**2022~2023学年度石家庄市高二第一学期期中考试**

**数学**

**一､单项选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分，下列每小题所给选项只有一项符合题意.请将正确答案的序号填涂在答题卡上.**

1. 已知空间向量，，则向量在向量上的投影向量是( )

A. (4，0，3) B. (4，0，3} C. (2，2，-1) D. (2，2，-1)

【答案】C

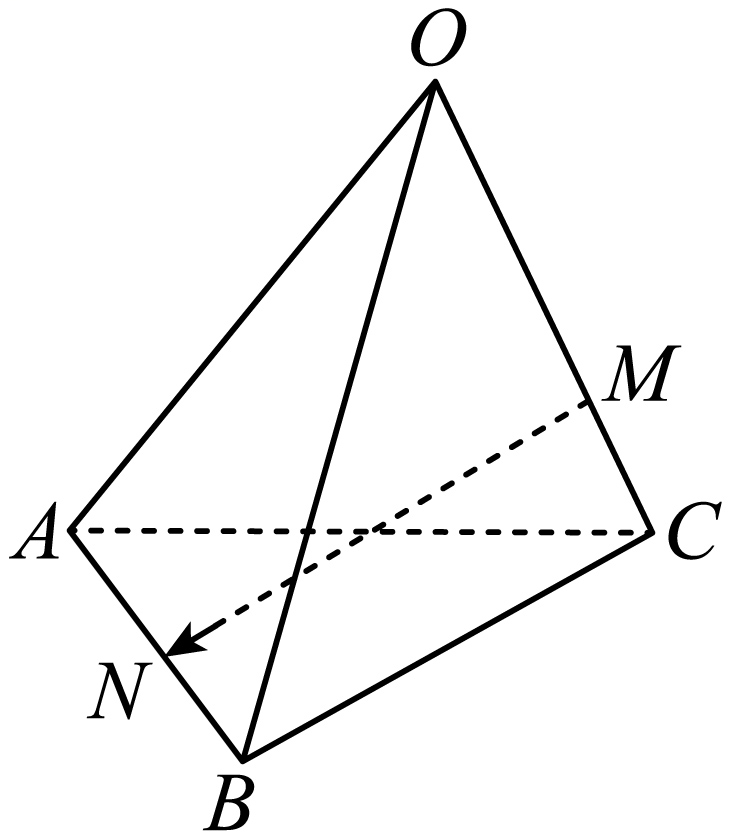
【解析】

【分析】根据向量在向量上的投影向量的概念求解即可.

【详解】向量在向量上的投影向量为，

故选：C

2. 如图，空间四边形*OABC*中，，，，点*M*在线段*OC*上，且*OM*=3*MC*，点*N*为*AB*中点，则( )



A.  B. 

C.  D. 

【答案】D

【解析】

【分析】由题意结合图形，直接利用，即可求解.

【详解】因为空间四边形中，，，，点在线段上，且，点为中点，

所以，，

所以.

故选：D

3. 已知点，，若直线与线段有交点，则直线斜率的取值范围为( )

A.  B.  C.  D. 

【答案】A

【解析】

【分析】先求出直线的定点，再结合图象利用斜率公式计算求解即可.

【详解】由直线，

变形可得，

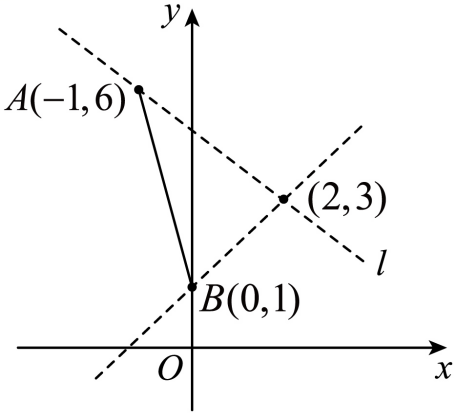
由，解得，

可得直线恒过定点，

则，，

若直线与线段有交点，则直线斜率的取值范围为.

故选：A.



4. 唐代诗人李颀的诗《古从军行》开头两句说：“白日登山望烽火，黄昏饮马傍交河，“诗中隐含着一个有趣的数学问题——“将军饮马”问题，即将军在观望火之后从山脚下某处出发，先到河边饮马后再回到军营，怎样走才能使总路最短？试求最小( )

A.  B.  C.  D. 

【答案】B

【解析】

【分析】将已知变形设出，，则为点分别到点，的距离之和，则，即可根据两点间距离计算得出答案.

【详解】，

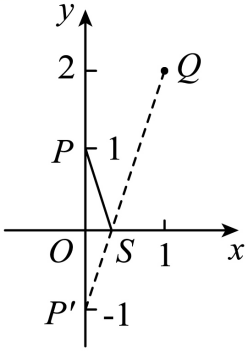
，

设，，，

则为点分别到点，的距离之和，

点关于轴的对称点的坐标为，

连接，

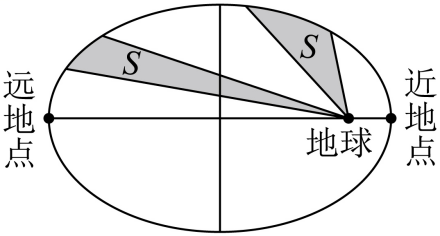


则，

当且仅当，，三点共线时取等号，

故选：B.

5. 1970年4月24日，我国发射了自己的第一颗人连地球卫星“东方红一号”，从此我国开向了人造卫层的新篇章.人造地球卫星绕地球运行遵循开普物行星运动定律；卫星在以地球为焦点的椭圆轨道上绕地球运行时，其运行速度是变化的，速度的变化服从面积守恒规律，即卫星的向径(卫星与地球的连线)在相同的时间内扫过的面积相等，如图建系，设椭圆道的长轴长，短轴长，焦距分别为2*a*，2*b*，2*c*，下列结论正确的是( )



A. 卫星向径的最大值为2*a*

B. 卫星向径的最小值为2*b*

C. 卫星绕行一周时在第三象阻内运动的时间小于在第四象限内运动的时间

D. 卫星向径的最小值与最大值的比值越大，椭圆轨道越圆

【答案】D

【解析】

【分析】选项AB，由卫星向径的最小值为*a*-*c*，最大值为*a*+*c*判断；选项C，由开普勒行星运动定律卫星的向径在相同的时间内扫过的面积相等判断；选项D，由判断.

【详解】解：由题意得：向径为卫星与地球的连线，即椭圆上的点与焦点的连线的距离，

由椭圆的几何性质可知卫星向径的最小值为*a*-*c*，最大值为*a*+*c*，故AB错误；

由开普勒行星运动定律卫星的向径在相同的时间内扫过的面积相等，

在第二象限运动时扫过的面积大于在第一象限运动时扫过的面积，

故卫星在第二象限内运动的时间大于在第一象限运动时扫过的时间，

由椭圆的对称性可知，卫星绕行一周时在第三象限内运动的时间大于在第四象限运动的时间，故C错误；

当卫星向径的最小值与最大值的比值越大时，由，可得*e*越小，椭圆越圆，故D正确，

故选：D

6. 在长方体*ABCD*-*A*1*B*1*C*1*D*1中，*M*为*A*1*B*1中点，下列说法正确的是( )

A. *BC*1平面*D*1*MC* B. *C*1*D*1平面*ACM* C. *CM*平面*A*1*BD* D. *B*1*C*平面*D*1*MB*

【答案】D

【解析】

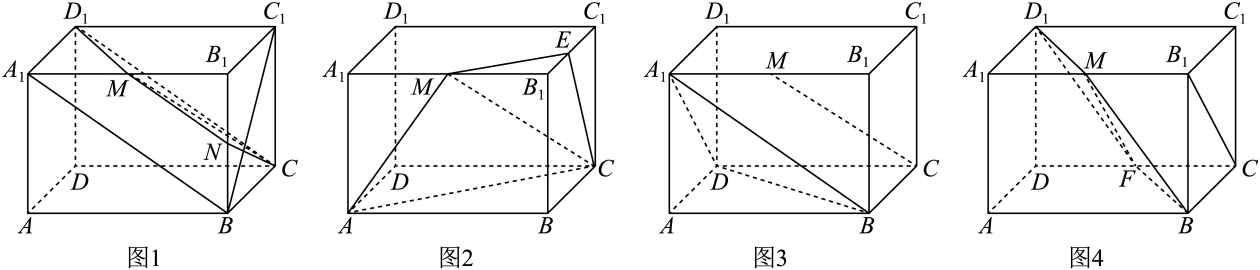
【分析】在长方体中，判断选项中直线与各平面的平行关系，可以通过取正方体棱的中点，找到各平面与长方体的表面的交线，即找到长方体的截面，再判断选项中直线与平面的位置关系.

【详解】选项A，如图1，取的中点，连结，，，又*M*为*A*1*B*1中点，则，根据长方体的对称性可知，所以，四点共面，直线与相交，所以与平面相交，所以选项A错误；

选项B，如图2，取的中点，由选项A同理可证，，四点共面，在平面内，直线与相交，所以与平面相交，所以选项B错误；

选项C，如图3，在平面内，直线与相交，所以与平面相交，所以选项C错误；

选项D，如图4，取的中点，连结，，，由长方体的对称性，，四点共面，在平面内，直线，平面*D*1*MB*，平面*D*1*MB*，所以*B*1*C*平面*D*1*MB*，选项D正确.



故选：D.

7. 已知椭圆的左右焦点分别为，过点且斜率为的直线*l*与*C*在*x*轴上方的交点为*A*．若，则*C*的离心率是( )

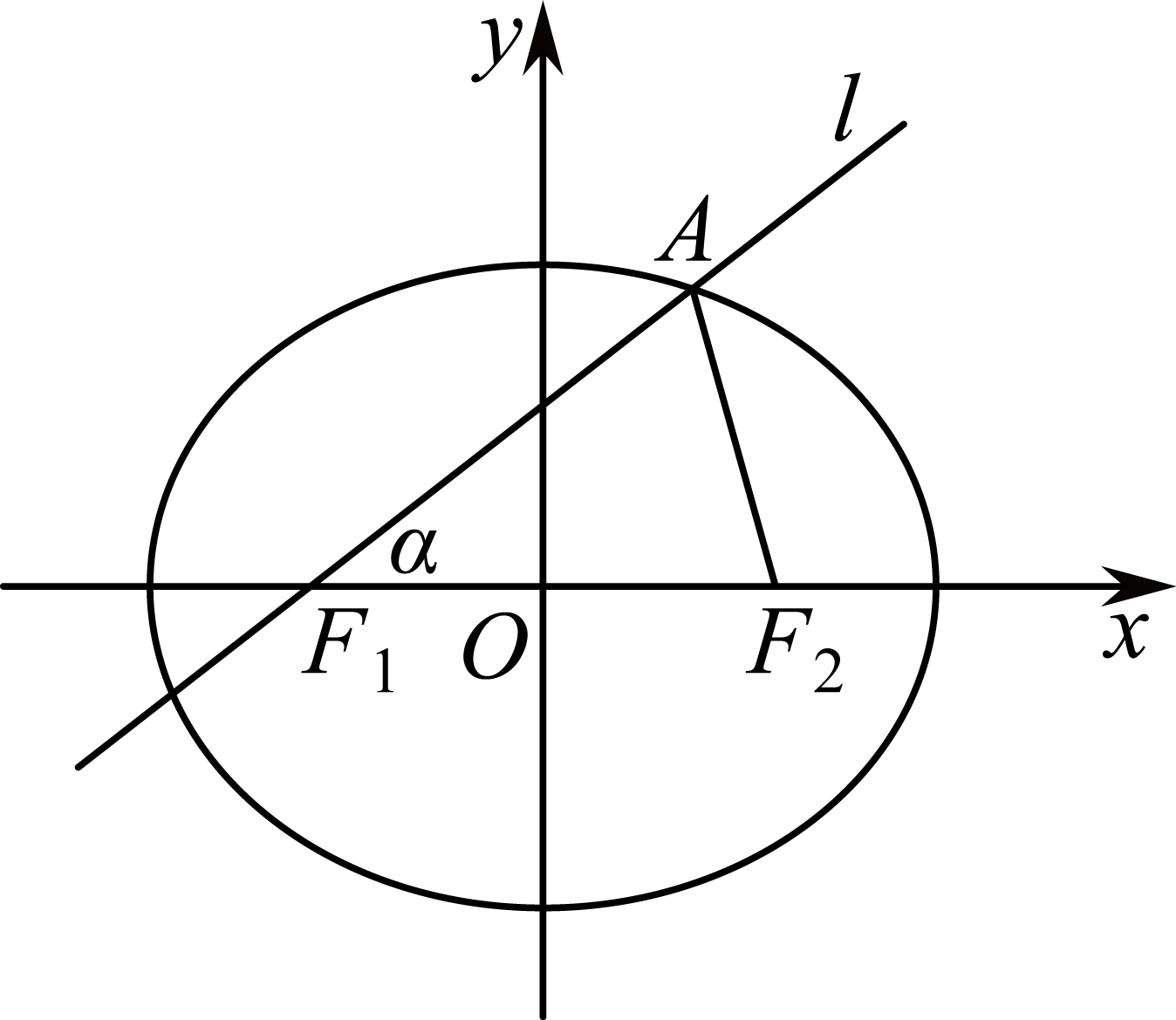
A.  B.  C.  D. 

【答案】A

【解析】

【分析】根据的正切值，求出的余弦值，在用余弦定理求出用表示，再求解.

【详解】设则，



又，在中，由余弦定理得：



故选：A

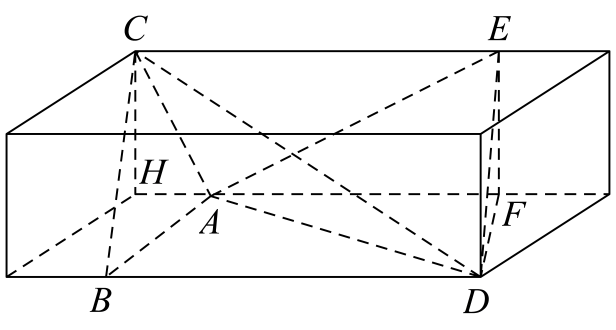
8. 已知二面角*C*-*AB*-*D*的大小为120°，*CA*⊥*AB*，*DB*⊥*AB*，*AB*=*BD*=4，*AC*=2，*M*，*N*分别为直线*BC*，*AD*上两个动点，则最小值为( )

A.  B.  C.  D. 

【答案】D

【解析】

【分析】将二面角放到长方体中，根据二面角的定义得到，根据几何知识得到最小值为异面直线，的距离，然后将异面直线，的距离转化为直线到平面的距离，即点到平面的距离，最后利用等体积求点到平面的距离即可.

【详解】

如图，将二面角放到长方体中，取，过点作面交面于点，

由题意可知，，所以为二面角的平面角，即，

因为，分别为直线，上的两个动点，所以最小值为异面直线，的距离，

由题意知，，所以四边形为平行四边形，，

因为平面，平面，所以∥平面，则异面直线，的距离可转化为直线到平面的距离，即点到平面的距离，

设点到平面的距离为，则，，

在直角三角形中，，，所以，，，，

直角梯形中，，，，

因为，，所以，，，，

.

故选：D.

【点睛】方法点睛：求异面直线距离的方法：(1)找出异面直线的公垂线，然后求距离；(2)转化为过直线甲且与直线乙平行的平面与直线乙的距离.

**二､多项选择题：本题共4小题，每题5分，共20分，每题给出的选项中有多项符合要求，全部选对得5分，错选得0分，部分选对得2分.**

9. 已知圆*M*：，直线*l*：，下面四个命题，其中真命题( )

A. 存在实数*k*与*θ*，使得直线*l*与圆*M*相离

B. 圆心*M*在某个定圆上

C. 对任意实数*k*，必存实数*θ*，使得直线*l*与圆*M*相切

D. 对任意实数*θ*，必存在实数*k*，使得直线*l*与圆*M*相切

【答案】BC

【解析】

【分析】先判断在定圆上和动直线所过的定点，从而可判断AB的正误，根据特例可判断D的正误，根据圆心到直线的距离以及辅助角公式可判断D的正误.

【详解】由题设可得，故，

故，故在圆运动变化，故B正确.

直线过定点，而，

故在圆上，故直线与圆不可能相离，故A错误.

取，则圆：，

则到直线的距离为，

故此时直线与圆始终相交，故D错误.

对于任意的，到直线的距离为：

，

设，

故到直线的距离为，

当时，有，

故此时直线与圆相切，故C正确.

故选：BC.

10. 已知椭圆*C*：上一点*P*，*F*1､*F*2分别为左，右焦点，，△*PF*1*F*2的面积为*S*，则下列选项正确的是( )

A. 若，则*θ*=60° B. 若*S*=12，则满足题意的点*P*有四个

C. 椭圆*C*内接矩形周长的最大值为 D. 若△*PF*1*F*2为钝角三角形，则*S*∈(9,12]

【答案】AC

【解析】

【分析】由题可得,，设，结合选项利用面积公式可判断选项A、B、D；设椭圆内接矩形的一个顶点为，利用辅助角公式可得周长的范围可判断选项C.

【详解】∵椭圆：，

∴，∴，，.

设，则，，

又若且，，

在△中有，则，

所以，

选项A，由椭圆的焦点三角形面积公式，，，则，故A正确；

选项B，若，则，故满足题意的点有两个，为椭圆的上下顶点，故B错误；

选项C，设椭圆内接矩形的一个顶点为，

则椭圆内接矩形周长为，其中， ，为一个锐角，

由得，当时，，

椭圆*C*内接矩形周长的最大值为，故C正确；

选项D，当点为椭圆的上顶点时，，，，，

，即，此时，△*PF*1*F*2的面积；当时，，所以*S*∈(9,12]；

当是钝角时，先考虑临界情况，当为直角时，易得，此时，故D错误.

故选：AC.

11. 已知双曲线*C*:的左,右焦点分别为*F*1､*F*2,且=4,*A*,*P*,*B*为双曲线上不同的三点,且*A*,*B*两点关于原点对称,直线*PA*与*PB*斜率的乘积为,则下列正确的是( )

A. 直线*AB*倾斜角的取值范围为

B. 若,则三角形*PF*1*F*2的周长为

C. 的取值范围为

D. 的最小值为

【答案】BCD

【解析】

【分析】设,首先根据已知条件,确定双曲线的方程,对于A,根据双曲线的渐近线的斜率进行判断;对于B,设,根据双曲线定义和已知条件列出方程组,求解即可;对于C,令,则,转化为直线与双曲线有交点时,直线在轴上的截距的范围求解即可;对于D,将原式化为:,,转化为,设，利用基本不等式即可求解.

【详解】设焦距为,则,设,

作差得,即,

则,

故,又,

所以,

则双曲线方程为,

对于A,双曲线的渐近线方程为,直线过原点,由题可知直线与有两个不同的交点,所以直线倾斜角的取值范围为,故A错误.

对于B,设,

因为,则,

所以,解得,

则三角形*PF*1*F*2的周长为,故B正确.

对于C,令,则,转化为直线与双曲线有交点时,直线在轴上的截距的范围,

当直线与双曲线相切时,

联立,得,

,

解得,

所以的取值范围为,故C正确.

对于D,(\*),

令,

则(\*)式化为,

设,则,

所以,

因为,当且仅当时等号成立,

所以,

即的最小值为,故D正确.

故选:BCD.

12. 在正方体中，，*E*，*F*，*M*分别为，*CD*，的中点，则下列正确的是( )

A. 

B. 

C. 若点*P*是正方体表面上一动点且满足，则点*P*的轨迹长度为

D. 已知平面过点*C*且，若，且，则*Q*点的轨迹长度为

【答案】ABD

【解析】

【分析】以点*D*为原点，*DA*，*DC*，为坐标轴建立空间直角坐标系，

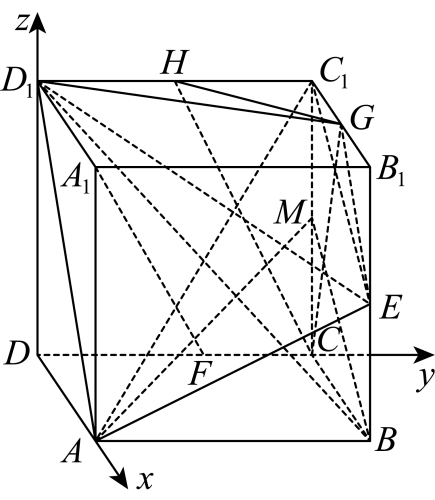
利用空间向量的数量积可判断A；

求出点*E*到平面的距离再求体积可判断B；

求出点*P*的轨迹长度可判断C；

求出点*Q*的轨迹方程，进而求得截面圆的半径可求*Q*点的轨迹长度判断D.

【详解】在正方体中，以点*D*为原点，*DA*，*DC*，为坐标轴建立如图所示空间直角坐标系，



则，，，，，，，

对于A：

棱*DC*中点，棱中点，

则，，

则，

则，即，

故A正确；

对于B：

平面，

，

，，

设平面的一个法向量，

则，令，得，

则点*E*到平面的距离为：，

而，

，

，

，

故B正确；

对于C：

连接*BM*，取的中点*G*，取的中点*H*，连接*GH*，

平面，平面，

，

由平面几何知识可得，

，

平面，

，同理可得，

，

平面，

点*P*是正方体表面上一动点且满足，

的轨迹是*CG*，*CH*，*HG*，

易得，，

的轨迹长度为，

故C错误；

对于D：

设，

，

，

，

，

，

的轨迹是以为球心，2为半径的球面，

由选项C知是平面的一个法向量，

又，

球心*O*到平面的距离，

平面截球面的截面圆的半径为，

点的轨迹长度为，

故D正确；

故选：ABD.

**三､填空题(每题5分，共20分)**

13. 已知向量，且，则\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_．

【答案】3

【解析】

【分析】利用向量的坐标运算求得求出，根据空间向量模的公式列方程求解即可.

【详解】因为，

所以，

可得，

因为，解得，故答案为3.

14. 已知圆*C*：与直线*l*：交与*A*，*B*两点，当|*AB*|最小值时，直线*l*的一般式方程是\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_.

【答案】

【解析】

【分析】根据直线的方程得到直线过定点，根据几何知识得到当垂直直线时，最小，然后根据垂直列方程，解方程得到即可得到直线的方程.

【详解】由圆的方程可得圆心为，直线的方程可整理为，令，解得，所以直线过定点，当垂直直线时，最小，所以，解得，所以直线的方程为，即.

故答案为：.

15. 已知圆*M*与圆*C*1：和圆*C*2：一个内切一个外切，则点*M*的轨迹方程为\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_.

【答案】

【解析】

【分析】根据内切和外切的性质及双曲线的定义得到点的轨迹为双曲线，然后求方程即可.

【详解】当圆与圆内切，与圆外切时，，，

当圆与圆外切，与圆内切时，，，

所以，点的轨迹为双曲线，设轨迹方程为，，，则，所以轨迹方程为.

故答案为：.

16. 已知双曲线的左顶点为*A*，左焦点为*F*，*P*为渐近线上一动点，且*P*在第二象限内，*O*为坐标原点，当∠*APF*最大时，，则双曲线的离心率为\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_.

【答案】

【解析】

【分析】设出点的坐标，然后表示出的斜率，利用到角公式表示出，最后结合基本不等式求出取得最大值时的条件，结合此时，即可求出离心率.

【详解】由已知得，渐近线方程为，设，

则

所以

，当且仅当即时等号成立，

此时，即，

即解得或(舍去).

故答案为：

**四､解答题(本大题有6个小题，共70分，其中第17题10分，其余每题12分，解答应写出文字说明､证明过程或演算步骤，写在答题纸的相应位置)**

17. 设全体空间向量组成的集合为，为*V*中的一个单位向量，建立一个“自变量”为向量，“因变量”也是向量的“向量函数”；.

(1)设，，若，求向量；

(2)对于*V*中的任意单位向量，求的最大值.

【答案】(1)或

(2)

【解析】

分析】(1)设，根据题意列方程，解方程即可得到；

(2)设与的夹角为，根据数量积的运算律得到，即可得到最大值.

【小问1详解】

依题意得：，设，

则，或；

【小问2详解】

设与的夹角为，则，

则，

故最大值为.

18. 数学家欧拉在1765年提出；三角形的外心，重心，垂心依次位于同一直线上，且重心到外心的距离是重心到垂心距离的一半，这条直线被后人称之为三角形的欧拉线.若的顶点*A*(2,0)，*B*(0,4)，且的欧拉线的方程为，记外接圆圆心记为*M*. 求：

(1)圆*M*的方程；

(2)已知圆*N*：，过圆*M*和圆*N*外一点*P*分别作两圆的切线，与圆*M*切于点*A*，与圆*N*切于点*B*，且，求*P*点的轨迹方程.

【答案】(1)

(2)

【解析】

【分析】(1)由*A*(2,0)，*B*(0,4)，可知*AB*的中垂线方程为，将其与欧拉线联立，可得外心坐标，后可得外接圆*M*的方程；

(2)设，由题有，，后可得答案.

【小问1详解】

因，则*AB*的中点为，

又，则*AB*的中垂线方程为，

将其与欧拉线方程联立有，解得，

故的外心为，则外接圆半径为，故圆*M*的方程为.

【小问2详解】

设，由题有

，

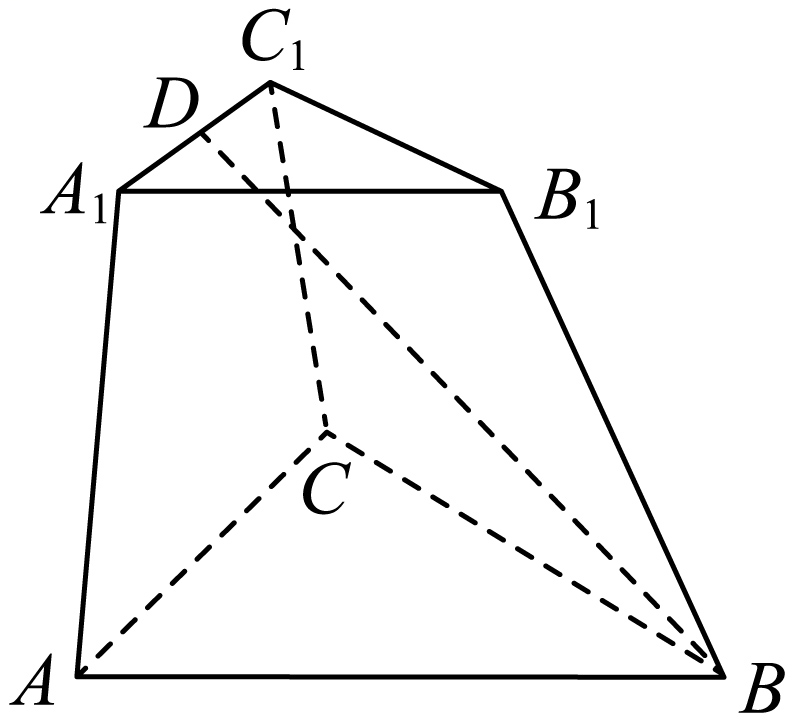
.

因，则.

化简得：

所以点的轨迹方程为：.

19. 如图，在三棱台*ABC*-*A*1*B*1*C*1中，侧面*AA*1*C*1*C*⊥底面*ABC*，三角形*ABC*是边长为2的正三角形，侧面*ACC*1*A*1为等腰梯形，且*A*1*C*1=*AA*1=1，*D*为*A*1*C*1的中点.



(1)证明：*AC*⊥*BD*；

(2)求直线*AA*1与平面*BB*1*C*1*C*所成角的正弦值.

【答案】(1)证明见解析

(2)

【解析】

【分析】(1)根据线面垂直即可求证线线垂直，

(2)根据空间向量的夹角即可求解线面角.

【小问1详解】

证明：如图，作*AC*的中点*M*，连接*DM*，*BM*，

在等腰梯形*ACC*1*A*1中，*D*，*M*为*A*1*C*1，*AC*的中点，∴*AC*⊥*DM*，

在正三角形*ABC*中，*M*为*AC*的中点，∴*AC*⊥*BM*，

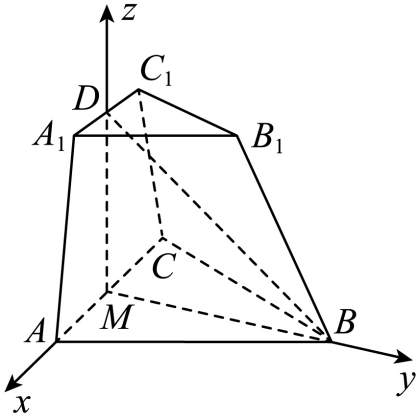
∵*AC*⊥*DM*，*AC*⊥*BM*，，*DM*，*BM*平面，

∴*AC*⊥平面，又*BD*平面，

∴*AC*⊥*BD*.

【小问2详解】

∵*AC*⊥平面*BDM*，以*M*为坐标原点，以，，，分别为，，，轴正向，如图建立空间直角坐标系，



，，，*D*，*C*1，，

设平面的法向量为，，*=*，

则有，即，

则可取，又

设直线与平面所成角为，则

∴直线与平面所成角正弦值为，

20. 已知椭圆*C*：，左顶点分别为*A*，上顶点为*B*，左右焦点分别为*F*1，*F*2，*P*为椭圆上一点，最大值为3，△*ABF*2的面积为.

(1)求椭圆方程；

(2)已知直线过*F*1与椭圆*C*交与*M*，*N*两点(*M*在*N*上方)，且，若，求直线斜率的值范围.

【答案】(1)

(2)

【解析】

【分析】(1)根据最大值和△*ABF*2的面积，求出的值，即可求出椭圆方程.

(2)分类讨论直线斜率是否存在时的两种情况，让直线的解析式与椭圆方程联立，消去，得到的表达式，代入韦达定理，即可得到直线斜率的取值范围.

【小问1详解】

由题意

在椭圆*C*：中，

最大值为3，△*ABF*2的面积为.

∴，解得：

∴椭圆方程为：

【小问2详解】

由题意及(1)得

椭圆*C*：中，，

直线过*F*1与椭圆*C*交与*M*，*N*两点(*M*在*N*上方)，且，，

当直线斜率不存在时，显然不成立

当直线斜率存在时设为，，，

由得...①

联立消去得；

∴

②

且③

由①②得：，代入③中得：，

因为当*k*=0时，不成立，

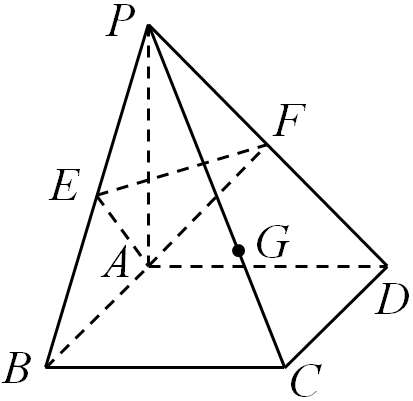
∴

∴，

∵*M*在*N*上方

∴.

21. 如图，四棱锥*P*-*ABCD*的底面为菱形，∠*ABC*=，*AB*=*AP*=2，*PA*⊥底面*ABCD*，*E*，*F*分别是线段*PB*，*PD*的中点，*G*是线段*PC*上的一点.



(1)若*G*是直线*PC*与平面*AEF*的交点，试确定的值；

(2)若直线*AG*与平面*AEF*所成角的正弦值为，求三棱锥*C*-*EFG*体积.

【答案】(1)

(2)

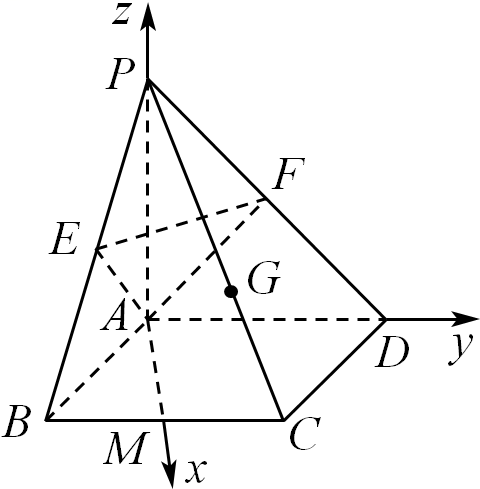
【解析】

【分析】(1)取*BC*的中点*M*，连接*AM*，分别以*AM*，*AD*，*AP*，所在直线为轴建立空间直角坐标系，设，求得平面*AEF*的一个法向量，由求解；

(2)设，由，求得，先求得，再由求解.

【小问1详解】

解：取*BC*的中点*M*，连接*AM*，则*AM*⊥*AD*，分别以*AM*，*AD*，*AP*，所在直线为轴建立空间直角坐标系，如图所示，



则，，

设，

则

设平面*AEF*的一个法向量为，

则，所以，取，

易知，所以，

解得，此时；

【小问2详解】

设，则

则，

整理得，解得或(舍去)，

，，设平面*PCD*的一个法向量为，

则， 所以，

取，又，

则点*E*到平面*PCD*的距离即点*E*到平面*PFG*的距离为

，

由已知条件，在*PCD*中，*PC*=*PD*=，*CD*=2，可得



所以，

.

因，

所以.

22. 已知双曲线*C*：过点且右焦点.

(1)求双曲线的方程；

(2)点*M*是双曲线上位于第一象限内的一动点，直线与*x*轴交于点*A*，的平分线与直线交于点*B*，试问直线*MB*是否恒过定点，若过，则求出定点坐标，若不过，请说明理由.

【答案】(1)

(2)过定点，定点为

【解析】

【分析】(1)根据双曲线的性质结合已知列出关于，的方程组，求解得出，的值，即可得出答案；

(2)设，表示出直线*MF*的方程，由*FB*为的平分线，得出点*B*到直线*FB*和*FA*距离相等，利用点到直线的距离公式得出，即可表示出直线*MB，*化简得出定点坐标.

【小问1详解】

由已知得出，解得，

所以双曲线方程为.

【小问2详解】

设，则直线*MF*为，

设，因为*FB*为的平分线，

所以点*B*到直线*FB*和*FA*距离相等，

即，

因为且*M*在第一象限，

所以上式可变为，

解得，

所以直线*MB*可以表示为

化简得

即，

所以直线*MB*恒过.