第 3 节 抛物线小题的综合运算（★★★）

强化训练

1.（★★）已知 O 为坐标原点，垂直于抛物线 $C: y^2 = 2px(p > 0)$ 的对称轴的直线 l 交 C 于 A，B 两点，$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 0$，且 $|AB| = 4$，则 $p =$（　　）

（A）4　（B）3　（C）2　（D）1

答案：D

解法 1：可设直线 l 的方程，与抛物线联立求解 A，B 的坐标，再翻译已知条件建立方程，

由题意，可设直线 l 的方程为 $x = t(t > 0)$，代入 $y^2 = 2px$ 可得：$y^2 = 2pt$，解得：$y = \pm\sqrt{2pt}$，

不妨设 $A(t, \sqrt{2pt})$，$B(t, -\sqrt{2pt})$，则 $\begin{cases} |AB| = 2\sqrt{2pt} = 4 & ① \\ \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = t^2 + \sqrt{2pt} \cdot (-\sqrt{2pt}) = t^2 - 2pt = 0 & ② \end{cases}$，

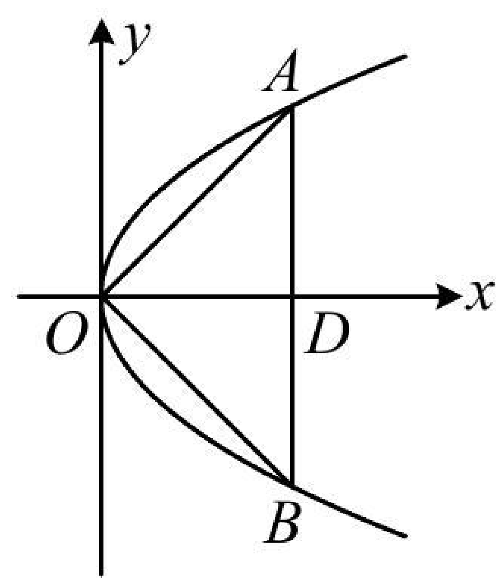
由②结合 $t > 0$ 可得：$t = 2p$，代入①解得：$p = 1$.

解法 2：如图，也可通过分析图形的几何特征，找到 A 的坐标，代入抛物线方程求 p，

设直线 l 与 x 轴交于点 D，由对称性，$|OA| = |OB|$，又 $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 0$，所以 $OA \perp OB$，

故 ΔAOB 为等腰直角三角形，所以 ΔAOD 也是等腰直角三角形，

因为 $|AB| = 4$，所以 $|OD| = |AD| = 2$，故 $A(2,2)$，代入 $y^2 = 2px$ 可得：$2^2 = 2p \cdot 2$，解得：$p = 1$.



2.（2022·镇远模拟·★★）已知 A，B 是抛物线 $C: y^2 = 4x$ 上关于 x 轴对称的两点，D 是 C 的准线与 x 轴的交点，若直线 BD 与 C 的另一个交点是 $E(4,4)$，则直线 AE 的方程为（　　）

（A）$2x - y - 4 = 0$　（B）$4x - 3y - 4 = 0$　（C）$x - 2y + 4 = 0$　（D）$4x - 5y + 4 = 0$

答案：B

解析：如图，抛物线的准线为 $x = -1$，所以 $D(-1,0)$，

还知道点 E，于是可写出直线 DE 的方程，与抛物线联立求 B 的坐标，

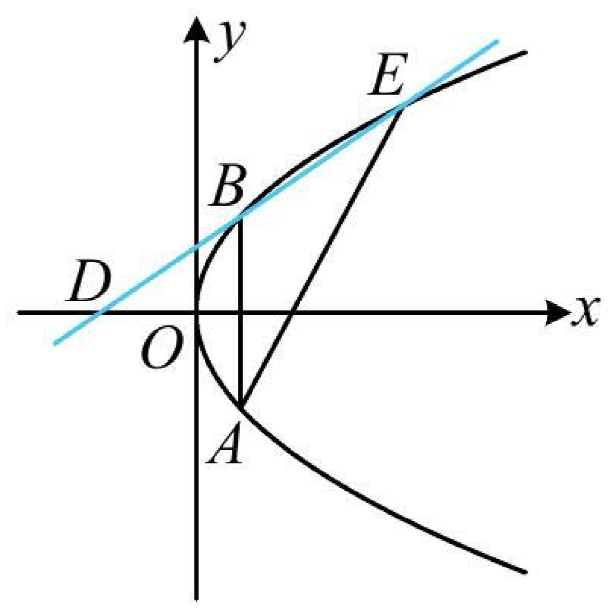
又 $E(4,4)$，所以 $k_{DE} = \dfrac{0-4}{-1-4} = \dfrac{4}{5}$，故直线 DE 的方程为 $y = \dfrac{4}{5}(x+1)$，即 $4x = 5y - 4$，

代入 $y^2 = 4x$ 消去 x 整理得：$y^2 - 5y + 4 = 0$，解得：$y = 1$ 或 4，

因为 $y_E = 4$，所以 $y_B = 1$，又点 B 在抛物线 C 上，所以 $x_B = \dfrac{y_B^2}{4} = \dfrac{1}{4}$，故 $B(\dfrac{1}{4}, 1)$，

此时可由对称性求得 A 的坐标，结合点 E 写出直线 AE 的方程，由对称性知点 A 的坐标为 $(\frac{1}{4},-1)$，

所以 $k_{AE}=\frac{-1-4}{\frac{1}{4}-4}=\frac{4}{3}$，故直线 AE 的方程为 $y-4=\frac{4}{3}(x-4)$，整理得：$4x-3y-4=0$.



3.（2022 •上饶模拟 •★★）已知抛物线 $y^2=2px(p>0)$ 的焦点为 $F(1,0)$，则抛物线上的动点 N 到点 $M(3p,0)$ 的距离的最小值为（　　）

（A）4　（B）6　（C）$2\sqrt{5}$　（D）$4\sqrt{5}$

答案：C

解析：抛物线的焦点为 $F(1,0)\Rightarrow\frac{p}{2}=1\Rightarrow p=2$，所以抛物线的方程为 $y^2=4x$，且 M 的坐标为 $(6,0)$，

点 N 在抛物线上运动，可将其坐标设为单变量的形式，用于计算 $|MN|$，

可设 $N(\frac{a^2}{4},a)$，则 $|MN|=\sqrt{(\frac{a^2}{4}-6)^2+(a-0)^2}=\sqrt{\frac{a^4}{16}-2a^2+36}=\sqrt{\frac{a^4-32a^2+576}{16}}=\frac{\sqrt{(a^2-16)^2+320}}{4}$，

所以当 $a=\pm4$ 时，$|MN|$ 取得最小值 $2\sqrt{5}$.

4.（2022 • 湖北模拟改 • ★★★）已知 F 为抛物线 $y^2=2x$ 的焦点，$A(x_0,y_0)(x_0\neq0)$ 为抛物线上的动点，点 $B(-1,0)$，则 $\frac{2|AB|}{\sqrt{4|AF|-2}}$ 的最小值为（　　）

（A）$\frac{1}{2}$　（B）$\sqrt{2}$　（C）$\sqrt{6}$　（D）$\sqrt{5}$

答案：C

解析：$|AF|$ 为抛物线上的点到焦点的距离，用定义转到准线上；A，B 均有坐标，$|AB|$ 用两点距离公式表示，

由题意，$F(\frac{1}{2},0)$，$|AF|=x_0+\frac{1}{2}$，$|AB|=\sqrt{(x_0+1)^2+y_0^2}$，

所以 $\frac{2|AB|}{\sqrt{4|AF|-2}}=\frac{2\sqrt{(x_0+1)^2+y_0^2}}{2\sqrt{x_0}}=\sqrt{\frac{(x_0+1)^2+y_0^2}{x_0}}$ ①，式①中有两个变量，可结合抛物线的方程来消元，

因为点 A 在抛物线 $y^2=2x$ 上，所以 $y_0^2=2x_0$，

代入①得：$\frac{2|AB|}{\sqrt{4|AF|-1}}=\sqrt{\frac{(x_0+1)^2+2x_0}{x_0}}=\sqrt{\frac{x_0^2+4x_0+1}{x_0}}=\sqrt{x_0+\frac{1}{x_0}+4}\geq\sqrt{2\sqrt{x_0\cdot\frac{1}{x_0}}+4}=\sqrt{6}$，

当且仅当 $x_0=\frac{1}{x_0}$，即 $x_0=1$ 时取等号，所以 $\frac{2|AB|}{\sqrt{4|AF|-2}}$ 的最小值为 $\sqrt{6}$.

5.（2022 • 唐山一模 • ★★★）（多选）已知直线 $l:x=my+4$ 和抛物线 $C:y^2=4x$ 交于 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$ 两点，O 为原点，直线 OA，OB 的斜率分别为 k_1，k_2，则（　　）

（A）y_1y_2 为定值　（B）k_1k_2 为定值　（C）y_1+y_2 为定值　（D）k_1+k_2+m 为定值

答案： ABD

解析： 选项中的 y_1+y_2 和 y_1y_2，可通过将直线和抛物线联立，结合韦达定理来算，

联立 $\begin{cases}x=my+4\\y^2=4x\end{cases}$ 消去 x 整理得：$y^2-4my-16=0$，判别式 $\Delta=16m^2+64>0$ 恒成立，

由韦达定理，$y_1+y_2=4m$，$y_1y_2=-16$，所以 A 项正确，C 项错误；

对于 B、D 两项，$k_1k_2=\frac{y_1}{x_1}\cdot\frac{y_2}{x_2}$ ①，$k_1+k_2+m=\frac{y_1}{x_1}+\frac{y_2}{x_2}+m$ ②，

此二式都可用点在抛物线上将分母的 x_1 和 x_2 转化为 y_1 和 y_2，结合韦达定理来算，

因为 A，B 在抛物线上，所以 $\begin{cases}x_1=\frac{y_1^2}{4}\\x_2=\frac{y_2^2}{4}\end{cases}$，代入①得：$k_1k_2=\frac{y_1y_2}{\frac{y_1^2}{4}\cdot\frac{y_2^2}{4}}=\frac{16}{y_1y_2}=\frac{16}{-16}=-1$，

代入②得：$k_1+k_2+m=\frac{y_1}{\frac{y_1^2}{4}}+\frac{y_2}{\frac{y_2^2}{4}}+m=\frac{4}{y_1}+\frac{4}{y_2}+m=\frac{4(y_1+y_2)}{y_1y_2}+m=\frac{4\times4m}{-16}+m=0$，故 B 项和 D 项正确.

6.（2022 • 哈尔滨模拟 • ★★★）直线 $l:y=x-2$ 与抛物线 $C:y^2=2x$ 交于 A，B 两点，线段 AB 的中垂线与 x 轴交于点 D，O 为原点，则四边形 $OADB$ 的面积为_____.

答案： $4\sqrt{5}$

解析： 由于点 D 坐标可求，则 OD 的长度可算，故按 $S=\frac{1}{2}|OD|\cdot|y_A-y_B|$ 来算面积，于是先把直线 l 与抛物线 C 联立，结合韦达定理求 AB 中点 E 的坐标，再写出中垂线的方程，求点 D，

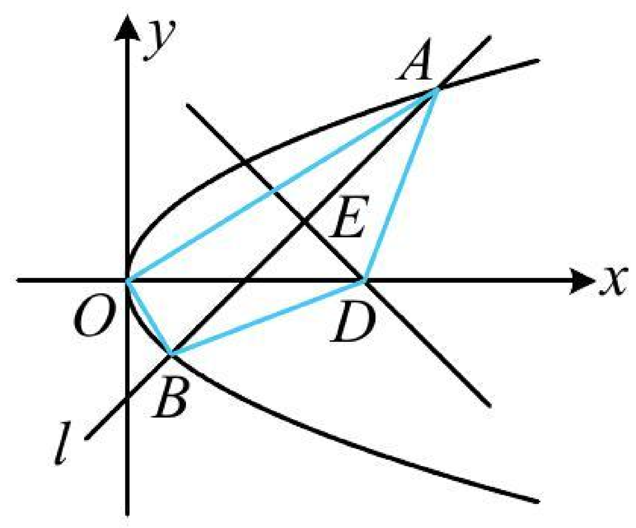
$y=x-2\Rightarrow x=y+2$，联立 $\begin{cases}x=y+2\\y^2=2x\end{cases}$ 消去 x 整理得：$y^2-2y-4=0$，判别式 $\Delta=(-2)^2-4\times1\times(-4)=20$，

由韦达定理，$y_A+y_B=2$，所以 $x_A+x_B=y_A+2+y_B+2=(y_A+y_B)+4=6$，从而 AB 中点为 $E(3,1)$，

故 AB 中垂线的方程为 $y-1=-(x-3)$，整理得：$x+y-4=0$，令 $y=0$ 得：$x=4$，所以 $D(4,0)$，

再算 $|y_A-y_B|$，可由韦达定理推论来算，$|y_A-y_B|=\frac{\sqrt{\Delta}}{|1|}=2\sqrt{5}$，

所以四边形 $OADB$ 的面积 $S=\frac{1}{2}|OD|\cdot|y_A-y_B|=\frac{1}{2}\times4\times2\sqrt{5}=4\sqrt{5}$.



7．（2022 • 长沙月考 • ★★★★）已知直线 $l: x-2y+1=0$ 与抛物线 $C: y^2=4x$ 交于 A，B 两点，与 x 轴交于点 D，N 为 B 关于 x 轴的对称点，则 ΔDAN 的面积为_____.

答案：8

解析：$S_{\Delta DAN}$ 怎么算？由于底边 AD 方程已知，故可用弦长公式求 $|AD|$，用点到直线的距离公式算高，

设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，由对称性，$N(x_2,-y_2)$，$x-2y+1=0\Rightarrow x=2y-1$，令 $y=0$ 可得 $x=-1$，

所以 $D(-1,0)$，故 $|AD|=\sqrt{1+2^2}\cdot|y_1-y_D|=\sqrt{5}|y_1|$，

再算 ΔDAN 的边 AD 上的高，点 N 到直线 l 的距离 $d=\dfrac{|x_2-2(-y_2)+1|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}=\dfrac{|x_2+2y_2+1|}{\sqrt{5}}$，

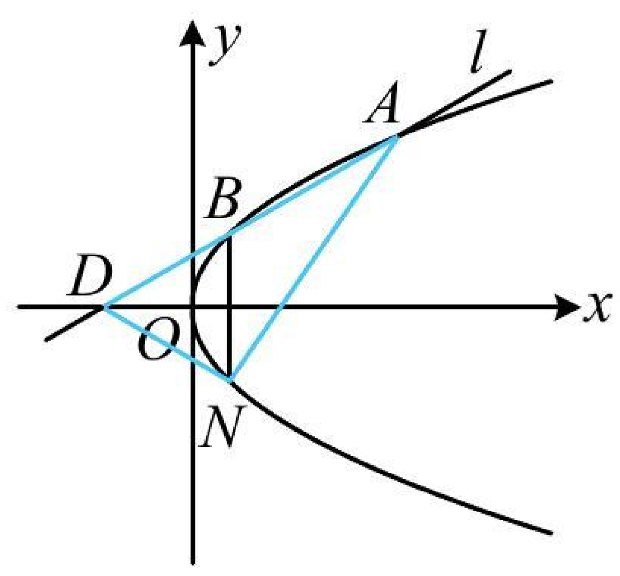
所以 $S_{\Delta DAN}=\dfrac{1}{2}|AD|\cdot d=\dfrac{1}{2}\times\sqrt{5}|y_1|\times\dfrac{|x_2+2y_2+1|}{\sqrt{5}}=\dfrac{|y_1|\cdot|x_2+2y_2+1|}{2}$ ①，

式①变量较多，可利用点 B 在直线 l 上消去 x_2，

点 B 在 l 上 $\Rightarrow x_2=2y_2-1$，代入①得：$S_{\Delta DAN}=\dfrac{|y_1|\cdot|2y_2-1+2y_2+1|}{2}=2|y_1y_2|$ ②，

于是把直线 l 和抛物线联立，结合韦达定理计算 y_1y_2 即可，

联立 $\begin{cases}x=2y-1\\y^2=4x\end{cases}$ 消去 x 整理得：$y^2-8y+4=0$，由韦达定理，$y_1y_2=4$，代入②得：$S_{\Delta DAN}=8$.



【反思】设直线 l 的方程为 $x=my+t$，$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$ 是 l 上任意两点，则 $|AB|=\sqrt{1+m^2}\cdot|y_1-y_2|$.

8．（2022 • 北京模拟 • ★★★★）设 A，B 是抛物线 $y^2=2x$ 上的两个不与原点 O 重合的动点，且 $OA\perp OB$，则 $|OA|\cdot|OB|$ 的最小值是（　　）

（A）$\dfrac{5}{4}$　（B）4　（C）8　（D）64

答案：C

解析：如图，$|OA|\cdot|OB|$ 可用 A，B 的坐标来算，于是设坐标，由题意，可设 $A(\dfrac{y_1^2}{2},y_1)$，$B(\dfrac{y_2^2}{2},y_2)$，

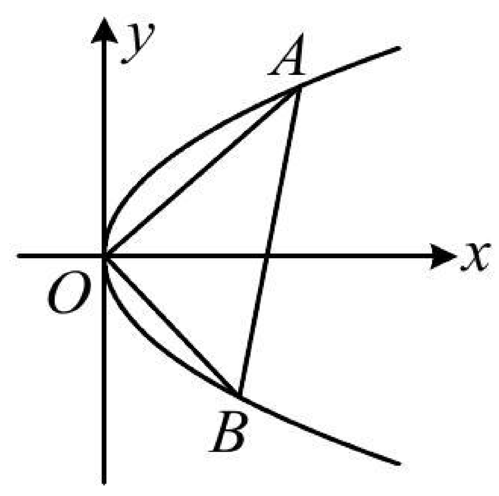
则 $|OA|\cdot|OB|=\sqrt{\frac{y_1^4}{4}+y_1^2}\cdot\sqrt{\frac{y_2^4}{4}+y_2^2}=\sqrt{y_1^2y_2^2(\frac{y_1^2}{4}+1)(\frac{y_2^2}{4}+1)}=\frac{|y_1y_2|}{4}\cdot\sqrt{(y_1^2+4)(y_2^2+4)}$ ①，

要求式①的最小值，应先建立 y_1 和 y_2 关系，用斜率翻译 $OA\perp OB$ 即可，

因为 $OA\perp OB$，所以 $k_{OA}\cdot k_{OB}=\frac{y_1}{\frac{y_1^2}{2}}\cdot\frac{y_2}{\frac{y_2^2}{2}}=-1$，整理得：$y_1y_2=-4$，

代入①得：$|OA|\cdot|OB|=\sqrt{(y_1^2+4)(y_2^2+4)}=\sqrt{y_1^2y_2^2+4(y_1^2+y_2^2)+16}=\sqrt{32+4(y_1^2+y_2^2)}\ge\sqrt{32+4\times2|y_1y_2|}=8$，

当且仅当 $|y_1|=|y_2|$ 时取等号，结合 $y_1y_2=-4$ 可得此时 $\begin{cases}y_1=2\\y_2=-2\end{cases}$ 或 $\begin{cases}y_1=-2\\y_2=2\end{cases}$，故 $|OA|\cdot|OB|$ 的最小值是 8.



9．（2022•新高考Ⅱ卷•★★★★）（多选）已知 O 为坐标原点，过抛物线 $C:y^2=2px(p>0)$ 的焦点 F 的直线与 C 交于 A、B 两点，点 A 在第一象限，点 $M(p,0)$，若 $|AF|=|AM|$，则（　　）

（A）直线 AB 的斜率为 $2\sqrt{6}$　　（B）$|OB|=|OF|$　　（C）$|AB|>4|OF|$　　（D）$\angle OAM+\angle OBM<180^\circ$

答案：ACD

解析：A 项，如图，可先由 $|AF|=|AM|$ 求出点 A 的坐标，再结合 F 的坐标求直线 AB 的斜率，

$|AF|=|AM|\Rightarrow A$ 在 FM 的中垂线上，又 $F(\frac{p}{2},0)$，$M(p,0)$，所以 FM 的中垂线为 $x=\frac{3p}{4}$，故 $x_A=\frac{3p}{4}$，

结合 A 在抛物线上且在第一象限可得 $y_A=\sqrt{2px_A}=\frac{\sqrt{6}p}{2}$，所以 $A(\frac{3p}{4},\frac{\sqrt{6}p}{2})$，

从而 $k_{AB}=k_{AF}=\frac{\frac{\sqrt{6}p}{2}-0}{\frac{3p}{4}-\frac{p}{2}}=2\sqrt{6}$，故 A 项正确；

B 项，要判断 $|OB|=|OF|$ 是否成立，需算 $|OB|$，可联立直线 AB 和抛物线求点 B 的坐标，

直线 AB 的方程为 $y=2\sqrt{6}(x-\frac{p}{2})$，代入 $y^2=2px$ 整理得：$12x^2-13px+3p^2=0$，解得：$x=\frac{p}{3}$ 或 $\frac{3p}{4}$，

因为 $x_A=\frac{3p}{4}$，所以 $x_B=\frac{p}{3}$，从而 $y_B=2\sqrt{6}(x_B-\frac{p}{2})=-\frac{\sqrt{6}p}{3}$，故 $|OB|=\sqrt{x_B^2+y_B^2}=\frac{\sqrt{7}p}{3}$，

而 $|OF|=\frac{p}{2}$，所以 $|OB|\ne|OF|$，故 B 项错误；

C 项，$|AB|=|AF|+|BF|=(\frac{3p}{4}+\frac{p}{2})+(\frac{p}{3}+\frac{p}{2})=\frac{25p}{12}$，$4|OF|=4\times\frac{p}{2}=2p$，所以 $|AB|>4|OF|$，故 C 项正确；

D 项，先看看 $\angle OAM$ 和 $\angle OBM$ 各自的钝锐，可计算向量数量积，由结果的正负来判断，

$\overrightarrow{AO}=(-\frac{3p}{4},-\frac{\sqrt{6}p}{2})$，$\overrightarrow{AM}=(\frac{p}{4},-\frac{\sqrt{6}p}{2})$，所以$\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AM}=-\frac{3p}{4}\cdot\frac{p}{4}+(-\frac{\sqrt{6}p}{2})^2=\frac{21p^2}{16}>0$，故$\angle OAM$为锐角，

又$B(\frac{p}{3},-\frac{\sqrt{6}p}{3})$，所以$\overrightarrow{BO}=(-\frac{p}{3},\frac{\sqrt{6}p}{3})$，$\overrightarrow{BM}=(\frac{2p}{3},\frac{\sqrt{6}p}{3})$，

从而$\overrightarrow{BO}\cdot\overrightarrow{BM}=-\frac{p}{3}\times\frac{2p}{3}+(\frac{\sqrt{6}p}{3})^2=\frac{4p^2}{9}>0$，故$\angle OBM$为锐角，

所以$\angle OAM+\angle OBM<180^\circ$，故D项正确.