模块四 双曲线与方程

第 1 节 双曲线的定义、标准方程及简单几何性质（★★）

强化训练

1．（★）双曲线 $\frac{x^2}{2}-y^2=1$ 的左、右焦点分别为 F_1，F_2，P 在双曲线上，且 $|PF_2|=4\sqrt{2}$，则 $|PF_1|=$_____.

答案： $6\sqrt{2}$ 或 $2\sqrt{2}$

解析： 在双曲线中，已知 $|PF_1|$ 求 $|PF_2|$，用定义即可，由题意，$||PF_1|-|PF_2||=2\sqrt{2}$，

所以 $|PF_1|-|PF_2|=\pm 2\sqrt{2}$，故 $|PF_1|=|PF_2|\pm 2\sqrt{2}$，又 $|PF_2|=4\sqrt{2}$，所以 $|PF_1|=6\sqrt{2}$ 或 $2\sqrt{2}$.

2．（2021·全国甲卷·★）点 $(3,0)$ 到双曲线 $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$ 的一条渐近线的距离为（　　）

（A）$\frac{9}{5}$　　（B）$\frac{8}{5}$　　（C）$\frac{6}{5}$　　（D）$\frac{4}{5}$

答案： A

解析： 双曲线 $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$ 的渐近线为 $y=\pm\frac{3}{4}x$，即 $3x\pm 4y=0$，

所以点 $(3,0)$ 到渐近线的距离 $d=\frac{|3\times 3|}{\sqrt{3^2+(\pm 4)^2}}=\frac{9}{5}$.

3．（2021·全国乙卷·★）已知双曲线 $C:\frac{x^2}{m}-y^2=1(m>0)$ 的一条渐近线为 $\sqrt{3}x+my=0$，则 C 的焦距为_____.

答案： 4

解析： 给出了一条渐近线，可通过比较渐近线斜率求 m，

由题意，$a=\sqrt{m}$，$b=1\Rightarrow$ 双曲线 C 的渐近线为 $y=\pm\frac{1}{\sqrt{m}}x$，

$\sqrt{3}x+my=0\Rightarrow y=-\frac{\sqrt{3}}{m}x$，因为 $y=-\frac{\sqrt{3}}{m}x$ 是其中一条渐近线，所以 $-\frac{\sqrt{3}}{m}=-\frac{1}{\sqrt{m}}$，解得：$m=3$，

所以 $c=\sqrt{m+1}=2$，故 C 的焦距为 4.

4．（★）若方程 $\frac{x^2}{m+1}+\frac{y^2}{m-2}=1$ 表示焦点在 x 轴上的双曲线，则实数 m 的取值范围为_____.

答案： $(-1,2)$

解析： 所给方程表示焦点在 x 轴上的双曲线，可将其化为标准方程 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 的形式，再比较系数，

由 $\frac{x^2}{m+1}+\frac{y^2}{m-2}=1$ 可得 $\frac{x^2}{m+1}-\frac{y^2}{2-m}=1$，所以 $\begin{cases}a^2=m+1>0\\b^2=2-m>0\end{cases}$，解得：$-1<m<2$.

5．（2022·玉溪模拟·★★）方程 $\sqrt{(x+10)^2+y^2}-\sqrt{(x-10)^2+y^2}=12$ 化简的结果为（　　）

（A）$\frac{x^2}{36}-\frac{y^2}{64}=1$　　（B）$\frac{x^2}{64}-\frac{y^2}{36}=1$　　（C）$\frac{x^2}{36}-\frac{y^2}{64}=1(x\ge 6)$　　（D）$\frac{x^2}{64}-\frac{y^2}{36}=1(x\ge 8)$

答案：C

解析：所给等式的形式为距离之差，可联想到双曲线的定义，

记 $F_1(-10,0)$，$F_2(10,0)$，$P(x,y)$，则所给方程等价于 $|PF_1|-|PF_2|=12$，

所以点 P 在以 F_1F_2 为焦点的双曲线的右支上，该双曲线的半焦距 $c=10$，$12=2a\Rightarrow a=6$，

所以 $b^2=c^2-a^2=64$，故原方程化简的结果为 $\frac{x^2}{36}-\frac{y^2}{64}=1(x\ge 6)$.

6．（2023·全国甲卷·★★★）双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的离心率为 $\sqrt{5}$，其中一条渐近线与圆 $(x-2)^2+(y-3)^2=1$ 交于 A，B 两点，则 $|AB|=$（　　）

（A）$\frac{1}{5}$　　（B）$\frac{\sqrt{5}}{5}$　　（C）$\frac{2\sqrt{5}}{5}$　　（D）$\frac{4\sqrt{5}}{5}$

答案：D

解析：由题意，双曲线的离心率 $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}=\sqrt{5}$，

所以 $\frac{b}{a}=2$，故双曲线的渐近线为 $y=\pm 2x$，

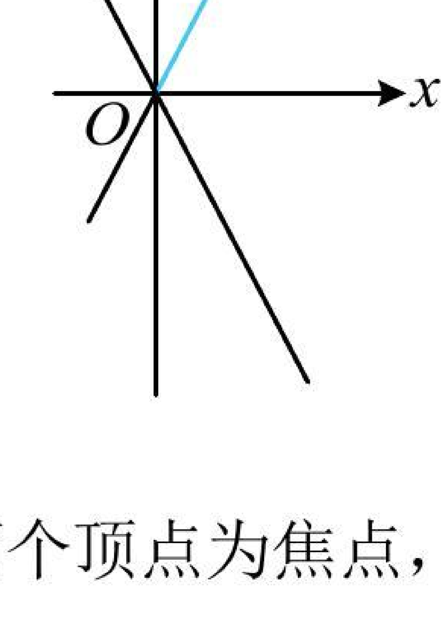
如图，与所给圆交于 A，B 两点的是渐近线 $y=2x$，

求圆的弦长用公式 $L=2\sqrt{r^2-d^2}$，先求 d，

圆心为 $C(2,3)$，$y=2x$ 可化为 $2x-y=0$，

所以 C 到该渐近线的距离 $d=\frac{|2\times 2-3|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\frac{1}{\sqrt{5}}$，

故 $|AB|=2\sqrt{r^2-d^2}=2\sqrt{1-\frac{1}{5}}=\frac{4\sqrt{5}}{5}$.



7．（2022·佛山二模·★★★）已知双曲线 $E:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 以正方形 $ABCD$ 的两个顶点为焦点，

且经过该正方形的另外两个顶点. 若正方形 $ABCD$ 的边长为 2，则 E 的实轴长为（　　）

（A）$2\sqrt{2}-2$　　（B）$2\sqrt{2}+2$　　（C）$\sqrt{2}-1$　　（D）$\sqrt{2}+1$

答案：A

解析：先画图看双曲线的焦点到底是正方形对角的两个顶点，还是相邻的两个顶点，

若焦点是正方形对角的两个顶点，如图 1，双曲线 E 不可能过正方形的另外两个顶点，不合题意，

若焦点是正方形相邻的两个顶点，如图 2，要求实轴长 $2a$，可用双曲线的定义，

因为正方形边长为 2，所以 $|CA|-|CB|=2a=2\sqrt{2}-2$，故双曲线 E 的实轴长为 $2\sqrt{2}-2$.

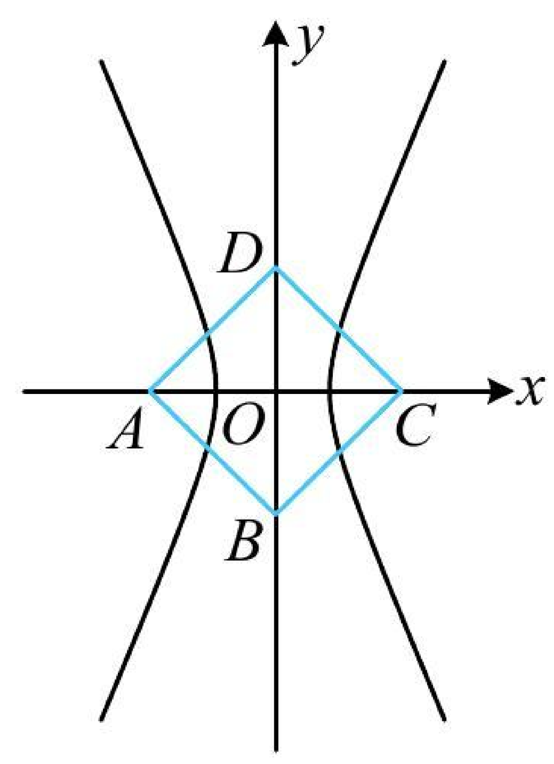


图1

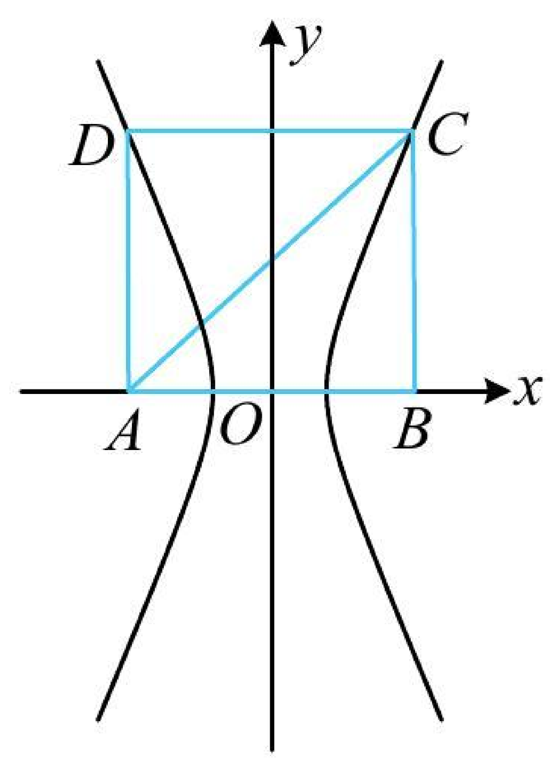


图2

8.（2020 • 新高考Ⅰ卷 • ★★★）（多选）已知曲线 $C: mx^2+ny^2=1$.（　　）

（A）若 $m>n>0$，则 C 是椭圆，其焦点在 y 轴上

（B）若 $m=n>0$，则 C 是圆，其半径为 $\sqrt{n}$

（C）若 $mn<0$，则 C 是双曲线，其渐近线方程为 $y=\pm\sqrt{-\frac{m}{n}}x$

（D）若 $m=0$，$n>0$，则 C 是两条直线

答案：ACD

解析：A 项，当 $m>n>0$ 时，$0<\frac{1}{m}<\frac{1}{n}$，接下来把曲线 C 化为标准方程，看焦点在哪里，

由 $mx^2+ny^2=1$ 可得 $\frac{x^2}{\frac{1}{m}}+\frac{y^2}{\frac{1}{n}}=1$，所以 C 是焦点在 y 轴上的椭圆，故 A 项正确；

B 项，若 $m=n>0$，则 $mx^2+ny^2=1$ 即为 $x^2+y^2=\frac{1}{n}$，它表示半径为 $\sqrt{\frac{1}{n}}$ 的圆，故 B 项错误；

C 项，若 $mn<0$，则 C 是双曲线，此处不清楚焦点在哪条坐标轴，可用求渐近线的统一方法，

在所给方程中将 1 换成 0 得 $mx^2+ny^2=0$，所以 $y^2=-\frac{m}{n}x^2$，从而渐近线为 $y=\pm\sqrt{-\frac{m}{n}}x$，故 C 项正确；

D 项，若 $m=0$，$n>0$，则所给方程可化为 $y^2=\frac{1}{n}$，即 $y=\pm\sqrt{\frac{1}{n}}$，所以 C 是两条直线，故 D 项正确.

9.（★★★）双曲线 $\frac{x^2}{3}-\frac{y^2}{6}=1$ 的左、右焦点分别为 F_1、F_2，点 $A(3,1)$，P 为双曲线右支上一动点，则 $|PA|-|PF_1|$ 的最大值为_____.

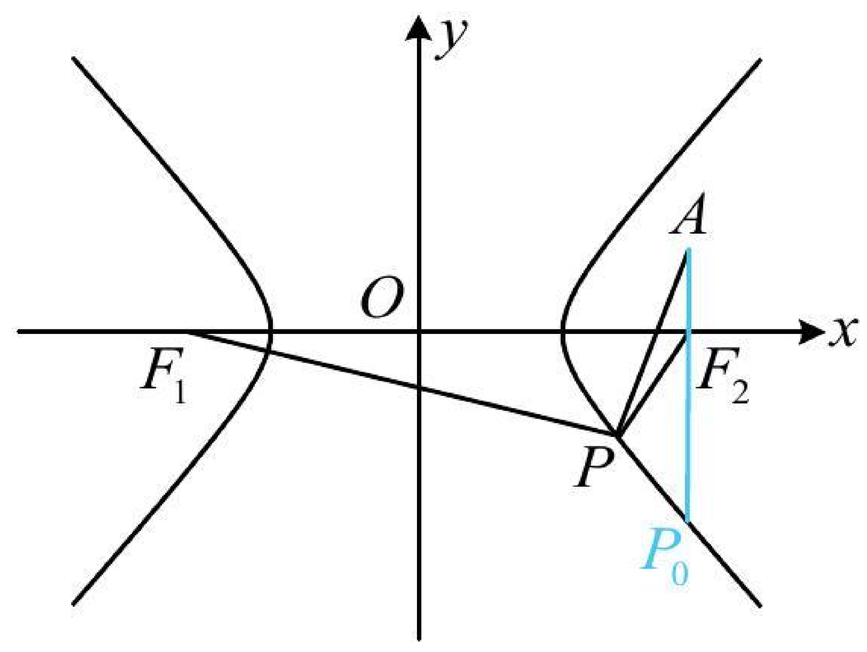
答案：$1-2\sqrt{3}$

解析：如图，直接分析$|PA|-|PF_1|$的最大值不易，涉及$|PF_1|$，可利用双曲线定义转化为$|PF_2|$来看，

由题意，$F_2(3,0)$，$|PF_1|-|PF_2|=2\sqrt{3}$，所以$|PF_1|=|PF_2|+2\sqrt{3}$，故$|PA|-|PF_1|=|PA|-|PF_2|-2\sqrt{3}$ ①，

由三角形两边之差小于第三边知$|PA|-|PF_2|\le|AF_2|=1$，当且仅当P位于图中P_0处时等号成立，

结合①可得$|PA|-|PF_1|\le1-2\sqrt{3}$，所以$|PA|-|PF_1|$的最大值为$1-2\sqrt{3}$.



10.（2022·鹰潭二模·★★★）已知双曲线$\frac{x^2}{m}-\frac{y^2}{5}=1(m>0)$的一条渐近线方程为$\sqrt{5}x+2y=0$，左焦点为$F$，点$P$在双曲线右支上运动，点$Q$在圆$C:x^2+(y-4)^2=1$上运动，则$|PQ|+|PF|$的最小值为（）

（A）$2\sqrt{2}+4$　（B）8　（C）$2\sqrt{2}+5$　（D）9

答案：B

解析：给了一条渐近线，可求出m，双曲线的渐近线为$y=\pm\sqrt{\frac{5}{m}}x$，

$\sqrt{5}x+2y=0\Rightarrow y=-\frac{\sqrt{5}}{2}x$，由题意，$y=-\frac{\sqrt{5}}{2}$是其中一条渐近线，所以$-\sqrt{\frac{5}{m}}=-\frac{\sqrt{5}}{2}$，解得：$m=4$，

下面分析$|PQ|+|PF|$的最小值，P、Q都是动点，可先取定P，

如图，当Q在圆C上运动时，$|PQ|\ge|PC|-1$，当且仅当点Q为线段PC与圆C交点时取等号，

于是$|PQ|+|PF|\ge|PC|-1+|PF|=|PC|+|PF|-1$ ①，

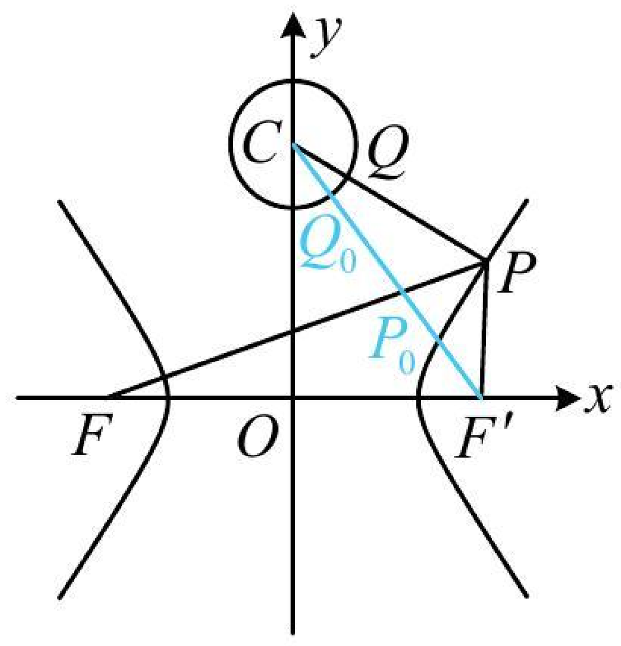
再求$|PC|+|PF|$的最小值，直接分析不易，涉及$|PF|$，可用双曲线定义转化到右焦点来看，

记双曲线的右焦点为$F'(3,0)$，则$|PF|-|PF'|=4$，所以$|PF|=|PF'|+4$，故$|PC|+|PF|=|PC|+|PF'|+4$ ②，

由三角形两边之和大于第三边可得$|PC|+|PF'|\ge|CF'|=\sqrt{|OC|^2+|OF'|^2}=5$，

代入②得$|PC|+|PF|\ge9$，再代入①得$|PQ|+|PF|\ge8$，

当P，Q分别与图中P_0，Q_0重合时取等号，所以$(|PQ|+|PF|)_{\min}=8$.


y
C
Q
Q_0
P
P_0
x
F
O
F′