**青岛二中2022-2023学年第一学期期中考试——高二试题(数学)**

**第Ⅰ卷(共60分)**

**一、单项选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．**

1. 若直线与直线垂直，则*m*的值是( )．

A  B.  C. 2或 D. 

【答案】A

【解析】

【分析】根据两直线垂直，则计算即可.

【详解】解：因为直线与直线垂直，

所以，解得.

故选：A.

2. 已知空间向量，，且，则( )

A. 9 B.  C. 1 D. 

【答案】C

【解析】

【分析】根据空间向量共线的充要条件即可求解.

【详解】因为空间向量，，且，

所以，解得：，

故选：.

3. 直线过点，且在*x*轴上的截距是在*y*轴上截距的2倍，则该直线的斜率是( )．

A.  B.  C. 或 D. 或

【答案】D

【解析】

【分析】分过直线原点和不过原点的两类情况作讨论即可求解.

【详解】若直线过坐标原点,则,此时横纵截距都等于0,满足题意;

若直线不过坐标原点,设直线的方程为,

因为直线过点,所以,解得,

所以直线方程为,此时,

故选:D.

4. 已知的顶点*B*、*C*在椭圆上，顶点*A*是椭圆的一个焦点，且椭圆的另外一个焦点在*BC*边上，则的周长是( )．

A.  B. 6 C.  D. 12

【答案】D

【解析】

【分析】根据题设条件求出椭圆的长半轴，再借助椭圆定义即可作答.

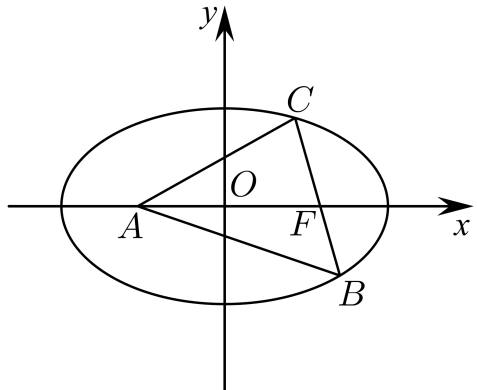
【详解】由椭圆知，该椭圆的长半轴，

*A*是椭圆的一个焦点，设另一焦点为，而点在*BC*边上，点*B*，*C*又在椭圆上，

由椭圆定义得，

所以的周长

故选：D.



5. 直线与圆的公共点个数为( )．

A. 0个 B. 1个 C. 2个 D. 1个或2个

【答案】D

【解析】

【分析】求直线过的定点，再判断直线与圆位置关系，

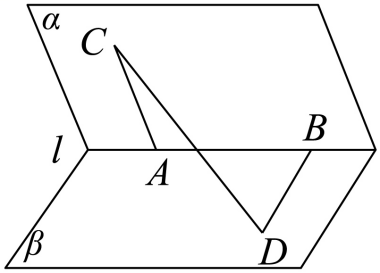
【详解】为，

故过定点，在圆上，

故直线与圆相切或相交，公共点个数为1个或2个，

故选：D

6. 已知大小为二面角棱上有两点，，，，，，若，，，则的长为( )．



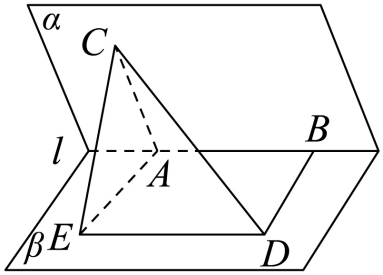
A. 22 B. 49 C. 7 D. 

【答案】C

【解析】

【分析】过作且，连接、，易得，通过线面垂直的判定定理可得平面，继而得到，即可求出答案．

【详解】解：过作且，连接、，



则四边形是平行四边形，则

因为，所以平行四边形是矩形，

因为，即，而，

则是二面角的平面角，即，

因为，即为正三角形，所以，

因为，即，，，平面，

所以平面，因为平面，所以，

所以在中，

故选：C．

7. 唐代诗人李颀的诗《古从军行》开头两句说：“白日登山望烽火，黄昏饮马傍交河．”诗中隐含着一个有趣的数学问题——“将军饮马”问题，即将军在观望烽火之后从山脚下某处出发，先到河边饮马后再回军营，怎样走才能使总路程最短？在平面直角坐标系中，设军营所在区域为，若将军从点处出发，河岸线所在直线方程为，并假定将军只要到达军营所在区域即回到军营，则“将军饮马”的最短总路程为( )．

A.  B.  C.  D. 

【答案】B

【解析】

【分析】利用点关于直线的找到最短距离，根据两点之间的距离公式即可求得.

【详解】由已知得关于直线的对称点为，

中点坐标为 ，且直线斜率为

所以 解得，即

圆心，可知，则最短总路程为

故选：B

8. 已知*F*是椭圆的一个焦点，若存在直线与椭圆相交于*A*，*B*两点，且，则椭圆离心率的取值范围是( )．

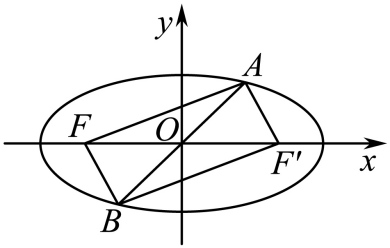
A.  B.  C.  D. 

【答案】A

【解析】

【分析】由椭圆的性质可得四边形为平行四边形，可得，在三角形中有余弦定理及均值不等式可得离心率的取值范围．

【详解】解：连接，与左右焦点，的连线，



由，由椭圆及直线的对称性可得四边形为平行四边形，，

在三角形中，，

所以，即，当且仅当时等号成立，又直线的斜率存在，故，

即，可得，

所以椭圆的离心率.

故选：A．

**二、多项选择题：本题共4小题，每小题5分，共20分，在每小题给出的四个选项中，有多项符合题目要求．全部选对的得5分，有选错的得0分，部分选对的得2分．**

9. 已知空间中三点，，，则( )．

A.  B. 

C.  D. *A*，*B*，*C*三点共线

【答案】ABC

【解析】

【分析】根据向量的模的坐标表示即可判断A；判断是否成立即可判断B；根据即可判断C；判断向量是否共线即可判断D.

【详解】解：，则，故A正确；

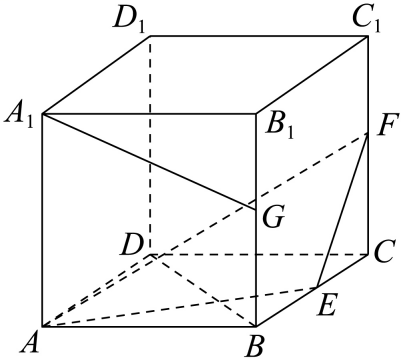
，则，所以，故B正确；

，则，故C正确；

因为，，，所以向量不共线，则*A*，*B*，*C*三点不共线，故D错误.

故选：ABC.

10. 在棱长为2的正方体中，、、分别为，，的中点，则下列选项正确的是( )．



A. 

B. 直线与所成角的余弦值为

C. 三棱锥的体积为

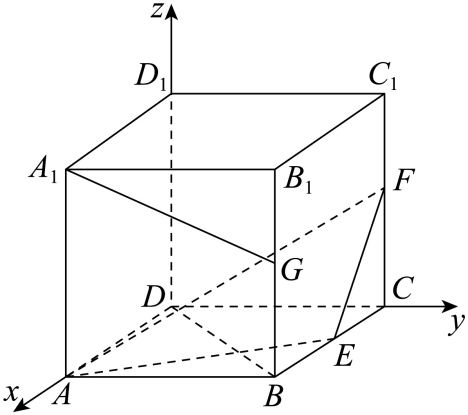
D. 存在实数、使得

【答案】ABD

【解析】

【分析】以为原点，为轴建立空间直角坐标系，利用空间向量的坐标运算逐项判断即可.

【详解】解：如图，以为原点，为轴建立空间直角坐标系



则，，，，，，，，，，

对于A，，所以，则，故A正确；

对于B，，，所以，

因此，直线与所成角的余弦值为，故B正确；

对于C，又，设平面的法向量为，

则，令，则，又，

则点到平面的距离，

又中，，则，

所以，

故，故C错误；

对于D，因为，，所以，则，则四点共面，

又，，所以，则共面，

即存在实数、使得，故D正确；

故选：ABD．

11. 已知与相交于*A*，*B*两点，则下列结论正确的是( )．

A. 直线*AB*的方程为

B. 过*A*，*B*两点，且过点的圆的方程为

C. 与的公切线的长度为

D. 以线段*AB*为直径的圆的方程为

【答案】AD

【解析】

【分析】由圆与圆的位置关系，直线方程，圆的方程对选项逐一判断，

【详解】由解得或，

即，，

对于A，直线*AB*的方程为，故A正确，

对于B，设过*A*，*B*两点，且过点的圆的方程，

得，解得，

圆的方程为，故B错误，

对于C，的圆心为，半径为，的圆心为，半径为2，

两圆半径相等，则与的公切线的长度为，故C错误，

对于D，中点为，，则以线段*AB*为直径的圆的方程为，

故选：AD

12. 在平面直角坐标系*xOy*中，方程对应的曲线为*E*，则( )．

A. 曲线*E*是封闭图形，其围成的面积小于

B. 曲线*E*关于原点中心对称

C. 曲线*E*上的点到原点距离的最小值为

D. 曲线*E*上的点到直线距离的最小值为

【答案】AB

【解析】

【分析】对于选项B结合中心对称的概念即可判断；对于选项C，设曲线*E*上任意一点为，结合两点间的距离公式化简整理即可判断；对于选项D，结合点到直线的距离公式即可判断；对于选项A，求出与直线平行且与曲线相切的直线方程，再根据曲线的对称性求出此直线与坐标轴围成图形的面积结合图形即可得解.

【详解】解：当时，，

当时，，

当时，，

由此作出曲线*E*的图象，其中，

对于选项B，因为点，点均满足方程，则可得到曲线关于原点中心对称，所以选项B正确；

对于选项C，设曲线*E*上任意一点为，则其到原点的距离的平方为，且，

当且仅当时取等号，

所以曲线上的点到原点距离的最小值为，故选项C错误；

对于选项D，由图可知曲线上到直线距离最小的点位于第一象限，

此时，则，

曲线上任意一点为，

则其到直线距离，

当且仅当时，取等号，

所以曲线*E*上的点到直线距离的最小值为，故选项D错误；

对于选项A，设与直线平行且与曲线相切的直线方程为，

联立，消得，

则，解得，

所以所求直线方程为，

令，则，令，则，

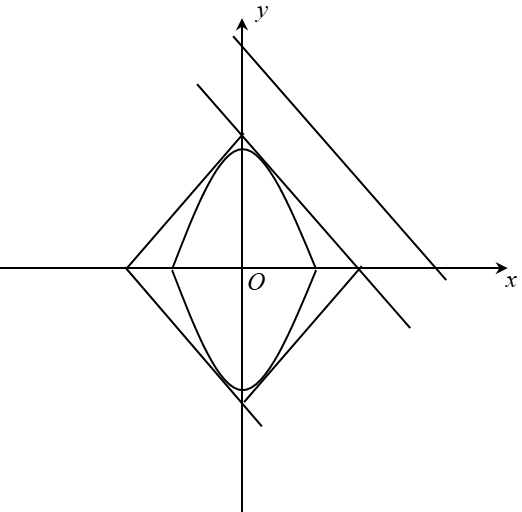
由曲线的对称性可得，

以四点为顶点的正方形的四条边与曲线相切，

这个正方形的面积为，

所以曲线*E*是封闭图形，其围成的面积小于，故A正确.

故选：AB.



**第Ⅱ卷(共90分)**

**三、填空题：本题共4小题，每小题5分，共20分．**

13. 已知的三个顶点分别是，，，则的外接圆的方程为\_\_\_\_\_\_．

【答案】

【解析】

【分析】由为直角三角形，确定斜边上中点坐标并求外接圆半径，即可写出的外接圆的方程.

【详解】由题设易知：为直角三角形，故外接圆圆心是斜边的中点，而，

所以斜边为，则外接圆圆心为，故，

综上，的外接圆的方程为.

故答案为：

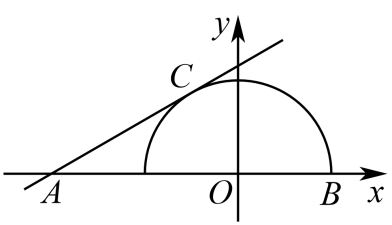
14. 在平面直角坐标系中，直线与曲线有公共点，则实数的取值范围是\_\_\_\_\_\_．

【答案】

【解析】

【分析】由题知直线过定点，曲线表示半圆，作出图像，数形结合即可求得答案．

【详解】解：直线过定点，曲线是圆心为半径为1的上半圆，为右顶点，如图所示，其中点为直线与曲线相切时的切点



由图可知，直线与曲线有公共点时，直线的斜率满足

当直线与曲线相切时，圆心到直线的距离，解得或，

则直线的斜率或，由图可得，所以，

于是有，即，解得：

故答案为：.

15. 过点，且与椭圆有相同的焦点的椭圆标准方程是\_\_\_\_\_\_．

【答案】

【解析】

【分析】设与已知椭圆焦点相同的椭圆的方程，将已知点的坐标代入，可得参数的值，求出椭圆的方程．

【详解】解：由题意设椭圆的方程为，，

将点代入，，

整理可得：，

解得或(舍，

所以椭圆的方程为：，

故答案为：．

16. 古希腊数学家阿波罗尼奥斯发现：平面上到两定点*A*，*B*距离之比是常数的点的轨迹是一个圆心在直线以*AB*上的圆，该圆简称为阿氏圆．根据以上信息，解决下面的问题：在棱长为1的正方体中，点*P*是正方体的表面(包括边界)上的动点，若动点*P*满足，则点*P*所形成的阿氏圆的半径为\_\_\_\_\_\_；三棱锥体积的最大值是\_\_\_\_\_\_．



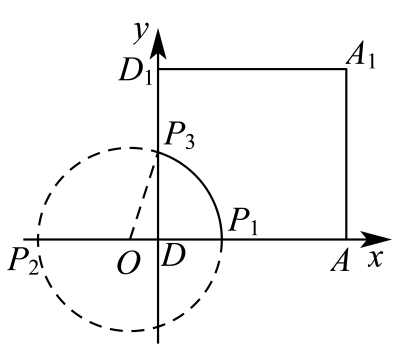
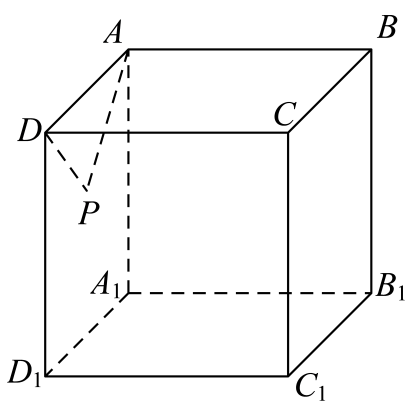
阿波罗尼奥斯

【答案】 ①.  ②. 

【解析】

【分析】以为坐标原点，为轴建立平面直角坐标系，设，利用，求出点的轨迹方程，即可得到点所形成的阿氏圆的半径；求出即为三棱锥最大的高，然后利用三棱锥的体积公式求解即可．

【详解】解：以为坐标原点，为轴建立如图所示的平面直角坐标系，



则，，设，

因为，所以，

整理得，

点所形成的阿氏圆的半径为；

则当到距离最大时，三棱锥的体积最大，

结合图形可知当在上，即为三棱锥最大的高，

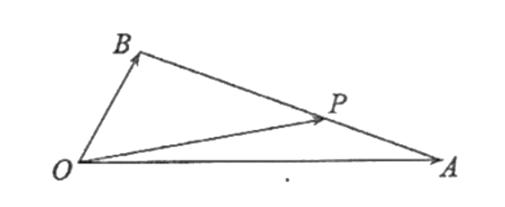


则三棱锥体积的最大值是．

故答案为：；．

**四、解答题：本题共6小题，共70分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．**

17. 如图，在中，为边上的一点，，且与的夹角为.



(1)设，求，的值；

(2)求值.

【答案】(1)，；(2).

【解析】

【分析】(1)由向量的加减运算，可得，进而可得答案.

(2)用表示，利用向量数量积公式，即可求得结果.

【详解】(1)因为，所以.

.

又，

又因为、不共线，所以，，

(2)结合(1)可得：

.



，

因为，，且与的夹角为.

所以.

【点睛】本题考查了向量的加减运算、平面向量基本定理、向量的数量积运算等基本数学知识，考查了运算求解能力和转化的数学思想，属于基础题目.

18. 已知直线和的交点为*P*．

(1)若直线*l*经过点*P*且与直线平行，求直线*l*的方程；

(2)若直线*m*经过点*P*且与*x*轴，*y*轴分别交于*A*，*B*两点，为线段的中点，求△*OAB*的面积．(其中*O*为坐标原点)．

【答案】(1)4*x*－3*y*－3＝0

(2)30

【解析】

【分析】(1)联立直线方程，求出交点坐标，根据直线平行，明确斜率，由点斜式方程可得答案；

(2)由点斜式方程，设出直线方程，求得两点的坐标，根据中点坐标公式，求得斜率，根据三角形面积公式，可得答案.

【小问1详解】

由，求得，可得直线和的交点为*P*(－3，－5)．

由于直线的斜率为，故过点*P*且与直线平行的直线*l*的方程为，

即4*x*－3*y*－3＝0．

【小问2详解】

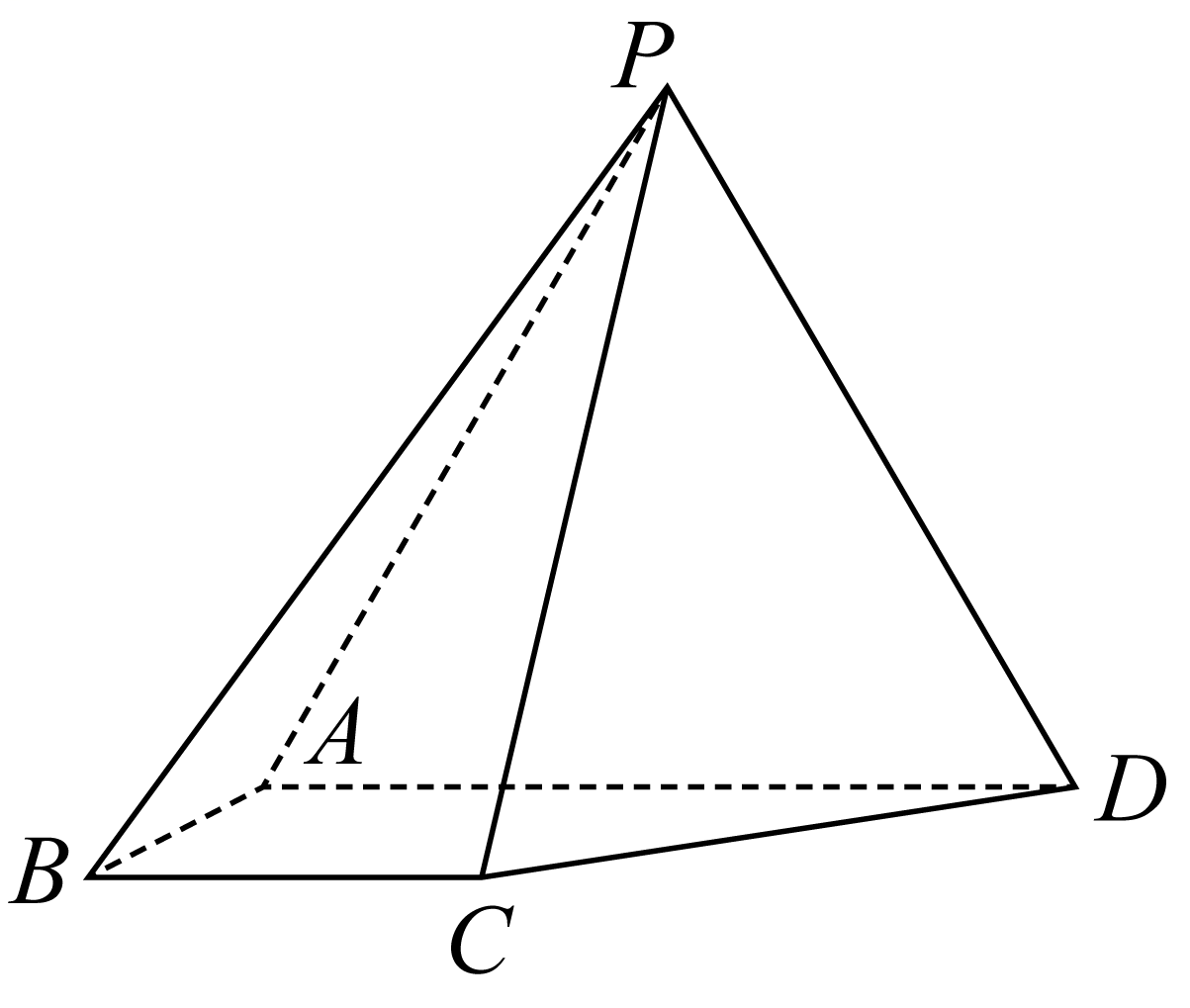
由题知：设直线*m*的斜率为*k*，则直线*m*的方程为，

故，，且，且，求得，

故、．

故△*OAB*的面积为．

19. 如图，在四棱锥中，．



(1)若，为的中点，求证：平面；

(2)若是边长为的正三角形，平面平面，直线与平面所成角的正切值为，且，求四棱锥的体积．

【答案】(1)证明见解析

(2)

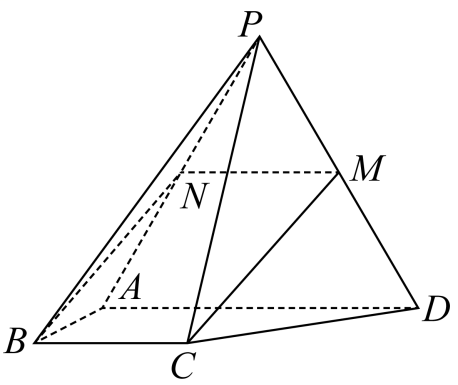
【解析】

【分析】(1)取中点，连接，证明四边形为平行四边形，可得出，利用线面平行的判定定理可证得结论成立；

(2)取中点，连、，推导出平面，可得出为直线与平面所成的角，根据已知条件可求得、的长，利用锥体的体积公式可求得四棱锥的体积.

【小问1详解】

证明：取中点，连接，



因为、分别为、中点，所以，且，

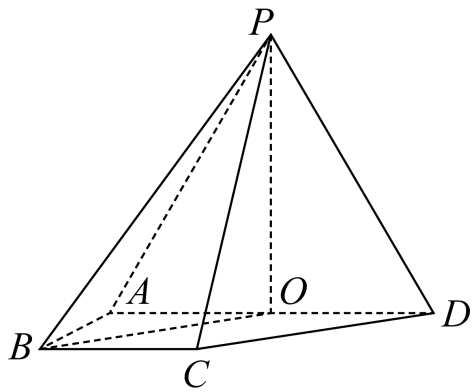
在底面中，因为，且，则且，

因此且，从而四边形是平行四边形，所以．

又因为平面，平面，所以平面．

【小问2详解】

解：取中点，连、．



因为是正三角形，为中点，所以，

因为平面平面，面平面，平面，

所以平面，从而为直线与平面所成的角．

在正三角形中，因为，所以．

则在直角中，，所以．

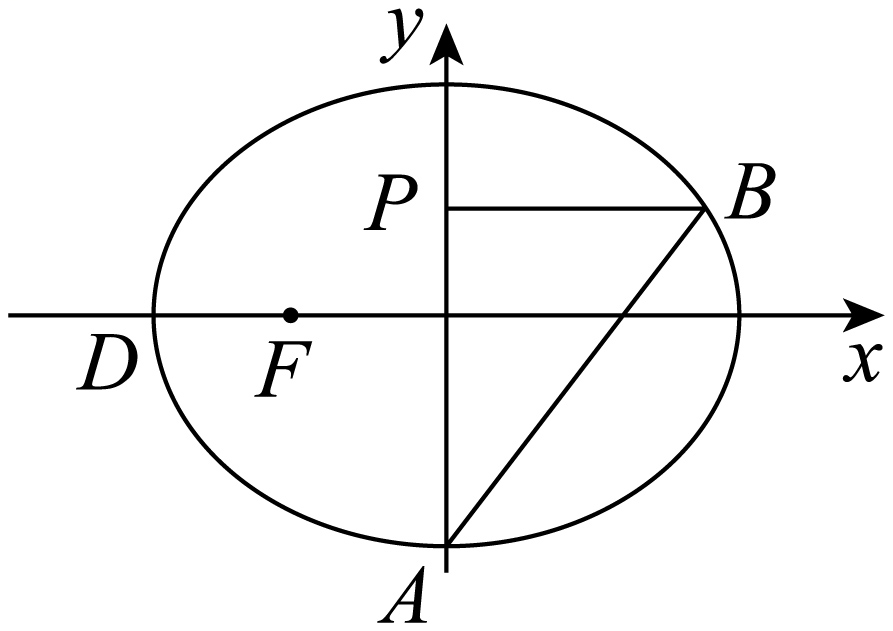
直角中，，

所以，因此．

四边形的面积．

又因为，所以四棱锥的体积．

20. 如图，点是椭圆的短轴位于轴下方的端点，过作斜率为的直线交椭圆于点，若点的坐标为，且满足轴，．



(1)求椭圆的方程；

(2)椭圆的左顶点为，左焦点为，点为椭圆上任意一点，求的取值范围．

【答案】(1)

(2)

【解析】

【分析】(1)由已知求得的坐标，得到直线方程，求出，的坐标，得到的坐标，由，求得，得到的坐标，把的坐标代入椭圆方程求得，则椭圆方程可求；

(2)由椭圆方程得，，设，则，按坐标运算得可转换为关于的二次函数，由，即可得的取值范围.

【小问1详解】

解：由题意得，的方程为，由，则，

，，由，即，即，，又在椭圆上，得，解得，

所求椭圆方程；

【小问2详解】

解：由椭圆方程得，则，，设，则

所以，且，

则

由于，所以，即的取值范围为.

21. 已知圆．

(1)若直线过点且被圆截得的弦长为，求直线的方程；

(2)若直线过点与圆相交于，两点，求的面积的最大值，并求此时直线的方程；

(3)若点是直线上的动点，过点分别作圆的两条切线，切点分别为，，求证：直线过定点．

【答案】(1)或

(2)或

(3)证明见解析.

【解析】

【分析】(1)讨论直线方程斜率不存在时，根据直线与圆相交弦长公式求弦长，检验是否符合；直线斜率存在时，设直线方程，根据直线与圆相交弦长公式，求出参数的值，即得直线的方程；

(2)设直线的方程，求出圆心到直线的距离，进而求出弦长的表达式，代入面积公式中，由二次函数的最值求出其最大值，进而求出参数的值，求得直线的方程；

(3)设点，，可得以为圆心，为半径的圆的方程，则线段为该圆与圆相交形成的相交弦，两圆方程作差可得直线的方程，即可求得直线过定点.

【小问1详解】

解：圆，圆心，半径

当直线的斜率不存在时，的方程为：，此时圆心到直线的距离，

则相交弦长为，符合题意；

当直线的斜率存在时，设的方程为：，即

此时圆心到直线的距离，则相交弦长为，解得：

所以此时直线的方程为：，即.

综上，直线的方程为或.

【小问2详解】

解：在圆外，显然直线的斜率存在，

设直线的方程为：，则圆心到直线的距离，

所以弦长，

所以，

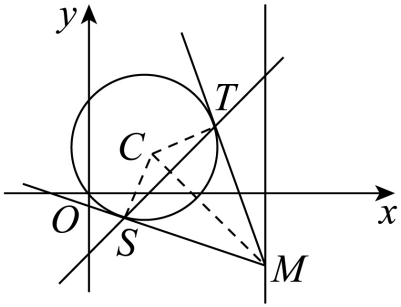
当时最大，即，即，解得或，

的最大值为1，

所以直线的方程为：或．

【小问3详解】

解：如图，连接



设点，

以为圆心，为半径的圆的方程为①

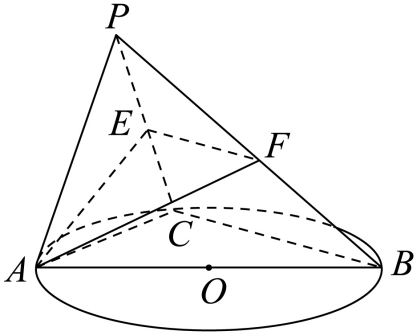
又②，则线段为两圆相交弦，

故由①②得为直线的方程，即

所以，解得

直线过定点.

22. 如图，*C*是以*AB*为直径的圆*O*上异于*A*，*B*的点，平面平面*ABC*，为正三角形，*E*，*F*分别是*PC*，*PB*上的动点．



(1)求证：；

(2)若，，求三棱锥的外接球体积；

(3)若*E*，*F*分别是*PC*，*PB*的中点且异面直线*AF*与*BC*所成角的正切值为，记平面*AEF*与平面*ABC*的交线为直线*l*，点*Q*为直线*l*上动点，求直线*PQ*与平面*AEF*所成角的取值范围．

【答案】(1)见解析 (2)

(3)

【解析】

【分析】(1)利用面面垂直的性质及判定定理即可；

(2)建立空间直角坐标系，确定球心坐标，可得球的半径大小即可求解；

(3)建立空间直角坐标系，利用向量表示出直线*PQ*与平面*AEF*所成角的正弦值即可确定范围.

【小问1详解】

因为*C*是以*AB*为直径的圆*O*上异于*A*，*B*的点，所以,

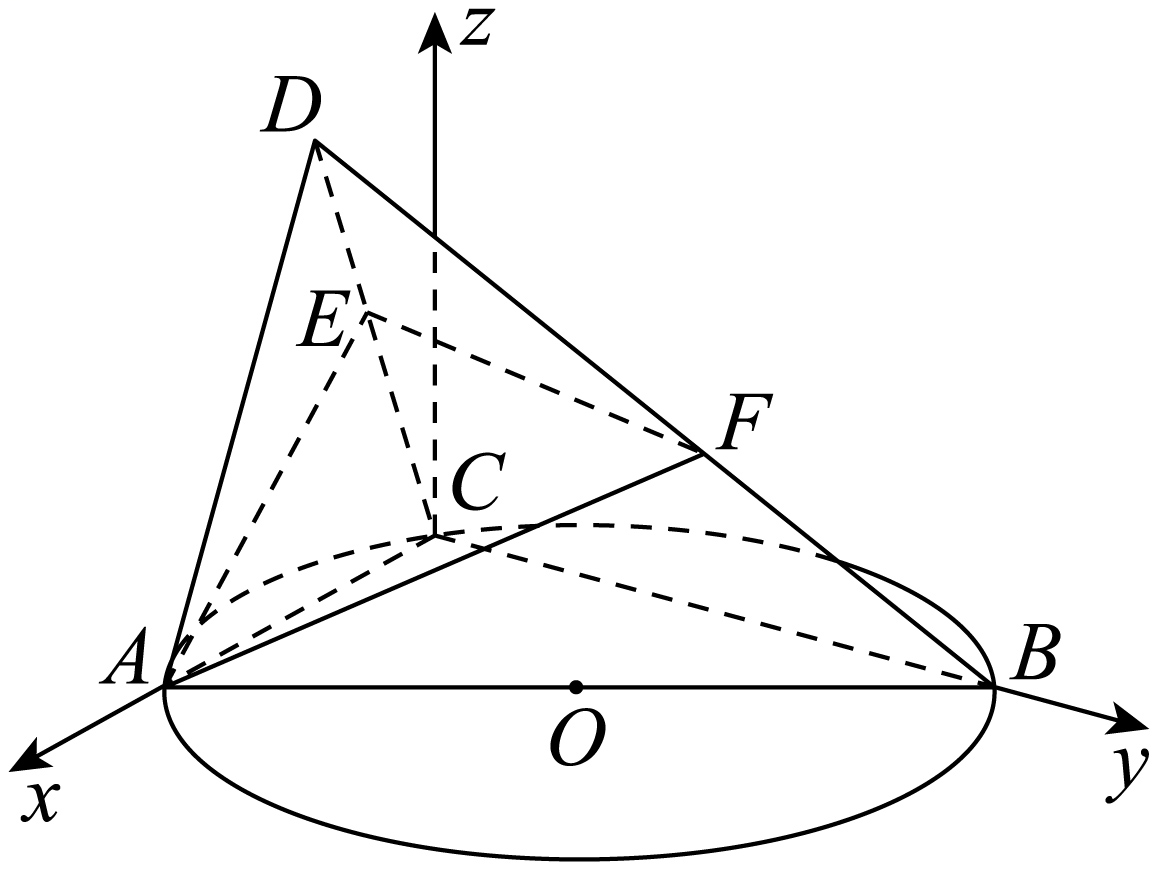
又平面平面*ABC,*

且平面平面*ABC**,*平面*ABC,*

所以平面,平面,

所以.

【小问2详解】



以*C*为坐标原点，*CA,CB*所在直线分别为轴，轴，过*C* 且垂直于平面*ABC*的直线为轴，建立空间直角坐标系，

因为，，所以，

,

因为的外接圆为圆,

所以设三棱锥的外接球球心为,

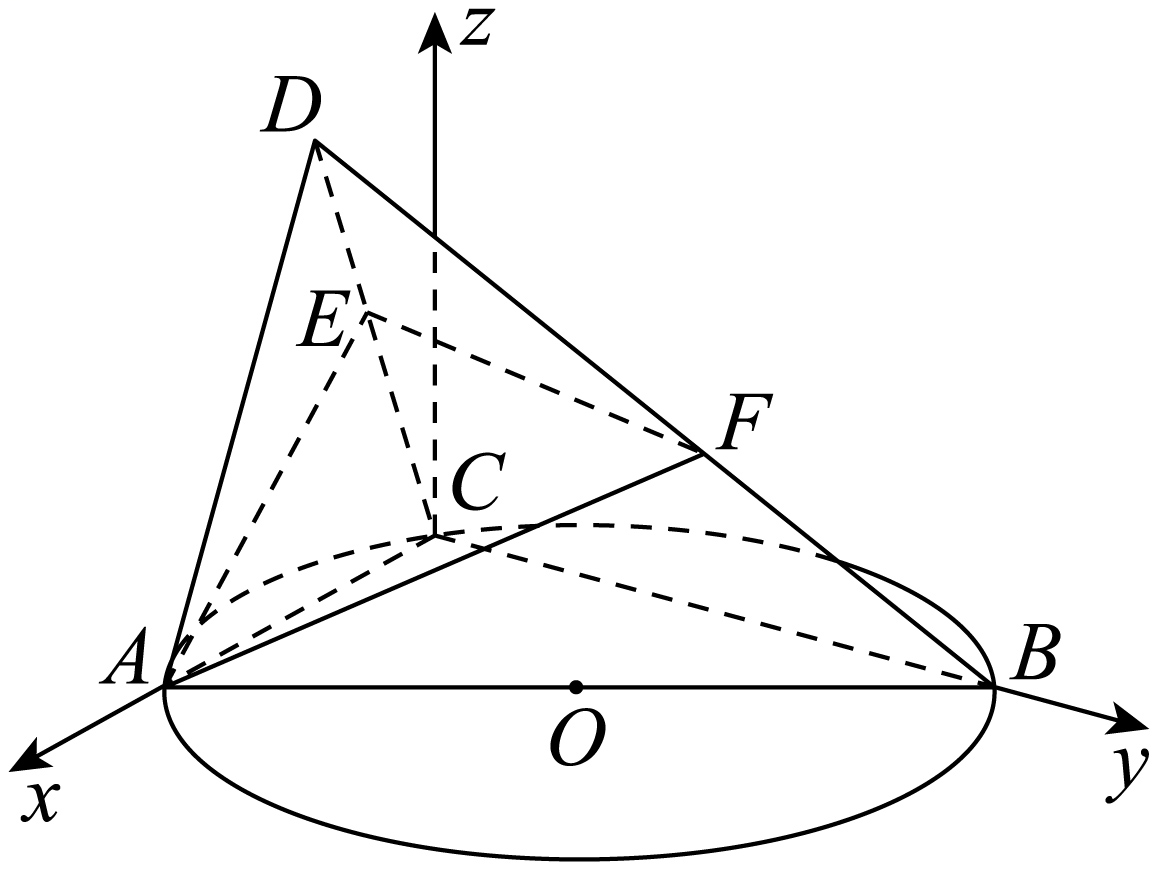
则有,即，

解得，所以球心为，

所以球的半径,

所以外接球的体积 .

【小问3详解】



由*E*，*F*分别是*PC*，*PB*的中点，所以*BC//EF*，

由(1)知，所以，

所以在中，就是异面直线*AF*与*BC*所成的角,

因为异面直线*AF*与*BC*所成角的正切值为,

所以 ,

又*EF*平面*AEF,BC*平面*AEF,*所以*BC*平面*AEF*，

又*BC*平面*ABC*，平面*EFA*平面*ABC*=*l,*所以*BC**l,*

所以在平面*ABC*中，过点*A*作*BC* 的平行线即为直线*l,*

以*C*为坐标原点，*CA,CB*所在直线分别为轴，轴，过*C* 且垂直于平面*ABC*的直线为轴，建立空间直角坐标系，设*AC*=2.

因为△*PAC*为正三角形，所以*AE*=，从而*EF*=2，

由已知*E，F*分别是*PC,PB*的中点，所以*BC*=2*EF*=4,

则 ,

所以,

因为*BC**l*，所以可设，平面*AEF*的一个法向量为，

则 ,取，得,

又,设直线与平面所成角为，

则，

所以直线与平面所成角为.