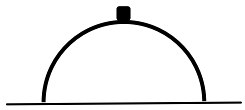
12/9/2013
ore 9:30

FISICA (secondo appello)

Proff. Della Valle, Nisoli, Torricelli

1) Un corpo di massa *m*, soggetto alla forza peso, scivola su una semisfera di raggio *R*, partendo dalla sua sommità con velocità iniziale nulla. Supponendo di poter trascurare l'attrito, si calcoli la quota (rispetto alla base della semisfera) a cui il corpo si stacca dalla superficie.



2)
a) Si enunci il teorema del momento angolare per un sistema di particelle (seconda equazione cardinale della meccanica dei sistemi), definendo nel contempo le grandezze che vi compaiono.
b) Si dimostri che tale teorema è conseguenza dei principi di Newton.
c) Si utilizzi tale teorema per mostrare che in un *sistema isolato* di particelle osservato in un riferimento inerziale si conserva il momento angolare.

3) Un corpo viene lanciato dalla superficie di un pianeta di massa *M* e raggio *R* lungo una direzione tangente alla superficie con una velocità

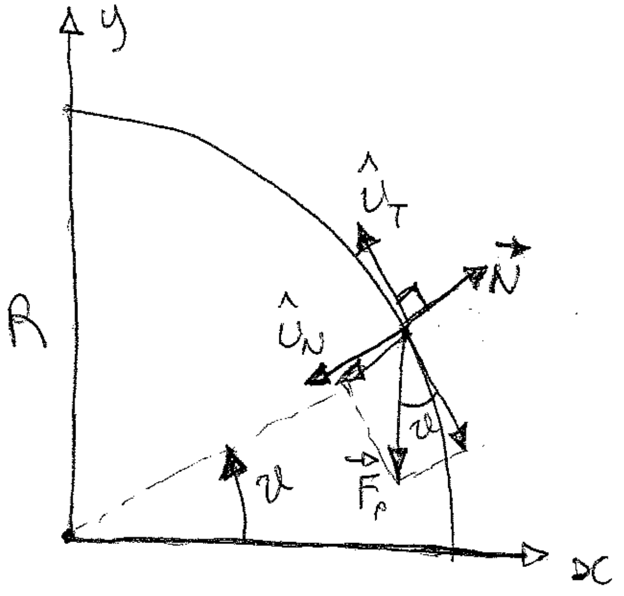
$$v_0 = \sqrt{\frac{3GM}{2R}},$$

dove *G* è la costante di gravitazione universale. Trascurando la rotazione del pianeta e l'attrito si calcoli la massima distanza dal centro del pianeta che il corpo raggiunge.

4) Un cilindro costituito da un materiale perfettamente conduttore del calore è chiuso da un pistone scorrevole senza attrito e si trova in un ambiente a temperatura T_0. Nel cilindro sono contenute *n* moli di un gas perfetto inizialmente in uno stato di equilibrio termodinamico. Il gas viene compresso bruscamente fino a dimezzarne il volume e raggiunge poi un nuovo stato di equilibrio cedendo all'ambiente una quantità di calore *Q*. Si determini:
(a) il lavoro termodinamico;
(b) la variazione di entropia del gas e dell'ambiente a seguito del processo.

- Scrivere in stampatello NOME, COGNOME e numero di MATRICOLA
- ***FIRMARE*** *l'elaborato*
- *MOTIVARE e COMMENTARE adeguatamente le formule utilizzate*

1.



Si definisce una coppia d'assi ortogonali con direzione tangente, $\hat{u}_T$, e normale, $\hat{u}_N$, alla traiettoria circolare del moto (fin tanto che il corpo puntiforme rimane a contatto con la semisfera). Le equazioni del moto per tale oggetto puntiforme sono:

$$\hat{u}_T : \quad \vec{F}_p \cdot \hat{u}_T = m a_T \hat{u}_T$$

$$-mg\cos\vartheta = m a_T$$

$$\hat{u}_N : \quad (\vec{N} + \vec{F}_p)\, \hat{u}_N = m a_N \hat{u}_N$$

$$-N + mg\sin\vartheta = m\frac{v^2}{R}$$

Dalla seconda equazione ricaviamo la seguente espressione per la reazione normale della superficie sferica

$$N = m\left(g\sin\vartheta - \frac{v^2}{R}\right)$$

Il corpo si staccherà dalla superficie della semisfera quando $N = 0$, cioè quando occuperà la posizione angolare $\bar{\vartheta}$ t.c.

$$g \sin(\bar{\vartheta}) = \frac{v^2(\bar{\vartheta})}{R}$$

Per determinare $\bar{\vartheta}$, occorre una seconda equazione, che possiamo ottenere dalle leggi di conservazione dell'energia meccanica. Il moto infatti avviene sotto l'azione di tutte e sole forze conservative: la forza peso (campo uniforme e costante nel tempo, quindi conservativo); la reazione normale, che, pure essendo variabile, non compie lavoro perchè ovunque ortogonale allo spostamento del punto materiale cui è applicata.

Alla posizione angolare $\bar{\vartheta}$, l'energia cinetica del corpo sarà $E_c'' = \frac{1}{2} m v^2(\bar{\vartheta})$, mentre all'istante iniziale del moto era $E_c' = 0$. L'energia potenziale all'istante iniziale era $E_p' = mgR$, mentre al momento del distacco sarà $E_p'' = mgH$ con $H = R \sin \bar{\vartheta}$ incognita del problema.

Quindi

$$E_c' + E_p' = E_c'' + E_p''$$

$$\frac{1}{2} \cancel{m} v^2(\bar{\vartheta}) + \cancel{m} g R \sin \bar{\vartheta} = \cancel{m} g R$$

$$v^2(\bar{\vartheta}) = 2gR(1 - \sin \bar{\vartheta})$$

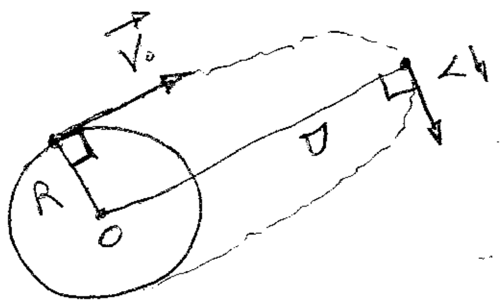
Sostituendo nella equazione ricavata in precedenza si ha

$$g \sin(\bar{\vartheta}) = 2g(1 - \sin(\bar{\vartheta})) \Rightarrow \bar{\vartheta} = \arcsin\left(\frac{2}{3}\right)$$

$$H = R \sin(\bar{\vartheta}) = \frac{2}{3} R.$$

2. Vedi dispense del corso pag. 68-69
(Lezione numero 14, AA 2012-2013)

3.



Nel moto del corpo si conservano sia l'energia meccanica che il momento angolare del corpo stesso, poiché esso è soggetto unicamente alla forza gravitazionale esercitata dal pianeta, che è una forza centrale (dunque conservativa e con momento nullo rispetto al centro del pianeta).

$\vec{L}_0' = R m v_0 \hat{u}_z$ ($\hat{u}_z$ versore entrante nel piano del disegno)

$\vec{L}_0'' = D m v \hat{u}_z = \vec{L}_0' \Rightarrow \underline{R v_0 = D v}$

essendo $\vec{L}_0'$ e $\vec{L}_0''$ il momento angolare iniziale del corpo e nell'istante in cui raggiunge la massima distanza D, rispettivamente.
Si noti che nella espressione di $\vec{L}_0''$ compare D perché evidentemente alla massima distanza la velocità del corpo è tutta trasversale (si annulla la velocità radiale) quindi il vettore posizione del corpo rispetto al pianeta in quell'istante è ortogonale alla velocità in quell'istante.

Per risolvere il problema abbiamo bisogno di una seconda equazione:

$$E' = E_c' + E_p' = \frac{1}{2} m v_0^2 - G\frac{Mm}{R}$$

$$E'' = E_c'' + E_p'' = \frac{1}{2} m v^2 - G\frac{Mm}{D}$$

avendo indicato con E' e E'' l'energia meccanica iniziale e all'istante di massima distanza, rispettivamente.

$$E' = E'' \Rightarrow \frac{1}{2}v_0^2 - G\frac{M}{R} = \frac{1}{2}v^2 - G\frac{M}{D}$$

$$\frac{3}{4}\cancel{G}\frac{M}{R} - \cancel{G}\frac{M}{R} = \frac{1}{2}\frac{R^{\cancel{2}}}{D^2}\frac{3}{2}\cancel{G}\frac{M}{\cancel{R}} - \cancel{G}\frac{M}{D}$$

$$-\frac{1}{4}\frac{\cancel{MR}}{R^2} = \frac{3}{4}\frac{\cancel{MR}}{D^2} - \frac{\cancel{MR}}{DR}$$

$$\frac{1}{4R^2}D^2 - \frac{1}{R}D + \frac{3}{4} = 0$$

$$D_{1,2} = \left(\frac{1}{R} \pm \sqrt{\frac{1}{R^2} - \frac{3}{4R^2}}\right)2R^2 =$$

$$= \left(1 \pm \sqrt{\frac{1}{4}}\right)2R = (2 \pm 1)R$$

La massima distanza è quindi $D = 3R$, l'altra soluzione, $D = R$, coincide con la posizione di lancio iniziale.

4.

(a) Poichè il gas è a contatto diatermano con l'ambiente a temperatura T_0, sia lo stato iniziale che lo stato finale della trasformazione sono stati di equilibrio termodinamico del gas alla medesima temperatura, T_0:

$\Delta U = 0$, essendo il gas ideale.

In base al I PTD, si trova quindi

$$\mathcal{L} = -Q \quad (<0)$$

(b) La variazione di entropia dell'ambiente sarà semplicemente

$$\Delta S_A = \frac{Q}{T_0} > 0$$

Per il sistema invece, sappiamo che

$$\Delta S_S = \int_i^F \left(\frac{\delta Q}{T}\right)_{REV} = \frac{1}{T_0} \int_i^F (\delta Q)_{REV}$$

$$= \frac{Q_{REV}}{T_0}$$ ove Q_{REV} è il calore scambiato in una trasf. reversibile tra stato iniz. e finale.

Stato iniziale : $T_i = T_0$, $V_i = V_0$, $p_i = nRT_0/V_0$

Stato finale : $T_F = T_0$, $V_F = \frac{1}{2}V_0$, $p_F = 2nRT_0/V_0$

Infatti gli stati iniziale e finale giacciono sull'isoterma reversibile a temperatura T_0.

$$Q_{REV} = \mathcal{L}_{REV} = nRT_0 \ln\left(\frac{V_F}{V_i}\right) = nRT_0 \ln\left(\frac{1}{2}\right) =$$

$$= -nRT_0 \ln(2)$$

$$\Delta S_S = -nR\ln(2) < 0$$