Nota: abbiamo messo in evidenza ed in modo indipendente il teorema di Lagrange per la sua notevole importanza. Comunque esso e' un caso particolare del seguente teorema

Teorema di Cauchy - *Siano $y = f(x)$ e $y = g(x)$ due funzioni definite e continue nell'intervallo $[a,b]$ e derivabuli in (a,b) (nei punti interni). Allora esiste almeno un punto c interno ad $[a,b]$, tale che*

$$i) \qquad f'(c)(g(b)-g(a)) = g'(c)(f(b)-f(a)).$$

Se $g'(x) \neq 0$ si ha

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Dimostrazione.

Consideriamo la funzione ausiliaria

$$F(x) = f(x)(g(b)-g(a)) - g(x)(f(b)-f(a)).$$

La funzione $F(x)$ in $[a,b]$ soddisfa le ipotesi del teorema di Rolle. Infatti e' continua e derivabile perche' somma di funzioni continue e derivabili. Inoltre

$$F(b)-F(a) = (f(b)(g(b)-g(a)) - g(b)(f(b)-f(a)) - (f(a)(g(b)-g(a)) - g(a)(f(b)-f(a))) =$$

$$(f(b)-f(a))(g(b)-g(a)) - (g(b)-g(a))(f(b)-f(a)) = 0,$$

da cui

$$F(a) = F(b).$$

Le ipotesi del teorema di Rolle sono soddisfatte allora esiste almeno un punto c interno ad $[a,b]$ in cui $F'(x) = f'(x)(g(b)-g(a)) - g'(x)(f(b)-f(a))$ si annulla ovvero

$$f'(c)(g(b)-g(a)) = g'(c)(f(b)-f(a)).$$

Caso particolare: se poniamo $g'(x) \neq 0$ allora anche $g(a) \neq g(b)$ perche' se fosse $g(a) = g(b)$ il teorema di Rolle imporrebbe l'annullamento, in qualche punto interno ad $[a,b]$, di $g'(x)$, contro l'ipotesi. Allora con questa condizione la (i) si puo' scrivere nella forma espressiva ed utile

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}.$$

Il teorema e' dimostrato.

Per ottenere il teorema di Lagrange basta porre $g(x) = x$.

Osservazioni sulla funzione $f'(x)$.

L'operazione di derivazione $D : f \mapsto f'$ ci permette di costruire da f un'altra funzione. Sulla f abbiamo dovuto imporre delle condizioni. Quali di queste condizioni e proprieta' di f si conservano con l'operazione di derivazione? Certo non possiamo prevedere che la derivabilita' si conservi cioe' che f' sia derivabile, la derivabilita' non e' una proprieta' ereditaria, non si autoriproduce come vedremo, in generale. Ma sulle proprieta' di ordine inferiore come per esempio la continuita', teorema degli zeri, la proprieta' di Darboux, esistenza di massimo e minimo, la domanda e' lecita.

Per quanto riguarda la continuita' possiamo dire poco. Con certezza possiamo affermare che :

•$f'(x)$ **non puo' avere discontinuita' di prima o terza specie, in altri termini o e' continua o presenta discontinuita' di seconda specie.**

Infatti, sia x_0 un punto di (a,b). Se f' presentasse in x_0 una discontinuita' di prima specie si avrebbe

$$i) \qquad \lim_{x\to x_0^-} f'(x) = l_1 \neq l_2 = \lim_{x\to x_0^+} f'(x).$$

Dal teorema di Lagrange in $[x_0, x]$ si ha

$$ii) \qquad \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(\alpha)$$

con α interno ad $[x_0, x]$ (dipendente da x) e se $x \to x_0$ anche $\alpha \to x_0$. Osserviamo che al variare di x il punto α non descrive tutto l'intervallo $[x_0, x]$ ma solo una parte; ma noi sappiamo che se una funzione ammette limite lo ammette ogni sua restrizione ed i limiti sono uguali. Passando al limite nella ii) si ha

$$iii) \quad \lim_{x\to x_0} f'(\alpha) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0).$$

Che per ipotesi e' l_2 e risulta $f'(x_0) = l_2$.

Ripetendo il procedimento in $[x, x_0]$ si ottiene $l_1 = f'(x_0)$. Una contraddizione perche' sarebbe $f(x_0) \neq f(x_0)$.

Non puo' esserci discontinuita' di prima specie e si vede subito che non c' e' neppure quella di terza specie perche' il limite e' proprio il valore della derivata nel punto x_0.

• **Vale il teorema degli zeri e la proprieta' di Darboux per f' senza richiederene la continuita'.**

Se $f(x)$ e' continua e derivabile in $[a,b]$ ed e' $f'(b) < 0$ e $f'(a) > 0$ o viceversa allora esiste almeno un punto $c \in (a,b)$ tale che $f'(c) = 0$.

Infatti essendo $f(x)$ continua in un intervallo chiuso e limitato esiste (almeno) un punto di massimo x_M ed un punto di minimo x_m. Il punto di massimo x_M deve essere interno, perche' dal teorema di Fermat, se fosse $x_M = a$ allora $f'(x_M) \leq 0$, mentre per ipotesi $f'(a) > 0$; analogamente non puo' essere $x_M = b$ perche' dal teorema di Fermat sarebbe $f'(x_M) \geq 0$, contro l'ipotesi $f'(b) < 0$. Allora x_M e' interno ed il teorema di Fermat afferma che $f'(x_M) = 0$.

Per verificare la proprieta' di Darboux assumiamo $f'(a) > f'(b)$. Sia μ un numero con $f'(b) < \mu < f'(a)$ e definiamo una funzione ausiliaria

$$F(x) = f(x) - \mu x.$$

Ora $F'(a) = f'(a) - \mu > 0$ ed $F'(b) = f'(b) - \mu < 0$. Allova per la funzione $F'(x) = f'(x) - \mu$ esiste un punto $c \in (a,b)$ tale che $F'(c) = 0 \Rightarrow f'(c) = \mu$.

Derivate successive e formula di Leibnitz

Sia $y = f(x)$ una funzione definita e derivabile in T e sia $y = f'(x)$ la sua derivata. $f'(x)$ e' una funzione definita in D dalle ipotesi fatte (in generale e' definita in un soottoinsieme di T). $f'(x)$ a sua volta puo' essere derivabile ovvero esiste finito il limite per $\Delta x \to 0$ del rapporto incrementale

$$\frac{f'(x+\Delta x) - f'(x)}{\Delta x}.$$

Tale derivata la chiamiamo *derivata seconda* di $f(x)$ e si indica con i seguenti simboli

$$y'',\ f'',\ \frac{d^2y}{dx^2},\ \frac{d^2f}{dx^2},\ D^2y,\ D^2f,\ \ddot{y},\ \ddot{f}.$$

$f'(x)$ la chiameremo derivata prima e per uniformita' $f(x)$ viene detta derivata di ordine zero. Procedendo induttivamente possiamo allora definire la derivata di ordine tre, quattro,..., n. L'n-esima la indicheremo con i simboli

$$y^{(n)},\ f^{(n)},\ \frac{d^ny}{dx^n},\ \frac{d^nf}{dx^n},\ D^ny,\ D^nf.$$

Esempio: Sia $y = x^3$ allora $y' = 3x^2$, $y'' = 6x$, $y''' = 3!$, $y^{(4)} = 0$. Osserviamo che la derivata dell'ordine della potenza di x e' una costante e le derivate di ordine superiore sono nulle. $y = x^n$, $y' = nx^{n-1}$, $y'' = n(n-1)x^{n-2}$, $y^{(k)} = n(n-1)\cdots(n-(k-1))x^{n-k}$, $y^{(n)} = n!$, $y^{(n+1)} = 0$. Sia $y = P_n(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$ un polinomio di grado n. Allora $y^{(n)} = n!a_n$ e $y^{(n+i)} = 0$ per $i \geq 1$.

L'operazione di derivazione e' lineare ovvero

$$D(f+g) = Df + Dg$$

D si distribuisce sui termini della somma oppure l'operazione di derivazione e di somma commutano. Inoltre

$$D^2(f+g) = D(D(f+g)) + D(Df+Dg) = D^2f + D^2g.$$

Per induzione si ha $D^n(f+g) = D^nf + D^ng$. D^n e' una operazione lineare.

Inoltre vale la

medskip Proprieta' di omogeneita' di D^n: $D^n(cf) = cD^n(f)$ ovvero l'operazione di derivazione e di moltiplicazione per una costante commutano: questa proprieta' non vale per la moltiplicazione per una funzione.

In conclusione D^n e' una operazione lineare

L'operatore di derivazione non commuta con il prodotto, ovvero $D(f \cdot g) \neq Df \cdot Dg$. Abbiamo mostrato che $D(fg) = gDf + fDg$. Questa formula si estende all'operatore D^n.

Allora

$$D^2(fg) = D(D(fg)) = D(gDf + fDg) = DgDf + gD^2f + DfDg + fD^2g = gD^2f + 2DfDg + fD^2g.$$

In generale si ha (formula di Leibnitz)

$$i) \quad D^n(fg) = \binom{n}{0} gD^nf + \binom{n}{1} DgD^{n-1}f + \binom{n}{2} D^2gD^{n-2}f + ... + \binom{n}{n} fD^ng = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} D^{n-k}fD^kg.$$

Questa formula si dimostra per induzione.

La formula e' vera per $n = 1, 2$. Mostriamo che se vale per n allora vale per $n+1$. Ritenendo vera la i) la deriviamo e raccogliendo i termini della stessa forma si ha

$$D^{n+1}(fg) = D(D^nfg) = gD^{n+1}f + (\binom{n}{0} + \binom{n}{1})g'D^nf + (\binom{n}{1} + \binom{n}{2})g''D^{n-1}f + \cdots +$$

$$(\binom{n}{n-1} + \binom{n}{n})f'D^ng + \binom{n}{n})fD^{n+1}g$$

Dalle proprieta' dei fattoriali

$$\binom{n}{k+1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k+1} \; e \; \binom{n}{n} = \binom{n+1}{n+1}$$

si ottiene

$$D^{n+1}(fg) = \binom{n+1}{0} gD^{n+1}f + \binom{n+1}{1} DgD^nf + \binom{n+1}{2} D^2gD^{n-1}f + ... + \binom{n+1}{n+1} fD^{n+1}g =$$

$$\sum_{k=1}^{n+1} \binom{n+1}{k} D^{n-k}fD^kg.$$

Allora la formula $i)$ vale per ogni n.

Nota: lo spazio delle funzioni definite in $[a, b]$, continue con derivate continue fino all'ordine n viene indicato $C^n([a, b])$. Dal momento che la derivabilita' implica la continuita' si puo' dire che $C^n([a, b])$ e' lo spazio vettoriale (dopo chiariremo il senso di questa dizione) di tutte le funzioni continue con derivate fino all'ordine n con derivata ennesima continua.

Regola di De l'Hospital e forme di indecisione $0/0$ **e** ∞/∞

La regola che ci apprestiamo ad introdurre lega il concetto di derivata con il concetto di limite. Facciamo una semplice introduzione. Siano $y = f(x)$ e $y = g(x)$ due funzioni definite in (a, b) e sia x_0 un punto in cui f e g siano derivabili con derivate continue e non nulle (almeno g') in x_0 ed $f(x_0) = g(x_0) = 0$. Allora si ha

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x_0)}{g(x_0)} = \frac{0}{0}.$$

Per risolvere questa forma di indecisione operiamo come segue.

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \frac{x - x_0}{g(x) - g(x_0)} =$$

$$\frac{\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}{\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}}.$$

Applicando il processo di limite ai rapporti estremi della catena di uguaglianze sopra esposta si ha, ricordando la continuita' delle derivate di f e g in x_0,

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \frac{x - x_0}{g(x) - g(x_0)} =$$

$$\frac{f'(x_0)}{g'(x_0)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Leggiamo il primo e l'ultimo termine: il limite del rapporto delle funzioni e' uguale al limite del rapporto delle loro derivate se questo esiste. Questa in sostanza e' la regola di De l'Hospital.

Da come e' stata ricavata la regola sembra che si applichi a funzioni con notevoli regolarita'. Ora generalizziamo la regola a funzioni piu' generali senza rinunciare ai contenuti della formula.

Per rendere piu' generale le nostre considerazioni, rinunciamo alla continuita' ed alla derivabilita' nel punto x_0.

- **Regola di De L' Hospital**

- **Caso x_0 finito**

Consideriamo le funzioni f e g definite in un intorno destro (oppure sinistro) del punto x_0, ; $x_0 < x < x_0 + h$ ed ivi derivabili con $g'(x) \neq 0$ e $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = 0$ e $\lim_{x \to x_0^+} g(x) = 0$. Inoltre esiste

$$\lim_{x \to x_0^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Allora esiste il

$$\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x)}{g(x)}.$$

e i due limiti sono uguali ovvero

$$\lim_{x\to x_0^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

L'ultima scrittura puo' indurre ad una errata lettura della regola . Essa deve essere letta dalla destra alla sinistra ovvero se esiste il limite del rapporto delle derivate allora esiste il limite del rapporto delle funzioni e questi sono uguali. Attenzione puo' esistere il limite del rapporto delle funzioni senza che esista il limite del rapporto delle derivate.

Dimostrazione
Ripristiniamo la continuita' delle funzioni in x_0 dal momento che siamo in presenza di una discontinuita' di terza specie. Nel nostro caso abbiamo la continuita' dalla destra e poniamo $f(x_0) = g(x_0) = 0$. Ora possiamo procedere come nell'esempio introduttivo ovviamente $x > x_0$ ed utilizziamo il teorema di Cauchy che non richiede le derivate in x_0.

$$i) \qquad \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

con $x_0 < c < x$. Quindi se $x \to x_0$ allora $c \to x_0$. Questa e' l'unica cosa che sappiamo dire di c. Ovviamente c dipende da x. Al variare di x, c descrive un sottoinsieme di $(x_0, x_0 + h)$. Quindi nella scrittura i) le derivate sono calcolate in questo sottoinsieme, in altri termini consideriamo una restrizione delle derivate. Questo fatto poco importa; per ipotesi sappiamo che il rapporto delle derivate globali ammette limite per cui e' garantito il limite delle restrizioni. Attenzione non vale il contrario questa e' la ragione per cui la formula della regola deve essere letta dalla destra alla sinistra. Ebbene ora passiamo al limite ed abbiamo

$$ii) \qquad \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(c)}{g'(c)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

ed il teorema e' dimostrato.

Leggiamo ii). Se esiste il limite del rapporto delle derivate allora esiste il limite del rapporto delle restrizioni delle derivate e questo e' uguale al limite del rapporto delle funzioni.

Questa catena di uguaglianze chiarisce il perche' dobbiamo leggere la formula dalla destra alla sinistra. Leggendola dalla sinistra , se esiste il limite del rapporto delle funzioni possiamo avere il limite del rapporto delle restrizioni delle derivate (dal teorema di Cauchy) ma questo non implica l'esistenza del limite del rapporto delle derivate (globali).

Per convicersi di questo fatto si consideri un semplice esempio. La funzione $y = cosx$ non ha limite per $x \to +\infty$. Restringiamo $y = cosx$ all'insieme $T = \{x \in \mathbb{R} : x = 2k\pi\}$ si ha $cosx_{|T} = 1$, una funzione costante che ammette limite per $x \to +\infty$.

Nota: il teorema si puo' iterare ovvero se il rapporto delle derivate dovesse dare una forma di indecisione $\frac{0}{0}$ allora si puo' passare alle derivate seconde sempre che queste verifichino le ipotesi della regola e considerare i rapporti dati dal teorema di Cauchy

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(c)}{g'(c)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(c)-f'(x_0)}{g'(c)-g'(x_0)} =$$
$$\lim_{x\to x_0} \frac{f''(c_1)}{g''(c_1)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f''(x)}{g''(x)}$$

ove $x_0 < c_1 < c$.

Se le derivate seconde dovessero presentare la forma di indecisione $\frac{0}{0}$ allora si applica la regola di De l' Hospital alla derivata seconda nell'intervallo (x_0, c_1) e cosi' via sempre che queste soddisfino le ipotesi della regola.

Analogamente si procede nel caso $x_0 + h < x < x_0$; il caso di intorno completo si ottiene combinando i due limiti unilateri.

• **Caso** $x_0 = \pm\infty$

Consideriamo solo il caso $+\infty$

Mediante la sostituzione $z = \frac{1}{x}$ portiamo l' infinito in 0^+ e quindi possiamo applicare il procedimento precedente: quindi abbiamo

$$ii) \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{z\to 0^+} \frac{f(\frac{1}{z})}{g(\frac{1}{z})} =$$

$$\lim_{z\to 0+} \frac{Df(\frac{1}{z})}{Dg(\frac{1}{z})} = \lim_{z\to 0+} \frac{\frac{f'(\frac{1}{z})}{-z^2}}{\frac{g'(\frac{1}{z})}{-z^2}} =$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

• **Caso** $\frac{\infty}{\infty}$ **e** x_0 **finito**

Consideriamo il caso $\frac{\pm\infty}{+\infty}$.

Assumiamo

$$\lim_{x\to x_0^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l$$

finito.

In questo caso non abbiamo piu' il valore nullo in x_0^+. Ricaveremo una relazione per il rapporto delle funzioni utilizzando il teorema di Cauchy in un intervallo $[x, x_0 + h]$ con $x > x_0$ ed h fissato ovvero

$$\frac{f(x) - f(x_0 + h)}{g(x) - g(x_0 + h)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

con $x < c < x_0 + h$. Allora abbiamo

$$i) \qquad \frac{f(x)(1 - \frac{f(x_0+h)}{f(x)})}{g(x)(1 - \frac{g(x_0+h)}{g(x)}} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

Denotato

$$F(x) = \frac{1 - \frac{g(x_0+h)}{g(x)}}{1 - \frac{f(x_0+h)}{f(x)}},$$

dalla i) ricaviamo

$$\frac{f(x)}{g(x)} = F(x)\frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Ora dato che $f(x)$ e $g(x)$ tendono all'infinito per x tendente ad x_0 si ha

$$\lim_{x\to x_0^+} F(x) = 1.$$

Ricordando il teorema della limitatezza locale per le funzioni che hanno limite finito, si ha

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} (F(x) - 1)\frac{f'(c)}{g'(c)} +$$

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f'(c)}{g'(c)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

e questo caso e' dimostrato.

Assumiamo

$$\lim_{x \to x_0^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = +\infty.$$

Quindi vicino ad x_0, $\frac{f'(x)}{g'(x)} > K$. Procedendo come il caso precedente, e sapendo dal teorema della permanenza del segno che $F(x) > 1/2$ in un intorno di x_0, si ha

$$\frac{f(x)}{g(x)} = F(x)\frac{f'(c)}{g'(c)} > \frac{1}{2}K.$$

ed anche questo caso e' dimostrato
Tutti gli altri casi si dimostrano nello stesso modo..
La regola di De L'Hospital e' dimostrata.

Esercizio 1): Provare, utilizzando la regola di De L'Hospital, tutti i limiti che sono stati introdotti fino ad ora.

Esercizio 2) : calcolare, utilizzando la regola di De L'Hospital, i seguenti limiti

$$\lim_{x \to 0} \frac{senx - x + \frac{x^3}{3!}}{x^3}; \quad \lim_{x \to 0} \frac{e^x - x - \frac{x^2}{2}}{x^2}.$$

Esercizio 3 - Mostrare che esiste il seguente limite

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x + senx}{3x + cosx}$$

esiste ma non esiste il limite del rapporto delle derivate.

• Le rimanenti forme di indecisione ricondotte alle due precedenti

Supponiamo di avere due funzioni $y = f(x)$ e $y = g(x)$ definite in intorni (unilaterali o completi) di x_0 o di $\pm\infty$. Si possono presentare le ben note forme di indecisione che elenchiamo qui sotto e possono ricondursi a $0/0$ o ∞/∞.

1) per $x \to x_0$, $f(x) \to 0$ e $g(x) \to \infty$. Il prodotto $f(x)g(x)$ presenta l'indecisione 0∞ che si studia ponendo

$$f(x)g(x) = \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}},$$

oppure

$$f(x)g(x) = \frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}}.$$

Esercizio: Calcolare $\lim_{x \to 0} xlogx$, $\lim_{x \to 0} xlogsenx$.

2) Se $f(x)^{g(x)}$; presenta una delle forme di indecisione 1^∞, 0^0, ∞^0 se ne studia il limite passando al logaritmo, ed alla fine retrocedendo alla funzione assegnata ovvero si studia il limite di

$$log(f^g) = glogf$$

che si presenta nella forma di indecisione 0∞.

Esercizio: Calcolare $\lim_{x \to 0^+} (cosx)^{logx}$, $\lim_{x \to 0} x^x$.

Il caso $\infty - \infty$.

Ci sono diversi modi per calcolarlo: ad esempio

1. $f-g=f(1-\frac{g}{f})$ oppure $f-g=g(\frac{f}{g}-1)$ se f/g o $(g/f)\to l\neq 1$.
2. Si puo' considerare $e^{f-g}=e^f/e^g$ e passare al logaritmo dell'eventuale limite.
3. Si puo' usare
$$f-g=\frac{\frac{1}{g}-\frac{1}{f}}{\frac{1}{fg}}.$$

Esercizio: calcolare $\lim_{x\to+\infty}(x-logx)$

Confronto tra logaritmo, potenze ed esponenziale

Con la regola di De L'Hospital si calcolino i seguenti limiti

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{log^k x}{x},\quad \lim_{x\to+\infty}\frac{x^k}{e^x}.$$

Infinitesimi ed infiniti

Frequentemente nel calcolo abbiamo usato un linguaggio colloquiale quale " corre piu' velocemente" "corrono con la stessa velocita " etc. Fissiamo dei termini piu' appropriati per indicare i comportamenti delle funzioni nel processo di limite.

• Infinitesimi

Per semplicita' consideriamo funzioni definite in intervalli limitati o no. Sia $y=f(x)$ una funzione definita in (a,b) e sia $x_0\in(a,b)$. Diremo che $f(x)$ e' un infinitesimo per $x\to x_0$ quando

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=0.$$

Relativamente al punto x_0 possiamo costruire molti infinitesimi. Confrontiamo gli infinitesimi relativi ad un punto x_0 valutando il limite del loro rapporto. Siano $y=f(x)$ e $g(x)\neq 0$ infinitesimi per $x\to x_0$ allora

$$Se\ \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}\begin{cases} = 0\ si\ dice\ che\ f(x)\ e'\ infinitesimo\ di\ ordine\ superiore\ a\ g(x), \\ = l\neq 0\ si\ dice\ che\ f(x)\ e\ g(x)\ sono\ infinitesimi\ dello\ stesso\ ordine \\ = \infty\ si\ dice\ che\ f(x)\ e'\ infinitesimo\ di\ ordine\ inferiore\ a\ g(x), \\ \nexists\ si\ dice\ che\ f(x)\ e\ g(x)\ non\ sono\ confrontabili. \end{cases}$$

Ad esempio $y=xsen\frac{1}{x}$ e $y=x$ sono infinitesimi per $x\to 0$ e non confrontali.

Tra tutti gli infinitesimi per $x\to x_0$ si puo' scegliere un infinitesimo di riferimento o principale che indichiamo $h(x)$. Allora misuriamo ogni infinitesimo rispetto ad $h(x)$ e diciamo che $f(x)$ e' un infinitesimo (per $x\to x_0$) di ordine $c\in\mathbb{R}^+$ rispetto ad $h(x)$ se $f(x)$ e $(h(x))^c$ sono infinitesimi dello stesso ordine.

Ad esempio se prendiamo come infinitesimo principale $y=x$ relativamente al punto $x=0$ allora si ha che l'nfinitesimo $y=e^x-1-x$ e' del secondo ordine rispetto ad x; per verificarlo basta applicare la regola di De L'Hospital al limite

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1-x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{2x}=\frac{1}{2},$$

oppure sempre mediante la regola di De l'Hospital determinare c affinche' esista finito il limite

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1-x}{x^c}.$$

indicare i comportamenti delle funzioni nel processo di limite.

• Infiniti

Per semplicita' consideriamo funzioni definite in intervalli limitati o no. Sia $y = f(x)$ una funzione definita in (a, b) e sia $x_0 \in (a, b)$. Diremo che $f(x)$ e' un infinito per $x \to x_0$ quamdo

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty.$$

Relativamente al punto x_0 possiamo costruire molti infiniti Confrontiamo gli infiniti relativi ad un punto x_0 valutando il limite del loro rapporto. Siano $y = f(x)$ e $g(x) \neq 0$ infiniti per $x \to x_0$ allora

$$Se\ \ lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}\begin{cases} = & \infty\ si\ \ dice\ \ che\ \ f(x)\ \ e'\ \ infinito\ \ di\ \ ordine\, superiore\ \ a\ \ g(x), \\ = & l\neq 0\ \ si\ \ dice\ \ che\ \ f(x)\ \ e\ \ g(x)\ \ sono\ \ infiniti\ \ dello\, stesso\, ordine, \\ = & 0\ \ si\ \ dice\ \ che\ \ f(x)\ \ e'\ \ infinito\ \ di\ \ ordine\, inferiore\ \ a\ \ g(x), \\ \nexists & si\ \ dice\ \ che\ \ f(x)\ \ e\ \ g(x)\ \ non\ \ sono\ \ confrontabili. \end{cases}$$

Come per gli infinitesimi anche per gli infiniti possiamo considerare un infinito principale. Diciamo che $f(x)$ e' un infinito (per $x \to x_0$) di ordine $c \in \mathbb{R}^+$ rispetto ad $h(x)$ se $f(x)$ e $(h(x))^c$ sono infiniti dello stesso ordine.

Esercizio. Provare che $y = \sqrt{1 + x^4}$ e' un infinito del secondo ordine rispetto ad $y = x$ per $x \to \infty$.

E' frequente considerare come infinitesimi ed infiniti principali,rispettivamente, relativamente al punto x_0 (finito)

$$x - x_0, \qquad \frac{1}{x - x_0}.$$

Se invece $x_0 = \infty$ si assumono come infinitesimo ed infinito principali rispettivamente

$$\frac{1}{x}, \qquad x.$$

• Parte principale

Se $y = f(x)$ e' un infinitesimo (infinito) relativamente al punto x_0 di ordine $c > 0$ rispetto ad $h(x)$ si ha

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{(h(x))^c} = l \neq 0$$

allora dalla scrittura fuori dal segno di limite si ha

$$\frac{f(x)}{(h(x))^c} = l + \alpha(x)$$

con $\alpha(x)$ infinitesimo (infinito) per $x \to x_0$. Ne segue che

$$f(x) = l((h(x))^c + \alpha(x)(h(x))^c.$$

Il prodotto $l((h(x))^c$ e' chiamato parte principale di $f(x)$ e viene indicata $p.p.f$. Supponiamo che l'infinitesimo (infinito) $y = g(x)$ sia di ordine d con parte principale $l_1(h(x))^d$. Allora vale

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{p.p.f(x)}{p.p.g(x)}.$$

Quindi il limite del rapporto di infinitesimi (infiniti) e' ricondotto al limite del rapporto delle loro parti principali. Quindi nel calcolo di limite di rapporto di somme di infinitesimi (infiniti) gli addendi che sono infinitesimi di ordine superiore (infiniti di ordine inferiore) sia al numeratore che al denominatore possono essere trascurati.

• **Simboli (di Landau) $\sim$ (asintotico) e $o(.)$ (o piccolo) di rapporto infinitesimo**

• $\sim$

Date due funzioni f(x) e g(x) , definite in un intorno di x_0 (finito o infinito) si dice che $f(x)$ e $g(x)$ sono asintotiche (o asintoticamente equivalenti) per $x \to x_0$, e si scrive:

$$f(x) \sim g(x) \ \ per \ \ x \to x_0$$

se

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1.$$

La relazione $f(x) \sim c(\neq 0)$ e' da interdersi $f(x) \to c$ per $x \to x_0$.

Nell'insieme delle funzioni asintotiche $\sim$ e' riflessiva, simmetrica e transitiva.

Valgono le seguenti relazioni

Se $f(x) \sim h(x)$ e $g(x) \sim l(x)$ allora

$$f(x)g(x) \sim h(x)l(x), \quad \frac{f(x)}{g(x)} \sim \frac{h(x)}{l(x)}.$$

In tutte le altre situazioni bisogna avere notevole cautela: vale $f \pm g \sim h \pm l$?
$e^x - 1 \sim x$ e $senx \sim x$ per $x \to 0$ a quale funzione e' asintotica $e^x - 1 - senx$?

• $o(.)$

Date due funzioni $f(x)$ e $g(x)$, definite in un intorno di x_0 (finito o infinito) si dice che $f(x)$ e' o piccolo di $g(x)$ per $x \to x_0$, e si scrive:

$$f(x) = o(g(x)) \ \ per \ \ x \to x_0$$

se

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0.$$

Se $g(x)$ e' un infinitesimo, quanto definito equivale a dire che $f(x)$ e' un infinitesimo di ordine superiore a $g(x)$. In particolare $o(1)$ rappresenta una quantita infinitesima.

Nell'insieme delle funzione non nulle vicine ad x_0 la relazione $o(.)$ e' (solo) transitiva: se $f(x) = o(g(x)$e $g(x) = o(h(x)$ allora $f(x) = o(h(x))$.

Inoltre $o(.)$ si conserva per moltiplicazione di funzioni limitate. Per il resto, quanto detto per $\sim$ vale per $o(.)$.

Formula di Taylor e di Mac Laurin: resto di Lagrange e di Peano

Fin dal concetto di limite e del suo calcolo e via via fino al concetto di derivata ed alla regola di De L'Hospital sono emersi, fra gli altri, i due seguenti problemi.

1. Nota la funzione in un punto x_0 del suo dominio (nota in senso esteso ovvero e' noto in x_0 il suo valore e e quello di tutte le (eventuali) derivate) quali informazioni possiamo avere sulla funzione in intorni di x_0?

2. Nota la funzione in x_0 possiamo approssimarla in intorni di x_0 con funzioni "semplici" come ad esempio polinomi?

Una risposta parziale a queste domanda l'abbiamo gia' data con la scrittura fuori dal segno di limite e con il teorema di Lagrange. Ora posiamo dare una risposta completa ai due problemi. A tal fine introduciamo il concetto di contatto fra linee che e' una estensione del concetto di intersezione.

• Contatto fra linee

Siano $y = f(x)$ e $y = g(x)$ due funzioni definite in (a, b) ed ivi derivabili fino all'ordine $n + k$ con $k \geq 0$. Sia inoltre $x_0 \in (a, b)$.

Diremo che le linee Λ_1 e Λ_1 grafici delle funzioni $y = f(x)$ e $y = g(x)$, rispettivamente, hanno un contatto di ordine n in x_0 quando nel punto x_0 le funzioni $f(x)$ e $g(x)$ coincidono insieme alle loro derivate fino all'ordine n; in formule

$$f(x_0) = g(x_0), \quad f'(x_0) = g'(x_0), \quad f''(x_0) = g''(x_0), ..., f^{(n)}(x_0) = g^{(n)}(x_0).$$

Se $n = 0$ abbiamo la ben nota nozione di intersezione.

Ebbene, ora costruiamo polinomi i cui grafici hanno contatti di ordine crescente partendo dal contatto di ordine zero con il grafico di una funzione $y = f(x)$.

I polinomi li indichiamo $P_n(x)$ con n il grado del polinomio.

1) Supponiamo di conoscere solo il valore della funzione nel punto x_0; con questa condizione possiamo avere, in generale, un contatto di ordine zero ovvero possiamo considerarare solo l'intersezione. Di conseguenza possiamo determinare completamente un polinomio di grado zero ovvero una costante: scriviamo

$$f(x_0) = P_0(x_0) = a \Rightarrow a = f(x_0).$$

Il polinomio e' completamente determinato ed il grafico di $y = f(x)$ e quello di $y = P_0(x)$ si intersecano nel punto $(x_0, f(x_0))$.

Assumendo la funzione $y = f(x)$ continua in x_0 e considerando la scrittura fuori dal segno di limite abbiamo

$$f(x) = P_0(x) + \alpha(x, x_0), \quad \alpha(x, x_0) \to 0 \ \textit{per} \ x \to x_0.$$

Quindi con un solo dato possiamo determinare un solo parametro, in altri termini un polinomio di grado zero. In termini di approssimazione abbiamo ($\sim$ sta per simbolo di approssimazione)

$$i) \qquad f(x) \sim P_0(x)$$

con errore

$$f(x) - P_0(x) = \alpha(x, x_0).$$

Geometricamente si sostituisce al grafico di $f(x)$ la retta parallela all'asse delle ascisse passante per il punto $(x_0, f(x_0))$.

2) Consideriamo ora un contatto del primo ordine ovvero abbiamo due dati sulla funzione: $f(x_0)$ ed $f'(x_0)$. Procedendo come al punto 1) possiamo, tramite il contatto del primo ordine , determinare completamente un polinomio con due parametri ovvero il polinomio $P_1(x) = ax + b$ (usiamo notazioni a cui siamo piu' abituati): imponiamo il contatto ed abbiamo

$$\begin{cases} f(x_0) & = & P_1(x_0) = ax_0 + b, \\ f'(x_0) & = & P'(x_0) = a \end{cases}$$

Si ricava facilmente risolvendo il sistema col metodo di sostituzione che

$$a = f'(x_0), \quad b = f(x_0) - x_0 f'(x_0).$$

Ne consegue che il polinomio cercato, ordinando per potenze crescenti di x i termini, e'

$$P_1(x, x_0) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0),$$

il cui grafico e' la retta tangente alla linea di equazione $y = f(x)$ nel punto x_0. Dalla seconda formula dell'accrescimento finito dato negli appunti "Funzioni in R IV " abbiamo

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + (x - x_0)\alpha(x - x_0),$$

con $\alpha(x, x_0)$ infinitesimo per $x \to x_0$. In termini di approssimazione si ha

$$ii) \qquad f(x) \sim f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0)$$

con errore $f(x) - P_1(x, x_0) = (x - x_0)\alpha(x, x_0)$.

Geometricamente si sostituisce il grafico di $y = f(x)$ con la sua retta tangente nel punto $(x_0, f(x_0))$.

Si osserva che l'approssimazione ii) e' migliore di quella della i). La funzione $f(x)$ ha piu' proprieta' in comune con $P_1(x, x_0)$ che con $P_0(x, x_0)$.

3) Consideriamo ora un contatto del secondo ordine ovvero abbiamo tre dati sulla funzione: $f(x_0)$, $f'(x_0)$, $f"(x_0)$. Procedendo come al punto 2) possiamo, tramite il contatto del secondo ordine , determinare completamente un polinomio con tre parametri ovvero il polinomio $P_2(x) = ax^2 + bx + c$ (equazione di una parabola): imponiamo il contatto ed abbiamo

$$\begin{cases} f(x_0) &= P_2(x_0) = ax_0^2 + bx_0 + c, \\ f'(x_0) &= P_2'(x_0) = 2ax_0 + b, \\ f''(x_0) &= P_2''(x_0) = 2!a. \end{cases}$$

Utilizzando il metodo di sostituzione partendo dall'ultima equazione si ha

$$a = \frac{1}{2!}f"(x_0), \quad b = f'(x_0) - 2x_0\frac{1}{2!}f"(x_0), \quad c = f(x_0) - x_0 f'(x_0) + x_0^2\frac{1}{2!}f"(x_0).$$

Inserendo questi valori in $P_2(x)$ ed ordinando i termini secondo le potenze crescenti di x si ha

$$P_2(x, x_2) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2!}f"(x_0)(x - x_0)^2.$$

Aplicando la regola di De L'Hospital (anche iterata) si ha il limite

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0) - \frac{1}{2!}f"(x_0)(x - x_0)^2}{(x - x_0)^2} = 0$$

.

Utilizzando la scrittura fuori dal segno di limite si ha

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2!}f"(x_0)(x - x_0)^2 + (x - x_0)^2\alpha(x_0, x),$$

con $\alpha(x, x_0)$ infinitesimo per $x \to x_0$.

In termini di approssimazione si ha

$$ii) \qquad f(x) \sim f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) + \frac{1}{2!}f"(x_0)(x - x_0)^2$$

con errore

$$f(x) - P_2(x, x_0) = (x - x_0)^2\alpha(x, x_0).$$

Graficamente si sostituisce il grafico di $y = f(x)$ con la parabola passante per punto $(x_0, f(x_0))$ con il contatto del secondo ordine col grafico di $f(x)$

Osserviamo che ogni polinomio e' ottenuto dal precedente aggiungendo un termine della forma

$$\frac{1}{k!}f^{(k)}(x_0)(x - x_0)^k, \quad k = 1, 2.$$

A questo punto e' di tutta evidenza come seguono le espressioni dei polinomi che hanno contatti con $f(x)$ di ordine superiore al secondo.

Con queste osservazioni a disposizione siamo ora pronti ad introdurre la formula di Taylor.

Formula di Taylor

Sia $y = f(x)$ definita in (a, b) e sia $x_0 \in (a, b)$. Supponiamo che esistano in x_0 tutte le derivate di $f(x)$ fino all'ordine $n-1$: $f'(x_0)$, $f''(x_0)$, ... $f^{(n-1)}(x_0)$.

Si dice formula di Taylor arrestata all'ordine n per la funzione $f(x)$ relativa al punto iniziale x_0 e con $x \in (a, b)$, la relazione

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2!}f''(x_0)(x - x_0)^2 + ... + \frac{1}{(n-1)!}f^{(n-1)}(x_0)(x - x_0)^{n-1} + \mathbf{T}_n(x_0, x).$$

$\mathbf{T}_n(x_0, x)$ viene chiamato termine complementare della formula o resto od errore. Esso dipende dalla funzione, dal punto x_0, da x e da n.

I polinomi

$$P_{n-1}(x, x_0) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2!}f''(x_0)(x - x_0)^2 + ... + \frac{1}{(n-1)!}f^{(n-1)}(x_0)(x - x_0)^{n-1}$$

sono detti polinomi di Taylor

Il termine complementare $\mathbf{T}_n(x_0, x)$ e' la differenza

$$f(x) - P_{n-1}(x, x_0).$$

Si sostanzia l'importanza della formula di Taylor nel momento in cui si conosce l'ordine di grandezza del termine complementare o meglio quando si conosce la sua espressione. Noi scriveremo solo due forme del termine complementare e sono le seguenti

• **Forma di Peano**

Se esiste la derivata ennesima $f^{(n)}(x_0)$ in x_0, allora

$$\mathbf{T}_n(x_0, x) = \frac{1}{n!}(f^{(n)}(x_0) + \alpha(x, x_0))(x - x_0)^n$$

con $\alpha(x, x_0)$ infinitesimo per $x \to x_0$.

Questa espressione l'abbiamo gia' ottenuta nella introduzione della formula utilizzando la regola di De L'Hospital, per $n = 2$. Iteriamo il procedimento. Sappiamo che $f(x_0) - P_{n-1}(x_0, x_0) = 0$, $D(f(x_0) - P_{n-1}(x_0, x_0)) = 0$,...,$D^{n-1}(f(x_0) - P_{(n-1)}(x_0, x_0)) = 0$, $D^n P_{n-1}(x; x_0) = 0$ e $G(x, x_0) = (x - x_0)^n$ soddisfa le stesse condizioni in x_0 ovvero

$$D^k G(x_0, x_0) = 0 \; per \; 0 \leq k \leq n-1 \; e \; D^{n-1}G(x; x_0) = n!(x - x_0), \;\; D^n G(x; x_0) = n!$$

Quindi possiamo iterare la regola di De L' Hospital $n - 1$ volte.

Allora

$$i) \lim_{x \to x_0} \frac{n! T_n(x, x_0)}{G(x, x_0)} = \lim_{x \to x_0} \frac{n!(f(x) - P_{n-1}(x, x_0))}{G(x, x_0)} = \lim_{x \to x_0} (\frac{n! D(f(x) - P_{n-1}(x, x_0)}{DG(x, x_0)} = ... =$$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{n!(D^{n-1}f(x) - D^{n-1}P_{n-1}(x, x_0))}{D^{n-1}G(x, x_0)} \lim_{x \to x_0} \frac{D^{n-1}f(x) - D^{n-1}f(x_0)}{(x - x_0)} = D^n f(x_0).$$

Dalla scrittura fuori dal segno di limite si ha

$$T_n(x,x_0) = \frac{(D^n f(x_0) + \alpha(x,x_0))(x-x_0)^n}{n!}.$$

La forma e' dimostrata

• **Forma di Lagrange**

Supponiamo che $f(x)$ sia derivabile in un intorno $U(x_0)$ fino alla derivata di ordine $n-1$: esistono $f'(x)$, $f''(x)$, $f''(x)$, ..., $f^{(n-1)}(x)$ con $x \in U(x_0)$ e che esista la derivata di ordine n in $U(x_0) \setminus \{x_0\}$ ovvero $f^{(n)}$ non e' richiesta nel punto iniziale x_0. Allora

$$\mathbf{T}_n(x_0,x) = \frac{1}{n!} f^{(n)}(c)(x-x_0)^n$$

con $c \in (x_0,x)$ se $x > x_0$ oppure $c \in (x,x_0)$ se $x < x_0$.

Per dimostrare questa forma si itera n volte il teorema di Cauchy per le funzioni

$$\mathbf{T}_n(x_0,x) \;\; e \;\; G(x,x_0) = (x-x_0)^n,$$

partendo con $a = x_0$ e $b = x$ ed osservando che tutte le derivate fino all'ordine $n-1$ di $\mathbf{T}_n(x_0,x)$ e $G(x,x_0)$ sono nulle in x_0 e che $D^n G = n!$

Si procede come per la formula di Peano senza il processo di limite. Per $x > x_0$

$$\frac{T_n(x,x_0)}{G(x,x_0)} = \frac{DT_n(c_1,x_0)}{DG(c_1,x_0)} = \frac{D^2T_n(c_2,x_0)}{D^2G(c_2,x_0)} = ...$$

$$\frac{D^nT_n(c,x_0)}{D^nG(c;x_0)} = \frac{D^n f(c)}{n!}$$

con $x_0 < c < c_{n-1} < ... < c_1 < x$. Lo stesso risultato si ha per $x < x_0$. Da cui consegue la forma di Lagrange.

Nota 1): l'entita' di $\mathbf{T}_n(x_0,x)$ misura la bonta' della approssimazione. L'ordine di grandezza di $|\mathbf{T}_n(x_0,x)|$ dipende da f da n e da x (fissato x_0). Per valutarla e' piu' adatta la forma di Lagrange. L'incertezza e' data dal punto c ed una ipotesi di limitatazza sulla derivata ennesima serve a controllarla. L'attenzione si pone dunque su x ed n. Se x e' abbastanza prossima ad x_0 ovvero $|x-x_0|$ piccolo, con modesti valori di n possiamo avere una significativa stima dell'errore. Se invece x e' lontano da x_0, saranno solo i valori di n a contribuire ad una efficace stima dell'errore e che sia piccolo. In questo caso i polinomi di Taylor devono avere un grado elevato.

Nota 2): se poniamo $x_0 = 0$ nella formula essa viene chiamata formula di Mac Laurin pertanto si ha

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2!} f"(0)x^2 + ... + \frac{1}{(n-1)!} f^{(n-1)}(0)x^{n-1} + \mathbf{T}_n(0,x).$$

Nota 3) Osserviamo che in generale

$$T_n(x,x_0) = o((x-x_0)^{n-1}$$

.

Alcuni esempi di formula di Mac Laurin

1) e^x in $x = 0$ ha valore uno insieme a tutte le sue derivate pertanto

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + ... + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + o(x^{n-1}) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{x^i}{i!} + o(x^{n-1}).$$

2) Per $senx$ si ha: $sen0 = 0$, $(senx)'_{|x=0} = cos0 = 1$, $(senx)''_{|x=0} = -sen0 = 0$, $(senx)'''_{|x=0} = -cos0 = 1$, etc. Si nota che tutte le derivate di ordine pari sono nulle in $x = 0$ e quelle dispari sono uguali ad 1 con segno alterno, per cui

$$(senx)^{(2i)}_{|x=0} = 0,\ (senx)^{(2i+1)}_{|x=0} = (-1)^i.$$

Quindi

$$senx = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - ...(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + o(x^{2n-1}) = \sum_{i=0}^{n-1}(-1)^i\frac{x^{2i+1}}{(2i+1)!} + o(x^{2n-1}).$$

3) Per $cosx$ si ha: $cos0 = 0$, $(cosx)'_{|x=0} = -sen0 = 0$, $(cosx)''_{|x=0} = -cos0 = -1$, $(cosx)'''_{|x=0} = sen0 = 0$, etc. Si nota che tutte le derivate di ordine dispari sono nulle in $x = 0$ e quelle pari sono uguali ad 1 con segno alterno, situazione complementare a quella del $senx$ per cui

$$(cosx)^{(2i)}_{|x=0} = (-1)^i,\ (cos)^{(2i+1)}_{|x=0} = 0.$$

Quindi

$$cosx = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - ...(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-2}}{(2n-1)!} + o(x^{2n-1}) = \sum_{i=0}^{n-1}(-1)^i\frac{x^{2i}}{(2i)!} + o(x^{2n-1}).$$

3) Per $log(1+x)$ si ha: $log1 = 0$, $(log(1+x))'_{|x=0} = (1+x)^{-1}_{|x=0} = 1$, $(log(1+x))''_{|x=0} = -(1+x)^{-2}_{|x=0} = -1$, $(log(1+x))'''_{|x=0} = 2(1+x)^{-3}_{|x=0} = 2$,...,$(log(1+x))^{(i)}_{|x=0} = (-1)^{i+1}(i-1)!(1+x)^{-i}_{|x=0} = (-1)^{i+1}(i-1)!$.
Quindi

$$log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} -, ..., (-1)^n\frac{x^{n-1}}{(n-1)} + o(x^{n-1}) =$$

$$\sum_{i=1}^{n-1}(-1)^{i+1}\frac{x}{i} + o(x^{n-1}).$$

Esercizio: scrivere il resto di Peano e di Lagrange delle funzioni $y = e^x$, $y = senx$, $y = cosx$, $y = log(1+x)$.

Esercizio: scrivere la formula di Mac Laurin delle seguenti funzioni
$y = Shx$, $y = Chx$, $y = arctgx$, $y = e^{-x}$.

Esercizio: usare la formula di Mac Laurin per calcolare tutti i limiti incontrati negli esercizi di questi appunti ed in quelli precedenti.

Nei paragrafi precedenti abbiamo assegnato delle condizioni sufficienti per garantire che un punto x_0 interno ad (a, b) sia un punto estremante relativo (punto a valore massimo o minimo relativo) oppure un punto di flesso a tangente orizzontale per una funzione derivabile. Perche' si verifichi una qualsiasi di queste circonstanze deve essere x_0 punto di stazionarieta' (cioe' $f'(x_0) = 0$). Il criterio sufficiente richiede l'esame del segno della derivata prima in un intorno di x_0. Oltre a questo criterio di uso piu' comune c'e' un altro criterio che implica le derivate successive puntualmente solo nel punto x_0. Questa indagine ci portera' a definire delle proprieta' geometriche delle funzioni e caratterizzarle con le derivate.

• Concavita', convessita', flessi, punti di massimo e minimo locale

Diamo le definizioni dei concetti nel modo piu' semplice ed intuitivo. A tal fine richiediamo una certa regolarita' delle funzioni.

Sia data la linea G grafico della funzione $y = f(x)$ definita in (a, b) derivabile con tutte le derivate che occorrono.

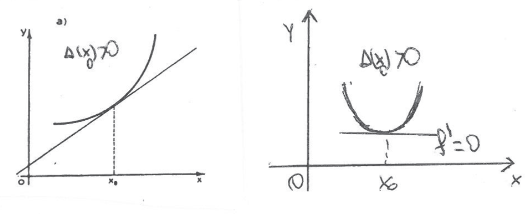
Diamo le seguenti definizioni. Ricordiamo che ogni retta divide il piano (cartesiano) in due semipiani uno superiore π^+ ed uno inferiore π^-. L'allocuzione e' intuitiva ma possiamo precisarla. Semipiano superiore intendiamo il luogo dei punti del piano che a parita' di ascissa hanno ordinata maggiore del corrispondente punto sulla retta. In ovvio modo si caratterizza il semipiano inferiore.

Sia $P_0 = (x_0, f(x_0))$ un punto della linea G e t_0 la retta tangente alla linea in P_0.

• Concetti geometrici

1) Diremo che la linea piana G volge la concavita' nel verso dell'asse delle y o verso l'alto se esiste un intorno $U(x_0)$ del punto x_0 in cui la linea appartiene al semipiano superiore π^+ determinato dalla retta tangente.

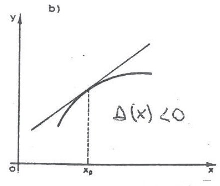
Caso particolare: *se nel punto x_0 la retta tangente e' parallela all'asse delle ascisse e la concavita' e' rivolta verso l'alto allora x_0 e' punto di minimo locale.*

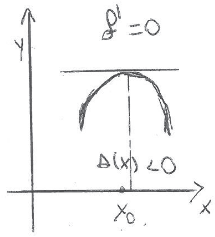


La funzione $\Delta(x)$ indicata nel grafico sara' definita piu' avanti 2) Diremo che nel punto x_0 la linea volge convessita' nel verso dell'asse delle y o concava verso il basso se esiste un intorno $U(x_0)$ del punto x_0 un cui la linea si trova nel semipiano inferiore π^- determinato dalla retta tangente nel punto x_0.

Caso particolare: *se nel punto x_0 la retta tangente e' parallela all'asse delle ascisse e la concavita' e' rivolta verso il basso allora x_0 e' punto di massimo locale.*

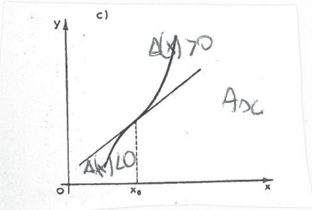
(Ci sono altre definizioni di convessita' che al concetto classico di insieme convesso affiancano il concetto di ordine: un insieme e' convesso quando il segmento che congiunge due suoi punti e' contenuto interamente nell'insieme. Allora si dice che una funzione f (non necessariamente derivabile) e' convessa se per ogni coppia di punti $(x_0, f(x_0))$ e $(x_1, f(x_1))$ del suo grafico si ha che il segmento congiungente i due punti sta tutto sopra il grafico della restrizione della funzione all'intervallo (x_1, x_2). La funzione f e' concava se $-f$ e' convessa. Da questa definizione appare chiaro che una funzione convessa o concava in (a, b) non puo' avere discontinuita'.)



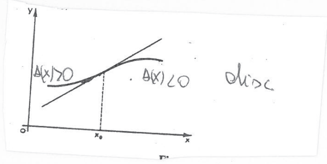


Il piu' delle volte useremo l'allocuzione concava verso l'alto o verso il basso perche' lo riteniamo piu' espressiva.

3) Diremo che nel punto x_0 la linea ha un punto di flesso ascendente se in un intorno $U(x_0)$ di x_0 cambia concavita' ed ha concavita' rivolta verso il basso per $x < x_0$ e concavita' rivolta verso l'alto per $x > x_0$.



4) Diremo che nel punto x_0 la linea ha un punto di flesso discendente se in un intorno $U(x_0)$ di x_0 la linea cambia concavita' ed ha concavita' rivolta verso l'alto per $x < x_0$ e concavita' rivolta verso il basso per $x > x_0$.



Trattazione analitica

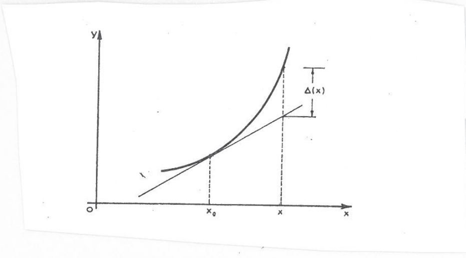
La concavita' verso l'alto o verso il basso dipende dalla posizione del grafico rispetto alla retta tangente. Analiticamente dobbiamo studiare le quote delle funzioni corrispondenti. Indichiamo l'equazione della retta tangente con $P_1(x, x_0)$:il polinomio di Taylor di grado uno; allora la concavita' e' studiata dalla differenza

$$\Delta(x) = f(x) - P_1(x, x_0).$$

Abbiamo col punto $x \in U(x_0)$

$$\Delta(x) \begin{cases} > & 0 \Rightarrow \textit{la linea volge la concavita' verso l'alto in } x_0, \\ < & 0 \Rightarrow \textit{la linea volge la concavita' verso il basso in } x_0. \end{cases}$$

$\Delta(x)$ e' il termine complementare della formula di Taylor per $n = 2$. Dal momento che vogliamo studiare la funzione con condizioni puntuali utilizzeremo il resto nella forma di Peano.



Distinguiamo il caso in cui $f"(x_0) \neq 0$ ed il caso per cui $f''(x_0) = 0$.

- 1) $f''(x_0) \neq 0$.

  Abbiamo
$$\Delta(x) = \frac{1}{2!}(f"(x_0) + \alpha(x, x_0))(x - x_0)^2.$$

Il segno di $\Delta(x)$ dipende da $(f"(x_0) + \alpha(x, x_0))$. Dal teorema della permanenza del segno questo ha lo stesso segno di $f''(x_0)$, in un intorno di x_0, cosi'

$$\Delta(x) \begin{cases} > & 0 \; se \; f''(x_0) > 0 \Rightarrow la\; linea\; volge\; la\; concavita'\; verso\; l'alto\; in\; x_0, \\ < & 0 \; se \; f''(x_0) < 0 \Rightarrow la\; linea\; volge\; la\; concavita'\; verso\; il\; basso\; in\; x_0. \end{cases}$$

Il segno della derivata seconda in un punto x_0 indica la concavita' della funzione nel punto. Si osservino i grafici di pagina 16.

Condizioni sufficienti per l'esistenza di punti di massimo e minimo relativi

1. Se $f'(x_0) = 0$ ed $f"(x_0) > 0$ allora x_0 e' punto di minimo relativo.
2. Se $f'(x_0) = 0$ e $f"(x_0) < 0$ allora x_0 e' punto di massimo relativo.

Nota: abbiamo due modi per determinare i punti di massimo e minimo relativo. Uno e' quello di calcolare la derivata seconda nel punto x_0; l'altro e' di esaminare la derivata prima nell' intorno di x_0. Ogni procedimento ha i propri vantaggi e svantaggi. Certo calcolare la derivata seconda, non sempre agevole, e' alquanto dispendioso per decidere dei massimi e dei minimi relativi. Procedimento piu' usato e' l'indagine della derivata prima.

- $f''(x_0) = 0$

L'annullarsi della derivata seconda e' una condizione necessaria per l'esistenza dei punti di flesso. Per avere una condizione sufficiente dobbiamo studiare la derivata terza. Si osservino i grafici di pagina 17.

In questo caso studiamo il segno di $\Delta(x)$ utilizzando il resto di Peano con la derivata terza supposta non nulla ovvero il signo dim

$$\Delta(x) = \frac{1}{3!}(f'''(x_0) + \alpha(x, x_0))(x - x_0)^3.$$

Ora il segno di $\Delta(x)$ dipende sia dal segno della derivata terza che dal segno di $(x - x_0)$.

1) $f'''(x_0) > 0$

$$\Delta(x) \begin{cases} > & 0 \; se \; x > x_0 \Rightarrow la\; linea\; ha\; concavita'\; verso\; l'alto\; per\; x > x_0, \\ < & 0 \; se \; x < x_0 \Rightarrow la\; linea\; volge\; la\; concavita'\; verso\; il\; basso\; per\; x < x_0. \end{cases}$$

quindi x_0 **e' un punto di flesso obliquo ascendente**.

2) $f'''(x_0) < 0$.

$$\Delta(x) \begin{cases} > & 0 \; se \; x < x_0 \Rightarrow \; la \;\; linea \;\; ha \;\; concavita' \;\; verso \;\; l'alto \;\; per \; x > x_0, \\ < & 0 \; se \; x > x_0 \Rightarrow \; la \;\; linea \;\; volge \;\; la \;\; concavita' \;\; verso \;\; il \, basso \;\; per \;\; x > x_0. \end{cases}$$

quindi x_0 **e' un punto di flesso obliquo discendente**.

Condizione sufficiente per l'esistenza dei punti di flesso

Condizione sufficiente affinche x_0 sia un punto di flesso ascendente e' che

$$f''(x_0) = 0 \;\; e \;\; f'''(x_0) > 0.$$

Condizione sufficiente affinche' x_0 sia un punto di flesso discendente e' che

$$f''(x_0) = 0 \;\; e \;\; f'''(x_0) < 0.$$

L'osservazione fatta per la ricerca dei massimi e minimi vale per i punti di flesso. Il procedimento piu' usato e' l'esame del segno della derivata f''. Allora

1. sia $f''(x_0) = 0$; se $f''(x) < 0$ per $x < x_0$ ed $f''(x) > 0$ per $x > x_0$ allora x_0 e' punto di flesso ascendente;
2. sia $f''(x_0) = 0$; se $f''(x) > 0$ per $x < x_0$ ed $f''(x) < 0$ per $x > x_0$ allora x_0 e' punto di flesso discendente.

Il legame fra la derivata seconda e la concavita' e fra la derivata terza e l'inflessione ha una portata piu' generale.

Supponiamo che $f''(x_0) = f'''(x_0) =, ..., = f^{(k-1)}(x_0) = 0$ e $f^{(k)}(x_0) \neq 0$. Per studiare il segno di $\Delta(x)$ usiamo il resto di Peano con $f^{(k)}(x_0)$ e ripetendo le considerazioni fatte sopra si ha

1. se k e' pari e $f^{(k)}(x_0) > 0$ allora $\Delta(x) > 0 \Rightarrow$ concavita' verso l'alto,
2. se k e' pari e $f^{(k)}(x_0) < 0$ allora $\Delta(x) < 0 \Rightarrow$ concavita' verso il basso,
3. se k e' dispari e $f^{(k)}(x_0) > 0$ allora $\Delta(x)$ cambia segno da negativo a positivo nel passaggio dalla sinistra alla destra del punto $x_0 \Rightarrow x_0$ punto di flesso ascendente.
4. se k e' dispari e $f^{(k)}(x_0) < 0$ allora $\Delta(x)$ cambia segno da positivo a negativo nel passaggio dalla sinistra alla destra del punto $x_0 \Rightarrow x_0$ punto di flesso discendente.

In questi casi la condizione sufficiente per i massimi e minimi e' data dal segno di $f^{(k)}(x_0)$ per k pari e la condizione sufficiente per i punti di flesso e' data dal segno di $f^{(k)}(x_0)$ per k dispari.

Esempio: La funzione $y = x^{5/3}$ ha un punto di flesso in $x = 0$ in cui non esiste la derivata seconda. $y = |x|$ ha minimo assoluto in $x = 0$ ed ivi non derivabile. Questo fatto mostra che possiamo avere punti di massimo, di mininimo, di flesso senza che esistano tutte le derivate che abbiamo richiesto. Va da se' che in questi casi la ricerca di tali punti diventa piu' elaborata e manca di criteri generali.

Differenziale e sua immagine geometrica

Data una funzione $y = f(x)$ qualunque sia la sua interpretazione di un fenomeno meccanico, fisico, chimico geometrico l'analisi del suo andamento (l'analisi del fenomeno) nell'intorno di un punto (stato del fenomeno) viene compiuto associando incrementi Δx della variabile indipendente x con gli incrementi corrispondenti Δy della variabile dipendente ed investigando il suo comportamento all'annullarsi di Δx ovvero si e' indagato il rapporto incrementale. In generale conviene indagare il comportamento di Δy allo svanire di Δx. A tal fine introduciamo il concetto di "differenziale" o di "differenziabilita". La presenteremo nella forma piu' generale adatta anche a funzioni di piu' variabili.

Sia $y = f(x)$ una funzione definita in (a,b) e sia $x_0 \in (a,b)$. Si dice che $f(x)$ e' differenziabile in x_0 quando l'incremento Δy relativo al passaggio dal punto iniziale x_0 al punto variato $x_0 + \Delta x$ si puo' scrivere come la somma di due termini nel seguente modo

$$\Delta y = \lambda \Delta x + \Delta x \alpha(\Delta x)$$

ove λ dipende da x_0 e non da Δx ed $\alpha(\Delta x) \to 0$ per $\Delta x \to 0$.

Δy e' un infinitesimo per $\Delta x \to 0$ e $\lambda \Delta x$ e' la sua parte principale. Allora il prodotto $\lambda \Delta x$ viene chiamato differenziale di $f(x)$ relativo al punto x_0 ed a Δx e lo denotiamo dy oppure df. Pertanto

$$i) \qquad dy = \lambda \Delta x, \;\; \textit{oppure} \;\; df = \lambda \Delta x.$$

Se una funzione e' differenziabile allora e' derivabile e viceversa e $\lambda = f'(x_0)$

Infatti dividendo i) per Δx si ha

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lambda + \alpha(\Delta x),$$

e dalla definizione di derivata

$$ii) \qquad \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0) = \lambda.$$

Applicando la scrittura fuori dal segno di limite ad ii) si ottiene la i).

Quindi abbiamo dimostrato l'equivalenza della derivabilita' e della differenziabilita'. Cosa non vera per le funzioni di piu' variabili.

Allora possiamo scrivere:

$$dy = df = f'(x_0)\Delta x.$$

Dalla i) abbiamo che

$$\frac{\Delta y - dy}{\Delta x} \to 0 \;\; \textit{per} \; \Delta x \to 0.$$

$\Delta y - dy$ e' un infinitesimo di ordine superiore a Δx

In termini di approssimazione $\Delta y \sim dy$ con un errore che e' un infinitesimo di ordine superiore a Δx (abbiamo usato $\sim$ nel senso di approssimazione non di asintotico). Questo fatto induce ad utilizzare, per comodita' di calcolo, dy invece di Δy.

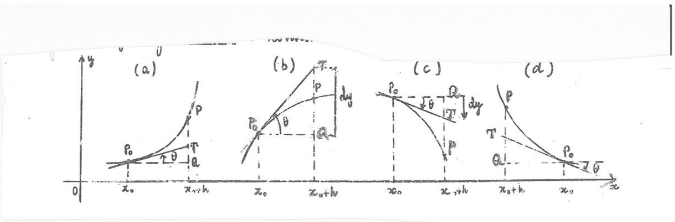
Interpretazione geometrica del differenziale

Nei grafici h e' Δx ed e' (in valore e segno)

$$P_0Q = h, \quad QP = \Delta y, \; f'(x_0) = tg\theta, \quad QT = f'(x_0)h = dy, \quad TP = h\alpha(x).$$

L'esame del grafici che, in ogni caso, qualunque sia il segno di h o di $f'(x_0)$ il segmento QT (con misura e segno) da' l'immagine geometrica del differenziale. Il segmento TP offre l'immagine dell'infinitesimo $h\alpha(x)$.

Quindi dy rappresenta l'incremento della y nel passaggio da x_0 ad $x_0 + h$ calcolato lungo la retta tangente (muovendosi lungo la retta tangente); Δy e' lincremento della y nel passaggio da x_0 ad $x_0 + h$



calcolato lungo il grafico della funzione (muovendosi lungo il grafico della funzione). In termini geometrici l'approssimazione $\Delta y \sim dy$ significa che si sostituisce la retta tangente al grafico della funzione in intorni di x_0.

Si possono introdurre in maniera evidente il differenziale destro e differenziale sinistro in x_0 considerando la derivata destra o la derivata sinistra.

Se la funzione e' differenziabile in ogni punto di (a, b) diremo che e' differenziabile in (a, b); se si considera la differenziabilita' in $[a, b]$ negli estremi e' da considerare la differenziabilita' unilaterale o destra o sinistra.

Convenzione sul differenziale. Regole di differenziazione ed invarianza formale del differenziale

La scrittura $dy = f'\Delta x$ presenta una dissimetria tra la variabile y e la variabile x. Qualche convenzione puo eliminare questa dissimetria e rendere piu' semplice il calcolo sui differenziali.

L'incrementi Δx oppure h (che sono quantita' arbitrarie da considerarsi indipendenti da x) saranno chiamati differenziali della variabile indipendente x e si denotera' dx. Quindi $\Delta x = dx$, $h = dx$. Una giustificazione formale di questa convenzione e' la seguente

Si consideri la funzione $y = f(x) = x$. I valori della x sono uguali ai valori della y e viceversa. Abbiamo $\Delta y = \Delta x$ e $dy = f'(x)\Delta x = \Delta x$. Ricordando la regola della derivata della funzione inversa si ha $dx = \Delta y$ e questa e' uguale a Δx. Da cui la giustificazione della convenzione. Altrettanto e' da considerare dx indipendente dalle funzioni considerate, cosi' scriveremo $df = f'dx$, $dg = g'dx$ etc.

Dopo queste convenzioni passiamo alle regole di differenziazione. Si ricorda che il differenziale e' il prodotto della derivata per l'incremento dx

Regole di differenziazione

Siano $y = f(x)$, $y = g(x)$ funzioni differenziabili in (a, b) e $df = f'(x)dx$, $dg = g'(x)dx$.

1. $d(f \pm g) = (f(x) \pm g(x))'dx = (f'(x) \pm g'(x))dx = df \pm dg$,
2. $d(fg) = (f(x)g(x))'dx = (g(x)f'(x) + f(x)g'(x))dx = g(x)df + f(x)dg$,
3. $g \neq 0$, $d\frac{f}{g} = (\frac{f(x)}{g(x)})'dx = \frac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x))}{g^2(x)}dx=$

$$\frac{g(x)df(x) - f(x)dg(x)}{g^2(x)}.$$

4. $d^2 f = d(df) = d(f'(x)dx) = (f(x)dx)'dx = f''(x)dx^2$ (dx e' indipendente da x),..., $d^n f = d(d^{n-1}f) = (f^{(n-1)}dx^{n-1})'dx = f^{(n)}dx^n$.
5. Derivate come rapporto di differenziali:

$$f'(x) = \frac{df}{dx}, \quad f''(x) = \frac{d^2 f}{dx^2}, \ ..., f^{(n)} = \frac{d^n f}{dx^n}.$$

Differenziale di funzione composta ed invarianza formale

Siano $y = f(x)$ e $x = x(t)$ funzioni definite in intervalli I_1 e I_2, rispettivamente, componibili e derivabili e sia $y = F(t) = f(x(t))$ la funzione composta di $f(x)$ e $x(t)$,inoltre $dy = f'(x)dx$, $dx = x'(t)dt$. Allora

$$dy = F'(t)dt = f'(x(t))x'(t)dt = f'(x)dx.$$

Notiamo che la forma del differenziale di $f(x)$ e' sempre la stessa sia che x sia variabile indipendente sia che x sia variabile intermedia, a sua volta funzione di un'altra variabile indipendente t. In altri termini la forma del differenziale primo non ci permette di capire, in relazioni a piu' variabili, quale sia la variabile indipendente.

Un esempio classico e' dato dalla legge dei gas perfetti

$$PV = CT.$$

P e' la pressione, V il volume, C una costante e T la temperatura. Differenziamo la legge, dalle regole di differenziazione, abbiamo

$$i) \qquad d(PV) = CdT \Rightarrow VdP + PdV = CdT.$$

Non e' necessario fissare preventivamente la variabile indipendente.

Ad esempio se T e' variabile indipendente, dT e' arbitrario allora la i) si scrive

$$VP'(T) + PV'(T) = C.$$

Lo stesso vale se P o V sono variabili indipendento oppure tutte e tre le grandezze dipendono da un'altra variabile t.

Concludiamo questo paragrafo con l'affermazione che l'invarianza formale non vale per i differenziali successivi. Questo perche' dx nel caso sopra esaminato non e' piu' una grandezza indipendente rispetto alla variabile di derivazione nel caso di funzione composta. Infatti, come sopra $x = x(t)$, $dx = x'(t)dt$, e $y = F(t) = f(x(t))$ si ha

$dy = F'(t)dt = f'(x(t))x'(t)dt$, da cui

$$d^2F(t) = d(dF(t)) = d(f'(x(t))x'(t)dt) = (f''(x(t))x'(t)x'(t) + f'(x(t))x''(t))dt^2 =$$

$$f''(x(t))(x'(t))^2dt^2 + f'(x(t))x''(t)dt^2 = f''(x)dx^2 + f'(x)d^2x = d^2f(x) + f'(x)d^2x \neq d^2f(x)$$