**高二数学试题**

**本试卷分第I卷(选择题)和第Ⅱ卷(非选择题)两部分，第I卷1－2页，第Ⅱ卷3－4页，共150分，测试时间120分钟.**

**注意事项：**

**选择题每小题选出答案后，用2B铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑.如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其它答案，不能答在测试卷上．**

**第I卷(共60分)**

**一、选择题(本大题共8个小题，每小题5分，共40分，在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合要求的．)**

1. 在空间直角坐标系中，已知点，则点*P*关于*x*轴的对称点的坐标是( )

A.  B. 

C.  D. 

【答案】C

【解析】

【分析】直接根据空间点关于轴对称的结论即可得到答案.

【详解】根据空间点关于轴对称，则轴上坐标不变，轴上坐标取相反数，

故点*P*关于*x*轴的对称点的坐标是.

故选：C.

2. 已知直线，且，则实数*a*的值为( )

A. 5 B. 1 C. 5或 D. 

【答案】D

【解析】

【分析】根据给定条件，列出方程求解，再验证判断作答.

【详解】直线，，由解得或，

当时，直线与重合，不符合题意，

当时，直线与平行，

所以实数*a*的值为.

故选：D

3. 电子设备中电平信号用电压高与低来表示，高电压信号记为数字1，低电压信号记为数字0，一串由0和1组成的不同排列代表不同的电平信号，所用数字只有0和1，例如001100就是一个信息．某电平信号由6个数字构成，已知其中至少有四个0，则满足条件的电平信号种数为( )

A. 42 B. 22 C. 20 D. 15

【答案】B

【解析】

【分析】根据给定的信息，利用组合知识分类列式求解作答.

【详解】依题意，求电平信号种数可以有3类办法，电平信号的6个数字中有4个0，有种，

电平信号的6个数字中有5个0，有种，电平信号的6个数字中有6个0，有种，

由分类加法计数原理得满足条件的电平信号种数为.

故选：B

4. 已知*P*(*B*)=0.3，，，则=( )

A.  B.  C.  D. 

【答案】A

【解析】

【分析】根据已知利用全概率公式得，即可求解.

详解】由全概率公式可得：

可得，解得：

则.

故选：A.

5. 已知每门大炮击中目标的概率都是0.5，现有10门大炮同时对某一目标各射击一次．记恰好击中目标3次的概率为*A*；若击中目标记2分，记10门大炮总得分的期望值为*B*，则*A*，*B*的值分别为( )

A. ，5 B. ，10 C. ，5 D. ，10

【答案】B

【解析】

【分析】根据题意得其机种次数和期望符合二项分布，利用其期望公式即可得到值，再利用其概率公式计算值即可.

【详解】设10门大炮击中目标的次数为,则根据题意可得,

门大炮总得分的期望值为，

，

故选：B.

6. 羽毛球单打实行“三局两胜”制(无平局)．甲乙两人争夺比赛的冠军．甲在每局比赛中获胜的概率均为，且每局比赛结果相互独立，则在甲获得冠军的条件下，比赛进行了三局的概率为( )

A.  B.  C.  D. 

【答案】A

【解析】

【分析】求出甲获胜的概率、甲获得冠军且比赛进行了三局的概率，利用条件概率公式求概率即可.

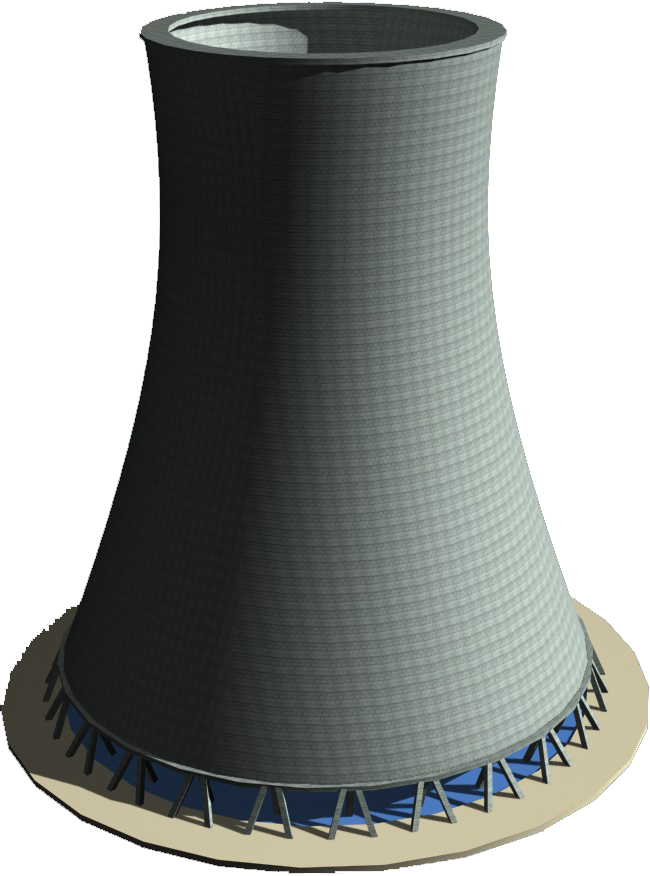
【详解】由甲获胜的概率为，

而甲获得冠军且比赛进行了三局，对应概率为，

所以在甲获得冠军的条件下，比赛进行了三局的概率为.

故选：A

7. 3D打印是快速成型技术的一种，通过逐层打印的方式来构造物体.如图所示的笔筒为3D打印的双曲线型笔筒，该笔筒是由离心率为3的双曲线的一部分围绕其旋转轴逐层旋转打印得到的，已知该笔筒的上底直径为6cm，下底直径为8cm，高为8cm(数据均以外壁即笔筒外侧表面计算)，则笔筒最细处的直径为( )



A.  B.  C.  D. 

【答案】C

【解析】

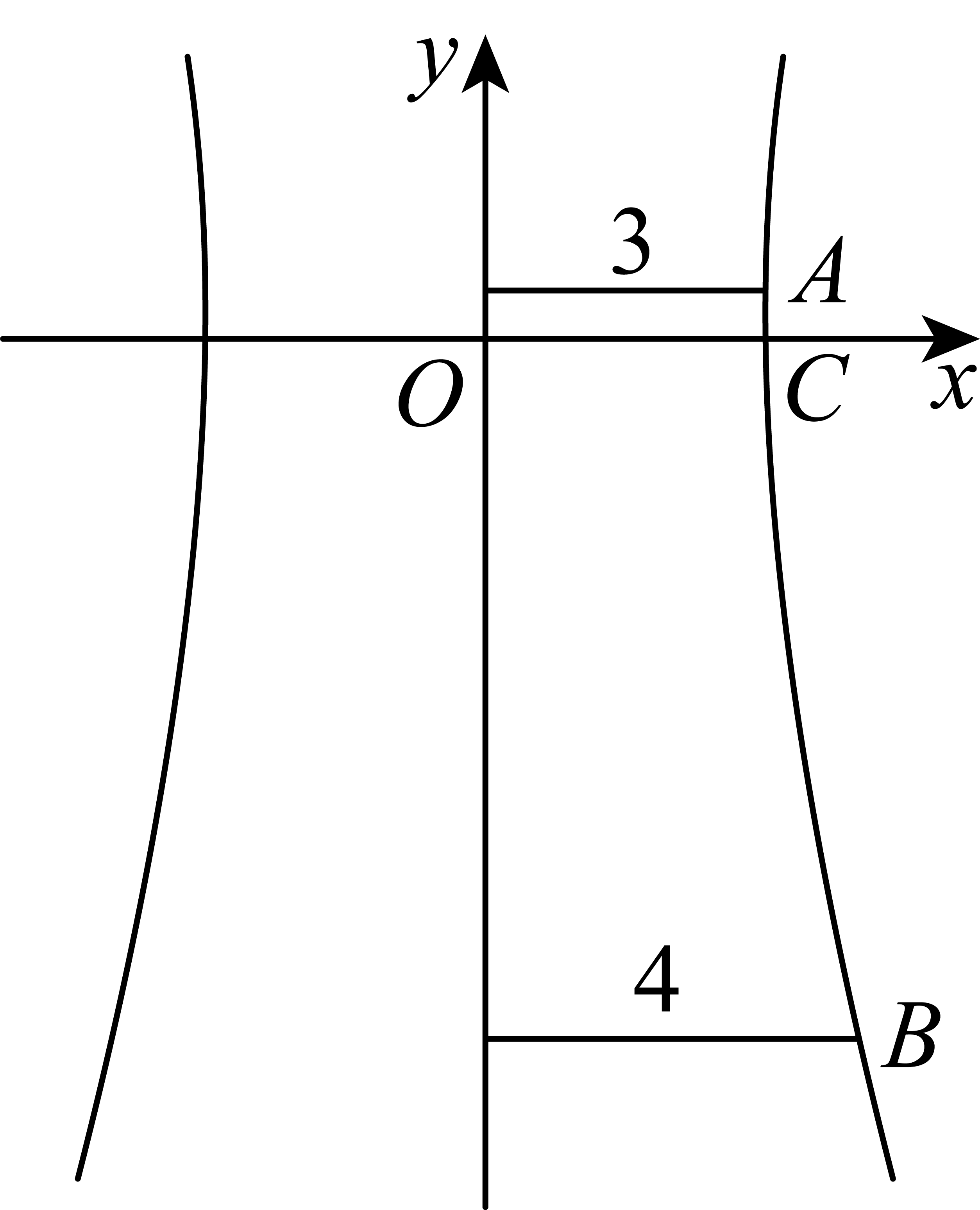
【分析】画出笔筒的轴截面，建立平面直角坐标系，设出双曲线的方程，根据题意写出点的坐标，把点的坐标代入双曲线方程即可求解.

【详解】该塔筒的轴截面如图所示，以为笔筒对应双曲线的实轴端点，

以所在直线为轴，过点且与垂直的直线为轴，

建立平面直角坐标系，设与分别为上，下底面对应点.

由题意可知，设，则，



设双曲线的方程为，因为双曲线的离心率为，

所以，所以方程可化简为，

将和的坐标代入式可得，解得，

则笔筒最细处的直径为.

故选：C.

8. 已知，，满足，则的最小值为( )

A.  B.  C.  D. 

【答案】D

【解析】

【分析】由可整理得到点轨迹方程，设，，可将所求式子化为，由此可得最小值.

【详解】由得：，整理可得：，

则可令，，，

(其中)，

则当时，.

故选：D.

**二、选择题(本题共4小题，每小题5分，共20分．在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求，全部选对的得5分，部分选对的得2分，有选错的得0分．)**

9. 已知方程，其中，则( )

A. 时，方程表示椭圆

B. 时，方程表示双曲线

C. 时，方程表示抛物线

D. 时，方程表示焦点在轴上的椭圆

【答案】BD

【解析】

【分析】

当时，表示双曲线，时表示焦点在*x*轴上的双曲线，表示焦点在*y*轴上的双曲线；当时表示焦点在y轴上的椭圆，当时表示焦点在*x*轴上的椭圆.

【详解】若，则不表示椭圆，故A错误；

若，则表示焦点在*x*轴上的双曲线，若，则表示焦点在*y*轴上的双曲线，故B正确；

当时，若，则方程表示两条垂直于*x*轴的直线，若则不表示任何图形，故C错误；

时，，表示焦点在*x*轴上的椭圆，D正确.

故选：BD

【点睛】本题考查圆锥曲线的标准方程，由标准方程判断焦点的位置，属于基础题.

10. 下列四个关系式中，一定成立的是( )

A. 

B. 

C. 

D. 若*m*，，且，则

【答案】AC

【解析】

【分析】根据组合数性质与排列数性质判断.

【详解】由组合数性质知一定成立，A正确；

，B错；

，C正确；

由组合数性质知且，当时，递增，当时，递减，因此D错．

故选：AC．

11. 若随机变量服从两点分布，其中，，分别为随机变量的均值与方差，则下列结论正确的是(       )

A.  B. 

C.  D. 

【答案】AB

【解析】

【分析】根据随机变量服从两点分布推出，根据公式先计算出、，由此分别计算四个选项得出结果．

【详解】随机变量服从两点分布，其中，，

，

，

在A中，，故A正确；

在B中，，故B正确；

在C中，，故C错误；

在D中，，故D错误．

故选：AB．

12. 已知正方体中，*AB*=2，*P*为正方体表面及内部一点，且，其中，，则( )

A. 当时，*PD*的最小值为

B. 当时，存在点*P*，使得

C. 当时，直线*AP*与平面*ABCD*所成角正切值的取值范围是

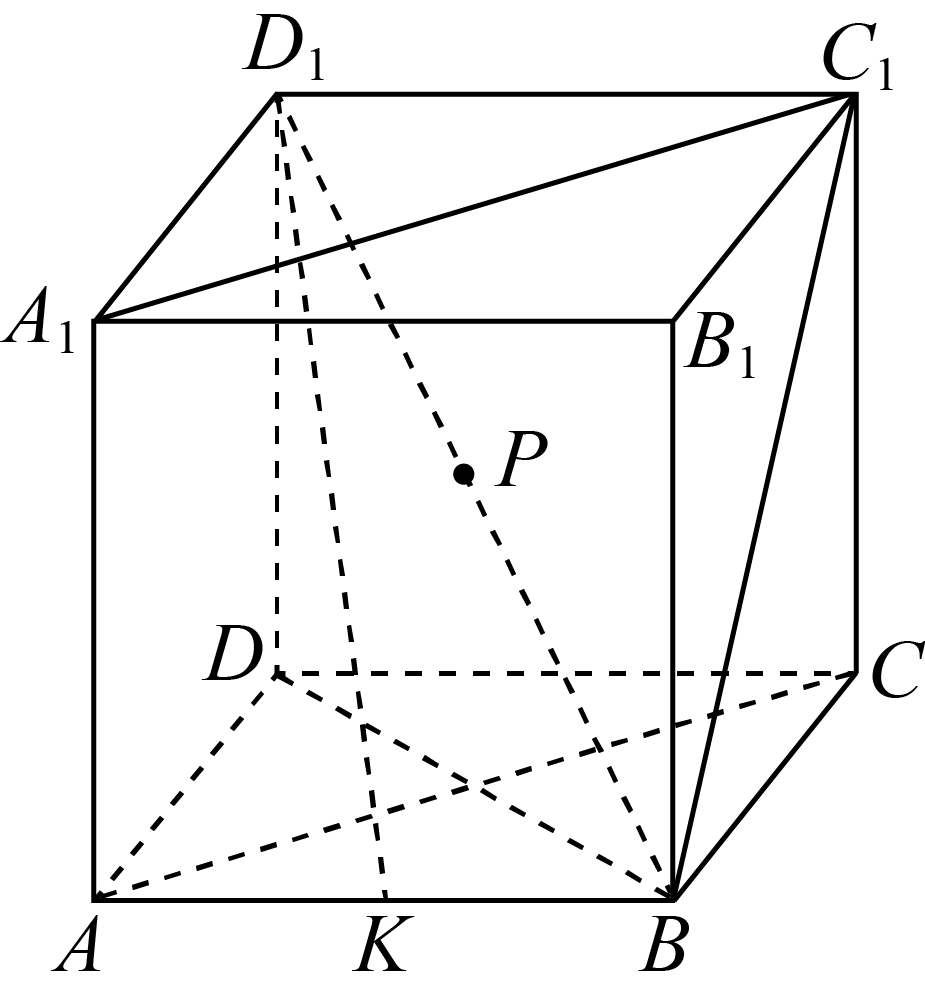
D. 当时，三棱锥的体积为定值

【答案】ABD

【解析】

【分析】当时,点*P*在上，求出的最小值判断A，取的中点，连接，是上的动点，平面，可判断B，取的中点分别为，当时，点*P*的轨迹是*NM*上的动点，可求直线*AP*与平面*ABCD*所成角正切值的取值范围判断C，取*AB*，的中点*G*，*H*，当时，点*P*的轨迹是*GH*上的动点，可证平面，判断D.

【详解】当时,点*P*在上，如图，



在中，

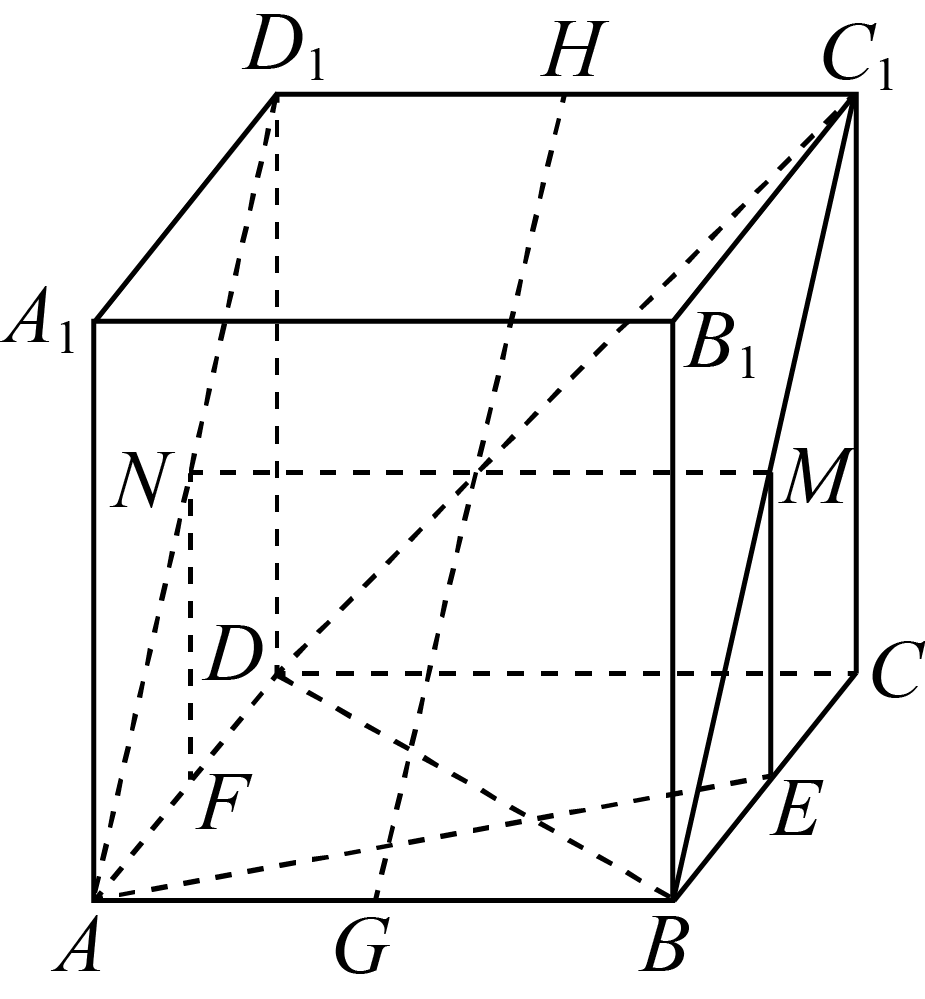
时，取得最小值为，故A正确；

取的中点，连接，，

当时，是上的动点，在正方体中平面，故存在点为

平面与的交点时，使，故B正确；

如图，



取的中点分别为，当时，点*P*的轨迹是*NM*上的动点，易得平面*ABCD*，故*P*到平面的距离为定值1，设直线*AP*与平面*ABCD*所成角为，当*P*点在*N*时*AP*的投影最小，最大，此时，当点*P*在*M*时*AP*的投影最大，最小，此时，故直线*AP*与平面*ABCD*所成角正切值的取值范围是，故C错误；

取*AB*，的中点*G*，*H*，当时，点*P*的轨迹是*GH*上的动点，易得平面，平面，平面，故点*P*到平面的距离为定值，三棱锥的体积为定值，故D正确.

故选：ABD

**第Ⅱ卷(共90分)**

**三、填空题(本题共4小题，每小题5分，共20分)**

13. 已知随机变量*X*服从正态分布，且，，则\_\_\_\_\_\_．

【答案】0.52##

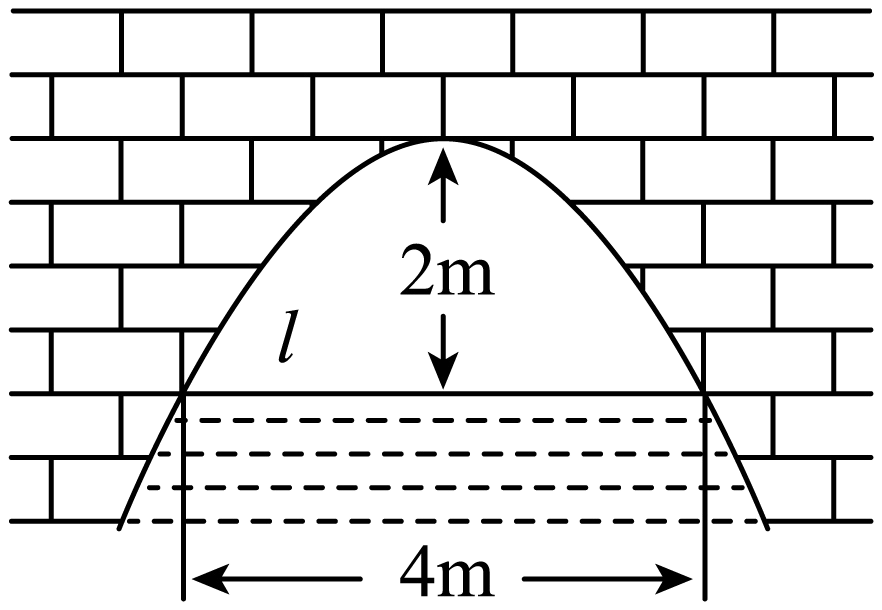
【解析】

【分析】先根据对称性得到，结合求出答案.

【详解】由对称性可知，，故.

故答案为：0.52

14. 如图是一座抛物线型拱桥，拱桥是抛物线的一部分且以抛物线的轴为对称轴，当水面在*l*时，拱顶离水面2米，水面宽4米．当水位下降，水面宽为6米时，拱顶到水面的距离为\_\_\_\_\_\_米．



【答案】4.5##

【解析】

【分析】建立平面直角坐标系，设抛物线方程为，求出抛物线的方程，再代点的坐标即得解.

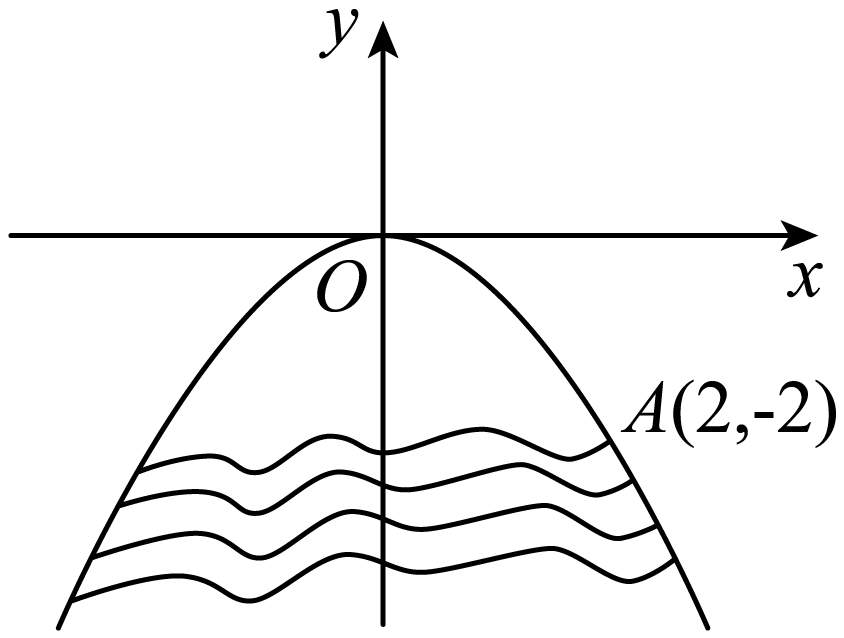
【详解】如图，建立平面直角坐标系，设抛物线方程为，

将代入，得，所以．

设，代入，得．

所以拱桥到水面的距离为．

故答案为：4.5.



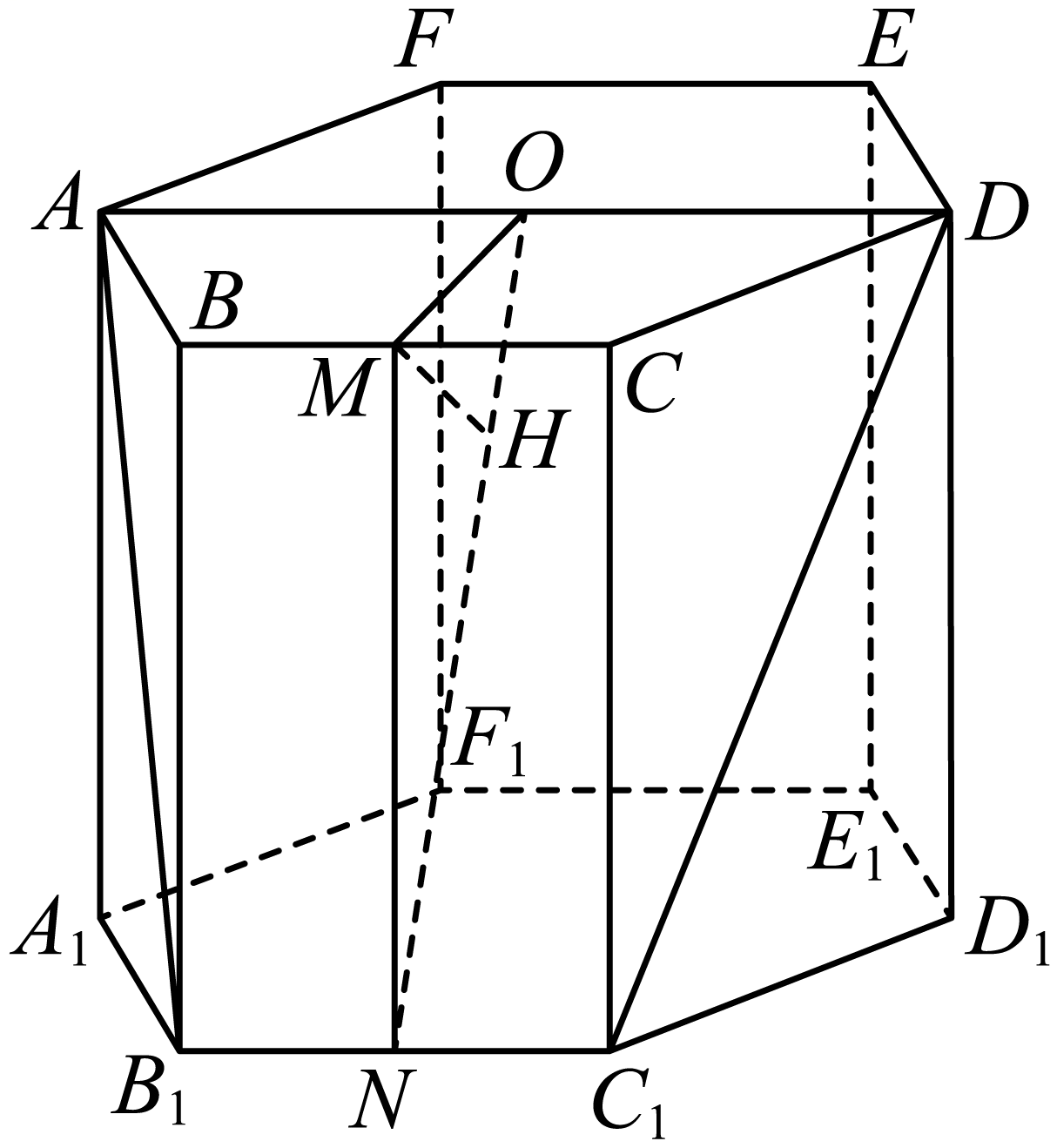
15. 在正六棱柱中，若底面边长为1，高为3，则*BC*到平面的距离为\_\_\_\_\_\_．

【答案】##

【解析】

【分析】取的中点，证明平面，平面平面，再求出斜边上的高作答.

【详解】在正六棱柱中，取的中点，连接，如图，



，平面，平面，则平面，

平面，则平面，平面，

即，而，即有，，平面，

则平面，又平面，因此平面平面，

在平面内过作于，而平面平面，

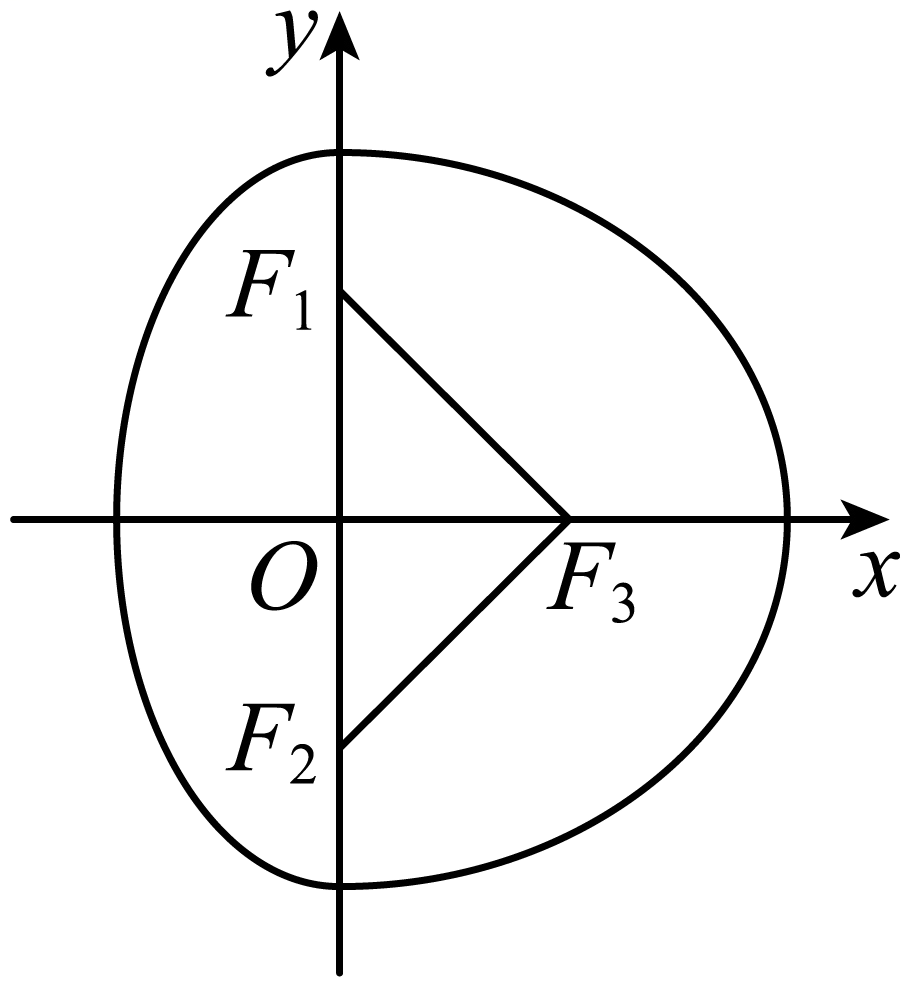
于是平面，线段长即为*BC*到平面的距离，

，，中，，

所以*BC*到平面的距离.

故答案为：

16. 如图，我们把由半椭圆和半椭圆合成的曲线称作“果圆”．，，是相应半椭圆的焦点，则的周长为\_\_\_\_\_\_，直线与“果圆”交于，两点，且中点为，点的轨迹方程为\_\_\_\_\_\_．



【答案】 ①.  ②. 

【解析】

【分析】根据各半椭圆方程可得，，的坐标，再根据两点间距离公式求得距离及周长；分别表示点，的坐标，利用中点公式表示，消参即可得到点，得轨迹方程.

【详解】由，，是相应半椭圆焦点，

可得，，，

所以，，，

故所求周长为；

设，

联立直线与，得，

即点，

联立直线与，得，

即点，且不重合，即，

又为中点，

所以，

即，，整理可得，，

故答案为：，.

**四、解答题(本大题共6小题，共70分，解答应写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤．)**

17. 已知的展开式中，所有项的系数之和是512．

(1)求展开式中含项的系数；

(2)求的展开式中的常数项.

【答案】(1)27 (2)

【解析】

【分析】(1)利用赋值法得所有项的系数和，求解*n*，然后利用二项式展开式通项公式求解即可；

(2)把式子化简为，然后分别利用二项式展开式通项公式求解常数项即可.

【小问1详解】

因为的展开式中，所有项的系数之和是512．

所以令，得，所以，

所以的展开式通项公式为，

令，解得，所以展开式中含项为，

所以展开式中含项的系数为27.

【小问2详解】

由(1)知，，从而，

因为的展开式的通项为，

所以的常数项为，

又的常数项为，

所以的展开式中的常数项为.

18. 已知抛物线经过点，为抛物线的焦点，且．

(1)求抛物线的标准方程；

(2)过点的直线与抛物线相交于，两点，求面积的最小值(为坐标原点)

【答案】(1)

(2)16

【解析】

【分析】(1)首先求出抛物线的焦点坐标与准线方程，将点坐标代入抛物线方程求出，再根据焦半径公式计算可得；

(2)分直线的斜率不存在与存在两种情况讨论，当直线的斜率存在时，设直线的方程为，，，联立直线与抛物线方程，消元，列出韦达定理，根据面积公式计算可得.

【小问1详解】

抛物线的焦点为，准线方程为，

由抛物线经过点，，

可得，即，

又，可得，

解得，，

故抛物线的标准方程为.

【小问2详解】

当直线的斜率不存在时，直线方程为，

由，解得，此时，所以的面积．

当直线的斜率存在时，设直线的方程为．

由得，．

设，，由根与系数的关系得，，

所以



，

综上所述，面积的最小值为．

19. 年是共青团建团一百周年，为了铭记历史、缅怀先烈、增强爱国主义情怀，某学校组织了共青团团史知识竞赛活动.在最后一轮晋级比赛中，甲、乙、丙三名同学回答一道有关团史的问题，已知甲回答正确的概率为，甲、丙两人都回答正确的概率是，乙、丙两人都回答正确的概率是.每个人回答是否正确互不影响．

(1)若规定三名同学都需要回答这个问题，求甲、乙、丙三名同学中至少人回答正确的概率；

(2)若规定三名同学需要抢答这道题，已知甲抢到答题机会的概率为，乙抢到答题机会的概率为，丙抢到的概率为，求这个问题回答正确的概率．

【答案】(1)

(2)

【解析】

【分析】(1)根据独立事件概率乘法公式可求得乙、丙回答正确的概率，结合对立事件概率公式可求得结果；

(2)根据全概率公式直接计算即可.

【小问1详解】

记甲回答正确为事件，乙回答正确为事件，丙回答正确为事件，则事件相互独立；

由题意知：，，，

，，

则甲、乙、丙三名同学中至少人回答正确的概率.

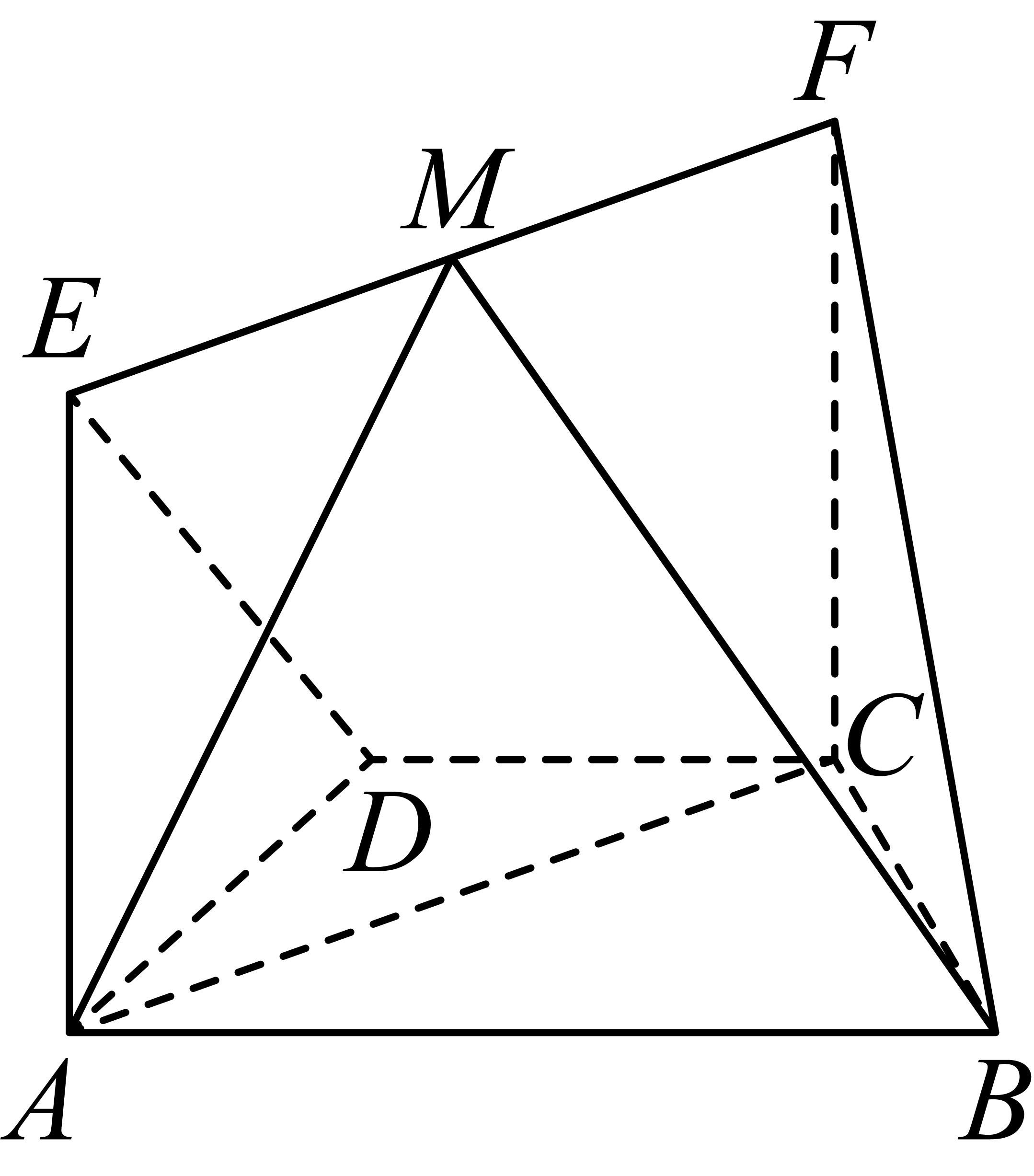
【小问2详解】

记该问题回答正确为事件，甲、乙、丙抢到答题机会分别为事件，

则，，，，，，

.

20. 如图，已知直角梯形，，，，，四边形为正方形，且平面⊥平面．



(1)求证：⊥平面；

(2)点*M*为线段的中点，求直线与平面所成角的正弦值．

【答案】(1)证明见解析

(2)

【解析】

【分析】(1)由余弦定理得到，再由勾股定理逆定理得到，结合面面垂直得到线面垂直；

(2)建立空间直角坐标系，利用空间向量求解线面角的正弦值.

【小问1详解】

已知直角梯形*ABCD*，，，

，所以等腰直角三角形，

可得，，，

所以在中，由余弦定理得，

所以，得．

因为平面平面*ABCD*，平面平面，平面，

所以⊥平面．

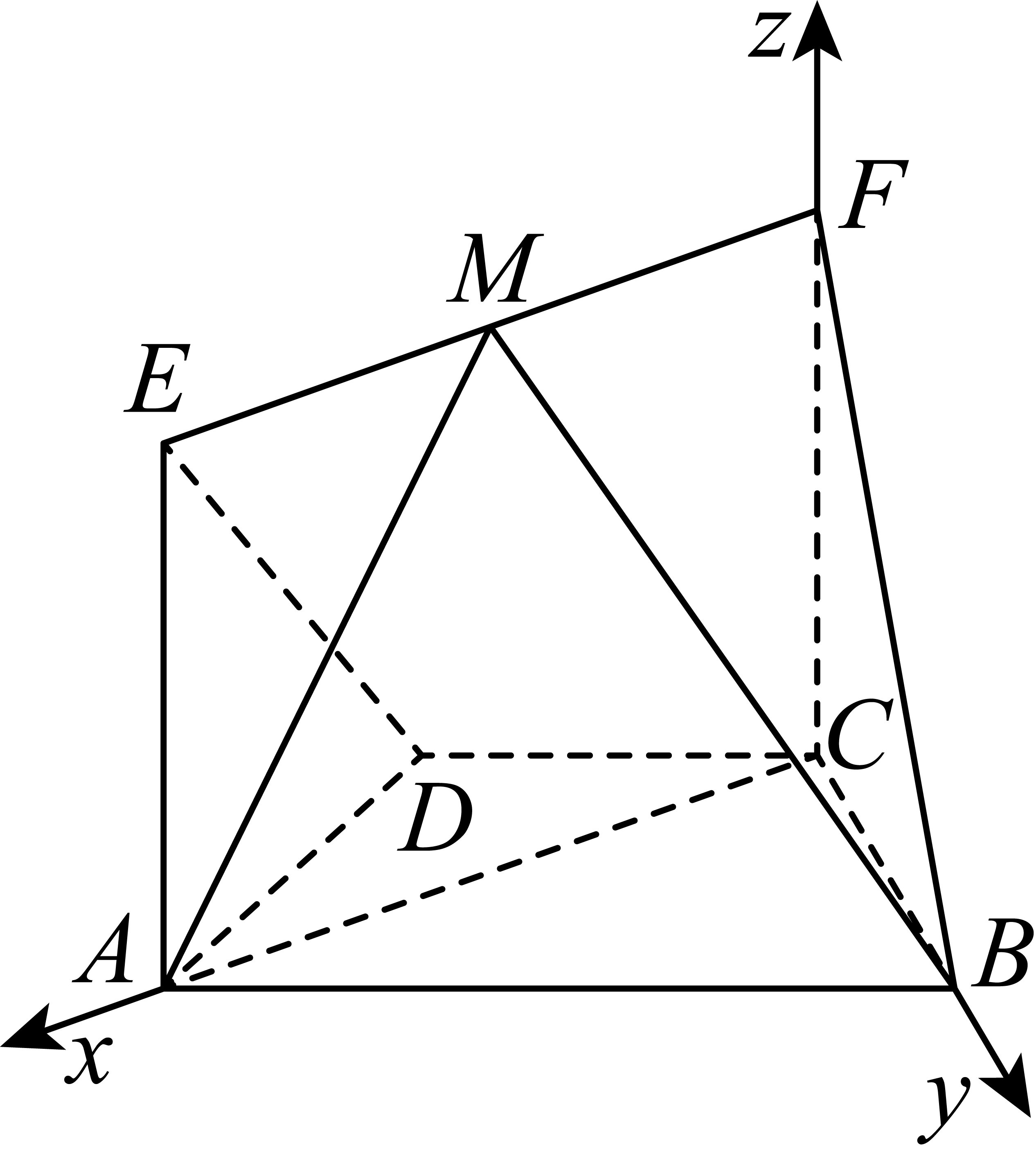
【小问2详解】

根据(1)中所证可得：两两垂直，

故以*C*为坐标原点，分别为轴建立如图所示空间直角坐标系：

则，，，．

，，，



设为平面*MAB*的一个法向量，

由，取，则，

故，

设直线与平面所成角为，

则．

即直线与平面所成角正弦值为．

21. 新冠疫情不断反弹，各大商超多措并举确保市民生活货品不断档，超市员工加班加点工作.某大型超市为答谢各位员工一年来的锐意进取和辛勤努力，拟在年会后，通过摸球兑奖的方式对500位员工进行奖励，规定：每位员工从一个装有5种面值奖券的箱子中，一次随机摸出2张奖券，奖券上所标的面值之和就是该员工所获得的奖励额．

(1)若箱子中所装的5种面值的奖券中有2张面值为100元，其余3张均为50元，试比较员工获得100元奖励额与获得150元奖励额的概率的大小；

(2)公司对奖励总额的预算是7万元，预定箱子中所装的5种面值的奖券有两种方案：第一方案是3张面值30元和2张面值130元；第二方案是3张面值50元和2张面值100元.为了使员工得到的奖励总额尽可能地符合公司的预算且每位员工所获得的奖励额相对均衡，请问选择哪一种方案比较好？并说明理由．

【答案】(1)员工获得100元奖励额的概率小于获得150元奖励额的概率

(2)应选择第二种方案，理由见解析

【解析】

【分析】(1)根据超几何分布求出员工获得100元奖励额与获得150元奖励额的概率，比较大小即可得出答案；

(2)分别求出选择方案一和方案二的分布列，进而求出对应的数学期望和方差，比较方差和期望的大小即可得出答案.

【小问1详解】

用表示员工所获得的奖励额．

因为，，

所以，

故员工获得100元奖励额的概率小于获得150元奖励额的概率．

【小问2详解】

第一种方案：设员工所获得的奖励额为，则的分布列为

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | 60 | 160 | 260 |
|  |  |  |  |

所以的数学期望为，

的方差为；

第二种方案：设员工所获得的奖励额为，则的分布列为

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | 100 | 150 | 200 |
|  |  |  |  |

所以的数学期望为，

的方差为，

又因为(元)，

所以两种方案奖励额的数学期望都符合要求，但第二种方案的方差比第一种方案的小，

故应选择第二种方案．

22. 已知椭圆的短轴长为，且过点．

(1)求椭圆的标准方程；

(2)直线与椭圆相交于、两点，以为直径的圆过点，求点到直线距离的最大值．

【答案】(1)

(2)

【解析】

【分析】(1)根据椭圆过点，结合短轴长列方程，解方程即可；

(2)法一：当直线斜率不存在时，设点与的坐标，根据，解方程可得直线方程，当斜率存在时，设直线方程为，联立直线与椭圆，结合韦达定理及，可得，即可得直线过定点，进而确定距离的最值.法二：将椭圆方程转化为，设直线方程为，与椭圆联立构造齐次式得，所以则，是方程的两个根，则，即，代入直线方程，可得直线过定点，进而确定距离的最值.

【小问1详解】

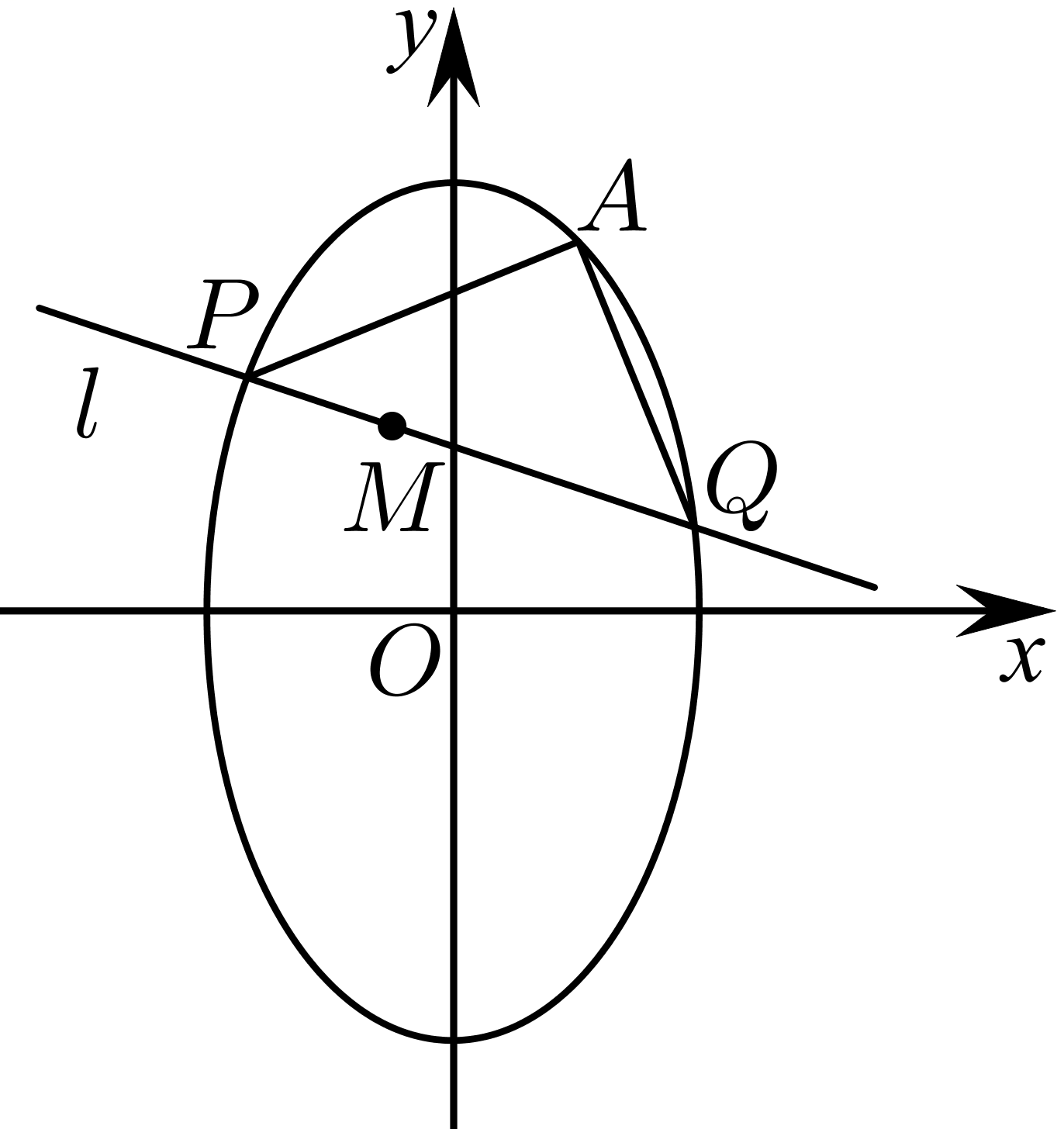
椭圆的短轴长为，所以，，

代入点，得，所以

椭圆的方程为；

【小问2详解】

法一：



当直线斜率不存在时，则有、，直线的方程为：，

因为以直径的圆过点，所以，

，

又，可得，解得或(舍去)，

当直线斜率存在时，设直线的方程为：，

设点，

联立，得，

由韦达定理得，，





，

点点不在直线上，所以，则有，经检验，此时，满足题意，

所以直线的方程为，直线过定点

综上，直线恒过定点，记作

则当时，点到直线距离最大，最大值为.

法二：齐次化构造

椭圆的标准方程为，即

变形为，

即，

设直线的方程为

与椭圆方程联立构造齐次式为



即：

设点，

则，是方程的两个根，

又因为，

所以，即

代入直线方程得：，

故直线过定点，记作记作

则当时，点到直线距离最大，最大值为.

【点睛】(1)解答直线与椭圆的题目时，时常把两个曲线的方程联立，消去*x*(或*y*)建立一元二次方程，然后借助根与系数的关系，并结合题设条件建立有关参变量的等量关系．

(2)涉及到直线方程的设法时，务必考虑全面，不要忽略直线斜率为0或不存在等特殊情形．