- *Teorema del limite del prodotto*

Siano $y = f(x)$ e $y = g(x)$ definite in D ed x_0 punto di accumulazione di D; inoltre $f(x) \to l_1$, $g(x) \to l_2$ (finiti) per $x \to x_0$.

Allora

$$lim_{x\to x_0} f(x)g(x) = lim_{x\to x_0} f(x) lim_{x\to x_0} g(x) = l_1 l_2.$$

Dimostazione:

Utilizziamo il risultato che il prodotto di una funzione limitata per un infinitesimo e' un infinitesimo e la scrittura fuori dal segno di limite. Scriviamo:

1. $f(x) = l_1 + \alpha(x)$ con $\alpha \to 0$ per $x \to x_0$;
2. $g(x) = l_2 + \beta(x)$ con $\beta \to 0$ per $x \to x_0$.

Allora

$$f(x)g(x) = (l_1 + \alpha(x))(l_2 + \beta(x)) = l_1 l_2 + l_2\alpha + l_1\beta + \alpha\beta.$$

Il secondo e terzo termine sono il prodoto di una funzione limitata (una costante) per un infinitesimo dunque sono infinitesimi. Altrettanto possiamo dire per il prodotto $\alpha\beta$: entrambe le funzioni sono limitate essendo degli infimitesimi quindi possiamo considerare $\alpha\beta$ un infinitesimo essendo il prodotto di una funzione limitata per un infinitesimo. Quindi scriviamo, dal terema del limite della somma,

$$\lim_{x\to x_0} f(x)g(x) = \lim_{x\to x_0} (l_1 l_2 + l_2\alpha + l_1\beta + \alpha\beta) =$$

$$\lim_{x\to x_0} l_1 l_2 + \lim_{x\to x_0} l_2\alpha + \lim_{x\to x_0} l_1\beta + \lim_{x\to x_0} \alpha\beta = l_1 l_2.$$

Il teorema e' dimostrato.

- *Teorema del limite del rapporto*

Siano $y = f(x)$ e $y = g(x)$ definite in D ed $x_0 \in \bar{D}$ e punto di accumulazione; inoltre $f(x) \to l_1$, $g(x) \to l_2 \neq 0$ (finiti) per $x \to x_0$.

Allora

$$lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{lim_{x\to x_0} f(x)}{lim_{x\to x_0} g(x)} = \frac{l_1}{l_2}.$$

Dimostrazione:

$l_2 \neq 0$. Dal teorema della permanenza del segno $g(x) \neq 0$ allora il rapporto $\frac{f(x)}{g(x)}$ ha significato in un intorno di x_0. Inoltre $|g(x)| \to |l_2| > 0$, dal teorema della permanenza del segno si ha $|g(x)| > \frac{l_2}{2}$ da cui

$$\frac{1}{|g(x)|} < \frac{2}{l_2}$$

$g(x)$ e' localmente limitata. Inoltre abbiamo

$lim_{x\to x_0}(l_2 f(x) - l_1 g(x)) = 0.$

Passiamo ora alla dimostrazione

$$lim_{x\to x_0}(\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{l_1}{l_2}) = lim_{x\to x_0}\frac{l_2 f(x) - l_1 g(x)}{l_2 g(x)} = lim_{x\to x_0}\frac{1}{l_2 g(x)}(l_2 f(x) - l_1 g(x)) = 0$$

perche' e' il prodotto di un infinitesimo $(l_2 f(x) - l_1 g(x))$ e di una funzione limitata $\frac{1}{l_2 g(x)}$ con $\frac{1}{|l_2 g(x)|} < \frac{2}{l_2^2}$.

Dalla scrittura fuori dal limite si ha

$$\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{l_1}{l_2} = \alpha(x)$$

con $\alpha(x)$ un infinitesimo per $x \to 0$, ne consegue

$$lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{l_1}{l_2}.$$

Il teorema e' dimostrato.

Estensione dei teoremi ai valori infiniti.

Ricordiamo la parziale aritmetica degli infiniti

1. $l \cdot \infty = \infty$ con $l \neq 0$,
2. $\infty \cdot \infty = \infty$, vale la regola dei segni,
3. $\frac{l}{0} = \infty$ con $l \neq 0$,
4. $\frac{l}{\infty} = 0$ con l finito,
5. $\frac{\infty}{l} = \infty$ con l finito.

Non daremo alcun significato alle seguente forme che vengono dette di indecisione:

$$0\infty, \quad \frac{0}{0}, \quad \frac{\infty}{\infty}.$$

I teoremi del limite del prodotto (uguale al prodotto dei limiti) del rapporto (uguale al rapporto dei limiti) continuano a valere anche in presenza degli infiniti tranne nei casi di indecisione.

Nota: Tutti i teoremi sui limiti di funzioni valgono nella formulazione data. In genere l'inverso non vale. Ad esempio nel teorema della somma si assume l'esistenza dei singoli limiti e poi si arriva alla esistenza della somma. Non vale il contrario, ovvero l'esistenza del limite della somma non garan tisce l'esistenza del limite dei singoli addendi. Ad esempio La funzione $F(x) = sen^2x + cos^2x$ ha limite per $x \to +\infty$ in quanto funzione costante mentre gli addendi sen^2x e cos^2x non hanno limite per $x \to +\infty$, facilmente verificabile mediante la definizione geometrica di limite.

- *Teorema del confronto*

Siano $y = f(x)$, $y = g(x)$, $y = h(x)$ definite in D e $x_0 \in \bar{D}$ punto di accumulazione. Inoltre $h(x) \le f(x) \le g(x)$ ed esistono i limiti

$$h(x) \to l, \quad g(x) \to l$$

per $x \to x_0$.
Allora

$$lim_{x \to x_0} f(x) = l.$$

Dalle considerazioni sui limiti simultanei si ricava che esiste un intorno di x_0 in cui valgono simultaneamente le seguente relazioni

$$\begin{cases} l - \epsilon < & h(x) & < l + \epsilon, \\ l - \epsilon < & g(x) & < l + \epsilon. \end{cases} \tag{1}$$

Allora nello stesso intorno si ha

$$l - \epsilon < h(x) \le f(x) \le g(x) < l + \epsilon.$$

Questa e' la definizione del limite

$$lim_{x \to x_0} f(x) = l.$$

Il teorema e' dimostrato.

- *Applicazione*

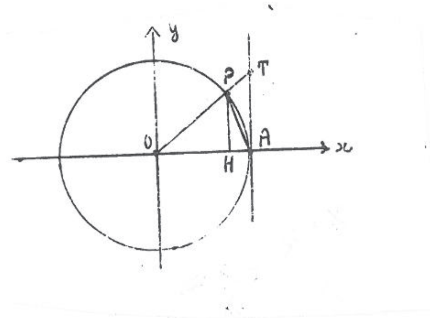
Dimostriamo che

$$\lim_{x \to 0} \frac{senx}{x} = 1$$

con x espresso in radianti.

Alcune osservazioni:
1) il limite si presenta sotto la forma di indecisione $\frac{0}{0}$.
2) $\frac{senx}{x}$ e' funzione pari quindi la consideriamo solo per x positivi;
3) Le funzioni sono di natura differente per questo non facilmente confrontabili.
4) x e' espresso in radianti. Il radiante e' l'unita' di misura degli angoli. Si ricorda che il radiante e' l' angolo che intercetta un arco di circonferenza con centro nel vertice dell'angolo di lunghezza pari al raggio della circonferenza. x e' la misura di un arco rispetto al raggio.

Passiamo alla dimostrazione.



Poniamo $0 \leq x < \frac{\pi}{2}$ e riferendoci al cerchio trigonometrico (vedi figura) si ha

$$\overline{OA} = 1, \quad \hat{AP} = x \ \ (misura \ \ dell' \ \ arco), \ \overline{HP} = senx, \ \overline{AT} = tgx.$$

E' evidente che

area triangolo(OAP) $\leq$ area settore (OAP)$\leq$ area triangolo (OAT)

e queste aree sono rispettivamente

$$\frac{senx}{2}, \ \frac{x}{2}, \ \frac{tgx}{2}$$

da cui ricaviamo

$$senx < x < tgx$$

(questa giustifica la scelta di misurare gli angoli in radianti).
Dividendola per $senx$ (positivo) si ha

$$1 < \frac{x}{senx} < \frac{1}{cosx},$$

ovvero

$$cosx < \frac{senx}{x} < 1.$$

Dato che per $x \to 0$ si ha $cosx \to 1$ dal teorema del confronto si ha

$$\frac{senx}{x} \to 1.$$

.

Osserviamo la struttura del limite: c'e' la misura di un angolo, il seno di tale angolo e la misura tende a zero. Se si denota $f(x)$ la misura di tale angolo e seguendo il procedimento con $f(x)$ allora il limite assume la seguente forma

$$\frac{senf(x)}{f(x)} \to 1 \;\; per \;\; f(x) \to 0.$$

Acquisita questa generalizzazione, calcolare

$$\lim_{x\to 0} \frac{sen5x}{x}, \; \lim_{x\to 0} \frac{senx^2}{x}, \; \lim_{x\to 0} \frac{sen(sen^2 x)}{x^2}, \; \lim_{x\to 0} \frac{senx(x-1)}{x}.$$

Esiste un legame della misura in radianti x ed in gradi α dello stesso angolo:

$$\frac{x}{\alpha} = \frac{\pi}{180} \; e \; senx = sen\alpha.$$

Dunque abbiamo

$$\frac{sen\alpha}{\alpha} = \frac{\pi}{180}\frac{senx}{x},$$

da cui

$$lim_{\alpha\to 0}\frac{sen\alpha}{\alpha} = \frac{\pi}{180}.$$

Funzioni monotone ed esistenza del limite

• *Funzione monotona crescente o decrescente*

Sia $y = f(x)$ definita in D. Si dice che $f(x)$ e' monotona crescente o crescente in D quando vale

$$\forall x_1, x_2 \in D, \;\; x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2).$$

Se vale il segno $<$ invece di $\leq$ allora si dice crescente in senso stretto.

• *Funzione monotona decrescente o decrescente*

Sia $y = f(x)$ definita in D. Si dice che $f(x)$ e' monotona decrescente o decrescente in D quando vale

$$\forall x_1, x_2 \in D, \;\; x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2).$$

Se vale il segno $>$ invece di $\geq$ allora si dice decrescente in senso stretto.

A piu' riprese abbiamo osservato che funzioni con carattere "eccessivamente" oscillante in vicinanza del punto x_0 non hanno limite relativamente a tale punto. Basti pensare alla funzione $y = sen\frac{1}{x}$ in un intorno dell'origine.

Allora ci aspettiamo dalle funzioni monotone, anzi abbiamo la certezza che per tali funzioni l'esistenza del limite sia garantita. Questo e' vero se rilassiamo un po' le nostre pretese ed accettiamo come esistenza anche l'esistenza parziale cioe' l'esistenza dei limiti destro e sinistro. Allora abbiamo i seguenti teoremi. Per, semplicita' di esposizione, consideriamo funzioni definite in intervalli limitati. I teoremi valgono in domini molto piu' generali ed anche illimitati.

- *Teorema 1*

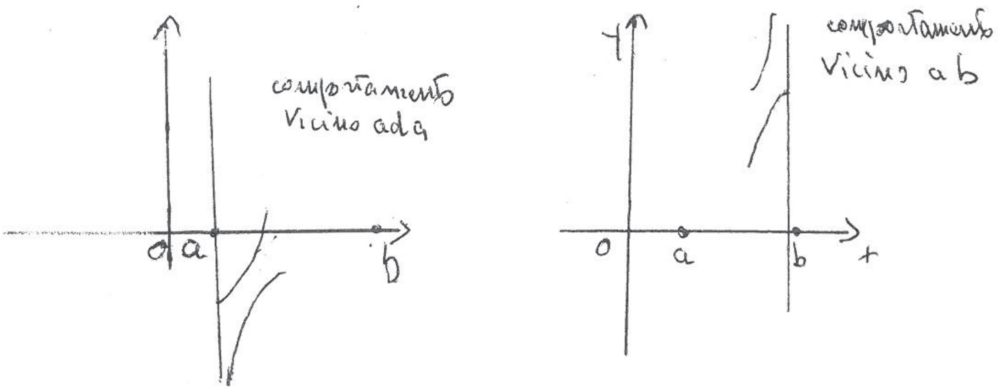
Sia $y = f(x)$ definita in (a, b) ed ivi crescente. Allora si ha

$$\exists \lim_{x \to a^+} f(x) (\equiv f(a^+)) = \begin{cases} \lambda = Inf_{x \in (a,b)} f(x) = -\infty \;\; se\ f(x)\ e'\ illimitata\ inferiormente; \\ \lambda = Inf_{x \in (a,b)} f(x)\ finito \;\; se\ f(x)\ e'\ limitata\ inferiormente; . \end{cases}$$

Inoltre se esiste $f(a)$ si ha $f(a) \leq \lambda$ (per semplicita' si indica $f(a^+)$ la scrittura $\lim_{x \to a^+} f(x)$).

$$\exists \lim_{x \to b^-} f(x) (\equiv f(b^-)) = \begin{cases} \Lambda = Sup_{x \in (a,b)} f(x) = +\infty \;\; se\ f(x)\ e'\ illimitata\ superiormente; \\ \Lambda = Sup_{x \in (a,b)} f(x)\ finito \;\; se\ e'\ limitata\ superiormente; \end{cases}$$

Inoltre se esiste $f(b)$ si ha $f(b) \geq \lambda$.



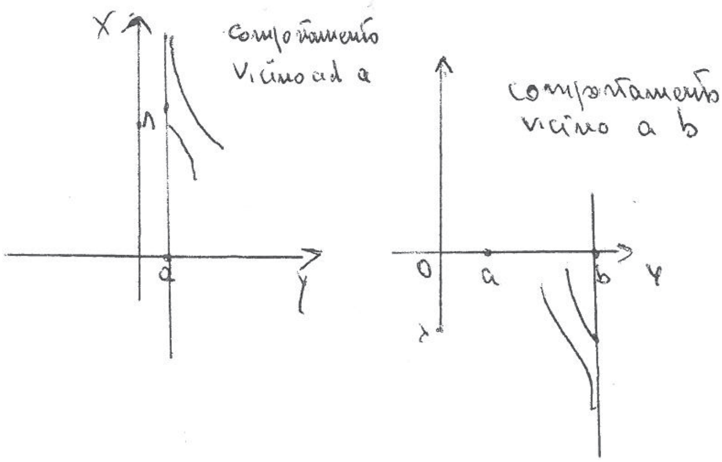
- *Teorema 2*

Sia $y = f(x)$ definita in (a, b) ed ivi decrescente. Allora si ha

$$\exists \lim_{x \to a^+} f(x) (\equiv f(a^+)) = \begin{cases} \Lambda = Sup_{x \in (a,b)} f(x) = +\infty \;\; se\ f(x)\ e'\ illimitata\ superiormente; \\ \Lambda = Sup_{x \in (a,b)} f(x)\ finito, \;\; se\ f(x)\ e'\ limitata\ superiormente; \end{cases}$$

Inoltre se esiste $f(a)$ si ha $f(a) \geq \Lambda$.

$$\exists \lim_{x \to b^-} f(x) (\equiv f(b^-) = \begin{cases} \lambda = Inf_{x \in (a,b)} f(x) = -\infty \;\; se\ f(x)\ e'\ illimitata\ inferiormente; \\ \lambda = Inf_{x \in (a,b)} f(x) finito, \;\; se\ e'\ limitata\ inferiormente; \end{cases}$$

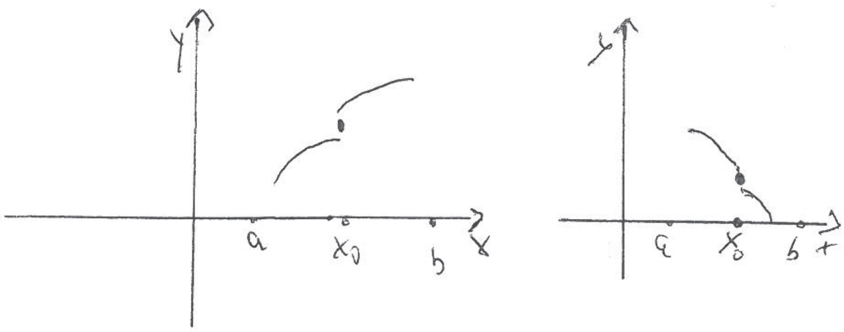


Inoltre se esiste $f(b)$ si ha $f((b) \leq \lambda$.

- *Teorema 3*

Sia $y = f(x)$ definita in (a, b), $x_0 \in (a, b)$ ed ivi crescente. Allora si ha

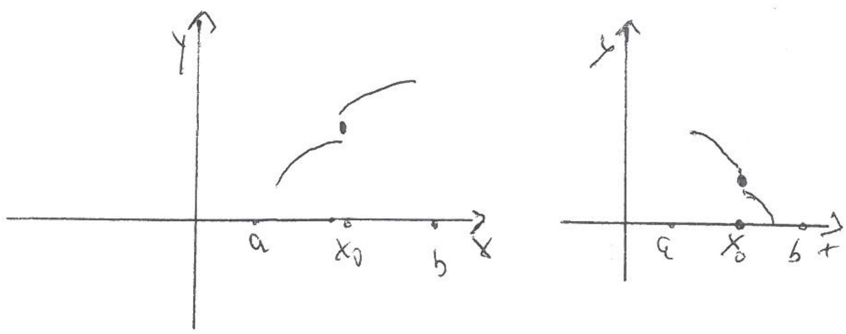
$$\exists \lim_{x \to x_0^-} f(x) = Sup_{x \in (a,x_0)}\, f(x) \leq f(x_0) \leq lim_{x \to x_0^+} f(x) = Inf_{x \in (x_0,b)}\, f(x).$$



- *Teorema 4*

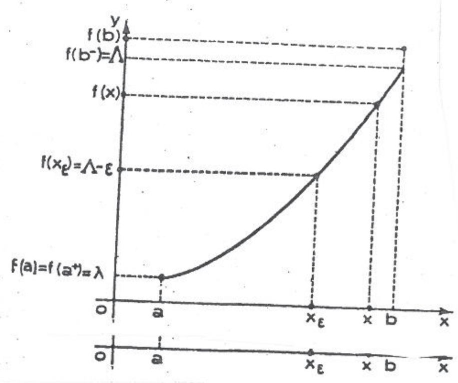
Sia $y = f(x)$ definita in (a, b), $x_0 \in (a, b)$ ed ivi decrescete. Allora si ha

$$\exists \lim_{x\to x_0^-} f(x) = Inf_{x\in(a,x_0)}\, f(x) \geq f(x_0) \geq lim_{x\to x_0^+} f(x) = Sup f_{x\in(x_0,b)}\, f(x).$$



Dimostriamo il teorema 1) solo per l'estremo b per funzioni limitate e crescenti; tutti gli altri casi si dimostrano in modo analogo.

Si osservi la figura.



L'immagine della funzione e' un insieme limitato. Allora l'estremo superiore

Λ dell'immagine e' un numero (ogni $f(x) < \Lambda$ per $x \in (a, b)$). Dalle proprieta' dell'estremo superiore $\forall\epsilon > 0$ esiste un elemento $y_\epsilon \in Im_{(a,b)}\ f$ tale che

$$\Lambda - \epsilon < y_\epsilon \leq \Lambda.$$

Dato che y_ϵ appartiene all'immagine della funzione esiste un punto $x_\epsilon \in (a, b)$ tale che $f(x_\epsilon) = y_\epsilon$

(nel grafico si e' assunto, per semplicita', $y_\epsilon = \Lambda - \epsilon$ e la funzione e' strettamente monotona). Ora la funzione e' crescente per cui in ogni punto $x \in (x_\epsilon, b)$ vale

$$\Lambda - \epsilon < f(x_\epsilon) \leq f(x) \leq \Lambda.$$

Questa e' la definizione di $\lim_{x\to b^-} f(x) = \Lambda$.

Il teorema e' dimostrato

Successioni e numero "e"

In questo paragrafo consideriamo particolari funzioni dette successione. Il concetto di successione storicamente e' precedente al concetto di funzione. L'idea di successione viene descritta esplicitamente nel " Liber Abaci " (1202 circa) di Fibonacci (Leonardo Pisano detto Fibonacci). Noi presenteremo le successione nel contesto piu' generale della teoria delle funzioni, impostata da Cauchy nella prima meta' dell'ottocento, che stiamo considearndo

Si chiama successione una funzione (numerica) che ha come insieme di definizione i numeri naturali:

$$f : \mathbf{N} \to \mathbf{R};$$

$$f : n \mapsto y = f(n).$$

L' immagine della successione e' : $Im\ f = \{y \in \mathbf{R} : y = f(n), n \in \mathbf{N}\}$ *in forma tabellare piu' semplice*

$$\{f(1), f(2), f(3), ...\}.$$

Il grafico di una successione e' un insieme di punti nel piano con ascisse i numeri naturali.

Per ragioni storiche e per ragioni di semplicita' la successione si scrive :

$$\{a_n\} \ \textit{oppure} \ \{s_n\}$$

ovvero una lettera con pedice n.

a_n, detto termine generico, rappresenta la legge con cui si determinano gli elementi della successione.

Considerata una successione come una funzione possiamo traslare su di essa i concetti gia' costruiti, ad esempio il concetto di limite. Dal momento che i numeri naturali hanno un solo punto di accumulazione che e' $+\infty$, si considera la sola scrittura

$$\lim_{n \to +\infty} s_n = \beta.$$

e si sostituisce la variabile continua x con la variabile discreta n nelle definizioni gia' date. Cosi' abbiamo

1. (ϵ, N_ϵ) : $\alpha = +\infty$ e $\beta = l$.

   $$\lim_{n \to +\infty} s_n = l$$

   se vale

   $$\forall \epsilon > 0 \; \exists N_\epsilon : \forall n \in \mathbf{N}, \; x > N_k \Rightarrow |s_n - l| < \epsilon.$$

   ove N_ϵ e' un numero naturale.

2. (K, N_K) : $\alpha = +\infty$ e $\beta = +\infty$.

   $$\lim_{n \to +\infty} s_n = +\infty$$

   se vale

   $$\forall K > 0 \; \exists N_K : \forall n \in \mathbf{N}, \; x > N_k \Rightarrow s_n > K.$$

   ove N_K e' un numero naturale.

3. (K, N_K) : $\alpha = +\infty$ e $\beta = -\infty$.

   $$\lim_{n \to +\infty} s_n = -\infty$$

   se vale

   $$\forall K > 0 \; \exists N_K : \forall n \in \mathbf{N}, \; x > N_k \Rightarrow s_n < -K.$$

   ove N_K e' un numero naturale.

4. (K, N_K) : $\alpha = +\infty$ e $\beta = \infty$.

   $$\lim_{n \to +\infty} s_n = \infty$$

   se vale

   $$\forall K > 0 \; \exists N_K : \forall n \in \mathbf{N}, \; x > N_k \Rightarrow |s_n| > K.$$

   ove N_K e' un numero naturale.

- *Carattere di una successione*

  1. Se $s_n \to l$ finito si dice che la successione e' convergente;

  2. Se $s_n \to \infty$ (di segno qualsiasi) si dice che la successione e' divergente;

3. $\nexists \lim_{n\to+\infty} s_n$ si dice che la successione e' oscillante o indeterminata (ad esempio $\{(-1)^n\}$).

Tutti i teoremi sui limiti delle funzioni considerati sopra valgono per le successioni. Come al solito trasliamo i teoremi sostituendo la variabile continua x con la variabile discreta n. Osserviamo che tutte le funzioni a noi note della variabile x definite su tutto l'asse delle ascisse positive,ristrette ai numeri naturali, sono delle successioni il cui grafico geometrico e' l'insieme dei punti con ascissa n.

Osserviamo che come per le funzioni anche per le successioni possiamo considerare l'operazione di restrizione ad un sottoinsieme di $\mathbb{R}$; si puo' operare nel seguente modo. Sia $\{a_n\}$ una successione. Consideriamo un certo numero di elementi di $\{a_n\}$ e li ordiniamo in una successione $\{b_n\}$ nello stesso ordine che hanno in $\{a_n\}$. In questo modo otteniamo una sottosuccessione o successione estratta da $\{a_n\}$. E' ovvio che l'elemento b_n occupera' un posto in $\{a_n\}$ che e' in corrispondenza di n e che indicheremo n'.

Sottosuccessione

Si chiama sottosuccessione della successione $\{a_n\}$ una successione $\{b_n\}$ tale che

$$\{b_n\} \quad con \quad b_n = a_{n'} \quad con \quad n \in \mathbb{N}.$$

e $\{n'\}$ e' una sottosuccessione crescente di numeri naturali.

Come per le funzioni possiamo affermare che

se $\{a_n\}$ ha limite allora ogni sua sottosuccessione ha limite e i due limiti sono uguali.

In generale non vale il contrario.

Il seguente teorema ci da' una condizione necessaria e sufficiente perche' una successione abbia limite

- *Teorema Condizione necessaria e sufficiente affinche' una successione $\{a_n\}$*

abbia limite e' che ogni sua sottosuccessione e' convergente

- *Successioni monotone*

Possiamo dare la definizione di monotonia per lesuccessioni in modo naturale e semplice. Dal momento che le successioni sono sequenze di numeri ordinati che hanno un succesivo allora possiamo scriverere:

1. $\{s_n\}$ e' crescente se per ogni $n \in \mathbf{N}$ si ha :

$$s_n \leq s_{n+1};$$

   se vale $<$ si dice crescente in senso stretto;

2. $\{s_n\}$ e' decrescente se per ogni $n \in \mathbf{N}$ si ha :

$$s_n \geq s_{n+1};$$

   se vale $>$ si dice decrescente in senso stretto.

Tutti i teoremi sui limiti delle funzioni monotone valgono per le successioni, in particolare

• se $\{s_n\}$ e' monotona allora o converge o diverge;

• se $\{s_n\}$ e' monotona e limitata ovvero

$$\begin{cases} s_n \leq s_{n+1} \ o \ s_n \geq s_{n+1}, \\ |s_n| \leq K \ \forall n \in \mathbf{N}, \ K\mathbb{R}. \end{cases} \tag{2}$$

allora $\{s_n\}$ e' convergente.

Il numero "e" e sue conseguenze.

In questa sezione definiamo il numero "e" come limite di una successione convergente e ne trarremo alcune interessanti conseguenze. E' un numero irrazionale ben noto, ad esempio e' base dei logaritmi Neperiani.

Proposizione

La successione $\{s_n\}$ *con*

$$s_n = (1 + \frac{1}{n})^n$$

e' convergente.

Il limite presenta la forma di indecisione esponenziale $1^{+\infty}$. Per la dimostrazione della convergenza useremo i teoremi di monotonia o meglio la crescita e la limitatezza della successione. Questo limite sara' un punto di riferimento per sciogliere la forma di indecisione 1^{∞}. Inoltre useremo la disuguaglianza di Bernoulli

$$(*) \qquad (1 - \frac{1}{n^2})^n > (1 - \frac{1}{n}).$$

(Questa e' un caso particolare di

$$(**) \qquad (1 + \alpha)^n > 1 + n\alpha.$$

con $\alpha \geq -1$. Basta porre $\alpha = -\frac{1}{n^2}$ ed otteniamo (*).

(**) si dimostra per induzione. E' vera per n=2. Supponiamola vera per n e dimostriamola per $(n + 1)$.

$$(1+\alpha)^{n+1} = (1+\alpha)^n(1+\alpha) > (1+n\alpha)(1+\alpha) = 1+n\alpha+\alpha+n\alpha^2 \geq 1+(n+1)\alpha.$$

Dunque (**) vale anche per $n+1$. La disuguaglianza e' dimostrata.

Dimostriamo il teorema

1) s_n e' crescente.

$s_1 = 2$ e per $n \geq 2$

$$\frac{s_n}{s_{n-1}} = \frac{(1+\frac{1}{n})^n}{(1+\frac{1}{n-1})^{n-1}} = \frac{(\frac{n+1}{n})^n(\frac{n-1}{n})^n}{\frac{n-1}{n}} =$$

$$\frac{(1-\frac{1}{n^2})^n}{1-\frac{1}{n}} > 1,$$

per la disuguaglianza di Bernoulli.

2) Limitatezza

Sia

$$b_n = (1+\frac{1}{n})^{n+1}.$$

E' chiaro che $b_n \geq s_n$ e $b_2 = 4$ allora per $n \geq 2$ si ha (come al punto (1))

$$\frac{b_n}{b_{n-1}} = \frac{(1+\frac{1}{n})^{n+1}}{(1+\frac{1}{n-1})^n} = (1+\frac{1}{n})\frac{(\frac{n+1}{n})^n}{(\frac{n}{n-1})^n} =$$

$$\frac{1+\frac{1}{n}}{(1-\frac{1}{n^2-1})^n} < 1$$

perche' dalla disuguaglianza di Bernoulli si ha

$$(1+\frac{1}{n^2-1})^n > (1+n\frac{1}{n^2-1}) > 1+\frac{1}{n}.$$

Quindi

$b_n < b_{n-1} < 4$. Allora la successione (**) e' convergente.

ll teorema e' dimostrato.

• *Definizione*

Chiameremo e il limite della successione

$$\{(1+\frac{1}{n})^n\}.$$

e e' un numero irrazionale trascendenpe (non e' soluzione di equazioni algebriche a coefficienti interi). E' uno di quei numeri come π non previsti dalle osservazioni iniziali, come il problema delle potenze ennesime perfette, che hanno portato alla costruzione dei numeri "reali".

Si presti attenzione alla struttura del termine generale nella successione. La base e' la somma di 1 piu' una funzione che tende a zero e l' esponente e' il reciproco di tale funzione. Questa proprieta', mediante la disuguaglianza di Bernoulli, e' stata cruciale per stabilire la crescita e la limitatezza della successione. Non ve' dubbio che una tale forma con funzioni che rispettano le caratteristiche di struttura di $\{s_n\}$ hanno limite e. Questa osservazione la verifichiamo col passaggio alla variabile continua.

Mostriamo che

$$***) \qquad (1+\frac{1}{y})^y \to e$$

per $y \to \pm\infty$ o $y \to \infty$.

Verifichiamo il limite per $y \to +\infty$.

Dato $y > 0$ esiste $n \in \mathbb{N}$ per cui $n \leq y \leq n+1$, dalle varie proprieta' di monototonia dell'ordine si ottiene

$$(*) \qquad \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{y} \leq \frac{1}{n} \Rightarrow 1+\frac{1}{n+1} \leq 1+\frac{1}{y} \leq 1+\frac{1}{n} \Rightarrow$$

$$(1+\frac{1}{n+1})^n \leq (1+\frac{1}{y})^y \leq (1+\frac{1}{n})^{n+1}.$$

Ora

$$(1+\frac{1}{n+1})^{n+1} = (1+\frac{1}{n})^n(1+\frac{1}{n}) \to e$$

per $n \to +\infty$.

Inoltre

$$(1+\frac{1}{n+1})^n = (1+\frac{1}{n+1})^{n+1}(1+\frac{1}{n+1})^{-1} \to e$$

e

$$\{(1+\frac{1}{n+1})^{n+1}\}$$

e' la stessa successione del numero e per $n \geq 0$.

Nella (*) le funzioni esterne nella ultima disuguaglianza convergono ad e, allora il teorema del confronto implica la convergenza ad e per $(n <)\ y \to +\infty$ della funzione intermedia.

$***)$ e' dimostrata.

Si hanno ora i seguenti limiti notevoli:

1. $$i) \qquad (1+\frac{a}{x})^x \to e^a, \quad a \in \mathbb{R}$$

   per $x \to \pm\infty$ o $x \to \infty$;

2.

$$ii) \qquad (1+ax)^{\frac{1}{x}} \to e^a, \quad a \in \mathbb{R}$$

per $x \to 0$;

3.

$$iii) \qquad \frac{log_b(1+x)}{x} \to log_b e, \quad (a,b) \in \mathbb{R}, b > 0 \neq 1$$

per $x \to 0$;

4.

$$iv) \qquad \frac{a^x - 1}{x} \to loga, \quad a > 0 \in \mathbb{R}$$

per $x \to 0$.

5.

$$v) \qquad \frac{(1+x)^a - 1}{x} \to a, \quad a > 0 \in \mathbb{R}$$

per $x \to 0$.

Dimostrazione:

1. Se $a = 0$ i) e' ovvia; se $a \neq 0$ si pone $y = \frac{x}{a}$ e dalla (***) si ha

$$[(1+\frac{1}{y})^y]^a \to e^a$$

per $x \to +\infty \Rightarrow y \to +\infty$.

2. ponendo $y = \frac{1}{x}$ in ii) si ottiene il limite i).

3. accettando che i simboli lim e log_b si possono scambiare (lo verificheremo piu' avanti), applicando il logaritmo alla ii) con $a = 1$ si ottiene iii).

4. posto $a^x - 1 = y$ si ha $y \to 0$ per $x \to 0$ e $x = log_a(y+1)$

allora abbiamo dalla iii)

$$\frac{a^x - 1}{x} = \frac{y}{log_a(y+1)} \to \frac{1}{log_a e} = loga$$

per $x \to 0$;

5. posto $y = (1+x)^a - 1$ risulta $log(y+1) = alog(1+x)$ e $y \to 0$ quando $x \to 0$. Quindi abbiamo che il limite iii) implica

$$\frac{(1+x)^a - 1}{x} = \frac{y}{log(y+1)} \frac{log(1+x)}{x} a \to a$$

per$x \to 0$.

Anticipiamo i seguenti risultati che giustificheremo piu' avanti nel contesto delle funzioni composte. Consideriamo il calcolo del limite della potenza $f(x)^{g(x)}$ con $f(x) > 0$. Si afferma che se esistono finiti

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l \neq 0, \ \lim_{x \to x_0} g(x) = L$$

allora esiste finito

$$\lim_{x \to x_0} f(x)^{g(x)} = l^L.$$

Questo si estende a qualsiasi valore di $l \geq 0, L$ (con le ovvie estensioni alla aritmetica dell'infinito) tranne quando si hanno le seguenti forme di indecisione

$$0^0, \quad 1^\infty \ (\textit{indecisione del numero } e), \quad \infty^0.$$

Tutte queste forme di indecisione di tipo esponenziale possono essere ridotte ad indecisioni di tipo algebrico ricordando che il logaritmo e la potenza sono leggi inverse per cui si ha

$$f(x)^{g(x)} = e^{log f(x)^{g(x)}} = e^{g(x) log f(x)}.$$

Allora la forma di indecisione di tipo esponenziale si trasforma nella forma di indecisione algebrica $0 \cdot \infty$.

Ad esempio calcolare il limite

$$\lim_{x \to 0^+} x^x = \lim_{x \to 0} e^{x log x}.$$

quindi si e' condotti a considerare il

$$lim_{x \to 0} x log x.$$