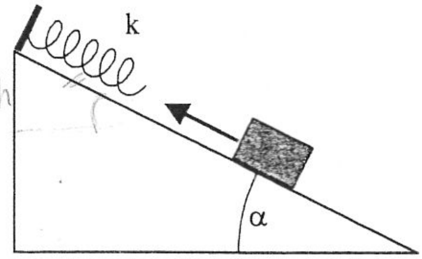
Politecnico di Milano – Scuola di Ingegneria Industriale e dell'Informazione

**27/6/2013**
*ore 16:30*

# FISICA (preappello)

*Proff. Ciucci, Della Valle, Magni, Nisoli, Torricelli*

**1)** Una cassa di massa $m$ striscia verso l'alto su un piano inclinato di un angolo $\alpha$ rispetto all'orizzontale. La superficie è scabra con coefficiente d'attrito dinamico $\mu_d$. Durante il moto la cassa colpisce l'estremità di una molla fissata al piano comprimendola di $\Delta L$. Si determini la velocità della cassa nell'istante in cui comincia a comprimere la molla.




**2)** Una pallina è in moto circolare su un piano orizzontale scabro legata ad un punto fisso (appartenente al piano) da un filo inestensibile di massa trascurabile. Sapendo che dopo un giro la tensione della fune è diminuita del 25%, si calcoli quanti giri compie la pallina prima di fermarsi.

**3)** a) Si definisca la pressione in un fluido.
b) Si ricavi l'equazione della statica dei fluidi ideali.

**4)** Una macchina termica che lavora tra due sorgenti di calore con temperature $T_1$ = 300 K e $T_2$ = 600 K fornisce una potenza media di 10 W con un rendimento pari al 50% di quello di una macchina di Carnot che utilizzi le stesse sorgenti. Si calcoli il calore scambiato con ciascuna delle sorgenti in un minuto di funzionamento e la corrispondente variazione di entropia dell'universo.

- Scrivere in stampatello NOME, COGNOME e numero di MATRICOLA
- ***FIRMARE** l'elaborato*
- *MOTIVARE e COMMENTARE adeguatamente le formule utilizzate*

1.

In base al teorema di conservazione dell'energia per un singolo punto materiale, la variazione di energia meccanica del punto materiale è pari al lavoro non conservativo:

$$\Delta E = \mathcal{L}^{NC}$$

$$\Delta E = E_p(B) + E_c(B) - E_p(A) - E_c(A)$$

con A e B punto iniziale e finale considerati. Se diciamo A il punto in cui la cassa inizia a comprimere la molla e $v_0$ la sua velocità in quel momento, e diciamo B il punto in cui la cassa comprime al massimo la molla, avremo

$$E_p(B) = \frac{1}{2}K(\Delta L)^2 + mg\,\Delta L \sin\alpha$$

$$E_p(A) = 0$$

$$E_c(B) = 0$$

$$E_c(A) = \frac{1}{2}m v_0^2$$

Inoltre $\mathcal{L}^{NC} = -\mu_d\, mg\cos\alpha\,\Delta L$

essendo $mg\cos\alpha$ la reazione normale del piano e quindi l'attrito dinamico radente $F_A = \mu_d mg\cos\alpha$ controverso alla velocità della cassa. Abbiamo quindi:

$$\frac{1}{2}K(\Delta L)^2 + mg\Delta L\sin\alpha - \frac{1}{2}mv_0^2 =$$
$$= -\mu_d mg\cos\alpha\,\Delta L$$

da cui

$$v_0 = \left[\frac{K}{m}(\Delta L)^2 + 2(\sin\alpha + \mu_d\cos\alpha)g\Delta L\right]^{1/2}$$

2.

Il moto della pallina è circolare decelerato a causa dell'attrito dinamico radente. Sulla pallina agiscono nel piano del moto la tensione T della fune e l'attrito dinamico radente che è sempre diretto come la velocità del punto materiale su cui agisce ma controverso ad essa. La tensione non compie lavoro poiché è ovunque ortogonale allo spostamento, invece l'attrito compie un lavoro negativo. Dal teorema delle forze vive sappiamo che la variazione di energia cinetica è pari al lavoro della risultante di tutte le forze. Se diciamo $v_0$ la velocità iniziale della pallina, dal teorema dell'energia cinetica abbiamo

$$\Delta E_c = -\frac{1}{2} m v_0^2 = n \mathcal{L}^{NC}_{giro} = -n \mu_d m g 2\pi R$$

essendo n il numero di giri necessari affinché la pallina si fermi, m la sua massa e R il raggio della circonferenza su cui si muovono.

$\mathcal{L}^{NC}_{giro}$ è il lavoro della forza d'attrito in un giro. Possiamo determinare tale lavoro osservando che poiché la tensione della fune e la velocità istantanea della pallina sono legate dalla relazione

$$T = m\frac{v^2}{R},$$

che rappresenta la I eq. cardinale (o seconda legge di Newton) lungo la direzione normale alla traiettoria, se $T$ diminuisce del 25% in un giro, allora $v^2$ diminuisce del 25% e anche l'energia cinetica della pallina diminuisce del 25% in un giro.

Quindi $\mathcal{L}^{NC}_{giro} = \Delta E_{c,\,giro} = 0.25\left(-\frac{1}{2}mv_0^2\right)$

Insieme alla precedente equazione, troviamo perciò

$$-\frac{1}{2}mv_0^2 = n\left(-\frac{1}{8}mv_0^2\right)$$

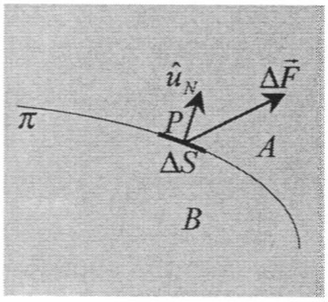
da cui $n = 4$ (indipendentemente da $v_0$).

3.

a)

**La *pressione* è la grandezza che esprime gli effetti *macroscopici* delle azioni delle particelle le une sulle altre e sulle pareti del recipiente.**

Consideriamo un punto $P$ all'interno di un fluido, ed una superficie ideale $\pi$ passante per $P$ che separa (idealmente) il fluido in due parti, A e B, (vedi figura).
Sia poi $\Delta S$ l'area di un elemento della superficie $\pi$ nell'intorno di $P$, e $\Delta\vec{F}$ la risultante delle azioni esercitate dalla parte $B$ sull'altra parte parte $A$ attraverso l'elemento di superficie di area $\Delta S$.




**Def.** Si definisce *sforzo* esercitato dal fluido in $P$ il vettore:

$$\vec{\phi} \equiv \lim_{\Delta S\to 0}\frac{\Delta\vec{F}}{\Delta S} = \frac{d\vec{F}}{dS}$$

Possiamo scomporre lo sforzo nelle componenti *normale* e *tangente* all'elemento di superficie $dS$: $\vec{\phi} = p\hat{u}_N + \tau\hat{u}_T$

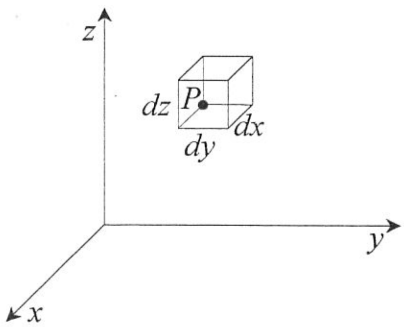
La componente *normale* dello sforzo viene detta *pressione*.
La componente *tangente* prende il nome di *sforzo di taglio*.
Le dimensioni della pressione sono:

$$[p] = [F][S]^{-1} = [M][L][T]^{-2}[L]^{-2} = [M][L]^{-1}[T]^{-2};$$

l'unità di misura nel S.I. è il Pascal ($Pa$), definito come la pressione corrispondente ad una forza di 1 Newton esercitata su una superficie di 1 metro quadro.

b)

Consideriamo un fluido omogeneo immerso in un campo di forze esterno, ed un elemento infinitesimo di volume al suo interno, di forma *cubica*. Possiamo individuare la posizione di tale elemento cubico in un SdR cartesiano attraverso le coordinate di un vertice del cubo, ad esempio il punto $P$ (vedi figura), di coordinate $x,y,z$.




L'equazione di equilibrio per il nostro elementino di volume sarà:

$$d\vec{F}_x + d\vec{F}_y + d\vec{F}_z + d\vec{F} = 0,$$

ove $d\vec{F}_x$, $d\vec{F}_y$, e $d\vec{F}_z$ sono le forze di pressione (infinitesime) esercitate da tutto il resto del fluido sull'elementino cubico considerato e $d\vec{F}$ è la forza esercitata direttamente sull'elementino a causa del campo di forze esterno.

Indichiamo con $\rho$ la densità del fluido, con $p$ la sua pressione (che in generale sarà un campo scalare $p = p(x,y,z)$), e con $\vec{f}$ la <u>*forza per unità di massa*</u> del campo esterno (che in generale sarà un campo vettoriale $\vec{f} = \vec{f}(x,y,z)$, anche se nel caso particolare della forza peso risulta $\vec{f} = -g\hat{u}_z$, dunque un campo uniforme).

Esprimiamo ora ciascuno dei diversi termini (infinitesimi) di forza coinvolti nell'equazione di equilibrio in funzione del campo esterno e della pressione.

Si ha:

$d\vec{F} = \rho dxdydz\,\vec{f}(x,y,z)$,

$d\vec{F}_x = \vec{F}_x(x,y,z) - \vec{F}_x(x+dx,y,z) = p(x,y,z)dydz\hat{u}_x - p(x+dx,y,z)dydz\hat{u}_x =$

$= -\left[p(x+dx,y,z) - p(x,y,z)\right]dydz\hat{u}_x = -\dfrac{\partial p(x,y,z)}{\partial x}dxdydz\hat{u}_x..$

Analogamente, troviamo:

$d\vec{F}_y = -\dfrac{\partial p(x,y,z)}{\partial y}dydxdz\hat{u}_y$, e

$d\vec{F}_z = -\dfrac{\partial p(x,y,z)}{\partial z}dzdxdy\hat{u}_z..$

L'equazione di equilibrio statico dell'elementino di fluido può essere dunque riscritta come segue:

$$-\left(\frac{\partial p}{\partial x}\hat{u}_x + \frac{\partial p}{\partial y}\hat{u}_y + \frac{\partial p}{\partial z}\hat{u}_z\right) + \rho\,\vec{f} \;=\; 0$$

ovvero, ricordando l'espressione dell'operatore gradiente in coordinate cartesiane:

$\vec{\nabla}p \;=\; \rho\,\vec{f}$.

4.

$$\eta = 1 - \frac{Q_{ced}}{Q_{ass}}$$ è il rendimento della macchina termica in esame, essendo $Q_{ass}$ il calore assorbito dalla sorgente a temperatura $T_1$ e $Q_{ced}$ il calore ceduto alla sorgente a temperatura $T_2 < T_1$.

La macchina di Carnot ideale che lavora tra le medesime sorgenti ha rendimento pari a $\eta_c = 1 - \frac{T_2}{T_1} = \frac{1}{2}$

Poiché $\eta = \frac{1}{2}\eta_c = \frac{1}{4}$ per ipotesi, si ha che $1 - \frac{Q_{ced}}{Q_{ass}} = \frac{1}{4}$ (i)

Inoltre dalla potenza media $P = 10\,W$, si ha che la macchina termica compie in un intervallo di tempo $\Delta t = 60\,s$ un lavoro $\mathcal{L} = P\Delta t = 600\,J$. Tale lavoro è anche pari al calore netto scambiato

$$\mathcal{L} = Q_{ass} - Q_{ced} = 600\,J \quad \text{(ii)}$$

La (i) e la (ii) rappresentano un sistema di 2 equazioni in due incognite, $Q_{ass}$, $Q_{ced}$.

La soluzione del sistema risulta

$Q_{ass} = 2400$ J, $Q_{ced} = 1800$ J

La variazione di entropia dell'universo in 10 s di funzionamento della macchina (nell'ipotesi che in tale intervallo di tempo la macchina compia un numero intero di cicli) risulta pari alla variazione di entropia delle sole sorgenti ($\Delta S_U = \Delta S_S + \Delta S_A$ con $\Delta S_S = 0$ in un ciclo), quindi:

$$\Delta S_U = \Delta S_1 + \Delta S_2 =$$

$$= -\frac{Q_{ass}}{T_1} + \frac{Q_{ced}}{T_2} = 2 \text{ J/K}$$