第 3 节 圆的切线有关的计算（★★☆）

内容提要

1．求圆 $C:(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ 过点 $P(x_0,y_0)$ 的切线：

①若点 P 在圆上，如图 1，可由 $PC\perp l$ 找到切线 l 的斜率（斜率可能不存在，此时切线即为 $x=x_0$），结合点 P 可求得切线方程.

②若点 P 在圆外，如图 2，可设切线斜率为 k（需先考虑斜率不存在的情况），结合点 P 写出切线的方程，并由圆心到直线的距离 $d=r$ 来解 k.

2．计算切线长：如图 2，切线长 $|PA|=|PB|=\sqrt{|PC|^2-r^2}$.

3．计算切点弦方程：如图 3，点 $P(x_0,y_0)$ 在圆 $C:(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ 外，PA、PB 是两条切线，A、B 是切点，则 $PA\perp AC$，$PB\perp BC$，所以 P、A、C、B 四点都在以 PC 为直径的圆上（如图 4），AB 恰好为该圆与圆 C 的公共弦，故可由两圆的方程作差求得直线 AB 的方程.

4．切线和切点弦方程的结论：设点 $P(x_0,y_0)$，将圆的标准方程 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ 变成 $(x-a)(x_0-a)+(y-b)(y_0-b)=r^2$，或在圆的一般式方程 $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$ 中，用 x_0x 替换 x^2，用 y_0y 替换 y^2，用 $\dfrac{x+x_0}{2}$ 替换 x，用 $\dfrac{y+y_0}{2}$ 替换 y，可以得到一个新方程，当 P 在圆上时，如图 1，该方程表示切线 l；当 P 在圆外时，如图 3，该方程表示切点弦 AB 所在直线的方程.

5．如图 3，四边形 $PACB$ 的面积 $S=S_{\Delta PAC}+S_{\Delta PBC}=\dfrac{1}{2}|PC|\cdot|AD|+\dfrac{1}{2}|PC|\cdot|BD|=\dfrac{1}{2}|PC|\cdot(|AD|+|BD|)=\dfrac{1}{2}|PC|\cdot|AB|$.

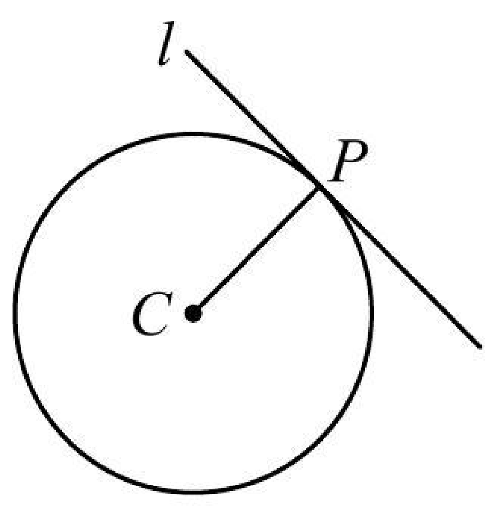


图1

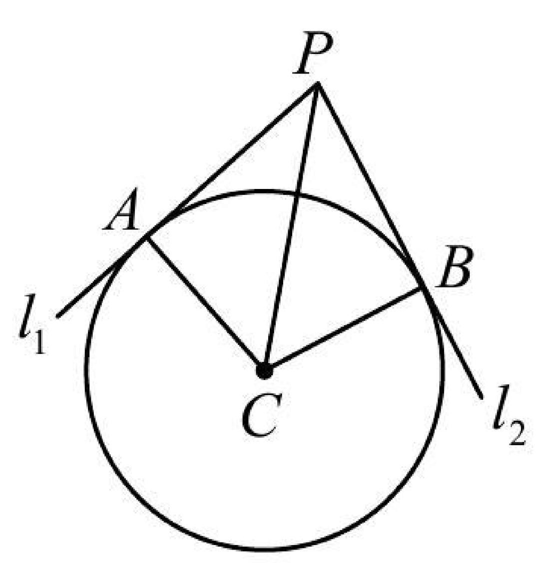


图2

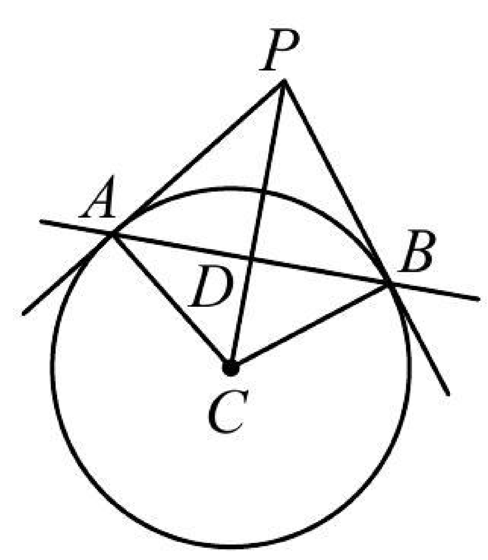


图3

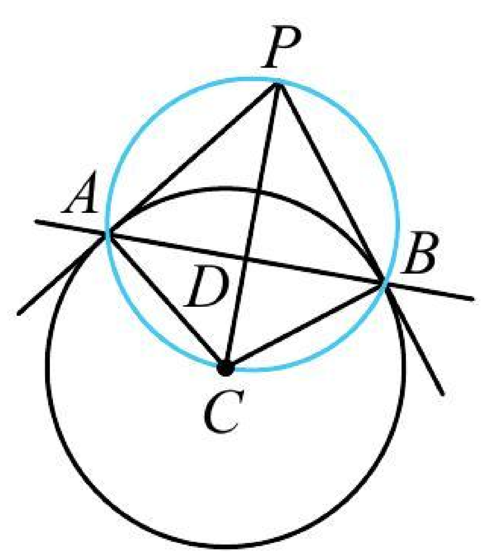


图4

典型例题

类型Ⅰ：求圆的切线方程

【例 1】圆 $C:(x-1)^2+y^2=4$ 过点 $P(2,\sqrt{3})$ 的切线方程为_____.

解法 1：先看点 P 在圆上还是圆外，$(2-1)^2+(\sqrt{3})^2=4\Rightarrow P$ 在圆 C 上，

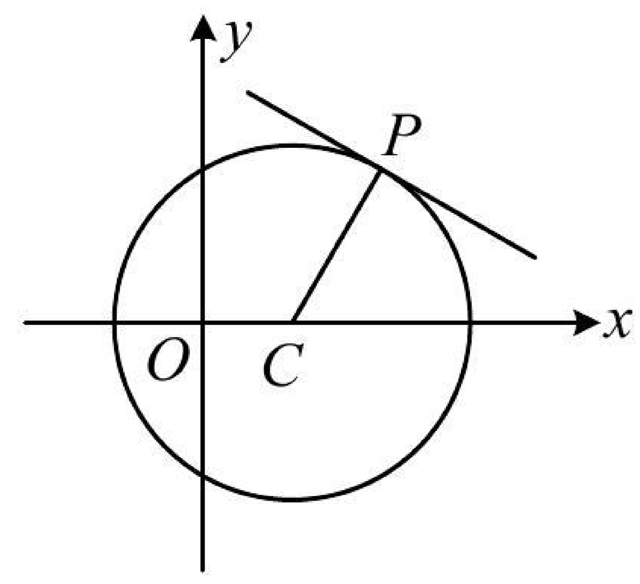
故可由 $PC\perp$ 切线来算切线斜率，如图，$C(1,0)$，$k_{PC}=\dfrac{\sqrt{3}-0}{2-1}=\sqrt{3}\Rightarrow$ 切线的斜率为 $-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，

所以切线方程为 $y-\sqrt{3}=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}(x-2)$，整理得：$x+\sqrt{3}y-5=0$.

解法 2：按解法 1 判断出点 P 在圆上后，也可直接用内容提要第 4 点的结论来写切线的方程，

所求切线的方程为 $(2-1)(x-1)+(\sqrt{3}-0)(y-0)=4$，整理得：$x+\sqrt{3}y-5=0$.

答案：$x+\sqrt{3}y-5=0$



【变式】过 $P(0,2)$ 作与圆 $C:x^2+y^2-2x=0$ 相切的直线 l，则 l 的方程为_____.

解析： $x^2+y^2-2x=0\Rightarrow(x-1)^2+y^2=1\Rightarrow$ 圆心为 $C(1,0)$，半径 $r=1$，

如图，P 在圆外，求切线可设斜率，并由 $d=r$ 求解斜率，先考虑斜率不存在的情况，

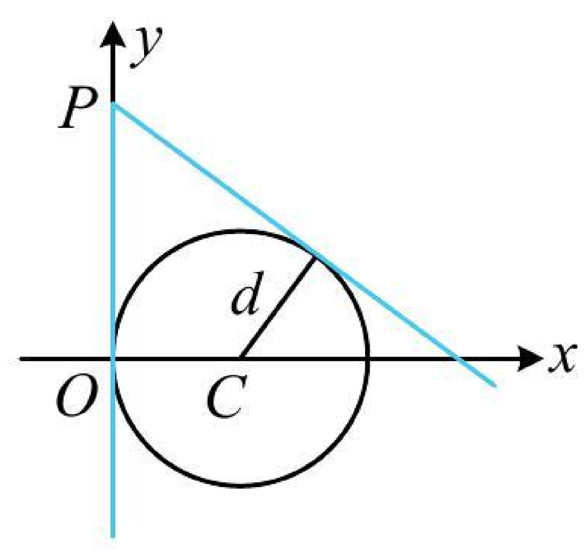
当 $l\perp x$ 轴时，其方程是 $x=0$，满足 l 与圆 C 相切；

当 l 不与 x 轴垂直时，设其方程为 $y=kx+2$，即 $kx-y+2=0$ ①，圆心 C 到直线 l 的距离 $d=\frac{|k+2|}{\sqrt{k^2+1}}$，

若 l 与圆 C 相切，则 $d=r$，即 $\frac{|k+2|}{\sqrt{k^2+1}}=1$，解得：$k=-\frac{3}{4}$，代入①整理得：$3x+4y-8=0$；

综上所述，l 的方程为 $x=0$ 或 $3x+4y-8=0$.

答案： $x=0$ 或 $3x+4y-8=0$



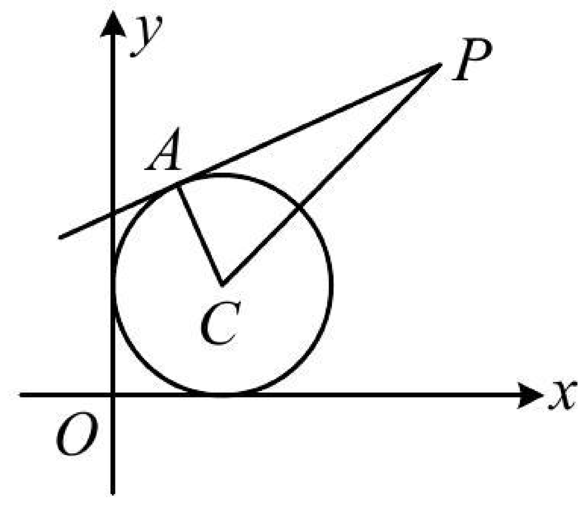
类型Ⅱ：切线长有关计算

【例 2】已知圆 $C:(x-1)^2+(y-1)^2=1$，过点 $P(3,3)$ 作直线与圆 C 相切于点 A，则 $|PA|=$_____.

解析： 如图，切线长 $|PA|$ 可在 ΔPAC 中由勾股定理计算，所以只需求出 $|PC|$ 即可，

$C(1,1)\Rightarrow|PC|=\sqrt{(3-1)^2+(3-1)^2}=2\sqrt{2}\Rightarrow|PA|=\sqrt{|PC|^2-r^2}=\sqrt{7}$.

答案： $\sqrt{7}$



【变式 1】已知直线 $l:x+2y-1=0$ 和圆 $C:(x+1)^2+(y+2)^2=4$，过 l 上的动点 P 作圆 C 的切线 PA，A 为切点，则 $|PA|$ 的最小值为（　　）

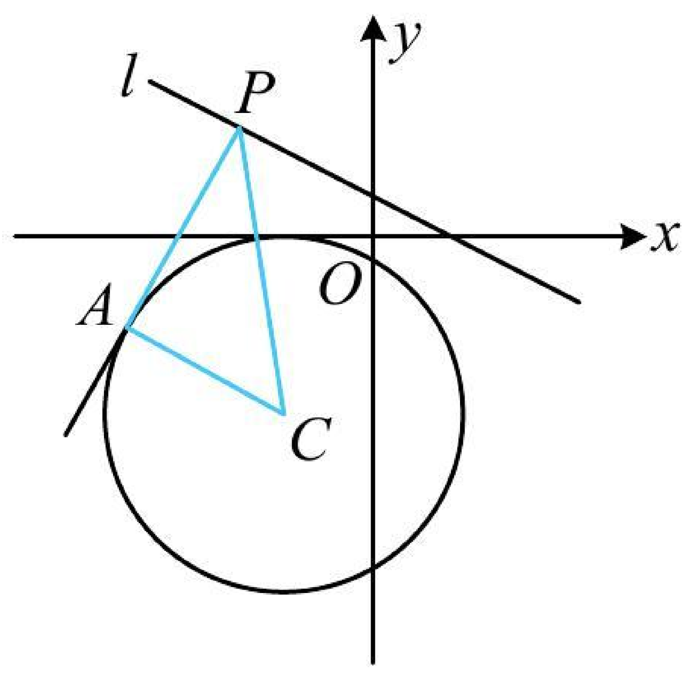
(A) $\dfrac{4\sqrt{5}}{5}$　　(B) $\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$　　(C) $\dfrac{4\sqrt{70}}{5}$　　(D) $\dfrac{2\sqrt{70}}{5}$

解析：如图，$|PA|=\sqrt{|PC|^2-|AC|^2}=\sqrt{|PC|^2-4}$ ①，

要使$|PA|$最小，只需$|PC|$最小，而$|PC|$的最小值即为点$C(-1,-2)$到直线l的距离，

所以$|PC|_{\min}=\dfrac{|-1+2\times(-2)-1|}{\sqrt{1^2+2^2}}=\dfrac{6}{\sqrt{5}}$，代入①得$|PA|_{\min}=\dfrac{4\sqrt{5}}{5}$.

答案：A



【变式 2】(2021·新高考Ⅰ卷)(多选)已知点P在圆$(x-5)^2+(y-5)^2=16$上，点$A(4,0)$，$B(0,2)$，则(　　)

(A) 点P到直线AB的距离小于 10

(B) 点P到直线AB的距离大于 2

(C) 当$\angle PBA$最小时，$|PB|=3\sqrt{2}$

(D) 当$\angle PBA$最大时，$|PB|=3\sqrt{2}$

解析：要判断 A、B 选项，可直接画图来分析点P到直线AB距离的取值范围，先求直线AB的方程，

由题意，直线AB的方程为$\dfrac{x}{4}+\dfrac{y}{2}=1$（截距式），整理得：$x+2y-4=0$，

如图 1，点P到直线AB的距离d的最大、最小值分别在P_1、P_2处取得，其中$P_1P_2\perp AB$，

因为圆心$C(5,5)$到AB的距离为$\dfrac{|5+2\times5-4|}{\sqrt{1^2+2^2}}=\dfrac{11\sqrt{5}}{5}$，半径$r=4$，所以$d_{\max}=\dfrac{11\sqrt{5}}{5}+4$，$d_{\min}=\dfrac{11\sqrt{5}}{5}-4$，

故$\dfrac{11\sqrt{5}}{5}-4\le d\le\dfrac{11\sqrt{5}}{5}+4$，因为$\dfrac{11\sqrt{5}}{5}-4<2$，$\dfrac{11\sqrt{5}}{5}+4<10$，所以 A 项正确，B 项错误；

对于 C、D 选项，如图 2，当$\angle PBA$最小时，P位于P_3处，当$\angle PBA$最大时，P位于P_4处，

其中P_3B和P_4B均与圆C相切，且$|P_3B|=|P_4B|$，它们都是切线长，可先求$|BC|$，再由勾股定理求它们，

因为$|BC|=\sqrt{(5-0)^2+(5-2)^2}=\sqrt{34}$，所以$|P_3B|=|P_4B|=\sqrt{|BC|^2-16}=3\sqrt{2}$，故 C 项和 D 项均正确.

答案：ACD

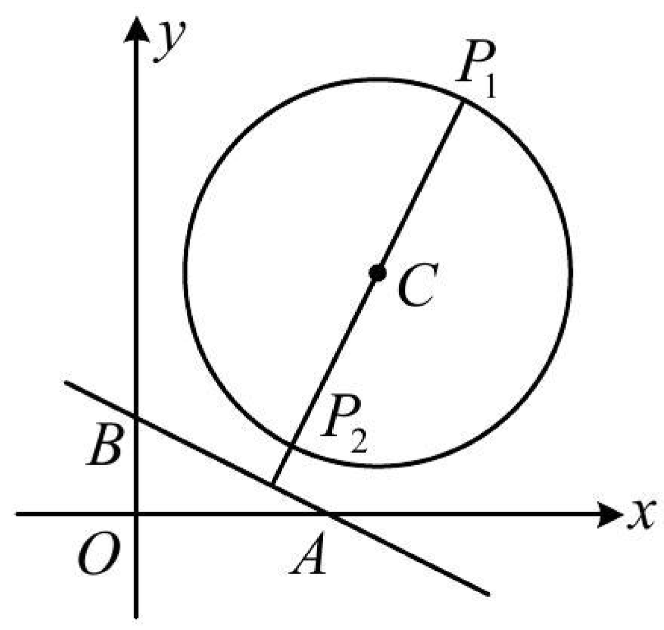


图1

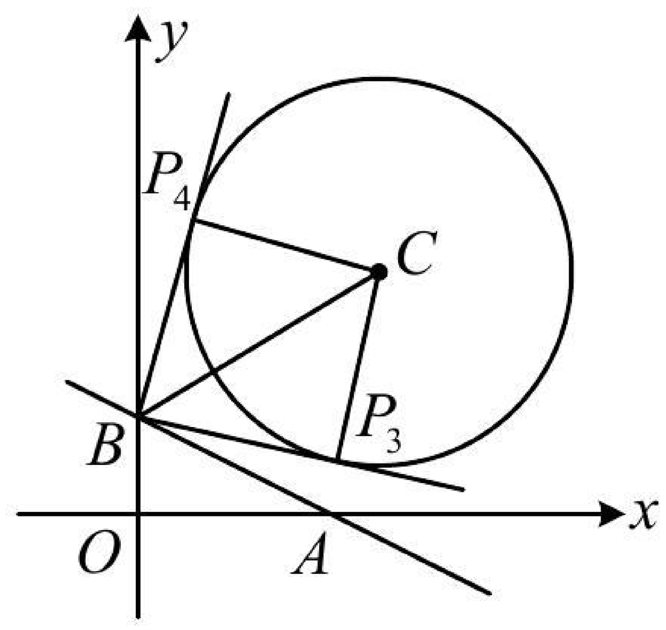


图2

【反思】从例 2 及两个变式可以看出，算切线长，关键是算圆外的点与圆心的距离.

类型Ⅲ：切点弦相关计算

【例 3】过点 $P(3,1)$ 作圆 $C:(x-1)^2+y^2=1$ 的两条切线，切点分别为 A、B，则直线 AB 的方程为（　　）

（A）$2x+y-3=0$　　（B）$2x-y-3=0$　　（C）$4x-y-3=0$　　（D）$4x+y-3=0$

解法 1：切点弦的方程，可按两圆的公共弦来算，如图，由题意，$PA\perp AC$，$PB\perp BC$，

所以 P、C、A、B 四点都在以 PC 为直径的圆上，

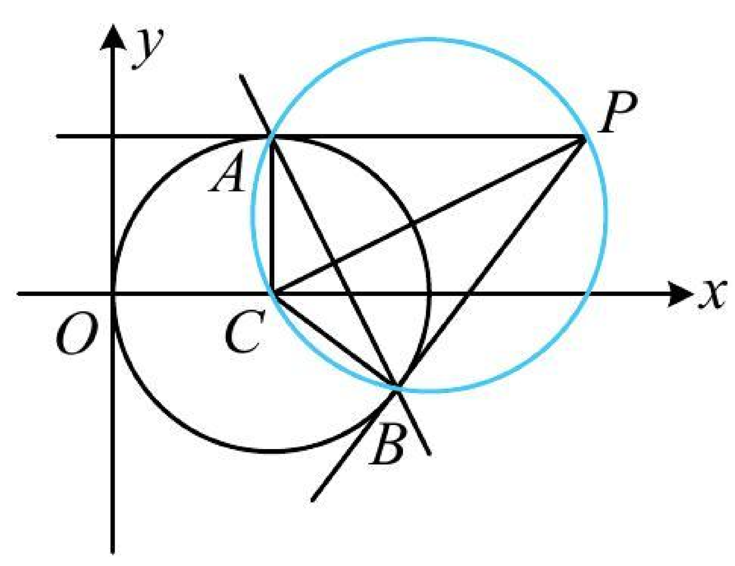
又 $C(1,0)$，所以 PC 中点为 $(2,\frac{1}{2})$，$|PC|=\sqrt{(3-1)^2+(1-0)^2}=\sqrt{5}$，

故以 PC 为直径的圆的方程为 $(x-2)^2+(y-\frac{1}{2})^2=\frac{5}{4}$，

与圆 C 的方程作差整理得直线 AB 的方程为 $2x+y-3=0$.

解法 2：也可用内容提要第 4 点的结论，直线 AB 的方程为 $(3-1)(x-1)+1\times y=1$，整理得：$2x+y-3=0$.

答案：A



【反思】上述解法 1 的过程中，为什么用两圆方程作差就能得到公共弦 AB 所在直线的方程？因为作差得到的必为直线方程，且两交点 A，B 都满足该方程，故该方程即为公共弦 AB 所在直线的方程.

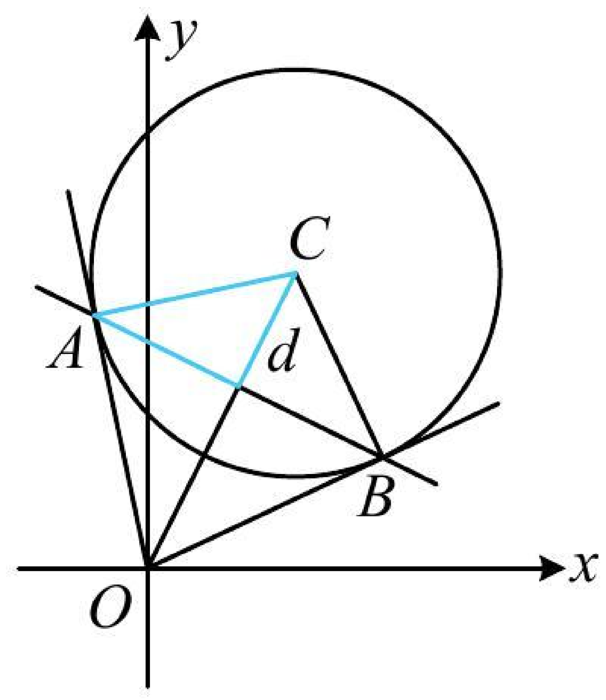
【变式 1】已知圆 $C:(x-1)^2+(y-2)^2=2$，过原点作圆 C 的两条切线，切点分别为 A、B，则 $|AB|=$______.

解析：如图，可先用结论求出切点弦 AB 的方程，按直线 AB 被圆截得的弦长来算 $|AB|$，

由题意，切点弦 AB 的方程为 $(0-1)(x-1)+(0-2)(y-2)=2$，整理得：$x+2y-3=0$，

圆心 $C(1,2)$ 到直线 AB 的距离 $d=\frac{|1+2\times2-3|}{\sqrt{1^2+2^2}}=\frac{2}{\sqrt{5}}$，所以 $|AB|=2\sqrt{r^2-d^2}=2\sqrt{2-\frac{4}{5}}=\frac{2\sqrt{30}}{5}$.

答案：$\frac{2\sqrt{30}}{5}$



【变式 2】（多选）已知圆 $M:(x+1)^2+y^2=2$，直线 $l:x-y-3=0$，点 P 在直线 l 上运动，直线 PA、PB 分别与圆 M 相切于点 A 和 B，则（　　）

（A）四边形 $PAMB$ 的面积的最小值为 $2\sqrt{3}$

（B）$|PA|$最短时，直线 AB 的方程为 $x-y-1=0$

（C）$|PA|$最短时，$|AB|=\sqrt{6}$

（D）直线 AB 过定点 $(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2})$

解析：A 项，如图，$M(-1,0)$，$|AM|=|BM|=\sqrt{2}$，设四边形 $PAMB$ 的面积为 S，

则 $S=2S_{\Delta PAM}=2\times\frac{1}{2}|AM|\cdot|PA|=\sqrt{2}|PA|$，$|PA|$是切线长，可在 ΔPAM 中用勾股定理转化为$|PM|$来算，

又$|PA|=\sqrt{|PM|^2-|AM|^2}=\sqrt{|PM|^2-2}$，所以 $S=\sqrt{2}\cdot\sqrt{|PM|^2-2}$ ①，故当$|PM|$最小时，S 也最小，

由图可知当 $PM\perp l$ 时，$|PM|$最小，故$|PM|_{\min}=\frac{|-1-3|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=2\sqrt{2}$，代入①得 $S_{\min}=2\sqrt{3}$，故 A 项正确；

B 项，由$|PA|=\sqrt{|PM|^2-2}$知$|PA|$最短时，$|PM|$也最短，此时 $PM\perp l$，

可由此求得 PM 的方程，与 l 联立求出 P 的坐标，直线 l 的斜率为 1，所以 PM 的斜率为 -1，

结合 $M(-1,0)$ 可得 PM 的方程为 $y=-(x+1)$，即 $x+y+1=0$，联立$\begin{cases}x+y+1=0\\x-y-3=0\end{cases}$解得：$\begin{cases}x=1\\y=-2\end{cases}$，故 $P(1,-2)$，

求出了点 P，就可由切点弦结论写出直线 AB 的方程，

直线 AB 的方程为 $(1+1)(x+1)-2y=2$，整理得：$x-y=0$，故 B 项错误；

C 项，$|PA|$最短时，AB 的方程是 $x-y=0$，$|AB|$可按直线被圆 M 截得的弦长来算，先求 d，

圆心 M 到直线 AB 的距离 $d=\frac{|-1|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，所以$|AB|=2\sqrt{r^2-d^2}=2\sqrt{2-\frac{1}{2}}=\sqrt{6}$，故 C 项正确；

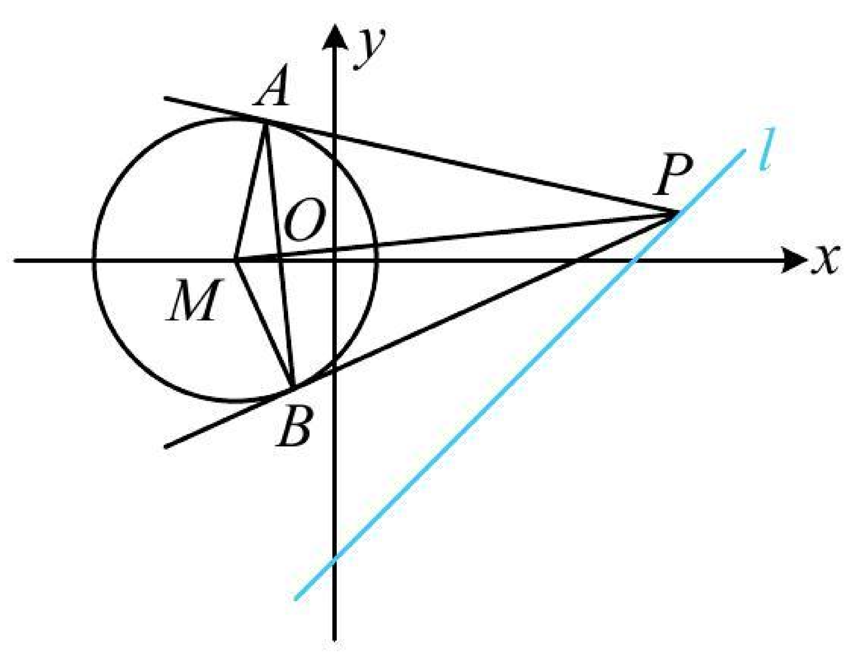
D 项，要找直线 AB 过的定点，得求 AB 的方程，可先设 P 的坐标，用切点弦结论来写 AB 的方程，

$x-y-3=0\Rightarrow y=x-3$，点 P 在直线 $y=x-3$ 上，故可设 $P(a,a-3)$，

则由切点弦结论，直线 AB 的方程为 $(a+1)(x+1)+(a-3)y=2$，整理得：$a(x+y+1)+(x-3y-1)=0$，

令$\begin{cases}x+y+1=0\\x-3y-1=0\end{cases}$解得：$\begin{cases}x=-\dfrac{1}{2}\\y=-\dfrac{1}{2}\end{cases}$，所以直线 AB 过定点 $(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2})$，故 D 项正确.

答案：ACD



【反思】切点弦的结论在选填题中用起来很方便，但例 3 解法 1 给出的推导方法，也需要掌握. 若遇到解答题，则可用该方法来求切点弦方程.

强化训练

1.（2022•玉溪期末•★）已知直线 l 经过点 $P(1,3)$，且 l 与圆 $x^2+y^2=10$ 相切，则 l 的方程为（　　）

（A）$x+3y-10=0$　（B）$x-3y+8=0$　（C）$3x+y-6=0$　（D）$2x+3y-11=0$

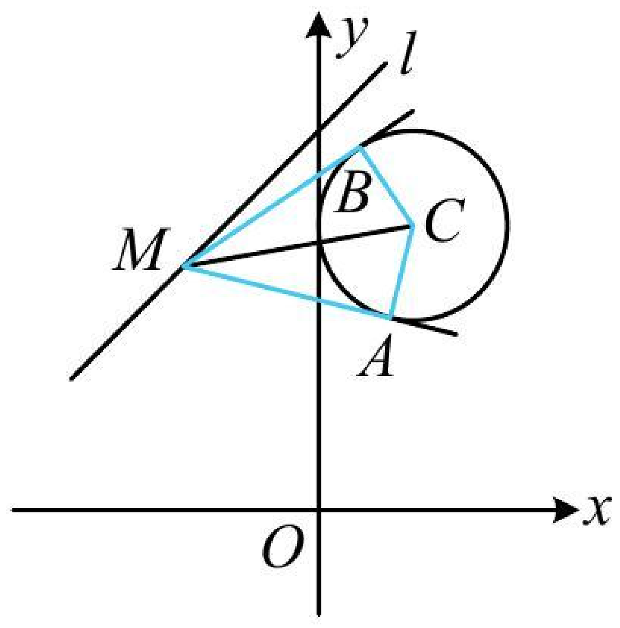
2.（★★）已知圆 C 的圆心坐标是 $(0,m)$，半径长是 r. 若直线 $2x-y+3=0$ 与圆相切于点 $A(-2,-1)$，则 $m=$_____，$r=$_____.

3.（2022•辽宁模拟•★★）已知圆 $C:x^2+y^2+2x-4y+m=0$ 与 y 轴相切，过点 $P(-2,4)$ 作圆 C 的切线 l，则 l 的方程为_____.

4.（2022•安徽模拟•★★）直线 $l:x+y-4=0$ 平分圆 $C:x^2+y^2-2bx-2by-5+b^2=0$ 的周长，过点 $P(-b,1)$ 作圆 C 的一条切线，切点为 Q，则 $|PQ|=$_____.

5.（2022·安阳模拟·★★★）已知圆$C:(x-2)^2+(y-6)^2=4$，点 M 为直线$l:x-y+8=0$上的动点，过 M 作圆 C 的两条切线，切点分别为 A 和 B，则四边形 $MACB$ 的周长的最小值为（　　）

（A）8　（B）$6\sqrt{2}$　（C）$5\sqrt{2}$　（D）$2+4\sqrt{2}$



6.（2022·湖北模拟·★★★）若圆$C:(x-2)^2+(y+1)^2=2$关于直线$l:ax+2by+6=0$对称，过$P(a,b)$作圆 C 的一条切线，切点为 A，则$|PA|$的最小值为（）

（A）2　（B）3　（C）4　（D）6

7.（★★）已知圆$C:(x-2)^2+(y-4)^2=16$，过点$P(-1,0)$作圆 C 的两条切线，切点分别为 A、B，则$|AB|=$ ______.

8.（2022·温州模拟·★★★）过 x 轴正半轴上一点$P(x_0,0)$作圆$C:x^2+(y-\sqrt{3})^2=1$的两条切线，切点分别为 A 和 B，若$|AB|\geq\sqrt{3}$，则 x_0 的最小值为（）

（A）1　（B）$\sqrt{2}$　（C）2　（D）3

9.（2020·新课标Ⅰ卷·★★★★）已知圆$M:x^2+y^2-2x-2y-2=0$，直线$l:2x+y+2=0$，P 为 l 上的动点，过点 P 作圆 M 的切线 PA、PB，切点为 A、B，当$|PM|\cdot|AB|$最小时，直线 AB 的方程为（　　）

（A）$2x-y-1=0$　（B）$2x+y-1=0$　（C）$2x-y+1=0$　（D）$2x+y+1=0$