第 4 节 高考中抛物线常用的二级结论（★★☆）

强化训练

1.（2020•新高考Ⅰ卷•★★）斜率为$\sqrt{3}$的直线过抛物线$C:y^2=4x$的焦点，且与C交于A、B两点，则$|AB|=$______.

答案：$\dfrac{16}{3}$

解法 1：直线AB过焦点且已知斜率，可写出其方程，与抛物线联立，用坐标版焦点弦公式求$|AB|$，

由题意，$p=2$，抛物线C的焦点为$F(1,0)$，过F且斜率为$\sqrt{3}$的直线为$y=\sqrt{3}(x-1)$，

联立$\begin{cases}y=\sqrt{3}(x-1)\\y^2=4x\end{cases}$消去$y$整理得：$3x^2-10x+3=0$，所以$x_A+x_B=\dfrac{10}{3}$，故$|AB|=x_A+x_B+2=\dfrac{16}{3}$.

解法 2：由斜率能求出倾斜角，故也可用角版焦点弦公式算$|AB|$，

由题意，$p=2$，直线AB的斜率为$\sqrt{3}\Rightarrow$其倾斜角$\alpha=60^\circ$，所以$|AB|=\dfrac{2p}{\sin^2\alpha}=\dfrac{4}{\sin^2 60^\circ}=\dfrac{16}{3}$.

2.（★★）设F为抛物线$C:y^2=3x$的焦点，过F且倾斜角为30°的直线交C于A，B两点，O为原点，则ΔAOB的面积为______.

答案：$\dfrac{9}{4}$

解析：已知直线的倾斜角，代公式$S=\dfrac{p^2}{2\sin\alpha}$即可求$\Delta AOB$的面积，

由题意，$p=\dfrac{3}{2}$，直线AB的倾斜角$\alpha=30^\circ$，所以$S_{\Delta AOB}=\dfrac{p^2}{2\sin\alpha}=\dfrac{(\frac{3}{2})^2}{2\sin 30^\circ}=\dfrac{9}{4}$.

3.（★★★）过抛物线$y^2=2x$的焦点F作直线交抛物线于A，B两点，若$|AB|=\dfrac{25}{12}$，$|AF|<|BF|$，则$|AF|=$______.

答案：$\dfrac{5}{6}$

解法 1：已知$|AB|$，可由角版焦点弦公式求角，再代入焦半径公式算$|AF|$，

不妨设直线AB为如图所示的情形，设$\angle AFO=\alpha(0<\alpha<\dfrac{\pi}{2})$，则$|AB|=\dfrac{2}{\sin^2\alpha}=\dfrac{25}{12}\Rightarrow\sin\alpha=\dfrac{2\sqrt{6}}{5}$，

所以$\cos\alpha=\sqrt{1-\sin^2\alpha}=\dfrac{1}{5}$，故$|AF|=\dfrac{1}{1+\cos\alpha}=\dfrac{1}{1+\frac{1}{5}}=\dfrac{5}{6}$.

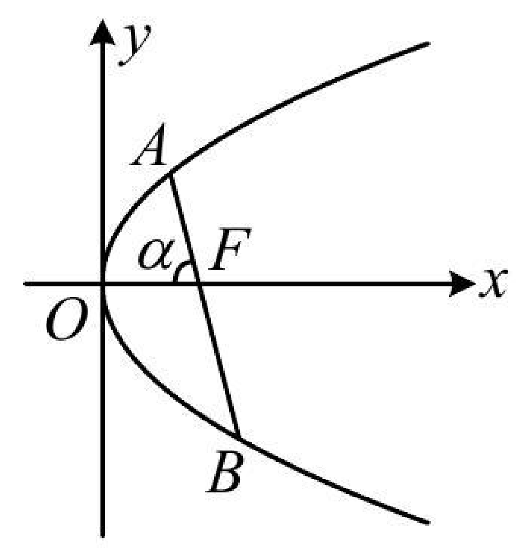
解法 2：$|AB|$可转换成$|AF|+|BF|$，把$|AF|$，$|BF|$看成未知数，结合$\dfrac{1}{|AF|}+\dfrac{1}{|BF|}=\dfrac{2}{p}$即可求解$|AF|$，

由题意，$p=1$，所以$\dfrac{1}{|AF|}+\dfrac{1}{|BF|}=\dfrac{2}{p}=2$ ①，又$|AB|=|AF|+|BF|=\dfrac{25}{12}$ ②，

由①可得$\dfrac{|AF|+|BF|}{|AF|\cdot|BF|}=2$，结合式②可得$|AF|\cdot|BF|=\dfrac{25}{24}$ ③，

由②③知$|AF|$，$|BF|$是一元二次方程$x^2-\dfrac{25}{12}x+\dfrac{25}{24}=0$的两根，解得：$x=\dfrac{5}{6}$或$\dfrac{5}{4}$，

因为$|AF|<|BF|$，所以$|AF|=\dfrac{5}{6}$.



4.（★★★）过抛物线$C:y^2=3x$的焦点F的直线与C交于A、B两点，若$|AF|=2|BF|$，则$|AB|=$______.

答案：$\dfrac{27}{8}$

解法 1：由$|AF|=2|BF|$可用角版焦半径公式建立方程求角，从而求得$|AB|$，

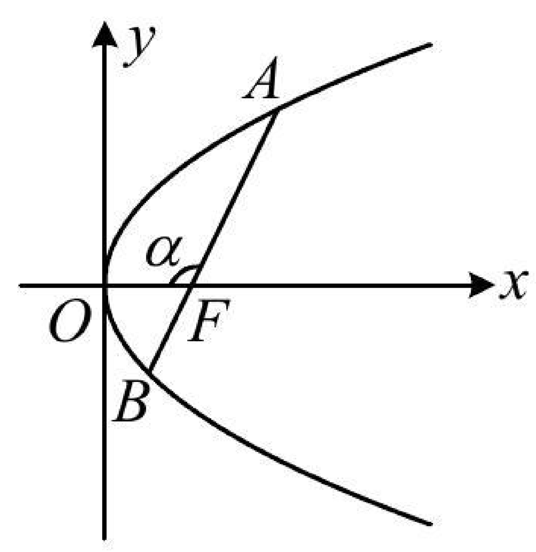
如图，设$\angle AFO=\alpha$，则$|AF|=\dfrac{p}{1+\cos\alpha}$，$|BF|=\dfrac{p}{1+\cos(\pi-\alpha)}=\dfrac{p}{1-\cos\alpha}$，

因为$|AF|=2|BF|$，所以$\dfrac{p}{1+\cos\alpha}=2\cdot\dfrac{p}{1-\cos\alpha}$，从而$\cos\alpha=-\dfrac{1}{3}$，故$|AB|=\dfrac{2p}{\sin^2\alpha}=\dfrac{2p}{1-\cos^2\alpha}=\dfrac{3}{1-(-\frac{1}{3})^2}=\dfrac{27}{8}$.

解法 2：由$|AF|=2|BF|$结合$\dfrac{1}{|AF|}+\dfrac{1}{|BF|}=\dfrac{2}{p}$也可求出$|AF|$和$|BF|$，进而求得$|AB|$，

由题意，$p=\dfrac{3}{2}$，所以$\dfrac{1}{|AF|}+\dfrac{1}{|BF|}=\dfrac{2}{p}=\dfrac{4}{3}$，结合$|AF|=2|BF|$可得$|AF|=\dfrac{9}{4}$，$|BF|=\dfrac{9}{8}$，

所以$|AB|=|AF|+|BF|=\dfrac{27}{8}$.



5.（2022•张掖模拟•★★★）已知抛物线$C:y^2=4x$的焦点为F，O为原点，过F的直线l与C交于P，Q两点，且$\overrightarrow{PF}=3\overrightarrow{FQ}$，则$\Delta OPQ$的面积为（　　）

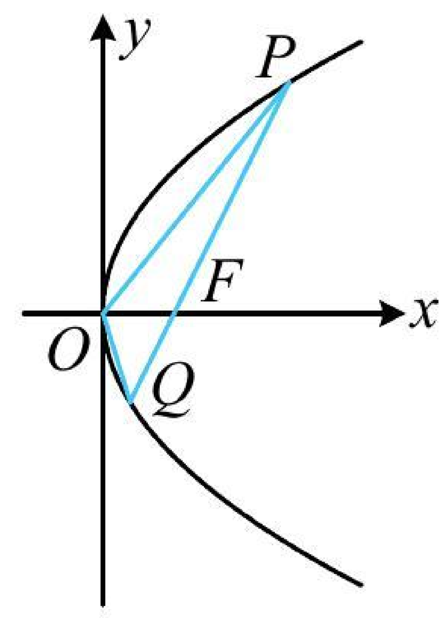
（A）$\sqrt{3}$　（B）$2\sqrt{3}$　（C）$\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$　（D）$\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$

答案：D

解析：如图，由$\overrightarrow{PF}=3\overrightarrow{FQ}$可得$|PF|$与$|QF|$的长度关系，故可用角版焦半径公式计算，

$\overrightarrow{PF}=3\overrightarrow{FQ}\Rightarrow|PF|=3|QF|$，设$\angle PFO=\alpha$，则$|PF|=\dfrac{p}{1+\cos\alpha}=\dfrac{2}{1+\cos\alpha}$，$|QF|=\dfrac{p}{1+\cos(\pi-\alpha)}=\dfrac{2}{1-\cos\alpha}$，

所以$\dfrac{2}{1+\cos\alpha}=3\cdot\dfrac{2}{1-\cos\alpha}$，解得：$\cos\alpha=-\dfrac{1}{2}$，从而$\alpha=\dfrac{2\pi}{3}$，故$S_{\Delta OPQ}=\dfrac{p^2}{2\sin\alpha}=\dfrac{4}{2\sin\dfrac{2\pi}{3}}=\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$.



6．（★★★）已知抛物线$C:y^2=2px(p>0)$的焦点为F，准线为l，过点F作倾斜角为120°的直线与准线l相交于点A，线段AF与C相交于点B，且$|AB|=\dfrac{4}{3}$，则C的方程为_____.

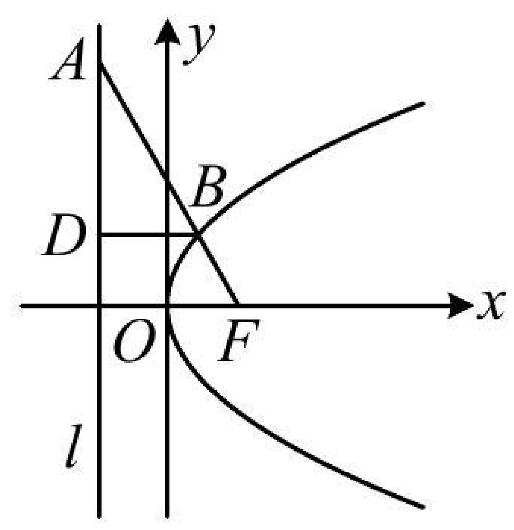
答案：$y^2=2x$

解析：如图，过B作$BD\perp l$于D，直线AF的倾斜角为120°，所以$\angle AFO=\angle ABD=60^\circ$，

已知$|AB|=\dfrac{4}{3}$，可在ΔABD中求$|BD|$，结合抛物线定义得出$|BF|$，再由角版焦半径公式建立方程求p，

从而$|BD|=|AB|\cos\angle ABD=\dfrac{2}{3}$，由抛物线定义，$|BF|=|BD|=\dfrac{2}{3}$，

又$|BF|=\dfrac{p}{1+\cos\angle BFO}=\dfrac{p}{1+\cos60^\circ}=\dfrac{2p}{3}$，所以$\dfrac{2p}{3}=\dfrac{2}{3}$，解得：$p=1$，故$C$的方程为$y^2=2x$.



7．（★★★）已知F为抛物线$y^2=2px(p>0)$的焦点，过F且倾斜角为45°的直线l与抛物线交于A，B两点，线段AB的中垂线与x轴交于点M，则$\dfrac{4p}{|FM|}=$_____.

答案：2

解法1：涉及中垂线，可先把直线l与抛物线联立，结合韦达定理求出AB中点，写出中垂线的方程，

由题意，$F(\dfrac{p}{2},0)$，直线AB的方程为$y=x-\dfrac{p}{2}$，即$x=y+\dfrac{p}{2}$，设$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，

将 $x=y+\frac{p}{2}$ 代入 $y^2=2px$ 消去 x 整理得：$y^2-2py-p^2=0$，判别式 $\Delta=(-2p)^2-4\times1\times(-p^2)=8p^2>0$，

由韦达定理，$y_1+y_2=2p$，所以 $x_1+x_2=y_1+\frac{p}{2}+y_2+\frac{p}{2}=y_1+y_2+p=3p$，故 AB 中点 G 为 $(\frac{3p}{2},p)$，

所以 AB 中垂线的方程为 $y-p=-(x-\frac{3p}{2})$ ①，由此中垂线可求 M 的坐标，进而求得 $|FM|$，

在①中令 $y=0$ 得：$x=\frac{5p}{2}$，故 $M(\frac{5p}{2},0)$，所以 $|FM|=\frac{5p}{2}-\frac{p}{2}=2p$，故 $\frac{4p}{|FM|}=2$.

解法 2：如图，要求 $|FM|$，结合 $\angle GFM$ 是已知的，可先求 $|FG|$，

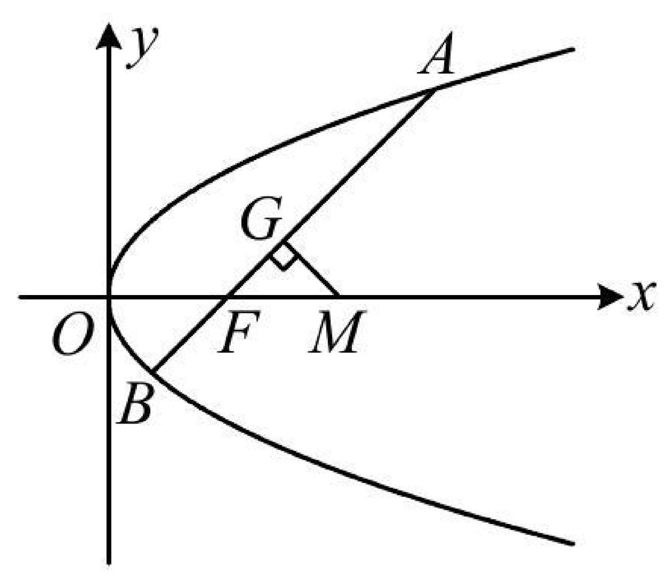
因为 G 为 AB 中点，所以 $|FG|=|AF|-|AG|=|AF|-\frac{1}{2}|AB|$ ①，

已知 l 的倾斜角，可用角版焦半径和焦点弦公式来算 $|AF|$ 和 $|AB|$，

直线 l 的倾斜角为 $45^\circ \Rightarrow \angle GFM=45^\circ \Rightarrow \angle AFO=135^\circ$，所以 $|AF|=\frac{p}{1+\cos135^\circ}$，$|AB|=\frac{2p}{\sin^2135^\circ}$，

代入①得：$|FG|=\frac{p}{1+\cos135^\circ}-\frac{1}{2}\cdot\frac{2p}{\sin^2135^\circ}=\sqrt{2}p$，

又 $\angle GFM=45^\circ$，所以 ΔGFM 是等腰直角三角形，从而 $|FM|=\sqrt{2}|FG|=2p$，故 $\frac{4p}{|FM|}=2$.



8．（★★★★）过抛物线 $C:y^2=4x$ 焦点 F 作两条互相垂直的直线分别与 C 交于 A、B 和 D、E 四点，则四边形 $ADBE$ 的面积 S 的最小值为_____.

答案：32

解法 1：四边形 $ADBE$ 的对角线互相垂直，所以 $S=\frac{1}{2}|AB|\cdot|DE|$，而 $|AB|$ 和 $|DE|$ 都是焦点弦，可设直线的方程，与抛物线联立，结合韦达定理来算，

由题意，$F(1,0)$，两直线都不与坐标轴垂直，可设直线 $AB:y=k(x-1)(k\neq0)$，设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，

联立 $\begin{cases}y=k(x-1)\\y^2=4x\end{cases}$ 消去 y 整理得：$k^2x^2-(2k^2+4)x+k^2=0$，

由韦达定理，$x_1+x_2=\frac{2k^2+4}{k^2}=2+\frac{4}{k^2}$，所以 $|AB|=x_1+x_2+2=4+\frac{4}{k^2}$ ①，

因为 $DE\perp AB$，所以直线 DE 的方程为 $y=-\frac{1}{k}(x-1)$，

两直线仅斜率不同，其它都一样，故只需在 $|AB|$ 的结果中替换斜率即得 $|DE|$，无需重复计算，

在①中用$-\frac{1}{k}$替换k可得：$|DE|=4+4k^2$，

四边形$ADBE$的面积$S=\frac{1}{2}|AB|\cdot|DE|=\frac{1}{2}(4+\frac{4}{k^2})(4+4k^2)=16+8k^2+\frac{8}{k^2}\geq 16+2\sqrt{8k^2\cdot\frac{8}{k^2}}=32$，

当且仅当$8k^2=\frac{8}{k^2}$时等号成立，此时$k=\pm 1$，所以四边形$ADBE$的面积的最小值为32.

解法2：也可设两直线的倾斜角，用角版焦点弦公式来计算$|AB|$和$|DE|$，进而表示面积S，

如图，设直线AB的倾斜角为α，两直线都不与坐标轴垂直，不妨设$0<\alpha<\frac{\pi}{2}$，则$|AB|=\frac{4}{\sin^2\alpha}$，

因为$AB\perp DE$，所以直线DE的倾斜角为$\frac{\pi}{2}+\alpha$，故$|DE|=\frac{4}{\sin^2(\frac{\pi}{2}+\alpha)}=\frac{4}{\cos^2\alpha}$，

所以四边形$ADBE$的面积$S=\frac{1}{2}|AB|\cdot|DE|=\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{\sin^2\alpha}\cdot\frac{4}{\cos^2\alpha}=\frac{8}{\sin^2\alpha\cos^2\alpha}=\frac{8}{(\frac{1}{2}\sin 2\alpha)^2}=\frac{32}{\sin^2 2\alpha}$，

故当$\alpha=\frac{\pi}{4}$时，$\sin^2 2\alpha=1$，四边形$ADBE$的面积取得最小值32.