

# PROGRAMMA DEL CORSO GEOMETRIA E ALGEBRA LINEARE 2013

## Geometria affine

Segmenti orientati e vettori geometrici. Combinazioni lineari e dipendenza lineare. Basi e sistemi di riferimento per la retta, il piano e lo spazio. Coordinate di vettori e punti. Geometria affine di rette e piani: rappresentazione parametrica, rappresentazione algebrica, mutua posizione, fasci di rette, fasci di piani.

## Sistemi lineari

Sistemi lineari in forma matriciale. Pivot. Matrici a scala. Metodo di eliminazione di Gauss. Proprietà delle soluzioni. Rango e nucleo di una matrice. Teorema di Rouché-Capelli. Sistemi lineari dipendenti da parametri. Interpretazione geometrica.

## Calcolo matriciale

Vettori riga e colonna, matrici. Somma e prodotto per uno scalare. Prodotto tra matrici. Matrice nulla e matrice identità. Proprietà delle operazioni. Matrici trasposte. Matrici quadrate, triangolari, diagonali. Matrici simmetriche e antisimmetriche. Matrici invertibili: definizione, condizioni di esistenza, proprietà. Calcolo dell'inversa con l'algoritmo di Gauss-Jordan. Risoluzione di sistemi lineari determinati. Traccia di una matrice. Definizione di determinante di una matrice e calcolo. Teorema di Binét. Proprietà del determinante, calcolo del determinante con MEG, formule di Laplace. Matrice aggiunta ed inversa, teorema di Kronecker. Teorema di Cramer.

## Spazi vettoriali

Spazi vettoriali: definizione ed esempi. Proprietà degli spazi vettoriali. Sottospazi vettoriali. Esempi. Spazi di polinomi. Combinazioni lineari, generatori, dipendenza lineare. Basi: definizione ed esempi. Proprietà delle basi. Spazi di dimensione finita. Dimensione. Costruzione delle basi. Cambiamento di base. Spazio delle righe, delle colonne e rango di una matrice. Nucleo e immagine di una matrice. Operazioni sui sottospazi. Formula di Grassman.

## Applicazioni lineari

Applicazioni lineari: definizione, esempi, proprietà. Nucleo, fibre ed immagine di una applicazione. Algebra delle applicazioni lineari. Omomorfismi, endomorfismi, isomorfismi. Teorema di isomorfismo. Teorema di rappresentazione, cambiamento di base. Teorema di nullità più rango.

## Autovalori, autovettori e diagonalizzazione

Autovalori e autovettori di applicazioni lineari e di matrici: definizione, esempi, proprietà. Autospazi. Applicazioni diagonalizzabili. Basi di autovettori e primo criterio di diagonalizzabilità. Matrici simili. Determinante e traccia di applicazioni. Polinomio ed equazione caratteristica. Molteplicità algebrica e geometrica. Indipendenza degli autovettori. Condizione sufficiente di diagonalizzabilità. Autovalori regolari e semplici. Secondo criterio di diagonalizzabilità. Invarianti per similitudine. Diagonalizzazione e algebra delle applicazioni lineari. Diagonalizzazione di applicazioni dipendenti da parametri. Diagonalizzazione di polinomi di applicazioni. Teorema di Caley-Hamilton ed inversione di applicazioni.

## Spazi euclidei

Prodotto scalare e spazi euclidei: definizione ed esempi. Norma: definizione, esempi e proprietà elementari. Proiezioni ortogonali. Disuguaglianze di Schwarz e triangolare. Angolo tra vettori. Matrici di Gram. Basi ortonormali. Algoritmo di Gram-Schmidt. Proiezioni ortogonali su sottospazi, riflessioni. Complementi ortogonali di sottospazi. Isometrie e matrici ortogonali. Interpretazione geometrica delle isometrie. Teorema di Eulero. Applicazioni ortogonalmente diagonalizzabili. Applicazioni simmetriche. Teorema spettrale. Matrici congruenti. Forme quadratiche: definizioni, esempi, segnatura.

## Geometria euclidea

Sistemi di riferimento cartesiani. Geometria euclidea di rette e piani. Prodotto vettoriale. Distanze tra punti, rette e piani, in due e tre dimensioni. Circonferenze e sfere. Sfere e loro intersezioni con rette e piani.

## Coniche e quadriche

Definizione ed equazione delle coniche in forma canonica. Coniche in forma matriciale. Affinità e rototraslazioni.

Invarianti metrici delle coniche. Classificazione e riduzione in forma canonica. Fasci di coniche: definizione, esempi, punti base. Coniche degeneri in un fascio. Quadriche in forma matriciale. Invarianti metrici delle quadriche. Classificazione e forma canonica delle quadriche. Quadriche rigate. Piano polare e tangente. Superfici di rotazione. Costruzione di quadriche di rotazione. Coni e cilindri generalizzati. Coni e cilindri sopra rette e coniche. Intersezioni tra piani e quadriche, proiezioni ortogonali di curve. Assi di simmetria.