第 3 节 抽象函数问题（★★★）

内容提要

本节涉及抽象函数各类问题，下面先归纳一些有关的结论.

1．轴对称：如果函数 $y=f(x)$ 满足若 $\dfrac{x_1+x_2}{2}=a$，就有 $f(x_1)=f(x_2)$，则 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=a$ 对称. 记法：自变量关于 a 对称，函数值相等，如图 1.

2．中心对称：若函数 $y=f(x)$ 满足若 $\dfrac{x_1+x_2}{2}=a$，就有 $\dfrac{f(x_1)+f(x_2)}{2}=b$，则 $f(x)$ 关于点 (a,b) 对称. 记法：自变量关于 a 对称，函数值关于 b 对称，如图 2.

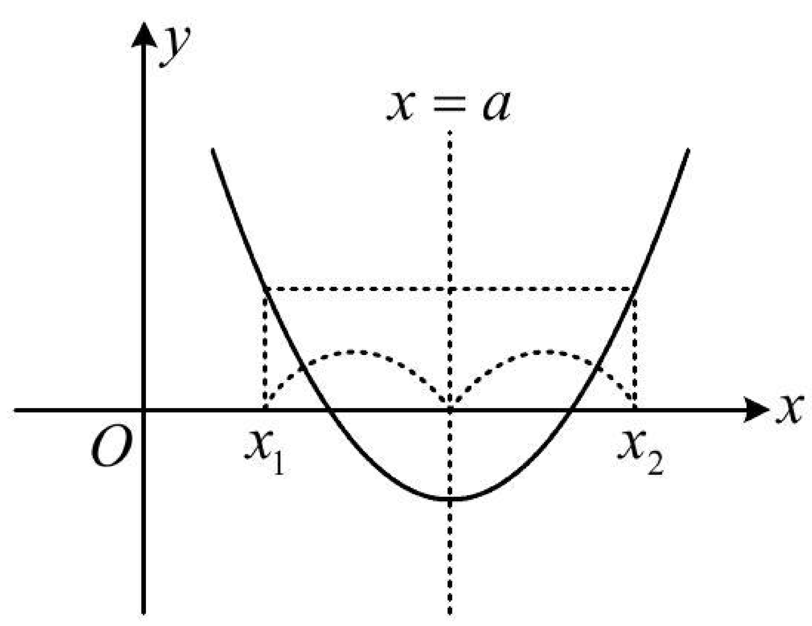


图1

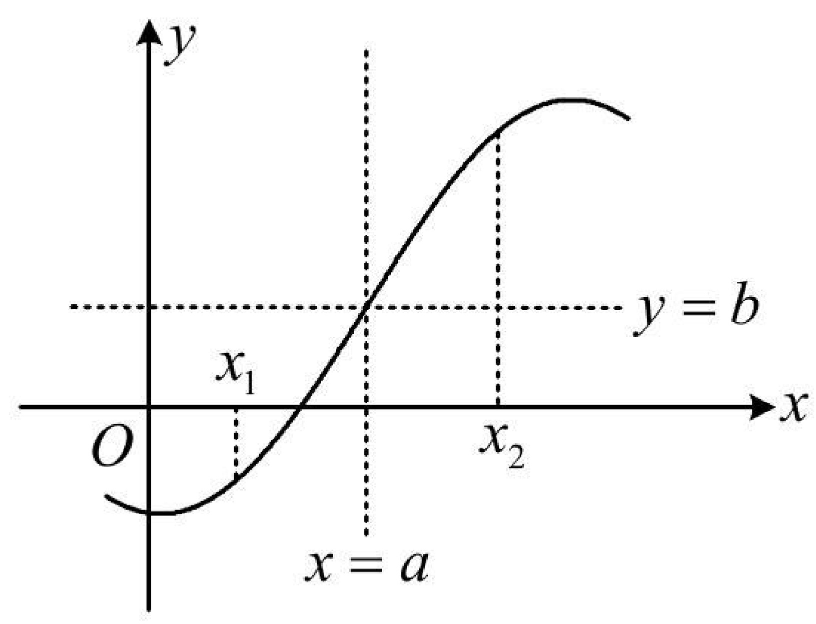


图2

3．函数图象的对称轴和对称中心结论（规律：x 系数相反是对称，x 系数相同是周期）

$f(x+a)=f(a-x)$ 或 $f(2a+x)=f(-x)$	$f(x)$ 关于直线 $x=a$ 对称（当 $a=0$ 时，$f(x)$ 即为偶函数，关于 y 轴对称）
$f(a+x)=f(b-x)$	$f(x)$ 关于直线 $x=\dfrac{a+b}{2}$ 对称
$f(a+x)+f(a-x)=0$	$f(x)$ 关于 $(a,0)$ 对称（当 $a=0$ 时，$f(x)$ 即为奇函数，关于原点对称）
$f(a+x)+f(b-x)=c$	$f(x)$ 关于点 $(\dfrac{a+b}{2},\dfrac{c}{2})$ 对称

注意：若将上述表格中结论里的 x 全部换成 $2x$（或 $3x$ 等等），结论不变. 例如，若 $f(2x+a)=f(a-2x)$，则仍可得到 $f(x)$ 关于直线 $x=a$ 对称.

4．常见的周期结论：由 $f(x+a)=-f(x)$，$f(x+a)=\dfrac{1}{f(x)}$，$f(x+a)+f(x)=t$ 均可得出 $f(x)$ 周期为 $2a$，其共同的特征是括号内 x 的系数相同，所以像 $f(2x+a)=-f(2x)$ 这种条件，也可得出 $f(x)$ 周期为 $2a$.

5．双对称的周期结论（可借助三角函数辅助理解）：

①如果函数 $f(x)$ 有两条对称轴，则 $f(x)$ 一定是周期函数，周期为对称轴距离的 2 倍.

②如果函数 $f(x)$ 有一条对称轴，一个对称中心，则 $f(x)$ 一定是周期函数，周期为对称中心与对称轴之间距离的 4 倍.

③如果函数 $f(x)$ 有在同一水平线上的两个对称中心，则 $f(x)$ 一定是周期函数，周期为对称中

心之间距离的 2 倍.

6．赋值法：题干给出诸如 $f(xy)=f(x)f(y)$ 这类关系式，让我们求一些函数值，或判断奇偶性. 这类题常采用赋值法处理，具体怎样赋值，可参考本节例 3.

典型例题

类型Ⅰ：单对称问题

【例 1】已知函数 $y=f(x)$ 满足 $f(x)-f(2-x)=0(x\in\mathbf{R})$，且在 $[1,+\infty)$ 上为增函数，则（　　）

（A）$f(-1)>f(1)>f(2)$　　（B）$f(1)>f(2)>f(-1)$

（C）$f(-1)>f(2)>f(1)$　　（D）$f(2)>f(-1)>f(1)$

解析： $f(x)-f(2-x)=0\Rightarrow f(x)=f(2-x)\Rightarrow f(x)$ 的图象关于直线 $x=1$ 对称，所以 $f(-1)=f(3)$，

因为 $3>2>1$，且 $f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上为增函数，所以 $f(3)>f(2)>f(1)$，故 $f(-1)>f(2)>f(1)$.

答案： C

【反思】本题的关键是由 $f(x)-f(2-x)=0$ 识别出 $f(x)$ 的对称性.

【变式 1】已知函数 $y=f(x)$ 满足 $f(x)+f(2-x)=0(x\in\mathbf{R})$，且在 $[1,+\infty)$ 上为增函数，则（　　）

（A）$f(-1)>f(1)>f(2)$　　（B）$f(1)>f(2)>f(-1)$

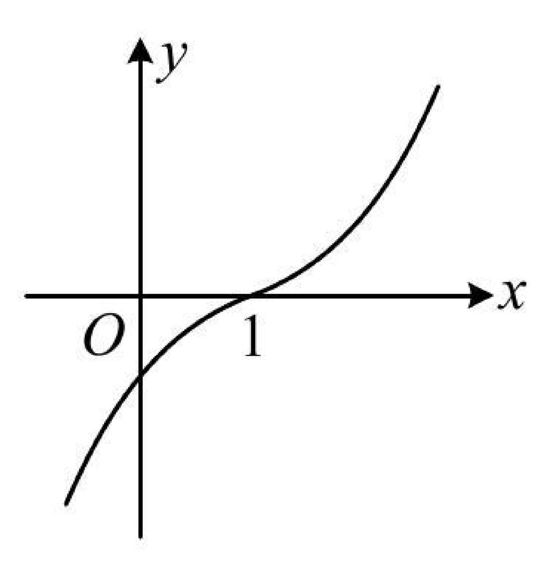
（C）$f(-1)>f(2)>f(1)$　　（D）$f(2)>f(1)>f(-1)$

解析： $f(x)+f(2-x)=0\Rightarrow f(x)$ 关于点 $(1,0)$ 对称，

又 $f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上↗，所以 $f(x)$ 的草图如图，

由图可知 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上↗，所以 $f(2)>f(1)>f(-1)$.

答案： D



【反思】本题只需由 $f(x)+f(2-x)=0$ 识别出 $f(x)$ 的对称性，结合单调性想象图形就可以解题.

【变式 2】已知函数 $f(x)$ 满足 $f(x)=f(2-x)(x\in\mathbf{R})$，若函数 $y=|x-1|-f(x)$ 有 3 个不同的零点 x_1，x_2，x_3，则 $x_1+x_2+x_3=$______.

解析： 看到 $f(x)=f(2-x)$，马上想到 $f(x)$ 的图象关于 $x=1$ 对称，

要研究 $y=|x-1|-f(x)$ 的零点，可将 $|x-1|$ 和 $f(x)$ 分离，作图看交点，

$|x-1|-f(x)=0\Leftrightarrow|x-1|=f(x)$，

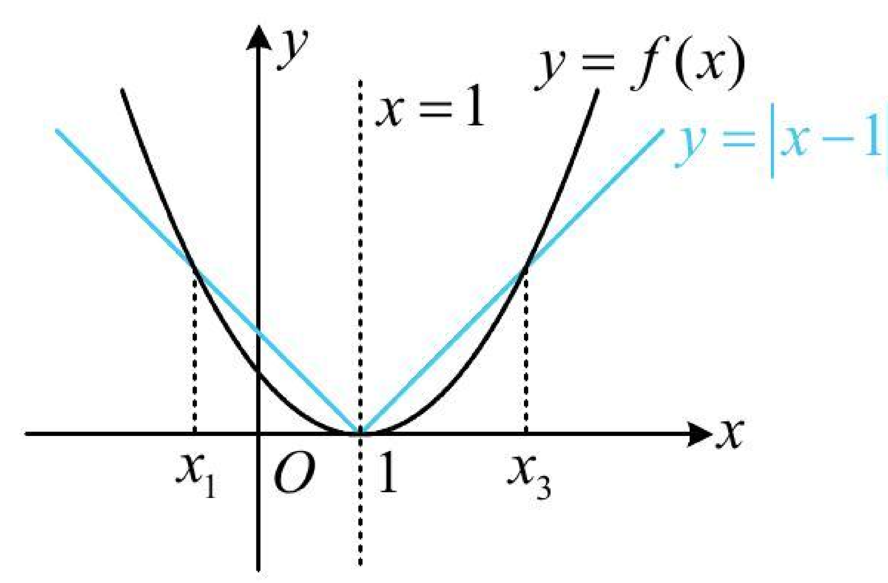
函数 $f(x)$ 没给解析式，只能从对称的角度来分析，

由于 $y=f(x)$ 和 $y=|x-1|$ 的图象都关于直线 $x=1$ 对称，

故它们的交点关于直线 $x=1$ 对称，如图，

设 $x_1<x_2<x_3$，则必有 $\dfrac{x_1+x_3}{2}=1$ 且 $x_2=1$，所以 $x_1+x_2+x_3=3$.

答案：3



【变式 3】已知函数 $f(x)$ 满足 $f(2-x)=2-f(x)(x\in\mathbf{R})$，若 $f(-1)+f(0)=4$，则 $f(2)+f(3)=$ ______.

解析：$f(2-x)=2-f(x)\Rightarrow f(2-x)+f(x)=2$，所以 $f(x)$ 的图象关于点 $(1,1)$ 对称，

而 $f(-1)$，$f(0)$，$f(2)$，$f(3)$ 这几个函数值中，-1 和 3 关于 1 对称，0 和 2 关于 1 对称，所以 $f(-1)$ 和 $f(3)$ 有关系，$f(0)$ 和 $f(2)$ 有关系，抓住这点就可以求 $f(2)+f(3)$ 了，

在 $f(2-x)+f(x)=2$ 中取 $x=3$ 可得 $f(-1)+f(3)=2$，所以 $f(3)=2-f(-1)$，

取 $x=2$ 可得 $f(0)+f(2)=2$，所以 $f(2)=2-f(0)$，故 $f(2)+f(3)=4-f(-1)-f(0)$，

又 $f(-1)+f(0)=4$，所以 $f(2)+f(3)=0$.

答案：0

【总结】给出 $f(x)$ 满足 $f(a+x)=f(b-x)$，$f(a+x)+f(b-x)=c$ 这类条件，一定要识别出它们分别表示 $f(x)$ 有对称轴 $x=\dfrac{a+b}{2}$，对称中心 $(\dfrac{a+b}{2},\dfrac{c}{2})$，进而运用对称性分析问题.

类型 II：双对称推周期问题

【例 2】偶函数 $y=f(x)$ 的图象关于直线 $x=2$ 对称，$f(3)=3$，则 $f(-1)=$ ______.

解析：由题意，$f(x)$ 有对称轴 $x=0$ 和 $x=2$，所以 $f(x)$ 的周期为 4，故 $f(-1)=f(3)=3$.

答案：3

【反思】有两条对称轴的函数必为周期函数，周期为对称轴之间距离的 2 倍.

【变式 1】偶函数 $f(x)$ 满足 $f(2-x)+f(x)=2$，且 $f(4)=-1$，则 $f(0)+f(1)=$ ______.

解析：由题意，$f(2-x)+f(x)=2\Rightarrow f(x)$ 关于点 $(1,1)$ 对称，

又 $f(x)$ 为偶函数，所以 $f(x)$ 关于 y 轴对称，从而 $f(x)$ 的周期为 4，故 $f(0)=f(4)=-1$，

在 $f(2-x)+f(x)=2$ 取 $x=1$ 可求得 $f(1)=1$，所以 $f(0)+f(1)=0$.

答案：0

【反思】既有对称轴又有对称中心的函数必为周期函数，周期为二者之间距离的 4 倍.

【变式 2】（2018•新课标Ⅱ卷）若 $f(x)$ 是定义域为 $(-\infty,+\infty)$ 的奇函数，满足 $f(1-x)=f(1+x)$，若 $f(1)=2$，则 $f(1)+f(2)+\cdots+f(50)=$（　　）

（A）-50　　（B）0　　（C）2　　（D）50

解法 1：首先由双对称，推出周期，下面给出结论的推导方法，$f(x)$ 是奇函数 $\Rightarrow f(1-x)=-f(x-1)$，

代入题干的 $f(1-x)=f(1+x)$ 可得 $f(x+1)=-f(x-1)$，所以 $f(x+2)=-f(x)$，

从而 $f(x+4)=-f(x+2)=f(x)$，故 $f(x)$ 是以 4 为周期的周期函数，所以 $f(3)=f(-1)=-f(1)=-2$，

接下来还需计算 $f(2)$ 和 $f(4)$，不能只由周期来求，要结合奇函数满足 $f(0)=0$ 这个隐含条件，

在 $f(1-x)=f(1+x)$ 中取 $x=-1$ 知 $f(2)=f(0)=0$，

又 $f(4)=f(0)=0$，所以 $f(1)+f(2)+f(3)+f(4)=2+0+(-2)+0=0$，

故 $f(1)+f(2)+\cdots+f(50)=[f(1)+\cdots+f(4)]+[f(5)+\cdots+f(8)]+\cdots+[f(45)+\cdots+f(48)]+f(49)+f(50)$

$=f(49)+f(50)=f(1)+f(2)=2.$

解法 2：也可以分析已知条件，举一个具体的函数来求解答案，

$f(x)$ 为奇函数 $\Rightarrow f(x)$ 有对称中心坐标原点，$f(1-x)=f(1+x)\Rightarrow$ 有对称轴 $x=1$，

既有对称轴又有对称中心，在三角函数中比较好找，

结合 $f(1)=2$，可取 $f(x)=2\sin\dfrac{\pi}{2}x$，此时不难发现 $f(x)$ 周期为 4，$f(2)=0$，$f(3)=-2$，$f(4)=0$，

所以 $f(1)+f(2)+\cdots+f(50)=[f(1)+\cdots+f(4)]+[f(5)+\cdots+f(8)]+\cdots+[f(45)+\cdots+f(48)]+f(49)+f(50)$

$=f(49)+f(50)=f(1)+f(2)=2.$

答案：C

【变式 3】（2021•新高考Ⅱ卷）已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，且 $f(x+2)$ 是偶函数，$f(2x+1)$ 是奇函数，则下列选项中值一定为 0 的是（　　）

（A）$f(-\dfrac{1}{2})$　　（B）$f(-1)$　　（C）$f(2)$　　（D）$f(4)$

解析：$f(x+2)$ 是偶函数 $\Rightarrow f(x)$ 向左平移 2 个单位是偶函数 $\Rightarrow f(x)$ 关于直线 $x=2$ 对称 ①，

题干给出 $f(2x+1)$ 是奇函数，这个条件怎么翻译？实际上，它和 $f(x+1)$ 为奇函数效果一样，都能得出 $f(x)$ 关于点 $(1,0)$ 对称，理由如下，

设 $\varphi(x)=f(2x+1)$，则 $\varphi(x)$ 是奇函数，所以 $\varphi(-x)=-\varphi(x)$，即 $f(2(-x)+1)=-f(2x+1)$，

从而 $f(-2x+1)=-f(2x+1)$，令 $t=2x$，则 $f(-t+1)=-f(t+1)$，故 $f(-t+1)+f(t+1)=0$，

所以 $f(x)$ 关于点 $(1,0)$ 对称 ②，由①②可得 $f(x)$ 周期为 4，且 $f(1)=0$，

又 $f(x)$ 的图象关于 $x=2$ 对称，1，3 关于 2 对称，所以 $f(3)=f(1)=0$，

结合 $f(x)$ 周期为 4 可得 $f(-1)=f(3)=0$.

答案：B

【反思】若 $f(x)$ 的图象关于点 (a,b) 对称，且 $f(x)$ 在 $x=a$ 处有定义，则必有 $f(a)=b$.

【变式 4】奇函数 $f(x)$ 满足 $f(2+x)+f(-x)=0(x\in\mathbf{R})$，若当 $0\le x\le 1$ 时，$f(x)=4x-4x^2$，则函数 $y=f(x)-\lg x$ 的零点个数为_____.

解析：$y=f(x)-\lg x$ 的零点无法直接求，可变形后画图看交点，

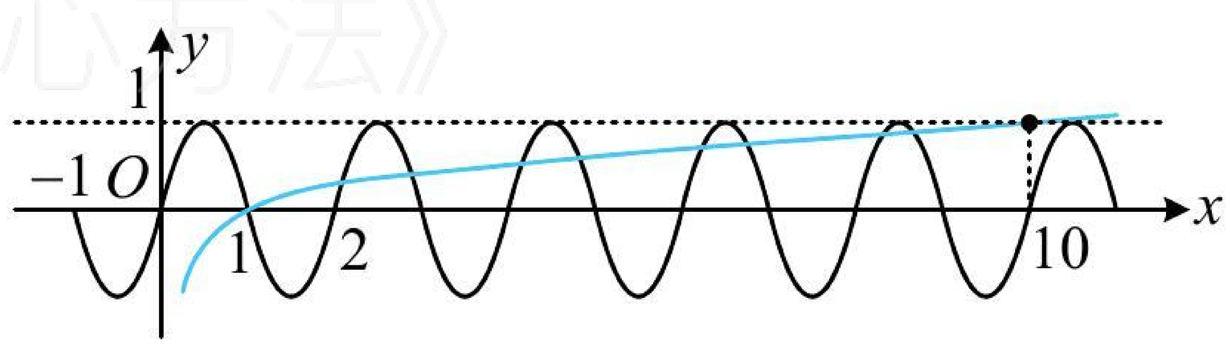
由题意，$f(x)-\lg x=0\Leftrightarrow f(x)=\lg x$，$f(2+x)+f(-x)=0\Rightarrow f(x)$ 的图象关于点 $(1,0)$ 对称，

又 $f(x)$ 为奇函数，所以 $f(x)$ 的图象关于原点对称，所以 $f(x)$ 的周期为 2，

结合所给 $[0,1]$ 上的解析式可画出 $f(x)$ 的大致图象如图，$f(x)$ 在直线 $y=1$ 上方没有图象，故作图时需重点关注 $y=\lg x$ 穿出直线 $y=1$ 的位置，

因为 $\lg 10=1$，所以如图，$y=\lg x$ 与 $y=f(x)$ 的图象共有 9 个交点，故函数 $y=f(x)-\lg x$ 有 9 个零点.

答案：9



类型III：抽象函数赋值法

【例 3】(2023 • 新高考 Ⅰ 卷)（多选）已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，$f(xy)=y^2f(x)+x^2f(y)$，则（　　）

（A）$f(0)=0$　　（B）$f(1)=0$　　（C）$f(x)$ 是偶函数　　（D）$x=0$ 为 $f(x)$ 的极小值点

解析：A 项，给出 $f(xy)=y^2f(x)+x^2f(y)$ 这类性质，让求一些具体的函数值，常用赋值法，

令 $x=y=0$ 可得 $f(0\times 0)=0^2f(0)+0^2f(0)$，所以 $f(0)=0$，故 A 项正确；

B 项，令 $x=y=1$ 可得 $f(1\times 1)=1^2f(1)+1^2f(1)$，所以 $f(1)=0$，故 B 项正确；

C 项，要判断奇偶性，就看 $f(-x)$ 与 $f(x)$ 的关系，为了产生 $f(-x)$，可将 y 取成 -1，

令 $y=-1$ 可得 $f(-x)=f(x)+x^2f(-1)$ ①，所以还得算 $f(-1)$，继续赋值，

令 $x=y=-1$ 可得 $f((-1)^2)=(-1)^2f(-1)+(-1)^2f(-1)$，所以 $f(1)=2f(-1)$，结合 $f(1)=0$ 可得 $f(-1)=0$，

代入①得 $f(-x)=f(x)$，所以 $f(x)$ 是偶函数，故 C 项正确；

D 项，ABC 都对，可大胆猜测 D 项错误，正面推理判断此选项较困难，可尝试举个反例，观察发现常值函数 $f(x)=0$ 满足所给等式，故可用它来判断选项，

令 $f(x)=0$，经检验，满足 $f(xy)=y^2f(x)+x^2f(y)$，显然 $x=0$ 不是 $f(x)$ 的极小值点，故 D 项错误.

答案：ABC

【反思】对于这种只给了函数满足的关系式的问题，一般用赋值法. 常见的赋值有 $x=0$，$x=\pm 1$，$y=\pm x$，$y=\pm\frac{1}{x}$ 等，具体怎么赋值，得由所给关系式决定.

强化训练

1．（2023 •黑龙江齐齐哈尔二模改 •★★）设函数 $f(x+1)$ 的图象关于 y 轴对称，且当 $x\in(0,1)$ 时，$f(x)=\mathrm{e}^{-x}$，则 $f(\frac{3}{2})=$_____.

2．（2023 • 浙江模拟 • ★★）定义在 **R** 上的非常值函数 $f(x)$ 满足：$f(-x)=f(x)$，且 $f(2-x)+f(x)=0$，则 $f(x)=$_____.（请写出符合条件的一个函数 $f(x)$ 的解析式）

3．（2022 • 黑龙江模拟 • ★★）定义在 **R** 上的奇函数 $f(x)$ 满足 $f(x+8)=f(-4-x)$，且当 $x\in[0,2]$ 时，$f(x)=1-3^x$，则 $f(2022)=$（　　）

（A）-8　　（B）-2　　（C）2　　（D）8

4．（2023 • 湖南模拟 • ★★）（多选）已知定义在 **R** 上的奇函数 $f(x)$ 满足 $f(2+x)=f(-x)$，若 $f(1)=2$，则（　　）

（A）$f(x)$ 的图象关于直线 $x=1$ 对称

（B）4 为 $f(x)$ 的一个周期

（C）$f(2022)=0$

（D）$f(2023)=2$

5.（2022•四川成都模拟•★★★）已知函数 $y=f(x)$ 满足 $f(4+x)-f(-x)=0(x\in\mathbf{R})$，且 $f(x)$ 在 $[2,+\infty)$ 上为减函数，则（　　）

（A）$f(\log_2 3)>f(\log_2 5)>f(3)$　（B）$f(\log_2 5)>f(\log_2 3)>f(3)$

（C）$f(\log_2 5)>f(3)>f(\log_2 3)$　（D）$f(\log_2 3)>f(3)>f(\log_2 5)$

6.（★★★）（多选）设 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数，且对任意的 $x\in\mathbf{R}$，都有 $f(x+2)=f(2-x)$，当 $x\in[0,2]$ 时，$f(x)=(\frac{1}{2})^{2-x}$，则（　　）

（A）$f(x)$ 是周期函数，且周期为 2

（B）$f(x)$ 的最大值是 1，最小值是 $\frac{1}{4}$

（C）$f(x)$ 在 $[2,4]$ 上单调递减，在 $[4,6]$ 上单调递增

（D）当 $x\in[2,4]$ 时，$f(x)=(\frac{1}{2})^{2-x}$

7.（★★★★）已知函数 $f(x)=\ln(\sqrt{x^2+1}-x)+1$，定义域为 $\mathbf{R}$ 的函数 $g(x)$ 满足 $g(-x)+g(x)=2$，若函数 $y=f(x)$ 与 $y=g(x)$ 的图象的交点为 (x_1,y_1)，(x_2,y_2)，…，(x_5,y_5)，则 $\sum_{i=1}^{5}(x_i+y_i)=$（　　）

（A）0　（B）5　（C）10　（D）15

8.（2022•江苏模拟•★★★★）偶函数 $f(x)$ 满足 $f(x)=f(2-x)(x\in\mathbf{R})$，当 $x\in[0,1]$ 时，$f(x)=2-2x^2$，则函数 $g(x)=f(x)-2\log_4|x-1|$ 的所有零点之和为（　　）

（A）4　（B）6　（C）8　（D）10

9．（2021·全国甲卷·★★★★）设函数 $f(x)$ 的定义域为 **R**，$f(x+1)$ 为奇函数，$f(x+2)$ 为偶函数，当 $x\in[1,2]$ 时，$f(x)=ax^2+b$. 若 $f(0)+f(3)=6$，则 $f(\frac{9}{2})=$（　　）

（A）$-\frac{9}{4}$　（B）$-\frac{3}{2}$　（C）$\frac{7}{4}$　（D）$\frac{5}{2}$