第 3 节 圆的切线有关的计算（★★☆）

强化训练

1.（2022•玉溪期末•★）已知直线 l 经过点 $P(1,3)$，且 l 与圆 $x^2+y^2=10$ 相切，则 l 的方程为（　　）

（A）$x+3y-10=0$　　（B）$x-3y+8=0$　　（C）$3x+y-6=0$　　（D）$2x+3y-11=0$

答案：A

解析：点 P 与圆的位置关系不同，求切线的方法也不同，故先判断，

将 P 的坐标代入圆的方程可得 $1^2+3^2=10 \Rightarrow P$ 在圆上，

故可直接用内容提要 4 的结论写出切线 l 的方程，

切线 l 的方程为 $1\cdot x+3y=10$，整理得：$x+3y-10=0$.

2.（★★）已知圆 C 的圆心坐标是 $(0,m)$，半径长是 r. 若直线 $2x-y+3=0$ 与圆相切于点 $A(-2,-1)$，则 $m=$ _____，$r=$ _____.

答案：-2，$\sqrt{5}$

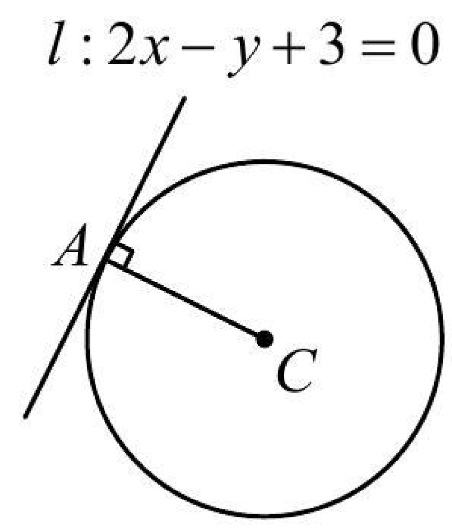
解法 1：如图，由题意，应有 $AC\perp l$，所以 $2\cdot\dfrac{m+1}{2}=-1$，解得：$m=-2$，

点 C 到直线 l 的距离即为半径，所以 $r=\dfrac{|-m+3|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\sqrt{5}$.

解法 2：也可写出圆的方程，代圆上一点处的切线结论，由题意，圆 C 的方程是 $x^2+(y-m)^2=r^2(r>0)$，

所以圆 C 在 $A(-2,-1)$ 处的切线方程是 $-2x+(-1-m)(y-m)=r^2$，整理得：$2x+(1+m)y+r^2-m(1+m)=0$，

此方程与题干的 $2x-y+3=0$ 是同一直线，比较系数即可，所以 $\begin{cases}1+m=-1\\ r^2-m(1+m)=3\end{cases}$，解得：$\begin{cases}m=-2\\ r=\sqrt{5}\end{cases}$.



3.（2022•辽宁模拟•★★）已知圆 $C: x^2+y^2+2x-4y+m=0$ 与 y 轴相切，过点 $P(-2,4)$ 作圆 C 的切线 l，则 l 的方程为_____.

答案：$x=-2$ 或 $3x+4y-10=0$

解析：$x^2+y^2+2x-4y+m=0 \Rightarrow (x+1)^2+(y-2)^2=5-m$，所以圆心为 $C(-1,2)$，半径 $r=\sqrt{5-m}$，

因为圆 C 与 y 轴相切，所以圆心到 y 轴的距离 $1=\sqrt{5-m}$，解得：$m=4$，故圆 $C:(x+1)^2+(y-2)^2=1$，

如图，点 P 在圆外，求切线可设斜率，先考虑斜率不存在的情况，

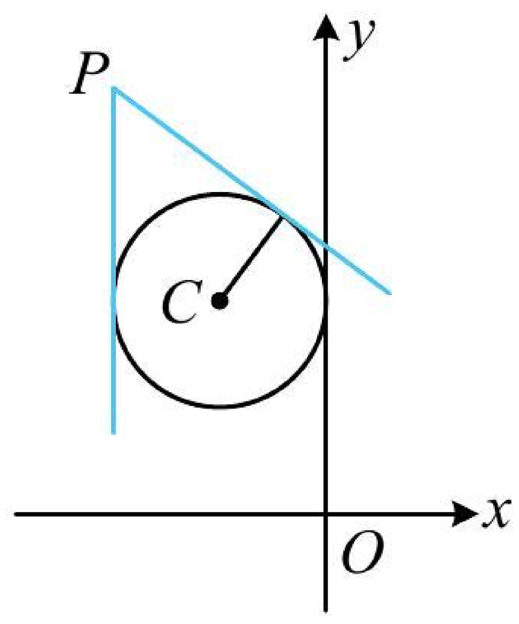
当 $l\perp x$ 轴时，其方程为 $x=-2$，圆心 C 到 l 的距离 $d=1$，满足直线 l 与圆相切；

当 l 不与 x 轴垂直时，可设其方程为 $y-4=k(x+2)$，即 $kx-y+2k+4=0$ ①，

所以 $d=\dfrac{|-k-2+2k+4|}{\sqrt{k^2+(-1)^2}}=\dfrac{|k+2|}{\sqrt{k^2+1}}$，直线 l 与圆 C 相切 $\Rightarrow d=r\Rightarrow\dfrac{|k+2|}{\sqrt{k^2+1}}=1$，解得：$k=-\dfrac{3}{4}$，

代入①整理得 l 的方程为 $3x+4y-10=0$；

综上所述，切线 l 的方程为 $x=-2$ 或 $3x+4y-10=0$.



4．（2022 • 安徽模拟 • ★★）直线 $l: x+y-4=0$ 平分圆 $C: x^2+y^2-2bx-2by-5+b^2=0$ 的周长，过点 $P(-b,1)$ 作圆 C 的一条切线，切点为 Q，则 $|PQ|=$_____.

答案： $2\sqrt{2}$

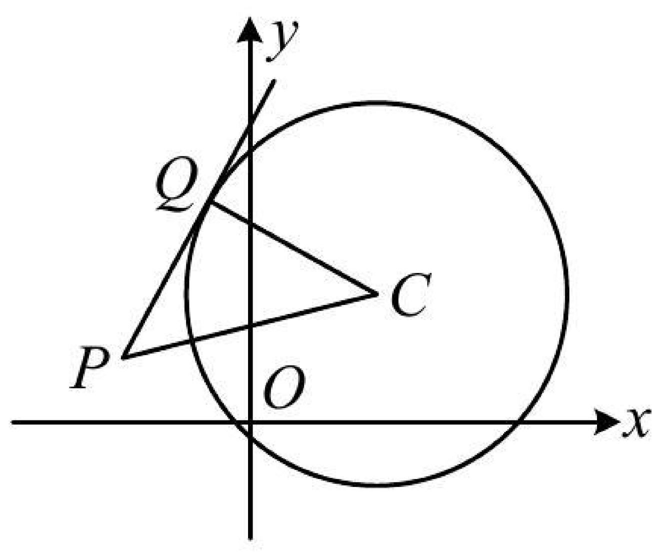
解析： $x^2+y^2-2bx-2by-5+b^2=0\Rightarrow(x-b)^2+(y-b)^2=5+b^2$，所以圆心为 $C(b,b)$，

直线 l 平分圆 C 的周长 $\Rightarrow$ 圆心 C 在 l 上 $\Rightarrow b+b-4=0$，解得：$b=2$，

所以圆 C 的圆心为 $(2,2)$，半径 $r=\sqrt{5+b^2}=3$，点 $P(-2,1)$，

如图，切线长 $|PQ|$ 可在 ΔPCQ 中由勾股定理算，先求 $|PC|$，

$|PC|=\sqrt{(-2-2)^2+(1-2)^2}=\sqrt{17}$，所以 $|PQ|=\sqrt{|PC|^2-|CQ|^2}=\sqrt{17-9}=2\sqrt{2}$.



5．（2022 • 安阳模拟 • ★★★）已知圆 $C:(x-2)^2+(y-6)^2=4$，点 M 为直线 $l: x-y+8=0$ 上的动点，过 M 作圆 C 的两条切线，切点分别为 A 和 B，则四边形 $MACB$ 的周长的最小值为（　　）

（A）8　（B）$6\sqrt{2}$　（C）$5\sqrt{2}$　（D）$2+4\sqrt{2}$

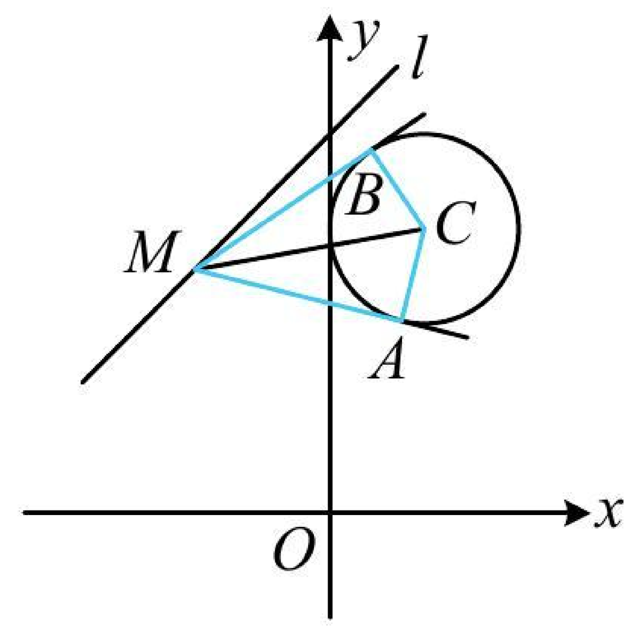
答案： A

解析： 如图，$|AC|=|BC|=2$，$|MA|=|MB|$，所以四边形 $MACB$ 的周长 $L=2|MA|+4$①，

$|MA|$ 是切线长，可转化为 $|MC|$ 来算，$|MA|=\sqrt{|MC|^2-|AC|^2}=\sqrt{|MC|^2-4}$，代入①得 $L=2\sqrt{|MC|^2-4}+4$ ②，

故只需求 $|MC|$ 的最小值，点 M 在直线 l 上运动，所以当 $MC\perp l$ 时，$|MC|$ 最小，

由题意，$C(2,6)$，所以 $|MC|_{\min}=\dfrac{|2-6+8|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=2\sqrt{2}$，代入②得四边形 $MACB$ 的周长的最小值为 8.



6.（2022·湖北模拟·★★★）若圆$C:(x-2)^2+(y+1)^2=2$关于直线$l:ax+2by+6=0$对称，过$P(a,b)$作圆C的一条切线，切点为A，则$|PA|$的最小值为（）

（A）2　（B）3　（C）4　（D）6

答案：C

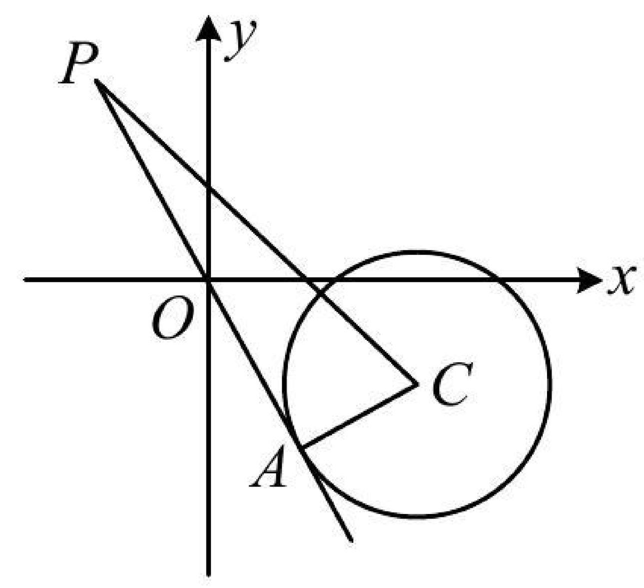
解析：圆C关于直线l对称$\Rightarrow$圆心$C(2,-1)$在直线l上$\Rightarrow 2a-2b+6=0\Rightarrow b=a+3$ ①，

如图，可在ΔPCA中用勾股定理算切线长$|PA|$，先算$|PC|$，$|PC|=\sqrt{(a-2)^2+(b+1)^2}$，

所以$|PA|=\sqrt{|PC|^2-|AC|^2}=\sqrt{(a-2)^2+(b+1)^2-2}$，有$a$、$b$两个变量，求最值前应先消元，

将式①代入可得$|PA|=\sqrt{(a-2)^2+(a+3+1)^2-2}=\sqrt{2a^2+4a+18}=\sqrt{2(a+1)^2+16}$，

故当$a=-1$时，$|PA|$取得最小值 4.



7.（★★）已知圆$C:(x-2)^2+(y-4)^2=16$，过点$P(-1,0)$作圆C的两条切线，切点分别为A、B，则$|AB|=$______.

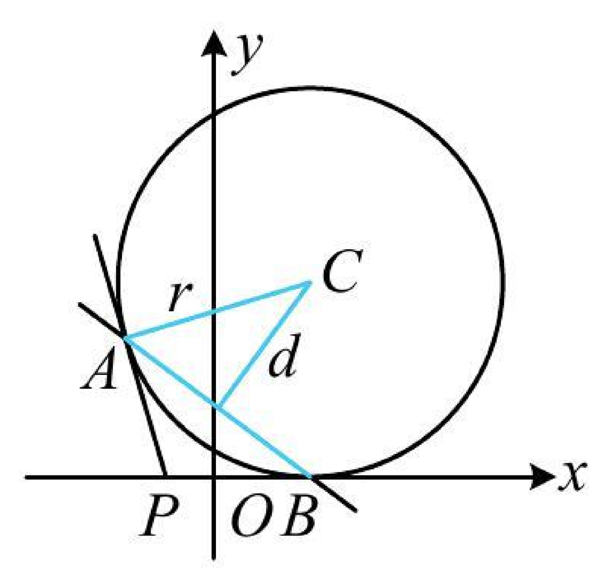
答案：$\dfrac{24}{5}$

解析：如图，可先由切点弦结论写出直线AB的方程，

切点弦AB的方程为$(-1-2)(x-2)+(0-4)(y-4)=16$，整理得：$3x+4y-6=0$，

此时$|AB|$可看成直线AB被圆C截得的弦长，先算d，

圆心$C(2,4)$到直线AB的距离$d=\dfrac{|3\times2+4\times4-6|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\dfrac{16}{5}$，所以$|AB|=2\sqrt{r^2-d^2}=2\sqrt{16-(\dfrac{16}{5})^2}=\dfrac{24}{5}$.



8.（2022·温州模拟·★★★）过 x 轴正半轴上一点 $P(x_0,0)$ 作圆 $C:x^2+(y-\sqrt{3})^2=1$ 的两条切线，切点分别为 A 和 B，若 $|AB|\geq\sqrt{3}$，则 x_0 的最小值为（）

（A）1　（B）$\sqrt{2}$　（C）2　（D）3

答案： A

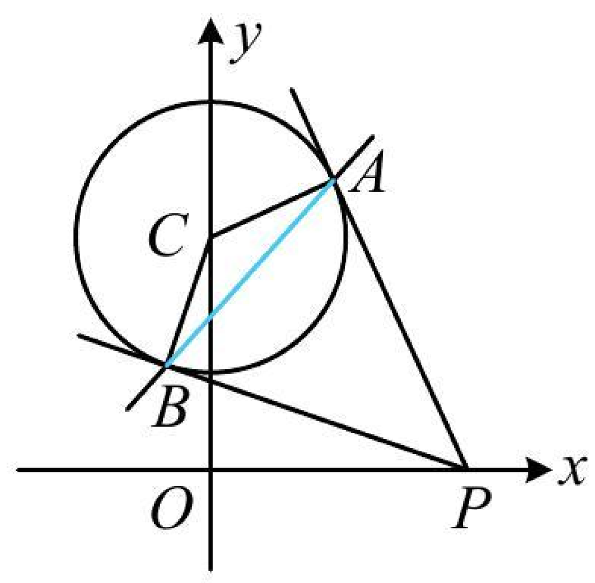
解析： 如图，可由切点弦结论写出直线 AB 的方程，

因为 $P(x_0,0)$，所以直线 AB 的方程为 $x_0x+(0-\sqrt{3})(y-\sqrt{3})=1$，整理得：$x_0x-\sqrt{3}y+2=0$，

题干给出 $|AB|\geq\sqrt{3}$，于是得算 $|AB|$，可按直线 AB 被圆截得的弦长来算，先求圆心到直线 AB 的距离 d，

圆 C 的圆心为 $C(0,\sqrt{3})$，半径 $r=1$，所以 $d=\dfrac{|-\sqrt{3}\times\sqrt{3}+2|}{\sqrt{x_0^2+(-\sqrt{3})^2}}=\dfrac{1}{\sqrt{x_0^2+3}}$，故 $|AB|=2\sqrt{r^2-d^2}=2\sqrt{1-\dfrac{1}{x_0^2+3}}$，

因为 $|AB|\geq\sqrt{3}$，所以 $2\sqrt{1-\dfrac{1}{x_0^2+3}}\geq\sqrt{3}$，结合 $x_0>0$ 可解得：$x_0\geq 1$，故 x_0 的最小值为 1.



9.（2020·新课标Ⅰ卷·★★★★）已知圆 $M:x^2+y^2-2x-2y-2=0$，直线 $l:2x+y+2=0$，P 为 l 上的动点，过点 P 作圆 M 的切线 PA、PB，切点为 A、B，当 $|PM|\cdot|AB|$ 最小时，直线 AB 的方程为（　）

（A）$2x-y-1=0$　（B）$2x+y-1=0$　（C）$2x-y+1=0$　（D）$2x+y+1=0$

答案： D

解析： $x^2+y^2-2x-2y-2=0\Rightarrow(x-1)^2+(y-1)^2=4\Rightarrow$ 圆心为 $M(1,1)$，半径 $r=2$，

要求直线 AB 的方程，只需求出点 P 的坐标，代切点弦结论即可，注意到 $|AB|$ 与 $|PM|$ 有关系，所以为了分析 $|PM|\cdot|AB|$ 何时最小，先把 $|AB|$ 也用 $|PM|$ 表示，

如图 1，设 AB 与 PM 交于点 N，则 $AN\perp PM$，下面先求 $|AN|$，可在 ΔPAM 中用等面积法，

因为 $S_{\Delta PAM}=\dfrac{1}{2}|PA|\cdot|AM|=\dfrac{1}{2}|PM|\cdot|AN|$，所以 $|AN|=\dfrac{|PA|\cdot|AM|}{|PM|}=\dfrac{2|PA|}{|PM|}=\dfrac{2\sqrt{|PM|^2-4}}{|PM|}=2\sqrt{1-\dfrac{4}{|PM|^2}}$，

从而 $|AB|=2|AN|=4\sqrt{1-\dfrac{4}{|PM|^2}}$，故 $|PM|\cdot|AB|=|PM|\cdot 4\sqrt{1-\dfrac{4}{|PM|^2}}=4\sqrt{|PM|^2-4}$，

所以当 $|PM|$ 最小时，$|PM|\cdot|AB|$ 也最小，而 $|PM|$ 最小时应有 $PM\perp l$，如图 2，

可由此垂直关系求得 PM 的斜率，结合点 M 写出其方程，并与 l 联立求出 P 的坐标，

因为直线 l 的斜率为 -2，所以 PM 的斜率为 $\dfrac{1}{2}$，故 PM 的方程为 $y-1=\dfrac{1}{2}(x-1)$，整理得：$x-2y+1=0$，

联立$\begin{cases}x-2y+1=0\\2x+y+2=0\end{cases}$解得：$\begin{cases}x=-1\\y=0\end{cases}$，所以$P(-1,0)$，

由切点弦结论知直线AB的方程为$-x+0\cdot y-2\cdot\dfrac{-1+x}{2}-2\cdot\dfrac{0+y}{2}-2=0$，整理得：$2x+y+1=0$.

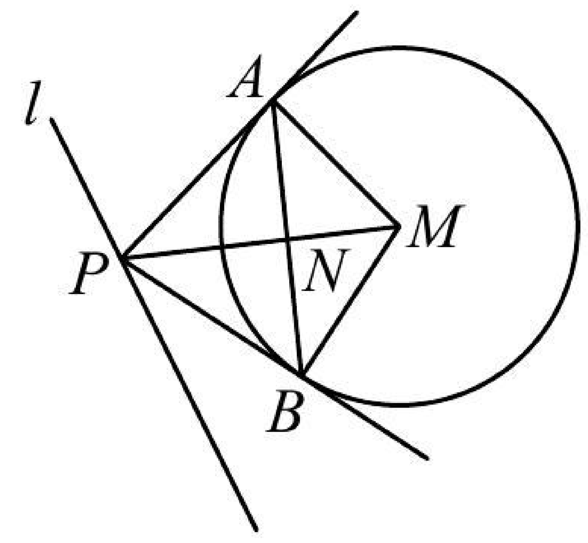


图1

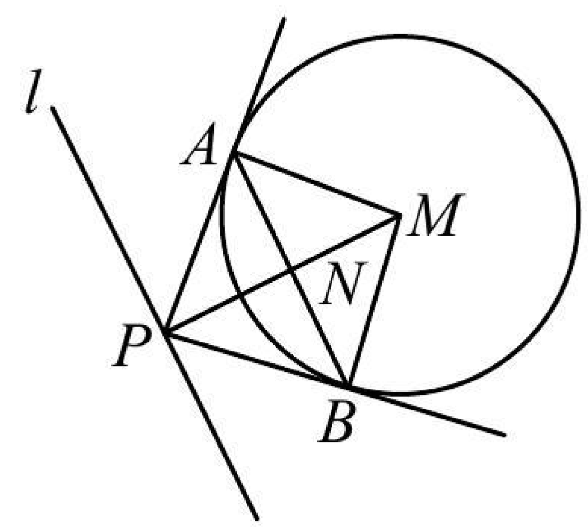


图2