

# ESAME DI GEOMETRIA E ALGEBRA LINEARE

PROF. MARCO COMPAGNONI

**Motivazione ed obiettivo del corso:** l'algebra lineare e la geometria sono strumenti matematici fondamentali, dal punto di vista sia teorico sia computazionale, e sono ampiamente utilizzati in ogni contesto scientifico ed ingegneristico. Obiettivo del corso è fornire le conoscenze di base grazie alla quali lo studente possa in futuro, con il supporto delle fonti opportune, comprendere ed eventualmente sviluppare la letteratura tecnica che utilizza tali metodologie.

**Valutazione:** scopo dell'esame è valutare il grado di raggiungimento dell'obiettivo preposto per ogni singolo studente. Si struttura in una prova scritta ed una prova orale.

## Esame scritto

- L'esame scritto consiste nella risoluzione di esercizi. Gli esercizi possono vertere su ogni argomento del corso e sono ispirati a quelli svolti durante le lezioni ed esercitazioni.
- La risoluzione deve essere completa, in particolare non devono essere saltati passaggi e vanno riportati tutti i conti necessari alla comprensione dello svolgimento.
- Conformemente all'obiettivo, è consentito allo studente la consultazione di appunti propri (un foglio formato A4) durante la prova.
- Il superamento della prova scritta è condizione necessaria per l'ammissione alla prova orale. La valutazione della prova sarà data secondo sei fasce di giudizio:
  - A: Ottimo;
  - B: Buono;
  - C: Discreto;
  - D: Sufficiente;
  - E: Insufficiente ammesso all'orale;
  - F: Insufficiente non ammesso all'orale.

## Esame orale

- Il superamento dell'esame e la valutazione finale terranno conto dei risultati della prova scritta, ma sono essenzialmente decisi in base alla qualità della prova orale. Le domande della prova verteranno su qualsiasi argomento affrontato durante le lezioni ed esercitazioni, come indicati nel Programma del Corso.
- Condizione necessaria al superamento della prova è sapere impostare correttamente la risoluzione di qualsiasi esercizio tratto da temi d'esame passati, presenti e futuri, commentati con gli adeguati riferimenti teorici (vedere l'esempio finale).
- Dopo avere riesaminato e commentato l'esame scritto, viene lasciata allo studente la possibilità di iniziare la prova con un argomento a scelta.
- Cose da non fare: l'esame orale non è una prova di recitazione a memoria di teoremi e dimostrazioni. Queste ultime sono importanti per la determinazione del voto finale, ma in primo luogo è fondamentale dimostrare di avere una sufficiente padronanza e familiarità della materia (vedere l'esempio finale) e di sapere il come e il perché si fanno le cose. In particolare, sono sconsigliate argomentazioni del tipo: "si fa così perché sul libro è scritto così" oppure "si fa così perché a lezione lei (o l'esercitatrice) ha detto così".

### Esempio delle domande orali sulla risoluzione di un esercizio

Descrivere il nucleo di

$$\begin{aligned} f : \mathbb{K}_2[x] &\longrightarrow \text{Mat}_{\mathbb{K}}(2, 2) \\ P &\longmapsto \begin{pmatrix} P(0) & P'(1) \\ P'(1) & P''(0) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

1. Cosa è uno spazio vettoriale? I due insiemi  $V = \mathbb{K}_2[x]$ ,  $W = \text{Mat}_{\mathbb{K}}(2, 2)$  sono spazi vettoriali? Perché?
2. Cosa è un'applicazione lineare? Cosa è  $\text{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W)$ ? La funzione  $f$  è un'applicazione lineare? Perché?
3. Cosa è  $\ker(f)$ ? Quali sono le sue proprietà? È un sottospazio di  $V$ ? Perché?
4. Cosa si intende per “descrivere”  $\ker(f)$ ? Cosa è una base di uno spazio vettoriale? Quale è la dimensione di  $\ker(f)$  e di  $\text{Im}(f)$ ? Come sono legate e perché?
5. Come si trova una base di  $\ker(f)$ ? Cosa sono gli isomorfismi  $\phi_{\mathcal{B}_V}$  e  $\phi_{\mathcal{B}_V \mathcal{B}_W}$ ? Perché sono isomorfismi? Cosa è  $A_{f, \{\mathcal{B}_V \mathcal{B}_W\}}$ ? Cosa è  $\ker(A_{f, \{\mathcal{B}_V \mathcal{B}_W\}})$  e come è legato a  $\ker(f)$ ? Come si calcola una base di  $\ker(A_{f, \{\mathcal{B}_V \mathcal{B}_W\}})$  e di  $\ker(f)$ ?

Suggerimento: è utile abituarsi a svolgere ogni esercizio ponendosi e rispondendo sempre a questo tipo di domande.