INTEGRAZIONE DI FUNZIONI RAZIONALI

Integrazione di funzioni razionali

α) Calcolare l'integrale :

$$I_1 = \int \frac{ax+b}{x^2+px+q}\,dx\,,$$

dove si suppone che l'equazione $x^2+px+q=0$ abbia radici complesse coniugate, cioè si suppone $p^2-4q<0$, ossia: $q-\frac{p^2}{4}>0$.

Posto, per brevità, $k^2 = q - \frac{p^2}{4}$, abbiamo :

$$x^2+px+q = \left(x+\frac{p}{2}\right)^2 + q - \frac{p^2}{4} = \left(x+\frac{p}{2}\right)^2 + k^2\,,$$

$$ax+b = \frac{a}{2}(2x+p) + b - \frac{ap}{2}\,,$$

e perciò :

$$\int \frac{ax+b}{x^2+px+q}\,dx = \frac{a}{2}\int \frac{2x+p}{x^2+px+q}\,dx + \left(b-\frac{ap}{2}\right)\int \frac{1}{k^2+\left(x+\frac{p}{2}\right)^2}\,dx\,.$$

Risulta :

$$\frac{a}{2}\int \frac{2x+p}{x^2+px+q}\,dx = \frac{a}{2}\log(x^2+px+q)\,,$$

perchè il numeratore è la derivata del denominatore; inoltre, in base al secondo degli esercizi svolti in 4) nel n. 3, risulta :

$$\left(b-\frac{ap}{2}\right)\int \frac{1}{k^2+\left(x+\frac{p}{2}\right)^2}\,dx = \left(b-\frac{ap}{2}\right)\int \frac{1}{k^2+\left(x+\frac{p}{2}\right)^2}\,d\left(x+\frac{p}{2}\right) =$$

$$= \left(b-\frac{ap}{2}\right)\cdot\frac{1}{k}\,\mathrm{arctg}\,\frac{x+\frac{p}{2}}{k} = \frac{b-\frac{ap}{2}}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}\,\mathrm{arctg}\,\frac{x+\frac{p}{2}}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}\,.$$

In definitiva si ha quindi :

$$\boxed{I_1 = \int \frac{ax+b}{x^2+px+q}\,dx = \frac{a}{2}\log(x^2+px+q) + \frac{b-\frac{ap}{2}}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}\,\mathrm{arctg}\,\frac{x+\frac{p}{2}}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}} + c}\,.$$

ESEMPI.

1) *Calcolare l'integrale* : $\displaystyle\int \frac{2x-3}{x^2-x-2}\,dx$.

Per decomporre la frazione secondo il metodo enunciato, cominciamo col trovare le radici dell'equazione :

$$x^2 - x - 2 = 0 ,$$

che sono : -1 e 2, e quindi possiamo scrivere, come è noto :

$$x^2 - x - 2 = (x+1)(x-2) .$$

Poniamo allora :

$$\frac{2x-3}{x^2-x-2} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-2} , \tag{1}$$

dove A e B sono costanti da determinare. Per determinare queste costanti eliminiamo nella (1) i denominatori. Si ottiene :

$$2x - 3 = A(x-2) + B(x+1) ,$$

ossia :

$$2x - 3 = (A+B)x + (-2A+B) .$$

Siccome questa eguaglianza deve essere soddisfatta per ogni valore della x, allora i coefficienti dei termini di egual grado della x dei due membri devono essere eguali. Dovrà quindi risultare :

$$\begin{cases} A + B = 2 \\ -2A + B = -3 . \end{cases}$$

Risolvendo questo sistema lineare, si trova :

$$A = \frac{5}{3} , \quad B = \frac{1}{3} .$$

— 5 —

Sostituendo questi valori nella (1), si ha:

$$\frac{2x-3}{x^2-x-2}=\frac{\frac{5}{3}}{x+1}+\frac{\frac{1}{3}}{x-2},$$

e quindi ([1]):

$$\int\frac{2x-3}{x^2-x-2}\,dx=\frac{5}{3}\int\frac{1}{x+1}\,dx+\frac{1}{3}\int\frac{1}{x-2}\,dx=$$

$$=\frac{5}{3}\log(x+1)+\frac{1}{3}\log(x-2)+c=\log(x+1)^{\frac{5}{3}}+\log(x-2)^{\frac{1}{3}}+c=$$

$$=\log\left[(x+1)^{\frac{5}{3}}\cdot(x-2)^{\frac{1}{3}}\right]+c.$$

2) *Calcolare l'integrale*: $\displaystyle\int\frac{4x^2-16x+4}{x^3-3x^2-x+3}\,dx$.

Si verifica subito che l'equazione ([2]):

(1) $$x^3-3x^2-x+3=0,$$

ha come radice 1; cosicchè il primo membro della (1) è divisibile per $x-1$. Eseguendo questa divisione si trova che il quoziente è: x^2-2x-3, e la (1) può perciò scriversi sotto la forma:

$$(x-1)(x^2-2x-3)=0.$$

Si trova ora che il secondo fattore di questo prodotto si annulla per $x = -1$ e $x = 3$, in modo che si può scrivere:

$$x^3 - 3x^2 - x + 3 = (x-1)(x+1)(x-3).$$

Posto allora:

$$\frac{4x^2 - 16x + 4}{x^3 - 3x^2 - x + 3} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x-3},$$

dovrà essere:

$$4x^2 - 16x + 4 = A(x+1)(x-3) + B(x-1)(x-3) + C(x-1)(x+1),$$

ossia:

$$4x^2 - 16x + 4 = (A + B + C)x^2 + (-2A - 4B)x + (-3A + 3B - C);$$

quindi:

$$\begin{cases} A + B + C = 4 \\ -2A - 4B = -16 \\ -3A + 3B - C = +4. \end{cases}$$

Risolvendo questo sistema lineare, si trova:

$$A = 2, \quad B = 3, \quad C = -1.$$

Ne segue che:

$$\int \frac{4x^2 - 16x + 4}{x^3 - 3x^2 - x + 3}\,dx = 2\int \frac{1}{x-1}\,dx + 3\int \frac{1}{x+1}\,dx - \int \frac{1}{x-3}\,dx =$$

$$= 2\log(x-1) + 3\log(x+1) - \log(x-3) + c = \log\frac{(x-1)^2(x+1)^3}{x-3} + c.$$

3) *Calcolare l'integrale*: $\displaystyle\int \frac{x^5 - 7x^4 + 8x^3 + 15x^2 - 26x + 13}{x^2 - 7x + 10}\,dx.$

Siccome la funzione che si deve integrare è impropria, si deve, innanzi tutto, eseguire la divisione. Si ottiene:

$$
\begin{array}{rrrrrr|l}
x^5 & -\,7x^4 & +\,8x^3 & +\,15x^2 & -\,26x & +\,13 & x^2-7x+10 \\
\cline{7-7}
-\,x^5 & +\,7x^4 & -\,10x^3 & & & & x^3-2x+1 \\
\hline
 & & -\,2x^3 & +\,15x^2 & -\,26x & +\,13 & \\
 & & +\,2x^3 & -\,14x^2 & +\,20x & & \\
\cline{3-6}
 & & & +\,x^2 & -\,6x & +\,13 & \\
 & & & -\,x^2 & +\,7x & -\,10 & \\
\cline{4-6}
 & & & & x & +\,3 &
\end{array}
$$

e quindi:

$$\frac{x^5-7x^4+8x^3+15x^2-26x+13}{x^2-7x+10}=x^3-2x+1+\frac{x+3}{x^2-7x+10}$$

Si ha perciò:

$$\int\frac{x^5-7x^4+8x^3+15x^2-26x+13}{x^2-7x+10}\,dx=\int\left(x^3-2x+1+\frac{x+3}{x^2-7x+10}\right)dx=$$

$$=\frac{x^4}{4}-x^2+x+\int\frac{x+3}{x^2-7x+10}\,dx\,,$$

e siamo ricondotti all'integrazione d'una funzione razionale fratta propria. Procedendo come nei due esempi svolti, si trova:

$$\int\frac{x+3}{x^2-7x+10}\,dx=\log\frac{(x-5)^{\frac{8}{3}}}{(x-2)^{\frac{5}{3}}}+c\,;$$

quindi, in definitiva, si ha:

$$\int\frac{x^5-7x^4+8x^3+15x^2-26x+13}{x^2-7x+10}\,dx=\frac{x^4}{4}-x^2+x+\log\frac{(x-5)^{\frac{8}{3}}}{(x-2)^{\frac{5}{3}}}+c\,.$$

b) Caso delle radici reali e multiple. — Supponiamo ora che l'equazione $N(x)=0$ *non* abbia tutte le radici distinte, pur essendo sempre reali. Supponiamo cioè, tanto per fissare le idee, che l'equazione $N(x)=0$, di grado n, ammetta soltanto tre radici reali distinte: $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, la prima contata r volte, la seconda s volte e la terza t volte con, s'intende, $r+s+t=n$.

In questo caso, come è noto dalla teoria, si dimostra che vale la seguente decomposizione:

$$\frac{M(x)}{N(x)} = \frac{A_1}{x-\alpha_1} + \frac{A_2}{(x-\alpha_1)^2} + \dots + \frac{A_r}{(x-\alpha_1)^r} +$$

$$+ \frac{B_1}{x-\alpha_2} + \frac{B_2}{(x-\alpha_2)^2} + \dots + \frac{B_s}{(x-\alpha_2)^s} +$$

$$+ \frac{C_1}{x-\alpha_3} + \frac{C_2}{(x-\alpha_3)^2} + \dots + \frac{C_t}{(x-\alpha_3)^t},$$

con: $A_1, A_2, \dots, A_r$; $B_1, B_2, \dots, B_s$; $C_1, C_2, \dots, C_t$, costanti convenienti. Anche in questo caso quindi l'integrale della funzione $\frac{M(x)}{N(x)}$ si scompone nella somma di più integrali che sappiamo già calcolare perchè, per $p > 1$, risulta:

$$\int \frac{A}{(x-\alpha)^p}dx = A\int (x-\alpha)^{-p}d(x-\alpha) = A\frac{(x-\alpha)^{-p+1}}{-p+1} + c = -\frac{A}{p-1}\cdot\frac{1}{(x-\alpha)^{p-1}} + c.$$

ESEMPI.

1) *Calcolare l'integrale*: $\int \frac{3x-1}{x^3-5x^2+8x-4}dx$.

Si verifica subito che l'equazione (¹):

$$x^3 - 5x^2 + 8x - 4 = 0,$$

ha per radice $x = 1$. Dividendo allora il primo membro di questa equazione per $x-1$, si trova per quoziente: x^2-4x+4, e perciò si può scrivere:

$$(x-1)(x^2-4x+4) = 0.$$

Si vede ora che l'equazione: $x^2 - 4x + 4 = 0$, ammette la radice $x = 2$ contata *due* volte, e quindi possiamo scrivere:

$$x^3 - 5x^2 + 8x - 4 = (x-1)(x-2)^2 .$$

Le radici della nostra equazione sono perciò 1 e 2, la prima *semplice* e la seconda *doppia*. Porremo quindi:

$$\frac{3x-1}{x^3 - 5x^2 + 8x - 4} = \frac{A}{x-1} + \frac{B_1}{x-2} + \frac{B_2}{(x-2)^2} .$$

Eliminando i denominatori, si ottiene:

$$3x - 1 = A(x-2)^2 + B_1(x-1)(x-2) + B_2(x-1) ,$$

ossia:

$$3x - 1 = (A + B_1)x^2 + (-4A - 3B_1 + B_2)x + (4A + 2B_1 - B_2) ,$$

e quindi:

$$\begin{cases} A + B_1 = 0 \\ -4A - 3B_1 + B_2 = 3 \\ 4A + 2B_1 - B_2 = -1 . \end{cases}$$

Risolvendo questo sistema lineare, si ottiene: $A = 2, B_1 = -2$, $B_2 = 5$.

Pertanto:

$$\int \frac{3x-1}{x^3 - 5x^2 + 8x - 4} dx = 2\int \frac{1}{x-1} dx - 2\int \frac{1}{x-2} dx + 5\int (x-2)^{-2} d(x-2) =$$

$$= 2 \log(x-1) - 2 \log(x-2) + 5 \frac{(x-2)^{-1}}{-1} + c =$$

$$= \log \frac{(x-1)^2}{(x-2)^2} - \frac{5}{x-2} + c .$$

2) *Calcolare l'integrale* : $\displaystyle\int \frac{x^3 - 2x + 3}{x^3(x-1)}\,dx$.

Le radici dell'equazione $x^3(x-1) = 0$, sono : $x = 0$, contata *tre* volte e $x = 1$, contata *una* sola volta. Porremo quindi :

$$\frac{x^3 - 2x + 3}{x^3(x-1)} = \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x^2} + \frac{A_3}{x^3} + \frac{B}{x-1} .$$

Eliminando i denominatori, si ottiene :

$$x^3 - 2x + 3 = A_1 x^2(x-1) + A_2 x(x-1) + A_3(x-1) + Bx^3 ,$$

ossia :

$$x^3 - 2x + 3 = (A_1 + B)x^3 + (-A_1 + A_2)x^2 + (-A_2 + A_3)x - A_3 ,$$

e quindi :

$$\begin{cases} A_1 \qquad\qquad + B = 1 \\ -A_1 + A_2 \qquad\quad = 0 \\ \qquad -A_2 + A_3 \quad = -2 \\ \qquad\qquad -A_3 \quad = 3 . \end{cases}$$

Risolvendo il sistema, si trova : $A_1 = -1$, $A_2 = -1$, $A_3 = -3$, $B = 2$.

Pertanto :

$$\int \frac{x^3 - 2x + 3}{x^3(x-1)}\,dx = -\int \frac{1}{x}\,dx - \int x^{-2}\,dx - 3\int x^{-3}\,dx + 2\int \frac{1}{x-1}\,dx =$$

$$= -\log x - \frac{x^{-1}}{-1} - 3\,\frac{x^{-2}}{-2} + 2\log(x-1) + c =$$

$$= \log\frac{(x-1)^2}{x} + \frac{1}{x} + \frac{3}{2x^2} + c .$$

3) *Calcolare l'integrale*: $\displaystyle\int \frac{3x^2 - 5x + 7}{(x-2)^4}\,dx$.

L'equazione $(x-2)^4 = 0$ ammette l'unica radice $x = 2$, contata *quattro* volte. Porremo quindi:

$$\frac{3x^2 - 5x + 7}{(x-2)^4} = \frac{A_1}{x-2} + \frac{A_2}{(x-2)^2} + \frac{A_3}{(x-2)^3} + \frac{A_4}{(x-2)^4},$$

da cui:

$$3x^2 - 5x + 7 = A_1(x-2)^3 + A_2(x-2)^2 + A_3(x-2) + A_4 .$$

Con il solito procedimento si ricava: $A_1 = 0$, $A_2 = 3$, $A_3 = 7$, $A_4 = 9$.

Si ha quindi:

$$\int \frac{3x^2 - 5x + 7}{(x-2)^4}\,dx = 3\int (x-2)^{-2}d(x-2) + 7\int (x-2)^{-3}d(x-2) +$$

$$+ 9\int (x-2)^{-4}d(x-2) = -\frac{3}{x-2} - \frac{7}{2(x-2)^2} - \frac{3}{(x-2)^3} + c .$$

c) *Caso delle radici complesse.* — Prima di trattare il caso che l'equazione $N(x) = 0$ abbia anche radici complesse, calcoliamo dapprima i seguenti integrali:

α) *Calcolare l'integrale*:

$$I_1 = \int \frac{ax + b}{x^2 + px + q}\,dx ,$$

dove si suppone che l'equazione $x^2 + px + q = 0$ *abbia radici complesse coniugate, cioè si suppone* $p^2 - 4q < 0$, *ossia*: $q - \dfrac{p^2}{4} > 0$.

Posto, per brevità, $k^2 = q - \frac{p^2}{4}$, abbiamo:

$$x^2 + px + q = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + q - \frac{p^2}{4} = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + k^2,$$

$$ax + b = \frac{a}{2}(2x + p) + b - \frac{ap}{2},$$

e perciò:

$$\int \frac{ax + b}{x^2 + px + q} dx = \frac{a}{2}\int \frac{2x + p}{x^2 + px + q} dx + \left(b - \frac{ap}{2}\right)\int \frac{1}{k^2 + \left(x + \frac{p}{2}\right)^2} dx.$$

Risulta:

$$\frac{a}{2}\int \frac{2x + p}{x^2 + px + q} dx = \frac{a}{2}\log(x^2 + px + q),$$

perchè il numeratore è la derivata del denominatore; inoltre, in base al secondo degli esercizi svolti in 4) nel n. 3, risulta:

$$\left(b - \frac{ap}{2}\right)\int \frac{1}{k^2 + \left(x + \frac{p}{2}\right)^2} dx = \left(b - \frac{ap}{2}\right)\int \frac{1}{k^2 + \left(x + \frac{p}{2}\right)^2} d\left(x + \frac{p}{2}\right) =$$

$$= \left(b - \frac{ap}{2}\right)\cdot \frac{1}{k} \operatorname{arctg} \frac{x + \frac{p}{2}}{k} = \frac{b - \frac{ap}{2}}{\sqrt{q - \frac{p^2}{4}}} \operatorname{arctg} \frac{x + \frac{p}{2}}{\sqrt{q - \frac{p^2}{4}}}.$$

In definitiva si ha quindi:

$$\boxed{I_1 = \int \frac{ax + b}{x^2 + px + q} dx = \frac{a}{2}\log(x^2 + px + q) + \frac{b - \frac{ap}{2}}{\sqrt{q - \frac{p^2}{4}}} \operatorname{arctg} \frac{x + \frac{p}{2}}{\sqrt{q - \frac{p^2}{4}}} + c}.$$

Così, ad esempio, si abbia da calcolare l'integrale:

$$\int \frac{3x+5}{x^2+x+2}\,dx\,.$$

Esso è del tipo dell'integrale considerato, e si ha:

$$\int \frac{3x+5}{x^2+x+2}\,dx = \frac{3}{2}\int \frac{2x+1}{x^2+x+2}\,dx + \left(5-\frac{3}{2}\right)\int \frac{1}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^2}\,d\left(x+\frac{1}{2}\right) =$$

$$= \frac{3}{2}\log(x^2+x+2) + \frac{7}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{7}}\,\mathrm{arctg}\,\frac{x+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{7}}{2}} + c =$$

$$= \frac{3}{2}\log(x^2+x+2) + \sqrt{7}\,\mathrm{arctg}\,\frac{2x+1}{\sqrt{7}} + c\,.$$

Così pure, si ha:

$$\int \frac{x-7}{x^2+3x+5}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x+3}{x^2+3x+5}\,dx - \left(7+\frac{3}{2}\right)\int \frac{1}{\left(x+\frac{3}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{11}}{2}\right)^2}\,d\left(x+\frac{3}{2}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\log(x^2+3x+5) - \frac{17}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{11}}\,\mathrm{arctg}\,\frac{x+\frac{3}{2}}{\frac{\sqrt{11}}{2}} + c =$$

$$= \frac{1}{2}\log(x^2+3x+5) - \frac{17}{\sqrt{11}}\,\mathrm{arctg}\,\frac{2x+3}{\sqrt{11}} + c\,.$$

β) *Calcolare l'integrale:*

$$I_n = \int \frac{ax+b}{(x^2+px+q)^n}\,dx\,,$$

con n numero intero > 1 e l'equazione $x^2+px+q=0$ a radici complesse.

Facendo la stessa decomposizione del caso precedente, si ha:

$$I_n = \frac{a}{2}\int \frac{2x+p}{(x^2+px+q)^n}\,dx + \left(b - \frac{ap}{2}\right)\int \frac{1}{\left[\left(x+\frac{p}{2}\right)^2 + k^2\right]^n}\,dx\,.$$

Risulta:

$$\frac{a}{2}\int \frac{2x+p}{(x^2+px+q)^n}\,dx = \frac{a}{2}\int (x^2+px+q)^{-n} d(x^2+px+q) =$$

$$= \frac{a}{2}\cdot\frac{(x^2+px+q)^{-n+1}}{-n+1} = -\frac{a}{2(n-1)}\cdot\frac{1}{(x^2+px+q)^{n-1}}\,.$$

Si osservi poi che, posto: $x + \frac{p}{2} = ky$, si ha:

$$\int \frac{1}{\left[\left(x+\frac{p}{2}\right)^2 + k^2\right]^n}\,dx = \int \frac{1}{[k^2y^2+k^2]^n}\,kdy = \frac{1}{k^{2n-1}}\int \frac{1}{(1+y^2)^n}\,dy\,,$$

e quindi l'integrale dato diventa:

$$(1)\quad I_n = -\frac{a}{2(n-1)}\cdot\frac{1}{(x^2+px+q)^{n-1}} + \frac{b-\frac{ap}{2}}{k^{2n-1}}\int \frac{1}{(1+y^2)^n}\,dy\,,$$

e siamo così condotti a dover calcolare il seguente integrale:

$$J_n = \int \frac{1}{(1+y^2)^n}\,dy\,.$$

Integrando per parti, prendendo come fattore finito: $\frac{1}{(1+y^2)^n}$,

e come fattore differenziale dy, otteniamo:

$$J_n = \frac{1}{(1+y^2)^n}\,y + 2n\int \frac{y^2}{(1+y^2)^{n+1}}\,dy = \frac{y}{(1+y^2)^n} + 2n\int \frac{y^2+1-1}{(1+y^2)^{n+1}}\,dy =$$

$$= \frac{y}{(1+y^2)^n} + 2n\int \frac{1}{(1+y^2)^n}\,dy - 2n\int \frac{1}{(1+y^2)^{n+1}}\,dy\,,$$

ossia :

$$J_n = \frac{y}{(1+y^2)^n} + 2n \cdot J_n - 2n \cdot J_{n+1} ;$$

di qui si ricava la seguente formula :

$$(2) \qquad \boxed{J_{n+1} = \frac{y}{2n(1+y^2)^n} + \frac{2n-1}{2n} J_n} \; , \quad J_n = \frac{c}{2(n-1)}$$

che ci permette di calcolare J_{n+1} una volta noto J_n.

Essendo :

$$J_1 = \int \frac{1}{1+y^2} dy = \text{arctg} y + c ,$$

dalla (2), per $n = 1$, si ricava :

$$(3) \qquad J_2 = \frac{y}{2(1+y^2)} + \frac{1}{2} \text{arctg} y + c ;$$

e ancora, per $n = 2$,

$$(4) \qquad J_3 = \frac{y}{4(1+y^2)^2} + \frac{3}{4}\left[\frac{y}{2(1+y^2)} + \frac{1}{2} \text{arctg} y\right] + c ,$$

ecc., ecc.

Determinato in questo modo J_n non vi è che da sostituirne il valore nella (1) e porre al posto della y il valore $\frac{1}{k}\left(x + \frac{p}{2}\right)$, per avere il valore del nostro integrale I_n.

Premesso tutto ciò, passiamo ora a trattare il caso che l'equazione $N(x) = 0$ ammetta anche radici complesse e consideriamo senz'altro il seguente esempio :

1) *Calcolare l'integrale* : $\int \frac{2x+10}{(x-2)(x^2+x+1)} dx$.

L'equazione: $(x-2)(x^2+x+1)=0$, si scinde nelle due equazioni: $x-2=0$, $x^2+x+1=0$; la prima ha come radice 2 e la seconda ammette due radici complesse coniugate.

In questo caso si pone:

$$\frac{2x+10}{(x-2)(x^2+x+1)}=\frac{A}{x-2}+\frac{Bx+C}{x^2+x+1}.$$

Come si vede ad un fattore (semplice) di 2° grado a radici complesse si fa corrispondere una frazione avente per numeratore una funzione razionale intera di *primo* grado e per denominatore la funzione di 2° grado considerata.

Eliminando i denominatori, si ha:

$$2x+10=A(x^2+x+1)+(Bx+C)(x-2),$$

ossia:

$$2x+10=(A+B)x^2+(A-2B+C)x+(A-2C),$$

ed eguagliando i coefficienti dei termini di egual grado, si ottengono le equazioni:

$$A+B=0\,,\quad A-2B+C=2\,,\quad A-2C=10\,,$$

dalle quali, nel solito modo, si ricava:

$$A=2\,,\quad B=-2\,,\quad C=-4\,.$$

Avremo perciò:

$$\int\frac{2x+10}{(x-2)(x^2+x+1)}\,dx=2\int\frac{1}{x-2}\,dx-\int\frac{2x+4}{x^2+x+1}\,dx\,.$$

Il primo integrale del 2° membro, vale: $2\log(x-2)=\log(x-2)^2$.

Il secondo integrale è del tipo dell'integrale α); abbiamo pertanto:

$$\int \frac{2x+4}{x^2+x+1}\,dx = \int \frac{2x+1}{x^2+x+1}\,dx + 3\int \frac{1}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}\,d\left(x+\frac{1}{2}\right) =$$

$$= \log(x^2+x+1) + \frac{6}{\sqrt{3}}\,\mathrm{arctg}\,\frac{x+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} + c\,.$$

Abbiamo quindi, in definitiva:

$$\int \frac{2x+10}{(x-2)(x^2+x+1)}\,dx = \log\frac{(x-2)^2}{x^2+x+1} - 2\sqrt{3}\,\mathrm{arctg}\,\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + c\,.$$

2) *Calcolare l'integrale*: $\displaystyle\int \frac{x^3+x-2}{(x+1)^2(x^2-x+1)}\,dx\,.$

L'equazione: $(x+1)^2(x^2-x+1)=0$, si scinde nelle due equazioni: $(x+1)^2=0$, $x^2-x+1=0$; la prima ha come radice -1 contata *due* volte, e la seconda ammette due radici complesse coniugate.

Porremo quindi:

$$\frac{x^3+x-2}{(x+1)^2(x^2-x+1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{Cx+D}{x^2-x+1}\,.$$

Deve risultare:

$$x^3+x-2 = A(x+1)(x^2-x+1) + B(x^2-x+1) + (Cx+D)(x+1)^2\,,$$

ossia:

$$x^3+x-2 = (A+C)x^3 + (B+2C+D)x^2 + (-B+C+2D)x + (A+B+D)\,,$$

e quindi:

$$A+C=1\,,\quad B+2C+D=0\,,\quad -B+C+2D=1\,,\quad A+B+D=-2\,,$$

da cui si ricava:

$$A = 0 , \quad B = -\frac{4}{3} , \quad C = 1 , \quad D = -\frac{2}{3} .$$

Avremo perciò.

$$\int \frac{x^3 + x - 2}{(x+1)^2(x^2 - x + 1)} dx = -\frac{4}{3}\int \frac{1}{(x+1)^2} dx + \int \frac{x - \frac{2}{3}}{x^2 - x + 1} dx =$$

$$= -\frac{4}{3}\int (x+1)^{-2} d(x+1) + \frac{1}{2}\int \frac{2x-1}{x^2-x+1} dx - \frac{1}{6}\int \frac{1}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} d\left(x - \frac{1}{2}\right) =$$

$$= -\frac{4}{3}\cdot\frac{(x+1)^{-1}}{-1} + \frac{1}{2}\log(x^2 - x + 1) - \frac{1}{6}\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{x - \frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} + c =$$

$$= \frac{4}{3(x+1)} + \frac{1}{2}\log(x^2 - x + 1) - \frac{1}{3\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}} + c .$$

L'ultimo caso che si presenta riguardo alle funzioni razionali è questo: il denominatore contiene un fattore di 2° grado, a radici complesse, *multiplo*. Ad esempio, si abbia da calcolare l'integrale:

$$I = \int \frac{x^6}{(x^2+1)^4} dx .$$

L'equazione: $(x^2+1)^4 = 0$, ammette le radici complesse coniugate $\pm i$, ciascuna contata quattro volte.

In questo caso la posizione da farsi è:

$$\frac{x^6}{(x^2+1)^4} = \frac{A_1 x + B_1}{x^2+1} + \frac{A_2 x + B_2}{(x^2+1)^2} + \frac{A_3 x + B_3}{(x^2+1)^3} + \frac{A_4 x + B_4}{(x^2+1)^4} , \tag{5}$$

cioè al fattore multiplo d'ordine, per esempio, s, corrispondono s frazioni aventi per numeratori funzioni razionali intere di primo grado e per denominatore quel fattore inalzato ad esponenti crescenti: $1, 2, 3, \ldots, s$.

Eliminando nella (5) i denominatori, dopo facili calcoli, si ha:

$$x^6 = A_1x^7 + B_1x^6 + (3A_1 + A_2)x^5 + (3B_1 + B_2)x^4 + (3A_1 + 2A_2 + A_3)x^3 +$$
$$+ (3B_1 + 2B_2 + B_3)x^2 + (A_1 + A_2 + A_3 + A_4)x + (B_1 + B_2 + B_3 + B_4).$$

Da qui si trae il sistema:

$$A_1 = 0, \quad B_1 = 1, \quad 3A_1 + A_2 = 0, \quad 3B_1 + B_2 = 0, \quad 3A_1 + 2A_2 + A_3 = 0,$$
$$3B_1 + 2B_2 + B_3 = 0, \quad A_1 + A_2 + A_3 + A_4 = 0, \quad B_1 + B_2 + B_3 + B_4 = 0,$$

da cui:

$$A_1 = 0, \quad A_2 = 0, \quad A_3 = 0, \quad A_4 = 0, \quad B_1 = 1, \quad B_2 = -3, \quad B_3 = 3,$$
$$B_4 = -1.$$

Si ha quindi:

$$I = \int \frac{x^6}{(x^2+1)^4} dx = \int \frac{1}{x^2+1} dx - 3\int \frac{1}{(x^2+1)^2} dx + 3\int \frac{1}{(x^2+1)^3} dx -$$
$$- \int \frac{1}{(x^2+1)^4} dx.$$

Ricordando ora le formule (2), (3), (4), si ha:

$$I = \operatorname{arctg} x - 3\left[\frac{x}{2(1+x^2)} + \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x\right] + 3\left[\frac{x}{4(1+x^2)^2} +\right.$$
$$\left. + \frac{3x}{8(1+x^2)} + \frac{3}{8}\operatorname{arctg} x\right] - \left[\frac{x}{6(1+x^2)^3} + \frac{5}{24}\cdot\frac{x}{(1+x^2)^2} +\right.$$
$$\left. + \frac{5}{16}\cdot\frac{x}{1+x^2} + \frac{5}{16}\operatorname{arctg} x\right] + c,$$

e semplificando, in definitiva, si trova:

$$I = \frac{5}{16}\operatorname{arctg} x - \frac{11}{16}\cdot\frac{x}{1+x^2} + \frac{13}{24}\cdot\frac{x}{(1+x^2)^2} - \frac{1}{6}\cdot\frac{x}{(1+x^2)^3} + c.$$