Esame di Geometria
Politecnico di Milano – Ingegneria

Secondo appello – 9 Settembre 2013 – Versione A

1. (a) Determinare, al variare del parametro reale k, la dimensione del sottospazio vettoriale X di $\mathbb{R}^4$ generato dai vettori
$$\mathbf{x}_1 = (2, 1, k, -k), \qquad \mathbf{x}_2 = (k, 1, k, 2), \qquad \mathbf{x}_3 = (2k, k, 2k, 0).$$
   (b) Per $k = 1$, stabilire se il vettore $\mathbf{v} = (1, 1, -1, 2)$ appartiene al sottospazio X.

2. Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare definita da
$$f(x, y, z) = (2x - y + z, -x + y - z, x - y + 2z)$$
per ogni $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.
   (a) Scrivere la matrice che rappresenta f rispetto alla base canonica.
   (b) Stabilire se f è un endomorfismo semplice.
   (c) Verificre che f è un automorfismo e determinare l'applicazione lineare inversa $f^{-1} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$.
   (d) Stabilire se esiste un'applicazione lineare $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che $g \circ f = f^{-1}$. In caso affermativo, scrivere la matrice che rappresenta g rispetto alla base canonica.

3. Sia Q il luogo dei punti P dello spazio tali che
$$\mathrm{d}(P, F) = 2\,\mathrm{d}(P, \pi),$$
dove $F \equiv (1, -1, -1)$ e $\pi : x - y + 1 = 0$.
   (a) Trovare l'equazione di Q.
   (b) Verificare che Q è una quadrica e riconoscerla.
   (c) Scrivere un'equazione canonica di Q.
   (d) Verificare che Q è una quadrica a centro e di rotazione.
   (e) Determinare il centro C, l'asse di rotazione a e i vertici di Q.
   (f) Verificare che il punto F appartiene all'asse a e determinare il raggio della circonferenza che si ottiene intersecando Q con il piano π' passante per F ed ortogonale ad a.
   (g) Stabilire se esiste una rototraslazione che porta la quadrica Q nella quadrica
$$Q' : 3x^2 - y^2 - z^2 + 6x + 4y + 2z - 8 = 0.$$