ESAME DI GEOMETRIA
Politecnico di Milano – Ingegneria

Appello del 17 luglio 2013

1. Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'endomorfismo tale che

   i. $(1,1,0)$ è un autovettore per f relativo all'autovalore 1;
   ii. $(1,0,1)$ è un autovettore per f relativo all'autovalore -1;
   iii. $f(0,1,1) = (1,-1,0)$.

   (a) Determinare la matrice rappresentativa di f rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$.
   (b) Determinare gli autovalori di f e i corrispondenti autospazi. e dire se f è diagonalizzabile;
   (c) Stabilire se f è invertibile e in caso affermativo dire se f^{-1} è diagonalizzabile.

2. Sia Σ la sfera in $\mathbb{R}^3$ con centro nell'origine e raggio uguale a 2.

   (a) Scrivere l'equazione cartesiana del piano π passante per $P \equiv (1,1,0)$ e parallelo all'asse z che taglia Σ lungo una circonferenza Γ di raggio $\sqrt{2}$.
   (b) Scrivere l'equazione del cilindro $\mathcal{C}$ con direttrici perpendicolari al piano π avente Γ come direttrice.
   (c) Determinare l'equazione di una sfera tangente al piano π e inscritta nel cilindro $\mathcal{C}$, e il numero di tali sfere.

3. Si consideri l'equazione $\underline{x}^T A_h \underline{x} = 0$ con

$$A_h = \begin{bmatrix} 2h & 2 & 2h \\ 2 & 4 & 1 \\ 2h & 1 & h \end{bmatrix} \qquad \text{e} \qquad \underline{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}.$$

   (a) Provare che l'equazione descrive un fascio di coniche e determinare al variare di $h \in \mathbb{R}$ il tipo di conica.
   (b) Per $h = 2$, sia Γ la conica $\underline{x}^T A_2 \underline{x} = 0$,
      i. Riconoscere Γ.
      ii. Determinare (se esistono) centro e assi di Γ.