**中山市高二级2021-2022学年度第一学期期末统一考试**

**数学试卷**

**本试卷满分150分.考试时间120分钟.**

**注意事项：**

**1.答卷前，考生务必将自己的姓名、统考考号、座位号写在答题卡上.**

**2.每小题选出答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑，如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其它答案，不能答在试题上.**

**3.不可以使用计算器.**

**4.考试结束，将答题卡交回，试卷不用上交.**

**第Ⅰ卷(选择题 共60分)**

**一、选择题：本大题共8小题，每小题5分，共40分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.**

1. 直线的倾斜角为( )

A.  B.  C.  D. 

【答案】C

【解析】

【分析】先求出直线的斜率，再根据倾斜角与斜率的关系即可求解.

【详解】由得，直线的斜率为，根据倾斜角与斜率的关系得，则.

故选：C

2. 已知复数*z*满足(i为虚数单位)，则复数*z*的共轭复数( )

A.  B.  C.  D. 

【答案】D

【解析】

【分析】由复数的除法运算与共轭复数的定义求解即可

【详解】因为，

所以，

所以，

故选：D

3. 已知数列满足，若，则( )

A. -1 B.  C. 1 D. 2

【答案】A

【解析】

【分析】由，且，得到所以数列是以3为周期的周期数列求解.

【详解】解：因为数列满足，且，

所以，

所以数列是以3为周期的周期数列，

所以，

故选：A

4. 过点引直线，使，两点到直线的距离相等，则这条直线的方程是( )

A.  B. 

C. 或 D. 或

【答案】D

【解析】

【分析】就直线与平行或过的中点可求直线的方程.

【详解】若过的直线与平行，因为，

故直线的方程为：即.

若过的直线过的中点，因为的中点为，此时，

故直线的方程为：即.

故选：D.

5. 已知是抛物线：的焦点，过上一点作其准线的垂线，垂足为，若，则点的横坐标是( )

A.  B.  C.  D. 1

【答案】A

【解析】

【分析】利用抛物线的定义，结合已知条件，求出的长，进而求得，再结合抛物线的定义，即可求解.

【详解】如图所示，抛物线的焦点坐标为，

过上一点作其准线的垂线，垂足为，若，

可得,

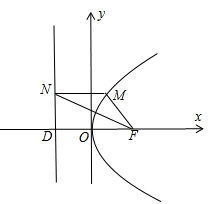
又由，所以，

在等腰中，可得，

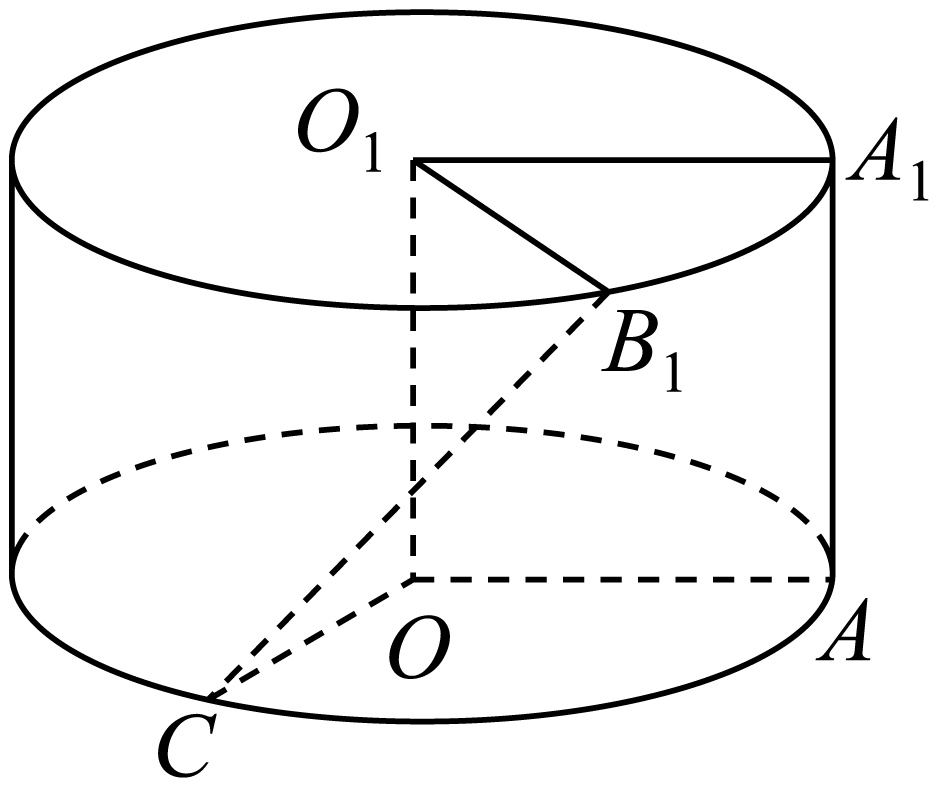
设，根据抛物线的定义，可得，解得，

即点的横坐标为.

故选：A.



6. 将边长为的正方形(及其内部)绕旋转一周形成圆柱，如图，长为，长为，其中与在平面的同侧.则异面直线与所成的角的大小为( )



A.  B. 

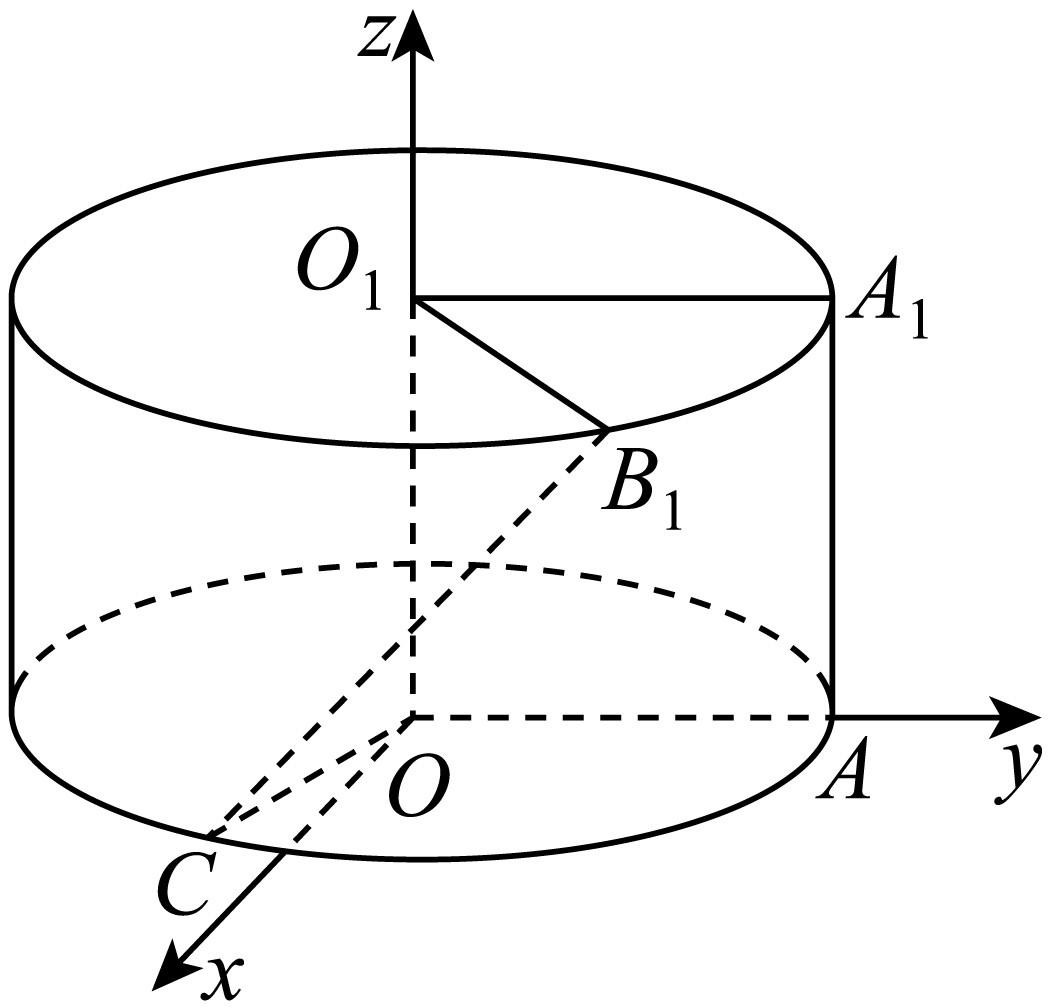
C.  D. 

【答案】B

【解析】

【分析】以*O*为坐标原点，、所在直线分别为、轴建立空间直角坐标系，利用空间向量法可计算出异面直线与所成的余弦值，即可得解.

【详解】以*O*为坐标原点，、所在直线分别为、轴建立如图所示的空间直角坐标系，



则、、、.

所以，，则，

所以.

因此，异面直线与所成的角为.

故选：B.

【点睛】本题考查利用空间向量法求解异面直线所成角的大小，考查计算能力，属于中等题.

7. 设数列的前*n*项和为，若，则( )

A. 243 B. 244 C. 486 D. 488

【答案】C

【解析】

【分析】通过，求出数列的通项公式，代入计算即可.

【详解】由，①

所以，②

②-①：

所以

当时，

所以，

所以数列以首项为，公比的等比数列

所以

所以

故选：C.

8. 已知、是椭圆的左、右焦点，点是椭圆上任意一点，以为直径作圆，直线与圆交于点(点不在椭圆内部)，则

A.  B. 4 C. 3 D. 1

【答案】C

【解析】

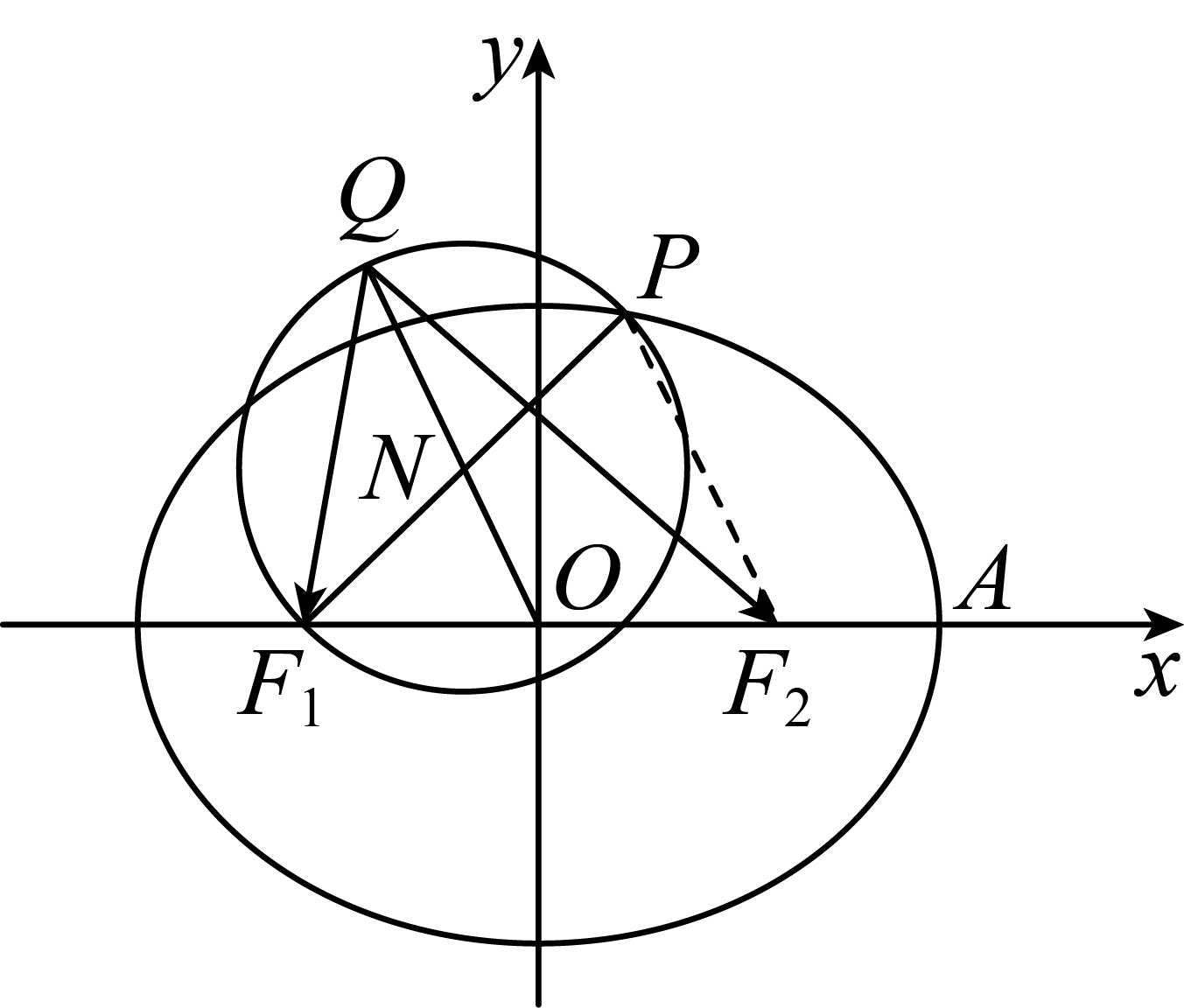
【分析】利用向量数量积运算可得，利用，进一步利用椭圆的定义可转化为，进而得解.

【详解】连接,设椭圆的基本量为，

,



故答案为：3.



【点睛】本题考查椭圆的定义与平面向量的数量积的运算，属中档题，关键是利用向量的数量积运算进行转化，并结合椭圆的定义计算.

**二、选择题：本大题共4小题，每小题5分.在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求.全部选对的得5分，部分选对的得2分，有选错的得0分.**

9. 设数列，的前项和分别为，，则下列命题正确的是( )

A. 若，则数列等差数列

B. 若，则数列为等比数列

C. 若数列是等差数列，则，，成等差数列

D. 若数列是等比数列，则，，成等比数列

【答案】AC

【解析】

【分析】对于A，C，利用等差数列定义判断即可，对于B，D，通过举反例判断

【详解】解：对于A，由等差数列的定义可知当时，数列为等差数列，所以A正确；

对于B，当时，满足，但数列不是等比数列，所以B错误；

对于C，数列是等差数列，数列的前项和为，

则，



，

所以，所以，，成等差数列，所以C正确；

对于D，当等比数列的公比，为偶数时，，，均为零，所以，，不成等比数列，所以D错误，

故选：AC

10. (多选)已知圆，直线.则以下几个命题正确的有( )

A. 直线恒过定点 B. 圆被轴截得的弦长为

C. 直线与圆恒相交 D. 直线被圆截得最长弦长时，直线的方程为

【答案】ABC

【解析】

【分析】

求出直线所过定点坐标，再根据直线与圆的位置关系判断．

【详解】直线方程整理得，由，解得，∴直线过定点，A正确；

在圆方程中令，得，，∴轴上弦长为，B正确；

，∴在圆内，直线与圆一定相交，C正确；

直线被圆截得弦最长时，直线过圆心，则，，直线方程，即．D错．

故选：ABC．

【点睛】关键点点睛：本题考查直线与圆的位置关系，直线过定点问题．(1)直线方程整理为关于参数的方程，然后由恒等式知识可得定点坐标．(2)直线与圆的位置关系的判断，若直线所过定点在圆内，则直线与圆相交，若定点在圆上，则直线与圆相交或相切，定点在圆外，直线与圆的三种位置关系都有可能．(3)直线过圆心时弦长最长，直线所过定点是弦中点时，弦长最短．

11. 已知空间四点，则下列说法正确的是( )

A.  B. 

C. 点*O*到直线的距离为 D. *O*，*A*，*B*，*C*四点共面

【答案】ABC

【解析】

【分析】

计算数量积判断A，求向量夹角判断B，利用向量垂直判断C，根据空间向量共面定理判断D．

【详解】，

，A正确；

，B正确；

，，所以，，所以点*O*到直线的距离为，C正确；

，

假设若*O*，*A*，*B*，*C*四点共面，则共面，设，

则，此方程组无解，所以*O*，*A*，*B*，*C*四点不共面，D错．

故选：ABC．

12. 过双曲线的左焦点作直线交于、两点，则( )

A. 若，则直线只有条 B. 若，则直线有条

C. 若，则直线有条 D. 若，则直线有条

【答案】ABD

【解析】

【分析】先由双曲线方程得到焦点坐标和渐近线方程，再对直线的斜率进行讨论，利用弦长公式即可判断.

【详解】因为双曲线的左焦点的坐标为，

该双曲线的渐近线方程为，

若直线的斜率不存在，则的方程为，代入双曲线，得，此时；

若直线的斜率存在，可设的方程为，

可设、，由联立可得，

为使与双曲线有两个不同的交点，则，可得，

由韦达定理可得，所以.

A选项，由可得，无解，因此若，则的方程只有，A正确；

B选项，由，可得，解得，

因此，若，则的方程为，B正确；

C选项，由，可得，解得，

因此，若，则的方程为，C正确；

D选项，由，可得，解得或，

因此，若，则的方程为或，D正确.

故选：ABD.

**第Ⅱ卷(非选择题 共90分)**

**三、填空题：本大题共4小题，每小题5分，共20分.请将答案填在答题卡对应题号的位置上.答错位置，书写不清，模棱两可均不得分.**

13. 已知圆与圆相交于，两点，则直线的方程为\_\_\_\_\_\_．

【答案】

【解析】

【分析】由两个圆的方程相减后可得直线的方程.

【详解】因为圆与圆相交于，两点

故的方程为：，

整理得到：.

故答案为：.

14. 若数列的通项公式是，则等于\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_.

【答案】30

【解析】

【分析】由通项公式可得，从而数列项两两结合进行求和.

【详解】解：由题意，数列的通项公式是，

则，

所以.

故答案为:30.

【点睛】方法点睛:

求和的常见方法有：等差、等比数列公式法；错位相减法；裂项相消法；并向求和法等.

15. 空间直角坐标系中，过点且一个法向量为的平面的方程为，过点且方向向量为的直线的方程为，阅读上面材料，并解决下面问题：已知平面的方程为，直线是两个平面与的交线，则直线与平面所成角的正弦值为\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_.

【答案】

【解析】

【分析】根据题意，结合材料，分别求出平面的法向量和直线的方向向量，即可求解.

【详解】根据材料可知，由平面的方程为，得为平面的法向量，

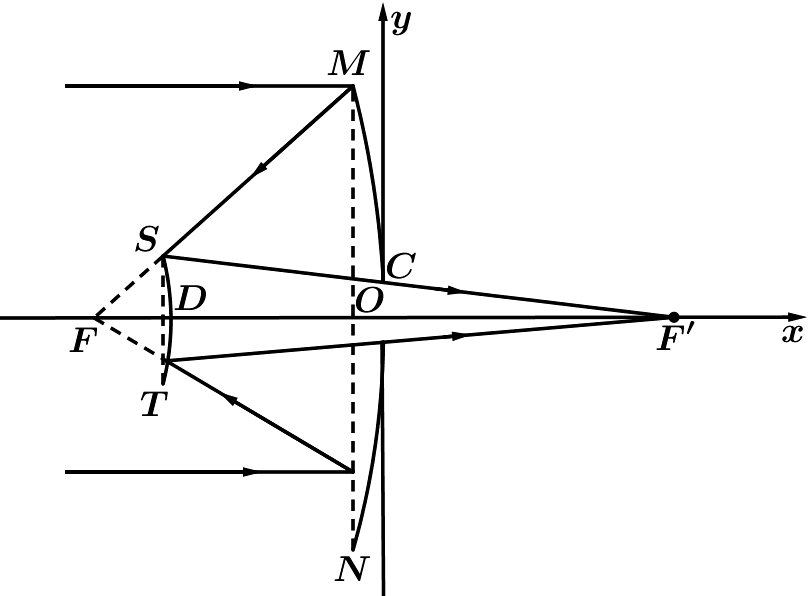
同理可知，与分别为平面与的法向量.

设直线的方向向量，则，即，取，则.

设直线与平面所成角为，则.

故答案为：.

16. 抛物线的光学性质：平行于抛物线的对称轴的光线经抛物线反射后经过抛物线的焦点双曲线的光学性质：从双曲线一个焦点发出的光，经过双曲线反射后，反射光线的反向延长线都汇聚到双曲线的另一个焦点上这些性质可以应用在天文望远镜的设计等方面卡塞格林式望远镜是由两块反射镜组成的望远镜，如图中心截面示意图所示反射镜中大的称为主镜，小的称为副镜，通常在主镜的中央开孔，成像于主镜后面.主镜是凹抛物面镜中心截面是抛物线，当来自天体平行对称轴的光线投射到主镜上，经过主镜反射，将会汇聚到卡塞格林焦点*F*处，但光线尚未完全汇聚时，又受到以*F*为焦点的凸双面镜中心截面是双曲线*D*的一支的反射，穿过主镜中心孔后汇聚于另一个焦点处以的中点为原点，为*x*轴，建立平面直角坐标系若单位：米，则抛物线*C*的方程为\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_凹抛物面镜的口径*MN*为，凸双面镜的口径*ST*为，若所有被凹抛物面镜汇聚的光线恰好都能被凸双曲面镜反射，则双曲线*D*的离心率为\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_.



【答案】 ①.  ②. 

【解析】

【分析】根据抛物线*C*的焦点坐标为，求得其方程；根据，求得M的坐标，由*ST*=，求得*S*的纵坐标，再根据，求得其横坐标，再根据双曲线的焦点为*F*，设双曲线方程为，将*S*的坐标代入求解.

【详解】因为曲线C的焦点坐标为，

所以，

则抛物线*C*的方程为，

因为，

所以 ，则，

设，因为*ST*=，则，

易知，

则，解得，

又双曲线的焦点为*F*，则，

所以双曲线方程为，

将，代入上式，

解得或，

又，则，

所以，

故答案为：，

**四、解答题：本大题共6个小题，共70分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.**

17. 已知圆过三个点.

(1)求圆的方程；

(2)过原点的动直线与圆相交于不同的两点，求线段的中点的轨迹.

【答案】(1)

(2)

【解析】

【分析】(1)设圆的方程为，列出方程组，求得的值，即可求得圆的方程；

(2)根据题意得到，得出在以为直径的圆上，得到以为直径的圆的方程，再联立两圆的方程组，求得交点坐标，即可得到点的轨迹方程.

【小问1详解】

解：设圆的方程为，

因为圆过三个点，

可得，解得，

所以圆的方程为，即.

【小问2详解】

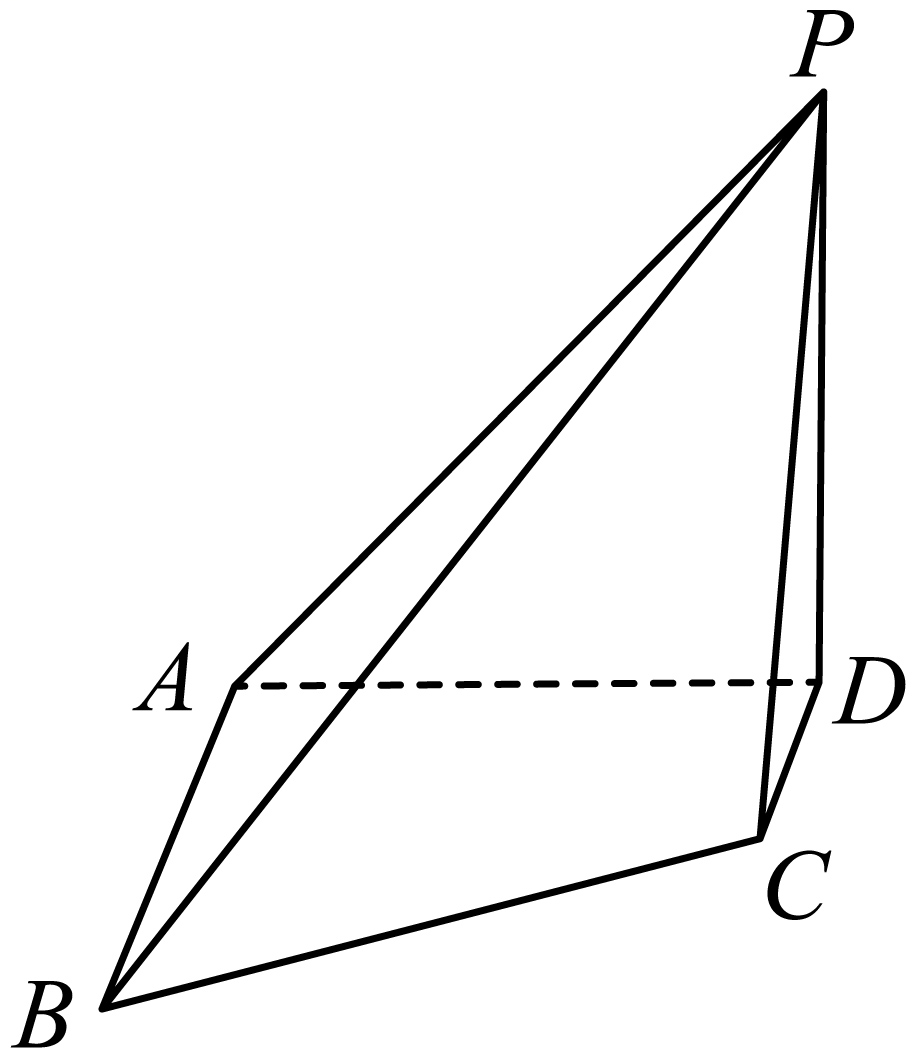
解：因为为线段的中点，且，所以在以为直径的圆上，

以为直径的圆的方程为，

联立方程组，解得或，

所以点的轨迹方程为.

18. 如图，在四棱锥中，底面四边形为直角梯形，，，，，，.



(1)求证：平面平面；

(2)求平面和平面的夹角大小.

【答案】(1)证明见解析；

(2).

【解析】

【分析】(1)根据线面垂直的判定定理，结合面面垂直的判定定理进行证明即可；

(2)建立空间直角坐标系，利用空间平面向量夹角公式

【小问1详解】

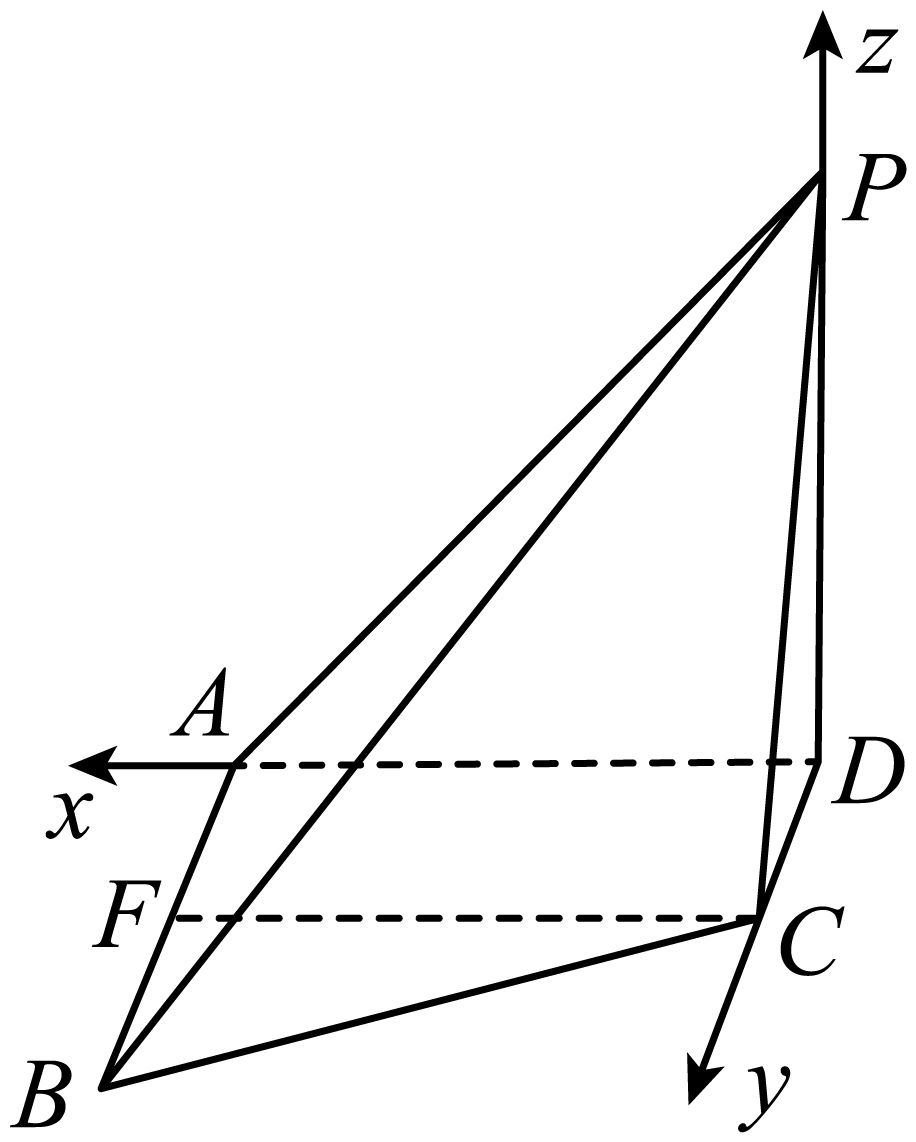
如图，过作于.由题意可知，在直角梯形中，，，，所以，.

又，，所以，所以.

因为，又，面，

所以面.

因为面，所以面面；

【小问2详解】

由(1)可知，，，两两垂直，故可以点为坐标原点，以，，分别为*x，y，z*轴建立如图所示的空间直角坐标系.

易知，，，，

则，，，

设平面的法向量为，则

令，则，，即，

设平面的法向量为，则

令，则，，即，

所以，即平面和平面的夹角为.

19. 记数列的前*n*项之积为.

(1)若为等比数列，，，求；

(2)若为等比数列，，，求数列的前*n*项和.

【答案】(1)；

(2).

【解析】

【分析】(1)设公比为，求出即得解；

(2)设等比数列公比为，求出，当时，，即得解.

【小问1详解】

解：设公比为，因为数列的前项之积，

由，得，，

解得，，所以，

所以.

【小问2详解】

解：设等比数列公比为，则，由得，

所以，

当时，，当时，，

所以时，，

当时，也满足上式，即，

所以数列的前项和.

20. 已知椭圆的左､右焦点分别为，，点为椭圆上一点.

(1)求椭圆的方程；

(2)过点作动直线与椭圆交于*A*，两点，过点*A*作直线的垂线，垂足为，求证：直线过定点.

【答案】(1)；(2)证明见解析.

【解析】

【分析】(1)根据椭圆的定义，结合题干条件，可求得*a、c*值，根据*a，b，c*的关系，可求得*b*值，即可得答案.

(2)当直线不与*x*轴平行时，设直线的方程为，，，，将直线与椭圆联立，根据韦达定理，可得，表达式，化简计算，可得直线*BN*的方程，即可求得定点；当直线平行*x*轴时，经检验符合题意，即可得证.

【详解】(1)解：由椭圆定义知：，

所以，又，则，

所以椭圆方程为.

(2)证明：当直线不与*x*轴平行时，

设直线的方程为，，，，

由消去，整理得：，

所以①，②，

又，所以直线*BN*的方程为，

即③，

又，

所以④，

将①､②式代入④式化简得：⑤，

⑤代入③化简得直线的方程为，

故直线过定点.

当直线平行*x*轴时，交点*A*，为长轴两个端点，则直线*BN*为*x*轴，经过点.

综上：直线过定点.

【点睛】解题的关键是熟练掌握椭圆的定义、韦达定理的应用等知识，易错点为：设直线时，需检验与*x*轴平行的直线是否满足题意.

21. 容器*A*内装有6升浓度为20%的酒精水溶液，容器*B*内装有4升浓度为5%的酒精水溶液，先将*A*内的酒精水溶液倒1升进入*B*内，再将*B*内的酒精水溶液倒1升进入*A*内，称为一次操作；这样反复操作*n*次，*A*、*B*容器内的酒精水溶液浓度分别为，.(酒精水溶液浓度=(酒精水溶液中乙醇体积/酒精水溶液总体积)×100%)

(1)请计算，，并判断数列是否为等比数列?若是，求出其通项公式；若不是，请说明理由；

(2)至少要经过几次操作，*A*、*B*两容器中溶液浓度之差小于1%?(，)

(3)求，的表达式.

【答案】(1)，，是，；

(2)至少要操作7次才能达到要求；

(3)，

【解析】

【分析】(1)先根据题意求出，，并求出，得到数列为等比数列，并求出通项公式；

(2)在第一问的基础上列出不等式，解不等式求出答案；

(3)根据与得到，由累加法求出，并求出.

【小问1详解】

，，

，，

所以，

所以数列是以为首项，以为公比的等比数列，

所以；

【小问2详解】

由得，，

所以至少要操作7次才能达到要求；

【小问3详解】

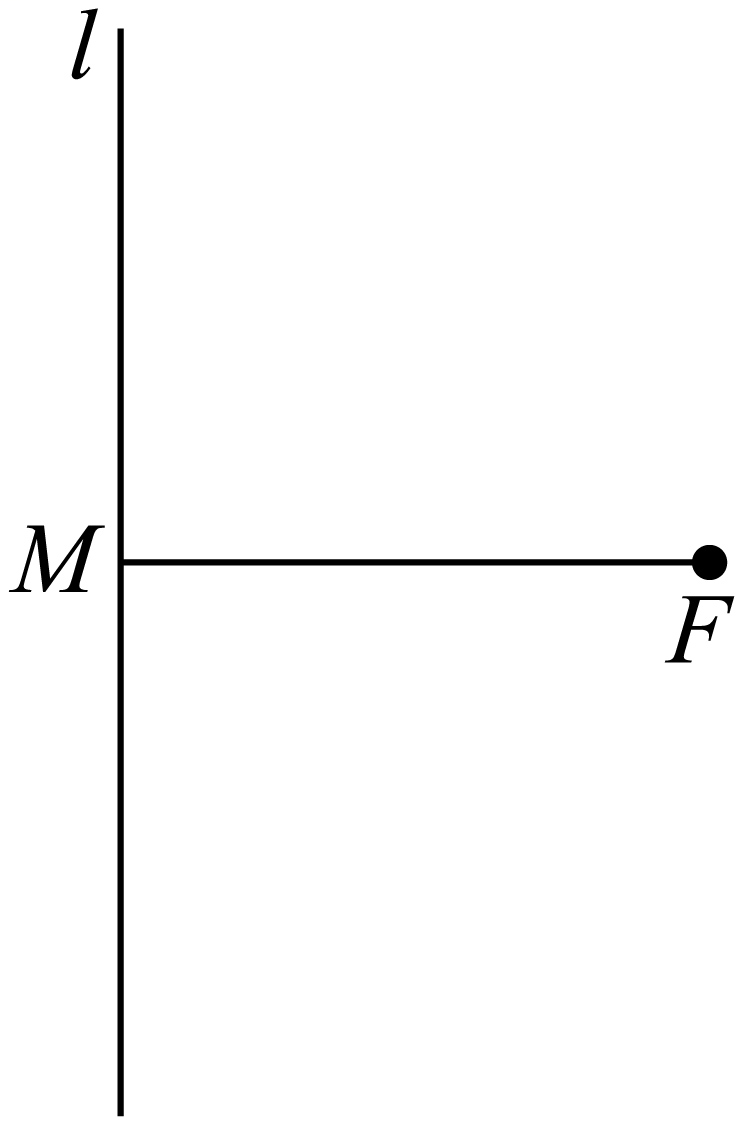
由(1)知，，

所以

，

.

22. 如图所示，定点到定直线的距离.动点到定点的距离等于它到定直线距离的2倍.设动点的轨迹是曲线.



(1)请以线段所在的直线为轴，以线段上的某一点为坐标原点，建立适当的平面直角坐标系，使得曲线经过坐标原点，并求曲线的方程；

(2)请指出(1)中的曲线的如下两个性质：①范围；②对称性.并选择其一给予证明.

(3)设(1)中的曲线除了经过坐标原点，还与轴交于另一点，经过点的直线交曲线于，两点，求证：.

【答案】(1)建系答案见解析，；(2)答案见解析；(3)证明见解析.

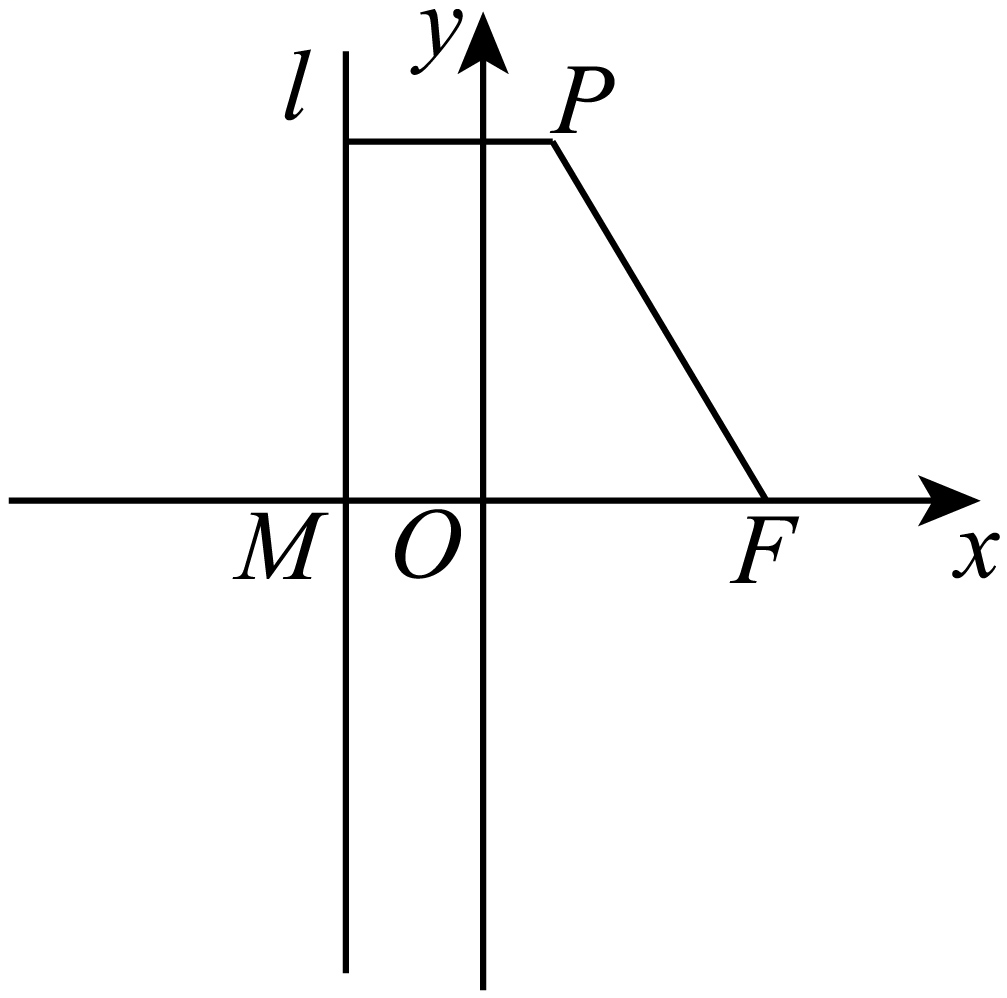
【解析】

【分析】(1)根据“定点到定直线的距离.动点到定点的距离等于它到定直线距离的2倍”，建立坐标系得到关于*P*点的坐标的关系式，即曲线的方程，原点距点*M*的距离为1.

(2)根据曲线的方程以及图像的特点，得出曲线的两个性质，范围和对称性.

(3)证明，即是证明，故需联立直线与曲线方程得到，.然后得出结果为0，即得到证明.

【详解】解：(1)在线段上取点，使得，以点为原点，以线段所在的直线为轴建立平面直角坐标系.



设动点的坐标为，则有，，由题意，有

，

整理得：.①

(2)①范围：或，

②对称性：

曲线关于成轴对称；

曲线关于成轴对称；

曲线关于成中心对称.

范围证明：

由，，得，

所以或；

，所以

对称性证明：

在方程①中，把换成，方程①不变，

所以，曲线关于成轴对称；

在方程①中，把换成，方程①不变，

所以，曲线关于成轴对称；

在方程①中，把换成，或把换成，方程①不变，

所以，曲线关于成中心对称；

(3)将代入，解得，(舍).

所以.

(*i*)若直线垂直于轴：

将代入，解得，

此时，､.所以，，.

.

(*ii*)若直线不垂直于轴：

设､，，.

直线的方程为，将其代入，整理得，

.

所以，，.

.

.

故，.

【点睛】(1)根据题目信息建立适当坐标系，得到关于点的横纵坐标的等量关系.

(2)利用图形观察特点，得出性质.

(3)将证明垂直的问题转化为证明向量乘积为0的问题，联立方程组，对基本的运算由一定的要求.