模块六 解析几何大题基本思路（★★★☆）

1.（2021·全国乙卷·★★★）已知抛物线$C:y^2=2px(p>0)$的焦点F到准线的距离为2.

（1）求C的方程；

（2）已知O为坐标原点，点P在C上，点Q满足$\overrightarrow{PQ}=9\overrightarrow{QF}$，求直线$OQ$的斜率的最大值.

解：（1）由题意，焦点$F(\frac{p}{2},0)$到准线$x=-\frac{p}{2}$的距离$p=2$，所以C的方程为$y^2=4x$.

（2）（步骤1：引入参数，点P在抛物线C上运动，可引入P的坐标为参数）

设$P(x_0,y_0)$，因为点P在C上，所以$y_0^2=4x_0$ ①，

（步骤2：条件翻译，题干给出$\overrightarrow{PQ}=9\overrightarrow{QF}$，可由此计算点$Q$的坐标，并求直线$OQ$的斜率）

由（1）可得$F(1,0)$，设$Q(x_Q,y_Q)$，则$\overrightarrow{PQ}=(x_Q-x_0,y_Q-y_0)$，$\overrightarrow{QF}=(1-x_Q,-y_Q)$，

因为$\overrightarrow{PQ}=9\overrightarrow{QF}$，所以$\begin{cases}x_Q-x_0=9(1-x_Q)\\y_Q-y_0=9(-y_Q)\end{cases}$，从而$\begin{cases}x_Q=\dfrac{x_0+9}{10}\\y_Q=\dfrac{y_0}{10}\end{cases}$，故$k_{OQ}=\dfrac{y_Q}{x_Q}=\dfrac{y_0}{x_0+9}$ ②，

（步骤3：消元，式②中有x_0，y_0两个变量，不易直接求最值，可利用式①来消元）

由①可得$x_0=\dfrac{y_0^2}{4}$，代入②可得$k_{OQ}=\dfrac{y_0}{\dfrac{y_0^2}{4}+9}=\dfrac{4y_0}{y_0^2+36}$，

（步骤4：求解，上式为$\dfrac{\text{一次函数}}{\text{二次函数}}$结构，可上下同除$y_0$，用均值不等式求最值，但需讨论$y_0$的正负）

当$y_0\le 0$时，$k_{OQ}\le 0$；

当$y_0>0$时，$k_{OQ}=\dfrac{4}{y_0+\dfrac{36}{y_0}}\le\dfrac{4}{2\sqrt{y_0\cdot\dfrac{36}{y_0}}}=\dfrac{1}{3}$，当且仅当$y_0=\dfrac{36}{y_0}$，即$y_0=6$时取等号；

综上所述，直线OQ的斜率的最大值是$\dfrac{1}{3}$.

2.（2022·南京模拟·★★★）在平面直角坐标系xOy中，点$A(-2,0)$，过动点P作直线$x=-4$的垂线，垂足为M，$\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AP}=-4$，记动点$P$的轨迹为曲线$E$.

（1）求曲线E的方程；

（2）过点A的直线l交曲线E于不同的两点B和C，若B为线段AC的中点，求直线l的方程.

解：（1）（要求点P的轨迹方程，可设P的坐标，并用它表示M的坐标，由$\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AP}=-4$建立方程）

设$P(x,y)$，则$M(-4,y)$，所以$\overrightarrow{AM}=(-2,y)$，$\overrightarrow{AP}=(x+2,y)$，

因为$\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AP}=-4$，所以$-2(x+2)+y^2=-4$，整理得曲线$E$的方程为$y^2=2x$.

（2）（步骤 1：引入参数，直线 l 绕定点 A 旋转，导致 B，C 一起运动，可设 l 的方程）

如图，直线 l 不与 y 轴垂直，可设其方程为 $x=my-2$，

（步骤 2：条件翻译，条件涉及中点，可用中点公式建立参数间的关系，于是设 B，C 的坐标）

设 $B(x_1,y_1)$，$C(x_2,y_2)$，因为 B 为 AC 中点，所以 $y_1=\frac{0+y_2}{2}$，故 $y_2=2y_1$ ①，

（步骤 3：消元，由①建立了一个方程，可联立 l 和抛物线，结合韦达定理将 y_1 和 y_2 用引入的参数 m 表示）

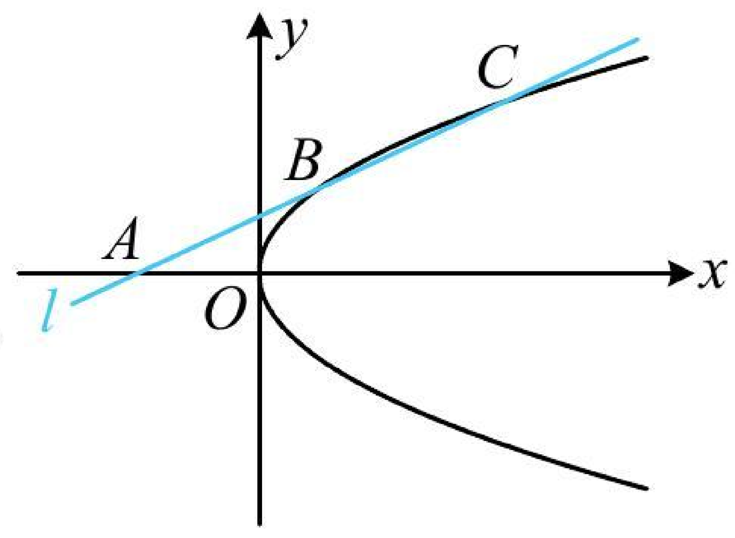
联立 $\begin{cases}x=my-2\\y^2=2x\end{cases}$ 消去 x 整理得：$y^2-2my+4=0$，判别式 $\Delta=(-2m)^2-4\times1\times4>0$，所以 $m<-2$ 或 $m>2$，

由韦达定理，$\begin{cases}y_1+y_2=2m & ②\\y_1y_2=4 & ③\end{cases}$，（步骤 4：求解，把 y_1，y_2 都变成 m，得到 m 的方程）

将①代入②可得 $3y_1=2m$，所以 $y_1=\frac{2m}{3}$ ④，

将①代入③整理得：$y_1^2=2$，结合④可得 $\frac{4m^2}{9}=2$，解得：$m=\pm\frac{3\sqrt{2}}{2}$，满足 $\Delta>0$，

所以直线 l 的方程为 $x=\pm\frac{3\sqrt{2}}{2}y-2$，整理得：$\sqrt{2}x\pm3y+2\sqrt{2}=0$.



【反思】遇到像 $y_2=2y_1$ 这种两根不对称的情形时，可考虑结合韦达定理消元处理.

3.（2022 • 昆明模拟 • ★★★★）过点 $P(2,1)$ 的直线 l 与双曲线 $C:\frac{x^2}{4}-y^2=1$ 交于 A，B 两点，O 为原点.

（1）判断点 P 能否为线段 AB 的中点，说明理由；

（2）记直线 OA，OB 的斜率分别为 k_1，k_2，若 $k_1+k_2=\frac{2}{5}$，求直线 l 的方程.

解：（1）（弦中点问题可考虑点差法，先设 A，B 的坐标，代入双曲线方程并作差）

假设 P 为 AB 中点，设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，则 $\begin{cases}\frac{x_1^2}{4}-y_1^2=1\\\frac{x_2^2}{4}-y_2^2=1\end{cases}$，

两式作差得：$\frac{x_1^2-x_2^2}{4}-(y_1^2-y_2^2)=0$，整理得：$\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}\cdot\frac{y_1+y_2}{x_1+x_2}=\frac{1}{4}$ ①，

（式①中 $\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}$ 即为直线 AB 的斜率，$\frac{y_1+y_2}{x_1+x_2}$ 可结合中点公式处理）

因为 $P(2,1)$ 为 AB 中点，所以 $\begin{cases}\dfrac{x_1+x_2}{2}=2\\ \dfrac{y_1+y_2}{2}=1\end{cases}$，故 $\dfrac{y_1+y_2}{x_1+x_2}=\dfrac{1}{2}$，代入①得：$k_{AB}\cdot\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{4}$，所以 $k_{AB}=\dfrac{1}{2}$，

故直线 l 的方程为 $y-1=\dfrac{1}{2}(x-2)$，整理得：$y=\dfrac{1}{2}x$，（还需检验直线 l 与双曲线 C 是否有 2 个交点）

将 $y=\dfrac{1}{2}x$ 代入 $\dfrac{x^2}{4}-y^2=1$ 得：$\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{x^2}{4}=1$，无解，所以直线 l 与双曲线 C 没有交点，

故 P 不能为线段 AB 的中点.

（2）（步骤 1：引入参数，直线 l 绕点 P 旋转，可设 l 的点斜式方程，先考虑斜率不存在的情形）

当直线 l 斜率不存在时，其方程为 $x=2$，此时直线 l 与双曲线 C 只有 1 个交点，不合题意；

当直线 l 斜率存在时，设其方程为 $y-1=k(x-2)$，即 $y=kx+1-2k$，

（步骤 2：条件翻译，题干给出 $k_1+k_2=\dfrac{2}{5}$，于是计算 k_1+k_2）

$k_1+k_2=\dfrac{y_1}{x_1}+\dfrac{y_2}{x_2}=\dfrac{x_2y_1+x_1y_2}{x_1x_2}$，因为 $k_1+k_2=\dfrac{2}{5}$，所以 $\dfrac{x_2y_1+x_1y_2}{x_1x_2}=\dfrac{2}{5}$，从而 $5(x_2y_1+x_1y_2)=2x_1x_2$，

故 $5[x_2(kx_1+1-2k)+x_1(kx_2+1-2k)]=2x_1x_2$，整理得：$(10k-2)x_1x_2+5(1-2k)(x_1+x_2)=0$ ②，

（步骤 3：消元，式②中有 x_1，x_2，k 三个变量，可联立直线 l 和双曲线 C，结合韦达定理将 x_1，x_2 全部用引入的参数 k 来表示）

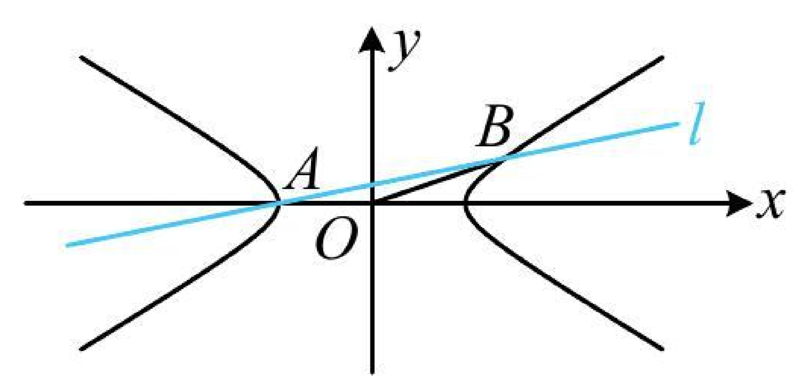
联立 $\begin{cases}y=kx+1-2k\\ \dfrac{x^2}{4}-y^2=1\end{cases}$ 消去 y 整理得：$(1-4k^2)x^2-8k(1-2k)x-4(1-2k)^2-4=0$，

由 l 与 C 有 2 个交点可得 $\begin{cases}1-4k^2\neq 0\\ \Delta=64k^2(1-2k)^2-4(1-4k^2)[-4(1-2k)^2-4]>0\end{cases}$，解得：$k<\dfrac{1}{2}$ 且 $k\neq-\dfrac{1}{2}$ ③，

由韦达定理，$x_1+x_2=\dfrac{8k(1-2k)}{1-4k^2}$ ④，$x_1x_2=-\dfrac{4(1-2k)^2+4}{1-4k^2}$ ⑤，（步骤 4：求解）

将④⑤代入②可得 $(10k-2)[-\dfrac{4(1-2k)^2+4}{1-4k^2}]+5(1-2k)\cdot\dfrac{8k(1-2k)}{1-4k^2}=0$，解得：$k=\dfrac{1}{4}$ 或 2，

其中 $k=2$ 不满足③，舍去，所以 $k=\dfrac{1}{4}$，故直线 l 的方程为 $y=\dfrac{1}{4}x+\dfrac{1}{2}$，整理得：$x-4y+2=0$.



4.（2022・南京模拟・★★★★）过点 $D(-1,2)$ 的直线与抛物线 $x^2=2py(p>0)$ 交于 A，B 两点.

（1）当 A 的坐标为 $(-2,1)$ 时，求点 B 的坐标；

（2）已知点 $P(0,2)$，若 D 为线段 AB 的中点，求 ΔPAB 面积的最大值.

解：（1）将 $A(-2,1)$ 代入 $x^2=2py$ 得：$(-2)^2=2p\cdot 1$，解得：$p=2$，所以抛物线的方程为 $x^2=4y$，

（由 A，D 两点可求出直线 AD 的方程，与抛物线联立即可解出点 B 的坐标）

直线 AD 的斜率 $k_{AD}=\frac{2-1}{-1-(-2)}=1$，故 AD 的方程为 $y-2=x+1$，即 $y=x+3$，

代入 $x^2=4y$ 整理得：$x^2-4x-12=0$，解得：$x=-2$ 或 6，

因为 $x_A=-2$，所以 $x_B=6$，从而 $y_B=x_B+3=9$，故点 B 的坐标为 $(6,9)$.

（2）（步骤 1：引入参数，直线 AB 绕点 D 旋转，可设点斜式方程）

如图，直线 AD 的斜率存在，可设其方程为 $y-2=k(x+1)$，即 $y=kx+k+2$ ①，

（步骤 2：条件翻译，条件涉及中点，可用中点公式翻译）

设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，因为 D 为 AB 中点，所以 $\frac{x_1+x_2}{2}=-1$，故 $x_1+x_2=-2$ ②，

（步骤 3：消元，目前主要涉及 x_1，x_2，k，p 这 4 个变量，由式②可知应联立直线 AB 和抛物线，结合韦达定理将 x_1，x_2，p 全部用引入的参数 k 表示）

将①代入 $x^2=2py$ 整理得：$x^2-2pkx-2p(k+2)=0$，判别式 $\Delta=4p^2k^2+8p(k+2)>0$ ③，

由韦达定理，$x_1+x_2=2pk$，代入②得：$2pk=-2$，所以 $p=-\frac{1}{k}$ ④，

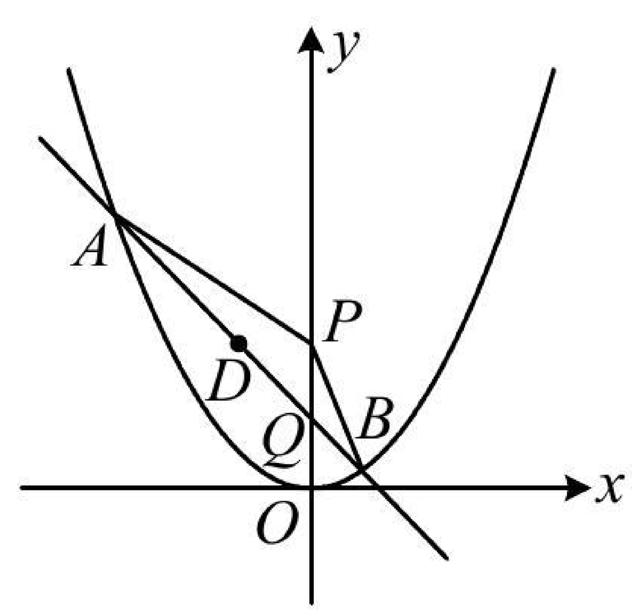
（步骤 4：求解，如图，可按 $S_{\Delta PAB}=\frac{1}{2}|PQ|\cdot|x_1-x_2|$ 来计算 ΔPAB 的面积）

在①中令 $x=0$ 得：$y=k+2$，所以直线 AB 与 y 轴的交点为 $Q(0,k+2)$，

故 $S_{\Delta PAB}=\frac{1}{2}|PQ|\cdot|x_1-x_2|=\frac{1}{2}|k+2-2|\cdot\frac{\sqrt{4p^2k^2+8p(k+2)}}{|1|}=|k|\cdot\sqrt{p^2k^2+2p(k+2)}$，

将式④代入得：$S_{\Delta PAB}=|k|\cdot\sqrt{1-\frac{2}{k}(k+2)}=\sqrt{k^2[1-\frac{2}{k}(k+2)]}=\sqrt{-k^2-4k}=\sqrt{-(k+2)^2+4}\le 2$，

取等条件是 $k=-2$，此时 $p=\frac{1}{2}$，经检验，满足③，所以 ΔPAB 的面积的最大值为 2.



【反思】除了我们设动点、动直线引入的参数外，题干本身的变量也应看成参数，例如本题的 p.