第 3 节 向量的分解与共线性质（★★★）

强化训练

类型Ⅰ：向量的分解与共线

1.（2022·新高考Ⅰ卷·★）在ΔABC中，点D在边AB上，$BD=2DA$，记$\overrightarrow{CA}=\boldsymbol{m}$，$\overrightarrow{CD}=\boldsymbol{n}$，则$\overrightarrow{CB}=$（　　）

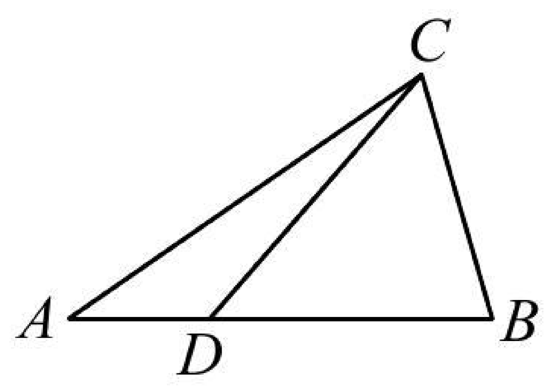
（A）$3\boldsymbol{m}-2\boldsymbol{n}$　（B）$-2\boldsymbol{m}+3\boldsymbol{n}$　（C）$3\boldsymbol{m}+2\boldsymbol{n}$　（D）$2\boldsymbol{m}+3\boldsymbol{n}$

答案：B

解法 1：如图，由题意，$\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CA}+3\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{CA}+3(\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{CA})=-2\overrightarrow{CA}+3\overrightarrow{CD}=-2\boldsymbol{m}+3\boldsymbol{n}$.

解法 2：由题意，$\overrightarrow{AD}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB}$，根据内容提要第 2 点的结论②，$\overrightarrow{CD}=(1-\dfrac{1}{3})\overrightarrow{CA}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{CB}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{CA}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{CB}$，

所以$\overrightarrow{CB}=-2\overrightarrow{CA}+3\overrightarrow{CD}=-2\boldsymbol{m}+3\boldsymbol{n}$.



2.（2023·广东模拟·★★）在平行四边形$ABCD$中，E为AD中点，F为BE与AC的交点，则$\overrightarrow{DF}=$（　　）

（A）$\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AD}$　（B）$\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB}-\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AD}$　（C）$\dfrac{1}{4}\overrightarrow{AB}+\dfrac{3}{4}\overrightarrow{AD}$　（D）$\dfrac{1}{4}\overrightarrow{AB}-\dfrac{3}{4}\overrightarrow{AD}$

答案：B

解析：从D到F，与基底$\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AD}$关联较强的路径可选$D\to A\to F$，

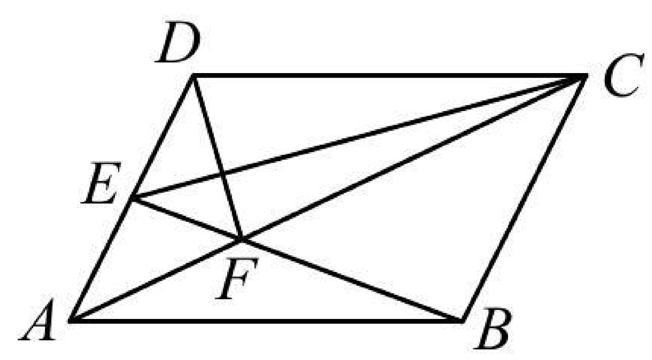
由题意，$\overrightarrow{DF}=\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AF}=-\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AF}$ ①，

还需把$\overrightarrow{AF}$也用基底表示，先分析F在AC上的位置，

由图可知$\Delta AEF\backsim\Delta CBF$，所以$\dfrac{AF}{CF}=\dfrac{AE}{BC}=\dfrac{1}{2}$，

故$\overrightarrow{AF}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AC}=\dfrac{1}{3}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD})$，

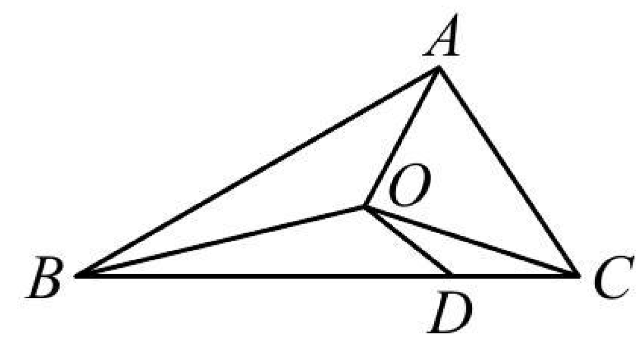
代入①整理得：$\overrightarrow{DF}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB}-\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AD}$.



3.（2022·芜湖模拟·★★★）如图，O是ΔABC的重心，D是边BC上一点，且$\overrightarrow{BD}=3\overrightarrow{DC}$，$\overrightarrow{OD}=\lambda\overrightarrow{AB}+\mu\overrightarrow{AC}$，

则$\dfrac{\lambda}{\mu}=$（　　）

（A）$-\frac{1}{5}$　（B）$-\frac{1}{4}$　（C）$\frac{1}{5}$　（D）$\frac{1}{4}$



答案：A

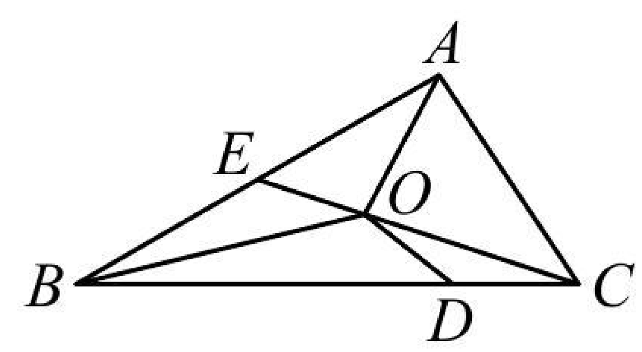
解析：$\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{OC}+\frac{1}{4}\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{OC}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$ ①，还需把$\overrightarrow{OC}$用基底表示，可用重心分中线比例来完成，

如图，延长 CO 交 AB 于 E，则 E 为 AB 中点，且$\overrightarrow{CO}=\frac{2}{3}\overrightarrow{CE}=\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB})=\frac{1}{3}\overrightarrow{CA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{CB}$

$=-\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}+\frac{1}{3}(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC})=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}-\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$，所以$\overrightarrow{OC}=-\overrightarrow{CO}=-\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$，

代入①得：$\overrightarrow{OD}=(-\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AC})+\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}=-\frac{1}{12}\overrightarrow{AB}+\frac{5}{12}\overrightarrow{AC}$，

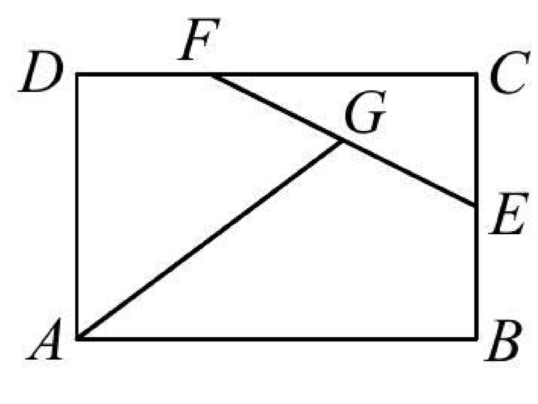
由题意，$\overrightarrow{OD}=\lambda\overrightarrow{AB}+\mu\overrightarrow{AC}$，所以$\lambda=-\frac{1}{12}$，$\mu=\frac{5}{12}$，故$\frac{\lambda}{\mu}=-\frac{1}{5}$.



【反思】设 O 为ΔABC 的重心，则$\overrightarrow{AO}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$.

4.（2022·益阳模拟·★★）在如图所示的矩形 $ABCD$ 中，E，F 满足$\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{EC}$，$\overrightarrow{CF}=2\overrightarrow{FD}$，$G$ 为 EF 的中点，若$\overrightarrow{AG}=\lambda\overrightarrow{AB}+\mu\overrightarrow{AD}$，则$\lambda\mu=$（　　）

（A）$\frac{1}{2}$　（B）$\frac{2}{3}$　（C）$\frac{3}{4}$　（D）2



答案：A

解析：G 为 EF 中点，故容易把$\overrightarrow{AG}$表示成$\overrightarrow{AE}$和$\overrightarrow{AF}$，再把$\overrightarrow{AE}$和$\overrightarrow{AF}$换成$\overrightarrow{AB}$和$\overrightarrow{AD}$即可，

由向量中线定理，$\overrightarrow{AG}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AE}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AF}$ ①，而$\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$，$\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DF}=\overrightarrow{AD}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$，

代入①得：$\overrightarrow{AG}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD})+\frac{1}{2}(\overrightarrow{AD}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AB})=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{4}\overrightarrow{AD}$，所以$\lambda=\frac{2}{3}$，$\mu=\frac{3}{4}$，故$\lambda\mu=\frac{1}{2}$.

5.（★★）已知ΔABC内接于圆 O，$|\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}|=|\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{CB}|$，若 P 为线段 OC 的中点，则$\overrightarrow{OP}=$（　　）

（A）$\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$　（B）$\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$　（C）$\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}-\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$　（D）$\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}-\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$

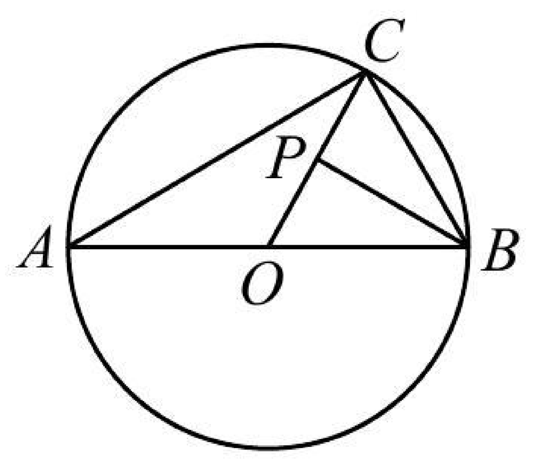
答案：C

解析：给出了模的关系，想到将其平方，$|\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}|=|\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{CB}|\Rightarrow|\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}|^2=|\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{CB}|^2$，

所以$\overrightarrow{CA}^2+\overrightarrow{CB}^2+2\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{CA}^2+\overrightarrow{CB}^2-2\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}$，从而$\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}=0$，故$CA\perp CB$，

所以AB是圆O的直径，O即为AB中点，如图，

故$\overrightarrow{OP}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{CO}=-\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB})=-\frac{1}{4}\overrightarrow{CA}-\frac{1}{4}\overrightarrow{CB}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}-\frac{1}{4}(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC})=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}-\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$.



6.（2023·西安模拟·★★★）在平行四边形$ABCD$中，$\overrightarrow{AE}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$，$\overrightarrow{CF}=\frac{1}{3}\overrightarrow{CD}$，则$\overrightarrow{BA}=$（　）

（A）$\frac{6}{5}\overrightarrow{AF}-\frac{9}{5}\overrightarrow{CE}$　（B）$\frac{2}{5}\overrightarrow{AF}-\frac{3}{5}\overrightarrow{CE}$　（C）$\frac{6}{5}\overrightarrow{AF}+\frac{9}{5}\overrightarrow{CE}$　（D）$\frac{2}{5}\overrightarrow{AF}+\frac{3}{5}\overrightarrow{CE}$

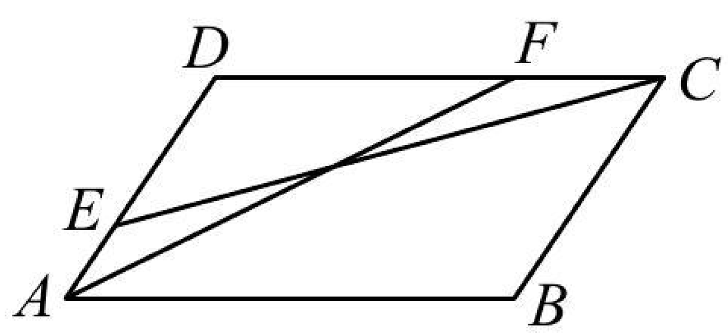
答案：C

解析：如图，直接用$\overrightarrow{AF}$，$\overrightarrow{CE}$表示$\overrightarrow{BA}$较难，考虑换基底，注意到用$\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AD}$容易表示其它向量，故若设$\overrightarrow{BA}=x\overrightarrow{AF}+y\overrightarrow{CE}$，则只要把$\overrightarrow{AF}$和$\overrightarrow{CE}$也用$\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AD}$表示，就能与$\overrightarrow{BA}=-\overrightarrow{AB}$比较系数，求出$x$，$y$，

由题意，$\overrightarrow{CE}=\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DE}=-\overrightarrow{AB}-\frac{2}{3}\overrightarrow{AD}$，$\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DF}=\overrightarrow{AD}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$，

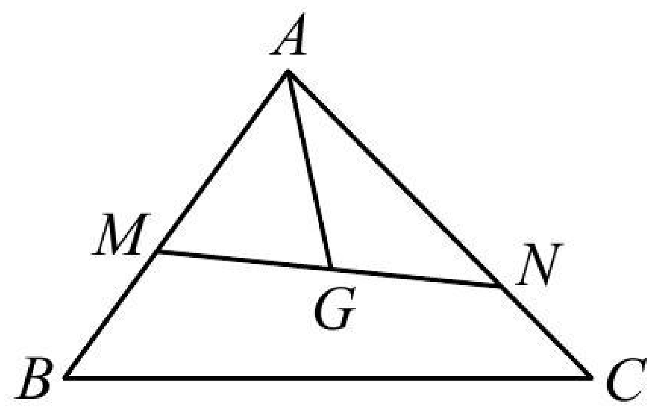
设$\overrightarrow{BA}=x\overrightarrow{AF}+y\overrightarrow{CE}$，则$\overrightarrow{BA}=x(\overrightarrow{AD}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AB})+y(-\overrightarrow{AB}-\frac{2}{3}\overrightarrow{AD})=(\frac{2x}{3}-y)\overrightarrow{AB}+(x-\frac{2y}{3})\overrightarrow{AD}$ ①，

又$\overrightarrow{BA}=-\overrightarrow{AB}$，与①对比可得$\begin{cases}\frac{2x}{3}-y=-1\\x-\frac{2y}{3}=0\end{cases}$，解得：$\begin{cases}x=\frac{6}{5}\\y=\frac{9}{5}\end{cases}$，所以$\overrightarrow{BA}=\frac{6}{5}\overrightarrow{AF}+\frac{9}{5}\overrightarrow{CE}$.



7.（2022·重庆模拟·★★★★）如图，已知点G是ΔABC的重心，过点G作直线分别与AB，AC两边交于M，N两点（M，N与B，C不重合），设$\overrightarrow{AB}=x\overrightarrow{AM}$，$\overrightarrow{AC}=y\overrightarrow{AN}$，则$\frac{1}{x+1}+\frac{1}{y+1}$的最小值为（　）

（A）$\frac{1}{2}$　（B）$\frac{2}{3}$　（C）$\frac{3}{4}$　（D）$\frac{4}{5}$



答案：D

解析：注意到 G 为重心，$\overrightarrow{AG}$ 易用 $\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AC}$ 表示，结合已知又可化为用 $\overrightarrow{AM}$，$\overrightarrow{AN}$ 表示的结果，从而由 M，G，N 三点共线找到 x，y 的关系，用于分析目标最值，

因为 G 是重心，所以 $\overrightarrow{AG}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}=\frac{x}{3}\overrightarrow{AM}+\frac{y}{3}\overrightarrow{AN}$，（原因可参考本节练习第 3 题）

结合 M，G，N 三点共线可得 $\frac{x}{3}+\frac{y}{3}=1$，故 $x+y=3$ ①，目标式分母是 $x+1$ 和 $y+1$，所以按此凑形式，

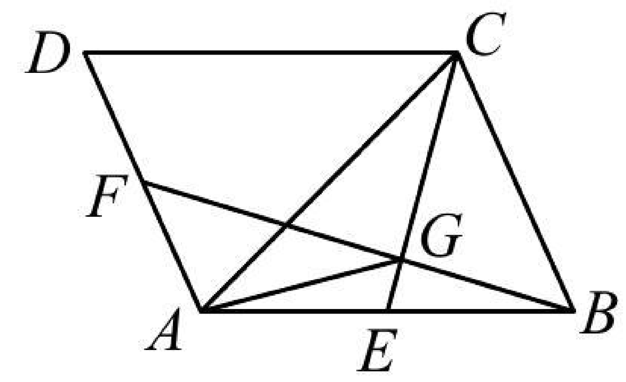
由①可得 $(x+1)+(y+1)=5$，所以 $\frac{1}{x+1}+\frac{1}{y+1}=(\frac{1}{x+1}+\frac{1}{y+1})\cdot 5\times\frac{1}{5}=(\frac{1}{x+1}+\frac{1}{y+1})\cdot[(x+1)+(y+1)]\cdot\frac{1}{5}$

$=\frac{1}{5}(1+\frac{y+1}{x+1}+\frac{x+1}{y+1}+1)=\frac{1}{5}(\frac{y+1}{x+1}+\frac{x+1}{y+1}+2)\geq\frac{1}{5}(2\sqrt{\frac{y+1}{x+1}\cdot\frac{x+1}{y+1}}+2)=\frac{4}{5}$，

取等条件是 $\frac{y+1}{x+1}=\frac{x+1}{y+1}$，结合 $x+y=3$ 可得 $x=y=\frac{3}{2}$，所以 $\frac{1}{x+1}+\frac{1}{y+1}$ 的最小值为 $\frac{4}{5}$.

8.（2022·全国模拟·★★★★）在平行四边形 $ABCD$ 中，$\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{AE}$，$\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{FD}$，点 G 为 CE 与 BF 的交点，则 $\overrightarrow{AG}=$（　　）

（A）$\frac{2}{5}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{5}\overrightarrow{AC}$　（B）$\frac{1}{5}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{5}\overrightarrow{AC}$　（C）$\frac{1}{5}\overrightarrow{AB}+\frac{4}{15}\overrightarrow{AC}$　（D）$\frac{3}{10}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{5}\overrightarrow{AC}$



答案：A

解法 1：设 AC 和 BF 交于点 H，如图 1，设 $\overrightarrow{AG}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$ ①，

要求 x 和 y，需建立两个方程，由于点 G 为 CE 与 BF 交点，故可由 C，G，E 共线，B，G，H 共线，用共线系数和结论来建立方程，

由题意，$\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{AE}$，代入①得：$\overrightarrow{AG}=2x\overrightarrow{AE}+y\overrightarrow{AC}$，因为 C，G，E 共线，所以 $2x+y=1$ ②，

又 $\Delta AHF\backsim\Delta CHB$，所以 $\frac{|AH|}{|HC|}=\frac{|AF|}{|BC|}=\frac{1}{2}$，故 $\overrightarrow{AC}=3\overrightarrow{AH}$，代入①得：$\overrightarrow{AG}=x\overrightarrow{AB}+3y\overrightarrow{AH}$，

由 B，G，H 三点共线可得 $x+3y=1$ ③，联立②③解得：$x=\frac{2}{5}$，$y=\frac{1}{5}$，所以 $\overrightarrow{AG}=\frac{2}{5}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{5}\overrightarrow{AC}$.

解法 2：只要确定了 G 在 BF 上的位置，就可直接基底表示，要确定这个位置，可构造相似三角形来分析，

如图 2，延长 DA 和 CE 交于点 T，首先，$\Delta TAE\backsim\Delta TDC$，所以 $\frac{|TA|}{|TD|}=\frac{|AE|}{|CD|}=\frac{1}{2}$，所以 $|TD|=2|TA|$，

不妨设$|TA|=2m$，则$|AD|=|BC|=2m$，又F为AD中点，所以$|TF|=3m$，

其次，$\Delta BCG\backsim\Delta FTG$，所以$\dfrac{|BG|}{|FG|}=\dfrac{|BC|}{|TF|}=\dfrac{2m}{3m}=\dfrac{2}{3}$，故$\overrightarrow{BG}=\dfrac{2}{5}\overrightarrow{BF}$，有了这一结果，就可以表示$\overrightarrow{AG}$了，

$\overrightarrow{AG}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BG}=\overrightarrow{AB}+\dfrac{2}{5}\overrightarrow{BF}=\overrightarrow{AB}+\dfrac{2}{5}(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AF})=\dfrac{3}{5}\overrightarrow{AB}+\dfrac{2}{5}\overrightarrow{AF}=\dfrac{3}{5}\overrightarrow{AB}+\dfrac{2}{5}\times\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AD}=\dfrac{3}{5}\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{5}(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD})$

$=\dfrac{3}{5}\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{5}\overrightarrow{AC}-\dfrac{1}{5}\overrightarrow{AB}=\dfrac{2}{5}\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{5}\overrightarrow{AC}$.

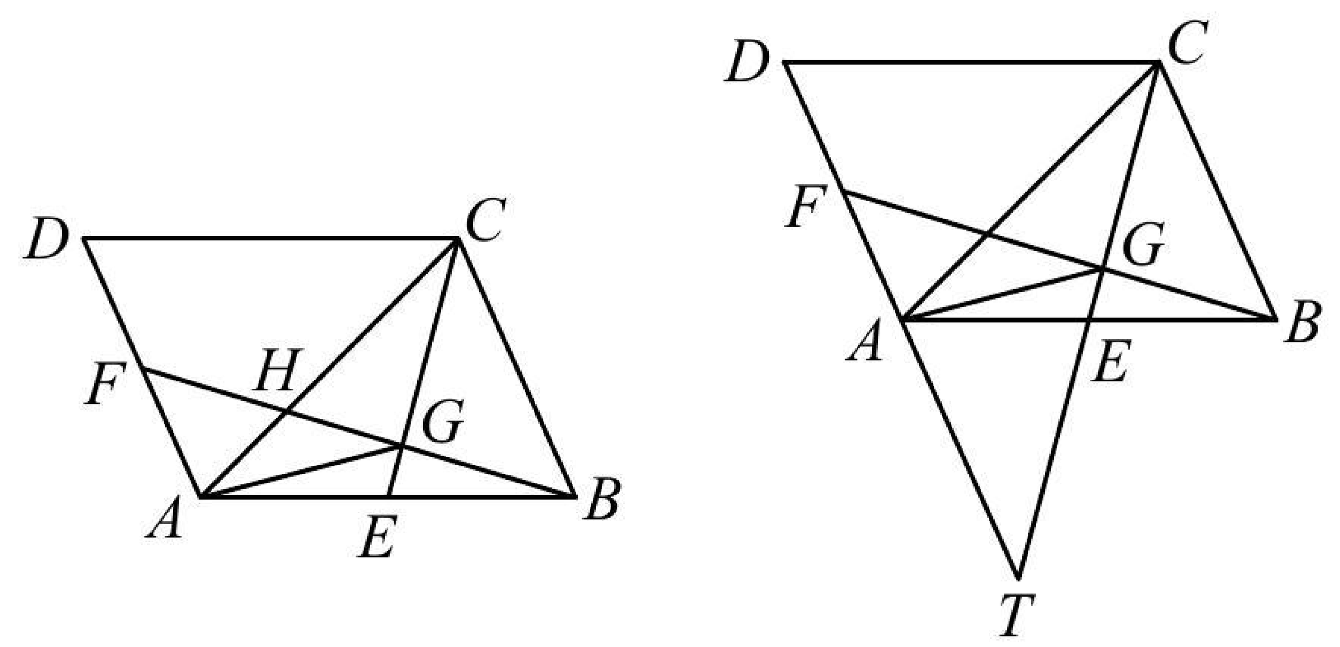
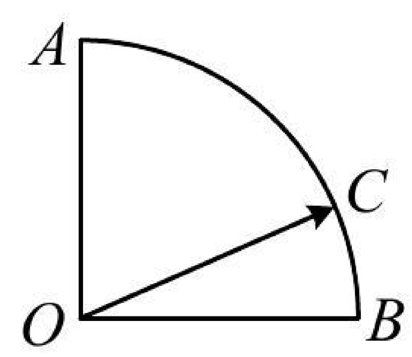


图1　　图2

【反思】若分解时发现某交点的位置不确定，则可考虑用两次三点共线构造方程，也可分析几何关系找交点的位置.

类型 II：等和线的运用

9.（★★★）如图，在扇形OAB中，$\angle AOB=90^\circ$，C为弧AB上的一个动点，若$\overrightarrow{OC}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}$，则$x+y$的最大值是_____.

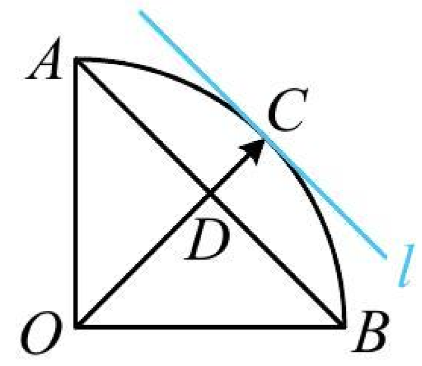


答案：$\sqrt{2}$

解析：涉及基底表示的系数和问题，考虑用等和线处理，先连接基向量终点，找到系数和为 1 的等和线，如图，连接AB，则AB是和为 1 的等和线，设l是与AB平行且与圆弧相切的直线，

由等和线定理，当C恰为切点时，C离等和线AB最远，此时$x+y$最大，设OC与AB交于点D，则$OD\perp AB$，

不妨设$|OA|=|OB|=|OC|=2$，则$|OD|=\sqrt{2}$，所以$(x+y)_{\max}=\dfrac{|OC|}{|OD|}=\dfrac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$.



10.（2023・山东模拟・★★★）已知等边三角形ABC的边长为1，动点P满足$|\overrightarrow{AP}|=1$，$\overrightarrow{AP}=\lambda\overrightarrow{AB}+\mu\overrightarrow{AC}$，则$\lambda+\mu$的最小值为（　）

（A）$-\sqrt{3}$　（B）$-\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$　（C）0　（D）3

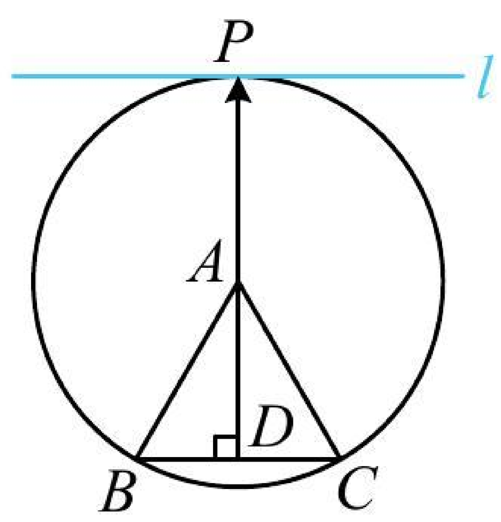
答案：B

解析：涉及基底表示的系数和问题，考虑用等和线处理，先找到系数和为 1 的等和线，

由题意，BC 即为系数和为 1 的等和线，所以等和线应与 BC 平行，

如图，要使 $\lambda+\mu$ 最小，点 P 应在如图所示的位置，其中 l 为与 BC 平行的圆的切线，

由等和线定理，$(\lambda+\mu)_{\min}=-\dfrac{|PA|}{|AD|}=-\dfrac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=-\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.



【反思】在以 $\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AC}$ 为基底系数和问题中，当点 A 在等和线 BC 与等和线 l 之间时，l 这条等和线的和为负数.