Numeri Reali

Premessa

Le quattro operazioni razionali trovano completo assetto con i numeri razionali: la somma, il prodotto e le relative operazioni inverse; l'insieme dei numeri razionali e' un campo e lo indicheremo $\mathbb{Q}$.

(Si ricorda che un insieme numerico ove sono possibili le quattro operazioni razionali e' chiamato campo numerico).

Eppure due problemi fondamentali non trovano soddisfacente assetto in $\mathbb{Q}$. Questi sono:

1) Il problema della misura; 2) il problema delle potenze n-esime perfette.

1) **Problema della misura.**

La Geometria ci fornisce classi di grandezze; ad esempio i segmenti che indicheremo ora per semplicita' con lettere maiuscole:A, B, C......

Conveniamo di moltiplicare i segmenti con numeri nel seguente modo. Dato un numero intero n, con nA intendiamo il segmento C ottenuto riportando n volte A, in modo contiguo, nella sua direzione. Diremo che C e' multiplo di A.

Dati due segmenti A e B puo' accadere che essi abbiano un multiplo comune ovvero esistono due numeri naturali m ed n tale che

$$mA = nB$$

e scriveremo

$$B = \frac{m}{n}A.$$

Il numero $\frac{m}{n}$ viene chiamato misura di B rispetto ad A, considerato segmento di riferimento od unita'. Coppie di segmenti che hanno un multiplo comune sono detti commensurabili e la misura dell'uno rispetto all'altro e' data da un numero razionale.

Possiamo affermare che i numeri razionali ci permettono di misurare grandezze commensurabili.

La geometria ci fornisce anche esempi di coppie di segmenti che non ammettono multiplo comune ovvero sono *incommensurabili*.

Ad esempio la diagonale ed il lato di un quadrato (piu' avanti illustreremo estesamente questo esempio).

Concludiamo dicendo che i numeri razionali non ci permettono di misurare grandezze incommensurabili.

2) **Potenze n-esime perfette.**

Esistono mumeri razionali che non sono quadrati perfetti, cubi perfetti, ..., potenze n-esime perfette di altri numeri razionali. Ad esempio 2 non e' il quadrato di un numero razionale x ovvero l'equazione $x^2 = 2$ non ha soluzione in $\mathbb{Q}$ (questa e' la traduzione algebrica della incommensurabilita' della diagonale e del lato di un quadrato).

Analogamente 35 non e' quadrato perfetto di un numero razionale x ovvero l'equazione $x^2 = 35$ non ha soluzione in $\mathbb{Q}$. Esplicitamente non esiste un numero razionale $x = \frac{m}{n}$ tale che

$$(\frac{m}{n})^2 = 35.$$

Se si fa ricorso al fatto che ogni numero intero si scompone in uno ed in un solo modo in fattori primi allora e' abbastanza semplice appurare la non esistenza. Infatti se valesse l'equazione

$$(\frac{m}{n})^2 = 35$$

si avrebbe

$$m^2 = 5 \cdot 7 \cdot n^2$$

che e' assurda perche' 5 e 7 nel secondo membro compaiono con potenza dispari mentre nel primo compaiono con potenza pari. Si ha una contraddizione.

Nota - Il procedimento usato per misurare grandezze omogenee e' del tutto generale e si estende a qualsiasi classe di grandezze della geometria, della fisica e di altre teorie che necessitano del concetto di misura. Si opera in questo modo. Si prende una grandezza della classe e la si assume come grandezza di riferimento od unita' di misura indicata con u. Poi ogni altra grandezza A della stessa classe viene confrontata con l'unita' scelta u. Questo confronto porta ad un numero che chiamiamo misura di A rispetto ad u.

Che cosa rende il campo dei numeri razionali inadeguato a dare un assetto soddisfacente ai problemi sopra esposti?

Per rendere piu' chiaro questo problema utilizzeremo anche l'immagine geometrica dei numeri razionali. Lo studente da lungo tempo ha familiarita' con l'immagine geometrica dei numeri ad esempio con l'uso del righello o della riga.

Ebbene descriviamola.

Si tratta di mettere in corrispondenza i numeri con i punti di una retta gemetrica cosi' come la percepiano, come un continuo. Per ora non ci soffermiamo su questo concetto.

Quindi sia r una retta geometrica. Fissiamo su questa retta un punto che indichiamo O e lo chiamiamo origine. Prendiamo un segmento di riferimento che sara' la nostra unita' di misura u. Infine fissiamo un verso sulla retta che ci permette di ordinarne i punti. Dati due punti $P_1, P_2 \in r$ diremo che P_1 precede P_2 o e' minore di P_2 e scriveremo $P_1 < P_2$ se P_1 per sovrapporsi a P_2 deve muoversi in verso concorde a quello stabilito.

La retta cosi' corredata viene chiamata <u>*retta cartesiana*</u>.

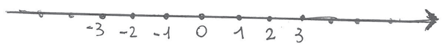
In seguito, per semplicita', non scriveremo piu' esplicitamente l'unita' di misura (una volta fissata).

1 - Rappresentazione dei numeri naturali sulla retta cartesiana r.

Sia $P_1 > O$ il secondo estremo del segmento $\overline{OP_1}$ di misura 1. Tale punto e' l'immagine geometrica del numero 1. Ora, per semplicita', conveniamo scrivere sulla retta 1 invece di P_1 ovvero mettiamo in evidenza la misura del segmento $\overline{0P_1}$. Appare chiaro come rappresentare geometricamente il numero 2. Si considera il segmento $\overline{OP_2}$ con $P_2 > P_1$ che ha misura 2 e poi si scrive sulla retta 2 invece di P_2. In questo modo rappresentiamo tutti i numeri naturali sulla retta.

Per gli interi negativi si considerano segmenti ove O e'il secondo estremo cosi' consideriamo i segmenti $\overline{P_{-n}O}$ che hanno misura n ma verso opposto a $\overline{OP_n}$. Lo zero e' rappresentato dal punto O.

In questo modo abbiamo determinato le " ascisse "dei punti " interi relativi".



Proprieta' dell'insieme dei numeri interi

Notiamo che fra due numeri interi c'e' al piu' un numero' finito di interi.

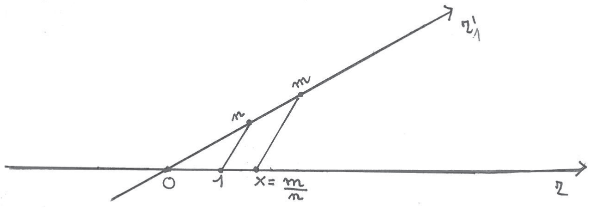
Questa proprieta' viene cosi' indicata: i numeri interi sono un insieme discreto.

Osserviamo inoltre che fra due interi consecutivi non ci sono altri numeri interi. In mezzo a loro c'e' il vuoto nel senso che non ci sono numeri naturali che coprono i punti della retta compresi fra i punti "interi" considerati.

Cerchiamo di coprire questi vuoti considerando i numeri razionali.

2) Rappresentazione dei numeri razionali sulla retta cartesiana r.

Utilizziamo il teorema di Talete sulla similitudine di triangoli e relativa proporzionalita' dei lati corrispondenti.



Sia r_1 un'altra retta passante per O con la stessa unita' di misura di r e verso concorde.

Su r_1 si considerino i punti n ed m con $n < m$. Su r si consideri il punto 1 e si congiunga n con 1; dal punto m si mandi la retta parallela al segmento $\overline{n1}$. Questa interseca la retta r nel punto x. Si ottengono due triangoli simili : $O\hat{n}1$ e $O\hat{m}x$. I lati corrispondenti sono proporzionali quindi

$$m : n = x : 1$$

da cui $x = \frac{m}{n}$ ed il punto x rappresenta il numero razionale $\frac{m}{n}$.

Con questo procedimento rappresentiamo geometricamente (mettiamo in corrispondenza) tutti i numeri razionali con i punti della retta r.

Proprieta' dell'insieme dei numeri razionali

1) Sia $s \in Q$. Allora esistono infiniti numeri razionali maggiori di s ed infiniti numeri razionali minori di s.

2) Proprieta' di densita'

Siano p, q due numeri razionali con $p < q$. Allora esistono infiniti numeri razionali s compresi tra p ed q ovvero esistono infiniti $s \in \mathbb{Q}$ tale che $p < s < q$.

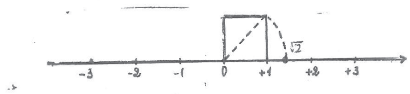
Un insieme che ha questa proprieta' si dice che e' denso.

E' facile verificare la proprieta'. E' sufficiente costruire i punti medi fra due punti dati.

$s_1 = \frac{p+q}{2}$ e' un numero razionale compreso fra p ed q. Cosi' possiamo procedere per la coppie (p, s_1) e (s_1, q) ed ottenere altri punti compresi fra p ed q. Induttivamente, in questo modo, troviamo infiniti numeri razionali compresi tra p e q.

L'insieme dei numeri razionali pur essendo fittissimo non e' in grado di coprire tutta la retta. Tra numeri razionali ci sono dei "vuoti" nel senso sopra precisato. Ovvero non tutti i punti della retta sono immagine di numeri razionali nella corrispondenza considerata. E' facile convincersi di questo.

E' sufficiente considerare sull'asse cartesiano r il secondo estremo partendo da O del segmento uguale alla diagonale del quadrato avente per lato l'unita' di misura.



Dal teorema di Pitagora la lunghezza della diagonale e' $\sqrt{2}$ che non e' un numero razionale. Con linguaggio geometrico la diagonale ed il lato del quadrato sono grandezze incommensurabili.

In modo suggestivo diciamo che l'insieme dei numeri razionali non e' un continuo (come la retta di supporto) o piu' in generale non e' un insieme completo (la nozione di completezza prescinde dalla nozione di ordine).

E' a causa della incompletezza che i problemi della misura e delle potenze perfette non trovano assetto soddisfacente in $\mathbb{Q}$.

Per risolvere, dunque, questi problemi dobbiamo costruire un insieme numerico che contenga i numeri razionali e che riesca a coprire i "vuoti" dei razionali. Un modo semplice e' quello di aggiungere ai numeri razionali tutti gli oggetti $x^n = r$ per ogni $r \in Q$ ed ogni n naturale. In questo modo si amplia l'insieme dei razionali. C'e' da osservare che un sistema numerico e' un insieme strutturato laddove gli oggetti sono relazionati con operazioni. Per rendere la costruzione piu' agevole, come abbiamo visto nei sistemi numerici gia' costruiti, occorre dare una rappresentazione uniforme agli oggetti e cercare di utilizzare tutte le proprieta' dei numeri razionali.

Verifichiamo in dettaglio la incommensurabilita' fra diagonale e lato di un quadrato ed il problema algebrico associato.

Consideriamo il problema storico in questo contesto: la incommensurabilita' del lato l e della diagonale d di un quadrato di lato uguale all'unita'. Quindi la misura del lato l e' 1 ovvero $l = 1u$. Il teorema di Pitagora da' $d^2 = 2u^2$ quindi la misura s^2 di d^2 e' 2 ovvero $s^2 = 2$.

Mostriamo che la soluzione dell'equazione $s^2 = 2$ non puo' essere un numero razionale $\frac{m}{n}$.

Ragioniamo per assurdo. Supponiamo che esista un numero razionale $\frac{m}{n} = \sqrt{2}$ con m ed n primi fra loro. Allora

$$(\frac{m}{n})^2 = \frac{m^2}{n^2} = 2$$

da cuii si ha

$$m^2 = 2n^2.$$

Il secondo membro e' un numero pari (e' divisibile per 2). Per il teorema dell'unica decomponibilita' di un intero in fattori primi anche il numero m sara' pari perche' se m non contenesse il fattore 2 neanche m^2 potrebbe contenerlo. Quindi possiamo scrivere

$$m = 2b \quad \textit{con } b \textit{ intero}.$$

Quindi

$$m^2 = 4b^2 = 2n^2.$$

Dividendo per due il secondo e terzo termine si ottiene

$$2b^2 = n^2$$

e per il solito ragionamento n deve essere pari. Ma allora m ed n avrebbero in comune almeno il fattore 2 contrariamente all'ipotesi che sono primi.

Abusando delle notazioni possiamo dire che l'oggetto $\sqrt{2}$ non e' un numero razionale.

Eppure esso puo' essere approssimato da numeri razionali. Ad esempio, e' noto che, ricorrendo alla rappresentazione decimale dei numeri razionali, possiamo costruire la coppia (A, B) di sequenze di numeri razionali

$$\sqrt{2} \sim \begin{cases} A = \{1;\ 1,4;\ 1,41;\ 1,414; ....\} \\ B = \{2,;\ 1,5;,\ 1,42;\ 1,415; ....\} \end{cases}$$

I numeri in A approssimano per difetto $\sqrt{2}$ o meglio i loro quadrati approssimano per difetto 2 ed i numeri in B approssimano per eccesso $\sqrt{2}$ o meglio i loro quadrati approssimano per eccesso 2.

Non v'e' dubbio che la coppia (A, B) individui ed identifichi l'oggetto $\sqrt{2}$. Anzi questo puo' essere considerato come l'elemento che separa gli insiemi A e B senza appartenere a nessuno dei due. Di coppie di tipo (A,B) che individuano (che sono separate da) $\sqrt{2}$ ne esistono infinite. Questo non e' un problema. Cio' che interessa e' la struttura della coppia (A,B).

1) Gli insiemi A e B non sono vuoti. 2) ogni numero in A e' minore di ogni numero in B. 3) gli insiemi A e B sono molto "vicini".

Abbiamo trovato un modo per identificare algebricamente i "vuoti" lasciati dai numeri razionali.

Ci sono altri modi per identificare questi "vuoti". Noi preferiamo usare le coppie (A,B) con le proprieta' elencate sopra. Resta da precisare, per uniformita' di rappresentazione, come identificare i numeri razionali.

Ogni numero razionale puo'essere considerato come elemento separatore di una coppia del tipo (A,B) il quale appartiene ad A od a B. Ad esempio 1 puo' essere identificato dalla coppia (A,B) ove A contiene tutti i numeri razionali minori od uguali ad 1 e B contiene tutti i numeri razionali maggiori di 1. La coppia (A,B) cosi' costruita identifica 1 che ne e' il separatore ed appartiene ad A. Con una costruzione analoga si puo' far appartenere 1 a B. Con questi esempi abbiamo messo in evidenza la differenza tra le coppie che identificano i numeri razionali e quelle che identificano i nuovi oggetti. Le seconde hanno un elemento separatore che appartiene ad uno degli insiemi componenti di cui e' massimo o minimo; le prime hanno l'elemento separatore che non appartiene a nessuno degli insiemi componenti e questi non hanno ne' massimo ne' minimo, rispettivamente.

Abbiamo introdotto molti concetti per presentare i nuovi oggetti. Occorre, pertanto, strutturare l'insieme delle coppie di numeri razionali fissando molte nozioni minute e precise che ci permetteranno di costruire i numeri reali in modo spedito e rigoroso.

Classi di numeri razionali

Formalizziamo i concetti descritti nella premessa.

Tratteremo con classi o insiemi di numeri razionali che saranno indicate con le lettere maiuscole $A,B,C,....$ I numeri razionali verranno indicati con le lettere latine minuscole: $a,b,c,r,s,....$ Si invita lo studente a seguire geometricamente le nozione sull'asse cartesiano.

Definizione 1

Sia $A \subset Q$. Diremo che A e' superiormente limitato quando esiste un numero $k \in \mathbb{Q}$ tale che $\forall a \in A$ si ha $a \leq k$.

Definizione 2

Sia $A \subset \mathbb{Q}$. Diremo che A e' inferiormente limitato quando esiste un numero $h \in \mathbb{Q}$ tale che $\forall a \in A$ si ha $a \geq h$.

Definizione 3

Sia $A \subset \mathbb{Q}$. Diremo che A e' limitato quando e' limitato superiormente ed inferiormene ovvero esistono due numeri $h,k \in \mathbb{Q}$ con $h < k$ tale che $\forall a \in A$ si ha $h \leq a \leq k$. Si dice non limitato od illimitato in caso contrario.

Definizione 4 -(massimo)

Sia $A \subset \mathbb{Q}$. Diremo che $a_M \in \mathbb{Q}$ e' massimo di A quando

1. $a_M \in A$.
2. $\forall a \in A$ *si ha* $a \leq a_M$.

ovvero a_M e' il piu' grande numero di A.

Analogamente

Definizione 5 -(minimo)

Sia $A \subset \mathbb{Q}$. Diremo che $a_m \in \mathbb{Q}$ e' minimo di A quando

1. $a_m \in A$.

2. $\forall a \in A$ *si ha* $a \geq a_m$.

ovvero a_m *e' il piu' piccolo numero di* A.

Non sempre per insiemi $A \subset \mathbb{Q}$ esistono massimo o minimo od entrambi.

Ad esempio l'insieme A formato da numeri razionali s con $0 \leq s < 1$ ha minimo ma non massimo. Infatti ovviamente il minimo e' 0 il massimo non puo' essere 1 perche' non appartiene ad A.

Per assurdo supponiamo che A abbia massimo a_M e sia $0 < a_M < 1$. Consideriamo il numero $a^* = \frac{a_M+1}{2}$. Si ha $a_M < a^* < 1$ quindi $a^* \in A$ ed e' maggiore del massimo a_M di A. Una contraddizione.

Questo fatto e' dovuto alla proprieta' di densita' di $\mathbb{Q}$.

Nei numeri interi invece esiste sempre massimo e minimo, ovvero ogni insieme limitato di numeri interi ha sempre massimo e minimo.

Definizione 6

Siano A e B due insiemi in $\mathbb{Q}$ non vuoti. Diremo che A e B sono separati quando ogni elemento dell'uno (ad esempio di A) non supera alcun elemento dell'altro (ad esempio di B); in simboli $\forall a \in A$ ed $\forall b \in B$ si ha $a \leq b$ (oppure $b \leq a$). Due insiemi separati possono avere un solo punto in comune. A e' detto <u>minorante</u> e B <u>maggiorante</u>.

Definizione 7 - elemento separatore

Siano A e B due insiemi separati in $\mathbb{Q}$ con A minorante. Ogni numero razionale r e' detto numero od elemento separatore di A e B se $\forall a \in A$ e $\forall b \in B$ si ha $a \leq r \leq b$.

Il numero razionale r se esiste puo' appartenere ad uno od ad entrambi gli insiemi e non e' detto che sia unico. Ad esempio se $A = \{a \in \mathbb{Q} | a \leq 0\}$ e $B = \{b \in \mathbb{Q} | b \geq 1\}$ tutti i numeri razionali compresi tra 0 ed 1 sono elementi separatori.

Per avere l'unicita' dell'elemento separatore dobbiamo rafforzare la definizione di separatezza. E' evidente che per avere l'unicita' dell'elemento separatore occorre che gli insiemi separati siano vicini anzi vicinissimi. Diamo dunque la definizione di questo concetto indipendentemente dalla separatezza.

Definizione 8 - indefinita vicinanza.

Siano A e B insiemi in $\mathbb{Q}$. Diremo che sono indefinitamente ravvicinati se, fissato un numero (arbitrario) razionale $\epsilon > 0$, e' possibile determinare un elemento $b^* \in B$ ed un elemento $a^* \in A$ tale che

$$|b^* - a^*| < \epsilon,$$

il valore assoluto della loro differenza e' minore di ϵ.

Se i due insiemi hanno intersezione non vuota essi sono indefinitamente ravvicinati.

Insiemi con intersezione vuota possono essere indefinitamente ravvicinate.

Gli insiemi separati $A = \{a \in \mathbb{Q} | a \leq 1\}$ e $B = \{b \in \mathbb{Q} | b > 1\}$ hanno intersezione vuota ma sono indefinitamente ravvicinati.

Ora possiamo dare la definizione fondamentale per la costruzione dei numeri reali.

Coppie di classi contigue

Definizione 9 . *Siano A e B due insiemi di $\mathbb{Q}$. Diremo che A e B costituiscono una coppia di classi contigue che denoteremo (A, B) se verificano le seguenti proprieta':*

1. *$A \neq \emptyset$ e $B \neq \emptyset$;*

2. *A e B sono separati;*

3. *A e B sono indefinitamente ravvicinati.*

Una coppia di classi contigue se ha elemento separatore esso e' unico.

Infatti se ammettesse due elementi separatori r, s con $r < s$ la coppia non sarebbe indefinitamente ravvicinata perche' si ha ogni $a \leq r$ ed ogni $b \geq s$ ed una volta preso $\epsilon < s - r$ non esiste alcun $b^* \in B$ ed alcun $a^* \in A$ tale che $b^* - a^* < \epsilon$.

Caso particolare di coppie di classi contigue: la **partizione** di $\mathbb{Q}$.

Definizione 10 - Partizione di $\mathbb{Q}$

Una coppia (A, B) di insiemi in $\mathbb{Q}$ e' detta partizione di $\mathbb{Q}$ quando valgono le seguenti proprieta':

1. $A \neq \emptyset$ *e* $B \neq \emptyset$*;*
2. $A \cup B = \mathbb{Q}$ *e* $A \cap B = \emptyset$*;*
3. *A e B sono separati ovvero ogni elemento di A e' minore di ogni elemento di B.*

Una partizione e' una coppia di classi contigue

Occorre dimostrare solo l'indefinito ravvicinamento. Sia $\epsilon > 0$ un numero razionale. Siano $a \in A$, $b \in B$ e sia N un numero intero tale che $\frac{b-a}{N} < \epsilon$. Allora la sequenza di numeri

$$a, \ a + \frac{b-a}{N}, \ a + 2\frac{b-a}{N}, \ ..., a + N\frac{b-a}{N} = b$$

inizia da $a \in A$ e termina in $b \in B$. Inoltre la differenza di un elemento con il precedente e' minore di ϵ. Procedendo da destra verso sinistra, sia

$$b^* = a + n\frac{b-a}{N}$$

il primo numero che non appartiene ad A. Allora appartiene ad A il precedente

$$a^* = a + (n-1)\frac{b-a}{N}$$

da cui

$$b^* - a^* < \frac{b-a}{N} < \epsilon.$$

Nota 1 - La definizione di partizione e' alquanto rigida, impone il coinvolgimento di tutti i numeri razionali La definizione di coppie di classi contigue e' piu' flessibile possiamo avere i suoi elementi scelti con regole diverse. Questa e' la ragione per cui preferiamo trattare con coppie di classi contigue.

Nota 2 - Esistono coppie di classi contigue che non hanno elemento separatore un numero razionale.

Abbiamo gia' incontrato questo problema con le grandezze incommensurabile ed algebricamente con $\sqrt{2}$.

Costruiamo una coppia $(A.B)$ di classi contigue che non ha elemento separatore razionale.

Sia $A = \mathbb{Q}_- \cup \{a \in Q_+ | a^2 < 2\}$ e $B = \{b | b^2 > 2\}$. Allora

1) $A \cup B = \mathbb{Q}$.

Infatti per assurdo supponiamo che esista un numero razionale positivo r che non appartenga ad $A \cup B$. Allora necessariamente $r^2 = 2$. Sappiamo che non esiste alcun numero razionale il cui quadrato e' 2. Una cotraddizione

2) (A, B) e' una partizione di $\mathbb{Q}$ di conseguenza e' una coppia di classi contigue. Essa non ammette elemento separatore.

Dimostriamolo.

Daprima consideriamo $\bar{A} = \{a^2 | a \in A, a > 0\}$ e $\bar{B} = \{b^2 | b \in B\}$.

$\bar{A}$ e $\bar{B}$ sono indefinitamente ravvicinati. Sappiamo che (A, B) e' una coppia di classi contigue: dato $\epsilon > 0$, esiste un numero $a^* \in A$ (positivo) ed un numero $b^* \in B$ con $b^* < 2$ tale che $b^* - a^* \leq \frac{\epsilon}{4}$ da cui discende

$$(b^*)^2 - (a^*)^2 = (b^* + a^*)(b^* - a^*) < 2b^*(b^* - a^*) < \epsilon.$$

Ne consegue che la coppia $(\bar{A}, \bar{B})$ e' indefinitamente ravvicinata.

Ora dimostriamo la tesi

Supponiamo per assurdo che la coppia (A, B) abbia elemento separatore r. Allora deve valere la relazione $a \leq r \leq b$, $\forall a \in A_+$ e $\forall b \in B$. Si ricavano le due limitazioni

$$\begin{cases} a^2 \leq r^2 \leq b^2 \\ a^2 \leq 2 \leq b^2, \end{cases} \tag{1}$$

da cui $|r^2 - 2| \leq b^2 - a^2$ per ogni $a \in A_+$ e ogni $b \in B$. Dato che $\bar{A}$ e $\bar{B}$ sono idefinitamente ravvicinati si ha $|r^2 - 2| \leq \epsilon$. Dalla arbitrarieta' di ϵ ne consegue $r^2 = 2$. Abbiamo gia' dimostrato che questa uguaglianza e' assurda.

Possiamo affermare che per una coppia (A, B) di classi contigue, priva di elemento separatore, A non ha massimo e B non ha minimo.

Dai risultati sopra ottenuti conclududiamo che per una coppia di classi contigue (A, B) (se esiste elemento separatore razionale lo assegnamo ad uno almeno degli insiemi) si ha:

1. A ha massimo e B non ha minimo . Questa coppia individua un numero razionale che e' il massimo di A;

2. A non ha massimo e B ha minimo. Questa coppia individua un numero razionale che e' il minimo di B;

3. A ha massimo e B ha minimo. Questa coppia individua un numero razionale che e' il massimo di A ed il minimo di B.

4. A non ha massimo e B non ha minimo. Questa coppia non individua un numero razionale. Tale coppia individua un oggetto che chiameremo numero irrazionale.

Le coppie dei primi tre casi non ci dicono nulla di nuovo rispetto ai vecchi numeri razionali. La novita' e' rappresentata dal quarto caso. E questo fatto giustifica la rappresentazione dei razionali come coppie di classi contigue.

Gli oggetti su cui costruiremo una struttura aritmetica sono le coppie di classi contigue di numeri razionali. Notiamo ancora che esse costituiscono un insieme piu' ampio dei numeri razionali considerati come coppie di classi contigue.

La totalita' delle coppie di classi contigue deve essere chiusa rispetto alle operazioni aritmetiche. A tal fine presentiamo i seguenti risultati.

Notazioni

Siano $A, B, C...$ insiemi di numeri ed $a \in A, b \in B, c \in C$. Useremo i simboli seguenti $-A = \{-a | a \in A\}$, $nA = \{na | a \in A\}$, $A + B = \{a + b | a \in A, b \in B\}$, $A - B = \{a - b | a \in A, b \in B\}$, $AB = \{ab | a \in A, b \in B\}$, $A^n = AAA..A$ n volte.

Chiusura rispetto a troncatura

Sia (A, B) una coppia di classi contigue. Sia $a_0 \in A$ e sia A_0 l'insieme ottenuto eliminando tutti gli elementi $a \in A$ minori di a_0 ovvero A_0 e' ottenuta troncando A al di sotto di a_0. Sia $b_0 \in B$ e sia B_0 l'insieme ottenuto eliminando tutti i numeri $b \in B$ maggiori di b_0 ovvero B_0 e' ottenuto troncando B

al di sopra di b_0. Allora (A_0, B), (A, B_0), (A_0, B_0) sono coppie di classi contigue. Inoltre se una delle quattro coppie ammette elemento separatore le restanti tre ammettomo lo stesso elemento separatore.

Teorema 1 - *Se (A, B) e (C, D) sono coppie di classi contigue di numeri razionali allora lo sono anche*

$$i) \qquad (A + C, B + D),\ (-B, -A),\ (A - D, B - C).$$

Inoltre se (A, B) e (C, D) ammettono elemento separatore r ed s rispettivamente, allora le tre coppie in i) ammettono elemento separatore $r + s, -r, r - s$, rispettivamente.

Dimostazione.
Nessun insieme e' vuoto.
Separazione: da $a \leq b$ e $c \leq d$ si ha $a + c \leq b + d$, $\quad -b \leq -a$ ed $a - d \leq b - c$.

Avvicinamento indefinito: fissato $\epsilon > 0$ scegliamo a^*, b^*, c^*, d^* in modo che $b^* - a^* < \epsilon/2$, $d^* - c^* < \epsilon/2$ (vere per ipotesi). Allora $(b^* + d^*) - (a^* + c^*) < \epsilon$, $(b^* - c^*) - (a^* - d^*) < \epsilon$, etc.

Elemento separatore
Da $a \leq r \leq b$ e $c \leq s \leq d$ (ovviamente per ogni $a \in A,\ b \in B$ etc) si ha $a + c \leq r + s \leq c + d$, $-b \leq -r \leq -a$ etc.
Il teorema e' dimostrato.

Ora consideriamo il comportamento delle coppie di classi contigue rispetto al prodotto ed al rapporto.
Il prodotto ed il rapporto non conservano l'ordine a meno che non si tratti solo con numeri positivi. Come abbiamo osservato nel teorema 1, le operazioni devono produrre un insieme maggiorante ed un insieme minorante. Per questo, momentaneamente, trattiamo con coppie contigue di numeri positivi o troncate con solo numeri positivi.

Teorema 2 - *Siano (A, B), (C, D) due coppie di classi contigue tali che in A e C sia contenuto almeno un numero positivo $a_0 > 0$ e $c_0 > 0$, rispettivamente. Consideriamo le due coppie troncate (di numeri positivi) (A_0, B) e (C_0, D) (A_0 e C_0 sono costituite da tutti gli elementi $a \geq a_0$ e $c \geq c_0$). Allora*

$$i) \qquad (A_0C_0, BD),\ (A_0^n, B^n),\ (\frac{1}{B}, \frac{1}{A_0}),\ (\frac{C_0}{B}, \frac{D}{A_0}).$$

sono coppie di classi contigue.
Inoltre se (A, B), (C, D) hanno elemento separatore r ed s, rispettivamente, allora anche le coppie in i) hanno elemento separatore $rs, r^n, \frac{1}{r}, \frac{r}{s}$, rispettivamente. (Osserviamo che nel caso di esistenza dell'elemento separatore ritroviamo il prodotto ed il rapporto fra numeri razionali.)

La dimostrazione di questo teorema, mutatis mutandis, segue il procedimento del teorema 1. Dimostriamo, dunque, solo il risultato del prodotto.
Consideriamo la coppia (A_0C_0, BD). Da $a \leq b$ e $c \leq d$ si ha $ac \leq bd$ (si tratta con numeri positivi) per ogni a, b, c, d nei rispettivi insiemi. Quindi A_0C_0 e' minorante e BD e' maggiorante: la coppia e' separata.
Dimostriamo l'indefinito avvicinamento: fissiamo $\epsilon > 0$ e a^*, b^*, c^*, d^* appartenenti ai rispettivi insiemi con $b^* < \bar{b}$, $d^* < \bar{d}$ ($\bar{b}$ e $\bar{d}$ sono numeri fissati arbitrariamente.)
Dato che le coppie (A, B), (C, D) sono indefinitamente ravvicinate si ha:

$$b^* - a^* < \frac{\epsilon}{\bar{d} - \bar{b}} \text{ e } d^* - c^* < \frac{\epsilon}{\bar{d} - \bar{b}}.$$

Si ricava

$$(b^*d^* - a^*c^*) = (b^*d^* - a^*d^*) + (a^*d^* - a^*c^*) = d^*(b^* - a^*) + a^*(d^* - c^*) \leq \frac{\epsilon(d^* + a^*)}{\bar{d} + \bar{b}} < \epsilon.$$

Se esistono r ed s , da $a \leq r \leq b$ e $c \leq s \leq q$, dalla monotonia del prodotto, si ha $ac \leq rs \leq bd$ .Il teorema e' dimostrato per la prima coppia. Per la seconda coppia si procede per induzione su n osservando $(A_0^2, B^2) = (A_0 A_0, BB)$. Per la terza e quarta coppia si procede come nella prima.

Campo dei numeri reali relativi

Indichiamo con $\mathbb{R}$ la totalita' delle coppie di classi contigue di numeri razionali relativi. Le coppie le denoteremo con le lettere greche $\alpha,\ \beta,\ \gamma, ..., \lambda, ...$ scrivendo $\alpha = (A, A'),\ \beta = (B, B')$ etc. Il lettore faccia pure coincidere sull'asse cartesiano queste lettere con il pumto separatore delle coppie di classi contigue di punti razionali. Con i teoremi 1 e 2 possiamo definire una struttura aritmetica su $\mathbb{R}$.

Definizione: Diremo che $\mathbb{R}$ e' il campo dei numeri reali quando si conviene operare su di esso nel seguente modo (le coppie le chiameremo da subito numeri reali per comodita'):

1) **Uguaglianza** (simbolo =). *Due numeri reali* $\alpha = (A, A')$ *e* $\beta = (B, B')$ *sono uguali e scriveremo* $\alpha = \beta$ *quando* $a \leq b'$ *e* $b \leq a'$ $\forall (a, a', b, b')$ *appartenenti ai rispettivi insiemi. Ovvero quando* (A, B') *e' una coppia di classi contigue (equivalentemente* (B, A') *e' una coppia di classi contigue).*

Nota - Le coppie possono essere molto diverse come costituzione ma i numeri li consideriamo uguali o meglio l'aritmetica sara' costruita in modo che le coppie saranno lo stesso numero, operativamente. (Cerchiamo di evitare di introdurre esplicitamente le classi di equivalenza). Osserviamo ancora che le coppie (A, A') e (B, B') entrambe o non ammettono l'elemento separatore o l'ammettono. In quest'ultimo caso sara' lo stesso per le due coppie.

Valgono le classiche proprieta':

1) riflessiva: $\alpha = \alpha$; 2) simmetrica : $\alpha = \beta \Rightarrow \beta = \alpha$; 3) transitiva: $\alpha = \beta$ e $\beta = \gamma \Rightarrow \alpha = \gamma$.

Osservazione: indicheremo $\alpha \neq \beta$ se due numeri non sono uguali.

Diremo numero reale razionale un numero $\alpha = (A, A')$ se la coppia (A, A') ha elemento separatore.
Diremo numero reale irrazionale un numero $\alpha = (A, A')$ se la coppia (A, A') non ha elemento separatore.

In questo modo $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

2) **Ordinamento** (simbolo <)

Siano $\alpha = (A, A')$ *e* $\beta = (B, B')$. *Diremo che* α *e' minore di* β *e si scrive* $\alpha < \beta$ *(oppure* β *maggiore di* α, $\beta > \alpha$*) quando esiste un numero* $a' \in A'$ *minore di qualche* $b \in B$.

Si scrive $\alpha \leq \beta$ se $\alpha < \beta$ o $\alpha = \beta$. Analoga interpretazione vale per $\geq$. Per questo ordinamento valgono le classiche proprieta':

1. $\alpha \leq \alpha$ - proprieta' riflessiva;
2. se $\alpha \leq \beta$ e $\beta \leq \alpha$ allora $\alpha = \beta$ -proprieta' antisimmetrica;
3. se $\alpha \leq \beta$ e $\beta \leq \gamma$ allora $\alpha \leq \gamma$ - proprieta' transitiva.
4. Tricotomia - Per ogni α e β vale una ed una sola delle seguenti relazioni: $\alpha > \beta$; $\alpha < \beta$; $\alpha = \beta$.

Queste proprieta' discedono direttamente da quelle dei numeri razionali.

Il sistema dei numeri reali relativi risulta ordinato.

Definizione dello zero (simbolo 0).

Sia 0 lo zero dei razionali. Il numero reale $0 = (D, D')$ tale che $d \leq 0 \leq d'$ $\forall d \in D$ e $\forall d' \in D'$ viene detto zero dei reali. Esso coincide con lo zero dei razionali.

Ogni numero $\alpha > 0$ e' detto positivo ed ogni numero $\beta < 0$ e' detto negativo. 0 e' detto anche numero nullo.

Dal teorema 1 possiamo dare la seguente definizione di somma.

3) **Somma** - simbolo +

Si chiama somma di due numeri reali relativi $\alpha = (A, A')$, $\beta = (B, B')$ *il numero reale* $\gamma = (A+B, A'+B')$ *e si scrive*

$$\alpha + \beta = \gamma.$$

Osservazione. Se α e β sono numeri reali razionali con elementi separatori r, s rispettivamente, allora γ e' un numero reale razionale con elemento separatore $r + s$. Ritroviamo l'operazione sui razionali.

Proprieta'

1) $\alpha + \beta = \beta + \alpha$ (proprieta' commutativa)

2) $(\alpha + \beta) + \lambda = \alpha + (\beta + \lambda)$ (proprieta' associativa).

3) Proprieta' di monotonia : $\alpha \geq \beta \Rightarrow \alpha + \gamma \geq \beta + \gamma$, $\forall \gamma \in \mathbb{R}$

Sono diretta conseguenza delle analoghe proprieta' dei numeri razionali.

Esistenza dell'elemento neutro rispetto alla somma.

Chiamiamo elemento neutro rispetto alla somma un numero reale $\omega = (C, C')$ *tale che*

$$\alpha + \omega = \alpha \quad \forall \alpha = (A, A') \in \mathbb{R}.$$

ω esiste (unico) e coincide con $0 = (D, D')$.

E' facile dimostrare che $0 = (D, D')$ e' un elemento neutro rispetto alla somma. Le coppie $(A + D, A' + D')$ e (A, A') sono uguali. Usiamo la definizione 1). Dato che D e' formato da numeri negativi e D' da numeri positivi allora $a \leq a' + d'$ e $a + d < a'$ per tutti gli elementi appartenenti ai rispettivi insiemi .

Lo zero e' unico. Supponiamo che esista un altro zero che denotiamo $0'$, allora valgono le reazioni $0 + 0' = 0$ e $0' + 0 = 0'$ e dalla proprieta' commutativa si ha $0 = 0'$.

Esistenza dell'opposto

Sia $\alpha = (A, A')$ *un numero reale. Diremo opposto di* α *un numero reale* $\omega = (D, D')$ *tale che* $\alpha + \omega = 0$.

L'opposto di α esiste ed e' $\omega = (-A', -A)$. La verifica e' semplice basta osservare che gli elementi di $(A + (-A'))$ sono tutti negativi o nulli e gli elementi di $(A' + (-A))$ sono tutti positivi o nulli.

Inoltre e' unico. Per assurdo, supponiamo che esista un altro opposto di α e lo indichiamo ω'. Si avrebbero le due uguaglianze

$$\alpha + \omega = 0, \quad \alpha + \omega' = 0$$

da cui

$$\alpha + \omega = \alpha + \omega'.$$

Dalla proprieta' di monotonia si ha

$$\alpha + \omega + \omega = \alpha + \omega' + \omega \Rightarrow \omega = \omega'.$$

4) **Sottrazione o differenza** (simbolo -)

Dati due numeri reali $\alpha = (A, A')$ e $\beta = (B, B')$ chiameremo differenza fra α e β un numero reale $\gamma = (C, C')$ tale che

$$\alpha = \beta + \gamma.$$

Il numero γ esiste ed e' dato da $\alpha + (-\beta)$ ovvero e' data dalla somma di α con l'opposto di β quindi $\gamma = (A - B', A' - B)$. La differenza tra α e β si scrive

$$\alpha - \beta = \gamma = \alpha + (-\beta).$$

α viene chiamato minuendo e β sottraendo.

Osserviamo che di coppie di classi contigue che definiscono un numero reale ne esistono infinite: che cosa accade quando sommiamo $\alpha+\beta$ con due nuove coppie $\alpha = (\bar{A}, (\bar{A})') = (A, A')$ e $\beta = ((\bar{B}, (\bar{B})') = (B, B')$. E' evidente che $\bar{a} \leq a'$ e $a \leq \bar{a}'$ cosi per gli elementi b, b' etc da cui si ricava $(A + B, A' + B') = (\bar{A} + \bar{B}, (\bar{A})' + (\bar{B})')$. La somma e' indipendente dalla scelta della coppia di classi contigue che rappresentano il numero reale. Questa proprieta' vale per tutte le altre operazioni.

5) **Prodotto** (simbolo $\cdot$)

Un po' piu' elaborata e' la definizione di prodotto. Per coppie di numeri positivi o troncate positive il prodotto e' dato dal teorema 2. Per coppie di segno qualsiasi ci aiuteremo con la regola dei segni che accettiamo valida per ogni struttura aritmetica. La difficolta' nella definizione di prodotto, come abbiamo gia' osservato, e' dovuta al fatto che il prodotto di numeri non conserva l'ordine quindi diventa difficile, mediante il prodotto, consevare gli insiemi minoranti e gli insiemi maggioranti.

Prodotto di due numeri reali $\alpha = (A, A')$ e $\beta = (B, B')$.

Per semplicita' di scrittura nel prodotto tralasciamo di scrivere $\cdot$ quando non sorgono equivoci.

1) Se $\alpha > 0$ e $\beta > 0$ allora $\alpha\beta = (A_0 B_0, A'_0 B'_0)$;

2) Se $\alpha > 0$ e $\beta = 0$ o viceversa allora $\alpha\beta = 0$;

3) Se $\alpha > 0$ e $\beta < 0$ si ha $\alpha\beta = -(\alpha(-\beta))$,

4) se $\alpha < 0$ e $\beta > 0$ allora $\alpha\beta = -((-\alpha)\beta)$;

5) Se $\alpha < 0$ e $\beta < 0$ allora $\alpha\beta = (-\alpha)(-\beta)$;

6) In generale poniamo $\alpha\beta = |\alpha||\beta|$ se i due numeri hanno lo stesso segno e $\alpha\beta = -|\alpha||\beta|$ se hanno segni opposti.

Proprieta'

1. $\alpha\beta = \beta\alpha$ - proprieta' commutativa;
2. $(\alpha\beta)\gamma = \alpha(\beta\gamma)$ - proprieta' associativa;
3. $\alpha = \beta \Rightarrow \alpha\gamma = \beta\gamma$ - proprieta' di monotonia;
4. $(\alpha + \beta)\gamma = \alpha\gamma + \beta\gamma$ - proprieta' distributiva del prodotto rispetto alla somma.

Queste proprieta' discendono direttamente dalle analoghe proprieta' dei numeri razionali.

Unita' o elemento neutro rispetto al prodotto - (simbolo 1)

Diremo elemento neutro rispetto al prodotto o unita' il numero $\omega = (C, C')$ tale che $\forall\alpha = (A, A') \in \mathbb{R}$ si ha

$$\alpha\omega = \alpha.$$

L'elemento neutro ω esiste (unico) ed e' dato dal numero razionale 1, elemento separatore della coppia di classi contigue (C, C') formate dai numeri positivi con $0 < c \leq 1$ e $c' > 1$. E' semplice verificare che $(AC, A'C') = (A, A')$. Infatti ogni ac e' minore di ogni $a' \in A$ ed ogni $a \in A$ e' minore di ogni $a'c'$

L'unicita' come al solito si dimostra per assurdo. Supponiamo che esista un altro elemento neutro ω' allora si hanno le due uguaglianze

$$\omega\omega' = \omega, \quad \omega'\omega = \omega'.$$

La proprieta' commutativa conduce all'uguagliaza $\omega = \omega'$.

Definiamo l'inverso o reciproco di un numero reale $\beta = (B, B')$.

6) **Inverso o reciproco**

Sia $\beta = (B, B')$ un numero reale. Diremo inverso di β un numero reale $\omega = (C, C')$ tale che

$$\beta\omega = 1$$

.

Sia $\beta \neq 0$. Allora ω esiste ed e'

1)Se $\beta = (B, B') > 0$ (si puo' supporre troncando eventualmente B che $b > b_0 > 0$ per ogni $b \in B$ con $b_0 > 0$ un numero fissato) allora

$$\omega = (C, C') := (\frac{1}{B'}, \frac{1}{B}).$$

La verifica e'semplice. Tutti gli elementi $\frac{b}{b'}$ sono inferiori od uguali ad 1. Tutti gli elementi $\frac{b'}{b}$ sono maggiori di uno. Quindi il prodotto $\beta\omega$ e' una coppia di classi contigue che ha 1 come elemento separatore.

2) Se $\beta < 0$, si pone

$$\frac{1}{\beta} = -\frac{1}{|\beta|}.$$

Il numero ω viene indicato $1 : \beta$ o $\frac{1}{\beta}$ o $1/\beta$ o β^{-1}. Con queste notazioni scriveremo:

$$\beta\beta^{-1} = 1; \ \beta\frac{1}{\beta} = 1; \ \beta(1 : \beta) = 1.$$

Concludiamo dicendo che β^{-1} esiste se $\beta \neq 0$.

In generale diremo β e γ sono uno inverso dell'altro se e soltanto se $\beta\gamma = 1$.

Non si definisce l'inverso di 0.

Rapporto (simbolo :)

Siano α e β numeri reali. Si dice rapporto o quoziente di α e β il numero reale γ tale che

$$\beta\gamma = \alpha.$$

Se $\beta \neq 0$ allora il numero reale γ esiste ed e'

$$\gamma = \alpha \cdot \frac{1}{\beta}.$$

Si scrive : $\gamma = \alpha : \beta$ o α/β o $\frac{\alpha}{\beta}$ o $\alpha \cdot \beta^{-1}$.

Con l'introduzione dell'opposto e dell'inverso completiamo le proprieta' della somma, del prodotto e dell'ordine.

1. Monotonia

   i) se $\alpha \leq \beta$ allora $\alpha + \gamma \leq \beta + \gamma$ per ogni γ;

   ii) se $\alpha < \beta$ allora $\gamma\alpha < \gamma\beta$ se e soltanto se $\gamma > 0$; se $\alpha = \beta$ allora $\gamma\alpha = \gamma\beta$ per ogni γ.

2. Cancellazione

   Dalla proprieta' di monotonia si deduce

   i) se $\alpha + \gamma = \beta + \gamma$ allora $\alpha = \beta$ (cancellazione per la somma);

   ii) Sia $\gamma \neq 0$. Se $\alpha\gamma = \beta\gamma$ allora $\alpha = \beta$ (cancellazione per il prodotto);

3. Legge di annullamento del prodotto

   $\alpha\beta = 0$ se e soltanto se almeno uno dei due fattori e' nullo.

A questo punto in $\mathbb{R}$ sono state introdotte le quattro operazioni razionale: esse sono illimitatamente possibile (con una piccola eccezione per il rapporto) con le relative proprieta'. Per questo $\mathbb{R}$ e' detto campo numerico.

Quindi rispetto ai numeri razionali non abbiamo nulla di nuovo. Anzi abbiamo reso un po' piu' elaborate le operazioni.

Una volta identificati i numeri razionali come le coppie di classi contigue con elemento separatore si ha $Q \subset \mathbb{R}$ e i teoremi 1),2) li identificano anche aritmeticamente. In questo senso $\mathbb{R}$ viene considerato un ampliamento di Q con l'aggiunta dei numeri reali irrazionali. Quali vantaggi comporta questo ampliamento? Le novita'che incontreremo in questo campo numerico sono la risoluzione (parziale) dei problemi della misura e delle potenze n-esime perfette. Inoltre, fatto non irrilevante, $\mathbb{R}$ ha la proprieta' di continuita' o di completezza.

Continuita' di $\mathbb{R}$

Tutte le nozioni introdotte per Q possono essere estese ai numeri reali sostituendo a quelle il termine razionale col termine reale. Quindi avremo classi o insiemi di numeri reali. Insieme di numeri reali limitato , illimitato, etc. Massimo o minimo di insiemi di numeri reali, coppie di classi contigue di numeri reali, elemento separatore che ora e' un numero reale perche' lo conosciamo:

dato una coppia di classi contigue di numeri reali (A, B) chiameremo elemento separatore un numero reale γ tale che $\alpha \leq \gamma \leq \beta$ $\forall\alpha \in A$ e $\forall\beta \in B$.

Definizione di continuita' - *Un campo numerico ordinato $\mathbb{C}$ e' un continuo quando ogni coppia di classi contigue in $\mathbb{C}$ ha elemento separatore.*

I numeri razionali non hanno questa proprieta'; a sua tempo abbiamo visualizzato questto fatto con il termine "vuoto" ovvero tra due numeri razionali esistono infiniti numeri razionali ma anche infiniti vuoti. Questi vuoti, ora, li abbiamo riempiti con i numeri irrazionali.

Vale il seguente

Teorema fondamentale - *Il campo dei numeri reali $\mathbb{R}$ e' un continuo ovvero ogni coppia (A, B) di classi contigue di numeri reali ammette uno ed un solo elemento separatore.*

Osserviamo che l'insieme dei numeri reali e' denso. Allora la dimostrazione del'unicita' dell'elemento separatore e' analoga a quella data per i razionali sostituendo il termine razionale col termine reale.

Se esistessero due elementi separatori γ_1, γ_2 con $\gamma_1 < \gamma_2$ allora si ha $\alpha \leq \gamma_1$ $\forall\alpha \in A$ e $\gamma_2 \leq \beta$ $\forall\beta \in B$.

Allora tra γ_1 e γ_2 non ci sono elementi di A e di B. Questo contraddice l'indefinito avvicinamento.

Costruire un numero separatore $\gamma = (C, C')$ (coppia di classi contigue di razionali) e' alquanto semplice. Basta porre in C i numeri razionali minori di $\alpha \in A$ e in C' numeri razionali maggiori di $\beta \in B$. Ovviamente questa operazione e' fatta per ogni $\alpha \in A$ ed ogni $\beta \in B$.

C e C' sono non vuoti e separati. Inoltre fissato $\epsilon > 0$ esistono α^* e β^* con $\beta^* - \alpha^* < \frac{\epsilon}{3}$ (si ricorda che A e B sono indefinitamente ravvicinate). Possiamo scegliere $c^* > \alpha^* - \frac{\epsilon}{3}$ e $(c')^* < \beta^* + \frac{\epsilon}{3}$. Allora $(c')^* - c^* < \epsilon$. Concludiamo mostrando che γ separa (A, B). Se fosse γ minore di qualche α ad esempio $\gamma < \alpha'$ allora esisterebbero tra γ ed α' numeri razionali $c \in C$ (come minori di un generico α) e numeri razionali c' (come maggiori di γ). Quindi deve essere $\alpha \leq \gamma$. In modo analogo si mostra $\gamma \leq \beta$. Il teorema e' dimostrato.

Nota - Due classi separate (A, B) di numeri reali, anche non indefinitamente ravvicinata, hanno un elemento separatore reale che in generale non e' unico. Infatti basta costruire la classe dei numeri δ reali o razionali minori di ogni $\beta \in B$. Allora (D, B) e' una coppia di classi contigue che ammette elemento separatore γ maggiore di ogni $\alpha \in A$.

Nota - L' insieme di numeri irrazionali e' denso ovvero fra due numeri irrazionali α e β con $\alpha < \beta$ ci sono infiniti numeri irrazionali.

Dapprima osserviamo che se γ e' irrazionale lo e' anche $r\gamma$ con r razionale. Sia $0 < \eta < 1$ un numero irrazionale (esiste). Presi due razionali a, b con $\alpha < a < b < \beta$, i numeri irrazionali $\gamma = a + (b - a)\eta$ soddisfano la relazione $\alpha < a < \gamma < b < \beta$.

Immagine geometrica dei numeri reali

Abbiamo gia' costruito sulla retta un sistema di riferimento mediante una origine, un verso ed una unita' di misura. Nel contempo abbiamo considerato la retta un continuo. Alla luce della costruzione fatta per i numeri reali precisiamo cosa intendere per continuita' di una retta.

Ripartiamo tutti i punti della retta in due classi A e B che verificano le seguenti proprieta' (partizione della retta):

1. nessuna delle due classi e' vuota;

2. ogni punto della retta appartiene ad una ed una sola delle due classi;

3. ogni punto di A precede ogni punto di B.

Allora esiste uno ed un solo punto della retta γ che appartiene ad una delle classi ed ogni punto $\alpha \in A$ precede γ e γ precede ogni punto $\beta \in B$.

Il punto γ e' detto punto separatore della coppia (A, B).

Oppure

Siano A e B due classi di punti della retta che verificano le seguenti proprieta' (coppie di classi contigue)):

1. nessuna delle due classi e' vuota;

2. ogni punto di A precede ogni punto di B ed al piu' hanno un punto in comune;

3. Fissato un segmento ϵ esistono due punti $a^* \in A$ e $b^* \in B$ tale che il segmento $\overline{a^*b^*}$ di estremi i punti a^* e b^* e' contenuto nel segmento ϵ.

Alora esiste uno ed un solo punto γ (che appartiene ad uno od ad entrambi gli insiemi) tale che e' preceduto da ogni punto di A ed e' seguito da ogni punto di B: il punto e' detto punto separatore.

E' evidente l'analogia di questa proprieta' della retta con la continuita' dei numeri reali espressa dalle partizioni di numeri reali e dalle coppie di classi contigue di razionali.

Dunque la retta fornisce una immagine geometrica del campo dei numeri reali. Abbiamo gia' costruito l'immagine del campo dei numeri razionali. Quindi possiamo parlare di classi di punti razionali (i punti immagine dei numeri razionali), di coppie di classi contigue di punti razionali, di partizioni di punti razionali. Da queste corrispondenze possiamo affermare che ad ogni numero reale (coppia di classi contigue o partizioni dei reali) corrisponde un punto sulla retta e viceversa.

Il numero viene detto ascissa cartesiana o ascissa del punto. La retta cartesiana e' anche un sistema di ascisse ed a sua volta il punto viene detto immagine cartesiana o immagine del numero reale.

Soluzione del problema della misura

Consideriamo numeri positivi.

La misura del segmento $\overline{0\alpha}$ sull'asse cartesiano rispetto all'unita' fissata e' α. Essa e' un numero razionale se il segmento $\overline{0\alpha}$ e l'unita' sono grandezze commensurabili. Se sono incommensurabili α e' un numero irrazionale. Il campo dei numeri reali risolve il problema della misura.

Consideriamo il secondo problema posto; lo risolviamo parzialmente ovvero solo per i numeri reali maggiori o uguali a zero. A tal fine presentiamo la sostanziale novita' dell'aritmetica dei numeri reali rispetto a quella dei razionali.

Estrazione di radice assoluta

Definiziome - *Siano* $\alpha \in \mathbb{R}$ *e* $n \in \mathbb{N}_+$. *Chiameremo radice n-esima di* α *il numero reale* β *che verifica l'equazione*

$$\beta^n = \alpha.$$

L'esistenza di β e' data dal seguente

Teorema 3 . *Siano* $\alpha \geq 0$ *reale ed* $n \in \mathbb{N}_+$. *Allora esiste uno ed un solo numero reale* $\beta \geq 0$ *che verifica l'equazione*

$$(*) \qquad\qquad \beta^n = \alpha.$$

Il teorema garantisce l'esistenza della radice per numeri positivi o nulli. Il procedimnto ci e' noto. Lo abbiamo usato relativamente a $\sqrt{2}$ pagina 7. Presentiamolo.

Se $\alpha = 0$ l'affermazione e' ovvia e si ha $\beta = 0$. Se $\alpha > 0$ ed $n = 0$ si ha $\beta = 1$. Quindi consideriamo il caso $\alpha > 0$ ed $n > 0$, ne consegue $\beta > 0$.

Vale l'unicita'. Perche' se esistessero due numeri positivi $\beta_1 < \beta_2$ (per esempio) soluzioni della equazione (*) si avrebbe $\beta_1^n = \alpha = \beta_2^n$. Quindi da $\beta_1 < \beta_2$ seguirebbe $\beta_1^n = \beta_2^n$. Una contraddizione.

Esistenza. Trattiamo con numeri positivi. Sia K l'insieme dei numeri razionali k tale che $k^n > \alpha$ e sia H l'insieme dei numeri razionali $h \geq 0$ che non appartengono a K. (H, K) e' una coppia di classi contigue di numeri razionali positivi. Detto $\beta = (H, K)$ si ha $\beta^n = (H^n, K^n)$.

Allora da $h \leq \beta \leq k$ si ha

$$h^n \leq \beta^n \leq k^n$$

per ogni $h \in H$ ed ogni $k \in K$ e per costruzione si ha anche

$$h^n \leq \alpha \leq k^n.$$

Da cui discende

$$|\beta^n - \alpha| \leq k^n - h^n$$

e per l'avvicinamento indefinito di (H, K) si ha $\beta^n = \alpha$.

Il teorema risolve parzialmente il problema delle potenze n-esime perfette. Si puo' affermare che : ogni numero reale positivo e' potenza n-esima perfetta di un numero reale positivo. Il numero β e' irrazionale quando e solo quando α non e' potenza n-esima perfetta nel campo razionale assoluto.

Nomenclatura: $\sqrt[n]{\alpha}$ si chiama radicale; $\sqrt{\ }$ si chiama segno di radice; n e' l'indice della radice; α si chiama radicando. Si usa scrivere $\sqrt{\alpha}$ in luogo di $\sqrt[2]{\alpha}$.

Nota - Dato un numero reale β ed un numero naturale conosciamo la potenza β^n di base β ed esponente naturale come il prodotto di β per se stesso n volte ed il risultato e' un numero reale α e si scrive: $\beta^n = \alpha$. Questa operazione ha proprieta' ben note. Dunque noto β ed n ricaviamo α.

Per definire il radicale assumiamo α ed n e cerchiamo la base β della potenza $\beta^n = \alpha$. Il ruolo delle grandezze e' scambiato. In questo senso l'estrazione di radice e' l'operazione inversa della potenza con esponente naturale. Dal teorema 3 tale inversione esiste per i numeri naturali assoluti.

Considerata l'estrazione di radice come operazione inversa della potenza e' possibile ricavare proprieta' dei radicali utilizzando le proprieta' delle potenze .

Sia $\alpha \geq 0$ e $\gamma \geq 0$: allora

1. $$(\sqrt[n]{\alpha})^n = \sqrt[n]{\alpha^n} = \alpha.$$

2. $$\sqrt[n]{\alpha\gamma} = \sqrt[n]{\alpha}\,\sqrt[n]{\gamma}; \quad \sqrt[n]{\frac{\alpha}{\gamma}} = \frac{\sqrt[n]{\alpha}}{\sqrt[n]{\gamma}} \quad per \ \ \gamma > 0.$$

3. $$\sqrt[n]{\alpha^m} = (\sqrt[n]{\alpha})^m$$

   e

   $$\sqrt[kn]{(\alpha)^k} = \sqrt[n]{\alpha}.$$

   con k un numero naturale (proprieta' invariantiva).

4. $$\sqrt[mn]{\alpha} = \sqrt[m]{\sqrt[n]{\alpha}}.$$

5. $$\sqrt[n]{\alpha}\,\sqrt[m]{\alpha} = \sqrt[nm]{\alpha^{n+m}}$$

Dimostrazione

Poprieta' 1- $(\sqrt[n]{\alpha})^n = \alpha$ e' immediata dalla definizione: basta porre $\beta = \sqrt[n]{\alpha}$ nel primo membro dell'equazione e si ha $\beta^n = \alpha$.

Per dimostrare la seconda relazione, partiamo dall'equazione $x^n = \alpha^n$. Dalla scomposizione

$$x^n - \alpha^n = (x - \alpha)(x^{n-1} + x^{n-2}\alpha + ... + \alpha^{n-1})$$

e' immediato rendersi conto che l'unica soluzione positiva risulta essere $x = \alpha$. Dalla definizione di radice, la soluzione puo' anche essere espressa come radicale: da $x^n = \alpha^n$ si ha $x = \sqrt[n]{\alpha^n}$.

Dato che $x = \alpha$ ed $x = \sqrt[n]{\alpha^n}$ si ottiene $\sqrt[n]{\alpha^n} = \alpha$.

Proprieta' 2- Radice di un prodotto

La dimostrazione del prodotto si ottiene facilmente ponendo $\delta = \sqrt[n]{\alpha}$ e $\lambda = \sqrt[n]{\gamma}$ si ha

$$\alpha\gamma = \delta^n\lambda^n = (\delta\lambda)^n.$$

Il primo ed ultimo termine danno $\delta\lambda = \sqrt[n]{\alpha\gamma}$. La proprieta' e' dimostrata.

La dimostrazione del rapporto e' analoga. Si considera il rapporto al posto del prodotto . Tralasciamo i dettagli.

Proprieta' 3 - Per la prima relazione la dimostrazione consiste in una semplice applicazione delle proprieta' gia' dimostrate:

$$(\sqrt[n]{\alpha})^m = \sqrt[n]{\alpha}\,\sqrt[n]{\alpha}...\,\sqrt[n]{\alpha}$$

m volte. Applicando la proprieta' 2 si ottiene subito il risultato.

Per dimostrare la seconda relazione scriviamo

$$\alpha^k = ((\sqrt[n]{\alpha})^n)^k = (\sqrt[n]{\alpha})^{nk}$$

da cui si ottiene, considerando il primo ed ultimo membro

$$\sqrt[nk]{\alpha^k} = \sqrt[n]{\alpha}.$$

Proprieta' 4 - Radice di un radicale

Utilizziamo la catena di uguaglianze

$$\sqrt[n]{\alpha} = \sqrt[nm]{\alpha^m} = (\sqrt[nm]{\alpha})^m.$$

Scrivendo l'uguaglianza fra primo e ultimo membro: $\sqrt[n]{\alpha} = (\sqrt[nm]{\alpha})^m$ si ottiene

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{\alpha}} = \sqrt[nm]{\alpha}.$$

Proprieta' 5 - Utilizziamo le proprieta' precedenti.

$$\sqrt[n]{\alpha}\,\sqrt[m]{\alpha} = \sqrt[nm]{\alpha^m}\,\sqrt[nm]{\alpha^n} = \sqrt[nm]{\alpha^n\alpha^m} = \sqrt[nm]{\alpha^{n+m}}.$$

Nota - A questo punto occorre riprendere una considerazione fatta all'inizio della trattazione ovvero che l'insieme dei numeri reali si sarebbe potuto ottenere aggiungendo ai numeri razionali le potenze ennesime perfette. La costruzione fatta va oltre queste aspettative. In effetti sono stati introdotti numeri irrazionali che non sono soluzioni di equazioni $x^n = a$. Questo fatto ha portato alla seguente classificazione.

1) Dicesi numero *algebrico* ogni numero reale che sia soluzione di una equazione algebrica , cioe' di una equazione riconducibile alla forma $P(x) = 0$ dove $P(x)$ un polinomio di grado n con coefficienti interi primi fra di loro .

$\sqrt{2}$ e' un numero algebrico in quanto e' soluzione dell' equazione algebrica $x^2 - 2 = 0$; $-2/7$ e' un numero algebrico in quanto e' soluzione dell' equazione algebrica $7x+2 = 0$. Anche solo da questi esempi si rileva che un numero algebrico puo' essere razionale , irrazionale.

I numeri non algebrici si dicono *trascendenti* . I numeri trascendenti non sono soluzioni di alcuna equazione algebrica del tipo sopra descritta cioe' equazione della forma $P(x) = 0$. Tutti i numeri trascendenti sono irrazionali . Numeri trascendenti particolarmente importanti sono il numero e ed il numero π (pi greco) .

Potenza con base reale assoluta ed esponente razionale relativo

Abbiamo gia' ricordato la potenza α^n valida per ogni numero reale ed $n > 0$. Tale operazione si estende agli esponenti negativi ponendo $\alpha^{-n} := \frac{1}{\alpha^n}$.

Tale operazione e' lecita se $\alpha \neq 0$. Dalla proprieta' $\frac{\alpha^m}{\alpha^n} = \alpha^{m-n}$, la potenza puo' essere estesa ad $n = 0$ ponendo $\alpha^0 = 1$ con $\alpha \neq 0$. Non si definisce (non si riesce) 0^0.

Sia $\alpha \geq 0$ e poniamo

$$\sqrt[n]{\alpha} := \alpha^{\frac{1}{n}}$$

e con $\alpha \neq 0$

$$\alpha^{-\frac{1}{n}} := \frac{1}{\sqrt[n]{\alpha}}.$$

Infine diamo la seguente definizione:

$$\sqrt[n]{\alpha^m} = (\sqrt[n]{\alpha})^m := \alpha^{\frac{m}{n}}.$$

Dalle proprieta' delle potenze intere e della estrazione di radice si hanno le seguenti proprieta'.

Siano a, b numeri razionali (positivi, negativi o nulli) ed α, β numeri reali positivi. Allora

1. $\alpha^a\alpha^b = \alpha^{a+b}$, $(\alpha^a)^b = \alpha^{ab}$,
2. $(\alpha\beta)^a = \alpha^a\beta^a$, $(\frac{\alpha}{\beta})^a = \frac{\alpha^a}{\beta^a}$ con $\beta \neq 0$.

3. con $a > 0$ si ha $\alpha^a \gtreqqless 1$ se $\alpha \gtreqqless 1$,

4. con $a < 0$ si ha $\alpha^a \gtreqqless 1$ se $\alpha \lesseqqgtr 1$,

5. Sia $\alpha > 1$ allora $a \lesseqqgtr b \Leftrightarrow \alpha^a \lesseqqgtr \alpha^b$,

6. Sia $0 < \alpha < 1$ allora $a \lesseqqgtr b \Leftrightarrow \alpha^a \gtreqqless \alpha^b$,
   (proprieta' di monotonia: la potenza e' concorde con l'esponente se $\alpha > 1$, discorde se $0 < \alpha < 1$).

Definiamo ora la potenza di base reale assoluta α ed esponente reale β (con segno qualsiasi).
Premettiamo la seguente disuguaglianza fondamentale:
$(1+\gamma)^n \geq 1 + n\gamma$ con $n \geq 1$ (naturale) ed $\gamma > -1$.

La dimostrazione procede per induzione. La proprieta' e' vera per $n = 1$. Supponiamo che sia vera per n e la dimostriamo per $n+1$:

$$(1+\gamma)^{n+1} = (1+\gamma)^n(1+\gamma) \geq (1+n\gamma)(1+\gamma) = 1 + \gamma + n\gamma + n\gamma^2 \geq 1 + (n+1)\gamma.$$

La definizione e proprieta' della potenza con esponente razionale ci permette di estendere la potenza ad esponente reale mediante il seguente

Teorema 5 - *Sia $\alpha > 0$ e $\beta = (B, B')$ (coppia di classi contigue di Q) un numero reale di segno qualsiasi. Allora l'insieme dei numeri reali $\alpha^B = \{\alpha^b | b \in B\}$ e $\alpha^{B'} = \{\alpha^{b'} | b' \in B'\}$ costituscono una coppia di classi contigue $(\alpha^B, \alpha^{B'})$ di numeri reali se $\alpha > 1$ ed $(\alpha^{B'}, \alpha^B)$ se $0 < \alpha < 1$. Pertanto esiste uno ed un solo numero reale positivo γ tale che : $\alpha^b \leq \gamma \leq \alpha^{b'}$ oppure $\alpha^{b'} \leq \gamma \leq \alpha^b$ $\forall b \in B$, $\forall b' \in B'$*
Se β e' un numero razionale r allora $\gamma = \alpha^r$.

La dimostrazione poggia sulle proprieta' delle potenze razionali, di monotonia e sulla disuguaglianza fondamentale che implica che per ogni numero $\epsilon > 0$ esiste un numero $\delta > 0$ tale che $\alpha^\delta - 1 < \epsilon$. Questa proprieta' ci da' l' indefinita ravvicinanza della coppie formate dagli insiemi $\alpha^B, \alpha^{B'}$. La monotonia da' la separazione.
La disuguaglianza fondamentale ci da' l'indefinita ravvicinanza.

Consideriamo $\alpha > 1$. Dato che (B, B') e' indefinitamente ravvicinata $\forall \epsilon$ esistono $b^* \in B$ e $b^{'*} \in B'$ tale che $b^{'*} - b^* < \epsilon$. Senza perdere di generalita' possiamo porre $b^{'*} - b* < 1/n$ con n sufficientemente grande. Ora l'indefinita ravvicinamento di $(e^B, e^{B'})$ e' espressa dalla differenza $\alpha^{b^{'*}} - \alpha^{b^*} = \alpha^{b^*}(\alpha^{b^{'*} - b^*} - 1)$. Allora per n sufficiente grande possiamo considerare la seguente disuguaglianza

$$\alpha^{b^{'*} - b^*} - 1 < \alpha^{1/n} - 1$$

Dimostriamo che esiste n tale che $\alpha^{1/n} - 1 < \epsilon$. Abbiamo $\alpha^{1/n} 1 + \epsilon \Rightarrow \alpha < (1+\epsilon)^n$. Dobbiamo dimosriamo che esiste n per cui $\alpha < (1+\epsilon)^{1/n}$. Dalla disuguaglianza fondamentale abbiamo $(1+\epsilon)^{1/n} > 1 + n\epsilon$. Dal momento che ϵ ed α somo assegnati possiamo trovare un numero n tale che $1 + n\epsilon > \alpha$. E' sufficiente assumere $n > \frac{\alpha - 1}{\epsilon}$. Concludiamo: per ogni $\epsilon > 0$ esiste un n_ϵ (dipende da ϵ) tale che $\alpha < (1+\epsilon)^n \Rightarrow \alpha^{1/n} - 1 < \epsilon$ per ogni $n > n_\epsilon$. Lo studente presti attenzione a questa conclusione. Essa sara' ripresa nella definizione di limite.
L'indefinito ravvicinamento e' dimostrato. Le coppie di classi del teorema sono contigue di conseguenza ammettono elemento separatore.

Possiamo ora definire la potenza con esponente reale.

Definizione: *Sia $\alpha > 0$ e $\beta = (B, B')$ (positivo, negativo o nullo.). Il numero $\gamma = (\alpha^B, \alpha^{B'})$ o $\gamma = (\alpha^{B'}, \alpha^B)$ (dato dal teorema 5) si dice potenza di base α ed esponente β e si scrive*

$$* \qquad \gamma = \alpha^\beta.$$

Questa potenza ha tutte le proprieta' delle potenze razionali che abbiamo gia' consedirato e che non trascriviamo; basta sostuire nelle proprieta' i numeri a e b razionali con numeri reali λ, δ.

Nota - Osservazioni sulle proprieta' di struttura dell'uguaglianza $\alpha^\beta = \gamma$.

α e' elavato ad un numero reale β. Nella costruzione abbiamo visto che intervengono infiniti numeri razionali anche tutti. Questo impone che α sia un numero positivo. Un numero positivo elevato ad un numero positivo ha come risultato un numero positivo; γ e' un numero positivo.

Nella uguaglianza (*) α e' dato, β e' dato e γ e' il risultato dell'operazione.

L'uguaglianza possiamo leggerla anche in modo inverso ovvero dato γ ed α si cerca un numero reale β tale che valga $\alpha^\beta = \gamma$. Nella lettura da destra alla sinistra della uguaglianza, β e' incognito quindi puo' essere un numero reale intero o razionale o irrazionale. Quindi per dare senso per ogni eventualita' alla potenza dobbiamo imporre $\alpha > 0$. Non solo, dobbiamo imporre anche $\alpha \neq 1$ altrimenti avremmo una indeterminazione. Con questi vincoli γ deve essere maggiore di zero. Allora per avere la operazione inversa della potenza si deve imporre $\alpha > 0; \neq 1$ e $\gamma > 0$. In questo modo l'equazione $\alpha^\beta = \gamma$ nell'incognita β e' algebricamente consistente. Si osserva che γ e' una potenza e β e' un esponente. Ed esso obbedisce alle regole degli esponenti. Ad esempio l'esponente di un prodotto e' la somma degli esponenti, l'esponente di un rapporto e' la differenza degli esponenti, l'esponente di potenza di potenza e' il prodotto degli esponenti etc.

Diamo un nome al numero β.

Definizione di logaritmo - *Siano $\alpha > 0, \neq 1$ e $\gamma > 0$ numeri reali. Chiameremo logaritmo di base α ed argomento γ il numero β tale che $\alpha^\beta = \gamma$ e scriviamo*

$$\beta = \log_\alpha \gamma$$

ovvero e' l'esponente che occorre dare ad α per avere il numero dato γ.

Valgono le uguaglianze

$$\beta = \log_\alpha \gamma = \log_\alpha \alpha^\beta \quad e \quad \gamma = \alpha^\beta = \alpha^{\log_\alpha \gamma}.$$

Fino ad ora abbiamo considerato la consistenza della equazione non la esistenza di β. Ebbene vale il seguente

Teorema 4 - *Siano $\alpha > 0 \neq 1$ e $\gamma > 0$ numeri reali. Allora esiste uno ed un solo numero reale β tale che $\alpha^\beta = \gamma$.*

Si procede on modo inverso al teorema 5. Si costruisce una partizione (B, B') di $\mathbb{R}$ che definisce β. Per $\alpha > 1$, in B si pongono tutti i numeri razionali b tale che $\alpha^b \leq \gamma$ ed in B' poniamo i rimanenti razionali (per $\alpha < 1$ si ha (B', B))).

La coppia (B, B') e' una partizione dei razionali e definisce β. Tralasciamo i dettagli.

Da quanto abbiamo espresso sopra e' facile convincersi delle seguenti proprieta' dei logaritmi

Assumiamo sempre che siano soddisfatte le condizioni di esistenza del logaritmo. Siano $(\lambda > 0, \mu > 0, (\alpha, \beta) > 0 \neq 1)$; allora

1. $\log_\alpha 1 = 0$ per ogni α,
2. $\log_\alpha(\lambda\mu) = \log_\alpha \lambda + \log_\alpha \mu$
3. $\log_\alpha(\frac{\lambda}{\mu}) = \log_\alpha \lambda - \log_\alpha \mu$;
4. $\log_\alpha \lambda^\mu = \mu \log_\alpha \lambda$.
5. $\log_\alpha \lambda = \frac{1}{\log_\lambda \alpha}$.
6. $\log_\alpha \lambda = \log_\beta \lambda \cdot \log_\alpha \beta$ (cambiamento di base e $\log_\alpha \beta$ e' il fattore di conversione)

Dimostriamo come esempio la seconda proprieta'.

Poniamo $\delta = \log_\alpha \lambda$ e $\gamma = \log_\alpha \mu$. Quindi $\lambda = \alpha^\delta$ e $\mu = \alpha^\gamma$. Allora $\lambda\mu = \alpha^\delta \alpha^\gamma = \alpha^{\delta+\gamma}$. la prima ed ultima uguaglianza danno $\log_\alpha \lambda\mu = \delta + \gamma = \log_\alpha \lambda + \log_\alpha \mu$. Le altre proprieta' si dimostrano in modo analogo.

Proprieta' di monotonia: dalle proprieta' 5) e 6) delle potenze di pg.18-19 si ha

1.
$$\textit{per } \alpha > 1, \quad \log_\alpha \gamma_1 \lesseqqgtr \log_\alpha \gamma_2 \Leftrightarrow \gamma_1 \lesseqqgtr \gamma_2.$$

2.
$$\textit{per } 0 < \alpha < 1, \quad \log_\alpha \gamma_1 \lesseqqgtr \log_\alpha \gamma_2 \Leftrightarrow \gamma_1 \gtreqqless \gamma_2.$$

I sistemi di logaritmi piu' usati sono

1) il logaritmo naturale o neperiani che ha come base il numero irrazionale trascendente e ; scriveremo $\log \gamma$ tralasciando di scrivere la base.

2) il logaritmo in base dieci che ha come base 10 e noi scriveremo Log tralasciando di scrivere la base.

Funzioni potenza, funzioni esponenziali e logaritmiche

1) Sia β un numero reale fissato. Si dice *funzione potenza di esponente β la funzione*

$$y = x^\beta.$$

Dato che β e' un numero reale (intero, razionale o irrazionale) la funzione e' definita per $x \geq 0$ se β e' positivo o per $x > 0$ se β e' negativo.

Tracciare i grafici delle funzioni elementari : $x^2, x^3, x^{\frac{1}{2}}, x^{-1}, x^{-\frac{1}{2}}$

2) Sia α un numero reale. Si dice funzione esponenziale la funzione

$$y = \alpha^x.$$

Dal momento che x percorre tutto il campo dei numeri reali (costituito dai numeri reali relativi, razionali ed irrazionali) (si dice x e' variabile reale) allora la funzione esponenziale e' definita per $\alpha > 0$.

Dalle proprieta' delle potenze si ha che $\alpha^x > 0$ ed e' monotona crescente ed illimitata superiormente per $\alpha > 1$ e mononotona decrescente per $0 < \alpha < 1$. Per $\alpha = 1$ e' costante. La illimitatezza e' dimostrata utilizzando la disuguaglianza fondamentale scrivendo (con $\alpha > 1$) $\alpha = (1 + \epsilon)$. Da cui per $x > n$, $\alpha^x > (1 + \epsilon)^n > 1 + n\epsilon$ Quindi per x grandi la funzione assume valori via via sempre piu' grandi.

Si ha

$$\begin{aligned} &\alpha^x > 0; \\ &\alpha^{x_1} \lesseqqgtr \alpha^{x_2} \Leftrightarrow x_1 \lesseqqgtr x_2; \\ &\alpha^x > K \textit{ per } x \to +\infty \ \forall K > 0. \end{aligned}$$

Per $0 < \alpha < 1$ la funzione decresce e $\alpha^x > K$ *per* $x \to -\infty \ \forall K > 0$. 2) Un caso notevole di funzione esponenziale e' quella con base $\alpha = e$.

Esercizio: tracciare il grafico delle funzioni : $2^x, (\frac{1}{2})^x$.

3) Sia $\alpha > 0, \neq 1$. Si dice *funzione logaritmica* di base α la funzione

$$y = \log_\alpha x.$$

Dalla definizione di logaritmo si ha che l'argomento x deve essere un numero positivo. Il suo grafico nel piano $O(x, y)$ si ottiene da quello di una funzione esponenziale quando si scambiano le parti di x ed

y; in altri termini la curva logaritmica $y = \log_\alpha x$ si ottiene dalla curva esponenziale $y = \alpha^x$ con una simmetria rispetto alla bisettrice del primo e terzo quadrante.

Le radici con segno nel campo dei numeri reali relativi

Abbiamo evidenziato a suo tempo la effettiva novita' dei numeri reali relativi: la estrazione di radice. Per i numeri reali assoluti e' operazione ben definita con le sue proprieta' che ne rendono il calcolo piu' spedito : anzi possiamo dire che tale insieme e' il suo habitat naturale. Comunque il vincolo dei numeri assoluti per l' estrazione di radice ha codizionato la definizione di potenza, in generale. Si e' imposto la base positiva. In ogni modo i radicali assoluti non danno una risposta soddisfacente alla risoluzione delle seguenti equazioni nel campo reale

1. $x^2 = 4$ ha due soluzioni: $x = 2$ e $x = -2$;
2. $x^2 = -2$ non ha soluzione;
3. $x^3 = -1$ ha una soluzione.
4. $x^{2n} = (-x)^{2n} \geq 0$ per ogni x allora $x^{2n} = \alpha$ ammette soluzioni opposte per $\alpha > 0$, una soluzione per $\alpha = 0$ e nessuna soluzione per $\alpha < 0$.
5. x^{2n+1} ha lo stesso segno di x per cui $x^{2n+1} = \alpha$ ha una ed una sola soluzione per ogni α reale.

I casi elencati sono di interesse pratico. La loro sistemazione suggerisce di estendere la nozione di radicale ai numeri reali relativi. Le varie situazioni considerate presentano delle anomalie rispetto alle definizioni di operazioni algebriche fin ad ora considerate. Sussistono delle dissimetrie fra l'indice pari e dispari. Di certo alcune proprieta' dei radicali assoluti non saranno valide. Comunque sia molte questioni si traducono in equazioni da risolvere nel campo reale ed e' opportuno fare alcune precisazioni onde evitare equivoci. Dato che stiamo introducendo una nuova definizione e' opportuno, momentaneamente, usare un altro simbolo ovvero $\sqrt[n]{}^{cr}$ ove cr indica campo reale relativo

Definizione di radicale in $\mathbb{R}$ - *Dati $\alpha \in \mathbb{R}$ ed $n \in \mathbb{N}$. Diremo radice n-esima nel campo reale relativo ogni numero reale x tale che $x^n = \alpha$ e scriveremo $x = \sqrt[n]{\alpha}^{cr}$.*

Osserviamo che stavolta nella definizione e' stato scritto " ogni numero reale " . Questo ci dice che in generale l'operazione non e' ad un solo valore.

Si procede nel seguente modo:

1) Se n e' pari $\sqrt[n]{\alpha}^{cr}$ ha due valori opposti per $\alpha \geq 0$: $\sqrt[n]{\alpha}^{cr} = \pm \sqrt[n]{\alpha}$ (l'ultima relazione si legge cosi': sappiamo calcolare il radicale assoluto di α allora il valore del radicale relativo e' $\pm$ il radicale assoluto.);

2) se n e' dispari allora $\sqrt[n]{\alpha}^{cr}$ ha uno ed un solo valore per ogni α e $\sqrt[n]{\alpha}^{cr} = \sqrt[n]{\alpha}$ se $\alpha \geq 0$ e $\sqrt[n]{\alpha}^{cr} = -\sqrt[n]{|\alpha|}$ se $\alpha < 0$.

Da quanto detto sopra il radicale relativo non ha tutte le proprieta' dei radicali assoluti. Ad esempio non ha la proprieta' invariantiva.

Infatti

$$\sqrt[3]{-27}^{cr} = \sqrt[6]{(-27)^2}^{cr} = \sqrt[6]{(-27)^2}^{cr} \; mentre \; \sqrt[3]{-27}^{cr} = -3 \; e \; \sqrt[6]{27^2}^{cr} = \pm 3$$

.

Comunque sia in ogni teoria nel campo dei reali conviene considerare i radicali come radicali assoluti.

Cosi'

$$\sqrt[2]{9} = 3$$

e se si vogliono considerare i due valori di $\sqrt[2]{9}^{cr}$ converremo scrivere, in sua vece, i due valori col doppio segno $\pm \sqrt[2]{9} = \pm 3$.

Analogamente $\sqrt[2]{\alpha^2} = |\alpha|$ e $\sqrt[2]{\alpha^2}^{cr} = \pm\alpha$. Cosi' per n dispari ad esempio conviene scrivere $\sqrt[3]{-11}$ in luogo di $\sqrt[3]{-11}^{cr}$.

Con questa osservazione conveniamo di considerare i radicali con indice dispari come radicali relativi. Cosi la funzione $y = \sqrt[3]{x}$ e' considerata per ogni x reale. A rigore $\sqrt[3]{x}$ dovrebbe essere cosi' definita : $y = \sqrt[3]{x}$ per $x \geq 0$ e $y = -\sqrt[3]{|x|}$ per $x < 0$.

Con queste convenzioni abbiamo:

$$\alpha^\beta = \begin{cases} per\ \beta = n & la\ potenza\ vale\ \forall\alpha \in \mathbb{R}, \\ per\ \beta = -n & la\ potenza\ vale\ \forall\alpha \neq 0 \in \mathbb{R}, \\ per\ \beta = m/n > 0 & con\ n\ dispari\ la\ potenza\ vale\ \forall\alpha \in \mathbb{R}, \\ per\ \beta = m/n < 0 & con\ n\ dispari\ la\ potenza; vale\ \forall\alpha \neq 0 \in \mathbb{R}, \\ per\ \beta = m/n > 0 & con\ n\ pari\ la\ potenza\ vale\ \forall\alpha \geq 0 \in \mathbb{R}, \\ per\ \beta = m/n < 0 & con\ n\ pari\ la\ potenza\ vale\ \forall\alpha > 0 \in \mathbb{R}, \\ per\ \beta > 0 & irrazionale\ la\ potenza\ vale\ \forall\alpha \geq 0 \in \mathbb{R}, \\ per\ \beta < 0 & irrazionale\ la\ potenza\ vale\ \forall\alpha > 0 \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Particolari coppie di classi contigue

Introduciamo il concetto di successione che riprenderemo in appunti successivi. Per ora abusiamo dell'intuizione del lettore e consideriamo successione $\{a_n\}$ come una funzione numerica dipendente da un indice naturale n i cui valori che sono numeri razionali vengono denotati a_n. Consideriamo due successioni (di numeri razionali) $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ per le quali valgono le seguenti proprieta':

1. $\{a_n\}$ e' una successione crescente o non decrescente ovvero $a_0 \leq a_1 \leq a_2 ....$; $\{b_n\}$ e' una successione decrescente o non crescente ovvero $b_0 \geq b_1 \geq b_2 ....$;
2. $\forall n\ a_n \leq b_n$;
3. per ogni $\epsilon > 0$ esiste un numero n_0 tale che $b_{n_0} - a_{n_0} \leq \epsilon$.

E' evidente che le due successioni formano una coppia di classi contigue in $\mathbb{Q}$. Infatti nessuna delle due e' vuota. Poi per oni coppia h, k di numeri naturali si ha $a_h \leq b_k$. Infatti se $h \leq k$ si ha $a_h \leq a_k \leq b_k$, se $h \geq k$ allora $b_k \geq b_h \geq a_h$. La terza proprieta' assicura l' indefinito ravvicinamento. Pertanto esiste uno ed un solo numero reale α tale che $a_n \leq \alpha \leq b_n$ per ogni n.

Ritenendo il lettore familiare con la rappresentazione decimale dei numeri con l'uso della posizione della virgola scriviamo due esempi di successioni che sono coppie di classi contigue

$$\sqrt{2} = \begin{cases} 1;\ 1,4;\ 1,41;\ 1,414; .... \\ 2;\ 1,5;\ 1,42;\ 1,415; .. \end{cases}$$

$$\frac{1}{3} = \begin{cases} 0;\ 0,3;\ 0,33;\ 0,333;; .... \\ 1;\ 0,4;\ 0,34;\ 0,334; .. \end{cases}$$

Ricordiamo solamente, senza alcun dettaglio, che ogni numero razionale (non periodico) ammette una rappresentazione decimale con un numero finito di cifre decimale ovvero della forma $C_0, c_1c_2c_3..c_n0000000000000000$ (e' comodo non scrivere gli zeri) mentre i numeri irrazionali sono rappresentati da un allineamento decimale con infinite cifre decimali non periodiche.

Per completezza citiamo l'uso di successioni di Cauchy di numeri razionali invece delle coppie di classi contigue. Questa scelta esige ulteriori conoscenze che attualmente non abbiamo. Lo studente, dopo aver aquisito il concetto di limite, puo' fare qualche riflessione su questo strumento e sul concetto di completezza.

Conclusione

Abbiamo costruito i numeri reali seguendo l'evoluzione storica del concetto di numero. Abbiamo descritto un procedimento costruttivo. I numeri naturali sono considerati concetti primitivi con alcuni assiomi (assiomi di Peano). Si e' passati ai numeri interi ed ai razionali guidati dalla estensione di alcune operazioni fino ad arrivare ai numeri reali . Questo ultimo passaggio e' stato la parte piu' difficile della costruzione.

Dai teoremi dimostrati possiamo affermare che i numeri reali sono i numeri razionali con la proprieta' di continuita' o completezza.

E' possibile presentare i numeri reali in forma assiomatica. Il metodo assiomatico e' alla base di una scuola di pensiero che si e' sviluppata negli ultimi cento anni. I numeri reali vengono assunti come oggetti primitivi, non definiti, soddisfacenti certe proprieta' assunte come assiomi. Questi sono, esplicitamente, le proprieta' di base (ovviamente note dalla teoria gia' costruita). E' una impostazione a priori ovvero si sa gia' quello che si vuole. Questi assiomi riguardano essenzialmente i punti di transizione che abbiamo incontrato nella nostra costruzione. Gli assiomi, in numero di dieci, sono di tre tipi: assiomi di campo (operazioni razionali), assiomi di ordine ed assioma di completezza. Da questi si ricavano tutte le proprieta' dei reali. Possiamo considerarla come una verifica di quanto e' stato gia' costruito.

Da questo sistema numerico si ottengono i numeri naturali, gli interi relativi ed i razionali come sottoiensiemi dei reali che non godono di alcune proprierta'. Ad esempio l'insieme dei razionali e ' considerato un sottoinsieme dei reali in cui non vale la proprieta' di completezza. Si compie, dunque, un processo inverso a quello usato in questi appunti. Questo sistema assiomatico e' di tipo logico-deduttivo (dal generale al particolare) mentre il nostro e' di tipo logico induttivo (dal particolare al generale). In ogni modo ci sono tre requisiti che un sistema assiomatico moderno deve rispettare. La coerenza, la completezza e l'indipendenza. E' di particolare importanza la coerenza o la non contraddittorieta' del sistema degli assiomi. Dato che proposizioni possono essere scelte come postulati e' possibile che questi si contraddicano o che portino a provare la verita' di un enunciato ed il suo contrario. "Ex contradictione sequitur quod libet" . In un sistema contraddittorio tutto e' possibile; in questo modo si rende la teoria inutile. La coerenza di un sistema assiomatico si verifa attraverso un altro sistema coerente. In generale non e' possibile dimostrare la coerenza di una teoria all'interno della teoria stessa. Non c'e' da stupirsi, altrimenti saremmo in presenza di una autocertificazione. Quindi e' impossibile dimostrare l'assoluta coerenza di una teoria. Bisogna accontentarsi di una coerenza parziale e di un certo campo di validita' della teoria stessa che ne fissi i confini. Filosoficamente questo fatto e' rassicurante. Ad uno sterile, inerte e fideistico "assoluto" si impone uno stimolante e dinamico "relativo".

Equazioni e disequazioni di I grado

Chiamiamo equazione di I grado una uguaglianza del tipo

$$P(x) = Q(x) \tag{2}$$

ove $P(x)$ e $Q(x)$ sono polinomi di I grado della forma $P(x) = p_0 + p_1x$ e $Q(x) = q_0 + q_1x$ con p_0, p_1, q_o, q_1 numeri reali assegnati ed x variabile reale che si presenta con potenza 1. La parte alla sinistra di $=$ viene chiamato primo membro e la parte a destra secondo membro.

Applicando le proprieta' di monotonia e di cancellazione della somma in (2)) si ottiene la forma standard di una equazione di primo grado

$$ax - b = 0 \tag{3}$$

ove $a = p_1 - q_1$ e $b = q_0 - p_0$.

Chiamiano soluzione di (2)) un numero reale c che assegnato alla x soddisfi l'equazione ovvero azzeri il polinomio $A(x) = ax - b$.
c e' chiamato uno zero di $A(x)$.
Poniamoci il problema della esistenza di una soluzione di (2)).

Diremo che (2)) e' <u>possibile</u> quando ha soluzione, <u>impossibile</u> se non ha soluzione.
Inoltre nel caso possibile, diremo <u>determinata</u> se esiste una sola soluzione, <u>indeterminata</u> se esistono piu' soluzioni.

Risoluzione

1) Sia $a \neq 0$. Esiste il reciproco di a. Applicando le proprieta' di monotonia della somma e del prodotto scriviamo

$$ax - b = 0 \Rightarrow ax = b \Rightarrow a^{-1}ax = a^{-1}b \Rightarrow x = \frac{b}{a}.$$

La soluzione cercata e' : $c = \frac{b}{a}$.

2) $a = 0$ e $b \neq 0$ allora (2)) non ha soluzione dato che la teoria costruita impone $0a = 0$. Se $a = 0$ e $b = 0$ abbiamo l' indeterminazione di x: (2)) e' verificata per ogni valore assunto da x.

Esempi:

$2x-1 = 0 \Rightarrow x = 1/2$ se non si hanno esigenze particolari e' bene scrivere la soluzione in forma frazionaria piuttosto che in forma decimale $0,5$.

$3x - 1 = 0 \Rightarrow 3x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{3}$ questo esempio motiva l'osservazione fatta nell'esercizio precedente.

Si risolvano le seguenti equazioni:$\sqrt{2}x + 2^{3/2} = 0$; $e^2x - e^5 = 0$; $\frac{x}{3} = \frac{1}{3}$.

Disequazioni

Chiamiamo disequazione di I grado una relazione del tipo

$$P(x) \lesseqgtr Q(x) \tag{4}$$

ove $P(x)$ e $Q(x)$ sono polinomi considerati sopra. Osserviamo che per i casi caso $\leq$ o $\geq$ occorre valutare le due condizioni $>$ e $=$ oppure $<$e $=$. Il caso $=$ l'abbiamo gia' considerato.

Studiamo il caso $>$. Mediante le proprieta' che abbiamo utilizzato per (2) si ottiene

$$ax - b > 0 \tag{5}$$

Oramai riteniamo acquisito il concetto di risoluzione e passiamo al calcolo. Diversamente da (2)) ora dobbiamo prestare attenzione ai segni. Dalla teoria abbiamo rilevato che la monotonia del prodotto vale se il fattore moltiplicativo e' positivo; in caso contrario si deve invertire la relazione d'ordine. Allora se $a > 0$ si ha $a^{-1} > 0$ da cui

$$ax - b > 0 \Rightarrow ax > b \Rightarrow a^{-1}ax > a^{-1}b \Rightarrow x > a^{-1}b.$$

Se $a < 0$ si puo' operare ancora con a^{-1} purche' si cambi l'ordine da $>$ a $<$ (si applica la regola dei segni) oppure si opera con $(-a)^{-1}$ senza intervenire sull'ordine.

Esempio:

$$-2x + 3 > 0 \Rightarrow -2x > -3 \Rightarrow 2x < 3 \Rightarrow x < \frac{3}{2}.$$

Il caso $<$ si studia in modo analogo.

Equazioni e disequazioni di II grado

Si consideri l'equazione

$$(x-1)(x+2) = 0. \tag{6}$$

La legge di annullamento del prodotto riduce l'equazione del secondo ordine (6) in due equazioni del primo ordine:

$$x - 1 = 0;\ x + 2 = 0.$$

Quindi l'equazione $(x-1)(x+2) = x^2 + x - 2 = 0$ ha due soluzioni date da altrettanti soluzioni di equazioni del primo ordine, che peremettono la scomposizione in fattori del trinomio di secondo grado : $x^2 + x - 2$.

Interessa, ora, studiare il segno del trinomio ovvero studiare la disequazione di secondo grado

$$x^2 + x - 2 = (x-1)(x+2) > 0.$$

La scomposizione del polinomio in fattori e' cruciale. Abbiamo da stabilire il segno di un prodotto. La regola dei segni ci conduce a considerare due casi 1)$++ = +$; 2) $-- = -$ ovvero i due sistemi

$$\begin{cases} x - 1 > 0 \\ x + 2 > 0. \end{cases}$$

o

$$\begin{cases} x - 1 < 0 \\ x + 2 < 0 \end{cases}$$

Osservazione: le parentesi graffe indicano intersezione, simultaneita' mentre o indica unione. I sistemi sono soddisfatto dalle x che verificano entrambe le disequazioni. Il primo sistema e' soddisfatto dagli elementi dell' insieme $I_1 = \{x \in \mathbb{R} | x > 1\}$ mentre il secondo sistema e' soddisfatto dagli elementi dell'insieme $I_2 = \{x \in \mathbb{R} | x < -2\}$. Quindi la disequazione e' soddisfatta dai numeri che appartengono all' unione $I_1 \cup I_2$ e che noi scriveremo semplicemente : $x < -2 \cup x > 1$ e si usa anche dire valori esterni alle radici.

Appare chiaro che la disuguaglianza con segno $<$ porta ad avere $-2 < x < 1$ soluzioni interne alle radici.

Abbiamo esposto con un esempio il modo di risolvere equazioni e disequazioni di secondo grado

Trattiamo il problema in modo piu' generale. Scriveremo da subito l'equazione nella forma standard con secondo membro 0.

Risolvere una equazione di secondo grado

$$ax^2 + bx + c = 0. \tag{7}$$

e' equivalente alla scomposizione del trinomio $P_2(x) = ax^2 + bx + c$ in fattori.

Troviamo gli zeri di $P_2(x)$. Supponiamo $a \neq 0$ altrimenti avremmo un polinomio del primo ordine gia' considerato.

Si procede aggiungendo e togliendo $\frac{b^2}{4a^2}$

$$* \qquad ax^2+bx+c = a(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}) = a(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{b^2}{4a^2}-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}) = a((x+\frac{b}{2a})^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}) = a((x+\frac{b}{2a})^2-\frac{\Delta}{4a^2})$$

ove $\Delta = b^2 - 4ac$ detto discriminante.

Per risolvere (7) si pone $y = x + \frac{b}{2a}$ in (*) e si ottiene l' equazione

$$y^2 = \frac{\Delta}{4a^2}$$

che risolveremo nel campo reale relativo:

$$y = \pm\sqrt{\frac{\Delta}{4a^2}} \Rightarrow x = \frac{-b}{2a} \pm \sqrt{\frac{\Delta}{4a^2}}.$$

Abbiamo due soluzioni distinte se $\Delta > 0$. Se $\Delta = 0$ le radici sono coincidenti. Se $\Delta < 0$ non abbiamo soluzioni.

Chiamare radici le soluzioni di $P_2(x) = 0$ e' dovuto a questo procedimento ovvero trovare soluzioni per radicali.

Indichiamo x_1, x_2 le due radici. Il trinomio $P_2(x)$ si scompone in prodotto di fattori

$$P_2(x) = a(x - x_1)(x - x_2).$$

$(x - x_1)$ e $(x - x_2)$ sono divisori di $P_2(x)$: $P_2(x)/(x - x_1) = a(x - x_2)$ e $P_2(x)/(x - x_2) = a(x - x_1)$.

A questo punto possiamo studiare sia gli zeri del polinomio sia il suo segno.

1) $\Delta > 0$- Si fa presente che tale scomposizione e' ottenuta supponendo $a \neq 0$. Per $a = 0$ abbiamo gia' osservato che il trinomio e' un polinomio (binomio) di primo grado. A questo punto interessa il segno del trinomio. Ad esso concorrono sia a che i fattori della scomposizione. Quindi abbiamo due casi sempre dovuti alla regola dei segni:

se $a > 0$ allora $P_2(x) > 0$ se $(x - x_1)(x - x_2) > 0$ ovvero per valori esterni alle radici.
se $a > 0$ allora $P_2(x) < 0$ se $(x - x_1)(x - x_2) < 0$ ovvero per valori interni alle radici.
se $a < 0$ allora $P_2(x) > 0$ se $(x - x_1)(x - x_2) < 0$ ovvero valori interni alle radici.
se $a > 0$ allora $P_2(x) < 0$ se $(x - x_1)(x - x_2) > 0$ ovvero per valori esterni alle radici.

Si osserva che possiamo sempre per una equazione o disequazione avere il coefficiente a positivo mediante la moltiplicazione per -1.

2) Caso $\Delta = 0$

$P_2(x) = a(x+b/2a)^2$ il segno dipende da a. Quindi se $a > 0$ si ha $P_2(x) \geq 0$; se $a < 0$ si ha $P_2(x) \leq 0$.

3) $\Delta < 0$.

$P_2(x) = a((x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{\Delta}{4a^2})$ ed il segno di P_2 coincide con il segno di a $\forall x$

Scomposizione: Dalle relazioni

$$x_1 + x_2 = -\frac{a}{b}, \quad x_1 x_2 = \frac{c}{a}$$

otteniamo

$$a(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}) = a(x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 x_2) = a(x(x - x_1) - x_2(x - x_1) = a(x - x_1)(x - x_2).$$

da cui $P_2(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$.

Osservazione: Nota una radice x_1 della equazione $P_2(x) = 0$ allora il binomio $(x - x_1)$ e' un divisore di $P_2(x)$ ovvero $P_2(x)/(x - x_1) = Q_1(x)$ o $P_2(x) = (x - x_1)Q_1(x)$ com $Q_1(x)$ polinomio di grado inferiore a quello di $P_2(x)$.

Esempio:

$$-8x^2 + 10x - 3 > 0 \Rightarrow 8x^2 - 10x + 3 < 0.$$

Il discriminante dell'equazione associata e' $4 > 0$ Gli zeri del trinomio sono $x_1 = 1/2$ e $x_2 = 3/4$: la disequazione e' soddisfatta per valori interni $1/2 < x < 3/4$.

Quanto abbiamo detto sulla scomposizioni con fattori di primo grado e' del tutto generale ovvero

$(x - a)$ e' un divisore di un polinomio $P_n(x)$ se e soltanto se a e' uno zero di $P_n(x)$ ovvero e' soluzione di $P_n(x) = 0$. Risolvere la disequazione

$$15x^2 + x - 2 > 0.$$

3) Cenni sulle equazioni e disequazioni di terzo grado.

Sulle relazioni

$$ax^3 + bx^2 + cx + d \gtreqless 0.$$

numericamente possiamo dire poco. Non e' semplice ricavare le soluzioni mediante radicali. Si puo' consultare gli appunti sui numeri complessi per conoscere le problematiche.

Ci limitiamo a qualche considerazione di carattere generale.

Osserviamo il polinomio $P_3(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ considerando $a > 0$ senza ledere la generalita'. Si constata che per $x > 0$ molto grande (x prossimo a $+\infty$) il primo termine ax^3 domina tutti gli altri ovvero $P_3(x)$ ha il segno di ax^3 che e' positivo. Lo stesso vale per x in valore assoluto molto grande ma con segno meno. Ancora, in negativo, il primo termine domina sugli altri per cui $P_3(x)$ ha valori negativi per x molto piccoli (x prossimo a $-\infty$). Quindi al variare di x da $-\infty$ a $+\infty$ $P_3(x)$ passa da valori negativi a valori positivi. Si arguisce che esiste qualche punto x_1 in cui $P_3(x)$ si azzera. Uno zero di $P_3(x)$ esiste sempre. Quindi $(x - x_1)$ e' un divisore di $P(x_2)$ per cui si ha la decomposizione

$$P_3(x) = (x - x_1)P_2(x).$$

Siamo in grado di trattare completamente $P_2(x)$: ne conosciamo gli zeri ed il segno.

Questo risultato e' del tutto generale. Ci dice che $P_3(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ puo' avere una sola soluzione o tre soluzioni di cui due coincidenti oppure tre soluzioni distinte. Il problema dal punto di vista numerico e' di conoscere almeno una soluzione. Qualche indicazione per trovare una soluzione per polinomi di terzo grado con coefficienti interi o razionali. Se esiste una radice razionale essa e' uno dei rapporti dei divisori di a e d ovvero

$$\frac{divisore\ d}{divisore\ a}.$$

Ad esempio il polinomio $P_3(x) = x^3 - 2x - 4$ e' a coefficienti interi. I divisori dell'ultimo coefficiente sono ± 1, ± 2, ± 4. Quelli del primo sono ± 1. Quindi gli unici candidati ad essere soluzioni razionali sono $1; 2; 4$ con segno. Verifichiamoli uno ad uno, a partire dai piu facili. Una sostituzione diretta da' subito risposta negativa per ± 1: $1^3 - 2 - 4 = -5$; cosi' $P_3(-1) = -3$, $P_3(-2) = -8$, $P_3(2) = 0$ quindi $x = 2$ e'una radice.

Per questi conti conviene usare la regola di Ruffini che oltre a dare i valori del polinomio da' anche il quoziente della divisione di $P_3(x)$ con il binomio $(x - x_1)$ in modo semplice.

Nota : Gauss dimostro', nel 1799, che ogni equazione polinomiale della forma $(n \geq 1)$

$$* \qquad a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0 = 0$$

ove $a_0, a_1, ..., a_n$ sono numeri reali arbitrari co $a_n \neq 0$ ha sempre soluzioni nell'insieme nei numeri complessi. Inoltre, anche se $a_0, a_1, ..., a_n$ sono complessi, esiste sempre una soluzione dei numeri complessi. Questo risultato e' noto come **il teorema fondamentale dell'algebra**. Dalle ossrvazioni fatte sopra si arriva ad affermare che l'equazione * ha n soluzioni (contate con la loro molteplicita') nel campo complesso. Si veda, anche, la premessa degli appunti sui numeri complessi.

Equazioni e disequazioni razionali fratte

Chiamiamo equazione razionale fratta una uguaglianza del tipo

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = 0 \tag{8}$$

ove $P(x)$ e $Q(x)$ sono polinomi. (8) e' stata scritta in forma standard.

Dapprima essendo una frazione bisogna imporre il denomimatore diverso da zero. Questa condizione impone l'esclusione di alcuni punti. Indi si passa a risolvere l'equazione. Ricordando che una frazione e' nulla se soltanto il numeratore e' nullo allora (8) e' verificata se e soltanto se

$$P(x) = 0.$$

Esempi:

$$\frac{1}{x} = 2 - \frac{3}{x-1}.$$

Dapprima diamo senso alle frazioni. I valori $x = 0$ e $x = 1$ devono essere esclusi. Scriviamo l'equazione in forma standard mediante le proprieta' delle operazione

$$\frac{1}{x} = 2 - \frac{3}{x-1} \Rightarrow \frac{1}{x} + \frac{3}{x-1} - 2 = 0 \Rightarrow \frac{x - 1 + 3x - 2x(x-1)}{x(x-1)} = 0 \Leftrightarrow$$

.

$$2x^2 - 6x + 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{7}}{2}.$$

$$\frac{x+2}{x-3} = 0 \Rightarrow x \neq 3,\ x + 2 = 0 \Rightarrow x \neq 3,\ x = -2.$$

$$\frac{4 - x^2}{x^2 - 2x - 15} = 0 \Rightarrow x^2 - 2x - 15 \neq 0 \text{ e } 4 - x^2 = 0, \Rightarrow x \neq -3,\ x \neq 5,\ x = \pm 2.$$

$$\frac{x-1}{3} = \frac{15}{x-5} \Rightarrow x \neq 5,\ (x-1)(x-5) - 45 = 0, \Rightarrow x \neq 5,\ x^2 - 6x - 40 = 0 \Rightarrow x \neq 5,\ x = 10,\ x = -4.$$

Esercizi

$$1) \quad \frac{2}{5}x - 1 + \frac{x}{x-2} = 4, \qquad \frac{x}{x-2} = 6 - \frac{x}{x-3}.$$

Disequazioni

Chiamiamo disequazione razionale fratta una relazione del tipo

$$\frac{P(x)}{Q(x)} \gtrless 0 \tag{9}$$

La scrittura in (**??**) indica o > 0 o < 0 ed e' scritta in forma standad.

Dapprima consideriamo $>$. L'altro caso si tratta analogamente.

Si impone $Q(x) \neq 0$ poi si studia il segno del rapporto con la regola dei segni: si cercano valori della variabile x che rendono positivi i due polinomi; altrettanto si cercano valori della x che rendono negativi i due poinomi. Cosi' indicato I_1 l'insieme delle soluzioni di $P(x) > 0$ e con I_2 l'insieme delle soluzioni di $Q(x) >$ allora i valori x che rendono contemporaneamente positivi i polinomi e' dato da $I_+ = I_1 \cap I_2$. In modo analoga si ragiona nel caso negativo: indicato I_3 l'insieme dei valori della x per cui $P(x) < 0$ ed indicato con I_4 l'insieme dei valori della x per cui $Q(x) < 0$ allora l'insieme dei valori della x per cui i polinomi sono entrambi negativi e' $I_- = I_3 \cap I_4$. Quindi i valori dell'insieme $I_+ \cup I_-$ soddisfano la disequazione

$$\frac{P(x)}{Q(x)} > 0.$$

Ricordando che la parentesi graffa viene usata per indicare simultaneita', le conclusioni precedenti le formalizziamo cosi':

$$\begin{cases} P(x) & > 0 \\ Q(x) & > 0 \end{cases} \quad \textit{oppure} \quad \begin{cases} P(x) < 0 \\ Q(x) < 0 \end{cases}$$

L'unione delle soluzioni dei due sistemi risolve la disequazione (9) con segno $>$.

Per risolvere la disequazione

$$\frac{P(x)}{Q(x)} < 0 \tag{10}$$

procediamo nello stesso modo considerando la regola $-+ = -$. Quindi si hammo i due sistemi

$$\begin{cases} P(x) & > 0 \\ Q(x) & < 0 \end{cases} \quad \textit{oppure} \quad \begin{cases} P(x) < 0 \\ Q(x) > 0. \end{cases}$$

L'unione delle soluzioni dei due sistemi risolve la disequazione (10).

Esempio:risolvere

$$\frac{x+2}{x-5} < 0.$$

Dapprima diamo significato alle operazioni presenti nella disequazione. Deve essere $x - 5 \neq 0$ ovvero dobbiamo escludere $x = 5$. Poi si passa alla risoluzione: numeratore e denominatore devono avere segno opposto quindi si ha

$$I_1 = \begin{cases} x+2 & > 0 \\ x-5 & < 0 \end{cases} \quad \textit{oppure} \quad I_2 = \begin{cases} x+2 < 0 \\ x-5 > 0 \end{cases}$$

$$I_1 = x > -2 \cap x < 5 \Rightarrow -2 < x < 5 \cup I_2 = x < -2 \cap x > 5 = \emptyset \Rightarrow -2 < x < 5.$$

Un procedimento risolutivo equivalente e' quello di moltiplicare la disequazione per il quadrato del denominatore (non si cambia il verso della disequazione) cosi' si ha una disequazione intera ovvero

$$\frac{x+2}{x-5} \Leftrightarrow \frac{(x-5)^2(x+2)}{x-5} = (x-5)(x+2) < 0.$$

Si ottiene una disequazione non fratta che abbiamo gia' considerato. Soluzioni sono i valori interni alle radici.

Esempio: Risolvere

$$\frac{x^2-4}{x-1} > 0.$$

Deve essere $x \neq 1$. Si considerino i due sistemi

$$I_1 = \begin{cases} x^2-4 & > 0 \\ x-1 & > 0 \end{cases} \quad \textit{oppure} \quad I_2 = \begin{cases} x^2-4 < 0 \\ x-1 < 0 \end{cases}$$

$I_1 = \{x < -2 \cup x > 2\} \cap x > 1 \Rightarrow x > 2 \cup I_2 = -2 < x < 2 \cap x < 1 = -2 < x < 1 \Rightarrow -2 < x < 1 \cup x > 2$

Esempio: Risolvere

$$\frac{2x}{x-2} + 1 > \frac{1}{x+3} + 2.$$

Le operazioni hanno significato per $x \neq 2$ e $x \neq -3$.
Scriviamola in forma standard:

$$\frac{2x}{x-2} + 1 > \frac{1}{x+3} + 2 \Rightarrow \frac{2x(x+3)-(x-2)(x+3)-(x-2)}{(x-2)(x+3)} > 0 \Rightarrow \frac{x^2+4x+8}{(x-2)(x+3)} > 0.$$

Il numeratore ha $\Delta = -2$. Allora il numeratore ha lo stesso segno del primo coefficiente ovvero positivo. Il segno del rapporto e' determinato dal segno del denominatore che e' positivo per $x < -3 \cup x > 2$. Queste sono le soluzioni della disequazione.

Esercizi: Risolvere le seguenti disequazioni:

$$\frac{x-2}{2x^2-5x+3} \leq 0; \quad \frac{x^2+x-6}{x^2-1} \geq 0; \quad \frac{x}{x+1} - \frac{9}{x-1} < 2 - \frac{18x}{x^2-1}.$$

$$\begin{cases} 3x-7 & > x+2 \\ 4(x-1) & > x+12 \end{cases} \qquad \begin{cases} x-1 & < 3/4x+6 \\ 11/5x-3/10 & > 2x-3/2. \end{cases}$$

Equazioni e disequazioni irrazionale

Equazioni e disequazioni irrazionali sono relazione ove la variabile x appare sotto il segno di radice. Esse sono della forma

$$\sqrt[n]{P(x)} \lesseqgtr Q(x)$$

con $P(x)$, $Q(x)$ polinomi e n numero naturale.

La risoluzione di equazioni o disequazioni irrazionali poggia sulle proprieta' dei radicali e sulle proprieta' di monotonia delle potenze in particolare vedi pagine 18-19. Ricordiamo:

siano α e β due numeri reali.

1) **Sia n un naturale dispari. Allora**

$$\alpha \gtreqless \beta \Leftrightarrow \alpha^n \lesseqgtr \beta^n$$

2) **Se n e' pari allora solo per α e β positivi si ha**

$$\alpha \gtreqqless \beta \Leftrightarrow \alpha^n \gtreqqless \beta^n$$

Inoltre i radicali con indice dispari li consideriamo in $\mathbb{R}$ ovvero radicali relativi.

Possiamo affermare che se n e' intero positivo dispari allora si ha l'equivalenza, ovviamente quando il secondo membro ha senso,

$$\sqrt[n]{P(x)} \lesseqqgtr Q(x) \Leftrightarrow P(x) \gtreqqless Q(x)^n.$$

Se n e' un numero intero pari, se $P(x) \geq 0$ e $Q(x) \geq 0$ allora

$$\sqrt[n]{P(x)} \lesseqqgtr Q(x) \Leftrightarrow P(x) \lesseqqgtr Q(x)^n.$$

Discussione della relazione

$$\sqrt[n]{P(x)} \geq Q(x) \tag{11}$$

per n pari.
La disequazione e' definita quando $P(x) \geq 0$; indichiamo con I l'insieme delle sue soluzioni.

La disequazione si risolve soltanto in I

In I discutiamo

$$\sqrt[n]{P(x)} \geq Q(x).$$

1) Il radicale assoluto a primo membro ha valore positivo. Allora ove $Q(x) < 0$ la disequazione (11) e' soddisfatta. Indichiamo con J l'insieme delle soluzioni di $Q(x) < 0$. .

2) $Q(x) > 0$ in questo caso risolviamo la disequazione con l'elevamento a potenza come indicato sopra ovvero risolviamo
ovvero risolviamo

$$\sqrt[n]{P(x)} \geq Q(x).$$

Indichiamo J_1 le sue soluzione. Concludiamo che (11) e' verificata in $I \cap (J \cup J_1)$.
Esempio

$$\sqrt{x+1} = -1$$

L'indice della radice e' pari siamo, nell'ambito dei radicali assoluti. Il radicando deve essere positivo da cui $x \geq -1$. Per questi valori la radice ha segno positivo. Allora l'uguaglinza e' impossibile. Non ci sono soluzioni.
Consideriamo ora la seguente disequazione

$$\sqrt{x+1} > -1$$

e' sempre verificata per $x \geq -1$ ove esiste la radice.

Esempio:

$$(x-2) > \sqrt[3]{x^3 - 4x^2 + 7x - 6}$$

L' indice della radice e' dispari senza problemi possiamo elevare a potenza tre i due membri della disequazione ed abbiamo

$$(x-2)^3 > (\sqrt[3]{x^3 - 4x^2 + 7x - 6})^3 \Rightarrow x^3-6x^2+12x-8 > x^3-4x^2+7x-6 \Rightarrow -2x^2+5x-2 > 0 \Rightarrow 2x^2-5x+2 < 0$$

$$\Rightarrow 1/2 < x < 2.$$

$$\sqrt{4x^2 - 13x + 3} > 2x - 5.$$

Dapprima diamo senso alla disequazione. Si impone che il radicando sia maggiore o uguale a zero; ovvero

$$4x^2 - 13x + 3 \geq 0 \Rightarrow \; x < 1/4 \cup x > 3 := I.$$

La disequazine si risolve in I

1) se $2x - 5 < 0$ la disequazione e' verificata quindi in $I \cap x < 5/2 \Rightarrow x < 1/4$ e' soddisfatta.

2) per $x > 5/2$ si risolve la disequazione per elevamento a potenza

$$(\sqrt{4x^2 - 13x + 3})^2 > (2x - 5)^2 \Rightarrow 4x^2 - 13x + 3 > 4x^2 - 20x + 25 \Rightarrow 7x > 22$$

per cui la disequazione e' soddisfatta in $I \cap x > 5/2 \cap x > 22/7 \Rightarrow x > 22/7$.

Unendo i punti 1) e 2) la disequazione e' soddisfatta in

$$x < 1/4 \cup x > 22/7.$$

Esercizi : Risolvere le seguenti disequazioni

$$(2x+1)^2-7 > (2x-1)^2;\; x^2-8 < 0;\; 2-9x^2 > 0;|;\; \sqrt[3]{x^2 - 7x + 18)} < 2;\; x-3 > \sqrt{x^2 - 5x + 4};\; 2x-5 < \sqrt{x - 2}.$$

$$\sqrt{2 + \sqrt{x - 5}} < \sqrt{13 - x};\; \sqrt{x + 7} + \sqrt{x - 5} \geq \sqrt{2x + 18};\; \frac{\sqrt{5 - x^2}}{2x + 1} \geq \frac{1}{2}.$$

Equazioni e disequazioni di esponenziali e logaritmi

Applichiamo le proprieta' delle potenze pagine 18-19 risolviamo

$2^x = 1 \Rightarrow x = 0$, $2^x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = -1$, $2^{x^2+2} = 4 \Rightarrow x^2 + 2 = 2 \Rightarrow x = 0$, $2^{x^2-2x} - 2^2 = 0 \Rightarrow x^2 - 2x = 2 \Rightarrow x = 1 \pm \sqrt{3}$, $2^{2x} - 22^x = 1 \Rightarrow (2^x)^2 - 2^x - 1 = 0 \Rightarrow 2^x = 1 \pm \sqrt{2} \Rightarrow 2^x = 1 + \sqrt{2} \Rightarrow x = \log_2(1 + \sqrt{2})$.

$\sqrt{x}\,\sqrt[3]{x}\,\sqrt[6]{x} = 3$ $x \geq 0 \Rightarrow \sqrt[6]{x^3}\,\sqrt[6]{x^2}\,\sqrt[6]{x} = \sqrt[6]{x^6} = 3 \Rightarrow x = 3$.

$$2^{3x-2x^2} = 3^x \Rightarrow \log_2(2^{3x-2x^2}) = x \log_2 3 \Rightarrow 2x^2 + (\log_2 3 - 3)x = 0 \Rightarrow x = 0, x = \frac{3 - \log_2 3}{2}.$$

$$2^{\frac{x-1}{x^2-4}} < 2$$

for $x \neq \pm 2$ si ha, dalla monotonia della potenza,

$$\frac{x - 1}{x^2 - 4} < 1 \Rightarrow \frac{x^2 - x - 3}{x^2 - 4} > 0 \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x^2 - x - 3 & > 0 \\ x^2 - 4 & > 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2 - x - 3 & < 0 \\ x^2 - 4 & < 0. \end{cases}$$

Il primo sistema e' verificato in $I_1 = \{x < \frac{1-\sqrt{13}}{2} \cup x > \frac{1+\sqrt{13}}{2}\} \cap \{x < -2 \cup x > 2\} =$
$\{x < -2 \cup x > \frac{1+\sqrt{13}}{2}\}$.

Il secondo sistema e' verificato in $I_2 = \{\frac{1-\sqrt{13}}{2} < x < \frac{1+\sqrt{13}}{2}\} \cap \{-2 < x < 2\} =$

$\frac{1-\sqrt{13}}{2} < x < 2$.
La disequazione e' verificata in $I_1 \cup I_2$.

$$\log_2(x+1) = 2 \ (per\ x > -1) \Rightarrow \log_2(x+1) = \log_2 4 \Rightarrow x+1 = 4 \Rightarrow x = 3.$$

$$\log_2(x+1) = \log_2(x^2-4) \ (per\ x > -1 \cap \{x < -2 \cup x > 2\}) \Rightarrow x+1 = x^2-4 \Rightarrow x^2-x-5 = 0 \Rightarrow x = \frac{1+\sqrt{21}}{2}$$

$$\log_2(x+1) > \log_4 x \ (per\ x > 0) \ \Rightarrow \log_2(x+1) > \log_4 2 \log_2 x \Rightarrow x+1 > \sqrt{x} \Rightarrow x^2+x+1 > 0.$$

sempre verificata per $x > 0$.

$$\log_{1/2} x - \frac{1}{\log_{1/2} x^2} > 0 \ (perx > 0, \neq 1) \Rightarrow \frac{\log_{1/2} x^2 \log_{1/2} x - 1}{\log_{1/2} x^2} > 0 \Rightarrow$$

$$2\frac{\log_{1/2} |x| \log_{1/2} x - 1}{2\log_{1/2} |x|} > 0 \Rightarrow \frac{\log_{1/2} x \log_{1/2} x - 1}{\log_{1/2} x} > 0 \Rightarrow$$

(si ricorda che $\log_{1/2} x$ e' decrescemte)

$$\begin{cases} \log^2_{1/2} x - 1 & > 0 \Rightarrow x < 1/2 \cup x > 2 \\ \log_{1/2} x & > 0 \Rightarrow x < 1 \end{cases} \cup \begin{cases} \log_{1/2} x^2 - 1 & < 0 \Rightarrow 1/2 < x < 2 \\ \log_{1/2} x & < 0 \Rightarrow x > 1 \end{cases}$$

La disequazione e' soddisfatta per $0 < x < 1/2 \cup 1 < x < 2$.

$\log^2 x - 2\log x - 3 < 0 \ (x > 0,\ posto\ \log x = t) \ \Rightarrow t^2 - 2t - 3 < 0 \Rightarrow -1 < t < 3 \Rightarrow e^{-1} < x < e^3$

dovuta al fatto che $\log x$ e' crescente.

Gli esercizi sono stati svolti applicando essenzialmente la legge di monotonia tranne l'ultimo Non sempre e' possibile utilizzare esclusivamente la monotonia. Come abbiamo constatato nell'ultimo esempio occorre applicare le tecniche risolutive delle equazioni algebriche.

$$2^x - 2(\frac{1}{2})^x + 1 = 0$$

si pone $2^x = t$ e l'equazione assume la forma, ovviamente $t > 0$,

$$\frac{t^2+t-2}{t} = 0 \Rightarrow t^2+t-2 = 0 \Rightarrow t = \frac{-1 \pm 3}{2} \Rightarrow (accettabile)\ t = 1 \Rightarrow x = 0.$$

$$5^{2x} - 2 \cdot 5^{x-1} - 5^{-1} > 0 (\ posto\ 5^x = t > 0) \ \Rightarrow 5t^2 - 2t - 1 > 0 \Rightarrow t > \frac{1+\sqrt{6}}{5} \Rightarrow x > \log_5(1+\sqrt{6}) - 1$$

Esercizi:

$5^x - 25^{-x-1} - 5^{-1} > 0$; $\quad (\frac{1}{2})^x < 5$; $\quad \log(2x+1) + \log x > 2\log(x+1)$; $\quad 2 - |log_2 x| > 2$; $\quad (2^{x-1})^x = 2^{x+3}$;

$\log_3[x(x-5)] = 2$; $\quad \log_{1/2}[x(x-8)] < 2$; $\quad (4^{3-x})^x = 1$; $\quad e^x - e^{-x} = 4$.