**杭州学军中学2022学年第一学期期中考试**

**高二数学试卷**

**命题人： 审题人：**

**一､选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分.在每小题给出的四个选切中.只有一项是符合题目要求的.**

1. 已知集合，则( )

A.  B.  C.  D. 

【答案】D

【解析】

【分析】解一元二次不等式得集合，再求交集即可.

【详解】因为，

所以，

故选：D.

2. 已知复数满足，则( )

A.  B. 

C.  D. 

【答案】B

【解析】

【分析】先设复数，则，然后代入式子计算后，利用复数相等即可求解.

【详解】复数，则，

因为复数满足，

所以，也即，

则有，解得：，所以，

故选：.

3. 已知直线与直线，若直线与直线的夹角是60°，则*k*的值为( )

A. 或0 B. 或0

C.  D. 

【答案】A

【解析】

【分析】先求出的倾斜角为120°，再求出直线的倾斜角为0°或60°，直接求斜率*k*.

【详解】直线的斜率为，所以倾斜角为120°.

要使直线与直线的夹角是60°，

只需直线的倾斜角为0°或60°，

所以*k*的值为0或.

故选：A

4. 设，则( )

A.  B.  C.  D. 

【答案】A

【解析】

【分析】化切为弦，通分，再利用平方关系及倍角公式即可得解.

【详解】解：





.

故选：A.

5. 已知函数，在定义域上单调递增，则实数的取值范围为( )

A.  B.  C.  D. 

【答案】D

【解析】

【分析】要使分段函数在定义域上单调递增，需要在每一段上为单调递增函数，且左端点值小于等于右端点的值，列出不等式，即可求出实数的取值范围.

【详解】解：由题意得，在时，

又函数在定义域上单调递增，

所以，解得，

所以，实数的取值范围为，

故选：D.

6. 将一张坐标纸折叠一次，使得点与点重合，点与点重合，则( )

A.  B.  C.  D. 1

【答案】D

【解析】

【分析】由对称，求出折痕所直线方程，两个方程相同，列方程组可求未知数.

【详解】假设折痕所在直线的斜率不存在，由点与点可得折痕所在直线的方程为，由点与点可得折痕所在直线的方程为，故舍去；

由点与点可得折痕所在直线的斜率不为0，

由点与点关于折痕对称，两点的中点坐标为，两点确定直线的斜率为，则折痕所在直线的斜率为，所以折痕所在直线的方程为：，即，

由点与点关于折痕对称，两点的中点坐标为，两点确定直线的斜率为，则折痕所在直线的斜率为，所以折痕所在直线的方程为：，即，

则有，解得.

所以

故选：D

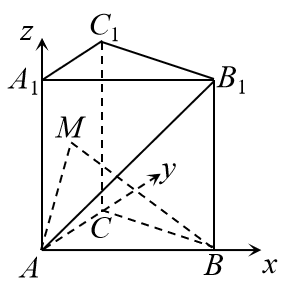
7. 在直三棱柱中，，，动点在侧面上运动，且，则异面直线和所成角的余弦值的最大值为( )

A.  B.  C.  D. 

【答案】B

【解析】

【分析】建立空间直角坐标系，设点坐标，将异面直线和所成角的余弦值以的形式表示，依据坐标的取值范围，求出的最大值.

【详解】

∵，且三棱柱是直三棱柱，

∴以为原点，，，所在直线分别为轴、轴、轴，建立如图所示空间直角坐标系，则由已知有，，，

∵动点在侧面上运动，且，

∴设，，，且

，即，

，，

，

，

，

设异面直线和所成角为，

∴，

∵

∴当时，的最大值为，

故选：B.

8. 已知中，，，则的最小值为( )

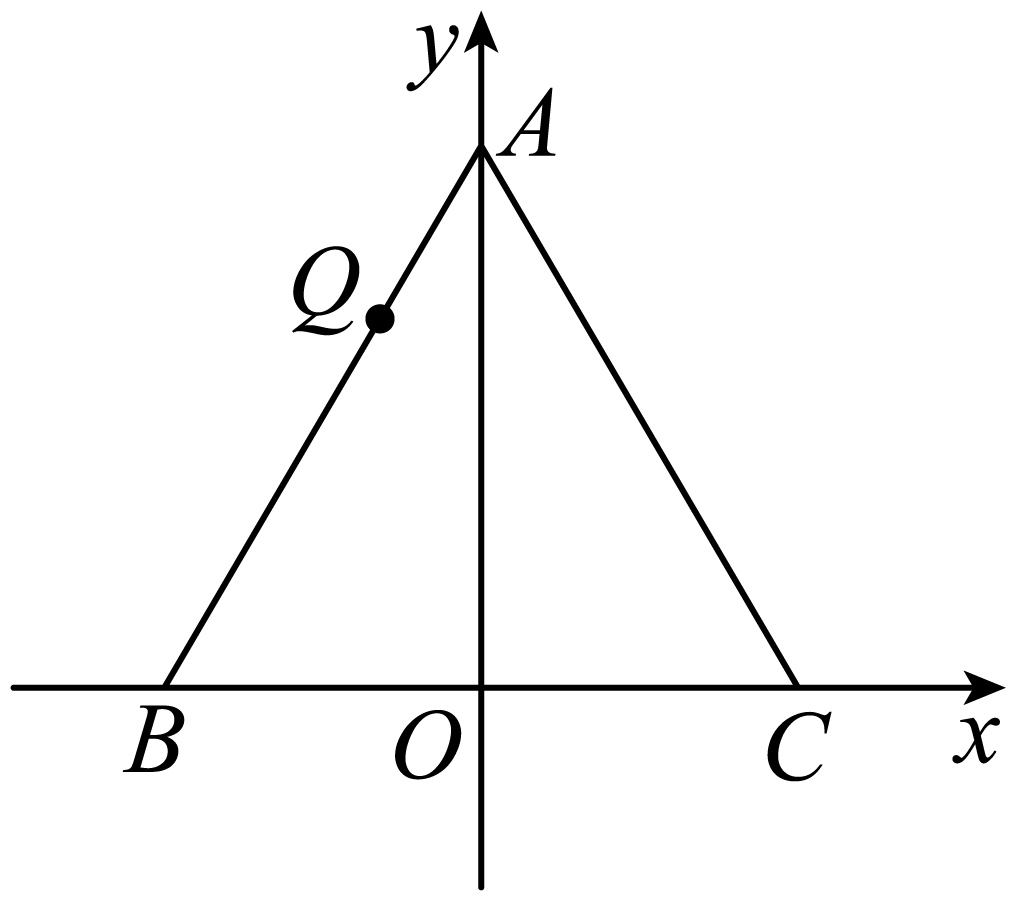
A. 3 B. 5 C.  D. 

【答案】C

【解析】

【分析】首先找到时的值，根据三角形的边长条件算出*BC*长度从而判断的形状，再建立平面直角坐标系将用坐标表示出来，根据坐标再计算出即可.

【详解】如图，设点*O*为*BC*上的一点，令，即，当时取最小值3，此时根据勾股定理可得，由此可知为等边三角形，当点*O*为*BC*的中点时建立如图直角坐标系：



，，，，

，

，故

因为，所以，则



因为，所以当时取最小值，

故选:C

**二､多选题：本题共4小题，每小题5分，共20分.在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求.全部选对的得5分，部分选对的得2分，有选错的得0分.**

9. 下列说法中，正确的有( )

A. 点斜式可以表示任何直线

B. 直线在轴上的截距为

C. 直线关于对称的直线方程是

D. 点到直线的的最大距离为

【答案】BD

【解析】

【分析】点斜式方程不能表示斜率不存在的直线判断A；直接令求解直线在轴上的截距判断B；结合关于直线对称的点的关系求解判断C；结合直线过定点求解即可判断D.

【详解】解：对于A选项，点斜式方程不能表示斜率不存在的直线，故错误；

对于B选项，令得，所以直线在轴上的截距为，正确；

对于C选项，由于点关于直线对称的点为，所以直线关于对称的直线方程是，故错误；

对于D选项，由于直线，即直线过定点，所以点到直线的的最大距离为，故正确.

故选：BD

10. 已知第一象限内的点在直线上，则( )

A.  B. 

C.  D. 

【答案】BC

【解析】

【分析】首先根据题意得到，且，，再利用基本不等式和函数单调性依次判断选项即可.

【详解】依题意，有，且，.

对选项A，因为

所以，且

所以，故A错误；

对选项B，因此，

当且仅当，时，等号成立.故选项B正确；

对选项C，，故选项C正确.

对选项D，因为，当且仅当时取等，所以，

故选项D错误，

故选：BC

11. 在长方体中，已知与平面和平面所成的角均为，则( )

A. 

B. 与平面所成的角为

C. 与平面所成的角为

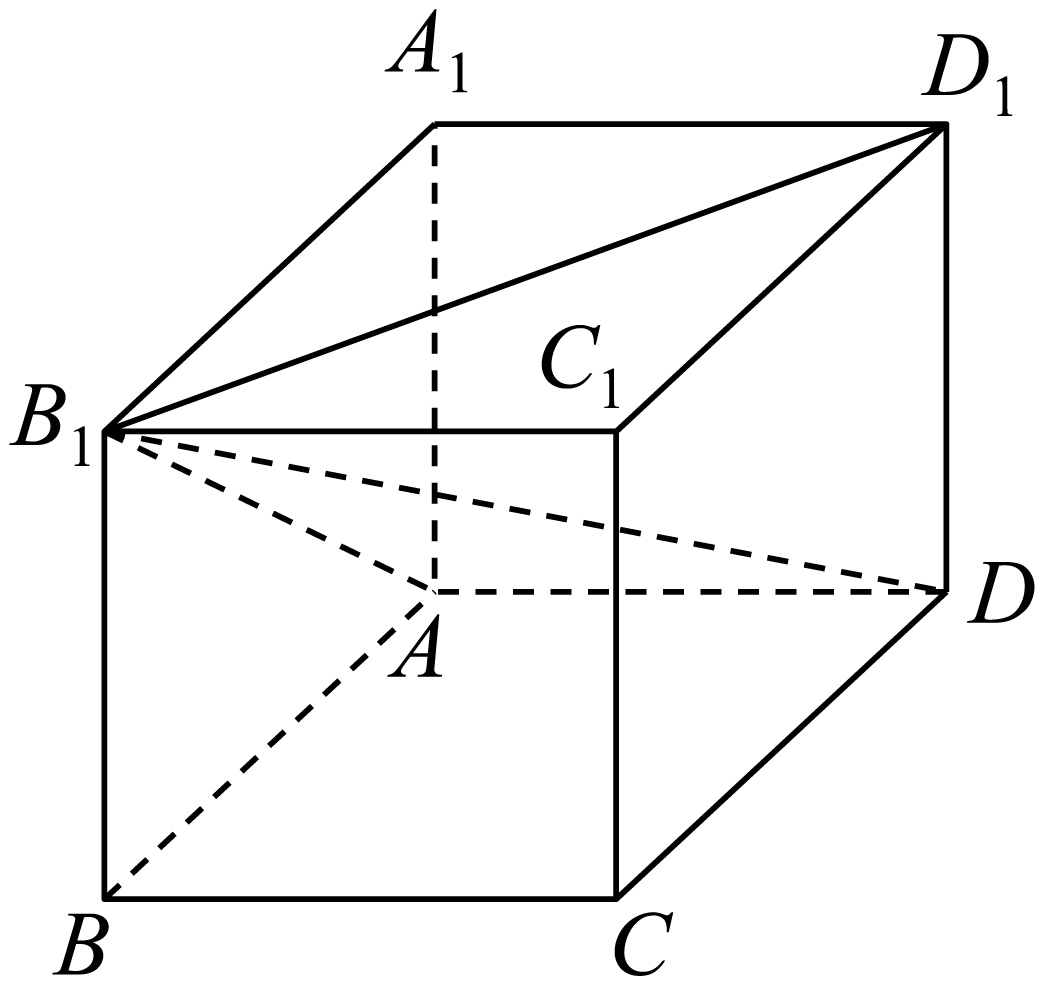
D. 

【答案】AC

【解析】

【分析】不妨令，可根据直线与平面所成角的定义，确定长方体的各棱长，即可求解．

【详解】解：如图所示，连接，，不妨令，



在长方体中，面，面，

所以和分别为与平面和平面所成的角，

即，

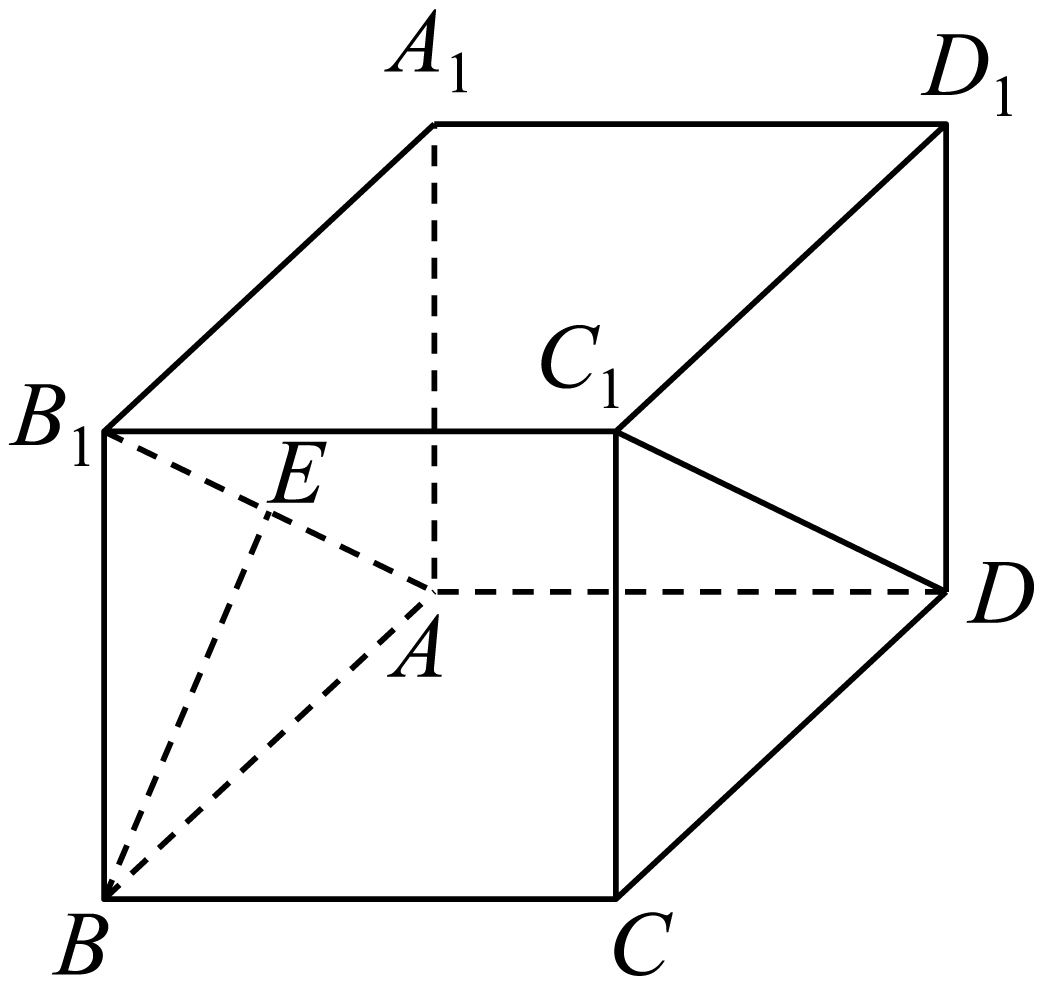
所以在中，，，

在中，，，

所以在长方体中，，，，

所以，，故A正确，D不正确；

如下图，过作于



在长方体中，面，面

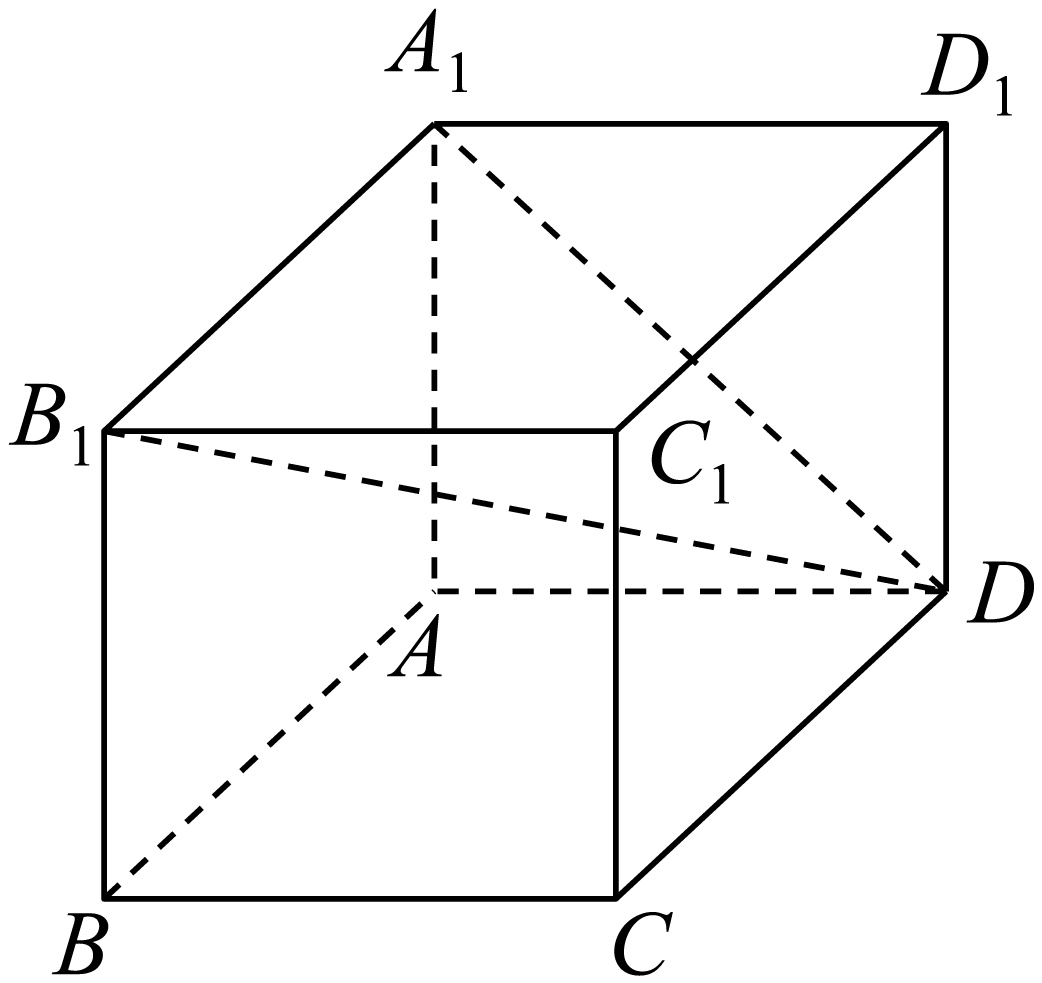
所以，又，平面

则平面

所以为与平面所成的角，

在中，，故选项B错误，

如下图，连接



在长方体中，面，

则与平面所成的角为且为锐角

在中，，所以，故选项C正确.

故选：AC.

12. 对，表示不超过*x*的最大整数.十八世纪，被“数学王子”高斯采用，因此得名为高斯函数.人们更习惯称之为“取整函数”，例如：，，则下列命题中的真命题是( )

A. ，

B. 函数的值域为

C. ，

D. 方程有两个实数根

【答案】BCD

【解析】

【分析】计算，A错误，考虑为整数和不为整数，计算得到B正确，根据得到C正确，解不等式得到，分别计算得到D正确，得到答案.

【详解】对于A：根据定义，，A错误；

对于B：当为整数时，，；当不是整数时，，故函数的值域为，B正确；

对于C：根据B知，故，，C正确；

对于D：，故，

解得，故，

当时，，解得，当时满足；

当时，，解得，不成立；

当时，，解得，当时满足；

综上所述：方程有2个解，D正确；

故选：BCD

**三､填空题：本题共4小题，每小题5分，共20分.**

13. 已知向量，且，则向量与的夹角为\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_.

【答案】

【解析】

【分析】先求出，再利用公式可求向量与的夹角.

【详解】因为，故，

而，故即，

故，而，故，

故答案为：

14. 一个袋于中有4个红球，8个绿球，采用不放回方式从中依次随机地取出2个球，则第二次取到红球的概率为\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_.

【答案】

【解析】

【分析】使用古典概型概率公式或全概率公式进行求解.

【详解】方法一：

由已知，该试验是古典概型，

样本空间中样本点的个数，

设事件“第二次取到红球”，则事件分为“第一次取到绿球，第二次取到红球”和“两次取到的均为红球”两类，

∴，

∴.

方法二：

设事件表示“第次摸到红球”，事件表示“第次摸到绿球”，，

则



.

故答案为：.

15. 已知函数，若，且在上有最小值但无最大值，则值为\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_.

【答案】

【解析】

【分析】由在上有最小值无最大值可知：，进而得、得范围，所以当时，结合在上有最小值无最大值，可得与关于对称，列式可求得结果.

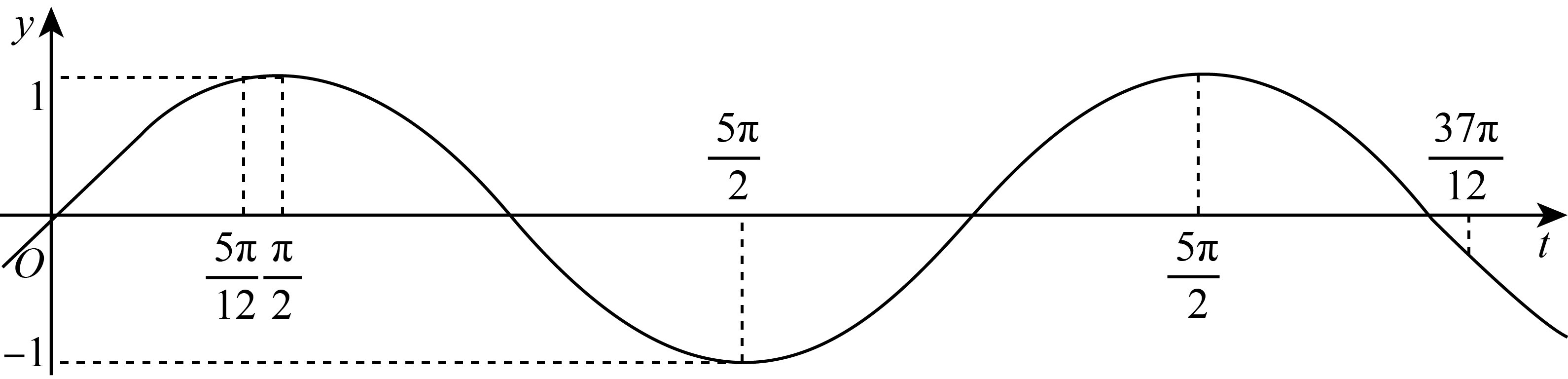
【详解】∵，

∴ ①

又∵在上有最小值无最大值， ②

∴ 即： 又因为 所以.

∴ ， ③

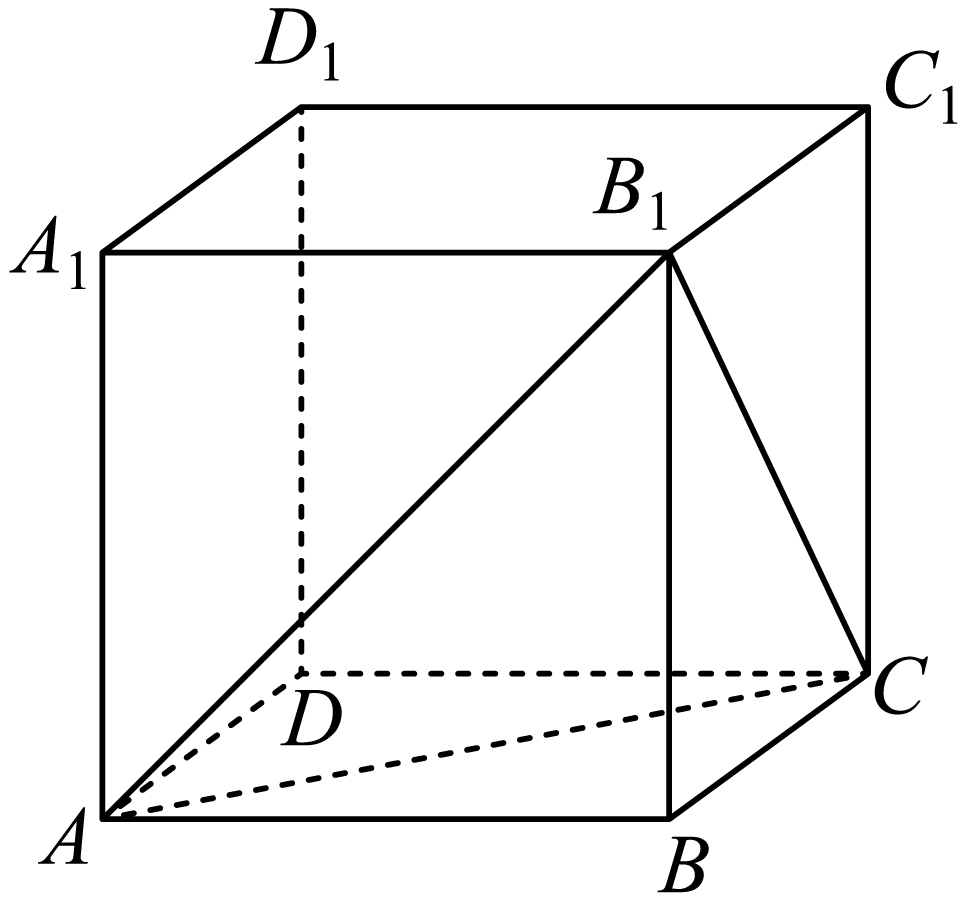


∴结合图象，由②③得：， ④

∴由①④得： 解得：

故答案为：.

16. 球*O*是棱长为2的正方体的外接球，*M*为球*O*上一点，*N*是的内切圆上的一点，则线段*MN*长度的取值范围为\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_.



【答案】

【解析】

【分析】首先分析出的内切圆是与正方体的各条棱都相切的球的小圆，这样将问题转化为两个同心圆上点的距离的最值问题.

【详解】设正方体的外接球的球心为，其半径,

设与正方体各棱都相切的球的球心为，与为同一点，则的内切圆为球一个小圆，球的半径，

又因为点在正方体的外接球的球面上运动，点在的内切圆上运动，

所以线段长度的最小值是正方体的外接球的半径减去与正方体的各条棱都相切的球的半径，

线段长度的最大值是正方体的外接球的半径加与正方体的各条棱都相切的球的半径，

由此可得线段的取值范围是.

故答案为：

**四､解答题：本题共6小题，共70分.解答应写出文字说明､证明过程或演算步骤.**

17. 已知直线的方程为：.

(1)求证：不论为何值，直线必过定点；

(2)过点引直线，使它与两坐标轴的负半轴所围成的三角形面积最小，求的方程.

【答案】(1)证明见解析

(2)

【解析】

【分析】(1)列出方程，分别令，可求出定点；

(2)令令，表达出三角形面积后，利用基本不等式求解即可.

【小问1详解】

证明：原方程整理得：．

由，可得，

不论为何值，直线必过定点.

【小问2详解】

设直线的方程为．

令令．

．

当且仅当，即时，三角形面积最小．

则的方程为．

18. 已知的内角的对边分别为，其面积为，且

(1)求角*A*的大小；

(2)若的平分线交边于点，求的长.

【答案】(1)

(2)

【解析】

【分析】(1)根据正弦定理及三角形面积公式即可求解，化简得到，结合余弦定理即可得解；

(2)由向量的数量积运算法则和余弦定理求出或，利用三角恒等变换和正弦定理进行求解，得到正确答案.

【小问1详解】

，

由正弦定理得：，即

即，即

所以，

因为，所以.

【小问2详解】

由(1)知：，所以，

即，解得：，

由余弦定理得：，所以，

解得：，解得：或

当得：，

则，

所以，

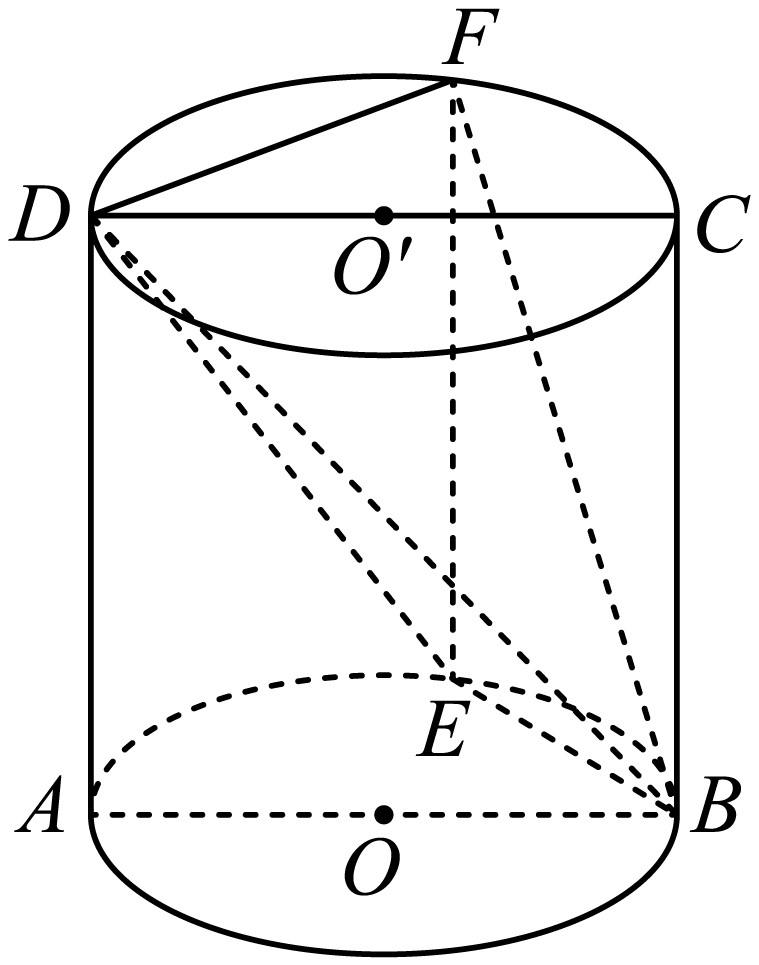
在三角形*ABT*中，由正弦定理得：，，

即，解得：；

当时，同理可得：；

综上：

19. 如图，为圆柱的轴截面，是圆柱上异于的母线．



(1)证明：平面；

(2)若，当三棱锥的体积最大时，求二面角的正弦值．

【答案】(1)证明见解析

(2)

【解析】

【分析】(1)先证明是平行四边形，再结合圆柱的性质得到平面；

(2)利用等积转换知识结合圆柱的性质先找到体积最大值时的相对位置，再找出

二面角的平面角或利用空间向量求得二面角的大小.

【小问1详解】

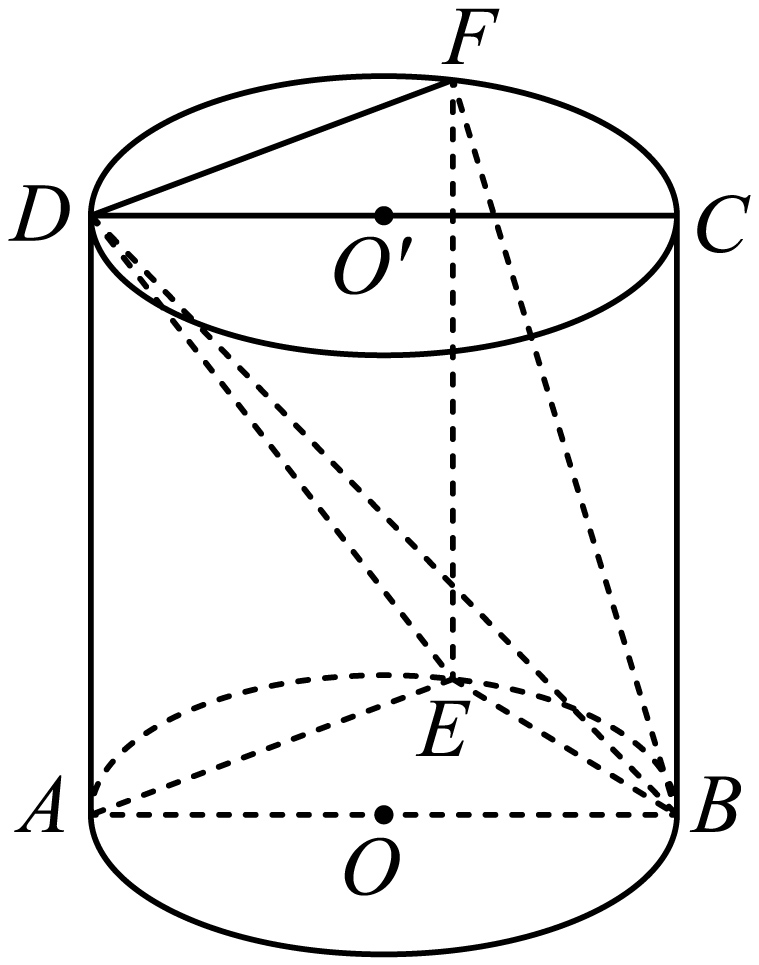
证明：如图，连接，由题意知为的直径，所以．因为是圆柱的母线，

所以且，所以四边形是平行四边形．

所以，所以．因为是圆柱的母线，所以平面，

又因为平面，所以．又因为，

平面，所以平面．

【小问2详解】

由(1)知是三棱锥底面上的高，由(1)知

，所以，即底面三角形是直角三

角形．设，则

在中有：，

所以，

当且仅当时等号成立，即点*E*，*F*分别是，的中点时，三棱

锥的体积最大，

(另解：等积转化法：

易得当*F*与距离最远时取到最大值，此时*E*、*F*分别为、中点)

下面求二面角的正弦值：

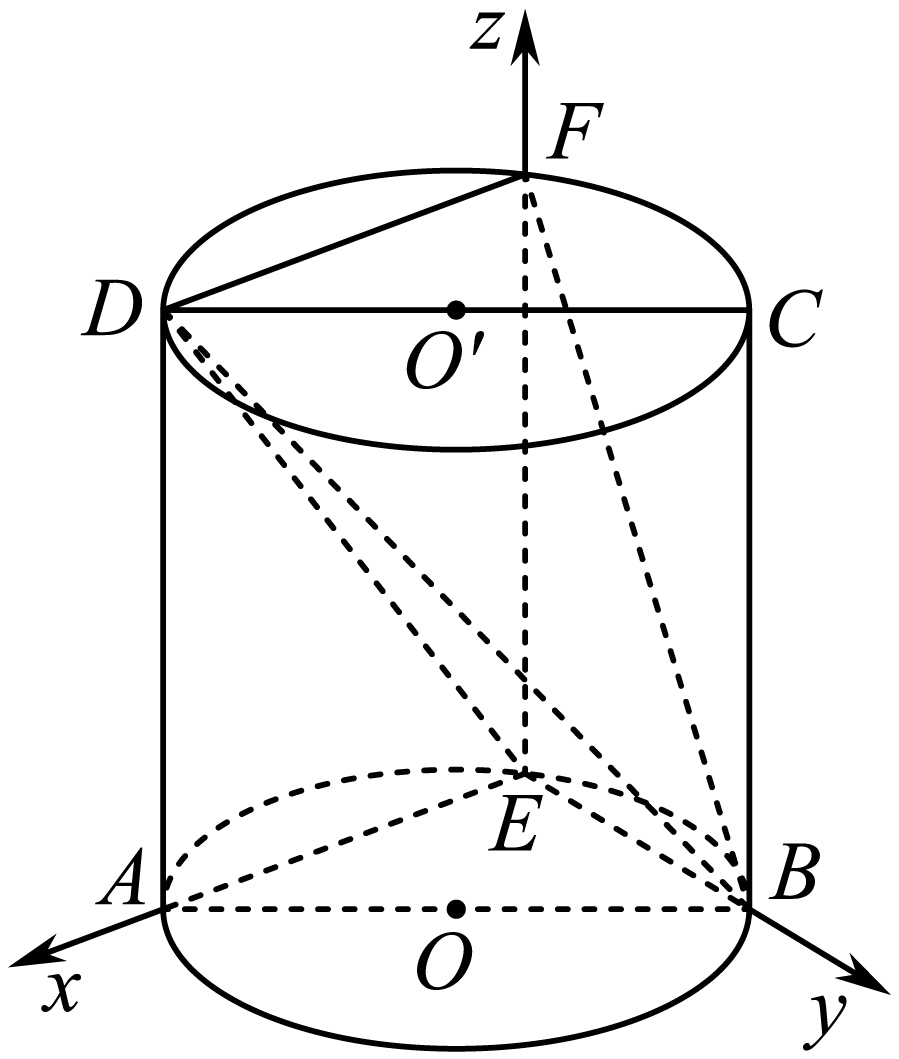
法一：由(1)得平面，因为平面，所以．

又因，所以平面．

因为平面，所以，所以是二面角的平面角，

由(1)知为直角三角形，则．

故，所以二面角的正弦值为．



法二：由(1)知两两相互垂直，

如图，以点*E*为原点，所在直线

为*x*，*y*，*z*轴建立空间直角坐标系，

则．

由(1)知平面，故平面的法向量可取为．

设平面的法向量为，

由，

得，即，即，取，得．

设二面角的平面角为，

，

所以二面角的正弦值为

20. 某商场计划按月订购一种酸奶，每天进货量相同，进货成本每瓶8元，售价每瓶10元，未售出的酸奶降价处理，以每瓶4元的价格当天全部处理完.根据往年销售经验，每天需求量与当天最高气温(单位：℃)有关.如果最高气温不低于25，需求量为600瓶；如果最高气温位于区间，需求量为400瓶；如果最高气温低于20，需求量为300瓶.为了确定六月份的订购计划，统计了前三年六月份各天的最高气温数据，得下面的频数分布表：

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 最高气温 | [10，15) | [15，20) | [20，25) | [25，30) | [30，35) | [35，40) |
| 天数 | 1 | 17 | 38 | 22 | 7 | 5 |

以最高气温位于各区间的频率估计最高气温位于该区间的概率.

(1)估计六月份这种酸奶一天的需求量不超过400瓶的概率，并求出前三年六月份这种酸奶每天平均的需求量；

(2)设六月份一天销售这种酸奶的利润为*Y*(单位：元)，当六月份这种酸奶一天的进货量为550瓶时，写出*Y*的所有可能值，并估计*Y*大于零的概率.

【答案】(1)；

(2)*Y*值见解析，

【解析】

【分析】(1)由前三年六月份各天的最高气温数据，求出最高气温位于区间[20，25)和最高气温低于20的天数，由此能求出六月份这种酸奶一天的需求量不超过400瓶的概率；利用平均数公式可求前三年六月份每天平均需求量；

(2)分别求当温度大于等于25℃时，温度在[20，25)℃时，以及温度低于20℃时的利润，从而估计*Y*大于零的概率．

【小问1详解】

由前三年六月份各天的最高气温数据，

得到最高气温位于区间[20，25)和最高气温低于20的天数为1+17+38＝56，

∴六月份这种酸奶一天的需求量不超过300瓶的概率*P*；

前三年六月份这种酸奶每天平均的需求量为(瓶)；

【小问2详解】

当温度大于等于25℃时，需求量为600，

*Y*＝550×2＝1100元，

当温度在[20，25)℃时，需求量为400，

*Y*＝400×2﹣(550﹣400)×4＝200元，

当温度低于20℃时，需求量为300，

*Y*＝600﹣(550﹣300)×4＝﹣400元，

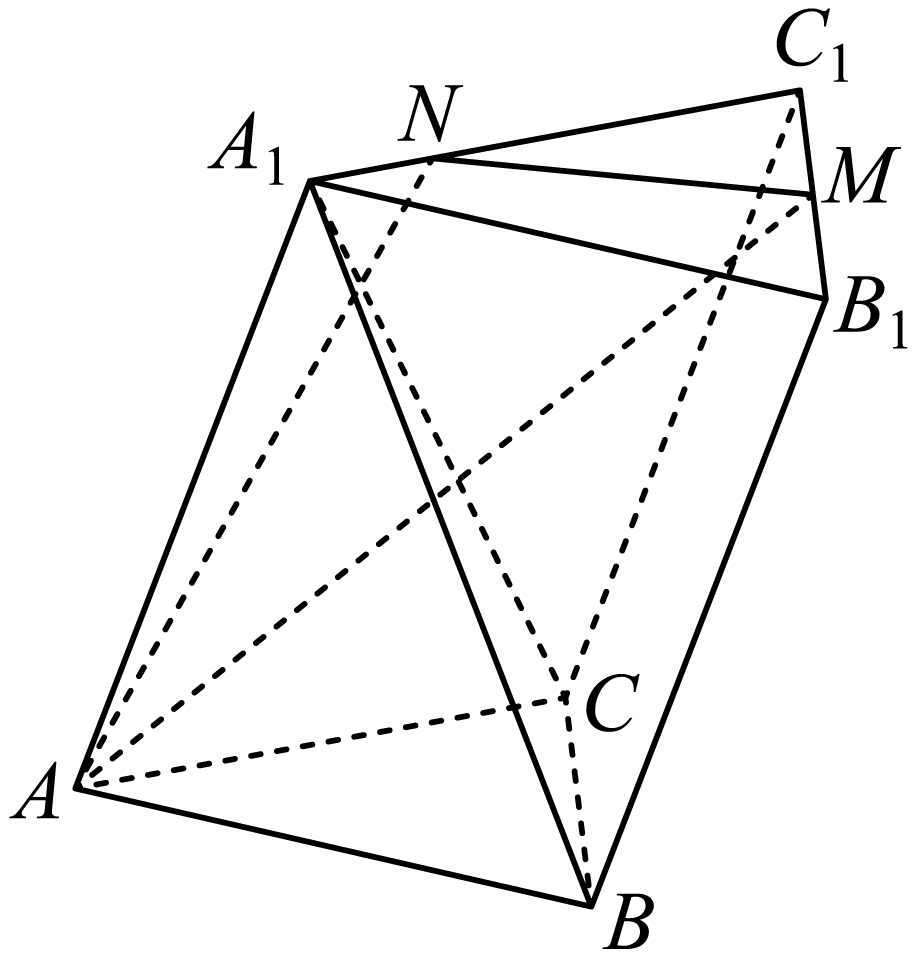
当温度大于等于20时，*Y*＞0，

由前三年六月份各天的最高气温数据，得当温度大于等于20℃的天数有：

，

∴估计*Y*大于零的概率*P*．

21. 如图，在三棱柱中，，，点为的中点，点是上一点，且.



(1)求点*A*到平面的距离；

(2)求平面与平面所成平面角的余弦值.

【答案】(1)

(2)

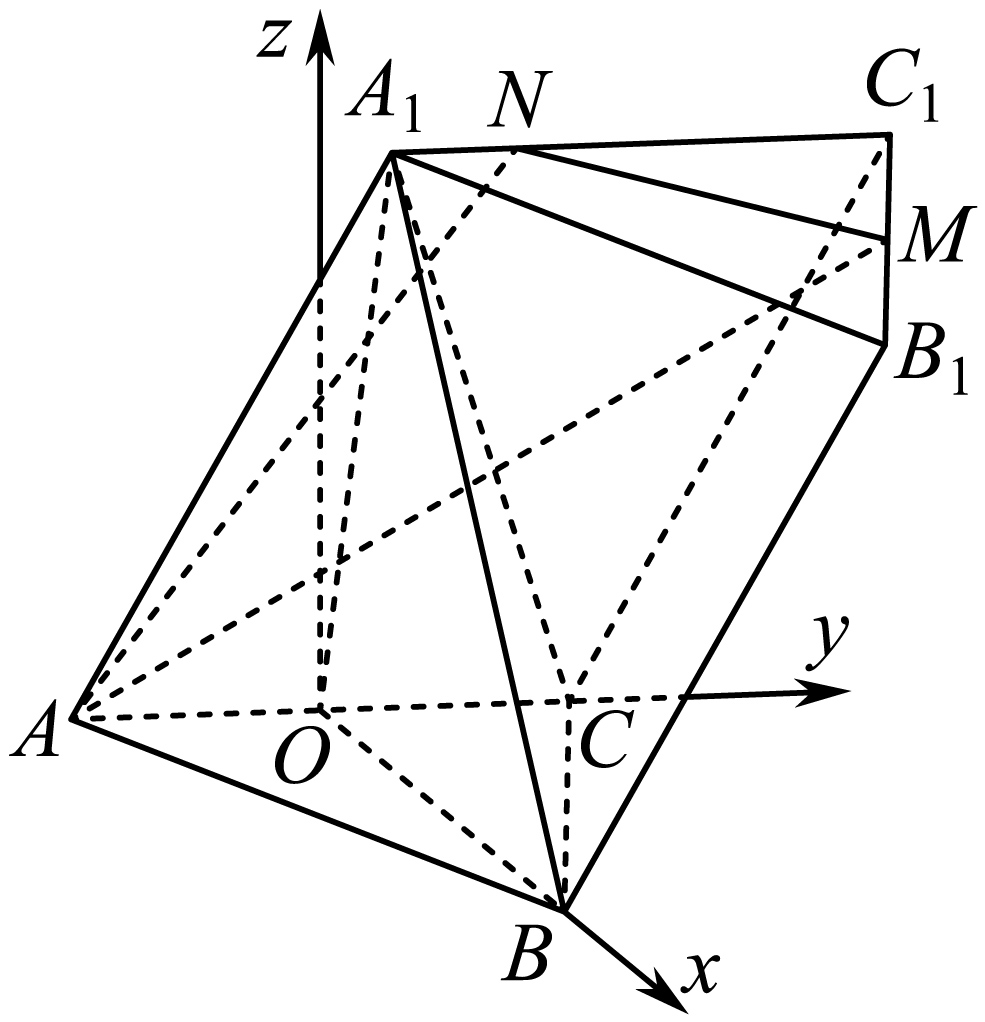
【解析】

【分析】(1)取的中点，连接，以为原点，分别为轴，为轴，建立空间直角坐标系，再利用空间向量法求解即可.

(2)利用空间向量法求解即可.

【小问1详解】

取的中点，连接，如图所示：



因为，

所以，，

所以，.

以为原点，分别为轴，为轴，建立空间直角坐标系，

，，，设，

则，，解得，，

即.

，，

设平面的法向量为，

则，令，解得，即.

，设点*A*到平面的距离为，

则

【小问2详解】

，，

设平面的法向量为，

则，令，解得，

即.

设，则，，

因为，解得.

设，则，，

因为，解得.

因为点为的中点，所以，.

.

设平面的法向量为，

则，令，解得，

即.

，

因为平面与平面所成平面角为锐角，

所以平面与平面所成平面角的余弦值.

22. 设函数

(1)当时，求在区间上的值域；

(2)若，且，使得，求实数的取值范围.

【答案】(1)

(2)

【解析】

【分析】(1)分类讨论后可得，分别求出各段的范围后可得函数的值域.

(2)就、、分类讨论的单调性后结合两个函数的值域的关系可求参数的取值范围.

【小问1详解】

，

当时，，故，

当时，，故，

故在区间上的值域为.

【小问2详解】

由题设可得上不单调.

，

若，则，

因为对称轴，则在上为增函数，舍；

若，则，

此时在为增函数，在为减函数，

此时，故在上为增函数，

故在上为增函数，

故的值域为即为.

因为，且，使得，

故，整理得到，无解.

若，则，

此时在为减函数，舍；

若，则，故，

此时在为减函数，在上为增函数，

而，故在上为增函数，

故在上为增函数，

故的值域为即为.

因为，且，使得，

故，整理得到：，解得.

若，则，故，

而对称轴，故在上为增函数，舍；

综上，.

【点睛】思路点睛：对于存在性和任意性综合问题，我们需要根据前者得到两个函数的值域关系，而且还要得到某一函数的性质，从而关于参数的不等式组.