

## Continuità'

### Premessa

Il concetto di limite studia il comportamento di una funzione in intorno di un punto  $x_0$  di accumulazione del dominio della funzione senza considerare il valore della funzione in tale punto o che il punto appartenga al dominio. Ora completiamo la definizione di limite considerando anche il punto  $x_0$  ed il valore che la funzione assume in esso. Si studia quindi la relazione che intercorre tra il valore della funzione in  $x_0$  ed il suo comportamento in intorno di  $x_0$ . Funzioni che introdurremo saranno chiamate continue. Daremo diverse definizioni, equivalenti, di continuità'. Esse esprimono in modi diversi il carattere topologico del concetto di continuità'.

### Concetto di Continuità'

Sia  $y = f(x)$  definita in  $D$  e  $x_0 \in D$ .

- 1) Diremo che  $f(x)$  è continua in  $x_0$  quando

1. se  $x_0$  è un punto isolato diremo, per definizione, che la funzione è continua in  $x_0$ .
2. Se  $x_0$  è punto di accumulazione di  $D$  allora diremo che la funzione  $f$  è continua in  $x_0$  quando esiste il limite di  $f(x)$  per  $x$  tendente ad  $x_0$  e tale limite è  $f(x_0)$  ovvero

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) = f\left(\lim_{x \rightarrow x_0} x\right).$$

Osserviamo che nota la funzione in un punto isolato  $x_0$  essa è nota in suoi opportuni intorno. Quindi è ragionevole dire che essa è continua in punti isolati. Nel secondo caso è opportuno notare lo scambio tra il simbolo di funzione ed il processo di limite. Questa è una utile caratteristica delle funzioni continue.

- 2)  $(\epsilon, \delta_\epsilon)$  - Diremo che  $f(x)$  è continua in  $x_0$  se vale

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta_\epsilon : \text{ per } x \in D \text{ e } 0 \leq |x - x_0| < \delta_\epsilon \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \epsilon.$$

Si osservi  $\leq$ ; nella definizione di limite si usa  $<$ . Questa è la differenza sostanziale tra la definizione di limite e quella di continuità. L'uguale ci permette di assegnare ad  $x$  il valore  $x_0$ , inoltre  $x_0$  può essere anche un punto isolato. Dunque se  $x_0$  è punto isolato abbiamo il punto (1.) della definizione (1); se è punto di accumulazione allora abbiamo la classica definizione di limite.

- ) 3)  $(x_n \rightarrow x_0)$  - Diremo che  $f(x)$  è continua in  $x_0$  se per ogni successione  $\{x_n\} \subset D$  convergente a  $x_0$  vale

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n) = f(x_0).$$

- 4) (topologica generale) Diremo che  $f(x)$  è continua in  $x_0$  se

$$\forall \mathcal{U}(f(x_0)) \exists \mathcal{U}(x_0) \text{ (in generale dipendente da } \mathcal{U}(f(x_0)) \text{) : per } x \in \mathcal{U}(x_0) \Rightarrow f(x) \in \mathcal{U}(f(x_0)).$$

Se  $f(x)$  è continua in tutti i punti di  $D$  si dice che è continua in  $D$ . Se  $D$  è un intervallo  $[a, b]$ , negli estremi si parla di continuità sinistra e continuità destra.

- **Algebra delle funzioni continue**

Consideriamo solo punti di accumulazione. Dai teoremi sui limiti ne consegue che:

1. Teorema della continuit  della somma o differenza:

Siano  $y = f(x)$ ,  $y = g(x)$  definite in  $D$  e continue in  $x_0 \in D$  (punto di accumulazione). Allora  $y = F(x) = f(x) \pm g(x)$    continua in  $x_0$ .

Infatti, dai teoremi sui limiti,  $F(x) = f(x) \pm g(x) \rightarrow f(x_0) \pm g(x_0) = F(x_0)$  per  $x \rightarrow x_0$ .

2. Teorema della continuit  del prodotto:

Siano  $y = f(x)$ ,  $y = g(x)$  definite in  $D$  e continue in  $x_0 \in D$  (punto di accumulazione). Allora  $y = F(x) = f(x)g(x)$    continua in  $x_0$ .

Infatti, dai teoremi sui limiti,  $F(x) = f(x)g(x) \rightarrow f(x_0)g(x_0) = F(x_0)$  per  $x \rightarrow x_0$ .

3. Teorema della continuit  del rapporto:

Siano  $y = f(x)$ ,  $y = g(x)$  definite in  $D$  e continue in  $x_0 \in D$  (punto di accumulazione) con  $g(x_0) \neq 0$ . Allora  $y = F(x) = f(x)/g(x)$    continua in  $x_0$ .

Infatti, dai teoremi sui limiti,  $F(x) = f(x)/g(x) \rightarrow f(x_0)/g(x_0) = F(x_0)$  per  $x \rightarrow x_0$ .

4. Teorema della continuit  del modulo:

Sia  $y = f(x)$  definita in  $D$  e continu in  $x_0 \in D$  (punto di accumulazione). Allora  $y = F(x) = |f(x)|$    continua in  $x_0$ .

Infatti, dai teoremi sui limiti,  $F(x) = |f(x)| \rightarrow |f(x_0)| = F(x_0)$  per  $x \rightarrow x_0$ .

Esempi di funzioni continue

1. La funzione costante  $y = f(x) = c$    continua in ogni punto. Sappiamo che il limite di una costante   la costante stessa, infatti  $f(x) - f(x_0) = c - c = 0$ .

*Le costanti sono funzioni continue*

2. La funzione  $y = f(x) = x$  (definita in  $\mathbb{R}$ )   continua in ogni punto  $x_0$  del dominio. Infatti la relazione  $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$  determina un intorno di  $x_0$  del tipo  $|x - x_0| < \delta_\epsilon$ . Ovvio, poich  i valori di  $x$  sono gli stessi di  $f(x)$  quindi ad intorni di  $f(x_0)$  corrispondono intorni di  $x_0$  di uguale ampiezza.

Dall'algebra delle funzioni continue possiamo affermare che le funzioni:

$$y = cx^n, y = P_n(x) = a_0 + a_1x_1 + \dots + a_nx^n \text{ (polinomio di grado } n),$$

$f(x) = P_n(x)/Q_n(x)$  (funzioni razionali fratte con  $P_n(x), Q_n(x)$  polinomi di grado  $n, m$  rispettivamente) sono funzioni continue.

3. Le funzioni trigonometriche sono continue. Dimostriamolo per  $y = \text{sen}x$ .

Ricordiamo che per  $h > 0$  si ha  $0 < \text{sen}h < h$  dal teorema del confronto  $\text{sen}h \rightarrow 0$  per  $h \rightarrow 0$ ; dal limite fondamentale  $\text{sen}h/h \rightarrow 1$  per  $h \rightarrow 0$ .

Scriviamo  $x = x_0 + h$  ove  $h \rightarrow 0$  per  $x \rightarrow 0$  ed abbiamo

$$\text{sen}x - \text{sen}x_0 = \text{sen}(x_0 + h) - \text{sen}x_0 = \text{sen}x_0 \cosh + \text{sen}h \cos x_0 - \text{sen}x_0 = \text{sen}x_0 (\cosh - 1) + \text{sen}h \cos x_0 \rightarrow 0$$

per  $h \rightarrow 0$  perch  ogni termine ha un fattore infinitesimo per  $h \rightarrow 0$  e l'altro limitato. Dalla scrittura fuori dal segno di limite si ha

$$\text{sen}x = \text{sen}x_0 + \alpha(x, x_0), \alpha(x, x_0) \rightarrow 0, \text{ se } x \rightarrow x_0$$

da cui

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \text{sen}x = \text{sen}x_0.$$

4.  $y = a^x$  con  $a > 0$  e' una funzione continua in ogni punto  $x_0 \in \mathbb{R}$

Come al solito scriviamo  $x = x_0 + h$  e valutiamo

$$a^x - a^{x_0} = a^{x_0+h} - a^{x_0} = a^{x_0}(a^h - 1).$$

Basta mostrare che  $(a^h - 1)$  e' un infinitesimo ovvero  $\lim_{h \rightarrow 0} a^h = 1$ .

Verifichiamolo mediante la definizione. Scegliamo  $0 < \epsilon < 1$  e mostriamo che  $|a^h - 1| < \epsilon$  per  $h$  appartenente ad un intorno di 0.

Risolviamo la disequazione:

$$|a^h - 1| < \epsilon \Leftrightarrow -\epsilon < a^h - 1 < \epsilon \Leftrightarrow 1 - \epsilon < a < 1 + \epsilon \Leftrightarrow \log_a(1 - \epsilon) < h < \log_a(1 + \epsilon).$$

Questo e' un intorno dello zero poiche'  $\log_a(1 + \epsilon)$  e' positivo e  $\log_a(1 - \epsilon)$  e' negativo. Quindi la disequazione e' vera in un intorno di 0. Non e' un intorno simmetrico di 0. Per simmetrizzarlo basta prendere come semiampiezza  $\log_a(1 + \epsilon) = \min(\log_a(1 + \epsilon), -\log_a(1 - \epsilon))$  allora l'intorno simmetrico trovato dello zero e'  $|h| < \log_a(1 + \epsilon)$ . ove vale  $|a^h - 1| < \epsilon$ .

#### • Punti di discontinuita'

I punti del dominio in cui una funzione non e' continua sono detti punti di discontinuita'. Piu' precisamente, sia  $y = f(x)$  un funzione definita in  $D$ .

Diremo che  $x_0 \in D$  e' punto di discontinuita' quando:

$$\begin{cases} \nexists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x), \text{ oppure} \\ \exists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \neq f(x_0). \end{cases}$$

Abuso: La definizione di discontinuita' richiede che la funzione sia definita in  $x_0$ . Per tradizione e' invalso l'uso di accettare anche come punti di discontinuita' punti di accumulazione di  $D$  non in  $D$ : in generale quale punto di discontinuita' si considera  $x \in \bar{D}$ . Preciso questo si evitano equivoci. E poi tale abuso e' espressivo ed e' in linea col fatto che, nei casi di non continuita', nulla cambia se la funzione sia definita o no in  $x_0$  come ora preciseremo.

#### • Classificazione dei punti di discontinuita'

1. Diremo che  $f(x)$  presenta in  $x_0 \in \bar{D}$  discontinuita' di I specie quando

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x).$$

I limiti sono finiti.

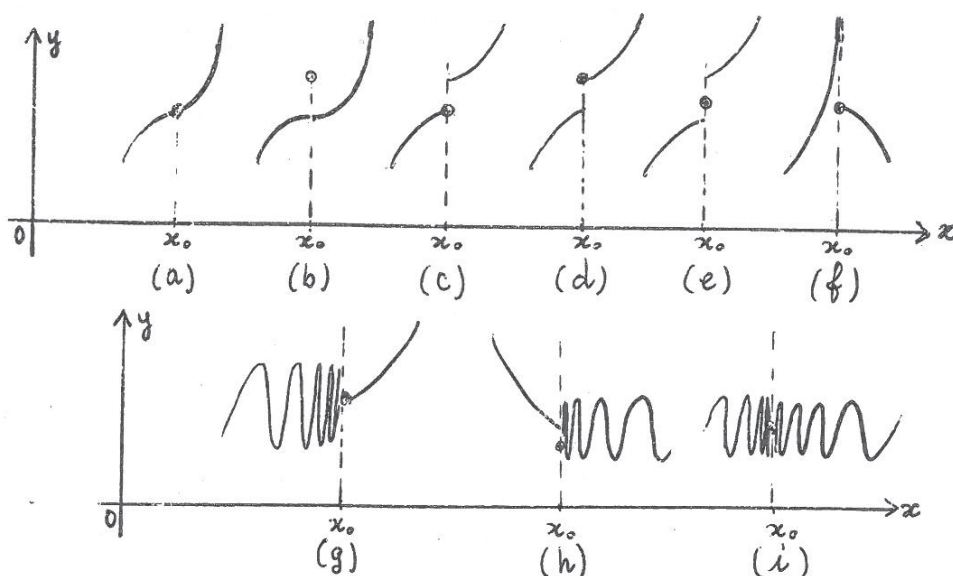
La differenza fra il limite destro e sinistro e' detto salto della funzione relativo al punto  $x_0$ .

2. Diremo che  $f(x)$  presenta in  $x_0 \in \bar{D}$  una discontinuita' di II specie se almeno uno dei due limiti  $\lim_{x \rightarrow x_0^\pm} f(x)$  o non esiste o e' infinito di segno qualsiasi;

3. Diremo che  $f(x)$  presenta in  $x_0 \in \bar{D}$  discontinuita' di III specie quando

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) \neq f(x_0).$$

i limiti sono finiti. E' detta eliminabile poiche' possiamo modificare la funzione nel solo punto  $x_0$  per renderla continua. Basta porre  $f(x_0)$  uguale al valore del limite.



Quanto stabilito sopra possiamo restringerlo ai limiti destro e sinistro.

1. Diremo che  $f(x)$  e' continua in  $x_0$  dalla sinistra ( dalla destra) se

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0) \quad (\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0)).$$

2. Diremo che  $f(x)$  presenta una discontinuita' eliminabile dalla sinistra (dalla destra ) se il limite destro (sinistro ) esiste finito.
3. Diremo che  $f(x)$  presenta in  $x_0$  discontinuita' di I specie dalla sinistra ( dalla destra) se il limite sinistro ( destro) e' infinito.
4. Diremo che  $f(x)$  presenta in  $x_0$  discontinuita' di II specie dalla sinistra ( dalla destra) se il limite sinistro ( destro) non esiste.

Si osservino i grafici e si valutino i tipi di discontinuita'.

Abbiamo gia' notato che le funzioni monotone hanno un particolare comportamento rispetto al processo di limite. E' interessante rilevare che esse hanno solo discontinuita' di prima specie (eliminabile negli estremi) e possiamo anche " contarle ": esse sono una infinita' numerabile cioe' un insieme in corrispondenza biunivoca con i numeri naturali.

**Teorema** - Ogni funzione monotona definita in un intervallo  $I$  chiuso e limitato ed ivi monotona possiede al piu' una infinita' numerabile di punti di discontinuita' ed ognuno di essi e' di prima specie (ed ovviamente eliminabile negli estremi).

Dapprima osserviamo che l' insieme immagine e' limitato e' contenuto in  $[f(a), f(b)]$ . Dal terzo teorema di monotonia sappiamo che le funzioni monotone presentano discontinuita' di prima specie. Sia  $x_0$  un tale punto e per semplicita' consideriamo una funzione crescente .  $I(x_0) = (l_1, l_2)$  e' l' intervallo salto della funzione sull' asse delle ordinate.  $I(x_0)$  contiene almeno un punto razionale dalla proprieta' di densita' dei razionali. Cosi' gli intervalli salto per i punti di discontinuita' sono a due a due disgiunti e contengono

almeno un numero razionale. Allora la totalita' degli intervalli salto e' al piu' numerabile (cioe' al piu' in corrispondenza biunivoca con i razionali).

(che i salti possibili sono una infinita numerabile ossia che rappresentano un insieme che puo' essere posto in corrispondenza biunivoca con l' insieme  $\mathbb{N}$ , si trae osservando che se consideriamo i salti maggiori di  $1/n$  con  $n \in \mathbb{N}$  essi sono una infinita numerabile per ogni valore che noi diamo ad  $n$  ( dal momento che l'immagine e' un insieme limitato) e siccome  $\mathbb{N}$  stesso e' numerabile ne consegue che globalmente avremo una infinita' numerabile di discontinuita' di I specie o di salto.)

## Continuita' uniforme

Quando abbiamo definito la continuita' in un punto  $x_0$  abbiamo commesso una imprecisione. A quel tempo era quasi necessaria per non appesantire la notazione. La definizione completa per punti di accumulazione del dominio e' la seguente. Sia  $y = f(x)$  definita in  $T$  e sia  $x_0 \in T \cap DT$ . Diremo che  $f(x)$  e' continua in  $x_0$  quando per ogni  $\epsilon > 0$  esiste in corrispondenza un  $\delta_{\epsilon, x_0}$  tale che per ogni  $x \in T$  e  $0 \leq |x - x_0| < \delta_{\epsilon, x_0}$  si ha  $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$ .

Il numero  $\delta$  non solo dipende da  $\epsilon$  ma anche dalla posizione del punto  $x_0$ .

E' facile convicersi di questo fatto. Si puo' saggiare la continuita' del logaritmo in ogni punto  $x > 0$ : piu'  $x$  e' lontano dall'origine piu'  $\delta$  e' grande, piu'  $x$  e' vicino all'origine piu'  $\delta$  e' piccolo. Se si segue graficamente la definizione tutto questo appare chiaro. Non solo ma si capisce che la presenza dell'asintoto verticale e' la causa dell' annullarsi del  $\delta$  quando  $x$  tende a zero. Questo fatto ci impedisce di trovare un  $\delta$  che vada bene per tutti i punti  $x_0$  ovvero  $\delta = \inf_{x_0 \in T} \delta_{x_0, \epsilon} > 0$ .

La domanda che si puo' porre e' per quali funzioni esiste un  $\delta > 0$  dipendente da  $\epsilon$  e non dal punto in cui si saggia la continuita' ovvero per quali funzioni il concetto di continuita' e' uniforme rispetto al punto. Una semplice osservazione e' questa se facciamo il minimo rispetto ad numero finito di punti di tipo  $x_0$  ovvero rispetto all' insieme di punti  $\{x_0^1, x_0^2, \dots, x_0^n\}$  allora il risultato e' immediato poiche' il minimo sara' uno dei  $\delta_{x_0^i, \epsilon}$  per  $i = 1, 2, \dots, n$ . In sostanza e' questo il concetto alla base di una condizione sufficiente per determinare  $\delta$  uniforme. L'esempio del logaritmo  $y = \log x$  e di  $y = \sin x^2$  ci inducono a pensare che la presenza di asintoti verticali o di un eccessivo carattere oscillatorio all'infinito che produce un effetto verticalizzante del grafico della funzione inibiscono la uniformita' della continuita'.

Valutiamo la continuita' di  $y = \log x$ : ( $x_0 > 0$ ) ovvero

$$|\log x - \log x_0| < \epsilon \Leftrightarrow -\epsilon < \log \frac{x}{x_0} < \epsilon \Leftrightarrow$$

$$e^{-\epsilon} x_0 < x < x_0 e^{\epsilon}.$$

Un intorno di  $x_0$  che dipende da  $\epsilon$  e da  $x_0$ . L'ampiezza di tale intorno tende a zero per  $x_0$  tendente a zero. Come abbiamo gia' osservato.

Un altro esempio semplice e' dato dalla funzione  $y = x$  definita in  $\mathbb{R}$ . Nella verifica fatta sulla sua continuita' abbiamo rilevato che per ogni punto  $x_0$   $\delta$  e' sempre lo stesso ed e' uguale ad  $\epsilon$ . In questo caso non ci sono asintoti verticali ne' esiste carattere oscillante della funzione.

Prima diamo la definizione di continuita' uniforme e dopo la sostanziamo.

*Sia  $y = f(x)$  definita e continua in un dominio  $T$ . Diremo che  $f(x)$  e' uniformemente continua in  $T$  se: per ogni  $\epsilon > 0$  esiste in corrispondenza un  $\delta_{\epsilon}$  ( dipendente solo da  $\epsilon$ ) tale per ogni coppia di punti  $x', x'' \in T$  e  $|x' - x''| < \delta_{\epsilon}$  si ha*

$$|f(x') - f(x'')| < \epsilon.$$

Questa e' una nozione di carattere globale.

Una dimostrazione indiretta e' la seguente

**Teorema di Heine-Cantor** - Ogni funzione definita e continua in un intervallo  $I$  chiuso e limitato e' uniformemente continua.

Appare chiaro che le ipotesi fanno si che la funzione non abbia asintoti verticali o comportamento simile. Inoltre, per semplicita', abbiamo considerato un intervallo come dominio.

Si da' una dimostrazione indiretta ovvero per assurdo. Si rammenta che la negazione di " per ogni" e' "qualche" e viceversa.

Supponiamo la funzione continua ma non uniformemente continua. Quindi

$\exists \epsilon_0$  tale che  $\forall \delta > 0 \exists x, y \in I : |x - y| \leq \delta$  e  $|f(x) - f(y)| > \epsilon$ . Questa e' la negazione della continuita' uniforme.

Fissato  $\epsilon$  si prende (dato che e' arbitrario)  $\delta_n = \frac{1}{n} \forall n$  e si prendono  $x_n, y_n \in I$  tale che  $|x_n - y_n| < \frac{1}{n}$  e  $|f(x_n) - f(y_n)| > \epsilon_0$ . La successione formata dai punti  $x_n$  e' contenuta in  $I$  limitato allora dal teorema di Bolzano-Weierstrass esiste una sua sottosuccessione  $\{x_{n_k}\}$  convergente a  $\bar{x} \in I$  (che e' chiuso). Allora  $y_{n_k} \rightarrow \bar{x}$  perche' vale

$$0 < |x_{n_k} - y_{n_k}| < \frac{1}{n} \rightarrow 0.$$

Inoltre vale

$$|f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})| \geq \epsilon_0.$$

Per la continuita' del modulo, passando al limite, si ha

$$0 = |f(\bar{x}) - f(\bar{x})| \geq \epsilon.$$

Una contraddizione.

## Proprieta' delle funzioni continue in particolari insiemi

La continuita' non implica, in generale, significativi progressi qualitativi rispetto al concetto di limite. Ma se si considerano particolari insiemi di definizione possiamo dedurre delle rilevanti proprieta' espresse dai seguenti teoremi.

• **Teorema di Weierstrass** - Sia  $y = f(x)$  una funzione definita e continua in un insieme chiuso e limitato (compatto). Allora l'insieme immagine e' chiuso e limitato (compatto) ed ha massimo e minimo.

*Dimostrazione*

Negli appunti sulla topologia in  $\mathbf{R}$  abbiamo mostrato che ogni insieme chiuso e limitato ha massimo e minimo. Basta dimostrare, dunque, che l'immagine di  $f(x)$  e' un insieme chiuso e limitato.

1)  $B = Im f$  e' limitato.

Procediamo per assurdo. Supponiamo  $B$  illimitato superiormente ( per semplicita' di esposizione). Allora in ogni intorno di  $+\infty$  cadono punti di  $B$ . Quindi esiste una successione di punti  $\{y_n\} \subset B$  tale che  $y_n \rightarrow +\infty$  per  $n \rightarrow +\infty$ . Essendo  $y_n$  un punto dell'immagine esso viene assunto dalla funzione ovvero esiste  $x_n \in D$  tale  $y_n = f(x_n)$ . In questo modo alla successione  $\{y_n\}$  corrisponde una successione  $\{x_n\} \subset D$ , insieme limitato . Dal teorema di Bolzano- Weierstrass esiste un punto di accumulazione  $x_0 \in D$  di tale insieme ovvero esiste una sottosuccessione  $\{x_k\} \subset \{x_n\}$  per cui  $x_k \rightarrow x_0$  per  $k \rightarrow +\infty$ . Dalla continuita' di  $f$  si ha  $y_k = f(x_k) \rightarrow f(x_0)$  valore finito. Questa e' una contraddizione perche' per ipotesi abbiamo assunto  $y_k \rightarrow +\infty$  per  $k \rightarrow +\infty$ . Analogo ragionamento vale per il limite inferiore.

(Si ricorda che ogni sottosuccessione convergente ha lo stesso limite della successione globale. Inoltre  $k$  dipende da  $n$  per semplicita' abbiamo scritto solo  $k$ . Anzi e' modo acquisito di scrivere la sottosuccessione come la successione quando non sorgono equivoci.)

2)  $B = \text{Im } f$  e' chiuso.

Mostriamo che  $B = \text{Im } f$  contiene i propri punti di accumulazione.

Sia  $\bar{y}$  punto di accumulazione di  $B$ . Mostriamo che  $\bar{y} \in B$  ovvero esiste  $\bar{x} \in D$  per cui  $\bar{y} = f(\bar{x}) \in B$ . Come nel punto 1) esiste una successione  $\{y_n\} \subset B$  tale che  $y_n \rightarrow \bar{y}$ . Essendo  $y_n$  un punto dell'immagine esso viene assunto dalla funzione ovvero esiste  $x_n \in D$  tale  $y_n = f(x_n)$ . In questo modo si ottiene una successione  $\{x_n\} \subset D$  limitato. Dal teorema di Bolzano- Weierstrass esiste un punto di accumulazione  $\bar{x} \in D$  di tale insieme ovvero esiste una sottosuccessione  $\{x_k\} \subset \{x_n\}$  per cui  $x_k \rightarrow \bar{x}$ . Dalla continuita' di  $f$  si ha  $\bar{y} \leftarrow y_k = f(x_k) \rightarrow f(\bar{x})$ . Dalla unicita' del limite si ha  $\bar{y} = f(\bar{x}) \in \text{Im } f$ .

$B$  e' chiuso e limitato.

Il teorema e' dimostrato.

*Esercizio: Con facili esempi grafici verificare che se viene meno una delle ipotesi del teorema non e' certa la esistenza del massimo e del minimo.*

Un'altro interessante teorema riguarda l'esistenza degli zeri di una funzione ovvero l' esistenza di punti  $\alpha$  in cui  $f(\alpha) = 0$ . Geometricamente e' la ricerca delle intersezioni del grafico di una funzione con l'asse delle ascisse.

In questo caso dobbiamo considerare ancora piu' particolari domini; non solo chiusi e limitati ma devono essere degli intervalli.

### • Teorema degli zeri

Sia  $y = f(x)$  una funzione definita e continua in un intervallo  $[a, b]$  ( $a < b \in \mathbf{R}$ ) chiuso e limitato. Inoltre sia  $f(a)f(b) < 0$ .

Allora esiste almeno un punto  $\alpha \in (a, b)$  (interno all'intervallo) tale che  $f(\alpha) = 0$

Dimostrazione. Si assume  $f(a) > 0$  e  $f(b) < 0$ .

Sia  $D^+ = \{x \in [a, b] : f(x) \geq 0\} \subset [a, b]$ .

$D^+$  e' un insieme limitato. Esiste l'estremo superiore (finito) di  $D^+$  e lo denotiamo  $\alpha$ . Affermiamo che vale  $f(\alpha) = 0$ . Se cosi' non fosse, dalla proprieta' di tricotomia dei numeri reali si dovrebbe avere  $f(\alpha) > 0$  oppure  $f(\alpha) < 0$ .

1) se fosse  $f(\alpha) < 0$  dalla continuita' e dal teorema della permanenza del segno esiste tutto un intorno  $\mathcal{U}(\alpha)$  di  $\alpha$  (intorno sinistro se  $\alpha = b$ ) in cui la funzione e' negativa. Questo non e' possibile perche'  $\alpha$  e' estremo superiore di  $D^+$  ovvero in ogni intorno (sinistro) di  $\alpha$  deve esserci almeno un punto  $\bar{x}$  tale che  $f(\bar{x}) \geq 0$ .

Da questo ricaviamo che  $\alpha < b$ .

2) se fosse  $f(\alpha) > 0$ , dalla continuita' e dal teorema della permanenza del segno esiste tutto un intorno (destro se  $\alpha = a$ )  $\mathcal{U}(\alpha)$  di  $\alpha$  in cui  $f(x)$  e' positiva per cui esiste almeno un punto  $\bar{x} > \alpha$  tale che  $f(\bar{x}) > 0$  ovvero esiste in  $D^+$  un punto  $\bar{x}$  maggiore del suo estremo superiore  $\alpha$ . Una contraddizione.

Allora si e' dimostrato che esiste un punto  $\alpha \in (a, b)$  tale che  $f(\alpha) = 0$ . Il punto trovato e' il piu' grande punto ove la funzione si azzerava .

Nel caso di funzioni monotone tale punto e' unico. In questo caso per la dimostrazione della esistenza si puo' usare un procedimento costruttivo detto dicotomico ovvero dividere continuamente in parti uguali gli intervalli in cui sono verificate le ipotesi del teorema fino a quando si raggiunge lo zero della funzione .

### • Teorema dei valori intermedi o proprieta' di Darboux

Sia  $y = f(x)$  una funzione definita e continua in un intervallo  $(a, b)$  . Siano  $x_1, x_2 \in (a, b)$  con  $x_1 < x_2$  e  $f(x_1) \neq f(x_2)$ . Allora  $f(x)$  assume in  $[x_1, x_2]$  tutti i valori compresi tra  $f(x_1)$  e  $f(x_2)$ ; ovvero preso un numero  $\lambda$  compreso fra  $f(x_1)$  e  $f(x_2)$  esiste un punto  $\alpha \in [x_1, x_2]$  tale che  $f(\alpha) = \lambda$ .

Dimostrazione - Supponiamo  $f(x_1) < f(x_2)$  e sia  $\lambda \in [f(x_1), f(x_2)]$ . Ovviamente il teorema vale per  $\lambda$  uguale a  $f(x_1)$  o  $f(x_2)$ . Allora scegliamo  $f(x_1) < \lambda < f(x_2)$ . Sia  $y = F(x) = f(x) - \lambda$  definita in  $[x_1, x_2]$ .

$F(x)$  e' continua perche' somma di funzioni continue. Inoltre  $F(x_1) = f(x_1) - \lambda < 0$  e  $F(x_2) = f(x_2) - \lambda > 0$ .  $F(x)$  soddisfa le ipotesi del teorema degli zeri per cui esiste un punto  $\alpha \in [x_1, x_2]$  tale che  $F(\alpha) = f(\alpha) - \lambda = 0$ . Allora  $f(\alpha) = \lambda$  ed il teorema e' dimostrato.

### • Corollario

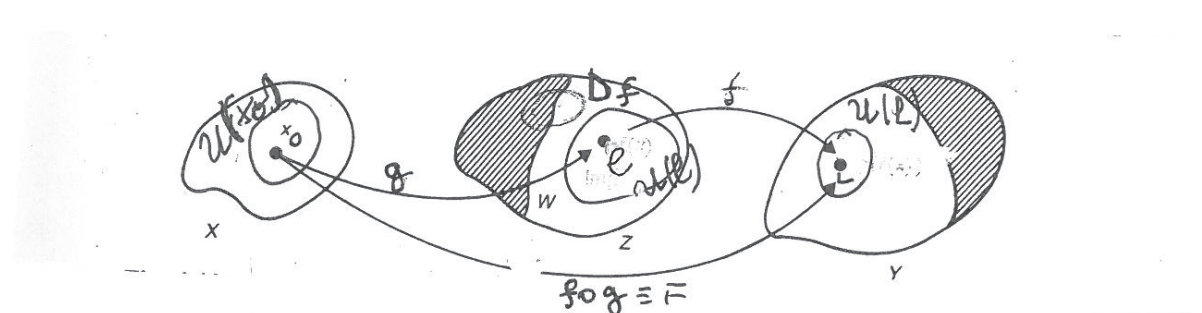
Sia  $y = f(x)$  una funzione definita e continua in un intervallo  $[a, b]$ . Allora  $f(x)$  assume in  $[a, b]$  tutti i valori compresi tra il minimo ed il massimo.

Dal teorema di Weierstrass,  $f$  ha massimo  $M$  e minimo  $m$ . Siano  $x_m$  e  $x_M$  i punti di massimo e minimo, rispettivamente. Supponendo  $x_m < x_M$  e ponendo nella dimostrazione del teorema precedente  $x_1 = x_m$  e  $x_2 = x_M$  il corollario ne consegue.

## Funzione composta e funzione inversa

Date due funzioni  $y = f(x)$  e  $y = g(x)$  si definiscono da esse altre funzioni mediante le operazioni algebriche, cosi' si ha:  $y = f(x) \pm g(x)$ ,  $y = f(x)g(x)$ ,  $f(x)/g(x)$  etc.

In questo paragrafo consideriamo altre due operazioni per definire funzioni da altre : la composizione e la inversione.



Sia  $z = g(x)$  una funzione definita in  $D_g \subseteq X$  con codominio  $Z$  ed  $Im\ g \subseteq Z$ :

$$g : D_g \rightarrow Z; \quad g : x \mapsto z; \quad Im\ g = \{z : z = g(x), x \in D_g\}.$$

Sia inoltre  $y = f(z)$  una funzione definita in  $D_f \subseteq Z$  con codominio  $Y$  ed  $Im\ f \subseteq Y$ :

$$f : D_f \rightarrow Y; \quad f : z \mapsto y; \quad Im\ f = \{y : y = f(z), z \in D_f\}.$$

Mediante queste due funzioni possiamo costruire una funzione che metta in corrispondenza la variabile  $x$  con la variabile  $y$ , mediante  $g$  ed  $f$ . A priori non abbiamo una relazione diretta tra le variabili  $x, y$ , ma la otteniamo attraverso passaggi intermedi. Osservando il grafico si nota che la connessione fra le funzioni e' possibile se c'e' coincidenza totale o parziale di  $Im\ g$  con  $D_f$ . In altri termini la  $f$  deve aver senso per le  $z$  di nome  $g(x)$ , ancora, se ha senso la restrizione di  $f$  a  $Im\ g$ . Tutto questo e' possibile se  $Im\ g \subseteq D_f$ . Dunque assumiamo che

$$Im\ g \subseteq D_f.$$



Poniamo  $z = g(x)$  in  $f$  ed otteniamo

$$y = f(g(x)).$$

Si e' cosi' stabilita una corrispondenza tra  $x$  ed  $y$  non direttamente ma tramite le funzioni  $f$  e  $g$ .

• *La funzione  $F$*

$$F : x \mapsto y = f(g(x)), \quad F : D_g \rightarrow Y$$

viene chiamata *funzione composta di  $g$  ed  $f$* .

Si usa, anche, scrivere  $F = f \circ g$  ( $f$  composto  $g$ ) ed  $f \circ g(x) = f(g(x)) = F(x)$ .

L'operazione che porta dalle due funzioni  $f$  e  $g$  ad  $F$  si dice *composizione della funzione  $f$  con la funzione  $g$* .

Inoltre quando  $Im\ g \subseteq f$  si dice che  $f$  e  $g$  sono *componibili*.

E' palese che la composizione non e' commutativa, in generale; e' facile constatare che vale la proprieta' associativa ovvero possiamo comporre piu' di due funzioni senza curarci dell'ordine di composizione.

Esempi di funzioni composte:

- 1)  $y = \sin(\sin x)$  e' composta da  $y = \sin z$  e da  $z = \sin x$ .
  - 2)  $y = \log \cos x$  e' composta da  $y = \log z$  e da  $z = \cos x$  con  $\cos x > 0$
  - 3)  $y = \sqrt{\log x}$  e' composta da  $y = \sqrt{z}$  e da  $z = \log x > 0$ .
- Esercizio: trovare le funzioni componenti di  $y = |x^2 + 2|$

• **Composizione, processo di limite e continuita'**

**Proposizione** Siano  $z = g(x)$  definita in  $D_g \subseteq X$  e  $y = f(z)$  definita in  $D_f \subseteq Z$  e siano componibili ovvero  $Im\ g \subseteq D_f$ . Inoltre si ha:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = l,$$

$$\lim_{z \rightarrow l} f(z) = L.$$

Allora esiste il limite per  $x \rightarrow x_0$  della funzione composta  $F$  e si ha

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(g(x)) = L.$$

la funzione  $F$  e' la restrizione di  $f$  a  $Im\ g$ . Se la funzione globale ammette limite anche la sua restrizione ammette limite e i due limiti sono uguali con  $l$  punto di accumulazione dell'insieme della restrizione.

Dimostriamo questo risultato esplicitando la definizione di limite. Dalle ipotesi abbiamo

$$\forall \mathcal{U}(l) \exists \mathcal{U}(x_0) \text{ (dipendente da } \mathcal{U}(l)) : \forall x \in \mathcal{U}(x_0) \cap D_g \setminus \{x_0\} \Rightarrow g(x) \in \mathcal{U}(l)$$

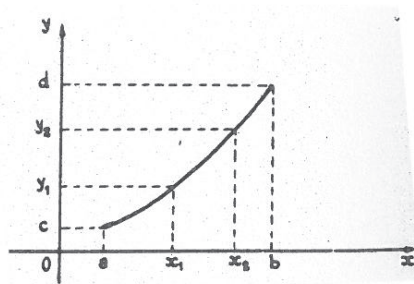
e

$$\forall \mathcal{U}(L) \exists \mathcal{U}(l) \text{ (dipendente da } \mathcal{U}(L)) : \forall z \in \mathcal{U}(l) \cap D_f \setminus \{l\} \Rightarrow f(z) \in \mathcal{U}(L).$$

Poniamo le due definizioni in opportuna sequenza

$$\begin{aligned} \forall \mathcal{U}(L) (\exists \mathcal{U}(l) \Rightarrow) \exists \mathcal{U}(x_0) : \forall x \in \mathcal{U}(x_0) \cap D_g \setminus \{x_0\} (\Rightarrow g(x) \in \mathcal{U}(l)) \text{ e } \forall z = g(x) \in \mathcal{U}(l) \cap D_f \setminus \{l\} \Rightarrow \\ f(z)_{z=g(x)} \in \mathcal{U}(L). \end{aligned}$$

Cancelliamo i passaggi intermedi racchiusi in parentesi ed abbiamo



[h]

$$\forall \mathcal{U}(L) \exists \mathcal{U}(x_0) : \forall x \in \mathcal{U}(x_0) \cap D_g \setminus \{x_0\} \Rightarrow f(z)_{z=g(x)} \in \mathcal{U}(L).$$

Questa e' la definizione del

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(g(x)) = L.$$

• **Corollario** Supponiamo che  $y = g(x)$  sia continua in  $D_g$  e  $f(z)$  sia continua in  $D_f$  e siano componibili. Allora  $y = F(x)$  e' continua in  $D_g$ .

La proposizione dice che ( $x_0$  punto di accumulazione)

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(g(x)) = f(g(x_0)).$$

Sia  $x_0$  punto di continuita' di  $g(x)$  e di accumulazione. Allora

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = g(x_0), \text{ e } \lim_{z \rightarrow g(x_0)} f(z) = f(g(x_0)).$$

Allora

$$\lim_{x \rightarrow x_0} F(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(g(x)) = f(g(x_0)) = F(x_0).$$

La continuita' di  $F$  e' dimostrata.

## Funzione inversa

Ci apprestiamo a definire l'operazione di inversione e la funzione inversa che ne e' l'effetto. E' abitudine consolidata quella di avere il dominio di una funzione come un insieme sull'asse delle ascisse e l'immagine sull'asse delle ordinate. Ora facciamo in modo che la funzione che otteniamo con l'inversione soddisfi queste convenzioni. A tal fine consideriamo una funzione  $x = f(y)$  definita in un intervallo  $I = (c, d)$  sull'asse delle ordinate (consideriamo intervalli per comodita') e sia ivi iniettiva ovvero  $f(y_1) = f(y_2) \Rightarrow y_1 = y_2$ . Allora abbiamo la seguente legge

*ad ogni  $x \in Im f$  viene a corrispondere uno ed un solo valore  $y$  tale che  $x = f(y)$*

Questa legge fa passare da  $x$  ad  $y$  e la denoteremo

$$y = f^{-1}(x)$$

od anche

$$f^{-1} : x \mapsto y; \text{ oppure } f^{-1} : \text{Im } f \rightarrow I = (c, d)$$

e viene chiamata *funzione inversa*. I suoi valori possiamo considerarli come le soluzioni dell'equazione  $x = f(y)$  rispetto all' incognita  $y$ .

Per le funzioni  $f$  e  $f^{-1}$ , vale : (grafico  $f^{-1}$ )  $\ni (x, f^{-1}(x)) = (f(y), y) \in (\text{grafico di } f)$ ; nelle due funzioni cambia il ruolo delle variabili: la variabile indipendente nell'una e' variabile dipendente nell'altra e viceversa. Le due funzioni hanno lo stesso grafico nel piano cartesiano  $O(x, y)$ . La funzione inversa e' caratterizzata dalle seguenti relazioni

$$f(f^{-1}(x)) = x; \quad f^{-1}(f(y)) = y.$$

Allora

$$f \circ f^{-1} = I_{\text{Im } f} : x \mapsto x \equiv \text{funzione identica su Im } f.$$

$$f^{-1} \circ f = I_{[c,d]} : y \mapsto y \equiv \text{funzione identica su } [c, d].$$

Esercizio 1: Mostrare che ogni funzione iniettiva e continua in un intervallo chiuso e limitato e' monotona

(si supponga (per assurdo) che non sia monotona, dato che assume almeno una volta tutti i valori compresi fra il minimo ed il massimo allora .....)

Esercizio 2 - Mostrare che ogni funzione definita in un intervallo chiuso e limitato  $I = [a, b]$ , ivi monotona ed assume tutti i valori compresi fra  $f(a)$  e  $f(b)$  essa e' continua.

(se la funzione avesse un punto di discontinuita' esso sarebbe di prima specie ovvero avrebbe un salto allora.....)

Ora possiamo affermare che

se  $x = f(y)$  e' definita e continua in un intervallo  $I = [c, d]$  (sull'asse delle  $y$ ) ed ivi monotona (in senso stretto) con immagine  $\bar{I} = [a, b]$  (sull'asse delle  $x$ ) allora la funzione inversa  $y = f^{-1}(x)$  esiste, e' definita in  $\bar{I}$ , e' ivi monotona (in senso stretto) ed e' continua.

Dimostrazione.

La monotonia implica la invertibilita' e questa conserva la monotonia.

La continuita' e' conseguenza dell'esercizio 2 poiche' la funzione  $x = f(y)$  e' definita in tutto l'intervallo  $I$  cosi'  $f^{-1}(x)$  assume tutti i valori tra  $c$  e  $d$ .

Nota importante:

Abbiamo costruito funzioni composte ed inverse ove intervengono piu' variabili ed alcune in ruoli diversi. E' naturale anche per comodita' che tutte le funzioni che consideriamo abbiamo il proprio dominio rappresentato sull'asse delle ascisse e l'immagine rappresentata sull'asse delle ordinate come ad esempio, per  $x > 0$ ,  $y = \sqrt{x}$ ,  $y = x^2$ ,  $y = e^x$ ,  $y = \log x, \dots$

Alcuni autori in un eccesso di semplificazione affermano che queste sono una inversa dell'altra. Possiamo affermare che le leggi sono una inversa dell'altra come l'estrazione di radice e la potenza oppure il logaritmo e l'esponenziale ma non certamente le funzioni laddove intervengono le variabili. Ad esempio si presti attenzione ai grafici di  $y = \sqrt{x}$  e  $y = x^2$ . Si puo' affermare che uno e' ottenuto dall'altro scambiando i valori delle variabili ma non il ruolo.

Il punto  $(2, 4)$  appartiene al grafico di  $y = x^2$ , mentre il punto  $(4, 2)$  appartiene al grafico di  $y = \sqrt{x}$ .

Ancora, il punto  $(2, 4)$  e' simmetrico di  $(4, 2)$  rispetto alla bisettrice del primo e terzo quadrante del piano cartesiano. Questa osservazione ci permette di affermare che il grafico di  $y = x^2$  e' simmetrico a quello di  $y = \sqrt{x}$  rispetto alla retta  $y = x$  oppure uno e' ottenuto d'altro per rotazione di  $\pi$  intorno alla retta  $y = x$ . Si ricorda anche che e' un fatto consolidato che un punto nel piano cartesiano  $O(x, y)$  ha come prima componente la proiezione sull'asse delle ascisse (le  $x$ ) e come seconda componente la proiezione sull'asse delle ordinate (le  $y$ ).

Esercizio: Determinare la funzione inversa di  $x = Sh(y) = \frac{e^y - e^{-y}}{2}$  (seno iperbolico di  $x$ ); di  $x = Chy = \frac{e^y + e^{-y}}{2}$  (coseno iperbolico); di  $x = Th(y) = \frac{Shy}{Chx}$  (tangente iperbolica).

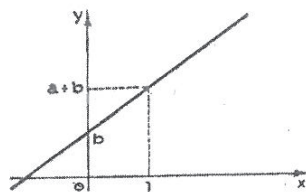
### Le funzioni elementari dell'analisi

In analisi si è condotti a considerare classi di funzioni sempre più estese. La prima classe che si dirà costituita dalle funzioni elementari, si ottiene partendo dalle funzioni che conosciamo, come:

$$c, t^a, a^t, \log_a, \operatorname{sen} t, \operatorname{cos} t, \operatorname{tg} t, \operatorname{cotg} t$$

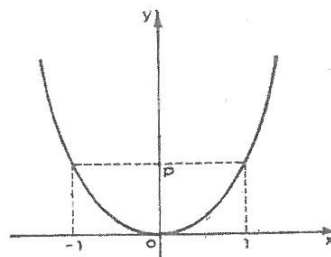
con  $c$  ed  $a$  costanti ed  $t$  variabile. Da queste poi si ottengono tutte quelle costruite con le operazioni razionali, con composizioni ed inversioni in numero finito. Si ottengono polinomi, rapporto di polinomi combinando le prime due funzioni con  $a \in \mathbb{N}$ . La funzione  $y = Shx = (e^x - e^{-x})/2$  è ottenuta combinando la prima e terza funzione, così  $y = Chx = (e^x + e^{-x})/2$ .  $y = \operatorname{arcsen} x$  è ottenuta invertendo la funzione  $x = \operatorname{sen} y$  per  $-\pi/2 < y < \pi/2$ , un intervallo di monotonia.  $y = \operatorname{arccos} x$  è ottenuta invertendo  $x = \operatorname{cos} y$  per  $0 < y < \pi$ , un intervallo di monotonia.  $y = \operatorname{arctg} x$  è ottenuta invertendo  $x = \operatorname{tg} y$  nell'intervallo di monotonia  $-\pi/2 < y < \pi/2$ . Se queste funzioni si invertono su tutto l'asse si ottengono funzioni a più valori.

Osservare attentamente i seguenti grafici ove sono definite e rappresentate le inverse di funzioni circolari.



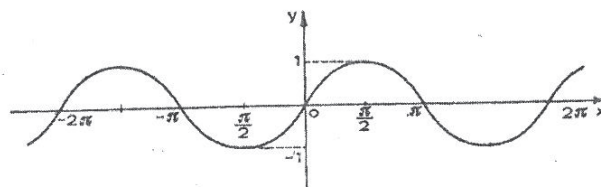
1)  $y = ax + b$   
 $T = -\infty^+ + \infty$ ,  $E = -\infty^+ + \infty$ ,  
 (linea retta);

Fig. 3.3.



2)  $y = px^2$   
 $T = -\infty^+ + \infty$ ,  $E = 0^+ \infty$ ,  
 (parabola avente per asse l'asse y);

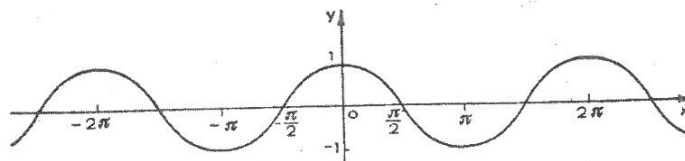
Fig. 3.4.



3)  $y = \sin x$

$T = -\infty^+ + \infty$ ,  $E = -1^+ 1$ ,  
 (sinusoide);

Fig. 3.5.

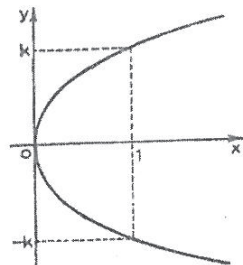


4)  $y = \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$   $T = -\infty^+ + \infty$ ,  $E = -1^+ 1$ ,  
 (cosinusoide);

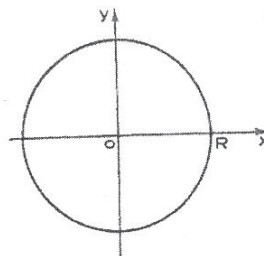
Fig. 3.6.

## Funzioni inverse a più valori

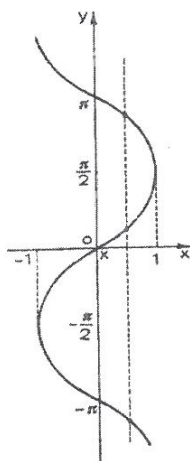
Esempi.



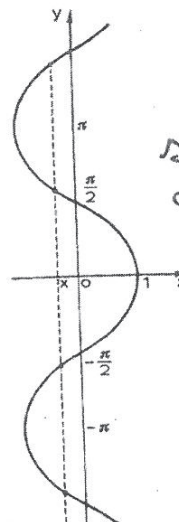
1')  $y = \pm k\sqrt{x}$   
 $T = 0^+ + \infty$ ,  $E = -\infty + \infty$ ,  
 funzione a due valori (parabola  
 avente per asse l'asse  $x$ );  
 Fig. 3.12.



2')  $y = \pm \sqrt{R^2 - x^2}$   
 $T = -R^+ R$ ,  $E = -R^- R$ .  
 funzione a due valori (circonferenza  
 col centro nell'origine e raggio  
 $R$ );  
 Fig. 3.13.

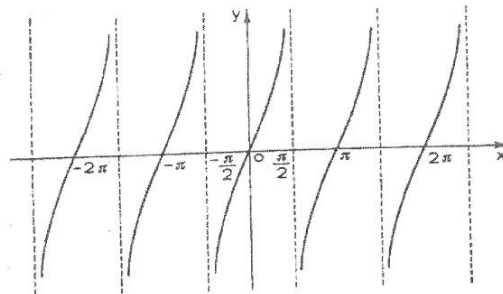


3')  $y = \arcsin x$   
 (cioè  $x = \sin y$ )  
 $T = -1^+ 1$ ,  $E = -\infty^+ + \infty$ ,  
 funzione a infiniti valori;  
 Fig. 3.14.



4')  $y = \arccos x$   
 (cioè  $x = \cos y$ )  
 $T = -1^+ 1$ ,  $E = -\infty^+ + \infty$ ,  
 funzione a infiniti valori;  
 Fig. 3.15.

si faccia  
 attenzione a  
 questi grafici



$$5) y = \operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

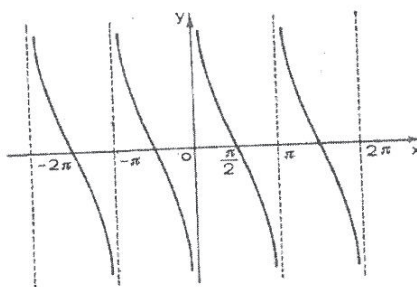
$$T = \left\{ (2n-1) \frac{\pi}{2} < x < (2n+1) \frac{\pi}{2}; \right.$$

$$n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \},$$

$$E = -\infty + \infty,$$

(tangente);

Fig. 3.7.



$$6) y = \operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\sin x}$$

$$T = \{ n\pi < x < (n+1)\pi; \}$$

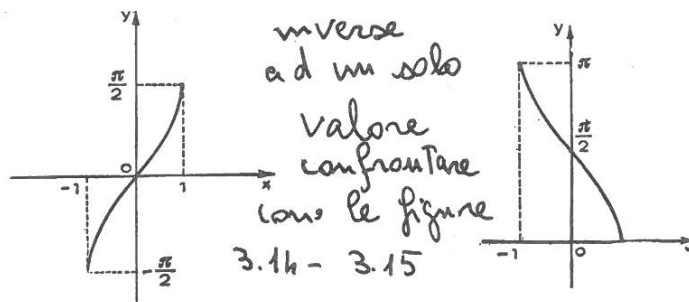
$$n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \},$$

$$E = -\infty + \infty,$$

(cotangente);

Fig. 3.8.

Si ottengono così i grafici seguenti:

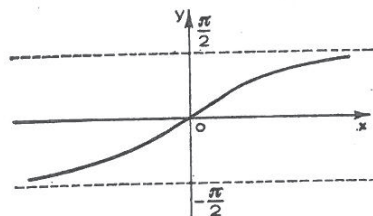


$y = \arcsin x$   
 $T = -1 \dots 1, E = -\pi/2 \dots \pi/2,$

Fig. 3.19.

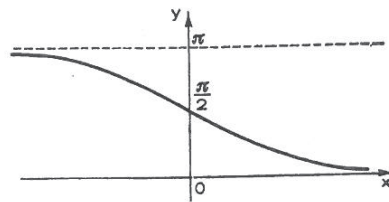
$y = \arccos x$   
 $T = -1 \dots 1, E = 0 \dots \pi,$

Fig. 3.20.



$y = \arctg x$   
 $T = -\infty \dots +\infty, E = -\pi/2 \dots \pi/2,$

Fig. 3.21.



$y = \text{arc cotg } x$   
 $T = -\infty \dots +\infty, E = 0 \dots \pi.$

Fig. 3.22.

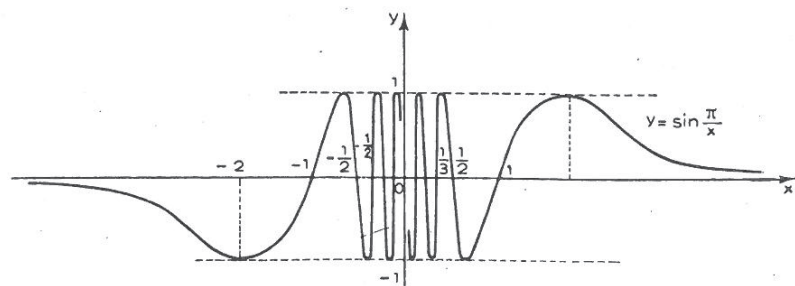


Fig. 3.35.



c) Le funzioni iperboliche. — Sono definite dalle eguaglianze

$$\begin{aligned} \text{Sh } x &= \frac{1}{2} (e^x - e^{-x}), & \text{Ch } x &= \frac{1}{2} (e^x + e^{-x}), \\ \text{Th } x &= \frac{\text{Sh } x}{\text{Ch } x}, & \text{Cth } x &= \frac{\text{Ch } x}{\text{Sh } x}, \end{aligned} \quad (24.4)$$

e vengono dette rispettivamente *seno iperbolico*, *coseno iperbolico*, *tangente iperbolica* e *cotangente iperbolica* (quest'ultima è definita per  $x \neq 0$ ). Le funzioni iperboliche vengono anche indicate con le notazioni

$\sinh x$ ,  $\cosh x$ ,  $\tanh x$ ,  $\coth x$ .

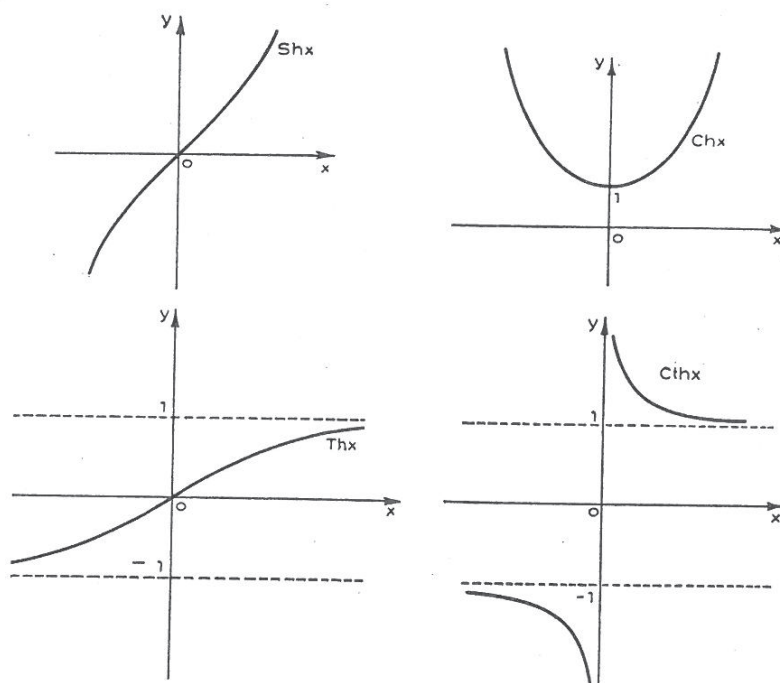


Fig. 3.45.

Osserviamo che, per  $\alpha > 0$ , la funzione  $x^\alpha$  è definita anche nel punto  $x = 0$ , ove assume il valore zero ed è continua a destra.

È infatti  $0 < x^\alpha < \varepsilon$  per  $0 < x < \varepsilon^{1/\alpha} = \delta_\varepsilon$  (la tesi si deduce anche dalla (24.8), per  $x \rightarrow 0^+$ ).

Inoltre, se  $\alpha$  è razionale con denominatore dispari, la funzione  $x^\alpha$  è definita e continua anche per  $x < 0$ , risultando ivi  $x^\alpha = (-1)^m |x|^\alpha$ ,  $\alpha = m/n$ . Se infine è  $\alpha > 0$ , oltre che razionale con denominatore dispari,  $x^\alpha$  è definita e continua in tutto l'intervallo  $-\infty^+ + \infty$ .

e) Costruiamo la funzione inversa di  $\text{Sh } y$ .

Posto

$$x = \text{Sh } y = \frac{1}{2}(e^y - e^{-y}) = g(y)$$

risulta (moltiplicando entrambi i membri per  $e^y$ , che è  $> 0$  per tutti i valori di  $y$ )

$$e^{2y} - 2xe^y - 1 = 0,$$

da cui (osservando ancora che è  $e^y > 0$ ):

$$e^y = x + \sqrt{1 + x^2},$$

cioè

$$y = \log(x + \sqrt{1 + x^2}). \quad (24.9)$$

Questa funzione si indica anche col simbolo

$$y = \text{Sett Sh } x \quad (24.10)$$

(settore seno iperbolico  $x$ ).

Si noti che la funzione inversa di una funzione  $x = g(y)$  si può definire anche se  $g(y)$  non è monotona: in tal caso risulta però una funzione a più valori (lo si è constatato negli esempi: 1', 3'), ..., 6') del § 2); per evitare la considerazione di funzioni di tal natura si preferisce, di solito, porre delle limitazioni per la  $y$  in modo che, per i valori considerati, la  $g(y)$  risulti strettamente monotona (cfr. l'osservazione II del § 2).

Ad esempio, la funzione inversa di  $x = \text{Ch } y$  è

$$y = \log(x \pm \sqrt{x^2 - 1}) = \text{Sett Ch } x \quad (24.11)$$

La linea di equazione

$$y = \text{Ch } x$$

si chiama *catenaria*: essa è la linea secondo cui si dispone, per effetto del proprio peso, un filo omogeneo fissato agli estremi.

La *continuità delle funzioni iperboliche* segue da quella di

$$e^x \text{ e di } e^{-x} = \frac{1}{e^x}.$$

Le funzioni iperboliche sono legate da relazioni simili a quelle stabilite tra le funzioni circolari.

Tra queste, particolarmente notevole è la relazione

$$\text{Ch}^2 x - \text{Sh}^2 x = 1, \quad (24.5)$$

analogha alla relazione  $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ .

È infatti

$$\text{Ch}^2 x - \text{Sh}^2 x = (\text{Ch } x + \text{Sh } x)(\text{Ch } x - \text{Sh } x) = e^x e^{-x} = 1.$$

Si dimostrano poi facilmente le seguenti *formule di addizione*:

$$\begin{aligned} \text{Sh}(a+b) &= \text{Sh } a \text{ Ch } b + \text{Ch } a \text{ Sh } b, \\ \text{Ch}(a+b) &= \text{Ch } a \text{ Ch } b + \text{Sh } a \text{ Sh } b, \\ \text{Th}(a+b) &= \frac{\text{Th } a + \text{Th } b}{1 + \text{Th } a \text{ Th } b}, \end{aligned} \quad (24.6)$$

analoghe alle note formule di addizione delle funzioni circolari.

d) Poiché l'esponenziale e il logaritmo sono funzioni *continue*, risultano continue, per quanto dimostrato nel § 20, le funzioni composte

$$y = e^{\varphi(x)}, \quad y = \log \varphi(x) \quad (24.7)$$

(con  $\varphi(x)$  continua nel primo caso, continua e positiva nel secondo). Per lo stesso motivo, è *continua*, nell'intervallo  $0 < x < +\infty$  e supponendo l'esponente  $\alpha$  reale, la funzione

$$y = x^\alpha = e^{\alpha \log x}. \quad (24.8)$$