NUMERI COMPLESSI

Introduzione

Per risolvere i problemi della misura e delle potenze n-sime perfette abbiamo costruito il campo dei numeri reali. Si e' constato che per ogni n intero positivo e per ogni numero reale positivo α esiste uno ed un solo numero reale β positivo tale che $\beta^n = \alpha$, in altri termini in $\mathbb{R}^+$ l'equazione $x^n = \alpha$ ammette una ed una sola soluzione positiva. Cosi' si e' definita l'operazione inversa della potenza n-sima di un numero reale positivo, ovvero abbiamo introdotto i radicali assoluti. Pero' equazioni come $x^2 = 4$, $x^3 = 8$ ci hanno indotto ad estendere il concetto di radicale (detto radicale algebrico) in $\mathbb{R}$. In questo caso sussistono delle dissimetrie come $x^3 = \alpha$ ha una sola soluzione per ogni α e tale soluzione la indichiamo col vecchio simbolo di radicale assoluto ovvero $\sqrt[3]{\alpha}$ se α e' positivo oppure $-\sqrt[3]{|\alpha|}$ se α e' negativo. Nel caso $x^2 = \alpha$ abbiamo soluzioni (due ed opposte) solo nel caso $\alpha \geq 0$. Questa anomalia e' parzialmente accettata constatando una coerenza tra le soluzioni di una equazione di secondo grado usando i radicali algebrici ed il comportamento geometrico di un polinomio di secondo grado ovvero il grafico delle parabole di equazione $y = ax^2 + bx + c$ ($a > 0$). Le intersezioni con l'asse delle x sono date dalle soluzioni dell'equazione $ax^2 + bx + c = 0$ ovvero $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$.

Se $\Delta = b^2 - 4ac < 0$ non ci sono intersezioni e la parabola si trova nel semipiano $y > 0$; se $\Delta = 0$ si hanno due radici coincidenti e la parabola ha vertice sull'asse delle x; se $\Delta > 0$ allora ci sono due radici reali e la parabola ha due intersezioni con l'asse delle x.

Tutto e' coerente.

Quindi i radicali algebrici sono uno strumento valido e coerente per lo studio delle soluzioni di equazioni di secondo grado. Purtroppo non altrettanto accade per le equazioni di terzo grado.

La soluzione generale dell'equazione di terzo grado

$$x^3 + px + q = 0$$

si deve agli italiani Del Ferro e Cardano, algebristi del rinascimento. La formula risolutiva ottenuta, utlizzando i radicali, e' la seguente.

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}.$$

Si osserva che nel caso $\Delta = \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} > 0$ la formula risolutiva, nel campo reale, fornisce una sola soluzione reale dell'equazione. Ma il fatto sorprendente e' che se $\Delta < 0$ la formula non fornisce alcuna soluzione reale mentre l'equazione ha proprio tre soluzioni reali e distinte come il seguente esempio mostra.

$$x(x^2 - 1) = x^3 - x.$$

Nel nostro esempio $p = 1$ e $q = 0$. E' immediato constatare che la equazione ha tre soluzioni reali e distente $x_1 = 0,\ x_2 = 1,\ x_3 = -1$ mentre la formula risolutiva non da' soluzioni (reali) poiche' $\Delta = \frac{-1}{27} < 0$.

Questa discrepanza tra la formula e le soluzioni con $\Delta < 0$ e' il noto "caso irriducibile" ovvero le soluzioni reali dell'equazione non possono essere descritte da radicali nel campo reale. Questa anomalia fu attribuita alla impossibilita' di gestire la radice di numeri negativi o meglio gestire $\sqrt{-1}$. Questo e' il principale movente per ampliare il campo dei numeri reali e dare cosi' sistemazione all'oggetto $\sqrt{-1}$.

I numeri complessi secondo Hamilton

Costruiremo il campo dei numeri complessi seguendo la formalizzazione razionale ed algebrica del concetto di numero complesso fatta da Hamilton (1805-1865). Non v'e' dubbio che per rappresentare geometricamente un ampliamento dei numeri reali non e' piu' sufficiente la retta. Occorre considerare il piano (cartesiano) $\mathbb{R}^2$ ovvero coppie ordinate di numeri reali.

Questa osservazione conduce a considerare il seguente insieme.

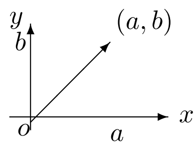
$$\mathbb{C} = \{(a,b)|a \in \mathbb{R},\ b \in \mathbb{R}\}.$$

(a,b) e' detta coppia ordinata di numeri reali; a prima componente o primo elemento, b seconda componente o secondo elemento.

La rappresentazione geometrica delle coppie ordinate di numeri reali e' ben nota. E' data da un punto nel piano geometrico ove si fissa un sistema di riferimento cartesiano

$$O(x,y).$$

L'insieme $\mathbb{C}$, come e' ben noto, e' in corrispondenza biunivoca con i punti (a,b) del piano (a ascissa e b ordinata)



Nella figura abbiamo tracciato il vettore applicato in O e puntato in (a,b). Talvolta questa rappresentazione vettoriale viene usata per seguire geometricamente le operazioni sulle coppie con notevole semplicita'. Inoltre il piano considerato risulta l'immagine dei numeri complessi quando si seguono su di esso le immagini delle operazioni che definiremo. Tale piano lo chiameremo piano di Gauss o di Argand-Gauss. Per stabilire una aritmetica dei numeri complessi dobbiamo definire le operazioni sulle coppie ordinate di numeri reali. In seguito le coppie verranno denotate con le lettere $\alpha,\ \beta, ...$

Definizione del campo dei numeri complessi

Diremo che l'insieme $\mathbb{C}$ e' il campo dei numeri complessi quando su di esso si fissa una aritmetica (le consuete operazioni binarie) nel modo che segue.

• **Uguaglianza, simbolo =**

Siano $\alpha = (a, b)$ e $\beta = (c, d)$ due elemti di $\mathbb{C}$. Diremo che α e β sono uguali e scriveremo

$$\alpha = \beta$$

quando

$$\begin{cases} a &= c, \\ b &= d. \end{cases} \tag{1}$$

Osserviamo che l'uguaglianza in $\mathbb{C}$ e' espressa da due relazioni.
Valgono le proprieta' riflessiva, simmetrica e transitiva (facile da verificare).
Due numeri complessi uguali hanno la stessa immagine geometrica.

• **Somma**

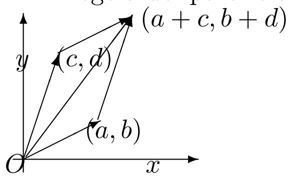
Siano $\alpha = (a, b)$ e $\beta = (c, d)$ due elemti di $\mathbb{C}$. Diremo somma dei numeri complessi α e β il numero complesso $\gamma = (a + c, b + d)$ e si scrive

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d).$$

α e β si dicono addendi .

Valgono le proprieta' commutativa ed associativa.
L'mmagine geometrica della somma e' data dalla regola del parallelogramma del calcolo vettoriale.

regola del parallelogramma



• **Elemento neutro rispetto alla somma- Lo zero**

Diremo elemento neutro rispetto alla somma la coppia $\omega = (c, d)$ tale che per ogni numero complesso $\alpha = (a, b)$ si ha

$$(a, b) + (c, d) = (a, b).$$

In $\mathbb{C}$ esiste (ed e'unico) ω ed e' la coppia $(0, 0)$.
Infatti
$(a, b) + (c, d) = (a, b) \to (a + c, b + d) = (a, b)$.
La uguaglianza in $\mathbb{C}$ si traduce nel sistema

$$\begin{cases} a + c &= a, \\ b + d &= d, \end{cases} \tag{2}$$

Da cui l'asserto.

• **Opposto**

Sia $\alpha = (a, b)$. Chiameremo opposto di α un numero complesso $\omega = (c, d)$ tale che
$$(a, b) + (c, d) = (0, 0).$$

L'opposto esiste (unico) ed e' la coppia $(-a, -b)$

Dimostrazione :
$(a, b) + (c, d) = (0, 0) \to (a + c, b + c) = (0, 0)$ da cui
$$\begin{cases} a + c = 0, \\ b + d = 0. \end{cases} \tag{3}$$
da cui l'asserto.

Con l'esistenza dell'opposto abbiamo l'esistenza della differenza.

• **Differenza**

Siano $\alpha = (a, b)$ e $\beta = (c, d)$ due elementi di $\mathbb{C}$. Chiameremo differenza fra $\alpha = (a, b)$ e $\beta = (c, d)$ un numero complesso $\gamma = (e, f)$ tale che
$$(a, b) = (c, d) + (e, f),$$
e si scrive $\gamma = \alpha - \beta = (a, b) - (c, d)$. α il minuendo e β il sottraendo.

L'esistenza di γ e' immediata; si ottiene per costruzione; si verifica che e' $\gamma = (a, b) + (-c, -d)$.

• **Prodotto**

Siano $\alpha = (a, b)$ e $\beta = (c, d)$ due elementi di $\mathbb{C}$. Chiameremo prodotto di α e β il numero complesso $\gamma = (ac - bd, ad + bc)$ e si scrive
$$(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc).$$

Valgono le proprieta' commutativa, associativa ed anche la proprieta' distributiva del prodotto rispetto alla somma
$$\alpha \cdot (\beta + \gamma) = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma.$$

α e β sono detti fattori. E' facile verificare che $(a, b)(0, 0) = (0, 0)$.

• **Elemento neutro del prodotto - L' unita' reale**

Elemento neutro rispetto al prodotto e' un numero complesso $\omega = (c, d)$ tale che per ogni $\alpha = (a, b)$ si ha
$$(a, b) \cdot (c, d) = (a, b).$$

L'elemento neutro esiste (unico)ed ha la forma $(1, 0)$.

Infatti

$(a, b) \cdot (c, d) = (a, b) \to (ac - bd, ad + bc) = (a, b),$

e si ha il sistema

$$\begin{cases} ac - bd & = & a, \\ ad + bc & = & b, \end{cases} \tag{4}$$

da cui si ricava $c = 1, d = 0$. La coppia $(1, 0)$ e' detta unita' reale.

Esercizio: Verificare la legge di annullamento del prodotto ovvero $\alpha \cdot \beta = (0, 0)$ se uno almeno dei fattori e' nullo.

• **Reciproco**

Dato $\alpha = (a, b)$ chiameremo reciproco di α un numero complesso $\omega = (c, d)$ tale che

$$\alpha \cdot \beta = (1, 0).$$

Se $(a, b) \neq (0, 0)$ allora esiste ed e' unico il reciproco ω e si ha

$$\omega = (\frac{a}{a^2 + b^2}, \frac{-b}{a^2 + b^2}).$$

Dimostrazione.

$(a, b) \cdot (c, d) = (1, 0) \to (ac - bd, ad + dc) = (1, 0)$ per cui si ha

$$\begin{cases} ac - bd & = & 1, \\ ad + bc & = & 0. \end{cases} \tag{5}$$

Moltiplicando la prima equazione per a e la seconda per b e sommando i risultati si ha l'equazione

$$a^2c + b^2c = a$$

dato che $a^2 + b^2 \neq 0$ si ricava

$$c = \frac{a}{a^2 + b^2}.$$

Inserendo questo numero in una equazione qualsiasi del sistema si ottiene

$$d = \frac{-b}{a^2 + b^2}.$$

In conclusione il reciproco di α che ora indichiamo α^{-1} si scrive

$$\alpha^{-1} = (\frac{a}{a^2 + b^2}, \frac{-b}{a^2 + b^2}).$$

Va da se' che tale elemento e' unico.

• **Rapporto**

Dati $\alpha = (a, b) \neq (0, 0)$ e $\beta = (c, d)$ elementi di $\mathbb{C}$. Diremo quoziente o rapporto di α e β un numero complesso $\gamma = (e, f)$ tale che

$$\alpha \cdot \gamma = \beta.$$

Si scrive

$$\gamma = \frac{\beta}{\alpha} \text{ \textit{oppure} } \gamma = \beta : \alpha.$$

Noto il reciproco di α, γ esiste(unico) ed ha la seguente forma

$$\gamma = \beta \cdot \alpha^{-1} = (\frac{ac+bd}{a^2+b^2}, \frac{ad-bc}{a^2+b^2}).$$

Campo complesso come ampliamento del campo dei numeri reali

Abbiamo gia' piu' volte considerato il problema di ritrovare nel nuovo sistema numerico il sistema numerico di partenza. Nei numeri razionali abbiamo considerato l'applicazione $(a, 1) \to a$ per ritrovare i numeri interi come numero razionale. Lo stesso procedimento lo seguiremo ora.

Dalla definizione di numero complesso e dalla rappresentazione geometrica e' facile intuire che i complessi candidati a rappresentare i numeri reali sono le coppie della forma $(a, 0)$; ovvero dal punto di vista operativo i numeri reali a e le coppie $(a, 0)$ si comportano nello stesso modo. Sia $\mathbb{A} = \{(a, 0)|a \in \mathbb{R}]\} \subset \mathbb{C}$. Consideriamo la corrispondenza suriettiva fra $\mathbb{A}$ e $\mathbb{R}$ data'da

$$(a, 0) \mapsto a.$$

Questa corrispondenza conserva i risultati di'somma e di prodotto. Infatti

$$(a, 0) + (b, 0) = (a + b, 0) \ (somma;\ complessa) \mapsto a + b,\ (sommare`ale);$$

$$(a, 0) \cdot (b,) = (a \cdot b, 0) \ (prodotto\ complesso) \mapsto a \cdot b; (prodotto\ reale).$$

La corrispondenza ci dice che fare la somma dei numeri complessi $(a, 0), (b, 0)$ in $\mathbb{C}$ da' lo "stesso" risulato della somma dei reali a, b in $\mathbb{R}$. Lo stesso vale per il prodotto, per la differenza e per il rapporto. Quindi dal punto di vista operativo i due oggetti possono essere identificati. La classe dei numeri complessi della forma $(a, 0)$ costituisce un campo numerico che e' aritmeticamente equivalente (isomorfo) al campo dei numeri reali relativi. Quindi operativamente identificheremo (come se fossero lo stesso ente aritmetico) il numero complesso $(a, 0)$ ed il numero reale a e scriveremo $(a, 0) = a$. In questo modo il campo complesso si puo' considerare un ampliamento del campo dei reali la cui immagine geometrica e' l'asse delle ascisse del riferimento cartesiano.

Forma algebrica del numero complesso

Dalle definizioni di somma, prodotto e dalle identificazioni fatte, abbiamo

$$(a, 0) = a = a(1, 0), \ \ (b, 0)(0, 1) = (0, b), \ \ (0, 1)(0, 1) = -1,$$

da cui

$$(a, b) = (a, 0) + (0, b) = (a, 0)(1, 0) + (b, 0)(0, 1) = a + b(0, 1).$$

Abbiamo osservato che $(0, 1)(0, 1) = -1$ ovvero il quadrato di $(0, 1)$ e' -1. Questo e' proprio l'oggetto che ha motivato la costruzione del campo complesso.

Il numero $(0, 1)$ viene indicato i ed e' chiamato unita' immaginaria. Da queste notazioni finalmente arriviamo alla seguente forma del numero comrlesso (a, b)

$$\alpha = (a, b) = a + ib.$$

e si chiama FORMA ALGEBRICA di α.

a e' detta parte reale di α,.
ib parte immaginaria di α, b, coefficiente della parte immaginaria.

Si usano anche i seguenti simboli

$$Re(\alpha) = a, \quad Im(\alpha) = b.$$

Abbiamo gia' visto che i numeri reali hanno immagine sull'asse delle ascisse e viene chiamato asse dei reali o asse reale.

I numeri della forma ib sono detti *immaginari puri* ed hanno immagine sull'asse y e si dice asse delle immaginarie o asse immaginario.

Calcoliamo le potenze di i:

$$i = -1, \;\; i^3 = i^2 i = -i, \;\; i^4 = 1, etc.$$

Assumendo $i^0 = 1$ ed in generale $\alpha^0 = 1$ con $\alpha \neq 0$, le operazioni aritmetiche che abbiamo definito sopra possiamo ottenerle usando 'il consueto calcolo letterale ovvero

$$(a + ib) + (c + id) = (a + c) + i(b + d),$$

$$(a + ib)(c + id) = ac + i^2bd + cid + ibc = (ac - bd) + i(ad + bc),$$

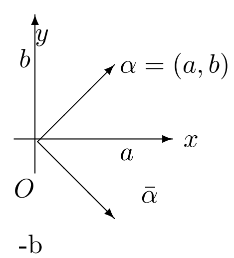
$$\frac{c + id}{a + ib} = (c + id)(a + ib)^{-1} = frac(ac + bd) + (ad - bc)a^2 + b^2.$$

• **Complesso coniugato**

Si chiama coniugato di $\alpha = a + ib$ il numero $\bar{\alpha} = a - ib$.

La notazione del coniugio e' la barra sopra α e l'effetto e' cambiare il segno alla parte immaginaria. Il doppio coniugato e' il numero stesso, ovvero $\bar{\bar{\alpha}} = \alpha$. Inoltre $\overline{\alpha + \beta} = \bar{\alpha} + \bar{\beta}$ e $\overline{\alpha\beta} = \bar{\alpha}\bar{\beta}$ e per induzione $\overline{\alpha^n} = \bar{\alpha}^n$, $\overline{\frac{\alpha}{\beta}} = \frac{\bar{\alpha}}{\bar{\beta}}$ Da queste proprieta' si ha

Immagine geometrica



Qualche calcolo con il coniugato

$$\alpha + \bar{\alpha} = a + ib + a - ib = 2a = 2Re(\alpha)$$
$$\alpha - \bar{\alpha} = a + ib - a + b = 2b = 2Im(\alpha),$$

$$\alpha \cdot \bar{\alpha} = (a + ib) \cdot (a - ib) = a^2 - (ib)^2 = a^2 + b^2$$

L'ultima relaziole ci permette di calcolar il rapporto di $\alpha = a+ib$ e $\beta = c+id$ nel seguente modo

$$\frac{\beta}{\alpha} = \frac{\beta\bar{\alpha}}{\alpha\bar{\alpha}} = \frac{(c+id)(a-ib)}{a^2+b^2} = \frac{(ac+bd)+i(ad-bc)}{a^2+b^2}.$$

Inoltre $\alpha \bar{+} \beta = \bar{\alpha} + \bar{\beta}$ e $\bar{\alpha\beta} = \bar{\alpha}\bar{\beta}$ e per induzione $\bar{\alpha^n} = \bar{\alpha}^n$, $\frac{\bar{\alpha}}{\beta} = \frac{\bar{\alpha}}{\bar{\beta}}$. Da queste proprieta' si ha

Sia $P_n(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + ... + a_n z^n$ nel campo complesso si ha : $\bar{P_n}(z) = P_n(\bar{z})$

• Modulo, argomento e forma trigonometrica

Fino ad ora abbiamo rappresentato geometricamente i numeri complessi con l'uso delle coordinate cartesiane. La rappresentazione vettoriale dei numeri complessi suggerisce l'utilizzo di due nuove coordinate che descrivono geometricamente i numeri complessi: modulo ed angolo od argomento.

•Modulo

Si dice *modulo* di $\alpha = a + ib$ e si denota $|\alpha|$, l'espressione

$$\rho = |\alpha| := \sqrt{a^2 + b^2}$$

ovvero la lunghezza del vettore immagine di α o la distanza del punto (a, b) dall'origine degli assi.

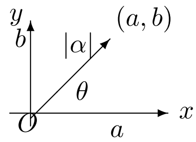
• Argomento

Sia $\alpha \neq 0$. Si dice argomento di $\alpha = a + ib$ e si denota $arg\alpha$ l'angolo θ (o uno degli infiniti angoli $\theta + 2k\pi$) di cui si deve ruotare l'asse reale per sovrapporlo in direzione e verso al vettore che rappresenta α. L'angolo viene assunto positivo se viene desritto in senso antiorario.

(Si ricorda che due numeri θ e θ' che differiscono per un multiplo di 2π sono detti congrui fra loro e si scrive

$$\theta \equiv \theta (mod 2\pi).$$

Si dice **argomento principale** l'argomento $arg^*\alpha = \theta'$ tale $-\pi < \theta^+ \leq \pi$ oppure $0 \leq \theta^* < 2\pi$.



Dalle funzioni trigonometriche

$$cos\theta = \frac{a}{\rho},\ sen\theta = \frac{b}{\rho}, \quad con\ \rho = \sqrt{a^2 + b^2}$$

si hanno le seguenti relazioni : $a = \rho cos\theta;\ b = \rho sen\theta)$ da cui si ottiene

• **Forma trigonometrica di** α

$$\alpha = \rho(cos\theta + isen\theta).$$

Esempi : $|2| = 2;\ |3 + i| = \sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10};\ |a + ib + 2| = \sqrt{(a + 2)^2 + b^2}$

$|\alpha|$ e' la distanza del punto immagine di α dall'origine per cui l'equazione $|\alpha| = 2$ rappresenta l'equazione di una circonferenza di centro l'origine e raggio 2.

Esercizio: si disegnino i luoghi geometrici dati dalle seguenti relazioni: $|\alpha| < 2,\ |\alpha - i| > 2$.

• **Operazioni sui numeri complessi in forma trigonometrica**

• **Uguaglianza**

Siano $\alpha = \rho(cos\theta + isen\theta),\ \beta = \rho_1(cos\theta_1 + isen\theta_1)$ due numeri complessi in forma trigonometrica.

Si dice che α e β sono uguali se hanno lo stesso modulo ed argomenti congrui, ovvero

$$\alpha = \beta \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \rho = \rho_1 \\ \theta = \theta_1 (mod 2\pi) \end{cases}$$

L'uguaglianza dei moduli e' ovvia. La congruita' degli angoli e' dovuta alla indeterminazione dell'angolo di un vettore come abbiamo gia precedentemente illustrato.

• **Prodotto e rapporto dei numeri complessi in forma trigonometrica**

Il prodotto ed il rapporto dei numeri complessi in forma trigonometrica sono dati dai teoremi di De Moivre. Si ricorda che

$$sen(\theta \pm \theta_1) = sen\theta cos\theta_1 \pm cos\theta sen\theta_1,$$

$$cos(\theta \pm \theta_1) = cos\theta cos\theta_1 \mp isen\theta sen\theta_1.$$

• **Primo teorema di De Moivre**

Siano $\alpha = \rho(cos\theta + isen\theta)$ *e* $\beta = \rho_1(cos\theta_1 + isen\theta_1)$ *due numeri complessi scritti in forma trigonometrica. Allora*

$$\alpha \cdot \beta = \rho\rho_1(cos(\theta + \theta_1) + isen(\theta + \theta_1)),$$

ovvero il prodotto di due numeri complessi scritti in forma trigonometrica e' ancora un numero complesso scritta in forma trigonometrica che ha come modulo il prodotto dei moduli e come argomento la somma degli argomenti

Dimostrazione:

$$\begin{aligned}
&\alpha \cdot \beta = \rho(cos\theta + isen\theta)\rho_1(cos\theta_1 + isen\theta_1) = \\
&\rho\rho_1(cos\theta cos\theta_1 + icos\theta sen\theta_1 + isen\theta cos\theta_1 - sen\theta sen\theta_1) = \\
&\rho\rho_1(cos(\theta + \theta_1) + isen(\theta + \theta_1)).
\end{aligned}$$

Se $\alpha = \beta$ si ha

$$\alpha^2 = \rho^2(cos2\theta + isen2\theta)$$

e per induzione

$$\alpha^n = \rho^n(cosn\theta + isenn\theta).$$

• **Secondo teorema di De Moivre**

Siano $\alpha = \rho(cos\theta + isen\theta)$ *e* $\beta = \rho_1(cos\theta_1 + isen\theta_1) \neq 0$ *due numeri complessi scritti in forma trigonometrica. Allora*

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\rho}{\rho_1}(cos(\theta - \theta_1) + isen(\theta - \theta_1)),$$

ovvero il rapporto di due numeri complessi scritti in forma trigonometrica e' ancora un numero complesso scritta in forma trigonometrica che ha come modulo il rapporto dei moduli e come argomento la differenza degli argomenti

Dimostrazione:

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\rho(cos\theta + isen\theta)}{\rho_1(cos\theta_1 + isen\theta_1)} =$$
$$\frac{\rho(cos\theta + isen\theta)(cos\theta_1 - isen\theta_1)}{\rho_1(cos\theta_1 + isen\theta_1)(cos\theta_1 - isen\theta_1)} =$$
$$\frac{\rho}{\rho_1}(cos\theta + isen\theta)(cos\theta_1 - isen\theta_1) =$$
$$\frac{\rho}{\rho_1}(cos\theta cos\theta_1 - icos\theta sen\theta_1 + isen\theta cos\theta_1 + sen\theta sen\theta_1) =$$
$$\frac{\rho}{\rho_1}(cos(\theta - \theta_1) + isen(\theta - \theta_1)).$$

Se $\alpha = 1$ allora abbiamo

$$\frac{1}{\beta} = \beta^{-1} = \frac{1}{\rho_1}(cos(-\theta_1) + isen(-\theta_1)),$$

e per induzione

$$\beta^{-n} = \rho_1^{-n}(cos(-n\theta_1) + isen(-n\theta_1)).$$

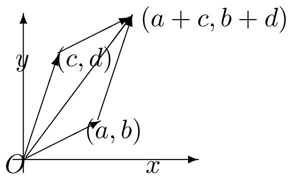
Nota- Dai teoremi di De Moivre ricaviamo proprieta' del modulo.

$$|\alpha \cdot \beta| = |\alpha||\beta|, \quad | \frac{\alpha}{\beta} = \frac{|\alpha|}{|\beta|}, \quad |\alpha^n| = |\alpha|^n, \quad |c\alpha| = |c||\alpha|, \ c \; numero \; reale.$$

e la disuguaglianza triangolare

$$|\ |\alpha| - |\beta|\ | \leq |\alpha + \beta| \leq |\alpha| + |\beta|.$$

Ricordando il significato geometrico del modulo la disuguqglianza e' stata dimostrata da Euclide con la seguente affermazione: in un triangolo la lunghezza di un lato e' inferiore alla somma delle lunghezze degli altri due lati ed e' maggiore della differenza delle lunghezze degli altri due lati. Si osservi il triagolo con vertici i punti O, (a, b) e $(a+c, b+d)$ nella figura della regola del parallelogrammo nel contesto del teorema di Euclide.



Lo studente traduca in forma algebrica la disuguaglianza e ne provi algebricamente la validita'.

FORMA ESPONENZIALE DI UN NUMERO COMPLESSO

Sia e la base dei logaritmi neperiani e θ un numero reale.

Poniamo
$$e^{i\theta} = cos\theta + isen\theta.$$

A questa scrittura diamo solo un senso formale. Se ne puo' precisare il contenuto ma ora non abbiamo gli strumenti necessari per farlo. Consideriamo $e^{i\theta}$ come una scrittura semplice di $cos\theta + isen\theta$. Una certa coerenza di calcolo della potenza $e^{i\theta}$ e' garantita dai teoremi di De Moivre.

Ad esempio
$$e^{i\theta}e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')}$$

ovvero

$$(cos\theta + isen\theta)(cos\theta' + isen\theta') = cos(\theta + \theta') + isen(\theta + \theta').$$

Cosi'

$$e^{i\theta} : e^{i\theta'} = e^{i(\theta-\theta')}$$

ovvero
$$\frac{(cos\theta + isen\theta)}{(cos\theta' + isen\theta')} = cos(\theta - \theta') + isen(\theta + \theta').$$

Accettata la scrittura, abbiamo anche

$$e^{i\theta} = e^{i\theta'} \Leftrightarrow \theta \equiv \theta' \ (mod\ 2\pi).$$

Con questa convenzione si ha la *forma esponenziale* del numero complesso:

$$\alpha = (a + ib) = \rho(cos\theta + isen\theta)) = \rho e^{i\theta}.$$

Quindi nello forma esponenziale il coefficiente di $e^{i\theta}$ e' il modulo del numero complesso.

Possiamo estendere questa scrittura. Sia $z = x + iy$ ricordando le proprieta' delle potenze abbiamo

$$e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x(cosy + iseny).$$

Quindi $|e^z| = e^x$ ed $arge^z = y$.

RADICE n-sima DI UN NUMERO COMPLESSO

Premessa: nel campo complesso la radice si esegue con i numeri in FORMA TRIGONOMETRICA.

Definizione. Sia α un numero complesso. Diciamo radice n-sima di α tutti i numeri complessi β tali che
$$(*)\ \ \beta^n = \alpha.$$

(il lettore confronti questa definizione con quelle date per i numeri reali).

Costruiamo β e cosi' ne abbiamo l'esistenza. Non ci occupiamo del caso banale $\alpha = 0$

Scriviamo i numeri in forma trigonometrica

$$\alpha = \rho(cos\theta + isen\theta), \ \beta = \tau(cos\psi + isen\psi).$$

Si ricorda che α e' assegnato ovvero sono assegnati ρ e θ mentre β deve essere determinato ovvero τ e ψ devono essere determinati. Per trovare τ e ψ usiamo l'equazione $(*)$ in forma trigonometrica dopo aver utilizzato i teoremi di De Moivre:

$$\beta^n = \alpha \to \tau^n(cosn\psi + isenn\psi) = \rho(cos\theta + isen\theta).$$

L' uguaglianza dei numeri in forma trigonometrica conduce al sistema

$$\begin{cases} \tau^n & = & \rho, \\ n\psi & = & \theta + 2k\pi. \end{cases} \tag{6}$$

La prima equzione e' la radice n-esima assoluta in $\mathbb{R}$ (τ e ρ sono positivi) per cui abbiamo le soluzioni

$$\begin{cases} \tau & = & \sqrt[n]{\rho}, \\ \psi & = & \frac{\theta+2k\pi}{n}. \end{cases} \tag{7}$$

Finalmente i numeri complessi β hanno la seguente forma

$$\beta_k = \sqrt[n]{\rho}(cos(\frac{\theta + 2k\pi}{n}) + isen(\frac{\theta + 2k\pi}{n})).$$

Osserviamo che tutti i numeri β_k hanno lo stesso modulo ovvero le immagini hanno tutte la stessa distanza dall'origine. Sono infiniti in dipendenza dal parametro k. Pero' di distinte ce sono n. Per convirci di questo seguiamo la forma dei numeri β_k per $k = 0, 1...., n$. Noteremo che una radice e' ottenuta incrementando di $\frac{2\pi}{n}$ l'angolo della radice precedente. Per cui dopo n incrementi le radici si ripetono.

$$\begin{aligned}
&\beta_0 = \sqrt[n]{\rho}(cos(\frac{\theta}{n}) + isen(\frac{\theta}{n})); \\
&\beta_1 == \sqrt[n]{\rho}(cos(\frac{\theta + 2\pi}{n}) + isen(\frac{\theta + 2\pi}{n})) \\
&. \quad . \quad . \quad . \quad . \\
&. \quad . \quad . \quad . \quad . \\
&\beta_k == \sqrt[n]{\rho}(cos(\frac{\theta + 2k\pi}{n}) + isen(\frac{\theta + 2k\pi}{n})) \\
&\beta_{k+1} = \sqrt[n]{\rho}(cos(\frac{\theta + 2(k+1)\pi}{n}) + isen(\frac{\theta + 2(k+1)\pi}{n})) \\
&. \quad . \quad . \quad . \quad . \\
&\beta_n = \sqrt[n]{\rho}(cos(\frac{\theta + 2n\pi}{n}) + isen(\frac{\theta + 2n\pi}{n})) = \\
&\sqrt[n]{\rho}(cos(\frac{\theta}{n}) + isen(\frac{\theta}{n})) = \beta_0
\end{aligned}$$

e quindi

$$\beta_{n+1} = \beta_1, \; . \quad . \quad ., \beta_{n+k} = \beta_k \quad \cdot$$

In conclusione le radici n-sime distinte sono n e le otteniamo facendo variare k da 0 ad $n-1$.
Abbiamo, dunque, dimostrato il seguente teorema

Teorema - *Sia $\alpha \neq 0$ un numero complesso. Esistono n radici n-sime distinte di α e le loro immagini sono i vertici di un poligono regolare di n lati inscritto in un cerchio di centro l'origine e di raggio $r = \sqrt[n]{\rho}$.*

Ricordando la forma esponenziale di un numero complesso, si puo' scrivere

$$\beta_k = \sqrt[n]{\rho}(cos(\frac{\theta + 2k\pi}{n}) + isen(\frac{\theta + 2k\pi}{n})) = \sqrt[n]{\rho}e^{i\frac{\theta+2k\pi}{n}}.$$

Esempio - Determinare le radici quarte del numero complesso $\alpha = 1 + i$

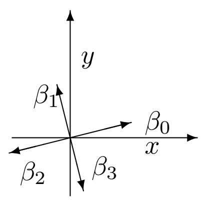
Dapprima si scrive il numero α in forma trigonometrica.
$\rho = |\alpha| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$ e le due equazioni $cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$ e $sen\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$ determinano in modo univoco l'argomento principale ed in questo caso e' $\frac{\pi}{4}$. Allora abbiamo la forma trigonometrica (ed esponenziale)

$$\alpha = \sqrt{2}(cos\frac{\pi}{4} + isen\frac{\pi}{4}) = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$$

Le radici sono:

$$\begin{aligned}
\beta_0 &= \sqrt[8]{2}(cos\frac{\pi}{16} + isen\frac{\pi}{16}) \\
\beta_1 &= \sqrt[8]{2}(cos(\frac{\pi}{16} + \frac{\pi}{2}) + isen(\frac{\pi}{16} + \frac{\pi}{2})), \\
\beta_2 &= \sqrt[8]{2}(cos(\frac{\pi}{16} + 2\frac{\pi}{2}) + isen(\frac{\pi}{16} + 2\frac{\pi}{2})), \\
\beta_3 &= \sqrt[8]{2}(cos(\frac{\pi}{16} + 3\frac{\pi}{2}) + isen(\frac{\pi}{16} + 3\frac{\pi}{2})).
\end{aligned}$$

Si osserva che il vettore immagine di una radice e' ottenuto ruotando di $\frac{\pi}{2}$ il vettore immagine della radice precedente.



Esercizio: calcolare le seguenti radici:

$$\sqrt[n]{1}; \;\; \sqrt[3]{i}; \;\; \sqrt[4]{-1}; \;\; \sqrt{-i}.$$

Giustificare con un esempio che $(\sqrt[n]{\alpha})^n \neq \sqrt[n]{\alpha^n}$.

Osservazione sull'ordinamento in $\mathbb{C}$

Abbiamo gia' considerato l'ordinamaento nei vari sistemi numerici costruiti. Abbiamo considerato un ordine mediante elementi positiv;la somma ed il prodotto fra loro conserva la positivita'. Sussistono la proprieta' di tricotomia o ordine completo e le varie proprieta' di monotonia. Nel campo dei numeri complessi questo tipo di ordinamento non e' possibile. Supponiamo di aver un tale ordine in $\mathbb{C}$ e di avere coppie (a, b) positive ovvero $> (0, 0)$. In tale ordinamento il quadrato di un numero o il prodotto di numeri positivi deve essere positivo. Ora in $\mathbb{C}$ si ha $(0, 1)^2 = (-1, 0)$ (positivo). Sia ora $(a, b) > (0, 0)$ numero positivo e moltiplichiamolo per $(-1, 0)$ si ha $(a, b)(-1, 0) = (-a, -b)$ positivo perche' prodotto di numeri positivi. Ma $(-a, -b)$ e' l' opposto di (a, b) che a sua volta e' positivo. Quindi si ha che l' opposto di un numero positivo e' positivo. Una contraddizione. Per completezza bisogna dire che su $\mathbb{C}$ si puo' definire un ordine parziale. In questi appunti non discuteremo questo problema.

Esercizi sui numeri complessi

• Luoghi geometrici

1) Sia $\alpha = 2 + i5$ un numero complesso. Allora $Re(\alpha) = 2$ e $Im(\alpha) = 5$.
Sia $\alpha = 2$. Allora $Re(\alpha) = 2$ e $Im(\alpha) = 0$.
Sia $\alpha = i3$. Allora $Re(\alpha) = 0$, $Im(\alpha) = 3$.
Sia $\alpha = 2(cos5 + isen3)$. Allora $Re(\alpha) = 2cos5$ e $Im(\alpha) = 2sen3$.

2) Scrivere i numeri $z = x + iy$ che hanno immagine sulla retta di equazione $x = 1$.
I punti sulla retta $x = 1$ hanno le componenti $(1, y)$
Allora $z = 1 + iy$.

3) Scrivere i numeri $z = x + iy$ che hanno immagine sulla retta di equazione $y = 2$.
I punti sulla retta $y = 1$ hanno le componenti $(x, 2)$
Allora $z = x + i2$.

4) Scrivere i numeri $z = x + iy$ che hanno immagine sulla retta di equazione $y = 3x$.
I punti sulla retta $y = 3x$ hanno le componenti $(x, 3x)$
Allora $z = 1 + iy$.

5) Disegnare nel piano di Gauss il luogo delle immagini dei numeri complessi $z = x + iy$ che soddisfano la relazione $0 \leq Re(z) \leq 1$.
E' la parte del piano (x, y) compresa fra le rette di equazione $x = 0$ e $x = 1$.

6) Disegnare nel piano di Gauss il luogo dei numeri complessi $z = x + iy$ che soddisfano la relazione $0 \leq Im(z) \leq 1$.
E' la parte del piano (x, y) compresa fra le rette di equazione $y = 0$ e $y = 1$.

7) Disegnare nel piano di Gauss il luogo dei numeri complessi $z = x + iy$ che soddisfano le relazioni $0 \leq Re(z) \leq 1$ e $0 \leq Im(z) \leq 1$.
E' il quadrato del piano (x, y) formato con gli intervalli $0 \leq x \leq 1$ sull'asse delle ascisse x e l'intervallo $0 \leq y \leq 1$ sull'asse delle ordinate.

8)Disegnare nel piano di Gauss il luogo delle immagini dei numeri complessi $z = x + iy$ che soddisfano la relazione $|z| < 2$ e $0 \leq Im(z) \leq 1$.
E' l'intersezione del cerchio di centro l'origine e raggio 2 con la striscia orizzontale del piano compresa fra le due rette d i equazioni $y = 0$ e $y = 1$.

8) Disegnare nel piano di Gauss il luogo delle immagini dei numeri complessi $z = x + iy$ che soddisfano $\arg z = \frac{\pi}{2}$.
L' angolo determina direzione e verso del vettore che rappresenta il numero complesso. L'angolo in considerazione determina la semiretta bisettrice del primo quadrante. Questa retta e' il luogo dei punti immagine dei numeri complessi con $\arg z = \frac{\pi}{2}$. I numeri complessi hanno la forma trigonometrica

$z = \rho(cos\frac{\pi}{2} + isen\frac{\pi}{2})$ ove $\rho = \sqrt{x^2+y^2}$. Da questa scrittura si nota che la direzione e verso sono determinate mentre la distanza dall'origine e' indeterminata.

9) Disegnare nel piano di Gauss il luogo delle immagini dei numeri complessi $z = x + iy$ che soddisfano $0 \leq \ argz \leq \frac{\pi}{2}$.
Il luogo e' l'angolo compreso fra le due semirette determinate dagli angoli $\arg z = 0$ (semiasse positivo delle ascisse (escluso))) e $argz = \frac{\pi}{2}$ (semiasse positivo delle ordinate (escluso)).

10) Disegnare nel piano di Gauss il luogo delle immagini dei numeri complessi $z = x + iy$ che soddisfano $-\frac{\pi}{2} \leq \arg z < 0$.

Il luogo e' l'angolo compreso fra le due semirette determinate dagli angoli $\arg z = 0$ (semiasse positivo delle ascisse (escluso)) e $\arg z = -\frac{\pi}{2}$ (semiasse negativo delle ordinate (escluso)).

11) Disegnare nel piano di Gauss il luogo dei numeri complessi $z = x + iy$ che soddisfano $|z| < 2$.
In questo caso dei numeri complessi e' dato il modulo ovvero la distanza dall'origine mentre e' lasciato indeterminato l'angolo ovvero la direzione verso. Il luogo e' il cerchio di centro l'origine con raggio 2.

E' facile disegnare nel piano di Gauss il luogo delle immagini dei numeri complessi $z = x + iy$ che soddisfano $2 \leq |z| < 4$. Esso e' la corona circolare formata dalla parte di piano compresa fra le due circonferenze di centro l'origine e raggi 2 e 4, rispettivamente.

12) Disegnare nel piano di Gauss il luogo delle immagini dei numeri complessi $z = x + iy$ che soddisfano $|z| = 2$ e $\arg z = \frac{\pi}{4}$.
In questo caso sono dati sia il modulo che l'argomento; il numero complesso e' completamente determinato ed e'

$z = 2(cos\frac{\pi}{4} + isen\frac{\pi}{4}) = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$.

La distanza dall'origine del punto immagine di z e' data dal modulo di z: $|z| = \sqrt{x^2+y^2}$. La distanza del punto immagine di $\alpha = a + ib$ dal punto immagine di z e' data da $|z - \alpha| = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}$.

13) Disegnare nel piano di Gauss il luogo immagine dei numeri complessi $z = x + iy$ che soddisfano $|z - (2 - i)| < 2$.

Il luogo e' dato dal cerchio di centro $\alpha = 2 + i$ e raggio 2

15) Determinare il luogo dei punti nel piano di Gauss delle soluzioni della relazione

$$|z| = |z - 1|.$$

Geometricamente si cercano i punti del piano che sono equidistanti dall'origine e dal punto $(1, 0)$ ovvero l'asse del segmento $\overline{01}$ sull'asse delle ascisse.

$$|z| = |z-1| \rightarrow \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{(x-1)^2+y^2} \ \textit{elevando al quadrato} \ \rightarrow$$

$$x^2 + y^2 = x^2 + y^2 + 1 - 2x \to 2x = 1 \to x = 1/2$$

l'equazione dell'asse.

16) Determinare il luogo dei punti nel piano di Gauss delle soluzioni della relazione

$$|z - (1 + i)| = |z - i|.$$

Geometricamente si cercano i punti del piano che sono equidistanti dal punto immagine di $(1 + i)$ e dal punto immagine di $0 + i$ ovvero l'asse del segmento che congiunge i punti $(1, 1)$ e $(0, 1)$.

$$|z-(1+i)| = |z-i| \to \sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2} = \sqrt{x^2 + (y-1)^2} \textit{ elevando al quadrato}$$

$$x^2 - 2x + 1 + (y-1)^2 = x^2 + (y-1)^2 \to x = 1/2$$

lo stesso dell'esercizio 15). Lo studente interpreti questo fatto.

17) Determinare il luogo dei punti nel piano di Gauss delle soluzioni della relazione

$$|z - i| = |z - (1 + 2i)|.$$

$$|z-i| = |z-(1+2i)| \to \sqrt{x^2 + y^2 - 2y + 1} = \sqrt{x^2 - 2x + 1 + y^2 - 4y + 4} \textit{elevando al quadrato}$$

$$\to x^2+y^2-2y+1 = x^2-2x+1+y^2-4y+4 \to -2y = -2x-4y+4 \to y = -x+2$$

l'equazione del luogo cercato.

• **Numeri in forma algebrica**

1) Scivere in forma algebrica:

$$i^3 \to ii^2 = -i; i^{20} \to i^{20} = (i^4)^5 = 1^5 = 1;$$

$$\frac{2}{i} \to \frac{2}{i} = \frac{2i}{i^2} = -2i; \frac{1}{i^7} \to \frac{1}{i^7} = \frac{i}{i^8} = \frac{i}{(i^4)^2} = i;$$

$$\alpha = \frac{1}{1+i} \to \frac{1}{1+i} = \frac{1-i}{(1+i)(1-i)} = \frac{1-i}{2} \to Re(\alpha) = 1/2;\ Im(\alpha) = -1/2;$$

$$\alpha = (1 + i)(3 - 2i) \to 3 - 2i + 3i - 2i^2 = 5 + i \to Re(\alpha) = 5,\ Im(\alpha) = 1.$$

$$\alpha = i(1+i) - 4i \to i + i^2 - 4i = -1 - 3i \to Re(\alpha) = -1;\ Im(\alpha) = -3\,|\alpha| = \sqrt{10}.$$

$$\alpha = (-i - \frac{2-i}{i})^2 = (-i + i(2 - i))^2 = (1 + i)^2 = 2i.$$

$$\alpha = \frac{1+i\sqrt{3}}{1-i} \rightarrow \frac{1+i\sqrt{3}}{1-i} = \frac{(1+i\sqrt{3})(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{1+i+i\sqrt{3}-\sqrt{3}}{2} = \frac{(1-\sqrt{3})+i(1+\sqrt{3})}{2} \rightarrow$$

$$Re(\alpha) = \frac{1-\sqrt{3}}{2},\ Im(\alpha) = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}.$$

$$\alpha = \frac{i}{2+i} \rightarrow \frac{i}{2+i} = \frac{i(2-i)}{(2+i)(2-i)} = \frac{1+2i}{5} \rightarrow Re(\alpha) = 1/5,\ Im(\alpha) = 2/5.$$

$$\alpha = \frac{2(cos\pi/5 + isen\pi/5}{(2-2i)} \rightarrow \frac{2(cos\pi/5 + isen\pi/5)(1+i)}{(2-2i)(1+i)} = \frac{((cos\pi/5 + isen\pi/5)(1+i)}{2} \rightarrow$$

$$\frac{(cos\pi/5 - sen\pi/5 + i(cos\pi/5 + sen\pi/5)}{2}\ oppure\ (DeMoivre)\frac{2(cos\pi/5 + isen\pi/5}{)}(2-2i) = \frac{2(cos\pi/5 +}{2(cos(-\pi/4) -}$$

$$cos9\pi/20 + isen9\pi/20.$$

$$\alpha = \frac{(2(cos\pi/5 + isen\pi/5)^{10}}{(1+i\sqrt{3})^4} \rightarrow \frac{(2(cos\pi/5 + isen\pi/5)^{10}}{(1+i\sqrt{3})^4} =$$

$$\frac{2^6(cos2\pi + isen2\pi)}{((cos4\pi/3 + isen4\pi/3)} = 2^6(cos2\pi/3 + isen2\pi/3) = 2^5(-1+i\sqrt{3}).$$

$$\alpha = \sqrt{2}e^{i\pi/4} = \sqrt{2}(cos\pi/4 + isen\pi/4) = 1+i.$$

$$\frac{}{(1+i)(3-i)} = \frac{}{3-i+3i+1} = \frac{}{4+2i} = \frac{i(1-i)}{4} = \frac{1+i}{4}.$$

2) Determinare z per cui

$$\alpha = \frac{z+1+i}{z-i}$$

sia un numero reale.

$$\alpha = \frac{z+1+i}{z-i} \rightarrow \frac{z+1+i}{z-i} = \frac{x+iy+1+i}{x+iy-i} = \frac{(x+1)+i(y+1)}{x+i(y-1)} \rightarrow$$

$$\frac{((x+1)+i(y+1))(x-i(y-1)}{x^2+(y-1)^2} =$$

$$\frac{((x+1)x+(y^2-1)+i(x(y+1)-(x+1)(y-1))}{x^2+(y-1)^2} \rightarrow \alpha \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$$

$x(y+1)-(x+1)(y-1) = 0 \rightarrow 2x-y+1 = 0 \rightarrow y = 2x+1 \rightarrow z = x+i(2x+1)$

.

3) Determinare $z = x+iy$ per cui

$$\frac{z+1}{\bar{z}-2} = 2.$$

$\dfrac{z+1}{\bar{z}-2} = 2(\bar{z}-2 \neq 0) \rightarrow z+1 = 2(\bar{z}-2) \rightarrow x+1+iy = 2(x-iy-2) \rightarrow x+1 = 2x-4 \; e \; y = -2y \rightarrow x = 5, y = 0.$

4) Determinare $z = x + iy$ per cui

$$z^2 \bar{+} 1 - z^2 + 3x + i = 0$$

$z^2 + 1 - z^2 + 3x + i = 0 \rightarrow (\bar{z})^2 + 1 - z^2 + 3x + i = 0 \rightarrow (x-iy)^2 - (x+iy)^2 + 3x + 1 + i = 0 \rightarrow$

$x^2 - y^2 - 2ixy - x^2 + y^2 - 2ixy + 3x + 1 + i = 0 \rightarrow -4ixy + 3x + 1 + i = 0 \rightarrow -4xy + 1 = 0 \; e \; 3x + 1 = 0 \rightarrow x = -1/3$

5) Determinare $z = x + iy$ per cui

$$x + iy = (x - iy)^2$$

.

$x+iy = (x-iy)^2 \rightarrow x+iy = x^2 - 2ixy - y^2 \rightarrow x = x^2 - y^2 \; e \; y = -2xy \rightarrow y(1+2x) = 0 \; e \; x^2 - x - y^2 = 0 \leftrightarrow$

$$se \; y = 0 \; allora \; x = 0 \; oppure \; x = 1,$$
$$se \; x = -1/2 \; allora \; y = \pm\sqrt{3}/2$$

Le soluzioni sono :

$$z_1 = 0, \; z_2 = 1, z_3 = -1/2 + i\sqrt{3}/2, z_4 = -1/2 - i\sqrt{3}/2$$

- **Modulo e forma trigonometrica**

$|2| = 2; \; |-3| = 3; \; |i| = 1; \; |i^n| = |i|^n = 1; \; |1+2i| = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}; \; |2-i| = \sqrt{2^2 + (-1)^2} = \sqrt{5};$

$|(1-i)3| = 3|1-i| = \sqrt{2}; \; |(1-i)(3+i)| = |(1-i)||(3+i)| = \sqrt{2}\sqrt{10} = 2\sqrt{5};$

$$|(2 + i\sqrt{5})^2| = |2 + i\sqrt{5}|^2 = (\sqrt{2^2 + \sqrt{5}^2})^2 = 9$$

$|(z-1)^2| + yi + 2 = 0 \rightarrow |(z-1)|^2 + yi + 2 = 0 \rightarrow (x-1)^2 + y^2 + iy + 2 = 0 \rightarrow y = 0 \; e \; (x-1)^2 = 2 \rightarrow$

$$y = 0 \; e \; x = 1 \pm \sqrt{2}$$

Le soluzioni sono : $z = 1 + \sqrt{2}, z = 1 - \sqrt{2}$.

$z{+}2{-}i = |z| \to x{+}2{+}i(y{-}1) = \sqrt{x^2 + y^2}\ uguaglianza\ fra\ complessi \to y{-}1 = 0\ e\ x{+}2 = \sqrt{x^2 + y^2} \to y$

$$x + 2 = \sqrt{x^2 + 1}\ per\ x + 2 > 0 \to x^2 + 4 + 4x = x^2 + 1 \to x = -3/4.$$

La soluzione e' $z = -3/4 + i$.

$$|\frac{i}{\sqrt{3} + i}| = |\frac{i\sqrt{3} + 1}{4}| = \frac{\sqrt{4}}{4} = \frac{1}{2}.$$

$$\arg i = \pi/2;\ \arg(-1) = \pi,\ \arg(1 + i) = \pi/4,\ \arg(1 + i)^5 = 5\pi/4,$$

$$\arg \frac{1}{(1 - i)^3} = -3 \arg(1 - i) = 3\pi/4.$$

2) Scrivere in forma trigonometrica:

$$\alpha = 3 + 3i \to |\alpha| = 3|1 + i| = 3\sqrt{2}; \quad cos\theta = 1/2 = sen\theta \to \theta = \pi/4 \to$$

$$\alpha = 3\sqrt{2}(cos\pi/4 + isen\pi/4).$$

$$\alpha = \frac{1 + i}{1 - i},\ |\alpha| = \frac{|1 + i|}{|1 - i|} = 1; \arg \alpha = \arg(1{+}i){-}\arg(1{-}i) = \pi/2 \to \alpha = cos\pi/2{+}isen\pi/2 = i.$$

$z = xe^{iy} \to |z| = |x||e^{iy}| = |x|\ allora\ per\ x > 0 \quad \alpha = x(cosy{+}iseny);\ per\ x < 0, \alpha = -|x|eiy = |x|e^{i\pi}e^{iy}$

$$allora\ \alpha = |x|(cos(y + \pi) + isen(y + \pi)).$$

$$(e^{1+i})^2 = e^{2+2i} = e^2 e^{2i} = e^2(cos2 + isen2).$$

Il modulo e' e^2 e l'argomento e'2.

• **Radici ed equazioni**

1)

$$\beta = \sqrt[3]{1}$$

Si scrive 1 in forma trigonometrica

$$1 = cos0 + isen0$$

allora

$$\beta = \sqrt[3]{1} = cos(\frac{0+2k\pi}{3}) + isen(\frac{0+2k\pi}{3})$$

assegnando a k i valori $0, 1, 2$ si ha

$$\beta_0 = 1;\ \beta_1 = cos(\frac{2\pi}{3}) + isen(\frac{2\pi}{3}),\ \beta_2 = cos(\frac{4\pi}{3}) + isen(\frac{4\pi}{3})$$

che sono i vertici di un triangolo equilatero inscritto nel cerchio di centro l'origine e raggio uno.

2)

$$\beta = \sqrt{-4}$$

Si scrive -4 in forma trigonometrica. Il modulo e' quattro e l' argomento e' π quindi $-4 = 4(cos\pi + isen\pi)$ per cui

$$\beta = \sqrt{4}(cos(\pi + 2k\pi)/2 + isen(\pi + 2k\pi)/2) \rightarrow \beta_0 = \sqrt{4}(cos\pi/2 + isen\pi/2) =$$

$$\sqrt{4}i = 2,\ \beta_1 = \sqrt{4}(cos3\pi/2 + isen3\pi/2) = -\sqrt{4}i = -\beta_0.$$

Osserviamo che le radici quadrate sono una l' opposta dell'altra; poi c'e' $\sqrt{4}$ che intesa nel campo reale. Seppure le notazioni sono le stesse dal contesto si riesce a distinguere il caso reale da quello complesso.

Con questa osservazione non v' e' dubbio che si puo' scrivere $\sqrt{-3i} = \sqrt{3}\sqrt{-1}$ ove la prima radice e' reale e la seconda e' complessa. Ancora $\sqrt{-1}$ ha due soluzioni $\pm i$. A volte in forma colloquiale si usa dire $i = \sqrt{-1}$. La teoria ci ha portato a scrivere $i = (0, 1)$. Questa e' stata una delle ragioni che ha indotto a presentare i numeri complessi sotto forma di coppie ordinate di numeri reali pittosto che scrivere $a + \sqrt{-1}b$.

3)

$$\beta = \sqrt[4]{-1}$$

si scrive -1 in forma trigonometrica: $-1 = cos\pi + isen\pi$ quindi

$$\beta_k = cos(\frac{\pi + 2k\pi}{4}) + isen(\frac{\pi + 2k\pi}{4}) \rightarrow \beta_0 = cos(\frac{\pi}{4}) + isen(\frac{\pi}{4}) = 1 + i,$$

$$\beta_1 = cos(\frac{3\pi}{4}) + isen(\frac{3\pi}{4}) = -1+i,\ \beta_2 = cos(\frac{5\pi}{4}) + isen(\frac{5\pi}{4}) = -(1+i),\ \beta_3 = cos(\frac{7\pi}{4}) + isen(\frac{7\pi}{4}) = -(-1+i$$

Tali radici sono i vertici di un quadrato inscritto nel cerchio di centro l' origine e raggio uno.

4)Risolvere l'equazione

$$(z-1)^3 = i$$

Scriviamo $z-1 = \sqrt[2]{i}$ e poniamo i in forma trigonometrica.

$i = cos\pi/2 + isen\pi/2$. Si ha

$$(z-1)_k = cos\frac{\pi/2+2k\pi}{3} + isen\frac{\pi/2+2k\pi}{3} \rightarrow$$

$(z-1)_0 = cos\frac{\pi}{6} + isen\frac{\pi}{6};\ (z-1)_1 = cos\frac{5\pi}{6} + isen\frac{5\pi}{6};\ (z-1)_2 = cos\frac{9\pi}{6} + isen\frac{9\pi}{6}$

ovvero

$$z_0 = 1 + \sqrt{3}/2 + i/2;\ z_1 = 1 - \sqrt{3}/2 + i/2;\ z_2 = 1 - i$$

5) Risolvere l'equazione

$$z^3 = 8.$$

Scriviamo

$$z = \sqrt[3]{8} \rightarrow z = \sqrt[3]{2^3}$$

.

Una soluzione e' 2 le altre si ottengono per rotazione di $2\pi/3$ le soluzioni sono

$$z_k = 2e^{2k\pi/3},\ k = 0, 1, 2.$$

6) Risolvere l'equazione

$$(\frac{z-i}{i})^2 = 1 + i.$$

Scriviamo:

$$\frac{z-i}{i} = \sqrt{1+i},\ 1 + i = \sqrt{2}(cos\pi/4 + isen\pi/4)$$

allora

$$(\frac{z-i}{i}) = \pm\sqrt{2}(cos\pi/8 + isen\pi/8) \rightarrow z = i \pm i\sqrt{2}(cos\pi/8 + isen\pi/8).$$

7) Risolvere l'equazione

$$z^2 + 2iz - 5 = 0.$$

In questo caso conviene usare la formula risolutiva dell'equazione di secondo grado usando il radice complessa invece della radice algebrica. Quindi

$$z = -i + \sqrt{(-i)^2 + 5} = -i \pm 2.$$

8) Risolvere l'equazione

$$z^2+2iz-i=0 \to z=-i+\sqrt{-1+i} \to z=-i \pm \sqrt{2}(cos 3\pi/8+isen 3\pi/8).$$

9) Risolvere l'equazione

$$(z+i)^2=(\sqrt{3}+i)^2 \to z+i=\sqrt{(\sqrt{3}+i)^2}=\pm(\sqrt{3}+i) \to$$

$$z=i \pm (\sqrt{3}+i).$$

10) Risolvere l'equazione

$$z^3(z^2-i)=0.$$

$$z^3(z^2-i)=0 \to z=0 \ oppure \ z^2-i=0$$

Risolviamo la seconda equazione.

$$z^2=i \to z_k=cos(\frac{\pi+4k\pi}{4})+isen(\frac{\pi+4k\pi}{4}) \to z_0=cos\pi/4+isen\pi/4=$$

$$\frac{1+i}{\sqrt{2}}, \ z_1=-z_0=-\frac{1+i}{\sqrt{2}}.$$

(si rammenta che le radici quadrate sono una opposta all'altra).

12) Risolvere l'equazione

$$z^2+|z^2|+i=1$$

Non c'e formula risolutiva per questa equazione. Si risolve applicando la uguaglianza fra numeri complessi.

$$z^2+|z^2|+i=1 \to x^2-y^2+2iy+(x^2+y^2)+i=1 \to x^2-y^2+(x^2+y^2)=1 \ e \ 2y+1=0 \to$$

$$y=-1/2, \ e \ x^2=1/2 \to z_1=\sqrt{1/2}-i/2, z_2=-\sqrt{1/2}-i/2.$$

13) Risolvere l'equazione

$$z+|z|z=1.$$

Usiamo l'uguaglianza fra numeri complessi.

$$x+iy+(x+iy)\sqrt{x^2+y^2}=1 \to x(1+\sqrt{x^2+y^2})+iy(1+\sqrt{x^2+y^2})=1+0i \to$$

uguagliando i due membri si ha il sistema

$$\begin{cases} x(1+\sqrt{x^2+y^2}) = 1 \\ y(1+\sqrt{x^2+y^2}) = 0 \end{cases}$$

La seconda equazione ha la sola soluzione $y = 0$ per cui la prima equazione assume la forma

$$x(1+\sqrt{x^2}) = 1 \rightarrow x(1+|x|) = 1 \rightarrow (x \neq 0)$$

$$\begin{cases} x > 0 \\ x^2 + x - 1 = 0 \end{cases} e \begin{cases} x < 0 \\ x^2 - x + 1 = 0 \end{cases}$$

Il secondo sistema non ha soluzione (si rammenta che x ed y devono essere numeri reali). Il primo sistema ha una sola soluzione

$$x = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$$

quindi la soluzione dell'equazione proposta e':

$$z = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}.$$

14) Risolvere l'equazione

$$|z|(z^2 - z + 1) = 0.$$

$z = 0$ e' una soluzione le altre le otteniamo applicando a formula risolutiva di una equazione di secondo grado.

$$z^2 - z + 1 = 0 \rightarrow z = \frac{1+\sqrt{-3}}{2} = \frac{1+\sqrt{3}\sqrt{-1}}{2} = \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}.$$

15)

$$(|z| - 1)(z^2 - z + 1) = 0.$$

$$|z| = 1 \; e \; (z^2 - z + 1) = 0.$$

Le soluzioni $z = \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}$ e $z = e^{i\theta}$.
16) Risolvere l'equazione

$$z - |z| = 0$$

$$z - |z| = 0 \rightarrow z = |z| \rightarrow x + iy = \sqrt{x^2+y^2}.$$

A secondo membro c'e' un numero reale; dalla uguaglianza complessa si ha

$$y = 0 \; per \; cui \; x = \sqrt{x^2} \rightarrow x = |x| \rightarrow x \geq 0.$$

Le soluzioni della equazione proposta sono $z = x$ con $x \geq 0$.