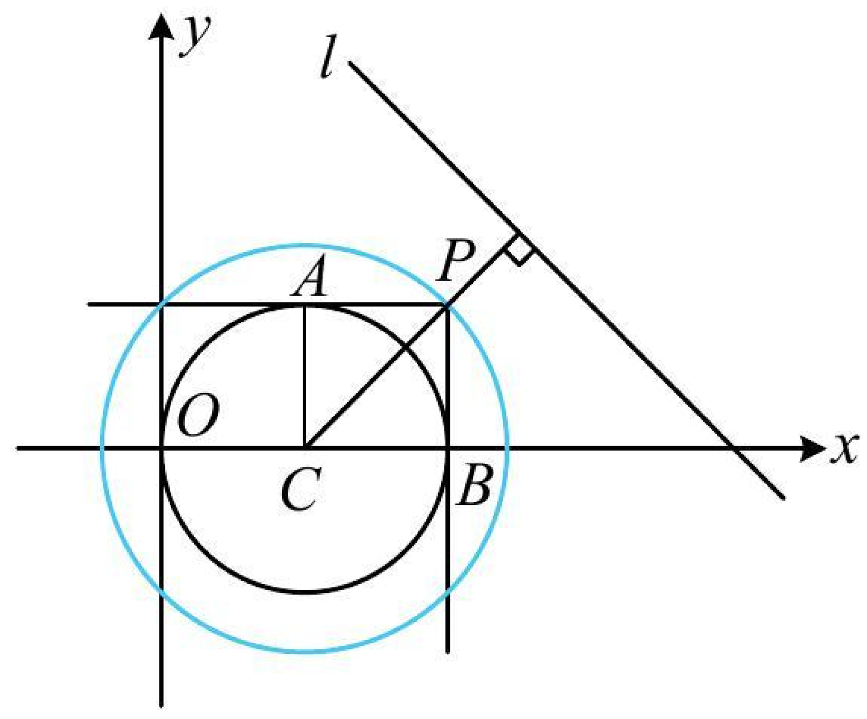
注意到 C 是定点，所以点 P 的轨迹是以 $C(1,0)$ 为圆心，$\sqrt{2}$ 为半径的圆，如图，

接下来就是圆上动点到定直线距离的最值问题了，先求圆心 C 到直线 l 的距离 d，

$d=\dfrac{|1-4|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}>\sqrt{2}$，直线 l 与点 P 所在的圆相离，图中点 P 即为所求距离最小的情形，

所以点 P 到直线 l 的距离的最小值为 $\dfrac{3\sqrt{2}}{2}-\sqrt{2}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

答案：$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$



【反思】从上面两道题可以看出，动点 P 与定点 C 之间的距离为定值这种条件隐含了点 P 的轨迹是圆，在诸多问题中，发现这一特征，往往是解题的关键.

类型Ⅱ：定长对定角

【例 3】已知点 $A(-2,0)$，$B(2,0)$，$C(4,3)$，动点 P 满足 $PA\perp PB$，则 $|PC|$ 的取值范围是（　　）

（A）$[2,5]$　　（B）$[2,8]$　　（C）$[3,7]$　　（D）$[4,6]$

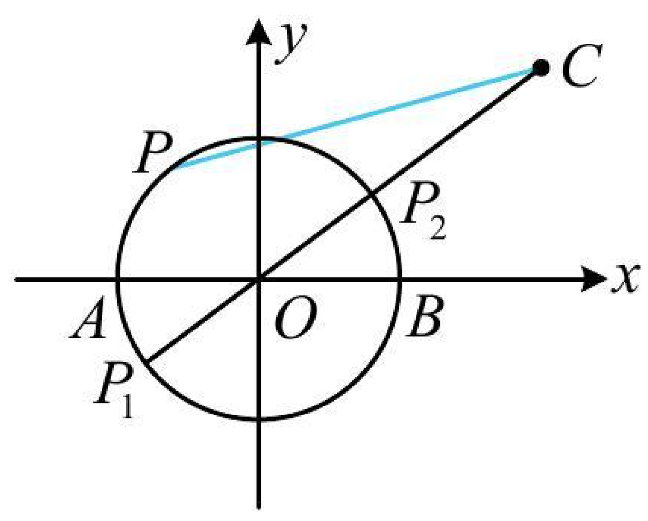
解析： A、B 是定点，由 $PA\perp PB$ 可知点 P 的轨迹是以 AB 为直径的圆，先求出该圆，

由题意，点 P 在圆 $x^2+y^2=4$ 上（不含 A、B 两点），

如图，点 C 在圆外，$|PC|$ 的最大、最小值分别在 P_1、P_2 处取得，

因为 $|OC|=\sqrt{4^2+3^2}=5$，所以 $|PC|_{\max}=|OC|+|OP_1|=7$，$|PC|_{\min}=|OC|-|OP_2|=3$.

答案： C



【变式 1】已知点 $A(a,0)$，$B(-a,0)$，其中 $a>0$，若圆 $C:(x-\sqrt{3})^2+(y-1)^2=4$ 上存在点 P，使 $\angle APB=90^\circ$，则 a 的取值范围是（　　）

（A）$(0,4)$　　（B）$(0,4]$　　（C）$[2,3]$　　（D）$[1,2]$

解析： $\angle APB=90^\circ$ 隐含了点 P 的轨迹是圆，先把该圆找到，

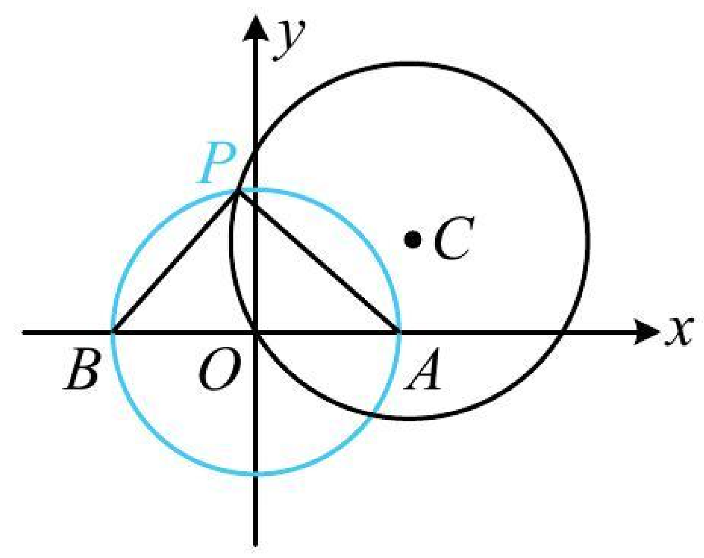
因为 $\angle APB=90^\circ$，所以点 P 在以 AB 为直径的圆上，该圆的圆心为原点 O，半径 $r_1=a$，

点 P 也在圆 C 上，于是两圆应有交点，如图，可根据圆与圆的位置关系来求 a 的范围，

由题意，圆 C 的圆心为 $C(\sqrt{3},1)$，半径 $r_2=2$，所以 $|OC|=2$，

两圆有交点 $\Rightarrow |r_1-r_2|\le|OC|\le r_1+r_2$，所以 $|a-2|\le 2\le a+2$，结合 $a>0$ 解得：$0<a\le 4$.

答案： B



【变式 2】已知 m，n 不同时为 0，过点 $P(2,6)$ 作直线 $l:2mx-(4m+n)y+2n=0$ 的垂线 l'，垂足为 M，O 为原点，则 $|OM|$ 的取值范围是（　　）

（A）$[5-2\sqrt{5},5+2\sqrt{5}]$　　（B）$[5-\sqrt{5},5+\sqrt{5}]$　　（C）$[5-\sqrt{3},5+\sqrt{3}]$　　（D）$[5,5+\sqrt{5}]$

解析： 直线 l 含参，先看看它是否过定点，$2mx-(4m+n)y+2n=0\Rightarrow m(2x-4y)+n(2-y)=0$，

令 $\begin{cases}2x-4y=0\\2-y=0\end{cases}$ 可得：$\begin{cases}x=4\\y=2\end{cases}$，所以直线 l 过定点 $Q(4,2)$，

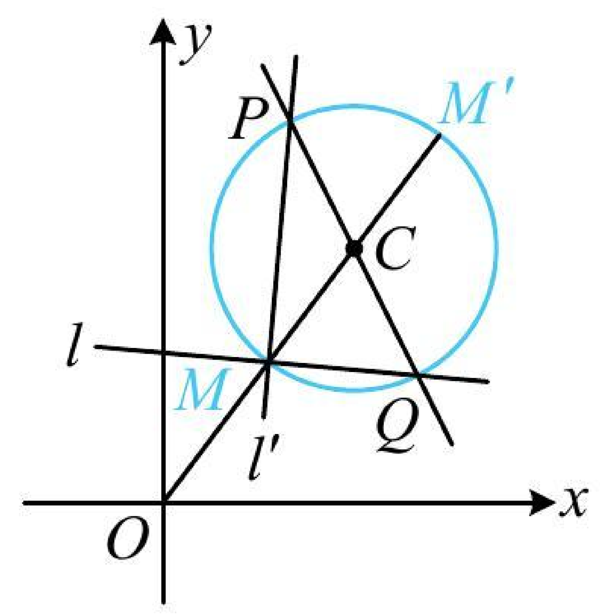
如图，$l\perp l'$，垂足为 M，所以点 M 的轨迹是以 PQ 为直径的圆，圆心为 $C(3,4)$，半径 $r=\frac{1}{2}|PQ|=\sqrt{5}$，

接下来就是圆外定点与圆上动点距离的范围问题了，$|OM|$ 最小的情形如图，最大时 M 为图中的 M'，

因为 $|OC|=\sqrt{3^2+4^2}=5$，所以图中 $|OM|=|OC|-r=5-\sqrt{5}$，$|OM'|=|OC|+r=5+\sqrt{5}$，

故 $|OM|$ 的取值范围是 $[5-\sqrt{5},5+\sqrt{5}]$.

答案： B



【反思】 从例 3 和两个变式可以看出，涉及过两定点的两动直线互相垂直时，它们的交点的轨迹是圆.

类型Ⅲ：定长对定比（阿氏圆）

【例 4】若点 C 到 $A(-1,0)$，$B(1,0)$ 的距离之比为 $\sqrt{3}$，则点 C 到直线 $l:x-2y+3=0$ 的距离的最小值为_____.

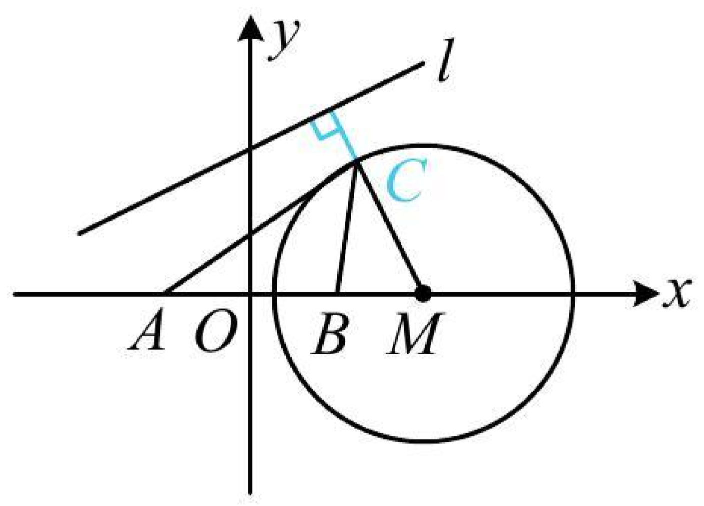
解析： 要求目标，需找 C 的轨迹，可设 C 的坐标，利用两点距离公式翻译距离之比的条件，

设 $C(x,y)$，则由 $\frac{|CA|}{|CB|}=\sqrt{3}$ 可得 $\frac{\sqrt{(x+1)^2+y^2}}{\sqrt{(x-1)^2+y^2}}=\sqrt{3}$，整理得：$(x-2)^2+y^2=3$，

所以点 C 在圆心为 $M(2,0)$，半径 $r=\sqrt{3}$ 的圆上，圆心 M 到直线 l 的距离 $d=\frac{|2+3|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}=\sqrt{5}>\sqrt{3}$，

直线 l 与圆 M 相离，图中的点 C 即为到 l 距离最小的情形，故所求距离的最小值为 $d-r=\sqrt{5}-\sqrt{3}$.

答案： $\sqrt{5}-\sqrt{3}$



强化训练

1.（2014·北京卷·★★★）已知圆 $C:(x-3)^2+(y-4)^2=1$ 和两点 $A(-m,0)$，$B(m,0)(m>0)$，若圆 C 上存在点 P，使得 $\angle APB=90^\circ$，则 m 的最大值为（　　）

（A）7　（B）6　（C）5　（D）4

2.（★★★）若圆 $C:x^2+y^2-6x-6y-m=0$ 上有到点 $P(-1,0)$ 的距离为 1 的点，则实数 m 的取值范围是(　　)

（A）$[-18,6]$　（B）$[-2,6]$　（C）$[-2,18]$　（D）$[4,18]$

3．（★★★）在平面直角坐标系 xOy 中，已知点 $A(1,0)$，$B(4,0)$，若直线 $x-y+m=0$ 上存在点 P 使得 $|PB|=2|PA|$，则实数 m 的取值范围为_____.

4.（2022•黄山模拟•★★★★）已知点 $P(-3,0)$ 在动直线 $l:mx+ny-(m+3n)=0$ 上的投影为 M，若点 $N(2,\frac{3}{2})$，则 $|MN|$ 的最大值为（　　）

（A）1　（B）$\frac{3}{2}$　（C）2　（D）$\frac{11}{2}$

5．（2022 • 河南模拟 • ★★★★）已知点$M(0,-a)$，$N(0,a)$，$a>0$，若圆$C:(x-3)^2+(y+4)^2=9$上存在点P使得$\angle MPN$为钝角，则a的取值范围是_____.

由图可知，当$a>2$时，圆C上有点在圆O内部，故a的取值范围是$(2,+\infty)$.