**大连市2022～2023学年度第一学期期末考试**

**高二数学**

**第Ⅰ卷(选择题)**

**一、单项选择题：本大题共8小题，每题5分，共40分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．**

1. 若直线*l*的方向向量是，则直线*l*的倾斜角为( )

A.  B.  C.  D. 

【答案】B

【解析】

【分析】由斜率与倾斜角，方向向量的关系求解

【详解】由直线*l*的方向向量是得直线的斜率为，

设直线的倾斜角是，

故选：B.

2. 已知空间向量，，且，则( )

A. 9 B.  C. 1 D. 

【答案】C

【解析】

【分析】根据空间向量共线的充要条件即可求解.

【详解】因为空间向量，，且，

所以，解得：，

故选：.

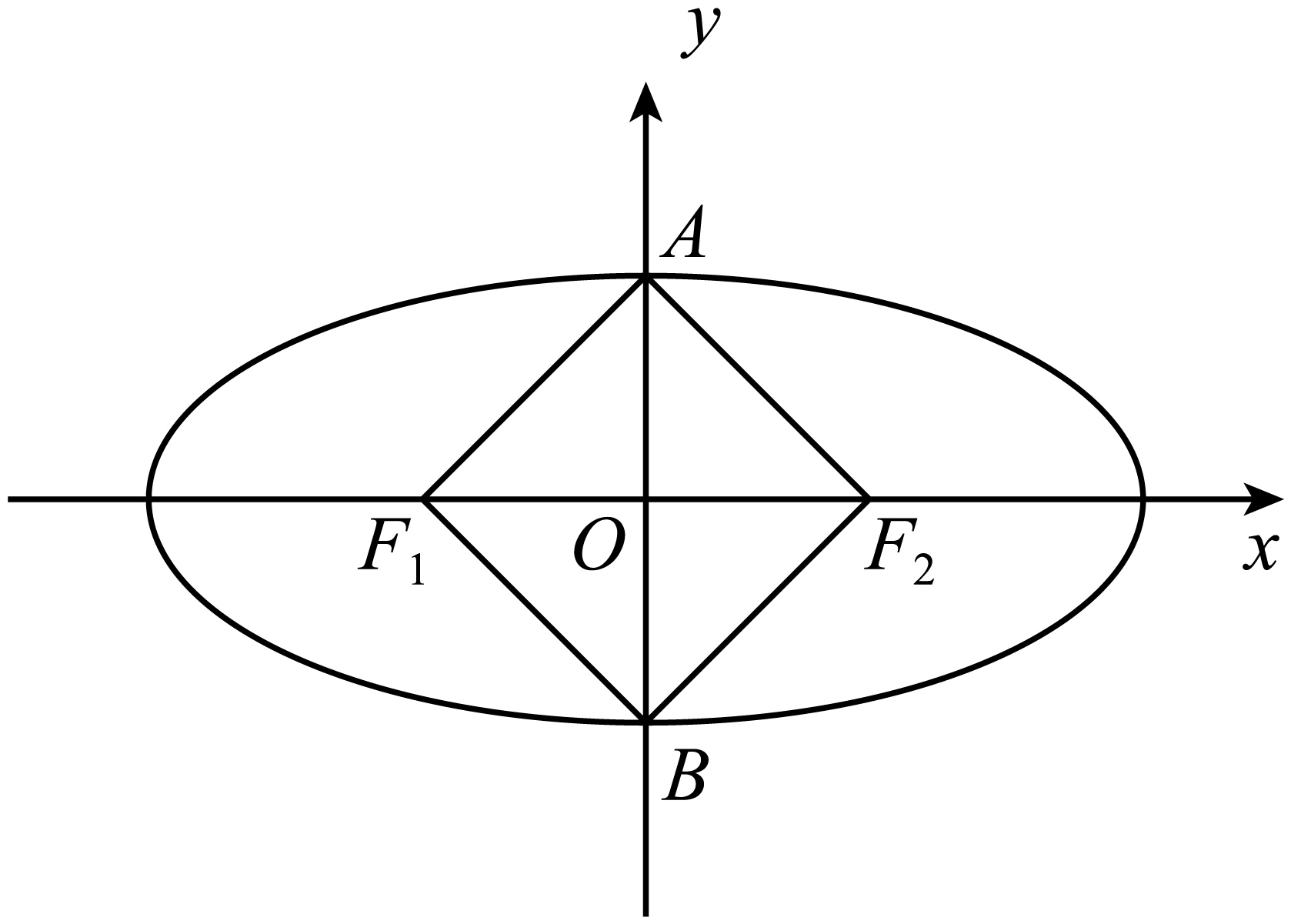
3. 已知椭圆的左、右焦点分别为，，上、下顶点分别为*A*，*B*，若四边形为正方形，则椭圆*C*的离心率为( )

A.  B.  C.  D. 

【答案】B

【解析】

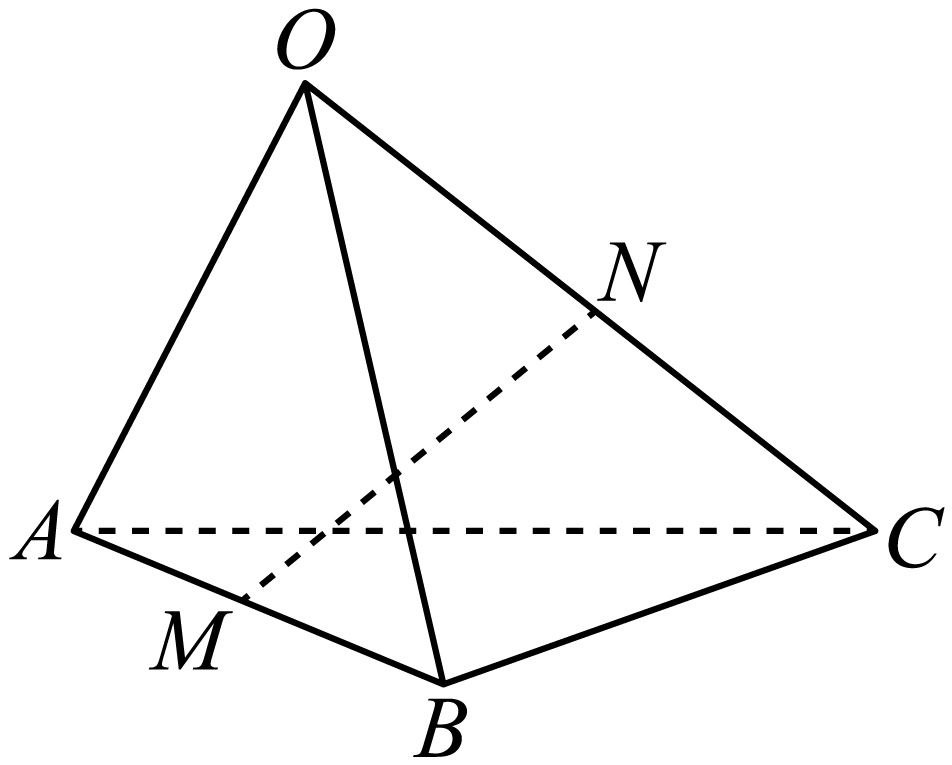
【分析】根据椭圆的几何性质得到，，然后根据四边形为正方形得到，化简即可得到椭圆的离心率.

【详解】

根据椭圆的性质可得，，因为四边形为正方形，所以，即，所以.

故选：B.

4. 已知三棱锥中，点*M*，*N*分别为*AB*，*OC*的中点，且，，，则( )



A.  B.  C.  D. 

【答案】D

【解析】

【分析】利用空间向量线性运算计算即可.

【详解】



.

故选：D.

5. 已知圆的圆心在直线上，若圆与轴交于两点，圆与轴交于两点，则( )

A.  B.  C.  D. 

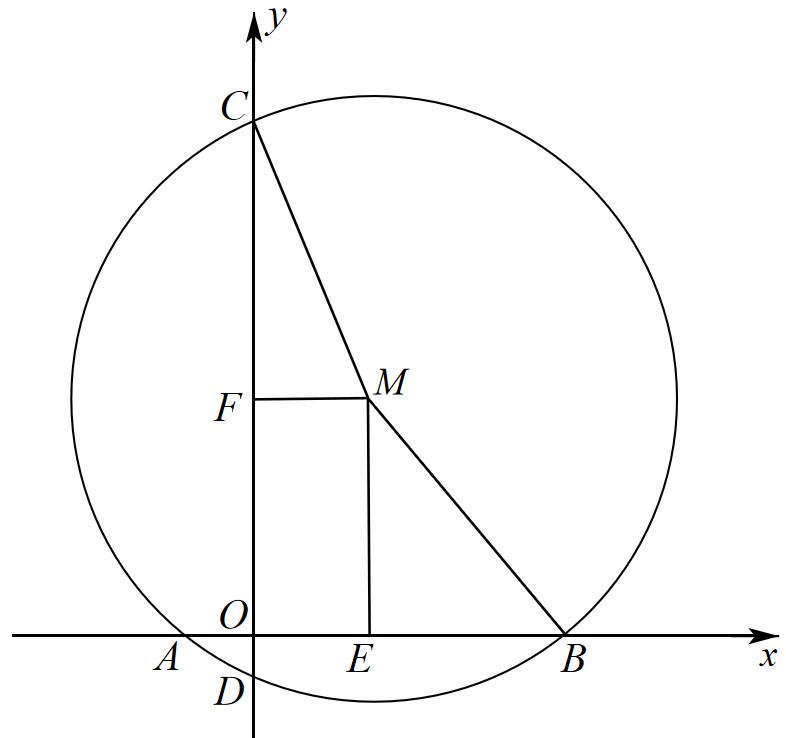
【答案】A

【解析】

【分析】过点作轴，轴.分别利用垂径定理表示出，即可得到答案.

【详解】设圆的圆心，半径为.

过点作轴，轴.



所以.

由垂径定理得：.

同理：.

因为，所以，，

所以.

故选：A

6. 已知一个动圆*P*与两圆和都外切，则动圆*P*圆心的轨迹方程为( )

A.  B. 

C.  D. 

【答案】A

【解析】

【详解】设动圆半径为，

由于动圆*P*与两圆和都外切，

所以，，

即，

可知动圆*P*圆心的轨迹为以为焦点，实轴长为4的双曲线的左支，

即，，，

所以动圆*P*圆心的轨迹方程为，

故选：A.

7. 若四棱柱的所有棱长均为2，且，则到平面的距离为( )

A.  B.  C.  D. 

【答案】C

【解析】

【分析】设与交于点，连接，结合题意可证明平面，再过作，垂足为，则，进而得到平面，则到平面的距离为，再根据题意求解即可.

【详解】如图，设与交于点，连接，

，，

，，

又为的中点，，

四边形为菱形，，

又，平面，

在平面中，过作，垂足为，则，

又，平面，即到平面的距离为，

由已知：，为等边三角形，，.

和均为等边三角形，，

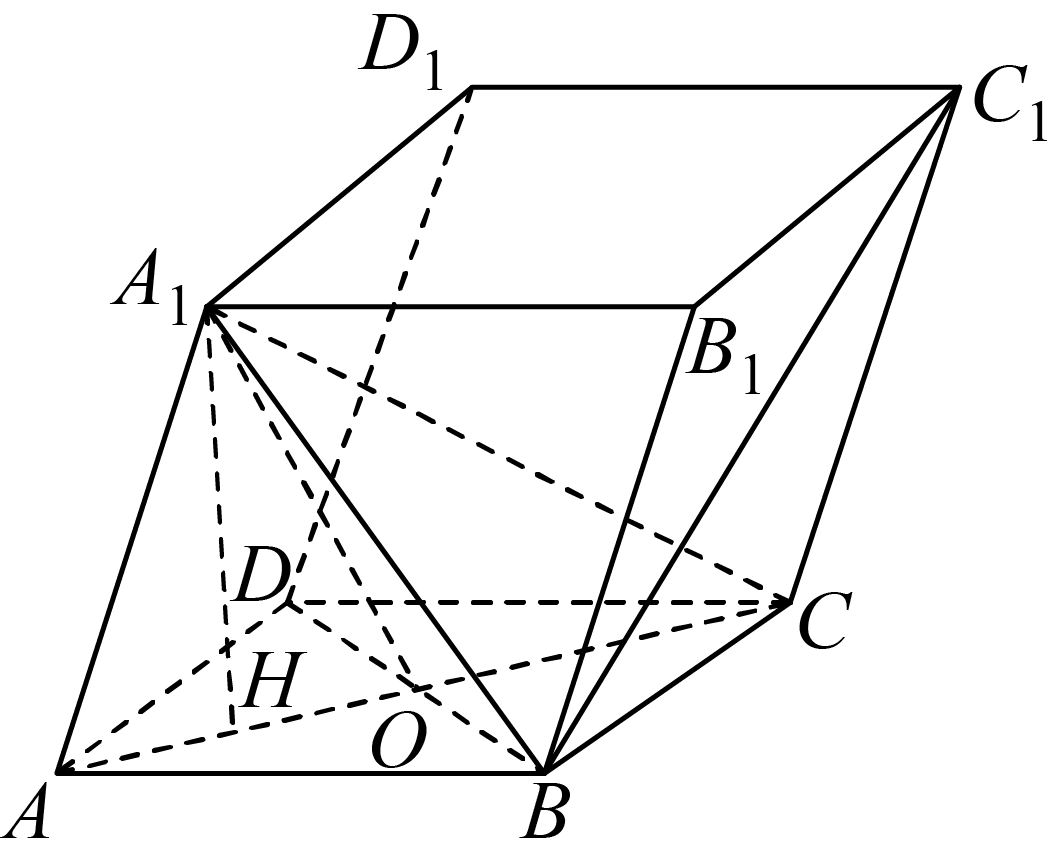
，

在中，由余弦定理，，

，，

在中，.

故选：C.



8. 已知*F*为抛物线的焦点，直线与*C*交于*A*，*B*两点(*A*在*B*的左边)，则的最小值是( )

A. 10 B. 9 C. 8 D. 5

【答案】B

【解析】

【分析】直线方程与抛物线方程联立，求得，利用定义可得，再根据基本不等式得结果

【详解】由题知的焦点，，准线为，如图，作准线，准线，

过定点，

设，联立

得

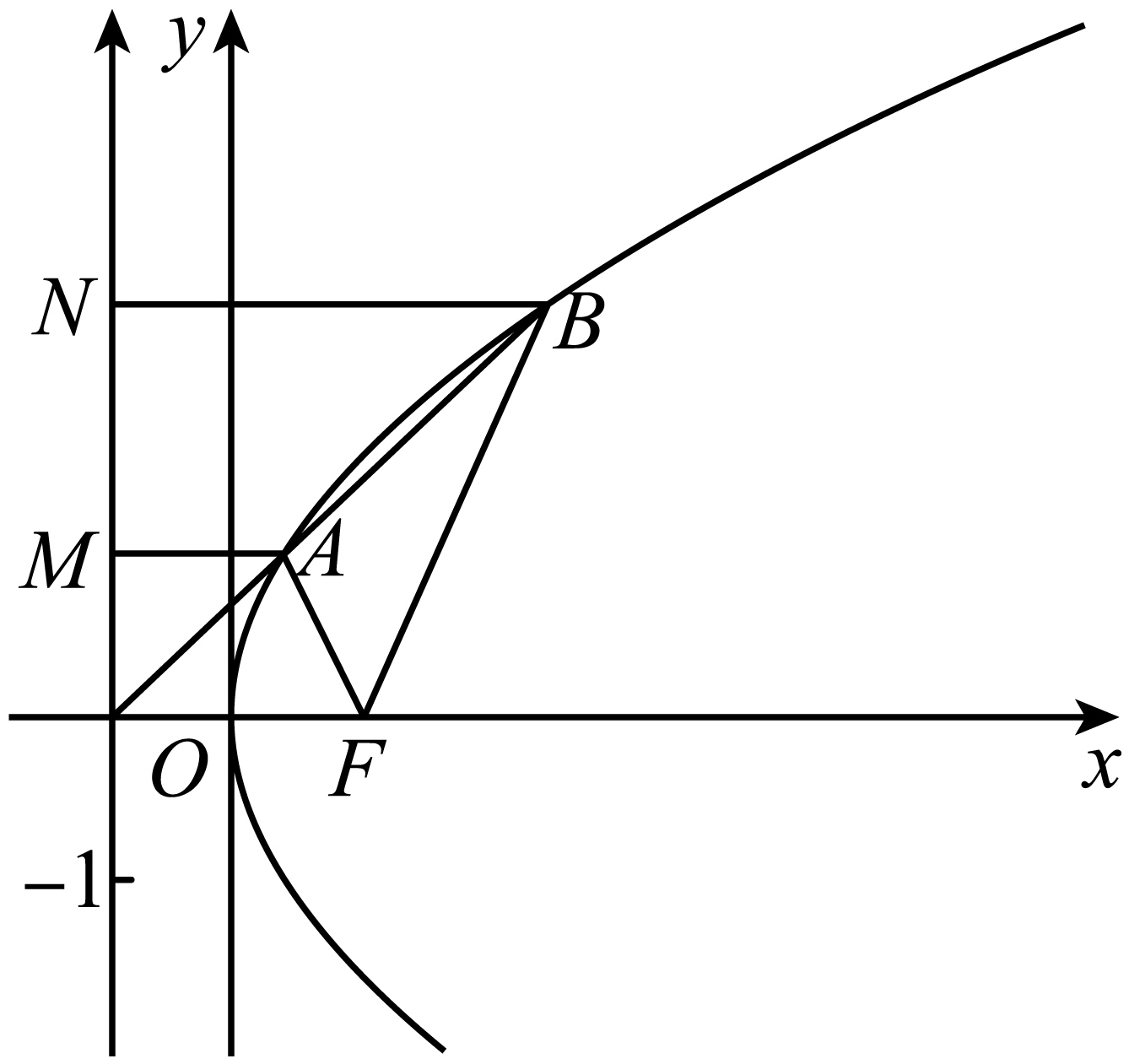
即,

,又，



当且仅当时取等，

故选：B



**二、多项选择题：本题共4小题，每小题5分，共20分．在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求．全部选对的得5分，部分选对的得2分，有选错的得0分．**

9. 已知向量，，，则( )

A  B.  C.  D. 向量，，共面

【答案】ABD

【解析】

【分析】空间向量模的坐标计算可以验证选项A，

向量坐标减法运算验证选项B，

两向量数量积为0验证选项C，

利用向量共面条件验证选项D

【详解】因为，

所以，

，

所以A正确；

，

故B正确；

，

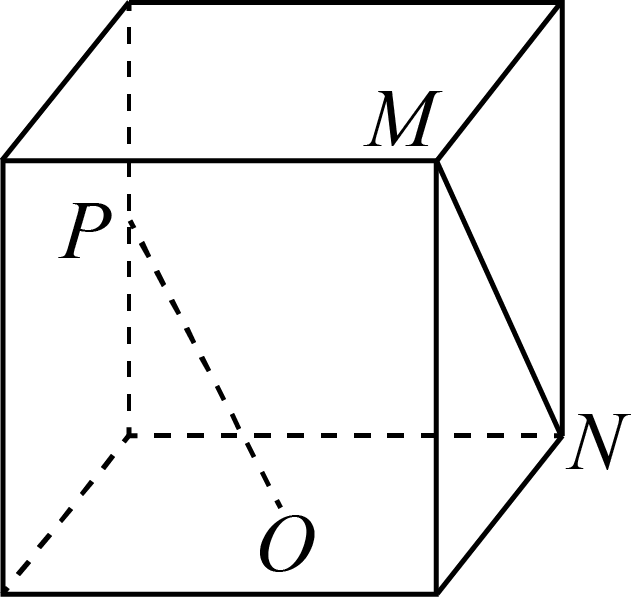
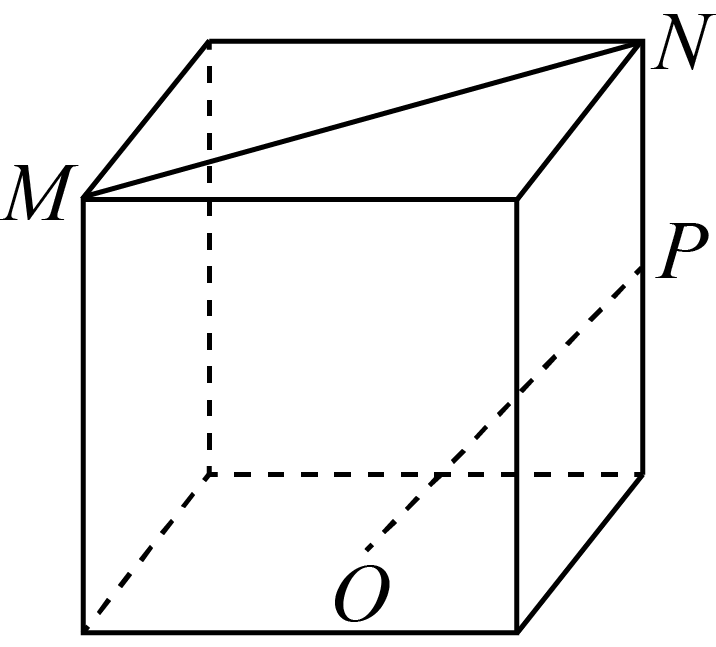
故C不正确；

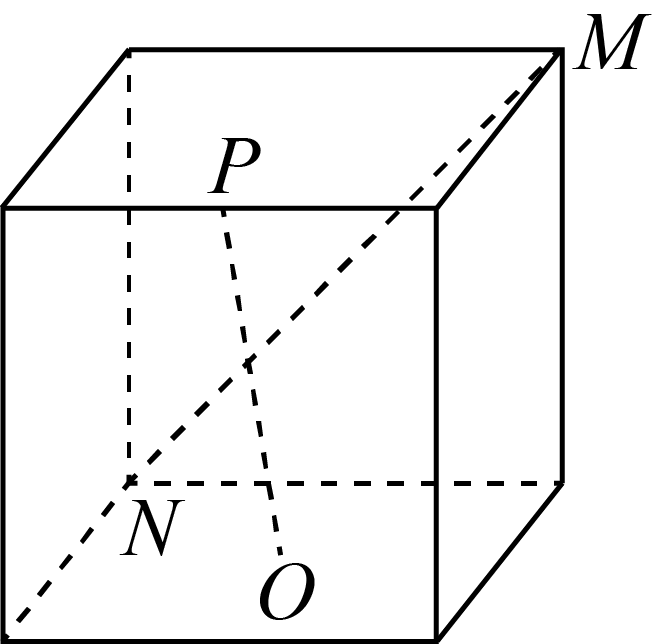
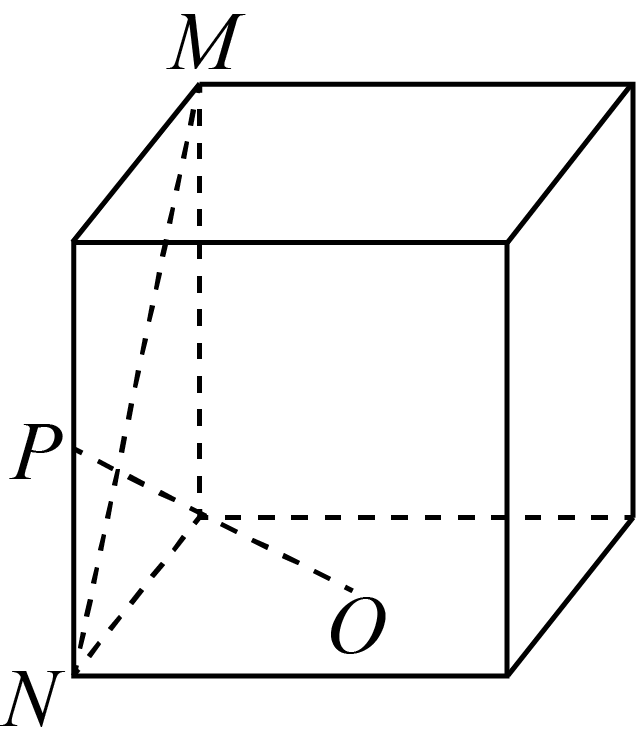
由，

所以，故选项D正确.

故选：ABD.

10. 如图，下列各正方体中，*O*为下底面的中心，*M*，*N*为顶点，*P*为所在棱的中点，则满足的是( )

A.  B. 

C.  D. 

【答案】AD

【解析】

【分析】建立空间直角坐标系，利用向量法逐个判断即可求解

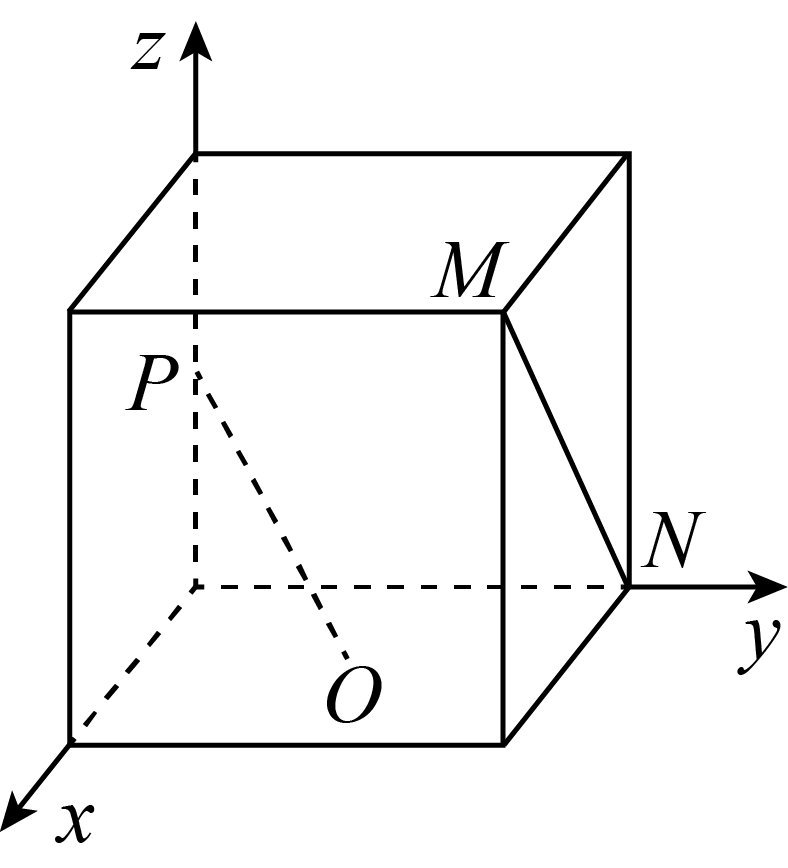
【详解】对于A：建立如图所示的空间直角坐标系，设正方体的边长为2，

则，

故，

所以，

所以，故A正确；



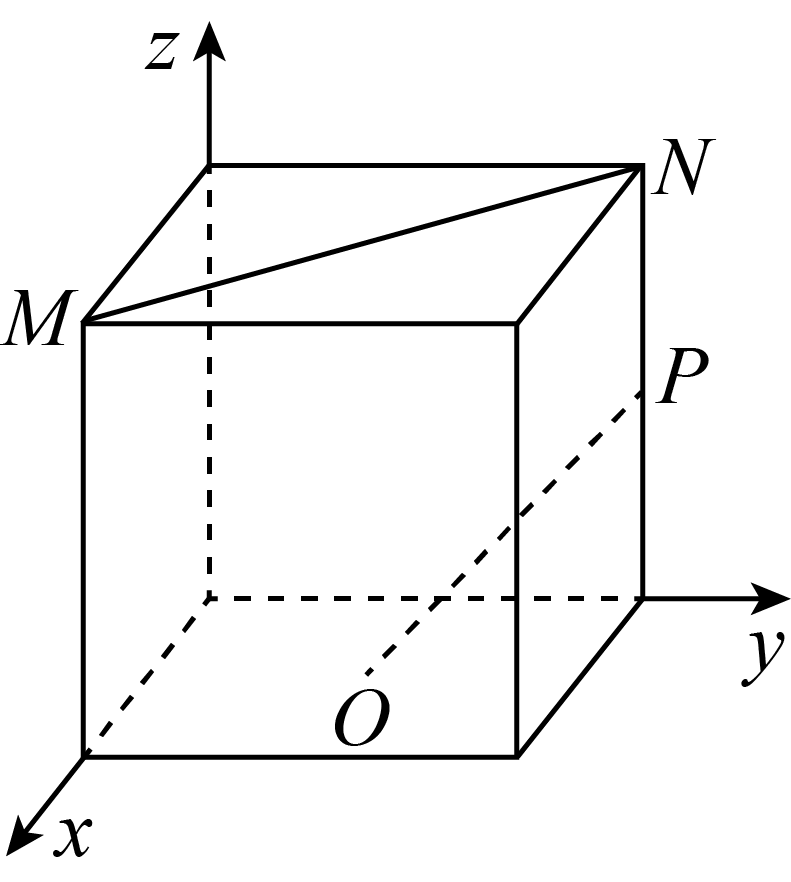
对于B：建立如图所示的空间直角坐标系，设正方体的边长为2，

则，

故，

所以，

所以，故B错误；



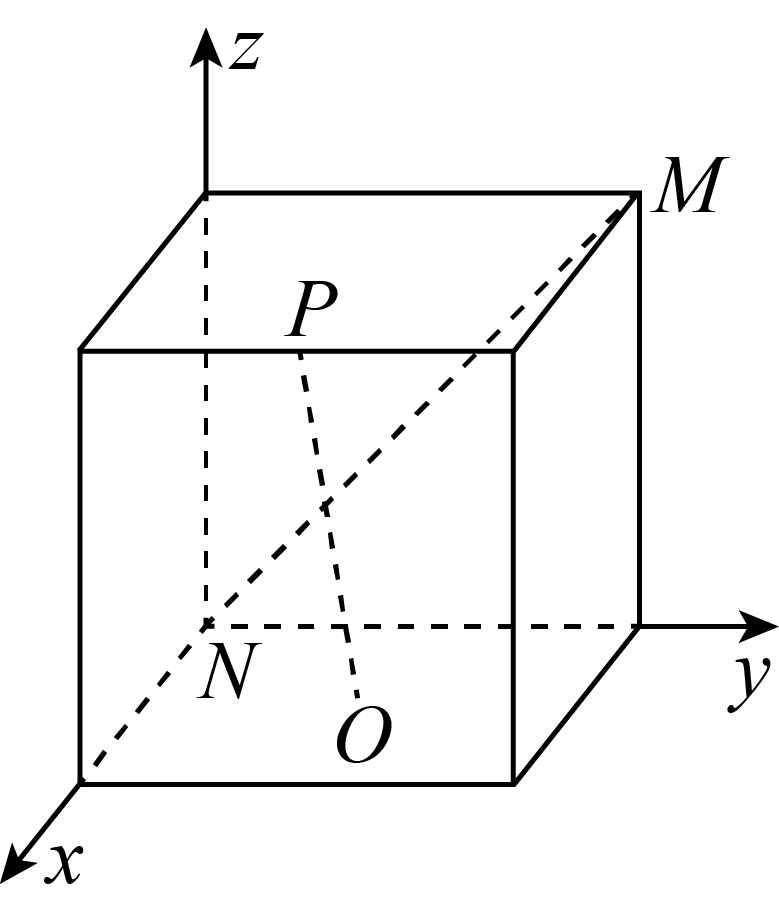
对于C：建立如图所示的空间直角坐标系，设正方体的边长为2，

则，

故，

所以，

所以，故C错误；



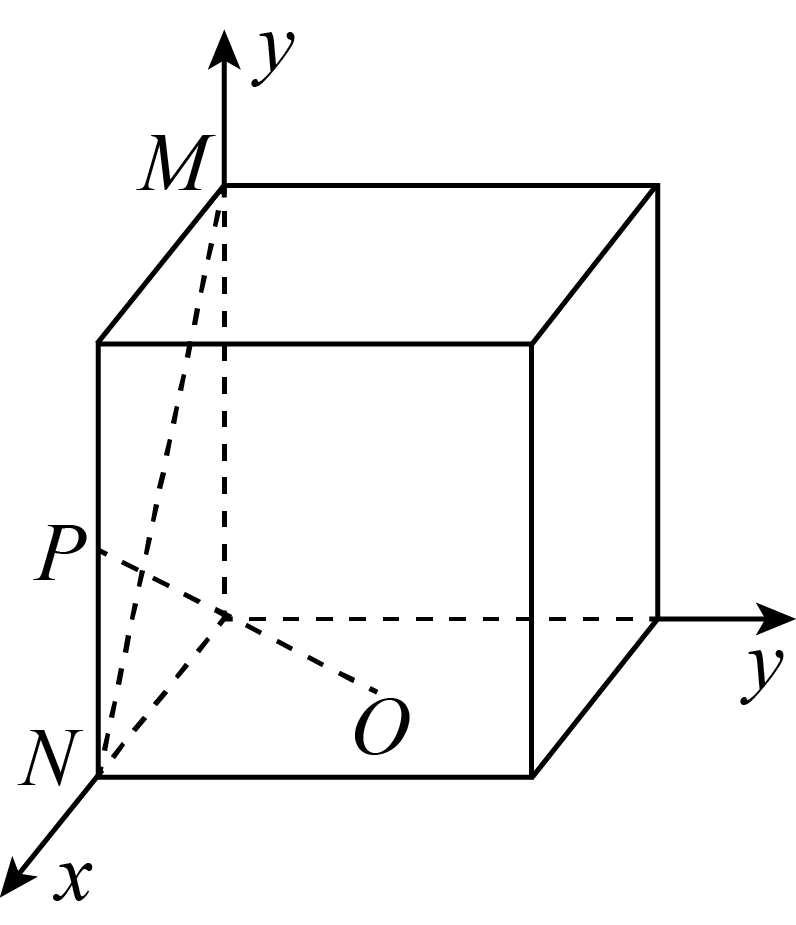
对于D：建立如图所示的空间直角坐标系，设正方体的边长为2，

则，

故，

所以，

所以，故D正确；



故选：AD

11. 已知圆，直线，则( )

A. 圆*C*的圆心为 B. 点在*l*上

C. *l*与圆*C*相交 D. *l*被圆*C*截得的最短弦长为4

【答案】BCD

【解析】

【分析】一般方程化成标准方程可判断A；点代入直线方程可判断B；根据点在圆内判断C；根据与圆心连线与直线垂直时，*l*被圆*C*截得的弦最短判断D.

【详解】由，所以圆的圆心为，半径，A不正确；

因为时，所以点在*l*上，B正确；

因为圆心到的距离为，所以点在圆内，又点在*l*上，故*l*与圆*C*相交，C正确；

与圆心连线与直线垂直时，*l*被圆*C*截得的弦最短，最短弦长为，D正确.

故选：BCD

12. 在正三棱柱中，，点*P*满足，其中，，则( )

A. 当时，的最小值为

B. 当时，三棱锥的体积为定值

C. 当时，存在两个点*P*，使得

D. 当时，有且仅有一个点*P*，使得平面

【答案】ACD

【解析】

【分析】对于A，将矩形展开与在同一平面，再根据两点间线段最短判断即可；

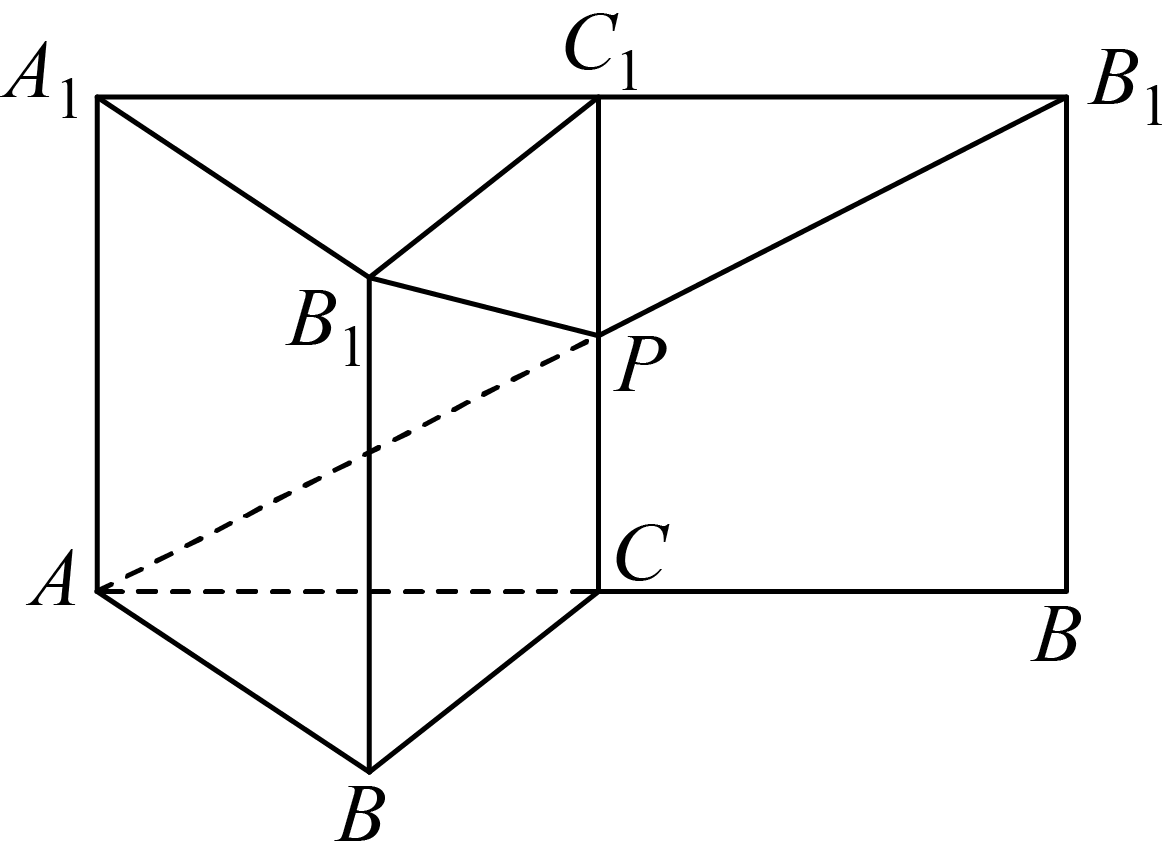
对于B，将点的运动轨迹考虑到一个三角形内，确定路线，进而考虑体积是否为定值；

对于C，考虑借助向量的平移将点轨迹确定，进而考虑建立合适的直角坐标系来求解点的个数；

对于D，考虑借助向量的平移将点轨迹确定，进而考虑建立合适的直角坐标系来求解点的个数．

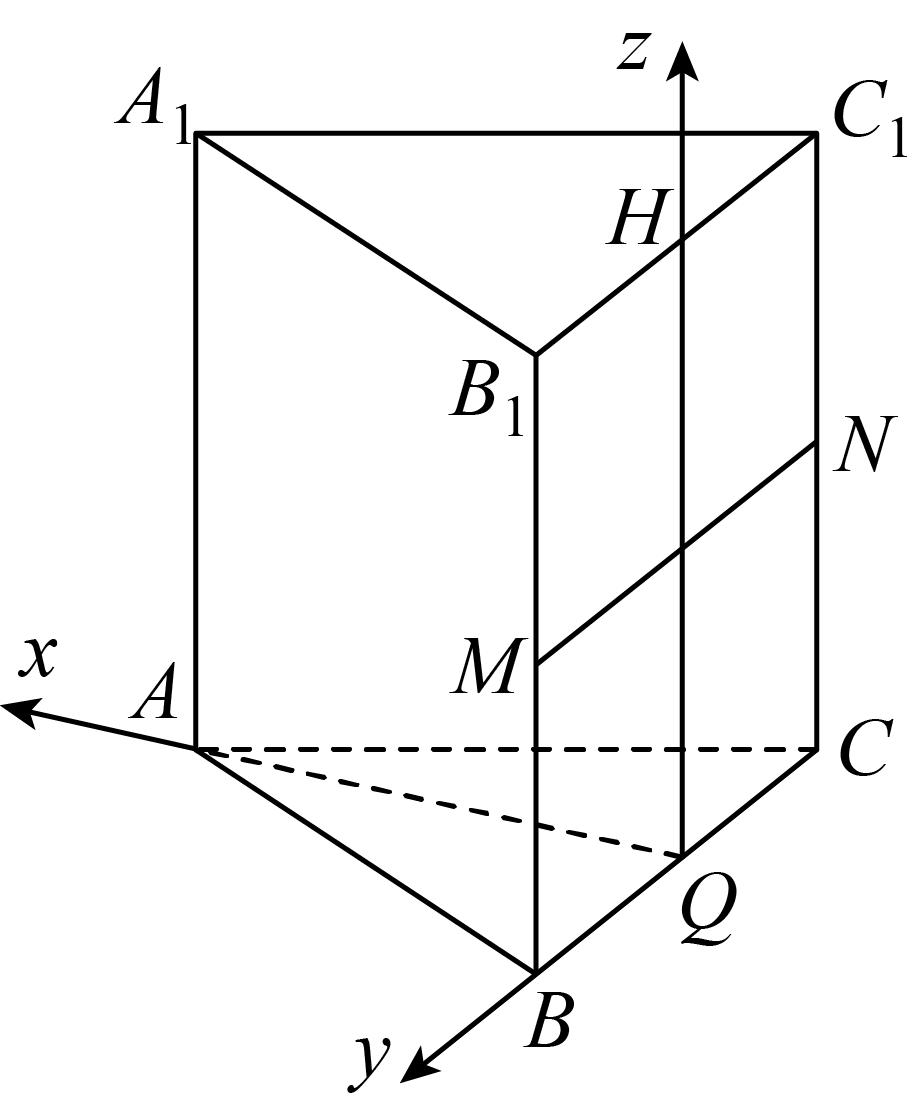
【详解】易知，点在矩形内部(含边界)．

对于A，当时，，即此时线段，将矩形展开与在同一平面如图，则的最小值为，故A正确；



对于B，当时，，故此时点轨迹为线段，而到平面距离不为定值，所以其体积不为定值，故B错误．

对于C，当时，，取，中点分别为，，则，所以点轨迹为线段，不妨建系解决，建立空间直角坐标系如图，



，，，则，，，所以或．故均满足，故C正确；

对于D，当时，，取，中点为．，所以点轨迹为线段．设，因为，所以，，所以，此时与重合，故D正确．

故选：ACD．

**第II卷(非选择题)**

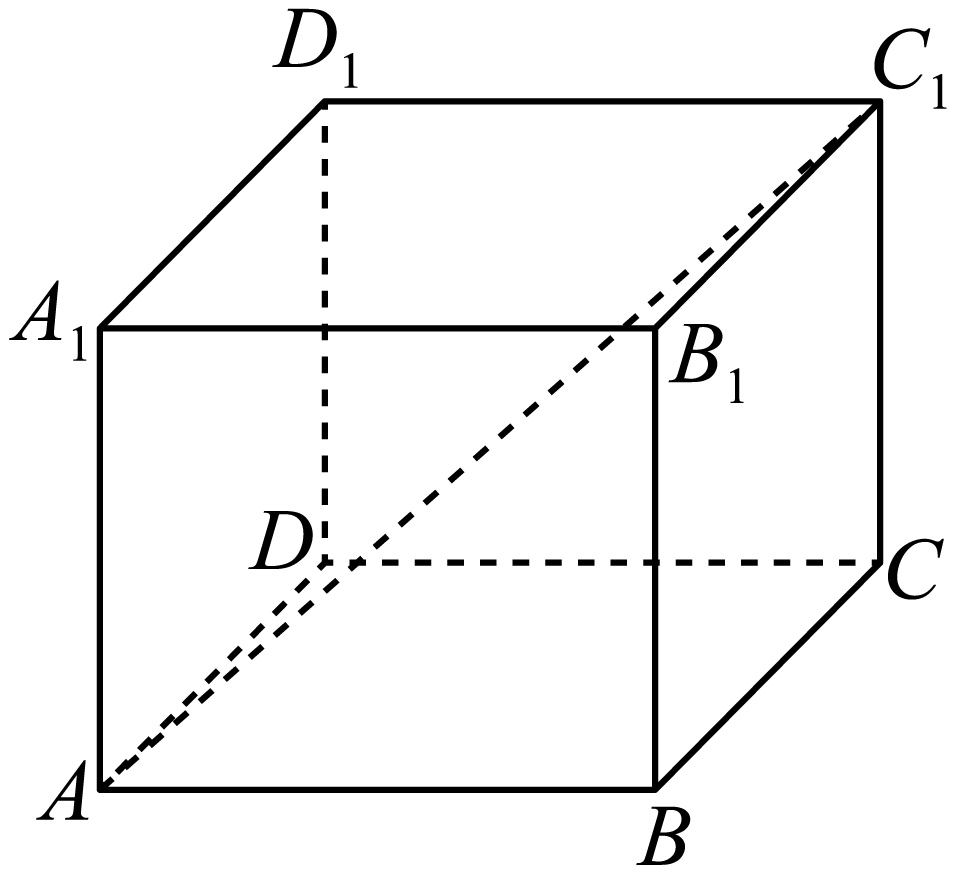
**三、填空题：本题共4小题，每小题5分，共20分．**

13. 已知平行六面体，，则*m*的值为\_\_\_\_\_\_．

【答案】1

【解析】

【分析】根据平行六面体的性质和空间向量的线性运算求即可.

【详解】

，所以.

故答案为：1.

14. 已知双曲线的一条渐近线为，那么双曲线的离心率为\_\_\_\_\_\_．

【答案】2

【解析】

【分析】根据渐近线方程求得的值，根据离心率的公式求得双曲线的离心率.

【详解】由于双曲线的一条渐近线为，故.所以双曲线离心率.

【点睛】本小题主要考查双曲线的渐近线，考查双曲线离心率的求法，属于基础题.

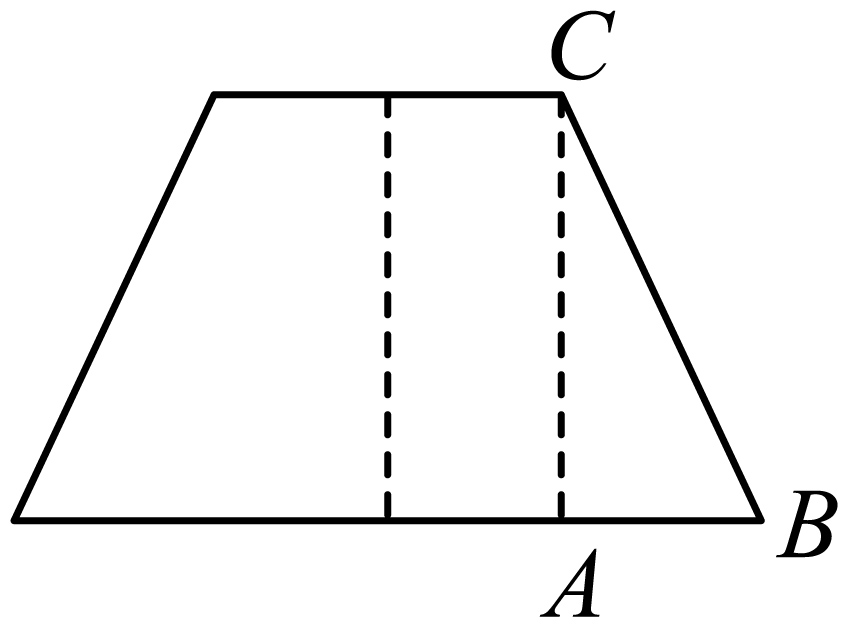
15. 已知圆台的上、下底面半径分别是10和20，它的侧面积为，则此圆台的母线与下底面所成角的余弦值为\_\_\_\_\_\_．

【答案】

【解析】

【分析】根据圆台的侧面积可求出圆台的母线长，然后利用直角三角形即可求解.

【详解】作出圆台的轴截面，如图所示：



设圆台的上、下底面半径分别为和，母线长为，

由题意可知：，，因为它的侧面积为，

所以，解得：，

设圆台的母线与下底面所成角为，由图可知：，

则，

故答案为.

16. 抛物线的光学性质是：位于抛物线焦点处的点光源发出的每一束光经抛物线反射后的反射线都与抛物线的对称轴平行．已知抛物线的焦点为*F*，直线，点*P*，*Q*分别是*C*，*l*上的动点，若*Q*在某个位置时，*P*仅存在唯一的位置使得，则满足条件的所有的值为\_\_\_\_\_\_．

【答案】或

【解析】

【分析】设，易知抛物线焦点为，为直线上的动点，设，根据结合距离公式，可得，根据方程有唯一解列方程求解即可.

【详解】设，易知抛物线焦点为，

为直线上的动点，设，





由



，

，即代入，

，



(1)当时，，

由得，

此时方程只有一个解，满足题意，



(2)当时，，



解得，代入可得

求得，可得

的值为或

故答案为：或.

**四、解答题：本题共6小题，共70分.解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤．**

17. 已知双曲线．请从①②③中选取两个作为条件补充到题中，并完成下列问题．①；②离心率为2；③与椭圆的焦点相同．

(1)求*C*的方程；

(2)直线与*C*交于*A*，*B*两点，求的值．

【答案】(1)

(2)

【解析】

【分析】(1)选①②，可得，解得即可；选①③，可得，解得即可；选②③，可得，解得，即可；

(2)联立，消掉*y*，整理得，利用韦达定理、弦长公式可得答案.

【小问1详解】

选①②，可得，，解得，所以*C*的方程为；

选①③，可得，，解得，所以*C*的方程为；

选②③，可得，，解得，，所以*C*的方程为；

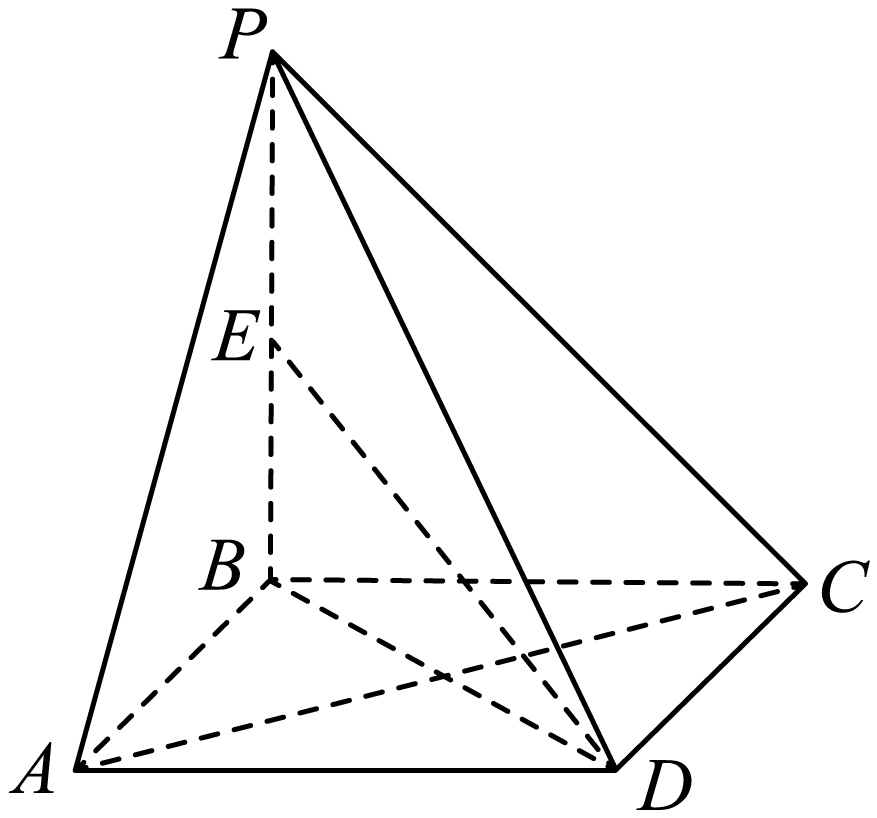
【小问2详解】

设，，联立，消掉*y*，整理得，

所以，因为，

所以．

18. 如图，四棱锥，底面为正方形，平面，为线段的中点．



(1)证明：；

(2)若，求直线与平面所成角的正弦值．

【答案】(1)证明见解析

(2)

【解析】

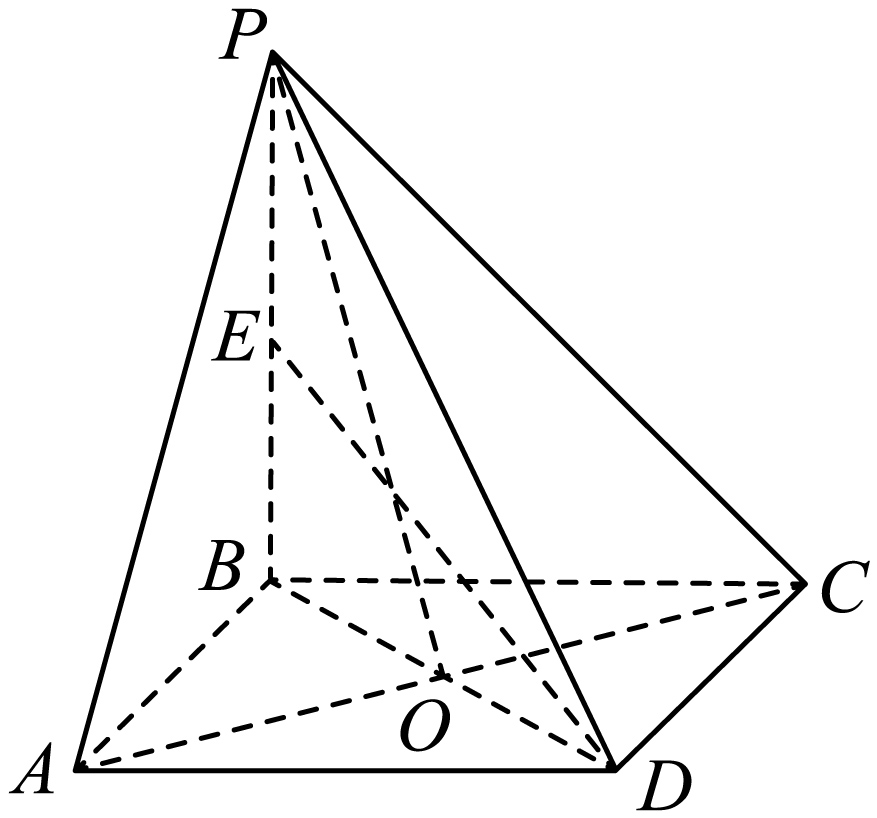
【分析】(1) 连接，设与交点为，连接，根据为正方形得到，再利用线面垂直得到，然后利用线面垂直的判定得出平面，进而得到线线垂直；

(2)根据为正方形和平面可知：，，两两垂直，则建立空间直角坐标系，写出点的坐标，利用直线的方向向量与平面的法向量的夹角公式即可求解.

【小问1详解】

连接，设与交点为，连接，

因为为正方形，所以，因为平面，所以，因为，*BD,PB*含于面*PBD,*所以平面，所以；

【小问2详解】

因为底面为正方形，且平面，

所以，，两两垂直，则建立空间直角坐标系，如图所示．

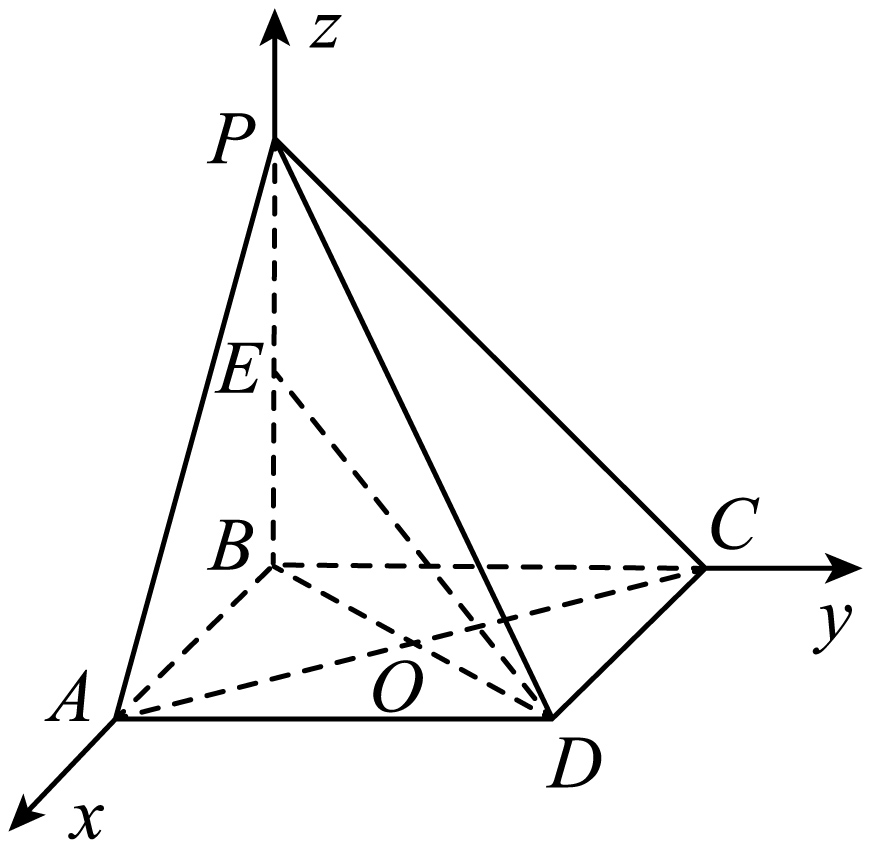
所以，，，，所以，，，

设平面的一个法向量为，则，即，

令，则，设直线与平面所成角为，由图可知为锐角，

则，

即直线与平面所成角的正弦值为．



19. 已知点在抛物线上，直线与交于两点，为坐标原点，且．

(1)求抛物线的焦点到准线的距离；

(2)求面积的最小值．

【答案】(1)；

(2).

【解析】

【分析】(1)将点代入，直接求解；(2)利用“设而不求法”表示出，得到，表示出的面积，进而求出最小值.

【小问1详解】

将点代入方程，解得：.

所以抛物线的焦点到准线的距离为；

【小问2详解】

设，，直线的方程为，联立，消去*y*，整理得，所以.

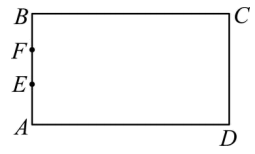
因为，所以，即，即

代入可得：，即或(不符合题意，舍去).

所以

所以当时，面积有最小值．

20. 在某地举办的智能AI大赛中，主办方设计了一个矩形场地*ABCD*(如图)，*AB*的长为9米，*AD*的长为18米．在*AB*边上距离*A*点6米的*F*处有一只电子狗，在距离*A*点3米的*E*处放置一个机器人．电子狗的运动速度是机器人运动速度的两倍，如果同时出发，机器人比电子狗早到达或同时到达某点(电子狗和机器人沿各自的直线方向到达某点)，那么电子狗将被机器人捕获，电子狗失败，这点叫失败点．



(1)判断点*A*是否为失败点(不用说明理由)；

(2)求在这个矩形场地内电子狗失败的区域面积*S*；

(3)若*P*为矩形场地*AD*边上的一动点，当电子狗在线段*FP*上都能逃脱时，求的取值范围．

【答案】(1)*A*是失败点

(2)(米2)；

(3)

【解析】

【分析】(1)直接根据失败点的概念即可判断；

(2)建立直角坐标系，求出点的轨迹为圆，进而得面积；

(3)根据临界位置为当线段*FP*与(2)中圆相切时，即可得结果.

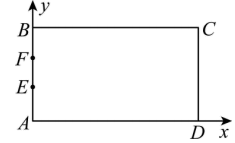
【小问1详解】

由于，，即机器人和电子狗同时到达点*A*，

故*A*是失败点

【小问2详解】

建立以*A*点为坐标原点，*AD*为*x*轴，*AB*为*y*轴的直角坐标系，如图，，



设机器人的速度为*v*，则电子狗的速度为2*v*，电子狗失败的区域内任意点，

可得，即，，

即失败点组成的区域为以为圆心，2为半径的半圆及其内部，

所以电子狗失败的区域面积(米2)

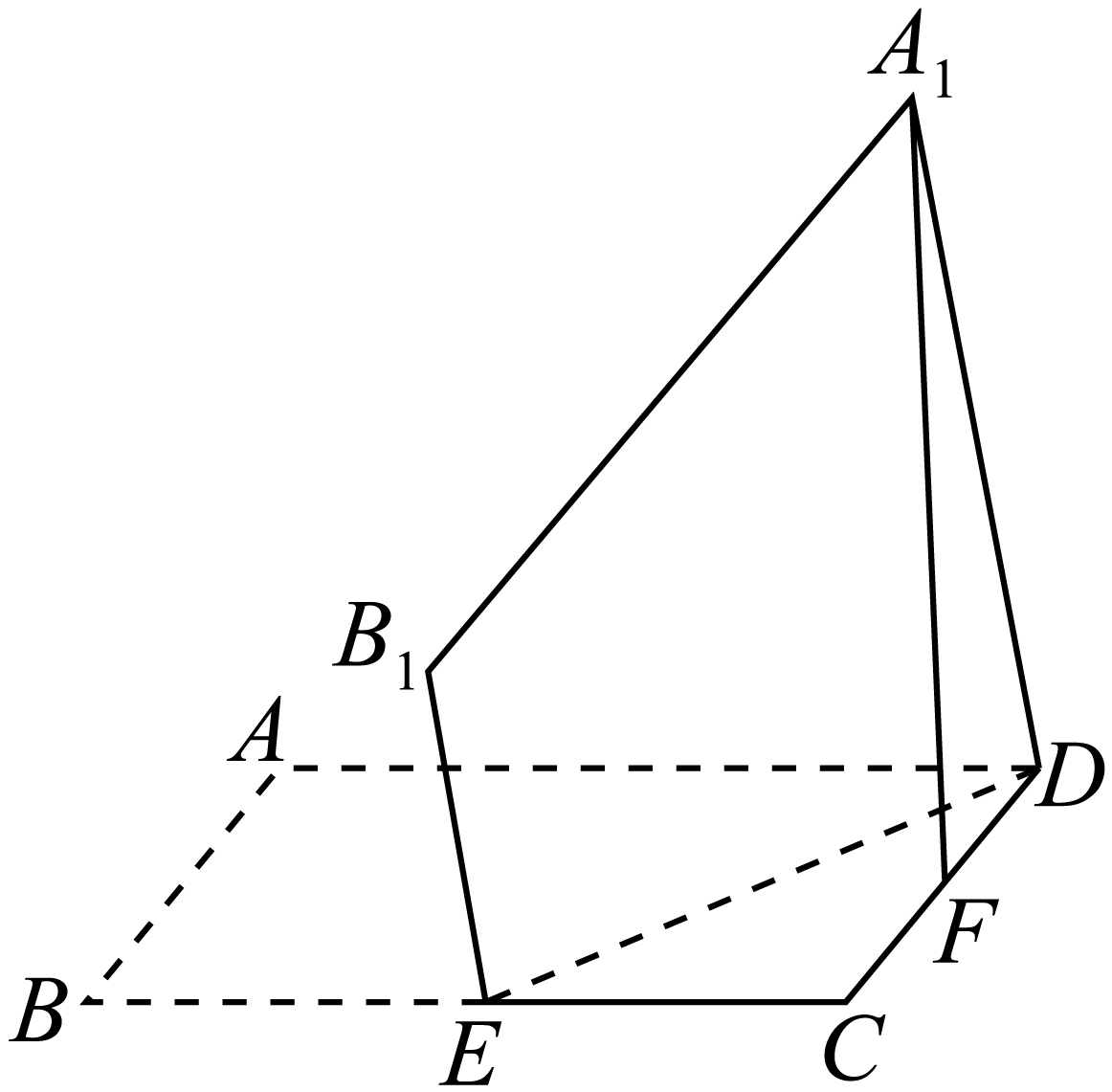
【小问3详解】

当线段*FP*与(2)中圆相切时，即，所以，

因为电子狗在线段*FP*上都能逃脱时，所以

又因为，所以的取值范围是．

21. 如图，在边长为2的正方形*ABCD*中，*E*，*F*分别为*BC*，*CD*的中点．以*DE*为折痕将四边形*ABED*折起，使*A*，*B*分别到达，，且平面平面*CDE*．设*P*为线段*CE*上一点，且，，*P*，*F*四点共面．



(1)证明：平面；

(2)求*CP*的长；

(3)求平面与平面*CDE*所成角的余弦值．

【答案】(1)证明见解析

(2)

(3)

【解析】

【分析】(1)根据翻折前后的位置关系可知，，再结合线面平行的判断定理，即可证明；

(2)首先利用确定平面的依据，先作出点，再利用三角形相似，求的长；

(3)首先以*C*为坐标原点，建立空间直角坐标系，分别求平面与平面*CDE*的法向量，利用法向量公式求二面角的余弦值.

【小问1详解】

证明：因为，所以沿*DE*为折痕将四边形*ABED*折起后，，

因为平面，平面，所以平面．

【小问2详解】

延长*AB*，*DE*交于点*G*，沿*DE*为折痕将四边形*ABED*折起的过程中，，，*G*三点共线，连接*FG*，设*FG*与*CE*的交点即为点*P*，则这样的点*P*满足，，*P*，*F*四点共面．

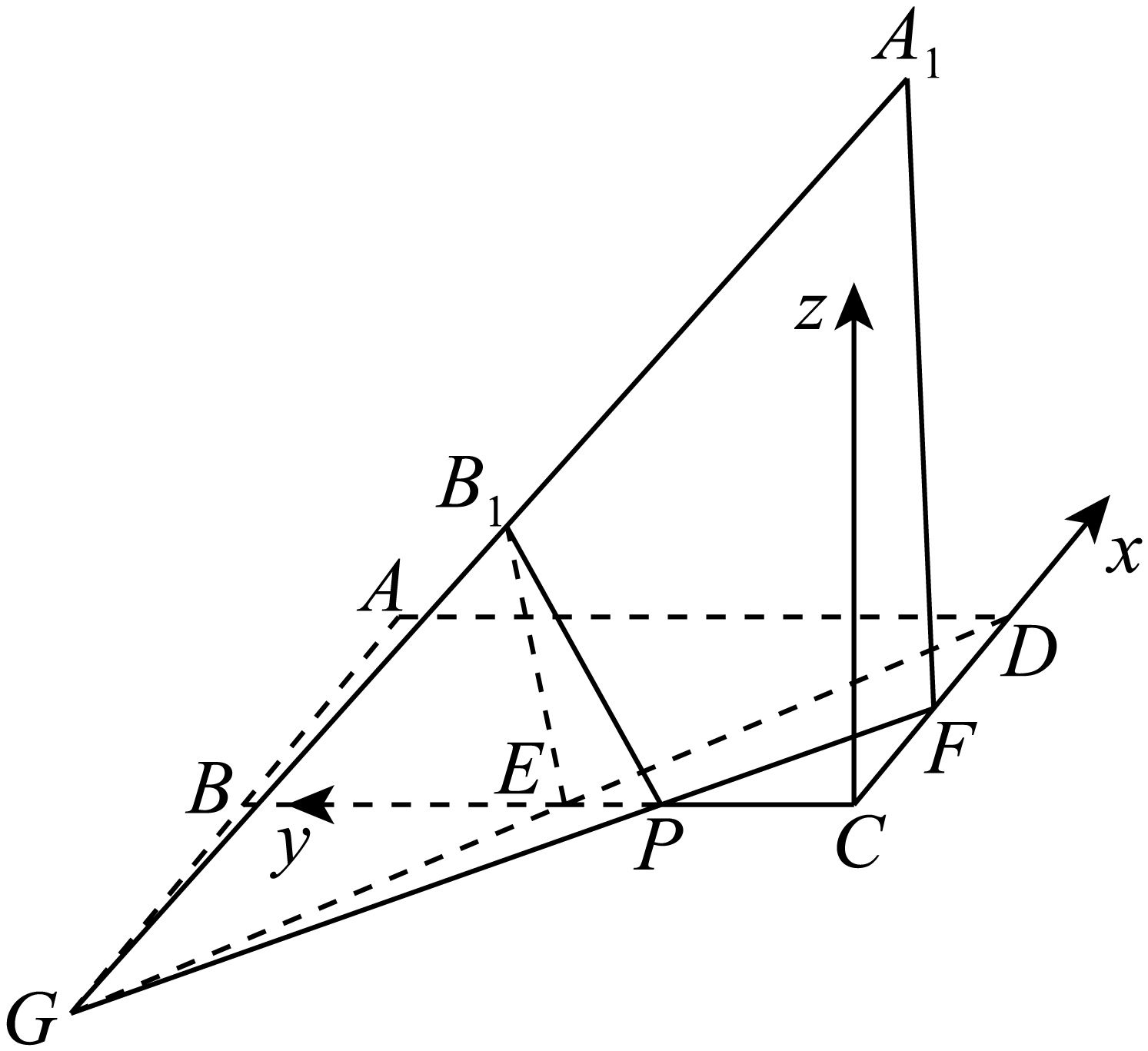
因为*E*为*BC*的中点，所以*B*为*AG*的中点，即，

设，则，由可得，，即，

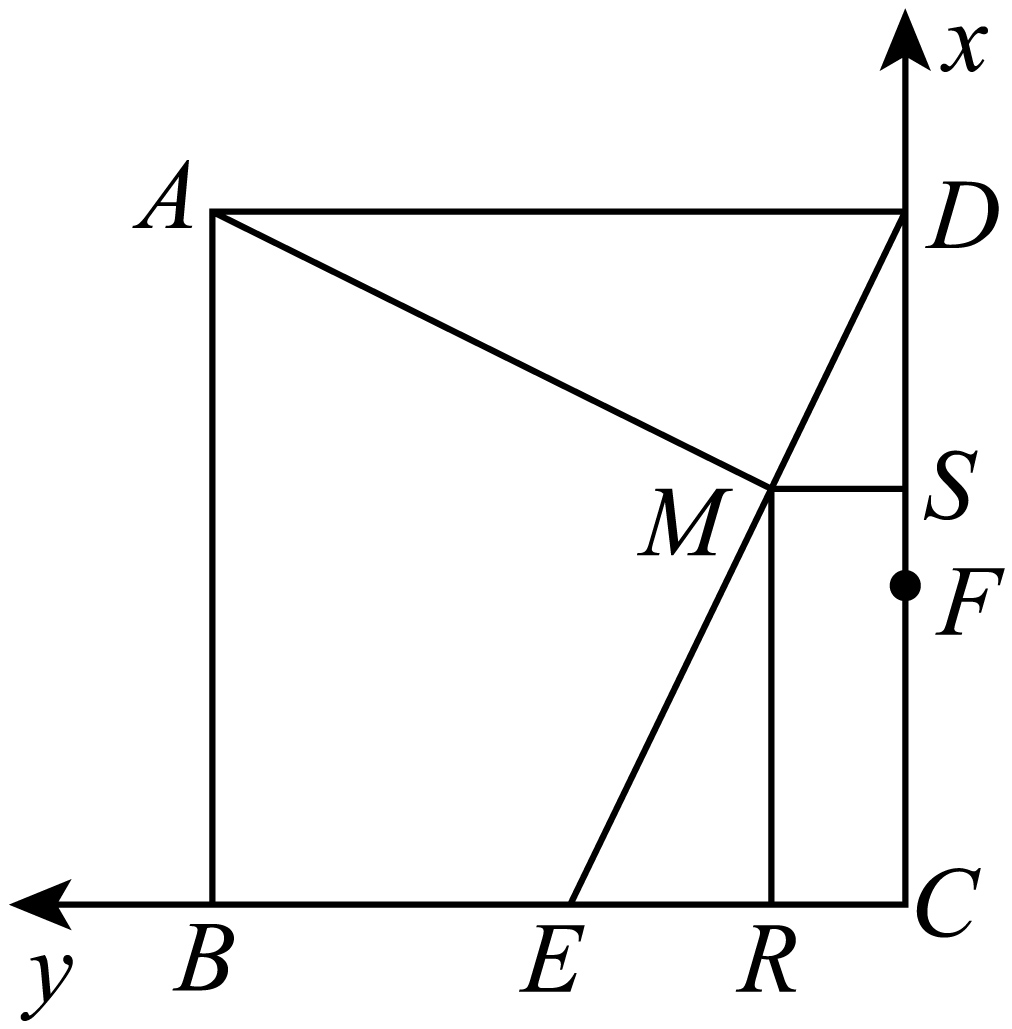
所以，即．

【小问3详解】

以*C*为坐标原点，分别以射线*CD*，*CE*为*x*轴，*y*轴正方向，以垂直于平面*CDE*且向上的方向为*z*轴正方向建立空间直角坐标系，如图所示，



则，，



如图，在平面直角坐标系中，,而平面平面，

而平面平面，所以平面，

再作，，垂足分别为，

,，

所以，所以,中，,即,,

所以,所以点的坐标是，

,所以在空间直角坐标系中点的坐标是

，所以，，

平面与平面*CDE*的法向量分别为，，

则，不妨取，则，

又，

平面与平面*CDE*所成角，锐角，

所以，

即平面与平面*CDE*所成角的余弦值．

22. 已知椭圆的左、右焦点分别为,,且．过的一条斜率存在且不为零的直线交于两点,的周长为．

(1)求的方程;

(2)设关于轴的对称点为,直线交轴于点,过作的一条切线,切点为,证明:．

【答案】(1)

(2)证明见解析

【解析】

【分析】(1) 根据椭圆定义及的周长为,可得的值,根据即可得的值,进而可得椭圆的方程;

(2)设出两点坐标,得出点坐标,设出直线的方程与椭圆联立,求出两点横坐标之间的关系,得出直线的方程,令,即可得点坐标,设出的直线方程,与椭圆联立,令即可得的直线方程,进而得点坐标,发现点横坐标与的横坐标相同,根据角度关系即可得到答案

【小问1详解】

由题意可知的周长为:,

所以,即,

设的半焦距为,

因为,即,

所以,即,

所以的方程为;

【小问2详解】

由(1)知椭圆的方程为,右焦点，

设的方程为,

代入的方程有:,

,

设,,则有,,

是点关于轴的对称点, 且,,

则直线的方程可表示为:,

令,得,

所以,

设直线的方程为,

代入的方程有:(\*),

当与相切时,,得,

将代入(\*)方程:,解得,

所以切点的横坐标等于右焦点的横坐标,

故轴,

所以,

又由关于轴的对称点为,所以,

所以,所以,得证.

【点睛】思路点睛:本题考查直线与圆锥曲线的综合应用,关于直线与圆锥曲线问题思路有:

(1)根据题意考虑直线与圆锥曲线的两个交点,即设有两个交点的直线方程;

(2)分情况讨论直线斜率是否存在;

(3)设直线方程,联立方程组;

(4)判别式大于零,韦达定理;

(5)根据题意建立关于的等式,化简即可.