**学军中学高二年级12月教学质量检测数学学科考试试卷**

**一、选择题：本大题共8小题，每小题5分，共40分.**

1. 已知直线*l*的方向向量，平面的一个法向量为，若直线*l*在平面内，则的值是( )

A.  B.  C. 2 D. 16

【答案】A

【解析】

【分析】根据法向量的定义，转化为两个向量垂直，即可列式求解.

【详解】由条件可知，，得.

故选：A

2. 若：，，是三个非零向量；：，，为空间的一个基底，则*p*是*q*的 ( )

A. 充分不必要条件

B. 必要不充分条件

C. 充要条件

D. 既不充分也不必要条件

【答案】B

【解析】

【分析】利用基底的判定方法和充分不必要条件的定义进行判定.

【详解】空间不共面的三个向量可以作为空间的一个基底，

若，，是三个共面非零向量，则，，不能作为空间的一个基底；

但若，，为空间的一个基底，则，，不共面，

所以，，是三个非零向量，即*p*是*q*的必要不充分条件.

故选：B.

3. 已知三条直线为，，，，则下列结论正确的是( )

A.  B. 三条直线的斜率之和为4.5

C. 三条直线的倾斜角之和为135° D. 三条直线在*y*轴上的截距之和为

【答案】C

【解析】

【分析】分别将三直线转化成点斜式，结合概念判断即可.

【详解】设三条直线对应斜率为，倾斜角为，

，；

，；

，，

因为，所以不垂直于，选项A错误；

，故选项B错误；

，

因为，所以，所以，即三条直线的倾斜角之和为135°，故选项C正确；

三条直线在*y*轴上的截距之和为，故选项D错误.

故选：C

4. 焦距为，并且截直线所得弦的中点的横坐标是的椭圆的标准方程为( )

A.  B. 

C.  D. 或

【答案】A

【解析】

【分析】设椭圆方程为，且，及交点，将两点代入椭圆方程可得，根据弦中点坐标关系可得，结合直线方程得，再由椭圆的焦距求得的值，即可得椭圆标准方程.

【详解】解：设椭圆方程为，且

设直线与椭圆相交的两点坐标为，由题意可知，即，

所以，

又在椭圆上，可得：，两式相减得，

整理得：，则，所以，

又直线的斜率为，所以，即，所以

椭圆的焦距为，所以，则，

故可得：解得，故椭圆的标准方程为：.

故选：A.

5. 平面直角坐标系中，关于曲线对应的图像下列选项错误的是( )

A. 若，则曲线*C*围成面积

B. 若，则曲线*C*围成的面积

C 若，则曲线*C*关于原点对称

D. 若，则曲线*C*有2条渐近线

【答案】D

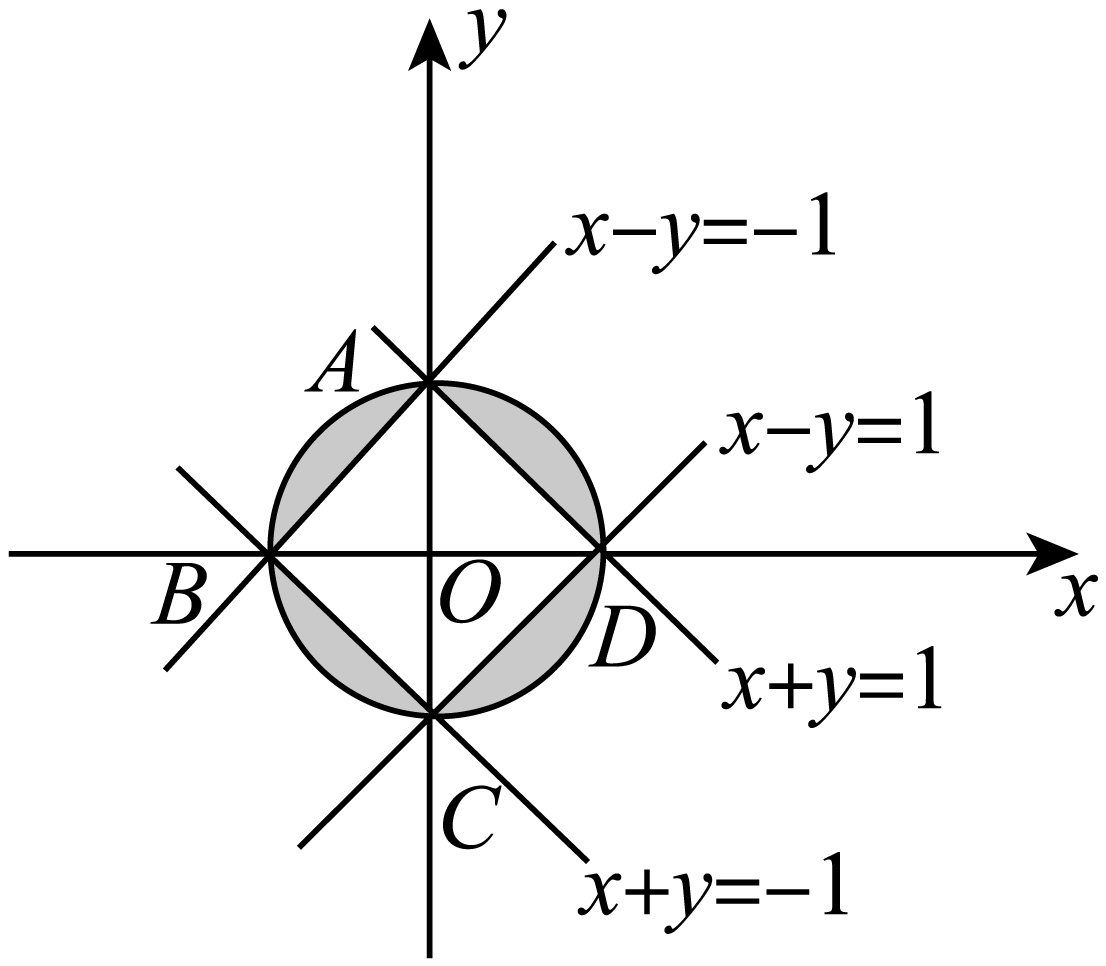
【解析】

【分析】根据对称性，和极限思想解决.

【详解】对于A项，若，即介于的区域里面，所以面积，所以A项正确；

对于B项，若，即，根据幂函数图像的性质得

，所以，所以曲线上的点表示在内部，设点是曲线上的点,即，把点关于原点对称的点，轴对称的点分别代入曲线都成立，说明曲线即关于原点对称也关于轴对称，当时满足即，所以曲线上的点表示在直线的右上方，如图



所以曲线上的点落在正方形外，圆内，所以曲线表示的面积.

对于C项，即，设点在曲线上即，则点关于原点的对称点代入曲线即则说明曲线关于原点对称；

对于D项，当时，,即是曲线的渐近线，同理也是曲线的渐近线，所以曲线至少有四条渐近线，故D不正确.

故选：D.

6. 已知点，，为直线上一动点，当最大时，点的坐标是( )

A.  B.  C.  D. 

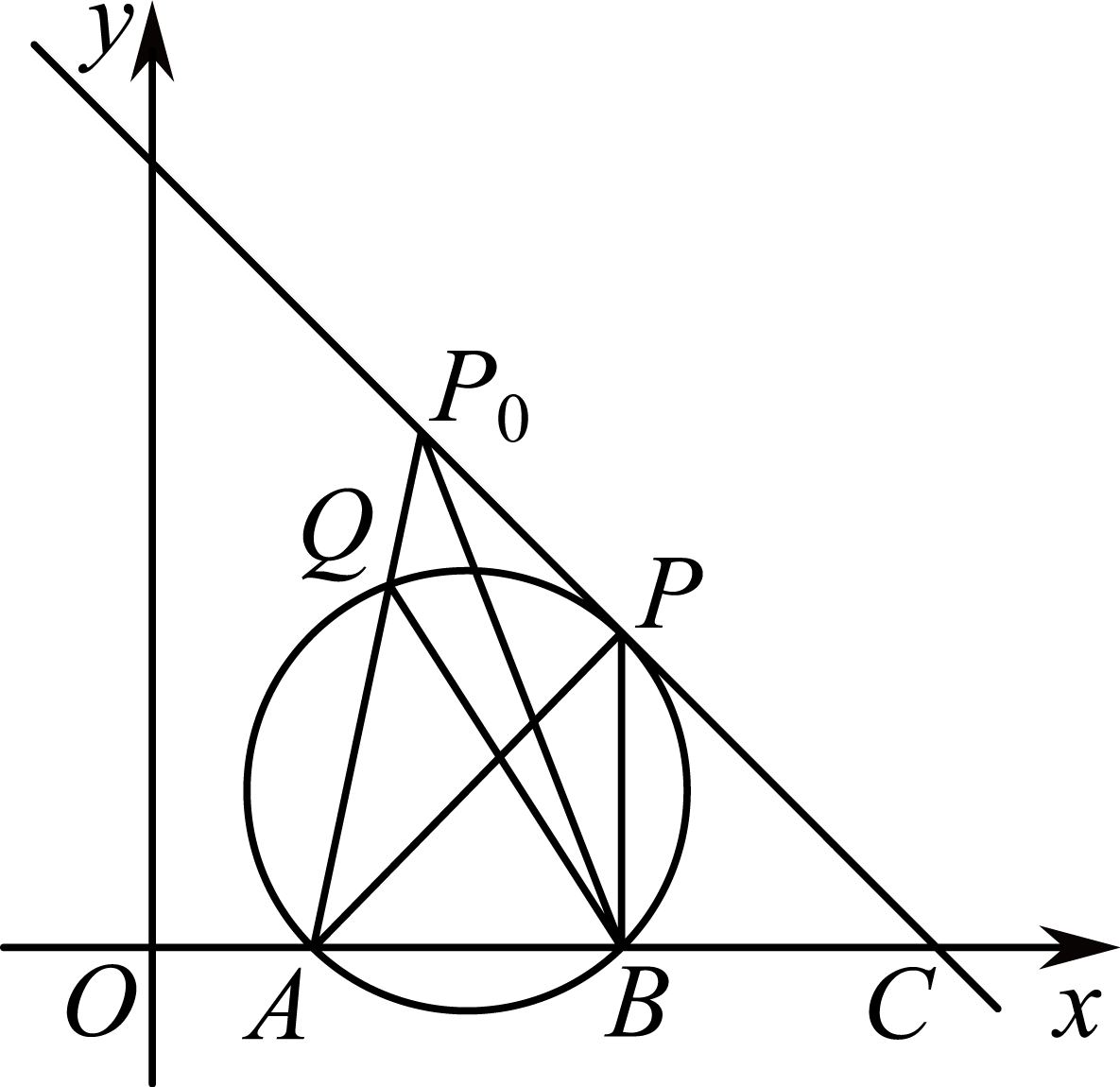
【答案】B

【解析】

【分析】过作圆与直线相切于，在直线上任取一点，连接交圆于，由

得点即为所求点，利用几何关系求点坐标即可.

【详解】如图所示过作圆与直线相切于，在直线上任取一点，连接交圆于，



因为，所以切点即为所求点，

因为点坐标为，所以由切割线定理得，

又由直线的倾斜角为可得，且

由余弦定理可得.

所以轴，

所以点横坐标为3，代入直线方程得点坐标为，

故选：B

7. 已知椭圆和双曲线有相同的焦点、，它们的离心率分别为、，点为它们的一个交点，且，则的范围是( )

A.  B. 

C.  D. 

【答案】C

【解析】

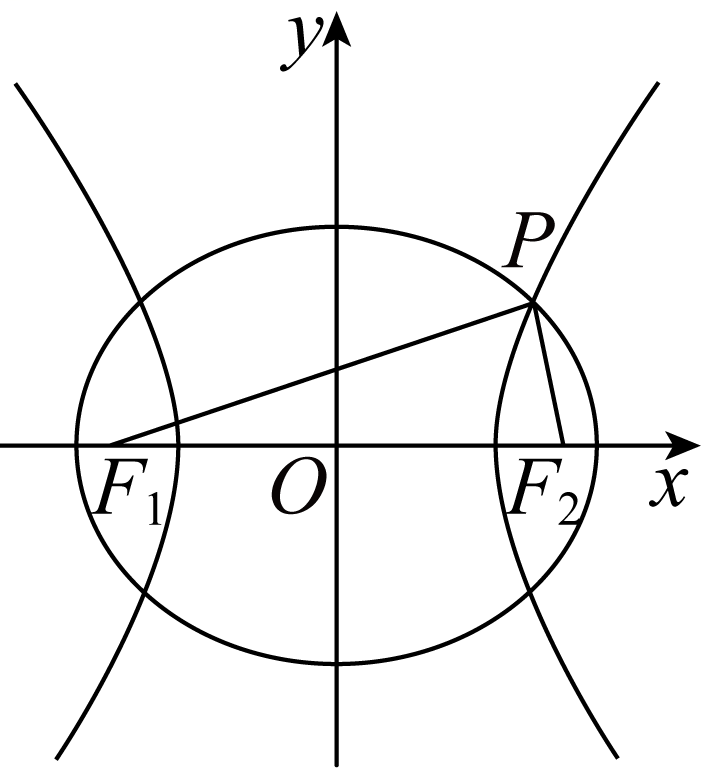
【分析】设椭圆的长半轴长为，双曲线的实半轴长 ，焦距．结合椭圆与双曲线的定义,得， ,在中,根据余弦定理可得到，，与的关系式，进而可得，设则有，所以，构造函数,利用导数求出函数的值域即可.

【详解】解：设椭圆的长半轴长为，双曲线的实半轴长，焦距，点为第一象限交点．

则，，

解得，，

如图：



在中,根据余弦定理可得：

，

整理得，即，

设 则有，，

所以，即有，所以，

所以===，

设,

则,

令，得，

所以在上恒成立,

所以在上单调递减，

当趋于时，趋于，当趋于1时，趋于2，

所以，

即：.

故选：C.

8. 设不等式的解集为，则的值是( )

A. 5 B.  C. 6 D. 7

【答案】D

【解析】

【分析】设，则，原不等式可化为，整理可得该方程表示的点在双曲线上，故原不等式与不等式组同解，整理可得，根据一元二次不等式与一元二次方程之间的关系即可得到答案

【详解】设，则，原不等式可化为.

先解.

则，移项可得，

两边平方可得，，

整理可得，，两边平方整理可得.

所以，表示的点在双曲线上.

则不等式表示的点在双曲线上及其内部.

则不等式与不等式组同解，

整理可得.

由已知可得，不等式的解集是，

所以的两个解为、，根据韦达定理有.

故选：D.

**二、选择题：本大题共4小题，每小题5分，共20分.**

9. 曲线，下列结论正确的有( )

A. 若曲线表示椭圆，则且不等于0 B. 若曲线表示双曲线，则焦距是定值

C. 若，则短轴长为2 D. 若，则渐近线为

【答案】AC

【解析】

【分析】根据椭圆双曲线简单几何性质逐项判断即可.

【详解】对于:表示椭圆,则,即,故正确;

对于:表示双曲线,则,即,

当时,,焦距不是定值, 故错误;

对于:时,为椭圆,短轴长,故正确;

对于:时, 为双曲线,渐近线方程为,故错误;

故选: .

10. 设椭圆的右焦点为，点为左顶点，点为上顶点，直线过原点且与椭圆交于，两点(在第一象限)，则以下命题正确的有( )

A. 

B. 时，三角形面积为

C. 直线与直线的斜率之积是定值

D. 当与平行时，四边形的面积最大

【答案】ABD

【解析】

【分析】根据题意和椭圆的性质，结合直线的特点，可较易判断A选项；对于B选项我们可以巧妙利用椭圆的对称性，将所求三角形转化为面积相同且较易求面积的三角形，利用三角形相关的性质，即可判断；对于C选项，按照选项内容建立起直线和直线的斜率的积的关系式，通过对式子的变形整理，看式子中是否含有变量，如果有变量，则不是定值，如果没有变量，则是定值；对于D选项，我们可以将四边形的面积分解为几个易于计算的小三角形的面积，这样有利于我们更好的建立四边形面积的表达式，从而根据表达式得出面积最大时，和的位置关系.

【详解】设椭圆的长半轴长为，短半轴长为，焦距为，

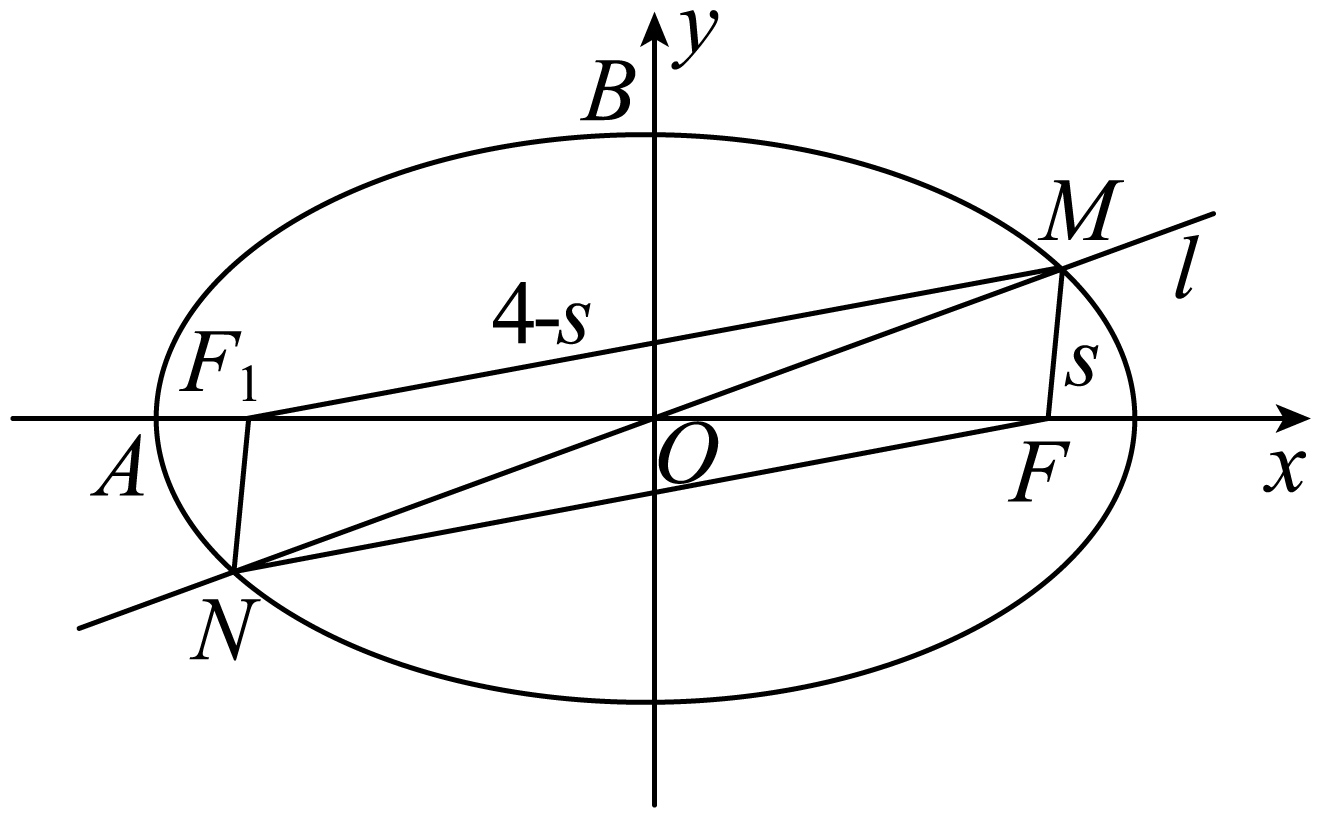
则由题意可知，，，，，

∴，，，直线过原点，且在第一象限，

∴设直线的方程为：，，

∵经过原点，∴，即：，

∴，即：，故A正确；

如图所示：

设椭圆的左焦点为，连接，，，，由对称性可知：四边形是平行四边形，

又：，，

设，，，

由余弦定理可知：，

即：，

即：，解得：，∴，

又：，∴，，

∴

，

∴，故B正确；

设：，点在第一象限，∴，由对称性知：，

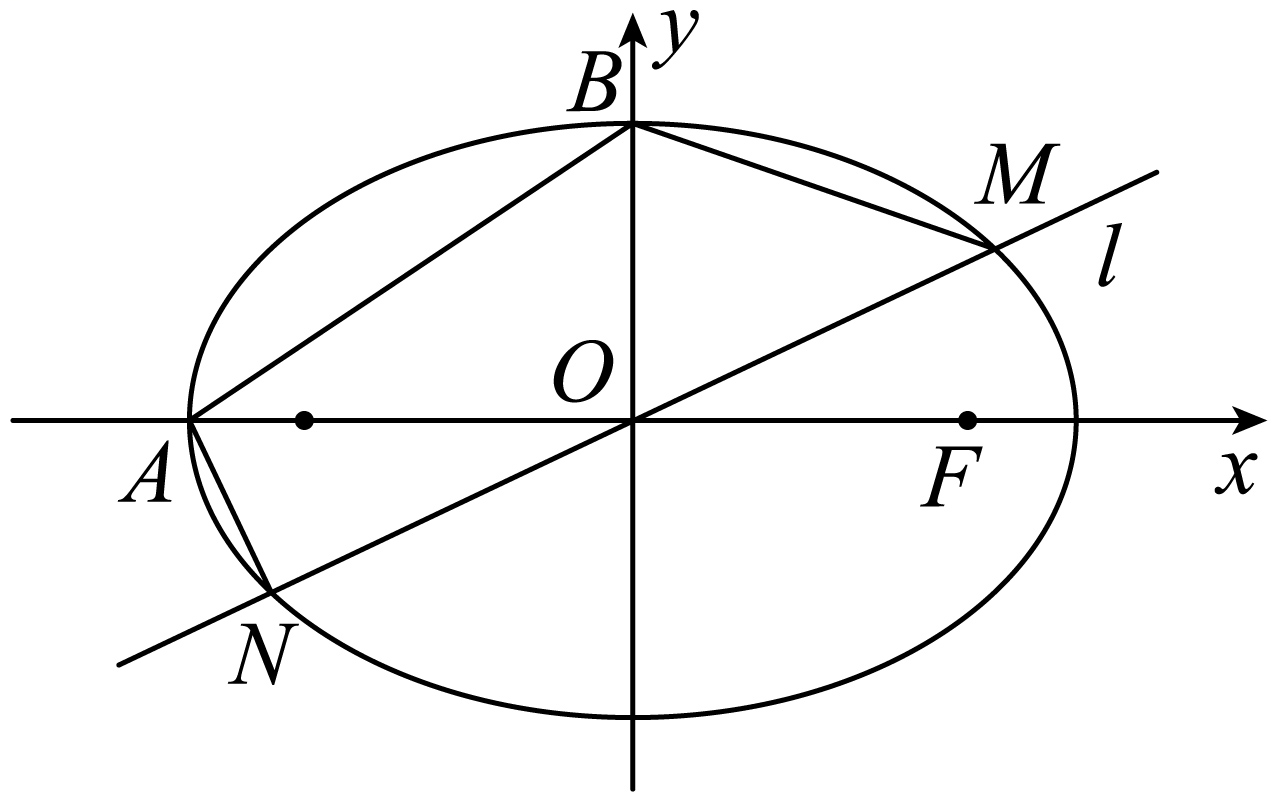
∴，，

∴，

又：在椭圆上，∴，∴，

即有：，

直线与直线的斜率之积与直线的斜率有关，不是定值，故C错误；

如图所示：









，

当且仅当：，即：，，时等号成立，

而，此时，

∴当与平行时，四边形的面积最大，最大面积为，故D正确.

故选：ABD.

【点睛】方法点睛：

关于这类以椭圆为基础的综合性问题，要注意以下几个点：

(1)根据题意和题设条件得到较为标准的草图，这可以帮助我们更好的发现一些细节；

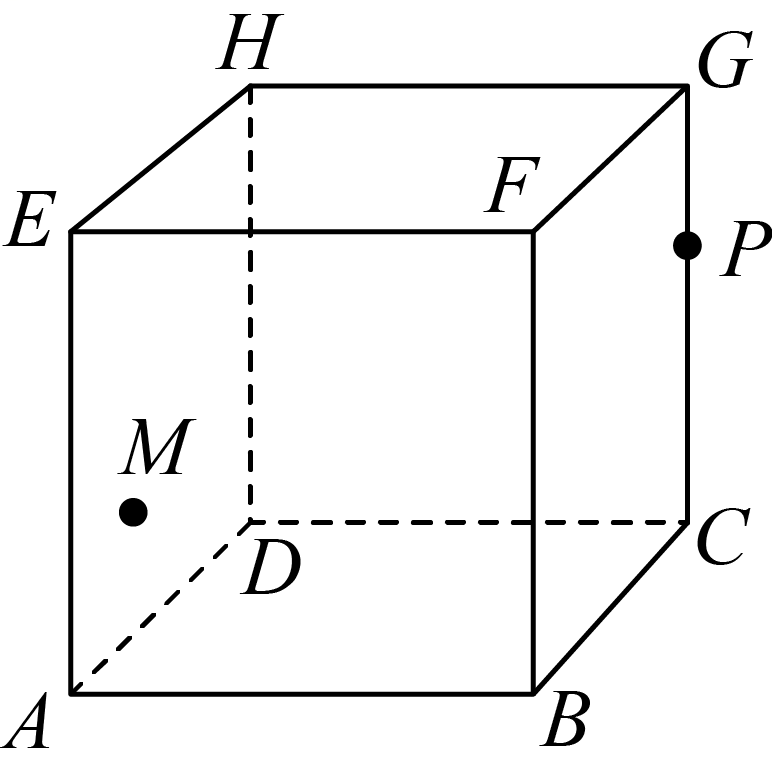
(2)辨析椭圆中包含的原点弦，焦点弦，过焦点三角形，过顶点三角形，线段的垂直、平行，特殊角，特别注意三角相关知识点的应用；

(3)利用椭圆的性质，特别是椭圆的对称性，可以引出点的对称，直线的对称，一些几何图形的对称；

(4)椭圆中解题的关键是建立正确的关系.这个关系有联立方程组得到或的二次式，进而得到根与系数的关系，也有几何关系、不等关系、甚至运动关系，数形结合、转化是主要思维方法；

(5)解析几何对计算要求较高，应特别注意多项运算，负号运算.

11. 如图，若正方体的棱长为1，点*M*是正方体的侧面上的一个动点(含边界)，*P*是棱上靠近*G*点的三等分点，则下列结论正确的有( )



A. 沿正方体的表面从点*A*到点*P*的最短路程为

B. 保持与垂直时，*M*的运动轨迹是线段

C. 若保持，则点*M*在侧面内运动路径长度为

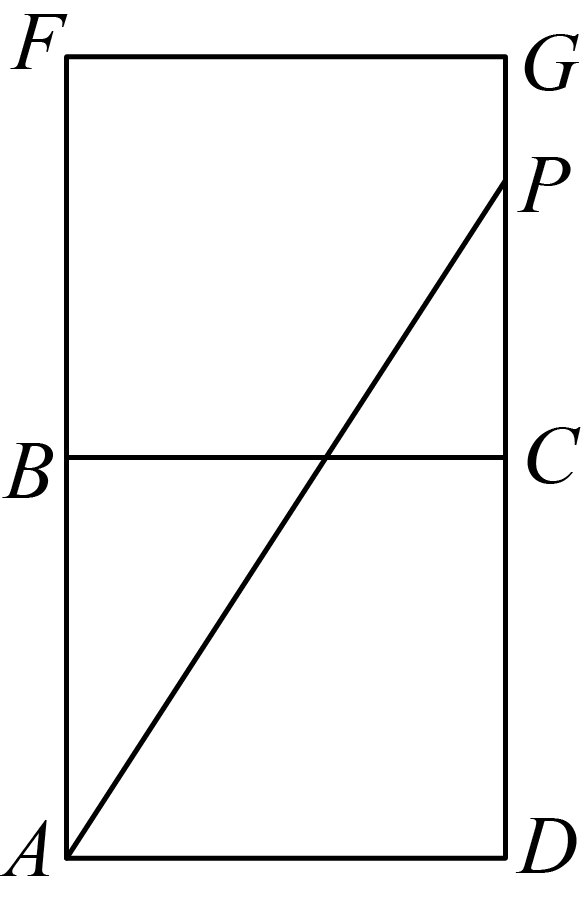
D. 当*M*在*D*点时，三棱锥的体积取到最大值

【答案】BD

【解析】

【分析】利用平面分析可判断A，利用空间直角坐标系得到轨迹方程为直线方程可判断B，利用向量坐标表示表示模长可得轨迹为圆即可判断C，利用点到直线的距离公式可判断D.

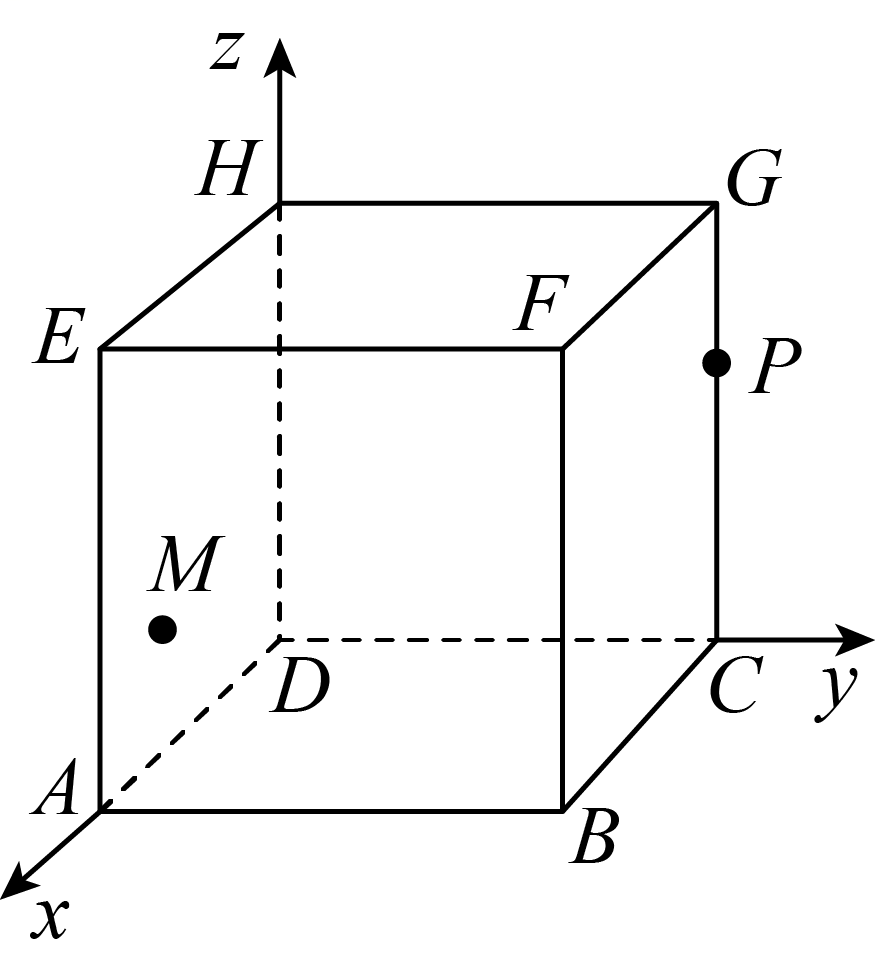
【详解】对于A，将正方体的下面和右面展开可得如下图形，



连接,则，

因此*A*到点*P*的最短路程为，故A错误；

对于B，建系如图，设，



，

所以，即，

又因为是侧面上的一个动点(含边界)，

所以*M*的运动轨迹是线段,

为靠近点的三等分点和靠近点三等分点的的连线段.

故B正确；

对于C，由B选项过程可得，

整理得，

所以*M*在侧面内运动路径是以为圆心，为半径的圆，

而点到的距离等于，

所以要保持，则点在侧面外，

所以点*M*在侧面内运动路径长度为，故C错误；

对于D，设平面的法向量为，

，

所以，令，解得，

所以点到平面的距离等于，

因为点在平面内，所以，

所以当，即当*M*在*D*点时，三棱锥的高最大，

又因为的面积为定值，

所以当*M*在*D*点时，三棱锥的体积最大，故D正确.

故选:BD.

12. 设双曲线左右焦点分别为，，设右支上一点*P*与所连接的线段为直径的圆为圆，以实轴为直径的圆为圆，则下列结论正确的有( )

A. 圆与圆始终外切 B. 若与渐近线垂直，则与圆相切

C. 的角平分线与圆相切 D. 三角形的内心和外心最短距离为2

【答案】ABD

【解析】

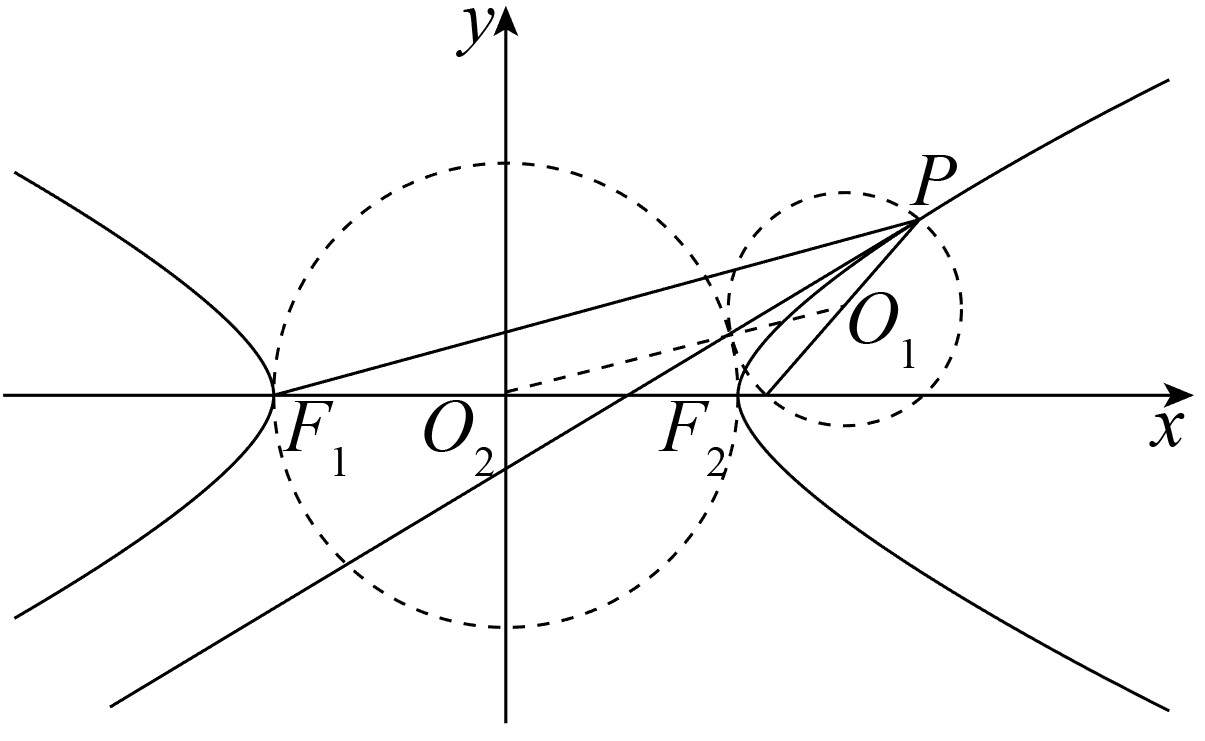
【分析】利用圆心距与半径的关系判断两圆是否外切，圆心到直线距离与半径的关系判断直线是否与圆相切，判断三角形内心和外心的位置特征，计算内心和外心最短距离.

【详解】双曲线，左右焦点分别为，，

设，满足，

*P*与所连接的线段为直径的圆为圆，则，半径，

实轴为直径的圆，圆心，半径，如图所示：



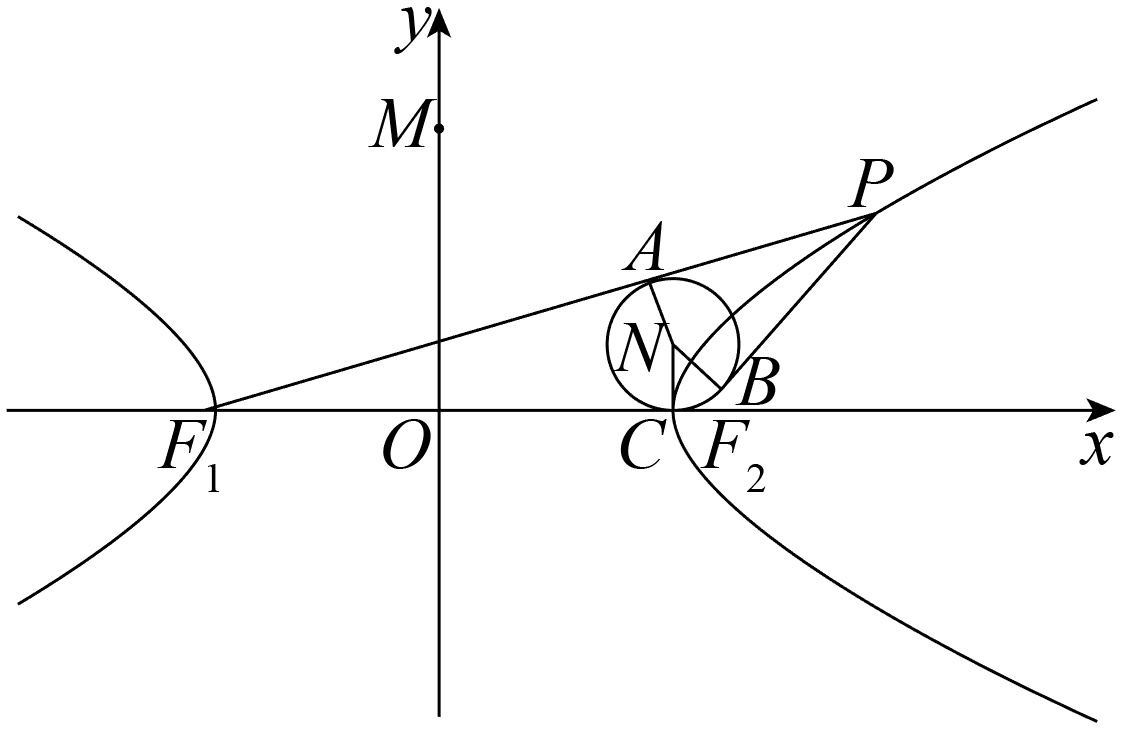
，

，所以圆与圆始终外切，A选项正确；

双曲线，渐近线方程为，若与渐近线垂直，则所在直线方程为，到直线为距离，所以与圆相切，B选项正确；

为圆的直径， 的角平分线过*P*点，不可能与互相垂直，即的角平分线与圆不可能相切，C选项错误；

三角形的内切圆的切点分别为*A*，*B*，*C*，其中*C*在*x*轴上，内心为*N*，如图所示：



则，

又，故，所以，内心*N*的横坐标为2，

三角形的外心是三边垂直平分线的交点，所以外心*M*一定在*y*轴上，外心*M*的横坐标为0，

在*P*点移动的过程中，当点*M*与点*N*纵坐标相同时，两点间距离最短为2，即三角形的内心和外心最短距离为2，D选项正确.

故选：ABD

**三、填空题：本大题共4小题，每小题5分，共20分.**

13. 直线将单位圆分成长度的两段弧,则\_\_\_\_\_\_.

【答案】

【解析】

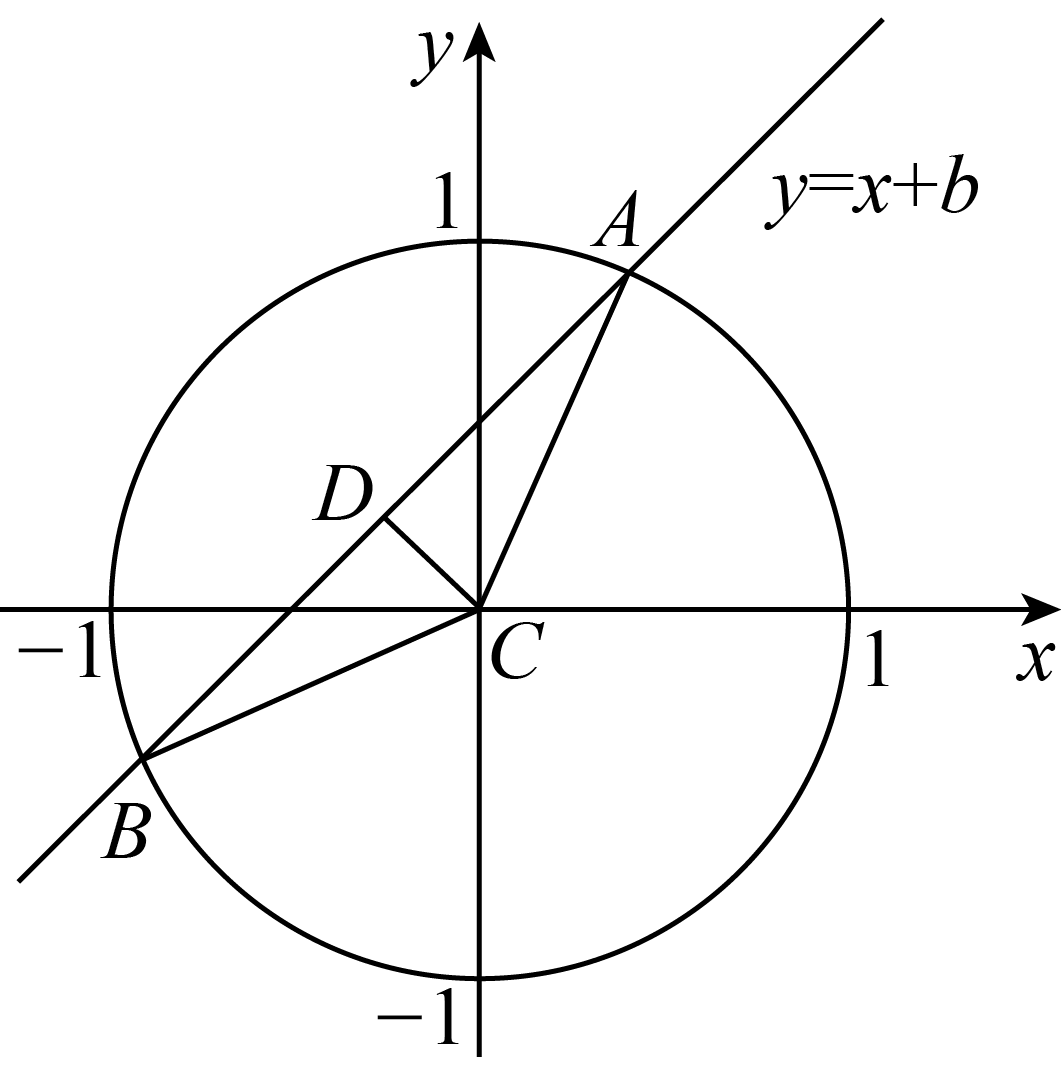
【分析】根据直线将单位圆分成长度的两段弧，求出劣弧所对圆心角，再根据半径为1，求出圆心到直线的距离，根据点到直线的距离公式求出即可.

【详解】解:由题知分成长度的两段弧，

所以两段弧长所对圆心角之比为，故劣弧所对圆心角为，

记与圆交点为，则，

过点作垂线，垂足为，画图如下:



则有，，，,

即圆心到直线的距离为，

，根据点到直线的距离公式有:，解得.

故答案为：.

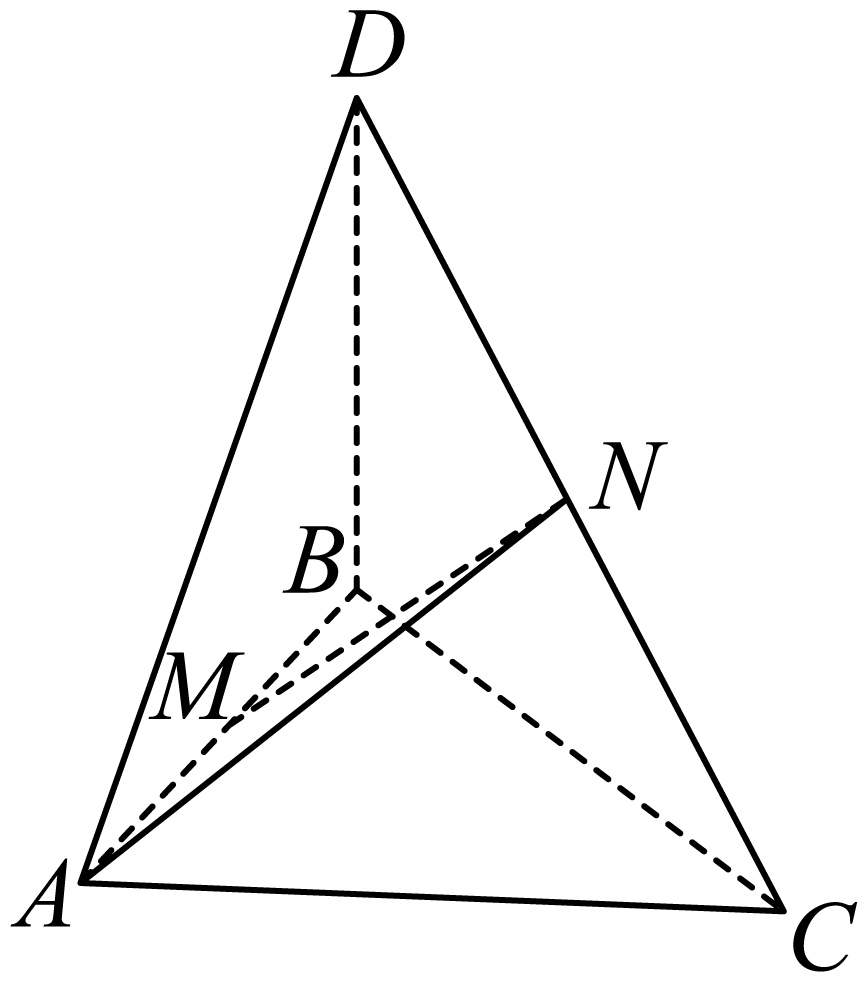
14. 在四面体中，，，的长度分别为1，2，3，且，*M*，*N*分别为，中点，则的长度为\_\_\_\_\_\_.

【答案】

【解析】

【分析】根据几何体的结构特征，将向量表示成，再根据其长度和夹角用空间向量计算的长.

【详解】根据题意画出几何体如下图所示，



则

又因为，，的长度分别为1，2，3，且，

所以，





得

即的长度为.

故答案为：.

15. 已知双曲线，过双曲线*C*上任意一点*P*作两条渐近线的垂线，垂足分别为*M*，*N*，则的最小值为\_\_\_\_\_\_.

【答案】##

【解析】

【分析】先由双曲线的标准方程求得其渐近线方程，再利用点线距离公式及双曲线的几何性质求得的范围，从而得解.

【详解】因为双曲线，所以双曲线的渐近线方程为，

设是双曲线上任意一点，则，

所以，则，

由点线距离公式得，

两边平方得



，

所以，即的最小值为.

故答案为：.

16. 在椭圆上有点，斜率为1的直线*l*与椭圆交于不同的*A*，*B*两点(且不同于*P*)，若三角形的外接圆恰过点*P*，则外接圆的圆心坐标为\_\_\_\_\_\_.

【答案】

【解析】

分析】根据题意得到，联立直线与椭圆方程，利用韦达定理求得，，，；

法一：先利用点斜式求得的中垂线方程，联立两者方程即可求得圆心，再由半径相等得到，利用两点距离公式，代入上述式子得到关于的方程，解之即可；

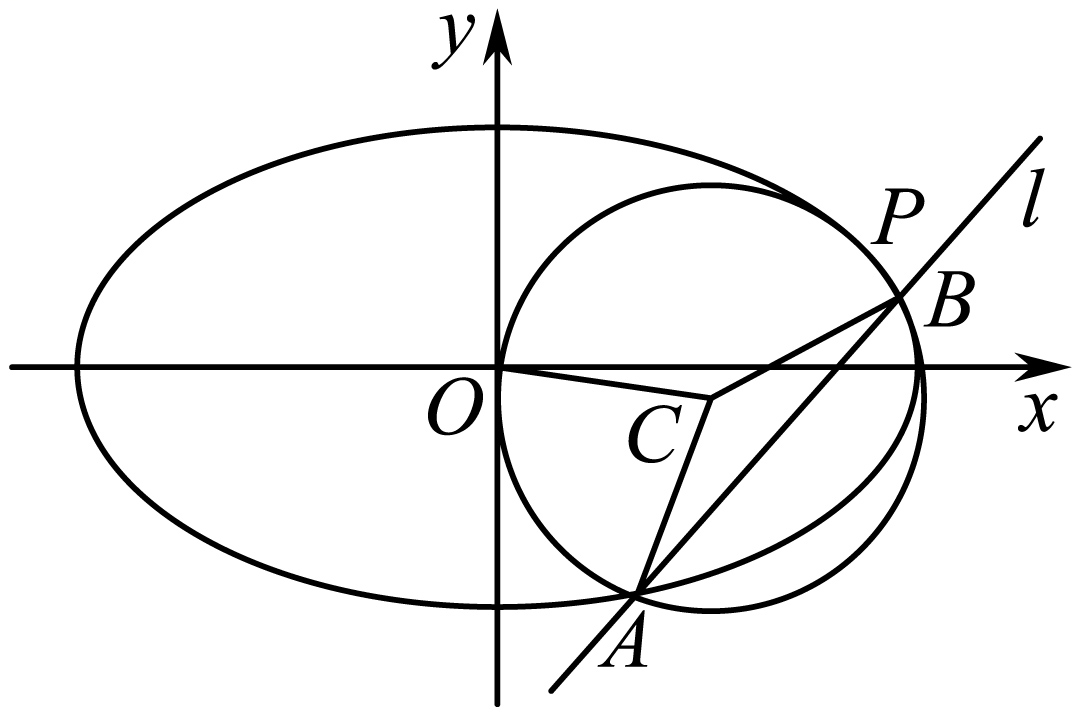
法二：根据题意得到圆的方程，联立直线与圆的方程，利用韦达定理求得，，进而得到关于的表达式，又由点在圆上得到关于的方程，解之即可.

【详解】依题意，设，，直线，

联立，消去，得，

所以，，

则，，

 .

法一：

因为，所以，的中点坐标为，中垂线的斜率为，

所以中垂线方程为，即，

因为的斜率为，的中点坐标为，即，

所以中垂线的斜率为，则中垂线方程，即，

联立，解得，则圆心坐标，

因为，

所以，

整理得，

因为，，，，

所以，，

则，

整理得，解得，，

当时，直线，显然直线过*P*点，舍去，

当时，，直线，满足题意，

又，所以此时圆心坐标.

法二：因为圆过原点，所以设圆的方程为，

联立，消去，得，

所以，，

又，，所以，，

所以，，

因为点在圆上，所以，即，

所以，整理得，

解得，，

当时，直线，显然直线过*P*点，舍去，

当时，，，

对于方程，有，

对于方程，即，有，满足题意，

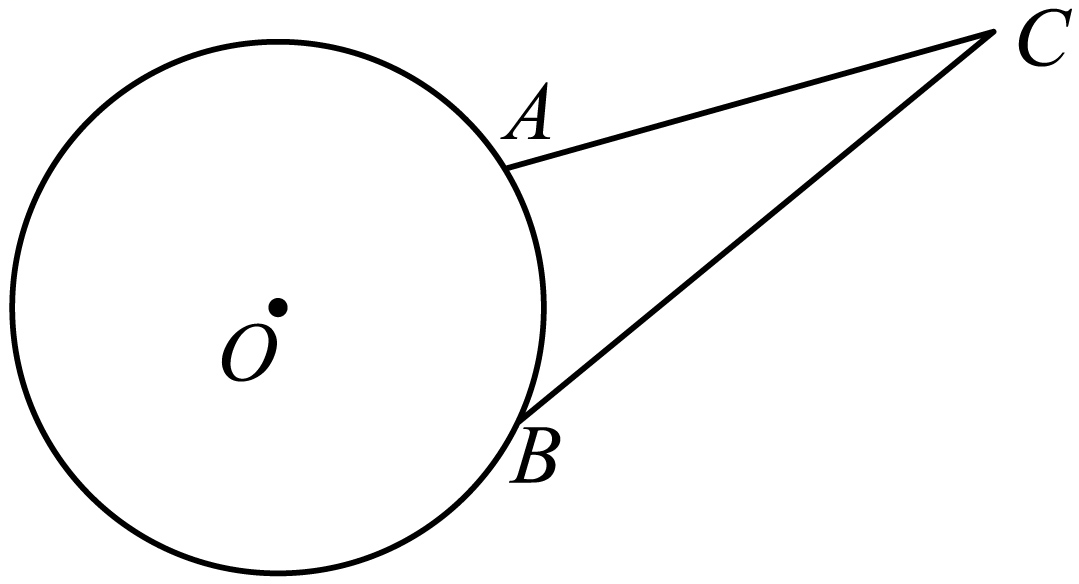
又因为外接圆的圆心坐标为，所以圆心为.

故答案为：.

【点睛】方法点睛：直线与圆锥曲线位置关系的题目，往往需要联立两者方程，利用韦达定理解决相应关系，其中的计算量往往较大，需要反复练习，做到胸有成竹.

**四、解答题：本大题共6小题，共70分.**

17. 学军中学11月在杭州乐园举行了秋游活动，其中“旋转木马”项目受到了师生们的喜爱．假设木马旋转时为逆时针方向的水平匀速圆周运动，圆心为*O*，半径为5米，周期为1分钟．如图，在旋转木马右侧有一固定相机*C*(*C*，*O*两点分别在*AB*的异侧)，若记木马一开始的位置为点*A*，与*C*的直线距离为7米．110秒后木马的位置为点*B*，与*C*的直线距离为8米．



(1)求弦长的值；

(2)求旋转中心*O*到*C*点的距离．

【答案】(1)

(2)

【解析】

【分析】(1)先求出木马旋转的角度，进而得到，从而求得弦长的值；

(2)在三角形中，先根据余弦定理求出，进而得到，又在三角形中，根据余弦定理即可求得．

【小问1详解】

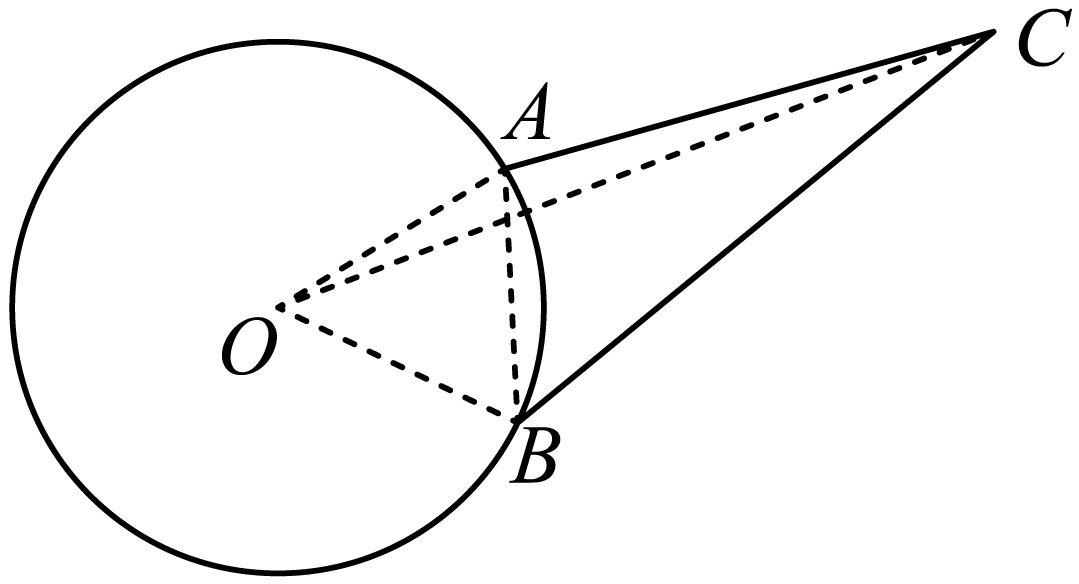
连接

由木马旋转的角度为，即，

所以三角形为等边三角形，所以；

【小问2详解】

连接，



在三角形中，

由余弦定理有，

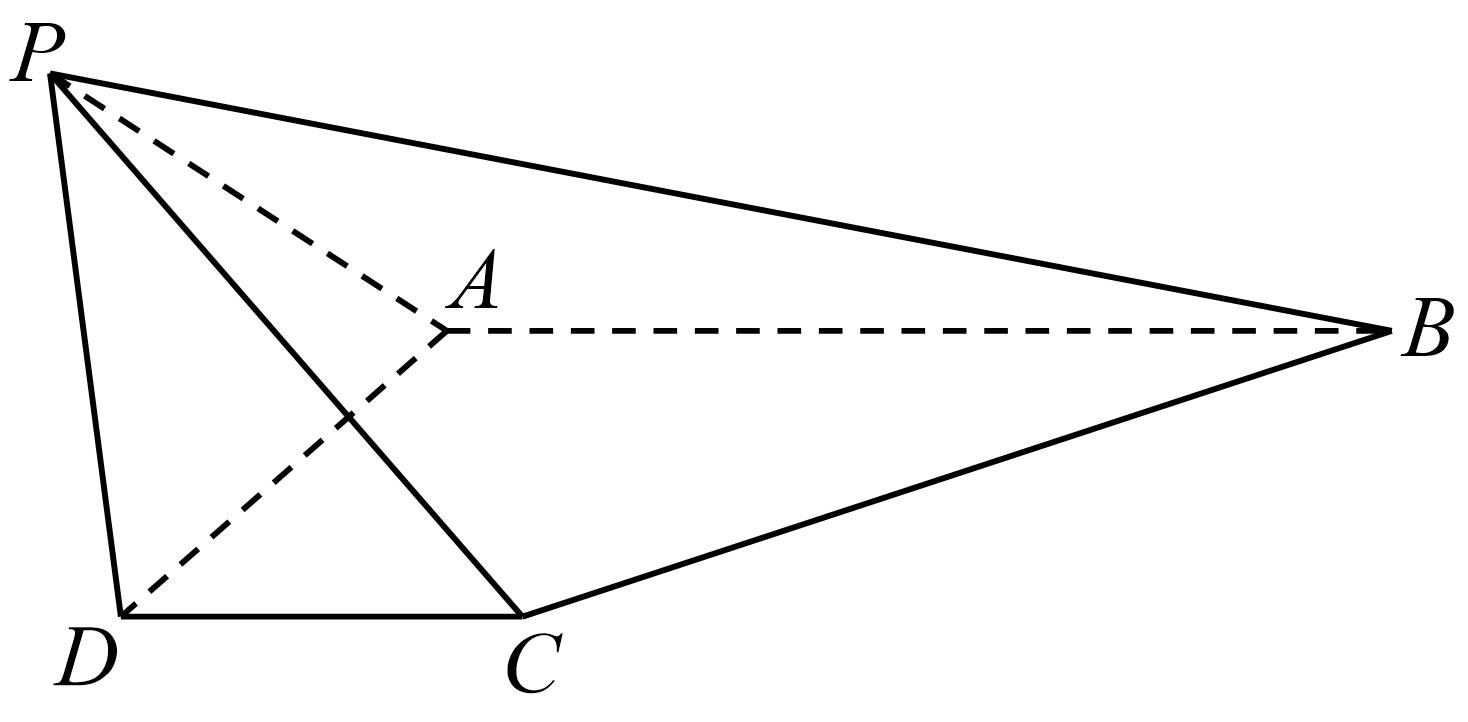
因为，所以，

又，

在三角形中，由余弦定理有，

故旋转中心*O*到*C*点距离为．

18. 如图，四棱锥中，△为正三角形，，，，.



(1)求证：；

(2)求与平面所成角的正弦值.

【答案】(1)证明见解析；(2).

【解析】

【分析】(1)取中点，连结.由平面几何及解三角形知识可证得， ，再根据线面垂直的判定定理和性质定理可得证.

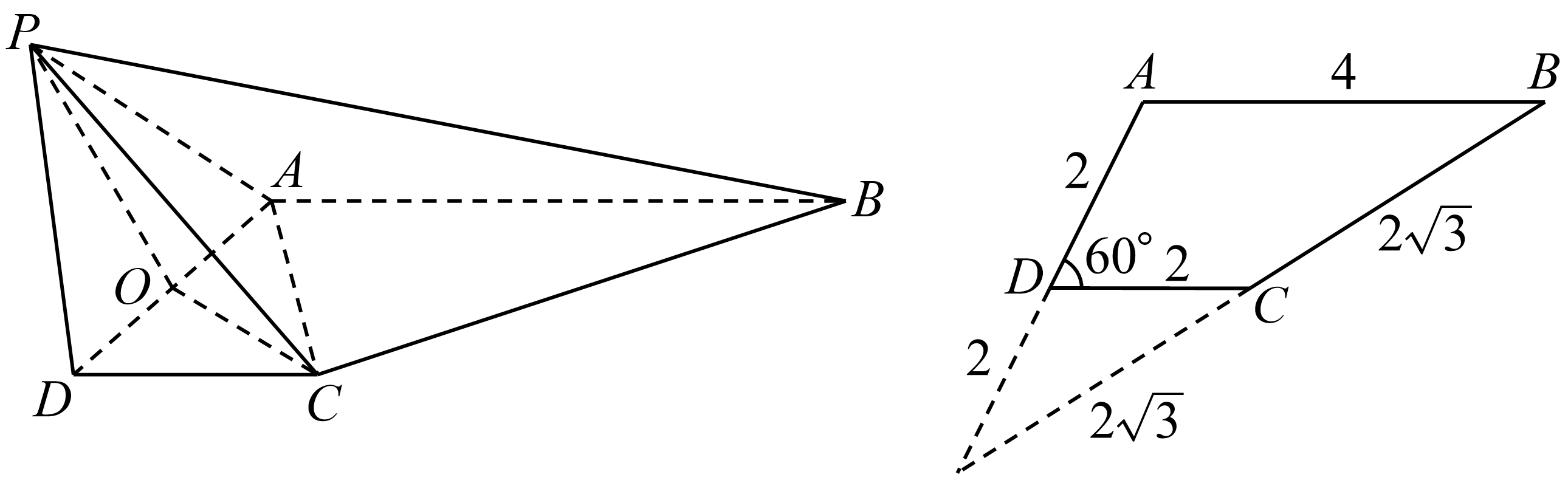
(2)方法一：过点作平面，则垂足必在直线上，由解三角形的知识可求得平面所成角的正弦值.

方法二：过点作直线，则平面，建立空间直角坐标系.运用线面角的空间向量求解方法可求得答案.

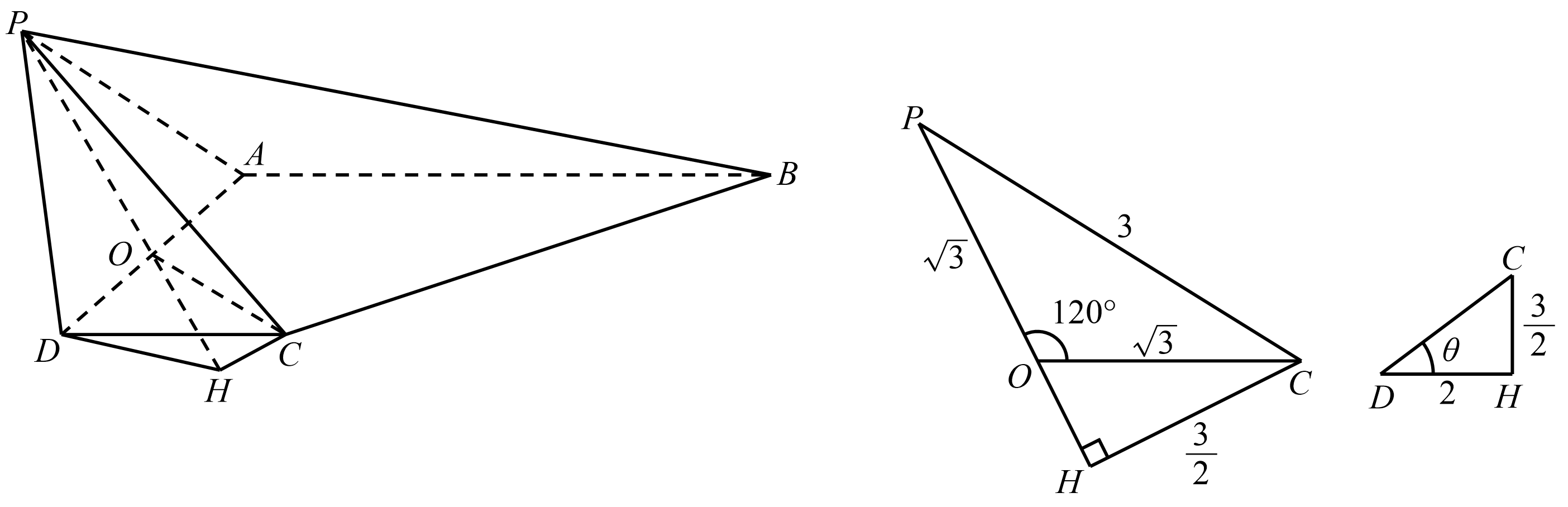
【详解】(1)取中点，连结.因为，，

由平面几何及解三角形知识得 ，解得 ，所以，

因此△为正三角形，故，又因为△也是正三角形，因此，又，所以平面，而平面，所以.



(2)方法一：



因为，所以与平面所成角即与平面所成角，记作.

由(1)得平面，又平面，所以平面平面，

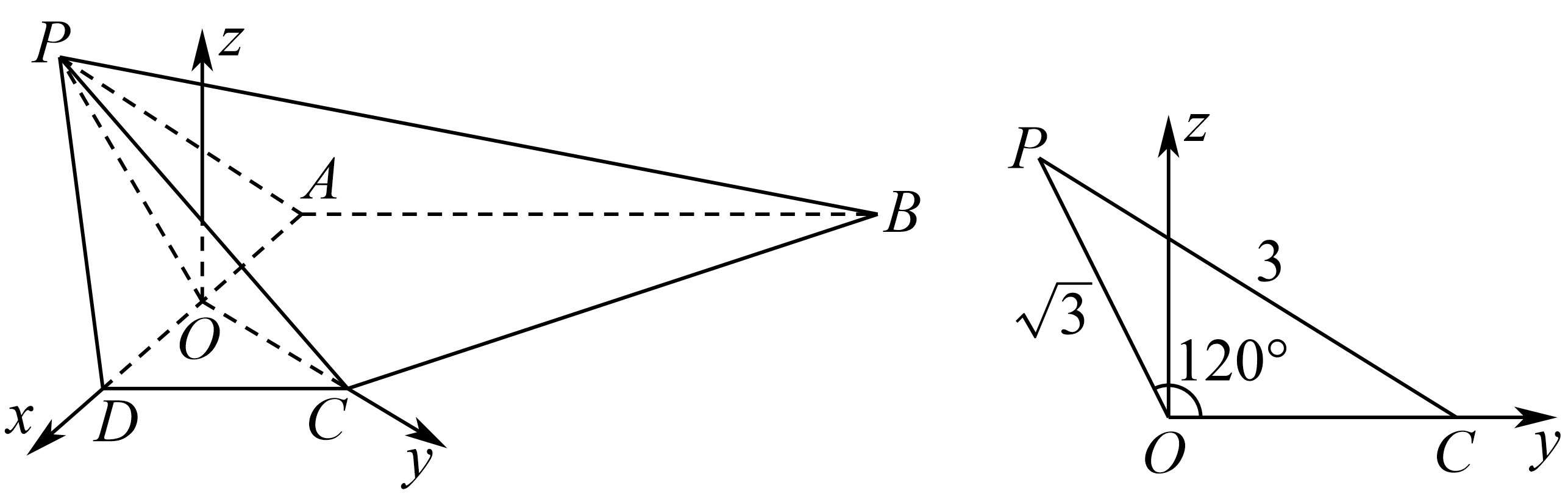
平面平面，故过点作平面，则垂足必在直线上，

此时，在正△中，，而，，

所以在△中，由余弦定理可得，所以，又，

所以，所以与平面所成角的正弦值为.

方法二：



由(1)知平面，又平面，所以平面平面，

平面平面.故过点作直线，则平面，

又，故可如图建立空间直角坐标系.又，，，，可求得各点坐标：，，，，

设平面的一个法向量为，则，即，

故，令，故，又，

记与平面所成角为，则.

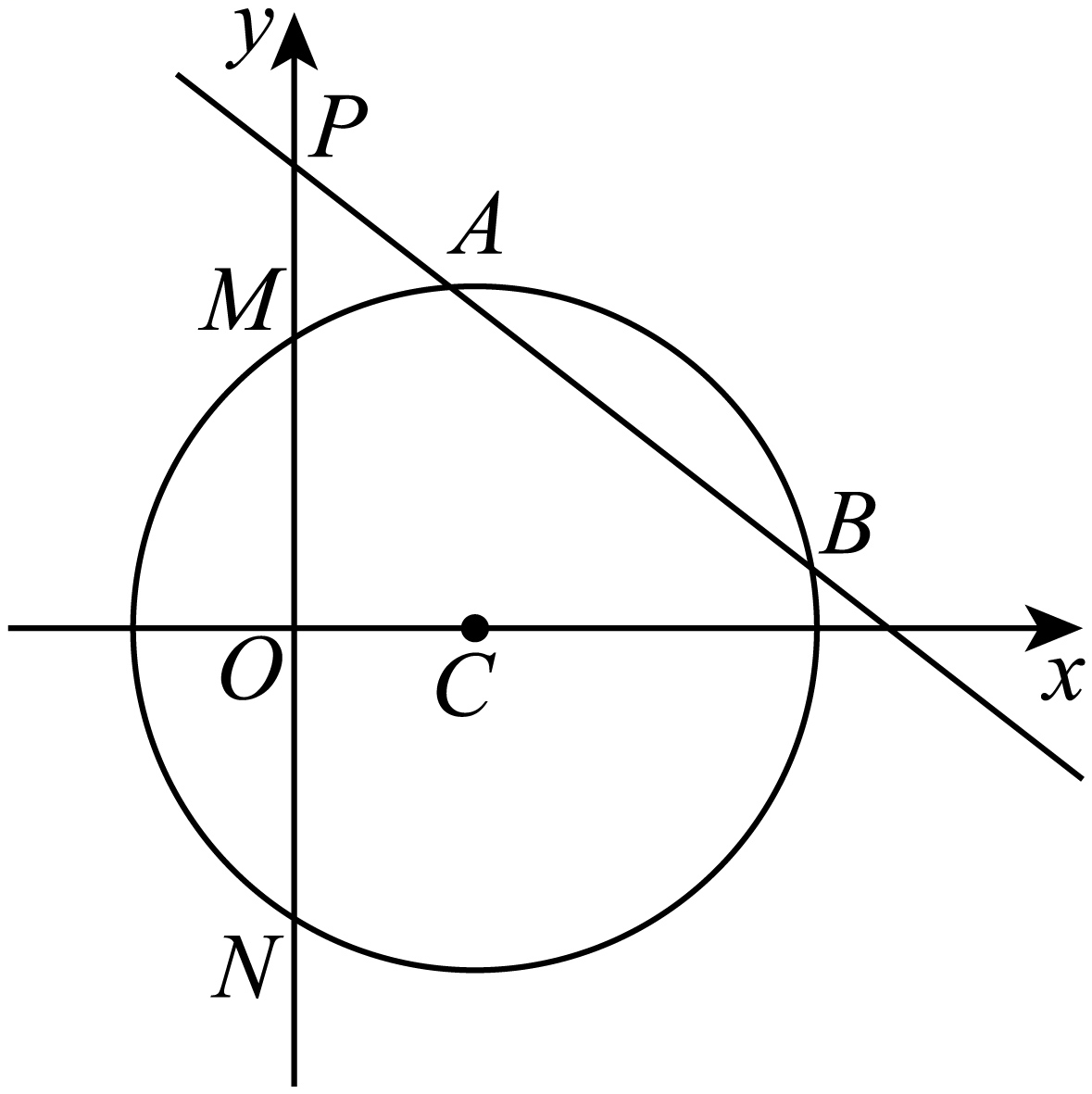
又因为，故与平面所成角的正弦值为.

【点睛】思路点睛：线面角的二种求法：

1.几何法：一般要有三个步骤：一作，二证，三算.

2. 向量法：直线*a*的方向向量和平面的法向量分别为和.直线*a*的方向向量和平面所成的角*θ*满足: 

19. 已知圆心在轴正半轴上的圆与直线相切，与轴交于两点，且.



(1)求圆的标准方程；

(2)过点的直线与圆交于不同的两点，若设点为的重心，当的面积为时，求直线的方程.

【答案】(1)；(2)或.

【解析】

【详解】试题分析：(1)设圆*C*的方程为，利用点C到直线5*x*+12*y*+21=0的距离为，求出*a*，即可求圆C的标准方程；(2)利用△*MNG*的面积为，得出||=1，设*A*，*B*，则，即，直线方程与圆的方程联立，即可得出结论

试题解析：(1)由题意知圆心，且，

由知中，，，则，

于是可设圆的方程为

又点到直线的距离为，

所以或(舍)，

故圆的方程为.

(2)的面积，所以．

若设，则，即，

当直线斜率不存在时，不存在，

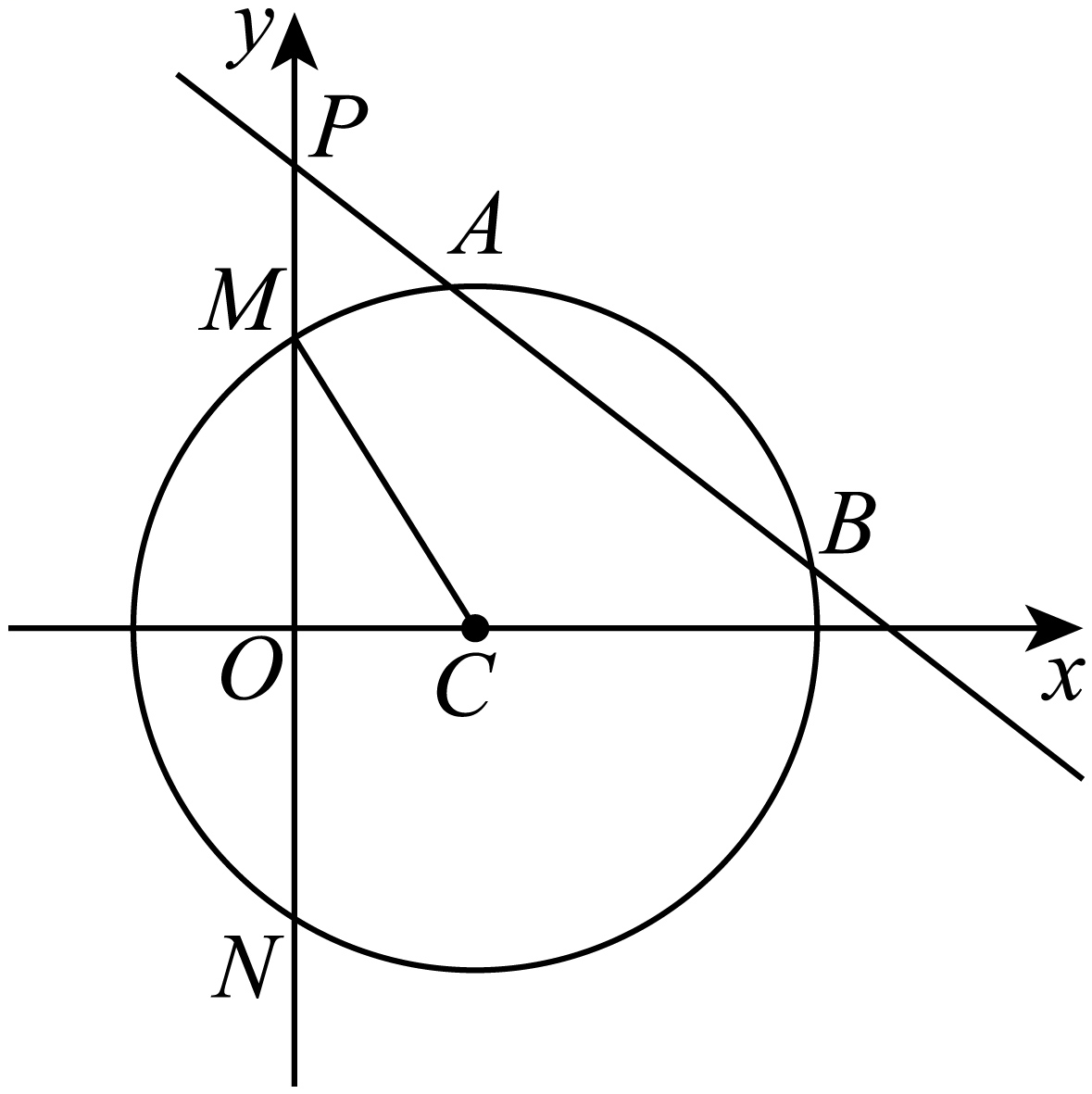
故可设直线为，代入圆的方程中，

可得，

则，即

得或，

故满足条件的直线的方程为或.



20. 已知焦点在*x*轴上的椭圆*C*过定点，离心率为.过点的直线*l*与椭圆交于不同的两点*M*，*N*，

(1)求椭圆*C*方程.

(2)求的取值范围.

【答案】(1)

(2)

【解析】

【分析】(1)由离心率及椭圆过点*P*得方程组求出参数即可；

(2)讨论直线斜率存在与否，其中斜率存在时，设直线方程为，联立直线与椭圆方程，结合判别式、韦达定理、弦长公式可得的函数式及其范围.

【小问1详解】

离心率为，焦点在*x*轴上的椭圆可设为，

代入可解得，∴椭圆方程为.

【小问2详解】

设*M*点坐标为，*N*点坐标为，

①当直线斜率存在时，设直线方程为，

联立直线与椭圆方程可得，

由题意，，解得，

由书达定理：，

∴，

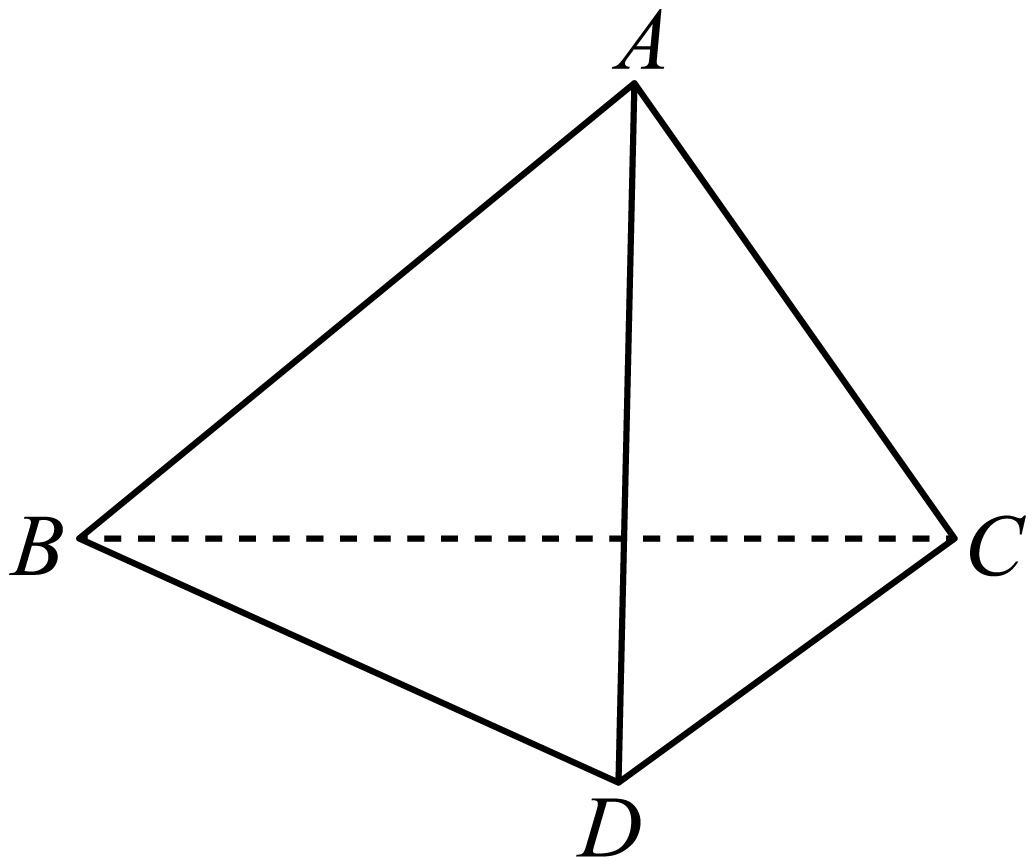
由，得；

②当直线斜率不存在时，此时直线方程为，

解得*M*，*N*点坐标分别为，，此时.

综上所述，.

21. 如图，已知四边形由和拼接而成，其中，，，，将沿着折起，



(1)若，求异面直线与所成角的余弦值；

(2)当二面角最大时，求此时二面角的余弦值.

【答案】(1)

(2)

【解析】

【分析】(1)运用向量数量积的方法即可求解；

(2)建立空间直角坐标系，运用空间向量数量积构造函数，求该函数的最小值即可.

【小问1详解】

由于，，，，

所以，，.

设异面直线与所成角为，则



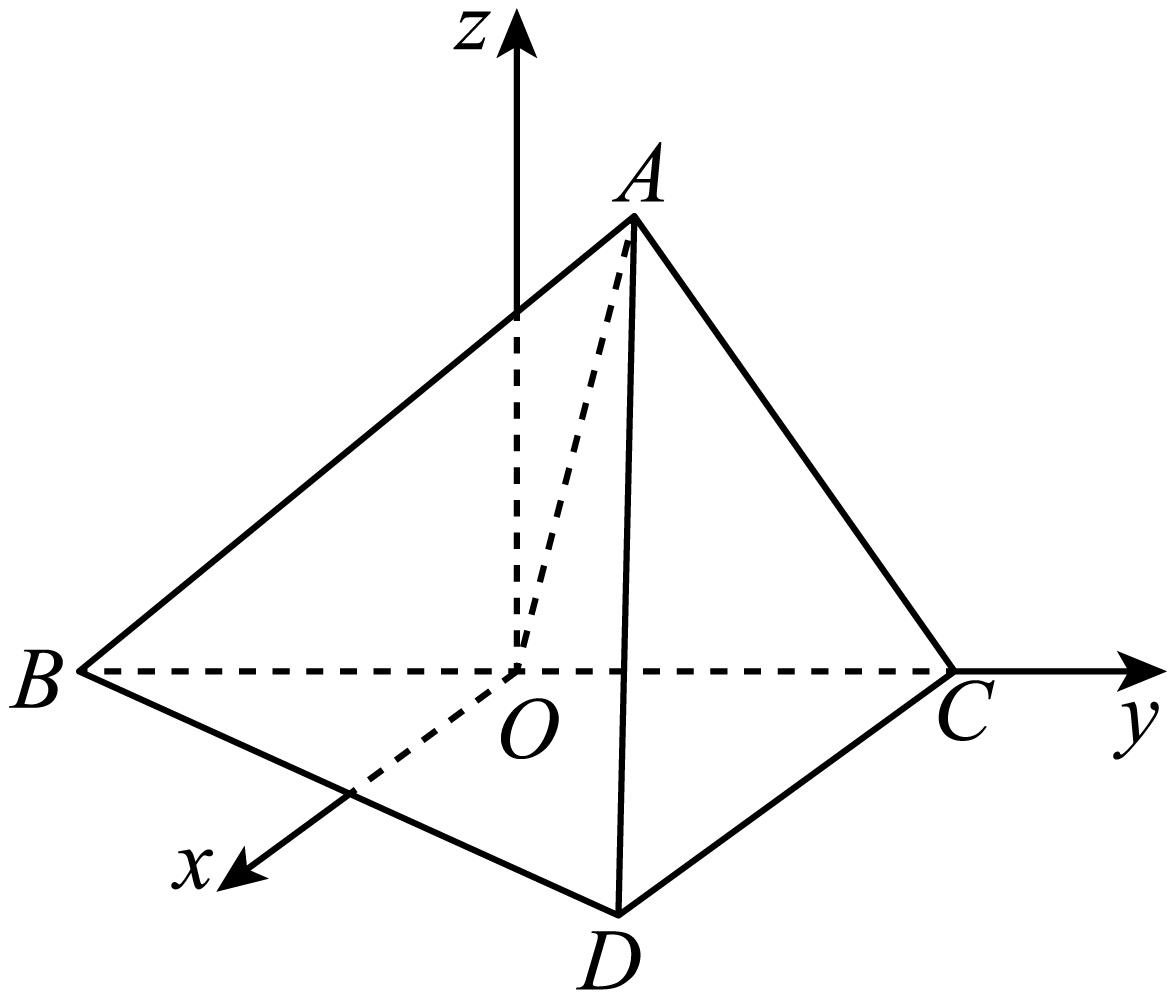
 ，

即异面直线*AB*与*CD*所成角的余弦值为；

【小问2详解】

设*O*是的中点，过*O*作，平面，

以，，分别为*x*，*y*，*z*轴建立空间直角坐标系.



在沿着折起的过程中，，，.

所以是二面角平面角

设，，则，，，，

所以，，，

设平面的法向量为，

则 即

令，故.

设平面的法向量为 ，

则 即 ，

令，故 ，

记平面与平面所成角为，易知为锐角，

则，

令，上式，

当令，即，时取到最小值，取到最大值，

故当二面角最大时，此时二面角的余弦值为；

综上，(1)异面直线*AB*与*CD*所成角的余弦值为，(2)当二面角最大时，此时二面角的余弦值为.

【点睛】对于第一问，用向量的方法很巧妙，直接法难以计算；对于第二问，难度较大，

建立直角坐标系的思路很巧妙，将二面角的问题转化为平面角的问题，才便于用空间向量构造函数，求最小值.

22. 在平面直角坐标系中，动点*M*到点的距离等于点*M*到直线的距离的倍，记动点*M*的轨迹为曲线*C*.

(1)求曲线*C*的方程；

(2)已知直线与曲线*C*交于*A*，*B*两点，曲线*C*上恰有两点*P*，*Q*满足，问是否为定值?若为定值，请求出该值；若不为定值，请说明理由.

【答案】(1)

(2)是定值，

【解析】

【分析】(1)设点，由题意由点到直线的距离得出等量关系，化简即可求得.

(2)联立直线方程与曲线方程，根据题意由可得点及点在圆上，求出定圆与定直线的交点即为，再求出两点之间的距离即可.

【详解】(1)设，由题意得，化简得

(2)存在.

设，，

联立直线与双曲线方程，有 

由韦达定理，有

，









法一：注意到上式当时，上式恒成立，即过定点和

经检验两点恰在双曲线*C*上，且不与*A*，*B*重合，故为定值，该定值为

法二：联立直线与双曲线方程，有……(1)

(1)式两边平方，有，即……(2)

注意到，是此方程的两个增根，故含有因式，记为代入(2)，有

即



即 即

解得，代回(1)有或

经检验直线不过这两点，故上述两点为*P*，*Q*，为定值，该定值为

