**2022-2023学年高二元月期末考试**

**数学试卷**

**本试卷全卷满分150分．考试用时120分钟．**

**注意事项：**

**1．答题前，先将自己的姓名、准考证号填写在试卷和答题卡上，并将准考证号条形码粘贴在答题卡上的指定位置．**

**2．选择题的作答：每小题选出答案后，用2B铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑．写在试卷、草稿纸和答题卡上的非答题区域均无效．**

**3．非选择题的作答：用黑色签字笔直接答在答题卡上对应的答题区域内．写在试卷、草稿纸和答题卡上的非答题区战均无效．**

**4．考试结束后，请将本试卷和答题卡一并上交．**

**一、单项选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．**

1. 经过点且与直线平行的直线方程为( )

A.  B. 

C.  D. 

【答案】D

【解析】

【分析】根据平行得到斜率，结合点坐标得到答案.

【详解】直线的斜率为，两直线平行，故所求直线方程为.

整理得：.

故选：D

2. 焦点在轴的正半轴上，且焦点到准线的距离为的抛物线的标准方程是( )

A.  B.  C.  D. 

【答案】A

【解析】

【分析】直接由焦点位置及焦点到准线的距离写出标准方程即可.

【详解】由焦点在轴的正半轴上知抛物线开口向上，又焦点到准线的距离为，故抛物线的标准方程是.

故选：A.

3. 已知空间向量，，，若向量共面，则实数 ( )

A.  B.  C.  D. 

【答案】C

【解析】

【分析】根据题意和空间向量的基本定理列出方程组，解之即可.

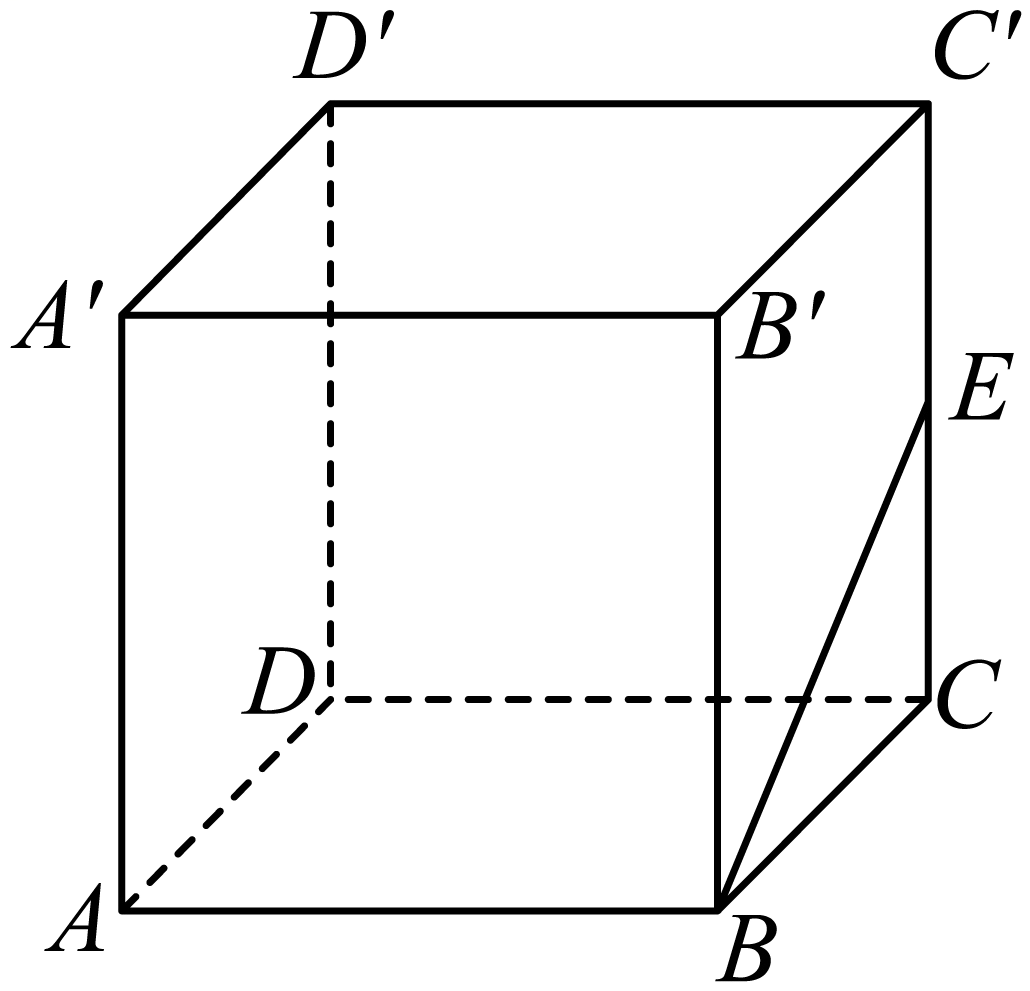
【详解】因为三向量、、共面，

设，其中、，

则，解得.

故选：C.

4. 在棱长为2的正方体中，点*E*为棱的中点，则点到直线*BE*的距离为( )



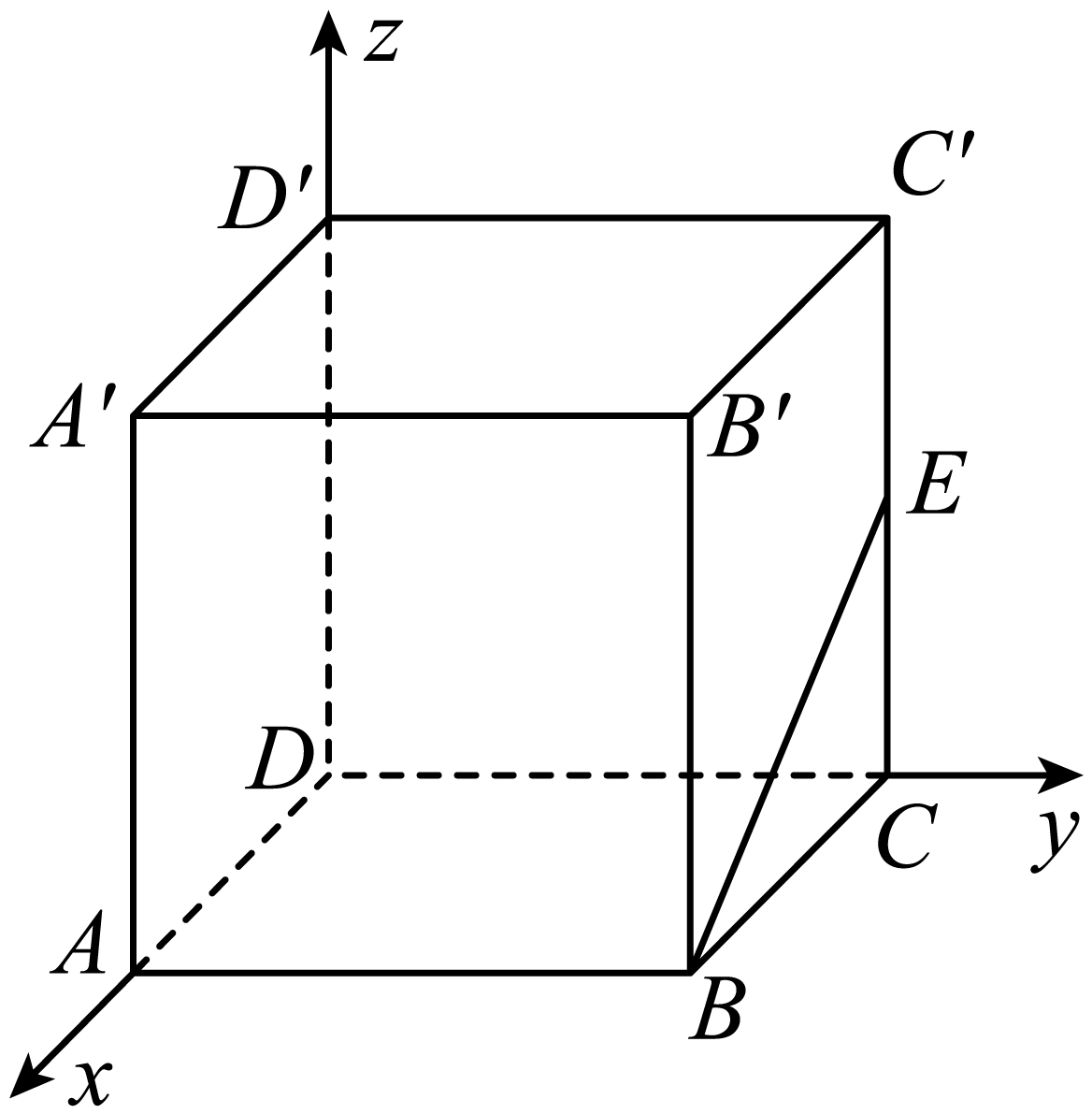
A. 3 B.  C.  D. 

【答案】C

【解析】

【分析】建立空间直角坐标系，得到各点坐标，再根据向量公式计算得到距离.

【详解】如图所示：以分别为轴建立空间直角坐标系.



则，，，，，

，点到直线*BE*的距离为.

故选：C.

5. 曲线与直线的公共点的个数为( )

A.  B.  C.  D. 

【答案】B

【解析】

【分析】根据以及分别得曲线为椭圆以及双曲线的一部分，根据直线与其关系即可求解.

【详解】当时，曲线的方程为，表示椭圆的上半部分含与轴的交点，此时曲线与的交点为(0,3),(4,0),

当时，曲线的方程为，表示双曲线在轴下方的部分，

其一条渐近线方程为：，故直线与无交点，

曲线与直线的公共点的个数为.

故选：B

6. 已知双曲线的左焦点为，*M*为双曲线*C*右支上任意一点，*D*点的坐标为，则的最大值为( )

A. 3 B. 1 C.  D. 

【答案】C

【解析】

【分析】由双曲线定义把转化为到右焦点的距离，然后由平面几何性质得结论．

【详解】设双曲线*C*的实半轴长为，右焦点为，

所以，

当且仅当*M*为的延长线与双曲线交点时取等号.

故选：C．

7. 为建设宜居之城，某市决定每年按当年年初住房总面积的建设新住房，同时拆除面积为单位：的旧住房已知该市年初拥有居民住房的总面积为单位：，则到年末，该市住房总面积为( )

参考数据：，

A.  B. 

C.  D. 

【答案】A

【解析】

【分析】根据题意可得，根据等比数列的求和公式即可化简求值.

【详解】由题意，年末的住房面积为，

年末的住房面积为，

年末的住房面积为，

……

年末的住房面积为

.

到年末，该市住房总面积为.

故选：A

8. 已知椭圆与双曲线有共同的焦点，，离心率分别为，，点为椭圆与双曲线在第一象限的公共点，且 .若，则的取值范围为( )

A.  B.  C.  D. 

【答案】B

【解析】

【分析】根据椭圆和双曲线定义可得，，进而在焦点三角形中由余弦定理即可得，由即可得的范围.

【详解】由题意设焦距为，椭圆长轴长为，双曲线实轴长为，

在双曲线的右支上，由双曲线的定义，由椭圆定义，

可得，，

又，由余弦定理得，

可得，

得，即，

可得，即，

又时，可得，

即，亦即，

得.

故选：B

**二、多项选择题：本题共4小题，每小题5分，共20分．在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求．全部选对的得5分，部分选对的得2分，有选错的得0分．**

9. 分别抛掷两枚质地均匀的硬币，设“第一枚正面朝上”为事件*A*，“第二枚反面朝上”为事件，“两枚硬币朝上的面相同”为事件，则 ( )

A.  B. 事件*A*与事件互斥

C. 事件与事件对立 D. 事件*A*与事件相互独立

【答案】AD

【解析】

【分析】对A：根据古典概型的计算公式分析运算；对B：根据互斥事件的概念分析判断；对C：根据对立事件的概念分析判断；对D：根据独立事件的概念分析判断.

【详解】对A：由题意可知：一枚硬币有两个等可能结果：正面朝上、反面朝上，

则，

两枚硬币有两个等可能结果：正正、正反、反正、反反，

则，A正确；

对B：事件*A*与事件可以同时发生，即事件*A*与事件不是互斥，B错误；

对C：事件对立事件包含两种情况：正反、反正，事件仅有一种情况：正反，

故事件与事件不对立，C错误；

对D：∵，故事件*A*与相互独立，D正确.

故选：AD.

10. 已知数列为等差数列，，，其前项和为，则( )

A. 数列的公差为

B. 时，取得最大值

C. 

D. 数列中任意三项均不能构成等比数列

【答案】ACD

【解析】

【分析】根据等差数列基本量的计算可判断AB,根据求和公式可判断C，根据等比中项的关系，结合不等式即可求解D.

【详解】对于,设公差为 则，解得，选项正确；

对于B,，， ，当时，取得最大值，B选项错误.

对于C,，C选项正确.

对于D,假设中三项，，成等比数列，则有；

整理得：

 ，

由①知，将其代入中得这与矛盾，

故假设不成立，数列中任意三项均不能构成等比数列，D选项正确.

故选：ACD

11. 已知圆和圆，则( )

A. 直线与圆有两个公共点

B. 圆被直线截得的弦长可能为

C. 圆心直线上

D. 圆与圆有且仅有条公切线

【答案】AC

【解析】

【分析】确定直线过定点且定点在圆内得到A正确；计算最短弦长为得到B错误；计算圆心代入直线方程得到C正确；举反例得到D错误，得到答案.

【详解】对选项A：直线即，过定点，则，即点在圆内，因此直线与圆有两个公共点，正确；

对选项B：由选项A可知当垂直于直线时，所截得的弦长最短且为，因此圆被直线截得的弦长不可能为，错误；

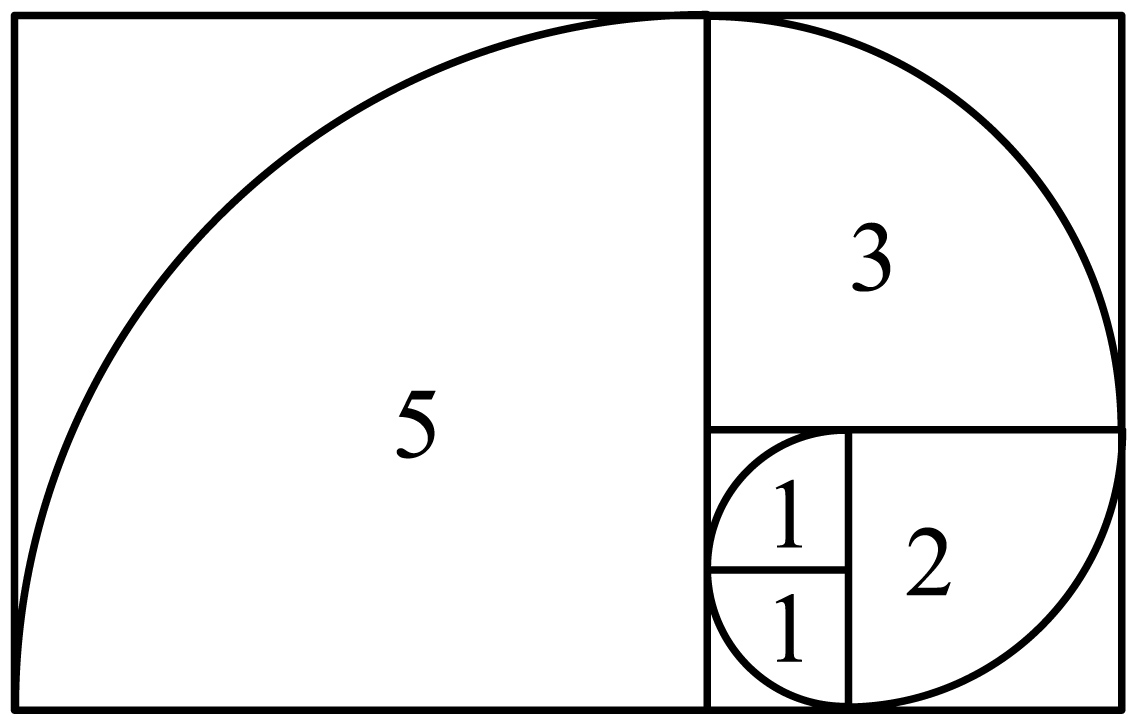
对选项C：圆的圆心为，则，即圆心坐标满足方程，即圆心在直线上，正确；

对选项D：取，圆的方程为，即，

其圆心为，半径为，，此时圆与圆外切，有条公切线，错误.

故选：AC

12. 若数列满足，，则称该数列为斐波那契数列如图所示的“黄金螺旋线”是根据斐波那契数列画出来的曲线图中的长方形由以斐波那契数为边长的正方形拼接而成，在每个正方形中作圆心角为的扇形，连接起来的曲线就是“黄金螺旋线”记以为边长的正方形中的扇形面积为，数列的前项和为，则 ( )



A.  B. 是奇数

C.  D. 

【答案】ABD

【解析】

【分析】根据递推公式求出即可判断A；观察数列的奇偶特点即可判断B；根据递推公式，结合累加法即可判断C；根据递推公式可得，结合累加法计算即可判断D.

【详解】对于A，由，且，可得斐波那契数列：，，，，，，，，故故A正确；

对于B：由斐波那契数列：，，，，，，，，，，，，

可得每三个数中前两个为奇数，后一个偶数，且，所以是奇数，故B正确；

对于C：因为，

相加可得：，故C错误；

对于D：因为斐波那契数列总满足，且，

所以，

，

，

类似的有，，

其中

累加得，

，

故：，故D正确.

故选：ABD.

**三、填空题：本题共4小题，每小题5分，共20分**

13. 已知数列为正项等比数列，且，则\_\_\_\_.

【答案】

【解析】

【分析】根据等比数列性质得到，计算得到答案.

【详解】数列为正项等比数列，.

.

故答案为：

14. 已知双曲线与双曲线有相同的渐近线，且过点，则双曲线的标准方程为\_\_\_\_.

【答案】

【解析】

【分析】设双曲线方程为，代入点坐标，计算得到答案.

【详解】双曲线即，

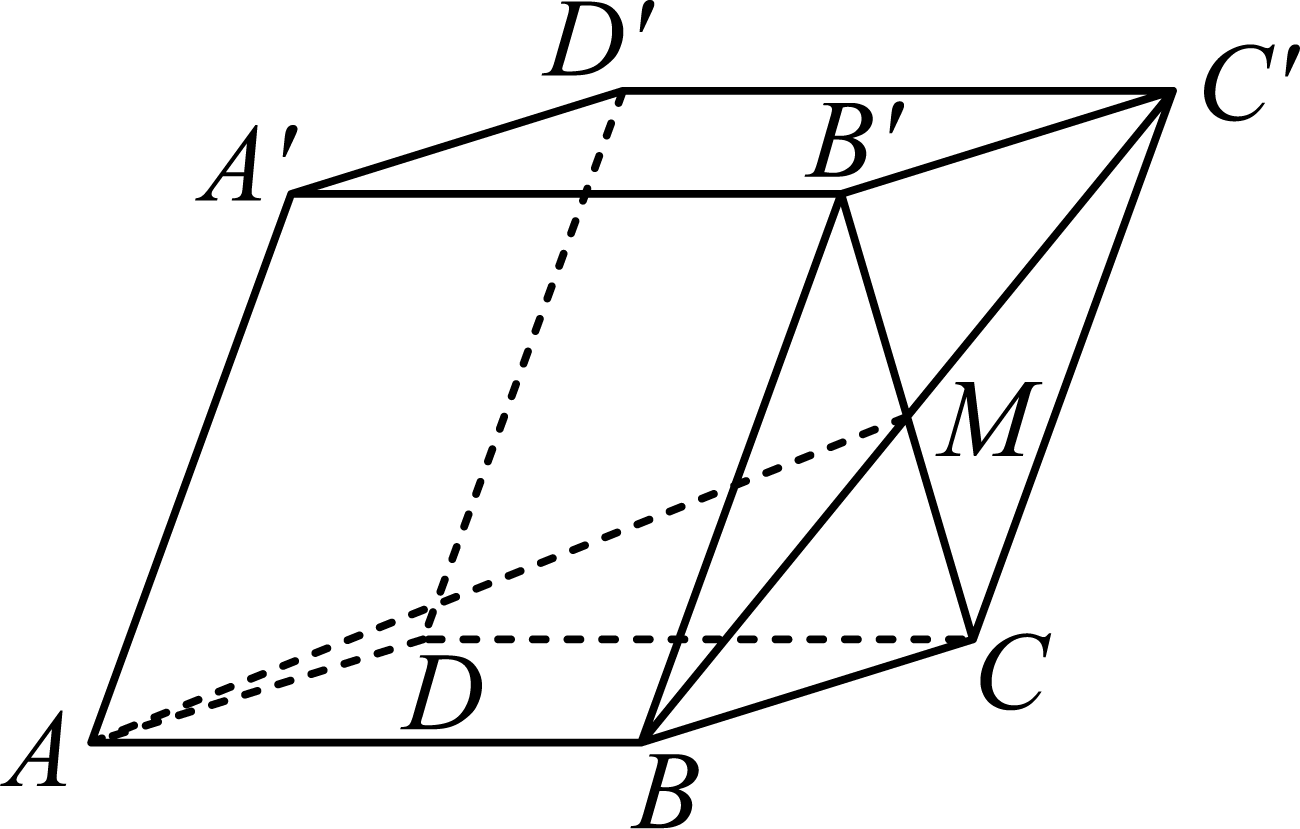
双曲线与双曲线有相同的渐近线，

所以双曲线的方程可设为：，代入点的坐标，可得，

则双曲线的方程为，即双曲线的标准方程为.

故答案为：

15. 如图所示，在棱长均为的平行六面体中，，点为与的交点，则的长为\_\_\_\_\_.



【答案】

【解析】

【分析】设，，为基底，，，平方计算得到答案.

【详解】设，，为基底，，

则，

所以

，故.

故答案为：

16. 已知为坐标原点，直线与抛物线交于，两点，且，点为点在直线上的射影，则点到直线的距离的最大值为\_\_\_\_\_\_.

【答案】

【解析】

【分析】设直线：，联立方程得到根与系数的关系，根据垂直计算得到，考虑和两种情况，得到的轨迹，计算距离得到答案.

【详解】由题可知直线斜率存在，设直线：，，，

联立方程：，整理得：，

，，，



，得或(舍)，满足，

故直线：.

当时，点，点到直线为；

当时，直线，又直线：，消去整理得：，

，圆心为，半径，

点到直线距离的最大值为圆心到直线的距离加半径，

即，

综上所述：点到直线的距离的最大值为.

故答案为：

**四、解答题：本题共6小题，共70分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．**

17. 为弘扬宪法精神，某校举行宪法知识竞赛.在初赛中，已知甲同学晋级的概率为 ，乙同学晋级的概率为，甲、乙两人是否晋级互不影响.

(1)求甲、乙两人同时晋级的概率；

(2)求甲、乙两人中至少有一人晋级的概率.

【答案】(1)

(2)

【解析】

【分析】(1)根据相互对立事件的乘法计算公式即可求解，

(2)根据相互对立事件的乘法公式以及对立事件的概率即可求解.

【小问1详解】

设“甲晋级”为事件，“乙晋级”为事件，

设“甲、乙两人同时晋级”为事件，

则 ；

【小问2详解】

设“甲、乙两人中至少有一人晋级”事件，

由题事件，相互独立，则，也相互独立，

所以 ，

则 .

18. 已知数列的前*n*项和为，且．

(1)求数列的通项公式；

(2)若，求数列的前*n*项和．

【答案】(1)，

(2)

【解析】

【分析】(1)利用公式求解；

(2)根据第(1)的结论，再利用错位相减法求解.

【小问1详解】

因为①，

所以时，②，

由①②相减，可得，，

当时，，满足，

故的通项公式为，．

【小问2详解】

因为，

所以③，

则④，

由③-④，得，

∴，

∴.

19. 已知点和直线点是点*A*关于直线的对称点.

(1)求点的坐标；

(2)为坐标原点，且点满足.若点的轨迹与直线有公共点，求的取值范围.

【答案】(1)

(2)

【解析】

【分析】(1)设点，根据点关于直线对称可列出方程，联立解得答案；

(2)设点，根据求得*P*点轨迹方程，根据点的轨迹与直线有公共点，可知圆心到直线距离小于等于半径，解不等式可得答案.

【小问1详解】

设点，由题意知线段的中点在直线上，

故：，①

又直线垂直于直线，故，②

联立①②式解得：，故点的坐标为；

【小问2详解】

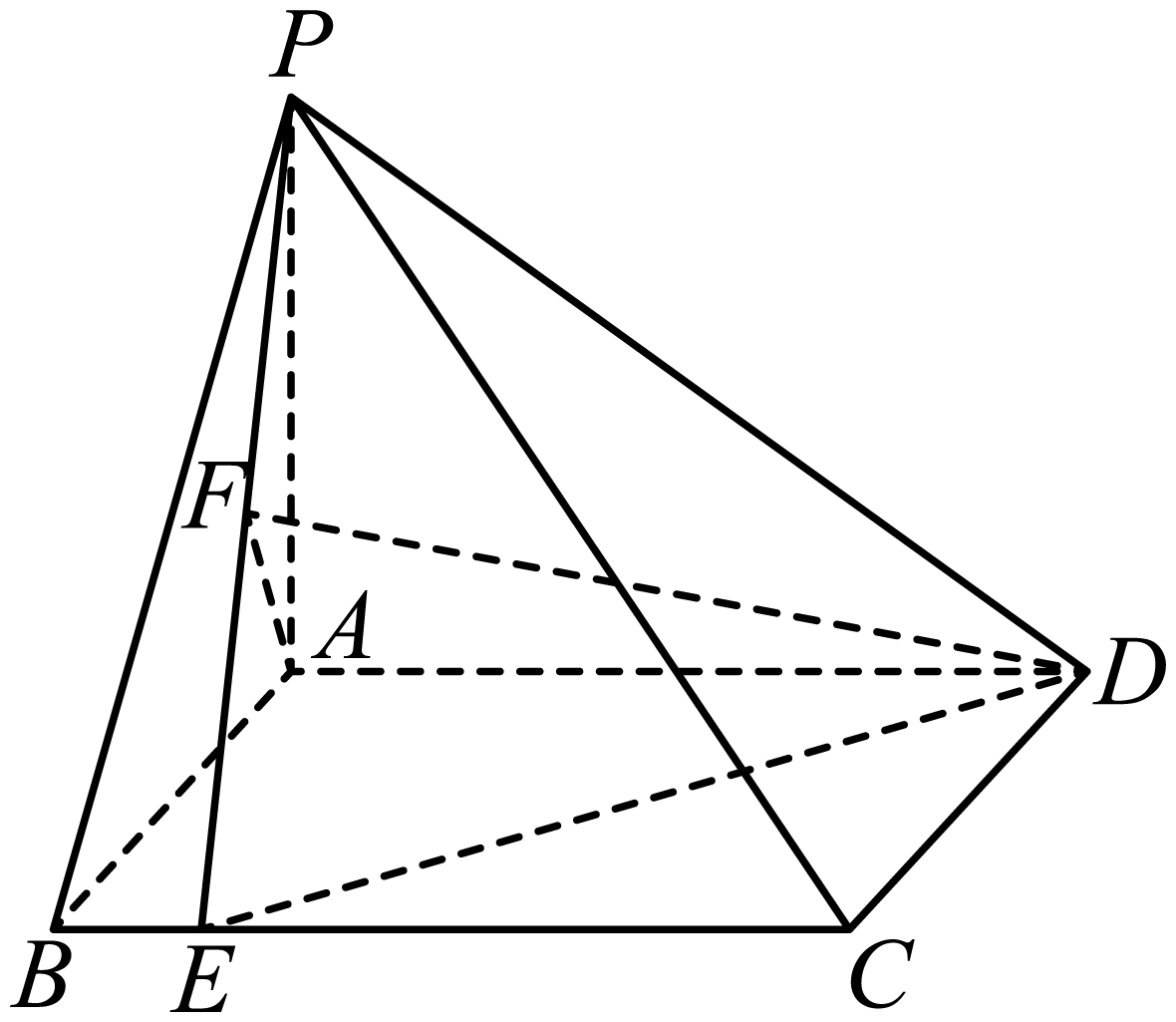
设点，由题，则，

故，化简得，

又直线与圆有公共点，

故，解得 .

20. 如图，在四棱锥中，底面*ABCD*，四边形*ABCD*是正方形，且，*E*是棱*BC*上的动点，*F*是线段*PE*的中点．



(1)求证：平面*ADF*；

(2)是否存在点*E*，使得平面*DEP*与平面*ADF*所成角的余弦值为？若存在，请求出线段*BE*的长；若不存在，请说明理由．

【答案】(1)证明见解析；

(2)不存在，理由见解析.

【解析】

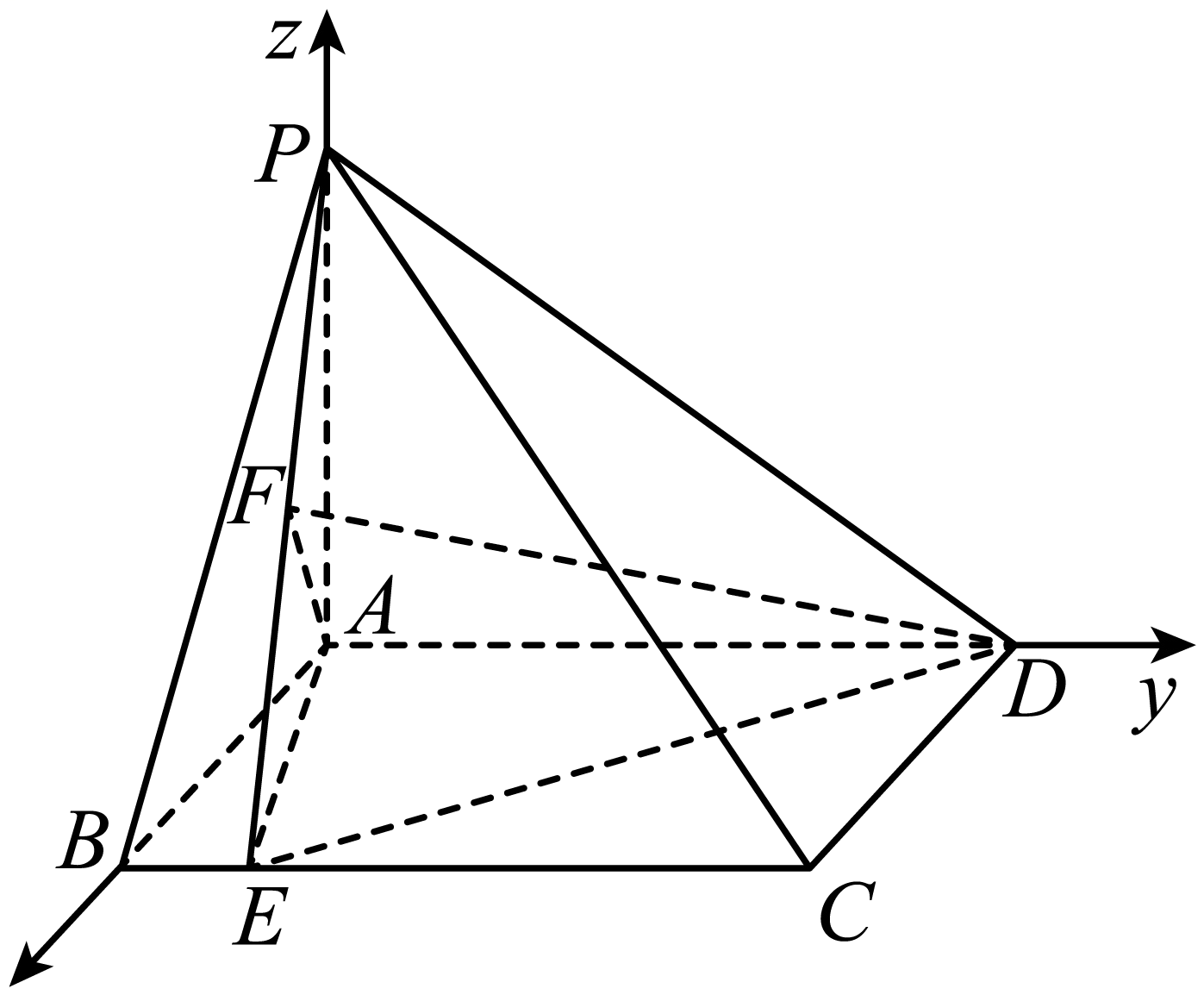
【分析】(1)根据给定条件，建立空间直角坐标系，利用空间位置关系的向量证明推理作答.

(2)由(1)中坐标系，求出平面*DEP*与平面*ADF*的法向量，再利用面面角的向量求法计算判断作答.

【小问1详解】

在四棱锥中，底面*ABCD*，四边形*ABCD*是正方形，

以*A*为原点建立空间直角坐标系，如图，，设，，



则，，，

于是，，有，，

又，平面，平面，

因此平面.

【小问2详解】

由(1)平面*ADF*的法向量为，

又，，设平面的法向量为，

则，不妨令，则，

故平面的一个法向量为，

设平面与平面所成角为，则，

解得或，此时点在线段的延长上，

所以，不存在这样的点.

21. 在数列中，已知， .

(1)证明：数列为等比数列；

(2)记，数列的前项和为，求使得的整数的最大值.

【答案】(1)证明见解析

(2)5

【解析】

【分析】(1)计算，，得到等比数列的证明.

(2)确定，，根据裂项相消法得到，代入不等式计算得到答案.

【小问1详解】

，得，，，

故数列是以为首项，为公比的等比数列；

小问2详解】

，故，故，

，

，即，即，，故，

故使得的最大整数为.

22. 已知平面内点*P*与两定点连线的斜率之积等于．

(1)求点*P*的轨迹连同点所构成的曲线*C*的方程；

(2)设不过坐标原点且不垂直于坐标轴的直线*l*与曲线*C*交于*A*、*B*两点，点*M*为弦*AB*的中点．

①求证：直线*OM*与直线*l*的斜率之积为定值；

②过点*M*作直线*l*的垂线交曲线*C*于*D*、*E*两点，点*N*为弦*DE*的中点．设直线*ON*与直线*l*交于点*T*，若有，求的最大值．

【答案】(1)点的轨迹方程为，曲线的方程为.

(2)①证明见解析；② 

【解析】

【分析】(1)由求轨迹的方程的步骤结合两点间的斜率公式，即可求得

(2)①设，代入椭圆方程利用点差法，即可求出直线*OM*与直线*l*的斜率之积为定值.

②结合①中的结论，结合两条直线的垂直条件求出点*N*的纵坐标，通过直线*ON*与直线联立方程，求出交点*T*的纵坐标，通过将转化，通过基本不等式，求得的最大值.

小问1详解】

设点为轨迹上任意一点，由题意得，

则，，

，

故点的轨迹方程为，

所以点*P*的轨迹连同点所构成的曲线*C*的方程 为.

【小问2详解】

①设点，则，

即；

由题意知，故，

即，

所以，

因为，即(定值)，直线*OM*与直线*l*的斜率之积为定值 .

②由①易知，故，

又因为，故，，

设，点在直线上，则 (i)，

,.

又由①同理得，则 (ii)，

联立(i)(ii)得，，

设，又由(ii)得，

则，,

联立，解得，

易知点与点在轴的同侧，故点在线段上，即与同向，

故，

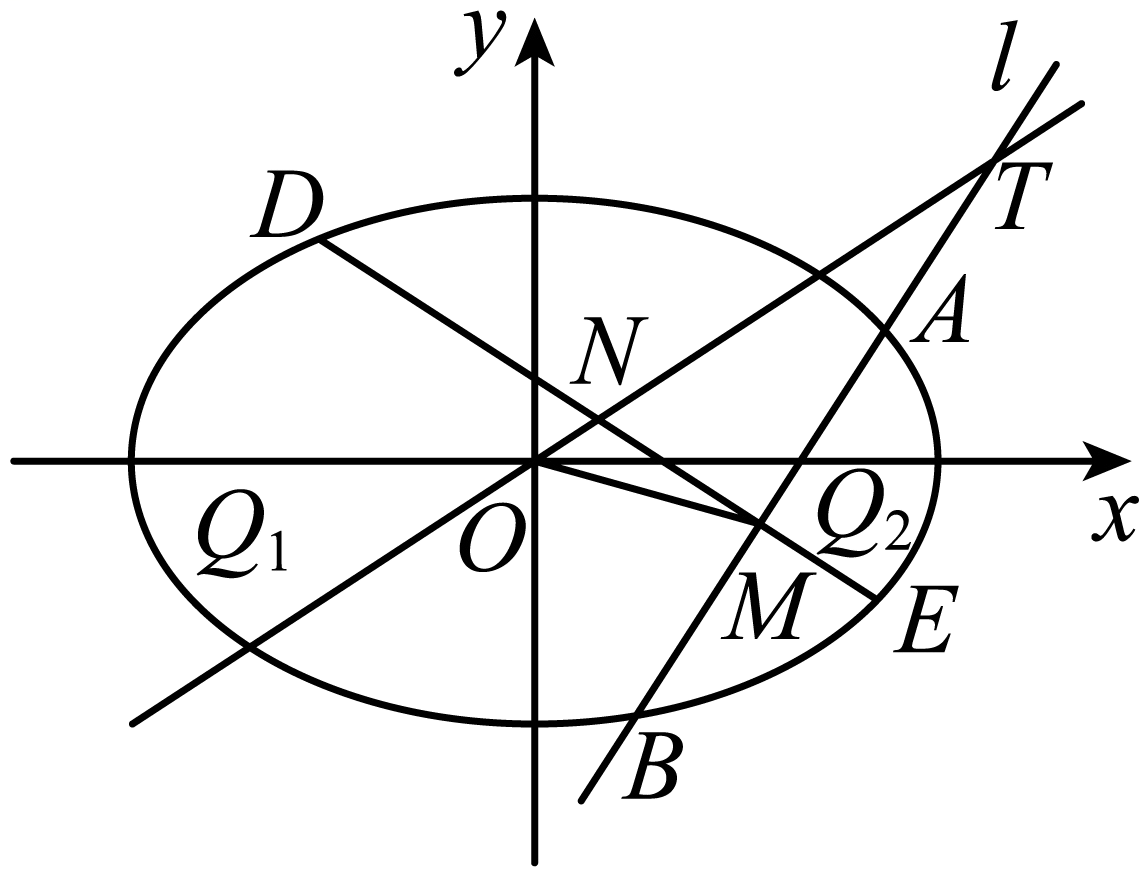
又因为



，即；

当且仅当，即时等号成立，， 所以，

即，故的最大值为.



【点睛】关键点点睛：本题求解的关键有三个：一是根据斜率积为定值找到两个斜率间的关系；二是利用表示出；三是利用基本不等式求解的最小值.