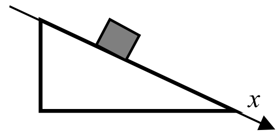
3/2/2014
ore 9:30

FISICA (terzo appello)

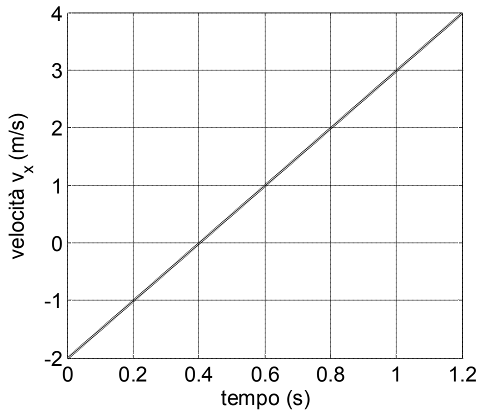
Proff. Ciucci, Della Valle, Magni, Nisoli, Torricelli



1) Un corpo è in moto su un piano inclinato liscio. Il grafico mostra la velocità v_x del corpo in funzione del tempo. Si calcoli:

a) l'accelerazione del corpo, a_x;
b) lo spostamento tra $t_0 = 0$ e t_1=0.8 s;
c) la lunghezza del percorso tra $t_0 = 0$ e t_1=0.8 s;
d) l'inclinazione del piano.

Ove necessario si approssimi il valore dell'accelerazione di gravità con $g \approx 10$ ms^{-2}.



2) Un pendolo è costituito da un'asta rigida di massa trascurabile che può oscillare attorno ad un estremo. All'asta sono fissate due masse puntiformi (m_1 e m_2) a distanza h_1 ed h_2 dal punto di sospensione. Si calcoli la frequenza delle piccole oscillazioni.

3) Si enunci e si spieghi il primo principio di Newton, chiarendo che cosa si intende per sistema di riferimento inerziale. Si utilizzino esempi per illustrare i concetti esposti.

4) Un recipiente <u>adiabatico</u> contiene una massa m_A d'acqua e una massa m_G di ghiaccio in equilibrio a 0°C. Il recipiente viene agitato finché tutto il ghiaccio si scioglie e l'acqua raggiunge la temperatura $T_1 > 0$°C.

a) L'entropia della massa m_A+m_G è variata?
b) L'energia interna è variata?
c) In caso affermativo se ne calcolino le variazioni, assumendo noti i calori specifici di acqua e ghiaccio ed il calore latente di fusione (trascurare le variazioni di volume).

- Scrivere in stampatello NOME, COGNOME e numero di MATRICOLA
- ***FIRMARE*** *l'elaborato*
- *MOTIVARE e COMMENTARE adeguatamente le formule utilizzate*

1.

a) $a_x(t) \triangleq \frac{d}{dt} v_x(t)$

Dal grafico di $v_x(t)$, osservo che deve essere $a_x(t) = a \ \forall t$, essendo $v_x(t)$ rappresentata da una retta.

Quindi $a_x(t) = a_{x,m}(t_1, t_2) =$

$$= \frac{v_x(t_2) - v_x(t_1)}{t_2 - t_1} = a.$$

Presi $t_1 = 0\,s$ e $t_2 = 1\,s$ si trova

$v_x(t_1) = -2\,m/s$ e $v_x(t_2) = 3\,m/s$.

Quindi $a = 5\,m/s^2$.

b) $\vec{s}(t_0, t_1) \equiv \Delta\vec{r}(t_0, t_1) \triangleq \vec{r}(t_1) - \vec{r}(t_0) =$

$= x(t_1)\,\hat{u}_x - x(t_0)\,\hat{u}_x$, con

$x(t) = x(t = 0\,s) + v_x(t = 0\,s) \cdot t + \frac{1}{2} a t^2 =$

$= x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$, poste

$x_0 = x(t = 0\,s)$ e $v_0 = v_x(t = 0\,s) = -2\,m/s$

Si ha quindi

$$\vec{s}(t_0, t_1) = \left[\frac{1}{2} a (t_1^2 - t_0^2) + v_0 (t_1 - t_0)\right] \hat{u}_x$$

$$= 0\,m\,\hat{u}_x.$$

Si noti che al medesimo risultato si poteva giungere immediatamente osservando che

$$x(t_1) - x(t_0) = \int_{t_0}^{t_1} v_x(t')\,dt'$$

e poichè t_0 e t_1 si trovano in posizione simmetrica rispetto all'istante di tempo $t' = 0.4\,s$ in cui v_x si annulla, l'integrale a secondo membro sarà nullo (vedi grafico nel testo).

c) $L = \int_{t_0}^{t_1} |ds|$ con s ascissa curvilinea.

$|ds| = |v(t)\,dt| = |v(t)|\,dt$ e $v(t) = v_0 + at$

$$L = \int_{t_0,\, v \geq 0}^{t_1} v(t)\,dt + \int_{t_0,\, v < 0}^{t_1} -v(t)\,dt$$

Poichè $v(t) < 0$ per $t \in [t_0, t')$ con $t' = 0.4\,s$ e $v(t) \geq 0$ per $t \in [t', t_1]$ abbiamo:

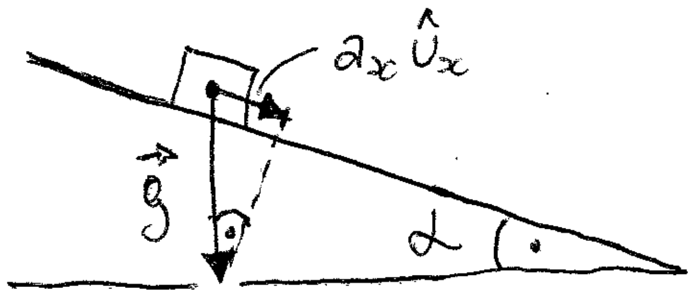
$$L = \int_{t_0}^{t'} -v(t)\,dt + \int_{t'}^{t_1} v(t)\,dt =$$

$$= \int_{t_0}^{t'} (-v_0 - at)\,dt + \int_{t'}^{t_1} (v_0 + at)\,dt =$$

$$= v_0(t_0 + t_1) - 2v_0 t' + \frac{1}{2} a \left(t_1^2 + t_0^2 - 2t'^2\right) =$$

$= 0.8\ m$ (pari all'area sotto la curva $|v_x|$ compresa tra t_0 e t_1).

d)



$$F_x \hat{u}_x = m a_x = m a$$

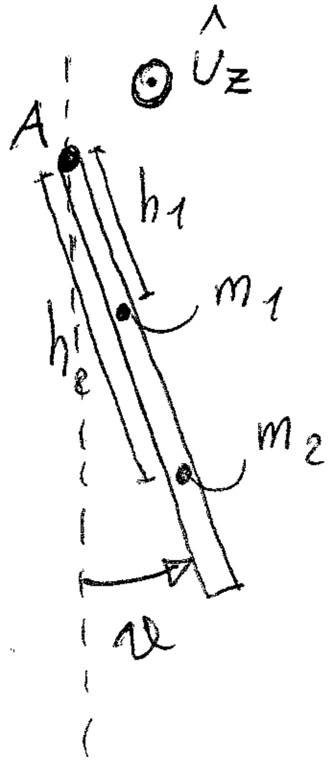
$$F_x = \vec{F}_p \cdot \hat{u}_x = |F_p| \sin\alpha$$

$$\vec{F}_p = m\vec{g}$$

$$g \sin\alpha = a$$

$$\alpha = \arcsin\left(\frac{a}{g}\right) = \arcsin\left(\frac{1}{2}\right) = 30°.$$

2.



$I_A = m_1 h_1^2 + m_2 h_2^2$

momento d'inerzia del sistema rispetto ad un asse passante per il punto di vincolo dell'asta (A).

Sul sistema agiscono le forze peso delle masse m_1 e m_2 e le reazioni vincolari dovute al perno in A. Queste ultime hanno momento nullo rispetto ad A, quindi la risultante di tutti i momenti delle forze applicate sul sistema sarà:

$$\vec{\tau}_A = -(m_1 g h_1 \sin\vartheta + m_2 g h_2 \sin\vartheta)\,\hat{u}_z$$

essendo $\hat{u}_z$ un versore uscente da piano del disegno (e ortogonale al piano stesso).
Dalla II eq. cardinale della dinamica per un corpo rigido abbiamo quindi:

$$\tau_{A,z} = I_A \frac{d^2\vartheta}{dt^2}$$

Sostituendo le espressioni precedenti per $\tau_{A,z} = \vec{\tau}_A \cdot \hat{u}_z$ e per I_A troviamo.

$$(m_1 h_1^2 + m_2 h_2^2)\frac{d^2\vartheta}{dt^2} = -(m_1 h_1 + m_2 h_2) g \sin\vartheta$$

Per piccole oscillazioni $\sin\vartheta \simeq \vartheta$ e ricaviamo

$$\frac{d^2\vartheta}{dt^2} + \frac{(m_1 h_1 + m_2 h_2) g}{m_1 h_1^2 + m_2 h_2^2}\vartheta = 0$$

Tale equazione rappresenta l'equazione di un moto armonico per ϑ, della forma cioè $\vartheta(t) = \vartheta_0 \sin(\omega t + \varphi)$

con $\omega = \sqrt{\frac{m_1 h_1 + m_2 h_2}{m_1 h_1^2 + m_2 h_2^2} g}$ pulsazione della oscillazione armonica.

Il periodo di tale oscillazione sarà quindi $T = 2\pi/\omega = 2\pi \sqrt{\frac{m_1 h_1^2 + m_2 h_2^2}{(m_1 h_1 + m_2 h_2) g}}$,

e $F = \frac{1}{T} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{(m_1 h_1 + m_2 h_2) g}{m_1 h_1^2 + m_2 h_2^2}}$ la sua frequenza

3. Vedi dispense del corso, lezione n°5.

4.

a) La trasformazione in esame è irreversibile poiché certamente non quasistatica. Inoltre la trasformazione riguarda un sistema termicamente isolato (trasformazione adiabatica).
Si applicano dunque le ipotesi del principio di accrescimento dell'entropia. In generale infatti (da Clausius):

$$\Delta S_{AB} \geq \int \frac{\delta Q}{T} = 0 \quad \text{essendo } \delta Q = 0.$$

Il sistema quindi accresce la propria entropia nella trasformazione in esame.

b) In base al I principio della TD:

$$Q = \mathcal{L} + \Delta U \quad \text{ossia} \quad \Delta U = Q - \mathcal{L}$$

ovvero $\Delta U = -\mathcal{L}_{adiab}$

con $\mathcal{L}_{adiab}$ il lavoro compiuto dal sistema in una trasformazione adiabatica. La trasf. in esame è adiabatica ma il lavoro adiabatico è negativo (è l'ambiente che compie lavoro agitando il recipiente che contiene il miscuglio): $\Delta U > 0$.

c) $T_0 = 0°C$

$T_1 > 0°C$

La massa m_A passa dalla tempera= tura iniziale T_0 alla temperatura finale T_1. Un processo reversibile tra i medesimi stati iniziale e finale è un riscaldamento isocoro reversibile. In tale processo $\delta Q = m_A c_A dT$, quindi $\Delta S_A = \int_{T_0}^{T_1} \frac{m_A c_A dT}{T} = m_A c_A \ln \frac{T_1}{T_0}$

con c_A calore specifico dell'acqua. Per il ghiaccio vale un discorso analogo, tuttavia occorrono due trasformazioni per collegare lo stato iniziale allo sta= to finale. Una prima trasformazione sarà una trasformazione isoterma (di riscaldamento) alla temperatura T_0 fino allo stato intermedio corrisponden= te alla completa fusione del ghiaccio. Lungo questa trasformazione sarà $\delta Q = \lambda\, dm_G$, con λ calore latente di fusione del ghiaccio e dm_G la quanti=

tà di ghiaccio (infinitesima) sciolta nel tratto infinitesimo di tale trasformazione.
Seguirà un riscaldamento isocoro della intera massa m_G ora trasformata in acqua dalla temperatura T_0 alla temperatura $T_1 > T_0$. In tale seconda trasf. reversibile sarà $\delta Q = m_G c_A dT$.
Complessivamente per la massa di ghiaccio m_G la variazione di entropia sarà:

$$\Delta S_G = \int_0^{m_G} \frac{\lambda \, dm_G}{T_0} + \int_{T_0}^{T_1} \frac{m_G c_A \, dT}{T} =$$

$$= \frac{m_G \lambda}{T_0} + m_G c_A \ln \frac{T_1}{T_0} .$$

$$\Delta S = \Delta S_A + \Delta S_G =$$

$$= \frac{m_G \lambda}{T_0} + (m_A + m_G) c_A \ln \frac{T_1}{T_0}$$

Per quanto riguarda la variazione di energia interna, essa corrisponderà all'energia fornita dall'esterno e convertita in calore dalle forze di attrito interne, calore poi utilizzato dal sistema per il riscaldamento (e scioglimento del ghiaccio). Abbiamo dunque

$$\Delta U = \Delta U_A + \Delta U_G$$

$$\Delta U_A = Q_A = m_A c_A (T_1 - T_0)$$

$$\Delta U_G = Q_G = m_G \lambda + m_G c_A (T_1 - T_0).$$

$$\Delta U = m_G \lambda + (m_A + m_G) c_A (T_1 - T_0).$$

Si noti che le relazioni $\Delta U_A = Q_A$ e $\Delta U_G = Q_G$ esprimono il primo principio della Termodinamica per i due sottosistemi costituiti dalla massa m_A di acqua e dalla massa m_G di ghiaccio, essendo, per ipotesi nullo il lavoro termodinamico $\mathcal{L}_A$ e il lavoro termodinamico $\mathcal{L}_G$ compiuto dai due sottosistemi (dovendo trascurare variazioni di volume delle due masse, come indicato dal testo).