第 4 节 高考中双曲线常用的二级结论（★★☆）

强化训练

1．（★）设 F_1，F_2 是双曲线 $C:\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{5}=1$ 的左、右焦点，P 为 C 上一点，若 $PF_1 \perp PF_2$，则 ΔPF_1F_2 的面积为_____.

答案：5

解析：给出 $\angle F_1PF_2$，可用 $S=\frac{b^2}{\tan\frac{\theta}{2}}$ 求焦点三角形面积，$PF_1 \perp PF_2 \Rightarrow \angle F_1PF_2=90^\circ \Rightarrow S_{\Delta PF_1F_2}=\frac{5}{\tan 45^\circ}=5$.

2．（2022 • 辽宁模拟 • ★★）设 F_1，F_2 是双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的左、右焦点，P 为双曲线右支上一点，若 $\angle F_1PF_2=90^\circ$，半焦距 $c=2$，$S_{\Delta PF_1F_2}=3$，则双曲线的两条渐近线的夹角为（　　）

（A）$\frac{\pi}{2}$　（B）$\frac{\pi}{4}$　（C）$\frac{\pi}{3}$　（D）$\frac{\pi}{6}$

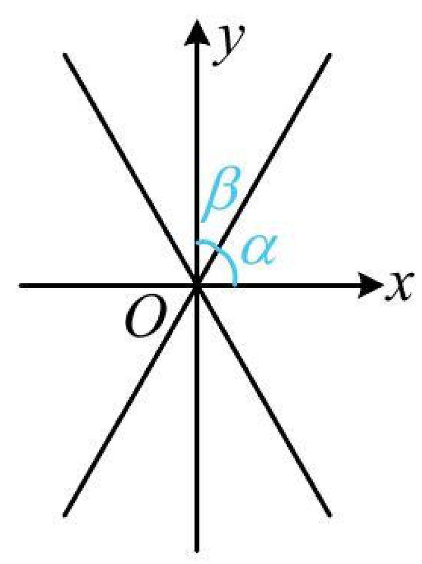
答案：C

解析：给出 ΔPF_1F_2 的面积和 $\angle F_1PF_2$，可用 $S=\frac{b^2}{\tan\frac{\theta}{2}}$ 求解 b，

由题意，$\angle F_1PF_2=90^\circ$，所以 $S_{\Delta PF_1F_2}=\frac{b^2}{\tan 45^\circ}=b^2$，又 $S_{\Delta PF_1F_2}=3$，所以 $b^2=3$，故 $b=\sqrt{3}$，

因为 $c=2$，所以 $a=\sqrt{c^2-b^2}=1$，故双曲线的渐近线方程为 $y=\pm\sqrt{3}x$，

如图，渐近线 $y=\sqrt{3}x$ 的倾斜角 $\alpha=\frac{\pi}{3}$，所以图中 $\beta=\frac{\pi}{6}$，故渐近线的夹角是 $2\beta=\frac{\pi}{3}$.



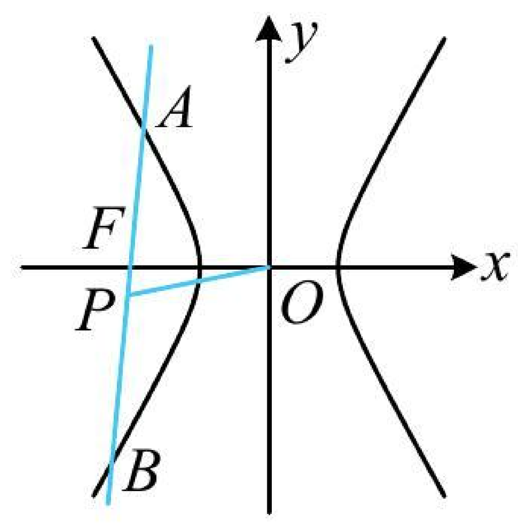
3．（2022 • 汉中模拟 • ★★）已知双曲线 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{b^2}=1(b>0)$ 的左焦点为 F，过 F 作斜率为 2 的直线与双曲线交于 A，B 两点，P 是 AB 中点，O 为原点，若直线 OP 的斜率为 $\frac{1}{4}$，则双曲线的离心率为（　　）

（A）$\frac{\sqrt{6}}{2}$　（B）2　（C）$\frac{3}{2}$　（D）$\sqrt{2}$

答案：A

解析：涉及弦中点，考虑用中点弦斜率积结论，

如图，$k_{AB}\cdot k_{OP}=\dfrac{b^2}{4}$，所以$2\times\dfrac{1}{4}=\dfrac{b^2}{4}$，解得：$b^2=2$，故离心率$e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{4+b^2}}{2}=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$.



4.（2022•长沙模拟•★★★）已知$m+n=4$，点$M(m,n)$是双曲线$\dfrac{x^2}{8}-\dfrac{y^2}{2}=1$的一条弦$AB$的中点，则当$mn$取得最大值时，直线$AB$的方程为_____.

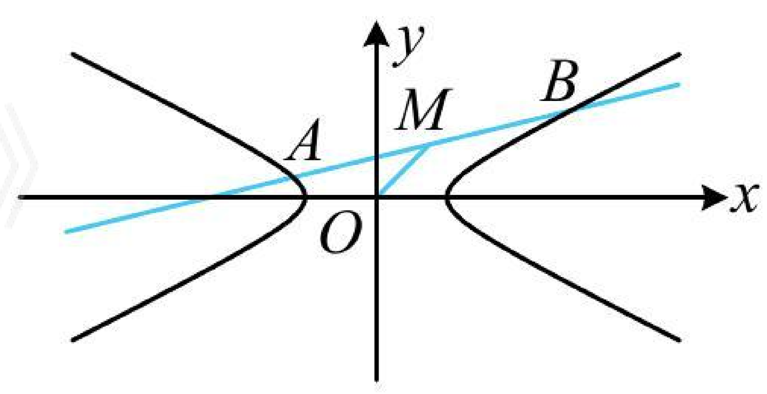
答案：$x-4y+6=0$

解析：先分析mn取得最大值时m和n的值，得到M的坐标，

由题意，$mn\le(\dfrac{m+n}{2})^2=4$，当且仅当$m=n=2$时取等号，所以当$mn$最大时，$M$的坐标为$(2,2)$，

涉及M为弦AB中点，考虑中点弦斜率积结论，如图，$k_{OM}=1$，所以$k_{AB}\cdot k_{OM}=k_{AB}=\dfrac{1}{4}$，

故直线AB的方程为$y-2=\dfrac{1}{4}(x-2)$，整理得：$x-4y+6=0$.



5.（★★★）已知A，B为双曲线E的左、右顶点，点M在E上，ΔABM为等腰三角形，且顶角为120°，则E的离心率为（　　）

（A）$\sqrt{5}$　　（B）2　　（C）$\sqrt{3}$（D）$\sqrt{2}$

答案：D

解法1：如图，可通过分析几何特征，求得M的坐标，代入双曲线方程求离心率，

设双曲线$E:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$，不妨设$M$在第一象限，过$M$作$MN\perp x$轴于$N$，

由题意，$\angle ABM=120^\circ$，$|AB|=|BM|=2a$，所以$\angle MBN=180^\circ-\angle ABM=60^\circ$，

$|BN|=|BM|\cdot\cos\angle MBN=2a\cos60^\circ=a$，$|ON|=|OB|+|BN|=2a$，$|MN|=|BM|\cdot\sin\angle MBN=2a\sin60^\circ=\sqrt{3}a$，

故$M(2a,\sqrt{3}a)$，代入双曲线方程得：$\dfrac{(2a)^2}{a^2}-\dfrac{(\sqrt{3}a)^2}{b^2}=1$，

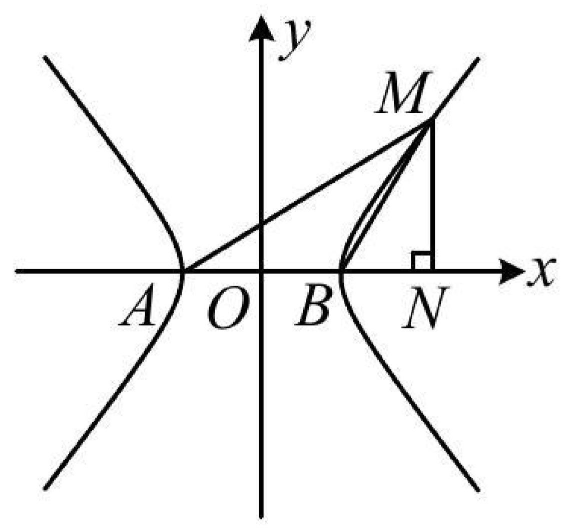
所以$a^2=b^2=c^2-a^2$，从而$\dfrac{c^2}{a^2}=2$，故E的离心率$e=\dfrac{c}{a}=\sqrt{2}$.

解法2：注意到A，B为两个顶点，M在E上，故可用第三定义斜率积结论建立a，b，c的关系，

设双曲线$E:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$，由题意，$\angle ABM=120^\circ$，$\angle BAM=\angle BMA=30^\circ$，

$\angle MBx = 180^{\circ} - \angle ABM = 60^{\circ}$，所以 $k_{MA} = \tan\angle BAM = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$， $k_{MB} = \tan\angle MBx = \sqrt{3}$，

由第三定义斜率积结论， $k_{MA} \cdot k_{MB} = \dfrac{\sqrt{3}}{3} \times \sqrt{3} = \dfrac{b^2}{a^2}$，所以 $a^2 = b^2 = c^2 - a^2$，从而 $\dfrac{c^2}{a^2} = 2$，故 $e = \dfrac{c}{a} = \sqrt{2}$.



6.（2022•吉林模拟•★★★★）已知直线 $l: y = kx(k \neq 0)$ 与双曲线 $C: \dfrac{x^2}{4} - y^2 = 1$ 相交于 P，Q 两点，$QH \perp x$ 轴于点 H，直线 PH 与双曲线 C 交于另一点 T，则下列选项中错误的是（　　）

（A） $-\dfrac{1}{2} < k < 0$ 或 $0 < k < \dfrac{1}{2}$　　（B） $k_{PT} = \dfrac{k}{2}$　　（C） $k_{PT} \cdot k_{QT} = \dfrac{1}{4}$　　（D） $k_{PQ}^2 + k_{QT}^2$ 的最小值为 1

答案：D

解析：A 项，如图，双曲线 C 的渐近线为 $y = \pm\dfrac{1}{2}x$，结合 $k \neq 0$ 可得直线 l 与 C 有 2 个交点 $\Leftrightarrow -\dfrac{1}{2} < k < 0$ 或 $0 < k < \dfrac{1}{2}$，故 A 项正确；

B 项，要求 k_{PT}，可设坐标来算，设 $P(x_0, y_0)$，由对称性， $Q(-x_0, -y_0)$，所以 $H(-x_0, 0)$，

从而直线 PQ 的斜率 $k = \dfrac{y_0 - (-y_0)}{x_0 - (-x_0)} = \dfrac{y_0}{x_0}$， 直线 PT 的斜率 $k_{PT} = k_{PH} = \dfrac{y_0 - 0}{x_0 - (-x_0)} = \dfrac{y_0}{2x_0} = \dfrac{k}{2}$， 故 B 项正确；

C 项，如图，P，Q 关于原点对称，由第三定义斜率积结论知 $k_{PT} \cdot k_{QT} = \dfrac{1}{4}$，故 C 项正确；

D 项，要求 $k_{PQ}^2 + k_{QT}^2$ 的最小值，先统一变量，将选项 B 的结论代入选项 C 知 $\dfrac{k}{2} \cdot k_{QT} = \dfrac{1}{4}$， 所以 $k_{QT} = \dfrac{1}{2k}$，

故 $k_{PQ}^2 + k_{QT}^2 = k^2 + \dfrac{1}{4k^2} \geq 2\sqrt{k^2 \cdot \dfrac{1}{4k^2}} = 1$， 当且仅当 $k^2 = \dfrac{1}{4k^2}$ 时取等号，此时 $k = \pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，

不满足 $-\dfrac{1}{2} < k < 0$ 或 $0 < k < \dfrac{1}{2}$，所以 $k_{PQ}^2 + k_{QT}^2$ 的最小值不是 1，故 D 项错误.