**杭州二中2022学年第一学期高二年级期末考**

**数学试卷**

**本试卷分为第Ⅰ卷(选择题)和第Ⅱ卷(非选择题)两部分，共150分，考试时间120分钟.**

**第Ⅰ卷(选择题)**

**一、选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.**

1. 已知直线斜率等于，则该直线的倾斜角为( )

A.  B.  C.  D. 

【答案】D

【解析】

【分析】利用直线的斜率的定义及倾斜角的范围即可求解.

【详解】设该直线的倾斜角为，则

由，得，又，所以.

故选：D.

2. 为做好“新冠肺炎”疫情防控工作，我校坚持每日测温报告，以下是某班8名同学的体温记录：36.1，36.3，36.3，36.4，36.4，36.5，36.6，36.7(单位：)，则该组数据的第60百分位数为( )

A. 36.3 B. 36.4 C. 36.45 D. 36.5

【答案】B

【解析】

【分析】根据第百分位数的概念和计算方法可得答案.

【详解】将8名同学某日上午体温记录从小到大排列为：

36.1，36.3，36.3，36.4，36.4，36.5，36.6，36.7，

因为，所以该组数据的第60百分位数为36.4.

故选：B.

3. 已知点和，点在轴上，且为直角，则点坐标为( )

A.  B. 或 C. 或 D. 

【答案】B

【解析】

【分析】设点，由为直角，得，然后由列式计算即可.

【详解】由题意，设点，

为直角，，

由，

，

解得或，所以点的坐标为或

故选：B

4. 已知数列是递增的等比数列，，，则公比( )

A.  B. 1 C.  D. 

【答案】C

【解析】

【分析】由方程利用等比数列的性质先求，再代入，联立方程组求出.

【详解】已知，所以，解得，即①；

又，则，即②；又，

由①②得，所以，解得或.

因为数列是递增的等比数列，所以.

故选：C.

5. 已知圆与圆，动圆同时与圆及相外切，则动圆圆心的轨迹为( )

A. 椭圆 B. 椭圆和一条直线

C. 双曲线和一条射线 D. 双曲线的一支

【答案】D

【解析】

【分析】首先设，根据圆同时与圆及相外切，得到，再结合双曲线的概念即可得到答案.

【详解】圆，，圆心，，

圆，，圆心，，

设，因为圆同时与圆及相外切，

所以，

即的轨迹是以为焦点，的双曲线的左支.

故选：D

6. 已知椭圆，过椭圆的左顶点*A*作直线，与椭圆和轴分别交于点和点，过原点且平行于的直线与椭圆交于点，则( )

A. ，，始终成等比数列

B. ，，始终成等比数列

C. ，，始终成等比数列

D. ，，始终成等比数列

【答案】A

【解析】

【分析】联立直线与椭圆方程，结合韦达定理求得弦长，由等比中项性质判断等比数列即可.

【详解】由题意知，直线*l*斜率存在，设*OP*方程为，则*AM*的方程为，则，.

设直线或，则该直线必与椭圆存在交点，设为，

由得，

则，

则直线与椭圆交得的弦长为.

当时，该弦长为；

当时，该弦长为，即.

∵，∴，，成等比数列.

故选：A

7. 在三棱锥中，，，是的中点，满足，则异面直线，所成角的余弦值为( )

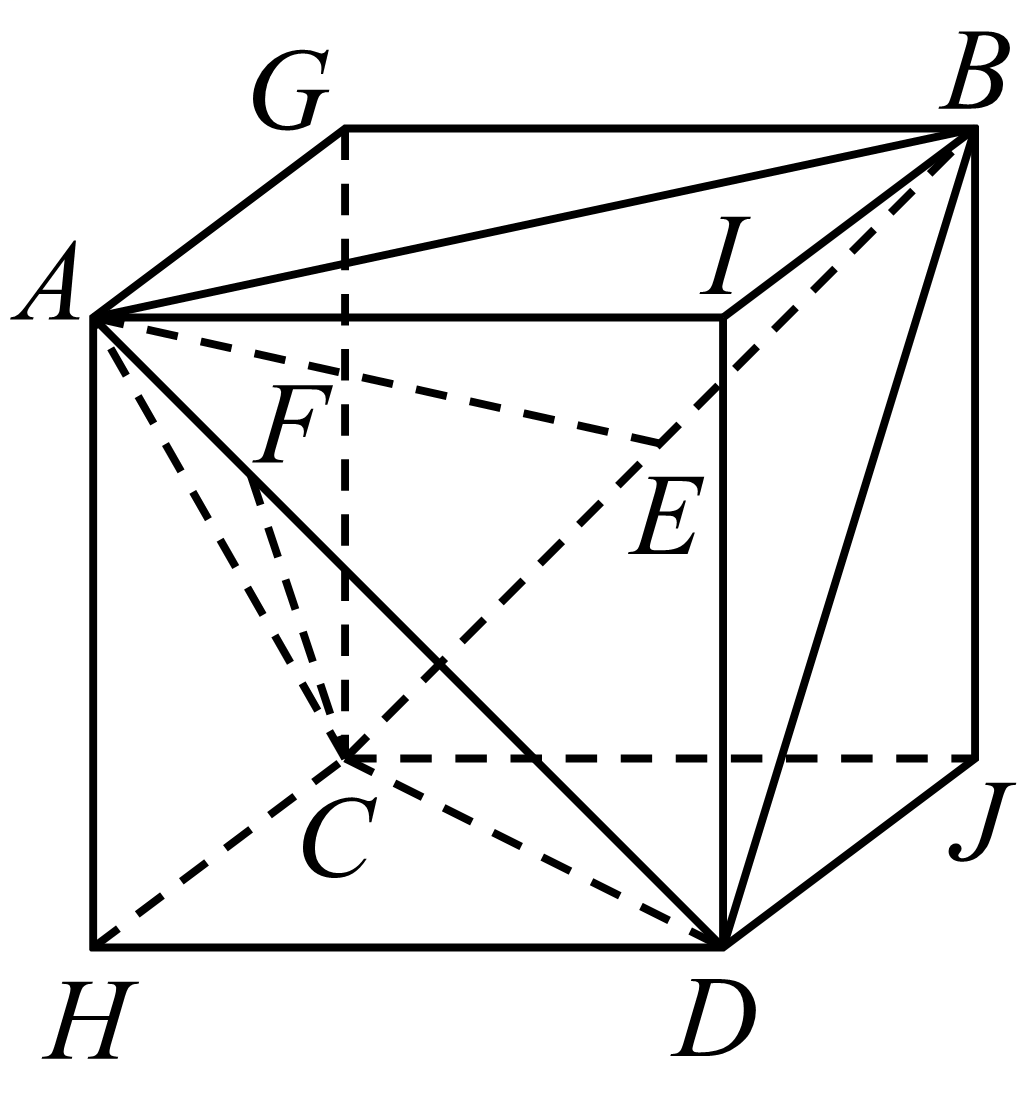
A.  B.  C.  D. 

【答案】D

【解析】

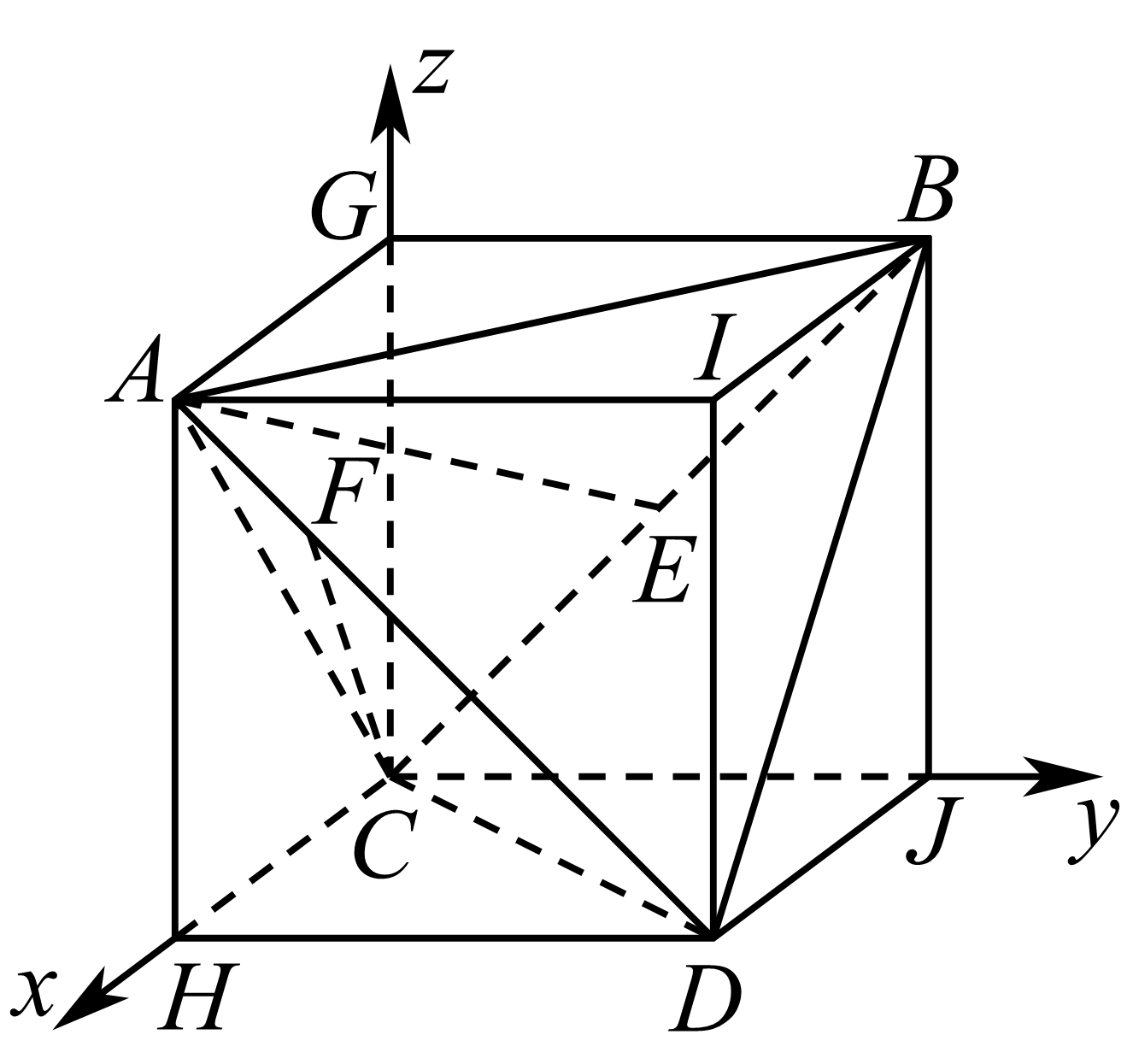
【分析】根据三棱锥的对棱相等可以补成长方体，计算长方体的长宽高，建立空间直角坐标系，利用空间向量的坐标运算即可求得异面直线，所成角的余弦值.

【详解】解：三棱锥中，由于，，则三棱锥可以补在长方体，



则设长方体的长宽高分别为，则，

解得，如图以为原点，分别为轴建立空间直角坐标系，



则，

所以，则，，

所以，

则异面直线，所成角的余弦值为.

故选：D

8. 已知双曲线的左焦点为，左顶点为，为左准线上动点，则的最大值为( )

A.  B.  C.  D. 

【答案】B

【解析】

【分析】根据余弦定理表达出，结合不等式即可求解最值.

【详解】由题意可知： ，左准线方程为 ，

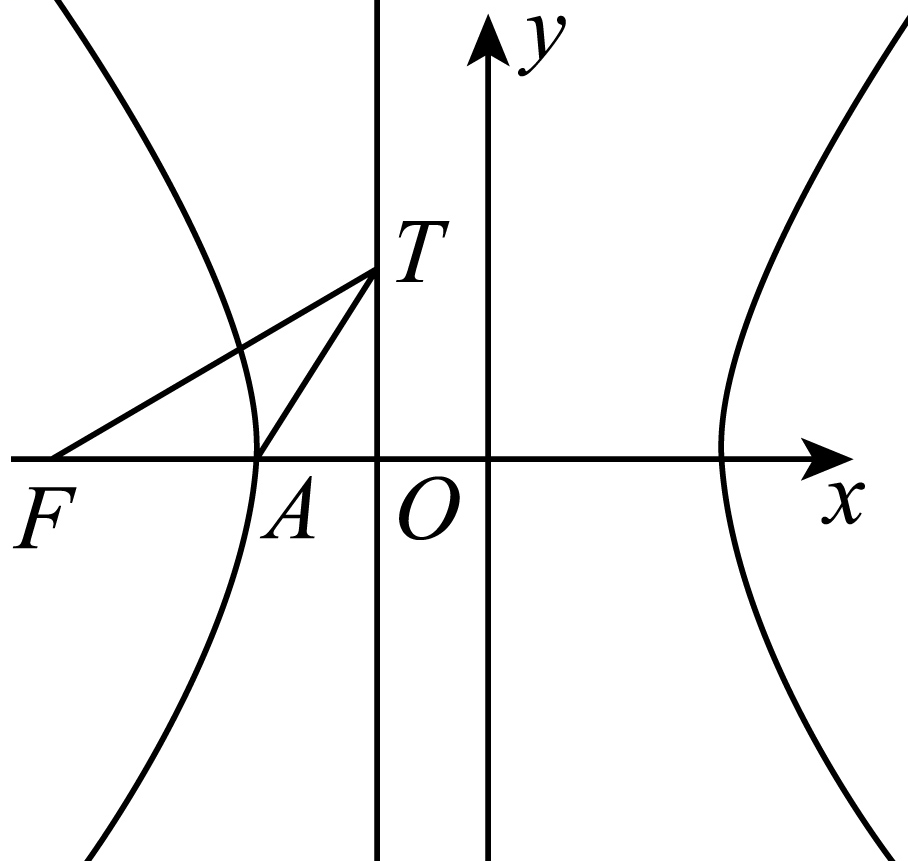
故设，则

当在轴上，此时为0，时当不在轴时， 在中，由余弦定理得

，当且仅当，即时，等号成立，

故的最小值为，由于,故最大为，

故选：B



**二、选择题：本题共4小题，每小题5分，共20分．在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求．全部选对的得5分，部分选对的得2分，有选错的得0分．**

9. 不透明的袋子中有5个大小质地完全相同的球，其中3个红球、2个黄球.记为事件“从中任取1个球是红球”，为事件“在有放回随机抽样中，第二次取出1个球是红球”，则( )

A.  B. 

C. 事件与是互斥事件 D. 事件与是相互独立事件

【答案】AD

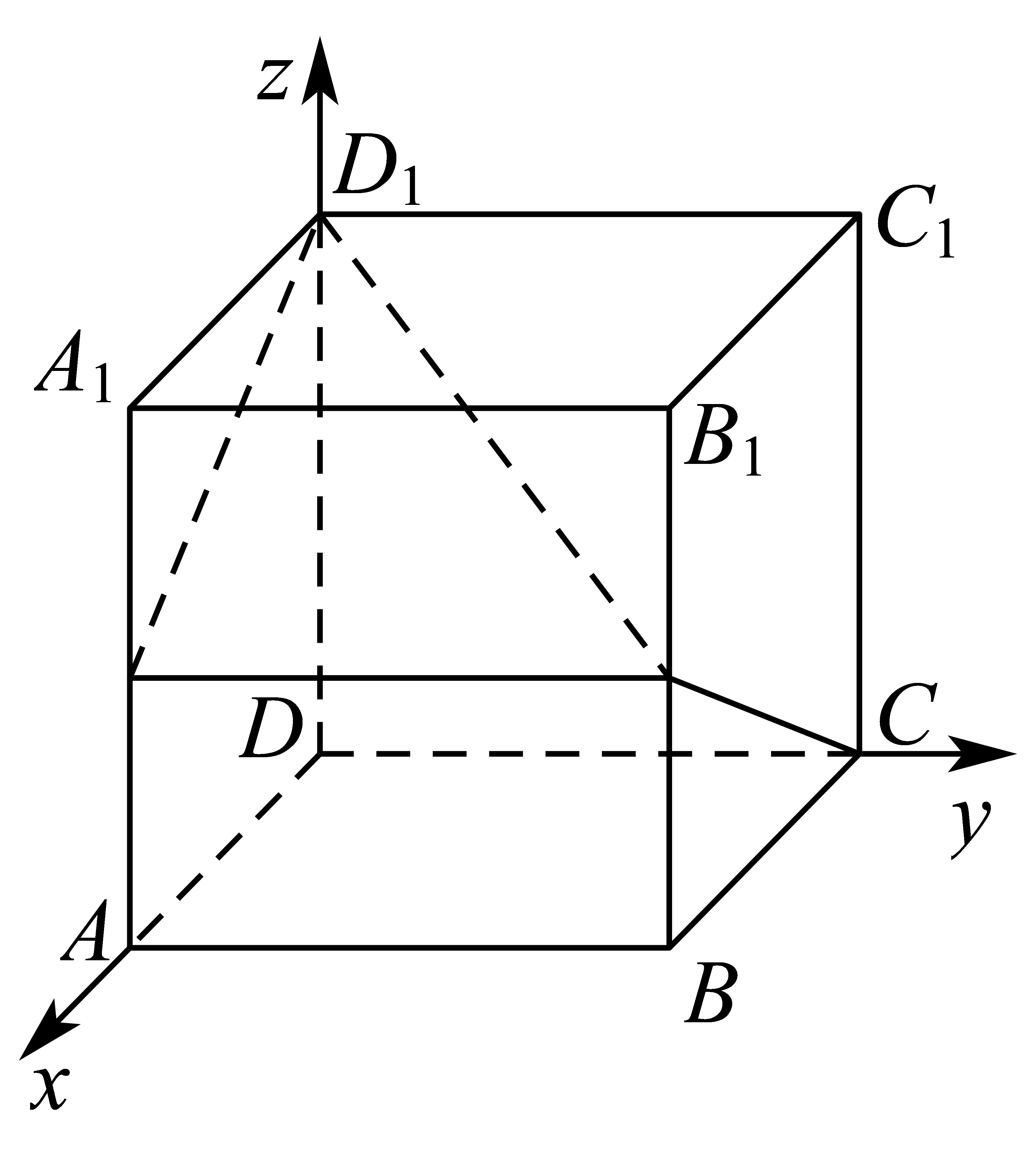
【解析】

【分析】根据题意可知：此实验相当于进行两次独立重复实验，进而判断选项即可求解.

【详解】根据题意可知：两次取球相当于两次独立重复实验，所以事件与是相互独立事件，且，

故选：.

10. 如图所示，在棱长为2的正方体中，，分别为棱和的中点，则( )



A. 平面 B. 

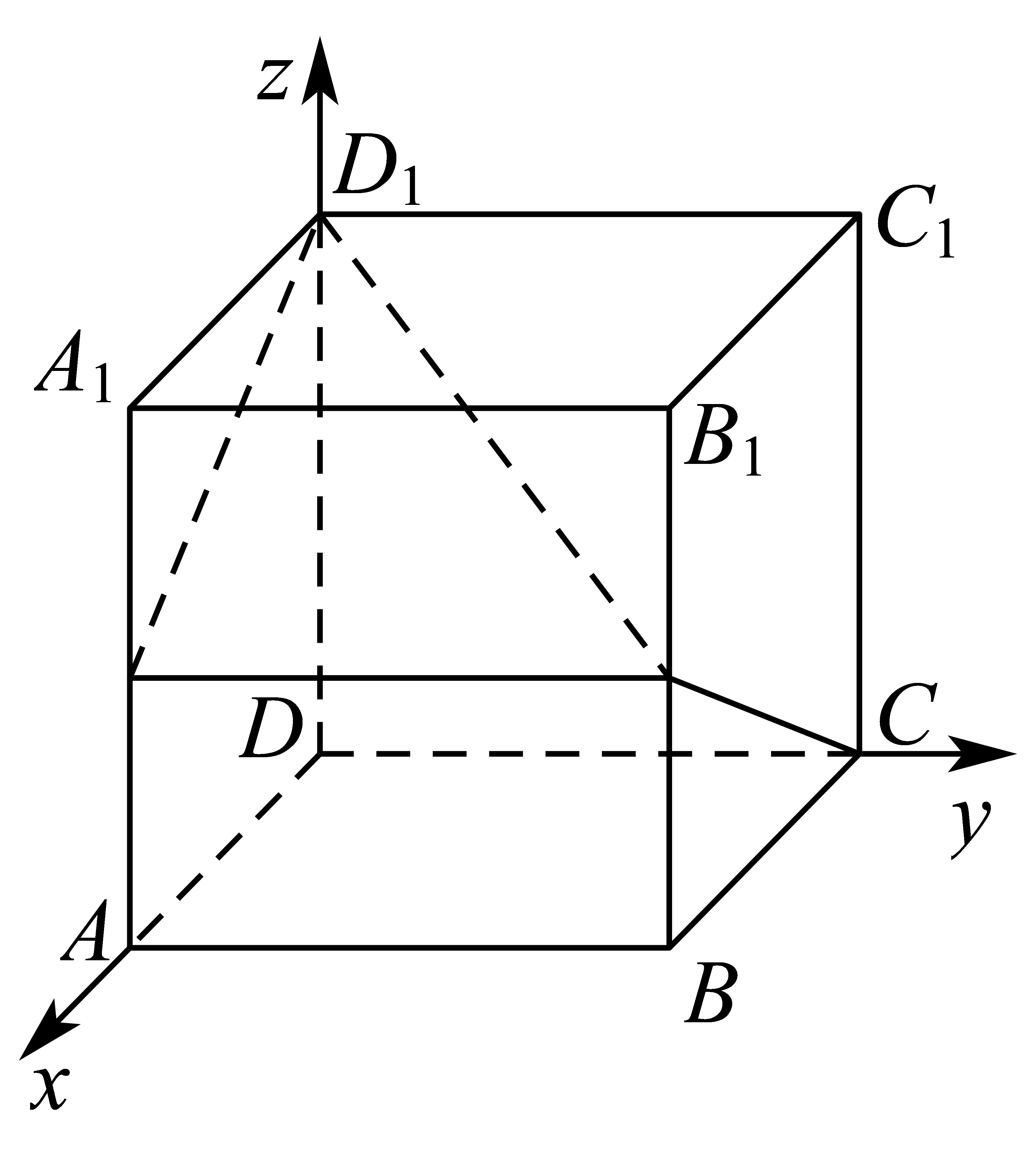
C. 是平面的一个法向量 D. 点到平面的距离为

【答案】ACD

【解析】

【分析】根据线线平行即可判断A,建立空间直角坐标系，利用向量数量积即可判断线线垂直，即可判断B，根据空间向量求解法向量即可判断C，根据空间距离的向量法即能求出点到平面的距离，从而判断D.

【详解】以为原点，，，所在直线分别为轴，轴，轴建立如图所示的空间直角坐标系，



对于A，由于分别是的中点，所以,平面,平面,故平面，故A正确，

对于B，，故，故与不垂直，进而可得与不垂直，故B错误，

对于C,由，所以，，

设平面的法向量为，

则，

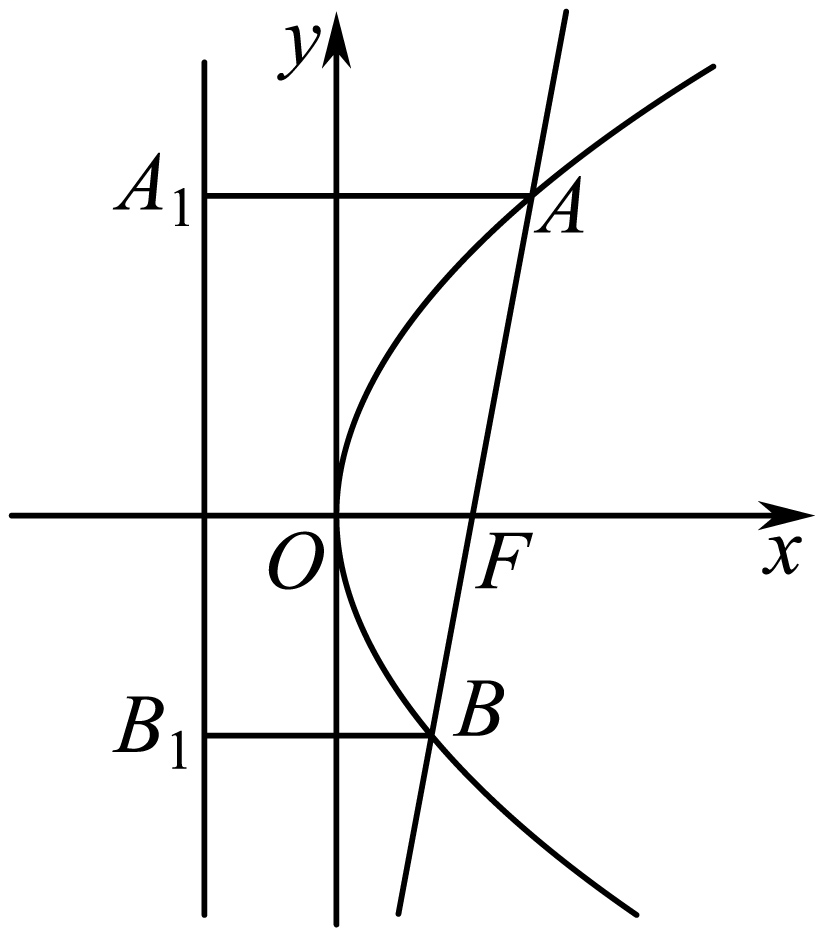
令，则，，所以平面的一个法向量，故C正确，

对于D，

点到平面的距离为,故D正确，

故选：ACD

11. 如图所示，抛物线的焦点为，过焦点的直线交抛物线于，两点，分别过点，作准线的垂线，垂足分别为，，则( )



A. ，两点的纵坐标之积为定值 B. 以线段为直径的圆与准线相切

C. 点在以为直径的圆外 D. 直线经过原点

【答案】ABD

【解析】

【分析】选项A，设出的方程与抛物线联立，求两根之积即可得出结论；选项B，求的中点到准线的距离并与弦长的关系进行比较；选项C，通过斜率的关系证明，得到点在以为直径的圆的关系；选项D，通过斜率的关系证明三点共线.

【详解】选项A，设的方程为：，，，

联立，整理得，则，

故选项A正确；

选项B，的中点， 点到准线的距离为,

，所以，即以线段为直径的圆与准线相切，故选项B正确；

选项C，由，，，得，所以，

点在以为直径的圆上，故选项C错误；

选项D，由，，，得，，所以，所以三点共线；

所以直线经过原点，故选项D正确.

故选：ABD.

12. 欧拉函数的函数值等于所有不超过正整数，且与互素的正整数的个数(互素是指两个整数的公约数只有1)，例如，，，则( )

A.  B. 数列是递增数列

C. 的前10项中最大项为第3项 D. 的前项和，则

【答案】ABD

【解析】

【分析】根据欧拉函数的定义求出，故A正确；根据欧拉函数的定义求出，由可得数列是递增数列，故B正确；根据数列的第一项大于第三项可知C不正确；根据错位相减法求出，可知，故D正确.

【详解】对于A，所有不超过正整数的正整数有个，其中与不互素的正整数有，，，，，共个，所以所有不超过正整数，且与互素的正整数的个数为个，即，故A正确；

对于B，所有不超过正整数的正整数有个，其中与不互素的正整数有，，，，，共个，所以所有不超过正整数，且与互素的正整数的个数为个，即，因为，所以，所以数列是递增数列，故B正确；

对于C，由B知，，所以，第一项为，第三项为，，故C不正确；

对于D，由C知，，

则，

，

所以，

所以，

所以，

所以，

所以，因为，

所以，故D正确.

故选：ABD

**第Ⅱ卷(非选择题)**

**三、填空题：本题共4小题，每小题5分，共20分．**

13. 双曲线的离心率为\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_.

【答案】

【解析】

【分析】依据题意可得，然后根据离心率公式可得结果.

【详解】由题可知：，由

所以离心率

故答案为：

14. 已知数列{}的前*n*项和为，则该数列的通项公式\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_.

【答案】2*n*+1

【解析】

【分析】由计算，再计算可得结论．

【详解】由题意时，，

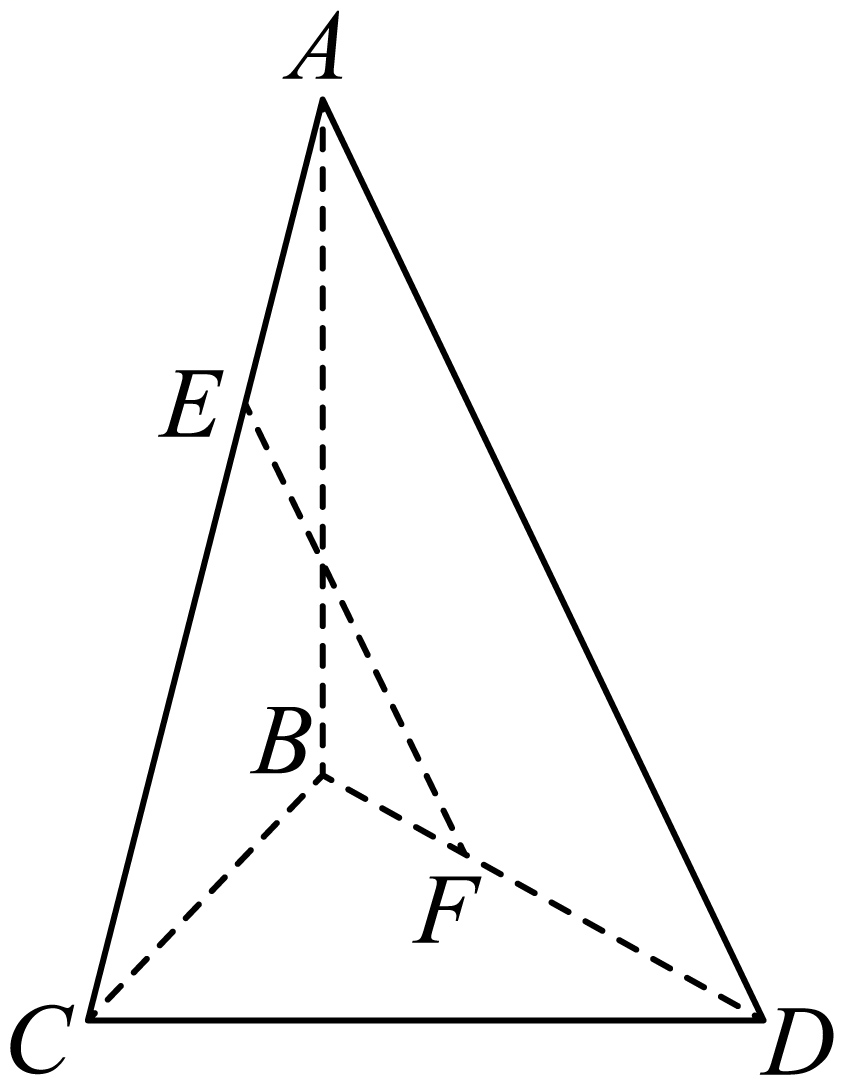
又适合上式，

所以．

故答案为：．

【点睛】本题考查由求通项公式，解题根据是，但要注意此式不含，．

15. 在《九章算术》中，将四个面都是直角三角形的四面体称之为鳖臑.如图所示，四面体为鳖臑，平面，，，，分别是棱和上的动点，且，则的长最小为\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_.



【答案】

【解析】

【分析】作于点，连接，得到直角三角形,设，由对应线段成比例求出，利用勾股定理表示，求其最小值即可.

【详解】如图，作于点，连接.

因为平面，平面，所以，又，

所以，所以平面，又平面，

所以.

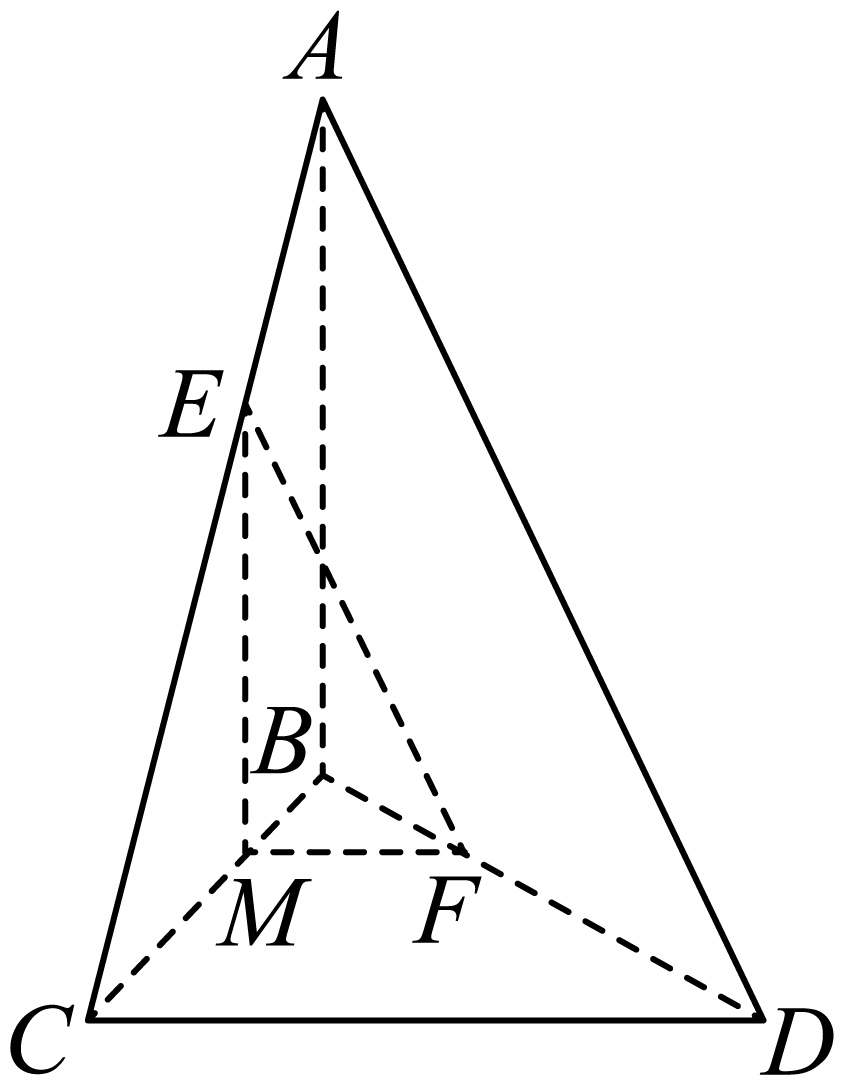
又，，所以,

由，得，则，得.

设，，得到，，

在中， 由，得到，

，当且仅当时，等号成立.



故答案为：.

16. 在平面直角坐标系中，点的坐标满足，其中，则的最小值为\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_.

【答案】

【解析】

【分析】由题可得，由椭圆第二定义有：.

则，即椭圆上一点到点距离与到直线距离之和.

【详解】因点的坐标满足，则，得，，

.则该椭圆的右焦点坐标为，右准线方程为.

则由椭圆第二定义，有，故

，即椭圆上一点到点距离与到直线距离之和.

则距离之和最小值为过的垂直于右准线的垂线段长度，为.

故答案为：.

**四、解答题：本题共6小题，共70分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．**

17. 已知数列满足，.

(1)求，，；

(2)试猜想数列的通项公式，并用数学归纳法证明.

【答案】(1)

(2)，证明见解析

【解析】

【分析】(1)首先根据题意得到，再求，，即可.

(2)首先猜想数列的通项公式为，再利用数学归纳法证明即可.

【小问1详解】

由可知，

当时，代入，解得；

当时，代入，解得；

当时，代入，解得；

【小问2详解】

猜想数列的通项公式为.

当时，左边，右边，成立.

(2)假设当时，成立.

则当时，有，

即当时，也成立.

所以对任何都成立.

18. 在一次期中考试后,学校教学处对数学考试情况进行分析,考生的成绩(单位:分)分布大致如下:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| 考生数学分数区间 |  |  |  |  |
| 比例 |  |  |  |  |

(1)估计本次数学考试成绩的众数、中位数以及平均数;

(2)为了进一步了解学生的数学学习情况,用按比例分配的分层随机抽样方法,在和两组中抽取7名同学,再从这7名同学中随机抽取2名同学进行访谈,求抽取的这2名同学恰好有1人成绩在内的概率.

【答案】(1)众数:120;中位数:;平均数:115

(2)

【解析】

【分析】(1)根据表格,根据数字特征的计算公式,计算结果即可;

(2)先根据分组抽样求得和中需要抽取的人数,列举出从中抽取两位同学的所有的可能,找出其中恰好有1人成绩在的结果,利用古典概型的概率公式,即可得出结果.

【小问1详解】

解:由表格可知:众数:120;中位数:;

平均数:;

【小问2详解】

由表格知:中的学生与中的学生比例为: ,

根据分层随机抽样的方法抽取7名学生,则在中抽取2人,分别记作,

在中抽取5人,分别记作,

把“从样本中抽取2名同学恰好有1人成绩在内”记作事件,

用表示抽出的两位同学,则所有的可能性为:







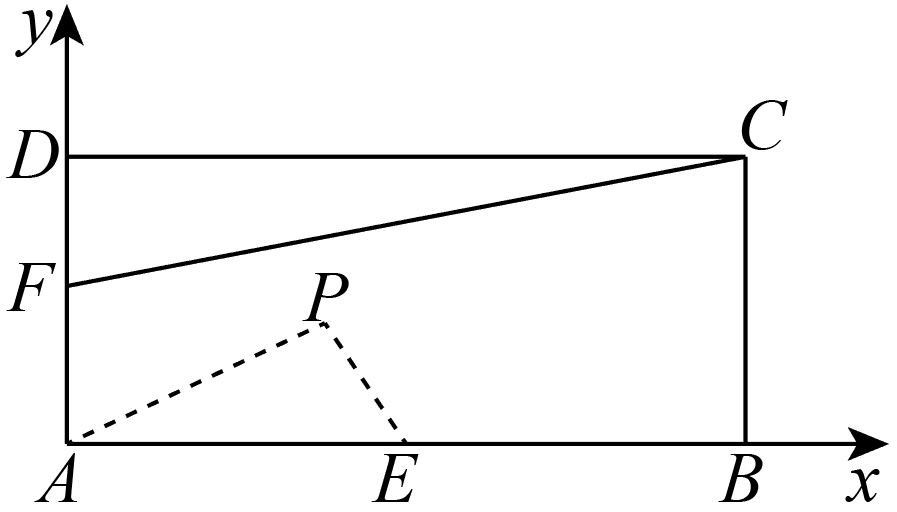
共21种,

其中满足事件的有:

共10种,

故.

19. *VEX*亚洲机器人比赛是全球两大机器人赛事之一.如图所示，在某次比赛中，主办方设计了一个矩形坐标场地(包含边界和内部，为坐标原点)，长12米，长5米.在处有一只电子狗，在边上距离点米的点处放置机器人，电子狗的运动速度是机器人运动速度的两倍.若电子狗和机器人从起始位置同时出发，在场地内沿直线方向同时达到某点，那么电子狗被机器人捕获，称点为成功点.



(1)求成功点的轨迹方程；

(2)为了记录比赛情况，摄影机从边上某点处沿直线方向往点运动，要求直线与点的轨迹没有公共点，求点纵坐标的取值范围.

【答案】(1)

(2)

【解析】

【分析】(1)设，，机器人运动速度为，依题意得，整理即可得解；

(2)设直线：，根据直线与点的轨迹没有公共点，则圆心到直线的距离等于半径，即可求出的取值范围，从而求出点纵坐标的取值范围.

【小问1详解】

解：设，，机器人运动速度为，

由题意可得，化简得.

由于点在矩形场地内，则.

所以成功点的轨迹方程为.

【小问2详解】

解：由题意可知直线的斜率存在，不妨设直线：，

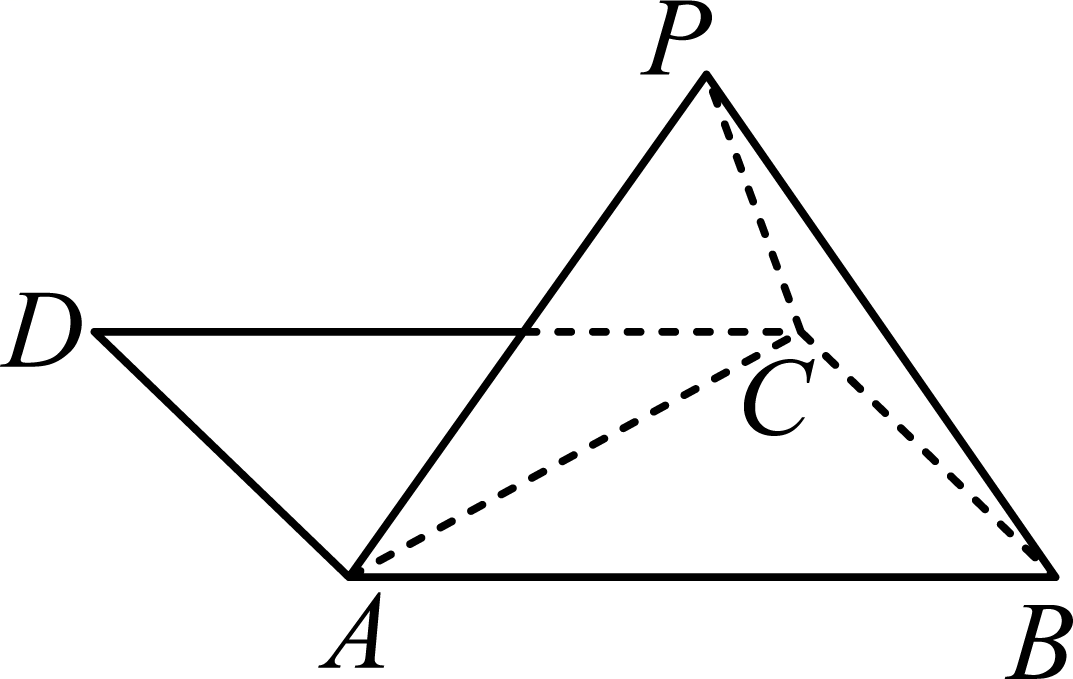
直线与点的轨迹没有公共点，

由直线与圆的位置关系可得，解得.

则点纵坐标，

又因为，所以.

20. 如图所示，在正方形中，将沿折起至.



(1)求证：；

(2)记二面角的大小为. 当时，求异面直线和所成角的余弦值的范围.

【答案】(1)证明见解析

(2)

【解析】

【分析】(1)由线线垂直证平面，再证；

(2)由向量法求异面直线夹角.

【小问1详解】

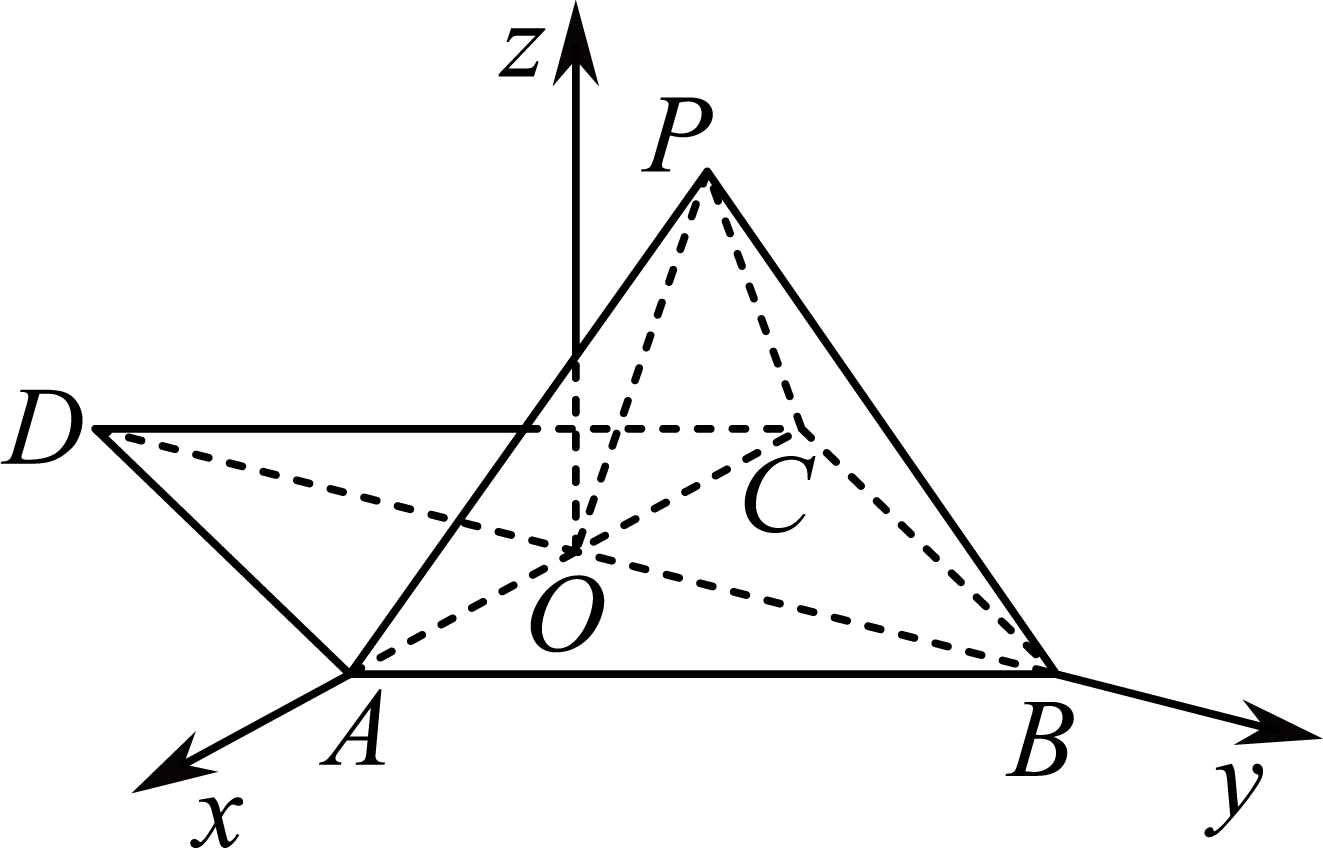
连接正方形的对角线交于点，连接.

因为四边形是正方形，所以.

由翻折不变性可知.

又因为，平面，所以平面.

因为平面，所以.

【小问2详解】

由(1)可知为二面角的平面角，即.

法1(坐标法)：如图，以为原点，为轴正方向，为轴正方向，垂直于平面且向上为轴正方向，建立空间直角坐标系.

不妨设，则，，，，

则，.

所以，

因为，所以.

法2(基底法)：不妨设，则，

以为基底，，，.

因为，，

所以，

因为，所以.

21. 已知数列的首项，且满足.

(1)求数列的通项公式；

(2)设，求数列的前项和.

【答案】(1)

(2)

【解析】

【分析】(1)根据递推公式可得：是以为首项，为公比的等比数列，利用等比数列的通项公式即可求解；

(2)结合(1)的结论得出，利用分组求和和错位相减法即可求解.

【小问1详解】

由可知，

两边同减1可得，

因为，所以是以为首项，为公比的等比数列.

所以，即.

【小问2详解】

由(1)可知，

所以





记



两式作差可得

所以.

因此.

22. 已知双曲线：与双曲线：的渐近线相同，且经过点．

(1)求双曲线的方程；

(2)过点的直线与双曲线的右支交于，两点，与轴交于点.设，，求的取值范围.

【答案】(1)

(2)

【解析】

【分析】(1)根据共渐近线方程设双曲线，代入点即可求得的值，可得双曲线的方程；

(2)根据双曲线与直线的位置关系，求得交点坐标关系，根据向量线性关系列式，即可求得的取值范围.

【小问1详解】

由双曲线*C*与双曲线的渐近线相同，可设双曲线，

代入，可得，

所以求双曲线的方程为，即.

【小问2详解】

易知直线的斜率存在且不为0，设为，则直线的方程为，则.

设.

联立可得，

方程有两个不同的正根可得

，解得.

记点的横坐标为，即.

由可得，代入双曲线*C*的方程，可得.

同理可得，由可得.

所以是方程的两个根，

由韦达定理可得.

所以.

令，，

则

令，，则在上单调递增，

所以且.

因此，.