5. Integrazione indefinita di alcune funzioni goniometriche.

5.1. Si abbia da calcolare l'integrale:

(1) $$\boxed{I = \int R(\operatorname{sen} x, \cos x)\, dx},$$

con R funzione razionale dei due argomenti $\operatorname{sen} x$ e $\cos x$.

Gli integrali di questo tipo si riconducono a integrali di funzioni razionali, con il seguente cambiamento di variabile, detto **sostituzione goniometrica universale**:

$$\boxed{t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}}.$$

Infatti, si ha:

$$x = 2 \operatorname{arctg} t, \; dx = \frac{2}{1 + t^2}\, dt.$$

Essendo poi, per note formule di goniometria:

$$\operatorname{sen} x = \frac{2 \operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1 + t^2}; \; \cos x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{1 - t^2}{1 + t^2},$$

l'integrale (1) si trasforma nel seguente integrale di funzione razionale:

$$I = 2 \int R\left(\frac{2t}{1 + t^2}, \frac{1 - t^2}{1 + t^2}\right) \frac{1}{1 + t^2}\, dt.$$

Esempi.

● 1) *Calcolare l'integrale:* $I = \int \frac{1 + \operatorname{sen} x}{1 + \cos x}\, dx.$

Posto $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$, si ha:

$$I = \int \frac{1 + \frac{2t}{1+t^2}}{1 + \frac{1-t^2}{1+t^2}} \cdot \frac{2}{1+t^2}\, dt = \int \frac{1 + t^2 + 2t}{1+t^2}\, dt =$$

$$= \int \left(1 + \frac{2t}{1+t^2}\right) dt = t + \ln(1+t^2) + c = \operatorname{tg}\frac{x}{2} + \ln\left(1 + \operatorname{tg}^2\frac{x}{2}\right) + c.$$

- 2) *Calcolare l'integrale:* $I = \int \frac{\cos x}{1 + \cos x}\, dx.$

Si ha:

$$I = \int \frac{\frac{1-t^2}{1+t^2}}{1 + \frac{1-t^2}{1+t^2}} \cdot \frac{2}{1+t^2}\, dt = \int \frac{1-t^2}{1+t^2}\, dt =$$

$$= \int \left(-1 + \frac{2}{1+t^2}\right) dt = -t + 2\operatorname{arctg} t + c = -\operatorname{tg}\frac{x}{2} + x + c.$$

- 3) *Calcolare l'integrale:*

$$I = \int \frac{dx}{(a^2 + b^2) - (a^2 - b^2)\cos x}.$$

Ponendo $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$, si ha:

$$I = \int \frac{\frac{2\, dt}{1+t^2}}{(a^2 + b^2) - (a^2 - b^2) \cdot \frac{1-t^2}{1+t^2}} =$$

$$= 2\int \frac{dt}{(a^2 + b^2) \cdot (1 + t^2) - (a^2 - b^2) \cdot (1 - t^2)} =$$

$$= \int \frac{dt}{a^2 t^2 + b^2} = \frac{1}{a} \int \frac{d(at)}{(at)^2 + b^2} = \frac{1}{ab} \operatorname{arctg}\frac{at}{b} + c =$$

$$= \frac{1}{ab} \operatorname{arctg}\left(\frac{a}{b} \operatorname{tg}\frac{x}{2}\right) + c.$$

● 4) *Calcolare l'integrale:*

$$I = \int \frac{dx}{\operatorname{sen} x\,(2 + \cos x - 2 \operatorname{sen} x)}.$$

Posto $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$, si ha:

$$I = \int \frac{\dfrac{2\,dt}{1+t^2}}{\dfrac{2t}{1+t^2}\left(2 + \dfrac{1-t^2}{1+t^2} - \dfrac{4t}{1+t^2}\right)} = \int \frac{(1+t^2)\,dt}{t\,(t^2 - 4t + 3)}.$$

Scomponendo in elementi semplici:

$$\frac{1+t^2}{t\,(t-3)\,(t-1)} = \frac{A}{t} + \frac{B}{t-3} + \frac{C}{t-1},$$

si trovano i coefficienti: $A = \frac{1}{3}$, $B = \frac{5}{3}$, $C = -1$.

Quindi:

$$I = \frac{1}{3}\int \frac{1}{t}\,dt + \frac{5}{3}\int \frac{1}{t-3}\,dt - \int \frac{1}{t-1}\,dt =$$

$$= \frac{1}{3}\ln|t| + \frac{5}{3}\ln|t-3| - \ln|t-1| + c =$$

$$= \frac{1}{3}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + \frac{5}{3}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2} - 3\right| - \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2} - 1\right| + c.$$

● 5) *Calcolare l'integrale:* $I = \displaystyle\int \frac{2 \operatorname{sen} x - \cos x}{1 + \operatorname{sen} x}\,dx.$

Posto: $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$, $dt = \frac{1}{2}(1+t^2)\,dx$; $dx = \frac{2}{1+t^2}\,dt$, si ha:

$$I = 2\int \frac{t^2 + 4t - 1}{(t+1)^2\,(1+t^2)}\,dt = 2\int \left[\frac{A}{(t+1)^2} + \frac{B}{t+1} + \frac{Ct + D}{1+t^2}\right] dt =$$

$$= 2\int \left[\frac{-2}{(t+1)^2} + \frac{-1}{t+1} + \frac{t+2}{1+t^2}\right] dt =$$

$$= 2\left[-2\int \frac{1}{(t+1)^2}\,dt - \int \frac{1}{t+1}\,dt + \frac{1}{2}\int \frac{2t}{1+t^2}\,dt + 2\int \frac{1}{1+t^2}\,dt\right] =$$