

模块一 函数的概念与性质

第1节 函数概念 (★☆☆)

内容提要

这一节主要涉及求定义域、求解析式、求一类常见的分式型函数的值域这三类问题.

1. 求定义域

①偶次方根: 如 $\sqrt{f(x)}$, $\sqrt[4]{f(x)}$, $\sqrt[6]{f(x)}$, \cdots , 根号下的数非负, 即 $f(x) \geq 0$;

②对数: $\log_a f(x)$, 真数大于 0, 即 $f(x) > 0$;

③分式: 如 $y = \frac{f(x)}{g(x)}$, 分母不为 0, 即 $g(x) \neq 0$;

④零次方: x^0 中 $x \neq 0$;

⑤正切: $\tan x$ 中 $x \neq k\pi + \frac{\pi}{2} (k \in \mathbf{Z})$;

⑥抽象函数求定义域: (i) 定义域永远指自变量 x 的取值集合; (ii) “ $f(\cdots)$ ” 括号范围恒不变.

2. 求解析式常用①换元法, ②待定系数法, ③方程法.

3. $\frac{\text{二次函数}}{\text{一次函数}}$ 、 $\frac{\text{二次函数}}{\text{二次函数}}$ 、 $\frac{\text{一次函数}}{\text{二次函数}}$ 型分式函数求最值: 同除法、换元法、判别式法等.

典型例题

类型 I: 求函数的定义域

【例 1】函数 $f(x) = \sqrt{2^x - 1} + \frac{1}{x-2} + \ln(3-x)$ 的定义域为_____.

解析: 由 $\begin{cases} 2^x - 1 \geq 0 \\ x - 2 \neq 0 \\ 3 - x > 0 \end{cases}$ 解得: $0 \leq x < 3$ 且 $x \neq 2$, 所以 $f(x)$ 的定义域为 $[0, 2) \cup (2, 3)$.

答案: $[0, 2) \cup (2, 3)$

【反思】函数的定义域一定要写成区间或集合的形式.

【变式 1】若函数 $f(x^2 - 1)$ 的定义域是 $[1, 2]$, 则函数 $f(x)$ 的定义域是_____.

解析: 定义域指的是自变量 x 的取值集合, $f(x^2 - 1)$ 的定义域为 $[1, 2] \Rightarrow$ 在 $f(x^2 - 1)$ 中, $1 \leq x \leq 2$,

所以 $0 \leq x^2 - 1 \leq 3$, 即 $f(x^2 - 1)$ 的括号整体的范围是 $[0, 3]$, 抽象函数定义域遵循括号范围恒不变原则,

从而在函数 $f(x)$ 中, 括号整体的范围也是 $[0, 3]$, 即 $x \in [0, 3]$, 故 $f(x)$ 的定义域是 $[0, 3]$.

答案: $[0, 3]$

【变式 2】若 $f(2x+1)$ 的定义域为 $[0,3]$ ，则函数 $y=f(x-1)$ 的定义域为_____.

解析：定义域指的是自变量 x 的取值集合， $f(2x+1)$ 的定义域为 $[0,3] \Rightarrow$ 在 $f(2x+1)$ 中， $0 \leq x \leq 3$ ，所以 $1 \leq 2x+1 \leq 7$ ，即 $f(2x+1)$ 的括号整体的范围是 $[1,7]$ ，抽象函数定义域遵循括号范围恒不变原则，所以在 $y=f(x-1)$ 中， $1 \leq x-1 \leq 7$ ，解得： $2 \leq x \leq 8$ ，故 $y=f(x-1)$ 的定义域为 $[2,8]$.

答案： $[2,8]$

【总结】给出解析式求定义域，根据解析式有意义建立不等式求 x 的范围即可；抽象函数求定义域，抓住两点：①定义域永远指自变量 x 的取值集合，②“ $f(\dots)$ ”的括号范围恒不变.

类型 II：几种求函数解析式的题型

【例 2】已知 $f(\sqrt{x}+1)=x-3\sqrt{x}$ ，则 $f(x)=$ _____.

解析：欲求 $f(x)$ ，可先将 $f(\sqrt{x}+1)$ 括号里的整体换元成 t ，求出 $f(t)$ ，

令 $t=\sqrt{x}+1(t \geq 1)$ ，则 $x=(t-1)^2$ ，所以 $f(t)=(t-1)^2-3(t-1)=t^2-5t+4(t \geq 1)$ ，故 $f(x)=x^2-5x+4(x \geq 1)$.

答案： $x^2-5x+4(x \geq 1)$

【反思】已知函数 $y=f(g(x))$ 的解析式求 $f(x)$ 的解析式的流程：①令 $t=g(x)$ ，则 $f(g(x))$ 可化为 $f(t)$ ，②由 $t=g(x)$ 反解出 x ，用 t 表示，代入所给函数 $y=f(g(x))$ 的右侧，从而求得 $f(t)$ ；③由 $t=g(x)$ 研究 t 的取值范围，得到 $f(t)$ 的定义域；④将 $f(t)$ 的自变量 t 换回成 x ，得到 $f(x)$.

【例 3】已知 $f(x)$ 是一次函数，且 $f(f(x))=4x+3$ ，则 $f(x)=$ _____.

解析：已知了函数类型，用待定系数法求解析式，

设 $f(x)=ax+b(a \neq 0)$ ，则 $f(f(x))=af(x)+b=a(ax+b)+b=4x+3$ ，即 $a^2x+ab+b=4x+3$ ，

所以 $\begin{cases} a^2=4 \\ ab+b=3 \end{cases}$ ，解得： $\begin{cases} a=2 \\ b=1 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} a=-2 \\ b=-3 \end{cases}$ ，所以 $f(x)=2x+1$ 或 $f(x)=-2x-3$.

答案： $2x+1$ 或 $-2x-3$

【反思】已知 $f(x)$ 的函数类型（如一次、二次函数，指数函数等）求 $f(x)$ 的解析式，可用待定系数法.

【例 4】已知定义在 \mathbf{R} 上的函数 $f(x)$ 满足 $f(x)=2f(-x)+x$ ，则 $f(x)=$ _____.

解析：看到 $f(x)$ 和 $f(-x)$ 在同一个式子中，将 x 换成 $-x$ ，再构造一个函数方程，

在 $f(x)=2f(-x)+x$ 中将 x 换成 $-x$ 可得 $f(-x)=2f(x)-x$ ，所以 $\begin{cases} f(x)=2f(-x)+x & \text{①} \\ f(-x)=2f(x)-x & \text{②} \end{cases}$ ，

将②代入①得： $f(x)=2[2f(x)-x]+x$ ，整理得： $f(x)=\frac{x}{3}$.

答案： $\frac{x}{3}$

【反思】类似地，若给出的是 $f(x)$ 与 $f(\frac{1}{x})$ 的方程，则可将 x 换成 $\frac{1}{x}$ 得到一个新的方程。

类型III：一类分式函数的最值问题

【例 5】函数 $y = \frac{x^2}{x^2 - x + 1} (x > 0)$ 的最大值为_____。

解析：由题意， $y = \frac{x^2}{x^2 - x + 1} = \frac{1}{1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} = \frac{1}{(\frac{1}{x} - \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}} \leq \frac{4}{3}$ ，当且仅当 $x = 2$ 时取等号，所以 $y_{\max} = \frac{4}{3}$ 。

答案： $\frac{4}{3}$

【变式 1】函数 $y = \frac{x-1}{x^2 - x + 1} (x > 1)$ 的最大值为_____。

解法 1：像这种 $\frac{\text{一次函数}}{\text{二次函数}}$ 型的分式函数，可令一次函数部分为 t ，再分子分母同除以 t ，

令 $t = x - 1$ ，则 $t > 0$ ， $x = t + 1$ ，所以 $y = \frac{t}{(t+1)^2 - (t+1) + 1} = \frac{t}{t^2 + t + 1} = \frac{1}{t + \frac{1}{t} + 1} \leq \frac{1}{2\sqrt{t \cdot \frac{1}{t}} + 1} = \frac{1}{3}$ ，

当且仅当 $t = \frac{1}{t}$ ，即 $t = 1$ 时取等号，此时 $x = 2$ ，故函数 $y = \frac{x-1}{x^2 - x + 1} (x > 1)$ 的最大值为 $\frac{1}{3}$ 。

解法 2：把函数的解析式看成关于 x 的方程，将方程变形，利用判别式研究 y 的最值，

将 $y = \frac{x-1}{x^2 - x + 1}$ 变形为 $y(x^2 - x + 1) = x - 1$ ，整理得： $yx^2 - (y+1)x + y + 1 = 0$ ①，

当 $y \neq 0$ 时，把①看成关于 x 的一元二次方程，其判别式 $\Delta = [-(y+1)]^2 - 4(y+1) \geq 0$ ，解得： $-1 \leq y \leq \frac{1}{3}$ ，

要得出 y 的最大值是 $\frac{1}{3}$ ，还需验证等号能成立，可把 $y = \frac{1}{3}$ 代入 $y = \frac{x-1}{x^2 - x + 1}$ 看能否求出满足题意的 x ，

由 $\frac{1}{3} = \frac{x-1}{x^2 - x + 1}$ 可解得： $x = 2$ ，满足 $x > 1$ ，所以函数 $y = \frac{x-1}{x^2 - x + 1} (x > 1)$ 的最大值为 $\frac{1}{3}$ 。

答案： $\frac{1}{3}$

【变式 2】函数 $y = \frac{x^2 - 2x + 2}{x^2 - x + 1} (x > 1)$ 的最小值为_____。

解法 1： $\frac{\text{二次函数}}{\text{二次函数}}$ 型的分式函数，可以通过拆项把分子化为一次函数，将问题化归成变式 1 的类型，

由题意， $y = \frac{x^2 - 2x + 2}{x^2 - x + 1} = \frac{(x^2 - x + 1) - (x - 1)}{x^2 - x + 1} = 1 - \frac{x-1}{x^2 - x + 1}$ ，由上一题结论可得 $y_{\min} = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$ 。

解法 2：将 $y = \frac{x^2 - 2x + 2}{x^2 - x + 1}$ 变形为 $y(x^2 - x + 1) = x^2 - 2x + 2$ ，整理得： $(y-1)x^2 + (2-y)x + y - 2 = 0$ ，

当 $y \neq 1$ 时, 将该方程看成关于 x 的一元二次方程,

其判别式 $\Delta = (2-y)^2 - 4(y-1)(y-2) \geq 0$, 解得: $\frac{2}{3} \leq y \leq 2 (y \neq 1)$,

要得出 y 的最小值为 $\frac{2}{3}$, 还需验证等号能成立, 可将 $y = \frac{2}{3}$ 代回 $y = \frac{x^2 - 2x + 2}{x^2 - x + 1}$ 看能否求出满足题意的 x ,

由 $\frac{2}{3} = \frac{x^2 - 2x + 2}{x^2 - x + 1}$ 解得: $x = 2$, 满足 $x > 1$, 所以函数 $y = \frac{x^2 - 2x + 2}{x^2 - x + 1} (x > 1)$ 的最小值为 $\frac{2}{3}$.

答案: $\frac{2}{3}$

【变式 3】函数 $y = \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x^2 + 5}$ 的最大值为_____.

解析: 此处虽不是 $\frac{\text{一次函数}}{\text{二次函数}}$, 但可以把分子的 $\sqrt{x^2 + 1}$ 看成一次的, 故将其换元成 t ,

设 $t = \sqrt{x^2 + 1}$, 则 $t \geq 1$, $x^2 = t^2 - 1$, 且 $y = \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x^2 + 5} = \frac{t}{t^2 + 4} = \frac{1}{t + \frac{4}{t}} \leq \frac{1}{2\sqrt{t \cdot \frac{4}{t}}} = \frac{1}{4}$,

当且仅当 $t = \frac{4}{t}$, 即 $t = 2$ 时取等号, 此时 $x = \pm\sqrt{3}$, 所以函数 $y = \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x^2 + 5}$ 的最大值为 $\frac{1}{4}$.

答案: $\frac{1}{4}$

《一数·高考数学核心方法》

【总结】 $\frac{\text{一次函数}}{\text{二次函数}}$ 、 $\frac{\text{二次函数}}{\text{一次函数}}$ 在处理时, 通法都是把一次的部分换元成 t , 转化为均值不等式模型求最值,

若是 $\frac{\text{二次函数}}{\text{二次函数}}$, 则可通过拆项化为 $\frac{\text{一次函数}}{\text{二次函数}}$.

强化训练

1. (★) 函数 $y = \frac{\sqrt{4-x^2}}{\ln(x+1)}$ 的定义域为 ()

- (A) $[-2, 2]$ (B) $(-1, 2]$ (C) $(-1, 0) \cup (0, 2]$ (D) $(-1, 1) \cup (1, 2]$

2. (2023·吉林模拟·★) 若函数 $f(x)$ 的定义域为 $[0, 4]$, 则函数 $g(x) = f(x+2)$ 的定义域为 ()

- (A) $[-2, 2]$ (B) $[0, 2]$ (C) $[2, 6]$ (D) $[2, 4]$

3. (2022·四川遂宁期末·★★) 若函数 $f(x+1)$ 的定义域为 $[-1,0]$, 则 $f(\lg x)$ 的定义域为 ()

- (A) $[10,100]$ (B) $[1,2]$ (C) $[1,10]$ (D) $(0,1]$

4. (2023·宁夏银川模拟·★) 已知 $f(\sqrt{x}-1)=x+1$, 则函数 $f(x)$ 的解析式为 ()

- (A) $f(x)=x^2$ (B) $f(x)=x^2+1(x\geq 1)$ (C) $f(x)=x^2+2x+2(x\geq -1)$ (D) $f(x)=x^2-2x(x\geq -1)$

5. (2022·陕西临潼一模·★★) 已知 $f(x+1)=\ln x^2$, 则 $f(x)=$ ()

- (A) $\ln(x+1)^2$ (B) $2\ln(x+1)$ (C) $2\ln|x-1|$ (D) $\ln(x^2-1)$

6. (2022·安徽模拟·★★) 已知 $f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$, 且 $f(x)=2f(\frac{1}{x})+\ln x$, 则 $f(x)=$ _____.

《一数·高考数学核心方法》

7. (★★) 函数 $f(x)=2^{x^2-2x}(0\leq x\leq 3)$ 的值域是_____.

8. (2022·辽宁模拟·★★) 函数 $y=\frac{x^2+x+1}{x^2-x+1}$ 的值域为_____.

9. (2022·江苏模拟·★★) 函数 $y=\frac{\sqrt{x^2+1}}{x^2+2}$ 的最大值为_____.

10. (2022·广西模拟·★★★★) 函数 $y=\frac{2x-1}{\sqrt{x-1}+1}$ 的最小值为_____.