5. Cinematica e Dinamica dei moti relativi

5.1 Il problema del moto relativo

Cambio di sistema di riferimento

Supponiamo di conoscere le legge oraria di un punto materiale rispetto a un dato sistema di riferimento inerziale $Oxyz$, e la legge del moto di un secondo sistema di riferimento $O'x'y'z'$ rispetto al primo. Vogliamo determinare la legge del moto del nostro punto materiale rispetto al secondo sistema di riferimento. Per convenzione ed in maniera arbitraria si indicano comunemente i due sistemi di riferimento in questione come:

$Oxyz$: sistema di riferimento ***assoluto*** o *fisso*

$O'x'y'z'$ sistema di riferimento ***relativo*** o *mobile*

Il moto del "sistema mobile" rispetto a quello fisso viene detto ***moto di trascinamento***, e può essere di tipo traslatorio, rotatorio, o più in generale rototraslatorio. Vediamo cosa avviene nei tre suddetti casi.

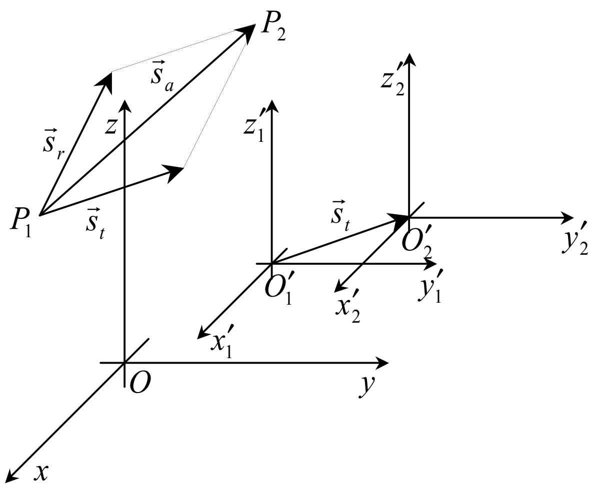
a) Moto di trascinamento traslatorio puro

Considerati due istanti di tempo successivi t_1 e t_2, lo spostamento compiuto dal sistema mobile rispetto a quello fisso nell'intervallo temporale t_2-t_1 è lo stesso per tutti i suoi punti, e può essere rappresentato con un vettore che prende il nome di *spostamento di trascinamento*:

$\vec{s}_t = \overrightarrow{O_1'O_2'}$ *spostamento di trascinamento*

Consideriamo un punto materiale che nello stesso intervallo di tempo si muova, nel sistema fisso, di uno *spostamento assoluto*

$$\vec{s}_a = \overrightarrow{P_1P_2}$$



Nel sistema mobile, lo stesso punto materiale avrà compiuto uno *spostamento relativo* pari a:

$$\vec{s}_r = \overrightarrow{O_2'P_2} - \overrightarrow{O_1'P_1} = \left(-\overrightarrow{O_1'O_2'} + \overrightarrow{O_1'P_2}\right) - \overrightarrow{O_1'P_1}$$
$$= \left(\overrightarrow{O_1'P_2} - \overrightarrow{O_1'P_1}\right) - \overrightarrow{O_1'O_2'} = \vec{s}_a - \vec{s}_t$$

In definitiva, in caso di moto di trascinamento *traslatorio* vale la legge di composizione:

$$\boxed{\vec{s}_a = \vec{s}_r + \vec{s}_t}$$

a) Moto di trascinamento rotatorio puro

Per spostamenti *infinitesimi* del sistema di riferimento, cioè se consideriamo un intervallo di tempo t_2-t_1 infinitesimo, vale ancora la stessa legge di composizione degli spostamenti, ma in forma differenziale:

$$\boxed{d\vec{s}_a = d\vec{s}_r + d\vec{s}_t}$$

dove $d\vec{s}_t$ rappresenta lo spostamento infinitesimo subito, rispetto al sistema fisso, dal punto del sistema mobile in cui si trova il nostro punto materiale. Al contrario che nel caso traslatorio, tale spostamento non è lo stesso per tutti i punti dello spazio, e non si identifica perciò con lo spostamento subito dall'origine O' del sistema mobile.
Per rotazioni *finite*, al contrario, questa legge non si può applicare: le rotazioni finite non sono descritte da vettori. Tra l'altro, non sono neppure trasformazioni commutative.

c) Moto di trascinamento rototraslatorio

Si tratta del caso più generale, in cui il moto del sistema mobile rispetto al sistema fisso è una composizione di una rotazione e di una traslazione. Come nel caso precedente, per spostamenti *infinitesimi* vale ancora la legge di composizione degli spostamenti in forma differenziale, mentre per spostamenti finiti non si può dare una descrizione in termini di vettori.

5.2 Legge di composizione delle velocità

La composizione galileiana delle velocità

Dalla legge di composizione degli spostamenti in forma differenziale, che è valida in generale per un moto di trascinamento rototraslatorio, si ricava immediatamente (dividendo per l'intervallo infinitesimo $dt = t_2 - t_1$) la legge di composizione delle velocità di Galileo, sempre valida eccetto che per velocità prossime alla velocità della luce, ove intervengono effetti relativistici:

$$\boxed{\vec{v}_a = \vec{v}_r + \vec{v}_t}$$

avendo definito in questo modo le tre velocità in gioco:

$\vec{v}_a \equiv \dfrac{d\vec{s}_a}{dt}$ *velocità assoluta*

$\vec{v}_r \equiv \dfrac{d\vec{s}_r}{dt}$ *velocità relativa*

$\vec{v}_t \equiv \dfrac{d\vec{s}_t}{dt}$ *velocità di trascinamento*

La velocità assoluta è la velocità del punto materiale nel sistema di riferimento assoluto; quella relativa è la velocità misurata, per lo stesso punto materiale, nel sistema di riferimento relativo, mentre la velocità di trascinamento è la velocità che il punto dello spazio occupato dal nostro punto materiale ha, nel sistema relativo, rispetto a quello fisso, cioè è la velocità assoluta che il punto materiale avrebbe se fosse fermo rispetto al sistema di riferimento mobile (in generale varia da punto a punto, salvo che nel caso di pura traslazione, come visto in precedenza).

Calcolo della velocità di trascinamento

Abbiamo visto che, in generale, la velocità di trascinamento varia da punto a punto del sistema mobile: vediamo ora come è possibile calcolarla, conoscendo le componenti di traslazione e di rotazione del moto di trascinamento. A tale scopo definiamo anzitutto i tre vettori-posizione:

$\vec{r}_a \equiv \overrightarrow{OP}$ vettore posizione assoluto

$\vec{r}_r \equiv \overrightarrow{O'P}$ vettore posizione relativo

$\vec{r}_{O'} \equiv \overrightarrow{OO'}$ vettore posizione (assoluto) dell'origine O' del sistema mobile per i quali valgono, come diretta conseguenza della definizione, le relazioni:

$$\vec{r}_a = \vec{r}_r + \vec{r}_{O'} \quad ; \quad d\vec{r}_a = d\vec{r}_r + d\vec{r}_{O'} \quad ; \quad \Delta\vec{r}_a = \Delta\vec{r}_r + \Delta\vec{r}_{O'}$$

Osserviamo che mentre è evidente che la variazione del vettore posizione assoluto coincida con lo spostamento assoluto sopra definito, la variazione del vettore posizione di O' non coincide, in generale, con lo spostamento di trascinamento (neppure in forma infinitesima), e la variazione del vettore posizione relativo non coincide con lo spostamento relativo. Cioè in generale:

$$d\vec{r}_a = d\vec{s}_a \quad \Rightarrow \quad \vec{v}_a \equiv \frac{d\vec{s}_a}{dt} = \frac{d\vec{r}_a}{dt},$$

$$d\vec{r}_r \neq d\vec{s}_r \quad \Rightarrow \quad \vec{v}_r \equiv \frac{d\vec{s}_r}{dt} \neq \frac{d\vec{r}_r}{dt},$$

$$d\vec{r}_{O'} \neq d\vec{s}_t \quad \Rightarrow \quad \vec{v}_t \equiv \frac{d\vec{s}_t}{dt} \neq \frac{d\vec{r}_{O'}}{dt}.$$

Se allora esplicitiamo il calcolo della velocità assoluta come derivata del vettore posizione assoluto otteniamo:

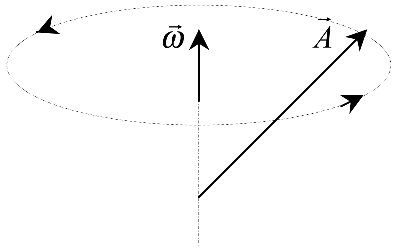
$$\vec{v}_a = \frac{d\vec{r}_a}{dt} = \frac{d\left(\vec{r}_r + \vec{r}_{O'}\right)}{dt} = \frac{d}{dt}\left(x'\hat{u}_{x'} + y'\hat{u}_{y'} + z'\hat{u}_{z'}\right) + \frac{d\vec{r}_{O'}}{dt} =$$
$$= \left(\frac{dx'}{dt}\hat{u}_{x'} + \frac{dy'}{dt}\hat{u}_{y'} + \frac{dz'}{dt}\hat{u}_{z'}\right) + \left(x'\frac{d\hat{u}_{x'}}{dt} + y'\frac{d\hat{u}_{y'}}{dt} + z'\frac{d\hat{u}_{z'}}{dt}\right) + \vec{v}_{O'}.$$

Nel primo termine fra parentesi dell'ultima espressione riconosciamo la velocità relativa in coordinate cartesiane, e quindi per la legge di composizione delle velocità i due termini restanti costituiscono la velocità di trascinamento, ove abbiamo definito con il simbolo $\vec{v}_{O'}$ la velocità dell'origine O' del sistema mobile (la derivata del vettore posizione dell'origine del sistema mobile).
Possiamo dunque scrivere la velocità relativa e quella di trascinamento come:

$$\vec{v}_r = \left(\frac{dx'}{dt}\hat{u}_{x'} + \frac{dy'}{dt}\hat{u}_{y'} + \frac{dz'}{dt}\hat{u}_{z'}\right) \quad ; \quad \vec{v}_t = \vec{v}_{O'} + \left(x'\frac{d\hat{u}_{x'}}{dt} + y'\frac{d\hat{u}_{y'}}{dt} + z'\frac{d\hat{u}_{z'}}{dt}\right)$$

Nel caso di pura traslazione fra i due sistemi di riferimento, i versori del sistema mobile non cambiano nel tempo, perciò il termine fra parentesi nell'espressione della velocità di trascinamento scompare, ed essa va a coincidere, per tutti i punti dello spazio, con la velocità dell'origine, come è del resto intuitivo. Se invece è presente anche un moto di trascinamento rotatorio il termine aggiuntivo, che non si annulla, può essere riscritto in funzione della velocità angolare del sistema mobile.
Sia ora $\vec{\omega}$ il vettore velocità angolare del sistema mobile all'istante di tempo considerato: ciascuno dei suoi versori cartesiani, allora, è soggetto alla stessa velocità angolare. Calcoliamo le derivate di questi versori: ciascuno dei tre sta descrivendo, in quell'istante di tempo, un *moto di precessione* intorno all'asse di rotazione (cioè una rotazione rispetto ad un asse fisso con il quale si ha un punto in comune).

E' noto che, se un vettore $\vec{A}$ di modulo costante sta eseguendo un moto di precessione con velocità angolare $\vec{\omega}$, la sua derivata è pari al prodotto vettore:



$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{A}$$

Questo sarà dunque vero, nel nostro caso, per ciascuno dei tre versori del sistema mobile:

$$\frac{d\hat{u}_{x'}}{dt} = \vec{\omega}\times\hat{u}_{x'} \quad ; \quad \frac{d\hat{u}_{y'}}{dt} = \vec{\omega}\times\hat{u}_{y'} \quad ; \quad \frac{d\hat{u}_{z'}}{dt} = \vec{\omega}\times\hat{u}_{z'}$$

Il termine fra parentesi, perciò, è pari a

$$x'\frac{d\hat{u}_{x'}}{dt}+y'\frac{d\hat{u}_{y'}}{dt}+z'\frac{d\hat{u}_{z'}}{dt} = x'\vec{\omega}\times\hat{u}_{x'}+y'\vec{\omega}\times\hat{u}_{y'}+z'\vec{\omega}\times\hat{u}_{z'} =$$
$$= \vec{\omega}\times\left(x'\hat{u}_{x'}+y'\hat{u}_{y'}+z'\hat{u}_{z'}\right) = \vec{\omega}\times\vec{r}_r$$

In definitiva, la velocità di trascinamento vale: $\vec{v}_t = \vec{v}_{O'}+\vec{\omega}\times\vec{r}_r$

Casi particolari

a) Moto traslatorio puro
$\vec{\omega} = 0 \Rightarrow \vec{v}_t = \vec{v}_{O'}$ in tutti i punti dello spazio (banalmente).

b) Moto rotatorio puro
$\vec{v}_{O'} = 0 \Rightarrow \vec{v}_t = \vec{\omega}\times\vec{r}_r$, quindi la velocità di trascinamento varia a seconda del valore della posizione occupata dal punto materiale nel sistema di riferimento relativo, individuata dal vettore $\vec{r}_r$.

5.3 Legge di composizione delle accelerazioni

Definizioni di accelerazione assoluta e relativa

In modo del tutto analogo a quanto visto per le velocità, definiamo le seguenti accelerazioni:

$$\vec{a}_a \equiv \frac{d\vec{v}_a}{dt} = \frac{d^2\vec{r}_a}{dt^2} = \frac{d^2x}{dt^2}\hat{u}_x+\frac{d^2y}{dt^2}\hat{u}_y+\frac{d^2z}{dt^2}\hat{u}_z \qquad \textit{accelerazione assoluta}$$
$$\vec{a}_r \equiv \frac{d^2x'}{dt^2}\hat{u}_{x'}+\frac{d^2y'}{dt^2}\hat{u}_{y'}+\frac{d^2z'}{dt^2}\hat{u}_{z'} \qquad \textit{accelerazione relativa}$$

Introdurremo poi anche l'accelerazione di trascinamento e l'accelerazione dell'origine del sistema mobile.

Calcolo dell'accelerazione assoluta

Partendo dalla legge di composizione delle velocità, con l'espressione cartesiana esplicita delle due componenti, per derivazione otteniamo:

$$\vec{a}_a = \frac{d\vec{v}_a}{dt} = \frac{d\left(\vec{v}_r+\vec{v}_t\right)}{dt} = \frac{d}{dt}\left[\left(\frac{dx'}{dt}\hat{u}_{x'}+\frac{dy'}{dt}\hat{u}_{y'}+\frac{dz'}{dt}\hat{u}_{z'}\right)+\left(x'\frac{d\hat{u}_{x'}}{dt}+y'\frac{d\hat{u}_{y'}}{dt}+z'\frac{d\hat{u}_{z'}}{dt}\right)+\frac{d\vec{r}_{O'}}{dt}\right] =$$
$$= \left(\frac{d^2x'}{dt^2}\hat{u}_{x'}+\frac{d^2y'}{dt^2}\hat{u}_{y'}+\frac{d^2z'}{dt^2}\hat{u}_{z'}\right)+\left(\frac{dx'}{dt}\frac{d\hat{u}_{x'}}{dt}+\frac{dy'}{dt}\frac{d\hat{u}_{y'}}{dt}+\frac{dz'}{dt}\frac{d\hat{u}_{z'}}{dt}\right)+$$
$$+\left(\frac{dx'}{dt}\frac{d\hat{u}_{x'}}{dt}+\frac{dy'}{dt}\frac{d\hat{u}_{y'}}{dt}+\frac{dz'}{dt}\frac{d\hat{u}_{z'}}{dt}\right)+\left(x'\frac{d^2\hat{u}_{x'}}{dt^2}+y'\frac{d^2\hat{u}_{y'}}{dt^2}+z'\frac{d^2\hat{u}_{z'}}{dt^2}\right)+\frac{d^2\vec{r}_{O'}}{dt^2}.$$

Riconosciamo nel primo termine fra parentesi di questa espressione l'accelerazione relativa; il secondo ed il terzo sono uguali fra loro, e possono essere scritti in funzione della velocità angolare del sistema mobile, considerando come sopra le proprietà del moto di precessione dei versori, cioè:

$$\frac{dx'}{dt}\frac{d\hat{u}_{x'}}{dt}+\frac{dy'}{dt}\frac{d\hat{u}_{y'}}{dt}+\frac{dz'}{dt}\frac{d\hat{u}_{z'}}{dt} = \frac{dx'}{dt}\vec{\omega}\times\hat{u}_{x'}+\frac{dy'}{dt}\vec{\omega}\times\hat{u}_{y'}+\frac{dz'}{dt}\vec{\omega}\times\hat{u}_{z'} =$$

$$= \vec{\omega}\times\left(\frac{dx'}{dt}\hat{u}_{x'}+\frac{dy'}{dt}\hat{u}_{y'}+\frac{dz'}{dt}\hat{u}_{z'}\right) = \vec{\omega}\times\vec{v}_r$$

La somma dei suddetti due termini coincidenti è detta ***accelerazione di Coriolis***: $\vec{a}_c = 2\hat{\omega}\times\vec{v}_r$

L'accelerazione di Coriolis si annulla in caso di pura traslazione e nel caso in cui il moto *relativo* del punto materiale sia parallelo all'asse di rotazione del sistema mobile, oppure sia assente.

La somma degli ultimi due termini, invece, rappresenta l'accelerazione che il punto materiale avrebbe, rispetto al sistema fisso, se fosse fermo nel sistema mobile, là dove si trova all'istante considerato. Per questo motivo viene indicata come *accelerazione di trascinamento*:

$$\vec{a}_t = \left(x'\frac{d^2\hat{u}_{x'}}{dt^2}+y'\frac{d^2\hat{u}_{y'}}{dt^2}+z'\frac{d^2\hat{u}_{z'}}{dt^2}\right)+\frac{d^2\vec{r}_{O'}}{dt^2}$$

Di questa espressione, il secondo termine è la derivata della velocità dell'origine, e rappresenta perciò l'accelerazione dell'origine, che indicheremo come $\vec{a}_{O'}$, mentre il primo termine può essere riscritto come segue:

$$x'\frac{d^2\hat{u}_{x'}}{dt^2}+y'\frac{d^2\hat{u}_{y'}}{dt^2}+z'\frac{d^2\hat{u}_{z'}}{dt^2} = x'\frac{d}{dt}\left(\frac{d\hat{u}_{x'}}{dt}\right)+y'\frac{d}{dt}\left(\frac{d\hat{u}_{y'}}{dt}\right)+z'\frac{d}{dt}\left(\frac{d\hat{u}_{z'}}{dt}\right) =$$

$$= x'\frac{d}{dt}\left(\vec{\omega}\times\hat{u}_{x'}\right)+y'\frac{d}{dt}\left(\vec{\omega}\times\hat{u}_{y'}\right)+z'\frac{d}{dt}\left(\vec{\omega}\times\hat{u}_{z'}\right) =$$

$$= \frac{d\vec{\omega}}{dt}\times\left(x'\hat{u}_{x'}+y'\hat{u}_{y'}+z'\hat{u}_{z'}\right)+\vec{\omega}\times\left(x'\frac{d\hat{u}_{x'}}{dt}+y'\frac{d\hat{u}_{y'}}{dt}+z'\frac{d\hat{u}_{z'}}{dt}\right) =$$

$$= \frac{d\vec{\omega}}{dt}\times\vec{r}_r+\vec{\omega}\times\left(\vec{\omega}\times\vec{r}_r\right)$$

In conclusione, l'accelerazione assoluta può essere scomposta nei termini:

$$\boxed{\vec{a}_a = \vec{a}_r+\vec{a}_c+\vec{a}_t}$$

dove $\vec{a}_t = \vec{a}_{O'}+\vec{\omega}\times\left(\vec{\omega}\times\vec{r}_r\right)+\frac{d\vec{\omega}}{dt}\times\vec{r}_r = \vec{a}_{O'}+\vec{\omega}\times\left(\vec{\omega}\times\vec{r}_r\right)+\vec{\alpha}\times\vec{r}_r$,

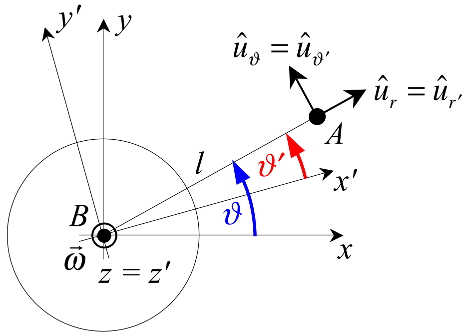
avendo indicato nell'ultimo passaggio l'accelerazione angolare di rotazione del sistema di riferimento relativo come la derivata della velocità angolare.

Esempio

Un bambino B è seduto (immobile) al centro di una giostra che ruota con velocità angolare costante intorno ad un asse verticale, ed osserva un albero A posto a distanza l dall'asse. Descrivere il moto dell'albero rispetto al bambino (il quale rappresenta un SdR non inerziale con origine sull'asse di rotazione e in moto rotatorio puro e uniforme).

Velocità:

Il sistema di riferimento del bambino ruota intorno all'asse *z*, ma non compie traslazioni:



$\vec{\omega} = \omega \hat{u}_z = \text{cost.}$

$\vec{r}_{O'} = 0 \Rightarrow \vec{v}_{O'} = 0$

$\Rightarrow \vec{v}_t = \vec{\omega} \times \vec{r}_r$

L'albero è fermo nel sistema assoluto:

$\vec{v}_a = 0 = \vec{v}_r + \vec{v}_t \quad \Rightarrow \quad \vec{v}_r = -\vec{v}_t = -\vec{\omega} \times \vec{r}_r$

$\vec{r}_a = l\hat{u}_r = \vec{r}_r + \vec{r}_{O'} \quad \Rightarrow \quad \vec{r}_r = \vec{r}_a = l\hat{u}_r = l\hat{u}_{r'}$

$\vec{v}_r = -\vec{\omega} \times l\hat{u}_{r'} = -\omega l \left(\hat{u}_z \times \hat{u}_{r'}\right) = -\omega l \hat{u}_{\vartheta'}$

Accelerazioni:

$\vec{a}_a = 0 = \vec{a}_r + \vec{a}_c + \vec{a}_t$

$\vec{a}_{O'} = 0, \vec{\omega} = \text{cost.} \quad \Rightarrow \quad \vec{a}_t = \vec{\omega} \times \left(\vec{\omega} \times \vec{r}_{r'}\right) = \vec{\omega} \times \left(\vec{\omega} \times l\hat{u}_{r'}\right) = l\omega^2 \hat{u}_z \times \left(\hat{u}_z \times \hat{u}_{r'}\right) = -l\omega^2 \hat{u}_{r'}$

$\vec{a}_c = 2\vec{\omega} \times \vec{v}_r = -2\omega^2 l \left(\hat{u}_z \times \hat{u}_{\vartheta'}\right) = +2\omega^2 l \hat{u}_{r'}$

$\vec{a}_r = -\vec{a}_t - \vec{a}_c = -\omega^2 l \hat{u}_{r'}$

Dall'espressione trovata per l'accelerazione relativa, comprendiamo immediatamente che il moto relativo dell'albero è un moto circolare uniforme di raggio *l* e velocità angolare ω intorno all'origine, con rotazione che si compie in senso opposto alla rotazione della giostra.

Si noti che il problema esaminato corrisponde esattamente al caso del moto giornaliero (apparente) del Sole (l'albero nel nostro problema) intorno alla Terra (rappresentata dalla giostra). L'esempio discusso fornisce quindi una dimostrazione rigorosa dell'argomento eliocentrico relativamente al sorgere e tramontare del Sole .