APPUNTI SUI NUMERI NATURALI

1 - Il metodo assiomatico

L'aspetto caratterizzante della matematica, in contrasto con le altre scienze, e' l'uso della dimostrazione invece della osservazione e dell'esperimento. Un fisico puo' provare leggi fisiche da altre leggi fisiche. Ma e' la verifica sperimentale la prova definitiva di una legge fisica. Un matematico accetta una proprieta' solo quando e' stata dimostrata.

Dal momento che in matematica una legge e' provata da altre leggi, appare chiaro che non tutte le leggi possono essere dimostrate. Le prime leggi che si accettano non possono essere dimostrate a causa della mancanza di leggi precedenti da cui possono essere dedotte. Di conseguenza, abbiamo un certo numero di leggi iniziali, chiamati **assiomi**, che accettiamo senza dimostrazione; le restanti leggi, che chiamiamo **teoremi**, sono dimostrate tramite gli assiomi. Come scegliere gli assiomi. Un criterio di scelta e' il requisito di essere recepiti chiari ed evidenti dalla natura dei concetti coinvolti.

In questo modo abbiamo una riduzione di un gran numero di leggi ad un piccolo numero di assiomi.

Una simile riduzione si puo' realizzare anche per i concetti matematici. Possiamo definire certi concetti tramite altri concetti. Quindi, abbiamo concetti primi che non sono definiti perche'non ci sono concetti precedenti in termini dei quali essi possono essere definiti. Dunque, abbiamo un certo numero di **concetti base** che non sono definiti; i restanti concetti, detti **concetti derivati**, sono definiti in termini di questi. Il criterio della scelta dei concetti primi e' simile a quello per gli assiomi.

Possiamo ora immaginare come deve comportarsi un matematico.

Egli ci presenta certi concetti e certi assiomi relativi a questi concetti. Ci spiega questi concetti fino a quando noi li comprendiamo sufficientemente bene da renderci conto che gli assiomi sono veri. Egli, allora, procede a definire concetti derivati ed a provare teoremi relativi ai concetti base e derivati. L'intero edificio che egli costruisce consistente di concetti base, concetti derivati, assiomi e teoremi e' chiamato un **sistema assiomatico**.

Nella aritmetica di Peano, che tra poco considereremo, i concetti primitivi sono numero, zero e successivo.

Concludiamo questa premessa con qualche riflessione sui criteri con cui vanno scelti concetti primitivi ed assiomi. Nel sistema assiomatico discusso sopra si segue il pensiero aristotelico che i concetti primitivi sono piu' facilmente accettati da moltitudine via via piu' ampia di persone quanto piu' essi sono semplici, intuitivi, immediati. Questa e' la impostazione dell' assiomatica classica.

Quindi nell' assiomatica classica si hanno in mente dei concetti e si definiscono certi assiomi intorno a questi concetti. Ma e' possibile scoprire altri concetti per cui gli assiomi sono veri e in questo caso, i teoremi dimostrati saranno veri anche per questi nuovi concetti.

Questo fatto ha indotto i matematici a considerare sistemi assiomatici in cui gli assiomi siano veri per un gran numero di concetti.

Tale sistema assiomatico viene detto **sistema assiomatico moderno**.

La concezione moderna dell' assiomatica permette un certo grado di liberta' e non e' strettamente vincolata alla evidenza intuitiva ma alla sua utilita'. Di certo, la differenza tra i due sistemi non sta nel sistema assiomatico ma sostanzialmente sta nelle intenzioni di chi formula il sistema.

Questo atteggiamento, oltre agli indubbi vantaggi di scelta, puo' condurre ad una eccessiva ed ermetica generalizzazione. Si corre il rischio di formulare teorie in modo astratto ed eccessivamente aprioristico tale da sembrare rivolte solo agli iniziati. Si perde cosi' il notevole vantaggio del sistema assiomatico classico, data la sua immediatezza e semplicita', di diffondere la conoscenza matematica ad un pubblico molto ampio, almeno nella fase iniziale.

In questi appunti non siamo interessati allo studio degli assiomi, dei teoremi e del linguaggio. Esporremo la teoria dei numeri naturali con simboli semplici e linguaggio colloquiale col significato comune ed aquisito dall'uso.

Inoltre non ci soffermeremo a considerare altri requisiti degli assiomi, quali la coerenza, l' indipendenza e la completezza. Cercheremo di percepirli come soddisfatti.

Passiamo, ora, a cosiderare la costruzione dei numeri naturali seguendo l'assiomatizzazione dell'aritmetica considerata da Giuseppe Peano. Alcuni autori parlano dell'assiomatizzazione di Peano come del primo esempio di assiomatica moderna. A ben vedere l'assiomatica di Peano, tranne il postulato di induzione, formalizza i primi atti compiuti dall'uomo di fronte al problema del computo, che sono semplici chiari ed evidenti (atti questi ripresi dalle maestre della scuola materna per avvicinare i fanciulli al problema del calcolo).

2 - Numeri naturali secondo Peano

L' aritmetica di Peano si basa su tre concetti primitivi e cinque assiomi.

E ' un sistema indipendente e completo.

- I concetti primitivi sono:
  numero, zero (0), successivo (').
  L'insieme dei numeri lo indichiamo $\mathbb{N}$.

- Gli assiomi sono

1. lo zero e' un numero. In particolare, l' insieme dei numeri e' non vuoto.
2. Ogni numero ha uno ed un solo successivo: ad ogni elemento $n \in \mathbb{N}$ e' associato un ben determinato elemento n' di $\mathbb{N}$ che chiameremo successivo di n (operazione di passaggio al successivo).
3. Lo zero non e' successivo di alcun numero.
4. Se due numeri hanno successivi uguali, allora sono uguali.
5. (postulato di induzione od effetto domino) Sia $\mathbb{M} \subseteq \mathbb{N}$ un insieme di numeri naturali che verifica le seguenti due proprieta':

   •**lo zero appartiene ad** $\mathbb{M}$;

• se n appartiene ad $\mathbb{M}$ anche il suo successivo n' appartiene ad $\mathbb{M}$;

allora $\mathbb{M}$ coincide con l ' insieme dei numeri naturali, ovvero $\mathbb{M} = \mathbb{N}$.

E' il principio di induzione matematica il principale strumento utilizzato da Peano per le definizioni e le dimostrazioni .

Osservazione sul principio. Si nota che il postulato di induzione e' molto diverso dagli altri postulati, almeno come struttura. Ad esempio, sono implicati tutti gli oggetti di $\mathbb{N}$. Il postulato di induzione fu introdotto per la completezza dimostrativa in aritmetica.

Frequentemente, in aritmetica, i teoremi, le proprieta', le formule dipendono da un numero n variabile nel sistema $\mathbb{N}$. Nelle dimostrazioni di teoremi o proprieta' di questo tipo ci si limitava a verificare il teorema o la proprieta' per un certo insieme (finito) di valori di n e si concludeva la dimostrazione con un atto di fede espressa da " e cosi' via". Appare chiaro che questo atteggiamento conduceva spesso a degli errori. Accertare una proprieta' verificandola per pochi valori di n, rispetto all'infinita' dei numeri naturali, e' un azzardo. Per evitare l'atto di fede " e cosi via", e' stato introdotto il postulato di induzione per rendere piu' rigorose le dimostrazioni. E Peano, sia per le definizioni delle operazioni sia per le dimostrazioni, usa il principio di induzione. In seguito, a mo' d'esempio, dimostreremo alcune proprieta' con il procedimento induttivo.

(Un esempio e' dimostrare, per induzione, la formula dell'aritmetica che fornisce la somma dei primi n numeri naturali

$$(i) \quad S_n = 1 + 2 + 3 + ... + n = \frac{n.(n+1)}{2}.$$

E' facile ricavare tale formula. Basta osservare che la somma degli elementi simmetrici rispetto al punto di " mezzo " e' sempre la stessa.

Un aneddoto racconta che un maestro, per calmare una scolaresca alquanto turbolenta, diede come esercizio il calcolo della somma dei primi cento numeri naturali. Penso' di potere riposare un po'. Passati pochi minuti gli si avvicino' un alunno con un foglietto con il risultato ottenuto con pochi passaggi. Il maestro, incredulo, volle verificare il risultato. E dopo parecchio tempo riusci' ad appurare l'esattezza del conto dello scolaro. Lo scolaro era Gauss; a 9 anni aveva usato la formula (i). Bisogna pero' dire che la madre di Gauss aveva una forte passione per la matematica).

Certo che non possiamo accertare, proprio fisicamente, la bonta' di una formula verificandola per tutti gli infiniti numeri naturali. Il postulato di induzione fornisce uno strumento, l'induzione, per dimostrarla.

Si procede nel seguente modo:

• si verifica che la formula (o proprieta') vale per il primo elemento;
• se la proprieta' vale per un elemento allora vale per il successivo.

Verificate queste due relazioni, abbiamo certezza che la formula (o la proprieta') e' vera per tutti i numeri naturali (effetto domino).

Modelli o rappresentazioni dei numeri naturali

Cerchiamo di rappresentare il sistema $\mathbb{N}$, ovvero costruiamo dei modelli del sistema assiomatico di Peano.

Si puo' dimostrare che il sistema assiomatico presentato sopra e' **categorico**, ovvero determina completamente i propri modelli: due modelli di numeri naturali, comunque costruiti, hanno una struttura sostanzialmente identica.

1) **Modello ottenuto con raggruppamento di bastoncini**

$$| \quad || \quad ||| \quad |||| \quad ...$$

Ogni raggruppamento e' ottenuto dal precedente aggiungendo un bastoncino. In questo modo lo zero e' |. E' facile constatare che tale rappresentazione soddisfa gli assiomi di Peano. Questa rappresentazione e' alquanto suggestiva e ci porta a considerare le varie forme inventate dall'uomo, nella sua evoluzione, per affrontare il problema del calcolo.

2) **Modello decimale**

$$i) \qquad\qquad 0,\ 1,\ 2,\ 3, ..., 9$$

Assumiamo il simbolo 0 come lo zero del sistema numerico, 1 come il successivo dello zero :$1 = 0'$, cosi' $2 = 1'$, ..., $9 = 8'$. Per costruire il successivo di 9, e tutti i successivi, formuliamo la seguente regola utilizzando solo le dieci cifre dell'allineamento i).

Scritto un numero naturale n come allineamento di cifre in i) (esempio:3467) disposte una accanto all' altra in un certo ordine, si puo' scrivere il successivo n' di n sostituendo l'ultima cifra di destra, se non e' 9 (nel nostro esempio e' 7) con quella che la segue nell'ordinamento (i), lasciando inalterate tutte le altre (nel nostro esempio 3467'=3468). Se l'ultima cifra e' 9 (esempio: 29), si muta 9 nello zero e si opera con la stessa legge con le cifre che si trovano alla sua sinistra ovvero ne prendiamo il successivo (29'= 30). Se il numero e' composto solo da uno o piu' 9 (esempio :99) per avere il successivo, ai nove si sostituisce lo zero facendolo precedere da 1 (99'=100). In questo modo otteniamo la seguente rappresentazione decimale dei numeri naturali (quella a noi piu' familiare)

$$0,\ 1,\ 2,\ 3, ..., 9,\ 10,\ 11, ..., 19,\ 20,\ 21, ..., 99,\ 100\ 101, ..., 109,\ 110,\ 111, ..., 199,\ 200,\ 201, ...$$

Abbiamo ottenuto una rappresentazione posizionale dei numeri: il valore effettivo di ciascuna cifra dipende dalla posizione occupata nell'allineamento. Possiamo dire che la cifra piu' a destra rappresenta se stessa; quella immediatamente alla sua sinistra rappresenta le decine, quelle successiva le centinaia, eccetera. Leggiamo il numero 207. E' formato da 2 centinaia, nessuna decina e 7 unita'. In questo semplice esempio si evidenzia l'importaza del simbolo 0. Iniazialmente, per indicare la mancanza di una cifra in una rappresentazione posizionale, si lasciava uno spazio vuoto tra la cifra precedente e quella successiva. E' facile capire, pensando alla incertezza delle grafie, che questo accorgimento procurava grossi inconvenienti. Per evitare false interpretazioni, fu introdotto un simbolo specifico per indicare uno spazio privo di valore : lo zero "0" . Lo sviluppo del concetto di zero, come numero, richiese molto tempo. Il nostro modo di scrivere i numeri naturali rende l'aritmetica alquanto semplice. Ci consente di addizionare, sottrarre, moltiplicare ed anche dividere i numeri usando delle semplici regole, facili da apprenderle, per manipolare i simboli. Nel mondo moderno i numeri sono presenti ovunque: fanno talmente parte della nostra vita quotidiana che finiamo per darli per scontati, senza apprezzare quanto sia straordinario il sistema costruito, sia per scrivere i numeri sia per usarli nei calcoli.

Modello binario

Nel modello binario utilizziamo solo due cifre dell'allineamento (i): 0,1; in questo modello 1 ha il ruolo di 9 nel sistema decimale per cui si ha

$$0,\ 1,\ 10,\ 11,\ 100,\ 101,\ 111, \dots\dots..$$

Senza entrare nei dettagli, si osserva che i vari modelli hanno la stessa struttura. Hanno un elemento iniziale e poi ogni elemento ha un successivo, insomma i postulati di Peano sono validi per tutti. Anzi, si puo' stabilire una corrispondenza biunivoca fra loro che associ ad un elemento di un sistema uno ed un solo elemento dell'altro e che siano associati gli zeri ed i successivi.

Nel prossimo paragrafo introdurremo due operazioni binarie in $\mathbb{N}$, ovvero due operazioni interne ad $\mathbb{N}$ che a due numeri naturali associano un ben definito numero naturale. Queste operazioni sono la somma ed il prodotto.

Aritmetica dei numeri naturali

Operazione di somma

Introduciamo una definizione induttiva di addizione che ci permette di calcolare la somma di due numeri naturali. Il simbolo dell'addizione e' "+".

• L'operazione di somma e' definita dalle seguenti operazioni:

$$\begin{cases} n+0 &= n \\ n+m' &= (n+m)'. \end{cases} \tag{1}$$

con $n, m \in N$.

La prima della (1) ci dice che ogni numero sommato a sinistra allo zero da' il numero stesso. La seconda ci dice che ogni numero, sommato a sinistra al successivo di un altro numero, da' il successivo della somma a sinistra del primo numero col secondo. La precisazione a sinistra e' resa necessaria poiche' non abbiamo ancora la proprieta' commutativa.

Attenzione:la (1) non definisce direttamente la somma di due numeri naturali n, m ma indica il modo di calcolarla.

Esempi.

Utilizziamo il modello decimale dei numeri naturali. Per comodita' di scrittura il successivo di m lo indichiamo $succ(m)$ invece di m'.

[1] 4 + 3 = succ(4 + 2) = succ(succ(4 + 1)) = succ(succ(succ(4 + 0))) = succ(succ(succ(4))) = succ (succ (5)) = succ (6) = 7.

[2] 8 + 4 = succ(8 + 3) = succ(succ(8 + 2)) = succ(succ(succ(8 + 1))) = succ(succ(succ(succ(8 + 0))))= succ(succ(succ(succ(8))))= succ(succ(succ(9)))= = succ(succ(10)) = succ(11) = 12.

La somma di due numeri naturali viene cosi' definita mediante un meccanismo, detto di ricorsione, che rimanda la soluzione del problema ad un caso piu' semplice; questo a sua volta ad un caso piu' semplice e cosi' via fino ad arrivare alla prima proposizione a + 0 = a; da qui si ricostruisce la sequenza determinando ogni volta il successivo del numero trovato. La somma del numero a con il numero b quindi, in definitiva, e' il b-esimo successivo di a nell'allineamento decimale.

Proprieta' della somma

Siano m, n, r numeri naturali. Allora

1. $(n+m)+r = n+(m+r)$: proprieta' associativa;
2. $n+m = m+n$: proprieta' commutativa.

Le proprieta' si dimostrano utilizzando la definizione di somma e i postulati di Peano. Il procedimento dimostrativo e' quello per induzione.

A titolo esemplificativo, dimostriamo la proprieta' associativa.

Dimostrazione. Osserviamo che il numero variabile (quello che si sposta) e' r, quindi procederemo per induzione su r. Sia M il sottoinsieme dei numeri naturali per i quali la proprieta' e' verificata. Quali sono gli elementi di M?

1) 0 e' in M

ovverro se poniamo $r = 0$ la proprieta' e' vera. Infatti

$$(n+m)+0 = n+m = (n+0)+m$$

dalla prima relazione della definizione di somma.

2) Supponiamo ora che se r un elemento di M (ovvero verifica la proprieta' associativa) anche r' e' un elemento di M,ovvero verifica la proprieta' associativa.

Infatti sappiamo, per ipotesi, che

$$i) \qquad (n+m))+r = n+(m+r).$$

Vogliamo dimostrare

$$(n+m)+r' = n+(m+r').$$

In questo modo $r' \in M$.

Utilizzando la seconda relazione della definizione di somma e la ipotesi (i), si ha

$$(n{+}m){+}r' = ((n{+}m){+}r)' = \ (ipotesi)\ (n{+}(m{+}r))' = n{+}(m{+}r)' = n{+}(m{+}r')\ (definizione\ somma)$$

L'insieme M contiene lo zero. Inoltre se contiene un elemento r contiene anche il successivo. Il postulato di induzione implica $M = N$, ovvero la proprieta' associativa vale per tutti i numeri naturali.

Con lo stesso procedimento induttivo si puo' dimostrare la proprieta' commutativa. Stavolta il procedimento induttivo va applicato sia ad n sia ad m poiche' il loro ruolo e' lo stesso nella formula (entrambi cambiano posizione). Omettiamo la dimostrazione

Osservazione. Chiamiamo uno (1) il successivo di zero: $0' = 1$. Grazie alla seconda relazione della definizione di somma, possiamo far corrispondere l'operazione di successivo di un numero n all'addizione tra n ed 1. Infatti $n' = (n+0)' = n + 0' = n + 1$. Questa catena di uguaglianze non e' pero' una definizione di successivo: usa infatti la definizione di somma che utilizza il concetto primitivo di successivo.

Prodotto

Diamo ora la definizione di prodotto in $\mathbb{N}$ in modo induttivo .

• Il prodotto (indicato con $\cdot$) in $\mathbb{N}$ viene definito, induttivamente, dalle relazioni

$$\begin{cases} n \cdot 0 & = & 0, \\ n \cdot m' & = & (n \cdot m) + n. \end{cases} \tag{2}$$

Per il calcolo del prodotto di due numeri naturali si procede come per la somma.

ESEMPIO:

$5 \cdot 4 = 5 \cdot succ(3) = (5 \cdot 3) + 5 = (5 \cdot succ(2)) + 5 = (5 \cdot 2 + 5) + 5 = (5 \cdot succ(1) + 5) + 5 = ((5 \cdot 1 + 5) + 5) + 5 = ((5 \cdot succ(0) + 5) + 5) + 5 = (((5 \cdot 0 + 5) + 5) + 5) + 5 = (((0 + 5) + 5) + 5) + 5 = 20.$

Possiamo affermare che il prodotto di n per m si ottiene sommando n, m volte, ovvero $n + n + n + ... + n$ con m addendi.

Per il prodotto valgono tutte le considerazioni fatte per la somma.

Osseviamo che, per ogni n numero naturale, si ha: $n \cdot 1 = n$. Infatti $n \cdot 1 = n \cdot 0' = (n \cdot 0) + n = 0 + n = n$.

• Si dice che 1 e' l'elemento neutro rispetto al prodotto.

Inoltre per l'operazione di prodotto valgono le due proprieta'.

$$1) \qquad (n \cdot m) \cdot r = n \cdot (m \cdot r) : \quad proprieta'\ associativa;$$

$$2) \qquad n \cdot m = m \cdot n : \quad proprieta'\ commutativa.$$

Infine, le operazioni di somma e di prodotto sono legate dalla proprieta' distributiva del prodotto rispetto alla somma, ovvero

$$3) \qquad (m + n) \cdot r = m \cdot r + n \cdot r.$$

La dimostrazione si effettua per induzione su r.

La proprieta' e' vera per $r = 0$. Infatti

$$(m+n)0 = 0 = m0 + n0.$$

Supponiamo che valga

$$(m+n)r = mr = nr$$

allora vale

$$(m+n)r' = mr' + nr'.$$

Infatti, dalla definizione di prodotto, si ha

$$(m+n)r' = (m+n)r+m+n = mr+nr+m+n = mr+m+nr+n = mr'+nr'.$$

La proprieta' e' dimostrata.

Tutte le proprieta', sopra elencate,dunque, si dimostrano per induzione, alcune semplici altre un po' piu' laboriose. In questi appunti riteniamo sufficiente dimostrarne alcune.

Definiamo, ora, una legge di ordinamento: cioe' un ordine fra i numeri naturali.

Ordinamento : simbolo $>$

Siano n, m due numeri naturali. Scriveremo

$$n > m \quad oppure \quad m < n$$

se esiste un numero naturale $r \neq 0$ tale che

$$n = m + r.$$

Osserviamo che l'uguaglianza ($r = 0$) e' data dal quarto assioma di Peano. Se vogliamo contemplare anche l'uguaglianza scriveremo $n \geq m$.

Per questa relazione di ordine valgono le seguenti proprieta'.

proprieta' di tricotomia o dell'ordine totale

Dati due numeri naturali n, m fra di essi vale una ed una sola delle seguenti relazioni

$$n > m, \quad n < m, \quad n = m$$

. La dimostrazione di questa proprieta' e' alquanto laboriosa anche se non difficile.

L'ordine ha le seguenti proprieta'.

• **proprieta' transitiva**

$$Se\ n > m \ \ ed \ \ m > r \ \ allora \ \ n > r.$$

Se usiamo il simbolo $\geq$ allora abbiamo anche le seguenti proprieta'

- **proprieta' riflessiva**

$$n \geq n$$

- **proprieta' antisimmetrica**

$$Se \;\; n \geq m \;\; ed \;\; m \geq n \;\; allora \;\; n = m.$$

Un sistema numerico con la proprieta' di tricotomia viene detto completamento ordinato ovvero tutti gli elementi sono confrontabili.

- **proprieta' di monotonia**

1. se $n \geq m$ allora, per ogni $r \in N$, si ha $n + r \geq m + r$.
2. se $n \geq m$ allora, per ogni $r \in N$, si ha $n \cdot r \geq m \cdot r$.

Come al solito, le proprieta' elencate si dimostrano per induzione. Dimostriamo la 1). Innanzitutto, se $n > m$ allora $n' > m'$. Accettata questa, applichiamo l'induzione per dimostrare la 1). La proprieta' vale per $r = 0$, ovvio.

Ora, dimostriamo che "se $n > m$ vale $n + r > m + r$" allora "vale $n + r' > m + r'$". Infatti,

$$n + r' = (n + r)' > (m + r)' = m + r'.$$

Operazomi inverse

Si possono definire, nel solito modo, le operazioni inverse della somma e del prodotto.

Differenza: simbolo -

Dati due numeri naturali n, m, si dice differenza fra di essi
un terzo numero naturale r tale che

$$n = m + r.$$

Si usa la scrittura $r = n - m$.

L'operazione e' detta inversa della somma perche' n (la somma) ed m (un addendo) sono dati mentre r (l' altro addendo) e' da determinare.

Non sempre esiste r in $\mathbb{N}$. Dalla definizione di differenza e di ordine sui naturali per l' esistenza di r, deve essere $n \geq m$.

Allora il numero $r = n - m$ esiste se e soltanto se $n \geq m$.

Quindi la differenza nei naturali non e' sempre possibile.

In altri termini l'equazione $x + a = b$ non sempre e' risolubile in $\mathbb{N}$.

Rapporto: simbolo : oppure/

Dati due numeri naturali n, m si dice rapporto o quoziente di n per m il numero naturale r tale che

$$n = mr.$$

r viene indicato $n : m$ o n/m o $\frac{n}{m}$ e scriveremo, comunemente, $r = \frac{n}{m}$; n viene chiamato numeratore ed m denominatore. Allora r e' il numero che moltiplicato per il denominatore da' il numeratore. Si nota che il rapporto e' l'operazione inversa del prodotto in quanto il risultato del prodotto e' dato, come e' dato un fattore mentre l'altro fattore e' da determinare.

Validita' dell'operazione rapporto.

1) se $n \neq 0$ ed $m = 0$ il rapporto non ha significato poiche' dovrebbe essere

$$n = 0r.$$

L'uguaglianza e' assurda poiche', dalla definizione del prodotto, il prodotto di qualsiasi numero r per 0 ha come risultato zero.

2) Supponiamo $n = m = 0$ allora avremmo $0 = 0r$ relazione vera per ogni r quindi r e' indefinito.

Concludiamo che l'operazione di rapporto ha significato sempre tranne che nei casi indicati.

Dalla scrittura $n = mr$ si evidenzia che non sempre esiste il rapporto in $\mathbb{N}$; basta porre $n = 2$ ed $m = 3$ per appurare che non esiste nessun numero naturale r tale che $2 = 3r$.

E' interessante eseguire la somma di due rapporti.

Siano $n, m, n_1, m_1 \in \mathbb{N}$ e consideriamo i loro rapporti r e r_1. Che cosa e' la somma di questi numeri? Dalla definizione abbiamo

$$r = \frac{n}{m}, \;\; ovvero \;\; n = mr, \;\; r_1 = \frac{n_1}{m_1}, \;\; ovvero \; n_1 = m_1 r_1.$$

Moltiplichiamo $n = mr$ per m_1 ed otteniamo, dalla proprieta' di monotonia,

$$i) \qquad m_1 n = m_1 m r.$$

Operiamo nello stesso modo per $n_1 = m_1 r_1$, ovvero la moltiplichiamo per m ed otteniamo

$$(ii) \qquad m n_1 = m m_1 r_1.$$

Sommando membro a membro (i) e (ii) si ha

$$m_1 n + m n_1 = m_1 m r + m_1 m r_1.$$

Raccogliendo mm_1 a secondo membro si ha

$$m_1 n + m n_1 = m m_1 (r + r_1).$$

Dalla definizione del rapporto concludiamo che

$$r + r_1 = \frac{m_1 n + m n_1}{m m_1}.$$

In modo piu' esplicito
$$\frac{n}{m} + \frac{n_1}{m_1} = \frac{m_1 n + m n_1}{m m_1}.$$

L'aritmetica costruita conduce a sommare frazioni con la regola sopra descritta.

In conclusione, la somma di due frazioni e' una frazione che ha come denominatore il prodotto dei denominatori degli addendi ed ha come numeratore la somma dei prodotti del primo numeratore per il secondo denominatore e del prodotto del secondo numeratore per il primo denominatore. (e' chiaro cosa si intende: primo numeratore, secondo denominatore, etc.).

Con procedimento analogo, si ottiene

$$\frac{n}{m} \cdot \frac{n_1}{m_1} = \frac{n \cdot n_1}{m \cdot m_1}.$$

Quindi il prodotto di due frazioni e' una frazione che ha come numeratore il prodotto dei numeratori e come denominatore il prodotto dei denominatori.

Concludiamo con le leggi di cancellazione e di annullamento.

Legge di cancellazione

- **Legge di cancellazione per la somma**

se $n + m = n + r$ allora $m = r$.

La dimostrazione di questa semplice proprieta' ci da' l'occasione di presentare il procedimento dimostrativo " per assurdo ".

Accettiamo l' ipotesi ma neghiamo la tesi (questo vuol dire negare l'affermazione). In questo modo arriviamo ad una contraddizione.

Dichiariamo che non e' vera $m = r$. Dalla proprieta' di tricotomia, deve essere vera o $m > r$ o $m < r$. Ma dalla proprieta' di monotonia si ha o $m + n > n + r$ o $n + m < n + r$ contro l'ipotesi.

- **Legge di cancellazione del prodotto**

se $n \cdot m = n \cdot r$ con $n \neq 0$ allora $m = r$.

La dimostrazione e' analoga a quella della somma; basta sostituire la somma con il prodotto

- **Legge di annullamento del prodotto**

Se $n \cdot m = 0$ allora almeno uno dei due fattori e' nullo.

Dalle leggi di monotonia e di cancellazione del prodotto si nota che il rapporto r non e' determinato da una sola coppia di numeri naturali n, m ma da infinite coppie di numeri naturali le quali, pero', sono legate da una relazione che otteniamo subito.

Sia r dato dalle coppie $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$; e' facile mostrare che $a \cdot d = c \cdot b$. Infatti, sia $br = a$ e $dr = c$. Moltiplichiamo la prima uguaglianza per d e la seconda per b si ha $dbr = da$ e $bdr = bc$ da cui $bc = da$.

Si tengano presente queste propieta' sulle frazione. Esse saranno di notevole aiuto per la costruzione dei numeri razionali. Osservazione.

Abbiamo costruito un sistema numerico che ci permette di computare, ovvero far di conto. In seguito, quando penseremo ad un sistema numerico, noi lo penseremo come un insieme di oggetti in cui ci sono due operazioni binarie interne "somma" e "prodotto" con le relative proprieta', elementi neutri "0" ed "1" , le operazioni inverse. Se possibile anche un ordine.

Abbiamo constatato che, nel sistema numerico dei numeri naturali, sono illimitatamente possibili la somma ed il prodotto, parzialmente possibile la differenza ed il rapporto. In ogni modo, il sistema di numeri naturali e' il sistema numerico di riferimento per costruire sistemi numerici via via sempre piu' completi. Inoltre ci e' utile pensare, nelle varie estensioni del concetto di numero, i numeri naturali operativamente, ovvero come l'insieme numerico ove sono possibili, illimitatamente, le operazioni di somma e prodotto; cosi' penseremo i numeri interi relativi come il sistema numerico ove sono possibili, illimitatamente, le operazioni di somma prodotto e differenza ed i numeri razionali come il sistema numerico ove sono, illimitapamente, possibili la somma, il prodotto, la differenza ed il rapporto (quando ha significato).