**湖南师大附中2022-2023学年度高二第一学期期中考试**

**数学**

**一、选择题(本大题共8小题，每小题5分，共40分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．)**

1. 当*m*＜1时，复数*m*(3+*i*)﹣(2+*i*)在复平面内对应的点位于( )

A. 第一象限 B. 第二象限 C. 第三象限 D. 第四象限

【答案】D

【解析】

【分析】原复数化为(3*m*﹣2)+*i*(*m*﹣1)，再根据*m*的范围确定.

【详解】*m*(3+*i*)﹣(2+*i*)化简得(3*m*﹣2)+*i*(*m*﹣1)，

∵

∴3*m*﹣2＞0，*m*﹣1＜0

∴所对应的点在第四象限

故选：*D.*

【点睛】本题主要考查复数的代数形式，考查了复平面内各象限复数的特点，属于基础题.

2. 曲线与曲线(且)的( )

A. 长轴长相等 B. 短轴长相等 C. 焦距相等 D. 离心率相等

【答案】C

【解析】

【分析】分析可知两曲线都表示椭圆，求出两椭圆的长轴长、短轴长、焦距以及离心率，可得出合适的选项.

【详解】曲线表示焦点在轴上，长轴长为，短轴长为，离心率为，焦距为的椭圆．

曲线(且)表示焦点在轴上，长轴长为，

短轴长为，焦距为，离心率为的椭圆．

故选：C.

3. 数列的通项若是递增数列，则实数*t*的取值范围是( )

A.  B.  C.  D. 

【答案】A

【解析】

【分析】根据一次函数以及幂函数的性质即可结合数列的特征求解.

【详解】由已知得解得．

故选:A．

4. 是从点*P*出发的三条射线，每两条射线的夹角均为，那么直线与平面所成角的余弦值是( )

A.  B.  C.  D. 

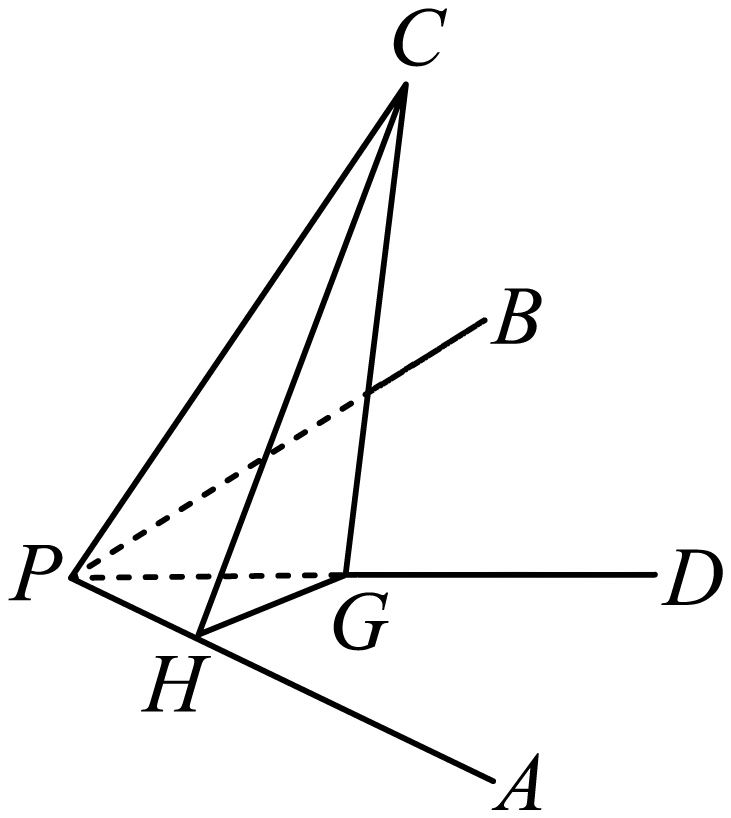
【答案】B

【解析】

【分析】作图，找到直线在平面上的投影在构建多个直角三角形，找出边与角之间的关系，继而得到线面角；也可将三条射线截取出来放在正方体中进行分析.

【详解】解法一：

如图，设直线在平面的射影为，



作于点*G*，于点*H*，连接，

易得，又平面，则平面，又平面，则，

有

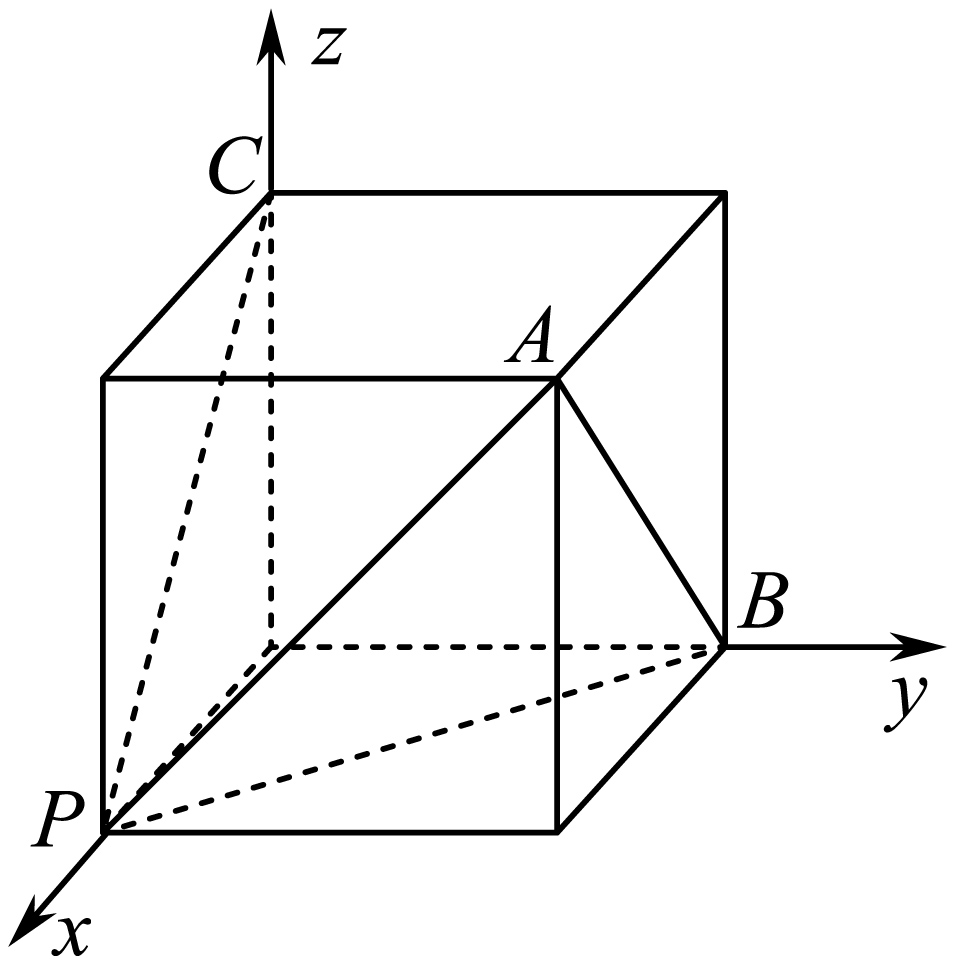
故．

已知，

故为所求．

解法二：

如图所示，把放在正方体中，的夹角均为．



建立如图所示的空间直角坐标系，设正方体棱长为1，

则，

所以，

设平面的法向量，则

令，则，所以，

所以．

设直线与平面所成角，所以，

所以．

故选B．

5. 在流行病学中，基本传染数是指在没有外力介入，同时所有人都没有免疫力的情况下，一个感染者平均传染的人数．一般由疾病的感染周期、感染者与其他人的接触频率、每次接触过程中传染的概率决定．对于，而且死亡率较高的传染病，一般要隔离感染者，以控制传染源，切断传播途径．假设某种传染病的基本传染数，平均感染周期为7天(初始感染者传染个人为第一轮传染，经过一个周期后这个人每人再传染个人为第二轮传染……)那么感染人数由1个初始感染者增加到1000人大约需要的天数为(参考数据：，)( )

A. 35 B. 42 C. 49 D. 56

【答案】B

【解析】

【分析】根据题意列出方程，利用等比数列的求和公式计算*n*轮传染后感染的总人数，得到指数方程，求得近似解，然后可得需要的天数.

【详解】感染人数由1个初始感染者增加到1000人大约需要*n*轮传染,

则每轮新增感染人数为，

经过*n*轮传染，总共感染人数为：，

∵，∴当感染人数增加到1000人时，，化简得，

由，故得，又∵平均感染周期为7天，

所以感染人数由1个初始感染者增加到1000人大约需要天，

故选：B

【点睛】等比数列基本量的求解是等比数列中的一类基本问题，解决这类问题的关键在于熟练掌握等比数列的有关公式并能灵活运用，尤其需要注意的是，在使用等比数列的前*n*项和公式时，应该要分类讨论，有时还应善于运用整体代换思想简化运算过程．

6. 半径为的圆内有一点，已知，过点的条弦的长度构成一个递增的等差数列，则的公差的取值范围为( )

A.  B.  C.  D. 

【答案】A

【解析】

【分析】计算出过点的直线截圆所得弦长的最大值和最小值，即可求得数列的公差的取值范围.

【详解】设圆心到过点的直线的距离为，则，

设过点的直线截圆的弦长为，则，

即过点的直线截圆所得弦长的最大值为，最小值为，

设等差数列的公差为，则且，解得.

故选：A.

7. 已知，函数在上存在最值，则的取值范围是( )

A.  B.  C.  D. 

【答案】D

【解析】

【分析】根据的最值点为，进而根据不等式得到，由的取值范围即可求解.

【详解】当取最值时，．

即，

由题知，故．

即．

因为时，；时，；

显然当时，，此时在上必有最值点．

综上，所求．

故选:D．

8. 已知函数，则存在，对任意的有( )

A.  B. 

C.  D. 

【答案】C

【解析】

【分析】根据二次函数的对称轴，结合二次函数的单调性，即可判断AC，根据指数函数的性质即可判断B,取特殊值即可排除D.

【详解】由题意可知，函数图象开口向上，对称轴为，

A选项，当时，根据二次函数性质知不成立，故A错误；

B选项，为四次函数，因为为指数函数，且单调递增，当取得足够大的实数时，一定有，故B错误；

C选项，，则只需的对称轴位于左边即可，即，所以即可，故C正确；

D选项，分别取，可得，对二次函数来说是不可能，故D错误．

故选：C．

**二、选择题(本大题共4小题，每小题5分，共20分．在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求．全部选对得5分，部分选对的得2分，有选错的得0分．)**

9. 已知圆，则下列说法正确的是( )

A. 直线与圆*A*相切

B. 圆*A*截*y*轴所得的弦长为4

C. 点在圆*A*外

D. 圆*A*上的点到直线的最小距离为3

【答案】BC

【解析】

【分析】根据圆心到直线的距离即可判断AD,根据圆的弦长可判断B,根据点与圆的位置关系可判断C.

【详解】由圆得，

所以圆心，半径，

对于A：圆心*A*到直线的距离为1，所以直线与圆*A*相交，故A错误；

对于B：圆心*A*在*y*轴上，则所截得的弦长为直径等于4，故B正确；

对于C：点到圆心*A*的距离，所以点*B*在圆*A*外，故C正确；

对于D：圆心*A*到直线的距离，所以圆*A*上的点到直线的最小距离为，故D错误．

故选:BC．

10. 已知是的前*n*项和，下列结论正确的是( )

A. 若为等差数列，则(*p*为常数)仍然是等差数列

B. 若为等差数列，则

C. 若为等比数列，公比为*q*，则

D. 若为等比数列，则“”是“”的充要条件

【答案】AC

【解析】

【分析】结合等差数列求和公式求出，根据等差数列定义判断A；结合等差数列前项和的性质判断B；根据数列的前项和的定义及等比数列的通项公式判断C；举反例判断D.

【详解】对于A，由，故．所以， 所以(*p*为常数)是等差数列，A正确；

对于B，由为等差数列，则仍成等差数列，故有，所以，设数列的公差为，则，当时，，B不正确；

对于C，，故，C正确；

对于D，令，则为等比数列，且，但，故“”不是“”的必要条件，D不正确．

故选：AC．

11. 点是正方体中侧面正方形内的一个动点，正方体棱长为，则下面结论正确的是( )

A. 满足的点的轨迹长度为

B. 点存在无数个位置满足直线平面

C. 在线段上存在点，使异面直线与所成的角是

D. 若是棱的中点，平面与平面所成锐二面角的正切值为

【答案】ABD

【解析】

【分析】利用线面垂直判定可证得平面，可知点轨迹即为平面与平面的交线，由此可得轨迹长度，知A正确；利用面面平行得判定可证得平面平面，可知当轨迹为平面与平面的交线，由此可知B正确；以为坐标原点建立空间直角坐标系，设可求得点坐标，利用线线角的向量求法可得关于的函数形式，由函数的最值可得线线角最小值大于，知C错误；利用二面角的向量求法可求得平面与平面所成锐二面角的余弦值，进而得到正切值，知D正确.

【详解】对于A，平面，平面，；

四边形为正方形，；

又平面，，平面，

点轨迹即为平面与平面的交线，即为，



点轨迹轨迹长度为，A正确；

对于B，，平面，平面，平面；

同理可得：平面，又，平面，

平面平面，



轨迹为平面与平面的交线，即，

点存在无数个位置满足直线平面，B正确；

对于C，以为坐标原点，正方向为轴，可建立如图所示空间直角坐标系，



则，，，，，

，

设，，，则，

，

，

则当时，；

与夹角大于，C错误；

对于D，由C可得空间直角坐标系如下，



则，，，，，

设平面的法向量，

，令，解得：，，，

又平面轴，平面的一个法向量，

，，

即平面与平面所成锐二面角的正切值为，D正确.

故选：ABD.

【点睛】关键点点睛：本题考查立体几何中的动点轨迹问题、线线角与面面角的求解问题；本题求解动点轨迹的关键是能够借助线面垂直、面面平行的性质，找到动点所在的其他平面，进而得到动点轨迹为两平面的交线.

12. 已知双曲线的左、右两个顶点分别是，左、右两个焦点分别是，*P*是双曲线上异于的一点，给出下列结论，其中正确的是( )

A. 存在点*P*，使得

B. 存在点*P*，使得直线的斜率的绝对值之和

C. 使得为等腰三角形的点*P*有且仅有四个

D. 若，则

【答案】AD

【解析】

【分析】由双曲线的定义，可判断A正确；由，结合双曲线的方程，得到可判断B错误；结合双曲线的几何性质，可判断C错误；结合，得到，可判断D正确．

【详解】设．对于A，由双曲线的定义，只需即可，即只需*P*点为线段的中垂线与双曲线的交点，故A正确；

对于B，因为，所以，又，

所以，故，当且仅当时等号成立，又分析得等号不可能成立，故B错误；

对于C，若*P*在第一象限，则当时，，为等腰三角形；

当时，也为等腰三角形，

故点*P*在第一象限且使得为等腰三角形的点*P*有两个．

同理，在第二、三、四象限且使得为等腰三角形的点*P*也各有两个，

因此使得为等腰三角形的点*P*共有八个，故C错误；

对于D，由，得，

从而，故D正确．

故选：AD．

**三、填空题(本大题共4小题，每小题5分，共20分．)**

13. 从长度为1，3，5，7，9的5条线段中任取3条，则这三条线段能构成一个三角形的概率为\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_．

【答案】##0.3

【解析】

【分析】由列举法得所有基本事件，根据古典概型的概率计算公式即可求解.

【详解】从5条线段中任取3条线段的基本事件有,总数为10，能构成三角形的情况有：，共3个基本事件，故概率为．

故答案为：

14. 已知直三棱柱的所有顶点都在球*O*的球面上，，则球的表面积为\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_．

【答案】

【解析】

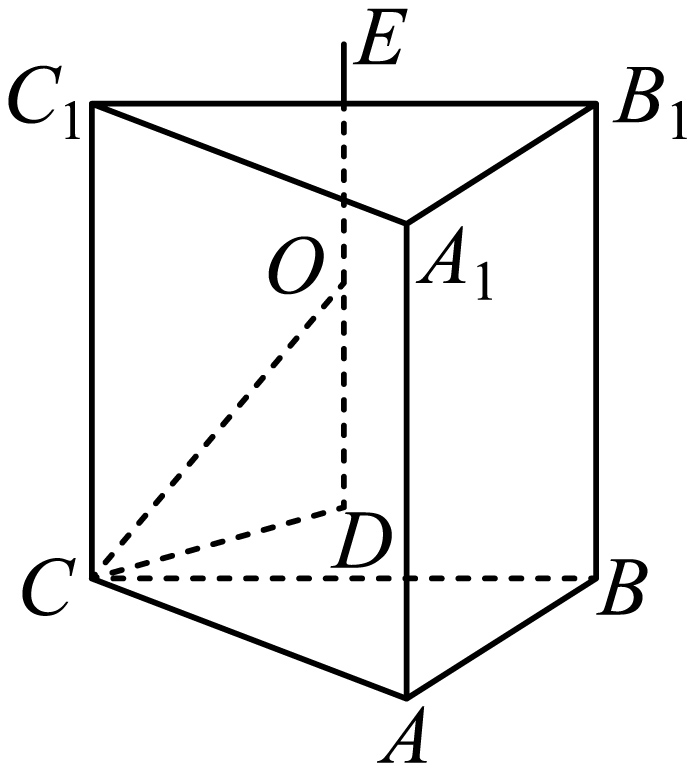
【分析】设和外接圆的圆心为，，则球心为的中点，在中由正弦定理可求得其外接圆半径，结合球的性质可求球的半径，进而求得其表面积．

【详解】设和的外心分别为*D*，*E*．由球的性质可得三棱柱的外接球的球心*O*是线段的中点，连接，设外接球的半径为R，的外接圆的半径*r*，因为，由余弦定理可得， 由正弦定理可得，所以，

而在中，可知，即，

因此三棱柱外接球的表面积为．

故答案为：．



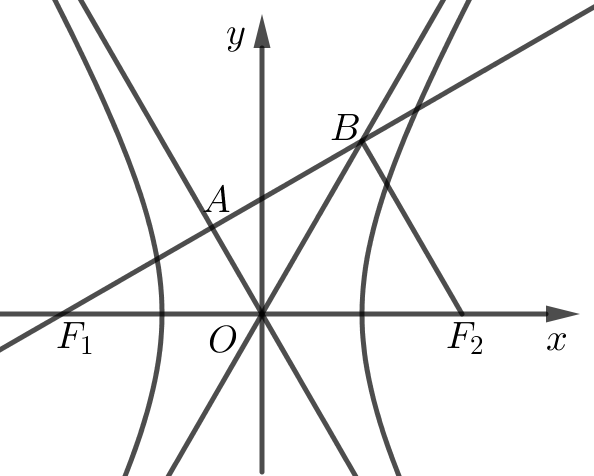
15. 已知双曲线*C*：的左、右焦点分别为*F*1，*F*2，过*F*1的直线与*C*的两条渐近线分别交于*A*，*B*两点．若，，则*C*的离心率为\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_．

【答案】2.

【解析】

【分析】通过向量关系得到和，得到，结合双曲线的渐近线可得从而由可求离心率.

【详解】如图，



由得又得OA是三角形的中位线，即由，得则有，

又OA与OB都是渐近线，得又，得．又渐近线OB的斜率为，所以该双曲线的离心率为．

【点睛】本题考查平面向量结合双曲线的渐进线和离心率，渗透了逻辑推理、直观想象和数学运算素养．采取几何法，利用数形结合思想解题．

16. 已知数列满足．

(1)若，则\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_；

(2)若对任意正实数*t*，总存在和相邻两项，使得成立，则实数取值范围是\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_．

【答案】 ①.  ②. 

【解析】

【分析】化简递推关系，证明数列为等差数列，利用等差数列通项公式求，化简方程可得，结合连接列不等式求的取值范围.

【详解】因为，所以，

所以，故，

所以，所以数列是公差为的等差数列，

(1)时，，所以，所以，

(2)由已知可得，又为正实数，

所以，，所以．

所以，

即．

从而，即有，

所以，所以实数的取值范围是，

故答案为：；.

**四、解答题(本大题共6小题，共70分．解答应写出必要的文字说明、证明过程及演算步骤．)**

17. 在平面直角坐标系中，三个点到直线*l*的距离均为*d*，且．

(1)求直线*l*的方程；

(2)若圆*C*过点，且圆心在*x*轴的正半轴上，直线*l*被该圆所截得的弦长为，求圆*C*的标准方程．

【答案】(1)

(2)

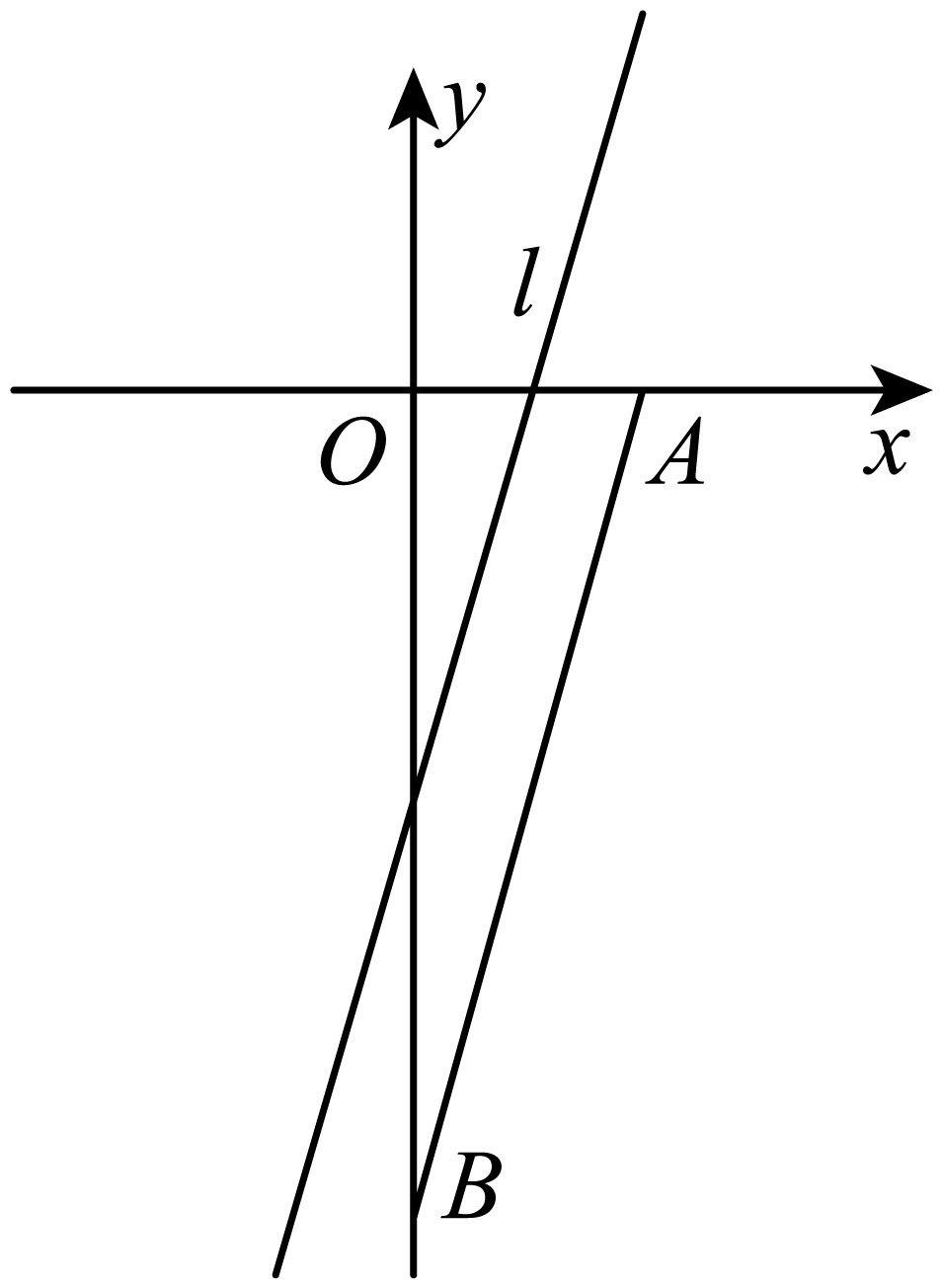
【解析】

【分析】(1)根据几何意义可判断直线*l*为的三条中位线，结合可知为边上的中位线，进而根据截距式即可求解方程，

(2)由待定系数法，可根据圆的弦长公式列方程求解半径和圆心即可.

【小问1详解】

由几何意义可知，直线*l*为的中位线，



而*O*到边的中位线距离为1．*O*到边的中位线距离为3．*O*到边上的中位线距离，故直线*l*只能为边上的中位线，

即直线*l*过点．故直线*l*的方程，即；

【小问2详解】

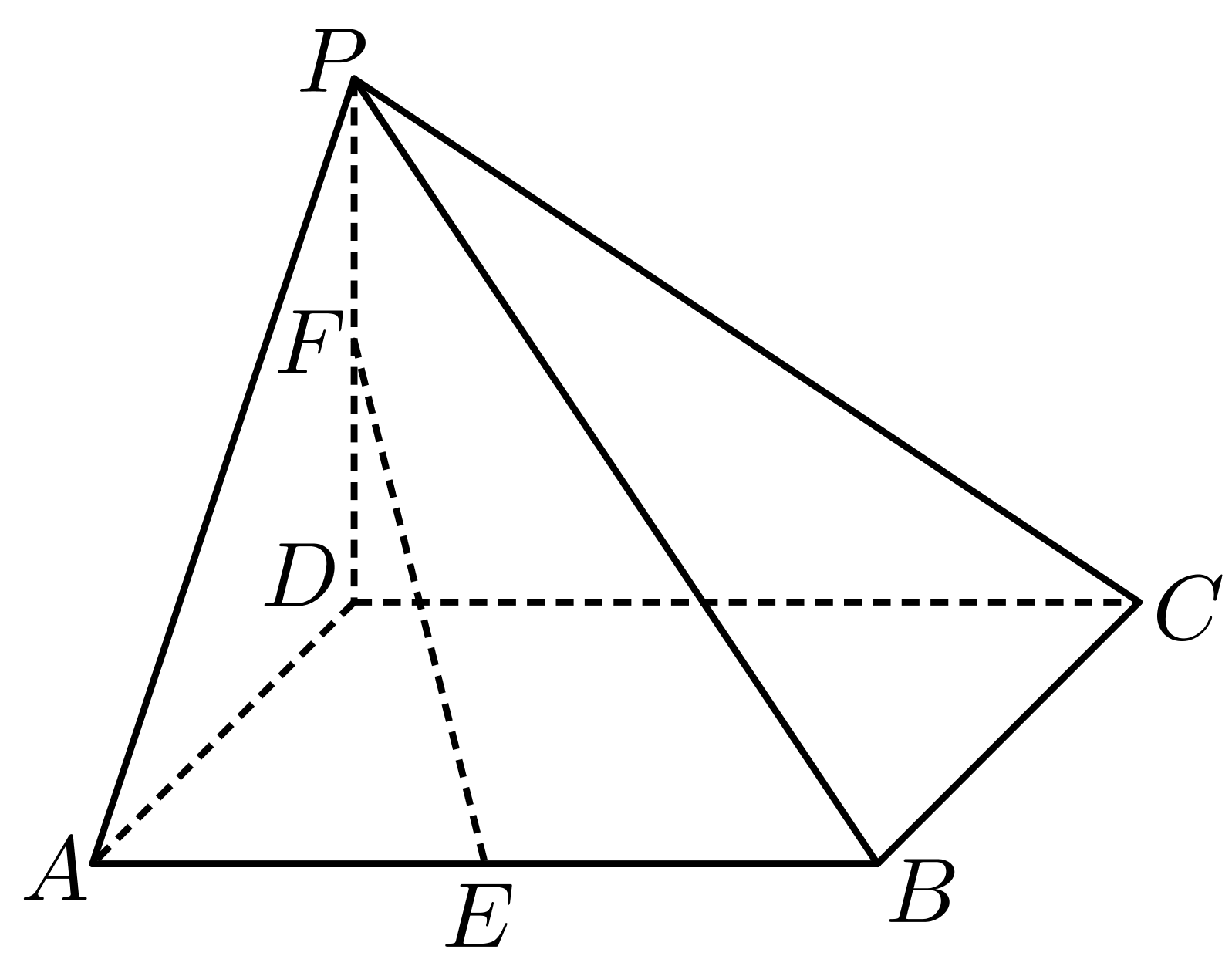
设圆的标准方程为，

则

解得或0(舍去)，，

所以圆*C*的标准方程为

18. 如图，四棱锥中，底面为矩形，平面，为中点，*F*为中点，．



(1)证明：∥平面；

(2)求点到面的距离．

【答案】(1)证明见解析

(2)

【解析】

【分析】(1)取的中点，连接，由三角形中位线定理结合矩形的性质可得四边形为平行四边形，则∥，再由线面平行的判定定理可证得结论，

(2)由已知可得两两垂直，所以以点为坐标原点，以所在直线分别为轴建立空间直角坐标系，求出平面的法向量， 利用空间向量求解即可.

【小问1详解】

证明：取的中点，连接,

因为*F*为中点，

所以∥，，

因为为中点，

所以，

因为∥，，

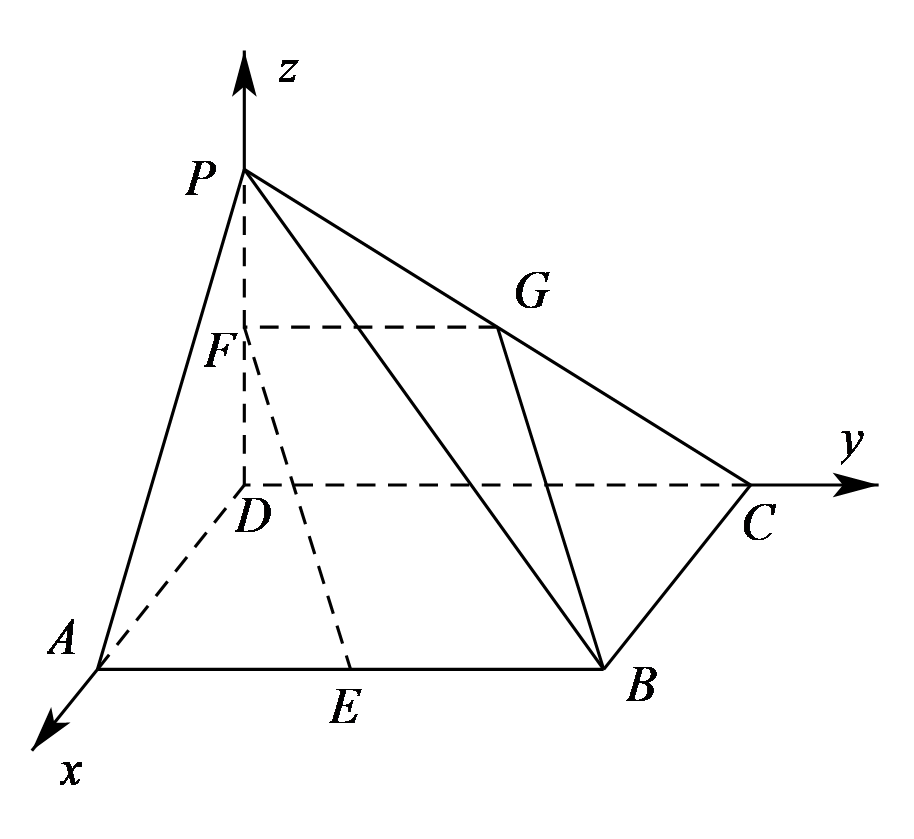
所以∥，，

所以四边形为平行四边形，

所以∥，

因为平面，平面，

所以∥平面；

【小问2详解】

因为平面，平面，

所以，

因为四边形为矩形，所以，

所以两两垂直，

所以以点为坐标原点，以所在直线分别为轴建立空间直角坐标系，

则，

因为为中点，*F*为中点，

所以，

所以，，

设平面的法向量为，则

，令，则，

所以点到平面的距离为

.

19. 7月份，有一新款服装投入某市场.7月1日该款服装仅售出3件，以后每天售出的该款服装都比前一天多3件，当日销售量达到最大(只有1天)后，每天售出的该款服装都比前一天少2件，且7月31日当天刚好售出3件．

(1)求7月几日该款服装销售最多，最多售出几件．

(2)按规律，当该市场销售此服装达到200件时，社会上就开始流行，而日销售量连续下降并低于20件时，则不再流行．求该款服装在社会上流行几天．

【答案】(1) 7月13日该款服装销售最多，最多售出39件；(2) 11天．

【解析】

【分析】(1)根据等差数列的特点列出式子即可求解；

(2)求出数列的前*n*项和，根据题意列出不等式即可求解.

【详解】(1)设7月日售出的服装件数为，最多售出件．

由题意知，解得，

∴7月13日该款服装销售最多，最多售出39件．

(2)设是数列的前项和，

由(1)及题意知，

∴．

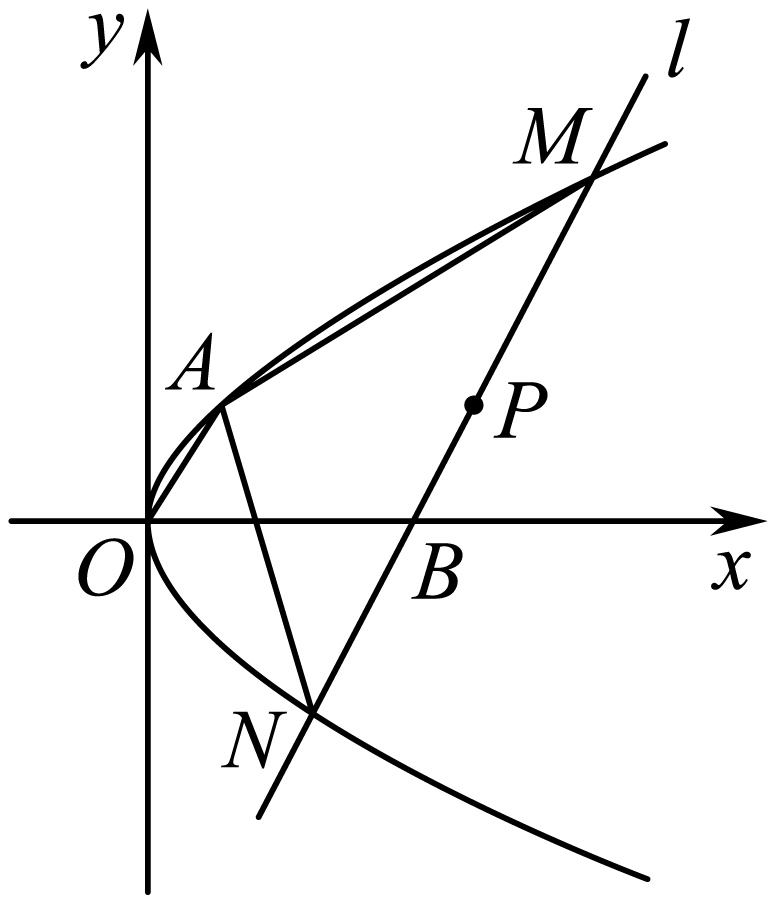
∵，

∴当时，由，得，

当时，日销售量连续下降，由，得，

∴该款服装在社会上流行11天(从7月12日到7月22日)．

20. 已知抛物线，其中，过*B*的直线*l*交抛物线*C*于*M*，*N*两点．



(1)当直线*l*垂直于*x*轴，且为直角三角形，求实数*m*的值；

(2)若四边形是平行四边形，当点*P*在直线*l*上时，求实数*m*，使得．

【答案】(1)

(2)

【解析】

【分析】(1)根据向量垂直，即可利用坐标运算求解，

(2)根据平行得斜率关系，进而联立方程得韦达定理，结合向量垂直由坐标运算即可求解.

【小问1详解】

由题意，代入中，解得，

不妨取，

则，

为直角三角形,故只能为直角，

即，

故或1，易知不合题意，舍去，故．

【小问2详解】

由题意四边形为平行四边形，则，

设直线，

联立得，

由题意，判别式，

，

要使，则，

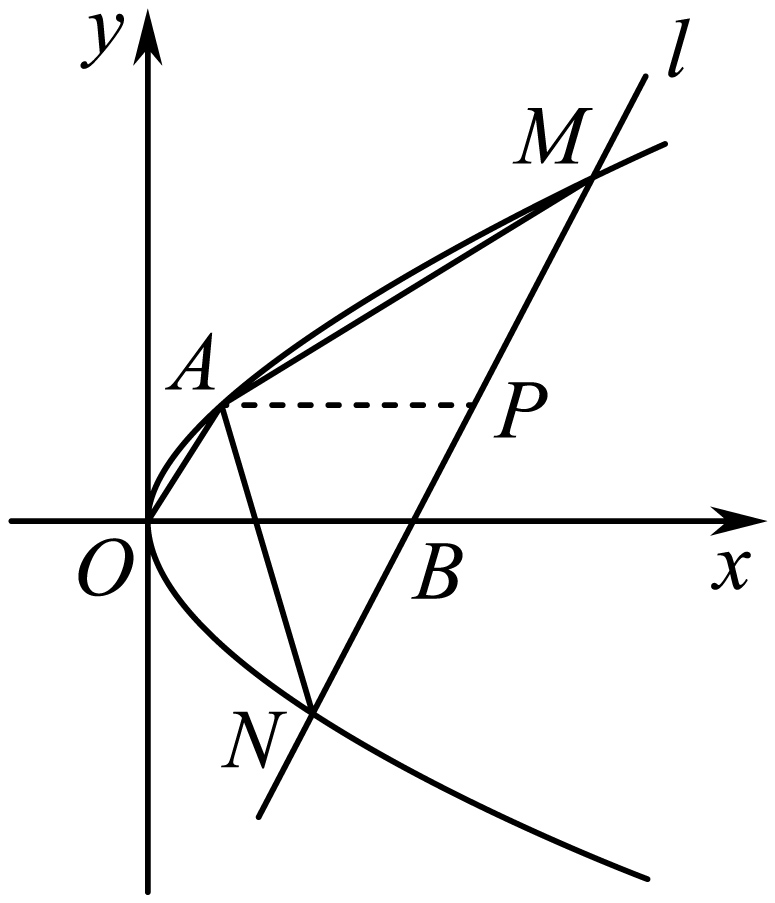
又，

即，

化简，得，

即，代入得故．

故时，有．



21. 已知数列的首项，且满足．

(1)求证：数列为等比数列；

(2)设数列满足求最小的实数*m*，使得对一切正整数*k*均成立．

【答案】(1)证明见解析

(2)

【解析】

【分析】(1)根据等比数列的定义即可证明.

(2)根据奇偶项的特点，由裂项求和和分组求和，结合等比数列求和公式即可求解，由不等式的性质即可求解.

【小问1详解】

由已知得，，

所以．

因为，

所以数列是首项为，公比为的等比数列．

【小问2详解】

证明：(2)由(1)，当*n*为偶数时，，

当*n*为奇数时，，

故







，

由

所以*m*的最小值为．

22. 设椭圆的左焦点为．过且倾斜角为的直线与椭圆交于两点，且．

(1)求证：，并求椭圆*C*的方程；

(2)设是椭圆*C*上顺时针依次排列的四个点，求四边形面积的最大值并计算此时的的值．

【答案】(1)证明见解析；

(2)四边形面积的最大值为，此时

【解析】

【分析】(1)化简关系可得，由此证明，结合设而不求法列方程，结合关系可求，由此可得椭圆方程；(2)由三角形面积公式和数量积运算证明，再结合基本不等式求其最大值，由此求出四边形面积的最大值并求出取最值是的值．

【小问1详解】

由，得，

故，从而，

依题意，直线的方程为，

由得，

即，

又因为，

故

于是，所以，

解得，

故椭圆*C*的方程为；

【小问2详解】

由(1)得，故由基本不等式和绝对值不等式

，

从而，取等条件为，且，故有，又，于是．

而





．

同理．

于是，四边形的面积．

另一方面，当*M*，*N*，*P*，*Q*为椭圆四个顶点时，有，

故四边形面积的最大值为，且由上述过程知，此时．

【点睛】解决直线与椭圆的综合问题时，要注意：

(1)注意观察应用题设中的每一个条件，明确确定直线、椭圆的条件；

(2)强化有关直线与椭圆联立得出一元二次方程后的运算能力，重视根与系数之间的关系、弦长、斜率、三角形的面积等问题．