GEOMETRIA ED ALGEBRA LINEARE

Prima prova in itinere - 02/05/2012 - Versione A

Tutti i calcoli devono essere riportati per la correzione, e le risposte devono essere giustificate.

Esercizio 1. $(3+4+4)$ Siano date le matrici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix},$$

e siano

$$T_A : \mathrm{Mat}(3,1;\mathbb{R}) \to \mathrm{Mat}(3,1;\mathbb{R}) \quad \text{e} \quad T_B : \mathrm{Mat}(3,1;\mathbb{R}) \to \mathrm{Mat}(3,1;\mathbb{R})$$

le applicazioni lineari definite come $T_A(X) = AX$ e $T_B(X) = BX$, con $X \in \mathrm{Mat}(3,1;\mathbb{R})$.

(1) Determinare una base e la dimensione di $\mathrm{Im}(T_A)$.
(2) Determinare una base e la dimensione di $\mathrm{Im}(T_A) \cap \ker(T_B)$.
(3) Verificare che $\ker(T_A)$ è contenuto propriamente in $\ker(T_B \circ T_A)$.

Svolgimento. Sia $B = (\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix})$ la base naturale di $V = \mathrm{Mat}(3,1;\mathbb{R})$. Dalla teoria, sappiamo che $\mathrm{Im}(T_A)$ è generato dalle immagini dei vettori di B tramite T_A. Con facili calcoli, otteniamo che

$$\mathrm{Im}(T_A) = L(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}).$$

Effettuando le operazioni elementari $C_2 + C_1 \to C_2, C_3 - C_2 \to C_3$ sulle colonne di A, si ottiene che il terzo generatore di $\mathrm{Im}(T_A)$ è combinazione lineare dei primi due, e quindi $\dim \mathrm{Im}(T_A) = 2$, ed una sua base è

$$B' = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right).$$

I vettori di $\mathrm{im}(T_A) \cap \ker(T_B)$ sono i vettori della forma $a \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ che verificano $BX = 0$. Con facili calcoli, otteniamo

$$a \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

equivalente al sistema lineare $-a + b = 0$. In conclusione, $\dim \mathrm{Im}(T_A) \cap \ker(T_B) = 1$ ed una base del sottospazio analizzato è

$$B'' = \left(\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \right)$$

ottenuto ponendo $a = b = 1$.

Se $X \in \ker(T_A)$, allora $AX = 0$ e quindi $BAX = 0$. In definitiva, $X \in \ker(T_B \circ T_A)$. Quindi, $\ker(T_A) \subseteq \ker(T_B \circ T_A)$. Dal Teorema del rango, si ottiene che $\dim \ker(T_A) = 3 - \dim \mathrm{Im}(T_A) = 3 - 2 = 1$. La matrice BA descrive $T_B \circ T_A$ ed è uguale a

$$BA = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

È evidente che $r(BA) = 1$ e quindi $\dim \ker(T_B \circ T_A) = 3 - 1 = 2$. Avendo dimensioni diverse, $\ker(T_A)$ non è uguale a $\ker(T_B \circ T_A)$ come volevamo dimostrare.

Esercizio 2. $(6+3+2)$ Nello spazio vettoriale reale $V = \mathrm{Mat}(2, 2; \mathbb{R})$ siano dati i vettori

$$X_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, X_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, X_3 = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}, X_4 = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}.$$

(1) Verificare che X_1, X_2 sono linearmente indipendenti, che lo sono anche i vettori X_3, X_4, e che $L(X_1, X_2) = L(X_3, X_4)$.
(2) Detto U il sottospazio $L(X_1, X_2)$, siano $B' = (X_3, X_4)$ e $B'' = (X_1, X_2)$ due sue basi. Verificare che
$$U' = \{X \in U \mid [X]_{B'} = [X]_{B''}\}$$
è un sottospazio di V.
(3) Determinare una base e la dimensione di U'.

Svolgimento. Lavoriamo in componenti rispetto alla base $B = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$ di $V = \mathrm{Mat}(2, 2; \mathbb{R})$. Scrivendo le componenti di X_1 e X_2 rispetto a B si ottiene la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

che ha rango 2 e quindi X_1 e X_2 sono l.i.. Scrivendo le componenti di X_3 e X_4 si ottiene la matrice

$$\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 2 \\ 3 & 4 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$$

che ha ancora rango 2 come si osserva effettuando l' operazione $C_2 - c_1 \to C_2$. Quindi i sottospazi $L(X_1, X_2)$ e $L(X_3, X_4)$ hanno entrambi dimensione 2. Per verificare la loro uguaglianza, basta che uno dei due sia contenuto nell' altro. A tale scopo, basta verificare che X_3 e X_4 sono combinazioni lineari di X_1 ed X_2. Scriviamo allora le componenti dei quattro vettori in una matrice ottenendo

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Effettuiamo le operazioni elementari $C_3 + C_1 \to C_3, C_4 + 2C_1 \to C_4, C_3 - 2C_2 \to C_3, c_4 - 4C_2 \to C_4$ si ottiene una matrice con le ultime due colonne nulle. Quindi, $L(X_1, X_2) = L(X_3, X_4)$.

Le componenti della matrice nulla sono la matrice nulla rispetto a qualunque base, e quindi $0 \in U'$. Siano poi $X, Y \in U'$, ed $a, b \in \mathbb{R}$. Verifichiamo che $aX + bY \in U'$: $[aX + bY]_{B'} = a[X]_{B'} + b[Y]_{B'} = a[X]_{B''} + b[Y]_{B''} = [aX + bY]_{B''}$ dove la prima e la terza uguaglianza discendono dalle proprietà delle componenti, e la seconda uguaglianza vale perché X e Y sono in U'. In conclusione, $aX + bY \in U'$ e quindi U' è un sottospazio.

Le matrici di U' verificano l' uguaglianza

$$aX_1 + bX_2 = aX_3 + bX_4.$$

Si ottiene un sistema lineare con infinite soluzioni della forma $a = -b$. Una base di U' è $(-X_1 + X_2 := \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix})$ e la dimensione di U' è uguale a 1.

Esercizio 3. (2+5+3+1) Siano dati i piani α_h, β_h e la retta r di equazioni rispettivamente

$$\alpha_h : x + hy - z = h, \quad \beta_h : hx - y + hz = 1, \quad r : \begin{cases} x + 2y + z = 1 \\ 2x - y - 2z = 2 \end{cases}.$$

(1) Verificare che α_h e β_h hanno in comune una retta s_h, per qualunque valore di $h \in \mathbb{R}$.
(2) Si determini la posizione reciproca di r ed s_h, al variare di $h \in \mathbb{R}$.
(3) Si calcoli l' equazione del piano π contenente r e parallelo ad s_0 (ossia la retta s_h avendo posto $h = 0$).
(4) Calcolare, se esiste, l' equazione di una retta complanare con tutte e tre le rette $s_h, h = -1, 0, 1$.

Svolgimento. Scriviamo un sistema lineare di due equazioni con le equazioni di α_h e β_h : se il sistema ha ∞^1 soluzioni allora i due piani hanno una retta in comune. La matrice completa del sistema è

$$(M|N) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & h & -1 & h \\ h & -1 & h & 1 \end{array}\right).$$

Con l' operazione elementare $r_2 - hr_1 \to r_2$ si ottiene la matrice

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & h & -1 & h \\ 0 & -1-h^2 & 2h & 1-h^2 \end{array}\right)$$

ridotta per ogni valore di $h \in \mathbb{R}$. Visto che $-1 - h^2 \neq 0$ per ogni $h \in \mathbb{R}$, si ha che $r(M) = 2 = r(M|N)$ e quindi l' intersezione dei due piani è una retta, per ogni $h \in \mathbb{R}$.

Per studiare la posizione mutua di r ed s_h, scriviamo il sistema con le equazioni di tutte e due le rette, ottenendo la matrice completa

$$(A|B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -2 & 2 \\ 1 & h & -1 & h \\ h & -1 & h & 1 \end{array}\right).$$

Effettuiamo le operazioni elementari $r_2-2r_1 \to r_2, r_3-r_1 \to r_3, r_4-hr_1 \to r_4, r_3-\frac{1}{2}r_2 \to r_3$ in sequenza, si ottiene la matrice

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -5 & -4 & 0 \\ 0 & h+\frac{1}{2} & 0 & h-1 \\ 0 & -2h-1 & 0 & 1-h \end{array}\right).$$

Se $h \neq -\frac{1}{2}$, possiamo effettuare $r_4 + 2r_3 \to r_4$ si ottiene l' ulteriore matrice

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -5 & -4 & 0 \\ 0 & h+\frac{1}{2} & 0 & h-1 \\ 0 & 0 & 0 & -1+h \end{array}\right).$$

Se $h = 1$, si ha $r(A) = r(A|B) = 3$, e quindi r ed s_1 sono incidenti. Se $h \neq -\frac{1}{2}, 1$, allora $r(A) = 3, r(A|B) = 4$, e quindi r ed s_h sono sghembe. Se $h = -\frac{1}{2}$, sostituendo nella penultima matrice si ha che $r(A) = 2, r(A|B) = 3$ e quindi r e $s_{-1/2}$ sono parallele.

La retta s_0 ha equazione parametrica $x = t, y = -1, z = t, t \in \mathbb{R}$, mentre i piani di asse r hanno equazione

$$l(x + 2y + z - 1) + m(2x - y - 2z - 2) = 0.$$

Sostituendo l' equazione parametrica di s_0 nell' equazione del fascio di piani, dobbiamo avere che il coefficiente di t deve essere nullo: in tal modo o non ci sono soluzioni, oppure le soluzioni sono infinite,e quindi piano e retta s_0 sono paralleli. Con facili calcoli, si ha che il coefficiente di t è uguale a $2l$ e quindi $l = 0$. L' equazione del piano è $\alpha : 2x-y-2z-2 = 0$.

Le rette s_1 e s_{-1} hanno equazioni parametriche $s_1 : x = 1, y = t', z = t', t' \in \mathbb{R}$, e $s_{-1} : x = -1, y = t'', z = -t'', t'' \in \mathbb{R}$. Un punto di s_0 è $P(t, -1, t)$, uno di s_1 è $Q(1, t', t')$, mentre uno di s_{-1} è $R(-1, t'', -t'')$. I vettori $\overrightarrow{RQ}$ e $\overrightarrow{RP}$ sono paralleli per $t = 0, t' = -1, t'' = -1$, e quindi una retta complanare con s_0, s_1, s_{-1} ha equazione parametrica $p : x = -1 + 2\tau, y = -1, z = 1 - 2\tau, \tau \in \mathbb{R}$. Tale retta non è l' unica.

GEOMETRIA ED ALGEBRA LINEARE

Prima prova in itinere - 02/05/2012 - Versione B

Tutti i calcoli devono essere riportati per la correzione, e le risposte devono essere giustificate.

Esercizio 1. $(3+4+4)$ Siano date le matrici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -2 & -4 & -2 \end{pmatrix},$$

e siano

$$T_A : \mathrm{Mat}(3,1;\mathbb{R}) \to \mathrm{Mat}(3,1;\mathbb{R}) \quad \text{e} \quad T_B : \mathrm{Mat}(3,1;\mathbb{R}) \to \mathrm{Mat}(3,1;\mathbb{R})$$

le applicazioni lineari definite come $T_A(X) = AX$ e $T_B(X) = BX$, con $X \in \mathrm{Mat}(3,1;\mathbb{R})$.

(1) Determinare una base e la dimensione di $\mathrm{Im}(T_A)$.
(2) Determinare una base e la dimensione di $\mathrm{Im}(T_A) \cap \ker(T_B)$.
(3) Verificare che $\ker(T_A)$ è contenuto propriamente in $\ker(T_B \circ T_A)$.

Esercizio 2. $(6+3+2)$ Nello spazio vettoriale reale $V = \mathrm{Mat}(2,2;\mathbb{R})$ siano dati i vettori

$$X_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, X_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, X_3 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}, X_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

(1) Verificare che X_1, X_2 sono linearmente indipendenti, che lo sono anche i vettori X_3, X_4, e che $L(X_1, X_2) = L(X_3, X_4)$.
(2) Detto U il sottospazio $L(X_1, X_2)$, siano $B' = (X_3, X_4)$ e $B'' = (X_1, X_2)$ due sue basi. Verificare che

$$U' = \{X \in U \mid [X]_{B'} = [X]_{B''}\}$$

è un sottospazio di V.
(3) Determinare una base e la dimensione di U'.

Esercizio 3. (2+5+3+1) Siano dati i piani α_h, β_h e la retta r di equazioni rispettivamente

$$\alpha_h : hx + y - z = h, \quad \beta_h : x - hy - hz = -1, \quad r : \begin{cases} 2x + y + z = 1 \\ x - 2y - 2z = -2 \end{cases}.$$

(1) Verificare che α_h e β_h hanno in comune una retta s_h, per qualunque valore di $h \in \mathbb{R}$.
(2) Si determini la posizione reciproca di r ed s_h, al variare di $h \in \mathbb{R}$.
(3) Si calcoli l' equazione del piano π contenente r e parallelo ad s_0 (ossia la retta s_h avendo posto $h = 0$).
(4) Calcolare, se esiste, l' equazione di una retta complanare con tutte e tre le rette $s_h, h = -1, 0, 1$.

GEOMETRIA ED ALGEBRA LINEARE

Prima prova in itinere - 02/05/2012 - Versione C

Tutti i calcoli devono essere riportati per la correzione, e le risposte devono essere giustificate.

Esercizio 1. $(3+4+4)$ Siano date le matrici

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix},$$

e siano

$$T_A : \mathrm{Mat}(3,1;\mathbb{R}) \to \mathrm{Mat}(3,1;\mathbb{R}) \quad \text{e} \quad T_B : \mathrm{Mat}(3,1;\mathbb{R}) \to \mathrm{Mat}(3,1;\mathbb{R})$$

le applicazioni lineari definite come $T_A(X) = AX$ e $T_B(X) = BX$, con $X \in \mathrm{Mat}(3,1;\mathbb{R})$.

(1) Determinare una base e la dimensione di $\ker(T_B)$.
(2) Determinare una base e la dimensione di $\mathrm{Im}(T_A) \cap \ker(T_B)$.
(3) Verificare che $\mathrm{Im}(T_B)$ è uguale a $\mathrm{Im}(T_B \circ T_A)$.

Esercizio 2. $(6+3+2)$ Nello spazio vettoriale reale $V = \mathbb{R}[x]_3$ siano dati i vettori

$$P_1 = x^3 + x + 1, P_2 = x^2 + x, P_3 = -x^3 + 3x^2 + 2x - 1, P_4 = -2x^3 + 4x^2 + 2x - 2.$$

(1) Verificare che P_1, P_2 sono linearmente indipendenti, che lo sono anche i vettori P_3, P_4, e che $L(P_1, P_2) = L(P_3, P_4)$.
(2) Detto U il sottospazio $L(P_1, P_2)$, siano $B' = (P_3, P_4)$ e $B'' = (P_1, P_2)$ due sue basi. Verificare che
$$U' = \{P \in U \mid [P]_{B'} = [P]_{B''}\}$$
è un sottospazio di V.
(3) Determinare una base e la dimensione di U'.

Esercizio 3. (2+5+3+1) Siano dati i piani α_h, β_h e la retta r di equazioni rispettivamente

$$\alpha_h : hx + y + z = h, \quad \beta_h : x - hy + hz = 1, \quad r : \begin{cases} x + y - z = 0 \\ x - y - z = 1 \end{cases}.$$

(1) Verificare che α_h e β_h hanno in comune una retta s_h, per qualunque valore di $h \in \mathbb{R}$.
(2) Si determini la posizione reciproca di r ed s_h, al variare di $h \in \mathbb{R}$.
(3) Si calcoli l' equazione del piano π contenente r e parallelo ad s_0 (ossia la retta s_h avendo posto $h = 0$).
(4) Calcolare, se esiste, l' equazione di una retta complanare con tutte e tre le rette $s_h, h = -1, 0, 1$.

GEOMETRIA ED ALGEBRA LINEARE

Prima prova in itinere - 02/05/2012 - Versione D

Tutti i calcoli devono essere riportati per la correzione, e le risposte devono essere giustificate.

Esercizio 1. $(3+4+4)$ Siano date le matrici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & -4 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix},$$

e siano

$$T_A : \mathrm{Mat}(3,1;\mathbb{R}) \to \mathrm{Mat}(3,1;\mathbb{R}) \quad \text{e} \quad T_B : \mathrm{Mat}(3,1;\mathbb{R}) \to \mathrm{Mat}(3,1;\mathbb{R})$$

le applicazioni lineari definite come $T_A(X) = AX$ e $T_B(X) = BX$, con $X \in \mathrm{Mat}(3,1;\mathbb{R})$.

(1) Determinare una base e la dimensione di $\ker(T_B)$.
(2) Determinare una base e la dimensione di $\mathrm{Im}(T_A) \cap \ker(T_B)$.
(3) Verificare che $\mathrm{Im}(T_B)$ è uguale a $\mathrm{Im}(T_B \circ T_A)$.

Esercizio 2. $(6+3+2)$ Nello spazio vettoriale reale $V = \mathbb{R}[x]_3$ siano dati i vettori

$$P_1 = -x^2 + x - 1, P_2 = x^3 + x^2 - x - 1, P_3 = 2x^3 + x^2 - x - 3, P_4 = x^3 - 2.$$

(1) Verificare che P_1, P_2 sono linearmente indipendenti, che lo sono anche i vettori P_3, P_4, e che $L(P_1, P_2) = L(P_3, P_4)$.
(2) Detto U il sottospazio $L(P_1, P_2)$, siano $B' = (P_3, P_4)$ e $B'' = (P_1, P_2)$ due sue basi. Verificare che

$$U' = \{P \in U \mid [P]_{B'} = [P]_{B''}\}$$

è un sottospazio di V.
(3) Determinare una base e la dimensione di U'.

Esercizio 3. (2+5+3+1) Siano dati i piani α_h, β_h e la retta r di equazioni rispettivamente

$$\alpha_h : x + hy + z = h, \quad \beta_h : hx + y - hz = 1, \quad r : \begin{cases} x - y - z = 0 \\ x - y + z = -1 \end{cases}.$$

(1) Verificare che α_h e β_h hanno in comune una retta s_h, per qualunque valore di $h \in \mathbb{R}$.
(2) Si determini la posizione reciproca di r ed s_h, al variare di $h \in \mathbb{R}$.
(3) Si calcoli l' equazione del piano π contenente r e parallelo ad s_0 (ossia la retta s_h avendo posto $h = 0$).
(4) Calcolare, se esiste, l' equazione di una retta complanare con tutte e tre le rette $s_h, h = -1, 0, 1$.

GEOMETRIA ED ALGEBRA LINEARE

Seconda prova in itinere - 29/06/2012 - Versione A

Tutti i calcoli devono essere riportati per la correzione, e le risposte devono essere giustificate.

Esercizio 1. (11 punti) Sia V uno spazio vettoriale reale di dimensione 3 e sia $B = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ una sua base, e sia dato l' endomorfismo $f_a : V \to V$ definito dalle condizioni

(1) $f_a(\vec{i}) = \vec{i} + \vec{j} - a\,\vec{k}$;
(2) $f_a(\vec{j}) = 3\,\vec{j} - \vec{k}$;
(3) $\vec{j} - \vec{k}$ è autovettore per f_a relativo all' autovalore 1.

Dopo aver calcolato la matrice che rappresenta f_a rispetto alla base B, calcolare gli autovalori di f_a ed una base per ogni suo autospazio. Determinare quindi i valori di $a \in \mathbb{R}$ per cui f_a è diagonalizzabile. Posto poi $a = \frac{1}{2}$, e scelto un prodotto scalare su V per cui B è base ortonormale, calcolare l' angolo minimo tra autovettori di autospazi distinti.

Svolgimento. Essendo $\vec{j} - \vec{k}$ autovettore per f_a relativo all' autovalore 1, abbiamo $f_a(\vec{j} - \vec{k}) = \vec{j} - \vec{k}$. Usando la linearità di f_a, e l' uguaglianza $f_a(\vec{j}) = 3\,\vec{j} - \vec{k}$, otteniamo $f_a(\vec{j}) - f_a(\vec{k}) = \vec{j} - \vec{k}$ da cui $f_a(\vec{k}) = 2\,\vec{j}$. Quindi la matrice $M_{B,B}(f_a)$ che chiamiamo A per comodità, è uguale a

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \\ -a & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Il polinomio caratteristico di f_a è allora uguale a $p(t) = \det(A - tI) = -(t-1)^2(t-2)$. Le sue radici $t_1 = 1$ e $t_2 = 2$, essendo entrambe reali, sono anche autovalori per f_a, il primo di molteplicità 2, il secondo di molteplicità 1.

L' autospazio $V(1)$ è dato dai vettori le cui componenti risolvono il sistema lineare omogeneo $(A - I)[\vec{v}]_B = 0$. Riducendo la matrice $A - I$ con le operazioni elementari $R_3 + \frac{1}{2}R_2 \to R_3$ otteniamo la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ -a + \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

e quindi $r(A-I) = 2$ se $a \neq \frac{1}{2}$, mentre $r(A-I) = 1$ se $a = \frac{1}{2}$. Nel primo caso, otteniamo che una base è data da $B_1 = (\vec{j} - \vec{k})$, mentre nel secondo caso si ha $B_1 = (\vec{j} - \vec{k}, 2\,\vec{i} - \vec{k})$. In particolare, $\dim V(1) = 2 = m(1)$ se, e solo se, $a = \frac{1}{2}$.

Con simili calcoli, si ottiene che $V(2)$ ha $B_2 = (-2\,\vec{j} + \vec{k})$ come base, qualunque sia $a \in \mathbb{R}$.

In conclusione, f_a è diagonalizzabile se, e solo se, $a = \frac{1}{2}$.

Supponiamo ora che $a = \frac{1}{2}$ e che B sia una base ortonormale per V. Visto che $V(1)$ ha dimensione 2 e $V(2)$ ha dimensione 1, il minimo angolo tra autovettori di autospazi diversi è l' angolo tra il piano $V(1)$ di equazione $x + 2y + 2z = 0$ e la retta parallela al vettore $-2\vec{j}+\vec{k}$. L' angolo α cercato verifica allora

$$\sin(\alpha)=\frac{|(\vec{i}+2\vec{j}+2\vec{k})\cdot(-2\vec{j}+\vec{k})|}{|\vec{i}+2\vec{j}+2\vec{k}\,|\,|-2\vec{j}+\vec{k}\,|}=\frac{2}{3\sqrt{5}}.$$

Esercizio 2. (11 punti) Nel piano euclideo, sia dato il fascio di coniche di equazione

$$\Gamma_t : 2tx^2+2(t+1)xy+2ty^2-2x-2(t+1)y+2=0.$$

(1) Classificare le coniche del fascio al variare di $t\in\mathbb{R}$.
(2) Calcolare una forma canonica, il cambio relativo di coordinate e disegnare la conica Γ_2.

Svolgimento. Le matrici associate alla conica Γ_t sono

$$B_t=\begin{pmatrix} 2t & t+1 & -1\\ t+1 & 2t & -t-1\\ -1 & -t-1 & 2\end{pmatrix}\qquad \text{e}\qquad A_t=\begin{pmatrix} 2t & t+1\\ t+1 & 2t\end{pmatrix}.$$

Il determinate di B_t è uguale a $\det(B_t)=-2t(t^2-2t+2)$ ed esso è nullo solo per $t=0$. Il determinate di A_t è uguale a $\det(A_t)=(3t-1)(t+1)$ che è positivo per $t<-1$ oppure $t>\frac{1}{3}$. Infine, $\mathrm{tr}(A_t)\det(B_t)=-8t^2(t^2-2t+2)<0$ per ogni $t\neq 0$. In conclusione abbiamo: se $t<-1$ oppure $t>\frac{1}{3}$, Γ_t è un' ellisse reale, se $t=-1$ oppure $t=\frac{1}{3}$, Γ_t è una parabola, se $-1<t<\frac{1}{3}, t\neq 0$, Γ_t è un' iperbole, se $t=0$, Γ_0 è degenere di tipo iperbolico e le rette in cui si spezza sono $x-1=0$ e $y-1=0$.

Posto $t=2$, $\Gamma=\Gamma_2$ è un' ellisse reale. Il polinomio caratteristico di A è uguale a $p_A(t)=(t-1)(t-7)$. Gli autovalori sono allora $t_1=1, t_2=7$ entrambi di molteplicità 1. Con facili calcoli, si ha che una base ortonormale di $V(1)$ è $(\vec{e_1}=\frac{1}{\sqrt{2}}\vec{i}-\frac{1}{\sqrt{2}}\vec{j}$. La matrice ortogonale speciale P è allora uguale a

$$P=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}.$$

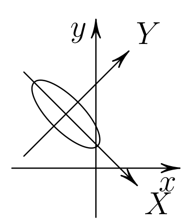
Il centro di simmetria di Γ ha coordinate che verificano il sistema

$$\begin{cases} 4x+3y-1=0\\ 3x+4y-3=0\end{cases}$$

e quindi è il punto di coordinate $(-\frac{5}{7},\frac{9}{7})$. Il cambio di coordinate che riporta Γ in forma canonica è allora

$$\begin{pmatrix} x\\ y\end{pmatrix}=P\begin{pmatrix} X\\ Y\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-\frac{5}{7}\\ \frac{9}{7}\end{pmatrix}$$

e l' equazione canonica di Γ è $\frac{X^2}{\frac{8}{7}}+\frac{Y^2}{\frac{8}{49}}=1$.



Esercizio 3. (11 punti) Sia σ la sfera di centro l' origine e raggio 2, e sia α il piano di equazione $\sqrt{3}y + z - 2\sqrt{3} = 0$.

(1) Calcolare centro e raggio della circonferenza $\gamma = \sigma \cap \alpha$.

(2) Scrivere l' equazione del cono S di vertice $V(0,0,1)$ avente γ come direttrice, e classificare quindi la conica Γ intersezione del cono S con il piano $[xy]$.

Svolgimento. La retta ortogonale ad α per il centro di σ ha equazione parametrica p : $x = 0, y = t\sqrt{3}, z = t$, ed interseca α per $t = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Il punto C corrispondente ha coordinate $(0, \frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ ed è il centro della circonferenza γ. Il raggio di γ è $R_\gamma = \sqrt{R_\sigma^2 - d^2(O,\alpha)} = 1$ essendo $R_\sigma = 2$ e $d(O,\alpha) = \sqrt{3}$. L' equazione di γ è

$$\begin{cases} y\sqrt{3} + z - 2\sqrt{3} = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 4. \end{cases}$$

Il cono richiesto ha equazione

$$\begin{cases} x = tx_0 \\ y = ty_0 \\ z = 1 + t(z_0 - 1) \\ y_0\sqrt{3} + z_0 - 2\sqrt{3} = 0 \\ x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 = 4 \end{cases}.$$

Eliminando i parametri t, x_0, y_0, z_0 si ottiene l' equazione cartesiana

$$\mathcal{C} : (13 - 4\sqrt{3})x^2 + (4 - 4\sqrt{3})y^2 + 2(6 - 4\sqrt{3})yz + 8z^2 - 2(6 - 4\sqrt{3})y - 16z + 8 = 0.$$

Esso interseca il piano $z = 0$ lungo la conica Γ di equazione

$$\begin{cases} z = 0 \\ (13 - 4\sqrt{3})x^2 + (4 - 4\sqrt{3})y^2 - 2(6 - 4\sqrt{3})y + 8 = 0 \end{cases}.$$

Visto che $13 - 4\sqrt{3} > 0$ mentre $4 - 4\sqrt{3} < 0$ Γ è un' iperbole non degenere ($V \notin [xy]$).

GEOMETRIA ED ALGEBRA LINEARE

Prova d' esame - 18/07/2012 - Versione A

Tutti i calcoli devono essere riportati per la correzione, e le risposte devono essere giustificate.

Esercizio 1. (11 punti) Sia $V = \mathbb{R}^3$ e si consideri la sua base $B = ((1,0,0),(0,1,0),(1,1,1))$. Sia poi data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

e sia $f : V \to V$ l' endomorfismo definito da $M_{B,B}(f) = A$.

(1) Calcolare gli autovalori di f.
(2) Calcolare una base per ogni autospazio di f, ed una matrice invertibile P, se esiste, che diagonalizza A.
(3) Usando poi il prodotto scalare standard di V, determinare un vettore $\vec{u}$ non nullo di $\mathbb{R}^3$ tale che l' angolo tra $\vec{u}$ e $f(\vec{u})$ sia ottuso. Ne esiste anche uno non nullo $\vec{v}$ tale che l' angolo tra $\vec{v}$ e $f(\vec{v})$ sia retto?

Svolgimento. Il polinomio caratteristico di f è $p(t) = \det(A - tI) = (1-t)[(-t)(-1-t) - 2] = -(t-1)^2(t+2)$. Essendo le sue radici reali, gli autovalori di f sono $t_1 = 1$ e $t_2 = -2$ di molteplicità $m(1) = 2, m(-2) = 1$, rispettivamente.

Calcoliamo ora l' autospazio $V(1)$: i vettori $\vec{v}$ che appartengono a tale autospazio hanno componenti $[\vec{v}]_B = {}^t(a,b,c)$ che risolvono il sistema lineare omogeneo avente

$$A - I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

come matrice dei coefficienti delle incognite. Effettuando l' operazione elementare $R_3 + 2R_2 \to R_3$ si ottiene una matrice ridotta per righe di rango 1, e quindi $\dim(V(1)) = 3 - 1 = 2 = m(1)$. Sia $B_1 = (\vec{v_1}, \vec{v_2})$ una base di $V(1)$. L' unica equazione da risolvere è $a - b + c = 0$ e quindi $b = a + c$. Le componenti dei vettori $\vec{v_1}, \vec{v_2}$ di B_1 sono, ad esempio, $[\vec{v_1}]_B = {}^t(1,1,0)$ e $[\vec{v_2}]_B = {}^t(0,1,1)$. Con facili calcoli si ottiene che $\vec{v_1} = (1,1,0)$ e $\vec{v_2} = (1,2,1)$.

Con procedimento analogo, si ha che $V(-2)$ ha dimensione 1, e, detta $B_{-2} = (\vec{v_3})$ una sua base, le componenti di $\vec{v_3}$ sono $[\vec{v_3}]_B = {}^t(0,1,-2)$. In conclusione, $\vec{v_3} = (-2,-1,-2)$.

Essendo le radici di $p(t)$ tutte reali, ed avendo gli autospazi dimensione uguale alla molteplicità dell' autovalore relativo, f è diagonalizzabile, $E = (\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3})$ è una base di V di autovettori per f, ed una matrice P che diagonalizza A è

$$P = M_{E,B}(1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Consideriamo il vettore $\vec{w} = \vec{v_3} + t\,\vec{v}$ dove $\vec{v} = (1,0,-1) \in V(1)$ è ortogonale a $\vec{v_3}$. Usando la linearità di f, si ha che $f(\vec{w}) = -2\,\vec{v_3} + t\,\vec{v}$, e quindi $\vec{w} \cdot f(\vec{w}) = -2\,\vec{v_3} \cdot \vec{v_3} - t\,\vec{v} \cdot \vec{v_3} + t^2\,\vec{v} \cdot \vec{v} = -18 + 2t^2$. Se $2t^2 - 18 < 0$, ossia $-3 < t < 3$, l' angolo tra $\vec{w}$ e la sua immagine è ottuso, mentre se $t = 3$ oppure $t = -3$, $\vec{w}$ è ortogonale alla sua immagine.

Esercizio 2. (11 punti) In $\mathbb{R}^4$, siano dati i sottospazi

$$V = L((1,0,-1,0),(0,-1,2,1))$$

e

$$W = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x+2y+z=0, z-t=0\}$$

e siano $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ e $g : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ applicazioni lineari tali che $V = \mathrm{Im}(f)$ e $W = \ker(g)$.

(1) Determinare una base di $V \cap W$ e la sua dimensione.
(2) Costruire un esempio esplicito di f e g in modo che $\ker(f \circ g) = W$.
(3) Calcolare $\dim \ker(g \circ f)$ e dedurre che $g \circ f$ ha un autovalore di molteplicità almeno 3.

Svolgimento. I vettori di V sono della forma $a(1,0,-1,0)+b(0,-1,2,1) = (a,-b,-a+2b,b)$ con $a,b \in \mathbb{R}$. Sostituendo tale vettore nel sistema che definisce W, otteniamo il nuovo sistema lineare $a-b=0$ essendo la prima equazione identicamente soddisfatta. Abbiamo che le soluzioni sono infinite e tutte verificano $a=b$. Quindi, $V \cap W$ ha dimensione 1 ed una sua base è $B = ((1,-1,1,1))$.

Il sottospazio W ha base $B_W = ((-2,1,0,0),(-1,0,1,1))$ che si ottiene con facili calcoli risolvendo il sistema che definisce W. Una base di $\mathbb{R}^4$ che completa la base di W è, ad esempio, $B = ((-2,1,0,0),(-1,0,1,1),(1,0,0,0),(0,0,0,1))$. Definiamo g ponendo

$$g(-2,1,0,0) = (0,0,0,0), g(-1,0,1,1) = (0,0,0,0),$$

$$g(1,0,0,0) = (1,0,0,0), g(0,0,0,1) = (0,0,0,1).$$

È evidente che $\mathrm{Im}(g) = L((1,0,0,0),(0,0,0,1))$. Definiamo ora f ponendo

$$f(1,0,0,0) = (0,-1,2,1), f(0,0,0,1) = (1,0,-1,0),$$

$$f(0,1,0,0) = (0,0,0,0), f(0,0,1,0) = (0,0,0,0).$$

La composizione delle due applicazioni si calcola facilmente, ed abbiamo

$$(f \circ g)(-2,1,0,0) = (f \circ g)(-1,0,1,1) = (0,0,0,0),$$

$$(f \circ g)(1,0,0,0) = (0,-1,2,1), (f \circ g)(0,0,0,1) = (1,0,-1,0)$$

ed è quindi evidente che $\ker(f \circ g) = W$ mentre $\mathrm{Im}(f \circ g) = V$.

Dal teorema del rango, sappiamo che $\dim(V) = \dim(\ker(g \circ f)) + \dim(\mathrm{Im}(g \circ f))$. Dalla definizione di applicazione composta, sappiamo che $\mathrm{Im}(g \circ f) = \mathrm{Im}(G)$ dove $G : \mathrm{Im}(f) \to V$ è la restrizione di g a $\mathrm{im}(f)$. Il nucleo di G è $\mathrm{Im}(f) \cap \ker(g) = V \cap W$ e quindi $\dim(\mathrm{Im}(G)) = \dim(\mathrm{Im}(f) = V) - \dim(V \cap W) = 1$. In conclusione, $\dim(\ker(g \circ f)) = 3$, e quindi $g \circ f$ ha l' autovalore 0 con autospazio $V(0)$ di dimensione 3. Ne risulta che $m(0) \geq 3$.

Esercizio 3. (11 punti) Sia dato il piano $\alpha : x - y - 1 = 0$, e sia Q la quadrica formata dai punti P che verificano

$$d(P,r) = \sqrt{\frac{2}{3}}\, d(P,\alpha)$$

dove r è l' asse x.

(1) Classificare Q dopo averne calcolato l' equazione.
(2) Trovare una forma canonica della conica $Q \cap [yz]$ essendo $[yz]$ il piano coordinato che contiene gli assi y ed z, ed il relativo cambio di coordinate.

Svolgimento. Sia $P(x, y, z)$ un punto. La distanza di P dall' asse x è $d(P, r) = \sqrt{y^2 + z^2}$ visto che la proiezione ortogonale di P su tale retta ha coordinate $(x, 0, 0)$. La distanza di P dal piano α è uguale a $d(P, \alpha) = |x - y - 1|/\sqrt{2}$. Sostituendo nella relazione che definisce Q, elevando al quadrato e semplificando, otteniamo l' equazione

$$Q : x^2 - 2xy - 2y^2 - 3z^2 - 2x + 2y + 1 = 0.$$

Le matrici associate a Q sono

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

Effettuando le operazione elementari $R_2 + R_1 \to R_2, R_4 + R_1 \to R_4$ sulle righe di B si ottiene una matrice ridotta con l' ultima riga nulla. Quindi, $r(B) = 3$ ossia Q è una quadrica singolare. Il polinomio caratteristico di A è $p(t) = (-3 - t)(t^2 + t - 3)$ e quindi A ha due autovalori negativi ed uno positivo. Di conseguenza, Q è un cono reale.

La conica $\Gamma = Q \cap [yz]$ ha equazione $x = 0, 2y^2 + 3z^2 - 2y - 1 = 0$. La matrice completa della conica è

$$B' = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

ed ha determinante $\det(B') = -9$. Quindi Γ è non degenere. In particolare, è un' ellisse, essendo gli autovalori di A' uguali a 2 e 3. Una sua forma canonica è

$$2Y^2 + 3Z^2 - \frac{9}{6} = 0$$

ed avendo Γ centro di simmetria in $(\frac{1}{2}, 0)$ il cambio di coordinate che la riporta in forma canonica è

$$\begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y \\ Z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

GEOMETRIA ED ALGEBRA LINEARE

Prova d' esame - 18/07/2012 - Versione B

Tutti i calcoli devono essere riportati per la correzione, e le risposte devono essere giustificate.

Esercizio 1. (11 punti) Sia $V = \mathbb{R}^3$ e sia $B = ((1,1,1),(0,1,0),(0,0,1))$ una sua base. Sia poi data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e sia $f : V \to V$ l' endomorfismo definito da $M_{B,B}(f) = A$.

(1) Calcolare gli autovalori di f.
(2) Calcolare una base per ogni autospazio di f, ed una matrice invertibile P, se esiste, che diagonalizza A.
(3) Usando poi il prodotto scalare standard di V, determinare un vettore $\vec{u}$ non nullo di $\mathbb{R}^3$ tale che l' angolo tra $\vec{u}$ e $f(\vec{u})$ sia ottuso. Ne esiste anche uno non nullo $\vec{v}$ tale che l' angolo tra $\vec{v}$ e $f(\vec{v})$ sia retto?

Esercizio 2. (11 punti) In $\mathbb{R}^4$, siano dati i sottospazi

$$V = L((0,1,-1,0),(-1,0,2,1))$$

e

$$W = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid 2x + y + z = 0, z - t = 0\}$$

e siano $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ e $g : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ applicazioni lineari tali che $V = \mathrm{Im}(f)$ e $W = \ker(g)$.

(1) Determinare una base di $V \cap W$ e la sua dimensione.
(2) Costruire un esempio esplicito di f e g in modo che $\ker(f \circ g) = W$.
(3) Calcolare $\dim \ker(g \circ f)$ e dedurre che $g \circ f$ ha un autovalore di molteplicità almeno 3.

Esercizio 3. (11 punti) Sia dato il piano $\alpha : x - y - 1 = 0$, e sia Q la quadrica formata dai punti P che verificano

$$d(P, r) = \sqrt{\frac{2}{3}}\, d(P, \alpha)$$

dove r è l' asse y.

(1) Classificare Q dopo averne calcolato l' equazione.
(2) Trovare una forma canonica della conica $Q \cap [xz]$ essendo $[xz]$ il piano coordinato che contiene gli assi x ed z, ed il relativo cambio di coordinate.

GEOMETRIA ED ALGEBRA LINEARE

TEMA D' ESAME DEL 07/09/2012

Tutti i calcoli devono essere riportati per la correzione, e le risposte devono essere giustificate.

Esercizio 1. (9 punti) Sia $V = \mathbb{R}^3$ spazio vettoriale euclideo rispetto al prodotto scalare standard, e sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'endomorfismo rappresentato, rispetto alla base canonica, dalla seguente matrice

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 1 & -3 \\ 1 & 10 & 3 \\ -3 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

(1) Calcolare la dimensione degli autospazi di f, ed una base ortonormale per ognuno di essi.
(2) Calcolare una matrice ortogonale P che diagonalizza A.
(3) Usando i calcoli fatti, esibire le equazioni cartesiane del nucleo e dell' immagine di f.

Svolgimento. Il polinomio caratteristico di f è $P(t) = -t(t-11)^2$ e quindi gli autovalori di f (essendo A simmetrica, le radici di $P(t)$ sono necessariamente reali) sono $t_1 = 0$ di molteplicità $m(0) = 1$, e $t_2 = 11$ di molteplicità $m(11) = 2$. Inoltre, dal Teorema Spettrale, sappiamo che f è diagonalizzabile, e che ogni autospazio ha dimensione uguale alla molteplicità dell' autovalore corrispondente. L' autospazio $V(11)$ è definito dall' equazione $-x+y-3z = 0$ con $[v]_C = {}^t(x, y, z)$, e quindi $V(0)$ ha $\left(\vec{e_1}= \left(-\frac{1}{\sqrt{11}}, \frac{1}{\sqrt{11}}, -\frac{3}{\sqrt{11}}\right)\right)$ come base (osserviamo che $V(0)$ e $V(11)$ sono l' uno il complemento ortogonale dell' altro, essendo f endomorfismo simmetrico). Inoltre, $\vec{e_2}= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$ appartiene a $V(11)$. Quindi, $\vec{e_3}=\vec{e_1} \wedge \vec{e_2}= \left(\frac{3}{\sqrt{22}}, -\frac{3}{\sqrt{22}}, -\frac{2}{\sqrt{22}}\right)$ è in $V(11)$ ed una base ortonormale di $V(11)$ è $(\vec{e_2},\vec{e_3})$. Ovviamente, una matrice ortogonale che diagonalizza A è

$$P = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{11}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{3}{\sqrt{22}} \\ \frac{1}{\sqrt{11}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{3}{\sqrt{22}} \\ -\frac{3}{\sqrt{11}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{22}} \end{pmatrix}.$$

Infine, $V(0)$ è il nucleo di f, e quindi le sue equazioni cartesiane sono $10x + y - 3z = 0, x + 10y + 3z = 0$, mentre $V(11)$ è l' immagine di f e la sua equazione cartesiana è $-x + y - 3z = 0$.

Esercizio 2. (9 punti) Nel piano euclideo, fissato un riferimento euclideo, si consideri la conica Γ di equazione

$$\Gamma : x^2 + 4xy + 3y^2 - 8x + 4y + 1 = 0.$$

Classificare Γ, fornirne una equazione canonica ed il relativo cambio di coordinate, e rappresentarla graficamente. Calcolare poi le equazioni delle eventuali rette tangenti a Γ per il punto $(0, -1)$.

Svolgimento. Le matrici associate a Γ sono

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 2 & 3 & 2 \\ -4 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{ed} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

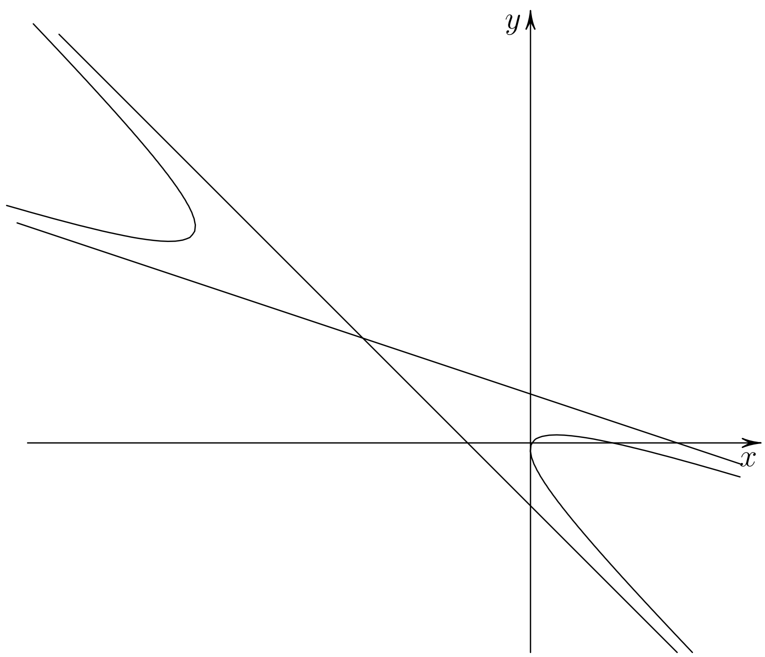
Visto che $\det(B) = -45$ e $\det(A) = -1$, abbiamo che Γ è un' iperbole. Gli autovalori di A sono $2 \pm \sqrt{5}$, e quindi un' equazione canonica per Γ è

$$(2-\sqrt{5})X^2 + (2+\sqrt{5})Y^2 + 45 = 0.$$

Il centro di simmetria di Γ ha coordinate $(-16, 10)$. Posto $a = \sqrt{10 - 2\sqrt{5}}$, una base ortonormale di $V(2-\sqrt{5})$ è $\left(\vec{e_1} = \frac{2}{a}\vec{i} + \frac{1-\sqrt{5}}{a}\vec{j}\right)$. In conclusione, la matrice di cambio base è

$$P = \begin{pmatrix} \frac{2}{a} & -\frac{1-\sqrt{5}}{a} \\ \frac{1-\sqrt{5}}{a} & \frac{2}{a} \end{pmatrix}$$

ed il cambio di coordinate è $\underline{x} = P\underline{X} + \underline{c}$, con ovvio significato dei simboli usati. Il punto $(0, -1)$ appartiene a Γ e quindi esiste un' unica retta tangente a Γ per tale punto, ed essa ha equazione $6x + y + 1 = 0$ come si ottiene facilmente usando la formula opportuna.



Esercizio 3. (9 punti) Nello spazio euclideo, sia Q il cilindro avente generatrici parallele alla retta $r : x = y = z$, e direttrice data da

$$\begin{cases} y = x^2 \\ z = 0. \end{cases}$$

(1) Calcolare l'equazione di Q.
(2) Scrivere l' equazione del piano di simmetria ortogonale di Q.

Svolgimento. L' equazione parametrica di Q è $x = x_0 + t, y = y_0 + t, z = z_0 + t, z_0 = 0, y_0 = x_0^2$ essendo $\vec{v} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$ un vettore parallelo alla retta r. Eliminando x_0, y_0, z_0, t, si ottiene $Q : (x-z)^2 = y - z$. È evidente che Q rappresenta un cilindro parabolico, essendo la direttrice una parabola. Il piano di simmetria ortogonale è parallelo a quello che contiene il vettore $\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$ parallelo alle generatrici, ed il vettore $\vec{j}$ parallelo all' asse della direttrice e quindi ha equazione della forma $x - z + h = 0$. La retta ortogonale a tale piano e passante per l' origine ha equazione $x = t, y = 0, z = -t, t \in \mathbb{R}$, ed incontra il cilindro Q nei punti $(0, 0, 0)$ e $(\frac{1}{4}, 0, -\frac{1}{4})$. Il loro punto medio appartiene al piano che stiamo cercando, e quindi $h = -\frac{1}{4}$. In conclusione, il piano cercato ha equazione $x - z - \frac{1}{4} = 0$.

GEOMETRIA ED ALGEBRA LINEARE

TEMA D' ESAME 19/02/2013

Tutti i calcoli devono essere riportati per la correzione, e le risposte devono essere giustificate.

Esercizio 1. Si consideri la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & h & 1+h \\ h & 1 & 2 \\ 1 & 2-h & 1+h \end{pmatrix},$$

con h parametro reale, e sia

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$$

l' applicazione lineare avente A come matrice associata rispetto alla base canonica.

(1) Determinare, al variare di h in $\mathbb{R}$, il rango di A, e le dimensioni di $\ker(f)$ e di $\mathrm{Im}(f)$.
(2) Posto $h = 1$, determinare nucleo ed immagine di f.
(3) Determinare i valori di h per cui $(1, 0, 1) \in \ker(f)$.

Svolgimento. Effettuiamo le operazioni elementari $R_2 \to R_2 - hR_1, R_3 \to R_3 - R_1$ ed otteniamo la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & h & 1+h \\ 0 & 1-h^2 & 2-h-h^2 \\ 0 & 2-2h & 0 \end{pmatrix}$$

che è ridotta per righe se $2 - h - h^2 \neq 0$ e $2 - 2h \neq 0$, ossia per $h \neq 1, -2$, oppure se $2 - 2h = 2 - h - h^2 = 0$, ossia se $h = 1$. Se $h = -2$, effettuiamo l' ulteriore operazione $R_3 \to R_3 + 2R_2$ ed otteniamo la matrice ridotta

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Se invece $h = 1$, la matrice ridotta che si ottiene è

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Il rango di A risulta allora

$$r(A) = \begin{cases} 1 & \text{se } h = 1 \\ 2 & \text{se } h = -2 \\ 3 & \text{altrimenti} \end{cases}.$$

Sapendo che $\dim \mathrm{Im}(f) = r(A)$, e che $\dim \ker(f) = 3 - \dim \mathrm{Im}(f)$, otteniamo

$$\dim \mathrm{Im}(f) = \begin{cases} 1 & \text{se } h = 1 \\ 2 & \text{se } h = -2 \\ 3 & \text{altrimenti} \end{cases} \qquad \dim \ker(f) = \begin{cases} 2 & \text{se } h = 1 \\ 1 & \text{se } h = -2 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}.$$

Posto $h = 1$, sappiamo che $\dim \ker(f) = 2$, e che $\dim \mathrm{Im}(f) = 1$. La prima colonna di A, per $h = 1$, è composta da tutti elementi uguali ad 1, e quindi $f(1, 0, 0) = (1, 1, 1)$. In conclusione, $\mathrm{Im}(f) = L((1, 1, 1))$. Per calcolare $\ker(f)$, risolviamo il sistema $A'X = 0$ con

A' matrice ridotta ottenuta da A con $h = 1$. L' unica equazione da risolvere è $a+b+2c = 0$ le cui soluzioni sono $a = -b - 2c$. Quindi $\ker(f) = L((-1, 1, 0), (-2, 0, 1))$.

Perché sia verificato $(1, 0, 1) \in \ker(f)$, deve risultare $A\, {}^t(1, 0, 1) = 0$, da cui si ottiene il sistema lineare $h + 2 = 0$, la cui unica soluzione è $h = -2$.

Esercizio 2. Nel piano euclideo, si consideri la conica γ di equazione

$$3x^2 - 4xy + 3y^2 - 8x + 9 = 0.$$

(1) Classificare γ e ridurla a forma canonica.
(2) Determinare l'equazione della circonferenza γ_1 di raggio massimo contenuta in γ, e l'equazione della circonferenza γ_2 di raggio minimo contenente γ, nel caso in cui γ_1 e γ_2 abbiano lo stesso centro di γ.

Svolgimento. Le matrici associate a γ sono

$$B = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -4 \\ -2 & 3 & 0 \\ -4 & 0 & 9 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Con facili calcoli si ha che $\det(B) = -3$, $\det(A) = 5$, e $\mathrm{tr}(A) = 6$. Quindi, γ è un' ellisse ($\det(B) \neq 0, \det(A) > 0$) con punti reali ($\det(B)\mathrm{tr}(A) < 0$). L' equazione canonica di γ è della forma $aX^2 + bY^2 + c = 0$ con $c = \det(B)/\det(A) = -3/5$, ed a, b autovalori di A. Il polinomio caratteristico di A è $p(t) = t^2 - 6t + 5$, le cui radici sono $t_1 = 1, t_2 = 5$, entrambe di molteplicità 1. Poniamo $a = 1, b = 5$, e quindi l' equazione canonica di γ è

$$\frac{X^2}{\frac{3}{5}} + \frac{Y^2}{\frac{3}{25}} = 1.$$

L' autospazio $V(1)$ contiene tutti e soli i vettori proporzionali a $\vec{i} + \vec{j}$ ed un versore di tale spazio è $\vec{e_1} = \frac{1}{\sqrt{2}}\, \vec{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\, \vec{j}$. Quindi la matrice P di rotazione è

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

Il centro di simmetria della conica ha coordinate che risolvono il sistema $3x - 2y - 4 = 0, -2x + 3y = 0$ e quindi sono uguali a $(12/5, 8/5)$. In conclusione, il cambio di riferimento è descritto dall' equazione

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 12/5 \\ 8/5 \end{pmatrix}.$$

Le circonferenze γ_1 e γ_2 hanno centri in $(12/5, 8/5)$ e raggi $R_1 = \frac{\sqrt{3}}{5}$ e $R_2 = \sqrt{\frac{3}{5}}$, rispettivamente. Quindi le loro equazioni sono

$$\gamma_1 : x^2 + y^2 - \frac{24}{5}x - \frac{16}{5} + \frac{41}{5} = 0$$

e

$$\gamma_2 : x^2 + y^2 - \frac{24}{5}x - \frac{16}{5} + \frac{193}{25} = 0.$$

Esercizio 3. Nello spazio euclideo, si considerino il punto $F(1, 0, 1)$ ed il piano π di equazione $x - y = 0$.

(1) Calcolare l'equazione del luogo Q formato dai punti che verificano la condizione
$$d(P,F) = \sqrt{2}d(P,\pi).$$
(2) Verificare che Q è una quadrica di rotazione, classificarla e calcolarne un' equazione canonica.
(3) Determinare l'equazione dell'asse di rotazione della quadrica Q.

Svolgimento. Sia $P(x,y,z)$. La condizione che definisce Q è
$$\sqrt{(x-1)^2+y^2+(z-1)^2} = \sqrt{2}\frac{|x-y|}{\sqrt{2}}.$$
Elevando al quadrato e semplificando, otteniamo
$$Q : 2xy + z^2 - 2x - 2z + 2 = 0.$$
Q è una quadrica perché l' equazione che la definisce è un polinomio di secondo grado. Le matrici associate a Q sono
$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
Abbiamo che $\det(B) = -1$, e quindi Q è liscia, a punti ellittici. Gli autovalori di A sono le radici di $p(t) = \det(A - tI) = -(t-1)^2(t+1)$, e quindi sono $t_1 = 1$ di molteplicità 2, e $t_2 = -1$, di molteplicità 1. L' equazione canonica di Q è allora
$$Q : X^2 + Y^2 - Z^2 + 1 = 0$$
e quindi Q è un iperboloide a due falde, di rotazione avendo un autovalore doppio. L' asse di simmetria di Q passa per il centro di simmetria C di Q, le cui coordinate risolvono il sistema $y-1=0, x=0, z-1=0$, ossia $C(0,1,1)$, ed è parallelo all' autospazio $V(-1) = V(1)^{\perp}$. L' equazione che descrive $V(1)$ è $x-y=0$ e quindi $V(-1) = L((1,-1,0))$. L' asse ha allora equazione parametrica $x = t, y = 1-t, z = 1$.