**广州中学2022-2023学年高二第一学期期末考试**

**数学试题**

**班级\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_姓名\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_考号\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_**

**一、单项选择题(每小题5分，共40分)**

1. 经过点且与直线垂直的直线方程为( )

A.  B. 

C.  D. 

【答案】C

【解析】

【分析】

先由垂直关系，求出所求直线的斜率，再由直线的点斜式方程，即可得出结果.

【详解】因为所求直线与直线垂直，

所以其斜率为，

又所求直线过点，

因此，所求直线方程为，即.

故选：C.

2. 若平面*α*，*β*的法向量分别为＝(－1，2，4)，＝(*x*，－1，－2)，且*α*⊥*β*，则*x*的值为( )

A. 10 B. －10

C.  D. －

【答案】B

【解析】

【分析】由*α*⊥*β*，可得它们的法向量也互相垂直，从而可求出*x*的值

【详解】解：因为*α*⊥*β*，所以它们的法向量也互相垂直，

所以＝(－1，2，4)·(*x*，－1，－2)＝0，

解得*x*＝－10．

故选：B

3. 已知圆经过原点，且其圆心在直线上，则圆半径的最小值为( )

A.  B.  C.  D. 

【答案】B

【解析】

【分析】

计算出原点到直线的距离，即为所求.

【详解】当与直线垂直时，圆的半径最小，

因此，圆半径的最小值为.

故选：B.

4. 已知中心在原点的双曲线的右焦点为,离心率等于,在双曲线的方程是

A.  B.  C.  D. 

【答案】B

【解析】

【详解】依题意,,所以,从而,,故选B．

【考点定位】考查双曲线方程．

5. 已知等比数列满足，且成等差数列，则( )

A.  B.  C.  D. 

【答案】C

【解析】

【分析】

设公比为，由等比数列的通项公式和等差数列中项性质列方程，解方程可得*q*，即可得到所求值

【详解】成等差数列，得，即：，

所以＝16，

故选：C.

【点睛】本题考查等比数列的通项公式和等差数列中项性质，考查方程思想和运算能力，属于基础题.

6. 已知抛物线的焦点与椭圆的一个焦点重合，且椭圆截抛物线的准线所得线段长为6，那么该椭圆的离心率为　　

A. 2 B.  C.  D. 

【答案】D

【解析】

【分析】先求出抛物线的焦点、准线，再根据椭圆的通径公式求出a、c，算出离心率.

【详解】易知抛物线的焦点(2，0)，准线x=-2，

即椭圆的c=2，

因为抛物线的准线恰好过椭圆的焦点，即相交的线段为椭圆的通径；

即通径为 ，又因为c=2

解得a=4

所以离心率

故选D.

【点睛】本题目考察了抛物线的方程和性质，以及椭圆的性质，本题关键点在通径上，如果记不得通径公式就直接带入计算，一样可得答案，属于一般题型.

7. 在四面体中，点*G*是的重心，设，，，则( )

A.  B. 

C.  D. 

【答案】B

【解析】

【分析】结合重心的知识以及空间向量运算求得正确答案.

【详解】设是中点，

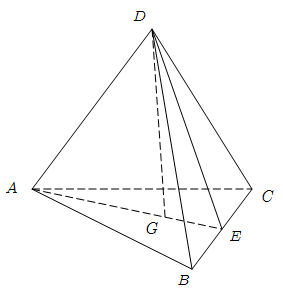






.

故选：B



8. 已知圆,直线,若直线上存在点，过点引圆的两条切线,使得,则实数的取值范围是

A.  B. [,]

C.  D. )

【答案】D

【解析】

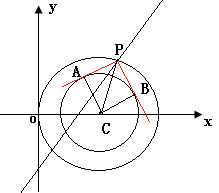
【分析】由题意结合几何性质可知点*P*的轨迹方程为，则原问题转化为圆心到直线的距离小于等于半径，据此求解关于*k*的不等式即可求得实数*k*的取值范围.

【详解】圆*C*(2,0)，半径*r*＝，设*P*(*x*，*y*)，

因为两切线，如下图，*PA*⊥*PB*，由切线性质定理，知：

*PA*⊥*AC*，*PB*⊥*BC*，*PA*＝*PB*，所以，四边形*PACB*为正方形，所以，｜*PC*｜＝2，

则：，即点*P*的轨迹是以(2,0)为圆心，2为半径的圆.



直线过定点(0，－2)，直线方程即，

只要直线与*P*点的轨迹(圆)有交点即可，即大圆的圆心到直线的距离小于等于半径，

即：，解得：，

即实数的取值范围是).

本题选择*D*选项.

【点睛】本题主要考查直线与圆的位置关系，轨迹方程的求解与应用，等价转化的数学思想等知识，意在考查学生的转化能力和计算求解能力.

**二、多项选择题(每小题5分，共20分，有多项符合要求，全部选对得5分，部分选对得2分，有选错得0分)**

9. 已知圆：和圆：，以下结论正确的是( )

A. 若和只有一个公共点，则

B. 若，则和关于直线对称

C. 若，则和外离

D. 若且和的公共弦长为，则

【答案】BCD

【解析】

【分析】根据圆与圆的位置关系对选项进行分析，从而确定正确答案.

【详解】圆的圆心为，半径为.

圆的圆心为，半径为.

圆心距.

当时，，两圆内切，和只有一个公共点，A选项错误.

当时，两个圆的半径相等，和关于直线对称，B选项正确.

当时，，即，和外离，C选项正确.

当，，，

所以，所以两圆相交，，两式相减并化简得，

即相交弦所在直线方程为，

所以公共弦长为，D选项正确.

故选：BCD

10. 已知曲线*C*的方程为(，且，)，则下列结论正确的是( )

A. 当时，曲线*C*为圆 B. 若曲线*C*为椭圆，且焦距为，则

C. 当或时，曲线*C*为双曲线 D. 当曲线*C*为双曲线时，焦距等于4

【答案】AC

【解析】

【分析】写出当时的曲线方程，即可判断A;分情况求出当曲线表示椭圆时*k*的值，可判断B；当或时，判断的正负，即可判断C; 当曲线*C*为双曲线时,确定*k*的范围，求得焦距，可判断D.

【详解】当时,方程为，即，表示圆，故A正确；

若曲线*C*为椭圆，且焦距为，

则当焦点在*x*轴上， 且 ，解得 ；

当焦点在*y*轴上， 且 ，解得 ,

故此时或，故B错误；

当时， ，曲线表示的是焦点位于*y*轴上的双曲线；

当时， ，曲线表示的是焦点位于*x*轴上的双曲线；故C正确；

当曲线*C*为双曲线时，  ，即或，

当时，，焦距 ，

当时，，焦距 ，

故D错误，

故选：AC

11. 已知数列的前项和为，与是方程的两根，则下列说法正确的是( )

A. 若是等差数列，则

B. 若是等比数列，则

C. 若是递减等差数列，则当取得最大值时，或

D. 若是递增等差数列，对恒成立，则

【答案】BC

【解析】

【分析】由题意利用等差数列性质求出公差和首项，利用前项和求出，再利用二次函数性质，基本不等式，得出结论判断即可.

【详解】因为数列的前项和为，与是方程的两根，

由韦达定理得，，，所以解得，或，；

对于A选项：若等差数列，则，故A不正确；

对于B选项：若是等比数列，则，因为，

所以，则，故B正确；

对于C选项：若是递减等差数列，所以，，解得公差，

首项，所以，

故当或时取得最大值，故C正确；

对于D选项：若是递增等差数列，所以，，解得公差，

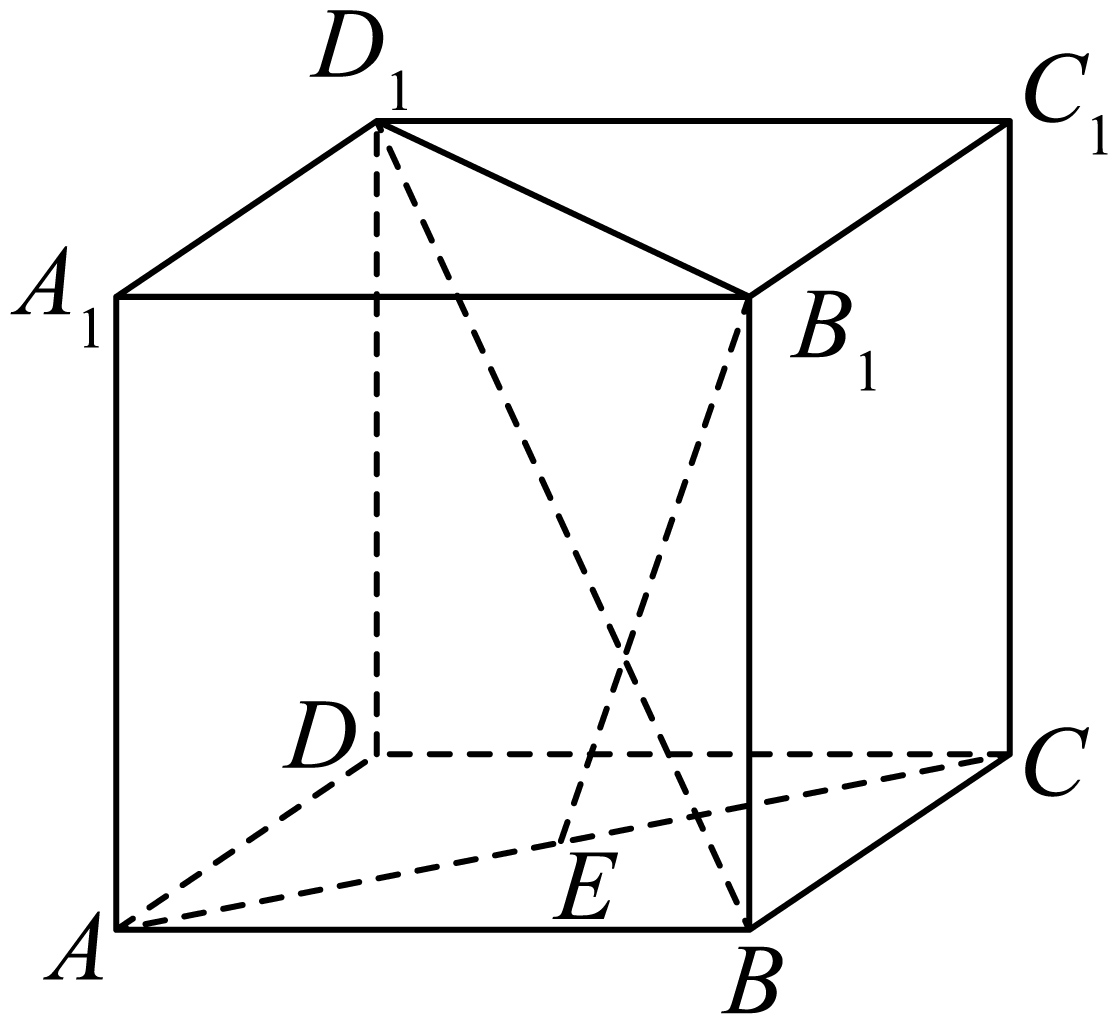
首项1，所以，因为对恒成立，

即恒成立，即恒成立，因为，

当且仅当时等号成立，故，则，故D不正确.

故选：BC.

12. 如图所示，在正方体中，为的中点.则( )



A.  B. 

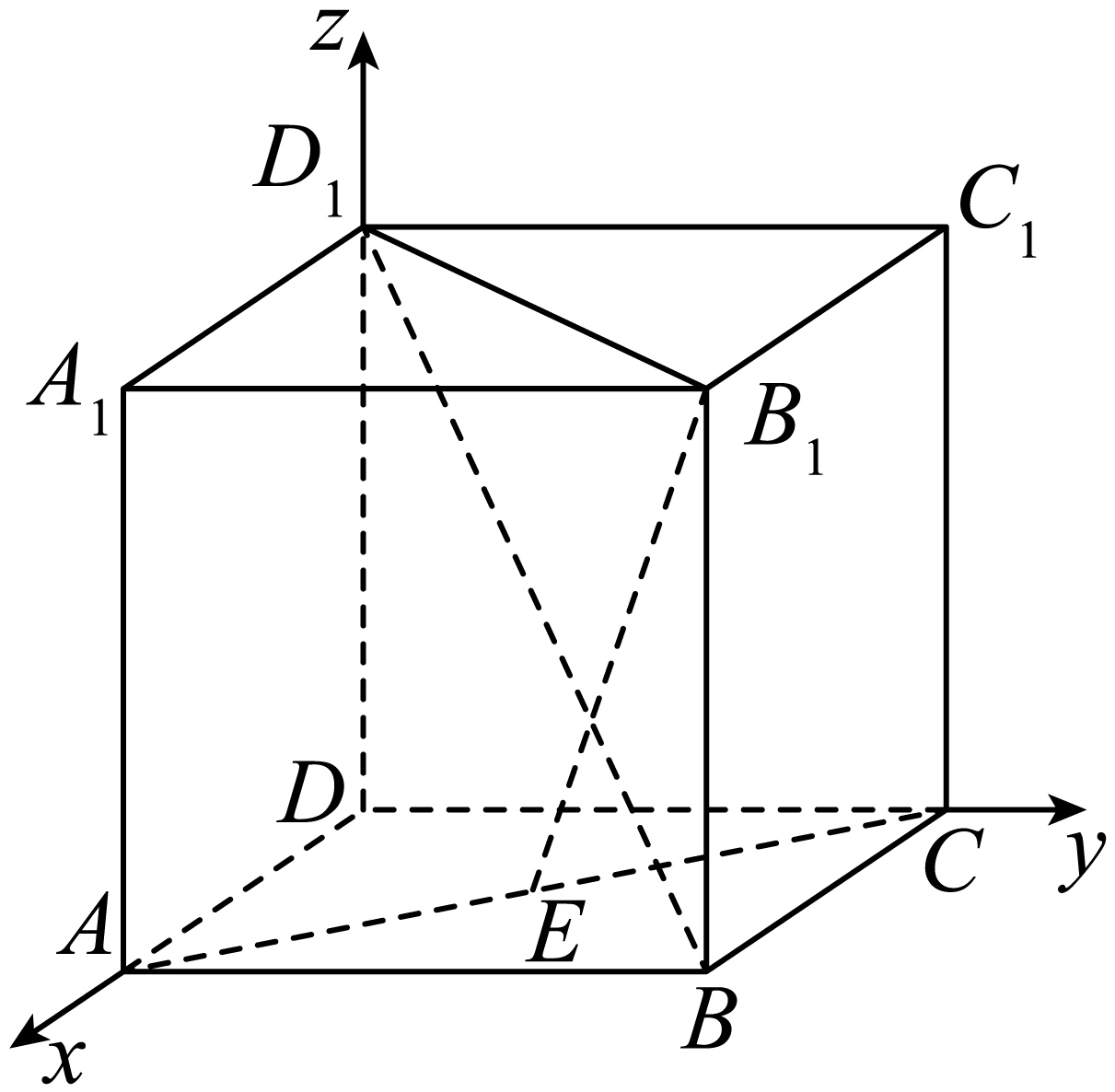
C.  D. 

【答案】ABC

【解析】

【分析】建立空间直角坐标系，利用空间向量夹角公式、空间向量数量积的运算性质逐一判断即可.

【详解】建立如图所示的空间直角坐标系，



设该正方体的棱长为，

则，

因为，所以，

因为，所以，因此选项A正确；

因为，

所以，所以选项B正确；

因为,

所以有，所以选项C正确；

因为，

所以有，

所以不正确，因此选项D不正确，

故选：ABC

**三、填空题(每小题5分，共20分)**

13. 两直线与平行，则它们之间的距离为\_\_\_\_\_\_\_.

【答案】

【解析】

【详解】因为直线与平行，得，

所以，即，

化为

由平行直线距离公式.

14. 已知数列是等比数列，函数的两个零点是，则\_\_\_\_\_\_\_\_\_

【答案】

【解析】

【分析】

首先利用韦达定理可得，再利用等比数列的性质即可求解.

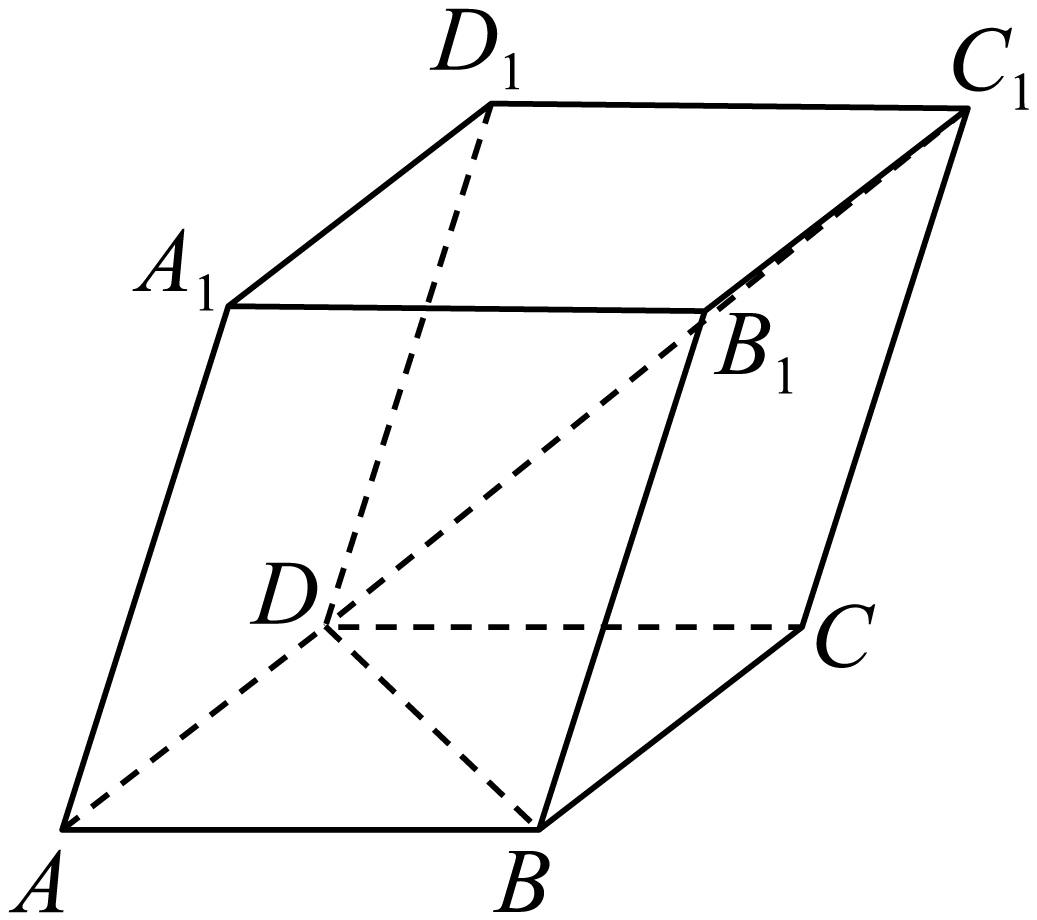
【详解】由韦达定理可知，，

则，，从而，且.

故答案为：

【点睛】本题考查了等比数列的性质，需熟记性质，属于基础题.

15. 如图,在棱长都为1的平行六面体中,两两夹角均为,则\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_.



【答案】0

【解析】

【分析】根据空间向量的加减,将转化为之间的运算,再根据模及夹角计算结果即可.

【详解】解:由题知平行六面体棱长为1,

且两两夹角均为,

所以









.

故答案为:0

16. 已知椭圆的短轴长为2，上顶点为，左顶点为，左、右焦点分别是，，且的面积为，点为椭圆上的任意一点，则的取值范围是\_\_\_\_\_\_.

【答案】

【解析】

【分析】根据的面积和短轴长得出*a*，*b*，*c*的值，从而得出的范围，得到关于的函数，从而求出答案．

【详解】由已知得，故，∵的面积为，

∴，∴，又，

∴，，∴，

又，∴，

∴.

即的取值范围为.

故答案为

【点睛】本题考查了椭圆的简单性质，函数最值的计算，熟练掌握椭圆的基本性质是解题的关键，属于中档题．

**四、解答题(共6小题，共计70分)**

17. 已知等差数列满足.

(1)求数列的通项公式;

(2)若数列满足,再从①;②;③这三个条件中任选一个作为已知,求数列的前项和.

【答案】(1)

(2)选①时,;选②时,;选③时,.

【解析】

【分析】(1)由题意设出公差,代入中,求出基本量即可求出通项公式;

(2)先选择一种条件,根据递推关系得到为等比数列,求出的首项和公比,用分组求和即可得.

【小问1详解】

解:由题知是等差数列,

记数列公差为,

因为,

所以,

解得,

故;

【小问2详解】

由(1)知,

当选择①时:

因为,,

故,

所以,

即为以2为首项,2为公比的等比数列,

所以,





;

当选择②时:

因为,,

故,

所以,

即为以2为首项,为公比的等比数列,

所以





;

当选择③时:

因为,,

故,

所以,

即为以2为首项,-1为公比的等比数列,

所以,





.

18. 已知双曲线

(1)若，求双曲线的焦点坐标、顶点坐标和渐近线方程；

(2)若双曲线的离心率为，求实数的取值范围．

【答案】(1)焦点坐标为，，顶点坐标为，，渐近线方程为；(2).

【解析】

【分析】(1)根据双曲线方程确定，即可按照概念对应写出焦点坐标、顶点坐标和渐近线方程；

(2)先求(用表示)，再根据解不等式得结果.

【详解】(1)当时，

双曲线方程化为，

所以，，，

所以焦点坐标为，，顶点坐标为，，

渐近线方程为.

(2)因为，

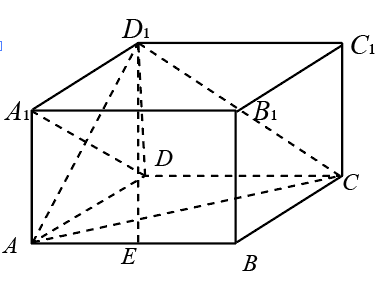
所以，

解得，

所以实数的取值范围是．

【点睛】本题根据双曲线方程求焦点坐标、顶点坐标和渐近线方程，根据离心率求参数范围，考查基本分析求解能力，属基础题.

19. 如图，在长方体中，，，*E*为*AB*的中点.



(1)证明：；

(2)求点*E*到平面的距离；

(3)求平面与平面夹角的余弦值.

【答案】(1)见解析；(2)；(3).

【解析】

【分析】

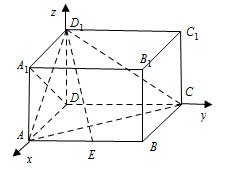
(1)首先建立空间直角坐标系，证明；

(2)求平面的法向量，利用点到平面的距离的向量公式代入求解；

(3)求平面与平面的法向量，利用法向量求二面角夹角的余弦值.

【详解】(1)如图，以，，为轴的正方形建立空间直角坐标系，建立空间直角坐标系，

，，，



，，，

所以；

(2)，，，，

 ，

设平面的法向量为，

则，即，令则，

所以，

则点到平面的距离；

(3)由(1)可知，

又，，且，

平面，是平面的法向量，

，

平面与平面夹角是锐角，

所以平面与平面夹角的余弦值为.

【点睛】思路点睛：本题第二问涉及点到平面的距离，1.可以采用等体积转化求解；2.利用向量法，直接代入公式求解；3.几何法，确定点在平面内的射影，或是利用面面垂直，点到交线的距离就是点到平面的距离.

20. 已知抛物线的准线方程是.

(Ⅰ)求抛物线的方程；

(Ⅱ)设直线与抛物线相交于，两点，为坐标原点，证明：.

【答案】(Ⅰ)(Ⅱ)详见解析

【解析】

【详解】试题分析：(Ⅰ)利用排趋性的准线方程求出p，即可求解抛物线的方程；(Ⅱ)直线y=k(x-2)(k≠0)与抛物线联立，通过韦达定理求解直线的斜率关系即可证明OM⊥ON

试题解析：(Ⅰ)解：因为抛物线的准线方程为，

所以 ， 解得，

所以 抛物线的方程为.

(Ⅱ)证明：设，.

将代入，

消去整理得 .

所以 .

由，，两式相乘，得 ，

注意到，异号，所以 

所以直线与直线的斜率之积为，

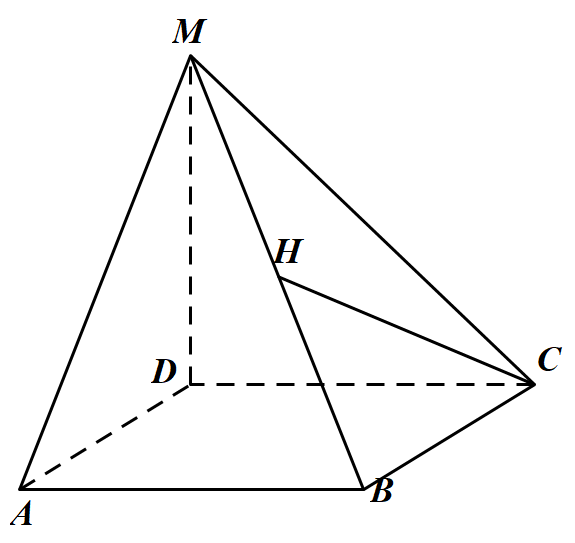
即 .

考点：直线与抛物线的位置关系；抛物线的标准方程

21. 如图，在四棱锥中，底面是平行四边形，且，，平面，是中点，在下面两个条件中任选一个，并作答：

①二面角的大小是；②．

若\_\_\_\_\_\_，求与平面所成角的正弦值．



【答案】答案见解析.

【解析】

【分析】若选①，先证明，轴，以为坐标原点，以，所在直线为轴、轴建立如图所示空间直角坐标系，再利用向量法求与平面所成角的正弦值；

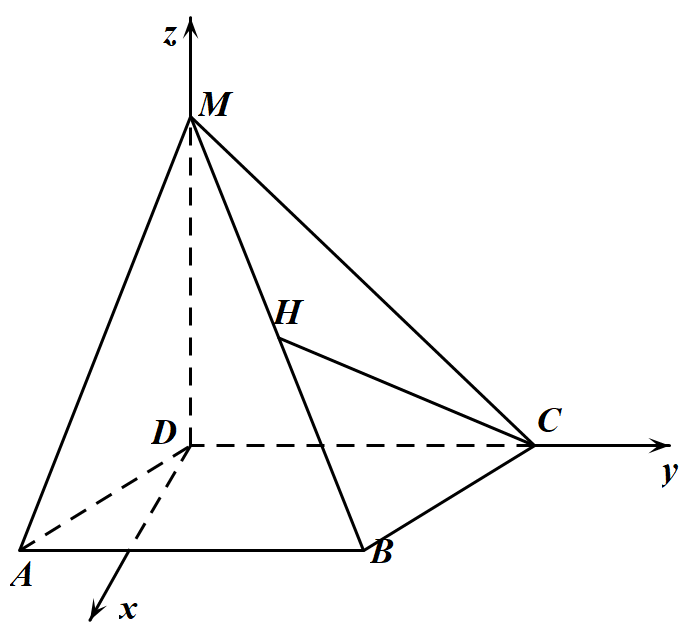
若选②，以为坐标原点，以，，所在直线分别为轴，轴，轴建立如图所示的空间直角坐标系，再利用向量法求与平面所成角的正弦值.

【详解】若选①：

因为平面，所以，，

所以就是二面角的平面角，所以.

过作轴，以为坐标原点，以，所在直线为轴、轴建立如图所示的空间直角坐标系.



则，.

所以.

取平面的一个法向量.

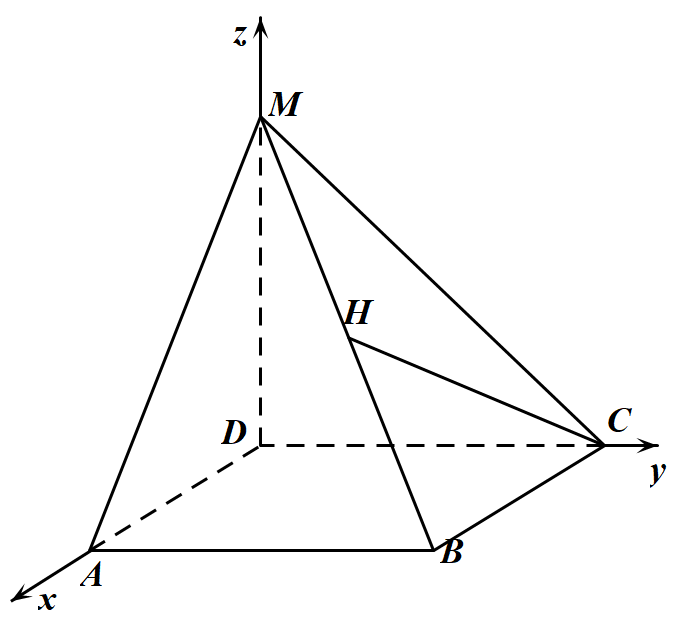
设与平面所成角为，则.

所以与平面所成角的正弦值是.

若选②，

因平面，，所以，，两两垂直.

以为坐标原点，以，，所在直线分别为轴，轴，轴建立如图所示的空间直角坐标系，



则，.所以.

取平面的一个法向量.

设与平面所成角为，

则.

所以与平面所成角的正弦值是.

【点睛】本题主要考查空间角的计算和应用，意在考查学生对这些知识的理解掌握水平.

22. 已知圆，*P*(2，0)，*M*点是圆*Q*上任意一点，线段*PM*的垂直平分线交半径*MQ*于点*C*，当*M*点在圆上运动时，点*C*的轨迹为曲线*C*．

(1)求曲线*C*方程；

(2)已知直线*l*：*x*＝8，*A、B*是曲线*C*上的两点，且不在*x*轴上，，垂足为，，垂足为，若*D*(3，0)，且的面积是△*ABD*面积的5倍，求△*ABD*面积的最大值．

【答案】(1)

(2)3

【解析】

【分析】(1)由定义法求出曲线*C*的方程；

(2)先判断出直线*AB*过定点*H*(*2*,0)或*H*(*4*,0)；当*H*(2,0)时，可设直线*AB*：.用“设而不求法”表示出，不妨设()，利用函数的单调性求出△*ABD*面积的最大值.

【小问1详解】

因为线段*PM*的垂直平分线交半径*MQ*于点*C*，所以,

所以,符合椭圆的定义，

所以点*C*的轨迹为以*P、Q*为焦点的椭圆，其中，所以

，

所以曲线*C*的方程为.

【小问2详解】

不妨设直线*l*：*x*＝8交*x*轴于*G*(8,0)，直线*AB*交*x*轴于*H*(*h*,0)，则,.

因为，， ，所以.

又因为的面积是△*ABD*面积的5倍，所以.

因为*G*(8,0)，*D*(3，0)，所以，所以*H*(2,0)或*H*(4,0).

当*H*(*4*,0)时，则*H与A*(或*H*与*B*)重合，不合题意；

当*H*(2,0)时，要想构成三角形*ABD*，直线*AB*的斜率不为0，可设直线*AB*：.

设,则，消去*x*可得：，

所以，，，

所以.

不妨设()，则，由对勾函数的性质可知，在上单调递减，所以当*t*=1时，，此时最大

综上所述，△*ABD*面积的最大值为3.

【点睛】(1)“设而不求”是一种在解析几何中常见的解题方法，可以解决直线与二次曲线相交的问题；

(2)解析几何中最值计算方法有两类：

①几何法：利用几何图形求最值；②代数法：表示为函数，利用函数求最值.