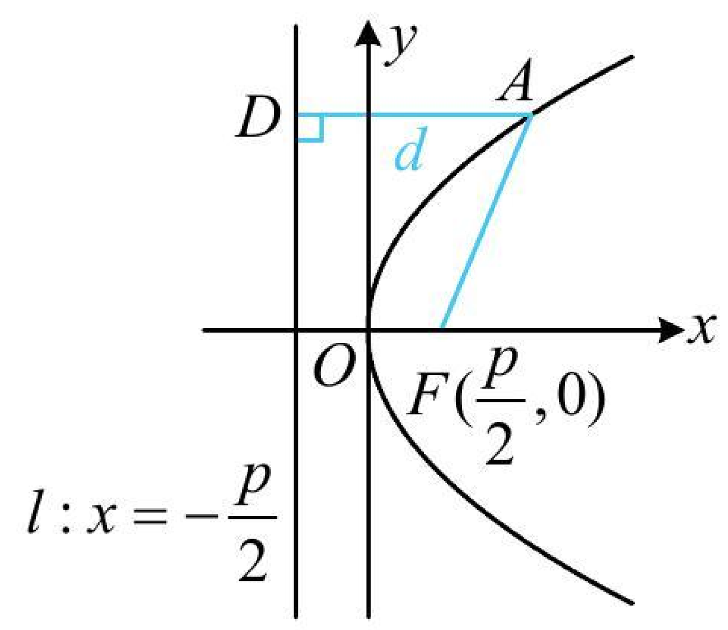
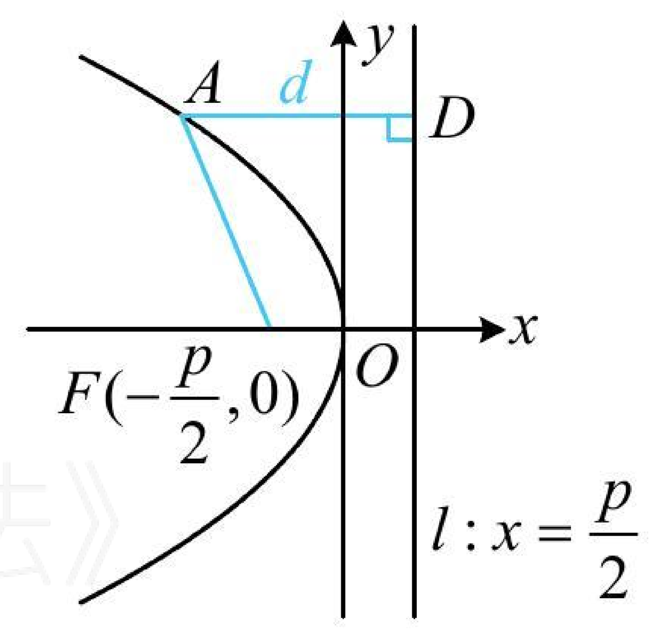
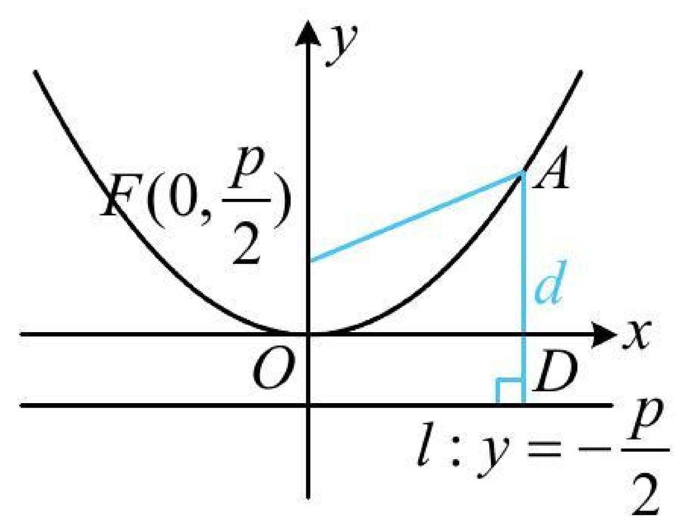
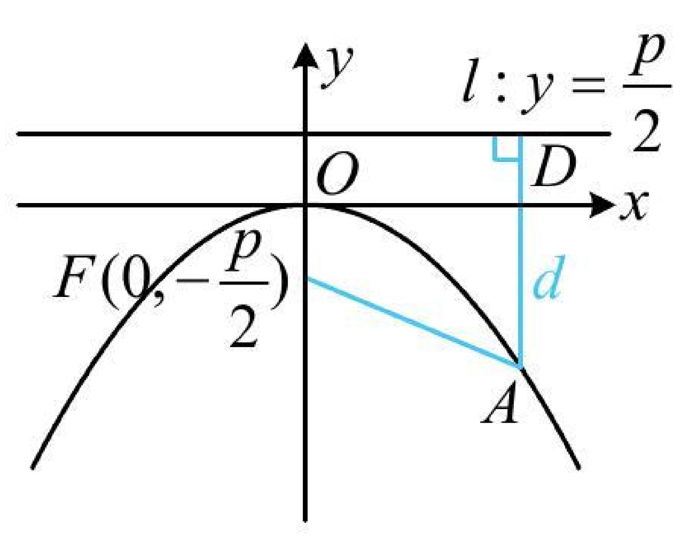
模块五 抛物线与方程

第 1 节 抛物线定义、标准方程及简单几何性质（★☆）

内容提要

1．抛物线的定义：平面上到定点 F 的距离与到定直线 l（不过定点 F）的距离相等的点的轨迹是抛物线，其中定点 F 叫做抛物线的焦点，定直线 l 叫做抛物线的准线.

2．抛物线的标准方程与简单几何性质：

定义	标准方程 $(p>0)$	焦点	准线	范围	对称轴	顶点	图形
$\|AF\|=d$	$y^2=2px$	$(\frac{p}{2},0)$	$x=-\frac{p}{2}$	$x\geq 0$ $y\in\mathbf{R}$	x 轴	原点	
	$y^2=-2px$	$(-\frac{p}{2},0)$	$x=\frac{p}{2}$	$x\leq 0$ $y\in\mathbf{R}$	x 轴	原点	
	$x^2=2py$	$(0,\frac{p}{2})$	$y=-\frac{p}{2}$	$x\in\mathbf{R}$ $y\geq 0$	y 轴	原点	
	$x^2=-2py$	$(0,-\frac{p}{2})$	$y=\frac{p}{2}$	$x\in\mathbf{R}$ $y\leq 0$	y 轴	原点	

3．抛物线上的点到焦点 F 的距离可用坐标表示，例如开口向右的抛物线 $y^2=2px(p>0)$ 中，若点 A 在抛物线上，且 $AD\perp$ 准线于 D，如上表中第 1 个图，有 $|AF|=|AD|=x_A+\frac{p}{2}$，其余开口的抛物线类似.

典型例题

类型Ⅰ：抛物线的标准方程与简单几何性质

【例 1】若抛物线 C 的顶点在原点，焦点坐标为 $(\frac{3}{2},0)$，则抛物线 C 的标准方程为_____，准线方程是_____.

解析：先判断开口，并设标准方程，焦点为$(\frac{3}{2},0)\Rightarrow$开口向右，可设抛物线方程为$y^2=2px(p>0)$，

则其焦点坐标为$(\frac{p}{2},0)$，由题意，$\frac{p}{2}=\frac{3}{2}$，所以$p=3$，故C的方程为$y^2=6x$，准线方程为$x=-\frac{3}{2}$.

答案：$y^2=6x$，$x=-\frac{3}{2}$

【变式 1】顶点在原点，对称轴为坐标轴的抛物线C经过点$A(2,1)$，则C的方程为_____.

解析：抛物线过点$A(2,1)$，有如图所示的两种情况，下面分别考虑，

若开口向右，可设抛物线C的方程为$y^2=2px(p>0)$，

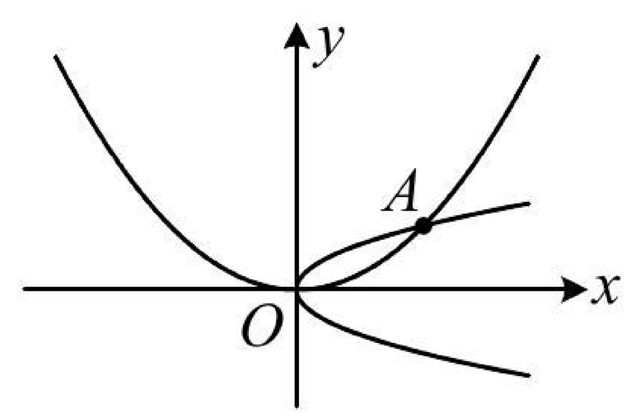
将点$A(2,1)$代入可得：$1^2=2p\cdot 2$，解得：$p=\frac{1}{4}$，所以C的方程为$y^2=\frac{1}{2}x$；

若开口向上，可设抛物线C的方程为$x^2=2my(m>0)$，

将点$A(2,1)$代入可得：$2^2=2m$，解得：$m=2$，所以C的方程为$x^2=4y$；

综上所述，C的方程为$y^2=\frac{1}{2}x$或$x^2=4y$.

答案：$y^2=\frac{1}{2}x$或$x^2=4y$



【变式 2】若抛物线$y=ax^2$的准线方程为$y=-\frac{1}{8}$，则$a=$_____.

解析：先把所给方程化为标准方程，即把平方项系数化 1，并判断开口，$y=ax^2\Rightarrow x^2=\frac{1}{a}y$，

由抛物线的准线方程是$y=-\frac{1}{8}$知抛物线开口向上，所以$a>0$，且$2p=\frac{1}{a}$，从而$p=\frac{1}{2a}$，

故抛物线的准线方程为$y=-\frac{1}{4a}$，与$y=-\frac{1}{8}$比较可得$-\frac{1}{4a}=-\frac{1}{8}$，解得：$a=2$.

答案：2

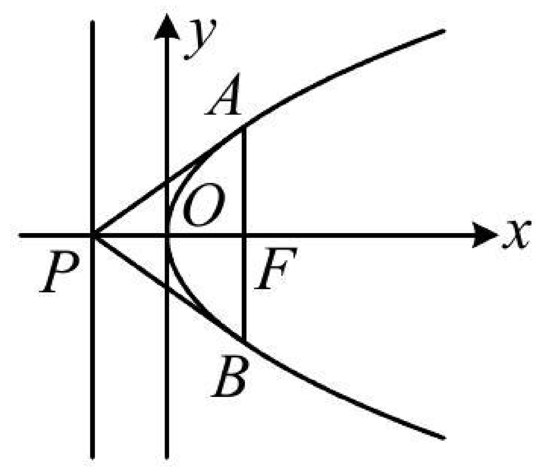
【例 2】已知抛物线$C:y^2=2px(p>0)$的焦点为F，准线l与x轴交于点P，过F且垂直于x轴的直线与抛物线交于A、B两点，若ΔPAB的面积为2，则$p=$_____.

解析：如图，可以AB为底，PF为高来计算ΔPAB的面积，下面先求$|AB|$，

将$x=\frac{p}{2}$代入$y^2=2px$解得：$y=\pm p$，所以$|AB|=2p$，

又$|PF|=p$，所以$S_{\Delta PAB}=\frac{1}{2}|AB|\cdot|PF|=\frac{1}{2}\cdot 2p\cdot p=p^2$，由题意，$S_{\Delta PAB}=2$，所以$p^2=2$，故$p=\sqrt{2}$.

答案：$\sqrt{2}$



类型Ⅱ：抛物线定义的运用

【例3】（2020·新课标Ⅰ卷）已知A为抛物线$C:y^2=2px(p>0)$上一点，点A到C的焦点的距离为12，到y轴的距离为9，则$p=$（）

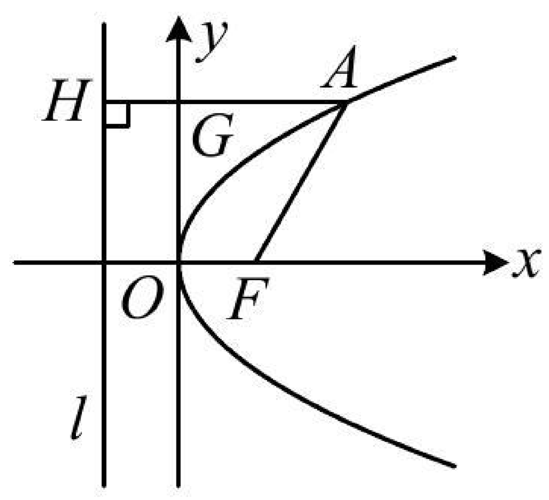
（A）2　（B）3　（C）6　（D）9

解析：如图，涉及抛物线上的点到焦点的距离，考虑抛物线的定义，

设焦点为$F(\frac{p}{2},0)$，准线为$l:x=-\frac{p}{2}$，作$AH\perp l$于H，交y轴于G，

由抛物线定义，$|AH|=|AF|=12$，又$|AG|=9$，所以$|HG|=|AH|-|AG|=12-9=3$，即$\frac{p}{2}=3$，故$p=6$.

答案：C



【反思】涉及抛物线上的点到焦点的距离问题，可优先往抛物线定义上考虑.

【变式1】（2022·全国乙卷）设F为抛物线$C:y^2=4x$的焦点，点A在C上，点$B(3,0)$，若$|AF|=|BF|$，则$|AB|=$（　）

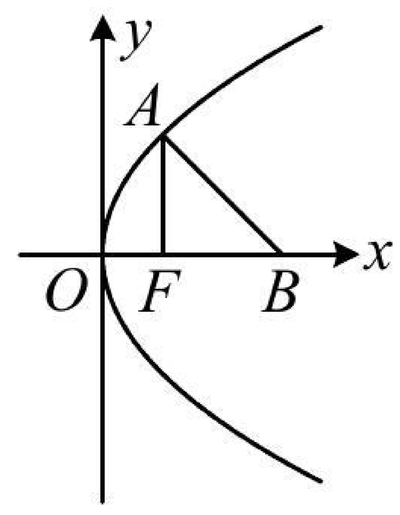
（A）2　（B）$2\sqrt{2}$　（C）3　（D）$3\sqrt{2}$

解析：如图，只要求出$|AF|$，就可结合抛物线定义求得A的坐标，进而求出$|AB|$，

由题意，$F(1,0)$，$B(3,0)$，所以$|BF|=2$，因为$|AF|=|BF|$，所以$|AF|=2$，由内容提要3，

$|AF|=x_A+\frac{p}{2}=x_A+1$，所以$x_A+1=2$，从而$x_A=1$，故$y_A^2=4x_A=4$，故$|AB|=\sqrt{(x_A-3)^2+y_A^2}=2\sqrt{2}$.

答案：B



【变式 2】点 P 是抛物线 $C: y^2 = 4x$ 上的动点，设点 P 到抛物线准线的距离为 d_1，到直线 $l: x - y + 2 = 0$ 的距离为 d_2，则 $d_1 + d_2$ 的最小值为_____.

解析：如图，直接分析 $d_1 + d_2$ 的最小值不易，可考虑用定义将 d_1 转化为 $|PF|$ 来看，

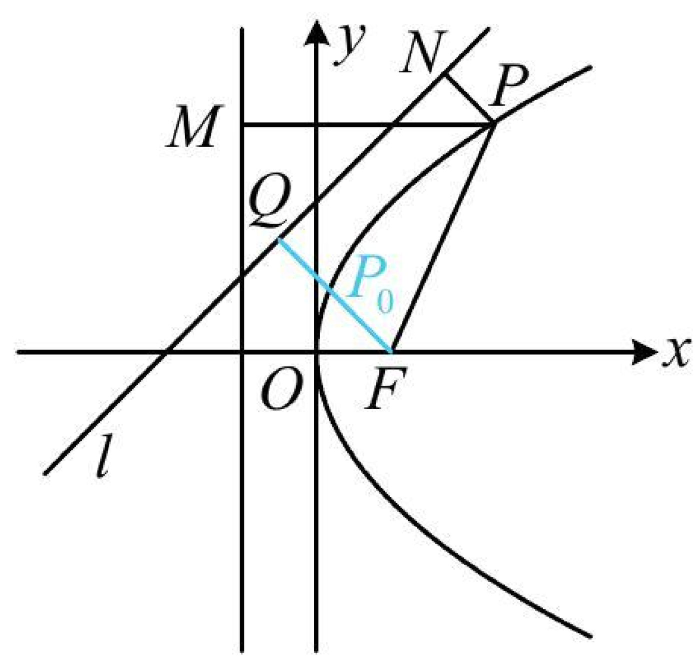
设抛物线的焦点为 $F(1,0)$，由抛物线的定义知 $d_1 = |PF|$，所以 $d_1 + d_2 = |PF| + d_2$ ①，

如图，过 F 作 $FQ \perp l$ 于 Q，过 P 作 $PN \perp l$ 于 N，则 $d_2 = |PN|$，

代入①得：$d_1 + d_2 = |PF| + |PN| \ge |FQ| = \dfrac{|1+2|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \dfrac{3\sqrt{2}}{2}$，

当且仅当点 P 为线段 FQ 与抛物线交点 P_0 时取等号，所以 $(d_1 + d_2)_{\min} = \dfrac{3\sqrt{2}}{2}$.

答案：$\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$



【总结】只要涉及抛物线上的点到焦点的距离，不管问什么，最常见的思考方向都是利用定义转换长度.

强化训练

1.（★）抛物线 $x = -y^2$ 的焦点坐标为_____.

2.（★）若抛物线 C 的顶点在原点，准线方程为 $y = -\dfrac{1}{4}$，则抛物线 C 的标准方程为_____.

3．（2021 • 新高考Ⅱ卷 • ★）抛物线 $y^2=2px(p>0)$ 的焦点到直线 $y=x+1$ 的距离为 $\sqrt{2}$，则 $p=$（　　）

（A）1　　（B）2　　（C）$2\sqrt{2}$　　（D）4

4．（★）顶点在原点，对称轴为坐标轴的抛物线 C 经过点 $A(2,2)$，则 C 的方程为_____.

5．（2022 • 上海模拟 • ★★）已知点 F 为抛物线 $y^2=2px(p>0)$ 的焦点，点 P 在抛物线上且横坐标为 8，O 为原点，若 ΔOFP 的面积为 $2\sqrt{2}$，则该抛物线的准线方程为_____.

6．（2022 • 广东模拟 • ★★）已知点 $A(m,2)$ 为抛物线 $C:y^2=2px(p>0)$ 上一点，过 A 作 C 的准线的垂线，垂足为 B，若 ΔAOB 的面积为 2，其中 O 为原点，则 p 等于（　　）

（A）$\frac{1}{2}$　　（B）1　　（C）2　　（D）4

7.（2022 • 北京模拟 • ★★★）已知点$Q(2\sqrt{2},0)$及抛物线$x^2=4y$上一动点$P(x,y)$，则$y+|PQ|$的最小值是（　　）

（A）$\frac{1}{2}$　　（B）1　　（C）2　　（D）3

8.（2023 • 扬州模拟 • ★★★）已知抛物线$C_1:y^2=8x$，圆$C_2:(x-2)^2+y^2=1$，点$M(1,1)$，若 A，B 分别是C_1，C_2上的动点，则$|AM|+|AB|$的最小值为_____.