Integrazione di funzioni irrazionali

L'integrale:

$$\boxed{\int R\left\{x,\ \sqrt[p]{\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\alpha}},\ \sqrt[q]{\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\beta}},\ \dots\right\} dx},$$

si riduce a quello di una funzione razionale mediante il cambiamento di variabile:

$$\boxed{\frac{ax+b}{cx+d} = t^n},$$

ove n è il **minimo comune multiplo** fra gli indici: p, q, ..., delle radici.

1.3. Casi particolari sono gli integrali del tipo:

1) $\int R\left(x,\ \sqrt[p]{(ax+b)^{\alpha}},\ \sqrt[q]{(ax+b)^{\beta}},\ \dots\right) dx,$

2) $\int R\left(x,\ \sqrt[p]{x^{\alpha}},\ \sqrt[q]{x^{\beta}},\ \dots\right) dx.$

1.4. Esempi.

● 1) *Calcolare l'integrale:* $\int \frac{1}{x}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\,dx.$

Posto:

$$\frac{1-x}{1+x} = t^2,$$

---

(1) Se fosse $ad - bc = 0$, la funzione: $\frac{ax+b}{cx+d}$, si ridurrebbe a una costante, come subito si vede calcolandone la derivata.

● 3) *Calcolare l'integrale:* $\displaystyle\int \frac{1}{x+\sqrt{2x+3}}\,dx.$

Si ponga: $2x+3=t^2$, onde: $x=\dfrac{t^2-3}{2}$, $dx = t\,dt$.

Sostituendo, si ottiene:

$$\int \frac{1}{x+\sqrt{2x+3}}\,dx = \int \frac{2t}{t^2+2t-3}\,dt.$$

Scomponendo la funzione integranda, si ha:

$$\frac{2t}{t^2+2t-3} = \frac{A}{t-1} + \frac{B}{t+3},$$

da cui:

$$2t = (A+B)\,t + (3A-B),$$

ossia:

$$A+B=2;\ 3A-B=0;$$

si ricava: $A=\dfrac{1}{2}$, $B=\dfrac{3}{2}$, e quindi:

$$\int \frac{1}{x+\sqrt{2x+3}}\,dx = \frac{1}{2}\ln|t-1| + \frac{3}{2}\ln(t+3)+c =$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left|\sqrt{2x+3}-1\right| + \frac{3}{2}\ln\left(\sqrt{2x+3}+3\right) + c.$$

● 4) *Calcolare l'integrale:* $\displaystyle I = \int \frac{x}{(3x+1)\left(\sqrt{x}-1\right)}\,dx.$

Posto: $\sqrt{x}=t$; $x=t^2$; $dx=2t\,dt$, si ha:

$$I = \int \frac{t^2}{(3t^2+1)(t-1)}\cdot 2t\,dt = 2\int \frac{t^3}{(3t^2+1)(t-1)}\,dt =$$

$$= 2\int\left(\frac{1}{3}+\frac{t^2-\frac{1}{3}t+\frac{1}{3}}{(3t^2+1)(t-1)}\right)dt =$$

$$= \frac{2}{3}t + \frac{2}{3}\int \frac{3t^2-t+1}{(3t^2+1)(t-1)}\,dt = \frac{2}{3}t+\frac{2}{3}\int\left(\frac{At+B}{3t^2+1}+\frac{C}{t-1}\right)dt.$$

Ora, da:

$$(At + B)(t - 1) + C(3t^2 + 1) = 3t^2 - t + 1,$$

si deduce: $A = \frac{3}{4}$, $B = -\frac{1}{4}$, $C = \frac{3}{4}$.

Quindi:

$$I = \frac{2}{3}t + \frac{2}{3}\int\left(\frac{\frac{3}{4}t - \frac{1}{4}}{3t^2 + 1} + \frac{\frac{3}{4}}{t - 1}\right)dt =$$

$$= \frac{2}{3}t + \frac{1}{6}\int\left(\frac{3t}{3t^2 + 1} - \frac{1}{3t^2 + 1} + \frac{3}{t - 1}\right)dt =$$

$$= \frac{2}{3}t + \frac{1}{6}\left[\frac{1}{2}\ln(3t^2 + 1) - \frac{1}{\sqrt{3}}\int\frac{1}{(t\sqrt{3})^2 + 1}\,d\left(t\sqrt{3}\right) + 3\ln|t - 1|\right] =$$

$$= \frac{2}{3}t + \frac{1}{12}\ln(3t^2 + 1) - \frac{1}{6\sqrt{3}}\operatorname{arctg} t\sqrt{3} + \frac{1}{2}\ln|t - 1| + c =$$

$$= \frac{2}{3}\sqrt{x} + \frac{1}{12}\ln(3x + 1) - \frac{1}{6\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\sqrt{3x} + \frac{1}{2}\ln|\sqrt{x} - 1| + c.$$

● 5) *Calcolare l'integrale*: $I = \int\frac{\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[3]{x} + 2}dx.$

Posto: $\sqrt[3]{x} = t$; $x = t^3$; $dx = 3t^2\,dt$, si ha:

$$I = \int\frac{t^2}{t + 2}3t^2\,dt = 3\int\left(t^3 - 2t^2 + 4t - 8 + \frac{16}{t + 2}\right)dt =$$

$$= \frac{3}{4}t^4 - 2t^3 + 6t^2 - 24t + 48\ln|t + 2| + c =$$

$$= \frac{3}{4}x\sqrt[3]{x} - 2x + 6\sqrt[3]{x^2} - 24\sqrt[3]{x} + 48\ln|\sqrt[3]{x} + 2| + c.$$

● 6) *Calcolare l'integrale*: $I = \int\frac{x - \sqrt{x + 3}}{x + 2}dx.$

Posto: $x + 3 = t^2$ (con $t > 0$), $x = t^2 - 3$, $dx = 2t\,dt$, si ha:

$$I = \int\frac{t^2 - 3 - t}{t^2 - 3 + 2}2t\,dt = 2\int\frac{t^3 - t^2 - 3t}{t^2 - 1}dt =$$

$$= 2\int \left(t - 1 - \frac{2t+1}{t^2-1}\right) dt =$$

$$= 2\int \left(t - 1 - \frac{2t}{t^2-1} - \frac{1}{2}\frac{1}{t-1} + \frac{1}{2}\frac{1}{t+1}\right) dt =$$

$$= 2\left(\frac{t^2}{2} - t - \ln|t^2-1| - \frac{1}{2}\ln|t-1| + \frac{1}{2}(t+1)\right) + c =$$

$$= 2\left(\frac{t^2}{2} - t - \frac{3}{2}\ln|t-1| - \frac{1}{2}\ln(t+1)\right) + c =$$

$$= x + 3 - 2\sqrt{x+3} - 3\ln|\sqrt{x+3} - 1| - \ln\left(\sqrt{x+3} + 1\right) + c =$$

$$= x + 3 - 2\sqrt{x+3} - 2\ln|\sqrt{x+3} - 1| - \ln|x+2| + c.$$

2. Sostituzioni di Eulero.

Un altro tipo di integrale di funzione irrazionale che si riesce a ricondurre a un integrale di funzione razionale è il seguente:

$$\boxed{\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right) dx} \quad , \tag{1}$$

dove $R(x, u)$ è una *funzione razionale* delle variabili x e u, con $u = \sqrt{ax^2+bx+c}$.

Questo integrale può essere ricondotto a quello di una funzione razionale, con le cosiddette « **sostituzioni di** Eulero ».

2.1 Prima sostituzione di Eulero. – *Sia:* $a > 0$.

L'integrale (1) si razionalizza con uno dei seguenti cambiamenti di variabile:

$$\boxed{\sqrt{ax^2+bx+c} = \pm \sqrt{a} \cdot x + t} \quad , \tag{2}$$

scegliendo indifferentemente il segno + o – dinanzi alla radice che sta a secondo membro.

Infatti, risolvendo la (2) rispetto alla x, si ricava, come si può vedere con facili calcoli, x come funzione razionale di t.

Sostituendo poi il valore così trovato al posto della x nel secondo membro della (2), segue che anche la $\sqrt{ax^2 + bx + c}$ risulta una funzione razionale di t e perciò l'integrale (1) si trasforma in quello di una funzione razionale.

Esempi.

1) *Calcolare l'integrale*: $I = \int \frac{1}{x \cdot \sqrt{x^2 + x + 1}} dx.$

Avendosi in questo caso $a = 1$, in base alla (2), si ha:

$$\sqrt{x^2 + x + 1} = x + t, \tag{3}$$

da cui, elevando al quadrato, si ottiene:

$$x^2 + x + 1 = x^2 + 2tx + t^2,$$

ossia:

$$x = \frac{1 - t^2}{2t - 1}, \quad dx = -2\frac{t^2 - t + 1}{(2t - 1)^2} dt.$$

Inoltre, dalla (3), si deduce:

$$\sqrt{x^2 + x + 1} = \frac{1 - t^2}{2t - 1} + t = \frac{t^2 - t + 1}{2t - 1}.$$

Sostituendo nell'integrale dato e poi integrando, si ottiene:

$$I = -2\int \frac{2t - 1}{1 - t^2} \cdot \frac{2t - 1}{t^2 - t + 1} \cdot \frac{t^2 - t + 1}{(2t - 1)^2} dt = \int \frac{2}{t^2 - 1} dt =$$

$$= \int \left(\frac{1}{t - 1} - \frac{1}{t + 1}\right) dt = \ln|t - 1| - \ln|t + 1| + c = \ln\left|\frac{t - 1}{t + 1}\right| + c.$$

Avendosi, dalla (3), $t = \sqrt{x^2 + x + 1} - x$, in definitiva, si ha:

$$I = \ln\left|\frac{\sqrt{x^2 + x + 1} - x - 1}{\sqrt{x^2 + x + 1} - x + 1}\right| + c.$$

● 2) *Calcolare l'integrale:* $I = \int \frac{1}{\sqrt{x^2 + \alpha}} dx.$

Anche in questo caso è $a = 1$ e perciò, in base alla (2), poniamo:

$$\sqrt{x^2 + \alpha} = - x + t.$$

Si ottiene:

$$x = \frac{t^2 - \alpha}{2t}, \quad dx = \frac{t^2 + \alpha}{2t^2} dt,$$

$$\sqrt{x^2 + \alpha} = - x + t = - \frac{t^2 - \alpha}{2t} + t = \frac{t^2 + \alpha}{2t},$$

e quindi:

$$I = \int \frac{2t}{t^2 + \alpha} \cdot \frac{t^2 + \alpha}{2t^2} dt = \int \frac{1}{t} dt = \ln |t| + c.$$

Essendo: $t = x + \sqrt{x^2 + \alpha}$, in definitiva, si ha:

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 + \alpha}} dx = \ln |x + \sqrt{x^2 + \alpha}| + c,$$

risultato già noto.

● 3) *Calcolare l'integrale:* $\int \sqrt{x^2 + \alpha}\, dx.$

Integrando per parti, si ha:

$$\int \sqrt{x^2 + \alpha}\, dx = x \sqrt{x^2 + \alpha} - \int \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + \alpha}} dx =$$

$$= x \sqrt{x^2 + \alpha} - \int \frac{x^2 + \alpha - \alpha}{\sqrt{x^2 + \alpha}} dx =$$

$$= x \sqrt{x^2 + \alpha} - \int \frac{x^2 + \alpha}{\sqrt{x^2 + \alpha}} dx + \alpha \int \frac{1}{\sqrt{x^2 + \alpha}} dx.$$

Di qui, tenendo presente l'integrale calcolato precedentemente e che: $\frac{x^2 + \alpha}{\sqrt{x^2 + \alpha}} = \sqrt{x^2 + \alpha}$, si ottiene:

$$\int \sqrt{x^2+\alpha}\,dx = x\sqrt{x^2+\alpha} - \sqrt{x^2+\alpha} + \alpha \ln|x+\sqrt{x^2+\alpha}|,$$

ossia:

$$2\int \sqrt{x^2+\alpha}\,dx = x\sqrt{x^2+\alpha} + \alpha \ln|x+\sqrt{x^2+\alpha}|,$$

e perciò, tenendo conto che le primitive di una funzione sono definite a meno di una costante:

$$\boxed{\int \sqrt{x^2+\alpha}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2+\alpha} + \frac{\alpha}{2}\ln|x+\sqrt{x^2+\alpha}| + c}\ .$$

Ovviamente, l'integrale proposto può essere calcolato, direttamente, con una delle sostituzioni viste.

Infatti, posto $\sqrt{x^2+\alpha} = x+t$, si ha $\alpha = 2tx + t^2$, da cui:

$$x = \frac{\alpha - t^2}{2t} \qquad \text{e} \qquad \sqrt{x^2+\alpha} = \frac{\alpha - t^2}{2t} + t = \frac{\alpha + t^2}{2t}.$$

Pertanto:

$$\int \sqrt{x^2+\alpha}\,dx = \int \frac{\alpha+t^2}{2t}\cdot\frac{1}{2}\,\frac{-\alpha-t^2}{t^2}\,dt = -\frac{1}{4}\int \frac{\alpha^2+2\alpha t^2+t^4}{t^3}\,dt =$$

$$= -\frac{1}{4}\left(-\frac{\alpha^2}{2t^2} + 2\alpha\ln|t| + \frac{t^2}{2}\right) + c =$$

$$= \frac{\alpha^2}{8}\cdot\frac{1}{\left(\sqrt{x^2+\alpha}-x\right)^2} - \frac{\alpha}{2}\ln|\sqrt{x^2+\alpha}-x| - \frac{1}{8}\left(\sqrt{x^2+\alpha}-x\right)^2 + c =$$

$$= \frac{\alpha^2}{8}\,\frac{1}{2x^2+\alpha-2x\sqrt{x^2+\alpha}} - \frac{\alpha}{2}\ln\left|\frac{x^2+\alpha-x^2}{\sqrt{x^2+\alpha}+x}\right| -$$

$$-\frac{1}{8}\left(2x^2+\alpha-2x\sqrt{x^2+\alpha}\right) + c =$$

$$= \frac{\alpha^2}{8}\cdot\frac{2x^2+\alpha+2x\sqrt{x^2+\alpha}}{\alpha^2} + \frac{\alpha}{2}\ln|\sqrt{x^2+\alpha}+x| - \frac{1}{8}\left(2x^2+\alpha-2x\sqrt{x^2+\alpha}\right) +$$

$$+ c - \frac{\alpha}{2}\ln|\alpha| = \frac{x}{2}\sqrt{x^2+\alpha} + \frac{\alpha}{2}\ln|\sqrt{x^2+\alpha}+x| + k.$$

● 4) *Calcolare l'integrale:* $\displaystyle\int \frac{1}{2x + \sqrt{4x^2 + x}}\,dx.$

Avendosi in questo caso $a = 4$, in base alla (2), poniamo:

$$\sqrt{4x^2 + x} = -2x + t,$$

da cui si ricava:

$$x = \frac{t^2}{1 + 4t},\quad dx = 2t\,\frac{1 + 2t}{(1 + 4t)^2}\,dt,\quad t = 2x + \sqrt{4x^2 + x},$$

e quindi:

$$\int \frac{1}{2x + \sqrt{4x^2 + x}}\,dx = \int \frac{2 + 4t}{(1 + 4t)^2}\,dt = \int \frac{1}{(1 + 4t)^2}\,dt + \int \frac{1 + 4t}{(1 + 4t)^2}\,dt =$$

$$= \frac{1}{4}\int (1 + 4t)^{-2}\,d(1 + 4t) + \int \frac{1}{1 + 4t}\,dt = \frac{1}{4}\cdot\frac{-1}{1 + 4t} + \frac{1}{4}\ln|1 + 4t| + c =$$

$$= \frac{-1}{4 + 32x + 16\sqrt{4x^2 + x}} + \frac{1}{4}\ln\left|1 + 8x + 4\sqrt{4x^2 + x}\right| + c.$$

2.2 Seconda sostituzione di Eulero. – *Sia* : $c > 0$.

In questo caso, possiamo porre:

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = xt \pm \sqrt{c},$$

e quindi (prendendo, per fissare le idee, il segno + davanti a $\sqrt{c}$):

$$ax^2 + bx + c = x^2t^2 + 2xt\sqrt{c} + c,$$

da cui risulta ($x \neq 0$):

$$x = \frac{2\sqrt{c}\,t - b}{a - t^2},$$

e ciò mette in luce che x è una funzione razionale di t; pertanto anche dx e $\sqrt{ax^2 + bx + c}$ si esprimono, egualmente, come funzioni razionali di t. Sostituendo i valori di x, $\sqrt{ax^2 + bx + c}$ e dx, determinati mediante le sostituzioni operate, nell'integrale (1), si riconduce quest'ultimo a quello di una funzione razionale di t.

Esempio. – *Calcolare l'integrale:*

$$I = \int \frac{\left(1 - \sqrt{1 + x + x^2}\right)^2}{x^2 \sqrt{1 + x + x^2}}\, dx.$$

Poniamo [1]: $\sqrt{1 + x + x^2} = xt + 1$; dunque:

$$1 + x + x^2 = x^2t^2 + 2xt + 1;\ x = \frac{2t - 1}{1 - t^2};\ dx = \frac{2t^2 - 2t + 2}{(1 - t^2)^2}\, dt;$$

$$\sqrt{1 + x + x^2} = xt + 1 = \frac{t^2 - t + 1}{1 - t^2};\ 1 - \sqrt{1 + x + x^2} = \frac{-2t^2 + t}{1 - t^2}.$$

Sostituendo le espressioni così ottenute nell'integrale che vogliamo calcolare, si trova:

$$I = \int \frac{(-2t^2 + t)^2 (1 - t^2)^2 (1 - t^2)(2t^2 - 2t + 2)}{(1 - t^2)^2 (2t - 1)^2 (t^2 - t + 1)(1 - t^2)^2}\, dt =$$

$$= 2 \int \frac{t^2}{1 - t^2}\, dt = -2t + \ln\left|\frac{1 + t}{1 - t}\right| + c =$$

$$= -\frac{2\left(\sqrt{1 + x + x^2} - 1\right)}{x} + \ln\left|\frac{x + \sqrt{1 + x + x^2} - 1}{x - \sqrt{1 + x + x^2} + 1}\right| + c =$$

$$= -\frac{2\left(\sqrt{1 + x + x^2} - 1\right)}{x} + \ln\left|2x + 2\sqrt{1 + x + x^2} + 1\right| + c.$$

2.3. Terza sostituzione di Eulero.

Se il trinomio $ax^2 + bx + c$ ammette radici reali, e distinte (e ciò succede certamente quando a e c sono discordi), l'integrale (1) si trasforma in quello di una funzione razionale ponendo, qualunque sia la radice α del trinomio $ax^2 + bx + c$:

(1) Naturalmente, essendo $a > 0$, si potrebbe usare anche la 1ª sostituzione di Eulero.

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = (x - \alpha)\, t.$$

Infatti, poiché $ax^2 + bx + c = a\,(x - \alpha)(x - \beta)$, si ha:

$$a\,(x - \alpha)(x - \beta) = (x - \alpha)^2\, t^2, \text{ cioè: } a\,(x - \beta) = (x - \alpha)\, t^2.$$

Quindi x si esprime come funzione razionale in t:

$$x = \frac{a\beta - \alpha t^2}{a - t^2},$$

e di conseguenza anche dx e $\sqrt{ax^2 + bx + c}$.

L'integrale considerato si trasforma, quindi, in quello di una funzione razionale.

Esempi.

● 1) *Calcolare l'integrale*: $I = \displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{-x^2 + 5x - 6}}\, dx.$

Le radici dell'equazione $-x^2 + 5x - 6 = 0$ sono 2 e 3; poniamo pertanto:

(1) $\sqrt{(x - 2)(3 - x)} = (x - 2)\, t$, cioè: $(x - 2)(3 - x) = (x - 2)^2\, t^2$,

da cui:

$$x = \frac{2t^2 + 3}{1 + t^2}, \quad dx = \frac{-2t}{(1 + t^2)^2},$$

e anche:

$$\sqrt{(x - 2)(3 - x)} = (x - 2)\, t = \left(\frac{2t^2 + 3}{1 + t^2} - 2\right) t = \frac{t}{1 + t^2}.$$

Si ha quindi:

$$I = \int \frac{1 + t^2}{t} \cdot \frac{-2t}{(1 + t^2)^2}\, dt = -2 \int \frac{1}{1 + t^2}\, dt = -2 \operatorname{arctg} t + c.$$

Essendo, per la (1), $t = \sqrt{\dfrac{3 - x}{x - 2}}$, si ha, in definitiva:

$$I = -2 \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{3 - x}{x - 2}} + c.$$

● 2) *Calcolare l'integrale*: $I = \int \frac{1}{\sqrt{3 - x - 2x^2}} dx.$

Risulta: $a < 0$ e $3 - x - 2x^2 = 0$ per $x = 1$ e $x = -\frac{3}{2}$.

Posto: $\sqrt{3 - x - 2x^2} = t(x - 1)$, si ha: $-(x - 1)(2x + 3) = t^2(x - 1)^2$, da cui: $2x + 3 + t^2(x - 1) = 0$, e quindi:

$$x = \frac{t^2 - 3}{2 + t^2};\ dx = \frac{10t}{(2 + t^2)^2} dt;\ \sqrt{3 - x - 2x^2} = \frac{-5t}{2 + t^2}.$$

Pertanto:

$$I = \int - \frac{2 + t^2}{5t} \cdot \frac{10t}{(2 + t^2)^2} dt = -2 \int \frac{1}{2 + t^2} dt =$$

$$= -\sqrt{2} \int \frac{1}{1 + \left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right)^2} d\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right) = -\sqrt{2} \operatorname{arctg} \frac{t}{\sqrt{2}} + c.$$

Ora è:

$$t = \frac{\sqrt{-(2x + 3)(x - 1)}}{x - 1} = -\sqrt{\frac{-(2x + 3)(x - 1)}{(x - 1)^2}} = -\sqrt{\frac{2x + 3}{1 - x}},$$

e quindi, in definitiva:

$$I = \sqrt{2} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{2x + 3}{2(1 - x)}} + c.$$

● 3) *Calcolare l'integrale* $I = \int \frac{1}{\sqrt{x^2 + 3x - 4}} dx.$

Essendo: $x^2 + 3x - 4 = (x + 4)(x - 1)$, poniamo:

$\sqrt{(x + 4)(x - 1)} = (x + 4)t$, ossia: $(x + 4)(x - 1) = (x + 4)^2 t^2$,

da cui:

$$x = \frac{1 + 4t^2}{1 - t^2},\ dx = \frac{10t}{(1 - t^2)^2} dt,\ \sqrt{(x + 4)(x - 1)} = \frac{5t}{1 - t^2}.$$

Pertanto risulta:

$$I = \int \frac{10t(1 - t^2)}{(1 - t^2)^2 5t} dt = \int \frac{2}{1 - t^2} dt = \ln \left|\frac{1 + t}{1 - t}\right| + c =$$

$$= \ln \left| \frac{1 + \sqrt{\dfrac{x-1}{x+4}}}{1 - \sqrt{\dfrac{x-1}{x+4}}} \right| + c = \ln \left| \frac{\sqrt{x+4} + \sqrt{x-1}}{\sqrt{x+4} - \sqrt{x-1}} \right| + c.$$

3. Continuazione.

Le sostituzioni di EULERO, pur avendo una portata generale, spesso conducono a calcoli piuttosto ingombranti; pertanto, a volte, può essere più agevole operare con metodi differenti.

3.1. Per esempio, *gli integrali del tipo*:

$$(1) \quad \boxed{\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}} \;, \text{ e } \quad \boxed{\int \frac{Ax + B}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}\, dx} \;, \quad (2)$$

si possono calcolare come segue.

Per calcolare gli integrali del tipo (1), si mette in evidenza un quadrato perfetto nel trinomio di secondo grado. *Per esempio*:

● 1) *Calcolare l'integrale*:

$$I = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 2x + 5}}.$$

Trasformiamo il trinomio di secondo grado:

$$x^2 + 2x + 5 = (x + 1)^2 + 4.$$

Quindi:

$$I = \int \frac{d\,(x + 1)}{\sqrt{(x + 1)^2 + 4}} = \ln |x + 1 + \sqrt{x^2 + 2x + 5}| + c.$$

● 2) *Calcolare l'integrale*:

$$I = \int \frac{dx}{\sqrt{-\,3x^2 + 4x - 1}}.$$

Essendo:

$$-\,3x^2 + 4x - 1 = -\,3\left(x^2 - \frac{4}{3}x + \frac{1}{3} + \frac{4}{9} - \frac{4}{9}\right) =$$

$$= -\,3\left[\left(x - \frac{2}{3}\right)^2 - \frac{1}{9}\right] = 3\left[\frac{1}{9} - \left(x - \frac{2}{3}\right)^2\right],$$

si ha:

$$I = \frac{1}{\sqrt{3}} \int \frac{d\left(x - \frac{2}{3}\right)}{\sqrt{\frac{1}{9} - \left(x - \frac{2}{3}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arcsen} \frac{x - \frac{2}{3}}{\frac{1}{3}} + c =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arcsen}(3x - 2) + c.$$

Per calcolare gli integrali del tipo (2), bisogna far comparire al numeratore la derivata del trinomio di secondo grado che compare come radicando e poi scomporre l'integrale nella somma di due integrali.

Si ha:

$$\int \frac{Ax + B}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}\, dx = \int \frac{\frac{A}{2a}(2ax + b) + B - \frac{Ab}{2a}}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}\, dx =$$

$$= \frac{A}{2a} \int \frac{d(ax^2 + bx + c)}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} + \left(B - \frac{Ab}{2a}\right) \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} = I_1 + I_2.$$

L'integrale I_1 è di tipo elementare.

L'integrale I_2 è del tipo precedente.

Per esempio, calcolare l'integrale:

$$I = \int \frac{5x - 3}{\sqrt{2x^2 + 8x + 1}}\, dx.$$

Facciamo comparire al numeratore la derivata del radicando:

$$D(2x^2 + 8x + 1) = 4x + 8.$$

Si ha:

$$I = \int \frac{\frac{5}{4}(4x + 8) - 13}{\sqrt{2x^2 + 8x + 1}}\, dx = \frac{5}{4} \int \frac{4x + 8}{\sqrt{2x^2 + 8x + 1}}\, dx - 13 \int \frac{dx}{\sqrt{2x^2 + 8x + 1}} =$$

$$= \frac{5}{2} \sqrt{2x^2 + 8x + 1} - \frac{13}{\sqrt{2}} \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 4x + \frac{1}{2}}} = \ldots =$$

$$= \frac{5}{2} \sqrt{2x^2 + 8x + 1} - \frac{13}{\sqrt{2}} \ln \left| x + 2 + \sqrt{x^2 + 4x + \frac{1}{2}} \right| + c.$$

3.2. *L'integrale del tipo*:

(3) $$\boxed{\int \frac{dx}{(x-k)\sqrt{ax^2+bx+c}}},$$

con la sostituzione $x - k = \frac{1}{t}$, viene ricondotto a un integrale del tipo (1).

Esempio. – *Calcolare l'integrale:*

$$I = \int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{-x^2+2x+3}}.$$

Posto $x - 1 = \frac{1}{t}$, allora: $x = \frac{1}{t} + 1$ e $dx = -\frac{1}{t^2}dt$. Pertanto:

$$I = -\int \frac{\frac{dt}{t^2}}{\frac{1}{t}\sqrt{-\left(1+\frac{1}{t}\right)^2 + 2\left(1+\frac{1}{t}\right)+3}} =$$

$$= -\int \frac{dt}{t\sqrt{-1-\frac{2}{t}-\frac{1}{t^2}+2+\frac{2}{t}+3}} = -\int \frac{dt}{\sqrt{4t^2-1}} = -\frac{1}{2}\int \frac{dt}{\sqrt{t^2-\frac{1}{4}}} =$$

$$= -\frac{1}{2}\ln\left|t + \sqrt{t^2-\frac{1}{4}}\right| + c = -\frac{1}{2}\ln\left|\frac{2+\sqrt{-x^2+2x+3}}{2(x-1)}\right|.$$

3.3. *Gli integrali del tipo:*

(4) $$\boxed{\int \frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx},$$

si calcolano a partire dall'identità:

$$(5) \qquad \int \frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx = Q_{n-1}(x)\cdot\sqrt{ax^2+bx+c} + {}$$
$$+ K \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}},$$

ove $Q_{n-1}(x)$ è un opportuno polinomio di grado $n-1$ e K una certa costante, che devono essere determinati.

Derivando i due membri dell'identità in questione e riducendo il risultato allo stesso denominatore, si ottiene l'eguaglianza tra due polinomi, a partire dalla quale, si possono determinare i coefficienti del polinomio $Q_{n-1}(x)$ e il numero K.

Esempio. – *Calcolare l'integrale*:

$$I = \int \frac{x^3+2x^2+3x+4}{\sqrt{x^2+2x+2}}\,dx.$$

Qui è $n = 3$, per cui l'identità (5) diventa:

$$\int \frac{x^3+2x^2+3x+4}{\sqrt{x^2+2x+2}}\,dx = (Ax^2+Bx+C)\sqrt{x^2+2x+2} + {}$$
$$+ K \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+2}}.$$

Derivando i due membri dell'identità, si ottiene:

$$\frac{x^3+2x^2+3x+4}{\sqrt{x^2+2x+2}} = (2\,Ax+B)\sqrt{x^2+2x+2} + {}$$
$$+ (Ax^2+Bx+C)\cdot\frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+2}} + K\frac{1}{\sqrt{x^2+2x+2}}.$$

Eliminando i denominatori, si ha:

$$x^3+2x^2+3x+4 = (2\,Ax+B)(x^2+2x+2) + {}$$
$$+ (Ax^2+Bx+C)(x+1)+K,$$

da cui:

$$x^3+2x^2+3x+4 = 3\,Ax^3 + (5A-2\,B)x^2 + (4A+3\,B+C)x + (2B+C+K).$$

Per il principio di identità dei polinomi, si ottiene il sistema:

$$\begin{cases} 3A = 1 \\ 3A + 2B = 2 \\ 4A + 3B + C = 3 \\ 2B + C + K = 4, \end{cases}$$

che, risolto, dà: $A = \frac{1}{3}$, $B = \frac{1}{6}$, $C = \frac{7}{6}$, $K = \frac{5}{2}$.

Pertanto, si ha:

$$I = \left(\frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{6}x + \frac{7}{6}\right)\sqrt{x^2 + 2x + 2} + \frac{5}{2}\ln\left|x + 1 + \sqrt{x^2 + 2x + 2}\right| + c.$$

4. Integrazione indefinita dei differenziali binomi.

4.1. *Si chiamano* **differenziali binomi** *le espressioni della forma:*

$$x^m (a + bx^n)^p \, dx,$$

dove gli esponenti m, n, p sono *numeri razionali*, e a, b numeri reali arbitrari.

Si dimostra che l'integrale:

$$\int x^m (a + bx^n)^p \, dx,$$

si *razionalizza* soltanto nei seguenti tre casi, e con le sostituzioni indicate.

1°) *Se p è un numero intero, ponendo*:

$$x = t^k,$$

ove k è il minimo comune multiplo dei denominatori di m e n.

2°) *Se $\frac{m+1}{n}$ è un numero intero, ponendo*:

$$a + bx^n = t^h,$$

ove h è il denominatore di p.

3°) *Se $\frac{m+1}{n} + p$ è un numero intero, ponendo*:

$$\frac{a + bx^n}{x^n} = t^h,$$

ove h è il denominatore di p.

4.2 Esempi.

● 1) *Calcolare l'integrale:* $I = \int \frac{\sqrt{x}}{\left(1 - \sqrt[3]{x}\right)^2} dx.$

L'integrale può scriversi sotto la forma:

$$I = \int x^{\frac{1}{2}} \left(1 - x^{\frac{1}{3}}\right)^{-2} dx,$$

e si vede così che è l'integrale di un differenziale binomio.

Avendosi:

$$m = \frac{1}{2}, \; n = \frac{1}{3}, \; p = -2,$$

si verifica dunque il primo caso; con la sostituzione:

$$x = t^6,$$

si ha:

$$I = \int t^3 (1 - t^2)^{-2} \, 6t^5 \, dt = 6 \int \frac{t^8}{(1 - t^2)^2} dt.$$

Eseguendo dapprima la divisione e poi integrando, in definitiva, si ottiene:

$$I = \frac{6}{5} t^5 + 4t^3 + 18t + \frac{21}{2} \ln \left| \frac{t - 1}{t + 1} \right| - \frac{3t}{t^3 - 1} + c =$$

$$= \frac{6}{5} x^{\frac{5}{6}} + 4x^{\frac{1}{2}} + 18x^{\frac{1}{6}} \ln \left| \frac{x^{\frac{1}{6}} - 1}{x^{\frac{1}{6}} + 1} \right| - \frac{3x^{\frac{1}{6}}}{x^{\frac{1}{3}} - 1} + c.$$

● 2) *Calcolare l'integrale:* $I = \int \frac{x^5}{\sqrt{x^3 - 1}} dx.$