**长郡中学2022年下学期高二期中考试**

**数学**

**本试卷共8页，时量120分钟，满分150分**

**第Ⅰ卷**

**一、选择题：本大题共8小题，每小题5分，共40分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.**

1. 在数列中，且，则( )

A.  B.  C.  D. 

【答案】D

【解析】

【分析】根据给定的条件，利用等比数列通项公式求解作答.

【详解】数列中，且，因此数列是首项为1，公比为-2的等比数列，

所以.

故选：D

2. 在棱长为1的正方体中，( )

A. 1 B.  C.  D. 2

【答案】B

【解析】

【分析】根据向量的线性运算得，即可得结果．

【详解】．

故选：B．

3. 在平面直角坐标系中， 以点(0，1)为圆心且与直线相切的圆的标准方程为( )

A.  B. 

C.  D. 

【答案】A

【解析】

【分析】由条件利用点到直线的距离公式求得半径，可得要求的圆的标准方程．

【详解】由题意可得圆心为点(0，1)，半径为，

要求的圆的标准方程为，

故选：A．

4. 在等比数列中，，若、、成等差数列，则的公比为( )

A.  B.  C.  D. 

【答案】B

【解析】

【分析】设等比数列的公比为，则，根据题意可得出、的等量关系，即可求得数列的公比.

【详解】设等比数列的公比为，则，

由题意可得，即，则，故.

故选：B.

5. 若一个椭圆的长轴长和焦距之和为短轴长的两倍，则该椭圆的离心率为( )

A.  B.  C.  D. 

【答案】B

【解析】

【分析】由题意列出关系式，结合与可求出椭圆的离心率．

【详解】椭圆的长轴长和焦距之和为短轴长的两倍，

，即，

又，，

，，

又，则，

因此椭圆的离心率为．

故选：B．

6. 已知某圆锥的母线长为2，记其侧面积为*S*，体积为*V*，则当取得最大值时，母线与底面所成角的正弦值为( )

A.  B.  C.  D. 

【答案】A

【解析】

【分析】设圆锥底面半径为*r*，高为*h*，母线长为*l*，表示，利用均值不等式求最值，结合线面角定义可得结果.

【详解】设圆锥底面半径为*r*，高为*h*，母线长为*l*，则，

，

于是

(当且仅当，即时取等号)

此时，，由线面角的定义得，所求的母线与底面所成角的正弦值为，

故选：A

7. 阿基米德是古希腊著名的数学家、物理学家，他利用“逼近法”得到椭圆的面积除以圆周率等于椭圆的长半轴长与短半轴长的乘积. 已知椭圆()的右焦点为，过*F*作直线*l*交椭圆于*A*、*B*两点，若弦中点坐标为，则椭圆的面积为( )

A  B.  C.  D. 

【答案】C

【解析】

【分析】利用作差法构建斜率、中点坐标相关方程，再结合即可求解出*a*、*b，*进而求出面积.

【详解】设，，则有，两式作差得：，

即，

弦中点坐标为，则，

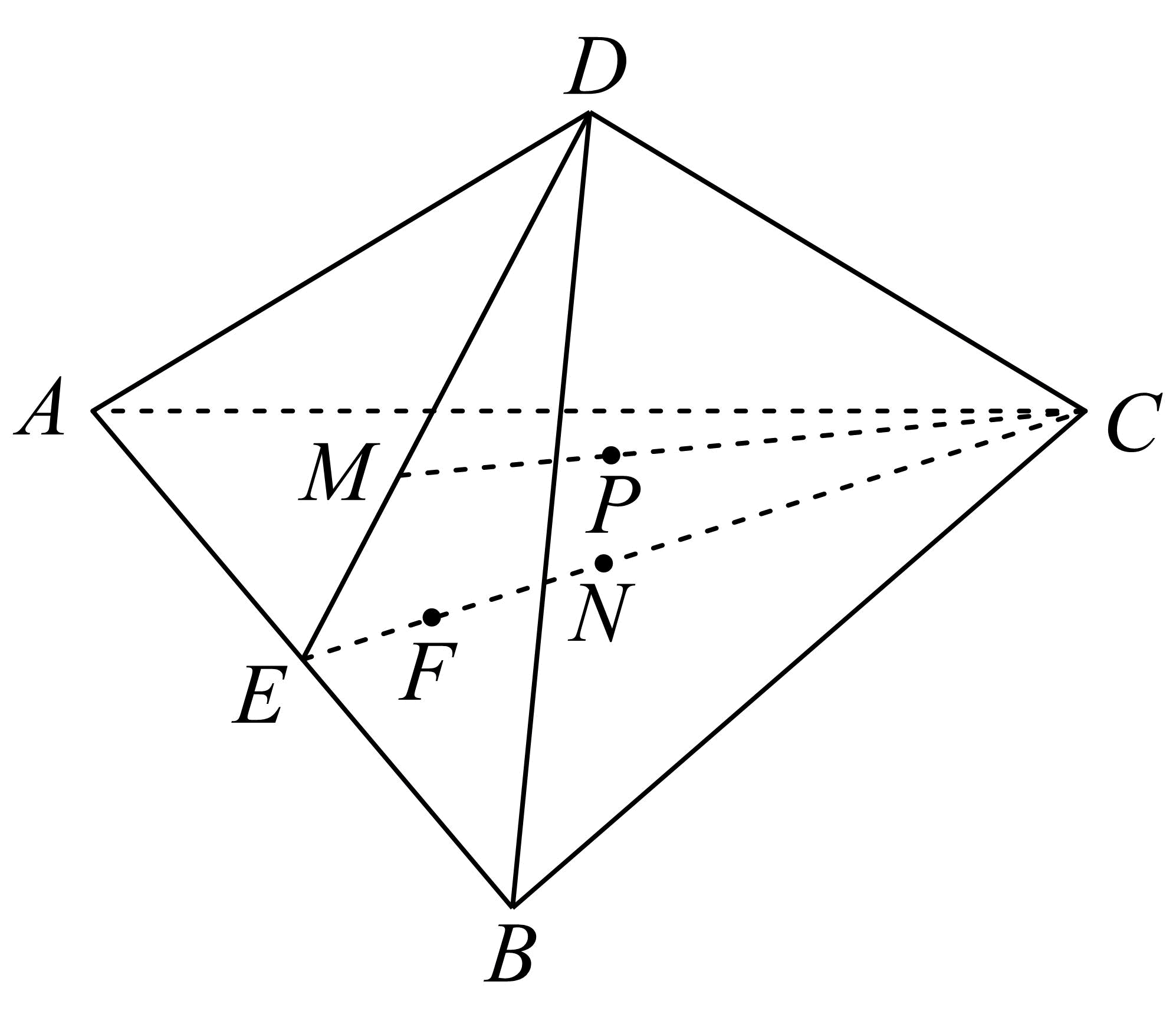
又∵，∴，∴，

又∵，∴可解得，，

故椭圆的面积为.

故选：C

8. 如图，在棱长为2的正四面体*ABCD*中，点*N*，*M*分别为和的重心，*P*为线段*CM*上一点．( )



A. 的最小为2

B. 若*DP*⊥平面*ABC*，则

C. 若*DP*⊥平面*ABC*，则三棱锥*P*－*ABC*外接球的表面积为

D. 若*F*为线段*EN*的中点，且，则

【答案】D

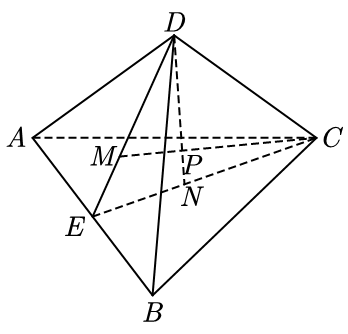
【解析】

【分析】A选项由线面垂直证得*CM*⊥*BM*，*CM*⊥*AM*，进而由点*P*与点*M*重合时即可判断；B选项利用内切球求得即可判断；C选项找到球心，由勾股定理求得半径，即可判断；D选项由空间向量的线性运算即可判断.

【详解】易得，又，则面，又面，则，同理可得，

，则*CM*⊥平面*ABD*，又平面，所以*CM*⊥*BM*，*CM*⊥*AM*．则当点*P*与点*M*重合时，取得最小值，

又，则最小值为，A错误．

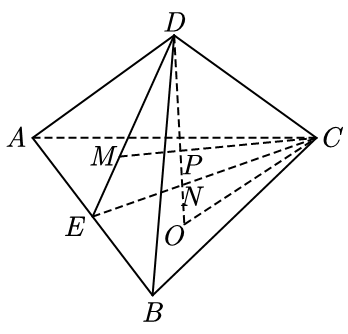


在正四面体*ABCD*中，因为*DP*⊥平面*ABC*，易得在上，所以，又点*N*，*M*也是和的内心，

则点*P*为正四面体*ABCD*内切球的球心．，．设正四面体*ABCD*内切球的半径为*r*，

因为，所以，

解得，即，故，B错误．



设三棱锥*P*－*ABC*外接球球心为*O*，半径为*R*，易得球心在直线上，且，则，

解得，故三棱锥*P*－*ABC*外接球的表面积为，C错误．

若*F*为线段*EN*的中点，则，．

设，则．因为，

所以设，则解得故，D正确.

故选：D.

**二、选择题：本大题共4小题，每小题5分，共20分，在每小题给出的四个选项中，有多项符合题目要求，全部选对的得5分，部分选对的得2分，有选错的得0分.**

9. 已知直线，则( )

A. 直线过定点

B 当时，

C. 当时，

D. 当时，两直线之间的距离为1

【答案】CD

【解析】

【分析】根据给定的直线的方程，结合各选项中的条件逐一判断作答.

【详解】依题意，直线，由解得：，因此直线恒过定点，A不正确；

当时，直线，而直线，显然，即直线不垂直，B不正确；

当时，直线，而直线，显然，即，C正确；

当时，有，解得，即直线，

因此直线之间的距离，D正确.

故选：CD

10. 若是等差数列，则下列数列中仍为等差数列的是( )

A. 

B. 

C. (为常数)

D. 

【答案】BCD

【解析】

【分析】根据等差数列的定义逐一进行检验即可求解.

【详解】对于选项A，数列是等差数列，取绝对值后不是等差数列，故选项A不符合题意；

对于选项B，若为等差数列，根据等差数列的定义可知：数列为常数列，故为等差数列，故选项B符合题意；

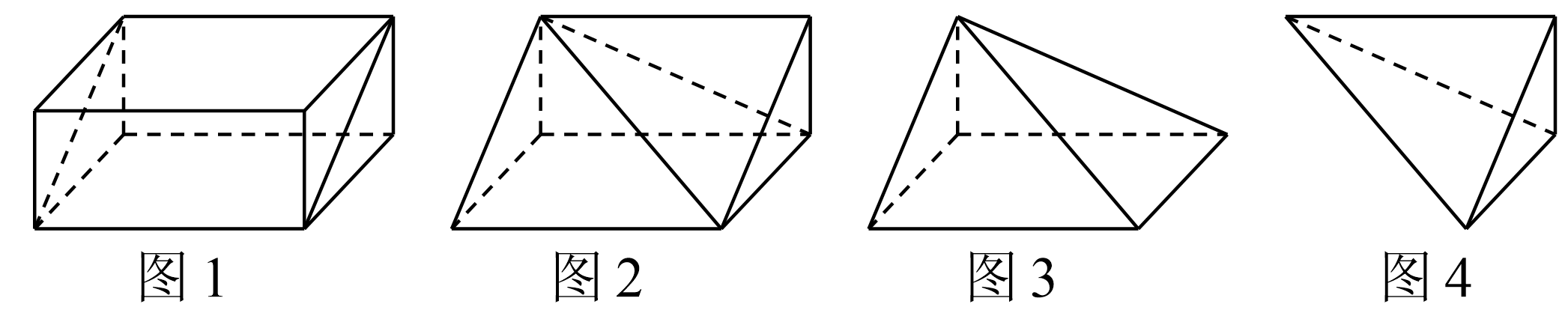
对于选项C，若为等差数列，设其公差为，则为常数列，

故为等差数列，故选项C符合题意；

对于选项D，若为等差数列，设其公差为，则为常数，故为等差数列，故选项D符合题意，

故选：BCD.

11. “堑堵”“阳马”和“鳖臑””是我国古代对一些特殊几何体的称谓.《九章算术·商功》：“斜解立方，得两堑堵，斜解堑堵，其一为阳马，其一为鳖臑”.一个长方体沿对角面斜解(图1)，得到一模一样的两个堑堵(图2)，再沿一个堑堵的一个顶点和相对的棱斜解(图2)，得一个四棱锥称为阳马(图3)，一个三棱锥称为鳖臑(图4).



若长方体的体积为，由该长方体斜解所得到的堑堵、阳马和鳖臑的体积分别为，则下列选项正确的是( )

A.  B. 

C.  D. 

【答案】ACD

【解析】

【分析】根据题意确定堑堵、阳马和鳖臑的体积与长方体的体积的数量关系，即可得答案.

【详解】由题意，堑堵的体积，阳马的体积，瞥臑的体积，

故选：ACD

12. 已知是抛物线的焦点， 是抛物线上的两点，为坐标原点，则( )

A. 曲线的准线方程为

B. 若，则的面积为

C. 若，则

D. 若，的中点在的准线上的投影为，则

【答案】BCD

【解析】

【分析】对于A，由抛物线的方程易知准线为，故A错误；

对于B，利用抛物线的定义求得，进而可求的面积，故B正确；

对于C，由及点抛物线上得到，再利用两点距离公式及基本不等式，即可证得，故C正确；

对于D，结合图像，利用余弦定理及基本不等式即可证得，故D正确.

【详解】因为抛物线，故，焦点，准线为，设，则

对于A，易知准线为，故A错误；

对于B，如图1，由抛物线的定义可知，即，故，

代入，解得，

所以，故B正确；

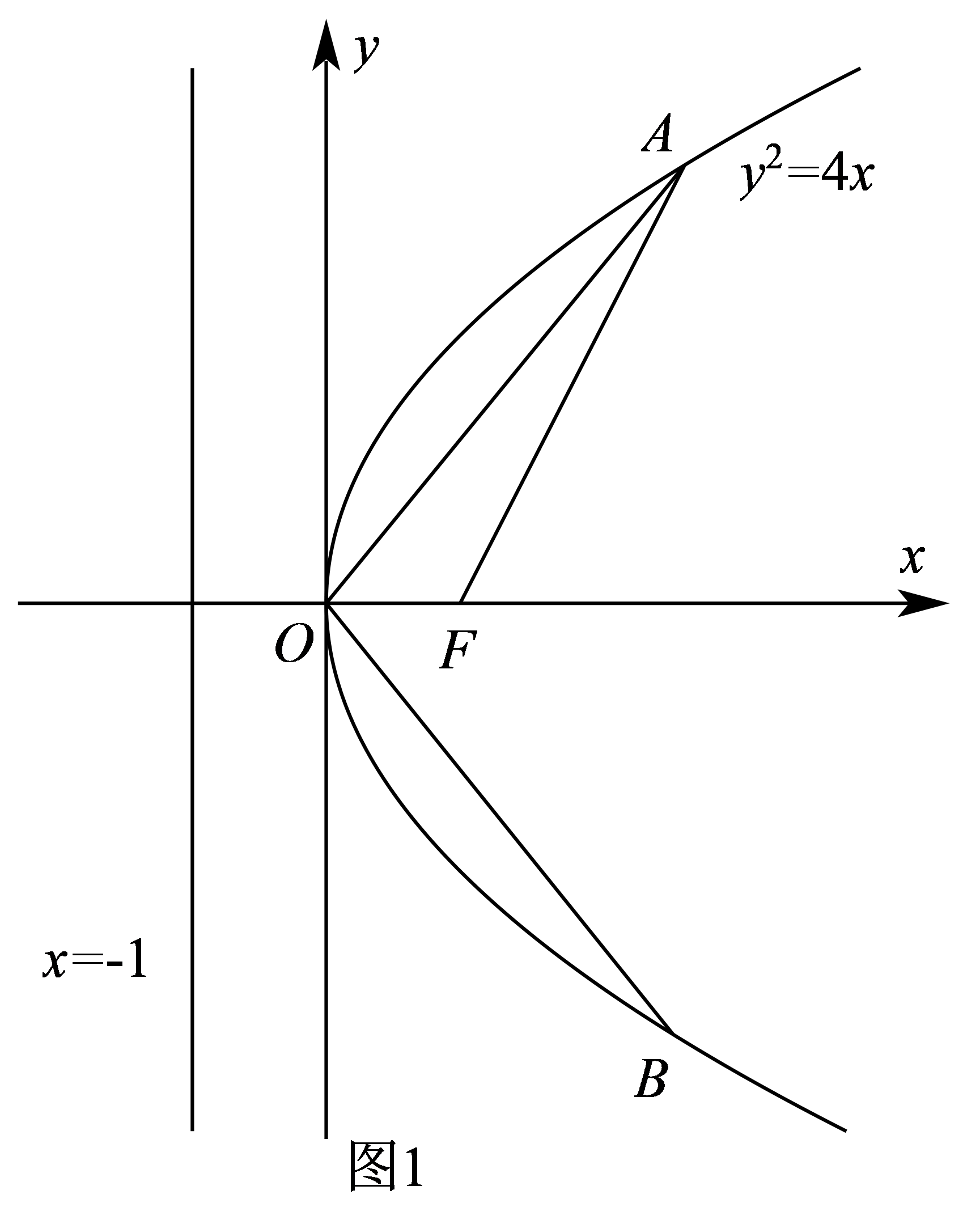
对于C，由得，故，即，

又，，故，

得或(舍去)，则，

所以，

故，故C正确；



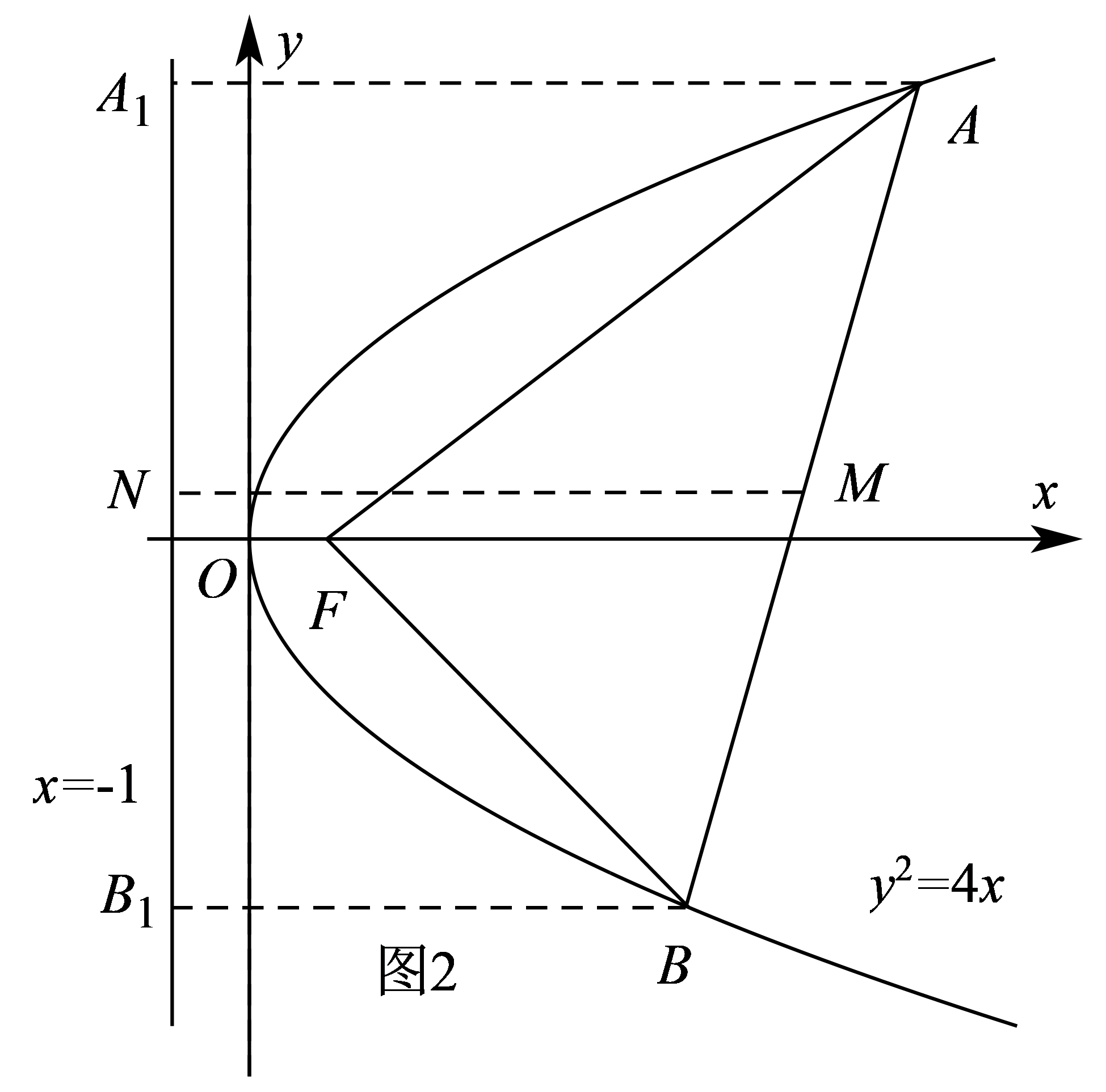
对于D，如图2，过作准线的垂线，垂足分别为，连接，则

，

在中，，

故

所以，即，故D正确.



故选：BCD.

**第Ⅱ卷**

**三、填空题：本大题共4小题，每小题5分，共20分.**

13. 椭圆与双曲线有公共点*P*，则*P*与双曲线两焦点连线构成三角形的周长为\_\_\_\_\_\_\_\_\_．

【答案】24

【解析】

【分析】根据椭圆与双曲线方程得到椭圆与双曲线具有共同的焦点，，

从而得到*P*与双曲线两焦点的距离之和，再根据，求出周长.

【详解】由已知得椭圆与双曲线具有共同的焦点，，

由椭圆定义可知：，

故*P*与双曲线两焦点的距离之和为14，

又，

因此*P*与双曲线两焦点连线构成三角形的周长为.

故答案为：24

14. 已知，若三向量共面，则实数\_\_\_\_\_.

【答案】1

【解析】

【分析】由题意存在，使得，代入坐标，列方程组计算，即得解.

【详解】由题意，三向量共面，故存在，使得，

即，

故，解得.

故答案为：1

15. 在平面直角坐标系中，，，若动点在直线上，圆过、、三点，则圆的面积最小值为\_\_\_\_\_\_\_\_\_.

【答案】

【解析】

【分析】要使圆的面积尽可能小，则点位于第一象限，设，再求出的中垂线方程，设设圆心坐标为，根据，得到，参变分离求出的最小值，即可求出，从而求出面积最小值.

【详解】解：要使圆的面积尽可能小，则点位于第一象限，设，

又，，所以线段的中垂线方程为，则圆心在直线上，不妨设圆心坐标为，圆的半径为，

所以，

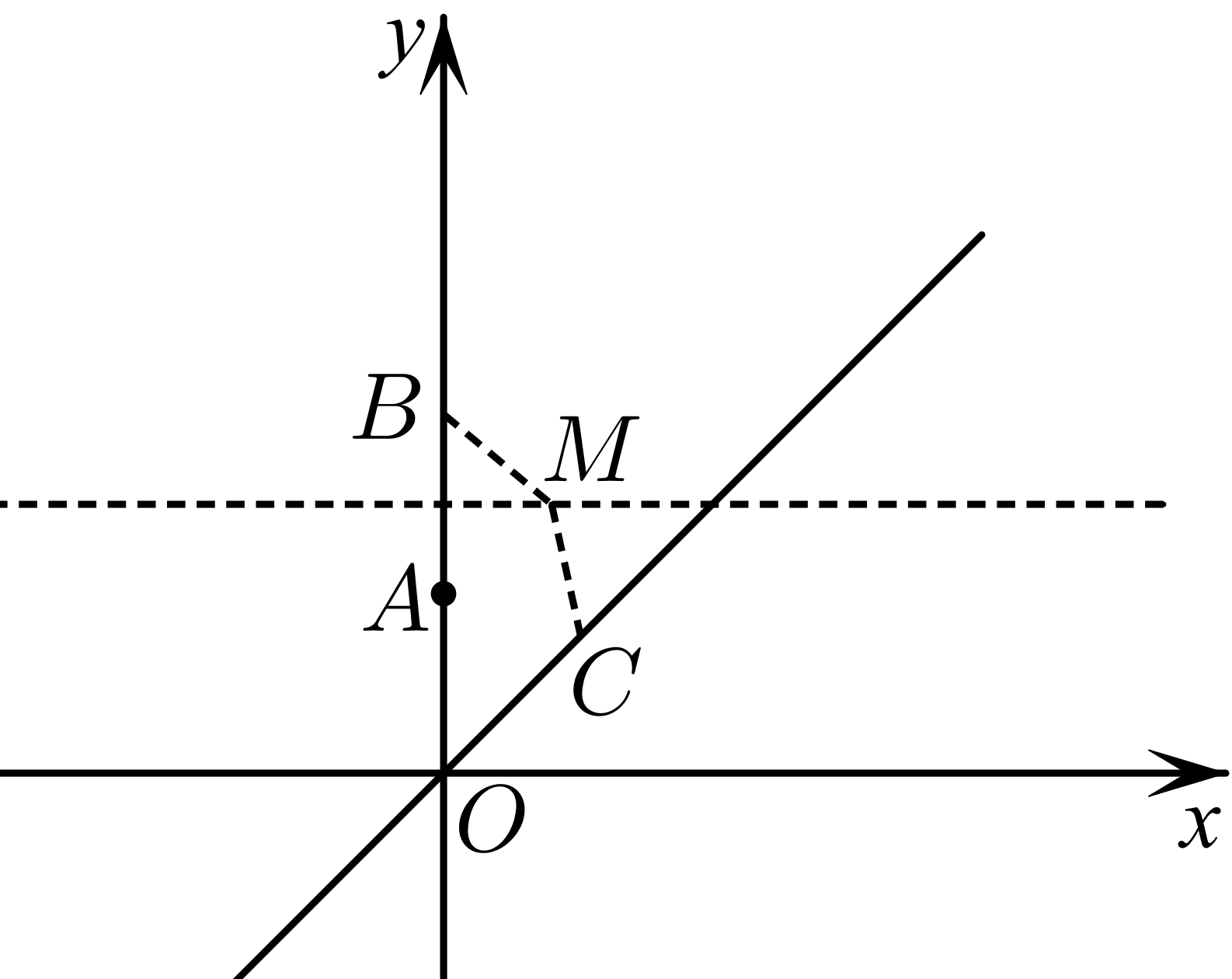
即，

则，

所以，

所以，当且仅当即时取等号，

所以，所以圆的面积最小值为，此时；



故答案为：

16. 已知数列满足，，则数列的通项公式为\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_，若数列的前项和，则满足不等式的的最小值为\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_．

【答案】 ①.  ②. 6

【解析】

【分析】根据给定递推公式变形构造新数列即可得解；利用裂项相消法求出，再借助数列单调性计算得解.

【详解】在数列中，，由得：，而，

于是得数列是以4为首项，2为公比的等比数列，则，即，

所以数列的通项公式为；

显然，，

则，

由得：，即，令，则，即数列是递增数列，

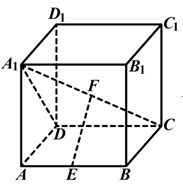
由，得，而，因此，，从而得，，

所以满足不等式的的最小值为6.

故答案为：；6

**四、解答题：本大题共6小题，共70分.解答时应写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤.**

17. 如图在边长是2的正方体中，*E*，*F*分别为*AB*，的中点．



(1)求异面直线*EF*与所成角的大小．

(2)证明：平面．

【答案】(1)；(2)证明见解析．

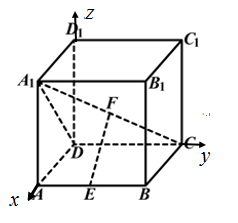
【解析】

【分析】

(1)通过建立空间直角坐标系，利用可得解；

(2)利用和，可证得线线垂直，进而得线面垂直.

【详解】据题意，建立如图坐标系．于是：



，，，，，

∴，，，．

(1)，

∴

∴异面直线*EF*和所成的角为．

(2)

∴，即

，

∴即．

又∵，平面且

∴平面．

18. 已知曲线上任一点与点的距离与它到直线的距离相等.

(1)求曲线的方程；

(2)求过定点，且与曲线只有一个公共点的直线的方程.

【答案】(1)

(2)或或

【解析】

【分析】(1)根据抛物线的定义可得曲线方程；

(2)分类讨论：斜率为0，即与抛物线的对称轴平行；斜率不存在与抛物线相切，斜率存在且与抛物线相切(应用判别式为0)，分别求解可得．

【小问1详解】

设的坐标，由抛物线的定义可知，的轨迹为抛物线，且焦点在轴上，焦点坐标，所以的轨迹方程为.

故曲线C的方程为：

【小问2详解】

当直线过点，且斜率为0时，即直线与拋物线的对称轴平行时，直线与曲线有一个公共点，

此时直线的方程为；

当过的直线的斜率不存在时，即直线的方程为，显然与拋物线相切；

当过的直线斜率存在时，设直线的方程为，

联立，整理可得，

则，即，解得，

此时直线的方程为，

综上所述，满足条件的直线的方程为或或.

19. 在平面直角坐标系中，△*ABC*的三个顶点坐标分别为，，．

(1)求*BC*边上的中线*AD*的所在直线方程；

(2)求△*ABC*的外接圆*O*被直线*l*：截得的弦长．

【答案】(1)

(2)

【解析】

【分析】(1)先求*BC*边的中点*D*的坐标，再得*AD*的斜率即可求解；

(2)先求△*ABC*的外接圆*O，*再求圆心到直线.直线*l*的距离，再由勾股定理可求解.

【小问1详解】

∵，

∴*BC*边的中点*D*的坐标为，

∴中线*AD*的斜率为，

∴中线*AD*的直线方程为：，即

【小问2详解】

设△*ABC*的外接圆*O*的方程为，

∵*A*、*B*、*C*三点在圆上，

∴

解得：

∴外接圆*O*的方程为，即，

其中圆心*O*为，半径,

又圆心*O*到直线*l*的距离为,

∴被截得的弦长的一半为,

∴被截得的弦长为.

20. 已知各项均不为零的数列的前*n*项的和为，且满足，．

(1)求数列的通项公式；

(2)设数列满足的前*n*项和为，证明．

【答案】(1)；

(2)证明见解析.

【解析】

【分析】(1)利用给定的递推公式，探求数列相邻两项的关系，即可求解作答.

(2)由(1)结合已知求出，再利用错位相减法求和推理作答.

【小问1详解】

，，当时，，两式相减得：，

由得：，即，满足上式，

因此，，于是得数列是首项为4，公比为4的等比数列，，

所以数列的通项公式是.

【小问2详解】

由(1)知，，而，则，即，

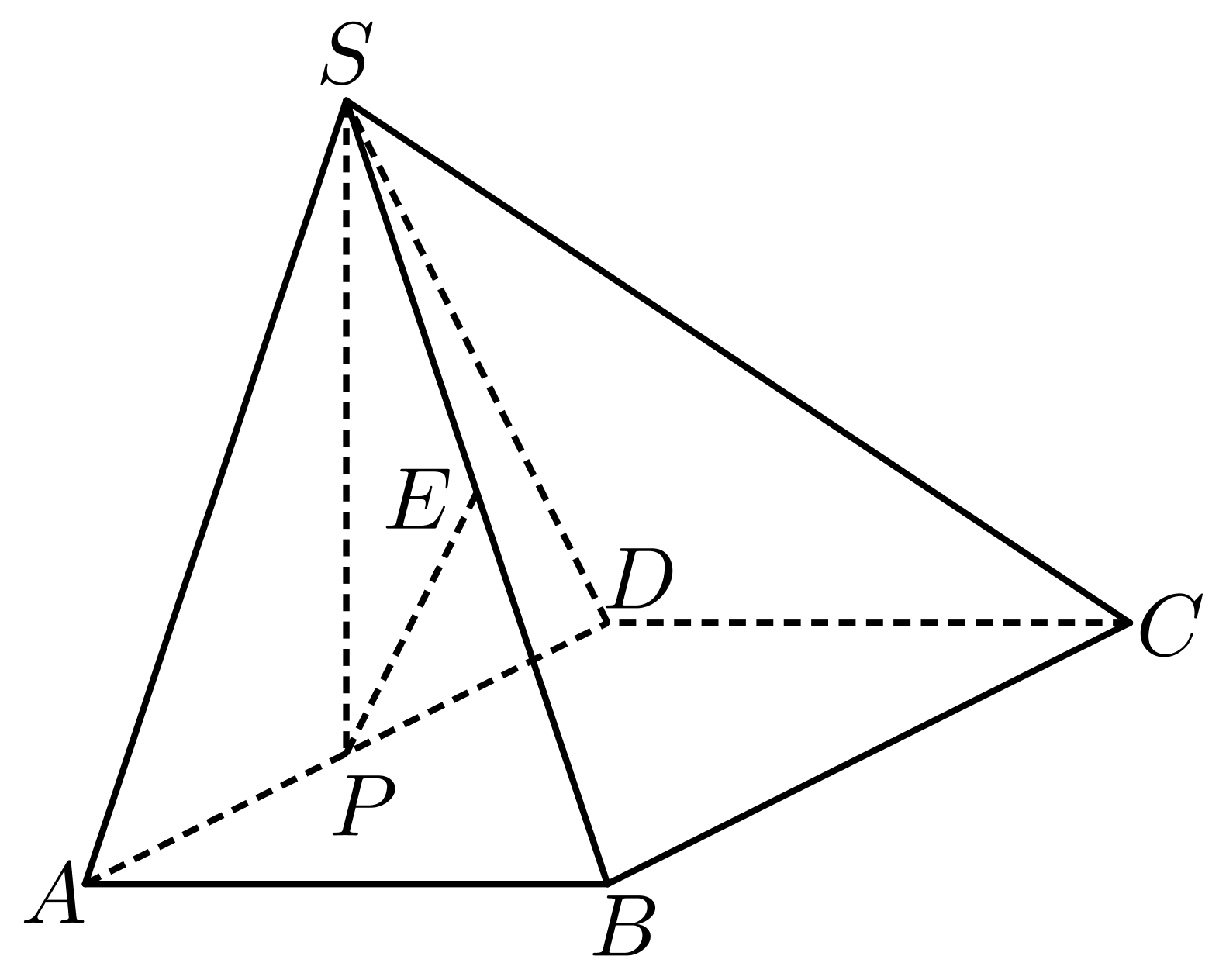
则，

于是得，

两式相减得：，

所以．

21. 如图，在四棱锥中，四边形是矩形，是正三角形，且平面平面，，为棱的中点，四棱锥的体积为．



(1)若为棱的中点，求证：平面；

(2)在棱上是否存在点，使得平面与平面所成锐二面角的余弦值为？若存在，指出点的位置并给以证明；若不存在，请说明理由.

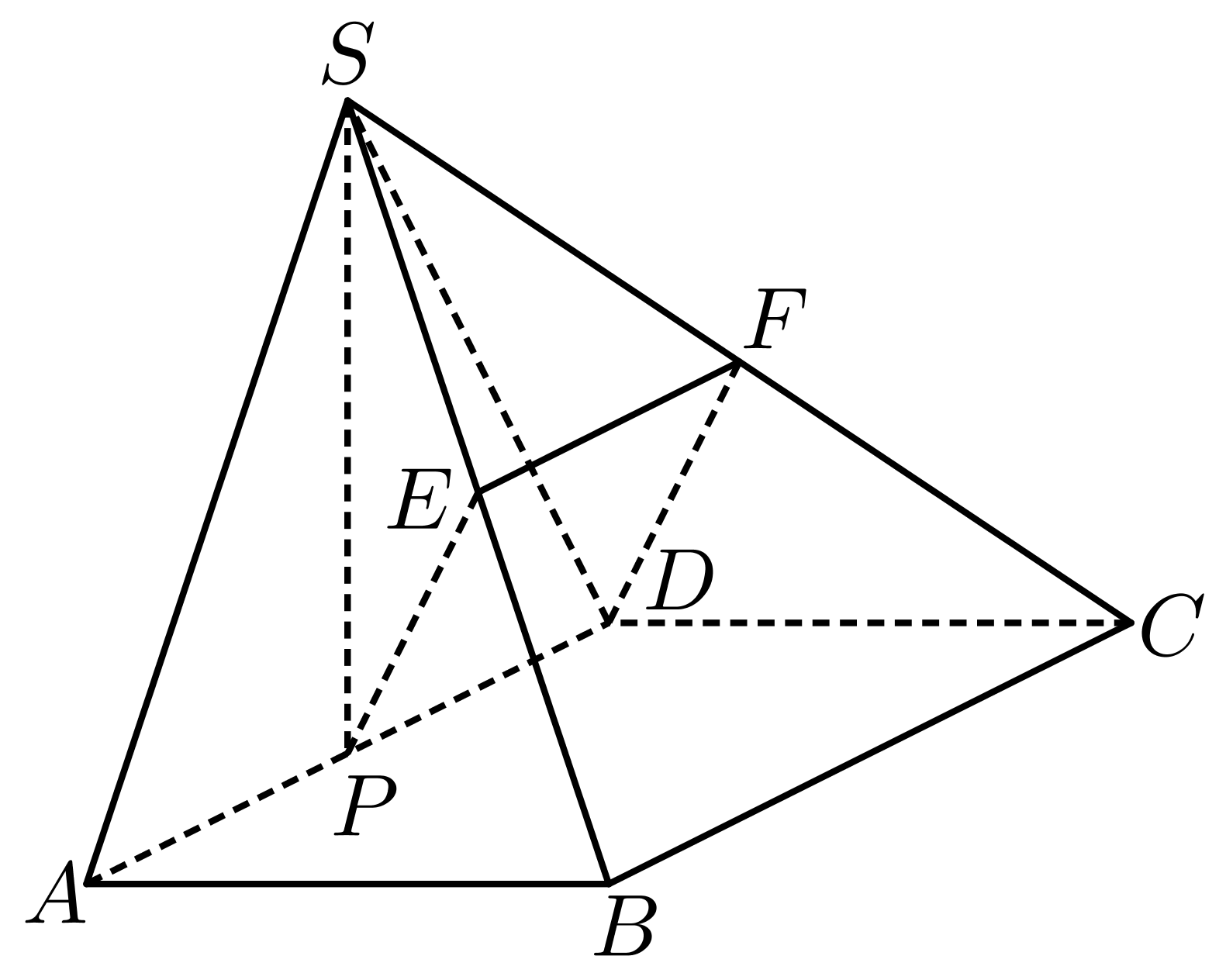
【答案】(1)证明见解析；

(2)存在点，位于靠近点三等分点处满足题意.

【解析】

【分析】(1)取中点，连接，得到，然后利用线面平行的判定定理得到平面；(2)假设在棱上存在点满足题意，建立空间直角坐标系，设，根据平面与平面的夹角的余弦值为，则两平面法向量所成角的余弦值的绝对值等于，求出，即可得出结论.

【小问1详解】



取中点，连接，

分别为的中点，

，

底面四边形是矩形，为棱的中点，

，．

，，

故四边形是平行四边形，

．

又平面，平面，

平面．

【小问2详解】

假设在棱上存在点满足题意，

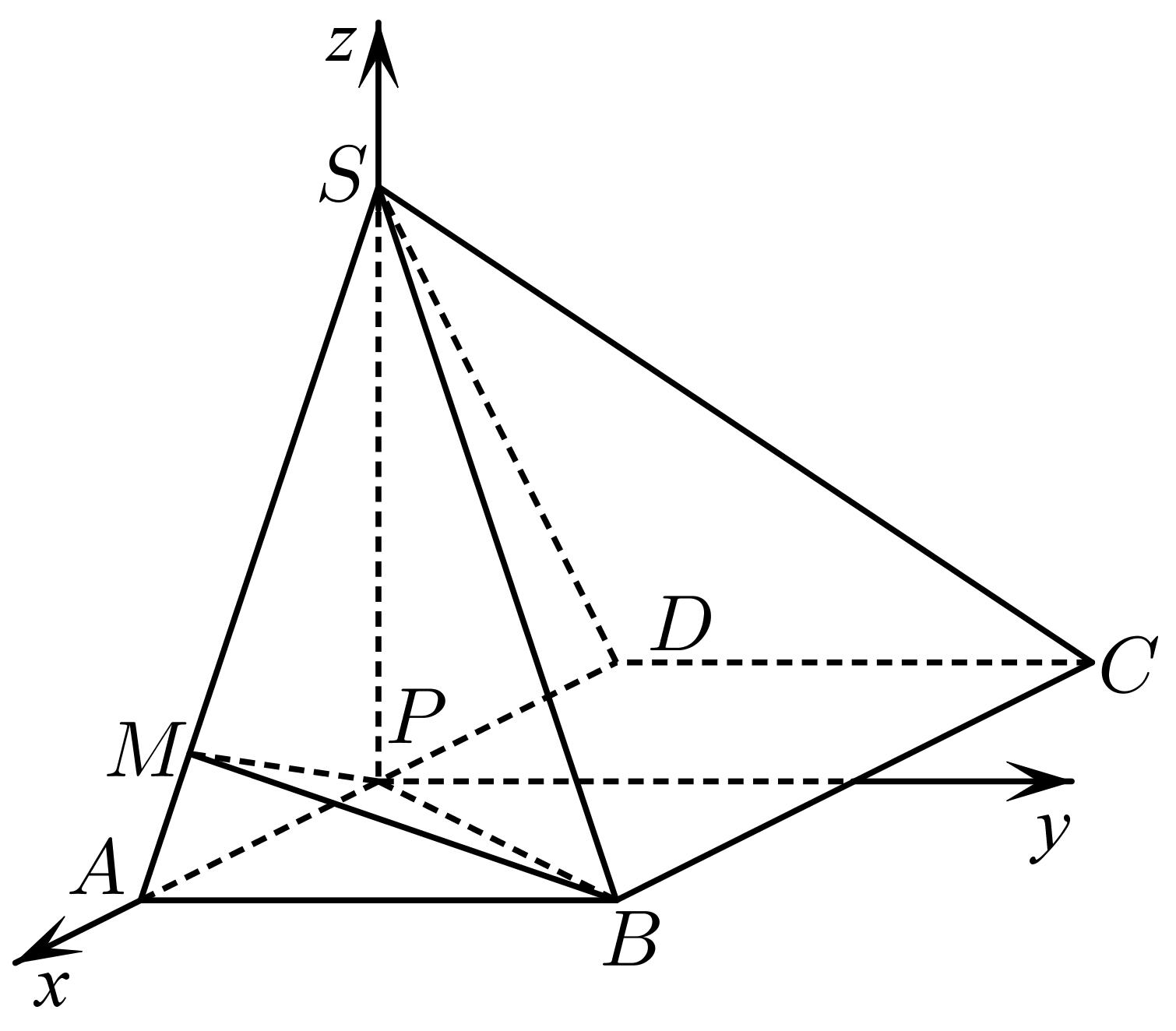
在等边中，为的中点，所以，

又平面平面，平面平面，平面，

平面，则是四棱锥的高．

设，则，，

，所以.



以点为原点，，的方向分别为轴的正方向，建立如图所示的空间直角坐标系，则，，，，

故，，．

设，

．

设平面*PMB*的一个法向量为，

则 

取．

易知平面的一个法向量为，，

，

故存在点，位于靠近点的三等分点处满足题意.

22. 已知双曲线的离心率为2，*F*为双曲线的右焦点，直线*l*过*F*与双曲线的右支交于两点，且当*l*垂直于*x*轴时，；

(1)求双曲线的方程；

(2)过点*F*且垂直于*l*的直线与双曲线交于两点，求的取值范围．

【答案】(1)

(2)

【解析】

【分析】(1)根据通径，直接求得，再结合离心率为2即可求双曲线的方程；

(2)通过对转化为，从而简化计算，利用韦达定理求解即可.

【小问1详解】

依题意，，当*l*垂直于*x*轴时，，

即，即，

解得，，因此；

【小问2详解】

设，联立双曲线方程，

得：，

当时，，

，

当时，设，

因为直线与双曲线右支相交，

因此，即，同理可得，

依题意，

同理可得，，

而，

代入，，

，

分离参数得，，

因为，

当时，由，

，

所以，

综上可知，的取值范围为.