**长郡中学2022—2023学年度高二第一学期第二次模块检测**

**数学**

**命题人：陈涛**

**本试卷分第Ⅰ卷(选择题)和第Ⅱ卷(非选择题)两部分，共8页.时量120分钟.满分150分.**

**第Ⅰ卷**

**一、选择题(本大题共8小题，每小题5分，共40分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的)**

1. 直线的一个方向向量是( )

A.  B.  C.  D. 

【答案】A

【解析】

【分析】

根据直线的斜率先得到直线的一个方向向量，然后根据方向向量均共线，求解出结果.

【详解】因为直线的斜率为，所以直线的一个方向向量为，

又因为与共线，所以的一个方向向量可以是，

故选：A.

2. 设，是空间中两条不同的直线，，是两个不同的平面，则下列说法正确的是( )

A. 若，，,则

B. 若，，，则

C. 若，，，则

D. 若，，，，则

【答案】B

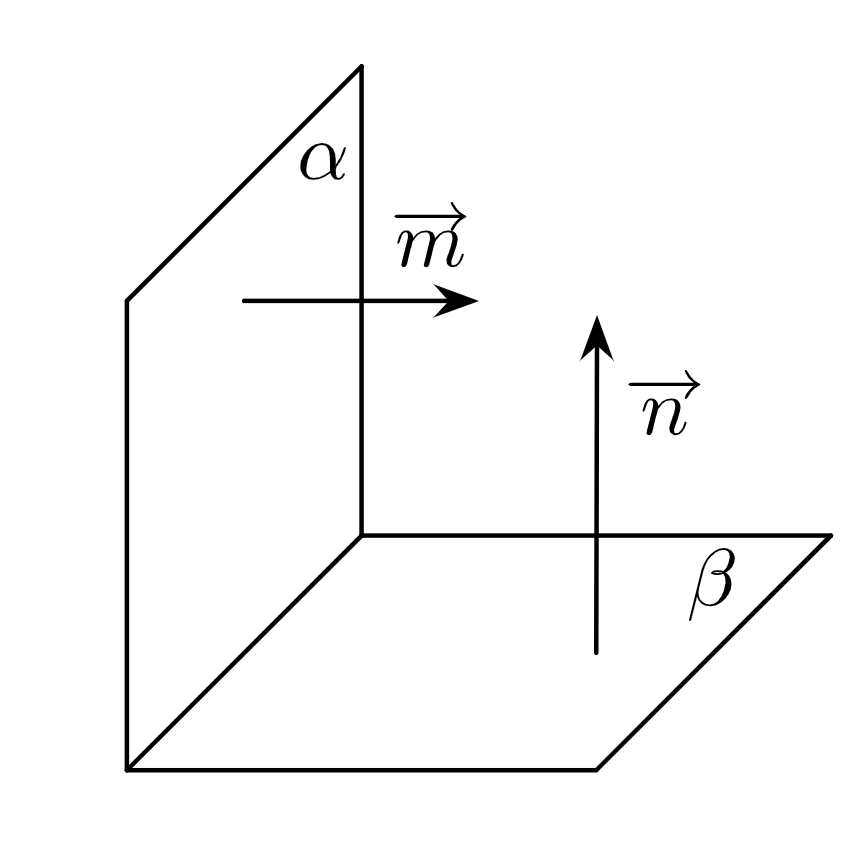
【解析】

【分析】根据面面平行性质可说明可能异面可能平行，判断A;利用平面的法向量的关系可判断B; 根据，，，可判断可能平行，不一定垂直，判断C;根据面面平行的判定可判断D.

【详解】对于A，若，，，则可能异面可能平行，A错误；

对于B，若，，则可在直线*m*上取向量作为平面的法向量，

可在直线*n*上取向量作为平面的法向量，



因为，故，所以，B正确；

对于C，若，，，则可能平行，不一定垂直，C错误；

对于D, 若，，，，由于可能平行直线，

此时可能相交，D错误，

故选：B.

3. 设数列｛｝的前n项和=，则的值为

A. 15 B. 16 C. 49 D. 64

【答案】A

【解析】

【分析】利用求解即可.

【详解】因为数列｛｝的前n项和=，

所以，

故选：A.

【点睛】本题主要考查本题主要考查数列的通项公式与前项和公式之间的关系，属于中档题. 已知数列前项和，求数列通项公式，常用公式.

4. 若，则( )

A.  B. 

C.  D. 

【答案】C

【解析】

【分析】构造函数，利用导数讨论单调性即可判断A和B，再构造，利用导数讨论单调性即可判断C和D.

【详解】令，则，

令恒成立，

即在定义域单调递增，

且

因此在区间上必然存在唯一使得，

所以当时单调递减，当时单调递增，

故A，B均错误；

令，，

当时，，

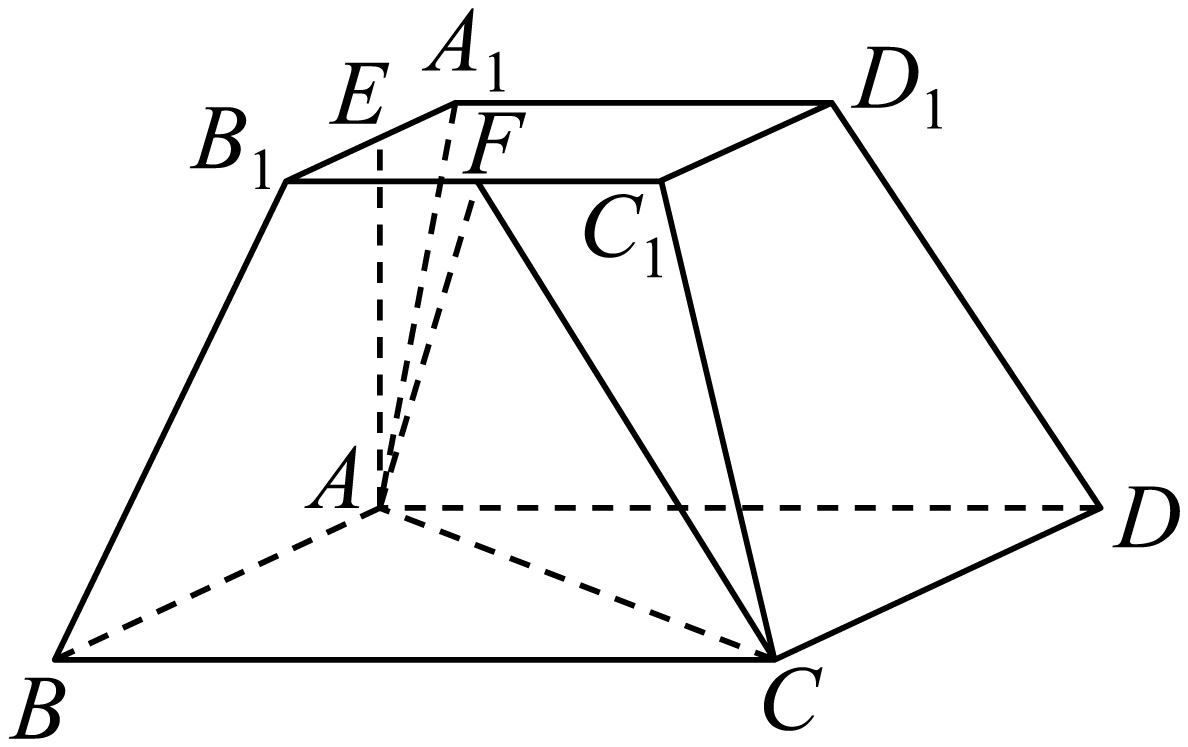
∴在区间上为减函数，

∵，∴，即，

∴选项C正确，D不正确.

故选:C.

5. 如图，在正四棱台中，点，分别是棱，的中点，，则下列判断错误的是( )



A. ,，，共面 B. 平面

C. ，，交于同一点 D. 平面

【答案】D

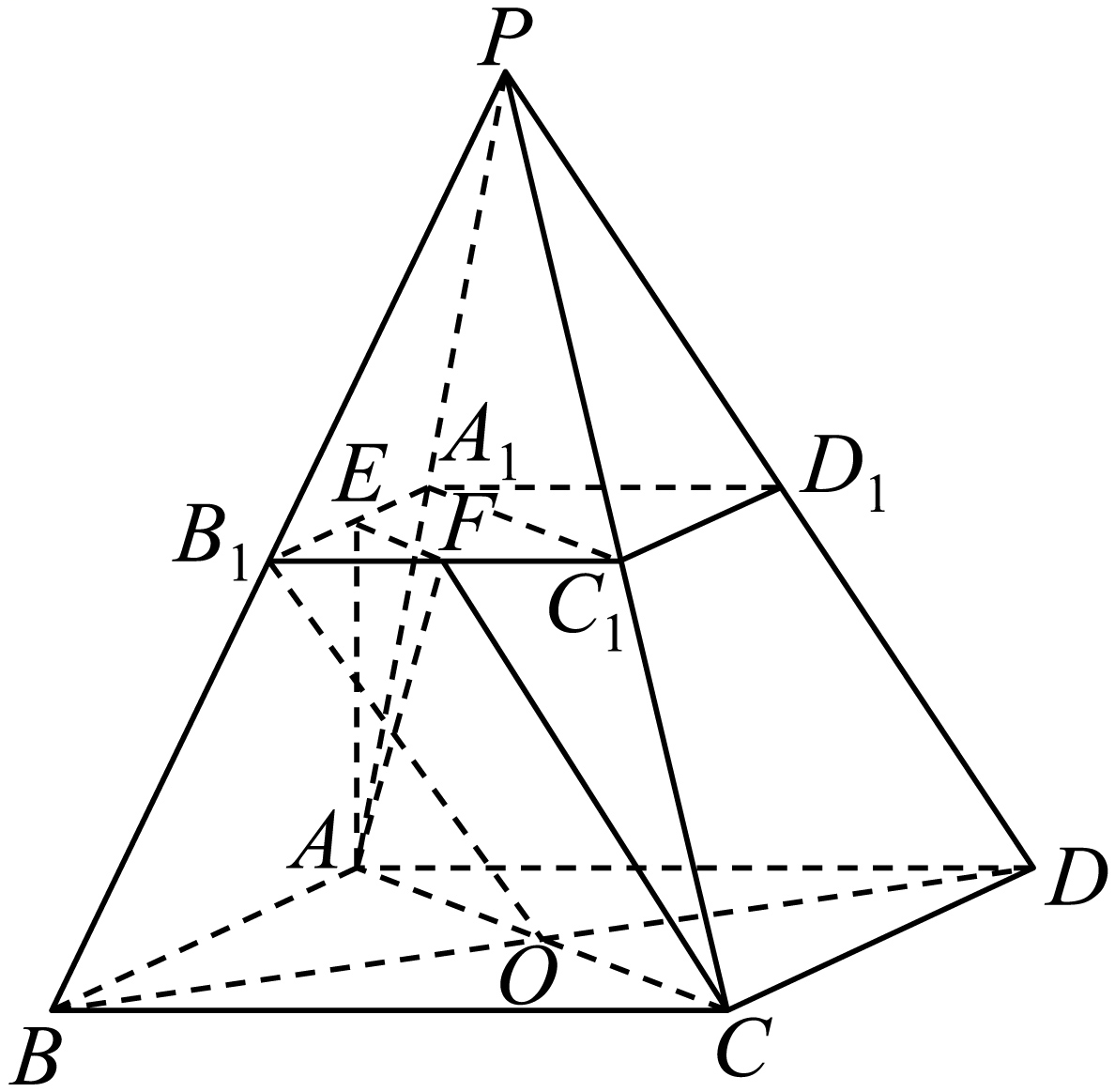
【解析】

【分析】根据棱台的结构特征，即各侧棱延长后交于一点可判断A; 连接，证明，说明，共面，判断B;利用平面基本定理可证明，，交于同一点，判断C; 连接，交于，连接，证明，由与平面相交于点，可判断D.

【详解】对于选项，由棱台的性质，延长正四棱台的侧棱，相交于点，

则,，，共面，A选项正确；

对于选项，连接，则，而，所以，



所以，共面，则平面，B选项正确；

对于选项，由于，共面，,则，不平行，

设，因为平面，平面，

所以平面，平面，

又平面平面直线，所以直线，

所以、、交于同一点，C选项正确；

对于选项，连接，交于，连接，

因为，所以为的中点，而为的中点，

所以，而与平面相交于点，

所以与平面不平行，所以与平面不平行，D选项错误，

故选：D.

6. 已知是函数的导数，则不等式的解集是( )

A.  B.  C.  D. 

【答案】C

【解析】

【分析】设，求出函数的导数，得到在上单调递增，问题等价于，即可解决．

【详解】令，则，  
因为，

所以，即，  
设，

所以，  
因为，

所以，所以在上单调递增，  
因为，

所以，

所以等价于，  
则，即，解得．

所以不等式的解集是．

故选：C

7. 已知数列满足，，若不等式对任意的都成立，则实数的取值范围是( )

A.  B. 

C.  D. 

【答案】A

【解析】

【分析】将两边取倒数，可得是首项为2，公差为1的等差数列，求得，进而将不等式对任意的都成立转化为恒成立，利用基本不等式求得的最值，可得答案.

【详解】由数列满足，，可得，可知，

因为，所以，所以，

因为，所以是首项为2，公差为1的等差数列，所以，所以且，

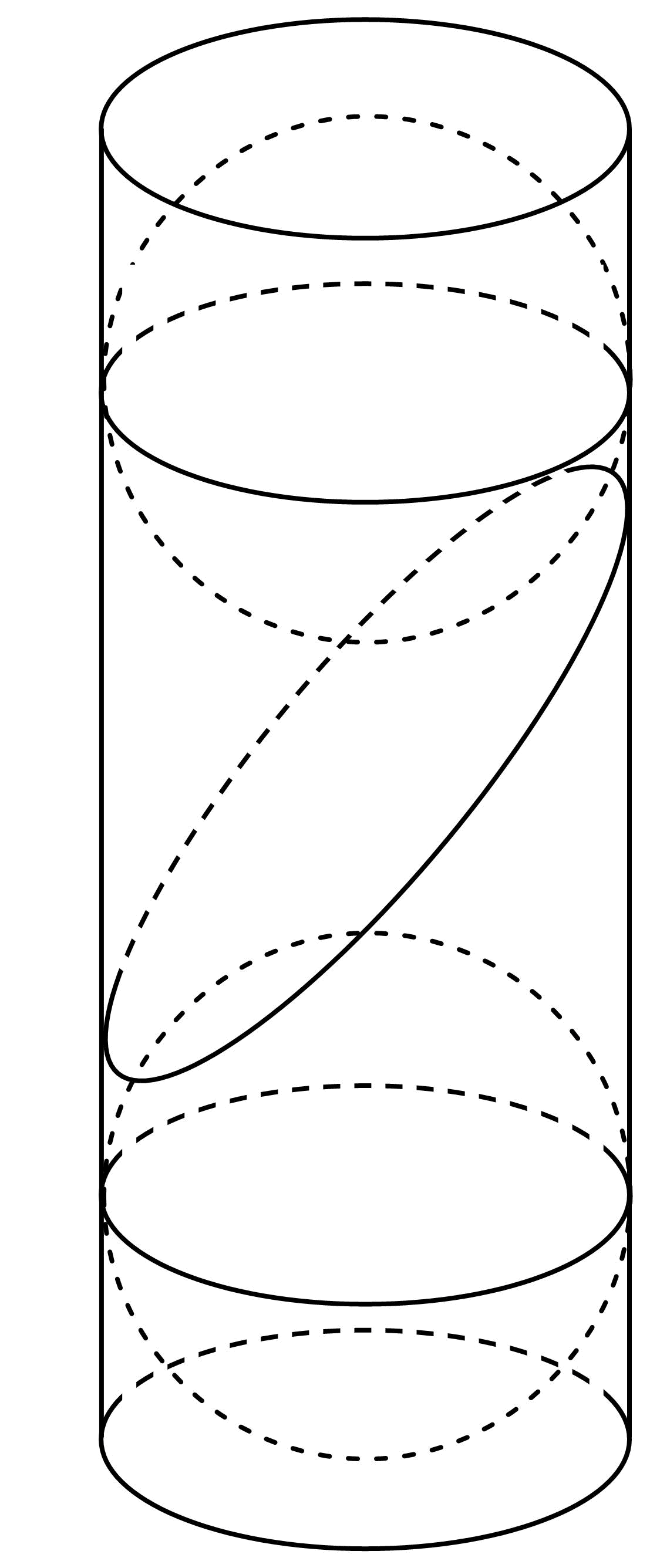
因为不等式恒成立，所以恒成立，

因为，当且仅当时取等号，

所以，即实数的取值范围是，

故选：A.

8. 如图，在底面半径为1，高为5的圆柱内放置两个球，使得两个球与圆柱侧面相切，且分别与圆柱的上下底面相切．一个与两球均相切的平面斜截圆柱侧面，得到的截线是一个椭圆．则该椭圆的离心率为( )



A.  B.  C.  D. 

【答案】C

【解析】

【分析】作出轴截面图形，根据几何关系即可求解．

【详解】如图所示，，，，

则，

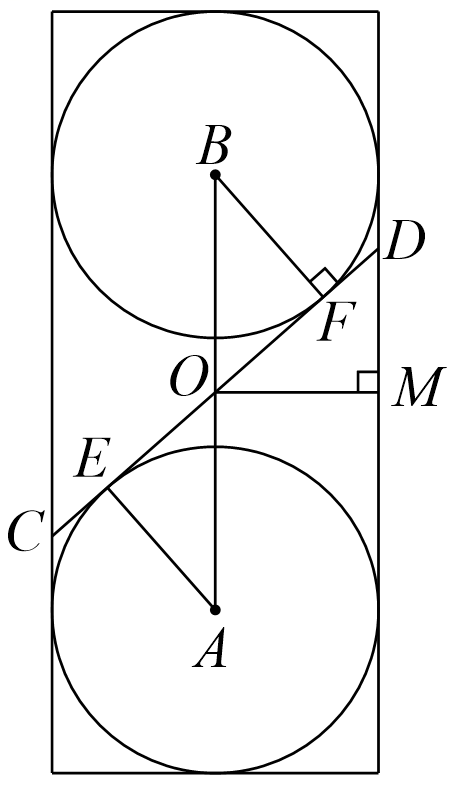
∴，即，

而，即，

∴，

∴．

故选：C．



**二、选择题(本大题共4小题，每小题5分，共20分，在每小题给出的四个选项中，有多项符合题目要求，全部选对的得5分，部分选对的得2分，有选错的得0分)**

9. (多选题)等差数列的前*n*项和为，若，公差，则下列命题正确的是( )

A. 若，则必有=0

B. 若，则必有是中最大的项

C. 若，则必有

D. 若，则必有

【答案】ABC

【解析】

【分析】根据等差数列性质依次分析即可得答案.

【详解】解：对于A.，若，则，所以，所以，故A选项正确；

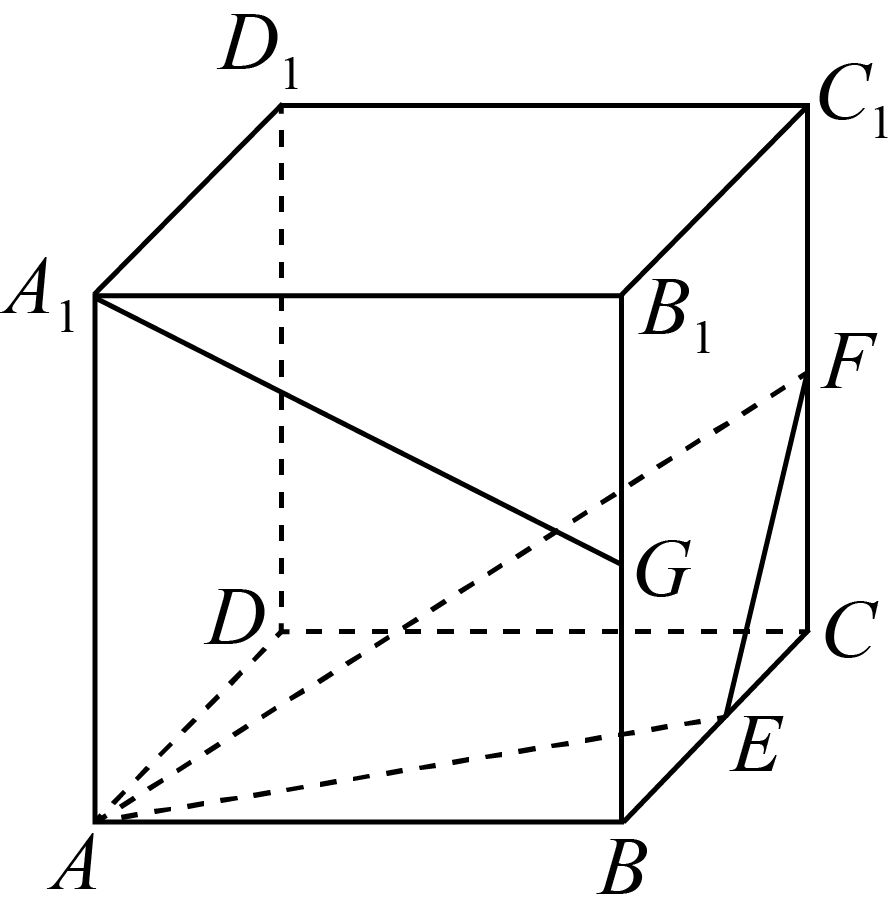
对于B选项，若，则，由于，公差，故，故，所以是中最大的项；故B选项正确；

C. 若，则，由于，公差，故，故，的符号不定，故必有，无法确定；故C正确，D错误．

故选：ABC．

【点睛】本题考查数列的前项和的最值问题与等差数列的性质，是中档题．

10. 如图，正方体的棱长为，，，分别为，，的中点，则( )



A. 直线与直线垂直

B. 直线与平面平行

C. 平面截正方体所得的截面面积为

D. 点与点到平面的距离相等

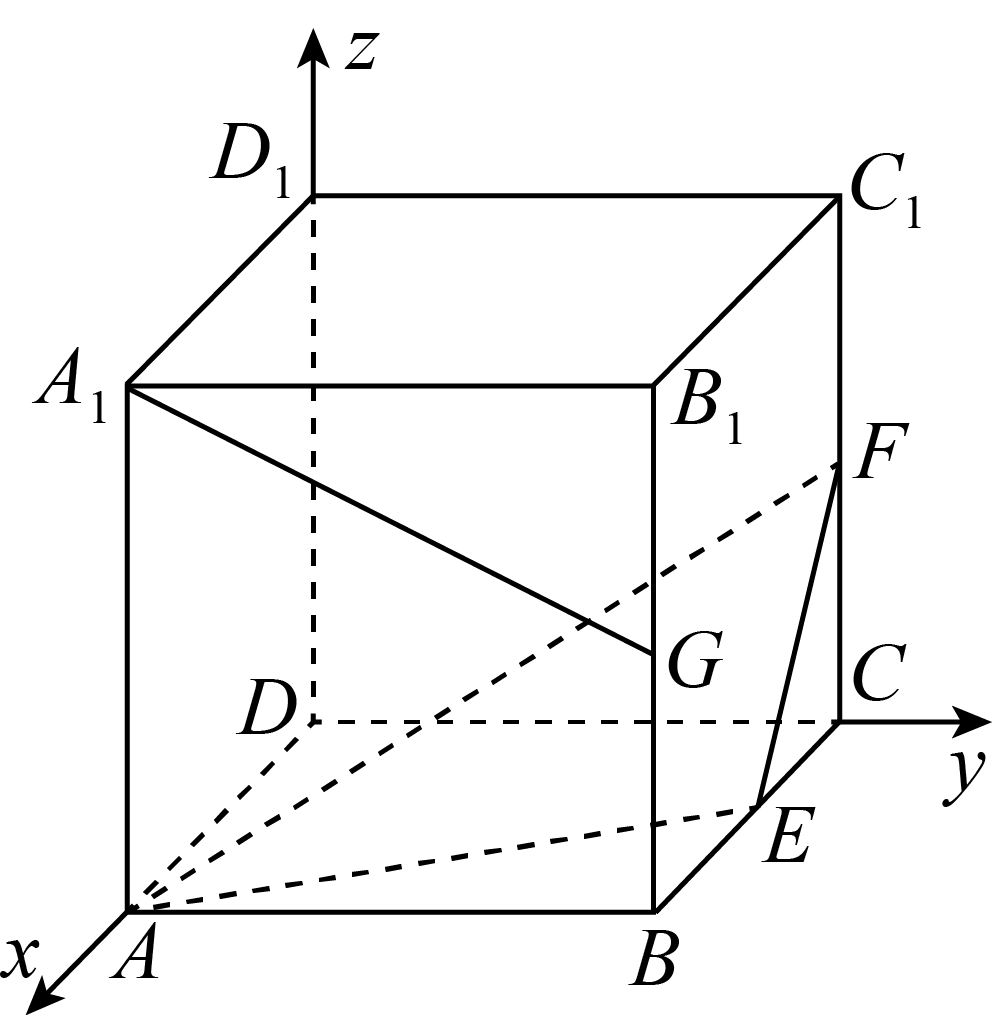
【答案】BC

【解析】

【分析】(1)利用空间向量的坐标运算确定直线与直线的位置关系；(2)根据面面平行来证明线面平行；(3)先根据四点共面确定截面，进而算截面面积；(4)利用等体积法思想证明求解.

【详解】对于选项A，以点为坐标原点，

，，所在的直线分别为，，轴，建立空间直角坐标系，

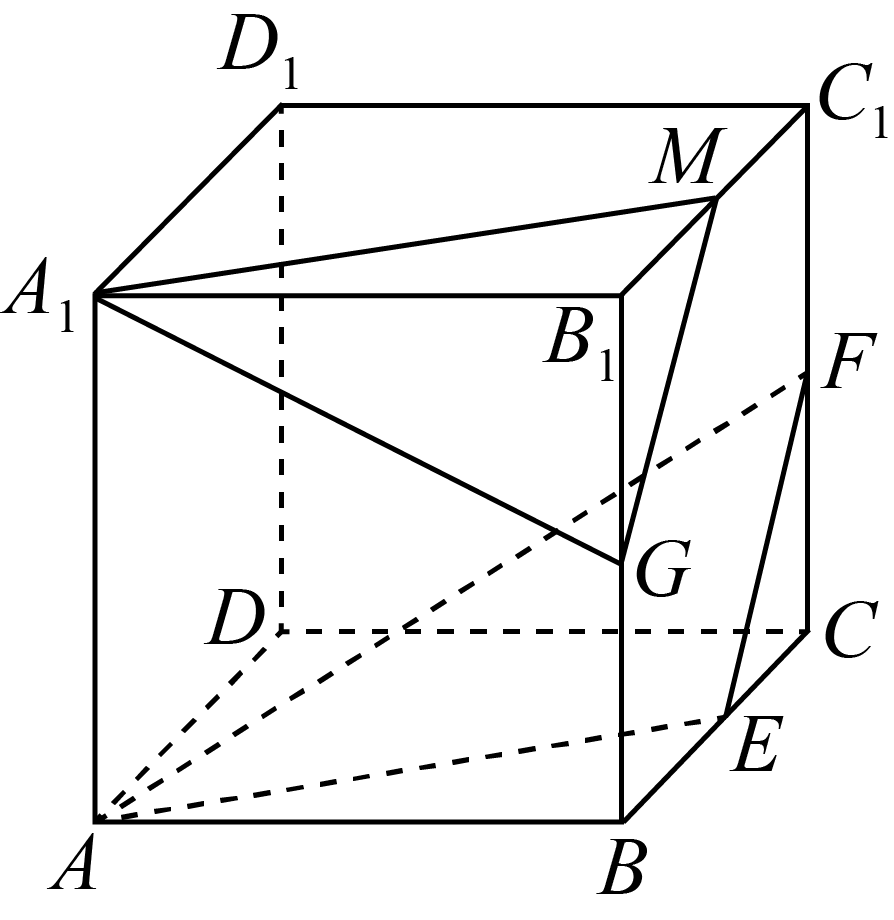


则，，，.

从而，，

从而，所以直线与直线不垂直，选项错误；

对于选项，取的中点为，连接，，则易知，



又平面，平面，故平面，

又，平面，平面，

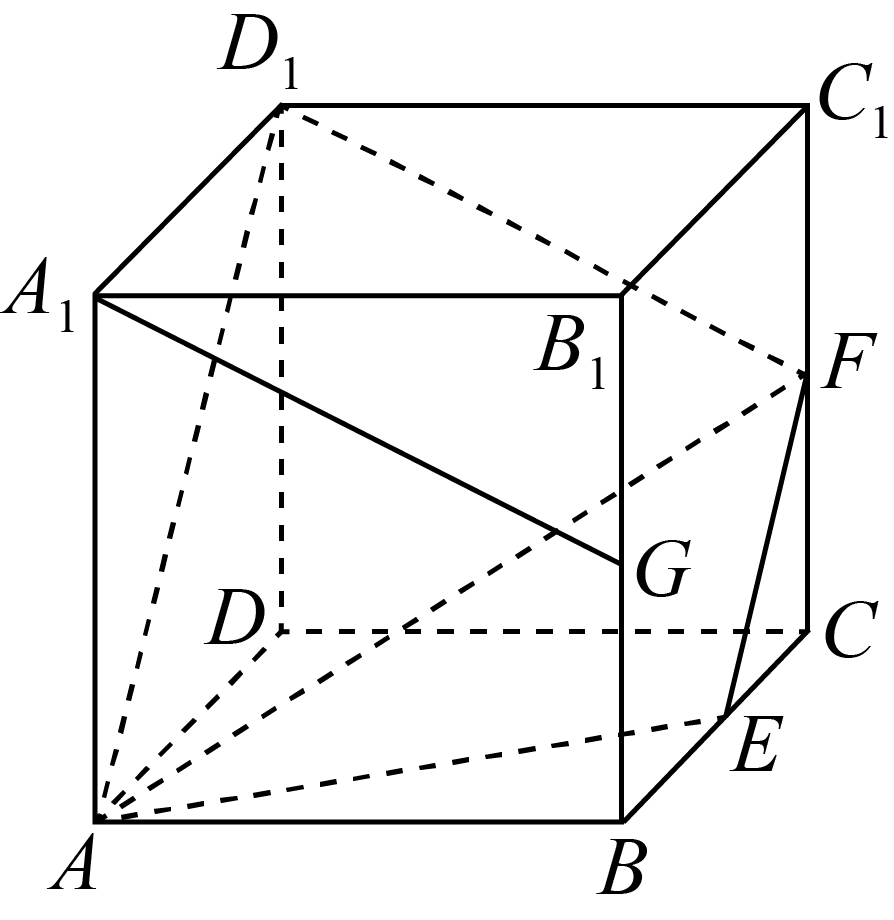
所以平面，

又，，平面，

故平面平面，

又平面，从而平面，选项正确；

对于选项C，连接，，如图所示，



∵正方体中，∴，，，四点共面，

∴四边形为平面截正方体所得的截面四边形，且截面四边形为梯形，

又由勾股定理可得，，，

∴梯形为等腰梯形，高为，

∴，选项C正确；

对于选项D，由于，，

而，，

∴，即，

点到平面的距离为点到平面的距离的2倍，选项错误.

故选:BC.

11. 已知抛物线：与圆：交于，两点，且，直线过的焦点，且与交于，两点，则下列说法正确的是( )

A. 若直线的斜率为，则

B. 的最小值为

C. 若以为直径的圆与轴的公共点为，则点的横坐标为

D. 若点，则周长的最小值为

【答案】BCD

【解析】

【分析】首先求出抛物线的解析式，设出的坐标，联立进行求解，当时，，进而判断选项A错误；再根据韦达定理和不等式求最小值后进行判断选项B；画出大致图象，过点作准线的垂线，垂足为，交轴于，结合抛物线定义判断选项C；过作垂直于准线，垂足为，结合的周长，进而判断选项D即可.

【详解】由题意得点在抛物线上，

所以，解得，所以，则，

设直线，与联立得，

设，，所以，，

所以，

当时，，A项错误；

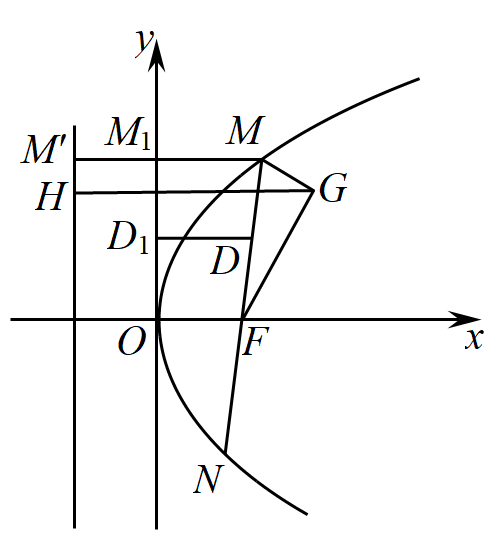


，

则，

当且仅当，时等号成立，B项正确；

如图，过点作准线的垂线，垂足为，交轴于，



取的中点为，过点作轴的垂线，垂足为，

则，是梯形的中位线，

由抛物线的定义可得，

所以，

所以以为直径的圆与轴相切，

所以点为圆与轴的切点，所以点的纵坐标为，

又为的中点，所以点的纵坐标为，

又点在抛物线上，所以点的横坐标为，C项正确；

过作垂直于准线，垂足为，

所以的周长为，

当且仅当点的坐标为时取等号，D项正确.

故选：BCD.

12. 已知函数，则下列结论正确的是( )．

A. 函数有极小值

B. 函数在处切线与直线垂直

C. 若有三个实根，则的取值范围为

D. 若时，，则的最小值为3

【答案】AD

【解析】

【分析】对函数求导，利用极小值的定义、导数的几何意义逐一判断即可.

【详解】由已知，，当或时，，时，，

所以在和上递减，在上递增，极小值为，极大值为，A正确；

切线斜率，直线斜率，，两直线不垂直，B错误；

时，，时，，若有三个实根，则；当时，只有两个根，C错误；

若时，，则，的最小值为3，D正确．

故选：AD．

**第Ⅱ卷**

**三、填空题(本大题共4小题，每小题5分，共20分)**

13. 对任意都有.数列满足：，则\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_.

【答案】

【解析】

【分析】采用倒序相加法即可求得结果.

【详解】由题意得：，，，……，

，

，

，解得：.

故答案为：.

【点睛】本题考查利用倒序相加法求和的问题，属于基础题.

14. 若空间两个单位向量、与的夹角都等于，则\_\_\_\_\_\_．

【答案】.

【解析】

分析】利用空间向量夹角公式进行求解即可.

【详解】因为是单位向量，所以有，

因为与的夹角都等于，

所以，

所以有，

，

故答案为：

15. 设F1，F2是双曲线C，(a>0,b>0)的两个焦点．若在C上存在一点P．使PF1⊥PF2，且∠PF1F2=30°，则C的离心率为\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_.

【答案】；

【解析】

【详解】设点P在双曲线右支上,

由题意,在Rt△F1PF2中,

|F1F2|=2c,∠PF1F2=30°,

得|PF2|=c,|PF1|=c,

根据双曲线的定义:|PF1|-|PF2|=2a,

即(-1)c=2a,

e===+1.

16. 已知函数．为函数导函数，若对任意恒成立，则整数*k*的最大值为\_\_\_\_\_\_\_\_．

【答案】3

【解析】

【分析】先求得函数的导函数，转化问题为对恒成立，即求在时的最小值，令，构造函数，则再将问题转化为求在时的最大值，借助导函数判断的单调性，进而求解.

【详解】由题，，

因为，对恒成立，

则对恒成立，

令，

则对恒成立，

令，

则，令，

则当时，，所以在上单调递增，

又，，

，当，，则，此时单调递减；

当，，则，此时单调递增，

则，

又，代入，

则整数.

故答案为：3

**四、解答题(本大题共6小题，共70分.解答时应写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤)**

17. 已知为圆上的动点，的坐标为，在线段的中点.

(1)求的轨迹的方程.

(2)过点的直线与交于、两点，且，求直线的方程.

【答案】(1)；

(2)或.

【解析】

【分析】(1)设点的坐标为，*A*，由中点坐标公式可得，利用相关点法计算可得点的轨迹的方程.

(2)由题意可得原点到直线的距离，分直线斜率不存在与存在两种情况讨论，利用点到线的距离公式求出参数的值，即可得解.

【小问1详解】

解：设点的坐标为，点的坐标为，

依题意得，，解得，

又，所以，即，

所以点的轨迹的方程为.

【小问2详解】

解：因为直线与曲线交于、两点，且，

所以原点到直线的距离.

若斜率不存在，直线的方程为，此时符合题意；

若斜率存在，设直线的方程为，即，

则原点到直线的距离，解得，

此时直线的方程为，

所以直线的方程为或.

18. 已知数列的前项和为，且满足.

(1)求数列的通项公式；

(2)求数列的前项和.

【答案】(1)

(2)

【解析】

【分析】(1)根据计算即可；

(2)数列的前项和可用错位相减法求得．

【小问1详解】

解：当，，解得，

当时，，，

两式相减得，化简得，

所以数列是首项为，公比为的等比数列，

所以；

【小问2详解】

解：由(1)可得，

①，

 ②，

由①②得 

 ，

所以.

19. 已知函数.

(1)当时，求的图像在处的切线方程；

(2)若函数在上有两个零点，求实数的取值范围.

【答案】(1)

(2)

【解析】

【分析】(1)将代入，得到切点坐标，求导得到切线斜率，然后根据直线的点斜式方程，即可得到切线方程.

(2)根据导数求得函数的极值，求出端点值，，然后根据在上有两个零点，列出不等式求解即可得到的范围.

【小问1详解】

当时，，则，切点坐标为，

则切线的斜率，则函数的图像在处的切线方程为

即.

【小问2详解】

，

则，

，∴由，得*.*

当，，函数单调递增，

当时，，函数单调递减，

故当时，函数取得极大值，

又，，

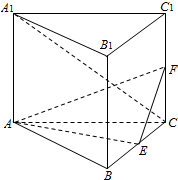
且，

∴在上有两个零点需满足条件，

解得

故实数取值范围是.

20. 如图，直三棱柱的底面是边长为2的正三角形，分别是的中点．



(１)证明：平面平面；

(２)若直线与平面所成的角为，求三棱锥的体积．

【答案】(Ⅰ)见解析；(Ⅱ) .

【解析】

【详解】试题分析：(１)由面面垂直的判定定理很容易得结论；(２)所求三棱锥底面积容易求得，是本题转化为求三棱锥的高，利用直线与平面所成的角为，作出线面角，进而可求得的值，则可得的长．

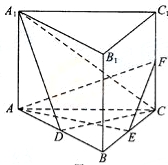
试题解析：(1)如图，因为三棱柱是直三棱柱，所以，

又是正三角形的边的中点，所以

又，因此平面

而平面，所以平面平面

(2)设的中点为，连结,



因为是正三角形，所以

又三棱柱是直三棱柱，所以

因此平面，于是为直线与平面所成的角，

由题设，，所以

在中，，所以

故三棱锥的体积

考点：直线与平面垂直的判定定理；直线与平面所成的角；几何体的体积．

21. 已知椭圆的离心率为，焦距为2．

(1)求的标准方程．

(2)过的右焦点*F*作相互垂直的两条直线，(均不垂直于*x*轴)，交于*A，B*两点，交 于*C，D*两点．设线段*AB，CD*的中点分别为*M，N*，证明：直线*MN*过定点．

【答案】(1)；(2)证明见解析．

【解析】

【分析】

(1)由焦点得，由离心率可求得，再由求得后可得椭圆方程；

(2)设直线*AB*的方程为，，，直线方程代入椭圆方程整理后应用韦达定理得，从而得点坐标，同理得点坐标，在直线斜率存在的情况下，求出直线斜率，得直线方程，由直线方程得定点坐标，然后说明斜率不存在时直线也过此定点．

【详解】(1)解：因为离心率，，且，

所以，，，

故的标准方程为．

(2)证明：由(1)知．

设直线*AB*的方程为，，，

联立方程组，消去*y*得

，

则，，

所以*M*的坐标为．

因为，所以*CD*的斜率为．

将*M*坐标中的*k*换为，可得*N*的坐标为．

当时，设直线*MN*的斜率为，

则，

所以直线*MN*的方程为，

即，则直线*MN*过定点．

当时，直线*MN*的方程为，也过点．

综上所述，直线*MN*过定点．

【点睛】方法点睛：本题考查求椭圆的标准方程，考查直线与椭圆相交中定点问题．解题方法是设而不求的思想方法．即设直线*AB*的方程为，，，直线方程代入椭圆方程整理后应用韦达定理得，从而可得中点坐标(用表示)，点坐标，然后求出直线方程后，通过方程得出定点．

22. 设函数.

(1)讨论的单调性；

(2)若函数存在两个零点，证明：.

【答案】(1)当时，在区间上单调递减；

当时在区间上单调递减，在区间上单调递增

(2)证明见解析.

【解析】

【分析】(1)求出函数的导数，分类讨论*a*的取值范围，根据导数的正负，即可得答案;

(2)利用函数零点可得，，整理变形可得，换元令，得，结合，需证明，由此构造函数，利用导数即可证明结论.

【小问1详解】

由于，则定义域为 ，

可得：，

当时，∵，∴，故在区间上单调递减；

当时，∵，∴由可得，由得，

故在区间上单调递减，在区间上单调递增.

【小问2详解】

证明：∵，，，不妨设，

则有，，

两式相加得，相减得，

消去得：，

令，则，

要证，即证，也就是要证，即证，

令，

∵

∴在上为增函数，，即成立，故.

【点睛】关键点点睛：利用导数证明关于函数零点的不等式问题，关键在于正确地变式消去参数，进而构造函数，本题中利用，，将两式相加减，进而消去*a*，可得，换元令，得，进而根据，需证，从而构造函数，解决问题.