Continuita'

Premessa

Il concetto di limite studia il comportamento di una funzione in intorni di un punto x_0 di accumulazione del dominio della funzione senza considerare il valore della funzione in tale punto o che il punto appartenga al dominio. Ora completiamo la definizione di limite considerando anche il punto x_0 ed il valore che la funzione assume in esso. Si studia, quindi, la relazione che intercorre tra il valore della funzione in x_0 ed il suo comportamento in intorni di x_0. Funzioni che introdurremo saranno chiamate continue. Daremo diverse definizioni, equivalenti, di continuita' . Esse esprimono in modi diversi il carattere topologico del concetto di continuita'.

Concetto di Continuita'

Sia $y = f(x)$ definita in D e $x_0 \in D$.

• 1) *Diremo che $f(x)$ e' continua in x_0 quando :*

1. *se x_0 e' un punto isolato diremo, per definizione, che la funzione e' continua in x_0.*
2. *Se x_0 e' punto di accumulazione di D allora diremo che la funzione f e' continua in x_0 quando esiste il limite di $f(x)$ per x tendente ad x_0 e tale limite e' $f(x_0)$, ovvero*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) = f(\lim_{x \to x_0} x).$$

Osserviamo che, nota la funzione in un punto isolato x_0, essa e' nota in suoi opportuni intorni. Quindi e' ragionevole dire che essa e' continua in punti isolati. Nel secondo caso e' opportuno notare lo scambio tra il simbolo di funzione ed il processo di limite. Questa e'una utile caratteristica delle funzioni continue.

• 2) $(\epsilon, \delta_\epsilon)$ - Diremo che $f(x)$ e' continua in x_0 se vale

$$\forall \epsilon > 0 \; \exists \delta_\epsilon > 0 : \; \textit{per } x \in D \textit{ e } 0 \leq |x - x_0| < \delta_\epsilon \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \epsilon.$$

Si osservi $\leq$; nella definizione di limite si usa $<$. Questa e' la differenza sostanziale tra la definizione di limite e quella di continuita'. L' uguale ci permette di assegnare ad x il valore x_0, inoltre, x_0 puo' essere anche un punto isolato. Dunque se x_0 e' punto isolato abbiamo il punto (1.) della definizione (1); se e' punto di accumulazione allora abbiamo la classica definizione di limite.

•) 3) $(x_n \to x_0)$ - *Diremo che $f(x)$ e ' continua in x_0 se per ogni successione $\{x_n\} \subset D$ convergente a x_0 vale*

$$\lim_{n \to \infty} f(x_n) = f(lim_{n \to \infty} x_n) = f(x_0).$$

• 4) (topologica generale) *Diremo che $f(x)$ e ' continua in x_0 se*

$$\forall \mathcal{U}(f(x_0)) \; \exists \mathcal{U}(x_0)(\textit{ in generale dipendente da } \mathcal{U}(f(x_0)) : \; \textit{per } x \in \mathcal{U}(x_0) \Rightarrow f(x) \in \mathcal{U}(f(x_0)).$$

Osserviamo che x_0 non e' escluso. Se $f(x)$ e' continua in tutti i punti di D si dice che e' continua in D. Se D e' un intervallo $[a, b]$, negli estremi si parla di continuita' sinistra e continuita' destra.

• **Algebra delle funzioni continue**

Dai teoremi sui limiti ne consegue che:

1. Teorema della continuita' della somma o differenza:

   Siano $y = f(x)$, $y = g(x)$ definite in D e continue in $x_0 \in D$ (punto di accumulazione). Allora $y = F(x) = f(x) \pm g(x)$ e' continua in x_0.

   Infatti, dai teoremi sui limiti, $F(x) = f(x) \pm g(x) \to f(x_0) \pm g(x_0) = F(x_0)$ per $x \to x_0$.

2. Teorema della continuita' del prodotto:

   Siano $y = f(x)$, $y = g(x)$ definite in D e continue in $x_0 \in D$ (punto di accumulazione). Allora $y = F(x) = f(x)g(x)$ e' continua in x_0.

   Infatti, dai teoremi sui limiti, $F(x) = f(x)g(x) \to f(x_0)g(x_0) = F(x_0)$ per $x \to x_0$.

3. Teorema della continuita' del rapporto:

   Siano $y = f(x)$, $y = g(x)$ definite in D e continue in $x_0 \in D$ (punto di accumulazione) con $g(x_0) \neq 0$. Allora $y = F(x) = f(x)/g(x)$ e' continua in x_0.

   Infatti, dai teoremi sui limiti, $F(x) = f(x)/g(x) \to f(x_0)/g(x_0) = F(x_0)$ per $x \to x_0$.

4. Teorema della continuita' del modulo:

   Sia $y = f(x)$ definita in D e continua in $x_0 \in D$ (punto di accumulazione). Allora $y = F(x) = |f(x)|$ e' continua in x_0.

   Infatti, dai teoremi sui limiti, $F(x) = |f(x)| \to |f(x_0)| = F(x_0)$ per $x \to x_0$.

Modi di scrivere la continuita': 1)$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0) \Leftrightarrow) \lim_{x\to x_0}(f(x)-f(x_0)) = 0 \Leftrightarrow \lim_{h\to x_0} f(x_0+h) = f(x_0)$, con $h = x - x_0$. h viene detto incremento di x
Esempi di funzioni continue

1. La funzione costante $y = f(x) = c$ e' continua in ogni punto. Sappiamo che il limite di una costante e' la costante stessa, infatti $f(x) - f(x_0) = c - c = 0$.

   Le costanti sono funzioni continue

2. La funzione $y = f(x) = x$ (definita in $\mathbb{R}$) e' continua in ogni punto x_0 del dominio. Infatti la relazione $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$ determina un intorno di x_0 del tipo $|x - x_0| < \delta_\epsilon$. Ovvio, poiche' i valori di x sono gli stessi di $f(x)$ quindi ad intorni di $f(x_0)$ corrispondono intorni di x_0 di uguale ampiezza.

   Dall'algebra delle funzioni continue possiamo affermare che le funzioni:

   $$y = cx^n,\ y = P_n(x) = a_0 + a_1x_1 + ... + a_nx^n\ (polinomio\ di\ grado\ n),$$

   $$f(x) = P_n(x)/Q_n(x)(\ funzioni\ razionali\ fratte\ con\ P_n(x), Q_n(x)\ polinomi\ di\ grado\ n, m\ rispettivamente$$

   sono funzioni continue.

3. Le funzioni trigonometriche sono continue. Dimostriamolo per $y = senx$.

   Ricordiamo che per $h > 0$ si ha $0 < senh < h$ dal teorema del confronto $senh \to 0$ per $h \to 0$; dal limite fondametale $senh/h \to 0$ si ha $cosh \to 1$ per $h \to 0$.

   Scriviamo $x = x_0 + h$ ove $h \to 0$ per $x \to 0$ ed abbiamo

   $senx - senx_0 = sen(x_0+h) - senx_0 = senx_0cosh + senhcosx_0 - senx_0 = senx_0(cosh-1) + senhcosx_0 \to 0$

per $h \to 0$ perche' ogni termine ha un fattore infinitesimo per $h \to 0$ e l'altro limitato. Dalla scrittura fuori dal segno di limite si ha

$$senx = senx_0 + \alpha(x, x_0),\ \alpha(x, x_0) \to 0,\ se\ x \to x_0$$

da cui

$$lim_{x\to x_0} senx = senx_0.$$

4. $y = a^x$ con $a > 0$ e' una funzione continua in ogni punto $x_0 \in \mathbb{R}$.

   Come al soluto scriviamo $x = x_0 + h$ e valutiamo

$$a^x - a^{x_0} = a^{x_0+h} - a^{x_0} = a^{x_0}(a^h - 1).$$

   Basta mostrare che $(a^h - 1)$ e' un infinitesimo, ovvero $\lim_{h\to 0} a^h = 1$.

   Verifichiamolo mediante la definizione. Scegliamo $0 < \epsilon < 1$ e mostriamo che $|a^h - 1| < \epsilon$ per h appartenente ad un intorno di 0.

   Risolviamo la disequazione:

$$|a^h - 1| < \epsilon \Leftrightarrow -\epsilon < a^h - 1 < \epsilon \Leftrightarrow 1 - \epsilon < a^h < 1 + \epsilon \Leftrightarrow$$
$$log_a(1 - \epsilon) < h < log_a(1 + \epsilon).$$

   Questo e' un intorno dello zero poiche' $log_a(1 + \epsilon)$ e' positivo e $log_a(1 - \epsilon)$ e' negativo. Quindi la disequazione e' vera in un intorno di 0. Non e' un intorno simmetrico di 0. Per simmetrizzarlo basta prendere come semiampiezza $\delta_\epsilon) = min(log_a(1 + \epsilon), -log_a(1 - \epsilon))$ allora l'intorno simmetrico trovato dello zero e' $|h| < log_a(1 + \epsilon)$ ove vale $|a^h - 1| < \epsilon$.

• Punti di discontinuita'

I punti del dominio in cui una funzione non e' continua sono detti punti di discontinuita'. Piu' precisamente, sia $y = f(x)$ un funzione definita in D.

Diremo che $x_0 \in D \cap \bar{D}$ e' punto di discontinuita' quando:

$$\begin{cases} \nexists lim_{x\to x_0} f(x),\ oppure \\ \exists \lim_{x\to x_0} f(x) \neq f(x_0). \end{cases}$$

Abuso: La definizione di discontinuita' richiede che la funzione sia definita in x_0. Per tradizione e' invalso l'uso di accettare anche come punti di discontinuita' punti di accumulazione di D non in D : in generale quale punto di discontinuita' si considera $x \in \bar{D}$. Precisato questo si evitano equivoci. E poi tale abuso e' espressivo ed e' in linea col fatto che, nei casi di non continuita', nulla cambia se la funzione sia definita o no in x_0 come ora preciseremo.

• *Classificazione dei punti di discontinuita'*

1. Diremo che $f(x)$ presenta in $x_0 \in \bar{D}(\cap D)$ discontinuita' di I specie quando

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) \neq \lim_{x\to x_0^+} f(x).$$

   I limiti sono finiti.

   La differenza fra il limite destro e sinistro e' detto salto della funzione relativo al punto x_0.

2. Diremo che $f(x)$ presenta in $x_0 \in \bar{D}(\cap D)$ una discontinuita' di II specie se almeno uno dei due limiti $\lim_{x\to x_0^\pm} f(x)$ o non esiste o e' infinito di segno qualsiasi;

3. Diremo che $f(x)$ presenta in $x_0 \in \bar{D}(\cap D)$ discontinuita' di III specie quando

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x) \neq f(x_0).$$

I limiti sono finiti. E' detta eliminabile poiche' possiamo modificare la funzione nel solo punto x_0 per renderla continua. Basta porre $f(x_0)$ uguale al valore del limite.

Quanto stabilito sopra possiamo restringerlo ai limiti destro e sinistro.

1. Diremo che $f(x)$ e' continua in x_0 dalla sinistra (dalla destra) se

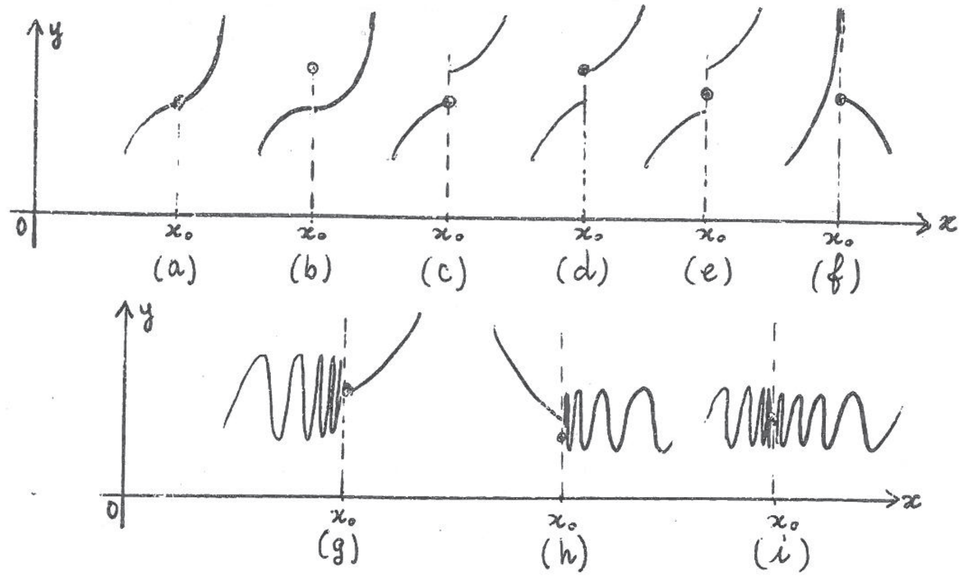
$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0) \;\; (\lim_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)).$$

2. Diremo che $f(x)$ presenta una discontinuita' eliminabile dalla sinistra (dalla destra) se il limite destro (sinistro) esiste finito.

3. Diremo che $f(x)$ presenta in x_0 discontinuita' di I specie dalla sinistra (dalla destra) se il limite sinistro (destro) e' infinito.

4. Diremo che $f(x)$ presenta in x_0 discontinuita' di II specie dalla sinistra (dalla destra) se il limite sinistro (destro) non esiste.

   Sotto sono riportati alcuni esempi di discontinuita'. In ogni grafico e' stata definita la funzione in x_0. Lo studente valuti il tipo di discontinuita' ed il ruolo assunto della funzione in x_0.



Esempi: Determinare il tipo di discontinuita' delle seguenti funzioni

1. $y = \frac{1}{x}$ in generale si cercano i punti in cui la funzione non e' definita per cui si possa eseguire il limite destro o sinistro: nel nostro caso il punto di discontinuita' e' $x = 0$. Si ha
$$\lim_{x\to 0^{\pm}} \frac{1}{x} = \pm\infty.$$
$x = 0$ e' punto di discontinuita' di seconda specie.

2. $y = e^{1/x}$. Il punto di discontinuita' e' $x = 0$.
$$\lim_{x\to 0^{-}} e^{1/x} = 0 \quad \lim_{x\to 0^{+}} e^{1/x} = +\infty.$$
$x = 0$ e' punto di discontinuita' di seconda specie.

3. $y = xsen1/x$. Il punto di discontinuita' e' $x = 0$.
$$\lim_{x\to 0^{\pm}} xsen1/x = 0.$$
$x = 0$ e' punto di discontinuita' di terza specie.

4. $y = \frac{x}{|x|}$. Il punto di discontinuita' e' $x = 0$.
$$\lim_{x\to 0^{\pm}} \frac{x}{|x|} = \pm 1.$$
$x = 0$ e' punto di discontinuita' di prima specie.

5. $y = \frac{sen(x-1)}{|x-1|}$. Il punto di discontinuita' e' $x = 1$.
$$\lim_{x\to 1^{\pm}} \frac{sen(x-1)}{|x-1|} = \lim_{x\to 1^{\pm}} \frac{sen(x-1)}{x-1}\frac{x-1}{|x-1|} = \pm 1$$
$x = 1$ e' punto di discontinuita' di prima specie.

Abbiamo gia' notato che le funzioni monotone hanno un particolare comportamento rispetto al processo di limite. E' interessante rilevare che esse hanno solo discontinuita' di prima specie e possiamo anche " contarle ": esse sono una infinita' numerabile cioe' in corrispondenza con i numeri naturali.

Teorema - *Ogni funzione definita in un intervallo I ed ivi monotona possiede al piu' una infinita' numerabile di punti di discontinuita' ed ognuno di essi e' di prima specie.*

Dal terzo teorema di monotonia sappiamo che le funzioni monotone presentano discontinuita' di prima specie. Sia x_0 un tale punto e, per semplicita', consideriamo una funzione crescente . $I(x_0) = (l_1, l_2)$ e' l' intervallo salto della funzione sull' asse delle ordinate. $I(x_0)$ contiene almeno un punto razionale dalla proprieta' di densita' dei razionali. Cosi' gli intervalli salto per i punti di discontinuita' sono a due a due disgiunti e contengono almeno un numero razionale. Allora la totalita' degli intervalli salto e' al piu' numerabile (cioe' al piu' in corrispondenza biunivoca con i razionali).
(Che i salti possibili sono una infinita' numerabile ossia che rappresentano un insieme che puo' essere posto in corrispondenza biunivoca con l' insieme $\mathbb{N}$, si trae osservando che se consideriamo i salti maggiori di $1/n$ con $n \in \mathbb{N}$, essi sono un numero finito per ogni valore che noi diamo ad n dal momento che l'immagine e' un insieme limitato. Siccome $\mathbb{N}$ stesso e' numerabile ne consegue che globalmente avremo una infinita' numerabile di discontinuita' di I specie o di salto.)

Continuita' uniforme

Quando abbiamo definito la continuita' in un punto x_0 abbiamo commeso una imprecisione. A quel tempo era quasi necessaria per non appesantire la notazione. La definizione completa per punti di accumulazione del dominio e ' la seguente. Sia $y = f(x)$ definita in T e sia $x_0 \in T \cap DT$. Diremo che $f(x)$ e' continua in x_0 quando per ogni $\epsilon > 0$ esiste in corrispondenza un δ_{ϵ,x_0} tale che per ogni $x \in T$ e $0 \leq |x - x_0| < \delta_{\epsilon,x_0}$ si ha $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$.

Il numero δ non solo dipende da ϵ ma anche dalla posizione del punto x_0.

E' facile convicersi di questo fatto. Si puo' saggiare la continuita' del logaritmo in ogni punto $x > 0$: piu' x e' lontano dall'origine piu' δ e' grande, piu' x e' vicino all'origine piu' δ e' piccolo. Se si segue graficamente la definizione tutto questo appare chiaro. Non solo, si capisce che la presenza dell'asintoto verticale e' la causa dell' annullarsi del δ quando x tende a zero. Questo fatto ci impedisce di trovare un δ che vada bene per tutti i punti x_0, ovvero $\delta = inf_{x_0 \in T} \delta_{x_0,\epsilon} > 0$.

La domanda che si puo' porre e' per quali funzioni esiste un $\delta > 0$ dipendente da ϵ e non dal punto in cui si saggia la continuita', ovvero per quali funzioni il concetto di continuita' e' uniforme rispetto al punto. Una semplice osservazione e' questa se facciamo il minimo rispetto ad numero finito di punti di tipo x_0 ovvero rispetto all' insieme di punti $\{x_0^1, x_0^2, ..., x_0^n\}$ allora il risultato e' immediato poiche' il minimo sara' uno dei $\delta_{x_0^i,\epsilon}$ per $i = 1, 2, ..., n$. Se siamo in presenza di infiniti il risultato non e' cosi' certo. In sostanza e' questo il concetto alla base di una condizione sufficiente per determinare δ uniforme. L'esempio del logaritmo $y = logx$ e di $y = senx^2$ ci inducono a pensare che la presenza di asintoti verticali o di un eccessivo carattere oscillatorio all'infinito che produce un effetto verticalizzante del grafico della funzione inibiscono la uniformita' della continuita'.

Valutiamo la continuita' di $y = logx$: $(x_0 > 0)$ ovvero

$$|logx - logx_0| < \epsilon \Leftrightarrow -\epsilon < log\frac{x}{x_0} < \epsilon \Leftrightarrow$$

$$e^{-\epsilon}x_0 < x < x_0 e^{\epsilon}.$$

Un intorno di x_0 che dipende da ϵ e da x_0. L'ampiezza di tale intorno tende a zero per x_0 tendente a zero. Come abbiamo gia' osservato.

Un altro esempio semplice e' dato dalla funzione $y = x$ definita in $\mathbb{R}$. Nella verifica fatta sulla sua continuita' abbiamo rilevato che per ogni punto x_0, δ e' sempre lo stesso ed e' uguale ad ϵ. In questo caso non ci sono asintoti verticali ne' esiste carattere oscillante della funzione.

Prima diamo la definizione di continuita' uniforme e dopo la sostanziamo.

Sia $y = f(x)$ definita e continua in un dominio T. Diremo che $f(x)$ e' uniformemente continua in T se: per ogni $\epsilon > 0$ esiste in corrispondenza un δ_ϵ (dipendente solo da ϵ) tale per ogni coppia di punti $x', x'' \in T$ e $|x' - x''| < \delta_\epsilon$ si ha

$$|f(x') - f(x'')| < \epsilon.$$

Questa e'una nozione di carattere globale.

Una dimostrazione indiretta per l'esistenza della proprieta' e' data dal seguente seguente

Teorema di Heine-Cantor - Ogni funzione definita e continua in un intervallo I chiuso e limitato e' uniformemente continua.

Appare chiaro che le ipotesi fanno si che la funzione non abbia asintoti verticali o comportamento similare. Inoltre, per semplicita', abbiamo considerato un intervallo come dominio.

Si da' una dimostrazione indiretta, ovvero per assurdo. Si rammenta che la negazione di " per ogni" e' "qualche" e viceversa.

Supponiamo la funzione continua ma non uniformemente continua. Quindi $\exists\epsilon_0$ tale che $\forall\delta > 0 \exists$; $x, y \in I : |x - y| \leq \delta$ e $|f(x) - f(y)| > \epsilon$. Questa e' la negazione della continuita' uniforme.

Fissato ϵ si prende (dato che e' arbitrario) $\delta_n = \frac{1}{n}$ $\forall n$ e si prendono $x_n, y_n \in I$ tale che $|x_n - y_n| < \frac{1}{n}$ e $|f(x_n) - f(y_n)| > \epsilon_0$. La successione formata dai punti x_n e' contenuta in I limitato allora dal teorema di Bolzano-Weierstrass esiste una sua sottosuccessione $\{x_{n_k}\}$ convergente a $\bar{x} \in I$ (che e' chiuso). Allora $y_{n_k} \to \bar{x}$ perche' vale

$$0 < |x_{n_k} - y_{n_k}| < \frac{1}{n} \to 0.$$

Inoltre vale

$$|f(x_{n_k}) - f(y_{n_k}| \geq \epsilon_0.$$

Per la continuita' del modulo, passando al limite, si ha

$$0 = |f(\bar{x}) - f(\bar{x})| \geq \epsilon.$$

Una contraddizione.

Proprieta' delle funzioni continue in particolari insiemi

La continuita' non implica, in generale, significativi progressi qualitativi rispetto al concetto di limite. Ma se si considerano particolari insiemi di definizione possiamo dedurre delle rilevanti proprieta' espresse dai seguenti teoremi.

• **Teorema di Weierstrass -** *Sia $y = f(x)$ una funzione definita e continua in un insieme chiuso e limitato (compatto). Allora l'insieme immagine e' chiuso e limitato (compatto) ed ha massimo e minimo.*

Dimostrazione

1) $B = Im\ f$ e' limitato.

Procediamo per assurdo. Supponiamo B illimitato superiormente (per semplicita' di esposizione). Allora in ogni intorno di $+\infty$ cadono punti di B. Quindi esiste una successione di punti $\{y_n\} \subset B$ tale che $y_n \to +\infty$ per $n \to +\infty$. Essendo y_n un punto dell'immagine esso viene assunto dalla funzione, ovvero esiste $x_n \in D$ tale $y_n = f(x_n)$. In questo modo alla successione $\{y_n\}$ corrisponde una successione $\{x_n\} \subset D$, insieme limitato . Dal teorema di Bolzano- Weierstrass esiste un punto di accumulazione

$x_0 \in D$ di tale insieme, ovvero esiste una sottosuccessione $\{x_k\} \subset \{x_n\}$ per cui $x_k \to x_0$ per $k \to +\infty$. Dalla continuita' di f si ha $y_k = f(x_k) \to f(x_0)$ valore finito. Questa e' una contraddizione perche' per ipotesi abbiamo assunto $y_k \to +\infty$ per $k \to +\infty$. (Si ricorda che ogni sottosuccessione convergente ha lo stesso limite della successione globale. Inoltre k dipende da n, per semplicita' abbiamo scritto solo k. Anzi e' modo acquisito di scrivere la sottosuccessione come la successione quando non sorgono equivoci.)

2) $B = Im\ f$ e' chiuso.

Mostriamo che $B = Im\ f$ contiene i propri punti di accumulazione.

Sia $\bar{y}$ punto di accumulazione di B. Mostriamo che $\bar{y} \in B$, ovvero esiste $\bar{x} \in D$ per cui $\bar{y} = f(\bar{x}) \in B$. Come nel punto 1) esiste una successione $\{y_n\} \subset B$ tale che $y_n \to \bar{y}$. Essendo y_n un punto dell'immagine esso viene assunto dalla funzione, ovvero esiste $x_n \in D$ tale $y_n = f(x_n)$. In questo modo si ottiene una successione $\{x_n\} \subset D$ limitata. Dal teorema di Bolzano- Weierstrass esiste un punto di accumulazione $\bar{x} \in D$ di tale insieme, ovvero esiste una sottosuccessione $\{x_k\} \subset \{x_n\}$ per cui $x_k \to \bar{x}$. Dalla continuita' di f si ha $\bar{y} \leftarrow y_k = f(x_k) \to f(\bar{x})$. Dalla unicita' del limite si ha $\bar{y} = f(\bar{x}) \in Im\ f$.

B e' chiuso e limitato.

Negli appunti sulla topologia in $\mathbf{R}$ abbiamo mostrato che ogni insieme chiuso e limitato ha massimo e minimo.

Il teorema e' dimostrato.

Esercizio: Con facili esempi grafici verificare che se viene meno una delle ipotesi del teorema non e' certa la esistenza del masssimo o del minimo.

Un'altro interessente teorema riguarda l'esistenza degli zeri di una funzione, ovvero l' esistenza di punti α in cui $f(\alpha) = 0$. Geometricamente e' la ricerca delle intersezioni del grafico di una funzione con l'asse delle ascisse.

In questo caso dobbiamo considerare ancora piu' particolari domini; non solo chiusi e limitati ma devono essere degli intervalli.

• **Teorema degli zeri**

Sia $y = f(x)$ una funzione definita e continua in un intervallo $[a, b]$ ($a < b \in \mathbf{R}$) chiuso e limitato. Inoltre sia $f(a)f(b) < 0$.

Allora esiste almeno un punto $\alpha \in (a, b)$ (interno all'intervallo) tale che $f(\alpha) = 0$.

Dimostrazione.

Supponiamo $f(a) > 0$ e $f(b) < 0$.

Sia $D^+ = \{x \in [a, b] : f(x) \geq 0\} \subset [a, b]\}$. Non e' vuoto poiche' contiene a.

D^+ e' un insieme limitato. Esiste l'estremo superiore (finito) di D^+ e lo denotiamo α .

Affermiamo che vale $f(\alpha) = 0$.

Se cosi' non fosse, dalla proprieta' di tricotomia dei numeri reali, si dovrebbe avere $f(\alpha) > 0$ oppure $f(\alpha) < 0$.

1) se fosse $f(\alpha) < 0$, dalla continuita' e dal teorema della permanenza del segno, esiste tutto un intorno $\mathcal{U}(\alpha)$ di α (intorno sinistro se $\alpha = b$) in cui la funzione e' negativa. Questo non e' possibile perche' α e' estremo superiore di D^+, ovvero in ogni intorno (sinistro) di α deve esserci almeno un punto $\bar{x}$ tale che $f(\bar{x}) \geq 0$.

Da questo ricaviamo che $\alpha < b$.

2) se fosse $f(\alpha) > 0$, dalla continuita' e dal teorema della permanenza del segno, esiste tutto un intorno (destro se $\alpha = a$) $\mathcal{U}(\alpha)$ di α in cui $f(x)$ e' positiva per cui esiste almeno un punto $\bar{x} > \alpha$ tale che $f(\bar{x}) > 0$, ovvero esiste in D^+ un punto $\bar{x}$ maggiore del suo estremo superiore α. Una contraddizione.

Allora si e' dimostrato che esiste un punto $\alpha \in (a, b)$ tale che $f(\alpha) = 0$. Il punto trovato e' il piu' grande punto ove la funzione si azzera .

Nel caso di funzioni monotone tale punto e' unico.

Nota: Per la dimostrazione della esistenza di uno zero si puo' usare un procedimento costruttivo detto dicotomico o di bisezioni successive, ovvero dividere continuamente in parti uguali gli intervalli in cui sono verificate le ipotesi del teorema fino a quando si raggiunge lo zero della funzione. La costruzione permette di ottenere buone approssimazioni del numero α, Dimostriamo il teorema con tale procedimento per funzioni monotone.

iI procedimento di bisezioni successive porta a considerare successioni di punti. Useremo la seguente convenzione: i punti ove la funzione assume valore positivo li indicheremo a_n ove n funge da contatore, indica il numero di bisezioni effettuate ; i punti ove la funzione assume valore negativo li indicheremo b_n. Assumiamo $f(a) > 0$ e $f(b) < 0$. Inoltre sceglieremo gli intervalli ove sono soddisfatte le ipotesi del teorema.

Iniziamo il procedimento.

Poniamo $a_0 := a$ e $b_0 := b$.

1) Prima suddivisione. Dividiamo in due parti uguali l'intervallo (a_0, b_0) mediante il punto di mezzo $c_0 = \frac{a_0+b_0}{2}$. Otteniamo due intervalli $I_1 = (a_0, c_0)$ e $J_1 = (c_0, b_0)$. Si presentano tre possibilita': $f(c_0) = 0$, in questo caso il teorema e' dimostrato. In caso contrario operiamo la scelta: scegliamo l'intervallo ove sono siddisfatte le ipotesi del teorema. Se $f(c_0) < 0$ consideriamo l'intervallo I_1; se $f(c_0) > 0$ consideriamo l'intervallo J_1. Supponiamo che $f(c_0) < 0$, allora continuiamo il procedimento su I_1. Dopo questa scelta usiamo la notazione $E_1 = (a_1, b_1)$ ove $a_1 = a_0$ e $b_1 = c_0$; con queste notazioni sappiamo che $f(a_1) > 0$ e $f(b_1) < 0$) ed il pedice 1 indica che siamo alla prima suddivisione. Inoltre $b_1 - a_1 = \frac{b-a}{2}$.

2) Seconda suddivisione. Procediamo come al punto (1) per l'intervallo $E_1 = (a_1, b_1)$. Dividiamo in due parti uguali l'intervallo (a_1, b_1) mediante il punto di mezzo $c_1 = \frac{a_1+b_1}{2}$. Otteniamo due intervalli $I_2 = (a_1, c_1)$ e $J_2 = (c_1, b_1)$. Si presentano tre possibilita': $f(c_1) = 0$, in questo caso il teorema e' dimostrato. In caso contrario operiamo la scelta: scegliamo l'intervallo ove sono siddisfatte le ipotesi del teorema. Se $f(c_1) < 0$ consideriamo l'intervallo I_2; se $f(c_1) > 0$ consideriamo l'intervallo J_2. Supponiamo che $f(c_1) > 0$, allora continuiamo il procedimento su J_2. Dopo questa scelta usiamo la notazione $E_2 = (a_2, b_2)$ ove $a_2 = c_1$ e $b_2 = b_1$), con queste notazioni sappiamo che $f(a_2) > 0$ e $f(b_2) < 0$) ed il pedice 2 indica che siamo alla seconda suddivisione. Inoltre $b_2 - a_2 = \frac{b_1-a_1}{2} = \frac{b-a}{2^2}$ e $a_1 \leq a_2$ e $b_2 \geq b_1$. Osserviamo subito che i punti " a" crescono ed punti "b" decrescono.

Dopo n suddivisioni si hanno i seguenti dati: $E_n = (a_n, b_n)$, $f(a_n) > 0$, $f(b_n) < 0$, $b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}$ ed $a = a_0 \leq a_1 \leq ...a_n < b_n \leq b_{n-1} \leq ... \leq b_0 = b$. Dunque procedendo induttivamente, se avviene che la funzione si annulla in un punto c_n allora il teorema e' dimostrato; se cio' non avviene si ottengono due successioni $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ tali che

$$a = a_0 \leq a_1 \leq ... \leq a_n \leq ... < ... \leq b_n \leq b_{n-1} \leq ... \leq b_0 = b.$$

con $f(a_n) > 0$, $f(b_n) < 0$, $b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}$ per ogni $n \geq 0$.

Quindi $\{a_n\}$ e' monotona crescente e limitata da b; $\{b_n\}$ e' monotona decrescente e limitata da a. Dalla continuita', dai teoremi di monotonia e dal teorema inverso della permanenza del segno si ha

$$i) \qquad \lim_{n\to+\infty} a_n = \alpha < b; \ \lim_{n\to+\infty} f(a_n) = f(\alpha) \geq 0.$$

$$ii) \qquad \lim_{n\to+\infty} b_n = \beta > a; \ \lim_{n\to+\infty} f(b_n) = f(\beta) \leq 0.$$

Ora, per costruzione, si ha

$$b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n} \Rightarrow b_n = a_n + \frac{b-a}{2^n} \to \alpha$$

per $n \to +\infty$. Allora (i) e (ii) implicano che $\alpha = \beta$ per cui $f(\alpha) \geq 0$ e $f(\alpha) \leq 0$. L'unico segno compatibile e' "=" quindi

$$f(\alpha) = 0.$$

Il teorema e' dimostrato.

Si osserva che $a_n < \alpha < b_n$. Potremmo considerare a_n o b_n un valore approssimato per difetto o per eccesso di α. L' errore r, per eccesso o per difetto, che si commette e' inferiore a

$$b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}.$$

Si puo' raffinare la stima dell'approssimazione. Per ora e' sufficiente l'informazione considerata.

• **Teorema dei valori intermedi o proprieta' di Darboux**

Sia $y = f(x)$ una funzione definita e continua in un intervallo (a, b) . Siano $x_1, x_2 \in (a, b)$ con $x_1 < x_2$ e $f(x_1) \neq f(x_2)$. Allora $f(x)$ assume in $[x_1, x_2]$ tutti i valori compresi tra $f(x_1)$ e $f(x_2)$; ovvero preso un numero λ compreso fra $f(x_1)$ e $f(x_2)$ esiste un punto $\alpha \in [x_1, x_2]$ tale che $f(\alpha) = \lambda$.

Dimostrazione - Supponiamo $f(x_1) < f(x_2)$ e sia $\lambda \in [f(x_1), f(x_2]$. Ovviamente il teorema vale per λ uguale a $f(x_1)$ o $f(x_2)$. Allora scegliamo $f(x_1) < \lambda < f(x_2)$. Sia $y = F(x) = f(x) - \lambda$ definita in $[x_1, x_2]$.

$F(x)$ e' continua perche' somma di funzioni continue. Inoltre $F(x_1) = f(x_1) - \lambda < 0$ e $F(x_2) = f(x_2) - \lambda > 0$. $F(x)$ soddisfa le ipotesi del teorema degli zeri per cui esiste un punto $\alpha \in [x_1, x_2]$ tale che $F(\alpha) = f(\alpha) - \lambda = 0$. Allora $f(\alpha) = \lambda$ ed il teorema e' dimostrato.

• **Corollario**

Sia $y = f(x)$ una funzione definita e continua in un intervallo $[a, b]$. Allora $f(x)$ assume in $[a, b]$ tutti i valori compresi tra il minimo ed il massimo.

Dal teorema di Weierstrass, f ha massimo M e minimo m. Siano x_m e x_M i punti di massimo e minimo, rispettivamente. Supponendo $x_m < x_M$ e ponendo nella dimostrazione del teorema precedente $x_1 = x_m$ e $x_2 = x_M$ il corollario ne consegue.

Nota: Abbiamo considerato il problema di risolvere l'equazione $f(x) = c$. Abbiamo ottenuto che se c e' compreso fra il minimo e massimo di f l'equazione ha soluzione unica se la funzione e' monotona. Determiniamo condizioni per cui l'equazione abbia soluzione per ogni c reale. Supponiamo che $f(x)$ sia monotona e continua in $\mathbb{R}$, inoltre $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$ allora l'equazione $f(x) = c$ ha soluzione unica per ogni c. Qesta osservazione vale anche quando $f(x)$ e' definita in un intervallo (a, b) con

$\lim_{x\to a^+} f(x) = +\infty$ e $\lim_{x\to b^-} f(x) = -\infty$.

Funzione composta e funzione inversa

Date due funzioni $y = f(x)$ e $y = g(x)$ si definiscono da esse altre funzioni mediante le operazioni algebriche, cosi' si ha: $y = f(x) \pm g(x)$, $y = f(x)g(x)$, $f(x)/g(x)$ etc.

In questo paragrafo consideriamo altre due operazioni per definire funzioni da altre : la composizione e la inversione.

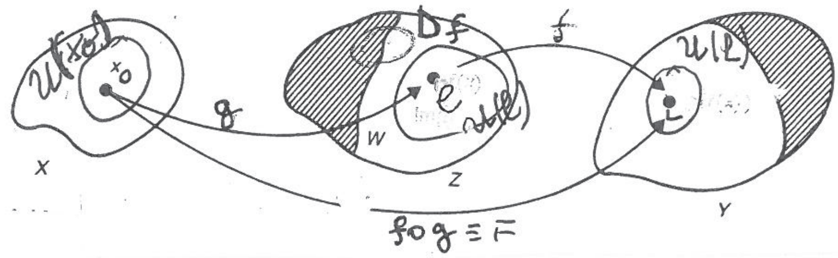
Sia $z = g(x)$ una funzione definita in $D_g \subseteq X$ con codominio Z ed $Im\ g \subseteq Z$:

$$g : D_g \to Z; \quad g : x \mapsto z; \quad Im\ g = \{z : z = g(x), x \in D_g\}.$$

Sia inoltre $y = f(z)$ una funzione definita in $D_f \subseteq Z$ con codominio Y ed $Im\ f \subseteq Y$:

$$g : D_f \to Y; \quad f : z \mapsto y;\ Im\ f = \{y : y = f(z), z \in D_f\}.$$

Mediante queste due funzioni possiamo costruire una funzione che metta in corrispondenza la variabile x con la variabile y, mediante g ed f. A priori non abbiamo una relazioni diretta tra le variabili x, y, ma la otteniano attraverso passaggi intermedi. Osservando il grafico si nota che la connessione fra le funzione



e' possibile se c'e' coincidenza totale o parziale di $Im\ g$ con D_f. In altri termini la f deve aver senso per le z di nome $g(x)$; ancora, se ha senso la restrizione di f a $Im\ g$. Tutto questo e' possibile se $Im\ g \subseteq D_f$. Dunque assumiamo che

$$Im\ g \subseteq D_f.$$

Poniamo $z = g(x)$ in f ed otteniamo

$$y = f(g(x)).$$

Si e' cosi' stabilita una corrispondenza tra x ed y non direttamente ma tramite le funzioni f e g.

• *La finzione F*

$$F : x \mapsto y = f(g(x)), \quad F : D_g \to Y$$

viene chiamata funzione composta di f e g.

Si usa, anche, scrivere $F = f \circ g$ (f composta g) che ricorda l'operazione di prodotto ed $f \circ g(x) = f(g(x)) = F(x)$.

L'operazione che porta dalle due funzioni f e g ad F si dice composizione della funzione f con la funzione g.

Inoltre quando $Im\ g \subseteq f$ si dice che *f e g sono componibili.*

E' palese che la composizione non e' commutativa, in generale; e' facile constatare che vale la proprieta' associativa ovvero possiamo comporre piu' di due funzioni senza curarci dell'ordine di composizione.

Esempi di funzioni composte:

1) $y = sen(senx)$ e' composta da $y = senz$ e da $z = senx$.
2) $y = logcosx$ e' composta da $y = logz$ e da $z = cosx$ con $cosx > 0$
3) $y = \sqrt{logx}$ e' composta da $y = \sqrt{z}$ e da $z = logx > 0$.
Esercizio: trovare le funzioni componenti di $y = |x^2 + 2|$

• Composizione, processo di limite e continuita'

Proposizione *Siano $z = g(x)$ definita in $D_g \subseteq X$ e $y = f(z)$ definita in $D_f \subseteq Z$ e siano componibili ovvero $Im\ g \subseteq D_f$. Inoltre si ha:*

$$\lim_{x \to x_0} g(x) = l,$$

$$\lim_{z \to l} f(z) = L.$$

Allora esiste il limite per $x \to x_0$ della funzione composta F e si ha

$$\lim_{x \to x_0} f(g(x)) = L.$$

La funzione F e' la restrizione di f a $Im\ g$. Se la funzione globale ammette limite anche la sua restrizione ammette limite e i due limiti sono uguali con l punto di accumulazione dell'insieme della restrizione.

Dimostriamo questo risultato esplicitando la definizione di limite. Dalle ipotesi abbiamo

$$\forall \mathcal{U}(l)\ \exists \mathcal{U}(x_0)\ (dipendente\ \ da\ \ \mathcal{U}(l)) : \forall x \in \mathcal{U}(x_0) \cap D_g \setminus \{x_0\} \Rightarrow g(x) \in \mathcal{U}(l)$$

e

$$\forall \mathcal{U}(L)\ \exists \mathcal{U}(l)\ (dipendente\ da\ \ \mathcal{U}(L) : \forall z \in \mathcal{U}(l) \cap D_f \setminus \{l\} \Rightarrow f(z) \in \mathcal{U}(L).$$

Poniamo le due definizioni in opportuna sequenza

$$\forall \mathcal{U}(L)\ (\exists \mathcal{U}(l) \Rightarrow) \exists \mathcal{U}(x_0) : \forall x \in \mathcal{U}(x_0) \cap D_g \setminus \{x_0\} (\Rightarrow g(x) \in \mathcal{U}(l)) e \forall z = g(x) \in \mathcal{U}(l) \cap D_f \setminus \{l\}) \Rightarrow$$

$$f(z)_{z=g(x)} \in \mathcal{U}(L).$$

Cancelliamo i passaggi intermedi racchiusi in parentesi ed abbiamo

$$\forall \mathcal{U}(L)\ \exists \mathcal{U}(x_0) : \forall x \in \mathcal{U}(x_0) \cap D_g \setminus \{x_0\} \Rightarrow f(z)_{z=g(x)} \in \mathcal{U}(L).$$

Questa e' la definizione del

$$\lim_{x \to x_0} f(g(x)) = L.$$

• **Corollario** *Supponiamo che $y = g(x)$ sia continua in D_g e $f(z)$ sia continua in D_f e siano componibili. Allora $y = F(x)$ e' continua in D_g.*

La proposizione dice che

$$\lim_{x \to x_0} f(g(x)) = f(g(x_0)).$$

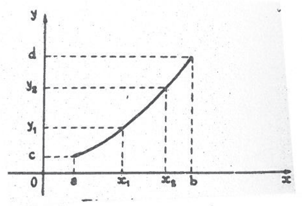
Sia x_0 punto di continuita' di $g(x)$. Allora

$$lim_{x \to x_0} g(x) = g(x_0),\ \ e\ \ lim_{z \to g(x_0)} f(z) = f(g(x_0)).$$

Allora il

$$\lim_{x \to x_0} F(x) = \lim_{x \to x_0} f(g(x)) = f(g(x_0)) = F(x_0).$$

La continuita' di $F(x)$ e' dimostrata.



[h]

Funzione inversa

Ci apprestiamo a definire l'operazione di inversione e la funzione inversa che ne e' l'effetto. E' abitudine consolidata quella di avere il dominio di una funzione come un insieme sull'asse delle ascisse e l'immagine sull'asse delle ordinate. Ora facciamo in modo che la funzione che otteniamo con l'inversione soddisfi queste convenzioni. A tal fine consideriamo una funzione $x = f(y)$ definita in un intervallo $I = (c, d)$ sull'asse delle ordinate con immagine l'intervallo (a, b) (consideriamo intervalli per comodita') e sia ivi iniettiva ovvero $f(y_1) = f(y_2) \Leftrightarrow y_1 = y_2$. Quindi ad ogni $y \in I$ corrisponde una x $(y \to x)$. Ma abbiamo anche la seguente legge

ogni punto $x \in (a, b)$ e' immagine di (proviene da) un punto $y \in (c, d)$; meglio, ad ogni $x \in Im\ f$ viene a corrispondere uno ed un solo valore y tale che $x = f(y)$.

Abbiamo, dunque, x ($\in$ codominio di f) $\to y$ ($\in$ dominio di f).

In questo modo risulta definita una legge che fa passare da x ad y e la denoteremo

$$y = f^{-1}(x)$$

od anche

$$f^{-1} : x \mapsto y \ \ oppure \ \ f^{-1} : Im\ f \to I = (c, d)$$

e viene chiamata *funzione inversa di f*.

Per le funzioni f e f^{-1}, vale : (grafico f^{-1}) $\ni (x, f^{-1}(x)) = (f(y), y) \in$ (grafico di f); nelle due funzioni cambia il ruolo delle variabili: la variabile indipendente nell'una e' variabile dipendente nell'altra e viceversa. Le due funzioni hanno lo stesso grafico nel piano cartesiano $O(x, y)$.

Usando il concetto di composizione di funzioni, la funzione inversa e' caratterizzata dalle seguenti relazioni (identita')

$$f(f^{-1}(x)) = x; \quad f^{-1}(f(y)) = y.$$

Allora

$$f \circ f^{-1} = I_{Im\ f} : x \mapsto x\ funzione\ \ identica\ \ su\ Im\ f.$$

$$f^{-1} \circ f = I_{[c,d]} : y \mapsto y\ funzione\ \ identica\ \ su\ [c, d].$$

Esercizio 1: Mostrare che ogni funzione iniettiva e continua in un intervallo chiuso e limitato e' monotona

.

(Si supponga (per assurdo) che non sia monotona dato che assume almeno una volta tutti i valori compresi fra il minimo ed il massimo allora ...)

Esercizio 2 - Mostrare che ogni funzione definita in un intervallo chiuso e limitato $I = [a, b]$, ivi monotona ed assume tutti i valori compresi fra $f(a)$ e $f(b)$ essa e' continua.

(se la funzione avesse un punto di discontinuita' esso sarebbe di prima specie ovvero avrebbe un salto allora....)

Ora possiamo affermare che

se $x = f(y)$ e' definita e continua in un intervallo $I = [c, d]$ (sull'asse delle y) ed ivi monotona (in senso stretto) con immagine $\bar{I} = [a, b]$ (sull'asse delle x) allora la funzione inversa $y = f^{-1}(x)$ esiste, e' definita in $\bar{I}$, e' ivi monotona (in senso stretto) ed e' continua.

Dimostrazione.

La monotonia implica la invertibilita' e questa conserva la monotonia (si ricorda che la stretta monotonia e' caratterizzata dalla relazione

$$\frac{f(y_1) - f(y_2)}{y_1 - y_2} > 0.$$

)

La continuita' e' conseguenza dell'esercizio 2 poiche' la funzione $x = f(y)$ e' definita in tutto l'intervallo I cosi' $f^{-1}(x)$ assume tutti i valori tra c e d.

Nota importante:

Abbiamo costruito funzioni composte ed inverse ove intervengono piu' variabili ed alcune in ruoli diversi. E' naturale anche per comodita' che tutte le funzioni che consideriamo abbiamo il proprio dominio rappresentato sull'asse delle ascisse e l'immagine rappresentata sull'asse delle ordinate

come ad esempio, per $x > 0$, $y = \sqrt{x}$, $y = x^2$,e $y = e^x$, $y = logx$,...

Alcuni autori, in un eccesso di semplificazione, affermano che queste sono una inversa dell'altra. Possiamo affermare che le leggi sono una inversa dell'altra come l' estrazione di radice e la potenza oppure il logaritmo e l'esponenziale ma non certamente sono inverse le funzioni laddove intervengono le variabili. Ad esempio si presti attenzione ai grafici di $y = \sqrt{x}$ e $y = x^2$. Si puo' affermare che uno e' ottenuto dall'altro scambiando i valori delle variabili ma non il ruolo.

Il punto $(2, 4)$ appartiene al grafico di $y = x^2$, mentre il punto $(4, 2)$ appartiene al grafico di $y = \sqrt{x}$.

Ancora, il punto $(2, 4)$ e' simmetrico di $(4, 2)$ rispetto alla bisettrice del primo e terzo quadrante del piano cartesiano. Questa osservazione ci permette di affermare che il grafico di $y = x^2$ e' simmetrico a quello di $y = \sqrt{x}$ rispetto alla retta $y = x$ oppure uno e' ottenuto d'altro per rotazione di π intorno alla retta $y = x$. Si ricorda anche che e' un fatto consolidato che un punto nel piano cartesiano $O(x, y)$ ha come prima componente la proiezione sull'asse delle ascisse (le x) e come seconda componente la proiezioe sull'asse dele ordinate (le y). Quindi le funzioni "simmetriche" rispetto alla retta di equazione $y = x$ rappresentano leggi inverse ma non funzioni inverse.

La maggior parte delle funzioni che tratteremo sono dotate di funzione inversa almeno quando somo considerate in insiemi opportunamente ristretti.

Esempi:

1) $y = f(x) = x + 1$ e' monotona crescente per ogni x, quindi invertibile. Per determinare l'inversa $y \to x$ esplicitamente bisogna considerare y dato e x valore da determinare. Dunque bisogna risolvere l' equazione $y = x + 1$ rispetto alla x. La funzione inversa e' $x = f^{-1}(y) = y - 1$. Ovvero la funzione inversa si ottiene sottraendo 1 alla variabile.

Inoltre $y = f(x) = f(f^{-1}(y)) = f(y - 1) = (y - 1) + 1 = y$; oppure $x = f^{-1}(y) = f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(x + 1) = (x + 1) - 1 = x$.

2) $y = f(x) = x^3$ funzione definita per ogni x e monotona. Quindi invertibile. Per determinare la funzione inversa bisogna risolvere $y = x^3$ rispetto alla variabile x, quindi $x = f^{-1}(y) = \sqrt[3]{y}$ (l'estrazione di radice e' la legge inversa della potenza). Inoltre.

$$y = f(x) = f(f^{-1}(y)) \; e \; x = f^{-1}(f(x)).$$

3) $y = f(x) = x^2$ funzione definita per ogni x e monotona ad esempio per $x \geq 0$. Quindi e' invertibile per x positivi. Per determinare la funzione inversa bisogna risolvere $y = x^2$ rispetto alla variabile $x \geq 0$, quindi $x = f^{-1}(y) = \sqrt[2]{y}$ (l'estrazione di radice e' la legge inversa della potenza).

4) $y = a^x$ per $a > 0, \neq 1$ e' monotona per ogni x e la sua inversa e' $x = log_a y$; inoltre $x = log_a(a^x)$ e $y = a^{log_a y}$. Uguaglianze gia' note dalla definizione di logaritmo.

Esercizio:

1) Determinare la funzione inversa di : $y = x^2 + 1$.

2) Determinare la funzione inversa di $x = Sh(y) = \frac{e^y - e^{-y}}{2}$ (seno iperbolico di x); di $x = Chy = \frac{e^y + e^{-y}}{2}$(coseno iperbolico); di $x = Th(y) = \frac{Shy}{Chx}$ (tangente iperbolica).

Osservare attentamente i seguenti grafici ove sono definite e rappresentate le inverse di funzioni circolari.

Funzione $y = arcsenx$ inversa di $x = seny$.

Si osservi la figura 314 ove e' rappresentato il grafico di $x = seny$. Questo grafico e' il simmetrico rispetto alla retta $y = x$ del grafico della ben nota funzione $y = senx$. La funzione $x = seny$ e' una applicazione da y in x definita per ogni valore di y. Non e' iniettiva perche' valori di x provengono da infiniti valori (archi)y. Quindi non e' invertibile. Per invertire tale funzione operiamo una comoda restrizione. Consideriamo l'intervallo $-\pi/2 \leq y \leq \pi/2$. In questo intervallo $x = seny$ e' monotona quindi invertibile. La sua inversa e' indicata: $y = arcsenx$. Essa e' definita nell'intervallo $-1 \leq x \leq 1$ che sono i valori del seno ed ha immagine l'intervallo $-\pi/2 \leq y \leq \pi/2$ Si osservi la figura 319.

• Funzione $y = arccosx$ inversa di $x = cosy$.

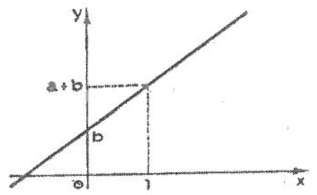
Si osservi la figura 315 ove e' rappresentato il grafico di $x = cosy$. Questo grafico e' il simmetrico rispetto alla retta $y = x$ del grafico della ben nota funzione $y = cosx$. La funzione $x = cosy$ e' una applicazione da y in x definita per ogni valore di y. Non e' iniettiva perche' valori di x provengono da infiniti valori (archi)y. Quindi non e' invertibile. Per invertire tale funzione operiamo una comoda restrizione. Consideriamo l'intervallo $0 \leq y \leq \pi$. In questo intervallo $x = cosy$ e' monotona quindi invertibile: La sua inversa e' indicata: $y = arccosx$. Essa e' definita nell'intervallo $-1 \leq x \leq 1$ che sono i valori del coseno ed ha immagine l'intervallo $0 \leq y \leq \pi$.Si osservi la figura 320.

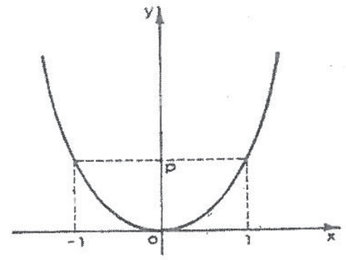
• Funzione $y = arctgx$ inversa di $x = tgy$.

Si osservi la figura 316 ove e' rappresentato il grafico di $x = tgy$. Questo grafico e' il simmetrico rispetto alla retta $y = x$ del grafico della ben nota funzione $y = tgx$. La funzione $x = tgy$ e' una applicazione da y in x definita per valori di y. Non e' iniettiva perche' valori di x provengono da infiniti valori (archi)y. Quindi non e' invertibile. Per invertire tale funzione operiamo una comoda restrizione.Consideriamo $-\pi/2 \leq y \leq \pi/2$. In questo intervallo $x = tgy$ e' monotona quindi invertibile: La sua inversa e' indicata: $y = arctgx$. Essa e' definita nell'intervallo $-\infty \leq x \leq +\infty$ che sono i valori della tangente ed ha immagine l'intervallo $-\pi/2 \leq y \leq \pi/2$. Si osservi la figura 321.

• Funzione $y = arccotgx$ inversa di $x = cotgy$.

Si osservi la figura 317 ove e' rappresentato il grafico di $x = cotgy$. Questo grafico e' il simmetrico rispetto alla retta $y = x$ del grafico della ben nota funzione $y = cottgx$. La funzione $x = cotgy$ e' una applicazione da y in x definita per valori di y. Non e' iniettiva perche' valori di x provengono da infiniti valori (archi)y. Quindi non e' invertibile. Per invertire tale funzione operiamo una comoda restrizione. Consideriamo $0 \leq y \leq \pi$. In questo intervallo $x = cotgy$ e' monotona quindi invertibile: La sua inversa e' indicata: $y = arccotgx$. Essa e' definita nell'intervallo $-\infty \leq x \leq +\infty$ che sono i valori della cotangente ed ha immagine l'intervallo $0 \leq y \leq \pi$. Si osservi la figura 322.



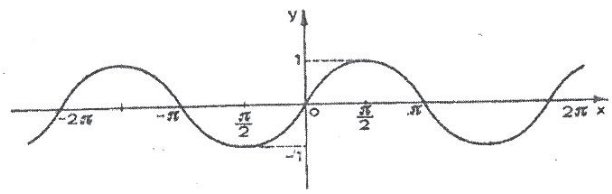


1) $y = ax + b$
$T = -\infty\,\overline{}\,+\infty,\ E = -\infty\,\overline{}\,+\infty,$
(linea *retta*);

Fig. 3.3.

2) $y = px^2$
$T = -\infty\,\overline{}\,+\infty,\ E = 0\,\overline{}\,\infty,$
(*parabola* avente per asse l'asse y);

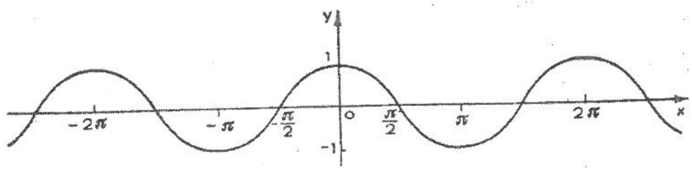
Fig. 3.4.



3) $y = \sin x$

$T = -\infty\,\overline{}\,+\infty,\ E = -1\,\overline{}\,1,$
(*sinusoide*);

Fig. 3.5.

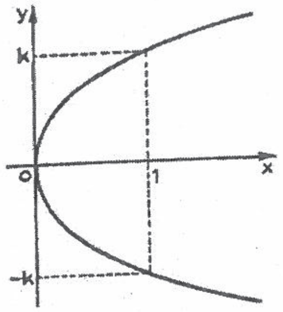


4) $y = \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$

$T = -\infty\,\overline{}\,+\infty,\ E = -1\,\overline{}\,1,$
(*cosinusoide*);

Fig. 3.6.

Esempi.

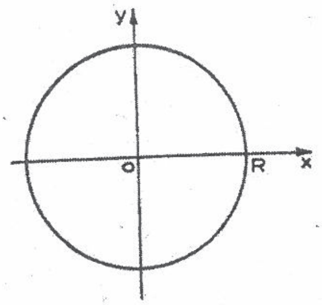


1′) $y = \pm\, k\sqrt{x}$

$T = 0 \vdash\!\!- +\infty$, $E = -\infty \,\text{—}\, +\infty$,

funzione a due valori (*parabola* avente per asse l'asse x);

Fig. 3.12.

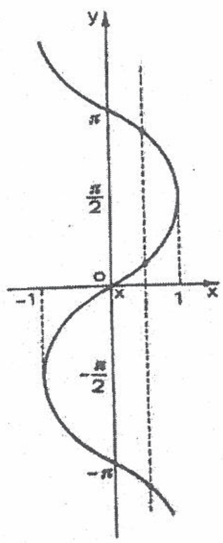


2′) $y = \pm\sqrt{R^2 - x^2}$

$T = -R \vdash\!\dashv R$, $E = -R \vdash\!\dashv R$.

funzione a due valori (*circonferenza* col centro nell'origine e raggio R);

Fig. 3.13.



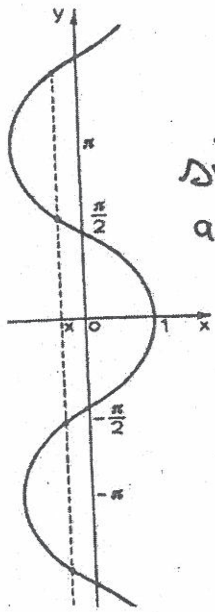
3′) $y = \text{arc sin}\, x$

(cioè $x = \sin y$)

$T = -1 \vdash\!\dashv 1$, $E = -\infty \,\text{—}\, +\infty$,

funzione a infiniti valori;

Fig. 3.14.



4′) $y = \text{arc cos}\, x$

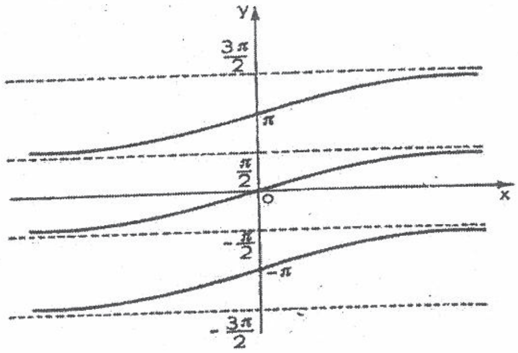
(cioè $x = \cos y$)

$T = -1 \vdash\!\dashv 1$, $E = -\infty \,\text{—}\, +\infty$,

funzione a infiniti valori;

Fig. 3.15.

si faccia attenzione a questi grafici



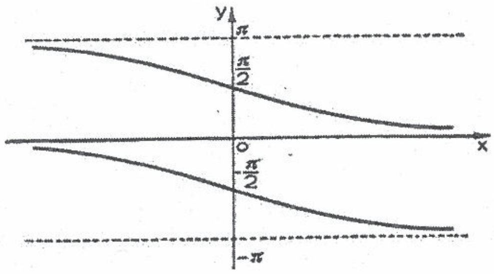
5′) $y = \text{arc tg}\, x$
(cioè $x = \text{tg}\, y$)

$T = -\infty^{\frown} + \infty$,

$E = \left\{(2n-1)\frac{\pi}{2} < y < (2n+1)\frac{\pi}{2};\; n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots\right\}$,

funzione a infiniti valori;

Fig. 3.16.



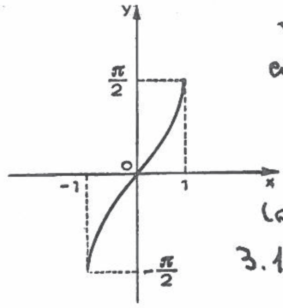
6′) $y = \text{arc cotg}\, x$
(cioè $x = \text{cotg}\, y$)

$T = -\infty^{\frown} + \infty$,
$E = \{n\pi < y < (n+1)\pi;\; n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}$,
funzione a infiniti valori.

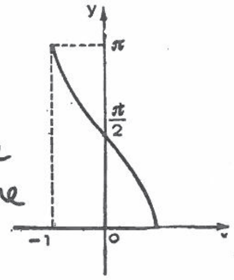
Fig. 3.17.

Osservazione I. — È essenziale tener ben presente che *la definizione di funzione è basata solo sulla nozione di corrispondenza*; non si richiede affatto che una funzione $f(x)$ abbia in tutto il suo insieme T di definizione la medesima rappresentazione analitica.

Si ottengono così i grafici seguenti:



inverse
ad un solo
valore
confrontare
con le figure
3.14 - 3.15

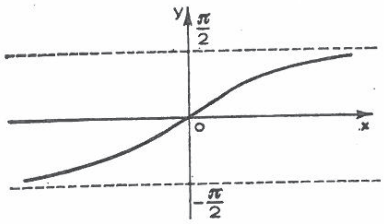


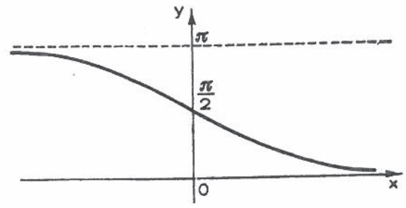
$y = \text{arc sin } x$
$T = -1 \vdash\!\dashv 1, \; E = -\pi/2 \vdash\!\dashv \pi/2,$

Fig. 3.19.

$y = \text{arc cos } x$
$T = -1 \vdash\!\dashv 1, \; E = 0 \vdash\!\dashv \pi,$

Fig. 3.20.





$y = \text{arc tg } x$
$T = -\infty \overline{} +\infty, \; E = -\pi/2 \overline{} \pi/2,$

Fig. 3.21.

$y = \text{arc cotg } x$
$T = -\infty \overline{} +\infty, \; E = 0 \overline{} \pi.$

Fig. 3.22.

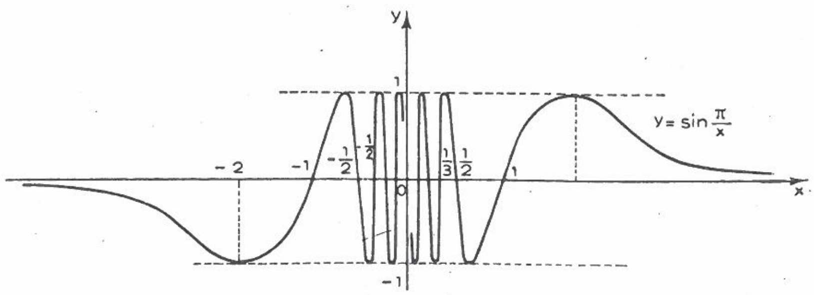


Fig. 3.35.

c) *Le funzioni iperboliche.* — Sono definite dalle eguaglianze

$$\begin{aligned} \operatorname{Sh} x &= \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}), & \operatorname{Ch} x &= \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}), \\ \operatorname{Th} x &= \frac{\operatorname{Sh} x}{\operatorname{Ch} x}, & \operatorname{Cth} x &= \frac{\operatorname{Ch} x}{\operatorname{Sh} x}, \end{aligned} \tag{24.4}$$

e vengono dette rispettivamente *seno iperbolico, coseno iperbolico, tangente iperbolica* e *cotangente iperbolica* (quest'ultima è definita per $x \neq 0$). Le funzioni iperboliche vengono anche indicate con le notazioni

$$\sinh x, \quad \cosh x, \quad \operatorname{tgh} x, \quad \operatorname{cotgh} x.$$

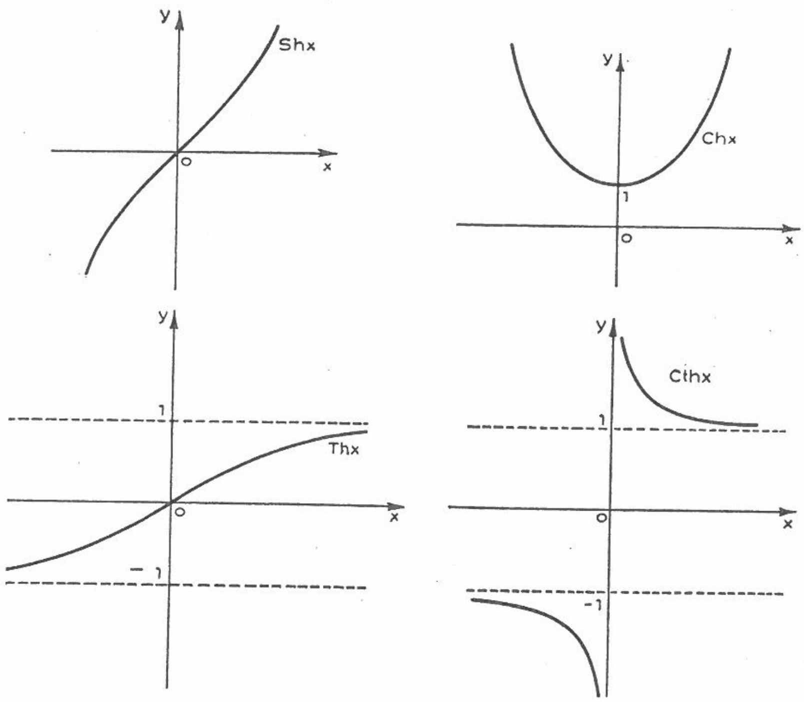


Fig. 3.45.

Osserviamo che, *per* $\alpha > 0$, *la funzione* x^α *è definita anche nel punto* $x = 0$, *ove assume il valore zero ed è continua a destra.*
È infatti $0 < x^\alpha < \varepsilon$ per $0 < x < \varepsilon^{1/\alpha} = \delta_\varepsilon$ (la tesi si deduce anche dalla (24.8), per $x \to 0^+$).
Inoltre, *se* α *è razionale con denominatore dispari, la funzione* x^α *è definita e continua anche per* $x < 0$, risultando ivi $x^\alpha = (-1)^m |x|^\alpha$, $\alpha = m/n$.
Se infine è $\alpha > 0$, *oltre che razionale con denominatore dispari,* x^α *è definita e continua in tutto l'intervallo* $-\infty \rightharpoondown +\infty$.

e) Costruiamo la *funzione inversa di* Sh y.
Posto

$$x = \operatorname{Sh} y = \frac{1}{2}(e^y - e^{-y}) = g(y)$$

risulta (moltiplicando entrambi i membri per e^y, che è > 0 per tutti i valori di y)

$$e^{2y} - 2xe^y - 1 = 0,$$

da cui (osservando ancora che è $e^y > 0$):

$$e^y = x + \sqrt{1 + x^2},$$

cioè

$$y = \log(x + \sqrt{1 + x^2}). \qquad (24.9)$$

Questa funzione si indica anche col simbolo

$$y = \operatorname{Sett} \operatorname{Sh} x \qquad (24.10)$$

(*settore seno iperbolico* x).
Si noti che la funzione inversa di una funzione $x = g(y)$ si può definire anche se $g(y)$ non è monotona: in tal caso risulta però una funzione *a più valori* (lo si è constatato negli esempi: 1′, 3′), ..., 6′) del § 2); per evitare la considerazione di funzioni di tal natura si preferisce, di solito, porre delle limitazioni per la y in modo che, per i valori considerati, la $g(y)$ risulti strettamente monotona (cfr. l'*osservazione II* del § 2).
Ad esempio, *la funzione inversa di* $x = \operatorname{Ch} y$ *è*

$$y = \log(x \pm \sqrt{x^2 - 1}) = \operatorname{Sett} \operatorname{Ch} x \qquad (24.11)$$

La linea di equazione

$$y = \mathrm{Ch}\, x$$

si chiama *catenaria*: essa è la linea secondo cui si dispone, per effetto del proprio peso, un filo omogeneo fissato agli estremi.
La *continuità delle funzioni iperboliche* segue da quella di

$$e^x \quad \text{e di} \quad e^{-x} = \frac{1}{e^x} .$$

Le funzioni iperboliche sono legate da relazioni simili a quelle stabilite tra le funzioni circolari.
Tra queste, particolarmente notevole è la relazione

$$\boxed{\mathrm{Ch}^2 x - \mathrm{Sh}^2 x = 1 ,} \tag{24.5}$$

analoga alla relazione $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$.
È infatti

$$\mathrm{Ch}^2 x - \mathrm{Sh}^2 x = (\mathrm{Ch}\, x + \mathrm{Sh}\, x)(\mathrm{Ch}\, x - \mathrm{Sh}\, x) = e^x e^{-x} = 1 .$$

Si dimostrano poi facilmente le seguenti *formule di addizione*:

$$\begin{aligned} \mathrm{Sh}\,(a+b) &= \mathrm{Sh}\, a\, \mathrm{Ch}\, b + \mathrm{Ch}\, a\, \mathrm{Sh}\, b , \\ \mathrm{Ch}\,(a+b) &= \mathrm{Ch}\, a\, \mathrm{Ch}\, b + \mathrm{Sh}\, a\, \mathrm{Sh}\, b , \\ \mathrm{Th}\,(a+b) &= \frac{\mathrm{Th}\, a + \mathrm{Th}\, b}{1 + \mathrm{Th}\, a\, \mathrm{Th}\, b} , \end{aligned} \tag{24.6}$$

analoghe alle note formule di addizione delle funzioni circolari.

d) Poichè l'esponenziale e il logaritmo sono funzioni *continue, risultano continue*, per quanto dimostrato nel § 20, *le funzioni composte*

$$y = e^{\varphi(x)} , \qquad y = \log \varphi(x) \tag{24.7}$$

(con $\varphi(x)$ continua nel primo caso, continua e positiva nel secondo).
Per lo stesso motivo, *è continua, nell'intervallo* $0 < x < +\infty$ *e supponendo l'esponente* α *reale, la funzione*

$$y = x^\alpha = e^{\alpha \log x}. \tag{24.8}$$