**福州一中2022-2023学年第一学期第二学段模块考试**

**高二数学试卷**

**(完卷：120分钟 满分：150分)**

**一、选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分，在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.**

1. 过两直线的交点，且与直线垂直的直线方程为( )

A.  B.  C.  D. 

【答案】C

【解析】

【分析】求出两直线的交点坐标，求出所求直线的斜率，利用点斜式可得出所求直线的方程.

【详解】由，解得，得直线的交点为点．

因为所求直线与直线垂直，故所求直线的斜率，

因此，所求直线的方程为，即．

故选：C .

2. 已知为平面的一个法向量，为内的一点，则点到平面的距离为( )

A. 3 B.  C.  D. 

【答案】B

【解析】

【分析】根据给定条件，利用空间向量点到平面的距离公式计算作答.

【详解】依题意，，所以点到平面的距离.

故选：B

3. 已知抛物线的焦点为*F*，过*F*作倾斜角为的直线*l*交抛物线*C*与*A*、*B*两点，若线段*AB*中点的纵坐标为，则抛物线*C*的方程是( )

A.  B.  C.  D. 

【答案】C

【解析】

【分析】本题首先可设、，则、，然后两式相减，可得，再然后根据、两点在倾斜角为的直线上得出，最后根据线段中点的纵坐标为即可求出结果.

【详解】设，，则，，

两式相减得，即，

因为、两点在倾斜角为的直线上，

所以，即，

因为线段中点的纵坐标为，所以，

则，，抛物线的方程是，

故选：C.

4. 已知数列是等差数列，且，将去掉一项后，剩下三项依次为等比数列的前三项，则( )

A.  B.  C.  D. 

【答案】C

【解析】

【分析】根据给定条件，利用等差数列性质求出公差及通项公式，再确定等比数列的前三项作答.

【详解】在等差数列中，，解得，而，即有公差，

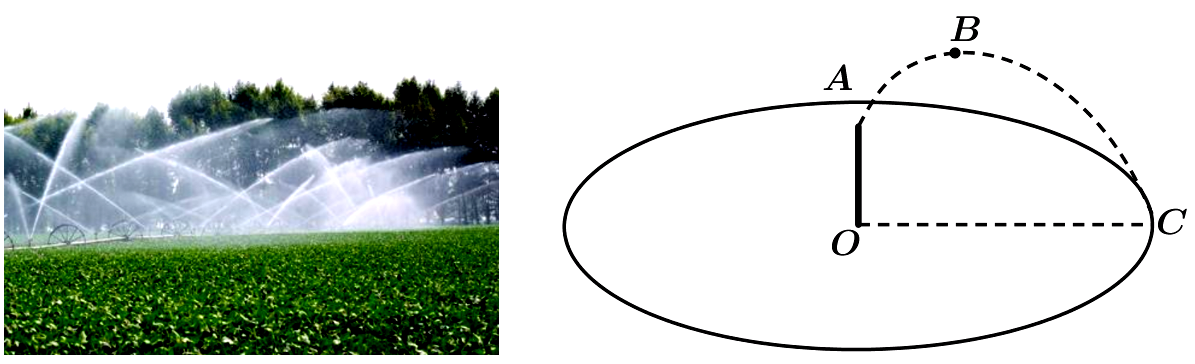
等差数列的通项，则，显然去掉，

成等比数列，则数列的首项为，公比，

所以.

故选：C

5. 某农场为节水推行喷灌技术，喷头装在管柱的顶端*A*处，喷出的水流在各个方向上呈抛物线状，如图所示.现要求水流最高点*B*离地面，点*B*到管柱所在直线的距离为，且水流落在地面上以*O*为圆心，以为半径的圆上，则管柱的高度为( )



A.  B.  C.  D. 

【答案】B

【解析】

【分析】根据题意建立合适平面直角坐标系，设出抛物线方程，根据的坐标求解出抛物线的方程，由的横坐标可计算出的纵坐标，结合长度可求解出的高度.

【详解】以为坐标原点建立平面直角坐标系如下图所示，记且垂足为，

在轴上的投影点为，设抛物线方程为，

由题意可知：，

所以，所以，代入抛物线方程可知，

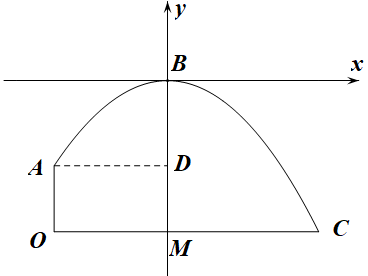
所以，所以抛物线方程为，

又因为，所以，

所以，所以，

所以的高度为，

故选：B.



6. 已知椭圆的左、右焦点分别是，*P*是椭圆*C*上一点，则的重心与椭圆*C*短轴顶点距离的最大值为( )

A. 1 B.  C.  D. 

【答案】D

【解析】

【分析】不妨设，，取短轴顶点为，重心，，根据二次函数性质得到最值.

【详解】根据对称性，不妨设，，取短轴顶点为，

椭圆，，，则重心，

，

当时，最大为.

故选：D

7. 画法几何的创始人——法国数学家加斯帕尔•蒙日发现：椭圆的任意两条互相垂直的切线的交点的轨迹是一个圆，它的圆心是椭圆的中心，半径等于长半轴长与短半轴长平方和的算术平方根，我们通常把这个圆称为该椭圆的蒙日圆.已知椭圆*C*的离心率为，*M*为其蒙日圆上一动点，过点*M*作椭圆*C*的两条切线，与蒙日圆分别交于*P*，*Q*两点，若面积的最大值为36，则椭圆*C*的长轴长为( )

A.  B.  C.  D. 

【答案】B

【解析】

【分析】结合离心率设出椭圆的方程，确定出椭圆的蒙日圆的直径，再利用垂直关系借助勾股定理及均值不等式求解作答.

【详解】令椭圆的对称轴为坐标轴，焦点在*x*轴上，设椭圆方程为，其半焦距为*c*，有，即，

则该椭圆的蒙日圆方程为，因为点均在这个圆上，且，

于是是这个圆的直径，而，即有，

因此，当且仅当时取等号，即，

的面积，即面积的最大值为，则，解得，则，

所以椭圆*C*的长轴长为.

故选：B

8. 已知数列的前*n*项和为，且，则使得成立的*n*的最大值为( )

A. 32 B. 33 C. 44 D. 45

【答案】C

【解析】

【分析】分奇偶项讨论，根据题意利用并项求和求，运算求解即可.

【详解】当为偶数时，

，

令，且*n*为偶数，

解得，故*n*的最大值为44；

当为奇数时，

，

令，且为奇数，

解得，故*n*的最大值为43；

综上所述：*n*最大值为44.

故选：C.

【点睛】方法点睛：并项求和适用的条件和注意事项：

1.适用条件：数列中出现等形式时，常用利用并项求和求；

2.注意分类讨论的应用，比如奇偶项，同时还需注意起止项的处理.

**二、选择题：本题共4小题，每小题5分，共20分.在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求.全部选对的得5分，部分选对的得2分，有选错的得0分.**

9. 已知分别是双曲线的左，右焦点，*P*是*C*上一点，且，则( )

A. 双曲线*C*的离心率为 B. 双曲线*C*的渐近线方程为

C. 的周长为18 D. 的面积为9

【答案】ABD

【解析】

【分析】由双曲线方程直接求离心率、并写出渐近线方程，即可判断A、B正误；利用双曲线的定义结合，求出，即可求出焦点三角形的周长和面积可判断C，D.

【详解】在双曲线中，，，

，故离心率，即A正确；

双曲线的渐近线方程为，即B正确；

不妨设点为*C*右支上一点，由双曲线的定义知，，，

又，则，解得：，则，

△的周长为，即C不正确；

因为，所以的面积为:

，故D正确,

故选：ABD.

10. 已知数列满足，，记数列的前项和为，则( )

A.  B. 

C.  D. 

【答案】CD

【解析】

【分析】根据递推公式求出、、，即可找到规律得到数列是以为周期的周期数列，即可判断A、B、D，再根据递推公式表示出，即可得到，从而判断C.

【详解】解：因为，，

所以，故A错误；

，，所以数列是以为周期的周期数列，

所以，故B错误；

因为，，

所以，故C正确；

，故D正确；

故选：CD

11. 已知点*F*为椭圆*C*：，的左焦点，过原点*O*的直线*l*交椭圆于*P*，*Q*两点，点*M*是椭圆上异于*P*，*Q*的一点，直线*MP*，*MQ*的斜率分别为，，椭圆的离心率为*e*，若，，则( )

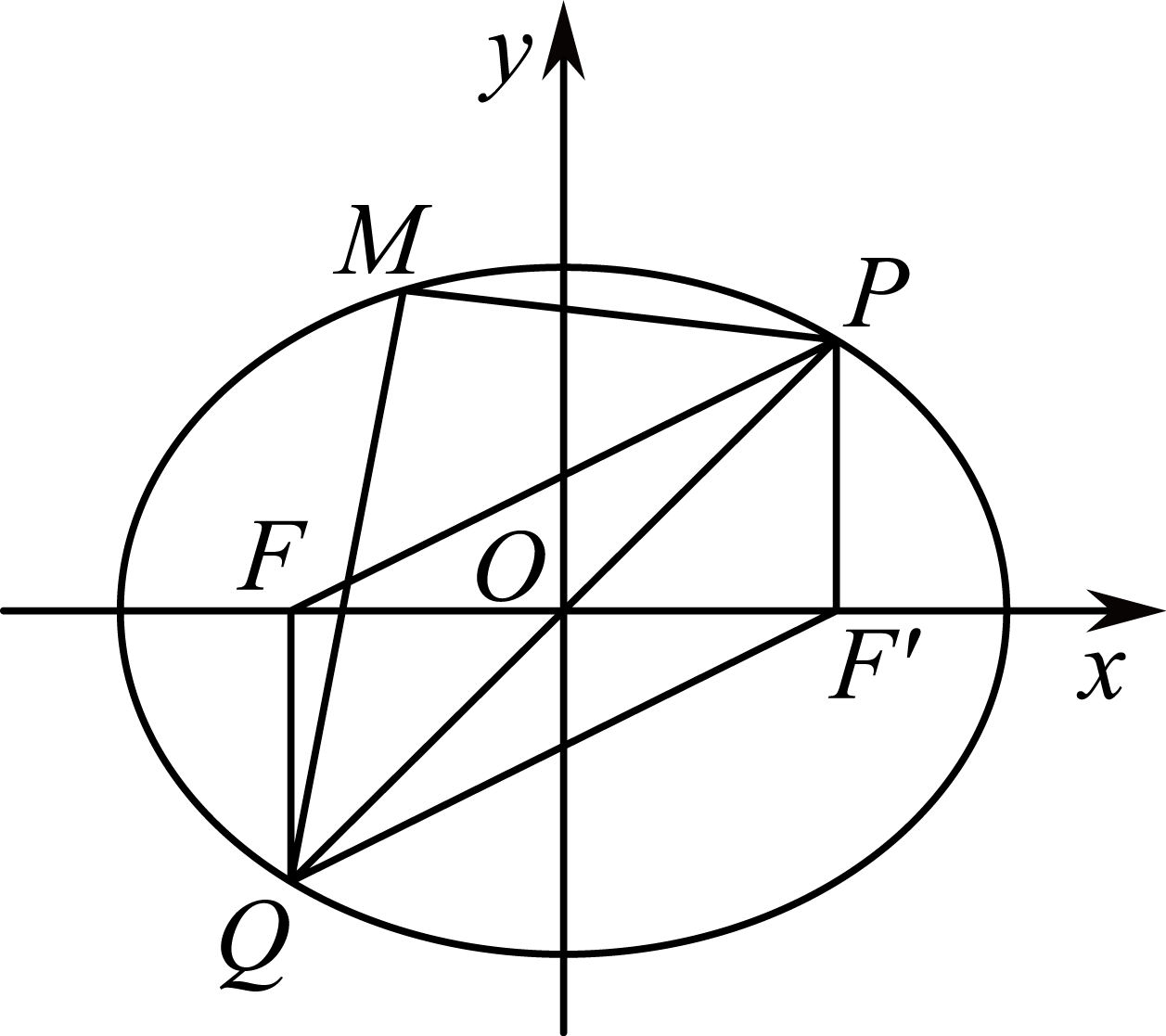
A.  B.  C.  D. 

【答案】BD

【解析】

【分析】设出右焦点，根据椭圆定义结合对称性以及余弦定理得到关系，则离心率可求，设出坐标，利用点差法可求得的表示，结合关系可求解出的值.

【详解】连接，根据椭圆对称性可知四边形为平行四边形，则，且由，可得,



所以,则.

由余弦定理可得，

化简得，故，所以(负舍)

设，则，

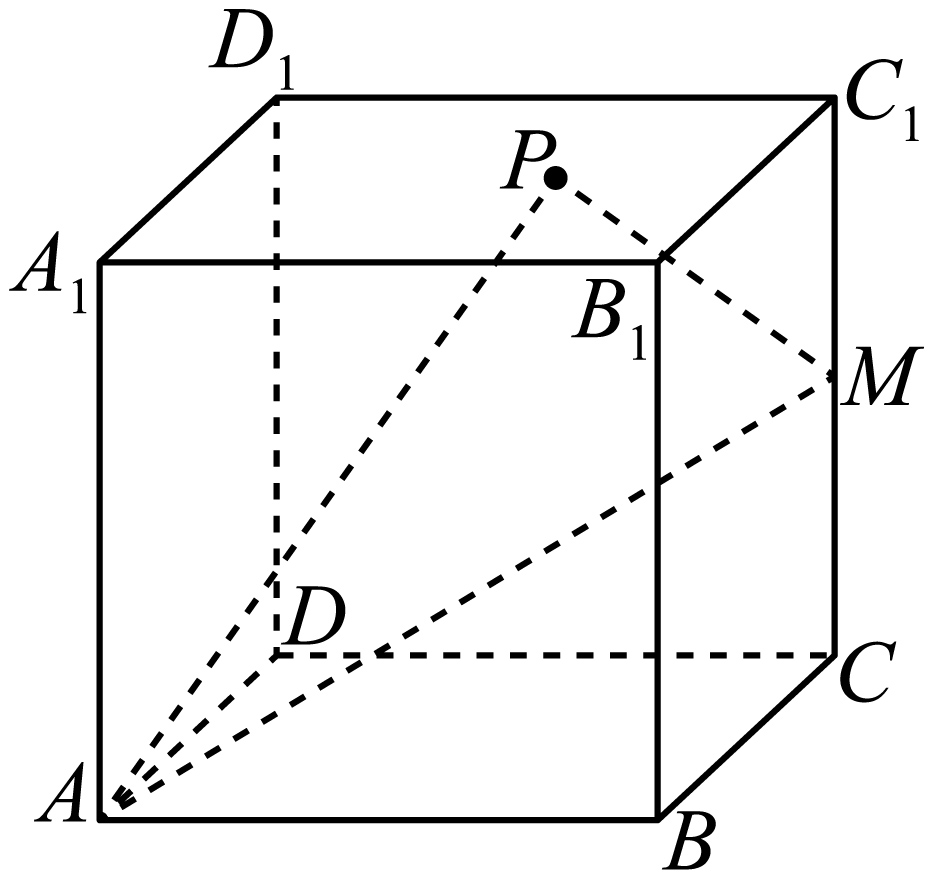
所以，又，相减可得．

因为，所以，，所以.

故选：BD.

【点睛】解答本题的关键在于合理运用焦点三角形的知识以及点差法设而不求的思想去计算；椭圆是一个对称图形，任何过原点的直线(不与焦点所在轴重合)与椭圆相交于两点，这两点与椭圆的焦点构成的四边形为平行四边形.

12. 如图，已知正方体棱长为2，点*M*为的中点，点*P*为底面上的动点，则( )



A. 满足平面的点*P*的轨迹长度为

B. 满足的点*P*的轨迹长度为

C. 存在点*P*满足

D. 以点*B*为球心，为半径的球面与面的交线长为

【答案】AD

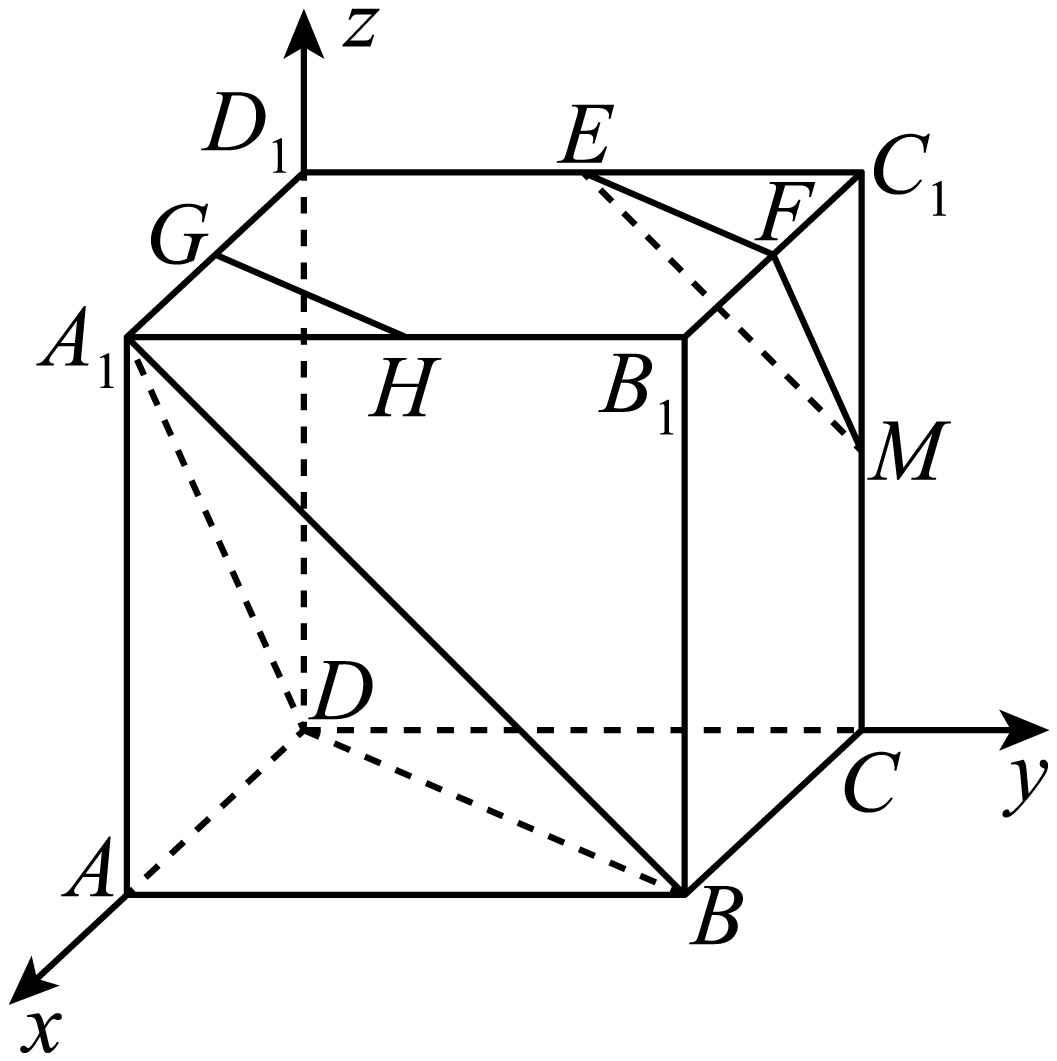
【解析】

【分析】对选项A，利用面面平行的性质证明线面平面，进而求出轨迹长度；

对选项B，建立空间直角坐标系，利用向量垂直求出点*P*轨迹，进而求出轨迹长度；

对选项C，建立空间直角坐标系，利用距离公式求出点*P*轨迹满足的方程，再结合二次方程的判别式，进而判断不存在这样的点*P*；

对选项D，利用等体积法求出球心点*B*到面的距离，进而求出交线长度；

【详解】

分别取的中点为，连接.

可得：，.

又有：.

可得：平面平面.

故满足平面的点*P*的轨迹长度为，故答案A正确；

建立如图所示的空间直角坐标系

可得：，，，，.

设，可得：，，，.

由，可得：.

分别取的中点为，点满足方程，说明点在平面内的轨迹为一条线段，则满足的点*P*的轨迹长度为，故答案B错误.

要使，只需：.

可得：().

化简可得：().

则：，即当时，.显然该方程无解，

故不存在这样的点，故答案C错误.

为正三角形，设点到平面的距离为，点平面的距离为.

由等体积法，可得：.

可得：，即

故以点*B*为球心，为半径的球面与面的交线长为：

故答案D正确.

故选：AD

【点睛】(1)与球有关的组合体问题，一种是内切，一种是外接．解题时要认真分析图形，明确切点和接点的位置，确定有关元素间的数量关系，并作出合适的截面图；

(2)用向量方法解决立体几何问题，树立“基底”意识，利用基向量进行线性运算，要理解空间向量概念、性质、运算，注意和平面向量类比；

**三、填空题；本题共4小题，每小题5分，共20分.**

13. 设等差数列的前*n*项和为，若对任意正整数*n*，都有，则整数\_\_\_\_\_\_.

【答案】18

【解析】

【分析】根据给定条件，利用等差数列前*n*项和公式，结合通项的性质计算判断其所有负数项作答.

【详解】等差数列中，，则，

又，则，即有，

于是数列的公差，即是递增等差数列，其前18项均为负数，从第19项起为正数，

因此，所以对任意正整数*n*，都有的整数.

故答案为：18

14. 已知圆，若圆*C*与*y*轴交于*M*，*N*两点，且，则\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_．

【答案】2

【解析】

【分析】首先通过的关系，得，然后根据圆的垂径定理构造关于的方程，解方程即可求出半径.

【详解】由题意知的圆心，半径为*r*，

圆心到*y*轴的距离为1，

因为圆*C*与*y*轴交于*M*，*N*两点，且，

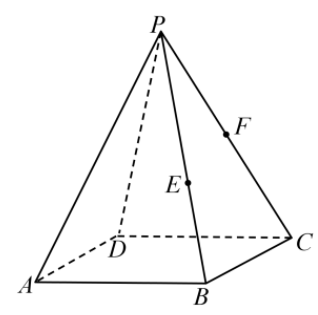
，所以，

由垂径定理得，，

即，解得．

故答案为：2．

15. 如图所示的木质正四棱锥模型，过点作一个平面分别交，，于点*E*，*F*，*G*，若，，则的值为\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_.



【答案】

【解析】

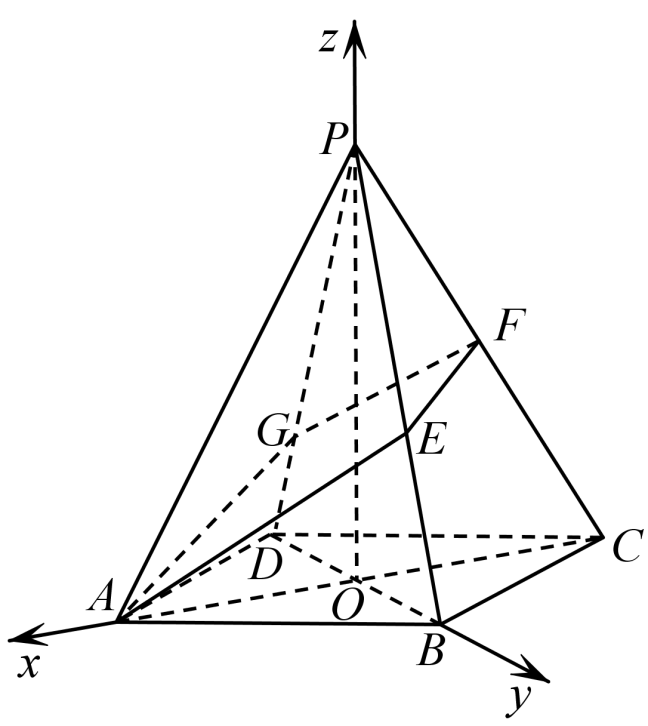
【分析】以*AC*、*BD*交点*O*为坐标原点，射线*OA*、*OB*、*OP*为*x*、*y*、*z*轴正方向建立空间直角坐标系，设，，，， (*a*、*b*>0)，进而写出、、、坐标，可得，，由四点共面有，设，求值即可得答案.

【详解】在正四棱锥中，连接交于点，连接,则平面，

以*AC*、*BD*交点*O*为坐标原点，射线*OA*、*OB*、*OP*为*x*、*y*、*z*轴正方向建立空间直角坐标系，

设，，，， (*a*、*b*>0)，则，，，，

∴，，



由题意四点共面，则有，其中，

设，

∴

由方程组，即，解得，

所以，

故选：C.

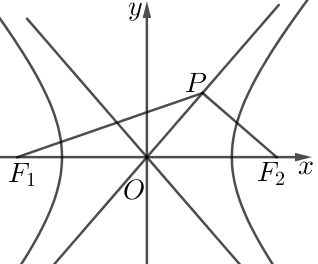
16. 设分别是双曲线的左、右焦点，*O*是坐标原点，过作*C*的一条渐近线的垂线，垂足为*P*，若，则双曲线*C*的离心率为\_\_\_\_\_\_\_.

【答案】##

【解析】

【分析】根据给定条件，求出，再借助平面向量数量积的运算律建立关系求解作答.

【详解】依题意，不妨令双曲线*C*的一条渐近线为，半焦距为*c*，即，如图，



则，有，而，

在中，，又*O*为线段中点，

由，且得：，

因此，即，则有，即，解得，

所以双曲线*C*的离心率为.

故答案为：

【点睛】方法点睛：求解椭圆或双曲线的离心率的三种方法：(1)定义法：通过已知条件列出方程组，求得得值，根据离心率的定义求解离心率；(2)齐次式法：由已知条件得出关于的二元齐次方程，然后转化为关于的一元二次方程求解；(3)特殊值法：通过取特殊值或特殊位置，求出离心率.

**四、解答题：本题共6小题，共70分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.**

17. 已知圆.

(1)设点，过点*M*作直线*l*与圆*C*交于*A*，*B*两点，若，求直线*l*的方程；

(2)设*P*是直线上一点，过*P*作圆*C*的切线*PE*，*PF*，切点分别为*E*，*F*，求的最小值.

【答案】(1)或；

(2)50.

【解析】

【分析】(1)根据给定条件，求出圆心到直线*l*的距离，再按斜率不存在和存在两种情况求解作答.

(2)求出圆心到给定直线的距离，利用圆的切线的性质，结合四边形面积建立关系式，即可推理计算作答.

【小问1详解】

圆的圆心，半径，

因为直线*l*被圆*C*截得的弦*AB*长为8，则圆心*C*到直线*l*的距离为，

因为点到直线的距离为3，因此直线*l*的方程可为：，

当直线*l*的斜率存在时，设直线*l*的方程为：，即，

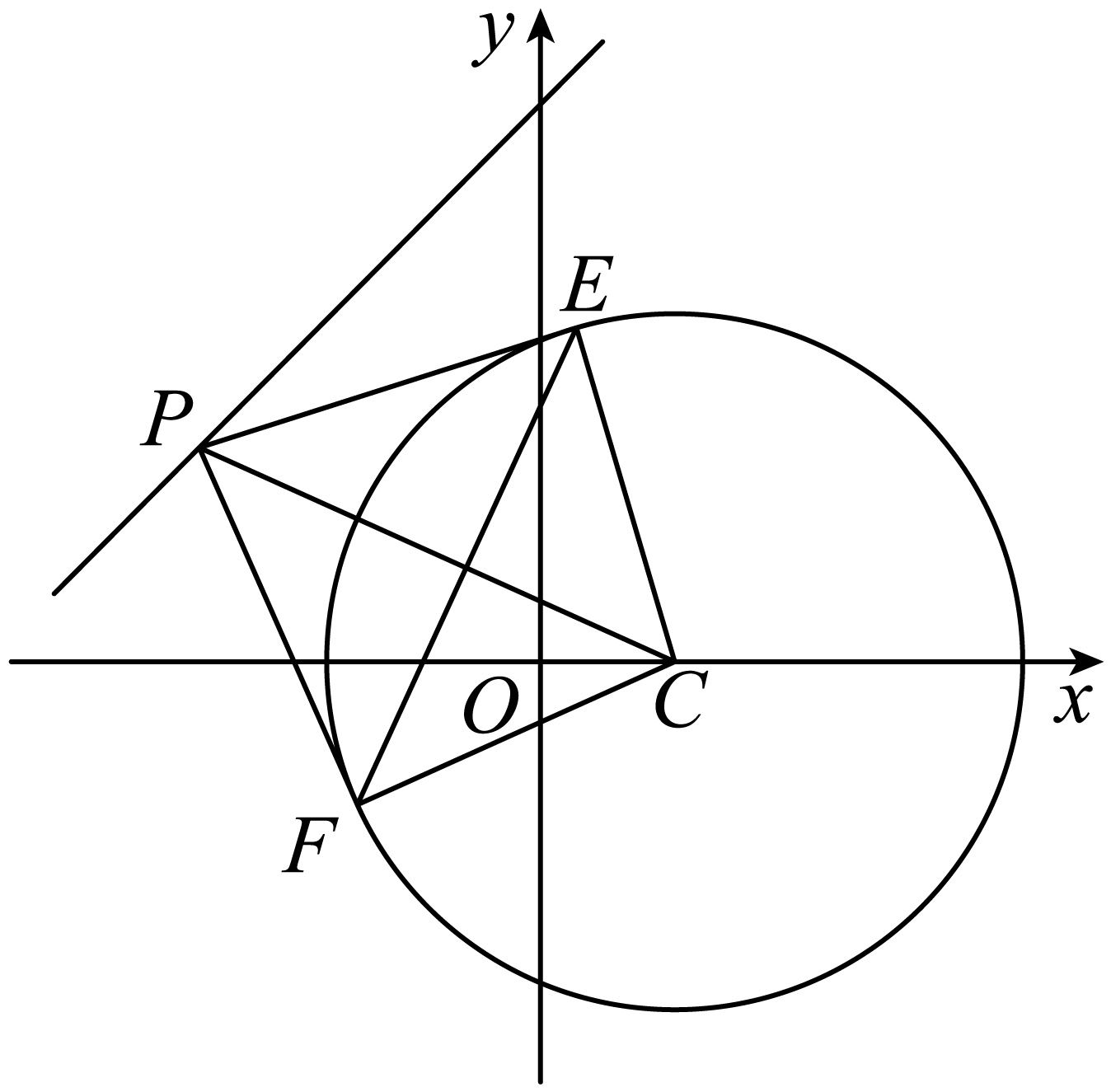
则有，解得，直线*l*的方程为：，即，

所以直线*l*的方程为或.

【小问2详解】

由(1)知，圆心到直线的距离，

依题意，，≌，*PC*垂直平分弦*EF*，如图，



四边形面积，

于是

，当且仅当垂直于直线时取等号，

所以的最小值为50.

18. 已知数列的前*n*项和为，从条件①、条件②这两个条件中选择一个条件作为已知，解答下列问题.

(1)求数列的通项公式；

(2)设，记的前*n*项和为，若对任意正整数*n*，都有，求实数的取值范围.

条件①，且；条件②为等比数列，且满足；

注：如果选择多个条件分别解答，按第一个解答计分.

【答案】(1)

(2)

【解析】

【分析】(1)若选择①得到，得到等比数列公比为，计算得到，若选择②，计算，得到公比，计算得到通项公式.

(2)确定，，利用裂项相消法得到，得到取值范围.

【小问1详解】

若选择条件①：且，则，

两式相减，，

为公比的等比数列，，，解得，；

若选择条件②：为等比数列，且满足，

，，

，.

【小问2详解】

，，

，

，，故，

不等式恒成立，，即.

19. 已知为椭圆的左焦点，过原点的动直线与交于、两点．当的坐标为时，．

(Ⅰ)求椭圆的标准方程；

(Ⅱ)延长交椭圆于，求的面积的最大值．

【答案】(Ⅰ)(Ⅱ)

【解析】

【分析】(Ⅰ)由已知求得，再由，解得，．则椭圆的标准方程可求；

(Ⅱ)当直线斜率不存在时，：，求出三角形的面积；当所在直线斜率存在时，设：．联立直线方程与椭圆方程，利用弦长公式求，再由点到直线距离公式求到的距离，得到到的距离，代入三角形面积公式，换元后利用二次函数的性质求最值．

【详解】解：(Ⅰ)由，得，

而，∴，即．

由，解得，．

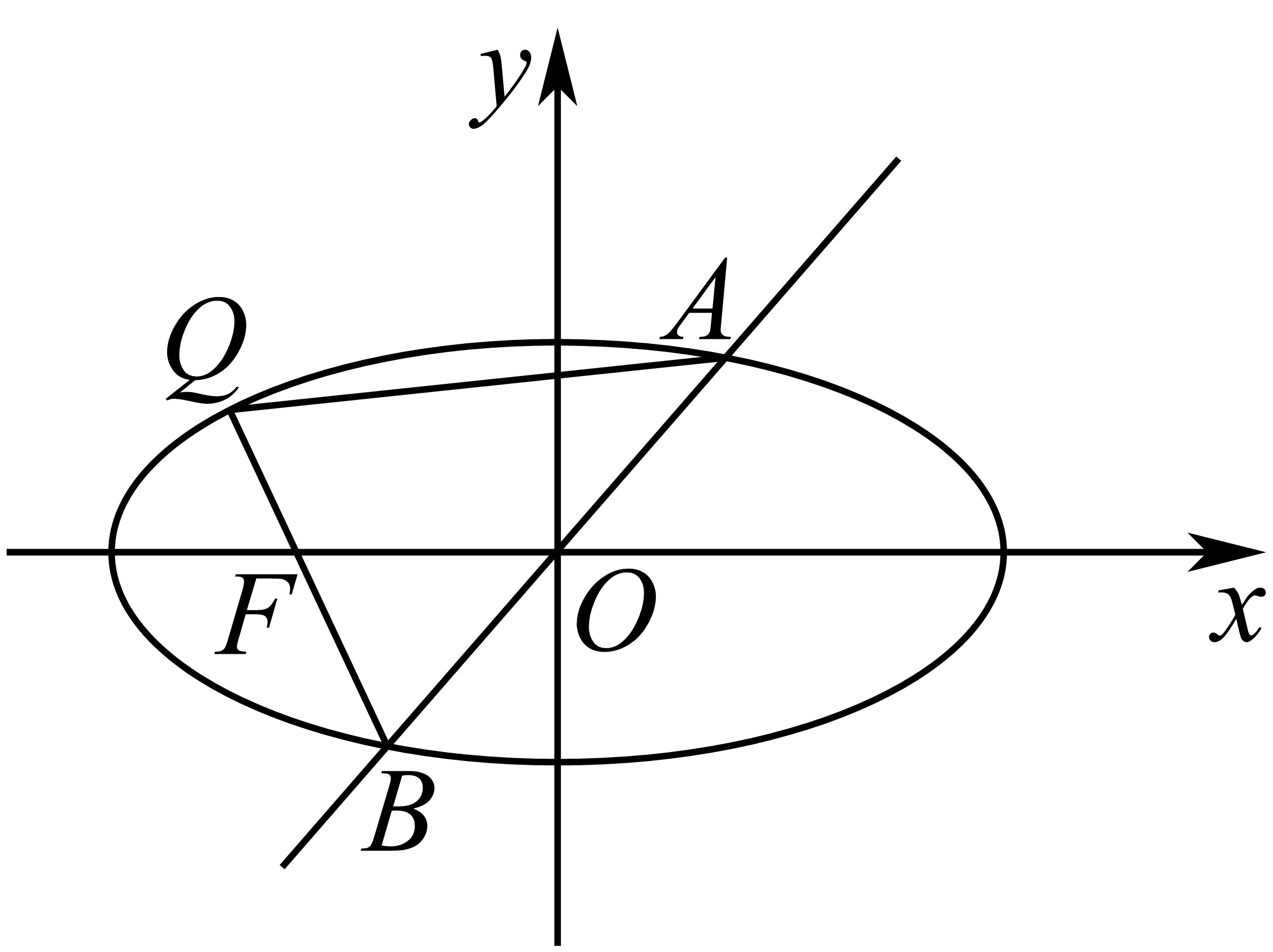
∴椭圆的标准方程为；

(Ⅱ)当直线斜率不存在时，：，

此时，，，

；

当所直线斜率存在时，



设：．

联立，得．

设，，

则，．

则

．

到的距离，则到的距离为．

∴．

令，

则．

当时，．

综上，的面积的最大值为．

【点睛】本题主要考查了椭圆的简单性质及方程思想，还考查了韦达定理及弦长公式，考查了点到直线的距离公式及转化能力，还考查了换元思想及计算能力，属于难题．

20. 某林场去年底森林木材储存量为100万，若树木以每年20%的增长率生长，计划从今年起，每年底要砍伐*x*万木材，记为第*n*年年底的木材储存量.

(1)写出；写出数列的递推公式；

(2)为了实现经过10年木材储存量翻两番(原来的4倍)的目标，每年砍伐的木材量*x*的最大值是多少?(精确到0.1万)

参考数据：.

【答案】(1)，，；

(2)万.

【解析】

【分析】(1)根据给定的信息求出，数列的递推公式作答.

(2)由(1)的递推公式求出数列的通项公式，再列出不等式求解作答.

【小问1详解】

依题意，，，

，所以数列的递推公式是.

【小问2详解】

由(1)知，，，则，

若，则，有，即，

若，则，于是数列是以为首项，为公比的等比数列，

则有，即，当时，上式也成立，

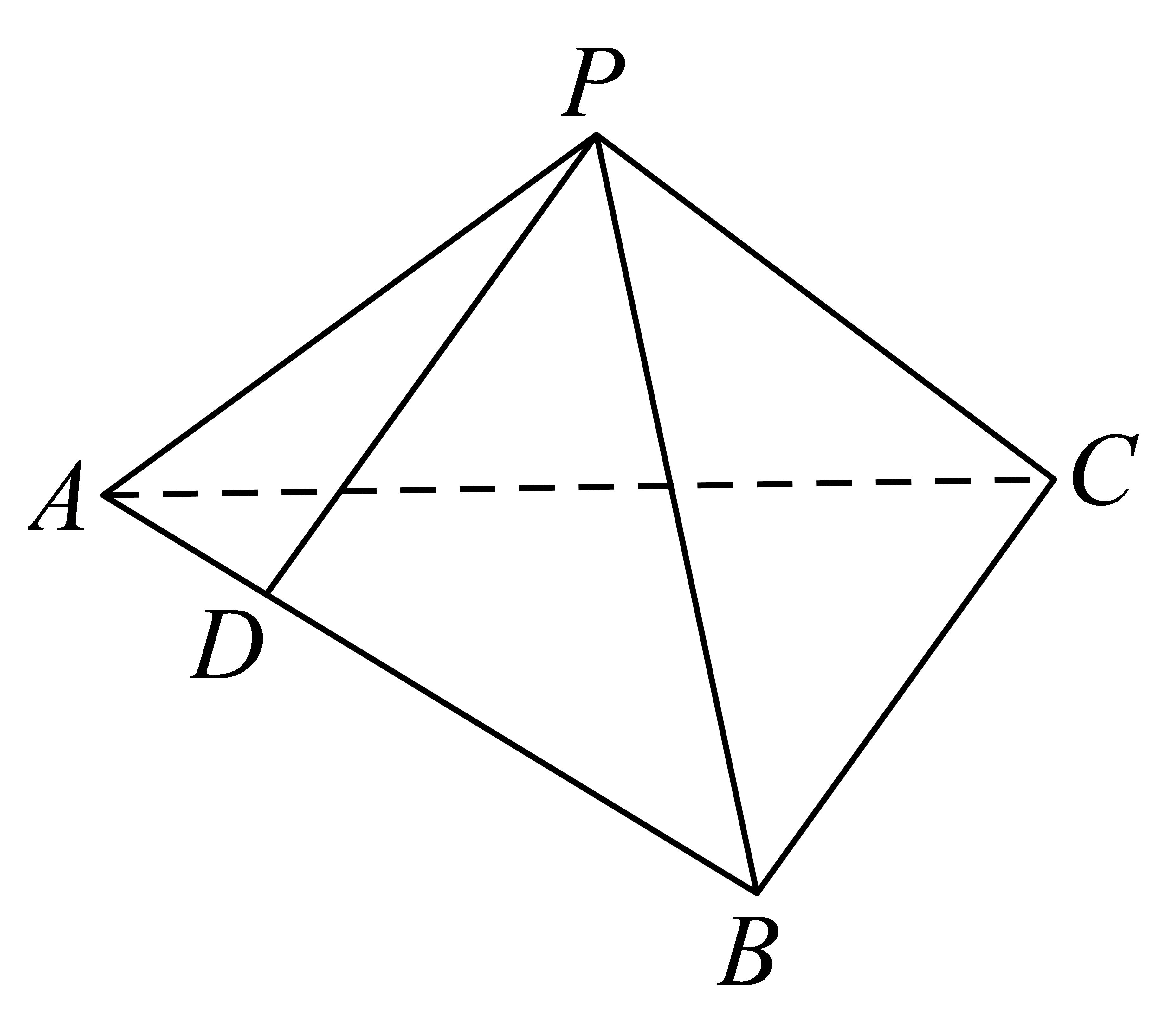
因此，，

因为10年木材量翻两番，即，则，而，

从而，解得，

所以每年砍伐的木材量*x*的最大值是万.

21. 如图，在三棱锥中，，，*D*为棱*AB*上一点，，，



(1)证明：平面平面*ABC*；

(2)线段*PD*上是否存在点*M*，使直线*AP*与平面*MBC*所成角的正弦值为?若存在，求出的值；若不存在，请说明理由.

【答案】(1)证明见解析；

(2)存在，.

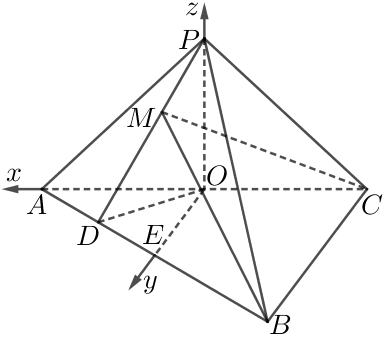
【解析】

【分析】(1)取*AC*中点*O*，连接*OP*，*OD*，利用余弦定理计算*OD*，并证明，再利用线面垂直、面面垂直的判定推理作答.

(2)取*AB*的中点，以*O*为原点建立空间直角坐标系，利用空间向量求解作答.

【小问1详解】

在三棱锥中，取*AC*中点*O*，连接*OP*，*OD*，如图，



因为，则，而，于是，又，，

有，而，即有，中，由余弦定理得：

，有，

因此，而平面，则平面，又平面，

所以平面平面.

【小问2详解】

取*AB*中点*E*，连接，则，由(1)知两两垂直，

以*O*为坐标原点，射线分别为轴非负半轴建立空间直角坐标系，

则，

，假设存在符合条件的点，

令，，，，

设平面的法向量，则，

令，得，令直线*AP*与平面*MBC*所成的角为，

则，

而，解得，

所以存在符合条件的点*M*，.

【点睛】关键点睛：用向量法求直线与平面所成的角，求出平面的法向量是关键，并注意公式求出的是线面角的正弦．

22. 已知双曲线的左､右焦点分别为，点在*C*上，且.

(1)求*C*方程；

(2)斜率为的直线*l*与*C*交于*A*，*B*两点，点*B*关于原点的对称点为*D*.若直线的斜率存在且分别为，证明：为定值.

【答案】(1)；(2)证明见解析.

【解析】

【分析】(1)由点的坐标求*c*,再根据双曲线定义求*a*,即可求解；

(2)设直线*l*方程为，直接求出的斜率，联立直线与双曲线方程，利用韦达定理，化简即可求解.

【详解】(1)设，，其中.

因为，所以，

解得或，又，故.

所以，即.

所以.

所以*C*的方程为.

(2)设，，则

设直线*l*方程为，与双曲线*C*方程联立，

消去*y*得，.

由，得.

，.

所以.

所以

.

所以为定值.

【点睛】关键点点睛：设直线*l*方程为，联立直线与双曲线方程，消元，由韦达定理可得，，计算斜率化简是解题关键，属于中档题.