Esercitazione 2 - 20/03

1. Un punto materiale inizialmente fermo percorre una traiettoria rettilinea. Per un intervallo di tempo ΔT_1 procede con accelerazione costante a_1; poi prosegue per un intervallo ΔT_2 a velocità costante, infine termina con accelerazione costante a_2 negativa, fino a fermarsi dopo un intervallo ΔT_3. Calcolare l'intervallo di tempo ΔT_3 in funzione delle altre costanti del problema. Disegnare i grafici dello spostamento *s*, della velocità *v* e dell'accelerazione *a* in funzione del tempo *t*.

   [$\Delta T_3 = -a_1\,\Delta T_1/a_2 = a_1\,\Delta T_1/|a_2|$]

2. Due automobili *A* e *B* sono in moto lungo una strada rettilinea, inizialmente con velocità rispettive $v_{A0}=70$ km/h e $v_{B0}=90$ *km/h*. Ad un certo istante di tempo, quando la distanza fra le due vetture vale $d=60$ *m*, il conducente di *A*, che si trova alle spalle di *B*, decide di effettuare un sorpasso ed imprime alla propria autovettura un accelerazione costante $a=1.5$ m/s^2. Si calcoli dopo quanto tempo avviene il sorpasso, e la velocità di A a quell'istante.

   [$\Delta t \approx 13.38$ s; $v_A(\Delta t) \approx 39.5\ \mathrm{m\,s^{-1}} \approx 142.3$ km/h]

3. Un punto materiale si muove nel piano (x, y) secondo la legge oraria:

   $$\begin{cases} x = at \\ y = bt^2 + y_0 \end{cases}$$

   con $a=2\ ms^{-1}$, $b=2.5\ ms^{-2}$ e $y_0=0.5\ m$. Ricavare l'equazione della traiettoria ed il valore della velocità (in modulo, direzione e verso) all'istante $t_1=1$ s.

   [$y= b/a^2\, x^2 + y_0$; 5,4 m/s; $\alpha \approx 68.2°$]

4. Un punto materiale si muove nel piano (x, y) secondo la legge oraria:

   $$\begin{cases} x = at^2 \\ y = 2bt \end{cases}$$

   Ricavare l'equazione della traiettoria, l'accelerazione tangenziale, quella normale, ed il raggio di curvatura in funzione del tempo.

   [$x = \dfrac{a}{4b^2}y^2$; $\vec{a}_T = \dfrac{2a^2t}{a^2t^2+b^2}\left(at\,\hat{u}_x + b\,\hat{u}_y\right)$; $\vec{a}_N = \dfrac{2ab}{a^2t^2+b^2}\left(b\,\hat{u}_x - at\,\hat{u}_y\right)$ $\rho = \dfrac{v^2}{a_N}$]

5. Un punto si muove lungo una circonferenza con legge oraria $s(t) = t^3 + 2t^2$. Se al tempo t=2 s l'accelerazione è $a=16\sqrt{2}$ m/s^2, calcolare il raggio *R* della circonferenza.

   [R=25 m]

6. Un oggetto viene lanciato da terra con una velocità iniziale v_0 diretta verticalmente verso l'alto, ed è soggetto all'accelerazione di gravità *g*, diretta verso il basso. Quanto vale la quota massima raggiunta? Dopo quanto tempo l'oggetto torna a terra? Quale è la velocità finale, un attimo prima di toccare il suolo?

   [$y_{max} = \dfrac{v_0^2}{2g}; t_f = \dfrac{2v_0}{g} = 2t_{max}; \vec{v}_f = -\vec{v}_0$]

7. Un battello che si muove alla velocità $v=20$ *km/h* deve attraversare un fiume, largo $d=50$ *m* e avente velocità $v_f=1$ *m/s* e raggiungere un punto situato sulla perpendicolare alla sponda nel luogo di partenza. Calcolare l'inclinazione α della direzione del moto, rispetto alla

normale alla sponda, perché la rotta risulti quella voluta. Quanto tempo è necessario per completare la traversata?

[α=10.36; t=9.14 s]

8. Un proiettile viene lanciato da terra con velocità iniziale $\vec{v}_0$ inclinata di un angolo ϑ_0 rispetto alla direzione orizzontale, ed è soggetto all'accelerazione $\vec{g}$ diretta verso il basso, per effetto del campo gravitazionale. Calcolare la gittata del proiettile in funzione di $|\vec{v}_0|$ e di ϑ_0. Fissata la velocità scalare v_0, per quale valore di ϑ_0 la gittata è massima?

$$[\ \Delta x = 2\sin\vartheta_0\cos\vartheta_0\frac{v_0^2}{g} = \sin(2\vartheta_0)\frac{v_0^2}{g};\ \vartheta_0 = 45°;\ \Delta x_{\max} = \frac{v_0^2}{g}\ ]$$

9. Un cannone viene puntato su un bersaglio che è posto in cima ad una torre di altezza h, posta ad una distanza a dal cannone. All'istante dello sparo, il bersaglio viene lasciato cadere dalla torre. Mostrare che, purché la gittata del cannone non sia inferiore ad a, il proiettile colpisce il bersaglio.

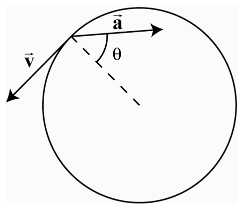
10. Una pietra è lasciata cadere in acqua da un ponte alto 44m sull'acqua. Una seconda pietra è gettata verticalmente dopo un secondo dalla partenza della prima. Le pietre colpiscono l'acqua allo stesso istante. Determinare la velocità iniziale della pietra.

[v_i=12.2m/s]

11. Un ciclista percorre una pista circolare di raggio $R = 150\ m$ partendo da fermo con accelerazione tangenziale costante di valore a_t, fino all'istante t_1, poi continua con la velocità scalare v_1, raggiunta, riuscendo dopo un tempo $T = 2\ min$ a compiere un altro giro. Sapendo che al tempo t_1 l'angolo formato dal vettore accelerazione col vettore velocità vale $\vartheta(t_1) = 45°$, determinare:
    a. lo spazio s_1 percorso fino al tempo t_1;
    b. il valore dell'accelerazione tangenziale a_t;
    c. il tempo t_1;
    d. la velocità v_1;
    e. l'angolo $\vartheta(t)$ formato fra l'accelerazione e la velocità al variare del tempo.

$$[\ v_1 = \frac{2\pi R}{T} \cong 7.85\,\frac{m}{s};\ t_1 = \frac{v_1}{a_t} \cong 19.1\,s;\ s_1 = \frac{1}{2}a_t\,t_1^2 = 75\ m;\ a_t = \frac{v_1^2}{R} \cong 0.41\,\frac{m}{s^2};\ \vartheta(t) = \arctan\left(\frac{t^2}{t_1^2}\right), t < t_1 = \frac{T}{2\pi}\ ]$$

12. Ad un certo istante di tempo, una particella che si muove in verso antiorario su una circonferenza di raggio r=2m possiede una velocità di v=8m/s e la sua accelerazione totale è diretta come mostrato in figura con θ=30° . In tale istante si determinino:
    a. l'accelerazione centripeta della particella;
    b. l'accelerazione tangenziale;
    c. il modulo dell'accelerazione totale.



[$a_N=v^2/R=32m/s^2;\ a=a_N/cos(\theta)=36.45m/s^2;\ a_T=asen(\theta)=18.47m/s^2$]