**2022-2023学年度上学期期末考试高二年级**

**数学试卷**

**一、单选题：本题共8小题，每小题5分，共40分.在㙁小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.**

1. 直线和直线的位置关系是( )

A. 平行 B. 相交但不垂直 C. 垂直 D. 重合

【答案】B

【解析】

【分析】根据两直线的方程求出各自的斜率，然后斜率的关系进行判断即可.

【详解】方程可化为，因此该直线的斜率.

方程可化为，因此该直线的斜率，

因为，所以这两条直线相交但不垂直.

故选：B.

2. 若直线的方向向量与平面的法向量的夹角等于，则直线与平面的所成的角等于( )

A.  B.  C.  D. 以上均错

【答案】A

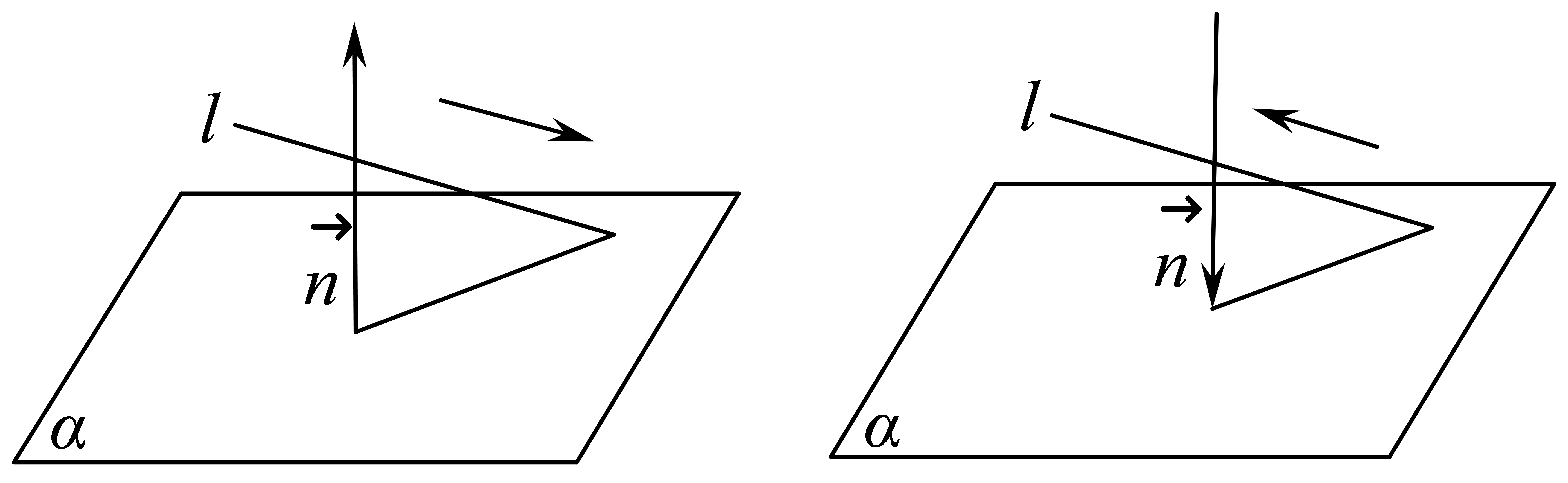
【解析】

【分析】利用直线的方向向量与法向量的夹角与线面角的关系可求答案.

【详解】因为直线的方向向量与平面的法向量的夹角等于，

所以直线与平面的所成的角为.

故选：A.



3. 在平面内，已知定点及定直线，记动点到的距离为，则“”是“点的轨迹是以点为焦点，直线为准线的抛物线”的( )

A. 充要条件 B. 充分不必要条件

C. 必要不充分条件 D. 既不充分也不必要条件

【答案】C

【解析】

【分析】根据抛物线的定义和利用充分条件和必要条件的定义进行判断.

【详解】“点的轨迹是以点为焦点，直线为准线的抛物线”“”， 反之不成立，直线经过定点，轨迹不是抛物线.因此“”是“点的轨迹是以点为焦点，直线为准线的抛物线”的必要不充分条件.

故选：C.

4. 的展开式中的系数为( )

A.  B.  C.  D. 192

【答案】B

【解析】

【分析】由，根据单项式与多项式的乘法法则结合二项式定理求展开式中的系数.

【详解】因为，

因为的展开式的通项，

所以的展开式中含的项为，其系数为，

所以的展开式中含的项为，其系数为，

所以的展开式中的系数为.

故选：B.

5. 正方体中，直线与平面所成的角为( )

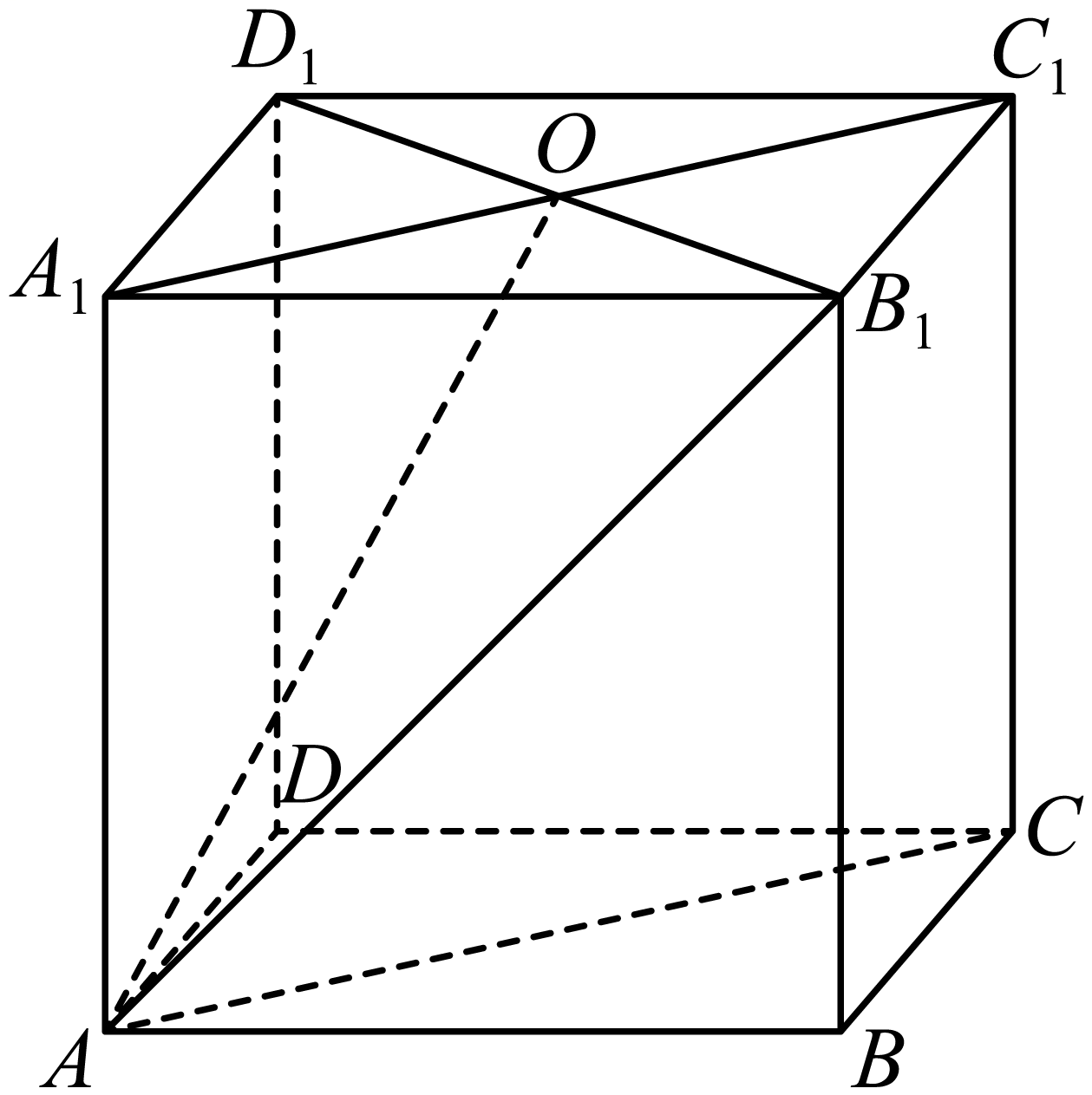
A.  B.  C.  D. 

【答案】A

【解析】

【分析】根据给定条件，作出直线与平面所成的角，再在三角形中求解作答.

【详解】正方体中，连接，连接，如图，



则有，而平面，平面，即有，

又平面，因此平面，

则是直线与平面所成的角，

在中，，，则有，

所以直线与平面所成的角为.

故选：A

6. 用这九个数字组成的无重复数字的四位奇数中，各位数字之和为偶数的共有( )

A. 120个 B. 600个 C. 720个 D. 840个

【答案】D

【解析】

【分析】首先根据题意将问题分成四位均为奇数和四位中两位偶数两位奇数两种情况，然后分别计算两种情况所包含的四位奇数个数，最后根据分类相加原理即可求出总共个数.

【详解】根据题意，若想组成四位奇数且各位数字之和为偶数，分以下两种情况：

(1)四位数均为奇数：包含种；

(2)四位数中两位奇数两位偶数：包含种.

综上所述一共包含个.

故选：D

7. 已知椭圆的左、右焦点分別为为椭圆上一点，且，若关于平分线的对称点在椭圆上，则的面积为( )

A.  B.  C.  D. 

【答案】C

【解析】

【分析】设关于平分线的对称点为*Q*，结合角平分线的性质可得是正三角形，再运用椭圆定义求得，，根据三角形面积公式求的面积即可.

【详解】设椭圆的长半轴为，则

设关于平分线的对称点为*Q*，

由椭圆对称性及角平分线性质可知*P*，，*Q*三点共线且

又因为，所以是正三角形，

设，

由椭圆定义可得，，

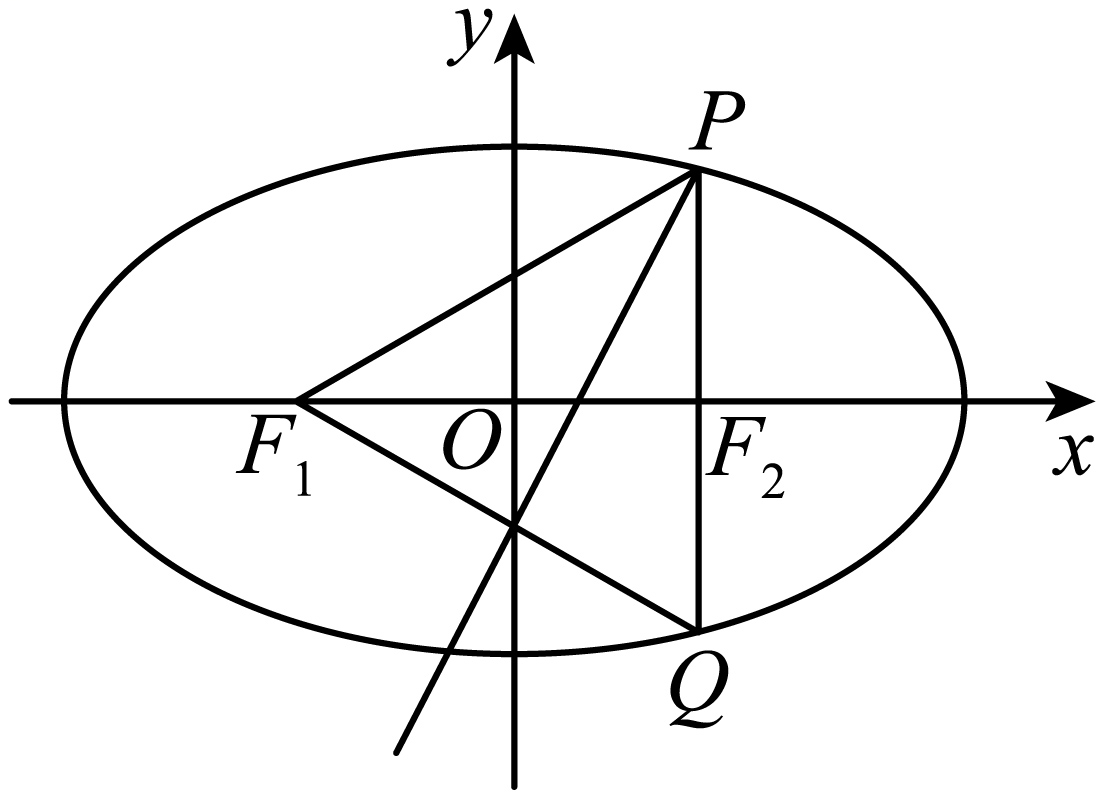
又，

所以，

所以，即，，

所以的面积.

故选：C.



8. 我国著名数学家华罗庚曾说“数缺形时少直观，形少数时难入微；数形结合百般好，隔离分家万事休.”事实上，很多代数问题可以都转化为几何问题加以解决，列如，与相关的代数问题，可以转化为点与点之间的距离的几何问题.已知点在直线，点在直线上，且，结合上述观点，的最小值为( )

A.  B.  C.  D. 5

【答案】D

【解析】

【分析】根据两点距离公式将目标函数转化为点到点的距离与点到点的距离和，过点作，垂足为，证明，由 求目标函数最小值.

【详解】由已知表示点到点的距离，

表示点到点的距离，

所以，

过点作，垂足为，

因为直线的方程为，，

所以，

又直线与直线平行，，

所以，

所以，

所以四边形为平行四边形，

所以，

所以，

又，

当且仅当三点共线时等号成立，

所以当点为线段与直线的交点时，

取最小值，最小值为，

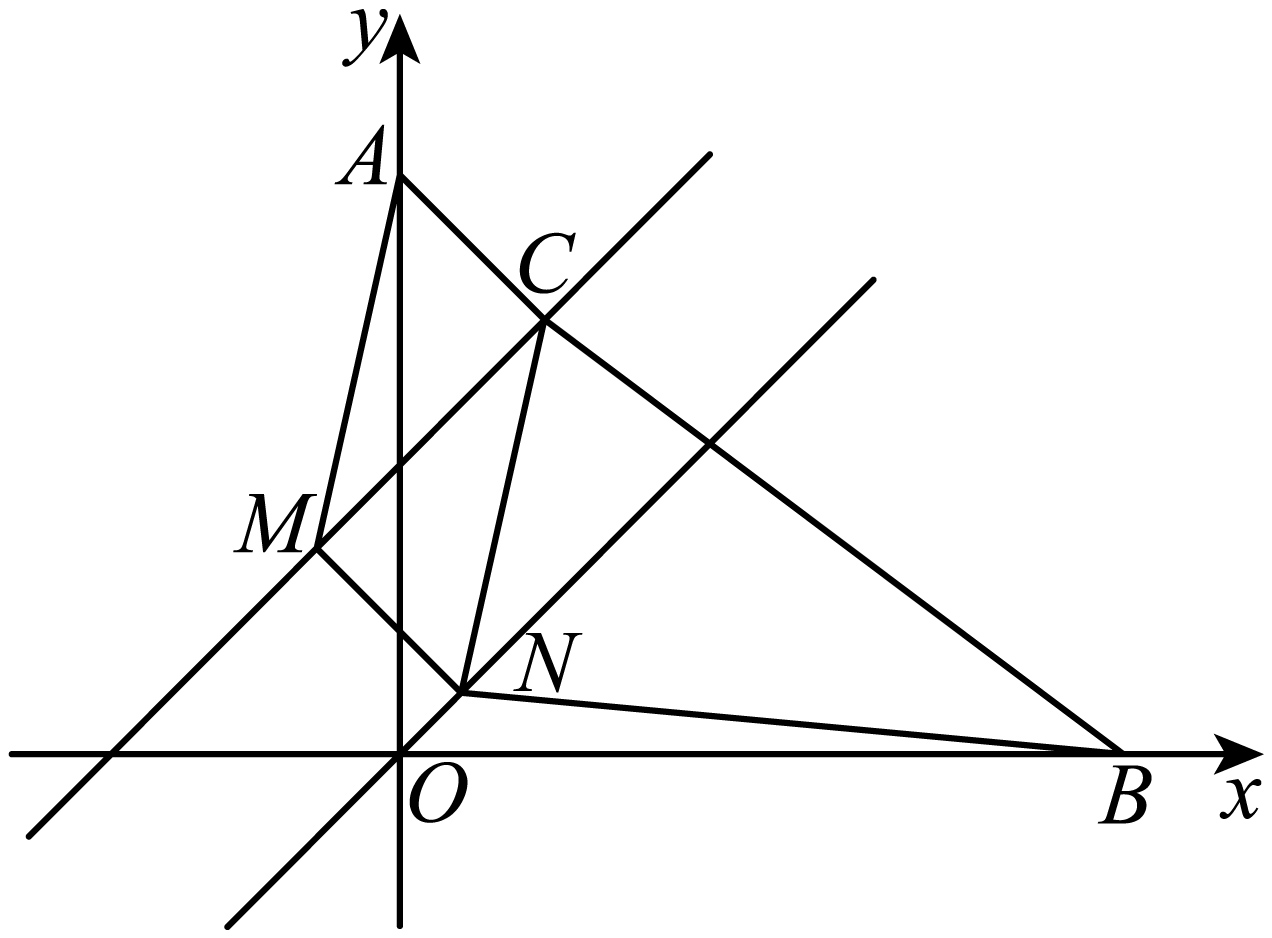
因为过点与直线垂直的直线的方程为，

联立，可得，

所以点的坐标为，所以，

所以最小值为，

故选：D.



【点睛】本题解决的关键在于根据两点距离公式将目标函数转化为求线段的距离和问题，进一步结合图形将问题转化为两点之间的距离问题.

**二、多选题：本题共4小题，每小题5分，共20分.在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求.全部选对的得5分，部分选对的得2分，有选错的得0分.**

9. 已知双曲线，则不因的变化而变化的是( )

A. 顶点坐标 B. 渐近线方程 C. 焦距 D. 离心率

【答案】BD

【解析】

【分析】将双曲线方程整理为标准方程，写出顶点坐标，渐近线方程，焦距和离心率，，判断是否因改变而变化，即可得解.

【详解】整理双曲线方程可得，

所以，， ，

所以顶点坐标为或，A错误；

渐近线方程为，B正确；

该双曲线焦距为：，C错误；

离心率为：，D正确；

不因改变而变化的是离心率与渐近线方程.

故选：BD.

10. 下列有关排列数、组合数的等式中，正确的是( )

A.  B. 

C.  D. 

【答案】BC

【解析】

【分析】对于AC,根据组合数的公式即可;对于B，根据排列数的公式即可;对于D，根据二项式定理即可.

【详解】对于A, ,故A错误；

对于B，，故B正确；

对于C，组合数的性质，，故C正确；

对于D，由二项式定理知，=，故D错误；

故选：BC.

11. 已知点，点，点在抛物线上，则( )

A. 当时，最小值为1 B. 当吋，的最小值为4

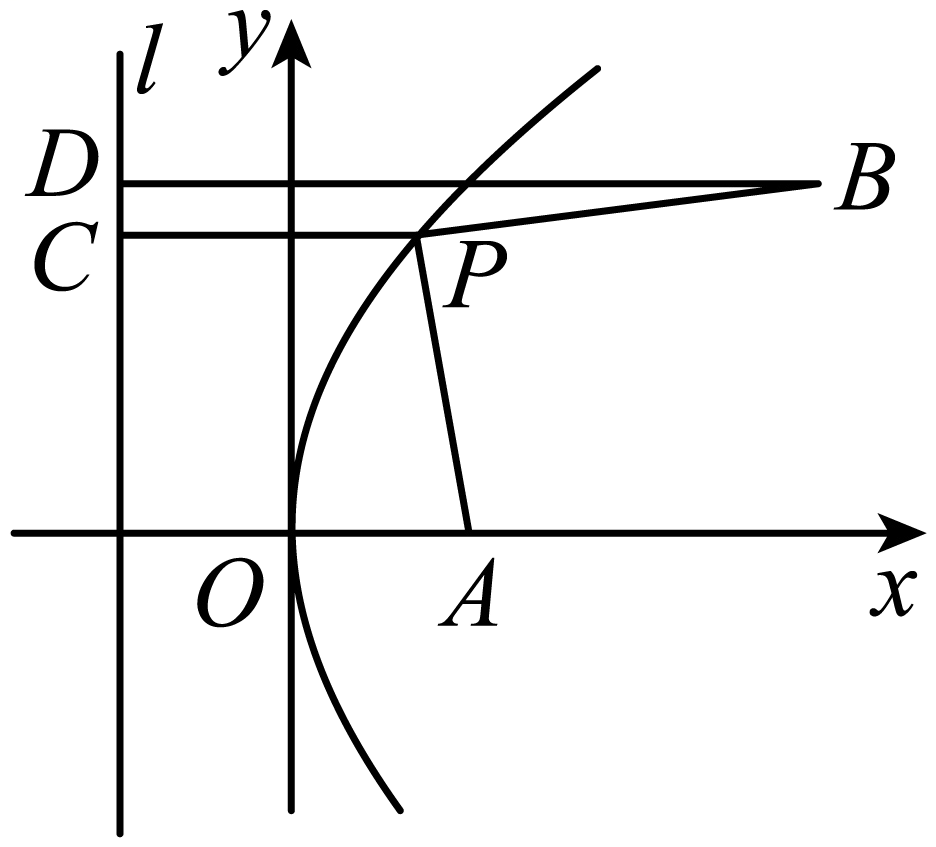
C. 当时，的最小值为3 D. 当吋，的最大值为2

【答案】ABD

【解析】

【分析】由题意，根据抛物线的定义，作图，结合点到直线距离以及三角形三边法则，利用两点距离公式，可得答案.

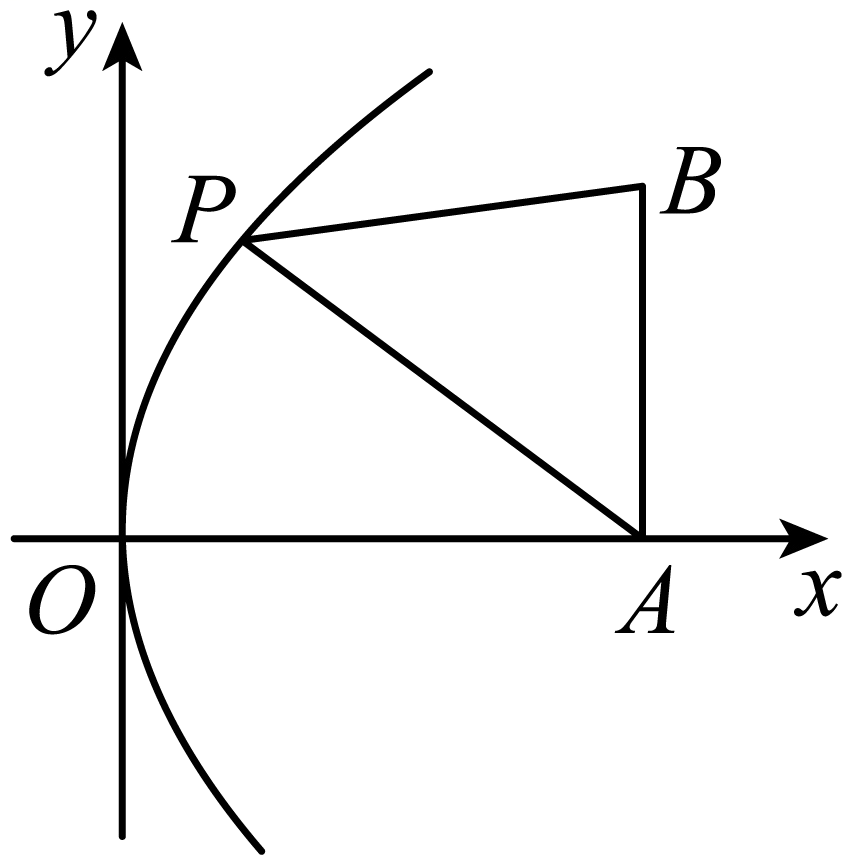
【详解】当时，作抛物线的准线，过作，过作，如下图所示：



可得恰为抛物线的焦点，由抛物线定义可得，

则，故A、B正确；

当时，连接，如下图所示：



设，则，当时，取得最小值为，故C错误；

则，当在线段的延长线上时，等号成立，故D正确.

故选：ABD.

12. 过直线上一点作圆的两条切线.切点分别为，若四边形周长的最小值是6，则( )

A.  B. 的最大度数为

C. 直线必过点 D. 的最小值为

【答案】ACD

【解析】

【分析】由圆的切线的性质可得四边形的周长，再求的最小值，结合条件列方程求，判断A，求的余弦及其最小值，结合余弦函数性质求的最大度数，判断B，求过点的圆的方程，再求其与圆的公共弦方程，确定其所过定点坐标，判断C，利用等面积法可得，由此可求的最小值，判断D.

【详解】因为方程可化为，

所以圆的圆心为，半径，

所以，

因为为圆的切线，切点分别为，

所以，

所以，，

如图四边形的周长，

因为四边形周长最小值是6，

所以的最小值为，

所以点到直线的距离为，

所以，

所以，A正确；

，，

所以，

所以当取最小值时，取最小值为，

即，

又余弦函数在上单调递减，

所以，B错误；

因为，

所以点四点共圆，且线段为该圆的直径，

设，

过点的圆的方程为，

化简可得，

因为圆与圆相交，

将圆与圆方程相减可得

，

化简可得，

故直线的方程为，

又由可得，

所以直线必过点，C正确；

因为的面积，

所以，

所以当取最小值时，取最小值为，D正确；

故选：ACD.

【点睛】本题为直线与圆的综合问题，涉及直线外一点到直线的最小距离，直线过定点，圆的切线的性质，相交圆的公共弦的求法等方面，难度较大.

**三、填空题：本题共4小题，每小题5分，共20分.**

13. 平面内，一条直线至多与双曲线有\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_个交点.

【答案】2

【解析】

【分析】根据直线与双曲线方程，联立求根，可得答案.

【详解】当直线斜率不存在时，可设直线方程为，将其代入双曲线方程，

则，整理可得，显然当时，方程由两个不相等的实根，

则此时直线与双曲线有两个交点；

当直线斜率存在时，可设直线方程为，将其代入双曲线方程，

则，整理可得，

显然当，且时，该方程有两个不相等的实根，

则此时直线与双曲线有两个交点，

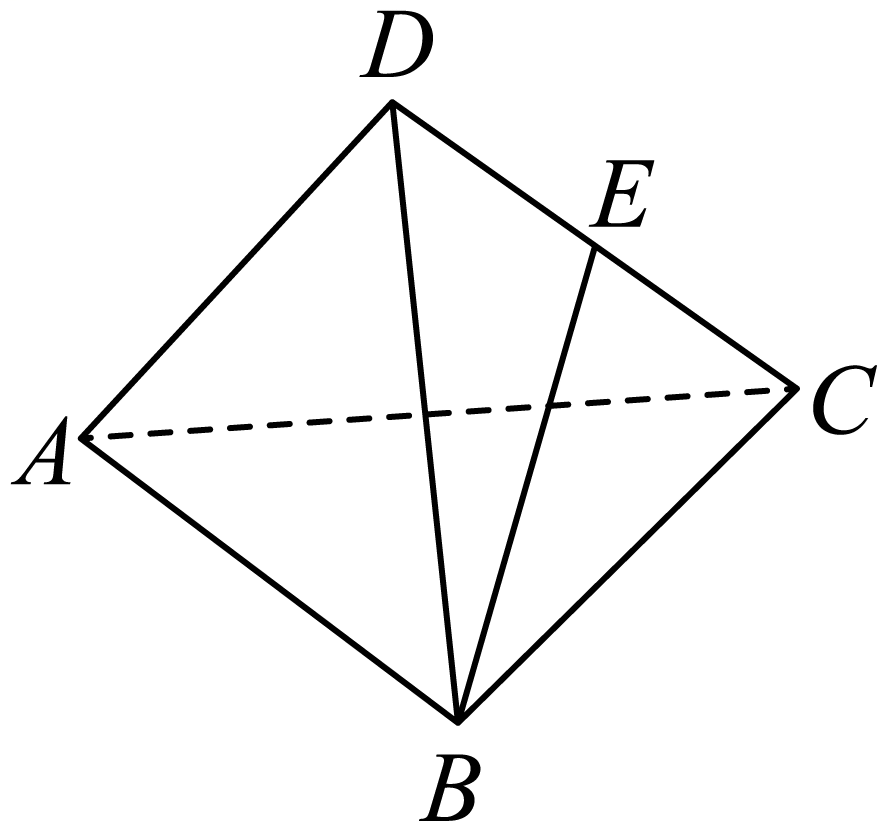
故答案为：2.

14. 在四面体中，是棱的中点，且，则的值为\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_.

【答案】0

【解析】

【分析】利用空间向量加减法法则，把用表示出来，即可求出结果.

【详解】

如图所示，因为是棱的中点，

所以，

则，

所以，

故答案为：0.

15. 某大学的名同学准备拼车去旅游，其中大一、大二、大三、大四每个年级各两名，分乘甲、乙两辆汽车.每车限坐名同学(乘同一辆车的名同学不考虑位置)，其中大一的孪生姐妹需乘同一辆车，则乘坐甲车的名同学中恰有名同学是来自同一年级的乘坐方式共有\_\_\_\_\_\_\_种(有数字作答).

【答案】24

【解析】

【详解】由题意，第一类，大一的孪生姐妹在甲车上，甲车上剩下两个要来自不同的年级，从三个年级中选两个为，然后分别从选择的年级中再选择一个学生，为，故有=3×2×2=12种．

第二类，大一的孪生姐妹不在甲车上，则从剩下的3个年级中选择一个年级的两名同学在甲车上，为，然后再从剩下的两个年级中分别选择一人(同第一类情况)，这时共有=3×2×2=12种

因此共有24种不同的乘车方式

16. 底面为矩形的直四棱柱中，，点在棱上且满足分别为棱的中点，是底面内一点，若直线与平面垂直，则点到平面的距离的大小是\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_.

【答案】

【解析】

【分析】根据条件建立适当的空间坐标系，利用空间向量得到坐标，进而利用等体积转化求得点面距离.

【详解】如图所示以为中心建立空间直角坐标系，设，,

∴

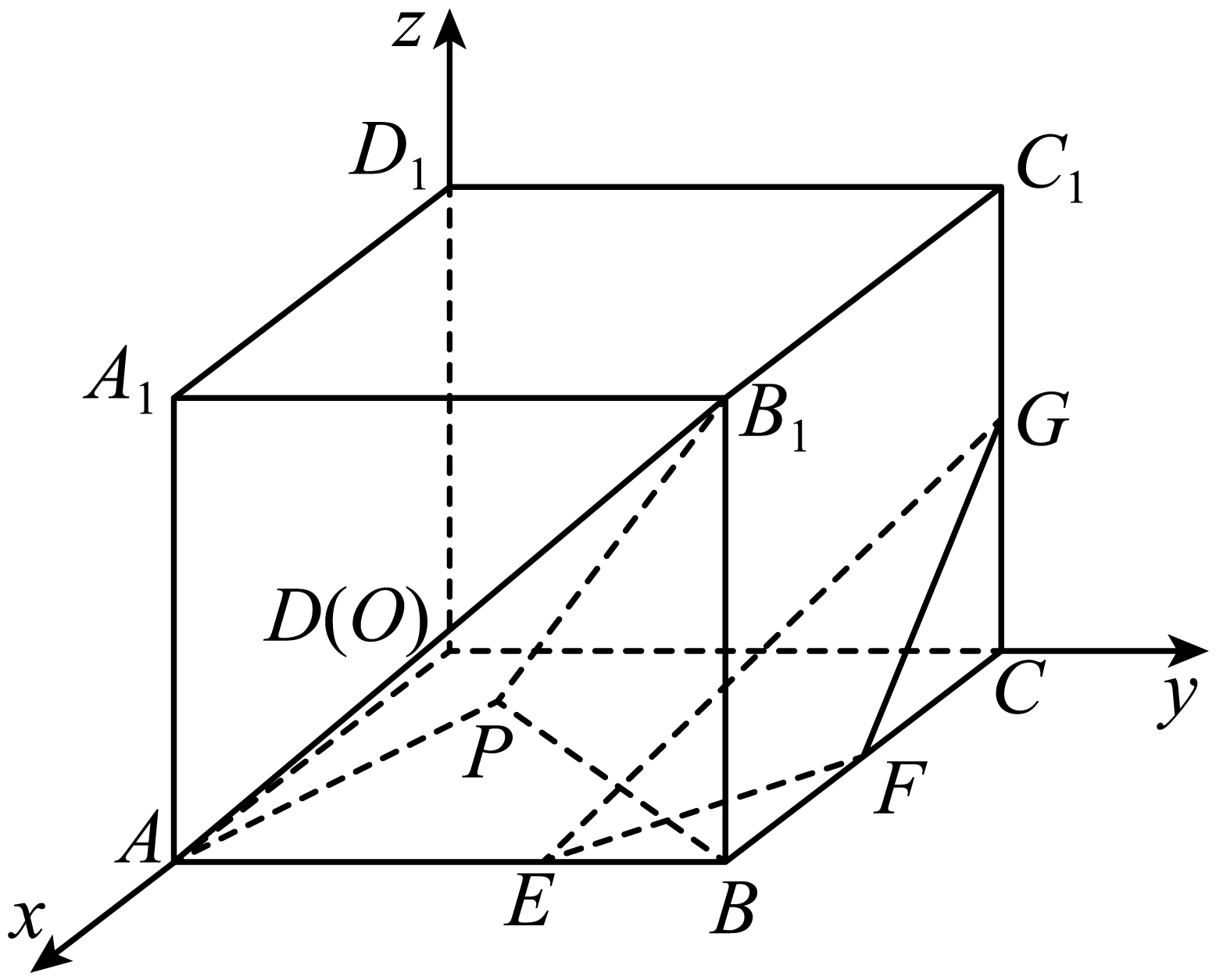
∵直线与平面垂直，

∴，解得：即

设点到平面的距离为，则有：



故答案为：



**四、解答题：本题共6小题，共70分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.**

17. 在二项式展开式中，前三项的二项式系数之和为79.

(1)求的值；

(2)若展开式中的常数项为，求实数的值.

【答案】(1)

(2)

【解析】

【分析】(1)由二项式定理求前三项的二项式系数，列方程即可求得；

(2)由二项式定理求的通项，由此可求常数项，由条件列方程求即可.

【小问1详解】

二项式的展开式的前三项的二项式系数依次为，

因为展开式中的前三项的二项式系数之和等于79，

所以有，

即，

解得或.

因为，所以.

【小问2详解】

因为展开式的通项为

，

令，得，所以常数项为，

由已知

整理得，

所以.

18. ①经过点；②与轴相切，半径为2；③被直线平分.从这三个条件中任选一个，补充在下面问题中，并完成解答.

问题：已知圆经过点，点，\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

(1)求圆的方程；

(2)若经过点的直线与圆相切，求直线的方程.

注：如果选多个条件分别解答，按第一个解答计分.

【答案】(1)条件选择见解析，

(2)或

【解析】

【分析】(1)选①把三个点代入圆的一般方程求得结果；②利用圆心在线段的中垂线上以及与轴相切，半径为2确定圆心坐标，写出圆的方程；③圆心在线段的中垂线上和直线上，求出圆心坐标及半径，写出圆的方程.

(2)分成直线斜率存在与不存在两种情况进行讨论，利用进行求解.

【小问1详解】

选①.设圆的方程为，

因为圆经过三点，

所以，解得.

所以圆的方程为，即.

选②.由点，得线段的中垂线方程为.

则圆心在直线上，

设圆的圆心坐标为，

又由圆与轴相切，可知圆心在轴上方

由半径为2，得，所以.

所以圆的方程为.

选③.由点，得线段的中垂线方程为.

则圆心在直线上，

因为圆被直线平分，则圆心在直线上.

由解得所以圆心坐标为，

所以半径，

所以圆的方程为.

【小问2详解】

当直线的斜率存在时，设直线的方程为，

即.

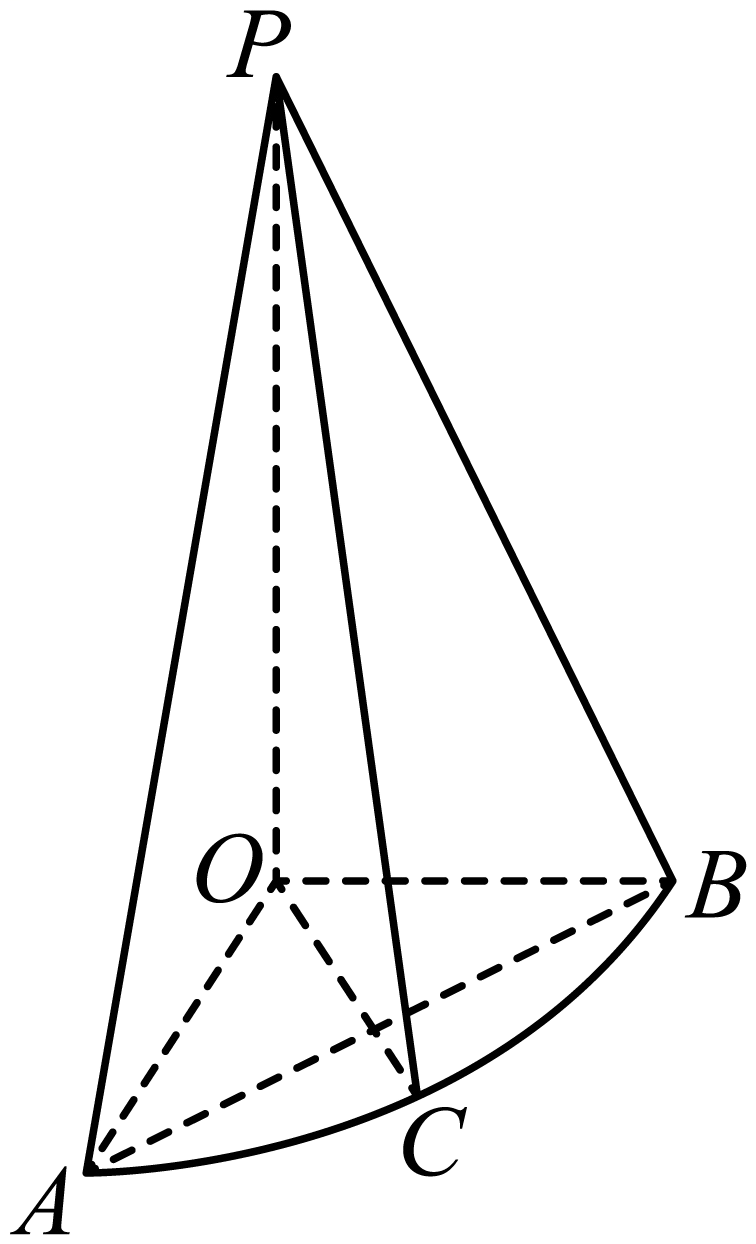
因为直线与圆相切，所以，解得，

所以直线的方程为.

当直线的斜率不存在时，直线的方程为，符合题意；

综上，直线的方程为或.

19. 如图所示的几何体是圆锥的一部分，其中是圆锥的高，，底面是扇形，满足，，点为弧的中点.



(1)求证：平面平面；

(2)求直线与平面所成的角的正弦值.

【答案】(1)证明见解析；

(2).

【解析】

【分析】(1)根据给定条件，利用线面垂直的性质、判定证明平面，再利用面面垂直的判定推理作答.

(2)以*O*为原点，建立空间直角坐标系，利用空间向量计算作答.

【小问1详解】

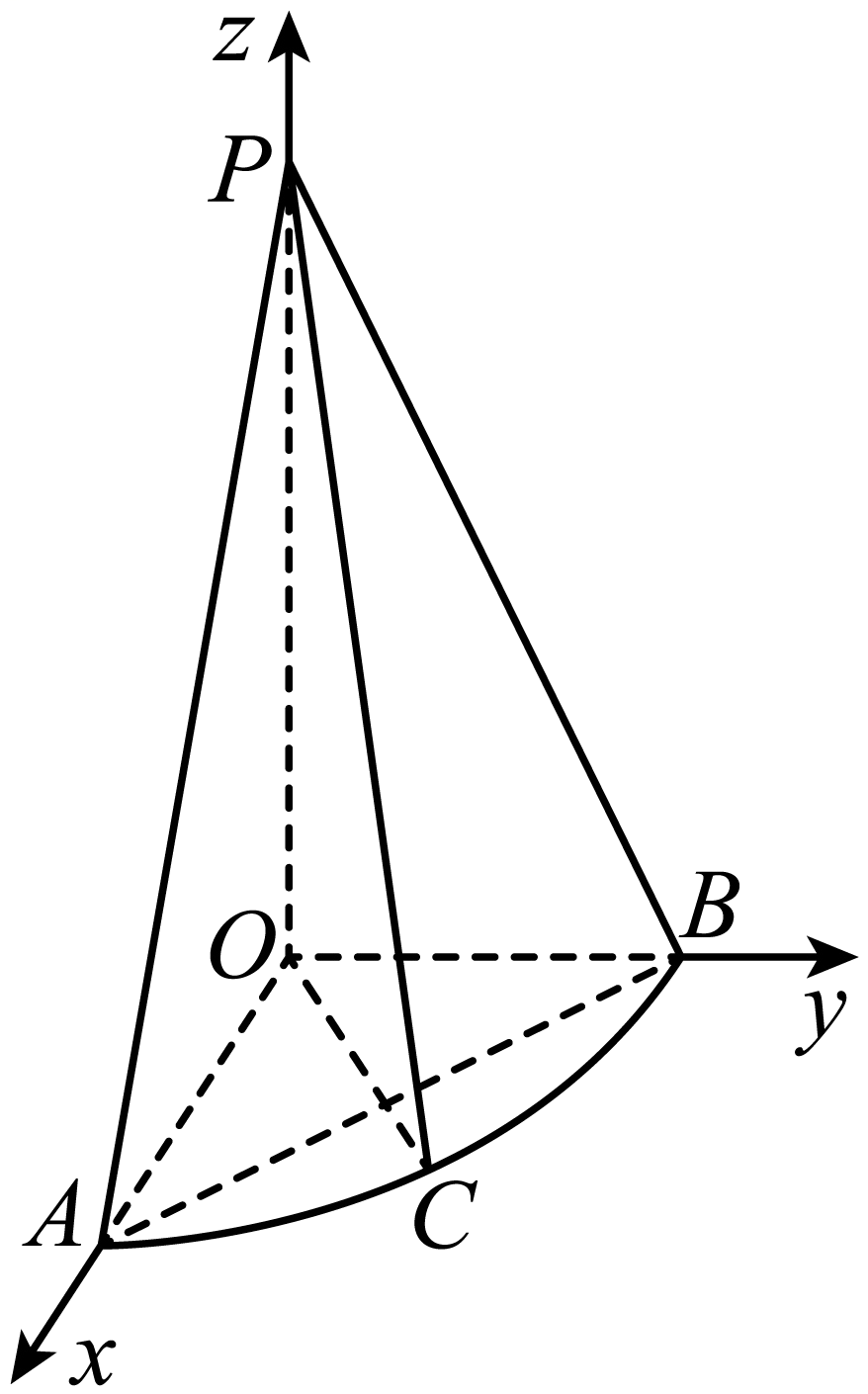
依题意，平面，平面，有，又点为弧的中点，即有，

且平面，则平面，又平面，

所以平面平面.

【小问2详解】

以为原点，的方向分别作为轴的正方向建立空间直角坐标系，如图，



则，

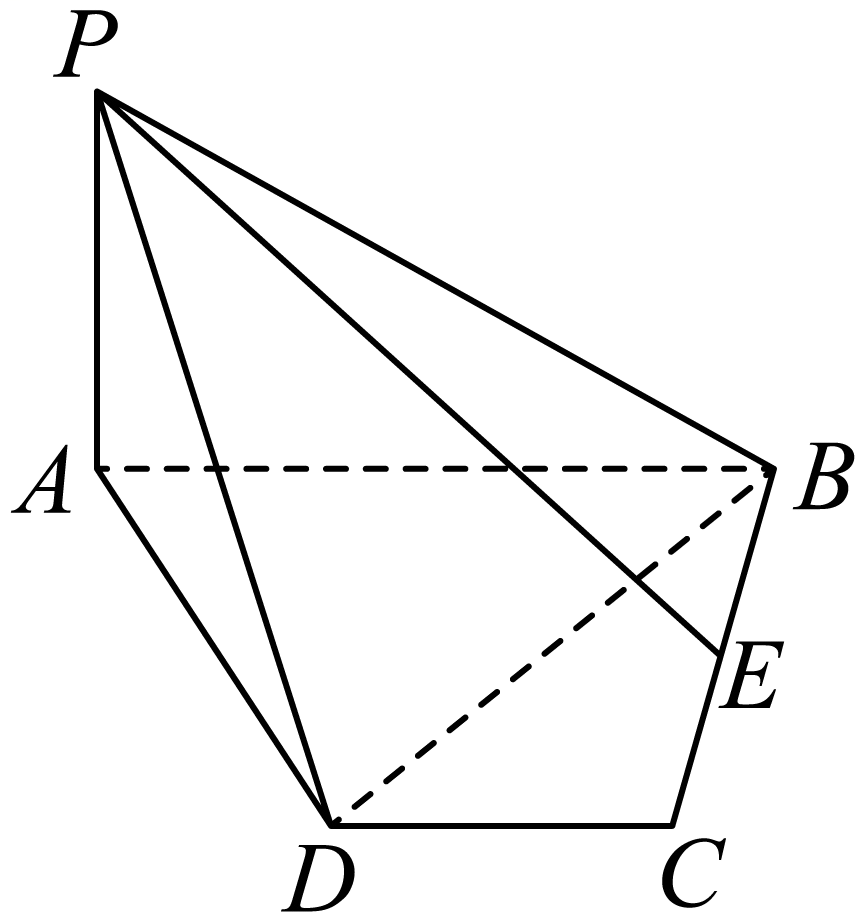
所以，

设平面的法向量为，则，取，得，

设直线与平面所成的角为，则，

所以直线与平面所成角的正弦值为.

20. 如图，直角梯形中，，，，为的中点.平面外一点满足：，且.



(1)证明：平面；

(2)存在线段上一点，使得二面角的余弦值为，求三棱锥的体积.

【答案】(1)证明见解析

(2)

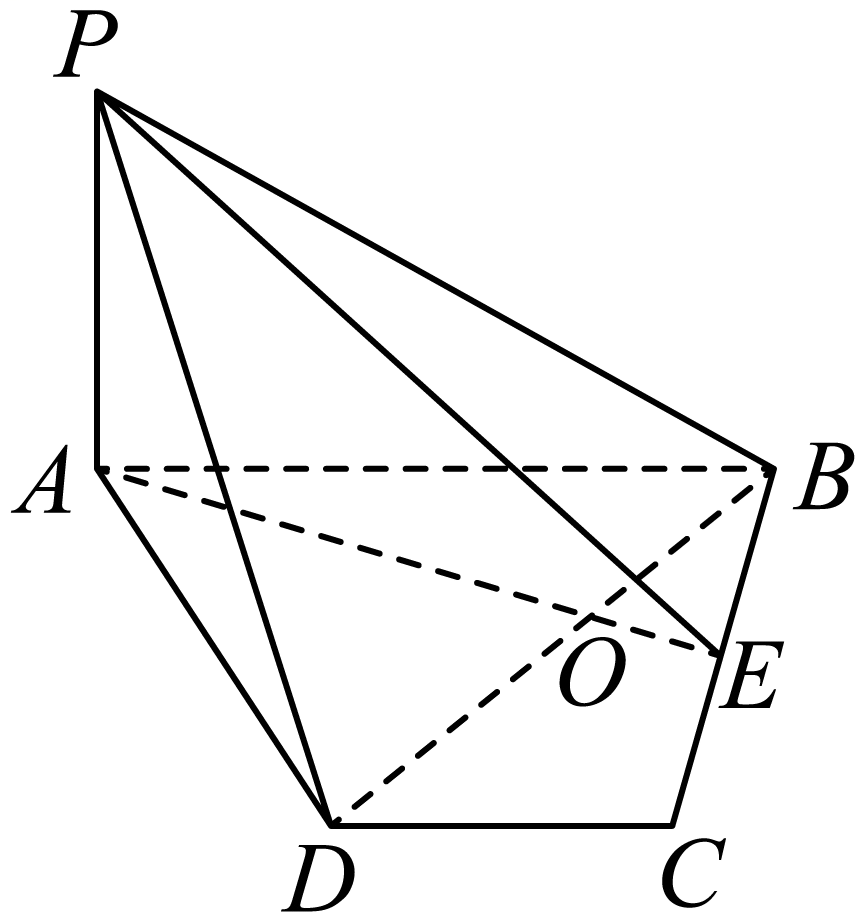
【解析】

【分析】(1)利用勾股定理，可得，再利用全等三角形以及线面垂直判定以及性质定理，可得，结合线面垂直判定定理，可得答案.

(2)由题意，建立空间直角坐标系，表示点的坐标，求得平面的法向量，根据公式，可得答案.

小问1详解】

如图，连接与的交点记为点，







即

又，且，平面，

平面，又平面，

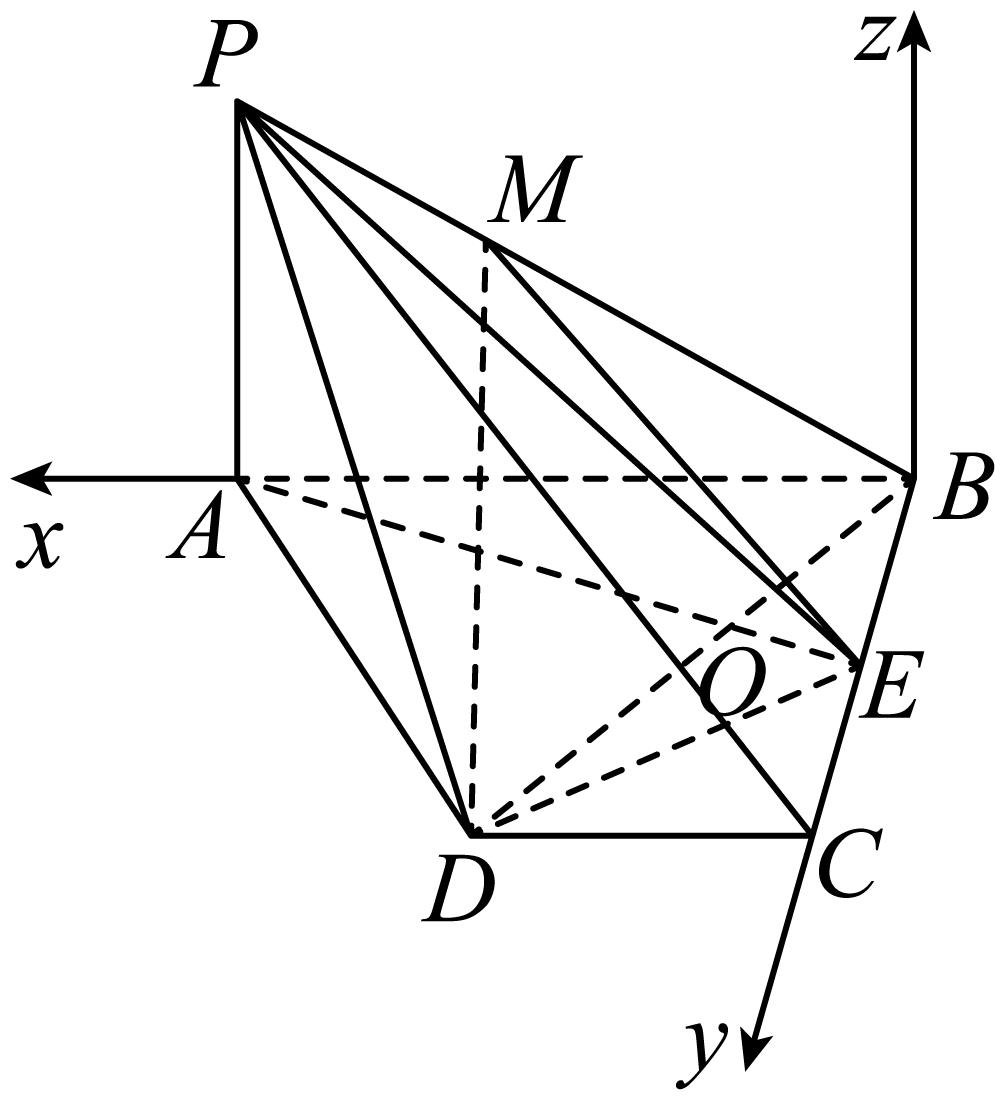
又，平面，

平面.

【小问2详解】

如图，以为原点，所在直线分别为轴，平行于为轴，建立空间直角坐标系，

则，



，设，则，即点



则，

设平面的法向量，

由，取，则，

易知，平面的一个法向量为，

二面角的余弦值为，

，

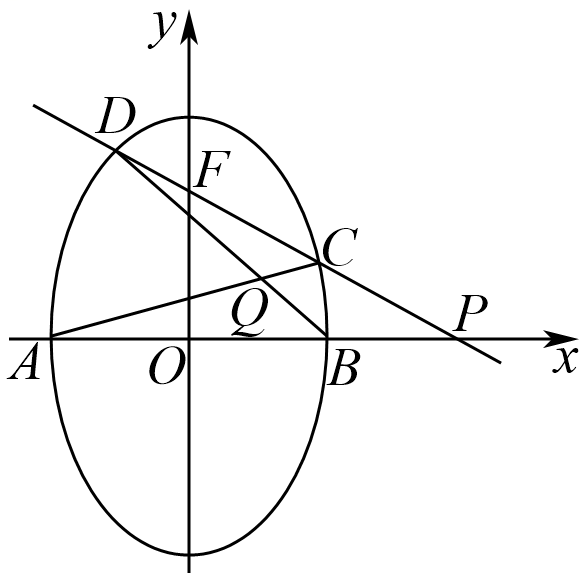
整理得，解得(舍)或.

，此时点为线段靠近点的三等分点，

点到平面的距离，又，

三棱锥的体积为.

21. 已知，点在椭圆上，是椭圆的一个焦点.经过点的直线与椭圆交于两点，与轴交于点，直线与交于点.



(1)当时，求直线的方程；

(2)当点异于点点，求.

【答案】(1)

(2)1

【解析】

【分析】(1)由条件求椭圆方程，设直线的方程为，利用设而不求法求弦长，列方程求；

(2)求直线的方程，联立求点的坐标，结合数量积坐标运算公式求.

【小问1详解】

由题意，，

所以，

所以椭圆的方程为

依题意，直线与坐标轴不垂直且不经过两点，

设的方程为，

由消去整理得，

因为直线过点，所以恒成立，

设，则

，

由，

解得，

所以的方程为.

【小问2详解】

直线的斜率为，故其方程为，

直线的斜率为，故其方程为，

由两式相除得

，

即

由得，

故

解得，又，

故.

【点睛】解决直线与椭圆的综合问题时，要注意：

(1)注意观察应用题设中的每一个条件，明确确定直线、椭圆的条件；

(2)强化有关直线与椭圆联立得出一元二次方程后的运算能力，重视根与系数之间的关系、弦长、斜率、三角形的面积等问题．

22. 已知双曲线的右焦点为，渐近线与抛物线交于点.

(1)求的方程；

(2)设是与在第一象限的公共点，作直线与的两支分别交于点，便得.

(i)求证：直线过定点；

(ii)过作于.是否存在定点，使得为定值？如果有，请求出点的坐标；如果没有，请说明理由.

【答案】(1)，；

(2)(i)答案见解析；(ii)答案见解析.

【解析】

【分析】(1)利用待定系数法求出的方程；

(2)(i)设方程为.令,利用“设而不求法”得到.表示出,整理可得： .可以判断出直线*MN*的方程为,即可证明过定点.(ⅱ)由为直角，判断出*D*在以*AB*为直径的圆上，得到为*AB*的中点,使得为定值.

【小问1详解】

因为，渐近线经过点，

所以，解得：，所以

抛物线经过点

所以，所以

【小问2详解】

(i)因为在不同支,所以直线的斜率存在,设方程为.

令,联立得， ，则.

联立可得，解得：.

因为,所以，

代入直线方程及韦达结构整理可得：，

整理化简得：.

因为不在直线*MN*上,所以.

直线*MN*的方程为,过定点.

(ⅱ)因为为定点,且为直角，

所以*D*在以*AB*为直径的圆上,*AB*的中点即为圆心,半径为定值.

故存在点,使得为定值.