第 5 节 圆中最值问题（★★★）

强化训练

1．（★★）已知 O 为原点，P 为圆 $C:(x-1)^2+(y-b)^2=1(b>0)$ 上的动点，若 $|OP|$ 的最大值为 3，则 b 的值为（　　）

（A）1　（B）$\sqrt{2}$　（C）$\sqrt{3}$　（D）2

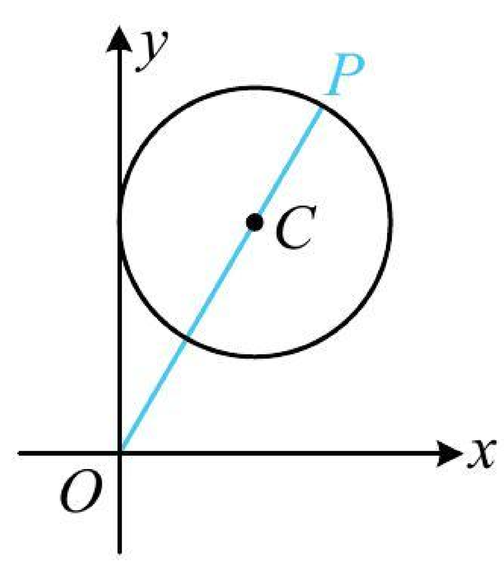
答案：C

解析：涉及圆上动点与定点的距离最值问题，应先判断定点在圆内还是圆外，

因为 $(0-1)^2+(0-b)^2=1+b^2>1$，所以点 O 在圆 C 外，

可按内容提要中的模型 1 处理，如图所示即为 $|OP|$ 最大的情形，

圆心为 $C(1,b)$，所以 $|OP|_{\max}=|OC|+1=\sqrt{1+b^2}+1$，由题意，$\sqrt{1+b^2}+1=3$，结合 $b>0$ 可得 $b=\sqrt{3}$.



2．（2022・西安模拟・★★）已知半径为 2 的圆过点 $(5,12)$，则其圆心到原点的距离的最小值为（　　）

（A）10　（B）11　（C）12　（D）13

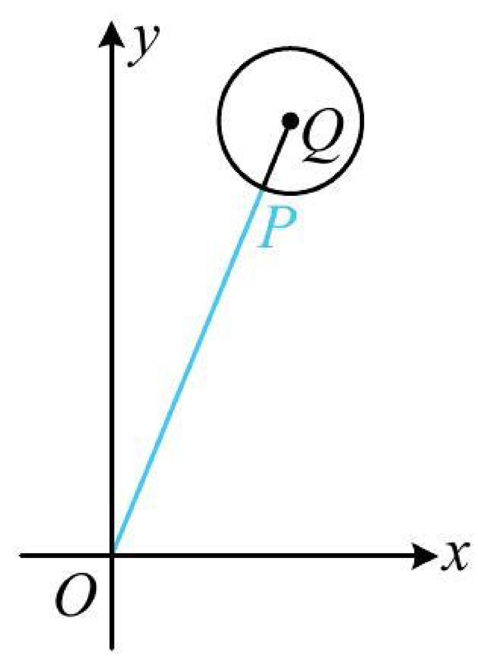
答案：B

解析：本题圆心是动点，先求出圆心的运动轨迹，

设圆心为 $P(x,y)$，记 $Q(5,12)$，由题意，$\sqrt{(x-5)^2+(y-12)^2}=2$，所以 $(x-5)^2+(y-12)^2=4$，

故圆心 P 可在以 $Q(5,12)$ 为圆心，2 为半径的圆上运动，如图，原点在该圆外，属内容提要中的模型 1，

因为 $|OQ|=\sqrt{5^2+12^2}=13$，所以圆心 P 到原点距离的最小值为 $|OQ|-2=11$.



3．（2022・西安模拟・★★）圆 $C:x^2+y^2-4x-4y-10=0$ 上的点 P 到直线 $l:x+y-14=0$ 的最大距离与最小距离之和为（　　）

（A）30　（B）18　（C）$10\sqrt{2}$　（D）$5\sqrt{2}$

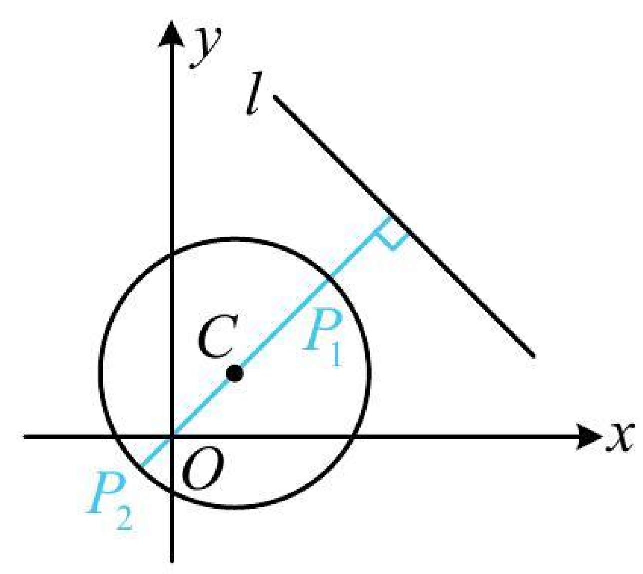
答案：C

解析：先判断直线 l 与圆 C 的位置关系，$x^2+y^2-4x-4y-10=0 \Rightarrow (x-2)^2+(y-2)^2=18$

所以圆 C 的圆心为 $C(2,2)$，半径 $r=3\sqrt{2}$，故圆心 C 到直线 l 的距离 $d=\dfrac{|2+2-14|}{\sqrt{1^2+1^2}}=5\sqrt{2}>r$，

直线 l 与圆 C 相离，属内容提要中的模型 3，P 到 l 的距离最小、最大的情形如图中的 P_1、P_2，

圆 C 上的点到直线 l 的最大距离为 $d+r$，最小距离为 $d-r$，它们的和为 $2d=10\sqrt{2}$.



4.（2022·大通三模·★★★）已知点 M、N 分别在圆 $C:(x-3)^2+(y-1)^2=4$ 和直线 $l:4x-3y+t=0$ 上运动，若 $|MN|$ 的最小值为 7，则 t 的值为（　　）

（A）36　（B）37　（C）-45　（D）-54 或 36

答案：D

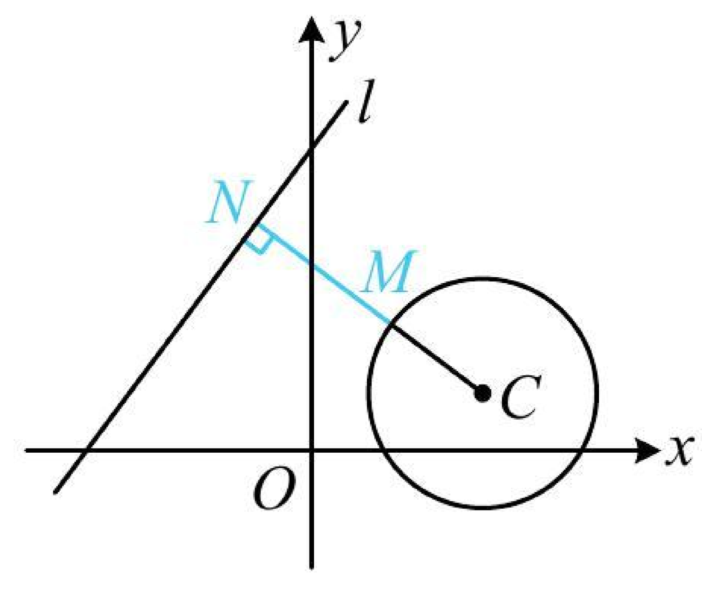
解析：为了作图，先判断直线与圆的位置关系，此处 l 含参，三种位置关系均有可能，故分别考虑，

若直线与圆有交点，则当 M、N 取同一交点时，$|MN|=0$，不合题意，所以直线与圆只能相离，

如图，当 $|MN|$ 最小时，必有 $MN\perp l$，故只需求点 M 到 l 距离的最小值，可按内容提要中的模型 3 处理，

圆心 $C(3,1)$ 到直线 l 的距离 $d=\dfrac{|4\times3-3\times1+t|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}}=\dfrac{|9+t|}{5}$，所以 $|MN|_{\min}=d-r=\dfrac{|9+t|}{5}-2$，

由题意，$\dfrac{|9+t|}{5}-2=7$，解得：$t=-54$ 或 36.



5.（2022·天津模拟·★★★）设曲线 $C:x=\sqrt{1-(y-1)^2}$ 上的点 P 到直线 $l:x-y-2=0$ 的距离的最大值为 a，最小值为 b，则 $a-b$ 的值为（　　）

（A）$\sqrt{2}$　（B）$2-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　（C）2　（D）$\dfrac{\sqrt{2}}{2}+1$

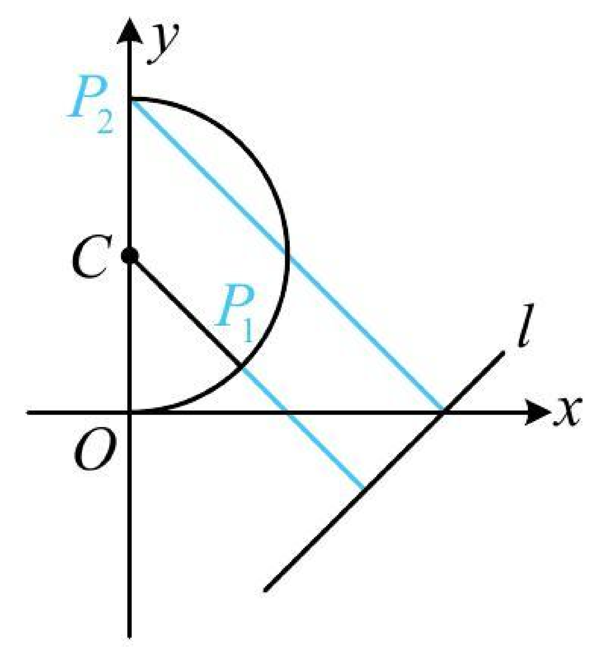
答案：D

解析：曲线 C 的方程有根号，先平方去根号，$x=\sqrt{1-(y-1)^2} \Rightarrow x^2=1-(y-1)^2 \Rightarrow x^2+(y-1)^2=1(x\ge0)$，

曲线 C 为如图所示的半圆，圆心为 $C(0,1)$，半径 $r=1$，点 C 到直线 l 的距离的 $d=\dfrac{|-1-2|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}>r$，

直线 l 与半圆 C 相离，P 到 l 的距离的最小值在图中 P_1 处取，但由于是半圆，所以最大值在 P_2 处取，

所以 $b=d-r=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}-1$，又 $P_2(0,2)$，所以 $a=\dfrac{|-2-2|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=2\sqrt{2}$，故 $a-b=\dfrac{\sqrt{2}}{2}+1$.



6.（★★★）已知 P 为圆 $O:x^2+y^2=2$ 上的动点，点 $A(m,m-3)(m\in\mathbf{R})$，则 $|PA|$ 的最小值为（　　）

（A）1　　（B）2　　（C）$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　　（D）$\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$

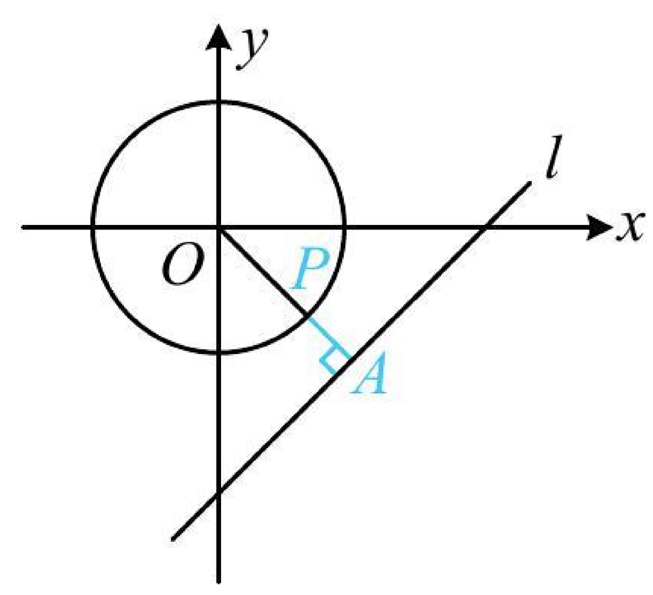
答案：C

解析：点 A 的坐标含参，是动点，先消去参数看看点 A 的运动轨迹，设 $A(x,y)$，则 $\begin{cases}x=m\\y=m-3\end{cases}$，

两式作差消去 m 整理得：$x-y-3=0$，所以 A 是直线 $l:x-y-3=0$ 上的动点，

对圆 O 上任意的点 P，A 在 l 上运动，总有当 $AP\perp l$ 时，$|PA|$ 最小，故只需求 P 到直线 l 距离的最小值，

如图，圆心 O 到直线 l 的距离 $d=\dfrac{|-3|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$，所以 $|PA|_{\min}=d-r=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}-\sqrt{2}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.



7.（2022•昆明模拟•★★★）在圆 $M:x^2+y^2-4x+2y-4=0$ 内，过点 $O(0,0)$ 的最长弦和最短弦分别是 AC 和 BD，则四边形 $ABCD$ 的面积为（　　）

（A）24　　（B）12　　（C）10　　（D）8

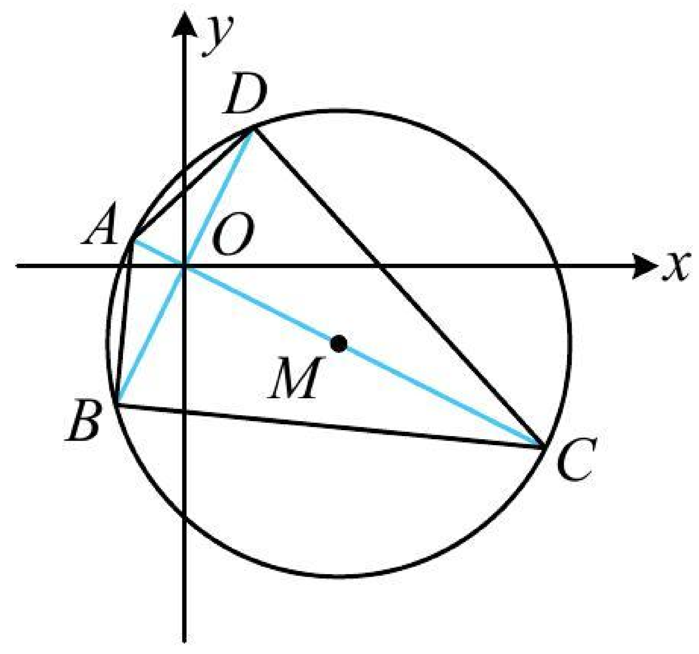
答案：B

解析：$x^2+y^2-4x+2y-4=0\Rightarrow(x-2)^2+(y+1)^2=9$，所以圆心为 $M(2,-1)$，半径 $r=3$，

如图，原点 O 在圆内，属内容提要中的模型 5，最长弦 AC 是直径，最短弦 BD 是与 OM 垂直的弦，

所以 $|AC|=6$，又 $|OM|=\sqrt{2^2+(-1)^2}=\sqrt{5}$，所以 $|BD|=2\sqrt{r^2-|OM|^2}=4$，

故四边形 $ABCD$ 的面积 $S=\dfrac{1}{2}|AC|\cdot|BD|=\dfrac{1}{2}\times6\times4=12$.



8.（2021·北京卷·★★★）已知直线 $y=kx+m$（m 为常数）与圆 $x^2+y^2=4$ 交于 M，N，当 k 变化时，若 $|MN|$ 的最小值为 2，则 $m=$（　　）

（A）± 1　　（B）$\pm\sqrt{2}$　　（C）$\pm\sqrt{3}$　　（D）± 2

答案：C

解法 1：注意到 m 为常数，故所给直线是过定点 $P(0,m)$ 的直线，先分析点 P 与圆的位置关系，

如图，点 P 必在圆内，否则 M，N 可以重合，$|MN|$ 的最小值不是 2，

此时问题就变成了过圆内定点的最短弦问题（内容提要的模型 5），可直接求 $|MN|$ 的最小值，

当 $MN\perp OP$ 时，$|MN|$ 最小，所以 $|MN|_{\min}=2\sqrt{r^2-|OP|^2}=2\sqrt{4-m^2}$，由题意，$|MN|_{\min}=2$，

所以 $2\sqrt{4-m^2}=2$，解得：$m=\pm\sqrt{3}$.

解法 2：涉及圆的弦长，可用公式 $L=2\sqrt{r^2-d^2}$ 计算，

设圆心 O 到直线 l 的距离为 d，则 $|MN|=2\sqrt{4-d^2}$，

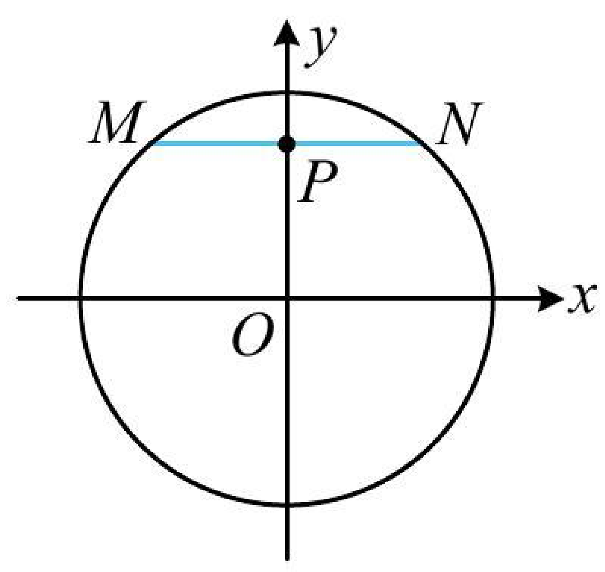
我们发现 d 最大时，$|MN|$ 最小，而 d 可由点到直线的距离公式计算，故先计算，再分析其最大值，

由题意，$d=\dfrac{|m|}{\sqrt{k^2+(-1)^2}}=\dfrac{|m|}{\sqrt{k^2+1}}$，

注意到题干说 m 为常数，所以上式的变量是 k，

当 $k=0$ 时，d 取最大值 $|m|$，所以 $|MN|_{\min}=2\sqrt{4-|m|^2}$，

由题意，$|MN|_{\min}=2$，所以 $2\sqrt{4-|m|^2}=2$，故 $m=\pm\sqrt{3}$.



9.（2022·北京模拟·★★★）已知直线 $l: ax+by=1$，若 l 上有且仅有一点 P，使得以 P 为圆心，1 为半径的圆过原点 O，则 $a-b$ 的最大值为（　　）

（A）$\sqrt{2}$　　（B）$2\sqrt{2}$　　（C）2　　（D）1

答案：A

解析：为了求 $a-b$ 的最大值，得先寻找 a 和 b 的关系，我们来翻译已知条件，

以 P 为圆心，1 为半径的圆过原点，所以 $|OP|=1$，

原点是定点，所以满足 $|OP|=1$ 的点 P 在圆 $x^2+y^2=1$ 上，故题干的条件等价于直线 l 与圆 $x^2+y^2=1$ 有且仅有一个交点，它们应相切，可据此建立 a 和 b 的关系，

$ax+by=1\Rightarrow ax+by-1=0$，所以原点 O 到直线 l 的距离 $d=\dfrac{|-1|}{\sqrt{a^2+b^2}}=1$，故 $a^2+b^2=1$，

看到平方和等于 1，想到用内容提要第 2 点中的三角换元，将 $a-b$ 转化为三角函数求最大值，

可设 $\begin{cases} a=\cos\theta \\ b=\sin\theta \end{cases}$，其中 $\theta\in\mathbf{R}$，则 $a-b=\cos\theta-\sin\theta=\sqrt{2}\cos(\theta+\dfrac{\pi}{4})$，所以 $(a-b)_{\max}=\sqrt{2}$.

【反思】遇到两个变量的平方和等于某正常数，都可以考虑用三角换元的方法来分析关于这两个变量的代数式的最值.