**长沙市四校联考2022-2023学年度第一学期期中考试(B)**

**高二数学**

**一､单项选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.**

1. 若数列，，，，是等比数列，则的值是( )

A. 12 B.  C.  D. 

【答案】C

【解析】

【分析】根据等比数列得到，结合得到答案.

【详解】数列，，，，是等比数列，则，故，

，故.

故选：C

2. 已知方程表示椭圆，则的取值范围为( )

A. 且 B. 且

C.  D. 

【答案】B

【解析】

【分析】根据椭圆的标准方程可得，即得.

【详解】因为方程表示椭圆，

所以，

解得且.

故选：B.

3. 等差数列的前项和为，若，，则( )

A.  B.  C.  D. 

【答案】B

【解析】

【分析】利用等差数列的性质与等差数列的前*n*项和的公式计算即可.

【详解】由题意可得：，则，

故.

故选：B.

4. 已知数列，满足，，其中是等差数列，且，则( )

A. 2022 B. －2022 C.  D. 1011

【答案】B

【解析】

【分析】根据条件，可以推出.然后，根据等差数列的性质，可得结果；也可以直接根据前*n*项和公式求和.

【详解】解法1：由已知，得，则，

根据等差数列的性质有，

所以，有

解法2：由已知，得，则，

根据等差数列的性质有，

所以，.

故选：B.

5. 椭圆的左、右焦点分别为、，动点*A*在椭圆上，*B*为椭圆的上顶点，则周长的最大值为( )

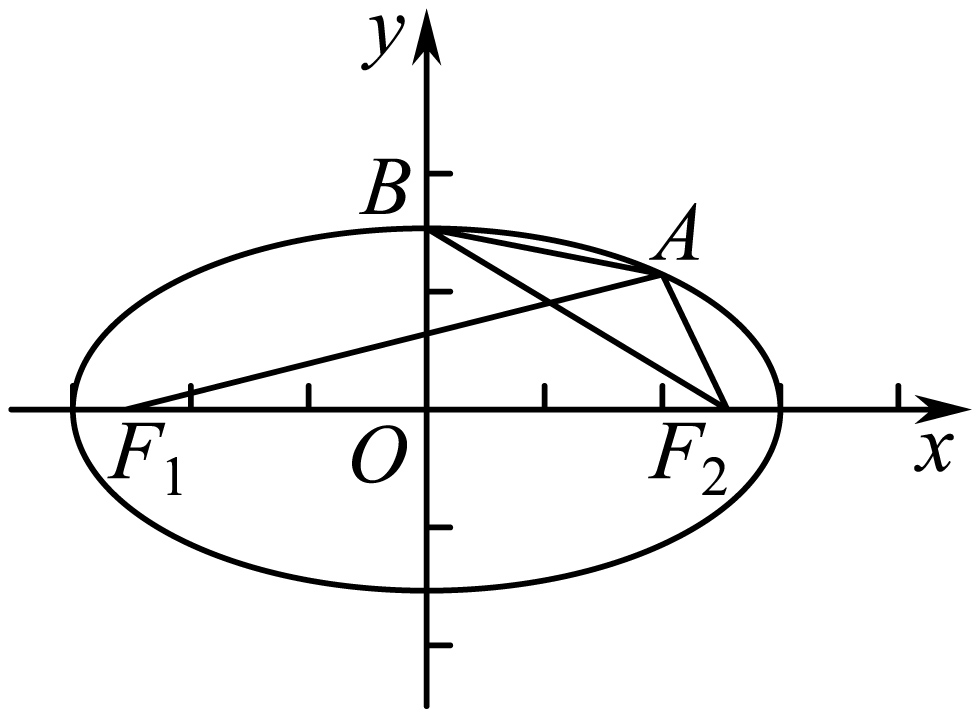
A. 8 B. 10 C. 12 D. 16

【答案】C

【解析】

【分析】转化周长为，

结合，即得解.

【详解】

由题意，椭圆，其中，，

由于点*B*为椭圆的上顶点，故，

周长为，

其中，当且仅当点在线段延长线上时取得等号，

，

即，故周长最大值为12.

故选：C

6. 已知圆，直线，若上存在点，过作圆的两条切线，切点分别为，使得，则的取值范围为( )

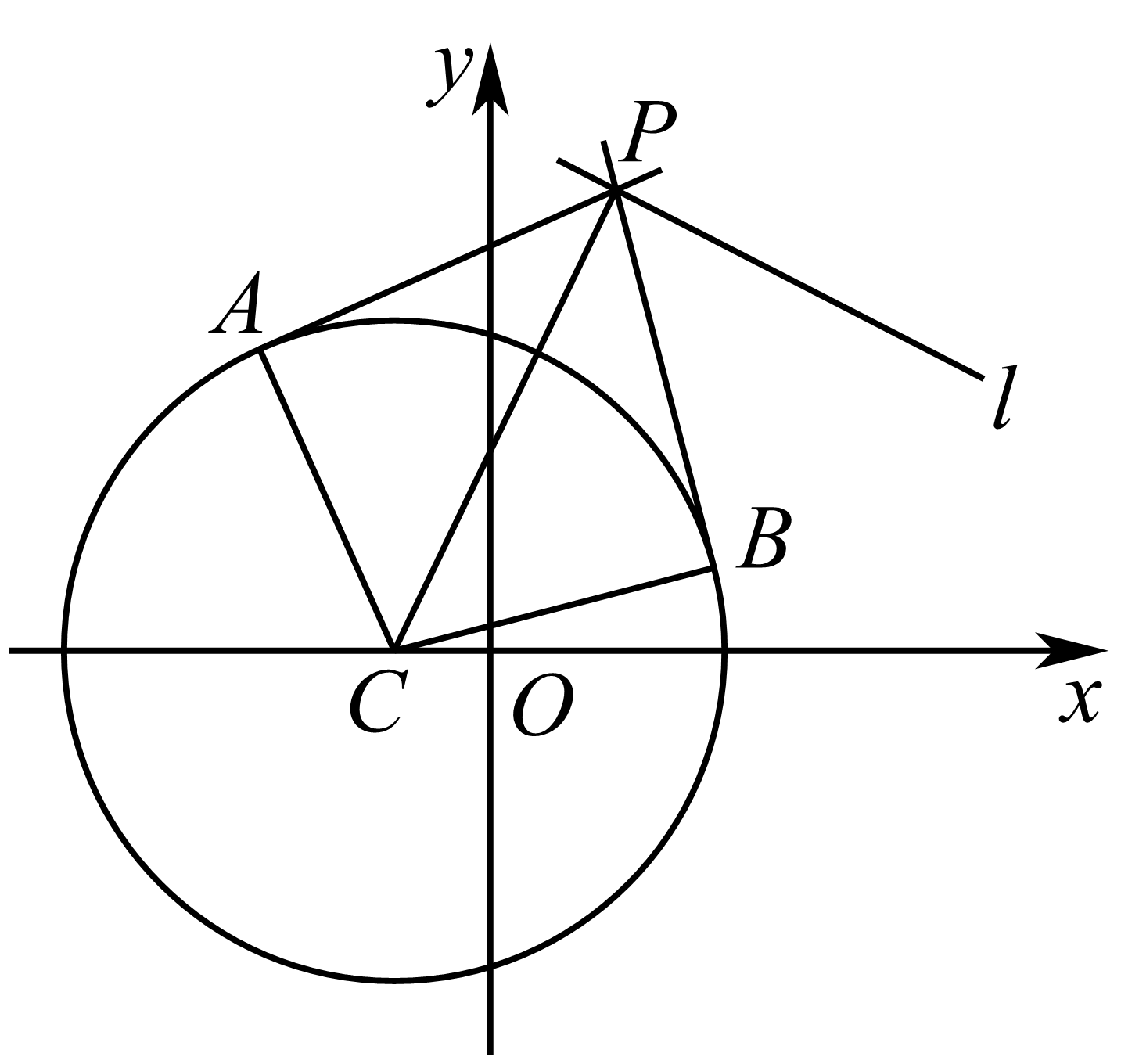
A.  B.  C.  D. 

【答案】D

【解析】

【分析】由圆的性质可确定，且当为圆心到直线的距离时，取得最大值，由此可构造不等式解得的范围.

【详解】由圆的方程知：圆心，半径，



，，，，

，

，

当取得最小值，即为圆心到直线的距离时，取得最大值，

存在点使得，则此时，

则，即，

解得：，即实数的取值范围为.

故选：D.

7. 已知是棱长为8的正方体外接球的一条直径，点*M*在正方体表面上运动，则的最小值为( )

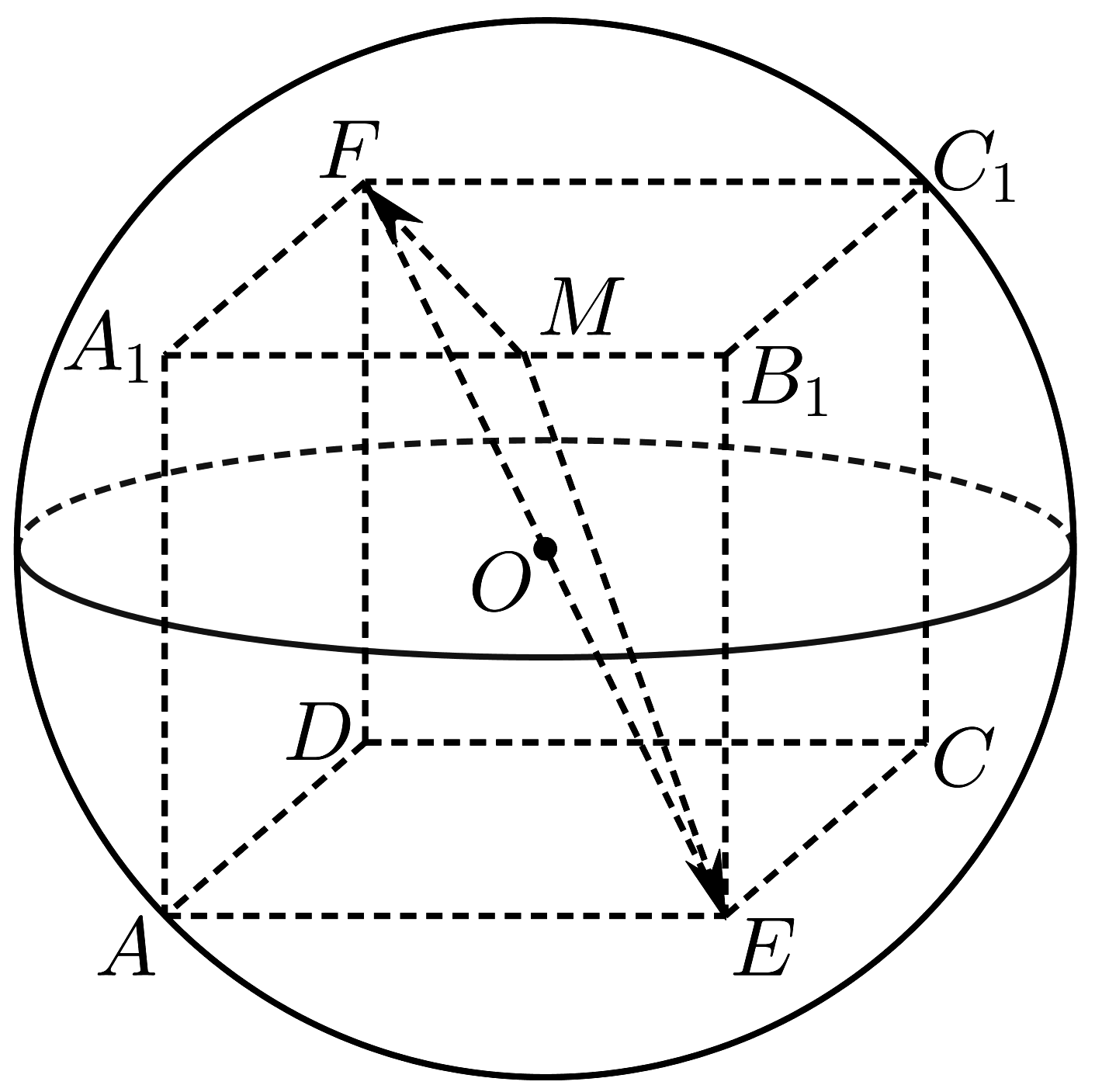
A.  B.  C.  D. 0

【答案】B

【解析】

【分析】本题通过基底法，得到，再通过立体图得到的值，以及的最小值，最终代入数据得到最小值.

【详解】如图为棱长为8的正方体外接球的一条直径,为球心，为正方体表面上的任一点

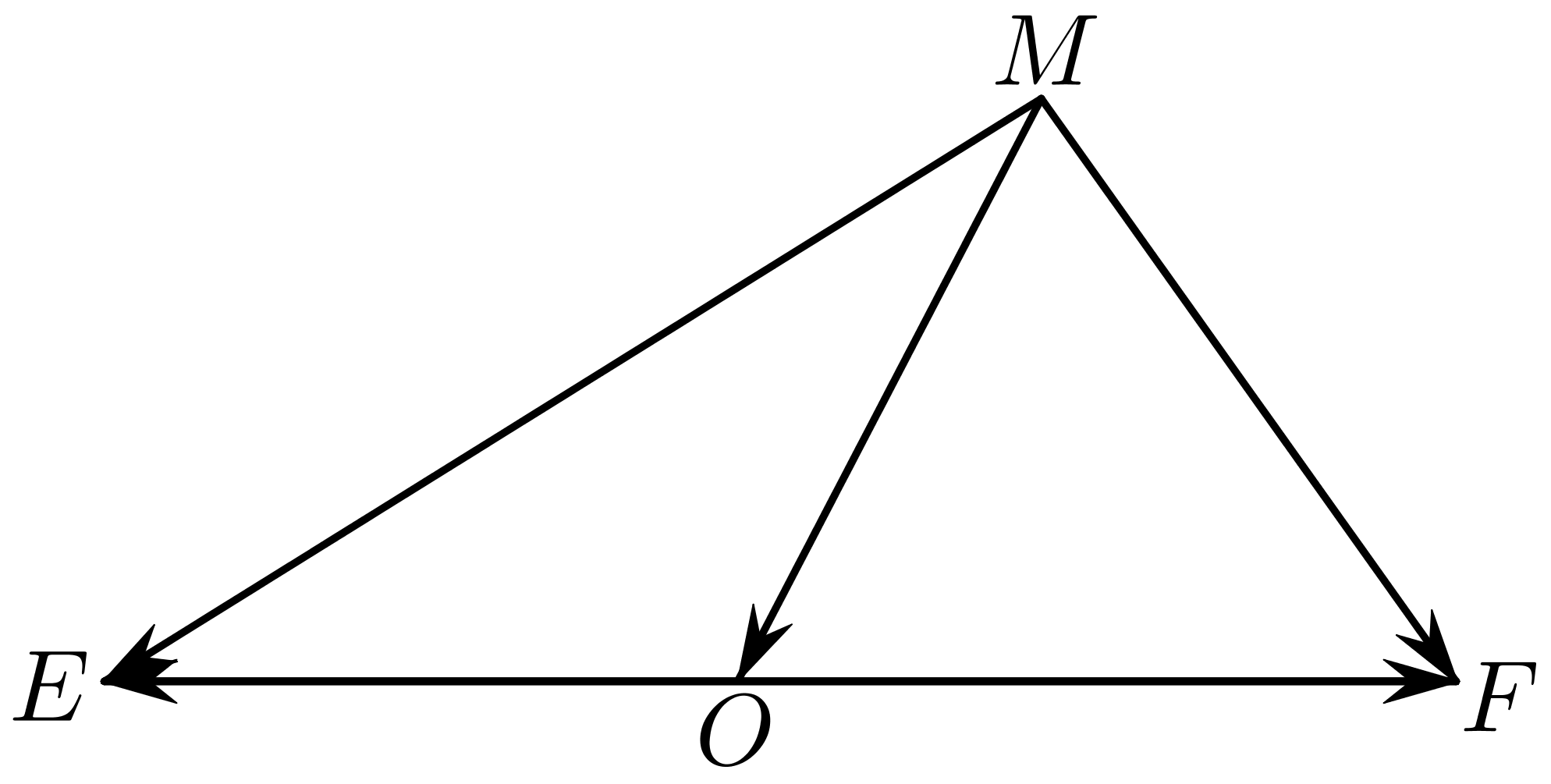


则球心也就是正方体的中心，

所以正方体的中心到正方体表面任一点的距离的最小值为正方体的内切球的半径,

它等于棱长的一半，即长度为4，,的长为正方体的对角线长，为，

我们将三角形单独抽取出来如下图所示：







所以的最小值为.

故选：B.

【点睛】将空间向量知识与正方体结合考察最值问题，难度较大，需要一定空间想象能力以及向量基底法的熟练运用，平时要多加训练.

8. 设是数列的前项和，，若不等式对任意恒成立，则的最小值为( )

A.  B.  C.  D. 

【答案】D

【解析】

【分析】利用，得到，，变形后得到是等差数列，首项为6，公差为4，从而求出，故代入整理得，利用作差法得到单调递减，最小值为，列出不等式求出答案.

【详解】当时，，解得：，

当时，，

整理得，

方程两边同除以，得，

又，故是等差数列，首项为6，公差为4，

所以，

故，经验证，满足要求，

所以为，

故，对任意恒成立，

，当时，，

故，

单调递减，当时，取得最大值，

故，解得：，

则的最小值为.

故选：D

**二､多项选择题：本题共4小题，每小题5分，共20分.在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求.全部选对的得5分，部分选对的得2分，有选错的得0分.**

9. 若是等差数列，则下列数列中仍为等差数列的是( )

A. 

B. 

C. (为常数)

D. 

【答案】BCD

【解析】

【分析】根据等差数列的定义逐一进行检验即可求解.

【详解】对于选项A，数列是等差数列，取绝对值后不是等差数列，故选项A不符合题意；

对于选项B，若为等差数列，根据等差数列的定义可知：数列为常数列，故为等差数列，故选项B符合题意；

对于选项C，若为等差数列，设其公差为，则为常数列，

故为等差数列，故选项C符合题意；

对于选项D，若为等差数列，设其公差为，则为常数，故为等差数列，故选项D符合题意，

故选：BCD.

10. 已知椭圆分别为它的左､右焦点，为椭圆的左､右顶点，点是椭圆上异于的一个动点，则下列结论中正确的有( )

A. 的周长为15 B. 若，则的面积为9

C. 为定值 D. 直线与直线斜率的乘积为定值

【答案】BCD

【解析】

【分析】对于A，结合椭圆定义和性质，即可求解，对于B，结合椭圆的定义和条件可求得，即可求得面积，对于C，利用向量的坐标运算可化简，根据其结果即可判断；对于D，结合直线的斜率公式，以及点在椭圆上进行化简，即可判断．

【详解】对于A，∵椭圆C  ,

∴ ，  ,,

∴的周长为,故A错误，

对于B，∵，

 ，

∵，故，

∴ ，

∴的面积为  ，故B正确；

对于C,由题意知 ,设，

则

为定值，故C正确；

对于D，设 ( )，

则 ，∴ ，

∵在椭圆上，则  ，即，

∴。联立可得  ，故D正确

故选： ．

11. 已知直线与圆相交于，两点，则( )

A. 的面积为定值 B. 

C. 圆上总存在3个点到直线的距离为2 D. 线段中点的轨迹方程是

【答案】ABD

【解析】

【分析】根据圆的几何性质，求出圆心到直线的距离为定值1，可判断AD，再由圆的几何性质知，由二倍角公式可判断B，根据点到直线的距离及与2的大小比较可判断D.

【详解】对A，点*O*到直线的距离，为定值，

所以为定值，所以为定值，故正确；

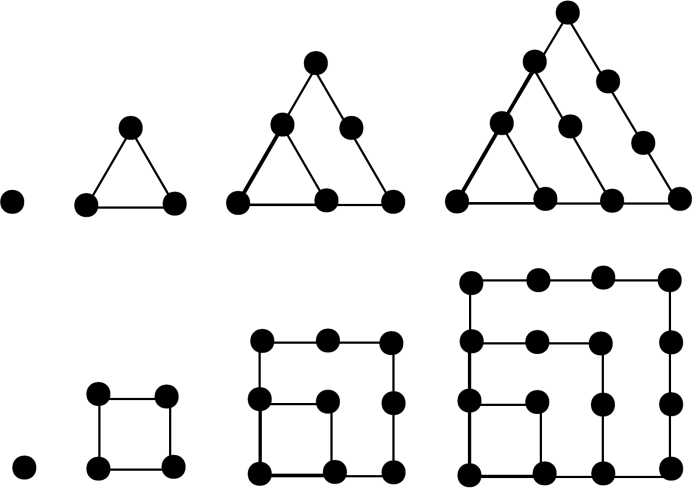
对B，由A知，，所以，故正确；

对C，因为圆的半径，圆心到直线的距离，所以，故圆上到直线的距离为2的点只有2个，故错误；

对D，设线段中点，由圆的几何性质知，所以点的轨迹方程为，即，故正确.

故选：ABD

12. 古希腊毕达哥拉斯学派的数学家用沙粒和小石子来研究数，他们根据沙粒或小石子所排列的形状，把数分成许多类，如图中第一行图形中黑色小点个数：1，3，6，10，…称为三角形数，第二行图形中黑色小点个数：1，4，9，16，…称为正方形数，记三角形数构成数列，正方形数构成数列，则下列说法正确的是( )



A. 

B. 1225既是三角形数，又是正方形数

C. 

D. ，总存在，使得成立

【答案】BCD

【解析】

【分析】利用累加法，分别求出，进而分别利用裂项求和法、放缩法，逐个选项进行判断即可得到答案.

【详解】三角形数构成数列：1，3，6，10，…，则有

，利用累加法，

得，得到；n=1成立

正方形数构成数列：1，4，9，16，…，则有

，利用累加法，

得，得到,n=1成立

对于A，，利用裂项求和法：，故A错误；

对于B，令，解得；令，解得；故B正确；

对于C，，则

，

整理得，，故C正确；

对于D，取，且，则令，则有，故，总存在，使得成立，故D正确；

故选：BCD

**三､填空题：本题共4小题，每小题5分，满分20分.**

13. 设等差数列{*an*}的前*n*项之和为*Sn*满足*S*10﹣*S*5＝20，那么*a*8＝

【答案】4

【解析】

【分析】根据数列前*n*项和的定义*S*10﹣*S*5＝*a*6+*a*7+*a*8+*a*9+*a*10，再根据等差数列的性质即可求．

详解】根据数列前*n*项和的定义得出：*S*10﹣*S*5＝*a*6+*a*7+*a*8+*a*9+*a*10，再根据等差数列的性质即为5*a*8＝20，*a*8＝4

故答案为4．

【点睛】本题考查等差数列的性质，属于基础题．

14. 已知数列的前项和为，，，则数列\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_．

【答案】

【解析】

【分析】根据可得，再利用累乘法即可求解.

【详解】由题意可得，

所以，

所以，

所以，

又因为，所以，

故答案为：

15. 已知圆关于直线对称，为圆*C*上一点，则的最大值为\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_．

【答案】20

【解析】

【分析】由圆关于直线对称列方程求，由此确定圆的圆心坐标和半径，设，由直线与圆有公共点，列不等式求的范围及最大值.

【详解】方程可化为，

所以圆的圆心为，半径为，

因为圆关于直线对称，所以，所以，令，则，

所以，所以，所以的最大值为20，

故答案为：20.

16. 已知椭圆的右焦点和上顶点*B*，若斜率为的直线*l*交椭圆*C*于*P*，*Q*两点，且满足，则椭圆的离心率为\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_.

【答案】##

【解析】

【分析】先由得到*F*为的重心，再利用点差法求得之间的关系，进而求得椭圆的离心率

【详解】设，线段*PQ*的中点为，

由，知*F*为的重心，故，

即，解得，

又*M*为线段*PQ*的中点，则，

又*P、Q*为椭圆*C*上两点，则，

两式相减得，

所以，

化简得，则

解得或(故舍去)

则，则离心率

故答案为：

**四､解答题：本题共6小题，共70分.解答应写出必要的文字说明､证明过程或演算步骤.**

17. 已知直线

(1)求证：直线*l*过定点，并求出此定点;

(2)求点到直线*l*的距离的最大值.

【答案】(1)证明见解析，定点

(2)

【解析】

【分析】(1)整理方程，分离出参数，建立方程组，解得答案；

(2)由(1)可知直线过定点，两点距离公式，可得答案.

【小问1详解】

由直线，则，

可得，解得，

故直线*l*过定点.

【小问2详解】

由(1)可知直线过定点，



18. 设等差数列{*an*}的前*n*项和为*Sn*，*a*8=4，*a*13=14.

(1)求数列{*an*}的通项公式；

(2)求*Sn*的最小值及相应的*n*的值；

(3)在公比为*q*的等比数列{*bn*}中，*b*2=*a*8，*b*1+*b*2+*b*3=*a*13，求.

【答案】(1)*an*=2*n*﹣12；(2)最小值为﹣30，此时相应的*n*=5或6；(3)答案见解析.

【解析】

【分析】

(1)利用等差数列的通项公式，通过解方程组进行求解即可；

(2)利用等差数列的前*n*项和公式，结合配方法进行求解即可；

(3)利用等比数列的通项公式，结合等比数列的前*n*项和公式进行求解即可.

【详解】解：(1)∵*a*8=4，*a*13=14.

∴，

则数列{*an*}的通项公式*an*=﹣10+2(*n*﹣1)=2*n*﹣12.

(2)，

∴当*n*=5或6时，*Sn*取得最小值，

最小值为﹣30，此时相应的*n*=5或6；

(3)∵*b*2=*a*8=4，*b*1+*b*2+*b*3=*a*13=14，

∴*b*1+*b*3=14﹣4=10，

设公比为*q*，

则2*q*2﹣5*q*+2=0，

解得*q*=2或*q*=.

若*q*=2，则，

若*q*=，则.

【点睛】本题考查了等差数列的通项公式和前*n*项和公式的应用，考查了等比数列的通项公式和前*n*项和公式的应用，考查了数学运算能力.

19. 已知正项数列满足且．

(1)求数列的通项公式；

(2)令，求数列的前项的和．

【答案】(1).

(2).

【解析】

【分析】(1)将化简可得，由此可求得答案；

(2)由(1)可得的通项公式，采用分组求和的方法，结合等差等比数列的前*n*项和公式求得答案.

【小问1详解】

由题意得：,

∵，∴，即为常数，

∴数列是以2为首项，以2为公比的等比数列，

∴．

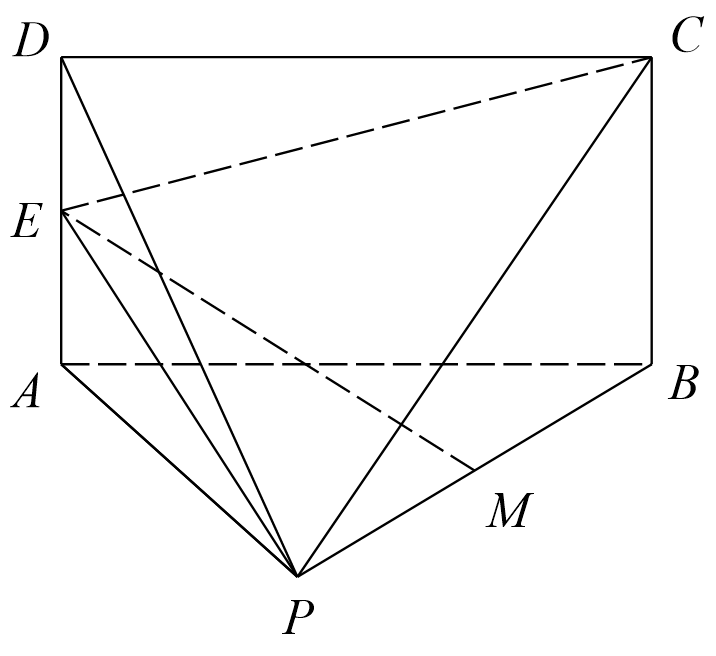
【小问2详解】

由(1)得,

∴

.

20. 如图，在四棱锥中，四边形是矩形，平面，*E*为的中点．

.

(1)若点*M*在线段上，试确定点*M*的位置使得直线平面．并证明；

(2)若，求平面与平面所成角的余弦值．

【答案】(1)为的中点，证明见解析；

(2)

【解析】

【分析】(1)利用中位线定理及矩形的性质证得且，由此证得，再利用线面平行的判定定理即可证得平面；

(2)根据题意建立空间直角坐标系，先求得平面与平面的法向量，再利用空间向量的数量积的坐标表示求得平面与平面所成角的余弦值.

【小问1详解】

为的中点，证明如下：

记为的中点，连接，如图，

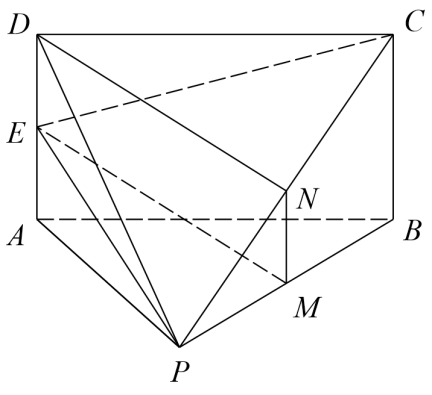
因为为的中点，所以且，

又因为四边形是矩形，所以且，故且，

又因为*E*为的中点，所以且，

故四边形是平行四边形，故，

又面，面，所以平面．

.

【小问2详解】

在平面内过作轴垂直于，

因为平面，则，轴，

故以为坐标原点，以为轴，为轴，建立如图所示的空间直角坐标系，

不妨设，则，

因为，则，故，

所以，

则，

设平面一个法向量，则，即，

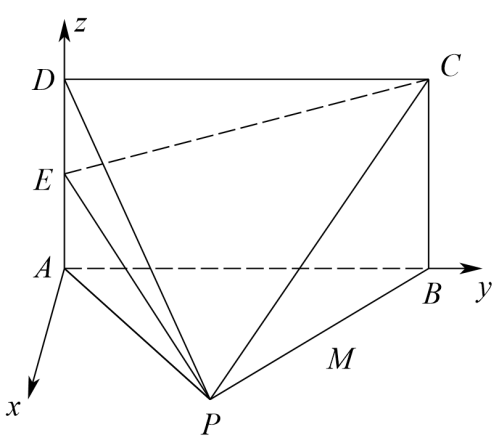
令，则，所以，

因为平面，所以为平面的一个法向量，

设平面与平面所成锐二面角为，

则，

所以平面与平面所成角的余弦值为.

.

21. 记数列{*an*}的前*n*项和为*Sn*，*bn*＝*an*＋1－*Sn*，且{*bn*}是以－1为公差的等差数列，*a*1＝2，*a*2＝3．

(1)求{*an*}的通项公式；

(2)求数列{*an* }的前*n*项和．

【答案】(1)

(2)

【解析】

【分析】(1)求出，得到，利用得到特征，求出通项；

(2)由，采用分组求和，分别求数列和的前*n*项和.

【小问1详解】

由，当时，，

∴是以1为首项，－1为公差的等差数列，，

∴，当时，有，两式相减，

得，即，

，，满足，

∴是1为首项2为公比的等比数列，

∴，，

∴的通项公式为.

【小问2详解】

，

设，，

数列的前*n*项和为，

，

则，

两式相减，得，

令，

则，两式相减，，，

，

.

数列的前*n*项和为，

则，

，

所以数列的前*n*项和为.

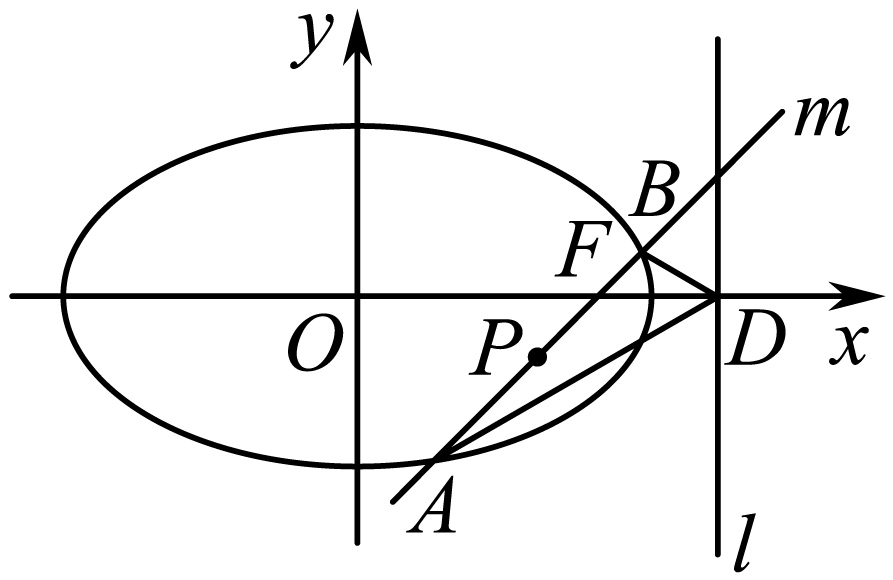
【点睛】1.等差等比数列关键要寻找首项和公差公比，就可计算数列通项及前*n*项和；

2. 的类型，要使用公式；

3. 数列求和，要使用错位相减、裂项相消、分组求和等求和方法；

4.由递推公式求通项公式，构造新数列是常用方法.

22. 如图，椭圆的右焦点为，过点*F*的一动直线*m*绕点*F*转动，并且交椭圆于*A*､*B*两点，*P*为线段的中点.



(1)求点*P*的轨迹*H*的方程；

(2)在*Q*的方程中，令，确定的值，使原点距椭圆的右准线*l*最远，此时，设*l*与*x*轴交点为*D*，当直线*m*绕点*F*转动到什么位置时，三角形的面积最大？

【答案】(1)；

(2)当直线绕点转动到垂直轴的位置时，面积最大．

【解析】

【分析】(1)设，设，两点坐标代入椭圆方程相减，利用可得轨迹方程，说明直线与轴垂直时也适用即可；

(2)右准线方程，原点到右准线的距离是，代入已知式，由三角函图象变换化为函数，由正弦函数性质得最大值，求出，设椭圆上的点，的面积为，

设直线的方程为，代入椭圆方程应用韦达定理得，代入面积表达式，利用基本不等式求得最大值．

【小问1详解】

设，设，

在椭圆上，则，

当不垂直于轴时，，

①－②得，

，

所以，整理得(\*)．

当直线与轴垂直时，点即为点，满足方程(\*),

故所求点的轨迹的方程为：；

【小问2详解】

椭圆的右准线的方程是，原点距右准线的距离为，由于，

，，

则，

时，上式达到最大值，

所以时，原点距离右准线最远，此时，，，，，

设椭圆上的点，

的面积为，

设直线的方程是，代入椭圆方程得:，

所以，，

，

令，，当且仅当，即时取等号，

因此当直线绕点转动到垂直轴的位置时，面积最大．

【点睛】方法点睛：求解圆锥曲线中有关最佳问题，关键是构建与参数有关的不等关系，主要方法有：

(1)利用已知的不等关系构造不等式，从而求出参数的取值范围，得最值；

(2)建立已知参数与未知参数之间的等量关，利用已知参数的范围，求新参数的范围，从而得所求最值；

(3)利用隐含的不等关系构造不等式，从而求出参数的最值；

(4)利用圆锥曲线的几何性质或判别式构造不等式，从而确定参数的最值；

(5)利用求函数的值域的方法将待求量表示为其他变量的函数，求其值域，从而确定参数的最值．