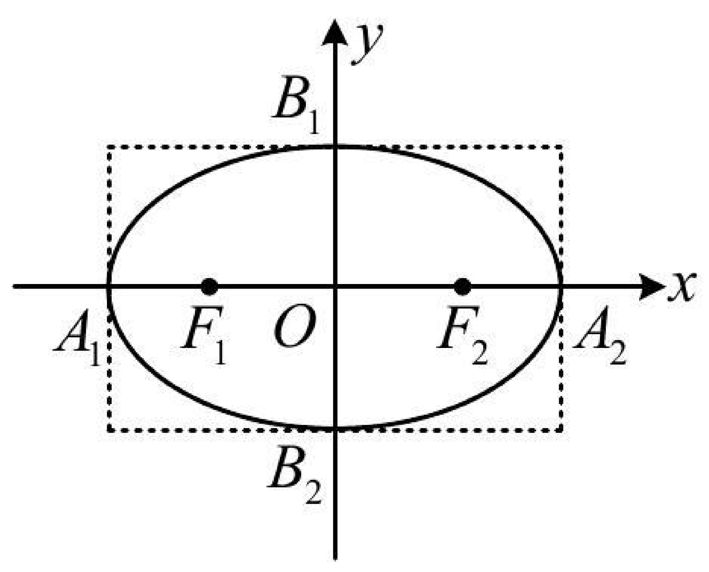
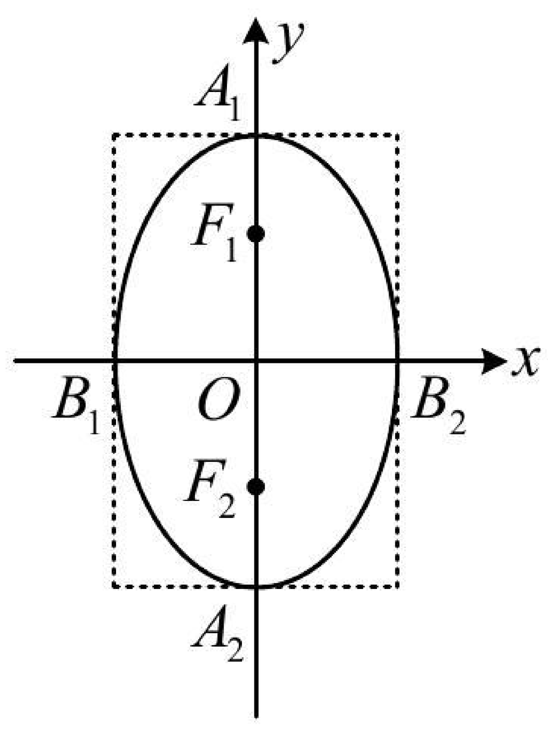
模块三 椭圆与方程

第 1 节 椭圆的定义、标准方程及简单几何性质（★★）

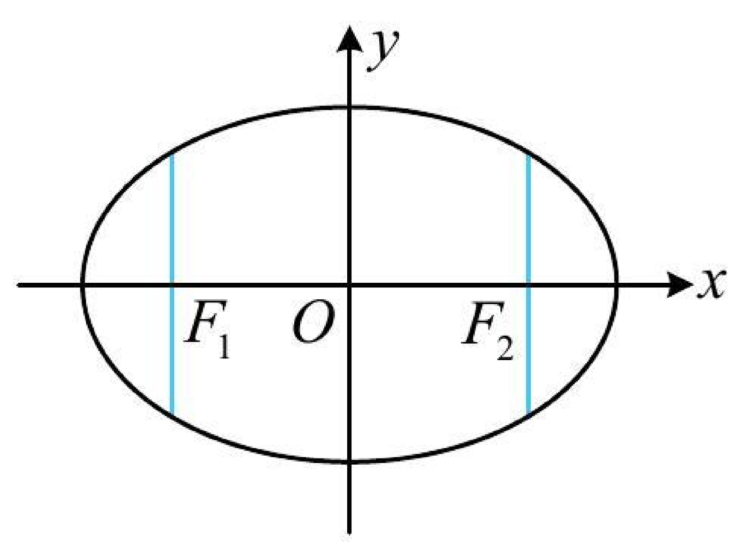
内容提要

1．椭圆定义：设 F_1，F_2 是平面上的两个定点，若平面内的点 P 满足 $|PF_1|+|PF_2|=2a(2a>|F_1F_2|)$，则点 P 的轨迹是以 F_1，F_2 为焦点的椭圆.

2．椭圆的简单几何性质：

标准方程	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$	$\frac{y^2}{a^2}+\frac{x^2}{b^2}=1(a>b>0)$
焦点坐标	$F_1(-c,0)$，$F_2(c,0)$	$F_1(0,c)$，$F_2(0,-c)$
焦距	$\|F_1F_2\|=2c$，且 $c^2=a^2-b^2$	
图形		
范围	$-a\le x\le a$，$-b\le y\le b$	$-b\le x\le b$，$-a\le y\le a$
对称性	关于 x 轴、y 轴、原点对称	
顶点坐标	左、右顶点：$A_1(-a,0)$，$A_2(a,0)$ 上、下顶点：$B_1(0,b)$，$B_2(0,-b)$	左、右顶点：$B_1(-b,0)$，$B_2(b,0)$ 上、下顶点：$A_1(0,a)$，$A_2(0,-a)$
长轴长	$\|A_1A_2\|=2a$，其中 a 叫做长半轴长	
短轴长	$\|B_1B_2\|=2b$，其中 b 叫做短半轴长	
离心率	$e=\frac{c}{a}(0<e<1)$	

3．通径：经过椭圆焦点且垂直于长轴的弦叫做通径（如图中两条蓝色的线段），其长度为 $\frac{2b^2}{a}$.



典型例题

类型Ⅰ：椭圆定义的运用

【例 1】椭圆 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{2}=1$ 的焦点为 F_1，F_2，点 P 在椭圆上，若 $|PF_1|=4$，则 $|PF_2|=$_____；$\angle F_1PF_2$ 的大小为_____；ΔPF_1F_2 的周长为_____；若延长 PO 交椭圆于 Q，则 $|PF_1|+|F_1Q|=$_____.

解析：椭圆中给出 $|PF_1|$，可由定义求 $|PF_2|$，由题意，$a=3$，$b=\sqrt{2}$，$c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{7}$，

因为$|PF_1|+|PF_2|=2a=6$，且$|PF_1|=4$，所以$|PF_2|=6-|PF_1|=2$；

要求$\angle F_1PF_2$，可先求$|F_1F_2|$，在ΔPF_1F_2中由余弦定理推论求$\cos\angle F_1PF_2$，

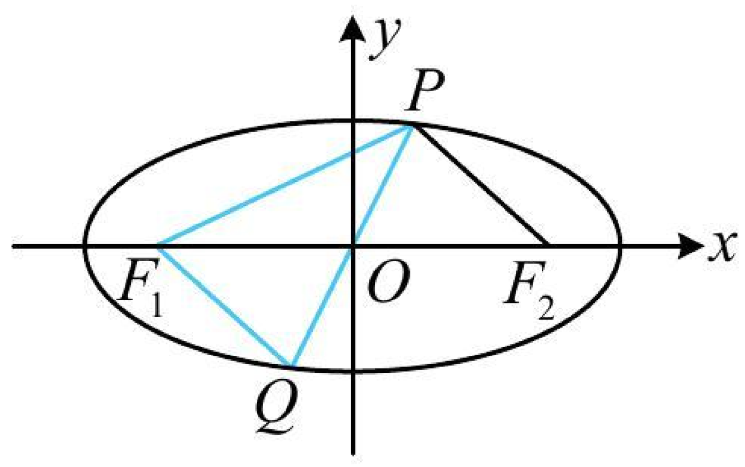
如图，$|F_1F_2|=2c=2\sqrt{7}$，所以$\cos\angle F_1PF_2=\dfrac{|PF_1|^2+|PF_2|^2-|F_1F_2|^2}{2|PF_1|\cdot|PF_2|}=\dfrac{16+4-28}{2\times4\times2}=-\dfrac{1}{2}$，故$\angle F_1PF_2=120^\circ$；

ΔPF_1F_2的周长为$|PF_1|+|PF_2|+|F_1F_2|=2a+2c=6+2\sqrt{7}$；

由椭圆的对称性，O是PQ中点，而O也是F_1F_2的中点，所以四边形PF_1QF_2为平行四边形，

从而$|QF_1|=|PF_2|=2$，故$|PF_1|+|QF_1|=4+2=6$.

答案：2；120°；$6+2\sqrt{7}$；6



【变式1】（2021•新高考Ⅰ卷）已知F_1、F_2是椭圆$C:\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$的两个焦点，点$M$在$C$上，则$|MF_1|\cdot|MF_2|$的最大值为（　　）

（A）13　（B）12　（C）9　（D）6

解析：由椭圆定义，$|MF_1|$与$|MF_2|$的和为定值，故可用不等式$mn\le(\dfrac{m+n}{2})^2$来求积的最大值，

由题意，$a=3$，所以$|MF_1|+|MF_2|=2a=6$，故$|MF_1|\cdot|MF_2|\le(\dfrac{|MF_1|+|MF_2|}{2})^2=9$，

当且仅当$|MF_1|=|MF_2|=3$时取等号，所以$|MF_1|\cdot|MF_2|$的最大值为9.

答案：C

【反思】涉及椭圆上的点到两焦点距离的问题，可优先往椭圆定义上思考.

【变式2】已知椭圆$C:\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$的左、右焦点分别为$F_1$、$F_2$，$A(1,2)$，$P$为椭圆$C$上的动点，则$|PA|-|PF_1|$的最小值为_____.

解析：如图，A在椭圆外，不易直接分析$|PA|-|PF_1|$的最小值，可考虑用椭圆定义将$|PF_1|$换成$|PF_2|$来看，

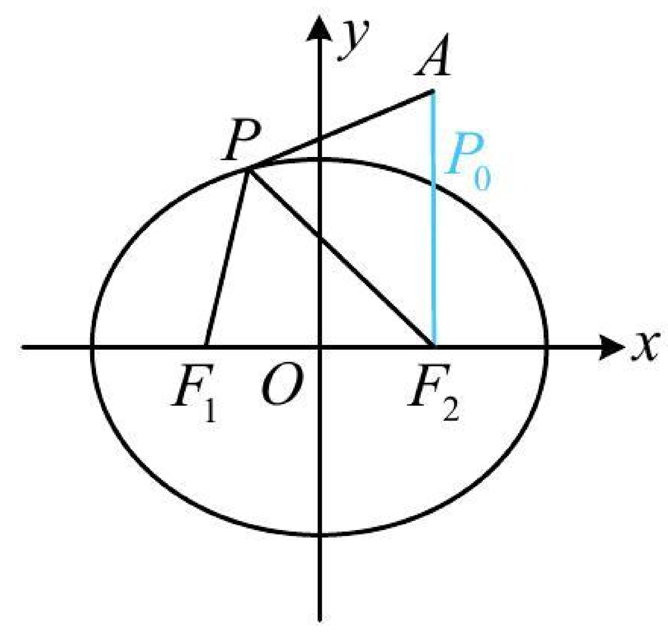
由题意，$|PF_1|+|PF_2|=4$，所以$|PF_1|=4-|PF_2|$，故$|PA|-|PF_1|=|PA|-(4-|PF_2|)=|PA|+|PF_2|-4$ ①，

由三角形两边之和大于第三边知$|PA|+|PF_2|\ge|AF_2|$，结合①得：$|PA|-|PF_1|=|PA|+|PF_2|-4\ge|AF_2|-4$ ②，

当且仅当点P位于图中P_0处时取等号，椭圆的半焦距$c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{4-3}=1$，所以$F_2(1,0)$，

又$A(1,2)$，所以$|AF_2|=2$，代入②知$|PA|-|PF_1|\ge2-4=-2$，故$|PA|-|PF_1|$的最小值为-2.

答案：-2



【反思】涉及椭圆上的点到一个焦点的距离的最值问题，若不易直接求解，则可考虑用椭圆定义，转化到另一个焦点去分析.

类型Ⅱ：椭圆的标准方程与简单几何性质

【例 2】椭圆的中心在原点，焦点在 x 轴上，离心率 $e=\frac{1}{2}$，且过点 $(2\sqrt{2},\sqrt{3})$，则椭圆的方程为_____.

解析：由题意，可设椭圆的方程为 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$，

已知离心率，可找到 a、b、c 的比例关系，将变量归一化，

由题意，$e=\frac{c}{a}=\frac{1}{2}$，所以 $a=2c$，$b=\sqrt{a^2-c^2}=\sqrt{3}c$，故椭圆的方程为 $\frac{x^2}{4c^2}+\frac{y^2}{3c^2}=1$，

最后求 c，将已知的点代入即可，椭圆过点 $(2\sqrt{2},\sqrt{3})\Rightarrow\frac{8}{4c^2}+\frac{3}{3c^2}=1$，解得：$c=\sqrt{3}$，

所以椭圆的方程为 $\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{9}=1$.

答案：$\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{9}=1$

【变式 1】若方程 $x^2+ky^2=2$ 表示焦点在 y 轴上的椭圆，则实数 k 的取值范围为_____.

解析：先将椭圆化为标准方程，再比较分母，$x^2+ky^2=2\Rightarrow\frac{y^2}{\frac{2}{k}}+\frac{x^2}{2}=1$，

因为椭圆焦点在 y 轴上，所以 $\frac{2}{k}>2$，解得：$0<k<1$.

答案：$(0,1)$

【反思】对于椭圆，若焦点在 x 轴，则在其标准方程中，x^2 的分母大；若焦点在 y 轴，则 y^2 的分母大.

【变式 2】(2022 • 全国甲卷）已知椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的离心率为 $\frac{1}{3}$，A_1、A_2 分别为 C 的左、右顶点，B 为 C 的上顶点，若 $\overrightarrow{BA_1}\cdot\overrightarrow{BA_2}=-1$，则 C 的方程为（　　）

（A）$\frac{x^2}{18}+\frac{y^2}{16}=1$　（B）$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{8}=1$　（C）$\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{2}=1$　（D）$\frac{x^2}{2}+y^2=1$

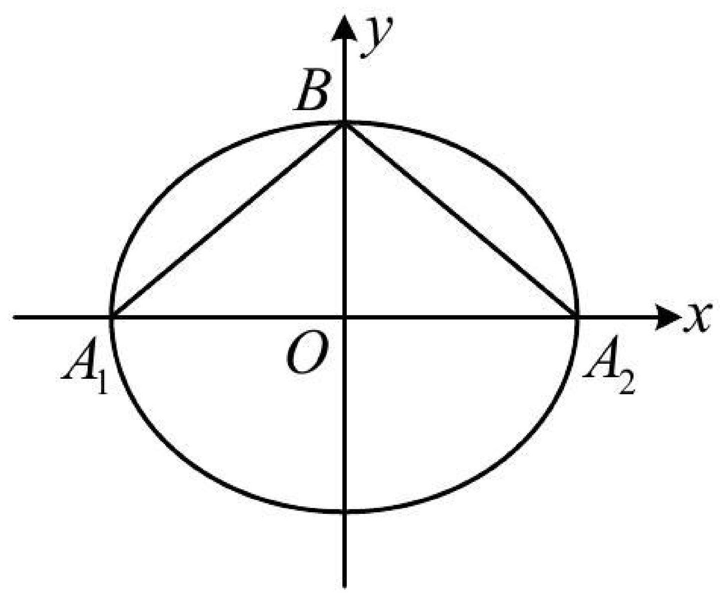
解析：已知离心率，可找到 a、b、c 的比例关系，将变量归一化，

由题意，离心率 $e=\frac{c}{a}=\frac{1}{3}$，所以 $a=3c$， $b=\sqrt{a^2-c^2}=2\sqrt{2}c$，如图， $A_1(-3c,0)$， $A_2(3c,0)$， $B(0,2\sqrt{2}c)$，

所以 $\overrightarrow{BA_1}=(-3c,-2\sqrt{2}c)$， $\overrightarrow{BA_2}=(3c,-2\sqrt{2}c)$，从而 $\overrightarrow{BA_1}\cdot\overrightarrow{BA_2}=-3c\cdot 3c+(-2\sqrt{2}c)^2=-c^2$，

因为 $\overrightarrow{BA_1}\cdot\overrightarrow{BA_2}=-1$，所以 $-c^2=-1$，从而 $c^2=1$，故 $a^2=9c^2=9$， $b^2=8c^2=8$，所以 C 的方程为 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{8}=1$.

答案：B



强化训练

1．（★★）椭圆 $\frac{y^2}{a^2}+\frac{x^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的右顶点为 $A(1,0)$，过其焦点且垂直于长轴的弦长为 1，则椭圆的方程为_____.

2．（★★）对称轴为坐标轴的椭圆经过 $P(-2\sqrt{3},1)$、$Q(\sqrt{3},-2)$ 两点，则椭圆的方程为_____.

3．（2023 •新高考Ⅰ卷 •★★）设椭圆 $C_1:\frac{x^2}{a^2}+y^2=1(a>1)$，$C_2:\frac{x^2}{4}+y^2=1$ 的离心率分别为 e_1，e_2，若 $e_2=\sqrt{3}e_1$，则 $a=$（　　）

（A）$\frac{2\sqrt{3}}{3}$　　（B）$\sqrt{2}$　　（C）$\sqrt{3}$　　（D）$\sqrt{6}$

4．（2022 • 衡水中学六调 • ★★）阿基米德（公元前 287 年至公元前 212 年）不仅是著名的物理学家，也是著名的数学家，他利用“逼近法”得到椭圆的面积除以圆周率等于椭圆的长半轴长与短半轴长的乘积. 若椭圆 C 的对称轴为坐标轴，焦点在 y 轴上，离心率为 $\frac{\sqrt{7}}{4}$，面积为 12π，则椭圆 C 的方程为（　　）

（A）$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}=1$　　（B）$\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{4}=1$　　（C）$\frac{x^2}{18}+\frac{y^2}{32}=1$　　（D）$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{36}=1$

5．（★★）已知ΔABC的周长是 8，且$B(-1,0)$，$C(1,0)$，则顶点A的轨迹方程是（　　）

（A）$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{8}=1(x\neq\pm3)$　　（B）$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{8}=1(x\neq0)$　　（C）$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1(y\neq0)$　　（D）$\frac{y^2}{4}+\frac{x^2}{3}=1(y\neq0)$

6．（★★）已知F_1、F_2是椭圆$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$的左、右焦点，$P$为椭圆上一点，$M$为$F_1P$中点，$|OM|=3$，则$|PF_1|=$_____.

7．（★★）已知F_1，F_2为椭圆$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$的两个焦点，过$F_1$的直线交椭圆于$A$，$B$两点，若$|AF_2|+|BF_2|=12$，则$|AB|=$_____.

8．（★★★）设椭圆$C:\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$的左、右焦点分别为$F_1$、$F_2$，$A(1,1)$，$P$为椭圆$C$上的动点，则$|PA|+|PF_1|$的最大值为_____.