

FISICA Sperimentale

PROBLEMI DI

MECCHANICA E TERMODINAMICA

Questo volume contiene una raccolta di problemi svolti e ampiamente commentati sui principali argomenti di Meccanica e Termodinamica. Il volume, che fa parte di una collana scritta per il nuovo ordinamento degli studi universitari, nasce dalla esperienza didattica maturata dagli autori nell'insegnamento dei corsi di Fisica Sperimentale presso le Facoltà di Ingegneria del Politecnico di Milano.

Lo scopo di questa raccolta di problemi è di fornire agli studenti delle Facoltà di Ingegneria e Scienze un nuovo e valido contributo didattico, mediante lo svolgimento accurato, metodico ma lineare, di numerosi problemi.

Gli esercizi sono raggruppati per argomenti ed aree tematiche e comprendono: cinematica e dinamica del punto materiale; lavoro ed energia; dinamica relativa; dinamica dei sistemi; gravitazione; statica e dinamica del corpo rigido e dei fluidi; termodinamica e termodinamica.

PROBLEMI DI MECCANICA E TERMODINAMICA



S. LONGHI, M. NISOLI,
R. OSELLAME, S. STAGIRA

PROGETTO  LEONARDO

è una realizzazione
SOCIETÀ EDITRICE ESCULAPIO
40131 Bologna - via U. Terrasini, 30 - Tel. 051-63.40.113 - Fax 051-63.41.100
www.editrice-esculapio.it



Progetto  LEONARDO
BOLOGNA

**S. LONGHI, M. NISOLI
R. OSCELLAME, S. STAGIRA**

**FISICA Sperimentale
Problemi di
Meccanica e Termodinamica**

PROGETTO  LEONARDO
BOLOGNA

ISBN 88-7488-058-8

Prima edizione: Settembre 2003

Ristampa corretta: Febbraio 2004

Ristampe: 2005 - 2006 - 2007 - 2008

Responsabile produzione: Giampaolo Parenti

Redazione: Gabriella Gatti e Giancarla Panigali

Stampa e confezione: L.E.G.O. SpA - Stabilimento di Lavis (TN)



PROGETTO LEONARDO

© SOCIETÀ EDITRICE ESCULAPIO s.r.l.
40131 Bologna - Via U. Terracini 30 - Tel. 051-63.40.113 - Fax 051-63.41.136
www.editrice-esculapio.it

Tutti i diritti riservati. Riproduzione anche parziale vietata.

Nessuna parte di questa pubblicazione può essere riprodotta, archiviata in un sistema di recupero o trasmessa, in qualsiasi forma o con qualsiasi mezzo elettronico, meccanico, fotoriproduzione, memorizzazione o altro, senza permesso scritto da parte dell'Editore.

Indice

1	Calcolo vettoriale ed analisi dimensionale	1
1.1	Problemi	1
1.2	Soluzioni	5
2	Cinematica del punto materiale	19
2.1	Problemi	19
2.2	Soluzioni	25
3	Dinamica del punto materiale	49
3.1	Problemi	49
3.2	Soluzioni	53
4	Lavoro ed energia	77
4.1	Problemi	77
4.2	Soluzioni	83
5	Dinamica nei sistemi di riferimento non-inerziali	105
5.1	Problemi	105
5.2	Soluzioni	109
6	Dinamica dei sistemi di particelle	131
6.1	Problemi	131
6.2	Soluzioni	137
7	Gravitazione universale	163
7.1	Problemi	163
7.2	Soluzioni	167
8	Statica e dinamica del corpo rigido	187
8.1	Problemi	187
8.2	Soluzioni	193
9	Statica e dinamica dei fluidi	219
9.1	Problemi	219
9.2	Soluzioni	223

10 Termologia, calorimetria, primo principio della termodinamica	243
10.1 Problemi	243
10.2 Soluzioni	249
11 Secondo principio della termodinamica	265
11.1 Problemi	265
11.2 Soluzioni	271
A Costanti ed unità di misura	289
B Richiami di trigonometria	293
C Calcolo differenziale ed integrale	297
C.1 Regole di derivazione di una funzione	297
C.2 Regole di integrazione di una funzione	298
C.3 Espansione in serie di una funzione	299

Prefazione

Questo volume contiene una raccolta di problemi di Meccanica e Termodinamica nata dall'esperienza didattica maturata dagli autori nell'insegnamento dei corsi di Fisica Sperimentale presso le Facoltà di Ingegneria del Politecnico di Milano. Il volume fa parte di una collana scritta per il nuovo ordinamento degli studi universitari per le Facoltà scientifiche. La riorganizzazione dei corsi universitari ha segnato una certa discontinuità di metodo e di programma rispetto ai corsi tradizionalmente impartiti nelle Facoltà di Ingegneria e di Scienze. Alle modifiche dei programmi e dei metodi di insegnamento si accompagna la necessità e la difficoltà di dover presentare a studenti del primo anno argomenti e problemi di una certa complessità. Il frequente ricorso alla discussione di esempi e l'applicazione delle leggi allo svolgimento dei problemi acquista, in questa prospettiva, una importanza non trascurabile nell'insegnamento dei nuovi corsi.

Sulla base di queste considerazioni e della nostra esperienza didattica, ci è parso che i numerosi eserciziari di Meccanica e Termodinamica attualmente in uso e scritti per corsi del vecchio ordinamento degli studi si impegnino su una tipologia di problemi ed utilizzino metodi di svolgimento poco consoni alla preparazione ed alle basi matematiche dello studente del nuovo ordinamento degli studi.

Lo scopo principale di questo volume è di fornire allo studente un nuovo e valido contributo didattico allo studio della Meccanica e della Termodinamica mediante lo svolgimento accurato, metodico ma lineare, di numerosi problemi. Gli esercizi sono raggruppati in undici capitoli organizzati per argomenti ed aree tematiche: calcolo vettoriale; cinematica e dinamica del punto materiale; lavoro ed energia; dinamica relativa; dinamica dei sistemi; gravitazione; statica e dinamica del corpo rigido e dei fluidi; termologia e termodinamica. I problemi, di difficoltà e gradualità diverse, sono completamente e dettagliatamente risolti in maniera critica, aiutando lo studente ad acquisire la metodologia di soluzione più per comprensione che per imitazione. Alcuni argomenti o metodi di svolgimento più ostici sono talvolta discussi al termine degli esercizi per stimolare l'interesse e le conoscenze degli studenti più brillanti. Molti problemi sono tratti da esercizi assegnati in prove d'esame. Questa raccolta di problemi è rivolta in particolare a studenti impegnati ad affrontare argomenti di Meccanica e Termodinamica in un corso di Fisica di base nelle Facoltà di Ingegneria o di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali. Ci auguriamo che il nostro lavoro aiuti lo studente nella comprensione di questa materia mediante lo svolgimento di problemi secondo le nuove metodologie ed i nuovi programmi posti dalla riforma universitaria.

Milano, febbraio 2004

Gli autori

Capitolo 1

Calcolo vettoriale ed analisi dimensionale

1.1 Problemi

P.1.1.

Una particella si sposta da A(1,2,3) a B(1,3,1). Si determinino i vettori posizione iniziale e finale rispetto all'origine e l'espressione del vettore spostamento.

P.1.2.

Dati due punti in un piano cartesiano:

$$A(1, 1, 1), \quad B(2, -1, 3)$$

si determini l'espressione del versore \mathbf{u} che individua la direzione ed il verso del vettore (B-A) che congiunge i suddetti punti.

P.1.3.

Dati i due vettori

$$\mathbf{v}_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} \mathbf{u}_x - \frac{1}{2} \mathbf{u}_y, \quad \mathbf{v}_2 = -\sqrt{2} \mathbf{u}_x + 2 \mathbf{u}_y$$

si calcolino:

- (i) il vettore somma $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$;
- (ii) il prodotto scalare $\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2$;
- (iii) il prodotto vettoriale $\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2$;
- (iv) la componente del vettore $\mathbf{w} = 3\mathbf{u}_x - 2\mathbf{u}_y$ nella direzione e verso del vettore somma determinato al punto (i).

P.1.4.

Si determini l'angolo compreso tra i due vettori:

$$\begin{aligned}\mathbf{v}_1 &= 3\mathbf{u}_x + 4\mathbf{u}_y - 5\mathbf{u}_z \\ \mathbf{v}_2 &= -\mathbf{u}_x + 2\mathbf{u}_y + 6\mathbf{u}_z\end{aligned}$$

P.1.5.

Si calcoli il prodotto vettoriale tra gli stessi due vettori dell'esercizio precedente.

P.1.6.

Si determini il modulo quadro del vettore somma $|\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2|^2$ dei due vettori del problema P.1.4 e si verifichi la seguente relazione:

$$|\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2|^2 = |\mathbf{v}_1|^2 + |\mathbf{v}_2|^2 + |\mathbf{v}_1||\mathbf{v}_2| \cos \vartheta,$$

dove ϑ è l'angolo compreso tra i due vettori.

P.1.7.

Si determini l'espressione di un vettore \mathbf{v}_3 di modulo pari a 5 e con direzione ortogonale ai seguenti due vettori:

$$\begin{aligned}\mathbf{v}_1 &= 2\mathbf{u}_x + \mathbf{u}_y - 3\mathbf{u}_z \\ \mathbf{v}_2 &= \mathbf{u}_x - 2\mathbf{u}_y + \mathbf{u}_z\end{aligned}$$

P.1.8.

Dati due vettori:

$$\begin{aligned}\mathbf{v}_1 &= 4\mathbf{u}_x + 2\mathbf{u}_y - 7\mathbf{u}_z \\ \mathbf{v}_2 &= 3\mathbf{u}_x - 3\mathbf{u}_y + \mathbf{u}_z\end{aligned}$$

si determini la componente z del seguente vettore:

$$\mathbf{v}_3 = 2\mathbf{u}_x - \mathbf{u}_y + z\mathbf{u}_z,$$

affinché i tre vettori siano complanari.

P.1.9.

Si calcoli la derivata dei seguenti vettori rispetto al parametro t :

- (i) $\mathbf{v}_1 = t\mathbf{u}_x + \sqrt{3}t\mathbf{u}_y$;
- (ii) $\mathbf{v}_2 = \cos t\mathbf{u}_x + \sin t\mathbf{u}_y$.

Si determini inoltre la quantità:

$$\int_0^a [\mathbf{v}_1(t) - \mathbf{v}_2(t)] dt.$$

P.1.10.

Si consideri il campo vettoriale definito in coordinate cartesiane dalla relazione:

$$\mathbf{v} = \frac{x\mathbf{u}_x + y\mathbf{u}_y}{\sqrt{x^2 + y^2}};$$

1.1 Problemi

si disegni il vettore \mathbf{v} nei punti di coordinate A(1,1), B(-1,1), C(-1,-1) e D(1,-1). Sulla base del disegno stabilire qual è in generale la direzione ed il verso di \mathbf{v} in un punto generico del piano. Si ripeta l'esercizio per il campo vettoriale

$$\mathbf{w} = \frac{y\mathbf{u}_x - x\mathbf{u}_y}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

P.1.11.

Sia assegnato il campo vettoriale definito in un punto P dall'espressione

$$\mathbf{E}(P) = \frac{\alpha}{r^2} \mathbf{u}_r$$

coh r distanza tra P e l'origine O delle coordinate ed \mathbf{u}_r versore radiale (spiccato da O e con verso uscente). Riscrivere \mathbf{E} in funzione delle coordinate cartesiane x ed y e dei corrispondenti versori degli assi \mathbf{u}_x ed \mathbf{u}_y . Si disegni l'andamento delle linee di flusso del campo.

P.1.12.

In un sistema di coordinate cartesiane siano definiti due campi vettoriali

$$\mathbf{a} = x^2 \mathbf{u}_x - 2y \mathbf{u}_y$$

e

$$\mathbf{b} = (2x+1)\mathbf{u}_x + y^2 \mathbf{u}_y$$

Sia $\mathbf{c} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$ la loro somma. Si calcolino:

- (i) Il modulo di \mathbf{c} ;
- (ii) I punti in cui $|\mathbf{c}| = 0$ (se esistono).

P.1.13.

In un sistema di coordinate cartesiane un campo scalare è definito dalla relazione:

$$f(x, y, z) = \frac{k}{x^2 + y^2}$$

Stabilire la forma delle superfici di livello $f(x, y, z) = \text{costante}$.

P.1.14.

Assegnato in un sistema di coordinate cartesiane un campo scalare $f = f(x, y, z)$, si definisce *gradiente del campo scalare* f la quantità:

$$\text{grad } f = \frac{\partial f}{\partial x} \mathbf{u}_x + \frac{\partial f}{\partial y} \mathbf{u}_y + \frac{\partial f}{\partial z} \mathbf{u}_z.$$

Si calcoli il gradiente del seguente campo scalare:

$$f(x, y, z) = 3\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

e si stabilisca che relazione sussiste fra le superfici di livello di $f(x, y, z)$ ed il gradiente di f .

P.1.15.

Assegnato in un sistema di coordinate cartesiane il campo vettoriale $\mathbf{v} = v_x \mathbf{u}_x + v_y \mathbf{u}_y + v_z \mathbf{u}_z$, si definisce *divergenza del vettore* \mathbf{v} la quantità:

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}.$$

In base a tale definizione si calcoli la divergenza del vettore $\mathbf{w} = 2xy \mathbf{u}_x - z^2 \mathbf{u}_y + 5 \sin(zy) \mathbf{u}_z$.

P.1.16.

Assegnato in un sistema di coordinate cartesiane il campo vettoriale $\mathbf{v} = v_x \mathbf{u}_x + v_y \mathbf{u}_y + v_z \mathbf{u}_z$, si definisce *rotore del vettore* \mathbf{v} la quantità:

$$\operatorname{rot} \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{u}_x & \mathbf{u}_y & \mathbf{u}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) \mathbf{u}_x + \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) \mathbf{u}_y + \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) \mathbf{u}_z.$$

In base a tale definizione si calcoli il rotore del vettore $\mathbf{w} = 4z^2 y \mathbf{u}_x - 3(x/y) \mathbf{u}_y + 2xz \mathbf{u}_z$.

P.1.17.

Si calcoli il valore dell'integrale di linea

$$\int_{\gamma, A \rightarrow B} \mathbf{w} \cdot d\mathbf{l}$$

essendo γ una linea giacente nel piano cartesiano xy , di equazione

$$y = ax^2;$$

A(0,0) e B(2,4a) due punti di γ ; \mathbf{w} un campo vettoriale di espressione

$$\mathbf{w} = x \mathbf{u}_y - y \mathbf{u}_x \quad (1)$$

e $d\mathbf{l}$ il vettore spostamento infinitesimo orientato lungo γ nella direzione che va da A a B.

P.1.18.

Sfruttando il principio di omogeneità, si determini l'espressione del periodo delle piccole oscillazioni di un pendolo semplice sapendo che può dipendere, mediante una costante adimensionale, solo dalla massa m del pendolo, dalla lunghezza l del filo e dall'accelerazione di gravità g .

P.1.19.

Si determinino le dimensioni della costante di gravitazione universale γ presente nella legge di gravitazione universale:

$$F = \gamma \frac{m_1 m_2}{r^2}$$

1.2 Soluzioni

1.2 Soluzioni

S.1.1.

Il vettore posizione in coordinate cartesiane di una particella che si trova in un qualsiasi punto dello spazio ha come componenti le stesse coordinate del punto. Da ciò consegue che il vettore posizione iniziale della particella corrispondente al punto A(1,2,3), è espresso da

$$\mathbf{r}_A = \mathbf{u}_x + 2\mathbf{u}_y + 3\mathbf{u}_z, \quad (1)$$

mentre il vettore posizione finale corrispondente al punto B(1,3,1), è espresso da

$$\mathbf{r}_B = \mathbf{u}_x + 3\mathbf{u}_y + \mathbf{u}_z. \quad (2)$$

Il vettore spostamento, definito come la differenza tra il vettore posizione finale ed il vettore posizione iniziale, è quindi pari a

$$\Delta \mathbf{r} = \mathbf{r}_B - \mathbf{r}_A = \mathbf{u}_y - 2\mathbf{u}_z. \quad (3)$$

Il modulo del vettore spostamento è dato da

$$|\Delta \mathbf{r}| = \sqrt{r_x^2 + r_y^2 + r_z^2} = \sqrt{5}, \quad (4)$$

mentre i suoi coseni direttori sono

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= \frac{\Delta r_x}{|\Delta r|} = 0 \\ \cos \beta &= \frac{\Delta r_y}{|\Delta r|} = \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \cos \gamma &= \frac{\Delta r_z}{|\Delta r|} = -\frac{2}{\sqrt{5}} \end{aligned} \quad (5)$$

Osservazione:

E' utile ricordare che i coseni direttori sono i coseni degli angoli individuati dal vettore in esame con i tre assi cartesiani e sono quindi dati dal rapporto tra le proiezioni del vettore sui tre assi (le sue componenti) ed il suo modulo. I coseni direttori permettono di individuare univocamente direzione e verso di un vettore. Si può inoltre verificare una proprietà generale dei coseni direttori:

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = \frac{1}{5} + \frac{4}{5} = 1. \quad (6)$$

S.1.2.

Il vettore $(B-A)$ che congiunge i due punti può essere calcolato come la differenza dei due vettori posizione che individuano i suddetti punti:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_A &= \mathbf{u}_x + \mathbf{u}_y + \mathbf{u}_z \\ \mathbf{r}_B &= 2\mathbf{u}_x - \mathbf{u}_y + 3\mathbf{u}_z \end{aligned} \quad (1)$$

e quindi

$$(B - A) = \mathbf{r}_B - \mathbf{r}_A = \mathbf{u}_x - 2\mathbf{u}_y + 2\mathbf{u}_z. \quad (2)$$

Il versore è un vettore di modulo unitario che viene utilizzato per indicare una direzione ed un verso. Per ricavare un versore a partire da un vettore in modo che ne mantenga la direzione ed il verso basta dividere il vettore stesso per il suo modulo.

Il modulo del vettore $(B-A)$ è dato da:

$$|B - A| = \sqrt{1 + 4 + 4} = 3, \quad (3)$$

e quindi il versore \mathbf{u} è espresso da

$$\mathbf{u} = \frac{(B - A)}{|B - A|} = \frac{1}{3} \mathbf{u}_x - \frac{2}{3} \mathbf{u}_y + \frac{2}{3} \mathbf{u}_z. \quad (4)$$

Lasciamo al lettore la verifica che il modulo del versore trovato sia effettivamente unitario e che i coseni direttori del vettore $(B-A)$ siano uguali a quelli del versore \mathbf{u} .

S.1.3.

(i) Il vettore somma è dato da

$$\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \sqrt{2} \right) \mathbf{u}_x + \left(-\frac{1}{2} + 2 \right) \mathbf{u}_y = -\frac{\sqrt{2}}{2} \mathbf{u}_x + \frac{3}{2} \mathbf{u}_y; \quad (1)$$

(ii) Il prodotto scalare è dato da

$$\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 = v_{1x}v_{2x} + v_{1y}v_{2y} + v_{1z}v_{2z} = \frac{\sqrt{2}}{2} \left(-\sqrt{2} \right) + \left(-\frac{1}{2} \right) 2 = -2; \quad (2)$$

(iii) Il prodotto vettoriale è dato da

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2 &= \begin{vmatrix} \mathbf{u}_x & \mathbf{u}_y & \mathbf{u}_z \\ v_{1x} & v_{1y} & v_{1z} \\ v_{2x} & v_{2y} & v_{2z} \end{vmatrix} = \mathbf{u}_x \begin{vmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} + \mathbf{u}_y \begin{vmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ -\sqrt{2} & 0 \end{vmatrix} + \mathbf{u}_z \begin{vmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\sqrt{2} & 2 \end{vmatrix} = \\ &= \left(\sqrt{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \mathbf{u}_z = \frac{\sqrt{2}}{2} \mathbf{u}_z \end{aligned} \quad (3)$$

1.2 Soluzioni

(iv) La componente del vettore \mathbf{w} nella direzione e verso del vettore somma ricavato al punto (i) può essere ottenuta mediante prodotto scalare tra il vettore \mathbf{w} ed il versore \mathbf{u} che individua direzione e verso del vettore somma. Si ricavi quindi il versore \mathbf{u} con lo stesso procedimento visto nell'esercizio P.1.2:

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2}{|\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2|}, \quad (4)$$

dove

$$|\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2| = \sqrt{\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2 + \left(\frac{3}{2} \right)^2} = \frac{\sqrt{11}}{2} \quad (5)$$

e quindi

$$\mathbf{u} = -\sqrt{\frac{2}{11}} \mathbf{u}_x + \frac{3}{\sqrt{11}} \mathbf{u}_y. \quad (6)$$

La componente di \mathbf{w} sarà quindi pari a

$$w_u = \mathbf{w} \cdot \mathbf{u} = -\frac{3}{\sqrt{11}} (\sqrt{2} + 2) = 3.09. \quad (7)$$

Osservazioni:

E' importante ricordare che il prodotto scalare è commutativo, mentre il prodotto vettoriale è anticommutativo. Questo significa che se anche si inverte l'ordine dei due vettori moltiplicati scalarmente il risultato non cambia, mentre nel prodotto vettoriale un'inversione dell'ordine dei vettori produce un risultato di segno opposto. Si lascia al lettore di verificare le proprietà appena ricordate a partire dalle definizioni applicate nei punti (ii) e (iii).

S.1.4.

Per determinare l'angolo tra i due vettori è possibile utilizzare la definizione di prodotto scalare, infatti:

$$\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 = |\mathbf{v}_1| |\mathbf{v}_2| \cos \vartheta \Rightarrow \cos \vartheta = \frac{\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2}{|\mathbf{v}_1| |\mathbf{v}_2|}, \quad (1)$$

dove ϑ è l'angolo compreso tra i due vettori. Si calcoli il prodotto scalare tra i due vettori mediante la formula fornita nella soluzione del problema P.1.3:

$$\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 = -3 + 8 - 30 = -25. \quad (2)$$

Calcolando quindi i moduli dei due vettori:

$$\begin{aligned} |\mathbf{v}_1| &= \sqrt{9 + 16 + 25} = \sqrt{50} \\ |\mathbf{v}_2| &= \sqrt{1 + 4 + 36} = \sqrt{41} \end{aligned} \quad (3)$$

si ricava

$$\cos \vartheta = -\frac{5}{\sqrt{82}} = -0.552 \Rightarrow \vartheta = 123^\circ \quad (4)$$

S.1.5.

Come già visto nella soluzione del problema P.1.3, il prodotto vettoriale tra due vettori si calcola mediante il seguente determinante:

$$\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2 = \begin{vmatrix} \mathbf{u}_x & \mathbf{u}_y & \mathbf{u}_z \\ 3 & 4 & -5 \\ -1 & 2 & 6 \end{vmatrix} = \mathbf{u}_x(24+10) - \mathbf{u}_y(18-5) + \mathbf{u}_z(6+4) = 34\mathbf{u}_x - 13\mathbf{u}_y + 10\mathbf{u}_z \quad (1)$$

S.1.6.

Si ricavi innanzitutto la relazione fornita nel testo del problema. Sapendo che il modulo quadro di un vettore può essere visto anche come il prodotto scalare del vettore con se stesso, si può scrivere:

$$|\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2|^2 = (\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) \cdot (\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) \quad (1)$$

e sviluppando il prodotto tra binomi si ottiene:

$$|\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2|^2 = |\mathbf{v}_1|^2 + |\mathbf{v}_2|^2 + 2\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 = |\mathbf{v}_1|^2 + |\mathbf{v}_2|^2 + 2|\mathbf{v}_1||\mathbf{v}_2| \cos \vartheta. \quad (2)$$

Si calcoli ora il modulo quadro del vettore somma dei due vettori del problema P.1.4:

$$|\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2|^2 = |2\mathbf{u}_x + 6\mathbf{u}_y + \mathbf{u}_z|^2 = 41. \quad (3)$$

I moduli dei due vettori ed il coseno dell'angolo tra di essi compreso sono già stati calcolati nella soluzione del problema P.1.4 e quindi, calcolando il secondo membro della relazione, si ottiene:

$$|\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2|^2 = 50 + 41 - 50 = 41, \quad (4)$$

il che verifica la suddetta relazione.

S.1.7.

Un'importante proprietà del prodotto vettoriale tra due vettori è che il vettore risultante è sempre ortogonale al piano individuato dai due vettori iniziali. Quindi, un qualsiasi vettore ortogonale a \mathbf{v}_1 e \mathbf{v}_2 sarà esprimibile come il prodotto tra uno scalare k ed il

1.2 Soluzioni

vettore \mathbf{w} risultante dal prodotto vettoriale tra \mathbf{v}_1 e \mathbf{v}_2

$$\mathbf{v}_3 = k\mathbf{w} = k(\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2) = k \begin{vmatrix} \mathbf{u}_x & \mathbf{u}_y & \mathbf{u}_z \\ 2 & 1 & -3 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = -5k(\mathbf{u}_x + \mathbf{u}_y + \mathbf{u}_z) \quad (1)$$

Il testo però richiede che il modulo di \mathbf{v}_3 sia pari a 5. Quindi

$$|\mathbf{v}_3| = 5|k|\sqrt{3} = 5 \Rightarrow k = \mp \frac{1}{\sqrt{3}}. \quad (2)$$

Il vettore cercato avrà quindi la seguente espressione

$$\mathbf{v}_3 = \mp \frac{5}{\sqrt{3}}(\mathbf{u}_x + \mathbf{u}_y + \mathbf{u}_z). \quad (3)$$

S.1.8.

Come visto nella soluzione dell'esercizio precedente, il vettore risultante dal prodotto vettoriale tra due vettori è ortogonale al piano individuato dai vettori stessi. La condizione che si può imporre al terzo vettore affinché sia complanare ai primi due è che il prodotto scalare tra il terzo vettore ed il risultante dal prodotto vettoriale tra i primi due sia pari a zero. Infatti, il prodotto scalare tra due vettori non nulli è pari a zero solo quando i due vettori sono tra loro ortogonali e l'ortogonalità tra il terzo vettore ed il risultante del prodotto vettoriale implica la complanarità ai due vettori iniziali.

Si inizi quindi calcolando il prodotto vettoriale tra i primi due vettori:

$$\mathbf{w} = (\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2) = \begin{vmatrix} \mathbf{u}_x & \mathbf{u}_y & \mathbf{u}_z \\ 4 & 2 & -7 \\ 3 & -3 & 1 \end{vmatrix} = -19\mathbf{u}_x - 25\mathbf{u}_y - 18\mathbf{u}_z \quad (1)$$

Il vettore \mathbf{v}_3 , per essere complanare ai primi due, deve quindi fornire un prodotto scalare nullo con il vettore \mathbf{w} :

$$\mathbf{v}_3 \cdot \mathbf{w} = -38 + 25 - 18z = 0 \Rightarrow z = -\frac{13}{18}. \quad (2)$$

S.1.9.

Incominciamo col calcolare le derivate dei due vettori. La derivata di un vettore rispetto ad una variabile, è un vettore che ha come componenti le derivate delle componenti del vettore iniziale; analizziamo ora i due casi:

(i) Il vettore $\mathbf{v}_1 = t\mathbf{u}_x + \sqrt{3}t\mathbf{u}_y$ è un vettore che varia solo in modulo, mentre la sua direzione e verso rimangono costanti. Infatti la sua inclinazione rispetto all'asse delle x è data da

$$\tan(\frac{\mathbf{v}_{1y}}{\mathbf{v}_{1x}}) = \tan(\sqrt{3}) = 60^\circ. \quad (1)$$

Il vettore derivata è pari a

$$\frac{d\mathbf{v}_1}{dt} = \mathbf{u}_x + \sqrt{3}\mathbf{u}_y, \quad (2)$$

che è un vettore costante e diretto come il vettore \mathbf{v}_1 .

(ii) Nel caso del vettore $\mathbf{v}_2 = \cos t \mathbf{u}_x + \sin t \mathbf{u}_y$, il modulo è costante:

$$|\mathbf{v}_2| = \sqrt{\cos^2 t + \sin^2 t} = 1, \quad (3)$$

ciò non implica tuttavia che la derivata sia nulla, infatti il vettore \mathbf{v}_2 cambia direzione al variare di t . La pendenza del vettore rispetto all'asse x è in questo caso pari a

$$m = \frac{v_{2y}}{v_{2x}} = \tan t. \quad (4)$$

La derivata del vettore sarà quindi data da

$$\frac{d\mathbf{v}_2}{dt} = -\sin t \mathbf{u}_x + \cos t \mathbf{u}_y. \quad (5)$$

Il vettore derivata è anch'esso di modulo costante ed unitario, ma ha direzione ortogonale al vettore \mathbf{v}_2 . Infatti, la sua pendenza è data da

$$\bar{m} = \frac{v_y}{v_x} = -\frac{1}{\tan t} = -\frac{1}{m}, \quad (6)$$

che è la condizione di ortogonalità tra due rette.

Generalizzando i risultati ottenuti nei due casi si può dire che la derivata di un vettore è diversa da zero quando varia il suo modulo oppure la sua direzione o entrambe. Inoltre, la direzione del vettore derivata sarà la stessa del vettore iniziale quando questo varia solo in modulo, sarà ortogonale a quella del vettore iniziale quando questo varia solo in direzione, sarà generica nel caso in cui il vettore iniziale vari sia in modulo che in direzione.

Passiamo ora al calcolo dell'integrale:

$$\mathbf{I} = \int_0^a [\mathbf{v}_1(t) - \mathbf{v}_2(t)] dt = \int_0^a [t \mathbf{u}_x + \sqrt{3}t \mathbf{u}_y] - [\cos t \mathbf{u}_x + \sin t \mathbf{u}_y] dt. \quad (7)$$

Si noti che l'integrale (definito od indefinito che sia) di un vettore rispetto ad una variabile, è ancora un vettore. Si osservi che i versori degli assi non dipendono dalla variabile t , per cui possiamo riscrivere la precedente espressione nella forma:

$$\mathbf{I} = \mathbf{u}_x \int_0^a (t - \cos t) dt + \mathbf{u}_y \int_0^a (\sqrt{3}t - \sin t) dt, \quad (8)$$

da cui si ottiene:

1.2 Soluzioni

$$\mathbf{I} = \mathbf{u}_x \left[\frac{t^2}{2} - \sin t \right]_0^a + \mathbf{u}_y \left[\frac{\sqrt{3}t^2}{2} + \cos t \right]_0^a \quad (9)$$

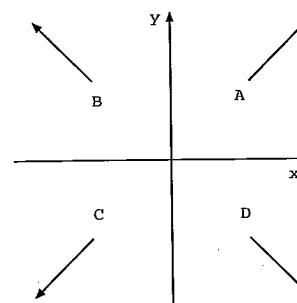
ed infine

$$\mathbf{I} = \left(\frac{a^2}{2} - \sin a \right) \mathbf{u}_x + \left(\frac{\sqrt{3}a^2}{2} + \cos a - 1 \right) \mathbf{u}_y. \quad (10)$$

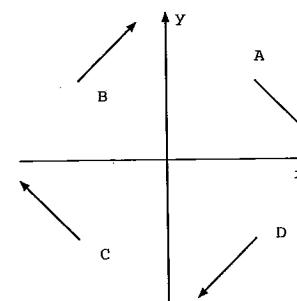
Si noti che \mathbf{I} è un integrale definito, calcolato tra estremi costanti; pertanto il risultato è un vettore costante.

S.1.10.

Nei punti considerati dal problema il campo vettoriale \mathbf{v} vale: $\mathbf{v}(A) = (\mathbf{u}_x + \mathbf{u}_y)/\sqrt{2}$; $\mathbf{v}(B) = (-\mathbf{u}_x + \mathbf{u}_y)/\sqrt{2}$; $\mathbf{v}(C) = (-\mathbf{u}_x - \mathbf{u}_y)/\sqrt{2}$; $\mathbf{v}(D) = (\mathbf{u}_x - \mathbf{u}_y)/\sqrt{2}$. Si noti che in qualunque punto del piano (ad eccezione dell'origine, in cui il campo non è definito) il modulo di \mathbf{v} è sempre pari ad 1. Come si evince dalla figura successiva, il campo ha in genere un andamento radiale; ciò significa che, considerato un punto P del piano, il campo risulta diretto lungo la retta congiungente P con l'origine delle coordinate. Un campo di questo tipo è detto centrale, in quanto diretto verso il centro del sistema.



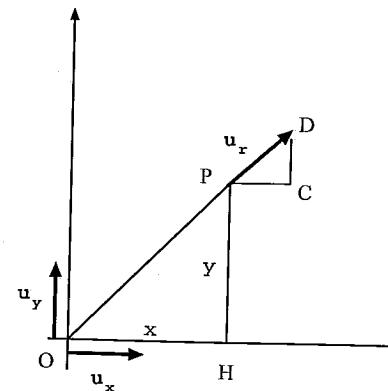
Il campo vettoriale \mathbf{w} , nei punti assegnati dal problema, è invece pari a: $\mathbf{w}(A) = (\mathbf{u}_x - \mathbf{u}_y)/\sqrt{2}$; $\mathbf{w}(B) = (\mathbf{u}_x + \mathbf{u}_y)/\sqrt{2}$; $\mathbf{w}(C) = (-\mathbf{u}_x + \mathbf{u}_y)/\sqrt{2}$; $\mathbf{w}(D) = (-\mathbf{u}_x - \mathbf{u}_y)/\sqrt{2}$.



Anche in questo caso il modulo di w è pari ad 1 in qualunque punto del piano, ad eccezione dell'origine in cui il vettore non è definito. Il disegno del campo nei punti assegnati rivela che il vettore descrive un vortice diretto in verso orario attorno all'origine delle coordinate.

S.1.11.

Per calcolare il campo E in funzione delle coordinate x ed y e dei corrispondenti versori degli assi, dobbiamo anzitutto riesprimere il versore radiale u_r . Come si evince dal disegno in figura, il triangolo PDC formato dal versore u_r e dalle sue proiezioni lungo le direzioni orizzontale e verticale, è simile al triangolo OHP (infatti hanno gli stessi angoli interni). Dunque possiamo scrivere una proporzione fra i lati corrispondenti dei due triangoli, nella



forma $OH : OP = PC : PD$ e $HP : OP = CD : PD$. Tuttavia $OH = x$; $HP = y$; $OP = \sqrt{x^2 + y^2}$ ed infine $PD = 1$ essendo il versore radiale di modulo unitario. Risulta (si veda la figura successiva) che:

$$u_r = PCu_x + CDu_y; \quad (1)$$

utilizzando le precedenti proporzioni tra i lati dei due triangoli, si arriva all'espressione:

$$u_r = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}u_x + \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}u_y. \quad (2)$$

Ricordando poi che la distanza radiale può essere riscritta come $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, otteniamo finalmente l'espressione del campo E :

$$E(P) = \frac{\alpha}{r^2}u_r = \frac{\alpha}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} [xu_x + yu_y]. \quad (3)$$

Si lascia al lettore il compito di disegnare le linee di flusso del campo.

S.1.12.

La somma dei campi vettoriali a e b è pari a

$$c = a + b = (x^2 + 2x + 1)u_x + (y^2 - 2y)u_y, \quad (1)$$

1.2 Soluzioni

di conseguenza il modulo di c è pari a

$$|c| = \sqrt{(x^2 + 2x + 1)^2 + (y^2 - 2y)^2} = \sqrt{(x+1)^4 + y^2(y-2)^2}. \quad (2)$$

Per stabilire in quali punti il modulo del vettore somma c si annulla, basta osservare che se in un punto $|c| = 0$ allora anche $c = 0$. Affinché c sia nullo, dobbiamo imporre che entrambe le componenti del vettore siano a loro volta nulle. Quindi basta imporre il sistema

$$\begin{aligned} (x^2 + 2x + 1) &= (x+1)^2 = 0 \\ (y^2 - 2y) &= y(y-2) = 0 \end{aligned}$$

che corrisponde alle due soluzioni

$$x = -1$$

$$y = 0$$

e

$$x = -1$$

$$y = 2$$

che definiscono i due punti del piano in cui $c = 0$ (e dunque $|c| = 0$).

S.1.13.

La superficie di livello

$$\frac{k}{x^2 + y^2} = \text{costante} \quad (1)$$

equivale ad una superficie di equazione $(x^2 + y^2) = \text{costante}$. Si consideri ora un piano Π perpendicolare all'asse z del sistema di coordinate. Per il teorema di Pitagora, la quantità $r_{xy} = \sqrt{x^2 + y^2}$ rappresenta la distanza r_{xy} dall'asse z di un punto P di coordinate (x, y, z) giacente su Π . Dunque la nostra superficie di livello può anche essere rappresentata dall'equazione

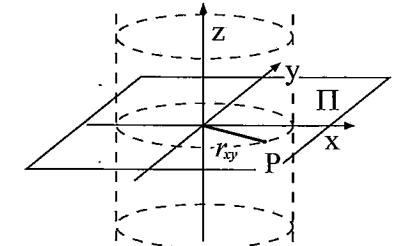
$$r_{xy} = \text{costante}. \quad (2)$$

Si osservi che tale espressione non dipende da z ; con riferimento alla figura, possiamo pertanto concludere che essa rappresenta un cilindro indefinito il cui asse coincide con z .

S.1.14.

Si applichi la definizione di gradiente al campo scalare fornito nel testo

$$\begin{aligned} \text{grad } f &= 3 \left[\frac{2x}{2\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}u_x + \frac{2y}{2\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}u_y + \frac{2z}{2\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}u_z \right] = \\ &= 3 \frac{xu_x + yu_y + zu_z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \end{aligned} \quad (1)$$



dove il numeratore può anche essere visto come il generico vettore posizione rispetto all'origine ed il denominatore è il suo modulo, quindi

$$\text{grad } f = 3 \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|} = 3\mathbf{u}_r. \quad (2)$$

Le superfici di livello in questo caso sono date da

$$f = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \text{costante} = k \quad (3)$$

e rappresentano delle superfici sferiche di raggio k . Si può quindi concludere che il gradiente, essendo diretto come il raggio, è ortogonale in ogni punto alle superfici di livello, proprietà questa di carattere generale.

S.1.15.

Per determinare l'espressione della divergenza del campo vettoriale $\mathbf{w} = 2xy\mathbf{u}_x - z^2\mathbf{u}_y + 5\sin(zy)\mathbf{u}_z$, calcoliamo dapprima le derivate parziali delle sue componenti rispetto agli assi corrispondenti:

$$\frac{\partial w_x}{\partial x} = \frac{\partial (2xy)}{\partial x} = 2y; \quad (1)$$

$$\frac{\partial w_y}{\partial y} = \frac{\partial (-z^2)}{\partial y} = 0; \quad (2)$$

$$\frac{\partial w_z}{\partial z} = \frac{\partial [5\sin(zy)]}{\partial z} = 5y\cos(zy). \quad (3)$$

Pertanto la divergenza di \mathbf{w} risulterà:

$$\text{div } \mathbf{w} = \frac{\partial w_x}{\partial x} + \frac{\partial w_y}{\partial y} + \frac{\partial w_z}{\partial z} = 2y + 5y\cos(zy). \quad (4)$$

S.1.16.

Per determinare l'espressione del rotore del campo vettoriale $\mathbf{w} = 4z^2y\mathbf{u}_x - 3(x/y)\mathbf{u}_y + 2xzu_z$ procediamo calcolando le derivate parziali delle sue componenti rispetto a tutti gli assi:

$$\frac{\partial w_x}{\partial x} = \frac{\partial (4z^2y)}{\partial x} = 0; \quad (1)$$

$$\frac{\partial w_x}{\partial y} = \frac{\partial (4z^2y)}{\partial y} = 4z^2; \quad (2)$$

$$\frac{\partial w_x}{\partial z} = \frac{\partial (4z^2y)}{\partial z} = 8zy; \quad (3)$$

$$\frac{\partial w_y}{\partial x} = \frac{\partial [-3(x/y)]}{\partial x} = -\frac{3}{y}; \quad (4)$$

1.2 Soluzioni

$$\frac{\partial w_y}{\partial y} = \frac{\partial [-3(x/y)]}{\partial y} = \frac{3x}{y^2}; \quad (5)$$

$$\frac{\partial w_y}{\partial z} = \frac{\partial [-3(x/y)]}{\partial z} = 0; \quad (6)$$

$$\frac{\partial w_z}{\partial x} = \frac{\partial (2xz)}{\partial x} = 2z; \quad (7)$$

$$\frac{\partial w_z}{\partial y} = \frac{\partial (2xz)}{\partial y} = 0; \quad (8)$$

$$\frac{\partial w_z}{\partial z} = \frac{\partial (2xz)}{\partial z} = 2x. \quad (9)$$

A tal punto, tenendo a mente la definizione di rotore:

$$\text{rot } \mathbf{w} = \begin{vmatrix} \mathbf{u}_x & \mathbf{u}_y & \mathbf{u}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ w_x & w_y & w_z \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial w_z}{\partial y} - \frac{\partial w_y}{\partial z} \right) \mathbf{u}_x + \left(\frac{\partial w_x}{\partial z} - \frac{\partial w_z}{\partial x} \right) \mathbf{u}_y + \left(\frac{\partial w_y}{\partial x} - \frac{\partial w_x}{\partial y} \right) \mathbf{u}_z, \quad (10)$$

e sostituendo quanto trovato in precedenza, si ottiene:

$$\text{rot } \mathbf{w} = (0 - 0) \mathbf{u}_x + (8zy - 2z) \mathbf{u}_y + \left(-\frac{3}{y} - 4z^2 \right) \mathbf{u}_z, \quad (11)$$

da cui

$$\text{rot } \mathbf{w} = 2z(4y - 1) \mathbf{u}_y - \left(\frac{3}{y} + 4z^2 \right) \mathbf{u}_z. \quad (12)$$

Si noti che la derivata di ciascuna componente rispetto al *proprio* asse, non compare nell'espressione del rotore; tali quantità sono invece impiegate per il calcolo della divergenza.

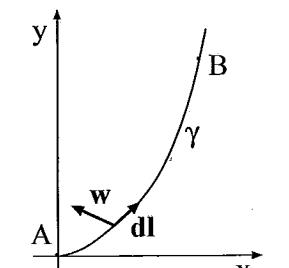
S.1.17.

Faremo riferimento alla figura, in cui è mostrata la linea γ tra i punti A e B ed i vettori \mathbf{w} e $d\mathbf{l}$ in un punto generico della linea; si noti che lo spostamento infinitesimo $d\mathbf{l}$ è diretto da A a B. Procediamo ora col calcolare l'integrale di linea

$$\int_{\gamma, A \rightarrow B} \mathbf{w} \cdot d\mathbf{l}. \quad (1)$$

Scriviamo lo spostamento infinitesimo come:

$$d\mathbf{l} = dx \mathbf{u}_x + dy \mathbf{u}_y; \quad (2)$$



si noti tuttavia che dx e dy sono tra loro legati, in quanto lo spostamento non è di tipo generico, ma avviene lungo la linea γ . Mediante l'equazione che definisce la linea:

$$y = ax^2 \quad (3)$$

possiamo esprimere dy in funzione di dx :

$$dy = \frac{dy}{dx} dx = 2ax dx. \quad (4)$$

Sostituendo nella (1) la (4) e ricordando che il vettore è dato dall'espressione $\mathbf{w} = xu_y - yu_x$, si ottiene:

$$\int_{\gamma, A \rightarrow B} \mathbf{w} \cdot d\mathbf{l} = \int_{\gamma, A \rightarrow B} [xu_y - yu_x] \cdot [dxu_x + 2ax dxu_y], \quad (5)$$

che diviene

$$\int_{\gamma, A \rightarrow B} \mathbf{w} \cdot d\mathbf{l} = \int_{x_A}^{x_B} [2ax^2 - y(x)] dx; \quad (6)$$

nella precedente equazione si è fatto uso dell'espressione del prodotto scalare di due vettori in funzione delle loro componenti. Si noti inoltre che l'integrale di linea diviene un normale integrale definito nella variabile x esteso tra le ascisse dei punti $A(0,0)$ e $B(0,4a)$.

Sostituendo nella (6) ancora la (3), si giunge infine a:

$$\int_{\gamma, A \rightarrow B} \mathbf{w} \cdot d\mathbf{l} = \int_0^2 ax^2 dx = \frac{8}{3}a. \quad (7)$$

Si sottolinea il fatto che il risultato di un integrale di linea è *sempre* un numero e non un vettore, dato che al suo interno contiene un prodotto scalare tra due vettori.

S.1.18.

Indichiamo con τ il periodo di oscillazione del pendolo, e supponiamo che esso dipenda dalla massa m del corpo, dall'accelerazione di gravità g e dalla lunghezza l del pendolo secondo una legge della forma:

$$\tau = km^x g^y l^z, \quad (1)$$

dove k , x , y e z sono tre costanti numeriche adimensionali da determinare. Per questo, osserviamo che, per il principio di omogeneità, le dimensioni delle grandezze a sinistra e destra nell'equazione (1) devono essere le stesse. Se consideriamo le dimensioni di ambo i membri di detta equazione e teniamo conto che $[\tau] = [T]$, $[m] = [M]$, $[g] = [L][T]^{-2}$ e $[l] = [L]$, dove $[T]$, $[L]$ e $[M]$ sono le unità fondamentali di tempo, lunghezza e massa, rispettivamente, deve dunque risultare:

$$[T] = [m]^x [g]^y [l]^z = [M]^x [L]^y [T]^{-2y}. \quad (2)$$

Uguagliando gli esponenti di $[T]$, $[L]$ ed $[M]$ nei due membri della precedente equazione, si ottiene $-2y = 1$, $y + z = 0$, $x = 0$, e cioè:

$$x = 0, \quad y = -1/2, \quad z = 1/2. \quad (3)$$

1.2 Soluzioni

Sostituendo tali valori di x , y e z nella equazione (1) si ottiene infine per il periodo τ del pendolo la seguente espressione:

$$\tau = k \sqrt{\frac{l}{g}}. \quad (4)$$

E' chiaro che il valore numerico della costante k non può essere determinato in base a sole considerazioni dimensionali, ma si dovrà ricorrere ad uno studio dettagliato della legge di moto del pendolo. Per piccole oscillazioni, la teoria mostrerà che $k = 2\pi$.

S.1.19.

Le dimensioni della costante di gravitazione universale γ che compare nella legge di gravitazione universale,

$$F = \gamma \frac{m_1 m_2}{r^2}, \quad (1)$$

si determinano mediante una analisi dimensionale della equazione (1), e cioè imponendo per il principio di omogeneità che le grandezze a sinistra e a destra dell'equazione abbiano le stesse dimensioni. Per questo osserviamo che, poichè vale la relazione fondamentale forza = massa \times accelerazione, le dimensioni di una forza sono $[F] = [M][L][T]^{-2}$, e quindi deve avversi:

$$[F] = [M][L][T]^{-2} = [\gamma][M]^2[L]^{-2}, \quad (2)$$

che è una equazione dimensionale nella incognita $[\gamma]$. Poichè per le equazioni dimensionali vale un'algebra analoga a quella per le equazioni numeriche, possiamo risolvere la equazione (2) rispetto a $[\gamma]$:

$$[\gamma] = [M]^{-1}[L]^3[T]^{-2}. \quad (3)$$

Capitolo 2

Cinematica del punto materiale

2.1 Problemi

P.2.1.

La posizione di una particella che si muove lungo l'asse x dipende dal tempo secondo l'equazione $x(t) = At^2 - Bt^3$, dove x è espresso in metri e t in secondi.

- (i) Quali devono essere le dimensioni delle costanti positive A e B ?
- (ii) Quanto valgono la velocità istantanea e l'accelerazione istantanea?
- (iii) In quale istante la particella raggiunge la massima ascissa?

P.2.2.

Un sasso viene lanciato verticalmente verso l'alto, con velocità iniziale $v_0 = 10 \text{ m/s}$, da una piattaforma ad altezza $h = 3 \text{ m}$ da terra. Sapendo che, in prossimità della superficie terrestre, il sasso si muove, per effetto del peso, con accelerazione verticale costante, diretta verso il basso e di modulo $g = 9.8 \text{ m/s}^2$, si calcoli dopo quanto tempo il sasso raggiunge il suolo.

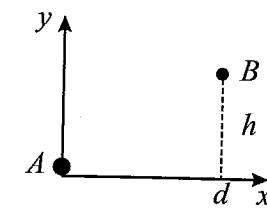
P.2.3.

Si sta progettando una nuova tratta di metropolitana sotterranea. Schematicamente la tratta è la seguente:

- A : treno fermo;
- A - B : tratto di 500 m percorso ad accelerazione costante a_1 ;
- B - C : tratto di 4 km percorso a velocità costante $v_2 = 72 \text{ km/h}$;
- C - D : tratto di 250 m percorso con decelerazione costante a_3 ;
- (i) si rappresenti su un grafico l'accelerazione, la velocità e la posizione in funzione del tempo in modo qualitativo;
- (ii) si calcoli il valore dell'accelerazione a_1 in m/s^2 necessaria per raggiungere in B la velocità prevista sul tratto BC;
- (iii) si calcoli il valore della decelerazione a_3 in m/s^2 necessaria al treno per arrestarsi nel punto D, cominciando a frenare in C;
- (iv) si determini il tempo di percorrenza del tratto AD;

P.2.4.

Si calcoli la velocità a cui deve muoversi di moto rettilineo uniforme un corpo A su un piano orizzontale per raccogliere un corpo B che viene lasciato cadere verticalmente da un'altezza $h = 120$ m. Il corpo B cade con accelerazione verticale costante, diretta verso il basso e di modulo $g = 9.8 \text{ m/s}^2$. All'inizio della caduta il corpo B si trova ad una distanza $d = 7$ m dalla verticale di caduta.

**P.2.5.**

Si determini la profondità di un pozzo sapendo che tra l'istante in cui si lascia cadere un sasso (con velocità iniziale nulla) e quello in cui si ode il rumore, in conseguenza dell'urto del sasso con il fondo del pozzo, trascorre un tempo $T = 4.8 \text{ s}$. Si trascuri la resistenza dell'aria e si assuma la velocità del suono pari a $v_s = 340 \text{ m/s}$. Il sasso cade con accelerazione verticale costante, diretta verso il basso e di modulo $g = 9.8 \text{ m/s}^2$.

P.2.6.

Un'automobile deve percorrere un tratto di strada rettilinea, di lunghezza $L = 2 \text{ km}$, nel minor tempo possibile partendo ed arrivando con velocità nulla. Se la massima accelerazione dell'automobile è pari ad $a_1 = 2 \text{ m/s}^2$, mentre la sua massima decelerazione è $a_2 = -3 \text{ m/s}^2$, si determinino la percentuale di strada che deve essere percorsa accelerando ed il minimo tempo totale impiegato.

P.2.7.

Un'automobile A, inizialmente ferma, viene superata da un'altra automobile B in moto con velocità costante $v_B = 100 \text{ km/h}$. Al momento del sorpasso l'automobile A si mette in moto con accelerazione costante pari ad $a_A = 5 \text{ m/s}^2$. Determinare il tempo impiegato dall'automobile A per raggiungere l'automobile B e la distanza dal punto di partenza a cui ciò avviene.

P.2.8.

Due automobili A e B viaggiano nella stessa direzione con velocità $v_A = 130 \text{ km/h}$ e $v_B = 70 \text{ km/h}$. Quando la macchina A si trova alla distanza d dietro B, comincia a frenare con decelerazione $a = -4 \text{ m/s}^2$. Si calcoli il minimo valore di d affinché sia evitato l'urto.

P.2.9.

Un punto materiale si muove di moto rettilineo partendo dalla posizione $x = 0$. La velocità iniziale è nulla e l'accelerazione varia nel tempo secondo la legge $a = a_0 \cos \omega t$. Si calcolino:

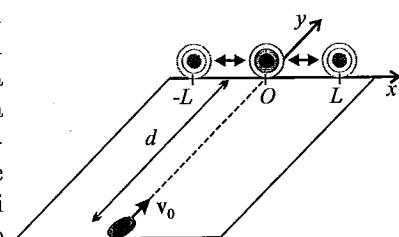
- la legge oraria del moto;
- gli istanti temporali nei quali il punto materiale ripassa per l'origine;
- il modulo della velocità del punto in tali istanti.

2.1 Problemi**P.2.10.**

Un corpo si muove di moto armonico con frequenza $\nu = 3 \text{ Hz}$. All'istante $t = 0$ il corpo è ad una distanza $d = 10 \text{ cm}$ dalla posizione di equilibrio e la sua velocità è $v_0 = 1 \text{ m/s}$. Si determini il minimo intervallo di tempo per cui il corpo raggiunge il massimo modulo della velocità e si calcoli quanto vale quest'ultimo.

P.2.11.

Un gioco al Luna Park consiste nel colpire un bersaglio mobile con un disco, libero di scorrere su un piano liscio orizzontale, inizialmente a distanza d dal bersaglio. Se il bersaglio si muove con legge oraria $x = L \cos \omega t$ ed il disco viene scagliato con velocità v_0 lungo la linea tratteggiata, diretta come l'asse y indicato in figura ($x = 0$), si determini in quale istante bisogna lanciare il disco per colpire il bersaglio. Si discuta inoltre se la probabilità di colpire il bersaglio è maggiore lanciando il disco lungo $x = 0$ o lungo $x = L$.

**P.2.12.**

Due particelle soggette al proprio peso sono, una dopo l'altra, lanciate in alto, verticalmente, da uno stesso punto e con la stessa velocità iniziale v . Tra i due lanci intercorre un intervallo di tempo T . Le due particelle si muovono con accelerazione verticale costante, diretta verso il basso, di modulo g . Quando si incontreranno? Qual è la condizione perché si possano effettivamente incontrare in volo?

P.2.13.

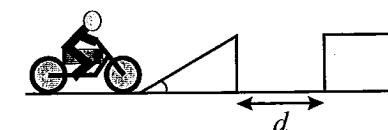
Una biglia A viene lasciata cadere da un'altezza h con velocità iniziale nulla. Contemporaneamente, una seconda biglia B viene lanciata dal suolo verso l'alto con velocità iniziale v_0 . Se il moto delle due biglie avviene sulla stessa verticale, si determini il valore di v_0 affinché:

- le due biglie si scontrino esattamente a metà altezza;
- le due biglie si scontrino quando hanno velocità uguali ed opposte.

P.2.14.

Un motociclista sale una rampa inclinata di $\alpha = 30^\circ$ per saltare un fossato lungo $d = 10 \text{ m}$.

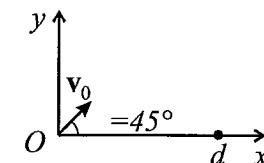
- Si determini la minima velocità con cui deve spiccare il salto per riuscirci.
- Si determini la massima altezza raggiunta durante il salto rispetto al punto di arrivo, con la velocità iniziale trovata nel punto (i).



P.2.15.

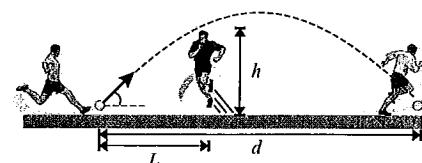
Nello sport olimpico del lancio del martello, una sfera di acciaio legata ad un cavo di lunghezza $L = 1.25$ m viene lanciata dall'atleta dopo essere stata posta in rotazione.

- Sapendo che il record mondiale in questa specialità è $d = 84.8$ m, si determini la velocità angolare che deve avere il martello al momento del lancio per ottenere tale prestazione. Si supponga che l'angolo formato dalla direzione di lancio con l'orizzontale sia di 45° e si trascuri l'altezza dell'atleta.
- Si determini inoltre l'accelerazione centripeta della sfera d'acciaio appena prima di essere lanciata.

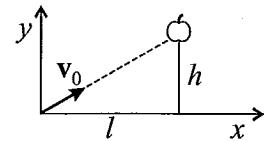
**P.2.16.**

Il terzino di una squadra di calcio vuole passare la palla al centravanti, che si trova ad una distanza $d = 50$ m, con una traiettoria parabolica che termini sui piedi del compagno. Sapendo che l'angolo di partenza rispetto all'orizzontale è $\alpha = 45^\circ$ e trascurando ogni attrito:

- Si determini la velocità iniziale che deve imprimere al pallone per riuscire.
- Si verifichi che l'avversario, distante $L = 3$ m dal terzino, non possa intercettare la palla pur saltando fino a raggiungere un'altezza $h = 2$ m.

**P.2.17.**

Un bambino, con una fionda capace di scagliare un sasso alla velocità v_0 , vuole colpire una mela su un albero distante l ad un'altezza h . Il bambino mira esattamente alla mela che però casualmente cade proprio nell'istante in cui il sasso viene scagliato. Si analizzi in quali condizioni il sasso riuscirà comunque a colpire la mela.

**P.2.18.**

La massima accelerazione alla quale possono essere sottoposti i piloti degli aerei militari è $6g$, dove g rappresenta l'accelerazione di gravità. Si calcoli il minimo raggio di curvatura con cui un aereo, che vola alla velocità di 2000 km/h, può effettuare una virata in un piano orizzontale.

P.2.19.

Un ciclista percorre un giro completo in una pista circolare di raggio R , partendo da fermo e con un'accelerazione angolare costante pari ad α . Si calcolino:

- La velocità vettoriale all'inizio ed alla fine del giro.
- L'accelerazione vettoriale all'inizio ed alla fine del giro.

P.2.20.

Un punto materiale si muove lungo una traiettoria circolare di raggio $R = 1$ m con velocità scalare $v = A + Bt^2$, con $A = 4$ m/s, $B = 1$ m/s 3 .

2.1 Problemi

- Si calcoli la lunghezza dell'arco di circonferenza percorso tra gli istanti $t_1 = 0$ s e $t_2 = 2$ s.
- Si determini il modulo dell'accelerazione del punto materiale negli istanti t_1 e t_2 .

P.2.21.

Un giradischi è in grado di portare un disco da fermo alla velocità angolare $\omega = 33$ giri/minuto in un intervallo di tempo $\Delta t = 0.6$ s, con accelerazione angolare α costante. Si determinino:

- il valore dell'accelerazione α in rad/s 2 ;
- la velocità al bordo del disco durante il transitorio (raggio $R = 15$ cm);
- la frazione di giro compiuta dal disco prima di raggiungere la velocità di regime.

P.2.22.

Le coordinate di un corpo in moto sono:

$$\begin{cases} x(t) = 2 \sin \omega t \text{ m;} \\ y(t) = 2 \cos \omega t \text{ m.} \end{cases} \quad (1)$$

dove ω è costante. Si determinino:

- l'equazione cartesiana della traiettoria;
- il modulo della velocità in ogni istante;
- le componenti radiale e tangenziale dell'accelerazione in ogni istante.

P.2.23.

Un motoscafo, che può raggiungere una velocità pari a $v_m = 50$ km/h rispetto all'acqua in cui naviga, cerca di attraversare un fiume largo $L = 2$ km, in cui la corrente dell'acqua ha una velocità $v_c = 20$ km/h. Si discuta quale rotta deve seguire il motoscafo per attraversare il fiume in direzione esattamente perpendicolare. Si discuta invece la rotta da seguire per attraversare il fiume nel minor tempo possibile.

P.2.24.

In una serata nebbiosa un ragazzo accompagna la fidanzata alla partenza del treno. Quando il treno parte, con accelerazione $a_{treno} = 3600$ km/h 2 , il ragazzo comincia a correre lungo la banchina con accelerazione $a_{ragazzo} = 1440$ km/h 2 . Se la visibilità è pari a 50 m, si determini dopo quanto tempo il ragazzo non riesce più a vedere la fidanzata.

2.2 Soluzioni

S.2.1.

(i) Per il principio di omogeneità si possono sommare algebricamente e uguagliare soltanto grandezze con le stesse dimensioni. Le dimensioni del termine a sinistra della legge oraria sono quelle di una lunghezza, quindi anche i prodotti At^2 e Bt^3 dovranno avere le dimensioni di una lunghezza:

$$\begin{aligned}[L] &= [At^2] = [A][T]^2 & [A] &= [L][T]^{-2} \\ [L] &= [Bt^3] = [B][T]^3 & [B] &= [L][T]^{-3} \end{aligned} \quad (1)$$

e quindi le unità di misura di A e di B sono, rispettivamente, m/s^2 e m/s^3 .

(ii) La velocità scalare istantanea è definita come:

$$v = \frac{dx}{dt} = 2At - 3Bt^2 \quad (2)$$

mentre l'accelerazione scalare istantanea è definita come:

$$a = \frac{dv}{dt} = 2A - 6Bt \quad (3)$$

(iii) Le relazioni (2) e (3) rendono evidente che il moto rettilineo della particella non è né uniforme né uniformemente accelerato, infatti al tempo $t = 0$ l'accelerazione è positiva e pari a $2A$ mentre all'aumentare del tempo diminuisce fino a diventare sempre più negativa. La particella, che parte da $x = 0$ e con velocità nulla (come è possibile dedurre dalla legge oraria e dall'equazione (2) per $t = 0$), si muoverà inizialmente verso x positivi fino a fermarsi per poi tornare indietro con accelerazione sempre maggiore. La massima ascissa viene perciò raggiunta dalla particella nell'istante \bar{t} , in corrispondenza del punto di inversione di moto. In tale punto la velocità della particella si deve annullare, quindi:

$$v = 2A\bar{t} - 3B\bar{t}^2 = 0 \quad (4)$$

le cui soluzioni sono

$$\bar{t} = 0 \quad \text{e} \quad \bar{t} = \frac{2A}{3B}. \quad (5)$$

La prima soluzione la scartiamo in quanto corrisponde all'istante iniziale (per cui $x = 0$) e quindi l'istante in cui si raggiunge la massima ascissa è dato dalla seconda soluzione, che sostituita nella legge oraria fornisce

$$x_{MAX} = \frac{4A^3}{27B^2}. \quad (6)$$

S.2.2.

Il sasso, durante il suo moto prima verso l'alto e poi verso terra, si muove di moto uniformemente accelerato con accelerazione sempre diretta verso il basso e pari all'accelerazione

di gravità g . Introduciamo un asse y verticale, diretto verso l'alto, con origine sulla superficie della terra e un asse x perpendicolare a y , come mostrato in figura. La posizione iniziale del sasso è data da

$$x(t=0) = 0 \quad (1)$$

$$y(t=0) = h \quad (2)$$

La velocità iniziale è

$$\mathbf{v}_0 = v_0 \mathbf{u}_y \quad (3)$$

L'accelerazione costante del sasso durante il suo moto è:

$$\mathbf{a} = -g \mathbf{u}_y \quad (4)$$

Il segno meno che compare nella (3) è dovuto al fatto che l'accelerazione è diretta in verso opposto rispetto al verso positivo dell'asse y . Dal momento che la velocità iniziale è verticale e che l'accelerazione lungo l'asse x è nulla, il moto sarà puramente verticale. Determiniamo dapprima la velocità del sasso:

$$\frac{dv_y}{dt} = a_y \quad (4)$$

Utilizzando la (3) nella (4), e considerando le condizioni iniziali (2), si ottiene:

$$\int_{v_0}^{v_y(t)} dv_y = -g \int_0^t dt \quad (5)$$

da cui si ricava:

$$v_y(t) = v_0 - gt \quad (6)$$

Determiniamo ora la legge oraria. Ricordando che

$$\frac{dy}{dt} = v_y(t) \quad (7)$$

utilizzando la condizione iniziale (1), si ha:

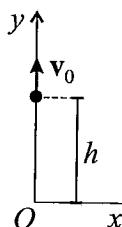
$$\int_h^{y(t)} dy = \int_0^t (v_0 - gt) dt \quad (8)$$

da cui si ricava la legge oraria:

$$y = h + v_0 t - \frac{1}{2} g t^2 \quad (9)$$

Per calcolare il tempo necessario, \bar{t} , affinché il sasso raggiunga terra è sufficiente imporre $y = 0$ nella legge oraria (9)

$$y = h + v_0 \bar{t} - \frac{1}{2} g \bar{t}^2 = 0, \quad (10)$$



2.2 Soluzioni

le cui soluzioni sono

$$t_{1,2} = \frac{v_0 \mp \sqrt{v_0^2 + 2gh}}{g}. \quad (11)$$

La soluzione con il segno meno la scartiamo in quanto l'argomento della radice è palesemente maggiore di v_0^2 e quindi si ottiene $t_1 < 0$. Il tempo impiegato dal sasso per toccare terra è quindi pari a

$$t_2 = \frac{v_0 + \sqrt{v_0^2 + 2gh}}{g} = 2.3 \text{ s.} \quad (12)$$

Osservazione:

Si consiglia di risolvere gli esercizi, anche quelli numerici, in modo simbolico fino all'ultimo passaggio e quindi sostituire i numeri. In questo modo è possibile, prima di fare i calcoli numerici, verificare rapidamente la consistenza del risultato con un'analisi dimensionale. Ad esempio, nel presente esercizio è possibile verificare la congruenza della formula finale (5). Il termine a sinistra dell'equazione ha le dimensioni di un tempo, quindi anche il termine a destra deve avere le stesse dimensioni. Sapendo che

$$[gh] = [g][h] = [L][T]^{-2}[L] = [L]^2[T]^{-2} = [v^2] \quad (13)$$

possiamo dedurre che l'argomento della radice ha le dimensioni di una velocità al quadrato e quindi che il denominatore della frazione ha le dimensioni di una velocità. A questo punto

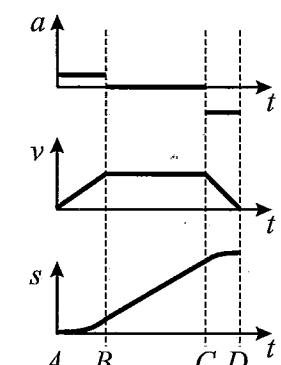
$$\frac{[v]}{[g]} = \frac{[L][T]^{-1}}{[L][T]^{-2}} = [T] \quad (14)$$

e quindi l'equazione che fornisce il risultato finale è dimensionalmente corretta, ora bisogna solo fare attenzione a non sbagliare i conti!

S.2.3.

(i) Nel primo tratto l'accelerazione è costante e positiva, nel secondo tratto l'accelerazione è nulla perché la velocità è costante, nel terzo tratto l'accelerazione è costante e negativa. La velocità aumenta linearmente nel primo tratto perché l'accelerazione è costante, rimane costante nel secondo tratto e decresce linearmente nel terzo tratto perché la decelerazione è costante.

La posizione aumenta parabolicamente nel primo tratto perché il treno si muove di moto uniformemente accelerato, nel secondo tratto la posizione aumenta linearmente perché il moto è rettilineo uniforme, infine nel terzo tratto la posizione diminuisce parabolicamente con concavità verso il basso perché l'accelerazione è negativa.



(ii) Siccome l'accelerazione nel primo tratto è costante, l'accelerazione istantanea e quella media coincidono. Posso quindi calcolare a_1 come

$$a_1 = \frac{v_2 - v_0}{\Delta t_1} = \frac{v_2}{\Delta t_1}, \quad (1)$$

dove $v_0 = 0$ e Δt_1 è il tempo impiegato a percorrere il tratto A - B. Conoscendo inoltre la lunghezza s_1 del tratto A - B, posso scrivere per il moto uniformemente accelerato

$$s_1 = \frac{1}{2} a_1 \Delta t_1^2, \quad (2)$$

da cui, sostituendo l'equazione (1), si ottiene

$$\Delta t_1 = \frac{2s_1}{v_2}, \quad (3)$$

che risostituito nell'equazione (1) fornisce

$$a_1 = \frac{v_2^2}{2s_1}. \quad (4)$$

Sapendo che

$$s_1 = 500 \text{ m} \quad \text{e} \quad v_2 = 72 \text{ km/h} = 20 \text{ m/s} \quad (5)$$

si trova

$$\Delta t_1 = 50 \text{ s} \quad \text{e} \quad a_1 = 0.4 \text{ m/s}^2. \quad (6)$$

(iii) Per calcolare la decelerazione a_3 si procede analogamente a quanto fatto nel punto precedente:

$$a_3 = \frac{v_f - v_2}{\Delta t_3} = -\frac{v_2}{\Delta t_3}, \quad (7)$$

dove la velocità finale $v_f = 0$ e Δt_3 è l'intervallo di tempo impiegato per percorrere il tratto C - D. Essendo un moto uniformemente decelerato con velocità iniziale v_2 , si può esprimere la lunghezza s_3 del tratto C - D come

$$s_3 = \frac{1}{2} a_3 \Delta t_3^2 + v_2 \Delta t_3 = -\frac{1}{2} v_2 \Delta t_3 + v_2 \Delta t_3 = \frac{1}{2} v_2 \Delta t_3, \quad (8)$$

da cui si ottiene

$$\Delta t_3 = \frac{2s_3}{v_2} = 25 \text{ s} \quad (9)$$

2.2 Soluzioni

e quindi

$$a_3 = -\frac{v_2^2}{2s_3} = -0.8 \text{ m/s}^2. \quad (10)$$

(iv) Il tempo totale impiegato per percorrere l'intero tragitto è pari a

$$\Delta t_{TOT} = \Delta t_1 + \Delta t_2 + \Delta t_3, \quad (11)$$

dove Δt_1 e Δt_3 sono già stati calcolati nei punti precedenti, mentre

$$\Delta t_2 = \frac{s_2}{v_2} = 200 \text{ s} \quad (12)$$

in quanto il moto nel tratto B - C è rettilineo uniforme.
Il tempo di percorrenza totale è quindi

$$\Delta t_{TOT} = 275 \text{ s} = 4 \text{ min } 35 \text{ s}. \quad (13)$$

S.2.4.

Il corpo B si muove di moto uniformemente accelerato con accelerazione g verso il basso, con velocità iniziale nulla. Introduciamo un asse y verticale diretto verso l'alto e un asse x , perpendicolare a y , disposto sulla superficie della terra, con origine nella posizione occupata inizialmente dal corpo A e passante per il punto in cui cade il corpo B (vedi figura). La posizione iniziale del corpo B è data da:

$$x(0) = d \quad (1)$$

$$y(0) = h$$

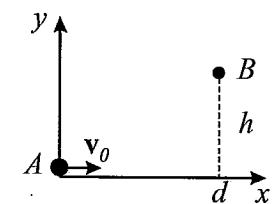
Procedendo come spiegato nell'esercizio 2 di questo capitolo, si ottiene che la legge oraria del corpo B è data da

$$y = h - \frac{1}{2} g t^2 \quad (2)$$

Il tempo impiegato per toccare terra si calcola facilmente dalla (2) ponendo $y = 0$

$$h - \frac{1}{2} g t^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad t = \sqrt{\frac{2h}{g}} \quad (3)$$

Nel tempo impiegato dal corpo B per raggiungere terra il corpo A, che si muove in direzione x con velocità uniforme $v_0 = v_0 u_x$ deve coprire la distanza che lo separa dalla verticale



di caduta, quindi

$$d = v_0 \bar{t} = v_0 \sqrt{\frac{2h}{g}} \Rightarrow v_0 = d \sqrt{\frac{g}{2h}} = 1.4 \text{ m/s}. \quad (4)$$

S.2.5.

Il tempo trascorso tra l'istante in cui si lascia cadere il sasso e l'istante in cui si sente il rumore è composto dal tempo impiegato dal sasso per raggiungere il fondo del pozzo, t_c , e dal tempo impiegato dal suono per risalire ed arrivare alle nostre orecchie, t_s , quindi

$$T = t_c + t_s. \quad (1)$$

Introduciamo un asse y verticale, con origine sul fondo del pozzo, ed indichiamo con h la profondità del pozzo. Procedendo come indicato negli esercizi precedenti, la legge oraria del sasso è data da:

$$y(t) = h - \frac{1}{2}gt^2 \quad (2)$$

Il tempo di caduta si ricava dalla (2) imponendo che l'ordinata del sasso sia pari a zero (il sasso ha raggiunto il fondo del pozzo):

$$y = h - \frac{1}{2}gt_c^2 = 0 \Rightarrow t_c = \sqrt{\frac{2h}{g}}, \quad (3)$$

mentre il tempo impiegato dal suono per risalire è

$$t_s = \frac{h}{v_s}. \quad (4)$$

Il tempo totale è quindi dato da

$$T = \sqrt{\frac{2h}{g}} + \frac{h}{v_s}. \quad (5)$$

Per eliminare la radice la si isola a secondo membro dell'equazione e si eleva tutto al quadrato

$$T - \frac{h}{v_s} = \sqrt{\frac{2h}{g}} \Rightarrow T^2 + \frac{h^2}{v_s^2} - \frac{2hT}{v_s} = \frac{2h}{g}, \quad (6)$$

ordinando opportunamente i termini si ottiene

$$gh^2 - 2v_s(gT + v_s)h + T^2v_s^2g = 0. \quad (7)$$

Le soluzioni della precedente equazione sono

$$h_{1,2} = \frac{v_s}{g}(gT + v_s \mp \sqrt{v_s^2 + 2gTv_s}) \quad (8)$$

2.2 Soluzioni

e sostituendo i valori numerici si ottiene

$$h_1 = 99.6 \text{ m} \quad e \quad h_2 = 26732 \text{ m}, \quad (9)$$

La soluzione corretta è h_1 , infatti fornisce

$$\begin{aligned} t_c &= 4.5 \text{ s} \\ t_s &= 0.3 \text{ s} \end{aligned} \quad (10)$$

mentre h_2 fornisce

$$\begin{aligned} t_c &= 73.8 \text{ s} \\ t_s &= 78.6 \text{ s} \end{aligned} \quad (11)$$

la cui somma non è evidentemente pari a T bensì lo è la loro differenza, che però non ha alcun significato fisico.

Osservazioni:

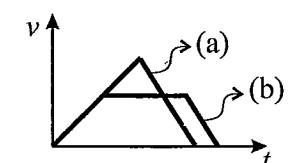
(i) Il motivo per cui si trova anche la soluzione h_2 , pur senza significato fisico, è dovuto al fatto che elevando al quadrato l'equazione (5) si perde l'informazione relativa ai segni con cui le grandezze compaiono e quindi la soluzione h_2 soddisfa ad un'equazione in cui il tempo totale è pari alla differenza dei tempi parziali piuttosto che alla loro somma.

(ii) La soluzione (10) permette di osservare che il tempo impiegato dal suono per risalire il pozzo è di molto inferiore al tempo impiegato dal sasso per cadere. Si potrebbe quindi pensare, a posteriori, che l'errore relativo commesso trascurando il ritardo dovuto alla propagazione del suono sia molto piccolo. In realtà, assumendo $t_c \approx 4.8$ s si ottiene una profondità del pozzo pari a $h = 113$ m con un errore relativo del 13%.

S.2.6.

Per percorrere un tratto di strada nel minor tempo possibile, partendo ed arrivando con velocità nulla, è opportuno accelerare il più possibile nel primo tratto e repentinamente decelerare il più possibile fino al traguardo, evitando di percorrere tratti di strada a velocità costante o, ancor peggio alternare più accelerazioni e decelerazioni. Il modo più semplice per dimostrare la precedente affermazione è quello di utilizzare il piano $t-v$.

In questo piano, infatti, un moto accelerato o decelerato corrisponde a rette con pendenza positiva o negativa rispettivamente. I limiti di accelerazione e decelerazione si tramutano quindi in limiti sulle pendenze massime delle rette nel sudetto piano. In questo piano è quindi possibile rappresentare una qualsiasi combinazione di moto accelerato, decelerato ed uniforme. Le uniche condizioni cui devono sottostare le curve sono di iniziare e finire con velocità nulla e di sottendere un ben preciso valore di area. L'area in questo piano rappresenta, infatti, lo spazio percorso che alla fine deve essere necessariamente pari ad L . Lasciando al lettore di discutere tutte le possibili scelte di legge oraria, ci siamo limitati a rappresentarne in figura solo due: (a) massima accelerazione



iniziale e massima decelerazione finale; (b) massima accelerazione iniziale, moto uniforme e massima decelerazione finale. Come risulta evidente dalla figura, la stessa area viene sottesa dal trapezio con una base maggiore più lunga della base del triangolo, il che significa che con la soluzione (a) la macchina arriva prima. Scelta la soluzione (a), indichiamo con T il tempo totale impiegato e con b la percentuale di tempo T in cui si è accelerato. La velocità nella fase di accelerazione è data da:

$$v(t) = a_1 t \quad (1)$$

avendo assunto che l'automobile parta da ferma all'istante $t = 0$. La velocità massima è

$$v_{\max} = a_1(bT) \quad (2)$$

Nella fase di decelerazione si ha

$$\int_{v_{\max}}^{v(t)} dv = a_2 \int_{bT}^t dt \Rightarrow v(t) = v_{\max} + a_2(t - bT) \quad (3)$$

dove a_2 è un numero negativo. All'istante $t = T$ l'automobile si ferma, quindi $v(T) = 0$. Dalla (3) si ricava:

$$v(T) = v_{\max} + a_2 T(1 - b) = 0 \quad (4)$$

Dalle (2) e (4) si ottiene

$$b = \frac{a_2}{a_2 - a_1} = \frac{3}{5} \quad (5)$$

Il valore di b trovato corrisponde alla percentuale di tempo in cui si è accelerato. Come vedremo, b è anche la percentuale di strada in cui si è accelerato.

Per determinare il tempo totale minimo T impiegato, si può impostare che l'area sottesa nel piano (t, v) dalla curva corrispondente al moto sia effettivamente pari alla distanza totale L percorsa dall'automobile:

$$L = \frac{1}{2} T v_{\max} = \frac{1}{2} T a_1 T b = \frac{1}{2} a_1 b T^2 \quad (6)$$

ed esplicitando rispetto a T si ottiene:

$$T = \sqrt{\frac{2L}{a_1 b}} = 57.7 \text{ s.} \quad (7)$$

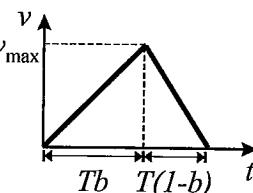
La legge oraria nella fase di accelerazione ($0 < t < bT$) si calcola facilmente:

$$\int_0^{x(t)} dx = a_1 \int_0^t t dt \Rightarrow x(t) = \frac{1}{2} a_1 t^2 \quad (8)$$

Quindi il tratto di strada percorso accelerando è dato da:

$$x(bT) = \frac{1}{2} a_1 (bT)^2 = bL \quad (9)$$

dove si è tenuto conto della (6). Si osservi che la strada percorsa accelerando può essere calcolata anche come l'area del triangolo rettangolo di base bT e di altezza v_{\max} .



2.2 Soluzioni

S.2.7.

All'istante iniziale le due macchine si trovano nella stessa posizione, la macchina A ha velocità nulla e accelerazione a_A , mentre la macchina B ha velocità v_B e accelerazione nulla. Negli istanti successivi si muoveranno rispettivamente di moto uniformemente accelerato e di moto rettilineo uniforme, con le seguenti leggi orarie

$$\begin{aligned} x_A &= \frac{1}{2} a_A t^2 \\ x_B &= v_B t \end{aligned} \quad (1)$$

Se si rappresentano le due leggi orarie nello stesso grafico, si può osservare come tra le due curve esista una seconda intersezione, oltre all'origine, corrispondente all'istante in cui la macchina A raggiunge la macchina B .

Imponendo quindi $x_A = x_B$ si trova

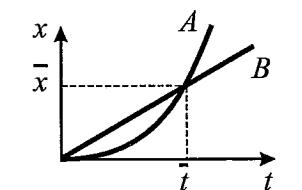
$$\frac{1}{2} a_A \bar{t}^2 = v_B \bar{t}, \quad (2)$$

da cui si ricava

$$\bar{t} = \frac{2v_B}{a_A} = 11.1 \text{ s} \quad (3)$$

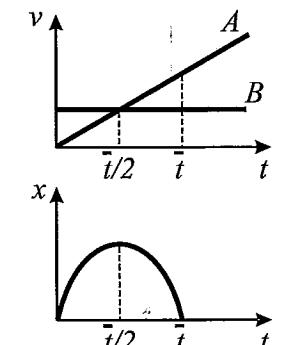
e dalla legge oraria della macchina B si determina che la posizione in cui questa viene raggiunta dalla macchina A è pari a

$$\bar{x} = v_B \bar{t} \simeq 309 \text{ m.} \quad (4)$$



Osservazione:

È utile osservare che l'istante in cui le due macchine si ri-congiungono non corrisponde all'istante in cui le due macchine raggiungono la stessa velocità. Come si può notare dal grafico delle due velocità in funzione del tempo, le due macchine raggiungono la stessa velocità in un tempo che è pari alla metà del tempo necessario per ri-congiungersi. Se inoltre si rappresenta, in un altro grafico, la distanza tra le due macchine $\Delta x = x_B - x_A$ in funzione del tempo, si ottiene una parabola che evidenzia come nell'istante in cui le due macchine hanno la stessa velocità sono anche alla massima distanza relativa.



S.2.8.

All'istante iniziale $t = 0$ le due macchine hanno velocità v_A e v_B e si trovano a distanza d . Si prenda un sistema di riferimento con origine nella posizione iniziale della macchina A in modo che la macchina B si trovi inizialmente nella posizione $x = d$. Negli istanti successivi la macchina A si muoverà di moto uniformemente decelerato mentre la macchina

B proseguirà con moto rettilineo uniforme. Le leggi orarie delle due macchine possono quindi essere espresse come:

$$\begin{aligned} x_A &= v_{At} - \frac{1}{2}|a|t^2 \\ x_B &= v_B t + d \end{aligned} \quad (1)$$

dove, per chiarezza, si è preferito evidenziare il segno dell'accelerazione a prendendone il modulo. L'urto tra le due macchine avviene quando $x_A = x_B$ e quindi

$$v_{At} - \frac{1}{2}|a|t^2 = v_B t + d, \quad (2)$$

che, una volta ordinata, diventa

$$\frac{1}{2}|a|t^2 + (v_B - v_A)t + d = 0. \quad (3)$$

Una delle due soluzioni dell'equazione precedente fornisce l'istante di tempo in cui le due macchine si urteranno. Affinché ciò non avvenga l'equazione non deve avere soluzioni reali e quindi il suo Δ deve essere negativo

$$\Delta = (v_B - v_A)^2 - 2|a|d < 0, \quad (4)$$

da cui si ottiene la minima distanza a cui la macchina *A* deve iniziare a frenare se vuole evitare l'impatto con la macchina *B*

$$d > \frac{(v_B - v_A)^2}{2|a|} = 34.7 \text{ m}. \quad (5)$$

S.2.9.

(i) Nota l'accelerazione di un punto materiale è possibile ricavarne la legge oraria mediante integrazione. Infatti,

$$\int_0^{v(t)} dv = a_0 \int_0^t \cos(\omega t) dt \Rightarrow v(t) = \frac{a_0}{\omega} \sin(\omega t) \quad (1)$$

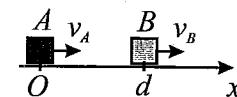
in cui si è imposta la condizione iniziale $v(t=0) = 0$. Per ottenere la legge oraria è necessario procedere ad un'ulteriore integrazione

$$\int_0^{x(t)} dx = \frac{a_0}{\omega} \int_0^t \sin(\omega t) dt \Rightarrow x(t) = -\frac{a_0}{\omega^2} [\cos(\omega t) - 1] \quad (2)$$

in cui si è imposta la condizione iniziale $x(0) = 0$. Dalla legge oraria (2) si vede la particella oscillare fra i punti $x = 0$ e $x = 2a_0/\omega^2$.

(ii) Gli istanti temporali, t_0 , in cui la particella ripassa dall'origine si determinano facilmente imponendo $x = 0$ nella (2):

$$\cos(\omega t_0) - 1 = 0 \Rightarrow \omega t_0 = 2m\pi \Rightarrow t_0 = \frac{2m\pi}{\omega} \quad (3)$$



2.2 Soluzioni

dove $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

(iii) La velocità assunta dalla particella quando ripassa nell'origine si ottiene dalla (1) ponendo $t = t_0$:

$$v(t_0) = \frac{a_0}{\omega} \sin(\omega t_0) = 0 \quad (4)$$

Osservazione:

Se assumiamo un nuovo sistema di riferimento X , definito come segue

$$X = x - \frac{a_0}{\omega^2} \quad (5)$$

la legge oraria (2) si scrive nel modo seguente

$$X(t) = -\frac{a_0}{\omega^2} \cos(\omega t) \quad (6)$$

Si osservi che nel nuovo sistema di riferimento si ha:

$$a(t) = -\omega^2 X \quad (7)$$

che è l'equazione caratteristica di un moto armonico di pulsazione ω .

S.2.10.

La legge oraria e la velocità di un corpo che si muove di moto armonico possono essere espresse dalle seguenti relazioni:

$$\begin{aligned} x &= A \cos(\omega t + \varphi) \\ v &= -A\omega \sin(\omega t + \varphi) \end{aligned} \quad (1)$$

dove $\omega = 2\pi\nu$. Per determinare A e φ bisogna impostare le condizioni iniziali:

$$\left\{ \begin{array}{l} x(0) = A \cos \varphi = d \Rightarrow \cos \varphi = \frac{d}{A} \\ v(0) = -A\omega \sin \varphi = v_0 \Rightarrow \sin \varphi = -\frac{v_0}{A\omega} \end{array} \right. \quad (2)$$

L'ampiezza A si ricava mediante la relazione fondamentale della trigonometria

$$\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi = 1 \Rightarrow \frac{d^2}{A^2} + \frac{v_0^2}{A^2 \omega^2} = 1, \quad (3)$$

da cui si ottiene

$$A = \sqrt{d^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2}} = 0.113 \text{ m} = 11.3 \text{ cm}. \quad (4)$$

per determinare la fase φ si può utilizzare la prima equazione del sistema (2) che, con il

valore di A appena ottenuto, permette di ricavare

$$\varphi = \arccos \frac{d}{A} = \mp 0.488 \text{ rad.} \quad (5)$$

Per determinare il segno della fase iniziale considero che la velocità iniziale ha segno positivo e quindi, dalla seconda equazione del sistema (2), deduco che $\sin \varphi < 0$ e di conseguenza

$$\varphi = -0.488 \text{ rad.} \quad (6)$$

La velocità in funzione del tempo avrà quindi la seguente espressione

$$v(t) = -A\omega \sin(\omega t + \varphi) \Rightarrow v(t) = -2.13 \sin(6\pi t - 0.488), \quad (7)$$

che ha come modulo massimo il valore

$$|v|_{max} = 2.13 \text{ m/s}, \quad (8)$$

raggiunto la prima volta all'istante

$$6\pi\bar{t} - 0.488 = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \bar{t} = \frac{0.488 + \pi/2}{6\pi} = 0.11 \text{ s}, \quad (9)$$

che corrisponde al primo passaggio del corpo per la posizione di equilibrio $x = 0$.

S.2.11.

Le leggi orarie dei due corpi, bersaglio e disco rispettivamente, possono essere espresse nel seguente modo rispetto al sistema di riferimento rappresentato in figura

$$x(t) = L \cos(\omega t) \quad (1)$$

$$\int_{-d}^{y(t)} dy = v_0 \int_{t_0}^t dt \Rightarrow y(t) = -d + v_0(t - t_0) \quad (2)$$

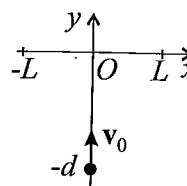
dove t_0 è il ritardo con cui viene lanciato il disco rispetto all'istante iniziale $t = 0$. Affinché il disco colpisca il bersaglio, i due corpi devono trovarsi nello stesso punto nello stesso istante \bar{t} . Quindi

$$x(\bar{t}) = L \cos \omega \bar{t} = 0 \quad (3)$$

$$y(\bar{t}) = -d + v_0(\bar{t} - t_0) = 0 \quad (4)$$

da cui ottengo

$$\begin{cases} \bar{t} = \frac{\pi}{2\omega} + \frac{k\pi}{\omega} & \text{con } k = 0, 1, 2, \dots \\ \bar{t} = t_0 + \frac{d}{v_0} \end{cases} \quad (5)$$



2.2 Soluzioni

e sostituendo la prima nella seconda si trova

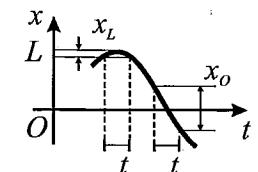
$$\frac{\pi}{2\omega} + \frac{k\pi}{\omega} = t_0 + \frac{d}{v_0} \Rightarrow t_0 = \frac{\pi}{\omega} \left(\frac{1}{2} + k \right) - \frac{d}{v_0}. \quad (6)$$

Esistono infiniti istanti in cui si può lanciare il disco con la sicurezza di colpire il bersaglio, uno per ogni valore di k , intero e positivo. Il primo istante di tempo t_0 utile per colpire il bersaglio lo si trova imponendo $t_0 > 0$, e quindi calcolando il primo valore di k , intero e positivo, che soddisfa la seguente diseguaglianza

$$\frac{\pi}{\omega} \left(\frac{1}{2} + k \right) - \frac{d}{v_0} > 0 \Rightarrow k > \frac{2d\omega - 1}{2\pi v_0}. \quad (7)$$

Per quanto riguarda la maggior possibilità di colpire il bersaglio in $x = 0$ o in $x = L$, è utile riportare in un grafico la legge oraria del bersaglio. Si immagini di avere un'incertezza Δt sull'istante di arrivo del disco nella posizione del bersaglio.

Il bersaglio, nell'intervallo di tempo Δt , si sposta di molto poco nell'intorno della posizione $x = L$ mentre si sposta molto di più nell'intorno della posizione $x = 0$. E' quindi più probabile colpire il bersaglio quando si trova agli estremi della sua oscillazione (velocità nulla) piuttosto che quando passa per il punto di equilibrio (velocità massima).



S.2.12.

Le leggi orarie delle due particelle sono espresse dalle seguenti relazioni

$$\begin{aligned} y_1 &= vt - \frac{1}{2}gt^2 \\ y_2 &= v(t - T) - \frac{1}{2}g(t - T)^2 \end{aligned} \quad (1)$$

dove il moto rappresentato dalla seconda equazione è ritardato rispetto a quello della prima di un intervallo di tempo T .

Affinché si abbia l'urto tra le due particelle è necessario che allo stesso istante \bar{t} si abbia

$$y_1(\bar{t}) = y_2(\bar{t}) \Rightarrow v\bar{t} - \frac{1}{2}g\bar{t}^2 = v\bar{t} - vT - \frac{1}{2}g\bar{t}^2 - \frac{1}{2}gT^2 + g\bar{t}T, \quad (2)$$

da cui si ottiene

$$\bar{t} = \frac{v}{g} + \frac{T}{2}. \quad (3)$$

Affinché l'urto avvenga quando le particelle sono ancora in volo, è necessario che il tempo \bar{t} sia inferiore al tempo t_1 impiegato dalla prima particella per toccare terra

$$y_1 = 0 = vt_1 - \frac{1}{2}gt_1^2 \Rightarrow t_1 = \frac{2v}{g}, \quad (4)$$

e quindi

$$\bar{t} < t_1 \Rightarrow \frac{v}{g} + \frac{T}{2} < \frac{2v}{g} \Rightarrow T < \frac{2v}{g}. \quad (5)$$

Questo risultato può essere altresì facilmente interpretato dicendo che affinché le due particelle si urtino in volo è sufficiente che il lancio della seconda particella avvenga anteriormente alla caduta della prima.

S.2.13.

Si assuma un sistema di riferimento come in figura. L'accelerazione costante delle due biglie è $\mathbf{a} = -g\mathbf{u}_y$. Calcoliamo le velocità delle due biglie:

$$\int_0^{v_A(t)} dv = -g \int_0^t dt \Rightarrow v_A(t) = -gt \quad (1)$$

$$\int_{v_0}^{v_B(t)} dv = -g \int_0^t dt \Rightarrow v_B(t) = v_0 - gt \quad (2)$$

Le leggi orarie si calcolano facilmente utilizzando le relazioni precedenti e le condizioni iniziali:

$$\int_h^{y_A(t)} dy = -g \int_0^t t dt \Rightarrow y_A(t) = h - \frac{1}{2}gt^2 \quad (3)$$

$$\int_h^{y_B(t)} dy = -g \int_0^t (v_0 - gt) dt \Rightarrow y_B = v_0 t - \frac{1}{2}gt^2 \quad (4)$$

L'urto tra le due biglie avviene quando

$$y_A = y_B \Rightarrow h - \frac{1}{2}g\bar{t}^2 = v_0\bar{t} - \frac{1}{2}g\bar{t}^2 \Rightarrow \bar{t} = \frac{h}{v_0}. \quad (5)$$

(i) Inserendo l'espressione di \bar{t} nella (3), è possibile trovare il valore di v_0 per cui all'istante dell'urto la prima biglia (e quindi anche la seconda) si trovi ad un'altezza pari ad $h/2$

$$y_A = h - \frac{1}{2}g \frac{h^2}{v_0^2} = \frac{h}{2}, \quad (6)$$

da cui si ottiene

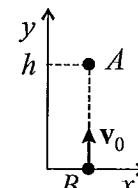
$$v_0 = \sqrt{gh}. \quad (7)$$

(ii) Se invece si vuole che le due biglie si urtino quando le loro velocità sono uguali ed opposte, è necessario scrivere

$$v_B(\bar{t}) = -v_A(\bar{t}) \Rightarrow v_0 - \frac{gh}{v_0} = \frac{gh}{v_0}, \quad (8)$$

da cui si ricava

$$v_0 = \sqrt{2gh}. \quad (9)$$



S.2 Soluzioni

S.2.14.

Si prenda un sistema di riferimento come in figura. Durante il salto, il motociclista è soggetto ad una accelerazione verticale costante $\mathbf{a} = -g\mathbf{u}_y$. Le condizioni iniziali ($t=0$) sono le seguenti:

$$x(0) = y(0) = 0 \quad (1)$$

$$v_x(0) = v_0 \cos \alpha \quad v_y(0) = v_0 \sin \alpha \quad (2)$$

Dal momento che lungo l'asse x l'accelerazione è nulla, il moto lungo tale asse è uniforme, quindi:

$$v_x(t) = v_0 \cos \alpha \quad (3)$$

Lungo l'asse y il moto è uniformemente accelerato e la componente y della velocità del motociclista è data da

$$\int_{v_0 \sin \alpha}^{v_y(t)} dv_y = -g \int_0^t dt \Rightarrow v_y(t) = v_0 \sin \alpha - gt \quad (4)$$

Determiniamo ora le equazioni parametriche del moto:

$$\int_0^{x(t)} dx = v_0 \cos \alpha \int_0^t dt \Rightarrow x(t) = v_0 t \cos \alpha \quad (5)$$

$$\int_0^{y(t)} dy = \int_0^t (v_0 \sin \alpha - gt) dt \Rightarrow y(t) = v_0 t \sin \alpha - \frac{1}{2}gt^2 \quad (6)$$

(i) Per avere la certezza che il motociclista superi il fossato si deve imporre che quando $x = d$ si abbia $y \geq 0$:

$$x = v_0 \bar{t} \cos \alpha = d \Rightarrow \bar{t} = \frac{d}{v_0 \cos \alpha}, \quad (7)$$

e quindi

$$y(\bar{t}) = v_0 \sin \alpha \frac{d}{v_0 \cos \alpha} - \frac{1}{2}g \frac{d^2}{v_0^2 \cos^2 \alpha} \geq 0, \quad (8)$$

da cui si ottiene

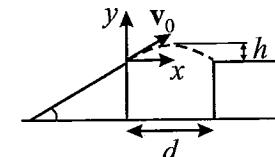
$$v_0^2 \geq \frac{gd}{\sin 2\alpha}. \quad (9)$$

Considerando i soli valori positivi di v_0 , si trova

$$v_0 \geq \sqrt{\frac{gd}{\sin 2\alpha}} \quad (10)$$

e quindi il valore minimo di v_0 affinché il motociclista salti il fossato è pari a

$$v_0 = \sqrt{\frac{gd}{\sin 60^\circ}} = 10.64 \text{ m/s}. \quad (11)$$



(ii) Per determinare la massima altezza raggiunta durante il salto possiamo osservare che in tale situazione si ha inversione di moto in direzione verticale, quindi il componente verticale della velocità si annulla:

$$v_y(t_m) = v_0 \sin \alpha - gt_m = 0 \Rightarrow t_m = \frac{v_0 \sin \alpha}{g} \quad (12)$$

Sostituendo, quindi, il valore di t_m nella (6) si ottiene

$$y_{max} = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{g} - \frac{1}{2} g \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{g^2} = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g} = 1.44 \text{ m.} \quad (13)$$

S.2.15.

(i) Per determinare la velocità angolare del martello al momento del lancio, è necessario conoscerne la velocità tangenziale. Quest'ultima può essere determinata dalle equazioni del moto parabolico del martello dopo essere stato scagliato dall'atleta, conoscendo la gittata d e l'angolo di lancio α . Infatti, come ricavato nell'esercizio precedente, le equazioni parametriche del moto del martello durante il lancio sono le seguenti:

$$\begin{aligned} x &= v_0 t \cos \alpha \\ y &= v_0 t \sin \alpha - \frac{1}{2} g t^2 \end{aligned} \quad (1)$$

E' possibile ricavare l'equazione della traiettoria eliminando il parametro t :

$$y = x \tan \alpha - \frac{g x^2}{2v_0^2 \cos^2 \alpha}. \quad (2)$$

Imponendo, nell'equazione (2), che $y = 0$ quando $x = d$ e $\alpha = 45^\circ$, si ottiene un'equazione in cui l'unica incognita è la velocità tangenziale del martello al momento del lancio v_0 :

$$v_0^2 = gd, \quad (3)$$

da cui, scartando la soluzione negativa in quanto fisicamente priva di senso, si ottiene:

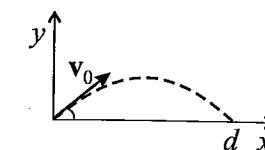
$$v_0 = \sqrt{gd} = 28.84 \text{ m/s.} \quad (4)$$

Nota la velocità tangenziale v_0 appena prima del lancio, si può calcolare la velocità angolare ω nello stesso istante dividendo la prima per il raggio del moto circolare compiuto dal martello prima di essere lasciato; raggio che coincide con la lunghezza L del cavo:

$$\omega = \frac{v_0}{L} = 23.07 \text{ rad/s.} \quad (5)$$

(ii) L'accelerazione centripeta, in un moto circolare, è legata alle velocità tangenziale e angolare mediante la relazione:

$$a_c = \frac{v_0^2}{L} = \omega^2 L = 665.51 \text{ m/s}^2. \quad (6)$$



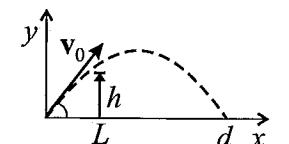
2.2 Soluzioni

S.2.16.

(i) Il moto del pallone lanciato dal terzino è un moto parabolico, dove l'equazione della traiettoria è data da (vedi esercizio precedente):

$$y = x \tan \alpha - \frac{g x^2}{2v_0^2 \cos^2 \alpha}. \quad (1)$$

Ponendo $\alpha = 45^\circ$ e $y = 0$ quando $x = d$, si ottiene il valore della velocità con cui deve essere lanciato il pallone affinché questo raggiunga il centravanti:



$$v_0 = \sqrt{gd} = 22.15 \text{ m/s.} \quad (2)$$

(ii) Per verificare che l'avversario non riesca ad intercettare il pallone si deve calcolare l'altezza raggiunta dal pallone per $x = L$, inserendo questo valore nell'equazione della traiettoria (1):

$$y = L - \frac{g L^2}{v_0^2} = 2.82 \text{ m.} \quad (3)$$

Siccome, per $x = L$, $y > h$ l'avversario non riuscirà ad intercettare il pallone.

S.2.17.

Si prenda un sistema di riferimento con l'origine nel punto in cui il bambino scaglia il sasso. Il moto del sasso è parabolico e soddisfa le seguenti equazioni:

$$\begin{aligned} x_s &= v_0 t \cos \alpha \\ y_s &= v_0 t \sin \alpha - \frac{1}{2} g t^2 \end{aligned} \quad (1)$$

dove α è l'angolo con cui viene scagliato il sasso rispetto all'orizzontale mirando nella direzione della mela quando questa si trova ancora sull'albero, quindi

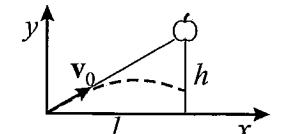
$$\tan \alpha = \frac{h}{l}. \quad (2)$$

La mela, cadendo dall'albero nello stesso istante in cui il bambino scaglia il sasso, segue un moto rettilineo uniformemente accelerato con lo stesso istante iniziale $t_0 = 0$:

$$\begin{aligned} x_M &= l \\ y_M &= h - \frac{1}{2} g t^2 \end{aligned} \quad (3)$$

Affinché il sasso colpisca la mela si deve verificare che nell'istante \bar{t} in cui $x_s = x_M$, anche $y_s = y_M$, e quindi

$$x_s = v_0 \bar{t} \cos \alpha = l \Rightarrow \bar{t} = \frac{l}{v_0 \cos \alpha}, \quad (4)$$



che inserito nella seconda equazione delle leggi orarie (1) e (3) fornisce

$$\begin{aligned} y_S(\bar{t}) &= l \tan \alpha - \frac{gl^2}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} \\ y_M(\bar{t}) &= h - \frac{gl^2}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} \end{aligned} \quad (5)$$

Le due espressioni sono identiche, considerando anche l'equazione (2), e quindi si può concludere che il sasso colpirà la mela qualunque sia la velocità iniziale con cui il sasso viene scagliato. L'unica condizione che bisogna porre sulla velocità iniziale è che quest'ultima sia sufficientemente grande da portare il sasso sulla verticale $x_S = l$ prima che y_S diventi uguale a zero, e cioè che la gittata del lancio sia superiore alla distanza l . La gittata di un moto parabolico si ottiene semplicemente dall'equazione della traiettoria calcolando il valore di x per cui la y torna ad essere pari a zero. Scartando la soluzione banale $x = 0$, si ottiene:

$$x_{\text{gittata}} = \frac{2v_0^2 \sin \alpha \cos \alpha}{g} = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g} \quad (6)$$

e quindi

$$x_{\text{gittata}} > l \Rightarrow v_0^2 > \frac{gl}{\sin 2\alpha} = \frac{gl(1 + \tan^2 \alpha)}{2 \tan \alpha} = \frac{gl(1 + h^2/l^2)}{2h/l} = \frac{g(l^2 + h^2)}{2h}. \quad (7)$$

Essendo la velocità iniziale sicuramente positiva si ottiene, infine,

$$v_0 > \sqrt{\frac{g(l^2 + h^2)}{2h}}. \quad (8)$$

Osservazione:

Si è quindi dimostrato che, purché la disequazione (8) venga soddisfatta, l'urto tra sasso e mela avverrà indipendentemente dalla velocità con cui il sasso viene scagliato. E' però interessante notare che la suddetta velocità v_0 determinerà la quota a cui l'urto avviene. Infatti, come deducibile dalle equazioni (5), più la velocità iniziale del sasso è elevata e più l'urto avverrà ad una quota vicina ad h e viceversa.

S.2.18.

In una virata circolare con raggio R nel piano orizzontale il pilota dell'aereo subisce un'accelerazione centripeta pari a

$$a_n = \frac{v^2}{R} \leq 6g, \quad (1)$$

da cui si ricava la seguente condizione per il raggio di curvatura

$$R \geq \frac{v^2}{6g}. \quad (2)$$

2.2 Soluzioni

Prima di inserire i valori numerici trasformiamo la velocità da km/h a m/s :

$$v = 2000 \text{ km/h} = \frac{2000}{3.6} \text{ m/s} = 555.6 \text{ m/s} \quad (3)$$

e quindi il raggio di curvatura dovrà soddisfare la diseguaglianza

$$R \geq 5244.5 \text{ m} = 5.2 \text{ km} \quad (4)$$

S.2.19.

Per esprimere la velocità e l'accelerazione vettoriali si prendano i due versori, tangente e normale rispetto alla traiettoria, rappresentati in figura. La velocità, in quanto derivata nel tempo dello spostamento, è sempre tangente alla traiettoria e quindi avrà solo la componente parallela al versore tangente. La velocità tangenziale è legata alla velocità angolare ω mediante la relazione:

$$v = \omega R, \quad (1)$$

dove la velocità angolare, essendo l'accelerazione angolare costante, si ricava come

$$\omega(t) = \alpha t \quad (2)$$

e quindi

$$\mathbf{v} = \alpha R t \mathbf{u}_t. \quad (3)$$

All'istante iniziale, cioè per $t = 0$, la velocità vale quindi

$$\mathbf{v}_i = 0. \quad (4)$$

Per determinare la velocità al termine del primo giro, è necessario determinare il tempo impiegato per compiere un giro. L'accelerazione tangenziale del ciclista è data da

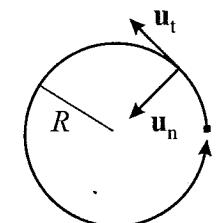
$$a_t = \frac{dv}{dt} = \alpha R, \quad (5)$$

ed è costante durante tutto il moto. La legge oraria, $s = s(t)$, si ricava come segue:

$$\int_0^{s(t)} ds = \int_0^t v(t) dt \Rightarrow s(t) = \frac{1}{2} \alpha R t^2 \quad (6)$$

Il tempo \bar{t} impiegato per percorrere un giro è quindi tale da soddisfare la relazione

$$2\pi R = \frac{1}{2} \alpha R \bar{t}^2 \Rightarrow \bar{t} = \sqrt{\frac{4\pi}{\alpha}}. \quad (7)$$



La velocità alla fine del giro è quindi pari a

$$\mathbf{v}_f = \alpha R \bar{t} \mathbf{u}_t = \sqrt{4\pi\alpha} R \mathbf{u}_t. \quad (8)$$

Siccome il ciclista si muove su una traiettoria circolare, la sua accelerazione avrà componenti sia tangenziali che normali. L'accelerazione tangenziale ha modulo costante ed è espressa dall'equazione (5), mentre l'accelerazione normale ha modulo pari a

$$a_n = \frac{v^2}{R}. \quad (9)$$

L'accelerazione vettoriale per $t = 0$ ha quindi la seguente espressione:

$$\mathbf{a}_i = \alpha R \mathbf{u}_t, \quad (10)$$

mentre l'accelerazione alla fine del giro è data da:

$$\mathbf{a}_f = \alpha R \mathbf{u}_t + 4\pi\alpha R \mathbf{u}_n. \quad (11)$$

S.2.20.

(i) L'ascissa curvilinea lungo la traiettoria è data dall'integrale nel tempo della velocità tangenziale. L'arco di circonferenza percorso nell'intervallo di tempo indicato è pari alla variazione dell'ascissa curvilinea e quindi al seguente integrale:

$$s(t_2) - s(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} v(t) dt = \left[At + \frac{Bt^3}{3} \right]_0^{2s} = 10.7 \text{ m}. \quad (1)$$

(ii) L'accelerazione vettoriale in un moto circolare è data dalla seguente espressione:

$$\mathbf{a} = a_t \mathbf{u}_t + a_n \mathbf{u}_n, \quad (2)$$

dove

$$a_t = \frac{dv}{dt} = 2Bt, \quad (3)$$

mentre

$$a_n = \frac{v^2}{R} = \frac{(A + Bt^2)^2}{R}. \quad (4)$$

Calcolando quindi l'accelerazione nei due istanti indicati, si ottiene

$$\begin{aligned} \mathbf{a}(t_1) &= \frac{A^2}{R} \mathbf{u}_n = 16 \mathbf{u}_n \text{ m/s}^2 \\ \mathbf{a}(t_2) &= (4 \mathbf{u}_t + 64 \mathbf{u}_n) \text{ m/s}^2 \end{aligned} \quad (5)$$

S.2.21 Soluzioni

S.2.21.

(i) Dal momento che l'accelerazione angolare α è costante e il disco parte da fermo, si ha:

$$\int_0^{\omega_f} d\omega = \alpha \int_0^{\Delta t} dt \Rightarrow \alpha = \frac{\omega_f}{\Delta t} \quad (1)$$

Dovendo esprimere il valore dell'accelerazione angolare in rad/s² trasformiamo il valore di velocità angolare finale in rad/s

$$\omega_f = \frac{33 \times 2\pi}{60} \text{ rad/s} = 3.46 \text{ rad/s} \quad (2)$$

e quindi si ottiene

$$\alpha = 5.76 \text{ rad/s}^2. \quad (3)$$

(ii) L'accelerazione tangenziale è data da

$$a_t = \alpha R \quad (4)$$

ed è quindi costante come l'accelerazione angolare. La velocità, inizialmente nulla, è esprimibile come

$$\int_0^{v(t)} dv = \alpha R \int_0^t dt \Rightarrow v(t) = \alpha R t = 0.86 t \text{ m/s}. \quad (5)$$

(iii) Calcoliamo ora l'angolo percorso dal disco nell'intervallo di tempo Δt .

$$\omega(t) = \alpha t = \frac{d\vartheta}{dt} \Rightarrow \int_0^{\vartheta(\Delta t)} d\vartheta = \alpha \int_0^{\Delta t} t dt \Rightarrow \vartheta(\Delta t) = \frac{1}{2} \alpha \Delta t^2 = 1.04 \text{ rad} \quad (6)$$

che in termini di frazione di giro equivale a

$$\frac{\vartheta}{2\pi} = 0.17. \quad (7)$$

S.2.22.

(i) Per trovare l'equazione della traiettoria bisogna eliminare il tempo dalle equazioni parametriche del moto. In questo caso, un modo semplice per ottenere questo effetto è quello di sommare i quadrati della due coordinate

$$x^2 + y^2 = 4 \sin^2 \omega t + 4 \cos^2 \omega t = 4 \text{ m}^2. \quad (1)$$

Questa traiettoria corrisponde ad una circonferenza di raggio $R = 2 \text{ m}$.

(ii) Le componenti della velocità possono essere ricavate derivando le coordinate del corpo:

$$v_x = \frac{dx}{dt} = 2\omega \cos \omega t \quad (2)$$

$$v_y = \frac{dy}{dt} = -2\omega \sin \omega t$$

e quindi

$$\mathbf{v} = 2\omega \cos \omega t \mathbf{u}_x - 2\omega \sin \omega t \mathbf{u}_y. \quad (3)$$

Il modulo della velocità è dato da:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{4\omega^2(\cos^2 \omega t + \sin^2 \omega t)} = 2\omega. \quad (4)$$

La velocità è uniforme, quindi siamo in presenza di un moto circolare uniforme.

(iii) Essendo il moto uniforme, l'accelerazione tangenziale è nulla. Si ha quindi solo accelerazione normale pari a

$$a_n = \frac{v^2}{R} = 2\omega^2 \text{ m/s}^2. \quad (5)$$

Osservazione:

Il vettore posizione, cioè quel vettore che indica la posizione del corpo ad ogni istante, ha come componenti le coordinate del corpo, e quindi

$$\mathbf{r} = 2 \sin \omega t \mathbf{u}_x + 2 \cos \omega t \mathbf{u}_y. \quad (6)$$

E' possibile verificare che la velocità ricavata nell'equazione (3) è sempre ortogonale al vettore posizione (infatti in una circonferenza la tangente deve essere ortogonale al raggio). Si calcoli la pendenza del vettore posizione:

$$m_r = \cot \omega t \quad (7)$$

e la si confronti con la pendenza del vettore velocità:

$$m_v = -\tan \omega t. \quad (8)$$

Si può osservare che

$$m_v = -\frac{1}{m_r}, \quad (9)$$

che è la relazione tra le pendenze di due rette tra loro ortogonali.

S.2.23.

Il dato di velocità del motoscafo fornito dal problema è relativo ad un sistema di riferimento che è in moto rispetto alla riva e cioè l'acqua del fiume. Per determinare quindi la velocità del motoscafo rispetto alla riva bisogna utilizzare il teorema delle velocità relative:

$$\mathbf{v}_O = \mathbf{v}_T + \mathbf{v}_{O'}, \quad (1)$$

dove \mathbf{v}_O e $\mathbf{v}_{O'}$ sono le velocità del corpo rispetto ai due sistemi di riferimento e \mathbf{v}_T è la velocità di trascinamento, cioè la velocità con cui il sistema O' si muove rispetto al sistema O . Nel nostro caso il sistema O è fisso a riva mentre il sistema O' è solidale all'acqua che scorre nel fiume. Di conseguenza la velocità di trascinamento è la velocità con cui scorre l'acqua $\mathbf{v}_c = \mathbf{v}_T$, mentre la velocità del motoscafo rispetto all'acqua è pari alla velocità nel sistema O' , $v_m = v_{O'}$. La velocità rispetto alla riva \mathbf{v}_r è quindi data da

$$\mathbf{v}_r = \mathbf{v}_c + \mathbf{v}_m. \quad (2)$$

S.2.24 Soluzioni

Essendo \mathbf{v}_c parallela al fiume, l'unica possibilità affinché \mathbf{v}_r sia ortogonale al fiume è che la direzione di \mathbf{v}_m sia tale da dare una componente parallela al fiume ma opposta alla corrente

$$v_m \sin \vartheta = v_c \Rightarrow \vartheta = \arcsin \frac{v_c}{v_m} = 23.6^\circ. \quad (3)$$

Quindi, per procedere con direzione ortogonale al fiume, la rotta del motoscafo dovrà essere controcorrente con un angolo pari a $90^\circ + \vartheta = 113.6^\circ$ rispetto alla velocità della corrente.

E' importante osservare che attraversando il fiume in questo modo si percorre la minima strada ma ciò non implica che si impieghi anche il minimo tempo. Infatti, la velocità assoluta con cui il motoscafo attraversa il fiume in direzione ortogonale è data da

$$v_r = v_m \cos \vartheta = 45.8 \text{ km/h} \quad (4)$$

ed il tempo impiegato è pari a

$$t = \frac{L}{v_m \cos \vartheta} = 0.043 \text{ h} = 157 \text{ s}. \quad (5)$$

Dall'equazione precedente risulta evidente che il tempo di attraversamento è minimo per la rotta corrispondente a $\vartheta = 0^\circ$, infatti

$$t' = \frac{L}{v_m} = 144 \text{ s}. \quad (6)$$

In questo caso, però, la velocità assoluta v_r ha anche una componente parallela al fiume pari a v_c che allontana la barca dalla direzione ortogonale al fiume, fino a farla attraccare ad una distanza d dal precedente punto di attracco lungo la riva opposta:

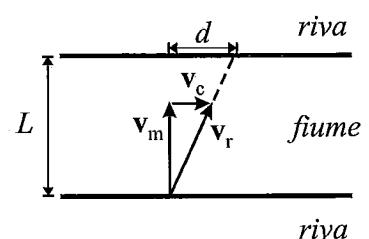
$$d = v_c t' = L \frac{v_c}{v_m} = 800 \text{ m}. \quad (7)$$

S.2.24.

Per determinare il tempo necessario affinché la fidanzata scompaia dalla vista del ragazzo, si deve calcolare il tempo necessario affinché tra i due si crei una distanza pari alla visibilità. E' quindi importante determinare l'accelerazione del treno relativa al ragazzo. Siamo infatti in presenza di due sistemi di riferimento, uno solidale alla stazione ed uno mobile insieme al ragazzo. L'accelerazione assoluta del treno rispetto alla stazione è pari al dato del problema a_{treno} e può essere messa in relazione all'accelerazione del treno rispetto al ragazzo mediante il teorema delle accelerazioni relative:

$$\mathbf{a}_O = \mathbf{a}_{O'} + \mathbf{a}_T, \quad (1)$$

dove \mathbf{a}_O e $\mathbf{a}_{O'}$ sono rispettivamente le accelerazioni del treno nel sistema di riferimento assoluto (stazione) e nel sistema di riferimento relativo (ragazzo), mentre \mathbf{a}_T è l'accelerazione di trascinamento. L'accelerazione di trascinamento è l'accelerazione assoluta che



il corpo in esame avrebbe se rimanesse fermo rispetto all'osservatore mobile. Nel nostro caso, se il treno fosse fermo rispetto al ragazzo, avrebbe un'accelerazione assoluta esattamente pari all'accelerazione con cui il ragazzo corre sulla banchina e quindi

$$a_{treno} = a'_{treno} + a_{ragazzo}, \quad (2)$$

dove a'_{treno} è l'accelerazione del treno rispetto al ragazzo che si vuole trovare. Esplicitando la precedente equazione si ottiene

$$a'_{treno} = a_{treno} - a_{ragazzo} = 2160 \text{ km/h}^2 = 0.17 \text{ m/s}^2, \quad (3)$$

Il moto del treno relativo al ragazzo è quindi un moto uniformemente accelerato dove lo spazio percorso è dato da

$$s' = \frac{1}{2} a'_{treno} t^2 \quad (4)$$

e quindi il tempo necessario affinché il treno guadagni $d = 50$ m rispetto al ragazzo è pari a

$$t = \sqrt{\frac{2d}{a'_{treno}}} = 24.3 \text{ s}. \quad (5)$$

Capitolo 3

Dinamica del punto materiale

3.1 Problemi

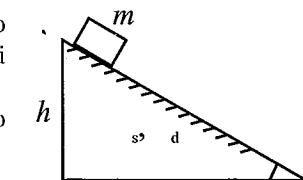
P.3.1.

La legge del moto di un corpo di massa $m = 6$ kg in funzione del tempo t è $\mathbf{r}(t) = (3t^2 - 6t)\mathbf{u}_x - 4t^3\mathbf{u}_y + (3t + 2)\mathbf{u}_z$, dove le componenti di $\mathbf{r}(t)$ sono espresse in metri. Si determini la forza che agisce sul corpo.

P.3.2.

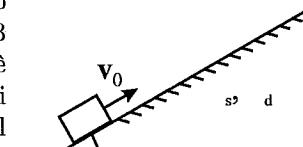
Un corpo di massa m è posto sulla sommità di un piano inclinato (angolo di inclinazione α) ad altezza h dal suolo. Il piano è scabro con coefficienti di attrito statico μ_s e dinamico μ_d . Si calcolino:

- (i) il valore α_0 dell'angolo di inclinazione tale per cui il corpo resta in equilibrio per $\alpha \leq \alpha_0$;
- (ii) l'accelerazione del corpo se $\alpha = 2\alpha_0$;
- (iii) il tempo necessario per raggiungere il suolo se $\alpha = 2\alpha_0$.



P.3.3.

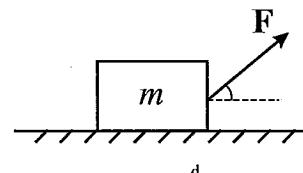
Un corpo è lanciato su un piano scabro, inclinato di un angolo $\vartheta = 30^\circ$ rispetto all'orizzontale, con velocità iniziale $v_0 = 3$ m/s. Il coefficiente di attrito dinamico fra il piano ed il corpo è $\mu_d = 0.3$ mentre il coefficiente di attrito statico è $\mu_s = 0.7$. Si calcoli l'intervallo di tempo necessario affinché la velocità del corpo si riduca a zero. Si discuta inoltre quale sarà il moto del corpo dopo tale istante.



P.3.4.

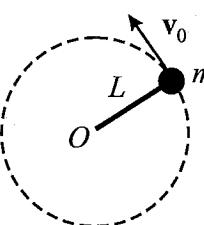
Un corpo di massa m è trascinato lungo un piano orizzontale scabro (coefficiente di attrito dinamico μ_d) da una forza \mathbf{F} inclinata di un angolo ϑ rispetto all'orizzontale. Si determinino:

- (i) il modulo della forza affinché il corpo si muova di moto rettilineo uniforme;
- (ii) l'angolo ϑ_0 per cui la forza necessaria è minima.



P.3.5.

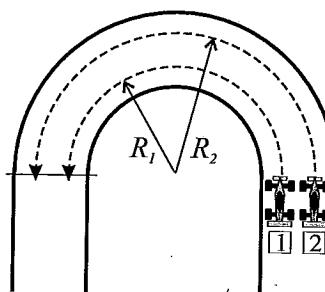
 Un corpo di massa $m = 2 \text{ kg}$ è posto in rotazione con velocità iniziale $v_0 = 10 \text{ m/s}$ su un piano orizzontale liscio mediante una fune inestensibile di lunghezza $L = 4 \text{ m}$ vincolata ad un punto fisso O . Si determini la frequenza di rotazione e la tensione della fune.

**P.3.6.**

In una giostra, un seggiolino di massa $m = 5 \text{ kg}$ è collegato mediante una fune ideale lunga $L = 5 \text{ m}$ alla cima di un palo, posto in rotazione con velocità angolare uniforme $\omega = 1.5 \text{ rad/s}$; durante il moto, l'angolo tra la fune ed il palo si mantiene costante. Si determini la distanza dal palo a cui si trova il seggiolino e la tensione nella fune.

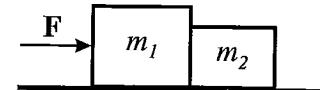
P.3.7.

Due automobili da corsa arrivano affiancate prima di una curva semicircolare, che entrambe percorrono a velocità costante lungo due traiettorie di raggio, rispettivamente, $R_1 = 95 \text{ m}$ e $R_2 = 105 \text{ m}$ (vedi figura). Sapendo che il coefficiente di attrito statico tra ruote ed asfalto vale $\mu_s = 0.7$, si determini la massima velocità con cui ognuna delle due macchine può percorrere la curva senza slittare e quale automobile, in queste condizioni, arrivi prima al termine della curva.

**P.3.8.**

Due blocchi di massa m_1 ed m_2 sono posti a contatto tra loro su un piano orizzontale liscio, come mostrato in figura. Una forza costante \mathbf{F} viene applicata alla prima massa. Si determinino:

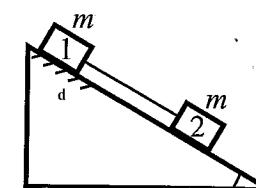
- l'accelerazione del sistema;
- il modulo della forza di interazione tra i blocchi.

**P.3.9.**

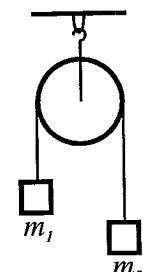
Un convoglio ferroviario è composto da una motrice di massa $M = 10^5 \text{ kg}$ e da due vagoni identici di massa $m = 3 \times 10^4 \text{ kg}$. Nell'intervallo di tempo compreso tra $t_i = 0$ e $t_f = 60 \text{ s}$ la velocità cresce linearmente dal valore $v_i = 100 \text{ km/h}$ a $v_f = 200 \text{ km/h}$. I vagoni sono collegati da ganci rigidi. Trascurando tutti gli attriti si calcolino le tensioni nei ganci e la forza motrice nell'intervallo di tempo considerato.

P.3.10.

Due corpi di massa m legati da una fune inestensibile scivolano lungo un piano, inclinato di un angolo α . Sapendo che tra il corpo 2 ed il piano non c'è attrito mentre tra il corpo 1 ed il piano il coefficiente di attrito dinamico è μ_d , si determini la tensione della fune. Si discuta inoltre per quale valore di α le due masse scivolano a velocità costante.

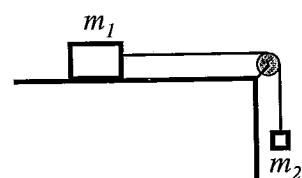
**P.3.11.**

La macchina di Atwood è composta da due corpi, di masse m_1 ed m_2 , sospesi verticalmente ad una puleggia liscia e di massa trascurabile. Si calcolino l'accelerazione del sistema, la tensione nella fune e la tensione nel gancio che tiene appesa la puleggia.

**P.3.12.**

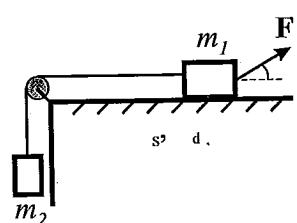
Un corpo di massa $m_1 = 1 \text{ kg}$ è posto su di un piano orizzontale liscio. Il corpo è collegato mediante una fune ideale ed una carrucola liscia ad un secondo corpo di massa $m_2 = 50 \text{ g}$ libero di scorrere in verticale. Si determinino:

- la forza che bisogna applicare alla massa m_1 per mantenere il sistema in equilibrio;
- la variazione nella tensione della fune quando il sistema è lasciato libero di scorrere.

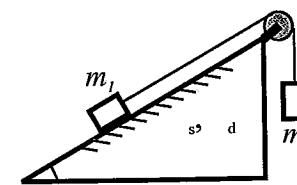
**P.3.13.**

Una massa m_1 è posta su un piano orizzontale scabro con coefficiente di attrito statico μ_s e coefficiente di attrito dinamico μ_d . Una seconda massa m_2 è collegata alla prima mediante una fune ideale ed è libera di muoversi in verticale mediante una carrucola liscia. Alla massa m_1 è inoltre applicata una forza costante \mathbf{F} con direzione formante un angolo ϑ con l'orizzontale.

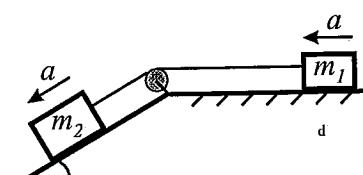
- Si discuta per quali valori di $|\mathbf{F}|$ il sistema si sposta vincendo l'attrito statico.
- Si determini l'accelerazione a con cui il sistema si muove nelle condizioni discusse nel punto (i).

**P.3.14.**

Due masse $m_1 = 5 \text{ kg}$ ed $m_2 = 10 \text{ kg}$ sono collegate come in figura. Il piano, inclinato di $\alpha = 30^\circ$, è scabro con coefficienti di attrito statico $\mu_s = 0.5$ e dinamico $\mu_d = 0.3$. Determinare se le due masse, inizialmente in quiete, si muovono ed in caso affermativo con che accelerazione.

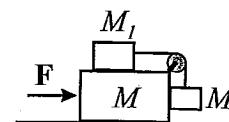
**P.3.15.**

Due corpi di masse m_1 ed m_2 , collegate mediante una fune ideale, sono in moto con accelerazione a . La massa m_1 si trova su un piano orizzontale scabro con coefficiente d'attrito dinamico $\mu_d = 0.5$, mentre la massa $m_2 = 2m_1$ si trova su un piano liscio inclinato di $\alpha = 30^\circ$ rispetto all'orizzontale. Si determini il valore dell'accelerazione a con cui si muove il sistema.



P.3.16.

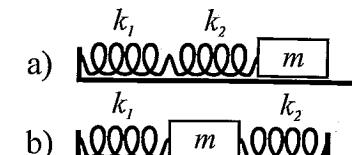
Dato il sistema rappresentato in figura, completamente privo di attriti, ed in moto sotto l'azione della forza costante \mathbf{F} applicata alla massa M , si determini il valore di F affinché le masse M_1 ed M_2 rimangano ferme rispetto alla massa M .

**P.3.17.**

Un corpo di massa m si muove lungo l'asse x con legge $x(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$. Si determini l'espressione della forza agente sul corpo.

P.3.18.

Si calcoli il periodo di oscillazione di un corpo di massa m collegato a due molle, di costanti elastiche k_1 e k_2 , poste in serie (a) ed in parallelo (b). Si consideri il piano liscio e la massa delle molle trascurabile.

**P.3.19.**

Un bambino vuole potenziare la sua pistola a molla con una seconda molla di uguale costante elastica $k = 200 \text{ N/m}$. Se il bambino riesce a caricare la pistola con una forza massima pari a $\bar{F} = 10 \text{ N}$, si discuta quale configurazione delle molle, in serie o in parallelo, fornisce la massima velocità del proiettile, di massa $m = 50 \text{ g}$, in uscita dalla pistola.

P.3.20.

Una massa $M = 2 \text{ kg}$ è libera di oscillare in verticale appesa ad una molla di costante elastica $k = 10 \text{ N/m}$. Si determini il periodo delle oscillazioni nell'intorno del punto di equilibrio.

P.3.21.

Un orologiaio deve aggiustare un orologio a pendolo che accumula un ritardo di 1 minuto ogni ora. Sapendo che il pendolo è costituito da una massa m appesa ad un filo di lunghezza L , si discuta quali aggiustamenti è necessario apportare per risolvere il problema in condizioni di piccole oscillazioni.

P.3.22.

Un blocco di massa $m = 2 \text{ kg}$ è posto su un piano orizzontale scabro. Una forza avente direzione orizzontale e modulo costante $F = 20 \text{ N}$ agisce sul blocco, inizialmente fermo, dall'istante iniziale $t_0 = 0$ all'istante $t_1 = 10 \text{ s}$. Cessata l'azione della forza, il blocco rallenta fermandosi all'istante $t_2 = 25 \text{ s}$. Si calcoli il coefficiente di attrito dinamico μ_d fra il blocco ed il piano.

P.3.23.

In una giostra chiamata 'centrifuga', delle persone possono restare sollevate dal pavimento rimanendo a contatto con la parete laterale interna di un cilindro posto in rotazione con un'opportuna velocità angolare. Se il cilindro ha raggio R ed il coefficiente di attrito statico tra i vestiti delle persone e la parete del cilindro è μ_s , si determini il massimo valore del periodo di rotazione affinché le persone non scivolino a terra.

3.2 Soluzioni**S.3.1.**

Per il secondo principio della dinamica:

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a}, \quad (1)$$

dove l'accelerazione vettoriale è data da

$$\mathbf{a} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} \quad (2)$$

e quindi

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = (6t - 6)\mathbf{u}_x - 12t^2\mathbf{u}_y + 3\mathbf{u}_z \quad (3)$$

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = 6\mathbf{u}_x - 24t\mathbf{u}_y, \quad (4)$$

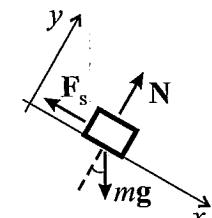
da cui si ottiene che sul corpo agisce una forza

$$\mathbf{F} = m\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = [36\mathbf{u}_x - 144t\mathbf{u}_y] \text{ N}. \quad (5)$$

S.3.2.

(i) Si considerino le forze che agiscono sulla massa m . Fintantoché $\alpha < \alpha_0$ la massa rimane in equilibrio, e quindi:

$$\mathbf{F}_s + \mathbf{N} + \mathbf{mg} = 0, \quad (1)$$



dove: \mathbf{F}_s è la forza di attrito statico; \mathbf{N} è il componente normale della reazione vincolare del piano d'appoggio; \mathbf{mg} è la forza peso. Introduciamo un sistema di riferimento cartesiano ortogonale in cui l'asse x è parallelo al piano inclinato e diretto verso il basso, e l'asse y , perpendicolare a x è diretto come mostrato in figura. Proiettando l'equazione di equilibrio (1) lungo gli assi x ed y si ottengono le seguenti due equazioni scalari:

$$\begin{cases} mg \sin \alpha - F_s = 0 & F_s = mg \sin \alpha \\ N - mg \cos \alpha = 0 & N = mg \cos \alpha \end{cases} \quad (2)$$

All'aumentare dell'angolo di倾inazione del piano aumenta la componente della forza lungo l'asse x , che tende a far scivolare la massa verso il basso. Per mantenere la massa

in equilibrio è quindi necessaria una forza di attrito statico sempre maggiore. Il modulo della forza di attrito statico è però limitato, infatti

$$F_s \leq \mu_s N, \quad (3)$$

e quindi la condizione limite ($\alpha = \alpha_0$) si ottiene quando la forza di attrito raggiunge il suo valore massimo

$$F_s = \mu_s N = \mu_s mg \cos \alpha_0. \quad (4)$$

La prima equazione del sistema (2) diventa

$$\mu_s mg \cos \alpha_0 = mg \sin \alpha_0 \quad (5)$$

e quindi

$$\tan \alpha_0 = \mu_s \Rightarrow \alpha_0 = \arctan(\mu_s). \quad (6)$$

(ii) Se $\alpha = 2\alpha_0$ il corpo sul piano inclinato non è più in condizioni di equilibrio e la massa comincia a scivolare lungo il piano. Le forze applicate alla massa m sono quelle rappresentate in figura, dove al posto della forza di attrito statico F_s ora abbiamo la forza di attrito dinamico F_d . Per il secondo principio della dinamica applicato alla massa m possiamo scrivere:

$$ma = mg + N + F_d; \quad (7)$$

proiettando la precedente equazione lungo gli assi x ed y ed osservando che l'accelerazione del corpo è diretta lungo x , si ottiene:

$$ma = mg \sin 2\alpha_0 - F_d \Rightarrow ma = mg \sin 2\alpha_0 - \mu_d N \quad (8)$$

$$0 = N - mg \cos 2\alpha_0 \Rightarrow N = mg \cos 2\alpha_0 \quad (9)$$

da cui si giunge alla

$$ma = mg \sin 2\alpha_0 - \mu_d mg \cos 2\alpha_0, \quad (10)$$

e quindi

$$a = g(\sin 2\alpha_0 - \mu_d \cos 2\alpha_0). \quad (11)$$

(iii) Nota l'accelerazione con cui la massa scivola lungo il piano, ricavata al punto precedente, si può determinare facilmente il tempo impiegato per percorrere la lunghezza del piano d pari a

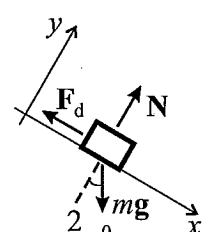
$$d = \frac{h}{\sin \alpha} = \frac{h}{\sin 2\alpha_0}, \quad (12)$$

infatti, essendo a costante, lo spazio percorso in un moto uniformemente accelerato è dato da

$$d = \frac{1}{2} a \bar{t}^2, \quad (13)$$

dove \bar{t} è il tempo impiegato per raggiungere il suolo. Dalla precedente equazione si ricava quindi il tempo \bar{t} come

$$\bar{t} = \sqrt{\frac{2d}{a}} = \sqrt{\frac{2h}{g \sin 2\alpha_0 (\sin 2\alpha_0 - \mu_d \cos 2\alpha_0)}}. \quad (14)$$



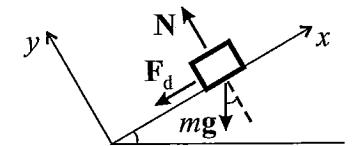
3.2 Soluzioni

§ 3.3.

Le forze che agiscono inizialmente sul corpo sono le seguenti: forza peso mg ; la forza d'attrito dinamico, F_d , parallela al piano e diretta verso il basso; il componente normale della reazione vincolare, N .

La legge di moto si scrive quindi come segue:

$$ma = mg + N + F_d \quad (1)$$



Introduciamo un sistema di riferimento cartesiano ortogonale in cui l'asse x è parallelo al piano inclinato e diretto verso l'alto, e l'asse y , perpendicolare a x è diretto come mostrato in figura. Proiettando la legge di moto (1) lungo gli assi x ed y si ottengono le seguenti due equazioni scalari:

$$\begin{cases} ma = -mg \sin \vartheta - F_d & ma = -mg \sin \vartheta - \mu_d N \\ N - mg \cos \vartheta = 0 & N = mg \cos \vartheta \end{cases} \quad (2)$$

Sostituendo la seconda nella prima si ottiene

$$a = -g(\sin \vartheta + \mu_d \cos \vartheta). \quad (3)$$

Quindi il moto risulta uniformemente accelerato (o, meglio, *uniformemente decelerato*, dato che l'accelerazione è negativa). Si ha quindi:

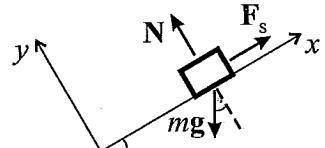
$$\int_{v_0}^{v(t)} dv = a \int_0^t dt \Rightarrow v(t) = v_0 + at \quad (4)$$

ed il tempo \bar{t} per cui la velocità si annulla sarà pari a

$$0 = v_0 + a \bar{t} \Rightarrow \bar{t} = -\frac{v_0}{a} = \frac{v_0}{g(\sin \vartheta + \mu_d \cos \vartheta)} = 0.4 \text{ s}. \quad (5)$$

All'istante \bar{t} la massa è ferma e quindi le forze che agiscono su di essa sono quelle rappresentate in figura, dove F_s è la forza di attrito statico. Impiegando ancora una volta il secondo principio della dinamica e proiettando l'equazione di moto in direzione x e y si ottiene:

$$\begin{cases} ma = -mg \sin \vartheta + F_s \\ N - mg \cos \vartheta = 0 \quad N = mg \cos \vartheta \end{cases} \quad (6)$$



Affinché la massa rimanga ferma deve essere

$$a = 0 \Rightarrow mg \sin \vartheta = F_s, \quad (7)$$

ma la forza di attrito statico può avere al massimo il valore $F_s = \mu_s N$ e quindi

$$mg \sin \vartheta = F_s \leq \mu_s mg \cos \vartheta. \quad (8)$$

La condizione per avere equilibrio è in conclusione

$$\tan \vartheta \leq \mu_s, \quad (9)$$

che risulta soddisfatta per $\vartheta = 30^\circ$ e $\mu_s = 0.7$.

S.3.4.

Le forze che agiscono sul corpo di massa m sono riportate in figura, dove N è il componente della reazione vincolare perpendicolare al piano ed F_d la forza di attrito dinamico agente sul corpo. Affinché il corpo si muova di moto rettilineo uniforme è necessario che la risultante di tutte le forze sia nulla. Se si proietta il sistema di forze in direzione orizzontale e verticale e si impone l'equilibrio, si trova il seguente sistema:

$$N + F \sin \vartheta = mg \Rightarrow N = mg - F \sin \vartheta \quad (1)$$

$$F \cos \vartheta = F_d = \mu_d N \Rightarrow F \cos \vartheta = \mu_d (mg - F \sin \vartheta) \quad (1)$$

e quindi dalla seconda equazione si ottiene

$$F = \frac{\mu_d mg}{\cos \vartheta + \mu_d \sin \vartheta}, \quad (2)$$

che rappresenta il modulo della forza necessario affinché il corpo si muova di moto rettilineo uniforme. Per determinare il valore di ϑ per cui il modulo della forza da applicare sia minimo, è necessario derivare rispetto a ϑ l'espressione (2) e cercare i punti stazionari (o a derivata nulla):¹⁾

$$\frac{dF}{d\vartheta} = \frac{-\mu_d mg(-\sin \vartheta + \mu_d \cos \vartheta)}{(\cos \vartheta + \mu_d \sin \vartheta)^2} = 0. \quad (3)$$

La derivata è nulla quando è nullo il numeratore e quindi per il valore ϑ_0 tale per cui

$$\sin \vartheta_0 = \mu_d \cos \vartheta_0 \Rightarrow \vartheta_0 = \arctan(\mu_d). \quad (4)$$

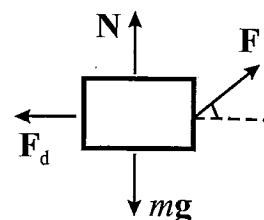
Osservazione:

I punti a derivata nulla (punti di stazionarietà) potrebbero a rigore coincidere con minimi o con massimi della funzione $F(\vartheta)$. Si rammenta che, in coincidenza dei minimi, la derivata seconda della funzione

$$\frac{d^2 F}{d\vartheta^2} = \frac{\mu_d mg}{\cos \vartheta_0 (1 + \mu_d^2)}, \quad (5)$$

deve risultare positiva. Valutando tale espressione in $\vartheta = \vartheta_0$, si verifica che essa è sicuramente positiva, in quanto $0 \leq \vartheta_0 \leq \pi/2$ e quindi il coseno a denominatore dell'espressione

¹⁾Si osservi che il minimo andrà cercato nell'intervallo finito $0 \leq \vartheta \leq \pi/2$; potrebbe accadere che il minimo coincida con uno degli estremi dell'intervallo, nel qual caso la condizione di stazionarietà non è necessariamente soddisfatta. Si lascia al lettore il compito di verificare che, nel caso in esame, il minimo coincide effettivamente con un punto di stazionarietà.



3.2 Soluzioni

è sempre maggiore di zero. Il valore di ϑ_0 trovato nella (4) corrisponde effettivamente ad un minimo.

S.3.5.

L'unica forza agente sul corpo di massa m di interesse per il suo moto è la tensione della fune. Infatti, la forza peso e la reazione vincolare del piano liscio, dirette entrambe ortogonalmente al piano del foglio, si bilanciano lungo tutto il moto e quindi non danno contributo. Non essendoci forze tangenziali possiamo concludere che l'accelerazione tangenziale della massa è nulla e quindi che il modulo della sua velocità si conserva. Siamo quindi in presenza di un moto circolare uniforme con velocità in modulo pari a v_0 . Per trovare la frequenza di rotazione (giri al secondo) si può dividere la velocità con cui la massa ruota per la lunghezza di un giro:

$$f = \frac{v_0}{2\pi L} = 0.40 \text{ giri/s.} \quad (1)$$

Questo significa che la massa compie due giri ogni cinque secondi.

La tensione della fune si ricava mediante il secondo principio della dinamica $F = ma$. In un moto circolare uniforme l'unica componente dell'accelerazione è quella normale, pari a

$$a_N = \frac{v_0^2}{L}; \quad (2)$$

si ottiene quindi

$$T = m \frac{v_0^2}{L} = 50 \text{ N.} \quad (3)$$

Osservazione:

In un moto circolare uniforme la velocità si conserva solo in modulo, mentre la sua direzione varia continuamente dovendo essere in ogni istante tangente alla traiettoria. Val la pena ricordare che una forza applicata ad una massa comporta un'accelerazione che può essere dovuta ad un variazione della velocità in modulo e/o in direzione.

S.3.6.

Quando tutto il sistema ruota con velocità angolare ω uniforme, le forze applicate al seggiolino sono solo la forza peso e la tensione della fune. L'equazione di moto è la seguente:

$$ma = mg + T \quad (1)$$

Il seggiolino si muove di moto circolare uniforme lungo una circonferenza di raggio $d = L \sin \vartheta$ disposta su un piano ortogonale alla direzione del palo. Ne consegue che l'unica accelerazione subita dal seggiolino debba essere un'accelerazione centripeta nel piano della circonferenza. Il direzione verticale le forze si fanno equilibrio, quindi:

$$mg - T \cos \vartheta = 0 \quad (2)$$

Proiettando la (1) in direzione radiale si ottiene:

$$m \frac{v^2}{d} = T \sin \vartheta \quad \Rightarrow \quad T = m \frac{v^2}{d \sin \vartheta} = m \omega^2 L \quad (3)$$

Utilizzando le (2) e (3) si ottiene la condizione

$$\cos \vartheta = \frac{g}{\omega^2 L}. \quad (4)$$

La distanza del seggiolino dal palo è pari al raggio d della traiettoria circolare seguita:

$$\begin{aligned} d &= L \sin \vartheta = L \sqrt{1 - \cos^2 \vartheta} = \\ &= \frac{\sqrt{\omega^4 L^2 - g^2}}{\omega^2} = 2.45 \text{ m}. \end{aligned} \quad (5)$$

Il valore della tensione si ricava invece dalla (2) ed è pari a

$$T = m \omega^2 L = 56.25 \text{ N}. \quad (6)$$

Osservazione:

E' interessante notare che non per tutti i valori di velocità angolare il seggiolino si allontana dal palo in rotazione. Infatti, affinché il valore di ϑ sia reale e diverso da zero, l'equazione (4) fornisce la seguente condizione:

$$\cos \vartheta = \frac{g}{\omega^2 L} < 1 \quad \Rightarrow \quad \omega > \sqrt{\frac{g}{L}} = 1.4 \text{ rad/s}. \quad (7)$$

Per velocità angolari inferiori a questo valore il seggiolino gira su se stesso rimanendo a contatto con il palo, per valori superiori invece il seggiolino si allontana dal palo fino a raggiungere la situazione $\vartheta = \pi/2$ per $\omega \rightarrow \infty$.

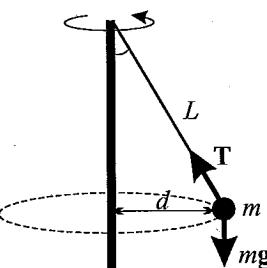
S.3.7.

Si cominci considerando l'equilibrio tra le forze che agiscono in direzione verticale su ogni macchina. Essendo il moto nel piano orizzontale (il piano della pista), la forza peso è bilanciata dalla reazione vincolare in ogni istante del moto

$$N = mg. \quad (1)$$

Per quanto riguarda invece le forze con direzione orizzontale, l'unica forza che agisce sulle due macchine è la forza di attrito statico tra pneumatici ed asfalto, che permette alle due macchine di curvare². Siccome la curva viene percorsa a velocità costante la forza di

²Si noti che la forza di attrito è di tipo *statico*: infatti gli pneumatici non strisciano sull'asfalto, per cui, istante per istante, la porzione di ruota a contatto col terreno è *ferma* rispetto al terreno stesso.



3.2 Soluzioni

attrito statico è solo in direzione radiale ed è totalmente responsabile dell'accelerazione centripeta delle due macchine durante la curva:

$$\frac{mv^2}{R} = F_s, \quad (2)$$

dove la forza di attrito statico F_s può al massimo assumere il valore

$$F_s \leq \mu_s N = \mu_s mg \quad (3)$$

e quindi l'equazione (2) diventa

$$\frac{mv^2}{R} \leq \mu_s mg \quad \Rightarrow \quad v \leq \sqrt{\mu_s g R}. \quad (4)$$

Quindi esiste una velocità massima a cui si può percorrere una curva senza slittare e questa velocità dipende dal coefficiente di attrito statico tra pneumatici e strada oltre che dal raggio di curvatura. Applicando il risultato precedente alle due macchine considerate in questo problema, si ottiene

$$v_1 \leq \sqrt{\mu_s g R_1} = 25.5 \text{ m/s} = 92 \text{ km/h} \quad (5)$$

$$v_2 \leq \sqrt{\mu_s g R_2} = 26.9 \text{ m/s} = 96.7 \text{ km/h}$$

La macchina più esterna può quindi raggiungere una velocità superiore senza slittare, ma ciò non è sufficiente per arrivare prima al termine della curva. Infatti, il tempo impiegato per compiere la semicirconferenza è rispettivamente:

$$t_1 = \frac{\pi R_1}{v_{max,1}} = 11.7 \text{ s} \quad (6)$$

$$t_2 = \frac{\pi R_2}{v_{max,2}} = 12.3 \text{ s}$$

La macchina 1 arriva quindi prima della macchina 2 pur avendo percorso la curva a minor velocità, in quanto è pur vero che la velocità massima aumenta con \sqrt{R} , ma la strada da percorrere aumenta con R .

S.3.8.

(i) Siccome le due masse si muovono solidali, le posso considerare come un unico corpo di massa $M = m_1 + m_2$. Per il secondo principio della dinamica l'accelerazione del sistema è quindi pari a

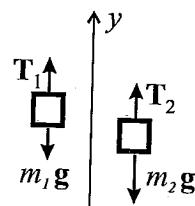
$$a = \frac{F}{m_1 + m_2}, \quad (1)$$

infatti, essendo il piano liscio, in orizzontale agisce solo la forza F .

S.3.11.

In figura sono mostrate le forze che agiscono sui due corpi: le forze peso m_1g e m_2g ; le forze esercitate dalla fune, T_1 e T_2 . Dal momento che il filo è costantemente teso, le forze T_1 e T_2 sono rivolte verso l'alto, come mostrato in figura. Le equazioni vettoriali di moto dei due corpi sono le seguenti:

$$\begin{aligned} m_1 \mathbf{a}_1 &= m_1 \mathbf{g} + \mathbf{T}_1 \\ m_2 \mathbf{a}_2 &= m_2 \mathbf{g} + \mathbf{T}_2 \end{aligned} \quad (1)$$



Introduciamo un asse y verticale, diretto verso l'alto. Si noti che il moto dei due corpi avviene esclusivamente in direzione verticale. Proiettando le leggi di moto (1) lungo l'asse y si ottiene:

$$\begin{aligned} m_1 a_1 &= -m_1 g + T_1 \\ m_2 a_2 &= -m_2 g + T_2 \end{aligned} \quad (2)$$

Poiché la fune è ideale e la carrucola è priva d'attrito, la tensione del filo viene trasmessa inalterata, in modulo, lungo il filo stesso. Nel nostro caso si ha:

$$\mathbf{T}_1 = \mathbf{T}_2 = T \mathbf{u}_y \quad (3)$$

Determiniamo ora il legame fra \mathbf{a}_1 e \mathbf{a}_2 . Se la massa m_1 si alza di un tratto Δy nell'intervallo di tempo Δt , la massa m_2 si abbassa della stessa quantità durante Δt , dal momento che il filo è inestensibile. Quindi le due masse hanno due velocità e due accelerazioni uguali in modulo e direzione, ma di verso opposto:

$$\mathbf{a}_1 = -\mathbf{a}_2 = a \mathbf{u}_y \quad (4)$$

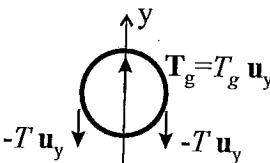
Le equazioni di moto (2) diventano:

$$\begin{aligned} m_1 a &= -m_1 g + T \\ -m_2 a &= -m_2 g + T \end{aligned} \quad (5)$$

Dalle (5) si ottiene:

$$\begin{aligned} a &= \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} g \\ T &= \frac{2m_1 m_2}{m_1 + m_2} g \end{aligned} \quad (6)$$

Si noti che se $m_2 > m_1$ risulta $a > 0$, quindi, secondo le nostre convenzioni di segno, la massa m_1 si alza e la massa m_2 si abbassa; si ha la situazione inversa se $m_2 < m_1$. Determiniamo ora la tensione nel gancio che tiene appesa la puleggia. Le forze che agiscono sulla puleggia, oltre alla tensione del gancio $\mathbf{T}_g = T_g \mathbf{u}_y$, sono quelle esercitate dalla fune



3.2 Soluzioni

\mathbf{T}_g , come mostrato in figura. Dal momento che la puleggia, di massa nulla, non si sposta, le forze applicate si fanno equilibrio, quindi risulta

$$T_g = 2T = \frac{4m_1 m_2}{m_1 + m_2} g \quad (7)$$

S.3.12.

Introduciamo un sistema di assi cartesiani ortogonali come in figura. Le forze applicate al corpo di massa m_1 sono le seguenti: la forza peso $m_1 \mathbf{g}$ e la reazione vincolare \mathbf{N}_1 , che si fanno equilibrio perché m_1 non si muove in direzione verticale; la forza esterna \mathbf{F} e la forza esercitata dalla fune, \mathbf{T}_1 . Dal momento che inizialmente il corpo è fermo, anche le due forze \mathbf{F} e \mathbf{T}_1 si fanno equilibrio:

$$\mathbf{T}_1 = \mathbf{F} \quad (1)$$

Le forze applicate al corpo di massa m_2 sono la forza peso $m_2 \mathbf{g}$ e la forza esercitata dalla fune, \mathbf{T}_2 , che inizialmente si fanno equilibrio, quindi:

$$\mathbf{T}_2 = m_2 \mathbf{g} \quad (2)$$

Come già osservato nell'esercizio precedente, dal momento che la fune è ideale e la carrucola è liscia, la tensione del filo viene trasmessa inalterata, in modulo, da un estremo all'altro, quindi:

$$\mathbf{T}_1 = T \mathbf{u}_x \quad \mathbf{T}_2 = -T \mathbf{u}_y \quad (3)$$

Dalle (1) e (2), utilizzando la (3), si ottiene:

$$\mathbf{F} = \mathbf{T} = m_2 \mathbf{g} = 0.49 \text{ N} \quad (4)$$

Vediamo ora cosa succede quando il sistema viene lasciato libero di scorrere, cioè quando la forza \mathbf{F} viene tolta. Osserviamo, in analogia alla situazione dell'esercizio precedente, che i due corpi si muoveranno con accelerazioni di uguale modulo, quindi:

$$\mathbf{a}_1 = a \mathbf{u}_x \quad \mathbf{a}_2 = a \mathbf{u}_y \quad (5)$$

L'equazione di moto della massa m_1 , proiettata lungo l'asse x è la seguente:

$$m_1 a = T \quad (6)$$

L'equazione di moto della massa m_2 , proiettata lungo l'asse y è la seguente:

$$m_2 a = m_2 g - T \quad (7)$$

Dalle due equazioni scritte si ottiene:

$$T = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} g \quad (8)$$

e quindi la variazione di tensione tra il caso dinamico e quello statico è pari a

$$\Delta T = -\frac{m_2^2}{m_1 + m_2} g = -0.023 \text{ N.} \quad (9)$$

S.3.13.

Si consideri inizialmente in quali condizioni il sistema si trova in equilibrio. In figura sono evidenziate tutte le forze agenti sulle due masse. In particolare, la forza \mathbf{F}_s è la forza di attrito statico. Introduciamo un sistema di assi cartesiani ortogonali x, y , come in figura. Come osservato negli esercizi precedenti, possiamo scrivere:

$$\mathbf{T}_1 = -T \mathbf{u}_x \quad \mathbf{T}_2 = -T \mathbf{u}_y \quad (1)$$

Proiettando tutte le forze lungo gli assi x e y , ed imponendo l'equilibrio si ottiene, per la massa 1:

$$\begin{aligned} -N - F \sin \vartheta + m_1 g &= 0 \Rightarrow N = m_1 g - F \sin \vartheta \\ F \cos \vartheta - T - F_s &= 0 \end{aligned} \quad (2)$$

e per la massa 2:

$$m_2 g - T = 0. \quad (3)$$

Eliminando la tensione dalle precedenti equazioni e sapendo che la forza di attrito statico F_s può avere un valore massimo limitato, si può scrivere

$$F \cos \vartheta - m_2 g = F_s \leq \mu_s N = \mu_s (m_1 g - F \sin \vartheta), \quad (4)$$

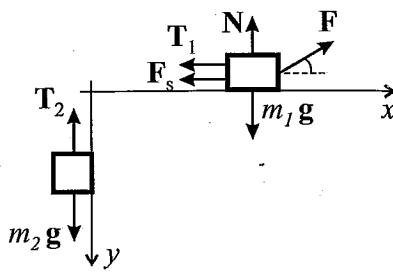
da cui si ricava che il sistema rimane in equilibrio fintantoché

$$F \leq \frac{g(\mu_s m_1 + m_2)}{\cos \vartheta + \mu_s \sin \vartheta}. \quad (5)$$

Affinché la forza F sia in grado di muovere il sistema è quindi necessario che

$$F > \frac{g(\mu_s m_1 + m_2)}{\cos \vartheta + \mu_s \sin \vartheta}. \quad (6)$$

Per questi valori di forza F il sistema si muoverà con un'accelerazione a che può essere determinata a partire dagli stessi sistemi di forze rappresentati precedentemente con la



3.2 Soluzioni

sola sostituzione della forza di attrito statico F_s con quella di attrito dinamico F_d . Applicando quindi il secondo principio della dinamica e sapendo che le due masse si muovono con accelerazioni di ugual modulo ($\mathbf{a}_1 = a \mathbf{u}_x$, $\mathbf{a}_2 = -a \mathbf{u}_y$) in quanto collegate da una fune inestensibile, si trova

$$\begin{aligned} m_1 a &= F \cos \vartheta - T - \mu_d (m_1 g - F \sin \vartheta) \\ -m_2 a &= -T + m_2 g \end{aligned} \quad (7)$$

Eliminando la tensione dalle due equazioni si ottiene

$$m_1 a = F \cos \vartheta - m_2 a - m_2 g - \mu_d m_1 g + \mu_d F \sin \vartheta \quad (8)$$

e quindi

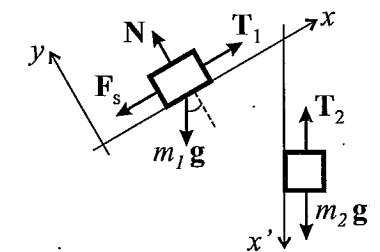
$$a = \frac{F(\cos \vartheta + \mu_d \sin \vartheta) - g(m_2 + \mu_d m_1)}{m_1 + m_2}. \quad (9)$$

S.3.14.

Per descrivere il moto (o la condizione di equilibrio) del corpo di massa m_1 utilizzeremo il sistema di assi cartesiani ortogonali x, y mostrato in figura. Per descrivere il moto (o la condizione di equilibrio) del corpo di massa m_2 utilizzeremo un asse verticale, x' , diretto verso il basso. In figura sono rappresentate tutte le forze che agiscono sui due corpi. Come osservato più volte negli esercizi precedenti, dal momento che la tensione si trasmette inalterata, in modulo, da un estremo all'altro della fune, si ha:

$$\mathbf{T}_1 = T \mathbf{u}_x \quad \mathbf{T}_2 = -T \mathbf{u}_{x'} \quad (1)$$

Vediamo innanzitutto se il sistema è in equilibrio. In tale condizione la somma vettoriale delle forze applicate ai due corpi deve essere nulla. Per quanto riguarda il corpo di massa m_1 , la condizione di equilibrio si trova uguagliando a zero la somma algebrica delle componenti lungo x e lungo y delle forze applicate. Non facciamo alcuna ipotesi sul verso della forza d'attrito statico $\mathbf{F}_s = F_s \mathbf{u}_x$, cioè non facciamo alcuna ipotesi sul segno della componente F_s (nel disegno il verso della forza d'attrito è stato scelto a caso). Si ha:



$$\begin{aligned} N - m_1 g \cos \alpha &= 0 \\ T - m_1 g \sin \alpha + F_s &= 0 \end{aligned} \quad (2)$$

Per quanto riguarda la massa m_2 si ha:

$$m_2 g - T = 0 \quad (3)$$

Utilizzando le relazioni scritte si ottiene:

$$F_s = (m_1 \sin \alpha - m_2) g < 0 \quad (4)$$

poichè, con i dati del problema, $F_s < 0$, la forza \mathbf{F}_s è effettivamente diretta come mostrato in figura. Ricordando la relazione di Coulomb si ha:

$$|\mathbf{F}_s| = (m_2 - m_1 \sin \alpha) g \leq \mu_s |\mathbf{N}| = \mu_s m_1 g \quad (5)$$

da cui si ricava

$$\frac{m_2 - m_1 \sin \alpha}{\mu_s m_1 \cos \alpha} \leq 1. \quad (6)$$

Inserendo i valori numerici nella precedente disequazione si trova però che il termine di sinistra è pari a $3.5 (> 1)$ e quindi si può concludere che l'equilibrio non è possibile ed il sistema si muoverà con una certa accelerazione. Siccome la massa 2 è maggiore della massa 1, che per di più si trova su di un piano inclinato scabro, è ragionevole ipotizzare il corpo di massa m_2 si muova verso il basso: verificheremo alla fine se tale supposizione è esatta. In tal caso la forza d'attrito dinamico agente sulla massa m_1 ha la seguente espressione:

$$\mathbf{F}_d = -\mu_d |\mathbf{N}| \mathbf{u}_x = -\mu_d m_1 g \cos \alpha \mathbf{u}_x \quad (7)$$

Anche in questo caso le accelerazioni dei due corpi sono uguali in modulo, quindi:

$$\mathbf{a}_1 = a \mathbf{u}_x \quad \mathbf{a}_2 = a \mathbf{u}_{x'} \quad (8)$$

Proiettando la legge di moto per la massa m_1 in direzione x e la legge di moto per la massa m_2 in direzione x' si ottiene:

$$m_1 a = T - m_1 g \sin \alpha - \mu_d m_1 g \cos \alpha \quad (9)$$

$$m_2 a = m_2 g - T$$

Eliminando la tensione dalle precedenti equazioni si ottiene

$$a = \frac{g(m_2 - m_1 \sin \alpha - \mu_d m_1 \cos \alpha)}{m_1 + m_2} = 4.06 \text{ m/s}^2. \quad (10)$$

Il segno positivo dell'accelerazione conferma la correttezza del verso scelto e riportato nella figura precedente.

S.3.15.

Per descrivere il moto del corpo di massa m_1 utilizzeremo il sistema di assi cartesiani ortogonali x, y mostrato in figura. Per descrivere il moto del corpo di massa m_2 utilizzeremo un asse x' parallelo al piano inclinato e diretto verso il basso (vedi figura). In figura sono rappresentate tutte le forze che agiscono sui due corpi. Come osservato più volte negli esercizi precedenti, dal momento che la tensione si trasmette inalterata, in modulo, da un estremo all'altro della fune, si ha:

$$\mathbf{T}_1 = T \mathbf{u}_x \quad \mathbf{T}_2 = -T \mathbf{u}_{x'} \quad (1)$$

3.2 Soluzioni

Consideriamo la massa m_1 . In direzione y la forza peso e il componente verticale della reazione vincolare del piano d'appoggio si fanno equilibrio, quindi:

$$N_1 = m_1 g. \quad (2)$$

La forza d'attrito dinamico \mathbf{F}_d è quindi:

$$\mathbf{F}_d = -\mu_d m_1 g \mathbf{u}_x. \quad (3)$$

La legge di moto per la massa m_1 , proiettata lungo l'asse x si scrive nel modo seguente:

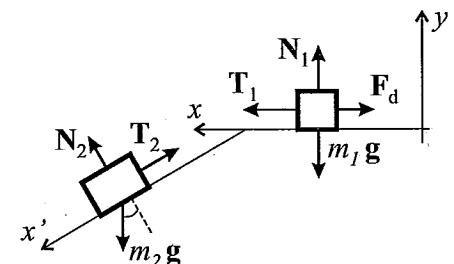
$$m_1 a = T - \mu_d m_1 g. \quad (4)$$

La legge di moto per la massa m_2 , proiettata lungo l'asse x' è data da:

$$m_2 a = m_2 g \sin \alpha - T. \quad (5)$$

Dalle due equazioni di moto si ottiene:

$$a = \frac{m_2 \sin \alpha - \mu_d m_1}{m_1 + m_2} g = \frac{g}{6} = 1.63 \text{ m/s}^2. \quad (6)$$



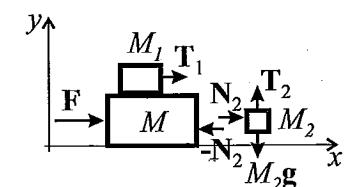
S.3.16.

Risolviamo il problema in un sistema di riferimento inerziale fisso a terra (assi cartesiani ortogonali x, y mostrati in figura). Le uniche forze da considerare sono quindi la forza \mathbf{F} , le forze peso, la tensione nella fune e le reazioni vincolari. Dal momento che la fune è ideale si ha:

$$\mathbf{T}_1 = T \mathbf{u}_x \quad \mathbf{T}_2 = T \mathbf{u}_y \quad (1)$$

Si consideri la forza \mathbf{F} applicata alla massa M . Se questa forza è effettivamente tale da mantenere tutte le masse solidali, allora, detta $a \mathbf{u}_x$ l'accelerazione impressa a tutto il sistema di masse, si ottiene:

$$a = \frac{F}{M_1 + M_2 + M} \quad (2)$$



Si noti che l'accelerazione risulta costante.

Consideriamo ora il corpo di massa M_2 . Le forze applicate sono la forza peso e la forza esercitata dal filo, che si fanno equilibrio, e la reazione vincolare del piano verticale. Si ha:

$$T = M_2 g \quad (3)$$

$$M_2 a = N_2$$

L'equazione di moto della massa M_1 è data da:

$$M_1 a = T \quad (4)$$

Dalle (2)-(4) si ottiene:

$$F = g \frac{M_2}{M_1} (M_1 + M_2 + M) \quad (5)$$

S.3.17.

Per il secondo principio della dinamica sappiamo che la forza agente su di una massa è pari a

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a} \quad (1)$$

dove, in questo caso,

$$\mathbf{a} = \frac{d^2x}{dt^2} \mathbf{u}_x \quad (2)$$

e quindi

$$\frac{dx}{dt} = -A\omega \sin(\omega t + \varphi), \quad (3)$$

da cui, mediante ulteriore derivazione, si ricava

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -A\omega^2 \cos(\omega t + \varphi) = -\omega^2 x. \quad (4)$$

La forza agente sulla massa ha quindi la seguente espressione:

$$\mathbf{F} = -m\omega^2 x \mathbf{u}_x, \quad (5)$$

che può essere vista come una forza elastica con costante elastica k pari a

$$k = m\omega^2. \quad (6)$$

Osservazione:

Il moto di una massa soggetta alla sola forza elastica è quindi un moto armonico con espressione

$$x = A \cos(\omega t + \varphi), \quad (7)$$

dove la pulsazione ω si ricava dalla (6) ed è uguale a

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}. \quad (8)$$

I parametri del moto A e φ si ricavano invece dalle condizioni iniziali del moto.

3.2 Soluzioni

S.3.18.

Come visto nell'esercizio precedente, una massa soggetta alla sola forza elastica si muove di moto armonico con una pulsazione ω pari a

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}. \quad (1)$$

Il periodo di oscillazione del moto è collegato alla pulsazione del moto dalla seguente relazione

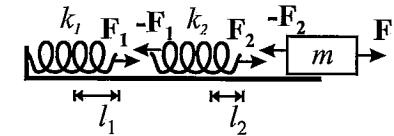
$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}. \quad (2)$$

Nel problema in esame, però, le molle sono due e collegate in due modi diversi. Per trovare quindi il periodo di oscillazione è necessario trovare la costante elastica della molla equivalente nei due casi e quindi applicare la relazione (2).

a) Si considerino inizialmente le due molle in serie.

Se si immagina di applicare alla massa m una forza \mathbf{F} diretta come in figura, la massa si sposterà di una quantità Δl tale per cui la forza elastica di richiamo bilanci perfettamente la forza F . Considerando solo i moduli delle forze, si ottiene quindi

$$F = k_{eq}\Delta l \Rightarrow k_{eq} = \frac{F}{\Delta l}. \quad (3)$$



Lo spostamento complessivo Δl della massa sarà però dato dalla somma degli allungamenti delle due molle e quindi

$$\Delta l = \Delta l_1 + \Delta l_2. \quad (4)$$

Essendo il sistema in equilibrio, le forze interne tra molle e massa sono tutte pari a F :

$$F = F_2 = F_1. \quad (5)$$

D'altra parte

$$\begin{aligned} F_1 &= F = k_1 \Delta l_1 \\ F_2 &= F = k_2 \Delta l_2 \end{aligned} \quad (6)$$

da cui si trova che

$$\Delta l = \frac{F}{k_1} + \frac{F}{k_2}, \quad (7)$$

che sostituito nella (3) fornisce

$$k_{eq} = \frac{F}{\frac{F}{k_1} + \frac{F}{k_2}} = \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2}. \quad (8)$$

Il periodo di oscillazione per le due molle in serie è quindi dato da

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m(k_1 + k_2)}{k_1 k_2}}. \quad (9)$$

b) Si consideri ora il caso delle due molle in parallelo. Inizialmente si consideri il sistema in equilibrio. Si definiscano l_{10} e l_{20} le lunghezze a riposo delle due molle, mentre siano l_1^{eq} e l_2^{eq} le loro lunghezze quando il sistema si trova in equilibrio. Le forze elastiche agenti sulla massa possono quindi essere espresse come

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_1 &= -k_1(l_1^{eq} - l_{10})\mathbf{u}_x \\ \mathbf{F}_2 &= k_2(l_2^{eq} - l_{20})\mathbf{u}_x \end{aligned} \quad (10)$$

Essendo il sistema all'equilibrio si ha:

$$\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 = \mathbf{0} \Rightarrow -k_1(l_1^{eq} - l_{10}) + k_2(l_2^{eq} - l_{20}) = 0. \quad (11)$$

Si immagini, ora, di applicare una forza nota $\mathbf{F} = F\mathbf{u}_x$ alla massa m ; questa si sposterà di una quantità Δl tale per cui le forze elastiche di richiamo bilanceranno esattamente la forza applicata, in modo da tornare nuovamente all'equilibrio. In questo caso, l'allungamento della molla 1 sarà aumentato della quantità Δl , mentre l'allungamento della molla 2 sarà diminuito della stessa quantità. Le forze elastiche applicate alla massa m avranno quindi la seguente espressione:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_1 &= -k_1(l_1^{eq} - l_{10} + \Delta l)\mathbf{u}_x \\ \mathbf{F}_2 &= k_2(l_2^{eq} - l_{20} - \Delta l)\mathbf{u}_x \end{aligned} \quad (12)$$

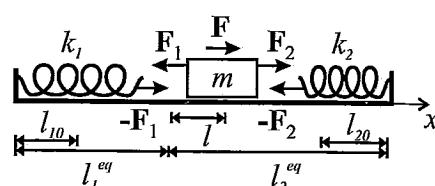
La condizione di equilibrio è quindi la seguente:

$$\mathbf{F} + \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 = \mathbf{0} \Rightarrow F = (k_1 + k_2)\Delta l = k_{eq}\Delta l \Rightarrow k_{eq} = k_1 + k_2, \quad (13)$$

dove si è utilizzata la (11).

Il periodo di oscillazione nel caso di molle in parallelo è quindi dato da:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k_1 + k_2}}. \quad (14)$$



3.2 Soluzioni

S.3.19.

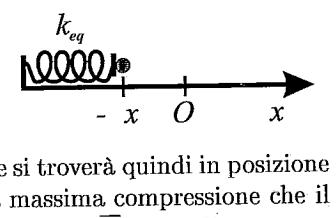
Inizialmente si consideri una molla di costante elastica equivalente k_{eq} indipendentemente da come il bambino decida di collegare le due molle. Per quanto si è visto nel problema 17, una massa soggetta alla sola forza elastica si muove di moto armonico con legge oraria data da

$$x(t) = A \cos(\omega t + \varphi), \quad (1)$$

dove l'asse delle x , diretto come in figura, ha l'origine nel punto occupato dall'estremo libero della molla in configurazione non deformata e la pulsazione ω è data da

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}. \quad (2)$$

Per determinare i parametri del moto A e φ bisogna impostare le condizioni iniziali. In questo caso la condizione iniziale del moto corrisponde alla situazione di pistola carica appena prima di sparare e quindi proiettile in quiete e massima compressione della molla compatibilmente con la forza del bambino. All'istante $t = 0$ il proiettile si troverà quindi in posizione $x = -\Delta x$ con velocità nulla. Il valore Δx corrisponde alla massima compressione che il bambino riesce ad impostare alla molla con una forza massima pari a \bar{F} e quindi



$$\Delta x = \frac{\bar{F}}{k_{eq}}. \quad (3)$$

Prima di applicare le condizioni iniziali è necessario ricavare l'espressione della velocità durante il moto armonico data da

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = -A\omega \sin(\omega t + \varphi). \quad (4)$$

Applicando quindi le condizioni iniziali ($t = 0$) si ottiene

$$x(0) = A \cos \varphi = -\Delta x \quad (5)$$

$$v(0) = -A\omega \sin \varphi = 0 \Rightarrow \varphi = 0$$

e quindi dalla prima equazione si ottiene

$$A = -\Delta x. \quad (6)$$

L'espressione della velocità (4) diventa quindi

$$v(t) = \Delta x \omega \sin(\omega t). \quad (7)$$

Come ben noto in un moto armonico la velocità risulta massima quando l'ampiezza di oscillazione è nulla ($x = 0$) e in questo caso raggiunge un valore massimo pari a

$$v_{max} = \Delta x \omega = \frac{\bar{F}}{k_{eq}} \sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{\bar{F}}{\sqrt{k_{eq} m}}. \quad (8)$$

Oltre questo punto la molla cessa di spingere il proiettile in quanto passa dall'essere compressa all'essere allungata. Negli istanti successivi, la forza elastica avrebbe quindi un effetto frenante sul proiettile se i due fossero vincolati; poiché, invece, il proiettile è semplicemente appoggiato alla molla, nel momento in cui questa comincia a rallentare il proiettile perde il contatto dalla molla e prosegue con la velocità massima acquisita fino a quel punto, la cui espressione abbiamo ricavato nell'equazione precedente. Analizzando quindi l'espressione della velocità massima (8), si può osservare come questa dipenda in modo inversamente proporzionale dalla radice della costante elastica equivalente. Quindi la velocità massima del proiettile sarà tanto più elevata quanto minore sarà la costante elastica equivalente.

Il bambino può decidere se collegare le due molle uguali in serie o in parallelo ottenendo così le seguenti costanti elastiche equivalenti

$$\begin{aligned} k_{eq}^{serie} &= \frac{kk}{k+k} = \frac{k}{2} \\ k_{eq}^{parallelo} &= 2k \end{aligned} \quad (9)$$

La scelta migliore è quindi quella di collegarle in serie, in quanto la velocità massima avrà un valore doppio rispetto al collegamento in parallelo.

S.3.20..

La massa M appesa ad una molla in verticale è soggetta alla forza peso ed alla forza elastica. Si cominci considerando la posizione di equilibrio della massa. L'equilibrio si ottiene quando la forza peso è perfettamente bilanciata dalla forza di richiamo elastica. Si deve quindi avere un allungamento ΔL_{eq} tale per cui

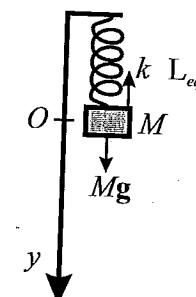
$$Mg = k\Delta L_{eq} \Rightarrow \Delta L_{eq} = \frac{Mg}{k}. \quad (1)$$

Si prenda ora un asse y diretto come in figura con l'origine coincidente con il punto di equilibrio. Se si perturba la massa in direzione y , questa comincerà ad oscillare nell'intorno della posizione di equilibrio e l'allungamento della molla sarà espresso in ogni posizione dalla relazione

$$\Delta L = \Delta L_{eq} + y. \quad (2)$$

Applicando il secondo principio della dinamica a questa situazione si ottiene

$$Mg - k\Delta L = Ma = M \frac{d^2y}{dt^2}. \quad (3)$$



3.2 Soluzioni

Sostituendo nella precedente equazione l'espressione dell'allungamento della molla (2) nonché la condizione di equilibrio (3) si arriva all'equazione caratteristica per il moto armonico:

$$M \frac{d^2y}{dt^2} = -ky, \quad (4)$$

che ha come soluzione la legge oraria

$$y = A \cos(\omega t + \varphi), \quad (5)$$

dove

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{M}}. \quad (6)$$

Il periodo di oscillazione si può infine ricavare dalla pulsazione come

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{M}{k}} = 2.81 \text{ s}. \quad (7)$$

S.3.21.

Durante il moto di un pendolo le uniche forze che agiscono sulla massa appesa sono la forza peso e la tensione della fune (si è trascurato l'attrito dell'aria in quanto molto piccolo alle velocità tipiche di un pendolo da orologio). Per determinare la legge oraria del pendolo si considerino solamente le proiezioni delle forze in direzione tangente alla traiettoria. Il secondo principio della dinamica diventa quindi

$$ma_t = -mg \sin \vartheta. \quad (1)$$

L'accelerazione tangenziale a_t può essere espressa come

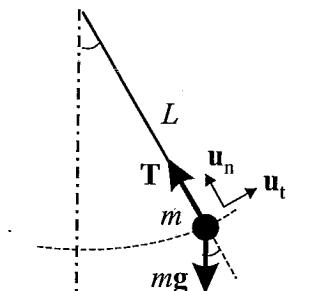
$$a_t = \frac{d^2s}{dt^2}, \quad (2)$$

dove l'ascissa curvilinea s è data da

$$s = L\vartheta \quad (3)$$

con ϑ espresso in radianti. A questo punto l'equazione (1) può essere riscritta come

$$mL \frac{d^2\vartheta}{dt^2} = -mg \sin \vartheta. \quad (4)$$



In condizioni di piccole oscillazioni $\sin \vartheta \simeq \vartheta \ll 1$, quindi la precedente equazione diventa

$$\frac{d^2\vartheta}{dt^2} = -\frac{g}{L}\vartheta, \quad (5)$$

che rappresenta l'equazione caratteristica di un moto armonico di equazione

$$\vartheta(t) = \vartheta_0 \cos(\omega t + \varphi), \quad (6)$$

dove la pulsazione ω è definita come

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{L}}. \quad (7)$$

Il periodo delle piccole oscillazioni di un pendolo è quindi dato da

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}. \quad (8)$$

Se l'orologio accumula un ritardo di 1 minuto ogni ora, allora il periodo di oscillazione del pendolo deve essere abbreviato di un sessantunesimo. Per abbreviare il periodo di oscillazione si può agire solo sulla lunghezza del filo che dovrà quindi essere diminuita di un opportuna quantità x . Il periodo di oscillazione corretto è quindi dato da

$$T' = \left(1 - \frac{1}{61}\right)T = 2\pi\sqrt{\frac{(1-x)L}{g}} \Rightarrow \frac{60}{61} = \sqrt{1-x} \Rightarrow x = 0.033. \quad (9)$$

Si può quindi concludere che per aggiustare l'orologio è necessario accorciare la lunghezza del pendolo del 3.3% della sua lunghezza originaria.

S.3.22.

Il problema può essere risolto con due procedimenti. Consideriamo inizialmente quello più dispendioso in termini di calcoli. Separiamo il moto della massa in due intervalli, il primo da t_0 a t_1 ed il secondo da t_1 a t_2 . Nel primo intervallo la massa subisce l'effetto della forza esterna F e dell'attrito dinamico F_d e quindi si muove con un'accelerazione pari a

$$a_1 = \frac{F - \mu_d mg}{m}. \quad (1)$$

Essendo l'accelerazione costante, la velocità all'istante t_1 è pari a

$$v_1 = a_1(t_1 - t_0) = \left(\frac{F}{m} - \mu_d g\right)t_1. \quad (2)$$

S.3.22 Soluzioni

Nel secondo intervallo di tempo la forza F cessa di esistere e quindi l'accelerazione è data da

$$a_2 = -\mu_d g \quad (3)$$

e quindi la velocità al tempo t_2 (nulla per quanto detto dal testo del problema) ha l'espressione

$$v_2 = v_1 + a_2(t_2 - t_1) = \frac{F}{m}t_1 - \mu_d g t_2 = 0; \quad (4)$$

il coefficiente di attrito dinamico è pertanto pari a

$$\mu_d = \frac{F t_1}{m g t_2} = 0.41. \quad (5)$$

Un metodo molto più semplice per risolvere questo problema è quello di utilizzare il teorema dell'impulso:

$$\mathbf{I} = \int_i^f \mathbf{F} dt = m(\mathbf{v}_f - \mathbf{v}_i). \quad (6)$$

Nel presente problema le forze in gioco sono tutte costanti, quindi l'integrale diventa semplicemente la forza per l'intervallo di tempo per cui viene applicata. Inoltre, le forze sono tutte orizzontali e quindi si può utilizzare il teorema dell'impulso in forma scalare. L'impulso generato dalle due forze che agiscono sulla massa sarà quindi dato da

$$F(t_1 - t_0) - \mu_d mg(t_2 - t_0) = 0. \quad (7)$$

L'impulso totale è pari a zero perché sia la velocità iniziale che quella finale sono nulle. Dalla precedente equazione si ricava quindi lo stesso risultato già calcolato in (5).

S.3.23.

Questo tipo di problemi viene generalmente risolto in un sistema di riferimento non inerziale solidale al corpo in rotazione, pur di introdurre opportune forze apparenti. Rimandando però la dinamica nei sistemi non inerziali ad un capitolo successivo, si provi a risolvere il problema in un sistema di riferimento inerziale con gli strumenti visti fino ad ora. Trascurando inizialmente la forza peso, si può osservare che in un sistema di riferimento inerziale, una massa m che possiede una certa velocità tende a muoversi di moto rettilineo uniforme in assenza di forze esterne. In questo caso, però, ciò comporterebbe un attraversamento della parete cilindrica che invece si oppone e vincola le persone a seguire un moto circolare. La forza necessaria a mantenere questo moto è la reazione vincolare della parete che ha la funzione di forza centripeta:

$$N = m\omega^2 R, \quad (1)$$

dove ω è la velocità angolare con cui ruota il cilindro. La presenza di una reazione vincolare della parete sulle persone dà anche luogo ad una forza di attrito statico F_s tangente alla parete che si oppone alla forza peso, mantenendo le persone sollevate dal pavimento:

$$mg = F_s \leq \mu_s N = \mu_s m\omega^2 R. \quad (2)$$

Esplicitando l'equazione rispetto alla velocità angolare ω , si ottiene

$$\omega \geq \sqrt{\frac{g}{\mu_s R}}. \quad (3)$$

Ricordando inoltre che il periodo di rotazione è legato alla velocità angolare mediante la seguente relazione

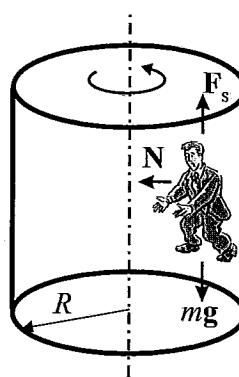
$$T = \frac{2\pi}{\omega}, \quad (4)$$

si ottiene

$$T \leq 2\pi \sqrt{\frac{\mu_s R}{g}}. \quad (5)$$

Osservazioni:

- (i) Il periodo di rotazione limite non dipende dalla massa della persona considerata. Quindi, pur di far funzionare la giostra con un periodo di rotazione inferiore al valore appena ricavato (o con una velocità angolare superiore al corrispondente valore limite), qualunque persona appoggiata alla parete rimane sospesa indipendentemente dalla sua massa.
- (ii) La reazione vincolare, che forza le persone a compiere un moto circolare, si oppone al tentativo dei corpi di proseguire di moto rettilineo uniforme attraversando la parete. Lo stesso principio viene sfruttato nella centrifuga della lavatrice o per produrre succhi di frutta. Il cestello forato non consente il passaggio dei panni o della polpa e buccia della frutta, mantenendoli in moto circolare, al contrario i liquidi sono liberi di sfuggire al cestello proseguendo di moto rettilineo uniforme lungo la tangente e quindi vengono raccolti esternamente alla centrifuga. Questa descrizione, valida in un sistema di riferimento inerziale, risulta meno intuitiva di quella che è possibile formulare in un sistema di riferimento non inerziale solidale alla centrifuga, che presuppone l'introduzione di forze apparenti quale ad esempio la forza centrifuga. Queste forze apparenti vengono introdotte per poter utilizzare i principi della dinamica anche in sistemi non inerziali, per i quali non sarebbero validi. Il motivo per cui queste forze, pur apparenti, ci risultano così familiari è dovuto al fatto che nelle situazioni di vita comune noi stessi siamo molto spesso osservatori non inerziali.



Capitolo 4

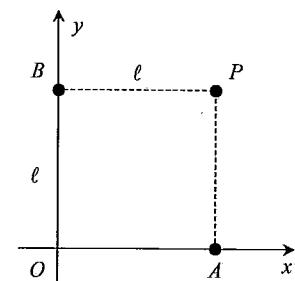
Lavoro ed energia

4.1 Problemi

P.4.1.

Una particella è sottoposta ad una forza $\mathbf{F} = axy\mathbf{u}_x - ax^2\mathbf{u}_y$, dove $a = 60 \text{ N/m}^2$ e $\mathbf{u}_x, \mathbf{u}_y$ sono i versori degli assi x e y .

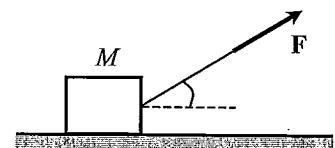
- (i) Si calcoli il lavoro compiuto dalla forza \mathbf{F} quando la particella si sposta dall'origine O al punto P di coordinate $x_P = \ell, y_P = \ell$ ($\ell = 0.1 \text{ m}$) lungo le due traiettorie OAP, OBP dove A = $(\ell, 0)$ e B = $(0, \ell)$.
- (ii) Sulla base dei risultati ottenuti è possibile stabilire se il campo di forze assegnato è conservativo?



P.4.2.

Un blocco di massa $M = 30 \text{ kg}$ viene trascinato mediante una fune su un piano orizzontale scabro, per un tratto $d = 10 \text{ m}$. Alla fune, che forma un angolo $\alpha = 40^\circ$ con l'orizzontale, è applicata una forza costante \mathbf{F} di modulo $F = 5 \text{ N}$. Sapendo che il blocco si muove con velocità costante si determinino:

- (i) il lavoro compiuto sul blocco dalla forza d'attrito;
- (ii) il coefficiente di attrito dinamico fra blocco e piano.



P.4.3.

Una forza agente su un corpo puntiforme di massa m , ne causa il moto descritto dalle seguenti equazioni parametriche: $x(t) = c_1 t^3, y(t) = c_2 t^2, z(t) = c_3 t$, dove c_1, c_2 e c_3 sono delle costanti. Si determini la potenza sviluppata dalla suddetta forza applicata.

P.4.4.

Un'automobile di massa m , percorre con moto uniforme una strada in salita inclinata di un angolo θ rispetto all'orizzontale. Supponendo che il modulo della forza di attrito \mathbf{F}_A dipenda dal modulo della velocità v dell'automobile secondo la relazione $F_A = (a + bv)$,

si calcoli la potenza erogata dal motore.

Dati numerici: $m = 1000 \text{ kg}$, $\theta = 15^\circ$, $a = 500 \text{ N}$, $b = 60 \text{ N s/m}$, $v = 70 \text{ Km/h}$.

P.4.5.

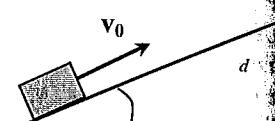
Una locomotiva, che sviluppa una potenza costante $P = 1.5 \text{ MW}$, accelera un treno da una velocità iniziale $v_0 = 10 \text{ m/s}$ ad una velocità finale $v_f = 25 \text{ m/s}$ in un intervallo di tempo $\Delta t = 6 \text{ min}$. Trascurando ogni forma di attrito, si calcoli la massa del treno.

P.4.6.

Un punto materiale di massa m si muove di moto rettilineo lungo un asse x , sotto l'azione di una forza con potenza costante P . Sapendo che all'istante $t = 0$ il punto materiale parte da fermo dalla posizione $x = 0$, si determini la sua legge oraria $x = x(t)$.

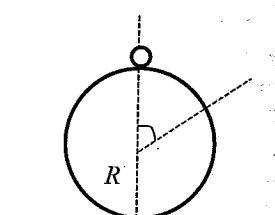
P.4.7.

Un corpo di massa m viene lanciato con velocità iniziale v_0 lungo un piano inclinato scabro, con coefficiente di attrito dinamico μ_d , partendo dal bordo inferiore del piano. Sapendo che l'angolo di inclinazione del piano è α , si calcoli la massima altezza raggiunta dal corpo e il corrispondente lavoro della forza d'attrito.



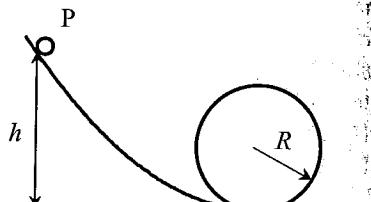
P.4.8.

Un corpo puntiforme viene lasciato scivolare da fermo dalla sommità di una superficie cilindrica liscia di raggio R . Si calcoli l'angolo α in corrispondenza del quale il corpo si stacca dal cilindro.



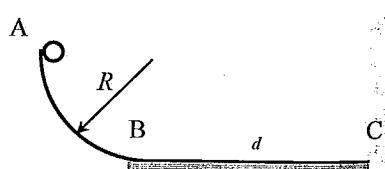
P.4.9.

Un corpo puntiforme parte da fermo da un punto P e scivola lungo una guida liscia che forma un anello di raggio R , come mostrato in figura. Si determini la minima quota h del punto di partenza P affinché il corpo possa percorrere l'anello rimanendo sempre a contatto con la guida.



P.4.10.

Una guida ABC è costituita da un arco di circonferenza AB di raggio $R = 3 \text{ m}$ e da un tratto rettilineo BC. Il tratto curvilineo è liscio, mentre il tratto rettilineo presenta attrito, con coefficiente di attrito dinamico $\mu_d = 0.3$. Un corpo viene lasciato scivolare da fermo dal punto A. Si determini la distanza percorsa dal corpo sul tratto rettilineo prima di fermarsi.



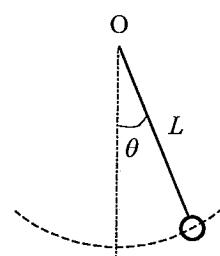
4.1 Problemi

P.4.11.

Un pendolo semplice è costituito da una pallina sospesa ad un filo inestensibile di massa trascurabile e lunghezza L . Nel punto inferiore della traiettoria la velocità della pallina è $v_0 = \sqrt{3gL}$.

(i) Si calcoli la tensione della fune in funzione dell'angolo θ formato dal filo con la verticale.

(ii) Si dica, giustificando la risposta, se il filo rimane teso durante tutto il moto della pallina.

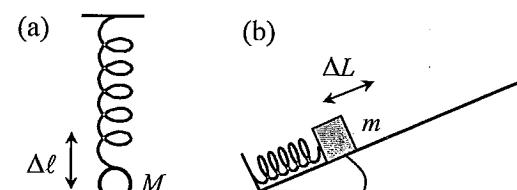


P.4.12.

Un oggetto di massa $m = 3 \text{ kg}$ è legato ad un punto fisso O mediante un filo inestensibile capace di sopportare tensioni fino a 40 N . Inizialmente l'oggetto è mantenuto alla stessa quota del punto O ed il filo è teso. Si stabilisca se, lasciato il sistema libero di muoversi, il filo si spezza. In caso affermativo, si stabilisca in che posizione ciò avviene.

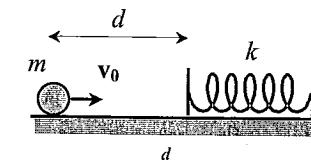
P.4.13.

Una molla ideale, priva di massa, è appesa ad un estremo in posizione verticale (figura a). All'estremo libero viene agganciato un blocco di massa $M = 10 \text{ kg}$. All'equilibrio l'allungamento subito dalla molla è $\Delta\ell = 9.8 \text{ cm}$. La stessa molla viene poi disposta su un piano inclinato di un angolo $\theta = 20^\circ$ e privo di attrito, come mostrato in figura b. Un corpo di massa $m = 2 \text{ kg}$ è appoggiato alla molla e spinto in modo da comprimerla di un tratto $\Delta L = 10 \text{ cm}$. Il corpo viene poi lasciato libero di muoversi sul piano inclinato, partendo da fermo. Si calcoli la distanza percorsa dal corpo lungo il piano inclinato prima di invertire il suo moto.



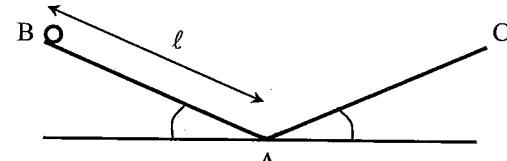
P.4.14.

Un blocco di massa $m = 5 \text{ kg}$ si muove su un piano orizzontale scabro avente un coefficiente di attrito dinamico $\mu_d = 0.2$. Inizialmente il blocco è dotato di una velocità $v_0 = 6 \text{ m/s}$ e si trova ad una distanza $d = 8 \text{ m}$ da una molla ideale di costante elastica $k = 100 \text{ N/m}$. Si dica, giustificando la risposta, se il blocco urta contro la molla. In caso affermativo, si calcoli la massima compressione della molla.



P.4.15.

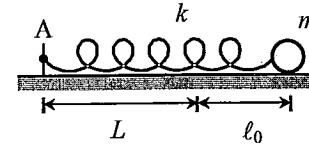
Una particella può muoversi lungo una guida fissa costituita da due tratti rettilinei di uguale inclinazione, $\alpha = 30^\circ$ rispetto all'orizzontale, uniti in A da un raccordo di lunghezza ℓ trascurabile. Il coefficiente di attrito dinamico fra il corpo e la guida, uguale a quello



statico, è $\mu = 0.04$. Il corpo viene lasciato libero a distanza $\ell=2$ m da A. Si calcoli la lunghezza complessiva del percorso compiuto.

P.4.16.

Una sferetta di massa $m = 100$ g è agganciata ad una molla ideale di costante elastica $k = 19.6$ N/m, lunghezza a riposo $L = 40$ cm, priva di massa il cui secondo estremo è fissato nel punto A, come mostrato in figura. Il sistema è posto su un piano orizzontale scabro (coefficiente di attrito dinamico $\mu = 0.5$). Se si allunga la molla di un tratto $\Delta\ell_0 = 20$ cm e si lascia quindi muovere la sferetta sotto l'azione della molla, si determini la distanza minima da A raggiunta dalla sferetta nel suo moto.



P.4.17.

Una particella puntiforme di massa m ed energia meccanica E si muove lungo una traiettoria circolare sotto l'azione della sola forza $\mathbf{F} = \alpha \mathbf{u}_r / r^4$, dove α è una costante, r è la distanza da un punto fisso O e \mathbf{u}_r è il versore radiale uscente dal punto O. Si determini il segno di α e il periodo T del moto.

P.4.18.

L'energia potenziale di un corpo puntiforme di massa $m = 50$ g, che si muove lungo l'asse x sotto l'azione di una forza conservativa, è data dalla relazione:

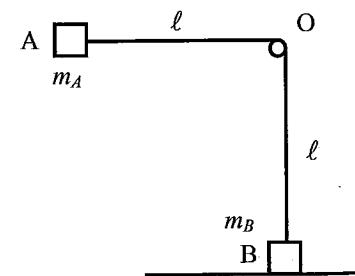
$$E_p(x) = x^2 - 10x + 25$$

(unità di misura del Sistema Internazionale). Si determinino:

- (i) la posizione di equilibrio;
- (ii) i punti in cui il corpo inverte il suo moto se lanciato dalla posizione di equilibrio con velocità $v_0 = 5$ m/s parallela all'asse x .

P.4.19.

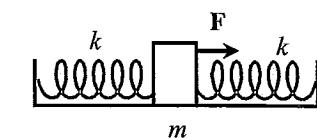
Un corpo A di massa $m_A = 2$ kg è collegato tramite una fune ideale, di lunghezza $2\ell = 4$ m, ad un corpo B di massa $m_B = 3$ kg tramite una carrucola O. Inizialmente il corpo B è appoggiato su un piano orizzontale ed il tratto di filo OB è verticale, mentre il corpo A, in quiete, è tenuto col tratto di filo OA teso ed orizzontale. Si lascia libero il corpo A. Si determini di quanto si abbassa il corpo A, in verticale, prima che il corpo B si stacchi dal piano d'appoggio.



4.1 Problemi

P.4.20.

Un corpo di massa $m = 0.1$ kg, vincolato a due molle uguali di costante elastica $k = 10^3$ N/m, è inizialmente in quiete appoggiato ad un piano orizzontale liscio. In tale condizione le molle non sono deformate. Si applica al corpo una forza \mathbf{F} , di modulo $F = 10.2$ N, costante e parallela alla direzione delle molle. Si calcoli la velocità del corpo nell'istante in cui raggiunge una distanza $\ell = 1$ cm dalla posizione di equilibrio.



P.4.21.

Un corpo si trova in una regione di spazio in cui è sottoposto a una forza del tipo:

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \left(-\frac{k_1}{r^2} + \frac{k_2}{r^3} \right) \mathbf{u}_r$$

dove k_1 e k_2 sono delle costanti positive, r è la distanza da un punto fisso O e \mathbf{u}_r è un versore diretto radiale uscente da O. Si dica se in tale campo di forze si conservano:

- (i) l'energia meccanica totale del corpo;
- (ii) la sua quantità di moto;
- (iii) il suo momento angolare rispetto al punto fisso O.

Si individui inoltre il luogo geometrico dei punti di equilibrio e si calcoli il minimo lavoro necessario a spostare il corpo da un punto di equilibrio sino all'infinito.

P.4.22.

Un corpo puntiforme di massa $m = 0.1$ kg si muove su un piano orizzontale liscio attorno ad un punto fisso O a cui è collegato tramite una molla ideale di massa trascurabile, di lunghezza a riposo nulla e di costante elastica $k = 40$ N/m. La minima distanza da O raggiunta dal corpo è $r_1 = 0.3$ m, la massima è $r_2 = 0.6$ m. Si calcolino le velocità del corpo in corrispondenza della distanza minima e massima da O.

4.2 Soluzioni

4.2 Soluzioni

S.4.1.

Il lavoro compiuto da una forza \mathbf{F} su un percorso γ , dalla posizione iniziale O alla posizione finale P è dato da:

$$\mathcal{L} = \int_{\gamma, O \rightarrow P} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \quad (1)$$

dove $d\mathbf{r}$ è lo spostamento infinitesimo lungo γ . Espri-
mando lo spostamento infinitesimo in coordinate car-
te-
siane:

$$d\mathbf{r} = dx\mathbf{u}_x + dy\mathbf{u}_y + dz\mathbf{u}_z \quad (2)$$

e ricordando che il prodotto scalare di un versore per se stesso è pari a 1, mentre il
prodotto scalare tra versori ortogonali è nullo, si ottiene

$$\mathcal{L} = \int_{\gamma, O \rightarrow P} (F_x \mathbf{u}_x + F_y \mathbf{u}_y + F_z \mathbf{u}_z) (dx\mathbf{u}_x + dy\mathbf{u}_y + dz\mathbf{u}_z) = \int_{\gamma, O \rightarrow P} (F_x dx + F_y dy + F_z dz) \quad (3)$$

Nel caso in considerazione si ha quindi:

$$\mathcal{L} = \int_{\gamma, O \rightarrow P} (axy dx - ax^2 dy) \quad (4)$$

Consideriamo dapprima il percorso OAP , che indicheremo con γ_1 . Lungo il tratto OA
 $F_x = axy = 0$, inoltre $dy = 0$, quindi il lavoro è nullo; lungo il tratto AP $dx = 0$,
 $F_y = -a\ell^2$, si ha quindi:

$$\mathcal{L}_1 = \int_0^\ell -a\ell^2 dy = -a\ell^3 = -0.06 \text{ J} \quad (5)$$

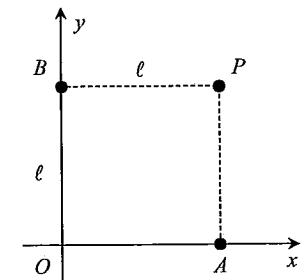
La (5) fornisce quindi il lavoro compiuto da \mathbf{F} sul percorso totale γ_1 . Nel caso del percorso
 OBP (γ_2) si ha: lungo il tratto OB $dx = 0$, $F_y = -ax^2 = 0$, quindi il lavoro è nullo; lungo
il tratto BP $F_x = a\ell x$, $dy = 0$ quindi:

$$\mathcal{L}_2 = a\ell \int_0^\ell x dx = a\ell^3/2 = 0.03 \text{ J} \quad (6)$$

La (6) fornisce quindi il lavoro compiuto da \mathbf{F} sul percorso totale γ_2 . Dal momento che
il lavoro dipende dal percorso possiamo concludere che il campo di forze assegnato non è
conservativo.

S.4.2.

La forza \mathbf{F} applicata alla fune viene trasmessa inalterata al blocco, che risulta quindi
sottoposto all'azione di quattro forze: la forza \mathbf{F} diretta come la fune; la forza peso Mg ;
il componente normale della reazione vincolare del piano d'appoggio, \mathbf{N} ; la forza d'attrito



F.A. Dal momento che il blocco si muove di moto rettilineo uniforme il risultante delle forze applicate è nullo. La condizione di equilibrio in direzione x si scrive come segue:

$$F \cos \alpha - F_A = 0 \Rightarrow \mathbf{F}_A = -F \cos \alpha \mathbf{u}_x \quad (1)$$

dove: $F_A = |\mathbf{F}_A|$ e $F = |\mathbf{F}|$. Possiamo subito calcolare il lavoro compiuto sul blocco dalla forza d'attrito costante in corrispondenza dello spostamento orizzontale d :

$$\mathcal{L} = \int_0^d \mathbf{F}_A \cdot d\mathbf{r} = -F \cos \alpha \int_0^d dx = -Fd \cos \alpha = -38.3 \text{ J} \quad (2)$$

Calcoliamo ora il coefficiente di attrito dinamico fra blocco e piano d'appoggio, ricordando che $F_A = \mu N$, dove $N = |\mathbf{N}|$. La reazione vincolare, \mathbf{N} , si calcola imponendo la condizione di equilibrio in direzione verticale:

$$F \sin \alpha + N - Mg = 0 \Rightarrow \mathbf{N} = (Mg - F \sin \alpha) \mathbf{u}_y \quad (3)$$

Usando le relazioni (1) e (3) si ottiene:

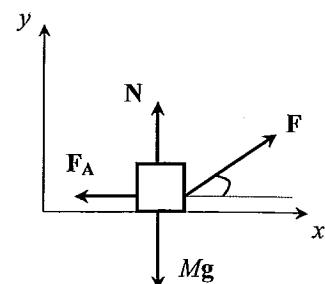
$$F_A = \mu(Mg - F \sin \alpha) = F \cos \alpha \quad (4)$$

da cui possiamo subito ottenere μ :

$$\mu = \frac{F \cos \alpha}{Mg - F \sin \alpha} = 0.013 \quad (5)$$

Nota: Il blocco rimarrà appoggiato al piano finché la reazione vincolare N sarà diretta verso l'alto, quindi finché la componente $N_y \geq 0$. Di conseguenza, il modulo della forza \mathbf{F} applicata alla fune deve essere minore di un valore massimo:

$$N_y = Mg - F \sin \alpha \geq 0 \Rightarrow F \leq \frac{Mg}{\sin \alpha} \quad (6)$$



S.4.3.

La potenza associata ad una forza \mathbf{F} applicata ad un corpo è data da:

$$\mathcal{P} = \frac{\delta \mathcal{L}}{dt} = \frac{\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} \quad (1)$$

avendo indicato con $\delta \mathcal{L}$ il lavoro infinitesimo compiuto da \mathbf{F} nell'intervallo di tempo dt , $d\mathbf{r}$ il corrispondente spostamento e \mathbf{v} la velocità del corpo. Dalle equazioni parametriche del moto possiamo calcolare la velocità, l'accelerazione e quindi la forza agente sul corpo.

Le componenti cartesiane ortogonali della velocità sono date da:

$$\begin{aligned} v_x &= \frac{dx}{dt} = 3c_1 t^2 \\ v_y &= \frac{dy}{dt} = 2c_2 t \\ v_z &= \frac{dz}{dt} = c_3 \end{aligned} \quad (2)$$

Le componenti dell'accelerazione si calcolano facilmente utilizzando le (2):

$$\begin{aligned} a_x &= \frac{dv_x}{dt} = 6c_1 t \\ a_y &= \frac{dv_y}{dt} = 2c_2 \\ a_z &= \frac{dv_z}{dt} = 0 \end{aligned} \quad (3)$$

Per il secondo principio della dinamica, l'unica forza \mathbf{F} applicata al corpo è pari alla massa del corpo per la sua accelerazione, $\mathbf{F} = ma$. Utilizzando la relazione (1) si ha quindi:

$$\mathcal{P} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} = m(a_x v_x + a_y v_y + a_z v_z) = m(18c_1^2 t^3 + 4c_2^2 t) \quad (4)$$

S.4.4.

Le forze che agiscono sull'automobile sono le seguenti: forza peso Mg ; la forza dovuta al motore, \mathbf{F}_m , parallela alla strada e diretta verso l'alto; la forza d'attrito, \mathbf{F}_A , parallela alla strada e diretta verso il basso; il componente normale della reazione vincolare, N . Dal momento che la macchina si muove di moto uniforme il risultante delle forze applicate deve essere uguale a zero. La condizione di equilibrio lungo l'asse x , diretto come la strada, si scrive come segue:

$$\mathbf{F}_m - mg \sin \theta - \mathbf{F}_A = 0 \Rightarrow \mathbf{F}_m = (mg \sin \theta + a + bv) \mathbf{u}_x \quad (1)$$

La potenza erogata dal motore si calcola facilmente:

$$\mathcal{P}_m = \mathbf{F}_m \cdot \mathbf{v} = |\mathbf{F}_m| |\mathbf{v}| \cos \alpha = v(mg \sin \theta + a + bv) = 8.17 \times 10^4 \text{ W} \quad (2)$$

dove $\alpha = 0^\circ$ è l'angolo compreso tra la forza dovuta al motore e la velocità della macchina.

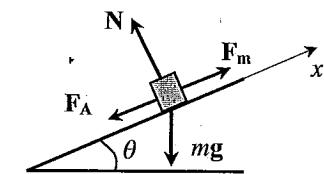
S.4.5.

Per il teorema dell'energia cinetica il lavoro di tutte le forze applicate ad una massa è pari alla sua variazione di energia cinetica:

$$\mathcal{L} = \Delta E_c = E_{c,f} - E_{c,0} = \frac{1}{2} M(v_f^2 - v_0^2), \quad (1)$$

avendo indicato con $E_{c,0} = Mv_0^2/2$ l'energia cinetica iniziale e con $E_{c,f} = Mv_f^2/2$ l'energia cinetica finale. Utilizzando la definizione di potenza e ricordando che nel caso in esame quest'ultima è costante, si ottiene:

$$\mathcal{L} = \int_0^{\Delta t} \mathcal{P} dt = \mathcal{P} \Delta t = \frac{1}{2} M(v_f^2 - v_0^2) \Rightarrow M = \frac{2\mathcal{P} \Delta t}{v_f^2 - v_0^2} = 2 \times 10^6 \text{ kg} \quad (2)$$



S.4.6.

Per risolvere questo problema è opportuno utilizzare il teorema dell'energia cinetica, che, in forma differenziale, può essere scritto nel modo seguente:

$$dE_c = \delta\mathcal{L} \quad (1)$$

avendo indicato con $\delta\mathcal{L}$ il lavoro infinitesimo compiuto sul punto materiale dal risultante delle forze applicate e con dE_c la corrispondente variazione di energia cinetica. La potenza fornita si può quindi scrivere come segue:

$$\mathcal{P} = \frac{\delta\mathcal{L}}{dt} = \frac{dE_c}{dt} \quad (2)$$

Si ha quindi:

$$\int_0^{E_c(t)} dE_c = \int_0^t \mathcal{P} dt \Rightarrow E_c(t) = \mathcal{P}t \quad (3)$$

si è utilizzato il fatto che per $t = 0$ la velocità della particella, e quindi la sua energia cinetica, è nulla. Dalla (3) possiamo ottenere la velocità della particella:

$$v(t) = \sqrt{\frac{2\mathcal{P}}{m}} t \quad (4)$$

La legge oraria si calcola facilmente ricordando che, nel caso in esame, si ha: $v(t) = dx/dt$. Quindi:

$$\int_0^x dx = \sqrt{\frac{2\mathcal{P}}{m}} \int_0^t \sqrt{t} dt \Rightarrow x(t) = \frac{2}{3} \sqrt{\frac{2\mathcal{P}}{m}} t^3 \quad (5)$$

Si è utilizzato il fatto che per $t = 0$ la particella si trova in $x = 0$.

S.4.7.

Il problema si risolve facilmente applicando il teorema dell'energia cinetica:

$$\Delta E_c = \mathcal{L} = \mathcal{L}_c + \mathcal{L}_{nc} \quad (1)$$

avendo indicato con \mathcal{L}_c il lavoro delle forze conservative applicate al corpo e con \mathcal{L}_{nc} il lavoro delle forze non conservative. Nel caso in esame si ha:

$$\Delta E_c = E_{c,F} - E_{c,0} = -\frac{1}{2}mv_0^2 \quad (2)$$

dal momento che, quando il corpo raggiunge la quota massima sul piano inclinato, la sua velocità, e quindi la sua energia cinetica, sono uguali a zero.

Le forze applicate al corpo sono: la forza peso mg , conservativa; il componente normale della reazione vincolare del piano d'appoggio, N , che non compie lavoro perché perpendicolare allo spostamento; la forza d'attrito, F_A , non conservativa. Si ha quindi:

$$\mathcal{L}_c = \mathcal{L}_{peso} = -\Delta E_p = E_{p,0} - E_{p,F} = -mgh \quad (3)$$

4.2 Soluzioni

avendo indicato con h la quota massima raggiunta dal corpo sul piano inclinato. Nella (3) si è implicitamente assunto che l'energia potenziale associata alla forza peso sia nulla alla base del piano inclinato. La forza d'attrito è data da:

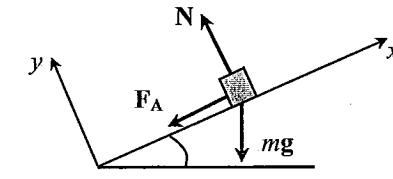
$$\mathbf{F}_A = -\mu_d |\mathbf{N}| \mathbf{u}_x \quad (4)$$

avendo introdotto un asse x nella direzione del piano inclinato, come mostrato in figura. La reazione vincolare N si calcola facilmente imponendo la condizione di equilibrio in direzione y perpendicolare al piano inclinato:

$$N - mg \cos \alpha = 0 \Rightarrow N = mg \cos \alpha \mathbf{u}_y \quad (5)$$

Si ha quindi:

$$\mathbf{F}_A = -\mu_d mg \cos \alpha \mathbf{u}_x \quad (6)$$



Il lavoro compiuto dalla forza d'attrito si calcola facilmente:

$$\mathcal{L}_{nc} = \mathcal{L}_{attrito} = \int \mathbf{F}_A \cdot d\mathbf{r} = -\mu_d mg \cos \alpha \int_0^\ell dx = -\mu_d m g \ell \cos \alpha \quad (7)$$

avendo indicato con ℓ la distanza totale percorsa dal corpo sul piano inclinato:

$$\ell = \frac{h}{\sin \alpha} \quad (8)$$

Utilizzando le relazioni (1)-(3) e (7) si ottiene:

$$h = \frac{v_0^2}{2g} \frac{\sin \alpha}{\sin \alpha + \mu_d \cos \alpha} \quad (9)$$

Il lavoro della forza d'attrito si calcola utilizzando le relazioni (7)-(9):

$$\mathcal{L}_{nc} = -\frac{mv_0^2 \mu_d \cos \alpha}{2(\sin \alpha + \mu_d \cos \alpha)} \quad (10)$$

Note: La relazione (1) si può scrivere anche come segue:

$$\Delta E_c = -\Delta E_p + \mathcal{L}_{nc} \Rightarrow \Delta E = \mathcal{L}_{nc} \quad (11)$$

avendo indicato con $E = E_c + E_p$ l'energia meccanica totale. Nel caso in esame si ha:

$$E_0 = \frac{1}{2}mv_0^2, \quad E_F = mgh \Rightarrow \Delta E = E_F - E_0 = mgh - \frac{1}{2}mv_0^2 \quad (12)$$

Utilizzando le (7), (11) e (12) si ottiene la (9).

S.4.8.

Le forze agenti sul punto materiale sono la forza peso, mg , e la reazione vincolare di appoggio, N , radiale perché la superficie cilindrica è liscia, uscente dalla superficie stessa. La legge di moto si scrive quindi come segue:

$$ma = mg + N \quad (1)$$

dove, fintantoché il punto materiale segue la traiettoria circolare, l'accelerazione a è centripeta e pari a

$$\mathbf{a} = -\frac{v^2}{R}\mathbf{u}_r. \quad (2)$$

Proiettando la (1) in direzione radiale si ottiene:

$$-m\frac{v^2}{R} = -mg \cos \alpha + N \Rightarrow N = m\left(g \cos \alpha - \frac{v^2}{R}\right)\mathbf{u}_r \quad (3)$$

La condizione di appoggio è che la reazione vincolare abbia verso uscente dalla circonferenza, cioè:

$$g \cos \alpha - \frac{v^2}{R} \geq 0 \quad (4)$$

A questo punto dobbiamo calcolare la velocità del punto materiale in funzione dell'angolo α . La reazione vincolare non compie lavoro perché è sempre perpendicolare allo spostamento. Quindi l'unica forza che compie lavoro è quella peso che è conservativa. Applichiamo il principio di conservazione dell'energia meccanica totale E come segue:

$$\Delta E = E(\alpha) - E(0) = 0 \quad (5)$$

avendo indicato con $E(0)$ l'energia meccanica iniziale (particella sulla sommità della superficie cilindrica) e con $E(\alpha)$ l'energia meccanica della particella nella posizione individuata dall'angolo α . Si ha:

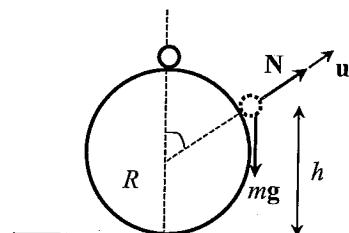
$$\begin{aligned} E(0) &= 2mgR \\ E(\alpha) &= \frac{1}{2}mv^2 + mgh = \frac{1}{2}mv^2 + mgR(1 + \cos \alpha) \end{aligned} \quad (6)$$

Nelle (6) si è assunto che l'energia potenziale sia nulla sul piano orizzontale su cui è vincolata la superficie cilindrica, e che la particella parta da ferma dalla sommità del cilindro (quindi con energia cinetica nulla). Utilizzando le (5) e (6) si ottiene:

$$v^2 = 2gR(1 - \cos \alpha) \quad (7)$$

Dalle (4) e (7) si ricava quindi che il punto materiale rimane appoggiato alla guida cilindrica finché si ha:

$$\cos \alpha \geq \frac{2}{3} \Rightarrow 0 \leq \alpha \leq 48^\circ \quad (8)$$



4.2 Soluzioni

S.4.9.

Le forze agenti sulla particella nel suo moto lungo la guida circolare sono la forza peso, mg , e la reazione vincolare di appoggio, N , radiale perché la guida è liscia, e diretta verso il centro della circonferenza. La legge di moto si scrive quindi come segue:

$$ma = mg + N \quad (1)$$

Proiettando la (1) in direzione radiale si ottiene:

$$-m\frac{v^2}{R} = -N + mg \cos \alpha \Rightarrow N = -m\left(g \cos \alpha + \frac{v^2}{R}\right)\mathbf{u}_r \quad (2)$$

avendo individuato con α la posizione della particella sulla guida circolare, come mostrato in figura. La particella resterà a contatto della guida in tutto il suo moto circolare solo se la reazione vincolare rimarrà diretta verso il centro della circonferenza. Per la (2) questo significa che

$$m\left(g \cos \alpha + \frac{v^2}{R}\right) \geq 0. \quad (3)$$

Il modulo N della reazione vincolare assume il minimo valore quando $\alpha = \pi$, cioè quando la particella raggiunge la sommità, A, della guida circolare. Tale posizione è quella più critica per soddisfare la (3), che diventa

$$m\left(\frac{v_A^2}{R} - g\right) \geq 0 \Rightarrow v_A^2 \geq gR. \quad (4)$$

Basterà quindi che sia verificata la (4) affinché la particella percorra l'anello rimanendo sempre a contatto con la guida. Possiamo calcolare v_A utilizzando il principio di conservazione dell'energia. La sola forza agente sulla particella che compie lavoro non nullo è la forza peso, conservativa. L'energia meccanica della particella, quindi, si conserva. L'energia meccanica iniziale, quando la particella parte da ferma dal punto P, è puramente potenziale:

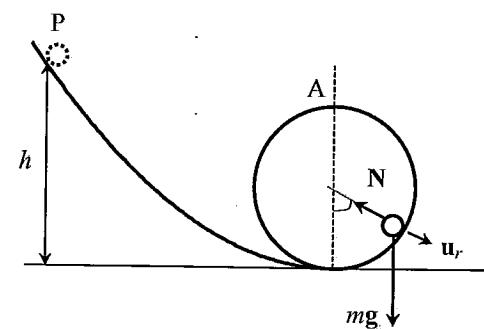
$$E(P) = mgh \quad (5)$$

avendo assunto uguale a zero l'energia potenziale sul piano orizzontale. L'energia meccanica in A è data da:

$$E(A) = 2mgR + \frac{1}{2}mv_A^2 \quad (6)$$

Si ha quindi:

$$E(P) = E(A) \Rightarrow v_A^2 = 2g(h - 2R) \quad (7)$$



Utilizzando le relazioni (4) e (7) si ottiene:

$$h \geq \frac{5}{2}R \quad (8)$$

Nota: E' interessante osservare che nel caso di vincolo unilatero l'altezza h del punto di partenza P deve essere maggiore di quella del punto A . La differenza di energia potenziale tra i due punti è infatti necessaria per far arrivare la particella in A con la velocità adeguata per soddisfare la (4).

Nel caso in cui il vincolo fosse stato bilatero, invece, non ci sarebbero state limitazioni sul verso di \mathbf{N} e quindi non avremmo dovuto soddisfare la (3) e la (4). In quest'ultimo caso infatti sarebbe bastato che la particella avesse energia sufficiente per arrivare in A , anche con velocità $v_A = 0$, per compiere un giro completo a contatto con la guida. Quindi l'altezza del punto di partenza P sarebbe stata $h' = 2R$.

S.4.10.

Per risolvere il problema possiamo applicare il teorema dell'energia cinetica in presenza di forze non conservative:

$$\Delta E_c = \mathcal{L}_c + \mathcal{L}_{nc} \quad (1)$$

Dal momento che $\mathcal{L}_c = -\Delta E_p$, si ottiene:

$$\Delta E = \mathcal{L}_{nc} \quad (2)$$

Nel caso in esame la forza non conservativa

agente sulla particella è data dalla forza di attrito agente unicamente sul tratto rettilineo. L'energia meccanica iniziale, quando il corpo parte da fermo dal punto A , è data da:

$$E_A = mgR \quad (3)$$

Si è assunta uguale a zero l'energia potenziale sul piano orizzontale. L'energia meccanica finale, quando il corpo si ferma in un punto del tratto rettilineo BC è ovviamente uguale a zero. Si ha quindi:

$$\Delta E = -mgR \quad (4)$$

Calcoliamo ora il lavoro compiuto sul corpo dalla forza di attrito. Tale forza è data da:

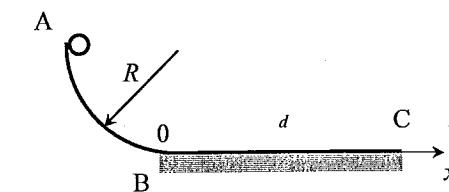
$$\mathbf{F}_A = -\mu_d |\mathbf{N}| \mathbf{u}_x \quad (5)$$

avendo assunto un asse x diretto come il tratto orizzontale BC , con origine nel punto B , come mostrato in figura. La componente normale della reazione vincolare sul tratto BC si calcola imponendo l'equilibrio in direzione verticale:

$$|\mathbf{N}| = mg \quad (6)$$

Il lavoro compiuto dalla forza di attrito si calcola facilmente:

$$\mathcal{L}_{nc} = \int \mathbf{F}_A \cdot d\mathbf{r} = -\mu_d mg \int_0^L dx = -\mu_d mgL \quad (7)$$



4.2 Soluzioni

avendo indicato con L la distanza percorsa dal corpo sul tratto rettilineo prima di fermarsi. Utilizzando le relazioni (2), (4) e (7) si ottiene:

$$L = \frac{R}{\mu_d} = 10 \text{ m} \quad (8)$$

S.4.11.

Le forze agenti sulla pallina sono la forza peso, mg e la tensione T della fune. La legge di moto della pallina è quindi la seguente:

$$ma = mg + T \quad (1)$$

Proiettando la (1) in direzione radiale si ottiene:

$$-m \frac{v^2}{L} = -T + mg \cos \theta \Rightarrow T = m \frac{v^2}{L} + mg \cos \theta \quad (2)$$

dove $T = |\mathbf{T}|$.

Per determinare la tensione in funzione dell'angolo θ dobbiamo prima esprimere la velocità v in funzione di θ . Dal momento che l'unica forza agente sulla pallina che compie lavoro non nullo è la forza peso, conservativa, possiamo applicare il principio di conservazione dell'energia meccanica. L'energia iniziale, quando la pallina si trova nel punto più basso della sua traiettoria circolare è:

$$E_0 = \frac{1}{2}mv_0^2 \quad (3)$$

Si è assunto che in tale posizione l'energia potenziale della forza peso sia nulla. L'energia meccanica in corrispondenza di un punto generico della traiettoria, individuato dall'angolo θ è data da:

$$E_F = \frac{1}{2}mv^2 + mgL(1 - \cos \theta) \quad (4)$$

Si ha quindi:

$$E_0 = E_F \Rightarrow v^2 = v_0^2 - 2gL(1 - \cos \theta) \quad (5)$$

Utilizzando la relazione (5) nella (2) si ottiene:

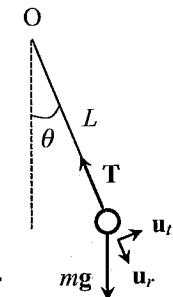
$$T = m \left(\frac{v_0^2}{L} - 2g + 3g \cos \theta \right) \quad (6)$$

Nel caso in esame $v_0 = \sqrt{3gL}$, quindi:

$$T = mg(1 + 3 \cos \theta) \quad (7)$$

Se il filo rimane sempre teso durante il moto del pendolo, la pallina sale fino a che la sua velocità non si annulla. Quindi per la (5), si ha

$$v^2 = 0 = gL + 2gL \cos \theta_{max} \Rightarrow \cos \theta_{max} = -\frac{1}{2} \Rightarrow \theta_{max} = 120^\circ. \quad (8)$$



In realtà, la tensione si annulla in corrispondenza dell'angolo $\bar{\theta}$, dato da:

$$\bar{\theta} = \arccos(-1/3) = 109.5^\circ \quad (9)$$

quindi la pallina *non* compie tutto il suo moto con il filo teso, ma, raggiunta la posizione individuata dall'angolo $\bar{\theta}$, segue un moto di caduta parabolico, come rappresentato nella figura sottostante.

Nota: E' interessante osservare che in un pendolo semplice la fune rimane sempre tesa se le oscillazioni sono limitate ad un angolo massimo $0 \leq \theta_{max} \leq \pi/2$, mentre non rimane tesa durante tutto il moto se le oscillazioni raggiungono la posizione estrema ad un angolo $\pi/2 < \theta_{max} \leq \pi$. Infatti, dalla (5) si ottiene che l'angolo massimo raggiunto è dato da

$$v = 0 \Rightarrow \cos \theta_{max} = 1 - \frac{v_0^2}{2gL}, \quad (10)$$

mentre dalla (6) si ottiene che la tensione si annulla nella posizione individuata da

$$T = 0 \Rightarrow \cos \bar{\theta} = \frac{2}{3} \left(1 - \frac{v_0^2}{2gL}\right) = \frac{2}{3} \cos \theta_{max}. \quad (11)$$

Affinché la fune rimanga tesa durante tutto il moto è necessario che

$$\theta_{max} < \bar{\theta} \Rightarrow \cos \theta_{max} > \cos \bar{\theta}, \quad (12)$$

avendo considerato $0 \leq \theta_{max} \leq \pi$ e $0 \leq \bar{\theta} \leq \pi$. Per la (11) la condizione (12) è soddisfatta solo se $\cos \theta_{max} \geq 0$ e cioè per $0 \leq \theta_{max} \leq \pi/2$. Non è quindi possibile far salire il pendolo oltre la posizione orizzontale mantenendo la fune tesa, a meno che il pendolo non abbia sufficiente slancio da compiere un giro completo. Utilizzando la relazione (6) possiamo calcolare la minima velocità iniziale, v_0 , necessaria perché la pallina possa compiere un giro completo. Si osservi, innanzitutto, che la tensione è minima nel punto più alto della traiettoria circolare ($\theta = \pi$). In tale posizione si ha:

$$T(\theta = \pi) = m \left(\frac{v_0^2}{L} - 5g \right) \quad (13)$$

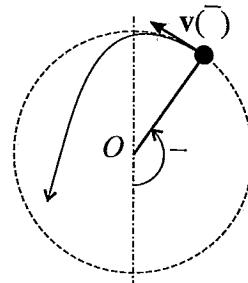
Perchè la pallina possa compiere un giro completo è necessario che tale tensione minima sia maggiore o, al limite, uguale a zero, cioè:

$$v_0 \geq \sqrt{5gL} \quad (14)$$

S.4.12.

Le forze agenti sull'oggetto di massa m durante il moto sono la forza peso, mg , e la tensione T , diretta come il filo verso il punto fisso O. La legge di moto è la seguente:

$$ma = mg + T \quad (1)$$



4.2 Soluzioni

Proiettando la (1) in direzione radiale si ha:

$$-m \frac{v^2}{R} = -T + mg \sin \theta \quad (2)$$

avendo indicato con R la lunghezza della fune e con θ l'angolo indicato in figura. Il modulo della tensione del filo in una generica posizione è quindi:

$$T = m \left(\frac{v^2}{R} + g \sin \theta \right) \quad (3)$$

Possiamo calcolare la velocità di m applicando il principio di conservazione dell'energia. L'unica forza applicata al corpo, che compie lavoro non nullo è la forza peso. L'energia iniziale, nella posizione A, è puramente potenziale:

$$E_A = mgR \quad (4)$$

Si è assunto come livello a energia potenziale nulla il punto inferiore B della traiettoria. L'energia in una posizione intermedia è data da:

$$E(\theta) = \frac{1}{2} mv^2 + mgR(1 - \sin \theta) \quad (5)$$

Si ha quindi:

$$E(\theta) = E_A \Rightarrow v^2 = 2gR \sin \theta \quad (6)$$

Dalle (3) e (6) si ottiene:

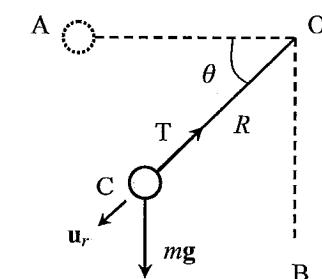
$$T = 3mg \sin \theta \quad (7)$$

La tensione massima si ha quando il corpo transita nel punto inferiore B della traiettoria circolare:

$$T_{max} = 3mg = 88.2 \text{ N} \quad (8)$$

Dal momento che tale tensione è superiore alla tensione massima sopportabile dal filo ($T_c = 40 \text{ N}$), quest'ultimo si spezza in una posizione compresa fra A e B, individuata dall'angolo θ_c dato da:

$$\sin \theta_c = \frac{T_c}{3mg} \Rightarrow \theta_c \cong 27^\circ \quad (9)$$



S.4.13.

Consideriamo dapprima la situazione in cui la molla è appesa ad un estremo in posizione verticale, mentre all'altro estremo è agganciato un blocco di massa M . Introduciamo un asse y verticale diretto verso il basso, come mostrato in figura. Le forze agenti sul blocco sono la forza peso, $Mg = Mg\mathbf{u}_y$, e la forza elastica, $\mathbf{F}_e = -k\Delta\ell\mathbf{u}_y$. Dal momento che il blocco è in equilibrio, il risultante delle forze applicate è nullo, quindi:

$$Mg - k\Delta\ell = 0 \quad \Rightarrow \quad k = \frac{Mg}{\Delta\ell} = 10^3 \text{ N/m} \quad (1)$$

Abbiamo quindi determinato la costante elastica della molla. Consideriamo ora il moto del blocco di massa m sul piano inclinato. Le forze applicate al blocco, che compiono lavoro non nullo, sono la forza peso e la forza elastica, entrambe conservative, quindi si conserva l'energia meccanica totale. Dal momento che il piano d'appoggio è liscio la reazione vincolare è puramente normale al piano e quindi non compie lavoro. All'inizio il blocco è fermo e la molla è compressa di un tratto ΔL , l'energia meccanica è solo di tipo potenziale:

$$E_0 = \frac{1}{2}k\Delta L^2 \quad (2)$$

Abbiamo assunto che l'energia potenziale della forza peso sia nulla alla quota iniziale del blocco. Quando il blocco raggiunge la quota massima, h , sul piano inclinato, la sua velocità si annulla. L'energia meccanica corrispondente è data da:

$$E_F = mgh = mg\ell \sin \theta \quad (3)$$

avendo indicato con ℓ la distanza percorsa dal blocco sul piano inclinato prima di fermarsi. Dal momento che l'energia meccanica si conserva si ha:

$$\frac{1}{2}k\Delta L^2 = mg\ell \sin \theta \quad \Rightarrow \quad \ell = \frac{k\Delta L^2}{2mg \sin \theta} = 74.6 \text{ cm} \quad (4)$$

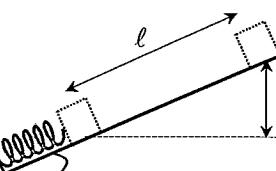
S.4.14.

Il blocco di massa m urta contro la molla se a distanza d dal punto di partenza la sua velocità è maggiore o al limite uguale a zero. Per calcolare tale velocità possiamo applicare il teorema dell'energia meccanica in presenza di forze non conservative:

$$\Delta E = \mathcal{L}_{nc} \quad (1)$$

L'energia meccanica nel punto di partenza, E_0 , e a distanza d da tale punto, E_d , (in corrispondenza dell'estremo libero della molla) è puramente cinetica:

$$E_0 = \frac{1}{2}mv_0^2, \quad E_d = \frac{1}{2}mv_d^2 \quad (2)$$

**4.2 Soluzioni**

L'unica forza non conservativa che compie lavoro sul blocco è la forza di attrito:

$$\mathbf{F}_A = -\mu_d |\mathbf{N}| \mathbf{u}_x = -\mu_d mg \mathbf{u}_x \quad (3)$$

Si è utilizzato un asse x diretto nella direzione del moto, orientato dal blocco verso la molla. Nella (3) la componente normale della reazione vincolare è stata calcolata imponendo la condizione di equilibrio in direzione perpendicolare all'asse x . Si ha quindi:

$$\mathcal{L}_{nc} = \int \mathbf{F}_A \cdot d\mathbf{r} = -\mu_d mg \int_0^d dx = -\mu_d mgd \quad (4)$$

Dalle (1), (2) e (4) si ottiene che la velocità del blocco in $x = d$ è:

$$v_d = \sqrt{v_0^2 - 2\mu_d gd} = 2.15 \text{ m/s} \quad (5)$$

quindi il blocco urta contro la molla. Per calcolare la massima compressione della molla applichiamo nuovamente la (1). Condizione iniziale: il blocco si trova in $x = d$ con velocità $v = v_d$ e la molla non è ancora compressa. L'energia meccanica corrispondente è la seguente:

$$E_d = \frac{1}{2}mv_d^2 \quad (6)$$

Condizione finale: la molla raggiunge la massima compressione, Δx , e il blocco ha velocità nulla. L'energia meccanica corrispondente è data da:

$$E_d = \frac{1}{2}k\Delta x^2 \quad (7)$$

Il lavoro compiuto dalla forza d'attrito in corrispondenza dello spostamento Δx si calcola come visto precedentemente:

$$\mathcal{L}_{nc} = -\mu_d mg \Delta x \quad (8)$$

Utilizzando le relazioni (1), (6)-(8) otteniamo:

$$k\Delta x^2 + 2\mu_d mg \Delta x - mv_d^2 = 0 \quad (9)$$

L'equazione di secondo grado (9) ammette due soluzioni per Δx , di cui una sola fisicamente accettabile ($\Delta x > 0$):

$$\Delta x = -\frac{\mu_d mg}{k} + \frac{1}{k}\sqrt{(\mu_d mg)^2 + mkv_d^2} = 0.39 \text{ m} \quad (10)$$

S.4.15.

Le forze che agiscono sulla particella sono: la forza peso, mg , il componente normale della reazione vincolare, N ; la forza d'attrito, F_A , parallela al piano d'appoggio, che si oppone al movimento della particella. Determiniamo innanzitutto la posizione finale di equilibrio della particella. Vediamo se la particella può rimanere in equilibrio in un punto di uno dei due piani inclinati. All'equilibrio il risultante delle forze applicate deve essere nullo. Consideriamo, per fissare le idee, il piano inclinato AB. Introduciamo un sistema di assi cartesiani xy come mostrato in figura. Imponendo la condizione di equilibrio lungo x e lungo y si ottiene:

$$\begin{aligned} |F_A| &= mg \sin \alpha \\ (1) \end{aligned}$$

$$|N| = mg \cos \alpha$$

Ricordando la relazione di Coulomb sul modulo della forza d'attrito statico si ha:

$$|F_A| \leq \mu |N| \quad (2)$$

Utilizzando le (1) e (2) si ottiene che è possibile che la particella rimanga in equilibrio in un punto generico del piano inclinato se è verificata la seguente condizione:

$$mg \sin \alpha \leq \mu mg \cos \alpha \Rightarrow \tan \alpha \leq \mu \Rightarrow \alpha \leq 2.29^\circ \quad (3)$$

Poiché $\alpha = 30^\circ$ si conclude che la particella non può fermarsi in nessun punto del piano inclinato. Quindi alla fine la particella si fermerà nel punto A, cioè nel punto di raccordo fra i due piani inclinati. Per calcolare la lunghezza complessiva del percorso compiuto dalla particella, è conveniente applicare il teorema dell'energia meccanica in presenza di forze non conservative: $\Delta E = \mathcal{L}_{nc}$. Poiché la particella parte da ferma, l'energia meccanica iniziale è data dall'energia potenziale gravitazionale:

$$E_0 = mgl \sin \alpha \quad (4)$$

avendo assunto che l'energia potenziale sia nulla nel punto A. Alla fine la particella si ferma in A, quindi la sua energia meccanica sarà nulla: $E_F = 0$. La forza di attrito dinamico è data da:

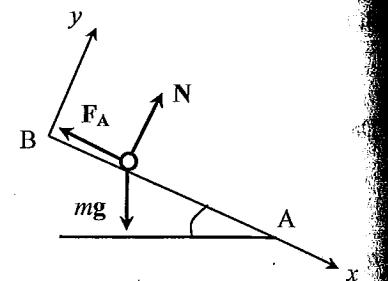
$$|F_A| = \mu |N| = \mu mg \cos \alpha \quad (5)$$

Il lavoro (non conservativo) eseguito dalla forza d'attrito sul percorso complessivo d della particella, si calcola facilmente:

$$\mathcal{L}_{nc} = -\mu mg d \cos \alpha \quad (6)$$

Il segno meno che compare nella (6) è dovuto al fatto che la forza d'attrito ha verso sempre opposto rispetto allo spostamento, indipendentemente da quale dei due piani inclinati si stia considerando. Si ha quindi:

$$E_F - E_0 = \mathcal{L}_{nc} \Rightarrow -mgl \sin \alpha = -\mu mg d \cos \alpha \Rightarrow d = \frac{\ell}{\mu} \tan \alpha = 28.87 \text{ m} \quad (7)$$



4.2 Soluzioni

Quindi la particella sale e scende più volte sui due piani inclinati prima di fermarsi in A.

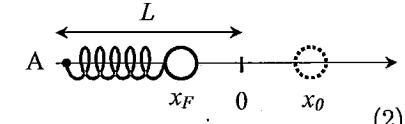
S.4.16.

Stimini osservando che la minima distanza da A viene raggiunta nella prima oscillazione. Infatti, essendo il moto oscillatorio smorzato per la presenza della forza di attrito dinamico, l'ampiezza delle oscillazioni andrà diminuendo progressivamente. Per risolvere il problema possiamo applicare il teorema dell'energia meccanica in presenza di forze non conservative: $\Delta E = \mathcal{L}_{nc}$. Introduciamo un asse x disposto come la molla, con origine nella posizione occupata dalla sferetta nella configurazione con molla a riposo, a distanza L dal punto A. Indichiamo con x_0 la posizione iniziale della sferetta: $x_0 = \Delta\ell_0$, e con x_F la posizione occupata dalla sferetta a distanza minima da A. L'energia meccanica iniziale è data da:

$$E_0 = \frac{1}{2} k x_0^2 \quad (1)$$

Nella posizione di massimo avvicinamento al punto A, la sferetta inverte il proprio moto, quindi la sua velocità si annulla. L'energia meccanica finale è data da:

$$E_F = \frac{1}{2} k x_F^2 \quad (2)$$



La forza di attrito si calcola facilmente:

$$|F_A| = \mu |N| = \mu mg \quad (3)$$

e si oppone al moto della pallina. Il lavoro eseguito sulla sferetta dalla forza di attrito è dato da:

$$\mathcal{L}_{nc} = -\mu mg(x_0 - x_F) \quad (4)$$

Utilizzando le (1), (2) e (4) si ottiene:

$$\frac{1}{2} k x_F^2 - \frac{1}{2} k x_0^2 = -\mu mg(x_0 - x_F) \quad (5)$$

Tale espressione può essere riscritta nel modo seguente:

$$\frac{1}{2} k (x_F + x_0)(x_F - x_0) = \mu mg(x_F - x_0) \quad (6)$$

Una soluzione della (6) è ovviamente $x_F = x_0$, che corrisponde alla posizione iniziale della sferetta (massima distanza dal punto A). La seconda soluzione dell'equazione (6), che corrisponde alla posizione a minima distanza da A, è data da:

$$x_F = \frac{2\mu mg}{k} - x_0 = -15 \text{ cm} \quad (7)$$

Si ha quindi che la distanza minima da A raggiunta dalla sferetta nel suo moto è pari a:

$$d_{min} = L + x_F = 25 \text{ cm} \quad (8)$$

S.4.17.

Dal momento che la particella si muove lungo una traiettoria circolare, la forza radiale \mathbf{F} applicata deve essere centripeta, quindi $\alpha < 0$. L'assenza di forze tangenti alla traiettoria garantisce che il moto sia uniforme. L'equazione di moto della particella si scrive nel modo seguente:

$$ma = \mathbf{F} \Rightarrow -m\frac{v^2}{R}\mathbf{u}_r = \frac{\alpha}{R^4}\mathbf{u}_r \Rightarrow mv^2 = -\frac{\alpha}{R^3} \quad (1)$$

avendo indicato con R il raggio della traiettoria circolare. Nella relazione (1) R e v sono incognite, dobbiamo quindi scrivere una seconda equazione. La forza \mathbf{F} è centrale e a simmetria sferica, quindi è conservativa. Ad essa possiamo associare un'energia potenziale, che si determina utilizzando la definizione: $d\mathcal{L} = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = -dE_p$. Se consideriamo una generica traiettoria che congiunge il punto A, posto a distanza r_A dal punto fisso O, al punto B, posto a distanza r_B da O, il lavoro corrispondente compiuto dalla forza \mathbf{F} si calcola facilmente:

$$\mathcal{L}_{A \rightarrow B} = \int_{A \rightarrow B} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = \int_{r_A}^{r_B} \alpha \frac{dr}{r^4} = \frac{\alpha}{3r_A^3} - \frac{\alpha}{3r_B^3} \quad (2)$$

Dal momento che il lavoro non dipende dalla traiettoria ma solo dalle posizioni iniziale e finale, la forza \mathbf{F} è, come già osservato, conservativa. Per definizione di energia potenziale $\mathcal{L}_{A \rightarrow B} = E_p(A) - E_p(B)$, quindi, dalla (2) ricaviamo:

$$E_p(r) = \frac{\alpha}{3r^3} + K \quad (3)$$

con K costante arbitraria. Ponendo uguale a zero l'energia potenziale all'infinito, ottieniamo che $K = 0$, quindi:

$$E_p(r) = \frac{\alpha}{3r^3} \quad (4)$$

L'energia meccanica totale della particella in moto lungo la traiettoria circolare di raggio R è quindi:

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{\alpha}{3R^3} \quad (5)$$

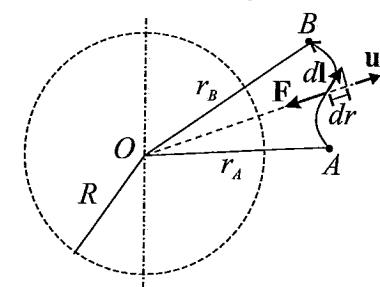
Le relazioni (1) e (5) permettono di calcolare R e v . Si ottiene:

$$R = \left(-\frac{\alpha}{6E} \right)^{\frac{1}{3}} \quad (6)$$

$$v = \sqrt{\frac{6E}{m}}$$

Il periodo T del moto circolare si calcola facilmente utilizzando le relazioni (6):

$$T = \frac{2\pi R}{v} = 2\pi \left(-\frac{\alpha}{6E} \right)^{\frac{1}{3}} \sqrt{\frac{m}{6E}} \quad (7)$$



S.4.18.

La posizione di equilibrio per la particella corrisponde ad un punto di stazionarietà per l'energia potenziale associata alle forze applicate. Un punto di minimo per l'energia potenziale corrisponde ad una posizione di equilibrio stabile; un punto di massimo corrisponde ad una posizione di equilibrio instabile. Nel caso in considerazione, l'energia potenziale ha un andamento parabolico in funzione della posizione x della particella, e il punto x_0 a derivata nulla è un punto di minimo (equilibrio stabile):

$$\frac{dE_p}{dx} = 2(x_0 - 5) = 0 \Rightarrow x_0 = 5 \text{ m} \quad (1)$$

La particella viene lanciata dalla posizione di equilibrio con velocità iniziale $v_0 = 5 \text{ m/s}$. L'energia meccanica totale, che si conserva durante il moto del corpo, è quindi data da:

$$E = \frac{1}{2}mv_0^2 + E_p(x_0) = \frac{1}{2}mv_0^2 = 0.625 \text{ J} \quad (2)$$

dal momento che $E_p(x = 5 \text{ m}) = 0$. Il moto della particella avviene lungo l'asse x , quindi nei punti di inversione di moto la velocità, e quindi l'energia cinetica, si annullano. In corrispondenza di tali punti l'energia meccanica è puramente potenziale, quindi:

$$E = E_p(x) = \frac{1}{2}mv_0^2 \quad (3)$$

Si ha quindi:

$$x^2 - 10x + 24.375 = 0 \Rightarrow x_1 = 4.2 \text{ m}, x_2 = 5.8 \text{ m} \quad (4)$$

La particella oscilla quindi fra $x = x_1$ e $x = x_2$.

Note: Durante il moto, la particella risulta soggetta ad una forza \mathbf{F} diretta come l'asse x , la cui componente si può calcolare nel modo seguente:

$$F_x = -\frac{dE_p}{dx} = -2(x - 5) \text{ [N]} \quad (5)$$

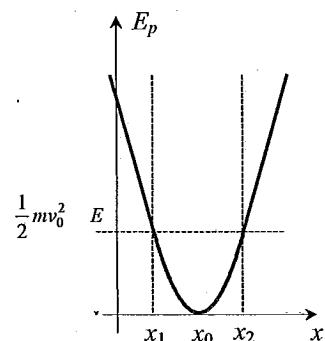
Eseguendo un semplice cambio di variabile, ponendo $X = x - 5$, possiamo scrivere:

$$\mathbf{F} = -2X\mathbf{u}_x \quad (6)$$

La legge di moto è la seguente:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = m \frac{d^2X}{dt^2} = -2X \quad (7)$$

Il moto della particella è quindi armonico, con pulsazione $\omega = \sqrt{2/m} = 6.32 \text{ Hz}$. Il centro di oscillazione è il punto di coordinata $X = 0$ ($\Rightarrow x = x_0 = 5 \text{ m}$), e l'ampiezza di oscillazione è $A = x_2 - x_0 = 0.8 \text{ m}$.



S.4.19.

Le forze applicate al corpo B sono: la forza peso $m_B g$; la tensione del filo, T_B , diretta come il filo verso l'alto; la reazione vincolare, N , perpendicolare al piano d'appoggio. Finché il corpo B non si stacca dal piano d'appoggio le forze applicate si fanno equilibrio. Possiamo quindi scrivere la seguente equazione:

$$N + T = m_B g \quad (1)$$

dove $T = |T_B|$. La condizione d'appoggio è data da:

$$N = m_B g - T \geq 0 \Rightarrow T \leq m_B g \quad (2)$$

Per risolvere il problema dobbiamo calcolare la tensione del filo in funzione della posizione del corpo A. Osserviamo innanzitutto che la tensione si trasmette inalterata, in modulo, da un estremo all'altro della fune ideale, quindi $|T_A| = |T_B| = T$, avendo indicato con T_A la forza esercitata dalla fune sul corpo A, come mostrato in figura. Sul corpo A agisce anche la forza peso $m_A g$. La legge di moto è quindi:

$$m_A \mathbf{a} = \mathbf{T}_A + m_A \mathbf{g} \quad (3)$$

Proiettando tale equazione vettoriale in direzione radiale, si ottiene:

$$-m_A \frac{v_A^2}{\ell} = -T + m_A g \sin \theta = -T + \frac{m_A g}{\ell} (\ell - h) \quad (4)$$

avendo indicato con h la quota del corpo A e con θ l'angolo che la fune forma con la direzione orizzontale (vedi figura). Utilizzando il principio di conservazione dell'energia meccanica possiamo esprimere la velocità v_A in funzione della quota h . L'energia meccanica iniziale, quando il corpo A è in quiete alla stessa quota della carrucola O, è puramente potenziale:

$$E_0 = m_A g \ell \quad (5)$$

avendo assunto che l'energia potenziale della forza peso sia nulla sul piano orizzontale su cui appoggia il corpo B. Quando A raggiunge la quota h , la sua energia meccanica è:

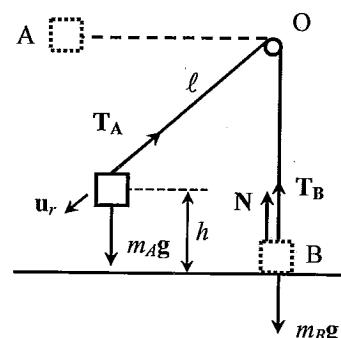
$$E_h = m_A g h + \frac{1}{2} m_A v_A^2 \quad (6)$$

Si ha quindi:

$$m_A g \ell = m_A g h + \frac{1}{2} m_A v_A^2 \Rightarrow v_A^2 = 2g(\ell - h) \quad (7)$$

Utilizzando la (7) nella (4) si ottiene:

$$T = 3m_A \frac{g}{\ell} (\ell - h) \quad (8)$$



4.2 Soluzioni

La condizione d'appoggio (2) diventa pertanto:

$$3m_A \frac{g}{\ell} (\ell - h) \leq m_B g \Rightarrow \ell - h \leq \frac{m_B}{3m_A} \ell = 1 \text{ m} \quad (9)$$

Quindi il corpo A si può abbassare di 1 m, in verticale, dalla sua quota iniziale, prima che il corpo B si stacchi dal piano d'appoggio.

S.4.20.

Possiamo risolvere il problema applicando il teorema dell'energia cinetica. Le forze applicate al corpo sono: la forza peso, che non compie lavoro perché perpendicolare allo spostamento; la reazione vincolare N del piano d'appoggio liscio, che non compie lavoro per lo stesso motivo; le forze elastiche delle due molle e la forza F , che invece compiono lavoro. Il teorema dell'energia cinetica si scrive nel modo seguente:

$$\Delta E_c = \mathcal{L}_{e1} + \mathcal{L}_{e2} + \mathcal{L}_F \quad (1)$$

avendo indicato con \mathcal{L}_{e1} e \mathcal{L}_{e2} i lavori compiuti dalle due molle e con \mathcal{L}_F il lavoro della forza F .

$$\Delta E_c = E_c(\ell) - E_c(0) = \frac{1}{2} m v^2 \quad (2)$$

Le forze elastiche esercitate dalle molle sono uguali, dal momento che le molle sono uguali e subiscono la stessa deformazione ℓ , quindi:

$$\mathcal{L}_{e1} = \mathcal{L}_{e2} = -\Delta E_{pe} = E_{pe}(0) - E_{pe}(\ell) = -\frac{1}{2} k \ell^2 \quad (3)$$

Il lavoro compiuto dalla forza F si calcola facilmente:

$$\mathcal{L}_F = \int_{0 \rightarrow \ell} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = F \ell \quad (4)$$

Applicando il teorema dell'energia cinetica si ottiene:

$$\frac{1}{2} m v^2 = F \ell - k \ell^2 \Rightarrow v = \sqrt{\frac{2\ell}{m} (F - k\ell)} = 0.2 \text{ m/s} \quad (5)$$

S.4.21.

(i) La forza F è centrale a simmetria sferica e quindi conservativa. L'energia meccanica totale del corpo si conserva. Possiamo calcolare l'energia potenziale associata. Il lavoro compiuto dalla forza F per uno spostamento da una posizione iniziale A, a distanza r_A dal punto fisso O, a una posizione finale B, a distanza r_B da O, è dato da:

$$\mathcal{L}_{A \rightarrow B} = \int_{r_A}^{r_B} \left(-\frac{k_1}{r^2} + \frac{k_2}{r^3} \right) dr = \left(-\frac{k_1}{r_A} + \frac{k_2}{2r_A^2} \right) - \left(-\frac{k_1}{r_B} + \frac{k_2}{2r_B^2} \right) = E_p(A) - E_p(B) \quad (1)$$

L'energia potenziale è data da:

$$E_p(r) = -\frac{k_1}{r} + \frac{k_2}{2r^2} + C \quad (2)$$

dove C è una costante arbitraria. Assumendo che l'energia potenziale sia nulla all'infinito, si ottiene $C = 0$, quindi:

$$E_p(r) = -\frac{k_1}{r} + \frac{k_2}{2r^2} \quad (3)$$

(ii) Dalla legge di Newton si ha:

$$\frac{d\mathbf{q}}{dt} = \mathbf{F} \quad (4)$$

Poiché \mathbf{F} è, in generale, non nulla, la quantità di moto \mathbf{q} non si conserva.

(iii) Dalla seconda equazione cardinale della dinamica si ha:

$$\frac{d\mathbf{L}_{(O)}}{dt} = \tau_{(O)} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} = 0 \quad (5)$$

quindi il momento angolare $\mathbf{L}_{(O)}$ rispetto al punto fisso O si conserva.

Determiniamo ora il luogo geometrico dei punti di equilibrio. Ponendo uguale a zero il modulo della forza \mathbf{F} si ottiene:

$$\frac{k_1}{r^2} = \frac{k_2}{r^3} \Rightarrow r = \frac{k_2}{k_1} \quad (6)$$

Il luogo dei punti di equilibrio è quindi dato da una circonferenza di raggio $R = k_2/k_1$.

Per determinare il minimo lavoro esterno necessario a spostare il corpo da un punto di equilibrio fino all'infinito, applichiamo il teorema dell'energia cinetica:

$$\Delta E_c = \mathcal{L}_F + \mathcal{L}_{est} \quad (7)$$

avendo indicato con \mathcal{L}_F il lavoro compiuto dalla forza \mathbf{F} :

$$\mathcal{L}_F = -\Delta E_p = E_p(R) - E_p(\infty) = -\frac{k_1^2}{2k_2} \quad (8)$$

e con \mathcal{L}_{est} il lavoro compiuto dalla forza esterna. Il lavoro minimo si ottiene quando il corpo raggiunge l'infinito con velocità nulla e quindi $\Delta E_c = 0$, dal momento che inizialmente il corpo si trova in quiete in una posizione di equilibrio. Si ha quindi:

$$\mathcal{L}_{est} = -\mathcal{L}_F = \frac{k_1^2}{2k_2} \quad (9)$$

S.4.22.

Le forze che agiscono in direzione normale al piano orizzontale liscio, cioè la forza peso e la reazione vincolare d'appoggio, si fanno equilibrio e non intervengono nel moto del corpo. L'unica forza agente sul corpo parallela al piano del moto è la forza elastica \mathbf{F}_{el} , diretta costantemente verso il punto fisso O. Dalla seconda equazione cardinale della

dinamica si deduce che il momento angolare del corpo rispetto al punto fisso O si conserva

$$\frac{d\mathbf{L}_{(O)}}{dt} = \tau_{(O)} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}_{el} = 0. \quad (1)$$

I punti a distanza minima e massima da O raggiunti dal corpo in movimento sono punti di inversione di moto in direzione radiale. In tali posizioni, dunque, la velocità radiale si annulla cosicché il vettore velocità risulta perpendicolare al vettore posizione. Il momento angolare, costante, è facilmente calcolabile in tali posizioni:

$$L_{(O),1} = L_{(O),2} \Rightarrow mr_1v_1 = mr_2v_2 \quad (2)$$

Dal momento che la forza elastica è conservativa, l'energia meccanica totale si conserva:

$$\frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}kr_1^2 = \frac{1}{2}mv_2^2 + \frac{1}{2}kr_2^2 \quad (3)$$

Le (2) e (3) costituiscono due equazioni nelle due incognite v_1 e v_2 , che possono quindi essere calcolate:

$$v_1 = r_2 \sqrt{\frac{k}{m}} = 12 \text{ m/s} \quad (4)$$

$$v_2 = r_1 \sqrt{\frac{k}{m}} = 6 \text{ m/s}$$

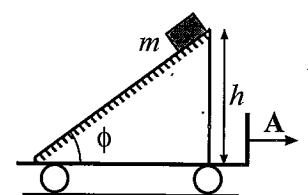
Capitolo 5

Dinamica nei sistemi di riferimento non-inerziali

5.1 Problemi

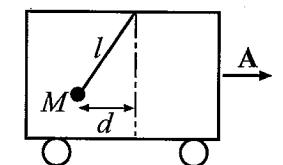
P.5.1.

Un carrello si muove con accelerazione costante A su di un piano orizzontale. Sul carrello è fissato un piano scabro (rispettivamente di coefficiente di attrito statico μ_s e dinamico μ_d) inclinato di un angolo ϕ rispetto al piano orizzontale. Sul piano scabro, ad una quota h rispetto al carrello, è poggiato un oggetto di massa m , inizialmente fermo rispetto al piano stesso. Si calcolino il massimo valore A_l dell'accelerazione del carrello per il quale l'oggetto rimane fermo rispetto al piano scabro ed il tempo impiegato per giungere alla base del carrello se quest'ultimo si muove con accelerazione $A = 2A_l$. [$\mu_s = 0.7$; $\mu_d = 0.6$; $\phi = 30^\circ$; $h = 20$ cm; $m = 1$ m]



P.5.2.

Una massa M è appesa, mediante un filo inestensibile di lunghezza l , al soffitto di un vagone ferroviario in moto. Un osservatore sul vagone nota un allontanamento della massa dalla verticale pari a d verso la parete posteriore del vagone. Si determini l'accelerazione A del vagone. [$l = 1$ m; $d = 15$ cm; $M = 1$ kg]



P.5.3.

Un pendolo semplice, costituito da una massa m collegata ad un filo inestensibile di lunghezza l , è appeso al soffitto di un ascensore in moto. Un osservatore solidale con l'ascensore, misurando le oscillazioni del pendolo, scopre che il periodo di oscillazione è maggiore del 10% rispetto a quanto previsto dalla teoria. Si determini modulo e verso dell'accelerazione dell'ascensore.

P.5.4.

All'interno di un vagone in moto rettilineo si vuole determinare il coefficiente di attrito

dinamico di un piano orizzontale scabro; l'esperimento viene condotto misurando la distanza di arresto di un oggetto di massa m lanciato sul piano con una velocità iniziale v_0' . Si scopre che la distanza di arresto è pari ad s_1 se l'oggetto viene lanciato dalla parete posteriore verso quella anteriore del vagone, mentre è pari ad s_2 quando la direzione di moto è opposta. Si determini l'accelerazione del vagone in modulo e verso ed il coefficiente di attrito dinamico μ_d del piano scabro rispetto ad un osservatore inerziale. [$s_1 = 2 \text{ m}$; $s_2 = 3 \text{ m}$; $v_0' = 0.5 \text{ m/s}$]

P.5.5.

Si consideri un blocco di massa M poggiato su di un piano orizzontale. Il piano si muove di moto rettilineo verticale con accelerazione A . Si calcolino il modulo ed il verso di A per cui l'oggetto si distacca dal piano.

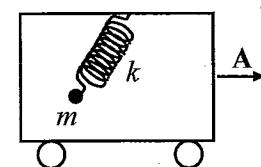
P.5.6.

Un aliante di massa M viene trainato in fase di decollo da un aereo mediante un cavo; la sua velocità di decollo è pari a v . Il cavo ha un carico di rottura pari a T_{max} . Trascurando le forze d'attrito esercitate dall'aria, si calcoli la lunghezza di pista necessaria per far decollare l'aliante senza che il cavo si rompa.

$$\begin{matrix} \lambda \\ \min \end{matrix}$$

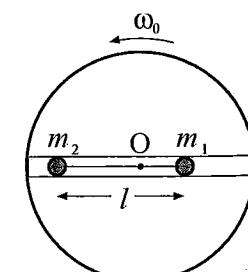
P.5.7.

Una molla ideale, di costante elastica k e lunghezza a riposo nulla, è collegata al soffitto di un vagone in moto rettilineo; al suo estremo libero è collegata una massa m . Posto che il vagone si muova di moto uniformemente accelerato con accelerazione A , stabilire la disposizione e l'elongazione della molla. [$k = 3 \text{ N/m}$; $m = 150 \text{ g}$; $|A| = 3 \text{ m/s}^2$]



P.5.8.

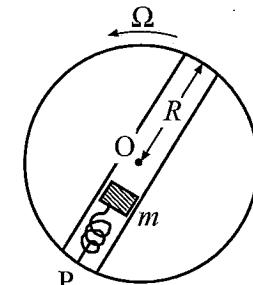
Si consideri una piattaforma in rotazione attorno al suo asse verticale con velocità angolare ω_0 costante, in cui sia praticata una scanalatura passante per il suo centro O. Nella scanalatura sono posti due oggetti, di masse m_1 ed m_2 rispettivamente, collegati da una fune ideale di lunghezza l . Si determini la posizione di equilibrio in cui la fune rimane tesa e le masse non si spostano rispetto ad O. [$\omega_0 = 6 \text{ rad/s}$; $m_1 = 1 \text{ kg}$; $m_2 = 0.7 \text{ kg}$; $l = 50 \text{ cm}$]



5.1 Problemi

P.5.9.

Si consideri una piattaforma, libera di ruotare attorno al suo asse verticale, in cui sia praticata una scanalatura passante per il suo centro O. Nella scanalatura è posta una massa m collegata al punto P mediante una molla ideale, di lunghezza a riposo pari al raggio R della piattaforma; la massa è libera di oscillare lungo la scanalatura senza attrito. Quando la piattaforma è in moto con velocità angolare Ω costante, la massa si muove di moto armonico lungo la scanalatura con periodo di oscillazione T . Si calcoli il periodo di oscillazione che si osserverebbe se la piattaforma fosse in quiete.

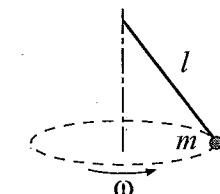


P.5.10.

Assumendo che la Terra sia un corpo sferico di raggio R che ruota attorno al suo asse con velocità angolare ω , si calcoli, in funzione della latitudine, lo scostamento angolare della direzione assunta da un filo a piombo rispetto alla congiungente col centro del pianeta e la forza totale agente sulla massa m legata al filo.

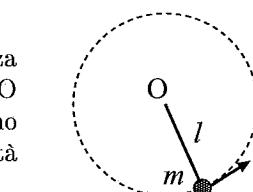
P.5.11.

Si consideri una massa m appesa mediante un filo inestensibile di lunghezza l . La massa descrive un moto circolare uniforme con velocità angolare ω (come in figura). Si determini l'angolo che il filo forma con la direzione verticale. [$m = 0.3 \text{ kg}$; $l = 70 \text{ cm}$; $\omega = 4 \text{ rad/s}$]



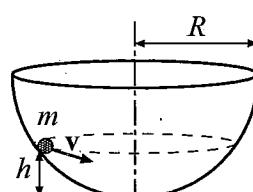
P.5.12.

Una massa m , collegata mediante una fune inestensibile di lunghezza l ad un punto fisso O, si muove nel piano orizzontale attorno ad O di moto circolare uniforme. La fune può reggere un carico massimo pari a T_{max} , oltre il quale si spezza. Determinare la massima velocità angolare consentita al sistema.



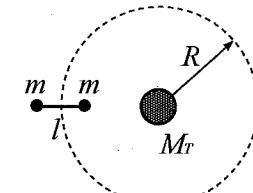
P.5.13.

Si consideri una scodella emisferica di raggio R in cui una pallina di massa m , dotata di velocità v , descrive un moto circolare uniforme in un piano orizzontale. Si determini la quota h a cui si trova la pallina rispetto al fondo della scodella. [$R = 20 \text{ cm}$; $m = 30 \text{ g}$; $v = 1 \text{ m/s}$]



P.5.14.

Si consideri un satellite composto da due corpi uguali di massa m collegati da un cavo inestensibile di lunghezza l . Il baricentro dei due oggetti si muove su un'orbita circolare di raggio R attorno alla Terra (la quale ha massa M_T). Assumendo che il cavo sia teso e rimanga diretto verso il centro della Terra, si calcoli la tensione nel cavo. [$m = 800 \text{ kg}$; $l = 100 \text{ m}$; $R = 10000 \text{ km}$; $M_T = 5.98 \times 10^{24} \text{ kg}$]



P.5.15.

Si consideri una piattaforma circolare scabra giacente in un piano orizzontale che ruota attorno al suo asse con una velocità angolare che varia nel tempo secondo la relazione $\omega(t) = \omega_0 + at$. Sulla piattaforma è poggiato un blocco di massa m a distanza R dal centro. Detto μ_s il coefficiente di attrito statico, si calcoli l'istante in cui il blocco incomincerà a muoversi rispetto alla piattaforma.

P.5.16.

Si consideri una piattaforma, in rotazione attorno al suo asse verticale con velocità angolare Ω costante, su cui sia posto un osservatore O' . Ad una distanza d dall'asse di rotazione della piattaforma si trova un oggetto di massa m in quiete rispetto ad un sistema di riferimento fisso a terra. Si descriva il moto dell'oggetto osservato da O' .

P.5.17.

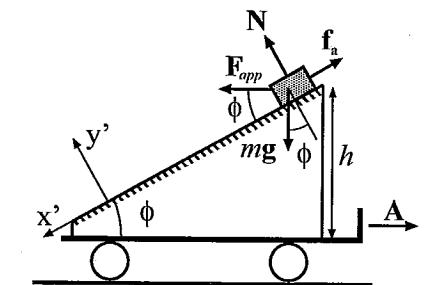
Una torre alta 100 m è situata all'equatore terrestre. Una massa m viene lasciata cadere dalla cima della torre. Si calcoli di quanto la massa si scosterà dalla direzione verticale quando sarà giunta al suolo ed in che direzione si sarà spostata.

P.5.18.

Una postazione di artiglieria, che si trova ad una latitudine di 35° , spara un proiettile verso un bersaglio situato a nord della postazione e ad una distanza $d = 1$ km. Il proiettile viaggia ad una velocità $v = 850$ km/h. Stabilire la deviazione dal bersaglio indotta sul proiettile dalla forza di Coriolis; si assuma che il modulo della velocità del proiettile si mantenga costante lungo la traiettoria.

5.2 Soluzioni**5.2 Soluzioni****S.5.1.**

Per risolvere il problema utilizzeremo un sistema di riferimento solidale al piano inclinato; poiché il piano si muove assieme al carrello di moto accelerato, il sistema di riferimento sarà non-inerziale. Introduciamo un sistema di coordinate cartesiane ortogonali, il cui asse x' sia parallelo al piano e l'asse y' sia ad esso perpendicolare, diretta verso l'alto (come in figura). Se il blocco è in quiete rispetto al piano, la risultante delle forze agenti su di esso sarà nulla:



$$\sum_i \mathbf{F}_i + \mathbf{F}_{app} = 0, \quad (1)$$

dove \mathbf{F}_i sono le forze reali agenti sull'oggetto, mentre \mathbf{F}_{app} è la forza apparente che compare nel sistema di riferimento non inerziale. Le forze reali agenti sul blocco di massa m sono: la reazione vincolare N perpendicolare al piano; la forza peso mg , dove g è l'accelerazione di gravità; la forza di attrito f_a , diretta parallelamente al piano ed opposta rispetto alla direzione potenziale di moto della massa. La forza apparente agente sul blocco sarà invece data dalla relazione $\mathbf{F}_{app} = -mA$, dove A è l'accelerazione di trascinamento del sistema. Nel caso in questione tale accelerazione corrisponde all'accelerazione con cui il carrello si sta muovendo rispetto ad un sistema di riferimento inerziale. Sostituendo nella (1) le espressioni precedenti, otteniamo:

$$N + mg + f_a - mA = 0. \quad (2)$$

Proiettando la (2) lungo gli assi x' ed y' otteniamo:

$$\begin{cases} N - mg \cos \phi + mA \sin \phi = 0 \\ mg \sin \phi + mA \cos \phi - f_a = 0 \end{cases} \quad (3)$$

dove $A = |A|$, $f_a = |f_a|$, $g = |g|$, $N = |N|$ ed infine ϕ è l'angolo che il piano inclinato forma con la direzione orizzontale. Sinché l'oggetto è in quiete, la forza di attrito soddisfa la relazione:

$$f_a \leq \mu_s N, \quad (4)$$

dove μ_s è il coefficiente di attrito statico. La (4), con l'aiuto delle equazioni (3), consente di scrivere la seguente condizione di equilibrio:

$$m(g \sin \phi + A \cos \phi) \leq \mu_s m(g \cos \phi - A \sin \phi); \quad (5)$$

se la relazione risulta soddisfatta, il blocco non si muoverà rispetto al piano inclinato. Dopo semplici passaggi matematici, l'espressione (5) si traduce nella condizione sull'accelerazione del carrello:

$$A \leq g \frac{\mu_s \cos \phi - \sin \phi}{\mu_s \sin \phi + \cos \phi} = A_l; \quad (6)$$

da cui, sostituendo i valori numerici assegnati dal problema, otteniamo il valore $A_l = 0.857 \text{ m/s}^2$; per valori di A superiori a quello calcolato, il blocco incomincerà a scivolare. Supponiamo ora che il carrello abbia accelerazione esattamente pari al doppio del valore critico, $A = 2A_l = 1.714 \text{ m/s}^2$, e che il blocco stia scivolando lungo il piano inclinato. In tal caso l'equazione di moto sarà data dalla relazione:

$$\mathbf{N} + mg + \mathbf{f}_a + \mathbf{F}_{app} = ma', \quad (7)$$

dove $\mathbf{F}_{app} = -2mA_l$ ed a' è l'accelerazione con cui il blocco si sta muovendo nel sistema di riferimento solidale al piano inclinato. Proiettando la (7) lungo gli assi x' ed y' e tenendo conto che il blocco scivola lungo il piano senza staccarsene, otteniamo le relazioni:

$$\begin{cases} N - mg \cos \phi + 2mA_l \sin \phi = 0 \\ mg \sin \phi + 2mA_l \cos \phi - f_a = ma' \end{cases} \quad (8)$$

dove $a' = |a'|$ è il modulo dell'accelerazione del blocco lungo l'asse x' , mentre la forza di attrito (dinamico) è data dalla relazione:

$$f_a = \mu_d N. \quad (9)$$

Facendo uso delle (8) e (9), otteniamo l'equazione di moto:

$$(g + 2\mu_d A_l) \sin \phi + (2A_l - \mu_d g) \cos \phi = a'. \quad (10)$$

Si noti che il primo termine della (10) è costante, per cui il moto del blocco rispetto al piano inclinato risulta uniformemente accelerato; secondo le leggi del moto uniformemente accelerato si ha:

$$s(t) = \frac{1}{2} a' t^2, \quad (11)$$

dove $s(t)$ è lo spazio percorso nell'intervallo di tempo t ; si noti che l'espressione (11) tiene conto del fatto che la velocità iniziale del blocco è nulla. Per giungere in fondo al piano inclinato, il blocco deve percorrere una distanza pari a

$$s = \frac{h}{\sin \phi}; \quad (12)$$

introducendo la (12) nella (11), otteniamo

$$t = \sqrt{\frac{2h}{a' \sin \phi}}; \quad (13)$$

sostituendo i valori numerici assegnati dal testo nella (10) ed impiegando la precedente

5.2 Soluzioni

espressione, otteniamo che il tempo necessario a percorrere il piano inclinato è pari a $t = 0.666 \text{ s}$.

Osservazione:

Nella soluzione dell'esercizio si è assunto che la forza apparente applicata alla massa non sia sufficiente per staccare la massa dal piano e quindi si è assunto che la massa non possa scivolare lungo il piano. Per trovare entro quali limiti questa ipotesi sia verificata è necessario discutere fino a che valore di accelerazione A del carrello la condizione di appoggio $N \geq 0$ sia soddisfatta. Considerando la prima equazione delle (3) si trova

$$N = mg \cos \phi - mA \sin \phi \geq 0 \Rightarrow A \leq \frac{g}{\tan \phi} = 17 \text{ m/s}^2. \quad (14)$$

S.5.2.

Faremo uso del sistema di riferimento non inerziale solidale al vagone rappresentato in figura (assi x' e y'). In tale sistema di riferimento la massa appesa al filo è in quiete, per cui possiamo impostare la condizione di equilibrio nella forma:

$$\mathbf{T} + Mg + \mathbf{F}_{app} = 0, \quad (1)$$

dove \mathbf{T} è la tensione del filo a cui la massa M è legata, g è l'accelerazione di gravità ed \mathbf{F}_{app} è la forza apparente (forza d'inerzia) che agisce sulla massa nel sistema di riferimento non inerziale. Detta A l'accelerazione con cui il vagone si muove rispetto ad un osservatore inerziale, possiamo riscrivere \mathbf{F}_{app} come:

$$\mathbf{F}_{app} = -MA. \quad (2)$$

Proiettando la (1) sugli assi cartesiani x' e y' e facendo uso della (2), otteniamo:

$$\begin{cases} T \cos \alpha - Mg = 0 \\ T \sin \alpha - MA = 0 \end{cases} \quad (3)$$

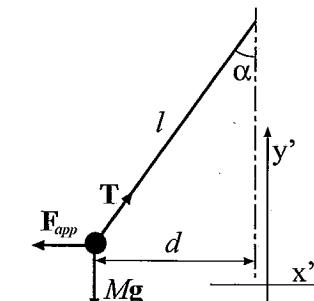
dove $T = |\mathbf{T}|$, $g = |\mathbf{g}|$, $A = |\mathbf{A}|$ mentre α è l'angolo che il filo forma con la direzione verticale. Con semplici passaggi algebrici, otteniamo dalle equazioni (3) l'espressione della tensione del filo ed il legame tra A ed α :

$$\begin{cases} T = \frac{Mg}{\cos \alpha} \\ A = g \tan \alpha \end{cases} \quad (4)$$

E' ora necessario calcolare α al fine di risolvere il problema. Detta d la distanza tra la massa M e la verticale passante per il punto in cui è appeso il pendolo, avremo:

$$\alpha = \arcsin \frac{d}{l}; \quad (5)$$

sostituendo i valori numerici assegnati dal problema, si ottiene $\alpha = 8.63^\circ$, da cui, mediante la seconda delle (4), si ottiene l'accelerazione del vagone $A = 1.49 \text{ m/s}^2$.



S.5.3.

Nel seguito faremo l'ipotesi che l'ascensore accelererà verso l'alto; sulla base del risultato dei calcoli si stabilirà se l'ipotesi è corretta o meno. Supponiamo di essere un osservatore solidale all'ascensore (e quindi di tipo non inerziale) e di studiare il moto del pendolo. L'equazione di moto si esprimerebbe nella forma:

$$\mathbf{T} + mg + \mathbf{F}_{app} = ma', \quad (1)$$

dove \mathbf{T} è la tensione del filo a cui la massa m è legata, g è l'accelerazione di gravità, $\mathbf{F}_{app} = -mA$ è la forza apparente (forza d'inerzia) che agisce sulla massa m nel sistema non inerziale, A è l'accelerazione dell'ascensore in un sistema di riferimento inerziale ed a' è l'accelerazione della massa nel sistema solidale all'ascensore stesso. Si noti che la traiettoria della massa è un arco di circonferenza, in quanto il filo a cui essa è appesa è inestensibile.

Per individuare la posizione del pendolo introduciamo una coordinata angolare θ , pari all'angolo che il pendolo forma con la direzione verticale, preso con segno positivo se l'angolo ha orientamento antiorario (come in figura). Proiettando la (1) in direzione tangente alla traiettoria della massa m , otteniamo:

$$ma'_t = -(mg + F_{app}) \cos \beta = -(mg + F_{app}) \sin \theta, \quad (2)$$

dove $\beta = \pi/2 - \theta$ è l'angolo tra la direzione verticale e la tangente alla circonferenza nel punto in cui si trova la massa, F_{app} è la componente di \mathbf{F}_{app} in direzione verticale verso il basso, mentre

$$a'_t = \frac{dv'}{dt} = l \frac{d^2\theta}{dt^2}, \quad (3)$$

è la componente tangenziale dell'accelerazione \mathbf{a}' , dove v' è la velocità di m ed l la lunghezza del pendolo. Si noti che nell'equazione (2) la componente tangenziale di \mathbf{T} è nulla. Con l'aiuto delle equazioni (2) e (3) ed utilizzando l'espressione della forza apparente, si ottiene:

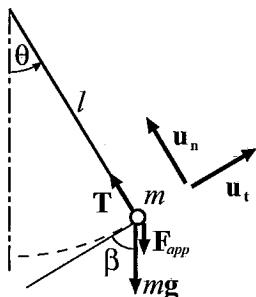
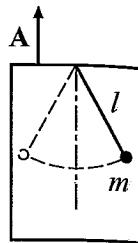
$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \left(\frac{g+A}{l} \right) \sin \theta = 0, \quad (4)$$

con A componente dell'accelerazione \mathbf{A} dell'ascensore in direzione verticale verso l'alto. Nell'approssimazione di piccoli angoli di oscillazione $\sin \theta \approx \theta$, per cui la (4) si riduce alla:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \left(\frac{g+A}{l} \right) \theta = 0. \quad (5)$$

La (5) ammette soluzioni di tipo periodico, nella forma

$$\theta(t) = C \cos(\omega t + \phi), \quad (6)$$



5.2 Soluzioni

con $\omega = \sqrt{\frac{g+A}{l}}$; il corrispondente periodo di oscillazione è quindi:

$$T_{ni} = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g+A}}. \quad (7)$$

Il periodo di oscillazione del pendolo ad ascensore fermo (cioè per $A = 0$), sarebbe invece:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}. \quad (8)$$

Poiché, secondo il problema, il periodo delle oscillazioni del pendolo T_{ni} nel sistema non inerziale dell'ascensore è più lungo del 10% rispetto a quello teorico T (cioè rispetto al periodo misurato in un sistema inerziale), possiamo porre:

$$T_{ni} = 1.1T, \quad (9)$$

da cui

$$\sqrt{\frac{l}{g+A}} = 1.1 \sqrt{\frac{l}{g}}; \quad (10)$$

elevando al quadrato ambo i membri della (10) e con semplici passaggi algebrici, otteniamo:

$$A = g \left[\frac{1}{(1.1)^2} - 1 \right], \quad (11)$$

da cui $A = -0.173 g = -1.70 \text{ m/s}^2$. Il segno negativo nella componente dell'accelerazione indica che l'ascensore accelera verso il basso, contrariamente a quanto assunto inizialmente.

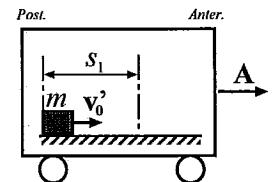
S.5.4.

Poiché la distanza di arresto dell'oggetto sul piano scabro dipende dalla sua direzione di moto, se ne deduce che su di esso agiscono delle forze apparenti (infatti in caso contrario la distanza di arresto sarebbe indipendente dalla direzione in cui l'oggetto viene lanciato). Il sistema di riferimento quindi non è inerziale ed il vagone si muove di moto accelerato.

Fisseremo un verso arbitrario per l'accelerazione \mathbf{A} con cui il vagone si muove in un sistema di riferimento inerziale; come evidenziato dalle figure, porremo che tale verso vada dal lato posteriore a quello anteriore del vagone. Incominciamo col considerare il caso in cui l'oggetto venga lanciato sul piano dal lato posteriore verso quello anteriore. L'equazione di moto dell'oggetto, nel sistema di riferimento solidale al vagone, sarà:

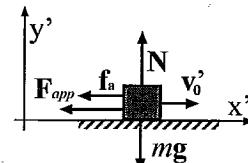
$$\mathbf{N} + mg + \mathbf{f}_a + \mathbf{F}_{app} = ma', \quad (1)$$

dove \mathbf{N} è la reazione vincolare che agisce sull'oggetto di massa m , mg è la forza peso, g l'accelerazione di gravità, \mathbf{f}_a la forza di attrito dinamico agente sulla massa, $\mathbf{F}_{app} = -mA$.



la forza apparente (forza di inerzia) che agisce sull'oggetto nel sistema non inerziale solidale al vagone ed a' è l'accelerazione dell'oggetto in tale sistema di riferimento. Introdotto un sistema di coordinate cartesiane ortogonali con l'asse x' diretto orizzontalmente nella direzione di moto dell'oggetto e l'asse y' diretto verso l'alto, potremo proiettare l'equazione (1) sugli assi cartesiani, ottenendo il sistema:

$$\begin{cases} N - mg = 0 \\ ma' = -f_a - F_{app}, \end{cases} \quad (2)$$



dove N , g , $f_a = \mu_d N$, F_{app} ed A sono le componenti dei rispettivi vettori nelle direzioni e versi rappresentati in figura; μ_d è il coefficiente di attrito dinamico del piano scabro misurato in un sistema di riferimento inerziale. In base alle equazioni (2) ed all'espressione della forza di attrito, si verifica che il corpo si muove in direzione orizzontale con accelerazione costante e negativa (dunque opposta alla direzione della velocità iniziale). L'accelerazione è pari ad

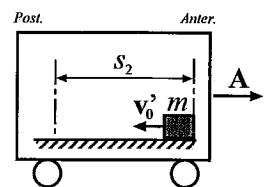
$$a'_1 = -(\mu_d g + A); \quad (3)$$

si tratta pertanto di moto uniformemente decelerato. Possiamo legare direttamente la velocità iniziale v'_0 del corpo alla distanza s_1 che questo percorre prima di arrestarsi mediante una nota espressione della cinematica dei moti uniformemente accelerati:

$$s_1 = \frac{v'_0^2}{2|a'_1|} = \frac{v'_0^2}{2(\mu_d g + A)}. \quad (4)$$

Si consideri ora il caso in cui l'oggetto venga lanciato sul piano dal lato anteriore verso quello posteriore con la medesima velocità iniziale v'_0 . L'equazione di moto dell'oggetto si può ancora riscrivere secondo la relazione (1); tuttavia il verso della forza di attrito sarà opposto rispetto al caso precedente, come si può notare dalla figura a lato. Proiettando l'equazione di moto sugli assi cartesiani, otterremo:

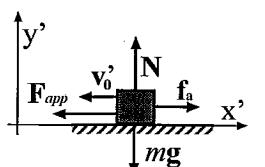
$$\begin{cases} N - mg = 0 \\ ma'_2 = f_a - F_{app}; \end{cases} \quad (5)$$



in base al precedente sistema ed impiegando ancora l'espressione della forza di attrito, deduciamo che l'oggetto si muoverà con accelerazione

$$a'_2 = \mu_d g - A; \quad (6)$$

si noti che il moto sarà decelerato solo se l'accelerazione sarà diretta in verso opposto alla velocità iniziale. Ciò comporta che il moto sia decelerato solo se $a'_2 > 0$; in tal caso l'oggetto si arresterà dopo aver coperto una distanza s_2 . Nell'ipotesi che questa condizione sia soddisfatta, possiamo ancora impiegare le formule della cinematica per legare s_2 alla velocità iniziale v'_0 , ottenendo:



5.2 Soluzioni

$$s_2 = \frac{v'_0^2}{2|a'_2|} = \frac{v'_0^2}{2(\mu_d g - A)}. \quad (7)$$

Impiegando le relazioni (4) e (7), possiamo ora calcolare il coefficiente di attrito μ_d e l'accelerazione A del vagone in funzione dei dati assegnati dal problema. Con semplici passaggi algebrici, si ottiene:

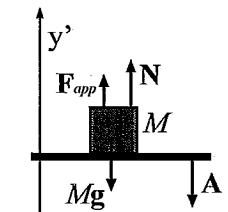
$$\begin{cases} \mu_d = \frac{v'_0^2 s_1 + s_2}{4g s_1 s_2} \\ A = \frac{v'_0^2 s_2 - s_1}{4 s_1 s_2}. \end{cases} \quad (8)$$

Sostituendo nelle precedenti equazioni i valori numerici assegnati dal problema, otteniamo $\mu_d = 5.31 \times 10^{-3}$ ed $A = 1.04 \times 10^{-2} \text{ m/s}^2$. Il segno positivo della componente A dell'accelerazione del vagone indica che il verso assunto all'inizio era quello corretto, così come effettivamente $a'_1 < 0$ e $a'_2 > 0$.

S.5.5.

Nel sistema di riferimento non inerziale solidale al piano in moto, l'oggetto di massa M appare in quiete. Possiamo dunque descrivere il suo stato mediante la condizione di equilibrio statico:

$$N + Mg + F_{app} = 0, \quad (1)$$



dove N è la reazione vincolare che agisce sul blocco, Mg è la forza peso, g l'accelerazione di gravità, $F_{app} = -MA$ la forza apparente (forza di inerzia) che agisce sull'oggetto nel sistema di riferimento non inerziale ed A è l'accelerazione con cui si muove il sistema stesso; supporremo nel seguito che l'accelerazione A sia diretta verso il basso, come illustrato in figura. Introdotto un asse cartesiano verticale y' diretto verso l'alto e scomponendo l'equazione (1) lungo tale asse, otteniamo:

$$N - Mg + MA = 0, \quad (2)$$

dove N , g ed A sono le componenti dei rispettivi vettori nelle direzioni e versi rappresentati in figura. Si noti che affinché l'oggetto risulti poggiato sul piano, la componente della reazione vincolare deve risultare maggiore o al limite uguale a zero; imponendo nella precedente equazione che $N \geq 0$, otteniamo:

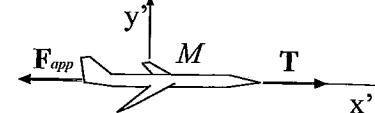
$$M(g - A) \geq 0, \quad (3)$$

da cui risulta che il corpo è poggiato sul piano fintanto che $A \leq g$. Quindi per accelerazioni A dirette verso il basso e di modulo maggiore di g , il corpo si distaccherà dal piano su cui è poggiato.

S.5.6.

Supponiamo per semplicità che la fase di decollo dell'aliante consista in un moto uniformemente accelerato, con accelerazione \mathbf{A} , sino a quando questi non abbia raggiunto la velocità di decollo v . Analizziamo l'insieme aliante-aereo nel sistema di riferimento (non inerziale) solidale ai due velivoli; assumeremo nel seguito che il cavo di collegamento tra di essi sia continuamente teso. Detta \mathbf{T} la tensione del cavo ed $\mathbf{F}_{app} = -M\mathbf{A}$ la forza apparente che agisce sull'aliante, nel sistema di riferimento non inerziale potremo scrivere l'equazione:

$$\mathbf{T} + \mathbf{F}_{app} = \mathbf{0}, \quad (1)$$



in quanto in tale sistema l'aliante appare in quiete. Risulta pertanto che

$$\mathbf{T} = M\mathbf{A}, \quad (2)$$

e dunque, detto T_{max} il massimo modulo della tensione che il cavo può sopportare, ne deriva che la massima accelerazione raggiungibile in fase di decollo sia pari ad

$$A_{max} = \frac{T_{max}}{M}. \quad (3)$$

Mediane le relazioni cinematiche che sussistono nel moto uniformemente accelerato, possiamo calcolare la distanza l che l'aliante deve percorrere con accelerazione A_{max} per raggiungere la velocità di decollo v :

$$l = \frac{v^2}{2A_{max}}, \quad (4)$$

che, in base alla (3), si può riesprimere come:

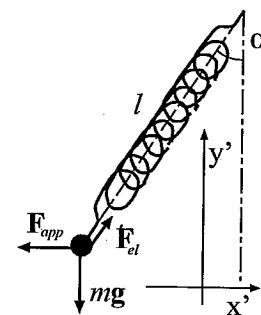
$$l = \frac{Mv^2}{2T_{max}}. \quad (5)$$

Questa è la minima lunghezza di pista necessaria al decollo dell'aliante.

S.5.7.

Sia l l'elongazione della molla ed α l'angolo che la molla forma con la direzione verticale. Sull'oggetto di massa m , nel sistema di riferimento non inerziale solidale al vagone, agiranno tre forze: la forza peso mg , con g accelerazione di gravità; la forza elastica di richiamo della molla \mathbf{F}_{el} e la forza apparente $\mathbf{F}_{app} = -m\mathbf{A}$, dove \mathbf{A} è l'accelerazione con cui il vagone si muove rispetto ad un osservatore inerziale. L'equazione che descrive lo stato di equilibrio del sistema nel riferimento non inerziale può essere espressa nella forma:

$$mg + \mathbf{F}_{el} + \mathbf{F}_{app} = \mathbf{0}. \quad (1)$$

**5.2 Soluzioni**

Introduciamo ora un sistema di coordinate cartesiane ortogonali, il cui asse x' sia diretto orizzontalmente nella direzione di moto del vagone, mentre l'asse y' sia diretto verticalmente verso l'alto. Proiettando l'equazione (1) sugli assi del sistema di coordinate, si ottengono le seguenti espressioni:

$$\begin{cases} F_{el} \cos \alpha - mg = 0 \\ F_{el} \sin \alpha - F_{app} = 0, \end{cases} \quad (2)$$

dove $F_{app} = |\mathbf{F}_{app}|$ ed $F_{el} = |\mathbf{F}_{el}| = kl$, con k costante elastica della molla stessa. Ricavando F_{el} dalla prima delle (2) e sostituendola nella seconda, otteniamo:

$$F_{app} = mg \tan \alpha, \quad (3)$$

da cui:

$$\frac{A}{g} = \tan \alpha, \quad (4)$$

dove $A = |\mathbf{A}|$. Pertanto l'angolo formato dalla molla rispetto alla direzione verticale sarà:

$$\alpha = \arctan \frac{A}{g}. \quad (5)$$

Impiegando la (5) nella prima delle (2), otteniamo poi:

$$F_{el} = \frac{mg}{\cos \left(\arctan \frac{A}{g} \right)}, \quad (6)$$

da cui si ricava il valore dell'elongazione della molla:

$$l = \frac{mg}{k \cos \left(\arctan \frac{A}{g} \right)}. \quad (7)$$

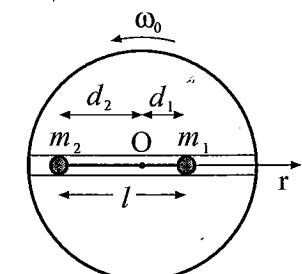
Sostituendo nelle (5) e (7) i dati assegnati dal testo, otteniamo $\alpha = 0.297$ rad (equivalenti a 17°) ed $l = 51.3$ cm.

S.5.8.

Consideriamo la situazione illustrata nella figura a lato; chiameremo d_1 e d_2 rispettivamente le distanze delle masse m_1 ed m_2 dal centro della piattaforma rotante. Purché la corda che collega le due masse rimanga tesa, varrà la relazione

$$d_1 + d_2 = l, \quad (1)$$

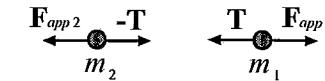
con l lunghezza della corda stessa. Scomponendo il sistema delle due masse, potremo scrivere due equazioni che rappresentino la condizione di equilibrio di m_1 ed m_2 nel sistema di riferimento non inerziale solidale alla piattaforma:



$$\begin{cases} \mathbf{F}_{app,1} + \mathbf{T} = \mathbf{0} \Rightarrow F_{app,1} = |\mathbf{F}_{app,1}| = |-\mathbf{T}| = T \\ \mathbf{F}_{app,2} - \mathbf{T} = \mathbf{0} \Rightarrow F_{app,2} = |\mathbf{F}_{app,2}| = |\mathbf{T}| = T, \end{cases} \quad (2)$$

essendo $F_{app,1} = |\mathbf{F}_{app,1}|$ ed $F_{app,2} = |\mathbf{F}_{app,2}|$ i moduli delle forze apparenti (forze centrifughe) agenti rispettivamente su m_1 ed m_2 ed essendo $T = |\mathbf{T}|$ il modulo della tensione della fune agente su m_1 (come in figura). Si noti che, essendo la fune ideale, la tensione agente su m_2 è pari a $-T$. I moduli delle forze centrifughe apparenti sono dati dalle espressioni:

$$\begin{cases} F_{app,1} = m_1 \omega_0^2 d_1 \\ F_{app,2} = m_2 \omega_0^2 d_2, \end{cases} \quad (3)$$



dove ω_0 è la velocità angolare con cui ruota la piattaforma rispetto ad un sistema di riferimento inerziale. In base alle equazioni (2) possiamo porre $F_{a1} = F_{a2}$, da cui si ottiene:

$$m_1 d_1 = m_2 d_2. \quad (4)$$

In base alla precedente equazione ed alla relazione (1), otteniamo infine:

$$\begin{cases} d_1 = \frac{m_2 l}{m_1 + m_2} \\ d_2 = \frac{m_1 l}{m_1 + m_2}. \end{cases} \quad (5)$$

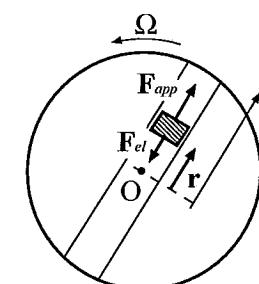
Come si può notare dalle precedenti espressioni, la posizione di equilibrio delle due masse non dipende dalla velocità di rotazione della piattaforma; sostituendo nelle (5) i dati assegnati dal problema otteniamo $d_1 = 20.6$ cm e $d_2 = 29.4$ cm.

S.5.9.

Si introduca un asse coordinato r parallelo alla scanalatura, avente per origine il centro O della piattaforma. L'equazione di moto della massa nel sistema non inerziale solidale alla piattaforma può scriversi come:

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = \mathbf{F}_{app} + \mathbf{F}_{el}, \quad (1)$$

dove \mathbf{r} è il vettore che individua la posizione della massa m rispetto all'origine O nel sistema solidale alla piattaforma, \mathbf{F}_{app} è la forza apparente (forza centrifuga) che compare nel sistema ed \mathbf{F}_{el} è la forza elastica agente sulla massa a causa della molla. Si noti che, essendo la massa in moto, si dovrebbe tener conto anche della forza apparente di Coriolis; tuttavia tale forza, che è perpendicolare alla direzione di moto, sarà costantemente bilanciata dalla reazione vincolare esercitata dalle pareti della scanalatura sulla massa. Non essendoci attrito durante



5.2 Soluzioni

il moto, possiamo quindi non tener conto della presenza di ulteriori forze. Proiettando l'equazione (1) sull'asse r , si ottiene:

$$m \frac{d^2 r}{dt^2} = m \Omega^2 r - k r, \quad (2)$$

dove: il primo termine nella parte destra dell'equazione rappresenta la componente radiale della forza centrifuga; il secondo termine la componente della forza elastica dovuta alla molla; k è la costante elastica della molla; Ω la velocità angolare con cui ruota la piattaforma ed r la coordinata radiale che individua la posizione della massa. Possiamo riscrivere la (2) nella forma:

$$\frac{d^2 r}{dt^2} + \left(\frac{k}{m} - \Omega^2 \right) r = 0, \quad (3)$$

che rappresenta l'equazione di un moto armonico di pulsazione

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m} - \Omega^2}. \quad (4)$$

Pertanto il periodo delle oscillazioni misurate durante il moto della piattaforma sarà pari a:

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{k}{m} - \Omega^2}}, \quad (5)$$

che possiamo riscrivere come:

$$\frac{4\pi^2}{T^2} = \frac{k}{m} - \Omega^2. \quad (6)$$

Si noti che, fermata la piattaforma, la velocità angolare diverrà nulla, per cui il nuovo periodo delle oscillazioni della massa sarà:

$$T_i = \frac{2\pi}{\sqrt{k/m}}, \quad (7)$$

che possiamo riscrivere nella forma

$$\frac{4\pi^2}{T_i^2} = \frac{k}{m}; \quad (8)$$

confrontando la (8) con la (6), possiamo dedurre che:

$$\frac{4\pi^2}{T^2} = \frac{4\pi^2}{T_i^2} - \Omega^2. \quad (9)$$

Con alcuni passaggi algebrici, la precedente espressione darà il legame tra il periodo delle oscillazioni misurato con la piattaforma in moto e quello misurato con la piattaforma in quiete:

$$T_i = \sqrt{\frac{4\pi^2 T^2}{T^2 \Omega^2 + 4\pi^2}}. \quad (10)$$

S.5.10.

Consideriamo un punto sulla superficie terrestre posto ad una latitudine θ , come illustrato nella figura successiva; sia R il raggio della Terra ed $r = R \cos \theta$ il raggio del parallelo che si trova alla latitudine considerata. Chiameremo ω la velocità angolare con cui ruota la Terra; poiché il suo periodo di rotazione T è pari a 24 ore, possiamo calcolare il valore di ω , che risulta pari a:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 7.27 \times 10^{-5} \text{ rad/s.} \quad (1)$$

Si consideri il sistema di riferimento non inerziale solidale alla terra rappresentato in figura. Sia m la massa legata al filo a piombo che si trova nel punto considerato; su di essa agiranno la forza di attrazione gravitazionale \mathbf{F}_g diretta verso il centro della Terra e la forza centrifuga \mathbf{F}_{app} giacente nel piano del parallelo su cui è posto l'oggetto e diretta verso l'esterno. Per calcolare la risultante \mathbf{F}_{tot} delle due forze in modulo, direzione e verso faremo uso del teorema di Carnot per il triangolo formato da \mathbf{F}_g , \mathbf{F}_{app} ed \mathbf{F}_{tot} . Risulterà:

$$|\mathbf{F}_g|^2 + |\mathbf{F}_{app}|^2 - 2|\mathbf{F}_g||\mathbf{F}_{app}| \cos \theta = |\mathbf{F}_{tot}|^2. \quad (2)$$

Tuttavia $|\mathbf{F}_g| = mg$, essendo g il modulo dell'accelerazione di gravità in prossimità della superficie terrestre; inoltre $|\mathbf{F}_{app}| = m\omega^2 r$. Pertanto l'equazione (2) si può riscrivere nella forma:

$$F_T^2 = m^2[g^2 + R\omega^2 \cos^2 \theta(R\omega^2 - 2g)], \quad (3)$$

essendo $F_T = |\mathbf{F}_{tot}|$. Il modulo della forza complessiva risulterà quindi pari a

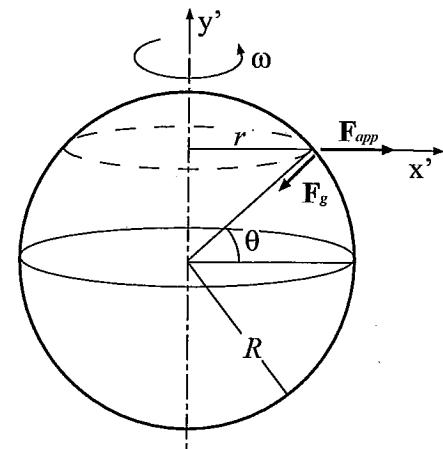
$$F_T = mg', \quad (4)$$

dove l'accelerazione di gravità efficace g' è pari a

$$g' = \sqrt{g^2 + R\omega^2 \cos^2 \theta(R\omega^2 - 2g)}. \quad (5)$$

Si noti come nessun effetto si avrebbe ai poli ($\theta = \pi/2$), mentre il massimo effetto si osserva all'equatore ($\theta = 0$); tenuto conto del raggio medio della Terra $R \approx 6.37 \times 10^6$ m e del valore $g = 9.83$ m/s² che risulterebbe dalla legge di gravitazione universale, si ottiene per g' all'equatore il valore:

$$g' = \sqrt{g^2 + R\omega^2(R\omega^2 - 2g)} = 9.796 \text{ m/s}^2; \quad (6)$$



5.2 Soluzioni

si verifica agevolmente che alla latitudine intermedia $\theta = \pi/4$ si avrebbe $g' = 9.81$ m/s². Passiamo ora al calcolo dello scostamento angolare β , rispetto alla congiungente col centro della Terra, che un filo a piombo subisce a causa della rotazione terrestre. Possiamo utilizzare a tal proposito la relazione (si confronti con la figura precedente):

$$\frac{F_T}{\sin \theta} = \frac{F_{app}}{\sin \beta}, \quad (7)$$

con $F_{app} = |\mathbf{F}_{app}| = m\omega^2 r$. In base a questa relazione si ottiene che:

$$\beta = \arcsin \left(\frac{F_{app}}{F_T} \sin \theta \right) = \arcsin \left(\frac{\omega^2 R \cos \theta \sin \theta}{\sqrt{g^2 + R\omega^2 \cos^2 \theta(R\omega^2 - 2g)}} \right), \quad (8)$$

che può semplificarsi nella forma:

$$\beta = \arcsin \left(\frac{\omega^2 R \sin 2\theta}{2g'} \right). \quad (9)$$

Si noti che non c'è alcuno scostamento angolare ai poli ed all'equatore mentre per $\theta = \pi/4$, impiegando i precedenti valori numerici, si ottiene $\beta = 1.72$ mrad, corrispondente a circa un decimo di grado angolare.

S.5.11.

Il sistema in considerazione (detto anche pendolo conico) può essere studiato in un riferimento non inerziale solidale alla massa. In tale sistema la massa m subisce l'azione della forza peso mg , della tensione T del filo e della forza apparente (forza centrifuga) \mathbf{F}_{app} . L'equazione che descrive il pendolo conico, che nel sistema di riferimento si riduce ad una condizione di equilibrio, sarà esprimibile come:

$$mg + T + \mathbf{F}_{app} = 0. \quad (1)$$

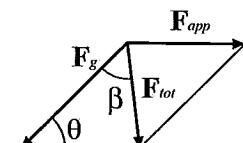
Introdotto un sistema di coordinate cartesiane ortogonali in cui l'asse x' sia diretto orizzontalmente e l'asse y' sia diretto verso l'alto, possiamo proiettare l'equazione (1) sui due assi ottenendo il sistema:

$$\begin{cases} F_{app} - T \sin \theta = 0 \\ T \cos \theta - mg = 0 \end{cases} \quad (2)$$

dove θ è l'angolo che la direzione verticale forma col filo a cui la massa è appesa, $F_{app} = |\mathbf{F}_{app}| = m\omega^2 r$, ω è la velocità angolare della massa, r il raggio della traiettoria circolare da essa compiuta, $T = |\mathbf{T}|$ e $g = |\mathbf{g}|$. Calcolando il modulo della tensione dalla prima equazione e sostituendolo nella seconda otteniamo:

$$\frac{m\omega^2 r}{\sin \theta} \cos \theta - mg = 0; \quad (3)$$

tenuto conto che $r = l \sin \theta$, dove l è la lunghezza del filo, otteniamo:



$$m\omega^2 l \cos \theta = mg, \quad (4)$$

da cui deriva che l'angolo θ formato dal filo con la direzione verticale è pari a:

$$\theta = \arccos \left(\frac{g}{\omega^2 l} \right). \quad (5)$$

Come si può notare dal risultato, l'angolo che il pendolo conico forma con la verticale non dipende dalla massa m ma solo dalla velocità angolare e dalla lunghezza del filo; sostituendo nella (5) i valori assegnati dal problema si ricava $\theta = 0.5$ rad, equivalente a 28.8°.

S.5.12.

Nel sistema di riferimento non inerziale solidale alla massa m , l'oggetto appare in quiete; pertanto la somma delle forze agenti su di esso è nulla. Possiamo scrivere tale condizione nella forma:

$$\mathbf{T} + \mathbf{F}_{app} = \mathbf{0}, \quad (1)$$

dove \mathbf{T} è la tensione del filo a cui è collegata la massa ed \mathbf{F}_{app} la forza apparente (centrifuga) che agisce sulla massa stessa; la forza peso agente sulla massa e la reazione vincolare esercitata dal piano si bilanciano e quindi non verranno considerate nel seguito. Tenuto conto che $|\mathbf{F}_{app}| = m\omega^2 l$, dove ω è la velocità angolare della massa ed l la lunghezza del filo a cui è collegata, possiamo riscrivere la (1) nella forma:

$$T = m\omega^2 l, \quad (2)$$

dove $T = |\mathbf{T}|$. Pertanto, rammentando che il valore massimo di tensione sopportabile dalla fune è T_{max} , risulterà dalla (2) che la massima velocità angolare raggiungibile dal corpo sarà:

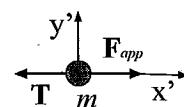
$$\omega_{max} = \sqrt{\frac{T_{max}}{ml}}. \quad (3)$$

S.5.13.

Poniamoci nel sistema di riferimento non inerziale solidale alla massa m ed introduciamo un sistema di coordinate cartesiane ortogonali in cui l'asse x' sia diretto orizzontalmente verso l'asse della scodella, mentre l'asse y' sia diretto verso l'alto. Si noti che nel sistema di riferimento scelto la massa appare in quiete; pertanto l'equazione che ne descrive l'equilibrio sarà:

$$mg + \mathbf{F}_{app} + \mathbf{N} = \mathbf{0}, \quad (1)$$

dove g è l'accelerazione di gravità, \mathbf{F}_{app} la forza apparente (centrifuga) agente sulla massa ed \mathbf{N} la reazione vincolare agente sulla massa a causa delle pareti della scodella; \mathbf{N} è sempre diretta verso il centro O della scodella. Proiettando la (1) sugli assi cartesiani, otterremo il sistema di equazioni:



$$\begin{cases} -F_{app} + N \cos \alpha = 0 \\ -mg + N \sin \alpha = 0 \end{cases} \quad (2)$$

dove α è l'angolo che l'asse x' forma con la congiungente la massa m col centro O della scodella, $N = |\mathbf{N}|$, $F_{app} = |\mathbf{F}_{app}|$ e $g = |\mathbf{g}|$. Detto $r = R \cos \alpha$ il raggio dell'orbita circolare descritta dalla massa, possiamo porre:

$$F_{app} = \frac{mv^2}{r} = \frac{mv^2}{R \cos \alpha}, \quad (3)$$

dove v è il modulo della velocità della massa nel sistema di riferimento inerziale solidale alla scodella; impiegando la prima delle (2) si ottiene la reazione vincolare:

$$N = \frac{F_{app}}{\cos \alpha} = \frac{mv^2}{R \cos^2 \alpha}. \quad (4)$$

Sostituendo la (4) nella seconda delle (2), si ottiene poi:

$$\frac{v^2 \sin \alpha}{R \cos^2 \alpha} = g, \quad (5)$$

che, tenuto conto dell'identità $\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha$, può essere riscritta come:

$$\frac{1 - \sin^2 \alpha}{\sin \alpha} = \frac{v^2}{Rg}. \quad (6)$$

Posto $t = \sin \alpha$, la (6) si trasforma in una equazione di secondo grado in t :

$$t^2 + \frac{v^2}{Rg} t - 1 = 0, \quad (7)$$

che ammette le soluzioni:

$$t_{1/2} = \frac{-v^2 \pm \sqrt{v^4 + 4g^2 R^2}}{2gR}. \quad (8)$$

Si noti che delle due soluzioni, quella col segno negativo non è fisicamente accettabile, in quanto comporterebbe che $|t| = |\sin \alpha| > 1$; pertanto l'unica soluzione accettabile è

$$\sin \alpha = \frac{-v^2 + \sqrt{v^4 + 4g^2 R^2}}{2gR}; \quad (9)$$

la quota h della massa rispetto al fondo della scodella sarà quindi:

$$h = R - R \sin \alpha = R + \frac{v^2 - \sqrt{v^4 + 4g^2 R^2}}{2g}. \quad (10)$$

Si noti che la quota a cui si trova la pallina non dipende dalla sua massa; sostituendo i valori assegnati dal testo, si ricava $h = 4.4$ cm.

S.5.14.

Indicheremo d'ora in avanti con il pedice 1 tutte le quantità che riguardano l'oggetto più vicino alla Terra, mentre useremo il pedice 2 per l'altra massa; rammentiamo inoltre che $m_1 = m_2 = m$. Ciascuno dei due corpi subisce l'attrazione gravitazionale terrestre; il modulo della forza di attrazione gravitazionale \mathbf{F}_{g1} per la massa 1 sarà (si veda la figura):

$$F_{g1} = \frac{\gamma M_T m}{(R - l/2)^2}, \quad (1)$$

dove l è la lunghezza del cavo che congiunge i due satelliti, R il raggio dell'orbita circolare descritta dal loro baricentro, γ la costante di gravitazione universale ed M_T la massa della Terra; il modulo della forza di attrazione gravitazionale \mathbf{F}_{g2} agente sulla massa 2 sarà:

$$F_{g2} = \frac{\gamma M_T m}{(R + l/2)^2}. \quad (2)$$

Sulle due masse agisce inoltre la tensione del cavo, che supporremo ideale e teso; chiameremo \mathbf{T} la tensione agente sul corpo 1; pertanto, essendo la fune ideale, la tensione agente sul corpo 2 sarà $-\mathbf{T}$. Per analizzare il sistema dei due corpi in modo semplice, ci porremo nel sistema di riferimento solidale al loro baricentro O; si noti che, essendo il cavo sempre diretto verso il centro della Terra, la velocità angolare ω dei due oggetti è la stessa e quindi, nel sistema di riferimento scelto, essi appaiono in quiete. Trattandosi di un sistema non inerziale, oltre alle forze effettive appaiono anche le forze apparenti (centrifughe); il modulo della forza apparente $\mathbf{F}_{app,1}$ agente sul corpo 1 sarà:

$$F_{app,1} = m\omega^2(R - l/2), \quad (3)$$

mentre il modulo della forza apparente $\mathbf{F}_{app,2}$ agente sul corpo 2 sarà:

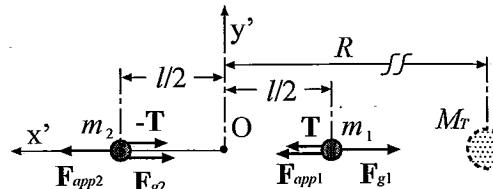
$$F_{app,2} = m\omega^2(R + l/2). \quad (4)$$

Possiamo ora scrivere le equazioni di equilibrio dei due oggetti proiettando direttamente le forze lungo la direzione radiale ed impiegando la figura precedente per determinarne i versi; avremo:

$$\begin{cases} T + F_{app,1} - F_{g1} = 0 \\ F_{app,2} - T - F_{g2} = 0 \end{cases} \quad (5)$$

essendo $T = |\mathbf{T}|$. Impiegando le precedenti espressioni nelle (5), si ottiene:

$$\begin{cases} T + m\omega^2(R - l/2) - \frac{\gamma M_T m}{(R - l/2)^2} = 0 \\ m\omega^2(R + l/2) - T - \frac{\gamma M_T m}{(R + l/2)^2} = 0 \end{cases} \quad (6)$$



5.2 Soluzioni

Sommando membro a membro le due equazioni del sistema (6) ed operando alcuni passaggi algebrici, si ottiene il valore della velocità angolare con cui il sistema orbita:

$$\omega^2 = \frac{\gamma M_T}{R} \frac{R^2 + l^2/4}{(R^2 - l^2/4)^2}; \quad (7)$$

assumendo che $l \ll R$, possiamo semplificare l'espressione nella forma:

$$\omega^2 = \frac{\gamma M_T}{R^3}. \quad (8)$$

Sostituendo la (8) nella prima delle (6), si ottiene:

$$T = \frac{\gamma M_T m}{(R - l/2)^2} - \frac{\gamma M_T m}{R^2}[1 - l/(2R)]; \quad (9)$$

ricordando che $l \ll R$ ed impiegando l'approssimazione

$$\frac{1}{(R - l/2)^2} = \frac{1}{R^2[1 - l/(2R)]^2} \approx \frac{1}{R^2[1 - l/R]} \approx \frac{1 + l/R}{R^2}, \quad (10)$$

otteniamo

$$T = \frac{\gamma M_T m}{R^2} \{ [1 + l/R] - [1 - l/(2R)] \}, \quad (11)$$

da cui

$$T = \frac{3l}{2} \frac{\gamma M_T m}{R^3}. \quad (12)$$

Sostituendo nella precedente espressione i dati assegnati dal problema, si ottiene $T = 4.78 \times 10^{-2}$ N.

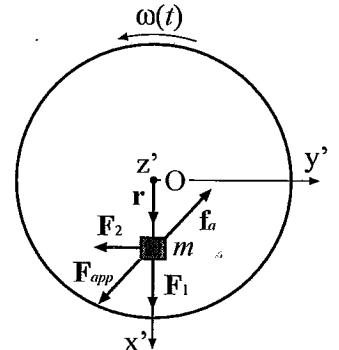
S.5.15.

La piattaforma ruota attorno ad un asse verticale passante per il suo centro O, con velocità angolare $\omega(t) = \omega_0 + \alpha t$. Consideriamo un sistema di riferimento solidale alla piattaforma in rotazione con gli assi rappresentati in figura. In tale sistema l'oggetto di massa m appare in quiete. Potremo pertanto scrivere per esso la condizione di equilibrio nella forma:

$$\mathbf{F}_{app} + \mathbf{f}_a + \mathbf{mg} + \mathbf{N} = \mathbf{0}, \quad (1)$$

dove: \mathbf{N} è la reazione vincolare esercitata dalla piattaforma sull'oggetto; \mathbf{mg} la forza peso agente su di esso; \mathbf{f}_a la forza di attrito statico; la forza apparente \mathbf{F}_{app} , che agisce nel sistema di riferimento non inerziale, si scompona a sua volta nella somma di due forze:

$$\mathbf{F}_{app} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2, \quad (2)$$



dove: $\mathbf{F}_1 = -m\omega \times (\omega \times \mathbf{r})$ è la forza centrifuga; ω è il vettore velocità angolare, perpendicolare alla piattaforma e diretto secondo la regola del cavatappi (in figura, dove il verso di rotazione è antiorario, ω è diretto verso il lettore) ed \mathbf{r} è il vettore posizione che individua l'oggetto rispetto al centro O della piattaforma. Si noti che essendo la piattaforma in moto con un'accelerazione angolare α , sull'oggetto agirà anche la forza apparente $\mathbf{F}_2 = -m\alpha \times \mathbf{r}$ diretta tangenzialmente (si veda la figura), dove α è il vettore accelerazione angolare diretto perpendicolarmente alla piattaforma; assumeremo che l'accelerazione sia diretta come il vettore velocità angolare (dunque $\alpha > 0$ e $\omega(t)$ crescente al passare del tempo). Scomporremo l'equazione (1) in direzione z' , x' ed y' . Lungo la direzione z' agiscono solo le forze N ed mg , che si bilanciano. Potremo pertanto porre

$$N = mg, \quad (3)$$

dove $N = |\mathbf{N}|$ e $g = |\mathbf{g}|$. Per quanto riguarda le forze che agiscono nel piano della piattaforma, si noti che in direzione x'

$$f_{a,x'} = -|\mathbf{F}_1| = -m\omega^2 R = -m(\omega_0 + \alpha t)^2 R, \quad (4)$$

dove $f_{a,x'}$ è la componente della forza di attrito in direzione x' ed R è la distanza della massa m dal centro della piattaforma; inoltre, in direzione y'

$$f_{a,y'} = |\mathbf{F}_2| = m\alpha R; \quad (5)$$

dove $f_{a,y'}$ è la componente della forza di attrito in direzione y' . Di conseguenza

$$|\mathbf{f}_a| = \sqrt{f_{a,x'}^2 + f_{a,y'}^2} = mR\sqrt{\alpha^2 + (\omega_0 + \alpha t)^4}. \quad (6)$$

Rammentando che per le forze di attrito statico vale la relazione:

$$|\mathbf{f}_a| \leq \mu_s N, \quad (7)$$

dove μ_s è il coefficiente di attrito statico, potremo poi porre:

$$mR\sqrt{\alpha^2 + (\omega_0 + \alpha t)^4} \leq \mu_s mg, \quad (8)$$

dove si è tenuto conto della (3). Il movimento del blocco rispetto alla piattaforma avrà quindi luogo successivamente all'istante t_d tale per cui nella (8) valga strettamente l'uguale. Elevando al quadrato ambo i membri della (8), otterremo quindi:

$$(\omega_0 + \alpha t_d)^4 = \frac{\mu_s^2 g^2}{R^2} - \alpha^2, \quad (9)$$

da cui si può estrarre il tempo:

$$t_d = \frac{1}{\alpha} \left[\left(\frac{\mu_s^2 g^2}{R^2} - \alpha^2 \right)^{1/4} - \omega_0 \right]. \quad (10)$$

La massa incomincerà a scivolare lungo la piattaforma per:

$$t > t_d. \quad (11)$$

5.2 Soluzioni

S.5.16.

In un sistema di riferimento inerziale la massa m sotto osservazione non è soggetta a forze in quanto è in quiete. Il sistema di riferimento solidale alla piattaforma ed all'osservatore O' non è inerziale e pertanto per tale osservatore l'oggetto è sottoposto ad una forza (apparente) \mathbf{F}_{app} ; si noti infatti che rispetto ad O' l'oggetto appare in moto circolare uniforme (dunque in moto accelerato a causa dell'accelerazione centripeta) lungo una traiettoria di raggio d attorno all'asse di rotazione della piattaforma. Pertanto per O' l'equazione di moto della massa m sarà data dall'espressione:

$$\mathbf{F}_{app} = ma', \quad (1)$$

dove a' è l'accelerazione dell'oggetto di massa m misurata nel sistema di riferimento non inerziale. La forza apparente agente su m è la somma di due contributi, che esprimeremo nella forma:

$$\mathbf{F}_{app} = \mathbf{F}_c + \mathbf{F}_{Cor}, \quad (2)$$

il primo contributo è la forza centrifuga $\mathbf{F}_c = -m\Omega \times (\Omega \times \mathbf{r})$, dove Ω è il vettore velocità angolare, perpendicolare alla piattaforma e diretto secondo la regola del cavatappi (in figura, dove si è assunto un verso di rotazione orario, Ω è diretto verso il basso) ed \mathbf{r} è il vettore posizione che individua l'oggetto rispetto all'asse di rotazione della piattaforma; il secondo contributo è la forza di Coriolis $\mathbf{F}_{Cor} = -2m\Omega \times \mathbf{v}'$, essendo \mathbf{v}' la velocità della massa misurata nel sistema di riferimento non inerziale. Si noti che per O' la velocità della massa m è quella di un oggetto che si muova lungo una traiettoria circolare di raggio d con velocità angolare Ω in verso antiorario; pertanto avremo che

$$\mathbf{v}' = d \Omega. \quad (3)$$

Detto \mathbf{u}_r il versore radiale diretto verso l'esterno della piattaforma, si verifica facilmente, con l'aiuto della precedente equazione, che

$$\mathbf{F}_{Cor} = -2m d \Omega^2 \mathbf{u}_r, \quad (4)$$

mentre la forza centrifuga sarà data dall'espressione:

$$\mathbf{F}_c = m d \Omega^2 \mathbf{u}_r. \quad (5)$$

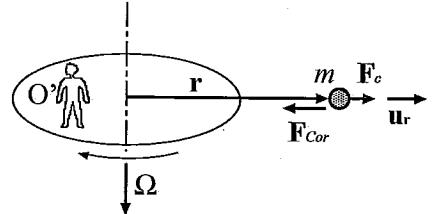
Sostituendo le (4) e (5) nella (1), si ottiene:

$$m a' = -m d \Omega^2 \mathbf{u}_r, \quad (6)$$

che possiamo riscrivere nella forma

$$\mathbf{a}' = -d \Omega^2 \mathbf{u}_r. \quad (7)$$

La (7) rappresenta la tipica legge del moto circolare uniforme, in quanto l'accelerazione subita dalla massa è diretta verso il centro della piattaforma rotante; si noti inoltre che, secondo le leggi della cinematica dei moti circolari, essa corrisponde proprio al moto lungo



una traiettoria circolare di raggio d con velocità angolare Ω , come era stato in precedenza constatato.

S.5.17.

Il moto del grave di massa m lasciato cadere dalla torre all'equatore terrestre verrà analizzato in un sistema di riferimento solidale col suolo; poiché la Terra ruota attorno al suo asse, tale sistema di riferimento non è inerziale. Oltre alla forza di attrazione gravitazionale \mathbf{F}_g , sul grave agirà quindi una forza apparente \mathbf{F}_{app} , che può essere scomposta secondo la relazione:

$$\mathbf{F}_{app} = \mathbf{F}_c + \mathbf{F}_{Cor}; \quad (1)$$

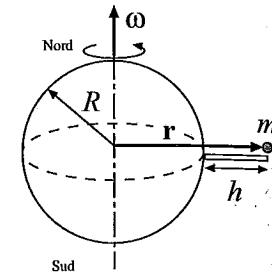
il primo contributo è la forza centrifuga $\mathbf{F}_c = -m\omega \times (\omega \times \mathbf{r})$, dove ω è il vettore velocità angolare della Terra, parallelo all'asse di rotazione e diretto secondo la regola del cavatappi (si veda la figura a lato) ed \mathbf{r} è il vettore posizione che individua l'oggetto rispetto all'asse di rotazione terrestre; il secondo contributo è la forza di Coriolis $\mathbf{F}_{Cor} = -2m\omega \times \mathbf{v}'$, essendo \mathbf{v}' la velocità della massa misurata nel sistema di riferimento solidale alla Terra. Si noti che la forza di Coriolis è sempre perpendicolare al vettore velocità ed è proporzionale al modulo di \mathbf{v}' ; pertanto, a rigore, questa forza cambia modulo e direzione durante la caduta della massa m , mentre la forza centrifuga e quella gravitazionale possono considerarsi invarianti durante il moto del grave. La forza gravitazionale sarà semplicemente espressa dalla relazione $\mathbf{F}_g = mg$, con g vettore accelerazione di gravità, in quanto il grave è in prossimità del suolo terrestre e quindi il modulo di \mathbf{F}_g non varia apprezzabilmente con la quota ($r \approx R$); per lo stesso motivo il modulo della forza centrifuga può approssimarsi con la relazione $|\mathbf{F}_c| \approx m\omega^2 R$, con $\omega = |\omega|$ ed R raggio della Terra. Introduciamo ora un sistema di coordinate cartesiane ortogonali in cui l'asse x' sia diretto verso il centro della Terra e l'asse y' sia tangente alla superficie terrestre e diretto verso Est (si osservi in proposito la figura successiva, in cui è presentata una visione del moto del grave dal polo Nord terrestre; il vettore ω è diretto in tal caso verso il lettore). La legge del moto del grave sarà espressa dalla relazione:

$$\mathbf{F}_g + \mathbf{F}_c + \mathbf{F}_{Cor} = ma', \quad (2)$$

dove a' è l'accelerazione dell'oggetto misurata nel sistema di riferimento non inerziale. Per semplificare la trattazione assumeremo nel seguito che la forza di Coriolis abbia modulo piccolo rispetto alle altre forze in gioco e che lo scostamento della traiettoria del grave dalla verticale sia molto minore di h , di modo che la forza di Coriolis si possa assumere sempre diretta lungo l'asse y' ; proiettando la (2) lungo l'asse x' avremo pertanto:

$$mg - m\omega^2 R = ma_{x'}, \quad (3)$$

dove $g = |\mathbf{g}|$. Dalla (3) si ricava che lungo l'asse x' il grave si muove di moto uniformemente accelerato, con accelerazione



$$a_{x'} = g' = g - \omega^2 R; \quad (4)$$

come già illustrato nell'esercizio 10, il valore di g' all'equatore terrestre è pari a circa 9.796 m/s^2 . In base alle leggi della cinematica dei moti uniformemente accelerati, lo spazio percorso dal grave sarà espresso dalla:

$$x'(t) = \frac{1}{2}g't^2 + x'_0; \quad (5)$$

dove x'_0 è la posizione iniziale del grave; inoltre, la componente della velocità del grave $v_{x'}$ lungo l'asse x' sarà data dalla relazione:

$$v_{x'}(t) = g't. \quad (6)$$

Assumendo \mathbf{F}_{Cor} parallela ad y' e proiettando la (2) lungo l'asse y' stesso, risulterà che:

$$2m\omega v' = ma_{y'}; \quad (7)$$

nell'ipotesi che la componente della velocità $v_{y'}$ lungo l'asse y' sia piccola rispetto al modulo complessivo della velocità v' , possiamo assumere $v' \approx v_{x'}$ e quindi sostituire nella (7) l'espressione (6), ottenendo:

$$2\omega g't = \frac{dv_{y'}}{dt}. \quad (8)$$

Integrando per parti la (8), si ottiene:

$$\int_0^t 2\omega g' t dt = \int_0^{v_{y'}(t)} dv_{y'}, \quad (9)$$

da cui si ricava l'andamento di $v_{y'}$ nel tempo:

$$\frac{dy'}{dt} = v_{y'}(t) = \omega g' t^2. \quad (10)$$

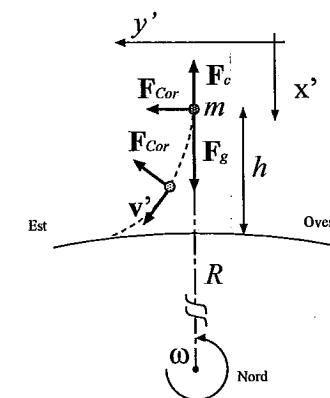
Integrando nuovamente la (10), si ricava:

$$y'(t) = \frac{\omega g' t^3}{3} + y'_0. \quad (11)$$

dove y'_0 è la posizione iniziale del grave. Mediante la (5) possiamo ricavare il tempo T impiegato dal grave per giungere al suolo da una quota h :

$$T = \sqrt{\frac{2h}{g'}}, \quad (12)$$

da cui, per sostituzione nella (11), otteniamo lo scostamento $\Delta y'$ del grave dalla verticale nel momento in cui tocca il suolo:



$$\Delta y' = \frac{\omega g'}{3} \left(\frac{2h}{g'} \right)^{3/2}. \quad (13)$$

Sostituendo nella (13) i valori numerici per le quantità coinvolte (si faccia ancora riferimento all'esercizio 10 per il valore di ω), si ricava che $\Delta y' = 2.19$ cm; si noti, come illustrato in figura, che tale spostamento è diretto verso Est.

S.5.18.

Assumeremo che la forza gravitazionale non abbia sostanziali effetti sul moto del proiettile, dato che si intende qui calcolare solo la deviazione sulla traiettoria introdotta dalla forza di Coriolis $\mathbf{F}_{Cor} = -2m\omega \times \mathbf{v}'$, essendo \mathbf{v}' la velocità del proiettile di massa m misurata nel sistema di riferimento solidale alla Terra ed ω il vettore velocità angolare della Terra. Assumeremo che \mathbf{v}' sia diretta verso nord e risulti pressoché tangente alla superficie terrestre; \mathbf{F}_{Cor} risulterà diretta verso Est (si veda la figura) e di modulo pari a

$$F_{Cor} = 2 m \omega v' \sin \phi, \quad (1)$$

dove $F_{Cor} = |\mathbf{F}_{Cor}|$; ϕ è l'angolo formato dai vettori \mathbf{v}' ed ω che risulta pari in questo caso alla latitudine della postazione P (si veda la figura) che si considera invariata per lo spostamento da P a B; $v' = |\mathbf{v}'|$ ed $\omega = |\omega|$. Assumendo che v' non cambi durante il moto del proiettile, F_{Cor} risulterà costante. Il tempo che il proiettile impiegherà per giungere nei pressi del bersaglio sarà pari a

$$T = \frac{d}{v'}, \quad (2)$$

essendo d la distanza tra P e B. L'accelerazione subita dal proiettile a causa della forza di Coriolis sarà diretta verso Est e pari ad

$$a_{Cor} = 2 \omega v' \sin \phi, \quad (3)$$

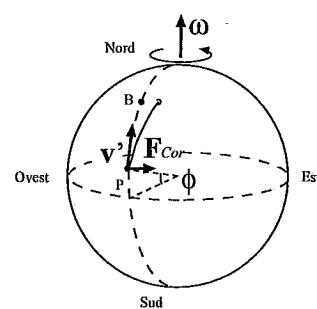
risultando quindi costante. In base alle leggi della cinematica dei moti uniformemente accelerati, lo spazio percorso verso Est a causa della forza di Coriolis sarà pertanto:

$$s = \frac{1}{2} a_{Cor} T^2 = \omega v' \sin \phi \left(\frac{d}{v'} \right)^2, \quad (4)$$

che possiamo riscrivere come

$$s = \frac{\omega d^2}{v'} \sin \phi. \quad (5)$$

Sostituendo nella precedente equazione i valori assegnati dal problema e la velocità angolare terrestre (si veda in proposito l'esercizio 10), otteniamo uno scostamento dal bersaglio pari ad $s = 17.7$ cm; si noti come il risultato non dipenda, nel limite delle approssimazioni effettuate, dalla massa del proiettile.



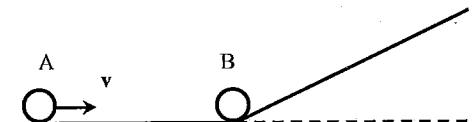
Capitolo 6

Dinamica dei sistemi di particelle

6.1 Problemi

P.6.1.

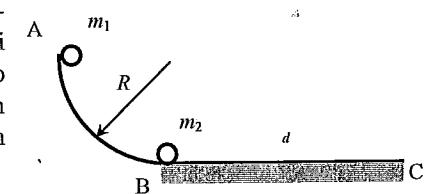
Un corpo puntiforme A in moto con velocità \mathbf{v} su un piano orizzontale liscio, urta un corpo B, uguale al primo, inizialmente fermo ai piedi di un piano inclinato liscio. Si trovi la massima quota a cui giunge il corpo B sul piano inclinato nei due casi di urto elastico e completamente anelastico



P.6.2.

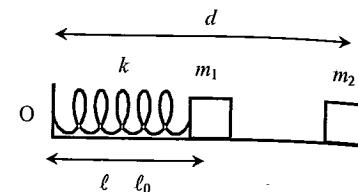
Una guida ABC è costituita da un arco di circonferenza AB di raggio $R = 3$ m e da un tratto rettilineo BC (vedi figura). Il tratto curvilineo è liscio, mentre il tratto rettilineo presenta attrito con coefficiente di attrito dinamico $\mu_d = 0.3$. Un corpo di massa $m_1 = 2$ kg viene lasciato scivolare dal punto A. Esso urta in modo completamente anelastico un corpo di massa $m_2 = 3$ kg, inizialmente fermo in B. Si determinino:

- (i) la velocità dei due corpi subito dopo l'urto;
- (ii) la distanza percorsa dai due corpi sul tratto rettilineo della guida prima di fermarsi.



P.6.3.

Un corpo puntiforme di massa $m_1 = 1 \text{ kg}$, posto su un piano orizzontale liscio, è vincolato ad una molla di lunghezza a riposo $\ell = 50 \text{ cm}$ e costante elastica $k = 500 \text{ N/m}$, vincolata all'altro estremo in un punto O (vedi figura). La molla viene compressa di un tratto $\Delta\ell_0 = 5 \text{ cm}$ e successivamente viene lasciata libera. Il corpo urta in modo elastico un secondo corpo di massa $m_2 = m_1$, inizialmente fermo, posto a distanza $d = 53 \text{ cm}$ dal punto O. Si calcoli la velocità del secondo corpo dopo l'urto e l'ampiezza di oscillazione del corpo di massa m_1 dopo l'urto.



P.6.4.

Un corpo A di massa $m = 50 \text{ g}$, in moto su un piano orizzontale scabro, urta un secondo corpo B, di massa M , inizialmente fermo. L'urto è elastico e, dopo l'urto, il corpo B percorre una distanza $D = 0.6 \text{ m}$ prima di fermarsi. Il coefficiente di attrito dinamico fra il piano e i due corpi è $\mu = 0.3$ e la velocità di A all'istante dell'urto è $v = 5 \text{ m/s}$. Si determinino:

- la massa M del corpo B;
- la velocità del corpo A immediatamente dopo l'urto.

P.6.5.

Due corpi puntiformi, A e B, di massa m_A e $m_B = 2m_A$, in moto lungo la stessa retta con velocità v_A e v_B dirette in verso opposto, si urtano frontalmente. Dopo l'urto l'energia cinetica del sistema è:

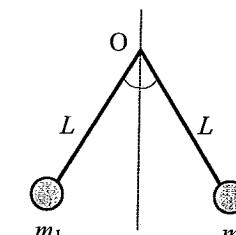
$$E_c = \frac{1}{6}m_A(v_A - 2v_B)^2$$

dove $v_A = |\mathbf{v}_A|$ e $v_B = |\mathbf{v}_B|$. Si dica, giustificando la risposta, se l'urto è elastico, anelastico o completamente anelastico.

P.6.6.

Due corpi di massa m_1 e $m_2 = 2m_1$ sono appesi a due funi di uguale lunghezza $L = 1 \text{ m}$, inestensibili e di massa trascurabile, vincolate ad uno stesso punto O. Inizialmente i corpi sono tenuti fermi con le funi tese e formanti uno stesso angolo $\alpha = 8^\circ$ da parti opposte rispetto alla verticale. I due corpi vengono poi lasciati liberi di cadere e si urtano in modo elastico. Si calcolino:

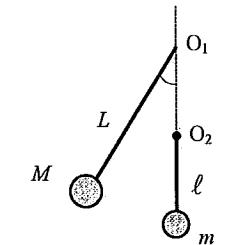
- la posizione in cui i due corpi si urtano;
- la velocità dei corpi subito dopo l'urto.



6.1. Problemi

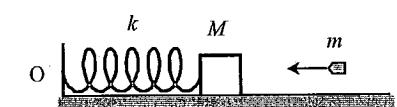
P.6.7.

Un pendolo semplice è costituito da una massa $M = 2 \text{ kg}$ appesa a un filo di massa trascurabile e lunghezza $L = 50 \text{ cm}$. Il pendolo viene spostato di un angolo $\theta = 30^\circ$ rispetto alla direzione verticale e poi lasciato libero. Nel punto inferiore dell'oscillazione la massa M urta elasticamente una massa $m = 1 \text{ kg}$, appesa ad un filo di lunghezza $\ell = 20 \text{ cm}$, inizialmente ferma. Si determini l'angolo massimo raggiunto dal secondo pendolo dopo l'urto.



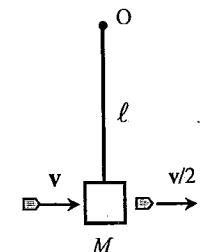
P.6.8.

Una molla di costante elastica k ha un'estremità collegata a un supporto fisso mentre l'altra è collegata ad un blocco di massa M . Il blocco, inizialmente in quiete su un piano orizzontale scabro con coefficiente di attrito dinamico μ , subisce un urto completamente anelastico con un proiettile di massa m . Sapendo che il massimo spostamento subito dal blocco a seguito dell'urto è ΔL , si determini la velocità del proiettile immediatamente prima dell'urto.



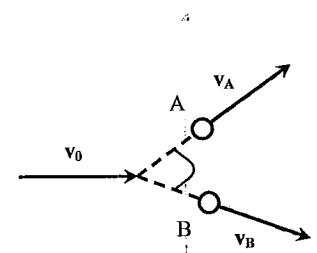
P.6.9.

Un proiettile di massa m e velocità v attraversa un blocchetto di legno di massa M , sospeso ad un filo di lunghezza ℓ , e ne fuoriesce con velocità $v/2$. Si calcoli il minimo valore di v tale che il blocchetto, inizialmente fermo, compia un giro completo intorno al centro di sospensione.



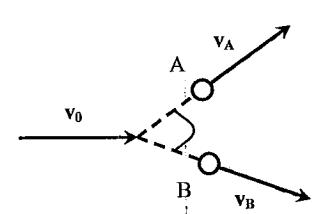
P.6.10.

Si ripeta l'esercizio precedente nel caso in cui il blocchetto di massa M sia sospeso ad un'asta rigida priva di peso.



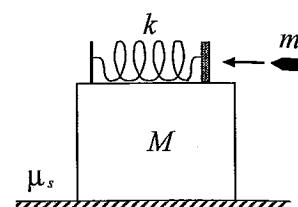
P.6.11.

Un corpo A di massa $m = 10 \text{ g}$ in moto con velocità v_0 , colpisce un secondo corpo identico, B, inizialmente fermo. Dopo l'urto le due particelle si muovono con velocità $v_A = 3 \text{ m/s}$ e $v_B = 5 \text{ m/s}$, lungo due direzioni che formano tra di loro un angolo $\theta = 60^\circ$. Si calcoli la velocità iniziale v_0 del corpo A.



P.6.12.

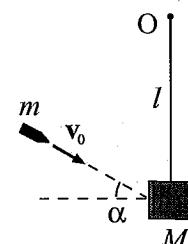
Un corpo di massa M è fermo su di un piano orizzontale scabro con coefficiente di attrito statico μ_s . Sul corpo si trova una molla di costante elastica k con un estremo saldato al corpo stesso. All'altro estremo è vincolato un blocchetto di massa trascurabile che può scivolare senza attrito sul corpo. Un proiettile di massa m , in moto con velocità diretta orizzontalmente, si conficca nel blocchetto. Si calcoli la massima velocità del proiettile oltre la quale il corpo di massa M si muove a seguito dell'urto del proiettile col blocchetto.



P.6.13.

Un blocchetto di massa M è appeso ad una fune inestensibile, dotata di massa trascurabile e di lunghezza l , vincolata ad un perno O . Il sistema è in quiete, col filo in posizione verticale. Un proiettile di massa m in moto con velocità di modulo v_0 e con direzione formante un angolo α con l'orizzontale, urta in modo completamente anelastico il blocchetto. Si calcolino:

- la velocità del sistema comprendente proiettile e blocchetto subito dopo l'urto;
- l'impulso fornito dalla tensione della fune all'atto dell'urto;
- il minimo valore di v_0 affinché il pendolo compia un giro completo dopo l'urto.

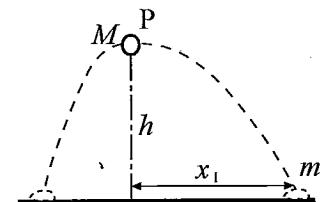


P.6.14.

Come cambierebbe la risposta al punto (iii) del precedente problema se la fune fosse sostituita da un'asta rigida di massa trascurabile?

P.6.15.

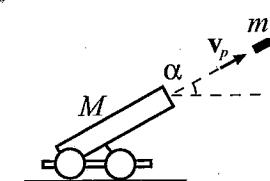
Un corpo di massa M che si trova in un punto P ad una quota h dal suolo esplode dividendosi in due frammenti, che si allontanano in versi opposti in direzione parallela al suolo. Dopo un intervallo di tempo τ dall'esplosione, un frammento di massa m_1 cade a distanza x_1 dalla verticale passante per il punto P . Si determini la coordinata del punto in cui cade il secondo frammento e la quota h a cui è avvenuta l'esplosione. [$M = 100 \text{ kg}$; $m_1 = 30 \text{ kg}$; $x_1 = 140 \text{ m}$; $\tau = 10 \text{ s}$]



P.6.16.

Un cannone di massa M , inizialmente fermo, spara un proiettile di massa m ad una velocità v_p , inclinata di un angolo α rispetto all'orizzontale. Trascurando ogni forma di attrito si calcolino:

- la velocità di rinculo del cannone;
- l'impulso della reazione vincolare di appoggio.

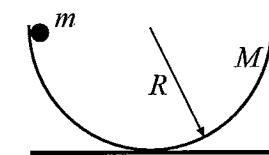


6.1 Problemi

P.6.17.

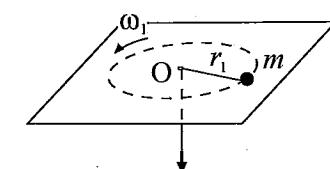
Una bilia di massa m può scorrere senza attrito lungo una guida semicircolare di raggio R e massa M . La guida è appoggiata su di un piano orizzontale e può strisciare su di esso senza attrito. Inizialmente la bilia viene lasciata libera di muoversi partendo dalla sommità della guida. Si calcolino:

- lo spostamento della guida nell'istante in cui la bilia giunge nel punto più basso della guida;
- la velocità della bilia e della guida in tale istante. Si assuma la guida omogenea.



P.6.18.

Un oggetto puntiforme di massa m si muove lungo una traiettoria circolare di raggio r_1 con velocità angolare ω_1 su di un piano orizzontale liscio, trattenuto da una fune inestensibile e di massa trascurabile che passa in un foro O praticato nel piano. La fune viene tirata fino a che la massa si muove su una nuova traiettoria circolare con centro in O , di raggio $r_2 < r_1$. Si calcoli la nuova velocità angolare con cui si muove la massa.



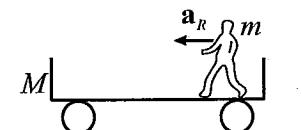
P.6.19.

Si consideri un sistema di particelle non interagenti soggetto solo a forze esterne, la cui risultante sia nulla. Si dica, giustificando la risposta, quale delle seguenti grandezze si conserva nel tempo:

- la quantità di moto delle singole particelle;
- la quantità di moto del centro di massa;
- l'energia cinetica totale;
- l'energia cinetica delle singole particelle;
- il momento angolare totale;
- il momento angolare delle singole particelle.

P.6.20.

Un carrello di massa M può muoversi senza attrito su di un piano orizzontale. Una persona di massa m si trova sul carrello; inizialmente il sistema è in quiete. Ad un certo istante la persona si mette a camminare sul carrello mantenendo un'accelerazione a_R costante rispetto al carrello. Si determinino l'accelerazione del carrello e della persona in un sistema di riferimento solidale al suolo. [$M = 250 \text{ kg}$; $m = 75 \text{ kg}$; $|a_R| = 0.8 \text{ m/s}^2$]

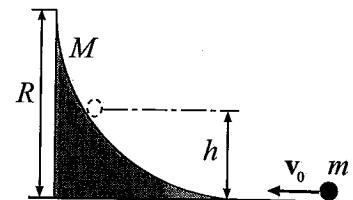
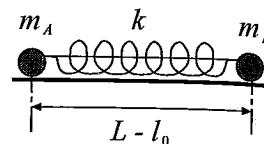


P.6.21.

Due corpi di massa m_A ed $m_B = 3m_A$, agganciati agli estremi di una molla di massa trascurabile, si trovano su di un piano orizzontale liscio. La molla ha costante elastica k e lunghezza a riposo L . Inizialmente la molla è tenuta compressa di un tratto l_0 mediante un filo collegato alle due masse. Tagliato il filo, si lasciano muovere i due corpi sotto l'azione della molla. Si determini la velocità massima raggiunta dai due corpi nel loro moto. Si esprimano i risultati in funzione di l_0 , k ed m_A .

P.6.22.

Un cuneo di massa M , la cui sezione è delimitata da un quarto di cerchio di raggio R , libero di muoversi su di un piano orizzontale, è inizialmente in quiete. Un corpo di massa m viene lanciato verso il cuneo lungo il piano orizzontale. Si determini il minimo valore che deve avere la velocità iniziale del corpo affinché possa percorrere la superficie curva del cuneo giungendo fino alla quota $h = R/2$. Si supponga trascurabile ogni forma di attrito. [$M = 2 \text{ kg}$; $R = 50 \text{ cm}$; $m = 0.5 \text{ kg}$]

**6.2 Soluzioni****6.2 Soluzioni****S.6.1.**

Consideriamo inizialmente il caso di urto elastico. Dal momento che, all'atto dell'urto, non intervengono forze esterne impulsive, si conserva la quantità di moto. Possiamo quindi scrivere:

$$mv = mv_A + mv_B \quad (1)$$

avendo indicato con v_A e v_B le velocità dei corpi A e B, rispettivamente, dopo l'urto. Le velocità che compaiono nella (1) sono le componenti delle velocità dei corpi nella direzione orizzontale di moto. Dal momento che l'urto è elastico si conserva anche l'energia cinetica:

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mv_A^2 + \frac{1}{2}mv_B^2 \quad (2)$$

Le relazioni (1) e (2) costituiscono un sistema di due equazioni nelle incognite v_A e v_B , che si può risolvere facilmente:

$$v_A = 0 \quad v_B = v \quad (3)$$

Cioè dopo l'urto il corpo A si ferma, mentre il corpo B si mette in moto con la stessa velocità di A prima dell'urto. Per calcolare la quota massima raggiunta da B sul piano inclinato, possiamo applicare il principio di conservazione dell'energia meccanica totale. Inizialmente il corpo B ha solo energia cinetica, mentre nel punto a quota massima, che corrisponde a un punto di inversione di moto, l'energia meccanica è di tipo potenziale. Si ha quindi:

$$\frac{1}{2}mv_B^2 = mgh \Rightarrow h = \frac{v^2}{2g} \quad (4)$$

Nel caso di urto completamente anelastico i due oggetti rimangono uniti dopo l'urto. Non ci sono forze esterne impulsive quindi si conserva la quantità di moto. Si ha quindi:

$$mv = 2mv_F \Rightarrow v_F = \frac{v}{2} \quad (5)$$

avendo indicato con v_F la velocità dei due corpi dopo l'urto. Applicando, come prima, il principio di conservazione dell'energia meccanica totale si ottiene:

$$\frac{1}{2}(2m)v_F^2 = (2m)gh \Rightarrow h = \frac{v^2}{8g} \quad (6)$$

S.6.2.

Calcoliamo innanzitutto la velocità del corpo di massa m_1 subito prima dell'urto. Possiamo applicare il principio di conservazione dell'energia meccanica totale (la guida circolare è liscia). Inizialmente la massa m_1 è ferma nel punto A, quindi ha solo energia potenziale, mentre in B, subito prima dell'urto, m_1 ha solo energia cinetica. Possiamo quindi scrivere:

$$m_1gR = \frac{1}{2}m_1v_1^2 \Rightarrow v_1 = \sqrt{2gR} \quad (1)$$

avendo indicato con v_1 la velocità di m_1 subito prima dell'urto. Durante l'urto non intervengono forze esterne impulsive, quindi si conserva la quantità di moto. Poiché l'urto è completamente anelastico i due corpi rimangono uniti dopo l'urto e si muovono con la stessa velocità v_F :

$$m_1 v_1 = (m_1 + m_2) v_F \Rightarrow v_F = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \sqrt{2gR} = 3.07 \text{ m/s} \quad (2)$$

Per calcolare la distanza percorsa dai due corpi dopo l'urto sulla guida orizzontale scabra, possiamo applicare il teorema dell'energia cinetica: $\Delta E_c = \mathcal{L}$. L'unica forza che compie lavoro è la forza d'attrito, data da:

$$\mathbf{F}_A = -\mu_d |\mathbf{N}| \mathbf{u}_x \quad (3)$$

dove \mathbf{u}_x è il versore dell'asse x diretto come la guida BC (vedi figura) e \mathbf{N} è il componente normale della reazione vincolare del piano d'appoggio, che si calcola facilmente osservando che in direzione verticale le forze applicate al corpo costituito dalle due masse (forza peso e reazione vincolare) si fanno equilibrio:

$$|\mathbf{N}| = (m_1 + m_2)g \quad (4)$$

Si ha quindi:

$$\mathbf{F}_A = -\mu_d (m_1 + m_2)g \mathbf{u}_x \quad (5)$$

Il lavoro compiuto dalla forza d'attrito, costante, per uno spostamento d dei due corpi si calcola facilmente:

$$\mathcal{L} = \int \mathbf{F}_A \cdot d\mathbf{r} = -\mu_d (m_1 + m_2)g \int_0^d dx = -\mu_d (m_1 + m_2)gd \quad (6)$$

La variazione dell'energia cinetica è data da:

$$\Delta E_c = E_c(d) - E_c(0) = -\frac{1}{2}mv_F^2 \quad (7)$$

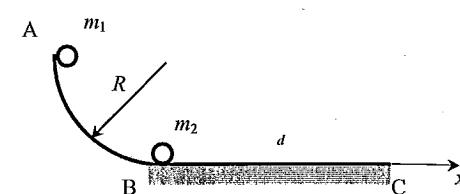
dal momento che alla fine i due corpi si fermano. Utilizzando le relazioni (2), (6) e (7) e il teorema dell'energia cinetica, si ottiene:

$$d = \frac{R}{\mu_d} \left(\frac{m_1}{m_1 + m_2} \right)^2 = 1.6 \text{ m} \quad (8)$$

S.6.3.

Calcoliamo inizialmente la velocità del corpo di massa m_1 subito prima dell'urto. Possiamo applicare il principio di conservazione dell'energia meccanica totale. Inizialmente il corpo è fermo e la molla è compressa di un tratto $\Delta\ell_0$, l'energia meccanica associata è:

$$E_0 = \frac{1}{2}k \Delta\ell_0^2 \quad (1)$$



6.2 Soluzioni

Subito prima dell'urto la massa m_1 è in moto con velocità v_1 e la molla risulta allungata di un tratto $(d - \ell)$. L'energia meccanica corrispondente è:

$$E_1 = \frac{1}{2}k(d - \ell)^2 + \frac{1}{2}m_1v_1^2 \quad (2)$$

Per la conservazione dell'energia meccanica totale si ha $E_0 = E_1$. Dalle (1) e (2) si ricava:

$$v_1 = \sqrt{\frac{k}{m_1} [\Delta\ell_0^2 - (d - \ell)^2]} = 0.89 \text{ m/s} \quad (3)$$

Poiché l'urto è elastico si conserva l'energia cinetica e, ricordando che il corpo di massa m_2 è inizialmente fermo, si ha:

$$\frac{1}{2}m_1v_1^2 = \frac{1}{2}m_1v_{1F}^2 + \frac{1}{2}m_2v_{2F}^2 \quad (4)$$

avendo indicato con v_{1F} e v_{2F} le velocità degli oggetti di massa m_1 e m_2 , rispettivamente, dopo l'urto. Poiché durante l'urto non intervengono forze esterne impulsive, si conserva la quantità di moto:

$$m_1v_1 = m_1v_{1F} + m_2v_{2F} \quad (5)$$

Sapendo che $m_1 = m_2$, dalle (4) e (5) si ricava:

$$v_{1F} = 0 \quad v_{2F} = v_1 \quad (6)$$

Dopo l'urto il corpo di massa m_1 è soggetto alla forza elastica e riprende il suo moto armonico con ampiezza data da: $d - \ell = 3 \text{ cm}$, essendo la velocità iniziale v_{1F} nulla.

S.6.4.

Analizziamo l'urto fra i due corpi. Dal momento che non intervengono forze esterne impulsive si conserva la quantità di moto del sistema. Poiché il corpo B è inizialmente in quiete, si ha:

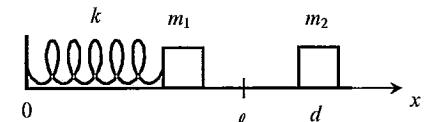
$$mv = mv_A + Mv_B \quad (1)$$

avendo indicato con v_A e v_B le velocità dei corpi A e B, rispettivamente, dopo l'urto. L'urto è elastico, quindi si conserva l'energia cinetica:

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mv_A^2 + \frac{1}{2}Mv_B^2 \quad (2)$$

Le relazioni (1) e (2) costituiscono un sistema di due equazioni nelle tre incognite v_A , v_B e M : serve quindi una terza equazione per risolvere il problema. Sappiamo che il corpo B dopo l'urto percorre una distanza D prima di fermarsi a causa dell'attrito. Utilizziamo allora il teorema dell'energia cinetica, $\Delta E_c = \mathcal{L}$, considerando come condizione iniziale l'istante successivo all'urto e come condizione finale l'istante in cui il corpo si ferma. Si ha quindi:

$$E_{c,i} = \frac{1}{2}Mv_B^2 \quad E_{c,f} = 0 \quad (3)$$



avendo indicato con $E_{c,i}$ ed $E_{c,f}$ le energie cinetiche iniziale e finale, rispettivamente. L'unica forza che compie lavoro è la forza d'attrito:

$$\mathbf{F}_A = -\mu|\mathbf{N}|\mathbf{u}_x = -\mu Mg \mathbf{u}_x \quad (4)$$

Si ha quindi:

$$\mathcal{L} = \int_{i-f} \mathbf{F}_A \cdot d\mathbf{r} = -\mu Mg \int_0^D dx = -\mu MgD \quad (5)$$

Dal teorema dell'energia cinetica si ottiene:

$$\frac{1}{2}Mv_B^2 = \mu MgD \Rightarrow v_B = \sqrt{2\mu gD} \quad (6)$$

Utilizzando le equazioni (1) e (2) si ottiene:

$$v_B = \frac{2m}{m+M}v \quad (7)$$

Dalle (6) e (7) si ha:

$$M = \frac{2mv}{\sqrt{2\mu gD}} - m = 216 \text{ g} \quad (8)$$

La velocità del corpo A subito dopo l'urto si ottiene dalle equazioni (1), (7) e (8):

$$v_A = \frac{m-M}{m+M}v = \sqrt{2\mu gD} - v = -3.12 \text{ m/s} \quad (9)$$

Quindi dopo l'urto il corpo A inverte il proprio moto.

S.6.5.

Se l'urto fosse elastico l'energia cinetica del sistema dopo l'urto dovrebbe essere uguale all'energia cinetica prima dell'urto:

$$E_{c,i} = \frac{1}{2}m_A v_A^2 + \frac{1}{2}m_B v_B^2 = \frac{1}{2}m_A(v_A^2 + 2v_B^2) \quad (1)$$

Dal momento che l'energia cinetica del sistema dopo l'urto è diversa dall'energia cinetica iniziale, possiamo concludere che l'urto non è elastico.

Vediamo se l'urto è completamente anelastico. In questo caso i due corpi rimangono uniti dopo l'urto. Dal momento che non intervengono forze esterne impulsive, si conserva la quantità di moto del sistema. Quindi:

$$m_A v_A - m_B v_B = (m_A + m_B) v_F \quad (2)$$

da cui, ricordando che $m_B = 2m_A$, si ottiene:

$$v_F = \frac{1}{3}(v_A - 2v_B) \quad (3)$$

L'energia cinetica del sistema dopo l'urto è quindi:

$$E_c = \frac{1}{2}(m_A + m_B)v_F^2 = \frac{1}{6}m_A(v_A - 2v_B)^2 \quad (4)$$

6.2 Soluzioni

Tale espressione coincide con quella assegnata dal problema. Possiamo quindi concludere che l'urto è di tipo completamente anelastico.

S.6.6.

Il periodo delle oscillazioni dei due pendoli, considerati separatamente, non dipende dalla massa dei corpi appesi, ma solo dalla lunghezza L del pendolo e dall'accelerazione di gravità g . E' quindi evidente che i due corpi raggiungono il punto più basso della loro traiettoria (quando le due funi sono verticali) nello stesso istante. Questa è la posizione in cui i due corpi si urtano.

Analizziamo l'urto elastico. Dal momento che non intervengono forze esterne impulsive, si conserva la quantità di moto del sistema:

$$m_1 \mathbf{v}_1 + m_2 \mathbf{v}_2 = m_1 \mathbf{v}_{1F} + m_2 \mathbf{v}_{2F} \quad (1)$$

avendo indicato con \mathbf{v}_1 e \mathbf{v}_2 le velocità dei corpi di massa m_1 e m_2 subito prima dell'urto, e con \mathbf{v}_{1F} e \mathbf{v}_{2F} le corrispondenti velocità subite dopo l'urto. Le quattro velocità che figurano nell'equazione (1) sono dirette secondo l'asse x , orizzontale. Sono inoltre noti i versi di \mathbf{v}_1 e di \mathbf{v}_2 : $\mathbf{v}_1 = |\mathbf{v}_1| \mathbf{u}_x = v_1 \mathbf{u}_x$, $\mathbf{v}_2 = -|\mathbf{v}_2| \mathbf{u}_x = -v_2 \mathbf{u}_x$. I versi delle velocità dopo l'urto non sono noti a priori. Possiamo scrivere: $\mathbf{v}_{1F} = v_{1F} \mathbf{u}_x$, $\mathbf{v}_{2F} = v_{2F} \mathbf{u}_x$, dove v_{1F} e v_{2F} sono le componenti delle velocità finali in direzione orizzontale. Si noti che v_{1F} e v_{2F} potranno risultare positive o negative, mentre abbiamo assunto $v_1 = |\mathbf{v}_1|$ e $v_2 = |\mathbf{v}_2|$ (positive). Proiettando la (1) in direzione x otteniamo:

$$m_1 v_1 - m_2 v_2 = m_1 v_{1F} + m_2 v_{2F} \quad (2)$$

L'urto è elastico, si conserva quindi l'energia cinetica:

$$\frac{1}{2}m_1 v_1^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2^2 = \frac{1}{2}m_1 v_{1F}^2 + \frac{1}{2}m_2 v_{2F}^2 \quad (3)$$

Le (2) e (3) costituiscono un sistema di due equazioni nelle due incognite v_{1F} e v_{2F} . La soluzione di tale sistema risulta notevolmente semplificata dal fatto che $v_1 = v_2$. Infatti la velocità prima dell'urto delle due masse può essere facilmente calcolata applicando il principio di conservazione dell'energia meccanica totale:

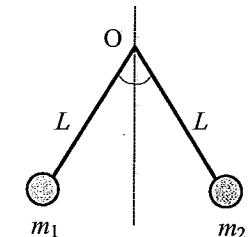
$$m_1 g L (1 - \cos \alpha) = \frac{1}{2}m_1 v_1^2 \Rightarrow v_1 = \sqrt{2gL(1 - \cos \alpha)} = 0.44 \text{ m/s} \quad (4)$$

Per la massa m_2 si ottiene lo stesso risultato. Sapendo inoltre che $m_2 = 2m_1$, il sistema di equazioni può essere riscritto come segue:

$$\begin{aligned} v_{1F} + 2v_{2F} &= -v_1 \\ v_{1F}^2 + 2v_{2F}^2 &= 3v_1^2 \end{aligned} \quad (5)$$

Il sistema (5) ammette le seguenti due soluzioni:

$$\begin{aligned} v_{1F} &= v_1 & v_{2F} &= -v_1 \\ v_{1F} &= -\frac{5}{3}v_1 & v_{2F} &= \frac{1}{3}v_1 \end{aligned} \quad (6)$$



La prima soluzione non è fisicamente accettabile, perché implica che non ci sia stato l'urto. La seconda è invece la soluzione cercata. Quindi:

$$\mathbf{v}_{1F} = -0.73 \mathbf{u}_x \text{ (m/s)} \quad \mathbf{v}_{2F} = 0.15 \mathbf{u}_x \text{ (m/s)} \quad (7)$$

S.6.7.

Calcoliamo la velocità del corpo di massa M subito prima dell'urto. Possiamo applicare il principio di conservazione dell'energia meccanica totale:

$$MgL(1 - \cos \theta) = \frac{1}{2}MV^2 \quad (1)$$

Si ottiene:

$$V = \sqrt{2gL(1 - \cos \theta)} \quad (2)$$

Analizziamo ora l'urto fra m e M . Non intervengono forze esterne impulsive, quindi si conserva la quantità di moto del sistema. Dal momento che la massa m è inizialmente in quiete, possiamo scrivere:

$$MV = MV_F + mv_F \quad (3)$$

avendo indicato con V_F e v_F le velocità di M e m subito dopo l'urto (si noti che non si è fatta alcuna ipotesi sui versi delle velocità finali, quindi V_F e v_F possono essere sia positivi che negativi). L'urto è elastico, quindi si conserva l'energia cinetica:

$$\frac{1}{2}MV^2 = \frac{1}{2}MV_F^2 + \frac{1}{2}mv_F^2 \quad (4)$$

Le (3) e (4) costituiscono un sistema di due equazioni nelle due incognite V_F e v_F . Le soluzioni sono le seguenti:

$$v_F = 0 \quad V_F = V \quad (5)$$

che non è fisicamente accettabile perché corrisponde all'assenza di urto. La soluzione fisicamente corretta è la seguente:

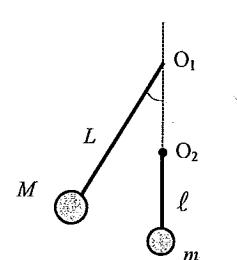
$$v_F = \frac{2M}{m+M}V \quad V_F = \frac{M-m}{m+M}V \quad (6)$$

Per calcolare l'angolo massimo raggiunto dal secondo pendolo dopo l'urto, applichiamo nuovamente il principio di conservazione dell'energia meccanica totale:

$$\frac{1}{2}mv_F^2 = mgl(1 - \cos \alpha) \quad (7)$$

Utilizzando le (6) e (7) si ricava:

$$\cos \alpha = 1 - \frac{L}{\ell} \left(\frac{2M}{m+M} \right)^2 (1 - \cos \theta) \Rightarrow \alpha = 66^\circ \quad (8)$$

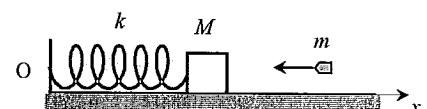


6.2 Soluzioni

S.6.8.

Consideriamo inizialmente l'urto completamente anelastico fra proiettile e blocco. Dal momento che non intervengono forze esterne impulsive, si conserva la quantità di moto del sistema. Si ha quindi:

$$mv = (m+M)V \Rightarrow V = \frac{m}{m+M}v \quad (1)$$



avendo indicato con v la velocità del proiettile subito prima dell'urto e con V la velocità del sistema blocco più proiettile subito dopo l'urto. In presenza di forze non conservative si ha:

$$\Delta E = \mathcal{L}_{nc} \quad (2)$$

dove ΔE rappresenta la variazione di energia meccanica totale e \mathcal{L}_{nc} è il lavoro compiuto dalla forza d'attrito. All'inizio la molla è non deformata e il corpo di massa $(m+M)$ ha velocità V . Alla fine il sistema è fermo e la molla è deformata di un tratto ΔL . Si ha quindi:

$$\Delta E = \frac{1}{2}k\Delta L^2 - \frac{1}{2}(m+M)V^2 \quad (3)$$

La forza d'attrito è data da:

$$\mathbf{F}_A = \mu |\mathbf{N}| \mathbf{u}_x = \mu(m+M)g \mathbf{u}_x \quad (4)$$

Il lavoro compiuto da tale forza per uno spostamento ΔL del corpo è dato da:

$$\mathcal{L}_{nc} = -\mu(m+M)g\Delta L \quad (5)$$

Dalle (2), (3) e (5) si ricava:

$$v = \frac{m+M}{m} \sqrt{\frac{k\Delta L^2}{m+M} + 2\mu g\Delta L} \quad (6)$$

S.6.9.

Nel punto più alto della sua traiettoria circolare (posizione B indicata in figura) l'equazione di moto del blocchetto è la seguente:

$$M \frac{v_B^2}{\ell} = Mg + T_B \quad (1)$$

avendo indicato con T_B la tensione della fune nel punto B. Perchè il blocco possa raggiungere il punto B, il filo deve continuare a rimanere teso ($T_B > 0$). Considerando l'equazione (1), si deve avere:

$$T_B = M \frac{v_B^2}{\ell} - Mg \geq 0 \Rightarrow v_B \geq \sqrt{g\ell} \quad (2)$$

Vediamo ora che relazione esiste fra le velocità del blocchetto nel punto più alto (B) e più basso (A) della sua traiettoria. Possiamo applicare il principio di conservazione dell'energia meccanica totale. Nel punto più basso si ha:

$$E_A = \frac{1}{2} M v_A^2 \quad (3)$$

Nel punto più alto si ha invece:

$$E_B = \frac{1}{2} M v_B^2 + 2Mg\ell \quad (4)$$

avendo assunto che l'energia potenziale gravitazionale sia nulla nel punto A. Poiché $E_A = E_B$ risulta:

$$v_A = \sqrt{v_B^2 + 4g\ell} \quad (5)$$

Dalle (2) e (5) si ricava che, affinché il blocco possa compiere un giro completo intorno al centro di sospensione, deve risultare:

$$v_A \geq \sqrt{5g\ell} \quad (6)$$

Consideriamo ora l'urto fra proiettile e blocchetto. Dal momento che, durante l'urto, non intervengono forze esterne impulsive, si conserva la quantità di moto del sistema. Sapendo che il pendolo è in quiete prima dell'urto, si ha:

$$mv = Mv_A + m\frac{v}{2} \quad (7)$$

quindi:

$$v_A = \frac{m}{2M}v \quad (8)$$

Considerando le equazioni (6) e (8), si ottiene:

$$v \geq \frac{2M}{m} \sqrt{5g\ell} \quad (9)$$

S.6.10.

Nel caso in cui il blocchetto di massa M sia sospeso ad un'asta, la condizione limite perché esso compia un giro completo intorno al centro di sospensione è che il blocchetto raggiunga il punto più alto, B, della sua traiettoria circolare con velocità nulla. In tale condizione l'energia meccanica totale in B sarà di tipo potenziale:

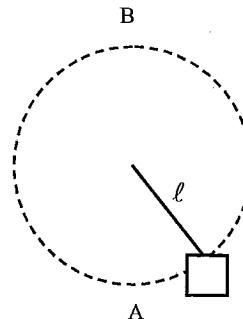
$$E_B = 2Mg\ell \quad (1)$$

Nel punto più basso della traiettoria si ha invece:

$$E_A = \frac{1}{2} M v_A^2 \quad (2)$$

Applicando il principio di conservazione dell'energia meccanica totale, si ottiene:

$$v_A = \sqrt{4g\ell} \quad (3)$$



6.2 Soluzioni

Consideriamo ora l'urto fra proiettile e blocchetto. Come nell'esercizio precedente si ottiene:

$$v_A = \frac{m}{2M}v \quad (4)$$

Dalle (3) e (4) si ottiene che il minimo valore di v tale che il blocchetto possa compiere un giro completo è dato da:

$$v = \frac{2M}{m} \sqrt{4g\ell} \quad (5)$$

S.6.11.

Il sistema costituito dalle due particelle è isolato, quindi si conserva la quantità di moto totale:

$$mv_0 = mv_A + mv_B \quad (1)$$

Proiettiamo l'equazione vettoriale (1) lungo gli assi x ed y mostrati in figura. L'asse x è diretto come la velocità iniziale v_0 . Si ottiene:

$$\begin{aligned} mv_0 &= mv_A \cos \theta_1 + mv_B \cos \theta_2 \\ 0 &= mv_A \sin \theta_1 - mv_B \sin \theta_2 \end{aligned} \quad (2)$$

avendo indicato con θ_1 e θ_2 gli angoli formati dalle velocità v_A e v_B con l'asse x . Si ha, ovviamente:

$$\theta_1 + \theta_2 = \theta \quad (3)$$

Le equazioni (2) e (3) costituiscono un sistema di tre equazioni nelle tre incognite θ_1 , θ_2 e v_0 . Dalla seconda delle (2) si ricava:

$$\sin \theta_2 = \frac{v_A}{v_B} \sin \theta_1 \quad (4)$$

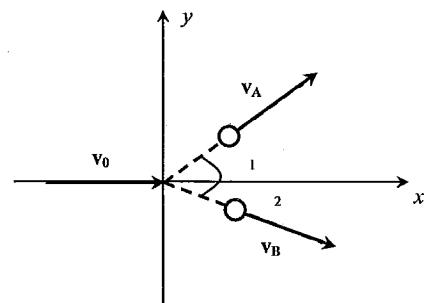
Utilizzando la (3) nella (4) si ottiene:

$$\sin \theta_2 = \frac{v_A}{v_B} \sin(\theta - \theta_2) = \frac{v_A}{v_B} (\sin \theta \cos \theta_2 - \sin \theta_2 \cos \theta) \quad (5)$$

Da cui, con facili calcoli, si ottiene:

$$\tan \theta_2 = \frac{v_A \sin \theta}{v_B + v_A \cos \theta} = 0.4 \Rightarrow \theta_2 = 21.8^\circ \quad (6)$$

Quindi: $\theta_1 = 38.2^\circ$. Dalla prima delle relazioni (2) possiamo determinare la velocità iniziale $v_0 = 7$ m/s.



S.6.12.

Nel seguito considereremo il sistema composto dal blocco di massa M , dalla molla di costante elastica k solidale al blocco e dal proiettile di massa m ; questo sistema è inglobato in figura da un rettangolo tratteggiato. Detta $M_T = M + m$ la massa totale del sistema e \mathbf{a}_{CM} l'accelerazione del suo centro di massa, potremo scrivere l'equazione di moto complessiva nella forma:

$$\mathbf{R}_{est} = M_T \mathbf{a}_{CM}, \quad (1)$$

essendo \mathbf{R}_{est} la risultante delle forze esterne agenti sul sistema; risulta in particolare che

$$\mathbf{R}_{est} = \mathbf{F}_g + \mathbf{N} + \mathbf{f}_a, \quad (2)$$

essendo $\mathbf{F}_g = M_T g$ la forza gravitazionale agente sul sistema, g l'accelerazione di gravità, \mathbf{N} la reazione vincolare esercitata dal piano di appoggio sul sistema ed \mathbf{f}_a la forza di attrito statico agente sul blocco. Per semplicità ci limiteremo ad analizzare il sistema a partire dall'istante successivo all'impatto del proiettile col bersaglio. Introduciamo un sistema di coordinate cartesiane ortogonali solidali al blocco (come in figura) il cui asse x sia parallelo al suolo, mentre l'asse y sia diretto verso l'alto. Poiché supporremo che il blocco sia in quiete, tale sistema di riferimento risulterà inerziale. Proiettando l'equazione (1) sugli assi cartesiani e tenuto conto che il centro di massa del sistema si muove solo in direzione orizzontale, otteniamo:

$$\begin{cases} N - F_g = 0 \\ f_a = M_T a_x \end{cases} \quad (3)$$

dove $N = |\mathbf{N}|$, $F_g = |\mathbf{F}_g| = M_T g$, $g = |g|$, $f_a = |\mathbf{f}_a|$ ed a_x è la componente sull'asse x di \mathbf{a}_{CM} . Essendo l'attrito di tipo statico, possiamo porre

$$f_a \leq \mu_s N, \quad (4)$$

la quale, con l'aiuto della prima delle equazioni (3), comporta che

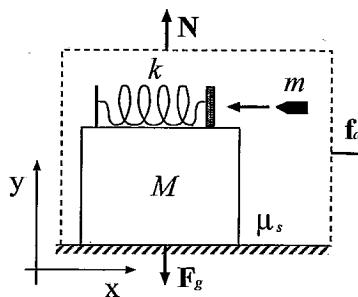
$$f_a \leq \mu_s M_T g. \quad (5)$$

Tenuto conto della definizione di centro di massa, possiamo riscrivere la quantità \mathbf{a}_{CM} come:

$$\mathbf{a}_{CM} = \frac{d^2}{dt^2} \mathbf{r}_{CM} = \frac{d^2}{dt^2} \frac{m \mathbf{r}_p + M \mathbf{r}_b}{M_T}, \quad (6)$$

dove \mathbf{r}_{CM} è il vettore posizione che individua il centro di massa del sistema, \mathbf{r}_p individua la posizione del proiettile ed \mathbf{r}_b quella del blocco. Tenuto conto che il blocco non si sposta durante l'interazione col proiettile, potremo riscrivere la (6) come:

$$\mathbf{a}_{CM} = \frac{m \mathbf{a}_p}{M + m}, \quad (7)$$

**6.2 Soluzioni**

che, proiettando sull'asse x , diventa:

$$a_x = \frac{m a_{px}}{M + m}, \quad (8)$$

essendo \mathbf{a}_p l'accelerazione del proiettile ed a_{px} la componente di \mathbf{a}_p sull'asse x ; mediante le equazioni (5) e (8), possiamo poi riscrivere la seconda delle (3) come:

$$m a_{px} \leq \mu_s (M + m) g. \quad (9)$$

L'unica forza agente in direzione orizzontale sul proiettile è la forza elastica esercitata dalla molla; pertanto, tenuto conto del secondo principio della dinamica, possiamo porre:

$$m a_{px} = -k \Delta x, \quad (10)$$

essendo k la costante elastica della molla e Δx la variazione di lunghezza della molla stessa. Si noti che, durante la compressione della molla, Δx è negativa, mentre l'accelerazione del proiettile, diretta nel verso dell'asse x , è positiva. Mediante la (9) e la (10), si giunge alla:

$$-k \Delta x \leq \mu_s (M + m) g. \quad (11)$$

Per sapere se la condizione (11) è valida, dobbiamo calcolare la massima compressione della molla Δx_{max} ; essendo la forza elastica conservativa, impiegheremo il principio di conservazione dell'energia meccanica:

$$\frac{1}{2} m v_0^2 = \frac{1}{2} k \Delta x_{max}^2, \quad (12)$$

dove v_0 è la velocità iniziale del proiettile; da tale relazione si ottiene:

$$|\Delta x_{max}| = v_0 \sqrt{\frac{m}{k}}. \quad (13)$$

Sostituendo la (13) nella (11) e tenuto conto che durante la compressione della molla $-\Delta x_{max} = |\Delta x_{max}|$, si giunge poi alla:

$$v_0 \leq \frac{\mu_s (M + m) g}{\sqrt{k m}}. \quad (14)$$

La relazione (14) esprime il massimo valore del modulo della velocità del proiettile, oltre il quale la forza di attrito statico non è più in grado di trattenere il blocco in seguito all'urto tra il proiettile ed il bersaglio.

S.6.13.

Considereremo nel seguito il sistema di oggetti costituito dal proiettile di massa m e dal blocco di massa M (si veda in proposito la figura); chiameremo $M_T = M + m$ la massa totale degli oggetti. Le forze esterne agenti sul sistema sono: la forza peso complessiva $\mathbf{F}_g = M_T g$, con g accelerazione di gravità e la tensione T della fune a cui è appeso il blocco. Si noti che, durante l'urto, la tensione del filo assume carattere impulsivo (vale a dire il suo modulo può divenire molto elevato durante l'urto). Pertanto non possiamo applicare la conservazione della quantità di moto per ottenere lo stato del sistema dopo

l'urto, in quanto ciò sarebbe lecito solo se le forze esterne al sistema non fossero impulsive. Applicheremo invece la seconda equazione cardinale della dinamica:

$$\mathfrak{M}_{tot, (O)} = \frac{d\mathbf{L}_{(O)}}{dt}, \quad (1)$$

dove $\mathfrak{M}_{tot, (O)}$ è il momento complessivo delle forze agenti sul sistema, calcolato rispetto al punto O ed $\mathbf{L}_{(O)}$ il suo momento angolare totale. La tensione e la forza peso totale durante l'urto sono dirette lungo la retta verticale passante per il punto O. Pertanto, durante l'urto, il momento delle forze

$$\mathfrak{M}_{tot, (O)} = \mathbf{r} \times (\mathbf{T} + \mathbf{F}_g), \quad (2)$$

risulterà nullo; nella precedente espressione \mathbf{r} è il vettore che individua la posizione dei due oggetti nell'istante dell'urto (come in figura). Per la (1) varrà quindi la conservazione del momento angolare totale, che possiamo scrivere come:

$$\bar{\mathbf{L}}_{(O)} = \mathbf{L}_{(O)}^+, \quad (3)$$

dove gli apici $-$, $+$ indicano che $\mathbf{L}_{(O)}$ è stato rispettivamente calcolato in un istante precedente ed in uno successivo all'urto. Prima dell'urto, essendo solo il proiettile in moto, risulterà:

$$\mathbf{L}_{(O)}^- = \mathbf{r} \times m\mathbf{v}_0, \quad (4)$$

dove \mathbf{v}_0 è la velocità del proiettile; dopo l'urto avremo invece:

$$\mathbf{L}_{(O)}^+ = \mathbf{r} \times M_T \mathbf{V}, \quad (5)$$

dove \mathbf{V} è la velocità del sistema blocco-proiettile dopo l'urto. Detto \mathbf{n} il versore perpendicolare al piano del foglio e diretto verso il lettore, potremo riscrivere la relazione (3), con l'aiuto della (4) e della (5), nella forma:

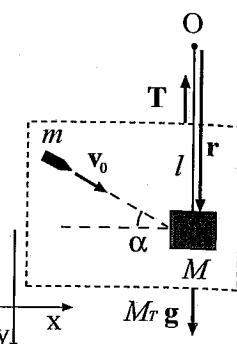
$$mlv_0 \sin(\pi/2 - \alpha) \mathbf{n} = M_T V l \mathbf{n}, \quad (6)$$

dove l è la lunghezza del filo, α l'angolo che la direzione di moto del proiettile forma con l'orizzontale, $v_0 = |\mathbf{v}_0|$ e $V = |\mathbf{V}|$. Si noti che le dimensioni del blocco su cui urta il proiettile sono state considerate trascurabili rispetto ad l ; si è inoltre assunto che il blocco si muova subito dopo l'urto in direzione orizzontale. Dalla (6) si giunge poi a determinare la velocità del sistema dopo l'urto:

$$V = \frac{mv_0 \cos \alpha}{m + M}. \quad (7)$$

Calcoliamo ora l'impulso \mathbf{I}_T esercitato dalla tensione \mathbf{T} durante l'urto. A tal fine introduciamo un sistema di coordinate cartesiane, il cui asse x sia diretto orizzontalmente e l'asse y verticalmente verso il basso (si veda la figura). Per il teorema dell'impulso risulta che:

$$\mathbf{I} = \int_{t_i}^{t_f} \mathbf{R} dt = \Delta \mathbf{Q}, \quad (8)$$



6.2 Soluzioni

dove $\mathbf{R} = M_T \mathbf{g} + \mathbf{T}$ è la risultante delle forze agenti sul sistema, \mathbf{I} l'impulso complessivo da esso subito e $\Delta \mathbf{Q}$ la variazione di quantità di moto del sistema nell'intervallo di tempo $[t_i, t_f]$. Limitando l'intervallo temporale all'interazione proiettile-blocco (di durata infinitesima), la forza peso darà un contributo trascurabile all'impulso rispetto alla tensione, per cui porremo $\mathbf{I} = \mathbf{I}_T$. Detti \mathbf{u}_x ed \mathbf{u}_y i versori degli assi x ed y , la quantità di moto iniziale del sistema sarà pari a:

$$\mathbf{Q}_i = mv_0 = mv_0 [\cos \alpha \mathbf{u}_x + \sin \alpha \mathbf{u}_y], \quad (9)$$

mentre, in base alla (7), la quantità di moto finale sarà:

$$\mathbf{Q}_f = M_T \mathbf{V} = mv_0 \cos \alpha \mathbf{u}_x. \quad (10)$$

Impiegando la (9) e la (10), la variazione di quantità di moto del sistema durante l'urto (e quindi per la (8), l'impulso esercitato dalla tensione) risulta:

$$\Delta \mathbf{Q} = \mathbf{Q}_f - \mathbf{Q}_i = -mv_0 \sin \alpha \mathbf{u}_y = \mathbf{I}_T. \quad (11)$$

Per calcolare la minima velocità del proiettile per la quale il blocco compie un giro completo attorno ad O, possiamo imporre che all'apice della traiettoria (che chiameremo A) la tensione della fune si annulli. Ciò comporta che, in A, l'unica forza agente sul sistema blocco-proiettile sia la forza peso \mathbf{F}_g (per una discussione più dettagliata si rinvia alla soluzione del prossimo esercizio). Tenuto conto che il blocco si muove lungo una traiettoria circolare, possiamo allora impostare l'equazione di moto nella forma:

$$F_g = M_T \frac{v_a^2}{l}, \quad (12)$$

dove $F_g = (M+m)g$, $g = |\mathbf{g}|$ e v_a sarà la velocità del sistema in A; l'equazione (12) impone che \mathbf{F}_g funga da forza centripeta nel punto più alto della traiettoria. Dalla precedente equazione si ottiene

$$v_a^2 = lg; \quad (13)$$

applicando la conservazione dell'energia meccanica tra l'istante successivo all'urto e l'istante in cui il sistema giunge in A, otteniamo:

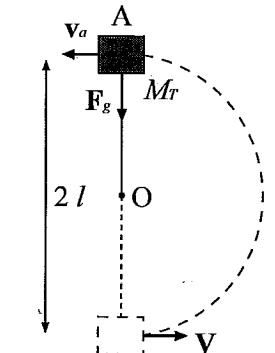
$$\frac{1}{2} M_T V^2 = \frac{1}{2} M_T v_a^2 + 2 M_T g l, \quad (14)$$

da cui

$$V^2 = v_a^2 + 4gl. \quad (15)$$

Sostituendo la (13) nella precedente espressione, otteniamo

$$V = \sqrt{5gl}, \quad (16)$$



da cui, con l'aiuto della (7), si giunge alla

$$v_{0, \min} = \frac{(M+m)\sqrt{5gl}}{m \cos \alpha}, \quad (17)$$

che rappresenta la minima velocità del proiettile necessaria a far compiere un giro completo al blocco.

S.6.14.

Se nel problema precedente sostituiamo il filo con un'asta rigida, la minima velocità del proiettile necessaria per far compiere un giro completo al blocco diminuisce. La differenza sostanziale tra i due casi è nel vincolo a cui è sottoposto il blocco; nel problema precedente esso è di tipo *monolatero*, ovvero la tensione T del filo deve sempre essere diretta verso O (od al più può annullarsi); in caso contrario il filo non sarà più teso. Pertanto il blocco deve giungere nel punto estremo A della traiettoria con velocità diversa da zero, di modo che la forza totale agente sul blocco funga da forza centripeta.

Un'asta rigida rappresenta invece un vincolo *bilatero*: la reazione vincolare N che essa esercita sul blocco può anche essere diretta in verso opposto, ovvero l'asta può anche sorreggere il blocco (si veda la figura a lato); in tal caso N potrà anche compensare la forza peso F_g . In questa situazione possiamo assumere che la minima velocità $v_{0, \min}$ con cui il proiettile deve colpire il blocco, corrisponde a far giungere questi all'apice A della traiettoria con velocità nulla. Imponendo la conservazione dell'energia meccanica tra l'istante successivo all'urto tra blocco e proiettile e l'istante in cui il sistema giunge in A, otteniamo:

$$\frac{1}{2} M_T V^2 = 2 M_T g l, \quad (1)$$

dove $M_T = M + m$, M è la massa del blocco, m la massa del proiettile, l la lunghezza dell'asta, g il modulo dell'accelerazione di gravità e V il modulo della velocità del sistema blocco-proiettile nell'istante successivo all'urto. In base alla (1) si ottiene:

$$V = 2\sqrt{gl}; \quad (2)$$

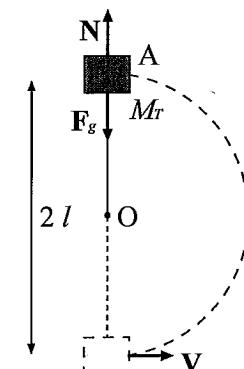
impiegando la relazione (7) dell'esercizio precedente (a cui si rinvia per i dettagli sulla procedura di risoluzione), si ottiene poi:

$$v_{0, \min} = \frac{2(M+m)\sqrt{gl}}{m \cos \alpha}, \quad (3)$$

dove α è l'angolo che la direzione di moto del proiettile forma con l'orizzontale. Si noti che la velocità ottenuta in questo caso è inferiore a quella ricavata nell'esercizio precedente.

S.6.15.

Il corpo di massa M , che a seguito dell'esplosione si separa in due frammenti di masse m_1



6.2 Soluzioni

ed $m_2 = M - m_1$, può essere pensato come un sistema di due oggetti che, sotto l'azione della forza peso, obbedisce all'equazione di moto:

$$\mathbf{R}_{est} = M\mathbf{g} = M \frac{d^2 \mathbf{r}_{CM}}{dt^2}, \quad (1)$$

dove \mathbf{R}_{est} è la risultante delle forze esterne al sistema, \mathbf{g} è l'accelerazione di gravità ed \mathbf{r}_{CM} il vettore posizione che individua il centro di massa del sistema. Introduciamo un sistema di coordinate cartesiane ortogonali, il cui asse x sia diretto orizzontalmente mentre l'asse y sia diretto verso l'alto; fissiamo l'origine dell'asse x in modo che coincida con l'ascissa del punto P in cui l'oggetto si trova prima dell'esplosione. Proiettando la (1) lungo x ed y si ottiene:

$$\begin{cases} \frac{d^2 x_{CM}}{dt^2} = 0 \\ \frac{d^2 y_{CM}}{dt^2} = -g \end{cases} \quad (2)$$

dove x_{CM} ed y_{CM} sono le coordinate del centro di massa e $g = |\mathbf{g}|$. Supponiamo che nell'istante $t = 0$ il sistema esploda dividendosi nei due frammenti; in base ai dati assegnati dal problema possiamo assumere che il centro di massa sia inizialmente in quiete ad una quota h dal suolo; le sue condizioni iniziali del moto saranno espresse da:

$$\begin{cases} x_{CM}(0) = 0 \\ y_{CM}(0) = h \\ v_{x,CM}(0) = 0 \\ v_{y,CM}(0) = 0 \end{cases} \quad (3)$$

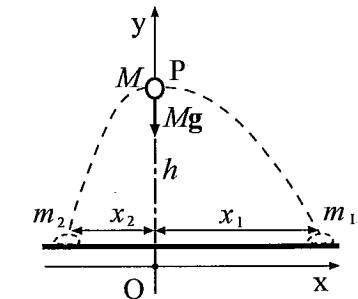
dove $v_{x,CM}$ e $v_{y,CM}$ sono le componenti della velocità del centro di massa lungo gli assi. In base alle (2) e (3), si ottengono le leggi del moto del centro di massa:

$$\begin{cases} x_{CM}(t) = 0 \\ y_{CM}(t) = h - \frac{1}{2}gt^2 \end{cases} \quad (4)$$

che derivano dalle leggi della cinematica dei moti uniformemente accelerati. Si noti che il centro di massa si muove come un grave lasciato cadere da una quota h partendo da fermo. All'istante $t = \tau$, in cui i frammenti giungono al suolo, la sua ascissa sarà $x_{CM}(\tau) = 0$. Per definizione possiamo calcolare x_{CM} anche mediante la

$$x_{CM} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}, \quad (5)$$

dove x_1 ed x_2 sono le ascisse che individuano i due frammenti in cui si è diviso l'oggetto; mediante la (5) e la prima delle (4) possiamo calcolare la posizione del secondo frammento in funzione di x_1 :



$$x_2 = -\frac{m_1}{m_2}x_1, \quad (6)$$

da cui si ottiene, sostituendo i dati assegnati dal problema, $x_2 = -60$ m. Impiegando la seconda delle (4) ed imponendo che all'istante $t = \tau$ il centro di massa abbia raggiunto il suolo, otteniamo la quota h di partenza:

$$h = \frac{1}{2}g\tau^2; \quad (7)$$

sostituendo ancora i dati assegnati, si ottiene $h = 490.5$ m.

S.6.16.

Nel seguito considereremo il sistema formato dal cannone e dal proiettile, evidenziato nella figura a lato da un rettangolo a tratteggio. Le forze esterne agenti sul sistema saranno la reazione vincolare \mathbf{N} , esercitata sul cannone dal piano di appoggio, e la forza peso complessiva $\mathbf{F}_g = M_T g$, dove g è l'accelerazione di gravità, $M_T = M + m$ la massa totale del sistema, M la massa del cannone ed m quella del proiettile. Possiamo scrivere l'equazione di moto del sistema nella forma:

$$\mathbf{R}_{est} = \frac{d\mathbf{Q}}{dt}, \quad (1)$$

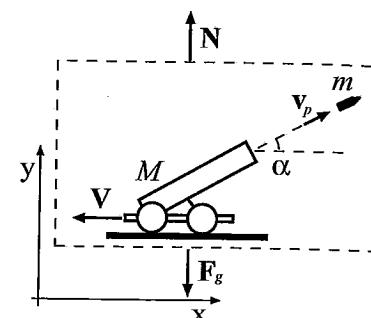
dove $\mathbf{R}_{est} = \mathbf{N} + \mathbf{F}_g$ è la risultante delle forze esterne e \mathbf{Q} la quantità di moto totale del sistema. Introduciamo un sistema di coordinate cartesiane, il cui asse x sia diretto orizzontalmente, mentre l'asse y sia diretto verso l'alto. Proiettando l'equazione (1) su tali assi, otteniamo:

$$\begin{cases} \frac{dQ_x}{dt} = 0 \\ \frac{dQ_y}{dt} = N - (M + m)g \end{cases} \quad (2)$$

dove Q_x e Q_y sono le componenti di \mathbf{Q} rispettivamente sugli assi x ed y , $N = |\mathbf{N}|$ e $g = |\mathbf{g}|$. In base alla prima delle (2) si deduce che la componente orizzontale della quantità di moto del sistema si conserva durante lo sparo del proiettile; poiché la quantità di moto iniziale del sistema è nulla, possiamo riscrivere tale condizione nella forma

$$mv_p \cos \alpha + MV = 0, \quad (3)$$

essendo v_p il modulo della velocità del proiettile, α l'angolo che tale velocità forma con la direzione orizzontale e V la componente sull'asse x della velocità di rinculo del cannone, che si ritiene diretta orizzontalmente. Dalla (3) si deduce che la velocità di rinculo è pari a:



$$V = -\frac{mv_p \cos \alpha}{M}. \quad (4)$$

L'impulso della reazione vincolare esercitato durante lo sparo può essere calcolato impiegando il teorema dell'impulso, secondo cui:

$$\mathbf{I} = \int_{t_i}^{t_f} \mathbf{R} dt = \Delta \mathbf{Q}, \quad (5)$$

dove \mathbf{I} è l'impulso complessivo esercitato sul sistema nell'intervallo temporale $[t_i, t_f]$ in cui avviene lo sparo e $\Delta \mathbf{Q}$ rappresenta la variazione di quantità di moto del sistema a seguito dello sparo. Si noti che, nell'intervallo temporale considerato, il contributo all'impulso di \mathbf{F}_g è trascurabile rispetto a quello della reazione vincolare \mathbf{N} , che assume carattere impulsivo. Possiamo quindi assumere che l'impulso della reazione vincolare \mathbf{I}_N coincida con l'impulso totale \mathbf{I} . Per la (5) risulta:

$$\mathbf{I}_N = \mathbf{Q}_f, \quad (6)$$

essendo $\mathbf{Q}_f = \mathbf{q}_{f,c} + \mathbf{q}_{f,p}$ la quantità di moto finale del sistema (che è stato assunto in quiete prima dello sparo), $\mathbf{q}_{f,c}$ la quantità di moto finale del cannone e $\mathbf{q}_{f,p}$ quella del proiettile. In base alla (4) ed alla direzione di moto del proiettile dopo lo sparo, la (6) diviene:

$$\mathbf{I}_N = \mathbf{q}_{f,c} + \mathbf{q}_{f,p} = mv_p(\cos \alpha \mathbf{u}_x + \sin \alpha \mathbf{u}_y) - M \frac{mv_p \cos \alpha}{M} \mathbf{u}_x, \quad (7)$$

da cui:

$$\mathbf{I}_N = mv_p \sin \alpha \mathbf{u}_y. \quad (8)$$

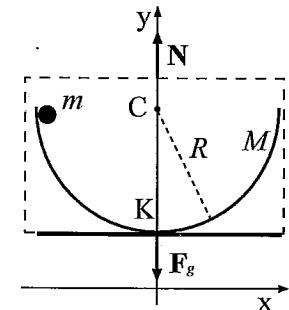
S.6.17.

Consideriamo il sistema composto dalla guida, di massa M , e dalla bilia, di massa m , individuato dal rettangolo tratteggiato in figura. Le forze esterne agenti sul sistema sono la reazione vincolare \mathbf{N} del piano di appoggio e la forza peso complessiva $\mathbf{F}_g = M_T g$, dove $M_T = M + m$ è la massa totale del sistema e g l'accelerazione di gravità. La legge del moto del sistema sarà:

$$\mathbf{R}_{est} = M_T \frac{d^2 \mathbf{r}_{CM}}{dt^2}, \quad (1)$$

dove $\mathbf{R}_{est} = \mathbf{N} + \mathbf{F}_g$ è la risultante delle forze esterne agenti sul sistema ed \mathbf{r}_{CM} è il vettore posizione che individua il centro di massa del sistema. Introduciamo un sistema di coordinate cartesiane il cui asse x sia diretto orizzontalmente, mentre l'asse y sia diretto verso l'alto. Proiettando la (1) lungo gli assi cartesiani, otteniamo:

$$\begin{cases} M_T \frac{d^2 x_{CM}}{dt^2} = 0 \\ M_T \frac{d^2 y_{CM}}{dt^2} = N - M_T g \end{cases} \quad (2)$$



dove x_{CM} ed y_{CM} sono le coordinate del centro di massa, $N = |N|$ e $g = |g|$. Come si può osservare dalla prima delle (2), l'accelerazione del centro di massa non ha componente lungo l'asse x; pertanto la componente $v_{CM,x}$ della velocità del centro di massa lungo x deve risultare costante. Supponiamo che nell'istante $t = 0$ gli oggetti siano in quiete; ne deriva che la velocità del centro di massa è nulla:

$$v_{CM,x}(t) = \frac{dx_{CM}(t)}{dt} = 0, \quad (3)$$

da cui discende che *l'ascissa del centro di massa rimane costante nel tempo*. Per calcolare il valore di x_{CM} utilizziamo la definizione di centro di massa:

$$x_{CM} = \frac{mx_b + Mx_g}{m + M}, \quad (4)$$

dove x_b ed x_g sono rispettivamente l'ascissa del centro di massa della bilia e della guida in un generico istante. Assumendo la guida omogenea, il suo centro di massa giace lungo l'asse verticale passante per il centro C della guida (vedi figura); per comodità assumeremo che l'asse y coincida con l'asse della guida, di modo che all'istante iniziale $x_g(0) = 0$. Di conseguenza risulterà $x_b(0) = -R$, dove R è il raggio della guida; si noti che la bilia è assimilabile ad un corpo puntiforme, la cui posizione coincide con quella del suo stesso centro di massa. Con tali condizioni iniziali si ottiene dalla (3) e dalla (4) che:

$$x_{CM} = -\frac{mR}{m + M} = \text{costante}. \quad (5)$$

Immaginiamo ora di lasciare andare la bilia; all'istante t_0 in cui questa giunge al fondo della guida (punto K in figura), la sua ascissa $x_b(t_0)$ coinciderà con l'ascissa $x_g(t_0)$ del centro di massa della guida, in quanto si troverà a passare per l'asse della guida stessa; tale assunzione implicitamente comporta che la guida, pur potendo scivolare lungo il piano di appoggio, non oscilli. Pertanto potremo porre:

$$x_{CM} = \frac{mx_g(t_0) + Mx_g(t_0)}{m + M} = x_g(t_0). \quad (6)$$

Sostituendo la relazione (5) nella (6) si ottiene quindi che

$$x_g(t_0) = -\frac{mR}{m + M}. \quad (7)$$

Per calcolare la velocità della guida e della bilia nell'istante t_0 in cui questa giunge al fondo della guida, utilizzeremo l'equazione (3) assieme al principio di conservazione dell'energia meccanica. Difatti dalla (3), usando la definizione di velocità del centro di massa, deriva che:

$$v_{CM,x} = \frac{mv_{b,x} + Mv_{g,x}}{M_T} = 0, \quad (8)$$

dove $v_{b,x}$ è la componente sull'asse x della velocità della bilia, mentre $v_{g,x}$ è la componente della velocità della guida; tenendo conto che la guida si muove orizzontalmente e che la velocità della bilia nel punto K è anche essa diretta orizzontalmente, possiamo riscrivere la precedente equazione come:

$$mv_b(t_0) = Mv_g(t_0), \quad (9)$$

dove stavolta v_b e v_g sono i moduli delle velocità dei due oggetti. Applichiamo ora il principio di conservazione dell'energia meccanica tra l'istante di partenza e l'istante t_0 ; risulterà:

$$mgR = \frac{1}{2} [mv_b^2 + Mv_g^2]; \quad (10)$$

sostituendo la (9) nella (10) si ottiene

$$mgR = \frac{1}{2} Mv_g^2 \left[1 + \frac{M}{m} \right], \quad (11)$$

da cui la velocità della guida risulterà:

$$v_g(t_0) = m \sqrt{\frac{2gR}{M(m + M)}}, \quad (12)$$

mentre quella della bilia, per la (9), sarà:

$$v_b(t_0) = M \sqrt{\frac{2gR}{M(m + M)}}. \quad (13)$$

Si noti che le velocità dei due oggetti sono dirette in versi opposti.

S.6.18.

L'oggetto di massa m in considerazione è sottoposto a tre forze: la reazione vincolare del piano di appoggio N ; la forza peso $F_g = mg$, con g accelerazione di gravità; la tensione della fune T . Detta \mathbf{R} la risultante delle forze agenti sull'oggetto, l'equazione di moto sarà:

$$\mathbf{R} = ma, \quad (1)$$

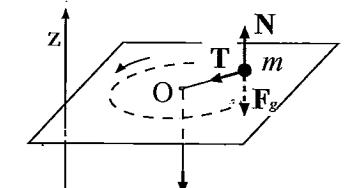
essendo a l'accelerazione dell'oggetto. Introdotto un asse z perpendicolare al piano del moto e diretto verso l'alto, possiamo proiettarvi la (1); ponendo $N = |N|$ e $g = |g|$, si ottiene:

$$N - mg = 0, \quad (2)$$

dove si è tenuto conto del fatto che l'oggetto non si muove in direzione z e dunque la componente verticale dell'accelerazione è nulla; pertanto la reazione vincolare è compensata dalla forza peso. Per determinare lo stato di moto dell'oggetto durante il tiro della fune, utilizzeremo la seconda equazione cardinale della dinamica:

$$\mathfrak{M}_{(O)} = \frac{dL_{(O)}}{dt}, \quad (3)$$

dove $\mathfrak{M}_{(O)}$ è il momento delle forze agenti sull'oggetto, calcolato rispetto al punto O per cui passa la fune, ed $L_{(O)}$ è il momento angolare dell'oggetto. Si consideri tuttavia che il



momento delle forze è nullo poiché, per quanto detto in precedenza, \mathbf{N} ed \mathbf{F}_g si annullano a vicenda, mentre \mathbf{T} è diretta verso il polo O e dunque il suo momento rispetto ad O è nullo. Pertanto, in base alla (3), risulta che il momento angolare dell'oggetto è una costante del moto. Assumendo che il moto avvenga in senso antiorario, detto r_1 il raggio della traiettoria circolare iniziale ed ω_1 la velocità angolare di partenza, per la definizione di momento angolare risulterà:

$$\mathbf{L}_{(O)} = mr_1^2\omega_1 \mathbf{u}_z, \quad (4)$$

dove \mathbf{u}_z è il versore dell'asse z . A seguito del tiro della fune, il raggio della traiettoria diverrà r_2 e la velocità angolare assumerà il valore (incognito) ω_2 ; il momento angolare si potrà allora scrivere come:

$$\mathbf{L}_{(O)} = mr_2^2\omega_2 \mathbf{u}_z. \quad (5)$$

Per la costanza del momento angolare possiamo eguagliare i secondi membri delle equazioni (4) e (5), ottenendo:

$$r_1^2\omega_1 = r_2^2\omega_2, \quad (6)$$

da cui si ottiene:

$$\omega_2 = \omega_1 \left(\frac{r_1}{r_2} \right)^2. \quad (7)$$

S.6.19.

Le considerazioni che saranno riportate nel seguito non dipendono dal numero di oggetti che costituiscono il sistema; pertanto faremo riferimento al sistema più semplice, costituito da due oggetti di masse m_1 ed m_2 , la cui posizione sia individuata rispetto ad un punto O mediante i vettori \mathbf{r}_1 ed \mathbf{r}_2 e su cui agiscono, rispettivamente, le forze esterne \mathbf{F}_1 ed \mathbf{F}_2 . Per le ipotesi di partenza, la risultante \mathbf{R}_{est} delle forze esterne è nulla, per cui porremo:

$$\mathbf{R}_{est} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 = 0. \quad (1)$$

Passiamo ora a rispondere ai sei punti riportati nel problema.

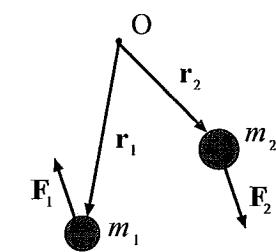
(a) Consideriamo l'equazione di moto della particella di massa m_1 :

$$\mathbf{F}_1 = \frac{d\mathbf{q}_1}{dt}, \quad (2)$$

dove \mathbf{q}_1 è la sua quantità di moto; come si evince da tale relazione, essendo in genere la forza agente su m_1 diversa da zero, la quantità di moto della particella non si conserverà nel tempo; stessa proprietà può enunciarsi per la particella m_2 .

(b) L'equazione di moto del centro di massa può esprimersi nella forma:

$$\mathbf{R}_{est} = \frac{d\mathbf{Q}}{dt}, \quad (3)$$



6.2. Soluzioni

dove \mathbf{Q} è la quantità di moto totale del sistema, che coincide con la quantità di moto del centro di massa:

$$\mathbf{Q} = M_T \mathbf{v}_{CM}, \quad (4)$$

dove $M_T = m_1 + m_2$ è la massa totale del sistema e \mathbf{v}_{CM} è la velocità del centro di massa. Poiché la risultante delle forze agenti sul sistema è nulla, per la (3) la quantità di moto totale si conserva nel tempo.

(c) Consideriamo un intervallo di tempo infinitesimo dt durante il quale le due particelle si muovono sotto l'azione delle forze esterne; si rammenta che le particelle non interagiscono tra loro, per cui le forze interne al sistema sono nulle. Siano \mathbf{v}_{i1} e \mathbf{v}_{i2} le velocità iniziali delle particelle. Per il teorema dell'energia cinetica, il lavoro infinitesimo complessivo $\delta\mathcal{L}_T$ delle forze agenti sul sistema durante dt egualia la variazione infinitesima di energia cinetica dE_{cT} del sistema stesso. Avremo quindi:

$$dE_{cT} = \delta\mathcal{L}_T = \mathbf{F}_1 \cdot d\mathbf{r}_1 + \mathbf{F}_2 \cdot d\mathbf{r}_2, \quad (5)$$

dove $d\mathbf{r}_1$ e $d\mathbf{r}_2$ sono gli spostamenti infinitesimi subiti dalle due particelle durante l'intervallo dt . Mediante la definizione di potenza $\mathcal{P}_T = \delta\mathcal{L}_T/dt$ e tenendo conto della definizione di velocità, possiamo riscrivere la (5) come:

$$\frac{dE_{cT}}{dt} = \mathcal{P}_T = \mathbf{F}_1 \cdot \mathbf{v}_{i1} + \mathbf{F}_2 \cdot \mathbf{v}_{i2}. \quad (6)$$

Impiegando la (1), possiamo trasformare la (6) come:

$$\frac{dE_{cT}}{dt} = \mathbf{F}_1 \cdot (\mathbf{v}_{i1} - \mathbf{v}_{i2}). \quad (7)$$

Poiché non è stata fatta alcuna ipotesi sulle velocità iniziali delle particelle, se ne deduce che la potenza complessiva \mathcal{P}_T , erogata dalle forze esterne al sistema, sia in genere diversa da zero. Pertanto, per la (7), deduciamo che l'energia cinetica totale del sistema non si conserva nel tempo.

(d) Per quanto detto nel precedente punto, si deduce che anche l'energia cinetica della singola particella generalmente non si conserva. Si noti che ciò è direttamente deducibile dalla mancata conservazione della quantità di moto delle singole particelle (si veda in proposito il punto a).

(e) Il momento angolare totale $\mathbf{L}_{(O)}$ del sistema è legato al momento totale delle forze esterne $\mathfrak{M}_{(O)}$ dalla relazione:

$$\mathfrak{M}_{(O)} = \frac{d\mathbf{L}_{(O)}}{dt}, \quad (8)$$

dove entrambi i due vettori sono valutati rispetto al polo O . Per definizione di momento delle forze, risulta che:

$$\mathfrak{M}_{(O)} = \mathbf{r}_1 \times \mathbf{F}_1 + \mathbf{r}_2 \times \mathbf{F}_2, \quad (9)$$

dove \mathbf{r}_1 ed \mathbf{r}_2 individuano la posizione dei punti di applicazione delle forze agenti sul sistema rispetto ad O . Tenuto conto della (1), possiamo riscrivere la (9) nella forma:

$$\mathfrak{M}_{(O)} = (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \times \mathbf{F}_1. \quad (10)$$

Poiché non è stata fatta alcuna ipotesi sulla posizione dei due oggetti, ne deduciamo che il momento totale delle forze è diverso da zero *anche se la risultante delle forze esterne è nulla*. Pertanto il momento angolare del sistema in genere non si conserverà nel tempo.
(f) Consideriamo ad esempio la seconda particella; il suo momento angolare $\mathbf{L}_{2,(O)}$ è legato al momento $\mathfrak{M}_{2,(O)}$ delle forze agenti su m_2 dalla relazione:

$$\mathfrak{M}_{2,(O)} = \frac{d\mathbf{L}_{2,(O)}}{dt}. \quad (11)$$

E' evidente che il momento delle forze agenti su m_2 è generalmente diverso da zero e quindi, anche in questo caso, il momento angolare della particella non si conserverà nel tempo.

S.6.20.

Considereremo nel seguito il sistema composto dal carrello di massa M e dalla persona di massa m , che nella figura a lato è racchiuso in un rettangolo a tratteggio. Le forze esterne al sistema sono la reazione vincolare \mathbf{N} e la forza peso complessiva $\mathbf{F}_g = M_T g$, con g accelerazione di gravità ed $M_T = m + M$ massa totale del sistema. Introduciamo un sistema di coordinate cartesiane solidali al suolo, il cui asse x sia diretto orizzontalmente e l'asse y sia diretto verso l'alto. In un sistema di riferimento inerziale, possiamo porre:

$$\mathbf{R}_{est} = M_T \mathbf{a}_{CM}, \quad (1)$$

dove \mathbf{a}_{CM} è l'accelerazione del centro di massa del sistema. Si noti che la risultante delle forze esterne $\mathbf{R}_{est} = \mathbf{N} + \mathbf{F}_g$ non ha componente lungo l'asse x ; ne ricaviamo che:

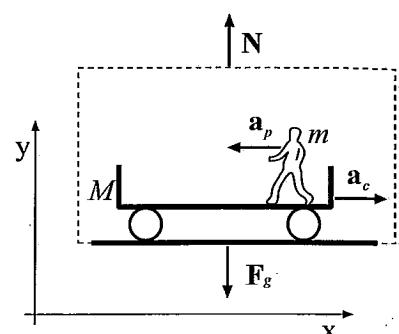
$$a_{CM,x} = 0, \quad (2)$$

essendo $a_{CM,x}$ la componente di \mathbf{a}_{CM} lungo l'asse x . Per definizione di accelerazione del centro di massa, possiamo anche porre:

$$a_{CM,x} = \frac{Ma_{c,x} + ma_{p,x}}{M_T}, \quad (3)$$

essendo $a_{c,x}$ ed $a_{p,x}$ le componenti lungo l'asse x rispettivamente dell'accelerazione del carrello \mathbf{a}_c e di quella \mathbf{a}_p della persona che cammina su di esso. In base alla (2) ed alla (3), possiamo anche scrivere:

$$a_{c,x} = -\frac{m}{M} a_{p,x}. \quad (4)$$



6.2 Soluzioni

Introduciamo ora un secondo sistema di riferimento solidale al carrello, dunque di carattere non inerziale. In base ai dati assegnati dal problema, l'accelerazione della persona rispetto al carrello è diretta orizzontalmente e pari ad \mathbf{a}_p ; il legame fra l'accelerazione della persona misurata nei due sistemi di riferimento è dato dall'equazione:

$$\mathbf{a}_p = \mathbf{a}_R + \mathbf{a}_{tr}, \quad (5)$$

dove \mathbf{a}_{tr} è l'accelerazione di trascinamento del sistema. Si noti che l'accelerazione di trascinamento del sistema non inerziale è pari all'accelerazione del carrello misurata nel sistema inerziale; tenuto conto di ciò e proiettando la (5) lungo l'asse x otteniamo:

$$a_{p,x} = a_{R,x} + a_{c,x}, \quad (6)$$

essendo $a_{R,x}$ la componente lungo x di \mathbf{a}_R . Sostituendo la (4) nella (6) e dopo semplici passaggi algebrici, otteniamo l'accelerazione del carrello:

$$a_{c,x} = -\frac{ma_{R,x}}{m + M}, \quad (7)$$

mentre l'accelerazione della persona nel sistema inerziale solidale al suolo sarà:

$$a_{p,x} = \frac{Ma_{R,x}}{m + M}. \quad (8)$$

Sostituendo nelle precedenti equazioni i dati assegnati dal problema e tenuto conto che tutti i vettori accelerazione hanno unicamente la componente lungo x , otteniamo che $|a_p| = 0.615 \text{ m/s}^2$ mentre $|a_c| = 0.185 \text{ m/s}^2$.

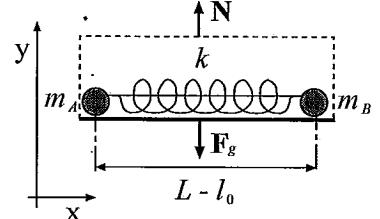
S.6.21.

Introduciamo un sistema di coordinate cartesiane, in cui l'asse x sia parallelo al piano su cui sono poggiati i due corpi, mentre l'asse y sia diretto verso l'alto. I corpi, di masse m_A ed m_B , sono collegati da una molla di costante elastica k con cui formano un sistema, indicato in figura da un rettangolo a tratteggio. Le forze esterne a tale sistema sono la reazione vincolare del piano \mathbf{N} e la forza peso complessiva $\mathbf{F}_g = M_T g$, dove g è l'accelerazione di gravità ed $M_T = m_A + m_B$ la massa totale del sistema. L'equazione di moto del sistema può essere scritta nella forma:

$$\mathbf{R}_{est} = \frac{d\mathbf{Q}}{dt}, \quad (1)$$

dove $\mathbf{R}_{est} = \mathbf{N} + \mathbf{F}_g$ è la risultante delle forze esterne agenti sul sistema e \mathbf{Q} la quantità di moto totale del sistema stesso. Come si evince dalla figura, le forze esterne non hanno componenti lungo l'asse x ; pertanto la componente lungo x di \mathbf{Q} è una costante del moto. Proiettando la (1) lungo x e tenuto conto che inizialmente le masse sono in quiete, deduciamo che:

$$Q_x = m_A v_{A,x} + m_B v_{B,x} = 0, \quad (2)$$



dove $v_{A,x}$ e $v_{B,x}$ sono le componenti lungo x delle velocità delle due masse. Ricordando che $m_B = 3m_A$, possiamo riscrivere la (2) nella forma:

$$v_{A,x} = -3v_{B,x}. \quad (3)$$

La forza elastica della molla, che è una forza interna al sistema, ha modo di agire sulle masse solo quando viene tagliato il filo che le collega. Questa è una forza di tipo conservativo; potremo pertanto impiegare il principio di conservazione dell'energia meccanica, applicandolo tra l'istante in cui viene reciso il filo e l'istante in cui le masse raggiungono la massima velocità. Si tenga presente che, in accordo con l'equazione (3), la massima velocità delle due masse (e dunque la loro massima energia cinetica) viene raggiunta in corrispondenza del minimo di energia potenziale elastica, e cioè nel momento in cui la molla raggiunge la lunghezza di riposo. Pertanto potremo porre:

$$\frac{1}{2}kl_0^2 = \frac{1}{2}m_A v_A^2 + \frac{1}{2}m_B v_B^2, \quad (4)$$

dove v_A e v_B sono i massimi valori raggiunti dai moduli delle velocità dei due corpi. Poiché il moto avviene solo in direzione x, possiamo impiegare la (3) per legare i moduli delle due velocità:

$$v_A = 3v_B, \quad (5)$$

che, introdotta nella (4), porta ad ottenere:

$$\frac{1}{2}kl_0^2 = \frac{9}{2}m_A v_B^2 + \frac{1}{2}(3m_A)v_B^2; \quad (6)$$

con semplici passaggi si ottiene poi:

$$v_B = \sqrt{\frac{kl_0^2}{12m_A}}, \quad (7)$$

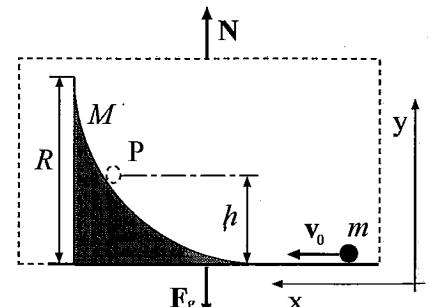
e

$$v_A = \sqrt{\frac{3kl_0^2}{4m_A}}. \quad (8)$$

S.6.22.

Consideriamo il sistema composto dal cuneo, di massa M , e dal corpo di massa m , come indicato dal rettangolo tratteggiato nella figura a lato. Su tale sistema agiscono unicamente la reazione vincolare del piano di appoggio N e la forza peso complessiva $\mathbf{F}_g = M_T g$, essendo g l'accelerazione di gravità ed $M_T = M+m$ la massa totale del sistema. L'equazione di moto si potrà scrivere come:

$$\mathbf{R}_{est} = \frac{d\mathbf{Q}}{dt}, \quad (1)$$



6.2 Soluzioni

dove $\mathbf{R}_{est} = \mathbf{N} + \mathbf{F}_g$ è la risultante delle forze esterne e \mathbf{Q} la quantità di moto totale del sistema. Introduciamo un sistema di coordinate cartesiane, il cui asse x sia parallelo al piano orizzontale, mentre l'asse y sia diretto verso l'alto. Poiché \mathbf{R}_{est} non ha componenti in direzione orizzontale, ne deduciamo che

$$\frac{dQ_x}{dt} = 0, \quad (2)$$

da cui deriva che la componente Q_x della quantità di moto del sistema lungo x si conserva. Inizialmente il cuneo è in quiete, mentre la massa m si muove con velocità diretta orizzontalmente di modulo pari a v_0 ; ne deriva che:

$$Q_x = mv_x + MV_x = mv_0, \quad (3)$$

dove v_x e V_x sono le componenti lungo x rispettivamente della velocità della massa m e della velocità del cuneo in un generico istante. Dato che le forze agenti sono di tipo conservativo, possiamo applicare il principio di conservazione dell'energia meccanica tra l'istante iniziale e l'istante in cui la massa m ha raggiunto la massima quota sul cuneo (punto P in figura); si noti che in P la massa m è ferma rispetto al cuneo, per cui la sua velocità rispetto al suolo è pari a quella del cuneo stesso. Avremo pertanto:

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}(m+M)V^2 + mgh, \quad (4)$$

dove V è il modulo della velocità del cuneo nel momento in cui la massa m ha raggiunto la massima quota h . Impiegando la (3) nell'istante in cui la massa m giunge in P e tenuto conto che la velocità dei due corpi è diretta orizzontalmente, si ottiene:

$$(m+M)V = mv_0, \quad (5)$$

da cui

$$V = \frac{mv_0}{m+M}. \quad (6)$$

Sostituendo la (6) nella (4), si ottiene:

$$h = \frac{Mv_0^2}{2g(m+M)}. \quad (7)$$

Posto che $h = R/2$, dalla precedente relazione si ottiene il minimo valore di v_0 necessario per far giungere la massa m nel punto P:

$$v_0 = \sqrt{\frac{gR(m+M)}{M}}. \quad (8)$$

Sostituendo nella precedente equazione i dati numerici assegnati, si ottiene $v_0 = 2.48$ m/s.

Capitolo 7

Gravitazione universale

7.1 Problemi

P.7.1.

Un proiettile viene sparato in direzione verticale dalla superficie della Terra con velocità iniziale \mathbf{v}_0 . Si determini il valore minimo di v_0 per il quale il proiettile può sfuggire all'attrazione della Terra.

Raggio della Terra: $R = 6400$ km; massa della Terra: $M = 6 \times 10^{24}$ kg, $\gamma = 6.67 \times 10^{-11}$ N m²/kg².

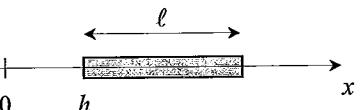
P.7.2.

Un proiettile viene sparato in direzione verticale dalla superficie terrestre con velocità $v_0 = \sqrt{2\gamma M_T / R_T}$, dove M_T ed R_T sono la massa e il raggio della Terra, rispettivamente. Si calcoli il tempo necessario perché il proiettile raggiunga una distanza dal centro della Terra pari a $2R$.

Raggio della Terra: $R_T = 6400$ km; massa della Terra: $M_T = 6 \times 10^{24}$ kg, $\gamma = 6.67 \times 10^{-11}$ N m²/kg².

P.7.3.

Una sbarra non uniforme di lunghezza ℓ viene posta lungo l'asse x ad una distanza h dall'origine. La densità lineare di massa, λ , varia secondo l'espressione $\lambda = \lambda_0 + Ax^2$, dove λ_0 e A sono delle costanti. Si determini la forza agente su un corpo puntiforme di massa m posto nell'origine.



P.7.4.

Un pianeta si muove su una traiettoria circolare di raggio R intorno ad una stella di massa M . Si dimostri che il quadrato del periodo di rivoluzione del pianeta intorno alla stella è proporzionale a R^3 .

P.7.5.

Un satellite di massa m descrive un'orbita circolare attorno a un pianeta di massa M ($M \gg m$). Il momento angolare del satellite rispetto al centro del pianeta è L . Si

determini l'energia totale del satellite in funzione di m , M e L .

P.7.6.

Un pianeta di massa m percorre un'orbita ellittica intorno ad una stella di massa M . Sapendo che la minima distanza dal centro della stella è R_1 e la massima distanza è R_2 , si calcoli il momento angolare del pianeta rispetto al centro della stella.

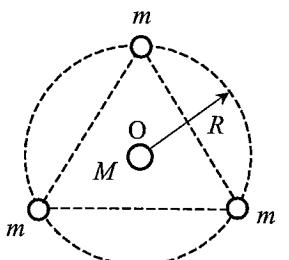
P.7.7.

Un asteroide passa da un punto a distanza r_0 dal centro della Terra con velocità v_0 ortogonale al vettore posizione \mathbf{r}_0 . Si determini la velocità v_0 per cui l'asteroide descrive un'orbita ellittica con perigeo e apogeo a distanza r_0 e $3r_0$ dal centro della Terra. Si esprimi il risultato in funzione di r_0 , della massa M della Terra e della costante di gravitazione universale γ .

P.7.8.

Tre corpi di massa m ruotano, per effetto delle sole forze gravitazionali, su una circonferenza di raggio R attorno ad un corpo fisso di massa M , mantenendosi equidistanti. Per l'intero sistema si calcoli:

- la quantità di moto totale;
- il momento angolare totale, rispetto al centro O del corpo di massa M ;
- il periodo di rivoluzione dei corpi di massa m attorno al corpo di massa M .



P.7.9.

Con riferimento al sistema di corpi descritto nel problema precedente, si calcoli l'energia potenziale gravitazionale totale.

P.7.10.

Un satellite artificiale di massa m si muove attorno alla Terra su un'orbita circolare di raggio $2R_T$, dove R_T è il raggio della Terra. Si determini l'energia necessaria per portare il satellite su un'orbita geostazionaria, esprimendo il risultato in funzione della massa del satellite, del periodo di rotazione della Terra (T), del raggio della Terra e dell'accelerazione di gravità sulla superficie terrestre (g).

P.7.11.

Un pianeta sferico, non rotante e privo di atmosfera, ha massa M e raggio R . Dalla sua superficie viene lanciato un proiettile con velocità iniziale

$$v_0 = \frac{3}{4} \left(\frac{2\gamma M}{R} \right)^{1/2}$$

dove γ è la costante di gravitazione universale. Si calcoli la massima distanza che esso raggiunge dal centro del pianeta se viene lanciato: (i) in direzione radiale; (ii) in direzione tangenziale.

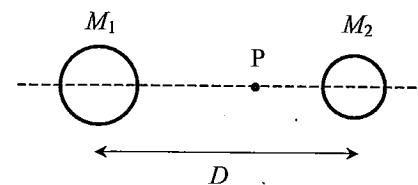
7.1 Problemi

P.7.12.

Ad un certo istante un corpo celeste si trova a una distanza R dal centro del Sole e si muove con una velocità che forma un angolo di $\theta_0 = 45^\circ$ rispetto alla retta congiungente il corpo con il Sole. L'energia meccanica totale associata a tale corpo è nulla (l'energia potenziale è assunta nulla a distanza infinita). Si dica che tipo di traiettoria descrive il corpo celeste e si calcoli la minima distanza dal centro del Sole.

P.7.13.

Si vuole collocare un satellite artificiale su un'orbita circolare ad una quota H dalla superficie terrestre. Considerando la rotazione della Terra, si calcoli il minimo lavoro necessario se il satellite viene lanciato (i) dall'equatore; (ii) dal polo. Si assuma che la Terra sia una sfera omogenea e si trascurino gli attriti. Si esprimano i risultati in funzione della massa m del satellite, della quota H , della costante di gravitazione universale γ , della massa della Terra M , del suo raggio R e del suo periodo di rotazione T .



P.7.14.

Si considerino due pianeti di massa M_1 e M_2 , con $M_1 = 4M_2$. Sia D la distanza fra i centri dei due pianeti. Si determini la distanza dal centro dei due pianeti del punto P in cui il campo gravitazionale totale è nullo.

P.7.15.

Due particelle di massa m e M , soggette unicamente alla loro mutua interazione gravitazionale, sono inizialmente ferme a distanza R_0 . Si calcoli la velocità delle due particelle quando la distanza è R_1 .

P.7.16.

In una stella doppia le masse delle due stelle sono m_1 e m_2 e la loro distanza d rimane costante durante il moto. Si determinino:

- la velocità angolare di rotazione delle due stelle intorno al loro centro di massa;
- l'energia meccanica del sistema;
- il momento angolare rispetto al centro di massa.

P.7.17.

Un razzo di massa m è dotato di un motore a reazione in grado di esercitare una forza \mathbf{F} costante. Il razzo parte dalla superficie terrestre ed il motore rimane acceso finché il razzo raggiunge la minima velocità che gli consente di sfuggire all'attrazione gravitazionale della Terra. Trascurando l'attrito con l'aria, la variazione di massa del razzo e la rotazione della Terra, si determini la quota h alla quale il motore viene spento. Si esprima il risultato in funzione della massa m del razzo, della massa M della Terra, del raggio R della Terra e della forza \mathbf{F} .

P.7.18.

Un corpo sferico di raggio R e densità di massa uniforme ρ è isolato nello spazio. E' possibile definire la sua energia potenziale gravitazionale? In caso affermativo se ne calcoli

l'espressione.

P.7.19.

Utilizzando il teorema di Gauss, si calcoli il campo gravitazionale generato da una massa M distribuita uniformemente su una crosta sferica di raggio R e di spessore trascurabile.

P.7.20.

Utilizzando il teorema di Gauss, si calcoli il campo gravitazionale generato da una massa M distribuita uniformemente all'interno di una sfera di raggio R .

P.7.21.

Si ipotizzi di poter scavare un tunnel attraverso la Terra da una parte all'altra lungo un diametro. Considerando la Terra come una sfera omogenea, si descriva il moto di una particella di massa m all'interno del tunnel. Si calcoli inoltre il tempo impiegato da tale particella per passare da un lato all'altro della superficie terrestre.

Raggio della Terra: $R = 6400$ km.

7.2 Soluzioni

7.2 Soluzioni

S.7.1.

La minima velocità necessaria perché il proiettile possa sfuggire all'attrazione gravitazionale della Terra (velocità di fuga) si calcola imponendo che il proiettile raggiunga distanza infinita dalla Terra con velocità nulla. Assumendo che l'energia potenziale gravitazionale sia nulla all'infinito, si ha che all'infinito l'energia meccanica totale è nulla. Dal momento che l'energia meccanica si conserva, si conclude che l'energia meccanica totale è sempre uguale a zero. In particolare, sulla superficie terrestre si ha:

$$E(R_T) = \frac{1}{2}mv_0^2 - \gamma \frac{mM_T}{R_T} = 0. \quad (1)$$

Da cui si ottiene la velocità di fuga:

$$v_0 = \sqrt{\frac{2\gamma M_T}{R_T}} = 11.18 \text{ km/s} \quad (2)$$

S.7.2.

L'energia meccanica iniziale è data da:

$$E(R_T) = \frac{1}{2}mv_0^2 - \gamma \frac{mM_T}{R_T} = 0. \quad (1)$$

Dal momento che l'energia meccanica si conserva, si conclude che tale energia è sempre uguale a zero. In particolare, a distanza r ($r > R_T$) dal centro della Terra si ha:

$$E(r) = \frac{1}{2}mv^2 - \gamma \frac{mM_T}{r} = 0. \quad (2)$$

da cui possiamo ottenere la velocità del proiettile in funzione di r :

$$v(r) = \sqrt{2\gamma \frac{M_T}{r}} \quad (3)$$

Dal momento che il proiettile si muove solo in direzione radiale, si ottiene:

$$v(r) = \frac{dr}{dt} = \sqrt{2\gamma \frac{M_T}{r}} \quad (4)$$

La (4) è un'equazione differenziale a variabili separabili, che può essere riscritta come segue:

$$\frac{1}{\sqrt{2\gamma M_T}} \sqrt{r} dr = dt \quad (5)$$

L'equazione (5) può essere facilmente integrata dall'istante iniziale $t = 0$ in cui il proiettile parte dalla superficie terrestre, all'istante $t = T$ in cui esso raggiunge una distanza dal centro della Terra pari al doppio del raggio terrestre:

$$\frac{1}{\sqrt{2\gamma M_T}} \int_{R_T}^{2R_T} \sqrt{r} dr = \int_0^T dt, \quad (6)$$

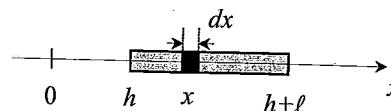
da cui si ottiene:

$$T = \frac{2}{3} \sqrt{\frac{R_T^3}{2\gamma M_T}} (2\sqrt{2} - 1) = 697 \text{ s} \quad (7)$$

S.7.3.

Consideriamo un elemento della sbarra di lunghezza infinitesima dx posto in una posizione individuata dall'ascissa x . La massa di tale elemento è data da:

$$dm = \lambda(x) dx. \quad (1)$$



La forza di attrazione gravitazionale esercitata da tale elemento su una particella di massa m posta in O è data da:

$$dF = \gamma \frac{\lambda(x) m dx}{x^2} \mathbf{u}_x = \gamma m \left(A + \frac{\lambda_0}{x^2} \right) dx \mathbf{u}_x \quad (2)$$

La forza complessiva esercitata dall'intera sbarra sulla particella si ottiene sommando vettorialmente le forze dF generate da tutti gli elementi infinitesimi in cui possiamo pensare di suddividere la sbarra. Poiché tutte le forze dF sono dirette come l'asse x , il risultato si ottiene integrando la (2) per x che varia fra h e $h + \ell$:

$$\mathbf{F} = \gamma m \mathbf{u}_x \int_h^{h+\ell} \left(A + \frac{\lambda_0}{x^2} \right) dx = \gamma m \ell \left[A + \frac{\lambda_0}{h(h+\ell)} \right] \mathbf{u}_x. \quad (3)$$

S.7.4.

Il pianeta si muove su una traiettoria circolare sotto l'azione della forza di attrazione gravitazionale esercitata dalla stella. La forza è puramente centripeta, quindi il pianeta si muove di moto circolare uniforme. La sua equazione di moto è data da:

$$m \frac{v^2}{R} = \gamma \frac{mM}{R^2} \Rightarrow v^2 = \gamma \frac{M}{R} \quad (1)$$

avendo indicato con m la massa del pianeta. Il periodo di rivoluzione del pianeta è dato dalla seguente espressione:

$$T = \frac{2\pi R}{v} \quad (2)$$

Utilizzando la (1) e la (2) si ottiene:

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{\gamma M} R^3 \quad (3)$$

7.2 Soluzioni

in accordo con la terza legge di Keplero.

S.7.5.

L'energia meccanica totale del satellite è data da:

$$E = \frac{1}{2} mv^2 - \gamma \frac{mM}{r} \quad (1)$$

La forza di attrazione gravitazionale fra satellite e pianeta fornisce la forza centripeta per il moto circolare del satellite:

$$m \frac{v^2}{r} = \gamma \frac{mM}{r^2} \Rightarrow v^2 = \gamma \frac{M}{r} \quad (2)$$

Sostituendo la (2) nella (1) si ottiene:

$$E = -\frac{1}{2} \gamma \frac{mM}{r} \quad (3)$$

Il momento angolare $\mathbf{L}_{(O)}$ del satellite rispetto al centro del pianeta si calcola facilmente ricordando che la velocità è perpendicolare al vettore posizione \mathbf{r} , che individua la posizione del satellite rispetto al centro del pianeta:

$$\mathbf{L}_{(O)} = \mathbf{r} \times m\mathbf{v} \quad |\mathbf{L}_{(O)}| = L = mrv \quad (4)$$

Dalle relazioni (2) e (4) si ottiene:

$$r = \frac{L^2}{\gamma m^2 M} \quad (5)$$

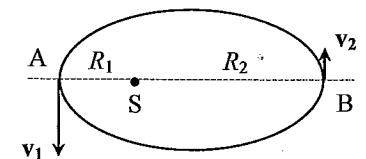
Sostituendo la (5) nella (3) si ha infine:

$$E = -\gamma^2 \frac{m^3 M^2}{2L^2} \quad (6)$$

S.7.6.

Il problema si risolve applicando i principi di conservazione dell'energia meccanica e del momento angolare rispetto al centro del campo di forze (la stella di massa M). Si osservi che i punti A e B a minima e massima distanza del pianeta dalla stella, sono punti di inversione di moto in direzione radiale. In tali posizioni la velocità del pianeta risulta perpendicolare ai corrispondenti vettori posizione con origine nel centro della stella. Il principio di conservazione del momento angolare si scrive quindi nel modo seguente:

$$mR_1 v_1 = mR_2 v_2 \quad (1)$$



avendo indicato con v_1 e v_2 i moduli delle velocità del pianeta nei punti A e B rispettivamente. Dalla relazione (1) si ricava:

$$v_2 = \frac{R_1}{R_2} v_1 \quad (2)$$

Applicando il principio di conservazione dell'energia meccanica si ottiene:

$$\frac{1}{2}mv_1^2 - \gamma \frac{mM}{R_1} = \frac{1}{2}mv_2^2 - \gamma \frac{mM}{R_2} \quad (3)$$

Sostituendo la (2) nella (3) si ottiene:

$$v_1 = \sqrt{2\gamma M \frac{R_2}{R_1(R_1 + R_2)}} \quad (4)$$

Il momento angolare, costante, è quindi dato da:

$$\mathbf{L}_{(S)} = m \sqrt{2\gamma M \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}} \mathbf{u}_z \quad (5)$$

avendo indicato con \mathbf{u}_z un versore perpendicolare al piano dell'orbita ellittica orientato secondo la regola della mano destra (nel caso riportato in figura il versore \mathbf{u}_z è perpendicolare e uscente dalla pagina).

S.7.7.

Per risolvere il problema applicheremo i principi di conservazione del momento angolare e dell'energia meccanica. Nelle posizioni a distanza minima (perigeo, P) e massima (apogeo, A) distanza dal centro della Terra, la velocità dell'asteroide ha componente radiale nulla, quindi la conservazione del momento angolare rispetto al centro della Terra si scrive nel modo seguente:

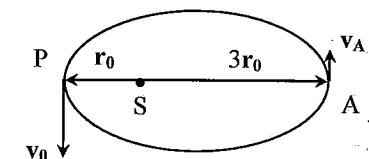
$$mr_0 v_0 = 3mr_0 v_A \Rightarrow v_A = \frac{v_0}{3} \quad (1)$$

avendo indicato con \mathbf{v}_A la velocità dell'asteroide in corrispondenza dell'apogeo. Dal momento che l'energia meccanica totale si conserva, possiamo scrivere:

$$\frac{1}{2}mv_0^2 - \gamma \frac{mM}{r_0} = \frac{1}{2}mv_A^2 - \gamma \frac{mM}{3r_0} \quad (2)$$

Utilizzando la (1) nella (2) si ottiene:

$$v_0 = \sqrt{\frac{3}{2} \gamma \frac{M}{r_0}} \quad (3)$$



7.2 Soluzioni

S.7.8.

(i) I tre corpi di massa m ruotano intorno al corpo di massa M mantenendosi equidistanti, quindi si muovono con la stessa velocità angolare. Indicando con \mathbf{v}_1 , \mathbf{v}_2 e \mathbf{v}_3 le velocità dei tre corpi, come mostrato in figura, si ha $|\mathbf{v}_1| = |\mathbf{v}_2| = |\mathbf{v}_3| = v$. La quantità di moto dell'intero sistema è data da:

$$\mathbf{Q} = m(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3) \quad (1)$$

Se trasliamo il vettore \mathbf{v}_2 parallelamente a se stesso in modo che il suo punto di applicazione coincida con l'apice del vettore \mathbf{v}_1 , e il vettore \mathbf{v}_3 in modo che il suo punto di applicazione coincida con l'apice di \mathbf{v}_2 , i tre vettori velocità vengono a costituire un triangolo equilatero. Quindi la loro somma vettoriale è nulla:

$$\mathbf{Q} = 0 \quad (2)$$

(ii) Il momento angolare totale rispetto al polo O è dato dalla somma vettoriale dei momenti angolari dei tre corpi di massa m rispetto al polo O:

$$\mathbf{L}_{(O)} = \sum_{i=1}^3 \mathbf{r}_i \times m\mathbf{v}_i \quad (3)$$

avendo indicato con \mathbf{r}_i ($i = 1, 2, 3$) i vettori posizione dei tre corpi rispetto al polo fisso O. Introducendo un asse z perpendicolare al piano di moto, orientato in modo da veder ruotare i tre corpi in verso antiorario, si ricava:

$$\mathbf{L}_{(O)} = 3mRv \mathbf{u}_z \quad (4)$$

Dobbiamo calcolare la velocità di rotazione v dei tre corpi. Riferiamoci al corpo 1 (vedi figura). La forza centripeta responsabile del moto circolare uniforme di tale corpo è data dal risultante delle forze gravitazionali dovute all'azione degli altri tre corpi:

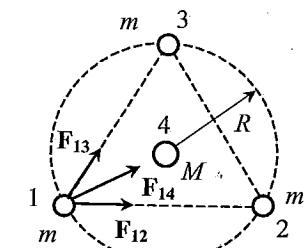
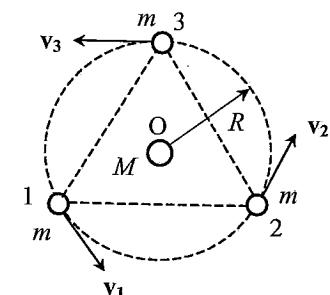
$$\mathbf{F}_1 = \mathbf{F}_{12} + \mathbf{F}_{13} + \mathbf{F}_{14} \quad (5)$$

dove:

$$|\mathbf{F}_{12}| = |\mathbf{F}_{13}| = \gamma \frac{m^2}{3R^2} \quad |\mathbf{F}_{14}| = \gamma \frac{mM}{R^2} \quad (6)$$

Indicando con \mathbf{u}_r il versore radiale uscente dal centro O, si ottiene:

$$\mathbf{F}_1 = -(|\mathbf{F}_{12}| \cos 30^\circ + |\mathbf{F}_{13}| \cos 30^\circ + |\mathbf{F}_{14}|) \mathbf{u}_r = -\gamma \frac{m}{R^2} \left(\frac{\sqrt{3}}{3} m + M \right) \mathbf{u}_r \quad (7)$$



L'equazione di moto del corpo 1 si scrive come segue:

$$\frac{m v^2}{R} = |\mathbf{F}_1| = \gamma \frac{m}{R^2} \left(\frac{\sqrt{3}}{3} m + M \right) \quad (8)$$

Da cui si ottiene il modulo della velocità di rotazione:

$$v = \sqrt{\frac{\gamma}{R} \left(\frac{\sqrt{3}}{3} m + M \right)} \quad (9)$$

Sostituendo l'espressione (9) nella (4) si ottiene che il momento angolare totale è dato da:

$$\mathbf{L}_{(O)} = m \sqrt{3\gamma R (3M + \sqrt{3}m)} \mathbf{u}_z \quad (10)$$

(iii) Utilizzando l'espressione (9) si ottiene:

$$T = \frac{2\pi R}{v} = \frac{2\pi R}{\sqrt{\frac{\gamma}{R} \left(\frac{\sqrt{3}}{3} m + M \right)}} \quad (11)$$

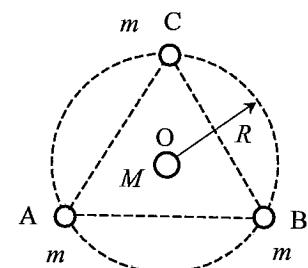
S.7.9.

Per calcolare l'energia gravitazionale del sistema di masse in considerazione, che possiamo considerare come puntiformi, seguiamo il processo che porta alla costruzione del sistema in esame. Per spostare una massa si agisce su di essa con una forza esterna uguale e contraria a quella dovuta al campo gravitazionale generato dalle altre masse del sistema. In tal modo il lavoro complessivo delle due forze agenti sulla massa (quella esterna e il risultante delle forze gravitazionali dovute alle altre masse) è nullo, la variazione di energia cinetica è nulla, quindi il lavoro eseguito dalla forza esterna, \mathcal{L}^{est} , si converte totalmente in energia potenziale del sistema. Assegnando, convenzionalmente, energia nulla alla configurazione in cui tutte le masse sono a distanza infinita fra di loro, si ha: $\mathcal{U} = \mathcal{L}^{est}$. Calcoliamo tale lavoro. Il posizionamento della prima massa, per esempio M , viene effettuato compiendo lavoro nullo, poiché inizialmente non è presente alcun campo gravitazionale. Il posizionamento della seconda massa, per esempio la massa m in posizione A, a partire dall'infinito fino alla posizione finale A, a distanza R da M , viene fatto muovendo il corpo nel campo gravitazionale generato da M . La forza esterna che agisce su m è data da:

$$\mathbf{F}_1^{est} = \gamma \frac{mM}{r^2} \mathbf{u}_r \quad (1)$$

essendo \mathbf{u}_r il versore uscente da M diretto lungo la congiungente le due masse. Si ha quindi:

$$\mathcal{L}_1^{est} = \int_{\infty}^A \mathbf{F}_1^{est} \cdot d\mathbf{r} = \gamma m M \int_{\infty}^R \frac{dr}{r^2} = -\gamma \frac{mM}{R} \quad (2)$$



7.2 Soluzioni

Per il trasporto della terza massa, ad esempio la massa m in posizione B, si procede nello stesso modo, ricordando che ora il campo gravitazionale in cui la massa si muove è generato dalle due masse già collocate nelle rispettive posizioni finali. Possiamo applicare il principio di sovrapposizione degli effetti. Si immagina dapprima che la massa venga spostata nel campo gravitazionale generato dalla sola massa M . In tal caso il lavoro esterno è dato da (vedi la (2)):

$$\mathcal{L}_{2,M}^{est} = -\gamma \frac{mM}{R} \quad (3)$$

Si immagina poi di spostare la massa in considerazione nel campo gravitazionale generato dalla sola massa m posta in A. In tal caso si ottiene:

$$\mathcal{L}_{2,m}^{est} = -\gamma \frac{m^2}{R\sqrt{3}} \quad (4)$$

Il lavoro complessivo è quindi:

$$\mathcal{L}_2^{est} = -\gamma \frac{mM}{R} - \gamma \frac{m^2}{R\sqrt{3}} \quad (5)$$

A questo punto dobbiamo posizionare l'ultima massa nella posizione C. In tal caso, seguendo lo stesso procedimento, otteniamo:

$$\mathcal{L}_3^{est} = -\gamma \frac{mM}{R} - \gamma \frac{m^2}{R\sqrt{3}} - \gamma \frac{m^2}{R\sqrt{3}} \quad (6)$$

L'energia gravitazionale è quindi data da:

$$\mathcal{U} = \mathcal{L}_1^{est} + \mathcal{L}_2^{est} + \mathcal{L}_3^{est} = -\gamma \frac{m}{R} (\sqrt{3}m + 3M) \quad (7)$$

Il procedimento descritto porta ad una semplice espressione dell'energia potenziale gravitazionale per un sistema di masse puntiformi:

$$\mathcal{U} = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1(i \neq j)}^N -\gamma \frac{m_i m_j}{r_{ij}} \quad (8)$$

dove r_{ij} rappresenta la distanza fra i corpi i e j ed N è il numero complessivo delle particelle che compongono il sistema in esame. L'applicazione diretta della (8) ($N=4$) porta alla (7).

S.7.10.

Determiniamo innanzitutto il raggio d dell'orbita geostazionaria. Un satellite geostazionario si mantiene fermo sopra la verticale di una certa località della Terra, quindi si muove su una traiettoria circolare con la stessa velocità angolare della Terra:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \quad (1)$$

dove T è il periodo di rotazione della Terra. La forza centripeta responsabile del moto del satellite è data dalla forza di attrazione gravitazionale, quindi la legge di moto del satellite è:

$$m\omega^2 d = \gamma \frac{mM_T}{d^2} \quad (2)$$

dove si è indicata con M_T la massa della Terra. Dalle (1) e (2) si ottiene:

$$d = \left(\frac{\gamma M_T T^2}{4\pi^2} \right)^{1/3} \quad (3)$$

Possiamo esprimere tale distanza in funzione di T e dell'accelerazione di gravità, g , sulla superficie terrestre. Infatti, la forza peso sulla superficie della Terra, mg , è data dalla forza di attrazione gravitazionale:

$$mg = \gamma \frac{mM_T}{R_T^2} \quad \gamma M_T = g R_T^2 \quad (4)$$

Sostituendo la (4) nell'espressione (3) si ottiene:

$$d = \left(\frac{g R_T^2 T^2}{4\pi^2} \right)^{1/3} \quad (5)$$

L'energia meccanica totale del satellite sull'orbita geostazionaria è data da:

$$E(d) = \frac{1}{2} m v_d^2 - \gamma \frac{mM_T}{d} \quad (6)$$

dove $v_d = \omega d$. Utilizzando la (2) nell'espressione (6) si ottiene:

$$E(d) = -\gamma \frac{mM_T}{2d} \quad (7)$$

L'energia meccanica totale del satellite sulla traiettoria circolare iniziale di raggio $2R_T$ si calcola nello stesso modo:

$$E(2R_T) = \frac{1}{2} m v^2 - \gamma \frac{mM_T}{2R_T} = -\gamma \frac{mM_T}{4R_T} \quad (8)$$

Nell'ultimo passaggio della (8) si è utilizzata la legge di moto del satellite sulla traiettoria iniziale:

$$\frac{m v^2}{2R_T} = \gamma \frac{mM_T}{4R_T^2} \quad (9)$$

L'energia che bisogna fornire per portare il satellite sulla traiettoria geostazionaria è quindi data da:

$$\mathcal{U} = E(d) - E(2R_T) = \gamma \frac{mM_T}{2} \left(\frac{1}{2R_T} - \frac{1}{d} \right) \quad (10)$$

Sostituendo le (3) e (4) nella (10) si ottiene il risultato finale:

$$\mathcal{U} = \frac{1}{2} mg R_T^2 \left[\frac{1}{2R_T} - \left(\frac{4\pi^2}{g R_T^2 T^2} \right)^{\frac{1}{3}} \right] \quad (11)$$

7.2 Soluzioni

Nota: sostituendo nella (5) i valori numerici: $R_T = 6371$ km, $g = 9.8$ m/s², $T = 86164$ s (giorno sidereo), si ottiene: $d = 42200$ km. Quindi i satelliti geostazionari si trovano ad un'altezza di circa 35830 km al di sopra della superficie terrestre.

S.7.11.

Il moto del proiettile avviene sotto l'azione della forza gravitazionale esercitata dal pianeta. Tale forza è centrale e a simmetria sferica, si conservano quindi l'energia meccanica totale e il momento angolare rispetto al centro del pianeta. Calcoliamo innanzitutto l'energia meccanica totale iniziale, che si conserva durante tutto il moto:

$$E = E_0 = \frac{1}{2} m v_0^2 - \gamma \frac{mM}{R} = -\frac{7}{16} \gamma \frac{mM}{R} \quad (1)$$

Dal momento che l'energia meccanica è negativa, l'orbita è chiusa e il proiettile non può allontanarsi indefinitamente dal pianeta. Esaminiamo ora separatamente i due casi proposti dal problema.

(i) Se il proiettile viene lanciato in direzione radiale, il suo moto sotto l'azione della sola forza gravitazionale avviene esclusivamente in direzione radiale. Quando il proiettile raggiunge la massima distanza, r_m , dal centro del pianeta, il moto in direzione radiale si inverte. In corrispondenza del punto di inversione del moto la velocità radiale del proiettile si annulla. Poiché nel caso in esame la velocità del proiettile è puramente radiale, in corrispondenza del punto di massimo allontanamento l'energia cinetica del proiettile si annulla e l'energia meccanica totale diventa esclusivamente di tipo potenziale:

$$E(r_m) = -\gamma \frac{mM}{r_m} \quad (2)$$

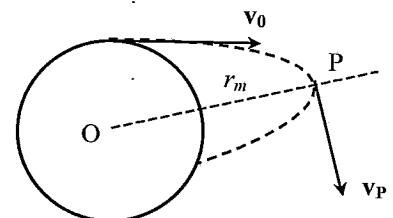
Applicando il principio di conservazione dell'energia e ricordando la (1) si ottiene:

$$E(r_m) = E_0 \Rightarrow r_m = \frac{16}{7} R. \quad (3)$$

(ii) Se il proiettile viene lanciato in direzione tangenziale, il suo moto *non* avviene solo in direzione radiale come nel caso precedente. Anche in questo caso la velocità radiale si annulla in corrispondenza del punto P di massimo allontanamento dal pianeta, che corrisponde ad un punto di inversione di moto in direzione radiale. Si ha quindi che nel punto P la velocità \mathbf{v}_P del proiettile ha solo il componente trasverso (cioè il componente perpendicolare al vettore posizione che individua la posizione del proiettile rispetto al centro del pianeta), come mostrato in figura. Il principio di conservazione dell'energia meccanica si scrive come segue:

$$E(P) = E_0 \quad \frac{1}{2} m v_P^2 - \gamma \frac{mM}{r_m} = -\frac{7}{16} \gamma \frac{mM}{R} \quad (4)$$

Per determinare r_m dobbiamo utilizzare anche il principio di conservazione del momento angolare. I momenti angolari iniziale e finale si calcolano facilmente ricordando che,



in entrambi i casi, il vettore velocità risulta perpendicolare al corrispondente vettore posizione:

$$\mathbf{L}_{(O)}(R) = \mathbf{r}_0 \times m\mathbf{v}_0, \quad |\mathbf{L}_{(O)}(R)| = mRv_0 \quad (5)$$

$$\mathbf{L}_{(O)}(r_m) = \mathbf{r} \times m\mathbf{v}_P, \quad |\mathbf{L}_{(O)}(r_m)| = mr_m v_P$$

Si ha quindi:

$$mRv_0 = mr_m v_P \Rightarrow v_P = \frac{R}{r_m} v_0 \quad (6)$$

Utilizzando la relazione (6) nella (4) si ottiene:

$$7r_m^2 - 16Rr_m + 9R^2 = 0 \quad (7)$$

L'equazione (7) ammette due soluzioni: $r_m = R$, che corrisponde alla posizione iniziale, e $r_m = 9R/7$, che corrisponde alla posizione di massimo allontanamento dal pianeta.

S.7.12.

Dal momento che l'energia meccanica totale del corpo è nulla, la sua traiettoria è di tipo parabolico, con fuoco nella posizione occupata dal Sole. Per risolvere il problema applicheremo il principio di conservazione dell'energia meccanica e la conservazione del momento angolare rispetto al Sole. Inizialmente il corpo si trova nel punto C, a distanza R dal Sole, con vettore velocità \mathbf{v}_C formante un angolo $\theta_0 = 45^\circ$ con la retta congiungente il corpo con il Sole. L'energia meccanica totale in tale posizione, uguale a zero, è data da:

$$\frac{1}{2}mv_C^2 - \gamma \frac{mM_S}{R} = 0 \Rightarrow v_C = \sqrt{\frac{2\gamma M_S}{R}} \quad (1)$$

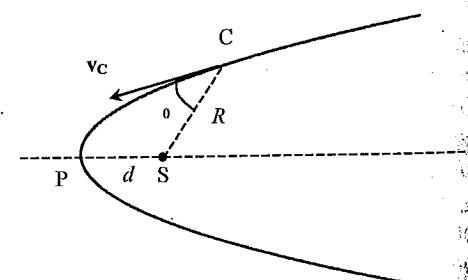
avendo indicato con m e M_S le masse del corpo celeste e del Sole, rispettivamente. L'energia meccanica nel punto P di massimo avvicinamento al Sole (perielio), sempre uguale a zero, è data da:

$$\frac{1}{2}mv_P^2 - \gamma \frac{mM_S}{d} = 0 \Rightarrow v_P = \sqrt{\frac{2\gamma M_S}{d}} \quad (2)$$

avendo indicato con \mathbf{v}_P la velocità del corpo nel punto P, posto a distanza d dal Sole.

Applichiamo ora il principio di conservazione del momento angolare calcolato rispetto al Sole, che costituisce il centro della forza gravitazionale responsabile del moto del corpo celeste. Il punto P di massimo avvicinamento è un punto di inversione di moto in direzione radiale, quindi la velocità radiale si annulla in P e il vettore velocità \mathbf{v}_P risulta perpendicolare al vettore posizione che individua la posizione del corpo rispetto al Sole. Il momento angolare in P è quindi:

$$\mathbf{L}_{(S)}(P) = \mathbf{r}_P \times m\mathbf{v}_P \Rightarrow |\mathbf{L}_{(S)}(P)| = mv_P d \quad (3)$$



7.2 Soluzioni

Il momento angolare in C è dato da:

$$\mathbf{L}_{(C)}(P) = \mathbf{r}_C \times m\mathbf{v}_C \Rightarrow |\mathbf{L}_{(S)}(C)| = mRv_C \sin \theta_0 \quad (4)$$

Dal momento che $|\mathbf{L}_{(S)}(P)| = |\mathbf{L}_{(S)}(C)|$, dalle (3) e (4) si ricava:

$$v_P d = Rv_C \sin \theta_0 \quad (5)$$

Utilizzando le relazioni (1), (2), (5), si ricava: $d = R/2$.

S.7.13.

Inizialmente il satellite artificiale si trova sulla superficie della Terra, fermo rispetto alla Terra. La sua velocità iniziale dipende dalla sua posizione sulla superficie terrestre. All'equatore è massima, ed è data da:

$$v_0 = \frac{2\pi R}{T} \quad (1)$$

essendo R il raggio della Terra e T il suo periodo di rotazione. Al polo la velocità iniziale è invece nulla ($v_0 = 0$). L'energia meccanica iniziale è data da:

$$E_0 = \frac{1}{2}mv_0^2 - \gamma \frac{mM}{R} \quad (2)$$

Quando il satellite si trova sulla sua orbita circolare, a quota H rispetto alla superficie terrestre, l'energia meccanica è data da:

$$E_F = \frac{1}{2}mv^2 - \gamma \frac{mM}{R+H} \quad (3)$$

Dall'equazione di moto del satellite è possibile calcolare la sua velocità sull'orbita circolare:

$$\frac{mv^2}{R+H} = \gamma \frac{mM}{(R+H)^2} \Rightarrow v^2 = \frac{\gamma M}{R+H} \quad (4)$$

Sostituendo la (4) nella (3) si ottiene:

$$E_F = -\frac{\gamma}{2} \frac{mM}{R+H} \quad (5)$$

Il minimo lavoro necessario per porre in orbita il satellite è dato da:

$$\mathcal{L} = E_F - E_0 = \gamma m M \frac{R+2H}{2R(R+H)} - \frac{1}{2}mv_0^2 \quad (6)$$

Quindi all'equatore si ha:

$$\mathcal{L}_E = \gamma m M \frac{R+2H}{2R(R+H)} - \frac{1}{2}m \left(\frac{2\pi R}{T} \right)^2 \quad (7)$$

mentre al polo:

$$\mathcal{L}_P = \gamma m M \frac{R+2H}{2R(R+H)} \quad (8)$$

S.7.14.

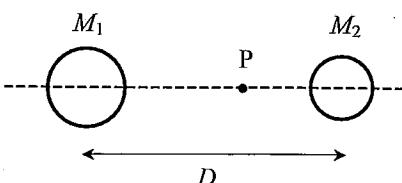
Il campo gravitazionale generato dai due pianeti è dato dalla somma vettoriale dei campi gravitazionali generati separatamente dai due pianeti. Nei punti in cui il campo gravitazionale totale è nullo i campi generati dai due pianeti sono quindi uguali ed opposti. Il punto P in cui il campo è nullo è necessariamente posto sulla congiungente i centri dei due pianeti. In tale punto, posto a distanza h ($h > R_1$), incognita, dal centro del primo pianeta (vedi figura) si deve avere:

$$\gamma \frac{M_1}{h^2} = -\gamma \frac{M_2}{(D-h)^2} \quad (1)$$

L'equazione (1) ammette due soluzioni:

$$h_1 = D \frac{M_1 - \sqrt{M_1 M_2}}{M_1 + M_2} = \frac{2}{3} D \quad (2)$$

$$h_2 = D \frac{M_1 + \sqrt{M_1 M_2}}{M_1 - M_2} = 2D \quad (3)$$



La prima soluzione ($h_1 < D$) fornisce la posizione cercata. Nella posizione individuata dalla seconda soluzione ($h_2 > D$) le forze gravitazionali generate dai due pianeti sono uguali non solo in modulo e direzione, ma anche in verso. Quindi il campo gravitazionale totale non è nullo ma ha modulo pari a $\gamma M_1 / 2D^2$.

S.7.15.

L'unica forza agente è la forza gravitazionale, pertanto si conserva l'energia meccanica del sistema. Inizialmente le particelle sono ferme a distanza R_0 l'una dall'altra, quindi l'energia meccanica è puramente potenziale:

$$E_0 = -\gamma \frac{mM}{R_0} \quad (1)$$

Le particelle si mettono in moto. Quando la distanza è pari a R_1 l'energia meccanica è data da:

$$E_1 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}MV^2 - \gamma \frac{mM}{R_1} \quad (2)$$

avendo indicato con v e con V le velocità delle particelle di massa m e M , rispettivamente. Poiché l'energia meccanica si conserva, possiamo scrivere:

$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}MV^2 - \gamma \frac{mM}{R_1} = -\gamma \frac{mM}{R_0} \quad (3)$$

Per determinare le velocità delle particelle, dobbiamo scrivere una seconda equazione. Dal momento che il sistema è isolato, la quantità di moto totale si conserva. Poiché la quantità di moto iniziale è nulla si ha:

$$mv + MV = 0 \Rightarrow \mathbf{V} = -\frac{m}{M}\mathbf{v} \quad (4)$$

7.2 Soluzioni

Utilizzando la (4) nella (3) si ottiene:

$$|v| = M \sqrt{\frac{2\gamma}{m+M} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_0} \right)} \quad (5)$$

$$|\mathbf{V}| = m \sqrt{\frac{2\gamma}{m+M} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_0} \right)} \quad (6)$$

S.7.16.

Le due stelle sono sottoposte esclusivamente all'azione della mutua interazione gravitazionale:

$$|\mathbf{F}_{12}| = |\mathbf{F}_{21}| = \gamma \frac{m_1 m_2}{d^2} \quad (1)$$

avendo indicato con \mathbf{F}_{12} la forza che agisce sulla stella di massa m_1 a seguito dell'interazione gravitazionale con la seconda stella, e con \mathbf{F}_{21} la forza che agisce sulla stella di massa m_2 . La distanza d fra le due stelle rimane costante durante il loro moto, quindi esse si muovono su orbite circolari concentriche, di raggi r_1 e r_2 , con la stessa velocità angolare ω , come mostrato in figura. Il centro di rotazione coincide con il centro di massa delle due stelle. Le forze gravitazionali \mathbf{F}_{12} e \mathbf{F}_{21} agiscono da forze centripete. Scriviamo le equazioni di moto per le due stelle:

$$m_1 \omega^2 r_1 = \gamma \frac{m_1 m_2}{d^2} \quad (2)$$

$$m_2 \omega^2 r_2 = \gamma \frac{m_1 m_2}{d^2} \quad (3)$$

ovviamente, dal momento che la distanza fra le due stelle rimane costante, si ha anche:

$$r_1 + r_2 = d \quad (4)$$

Le equazioni (2)-(4) costituiscono un sistema di tre equazioni nelle tre incognite ω , r_1 e r_2 . Con facili calcoli si ottiene:

$$\omega = \sqrt{\gamma \frac{m_1 + m_2}{d^3}} \quad (5)$$

$$r_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} d \quad r_2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} d \quad (6)$$

Calcoliamo ora l'energia meccanica del sistema. Si ottiene:

$$E = \frac{1}{2}m_1 \omega^2 r_1^2 + \frac{1}{2}m_2 \omega^2 r_2^2 - \gamma \frac{m_1 m_2}{d} \quad (7)$$

Utilizzando le relazioni (5)-(6) nella (7) si ottiene:

$$E = -\frac{1}{2}\gamma \frac{m_1 m_2}{d} \quad (8)$$

Infine, per quanto riguarda il momento angolare rispetto al centro di massa O del sistema si ha:

$$\mathbf{L}_{(O)} = \mathbf{L}_{1(O)} + \mathbf{L}_{2(O)} \quad (9)$$

dove $\mathbf{L}_{1(O)}$ e $\mathbf{L}_{2(O)}$ sono i momenti angolari rispetto ad O delle due stelle:

$$\mathbf{L}_{1(O)} = m_1 \mathbf{r}_1 \times \mathbf{v}_1 = m_1 r_1^2 \omega \mathbf{u}_z \quad (10)$$

$$\mathbf{L}_{2(O)} = m_2 \mathbf{r}_2 \times \mathbf{v}_2 = m_2 r_2^2 \omega \mathbf{u}_z \quad (11)$$

essendo \mathbf{u}_z il versore perpendicolare al piano dell'orbita con lo stesso verso del vettore velocità angolare. Si ha quindi:

$$\mathbf{L}_{(O)} = (m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2) \omega \mathbf{u}_z = m_1 m_2 \sqrt{\gamma \frac{d}{m_1 + m_2}} \mathbf{u}_z \quad (12)$$

S.7.17.

Oltre alla forza gravitazionale, sul razzo agisce la forza \mathbf{F} , costante. Tale forza, essendo esercitata da un motore a reazione, è diretta come lo spostamento del razzo. Si ha:

$$\Delta E = \mathcal{L}_F \quad (1)$$

avendo indicato con E l'energia meccanica totale e con \mathcal{L}_F il lavoro compiuto dalla forza \mathbf{F} . Poichè \mathbf{F} è costante ed è diretta come lo spostamento del razzo, \mathcal{L}_F si calcola facilmente:

$$\mathcal{L}_F = \int_{R \rightarrow R+h} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = F \int_R^{R+h} dr = Fh \quad (2)$$

avendo indicato con h la quota a cui il motore viene spento. L'energia meccanica iniziale, sapendo che il razzo parte da fermo e trascurando la rotazione della Terra, è data da:

$$E_i = -\gamma \frac{mM}{R} \quad (3)$$

Poichè il motore rimane acceso finchè il razzo raggiunge la minima velocità che gli consente di sfuggire all'attrazione gravitazionale della Terra, si conclude che l'energia meccanica finale è nulla. Infatti, dal momento in cui il razzo viene spento, l'unica forza che agisce sul razzo è quella gravitazionale, quindi la sua energia meccanica si conserva. La minima velocità che consente al razzo di allontanarsi fino a distanza infinita dalla Terra è tale per cui la velocità con cui il razzo arriva all'infinito è nulla, quindi, assumendo nulla l'energia potenziale all'infinito, si ha che $E = 0$. Quindi:

$$\Delta E = \gamma \frac{mM}{R} \quad (4)$$

7.2 Soluzioni

Utilizzando le (1), (2) e (4) si ottiene:

$$h = \gamma \frac{mM}{FR} \quad (5)$$

S.7.18.

L'energia potenziale di un corpo puntiforme posto in un campo gravitazionale esterno esprime il lavoro compiuto contro le forze gravitazionali per portare il corpo dall'infinito alla posizione in cui il corpo si trova. È evidente che se il corpo è isolato non esiste alcun campo gravitazionale esterno, dunque non esiste un'energia potenziale. Tuttavia, se il corpo in esame non è puntiforme ma ha una dimensione finita, può essere visto come costituito dalle particelle che lo compongono. Dal momento che tali particelle interagiscono fra di loro attraverso forze gravitazionali è possibile calcolare il lavoro compiuto contro tali forze per avvicinare le varie particelle portandole dall'infinito fino a costituire il corpo. Tale lavoro costituisce l'energia potenziale interna del corpo in esame.

Immaginiamo di costruire la sfera mediante la successiva aggiunta di gusci sferici di spessore dr fino a raggiungere la dimensione finale. Supponiamo di aver già costruito una sfera omogenea di raggio r ($r < R$). La massa di tale sfera è:

$$M(r) = \rho \frac{4}{3} \pi r^3 \quad (1)$$

Aggiungiamo ora un guscio sferico di spessore dr e raggio r . La massa, dm , di tale guscio è:

$$dm = \rho 4\pi r^2 dr \quad (2)$$

Per spostare la massa dm dall'infinito fino alla sua posizione finale, dobbiamo agire con una forza esterna uguale e contraria a quella dovuta al campo gravitazionale generato dalla massa $M(r)$. In tal modo il lavoro complessivo delle due forze agenti su dm (quella esterna e la forza gravitazionale) è nullo. La variazione di energia cinetica di dm è nulla, quindi il lavoro eseguito dalla forza esterna, $\delta\mathcal{L}_{est}$, si converte totalmente in energia potenziale. Poichè il lavoro complessivo è nullo si ha:

$$\delta\mathcal{L}_{est} = -\delta\mathcal{L}_{campo} \quad (3)$$

avendo indicato con $\delta\mathcal{L}_{campo}$ il corrispondente lavoro della forza gravitazionale agente su dm . Per definizione si ha:

$$\delta\mathcal{L}_{campo} = E_p(\infty) - E_p(r) = -E_p(r) = \gamma \frac{M(r) dm}{r} \quad (4)$$

assumendo nulla l'energia potenziale della massa dm a distanza infinita. Si ha quindi:

$$\delta\mathcal{L}_{est} = -\gamma \frac{M(r) dm}{r} = -\gamma \frac{16}{3} \pi^2 \rho^2 r^4 dr \quad (5)$$

Il lavoro complessivo, \mathcal{L}_{est} , per costruire la sfera di raggio R si calcola facilmente integrando la (5) facendo variare r fra 0 e R :

$$\mathcal{L}_{est} = -\gamma \frac{16}{3} \pi^2 \rho^2 \int_0^R r^4 dr = -\gamma \frac{(4\pi)^2}{15} \rho^2 R^5 \quad (6)$$

L'energia potenziale sarà dunque:

$$\mathcal{U} = \mathcal{L}_{est} = -\gamma \frac{(4\pi)^2}{15} \rho^2 R^5 = -\gamma \frac{3M^2}{5R} \quad (7)$$

avendo indicato con M la massa della sfera di raggio R .

S.7.19.

Il teorema di Gauss afferma che il flusso del campo gravitazionale uscente da una superficie chiusa S è pari a $-4\pi\gamma M_{int}$, avendo indicato con M_{int} la massa totale interna alla superficie chiusa S :

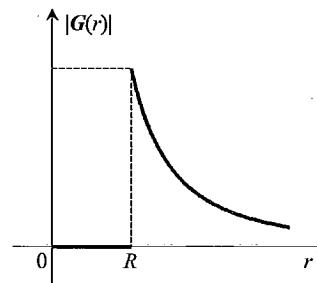
$$\Phi_S(\mathbf{G}) = \int_S \mathbf{G} \cdot \mathbf{n} \, dS = -4\pi\gamma M_{int} \quad (1)$$

avendo indicato con \mathbf{n} il versore normale uscente dalla superficie S . Applichiamo tale teorema nel caso di una massa M uniformemente distribuita su una sottile crosta sferica di raggio R e centro O. Data la simmetria sferica della distribuzione di massa, è naturale considerare come superficie gaussiana S su cui calcolare il flusso, una superficie sferica concentrica alla crosta sferica assegnata dal problema. Per ragioni di simmetria anche il campo gravitazionale ha simmetria sferica. \mathbf{G} ha quindi lo stesso modulo sui punti di una generica superficie sferica di raggio r con centro nel punto O. Si ha quindi: $\mathbf{G}(r) = G(r)\mathbf{u}_r$, avendo indicato con \mathbf{u}_r il versore radiale uscente da O. Il flusso di \mathbf{G} uscente dalla superficie sferica S è quindi:

$$\int_S \mathbf{G} \cdot \mathbf{n} \, dS = \int_S G \mathbf{u}_r \cdot \mathbf{u}_r \, dS = G \int_S dS = 4\pi r^2 G \quad (2)$$

Nella (2) si è utilizzato il fatto che il versore normale \mathbf{n} uscente dalla superficie S coincide con il versore radiale \mathbf{u}_r . Consideriamo dapprima una generica superficie sferica con centro in O e raggio $r < R$. All'interno di tale superficie non c'è alcuna massa, quindi, applicando il teorema di Gauss (1) ed utilizzando la (2), segue:

$$\int_S \mathbf{G} \cdot \mathbf{n} \, dS = 4\pi r^2 G = 0 \Rightarrow G(r) = 0 \quad (3)$$



Consideriamo ora una generica superficie sferica con centro in O e raggio $r > R$. All'interno di tale superficie c'è la massa M della crosta sferica, quindi:

$$\int_S \mathbf{G} \cdot \mathbf{n} \, dS = 4\pi r^2 G = -4\pi\gamma M \Rightarrow G(r) = -\gamma \frac{M}{r^2} \quad (4)$$

Ne segue che, per $r \geq R$, il campo gravitazionale è dato da:

$$\mathbf{G} = -\gamma \frac{M}{r^2} \mathbf{u}_r \quad (5)$$

7.2 Soluzioni

E' come se, per $r > R$, la massa M della crosta sferica fosse concentrata nel suo centro O. In figura è mostrato l'andamento del modulo del campo gravitazionale in funzione di r .

S.7.20.

Data la simmetria del problema, anche il campo gravitazionale ha simmetria sferica. \mathbf{G} ha quindi lo stesso modulo sui punti di una generica superficie sferica di raggio r con centro nel punto O. Ripetendo lo stesso ragionamento fatto nell'esercizio precedente, il flusso del campo gravitazionale attraverso una generica superficie sferica di raggio r e centro O è:

$$\Phi_S(\mathbf{G}) = \int_S \mathbf{G} \cdot \mathbf{n} \, dS = 4\pi r^2 G \quad (1)$$

Consideriamo una generica superficie sferica di raggio $r < R$. Dal momento che la massa M è distribuita in modo uniforme all'interno della sfera di raggio R , la densità di massa è data da:

$$\rho = \frac{3M}{4\pi R^3} \quad (2)$$

quindi la massa contenuta all'interno di una superficie sferica di raggio $r < R$ si calcola facilmente:

$$M_{int} = \rho \frac{4}{3}\pi r^3 = M \frac{r^3}{R^3} \quad (3)$$

Utilizzando il teorema di Gauss si ottiene:

$$G(r)4\pi r^2 = -4\pi\gamma M_{int} = -4\pi\gamma M \frac{r^3}{R^3} \quad (4)$$

da cui si ha:

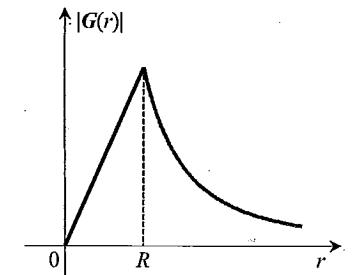
$$\mathbf{G} = -\gamma \frac{M}{R^3} r \mathbf{u}_r = -\gamma \frac{M}{R^3} \mathbf{r} \quad (5)$$

Consideriamo ora una generica superficie sferica con centro in O e raggio $r > R$. All'interno di tale superficie c'è tutta la massa M della sfera di raggio R , quindi, utilizzando il teorema di Gauss, si ottiene:

$$4\pi r^2 G = -4\pi\gamma M \quad (6)$$

da cui si ha:

$$\mathbf{G} = -\gamma \frac{M}{r^2} \mathbf{u}_r \quad (7)$$



E' come se, per $r > R$, la massa M della sfera fosse concentrata nel suo centro O. In figura è mostrato l'andamento del modulo del campo gravitazionale in funzione di r .

S.7.21.

Nell'esercizio precedente si è calcolato il campo gravitazionale generato da una massa M uniformemente distribuita in una sfera di raggio R . In particolare si è dimostrato che in

un punto all'interno della sfera, a distanza r ($r < R$) dal centro, il campo gravitazionale è dato da:

$$\mathbf{g} = -\gamma \frac{M}{R^3} \mathbf{r} \quad (1)$$

La forza che agisce sulla particella di massa m all'interno del tunnel scavato lungo un diametro è quindi:

$$\mathbf{F} = m\mathbf{g} = -\gamma \frac{mM}{R^3} \mathbf{r} \quad (2)$$

avendo indicato con \mathbf{r} il vettore posizione della particella rispetto al centro della Terra. La legge di moto della particella è quindi:

$$m\mathbf{a} = -\gamma \frac{mM}{R^3} \mathbf{r} \quad (3)$$

Il moto della particella avviene in direzione radiale. Proiettando l'equazione di moto lungo tale direzione si ottiene:

$$\frac{d^2r}{dt^2} = -\gamma \frac{M}{R^3} r \quad (4)$$

E' quindi evidente che la particella si muove di moto armonico semplice all'interno del tunnel, con pulsazione ω data da:

$$\omega = \sqrt{\gamma \frac{M}{R^3}} \quad (5)$$

La legge oraria della particella è quindi:

$$r(t) = A \cos(\omega t + \phi_0) \quad (6)$$

avendo indicato con A l'ampiezza del moto armonico e con ϕ_0 la fase iniziale. Tali due costanti possono essere calcolate considerando le condizioni iniziali del moto. Supponendo che la particella parta da ferma in corrispondenza di uno dei due estremi del tunnel, le condizioni iniziali sono le seguenti:

$$r(t=0) = R \quad v(t=0) = 0 \quad (7)$$

La velocità si calcola derivando la relazione (6):

$$v(t) = \frac{dr}{dt} = -\omega A \sin(\omega t + \phi_0) \quad (8)$$

Utilizzando le (7) si ottiene:

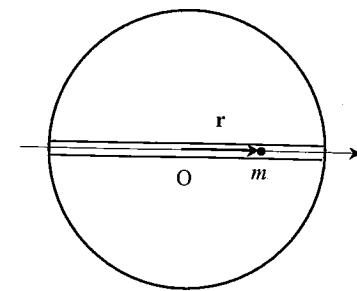
$$r(0) = A \cos \phi_0 = R \quad v(0) = -\omega A \sin(\phi_0) \quad (9)$$

Da cui:

$$\phi_0 = 0 \quad A = R \quad (10)$$

La legge oraria è quindi la seguente:

$$r(t) = R \cos(\omega t) \quad (11)$$



7.2 Soluzioni

La particella passa da un lato all'altro della superficie terrestre in un intervallo di tempo pari a mezzo periodo del moto armonico:

$$\Delta t = \frac{T}{2} = \frac{\pi}{\omega} = \pi \sqrt{\frac{R^3}{\gamma M}} \quad (12)$$

Il testo del problema non assegna la massa della Terra. Osserviamo che sulla superficie della Terra la forza peso agente su un oggetto di massa m , mg , è data dalla forza di attrazione gravitazionale, quindi:

$$mg = \gamma \frac{mM}{R^2} \Rightarrow \gamma M = gR^2 \quad (13)$$

Utilizzando la (13) nella (12) si ottiene:

$$\Delta t = \pi \sqrt{\frac{R}{g}} = 2533 \text{ s} \simeq 42 \text{ min} \quad (14)$$

Capitolo 8

Statica e dinamica del corpo rigido

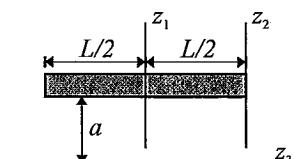
8.1 Problemi

P.8.1.

Un'asta rigida di lunghezza L è costituita da un materiale non omogeneo avente una densità lineare λ di massa variabile secondo la legge $\lambda(x) = \lambda_1 + (\lambda_2 - \lambda_1)x/L$, essendo λ_1 e λ_2 costanti e $0 < x < L$. Calcolare la posizione del centro di massa dell'asta.

P.8.2.

Calcolare il momento di inerzia di un'asta rettilinea ed omogenea, di massa M e lunghezza L , rispetto ai tre assi z_1 , z_2 e z_3 mostrati in figura.

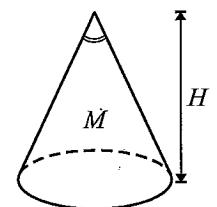


P.8.3.

Calcolare il momento di inerzia di un cilindro omogeneo massiccio, di massa M e raggio R , rispetto all'asse di simmetria z ed all'asse periferico z' parallelo a z e distante R da esso. Ripetere il calcolo nel caso in cui il cilindro è vuoto e la massa è distribuita uniformemente sulla superficie laterale del cilindro.

P.8.4.

Calcolare il momento di inerzia di un cono omogeneo massiccio, di altezza H , angolo al vertice α e massa M , rispetto al suo asse di simmetria.

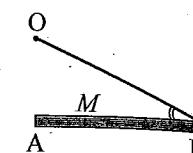


P.8.5.

Una molecola è schematizzabile con un corpo rigido costituito di due masse puntiformi M_1 ed M_2 poste alla distanza di equilibrio di legame R . Mostrare che il momento di inerzia della molecola rispetto all'asse baricentrico perpendicolare all'asse molecolare è uguale a μR^2 , dove $\mu = M_1 M_2 / (M_1 + M_2)$ è la massa ridotta della molecola.

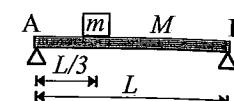
P.8.6.

Un'asta omogenea AB, di massa $M = 10 \text{ kg}$, è incornierata in un suo estremo A ed è mantenuta in equilibrio orizzontale mediante una fune legata all'altro estremo B dell'asta e fissata ad un estremo O (vedi figura). Sapendo che l'angolo che la fune forma con l'asta è $\alpha = 30^\circ$, calcolare la tensione della fune e le reazioni vincolari del fulcro in A.



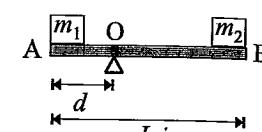
P.8.7.

Una trave omogenea, di lunghezza L e massa M , è appoggiata in posizione orizzontale su due fulcri lisci, posti alle estremità dell'asta come mostrato in figura. Una massa m è appoggiata sulla trave ad una distanza $L/3$ da un suo estremo. Calcolare i valori delle forze di appoggio esercitate dai due fulcri sulla trave.



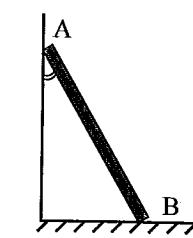
P.8.8.

Un'asta omogenea, di massa $M = 10 \text{ kg}$ e lunghezza $L = 1 \text{ m}$, è appoggiata su un fulcro liscio, distante $d = 0.2 \text{ m}$ da un suo estremo. L'asta è in equilibrio sotto l'azione di due pesi m_1 ed m_2 appoggiati agli estremi dell'asta stessa, come mostrato in figura. Sapendo che $m_2 = 5 \text{ kg}$, calcolare il valore di m_1 .



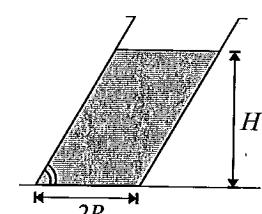
P.8.9.

Una scala AB è appoggiata ad un muro verticale liscio, formando con esso un angolo θ . Sapendo che tra la scala ed il pavimento c'è attrito con coefficiente di attrito statico $\mu_s = 0.1$, si calcoli il massimo valore dell'angolo θ affinché la scala resti in equilibrio.



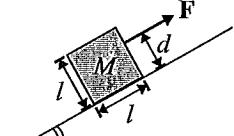
P.8.10.

Un recipiente cilindrico non retto, di massa trascurabile, raggio $R = 0.3 \text{ m}$ ed avente un angolo interno $\alpha = 70^\circ$, è appoggiato su un piano orizzontale e riempito di un liquido fino ad un'altezza H . Calcolare il massimo valore di H affinché il recipiente resti in equilibrio.



P.8.11.

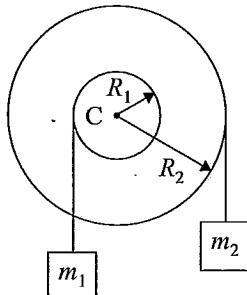
Un blocco omogeneo di massa M , a forma di cubo di lato l , è tirato su un piano inclinato liscio (angolo di inclinazione α) da una forza F , parallela al piano, applicata ad una distanza d dalla base di appoggio del cubo, con $(l/2) < d < l$ (vedi figura). Si calcoli il massimo valore della forza F che si può applicare al blocco affinché esso non si ribalzi. In tale condizione limite si calcoli poi l'accelerazione di moto del blocco.



8.1 Problemi

P.8.12.

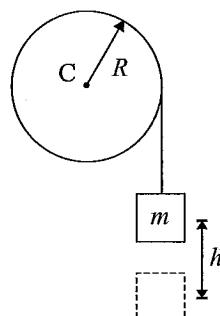
Una carrucola è costituita da due dischi omogenei e massicci, di raggi R_1 ed R_2 e masse M_1 ed M_2 , saldati in modo concentrico, ed è libera di ruotare senza attrito attorno al suo centro C. Due masse m_1 ed m_2 sono collegate alla carrucola mediante due funi, inestensibili e di massa trascurabile, che si avvolgono sui due dischi di raggi R_1 ed R_2 , rispettivamente, come mostrato in figura. Si determinino:



- il momento di inerzia I_C della carrucola attorno al suo centro di rotazione C;
- l'accelerazione angolare α di rotazione della carrucola.

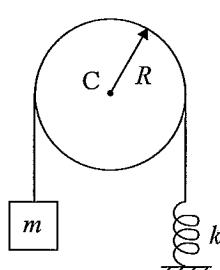
P.8.13.

Una massa $m = 2 \text{ kg}$ è collegata ad una puleggia, di massa $M = 10 \text{ kg}$ e raggio $R = 0.5 \text{ m}$, mediante una fune inestensibile e di massa trascurabile, che si avvolge senza slittare attorno alla puleggia. La puleggia è libera di ruotare senza attrito attorno al suo centro C. All'istante iniziale la massa m viene lasciata cadere da ferma, mettendo in rotazione la puleggia. Sapendo che la massa m si sgancia dalla fune dopo essere scesa di un tratto $h = 2 \text{ m}$ dalla posizione iniziale, si calcoli la velocità angolare di rotazione della puleggia dopo che la massa m si è sganciata.



P.8.14.

Una massa $m = 1 \text{ kg}$ è collegata ad una molla, di costante elastica $k = 30 \text{ N/m}$, mediante una fune inestensibile e di massa trascurabile che si avvolge su una carrucola, di massa $M = 10 \text{ kg}$ e raggio $R = 0.5 \text{ m}$, libera di ruotare senza attrito attorno al suo centro C (si veda la figura).



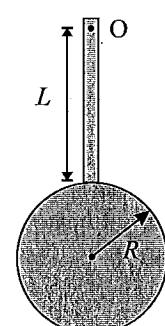
- Si calcoli l'allungamento della molla nella posizione di equilibrio della massa m .

(ii) Se la massa viene spostata dalla sua posizione di equilibrio, mostrare che il suo moto è armonico, e si calcoli il periodo delle oscillazioni (si assuma che la fune non slitti sulla carrucola nel moto).

(iii) Si calcoli la massima velocità angolare istantanea di rotazione della puleggia nel moto oscillatorio di m quando questa viene lasciata libera di oscillare, da ferma, una volta spostata verso il basso di $\Delta x = 0.4 \text{ m}$ dalla sua posizione di equilibrio.

P.8.15.

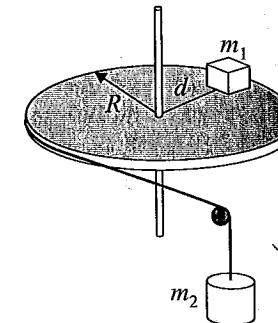
Un pendolo fisico è costituito da un'asta rigida, di lunghezza L e massa m , alla quale è saldato, ad una sua estremità, un disco massiccio di massa M e raggio R , come mostrato in figura. Si calcoli il periodo delle piccole oscillazioni del pendolo quando esso è posto in oscillazione attorno all'estremo O dell'asta.



P.8.16.

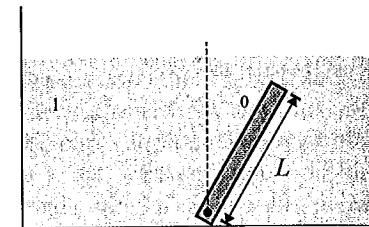
Una puleggia, di raggio R e massa M , può ruotare senza attrito in un piano orizzontale attorno al suo asse verticale. Un corpo di massa m_1 è appoggiato sul piano scabro (coefficiente di attrito statico μ_s) della puleggia ad una distanza d dal suo asse, con $d < R$. La puleggia viene messa in rotazione, da ferma, mediante un peso m_2 in caduta verticale, connesso alla puleggia mediante una fune inestensibile e di massa trascurabile, che si avvolge sulla puleggia senza slittare, come mostrato in figura. Si calcolino:

- l'accelerazione angolare di rotazione della puleggia;
- l'istante di tempo in cui m_1 si stacca dal piano della puleggia e l'accelerazione angolare di rotazione della puleggia dopo che m_1 si è staccata.



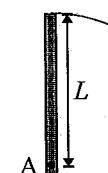
P.8.17.

Un'asta omogenea, di densità ρ_0 e lunghezza L , ha un estremo incernierato senza attrito sul fondo di un recipiente contenente un fluido di densità $\rho_l > \rho_0$, che immerge completamente l'asta. Se l'asta viene spostata di un piccolo angolo dalla sua posizione verticale di equilibrio, mostrare che il moto dell'asta è periodico e si calcoli il periodo delle piccole oscillazioni.



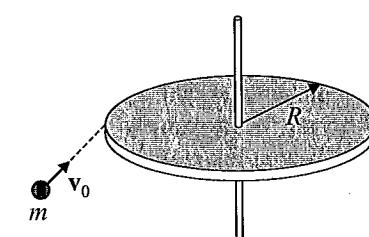
P.8.18.

Un'asta rettilinea omogenea, di lunghezza L , è incernierata senza attrito ad un suo estremo A. L'asta viene lasciata cadere da ferma dalla posizione verticale di equilibrio instabile, come mostrato in figura. Si calcoli la velocità angolare istantanea dell'asta quando essa transita per la posizione verticale di equilibrio stabile.



P.8.19.

Un cilindro massiccio e omogeneo ruota uniformemente attorno al suo asse di simmetria con velocità angolare ω_1 . Il cilindro viene scaldfato fino a che il suo raggio aumenta del 10% rispetto al suo valore iniziale. Quale è la velocità angolare ω_2 del cilindro dopo l'espansione termica?



P.8.20.

Un proiettile di massa $m = 0.05$ kg viene sparato con velocità $v_0 = 100$ m/s orizzontalmente ed in direzione tangenziale ad un disco massiccio di legno, di massa $M = 10$ kg e raggio $R = 0.5$ m, libero di ruotare senza attrito attorno al suo asse verticale. Nell'urto il proiettile resta conficcato nel legno. Sapendo che inizialmente il disco era in quiete, si calcoli la velocità angolare di rotazione del disco dopo l'urto.

8.1 Problemi

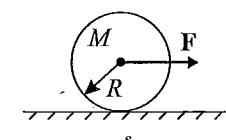
P.8.21.

Un disco omogeneo massiccio, di massa M e raggio R , rotola senza strisciare lungo un piano inclinato (angolo di inclinazione θ) scabro con coefficiente di attrito statico μ_s . Si calcolino:

- l'accelerazione angolare α di caduta del disco;
- la forza di attrito F_a esercitata fra piano e disco;
- il massimo valore dell'angolo θ di inclinazione del piano al di sopra del quale il disco comincia a strisciare.

P.8.22.

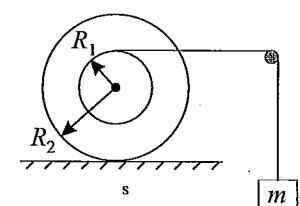
Una ruota, costituita da un disco massiccio di massa $M = 10$ kg, viene posta in movimento su un piano orizzontale scabro (coefficiente di attrito statico $\mu_s = 0.1$) applicando al suo centro una forza F orizzontale costante. Si calcoli il massimo valore della forza F che si può applicare affinché la ruota non slitti.



P.8.23.

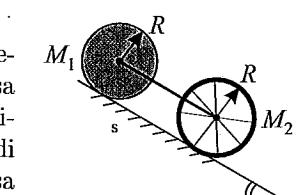
Un corpo rigido, costituito da due dischi massicci, di masse M_1 , M_2 e raggi R_1 ed R_2 ($R_1 < R_2$) saldati fra loro in modo concentrico, rotola senza strisciare lungo un piano orizzontale scabro sotto l'azione di un peso m , collegato al disco interno mediante una fune inestensibile e di massa trascurabile, come mostrato in figura. Si determini:

- il momento di inerzia del corpo rispetto al centro di istantanea rotazione;
- l'accelerazione di caduta della massa m ;
- il minimo valore del coefficiente di attrito statico μ_s fra il piano ed il corpo affinché si eviti lo strisciamento del disco.



P.8.24.

Il centro di un disco massiccio di raggio R e massa M_1 è collegato al centro di una ruota di bicicletta, di ugual raggio e massa M_2 , mediante un'asta rigida. I due corpi rotolano senza strisciare scendendo lungo un piano inclinato scabro, con angolo di inclinazione θ , come mostrato in figura. Trascurando la massa dell'asta, si calcolino la accelerazione angolare di rotazione dei due corpi e la forza assiale nell'asta, precisando se è di tensione o di compressione.

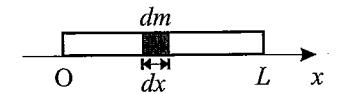


8.2 Soluzioni

8.2 Soluzioni

S.8.1.

Con riferimento alla figura, introduciamo un asse x diretto come l'asta e con origine in un suo estremo; la massa dm di un tratto infinitesimo di lunghezza dx dell'asta, posto a distanza x dall'origine, vale $dm = \lambda(x)dx$, dove:



$$\lambda(x) = \lambda_1 + (\lambda_2 - \lambda_1) \frac{x}{L} \quad (1)$$

è la densità (lineare) di massa dell'asta. Per definizione, l'ascissa x_G del centro di massa dell'asta è dato da:

$$x_G = \frac{1}{m} \int_0^L x \lambda(x) dx, \quad (2)$$

dove:

$$m = \int dm = \int_0^L \lambda(x) dx \quad (3)$$

è la massa totale dell'asta ed L la sua lunghezza. Sostituendo la espressione di $\lambda(x)$ data dalla equazione (1) nelle equazioni (2), (3) e svolgendo gli integrali si ottiene così:

$$m = \int_0^L \left[\lambda_1 + (\lambda_2 - \lambda_1) \frac{x}{L} \right] dx = \frac{(\lambda_1 + \lambda_2)L}{2}, \quad (4)$$

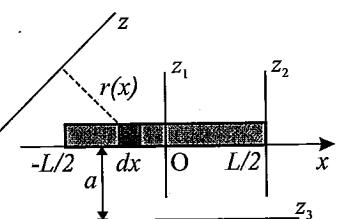
$$x_G = \frac{1}{m} \int_0^L x \left[\lambda_1 + (\lambda_2 - \lambda_1) \frac{x}{L} \right] dx = \frac{1}{m} \left[\frac{\lambda_1 L^2}{2} + \frac{(\lambda_2 - \lambda_1)L^2}{3} \right] = \frac{2\lambda_2 + \lambda_1}{3(\lambda_1 + \lambda_2)} L. \quad (5)$$

Si noti che, se l'asta è omogenea, e cioè per $\lambda_1 = \lambda_2$, si ha $x_G = L/2$, cioè il centro di massa dell'asta coincide col suo punto medio.

S.8.2.

Si introduca un asse x , orientato come l'asta, e si scelga l'origine dell'asse in corrispondenza del punto medio dell'asta. Il momento di inerzia dell'asta rispetto ad un generico asse z è dato da:

$$I_z = \int_{\text{asta}} r^2 dm = \frac{M}{L} \int_{-L/2}^{L/2} r^2(x) dx, \quad (1)$$



dove $r(x)$ è la distanza del punto corrente dell'asta, di ascissa x , dall'asse z . Cominciamo col calcolare il momento di inerzia rispetto all'asse z_1 di figura, che è un asse baricentrico, passante cioè per il centro di massa dell'asta. In tal caso, si ha manifestamente $r(x) = |x|$, e dunque:

$$I_{z_1} = \frac{M}{L} \int_{-L/2}^{L/2} x^2 dx = \frac{M}{L} \left[\frac{x^3}{3} \right]_{-L/2}^{L/2} = \frac{1}{12} M L^2. \quad (2)$$

Per il calcolo del momento di inerzia rispetto all'asse z_2 , si può procedere con il calcolo diretto, con procedimento analogo al precedente, che è lasciato per esercizio al lettore.

Qui osserviamo che z_2 è un asse parallelo all'asse baricentrico z_1 e distante $d = L/2$ da esso. In forza del teorema degli assi paralleli (di Huygens-Steiner), avremo perciò subito che:

$$I_{z_2} = I_{z_1} + Md^2 = \frac{1}{12}ML^2 + \frac{1}{4}ML^2 = \frac{1}{3}ML^2. \quad (3)$$

Infine, per il momento di inerzia rispetto all'asse z_3 , osservando che in questo caso $r(x) = a$, avremo:

$$I_{z_3} = \int_{asta} r^2 dm = a^2 \int_{asta} dm = Ma^2. \quad (4)$$

S.8.3.

Per il calcolo del momento di inerzia I_z del cilindro massiccio rispetto all'asse di simmetria z del cilindro, conviene suddividere idealmente il cilindro in una sequenza di corone cilindriche, di raggio r e spessore infinitesimo dr , con r variabile da 0 a R , come mostrato in figura. Il momento di inerzia I_z si può allora calcolare come somma dei momenti di inerzia $dI(r)$ di ciascuna corona cilindrica in cui è stato suddiviso il cilindro, e cioè:

$$I_z = \int_{cilindro} r^2 dm = \int dI_z(r), \quad (1)$$

dove:

$$dI_z(r) = \int_{corona} r^2 dm. \quad (2)$$

Si noti che, nella equazione (2), la distanza r , che compare sotto il segno di integrale, fra il punto corrente di integrazione della corona cilindrica e l'asse z è sempre uguale al raggio r della corona, e può dunque uscire dal segno di integrale, ottenendo:

$$dI_z(r) = r^2 \int_{corona} dm = r^2 dM, \quad (3)$$

dove dM è la massa della corona cilindrica, che è data semplicemente dal prodotto della massa M del cilindro per il rapporto fra le superfici della corona circolare ($2\pi r dr$) e della base del cilindro (πR^2):

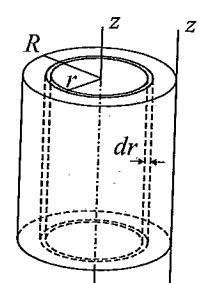
$$dM = M \frac{2\pi r dr}{\pi R^2} = M \frac{2r dr}{R^2}. \quad (4)$$

Sostituendo le equazioni (3) e (4) nella equazione (1), si ottiene:

$$I_z = \frac{2M}{R^2} \int_0^R r^3 dr = \frac{2M}{R^2} \left[\frac{r^4}{4} \right]_0^R = \frac{1}{2}MR^2. \quad (5)$$

Per il calcolo del momento di inerzia del cilindro massiccio rispetto all'asse z' , osserviamo che z' è parallelo all'asse baricentrico z , e distante da esso R . E' quindi possibile applicare il teorema degli assi paralleli, ottenendo:

$$I_{z'} = I_z + MR^2 = \frac{3}{2}MR^2. \quad (6)$$



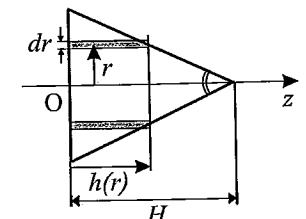
8.2 Soluzioni

Il calcolo del momento di inerzia del cilindro nel caso in cui esso sia cavo, e cioè nel caso in cui la massa è distribuita solo sulla superficie laterale del cilindro, è più semplice ed è analogo al calcolo del momento di inerzia di una corona cilindrica svolto precedentemente. Si avrà in tal caso:

$$I_z = \int_{cilindro} r^2 dm = R^2 \int_{cilindro} dm = MR^2. \quad (7)$$

Applicando il teorema degli assi paralleli, si ha infine per il cilindro cavo:

$$I_{z'} = I_z + MR^2 = 2M^{\frac{3}{2}}R^2 \quad (8)$$



S.8.4.

Con riferimento alla figura, per il calcolo del momento di inerzia del cono rispetto al suo asse z di simmetria, conviene suddividere il cono nella successione di corone cilindriche circolari, di spessore dr , raggio r variabile da 0 al raggio di base $R = H \operatorname{tg}(\alpha/2)$ del cono, ed altezza $h(r) = H - r \operatorname{cotg}(\alpha/2)$. In tal caso:

$$I_z = \int dI_z, \quad (1)$$

essendo dI_z il momento di inerzia, rispetto all'asse z , della corona cilindrica elementare in cui è stato decomposto il cono. Se ρ è la densità del cono, si ha facilmente (si veda il problema precedente):

$$dI_z = r^2 \rho dV = r^2 \rho 2\pi r h(r) dr, \quad (2)$$

dove $dV = 2\pi r h(r) dr$ è il volume della corona cilindrica elementare di altezza h e raggio r . Si ha perciò:

$$I_z = 2\pi \rho \int_0^{H \operatorname{tg}(\alpha/2)} \left(H - r \operatorname{cotg} \frac{\alpha}{2} \right) r^3 dr = \frac{\pi}{10} \rho H^5 \operatorname{tg}^4 \frac{\alpha}{2} \quad (3)$$

Resta infine da calcolare la densità del cono, che vale:

$$\rho = \frac{M}{V} \quad (4)$$

dove V è il volume del cono. Questo può calcolarsi come somma dei volumi delle corone cilindriche in cui il cono è stato suddiviso, e cioè:

$$V = \int_0^{H \operatorname{tg}(\alpha/2)} 2\pi r \left(H - r \operatorname{cotg} \frac{\alpha}{2} \right) dr = \frac{\pi}{3} H^3 \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}. \quad (5)$$

Sostituendo le espressioni di ρ e V , date dalle equazioni (4) e (5), nella (3), si ottiene infine:

$$I_z = \frac{3}{10} M H^2 \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}. \quad (6)$$

S.8.5.

Introduciamo un asse x , congiungente le due massi puntiformi M_1 ed M_2 , e sceglieremo l'origine dell'asse in corrispondenza della posizione della massa M_1 (vedi figura). L'ascissa del centro di massa della molecola è perciò dato da:

$$x_G = \frac{M_2 R}{M_1 + M_2}. \quad (1)$$

Il momento di inerzia della molecola rispetto all'asse z , perpendicolare all'asse x molecolare e passante per il centro di massa della molecola, si può calcolare dalla definizione così:

$$I_z = M_1 x_G^2 + M_2 (R - x_G)^2. \quad (2)$$

Sostituendo l'espressione x_G della ascissa del centro di massa nella precedente equazione si ottiene infine:

$$I_z = \frac{M_1 M_2}{M_1 + M_2} R^2 = \mu R^2, \quad (3)$$

dove si è introdotta la massa ridotta μ della molecola, definita da:

$$\frac{1}{\mu} = \frac{1}{M_1} + \frac{1}{M_2}. \quad (4)$$

S.8.6.

Si tratta di un problema di equilibrio di un corpo rigido, per cui occorre anzitutto individuare le forze agenti sul corpo, con i rispettivi punti di applicazione, e di imporre le condizioni (necessarie e sufficienti) per l'equilibrio, e cioè che la risultante \mathbf{R} di tutte le forze sia nulla ed il momento di tali forze \mathfrak{M}_0 , rispetto ad un polo O, scelto per altro arbitrariamente, sia nullo. La figura mostra il diagramma a corpo libero per l'asta AB, che si trova in equilibrio sotto l'azione delle seguenti forze: la forza peso Mg , che può essere, ai fini dinamici, applicata nel centro di massa dell'asta (e cioè nel punto medio di AB, essendo l'asta omogenea); la tensione T della fune applicata all'estremo B dell'asta; e le reazioni vincolari N_1 ed N_2 , applicate nel fulcro A come indicato in figura. Si noti che T , N_1 ed N_2 sono le tre incognite del problema, e dovremo perciò scrivere tre equazioni indipendenti che consentono di determinare le tre incognite. Scegliendo, ad esempio, come polo O l'estremo A dell'asta, si dovranno imporre le seguenti equazioni di equilibrio:

- $R_x = 0$, e cioè:

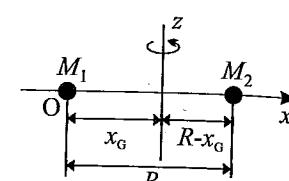
$$N_2 - T \cos \alpha = 0, \quad (1)$$

- $R_y = 0$, e cioè:

$$N_1 + T \sin \alpha - Mg = 0, \quad (2)$$

- $\mathfrak{M}_{A_z} = 0$, e cioè:

$$-Mg \frac{L}{2} + TL \sin \alpha = 0, \quad (3)$$



8.2 Soluzioni

dove L è la lunghezza dell'asta. Si osservi che, nello scrivere la equazione (3), si sono assunti i momenti delle forze positivi se orientati secondo l'asse z uscente dalla figura, e cioè se le forze, rispetto al polo A, tendono a far ruotare l'asta in senso antiorario secondo la convenzione indicata nella figura. Inoltre si è tenuto conto che il braccio della tensione T , e cioè la distanza della sua retta di applicazione dal polo A, è uguale a $L \sin \alpha$. Dalla equazione (3) si determina anzitutto la tensione T della fune:

$$T = \frac{Mg}{2 \sin \alpha} = 98 \text{ N}. \quad (4)$$

Dalle equazioni (1) e (2) si ricavano infine i valori delle reazioni vincolari nel fulcro A:

$$N_1 = Mg - T \sin \alpha = \frac{Mg}{2} = 49 \text{ N}, \quad (5)$$

$$N_2 = \frac{Mg}{2} \cot \alpha = 84.87 \text{ N}. \quad (6)$$

S.8.7.

Il problema, che riguarda ancora l'equilibrio di un corpo rigido, può essere svolto utilizzando la stessa metodologia esposta nella soluzione del problema precedente. Nella figura è indicato il diagramma delle forze agenti sull'asta, dove N_1 ed N_2 indicano le reazioni vincolari di appoggio nei fulcri A e B, che sono le due incognite del problema. Si osservi che, poiché non c'è attrito fra l'asta ed i punti di appoggio A e B, tali reazioni vincolari non hanno componenti orizzontali. Si osservi inoltre che, dalla condizione di equilibrio della massa m , segue che l'azione che questa esercita sulla trave è pari al suo peso Mg . Considerando la massa m alla stregua di un corpo puntiforme, tale forza è inoltre applicata nel punto dell'asta distante $L/3$ dall'estremo A. Le due equazioni che consentono di determinare N_1 ed N_2 sono le seguenti:

- $R_y = 0$, e cioè:

$$N_1 + N_2 - mg - Mg = 0, \quad (1)$$

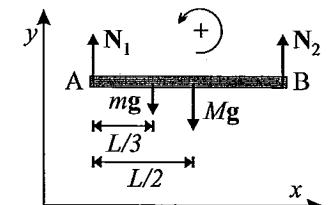
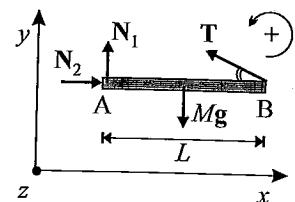
- $\mathfrak{M}_{A_z} = 0$, e cioè:

$$-Mg \frac{L}{2} - mg \frac{L}{3} + N_2 L = 0, \quad (2)$$

dove L è la lunghezza dell'asta. Si noti che nel presente problema l'equazione di equilibrio $R_x = 0$ si riduce ad una identità. Risolvendo le due precedenti equazioni rispetto alle due incognite N_1 ed N_2 si ottiene infine:

$$N_1 = \frac{Mg}{2} + \frac{2mg}{3}, \quad (3)$$

$$N_2 = \frac{Mg}{2} + \frac{mg}{3}. \quad (4)$$



S.8.8.

Il diagramma a corpo libero dell'asta è indicato nella figura a lato, nella quale sono mostrate le forze che agiscono su essa e che sono: le forze peso $m_1 g$ ed $m_2 g$ applicate ai due estremi A e B dell'asta dovute alle azioni delle due masse m_1 ed m_2 , considerate come corpi puntiformi; il peso Mg dell'asta, applicato nel suo centro di massa (punto medio del segmento AB, essendo l'asta omogenea); e la reazione vincolare del fulcro N applicata in O. Condizione necessaria e sufficiente affinché l'asta sia in equilibrio è che:

(i) la risultante delle forze anzidette sia zero, e (ii) il momento di tali forze, rispetto ad un polo arbitrario, sia zero. E' conveniente scegliere come polo per il calcolo dei momenti proprio il fulcro O, rispetto al quale la reazione vincolare N, incognita, ha braccio nullo. Con riferimento alla figura, l'equazione $\mathfrak{M}_{Oz} = 0$ dà perciò:

$$m_1 g d - m_2 g (L - d) - Mg \left(\frac{L}{2} - d \right) = 0 \quad (1)$$

da cui è possibile risolvere tale equazione rispetto all'incognita m_1 :

$$m_1 = M \left(\frac{L}{2d} - 1 \right) + m_2 \left(\frac{L}{d} - 1 \right) = 35 \text{ kg}. \quad (2)$$

Si noti che l'equazione $R_y = 0$ consentirebbe, qualora fosse richiesto, il calcolo della reazione vincolare N, mentre l'equazione $R_x = 0$ si riduce, in questo problema, ad una identità.

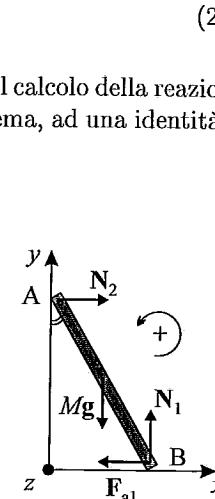
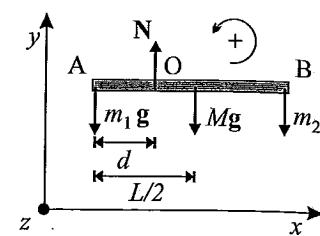
S.8.9.

Il diagramma a corpo libero della scala, che mostra le forze agenti su essa ed i rispettivi punti di applicazione, è indicato nella figura a lato. Si noti che, poiché la parete verticale è liscia, la forza che questa esercita sull'asta è orizzontale ed indicata con N_2 in figura. Al contrario, poiché fra la scala ed il pavimento c'è attrito, la reazione vincolare esercitata dal pavimento sulla scala comprende una forza verticale N_1 ed una forza di attrito orizzontale F_{a1} . Lo spirito di risoluzione del problema è il seguente: si ammette che la scala stia in equilibrio sotto l'azione delle forze indicate e si determinano tali forze imponendo le condizioni necessarie e sufficienti per l'equilibrio della scala; successivamente si determinano le condizioni per le quali le forze N_1 , N_2 e T che devono svilupparsi i vincoli siano fisicamente accettabili.

I valori incogniti di N_1 , F_{a1} ed N_2 dovranno essere determinati scrivendo tre equazioni scalari che si ottengono imponendo che: (i) la risultante R di tali forze sia zero, e cioè le due equazioni scalari $R_x = R_y = 0$; (ii) il momento di tali forze rispetto ad un polo O, scelto ad arbitrio, sia nullo, e cioè l'equazione scalare $\mathfrak{M}_{Oz} = 0$. E' conveniente scegliere come polo O un estremo della scala, ad esempio il punto B. Si ha con ciò:

- $R_x = 0$, e cioè:

$$N_2 - F_{a1} = 0, \quad (1)$$



8.2 Soluzioni

$R_y = 0$, e cioè:

$$N_1 - Mg = 0, \quad (2)$$

$\mathfrak{M}_{Bz} = 0$, e cioè:

$$Mg \frac{L}{2} \sin \theta - N_2 L \cos \theta = 0, \quad (3)$$

dove L è la lunghezza della scala ed M la sua massa. Da queste tre equazioni si ricava facilmente:

$$F_{a1} = N_2 = \frac{Mg}{2} \operatorname{tg} \theta, \quad (4)$$

$$N_1 = Mg. \quad (5)$$

Le condizioni affinché tali reazioni vincolari siano accettabili sono: (i) le condizioni di appoggio $N_1 > 0$ ed $N_2 > 0$, che sono manifestamente soddisfatte; (ii) la condizione di attrito statico:

$$|F_{a1}| \leq \mu_s N_1 \quad (6)$$

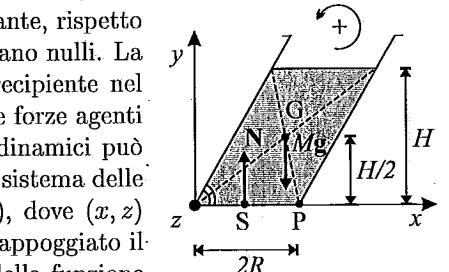
che implica, usando le espressioni di F_{a1} e N_1 date dalle equazioni (4) e (5), $(Mg/2)\operatorname{tg} \theta \leq \mu_s Mg$, e cioè:

$$\theta \leq \operatorname{arctg}(2\mu_s). \quad (7)$$

L'angolo massimo è perciò $\theta_{max} = \operatorname{arctg}(2\mu_s) \approx 11,3^\circ$.

S.8.10.

Condizione necessaria e sufficiente affinché il recipiente resti in equilibrio è che la risultante ed il momento risultante, rispetto ad un polo arbitrario, delle forze agenti su esso siano nulli. La figura mostra il diagramma a corpo libero del recipiente nel piano (x, y) contenente il baricentro del fluido. Le forze agenti su esso sono: (i) la forza peso Mg , che ai fini dinamici può essere applicata nel baricentro G del fluido; (ii) il sistema delle reazioni vincolari di appoggio sulla base, $N(x, z)$, dove (x, z) sono le coordinate del piano orizzontale su cui è appoggiato il cilindro, come mostrato in figura. Il significato della funzione $N(x, z)$ è il seguente: $N(x, z)dx dz$ è la forza verticale esercitata sulla superficie $dx dz$ della base del recipiente dal piano di appoggio (che supponiamo liscio). Si osservi che, poiché il sistema delle reazioni vincolari $N(x, z)$ è un sistema di forze parallele dirette lungo l'asse y , ai fini dinamici, e cioè del calcolo della risultante e del momento rispetto ad un polo arbitrario, al sistema di forze distribuito $N(x, z)$ si può sostituire una unica forza N , diretta lungo l'asse y e pari alla risultante delle forze distribuite, applicata in un punto S. Sebbene la posizione del centro di forze S è indeterminata a questo punto dell'analisi, senza dubbio possiamo già da subito dire che esso deve essere interno alla base del cilindro. Il punto S svolge l'analogo del baricentro G per il sistema delle forze parallele rappresentate dai pesi distribuiti di ogni parte del fluido. Si osservi inoltre che, poiché il fluido è omogeneo, il baricentro G di esso giace all'intersezione delle due diagonali del parallelogramma di figura, e cioè:



$$x_G = R + \frac{H}{2} \operatorname{cotg} \alpha, \quad y_G = \frac{H}{2}. \quad (1)$$

Inoltre, per l'equilibrio, il punto S deve giacere nello stesso piano verticale (x, y) in cui stà il baricentro G. Le equazioni per l'equilibrio, scegliendo ad esempio il punto P nel piano (x, y) di coordinate $(2R, 0)$ come polo e ove si tenga conto che le condizioni $R_x = 0$, $R_z = 0$, $\mathfrak{M}_{P_x} = 0$, e $\mathfrak{M}_{P_y} = 0$ corrispondono ad una indentità, sono:

- $R_y = 0$, e cioè:

$$N = Mg, \quad (2)$$

- $\mathfrak{M}_{P_x} = 0$, e cioè:

$$-(2R - x_S)N + Mg(2R - x_G) = 0, \quad (3)$$

dove x_S è la ascissa del punto S. Dalla equazione (2), tenendo conto che $N = Mg$, si ha:

$$x_S = x_G = R + \frac{H}{2} \cot \alpha. \quad (4)$$

Tale equazione indica che, come c'era da attendersi, all'equilibrio la risultante N delle reazioni vincolari di appoggio deve essere uguale al peso Mg del fluido ed applicata in un punto S che giace sulla retta verticale passante per il baricentro G del fluido. Poichè per costruzione S deve essere un punto interno alla base del contenitore, la condizione affinchè il recipiente stia in equilibrio è perciò che la proiezione del baricentro G sul piano $y = 0$ sia *interna* alla base del cilindro. Dunque deve aversi:

$$x_G = R + \frac{H}{2} \cot \alpha < 2R, \quad (5)$$

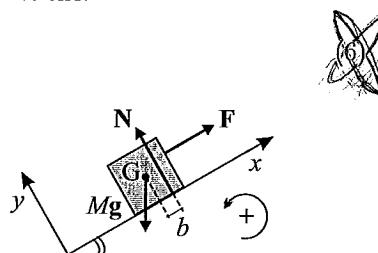
da cui, risolvendo questa disequazione rispetto ad H , si ottiene:

$$H < 2R \tan \alpha \approx 1.65 \text{ m.}$$

S.8.11.

La figura mostra il diagramma a corpo libero del blocco, di massa M , in moto lungo il piano inclinato liscio. Il sistema d'assi (x, y, z) è scelto, come in figura, con l'asse x coincidente con l'asse di moto del blocco e l'asse z uscente dal piano del foglio. Si osservi che la forza peso Mg è applicata nel centro di massa G del blocco, che coincide con il centro del cubo essendo il blocco omogeneo. Il sistema delle reazioni vincolari esercitate dal piano liscio sul blocco è equivalente, dal punto di vista dinamico, alla risultante N di tali forze, diretta lungo l'asse y , ed applicata in un punto interno alla base di appoggio del blocco (si veda la discussione del problema precedente inerente l'equilibrio di un corpo rigido). Per ora sia il valore della risultante N che il punto di applicazione di tale risultante è indeterminato, e saranno le equazioni dinamiche di moto a stabilirne univocamente i valori. Tuttavia, quello che richiediamo è che $N > 0$ (vincolo di appoggio) e che il punto di applicazione di N sia interno alla base di appoggio del cubo. Le equazioni che occorre ora scrivere, e che legano il movimento del cubo con le forze agenti su esso, sono le equazioni fondamentali della dinamica del corpo rigido (equazioni cardinali):

$$\frac{d\mathbf{R}}{dt} = M\mathbf{a}_G, \quad \frac{d\mathbf{L}_O}{dt} = \mathfrak{M}_O, \quad (1)$$



8.2 Soluzioni

dove G è il centro di massa del corpo, \mathbf{a}_G la sua accelerazione, \mathbf{L}_O il momento angolare del corpo rispetto ad un polo O , fisso o in moto con velocità parallela alla velocità del centro di massa, \mathbf{R} è la risultante delle forze esterne agenti sul blocco e \mathfrak{M}_O il momento di tali forze rispetto al polo O . E' conveniente, nel presente problema, scegliere il polo O coincidente con il centro di massa del corpo. In tal caso, poichè il moto del blocco è puramente traslatorio con velocità \mathbf{v}_G , il momento angolare \mathbf{L}_G si annulla; difatti:

$$\mathbf{L}_G = \int_{cubo} (\mathbf{r} - \mathbf{r}_G) \times \mathbf{v} dm = \left(\int_{cubo} \mathbf{r} dm - M\mathbf{r}_G \right) \times \mathbf{v}_G = M(\mathbf{r}_G - \mathbf{r}_G) \times \mathbf{v}_G = 0. \quad (2)$$

Con riferimento alla figura e tenendo conto che il moto del blocco è traslatorio lungo l'asse x , e cioè che $\mathbf{a}_G = a_G \mathbf{u}_x$, le equazioni (1) si esplicitano nelle seguenti tre equazioni scalari:

- $R_x = Ma_G$, e cioè:

$$F - Mg \sin \alpha = Ma_G, \quad (3)$$

- $R_y = 0$, e cioè:

$$N - Mg \cos \alpha = 0, \quad (4)$$

- $\mathfrak{M}_{Gz} = 0$, e cioè:

$$Nb - F \left(d - \frac{l}{2} \right) = 0, \quad (5)$$

dove con b abbiamo indicato il braccio della forza N rispetto al centro di massa G , e cioè la distanza di G dalla retta di applicazione della forza N (vedi figura). Le equazioni precedenti consentono di determinare l'accelerazione di moto del blocco, la reazione vincolare N e il suo punto di applicazione, e cioè la distanza b :

$$a_G = \frac{F}{M} - g \sin \alpha \quad (6)$$

$$N = Mg \cos \alpha \quad (7)$$

$$b = \frac{F}{Mg \cos \alpha} \left(d - \frac{l}{2} \right). \quad (8)$$

La condizione affinchè il blocco non ribalti, e cioè che il suo moto sia effettivamente traslatorio, è che la forza N sia applicata in un punto interno alla base del cubo, e cioè che $|b| \leq l/2$. Ciò implica che sia:

$$\frac{F}{Mg \cos \alpha} \left(d - \frac{l}{2} \right) \leq \frac{l}{2}, \quad (9)$$

da cui:

$$F \leq \frac{Mgl \cos \alpha}{2d - l}. \quad (10)$$

Al limite del ribaltamento, $F = Mgl \cos \alpha / (2d - l)$, e l'accelerazione di moto del blocco è, in corrispondenza:

$$a_G = \frac{F}{M} - g \sin \alpha = g \cos \alpha \left(\frac{l}{2d - l} \right) - g \sin \alpha. \quad (11)$$

S.8.12.

Il momento di inerzia della carrucola rispetto al centro di rotazione C è uguale alla somma dei momenti di inerzia dei due dischi omogenei rispetto a C. Ricordando l'espressione del momento di inerzia di un cilindro (o disco) omogeneo massiccio rispetto al suo asse (si veda, ad esempio, la soluzione del problema 3 di questo capitolo), si ha quindi:

$$I_C = \frac{1}{2}M_1R_1^2 + \frac{1}{2}M_2R_2^2. \quad (1)$$

Indichiamo con α l'accelerazione angolare di rotazione della carrucola, assumendo α positivo se la carrucola ruota in senso orario. Per il calcolo di α , è necessario analizzare in dettaglio il moto della carrucola e delle due masse m_1 ed m_2 . I diagrammi a corpo libero per i tre corpi sono mostrati in figura. Le forze incognite che compaiono nei diagrammi a corpo libero sono: le tensioni T_1 e T_2 delle due funi, e la reazione vincolare N esercitata dal perno di rotazione sulla carrucola. Se indichiamo con a_1 l'accelerazione di salita di m_1 e con a_2 l'accelerazione di discesa di m_2 , osserviamo che, poiché le funi sono inestensibili e supponendo che queste non slittino rispetto ai dischi, devono valere le seguenti relazioni fra le accelerazioni a_1 , a_2 e l'accelerazione angolare α della puleggia:

$$a_1 = \alpha R_1, \quad a_2 = \alpha R_2. \quad (2)$$

Tali vincoli cinematici derivano dal fatto che, poiché non c'è slittamento delle funi con i dischi, in ogni istante di tempo le velocità periferiche (e quindi anche le accelerazioni periferiche) dei punti istantaneamente a contatto, presi sulle funi e sui dischi (punti indicati con A, B e A', B' in figura), devono essere uguali. Si noti poi che le accelerazioni tangenziali dei punti A e B dei due dischi sono date da αR_1 ed αR_2 , rispettivamente, mentre le accelerazioni dei punti A' e B' delle funi sono, per l'onestensibilità dei fili, uguali alle accelerazioni di moto delle masse m_1 ed m_2 . Siamo ora in grado di scrivere le equazioni di moto, che legano l'accelerazione angolare α di rotazione alle azioni meccaniche. Queste sono:

- equazione di moto per la massa m_1 in direzione verticale:

$$T_1 - m_1g = m_1a_1 = m_1R_1\alpha \quad (3)$$

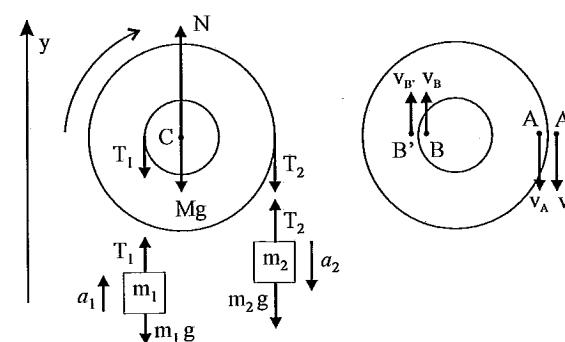
- equazione di moto per la massa m_2 in direzione verticale:

$$T_2 - m_2g = -m_2a_2 = -m_2R_2\alpha \quad (4)$$

- equazione dei momenti per la puleggia rispetto al polo C:

$$T_2R_2 - T_1R_1 = I_C\alpha \quad (5)$$

Le equazioni precedenti costituiscono un sistema di tre equazioni nelle tre incognite α , T_1 e T_2 . Esprimendo dalle prime due equazioni le tensioni T_1 e T_2 in funzione di α e



8.2 Soluzioni

sostituendo le espressioni così ottenute nella terza equazione, si ottiene una equazione nella sola incognita α , che risulta dà:

$$\alpha = \frac{(m_2R_2 - m_1R_1)g}{I_C + m_1R_1^2 + m_2R_2^2}. \quad (6)$$

Quale è il significato della equazione precedente se m_2R_2 fosse minore di m_1R_1 (e cioè $\alpha < 0$)?

S.8.13.

Il problema può essere risolto seguendo due procedimenti diversi, il primo basato sullo studio del movimento della puleggia e della massa, il secondo sui principi di conservazione dell'energia meccanica. Per completezza, risolviamo il problema usando ambedue i metodi anzidetti. Cominciamo con lo studio del moto dei corpi. Nella figura sono indicati i diagrammi a corpo libero per la massa m e per la puleggia. In tale figura, T indica la tensione della fune, mentre N è la reazione vincolare del fulcro attorno cui ruota la puleggia. Poiché la fune è inestensibile e la fune non slitta mentre si srotola dalla puleggia, l'accelerazione angolare α di rotazione della puleggia e l'accelerazione di caduta della massa m sono legate dalla relazione (si veda la discussione svolta nell'esercizio precedente):

$$a = R\alpha. \quad (1)$$

Le convenzioni di segno per α ed a sono quelle mostrate in figura. Le equazioni di moto che consentono il calcolo dell'accelerazione angolare α di rotazione e della tensione T sono le due seguenti:

- equazione di moto in direzione verticale per la massa m :

$$-T + mg = ma = m\alpha R \quad (2)$$

- equazione dei momenti per la carrucola rispetto al centro C di rotazione:

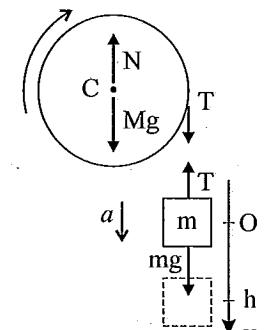
$$TR = I_C\alpha, \quad (3)$$

dove $I_C = (1/2)MR^2$ è il momento di inerzia della carrucola rispetto all'asse di rotazione passante per il suo centro C. Risolvendo le equazioni precedenti nelle incognite α e T , si ottiene facilmente per α la seguente espressione:

$$\alpha = \frac{mgR}{mR^2 + I_C}. \quad (4)$$

Il moto della massa m è dunque uniformemente accelerato con accelerazione $a = \alpha R$. Tenendo conto che la massa viene lasciata cadere da ferma, la legge oraria del moto di m vale perciò:

$$x(t) = \frac{1}{2}at^2. \quad (5)$$



dove x è l'asse verticale di figura, orientato verso il basso. La massa è scesa di un tratto h al tempo t_0 tale che $x(t_0) = h$, e cioè all'istante di tempo:

$$t_0 = \sqrt{\frac{2h}{a}} \quad (6)$$

La velocità angolare della puleggia, del resto, segue la legge dei moti angolari uniformemente accelerati, e cioè $\omega(t) = \alpha t$. Al tempo $t = t_0$ di distacco della massa m , la velocità angolare istantanea di rotazione della puleggia vale in definitiva:

$$\omega_0 = \alpha t_0 = \sqrt{\frac{2h\alpha}{R}} = \sqrt{\frac{2mgh}{mR^2 + I_C}} \simeq 6.70 \text{ rad/s.} \quad (7)$$

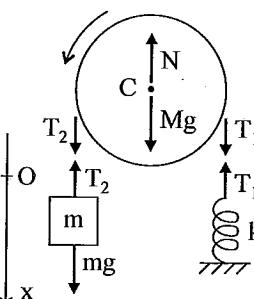
Allo stesso risultato si poteva giungere applicando il principio di conservazione dell'energia meccanica, per il sistema dinamico massa e carrucola, fra l'istante iniziale, in cui massa e carrucola sono in quiete, e l'istante finale di moto, nel quale la massa m è scesa di un tratto h rispetto alla quota iniziale e si sgancia dalla fune. Per questo osserviamo che l'energia cinetica finale del sistema è la somma dell'energia cinetica rotazionale della carrucola, che vale $(1/2)I_C\omega_0^2$, e dell'energia cinetica della massa m , pari a $(1/2)mv_0^2$, dove v_0 è la velocità istantanea della massa m nell'istante del distacco. Si noti che v_0 ed ω_0 non sono indipendenti, ma legate dal vincolo cinematico $v_0 = R\omega_0$. L'energia cinetica iniziale del sistema è manifestamente nulla, essendo inizialmente in quiete sia la massa che la carrucola. La conservazione dell'energia meccanica comporta che la variazione dell'energia cinetica sia uguale ed opposta alla variazione dell'energia potenziale gravitazionale della massa m , e cioè che:

$$mgh = \frac{1}{2}m\omega_0^2R^2 + \frac{1}{2}I_C\omega_0^2. \quad (8)$$

Risolvendo questa equazione rispetto ad ω_0 si ottiene il risultato espresso dalla (7).

S.8.14.

Per risolvere l'esercizio, è conveniente tracciare i diagrammi a corpo libero della massa m , della carrucola e della molla. Con riferimento alla figura, si osservi che: (i) le forze agenti sulla carrucola sono le tensioni T_1 e T_2 nei due tratti della fune, la reazione vincolare N nel fulcro C , diretta verticalmente verso l'alto, e la forza peso Mg applicata nel baricentro, che coincide col centro C di rotazione; (ii) le forze agenti sulla massa m sono la forza peso mg e la tensione T_2 , orientata come in figura. (iii) la forza agente sulla molla è la tensione T_1 , con l'orientazione di figura. E' importante sottolineare che, poichè la carrucola ha una inerzia non trascurabile, non si può assumere *a priori* uguale la tensione della fune nei due tratti che si avvolgono sulla puleggia, e cioè $T_1 = T_2$, e quindi è doveroso assumere diversi valori per la tensione. Un tale risultato può essere facilmente compreso, come vedremo, dall'equazione di moto della carrucola (equazione dei momenti rispetto al centro di rotazione C); in effetti, ciò che avviene è che la fune che si arrotola sulla puleggia scambia con questa una forza di attrito statico, necessaria affinché la fune stessa non slitti, che provoca una variazione della tensione fra i due estremi della



8.2 Soluzioni

fune. Ciò premesso, per lo studio del moto della massa m introduciamo un asse x verticale, orientato verso il basso come in figura, e fissiamo l'origine dell'asse in corrispondenza della posizione della massa m per la quale la molla è nella sua posizione indeformata. In tal caso, se la massa si trova in una posizione x generica, la molla è allungata di un tratto x , se $x > 0$, e compressa di un tratto $-x$, se $x < 0$. Poichè la tensione T_1 della fune è uguale e opposta alla forza elastica esercitata dalla molla sulla fune, possiamo scrivere con la convenzione di verso di figura che:

$$T_1 = kx, \quad (1)$$

e questo indipendentemente dal segno di x . Con ciò, le equazioni dinamiche che consentono di risolvere il problema sono:

- equazione di moto per la massa m :

$$mg - T_2 = m \frac{d^2x}{dt^2} \quad (2)$$

- equazione dei momenti per la carrucola rispetto al centro di rotazione:

$$(T_2 - T_1)R = I_C \frac{d^2x}{dt^2}, \quad (3)$$

dove $I_C = (1/2)MR^2$ è il momento di inerzia della carrucola rispetto al centro di rotazione C , ed α l'accelerazione angolare della carrucola ($\alpha > 0$ se orientata come in figura). Si noti che, poichè la fune non slitta sulla carrucola, l'accelerazione angolare α della carrucola e l'accelerazione di moto d^2x/dt^2 della massa m sono legate dalla usuale relazione $d^2x/dt^2 = \alpha R$.

Ciò premesso, veniamo a rispondere ai quesiti posti dal problema.

(i) In condizioni di equilibrio, si avrà $d^2x/dt^2 = 0$ nelle equazioni (2) e (3), e cioè, usando la equazione (1), $T_1 = T_2 = kx_{eq}$ e $T_2 = mg$, essendo x_{eq} l'allungamento della molla all'equilibrio. Perciò:

$$x_{eq} = \frac{mg}{k} \simeq 0.327 \text{ m} \quad (4)$$

(ii) Consideriamo ora il caso in cui la massa m è spostata dalla sua posizione di equilibrio ed oscilla attorno ad essa. In tal caso, dalle equazioni (1) e (3) si ha:

$$T_2 = kx + \frac{I_C}{R^2} \frac{d^2x}{dt^2}. \quad (5)$$

Sostituendo tale espressione della tensione T_2 nella equazione (2) si avrà:

$$mg - kx - \frac{I_C}{R^2} \frac{d^2x}{dt^2} = m \frac{d^2x}{dt^2} \quad (6)$$

che è l'equazione differenziale che descrive il moto della massa m . Si osservi che tale equazione può scriversi nella forma:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \Omega^2 x = \frac{mg}{m + I_C/R^2}, \quad (7)$$

dove si è posto:

$$\Omega \equiv \sqrt{\frac{k}{m + I_C/R^2}} = \sqrt{\frac{k}{m + M/2}} \quad (8)$$

La equazione (7) è l'equazione differenziale di un oscillatore armonico di pulsazione Ω , e perciò il moto è oscillatorio, attorno al valore di equilibrio $x = x_{eq}$, con periodo:

$$T = \frac{2\pi}{\Omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m + M/2}{k}} \simeq 2.81 \text{ s.} \quad (9)$$

(iii) La legge oraria del moto della massa m , quando essa viene lasciata libera di oscillare da ferma una volta spostata di un tratto Δx dalla sua posizione di equilibrio, è della forma:

$$x(t) = x_{eq} + A \cos(\Omega t + \phi), \quad (10)$$

dove A e ϕ sono costanti che vanno determinate con le condizioni iniziali $x(0) = x_{eq} + \Delta x$ e $(dx/dt)_{t=0} = 0$. Imponendo tali condizioni si trova così che $A = \Delta x$, $\phi = 0$, e dunque:

$$x(t) = x_{eq} + \Delta x \cos(\Omega t). \quad (11)$$

La velocità angolare $\omega(t)$ di rotazione della carrucola è legata alla velocità di moto $v(t) = dx/dt$ della massa m dalla relazione $\omega = v/R$, e perciò l'andamento nel tempo della velocità angolare di rotazione della carrucola sarà, ove si tenga conto della equazione (11):

$$\omega(t) = \frac{1}{R} \frac{dx}{dt} = -\frac{\Omega \Delta x}{R} \sin(\Omega t). \quad (12)$$

La massima velocità angolare di rotazione (in modulo) della puleggia, ω_{max} , si ha agli istanti di tempo $t_n = (\pi/2 + n\pi)/\Omega = (n + 1/2)T/2$ ($n = 0, 1, 2, \dots$), e cioè quando la massa transita per la posizione di equilibrio [$x(t_n) = x_{eq}$], e vale:

$$\omega_{max} = \frac{\Omega \Delta x}{R} = \sqrt{\frac{k}{I_C + mR^2}} \Delta x \simeq 1.79 \text{ rad/s.} \quad (13)$$

Osserviamo che al risultato espresso dalla equazione (13) si poteva anche giungere mediante l'applicazione del teorema di conservazione dell'energia meccanica. Poichè la massima velocità angolare di oscillazione si ha quando la massa transita per la sua posizione di equilibrio, la conservazione dell'energia meccanica fra la posizione iniziale, al tempo $t = 0$, e la posizione in cui m transita per $x = x_{eq}$, e cioè al tempo $t = t_n$, implica che:

$$E_c(0) + E_p(0) + E_{el}(0) = E_c(t_n) + E_p(t_n) + E_{el}(t_n), \quad (14)$$

essendo E_c , E_p ed E_{el} l'energia cinetica della massa m e della carrucola, l'energia potenziale gravitazionale della massa m e l'energia potenziale elastica della molla, rispettivamente.

8.2 Soluzioni

Si ha manifestamente:

$$E_c(0) = 0 \quad (15)$$

$$E_p(0) = -mg(x_{eq} + \Delta x) \quad (16)$$

$$E_{el}(0) = \frac{1}{2}k(x_{eq} + \Delta x)^2 \quad (17)$$

$$E_c(t_n) = \frac{1}{2}m\omega_{max}^2 R^2 + \frac{1}{2}I_C\omega_{max}^2 \quad (18)$$

$$E_p(t_n) = -mgx_{eq} \quad (19)$$

$$E_{el}(t_n) = \frac{1}{2}kx_{eq}^2. \quad (20)$$

L'equazione (14) diviene perciò:

$$-mg(x_{eq} + \Delta x) + \frac{1}{2}k(x_{eq} + \Delta x)^2 = \frac{1}{2}m\omega_{max}^2 R^2 + \frac{1}{2}I_C\omega_{max}^2 - mgx_{eq} + \frac{1}{2}kx_{eq}^2, \quad (21)$$

e cioè, tenendo conto della equazione (4)

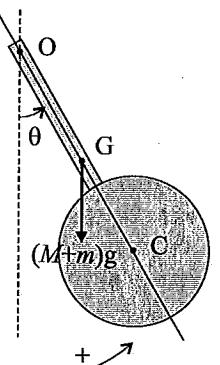
$$\frac{1}{2}k\Delta x^2 = \frac{1}{2}m\omega_{max}^2 R^2 + \frac{1}{2}I_C\omega_{max}^2 \quad (22)$$

che risolta rispetto a ω_{max} ridà l'equazione (13).

S.8.15.

Il problema riguarda il calcolo del periodo delle piccole oscillazioni di un corpo rigido, costituito qui da un'asta saldata ad un disco, posto in rotazione attorno ad un suo punto O . Tale problema è generalmente risolto nella teoria del corpo rigido, ma per completezza richiamiamo qui le linee principali che consentono di derivare la formula del periodo delle piccole oscillazioni di un pendolo fisico. Il diagramma a corpo libero del pendolo è mostrato in figura. Se indichiamo con G il baricentro del corpo, ai fini dinamici possiamo applicare la forza peso $(M+m)g$ in G . Se allora scriviamo l'equazione di moto dei momenti per il corpo in rotazione rispetto al centro di rotazione O , si avrà:

$$I_O \frac{d^2\theta}{dt^2} = -(M+m)gL \sin \theta, \quad (1)$$



essendo L la lunghezza del segmento OG , I_O il suo momento di inerzia rispetto all'asse di rotazione passante per O , e θ l'angolo di rotazione del pendolo. Si osservi che l'accelerazione angolare del pendolo è data da $d^2\theta/dt^2$ e che, per l'orientamento di θ , i momenti delle forze sono positivi se fanno ruotare il corpo in senso antiorario (vedi figura). Per piccoli angoli di oscillazione, potremo fare l'approssimazione $\sin \theta \simeq \theta$, e perciò l'equazione (1) assume la forma:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \Omega^2\theta = 0, \quad (2)$$

dove si è posto:

$$\Omega \equiv \sqrt{\frac{(M+m)g\mathcal{L}}{I_O}}. \quad (3)$$

Il moto del pendolo è quindi oscillatorio con periodo:

$$T = \frac{2\pi}{\Omega} = 2\pi \sqrt{\frac{I_O}{(M+m)g\mathcal{L}}}. \quad (4)$$

Il problema è dunque quello di calcolare la posizione del baricentro G e la lunghezza $\mathcal{L} = \overline{OG}$, ed il momento di inerzia del corpo rispetto all'asse di rotazione passante per O. Si ha facilmente:

$$\mathcal{L} = \frac{mL/2 + M(L+R)}{m+M}, \quad (5)$$

e:

$$I_O = I_{disco\ O} + I_{asta\ O}, \quad (6)$$

dove $I_{disco\ O}$ e $I_{asta\ O}$ sono i momenti di inerzia del disco e dell'asta, rispettivamente, rispetto all'asse di rotazione passante per O. Il calcolo di $I_{disco\ O}$ si può svolgere facilmente applicando il teorema degli assi paralleli e ricordando l'espressione del momento di inerzia di un disco omogeneo rispetto al suo centro:

$$I_{disco\ O} = \frac{1}{2}MR^2 + M(R+L)^2. \quad (7)$$

Analogamente per l'asta si ha:

$$I_{asta\ O} = \frac{1}{3}mL^2. \quad (8)$$

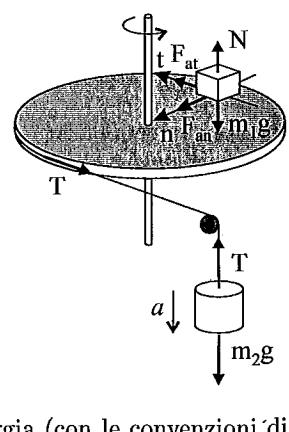
In definitiva:

$$I_O = \frac{1}{2}MR^2 + M(R+L)^2 + \frac{1}{3}mL^2. \quad (9)$$

Le equazioni (4), (5) e (9) rispondono alla domanda del problema.

S.8.16.

Prima di entrare nel dettaglio dello svolgimento del problema, è utile descrivere gli aspetti salienti che intervengono e che ci aiutano a comprendere l'impostazione di svolgimento del problema. Mentre la massa m_2 scende, essa pone in rotazione la puleggia orizzontale e quindi, a causa dell'attrito, anche la massa m_1 appoggiata su di essa. Tuttavia, poiché nel moto aumenta la velocità angolare di rotazione, la forza necessaria per tenere la massa m_1 solidale sul piano della puleggia, forza fornita dall'attrito statico, supererà il massimo valore consentito dalla condizione di attrito e, di conseguenza, la massa m_1 si metterà in moto relativo abbandonando la puleggia. Per rispondere alla prima domanda del problema, osserviamo che, se indichiamo con T la tensione della fune che collega la massa m_2 con la puleggia, con a l'accelerazione di caduta della massa m_2 e con α l'accelerazione angolare di rotazione della puleggia (con le convenzioni di



8.2 Soluzioni

figura per i versi), dovranno valere le seguenti equazioni di moto:

- equazione di moto per la massa m_2 :

$$m_2g - T = m_2a \quad (1)$$

- equazione dei momenti per la puleggia rispetto al centro di rotazione O:

$$TR = I_O\alpha, \quad (2)$$

dove I_O è il momento di inerzia della puleggia, comprensivo della presenza della massa m_1 appoggiata su di essa a distanza d dal centro di rotazione. Poiché $a = \alpha R$ per il vincolo cinematico di non strisciamento e $I_O = (1/2)MR^2 + md^2$, dalle equazioni (1) e (2), eliminando la tensione T , si ottiene la seguente espressione per l'accelerazione angolare di rotazione della puleggia:

$$\alpha = \frac{m_2gR}{m_1d^2 + (1/2)MR^2 + m_2R^2}. \quad (3)$$

Rispondiamo ora al secondo quesito del problema. Per questo osserviamo che il moto della puleggia è un moto rotatorio uniformemente accelerato con accelerazione angolare α , data dalla equazione (3). L'andamento nel tempo della velocità angolare istantanea di rotazione $\omega(t)$ della puleggia sarà dunque:

$$\omega(t) = \alpha t, \quad (4)$$

dove si è tenuto conto che, poiché la massa m_2 viene lasciata cadere da ferma, la velocità angolare iniziale della puleggia, al tempo $t = 0$, è nulla. La massa m_1 , fintanto che è solidale con il disco, descriverà di conseguenza un moto circolare uniformemente accelerato di raggio d . Se introduciamo due assi t e n , tangente e normale alla traiettoria circolare descritta da m_1 (vedi figura), ed indichiamo con F_{at} e F_{an} le componenti della forza di attrito, nelle direzioni t ed n , esercitate su m_1 dal piano scabro, l'equazione di moto per m_1 , decomposta nelle direzioni tangenziale e normale, fornisce le due relazioni:

$$F_{at} = m_1\alpha d \quad (5)$$

$$F_{an} = m_1\omega^2 d \quad (6)$$

per cui il modulo della forza di attrito, $|F_a|$, vale:

$$|F_a| = \sqrt{F_{at}^2 + F_{an}^2} = m_1\sqrt{\alpha^2 d^2 + \omega^4 d^2} = \alpha d m_1 \sqrt{1 + \alpha^4 t^4}. \quad (7)$$

La reazione vincolare di appoggio N , diretta verticalmente, che agisce su m_1 è evidentemente uguale al suo peso, cioè $N = m_1 g$. La condizione affinché la massa m_1 non scivoli rispetto al disco è quindi espressa dalla condizione di attrito statico:

$$|F_a| \leq \mu_s N, \quad (8)$$

dove μ_s è il coefficiente di attrito statico fra il piano della puleggia e la massa m_1 . Questa equazione, ove si tenga presente l'espressione di $|F_a|$ e di N , equivale a:

$$d\alpha\sqrt{1 + \alpha^4 t^4} \leq \mu_s g. \quad (9)$$

L'istante di distacco t_1 si ottiene al limite quando nella disequazione precedente vale il segno di uguaglianza, e cioè:

$$t_1 = \frac{1}{\alpha} \left[\left(\frac{\mu_s g}{d\alpha} \right)^2 - 1 \right]^{1/4}. \quad (10)$$

Dopo il distacco della massa m_1 , l'accelerazione angolare di rotazione della puleggia aumenta; precisamente essa è data ancora dalla equazione (3) ove si ponga $m_1 = 0$.

S.8.17.

Per studiare il moto dell'asta quando essa è spostata dalla sua posizione di equilibrio verticale, conviene disegnare il diagramma a corpo libero dell'asta, vincolata al suo estremo A e completamente immersa nel fluido, che è mostrato in figura. Le forze agenti sull'asta sono: (i) la reazione vincolare in O, che consta di due componenti, orizzontale (N_1) e verticale (N_2); (ii) la forza peso, pari a $\rho_0 V g$, di direzione verticale ed orientata verso il basso, applicata nel baricentro G dell'asta (V è il volume dell'asta e ρ_0 è la sua densità); (iii) la forza di spinta, che per il principio di Archimede è pari al peso del fluido spostato, e cioè di modulo $\rho_l V g$, diretta verticalmente verso l'alto ed applicata nel centro di spinta. Si noti che, poiché l'asta è omogenea e completamente immersa nel fluido, il centro di spinta coincide con il baricentro G dell'asta. Poiché la densità del fluido, ρ_l , è maggiore di quella dell'asta, ρ_0 , la risultante della forza peso e della spinta di Archimede è diretta verso l'alto, e ciò spiega perché l'asta è in equilibrio stabile quando l'estremo libero B è in posizione verticale sopra A. Se l'asta è spostata di un angolo θ dalla posizione di equilibrio, l'equazione dei momenti applicata all'asta rispetto al polo A (centro di rotazione) fornisce manifestamente la seguente equazione di moto per l'angolo $\theta = \theta(t)$:

$$I_A \frac{d^2\theta}{dt^2} = -V(\rho_l - \rho_0)g \frac{L}{2} \sin \theta, \quad (1)$$

dove $I_A = (1/3)ML^2 = (1/3)V\rho_0L^2$ è il momento di inerzia dell'asta rispetto al suo estremo A, ed $M = V\rho_0$ la sua massa. Si ha con ciò:

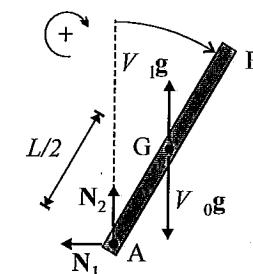
$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \Omega^2 \sin \theta = 0, \quad (2)$$

dove abbiamo posto:

$$\Omega \equiv \sqrt{\frac{g(\rho_l - \rho_0)V L}{2I_A}} = \sqrt{\frac{3g(\rho_l - \rho_0)}{2\rho_0 L}}. \quad (3)$$

L'equazione differenziale (2) che descrive il moto dell'asta è quella di un pendolo: il moto dell'asta è dunque periodico. Per piccoli angoli di oscillazione attorno alla posizione verticale di equilibrio stabile, $\sin \theta \simeq \theta$, il moto è armonico, ed il periodo di oscillazione, ove si tenga conto della equazione (3), vale in conclusione:

$$T = \frac{2\pi}{\Omega} = 2\pi \sqrt{\frac{2\rho_0 L}{3(\rho_l - \rho_0)g}}. \quad (4)$$



8.2 Soluzioni

S.8.18.

Il problema può essere risolto agevolmente osservando che, nel moto dell'asta, la sua energia meccanica, somma dell'energia cinetica di rotazione e dell'energia potenziale gravitazionale, è costante e pari al valore che assume nella posizione iniziale, indicata a tratto continuo in figura. Osservando che nella posizione iniziale l'energia cinetica dell'asta è nulla (perché è detto, nel testo del problema, che l'asta viene lasciata cadere da ferma), l'energia meccanica iniziale dell'asta è uguale all'energia potenziale gravitazionale iniziale. Se introduciamo un asse z verticale orientato verso l'alto con origine nel perno A di rotazione dell'asta ed assumiamo uguale a zero l'energia potenziale alla quota del fulcro A, avremo che nella posizione iniziale l'energia meccanica dell'asta vale:

$$E = Mgz_G = Mg \frac{L}{2}, \quad (1)$$

essendo M la massa dell'asta e $z_G = L/2$ la quota, al di sopra di A, del baricentro G dell'asta. Quando l'asta transita per la posizione verticale di figura (curva tratteggiata), detta ω la velocità angolare di rotazione istantanea dell'asta, la sua energia meccanica sarà data dalla somma dell'energia cinetica rotazionale, $(1/2)I_A\omega^2$, e dell'energia potenziale gravitazionale, $Mgz_{G'} = -MgL/2$, dove G' è il baricentro dell'asta nella posizione tratteggiata e $I_A = (1/3)ML^2$ il momento di inerzia dell'asta rispetto al centro A di rotazione. Dunque, quando l'asta transita dalla posizione verticale tratteggiata in figura, la sua energia meccanica vale:

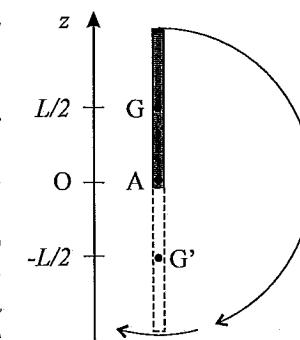
$$E = \frac{1}{2}I_A\omega^2 - Mg \frac{L}{2} = \frac{1}{6}ML^2\omega^2 - Mg \frac{L}{2}. \quad (2)$$

Uguagliando le espressioni (1) e (2) dell'energia meccanica, si ottiene:

$$\frac{1}{6}ML^2\omega^2 - Mg \frac{L}{2} = Mg \frac{L}{2}, \quad (3)$$

da cui si ottiene per la velocità angolare istantanea ω la seguente espressione finale:

$$\omega = \sqrt{\frac{6g}{L}}. \quad (4)$$



S.8.19.

Se indichiamo con z l'asse di rotazione del cilindro, osserviamo che, nell'espansione termica, il momento delle forze esterne nella direzione dell'asse di rotazione è nullo, e perciò il momento angolare $\mathbf{L} = I_z \omega \mathbf{u}_z$ del disco, che è diretto lungo l'asse z , si conserva. Se indichiamo con I_1 ed I_2 i momenti di inerzia del cilindro rispetto all'asse z e con ω_1 ed ω_2 le velocità angolari del cilindro prima e dopo l'espansione termica, dovrà dunque avversi:

$$I_1 \omega_1 = I_2 \omega_2, \quad (1)$$

e cioè:

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{I_1}{I_2}. \quad (2)$$

Poiché il momento di inerzia di un cilindro massiccio di massa M e raggio R rispetto al suo asse di simmetria è $I_z = (1/2)MR^2$, dalla equazione (1) avremo:

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = \left(\frac{R_1}{R_2} \right)^2. \quad (3)$$

La velocità angolare finale sarà perciò minore di quella iniziale, essendo $R_2 > R_1$ dopo l'espansione termica. La variazione relativa di velocità angolare è:

$$\frac{\omega_1 - \omega_2}{\omega_1} = 1 - \left(\frac{R_1}{R_2} \right)^2. \quad (4)$$

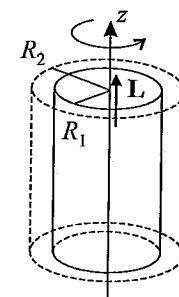
Poiché $R_2/R_1 = 1.1$, si avrà:

$$\frac{\omega_1 - \omega_2}{\omega_1} \simeq 0.174. \quad (5)$$

La velocità angolare sarà perciò diminuita del 17.4%.

S.8.20.

Si tratta di un problema d'urto tra un corpo puntiforme ed un corpo rigido vincolato a ruotare attorno al proprio asse. Per rispondere al quesito del problema, è importante stabilire la relazione fra le grandezze cinematiche prima e dopo l'urto, che sarà determinata da leggi di conservazione. Per questo, è importante osservare che sul sistema dinamico, costituito dal proiettile e dal disco, agiscono forze esterne impulsive a causa delle reazioni vincolari dell'asse nel perno di rotazione del disco. Tuttavia, pur se queste forze sono impulsive, il loro momento rispetto al centro C di rotazione del disco è zero. Possiamo di conseguenza concludere che nell'urto si deve conservare il momento angolare del sistema rispetto al polo C . Il momento angolare del sistema prima dell'urto è dovuto solo al moto del proiettile e vale manifestamente $\mathbf{L}_C^{(i)} = mv_0 R \mathbf{u}_z$. Se indichiamo con ω la velocità angolare di rotazione del disco subito dopo l'urto, il momento angolare del corpo in rotazione sarà



8.2 Soluzioni

$\mathbf{L}_C^{(f)} = I_C \omega \mathbf{u}_z$, dove $I_C = (1/2)MR^2 + mR^2$ è il momento di inerzia del disco, comprensivo del proiettile confiscato in esso a distanza R dal centro C , rispetto all'asse z di rotazione. Imponendo $\mathbf{L}_C^{(i)} = \mathbf{L}_C^{(f)}$, avremo perciò:

$$mv_0 R = I_C \omega, \quad (1)$$

da cui:

$$\omega = \frac{mv_0 R}{I_C} = \frac{mv_0}{R(m+M/2)} \simeq 1.98 \text{ rad/s.} \quad (2)$$

Si osservi che l'urto è anelastico, e si ha dissipazione di energia cinetica; infatti, la variazione di energia cinetica nell'urto vale:

$$\Delta E_c = \frac{1}{2} I_C \omega^2 - \frac{1}{2} mv_0^2 = \frac{1}{2} mv_0^2 \left(\frac{mR^2}{I_C} - 1 \right) \quad (3)$$

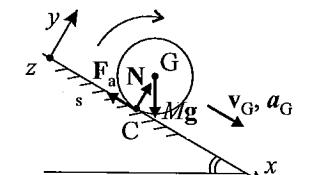
che è manifestamente negativa, essendo $I_C > mR^2$.

S.8.21.

Il problema riguarda il rotolamento senza strisciamento di un disco su un piano scabro e inclinato. Per rispondere alle domande poste dal problema, è utile tracciare il diagramma a corpo libero del disco nel suo moto di rotolamento senza strisciamento. Come indicato in figura, le forze agenti su di esso sono tre: la forza peso Mg , che ai fini dinamici può essere applicata nel suo centro di massa G (che coincide col centro del disco); la forza normale N di appoggio sul piano; e la forza di attrito F_a esercitata dal piano sul disco. Si noti che, mentre il verso di N è noto a priori ($N > 0$ con le convenzioni di figura), il verso della forza di attrito F_a non è a priori noto, e sarà il calcolo a stabilire se l'orientamento è quello mostrato in figura oppure opposto ad esso, secondo che il risultato del calcolo dia $F_a > 0$ oppure $F_a < 0$. È importante osservare che, poiché il disco rotola senza strisciare, il punto C del disco istantaneamente a contatto col piano (vedi figura) ha velocità nulla, poiché non striscia: di conseguenza l'attrito scambiato fra piano e disco, pur quest'ultimo essendo in moto, è di tipo statico, e non dinamico. Per procedere ulteriormente nell'analisi, è importante aver chiara la cinematica di movimento del disco. Poiché il punto C del disco è istantaneamente in quiete, esso compie un moto di rotazione con centro di istantanea rotazione in corrispondenza del punto C . Ciò significa che la velocità di un generico punto P del disco si può scrivere nella forma $\mathbf{v}_P = \omega \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}_C)$, dove $\omega = -(d\phi/dt)\mathbf{u}_z$ è la velocità angolare (vettoriale) di rotazione del disco (ϕ è l'angolo di rotazione del disco, assumendo un angolo di rotazione orario come in figura) e $(\mathbf{r} - \mathbf{r}_C)$ è il vettore posizione spiccato dal centro C che congiunge il punto P . In particolare, la velocità del centro di massa G sarà data da $\mathbf{v}_G = (d\phi/dt)R\mathbf{u}_x$ e dunque la sua accelerazione, per derivazione, da $\mathbf{a}_G = \alpha R\mathbf{u}_x$, dove $\alpha \equiv d^2\phi/dt^2$ è l'accelerazione angolare del disco. Siamo ora in grado di scrivere le equazioni di moto del disco (moto del centro di massa ed equazione dei momenti) con le quali il calcolo del movimento del disco è determinato univocamente:

- equazione di moto del centro di massa nella direzione x :

$$Mg \sin \theta - F_a = Ma_G = M\alpha R, \quad (1)$$



- equazione di moto del centro di massa nella direzione y :

$$-Mg \cos \theta + N = 0, \quad (2)$$

- equazione dei momenti rispetto al polo G:

$$F_a R = \alpha I_G, \quad (3)$$

dove $I_G = (1/2)MR^2$ è il momento di inerzia del disco rispetto al centro di massa G. Si osservi che, in presenza di un polo O mobile, la equazione dei momenti (seconda equazione cardinale) dovrebbe essere scritta nella forma generalizzata: $d\mathbf{L}_O/dt = \mathbf{M}_O - \mathbf{v}_O \times \mathbf{Q}$, dove \mathbf{L}_O , \mathbf{M}_O e $\mathbf{Q} = M\mathbf{v}_G$ sono il momento angolare, il momento delle forze esterne e la quantità di moto del corpo. Tuttavia, se il polo mobile coincide col centro di massa (come nel nostro caso), od ha una velocità parallela ad esso, l'equazione assume la forma usuale con polo fisso, essendo $\mathbf{v}_O \times \mathbf{Q} = 0$. Le equazioni (1), (2) e (3) costituiscono un sistema di tre equazioni nelle tre incognite F_a , N e α , che risolte danno:

$$N = Mg \cos \theta, \quad (4)$$

$$F_a = \frac{1}{3}Mg \sin \theta, \quad (5)$$

$$\alpha = \frac{2g \sin \theta}{3R}. \quad (6)$$

A questo punto resta da verificare la condizione, assunta come ipotesi fondamentale nello svolgimento del problema, che il disco non scivoli, e che cioè il punto C istantaneamente a contatto con il piano abbia effettivamente velocità nulla. Tale condizione implica, secondo la equazione (5), l'esistenza di una forza di attrito non nulla che deve essere sviluppata dal piano di appoggio, oltre che di una forza di appoggio normale N . La condizione di non slittamento è dunque quella dell'attrito statico, e cioè deve avversi $|F_a| \leq \mu_s N$. Usando le espressioni di N e F_a date dalle equazioni (4) e (5), tale condizione diviene:

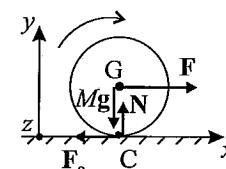
$$\frac{1}{3}Mg \sin \theta \leq \mu_s Mg \cos \theta, \quad (7)$$

da cui:

$$\theta \leq \arctan(3\mu_s). \quad (8)$$

S.8.22.

Anche questo problema riguarda il moto di rotolamento senza strisciamento su un piano scabro. Qui si tratta di una ruota in moto sotto l'azione di una forza trainante F orizzontale applicata al centro della ruota. Possiamo intuire che, se la forza applicata è troppo intensa, la forza di attrito necessaria per mettere in rotazione la ruota senza che essa strisci sul piano può superare il valore massimo imposto dal vincolo di attrito statico e la ruota, di conseguenza, inizierà a strisciare. Questo è il motivo per cui le ruote di una automobile, in accelerazione su un piano a basso attrito, possono slittare. Per studiare in maniera quantitativa il problema e determinare la massima forza che si può applicare alla



8.2 Soluzioni

ruota evitando lo strisciamento, cominciamo col tracciare il diagramma delle forze agenti sulla ruota, mostrato in figura. Nel diagramma abbiamo introdotto le due componenti incognite della forza esercitata dal piano sulla ruota, e cioè la forza di appoggio normale N e la forza di attrito orizzontale F_a . Se la ruota non strisci, il punto C della ruota a contatto con il piano ha velocità istantanea nulla, mentre il centro di massa G della ruota si muove lungo l'asse x orizzontale con una accelerazione $a_G = \alpha R u_x$, dove α è l'accelerazione angolare della ruota (orientata con il verso indicato in figura). Per una dettagliata analisi del moto di rotolamento senza strisciamento della ruota, rimandiamo il lettore alla discussione del problema precedente. Le incognite scalari introdotte sono tre: N , F_a ed α , e quindi dovremo scrivere tre equazioni scalari per determinare tali grandezze. Le tre equazioni sono precisamente le equazioni di moto della ruota, comprendenti le equazioni di moto del centro di massa e l'equazione dei momenti:

- equazione di moto del centro di massa nella direzione x :

$$F - F_a = Ma_G = M\alpha R \quad (1)$$

- equazione di moto del centro di massa nella direzione y :

$$N - Mg = 0 \quad (2)$$

- equazione dei momenti rispetto al polo G:

$$F_a R = \alpha I_G, \quad (3)$$

dove $I_G = (1/2)MR^2$ è il momento di inerzia della ruota rispetto al centro di massa G. Risolvendo tali equazioni, si ottiene facilmente:

$$N = Mg, \quad (4)$$

$$\alpha = \frac{F}{R(M + I_G/R^2)} = \frac{2F}{3MR}, \quad (5)$$

$$F_a = \frac{F}{1 + MR^2/I_G} = \frac{F}{3}. \quad (6)$$

La condizione di non slittamento è $|F_a| \leq \mu_s N$; utilizzando le espressioni di N e F_a date dalle equazioni precedenti, si ha perciò:

$$F \leq 3\mu_s Mg \simeq 29.4 \text{ N}. \quad (7)$$

S.8.23.

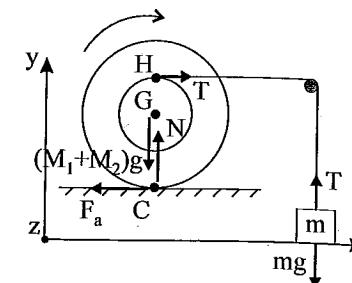
Il problema riguarda il moto di rotolamento senza strisciamento di un corpo rigido, costituito di due dischi concentrici e omogenei saldati fra loro, su un piano scabro sotto l'azione della forza trainante imposta dal corpo di massa m in caduta. In assenza di strisciamento, il centro di istantanea rotazione del corpo è il punto C di contatto fra il disco, di raggio R_2 , ed il piano scabro di moto. Per il calcolo del momento di inerzia del corpo rispetto all'asse di rotazione passante per C, conviene osservare che esso è la somma dei momenti di inerzia I_{1C} ed I_{2C} dei due dischi, di raggi R_1 ed R_2 e masse M_1 ed M_2 , rispettivamente, di cui esso è costituito. Per il calcolo di I_{1C} ed I_{2C} conviene utilizzare il teorema degli assi paralleli; ricordando l'espressione del momento di inerzia di un disco omogeneo massiccio, di massa M e raggio R , rispetto al suo centro di massa, che vale $(1/2)MR^2$, avremo perciò:

$$I_{C1} = \frac{1}{2}M_1R_1^2 + M_1R_2^2, \quad I_{C2} = \frac{1}{2}M_2R_2^2 + M_2R_1^2 = \frac{3}{2}M_2R_2^2. \quad (1)$$

Il momento di inerzia del corpo rispetto al centro C di istantanea rotazione è dunque:

$$I_C = I_{C1} + I_{C2} = \frac{1}{2}M_1R_1^2 + M_1R_2^2 + \frac{3}{2}M_2R_2^2. \quad (2)$$

Per rispondere agli altri due quesiti del problema, occorre considerare nel dettaglio il problema dinamico del movimento del corpo rigido e della massa m ad esso collegata. I diagrammi delle forze per il disco e per la massa in caduta sono mostrati in figura. Si osservi che sulla massa m agiscono la forza peso mg verticale, diretta verso il basso, e la tensione T verticale della fune, diretta verso l'alto. Le forze agenti sul disco sono invece: la tensione T orizzontale della fune, uguale in modulo a quella esercitata sulla massa m , essendo la fune di massa trascurabile, ed applicata nella gola interna del disco; la forza peso $(M_1 + M_2)g$, applicata nel centro di massa G del corpo, che coincide con il centro dei due dischi; la reazione di appoggio verticale N e la forza di attrito orizzontale F_a , applicate nel punto C di contatto fra disco e piano orizzontale scabro. Il moto del corpo rigido è di rotolamento senza strisciamento con centro di istantanea rotazione nel punto C di contatto fra disco esterno e piano; perciò, se indichiamo con α l'accelerazione angolare di rotazione del disco (positiva se l'angolo di rotazione è assunto in senso orario, come indicato in figura), le accelerazioni di moto del centro di massa G e del punto H della gola a contatto con la fune (vedi figura) saranno $a_G = R_2\alpha u_x$ e $a_H = (R_1 + R_2)\alpha u_z$, rispettivamente. Si noti altresì che, poiché la fune non slitta srotolandosi dalla gola del disco, in ogni istante la velocità di moto del punto H è uguale, in intensità, alla velocità di moto di caduta della massa m . Anche le accelerazioni di moto di detti punti saranno perciò uguali (in modulo). L'accelerazione di caduta della massa m sarà dunque data da $a_m = -(R_1 + R_2)\alpha u_y$. Tenendo conto dei vincoli cinematici anzidetti, le incognite introdotte sono perciò quattro: la tensione T della fune; le reazioni normale N e di attrito F_a del piano; e l'accelerazione angolare α di rotazione del corpo rigido sul piano. Sarà dunque necessario scrivere quattro equazioni scalari indipendenti capaci di determinare



8.2 Soluzioni

tali grandezze incognite. Tali equazioni sono le equazioni di moto del corpo rigido (tre equazioni) e l'equazione di moto della massa m (una equazione). Con riferimento alla figura, è facile scrivere per esplicito tali equazioni:

- equazione di moto del centro di massa G nella direzione x :

$$T - F_a = (M_1 + M_2)a_G = (M_1 + M_2)\alpha R_2 \quad (3)$$

- equazione di moto del centro di massa G nella direzione y :

$$N - (M_1 + M_2)g = 0 \quad (4)$$

- equazione dei momenti rispetto al polo C:

$$T(R_1 + R_2) = \alpha I_C \quad (5)$$

- equazione di moto della massa m nella direzione y :

$$T - mg = -m(R_1 + R_2)\alpha. \quad (6)$$

Si osservi che, nella equazione (5) dei momenti, per semplicità di calcolo si è assunto come polo il centro C di rotazione. In alternativa si poteva scrivere l'equazione dei momenti scegliendo il centro di massa G come polo, ottenendo un sistema di equazioni del tutto equivalenti. Si noti che, con la scelta fatta del polo, le equazioni (5) e (6) contendono come incognite solamente la tensione T della fune e l'accelerazione angolare α di rotazione del corpo; risolvendo tali equazioni si ottiene:

$$\alpha = \frac{mg(R_1 + R_2)}{m(R_1 + R_2)^2 + I_C}, \quad (7)$$

$$T = \alpha \frac{I_C}{R_1 + R_2} = \frac{mg}{1 + m(R_1 + R_2)^2/I_C}. \quad (8)$$

La forza di attrito F_a e la reazione vincolare di appoggio N si ottengono poi dalle equazioni (3) e (4):

$$N = (M_1 + M_2)g, \quad (9)$$

$$F_a = \frac{mg}{1 + m(R_1 + R_2)^2/I_C} \left[1 - \frac{(M_1 + M_2)R_2(R_1 + R_2)}{I_C} \right]. \quad (10)$$

La condizione di non slittamento del disco sul piano è espressa dalla condizione di attrito statico $|F_a| \leq \mu_s N$, da cui:

$$\mu_s \geq \frac{m}{(M_1 + M_2)[1 + m(R_1 + R_2)^2/I_C]} \left[1 - \frac{(M_1 + M_2)R_2(R_1 + R_2)}{I_C} \right]. \quad (11)$$

dove l'espressione di I_C è data dalla equazione (2).

S.8.24.

I diagrammi a corpo libero per i due corpi che scendono senza strisciare lungo il piano inclinato sono mostrati in figura. In figura, T indica la forza (incognita) che si scambiano i due corpi tramite l'asta, mentre F_{a1} , F_{a2} ed N_1 , N_2 sono le forze di attrito e le reazioni vincolari normali di appoggio, rispettivamente, agenti sui due corpi. E' chiaro che, poichè i due corpi hanno lo stesso raggio e, a causa dell'asta che congiunge i due centri, i centri di massa dei due corpi G_1 e G_2 si muovono con la stessa legge oraria (ed hanno dunque uguale velocità ed accelerazione in ogni istante di tempo), l'accelerazione angolare α di rotazione dei dischi è la medesima. Visto che non è richiesto il calcolo delle forze di attrito che si scambiano i corpi con il piano inclinato scabro né tanto meno di stabilire sotto quali condizioni i corpi non strisciano, si può agevolmente risolvere il problema scrivendo solamente alcune delle equazioni di moto dei due corpi che contengano come uniche incognite l'accelerazione angolare di rotazione α e la forza T esercitata dall'asta. Tali equazioni sono precisamente le equazioni dei momenti per ciascuno dei due corpi rispetto ai centri di istantanea rotazione C_1 e C_2 mostrati in figura, che assumono la forma:

$$I_1\alpha = TR + M_1gR \sin \theta \quad (1)$$

$$I_2\alpha = -TR + M_2gR \sin \theta, \quad (2)$$

dove I_1 ed I_2 sono i momenti di inerzia dei due corpi rispetto ai centri di rotazione C_1 e C_2 . Applicando il teorema degli assi paralleli per il calcolo di I_1 ed I_2 e schematizzando la ruota della bicicletta come un anello omogeneo di raggio R e massa M , avremo:

$$I_1 = I_{G_1} + M_1R^2 = \frac{3}{2}M_1R^2 \quad (3)$$

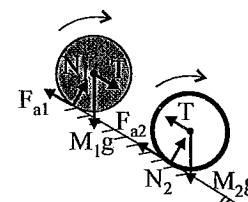
$$I_2 = I_{G_2} + M_2R^2 = 2M_2R^2. \quad (4)$$

Risolvendo il sistema delle equazioni (1) e (2) rispetto ad α e T , si ottiene:

$$\alpha = \frac{(M_1 + M_2)gR \sin \theta}{I_1 + I_2} = \frac{2(M_1 + M_2)g \sin \theta}{R(3M_1 + 4M_2)} \quad (5)$$

$$T = \frac{g \sin \theta}{I_1 + I_2} (M_2I_1 - M_1I_2) = -\frac{M_1M_2g \sin \theta}{3M_1 + 4M_2}. \quad (6)$$

Si osservi che, poichè $T < 0$, la forza assiale nell'asta è di compressione. Questo risultato può essere compreso osservando che, se non ci fosse l'asta che congiunge i due corpi, il disco massiccio scenderebbe lungo il piano rotolando con una accelerazione angolare $\alpha_1 = M_1gR \sin \theta/I_1 = 2g \sin \theta/(3R)$ mentre la ruota scenderebbe con accelerazione angolare $\alpha_2 = M_2gR \sin \theta/I_2 = g \sin \theta/(2R)$. Poichè $\alpha_1 > \alpha_2$, il disco massiccio scenderebbe più rapidamente della ruota, e ciò spiega perché, quando i due corpi sono collegati dall'asta, il disco tende a spingere la ruota, e cioè la forza assiale nell'asta risulta di compressione.



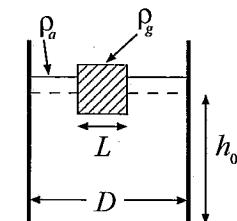
Capitolo 9

Statica e dinamica dei fluidi

9.1 Problemi

P.9.1.

Si consideri un bicchiere cilindrico di diametro D , contenente acqua (densità ρ_a) fino ad una quota h_0 . Un cubetto di ghiaccio (densità ρ_g) di lato pari a L viene posto nel bicchiere; si calcoli l'innalzamento del livello dell'acqua dopo l'inserimento del cubetto e di quanto tale livello cambierà una volta che il ghiaccio si sarà sciolto. Si supponga che la faccia superiore del cubetto sia parallela alla superficie libera dell'acqua. [$D = 6 \text{ cm}$; $\rho_a = 10^3 \text{ kg m}^{-3}$; $h_0 = 10 \text{ cm}$; $\rho_g = 917 \text{ kg m}^{-3}$; $L = 2 \text{ cm}$]



P.9.2.

Un cubetto di ghiaccio (densità ρ_g) di lato L viene buttato in un contenitore molto grande contenente acqua (densità ρ_a). Si determini il periodo delle oscillazioni con cui varia la posizione della faccia inferiore del cubetto rispetto alla superficie libera dell'acqua nel bicchiere; si assuma che la faccia superiore del cubetto rimanga costantemente parallela alla superficie dell'acqua. [$\rho_g = 917 \text{ kg m}^{-3}$; $\rho_a = 10^3 \text{ kg m}^{-3}$; $L = 2 \text{ cm}$]

P.9.3.

Un sommozzatore in immersione emette una bolla d'aria che, alla profondità h , ha un raggio r_i . Quando la bolla raggiunge la superficie, il raggio è pari ad r_f . Assumendo che l'aria sia un gas perfetto, che la temperatura all'interno della bolla si mantenga costante durante la risalita e che la pressione atmosferica sulla superficie dell'acqua sia pari a p_0 , si determini la profondità h a cui si trova il sommozzatore. [$r_i = 2 \text{ mm}$; $r_f = 3 \text{ mm}$; $p_0 = 1.01 \times 10^5 \text{ Pa}$; densità dell'acqua $\rho_a = 10^3 \text{ kg m}^{-3}$]

P.9.4.

Un recipiente di forma cilindrica contiene del liquido di densità ρ . Recipiente e liquido vengono posti in rotazione attorno all'asse verticale del cilindro con velocità angolare ω . Si determini l'equazione che descrive la superficie libera del liquido durante la rotazione.

P.9.5.

Si consideri un liquido la cui densità ρ varia in funzione della pressione secondo la relazione $\rho(p) = \rho_0 + kp$, essendo ρ_0 e k costanti. Si calcoli l'andamento della pressione in funzione della quota quando il liquido è in equilibrio sotto l'azione del suo peso, conoscendo il valore p_0 della pressione dell'aria alla superficie libera del liquido.

P.9.6.

In un recipiente contenente acqua (densità ρ_a) e mercurio (densità ρ_{Hg}) è immerso un cubo di alluminio (densità ρ_{Al}) di lato L . Supponendo che il cubo rimanga in equilibrio in posizione non inclinata, calcolare la quota del centro di massa del cubo rispetto alla superficie di separazione fra acqua e mercurio. [$\rho_a = 1 \text{ g cm}^{-3}$; $\rho_{Hg} = 13.6 \text{ g cm}^{-3}$; $\rho_{Al} = 2.7 \text{ g cm}^{-3}$; $L = 10 \text{ cm}$]

P.9.7.

Il peso di un oggetto, di densità incognita, è pari a 5 N. Quando lo stesso oggetto viene sospeso ad un dinamometro ed immerso in acqua, il dinamometro misura una forza complessiva pari a 3.5 N. Si determini la densità dell'oggetto.

P.9.8.

Si consideri una sfera cava formata da due emisferi separabili di raggio R e spessore piccolo rispetto al raggio. Mediante una pompa, la pressione all'interno della sfera viene ridotta fino ad un valore p minore della pressione p_0 presente all'esterno. Si dimostri che la forza richiesta per separare i due emisferi è in modulo pari ad $F = \pi R^2(p_0 - p)$.

P.9.9.

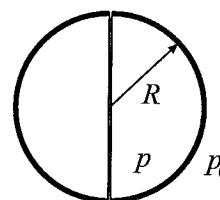
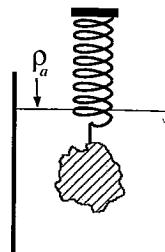
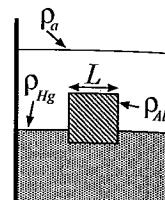
Un cubo di legno galleggia in acqua in posizione verticale. Se si poggia sulla faccia superiore del cubo una massa m , il cubo affonda per un tratto di lunghezza d . Stabilire la lunghezza L dello spigolo del cubo. [$m = 200 \text{ g}$; $d = 2 \text{ cm}$]

P.9.10.

Una diga di lunghezza L trattiene l'acqua di un bacino idrico di profondità h . Calcolare la risultante delle forze esercitate dall'acqua sulla diga. [$L = 300 \text{ m}$; $h = 150 \text{ m}$]

P.9.11.

Si consideri una colonna di gas perfetto, sottoposta al suo stesso peso, in cui la temperatura sia costante e pari a T . Si determini la quota, rispetto al fondo della colonna, a cui la pressione del gas risulta ridotta ai $9/10$ di quella presente sul fondo. Si assuma che la forza gravitazionale non cambi con la quota e che il peso molecolare del gas sia pari a μ . [$T = 273 \text{ K}$; $\mu = 50 \text{ g mole}^{-1}$]



9.1 Problemi

P.9.12.

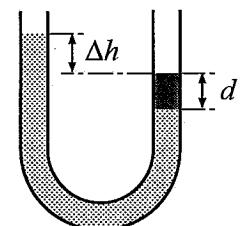
Una batisfera ha la forma di una sfera di raggio R ed ha massa M . Calcolare la massa della zavorra che è necessario aggiungere alla batisfera per portarla al di sotto del pelo dell'acqua. [$R = 1 \text{ m}$; $M = 2500 \text{ kg}$]

P.9.13.

Si determini il volume di elio necessario per portare un pallone metereologico alla quota h_0 con un carico complessivo di massa M . Si assuma che il volume del pallone e la densità dell'elio ρ_{He} al suo interno rimangano costanti e che la densità ρ dell'aria vari con la quota h secondo la relazione $\rho = \rho_0 e^{-h/k}$. [$\rho_{He} = 0.18 \text{ kg m}^{-3}$; $h_0 = 10000 \text{ m}$; $M = 250 \text{ kg}$; $\rho_0 = 1.25 \text{ kg m}^{-3}$; $k = 7500 \text{ m}$]

P.9.14.

Si consideri un tubo ad U, aperto da entrambi i lati, contenente acqua. Successivamente si aggiunge, da un lato del tubo, del liquido immiscibile con l'acqua, di densità incognita. Il liquido forma una colonna alta d . Sapendo che la differenza tra le quote delle superfici libere dei liquidi nei due rami è pari a Δh , si determini la densità del liquido incognito.



P.9.15.

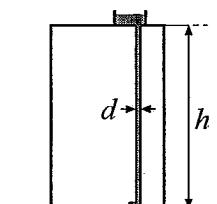
Un serbatoio cilindrico di diametro D contiene dell'acqua, la cui superficie libera si trova ad una quota h_0 dal fondo. Successivamente si pratica un foro sulla parete laterale del recipiente, in corrispondenza del fondo. Posto che il foro abbia un raggio pari a r , si determini la legge con cui cambia la quota della superficie dell'acqua al passare del tempo.

P.9.16.

Si consideri un tubo di diametro via via decrescente, il cui imbocco, di diametro d_i , si trova al pian terreno di un edificio; il tubo giunge sino al tetto del palazzo, dove ha un diametro pari a d_f . Una pompa all'imbocco immette nel tubo dell'acqua che, giunta sul tetto, viene scaricata in un serbatoio comunicante con l'ambiente esterno. Sapendo che la portata d'acqua immessa è pari a V , che l'altezza dell'edificio è pari ad h ed assumendo che non ci siano perdite di energia o di portata lungo il tragitto, si calcoli la pressione p_i dell'acqua nelle tubature al livello del pian terreno e la velocità che essa possiede in uscita dal tubo. [$d_i = 15 \text{ cm}$; $d_f = 2 \text{ cm}$; $V = 6 \text{ l/min}$; $h = 20 \text{ m}$]

P.9.17.

La fornitura idrica di un palazzo di altezza h viene erogata da un serbatoio d'acqua posto sul tetto; l'acqua raggiunge gli utenti del palazzo per caduta libera lungo le tubazioni. Posto che le tubazioni abbiano diametro pari a d , si stabilisca la massima portata che sarà disponibile al livello del piano terreno; si trascuri il contributo legato alla quota del pelo libero dell'acqua nel serbatoio e si assuma che non vi siano perdite di energia lungo le tubazioni. Si calcoli inoltre la pressione subita dalle tubature al pian terreno qualora il flusso d'acqua sia arrestato. [$h = 9 \text{ m}$; $d = 2 \text{ cm}$]



P.9.18.

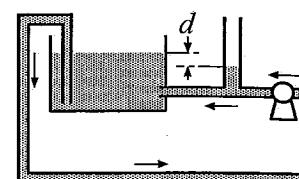
Si consideri un flusso di liquido, di densità ρ , in caduta libera da una quota h al suolo, che scorra in una tubazione con una portata V . Si calcoli la potenza disponibile che potrebbe essere estratta dal flusso di liquido; si trascurino eventuali perdite di energia lungo la condotta.

P.9.19.

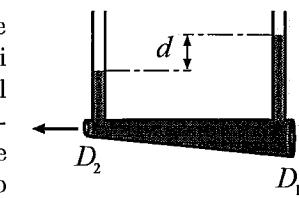
Si vuole costruire una centrale idroelettrica che sfrutta un flusso d'acqua proveniente da un bacino; dopo un salto di 60 m, l'acqua muove delle turbine che alimentano dei generatori elettrici. Assumendo che la centrale produca energia elettrica con un'efficienza del 70%, si calcoli la portata di acqua necessaria affinché la centrale eroghi alla rete di distribuzione elettrica una potenza di 10 MW.

P.9.20.

Si consideri il circuito in figura, in cui è presente del liquido di densità ρ . Inizialmente il liquido è in quiete ed il livello che raggiunge nella colonna verticale è pari a quello presente nel serbatoio. In seguito una pompa mette in moto il fluido nel circuito; si osserva che la colonna di liquido si abbassa di un tratto d rispetto al livello del serbatoio. Si calcoli la velocità del fluido trascurando le variazioni di quota che potrebbero comparire nel serbatoio all'atto dell'accensione della pompa ed assumendo fermo il liquido in corrispondenza delle superfici di contatto con l'atmosfera. [$d = 1 \text{ cm}$]

**P.9.21.**

Si consideri il sistema di tubazioni a lato; nel tratto orizzontale inferiore, composto da un tubo di sezione decrescente da un diametro D_1 ad un diametro D_2 , scorre del liquido di densità nota ρ con velocità incognita. I due rami verticali del sistema, posti in corrispondenza degli estremi della tubazione inferiore, sono direttamente comunicanti con l'ambiente esterno. Il dislivello che presentano le due colonne di liquido in questi rami è pari a d . Si calcoli la portata del flusso di liquido circolante nella tubazione inferiore.

**9.2 Soluzioni****9.2 Soluzioni****S.9.1.**

Il volume d'acqua inizialmente presente nel bicchiere è pari a:

$$V_i = \frac{\pi D^2 h_0}{4}, \quad (1)$$

essendo D il diametro del bicchiere ed h_0 la quota iniziale di acqua; una volta inserito il cubetto, il livello d'acqua si innalzerà sino ad una nuova quota h (vedi figura). Il volume della parte immersa del cubetto sarà dato dall'espressione:

$$V_{c,i} = x L^2, \quad (2)$$

dove x è la porzione di spigolo immersa in acqua ed L è la lunghezza dello spigolo del cubetto. Si noti che la somma del volume iniziale d'acqua V_i col volume della parte immersa del cubetto $V_{c,i}$ si può riscrivere in funzione della quota h :

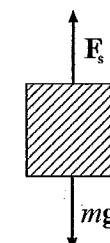
$$V_i + V_{c,i} = \frac{\pi D^2 h}{4}. \quad (3)$$

Pertanto, sostituendo nella (3) le relazioni (1) ed (2), otteniamo:

$$\frac{\pi D^2 h}{4} = \frac{\pi D^2 h_0}{4} + x L^2, \quad (4)$$

da cui si ricava il valore di h :

$$h = h_0 + \frac{4xL^2}{\pi D^2}. \quad (5)$$



Per calcolare h è ora necessario determinare x ; osserviamo in proposito che, in condizioni di equilibrio, la somma delle forze agenti sul cubetto è nulla:

$$mg + F_s = 0, \quad (6)$$

dove F_s è la spinta di Archimede che agisce sul cubetto, m è la sua massa e g è l'accelerazione di gravità; poiché le due forze hanno versi opposti, per ottenere la condizione di equilibrio è sufficiente uguagliarne i moduli. Introdotte le densità dell'acqua ρ_a e del ghiaccio ρ_g , possiamo riscrivere il modulo della forza peso come:

$$|mg| = \rho_g V_c g = \rho_g L^3 g, \quad (7)$$

dove $g = |g|$ e V_c è il volume complessivo del cubetto. Il modulo della spinta idrostatica è pari al peso di liquido spostato dal cubetto, per cui sarà dato dalla relazione:

$$|F_s| = \rho_a V_{c,i} g = \rho_a L^2 x g. \quad (8)$$

La condizione di equilibrio si ottiene ponendo $|F_s| = |mg|$:

$$\rho_g L^3 g = \rho_a L^2 x g, \quad (9)$$

da cui

$$x = \frac{\rho_g}{\rho_a} L. \quad (10)$$

Sostituendo nella (10) i valori numerici assegnati, otteniamo $x = 1.83$ cm. Sostituendo tale quantità nella (5), otteniamo infine $h = 10.26$ cm. Si noti che il volume immerso del cubetto $V_{c,i}$ è pari al volume di acqua $V_{c,sc}$ ottenuta dallo scioglimento del ghiaccio; difatti:

$$V_{c,sc} = \frac{m}{\rho_a} = \frac{L^3 \rho_g}{\rho_a} = x L^2 = V_{c,i}. \quad (11)$$

Pertanto, quando il ghiaccio si sarà sciolto, il livello d'acqua nel bicchiere non cambierà.

S.9.2.

Prima di risolvere il problema osserviamo che, in condizioni di equilibrio, la porzione di spigolo del cubetto immersa in acqua è data dalla relazione (vedi precedente esercizio):

$$z_0 = \frac{\rho_g}{\rho_a} L, \quad (1)$$

dove ρ_a e ρ_g sono rispettivamente le densità dell'acqua e del ghiaccio ed L è la lunghezza dello spigolo del cubetto. Introduciamo un sistema di coordinate cartesiane, il cui asse z sia diretto verticalmente verso il basso e la cui origine coincida con la superficie libera dell'acqua; si noti che, poiché il contenitore è molto grande, le oscillazioni del cubetto non provocheranno variazioni apprezzabili della quota della superficie dell'acqua. Le forze agenti sul cubetto sono due: la forza peso

$$\mathbf{F}_p = mg \mathbf{u}_z = \rho_g L^3 g \mathbf{u}_z, \quad (2)$$

dove m è la massa del cubetto e g l'accelerazione di gravità; la spinta idrostatica

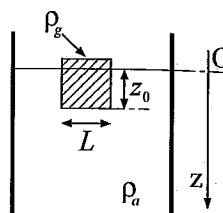
$$\mathbf{F}_s = -\rho_a g V_i \mathbf{u}_z = -\rho_a g L^2 z \mathbf{u}_z, \quad (3)$$

dove V_i è il volume della porzione immersa del cubetto e z la posizione della faccia inferiore del cubetto. Si noti ancora una volta che la spinta idrostatica è pari al peso del liquido spostato dal cubetto, ovvero è pari al peso del volume di liquido corrispondente al volume della parte immersa del cubetto. Applicando la seconda legge della dinamica al moto di oscillazione del cubetto avremo:

$$\mathbf{F}_s + \mathbf{F}_p = m \mathbf{a}, \quad (4)$$

dove \mathbf{a} è l'accelerazione del cubetto. Sostituendo nella (4) le espressioni (2) e (3) e proiettando lungo l'asse z , otteniamo la relazione:

$$\rho_g L^3 \frac{d^2 z}{dt^2} = \rho_g L^3 g - \rho_a g L^2 z, \quad (5)$$



9.2 Soluzioni

da cui otteniamo

$$\frac{d^2 z}{dt^2} = g \left[1 - \frac{\rho_a z}{\rho_g L} \right] = g \left[1 - \frac{z}{z_0} \right]. \quad (6)$$

Se effettuiamo nella (6) la sostituzione $z = z_0 + x$, otteniamo la nuova equazione di moto:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{\rho_a g}{\rho_g L} x = 0; \quad (7)$$

si noti che la (7) è la tipica equazione del moto armonico, che ammette soluzione del tipo:

$$x(t) = A \cos(\omega t + \phi), \quad (8)$$

dove A e ϕ sono costanti dipendenti dalle condizioni iniziali ed

$$\omega = \sqrt{\frac{\rho_a g}{\rho_g L}}. \quad (9)$$

Pertanto il periodo delle oscillazioni del cubetto sarà pari a:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{\rho_g L}{\rho_a g}}. \quad (10)$$

Sostituendo i dati assegnati dal problema, otteniamo $T = 0.27$ s.

S.9.3.

Per risolvere il problema faremo l'ipotesi che l'aria racchiusa nella bolla emessa dal sommozzatore sia assimilabile ad un gas perfetto. Potremo dunque far uso della legge dei gas perfetti:

$$pV = nRT, \quad (1)$$

dove p , V , T sono rispettivamente pressione, volume e temperatura della massa di gas in considerazione, n è il numero di moli contenute in tale massa di gas ed R è la costante dei gas perfetti. Nell'ipotesi che la temperatura all'interno della bolla rimanga costante durante la risalita verso la superficie, potremo utilizzare la (1) nella forma:

$$p_i V_i = p_f V_f, \quad (2)$$

dove p_i , V_i sono pressione e volume della bolla al momento dell'emissione alla profondità h , mentre p_f , V_f sono pressione e volume nel momento in cui la bolla raggiunge la superficie; la (2) rappresenta la ben nota legge di Boyle. Assumendo la bolla di forma perfettamente sferica, potremo riscrivere la (2) come:

$$p_i \frac{4}{3} \pi r_i^3 = p_f \frac{4}{3} \pi r_f^3, \quad (3)$$

essendo r_i ed r_f rispettivamente il raggio della bolla al momento dell'emissione ed al momento in cui giunge in superficie. Risulterà pertanto:

$$\frac{p_i}{p_f} = \left(\frac{r_f}{r_i} \right)^3. \quad (4)$$

Per poter esprimere la relazione precedente in funzione della profondità a cui la bolla viene emessa, assumeremo che la pressione dell'aria all'interno della bolla sia uguale a quella della massa d'acqua che la circonda. Tale ipotesi è accettabile purché la bolla, salendo lentamente, modifichi le sue dimensioni in modo graduale. In tal caso le forze agenti sulla superficie di separazione della bolla (pressione interna dell'aria e pressione esterna dell'acqua che circonda la bolla) si potranno assumere costantemente in equilibrio. La pressione presente nell'acqua ad una profondità h è data dalla legge di Stevino:

$$p(h) = p_0 + \rho_a g h, \quad (5)$$

dove p_0 è la pressione atmosferica che grava sulla superficie dell'acqua, g è l'accelerazione di gravità e ρ_a è la densità dell'acqua. Ponendo pertanto nella (4) $p_i = p(h)$, $p_f = p_0$ e facendo uso della (5), otteniamo:

$$\frac{p_0 + \rho_a g h}{p_0} = \left(\frac{r_f}{r_i} \right)^3, \quad (6)$$

da cui si giunge alla:

$$h = \frac{p_0}{\rho_a g} \left[\left(\frac{r_f}{r_i} \right)^3 - 1 \right]. \quad (7)$$

Sostituendo i valori assegnati dal testo, si ottiene infine $h = 24.45$ m.

S.9.4.

Impiegheremo nel seguito un sistema di riferimento solidale al liquido ed al recipiente in rotazione; l'asse z , diretto verso l'alto, coinciderà con l'asse di rotazione del sistema. Consideriamo un elemento infinitesimo di liquido di volume dV e coordinate (x, y, z) ; la distanza di dV dall'asse di rotazione è pari ad

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

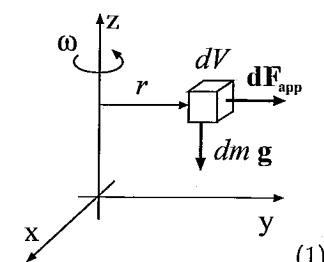
Le forze di volume agenti sull'elementino in questione (ovvero quelle forze proporzionali al volume dell'elementino) sono due; la prima è la forza peso

$$dF_p = dm g = -\rho dV g \mathbf{u}_z, \quad (2)$$

dove g è il modulo dell'accelerazione di gravità e $dm = \rho dV$ la massa dell'elementino; la seconda forza agente sull'elementino è la forza apparente (centrifuga)

$$dF_{app} = dm \omega^2 r \mathbf{u}_r = \rho dV \omega^2 r \mathbf{u}_r, \quad (3)$$

dove \mathbf{u}_r è un versore perpendicolare all'asse z e diretto verso l'esterno, mentre ω è la velocità angolare con cui il sistema ruota; si noti che il sistema di riferimento, essendo



9.2 Soluzioni

solidale al liquido in rotazione, non è inerziale; pertanto è necessario tener conto anche delle forze apparenti che compaiono nel sistema. La forza per unità di volume \mathfrak{F} agente sul liquido può essere calcolata impiegando le precedenti relazioni:

$$\mathfrak{F} = \frac{dF_p + dF_{app}}{dV} = \rho(\omega^2 r \mathbf{u}_r - g \mathbf{u}_z). \quad (4)$$

Si noti che è possibile riscrivere il termine radiale presente nella precedente espressione usando la relazione:

$$r \mathbf{u}_r = x \mathbf{u}_x + y \mathbf{u}_y, \quad (5)$$

che, inserita nella (4), consente di riscrivere la forza per unità di volume nella forma:

$$\mathfrak{F} = \rho \omega^2(x \mathbf{u}_x + y \mathbf{u}_y) - \rho g \mathbf{u}_z. \quad (6)$$

Possiamo a tal punto ricordare che la pressione p nel liquido è legata ad \mathfrak{F} dalla relazione:

$$\text{grad } p = \mathfrak{F} = \rho \omega^2(x \mathbf{u}_x + y \mathbf{u}_y) - \rho g \mathbf{u}_z, \quad (7)$$

dove

$$\text{grad } p = \frac{\partial p}{\partial x} \mathbf{u}_x + \frac{\partial p}{\partial y} \mathbf{u}_y + \frac{\partial p}{\partial z} \mathbf{u}_z. \quad (8)$$

Proiettando la (7) lungo i tre assi cartesiani, otteniamo quindi il sistema di equazioni:

$$\begin{cases} \frac{\partial p}{\partial x} = \rho \omega^2 x \\ \frac{\partial p}{\partial y} = \rho \omega^2 y \\ \frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g \end{cases} \quad (9)$$

la cui soluzione è

$$p(x, y, z) = \frac{\rho \omega^2}{2} (x^2 + y^2) - \rho g z + k, \quad (10)$$

essendo k una costante arbitraria. Per stabilire la forma che sarà assunta dalla superficie libera dell'acqua, osserviamo che tale superficie a regime è in equilibrio a causa del bilanciamento fra la pressione del liquido e la pressione atmosferica p_0 che grava sul sistema. Pertanto l'equazione che descrive la superficie dell'acqua sarà:

$$p(x, y, z) = p_0, \quad (11)$$

la quale, sostituita nella (10), si riduce all'espressione:

$$z = \frac{\omega^2}{2g} (x^2 + y^2) + \text{costante}, \quad (12)$$

che rappresenta un paraboloide di rotazione.

S.9.5.

Consideriamo un elemento infinitesimo di liquido di volume dV ; l'unica forza di volume (ovvero proporzionale al volume) che agisce su di esso è la forza peso:

$$d\mathbf{F}_p = dm \mathbf{g} = \rho g dV \mathbf{u}_z, \quad (1)$$

dove \mathbf{u}_z è il versore dell'asse z diretto verticalmente verso il basso e $dm = \rho dV$ la massa dell'elemento considerato; sostituendo nella (1) la espressione della densità in funzione della pressione

$$\rho(p) = \rho_0 + kp, \quad (2)$$

e calcolando la forza per unità di volume \mathfrak{F} agente sul liquido, otteniamo:

$$\mathfrak{F} = \frac{d\mathbf{F}_p}{dV} = g(\rho_0 + kp) \mathbf{u}_z. \quad (3)$$

Ricordando che il legame fra pressione e forza di volume agente sul liquido è:

$$\mathfrak{F} = \text{grad } p = \frac{\partial p}{\partial x} \mathbf{u}_x + \frac{\partial p}{\partial y} \mathbf{u}_y + \frac{\partial p}{\partial z} \mathbf{u}_z, \quad (4)$$

e sostituendo tale espressione nella (3), otteniamo la relazione:

$$\frac{dp}{dz} = g(\rho_0 + kp); \quad (5)$$

si noti che la (3) contiene solo un termine diretto come \mathbf{u}_z e quindi, in base alla definizione dell'operatore gradiente, l'equazione (5) contiene solo la derivata rispetto alla coordinata z . La (5) può essere risolta per separazione delle variabili, nella forma:

$$\int_{p_0}^{p(h)} \frac{dp}{\rho_0 + kp} = \int_0^h g dz, \quad (6)$$

essendo h la profondità a cui stiamo valutando la pressione $p(h)$ e p_0 la pressione atmosferica che grava sulla superficie del liquido. Calcolati gli integrali, otteniamo:

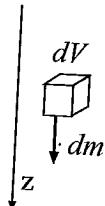
$$\frac{1}{k} \ln \left[\frac{\rho_0 + k p(h)}{\rho_0 + k p_0} \right] = gh. \quad (7)$$

La precedente equazione si trasforma infine nella espressione:

$$p(h) = \left(\frac{\rho_0}{k} + p_0 \right) e^{kh} - \frac{\rho_0}{k}. \quad (8)$$

S.9.6.

Introduciamo un asse z verticale e diretto verso l'alto di versore \mathbf{u}_z . Sul cubetto di alluminio agiscono tre forze: la forza peso $mg = -\rho_{Al} L^3 g \mathbf{u}_z$, la spinta idrostatica esercitata dal mercurio $\mathbf{F}_{s1} = \rho_{Hg} L^2 x_1 g \mathbf{u}_z$ e la spinta esercitata dall'acqua $\mathbf{F}_{s2} = \rho_a L^2 x_2 g \mathbf{u}_z$; nelle precedenti espressioni ρ_a , ρ_{Hg} e ρ_{Al} sono rispettivamente le densità dell'acqua, del mercurio e dell'alluminio; L è la lunghezza dello spigolo del cubetto; x_1 ed x_2 le porzioni



9.2 Soluzioni

di spigolo immerse rispettivamente nel mercurio e nell'acqua; g il modulo dell'accelerazione di gravità. Essendo il cubetto in equilibrio, la somma delle tre forze sarà nulla; la condizione di equilibrio si potrà esprimere come:

$$(\rho_a L^2 x_2 g + \rho_{Hg} L^2 x_1 g) \mathbf{u}_z - \rho_{Al} L^3 g \mathbf{u}_z = 0, \quad (1)$$

da cui

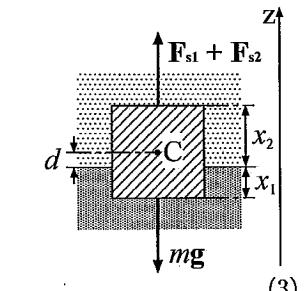
$$\rho_a x_2 + \rho_{Hg} x_1 = \rho_{Al} L. \quad (2)$$

Si noti che $x_1 + x_2 = L$ e pertanto, sostituendo tale espressione nella (2) otteniamo:

$$x_2 = L \frac{\rho_{Hg} - \rho_a}{\rho_{Hg} - \rho_a}, \quad (3)$$

e

$$x_1 = L \frac{\rho_{Al} - \rho_a}{\rho_{Hg} - \rho_a}. \quad (4)$$



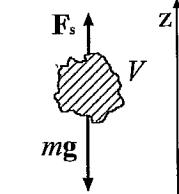
Sostituendo i valori numerici assegnati dal testo nelle due precedenti espressioni, otteniamo che $x_1 = 1.35$ cm ed $x_2 = 8.65$ cm. Abbiamo implicitamente assunto il cubetto come omogeneo, per cui il suo baricentro C si troverà a metà fra le due facce orizzontali. Pertanto la quota del baricentro dalla superficie di separazione acqua-mercurio è pari a

$$d = \frac{L}{2} - x_1 = 3.65 \text{ cm}. \quad (5)$$

S.9.7.

Introduciamo un asse z verticale e diretto verso l'alto, individuato da un versore \mathbf{u}_z . La forza peso agente sull'oggetto, misurata quando questo non è immerso in acqua, può essere espressa nella forma:

$$\mathbf{F}_p = mg = -\rho V g \mathbf{u}_z, \quad (1)$$



essendo g il modulo dell'accelerazione di gravità, V il volume dell'oggetto e ρ la sua densità, che intendiamo qui calcolare. Nel momento in cui l'oggetto è completamente immerso in acqua, su di esso agirà anche la spinta idrostatica

$$\mathbf{F}_s = \rho_a V g \mathbf{u}_z, \quad (2)$$

dove ρ_a è la densità dell'acqua. Il modulo della forza complessiva $\mathbf{F}_t = \mathbf{F}_p + \mathbf{F}_s$ agente sull'oggetto sarà pari a:

$$|\mathbf{F}_t| = \rho V g - \rho_a V g = V g (\rho - \rho_a), \quad (3)$$

che rappresenta anche la forza misurata dal dinamometro quando l'oggetto è immerso in acqua. Si noti che possiamo riesprimere la quantità $V g$ in base alla (1) come:

$$V g = \frac{|\mathbf{F}_p|}{\rho}, \quad (4)$$

che, sostituita nella (3), porta alla relazione:

$$|F_t| = |F_p| \frac{\rho - \rho_a}{\rho}, \quad (5)$$

da cui

$$\frac{|F_t|}{|F_p|} = 1 - \frac{\rho_a}{\rho}. \quad (6)$$

Dalla (6) possiamo poi ricavare la densità ρ del corpo in funzione del peso e della forza totale misurata dal dinamometro:

$$\rho = \frac{\rho_a}{1 - |F_t|/|F_p|}. \quad (7)$$

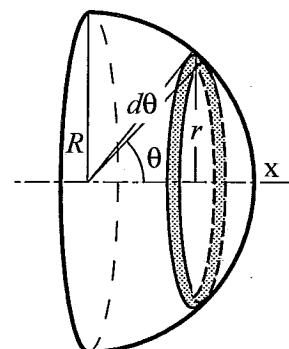
Sostituendo i valori assegnati nel testo, otteniamo che

$$\rho = \frac{10}{3} \rho_a = 3.33 \times 10^3 \text{ kg/m}^3 \quad (8)$$

S.9.8.

Procederemo calcolando la forza agente su uno dei due emisferi a causa dello squilibrio fra pressione interna ed esterna; per comodità introdurremo un asse x coincidente con l'asse di simmetria del guscio. Divideremo la superficie sferica in sottili strisce circolari lungo i paralleli, la cui posizione rispetto all'asse x sarà individuata da un angolo θ ; chiameremo $d\theta$ l'angolo infinitesimo che sottende una di queste strisce. Sia $r = R \sin \theta$ il raggio della striscia; l'area dA di tale striscia è pari a:

$$dA = 2\pi r R d\theta = 2\pi R^2 \sin \theta d\theta. \quad (1)$$



La risultante delle forze di pressione dF agenti sulla striscia sarà diretta lungo l'asse x in virtù della simmetria del sistema; pertanto per il calcolo di dF è sufficiente tener conto solo della proiezione di tali forze lungo l'asse x .

Risulterà:

$$dF = dA (p - p_0) \cos \theta u_x, \quad (2)$$

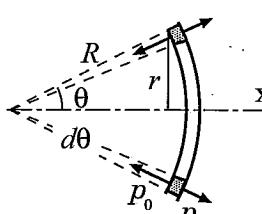
in cui p è la pressione interna al guscio, p_0 è la pressione atmosferica esterna ed u_x il versore dell'asse x . Sostituendo nella (2) la relazione (1), otteniamo:

$$dF = 2\pi R^2 (p - p_0) \cos \theta \sin \theta d\theta u_x, \quad (3)$$

che può essere riscritta come:

$$dF = \pi R^2 (p - p_0) \sin 2\theta d\theta u_x. \quad (4)$$

La risultante delle forze di pressione agenti su uno dei due emisferi sarà allora pari a:

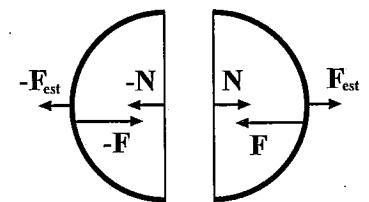


9.2 Soluzioni

$$F = \int_0^{\pi/2} dF = \int_0^{\pi/2} \pi R^2 (p - p_0) \sin 2\theta d\theta u_x, \quad (5)$$

da cui otteniamo

$$F = \pi R^2 (p - p_0) u_x. \quad (6)$$



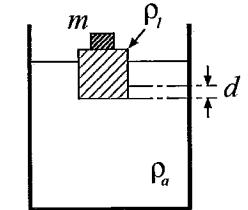
Per calcolare la forza necessaria a separare i due emisferi, analizziamo il sistema da essi formato. Detta F_{est} la forza esterna applicata ad uno degli emisferi per separarlo dall'altro ed N la reazione vincolare dovuta al contatto tra gli emisferi, la condizione per cui ciascun emisfero sia in equilibrio può essere scritta nella forma:

$$F_{\text{est}} + N + F = 0. \quad (7)$$

Per ottenere il distacco tra gli emisferi è sufficiente impostare che la reazione vincolare si annulli; pertanto la minima forza che è necessario applicare per tale scopo è proprio pari in modulo a $|F_{\text{est}}| = |F| = \pi R^2 (p_0 - p)$, ove si è tenuto conto del fatto che $p_0 > p$.

S.9.9.

In condizioni di equilibrio ed in assenza del blocco di massa m , il cubetto di legno è sottoposto unicamente alla forza peso $m_l g$ ed alla spinta di Archimede F_s , dove m_l è la massa del cubetto e g l'accelerazione di gravità. Poiché il cubetto galleggia le due forze si bilanciano, per cui possiamo impostare $|m_l g| = |F_s|$; da ciò deriva:



$$\rho_l L^3 g = \rho_a x L^2 g, \quad (1)$$

dove ρ_l e ρ_a sono rispettivamente la densità del legno e dell'acqua, L è la lunghezza dello spigolo del cubetto ed x la porzione di spigolo immersa in acqua.

Aggiungendo anche il blocco di massa m , alle due forze precedenti si sommerà la forza peso mg del blocco. In questa nuova situazione il cubetto galleggia ancora, ma la porzione di spigolo x' immersa in acqua sarà superiore rispetto al caso precedente. Avremo pertanto all'equilibrio che $|(m + m_l)g| = |F'_s|$, dove F'_s è la nuova spinta idrostatica agente sul cubetto; da ciò:

$$\rho_l L^3 g + mg = \rho_a x' L^2 g. \quad (2)$$

Impiegando la (1) nella (2), si giunge alla:

$$\rho_a x L^2 g + mg = \rho_a x' L^2 g, \quad (3)$$

da cui:

$$m = \rho_a L^2 (x' - x) = \rho_a L^2 d, \quad (4)$$

dove d è la porzione di cubetto affondato a seguito dell'introduzione del blocco sul cubetto stesso. Dalla precedente equazione giungiamo infine a determinare la lunghezza L dello spigolo del cubetto:

$$L = \sqrt{\frac{m}{\rho_a d}}; \quad (5)$$

sostituendo i valori numerici assegnati dal problema, si ottiene $L = 10$ cm.

S.9.10.

Introduciamo un sistema di coordinate cartesiane ortogonali, in cui l'asse z sia diretto verticalmente verso il basso, l'asse x sia parallelo alla superficie libera dell'acqua, diretto verso la diga e l'origine degli assi coincida con la superficie dell'acqua. Consideriamo una porzione infinitesima della superficie della diga di altezza dz e lunghezza L , parallela al bordo della diga stessa (vedi figura). La forza dF che l'acqua esercita su questa porzione della diga sarà pari a:

$$dF = p(z) L dz u_x, \quad (1)$$

dove $p(z)$ è la pressione esercitata alla profondità z e u_x è il versore dell'asse x . Per la legge di Stevino, la pressione può essere espressa come:

$$p(z) = p_0 + \rho_a g z, \quad (2)$$

dove ρ_a è la densità dell'acqua, g è il modulo dell'accelerazione di gravità e p_0 è la pressione atmosferica che grava sulla superficie dell'acqua. La forza complessiva esercitata dall'acqua sulla diga sarà data dalla relazione:

$$F = \int dF = \int_0^h p(z) L u_x dz, \quad (3)$$

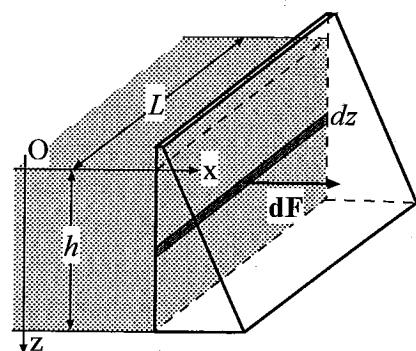
che, combinata con la (2), porta alla relazione:

$$F = \int_0^h (p_0 + \rho_a g z) L u_x dz. \quad (4)$$

Dalla (4) si ottiene:

$$F = \left[\frac{\rho_a g L h^2}{2} + p_0 L h \right] u_x. \quad (5)$$

Si noti tuttavia che, dall'altro lato della diga, l'aria esercita una forza diretta in senso opposto. La proiezione di questa forza lungo l'asse x sarà pari a $F_{aria} = -p_0 L h u_x$; pertanto la forza che la diga deve sopportare è data dalla relazione:



9.2 Soluzioni

$$F_{diga} = F + F_{aria} = \frac{\rho_a g L h^2}{2} u_x; \quad (6)$$

sostituendo nella precedente espressione i valori numerici assegnati dal problema, otteniamo $|F_{diga}| = 3.31 \times 10^{10}$ N che equivalgono a circa 3.37×10^6 tonnellate.

S.9.11.

Assumeremo nel seguito che il gas in oggetto sia perfetto. Consideriamo un elemento infinitesimo di gas di volume dV , la cui posizione sia individuata mediante un asse coordinato z diretto verticalmente verso l'alto. La forza peso dF_p agente su tale elemento sarà pari a:

$$dF_p = dm g = -dn \mu g u_z, \quad (1)$$

dove dm è la massa dell'elemento; dn è il numero di moli di gas contenuto in dV , g è il modulo dell'accelerazione di gravità e u_z il versore dell'asse z . Per poter esprimere la precedente relazione in funzione della pressione p del gas, facciamo uso della equazione di stato dei gas perfetti applicata a dV :

$$p dV = dn R T, \quad (2)$$

dove R è la costante dei gas perfetti e T la temperatura assoluta del gas. Ricavando dalla (2) il valore di dn in funzione delle altre quantità e sostituendolo nella (1), otteniamo:

$$dF_p = -\frac{p}{R T} \mu g u_z. \quad (3)$$

La forza per unità di volume \mathfrak{F} agente sul gas sarà pari a:

$$\mathfrak{F} = \frac{dF_p}{dV} = -\frac{p \mu g}{R T} u_z; \quad (4)$$

ricordando che il legame fra pressione e forza di volume agente sul gas è:

$$\mathfrak{F} = \text{grad } p = \frac{\partial p}{\partial x} u_x + \frac{\partial p}{\partial y} u_y + \frac{\partial p}{\partial z} u_z, \quad (5)$$

otteniamo che

$$\frac{dp}{dz} = -\frac{\mu g}{R T} p. \quad (6)$$

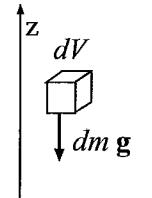
La (6) ammette per soluzione l'espressione:

$$p(z) = p_0 e^{-z/h}, \quad (7)$$

dove p_0 è la pressione alla base della colonna e

$$h = \frac{R T}{\mu g}. \quad (8)$$

Per calcolare la quota d alla quale la pressione si è ridotta ai 9/10 del valore iniziale, imponiamo che



$$e^{-d/h} = \frac{9}{10}, \quad (9)$$

da cui otteniamo

$$d = h \ln \left(\frac{10}{9} \right); \quad (10)$$

sostituendo i valori numerici assegnati dal problema, otteniamo $d = 487$ m.

S.9.12.

Se la batisfera è completamente immersa e rimane in equilibrio, la risultante delle forze agenti su di essa è nulla:

$$\mathbf{F}_s + (M + m_z)\mathbf{g} = \mathbf{0}, \quad (1)$$

dove \mathbf{F}_s è la spinta di Archimede, diretta verso l'alto, agente sulla batisfera; $M\mathbf{g}$ è la forza peso a cui la batisfera è sottoposta; $m_z\mathbf{g}$ è la forza peso agente sulla sua zavorra. Si noti che, essendo la forza peso complessiva diretta verso il basso, possiamo riscrivere la (1) semplicemente nella forma:

$$|\mathbf{F}_s| = (M + m_z)g, \quad (2)$$

dove $g = |\mathbf{g}|$. Il modulo della spinta idrostatica è pari al peso di liquido spostato dalla batisfera, per cui sarà dato dalla relazione:

$$|\mathbf{F}_s| = \rho_a V g = \frac{4}{3} \rho_a \pi R^3 g, \quad (3)$$

dove ρ_a è la densità dell'acqua ed R il raggio della batisfera. Impiegando la relazione (3) nella (2), giungiamo ad ottenere la massa di zavorra necessaria a mantenere la batisfera immersa:

$$m_z = \frac{4}{3} \rho_a \pi R^3 - M. \quad (4)$$

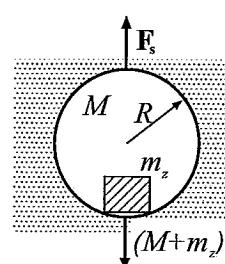
Sostituendo nella precedente equazione i valori numerici assegnati, otteniamo $m_z = 1689$ kg.

S.9.13.

Supponiamo che il pallone abbia raggiunto la quota h_0 desiderata e vi rimanga in quiete. La somma delle forze agenti su di esso sarà nulla; potremo pertanto porre:

$$\mathbf{F}_p + \mathbf{F}_s = \mathbf{0}, \quad (1)$$

essendo $\mathbf{F}_p = mg$ la forza peso agente sul pallone, m la sua massa complessiva (comprendendo anche l'olio al suo interno) ed \mathbf{F}_s la spinta di Archimede che agisce su di esso. Si noti che tale spinta è pari al peso della massa d'aria che il pallone sposta alla quota considerata. Supporremo nel seguito che la forza di interazione gravitazionale non cambi-



9.2 Soluzioni

apprezzabilmente con la quota. Introdotto un asse z diretto verticalmente verso l'alto, risulterà:

$$\mathbf{F}_p = -m g \mathbf{u}_z, \quad (2)$$

dove g è il modulo dell'accelerazione di gravità ed \mathbf{u}_z il versore dell'asse z ; inoltre la spinta di Archimede sarà pari a:

$$\mathbf{F}_s = \rho(h_0)Vg \mathbf{u}_z, \quad (3)$$

dove $\rho(h_0)$ è la densità dell'aria alla quota h_0 e V è il volume del pallone. Dalla (1) e con l'aiuto delle (2) e (3), otterremo:

$$mg = \rho(h_0)Vg. \quad (4)$$

In base ai dati del problema, l'espressione della densità dell'aria in funzione della quota è:

$$\rho(h_0) = \rho_0 \exp \left[-\frac{h_0}{k} \right]; \quad (5)$$

inoltre la massa complessiva m del pallone comprende sia la massa M della struttura che la massa m_{He} di olio al suo interno; pertanto potremo scrivere:

$$m = M + m_{He} = M + \rho_{He}V, \quad (6)$$

dove ρ_{He} è la densità dell'olio all'interno del pallone. Impiegando le (5) e (6) nella (4), otteniamo poi:

$$\rho_0 \exp \left[-\frac{h_0}{k} \right] V = M + \rho_{He}V, \quad (7)$$

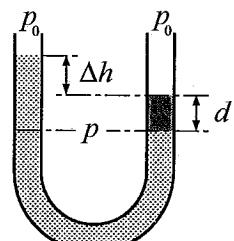
da cui:

$$V = \frac{M}{\rho_0 \exp[-h_0/k] - \rho_{He}}. \quad (8)$$

Sostituendo nella precedente equazione i dati assegnati dal problema, otteniamo $V = 1672$ m³.

S.9.14.

Per calcolare la densità del liquido incognito determiniamo la pressione p presente nell'acqua in corrispondenza della superficie di contatto tra il liquido e l'acqua stessa (ramo destro del tubo a U, come mostrato in figura). Si noti che, secondo la legge di Stevino, tale pressione è uguale a quella presente, alla stessa quota, nel ramo sinistro del tubo. Possiamo quindi calcolare p in due modi indipendenti ed uguagliare le espressioni ottenute. Per quanto riguarda la pressione nel ramo sinistro, avremo:



$$p = p_0 + \rho_a(d + \Delta h)g, \quad (1)$$

dove p_0 è la pressione atmosferica che grava su entrambe le aperture del tubo, ρ_a è la densità dell'acqua, g è il modulo dell'accelerazione di gravità, d e Δh sono rispettivamente l'altezza della colonna di fluido incognito e la differenza di quota tra le superfici libere dei liquidi nei due rami. La pressione nel ramo destro, alla medesima quota, sarà invece data dalla:

$$p = p_0 + \rho d g, \quad (2)$$

dove ρ è la densità del liquido incognito. Uguagliando la (1) e la (2), otteniamo:

$$p_0 + \rho_a(d + \Delta h)g = p_0 + \rho d g, \quad (3)$$

da cui:

$$\rho = \rho_a \frac{d + \Delta h}{d}. \quad (4)$$

S.9.15.

Nel seguito supporremo che il flusso di acqua perso attraverso il foro sia sufficientemente piccolo, in modo da poter assumere che nel recipiente, in corrispondenza della superficie libera, l'acqua sia in quiete. Applicheremo il teorema di Bernoulli, secondo il quale

$$p_1 + \frac{1}{2} \rho_a v_1^2 + \rho_a g h_1 = p_2 + \frac{1}{2} \rho_a v_2^2 + \rho_a g h_2, \quad (1)$$

dove: g è il modulo dell'accelerazione di gravità; ρ_a è la densità dell'acqua; p_1 , v_1 ed h_1 sono pressione, velocità e quota relativa ad un elemento infinitesimo di fluido nella posizione 1, mentre p_2 , v_2 ed h_2 sono pressione, velocità e quota relativa ad un elemento infinitesimo nella posizione 2. Nel nostro caso assumeremo che la posizione 2 coincida con la superficie libera dell'acqua nel recipiente, mentre la posizione 1 corrisponda al foro di uscita praticato in prossimità del fondo (vedi figura). In base alle ipotesi di partenza, porremo:

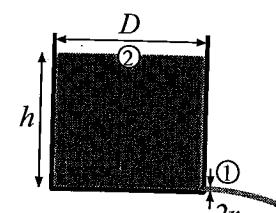
$$\begin{cases} p_2 = p_0, \\ v_2 = 0, \\ h_2 = h(t), \end{cases} \quad (2)$$

essendo p_0 la pressione atmosferica che grava sul recipiente ed $h(t)$ la quota di liquido nell'istante t ; varranno inoltre le condizioni:

$$\begin{cases} p_1 = p_0, \\ h_1 = 0. \end{cases} \quad (3)$$

Ponendo $v = v_1$ e sostituendo le precedenti condizioni nella (1) otteniamo:

$$\frac{1}{2} \rho_a v^2 = \rho_a g h(t), \quad (4)$$



9.2 Soluzioni

da cui si giunge alla:

$$v = \sqrt{2 g h(t)}. \quad (5)$$

Si noti che la portata \mathcal{V} (quantità di acqua che defluisce nell'unità di tempo) in uscita dal foro è pari alla variazione per unità di tempo del volume di liquido V contenuto nel recipiente:

$$\mathcal{V} = -\frac{dV}{dt}, \quad (6)$$

dove il segno negativo indica una diminuzione di volume. Ricordando che

$$\mathcal{V} = \pi r^2 v = \pi r^2 \sqrt{2 g h(t)}, \quad (7)$$

con r raggio del foro; esprimendo il volume di acqua nel recipiente come:

$$V = \pi \left(\frac{D}{2} \right)^2 h(t) = \frac{\pi D^2 h(t)}{4}, \quad (8)$$

e sostituendo nella equazione (6), otteniamo la relazione:

$$-\frac{\pi D^2 dh}{4 dt} = \pi r^2 \sqrt{2 g h(t)}. \quad (9)$$

Possiamo risolvere la (9) per separazione di variabili:

$$\int_{h_0}^{h(t)} \frac{dh}{\sqrt{2 g h(t)}} = - \int_0^t \frac{4r^2}{D^2} dt, \quad (10)$$

da cui si ottiene:

$$\sqrt{\frac{2}{g}} \left[\sqrt{h(t)} - \sqrt{h_0} \right] = - \frac{4r^2}{D^2} t. \quad (11)$$

La legge con cui varia la quota dell'acqua nel recipiente sarà infine data dalla relazione:

$$h(t) = \left[\sqrt{h_0} - \left(\frac{4r^2}{D^2} \sqrt{\frac{g}{2}} \right) t \right]^2. \quad (12)$$

S.9.16.

Assumeremo nel seguito che il fluido sia incompressibile; in base a tale assunzione possiamo ritenere che la portata di acqua \mathcal{V} sia costante attraverso ogni sezione del tubo. Pertanto avremo:

$$\mathcal{V}_i = \mathcal{V}_f = \mathcal{V}, \quad (1)$$

con \mathcal{V}_i , \mathcal{V}_f portate all'imbocco ed al termine del tubo. Convertendo la portata assegnata dal problema nelle unità di misura del Sistema Internazionale, otteniamo $\mathcal{V} = 10^{-4} \text{ m}^3/\text{s}$. Sostituendo nella precedente relazione la definizione di portata, otteniamo:

$$\frac{\pi d_i^2}{4} v_i = \frac{\pi d_f^2}{4} v_f = \mathcal{V}, \quad (2)$$

essendo: d_i e v_i rispettivamente diametro del tubo e velocità dell'acqua all'imbocco del tubo (situato al piano terra); d_f e v_f diametro del tubo e velocità dell'acqua al termine del tubo (situato in cima all'edificio). Dalla (2) si possono calcolare immediatamente le velocità con cui l'acqua fluisce agli estremi del tubo:

$$v_i = \frac{4\mathcal{V}}{\pi d_i^2} = 5.66 \times 10^{-3} \text{ m/s}, \quad (3)$$

e

$$v_f = \frac{4\mathcal{V}}{\pi d_f^2} = 0.32 \text{ m/s}. \quad (4)$$

Per il calcolo della pressione di esercizio della pompa, applichiamo il teorema di Bernoulli:

$$p_i + \frac{1}{2}\rho_a v_i^2 + \rho_a g h_i = p_f + \frac{1}{2}\rho_a v_f^2 + \rho_a g h_f, \quad (5)$$

dove: g è il modulo dell'accelerazione di gravità; ρ_a è la densità dell'acqua; p_i ed h_i sono pressione e quota relativa ad un elemento infinitesimo di fluido all'imbocco del tubo, mentre p_f ed h_f sono pressione e quota relativa ad un elemento infinitesimo al termine del tubo. Assumendo che all'estremo superiore della tubazione il fluido fuoriesca senza impedimenti, potremo porre $p_f = p_0$, con $p_0 \approx 1.01 \times 10^5 \text{ Pa}$ pressione atmosferica. Posto $h_i = 0$ ed $h_f = h$, con h altezza dell'edificio, avremo:

$$p_i = p_0 + \frac{1}{2}\rho_a(v_f^2 - v_i^2) + \rho_a g h; \quad (6)$$

sostituendo nella (6) i dati assegnati dal problema e quanto calcolato precedentemente, otteniamo $p_i = 2.97 \times 10^5 \text{ Pa}$.

S.9.17.

Assumano che l'acqua al pelo libero nel serbatoio (posizione 1 in figura) sia in quiete ed alla pressione atmosferica; inoltre assumiamo che la pressione in uscita dal tubo (posizione 2) sia ancora quella atmosferica. Per il teorema di Bernoulli avremo:

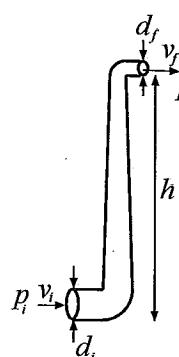
$$p_0 + \rho_a g h = p_0 + \frac{1}{2}\rho_a v_2^2, \quad (1)$$

dove: g è il modulo dell'accelerazione di gravità; ρ_a è la densità dell'acqua; p_0 è la pressione atmosferica; v_2 è la velocità con cui l'acqua fluisce in uscita al tubo ed h è l'altezza del palazzo. Dalla (1) risulta:

$$v_2 = \sqrt{2gh}, \quad (2)$$

da cui otteniamo $v_2 = 13.28 \text{ m/s}$. La portata della tubazione sarà allora pari a:

$$\mathcal{V} = \frac{\pi d^2}{4} v_2 = 4.17 \times 10^{-3} \text{ m}^3/\text{s}, \quad (3)$$



9.2 Soluzioni

essendo d il diametro della tubazione. Se l'acqua è in quiete, possiamo calcolare la pressione interna p che grava al pian terreno sulle tubature applicando la legge di Stevino:

$$p = p_0 + \rho_a g h; \quad (4)$$

si noti che sull'esterno delle tubazioni grava la pressione atmosferica, per cui la pressione netta che la tubazione deve sopportare è pari a $\rho_a g h = 8.83 \times 10^4 \text{ Pa}$.

S.9.18.

Assumiamo che il liquido sia posto in un recipiente a monte, dove la sua velocità sia trascurabile e la pressione prossima a quella atmosferica. Detta v la velocità con cui il liquido emergerà al termine della condotta ed h il salto subito dal fluido, applicando il teorema di Bernoulli ai due estremi della condotta avremo:

$$p_0 + \rho_a g h = p_0 + \frac{1}{2}\rho_a v^2, \quad (1)$$

dove: g è il modulo dell'accelerazione di gravità; ρ è la densità del fluido considerato e p_0 è la pressione atmosferica. Dalla (1) otteniamo:

$$v = \sqrt{2gh}. \quad (2)$$

La potenza \mathcal{P}_d teoricamente disponibile per esser estratta dal fluido sarà pari all'energia cinetica che il fluido può cedere nell'unità di tempo; tale quantità è pari a:

$$\mathcal{P}_d = \frac{1}{2} \frac{dm}{dt} v^2 = \frac{1}{2} v^2 \frac{dm}{dt} dV = \frac{1}{2} v^2 \rho \mathcal{V}, \quad (3)$$

dove: dm è la massa di un elementino infinitesimo di fluido, di volume dV , in uscita dal tubo nell'intervallo di tempo dt ; \mathcal{V} è la portata del tubo. Sostituendo la (2) nella (3), otteniamo infine:

$$\mathcal{P}_d = \rho g h \mathcal{V}. \quad (4)$$

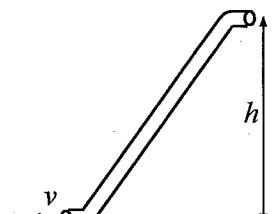
Si noti che tale risultato è puramente teorico, poiché presume che non vi sia perdita di energia del fluido lungo il condotto; inoltre, dopo che la sua energia è stata estratta (per esempio da una turbina), il fluido dovrà defluire; ciò comporta che una frazione dell'energia cinetica del fluido andrà persa.

S.9.19.

Tenuto conto che l'efficienza di trasformazione dell'energia cinetica dell'acqua in energia elettrica è pari al 70%, dovremo progettare la portata d'acqua in modo che renda disponibile una potenza \mathcal{P}_d pari a:

$$\mathcal{P}_d = \frac{100}{70} \times 10 \text{ MW} = 14.3 \text{ MW}. \quad (1)$$

In base al risultato del precedente esercizio, la portata richiesta è pari a:



$$\mathcal{V} = \frac{\mathcal{P}_d}{\rho g h}; \quad (2)$$

sostituendo i valori numerici, otteniamo che la portata richiesta è di $24.3 \text{ m}^3/\text{s}$.

S.9.20.

Nel seguito, seguendo il suggerimento del problema, si riterrà che il fluido in corrispondenza delle superfici di contatto con l'atmosfera (punti 1 e 4 in figura) sia in quiete. Si assumerà inoltre che esso sia in quiete in tutta la colonna verticale, con particolare riferimento alla base (punto 3). Assumeremo inoltre che la pressione del fluido nel tubo orizzontale (punto 2) sia uguale a quella alla base della colonna (punto 3). Applicando il teorema di Bernoulli ai punti 1 e 2 si ottiene:

$$p_1 + \rho g h_1 = p_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2, \quad (1)$$

essendo $p_1 = p_0$ la pressione alla superficie libera del fluido nel serbatoio, p_0 la pressione atmosferica, g il modulo dell'accelerazione di gravità, ρ la densità del fluido, h_1 la quota della superficie del fluido del serbatoio rispetto alla tubazione (punto 2), p_2 la pressione e v_2 la velocità del fluido nella tubazione stessa. Applicando la legge di Stevino tra i punti 3 e 4, si giunge alla:

$$p_3 = p_4 + \rho g (h_1 - d), \quad (2)$$

essendo $p_4 = p_0$ la pressione alla superficie libera del fluido nella colonna, p_3 la pressione alla base della colonna e d la differenza di quota fra liquido nella colonna e liquido nel serbatoio. Ricordando per le precedenti assunzioni che $p_3 = p_2$ ed usando la (1) e la (2), si giunge poi alla:

$$\frac{1}{2} \rho v_2^2 = \rho g d, \quad (3)$$

da cui

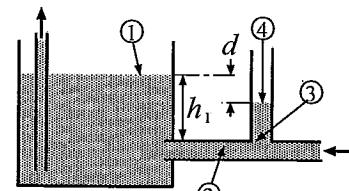
$$v_2 = \sqrt{2gd}. \quad (4)$$

Sostituendo i valori numerici, si ottiene che la velocità del fluido nella tubazione è di 0.44 m/s .

S.9.21.

Supporremo il fluido incompressibile, per cui la portata nella condotta dovrà risultare costante. Pertanto si avrà:

$$\frac{\pi D_1^2}{4} v_1 = \frac{\pi D_2^2}{4} v_2 = \mathcal{V}, \quad (1)$$



9.2 Soluzioni

dove \mathcal{V} è la portata del fluido, D_1 e D_2 sono i diametri della condotta, rispettivamente in ingresso ed uscita, mentre v_1 e v_2 le rispettive velocità del fluido. Applichiamo la legge di Stevino lungo le due colonne di fluido, che supporremo in quiete:

$$\begin{cases} p_1 = p_0 + \rho g h_1, \\ p_2 = p_0 + \rho g h_2, \end{cases} \quad (2)$$

dove p_1 e p_2 sono le pressioni del fluido alla base delle due colonne, rispettivamente in ingresso ed uscita; h_1 ed h_2 sono le quote delle superfici del liquido nelle due colonne; p_0 è la pressione atmosferica e ρ è la densità del fluido. Le pressioni p_1 e p_2 possono anche essere messe in relazione tra loro applicando il teorema di Bernoulli al fluido in moto nella condotta orizzontale; avremo in tal caso:

$$p_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 = p_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2. \quad (3)$$

Impiegando la (2) nella (3), si giunge alla:

$$\rho g (h_1 - h_2) = \frac{1}{2} \rho (v_2^2 - v_1^2) = \frac{1}{2} \rho v_2^2 \left(1 - \frac{v_1^2}{v_2^2}\right). \quad (4)$$

Facendo uso della (1), si ottiene:

$$\frac{v_1}{v_2} = \left(\frac{D_2}{D_1}\right)^2, \quad (5)$$

che può essere sostituita nella precedente equazione, ottenendo:

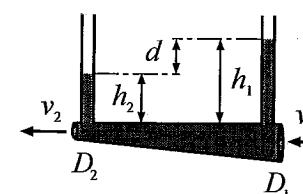
$$2gd = v_2^2 \left[1 - \left(\frac{D_2}{D_1}\right)^4\right], \quad (6)$$

dove si è tenuto conto del fatto che $(h_1 - h_2) = d$ è il dislivello tra le due colonne di liquido. Dalla (6) si ottiene

$$v_2 = \sqrt{\frac{2gd}{1 - (D_2/D_1)^4}}; \quad (7)$$

in base alla (1) otteniamo infine:

$$\mathcal{V} = \frac{\pi D_2^2}{4} v_2 = \frac{\pi D_2^2}{4} \sqrt{\frac{2gd}{1 - (D_2/D_1)^4}}. \quad (8)$$



Capitolo 10

Termologia, calorimetria, primo principio della termodinamica

10.1 Problemi

P.10.1.

In un termometro a mercurio la colonna di fluido è alta $h_1 = 5$ cm quando il termometro è immerso in ghiaccio fondente a pressione atmosferica ed $h_2 = 10$ cm quando il termometro è posto in equilibrio con acqua in ebollizione. Stimare le costanti termometriche del termometro e dire a quale temperatura la colonna di mercurio sarà alta $h_3 = 8$ cm.

P.10.2.

Un termometro di capacità C alla temperatura t_1 viene immerso in un fluido di massa m e temperatura t avente calore specifico massico c . Si calcoli la temperatura misurata dal termometro, precisando in quali condizioni tale temperatura è prossima a t .

P.10.3.

Una massa $m_1 = 2$ kg di ghiaccio a temperatura $t_1 = -10$ °C viene mescolata con una massa m_2 di acqua alla temperatura $t_2 = 20$ °C. Sapendo che dopo il mescolamento si ottiene acqua alla temperatura $t = 5$ °C, si calcoli la massa m_2 trascurando ogni dissipazione di calore con l'ambiente.

(Calore latente di fusione del ghiaccio: $\lambda_{gh} = 3.3 \times 10^5$ J/kg. Calore specifico del ghiaccio $c_{gh} = 2051$ J/Kg °C.)

P.10.4.

Un proiettile di piombo di massa $m = 0.05$ kg alla temperatura $t_{Pb} = 20$ °C, dotato di velocità $v_0 = 100$ m/s, si conficca orizzontalmente in un blocco di ghiaccio fondente di massa $M = 0.5$ kg, posto su un piano orizzontale liscio. Sapendo che il calore specifico del piombo è $c_{Pb} = 130$ J/kg°C ed il calore latente di fusione del ghiaccio $\lambda_{gh} = 3.3 \times 10^5$ J/kg, si calcoli la massa di ghiaccio che si è fusa.

P.10.5.

Una massa $m_1 = 0.1$ kg di ghiaccio alla temperatura $t_1 = -10$ °C viene mescolata adiabaticamente con una massa $m_2 = 0.2$ kg di vapor d'acqua a temperatura $t_2 = 160$ °C

a pressione atmosferica. Si dica quale sarà la composizione finale della miscela una volta raggiunto l'equilibrio termico. Si assumano, per i calori specifici ed i calori latenti, le seguenti espressioni: calore specifico del ghiaccio $c_{gh} = 0.5 \text{ cal/g } ^\circ\text{C}$; calore specifico dell'acqua $c_{ac} = 1 \text{ cal/g } ^\circ\text{C}$; calore specifico del vapor d'acqua a pressione costante $c_{va} = 0.44 \text{ cal/g } ^\circ\text{C}$; calore latente di condensazione del vapor d'acqua $\lambda_{va} = 540 \text{ cal/g}$; calore latente di fusione del ghiaccio $\lambda_{gh} = 80 \text{ cal/g}$.

P.10.6.

Un gas ideale alla temperatura $T = 300 \text{ K}$ ha una densità molecolare di $N = 10^{25} \text{ molecole/m}^3$. Si calcoli la pressione del gas.

P.10.7.

Un gas ideale è costituito da n_1 moli di elio (He) e da n_2 moli di azoto (N_2). Calcolare il calore specifico molare del gas a volume costante.

P.10.8.

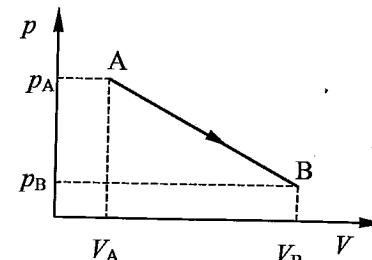
Un gas perfetto esegue una espansione adiabatica reversibile nella quale il gas triplica la sua pressione e dimezza il suo volume. Determinare il calore specifico a volume costante c_V del gas.

P.10.9.

n moli di gas ideale compiono una trasformazione quasistatica dal volume iniziale V_A e pressione p_A al volume finale V_B e pressione p_B , con $V_B > V_A$ e $p_B < p_A$, rappresentata nel piano (p, V) dal segmento AB di figura. Si determini:

(i) la temperatura assoluta T del gas lungo la trasformazione quando il volume del gas assume un valore V compreso fra V_A e V_B ;

(ii) quale condizione deve sussistere fra V_A , p_A , V_B e p_B affinché la temperatura massima del gas nella trasformazione sia raggiunta nello stato di equilibrio corrispondente al punto medio del segmento AB.



P.10.10.

Si consideri la trasformazione quasistatica di un gas perfetto descritta nel problema precedente. Assumendo che il gas sia monoatomico, si determini l'espressione del calore specifico $c = c(V)$ del gas lungo la trasformazione da A a B come funzione del volume V del gas.

P.10.11.

Si calcoli il calore specifico molare di un gas perfetto in una trasformazione reversibile descritta dall'equazione $VT^k = \text{costante}$, dove V e T sono il volume e la temperatura assoluta del gas, e k una costante.

P.10.12.

Una mole di gas ideale monoatomico alla temperatura $T_1 = 300 \text{ K}$ compie una espansione

10.1 Problemi

adiabatica reversibile che ne aumenta il volume dal valore iniziale $V_1 = 1 \text{ m}^3$ al valore finale $V_2 = 2 \text{ m}^3$. Calcolare la temperatura finale del gas ed il lavoro compiuto dal gas nella espansione.

P.10.13.

$n = 10$ moli di gas perfetto vengono compresse isotermicamente ed in modo reversibile da un volume $V_i = 1 \text{ m}^3$ al volume finale V_f . Il gas è contenuto in un recipiente adiabatico a contatto termico con un serbatoio di calore costituito da una massa $m = 0.1 \text{ kg}$ di ghiaccio fondente a temperatura $t = 0^\circ\text{C}$. Si determini il valore del volume finale V_f per il quale si ha completa fusione del ghiaccio.

(Calore latente di fusione del ghiaccio: $\lambda_{gh} = 79.7 \text{ kcal/kg}$.)

P.10.14.

Una mole di gas perfetto monoatomico occupa inizialmente un volume V_0 alla temperatura $T_0 = 300 \text{ K}$. Il gas si espande fino a raddoppiare il suo volume seguendo una trasformazione reversibile di equazione $p(V) = \bar{p} \exp(-V/V_0)$, con \bar{p} costante. Si calcolino:

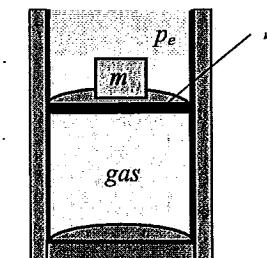
- (i) la temperatura finale del gas;
- (ii) il calore scambiato dal gas nella trasformazione.

P.10.15.

Una mole di gas perfetto monoatomico compie una trasformazione reversibile caratterizzata dal calore specifico molare $c(T) = c_V + \alpha T$, con $\alpha = 5 \times 10^{-2} \text{ J/(mol K}^2)$. Sapendo che nella trasformazione la temperatura del gas varia dal valore iniziale $T_1 = 300 \text{ K}$ al valore finale $T_2 = 450 \text{ K}$, si calcolino il calore scambiato dal gas ed il lavoro compiuto nella trasformazione.

P.10.16.

$n = 2$ moli di gas perfetto monoatomico sono contenute in un recipiente a pareti adiabatiche, chiuso da un pistone anch'esso adiabatico, di massa trascurabile e sezione $S = 10 \text{ cm}^2$. Sul pistone è appoggiato un blocco di massa $m = 20 \text{ kg}$ ed il pistone è in equilibrio alla temperatura $T_1 = 100 \text{ K}$. Si determini il volume occupato dal gas sapendo che la pressione atmosferica esterna è $p_e = 10^5 \text{ Pa}$. Successivamente il blocco viene rimosso ed il gas si espande fino a raggiungere l'equilibrio alla pressione esterna atmosferica. Si calcoli la temperatura finale T_2 di equilibrio del gas.



P.10.17.

Un gas perfetto compie una trasformazione reversibile di equazione:

$$V = V_0 \exp(Tr/R), \quad (1)$$

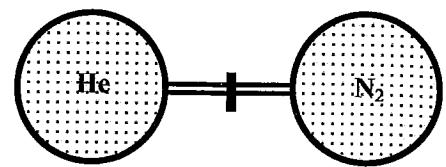
dove r è una costante. Dimostrare che il calore specifico del gas lungo la trasformazione varia con la temperatura secondo la legge:

$$c = c_V + rT \quad (2)$$

dove c_V è il calore specifico del gas a volume costante.

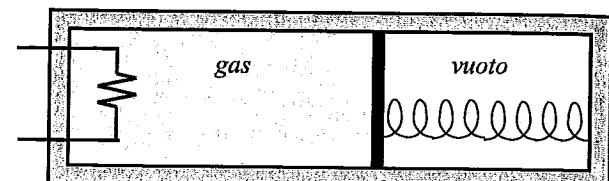
P.10.18.

Un recipiente a pareti rigide ed adiabatiche è costituito da due ampolle collegate da un tubicino munito di una valvola. Inizialmente la valvola è chiusa e nell'ampolla di sinistra sono contenute $n_1 = 3$ moli di He a temperatura $T_1 = 300$ K, mentre nell'ampolla di destra vi sono $n_2 = 2$ moli di N_2 a temperatura $T_2 = 270$ K. La valvola viene aperta ed i gas si miscelano defluendo fra le due ampolle del recipiente fino a raggiungere una condizione di equilibrio. Calcolare la temperatura finale di equilibrio dei due gas, supponendo che questi si comportino come gas perfetti.



P.10.19.

$n = 2$ moli di un gas biatomico sono contenute in un recipiente a pareti adiabatiche munito di un pistone orizzontale di sezione $S = 0.1 \text{ m}^2$, libero di scorrere senza attrito e vincolato ad una molla di costante elastica $k = 10 \text{ N/m}$ in vuoto, come mostrato in figura. Inizialmente il gas occupa un volume $V_1 = 1 \text{ m}^3$ alla temperatura $T_1 = 300$ K. Il gas viene quindi riscaldato lentamente mediante una resistenza elettrica. Sapendo che il volume finale del gas dopo il riscaldamento è $V_2 = 2 \text{ m}^3$, calcolare la quantità di calore Q fornita al gas dalla resistenza elettrica.



P.10.20.

In un recipiente rigido adiabatico contenente $n = 2$ moli di un gas ideale monoatomico, a pressione $p_0 = 2 \times 10^5 \text{ Pa}$ e temperatura $T_0 = 300 \text{ K}$, viene introdotto un solido di capacità termica $C = 30 \text{ J/K}$, alla temperatura $T = 800 \text{ K}$. Si determini la pressione finale del gas. Si trascuri la capacità termica del recipiente ed il volume del solido.

P.10.21.

Una miscela costituita da due moli di elio (He) e tre moli di azoto (N_2) compie una espansione adiabatica reversibile che ne raddoppia il volume. Si calcoli il rapporto fra la pressione finale e quella iniziale considerando la miscela un gas ideale.

P.10.22.

Si consideri il processo di vaporizzazione di una massa $m = 0.1 \text{ kg}$ di acqua alla temperatura di ebollizione a pressione atmosferica $p = 10^5 \text{ Pa}$. Si calcolino:

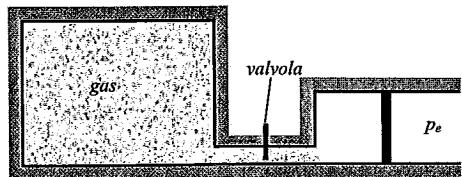
- (i) il lavoro compiuto dall'acqua;
- (ii) il corrispondente aumento di energia interna.

(calore latente di vaporizzazione dell'acqua: $\lambda_v = 2.26 \times 10^6 \text{ J/kg}$; densità del vapore $\rho_v = 0.6 \text{ kg/m}^3$)

10.1 Problemi

P.10.23.

Un gas ideale monoatomico è contenuto in un recipiente adiabatico alla pressione $p_0 = 2 \text{ atm}$, collegato mediante una valvola ad un cilindro munito di pistone soggetto ad una pressione esterna $p_e = 1 \text{ atm}$, come mostrato in figura. Inizialmente la valvola è chiusa ed il gas si trova in equilibrio alla temperatura $T_1 = 300 \text{ K}$. La valvola viene aperta lentamente e il gas fluisce nel cilindro, fino a che si raggiunge una condizione di equilibrio. Calcolare la temperatura finale del gas.



10.2 Soluzioni

10.2 Soluzioni

S.10.1.

La temperatura t nella scala Celsius viene empiricamente legata all'altezza h della colonna di mercurio, che è la sostanza termometrica, dalla relazione lineare:

$$h(t) = at + b, \quad (1)$$

dove a e b sono le costanti termometriche, che vanno determinate assegnando i due punti fissi, e cioè $h(0) = h_1$ e $h(100) = h_2$. Perciò:

$$b = h(0) = h_1 = 5 \text{ cm} \quad (2)$$

e:

$$100a + b = h_2 \quad (3)$$

da cui:

$$a = \frac{h_2 - h_1}{100} = 0.05 \text{ cm}/^\circ\text{C}. \quad (4)$$

Infine, l'altezza h_3 della colonnina si raggiungerà alla temperatura t data da:

$$t = \frac{h_3 - b}{a} = 60 \text{ } ^\circ\text{C}. \quad (5)$$

S.10.2.

Indichiamo con t_m la temperatura misurata dal termometro quando esso è immerso nel fluido. Trascurando il calore dissipato nell'ambiente, per calcolare t_m occorre imporre che il calore globalmente scambiato (assorbito) dal sistema costituito dal fluido e dal termometro sia nullo, e cioè che:

$$Q_1 + Q_2 = 0, \quad (1)$$

essendo Q_1 e Q_2 i calori assorbiti dal termometro e dal fluido, rispettivamente, nel raggiungimento dell'equilibrio termico. Poiché $Q_1 = C(t_m - t_1)$ e $Q_2 = mc(t_m - t)$, si ha:

$$C(t_m - t_1) + mc(t_m - t) = 0 \quad (2)$$

da cui:

$$t_m = \frac{Ct_1 + mct}{C + mc}. \quad (3)$$

La condizione affinchè la temperatura finale misurata sia prossima a t può essere espressa dalla diseguaglianza (valida purchè t sia discoste da zero):

$$\left| \frac{t_m - t}{t} \right| \ll 1. \quad (4)$$

Sostituendo l'espressione di t_m data dalla equazione (3) nella equazione (4), dopo qualche passaggio algebrico si ottiene facilmente la seguente condizione:

$$\left| \frac{t_1}{t} - 1 \right| \ll 1 + \frac{mc}{C}. \quad (5)$$

Se le temperature t_1 e t non sono molto discoste fra loro, questa condizione richiede in pratica che la capacità C del termometro sia piccola rispetto a quella, pari a m_C , della massa di fluido.

S.10.3.

Indichiamo con \mathcal{Q}_1 e \mathcal{Q}_2 i calori assorbiti dalle due masse m_1 e m_2 per portarsi all'equilibrio termico alla temperatura t . Il calore \mathcal{Q}_1 assorbito dalla massa m_1 di ghiaccio è dato dalla somma di tre contributi secondo la relazione seguente:

$$\mathcal{Q}_1 = m_1 c_{gh}(t_0 - t_1) + \lambda_{gh} m_1 + m_1 c_{ac}(t - t_0), \quad (1)$$

dove $t_0 = 0^\circ\text{C}$ è la temperatura di fusione del ghiaccio a pressione atmosferica, c_{gh} e c_{ac} sono i calori specifici massici del ghiaccio e dell'acqua, rispettivamente, e λ_{gh} è il calore latente di fusione del ghiaccio. La quantità di massa d'acqua m_2 assorbe invece il calore:

$$\mathcal{Q}_2 = m_2 c_{ac}(t - t_2). \quad (2)$$

Si noti che, poiché $t < t_2$, si ha $\mathcal{Q}_2 < 0$, e cioè la massa m_2 di fatto cede calore. Trascurando la dispersione di calore nell'ambiente, la trasformazione sarà complessivamente adiabatica, e cioè $\mathcal{Q}_1 + \mathcal{Q}_2 = 0$. Tale condizione comporta perciò che valga la seguente equazione:

$$m_1 c_{gh}(t_0 - t_1) + \lambda_{gh} m_1 + m_1 c_{ac}(t - t_0) + m_2 c_{ac}(t - t_2) = 0, \quad (3)$$

che, risolta rispetto all'incognita m_2 , fornisce la soluzione del problema:

$$m_2 = \frac{m_1 c_{gh}(t_0 - t_1) + \lambda_{gh} m_1 + m_1 c_{ac}(t - t_0)}{c_{ac}(t_2 - t)} \simeq 11.85 \text{ kg}. \quad (4)$$

Si osservi che, per il calcolo numerico, abbiamo assunto $c_{ac} = 1 \text{ cal/g}^\circ\text{C} = 4180 \text{ J/kg}^\circ\text{C}$ per il calore specifico dell'acqua.

S.10.4.

Nell'urto anelastico si conserva la quantità di moto del sistema in direzione orizzontale, per cui la velocità V del blocco dopo l'urto, nel quale resta conficcato il proiettile, sarà data dalla relazione:

$$V = \frac{mv_0}{m+M}. \quad (1)$$

L'energia cinetica dissipata nell'urto vale pertanto:

$$E_{diss} = \frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{1}{2}(m+M)V^2 = \frac{1}{2} \frac{mM}{m+M} v_0^2 \simeq 227 \text{ J}. \quad (2)$$

Tale energia viene ceduta al ghiaccio fondente sotto forma di calore, determinando la fusione in acqua di una massa ΔM di ghiaccio. Per calcolare ΔM occorre però tener debitamente in conto che anche il proiettile di piombo, inizialmente a temperatura t_{Pb} , cede la quantità di calore $mc_{Pb}(t_{Pb} - t_0)$ al ghiaccio portandosi, all'equilibrio, alla temperatura $t_0 = 0^\circ\text{C}$ di fusione del ghiaccio. Dalla definizione di calore latente di fusione, potremo perciò scrivere:

$$\lambda_{gh} \Delta M = E_{diss} + mc_{Pb}(t_{Pb} - t_0), \quad (3)$$

10.2 Soluzioni

da cui:

$$\Delta M = \frac{mc_{Pb}(t_{Pb} - t_0) + E_{diss}}{\lambda_{gh}} \simeq 1.1 \text{ g}. \quad (4)$$

S.10.5.

Si osservi che, dopo il mescolamento, si possono avere cinque possibili casi per la composizione finale della miscela e precisamente: solo ghiaccio, ghiaccio fondente in equilibrio con l'acqua in transizione di fase, solo acqua, acqua in ebollizione in equilibrio con il suo vapore in transizione di fase, solo vapore. Per capire in quale dei casi precedenti si troverà la miscela di acqua dopo il mescolamento, cominciamo con l'osservare che, per portare in ebollizione tutto il ghiaccio, occorrerebbe una quantità di calore:

$$\mathcal{Q}_1 = m_1 c_{gh}(t_0 - t_1) + m_1 \lambda_{gh} + m_1 c_{ac}(t_{100} - t_0) = 18.5 \text{ kcal}, \quad (1)$$

dove $t_0 = 0^\circ\text{C}$ e $t_{100} = 100^\circ\text{C}$ sono le temperature di condensazione e di evaporazione dell'acqua a pressione atmosferica, rispettivamente. Per portare il vapore alla condensazione sarà necessario invece che questo ceda una quantità di calore data da

$$\mathcal{Q}_2 = m_2 c_{va}(t_2 - t_{100}) = 5.28 \text{ kcal}, \quad (2)$$

mentre per farlo liquefare completamente, sempre alla temperatura di transizione t_{100} , occorrerà sottrargli la quantità di calore:

$$\mathcal{Q}_3 = \mathcal{Q}_2 + m_2 \lambda_{va} = 113.28 \text{ kcal}. \quad (3)$$

Poiché $\mathcal{Q}_3 > \mathcal{Q}_1$ ma $\mathcal{Q}_2 < \mathcal{Q}_1$, all'equilibrio ci attendiamo che si abbia vapore in condensazione (vapore saturo) ed acqua in ebollizione, in transizione di fase. Se indichiamo con m la massa di vapore saturo, trascurando la dissipazione di calore nell'ambiente durante il mescolamento, potremo considerare la trasformazione globalmente adiabatica e scrivere perciò:

$$m_1 c_{gh}(t_0 - t_1) + m_1 \lambda_{gh} + m_1 c_{ac}(t_{100} - t_0) + m_2 c_{va}(t_{100} - t_2) - m \lambda_{va} = 0, \quad (4)$$

da cui si ottiene per m l'espressione:

$$m = \frac{m_1 c_{gh}(t_0 - t_1) + m_1 c_{ac}(t_{100} - t_0) + m_2 c_{va}(t_{100} - t_2) + m_1 \lambda_{gh}}{\lambda_{va}} = 24.48 \text{ g}. \quad (5)$$

S.10.6.

La pressione del gas può essere calcolata utilizzando l'equazione di stato del gas perfetto secondo la relazione:

$$p = \frac{nRT}{V}. \quad (1)$$

Si osservi che, dai dati del problema, non conosciamo né il numero di moli n né il volume V del gas, ma solo la sua temperatura assoluta T e la densità molecolare N . Ricordando che una mole di gas contiene un numero di molecole pari al numero di Avogadro $N_A \simeq 6 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$, le grandezze n , V e N sono perciò legate dalla semplice relazione

$$n = \frac{NV}{N_A}. \quad (2)$$

Introducendo la costante di Boltzman $k_B = R/N_A \simeq 1.38 \times 10^{-23}$ J/K, l'espressione della pressione p del gas è dunque data da:

$$p = \frac{NRT}{N_A} = Nk_B T \simeq 41400 \text{ Pa.} \quad (3)$$

S.10.7.

Il calore specifico molare del gas a volume costante è definito dalla relazione:

$$c_V = \frac{1}{n} \left(\frac{\delta Q}{dT} \right)_V, \quad (1)$$

dove δQ è la quantità (infinitesima) di calore assorbita dal gas, quando la sua temperatura aumenta di dT , in una trasformazione in cui il volume del gas non cambia, ed $n = n_1 + n_2$ è il numero totali di moli del gas. Dal primo principio della termodinamica applicato ad una trasformazione termodinamica infinitesima nella quale il volume del gas non varia, si avrà del resto $\delta Q = dU$, cioè il calore assorbito è uguale alla variazione dell'energia interna dU del gas. Si noti che, sebbene sia δQ che dU siano quantità piccole (infinitesime), l'uso del simbolo di differenziale è riservato solo alla energia interna, poiché questa è una funzione di stato, mentre non lo è il calore. Del resto, l'energia interna è una funzione additiva, cioè nel nostro caso avremo $dU = dU_1 + dU_2$, essendo dU_1 e dU_2 le variazioni delle energie interne delle due specie di gas. Per un gas perfetto di una data specie chimica, è noto del resto che $U = nc_V T$, dove c_V è il calore specifico del gas. Perciò:

$$c_V = \frac{1}{n} \left(\frac{\delta Q}{dT} \right)_V = \frac{1}{n} \left(\frac{dU}{dT} \right)_V = \frac{n_1 c_{V1} + n_2 c_{V2}}{n_1 + n_2} \quad (2)$$

dove c_{V1} e c_{V2} sono i calori specifici dei due gas. Dal teorema di equipartizione dell'energia, per l'elio (gas monoatomico) si ha $c_{V1} = (3/2)R$ mentre per l'azoto (gas biatomico) si avrà, a temperatura ambiente, $c_{V2} = (5/2)R$, dove R è la costante universale del gas perfetto. In conclusione, il calore specifico della miscela dei due gas varrà:

$$c_V = \frac{3n_1 + 5n_2}{2(n_1 + n_2)} R. \quad (3)$$

Quanto vale il calore specifico della miscela se la trasformazione fosse avvenuta a pressione costante?

S.10.8.

Poiché si tratta di una trasformazione adiabatica *reversibile*, l'equazione della trasformazione, nelle variabili (p, V) , è data da:

$$pV^\gamma = p_0 V_0^\gamma, \quad (1)$$

dove V_0 e p_0 sono il volume e la pressione iniziali del gas e $\gamma = c_P/c_V$ è il rapporto fra i calori specifici del gas a pressione e volume costanti. Al termine della trasformazione si ha, dai dati del problema, $V = V_0/2$ e $p = 3p_0$, e perciò dovrà avversi:

$$3p_0 \left(\frac{V_0}{2} \right)^\gamma = p_0 V_0^\gamma. \quad (2)$$

10.2 Soluzioni

Dividendo ambo i membri dell'equazione precedente per $p_0 V_0^\gamma$ avremo, in conclusione:

$$2^\gamma = 3, \quad (3)$$

da cui:

$$\gamma = \frac{\ln 3}{\ln 2} \simeq 1.585. \quad (4)$$

Per calcolare il calore specifico del gas a volume costante, osserviamo che $\gamma = c_P/c_V$ e che, per la relazione di Mayer, $c_P - c_V = R$. Pertanto, eliminando il calore specifico a pressione costante, si ha:

$$\gamma c_V - c_V = R \rightarrow c_V = \frac{R}{\gamma - 1} \simeq 1.71 R. \quad (5)$$

S.10.9.

L'equazione della trasformazione nel piano (p, V) è l'equazione della retta passante per i punti A e B, e cioè:

$$p = p_A + \frac{p_B - p_A}{V_B - V_A} (V - V_A). \quad (1)$$

La temperatura lungo la trasformazione si calcola subito dall'equazione di stato del gas perfetto; assumendo il volume del gas come variabile indipendente nella trasformazione, si ha cioè:

$$T = \frac{pV}{nR} = \left[\frac{p_A}{nR} + \frac{(p_B - p_A)(V - V_A)}{nR(V_B - V_A)} \right] V. \quad (2)$$

Si noti che la temperatura è una funzione quadratica del volume occupato dal gas, e può essere scritta nella forma:

$$T(V) = aV - bV^2, \quad (3)$$

dove le costanti a e b sono definite dalle relazioni:

$$a = \frac{p_A V_B - p_B V_A}{nR(V_B - V_A)}, \quad (4)$$

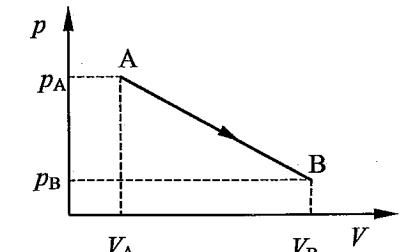
$$b = \frac{p_A - p_B}{nR(V_B - V_A)}, \quad (5)$$

Poiché $b > 0$, la temperatura assume un valore massimo in corrispondenza del volume V_0 tale che $(dT/dV)_{V_0} = 0$, e cioè per:

$$V_0 = \frac{a}{2b} = \frac{p_A V_B - p_B V_A}{2(p_A - p_B)}. \quad (6)$$

Affinché tale massimo della temperatura sia raggiunto quando il gas è nello stato di equilibrio rappresentato dal punto medio del segmento AB nel piano (p, V) , e cioè per $V_0 = (V_A + V_B)/2$, deve avversi:

$$\frac{p_A V_B - p_B V_A}{2(p_A - p_B)} = \frac{V_A + V_B}{2}, \quad (7)$$



che si può scrivere, dopo alcune semplificazioni, nella forma seguente:

$$p_A V_A = p_B V_B. \quad (8)$$

In base all'equazione di stato dei gas, il significato fisico di tale condizione è il seguente: il massimo della temperatura nella trasformazione da A a B è raggiunto in corrispondenza del punto medio del segmento AB se gli stati di equilibrio iniziale A e finale B della trasformazione sono alla stessa temperatura.

S.10.10.

Il calore specifico lungo la trasformazione γ dell'esercizio precedente, rappresentata dal segmento AB nel piano (p, V) , è definito dalla relazione:

$$c = \frac{1}{n} \left(\frac{\delta Q}{dT} \right)_{\gamma}, \quad (1)$$

dove δQ è il calore assorbito dal gas per aumentare la sua temperatura di dT . Se applichiamo il primo principio della termodinamica per un tratto infinitesimo della trasformazione si avrà:

$$\delta Q = pdV + dU = pdV + nc_VdT, \quad (2)$$

essendo pdV il lavoro delle forze di pressione e $dU = nc_VdT$ la variazione dell'energia interna per il gas ideale, dove c_V è il suo calore specifico a volume costante. Per gas monoatomico, si ha inoltre $c_V = (3/2)R$. Sostituendo l'espressione di δQ data dalla equazione (2) nella equazione (1), si avrà:

$$c = c_V + \frac{p}{n} \frac{dV}{dT} = \frac{3}{2}R + \frac{p}{n} \frac{1}{(dT/dV)}. \quad (3)$$

Per esprimere il calore specifico del gas lungo la trasformazione come funzione del volume occupato dal gas, che assumiamo come variabile indipendente della trasformazione, occorre esprimere la pressione del gas p e la derivata dT/dV come funzioni del volume del gas. Usando la espressione della temperatura $T = T(V)$ data dalla equazione (2) dell'esercizio precedente, la derivata dT/dV può essere facilmente calcolata e dà come risultato

$$\frac{dT}{dV} = -\frac{2(p_A - p_B)V}{nR(V_B - V_A)} + \frac{p_A V_B - p_B V_A}{nR(V_B - V_A)}. \quad (4)$$

La pressione del gas varia poi con il suo volume in accordo con la relazione lineare:

$$p = p_A + \frac{p_B - p_A}{V_B - V_A}(V - V_A). \quad (5)$$

In conclusione, si ha per il calore specifico $c = c(V)$ la seguente espressione:

$$c(V) = \frac{3}{2}R - R \frac{p_A(V_B - V_A) + (p_B - p_A)(V - V_A)}{2(p_A - p_B)V + p_B V_A - p_A V_B}. \quad (6)$$

S.10.11.

Il calore specifico lungo la trasformazione, per un gas ideale il cui calore specifico a volume costante vale c_V , è dato dalla relazione generale:

$$c = \frac{1}{n} \frac{\delta Q}{dT} = c_V + \frac{p}{n} \frac{dV}{dT}. \quad (1)$$

10.2 Soluzioni

Tale relazione è ottenuta, come già spiegato nell'esercizio precedente, esprimendo il calore δQ assorbito dal gas in un tratto infinitesimo della trasformazione mediante il primo principio della termodinamica in forma differenziale, e cioè $\delta Q = pdV + dU = pdV + nc_VdT$. Osserviamo che, delle tre variabili p , V e T che descrivono lo stato di equilibrio del gas, solo una variabile può essere assunta come indipendente *lungo la trasformazione*. Infatti, una relazione fra le tre variabili è imposta dall'equazione di stato del gas perfetto, $pV = nRT$, mentre l'altra equazione, l'equazione della trasformazione termodinamica, definisce un ulteriore legame fra le variabili T e V , e cioè $VT^k = \text{costante}$ lungo la trasformazione. Sceglieremo dunque una delle tre variabili come indipendente ed esprimiamo, di conseguenza, le altre due variabili in funzione di quella scelta come indipendente. Scegliendo, ad esempio, la temperatura come variabile indipendente, si avrà:

$$V = \frac{\text{costante}}{T^k}, \quad p = \frac{nRT}{V} = \frac{nRT^{k+1}}{\text{costante}}. \quad (2)$$

Perciò, usando la regola di derivazione delle funzioni composte $(1/V)(dV/dT) = d(\ln V)/dT$, si avrà:

$$\frac{p}{n} \frac{dV}{dT} = R \frac{T}{V} \frac{dV}{dT} = RT \frac{d\ln V}{dT} = -RT \frac{d\ln T^k}{dT} = -kR. \quad (3)$$

Utilizzando questo risultato, l'espressione del calore specifico [si veda l'equazione (1)] assume, in conclusione, la seguente espressione:

$$c = c_V - kR. \quad (4)$$

Si noti che il calore specifico nella trasformazione è costante, qualunque sia il parametro k . Questo risultato non è per nulla ovvio, poiché in generale il calore specifico di un gas, oltre che a dipendere dalla particolare trasformazione che esso compie, varia anche lungo la trasformazione stessa (si veda, in proposito, il problema precedente!). Una tale famiglia di trasformazioni, in cui il calore specifico lungo la trasformazione è costante, rappresenta la famiglia delle trasformazioni politropiche. Queste contengono, come casi particolari, le quattro trasformazioni quasistatiche più importanti per il gas perfetto: la trasformazione isoterma ($k = \infty$ e $c = \infty$); la trasformazione adiabatica ($k = c_V/R$ e $c = 0$); la trasformazione isobara ($k = -1$ e $c = c_V + R = c_p$); e la trasformazione isocora ($k = 0$ e $c = c_V$).

S.10.12.

Poiché la trasformazione subita dal gas è una adiabatica *reversibile*, la temperatura T_2 ed il volume V_2 del gas alla fine della trasformazione devono soddisfare la condizione:

$$T_2 V_2^{\gamma-1} = T_1 V_1^{\gamma-1}, \quad (1)$$

essendo $\gamma = c_p/c_V$ il rapporto fra i calori specifici del gas a pressione e volume costante. Per gas monoatomico, si ha $c_V = (3/2)R$ e, per la relazione di Mayer, $c_p = c_V + R = (5/2)R$, e cioè $\gamma = 5/3$. La temperatura finale del gas varrà perciò:

$$T_2 = T_1 \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{\gamma-1} \simeq 189 \text{ K}. \quad (2)$$

Poichè nella trasformazione il gas non scambia calore ($Q = 0$), dal primo principio della termodinamica il lavoro di pressione \mathcal{L} compiuto dal gas sarà uguale ed opposto alla variazione della sua energia interna, che vale $\Delta U = nc_V(T_2 - T_1)$ per il gas perfetto. Dunque:

$$\mathcal{L} = -\Delta U = nc_V(T_1 - T_2) = \frac{3}{2}Rn(T_1 - T_2) \simeq 1384 \text{ J.} \quad (3)$$

S.10.13.

Se indichiamo con Q il calore ceduto dal gas nella compressione isoterma, si avrà la completa fusione della massa m di ghiaccio fondente se:

$$Q = m\lambda_{gh}, \quad (1)$$

dove λ_{gh} è il calore latente di fusione del ghiaccio a 0 °C a pressione atmosferica. Per il calcolo del calore Q , osserviamo che, poichè la trasformazione subita dal gas è isoterma ed il gas è ideale, la variazione di energia interna del gas nella trasformazione è nulla e dunque il calore ceduto è uguale al lavoro compiuto dal gas, e cioè $Q = |\mathcal{L}|$ (intendendo che il calore è ceduto). Inoltre, poichè la trasformazione isoterma è anche quasistatica, il lavoro di pressione \mathcal{L} lungo la trasformazione può essere calcolato mediante l'integrale del lavoro elementare pdV , dove p è la pressione del gas:

$$\mathcal{L} = \int_{V_i}^{V_f} pdV = \int_{V_i}^{V_f} \frac{nRT}{V} dV = nRT \int_{V_i}^{V_f} \frac{dV}{V} = nRT \ln \frac{V_f}{V_i}. \quad (2)$$

Pertanto il calore ceduto dal gas al ghiaccio vale:

$$Q = -\mathcal{L} = nRT \ln \frac{V_i}{V_f}. \quad (3)$$

La equazione (1) comporta perciò che sia:

$$\lambda_{gh}m = nRT \ln \frac{V_i}{V_f}, \quad (4)$$

da cui è possibile determinare il volume finale V_f del gas:

$$V_f = V_i \exp \left(-\frac{m\lambda_{gh}}{nRT} \right). \quad (5)$$

Per la valutazione numerica di V_f , usiamo i dati forniti dal problema, facendo attenzione ad esprimere tutte le grandezze nelle unità di misura del Sistema Internazionale. In particolare, si osservi che $\lambda_{gh} = 79.7 \text{ kcal/Kg} = 3.33 \times 10^5 \text{ J/kg}$, e che le temperature vanno espresse in Kelvin. Inserendo i valori numerici, si ottiene $V_f \simeq 0.23 \text{ m}^3$.

S.10.14.

A partire dalla equazione della trasformazione del gas:

$$p(V) = \bar{p} \exp(-V/V_0), \quad (1)$$

10.2 Soluzioni

segue anzitutto che la pressione iniziale p_0 del gas vale $p_0 = \bar{p}/e$, mentre quella finale, p_1 , corrispondente al volume $V_1 = 2V_0$, vale $p_1 = \bar{p}/e^2 = p_0/e$. La temperatura finale del gas vale, di conseguenza:

$$T_1 = \frac{p_1 V_1}{nR} = \frac{2p_0 V_0}{enR} = \frac{2T_0}{e} \simeq 220.7 \text{ K.} \quad (2)$$

Il calore Q assorbito dal gas nella trasformazione può essere calcolato usando il primo principio della termodinamica:

$$Q = \mathcal{L} + \Delta U, \quad (3)$$

dove ΔU è la variazione di energia interna del gas ed \mathcal{L} il lavoro di pressione da esso compiuto. Per il calcolo del lavoro \mathcal{L} osserviamo che, essendo la trasformazione quasistatica, si ha:

$$\mathcal{L} = \int_{V_0}^{V_1} pdV = \int_{V_0}^{2V_0} \bar{p} \exp(-V/V_0) dV = V_0 \bar{p} \left(\frac{1}{e} - \frac{1}{e^2} \right) = nRT_0 \left(1 - \frac{1}{e} \right). \quad (4)$$

La variazione dell'energia interna del gas vale poi:

$$\Delta U = nc_V(T_1 - T_0) = \frac{3}{2}nRT_0 \left(\frac{2}{e} - 1 \right), \quad (5)$$

avendo assunto $c_V = (3/2)R$ per gas monoatomico. In conclusione, il calore assorbito dal gas nella trasformazione vale:

$$Q = \mathcal{L} + \Delta U = nRT_0 \left(1 - \frac{1}{e} \right) + \frac{3}{2}nRT_0 \left(\frac{2}{e} - 1 \right) = nRT_0 \left(\frac{2}{e} - \frac{1}{2} \right) \simeq 588 \text{ J.} \quad (6)$$

S.10.15.

In base alla definizione di calore specifico molare, il calore Q assorbito dal gas nella trasformazione è dato da:

$$Q = \int_{T_1}^{T_2} nc(T)dT = n \int_{T_1}^{T_2} (c_V + \alpha T)dT = nc_V(T_2 - T_1) + \frac{n\alpha}{2}(T_2^2 - T_1^2) \simeq 4683 \text{ J,} \quad (1)$$

dove si è assunto $c_V = (3/2)R \simeq 12.47 \text{ J/(mol K)}$ per gas monoatomico. La variazione di energia interna, trattandosi di gas ideale, dipende solo dalle temperature iniziale e finale secondo l'espressione:

$$\Delta U = nc_V(T_2 - T_1) \simeq 1871 \text{ J.} \quad (2)$$

Infine, il lavoro compiuto dal gas nella trasformazione si può valutare applicando il primo principio della termodinamica:

$$\mathcal{L} = Q - \Delta U = \frac{n\alpha}{2}(T_2^2 - T_1^2) \simeq 2812 \text{ J.} \quad (3)$$

S.10.16.

Cominciamo con l'osservare che la pressione p_1 esercitata sul gas quando sul pistone è posta la massa m è data dalla somma di due contributi: della pressione esterna p_e e della pressione (mg/S) esercitata dal peso mg che insiste sulla superficie S del pistone. Perciò:

$$p_1 = p_e + \frac{mg}{S} \simeq 2.962 \times 10^5 \text{ Pa.} \quad (1)$$

Il volume iniziale che il gas occupa nel recipiente si calcola poi immediatamente applicando l'equazione di stato del gas perfetto:

$$V_1 = \frac{nRT_1}{p_1} \simeq 0.0056 \text{ m}^3. \quad (2)$$

Quando il blocco di massa m viene rimosso, il gas si trova in una situazione di non equilibrio meccanico perché la pressione esterna, p_e , è inferiore a quella del gas, p_1 . Per questo il gas si espanderà sollevando il pistone, fino a raggiungere una nuova condizione di equilibrio termico e meccanico nella quale la pressione del gas, p_2 , egualerà quella esterna p_e , cioè $p_2 = p_e$. Si osservi che nella trasformazione il gas non scambia calore con l'ambiente (essendo le pareti del recipiente adiabatiche), e cioè la espansione subita dal gas è *adiabatica*. Tuttavia la trasformazione *non è quasistatica*, e perciò si tratta di una adiabatica *irreversibile*. Infatti, nella trasformazione il gas non percorre una successione di stati di equilibrio, ma vi saranno gradienti di pressione e temperatura, ed anzi queste variabili di stato non potranno nemmeno essere definibili e misurabili nella trasformazione. Questa osservazione è importante da tenere presente perché l'utilizzo delle equazioni fra volume e pressione (o fra temperatura e volume) valide per le trasformazioni adiabatiche reversibili (ad esempio, la ben nota legge $TV^{\gamma-1} = \text{costante}$) sarebbe erroneo e condurrebbe a risultati sbagliati. Per il calcolo della temperatura finale di equilibrio, T_2 , del gas e del suo volume finale, V_2 , dovremo invece applicare il primo principio fra gli stati di equilibrio iniziale e finale (che varrà certamente anche se la trasformazione è irreversibile!). Poiché $Q = 0$ (trasformazione adiabatica) e $\Delta U = nc_V(T_2 - T_1)$, avremo che il lavoro \mathcal{L} compiuto dal gas nella espansione vale:

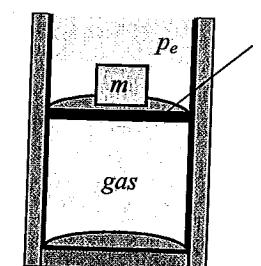
$$\mathcal{L} = -\Delta U = -nc_V(T_2 - T_1). \quad (3)$$

Del resto, il lavoro che compare in questa espressione deve essere uguale ed opposto al lavoro compiuto dalle forze esterne di pressione agenti sul gas nella trasformazione. Poiché durante l'espansione sul gas si esercita una pressione *esterna* p_e costante, tale lavoro sarà dato semplicemente da:

$$\mathcal{L} = \int_{V_1}^{V_2} p_e dV = p_e(V_2 - V_1). \quad (4)$$

Insistiamo sul fatto che, nella precedente equazione, la pressione che compare nel calcolo del lavoro non è la pressione del gas (che non è nemmeno definita durante la trasformazione), ma quella esterna che agisce sulle pareti del gas che si spostano. Uguagliando le espressioni (3) e (4) per il lavoro, si ottiene:

$$p_e(V_2 - V_1) = -nc_V(T_2 - T_1) \quad (5)$$

**10.2 Soluzioni**

che esprime una equazione fra le due incognite T_2 e V_2 . Per risolvere il problema, abbiamo bisogno di scrivere una seconda equazione che leggi il volume e la temperatura finali. Questa è semplicemente l'equazione di stato del gas perfetto, che applicata alla condizione di equilibrio finale impone che valga la seguente relazione:

$$V_2 = \frac{nRT_2}{p_e}. \quad (6)$$

Risolvendo le equazioni (5) e (6) rispetto alle due incognite T_2 e V_2 , si ha in conclusione:

$$T_2 = \frac{nc_V T_1 + p_e V_1}{nc_P} \simeq 73.5 \text{ K}, \quad (7)$$

$$V_2 = \frac{nRT_2}{p_e} \simeq 0.0122 \text{ m}^3. \quad (8)$$

S.10.17.

L'espressione del calore specifico per un gas perfetto in una generica trasformazione quasistatica è data da:

$$c = \frac{1}{n} \left(\frac{\delta Q}{dT} \right) = c_V + \frac{p}{n} \frac{dV}{dT} = c_V + R \frac{T}{V} \frac{dV}{dT}, \quad (1)$$

dove c_V è il calore specifico del gas a volume costante. Tale espressione è stata derivata, ad esempio, nella soluzione dei problemi 10 e 11 di questo capitolo, a cui rimandiamo il lettore. Per la trasformazione in questione si ha:

$$V = V_0 \exp \left(\frac{rT}{R} \right), \quad (2)$$

per cui:

$$\frac{dV}{dT} = \frac{r}{R} V_0 \exp \left(\frac{rT}{R} \right) = \frac{r}{R} V, \quad (3)$$

da cui:

$$R \frac{T}{V} \frac{dV}{dT} = rT. \quad (4)$$

In conclusione, sostituendo l'equazione (4) nella equazione (1) si ottiene:

$$c = c_V + rT, \quad (5)$$

come volevasi dimostrare.

S.10.18.

Nella condizione iniziale i due gas sono a temperature T_1 e T_2 , rispettivamente, ed occupano singolarmente i volumi delle due ampolle. Quando la valvola viene aperta, si ha un miscelamento dei due gas ed il raggiungimento di un equilibrio termico in cui i due gas raggiungono la stessa temperatura T , che è l'incognita del problema.

Per calcolare T , osserviamo che, assumendo come sistema termodinamico l'insieme dei due gas, nella trasformazione non viene scambiato calore con l'ambiente ($Q = 0$) perché le pareti del recipiente sono adiabatiche, e non viene compiuto alcun lavoro ($\mathcal{L} = 0$), poiché le pareti del recipiente sono indeformabili e le forze di pressione esterne che le pareti del recipiente esercitano sul gas non compiono lavoro meccanico. Pertanto, dal primo principio della termodinamica, possiamo concludere che l'energia interna del sistema si deve conservare nella trasformazione, e cioè che:

$$\Delta U_1 + \Delta U_2 = 0, \quad (1)$$

essendo ΔU_1 e ΔU_2 le variazioni delle energie interne dei due gas, rispettivamente. Ricordando l'espressione dell'energia interna per un gas perfetto il cui calore specifico a volume costante non dipende dalla temperatura, possiamo scrivere l'equazione precedente nella forma:

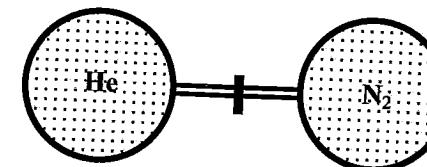
$$n_1 c_{V1}(T - T_1) + n_2 c_{V2}(T - T_2) = 0, \quad (2)$$

dove $c_{V1} = (3/2)R$ è il calore specifico dell'elio (gas monoatomico) e $c_{V2} = (5/2)R$ quello dell'azoto a temperatura ambiente (gas biatomico). L'equazione precedente consente di determinare la temperatura di equilibrio dei due gas dopo il mescolamento:

$$T = \frac{n_1 c_{V1} T_1 + n_2 c_{V2} T_2}{n_1 c_{V1} + n_2 c_{V2}} = \frac{3n_1 T_1 + 5n_2 T_2}{3n_1 + 5n_2} \simeq 284.2 \text{ K}. \quad (3)$$

S.10.19.

Prima di procedere allo svolgimento analitico del problema, cerchiamo di comprenderne qualitativamente gli elementi essenziali. Il riscaldamento del gas, che avviene lentamente, determina un aumento della sua temperatura e dunque della sua pressione. Ciò provoca un lento spostamento del pistone; si noti che, istante per istante, la forza esercitata dalle particelle del gas sul pistone sarà uguale e contraria alla forza elastica della molla. L'aumento del volume del gas, a sua volta, va ad influenzare la temperatura e la pressione del gas stesso in base alla equazione di stato dei gas perfetti. Come primo punto da risolvere per giungere alla soluzione del problema, è necessario stabilire una legge che leggi la pressione p del gas, nel corso della espansione quasistatica, al suo volume V , e cioè l'equazione della trasformazione $p = p(V)$, assumendo il volume come variabile indipendente per descrivere la trasformazione del gas dal

**10.2 Soluzioni**

volume iniziale V_1 al volume finale V_2 .

Introduciamo un asse x che descrive la posizione del pistone, con origine $x = 0$ in corrispondenza della posizione in cui la molla è indeformata (x è cioè la *compressione* della molla). La pressione che la molla esercita sul pistone, uguale per l'ipotesi di quasistaticità della trasformazione alla pressione del gas, sarà dunque data da:

$$p = \frac{kx}{S}. \quad (1)$$

Se indichiamo inoltre con x_1 la compressione della molla nella condizione iniziale, nella quale il gas occupa il volume V_1 , il volume del gas quando il pistone si trova in una generica posizione x sarà dato manifestamente dalla seguente equazione:

$$V = V_1 + S(x - x_1), \quad (2)$$

da cui anche:

$$x = x_1 + \frac{V - V_1}{S}. \quad (3)$$

L'equazione della trasformazione $p = p(V)$ si ottiene sostituendo la espressione di x data dalla equazione (3) nella (1):

$$p(V) = \frac{k}{S^2}(V - V_1 + Sx_1). \quad (4)$$

La compressione x_1 della molla nella condizione iniziale, che compare nella equazione (4), può essere inoltre determinata in funzione dei dati del problema osservando che, dall'equazione di stato del gas perfetto, deve avversi $p(V_1) = nRT_1/V_1$. Imponendo tale condizione si trova perciò:

$$x_1 = \frac{nRT_1 S}{kV_1}, \quad (5)$$

da cui:

$$p(V) = \frac{k}{S^2}(V - V_1) + \frac{nRT_1}{V_1}. \quad (6)$$

Ciò premesso, per il calcolo del calore Q assorbito dal gas applichiamo il primo principio della termodinamica, e cioè scriviamo:

$$Q = \Delta U + \mathcal{L}, \quad (7)$$

dove ΔU e \mathcal{L} sono la variazione di energia interna ed il lavoro compiuto dal gas nella espansione. La variazione di energia interna è data da:

$$\Delta U = ncv(T_2 - T_1) = \frac{cv}{R}(p_2 V_2 - p_1 V_1) = \frac{cv}{R} \left[\frac{k}{S^2}(V_2 - V_1)V_2 + nRT_1 \frac{V_2}{V_1} - nRT_1 \right], \quad (8)$$

dove $p_2 = p(V_2)$ è la pressione finale del gas, che è stata calcolata dalla equazione (6) ponendo $V = V_2$. Il lavoro di pressione compiuto dal gas si calcoli invece facilmente a partire dalla equazione (6) e vale:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \int_{V_1}^{V_2} p(V)dV = \int_{V_1}^{V_2} \left[\frac{k}{S^2}(V - V_1) + \frac{nRT_1}{V_1} \right] dV = \\ &= \frac{k}{2S^2}(V_2 - V_1)^2 + nRT_1 \frac{V_2}{V_1} - nRT_1 = \\ &= \frac{k}{2S^2}(V_2^2 - V_1^2) + \left(\frac{nRT_1}{V_1} - \frac{kV_1}{S^2} \right) (V_2 - V_1). \end{aligned} \quad (9)$$

Tenendo conto che il gas è biatomico [$c_V = (5/2)R$] ed usando i valori numerici dati nel testo del problema, dalle equazioni (8) e (9) si ha $\Delta U = 17471$ J e $\mathcal{L} = 5488$ J, da cui infine $Q = \Delta U + \mathcal{L} = 22959$ J.

S.10.20.

Il sistema complessivo costituito dal gas e dal corpo solido non scambia calore con l'esterno e su di esso non viene compiuto alcun lavoro. Dal primo principio della termodinamica segue che la variazione di energia interna del sistema, somma delle variazioni delle energie interne ΔU_{gas} e ΔU_{sol} del gas e del corpo solido, deve essere uguale a zero, cioè:

$$\Delta U_{gas} + \Delta U_{sol} = 0. \quad (1)$$

Del resto, se indichiamo con T_f la temperatura finale (incognita) del sistema e con T_0 e T le temperature iniziali del gas e del corpo solido, rispettivamente, si avrà manifestamente:

$$\Delta U_{gas} = nc_V(T_f - T_0), \quad \Delta U_{sol} = C(T_f - T). \quad (2)$$

Si osservi che, poiché il volume del solido non varia sensibilmente, la variazione della sua energia interna uguaglia il calore da esso assorbito, pari al prodotto della capacità termica del solido per il salto di temperatura. Ricordando che, per gas monoatomico, $c_V = (3/2)R$ e risolvendo l'equazione (1) rispetto all'incognita T_f , si ha:

$$T_f = \frac{nc_V T_0 + CT}{nc_V + C} \simeq 573 \text{ K}. \quad (3)$$

La pressione finale p_f del gas sarà poi data, in forza dell'equazione di stato del gas perfetto, da:

$$p_f = \frac{nRT_f}{V} = \frac{T_f}{T_0} p_0 \simeq 3.82 \times 10^5 \text{ Pa}, \quad (4)$$

dove $V = nRT_0/p_0$ è il volume del gas, che non varia nella trasformazione.

S.10.21.

Poiché la trasformazione è adiabatica reversibile, i volumi e le pressioni iniziali (V_1, p_1) e finali (V_2, p_2) del gas soddisfano la condizione:

$$\frac{p_2}{p_1} = \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^\gamma, \quad (1)$$

essendo $\gamma = c_P/c_V$ il rapporto fra i calori specifici a pressione e volume costanti del gas. Per il calcolo di γ osserviamo che, seguendo lo svolgimento del problema 7 di questo capitolo, il calore specifico a volume costante della miscela di gas sarà dato da:

$$c_V = \frac{n_1 c_{V1} + n_2 c_{V2}}{n_1 + n_2} = \frac{21}{10} R, \quad (2)$$

dove $c_{V1} = (3/2)R$ è il calore specifico a volume costante dell'elio (gas monoatomico) e $c_{V2} = (5/2)R$ quello dell'azoto (gas biatomico). Nel calcolo precedente, abbiamo tenuto inoltre conto dei dati del problema sul numero di moli dei due gas ($n_1 = 2$ e $n_2 = 3$). Il

10.2 Soluzioni

calore specifico a pressione costante, c_P , si calcola poi mediante la relazione di Mayer, e cioè:

$$c_P = c_V + R = \frac{31}{10} R. \quad (3)$$

Dunque:

$$\gamma = \frac{c_P}{c_V} = \frac{31}{21}, \quad (4)$$

e perciò, in conclusione:

$$\frac{p_2}{p_1} = \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^\gamma = \left(\frac{1}{2} \right)^\gamma \simeq 0.3594. \quad (5)$$

S.10.22.

Il lavoro compiuto dalla massa m di acqua nella transizione di fase è dovuto alla variazione di volume dell'acqua nel processo di vaporizzazione. Dette ρ_a e ρ_v rispettivamente le densità dell'acqua e del vapore saturo, poiché la transizione di fase avviene a pressione costante (la pressione atmosferica p) e la variazione di volume nella vaporizzazione è $\Delta V = (m/\rho_v - m/\rho_a)$, il lavoro \mathcal{L} sarà dato semplicemente dalla relazione:

$$\mathcal{L} = p\Delta V = p m \left(\frac{1}{\rho_v} - \frac{1}{\rho_a} \right) \simeq 1.666 \times 10^4 \text{ J}, \quad (1)$$

dove si è assunto che $\rho_a = 10^3 \text{ kg/m}^3$. Il calore assorbito dall'acqua per evaporare completamente vale poi:

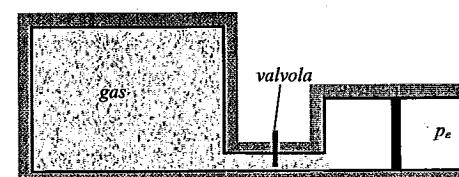
$$Q = m\lambda_v \simeq 22.6 \times 10^4 \text{ J}, \quad (2)$$

essendo λ_v il calore latente di vaporizzazione dell'acqua. La variazione di energia interna associata al processo di vaporizzazione si ottiene infine applicando il primo principio:

$$\Delta U = Q - \mathcal{L} \simeq 20.93 \times 10^4 \text{ J}. \quad (3)$$

S.10.23.

Osserviamo anzitutto che, poiché la pressione iniziale p_0 del gas è maggiore di quella esterna p_e , quando la valvola viene aperta il gas si espande, spingendo il pistone, fino a raggiungere una condizione finale di equilibrio nella quale la pressione del gas è uguale a quella esterna p_e . Inoltre il gas compie una trasformazione senza scambiare calore con l'ambiente, essendo le pareti del contenitore ed il cilindro adiabatiche. La trasformazione, inoltre, avviene lentamente, come detto nel testo del problema. Questo dato non deve però trarre in inganno il lettore ritenendo che la trasformazione compiuta dal gas sia adiabatica e *reversibile*. Infatti, si tratta di una trasformazione *irreversibile*, per cui sarebbe erroneo usare, nella soluzione del problema, le classiche relazioni fra le variabili termodinamiche (ad esempio, $pV^\gamma = \text{costante}$) valide per le trasformazioni adiabatiche reversibili. Per



risolvere il problema, applichiamo invece il primo principio della termodinamica nella forma:

$$\mathcal{Q} + \mathcal{L}_{est} = \Delta U, \quad (1)$$

dove $\mathcal{Q} = 0$ è il calore scambiato, \mathcal{L}_{est} il lavoro compiuto dalle forze esterne nell'espansione del gas, quando la valvola viene aperta, e ΔU è la variazione di energia interna del gas. Per il calcolo di tale lavoro osserviamo che, nella espansione del gas, la pressione esterna agente su esso è pari a p_e ed è costante. Perciò, indicando con V_1 e con V_2 il volume iniziale e finale del gas, una volta raggiunto l'equilibrio, si ha:

$$\mathcal{L}_{est} = p_e(V_2 - V_1). \quad (2)$$

In forza dell'equazione di stato del gas perfetto applicata nelle due condizioni di equilibrio iniziale e finale, si ha $p_e V_2 = nRT_2$ e $V_1 = nRT_1/p_0$, essendo T_1 e T_2 le temperature iniziale e finale del gas. Con ciò l'espressione del lavoro delle forze esterne compiuto sul gas nell'espansione assume la forma seguente:

$$\mathcal{L}_{est} = nR \left(\frac{p_e}{p_0} T_1 - T_2 \right). \quad (3)$$

La variazione di energia interna del gas è data poi dalla espressione usuale:

$$\Delta U = nc_V(T_2 - T_1), \quad (4)$$

essendo $c_V = (3/2)R$ il calore specifico a volume costante del gas monoatomico. Sostituendo le equazioni (3) e (4) nella equazione (1) e tenendo conto che $\mathcal{Q} = 0$ (trasformazione adiabatica), si ottiene:

$$\frac{3}{2}(T_2 - T_1) = \left(\frac{p_e}{p_0} T_1 - T_2 \right). \quad (5)$$

Questa equazione contiene come unica incognita la temperatura finale T_2 del gas, che risulta dà:

$$T_2 = \frac{2p_e + 3p_0}{5p_0} T_1 \approx 240 \text{ K}. \quad (6)$$

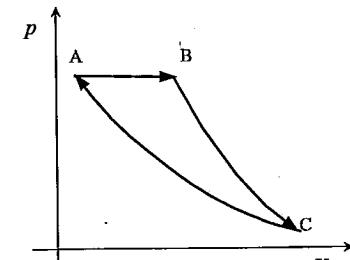
Capitolo 11

Secondo principio della termodinamica

11.1 Problemi

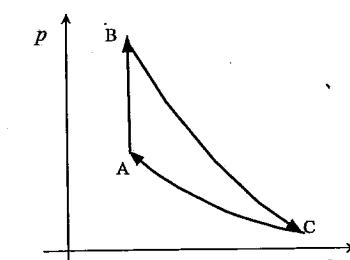
P.11.1.

Un gas perfetto biatomico compie un ciclo motore *reversibile* ABCA costituito da una espansione isobara AB, una espansione adiabatica BC ed una compressione isoterma CA che chiude il ciclo (si veda la figura). Sapendo che $V_B/V_A = 2$, si calcoli il rendimento termodinamico del ciclo. Varierebbe il risultato del problema se il gas fosse monoatomico?



P.11.2.

Un gas perfetto biatomico compie un ciclo motore *reversibile* ABCA costituito da un riscaldamento isocoro AB, una espansione adiabatica BC ed una compressione isoterma CA che chiude il ciclo (si veda la figura). Sapendo che $T_B/T_A = 2$, si calcoli il rendimento termodinamico del ciclo. Varierebbe il risultato del problema se il gas fosse monoatomico?



P.11.3.

Un gas perfetto monoatomico compie un ciclo motore reversibile formato da due adiabatiche e da due isobare a pressione p_1 e $p_2 > p_1$. Si tracci un diagramma qualitativo nel piano (p, V) del ciclo e se ne calcoli il rendimento termodinamico in funzione del rapporto p_2/p_1 .

P.11.4.

Un gas perfetto monoatomico, inizialmente nello stato di equilibrio A, compie un ciclo motore costituito dalle seguenti trasformazioni:

- (i) espansione isoterma reversibile dallo stato A' allo stato B, con $V_B = 2V_A$;

- (ii) espansione adiabatica *irreversibile* dallo stato B allo stato C, con $V_C = 3V_B$ e $T_C = T_B/2$;
 (iii) compressione isoterma reversibile dallo stato C allo stato D, con $p_D = p_A$;
 (iv) riscaldamento isobaro reversibile dallo stato D allo stato iniziale A.
 Si tracci un diagramma qualitativo del ciclo nel piano (p, V) e se ne calcoli il rendimento termodinamico.

P.11.5.

Un frigorifero viene utilizzato per congelare acqua a 0°C scambiando calore con l'ambiente a 40°C . Assumendo che il frigorifero sia una macchina reversibile e che il costo dell'energia elettrica sia $C = 0.5 \text{ Euro/kWh}$, si calcoli quanto costa congelare 100 litri di acqua. (calore latente di fusione del ghiaccio a pressione atmosferica $\lambda = 3.3 \times 10^5 \text{ J/kg}$)

P.11.6.

Se si deve mantenere all'interno di un frigorifero una temperatura di -3°C con una temperatura esterna dell'ambiente di 27°C , quanto vale il minimo lavoro che occorre spendere per trasferire, con una trasformazione ciclica, una quantità di calore pari a 10 J dall'interno della cella frigorifera all'ambiente esterno?

P.11.7.

Si consideri un fluido termodinamico che compie un ciclo motore *reversibile* scambiando calore con *più* di due sorgenti termiche, e si indichino con T_1 e T_2 le temperature minima e massima, rispettivamente, raggiunte dal fluido lungo la trasformazione. Dimostrare che il rendimento termodinamico η del ciclo è minore di quello $\eta_C = 1 - T_1/T_2$ del ciclo di Carnot reversibile a gas perfetto che opera fra le due temperature estreme T_1 e T_2 .

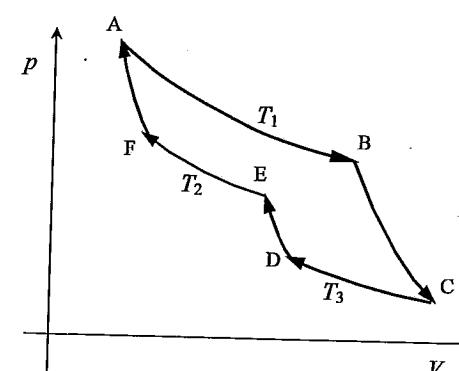
P.11.8.

Un fluido termodinamico compie un ciclo motore reversibile assorbendo calore da due sorgenti termiche alle temperature $T_1 = 1000 \text{ K}$ e $T_2 = 800 \text{ K}$, e cedendone ad una terza a temperatura $T_3 = 500 \text{ K}$. Si dica, giustificando la risposta, se il rendimento termodinamico η del ciclo è minore, maggiore od uguale a 0.5.

P.11.9.

Un fluido termodinamico compie reversibilmente il ciclo motore ABCDEFA mostrato in figura. Le trasformazioni AB, EF e CD sono isoterme a temperature T_1 , T_2 e T_3 , rispettivamente, con $T_1 > T_2 > T_3$, mentre BC, DE ed FA sono trasformazioni adiabatiche. Si dimostri che il rendimento η del ciclo soddisfa la seguente diseguaglianza:

$$1 - \frac{T_2}{T_1} < \eta < 1 - \frac{T_3}{T_1}.$$

**11.1 Problemi****P.11.10.**

Si abbiano tre sorgenti di calore le cui temperature siano rispettivamente $T_1 = 1000 \text{ K}$, $T_2 = 600 \text{ K}$ e $T_3 = 500 \text{ K}$. Si stabilisca se un sistema termodinamico possa compiere una trasformazione ciclica reversibile assorbendo una quantità di calore $Q_1 = 1000 \text{ cal}$ dalla prima sorgente e cedendo le quantità di calore $Q_2 = 500 \text{ cal}$ e $Q_3 = 50 \text{ cal}$ alla seconda ed alla terza sorgente, rispettivamente. Si giustifichi la risposta.

P.11.11.

Utilizzando l'enunciato di Kelvin del secondo principio della termodinamica, mostrare che le curve corrispondenti a due trasformazioni adiabatiche reversibili per un gas perfetto non possono intersecarsi nel piano (p, V) .

P.11.12.

Si dica, giustificando la risposta, se le seguenti affermazioni sono vere:

- (i) Quando un sistema assorbe calore da *una* sorgente, la sua temperatura aumenta.
- (ii) Quando un sistema assorbe calore da *una* sorgente, la sua entropia aumenta.
- (iii) Quando un sistema cede calore ad *una* sorgente, la sua entropia diminuisce.

P.11.13.

Una macchina frigorifera compie 4 cicli al secondo assorbendo una potenza $\mathcal{P} = 1.2 \text{ kW}$. Essa funziona in modo irreversibile, scambiando calore con due sorgenti alle temperature $T_1 = 300 \text{ K}$ e $T_2 = 250 \text{ K}$. Sapendo che in ogni ciclo si ha una variazione di entropia $\Delta S = 0.4 \text{ J/K}$, si determini il tempo necessario per sottrarre alla sorgente fredda una quantità di calore $Q = 250 \text{ kJ}$.

P.11.14.

Un recipiente cilindrico, che contiene $n = 3$ moli di un gas perfetto batomico, con la base capace di condurre calore e con la parete laterale costituita di materiale adiatermano, è chiuso con un pistone senza peso, anch'esso adiatermano, scorrevole senza attrito. La pressione esterna agente sul pistone è costante e pari alla pressione atmosferica $p = 1 \text{ atm}$. Inizialmente il recipiente è posato su una sorgente di calore alla temperatura $T_1 = 300 \text{ K}$ e posto su un'altra sorgente di calore a temperatura $T_2 = 400 \text{ K}$, raggiungendo un nuovo stato di equilibrio. Si calcolino:

- (i) la variazione di energia interna subita dal gas nella trasformazione, precisando se questa è reversibile oppure no;
- (ii) il lavoro termodinamico compiuto dal gas sull'ambiente;
- (iii) la variazione di entropia del gas e della sorgente termica a temperatura T_2 ;
- (iv) la variazione di entropia dell'universo.

P.11.15.

Si esponga la diseguaglianza di Clausius nella forma valida per trasformazioni cicliche. Si consideri poi un solido di capacità termica $C = 5 \text{ kJ/K}$, inizialmente a temperatura $T_1 = 300 \text{ K}$, che viene posto in un termostato alla temperatura $T_2 = 600 \text{ K}$ e successivamente raffreddato in maniera *reversibile* fino alla temperatura T_1 . Si verifichi la diseguaglianza di Clausius per la trasformazione ciclica subita dal solido.

P.11.16.

Un cubetto di ghiaccio fondente di massa $m_g = 15 \text{ g}$ viene posto in un bicchiere contenente una massa $m_a = 100 \text{ g}$ di acqua, inizialmente alla temperatura di 20°C . Si calcoli la variazione di entropia totale del sistema una volta raggiunto l'equilibrio. Si trascurino (calore latente di fusione del ghiaccio $\lambda_g = 80 \text{ cal/g}$)

P.11.17.

Un cilindro a pareti adiabatiche di sezione $S = 0.1 \text{ m}^2$ è munito di un pistone mobile, anch'esso adiabatico, di massa trascurabile. La base del cilindro conduce invece calore ed è posta a contatto con un termostato costituito da ghiaccio fondente alla temperatura $T_0 = 0^\circ\text{C}$. Inizialmente il cilindro contiene $n = 2$ moli di gas perfetto alla pressione atmosferica $p_0 = 10^5 \text{ Pa}$. Si calcoli il volume occupato dal gas in tali condizioni. Successivamente sul pistone viene appoggiata una massa $M = 500 \text{ kg}$, che comprime il gas. Si calcolino:

- il volume finale V_2 occupato dal gas ad equilibrio termodinamico raggiunto;
- la quantità di ghiaccio fusa, noto il calore latente di fusione $\lambda_g = 335 \text{ kJ/kg}$ del ghiaccio;
- la variazione di entropia del gas, del ghiaccio e dell'universo.

P.11.18.

Un gas perfetto monoatomico viene riscaldato a volume costante da uno stato iniziale di equilibrio fino alla temperatura $T_1 = 500 \text{ K}$. In seguito a tale trasformazione l'entropia del gas aumenta di $\Delta S = 3 \text{ J/K}$. Successivamente il gas torna alla pressione iniziale tramite una trasformazione isoterma reversibile. Si calcoli il lavoro compiuto dal gas.

P.11.19.

Due corpi solidi di uguale capacità termica $C = 1000 \text{ J/K}$ ed a temperature $T_1 = 100 \text{ K}$ e $T_2 = 300 \text{ K}$ vengono posti a contatto termico fino a raggiungere una condizione di equilibrio. Trascurando il calore dissipato con l'ambiente, si calcoli la variazione di entropia di ciascuno dei due corpi e dell'universo a seguito della trasformazione.

P.11.20.

Un recipiente rigido adiabatico è suddiviso in due parti uguali, comunicanti tra loro mediante una valvola. In una delle due parti si trovano $n = 5$ moli di un gas perfetto, nell'altra c'è il vuoto. Si apre la valvola finché $n_1 = 2$ moli di gas fluiscono nell'altra parte, e poi la si richiude. Si determini la variazione di entropia del gas e si dica se la trasformazione è reversibile.

P.11.21.

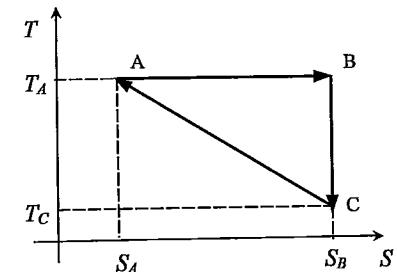
Un recipiente rigido e adiabatico è diviso da un setto in due volumi uguali, che contengono ciascuno $n = 3$ moli di elio e di azoto alla stessa temperatura. Il setto viene rimosso e si ha il miscelamento dei due gas. Calcolare la variazione di entropia totale a seguito del miscelamento dei due gas, precisando se la trasformazione è reversibile. Come cambierebbe il risultato se inizialmente nei due volumi del recipiente i due gas fossero uguali (ad

11.1 Problemi

esempio elio)?

P.11.22.

Una macchina termica compie un ciclo reversibile rappresentato nel piano (T, S) dal triangolo ABC di figura. Si calcoli il rendimento termodinamico del ciclo in funzione del rapporto delle temperature T_C/T_A .



11.2 Soluzioni

11.2 Soluzioni

S.11.1.

Il rendimento termodinamico del ciclo è dato da:

$$\eta = 1 - \frac{Q_{ced}}{Q_{ass}}, \quad (1)$$

dove Q_{ass} e Q_{ced} sono i calori assorbiti e ceduti dal gas lungo un ciclo. Mediante semplici considerazioni basate sul primo principio della termodinamica e sulla legge di stato dei gas ideali, si verifica che il gas assorbe calore nella espansione isobara da A a B e cede calore nella compressione isoterma da C ad A, mentre non scambia calore lungo l'adiabatica BC (si veda la figura a lato). Ricordando le espressioni dei calori scambiati in una trasformazione isobara ed isoterma reversibili, si avrà perciò:

$$Q_{ass} = Q_{AB} = nc_P(T_B - T_A), \quad (2)$$

$$Q_{ced} = |Q_{CA}| = \mathcal{L}_{AC} = nRT_A \ln \left(\frac{V_C}{V_A} \right), \quad (3)$$

dove c_P è il calore specifico del gas a pressione costante. Il rendimento del ciclo assume dunque la forma:

$$\eta = 1 - \frac{R}{c_P(T_B/T_A - 1)} \ln \left(\frac{V_C}{V_A} \right). \quad (4)$$

Per determinare il rendimento del ciclo, osserviamo che nella equazione precedente compaiono i rapporti T_B/T_A e V_C/V_A , che andranno espressi in funzione dell'unico dato del problema, e cioè del rapporto V_B/V_A . Per questo osserviamo che, essendo gli stati A e B alla stessa pressione, si ha dalla equazione di stato:

$$\frac{T_B}{T_A} = \frac{V_B}{V_A}. \quad (5)$$

Per il calcolo di V_C/V_A , osserviamo invece che, poichè gli stati di equilibrio B e C sono collegati da una trasformazione adiabatica reversibile, deve avversi:

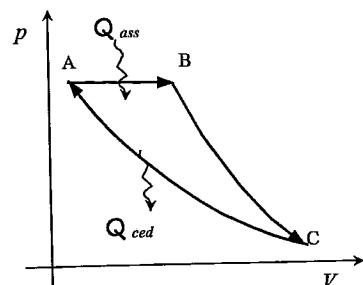
$$T_B V_B^{\gamma-1} = T_C V_C^{\gamma-1}, \quad (6)$$

dove $\gamma = c_P/c_V$ è il rapporto fra i calori specifici del gas a pressione e a volume costanti. Poichè $T_C = T_A$ ed usando la relazione $T_B/T_A = V_B/V_A$, dalla equazione (6) si ottiene per il volume V_C la seguente espressione:

$$V_C = \left(\frac{V_B}{V_A} \right)^{\frac{1}{\gamma-1}}, \quad (7)$$

per cui:

$$\frac{V_C}{V_A} = \left(\frac{V_B}{V_A} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \quad (8)$$



Secondo principio della termodinamica

Sostituendo le espressioni di T_B/T_A e V_C/V_A date dalle equazioni (6) e (8) nella espressione (4) del rendimento, si ottiene con ciò:

$$\eta = 1 - \frac{R}{c_P} \left(\frac{V_B}{V_A} - 1 \right)^{-1} \left(\frac{\gamma}{\gamma - 1} \right) \ln \left(\frac{V_B}{V_A} \right). \quad (9)$$

Osservando che $\gamma/(\gamma - 1) = c_P/(c_P - c_V) = c_P/R$, dove nell'ultimo passaggio abbiamo usato la relazione di Mayer $c_P - c_V = R$, si ha infine:

$$\eta = 1 - \left(\frac{V_B}{V_A} - 1 \right)^{-1} \ln \left(\frac{V_B}{V_A} \right). \quad (10)$$

Per $V_B/V_A = 2$, si ha $\eta \approx 0.307$. Si noti che il risultato è indipendente dal valore di c_V o c_P , per cui il rendimento del ciclo non cambia se il gas che compie la trasformazione fosse monoatomico anziché biatomico.

S.11.2.

Il problema è molto simile al precedente e dunque la risoluzione procede in modo analogo. Il rendimento termodinamico del ciclo è dato da:

$$\eta = 1 - \frac{Q_{ced}}{Q_{ass}}, \quad (1)$$

dove Q_{ass} e Q_{ced} sono i calori assorbiti e ceduti dal gas lungo un ciclo. Con riferimento alla figura, il gas assorbe calore nel riscaldamento isocoro da A a B e cede calore nella compressione isoterma da C ad A, mentre non scambia calore lungo l'adiabatica BC. Ricordando le espressioni dei calori scambiati in una trasformazione isocora ed isoterma reversibili, si avrà perciò:

$$Q_{ass} = Q_{AB} = nc_V(T_B - T_A), \quad (2)$$

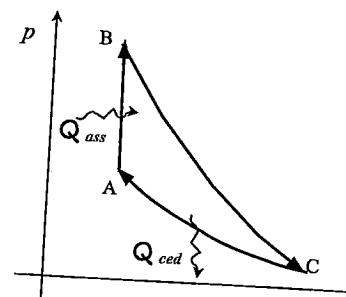
$$Q_{ced} = |Q_{CA}| = \mathcal{L}_{AC} = nRT_A \ln \left(\frac{V_C}{V_A} \right), \quad (3)$$

dove c_V è il calore specifico del gas a volume costante. Il rendimento del ciclo assume dunque la forma:

$$\eta = 1 - \frac{R}{c_V(T_B/T_A - 1)} \ln \left(\frac{V_C}{V_A} \right). \quad (4)$$

Per determinare il rendimento del ciclo, dobbiamo esprimere il rapporto V_C/V_A , che compare nella equazione precedente, in funzione dell'unico dato del problema, che è il rapporto T_B/T_A . Per questo osserviamo che, poiché gli stati di equilibrio B e C sono collegati da una trasformazione adiabatica reversibile, deve avversi:

$$T_B V_B^{\gamma-1} = T_C V_C^{\gamma-1}, \quad (5)$$



11.2 Soluzioni

dove $\gamma = c_P/c_V$ è il rapporto fra i calori specifici del gas a pressione e a volume costanti. Poiché $T_C = T_A$ e $V_B = V_A$, si ottiene:

$$T_B V_B^{\gamma-1} = T_A V_A^{\gamma-1}, \quad (6)$$

da cui:

$$\frac{V_C}{V_A} = \left(\frac{T_B}{T_A} \right)^{\frac{1}{\gamma-1}}. \quad (7)$$

Sostituendo le espressioni di V_C/V_A data dalla equazione (7) nella espressione (4) del rendimento, si ottiene:

$$\eta = 1 - \frac{R}{c_V} \left(\frac{T_B}{T_A} - 1 \right)^{-1} \left(\frac{1}{\gamma - 1} \right) \ln \left(\frac{T_B}{T_A} \right). \quad (8)$$

Osservando che $R/(\gamma - 1) = R c_V / (c_P - c_V) = c_V$, dove nell'ultimo passaggio abbiamo usato la relazione di Mayer $c_P - c_V = R$, si ha infine:

$$\eta = 1 - \left(\frac{T_B}{T_A} - 1 \right)^{-1} \ln \left(\frac{T_B}{T_A} \right). \quad (9)$$

Per $T_B/T_A = 2$, si ha $\eta \approx 0.307$. Si noti che il risultato è indipendente dal valore di c_V o c_P , per cui il rendimento del ciclo non cambia se il gas che compie la trasformazione fosse monoatomico anziché biatomico.

S.11.3.

Il grafico del ciclo motore reversibile, costituito dalle due trasformazioni isobare AB e CD, e dalle due curve adiabatiche reversibili BC e DA, è mostrato in figura. Il rendimento termodinamico del ciclo è dato da:

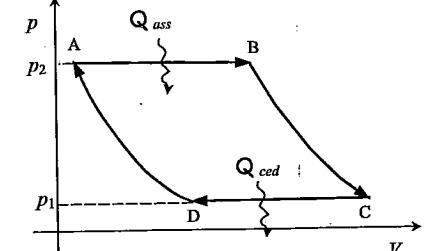
$$\eta = 1 - \frac{Q_{ced}}{Q_{ass}}, \quad (1)$$

dove Q_{ass} e Q_{ced} sono i calori assorbiti e ceduti dal gas lungo un ciclo. Con riferimento alla figura, il gas assorbe calore nel riscaldamento isobaro da A a B e cede calore nel raffreddamento isobaro da C a D, mentre non scambia calore lungo le due trasformazioni adiabatiche BC e DA. Dalla definizione di calore specifico a pressione costante, si ha inoltre:

$$Q_{ass} = Q_{AB} = nc_P(T_B - T_A) = \frac{c_P}{R}(p_B V_B - p_A V_A) = \frac{c_P}{R} p_2 (V_B - V_A), \quad (2)$$

$$Q_{ced} = |Q_{CD}| = nc_P(T_C - T_D) = \frac{c_P}{R}(p_C V_C - p_D V_D) = \frac{c_P}{R} p_1 (V_C - V_D), \quad (3)$$

dove c_P è il calore specifico del gas a pressione costante, e con p_2 e p_1 abbiamo indicato le pressioni delle due isobare AB e CD, rispettivamente. Nello scrivere le equazioni (2) e



(3) abbiamo usato l'equazione di stato del gas perfetto ($nT = pV/R$) applicata ai quattro stati di equilibrio A, B C e D. Il rendimento del ciclo assume dunque la forma:

$$\eta = 1 - \left(\frac{p_1}{p_2} \right) \frac{V_C - V_D}{V_B - V_A} = 1 - \left(\frac{p_1}{p_2} \right) \left(\frac{V_C}{V_B} \right) \frac{1 - V_D/V_C}{1 - V_A/V_B}. \quad (4)$$

Per calcolare i rapporti dei volumi che compaiono nella equazione precedente, osserviamo che, poiché gli stati di equilibrio B e C, ed A e D, giacciono su due curve adiabatiche reversibili, deve avversi:

$$p_2 V_A^\gamma = p_1 V_D^\gamma, \quad p_2 V_B^\gamma = p_1 V_C^\gamma, \quad (5)$$

dove $\gamma = c_P/c_V$ è il rapporto fra i calori specifici a pressione e volume costanti del gas. Da tali relazioni segue facilmente che:

$$\frac{V_A}{V_B} = \frac{V_D}{V_C}, \quad (6)$$

e

$$\frac{V_C}{V_B} = \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{1/\gamma}. \quad (7)$$

Sostituendo le equazioni (6) e (7) nella (4) si ottiene infine per il rendimento termodinamico del ciclo la seguente espressione:

$$\eta = 1 - \left(\frac{p_1}{p_2} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}. \quad (8)$$

Si noti che il rendimento dipende solo dal rapporto delle pressioni p_1/p_2 e dal coefficiente γ del gas. Per un gas monoatomico, $\gamma = c_P/c_V = 5/3$, e quindi:

$$\eta = 1 - \left(\frac{p_1}{p_2} \right)^{2/5}. \quad (9)$$

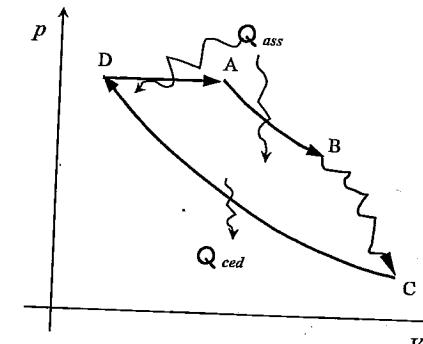
S.11.4.

Il grafico del ciclo ABCDA, costituito dalle due trasformazioni isoterme reversibili AB e CD, dalla adiabatica irreversibile BC e dalla isobara reversibile DA, è mostrato in figura. Il rendimento termodinamico del ciclo è dato da:

$$\eta = 1 - \frac{Q_{ced}}{Q_{ass}}, \quad (1)$$

dove Q_{ass} e Q_{ced} sono i calori assorbiti e ceduti dal gas lungo un ciclo. Con riferimento alla figura, il gas assorbe calore nel riscaldamento isobaro da D ad A e nella espansione isoterma da A a B, mentre il gas cede calore nella compressione isoterma da C a D. Ricordando le espressioni dei calori scambiati in trasformazioni isobare ed isoterme reversibili, possiamo dunque scrivere:

$$Q_{ass} = Q_{DA} + Q_{AB} = n c_P (T_A - T_D) + n R T_A \ln \left(\frac{V_B}{V_A} \right) \quad (2)$$



11.2 Soluzioni

$$Q_{ced} = |Q_{CD}| = n R T_D \ln \left(\frac{V_C}{V_D} \right) \quad (3)$$

Il rendimento del ciclo vale dunque:

$$\eta = 1 - \frac{\frac{T_D}{T_A} \ln \left(\frac{V_C}{V_D} \right)}{\frac{c_P}{R} \left(1 - \frac{T_D}{T_A} \right) + \ln \left(\frac{V_B}{V_A} \right)} \quad (4)$$

Per calcolare i rapporti dei volumi e delle temperature che compaiono nella equazione precedente, osserviamo che, dai dati del problema, si ha:

$$\frac{V_B}{V_A} = 2, \quad \frac{V_C}{V_B} = 3, \quad \frac{T_C}{T_B} = \frac{1}{2}. \quad (5)$$

Applicando l'equazione di stato alla isobara DA, tenendo conto delle relazioni precedenti e che $T_C = T_D$, $T_A = T_B$, si ha poi facilmente:

$$\frac{V_C}{V_D} = 6 \frac{V_A}{V_D} = 6 \frac{T_A}{T_D} = 6 \frac{T_B}{T_C} = 12 \quad (6)$$

e

$$\frac{T_D}{T_A} = \frac{T_C}{T_B} = \frac{1}{2} \quad (7)$$

In definitiva, ricordando che per gas monoatomico $c_P = (5/2)R$, si ha:

$$\eta = 1 - \frac{\frac{T_D}{T_A} \ln \left(\frac{V_C}{V_D} \right)}{\frac{c_P}{R} \left(1 - \frac{T_D}{T_A} \right) + \ln \left(\frac{V_B}{V_A} \right)} = 1 - \frac{\frac{1}{2} \ln(12)}{\frac{5}{2} \left(1 - \frac{1}{2} \right) + \ln(2)} \simeq 0.3606. \quad (8)$$

A conclusione del problema, va osservato che il lettore accorto potrebbe chiedersi se la trasformazione adiabatica BC è effettivamente irreversibile. Per questo, ricordando l'espressione dell'entropia del gas perfetto, osserviamo che la variazione di entropia del gas fra gli stati B e C di equilibrio vale:

$$\Delta S_{BC} = n c_V \ln \left(\frac{T_C}{T_B} \right) + n R \ln \left(\frac{V_C}{V_B} \right) = n R \left[-\frac{3}{2} \ln(2) + \ln(3) \right] > 0. \quad (9)$$

Ora, poiché si tratta di una trasformazione adiabatica, possiamo concludere che la variazione di entropia del gas nella trasformazione non può essere negativa, e che si annulla se e solo se la trasformazione è reversibile. Poiché, con i dati del problema, si ha $S(C) > S(B)$, la trasformazione adiabatica ha comportato un aumento di entropia, e dunque è stata irreversibile.

S.11.5.

Siano Q_1 la quantità di calore che il frigorifero assorbe dall'acqua a $T_1 = 273$ K, Q_2 la quantità di calore ceduta all'ambiente esterno alla temperatura $T_2 = 313$ K, ed L il lavoro assorbito dal frigorifero. Poiché il frigorifero opera reversibilmente, la variazione di entropia del sistema complessivo in uno o più cicli è nulla; da ciò (o, il che è equivalente, dal teorema di Clausius), discende che:

$$\frac{Q_1}{T_1} - \frac{Q_2}{T_2} = 0, \quad (1)$$

e cioè:

$$Q_2 = \frac{T_2}{T_1} Q_1. \quad (2)$$

Del resto, per il primo principio della termodinamica ed usando la espressione (2) per il calore Q_2 , si ha che

$$\mathcal{L} = Q_2 - Q_1 = Q_1 \left(\frac{T_2}{T_1} - 1 \right). \quad (3)$$

Se indichiamo con $m = 100 \text{ kg}$ la massa di acqua a 0°C da congelare, deve avversi $Q_1 = m\lambda$, dove λ è il calore latente di fusione del ghiaccio. Perciò il lavoro assorbito dal frigorifero per congelare la massa di acqua m vale:

$$\mathcal{L} = m\lambda \left(\frac{T_2}{T_1} - 1 \right). \quad (4)$$

Se $C = 0.5 \text{ Euro/kWh} = 1.3889 \times 10^{-7} \text{ Euro/J}$ è il costo dell'energia elettrica, il costo per congelare la massa m di acqua vale, in conclusione:

$$C\mathcal{L} = m\lambda C \left(\frac{T_2}{T_1} - 1 \right) \simeq 0.67 \text{ Euro}. \quad (5)$$

S.11.6.

Sia Q_1 la quantità di calore assorbito dalla cella frigorifera a temperatura $T_1 = 270 \text{ K}$ e Q_2 quella ceduta all'ambiente a temperatura $T_2 = 300 \text{ K}$ in ogni ciclo. Per il teorema di Clausius si ha:

$$\frac{Q_1}{T_1} - \frac{Q_2}{T_2} \leq 0, \quad (1)$$

cioè:

$$Q_2 \geq Q_1 \left(\frac{T_2}{T_1} \right), \quad (2)$$

dove l'uguaglianza è raggiunta se il ciclo è reversibile. Il lavoro \mathcal{L} assorbito in un ciclo, $\mathcal{L} = Q_2 - Q_1$, soddisfa dunque la diseguaglianza:

$$\mathcal{L} \geq Q_1 \left(\frac{T_2}{T_1} - 1 \right). \quad (3)$$

Il minimo lavoro che occorre spendere si ha quando il ciclo è reversibile e vale dunque:

$$\mathcal{L} = Q_1 \left(\frac{T_2}{T_1} - 1 \right) \simeq 1.11 \text{ J}. \quad (4)$$

11.2 Soluzioni

S.11.7.

Ricordiamo dalla teoria che, dato un ciclo termodinamico motore rappresentato da una trasformazione ciclica γ , il rendimento termodinamico η del ciclo è definito da:

$$\eta = 1 - \frac{Q_{ced}}{Q_{ass}}, \quad (1)$$

dove Q_{ced} e Q_{ass} sono i calori ceduti ed assorbiti, in un ciclo, dal gas, che possono esprimersi nella forma:

$$Q_{ced} = \oint_{\delta Q < 0} |\delta Q|, \quad (2)$$

$$Q_{ass} = \oint_{\delta Q > 0} \delta Q. \quad (3)$$

Se indichiamo con T_1 e T_2 le temperature minima e massima, rispettivamente, raggiunte dal gas nella trasformazione (vedi figura), l'esercizio chiede di dimostrare che sussiste la diseguaglianza:

$$\eta < 1 - \frac{T_1}{T_2}. \quad (4)$$

Si può dimostrare tale risultato in maniera elegante applicando la disequazione di Clausius, che, per la trasformazione reversibile γ , afferma che:

$$\oint_{\gamma} \frac{\delta Q}{T} = 0, \quad (5)$$

e cioè:

$$\oint_{\delta Q > 0} \frac{\delta Q}{T} = \oint_{\delta Q < 0} \frac{|\delta Q|}{T}. \quad (6)$$

Del resto, si ha manifestamente:

$$\oint_{\delta Q < 0} \frac{|\delta Q|}{T} < \oint_{\delta Q < 0} \frac{|\delta Q|}{T_1} = \frac{Q_{ced}}{T_1} \quad (7)$$

e

$$\oint_{\delta Q > 0} \frac{\delta Q}{T} > \oint_{\delta Q > 0} \frac{\delta Q}{T_2} = \frac{Q_{ass}}{T_2}. \quad (8)$$

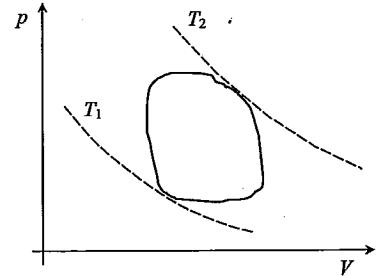
Tenendo conto della uguaglianza (6), le disequazioni (7) e (8) comportano perciò che si abbia:

$$\frac{Q_{ass}}{T_2} < \frac{Q_{ced}}{T_1}, \quad (9)$$

e cioè:

$$\frac{Q_{ced}}{Q_{ass}} > \frac{T_1}{T_2}. \quad (10)$$

Dalla definizione di rendimento η [vedi equazione (1)] e tenendo conto della disequazione precedente, segue facilmente l'asserto [equazione (4)].



S.11.8.

Poiché il ciclo è reversibile, la variazione totale di entropia delle sorgenti termiche con cui il fluido termodinamico scambia calore deve essere zero; dette dunque Q_1 e Q_2 le quantità di calore assorbite dalle sorgenti a temperature T_1 e T_2 (con $T_1 > T_2$), e Q_3 la quantità di calore ceduta alla sorgente termica a temperatura T_3 , si ha:

$$-\frac{Q_1}{T_1} - \frac{Q_2}{T_2} + \frac{Q_3}{T_3} = 0, \quad (1)$$

cioè:

$$Q_3 = \frac{T_3}{T_1} Q_1 + \frac{T_3}{T_2} Q_2. \quad (2)$$

Il rendimento η del ciclo è poi dato da:

$$\eta = 1 - \frac{Q_3}{Q_1 + Q_2} = 1 - \frac{T_3}{T_1 T_2} \frac{T_2 Q_1 + T_1 Q_2}{Q_1 + Q_2}. \quad (3)$$

Osserviamo che $(T_2 Q_1 + T_1 Q_2)/(Q_1 + Q_2)$ è la media delle temperature T_2 e T_1 pesata sulle quantità di calore Q_1 e Q_2 , per cui senz'altro si avrà:

$$T_2 < \frac{T_2 Q_1 + T_1 Q_2}{Q_1 + Q_2} < T_1. \quad (4)$$

Tenendo conto della (4), dalla equazione (3) segue pertanto:

$$1 - \frac{T_3}{T_2} < \eta < 1 - \frac{T_3}{T_1}. \quad (5)$$

Inserendo nella equazione precedente i dati numerici del problema, si ha $0.375 < \eta < 0.5$. Il rendimento termodinamico del ciclo è dunque inferiore a 0.5.

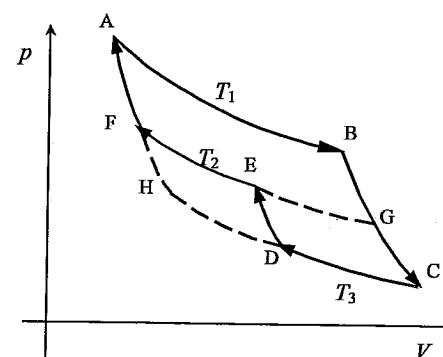
S.11.9.

Per lo svolgimento di questo esercizio si può seguire il procedimento descritto nel precedente esercizio. Poiché il ciclo è reversibile, la variazione totale di entropia, quella cioè associata alle sorgenti termiche con cui il fluido termodinamico scambia calore, deve essere zero. Indicate dunque con Q_1 la quantità di calore assorbito dalla sorgente calda a temperatura T_1 e con Q_2 e Q_3 le quantità di calore cedute alle sorgenti a temperature T_2 e T_3 (con $T_2 > T_3$), deve avversi:

$$-\frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} + \frac{Q_3}{T_3} = 0, \quad (1)$$

cioè:

$$Q_1 = \frac{T_1}{T_2} Q_2 + \frac{T_1}{T_3} Q_3. \quad (2)$$

**11.2 Soluzioni**

Il rendimento η del ciclo è poi dato da:

$$\eta = 1 - \frac{Q_2 + Q_3}{Q_1} = 1 - \frac{T_2 T_3}{T_1} \frac{Q_2 + Q_3}{Q_2 T_3 + Q_3 T_2}. \quad (3)$$

Osserviamo che $(T_2 Q_3 + T_3 Q_2)/(Q_3 + Q_2)$ è la media delle temperature T_2 e T_3 pesata sulle quantità di calore Q_3 e Q_2 , per cui senz'altro si avrà:

$$T_3 < \frac{T_2 Q_3 + T_3 Q_2}{Q_3 + Q_2} < T_2. \quad (4)$$

Tenendo conto della (4), dalla equazione (3) segue pertanto:

$$1 - \frac{T_2}{T_1} < \eta < 1 - \frac{T_3}{T_1}, \quad (5)$$

che è l'asserto dato nel testo del problema.

E' istruttivo osservare che al risultato espresso dalla equazione (5) si poteva anche giungere mediante semplici argomentazioni geometriche facendo riferimento alla rappresentazione del ciclo nel piano (p, V). Infatti, con riferimento alla figura, siano EG, DH e HF i prolungamenti delle isoterme EF, DC e dell'adiabatica AF, rispettivamente. Dette L_1 , L_2 e L_3 le aree corrispondenti ai rettangoloidi ABGF, GCDE e EDHF, ciascuno dei quali individua dei cicli di Carnot, il rendimento termodinamico del ciclo ABCDEF vale manifestamente:

$$\eta = \frac{L_1 + L_2}{Q_{ass}}, \quad (6)$$

essendo Q_{ass} il calore assorbito nella isoterma AB. Poiché per costruzione ABGFA è un ciclo reversibile di Carnot che opera tra le temperature T_1 e T_2 , si ha:

$$\eta > \frac{L_1}{Q_{ass}} = 1 - \frac{T_2}{T_1}. \quad (7)$$

Inoltre, con riferimento al ciclo di Carnot ABCHA che opera reversibilmente fra le sorgenti termiche a temperature T_1 e T_3 , si ha pure:

$$\eta < \frac{L_1 + L_2 + L_3}{Q_{ass}} = 1 - \frac{T_3}{T_1}. \quad (8)$$

Le disequazioni (7) e (8) corrispondono proprio alla (5).

S.11.10.

Per il teorema di Clausius, la trasformazione in questione è permessa dal secondo principio della termodinamica se è soddisfatta la condizione:

$$\oint \frac{\delta Q}{T} = \frac{Q_1}{T_1} - \frac{Q_2}{T_2} - \frac{Q_3}{T_3} \leq 0, \quad (1)$$

valendo il segno di uguaglianza se lo scambio di calore con le sorgenti termiche è stato reversibile. Dai dati del problema, si ha $Q_1/T_1 - Q_2/T_2 - Q_3/T_3 \simeq 0.067 \text{ cal/K}$, perciò tale trasformazione non è possibile per alcun sistema termodinamico.

Un modo equivalente di risolvere il problema è di osservare che, per un sistema isolato,

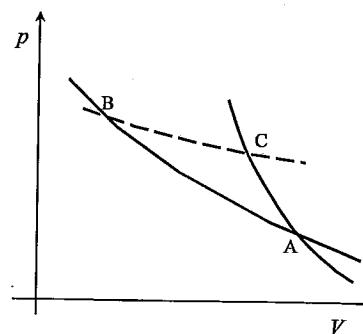
ogni trasformazione non può mai comportare una diminuzione dell'entropia totale del sistema e delle sorgenti termiche con cui esso ha scambiato calore. Poiché il sistema compie una trasformazione ciclica e l'entropia è una funzione di stato, la variazione di entropia del sistema è nulla. La variazione totale di entropia (dell'universo) è perciò data dalla somma delle variazioni di entropia delle tre sorgenti termiche con cui il sistema ha scambiato calore. Poiché la sorgente a temperatura T_1 cede la quantità di calore Q_1 mentre le sorgenti a temperature T_2 e T_3 assorbono le quantità di calore Q_2 e Q_3 , rispettivamente, si ha:

$$\Delta S_{tot} = -\frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} + \frac{Q_3}{T_3}. \quad (2)$$

La condizione $\Delta S_{tot} \geq 0$ corrisponde proprio alla equazione (1).

S.11.11.

Supponiamo, per assurdo, che due curve corrispondenti a due trasformazioni adiabatiche reversibili si intersechino nel piano (p, V), come mostrato in figura, in un punto A. Se si considera poi una trasformazione isoterma reversibile che intersechi le due adiabatiche in due stati di equilibrio B e C, come mostrato in figura, il ciclo ABCA è un ciclo motore reversibile che compie un lavoro $L > 0$, dato dall'area sottesa dal triangolo ABC, scambiando (assorbendo) calore da una sola sorgente termica lungo la isoterma BC. Un tale ciclo viola l'enunciato di Kelvin del secondo principio della termodinamica. La violazione si rimuove ammettendo che le due adiabatiche non si intersechino.



S.11.12.

Indichiamo con ΔS_{sis} e con ΔS_{sorg} le variazioni di entropia del sistema e della sorgente termica a temperatura T con cui esso ha scambiato calore, e sia Q la quantità di calore assorbito dal sistema ($Q < 0$ se la quantità di calore è ceduta dal sistema alla sorgente termica). L'unico vincolo imposto dal secondo principio della termodinamica alla realizzabilità della trasformazione è che la variazione di entropia dell'universo non diminuisca, e cioè che:

$$\Delta S_{sis} + \Delta S_{sorg} \geq 0, \quad (1)$$

valendo l'uguaglianza se lo scambio di calore è avvenuto in maniera reversibile. Poiché la sorgente termica cede la quantità di calore Q al sistema, si ha $\Delta S_{sorg} = -Q/T$, e quindi la equazione precedente comporta che si abbia:

$$\Delta S_{sis} \geq \frac{Q}{T}. \quad (2)$$

Ciò premesso, possiamo a questo punto rispondere ai quesiti del problema e dire se le tre affermazioni sono vere.

(i) Quando un sistema assorbe calore da una sorgente termica, la sua temperatura aumenta. Non necessariamente.

11.2 Soluzioni

Ciò che senz'altro aumenta è la sua entropia, ed anzi aumenta in maniera superiore o uguale a Q/T , ma tale aumento non corrisponde necessariamente ad un aumento della sua temperatura. Come controesempio, si consideri come sistema un gas ideale contenuto in un recipiente a pareti adiabatiche a contatto termico con una sorgente termica a temperatura T e munito di un pistone mobile. Se il gas si espande perché, ad esempio, la pressione esterna diminuisce bruscamente (si veda, ad esempio, il problema P16 del capitolo precedente), esso compie lavoro ed assorbe una uguale quantità di calore dalla sorgente termica, mentre la sua temperatura (e dunque la sua energia interna) non varia. Successivamente il gas, allontanato dalla sorgente termica, può subire una espansione adiabatica reversibile che determina una diminuzione della temperatura del gas, senza che esso scambi calore. La trasformazione complessiva ha comportato perciò una diminuzione della temperatura e l'assorbimento di una quantità di calore da una sola sorgente termica.

(ii) Quando un sistema assorbe calore da una sorgente termica, la sua entropia aumenta. Questa affermazione è sempre vera ed è conseguenza della equazione (2).

(iii) Quando un sistema cede calore ad una sorgente termica, la sua entropia diminuisce. Non necessariamente. Infatti, in base alla (2), la variazione di entropia del sistema non può essere inferiore a $-|Q|/T$, ma potrebbe tranquillamente essere positiva. Lasciamo, come compito per il lettore, la formulazione di un controesempio in cui, ad esempio, un gas ideale compie una trasformazione in cui cede una quantità di calore ad una sorgente termica ed aumenta la sua entropia.

S.11.13.

Siano Q_2 e Q_1 i calori assorbito e ceduto, in un ciclo, dal fluido frigorifero con le sorgenti a temperatura T_2 e T_1 , rispettivamente. Ricordando l'espressione della variazione di entropia di una sorgente termica e tenendo conto che, dopo un ciclo, il fluido frigorifero ritorna nel suo stato di equilibrio iniziale e dunque la sua variazione di entropia è nulla, la variazione di entropia dell'universo varrà:

$$\Delta S = -\frac{Q_2}{T_2} + \frac{Q_1}{T_1}. \quad (1)$$

Il lavoro speso in un ciclo frigorifero vale inoltre $L = P/N$, essendo N il numero di cicli nell'unità di tempo compiuti dal frigorifero. Dal primo principio della termodinamica si ha altresì:

$$Q_1 = \frac{P}{N} + Q_2. \quad (2)$$

Osserviamo che, dai dati del problema, le due precedenti equazioni contengono come incognite le quantità di calore Q_1 e Q_2 , e possono essere perciò risolte per tali variabili. In particolare, si ottiene per il calore Q_2 assorbito dalla sorgente fredda in un ciclo l'espressione seguente:

$$Q_2 = \frac{T_2 P / N - T_1 T_2 \Delta S}{T_1 - T_2} = 900 \text{ J}. \quad (3)$$

Per sottrarre la quantità di calore Q alla sorgente fredda, occorrerà infine un tempo:

$$t = \frac{Q}{Q_2} \frac{1}{N} = \frac{Q(T_1 - T_2)}{T_2 P - N T_1 T_2 \Delta S} \simeq 69.44 \text{ s}. \quad (4)$$

S.11.14.

La trasformazione è irreversibile perché il gas è portato a contatto termico con una sorgente termica a temperatura T_2 diversa da quella iniziale T_1 (irreversibilità termica). La variazione di energia interna del gas vale:

$$\Delta U = nc_V(T_2 - T_1) = \frac{5}{2}nR(T_2 - T_1) \simeq 6.23 \text{ kJ}, \quad (1)$$

essendo $c_V = (5/2)R$ il calore specifico a volume costante per gas batomico. Per calcolare il lavoro \mathcal{L} compiuto dal gas, siano V_1 e V_2 i volumi occupati dal gas nel cilindro nelle condizioni iniziale e finale, rispettivamente. Poiché sul pistone agisce la pressione esterna p , costante nella trasformazione, il lavoro compiuto dal gas, uguale ed opposto a quello compiuto dalle forze di pressione esterna su esso, vale:

$$\mathcal{L} = p(V_2 - V_1) = nR(T_2 - T_1) = 2.49 \text{ kJ}, \quad (2)$$

dove nell'ultimo passaggio abbiamo usato l'equazione di stato del gas perfetto per gli stati di equilibrio iniziale e finale. Il calore Q assorbito dal gas nella trasformazione si calcola poi applicando il primo principio della termodinamica, e cioè:

$$Q = \Delta U + \mathcal{L} = \frac{7}{2}nR(T_2 - T_1) = 8.73 \text{ kJ}. \quad (3)$$

Calcoliamo infine la variazione di entropia ΔS_g del gas, la variazione di entropia ΔS_s della sorgente termica a temperatura T_2 col quale il gas ha scambiato calore, e la variazione di entropia ΔS_u dell'universo. Ricordando l'espressione della entropia del gas perfetto in termini delle variabili termodinamiche p e T ed osservando che la pressione del gas non è variata nella trasformazione, si ha:

$$\Delta S_g = nc_p \ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right) = \frac{7}{2}nR \ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right) \simeq 25.11 \text{ J/K}. \quad (4)$$

La variazione di entropia della sorgente a temperatura T_2 , che ha ceduto la quantità di calore Q , vale:

$$\Delta S_s = -\frac{Q}{T_2} \simeq -21.82 \text{ J/K}. \quad (5)$$

Infine, la variazione di entropia dell'universo è:

$$\Delta S_u = \Delta S_g + \Delta S_s \simeq 3.29 \text{ J/K}. \quad (6)$$

Si noti che $\Delta S_u > 0$, che è indice della irreversibilità della trasformazione.

S.11.15.

Il teorema (o disequazione) di Clausius afferma che, se un sistema termodinamico compie una trasformazione *ciclica* γ scambiando calore δQ con una sorgente termica a temperatura T ($\delta Q > 0$ se il calore è assorbito), deve aversi:

$$\oint_{\gamma} \frac{\delta Q}{T} \leq 0, \quad (1)$$

11.2 Soluzioni

valendo l'uguale se e solo se la trasformazione ciclica γ è reversibile. Va osservato esplicitamente che nella (1) T non è la temperatura del sistema (che può non essere nemmeno definita se nella trasformazione il sistema si trova in stati di non equilibrio) ma quelle delle sorgenti termiche con le quali il sistema scambia la quantità di calore δQ .

Consideriamo ora la trasformazione ciclica del corpo solido descritta nel testo del problema, e verifichiamo che per essa vale la disequazione (1). Per questo osserviamo che, quando il solido viene portato a contatto termico con la sorgente a temperatura T_2 , esso si porta all'equilibrio termico assorbendo la quantità di calore Q data da:

$$Q = C(T_2 - T_1), \quad (2)$$

essendo C la capacità termica del solido. Se ora il corpo solido viene raffreddato reversibilmente fino a riportarlo alla temperatura iniziale T_1 , esso deve essere posto a contatto successivamente con infinite sorgenti termiche a temperatura T via via decrescente da T_2 a T_1 , ed alla sorgente a temperatura T deve cedere la quantità di calore:

$$\delta Q = CdT \quad (3)$$

per diminuire la sua temperatura di dT . Perciò, nella trasformazione reversibile che riporta il corpo solido nella sua condizione iniziale l'integrale di Clausius vale:

$$\int \left(\frac{\delta Q}{T} \right)_{rev} = \int_{T_2}^{T_1} \frac{CdT}{T} = -C \ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right). \quad (4)$$

L'integrale di Clausius esteso alla trasformazione ciclica vale dunque:

$$\oint_{\gamma} \frac{\delta Q}{T} = \frac{Q}{T_2} - C \ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right) = \frac{C(T_2 - T_1)}{T_2} - C \ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right) \simeq -966 \text{ J/K}. \quad (5)$$

Il valore dell'integrale è negativo, in accordo con la (1).

S.11.16.

Cominciamo col calcolare la composizione e la temperatura di equilibrio dopo il mescolamento del ghiaccio e dell'acqua. Se supponiamo che dopo il mescolamento tutto il ghiaccio si sia fuso ed indichiamo con T la temperatura finale di equilibrio, trascurando dissipazioni di calore con l'ambiente potremo scrivere che il calore assorbito dalla massa di ghiaccio deve uguagliare quello ceduto dalla massa di acqua, e cioè:

$$\lambda m_g + m_g c(T - T_0) = m_a c(T_1 - T), \quad (1)$$

essendo $T_0 = 273$ K la temperatura di fusione del ghiaccio a pressione atmosferica, λ il calore latente di fusione del ghiaccio, $T_1 = 293$ K la temperatura iniziale dell'acqua e $c = 1 \text{ cal/(K gr)}$ il calore specifico dell'acqua. Risolvendo l'equazione (1) rispetto a T si ottiene:

$$T = \frac{m_a c T_1 + m_g c T_0 - \lambda m_g}{c(m_a + m_g)} \simeq 279.96 \text{ K}. \quad (2)$$

Si osservi che $T > T_0$ e dunque dopo il mescolamento si ha effettivamente completa fusione del ghiaccio.

Calcoliamo ora la variazione totale di entropia del sistema, che sarà data da:

$$\Delta S = \Delta S_a + \Delta S_g, \quad (3)$$

essendo ΔS_a e ΔS_g le variazioni di entropia delle masse di acqua e di ghiaccio, rispettivamente. Ricordando le espressioni dell'entropia di un corpo solido o liquido e tenendo conto che nella transizione di fase il ghiaccio assorbe la quantità di calore λm_g alla temperatura T_0 , si ha facilmente:

$$\Delta S_a = \int_{T_1}^T \frac{m_a c dT}{T} = m_a c \ln \left(\frac{T}{T_1} \right) \quad (4)$$

$$\Delta S_g = \int_{\text{trans. fase}} \frac{\delta Q}{T_0} + \int_{T_0}^T \frac{m_g c dT}{T} = \frac{m_g \lambda}{T_0} + m_g c \ln \left(\frac{T}{T_0} \right) \quad (5)$$

per cui:

$$\Delta S = m_a c \ln \left(\frac{T}{T_1} \right) + m_g c \ln \left(\frac{T}{T_0} \right) + \frac{m_g \lambda}{T_0} \simeq 0.22 \text{ cal/K.} \quad (6)$$

Si noti che, poiché $\Delta S > 0$, il processo di fusione del ghiaccio è irreversibile.

S.11.17.

Il volume V_0 del gas si calcola immediatamente utilizzando l'equazione di stato del gas perfetto:

$$V_0 = \frac{nRT_0}{p_0} = 0.0454 \text{ m}^3. \quad (1)$$

Quando sul pistone viene posta la massa M , il gas subisce una compressione isoterma irreversibile. Ad equilibrio raggiunto, indichiamo con (p_1, V_1, T_1) la pressione, il volume e la temperatura raggiunti dal gas. Si ha evidentemente $T_1 = T_0$ poiché il gas resta a contatto col termostato costituito dal ghiaccio fondente, e:

$$p_1 = p_0 + \frac{Mg}{S} \simeq 1.49 \times 10^5 \text{ Pa.} \quad (2)$$

per l'equilibrio meccanico del pistone. Il volume finale del gas, V_1 , si calcola poi usando l'equazione di stato:

$$V_1 = \frac{nRT_1}{p_1} = \frac{nRT_0}{p_1} \simeq 0.0305 \text{ m}^3. \quad (3)$$

Per calcolare la massa m di ghiaccio fusa, indichiamo con Q il calore ceduto dal gas al ghiaccio nella compressione; allora si ha:

$$m = \frac{Q}{\lambda}, \quad (4)$$

essendo λ il calore latente di fusione del ghiaccio. La determinazione del calore ceduto Q necessita di un commento. Notiamo che, poiché il gas compie una trasformazione isoterma essendo a contatto con un termostato (il ghiaccio in transizione di fase), esso non varia la sua energia interna (trattandosi di gas perfetto) e dal primo principio si ha perciò:

$$Q = \mathcal{L}_e, \quad (5)$$

dove \mathcal{L}_e è il lavoro compiuto dalle forze esterne di pressione sul gas nella espansione. Poiché la trasformazione non è quasistatica, per il calcolo del lavoro dobbiamo considerare la pressione esterna agente sul pistone mobile, che è costante e pari a p_1 , e scrivere:

$$\mathcal{L}_e = - \int_{V_0}^{V_1} p_1 dV = p_1 (V_0 - V_1) = nRT_0 \left(\frac{p_1}{p_0} - 1 \right) = 2.224 \times 10^3 \text{ J.} \quad (6)$$

11.2 Soluzioni

La massa di ghiaccio fusa vale dunque:

$$m = \frac{nRT_0 \left(\frac{p_1}{p_0} - 1 \right)}{\lambda} \simeq 6.65 \text{ g.} \quad (7)$$

Calcoliamo in conclusione la variazione di entropia del gas, del ghiaccio e dell'universo. Ricordando l'espressione dell'entropia del gas perfetto e tenendo conto che la temperatura finale del gas è uguale a quella iniziale, si ha:

$$\Delta S_{\text{gas}} = nR \ln \frac{V_1}{V_0} \simeq -6.614 \text{ J/K.} \quad (8)$$

La variazione di entropia del ghiaccio in transizione di fase è quella di una sorgente termica a temperatura T_0 che assorbe la quantità di calore Q , e vale dunque:

$$\Delta S_{\text{gh}} = \frac{Q}{T_0} \simeq 8.148 \text{ J/K.} \quad (9)$$

La variazione di entropia dell'universo vale infine:

$$\Delta S_{\text{un}} = \Delta S_{\text{gas}} + \Delta S_{\text{gh}} \simeq 1.533 \text{ J/K.} \quad (10)$$

Si noti che $\Delta S_{\text{un}} > 0$ essendo il processo irreversibile.

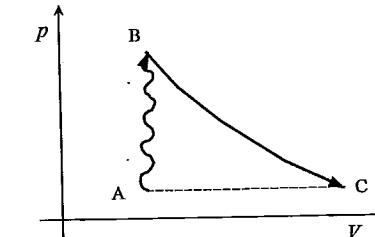
S.11.18.

La sequenza delle due trasformazioni compiute dal gas nel piano (p, V) è mostrata in figura. Nel riscaldamento isocoro da A a B, la variazione di entropia del gas vale:

$$\Delta S_{AB} = nc_V \ln \left(\frac{T_B}{T_A} \right) \quad (1)$$

e perciò:

$$\frac{T_B}{T_A} = \exp \left(\frac{\Delta S_{AB}}{nc_V} \right). \quad (2)$$



Il lavoro compiuto dal gas nella espansione isoterma reversibile BC vale:

$$\mathcal{L}_{BC} = nRT_B \ln \left(\frac{V_C}{V_B} \right). \quad (3)$$

Per il calcolo di V_C/V_B osserviamo che, dall'equazione di stato, si ha:

$$\frac{V_C}{V_B} = \frac{p_B}{p_C} = \frac{p_B}{p_A} = \frac{T_B}{T_A} = \exp \left(\frac{\Delta S_{AB}}{nc_V} \right) \quad (4)$$

dove nell'ultimo passaggio abbiamo usato la relazione (2). Perciò il lavoro \mathcal{L} , dato dalla equazione (3), diviene:

$$\mathcal{L}_{BC} = nRT_B \ln \left[\exp \left(\frac{\Delta S_{AB}}{nc_V} \right) \right] = \frac{RT_B \Delta S_{AB}}{c_V}. \quad (5)$$

Tenendo conto che il gas è monoatomico, e cioè che $c_V = (3/2)R$, e che $T_B = T_1$, sostituendo i valori numerici di ΔS_{AB} e T_1 dati nel testo del problema, si ottiene infine $\mathcal{L}_{BC} = (2/3)T_1\Delta S_{AB} = 1000 \text{ J}$.

S.11.19.

Trascurando la dissipazione di calore nell'ambiente, la temperatura finale T di equilibrio si ottiene imponendo che il calore ceduto da un corpo sia assorbito dall'altro (trasformazione globalmente adiabatica), e cioè:

$$C(T - T_1) + C(T - T_2) = 0, \quad (1)$$

da cui:

$$T = \frac{T_1 + T_2}{2} = 200 \text{ K}. \quad (2)$$

La variazione di entropia ΔS_1 e ΔS_2 per i due corpi si calcola supponendo che le quantità di calore che essi hanno assorbito e ceduto siano state scambiate in maniera reversibile, portando cioè quasistaticamente e reversibilmente ciascuno dei due corpi dalla sua temperatura iniziale alla temperatura finale di equilibrio T . Si ha così:

$$\Delta S_1 = C \ln \left(\frac{T}{T_1} \right) \simeq 693.15 \text{ J/K}, \quad (3)$$

$$\Delta S_2 = C \ln \left(\frac{T}{T_2} \right) \simeq -405.47 \text{ J/K}. \quad (4)$$

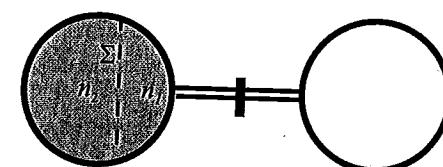
La variazione di entropia dell'universo vale infine:

$$\Delta S_{uni} = \Delta S_1 + \Delta S_2 = C \ln \left(\frac{T^2}{T_1 T_2} \right) \simeq 287.68 \text{ J/K}. \quad (5)$$

Osserviamo che $\Delta S > 0$, perciò il passaggio di calore dal corpo caldo a quello freddo è irreversibile. A conclusione dell'esercizio osserviamo che, se i due corpi sono a temperature diverse ($T_1 \neq T_2$), poiché si ha sempre $T^2 > T_1 T_2$, dalla espressione precedente di ΔS_{uni} segue che *sempre* è $\Delta S_{uni} > 0$: e cioè quando due corpi a temperature diverse sono posti a contatto termico, il raggiungimento dell'equilibrio termico è sempre un processo irreversibile.

S.11.20.

Poiché il gas si espande nel vuoto e le pareti del recipiente sono rigide, il lavoro compiuto dall'esterno sul gas nella espansione è nullo. Inoltre la trasformazione è adiabatica, per cui il calore scambiato dal gas con l'ambiente è nullo. Dal primo principio della termodinamica segue perciò che l'energia interna complessiva del gas non è variata. Poiché per un gas perfetto l'energia interna è funzione solo della sua temperatura, tenendo conto che, ad equilibrio termico raggiunto, le due quantità di gas nei due volumi del recipiente raggiungono la stessa temperatura, si può concludere che la



11.2 Soluzioni

temperatura finale delle due quantità di gas è uguale a quella iniziale. La variazione di entropia ΔS associata al deflusso del gas si può calcolare come somma della variazione di entropia ΔS_1 delle n_1 moli defluite nel volume di destra e di quella ΔS_2 associata alle restanti $n_2 = n - n_1$ moli che restano nel volume iniziale. Per il calcolo di ΔS_1 e ΔS_2 , si può utilizzare l'espressione della variazione di entropia del gas perfetto, facendo tuttavia attenzione al fatto che, poiché le molecole del gas sono le medesime, il volume occupato dalle moli n_1 ed n_2 quando sono entrambe contenute nel volume iniziale di sinistra V , non è V , ma esse si ripartiscono nei volumi $V_1 = (n_1/n)V$ e $V_2 = (n_2/n)V$ in proporzione al loro numero. Per capire questo punto, si faccia riferimento alla figura. Possiamo introdurre una superficie ideale Σ che separa, nel volume di sinistra V , le moli n_1 ed n_2 ; quando la valvola viene aperta, le molecole a destra di Σ defluiscono nel volume di destra e le molecole a sinistra di Σ invadono tutto il volume V dell'ampolla di sinistra. Alla fine, quando la valvola viene chiusa, i volumi finali a disposizione dei due gas sono quindi $V'_1 = V$ e $V'_2 = V$. La variazione di entropia dell'universo a seguito del deflusso del gas vale perciò:

$$\Delta S = n_1 R \ln \left(\frac{V'_1}{V_1} \right) + n_2 R \ln \left(\frac{V'_2}{V_2} \right) = n_1 R \ln \left(\frac{n}{n_1} \right) + n_2 R \ln \left(\frac{n}{n_2} \right) \simeq 27.98 \text{ J/K}. \quad (1)$$

Si osservi che, poiché $\Delta S > 0$, il deflusso del gas è un processo irreversibile.

S.11.21.

Siano (V_1, p_1, T_1) e (V_2, p_2, T_2) le variabili termodinamiche corrispondenti agli stati di equilibrio dell'elio e dell'azoto, rispettivamente, quando i gas sono separati dal setto. Dai dati del problema si ha $V_1 = V_2 = V$ e $T_1 = T_2 = T$; inoltre, poiché il numero di moli dei due gas è il medesimo, dall'equazione di stato del gas perfetto segue che essi sono anche alla stessa pressione, e cioè $p_1 = p_2 = p$. Quando il setto viene rimosso, si ha il miscelamento dei due gas. Poiché non c'è scambio di calore con l'ambiente ed il lavoro compiuto sul gas è nullo (essendo le pareti del recipiente rigide), dal primo principio della termodinamica segue che l'energia interna complessiva dei gas non è variata, e dunque la temperatura finale della miscela egualia quella iniziale T . Dopo il mescolamento, l'elio e l'azoto occupano tutto il volume del recipiente, pari a $2V$. Ricordando l'espressione della variazione di entropia di un gas perfetto e tenendo conto che la temperatura dei due gas non varia, si ha perciò che la variazione totale di entropia vale:

$$\Delta S = \Delta S_{He} + \Delta S_{N_2} = nR \ln \left(\frac{2V}{V} \right) + nR \ln \left(\frac{2V}{V} \right) = 2nR \ln 2 \simeq 34.58 \text{ J/K}. \quad (1)$$

Se i due gas fossero di uguale specie chimica (ad esempio He), l'apertura della valvola non produrrebbe alcun miscelamento, perché le molecole del gas sarebbero le stesse. Non si avrebbe cioè variazione dello stato di equilibrio del gas, e dunque $\Delta S = 0$.

S.11.22.

Il rendimento del ciclo è dato da:

$$\eta = 1 - \frac{Q_{ced}}{Q_{ass}}, \quad (1)$$

dove Q_{ass} e Q_{ced} sono le quantità di calore assorbito e ceduto in un ciclo, rispettivamente. Ricordando che in una trasformazione infinitesima reversibile $\delta Q = TdS$, Q_{ass} e Q_{ced} possono scriversi nella forma:

$$Q_{ass} = \oint_{\delta Q > 0} TdS, \quad (2)$$

$$Q_{ced} = \left| \oint_{\delta Q < 0} TdS \right|. \quad (3)$$

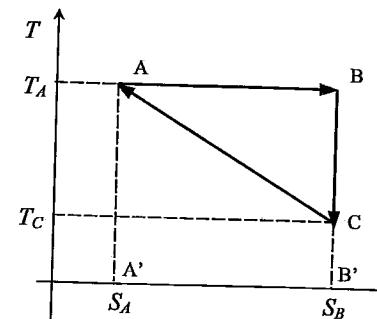
Ricordando l'interpretazione geometrica dell'integrale di una funzione, tali relazioni mostrano che, da un punto di vista geometrico, il calore scambiato in una trasformazione reversibile è uguale all'area sottesa dalla curva della trasformazione nel piano (T, S). Si osservi ora che nella trasformazione AB si ha $TdS > 0$, nella trasformazione CA si ha $TdS < 0$, mentre lungo la trasformazione BC si ha $dS = 0$ (adiabatica reversibile). Perciò il calore assorbito Q_{ass} è dato dall'area del rettangolo $ABB'A'$, mentre il calore ceduto dall'area del trapezio $ACB'A'$. Cioè:

$$Q_{ass} = Q_{AB} = T_A(S_B - S_A), \quad (4)$$

$$Q_{ced} = |Q_{CA}| = \frac{1}{2}(T_A + T_C)(S_B - S_A). \quad (5)$$

In conclusione, il rendimento del ciclo assume l'espressione:

$$\eta = 1 - \frac{(T_A + T_C)(S_B - S_A)}{2T_A(S_B - S_A)} = 1 - \frac{1}{2} \left(1 + \frac{T_C}{T_A} \right). \quad (6)$$



Appendice A

Costanti ed unità di misura

Costanti fisiche

Numero di Avogadro $N_A = 6.022 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$

Costante dei gas perfetti $R = 8.314 \text{ J/(K mol)}$

Costante di Boltzmann $k_B = R/N_A = 1.381 \times 10^{-23} \text{ J/K}$

Costante gravitazionale $\gamma = 6.672 \times 10^{-11} \text{ N m}^2/\text{kg}^2$

Prefissi per le potenze di dieci

Potenza	Prefisso	Abbreviazione	Potenza	Prefisso	Abbreviazione
10^{-18}	atto	a	10^1	déca	da
10^{-15}	femto	f	10^2	etto	h
10^{-12}	pico	p	10^3	chilo	k
10^{-9}	nano	n	10^6	mega	M
10^{-6}	micro	μ	10^9	giga	G
10^{-3}	milli	m	10^{12}	tera	T
10^{-2}	centi	c	10^{15}	peta	P
10^{-1}	deci	d	10^{18}	exa	E

Grandezze ed unità di misura impiegate nel testo

Grandezze fondamentali nel Sistema Internazionale

Grandezza	Unità di misura	Simbolo
Lunghezza	metro	m
Massa	chilogrammo	kg
Intervalli di tempo	secondo	s
Temperatura assoluta	kelvin	K
Quantità di sostanza	mole	mol
Angolo	radiante	rad

Grandezze derivate

Grandezza	Unità	Simbolo	Espressioni equivalenti
Velocità v	-	m/s	-
Velocità angolare ω	-	rad/s	-
Frequenza ν	hertz	Hz	-
Accelerazione a	-	m/s^2	$1/s$
Accelerazione angolare α	-	rad/s^2	-
Forza F	newton	N	$kg\ m/s^2; J/m$
Forza per unità di volume \mathfrak{F}	-	N/m^3	$kg/m^2 s^2; J/m^4$
Momento meccanico \mathfrak{M}	-	N m	$kg\ m^2/s^2$
Momento angolare L	-	$kg\ m^2/s$	-
Quantità di moto q, Q	-	$kg\ m/s$	-
Momento d'inerzia I	-	$kg\ m^2$	-
Energia E, U ; lavoro L ; calore Q	joule	J	$N\ m; kg\ m^2/s^2$
Potenza P	watt	W	$J/s; kg\ m^2/s^3$
Pressione p	pascal	Pa	$N/m^2; kg/m\ s^2$
Densità per unità di volume ρ	-	kg/m^3	-
Portata V	-	m^3/s	-
Entropia S	-	J/K	-

Altre unità di misura

Grandezza	Unità di misura	Equivalenza nel S.I.
Velocità	chilometro-ora (km/h)	0.2778 m/s
Forza	chilogrammo-forza (kg_f)	9.81 N
Energia	chilowatt-ora (kWh)	3.6×10^6 J
Volume	litro (l)	10^{-3} m ³
Pressione	kg_f/cm^2	9.8×10^4 Pa
"	bar	10^5 Pa
"	mm Hg	133.3 Pa
Calore	atmosfera (atm)	1.013×10^5 Pa
	caloria (cal)	4.18 J

Equivalenze utili

Detta t la temperatura di un oggetto misurata nella scala Celsius e T la corrispondente temperatura assoluta, vale la relazione:

$$t(^{\circ}\text{C}) = T(\text{K}) + 273.15.$$

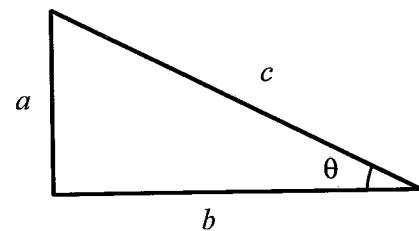
Appendice B

Richiami di trigonometria

Funzioni trigonometriche

Dato il triangolo rettangolo mostrato in figura di cateti a e b , ipotenusa c ed angolo θ opposto al cateto a , si definiscono:

$$\sin \theta = \frac{a}{c} \quad \cos \theta = \frac{b}{c}$$
$$\tan \theta = \frac{a}{b} = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \quad \cotan \theta = \frac{b}{a} = \frac{\cos \theta}{\sin \theta}$$



Identità trigonometriche

Risultano le seguenti relazioni:

$$\sin \theta = \cos \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right) \quad \cos \theta = \sin \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right)$$
$$\cotan \theta = \tan \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right) \quad \sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$$

$$\begin{aligned}\cos^2 \theta &= \frac{1}{1 + \tan^2 \theta} & \sin^2 \theta &= \frac{1}{1 + \cotan^2 \theta} \\ \cos 2\theta &= \cos^2 \theta - \sin^2 \theta & \sin 2\theta &= 2 \sin \theta \cos \theta \\ \cos^2 \frac{\theta}{2} &= \frac{(1 + \cos \theta)}{2} & \sin^2 \frac{\theta}{2} &= \frac{(1 - \cos \theta)}{2} \\ \tan 2\theta &= \frac{2 \tan \theta}{1 - \tan^2 \theta} & \tan \frac{\theta}{2} &= \sqrt{\frac{1 - \cos \theta}{1 + \cos \theta}}\end{aligned}$$

Inoltre valgono le seguenti regole di somma:

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta$$

$$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan \alpha \pm \tan \beta}{1 \mp \tan \alpha \tan \beta}$$

$$\sin \alpha \pm \sin \beta = 2 \sin[\frac{1}{2}(\alpha \pm \beta)] \cos[\frac{1}{2}(\alpha \mp \beta)]$$

$$\cos \alpha \pm \cos \beta = 2 \cos[\frac{1}{2}(\alpha \pm \beta)] \cos[\frac{1}{2}(\alpha \mp \beta)]$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = 2 \sin[\frac{1}{2}(\alpha + \beta)] \sin[\frac{1}{2}(\alpha - \beta)]$$

$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)]$$

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)]$$

$$\sin^2 \alpha - \sin^2 \beta = \sin(\alpha + \beta) \sin(\alpha - \beta)$$

$$\cos^2 \alpha - \cos^2 \beta = \sin(\alpha + \beta) \sin(\beta - \alpha)$$

Nel campo complesso valgono le seguenti relazioni:

$$\sin z = \frac{1}{2i} (e^{iz} - e^{-iz})$$

$$\cos z = \frac{1}{2} (e^{iz} + e^{-iz})$$

dette *formule di Eulero*; inoltre:

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z$$

$$e^{x+iy} = e^x (\cos y + i \sin y)$$

Formule notevoli per un triangolo

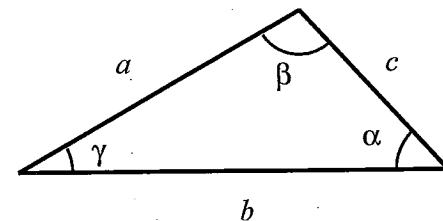
Dato il triangolo mostrato in figura di lati a, b e c ed angoli α, β e γ , valgono le seguenti relazioni:

$$\alpha + \beta + \gamma = \pi$$

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$$

quest'ultima si riduce al ben noto teorema di Pitagora per $\alpha = \pi/2$.



Appendice C

Calcolo differenziale ed integrale

C.1 Regole di derivazione di una funzione

Regole generali

Sia k una costante ed $f(x)$, $g(x)$ due funzioni continue e derivabili (per la nozione di derivabilità si rimanda ad un testo di Analisi Matematica). Indicando con $f'(x) = \frac{df}{dx}$ e $g'(x) = \frac{dg}{dx}$ le derivate prime di $f(x)$ e $g(x)$, si hanno le seguenti relazioni

$$\frac{d}{dx} [k f(x)] = k f'(x)$$

$$\frac{d}{dx} [g(x) + f(x)] = g'(x) + f'(x)$$

$$\frac{d}{dx} [g(x) \cdot f(x)] = g'(x) \cdot f(x) + g(x) \cdot f'(x)$$

$$\frac{d}{dx} \left[\frac{g(x)}{f(x)} \right] = \frac{g'(x) \cdot f(x) - g(x) \cdot f'(x)}{f^2(x)}$$

Se $g = g(z)$ e $z = f(x)$, la funzione $g = g[f(x)]$ si dice composita. In tal caso la derivata di $g(x)$ risulta:

$$\frac{d}{dx} g(z) = \frac{dg}{dz} \cdot \frac{dz}{dx} = \frac{dg}{dz} \cdot \frac{df}{dx}$$

Tabella delle principali derivate

$$\frac{d}{dx} k = 0$$

$$\frac{d}{dx} x^n = n \cdot x^{n-1}$$

$$\frac{d}{dx} e^{kx} = k e^{kx}$$

$$\frac{d}{dx} a^{kx} = k a^{kx} \ln(a)$$

$$\frac{d}{dx} \sin(x) = \cos(x)$$

$$\frac{d}{dx} \cos(x) = -\sin(x)$$

$$\frac{d}{dx} \operatorname{tg}(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$$

$$\frac{d}{dx} \operatorname{cotg}(x) = -\frac{1}{\sin^2(x)}$$

$$\frac{d}{dx} \ln(x) = \frac{1}{x}$$

$$\frac{d}{dx} \ln[f(x)] = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

C.2 Regole di integrazione di una funzione

Regole generali

Date due funzioni $f(x)$ ed $F(x)$, diremo che F è una primitiva di f se:

$$\frac{d}{dx} F(x) = f(x)$$

La primitiva di una funzione viene anche detta integrale indefinito ed indicata con la notazione:

$$F(x) = \int f(x) dx$$

In virtù delle regole di derivazione, la primitiva è sempre definita a meno di una costante arbitraria. Per il teorema del calcolo integrale, l'integrale definito di una funzione $f(x)$ valutato fra gli estremi a e b risulta pari alla differenza dei valori assunti dalla primitiva $F(x)$ nei due estremi:

$$\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

Vi sono due metodi importanti di risoluzione di un integrale definito:

1. *Integrazione per sostituzione.* Posto $x = y(t)$ e detta $t = g(x)$ la sua funzione inversa, risulta:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f[y(t)] \frac{dy}{dt} dt$$

C.3 Espansione in serie di una funzione

2. *Integrazione per parti.* Se in un integrale appare il prodotto di una funzione $f(x)$ per la derivata di una funzione $g(x)$, possiamo allora porre:

$$\int_a^b f(x) \frac{dg}{dx} dx = [f(x) g(x)]_a^b - \int_a^b \frac{df}{dx} g(x) dx$$

Tabella dei principali integrali indefiniti

Si noti che tutti gli integrali qui riportati sono sempre assegnati a meno di una costante arbitraria C.

$$\int k dx = kx$$

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

$$\int e^{kx} dx = \frac{e^{kx}}{k}$$

$$\int a^{kx} dx = \frac{a^{kx}}{k \ln(a)}$$

$$\int \sin(x) dx = -\cos(x)$$

$$\int \cos(x) dx = \sin(x)$$

$$\int \operatorname{tg}(x) dx = -\ln|\cos(x)|$$

$$\int \operatorname{cotg}(x) dx = \ln|\sin(x)|$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln(x)$$

$$\int \ln(x) dx = x \ln(x) - x$$

C.3 Espansione in serie di una funzione

Si consideri una funzione $f(x)$ continua assieme alle sue derivate in un intorno del punto x_0 ; $f(x)$ può essere rappresentata in tale intorno mediante una serie di potenze di x :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{d^n f}{dx^n}(x_0) (x - x_0)^n,$$

dove $n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \dots 3 \cdot 2 \cdot 1$; $0! = 1$ e le derivate di ordine n-simo della funzione $f(x)$ sono tutte valutate nel punto x_0 . Se la precedente sommatoria viene arrestata ai primi addendi, si ottiene una espressione che approssima la funzione $f(x)$. Di seguito si riportano le approssimazioni di alcune funzioni in un intorno di $x_0 = 0$.

Approssimazione di $f(x)$ nell'intorno di $x_0 = 0$

$$\sin(x) \approx x \quad \cos(x) \approx 1 - \frac{x^2}{2}$$

$$\exp(x) \approx (1 + x) \quad \tan(x) \approx x$$

$$\frac{1}{1+x} \approx (1-x) \quad \frac{1}{1-x} \approx (1+x)$$

$$(1+x)^2 \approx (1+2x) \quad (1-x)^2 \approx (1-2x)$$

$$\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{x}{2} \quad \sqrt{1-x} \approx 1 - \frac{x}{2}$$

$$\ln(1+x) \approx x$$

POWERED
By

~~KR4M~~