7. Forze centrali I: *Generalità*

7.1 Momento angolare a planarità del moto

Ricordiamo che, dati un punto materiale *P*, avente quantità di moto $\vec{p}$, ed un polo *O*, si definisce *momento della quantità di moto* o *momento angolare* $\vec{L}$ di *P* rispetto ad *O* il vettore

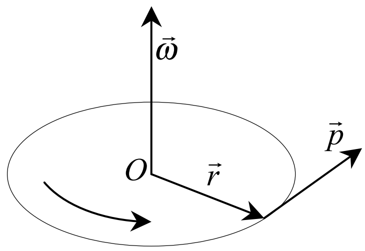
$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p},$$

dove $\vec{r}$ è il vettore che va da *O* a *P*.

Osserviamo che il momento angolare risulta così ortogonale al piano individuato dal vettore $\vec{p}$ (ovvero da $\vec{v}$, ad esso parallelo) e dal punto *O*.
Se un punto materiale compie un *moto piano*, ed anche il *polo O* viene scelto nel piano del moto, allora il momento angolare è ortogonale al piano del moto, e quindi la sua direzione resta costante nel tempo.
Viceversa, se il momento angolare $\vec{L}$ di un punto materiale *P* ha una *direzione costante*, allora il moto di *P* è un *moto piano*, infatti sarà costante la direzione del prodotto vettore $\vec{r} \times \vec{p}$, cioè il piano in cui giacciono $\vec{r}$ e $\vec{p}$ è unico.

Esempi
a) *Moto circolare*
Consideriamo il moto lungo una circonferenza di raggio *r* e centro *O*: il momento angolare di *P* rispetto al centro *O* vale

$$\vec{L} = m\vec{r} \times \vec{v} = m r^2 \vec{\omega}$$



b) *Moto piano non circolare*
Conviene utilizzare le coordinate polari del piano, e scomporre la velocità secondo le componenti:

$$v_r = \frac{dr}{dt} \quad ; \quad v_\vartheta = r\frac{d\vartheta}{dt} = r\omega$$

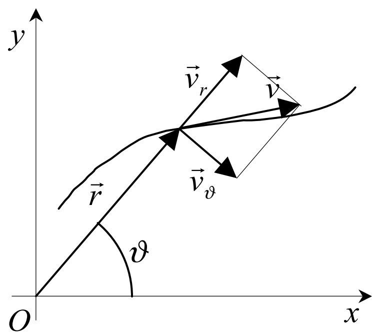
Il momento angolare rispetto all'origine vale quindi:

$$\vec{L} = m\vec{r} \times \vec{v} = m\vec{r} \times \left(v_r \hat{u}_r + v_\vartheta \hat{u}_\vartheta\right) =$$

$$= m\left[v_r \vec{r} \times \hat{u}_r + v_\vartheta \vec{r} \times \hat{u}_\vartheta\right] = m v_\vartheta \vec{r} \times \hat{u}_\vartheta =$$

$$= m r \frac{d\vartheta}{dt} r\left(\hat{u}_r \times \hat{u}_\vartheta\right) = m r^2 \omega \hat{u}_z = m r^2 \vec{\omega}$$

essendo $\vec{r} \times \hat{u}_r = 0$.



Consideriamo un riferimento inerziale, ed un punto materiale *P* in moto in esso. Ricordiamo che la *Seconda equazione cardinale* della dinamica afferma che:
In ogni istante, la derivata temporale del momento angolare di un punto materiale P è pari al momento della risultante delle forze applicate a P rispetto allo stesso polo O

$$\boxed{\vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt}}$$

Osserviamo che: $\vec{\tau} = 0 \Rightarrow \frac{d\vec{L}}{dt} = 0 \Rightarrow \vec{L} =$ cost. in modulo, direzione e verso.

Dunque, dalla II equazione cardinale segue che se il momento delle forze applicate ad un punto materiale P rispetto ad un certo polo O è nullo, allora il momento angolare di P rispetto ad O è costante, ed il moto di P è piano.

7.2 Moto in un campo di forze centrali

Planarità del moto

In un campo di forze centrali avremo sempre:

$$\vec{F}(\vec{r}) \parallel \vec{r} \Rightarrow \frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r}\times\vec{F} = 0 \Rightarrow \vec{L} = \text{cost.}$$

e quindi *il moto è piano*.

Si tratta di una delle caratteristiche principali dei campi di forze centrali. Più precisamente:

Prop. In un campo di forze centrali, il momento angolare rispetto al centro di forza si conserva.

Oss. Non è vera, in generale, l'implicazione inversa. Se infatti il momento angolare è costante, avremo certamente che il momento della forza risultante si annulla, ma ciò può corrispondere a due situazioni differenti:

a) $\vec{F}(\vec{r}) \parallel \vec{r} \Rightarrow$ il punto materiale P si muove effettivamente in un campo di forze centrali di centro di forza O.

b) il punto materiale P non è soggetto ad *alcuna interazione* e quindi si muove di moto *rettilineo uniforme*.

Energia potenziale centrifuga in un campo di forze centrali

L'energia meccanica di un punto materiale P di massa m che si muove con velocità scalare v in un campo di forze centrali e si trova a distanza r dal centro delle forze è $E = E_p(r) + \frac{1}{2}mv^2$.

Poiché il punto si muove in un campo di forze centrali, il moto è piano (il momento angolare si conserva, ed in particolare la sua direzione resta costante). Scriviamo allora la velocità vettoriale di P in un sistema di coordinate polari nel piano del moto e con origine nel centro di forza del campo: $\vec{v} = \frac{dr}{dt}\hat{u}_r + r\frac{d\vartheta}{dt}\hat{u}_\vartheta$.

Dunque il quadrato della velocità scalare vale $v^2 = \vec{v}\cdot\vec{v} = v_r^2 + v_\vartheta^2 = \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2$

Sostituendo questa espressione in quella dell'energia meccanica otteniamo:

$$E = E_p(r) + \frac{1}{2}m\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \frac{1}{2}mr^2\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2.$$

Consideriamo ora il momento angolare del punto materiale rispetto al centro di forza del campo:

$$\vec{L} = m\vec{r}\times\vec{v} = m\left(\vec{r}\times v_r\hat{u}_r + \vec{r}\times v_\vartheta\hat{u}_\vartheta\right) = mrv_\vartheta\hat{u}_r\times\hat{u}_\vartheta = mr^2\frac{d\vartheta}{dt}\hat{u}_z.$$

Oss. Osserviamo che l'ultimo termine nell'espressione dell'energia meccanica può essere riscritto in funzione del modulo del momento angolare, che è anche una costante del moto. Tale termine energetico prende il nome di *energia potenziale centrifuga* del punto materiale P nel campo di forze centrali: $\frac{1}{2}m r^2\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2 = \frac{L^2}{2m r^2} \equiv E_p^{(\mathrm{centr})}$.

Poiché infatti questo termine non dipende *esplicitamente* dal modulo della velocità scalare, ma solo dalla distanza r, come l'energia potenziale, può essere *interpretato* come se fosse un'energia potenziale, benché in realtà sia stato ricavato dall'espressione dell'energia cinetica.

Il suo effetto è lo stesso che avrebbe una forza *repulsiva* (*centrifuga*, appunto) apparente (in un sistema non inerziale). Se infatti scegliamo un sistema di riferimento con l'asse z parallelo all'asse di rotazione di P e che ruota con la stessa velocità angolare (istantanea) di P, in tale sistema di riferimento abbiamo effettivamente una *forza apparente centrifuga*, e la sua energia potenziale ha proprio l'espressione introdotta sopra, e il moto di P, in questo sistema di riferimento, diventa *monodimensionale*, diretto lungo l'asse r.

Per dimostrare l'asserto, calcoliamo l'energia potenziale della forza centrifuga:

$$\vec{F}_{\mathrm{centr}} = m\omega^2 r\,\hat{u}_r = \frac{L^2}{m r^3}\hat{u}_r \quad\Rightarrow\quad \mathcal{L}_{r\to\infty} = \int_r^\infty \frac{L^2}{m r^3}dr = \frac{L^2}{2m r^2} = E_p^{(\mathrm{centr})}(r),\ \text{C.V.D.}$$

Si noti che tale forza centrifuga, pur non essendo l'unica forza apparente presente nel sistema relativo considerato, viene a coincidere con la risultate di tutte le forze apparenti presenti. Si può infatti dimostrare che le altre forze si annullano tra loro. Infatti, in generale, avremmo:

$$\vec{F}_{app} = -m\vec{a}_t - m\vec{a}_c = -m\left[\vec{a}_{O'} + \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}_r) + \frac{d\vec{\omega}}{dt}\times\vec{r}_r\right] - 2m\vec{\omega}\times\vec{v}_r\,.$$

Poiché $\vec{a}_{O'} = 0$ e $\vec{F}_{centr} = -m\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}_r)$, abbiamo:

$$\vec{F}_{app} = -m\vec{a}_t - m\vec{a}_c = \vec{F}_{centr} - m\left[\frac{d\vec{\omega}}{dt}\times\vec{r}_r + 2\vec{\omega}\times\vec{v}_r\right].$$

Osserviamo che il termine in parentesi quadra risulta nullo. Infatti esso può essere riscritto come segue:

$$\frac{d\vec{\omega}}{dt}\times\vec{r}_r + 2\vec{\omega}\times\vec{v}_r = \frac{d\omega}{dt}r(\hat{u}_z\times\hat{u}_r) + 2\omega\frac{dr}{dt}(\hat{u}_z\times\hat{u}_r) = \left[\frac{d\omega}{dt}r + 2\omega\frac{dr}{dt}\right]\hat{u}_\vartheta\,.$$

Ricordando che nel moto in esame il momento angolare si conserva, e derivando la relazione che abbiamo dimostrato esistere (per ogni moto piano) tra momento angolare e velocità angolare, $\vec{L} = m r^2\omega\hat{u}_z$, abbiamo infine:

$$0 = \frac{d}{dt}\frac{L}{m} = \frac{d}{dt}(r^2\omega) = r\left[r\frac{d\omega}{dt} + 2\omega\frac{dr}{dt}\right],\ \text{C.V.D.}$$

Energia potenziale efficace in un campo di forze centrali

Definiamo un'*energia potenziale efficace* del campo di forze centrale come la somma dell'energia potenziale della forza del campo e dell'energia potenziale centrifuga:

$$E_p^{(eff)} \equiv E_p + E_p^{(\mathrm{centr})} = E_p(r) + \frac{L^2}{2m r^2}$$

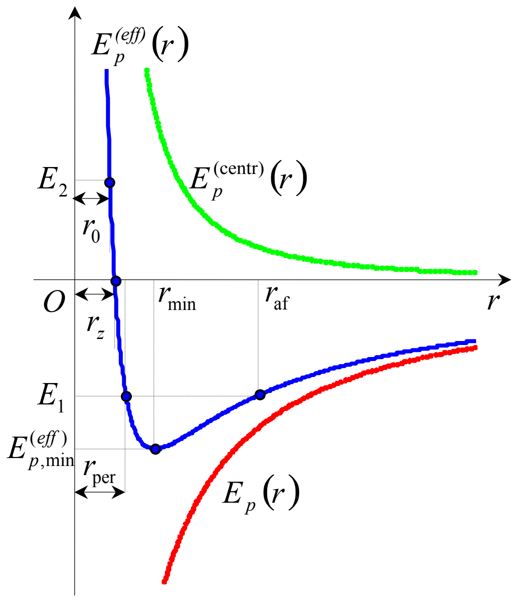
L'energia potenziale efficace rappresenta l'energia potenziale totale del punto materiale nel sistema non inerziale sopra definito.

In un campo di forze centrali *attrattivo*, l'energia potenziale del campo è sempre *negativa*, (come per il campo gravitazionale); l'energia potenziale *efficace*, invece, può essere negativa, positiva o nulla a seconda che predomini il termine dovuto alla forza del campo o il termine centrifugo (che è sempre positivo), o infine i due termini si bilancino esattamente.

Le *condizioni iniziali* del moto stabiliscono il valore del *momento angolare*, quindi l'andamento dell'energia potenziale efficace al variare della distanza r, e l'*energia totale* del punto materiale P, che si conserva durante il moto. Il *tipo di traiettoria* che si ottiene dipende da queste due condizioni.

Consideriamo ora il caso di un campo di forze centrali attrattivo la cui energia potenziale dipenda dall'inverso della distanza dal centro di forze, come nel caso del campo gravitazionale percepito da una massa m in presenza di una massa $M >> m$, o come nel caso del campo elettrostatico percepito da una particella carica leggera in presenza di una seconda particella di carica opposta molto più pesante: $E_p(r) = -\frac{k}{r}$.

L'energia potenziale efficace sarà dunque $E_p^{(eff)}(r) = -\frac{k}{r} + \frac{L^2}{2mr^2}$



Osserviamo che l'energia potenziale efficace sarà positiva per valori bassi di r, poiché in questo caso predomina il contributo centrifugo, inversamente proporzionale al quadrato di r, e negativa per valori alti di r, dove predomina il contributo attrattivo, inversamente proporzionale ad r (per $r \to \infty$ tenderà a zero, poiché entrambi i contributi tendono ad annullarsi) (vedi figura).

Il valore limite che separa la zona a valori positivi da quella a valori negativi è: $r_z = \frac{L^2}{2km}$. Nella zona a valori negativi è presente il punto di *minima energia potenziale efficace*, in corrispondenza della distanza doppia di quella per cui l'energia si annulla: $r_{min} = \frac{L^2}{km} = 2r_z$. Il minimo di energia potenziale efficace vale: $E_{p,min}^{(eff)} = -\frac{k^2 m}{2L^2}$.