Numeri Interi Relativi

Nel paragrafo precedente abbiamo introdotto i numeri naturali e le operazioni con le rispettive proprieta'. Questa costruzione specifica cio' che si deve intendere per sistema numerico e ad essa ci riferiremo ogni qualvolta vogliamo trattare con una struttura numerica. Senza inoltrarci nella definizione di numero possiamo, comunque, pensare il numero naturale in modo operativo e identificarlo quando lo consideriamo in un sistema numerico ove sono possibili, illimitatamente, le operazioni di somma e prodotto, mentre le operazioni inverse, differenza e divisione, sono parzialmente possibili.

La risoluzione dell'esistenza illimitata delle operazioni inverse portera' alla costruzione dei numeri interi e dei numeri razionali relativi.

Penseremo gli interi relativi come il sistema numerico laddove sono possibili illimitatamente le operazioni di somma, sottrazione e moltiplicazione; penseremo i numeri razionali relativi come il sistema numerico ove sono possibili, illimitatamente, le quattro operazioni razionali: la somma, la sottrazione, la moltiplicazione e la divisione.

Che cosa manca ai numeri naturali per poter eseguire la differenza senza problemi? Manca l'**opposto**, ovvero dato $a \neq 0 \in N$ non esiste un numero naturale $\bar{a}$ (opposto) tale che $a + \bar{a} = 0$.

L'esistenza dell'opposto sara' la vera novita' dei numeri interi rispetto ai numeri naturali.

Dunque, l'insieme dei naturali necessita di un ampliamento e di una struttura numerica piu' ricca.

In letteratura ci sono diversi modi di estendere i numeri naturali: si specifica una rappresentazione su cui definire le operazioni.

Useremo la rappresentazione degli interi come coppie formate da numeri naturali e segni; la forma ordinaria dei numeri interi che ci e' piu' familiare.

I numeri interi, dunque, sono:

$$\mathrm{Z} = \{\pm n\} = \{... - 3, -2, -1, 0, +1, +2, +3, ...\},$$

ovvero sono i vecchi numeri naturali preceduti da un segno.

(Per semplicita' abbiamo detto numeri ma, per il momento, sono solo oggetti di un insieme; diverranno numeri quando saranno immersi in una struttura numerica.)

Si osserva che allo zero non viene assegnato alcun segno. I numeri con segno $+$ vengono detti positivi e quelli col segno $-$ sono detti negativi. Infine,

i numeri sono presentati in modo ordinato nel senso che uno precede l'altro in relazione al segno ed alla parte aritmetica come indicato nell'allineamento sopra scritto.
Qualche nozione.
Dato un numero intero a, chiameremo parte aritmetica o valore assoluto di a, e lo indicheremo $|a|$, il numero senza il segno ovvero solo la sua parte naturale. Esempi : per $a = -2$ si ha $|a| = 2$; per $a = +3$ si ha $|a| = 3$.

I numeri interi con lo stesso segno sono detti **concordi** e quelli con segno diverso sono detti **discordi**.

Nel costruire una aritmetica su Z si deve, quindi, operare su due enti: il numero naturale ed il segno.

Come e' evidente dalla rappresentazione, in questo lavoro ci faremo guidare dall'empirico principio della massima economia di pensiero che si estrinseca nella conservazione di quanto e' stato costruito precedentemente.

I matematici chiamano questo atteggiamento " il princpio della permanenza delle proprieta' formali ".

ARITMETICA DEGLI INTERI RELATIVI

Una volta che abbiamo gli oggetti su cui operare, definiamo, dunque, le operazioni (binarie) di somma e prodotto e le relative inverse:

SOMMA

Dati due numeri $a, b \in$ Z, chiameremo somma di a con b un terzo numero $c \in$ Z, e lo indicheremo $c = a + b$, cosi costruito:

1. se a, b sono concordi allora c e' concorde ad a (o b) ed ha parte aritmetica la somma delle parti aritmetiche di a e b . Quindi $c =$ (segno di a o b)$(|a| + |b|) \in$ Z.

2. se a e b sono discordi allora il segno di c e' quello del numero con parte aritmetica maggiore e la sua parte aritmetica e' data dalla differenza fra la parte aritmetica maggiore e la parte aritmetica minore: ad esempio, se $|a| > |b|$ si ha $c = (\textit{segno di } a)(|a| - |b|)$. Osserviamo che l'operazione di differenza e' fra numeri naturali.

3. se $b = 0$ allora $c = a + 0 = a$ (0 e' l'elemento neutro rispetto alla somma).

Nella scrittura della somma, a e b vengono chiamati addendi.

Si osserva che abbiamo utilizzato le operazioni gia' note dei numeri naturali. Inoltre, il segno di c non dipende dalla posizione di a e b nella scrittura della somma. Allora, dalla proprieta' commutativa ed associativa dei naturali, si deduce, immediatamente, per i numeri interi

$$a + b = b + a : \quad \textit{proprieta' commutativa};$$

$$(a + b) + c = a + (b + c) : \quad \textit{proprieta' associativa}.$$

PRODOTTO

Dapprima, introduciamo la regola dei segni. La esprimiamo nel seguente modo: $+ \cdot + = - \cdot - = +$ e $+ \cdot - = - \cdot + = -$.

Dati due numeri $a, b \in$ Z, diremo prodotto di a per b un terzo numero $c \in$ Z, che indicheremo $c = a \cdot b$, il numero che ha modulo il prodotto dei moduli di a e b e segno quello ottenuto dalla regola dei segni applicata al segno di a ed al segno di b: $c = (\textit{segno di } a) \cdot (\textit{segno di } b)|a||b|$.

Dalla proprieta' commutativa della regola dei segni e dalla proprieta' commutativa ed associativa dei numeri naturali, si ottieme, immediatamente,

$$a \cdot b = b \cdot a : \quad \textit{proprieta' commutativa},$$

$$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c) : \quad \textit{proprieta' associativa}.$$

Altrettanto immediata e' la proprieta' distributiva del prodotto rispetto alla somma:

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c.$$

E' facile osservare che esiste l'elemento neutro rispetto al prodotto ed e' $+1$; infatti $a \cdot (+1) = a$.

Ora introduciamo la novita' dei numeri interi.

OPPOSTO

Sia $a \in$ Z. Chiameremo opposto di a un numero $\bar{a} \in$ Z tale che

$$a + \bar{a} = 0.$$

Dalla definizione di somma possiamo dimostrare, per costruzione, l'esistenza dell'opposto di ogni numero intero relativo.

" a e $\bar{a}$ devono avere la stessa parte aritmetica ed essere discordi. "

Per cui $\bar{a}$ ha lo stesso modulo di a e segno discorde.

L'opposto di a lo indicheremo $-a$.

L'esistenza dell'opposto ci consente di affermare che nei numeri interi esistera' sempre la differenza.

DIFFERENZA

Ricordiamo la definizione di differenza.

Siano $a, b \in$ Z. Diremo differenza fra a e b un terzo numero $c \in$ Z, tale che

$$a = b + c.$$

Scriveremo $c = a - b$, Si ricorda che nella uguaglianza il primo membro a e' assegnato e nel secondo membro b e' assegnato mentre c e' da determinare. In questo senso la differenza viene chiamata operazione inversa della somma.

La esistenza di c si dimostra per costruzione.

Dalle operazioni sopra definite, possiamo costruire il numero

$$c = a + (-b).$$

((-b) e' l'opposto di b, ovvero $b + (-b) = 0$). Questa forma di c soddisfa l'uguaglianza

$$a = b + c.$$

Infatti

$$b + c = b + a + (-b) = a + b + (-b) = a + 0 = a.$$

In conclusione, il numero c, differenza fra a e b, esiste ed e' $a+(-b) := a-b$.

Nella scrittura $a - b$, a viene chiamato minuendo e b sottraendo.

Prima di passare a considerare l'ordine nei numeri interi cerchiamo di ritrovare in Z i vecchi numeri naturali.

Osserviamo che i numeri interi, con segno positivo, si comportano aritmeticamente come i vecchi numeri naturali N per cui $\mathrm{Z}_+ \cup \{0\}$ e' chiuso rispetto alla somma ed al prodotto (chiuso nel senso che la somma ed il prodotto di numeri positivi sono numeri positivi).

Consideriamo l'applicazione :

$+m \mapsto n$, suriettiva da $Z_+ \cup \{0\}$ a N; essa conserva le operazioni. Infatti, da $+m \mapsto m$ e $+n \mapsto n$ si ha

$$(+m) + (+n) = +(m+n) \mapsto (m+n)$$

;

$$+m \cdot +n = +(m \cdot n) \mapsto m \cdot n.$$

I risultati della somma e del prodotto in N corrispondono ai risultati della somma e del prodotto in $Z + \cup \{0\}$. Quindi $Z_+ \cup \{0\}$ e' una rappresentazione del sistema dei numeri naturali. Per cui, aritmeticamente, i vecchi numeri naturali possono ben identificarsi con i numeri interi con il segno +, compreso lo zero. Per comodita' di scrittura e se cio' non procura confusione, si puo' usare, indifferentemente, la forma m o $+m$ per i numeri naturali.

Passiamo a considerare l'ordine in Z.

ORDINE

Per ordinare un sistema numerico F in cui esiste l'opposto, si seleziona un suo sottoinsieme H, chiuso rispetto alle operazioni di somma e di prodotto, e se a non appartiene ad H allora $-a \in H$. E' manifesto che in Z un tale insieme e' $Z_+ \cup \{0\}$.

Siano a, b due numeri interi relativi.

Diremo che a e' maggiore o uguale a b, e scriviamo $a \geq b$, se $a - b \in Z_+ \cup \{0\}$.

Dunque ogni numero positivo e' maggiore di 0 ed ogni numero negativo e' minore di 0.

Valgono le seguenti proprieta'.

1) $a \geq a$ proprieta' riflessiva;

2) se $a \geq b$ e $b \geq a$ allora $a = b$ proprieta' antisimmetrica;

3) se $a \geq b$ e $b \geq c$ allora $a \geq c$ proprieta' transitiva.

4) Tricotomia

Per ogni $a, b \in Z$ vale una sola delle seguenti relazioni:

$$a > b;\ a < b,\ a = b.$$

5) Monotonia

se $a \geq b$ allora $a + c \geq b + c$ per ogni c;

e

se $a > b$ allora $ca > cb$ se e soltanto se $c > 0$;
ovvero, se $a - b > 0$ allora $c(a - b) = ca - cb > 0$ se e soltanto se $c > 0$, dalla regola dei segni. (Nello svolgimento degli esercizi si faccia attenzione a questa proprieta')

4) Cancellazione

Dalla proprieta' di monotonia, si deduce

se $a + c = b + c$ allora $a = b$ per ogni c;

e

se $ac = bc$ allora $a = b$ per ogni $c \neq 0$.
Ed infine continua a valere la legge di annullamento del prodotto gia' considerato per i naturali.
Inoltre, usando la proprieta' di cancellazione, si dimostra l'unicita' dell'opposto, dell'elemento neutro rispetto alla somma ed al prodotto.
Per quanto riguarda la divisione fra interi non c'e' nulla di nuovo rispetto ai naturali tranne l'osservazione che il segno di $a : b$ si ricava dalla regola $+ : + = - : - = +$ ed $- : + = + : - = -$. conseguenza della regola dei segni
Questa operazione non trova completa sistemazione in Z. Per risolvere questo problema dobbiamo "arricchire" la struttura dei numeri interi e questo conduce ai numeri razionali.

Osservazione:

La regola dei segni e' imposta dalla proprieta' distributiva del prodotto rispetto alla somma (a questa proprieta' non si vuole rinunciare).
Ad esempio, si ha:

1) Il prodotto di a per l'opposto di b e' uguale al prodotto di b per l'opposto di a ed anche all'opposto di $a \cdot b$, in formule

$$a \cdot (-b) = (-a) \cdot b = -(a \cdot b).$$

Da questa proprieta' si deduce la regola piu' per meno uguale a meno.

Dimostriamola. Osserviamo che

$$a \cdot (-b) + a \cdot b + (-a) \cdot b = a \cdot ((-b) + b) + (-a) \cdot b = a \cdot 0 + (-a) \cdot b = (-a) \cdot b,$$

ed

$$a \cdot (-b) + a \cdot b + (-a) \cdot b = a \cdot (-b) + ((-a) + a) \cdot b = a \cdot (-b) + 0 \cdot b = a \cdot (-b),$$

per cui

$$a \cdot (-b) = (-a) \cdot b.$$

Inoltre

$$a \cdot (-b) + a \cdot b = a \cdot ((-b) + b) = 0,$$

onde

$$-(a \cdot b) = a \cdot (-b).$$

La proprieta' e' dimostrata.

2) Il prodotto dell'opposto di a per l'opposto di b e' uguale al prodotto di a per b ovvero

$$(-a) \cdot (-b) = a \cdot b \quad \textit{la regola meno per meno e'piu'}.$$

Infatti si ha

$$(-a) \cdot (-b) + a \cdot (-b) = ((-a) + a) \cdot (-b) = 0,$$

e

$$a \cdot b + a \cdot (-b) = a \cdot (b + (-b)) = 0,$$

e quindi

$$(-a) \cdot (-b) + a \cdot (-b) = a \cdot b + a \cdot (-b)$$

dalla proprieta' di cancellazione si ottiene

$$a \cdot b = (-a) \cdot (-b).$$

In modo analogo si dimostrano le altre regole..