Esercitazione 08/03/2012

Esercizio 1

Risolvere con MEG il sistema lineare:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 3 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 + \frac{5}{2}x_3 = \frac{7}{2} \end{cases}$$

Esercizio 2

Risolvere con MEG il sistema lineare:

$$\begin{cases} x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 4x_5 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 6x_4 + 7x_5 = 2 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 3x_5 = 1 \\ -2x_1 - x_2 - 2x_3 - 3x_4 - 2x_5 = -2 \end{cases}$$

Esercizio 3

Risolvere con MEG il sistema lineare:

$$\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + x_3 - 2x_4 = 5 \\ 6x_1 + 3x_3 - 2x_4 = 15 \\ 2x_2 + x_4 = -3 \\ -2x_1 - x_3 - 2x_4 = -10 \end{cases}$$

Esercitazione 15/03/2012

Esercizio 1

Risolvere i sistemi lineari:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - 3x_4 + 2x_5 = 0 \\ 3x_1 + 4x_2 + 3x_3 - 7x_4 + 7x_5 = 0 \\ x_1 - 4x_4 - x_5 = 0 \\ x_2 + 3x_3 + x_4 + 7x_5 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - 3x_4 + 2x_5 = 1 \\ 3x_1 + 4x_2 + 3x_3 - 7x_4 + 7x_5 = 3 \\ x_1 - 4x_4 - x_5 = 1 \\ x_2 + 3x_3 + x_4 + 7x_5 = 2 \end{cases}$$

e studiare la relazione tra le due soluzioni generali.

Esercizio 2

Risolvere il sistema lineare $A \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ con

$$(A|\mathbf{b}) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1+\cos\alpha & 1-\cos\alpha & \sin\alpha & 1-\cos\alpha \\ 1+\cos\alpha & \sin\alpha & \sin\alpha & 0 \\ -\cos\alpha & 1-\cos\alpha-2\sin\alpha & -\sin\alpha & 0 \end{array} \right),$$

dipendente dal parametro $\alpha \in [0, 2\pi]$, nei casi $\alpha = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$. Dare l'interpretazione geometrica dei risultati in termini di intersezione di piani nello spazio.

Esercizio 3

Risolvere il sistema lineare:

$$\begin{cases} x_1 + kx_2 + kx_3 = k \\ x_2 + x_3 = k \\ kx_1 + x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$$

al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$.

Esercizio 4

Sia $A \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ il sistema lineare definito da

$$(A|\mathbf{b}) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & k_2 \\ k_1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & k_1 & 1 & 1 \end{array} \right),$$

dipendente dai parametri $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$.

1. Calcolare il numero di soluzioni del sistema al variare dei parametri.

2. Trovare, se esistono, k_1, k_2 per i quali il vettore $\mathbf{x} = (-4 \quad -4 \ 5)^t$ é soluzione del sistema.

Esercizio 5

Siano:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, E = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Calcolare, ove possibile:

1. $A+B,\ B+A,\ A+C,\ (A+B)+D,\ A+(B+D)$;

2. $C \cdot D,\ D \cdot C,\ (C \cdot D) \cdot E,\ C \cdot (D \cdot E)$;

3. $A \cdot B,\ A^t \cdot B,\ B \cdot A^t,\ B^t \cdot A,\ A \cdot B^t$, e trovare le relazioni tra questi prodotti.

Esercitazione 22/03/2012

Esercizio 1

Invertire la matrice
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$
utilizzando l'algoritmo di Gauss–Jordan.

Esercizio 2

Sia
$$A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Calcolare il determinante di A utilizzando la regola di Sarrus, lo sviluppo di Laplace ed il metodo di eliminazione di Gauss.

2. Calcolare l'inversa di A con il metodo dei complementi algebrici.

Esercizio 3

Sia
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ k & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 \end{pmatrix}$$
dipendente dal parametro reale k. Dire per quali valori di k la matrice é invertibile, in questi casi calcolare A^{-1} e risolvere il sistema lineare $A \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ con $\mathbf{b}$ generico.

Esercizio 4

Sia
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 4 & 6 & 7 \\ 1 & 1 & 2 & 3 & 3 \\ -2 & -1 & -2 & -3 & -2 \end{pmatrix}.$$
Calcolare il rango di A con il metodo dei minori.

Esercitazione 29/03/2012

Esercizio 1

Verificare quale tra i seguenti insiemi è uno spazio vettoriale:

- $U_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y + 2z = 0\}$;
- $U_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y = 1\}$;
- $U_3 = \{M \in \mathrm{Mat}(2, 2; \mathbb{R}) \mid M^T = -M\}$.

Interpretare geometricamente i casi U_1 ed U_2.

Esercizio 2

1. Calcolare la dimensione e determinare una base per gli spazi U_1 ed U_3 dell'esercizio precedente.

2. Dimostrare che

$$\mathbf{w} = (12, -8 - 10) \qquad \text{e} \qquad A = \begin{pmatrix} 0 & -5 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$$

   sono rispettivamente vettori di U_1 ed U_3.

3. Calcolare le coordinate di $\mathbf{w}$ e A rispetto alle basi scelte nel primo punto.

Esercizio 3

Sia $U = \{P(x) \in \mathbb{R}_2[x] \mid P(1) = 0\}$ l'insieme dei polinomi a coefficienti reali di grado massimo due con una radice in $x = 1$.

1. Dimostrare che U è un sottospazio di $R_2[x]$.

2. Calcolare la dimensione e determinare una base di U.

3. Dimostrare che $\{x^2 - x, x - 1\}$ è una base di U.

Esercitazione 12/04/2012

Esercizio 1

Siano $U, V \subset \mathrm{Mat}(2,2;\mathbb{R})$ definiti come:

- U l'insieme delle matrici $\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ che soddisfano

$$\begin{cases} x - y - t = 0 \\ x + z + t = 0 \\ 2x - y + z = 0 \end{cases} \quad ;$$

- V lo spazio delle combinazioni lineari

$$V = L\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \right).$$

1. Calcolare la dimensione di U e di V e trovare due loro basi.
2. Calcolare la dimensione di $U + V$ e di $U \cap V$ e trovare due loro basi.

Esercizio 2

Sia V lo spazio delle combinazioni lineari

$$V = L\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

1. Dire se $V = \mathbb{R}^4$.
2. Se $V \neq \mathbb{R}^4$ trovare una sua base ed ampliarla ad una base di $\mathbb{R}^4$.
3. Calcolare le coordinate dei seguenti vettori rispetto alla base scelta nel punto precedente:

$$\mathbf{w_1} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{w_2} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{w_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

   Dire quali di questi vettori appartengono a V.

Esercizio 3

Sia $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ l'applicazione definita da:

$$T\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x + 2y - z + w \\ z + w \end{pmatrix}.$$

1. Dimostrare che T è un'applicazione lineare.
2. Calcolare la dimensione di $Im(T)$ e trovare una sua base.
3. Calcolare la dimensione di $Ker(T)$ e trovare una sua base.

Esercitazione 19/04/2012

Esercizio 1

Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ l'applicazione definita da:

$$f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} t(x+ty) \\ t(x-y) \end{pmatrix},$$

dipendente dal parametro $t \in \{-1, 0, 1\}$.

1. Scrivere la matrice rappresentativa dell'applicazione rispetto alla base canonica.
2. Per ogni valore del parametro calcolare la dimensione e trovare una base di $Im(f)$ e $Ker(f)$.
3. Interpretare geometricamente i risultati.

Esercizio 2

Sia $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione definita da:

$$T\left((x,\ y,\ z)\right) = \left((-x-y-2z,\ x+y+2z,\ 2x+2y+2z)\right).$$

1. Scrivere la matrice rappresentativa dell'applicazione rispetto alla base canonica.
2. Calcolare la dimensione di $Ker(T^2)$ e trovare una sua base ($T^2 = T \circ T$).

Esercizio 3

Provare l'esistenza ed unicità dell'endomorfismo $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ tale che:

$$\begin{array}{ll} f(2\mathbf{e_1} + \mathbf{e_2}) = \mathbf{0}, & f(\mathbf{e_1} + 2\mathbf{e_4}) = \mathbf{e_1} + \mathbf{e_2} + \mathbf{e_3} + \mathbf{e_4}, \\ f(\mathbf{e_3} + \mathbf{e_4}) = \mathbf{0}, & f(\mathbf{e_4}) = 4\mathbf{e_3} + 8\mathbf{e_4}. \end{array}$$

1. Scrivere la matrice rappresentativa dell'applicazione rispetto alla base canonica.
2. Calcolare la dimensione e trovare una base di $Im(f)$ e $Ker(f)$.

Esercizio 4

Sia $f : \mathbb{R}_3[x] \to \mathbb{R}_2[x]$ l'applicazione definita da:

$$f(P(x)) = \frac{d^2}{dx^2} P(x).$$

1. Dimostrare la linearità dell'applicazione.
2. Scrivere la matrice rappresentativa dell'applicazione rispetto alle basi canoniche.
3. Calcolare la dimensione e trovare una base di $Im(f)$ e $Ker(f)$.

Esercizio 5

Sia $f : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione definita da:

$$f(P(x)) = \begin{pmatrix} P(0) \\ P(1) \\ P(-1) \end{pmatrix}.$$

1. Dimostrare la linearità dell'applicazione.
2. Scrivere la matrice rappresentativa dell'applicazione rispetto alle basi canoniche.
3. Calcolare la dimensione e trovare una base di $Im(f)$ e $Ker(f)$.

Esercizio 6

Sia $f : \mathrm{Mat}(2, 2; \mathbb{R}) \to \mathbb{R}^2$ l'applicazione definita da:

$$f(M) = \begin{pmatrix} \mathrm{Tr}(M) \\ (1\ 1) \cdot M \cdot (1\ 1)^T \end{pmatrix}.$$

1. Dimostrare la linearità dell'applicazione.
2. Scrivere la matrice rappresentativa dell'applicazione rispetto alle basi canoniche.
3. Calcolare la dimensione e trovare una base di $Im(f)$ e $Ker(f)$.

Esercitazione 10/05/2012

Esercizio 1

Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ l'applicazione definita da:

$$f(\mathbf{v}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{v}.$$

1. Determinare autovalori e autovettori dell'applicazione.
2. Dimostrare che l'applicazione è diagonalizzabile e scrivere la matrice diagonale e la matrice del cambiamento di base.
3. Interpretare geometricamente i risultati.

Esercizio 2

Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione definita da:

$$f(\mathbf{v}) = \begin{pmatrix} 1 & 8 & -4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & -1 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{v}.$$

1. Determinare autovalori e autovettori dell'applicazione.
2. Dimostrare che l'applicazione è diagonalizzabile e scrivere la matrice diagonale e la matrice del cambiamento di base.

Esercizio 3

Sia $f : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}_2[x]$ l'applicazione definita da:

$$f(a_0 + a_1 x + a_2 x^2) = -a_1 + (a_0 - a_1)x.$$

1. Scrivere la matrice rappresentativa dell'applicazione rispetto alla base canonica.
2. Determinare autovalori e autovettori dell'applicazione.
3. Dimostrare che l'applicazione non è diagonalizzabile e discutere la diagonalizzabilità dell'estensione naturale di f su $\mathbb{C}_2[x]$.

Esercizio 4

Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita da:

$$f(\mathbf{e_1}) = \mathbf{e_1} + \mathbf{e_2}, \qquad f(\mathbf{e_2}) = \mathbf{e_2}, \qquad f(\mathbf{e_3}) = -4\mathbf{e_1} - 2\mathbf{e_2} - \mathbf{e_3}.$$

1. Scrivere la matrice rappresentativa dell'applicazione rispetto alla base canonica.
2. Determinare autovalori e autovettori dell'applicazione.
3. Dimostrare che l'applicazione non è diagonalizzabile.

Esercitazione 17/05/2012

Esercizio 1

Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ l'applicazione definita da:

$$f(\mathbf{v}) = \begin{pmatrix} 1 & h \\ \frac{1}{2}\,h(h-1) & 1 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{v},$$

dipendente dal parametro reale h.

1. Determinare per quali valori di h l'applicazione è diagonalizzabile.
2. Interpretare geometricamente i casi $h = -1, 0, 1$.

Esercizio 2

Siano:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \\ -h & h-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & h & -h \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2+h \end{pmatrix},$$

dipendenti dal parametro reale h.

1. Posto $h = -3$ determinare autovalori e autovettori di A.
2. Determinare per quali valori di h la matrice A è diagonalizzabile.
3. Determinare per quali valori di h le matrici A e B sono simili.

Esercizio 3

Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ l'applicazione definita da:

$$f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -4x - 2hy \\ hx + 5y \end{pmatrix},$$

dipendente dal parametro reale h.

1. Determinare h tale per cui $\mathbf{v} = \mathbf{e_1} - \mathbf{e_2}$ risulti un autovettore di f.
2. Per tale valore di h dire se f è semplice.
3. Per tale valore di h diagonalizzare l'applicazione $f^4 - 3f^3$.
4. Per tale valore di h dimostrare che $Ker(f^{n+2} - f^{n+1} - 2f^n) = \mathbb{R}^2$ per qualunque $n \in \mathbb{N}$.

Esercitazione 24/05/2012

Esercizio 1

Siano:

- $< \, , \, >_I \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ il prodotto scalare standard;
- $< \, , \, >_{II} \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ il prodotto scalare definito dalla matrice di Gram

$$G_{II,S} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 9 \\ 2 & 9 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Siano inoltre:

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Per entrambi i prodotti scalari:

1. calcolare il modulo dei due vettori;
2. calcolare l'angolo compreso tra i due vettori.

Esercizio 2

Sia $< \, , \, > \colon \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}$ la funzione definita da:

$$< p, q >= \int_{-1}^{1} p(x) \cdot q(x) \, dx. \tag{1}$$

Siano inoltre S la base canonica di $\mathbb{R}_2[x]$ e $B = \{1 + x, x + x^2, x^2 + 1\}$.

1. Dimostrare che $< \, , \, >$ è un prodotto scalare.
2. Calcolare le matrici di Gram G_S e G_B.
3. Costruire una base ortonormale di $\mathbb{R}_2[x]$.
4. Dato $U = \{p \in \mathbb{R}_2[x] \mid p(1) = 0\}$ trovare una base di U e di $U^\perp$.

Esercitazione 31/05/2012

Esercizio 1

Sia $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita da:

$$T(\mathbf{e_1}) = -2\mathbf{e_1} + \mathbf{e_3}, \qquad T(\mathbf{e_2}) = \mathbf{e_2}, \qquad T(\mathbf{e_3}) = \mathbf{e_1} - 2\mathbf{e_3}.$$

1. Scrivere la matrice rappresentativa dell'applicazione rispetto alla base canonica.
2. Dire se l'applicazione è diagonalizzabile.
3. Calcolare gli autovalori dell'applicazione e trovare una base ortonormale di autovettori.
4. Trovare la matrice che diagonalizza T e la sua inversa.
5. Dimostrare che T^4 ammette una base ortonormale di autovettori e diagonalizzare l'applicazione.
6. Scrivere la forma quadratica associata all'applicazione e determinarne il segno.

Esercizio 2

Siano nel piano le rette $r : x + y = 1$ ed $s : 2x - y = -4$ e la circonferenza $\gamma : x^2 + y^2 - 2x - 4y + 1 = 0$.

1. Determinare il punto di intersezione $P = r \cap s$.
2. Trovare le rette passanti per P e tangenti a γ.

Esercizio 3

- Trovare la circonferenza concentrica a $\gamma : x^2 + y^2 + 2x - 2y = 0$ e passante per $A = (1, 1)$.
- Trovare la circonferenza passante per $A = (-1, 0)$, $B = (1, 0)$ e di raggio $R = \sqrt{5}$.
- Trovare la circonferenza passante per $A = (-1, 0)$, $B = (1, 0)$ e $C = (0, 1 + \sqrt{2})$.
- Trovare la circonferenza di centro $C = (1, 1)$ e che taglia una corda di lunghezza $4\sqrt{2}$ sull'asse delle ascisse.

Esercitazione 07/06/2012

Esercizio 1

Classificare e ridurre in forma canonica le seguenti coniche:

- $x^2 - y^2 + 2x = 0$;
- $2x^2 + 4x - 2y + 1 = 0$;
- $x^2 + 2y^2 + 12y + 10 = 0$;
- $x^2 + 2y^2 + 12y + 20 = 0$;
- $x^2 - y^2 + 2x - 2y = 0$.

Esercizio 2

Sia il fascio di coniche dipendente dal parametro $t \in \mathbb{R}$:

$$\gamma_t : \; x^2 + (1-t)y^2 + 2tx - 2(1-t)y + 2 - t = 0.$$

Classificare tutte le coniche del fascio.

Esercizio 3

Sia il fascio di coniche dipendente dal parametro $t \in \mathbb{R}$:

$$\gamma_t : \; tx^2 + 2(2-t)xy + ty^2 - x - y + 1 - t = 0.$$

1. Classificare γ_3, trovarne la forma canonica ed il cambio del sistema di coordinate tra quello iniziale e quello canonico.
2. Determinare i punti base del fascio γ_t.
3. Trovare per quali valori di t la conica γ_t è rispettivamente una iperbole equilatera ed una circonferenza.

Esercitazione 14/06/2012

Esercizio 1

Sia:

$$M_{h,k} = \begin{pmatrix} k & k & 2h \\ k & 1 & h+1 \\ 3h & h+1 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. Determinare per quali valori di (h,k) la matrice $M_{h,k}$ è la matrice completa di una conica.

2. Classificare tutte le coniche del punto precedente.

3. Trovare per quale valore di (h,k) il punto $P = (1,1)$ appartiene ad una conica.

Esercizio 2

Sia il fascio di coniche dipendente dal parametro $t \in \mathbb{R}$:

$$\gamma_t : \; x^2 + (1-t)xy + y^2 - 3x + ty = 0.$$

1. Classificare γ_{-1}, trovarne la forma canonica ed il cambio del sistema di coordinate tra quello iniziale e quello canonico.

2. Determinare i punti base del fascio γ_t.

3. Trovare la retta tangente a γ_t in $(0,0)$ per ogni valore di t e stabilire se queste determinano un fascio di rette.

Esercizio 3

Sia la conica:

$$\gamma : \; x^2 - xy + 2x - y = 0.$$

1. Verificare che γ interseca ogni retta orizzontale.

2. Trovare la retta orizzontale che taglia su γ la corda di lunghezza minima.

Esercizio 4

Trovare e classificare il luogo dei punti distanti dalla retta $x - y - 1 = 0$ la metà della distanza dal punto $F = (0,2)$.

Esercizio 5

Trovare l'ellisse di centro $C = (1, 2)$ e semiassi rispettivamente di lunghezza $2\sqrt{2}$ ed 1 e paralleli a $\mathbf{e_1} + \mathbf{e_2}$ e $-\mathbf{e_1} + \mathbf{e_2}$.

Esercitazione 21/06/2012

Esercizio 1

Sia la quadrica:

$$Q: \ x^2 + y^2 + 4z^2 - 2x = 0.$$

1. Classificare Q e trovarne una forma canonica.

2. Costruire il cilindro avente:

   - direttrice la curva $C = Q \cap \Pi$ dove Π è il piano $2z - 1 = 0$;
   - generatrici le rette parallele all'asse z.

3. Dato il piano $\Pi' : \ z = 0$ costruire la superfice di rotazione ottenuta ruotando la curva $C' = Q \cap \Pi'$ attorno all'asse x.

Esercizio 2

Sia $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita da:

$$T(\mathbf{e_1}) = \mathbf{e_1} + 2\mathbf{e_2}, \qquad T(-\mathbf{2e_2}) = -4\mathbf{e_1} - 2\mathbf{e_2}, \qquad T(-\mathbf{e_3}) = \mathbf{e_3}.$$

1. Scrivere la matrice rappresentativa M dell'applicazione rispetto alla base canonica.

2. Dire se l'applicazione è simmetrica.

3. Classificare la quadrica $Q : \ \mathbf{x}^T \cdot M \cdot \mathbf{x} - 1 = 0$ e trovarne una forma canonica.

4. Determinare se la quadrica è una superficie di rotazione.

Esercizio 3

Sia il fascio di coniche dipendente dal parametro $t \in \mathbb{R}$:

$$\gamma_t : \ x^2 - 2(t+1)xy - ty^2 - 2tx - 2ty = 0.$$

1. Determinare t per cui γ_t è una conica degenere.

2. Determinare t per cui γ_t è una circonferenza e calcolarne il centro ed il raggio.

3. Costruire il cilindro C avente:

- direttrice la conica γ_1 nel piano $z = 0$;
- generatrici le rette parallele a $r : \begin{cases} x - y = 0 \\ y - z + 1 = 0 \end{cases}$.

4. Classificare l'intersezione di C con un generico piano.

5. Costruire il cono C' avente:
   - direttrice la conica γ_2 nel piano $z = 0$;
   - vertice il punto $V = (0, 0, 1)$.

6. Determinare e classificare l'intersezione di C' con il piano $x = 0$.