第 2 节 双曲线的焦点三角形相关问题（★★★）

强化训练

1．（2020•新课标III卷•★★）设双曲线$C:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的左、右焦点分别为$F_1$、$F_2$，离心率为$\sqrt{5}$，$P$是$C$上一点，$F_1P\perp F_2P$，若$\Delta PF_1F_2$的面积为4，则$a=$（　　）

（A）1　（B）2　（C）4　（D）8

答案：A

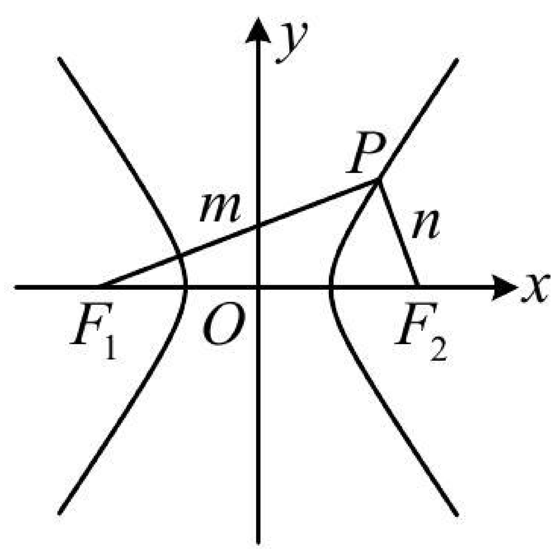
解析：先由离心率把变量统一起来，$e=\dfrac{c}{a}=\sqrt{5}\Rightarrow c=\sqrt{5}a$，所以$|F_1F_2|=2c=2\sqrt{5}a$，

焦点三角形中涉及垂直关系，常用勾股定理翻译，并结合定义处理，

设$|PF_1|=m$，$|PF_2|=n$，如图，$F_1P\perp F_2P\Rightarrow m^2+n^2=|F_1F_2|^2=20a^2$ ①，由双曲线定义，$|m-n|=2a$ ②，

把①配方可得$m^2+n^2=(m-n)^2+2mn=20a^2$，结合式②可得$4a^2+2mn=20a^2$，所以$mn=8a^2$，

故$S_{\Delta PF_1F_2}=\dfrac{1}{2}mn=4a^2$，由题意，$S_{\Delta PF_1F_2}=4$，所以$4a^2=4$，故$a=1$.



2．（2022•九江三模•★★）双曲线$\dfrac{x^2}{t}-\dfrac{y^2}{1-t}=1(0<t<1)$的左、右焦点分别为$F_1$，$F_2$，$P$为圆$x^2+y^2=1$与该双曲线的一个公共点，则$\Delta PF_1F_2$的面积为（　　）

（A）$1-t$　（B）t　（C）$2t-1$　（D）1

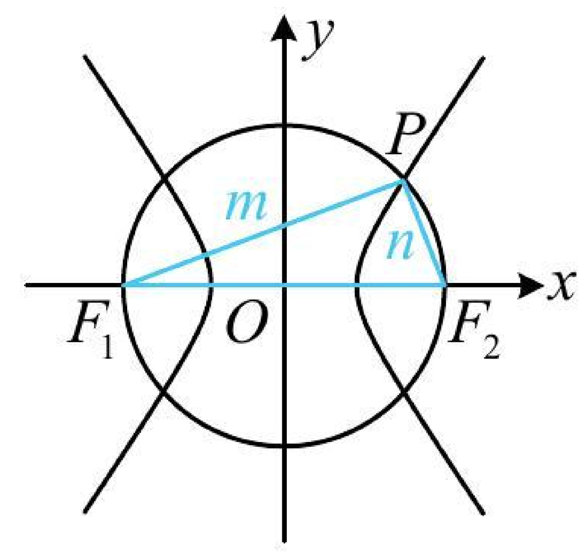
答案：A

解析：由题意，双曲线的半焦距$c=\sqrt{t+1-t}=1$，

所给圆即为以F_1F_2为直径的圆，点P在圆上隐含了$PF_1\perp PF_2$，可用勾股定理结合双曲线定义来处理，

如图，设$|PF_1|=m$，$|PF_2|=n$，则$m^2+n^2=|F_1F_2|^2=4c^2=4$ ①，由双曲线定义，$|m-n|=2\sqrt{t}$ ②，

由①可得$m^2+n^2=(m-n)^2+2mn=4$，将②代入得$4t+2mn=4$，所以$mn=2-2t$，故$S_{\Delta PF_1F_2}=\dfrac{1}{2}mn=1-t$.



3.（2022·南宁模拟·★★★）已知双曲线$C:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的右焦点为$F$，直线$y=kx(k\neq 0)$与双曲线$C$交于$A$，$B$两点，若$\angle AFB=90^\circ$，且$\Delta OAF$的面积为$4a^2$，则$C$的离心率为（　　）

（A）$\dfrac{2\sqrt{6}}{5}$　（B）$\dfrac{\sqrt{26}}{5}$　（C）2　（D）3

答案：D

解析：看到过原点的直线与双曲线交于A、B两点，想到和两焦点构成平行四边形，

如图，设双曲线C的左焦点为F_1，则四边形AF_1BF为平行四边形，

又$\angle AFB=90^\circ$，所以四边形AF_1BF为矩形，故$\angle F_1AF=90^\circ$，

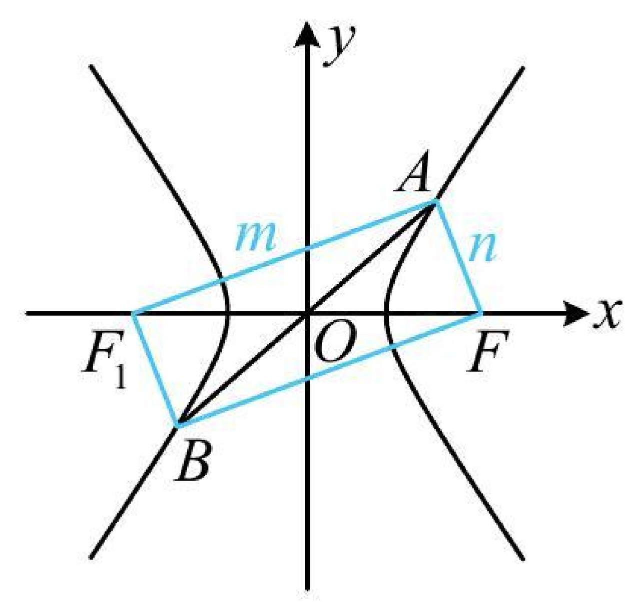
ΔOAF的面积可换算成ΔAFF_1的面积，于是结合双曲线的定义和勾股定理处理即可，

设$|AF_1|=m$，$|AF|=n$，则$m^2+n^2=|F_1F_2|^2=4c^2$ ①，由双曲线定义，$|m-n|=2a$ ②，

由①可得$m^2+n^2=(m-n)^2+2mn=4c^2$，将式②代入可得$4a^2+2mn=4c^2$，所以$mn=2c^2-2a^2$，

故$S_{\Delta AFF_1}=\dfrac{1}{2}mn=c^2-a^2$，由题意，$S_{\Delta OAF}=4a^2$，所以$S_{\Delta AFF_1}=2S_{\Delta OAF}=8a^2$，从而$c^2-a^2=8a^2$，故$c^2=9a^2$，

所以双曲线C的离心率$e=\dfrac{c}{a}=3$.



4.（2022·长沙模拟·★★★）已知F_1，F_2分别是双曲线$C:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的左、右焦点，过$F_2$的直线与双曲线的右支相交于$P$、$Q$两点，若$PQ\perp PF_1$，且$|PQ|=|PF_1|$，则$C$的离心率为（　　）

（A）$\sqrt{6}-\sqrt{3}$　（B）$\sqrt{5-2\sqrt{2}}$　（C）$\sqrt{5+2\sqrt{2}}$　（D）$1+2\sqrt{2}$

答案：B

解析：如图，涉及双曲线上的点和左、右焦点，可尝试结合已知条件和双曲线定义研究有关线段的长，

设$|PQ|=|PF_1|=m$，因为$PQ\perp PF_1$，所以$|QF_1|=\sqrt{2}m$，由双曲线定义，$\begin{cases}|PF_1|-|PF_2|=2a\\|QF_1|-|QF_2|=2a\end{cases}$，

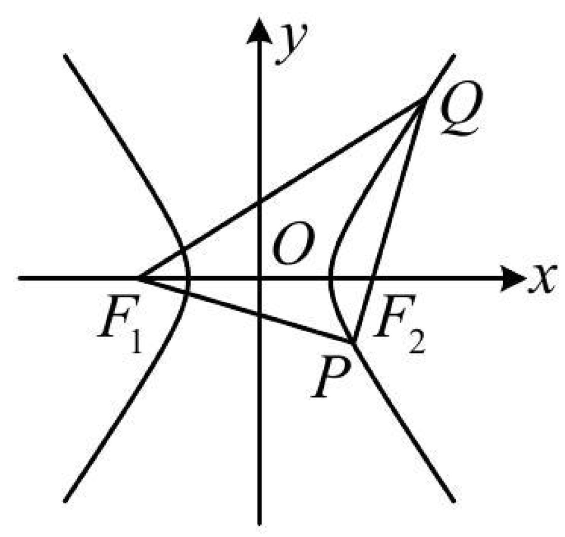
两式相加得：$|PF_1|+|QF_1|-(|PF_2|+|QF_2|)=|PF_1|+|QF_1|-|PQ|=m+\sqrt{2}m-m=4a$，所以$m=2\sqrt{2}a$，

故$|PF_1|=2\sqrt{2}a$，$|PF_2|=|PF_1|-2a=2(\sqrt{2}-1)a$，

接下来只需在ΔPF_1F_2中用勾股定理，即可建立a和c的方程求离心率，

因为$PQ\perp PF_1$，所以$|PF_1|^2+|PF_2|^2=|F_1F_2|^2$，故$8a^2+4(\sqrt{2}-1)^2a^2=4c^2$，

整理得：$\dfrac{c^2}{a^2}=5-2\sqrt{2}$，所以$e=\dfrac{c}{a}=\sqrt{5-2\sqrt{2}}$.



5.（2022·河南模拟·★★★）已知F_1，F_2分别是双曲线$C:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的左、右焦点，过$F_1$的直线与双曲线$C$的左、右两支分别交于$A$，$B$两点，若$\Delta ABF_2$是等边三角形，则$C$的离心率是_____.

答案：$\sqrt{7}$

解析：涉及双曲线上的点和左、右焦点，优先考虑定义，如图，由双曲线定义，$|BF_1|-|BF_2|=2a$ ①，

又ΔABF_2是正三角形，所以$|BF_2|=|AB|$，代入①得：$|BF_1|-|BF_2|=|BF_1|-|AB|=|AF_1|=2a$，

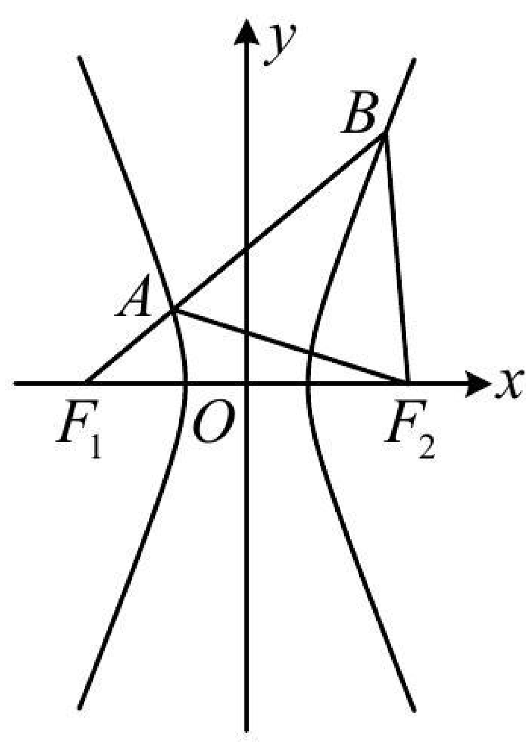
因为点A也在双曲线上，所以$|AF_2|-|AF_1|=2a$，故$|AF_2|=|AF_1|+2a=4a$，

正三角形除了已知边长关系外，还知道角，可在ΔAF_1F_2中由余弦定理建立方程求离心率，

由题意，$\angle BAF_2=60^\circ$，$\angle F_1AF_2=180^\circ-\angle BAF_2=120^\circ$，

在ΔAF_1F_2中，由余弦定理，$|F_1F_2|^2=|AF_1|^2+|AF_2|^2-2|AF_1|\cdot|AF_2|\cdot\cos\angle F_1AF_2$，

所以$4c^2=4a^2+16a^2-2\times2a\times4a\times\cos120^\circ$，整理得：$\dfrac{c^2}{a^2}=7$，故离心率$e=\dfrac{c}{a}=\sqrt{7}$.



6.（2022·河南模拟·★★★）已知双曲线$C:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的离心率为3，焦点分别为$F_1$，$F_2$，点$A$在双曲线$C$上，若$\Delta AF_1F_2$的周长为$14a$，则$\Delta AF_1F_2$的面积为（　　）

（A）$\sqrt{17}a^2$　（B）$15a^2$　（C）$2\sqrt{14}a^2$　（D）$2\sqrt{15}a^2$

答案：C

解析：答案都是用a表示的，于是先由离心率把变量统一成a，

双曲线 C 的离心率 $e=\dfrac{c}{a}=3\Rightarrow c=3a$，所以 $|F_1F_2|=2c=6a$，

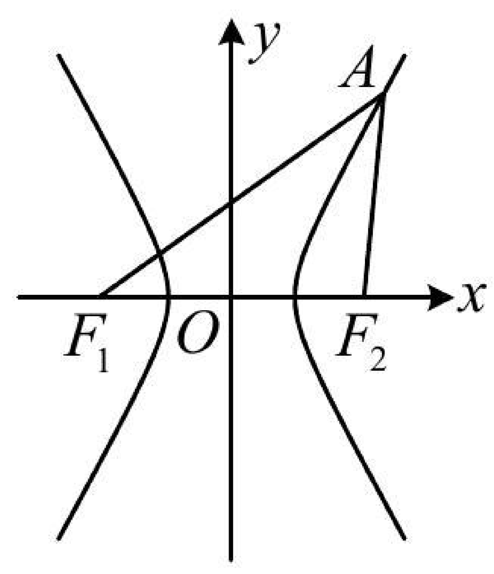
又 ΔAF_1F_2 的周长 $L=|AF_1|+|AF_2|+|F_1F_2|=|AF_1|+|AF_2|+6a=14a$，所以 $|AF_1|+|AF_2|=8a$ ①，

由①可联想到用定义再构造一个式子，解出 $|AF_1|$ 和 $|AF_2|$，不妨设 A 在右支上，则 $|AF_1|-|AF_2|=2a$ ②，

由①②可得：$|AF_1|=5a$，$|AF_2|=3a$，已知三边了，求面积可先用余弦定理推论求一个内角余弦，

在 ΔAF_1F_2 中，$\cos\angle F_1AF_2=\dfrac{|AF_1|^2+|AF_2|^2-|F_1F_2|^2}{2|AF_1|\cdot|AF_2|}=\dfrac{25a^2+9a^2-36a^2}{2\times5a\times3a}=-\dfrac{1}{15}$，

所以 $\sin\angle F_1AF_2=\sqrt{1-\cos^2\angle F_1AF_2}=\dfrac{4\sqrt{14}}{15}$，故 $S_{\Delta AF_1F_2}=\dfrac{1}{2}|AF_1|\cdot|AF_2|\cdot\sin\angle F_1AF_2=\dfrac{1}{2}\times5a\times3a\times\dfrac{4\sqrt{14}}{15}=2\sqrt{14}a^2$.



7.（2023·新高考Ⅰ卷·★★★）已知双曲线 $C:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的左、右焦点分别为 F_1，F_2，点 A 在 C 上，点 B 在 y 轴上，$\overrightarrow{F_1A}\perp\overrightarrow{F_1B}$，$\overrightarrow{F_2A}=-\dfrac{2}{3}\overrightarrow{F_2B}$，则 C 的离心率为_____.

答案： $\dfrac{3\sqrt{5}}{5}$

解析： 如图，条件中有 $\overrightarrow{F_2A}=-\dfrac{2}{3}\overrightarrow{F_2B}$，不妨设一段长度，看能否表示其余线段的长，

设 $|AF_2|=2m$，因为 $\overrightarrow{F_2A}=-\dfrac{2}{3}\overrightarrow{F_2B}$，所以 $|BF_2|=3m$，

故 $|AB|=|AF_2|+|BF_2|=5m$，由对称性，$|BF_1|=|BF_2|=3m$，

又 $\overrightarrow{F_1A}\perp\overrightarrow{F_1B}$，所以 $|AF_1|=\sqrt{|AB|^2-|BF_1|^2}=4m$，

$|AF_1|$ 和 $|AF_2|$ 都有了，结合双曲线的定义可计算 ΔABF_1 的各边，则可用“双余弦法”建立方程，

由图可知 A 在双曲线 C 的右支上，所以 $|AF_1|-|AF_2|=2m=2a$，从而 $m=a$，故 $|BF_1|=|BF_2|=3a$，

又 $|F_1F_2|=2c$，所以在 ΔBF_1F_2 中，由余弦定理推论，

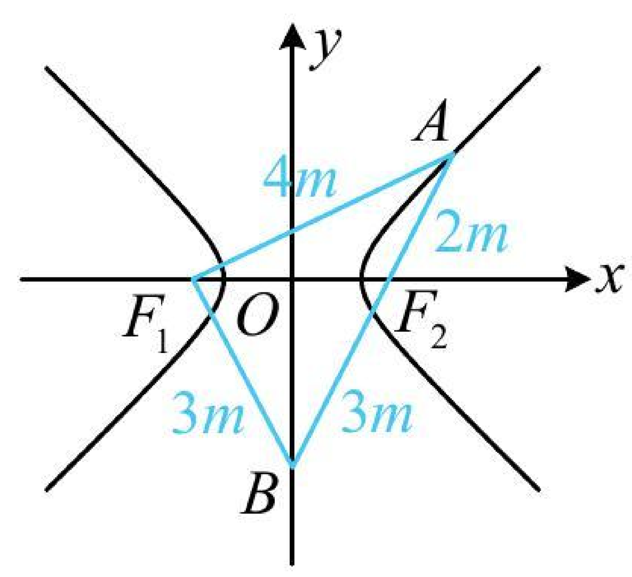
$$\cos\angle F_1BF_2=\frac{|BF_1|^2+|BF_2|^2-|F_1F_2|^2}{2|BF_1|\cdot|BF_2|}$$

$$=\frac{9a^2+9a^2-4c^2}{2\times3a\times3a}=\frac{9a^2-2c^2}{9a^2},$$

在 ΔABF_1 中，$\cos\angle ABF_1=\dfrac{|BF_1|}{|AB|}=\dfrac{3m}{5m}=\dfrac{3}{5}$，

因为 $\angle ABF_1=\angle F_1BF_2$，所以 $\dfrac{9a^2-2c^2}{9a^2}=\dfrac{3}{5}$，

故双曲线 C 的离心率 $e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{3\sqrt{5}}{5}$.



8．（★★★★）已知双曲线 $C:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的左、右焦点分别为 F_1，F_2，点 A、B 分别在其左、右两支上，$\overrightarrow{F_1B}=3\overrightarrow{F_1A}$，$T$ 为线段 AB 的中点，且 $F_1T\perp F_2T$，则双曲线的离心率为_____.

答案： $\sqrt{7}$

解析： 如图，先由已知条件结合双曲线定义分析有关线段的长，

因为 T 为线段 AB 的中点，且 $F_1T\perp F_2T$，所以 $|AF_2|=|BF_2|$，设 $|AF_2|=|BF_2|=m$，

由双曲线定义，$|AF_2|-|AF_1|=2a$，所以 $|AF_1|=|AF_2|-2a=m-2a$，

又 $\overrightarrow{F_1B}=3\overrightarrow{F_1A}$，所以 $|BF_1|=3|AF_1|=3m-6a$，因为点 B 在双曲线右支上，所以 $|BF_1|-|BF_2|=2a$，

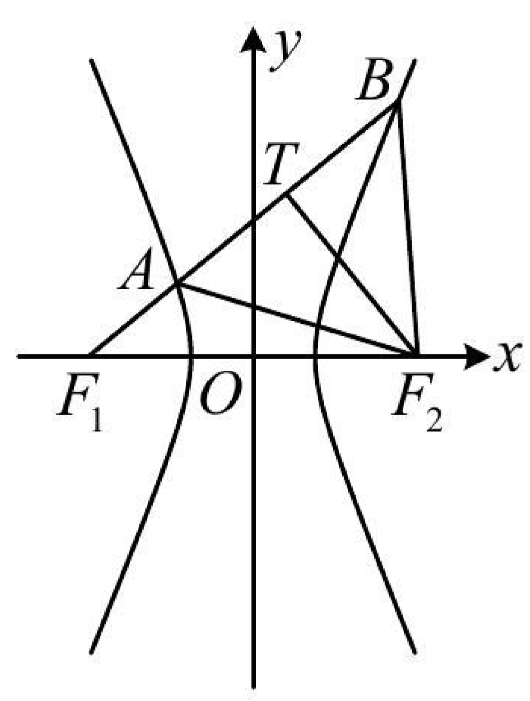
即 $3m-6a-m=2a$，故 $m=4a$，所以 $|BF_1|=6a$，$|BF_2|=4a$，$|AF_1|=2a$，$|AF_2|=4a$，

注意到 $|AB|=|BF_1|-|AF_1|=4a$，所以 $|AB|=|AF_2|=|BF_2|$，从而 ΔABF_2 是正三角形，故 $\angle F_1BF_2=60^\circ$，

此时 ΔBF_1F_2 三边都已知，还知道一个角，可用余弦定理建立方程求离心率，

由余弦定理，$|F_1F_2|^2=|BF_1|^2+|BF_2|^2-2|BF_1|\cdot|BF_2|\cdot\cos\angle F_1BF_2$，即 $4c^2=36a^2+16a^2-2\times6a\times4a\times\cos60^\circ$，

整理得：$\dfrac{c^2}{a^2}=7$，所以双曲线 C 的离心率 $e=\dfrac{c}{a}=\sqrt{7}$.



9．（2022•江西模拟•★★★★）已知双曲线 $\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(b>0)$ 的左、右焦点分别为 F_1，F_2，点 P 是右支上异于顶点的一点，PI 是 $\angle F_1PF_2$ 的平分线，过 F_2 作 PI 的垂线，垂足为 M，O 为原点，则 $|OM|=$（　　）

（A）2　（B）4　（C）8　（D）16

答案： A

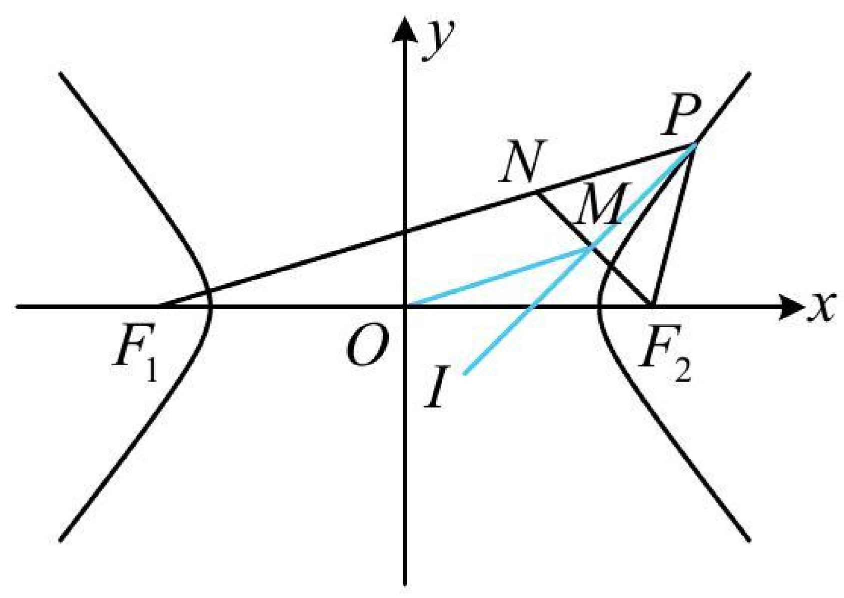
解析： 看到过 F_2 作角平分线 PI 的垂线，想到三线合一，构造等腰三角形，

如图，延长 F_2M 交 PF_1 于点 N，由题意，PM 既是 $\angle NPF_2$ 的平分线，又是 NF_2 的垂线，

所以$|PN|=|PF_2|$ ①，且 M 是 NF_2 的中点，涉及中点，考虑中位线，

又 O 是 F_1F_2 的中点，所以$|OM|=\frac{1}{2}|F_1N|=\frac{1}{2}(|PF_1|-|PN|)$ ②，

将①代入②可得$|OM|=\frac{1}{2}(|PF_1|-|PF_2|)=\frac{1}{2}\times 2a=a=2$.



【反思】本题构造等腰三角形的方法眼熟吧？之前椭圆涉及角平分线的问题也用过类似的构造方法.

10．（2022·大同月考·★★★★）设 F_1， F_2 是双曲线 $E:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的左、右焦点，点 P 在 E 上，且 $\angle F_1PF_2$ 的平分线交 x 轴于点 D，若 $\angle F_1PF_2=\frac{\pi}{3}$，$|PF_1|+|PF_2|=8$，且 $|PD|=\sqrt{3}$，则 E 的方程为（　　）

（A）$\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{8}=1$　　（B）$\frac{x^2}{8}-\frac{y^2}{2}=1$　　（C）$\frac{x^2}{6}-\frac{y^2}{4}=1$　　（D）$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{6}=1$

答案：B

解析：如图，题干给出了$|PF_1|+|PF_2|=8$，结合双曲线定义可求得$|PF_1|$和$|PF_2|$，

不妨设 P 在右支，由题意，$\begin{cases}|PF_1|+|PF_2|=8\\|PF_1|-|PF_2|=2a\end{cases}$，所以$|PF_1|=4+a$，$|PF_2|=4-a$，

注意到$\angle F_1PF_2$给了大小，可用小三角形面积和等于大三角形面积建立方程求 a，

因为 PD 是 $\angle F_1PF_2$ 的平分线，且 $\angle F_1PF_2=\frac{\pi}{3}$，所以 $\angle F_1PD=\angle F_2PD=\frac{\pi}{6}$，

因为 $S_{\Delta PF_1D}+S_{\Delta PF_2D}=S_{\Delta PF_1F_2}$，所以 $\frac{1}{2}|PF_1|\cdot|PD|\cdot\sin\angle F_1PD+\frac{1}{2}|PF_2|\cdot|PD|\cdot\sin\angle F_2PD=\frac{1}{2}|PF_1|\cdot|PF_2|\cdot\sin\angle F_1PF_2$，

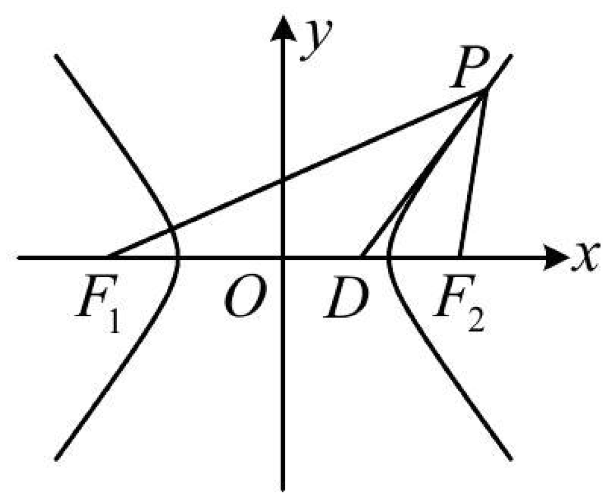
即 $\frac{1}{2}(4+a)\cdot\sqrt{3}\cdot\sin\frac{\pi}{6}+\frac{1}{2}(4-a)\cdot\sqrt{3}\cdot\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}(4+a)(4-a)\sin\frac{\pi}{3}$，解得：$a=2\sqrt{2}$，

再求 b，此时 ΔPF_1F_2 已知两边及夹角了，可先由余弦定理求$|F_1F_2|$，从而得到 c，那么 b 也就有了，

在 ΔPF_1F_2 中，$|F_1F_2|^2=|PF_1|^2+|PF_2|^2-2|PF_1|\cdot|PF_2|\cdot\cos\angle F_1PF_2$，

所以 $4c^2=(4+a)^2+(4-a)^2-2(4+a)(4-a)\cos 60^\circ=16+3a^2=40$，从而 $c^2=10$，故 $b^2=c^2-a^2=2$，

所以双曲线 E 的方程为 $\frac{x^2}{8}-\frac{y^2}{2}=1$.



【反思】本题对角平分线的翻译与上一题不一样，为什么？因为本题已知顶角，就可用解三角形中的等面积法构造方程，所以解析几何难题常与解三角形结合.