Insiemi in $\mathbb{R}$

Consideriamo insiemi di numeri reali. Di particolare importanza sono gli insiemi detti intervalli. Questi sono la trasposizione algebrica delle grandezze geometriche - i segmenti.

Siano a, b due numeri reali con $a < b$.

Chiamiamo intervallo (aperto) di estremi a,b e lo indichiamo (a, b) *l' insieme di tutti i numeri reali* x *che soddisfano le disuguaglianze* $a < x < b$.

Una notazione che ci ricorda la interpretazione geometrica e' $\overline{a\,b}$. Quindi abbiamo

$$(a, b) = \overline{a\,b} = \{x \in \mathbb{R} | a < x < b\}.$$

Se a o b appartengono all'intervallo nella notazione si sostituisce (con [e) con] cosi avremo

- intervallo chiuso

$$[a, b] = \overline{\dot{a}\,\dot{b}} = \{x \in \mathbb{R} | a \leq x \leq b\}.$$

La lettera a o b con il punto significa che apartiene all'intervallo.

- intervallo chiuso in a ed aperto in b

$$[a, b) = \overline{\dot{a}\,b} = \{x \in \mathbb{R} | a \leq x < b\}.$$

- intervallo aperto in a e chiuso in b

$$(a, b] = \overline{a\,\dot{b}} = \{x \in \mathbb{R} | a < x \leq b\}.$$

Tutti questi insiemi sono detti intervalli limitati.

Volendo rappresentare delle semirette o segmenti illimitati come insieme numerici si considerano insiemi di numeri $x > a$ oppure $x < b$. Introducendo i punti $+\infty$ e $-\infty$ (chiusura a destra e sinistra della retta euclidea) descriviamo gli intervalli illimitati con le notazioni sopra usate sostituendo a con $-\infty$ o b con $+\infty$ nel seguente modo:

- intervallo illimitato

$$(a, +\infty) = \overline{a\ +\infty} = \{x \in \mathbb{R} | a < x \leq +\infty\},$$

- intervallo illimitato chiuso in a

$$[a, +\infty) = \overline{\dot{a}\ +\infty} = \{x \in \mathbb{R} | a \leq x\},$$

- intervallo illimitato

$$(-\infty, b) = \overline{+\infty\ b} = \{x \in \mathbb{R} | x < b\},$$

- intervallo illimitato chiuso in b

$$(-\infty, b] = \overline{+\infty\ \dot{b}} = \{x \in \mathbb{R} | x \leq b\}.$$

Con $(-\infty, +\infty)$ indicheremo tutti i numeri reali o l'asse delle ascisse $\mathbb{R}$. Si osserva che $\pm\infty$ non sono mai inclusi perche' non sono numeri, li consideriamo solo punti. In ogni modo piu' avanti vedremo che per essi vale una parziale aritmetica.

- **Insiemi limitati ed illimitati**

Sia E un insieme di numeri reali non vuoto.

Diremo che E e' *limitato superiormente* quando esiste $k \in \mathbb{R}$ tale che per ogni $x \in E$ si ha $x \leq k$ ovvero

$$E \subseteq (-\infty, k].$$

k viene detto maggiorante di E.

Se esiste un maggiorante di E allora ne esistono infiniti. Indichiamo con $\mathbb{M}$ l' insieme dei maggioranti di E. L' insieme $\mathbb{M}$ e' dunque

$$\mathbb{M} = \{k \in \mathbb{R} | x \leq k (\forall x \in E)\}.$$

Sia E un insieme di numeri reali non vuoto.

Diremo che E e' *limitato inferiormente* quando esiste $h \in \mathbb{R}$ tale che per ogni $x \in E$ si ha $x \geq h$ ovvero

$$E \subset [h, +\infty).$$

h viene detto minorante di E.

Se esiste un minorante di E allora ne esistono infiniti. Indichiamo con $\mathbb{N}$ l' insieme dei minoranti di E. L' insieme $\mathbb{N}$ e' dunque

$$\mathbb{N} = \{h \in \mathbb{R} | x \geq h (\forall x \in E)\}.$$

Sia E un insieme di numeri reali non vuoto.

Diremo che E e' *limitato* quando e' limitato inferiormente e superiormente ovvero quando esistono $h < k \in \mathbb{R}$ tale che per ogni $x \in E$ si ha $h \leq x \leq k$ ovvero

$$E \subseteq [h, k].$$

• Massimo e minimo

Sia E un insieme di numeri reali. Si dice massimo di E un numero a tale che

1. $a \in E$,
2. a e' il piu' grande numero di E ovvero $\forall x \in E$ si ha $x \leq a$.

Osserviamo che se il massimo esiste e' unico (la dimostrazione e' molto semplice).

Sia E un insieme di numeri reali. Si dice minimo di E un numero b tale che

1. $b \in E$,
2. b e' il piu' piccolo numero di E ovvero $\forall x \in E$ si ha $x \geq b$.

Se il minimo esiste e' unico. L'intervallo $[a, b]$ e' il piu' piccolo intervallo che contiene E.

Esempio 1. - Sia $E = \{x \in \mathbb{R} | 0 \leq x \leq 1\}$. Allora 1 e' massimo e 0 e' minimo di E.

Esempio 2 - Sia $E = \{x \in \mathbb{R} | 0 < x < 1\}$. E non ha ne' massimo ne' minimo.

Eppure i due insiemi sono molto simili ma uno ha massimo e minimo l'altro no. Se i numeri 0 ed 1 dei due insiemi li consideriamo come confine ovvero punti che separano due insiemi allora possiamo dire che essi hanno lo stesso confine . Questa osservazione la formalizziamo con il concetto di estremo superiore ed di estremo inferiore.

• Estremo superiore ed estremo inferiore di un insieme

Sia E un insieme di numeri reali.

Chiameremo *estremo superiore* di E il numero Λ minimo dei maggioranti.

Quindi $\Lambda \in \mathbb{M}$. Se E ha massimo esso coincide con Λ ovvero $E \cap \mathbb{M} = \{\Lambda\}$

Λ e' caratterizzato dalle seguenti proprieta' (di confine).

1. $\forall x \in E$ si ha $x \leq \Lambda$,

2. $\forall \epsilon > 0$ esiste almeno un numero $x_\epsilon \in E$ tale che

$$\Lambda - \epsilon < x_\epsilon \leq \Lambda.$$

La proprieta' di confine e' espressa dal fatto che $\Lambda - \epsilon$ non e' un maggiorante dell'insieme E per ogni $\epsilon > 0$.

Analogamente si definisce l' estremo inferiore.

Sia E un insieme di numeri reali.

Chiameremo *estremo inferiore* di E il numero λ massimo dei minoranti.

Quindi $\lambda \in \mathbb{N}$. Se E ha minimo esso coincide con λ ovvero $E \cap \mathbb{N} = \{\lambda\}$.

λ e' caratterizzato dalle seguenti proprieta' (di confine).

1. $\forall x \in E$ si ha $x \geq \lambda$,

2. $\forall \epsilon > 0$ esiste almeno un numero $x_\epsilon \in E$ tale che

$$\lambda + \epsilon > x_\epsilon \geq \lambda.$$

La proprieta' di confne e' espressa dal fatto che $\lambda + \epsilon$ non e' un minorante dell'insieme E per ogni $\epsilon > 0$. Per indicare gli estremi superiore ed inferiore di un insieme E si usano i simboli

$$SupE \ (= \Lambda) \ o \ supE \ ; InfE \ (= \lambda) \ o \ infE.$$

Per quanto riguarda l'esistenza di questi numeri possiamo affermare che:

ogni insieme E limitato superiormente e' dotato di estremo superiore; ogni insieme E limitato inferiormente e' dotato di estremo inferiore;

ogni insieme E limitato e' dotato di estremo superiore e di estremo inferiore; l'intervallo $[\lambda, \Lambda]$ e' il piu' piccolo intervallo che contiene E.

La dimostrazione dell'esistenza e' una semplice conseguenza della continuita' dei reali.

Sia ad esempio E limitato superiormente. Allora la coppia di insiemi $C = (A = R \setminus \mathbb{M}; \mathbb{M})$ e' una partizione di $\mathbb{R}$. Dalla continuita' di $\mathbb{R}$ esiste elemento separatore H di C tale che per ogni elemento $a \in A$ e $k \in \mathbb{M}$ si ha $a \leq H \leq k$. $H \in \mathbb{M}$ cioe' e' un maggiorante di E. Infatti se esistesse un elemento $x' \in E$ con $H < x'$ si avrebbe $x' \in \mathbb{M}$. Una contraddizione.

Conveniamo di assumere $+\infty$ come estremo superiore di insiemi illimitati superiormente e $-\infty$ estremo inferiore di insiemi illimitati inferiormente.

In questo modo ogni insieme non vuoto e' dotato di estremo superiore ed inferiore che sono dei numeri se l'insieme e' limitato altrimenti sono $+\infty$ o $-\infty$.

Topologia in $\mathbb{R}$

Nel paragrafo precedente abbiamo descritto alcune proprieta' degli insiemi in $\mathbb{R}$ legate al concetto di ordine. In questo paragrafo si studia il concetto di vicinanza e le sue conseguenze. Non e' diffcile intuire che se tutti gli intervalli che contengono a contengono anche b e viceversa allora $a = b$. Ancora piu' sono gli intervalli che contengono a e b e piu' i punti sono "vicini". Quindi il concetto di intervallo sembra essere un valido strumento per valutare la vicinanza di punti. Formalizziamo questi concetti.

• **Definizione di intorno di un punto x_0.**

Sia $x_0 \in \mathbb{R}$ e (a, b) un intervallo con $a < b$.

Diremo che x_0 e' interno ad (a, b) se $a < x_0 < b$; diremo che x_0 e' esterno ad (a, b) se $x_0 < a$ o $x_0 > b$.

Diremo intorno di x_0 qualsiasi intervallo (a, b) a cui x_0 sia interno.

Diremo intorno destro di x_0 un intervallo $[x_0, b)$ con $b > x_0$;

Diremo intorno sinistro di x_0 un intervallo $(a, x_0]$ con $a < x_0$;

L'unione degli intorni destro e sinistro forma un intorno di x_0.

L'intersezione e l' unione di intorni di x_0 sono ancora intorni di x_0.

Si osserva che in generale l'unione di intervalli non e' un intervallo a meno che la loro intersezione non sia vuota.

Ora possiamo definire il concetto fondamentale di una topologia: " punto di accumulazione ".

Sia $E \subseteq \mathbb{R}$ un insieme non vuoto di numeri reali.

Diremo che $x_0 \in \mathbb{R}$ e' *punto di accumulazione* di E quando in ogni intorno di x_0 cadono infiniti punti di E.

x_0 non e' punto di accumulazione di E quando esiste un intorno di x_0 in cui non cadono punti di E o al piu' ne cadono un numero finito.

Non e' detto che x_0 appartenga ad E; la sua caratteristica e' quella di essere molto vicino ad E (concetto di vicinanza definito con gli intorni). Con linguaggio colloquiale diciamo che l'insieme si addensa vicino ad x_0.

Esempio 1 : Sia $E = \{1/n\} = \}1, 1/2, 1/3, 1/4, ...\}$ con $n \in N^+$.

E' immediato che ogni intervallo che contiene lo zero contiene infiniti punti di E. Eppure lo zero non appartiene ad E ovvero non esiste alcun numero intero per cui $1/n = 0$.

Il punto 1 e' la controparte di 0. Esso appartiene ad E ma esiste un intorno di 1 (ad esempio $(2/3, 1)$) che non ha altri punti di E oltre se stesso.

Tali punti sono detti punti isolati di E.

Sia $E \subseteq \mathbb{R}$ un insieme non vuoto di numeri reali.

Diremo che $x_0 \in \mathbb{R}$ e' punto isolato di E quando $x_0 \in E$ ed esiste un intorno di x_0 che non contiene altri punti di E.

Sono utili le sequenti variazioni.

Sia $E \subseteq \mathbb{R}$ un insieme non vuoto di numeri reali.

Diremo che $x_0 \in E$ e' punto di accumulazione sinistro (destro) di E quando in ogni intorno sinistro (destro) di x_0 cadono infniti punti di E.

• Punto di accumulazione ed estremo superiore ed estremo inferiore

Gli estremi superiore ed inferiore di un insieme possono essere punti di accumulazione?

L'esempio (1) dato sopra ci da' una risposta a questo problema. Notiamo che 1 e' massimo di E quindi e' estremo superiore di E ed e' anche di non accumulazione di E. Invece per l'insieme $E = \{x|0 < x \leq 1\}$ 1 e' punto di accumulazione.

Quindi possiamo affermare che se $SupE$ o $InfE$ appartengono ad E non abbiamo risposte certe a priori ; dobbiamo valutare caso per caso.

Ancora, l'esempio (1) ci mostra che lo zero (estremo inferiore) non appartiene ad E ed e' di accumulazione di E. In questo caso possiamo dare una risposta certa.

Se $SupE$ o $InfE$ non appartengono ad E allora sono punti di accumulazione di E.

Questa affermazione e' conseguenza della seconda proprieta' che caratterizza gli estremi superiore ed inferiore.

Fissiamo l'attenzione su $\Lambda = SupE$. La proprieta' dice che in ognuno degli infiniti intorni sinistri di Λ - $(\Lambda - \epsilon, \Lambda]$ -cade almeno un elemento $x_\epsilon \leq \Lambda$ di E e poiche' $\Lambda \notin E$ deve valere $\Lambda - \epsilon < x_\epsilon < \Lambda$, ovvero esiste almeno un elemento $x_\epsilon \in E$ tale che $\Lambda - \epsilon < x_\epsilon < \Lambda$. Quindi vicino a Λ ci sono infiniti punti di E di tipo x_ϵ. Per essere piu' precisi per ogni intorno sinistro di Λ - $(b; \Lambda]$ - possiamo determinare ϵ in modo che $b < \Lambda - \epsilon$ per cui $(\Lambda - \epsilon, \Lambda] \subseteq (b, \Lambda]$; ne consegue che $(b, \Lambda]$ contiene infiniti punti di E.

• Insieme chiuso ed insieme derivato

I punti di accumulazione di un insieme E formano a loro volta un insieme che viene chiamato l'insieme derivato di E e viene indicato DE.

A priori non esiste alcuna particolare relazione tra DE ed E . Dai pochi esempi dati abbiamo visto che $DE \cap E = \emptyset$, $DE \subseteq E$ oppure $E \subseteq DE$ come il caso $Q \subset DQ = \mathbb{R}$.

Introduciamo insiemi per cui sussiste una particolare relazione con DE.

Diremo che un insieme E e' chiuso quando contiene i propri punti di accumulazione ovvero $DE \subseteq E$.

Quindi gli insiemi chiusi sono particolari insiemi.

Osserviamo che l'insieme dell'esempio (1) non e' chiuso perche' non contiene il suo unico punto di accumulazione lo zero. Mentre l'insieme $E_1 = \{1, 2, 3\}$ non ha punti di accumulazione quindi l'insieme dei punti di accumulazione e' l'insieme vuoto, cioe' $DE = \emptyset$. Ma ogni insieme contiene l'insieme vuoto per cui E_1 e' chiuso.

In generale un insieme E non e' chiuso. Possiamo chiuderlo aggiungendogli i propri punti di accumulazione. Questa operazione si chiama chiusura.

Chiamiamo chiusura di E e la indichiamo $\bar{E}$ l'unione di E con il proprio derivato ovvero

$$\bar{E} = E \cup DE.$$

Possiamo osservare che $\bar{\bar{E}} = \bar{E}$.

Sappiamo che ogni insieme limitato ha estremi superiore ed inferiore finiti . Un fatto di notevole interesse e' riuscire a caratterizzare gli insiemi che hanno massimo e minimo. Ebbene vale il seguente

Teorema - *Ogni insieme chiuso e limitato ha massimo e minimo.*

La dimostrazione e' semplicissima. Si procede per assurdo. Ovvero non esiste massimo o minimo. Ragioniamo sul massimo. Dato che E e' limitato esso ha estremo superiore Λ finito (ed estremo inferiore) che per assurdo non appartiene ad E (altrimenti sarebbe massimo di E). Abbiamo dimostrato che se Λ non appartiene ad E esso e' di accumulazione di E ovvero $\Lambda \in DE$. Allora abbiamo

$$\Lambda \notin E \; e \; \Lambda \in DE \subseteq E \rightarrow \Lambda \in E.$$

Una contraddizione.

Quali insiemi hanno punti di accumulazione? La semplicita' di questa domanda e' il contraltare dell'importanza e utilita' del problema. Non insistiamo sulla sua importanza . Ci basta farlo notare. In $\mathbb{R}$ una risposta completa e' data dal seguente

Teorema di Bolzano-Weierstrass - *Ogni insieme $E \subset \mathbb{R}$ infinito (contiene infniti elementi) e limitato ha almeno un punto di accumulazione finito (un numero reale).*

Non abbiamo tempo per dimostrare questo teorema. Per convincerci dell'asserto, basta osservare che l' insieme deve addensarsi verso qualche punto altrimenti sarebbe costretto a "vagare" o a "spalmarsi" intervalli illimitati contraddicendo la sua limitatezza.

Estensione del teorema di Bolzano-Weierstrass

Il teorema ha come scopo l'esistenza di un punto di accumulazione che sia un numero. Questo e' il motivo della assunzione "limitato". Ma se accettiamo i punti $+\infty$, $-\infty$, ∞ cioe' permettiamo all'insieme di "spalmarsi" su insiemi illimitati, allora possiamo ennciare il teorema nella seguente forma generalizzata.

Teorema - *Ogni insieme $E \subseteq \mathbb{R}$ infinito ha almeno un punto di accumulazione.*

Con questo teorema possiamo affermare che i numeri naturali $\mathbb{N}$, i numeri interi $\mathbb{Z}$ hanno punti di accumulazione $+\infty$ e $\{-\infty, +\infty\}$ cosa che in seguito avremo modo di apprezzare.

Concludiamo questi appunti con un'altra interessante nozione che ci permette di valutare la vicinanza fra punti ovvero la nozione di distanza.

Ricordiamo la nozione di modulo.

Definizione - Sia a un numero reale, il modulo (o valore assoluto) di a e' un numero reale non negativo, che indichiamo con $|a|$: esso e' uguale ad a stesso se $a \geq 0$, mentre e' $-a$ se $a < 0$ ovvero

$$|a| = \begin{cases} a & se\ a \geq 0, \\ -a & se\ a < 0. \end{cases}$$

Esempio : $|+4| = +4$, $|-2| = 2$.

Dati i numeri reali a, b e c, con $c > 0$, e l'intero n , valgono le seguenti proprieta'.

1. $|ab| = |a||b|$, $|\frac{a}{b}| = \frac{|a|}{|b|}$, $b \neq 0$,
2. $|a^n| = |a|^n$ in particolare se n e' pari $|a|^n = a^n$.

Qualche equazione e disequazione con il modulo

$$|x| = c \Leftrightarrow \begin{cases} x = c & se\ x \geq, 0 \\ -x = c & \to x = -c\ se\ x < 0. \end{cases}$$

$$|x-1| = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x - 1 = 2 & \to x = 3\ se\ x - 1 \geq 0 \\ -(x-1) = 2 & \to x = 1\ se\ x - 1 < 0. \end{cases}$$

Si osserva che le equazioni si possono risolvere anche elevando al quadrato entrambi i membri. Con un po' di attenzione al grado dell'equazione.

Qualche disequazione ed interpretazione geometrica.

$$|x| \leq 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 1 & se\ x \geq 0, \\ -x \leq 1 & \to x \geq -1\ se\ x < 0. \end{cases}$$

in conclusione si ha l'intervallo $-1 \leq x \leq 1$; l' eliminazione delle sbarre si traduce in una limitazione tra -1 e 1. In conclusione $|x| \leq 1$ descrive un intervallo di estremi $-1, 1$, ad esempio un intorno simmetrico di 0.

$$|x| > k \Leftrightarrow \begin{cases} x > k & se\ x \geq 0, \\ -x > k & \to x < -k\ se\ x < 0. \end{cases}$$

$|x| > k$ descrive intervalli limitati inferiormente ed superiormente o meglio $|x| > k$ descrive un intorno di ∞ (infinito senza segno).

$$|x - x_0| < \delta \Leftrightarrow \begin{cases} x - x_0 < \delta & \to x < x_0 + \delta\ se\ x - x_0 \geq 0 \\ -(x - x_0) < \delta & \to x - x_0 > -\delta \to x > x_0 - \delta\ se\ x - x_0 < 0. \end{cases}$$

Seguiamo in una sola stringa quanto e' successo sopra

$$|x - x_0| < \delta \Leftrightarrow -\delta < x - x_0 < \delta \Leftrightarrow (risolviamo)\ x_0 - \delta < x < x_0 + \delta,$$

otteniamo un intervallo simmetrico del punto x_0, un intorno simmetrico di x_o. Ovviamente x_0 e $\delta > 0$ sono numeri assegnati.

Definizione di distanza- *Chiameremo distanza tra due punti x_1e x_2 sulla retta reale e la indichiamo $d(x_1, x_2)$ la relazione*

$$d(x_1, x_2) = |x_1 - x_2|.$$

Proprieta':

1. $d(x_1;x_2) \geq 0$, $d(x_1,x_2) = 0 \Leftrightarrow x_1 = x_2$,

2. $d(x_1,x_2) = d(x_2;x_1)$ (simmetria),

3. $d(x_1;x_3) \leq d(x_1,x_2) + d(x_2;x_3)$ (disuguaglianza triangolare).

Esempio: 1) $d(x_1,x_2) = \delta \Leftrightarrow x_1 - x_2 = \pm\delta$ i due punti distano fra loro di una quantita' δ.
2) $d(x;x_0) < \delta$ esprime che la distanza di x da x_0 e' inferiore a δ ovvero

$$|x - x_0| < \delta \Leftrightarrow -\delta < x - x_0 < -\delta \Leftrightarrow x_0 - \delta < x < x_0 + \delta$$

che e'un intervallo di estremi $x_0 - \delta$ e $x_0 + \delta$, simmetrico rispetto ad x_0: un intorno di x_0 e lo leggiamo anche il luogo dei punti x che distano da x_0 di una quantita' minore di δ.

Intorni dei punti all' infinito.

Sia $k \in \mathbb{R}^+$.
Un intorno di piu' infinito e' l'nsieme $\{x \in \mathbb{R}|x > k\}$*;*

Un intorno di meno infinito e' l'insieme $\{x \in \mathbb{R}|x < -k\}$*;*

Un intorno di infinito senza segno $\infty = -\infty \cup +\infty$ *e' l' insieme* $\{x \in \mathbb{R}||x| > k\}$*.*