**2022年学年第一学期9+1高中联盟期中考试**

**高二年级数学学科试题**

**一、选择题(本题共8小题，每小题5分，共40分．小题列出的四个备选项中只有一个是符合题目要求的，不选、多选、错选均不得分)**

1. 设集合，则等于( )

A.  B.  C.  D. 

【答案】D

【解析】

【分析】先解不等式求出集合，再由补集和交集的概念计算即可.

【详解】，或，则.

故选：D.

2. 若*a*，，则“复数为纯虚数(是虚数单位)”是“”的( )

A. 充要条件 B. 充分不必要条件

C. 必要不充分条件 D. 既不充分也不必要条件

【答案】B

【解析】

【分析】复数为纯虚数，即，且，判断其与的推断关系.

【详解】复数为纯虚数，等价于，且，

，且可推出，但，不一定得到，且，

所以 “复数为纯虚数”是“”充分不必要条件．

故选：B.

3. 向量，分别是直线，的方向向量，且，，若，则( )

A. 12 B. 14 C. 16 D. 18

【答案】B

【解析】

【分析】依题意可得，即可得到存在非零实数，使得，从而求出、的值，求出，最后根据数量积的坐标表示计算可得.

【详解】解：，，存在非零实数，使得，

，解得，，即，

.

故选：B

4. 已知定义域为**R**的奇函数，满足，且当时，则的值为( )

A.  B. 0 C. 1 D. 2

【答案】A

【解析】

【分析】利用函数的奇偶性和周期性即可求解.

【详解】由题可知即，

由奇函数性质可知，所以,

所以，所以是以4为周期的周期函数，

则

当时，所以，

所以

故选：A

5. 若圆锥的表面积为，其侧面展开图为一个半圆，则下列结论正确的为( )

A. 圆锥的母线长为 B. 圆锥的底面半径为

C. 圆锥的体积为 D. 圆锥的侧面积为

【答案】C

【解析】

【分析】根据已知条件及圆锥的表面积公式，结合圆锥的侧面积公式及体积公式即可求解.

【详解】设圆锥的底面半径为，母线为，由于其侧面展开图是一个半圆，

所以，解得，

又因为圆锥的表面积为，

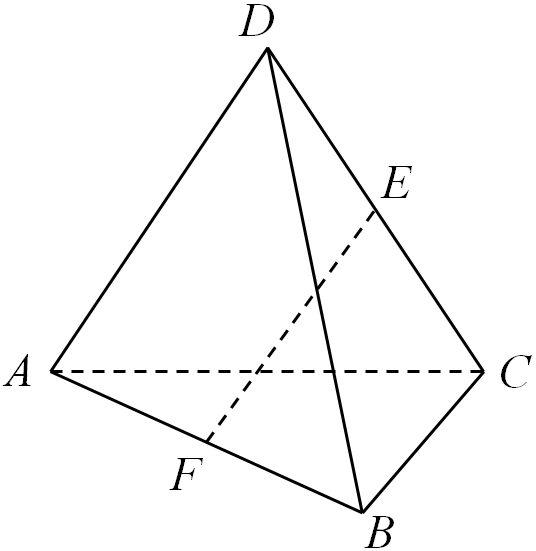
所以表面积，解得，得母线长，

所以圆锥的高，

所以侧面积，体积

故选：C.

6. 如图，在三棱锥中，，且，*E，F*分别是棱，的中点，则*EF*和*AC*所成的角等于



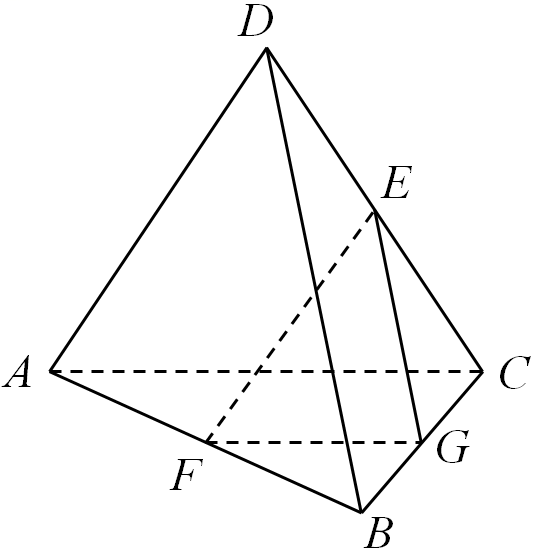
A. 30° B. 45° C. 60° D. 90°

【答案】B

【解析】

【分析】取*BC*的中点*G*，连接*FG*、*EG*，则为*EF*与*AC*所成的角．解．

【详解】如图所示，取*BC*的中点*G*，连接*FG，EG*．



，*F*分别是*CD，AB*的中点，

，，

且，．

为*EF*与*AC*所成的角．

又，．

又，，，

为等腰直角三角形，

，即*EF*与*AC*所成的角为45°．

故选：B．

【点睛】本题主要考查异面直线所成的角，找角证角求角，主要是通过平移将空间角转化为平面角，再解三角形，属于基础题．

7. 已知，，，则( )

A.  B. 

C.  D. 

【答案】A

【解析】

【分析】化简，利用三角函数二倍角余弦公式求得，比较大小可得，利用对数函数单调性可得，和*b*比较，综合可得答案.

【详解】由题意得，，

，

由于，故，

，，，

综上：，

故选：A.

8. 在正方体中，点*P*满足，且，直线与平面所成角为，若二面角的大小为，则的最大值是( )

A.  B.  C.  D. 

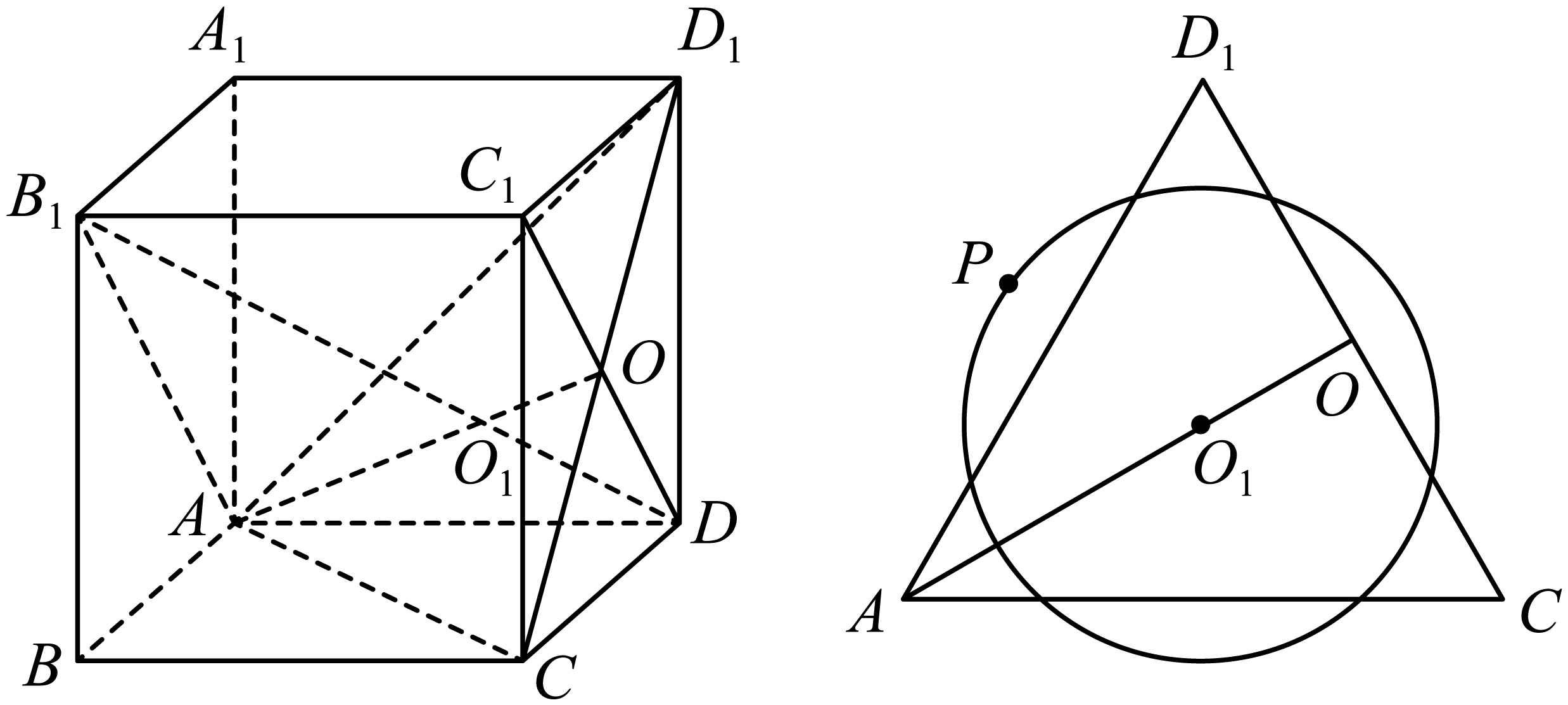
【答案】C

【解析】

【分析】由题可得在平面上，根据正方体的性质结合条件可得平面，进而可得在以为圆心，半径的圆上，且圆在平面内，作于点，过点作交*AD*于*N*点，可得为二面角的平面角，设结合条件可表示出，再利用二次函数的性质即得.

【详解】，且，

在平面上，



设，连接，，且，

因为平面，又平面，

所以，又，平面，平面，

所以平面，平面，

所以，

同理可得，又平面，平面，

所以平面，

设正方体的棱长为1，则可知为棱长为的正四面体，

所以为等边三角形的中心，

由题可得，得，

所以，

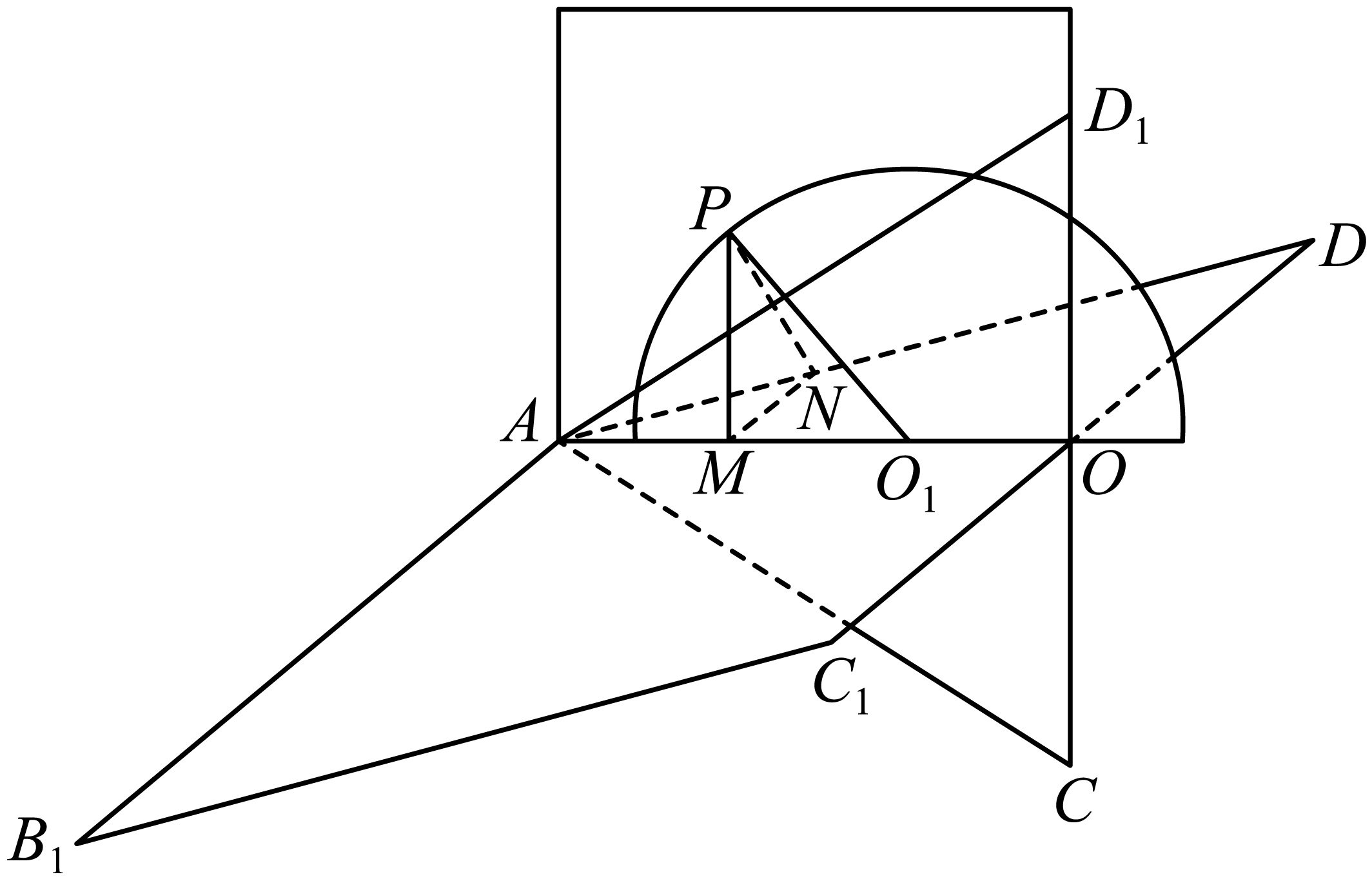
又与平面所成角为，则，

可求得，即在以为圆心，半径的圆上，且圆在平面内，

由平面，又平面，

平面平面，且两个平面的交线为*AO*，

把两个平面抽象出来，如图，



作于点，过点作交*AD*于*N*点，连接，

平面平面，平面，平面平面，

平面，平面，

，

又，*MN*与*PM*为平面*PMN*中两相交直线，

故平面*PMN*，平面*PMN*，

，

为二面角的平面角，即为角，

设，当*M*与点不重合时，在中，

可求得，

若*M*与点重合时，即当时，可求得，也符合上式，

故，

，，

，

，

，



令，

则，当，即时等号成立，

，

故的最大值是

故选：C.

【点睛】关键点点睛：本题的关键是找出动点的位置，根据空间向量共面定理及线面角可得在以为圆心，半径的圆上，且圆在平面内，然后利用面面角的定义作出面面角，转化为函数问题即得.

**二、选择题(本题共4小题，每小题5分，共20分．每小题列出的四个备选项中，有多项符合题目要求．全部选对的得5分，部分选对的得2分，有选错的得0分)**

9. 设 是两条不同的直线，，是两个不同的平面，则下列命题正确的有( )

A. 若，， ，则

B. 若，，则

C. 若，，则

D. 若，，，则

【答案】BD

【解析】

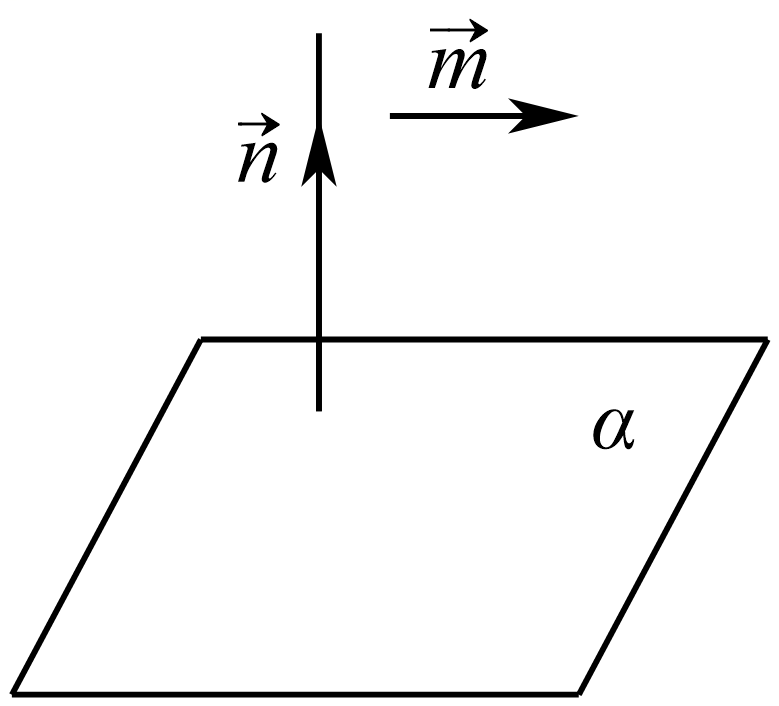
【分析】根据面面平行的判定定理可判断A; 根据线面垂直的性质B; 根据直线与平面平行的判定定理判断C,根据平面的法向量和一向量的数量积为0，判断D.

【详解】若，，*m*，时，根据面面平行的判定定理应该还需要 相交于一点，才可以得到，故A错误；

根据线面垂直的性质可知，当，，有，故B正确；

若，时，根据直线与平面平行的判定定理可知，应该还需要，才可以得到，故C错误；

当，，时，可在直线*n*上取,即可作为平面的法向量，在直线*m*上取,



则有 ，即，而，故有，故D正确，

故选：BD.

10. 已知，对于，，下述结论正确的是( )

A.  B. 

C.  D. 

【答案】AC

【解析】

【分析】根据分段函数的性质，结合各选项逐一验证即可.

【详解】对于A，，所以A正确.

对于B，取，，，，所以B错误.

对于C，当，，则，，，满足，

当，时，，由在R上的单调性知，，满足，

当，时，同理满足，

当，时，，，，，满足，

故，所以C正确.

对于D，取，，，，

不满足，所以D错误.

故选:AC.

11. 已知为双曲线的两个焦点，为双曲线上任意一点，则( )

A.  B. 双曲线的渐近线方程为

C. 双曲线的离心率为 D. 

【答案】CD

【解析】

【分析】对于A，用定义即可判断，对于B，根据焦点位置即可判断，对于C，直接计算即可，对于D，因为为的中点，所以，设可求出的取值范围，即可判断

【详解】双曲线：焦点在轴上，，，

对于A选项，，而点在哪支上并不确定，故A错误

对于B选项，焦点在轴上的双曲线渐近线方程为，故B错误

对于C选项，，故C正确

对于D选项，

设，则(时取等号)

因为为的中点，所以，故D正确

故选：CD

12. 在正三棱锥中，，，，分别为，的中点，若点是此三棱锥表面上一动点，且，记动点围成的平面区域的面积为，三棱锥的体积为，则( )

A. 当时， B. 当时，

C. 当时， D. 当时，

【答案】ACD

【解析】

【分析】依题意可得直线垂直于动点围成的平面区域所在的平面，当时取、、、的中点、、、，连接、、、，即可得到动点围成的平面区域为如图所示的矩形，求出锥体的体积与矩形的面积即可判断A、C，同理求出时的情况，即可判断.

【详解】解：由题意知，直线垂直于动点围成的平面区域所在的平面，

当时，正三棱锥的底面是边长为2的正三角形，侧面、、都是以为直角顶点的等腰直角三角形，

所以、，，平面，

所以平面，

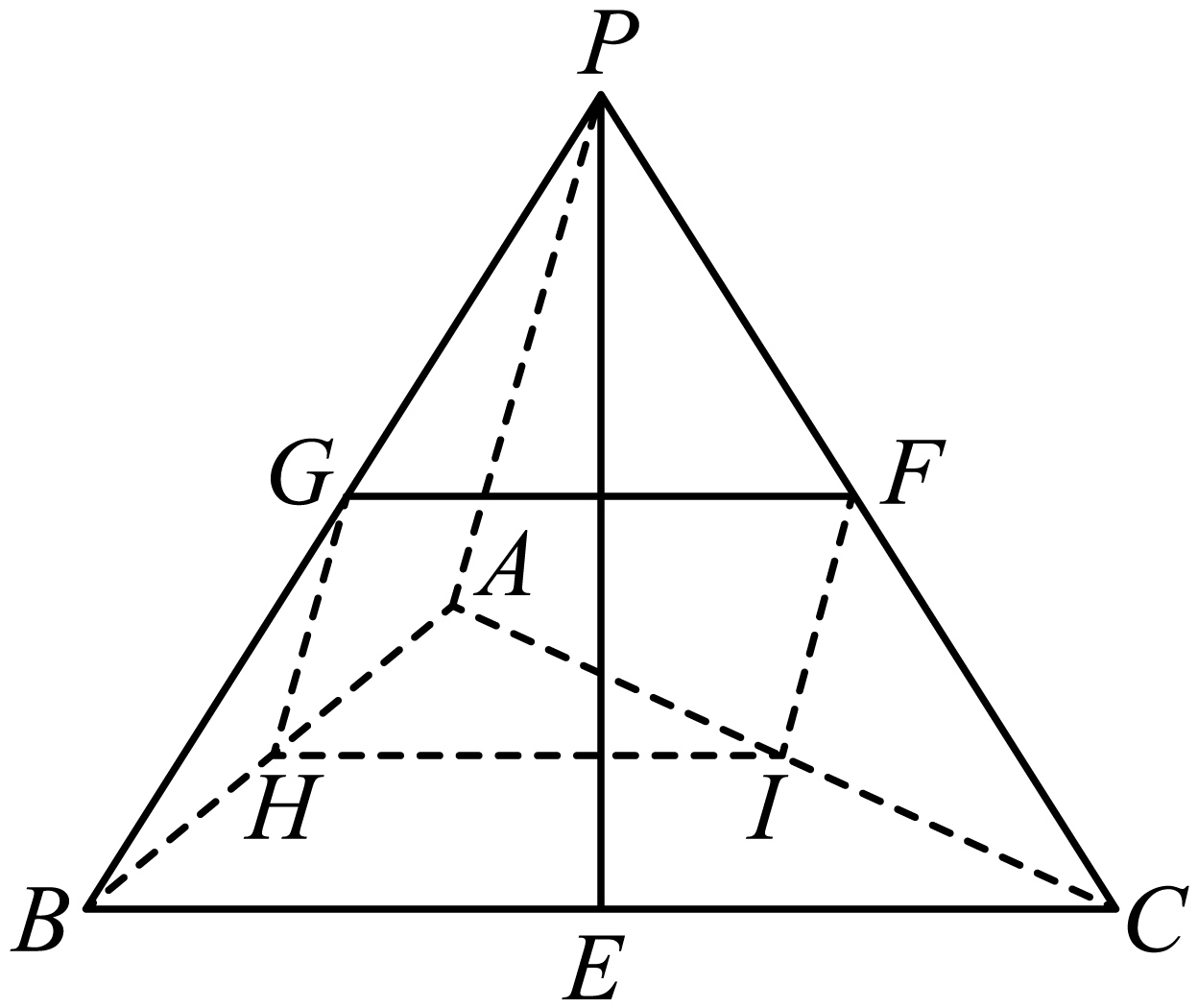
取、、、的中点、、、，连接、、、，

则，所以平面，平面，所以，

又三角形为等腰直角三角形，为的中点，所以，又，所以，

又，平面，所以平面，

则此时正三棱锥的体积，



由题意可知，动点围成的平面区域为如图所示的矩形，

且，，则该矩形的面积为，故A、C均正确；

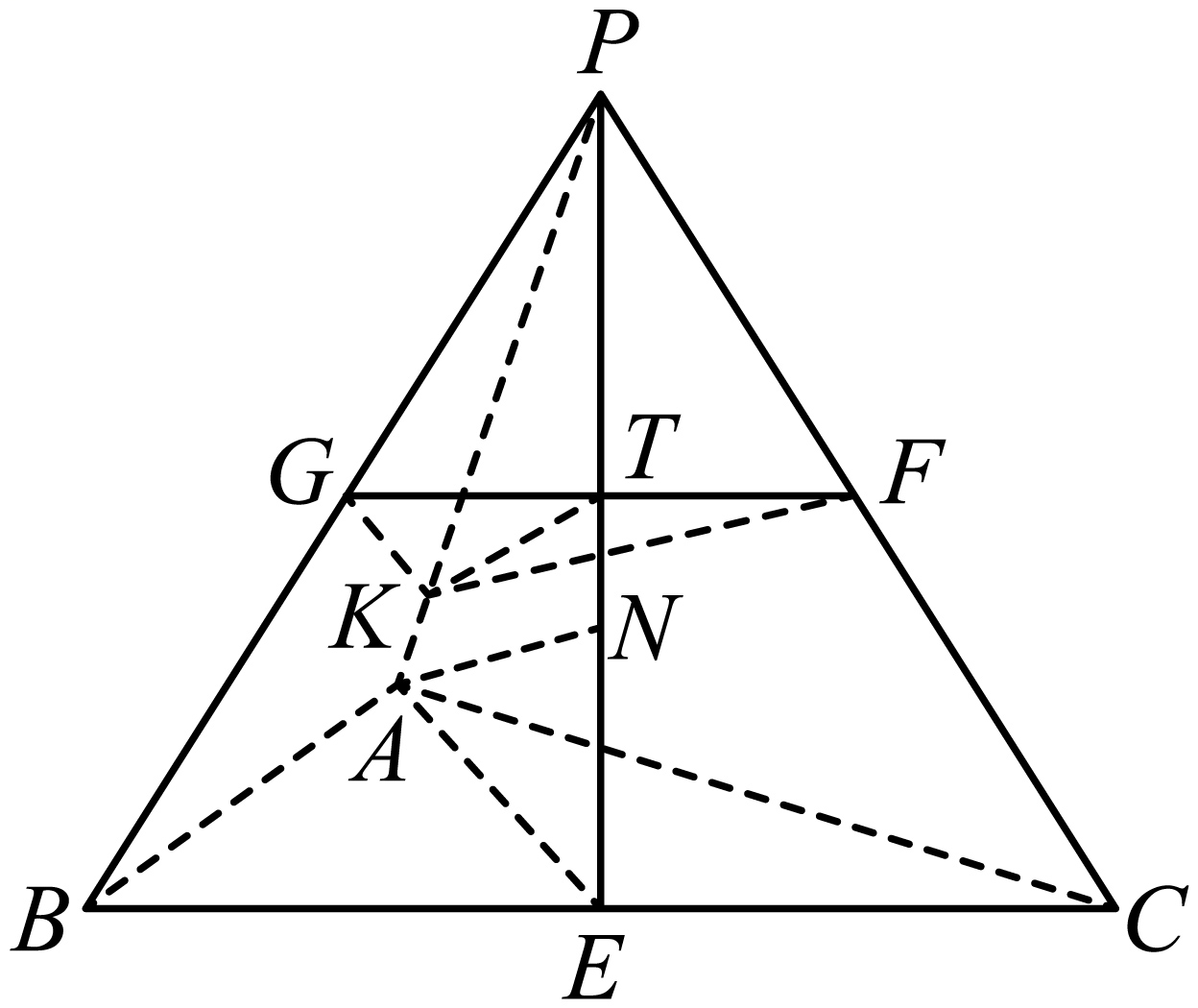
当时，正三棱锥即为棱长为2的正四面体，各个面都是边长为的正三角形，

则此时正三棱锥的体积，

过点作，垂足为，设，过点作交于点，连接、，

因为，，所以，又，，平面，

所以平面，



由题意可知，动点围成的平面区域为如图所示的三角形，

显然为的中点，，解得，

所以，，，

又，所以，即所以，

所以，故B错误、D正确.

故选：ACD

**三、填空题(本题共4小题，每小题5分，共20分)**

13. 将函数的图象向右平移个单位长度后的图象过原点，则*m*的最小值是\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_.

【答案】

【解析】

【分析】利用函数的平移变换及点在函数的图象上，结合三角方程即可求解.

【详解】由题意可知，平移后函数解析式为，

因为函数的图象过原点，

所以，即，解得，即，

又，故时，*m*取最小值

故答案为：.

14. 若点在幂函数图象上，则的值为\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_.

【答案】4

【解析】

【分析】由幂函数的概念求出*a*，*c*，再将点代入函数解析式，求得*b*的值.

【详解】因为为幂函数，则，，即，

又点在函数的图象上，则，解得，所以

故答案为：4.

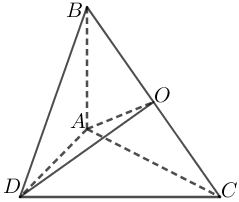
15. 已知四面体*ABCD*中，，平面*ACD*，平面*ABD*，则四面体*ABCD*外接球的半径是\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

【答案】1

【解析】

【分析】根据给定几何体，取棱*BC*的中点*O*，再确定四面体外接球球心即可计算作答.

【详解】在四面体*ABCD*中，因平面，平面，则，取棱*BC*的中点*O*，连*AO*，如图，



则，又平面*ABD*，平面，则，连*OD*，有，

因此，所以四面体*ABCD*外接球球心为O，半径为1.

故答案为：1

16. 已知，分别是椭圆的左右焦点，*P*是椭圆*C*上一点，若线段上有且只有中点*Q*满足其中*O*是坐标原点，则椭圆*C*的离心率是\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_.

【答案】##

【解析】

【分析】判断点*P*为长轴端点的情况，点*P*不为长轴端点，由椭圆定义结合余弦定理、一元二次方程计算作答.

【详解】令椭圆半焦距为*c*，有，显然点*P*不可能是椭圆长轴左端点，

当点*P*为椭圆长轴的右端点时，即，取，显然点*Q*在线段上，并满足，

而点*Q*不一定是线段的中点，因此点*P*不是椭圆长轴的端点.

在中，不妨设，当*Q*为中点时，而*O*是的中点，

则，，，

由，得，由余弦定理得，，

线段上的点*Q*满足，令，，在中，，

显然，即，解得或，

因线段上有且只有中点*Q*满足，于是得，即，则，

所以椭圆*C*的离心率.

故答案为：

【点睛】方法点睛：求椭圆的离心率问题，可以求出*a*，*c*，代入离心率公式即得；或者根据条件得到关于*a*，*b*，*c*的齐次式，利用方程或不等式求解．

**四、解答题(本题共6小题，共70分．解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤)**

17. 已知圆*C*的圆心在*x*轴上，且经过点，

(1)求圆*C*的标准方程;

(2)若过点的直线*l*与圆*C*相交于 两点，且，求直线*l*的方程.

【答案】(1).

(2)或.

【解析】

【分析】(1)求出直线的中垂线方程，结合圆心在*x*轴上，求得圆心和半径，即可求得圆的方程;

(2)利用圆的几何性质求得圆心到所求直线的距离，讨论直线斜率是否存在，存在时，设出直线方程，利用点到直线的距离可求得斜率，即得答案.

【小问1详解】

设圆*C*的标准方程为，其中，半径为，

记线段*AB*中点为*D*，则，又直线*AB*的斜率为 ，

故线段*AB*中垂线*CD*方程为，即 ，

由圆的性质，圆心在直线*CD*上，得，

所以圆心，，

所以圆*C*标准方程为；

【小问2详解】

因为直线*l*与圆*C*相交的弦长，

圆心到直线*l*的距离，

当直线*l*的斜率不存在时，*l*的方程，此时，不符合题意，舍去.

当直线*l*的斜率存在时，设斜率为*k*，则*l*的方程，即，

由题意得，解得或，

故直线*l*的方程为或，即或，

综上直线*l*的方程为或

18. 已知函数

(1)求函数的值域;

(2)若对任意的，不等式恒成立，求实数*a*的取值范围.

【答案】(1)

(2)

【解析】

【分析】(1)换元转化为求二次函数值域；(2)换元，分离参变量，根据不等式求解恒成立问题.

【小问1详解】

因为定义域为，

则，

设，则，

所以值域为.

【小问2详解】

因为，

所以，

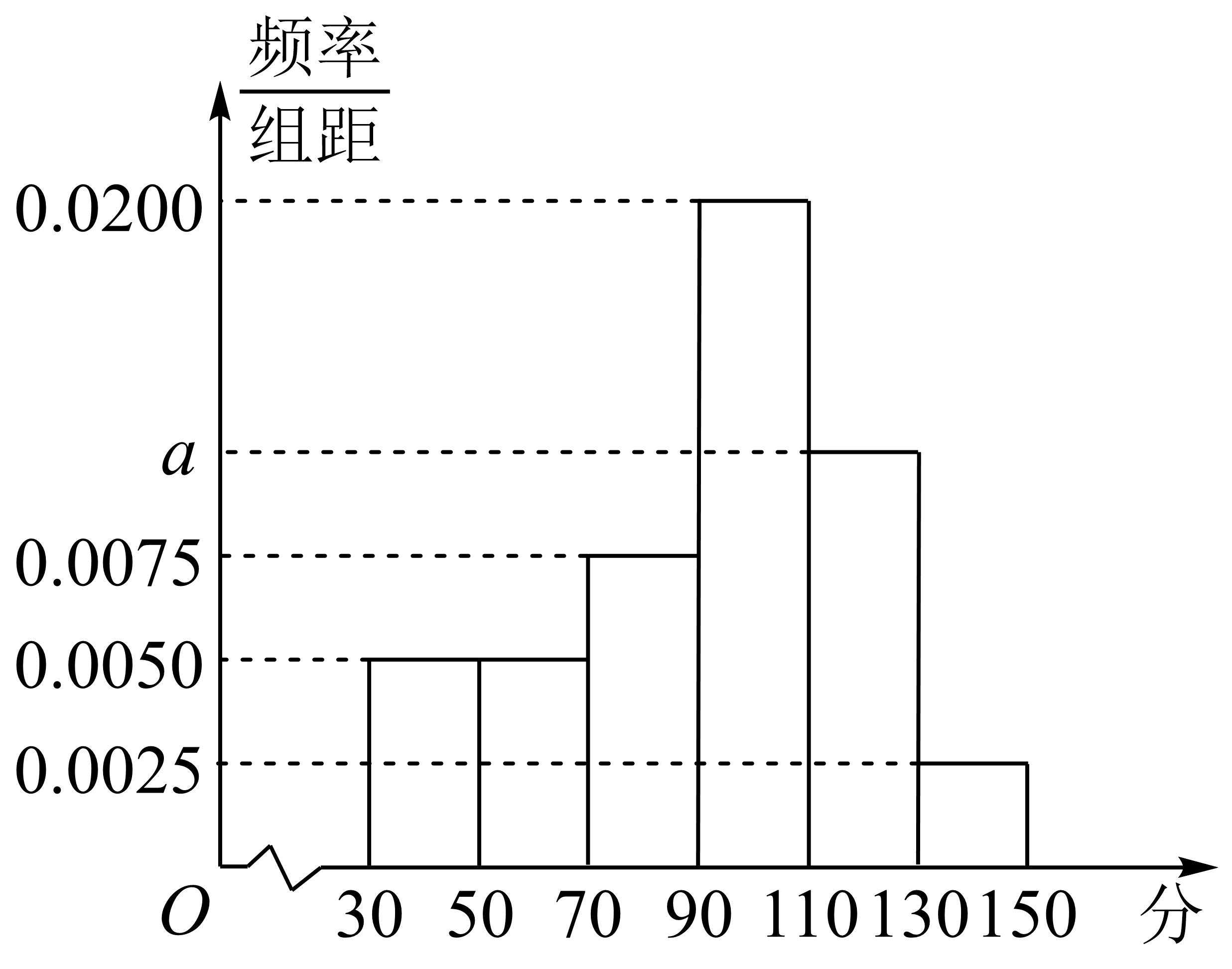
设，则，

原问题化为对任意，，即，

因为当且仅当即时，取等号，

即的最小值为3，所以

19. 某校对2022学年高二年级上学期期中数学考试成绩单位：分进行分析，随机抽取100名学生，将分数按照分成6组，制成了如图所示的频率分布直方图：



(1)估计该校高二年级上学期期中数学考试成绩的第80百分位数;

(2)为了进一步了解学生对数学学习的情况，由频率分布直方图，成绩在和的两组中，用按比例分配的分层随机抽样的方法抽取5名学生，再从这5名学生中随机抽取2名学生进行问卷调查，求抽取的这2名学生至少有1人成绩在内的概率.

【答案】(1)115；

(2).

【解析】

【分析】(1)根据百分位数的概念结合频率分布直方图求解即可；

(2)由分层抽样可知，内抽取2人，内抽取3人，分别列出所有基本样本点，利用古典概型求解即可.

【小问1详解】

由，

可得

样本数据中数学考试成绩在110分以下所占比例为，

在130分以下所占比例为，

因此，第80百分位数一定位于内，由，

所以样本数据的第80百分位数约为

【小问2详解】

由题意可知，分数段的人数为人，

分数段的人数为人用按比例分配的分层随机抽样的方法抽取5名学生，则需在内抽取2人，分别记为*a*，*b*，内抽取3人，分别记为*x*，*y*，*z*，

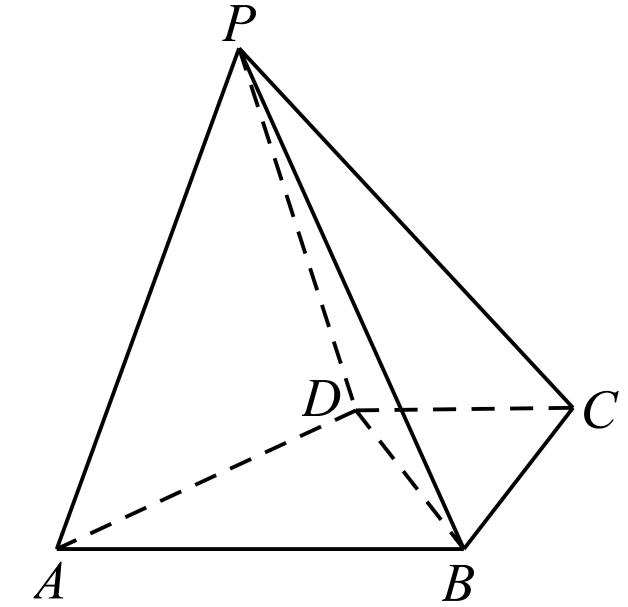
设“从样本中抽取2人，至少有1人分数在内”为事件*A*，

则样本空间为，共包含10个样本点，

而事件，包含7个样本点，

所以，即抽取的这2名学生至少有1人成绩在内的概率为.

20. 已知四棱锥中，，，，，，



(1)求证：

(2)求直线*PC*与平面*PBD*所成角的正弦值.

【答案】(1)证明见解析

(2)

【解析】

【分析】(1)根据线面平行的判定定理证明线面垂直，从而得到线线垂直；(2)利用几何法找到线面所成角进而求解或者利用空间向量求解.

【小问1详解】

在梯形*ABCD*中，，，，，

可算得，,

所以,所以，

在中，，，满足，所以，

又平面*PBD*，平面*PBD*，且，

所以平面*PBD*，又因为平面*PBD*，

所以；

【小问2详解】

由证明可知，平面*PBD*，因为平面*ABCD*，

则平面平面*ABCD*，取*BD*中点*O*，连*OP*，*OC*，

因为，所以，而平面*ABCD*，且平面平面，

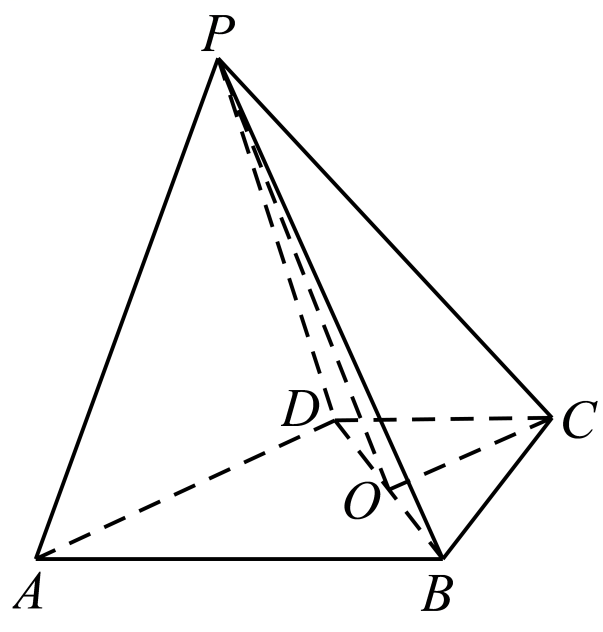
平面*PBD*，

所以就是*PC*与平面*PBD*所成的角，

在中，易得，

在中，，，计算可得，

所以，



所以求直线*PC*与平面*PBD*所成角的正弦值为

解法由证明可知，平面*PBD*，因为平面*ABCD*，

则平面平面*ABCD*，

通过计算可得，

建立以，为*x*轴，*y*轴的正方向，

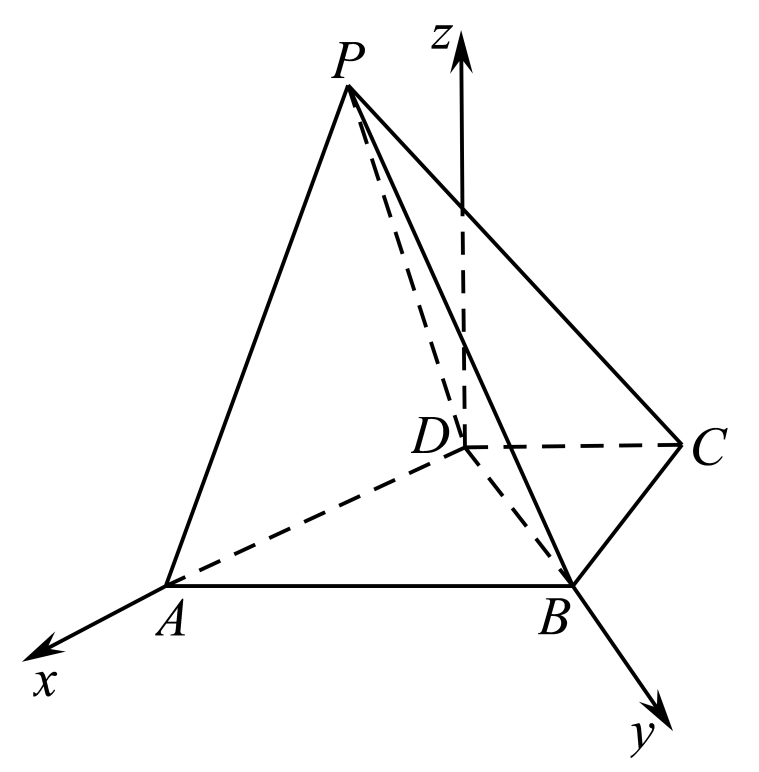
以过*D*与平面*ABCD*垂直的向量为在*z*轴的正方向建立如图空间直角坐标系，

显然*z*轴再平面*PBD*中且垂直于*BD*，

则，，，，

所以，，，

设平面*PBD*的法向量为，



则，即

取，

设直线*PC*与平面*PBD*所成角为，则

，所以求直线*PC*与平面*PBD*所成角的正弦值为

21. 在①，②这两个条件中任选一个，补充在下面的横线上，并加以解答.

已知的内角 的所对的边分别为，\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_.

(1)若，求

(2)求的最大值.

【答案】(1);

(2)

【解析】

【分析】(1)选①，由正弦定理边化角，结合，可推出，求得答案；

选②，当时，代入已知得，，利用两角和差正弦公式，即可求得答案；

(2)选①，由正弦定理边化角可推出，可得，继而，利用二倍角公式化简得，采用换元令，化简为，求得答案;

选②,利用三角恒等变换和角公式以及二倍角公式化简，可得到，以下同选①解答.

小问1详解】

若选①，由正弦定理可得，，

当时，代入得，，

整理可得，，

在中，，所以，

所以，即，

又*C*为三角形内角，所以，所以

若选②，当时，代入得，，

即，，即，

又因为，，

所以，所以.

【小问2详解】

若选①，因为，

所以，

，即，

在中，，，所以，即，

由于 ,

由，及在上递减，可得，

则，

所以，

所以，

设，而,

故，即，则，

所以，

当时，最大值为

选②，因为，

所以，

，

，

在中，，

所以，即，

由于 ,

由，及在上递减，可得，

则，

所以，

所以，

设，而,

故，即，则，

所以，

当时，最大值为

22. 已知点*P*在圆上运动，过点*P*作*x*轴的垂线段*PQ*，*Q*为垂足，动点*M*满足

(1)求动点*M*的轨迹方程

(2)过点的动直线*l*与曲线*E*交于*A*，*B*两点，与圆*O*交于*C*，*D*两点，

(i)求的最大值;

(ii)是否存在定点*T*，使得的值是定值?若存在，求出点*T*的坐标及该定值;若不存在，请说明理由.

【答案】(1)

(2)(i)16；(ii)存在定点，

【解析】

【分析】(1)求谁设谁，利用相关点法求轨迹方程，设出*M*、*P*点的坐标，由向量关系式用*M*点的坐标表示*P*点的坐标，代入圆的方程可得*M*点的轨迹方程.

(2)(*i*)分类讨论斜率存在与斜率不存在，

①斜率存在时设直线方程，联立方程组后由弦长公式得|*AB*|、再由圆内弦长公式得|*CD*|，转化为分式型函数求最值求得的最值；

②斜率不存在时，由两点间距离公式分别求得|*AB*|、|*CD*|，进而得出.

两者比较后可得的最大值.

(*ii*)分类讨论斜率存在与斜率不存在，

①斜率存在时，计算，要使得其为定值，则要与*k*无关，可得*m*、*n*的值.

②斜率不存在时，直接计算的值.

【小问1详解】

设点，，

因为，所以，所以，

即动点*M*的轨迹*E*的方程为

【小问2详解】

(*i*)①当直线*l*的斜率存在时，设直线*l*的方程为，

联立方程组，可得，

∴恒成立，

，，

∴，

又∵，

∴，

设，则，

则，得，当且仅当时取到，

此时最大值是

②当直线*l*的斜率不存在时，则直线*l*为，可得，，此时，

综上，最大值是

①当直线*l*的斜率存在时，设，，，可得，



，



，

要使得上式为定值，即与*k*无关，则满足且，

解得，，即点，此时，

②当直线*l*的斜率不存在时，直线*l*为，解得，，所以，

综上可得，存在定点，使得