Funzione reale di Variabile reale

Premessa

Introdurremo il concetto di funzione ed in particolare quello di funzione reale di variabile reale ed il concetto di grafico. Per funzione f intenderemo una relazione o legge tra due insiemi D e B non vuoti che ad ogni elemento x appartenente a D associa un solo elemento y di B: l elemento y si indica col simbolo $f(x)$. Se in particolare x e y sono numeri reali, si parla di funzioni reali di variabile reale.

Sappiamo inoltre che l' introduzione del metodo delle coordinate cartesiane permette di stabilire una corrispondenza biunivoca tra le coppie ordinate di numeri reali ed i punti del piano, grazie a questa corrispondenza e' quindi possibile rappresentare graficamente le coppie ordinate di numeri reali che soddisfano una relazione del tipo $y = f(x)$: la totalita' di queste coppie individua un sottoinsieme di punti del piano cartesiano che costituisce il grafico della funzione . Lo studio del grafico di una funzione sara' sviluppato introducendo strumenti che sono alla base dell' analisi infinitesimale.

FUNZIONI REALI DI VARIABILE REALE

• *CONCETTO DI FUNZIONE*

Siano $\mathbb{X}$ ed $\mathbb{Y}$ due insiemi e $D \subseteq \mathbb{X}$ e $B \subseteq \mathbb{Y}$. Una funzione (o applicazione) f con dominio D a valori in B e' una legge che associa ad ogni elemento $x \in D$ uno ed un solo elemento $y \in B$.

Utilizzeremo le notazioni

$$f : D \to B$$

e

$$f : x \mapsto y.$$

L' insieme D e' detto dominio di f e l' insieme B e' detto insieme immagine o codominio di f.

Per definire una funzione occorre specificare sia la legge f sia il dominio ed il codominio. Per cui, in una forma piu' generale, una funziene e' una tripletta di elementi formata da due insiemi, dominio e codominio, ed una legge f che li mette in corrispondenza. Inotre si preferisce, per problemi operativi, chiamare codominio l'insieme di arrivo $\mathbb{Y}$ piuttosto che l'immagine.

Comunemente la funzione si scrive

$$y = f(x)$$

.

Questa e' una forma semplificata del concetto di funzione ove si mette in evidenza l'azione della funzione. x viene chiamata variabile indipendente, y variabile dipendente ed $f(x)$ l'immagine di x tramite f.

Quando $\mathbb{X} \equiv \mathbb{Y} \equiv \mathbb{R}$ la funzione e' detta

funzione numerica di variabile reale a valori reali.

Queste sono le funzioni che tratteremo in questi appunti. E' opportuno ricordare che trattiamo funzioni ad un solo valore o monodrome o univoche. (in caso contrario si dice polidrome o polivocche o a piu' valori).

L' insieme $f(D) \subseteq \mathbb{Y}$ definito da $f(D) = \{y \in \mathbb{Y} : f(x) = y \; con \; x \in D\}$ e' detto immagine di f oppure immagine di D tramite f.

In generale, per le funzioni numeriche, f e' costituita da un complesso di operazioni o forme analitiche.

• *GRAFICO DI UNA FUNZIONE*

Carichiamo il piano euclideo con un sistema di assi cartesiani ortogonali: $O(x, y)$. Ogni punto del piano P e' in corrispondenza biunivoca con una coppia (a, b) ordinata di numeri reali. La prima componente a e detta ascissa del punto P e la seconda componente b e' detta ordinata del punto P.

Il grafico di una funzione $f : D \to B$ e' il sottinsieme G_f di $D \times B$ definito da $G_f = \{(x, y) \in D \times B | x \in D, y = f(x) \in B\}$. Geometricamente e' il luogo dei punti $(x, f(x))$ del piano di coordinate (x, y). Le rette verticali intersecano il grafico (o rappresentazione geometrica di una funzione) in al piu' un punto, dato che consideriamo funzioni ad un solo valore. Questo non vale per le rette orizzomtali.

Rappresentazione geometrica del grafico.

Al variare di $x \in D$ il punto $R = (x, f(x))$ descrive un luogo geometrico nel piano cartesiano che viene chiamato il grafico di f. La forma del grafico dipende dalla natura della funzione e puo' avere degli aspetti del tutto diversi da quelli che l'intuizione suggerisce.

A questo punto si puo' affermare che per conoscere una funzione occorrono tre elementi:

1) Identificazione del dominio di una funzione . Si usa chiamare, in questo contesto, dominio di una funzione il piu' grande insieme dei valori $x \in \mathbb{R}$ su cui hanno senso le espressioni analitiche che concorrono nella definizione di funzione.

2) Identificare il sottoinsieme $f(D) \subseteq \mathbb{Y}$ definito da $f(D) = \{y \in \mathbb{Y} : f(x) = y \; con \; x \in D\}$ detto immagine di f oppure immagine di D tramite f.

3) Idemtificazione del grafico della funzione $f : D \to Y$ che e' il sottinsieme $G(f)$ di $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ definito da $G(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : x \in D, y = f(x)\}$ e rappresentarlo geometricamente con i suoi caratteri principali.

• *Immagine e antiimmagine*

Sappiamo che se $D \subset \mathbb{R}$ e $f : D \to \mathbb{R}$ e' una funzione, l'immagine di D e' $B = f(D) = \{f(x) : x \in D\} \subset \mathbb{R}$; l'insieme delle immagini degli elementi di D e' un sottoinsieme del codominio, visualizzabile sull'asse delle ordinate nella rappresentazione cartesiana. L'antiimmagine di $C \subset B$ e' $f^{-1}(C) = \{x \in D : f(x) \in C\} \subseteq \mathbb{R}$: l'insieme dei punti del dominio D la cui immagine sta in C (si tratta dunque di un sottoinsieme del dominio, visualizzabile sull'asse delle ascisse nella rappresentazione geometrica della funzione).

GENERALITA'

Proprieta' definite per gli insiemi in $\mathbb{R}$ ci permettono di delineare alcune importanti caratteristiche delle funzioni. Da ora in poi l' immagine di f la scriveremo $Im\ f$.

• Si dice che f e' limitata superiormente se l'insieme immagine $Im\ f$ e' limitato superiormente ovvero esiste un numero $k \in \mathbb{R}$ tale che $f(x) \leq k$, $\forall x \in D$. Tutti gli elementi di $Im\ f$ sono inferiori a k; ancora $Im\ f \subseteq (-\infty, k]$.

• Si dice che f e' limitata inferiormente se l'insieme immagine $Im\ f$ e' limitato inferiormente ovvero esiste un numero $h \in \mathbb{R}$ tale che $f(x) \geq h$, $\forall x \in D$. Tutti gli elementi di $Im\ f$ sono maggiori di h, ancora $Im\ f \subseteq [h, +\infty)$.

• Si dice che f e' limitata se l'insieme immagine $Im\ f$ e' limitato inferiormente e superiormente movvero esistono due numeri $h, k \in \mathbb{R}$ con $h < k$ tale che

$$h \leq f(x) \leq k \ \ \forall x \in D.$$

Tutti gli elementi di $Im\ f$ sono maggiori di h e minori di k; ancora $Im\ f \subseteq [h, k]$.

Se scegliamo $K = max\{|h|, |k|\}$, possiamo scrivere la limitatezza nella seguente forma compatta

$$-K \leq f(x) \leq K \ \textit{oppure}\ |f(x)| \leq K,\ \forall x \in D.$$

• *Estremo superiore, estremo inferiore, massimo e minino*

Gli estremi superiore ed inferiore di $Im\ f$, Λ, λ sono detti estremi superioei ed inferiore di f e vengono scritti

$$\Lambda = \sup_{x \in D} f(x); \quad \lambda = \inf_{x \in D} f(x)$$

rispettivamente.

Si puo' omettere $x \in D$ quando non ci sia possibilita' di equivoco sull'insieme di definizione.

In generale Λ e λ non appartegono ad $Im\ f$. Se gli appartengono allora sono detti Massimo e minimo e li scriviamo $\mathbf{M}$ e $\mathbf{m}$. Dunque $\mathbf{M}$ e $\mathbf{m}$ sono elementi di $Im\ f$ ovvero sono assunti dalla funzione: esistono, dunque, due punti $x_M \in D$ detto "punto di massimo" e $x_m \in D$ detto "punto di minimo" tale che $\mathbf{M} = f(x_M)$ e $\mathbf{m} = f(x_m)$. Insistiamo: $\mathbf{M}$ e' il valore massimo della funzione. x_M " punto di massimo " e' il punto in D tale che la funziome calcolata in tale punto assume il valore $\mathbf{M}$. Analogamente $\mathbf{m}$ e' il valore minimo della funzione. x_m "punto di minimo " e' il punto in D tale che la funzione calcolata in tale punto assume il valore $\mathbf{m}$.

$\mathbf{M}$ e $\mathbf{m}$ vengono detti entrambi estremi di f in D.

I punti di massimo x_M e minimo x_m si dicono estremanti di f in D.

Quando si considera la funzione solo per i punti di un insieme $T \subset D$ si dice che si opera una restrizione di f a T e si indica $f_{|T}$; quando si considera la funzione in un dominio piu' grande si dice che si opera una estensione e l'estensione e' indicata Ef.

Osserviamo che data una funzione $y = f(x)$, il grafico di $y = f(x)$ ed il grafico di $y = -f(x)$ sono simmetrici rispetto all'asse delle ascisse oppure uno e' ottenuto dall'altro con una rotazione di π intorno all'asse delle ascisse (quando lo pensiamo immerso in spazio tridimensionale).

• *Parita'* - Se il dominio D di una funzione e' simmetrico rispetto all'origine (ovvero se $-D = D$, cioe' $x \in D$ se e solo se $-x \in D$), si puo' parlare di funzione "pari " o "dispari".

La funzione $f : D \to R$ si dice pari se per ogni $x \in D$ si ha $f(-x) = f(x)$, in termini geometrici se la funzione e' pari il suo grafico e' simmetrico rispetto all'asse delle ordinate y oppure il grafico della funzione in $D \cap \mathbb{R}^-$ e' ottenuto ruotando di π il grafico della funzione in $D \cap R^+$ intorno all'asse delle ordinate y (quando lo pensiamo immerso in spazio tridimensionale). .

Una funzione $f : D \to R$ si dice dispari se per ogni $x \in D$ si ha $f(-x) = -f(x)$; in termini geometrici il grafico della funzione e' simmetrico rispetto all' origine ovvero ogni retta r passante per l'origine interseca il grafico in due punti che su r sono simmetrici (opposti) rispetto all'origine (se si vuole usare le rotazioni bisogna eseguire due rotazioni di π una volta rispetto y (o x) e l 'altra rispetto ad $x(o\ y)$.

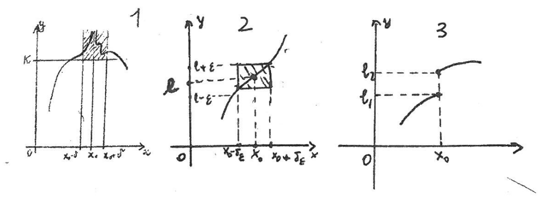
L' interesse di queste proprieta' sta nel fatto che e' sufficiente studiare la funzione solo nella parte positiva (o negativa) del dominio.

Esercizio: dato il grafico di $y = f(x)$ in $(-1, 20)$ traccciare il grafico di $y = g(x) = f(x+a)$ con $0 < a < 2$ di $y = h(x) = f(x)+a$ e di $y = p(x) = f(|x|)$.

CONCETTO DI LIMITE

Il primo strumento per lo studio delle funzioni e' il concetto di limite. E' una nozione di carattere locale.

Il concetto di limite riguarda il comportamento della funzione in intorni $\mathcal{U}(x_0)$ privati del punto x_0 stesso. Tale comportamento non dipende dal valore della funzione in tale punto anzi la funzione puo' anche non essere definita in esso. Si osservino i seguenti esempi



Le funzioni in intorni di x_0 hanno comportamenti diversi. Osserviamo il primo grafico. Notiamo che l' insieme immagine ha $+\infty$ come punto di accumulazione ovvero in ogni intorno $\mathcal{U}(+\infty)$ di $+\infty$ devono esserci punti dell' insieme immagine ovvero devono esserci punti $f(x)$. Questi punti sono valori della funzione calcolati in punti x che devono essere prossimi ad x_0. Si osservi il ruolo primario ed arbitrario della scelta dell'intorno $\mathcal{U}(+\infty)$ ed il ruolo sussidiario dei punti x vicini ad x_0. Questo comportamento possiamo esprimerlo cosi':

$f(x)$ tende a $+\infty$ per x che tende a x_0 oppure $f(x) \in \mathcal{U}(+\infty)$ quando x appartiene ad <u>un</u> intorno $\mathcal{U}(x_0)$ di x_0 e si scrive nella seguente forma semplice e compatta:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty.$$

Osserviamo che la funzione non e' definita in x_0. Potremmo anche completare il grafico assegnando un valore qualsiasi alla funzione in x_0. Tutto cio' non altera assolutamente il comportamento della funzione vicino ad x_0.

Dal secondo grafico ragionando come per l'esempio precedente si conclude che $f(x)$ tende a l per x tendente ad x_0. Quindi possiamo scrivere

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l.$$

Il terzo caso e' di natura diversa rispetto ai primi due casi. La funzione non si avvicina ad un valore per x prossimi ad x_0. In questo caso diremo che il limite non esiste.

Da quanto detto sopra rileviamo che il punto x_0 deve essere di accumulazione del dominio ed il comportamento della funzione e' valutato in <u>un</u> intorno di x_0.

Iniziamo lo studio del comportamento locale di una funzione di variabile reale, introducendo la nozione di limite. E' una nozione che si basa sul concetto di intorno. Formalizziamo le osservazione esposte sopra.

• *Definizione generale di limite*

Siano $y = f(x)$ una funzione definita in $D \subseteq \mathbb{R}$ e $\alpha \in \bar{\mathbb{R}}$ un punto di accumulazione di D finito o infinito ovvero appartiene al derivato di D.

Diremo che $f(x)$ per $x \to \alpha$ (si legge: per x che tende a α), tende a $\beta \in \bar{\mathbb{R}}$ (finito o infinito) e si scrive

$$\lim_{x \to \alpha} f(x) = \beta, \ \ \textit{oppure} \ \ f(x) \to \beta \ \ \textit{per} \ \ x \to \alpha$$

quando vale la seguente proprieta':

$$\forall \mathcal{U}(\beta)\ \ \exists \mathcal{U}(\alpha)\ (\textit{dipendente da }\ \mathcal{U}(\beta))\ : \forall x \in \mathcal{U}(\alpha) \cap D \setminus \{\alpha\} \Rightarrow f(x) \in \mathcal{U}(\beta).$$

Si legge: ad ogni intorno $\mathcal{U}(\beta)$ di β esiste un intorno $\mathcal{U}(\alpha)$ di α, in generale dipendente da $\mathcal{U}(\beta)$, tale che per ogni punto $x \in \mathcal{U}(\alpha)$ ed anche in D distinto da α, il valore $f(x)$ appartiene a $\mathcal{U}(\beta)$.

Abbiamo aggiunto $x \in D$ perche' non e' detto che D contenga tutto $\mathcal{U}(\alpha)$.

Insistiamo. Nella definizione non ha alcuna importanza se il punto α appartenga a D. Inoltre la definizione ci dice che β e' un punto di accumulazione dell'immagine della restrizione di f ad intorni di α. Questo fatto evidenzia che la nozione di limite ha carattere locale e non da' alcuna informazione sulla funzione per punti "lontani" da α. Possiamo modificare la funzione lontano da α senza che questo modifichi il comportamento in un suo intorno.

Esercizio: dare le definizioni dei seguenti limiti aiutandosi con un grafico (indichiamo con x_0 ed l valori finiti):

$\lim_{x\to x_0} = +\infty$; $\lim_{x\to x_0} = -\infty$; $\lim_{x\to x_0} = \infty$; $\lim_{x\to x_0} = l$; $\lim_{x\to +\infty} = +\infty$; $\lim_{x\to -\infty} = +\infty$; $\lim_{x\to +\infty} = l$; $\lim_{x\to -\infty} = l$; $\lim_{x\to \infty} = l$.

Dagli esempi posti si puo' notare che la scrittura di limite, mutatis mutandis, e' sempre la stessa. Basta adattare α e β ai vari casi.

Negli appunti sugli insiemi in $\mathbb{R}$ abbiamo descritto, in una forma espressiva, gli intorni di un punto utilizzando la nozione di distanza. Sono intorni simmetrici (rispetto ad punto) e per descriverli basta definire la semiampiezza che denoteremo con δ sull'asse delle ascisse e con ϵ sull'asse delle ordinate. La forma degli intorni dei punti all'infinito e' la consueta.

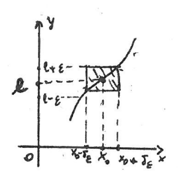
Si ha con x_0 ed l finiti

$\mathcal{U}(x_0) \Leftrightarrow |x - x_0| < \delta$; $\mathcal{U}(l) \Leftrightarrow |y - l| < \epsilon$;

per punti all'infinito detto K numero positivo, $\mathcal{U}(-\infty) \Leftrightarrow \{x : x < -K\}$; $\mathcal{U}(+\infty) \Leftrightarrow \{x|x > K\}$; $\mathcal{U}(\infty) \Leftrightarrow ; \{x|x < -K \cup x > K\} \Leftrightarrow \{x||x| > K\}$.

- *Definizione metrica di limite*

1. (ϵ, δ): $\alpha = x_0$ e $\beta = l$ finiti.

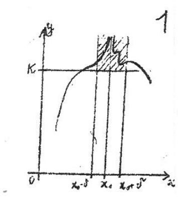


$$\lim_{x\to x_0} f(x) = l$$

se vale

$$\forall \epsilon > \ \ \exists \delta_\epsilon > 0 : \forall x \in D \ e \ 0 < |x - x_0| < \delta_\epsilon \Rightarrow |f(x) - l| < \epsilon \ (\equiv -\epsilon < f(x) - l < \epsilon \equiv l - \epsilon < f(x) < l + \epsilon).$$

2. $(K, \delta_K) : \alpha = x_0$ e $\beta = +\infty$.

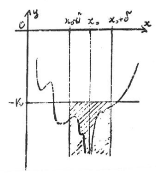


$$\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$$

se vale

$$\forall K > 0 \ \exists \delta_K > 0 : \forall x \in D \ e \ 0 < |x - x_0| < \delta_K \Rightarrow f(x) > K.$$

3. $(K, \delta_K) : \alpha = x_0$ e $\beta = -\infty$.

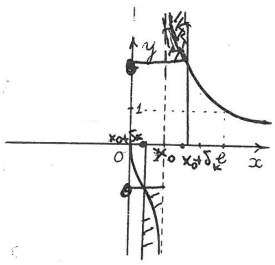


$$\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty$$

se vale

$$\forall K > 0 \ \exists \delta_K > 0 : \forall x \in D \ e \ 0 < |x - x_0| < \delta_k \Rightarrow f(x) < -K.$$

4. (K, δ_K) : $\alpha = x_0$ e $\beta = \infty$

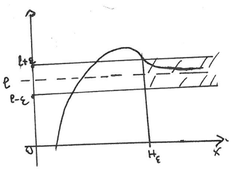


$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty$$

se vale

$$\forall K > 0\ \exists \delta_K > 0 : \forall x \in D\ e\ |x - x_0| < \delta_K \Rightarrow f(x) < -K \quad o \quad f(x > K \equiv |f(x)| > K.$$

5. (ϵ, H_ϵ) : $\alpha = +\infty$ e $\beta = l$.



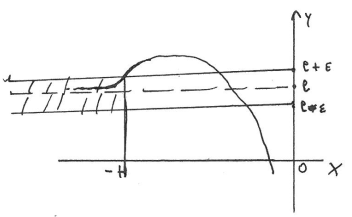
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = l$$

se vale

$$\forall \epsilon > 0\ \exists H_\epsilon > 0 : \forall x \in D\ e\ x > H_k \Rightarrow |f(x) - l| < \epsilon.$$

6. (ϵ, H_ϵ) : $\alpha = -\infty$ e $\beta = l$.

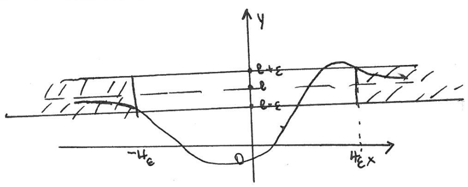
$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = l$$



se vale

$$\forall \epsilon > 0 \; \exists H_\epsilon > 0 : \forall x \in D \; e \; x < -H_k \Rightarrow |f(x) - l| < \epsilon.$$

7. (ϵ, H_ϵ) : $\alpha = \infty$ e $\beta = l$.

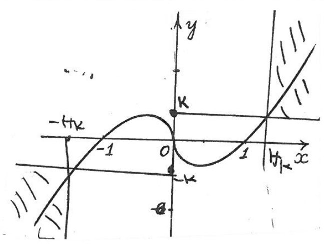


$$\lim_{x \to \infty} f(x) = l$$

se vale

$$\forall \epsilon > 0 \; \exists H_\epsilon > 0 : \forall x \in D \; e \; |x| > H_k \Rightarrow |f(x) - l| < \epsilon.$$

8. (K, H) - $\alpha = \infty$ e $\beta = \infty$.



$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$$

se vale

$$\forall K > 0\ \exists H_K > 0 : \forall x \in D\ e\ |x| > H \Rightarrow |f(x)| > K.$$

Dagli esempi sopra esposti si puo' constatare il comportamento geometrico della funzione quando esiste il limite. Il grafico della funzione si stabilizza nel rettangolo limitato o illimitato del piano (x, y) dato dai punti del prodotto cartesiano $\mathcal{U}(\alpha) \times \mathcal{U}(\beta)$. Questa osservazione suggerisce una definizione geometrica di limite. Nel caso finito con intorni simmetrici, chiamando striscia verticale la parte del piano $\mathcal{U}(\alpha) \times \mathbb{R}$ centrata in x_0 e striscia verticale centrata in l l'insieme $\mathbb{R} \times \mathcal{U}(\beta)$ si puo dare la definizione di limite

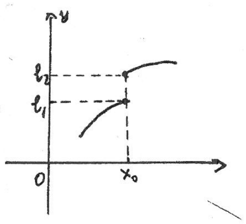
$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l$$

ne seguente modo :

Ad ogni striscia orizzontale centrata in l, $\mathbb{R} \times \mathcal{U}(\beta)$, e' possibile coordinare una striscia verticale centrata in x_0, $\mathcal{U}(\alpha) \times \mathbb{R}$, tale che il grafico della funzione e' tutto contenuto nel rettangolo $\mathcal{U}(\alpha) \times \mathcal{U}(\beta)$. Si osservino i grafici sopra riportati. Il grafico si stabilizza in una regione del piano con punto centrale $(x : 0, l)$. Ancora, questa osservazione suggerisce che se il grafico di una funzione oscilla " troppo " vicino al punto (x_0, l) allora la funzione non ha limite

Da questa considerazione si puo' verificare per via grafica che le funzioni $y = senx$, $y = cosx$ non hanno limite per x tendente all'infinito e la versione finita $y = sen\frac{1}{x}$ per x tendente a zero (abbiamo trasferito il punto ∞ nell'origine).

Il grafico



ci induce a considerare il limite destro ed il limite sinistro .

• *Limite dalla destra e limite dalla sinistra*

Puo' accadere che non esista il limite di $f(x)$ per $x \to x_0$; ma un tale limite puo' esistere se si considera una restrizione di $f(x)$ al sottoinsione D^+ delle $x \in D$ maggiori di x_0 oppure al sottoinsieme D^- delle $x \in D$ minori di x_0. Questi limiti vengono chiamati limiti dalla destra o dalla sinistra in quanto si considerano intorni di x_0 destro o sinistro e si scrivono

$$lim_{x \to x_0^+} f(x) = l_1; \quad f(x) \to l_1\ \ per\ x \to x_0^+,$$

$$lim_{x \to x_0^-} f(x) = l_2; \quad f(x) \to l_2 \;\; per \; x \to x_0^- .$$

Diamo le definizioni di questi limiti.

$$lim_{x \to x_0^+} f(x) = l_1$$

quando

$$\forall \epsilon > 0 \; \exists \delta_\epsilon >: x_0 < x < x_0 + \delta_\epsilon \; con \; x \in D \Rightarrow |f(x) - l_1| < \epsilon.$$

$$lim_{x \to x_0^-} f(x) = l_2$$

quando

$$\forall \epsilon > 0 \; \exists \delta_\epsilon >: x_0 - \delta_\epsilon < x < x_0 \; con \; x \in D \Rightarrow |f(x) - l_2| < \epsilon.$$

La differenza $\Delta = l_2 - l_1$ e' chiamata salto della funzione.

Osservando che $x_0 - \delta_\epsilon < x < x_0 \cup x_0 < x < x_0 + \delta_\epsilon$ forma un intorno completo di x_0 (escluso il punto stesso) si ha la seguente

Proposizione - *L'esistenza del limite di $f(x)$ per $x \to x_o$ e' equivalente all' uguaglianza del limite destro e sinistro:*

$$\exists \lim_{a \to x_0} f(x) \Leftrightarrow \exists \lim_{x \to x_0^+} f(x) = \lim_{x \to x_0^-} f(x).$$

Piu' in generale si puo' esaminare la relazione del limite con le restrizioni della funzione a sottonsiemi.

Proposizione- *Limite delle restrizioni*

Siano $C \subset D$, ed $\alpha \in \bar{\mathbb{R}}$ sia punto di accumulazione C ed $f_{|C}$ sia la restrizione di $f(x)$ a C. Se esiste

$$\lim_{x \to \alpha} f(x) = \beta$$

allora esiste

$$\lim_{x \to \alpha} f_{|C}(x)$$

ed e' uguale a β.

Viceversa puo' esistere il $\lim_{x \to \alpha} f_{|C}(x)$ senza che esista $\lim_{x \to \alpha} f(x)$.

La definizione di limite per f implica la definizione di limite $f_{|C}(x)$.

Infatti dalla definizione di limite $\lim_{x \to \alpha} f(x) = \beta$ si ha

$$\forall \mathcal{U}(\beta) \; \exists \mathcal{U}(\alpha)(\; dipendente \; da \; \mathcal{U}(\beta)) : \forall x \in \mathcal{U}(\alpha) \cap D \setminus \{\alpha\} \Rightarrow f(x) \in \mathcal{U}(\beta),$$

e questa implica

$$\forall \mathcal{U}(\beta)\ \exists \mathcal{U}(\alpha) : \forall x \in \mathcal{U}(\alpha) \cap C \setminus \{\alpha\} \Rightarrow f_{|C}(x) = f(x) \in \mathcal{U}(\beta).$$

Questa e' la definizione di

$$\lim_{x \to \alpha} f_{|C}(x) = \beta$$

.

Il viceversa e' giustificato dal limite destro e sinistro.

• Teoremi sui limiti

In questo paragrafo studiamo proprieta' delle funzioni legate al concetto di limite. Inoltre i teoremi considerati riguardano limiti simultanei di piu' funzioni e quelli delle loro relazioni algebriche.

Il primo teorema che consideriamo e' il teorema della unicita' del limite. Questo e' una conseguenza del tipo di funzioni che trattiamo: funzioni ad un solo valore.

Teorema della unicita' del limite.

Sia $y = f(x)$ una funzione definita in D e x_0 un punto di accumulazione di D. Se esiste il limite di $f(x)$ per x tendente a x_0 esso e' unico.

Dimostrazione.

Si ragiona per assurdo ovvero il limite esiste ma non e' unico. Allora dovranno esistere almeno due limiti distinti che denotiamo $L_1 \neq L_2$.

Allora abbiamo

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L_1 \Leftrightarrow\ \forall \mathcal{U}(L_1)\ \exists \mathcal{U}_{L_1}(x_0)(\text{ dipendente da } \mathcal{U}(L_1)) : \forall x \in \mathcal{U}_{L_1}(x_0) \cap D \setminus \{x_0\} \Rightarrow f(x) \in \mathcal{U}(L_1)$$

e

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L_2 \Leftrightarrow\ \forall \mathcal{U}(L_2)\ \exists \mathcal{U}_{L_2}(x_0)(\text{ dipendente da } \mathcal{U}(L_2)) : \forall x \in \mathcal{U}_{L_2}(x_0) \cap D \setminus \{x_0\} \Rightarrow f(x) \in \mathcal{U}(L_2).$$

Insistiamo:

se $x \in \mathcal{U}_{L_1}(x_0)$ allora $f(x) \in \mathcal{U}(L_1)$,

se $x \in \mathcal{U}_{L_2}(x_0)$ allora $f(x) \in \mathcal{U}(L_2)$,

allora

se x appartiene ad entrambi gli intorni di x_0 allora $f(x)$ appartiene ad entrambi gli intorni dei limiti: in formula

$$x \in \mathcal{U}_{L_1}(x_0) \cap \mathcal{U}_{L_2}(x_0) \Rightarrow f(x) \in \mathcal{U}(L_1) \cap \mathcal{U}(L_2).$$

CHIARISSIMO!!!!

Passiamo alla contraddizione:

$L_1 \neq L_2$ quindi e' possibile trovare un intorno $\mathcal{U}(L_1)$ di L_1 ed un intorno $\mathcal{U}(L_2)$ di L_2 disgiunti, privi di punti in comune, ovvero

$$\mathcal{U}(L_1) \cap \mathcal{U}(L_2) = \emptyset.$$

I corrispondenti intorni $\mathcal{U}_{L_1}(x_0)$ e $\mathcal{U}_{L_2}(x_0)$ hanno punti in comune perche' sono intorni dello stesso punto x_0 ovvero

$$\mathcal{U}_{L_1}(x_0) \cap \mathcal{U}_{L_2}(x_0) \neq \emptyset.$$

Allora consideriamo un punto x (esiste quindi esiste $f(x)$) che appartiene all'intersezione, allora abbiamo

$$x \in \mathcal{U}_{L_1}(x_0) \cap \mathcal{U}_{L_2}(x_0) \Rightarrow f(x) \in \mathcal{U}(L_1) \cap \mathcal{U}(L_2) = \emptyset.$$

Abbiamo una contraddizione.

Accertata la unicita' del limite passiamo a considerare l'algebra dei limiti.

I teoremi che ora consideriamo trattano limiti di piu' funzioni contemporaneamente. Questo fatto impone che dovremo considerare i punti x che rendono valide le definizioni di limite simultaneamente, ovvero dovremo considerae punti x che si trovano nella intersezione degli intorni implicati.

- *Teorema del limite della somma*

Siano $y = f(x)$ e $y = g(x)$ funzioni definite in $T \subseteq \mathbb{R}$ e sia $x_0 \in DT$ punto di accumulazione di T. Inoltre esistono finiti

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l_1, \quad \lim_{x \to x_0} g(x) = l_2.$$

Allora esiste il limite della somma $y = f(x) + g(x)$ e si ha:

$$\lim_{x \to x_0} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \to x_0} f(x) + \lim_{x \to x_0} g(x) = l_1 + l_2$$

(il processo di limite si distribuisce su termini della somma).

Dimostrazione.

Consideriamo la definizione metrica di limite.

$\lim_{x \to x_0} f(x) = l_1 \Leftrightarrow$

$$\forall \epsilon > 0 \ \exists \delta_\epsilon^f > 0 : 0 < |x - x_0| < \delta_\epsilon^f \ \textit{con} \ x \in T \Rightarrow |f(x) - l_1| < \epsilon.$$

$\lim_{x \to x_0} g(x) = l_2 \Leftrightarrow$

$$\forall \epsilon > 0 \ \exists \delta_\epsilon^g > 0 : 0 < |x - x_0| < \delta_\epsilon^g \ \textit{con} \ x \in T \Rightarrow |f(x) - l_2| < \epsilon.$$

Insistiamo: Abbiamo ora messo in evidenza con gli apici f, g le definizioni di limite delle funzioni f e g rispettivamente perche' le grandezze dell'una sono diverse da quelle dell'altra.

Uniformiamo le due definizioni. Indichiamo con I^f l'intervallo simmetrico descritto da $|x-x_0| < \delta_\epsilon^f$ e con I^g l'intervallo simmetrico descritto da $|x-x_0| < \delta_\epsilon^g$

allora

se $x \in I^f$ allora vale $|f(x) - l| < \epsilon$;

se $x \in I^g$ allora vale $|g(x) - l| < \epsilon$, .

E' di tutta evidenza che

$$x \in I^f \cap I^g \cap eT \Rightarrow \begin{cases} |f(x) - l_1| & < & \epsilon, \\ |g(x) - l_2| & < & \epsilon, \end{cases} \tag{1}$$

quindi valgono simultaneamente le due disequazioni.

Ricordando la disuguaglianza triangolare, vale

$$\forall x \in I^f \cap I^g \cap T \Rightarrow |(f(x) + g(x)) - (l_1 + l_2)| =$$
$$|(f(x) - l_1) + (g(x) - l_2)| \leq |f(x) - l_1| + |g(x) - l_2| < 2\epsilon.$$

Osservando che la semiampiezza δ_ϵ di $I^f \cap I^g$ simmetrizzato e' il minimo fra δ_ϵ^f e δ_ϵ^g, leggiamo in sequenza quanto e' stato ottenuto

$$\forall \epsilon > 0 \ \exists \delta_\epsilon > 0 : 0 < |x - x_0| < \delta_\epsilon \ \ x \in T \Rightarrow |(f(x) + g(x)) - (l_1 + l_2)| < \epsilon$$

e questa e' la definizione di

$$\lim_{x \to x_0} (f(x) + g(x)) = l_1 + l_2.$$

Il teorema e' dimostrato.

Osservazione: non ha alcuna importanza la presenza di 2 o di qualsiasi fissato numero k; l' arbitrarieta' e' garantita da ϵ. In ogni modo invece di considerare δ_ϵ si sceglie $\delta_{k\epsilon}$ ovvero si considera un intorno piu' piccolo.

Osserviamo che $|f(x) - l| = |-(f(x) - l)| = |(-f(x)) - (-l)$ per cui se $|f(x) - l| < \epsilon$ si ha che $|(-f(x)) - (-l)| < \epsilon$. Allora abbiamo la seguente

(Quando non sorgono equivoci eviteremo di precisare il dominio e che x_0 punto di accumulazione)

- *Proposizione - Se* $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$ *allora* $\lim_{x \to x_0} (-f(x)) = -l$.

  Le due definizioni di limite sono equivalenti.

  L'ipotesi dice che

$\forall \epsilon > 0\ \exists \delta_\epsilon >: 0 < |x - x_0| < \delta_\epsilon\ con\ x \in T \Rightarrow |f(x) - l| < \epsilon \Rightarrow |(-f(x)) - (-l) < \epsilon,$

ovvero la definizione del limite

$\lim_{x\to x_0}(-f(x)) = -l.$

Scrivendo $f(x) - g(x) = f(x) + (-g(x))$, conseguenza dei due ultimi risultati e' il seguente

- *Teorema del limite della differenza - Se esistono finiti*

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = l_1, \quad \lim_{x\to x_0} g(x) = l_2$$

allora

$$\lim_{x\to x_0} (f(x) - g(x)) = l_1 - l_2.$$

Allo scopo di eseguire le operazioni sui limiti quando sono implicati gli infiniti, ci si riferisce alla parziale aritmetica sui simboli $+\infty$, $-\infty$, ∞. Indichiamo con a un qualsiasi reale.

$$-(+\infty) = -\infty,\ -(-\infty) = +\infty,\ \ a + (+\infty) = +\infty,\ \ a + (-\infty) = -\infty,$$

$$(+\infty) + (+\infty) = (+\infty),\ \ (-\infty) + (-\infty) = (-\infty).$$

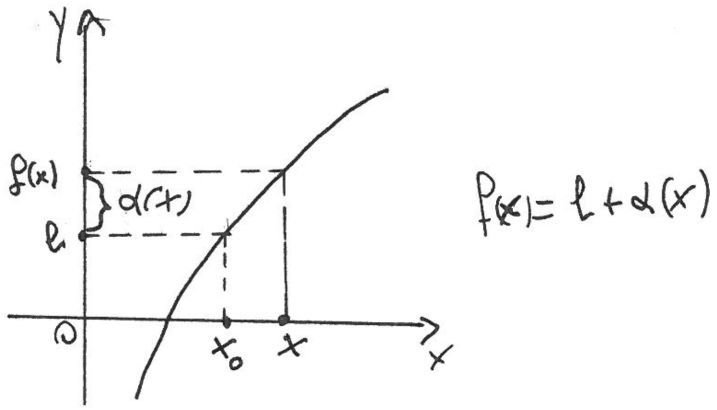
Alle forme $(+\infty) - (+\infty)$, $(-\infty) - (-\infty)$, $\infty - \infty$ non diamo alcun significato e le chiameremo forme di indecisione della somma (differenza).

Con queste convenzioni i teoremi del limite della somma e della differenza possono essere estesi anche ai simboli $(+\infty)$, $(+\infty)$, ∞ ed avremo che il limite della somma e della differenza e' la somma o la differenza dei limiti tranne nei casi di indecisione. Cosi avremo

l_1 e' finito e $l_2 = +\infty$ allora il limite della somma e' $+\infty$ e cosi' via.

- *Scrittura fuori dal segno di limite*

Una interessante conseguenza dei teoremi considerati e' la cosiddetta " scrittura fuori del segno di limite ". Con il concetto di limite abbiamo informazioni sull'andamento della funzione in intorni di x_0. Da questi dati e' possibile ricavare qualche informazione sulla forma della funzione? La scrittura fuori dal segno di limite e' l'inizio di un lungo percorso che attraverso il concetto di continuita', di derivata ed i suoi teoremi si arrivera' a dare una risposta completa ed esauriente a questa domanda con la formula di Taylor, una delle piu' importanti formule dell'analisi matematica. Il primo risultato e' modesto perche' modeste sono le informazioni che abbiamo.



Se e'

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l$$

allora vale

$$1) \quad \lim_{x \to x_0} (f(x) - l) = 0$$

(questa e' una semplice conseguenza del teorema del limite della somma e del fatto che il limite di una costante e' la costante stessa).

Posto allora

$$\alpha(x) = f(x) - l$$

si ha

$$2) \quad f(x) = l + \alpha(x).$$

con

$$\lim_{x \to x_0} \alpha(x) = 0,$$

un infinitesimo (quando il limite e' nullo per x tendente a x_0 diremo che la funzione e' un infinitesimo per x tendente a x_0.)

Per cancellare il processo di limite dalla (1) si deve aggiungere ad l una funzione $\alpha(x)$ di cui, in questo momento, sappiamo solo che e' un infinitesimo.

La (2) viene chiamata *scrittura di $f(x)$ fuori dal segno di limite.* Si osservi il grafico.

Consideriamo altre proprieta' delle funzioni dovute al concetto di limite.

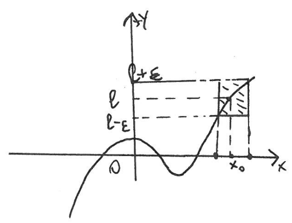
• *Teorema della permanenza del segno*

Se risulta

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l > 0$$

finito (o infinito), allora esiste un intorno di x_0 (escluso x_0) nel quale $f(x) > 0$.

Si osservi con attenzione il grafico.



Dalla definizione metrica di limite si ha:

$$\forall \epsilon > 0 \; \exists \delta_\epsilon > 0 : x \in D \; e \; 0 < |x - x_0| < \delta_\epsilon \Rightarrow |f(x) - l| < \epsilon$$

da cui si ha

$$|f(x) - l| < \epsilon \Leftrightarrow l - \epsilon < f(x) < l + \epsilon.$$

Dalla disuguaglianza a sinistra, scegliendo $\epsilon < l$ ad esempio $\epsilon = \frac{l}{2}$, si ha $f(x) > 0$. (attenzione la particolare scelta di ϵ condiziona l'intorno di x_0). Va da se' che se $l < 0$ allora $f(x) < 0$.

Osserviamo che $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$ pur essendo $\frac{1}{x} > 0$ per $x > 0$.

Questo esempio ci induce a considerare il teorema inverso della permanenza del segno nella seguente forma.

• *Teorema inverso della permanenza del segno.*

Se $f(x) \geq 0$ e $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$ allora $l \geq 0$.

In questo teorema abbiamo incluso l'uguale. Essendo un teorema inverso lo dimostriamo per assurdo. Supponiamo non vera la tesi, allora dalla proprieta' di tricotomia dei numeri reali deve essere $l < 0$. Il teorema della permanenza del segno impone $f(x) < 0$, localmente. Questa e' una contraddizione.

Da questi teoremi si ricava la proprieta' di monotonia del processo di limite: se $f(x) \geq g(x)$ e

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l_1, \quad \lim_{x \to x_0} g(x) = l_2$$

allora $l_1 \geq l_2$.

In forma espressiva

$$f(x) \geq g(x) \Rightarrow \lim_{x \to x_0} f(x) \geq \lim_{x \to x_0} g(x),$$

Il processo di limite conserva l'ordine.

La dimostrazione e' immediata. Si consideri $y = F(x) = f(x) - g(x) \geq 0$ e dal teorema inverso della permaneza del segno si ha $l_1 - l_2 \geq 0$ da cui l'asserto.

- *Teorema della locale limitatezza*

Se una funzione ha un limite finito per x tendente a x_0, allora esiste un intorno di x_0 (privato di x_0) dove la f e' limitata.

Dalla definizione di limite, si ha

$$\forall \epsilon > 0 \; \exists \delta_\epsilon > 0 : x \in D \setminus \{x_0\} \; e \; 0 < |x - x_0| < \delta_\epsilon \Rightarrow |f(x) - l| < \epsilon \Downarrow$$

$$l - \epsilon < f(x) < l + \epsilon.$$

scegliendo un opportuno ϵ, ad esempio 1, si ha in corrispondenza un opportuno intorno di x_0 di semiampiezza δ_1 in cui

$$l - 1 < f(x) < l + 1.$$

Quindi e' limitata

Se la funzione e' definita in x_0, $f(x_0)$ e' finito e quindi la funzione e' limitata in tutto l'imtormo.

- *Teorema del limite del modulo*

Se risulta

$$lim_{x \to x_0} f(x) = l$$

finito, allora

$$lim_{x \to x_0} |f(x)| = |l|.$$

Dalla disuguaglianza triangolare si ha

$$||f(x)| - |l|| \leq |f(x) - l|$$

per cui $|f(x) - l| < \epsilon \Rightarrow ||f(x)| - |l|| < \epsilon$ (con le stesse "x"). Per ipotesi abbiamo $|f(x) - l| < \epsilon$

Riprendendo la definizione di limite di $f(x)$ considerando tutte le x che rendono valida la definizione di limite di $f(x)$ abbiamo

$$\forall \epsilon > 0 \; \exists \delta_\epsilon > 0 : x \in D \setminus \{x_0\} \; e \; 0 < |x - x_0| < \delta_\epsilon \Rightarrow |f(x) - l| < \epsilon \Rightarrow ||f(x)| - |l|| < \epsilon$$

quindi

$$lim_{x \to x_0} f(x) = l \Rightarrow lim_{x \to x_0} |f(x)| = |l|.$$

da cui l'asserto.

Da questa osservazione otteniamo la limitatezza scritta con il modulo : $|f(x)| < |l| + 1$.

• Proposizione

Siano $y = f(x)$ una funzione limitata in un intorno di x_0 e $y = g(x)$ infinitesima per $x \to x_0$ ovvero

$$lim_{x \to x_0} g(x) = 0.$$

Allora

$$lim_{x \to x_0} f(x)g(x) = 0.$$

La limitatezza si scrive $|f(x)| \leq k$ per qualche numero positivo k. Il limite nullo di $g(x)$ e' espresso dalla disequazione $|g(x)| < \epsilon$. Allora in un intorno di x_0 si ha

$$|f(x)g(x)| = |f(x)||g(x)| < k\epsilon.$$

Ne consegue che $f(x)g(x)$ e' un infinitesimo per $x \to x_0$ oppure

$$lim_{x \to x_0} f(x)g(x) = 0.$$