**Successioni**

Abbiamo introdotto il sistema numerico dei numeri naturali $\mathbb{N}$. Con successivi ampliamenti abbiamo costruito tutti i sistemi naturali fino ai numeri complessi. Il concetto di successivo e la proprieta' di induzione rendono questo sistema numerico semplice e flessibile. Anzi tutti i suoi elementi possiamo disporli in un sequenza ordinata per successivo:

$$\mathbb{N} := 0, 1, 2, 3, 4, ..., n, ........ := \{n\}_{n\in\mathbb{N}} := \{n\}.$$

Il termine adottato per tale disposizione e' " successione" ovvero " l'atto di seguire in ordine o sequenza"; sono stati elencati i diversi modi di indicare la successione dei numeri naturali.

Inoltre per indicare insiemi che hanno qualche relazione con i naturali e' stato introdotto l'aggettivo " numerabile " e si dice che un insieme $E$ e' numerabile se e' possibile porlo in corrispondenza biunivoca con l'*insieme* $\mathbb{N}$.

Se si vuole ordinare l'insieme $E$ viene posto in corrispondena biunivoca con la successione dei numeri naturali. In questo caso $E$ viene chiamata successione. Allora possiamo dare la definizione di successione nel seguente modo

*Si dice successione un insieme $\mathcal{E}$ di oggetti o elementi che e' posto in corrispondenza biunivoca con la successione dei numeri naturali*

Tali elementi possono essere di natura qualsiasi. Un modo semplice per denotare la successione e' quello di usare una lettera munita di un indice, il numero naturale corrispondente che ne denota il posto nella sequenza:

$$\mathcal{E} := \{a_n\} := \{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} := a_0, a_1, a_2, ...., a_n, ...$$

Useremo piu' frequentemente la notazione $\{a_n\}$.

Dunque una successione e' definita dalla legge che assegnato il posto $n$ costruisce l'elemento $a_n$ che occupa quel posto. L' elemento $a_n$ e' anche detto l' elemento generale o elemento n-esimo della successione. Per ogni $n$, $a_{n+1}$ e' successivo di $a_n$. Se $n \leq m$ si dice che $a_m$ segue $a_n$ o che $a_n$ precede $a_n$.

Possiamo concludere che la successione e' una funzione definita sull'insieme dei numeri naturali $\mathbb{N}$ considerati posti in sequenza. Questa osservazione giustifica la definizione di successione numerica che abbiamo dato negli appunti "Funzioni in $\mathbb{R}$ II" ed ad essa abbiamo applicato tutte le nozioni costruite per le funzioni in generale. Da ora in poi consideriamo il codominio il campo dei numeri Reali. Riprendiamo quella definizione per poi adattare alle successioni tutta la potenza del calcolo che abbiamo costruito per le funzioni.

Definizione: Chiameremo successione numerica una funzione $f$ con dominio $\mathbb{N}$ e codominio $\mathbb{R}$ ovvero

$$f : \mathbb{N} \to \mathbb{R};\ o\ f : n \mapsto y,\ ed\ y = f(n).$$

Posto $f(n) = a_n$ abbiamo la successione definita sopra. Per le successione posssiamo, quindi, dare il concetto di immagine che e'

$$Imf = \{y \in \mathbb{R} | y = f(n),\ n \in \mathbb{N}\}$$

e con l'ovvio significato dei simboli possiamo scrivere piu' semplicemente

$$Imf := \{a_n\} := a_0, a_2, ..., a_n, ..$$

Inoltre possiamo definire il grafico di $f$ nel piano $O(x, y)$ di una successione:

$$G = \{(x, y)|x = n, y = f(n) = a_n\}.$$

Se $N_1 \subseteq \mathbb{N}$ possiamo parlare di restrizione di $\{a_n\}$ ad $N_1$ come una successione $\{b_n\}$ con $b_n = a_n$ per $n \in N_1$.

Cosi' diremo che
1) una successione $\{a_n\}$ e' **limitata superiormente** se esiste un numero reale k tale che $a_n \leq k$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Il numero $k$ e' detto maggiorante della successione;
2) una successione $\{a_n\}$ e' **limitata inferiormente** se esiste un numero reale $h$ tale che $a_n \geq h$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Il numero reale $h$ e' detto minorante della successione;
3) una successione $\{a_n\}$ e' detta limitata se esistono due numeri reali $h < k$ tale che $h \leq a_n \leq k$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ o in forma piu' compatta se esiste un numero positivo $C$ tale che $|a_n| \leq C$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.
4) Ovviamente in caso contrario diremo che la successione e' **illimitata superiormene, inferiormente o illimitata.**

La successione $\{a_n\}$ si dice monotona crescente ( o crescente in senso stretto) quando

$$a_0 < a_1 < ... < a_n < ...$$

. $\{a_n\}$ e' detta monotona crescente in senso lato o non decrescente se vale

$$a_0 \leq a_1 \leq ... \leq a_n \leq ...$$

.
Simmetricamente si dice che $\{a_n\}$ e' monotona decrescente o decrescente in senso stretto se

$$a_0 > a_1 > ...a_n > ...$$

o momotona decrescente in senso lato o non crescente se

$$a_0 \geq a_1 \geq ... \geq a_n \geq ...$$

(brevemente: crescente se $a_n \leq a_{n+1}$ per ogni $n$ oppure decrescente se $a_n \geq a_{n+1}$ per ogni $n$ ).

Alle successioni possiamo applicare il concetto di limite al solo punto $+\infty$ considerato come il solo punto di accumulazione dei naturali. Come ci e' noto con esso si studia il comportamento delle funzioni in intorni di punti di accumulazione o meglio il loro comportamento o proprieta' locale. Nella teoria delle successioni questo comportamento locale viene espresso nel seguente modo: la successione ha definitivamente una certa proprieta' o un comportamento. Cioe' la proprieta' non e' detto che valga per tutti gli elementi ma sicuramente per tutti gli elementi che hanno per indice un numero opportunamente grande ( ovvero vicino all'infinito), ancora c'e' solo un numero finito di oggetti che non ha la proprieta'.

Ad esempio la successione

$$0, 1, 0, -1, 0, -3, 2, 0, -1, 1, 3, 4, 6, 7, ...$$

non e' totalmente monotona ma lo e' dal nono posto in poi ovvero per $n > 9$ quindi la monotonia e' una proprieta' che viene acquisita definitivamente dopo il posto 9.

Si da' la seguente definizione:

*Si dice che una successione $\{a_n\}$ possiede definitivamente una proprieta' $\mathcal{P}$ se esiste un indice $\nu$ che dipende da $\mathcal{P}$ tale che gli elementi della successione $a_\nu, a_{\nu+1}, ..., a_n, ....$ hanno la proprieta' $\mathcal{P}$. Ovvero la proprieta' $\mathcal{P}$ vale vicino all'infinito.*

### Definizione di limite per le successioni

Abbiamo gia' dato, a suo tempo, la definizione di limite per le funzioni e per le successioni. Si e' osservato che il limite vale solo per il punto $+\infty$ e rispetto a quello gia' dato per le funzioni si cambia la variabile continua $x$ con la variabile discreta $n$.

Con il concetto di limite si valuta il carattere della successione.

**Definizione di convergenza** - *Si dice che la successione di numeri reali $\{a_n\}$ e' convergente al numero a (finito) e si scrive*

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = a \;\; \textit{oppure} \;\; a_n \to a \textit{ per } n \to +\infty$$

*quando comunque fissato un intorno $U$ di $a$ la successione cade definitivamente in $U$, ovvero*

$\forall \epsilon > 0 \; \exists$ *un numero intero $N_\epsilon > 0$ (dipendente da $\epsilon$) tale che per ogni $n > N_\epsilon$ si ha $|a_n - a| < \epsilon$.*

Possiame affermare che la successione cade definitivamente nell'intervallo $(a-\epsilon, a+\epsilon)$. Altri modi di dire : $a_n$ converge ad $a$; $a_n$ tende ad $a$.

**Una successione si dice convergente se ammette limite finito**

Qualche variazione.

Si dira' che $a_n$ converge ad $a$ per eccesso o dalla destra e si scrive

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = a^+ \textit{ oppure } a_n \to a^+ \textit{ per } \; \to +\infty$$

se $\forall \epsilon > 0 \; \exists$ un numero intero $N_\epsilon > 0$ (dipendente da $\epsilon$) tale che per ogni $n > N_\epsilon$ si ha $a < a_n < a + \epsilon$.

Analogamente si ha il limite per difetto o dalla sinistra

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = a^- \textit{ oppure } a_n \to a^- \textit{ per } \; \to +\infty$$

se $\forall \epsilon > 0 \; \exists$ un numero intero $N_\epsilon > 0$ (dipendente da $\epsilon$) tale che per ogni $n > N_\epsilon$ si ha $a - \epsilon < a_n < a$.

Veniamo ora alla definizione di divergenza.

**Definizione di divergenza** - *Si dice che la successione di numeri reali $\{a_n\}$ diverge a ( o tende a) $+\infty$ e si scrive*

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty \textit{ oppure } a_n \to +\infty \textit{ per } n \to +\infty$$

*se $\forall K > 0 \; \exists$ un numero naturale $N_K > 0$ (dipendente da $K$) tale che per ogni $n > N_K$ si ha $a_n > K$.*

*Si dice che la successione di numeri reali $\{a_n\}$ diverge a ( o tende a) $-\infty$ e si scrive*

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = -\infty \textit{ oppure } a_n \to -\infty \textit{ per } n \to +\infty$$

*se $\forall K > 0 \; \exists$ un numero naturale $N_K > 0$ (dipendente da $K$) tale che per ogni $n > N_K$ si ha $a_n < -K$.*

*Si dice che la successione di numeri reali $\{a_n\}$ diverge a ( o tende a) $\infty$ (infinito senza segno ) e si scrive*

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \infty \textit{ oppure } a_n \to \infty \textit{ per } n \to +\infty$$

*se $\forall K > 0 \; \exists$ un numero naturale $N_K > 0$ (dipendente da $K$) tale che per ogni $n > N_K$ si ha $|a_n| > K$.*

**Una successione che ha limite infinito e' detta divergente**

**Una successione che ha limite viene detta regolare.**

**Se una successione non ha limite e' detta oscillante oppure indeterminata oppure irregolare.**

Tutte le osservazioni fatte sulle funzioni che hanno limite, quali l'unicita' del limite, la permanenza del segno la limitatezza , il limite del modulo etc.. valgono per le successioni.

Enunciamo tali teoremi

**Teorema** -*Se $a_n$ ha limite esso e' unico.*

**Teorema della permanenza del segno** -*Se $a_n \to a > 0$ allora definitivament $a_n > 0$.*

*Conseguenza*

*Se $a_n \to a$ e $b_n \to b$ e se $a < b$ allora definitivamente $a_n < b_n$.*

*Se si ha $a_n \to a$ ed $a < k$ allora $\{a_n\}$ e' definitivamente minorante della successione costante di elemento $k$ ..*

**Teorema inverso della permanenza del segno** -*Se $a_n \to a$ ed $a_n \geq 0$ allora $a \geq 0$.*

*Conseguenza*

*Se $a_n \leq b_n$ ed $a_n \to a$ e $b_n \to b$ allora $a \leq b$.*

*Caso particolare se $a_n \leq k$ per ogni $n$ e $a_n \to a$ allora $a \leq k$.*

Interessante e' mostrare la limitatezza di una successione che ha limite finito.

Nella definizione ponendo $\epsilon = 1$ si ha che per $n > N_1$ si ha $a - 1 < a_n < a + 1$. allora scelto

$$K = max(|a_0|, |a_1|, ..., |a_{N_1}|, |a-1|, |a+1|)$$

si ha

$$|a_n| \leq K$$

per ogni $n$.

**Qualche criterio**

**Definizione** : *Siano $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ due successioni con $a_n \leq b_n$ per ogni $n$. Si dice che $\{a_n\}$ e' minorante di $\{b_n\}$ od anche $\{b_n\}$ e' maggiorante di $\{a_n\}$.*

In particolare se $a_n \leq k$ allora diremo che $k$ e' maggiorante di $a_n$ considerandolo come una successione costante $k := k, k, k, k, k.....$

Casi particolari della conseguenza del teorema della permanenza del segno.

1) se $a_n \to a$ ed $a_n \leq k$ per ogni $n$ (o definitivamente) allora $a \leq k$;

2) se $a_n \to a$ e $b_n \to b$ con $a_n \leq b_n$ per ogni $n$ (o definitivamente) allora $a \leq b$:

3) se $a_n \to 0$ ed $|b_n| \leq |a_n|$ per ogni $n$ (o definitivamente) allora $b_n \to 0$.

4) se $a_n \to +\infty$ ed $a_n \leq b_n$ per ogni $n$ (o definitivamente) allora $b_n \to +\infty$.

**Criterio del confronto di tre successioni**

Riscriviamoamo in forma di successioni il teorema del confronto per le funzioni.

**Teorema** - *Siano $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{c_n\}$ con $a_n \leq b_n \leq c_n$ definitivamente (ovvero a meno di un numero finito di indici). Se $a_n \to l$ e $c_n \to l$ allora $b_n \to l$.*

**Criterio per il carattere delle successioni monotone**

Per le funzioni monotone abbiamo osservato, a suo tempo, che hanno un buon comportamento rispetto al processo di limite. Per le successioni questo comportamento ha una forma piu' completa. Riscriviamo il teorema di monotonia per le successioni.

**Teorema** - *Ogni successione monotona, crescente o decrescente e' regolare: essa o e' convergente (per difetto se crescente, per eccesso se decrescente) o e' divergente (a $+\infty$ se e' crescente o $-\infty$ se e' decrescente.*
*1) Se essa e' monotona non decrescente e limitata superiormente allora e' convergente e se $L$ e' il suo estremo superiore allora converge a $L^-$;*
*2) Se essa e' monotona non decrescente e illimitata superiormente allora diverge a $+\infty$;*
*3) Se essa e' monotona non crescente e limitata inferiormente allora converge a $l^+$ se $l$ e' estremo inferiore;*
*4) Se e' monotona non crescente ed illimitata inferiormente allora diverge a $-\infty$.*

In breve

1) Sia $a_n \leq a_{n+1}$. Allora $a_n \to Supa_n$ finito o infinito $(+\infty)$ 2) Sia $a_n > a_{n+1}$. Allora $a_n \to Infa_n$ finito o infinito $(-\infty)$.

Dimostriamo, a mo' d'esempio, l'affermazione che se $\{a_n\}$ e' monotona non decrescente e limitata superiormente allora e' convergente a $L = Supa_n$ .

Se la successione e' costante non c'e' niente da dimostrare. Allora assumiamo $\{a_n\}$ almeno non definitivamente costante e sia $L = Supa_n$ . Allora per ogni $\epsilon > 0$ esiste un elemento $a_{n_\epsilon}$ tale che $L - \epsilon < a_{n_\epsilon} \leq L$. Dalla monotonia si ha che per ogni $n > n_\epsilon$ si ha $L - \epsilon < a_{n_\epsilon} < a_n \leq L$. Questa e' la definizione di limite per difetto.

Appare chiaro che se una successione e' o convergente o divergente non e' detto che sia monotona.

**Sottosuccessioni o successioni parziali**

Sia $\{n_k\} := n_1, n_2, n_3, ..., n_k, ...$ una successione crescente di numeri naturali ovvero $(n_1 < n_2 < n_3 < ... < n_k < ...)$. La successione $\{a_{n_k}\}$ e' detta sottosuccessione o successione parziale di $\{a_n\}$. Ovvero $\{a_{n_k}\}$ e' una restrizione di $\{a_n\}$ all'insieme $\{n_k\}$.

Se una successione e' regolare ogni sua sottosuccessione e' regolare; in particolare da $a_n \to a$ per $n \to +\infty$ si ha $a_{n_k} \to a$ per $k \to \infty$.

Non vale il contrario: se una sottosuccessione e' regolare non si puo' affermare che la successione sia regolare.

Esempio: Sia $\{a_n\} := 0, 1, 0, 2, 0, 3, .....$ La sottosuccessione formata dagli elementi di posto dispari e' costante e tende a 0, quella di posto pari tende a $+\infty$ e la successione globale non e' regolare.

**Criterio generale di convergenza : Condizione di Cauchy**

I criteri sopra studiati riguardano alcune particolari proprieta' della struttura delle successioni che implicano la convergenza della successione stessa. La domanda che ci poniamo e' quella della esistenza di una proprieta' di struttura generale che caratterizzi la convergenza o meglio che sia equivalente alla esistenza del limite della successione. Da quanto si e' costruito fino ad ora appare chiaro che una tale proprieta' deve controllare l'oscillazione della successione. Questa circonstanza ci e' suggerita dalla definizione stessa del limite. Se esiste il limite $a$ di $\{a_n\}$, allora la successione definitivamente deve soddisfare la relazione

$$a - \epsilon < a_n < a + \epsilon.$$

Prendiamo due indici $n$ e $m$ che la soddisfino, si ha

$$a - \epsilon < a_n < a + \epsilon \ e \ a - \epsilon < a_m < a + \epsilon$$

da cui

$$-2\epsilon < a_n - a_m < 2\epsilon$$

ovvero

$$|a_n - a_m| < 2\epsilon.$$

Abbiamo ottenuto una relazione che attiene alla struttura della successione indipendentemente dal valore del limite.

Questa relazione caratterizza le successioni convergenti. Si ha il seguente

**Criterio di convergenza di Cauchy** - *Condizione necessaria e sufficiente affinche' la successione $\{a_n\}$ sia convergente ed abbia limite a e' che (condizione di Cauchy ):*

$$CC \qquad \forall \epsilon > 0 \ \exists \ N_\epsilon > 0 : \forall n, m > N_\epsilon \Rightarrow |a_n - a_m| < \epsilon.$$

1) (CC) e' necessaria ovvero e' conseguenza dell'esistenza del limite. L'abbiamo gia' dimostrata. Ripetiamola. Supponiamo che esista il limite: $a_n \to a$. Allora per ogni $\epsilon > 0$ esiste $N_\epsilon > 0$ (naturale) tale che per $n > N_\epsilon$ si ha $|a_n - a| < \epsilon$. Allora scelti $n, m > N_\epsilon$ si ha $|a_n - a| < \epsilon$ e $|a_m - a| < \epsilon$ da cui

$$|a_n - a_m| = |a_n - a + a - a_m| < |a_n - a| + |a_m - a| < 2\epsilon.$$

2) CC e' sufficiente ovvero se essa vale la successione e' convergente.

Dalla condizione si ha che fissato $\epsilon > 0$ esiste $N_\epsilon > 0$ tale che per ogni $n, m > N_\epsilon$

$$|a_n - a_m| < \epsilon.$$

Anzitutto la successione risulta limitata; infatti fissato $\epsilon > 0$ ed $n > N_\epsilon > 0$ si ha $a_n - \epsilon < a_m < a_n + \epsilon$ per ogni $m > N_\epsilon$. Quindi la successione e' definitivamente limitata e di consequenza e' limitata. Per il Teorema di Bolzano-Weierstrass l'insieme $\{a_n\}$ ha un punto di accumulazione $a \in \mathbb{R}$ ovvero esiste una sottosuccessione $\{a_{n_k}\}$ di $\{a_n\}$ convergente ad $a$. Dunque, per ogni $\epsilon > 0$ esiste un intero $\nu_\epsilon > 0$ tale che per ogni $k > \nu_\epsilon$ si ha $|a_{n_k} - a| < \epsilon$; dalla condizione (CC) si ha anche che $|a_n - a_m| < \epsilon$ per ogni $n, m > N_\epsilon$. Quindi scelto $n_k > sup(n_{\nu_\epsilon}, N_\epsilon)$ si ha

$$|a_n - a| = |a_n - a_{n_k} + a_{n_k} - a| \leq |a_n - a_{n_k}| + |a_{n_k} - a| < 2\epsilon.$$

Il criterio e' dimostrato.

### Calcolo dei limiti

Ora presentiamo con qualche dimostrazione l'algebra dei limiti in forma di successione. Questa algebra l'abbiamo abbondandente considerata negli appunti sui limiti delle funzioni. Come abbiamo gia' a suo tempo osservato si vuole valutare il limite di somma, differenza, rapporto di successioni di cui si conosce gia' il carattere.

**Teorema della somma di successioni convergenti** - *Siano $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ due successioni convergenti ovvero $a_n \to a$ e $b_n \to b$ con $a, b$ finiti. Allora $\{a_n + b_n\}$ e' convergente e si ha $a_n + b_n \to a + b$.*

Dimostrazione. Dobbiamo considerare i limiti simultaneamente. Si ha

$$\textit{per ogni } \epsilon > 0 \textit{ esiste } N_\epsilon > 0 \textit{ tale che per } n > N_\epsilon \textit{ si ha } |a_n - a| < \epsilon,$$

$$\textit{per ogni } \epsilon > 0 \textit{ esiste } \mu_\epsilon > 0 \textit{ tale che per } n > \mu_\epsilon \textit{ si ha } |b_n - b| < \epsilon.$$

Le due definizioni sono una indipendente dall'altra. Tale indipendenza e' dovuta ai numeri $\mu_\epsilon, N_\epsilon$. Rendiamo ora validi simultaneamente i due limiti; per questo basta considerare $n > sup(N_\epsilon, \mu_\epsilon)$; per tali $n$ valgono conteporaneamente

$$|a_n - a| < \epsilon, \quad |b_n - b| < \epsilon.$$

Allora si puo' scrivere

$$|a_n + b_n - a - b| < |a_n - a| + |b_n - b| < 2\epsilon,$$

e questa e' la definizione di limite.

E' ben noto che i limiti possono essere anche infiniti, e dalla parziale aritmetica degli infiniti il teorema continua a valere tranne nel caso di indecisione $\infty - \infty$.

**Teorema della moltiplicazione per un numero $c$ di una successione convergente** - *Sia $\{a_n\}$ una successione convergente ovvero $a_n \to a$. Allora*

$$ca_n \to ca.$$

Basta osservare che $|c(a_n - a)| < |c|\epsilon$ quando $|a_n - a| < \epsilon$. Ponendo $c = -1$ si ha il seguente

**Teorema della differenza di successioni convergenti -** *Siano* $\{a_n\}$ *e* $\{b_n\}$ *due successioni convergenti ovvero* $a_n \to a$ *e* $b_n \to b$ *con* $a, b$ *finiti. Allora* $\{a_n - b_n\}$ *e' convergente e si ha* $a_n - b_n \to a - b$*.*

Questo teorema e' ricondotto al limite della somma scrivendo $a_n - b_n = a_n + (-b_n)$.

**Teorema del limite del prodotto di successioni convergenti -** *Siano* $\{a_n\}$ *e* $\{b_n\}$ *due successioni convergenti ovvero* $a_n \to a$ *e* $b_n \to b$ *con* $a, b$ *finiti. Allora* $\{a_n \cdot b_n\}$ *e' convergente e si ha* $a_n \cdot b_n \to a \cdot b$*.*

La dimostrazione poggia sulla osservazione che una successione convergente e' limitata (definitivamente) e che il prodotto di una successione limitata per un'altra convergente a zero tende a zero. Allora scrivendo

$$a_n b_n - ab = a_n b_n - ab_n + ab_n - ab = b_n(a_n - a) + a(b_n - b) \to 0.$$

Il teorema continua a valere anche per limiti infiniti nel senso che il limite del prodotto e' ancora il prodotto dei limiti, usando la parziale aritmetica degli infiniti, tranne il caso $0\infty$.

**Teorema del limite del rapporto di successioni convergenti -** *Siano* $\{a_n\}$ *e* $\{b_n\}$ *due successioni convergenti ovvero* $a_n \to a$ *e* $b_n \to b \neq 0$ *con* $a, b$ *finiti. Allora* $\{\frac{a_n}{b_n}\}$ *e' convergente e si ha* $\frac{a_n}{b_n} \to \frac{a}{b}$*.*

Anche questo teorema continua a valere per limiti infiniti e per zero tranne i casi $\infty/\infty$ e $0/0$.

**Limiti di potenze con base costante**

. Consideriamo successioni della forma $\{a^{b_n}\}$ con $a > 0$ dal momento che $b_n$ sono reali.

Esaminiamo alcuni casi particolari:

1) $b_n \to +\infty$

Possiamo considerare $b_n > 1$. Allora abbiamo

i) se $a > 1$ allora, posto $a = e^\delta$ ($\delta > 0$ opportuno), $a^{b_n} = e^{\delta b_n} \geq \delta b_n$ e dal criterio del confronto si ha $a^{b_n} \to +\infty$.

ii) se $a = 1$ la successione e' costante ed uguale ad 1.

iii) se $0 < a < 1$ allora $\frac{1}{a} > 1$ per cui $(\frac{1}{a})^{b_n} \to +\infty$ quindi $a^{b_n} = \frac{1}{(\frac{1}{a})^{b_n}} \to 0^+$.

2) $b_n \to -\infty$

dal punto 1) ponendo $a^{b_n} = (\frac{1}{a})^{-b_n}$ si ha

i) se $a > 1$ allora $a^{b_n} \to 0^+$,

ii) se $a = 1$ la successione e' costante ed uguale ad 1,

iii) se $0 < a < 1$ allora $a^{b_n} \to +\infty$.

3) Dalla definizione di limite possiamo affermare che

da $b_n \to 0$ si ha $a^{b_n} \to 1$.

Infatti per $1 > \epsilon > 0$ si ha con $a > 1$

$$1 - \epsilon < a^{b_n} < 1 + \epsilon \Rightarrow log_a(1 - \epsilon) < b_n < log_a(1 + \epsilon).$$

Dato che $b_n \to 0$ definitivamente si ha $log_a(1 - \epsilon) < b_n < log_a(1 + \epsilon)$ per cui e' verificata la definizione di limite.

Per $a < 1$ basta invertire l'ordine.

Possismo dimostrare che:

4) se $b_n \to b \neq 0$ allora $a^{b_n} \to a^b$.

Infatti $a^{b_n} - a^b = a^b(a^{b_n - b} - 1) \to 0$
dal momento che $b_n - b \to 0$ e il prodotto di una costante per un infinitesimo e' un infinitesimo.

5) $a_n \to 1$ e $|b_n| < c \Rightarrow a_n^{b_n} \to 1$.

Infatti esiste un numero naturale $N$ tale che $-N < b_n < N$ si ha $a^{-N} < a^{b_n} < a^N$ oppure $a^N < a^{b_n} < a^{-N}$ se $a > 1$ oppure $0 < a < 1$ ( $a_n$ e' definitivamente positivo). Dal teorema del prodotto $a_n^{\pm N} \to 1$ ed dal teorema del confronto si ha l'asserto.

7) Consideriamo il caso generale dove base ed esponente sono variabili e convergenti

$a_n \to a > 0$ e $b_n \to b$ allora $a_n^{b_n} \to a^b$.

Infatti possiamo scrivere

$$a_n^{b_n} = a^b \cdot a^{b_n - b} \cdot (\frac{a_n}{a})^{b_n} \to a^b.$$

Infatti $a_n$ e' definitivamente positivo (permanenza del segno) e $b_n$ definitivamente limitato; poi $a^{b_n - b} \to 1$ e $\frac{a^n}{a} \to 1$.

Nota: Per i limiti di potenza con base ed esponente variabile sussistono le seguenti forme di indecisione

$$0^0 \quad \infty^0 \quad 1^\infty.$$

Tutte le altre forme sono decise.

**logaritmi**

1) Date due successioni convergenti $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ con limiti $a$ e $b$, rispettivamente, si vuole valutare il carattere della successione

$$log_{b_n} a_n.$$

Dapprima semplifichiamo la forma

$$log_{b_n} a_n = log_b a_n : log_b b_n = (log_b \frac{a_n}{a} + log_b a) : (log_b \frac{b_n}{b} + log_b b).$$

Per valutare il limite di $log_{b_n} a_n$ basta valutare i limiti di $log_b \frac{a_n}{a}$ e di $log_b \frac{b_n}{b}$. Hanno la stessa struttura allora e' sufficiente valutarne uno solo. Verifichiamo mediante la definizione che
$log_b \frac{a_n}{a} \to 0$ e $log_b \frac{b_n}{b} \to 0$.

Supponiamo $b > 1$ (il caso $0 < b < 1$ e' analogo), allora per ogni $\epsilon > 0$ si ha $b^{-\epsilon} < 1 < b^\epsilon$ ovvero un intorno di 1. Dal momento che $a_n/a$ tende ad 1 allora definitivamente si ha

$$b^{-\epsilon} < \frac{a_n}{a} < b^\epsilon$$

possando ai logaritmi si ha

$$-\epsilon < log_b \frac{a_n}{a} < \epsilon.$$

Questa e' la definizione di limite. Quindi abbiamo dimostrato che

$$log_{b_n} a_n \to log_b a.$$

2) Il caso $a_n \to +\infty$ e $b_n \to b > 0$ viene valutato facilmente per $b > 1$.

In questo caso per $H > 0$ arbitrariamente grande si ha $a_n > b^H$ definitivamente perche' $a_n$ tende all'infinito

Allora $log_b a_n > H$ e questo e' sufficiente a dimostrare che .

$$log_{b_n} a_n \to +\infty.$$

Se $0 < b < 1$ allora ponendo $b' = 1/b$ e $log_{b'} a_n = -log_b a_n$ ritroviamo il caso precedente ed abbiamo

$$log_{b_n} a_n \to -\infty.$$

3) se $a_n \to 0^+$ e $b_n \to b > 0 \neq 1$, ponendo $a' = 1/a_n$ ci riduciamo ai casi precedenti:

$$log_{b_n} a_n \to -\infty, \ per\ b > 1,$$

$$log_{b_n} a_n \to +\infty, \ per\ 0 < b < 1.$$

Per i casi $a_n \to +\infty$ e $b_n \to 0^+$ ; $a_n \to 0^+$ e $b_n \to b > 0$;

$$a_n \to 0^+ \ e\ b_n \to +\infty; \ a_n \to 1 \ e\ b_n \to 1$$

non si puo' dedurre il carattere della successione, abbiamo forme di indecisionwe del tipo

$$log_0 + \infty; \ log_0^0; \ log_\infty 0; \ log_1 1.$$

Molte delle considerazioni sopra esposte le abbiamo affrontate nell'ambito delle funzioni. Sopra abbiamo utilizzato solo procedimenti nell'ambito delle successioni.

Ricordiamo anche che per definire il numero $e$ sono state utilizzate le successioni ed il criterio di monotonia.

**Infinitesimi, infiniti. Criteri**

In questo paragrafo introdurremo criteri che attengono alle proprieta' caratterizzanti le successioni.

Dapprima diamo la definizione di infinitesimo

**Definizione** - *Si dice successione infinitesima una successione che converge a zero.*

Se la successione $\{a_n\}$ e' infinitesima si dice anche che $a_n$ e' infinitesimo per $n \to +\infty$. Quando non sorgono equivoci si sottindente "$n \to +\infty$".

Per stabilire se una successione e' infinitesima si usano alcuni semplici criteri.

**• Criterio del confronto**

Sia definitivamente $|a_n| \leq |b_n|$; se $b_n \to 0$ allora $a_n \to 0$. Se $a_n \to \infty$ allora $a_n \to \infty$.

**• Criterio della radice**

*Se esiste un numero positivo $\rho < 1$ $(0 < \rho < 1)$ per cui*

$$|a_n|^{1/n} < \rho$$

*allora $a_n \to 0$.*

Infatti da $|a_n|^{1/n} < \rho$ si ottiene $|a_n| < \rho^n$. Essendo $0 < \rho < 1$ si ha $\rho^n \to 0$ e per il criterio del confronto $a_n \to 0$.

Una forma di uso piu' frequente del criterio della radice richiede l'esistenza del limite della radice n-esina:

**• Criterio della radice asintotico**

**Se $|a_n|^{1/n} \to \lambda < 1$ allora $a_n \to 0$.**

Infatti preso $\rho$ tale che $\lambda < \rho < 1$, infatti dalla definizione di limite o dal teorema della permanenza del segno nella forma di confronto, si ha definitivamente $|a_n|^{1/n} \leq \lambda + \epsilon = \rho < 1$ con $\epsilon < 1 - \lambda$. Siamo alla formulazione precedente.

**• Criterio del rapporto**

*Sia $a_n \neq 0$. Se esiste un numero $\rho$ positivo e minore di 1 $(0 < \rho < 1)$ per cui*

$$|\frac{a_{n+1}}{a_n}| \leq \rho,$$

*(il valore assoluto del rapporto di ogni elemento con il suo precedente)*
*allora*

$$a_n \to 0.$$

Infatti, consideriamo la successione $|a_n|$ da un posto $N$ in poi ovvero per $n > N$ ( e' sufficiente questo) e sia

$$|\frac{a_{n+1}}{a_n}| \leq \rho.$$

allora valgono le disuguaglianze

$$\begin{aligned}
&|a_{N+1}| \leq \rho|a_N|, \\
&|a_{N+2}| \leq \rho|a_{N+1}| \leq \rho^2|a_N|, \\
&. \quad . \quad . \quad . \\
&|a_n| \leq \rho|a_{n-1}| \leq \rho^2|a_{n-2}| \leq \cdots \leq \rho^{n-N}|a_N|.
\end{aligned}$$

Ora $|a_N|$ e' un numero fissato, $\rho^{n-N} \to 0$ per $n \to +\infty$ ne consegue

$$a_n \to 0.$$

Anche questo criterio ha una forma di uso frequente che richiede il limite del rapporto.

- **Criterio del rapporto asintotico**
  **Se**

$$|\frac{a_{n+1}}{a_n}| \to \lambda < 1,$$

**allora** $a_n \to 0$

E' facile ricondurre questa forma a quella precedente.

Infatti, nel caso del criterio della radice, dalla definizione del limite o dalla permanenza del segno esiste un numero positivo $\rho$ con $\lambda < \rho < 1$ per cui

$$|\frac{a_{n+1}}{a_n}| \leq \rho$$

vale definitivamente (da un certo indice in poi) ed e' verificata la condizione del criterio nella forma precedente.

I criteri sufficienti sopra esposti per successioni infinitesime si adottano anche come criteri sufficienti per le successioni divergenti: scriviamoli. Osservando che da $a_n \to \infty$ con $a_n \neq 0$ si ha $1/a_n \to 0$. Scriviamoli esplicitamente.

Trattiamo con successioni divergenti.

- **Criterio del confronto**

Sia definitivamente $|a_n| \leq |b_n|$; se $a_n \to \infty$ allora $b_n \to \infty$.

- **Criterio della radice**

Se esiste un numero positivo $\rho > 1$ per cui $|a_n|^{1/n} > \rho$ allora $\{a_n\}$ diverge.

- **Criterio del rapporto**

Sia $a_n \neq 0$. Se esiste un numero $\rho > 1$ per cui

$$|\frac{a_{n+1}}{a_n}| \geq \rho,$$

(il valore assoluto del rapporto di ogni elemento con il suo precedente)
allora $\{a_n\}$ diverge.

**Qualche interessante applicazione**

• Per ogni numero $k$ si ha

$$\frac{n^k}{e^n} \to 0; \quad \frac{(logn)^k}{n} \to 0.$$

Applichiamo il criterio del rapporto nella prima:

$$\frac{\frac{(n+1)^k}{e^{n+1}}}{\frac{n^k}{e^n}} = (\frac{n+1}{n})^k \cdot \frac{1}{e} \to \frac{1}{e} < 1.$$

Il criterio del rapporto termina la dimostrazione.
Lasciamo allo studente la verifica del secondo limite.

Osserviamo che il rapporto considerato e' la restrizione ai numeri naturali del rapporto delle funzioni $x^k$ ed $e^x$. A suo tempo per valutare con altrettanta " semplicita'" il limite abbiamo fatto intervenire la regola di $DeL'Hospital$. Quindi se e' possibile valutare il carattere delle successioni con i semplici criteri considerati e' bene applicarli. Certo se si riesce a determinare la funzione di cui la successione e' una restrizione ai numeri naturali si ha a disposizione strumenti ben collaudati per studiarne il carattere.

• *I simboli di equivalenza asintotica e di o piccolo ( rapporto infinitesimo)*

$a_n \sim b_n$ e si legge $a_n$ e' asintotica a $b_n$ quando $\frac{a_n}{b_n} \to 1$.

Scriviamo
$a_n = o(b_n)$ e si legge $a_n$ e' o piccola di $b_n$ quando $\frac{a_n}{b_n} \to 0$.

Esempi: $n + \sqrt{b} \sim n$, $\frac{1}{n} + \frac{senn}{n^2} \sim \frac{1}{n}$,
$\frac{n+logn}{\sqrt{n}} \sim \sqrt{n}$, $\frac{1}{n} = o(\frac{1}{\sqrt{n}})$, $logn = o(\sqrt{n})$

Per quanto riguarda il confronto fra successioni infinitesime e divergenti rimandiamo al confronto gia' ampiamente illustrato negli appunti sui limiti.

**Formula di Eulero-Mascheroni**

Valutiamo la somma degli inversi dei primi $n$ numeri naturali.

Vale il seguente

**Teorema -**

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdot + \cdots + \frac{1}{n} = logn + C + \epsilon_n,$$

ove $C$ e' una costante e $0 < \epsilon_n < 1/n$.

Dimostriamo solo $S \sim logn$.
Dalla dimostrazione del numero $e$ si ha

$$(1 + \frac{1}{n})^n < e < (1 + \frac{1}{n})^{n+1},$$

e passando ai logaritmi si ha

$$nlog(1 + \frac{1}{n}) < 1 < (n+1)log(1 + \frac{1}{n}),$$

ovvero

$$\frac{1}{n+1} < log(\frac{n+1}{n}) < \frac{1}{n}.$$

Sommando i membri della disequazione ed osservando che per $log(\frac{n+1}{n})$ per ogni $n$ vale

$$log\frac{2}{1}+log\frac{3}{2}+log\frac{4}{3}+...+log\frac{n}{n-1} = (log2-log1)+(log3-log2)+(log4-log3)+...+(logn-log(n-1)) = logn.$$

Si ha

$$S_n - 1 < logn < S_{n-1} = S_n - \frac{1}{n}$$

$$S_n \sim logn.$$

Dal teorema del confronto abbiamo che $S_n \to +\infty$.
Esempi:

1.
$$a_n = \sqrt{n} - \sqrt[3]{n} = \sqrt{n}(1 - \frac{\sqrt[3]{n}}{\sqrt{n}}) = \sqrt{n}(1 - \frac{1}{\sqrt[6]{n}}) \to +\infty;$$

$$\sqrt{n} - \sqrt[3]{n} \sim \sqrt{n};$$

2.
$$a_n = \frac{\sqrt{n}-1}{\sqrt{n}+1} = \frac{\sqrt{n}(1-\frac{1}{\sqrt{n}})}{\sqrt{n}(1+\frac{1}{\sqrt{n}})} \to 1^-$$

3.
$$\frac{n^3-n-2}{2n^2+n^2/3+n} = \frac{n^3(1-\frac{1}{n^2}-\frac{2}{n^3})}{n^2(2+\frac{1}{3}+\frac{1}{n})} \to +\infty;$$

4.
$$nlog\frac{n+1}{n^{3/2}+2} \to +\infty log0^+ = -\infty;$$

5.
$$a_n = \frac{1}{\sqrt{n}}log(1+\frac{1}{n}) = \frac{1}{n\sqrt{n}}\frac{log(1+\frac{1}{n})}{\frac{1}{n}} \to 0^+;$$

$$\frac{1}{\sqrt{n}}log(1+\frac{1}{n}) \sim \frac{1}{n\sqrt{n}}.$$

6. criterio del confronto
$$a_n = \frac{n!}{n^n} = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot ...\cdot (n-1)\cdot n}{n\cdot n\cdot n\cdot n\cdot n\cdot ...\cdot n} < \frac{1}{n} \to 0.$$

7.
$$a_n = \frac{sen(n+1)}{n}; \quad |\frac{sen(n+1)}{n}| \leq \frac{1}{n} \to 0 \Rightarrow a_n \to 0.$$

8. Criterio del rapporto

$$a_n = \frac{n!}{n^n}.$$

$$a_n = \frac{\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{n!}{n^n}} =$$

$$\frac{\frac{n!(n+1)}{(n+1)(n+1)^n}}{\frac{n|}{n^n}} = \frac{n^n}{(n+1)^n} =$$

$$\frac{1}{(1+\frac{1}{n})^n} \to e^{-1}.$$

la successione e' convergente.

9.

$$a_n = (\frac{n+2}{n+3})^n \frac{1}{n} = \frac{(1+\frac{2}{n})^n}{(1+\frac{3}{n})^n} \frac{1}{n} \to e^{-1} 0 = 0.$$

$$a_n \sim \frac{1}{en}.$$

10.

$$a_n = n(2^{\frac{n+1}{n^2}} - 1) = \frac{(2^{\frac{n+1}{n^2}} - 1)}{\frac{n+1}{n^2}} \cdot n \cdot \frac{n+1}{n^2} \to log2.$$

11. Criterio della radice

$$a_n = \frac{2^{n+1}}{n^n}; \quad \sqrt[n]{\frac{2^{n+1}}{n^n}} = \sqrt[n]{2}\frac{2}{n} \to 0 \Rightarrow a_n converge$$

oppure

$$a_n = \frac{2^{n+1}}{n^n} = 2\frac{2^n}{n^n} = \ (per\ n \geq 2)\ 2(\frac{2}{n})^n \to 0 \Rightarrow a_n \to 0.$$

## Serie numeriche

In questo paragrafo tratteremo del concetto di serie o meglio di serie numeriche. Questo concetto e le nozioni che ad essa attengono sono strettamente connesse con quelle che attengono alle successioni. Questa e' una delle ragioni per cui abbiamo adattato alle successioni molte nozioni che abbiamo estesamente presentato nell'ambito della teoria delle funzioni di una variabile reale. Il concetto di serie si presenta quando si intende sommare infiniti numeri. Questa esigenza si e' presentata piu' volte anche nel'aritmetica con la rappresentazione decimale dei numeri reali. Ci e' familiare l'operazione di somma di due numeri. In modo induttivo abbiamo esteso tale operazione a piu' numeri, conservandone le proprieta'. Si vuole estendere questa operazione ad infiniti elementi e cercando di conservarne il piu' possibile le proprieta' e di darne un significato coerente ed utile.

Certo non ci mettiamo a sommare uno alla volta gli infiniti numeri; sussiste un problema di spazio e di tempo. Gia' con il concetto di limite siamo riusciti a trattare in modo utile e ragionevole il concetto di "infinito". Recentemente abbiamo trattato integrali impropri affiancando il concetto di limite al concetto di integrale classico. Questo atteggiamento lo adotteremo per estendere l'operazione di somma di infiniti numeri. Alle somme finite di numeri reali applicheremo il passaggio al limite.

### Serie numeriche. Convergenza. Divergenza

**Definizione** *Sia $\{a_n\}$ una successione di numeri reali. Si dice serie (o serie numerica) la scrittura:*

$$(*) \qquad a_0 + a_1 + a_2 + ... + a_n + ....$$

Terminologia: + segno + o simbolo di addizione; $a_0, a_1, a_2, ..., a_n, ....$ termini della serie; $a_n$ termine di indice $n$ o termine generale.

Si usa indicare la scrittura (*) utilizzando il simbolo di sommatoria

$$1) \qquad \sum_{n=0}^{\infty} a_n; \qquad \sum_{0}^{\infty} a_n; \quad \sum a_n.$$

In ogni scrittura puo' essere sottinteso un segno quando questo non comporta equivoci. La serie e' definita quando e' assegnata la successione $\{a_n\}$ ovvero quando e' assegnata la legge per costruire il termine generale. Ora assegniamo ai simboli sopra introdotti un numero in modo coerente e pratico. Coerente nel senso che includa la somma finita e ne conservi le proprieta' il piu' possibile. Si opera nel seguente modo: consideriamo le seguenti somme

$$(**) \qquad s_0 = a_0,\ s_1 = a_0 + a_1,\ s_2 = a_0 + a_1 + a_2,\ ..., s_n = a_0 + a_1 + a_2 + ... + a_n, ....$$

Scriveremo anche

$$s_n = \sum_{i=0}^{n} a_i.$$

Con l'operazione di somma finita abbiamo costruito una successione. Ognuno dei numeri in (**) viene chiamato somma parziale o ridotta. Cosi' $s_n$ e' chiamato somma parziale $n$-esima o di posto $n$ o ridotta. Alla scrittura (*) viene associata la successione delle somme parziali

$$(***) \qquad s_0, s_1, s_2, ..., s_n, ...$$

Inoltre la scrittura

$$a_{n+1} + a_{n+2} + a_{n+3} + a_{n+4} + a_{n+5} + ... + a_{n+p} + ... = \sum_{i=n+1}^{\infty} a_i$$

e' detta serie **residua** di posto $n$.

Ora siamo in grado di associare al simbolo in (1) un numero nel seguente modo.

**Definizione** - *Si dice che la serie*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

*e' convergente ed ha per somma il numero $S$ quando $\{s_n\}$ e' convergente ed e'*

$$s_n \to S \text{ per } n \to +\infty$$

e si scrive

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} a_n.$$

**Definizione** - *Si dice che la serie*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

*e' divergente quando $\{s_n\}$ e'divergente.*

**Definizione** - *Si dice che la serie*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

*e' regolare quando $\{s_n\}$ e' o convergente o divergente. Per ogni altro caso la serie viene detta irregolare od oscillante.*

In breve si attribuisce alle serie il carattere delle proprie successioni parziali.

Qualche variazione:

**Definizione** - *Si dice che la serie*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

*converge per difetto ad $S$ e scriveremo*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = S^-$$

*quando $s_n \to S^-$. Cosi' diremo che la serie*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

*converge per eccesso ad $S$ e scriveremo*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = S^+$$

*quando $s \to S^+$ per $n \to +\infty$.*

Abbiamo posto un simbolo uguale ad un numero. Non occorre sconvolgersi piu' di tanto. Si cerchera' di avere delle proprieta' sul simbolo, per quanto possibile, coerenti con quelle dei numeri.

In accordo alle locuzioni introdotte per le successioni, risultera' chiaro il senso delle affermazioni: la serie ha definitivamente i termini non nulli; ha i termini definitivamente positivi; ha la successione dei termini definitivamente monotona, etc.

**Esempi. La serie di Mengoli. La serie armonica. La serie geometrica.**

Le serie che stiamo per scrivere devono essere considerate sia per l'interesse in se' sia come serie test o di riferimento.

• **Serie di Mengoli**

La serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + ... + \frac{1}{n\cdot(n+1)} + ...$$

e' detta serie di **Mengoli**.

Per valutarne il carattere consideriamo le somme parziali.

Dapprima osserviamo che

$$\frac{1}{n\cdot(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}.$$

Quindi

$$s_n = (1-\frac{1}{2}) + (\frac{1}{2}-\frac{1}{3}) + ... + (\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}) = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

Allora $s_n \to 1^-$ per $n \to +\infty$.

La serie di Mengoli e' convergente ed ha somma 1. Scriviamo

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$$

• **Serie armonica**

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n} + ....$$

e'detta serie **armonica**.

Per valutarne il carattere usiamo la formula di Eulero -Mascheroni

$$s_n = 1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n} \sim logn.$$

La serie armonica e' **divergente**.

• **Serie geometrica**

La serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = 1 + q + q^2 + ...q^n + ...$$

e' detta serie **geometrica** di ragione $q$.

Valutiamo il carattere della serie geometrica. E' palese che esso dipende dal valore di $q$.

Se $q = 1$ si ha $s_n = n + 1$ e la serie diverge. Quindi poniamo $q \neq 1$. Calcoliamo

$$s_n = 1 + q + q^2 + ...q^n.$$

Osserviamo che

$$qs_n = q + q^2 + ... + q^n + q^{n+1}.$$

Sottraendo termine a termine le due somme, si ha

$$s_n(1-q) = s_n - qs_n = 1 + q + q^2 + ... + q^n - (q + q^2 + ...q^n + q^{n+1}) = 1 - q^{n+1}$$

Concludiamo che

$$s_n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}.$$

Si presentano vari casi:

1) $q > 1 \Rightarrow q^n \to +\infty$ da cui la serie geometrica diverge.

2) $|q| < 1$ ovvero $-1 < q < 1$ allora $q^n \to 0$ pertanto

$$s_n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} \to \frac{1}{1-q}.$$

La serie geometrica e' convergente ed ha somma

$$\frac{1}{1-q}.$$

3) $q < -1$, per indici pari la somma parziale ha valore $> n \to +\infty$, per indici dispari la somma parziale ha valore $< -n \to -\infty$ . Quindi la successione delle somme parziali ha sottosuccessioni divergenti a $+\infty$ e sottosuccessioni divergenti a $-\infty$ per cui la successione delle somme parziali diverge a $\infty$ (infinito senza segno).

4) $q = -1$. La serie e' $1 - 1 + 1 - 1 + ....$ allora $\{s_n\} := 1, 0, 1, 0, 1, ...$
La serie e' irregolare.

Concludiamo affermando che la serie geometrica e' convergente per $-1 < q < 1$, e' irregolare per $q = -1$ e diverge per tutti gli altri valori di $q$.

**Alcune proprieta' delle serie**

Sia data la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n.$$

la serie

$$\sum_{n=p+1}^{\infty} a_n$$

ottenuta trascurando i primi $p$ termini della serie originaria, e' detta serie residua (o ridotta) $p-esimo$ o di posto $p$"; indicheremo $R_p$ la somma (se esiste) della serie ridotta che viene chiamato "resto della serie (convergente) dopo il posto $p$ e si scrive

$$R_p = \sum_{n=p+1}^{\infty} a_n.$$

Inoltre le somme parziali della serie residua o ridotta sono
$\bar{s}_1 = a_{p+1}$, $\bar{s}_2 = a_{p+1} + a_{p+2}$, $\bar{s}_3 = a_{p+1} + a_{p+2} + a_{p+3}$, ..., $\bar{s}_n = a_{p+1} + a_{p+2} + ... + a_{p+n}$

Non compare la somma dei primi $p$ termini della serie iniziale. Allora se $\{\bar{s}_n\}$ ha limite finito lo indicheremo $R_p$ e lo chiameremo resto di posto $p$. Poiche' le somme parziali delle due serie differiscono solo per una costante (la somma dei primi $p$ termini), e' chiaro che le due serie hanno lo stesso carattere (ma non la stessa somma). Si usa esprimere questo fatto dicendo che il carattere di una serie non dipende dai primi $p$ termini della serie stessa. Ovviamente cambia la somma.

2) Del raccoglimento a fattore comune.

Sia $c \neq 0$ una costante. Le due serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \qquad e \qquad \sum_{n=0}^{\infty} c a_n$$

hanno lo stesso carattere e se la prima e' convergente con somma $S$ la seconda e' convergente con somma $cS$. Inoltre la seconda viene anche scritta

$$c \sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

cioe' si e' posto in evidenza il fattore $c$.

**Condizioni di convergenza**

1) Sia

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

una serie convergente ed $S = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ la sua somma;
allora

$$a_n = s_n - s_{n-1} \to 0$$

dal momento che $\{s_n\}$ e $\{s_{n-1}\}$ sono le stesse successioni a meno di un elemento, pertanto hanno lo stesso limite ovvero $s_n \to S$ e $s_{n-1} \to S$.

Quindi abbiamo

**Teorema -** *Condizione necessaria per la convergenza di una serie*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

*e' che il termine generale tenda a zero ovvero $a_n \to 0$ per $n \to +\infty$.*

La condizione e' chiaramente non sufficiente perche' il termine generale $a_n = 1/n$ della serie armonica tende a zero eppure la serie armonica e' divergente.

Sia $S$ la somma della serie convergente $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$.

Ovvero $S = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$. Allora la serie residua di posto (n), $\sum_{n=0}^{\infty} a_n - s_n = a_{n+1} + a_{n+2} + ...$ e' convergente e la sua somma la incheremo $R_n$. $R_n$ (e' un numero ) e' il resto della serie convergente dopo il posto $n$.

Ora le somme $S$, $s_n$, $R_n$ (sono numeri) danno $S = s_n + R_n$ e si deduce che $R_n \to 0$ per $n \to \infty$. Quindi il resto di posto $n$ tende a zero per $n \to \infty$.

Pertanto possiamo dire:

**Teorema** *Se una serie e' convergente il suo resto di posto n-simo tende a zero per $n \to \infty$.*

**Criterio generale di convergenza**

Fino ad ora abbiamo evidenziato una condizione necessaria per la convergenza ovvero il termine generale tende a zero. Cerchiamo, ora, una condizione che sia anche sufficiente per la convergenza. A tal proposito consideriamo la seguente espressione

$$R_{n,p} = s_{n+p} - s_n = a_{n+1} + a_{n+2} + ...a_{n+p}.$$

$R_{n,p}$ e' la somma (numero) dei $p$ termini consecutivi al posto $n$ e viene chiamato resto " parziale " di posto $n$.

Dato che la convergenza di $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ e' identificata con la convergenza delle somme parziali $\{s_n\}$ possiamo applicare alle serie il criterio di convergenza di Cauchy per le successioni, adattandolo alle serie ovvero assegnando il ruolo della differenza fra elementi di una successione di posto $n$ e $m = n+p$ al resto $R_{n,p}$. Allora abbiamo

**Teorema** *Condizione necessaria e sufficiente affinche' una serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converga e' che: $\forall \epsilon > 0$ e' possibile determinare un indice $N_\epsilon$ (dipendente da $\epsilon$) tale che per ogni $n > N_\epsilon$ e $p$ un numero positivo arbitrario si abbia*

$$(*) \qquad (|s_{n+p} - s_n| =)|R_{n,p}| = |a_{n+1} + a_{n+2} + a_{n+3} + ... + a_{n+p}| < \epsilon.$$

Una volta osservato che preso $m > n$ e posto $m = n + p$ si ha

$$R_{n,p} = s_m - s_n$$

e l'enunciato del teorema e' proprio il criterio di convergenza di Cauchy per la successione $\{s_n\}$ delle somme ridotte.

Con questo criterio si puo' ricavare una conferma che la serie armonica non e' convergente.

Infatti

$$R_{n,2n} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + ... + \frac{1}{n+n} > \frac{n}{2n} > \frac{1}{2}.$$

Insistiamo, il criterio dice che per ogni $\epsilon > 0$ e per tutte le coppie $(n, p)$ (con $n > N_\epsilon$) vale la relazione (*). Per la serie armonica abbiamo costruito una coppia di indici per cui la proprieta' non vale.

## Serie a termini positivi

Consideriamo, ora, una serie a termini positivi o definitivamente positivi:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

Dato che tutti i termini $a_n$ sono positivi o nulli la successione delle somme parziali e' monotona non decrescente. Ad essa possiamo applicare tutti i risultati gia' ottenuti in caso di monotonia. Abbiamo il seguente criterio generale.

**Teorema** *Ogni serie*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

*con i termini positivi o nulli e' regolare: e' convergente o divergente a seconda che sia limitata o no la successione $\{s_n\}$ delle somme parziali. Inoltre se $L = Sup s_n$ allora*

$$L = \sum_{n=0}^{\infty} a_n.$$

Questo criterio non e' di facile applicazione pratica perche' non e' facile stabilire la limitatezza della successione. Nella pratica sono utili alcuni criteri sufficienti per decidere della convergenza o della divergenza.

• **Criterio del confronto**

**Definizione** *Siano*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n, \ e \sum_{n=0}^{\infty} b_n$$

*due serie a termini non negativi. Se $a_n \le b_n$ per ogni $n \ge 0$ si dice*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \ e' \ minorante \ della \ serie \ \sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

*oppure*

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n \ e' \ maggiorante \ della \ serie \ \sum_{n=0}^{\infty} b_n$$

*Se $a_n \le b_n$ vale per $n > n_0$ allora si dice definitivamente minorante .*

**Teorema** *Se una serie a termini positivi o definitivamente positivi e' convergente allora e' convergente ogni sua serie minorante;*
*se e' divergente allora e' divergente ogni sua serie maggiorante.*

*Inoltre se $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ e' minorante di $\sum_{n=0}^{\infty} b_n = B$ allora e' $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = S \le B$.*

La dimostrazione e' alquanto semplice.

Sia

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \ minorante \ di \ \sum_{n=0}^{\infty} b_n = B.$$

con $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ convergente.

Le somme parziali soddisfano la relazione

$$a_1 + a_2 + ... + a_n = A_n \le B_n = b_1 + b_2 + ... + b_n$$

(Abbiamo indicato le somme parziali con i simboli $A_n$ e $B_n$, rispettivamente.)

Dato che $B_n \le B$ per ogni $n$ si ha $A_n \le B$. Dunque la successione $\{A_n\}$ e' monotona crescente e limitata superiormente da un numero $A \le B$ ; la serie minorante e' convergente.

Se $A_n \to +\infty$, essendo $B_n \ge A_n$ allora $B_n \to +\infty$.

Il teorema e' dimostrato.

Questo teorema, come gli altri che seguiranno, non dice, in se', nulla di particolarmente interessante. L'interesse sta nella possibilita' di confronto con serie test di cui abbiamo conoscenza completa.

Una forma utile per semplificare il calcolo e di facile applicazione e' la seguente variante del criterio.

**Criterio del confronto asintotico** *Siano*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n, \ e \sum_{n=0}^{\infty} b_n$$

*due serie a termini positivi o definitivamente positivi. Se*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = l \neq 0.$$

*Allora le due serie hanno lo stesso carattere.*

Va da se' che nelle condizioni del criterio

$$a_n \sim lb_n$$

In breve

**Due serie a termini positivi ed asintotiche hanno lo stesso carattere**

Un altro criterio sufficiente per la regolarita' di una serie e' il seguente :

**Criterio di condensazione o di Cauchy** *Sia* $\{a_n\}$ *una successione monotona non crescente. Allora le due serie*

$$a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + ....... + a_n + ...$$

*e*

$$a_0 + 2a_2 + 2^2 a_{2^2} + 2^3 a_{2^3} + 2^4 a_{2^4} + .... + 2^k a_{2^k} + ... + .$$

*sono ambedue convergenti o ambedue divergenti.*

Senza perdere la generalita' consideriamo i termini positivi.

Per costruire la seconda serie si sono presi termini della prima serie di posto potenze di due cioe' elementi con indice, $2, 2^2, 2^3 ....$ ed ognuno e' moltiplicato per il rispettivo indice. Indichiamo con $s_n$ le somme ridotte della prima serie e con $\sigma_n$ le somme ridotte della seconda serie.

Osserviamo che ogni termine e ' maggiore dei successivi, allora abbiamo

$$\begin{aligned}
&a_0 \leq a_0, \\
&a_1 \leq a_0, \\
&a_2 + a_3 \leq 2a_2, \\
&a_4 + a_5 + a_6 + a_7 \leq 2^2 a_4, \\
&a_8 + a_9 + a_{10} + ... + a_{15} \leq 2^3 a_8, \\
&............................. \\
&................................... \\
&a_{2^n} + a_{2^n+1} + a_{2^n+2} + ... + a_{2^{n+1}-1} \leq 2^n a_{2^n}.
\end{aligned}$$

Sommando le disuguagliaze si ha

$$s_{2^{n+1}-1} \leq a_0 + \sigma_n.$$

Allora se $\{\sigma_n\}$ e' convergente allora e' convergente $\{s_n\}$; se $\{s_n\}$ e' divergente allora $\{\sigma_n\}$ e' divergente.

Inoltre

$$\begin{aligned}
&a_0 \geq \frac{1}{2} a_0, \\
&a_1 + a_2 \geq \frac{1}{2} 2a_2, \\
&a_3 + a_4 \geq \frac{1}{2} 4a_4, \\
&a_5 + a_6 + a_7 + a_8 \geq \frac{1}{2} 2^3 a_8, \\
&............................. \\
&................................... \\
&a_{2^{n-1}+1} + a_{2^{n-1}+2} + a_{2^{n-1}+3} + ... + a_{2^n} + \geq \frac{1}{2} 2^n a_{2^n}.
\end{aligned}$$

Sommando le disuguagliaze si ha

$s_{2^n} \geq \frac{1}{2}\sigma_n$.

Pertanto se $\{s_n\}$ converge allora converge $\{\sigma_n\}$; se $\{\sigma_n\}$ diverge allora diverge $\{s_n\}$. Il criterio e' dimostrato.

Osservazione: per semplicita' sono stato scelte le potenze di due come indice dei posti della seconda serie. Tutto vale con le potenze di qualsiasi numero naturale $k$.

Completiamo lo studio della serie armonica generalizzata.

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}$$

Abbiamo gia' mostrato che la serie diverge per $s \leq 1$ e converge per $s \geq 2$; esaminiamo il caso $1 < s < 2$.

Applichiamo il criterio di condensazione per la serie data. Otteniamo

$$1 + \frac{2}{2^s} + \frac{2^2}{2^{2s}} + \frac{2^3}{2^{3s}} + ..... + \frac{2^n}{2^{ns}} + .. = 1 + \frac{1}{2^{s-1}} + \frac{1}{(2^{s-1})^2} + \frac{1}{(2^{s-1})^3} + \frac{1}{(2^{s-1})^4} + ... \frac{1}{(2^{s-1})^n} + ..$$

Otteniamo una serie geometrica di ragione $q = \frac{1}{2^{s-1}}$ e, dato che $s - 1 > 0$, $q < 1$ per cui la serie geometrica e' convergente. Una dimostrazione piu' costruttiva e' la seguente:

Mostriamo che la serie :

$$1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \frac{1}{5^s} + ... + \frac{1}{n^s} + ..$$

e' convergente per $s > 1$.

Raggruppiamo in parentesi i termini nel seguente modo: il primo lo lasciamo senza modifica; per gli altri, nella prima parentesi poniamo due elementi consecutivi, nella seconda parentesi quattro elementi consecutivi, poi otto elementi consecutivi etc., allora abbiamo

$$1 + (\frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s}) + (\frac{1}{4^s} + \frac{1}{5^s} + \frac{1}{6^s} + \frac{1}{7^s}) + (\frac{1}{8^s} + ...$$

Valutiamo ogni parentesi:

$$\frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} < \frac{1}{2^s} + \frac{1}{2^s} = \frac{1}{2^{s-1}}.$$

$$\frac{1}{4^s} + \frac{1}{5^s} + \frac{1}{6^s} + \frac{1}{7^s} < \frac{1}{4^s} + \frac{1}{4^s} + \frac{1}{4^s} + \frac{1}{4^s} = 4 \cdot \frac{1}{4^s} = \frac{1}{(2^{s-1})^2}$$

Allora, per induzione, si ha

$$1 + \frac{1}{2^{s-1}} + \frac{1}{(2^{s-1})^2} + \frac{1}{(2^{s-1})^3} + ...$$

Questa e'la serie geometrica di ragione $\frac{1}{2^{s-1}}$ che e' convergente. Allora converge anche la armonica generalizzata per ogni $s > 1$.

Esempi:

1. La serie

$$\sum \frac{1}{n^n} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} + ... + \frac{1}{n^n} + ...$$

e' minorante della serie

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + ... + \frac{1}{2^n} ...$$

che e' la serie geometrica di ragione $q = 1/2$ priva del secondo termine ovvero e' la serie

$$\sum q^n - 1/2 = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + ... + \frac{1}{2^n} ...$$

che e' convergente a $3/2$. Pertanto la serie data e' convergente perche' e' minorante di una serie convergente.

2. La serie a termini positivi

$$\sum \frac{1}{n!} = 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + ... + \frac{1}{n!} + ...$$

e' una serie convergente perche' minorante della serie geometrica di ragione $1/2$

$$\sum \frac{1}{2^n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + ... + \frac{1}{2^n} ...$$

3. La serie

$$\sum \frac{1}{\sqrt{n}} = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + ... + \frac{1}{\sqrt{n}} + ...$$

diverge in quanto maggiorante della serie armonica

$$\sum \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n} + ...$$

Si ricorda che $\sqrt{n} \leq n$ da cui $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$.

4.

$$1) \qquad \sum \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + .... \frac{1}{n^2} + ..$$

e' minorante della serie di Mengoli tranne il primo termine.

$$\sum \frac{1}{n(n+1)} + 1 = 1 + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + ... + \frac{1}{n(n+1)} + ..$$

e'maggiorante di

$$\sum \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + .... \frac{1}{n^2} + ..$$

Quindi la serie (1) e' convergente.

5. Abbiamo constatato che e' facile verificare che la serie $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$ e' maggiorante della serie armonica di conseguenza e' divergente.

In generale, per

$$\sum \frac{1}{n^s}$$

( serie armonica generalizzata) si ha

i) per $0 < s \leq 1$ e' maggiorante della serie armonica quindi e' divergente;

ii) per $s \geq 2$ e' minorante della serie geometrica (priva del secondo termine) quindi e' convergente.

iii) per $1 < s < 2$ e' convergente.

6. Dimostrare la convergenza della serie

$$\sum \frac{1}{\sqrt{n(1+n^4)}} = \frac{1}{\sqrt{1(1+1^4)}} + \frac{1}{\sqrt{2(1+2^4)}} + ... + \frac{1}{\sqrt{n(1+n^4)}} + ...$$

Risulta

$$\frac{1}{\sqrt{n(1+n^4)}} \leq \frac{1}{\sqrt{n^4}} \leq \frac{1}{n^2}.$$

Quindi la serie data e' minorante di una serie convergente quindi e' convergente.

7. Studiare il carattere della serie

$$\sum \frac{n^2+n-logn}{3n^4+n^3-2}.$$

In questo caso conviene stabilire il comportamento asintotico del termine generale.

$$\frac{n^2+n-logn}{3n^4+n^3-2} = \frac{n^2}{3n^4}\frac{1+n^{-1}-logn/(n^2)}{1+1/3n-2/(3n^4)} \sim \frac{1}{3n^2}.$$

La serie data e' asintotica ad una serie convergente quindi e' convergente.

8. Studiare il carattere della serie che ha come termine generale

$$a_n = \frac{logn}{n^2+3}.$$

Osserviamo che

$$\frac{logn}{n^p} \to 0.$$

di sicuro per ogni $p \geq 1/2$, da cui abbiamo che definitivamente

$$\frac{logn}{n^p} < 1.$$

Al denomonatore abbiamo una buona potenza di $n$ ed una parte di essa la utilizziamo per neutralizzare il logaritmo. Allora vale

$$\frac{logn}{n^2+3} \leq \frac{logn}{n^2} = \frac{logn}{\sqrt{n}}\frac{1}{n^{3/2}} < \frac{1}{n^{3/2}}$$

definitivamente. Ma $\frac{1}{n^{3/2}}$ e' il termine generale della serie armonica generalizzata con potenza maggiore di 1, quindi convergente. La serie data e' minorante di una serie convergente pertanto e' convergente.

9. Mostrare che

$$\sum \frac{1}{logn}$$

e' divergente.

Osserviamo che $logn \leq n$ per $n > 1$ quindi $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{logn}$ per cui la serie data diverge.

10.

11. Mostrare che
$$\sum \frac{1}{nlogn}$$
e' divergente.

Applichiamo il criterio di condensazione e costruiamo la serie
$$\frac{2}{2log2} + \frac{2^2}{2^2log2^2} + + \frac{2^n}{2^nlog2^n} + ..$$
Valutiamo il termine generale
$$\frac{2^n}{2^nlog2^n} = \frac{2^n}{2^nnlog2} = \frac{1}{nlog2}$$
che e' il termine generale della serie armonica a meno di una costante. Quindi la serie data e' convergente.

12. Lo studente dimostri, applicando il procedimento dell'esercizio precedente, che per $\delta > 0$ la serie
$$\sum \frac{1}{n^{1+\delta}logn}$$
e' convergente.

### • Criterio della radice

**Teorema** *Sia $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ una serie a termini positivi o definitivamente positivi. Supponiano che esista un numero $\rho$ positivo minore di 1 $(0 < \rho < 1)$ tale che, almeno definitivamente,*
$$\sqrt[n]{a_n} \leq \rho.$$
*Allora la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ e' convergente.*

*Se per infiniti indici $n$ si ha*
$$\sqrt[n]{a_n} \geq 1$$
*allora la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ e' divergente.*

La dimostrazione e' alquanto semplice. Nel primo caso si confronta la serie data con una serie geometrica di ragione $\rho$. Infatti, per ipotesi, si ha, almeno definitivamente, (cioe' per $n$ abbastanza grande)
$$\sqrt[n]{a_n} \leq \rho < 1 \Rightarrow a_n \leq \rho^n.$$
Per cui la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ e' minorante della serie geometrica $\sum_{n=0}^{\infty} \rho^n$ di ragione minore di 1, almeno definitivamente. Quindi dal teorema del confronto e' convergente.

Per il secondo caso se
$$\sqrt[n]{a_n} \geq 1$$
allora $a_n \geq 1$ ed $a_n$ non puo' convergere a zero. La serie non puo' convergere. Dato che e' regolare deve quindi divergere.

Osservazione: Insistiamo che per il carattere di una serie non e' necessario considerare tutta la serie bensi' una serie residua ove si tralasciano i primi $n_0$ termini; questo e' cio' che si intende per definitivamente. In questo caso, nella dimostrazione, si considera la serie geometrica ridotta o residua :
$$\rho^{n_0} + \rho^{n_0+1} + \rho^{n_0+3} .... = \rho^{n_0}(1 + \rho + \rho^2 + ....$$

Una pratica variazione del criterio della radice e' data dal seguente teorema.

**Teorema - Criterio della radice asintotico** *Sia* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *una serie a termini positivi o definitivamente positivi. Supponiamo che esista*

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = l.$$

*Allora*

*1) se* $l < 1$, *la serie* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *e' convergente.*

*2) Se* $l > 1$, *la serie* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *e' divergente.*

*3) se* $l = 1$, *nulla si puo' dire in generale sul carattere della serie.*

Dimostrazione.
1) Per il teorema della permanenza del segno si ha che, definitivamente,

$$\sqrt[n]{a_n} < \rho = l + \epsilon < 1$$

con $\epsilon < 1 - l$. Ritroviamo le condizioni del criterio della radice.

2) Sempre per il teorema della permanenza del segno, abbiamo, definitivamente

$$\sqrt[n]{a_n} > \rho = l - \epsilon > 1$$

con $\epsilon < l - 1$ e vale il teorema precedente.

Per il terzo caso ci limitiamo a considerare due esempi.

La serie armonica

$$\sum \frac{1}{n}$$

e' divergente con

$$\sqrt[n]{1/n} \to 1^-.$$

Mentre la serie

$$\sum \frac{1}{n^2}$$

e' convergente in quanto minorante della serie di Mengoli ed ancora

$$\sqrt[n]{1/n^2} \to 1^-.$$

Per il calcolo dei limiti basta passare al logaritmo ovvero $log \sqrt[n]{1/n} = -\frac{logn}{n} \to 0^-$.

Esempi:

1. Stabilire il carattere della serie

$$\sum (\frac{n}{2n+1})^n = \frac{1}{3} + (\frac{2}{5})^2 + (\frac{3}{7})^3 + ... + (\frac{n}{2n+1})^n..$$

   E' naturale applicare il criteri della radice:

$$\sqrt[n]{(\frac{n}{2n+1})^n} = (\frac{n}{2n+1}) \to \frac{1}{2} < 1.$$

   La serie e' convergente.

2. Stabilire il carattere della serie

$$\sum \frac{1}{(logn)^n} = \frac{1}{(log2)^2} + ... + \frac{1}{(logn)^n}..$$

Anche in questo caso e' naturale applicare il criterio della radice:

$$\sqrt[n]{\frac{1}{(logn)^n}} = \frac{1}{logn} \to 0.$$

La serie data e' convergente.

3. Stabilire il carattere della serie

$$\sum e^{-n^2+xn}$$

dove $x$ e' un numero arbitrario.

Applichiamo il criterio della radice

$$\sqrt[n]{e^{-n^2+xn}} = e^{-n+x} \to 0$$

per ogni $x$. Quindi la serie data e' convergente.

4. Si consideri la serie

$$\sum \frac{x^n}{n^n}$$

con $x$ numero positivo qualsiasi.

Applichiamo il criterio delas radice.

$$\sqrt[n]{\frac{x^n}{n^n}} = \frac{x}{n} \to 0.$$

La serie e' convergente per ogni $x \geq 0$.

5. Studiare il carattere della serie

$$\sum x^n n^k$$

con $x$ numero non negativo.

Applichiamo il criterio della radice

$$\sqrt[n]{x^n n^k} = x \sqrt[n]{n^k} \to x$$

.

(Si ricorda che usando la forma esponenziale dobbiamo calcolare il limite

$$log(n^{k/n}) = \frac{k}{n} logn \to 0.)$$

Qualunque sia $k$ la serie converge per $x < 1$ e diverge per $x > 1$.

Per $x = 1$ la serie diventa

$$\sum n^k$$

Questo caso e' stato gia' studiato e si ha che la serie diverge per $k \geq -1$ e converge per $k < -1$.

6. Studiare la serie
$$\sum \frac{3n^2 - n + 2}{2n^3 + logn}.$$

Valutiamo il comportamento asintotico d del termine generale:

$$\frac{3n^2 - n + 2}{2n^3 + logn} = \frac{3n^2}{2n^3} \frac{(1 - 1/(3n) + 2/(3n^2))}{1 + logn/(2n^3)} \sim \frac{3}{2n}.$$

Quindi e' asintotica ad una serie amonica moltiplicata per una costante. La serie data e' divergente.

**Per quanto riguarda il criterio della radice asintotico abbiamo detto che per il caso**

$$\sqrt[n]{a_n} \to 1$$

**nulla si puo' dire. Pero' si puo' osservare che se si ha**

$$\sqrt[n]{a_n} \to 1^+$$

**La serie e' ovviamente divergente dal momento che definitivamente $a_n \geq 1$ ed il termine generale non puo' tendere a zero.**

**Il caso incerto resta solo $1^-$.**

• **Criterio del rapporto**

**Teorema** *Sia $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ una serie a termini strettamente positivi o definitivamente strettamente positivi. Allora*

*1) se esiste un numero $\rho$ positivo minore di 1 $(0 < \rho < 1)$ tale che, almeno definitivamente,*

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \rho$$

*la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ e' convergente.*

*2) Se*
$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq \rho \geq 1$$

*la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ e' divergente.*

1) Dalla ipotesi si ha
$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \rho.$$

Per semplicita' diciamo per ogni $n$. Allora

$$a_1 < \rho a_0; \; a_2 < a_1 \rho < a_0 \rho^2; \; ...a_n < a_{n-1} \rho < a_0 \rho^n.$$

Allora la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ e' minorante della serie geometrica di ragione $\rho < 1$; dal criterio del confronto e' convergente.

2) Dalla ipotesi si ha allora $a_{n+1} \geq \rho a_n$ per cui $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ e' maggiorante di una serie geometrica di ragione maggiore o uguale ad 1 che diverge. Da cui l'asserto.

Una pratica variazione del criterio del rapporto e' data dal seguente teorema.

**Criterio del rapporto asintotico**

**Teorema** *Sia $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ una serie a termini positivi o definitivamente positivi.*

*Supponiamo che esista*

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=l.$$

*Allora*

*1) se* $l<1$ *la serie* $\sum_{n=0}^{\infty}a_n$ *e' convergente.*

*2) Se* $l>1$ *o* $l=1^+$ *la serie* $\sum_{n=0}^{\infty}a_n$ *e' divergente.*

*3) se* $l=1^-$ *nulla si puo' dire in generale sul carattere della serie.*

1) Per ipotesi

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=l<1.$$

Dal teorema della permanenza del segno si ha

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}\leq\rho=l+\epsilon<1$$

con $\epsilon<1-l$.

Allora ritroviamo le condizioni del teorema del rapporto

2) Sempre dal teorema della permanenza del segno si ha, definitivamente,

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=l>1$$

si ha

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}\geq\rho=l-\epsilon>1$$

con $\epsilon<l-1$.
Se $l=1^+$ si ha definitivamente $a_{n+1}>a_n$ ed il termine generale non puo' tendere zero.

3) Il terzo caso $l=1^-$ e' giustificato dalle solite due serie

$$\sum\frac{1}{n},\sum\frac{1}{n^2}$$

una diverge e l'altra converge con il limite del rapporto dei termini che tende a $1^-$.

Esempi:

1. Studiare il carattere della serie

$$\sum\frac{1}{n!}=1+\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+...+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot ...\cdot n}+...$$

   Applichiamo il criterio del rapporto

$$\frac{n!}{(n+1)!}=\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot ....\cdot n}{1\cdot 2\cdot 3\cdot ....\cdot n\cdot(n+1)}=\frac{1}{n+1}\to 0.$$

   La serie e' convergente.

2. Studiare il carattere della serie

$$\sum\frac{n!}{n^n}=\frac{1!}{1}+\frac{2!}{2^2}+...\frac{n!}{n^n}...$$

   Applichiamo il criterio del rapporto

$$\frac{\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{n!}{n^n}}=\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}\frac{n^n}{n!}=(\frac{n}{n+1})^n\to e^{-1}$$

   .

   Quindi la serie data e' convergente.

3. Studiare il carattere della serie

$$\sum \frac{2^n}{n} = \frac{2}{1} + \frac{2^2}{2} + ... + \frac{2^n}{n}...$$

Applichiamo il criterio del rapporto

$$\frac{\frac{2^{n+1}}{n+1}}{\frac{2^n}{n}} = \frac{2^{n+1}}{n+1}\frac{n}{2^n} = 2\frac{n}{n+1} > 1.$$

per $n \geq 2$.

Quindi la serie data e' divergente.

**• Serie con termini di segno qualsiasi**

Consideriamo ora serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ con termini di segno qualsiasi. Non e' facile valutarne il carattere. Esse, in generale, hanno successioni di somme parziali a carattere oscillante.

Per applicare a tali serie gli strumenti che sono stati costruiti nei paragrafi precedenti si considera la serie dei valori assoluti dei loro termini. Diamo dunque la seguente definizione.

**Definizione** *Sia $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ una serie a termini reali. Si dice che e' assolutamente convergente se converge la serie dei valori assoluti dei suoi termini ovvero se converge la serie a ternini positivi*

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|.$$

E' intuibile che una serie assolutamente convergente e' convergente in senso ordinario.

Per dimostralo facciamo uso del criterio di Cauchy. La convergenza assoluta della serie e' equivalente a:

per ogni $\epsilon > 0$ e' possibile coordinare un numero naturale $N_\epsilon$ tale che per ogni $n > N_\epsilon$ e $p \geq 0$ si ha

$$R_{n,p} := |a_n| + |a_{n+1}| + ... + |a_{n+p}| < \epsilon.$$

Allora, con gli stessi indici, per il resto $\bar{R}_{n,p}$ della serie ordinaria si ha

$$|\bar{R}_{n,p}| = |a_n + a_{n+1} + ... + a_{n+p}| \leq |a_n| + |a_{n+1}| + ... + |a_{n+p}| < \epsilon.$$

Non v' e' dubbio che non vale il contrario ovvero una serie convergente in senso ordinario non e' detto che sia anche assolutamente convergente.

Dai criteri di regolarita' delle serie a termini positivi si ricavano i criteri di assoluta regolarita' che scriviamo qui di seguito.

**• Criterio del confronto**

*Siano*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n, \ e \ \sum_{n=0}^{\infty} b_n$$

*due serie di cui la seconda e' a termini positivi ed almeno definitivamente*

$$|a_n| \leq b_n$$

.

*Allora se la serie* $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ *e' convergente la serie* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$*, minorante della serie* $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$*, e' assolutamente convergente.*

• **Criterio della radice**

*Se risulta*

$$\sqrt[n]{|a_n|} \leq \rho < 1$$

*la serie*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

*converge assolutamente.*

*Se invece, per infiniti indici, si ha*

$$\sqrt[n]{|a_n|} \geq \rho > 1$$

*la serie data non converge.*

*Inoltre se*

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = l$$

*la serie data converge assolutamente se* $l < 1$*, non converge se* $l > 1$ *o* $l = 1^+$*, se e'*$l = 1^-$ *nulla si puo' dire senza una ulteriore indagine.*

• **Criterio del rapporto**

*Se risulta*

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \leq \rho < 1$$

*la serie*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

*converge assolutamente.*

*Se invece per infiniti indici si ha*

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \geq \rho > 1$$

*la serie data non converge, diverge.*

*Inoltre se*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = l.$$

*La serie data converge assolutamente se* $l < 1$*, non converge se* $l > 1$ *o* $l^+$*, se* $l = 1^-$ *nulla si puo' dire senza una ulteriore indagine.*

Un altro interessante tipo di serie e' quella a segno alternato ovvero serie del tipo

$$\sum_{n=0}(-1)^n a_n$$

con $a_n \geq 0$.

Vale il seguente teorema

**Teorema di Leibnitz -** *Sia*

$$\sum_{n=0}(-1)^n a_n$$

*una serie a segno alternato. Se*

$$a_{n+1} \leq a_n$$

*e*

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$$

*allora la serie e' convergente.*

La dimostrazione usa pesantemente la monotonia.

Si considerano somme parziali di indice pari ovvero si sommano i primi $2p$ termini della somma e le scriviamo

$$s_{2p} = a_0 - (a_1 - a_2) - (a_3 - a_4) - .... - (a_{2p-1} - a_{2p}).$$

Questa struttura mostra che la successione delle somme parziali con indice pari e' non crescente dal momento che al crescere di $p$ crescono i termini negativi quindi abbiamo

$$s_0 \geq s_2 \geq s_4 \geq .... \geq s_{2p} \geq ...$$

Inoltre per la monotonia dei termini della serie si ha

$$s_{2p} = (a_0 - a_1) + (a_2 - a_3) + (a_4 - a_5) + .... + a_{2p} \geq 0.$$

L'insieme delle somme parziali di indice pari e' inferiormente limitato.

Dai teoremi di monotonia esiste

$$\lim_{p\to+\infty} s_{2p} = S \geq 0.$$

Consideriamo le somme parziali di indice dispari. Similmente

$$s_{2n+1} \leq s_{2n+1} + a_{2n+2} - a_{2n+3} = s_{2n+3}.$$

e quindi

$$s_1 \leq s_3 \leq s_5 \leq \cdots \leq s_{2n+1} \leq \cdots$$

$$s_{2p+1} = s_{2p} - a_{2p+1}.$$

La successione delle somme con indice dispari e' non decrescente.

Dato che per ipotesi il termine generale $a_n \to 0$ si ha

$$\lim_{p\to+\infty} s_{2p+1} = \lim_{p\to+\infty} (s_{2p} - a_{2p+1}) = S.$$

Essendo $S$ il limite delle somme parziali pari, dalla definizione di limite, si ha che per ogni $\epsilon > 0$ esiste $N_\epsilon > 0$ tale che $|S - s_{2n}| < \epsilon$ per ogni $2n > N_\epsilon$. Allo stesso modo, essendo $S$ il limite delle somme parziali dispari, esiste $\nu_\epsilon > 0$ tale che la disuguaglianza $|S - s_{2p+1}| < \epsilon$ vale per ogni $2p+1 > \nu_\epsilon$ . Quindi, prendendo $\mu_\epsilon = max(N_\epsilon, \mu_\epsilon)$, la disuguaglianza

$$|S - s_n| < \epsilon$$

vale per ogni $n > \mu_\epsilon$, $n$ pari o dispari, e si ha quindi

$$\lim_{n\to\infty} s_n = S.$$

La successione delle somme parziali e' convergente ed ha come limite $S$

Possiamo scrivere allora

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n.$$

### Prodotto della serie per un numero. Somma e differenza di serie

Quando si e' posto $S = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ si ha avuto un po' di incertezza perche' alla sinistra abbiamo un numero con le sue proprieta' mentre alla destra abbiamo un simbolo di cui conosciamo poco. Ora e' il momento di ristabilire una parziale coerenza fra i due simboli. Incominciamo con la moltiplicazione della serie per un numero.

**Definizione** *Si dice moltiplicazione di una serie* $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ *per un numero* $c$ *la serie* $\sum_{n=0}^{+\infty} ca_n$.

Abbiamo gia' osservato che le due serie, se $c \neq 0$, hanno lo stesso carattere e se la prima e' convergente ed ha somma $S$ anche la seconda e' convergente con somma $cS$. Se la prima e' assolutamrente convergente anche la seconda e' assolutamente convergente.

Inoltre si usa scrivere

$$\sum_{n=0}^{+\infty} ca_n = c\sum_{n=0}^{+\infty} a_n.$$

**Definizione** *Si dice serie somma (o differenza) delle due serie* $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ *e* $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$ *la serie*

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(a_n + b_n), \quad \sum_{n=0}^{+\infty}(a_n - b_n).$$

Stabiliamo il legame fra i simboli.
Indichiamo con $A_n$ le somme parziali di $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ e con $B_n$ le somme parziali di $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$ e con $C_n = A_n + B_n$ o $D_n = A_n - B_n$ le somme parziali della somma e differenza.

**Definizione** *Si dice serie somma (o differenza) delle due serie* $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ *e* $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$ *la serie* $\sum_{n=0}^{+\infty}(a_n+b_n)$ *(o* $\sum_{n=0}^{+\infty}(a_n - b_n)$*).*

Se $A_n \to A$ e $B_n \to B$ allora $C_n \to A + B$ e $D_n \to A - B$ per $n \to +\infty$. Allora abbiamo

**Teorema** *Se le serie* $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ *e* $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$
*sono convergenti risultano convergenti anche le serie*

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(a_n + b_n) \quad e \quad \sum_{n=0}^{+\infty}(a_n - b_n)$$

*e vale*

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(a_n \pm b_n) = \sum_{n=0}^{+\infty}(a_n) \pm \sum_{n=0}^{+\infty} b_n.$$

*Se* $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ *e* $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$ *sono assolutamente convergente lo sono anche* $\sum_{n=0}^{+\infty}(a_n \pm b_n)$.

Osserviamo che in caso di convergenza il simbolo di serie $\sum_{n=0}^{+\infty}$ ha la proprieta' distributiva rispetto alla somma . Questa non vale in generale. Ad esempio la $\sum_{n=0}^{+\infty}(a_n + b_n)$ puo' convergere senza che convergano le serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ e $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$.

Considerando la parziale aritmetica dell'infinito possiamo estendere la proprieta' del teorema anche ai casi di divergenza con le seguenti modalita':

se $A = \infty$ $(o \ \pm\infty)$ e $B$ e' un numero allora

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(a_n \pm b_n) = \infty \ (o \pm \infty).$$

se $A = +\infty$ $(-\infty)$ e $B = +\infty$ $(-\infty)$ (infiniti dello stesso segno) allora

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(a_n + b_n) = +\infty\ (-\infty).$$

Nulla si puo' dire se $A = \infty$ e $B = \infty$.

**Prodotto di serie secondo Cauchy**

Veniamo a trattare brevemente il prodotto di due serie.

**Definizione di prodotto secondo Cauchy** *Si dice serie prodotto delle due serie*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \ e \ \sum_{n=0}^{+\infty} b_n$$

*la serie*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n$$

*ove*

$$c_0 = a_0b_0,\ c_1 = a_0b_1+a_1b_0,\ c_2 = a_0b_2+a_1b_1+a_2b_0,\ ..., c_n = a_0b_n+a_1b_{n-1}+a_2b_{n-2}+a_3b_{n-3}+...+a_nb_0, ...$$

Scriviamo in forma compatta il termine generale

$$c_n = \sum_{i=0}^{n} a_i b_{n-i}\ (detto\ prodotto\ ; di\ convoluzione\ discreta).$$

Si esegua la moltiplicazione, usando il calcolo letterale, di

$$(a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n + ...)(b_0 + b_1 + b_2 + b_3 + b_4 + +... + b_n + ...).$$

Raggruppando poi i termini che hanno la stessa somma degli indici, si ottengono gli elementi della serie prodotto secondo Cauchy

$$a_0b_0 + (a_0b_1 + a_1b_0) + (a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_2) + ....$$

Vale il seguente teorema.

**Teorema** *Siano*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \ e \ \sum_{n=0}^{+\infty} b_n$$

*due serie assolutamente convergenti. Allora anche la serie prodotto*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n$$

*e' assolutamente convergente ed ha per somma il prodotto delle serie fattori.*

Posto $A = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ e $B = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n$ allora $C = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n = AB$.

Qualche osservazione. Abbiamo messo in evidenza qualche incoerenza formale tra la operazione di somma e quella di serie. Nonostante l' apparente somiglianza, una serie e' un concetto molto diverso da quello di somma. Per associare un numero al simbolo di serie non solo abbiamo affiancato al concetto di somma il processo di limite ma abbiamo anche costruito una successione particolare che e' la successione delle somme parziali costruite con un certo ordine a cui si applica il limite. In particolare non si possono applicare le proprieta' associativa e commutativa tipiche della somma. Detta $\{s_n\}$ la successione delle somme parziali di una serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$, se si associano piu' termini $a_n$ si ottiene un'altra serie la cui successione delle somme parziali ha un numero di somme parziali minore di quella iniziale. Se il numero di elementi mancanti e' finito nulla cambia per quanto riguarda la somma delle serie. Cambia notevolmente invece se il numero delle associazioni e' infinito. Cosa piu' complessa quando si dissociano i termini $a_n$; in questo caso si inseriscono piu' somme parziali. Anche in questo caso se si dissociano infiniti elementi la serie risultante puo' avere carattere diverso da quella originaria. Un esempio classico e' il seguente.

$$0 = 0 + 0 + 0... + 0....$$

Posto $0 = 1 - 1$ si ha

$$0 = (1-1) + (1-1) + (1-1) + ....(1-1)...$$

Ma la serie

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1... + 1 - 1....$$

e' una serie indeterminata in quanto la successionedelle somme paziali e': 1,0,1,01,0,... Cosi'

$$1 + (-1+1) + (-1+1) + ...(-1+1).... = 1$$

e'convergente.

La situazione puo' essere piu' sorprendente se si scambiano i posti dei termini di una serie . Consideriamo, per esempio, la serie armonica a segno alterno

$$\sum (-1)^{n+1}\frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4}... = log2$$

e' convergente perche' verifica le ipotesi del teorema di Leibnitz.

Ebbene se riordiniamo i suoi termini come segue

$$1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{5} - ...$$

(uno positivo e due negativi), la serie e' ancora convergente ma ha somma $ln2/2$.

Oppure scambiando l'ordine dei termini in modo da avere due termini positivi consecutivi ed uno negativo . La serie ottenuta ha un'altra somma.

Si puo' addirittura provare che e' possibile riordinare i termini in modo da ottenere una serie divergente, oppure una serie convergente ad un reale qualsiasi. Solo per le serie assolutamente convergenti (in particolare quelle positive) le proprieta' associativa e commutativa continuano a valere: questo il motivo principale della loro importanza applicativa.

## Complementi

### Proprieta' associativa

Sia

$$1) \qquad \sum a_n = a_0 + a_1 + a_2 + ... + a_n + ...$$

e

$$s_0, s_1, s_2, ..., s_n, ...$$

la successione delle sue somme ridotte.

Raccogliendo in un unico termine piu' termini della somma ad esempio $a_5, a_6, a_7$ e raccogliendo i tre termini in una parentesi, la serie diventa

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + (a_5 + a_6 + a_7) + a_8 + .....$$

Allora per questa nuova serie la successione delle somme ridotte

$$\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4, \sigma_5, ..., \sigma_n, ..$$

e' tale che

$$s_0 = \sigma_0, s_1 = \sigma_1, s_2 = \sigma_2, s_3 = \sigma_3, s_4 = \sigma_4, s_7 = \sigma_5, s_8 = \sigma_6, ..$$

La successione delle somme $\{\sigma_n\}$ coincide con la successione $\{s_n\}$ privata di $s_5, s_6$.

Dunque $\{\sigma_n\}$ e' una sottosuccessione di $\{s_n\}$. Per induzione possiamo affermare che in base a questa osservazione, se nella serie si associano, con una legge qualsiasi, un numero finito di termini consecutivi, si ottiene una nuova serie la cui successione delle somme ridotte e' contenuta in quella della serie data (1). Allora vale il

**Teorema** - *Se si associano gruppi di un numero finito di elementi consecutivi di una serie regolare si ottiene una nuova serie con la stessa regolarita' e la stessa somma (finita o infinita).*

Sotto le condizioni del teorema, possiamo dire che per le serie vale la proprieta' associativa.

Tale proprieta' non vale per le serie indeterminate.

2) Cosa piu' complessa e' dissociare un numero ovvero scrivere un termine della serie come somma di piu' numeri, ad esempio: $a_n = (a_{n_1} + a_{n_2} + ... + a_{n_1})$. Questo fatto prova l'inserimento di nuove somme parziali rispetto alle somme parziali iniziali pari al numero degli addendi della dissociazione. Se si effettuano infinite dissociazioni, in generale, l'effetto e' imprevedibile. La serie ottenuta per dissociazione da una serie regolare puo' essere irregolare. Riscriviamo gli esempi gia' dati.

$$0 = 0 + 0 + 0... + 0....$$

Posto $0 = 1 - 1$ si ha

$$0 = (1 - 1) + (1 - 1) + (1 - 1) + ....(1 - 1)...$$

Ma la serie

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1... + 1 - 1....$$

e' una serie indeterminata. Cosi'

$$1 + (-1 + 1) + (-1 + 1) + ...(-1 + 1).... = 1$$

e' convergente.

**Possiamo affermare che per le serie, in generale, non vale la legge dissociativa.**

Come abbiamo gia' anticipato una risposta certa si puo' dare sotto alcune condizioni.

*Se si dissocia ogni termine $a_n$ di una serie $\sum a_n$ in un numero finito di termini dello stesso segno allora la nuova serie ha lo stesso carattere della precedente e se convergenti hanno la stessa somma. Quindi nel contesto delle serie a termini positivi la legge di dissociazione ( in numero finito di termini) vale.*

3) **Proprieta' commutativa**

La situazione e' piu' seria per la proprieta' commutativa. Dapprima precisiamo cosa si intende per cambiare o permutare l'ordine dei termini in una serie.

Date due serie, se fra i loro termini si stabilisce una corrispondenza biunivoca tale che gli elementi corrispondenti siano sempre uguali si dice che le due serie differiscono per l'ordine o che una e' ottenuta dall'altra cambiando l'ordine.

Dunque, **alterare l'ordine o riordinare** i termini di una serie significa dare una legge che permetta, assegnato un termine di posto $n$ della prima serie, di conoscere il posto $n'$ di questo termine nella nuova serie. In sostanza il termine ha cambiato posto.

Qual'e' l' effetto di questo cambiamento? In certi casi permutando l'ordine dei termini una serie convergente puo' restare convergente e cambiare somma oppure divenire divergente oppure indeterminata. Ad esempio . Prendiamo in considerazione la serie armonica a segno alterno

$$(*) \qquad 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+....=log2.$$

Consideriamo la serie riordinata con due termini positivi seguiti da uno negativo

$$1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}-..\frac{1}{4n-3}+\frac{1}{4n-1}-\frac{1}{2n}+...=\frac{3}{2}log2.$$

Mentre, riordinando (*) con un termine positivo seguito da due negativi

$$1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+.....=\frac{1}{2}log2.$$

In conclusione per le serie non vale, in generale, la proprieta' commutativa.

Allora le serie che hanno la proprieta' commutativa sono serie particolari, ammesso che esistano, ovvero formano un sottoinsieme delle serie che a priori puo' essere anche vuoto.

Si da' la seguente definizione.

**Definizione -** *Una serie e' detta incondizionatamente convergente ( incondizionatamente divergente) quando e' convergente (divergente) ed e' convergente ogni serie ottenuta riordinando i suoi termini.*

*Nel caso contrario si dira' condizionatamente convergente (divergente).*

Dall'esempio dato sembra che la causa della non commutativita' sia la presenza di infiniti termini di segno opposto. In effetti e' cosi'. Questa osservazione e' confortata dal seguente teorema.

**Teorema** *Permutando l'ordine dei termini di una serie a termini positivi o nulli si ottiene un'altra serie a termini positivi con lo stesso carattere e con la stessa somma finita od infinita. Allora ogni serie convergente a termini definitivamente positivi e' incondizionatamente convergente*

La dimostrazione e' semplice. Sia 1) $\sum a_n$ la serie data a termini positivi e sia 2) $\sum b_n$ la serie riordinata. Le successioni parziali di entrambe le serie ammettono limite. Dai teoremi di monotonia tali limiti sono finiti se le due successioni sono limitate. Sia $B_n$ la somma ridotta della serie (2). Sia $\nu$ il piu' piccolo numero per cui $A_\nu$, somma ridotta della serie (1), contenga tutti i termini in $B_n$. Ovviamente $\nu > n$ dipende da $n$ ed e' un numero finito. Inoltre, dato che tutti i termini sono positivi o al piu' nulli, si ha

$$B_n \leq A_\nu.$$

Supponiamo che la serie (1) sia convergente e la sua somma sia $A$. Si sa che $A = SupA_n$. Allora

$$B_n \leq A.$$

L'insieme delle somme parziali $B_n$ e' limitato pertanto la serie (2), di termini positivi, e' convergente con somma $B \leq A$. Scambiando le parti nel procedimento precedente si ha $A \leq B$ da cui l'asserto.

Enunciamo il teorema generale di convergenza incondizionata di *Dirichlet*.

**Teorema di Dirichlet** *Condizione necessaria e sufficiente affinche' una serie sia incondizionatamente convergente e' che sia assolutamente convergente e conserva la stessa somma qualunque sia il riordinamento.*

Brevemente: la condizione necessaria e sufficiente vale anche per la divergenza a $+\infty$ ($-\infty$) quando la serie dei suoi termini positivi (negativi) e' divergente e che i suoi termini negativi (positivi ) non disturbino troppo ovvero o sono in numero finito opppure la loro somma sia finita.

Le serie a termini definitivamente positivi sono incondizionatamente convergenti.

**Successioni e serie a termini complessi**

Fino ad ora abbiamo trattato successioni e serie con elementi che sono numeri reali. Quanto detto per tali successioni o serie, mutatis mutandis, si estende in modo naturale ai numeri complessi. Ne diamo un breve cenno.

Sia

$$* \qquad \{z_n\} := z_0, z_1, z_2, z_3, ....., z_n, ....$$

una successione di numeri complessi: $z_n = x_n + iy_n$ con $n = 1, 2, 3, ....$

E' manifesto che se vogliamo valutare il carattere della successione (*) dobbiamo considerare il carattere simultaneo delle due successioni $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$. A tal fine procediamo nel seguente modo.

**Definizione** *Diremo che il numero complesso $z = x + iy$ e' il limite della successione (*) se risulta*

$$\lim_{n\to+\infty} |z_n - z| = 0$$

*ovvero per ogni $\epsilon > 0$ e' possibile coordinare un numero $N_\epsilon > 0$*
*tale che per ogni $n > N_\epsilon$ si ha*

$$|z_n - z| < \epsilon.$$

Osserviamo che le misure delle vicinanze sono espresse da numeri reali. Geometricamente significa che, definitivamente , $z_n$ e' contenuta nel cerchio di centro $z$ e raggio $\delta_\epsilon$.

Ricordando che

$$|z_n - z| = |(x_n - x) + i(y_n - y)| = \sqrt{(x_n - x)^2 + (y_n - y)^2}$$

si ha

$$(|x_n - x| \text{ e } |y_n - y|) \leq |z_n - z| \leq |x_n - x| + |y_n - y|$$

e possiamo affermare che

$$z_n \to z \Leftrightarrow x_n \to x \text{ e } y_n \to y.$$

Per quanto riguarda la divergenza la esprimiamo nel seguente modo:

**Definizione** *Diremo che la successione (*) e' divergente se*

$$\lim_{n\to+\infty} |z_n| = +\infty$$

*ovvero per ogni $K > 0$ e' possibile coordinare un numero $N_K > 0$*
*tale che per ogni $n > N_K$ si ha*

$$|z_n| > K.$$

Geometricamente, i numeri complessi $z_n$ sono definitivamente esterni al cerchio di centro l'origine e raggio $K$.

In questo caso non e' detto che entrambe le successioni $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ tendano all'infinito. Basta che almeno una non sia limitata.

Osserviamo ancora che tutto e' regolato dal concetto di distanza o modulo dei numeri complessi. Da queste definizioni parte dei teoremi e criteri che abbiamo stabiliti per le successioni di numeri reali valgono per le successioni di numeri complessi, in particolare, l'algebra dei limiti, le forme di indecisione il concetto di asintoto, di o piccolo, etc.

Con queste nozioni a disposizione possiamo, ora, considerare serie di numeri complessi.

Sia

$$* \qquad \{z_n\} := z_0, z_1, z_2, z_3, ....., z_n, ....$$

una successione di numeri complessi: $z_n = x_n + iy_n$ con $n = 1, 2, 3, ....$ e consideriamo la scrittura che chiamiamo serie di numeri complessi

$$(*) \qquad \sum_{i=0}^{\infty} z_n := z_0 + z_1 + z_2 + z_3 + ..... + z_n, ....$$

Si costruisce la successione delle somme ridotte $\{s_n\}$ con

$$s_n = z_0 + z_2 + z_3 + .... + z_n = \sum_0^n z_n = \sum_0^n x_n + i \sum_0^n y_n.$$

Come al solito attribuiamo alla serie il carattere della successione delle somme parziali. In particolare, se

$$s_n \to Z = X + iY$$

diremo che la serie (*) e' convergente ed ha somma $Z$ e scriveremo

$$Z = \sum_{i=0}^{\infty} z_n = z_0 + +z_1 + z_2 + z_3 + ..... + z_n, ...$$

Possiamo anche scrivere

$$X = \lim_{n\to+\infty} \sum_1^n x_i \text{ e } Y = \lim_{n\to+\infty} \sum_1^n y_i.$$

Anche per le serie a termini complessi valgono parte delle definizioni, dei teoremi e criteri stabiliti per le serie a termini reali. In particolare, la assoluta convergenza: cioe' una serie

$$\sum_{i=0}^{\infty} z_n$$

e' assolutamente convergente se e' convergente

$$\sum_{i=0}^{\infty} |z_n|.$$

Questa nozione e' di particolare importanza dal momento che nel campo dei numeri complessi non vale la consueta nozione di ordine.

**Serie di potenze**

Una delle serie numeriche di riferimento di notevole importanza e' la serie geometrica i cui termini sono potenze di un numero detto ragione. Estendiamo questo tipo di serie nella seguente forma

$$(*) \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n := a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + ...a_n x^n + ...$$

ove $a_n$ sono numeri reali ed $x$ la variabile reale $x$. Se poniamo $a_n = 1$ per ogni $n$ e $x = q$ ritroviamo la classica serie geometrica. In questo caso la serie e' convergente per $|x| < 1$ e la somma della serie e'

$$\frac{1}{1-x}.$$

Leggiamo il risultato nel seguente modo: la serie in questione definisce una funzione della variabile $x$ il cui dominio $D$ e' l' insieme in cui la serie converge, ossia l'intervallo aperto simmetrico di centro 0 ed ampiezza 2 cioe' $I = (-1, 1)$ o $|x| < 1$. Le serie di potenze sono un'estensione della serie geometrica: le potenze sono "centrate" in un generico punto $x_0 \in \mathbb{R}$ e la potenza $n$-esima viene moltiplicata per un coeffciente reale $a_n$.

Le costanti $a_n$ sono chiamate coefficienti di $x_n$ . Il simbolo $x$ indica la variabile reale. Una serie di potenze puo' convergere per alcuni valori di $x$ e divergere per altri. Scritture del tipo (*) le abbiamo gia' incontrate con la formula di Taylor o di Mac-Laurin.

La convergenza della serie (*) dipende dai coefficieti $a_n$. Applichiamo il criterio della radice: supponiamo

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = A.$$

Allora

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n x^n|} = |x| \lim_{n\to} \sqrt[n]{|a_n|} = |x|A < 1.$$

La serie e' convergente per $x$ in $I = (-R, R)$ con $R = \frac{1}{A}$.

Analogamente, se

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = A$$

applicando il criterio del rapporto

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}x^{n+1}|}{|a_n x^n|} = |x| lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = A$$

la serie converge per $x \in (-R, R)$ intervallo simmetrico rispetto ad 0.

**$R$ lo chiameremo raggio di convergenza.**

Se $A = \infty$ poniamo $R = 0$ se $A = 0$ poniamo $R = +\infty$. La serie invece non converge se $|x| > R$. La determinazione del raggio di convergenza, come suggerisce la dimostrazione precedente, non da' alcuna informazione sul carattere della serie agli estremi del dominio quando $x = \pm R$. Per dare una risposta in questi casi bastera' studiare le serie numeriche corrispondenti ponendo $x = \pm R$.

Caso particolare

$$a_n = \frac{1}{n!}$$

.

Per questo caso abbiamo, applicando il criterio del rapporto,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0.$$

Allora la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!} x^n$$

e' convergente per ogni $x$.

Appare chiaro che se la serie di potenze e' centrata in $x_0$ allora la serie di potenze diventa

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n (x - x_0)^n.$$

Quanto detto sopra relativo al centro 0 si applica ad $x_0$. L'intervallo simmetrico di convergenza della serie e' $|x - x_0| < R$.

Le serie di potenze dipendono dalla variabile $x$. E' naturale indicarle con un simbolo che ricordi questa dipendenza. Useremo la seguente scrittura

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n.$$

Per ora e' una scrittura formale che ricorda il concetto di funzione della variabile $x$. Essa e' ben definita quando ne preciseremo il dominio $D$ ovvero l'insieme dei valori della variabile per cui la serie risulti convergente. Osserviamo che $D$ non e' vuoto, contiene 0. La seguente osservazione ha un certo interesse pratico.

**Teorema di Abel** *Sia*

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

*e sia $x_0$ un valore della variabile $x$. Se $x_0 \in D$ allora l'intervallo $|x| < |x_0|$ e' contenuto in $D$,*

*ovvero se la serie $S(x)$ converge in $x_0$ allora converge per tutti i punti $x$ soddisfacenti la relazione $|x| < |x_0|$.*

Diamo una dimostrazione semplice assumendo $a_n > 0$, per il caso generale si fa uso del criterio di Cauchy: supponiamo $x_0 > 0$. La serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x_0^n$ e' convergente da cui

$$a_n x_0^n \to 0.$$

Cronfrontiamo $a_n x^n$ e $a_n x_0^n$ per $|x| < x_0$, si ha

$$\frac{|a_n x^n|}{|a_n x_0^n|} = \frac{|x^n|}{x_0^n} < 1.$$

Quindi

$$|\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} a_n |x^n| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x_0^n.$$

Dal criterio del confronto si ha che $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ e' convergente per $|x| < x_0$.

Per $x_0 < 0$ la dimostrazione e' analoga.

Somme di potenze le abbiamo gia' costruite con la formula di Taylor o di Mac-Laurin laddove i coefficienti sono le derivate di una funzione divise per il fattoriale dell'ordine di derivazione. La Formula di Taylor e' centrata in un punto $x_0$ mentre la formula di Mac-Laurin e' centrata in 0.

**Serie di Taylor e di Mac-Laurin**

*Sia $y = f(x)$ una funzione definita in un intervallo $[a, b]$. Sia $x_0 \in (a, b)$ e la funzione e' infinitamente derivabile in $x_0$. Diremo serie di Taylor di $f(x)$ o $f(x)$ e' svippabilein serie di Taylor relativa al punto $x_0$ la seguente serie di potenze*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n.$$

*(si ricorda che si pone $f(x) = f^{(0)}$ e $0! = 1$.*

*Data una funzione $f(x)$ infinitamente derivabile in 0, diremo serie di Mac-Laurin di $f(x)$ relativa al punto 0 l'espressione:*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n.$$

*L'intervallo di convergenza dipendera' dalle derivate di $f(x)$.*

Vale il seguente teorema.

**Teorema** *Sia $y = f(x)$ una funzione infinitamente derivabile nell'intervallo simmetrico $I = (x_0 - R, x_0 + R)$. Inoltre in $I$ per le derivate di $f$ vale la relazione*

$$|\frac{f^{(n)}(x)}{n!}| \leq \frac{c}{R^n}$$

*con $x \in I$, $c$ una constante positiva indipendente da $n$ e da $R$.*
*Allora la serie*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

*e' convergente e la sua somma e' $f(x)$*

Consideriamo la formula di Taylor di $f(x)$ nel punto $x_0$ arrestata all'ordine $n$ con resto di Lagrange:

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{f^k(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + \frac{f^n(\alpha)}{n!}(x - x_0)^n$$

con $\alpha \in I$.

Si ottiene il risultato se

$$\frac{f^n(\alpha)}{n!}(x - x_0)^n \to 0$$

per $n \to +\infty$.

Dalle ipotesi si ha

$$|\frac{f^n(\alpha)}{n!}(x - x_0)^n| \leq c|\frac{x - x_0}{R^n}|^n \to 0$$

perche'

$$|\frac{x - x_0}{R}| < 1.$$

**Serie di Mac-Laurin di funzioni note:**

$$e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + .... + \frac{x^n}{n!} + ...$$

convergente per ogni $x$.

$$senx = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - ....(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + ...$$

convergente per ogni $x$.

$$cosx = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - ....(-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + ...$$

convergente per ogni $x$.

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n = 1 + x^2 + x^3 + .... + x^n + ...$$

converge per $|x| < 1$.

$$log(1+x) = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - ....(-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + ...$$

convergente per $|x| < 1$.

Ora siamo un possesso degli strumenti per ricavare la identita' di Eulero

$$e^{ix} = cosx + isenx$$

con $i$ unita' immaginaria. Scriviamo la serie della funzione espenziale con variabile $ix$

$$e^{ix} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(ix)^n}{n!} = 1 + ix + \frac{(ix)^2}{2!} + \frac{(ix)^3}{3!} + .... + \frac{(ix)^n}{n!}..$$

Ricordando che $i^2 = -1$, $i^3 = -i$, $i^4 = 1..$ , separando poi la parte immaginaria da quella reale si ha

$$e^{ix} = (1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - ....(-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + ...) + i(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - ....(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + ...) = cosx + isenx.$$

Ora se poniamo $-x$ al posto di $x$ si ottiene

$$e^{-ix} = cosx - isenx$$

da cui

$$e^{ix} + e^{-ix} = 2cosx \; ed \; e^{ix} - e^{-ix} = 2senx.$$

**Serie di potenze a termini complessi**

Abbiamo gia' considerato serie a termini complessi. Cosi' possiamo considerare serie di potenze del tipo gia' considerate sostituendo alla variabile $x$ la variabile complessa $z$, si ha

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n z^n := a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + ...a_n z^n + ...$$

con $a_n$ reale complesso. Quanto abbiamo detto nel caso reale vale nel caso complesso, naturalmente il modulo e' inteso nel campo complesso quale distanza di due punti nel piano di Gauss.

Esempi: la serie esponenziale:

$$e^z = \sum \frac{z^n}{n!} = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + ... + \frac{z^n}{n!} + ..$$

La serie converge asoolutamente per ogni $z$. La dimostrazione e' la stessa del caso reale.

Per $z = 0$ non c' e' niente da dimostrare. Allora per $z \neq 0$ applichiamo il criterio del rapporto:

$$\frac{\frac{|z^{n+1}|}{(n+1)!}}{\frac{|z^n|}{n!}} = \frac{|z|}{n+1} \to 0$$

per ogni $z$.

Valgono le seguenti proprieta'

$$e^0 = 1 \, ; e^{z_1+z_2} = e^{z_1} \cdot e^{z_2}.$$

Inoltre

$$e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x(cosy + iseny).$$

**Esempi**

Stabilire il carattere delle seguenti serie

1.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n^2+1};$$
valutiamo l'andamento asintotico del termine generale e poi usiamo il criterio del confronto:
$$\frac{n+1}{n^2+1} = \frac{n}{n^2} \cdot \frac{1+1/n}{1+1/n^2} \sim \frac{1}{n}$$
la serie data e' asintotica alla serie armonica per cui e' divergente.

2.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+2}.$$
Si ha
$$\frac{1}{n^2+2} \sim \frac{1}{n^2}.$$
Quindi la serie data e' minorante della serie di Mengoli. Dal criterio del confronto e' convergente.

3.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(an+b)^2};\ a \neq 0.$$
Si ha $\frac{1}{(an+b)^2} \sim \frac{1}{(an)^2}$. La serie data e' definitivamente minorante della serie di Mengoli per cui e' convergente , tralasciando il fattore $a$.

4.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-1}{3n+1}.$$
Valutiamo il termine generale :
$$\frac{n-1}{3n+1} \to \frac{1}{3} \neq 0$$
quindi, dato che il termine generale non tende a zero, la serie non converge. Inoltre essendo formata da termini positivi essa e' divergente. Si ricorda che in questo caso la successione delle somme parziali e' crescente.

5.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n}.$$
Si scrive il termine generale
$$\frac{(-1)^n}{2^n} = (\frac{-1}{2})^n$$
quindi la serie data e' una serie geometrica di ragione $q = \frac{-1}{2}$ quindi e' convergente.

6.
$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2-n}}.$$
E' una serie a termini positivi. Valutiamo il termine generale:
$$\frac{1}{\sqrt{n^2-n}} = \frac{1}{n\sqrt{1-1/n}} \sim \frac{1}{n}.$$
La serie data e' asintotica alla serie armonica quindi e' divergente.

7.
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n)^n};$$

Si ha
$$\frac{1}{(2n)^n} \leq \frac{1}{2^n}.$$

La serie data e' minorante della serie geometrica di ragione $\frac{1}{2}$. La serie data e' convergente.

8.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n+1}{3^n-n}.$$

E' una serie a termini positivi. Valutiamo il termine generale:

$$\frac{5^n+1}{3^n-n} = \frac{5^n(1+1/5^n)}{3^n(1-n/3^n)} \sim (\frac{5}{3})^n.$$

La serie data e' asintotica ad una serie geometrica di ragione $\frac{5}{3}$. La serie e' divergente.

9.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+logn}{(n-logn)^3}$$

E' una serie a termini positivi. Valutiamo il termine generale:

$$\frac{n+logn}{(n-logn)^3} = \frac{n}{n^3} \cdot \frac{1+logn/n}{(1-logn/n)^3} \sim \frac{1}{n^2}.$$

La serie e' asintotica ad una serie minorante della serie di Mengoli. La serie e' convergente.

10. Studiare il carattere della serie

$$\sum_{1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}.$$

Il termine generale

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{1}{\sqrt{1+1/n}+1} \sim \frac{1}{2\sqrt{n}}.$$

La serie data e' maggiorante della serie armonica per cui e' divergente.

In ogni modo di questa serie possiamo calcolare le somme ridotte: scritto

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \sqrt{n+1}-\sqrt{n}.$$

$$s_n = \sqrt{2}-\sqrt{1}+\sqrt{3}-\sqrt{2}+\sqrt{4}-\sqrt{3}+....\sqrt{n}-\sqrt{n-1}+\sqrt{n+1}-\sqrt{n} = \sqrt{n+1}-1 \to +\infty.$$

11. Studiare la serie

$$\sum_{1}^{+\infty} log\frac{n(n+2}{(n+1)^2}.$$

Osserviamo che

$$a_n = log\frac{n(n+2}{(n+1)^2} \to 0.$$

inoltre osserviamo che

$$log\frac{n(n+2)}{(n+1)^2} = log\frac{(n+2)}{(n+1)} - log\frac{n+1}{n}.$$

e' la differenza di un termine ed il precedente quindi nella somma ridotta sopravvivono solo il primo ed ultimo termine per cui

$$s_n = log\frac{n+2}{n+1} - log2 \to log1 - log2 = 0 - log2.$$

12. Studiare il carattere della serie

$$\sum \frac{1}{(3n-1)^2}.$$

Consideriamo il termine generale:

$$\frac{1}{(3n-1)^2} = \frac{1}{(3n)^2}\frac{1}{(1-1/3n)^2} < \frac{1}{(n)^2}.$$

definitivamente. Quindi la serie data e' convergente perche' e' minorante della serie armonica generalizzata di potenza 2

13. Studiare il carattere della serie

$$\sum \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}.$$

Osserviamo il termine generale

$$\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}} = \frac{1}{\sqrt{n^2(1+1/n)}} \sim \frac{1}{n}.$$

La serie data e' asintotica ad una serie armonica quindi diverge.

14. Studiare il carattere della serie

$$\sum \frac{\sqrt[3]{n}}{(n+1)\sqrt{n}}.$$

Osserviamo il termine generale

$$\frac{\sqrt[3]{n}}{(n+1)\sqrt{n}} = \frac{1}{(n+1)\sqrt[6]{n}} \sim \frac{1}{n^{1+1/6}}$$

La serie data e' asintotica alla serie armonica generalizzata di potenza $> 1$ quindi e' convergente.

15.
$$\sum \frac{2^n}{(n)^2}.$$

La serie non puo' convergere perche' il temine generale tende a $+\infty$. La serie diverge dato che e' a termini positivi .

16. Studiare il carattere della serie

$$\sum \frac{\sqrt{n}}{(2n+1)}.$$

Osserviamo il termine generale

$$\frac{\sqrt{n}}{2n+1} = \frac{\sqrt{n}}{2n(1+1/2n)} \sim \frac{1}{2\sqrt{n}}$$

La serie data e' asintotica alla serie divergente quindi diverge.

17. Studiare la serie,

$$\sum (\frac{3n}{3n+1})^n.$$

Consideriamo il comportamento del termine generale

$$(\frac{3n}{3n+1})^n = (\frac{3n}{3n(1+1/3n)})^n = (\frac{1}{1+1/3n})^n \to e^{-1/3}.$$

La serie non converge. Essendo a termini positivi essa diverge.

18. Studiare la seguente serie

$$\sum \frac{2^{n-1}}{(n-1)!}.$$

Utilizziamo il criterio del rapporto

$$(\frac{\frac{2^n}{(n)!}}{\frac{2^{n-1}}{(n-1)!}} = \frac{2^n}{(n)!}\frac{(n-1)!}{2^{n-1}} = \frac{2}{n}.$$

La serie converge

19. Lo studente verifichi che sono convergenti le seguenti serie,

$$\sum (\frac{1+n^2}{1+n^3})^2, \ \sum (\frac{2^n}{5^n+1})$$

20. Studiare la seguente serie

$$\sum \frac{n!}{2^n+1}.$$

Utilizziamo il criterio del rapporto

$$\frac{\frac{(n+1)!}{2^{n+1}+1}}{\frac{(n)!}{2^n+1}} = \frac{(n+1)!}{2^{n+1}+1}\frac{2^n+1}{(n)!} =$$

$$(n+1)\frac{2^n+1}{2^{n+1}+1} \sim \frac{n+1}{2}$$

La serie diverge.

21. Studiare la seguente serie
$$\sum \frac{3^n \cdot n!}{n^n}.$$
Applichiamo il criterio del rapporto
$$\frac{\frac{3^{n+1}\cdot(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{3^n\cdot n!}{n^n}} = 3(n+1)\frac{n^n}{(n+1)^n(n+1)} = 3(\frac{n}{n+1})^n \to \frac{3}{e} > 1.$$
La serie diverge.

22. Studiare la seguente serie
$$\sqrt{\frac{n+1}{n}}$$
Osserviamo che
$$\sqrt{\frac{n+1}{n}} \to 1$$
per cui la serie non converge. Essendo a termini positivi essa diverge.

23. Studiare la seguente serie
$$\sum \frac{senn^2}{n^2+1}.$$
$senn^2$ cambia il segno al variare di n per cui conviene studiarne la convergenza assoluta.
Osserviamo che
$$\frac{|senn^2|}{n^2+1} \leq \frac{1}{n^2+1} \leq \frac{1}{n^2}$$
dato che $|senn^2| \leq 1$ e $\frac{1}{n^2+1} < \frac{1}{n^2}$.
La serie data e'assolutamente minorante della serie di Mengoli. Quindi converge assolutamente e di consequenza in senso ordinario.

24. Studiare la seguente serie
$$\sum (\frac{logn}{n})^2.$$
Scriviamo in forma opportuna il termine generale
$$(\frac{logn}{n})^2 = \frac{(logn)^2}{n^2} = \frac{1}{n^{1+\delta}}\frac{(logn)^2}{n^{1-\delta}} \leq \frac{1}{n^{1+\delta}}$$
definitivamente poiche' per ogni $0 < \delta < 1$ si ha $\frac{(logn)^2}{n^{1-\delta}} \to 0$ per $n \to \infty$.
Allora la serie data e' convergente perche' minorante di una serie armonica generalizzata convergente.

25. Studiare la seguente serie

$$\sum \frac{logn!}{n^3}.$$

Valutiamo il termine generale, ricordando la monotonia di $logx$

$$\frac{logn!}{n^3} = \frac{log(1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot n)}{n^3} \leq \frac{logn^n}{n^3} \leq n\frac{logn}{n^3}.$$

Dall'esercizio precedente concludiamo che la serie data e' convergente.

26. Studiare la seguente serie

$$\sum \frac{1}{(logn)^n}.$$

Osserviamo che definitivamente $logn > 1$ per cui $\frac{1}{logn} < 1$. Quindi la serie data e' minorante di una serie geometrica di ragione positiva minore di 1. Dunque la serie e' convergente.

27. Studiare la seguente serie

$$\sum log\frac{n^2+1}{n^2}.$$

Consideriamo il termine generale.

$$log\frac{n^2+1}{n^2} = log(1+\frac{1}{n^2}) \sim \frac{1}{n^2}.$$

La serie data e' asintotica alla serie di Mengoli quindi e' convergente.

28. Studiare la seguente serie

$$\sum sen\frac{1}{n^2}.$$

Si osserva che

$$sen\frac{1}{n^2} \sim \frac{1}{n^2} \; per \; n \to +\infty$$

pertanto la serie data e' convergente.

29. Lo studente studi la serie

$$\sum(1 - cos\frac{1}{n}).$$

30. Studiare la seguente serie

$$\sum \frac{1}{nlogn + \sqrt{(logn)^3}}.$$

Valutiamo il termine generale

$$\frac{1}{nlogn + \sqrt{(logn)^3}} = \frac{1}{nlogn(1+\frac{\sqrt{(logn)^3}}{nlogn})} \sim \frac{1}{nlogn}$$

per $n \to +\infty$

pertanto la serie diverge.

**Serie a termini di segno qualsiasi**

31. Studiare la serie a segni alternati

$$\sum (-1)^{n+1} \frac{1}{2n-1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - ....(-1)^{n+1} \frac{1}{2n-1} + ..$$

Verifichiamo se sono soddisfatte le ipotesi del teorema di Leibnitz.

I denominatori sono crescenti quindi le frazioni sono decrescenti inoltre $\frac{1}{2n-1} \to 0$ per $n \to +\infty$.

La serie e' convergente.

32. Studiare la serie a segni alternati

$$\sum (-1)^{n+1} \frac{1}{(2n-1)^2} = 1 - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} - ....(-1)^{n+1} \frac{1}{(2n-1)^2} + ..$$

E' una serie che verifica le ipotesi del teorema di Leibnitz quindi e' convergente. Ma e' anche assolutamente convergente in quanto

$$\frac{1}{(2n-1)^2} \sim \frac{1}{(2n)^2}$$

che e' il termine generale di una serie convergente.

33. Studiare la serie a segni alternati

$$\sum (-1)^{n+1} \frac{1}{\sqrt{n}} = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - ....(-1)^{n+1} \frac{1}{\sqrt{n}} + ..$$

La serie e' convergente perche' verifica le ipotesi del teorema di Leibnitz. Non converge assolutamente perche'

$$\frac{1}{\sqrt{n}}$$

e' il termine generale di una serie divergente.

34. Studiare la serie a segni alternati

$$\sum (-1)^{n+1} \frac{n}{n+1} = \frac{1}{2} - \frac{2}{3} + ....(-1)^{n+1} \frac{n}{n+1} + ..$$

La serie ha termine generale che tende a 1. Quindi non converge

35. Studiare la serie a segni alternati

$$\sum (-1)^{n+1} \frac{n}{6n-5}.$$

La serie e' a segno alternato.

Inoltre $\frac{n}{6n-5} \to \frac{1}{6}^+$ per $n \to +\infty$. Tutti i termini in valore assoluto sono maggiori di $\frac{1}{6}$. La serie formata dai termini con $n$ dispari diverge a $+\infty$ quella formata dai termini con $n$ pari diverge a $-\infty$. Quindi la serie diverge ad $\infty$.

36. Studiare la serie a segno alternato

$$\sum(-1)^{n+1}\frac{n^3}{2^n}.$$

La serie e' assolutamente convergente. Infatti applicando il criterio del rapporto si ha

$$\frac{\frac{(n+1)^3}{2^{n+1}}}{\frac{n^3}{2^n}} = \frac{1}{2}(\frac{n+1}{n})^3 \to \frac{1}{2}.$$

La serie e' assolutamente convergente.

37. Studiare la serie a segno alternato

$$\sum(-1)^n\frac{1}{n-logn}.$$

La serie soddisfa le ipotesi del teorema di Leibnitz. Infatti
$\frac{1}{n-logn} \to 0$ per $n \to +\infty$
Inoltre

$$\frac{1}{n-logn} > \frac{1}{n+1-log(n+1)}.$$

Infatti

$$n+1-log(n+1) > n-logn \Rightarrow 1-log(1+\frac{1}{n}) > 0$$

sempre vera per $n > 1$.

38. Studiare la serie a segno alternato

$$\sum(-1)^n\frac{n+2}{n^2+1}.$$

La serie e' convergente perche' i termini verificano le ipotesi del teorema di Leibnitz.

**Esercizi proposti**

39.
$$\sum\frac{n+1}{n-1}\ (diverge);$$

40.
$$\sum\frac{n+1}{n^2+1}\ (diverge);$$

41.
$$\sum\frac{1}{(\sqrt[3]{n}+\sqrt[4]{n}+1)^4}\ (converge):$$

42.
$$\sum(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})^2\ (diverge);$$

43.
$$\sum\frac{log(logn)}{\sqrt{n}(logn)^3}\ (diverge);$$

44.

$$\sum \sqrt{nlog \frac{2n^2+3}{2n^2+2}} \ (converge);$$

45.

$$\sum \frac{log(1+\frac{1}{n})}{\sqrt{n}+logn} \ (converge);$$

46.

$$\sum \frac{1}{n}(\frac{n+2}{n+3})^n \ (diverge).$$