**绝密★启用并使用完毕前**

**高二年级学情检测**

**数学试题**

**本试卷共4页，22题，全卷满分150分．考试用时120分钟，**

**注意事项：**

**1．答卷前，考生务必将自己的姓名、考生号，考场号、座位号填写在答题卡上．**

**2．回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑．如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号．回答非选择题时，将答案写在答题卡上．写在本试卷上无效．**

**3．考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回，**

**一、单项选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．**

1. 等差数列中，已知，，则( )

A. 10 B. 11 C. 12 D. 13

【答案】D

【解析】

【分析】根据等差数列的性质可推出，代入数值即可得出答案.

【详解】因为，为等差数列，所以有，

所以，.

故选：D.

2. 已知两个平面的法向量分别为，则这两个平面的夹角为( )

A.  B.  C. 或 D. 

【答案】B

【解析】

【分析】根据两平面夹角与其法向量夹角的关系，利用向量夹角公式即可得到答案.

【详解】，因为向量夹角范围为，

故两向量夹角为，故两平面夹角为，即，

故选：B.

3. 直线与直线的位置关系是( )

A. 垂直 B. 相交且不垂直 C. 平行 D. 平行或重合

【答案】A

【解析】

【分析】分和讨论，其中时，写出两直线斜率，计算其乘积即可判断.

【详解】当时，直线，直线，此时两直线垂直，

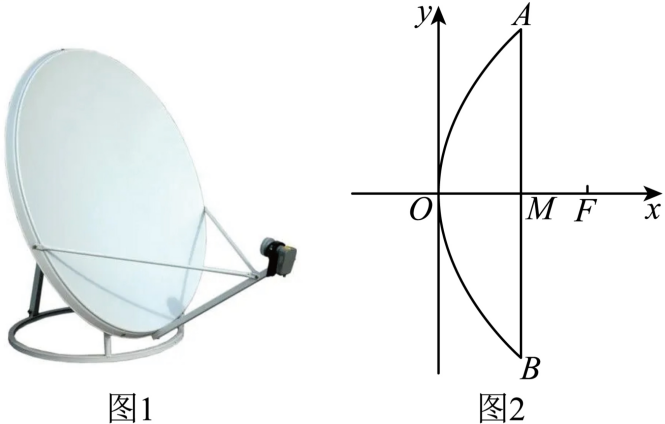
当时，直线的斜率，直线的斜率，

因为，则两直线垂直，

综上两直线位置关系是垂直，

故选：A.

4. 一种卫星接收天线(如图1)，其曲面与轴截面的交线可视为抛物线的一部分(如图2)，已知该卫星接收天线的口径米，深度米，信号处理中心*F*位于焦点处，以顶点*O*为坐标原点，建立如图2所示的平面直角坐标系*xOy*，则该抛物线的方程为( )



A.  B.  C.  D. 

【答案】B

【解析】

【分析】设出抛物线的标准方程，代入点坐标求出系数既可.

【详解】由题意，抛物线开口向右，设抛物线的标准方程，

点代入抛物线方程求得，得 ，则．

抛物线的标准方程为.

故选：B．

5. 在等比数列中， ，其前三项的和，则数列的公比 (　　)

A.  B. 

C. 或1 D. 或1

【答案】C

【解析】

【分析】利用等比数列的通项公式得到关于的方程组，解出即可．

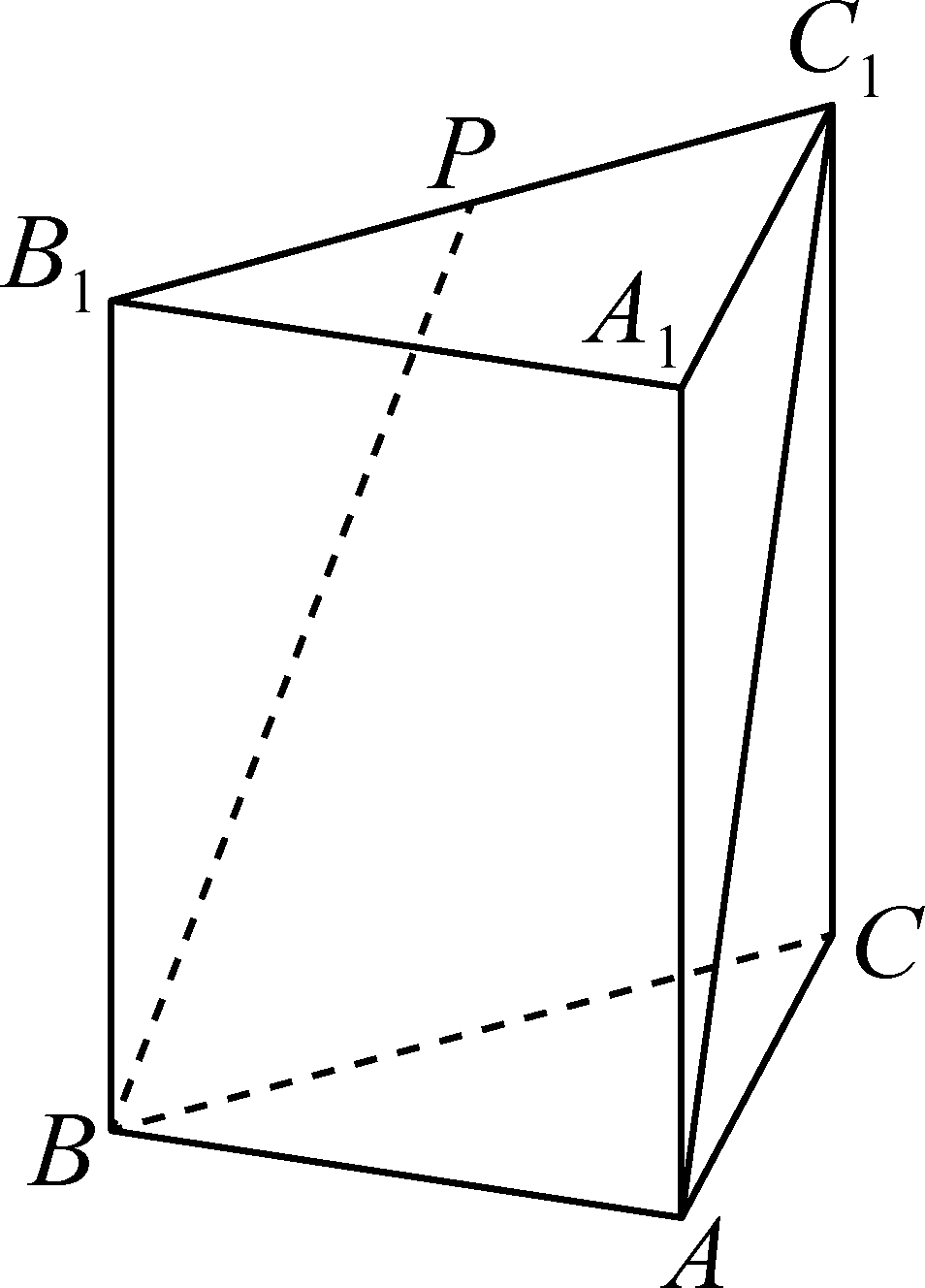
【详解】∵在等比数列中，，其前三项的和，

∴，解得，或．

∴的公比等于或1．

故选：C．

6. 《九章算术》是我国东汉初年编订的一部数学经典著作，其在卷第五《商功》中记载“斜解立方，得两堑堵”，堑堵是底面为直角三角形的直三棱柱．如图，在堑堵中，，*P*为的中点，则( )

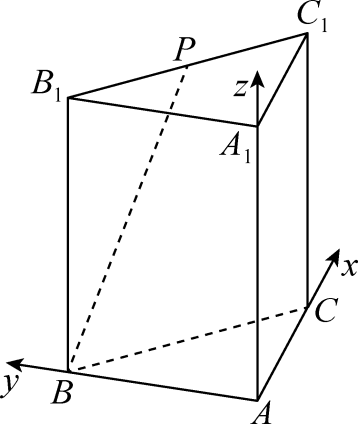


A.  B. 1 C.  D. 

【答案】A

【解析】

【分析】以点为坐标原点，建立空间直角坐标系，然后得出和的坐标，即可得出答案.

【详解】

如图，由已知可得，以点为坐标原点，建立空间直角坐标系.

则，，，，，.

所以，，

所以.

故选：A.

7. 若直线与焦点在*x*轴上的椭圆总有公共点，则*n*的取值范围是( )

A.  B.  C.  D. 

【答案】C

【解析】

【分析】由题得直线所过定点在椭圆上或椭圆内，代入椭圆得到不等式，再结合椭圆焦点在轴上即可.

【详解】直线恒过定点，若直线与椭圆总有公共点，

则定点在椭圆上或椭圆内，，解得或，

又表示焦点在轴上的椭圆，故，，

故选：C.

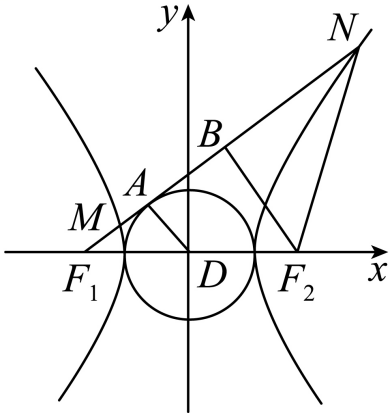
8. 双曲线*C*的两个焦点为，以*C*的实轴为直径的圆记为*D*，过作圆*D*的切线与*C*的两支分别交于*M*，*N*两点，且，则*C*的离心率为( )

A.  B.  C.  D. 

【答案】C

【解析】

【分析】设双曲线的方程为.设切点为，过点作，垂足为，可推出.进而在中，可求得，.根据双曲线的定义可得.在中，根据余弦定理可得，即可得出离心率.

【详解】

如图，设双曲线的方程为，则.

设切线与圆相切于点，过点作，垂足为，则.

所以，有，所以.

又，，所以为等腰直角三角形，

所以，，

根据双曲线的定义可得，，所以.

在中，由余弦定理可得，.

所以，，

所以，，.

所以，*C*的离心率.

故选：C.

**二、多项选择题：本题共4小题，每小题5分，共20分．在每小题给出的四个选项中，有多项符合题目要求．全部选对的得5分，部分选对的得2分，有选错的得0分．**

9. 已知直线与圆，则下列说法正确的是( )

A. 直线*l*恒过定点 B. 圆*M*的圆心坐标为

C. 存在实数*k*，使得直线*l*与圆*M*相切 D. 若，直线*l*被圆*M*截得的弦长为2

【答案】AB

【解析】

【分析】A选项，将直线方程变形后得到，求出恒过的定点；B选项，将圆的一般式化为标准式方程，得到圆心坐标；C选项，令圆心到直线*l*的距离等于半径，列出方程，结合根的判别式判断出结论；D选项，当时，求出圆心在直线*l*上，故直线*l*被圆*M*截得的弦长为直径4，D错误.

【详解】变形为，故恒过定点，A正确；

变形为，圆心坐标为，B正确；

令圆心到直线的距离，

整理得：，由可得，方程无解，

故不存在实数*k*，使得直线*l*与圆*M*相切，C错误；

若，直线方程为，圆心在直线上，

故直线*l*被圆*M*截得的弦长为直径4，D错误.

故选：AB

10. 已知抛物线的焦点为*F*，过点*F*且斜率为的直线交*C*于点，(其中)，与*C*的准线交于点*D*．下列结论正确的是( )

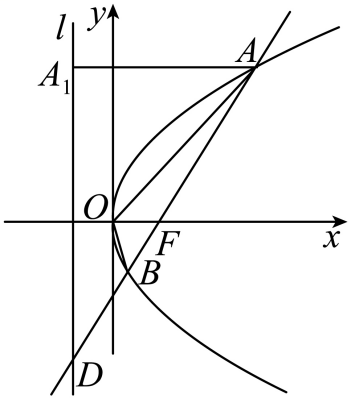
A.  B. 

C. *F*为线段*AD*中点 D. 的面积为

【答案】BC

【解析】

【分析】求出直线的方程，与抛物线联立，根据韦达定理得出，，推出，可判断A项；解方程得出点坐标，根据抛物线的定义求出的值，可判断B项；求出点，得出线段*AD*中点的坐标，即可判断C项；根据B可得出，进而求出点到直线的距离，即可得出面积，判断D项.

【详解】

由已知可得，，准线，直线的方程为.

联立直线的方程与抛物线的方程

可得，.

由韦达定理可得，，.

又，，所以，

又，所以，故A项错误；

对于B项，结合图象，解可得，，.

过点作，垂足为，则.

根据抛物线的定义可得，，同理可得，故B项正确；

对于C项，因为，所以，则点.

将代入直线的方程为可得，，即.

所以，线段中点坐标为，恰好为点，故C项正确；

对于D项，.

点到直线，即的距离为，

所以，的面积，故D项错误.

故选：BC.

11. 欧拉函数的函数值等于所有不超过正整数*n*，且与*n*互素的正整数的个数(互素是指两个整数的公约数只有1)，例如，．下列说法正确的是( )

A.  B. 数列为递增数列

C. 数列为等比数列 D. 数列的前*n*项和为，则

【答案】ACD

【解析】

【分析】对A列举法即可判断，对B举反例即可，对C得到与，所有互质的数均为正奇数，则，即可判断，对D用乘公比错位相减法即可.

【详解】对A，与11互质的正整数有1,2,3,4,5,6,7,8,9,10，故，故A正确；

对B，当时，与8互质的正整数有1,3,5,7，

故，则数列不是递增数列，故B错误；

对C，时，一定是2的倍数，

则与互素的数为：1,3,5,7,9,11 ,，即正奇数，

故，，故数列是以1为首项，2为公比的等比数列，故C正确，

对D，，

则①

②

①②得

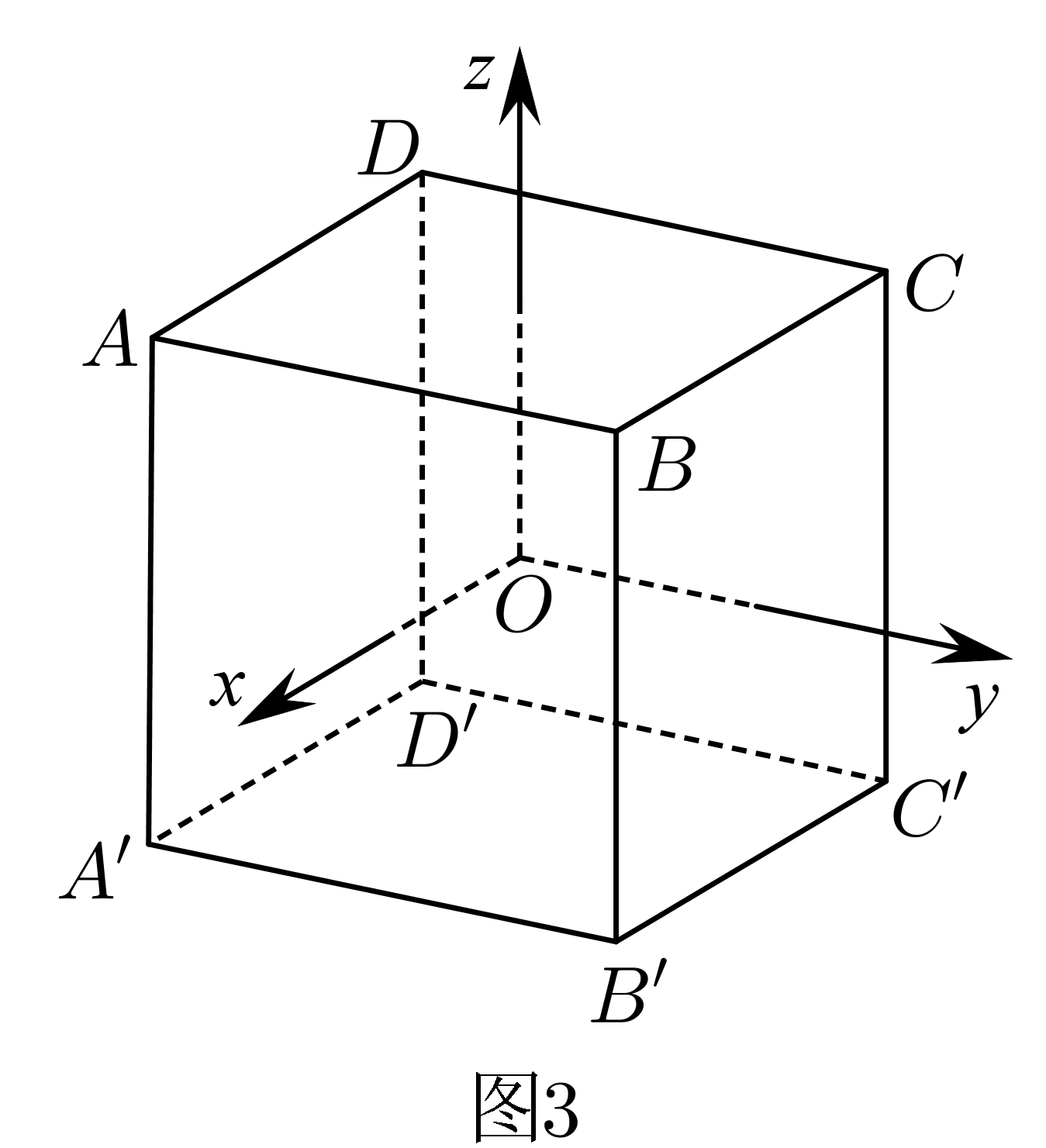
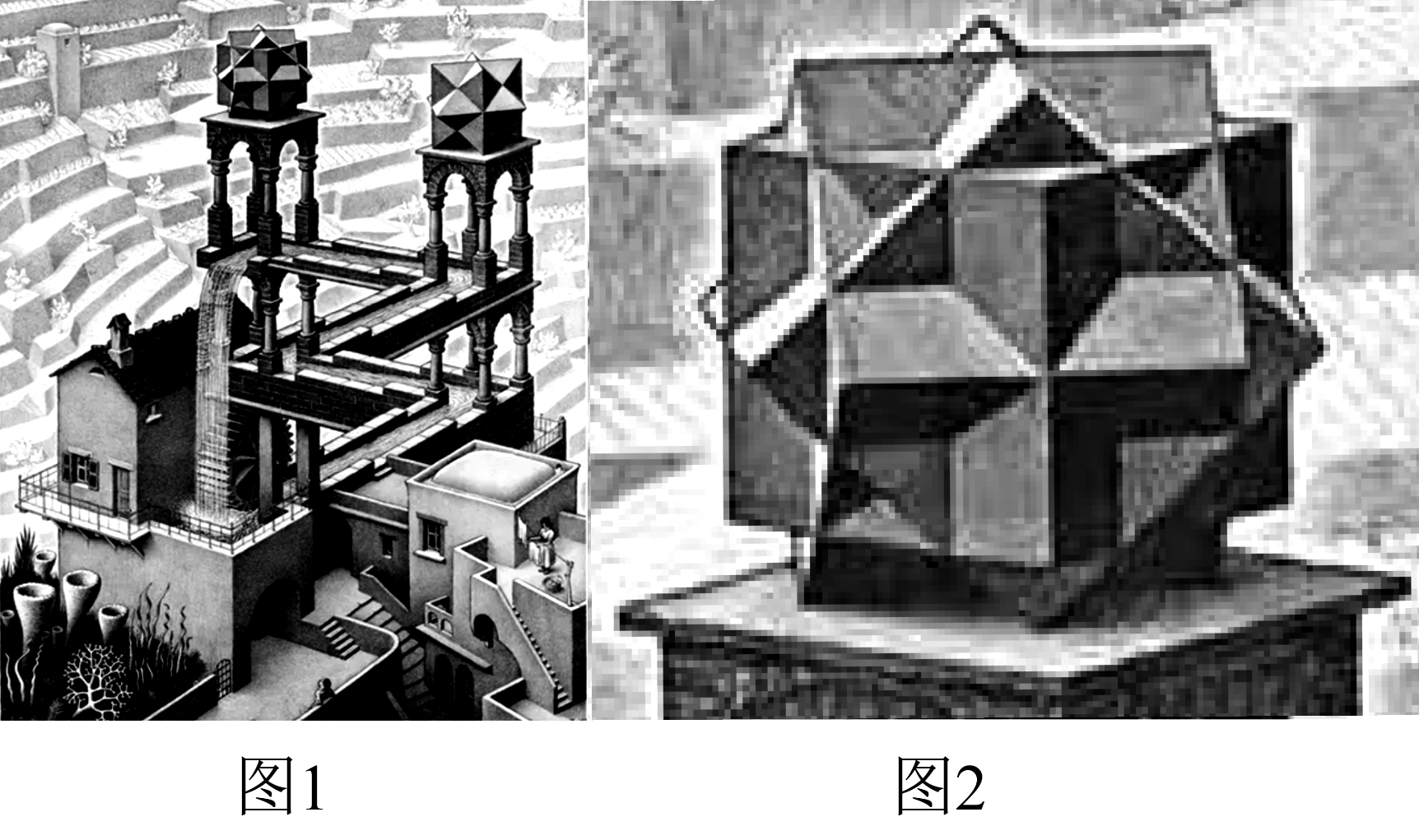
，

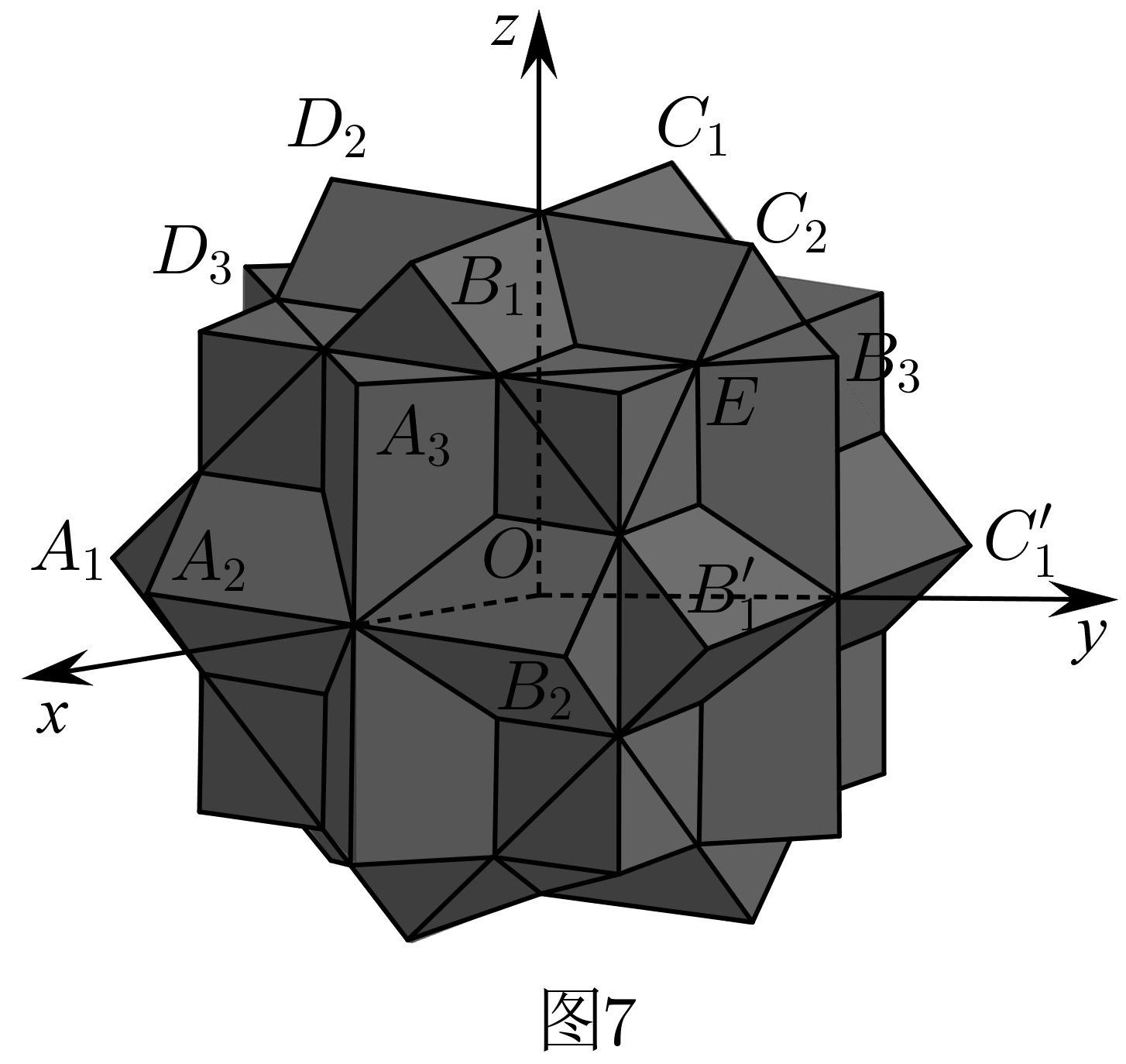
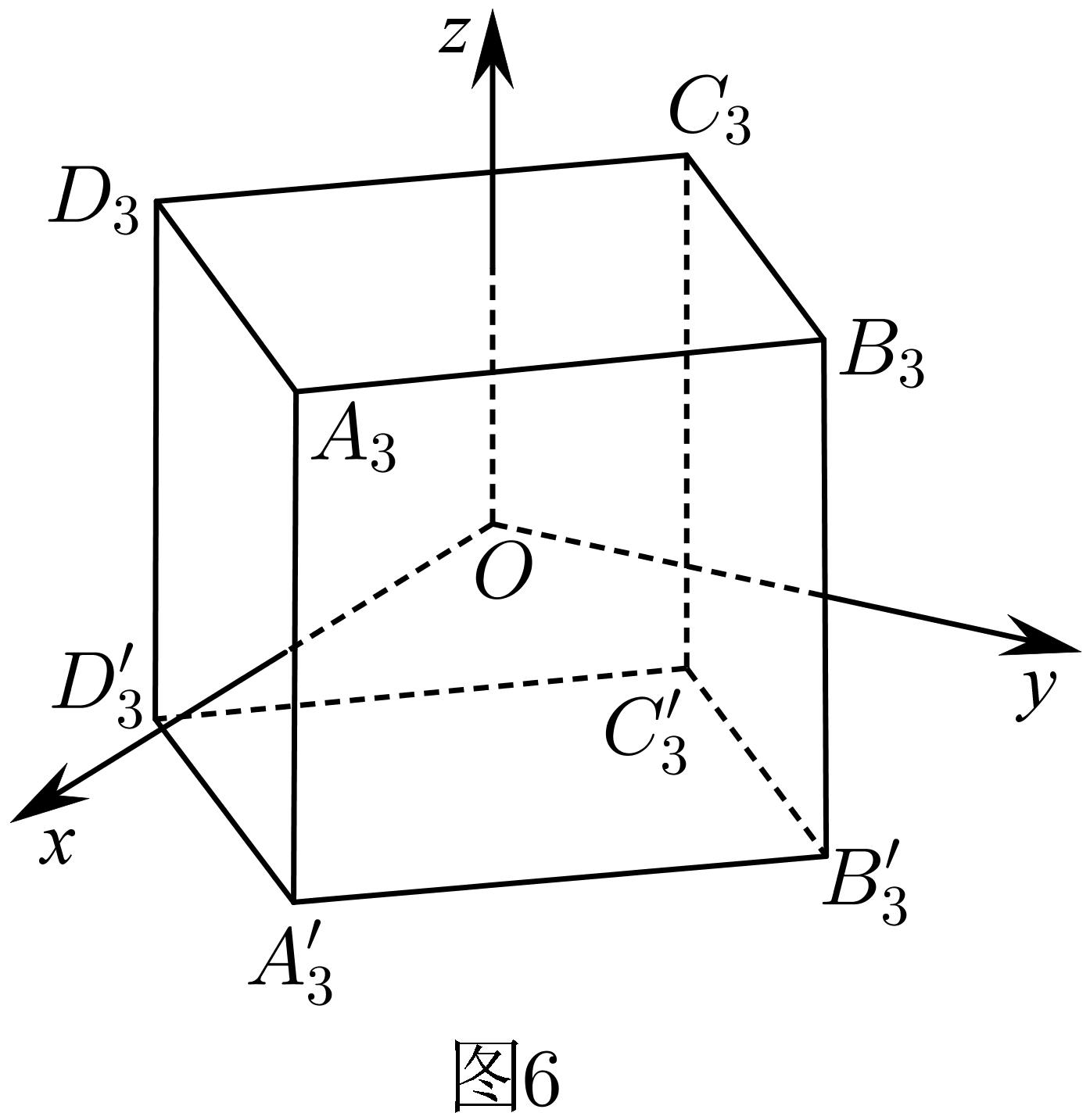
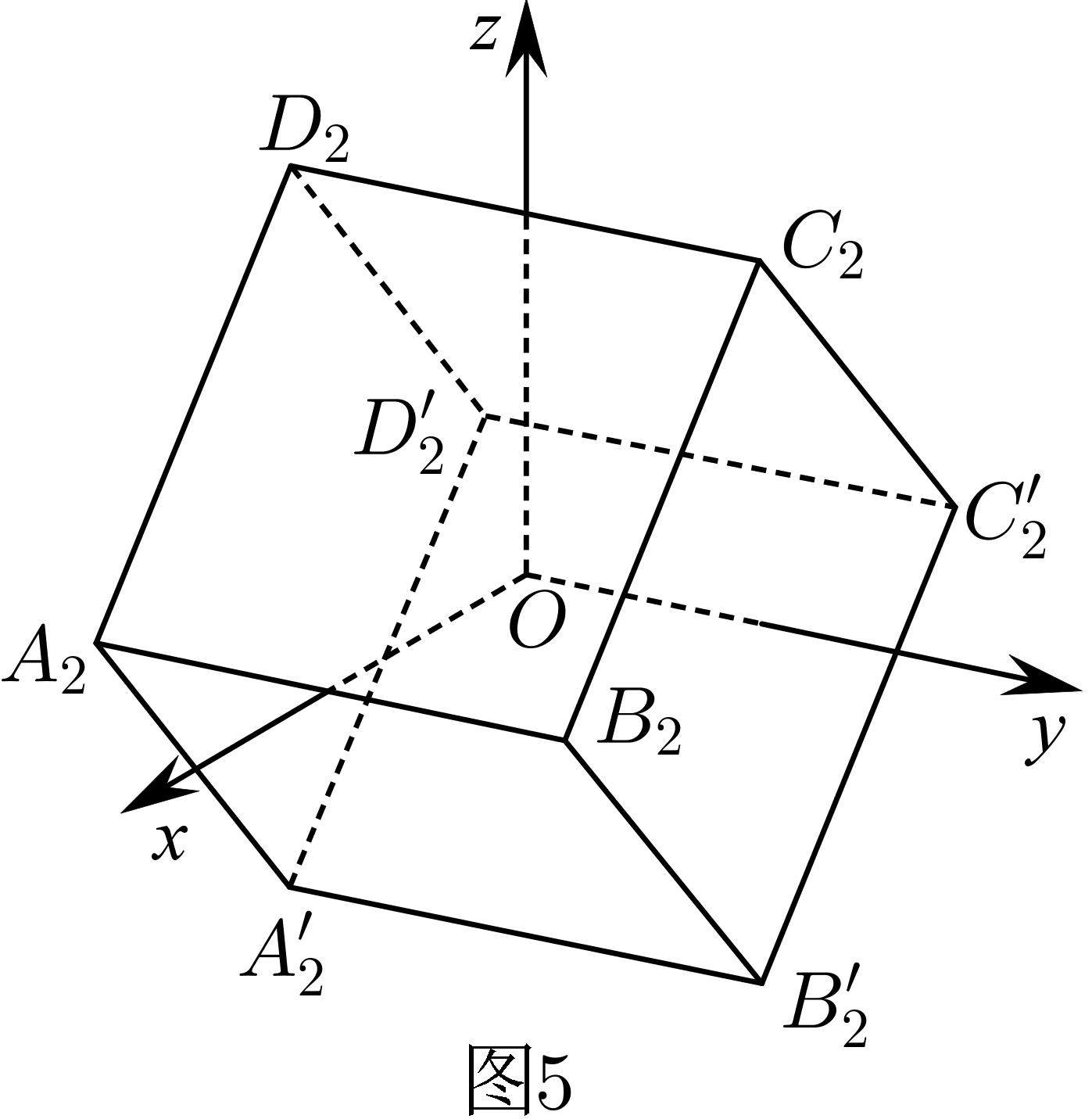
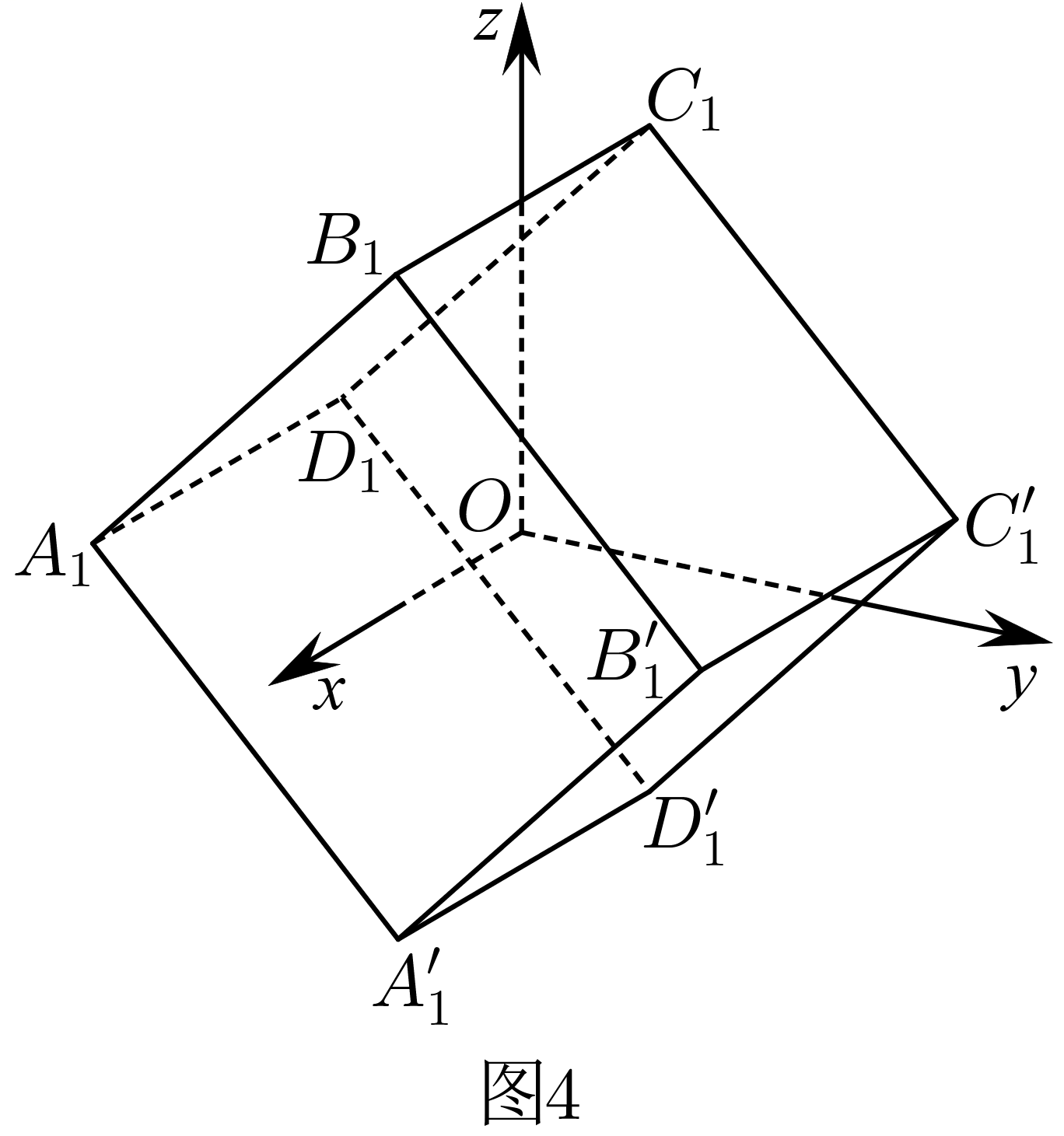
则，而，

故，故D正确.

故选：ACD.

12. 《瀑布》(图1)是埃舍尔为人所知的作品.画面两座高塔各有一个几何体，左塔上方是著名的“三立方体合体”(图2).在棱长为2的正方体中建立如图3所示的空间直角坐标系(原点*O*为该正方体的中心，*x*，*y*，*z*轴均垂直该正方体的面)，将该正方体分别绕着*x*轴，*y*轴，*z*轴旋转，得到的三个正方体，，2，3(图4，5，6)结合在一起便可得到一个高度对称的“三立方体合体”(图7).在图7所示的“三立方体合体”中，下列结论正确的是( )





A. 设点的坐标为，，2，3，则

B. 设，则

C. 点到平面的距离为

D. 若*G*为线段上的动点，则直线与直线所成角最小为

【答案】ACD

【解析】

【分析】正方体的顶点到中心的距离不变，判断A，写出各点坐标，利用空间向量法求解判断BCD．

【详解】正方体棱长为2，面对角线长为，

由题意，，，，

旋转后，，，，，，，，，，，，

旋转过程中，正方体的顶点到中心的距离不变，始终为，因此选项A中，，2，3，正确；

，设，则

，

，

，则存在实数，使得，

，

，，∴，B错；

，，

设是平面的一个法向量，则

，令，得，

又，

∴到平面的距离为，C正确；

，设，，

，

，



令，则，

时，，递增，时，，递减，

∴，又，，

所以，

即，，

夹角的最小值为，从而直线与直线所成角最小为，D正确．

故选：ACD．

【点睛】方法点睛：本题正方体绕坐标轴旋转，因此我们可以借助平面直角坐标系得出空间点的坐标，例如绕轴旋转时时，各点的横坐标()不变，只要考虑各点在坐标平面上的射影绕原点旋转后的坐标即可得各点空间坐标．

**三、填空题：本题共4小题，每小题5分，共20分．**

13. 已知，，其中，若，则的值为\_\_\_\_\_\_\_\_\_．

【答案】##

【解析】

【分析】由已知可得，，即可求出的值，进而得出答案.

【详解】由已知可得，，.

因为，所以，解得，，

所以，.

故答案为：.

14. 各项均为正数的等差数列的前*n*项和是，若，则的值为\_\_\_\_\_\_\_\_\_．

【答案】

【解析】

【分析】由题得，化简求出，利用求和公式即可.

【详解】数列为各项为正数的等差数列，

则，化简得，

解得或0(舍)，

则，

故答案为：.

15. 已知点，，若圆上存在点*Р*满足，则实数*a*的取值范围是\_\_\_\_\_\_\_．

【答案】

【解析】

【分析】由已知可得，圆的圆心、半径，且点在以为直径的圆上，进而得出圆心、半径.然后根据两圆有交点，即可得出，代入即可得出答案.

【详解】由已知可得，圆可化为，

圆心为，半径.

因为，所以，所以点在以为直径的圆上.

圆心为的中点，半径.

由题意可得，圆与圆有公共点*P*，则应满足，

即有，所以实数*a*的取值范围是.

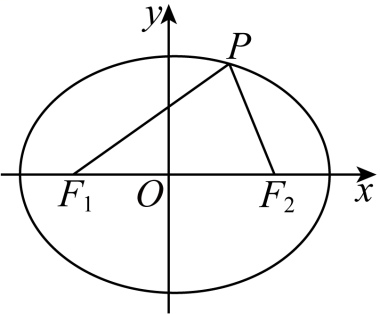
故答案为：.

16. 设是椭圆的两个焦点，若椭圆上存在点*P*满足，记的外接圆和内切圆半径分别是*R*，*r*，则的值为\_\_\_\_\_\_\_．

【答案】

【解析】

【分析】化标准，得到，，然后根据正弦定理求出.进而根据余弦定理推出的面积.根据等面积法，可知，即可求出.

【详解】

将椭圆化为标准方程可得，.

所以，，，.

所以，，，所以，.

根据正弦定理可得，，所以.

设，则.

由余弦定理可得，，

所以，，

整理可得，，显然是方程的两个解，

所以，

所以的面积.

又，

所以.

所以，.

故答案为：.

**四、解答题：本题共6小题，共70分．解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤．**

17. 已知圆*C*经过点和且圆心在直线上．

(1)求圆*C*的方程；

(2)若点*P*为圆*C*上的任意一点，求点*P*到直线距离的最大值和最小值．

【答案】(1)；

(2)最大值为，最小值为.

【解析】

【分析】(1)设出圆心、半径，根据已知条件列出方程组，求解方程组即可得到圆的标准方程；

(2)求出圆心到直线的距离，可知直线与圆相离.然后即可得出答案.

【小问1详解】

设圆心为，半径为，则圆的标准方程为.

由已知可得，，解得，

所以，圆的标准方程为.

【小问2详解】

由(1)知，圆心为，半径.

圆心到直线的距离.

所以，直线与圆相离.

所以，点*P*到直线距离的最大值为，最小值为.

18. 已知双曲线经过，两点．

(1)求*C*标准方程；

(2)若直线与*C*交于*M*，*N*两点，且*C*上存在点*P*﹐满足，求实数*t*的值．

【答案】(1)；

(2).

【解析】

【分析】(1)将点坐标代入双曲线的方程，得到方程组，即可求出双曲线的方程；

(2)联立直线与双曲线的方程得出，根据韦达定理可得出，所以.进而由，表示出点的坐标，代入双曲线即可得出答案.

【小问1详解】

由已知可得，，解得，

所以*C*的标准方程为.

【小问2详解】

设，，.

联立直线与双曲线的方程，

整理可得.

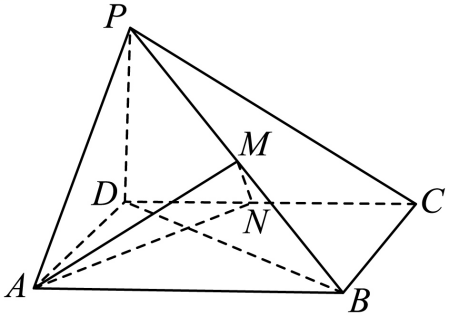
由韦达定理可得，所以.

所以，.

则由可得，，解得，即.

因为点在双曲线上，所以有，整理可得，解得.

19. 如图，四棱锥中，底面，底面为矩形，，，*M*，*N*分别为*PB*，*CD*的中点．



(1)求证：面；

(2)求直线*PB*与平面所成角的正弦值．

【答案】(1)证明见解析；

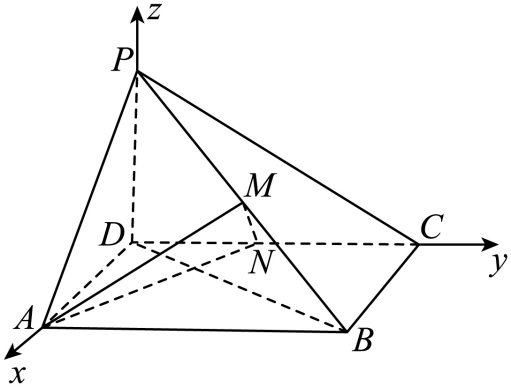
(2).

【解析】

【分析】(1)以点为坐标原点，建立空间直角坐标系.写出点的坐标，求出向量的坐标，根据，，证明，.即可根据线面垂直的判定定理即可证明；

(2)根据(1)中点的坐标，求出平面的法向量，进而即可根据向量求解出答案.

【小问1详解】



由已知底面，底面为矩形，易知两两垂直.

以点为坐标原点，分别以所在直线为轴，如图建立空间直角坐标系.

因为，，所以，，，，，则，.

所以，，.

则，，

所以，.

因为平面，平面，，

所以面.

【小问2详解】

由(1)可得，，，

设是平面的一个法向量，

则，取，则，，

所以是平面的一个法向量.

又，

所以直线*PB*与平面所成角的正弦值为.

20. 已知数列的前*n*项和，且，数列满足，其中．

(1)求和的通项公式；

(2)设，求数列的前20项和．

【答案】(1)，

(2)

【解析】

【分析】(1)根据、累乘法求得和的通项公式；

(2)结合分组求和法、裂项相消求和法求得.

【小问1详解】

对于，当时，，

当时，由得，

两式相减得，由于，

所以是首项为，公比为的等比数列，所以.

对于，，

所以，

也符合上式，所以.

【小问2详解】

当为奇数时，；，

所以.

当为偶数时，；

所以



.

所以.

21. 已知椭圆的长轴长是4，离心率为．

(1)求的方程；

(2)若点*P*是圆上的一动点，过点*P*作的两条切线分别交圆*O*于点*A*，*B*．

①求证：；

②求面积的取值范围．

【答案】(1)

(2)①证明见解析；②

【解析】

【分析】(1)根据题意，直接计算出，，，进而可得答案.

(2)根据题意，联立椭圆方程，根据直线与椭圆相切，再设，得到

，进而得到，解得，

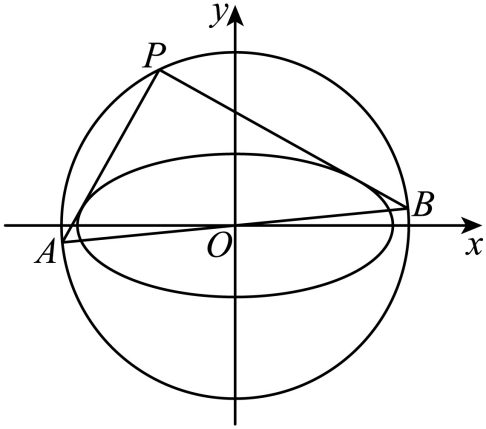
，可证得；再过作，必有，得到三角形的面积，进而利用二次函数的性质求出的范围.

【小问1详解】

由已知得，，，解得，可得，

则的方程为

【小问2详解】



①设，则过点的切线方程为：，联立椭圆方程得到

，，

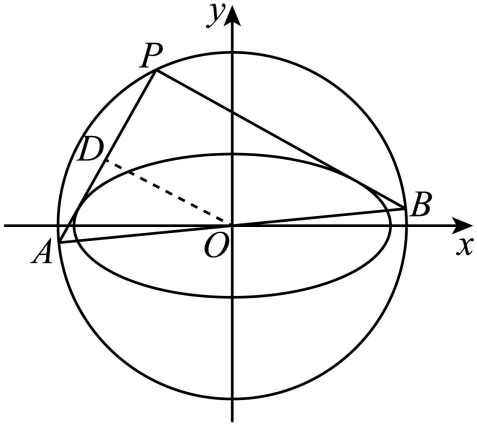
因为直线与椭圆相切，得，

化简得，，所以，，又因为，故，过点*P*作的两条切线分别交圆*O*于点*A*，*B*，故必有；

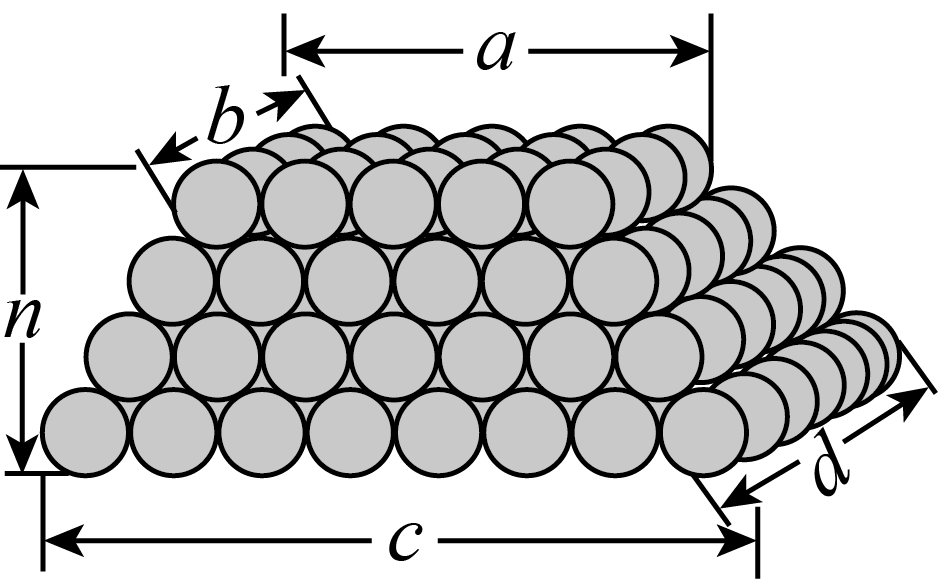
②由①得，必过圆心，过作，必有，设三角形的面积为，，设，，圆的半径为，

，，

设，当且仅当，即时，取最大值，而，当时，取最小值，，故，面积的取值范围为.



22. 对于数列，规定数列为数列的一阶差分数列，其中．



(1)已知数列的通项公式为，数列的前*n*项和为．

①求；

②记数列的前*n*项和为，数列的前*n*项和为，且，求实数的值．

(2)北宋数学家沈括对于上底有*ab*个，下底有*cd*个，共有*n*层的堆积物(堆积方式如图)，提出可以用公式求出物体的总数，这就是所谓的“隙积术”．试证明上述求和公式．

【答案】(1)① ；②；

(2)证明见解析.

【解析】

【分析】(1)根据一阶差分数列的定义，由数列的通项公式表示出数列的通项，再用类似于裂项相消的方法求前*n*项和，由的算式，找到与，的关系，解出的值.

(2)根据图形的结构特征，构造数列通项，利用(1)中的方法和结论，求前*n*项和，经验证与结论相同.

【小问1详解】

①由题意，，

所以， ，

即 .

②由题意知，，

所  ，

即，所以；

【小问2详解】

证明：设数列的通项公式为，

则由题意知，需证明的公式中，*S*即为数列的前n项和，即为数列的第*n*项， 且，．

又 ，

且，

由(1)知 ，

所以，  ，

所以 ，

又，，

则 

 ，

所以  成立.

【点睛】1.使用裂项法求和时，要注意正负项相消时消去了哪些项，保留了哪些项，切不可漏写未被消去的项，未被消去的项有前后对称的特点，实质上造成正负相消是此法的根源与目的．

2.使用求和符号时，要注意展开时化简，会用到等差或等比数列的求和公式.