3.6 Il problema generale della dinamica del punto materiale

Formulazione. Il *problema generale* della dinamica del punto materiale consiste nella ***ricerca della legge oraria*** di un punto materiale di massa m che si muove sotto l'azione della **risultante** $\vec{F}$ **delle forze** ad esso applicate.

Soluzione. Per il II principio della dinamica, $\vec{F}(t) = m\vec{a}(t) = m\frac{d\vec{v}(t)}{dt} = m\frac{d^2\vec{r}(t)}{dt^2}$, dunque, se l'andamento temporale della risultante è noto basta eseguire una doppia integrazione (vettoriale) nel tempo, inserendo le condizioni iniziali di velocità e di posizione:

$$m\int_{t_0}^{t} d\vec{v}(t') = \int_{t_0}^{t} \vec{F}(t')dt' = \quad \Rightarrow \quad \vec{v}(t) = \vec{v}(t_0) + \frac{1}{m}\int_{t_0}^{t} \vec{F}(t')dt'$$

$$\vec{r}(t) = \vec{r}(t_0) + \int_{t_0}^{t} \vec{v}(t')dt'$$

Oss. In generale, tuttavia, **l'andamento temporale della risultante delle forze non è noto esplicitamente**, ma si conosce ad esempio la sua dipendenza dalla posizione e dalla velocità del punto materiale, oltre che dal tempo.
Quindi poichè il secondo principio della dinamica permette di scrivere un'equazione vettoriale del tipo $m\frac{d^2\vec{r}(t)}{dt^2} = \vec{F}\left(\vec{r}(t), \frac{d\vec{r}(t)}{dt}, t\right)$, il problema generale della dinamica anche per un singolo punto materiale è un problema complesso, che si esprime come un sistema di tre equazioni differenziali **scalari** del tipo:

$$\begin{cases} m\dfrac{d^2x(t)}{dt^2} = F_x\left(x(t), y(t), z(t), \dfrac{dx(t)}{dt}, \dfrac{dy(t)}{dt}, \dfrac{dz(t)}{dt}, t\right) \\ m\dfrac{d^2y(t)}{dt^2} = F_y\left(x(t), y(t), z(t), \dfrac{dx(t)}{dt}, \dfrac{dy(t)}{dt}, \dfrac{dz(t)}{dt}, t\right) \\ m\dfrac{d^2z(t)}{dt^2} = F_z\left(x(t), y(t), z(t), \dfrac{dx(t)}{dt}, \dfrac{dy(t)}{dt}, \dfrac{dz(t)}{dt}, t\right) \end{cases}$$

In generale tale sistema non ammette una soluzione esatta in forma analitica. Caso per caso sarà possibile determinarne la soluzione o per via analitica esatta (casi particolari), o sulla base di talune approssimazioni, analitiche o numeriche.

3.7 Classificazione delle forze in natura (Cenni)

Le quattro interazioni fondamentali

Tutte le forze esistenti in natura possono essere ricondotte a quattro interazioni fondamentali:

- *interazione gravitazionale*: determina l'attrazione tra le masse; è stata scoperta e descritta analiticamente da Newton.
- *interazione elettromagnetica*: dà luogo a tutti i fenomeni di natura elettrica e magnetica, tra i quali la luce.
- *interazione nucleare forte*: tiene uniti protoni e neutroni nei nuclei atomici.
- *interazione nucleare debole*: presiede a molte reazioni nucleari.

Le distanze alle quali agiscono tali interazioni e le loro intensità sono molto diverse, come riassunto in tabella:

Interazione	Raggio d'azione	Intensità relativa
gravitazionale	∞	10^{-39}
elettromagnetica	∞	10^{-2}
nucleare forte	10^{-15} m	1
nucleare debole	<< 10^{-15} m	10^{-5}

Si noti, in particolare, come la forza gravitazionale e quella elettromagnetica, che hanno entrambe raggio d'azione infinito (e, come vedremo, hanno anche lo stesso andamento con la distanza), abbiano intensità molto differenti: l'interazione elettromagnetica è circa 37 ordini di grandezza più intensa di quella gravitazionale.

<u>Forza gravitazionale</u> (Sir Isaac Newton, 1666)
Ogni punto materiale attrae ogni altro punto materiale con una forza diretta come la congiungente dei due punti, e di modulo pari a

$$\boxed{F = \gamma \frac{m_1 m_2}{r_{12}^2}}$$

- m_1 ed m_2: masse dei due punti materiali
- r_{12}: distanza tra i due punti materiali
- $\gamma = 6.67 \times 10^{-11}$ N m^2 kg^2: costante di gravitazione universale

<u>NB</u>: Si dimostra poi che, per corpi di dimensioni non trascurabili, la forza gravitazionale è la stessa che si avrebbe se tutta la massa fosse concentrata nel baricentro del corpo.

<u>Forza peso</u>
Immaginiamo, per semplicità, che la Terra sia costituita da una sfera omogenea di raggio R_T e di massa M_T; se allora un corpo di massa m è posto sulla superficie terrestre, sarà attratto verso il centro della Terra con una forza gravitazionale pari a

$$W = \gamma \frac{M_T}{R_T^2} \cdot m = g_0 \cdot m \qquad \textit{forza peso}$$

L'*accelerazione di gravità* $g_0 = \gamma M_T / R_T^2 \simeq 9.81$ m/s^2, come si vede, non dipende dalla massa del corpo considerato, ma solo dalle caratteristiche della Terra.

<u>Forza elettrostatica o "forza di Coulomb"</u> (Charles Augustin de Coulomb, ~1785)
Due cariche elettriche puntiformi q_1 e q_2 nel vuoto interagiscono con una forza diretta lungo la congiungente e di modulo pari a

$$\boxed{F = \frac{1}{4\pi \varepsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r_{12}^2}}$$

- r_{12}: distanza tra le due cariche puntiformi
- $\varepsilon_0 = 8.854 \times 10^{-19}$ F/m: costante dielettrica del vuoto

La forza elettrostatica, a differenza di quella gravitazionale, può essere *attrattiva* o *repulsiva*, a seconda che le due cariche abbiano segni *discordi* o *concordi*; il suo modulo, come per la forza gravitazionale, è inversamente proporzionale al quadrato della distanza.

<u>Forza magnetica o "forza di Lorentz"</u> (Hendrik Antoon Lorentz, ~1875)
Una carica elettrica q in moto con velocità $\vec{v}$ in presenza di un campo magnetico $\vec{B}$ è soggetta ad una forza:

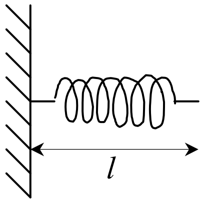
$$\boxed{\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}}$$

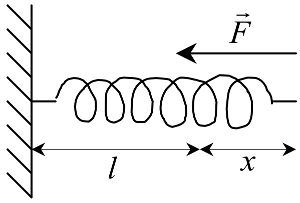
La forza magnetica è sempre ortogonale alla velocità della carica ed al campo magnetico.

<u>Forze elastiche</u> (Robert Hooke, 1675)

Consideriamo una molla avente lunghezza di riposo l. Se produciamo una deformazione di ampiezza x, la molla reagisce con una forza proporzionale ad x e di verso contrario alla deformazione:

$$\boxed{\vec{F} = -kx\hat{u}_x}$$





La costante di proporzionalità k è una caratteristica della molla e prende il nome di *costante elastica*; si misura in $N \cdot m^{-1}$ (Newton / metro).

Forze di attrito

Sono forze che si *oppongono al moto relativo* di due corpi in contatto meccanico tra loro. Esistono molteplici modelli fenomenologici dell'attrito. Riveste un ruolo particolarmente importante l'attrito radente tra corpi solidi (vedi lezione successiva).

3.8 Statica del punto materiale

Consideriamo un punto materiale con **velocità iniziale nulla** in un riferimento inerziale; se allora il risultante delle forze applicate è nullo il punto materiale resta fermo. Ovvero vale la seguente:

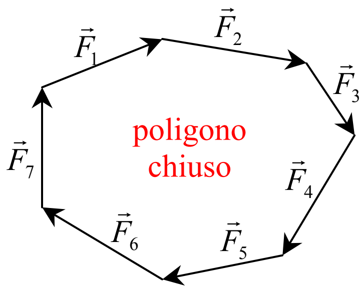
Prop. ***Legge fondamentale della statica***

Condizione necessaria e sufficiente affinché un punto materiale resti in ***quiete*** *in una certa posizione è che:*

- *sia nulla la velocità all'istante considerato*
- *sia nullo il risultante delle forze applicate*

Oss. In coordinate cartesiane, la condizione vettoriale $\vec{R} = 0$ equivale alle tre equazioni scalari:

$$\begin{cases} R_x \equiv \sum_i F_{i,x} = 0 \\ R_y \equiv \sum_i F_{i,y} = 0 \\ R_z \equiv \sum_i F_{i,z} = 0 \end{cases}$$



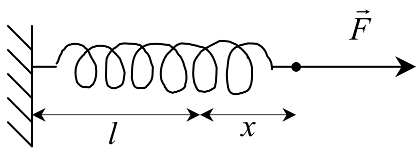
$$\boxed{\vec{R} = 0}$$

Se le forze agenti sono soltanto due, la risultante è nulla se queste sono uguali ed opposte.
Se sono più di due, la condizione di equilibrio si ottiene se i vettori che le rappresentano, disposti in sequenza, formano un poligono (vedi figura).

NB: Affinché il punto materiale si trovi effettivamente in quiete, poi, si richiede anche che la velocità iniziale sia nulla.

Misura statica delle forze

Una misura della forza alternativa a quella dinamica si ottiene *equilibrando* la forza da misurare con forze note. Su questo principio di basa il *dinamometro*, che sfrutta la forza elastica di una molla per bilanciare la forza incognita: dalla misura della deformazione indotta si ricava l'intensità della forza.

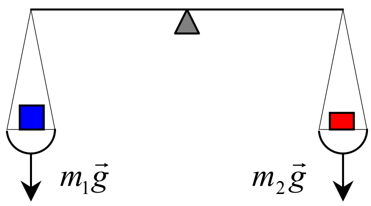


$$\vec{R} = \vec{F} + \vec{F}_{el} = \vec{F} + (-kx\hat{u}_x) \Rightarrow \vec{F} = kx\hat{u}_x$$

La bilancia a due piatti

Anche la bilancia a due piatti si basa sui principi della statica: se i due bracci hanno pari lunghezza, quando il peso di m_1 (nota) e quello di m_2 (da misurare) sono uguali si raggiunge l'equilibrio. In questo caso, poiché l'accelerazione di gravità g è la stessa per i due corpi, anche le due masse sono uguali.

La bilancia a due piatti misura, per confronto, la massa.



3.9 Le Reazioni Vincolari

Reazioni vincolari

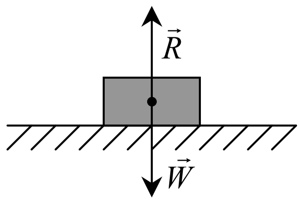
Le forze si dividono in ***forze attive***, che determinano il moto dei corpi, e ***reazioni vincolari***, che descrivono le limitazioni al moto dovute alla presenza di corpi circostanti.

Per una data reazione vincolare:

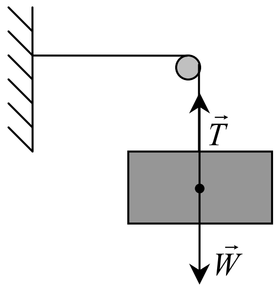
- *il modulo* è generalmente proporzionale a quello della forza attiva;
- *la direzione* dipende dal tipo di vincolo;
- *il verso* è sempre opposto al verso delle forze attive.

Alcuni ***vincoli*** sono ***monodimensionali***:

***a*)** Un **piano** di appoggio perfettamente liscio (situazione ideale, che però può essere riprodotta con ottima approssimazione) può esercitare solo reazioni vincolari orientate come la normale uscente dal piano. Se dunque la forza attiva è parallela al piano, la reazione è nulla; se, viceversa, la forza attiva è ortogonale al piano ed il piano è in quiete la reazione vincolare è uguale ed opposta alla forza attiva. Esempio tipico è quello della forza peso di un grave appoggiato ad un piano orizzontale (oppure inclinato).



***b*)** Una **fune** (cui sia appeso un corpo) può esercitare solo forze di *tensione* (o *trazione*), dirette parallelamente alla fune stessa. Una fune che sorregge un corpo (fermo) verticalmente esercita una tensione uguale ed opposta alla forza peso.



***c*)** Un'**asta** (cui sia vincolato un corpo) può esercitare solo forze di *compressione*, dirette parallelamente all'asta stessa. Un'asta che sorregge un corpo (fermo) verticalmente esercita una compressione uguale ed opposta alla forza peso.