Funzione reale di Variabile reale

Premessa

Introdurremo il concetto di funzione ed in particolare quella di funzione reale di variabile reale ed il concetto di grafico. Per funzione f intenderemo una relazione o legge tra due insiemi D e B, non vuoti, che ad ogni elemento x appartenente a D associa un solo elemento y di B: l' elemento y si indica col simbolo $f(x)$. Se, in particolare, x e y sono numeri reali, si parla di funzioni reali di variabile reale.

Sappiamo inoltre che l'introduzione del metodo delle coordinate cartesiane permette di stabilire una corrispondenza biunivoca tra le coppie ordinate di numeri reali ed i punti del piano; grazie a questa corrispondenza , quindi, possibile rappresentare graficamente le coppie ordinate di numeri reali che soddisfano una relazione del tipo $y = f(x)$:la totalita' di queste coppie individua un sottoinsieme di punti del piano cartesiano che costituisce il grafico della funzione. Lo studio del grafico di una funzione sara' sviluppato introducendo strumenti che sono alla base dell' analisi infinitesimale.

FUNZIONI REALI DI VARIABILE REALE

- *CONCETTO DI FUNZIONE*

Siano $\mathbb{X}$ ed $\mathbb{Y}$ due insiemi con $D \subseteq \mathbb{X}$ e $B \subseteq \mathbb{Y}$. Una funzione (od applicazione) f, con dominio D a valori in B, e' una legge che associa ad ogni elemento $x \in D$ uno ed un solo elemento $y \in B$.

Utilizzeremo le notazioni

$$f : D \to B$$

e

$$f : x \mapsto y.$$

L' insieme D e' detto dominio di f e l' insieme B e' detto insieme immagine o codominio di f.

Per definire una funzione occorre specificare sia la legge f sia il dominio ed il codominio. Per cui, in una forma piu' generale, una funziene e' una tripletta di elementi formata da due insiemi, dominio e codominio, ed una legge f che li mette in corrispondenza. Inotre si preferisce, per problemi operativi, chiamare codominio l'insieme di arrivo $\mathbb{Y}$ piuttosto che l'immagine.

Comunemente la funzione si scrive

$$y = f(x)$$

.

Questa e' una forma semplificata del concetto di funzione ove si mette in evidenza l'azione della funzione. x viene chiamata variabile indipendente, y variabile dipendente ed $f(x)$ l'immagine di x tramite la f.

Quando $\mathbb{X} \equiv \mathbb{Y} \equiv \mathbb{R}$ la funzione e' detta

funzione numerica di variabile reale a valori reali.

Queste sono le funzioni che tratteremo in questi appunti. E' opportuno ricordare che trattiamo funzioni ad un solo valore o monodrome o univoche. (in caso contrario si dice che sono polidrome o polivoche o a piu' valori).

L'insieme $f(D) \subseteq \mathbb{Y}$ definito da $f(D) = \{y \in \mathbb{Y} : f(x) = y \ con \ x \in D\}$ e'detto immagine di f oppure immagine di D tramite f.

In generale, per le funzioni numeriche, f e' costituita da un complesso di operazioni o forme analitiche.

• *GRAFICO DI UNA FUNZIONE*

Carichiamo il piano euclideo con un sistema di assi cartesiani ortogonali: $O(x, y)$. Ogni punto del piano P e' in corrisondenza biunivoca con una coppia (a, b) ordinata di numeri reali. La prima componente a e detta ascissa del punto P e la seconda componente b e' detta ordinata del punto P.

Il grafico di una funzione $f : D \to B$ e' il sottoinsieme G_f di $D \times B$ definito da $G_f = \{(x, y) \in D \times B | x \in D, y = f(x) \in B\}$. Geometricamente, e' il luogo dei punti $(x, f(x))$ del piano di coordinate (x, y). Le rette verticali intersecano il grafico, o rappresentazione geometrica di una funzione, in al piu' un punto, dato che consideriamo funzioni ad un solo valore. Questo non vale per le rette orizzontali.

Rappresentazione geometrica del grafico

Al variare di $x \in D$ il punto $R = (x, f(x))$ descrive un luogo geometrico nel piano cartesiano che viene chiamato il grafico di f. La forma del grafico dipende dalla natura della funzione e puo' avere degli aspetti del tutto diversi da quelli che l'intuizione suggerisce.

A questo punto si puo' affermare che per conoscere una funzione occorrono tre elementi:

1) Identificazione del dominio di una funzione . Si usa chiamare, in questo contesto, dominio di una funzione il piu' grande insieme dei valori $x \in \mathbb{R}$ su cui hanno senso le espressioni analitiche che concorrono nella definizione di funzione.

2) Identificare il sottoinsieme $f(D) \subseteq \mathbb{Y}$ definito da $f(D) = \{y \in \mathbb{Y} : f(x) = y \ con \ x \in D\}$ detto immagine di f oppure immagine di D tramite f.

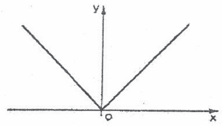
3) Idemtificazione del grafico della funzione $f : D \to Y$ che e' il sottinsieme $G(f)$ di $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ definito da $G(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : x \in D, y = f(x)\}$ e rappresentarlo geometricamente con i suoi caratteri principali.

• *Immagine e antiimmagine*

Sappiamo che se $D \subseteq \mathbb{R}$ e $f : D \to \mathbb{R}$ e' una funzione, l'immagine di D e' $B = f(D) = \{f(x) : x \in D\} \subseteq \mathbb{R}$, l'insieme delle immagini degli elementi di

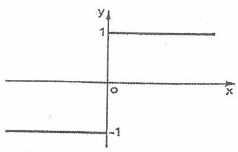
D e' un sottoinsieme del codominio, visualizzabile sull'asse delle ordinate nella rappresentazione cartesiana. L'antiimmagine di $C \subset B$ e' $f^{-1}(C) = \{x \in D : f(x) \in C\} \subseteq \mathbb{R}$, l'insieme dei punti del dominio D la cui immagine sta in B (si tratta dunque di un sottoinsieme del dominio, visualizzabile sull'asse delle ascisse nella rappresentazione geometrica della funzione).

Alcuni Grafici Notevoli



7) $y = |x|$
$T = -\infty \frown +\infty$,
$E = 0 \frown +\infty$,
(*modulo di* x);

Fig. 3.9.



8) $y = \dfrac{x}{|x|} = \operatorname{sgn} x$
$T = -\infty \frown 0 \cup 0 \frown +\infty$,
$E = \{-1\} \cup \{1\}$,
(*segno di* x).

Fig. 3.10.

Se si tratta di una funzione a più valori, con il simbolo $f(x)$ si indicheranno, $\forall\, x$ dell'insieme T di definizione, tutti e soli i valori di un ben determinato insieme numerico: a questo corrisponde un insieme di punti situati sulla parallela all'asse delle y passante per il punto di ascissa x. Al variare di x, tale insieme descrive il *grafico della funzione*.

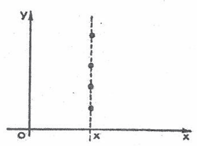
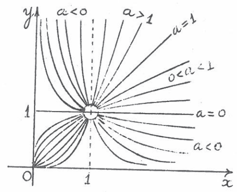


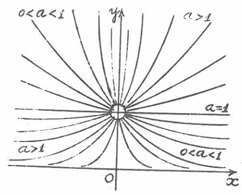
Fig. 3.11.

L'insieme E coincide ancora con la proiezione ortogonale del grafico, sull'asse y.

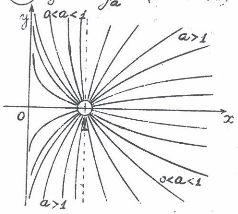
(22) $y = x^a$ (a reale; $x>0$)



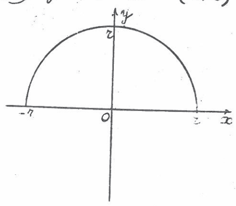
(23) $y = a^x$ (a reale>0)



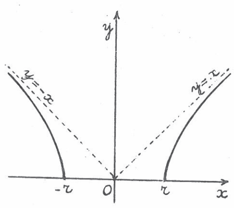
(24) $y = \log_a x$ ($a>0$, $a \neq 1$)



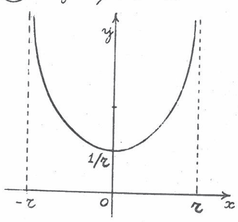
(25) $y = \sqrt{r^2 - x^2}$ ($r>0$)

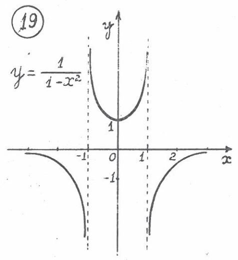


(26) $y = \sqrt{x^2 - r^2}$

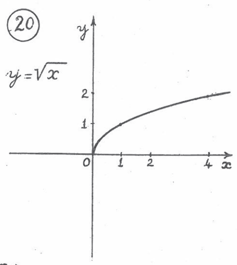


(27) $y = 1/\sqrt{r^2 - x^2}$

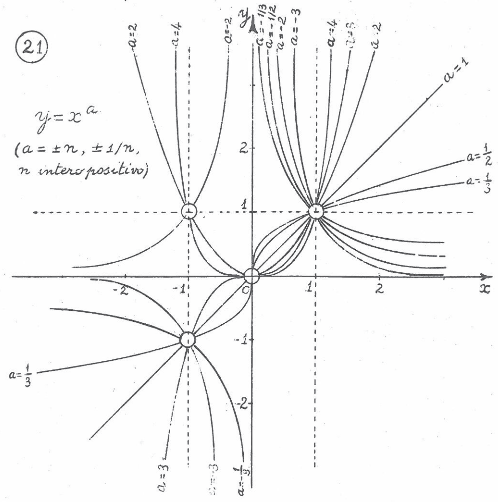




19
$y = \frac{1}{1-x^2}$

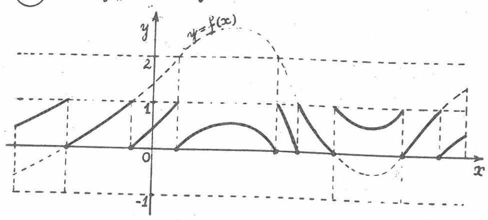


20
$y = \sqrt{x}$

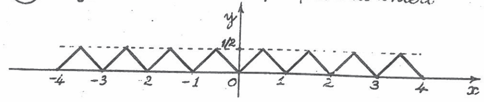


21
$y = x^a$
($a = \pm n$, $\pm 1/n$,
n intero positivo)

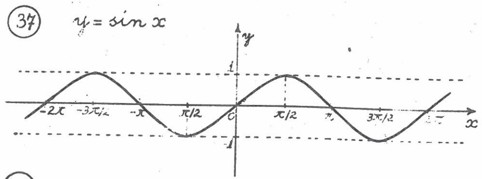
(35)''' $y = \text{mant}\, f(x)$



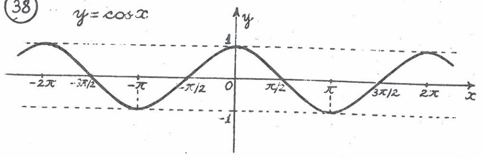
(36) y = distanza di x dal più prossimo intero



(37) $y = \sin x$

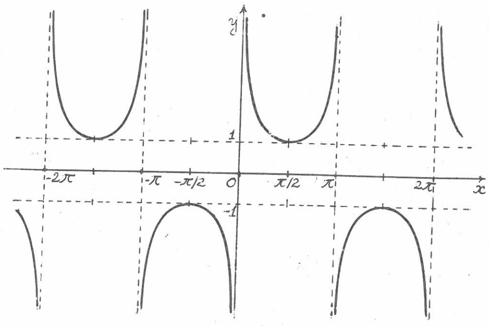


(38) $y = \cos x$

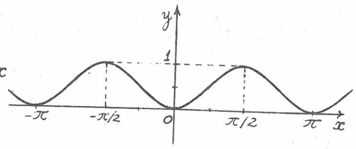


42

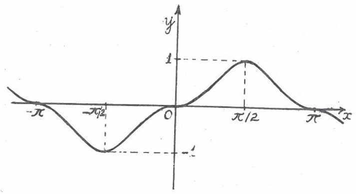
(44)′ $y = \dfrac{1}{\sin x}$



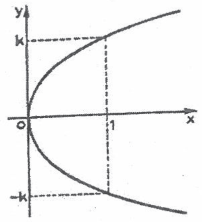
(45) $y = \sin^2 x$



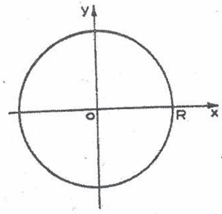
(46) $y = \sin^3 x$



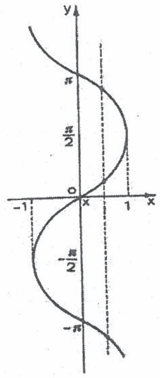
Esempi.



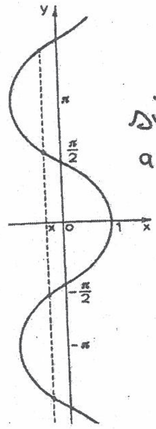
1') $y = \pm\, k\sqrt{x}$
$T = 0 \vdash\!\!- +\infty,\ E = -\infty \,\overline{\ \ }\, +\infty,$
funzione a due valori (*parabola* avente per asse l'asse x);
Fig. 3.12.



2') $y = \pm\sqrt{R^2 - x^2}$
$T = -R \vdash\!\!\dashv R,\ E = -R \vdash\!\!\dashv R\,.$
funzione a due valori (*circonferenza* col centro nell'origine e raggio R);
Fig. 3.13.

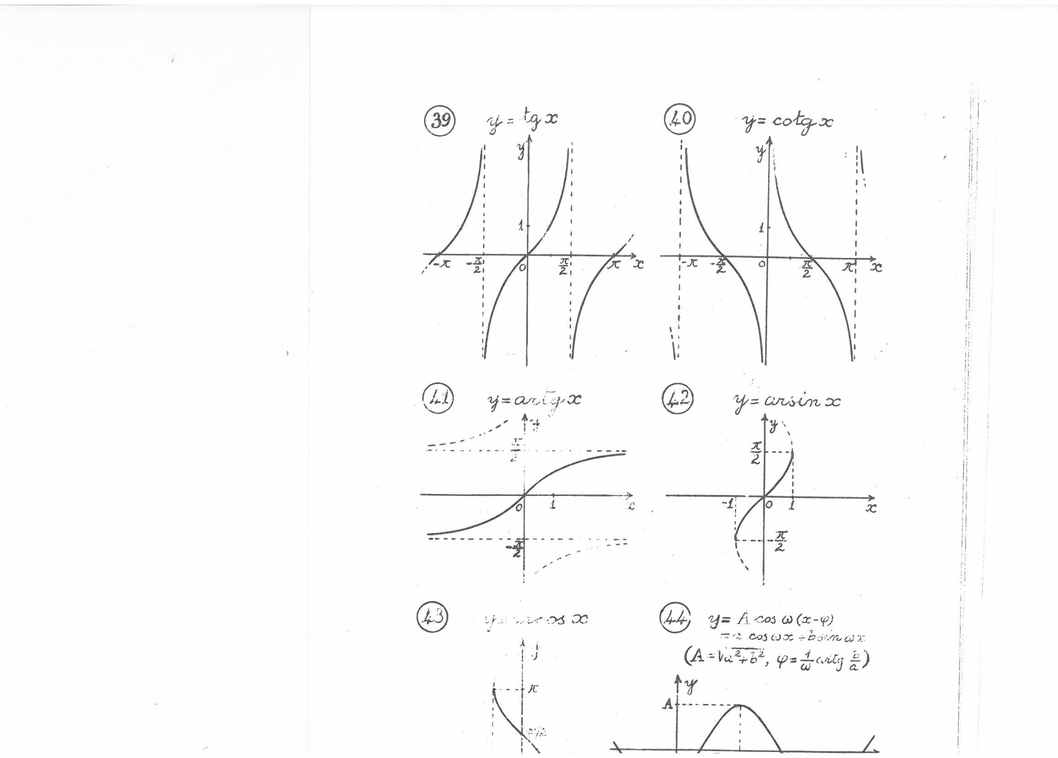


3') $y = \text{arc sin}\, x$
(cioè $x = \sin y$)
$T = -1 \vdash\!\!\dashv 1,\ E = -\infty \,\overline{\ \ }\, +\infty,$
funzione a infiniti valori;
Fig. 3.14.

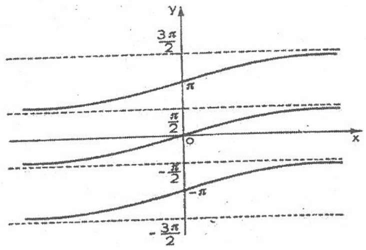


si faccia attenzione a questi grafici

4') $y = \text{arc cos}\, x$
(cioè $x = \cos y$)
$T = -1 \vdash\!\!\dashv 1,\ E = -\infty \,\overline{\ \ }\, +\infty,$
funzione a infiniti valori;
Fig. 3.15.



39
y = tg x
40
y = cotg x
41
y = arctg x
42
y = arsin x
43
44
y = A cos ω (x-φ)
(A = √a² + b², φ = 1/ω artg b/a)



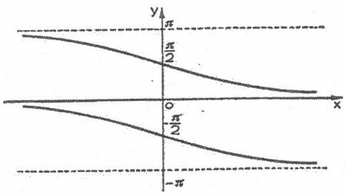
5′) $y = \text{arc tg}\, x$
(cioè $x = \text{tg}\, y$)

$T = -\infty \,\overline{\ }\, +\infty$,

$E = \left\{ (2n-1)\frac{\pi}{2} < y < (2n+1)\frac{\pi}{2};\ n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \right\}$,

funzione a infiniti valori;

Fig. 3.16.



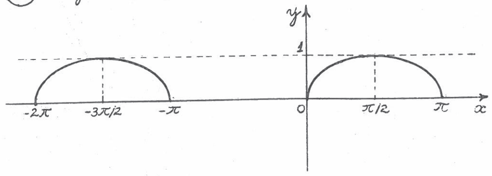
6′) $y = \text{arc cotg}\, x$
(cioè $x = \text{cotg}\, y$)

$T = -\infty \,\overline{\ }\, +\infty$,
$E = \{n\pi < y < (n+1)\pi;\ n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}$,
funzione a infiniti valori.

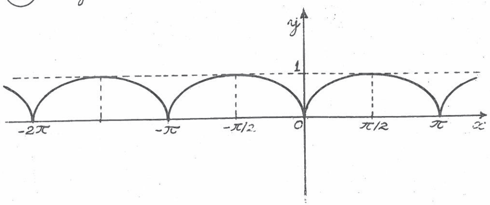
Fig. 3.17.

Osservazione I. — È essenziale tener ben presente che *la definizione di funzione è basata solo sulla nozione di corrispondenza*; non si richiede affatto che una funzione $f(x)$ abbia in tutto il suo insieme T di definizione la medesima rappresentazione analitica.

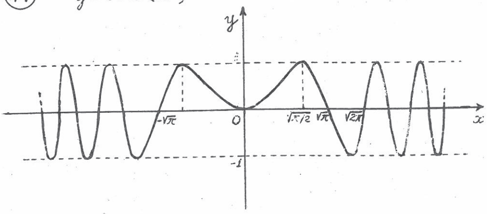
(47) $y=\sqrt{\sin x}$, $2k\pi \leq x \leq (2k+1)\pi$ $(k=\dots,-2,-1,0,1,2,\dots)$

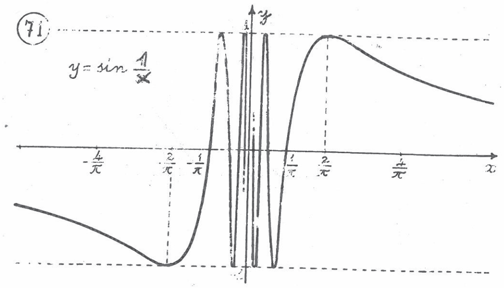


(47)′ $y=\sqrt{|\sin x|}$

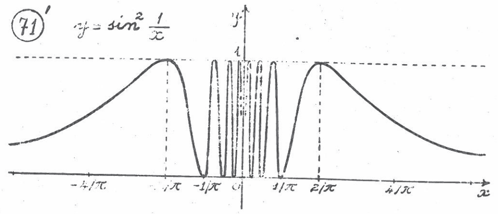


(47)″ $y=\sin(x^2)$

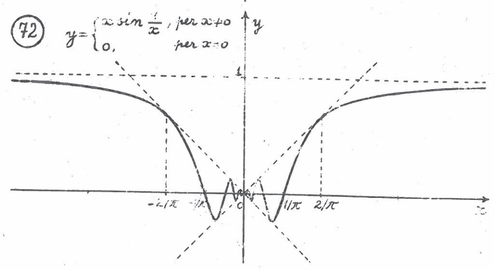




71
y = sin 1/x
y
x
-4/π
-2/π
-1/π
1/π
2/π
4/π



71'
y = sin² 1/x
y
1
x
-4/π
-1/π
0
1/π
2/π
4/π

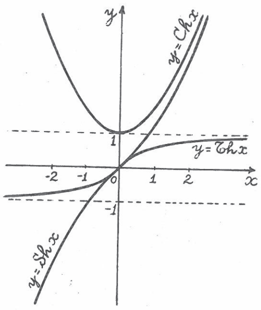


72
y = { x sin 1/x , per x≠0
0, per x=0
y
1
x
-2/π
0
1/π
2/π

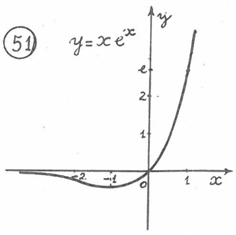
(48) $y = Sh\,x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$

(49) $y = Ch\,x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$

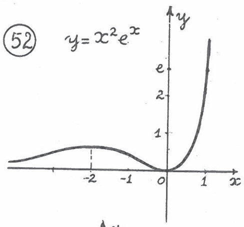
(50) $y = Th\,x = \dfrac{Sh\,x}{Ch\,x}$



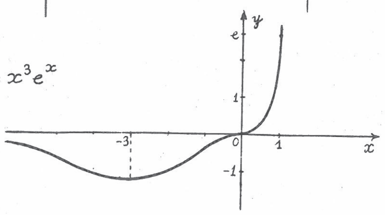
(51) $y = xe^x$



(52) $y = x^2e^x$



(53) $y = x^3e^x$



GENERALITA'

Proprieta' definite per gli insiemi in $\mathbb{R}$ ci permettono di delineare alcune importanti caratteristiche delle funzioni. Da ora in poi l'immagine di f la scriveremo $Im\, f$.

• Si dice che f e' limitata superiormente se l'insieme immagine $Im\ f$ e' limitato superiormente, ovvero esiste un numero $k \in \mathbb{R}$ tale che $f(x) \leq k\ \forall x \in D$. Tutti gli elementi di $Im\ f$ sono inferiori a k; ancora $Im\ f \subseteq (-\infty, k]$.

• Si dice che f e' limitata inferiormente se l'insieme immagine $Im\ f$ e' limitato inferiormente, ovvero esiste un numero $h \in \mathbb{R}$ tale che $f(x) \geq h\ \forall x \in D$. Tutti gli elementi di $Im\ f$ sono maggiori di h, ancora $Im\ f \subseteq [h, +\infty)$.

• Si dice che f e' limitata se l'insieme immagine $Im\ f$ e' limitato inferiormente e superiormente, ovvero esistono due numeri $h, k \in \mathbb{R}$ con $h < k$ tale che

$$h \leq f(x) \leq k \ \ \forall x \in D.$$

Tutti gli elementi di $Im\ f$ sono maggiori di h e minori di k; ancora $Im\ f \subseteq [h, k]$.

Se scegliamo $K = max\{|h|, |k|\}$, possiamo scrivere la limitatezza nella seguente forma compatta

$$-K \leq f(x) \leq K \ \textit{oppure}\ |f(x)| \leq K,\ \forall x \in D.$$

• *Estremo superiore, estremo inferiore, massimo e minino*

Gli estremi superiore ed inferiore di $Im\ f$, Λ, λ sono detti estremi superiore ed inferiore di f e vengono scritti

$$\Lambda = \sup_{x \in D} f(x); \quad \lambda = \inf_{x \in D} f(x),$$

rispettivamente.

Si puo' omettere $x \in D$ quando non ci sia possibilita' di equivoco sull'insieme di definizione.

In generale Λ e λ non appartegono ad $Im\ f$. Se gli appartengono allora sono detti massimo e minimo e li scriviamo $\mathbf{M}$ e $\mathbf{m}$. Dunque $\mathbf{M}$ e $\mathbf{m}$ sono elementi di $Im\ f$, ovvero sono assunti dalla funzione: esistono dunque due punti $x_M \in D$ detto "punto di massimo" e $x_m \in D$ detto "punto di minimo" tale che $\mathbf{M} = f(x_M)$ e $\mathbf{m} = f(x_m)$. Insistiamo: $\mathbf{M}$ e' il valore massimo della funzione. x_M " punto di massimo " e' il punto in D tale che la funziome calcolata in tale punto assume il valore $\mathbf{M}$. Analogamente $\mathbf{m}$ e' il valore minimo della funzione. x_m "punto di minimo " e' il punto in D tale che la funzione calcolata in tale punto assume il valore $\mathbf{m}$.

$\mathbf{M}$ e $\mathbf{m}$ vengono detti entrambi estremi di f in D.

I punti di massimo x_M e minimo x_m si dicono estremanti di f in D.

Quando si considera la funzione solo per i punti di un insieme $T \subset D$ si dice che si opera una restrizione di f a T e si indica $f_{|T}$: quando si considera la funzione in un dominio piu' grande si dice che si opera una estensione e l'estensione e' indicata Ef.

Osserviamo che data una funzione $y = f(x)$, il grafico di $y = f(x)$ ed il grafico di $y = -f(x)$ sono simmetrici rispetto all'asse delle ascisse oppure uno e' ottenuto dall'altro con una rotazione (tridimensionale) di π intorno all'asse delle ascisse.

• *Parita'* - Se il dominio D di una funzione e' simmetrico rispetto all'origine (ovvero se $-D = D$), cioe' $x \in D$ se e solo se $-x \in D$), si puo' parlare di funzione "pari " o "dispari".

La funzione $f : D \to R$ si dice pari se per ogni $x \in D$ si ha $f(-x) = f(x)$, in termini geometrici, se la funzione e' pari il suo grafico e' simmetrico rispetto all'asse delle ordinate y, oppure il grafico della funzione in $D \cap \mathbb{R}^-$ e' ottenuto ruotando (nello spazio tridimensionale) di π il grafico della funzione in $D \cap R^+$ intorno all'asse delle ordinate y.

Una funzione $f : D \to R$ si dice dispari se per ogni $x \in D$ si ha $f(-x) = -f(x)$; in termini geometrici il grafico della funzione e' simmetrico rispetto all' origine ovvero ogni retta r passante per l'origine interseca il grafico in due punti che su r sono simmetrici (opposti) rispetto all'origine (se si vuole usare le rotazioni (tridimensionali) bisogna eseguire due rotazioni (tridimensionali) di π una volta rispetto y (o x) e l 'altra rispetto ad $x(o\ y)$.

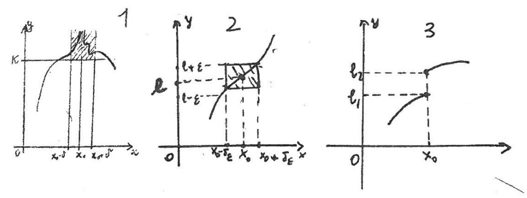
L' interesse di queste proprieta' sta nel fatto che e' sufficiente studiare la funzione solo nella parte positiva (o negativa) del dominio.

Esercizio: dato il grafico di $y = f(x)$ in $(-1, 20)$ traccciare il grafico di $y = g(x) = f(x+a)$ con $0 < a < 2$, di $y = h(x) = f(x)+a$ e di $y = p(x) = f(|x|)$.

CONCETTO DI LIMITE

Il primo strumento per lo studio delle funzioni e' il concetto di limite. E' una nozione di carattere locale.

Il concetto di limite riguarda il comportamento della funzione in intorni $\mathcal{U}(x_0)$ del punto x_0 privati del punto x_0 stesso. Tale comportamento non dipende dal valore della funzione in tale punto, anzi, la funzione puo' anche non essere definita in esso. Si osservino i seguenti esempi



Le funzioni in intorni di x_0 hanno comportamenti diversi. Osserviamo il primo grafico. Notiamo che l' insieme immagine ha $+\infty$ come punto di accumulazione, ovvero in ogni intorno $\mathcal{U}(+\infty)$ di $+\infty$ devono esserci punti dell' insieme immagine, ovvero devono esserci punti $f(x)$. Questi punti sono valori della funzione calcolati in punti x che sono prossimi ad x_0. Si osservi il ruolo primario ed arbitrario della scelta dell'intorno $\mathcal{U}(+\infty)$ ed il ruolo sussidiario dei punti x vicini ad x_0. Questo comportamento possiamo esprimerlo cosi':

$f(x)$ tende a $+\infty$ per x che tende a x_0

oppure

$f(x) \in \mathcal{U}(+\infty)$ quando x appartiene ad un intorno $\mathcal{U}(x_0)$ di x_0

e si scrive nella seguente forma semplice

$$f(x) \to +\infty \ \textit{per} \ x \to x_0,$$

oppure

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty.$$

Osserviamo che la funzione non e' definita in x_0. Potremmo anche completare il grafico assegnando un valore qualsiasi alla funzione in x_0. Tutto cio' non altera assolutamente il comportamento della funzione vicino ad x_0.

Dal secondo grafico, ragionando come per l'esempio precedente, si conclude che : $f(x)$ tende a l per x tendente ad x_0. Quindi possiamo scrivere

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l \ \textit{oppure} \ f(x) \to +\infty \ \textit{per} \ x \to x_0.$$

Il terzo caso e' di natura diversa rispetto ai primi due casi. La funzione non si avvicina ad un valore per x prossimi ad x_0. In questo caso diremo che il limite non esiste.

Iniziamo lo studio del comportamento locale di una funzione di variabile reale introducendo la nozione di limite. E' una nozione che si basa sul concetto di intorno. Formalizziamo le osservazione esposte sopra.

- *Definizione generale di limite*

Siano $y = f(x)$ una funzione definita in $D \subseteq \mathbb{R}$ e $\alpha \in \bar{\mathbb{R}}$ un punto di accumulazione di D finito o infinito.

Diremo che $f(x)$ per $x \to \alpha$ (si legge: per x che tende a α), tende a $\beta \in \bar{\mathbb{R}}$ (finito o infinito) e si scrive

$$\lim_{x \to \alpha} f(x) = \beta, \ \ oppure, \ \ f(x) \to \beta \ \ per \ \ x \to \alpha$$

quando vale la seguente proprieta':

$$\forall \mathcal{U}(\beta) \ \ \exists \mathcal{U}(\alpha) \ (dipendente \ da \ \ \mathcal{U}(\beta)) \ : \forall x \in \mathcal{U}(\alpha) \cap D \setminus \{\alpha\} \Rightarrow f(x) \in \mathcal{U}(\beta).$$

Si legge: ad ogni intorno $\mathcal{U}(\beta)$ di β esiste, si puo' coordinare, un intorno $\mathcal{U}(\alpha)$ di α, in generale dipendente da $\mathcal{U}(\beta)$, tale che, per ogni punto $x \in \mathcal{U}(\alpha)$ ed anche in D (non e' detto che D contenga tutto $\mathcal{U}(\alpha)$) distinto da α, il valore $f(x)$ appartiene a $\mathcal{U}(\beta)$.

Insistiamo. Nella definizione non ha alcuna importanza se il punto α appartenga a D. Inoltre la definizione ci dice che β e' un punto di accumulazione dell'immagine della restrizione di f ad intorni di α. Questo fatto evidenzia che la nozione di limite ha carattere locale e non da' alcuna informazione sulla funzione per punti "lontani" da α. Possiamo modificare la funzione lontano da α senza che questo modifichi il comportamento in un suo intorno.

Esercizio: dare le definizioni dei seguenti limiti aiutandosi con un grafico (indichiamo con x_0 ed l valori finiti):

$\lim_{x \to x_0} = +\infty$; $\lim_{x \to x_0} = -\infty$; $\lim_{x \to x_0} = \infty$; $\lim_{x \to x_0} = l$; $\lim_{x \to +\infty} = +\infty$; $\lim_{x \to -\infty} = +\infty$; $\lim_{x \to +\infty} = l$; $\lim_{x \to -\infty} = l$; $\lim_{x \to \infty} = l$.

Dagli esempi posti, si puo' notare che la scrittura di limite, mutatis mutandis, e' sempre la stessa. Basta adattare α e β ai vari casi.

Negli appunti sugli insiemi in $\mathbb{R}$ abbiamo descritto, in una forma espressiva, gli intorni di un punto utilizzando la nozione di distanza. Sono intorni simmetrici e per descriverli basta definire la semiampiezza: la denoteremo con δ sull'asse delle ascisse e con ϵ sull'asse delle ordinate. La forma degli intorni dei punti all'infinito e' la consueta.

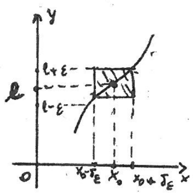
Si ha con x_0 ed l finiti

$\mathcal{U}(x_0) \Leftrightarrow |x - x_0| < \delta; \mathcal{U}(l) \Leftrightarrow |y - l| < \epsilon;$

per punti all'infinito, detto K un numero positivo, $\mathcal{U}(-\infty) \Leftrightarrow \{x : x < -K\}$; $\mathcal{U}(+\infty) \Leftrightarrow \{x|x > K\}; \mathcal{U}(\infty) \Leftrightarrow \{x|x < -K \cup x > K\} \Leftrightarrow \{x||x| > K\}$.

- *Definizione metrica di limite*

1. (ϵ, δ): $\alpha = x_0$ e $\beta = l$ finiti



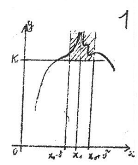
$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l$$

se vale

$$\forall \epsilon > \ \exists \delta_\epsilon > 0 : \forall x \in D,\ 0 < |x - x_0| < \delta_\epsilon \Rightarrow |f(x) - l| < \epsilon \ \Leftrightarrow -\epsilon < f(x) - l < \epsilon \equiv l - \epsilon < f(x) < l + \epsilon.$$

(si legge : per ogni numero epsilon maggiore di zero esiste in corrispondenza un numero delta, dipendente da epsilon, tale che per ogni x compresi fra $x_0 - \delta$ e $x_0 + \delta$ ed appartenente al diminio si ha $f(x)$ compreso fra $l - \epsilon$ ed $l + \epsilon$.)

2. (K, δ) : $\alpha = x_0$ e $\beta = +\infty$.



$$\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$$

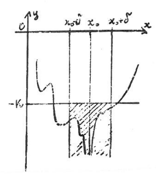
se vale

$$\forall K > 0\ \exists \delta_K > 0 : \forall x \in D,\ 0 < |x - x_0| < \delta_k \Rightarrow f(x) > K.$$

(lasciamo allo studente la lettura).

3. (K, δ) : $\alpha = x_0$ e $\beta = -\infty$.

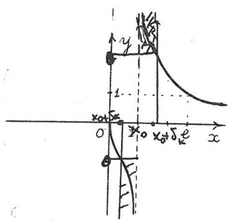
$$\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty$$



se vale

$$\forall K > 0\ \exists \delta_K > 0 : \forall x \in D,\ 0 < |x - x_0| < \delta_k \Rightarrow f(x) < -K.$$

4. $(K, \delta) :\ \alpha = x_0$ e $\beta = \infty$

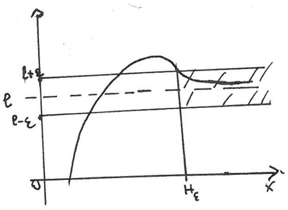


$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty$$

se vale

$\forall K > 0\ \exists \delta_K > 0 : \forall x \in D,\ |x - x_0| < \delta_K \Rightarrow f(x) < -K\ \ o\ \ f(x > K \equiv |f(x)| > K.$

5. (ϵ, H_ϵ) : $\alpha = +\infty$ e $\beta = l$.

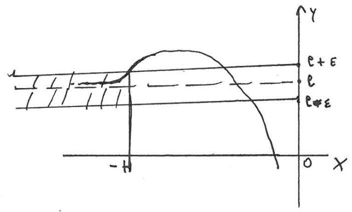


$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = l$$

se vale

$$\forall \epsilon > 0 \; \exists H_\epsilon > 0 : \forall x \in D, \; x > H_k \Rightarrow |f(x) - l| < \epsilon.$$

6. (ϵ, H_ϵ) : $\alpha = -\infty$ e $\beta = l$.

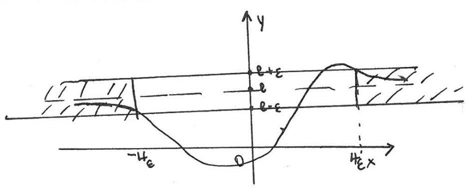


$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = l$$

se vale

$$\forall \epsilon > 0 \; \exists H_\epsilon > 0 : \forall x \in D, \; x < -H_k \Rightarrow |f(x) - l| < \epsilon.$$

7. (ϵ, H_ϵ) : $\alpha = \infty$ e $\beta = l$.

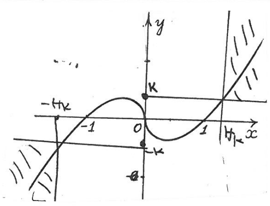


$$\lim_{x\to\infty} f(x) = l$$

se vale

$$\forall \epsilon > 0 \; \exists H_\epsilon > 0 : \forall x \in D, \; |x| > H_k \Rightarrow |f(x) - l| < \epsilon.$$

8. (K, H) - $\alpha = \infty$ e $\beta = \infty$.



$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$$

se vale

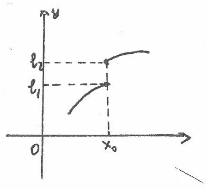
$$\forall K > 0 \; \exists H_K > 0 : \forall x \in D, \; |x| > H \Rightarrow |f(x)| > K.$$

Dagli esempi sopra esposti si puo' constatare il comportamento geometrico della funzione quando esiste il limite. Il grafico della funzione si stabilizza nel rettangolo limitato o illimitato del piano (x, y) dato dai punti del prodotto cartesiano $\mathcal{U}(\alpha) \times \mathcal{U}(\beta)$. Si puo' verificare, per via grafica, che le funzioni $y = senx$, $y = cosx$ non hanno limite per x tendente all'infinito.

Il grafico sotto
ci induce a considerare il limite destro ed il limite sinistro .

• *Limite dalla destra e limite dalla sinistra*

Puo' accadere che non esista il limite di $f(x)$ per $x \to x_0$; ma un tale limite puo' esistere se si considera una restrizione di $f(x)$ al sottoinsione D^+ delle $x \in D$ maggiori di x_0 oppure al sottoinsieme D^- delle $x \in D$ minori di x_0.



Questi limiti vengono chiamati limiti dalla destra o dalla sinistra in quanto si considerano intorni di x_0 destro o sinistro e si scrivono

$$lim_{x \to x_0^+} f(x) = l_1; \quad f(x) \to l_1 \ \ per \ x \to x_0^+,$$

$$lim_{x \to x_0^-} f(x) = l_2; \quad f(x) \to l_2 \ \ per \ x \to x_0^-.$$

Diamo le definizioni di questi limiti.

$$lim_{x \to x_0^+} f(x) = l_1$$

quando

$$\forall \epsilon > 0 \ \exists \delta_\epsilon > 0 : \forall \ x \ con \ x_0 < x < x_0 + \delta_\epsilon \ e \ x \in D \Rightarrow |f(x) - l_1| < \epsilon.$$

$$lim_{x \to x_0^-} f(x) = l_2$$

quando

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta_\epsilon > 0 : \forall x \ con \ x_0 - \delta_\epsilon < x < x_0 \ e \ x \in D \Rightarrow |f(x) - l_2| < \epsilon.$$

La differenza $\Delta = l_2 - l_1$ e' chiamata salto della funzione.

Osservando che $x_0 - \delta_\epsilon < x < x_0 \cup x_0 < x < x_0 + \delta_\epsilon$ forma un intorno completo di x_0 (escluso il punto stesso) , si ha la seguente

Proposizione - *L'esistenza del limite di $f(x)$ per $x \to x_0$ e' equivalente all' uguaglianza del limite destro e sinistro:*

$$\exists \lim_{a \to x_0} f(x) \Leftrightarrow \exists \lim_{x \to x_0^+} f(x) = \lim_{x \to x_0^-} f(x).$$

Piu' in generale, si puo' esaminare la relazione del limite con le restrizioni della funzione a sottonsiemi.

Proposizione - *Limite delle restrizioni*

Sia $C \subset D$, ed $\alpha \in \bar{\mathbb{R}}$ sia punto di accumulazione di C ed $f_{|C}$ sia la restrizione di $f(x)$ a C. Se esiste

$$\lim_{x\to\alpha} f(x) = \beta$$

allora esiste, per $x \in C$,

$$\lim_{x\to\alpha} f_{|C}(x)$$

ed e' uguale a β.

Viceversa :$\underline{puo'\ esistere\ il\ \lim_{x\to\alpha} f_{|C}(x)\ senza\ che\ esista \lim_{x\to\alpha} f(x).}$ per $x \in D$.

La definizione di limite per f implica la definizione di limite $f_{|C}(x)$.

Infatti dalla definizione di limite $\lim_{x\to\alpha} f(x) = \beta$ si ha

$$\lim_{x\to\alpha} f(x) = \beta,$$

quindi vale la seguente proprieta':

$$\forall \mathcal{U}(\beta) \exists \mathcal{U}(\alpha)(\ dipendente\ da\ \ \mathcal{U}(\beta) : \forall x \in \mathcal{U}(\alpha) \cap D \setminus \{\alpha\} \Rightarrow f(x) \in \mathcal{U}(\beta),$$

e questa implica

$$\forall \mathcal{U}(\beta)\ \exists \mathcal{U}_C(\alpha) = \mathcal{U}(\alpha) \cap C : \forall x \in \mathcal{U}(\alpha) \cap C \setminus \{\alpha\} \Rightarrow f_{|C}(x) = f(x) \in \mathcal{U}(\beta).$$

Questa e' la definizione di

$$\lim_{x\to\alpha} f_{|C}(x) = \beta.$$

Il viceversa e' giustificato dal limite destro e sinistro.

- **Teoremi sui limiti**

In questo paragrafo studiamo proprieta' delle funzioni legate al concetto di limite. Inoltre, i teoremi considerati riguardano limiti simultanei di piu' funzioni e quelli delle loro relazioni algebriche.

Il primo teorema che consideriamo e' il teorema della unicita' del limite. Questo e' una conseguenza del tipo di funzioni che trattiamo: funzioni ad un solo valore.

Teorema della unicita' del limite.

Sia $y = f(x)$ una funzione definita in D e x_0 un punto di accumulazione di D. Se esiste il limite di $f(x)$ per x tendente a x_0 esso e' unico.

Dimostrazione.

Si ragiona per assurdo, ovvero il limite esiste ma non e' unico. Allora dovranno esistere almeno due limiti distinti che denotiamo $L_1 \neq L_2$.

Allora abbiamo

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = L_1 \Leftrightarrow \forall \mathcal{U}(L_1)\ \exists \mathcal{U}_{L_1}(x_0)(\ \textit{dipendente da}\ \ \mathcal{U}(L_1)) : \forall x \in \mathcal{U}_{L_1}(x_0) \cap D \backslash \{x_0\} \Rightarrow f(x) \in \mathcal{U}(L_1)$$

e

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = L_2 \Leftrightarrow \forall \mathcal{U}(L_2)\ \exists \mathcal{U}_{L_2}(x_0)(\ \textit{dipendente da}\ \ \mathcal{U}(L_2)) : \forall x \in \mathcal{U}_{L_2}(x_0) \cap D \backslash \{x_0\} \Rightarrow f(x) \in \mathcal{U}(L_2).$$

Insistiamo:

se $x \in \mathcal{U}_{L_1}(x_0)$ allora $f(x) \in \mathcal{U}(L_1)$,

se $x \in \mathcal{U}_{L_2}(x_0)$ allora $f(x) \in \mathcal{U}(L_2)$,

allora

se x appartiene ad entrambi gli intorni di x_0 allora $f(x)$ appartiene ad entrambi gli intorni dei limiti, in formule:

$$x \in \mathcal{U}_{L_1}(x_0) \cap \mathcal{U}_{L_2}(x_0) \Rightarrow f(x) \in \mathcal{U}(L_1) \cap \mathcal{U}(L_2).$$

Ovvio.

Passiamo alla contraddizione:

$L_1 \neq L_2$ quindi e' possibile trovare un intorno $\mathcal{U}(L_1)$ di L_1 ed un intorno $\mathcal{U}(L_2)$ di L_2 disgiunti, privi di punti in comune, ovvero

$$\mathcal{U}(L_1) \cap \mathcal{U}(L_2) = \emptyset.$$

I corrispondenti intorni $\mathcal{U}_{L_1}(x_0)$ e $\mathcal{U}_{L_2}(x_0)$ hanno punti in comune perche' sono intorni dello stesso punto x_0, ovvero

$$\mathcal{U}_{L_1}(x_0) \cap \mathcal{U}_{L_2}(x_0) \neq \emptyset.$$

Allora consideriamo un punto x (esiste, quindi esiste $f(x)$) che appartiene all'intersezione, allora abbiamo

$$x \in \mathcal{U}_{L_1}(x_0) \cap \mathcal{U}_{L_2}(x_0) \Rightarrow f(x) \in \mathcal{U}(L_1) \cap \mathcal{U}(L_2) = \emptyset.$$

Abbiamo una contraddizion perche' insieme vuoto non ha punti.

Accertata la unicita' del limite, passiamo a considerare l'algebra dei limiti.

I teoremi che ora consideriamo trattano limiti di piu' funzioni contemporaneamente. Questo fatto impone che dovremo considerare i punti x che rendono valide le definizioni di limite simultaneamente, ovvero dovremo considerae punti x che si trovano nella intersezione degli intorni implicati.

- *Teorema del limite della somma*

Siano $y = f(x)$ e $y = g(x)$ funzioni definite in $T \subseteq \mathbb{R}$ e sia $x_0 \in DT$ punto di accumulazione di T. Inoltre esistono finiti

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = l_1, \quad \lim_{x\to x_0} g(x) = l_2.$$

Allora esiste il limite della somma $y = f(x) + g(x)$ e si ha:

$$\lim_{x\to x_0} (f(x) + g(x)) = \lim_{x\to x_0} f(x) + \lim_{x\to x_0} g(x) = l_1 + l_2.$$

(il processo di limite si distribuisce sui termini della somma)

Dimostrazione.

Consideriamo la definizione metrica di limite.

$\lim_{x\to x_0} f(x) = l_1 \Leftrightarrow$

$$\forall \epsilon > 0\ \exists \delta_\epsilon^f > 0 : 0 < |x - x_0| < \delta_\epsilon^f \ \textit{con}\ x \in T \Rightarrow |f(x) - l_1| < \epsilon.$$

$\lim_{x\to x_0} g(x) = l_2 \Leftrightarrow$

$$\forall \epsilon > 0\ \exists \delta_\epsilon^g > 0 : 0 < |x - x_0| < \delta_\epsilon^g \ \textit{con}\ x \in T \Rightarrow |f(x) - l_2| < \epsilon.$$

Osserviamo che stiamo considerando due funzioni ed a ciascuna compete un proprio δ. Questo fatto ci ha indotto a usare le notazioni con l'apice f o g.

Insistiamo: indichiamo con I^f l'intervallo simmetrico descritto da $|x - x_0| < \delta_\epsilon^f$ e con I^g l'intervallo simmetrico descritto da $|x - x_0| < \delta_\epsilon^g$.

Allora

se $x \in I^f$ allora vale $|f(x) - l| < \epsilon$;

se $x \in I^g$ allora vale $|g(x) - l| < \epsilon$, .

E' di tutta evidenza che

$$x \in I^f \cap I^g \cap T \Rightarrow \begin{cases} |f(x) - l_1| & < & \epsilon, \\ |g(x) - l_2| & < & \epsilon, \end{cases} \tag{1}$$

quindi valgono simultaneamente le due disequazioni.

Ricordando la disuguaglianza triangolare, vale

$$\begin{gathered} \forall x \in I^f \cap I^g \cap T \Rightarrow |(f(x) + g(x)) - (l_1 + l_2)| = \\ |(f(x) - l_1) + (g(x) - l_2)| \le |f(x) - l_1| + |g(x) - l_2| < 2\epsilon. \end{gathered}$$

Osservando che la semiampiezza δ_ϵ di $I^f \cap I^g$ e' il minimo fra δ_ϵ^f e δ_ϵ^g, leggiamo in sequenza quanto e' stato: ottenuto

$$\forall \epsilon > 0\ \exists \delta_\epsilon > 0 : \forall x\ \textit{con}\ 0 < |x - x_0| < \delta_\epsilon\ \textit{e}\ x \in T \Rightarrow |(f(x) + g(x)) - (l_1 + l_2)| < \epsilon$$

e questa e' la definizione di

$$\lim_{x \to x_0} (f(x) + g(x)) = l_1 + l_2.$$

Il teorema e' dimostrato.

Osservazione: non ha alcuna importanza la presenza di 2 o di qualsiasi fissato numero k; l' arbitrarieta' e' garantita da ϵ. In ogni modo invece di considerare δ_ϵ si sceglie $\delta_{k\epsilon}$ $(k = 1/2)$, ovvero si considera un intorno piu' piccolo.

Osserviamo che $|f(x)-l| = |-(f(x)-l)| = |(-f(x))-(-l)$ per cui se $|f(x)-l| < \epsilon$ si ha che $|(-f(x)) - (-l)| < \epsilon$. Allora abbiamo la seguente

(Quando non sorgono equivoci eviteremo di precisare il dominio e che x_0 punto di accumulazione)

- *Proposizione - Se* $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$ *allora* $\lim_{x \to x_0}(-f(x)) = -l$.

  Le due definizioni di limite sono equivalenti.
  L'ipotesi dice che

$$\forall \epsilon > 0\ \exists \delta_\epsilon > 0 : \forall x \text{ con } 0 < |x-x_0| < \delta_\epsilon \text{ e } x \in T \Rightarrow |f(x)-l_| < \epsilon \Rightarrow |(-f(x))-(-l) < \epsilon,$$

ovvero la definizione di

$$\lim_{x \to x_0} (-f(x)) = -l.$$

Scrivendo $f(x) - g(x) = f(x) + (-g(x))$, conseguenza dei due ultimi risultati e' il seguente

- *Teorema del limite della differenza - Se esistono finiti*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l_1, \quad \lim_{x \to x_0} g(x) = l_2$$

allora

$$\lim_{x \to x_0} (f(x) - g(x) = l_1 - l_2.$$

Allo scopo di eseguire le operazioni sui limiti quando sono implicati gli infiniti, ci si riferisce alla parziale aritmetica sui simboli $+\infty$, $-\infty$, ∞. Indichiamo con a un qualsiasi reale.

$$-(+\infty) = -\infty,\ -(-\infty) = +\infty,\ \ a + (+\infty) = +\infty,\ \ a + (-\infty) = -\infty,$$

$$(+\infty) + (+\infty) = (+\infty),\ \ (-\infty) + (-\infty) = (-\infty).$$

Alle forme $(+\infty) - (+\infty)$, $(-\infty) - (-\infty)$, $\infty - \infty$ non diamo alcun ignificato e le chiameremo forme di indecisione della somma (differenza).

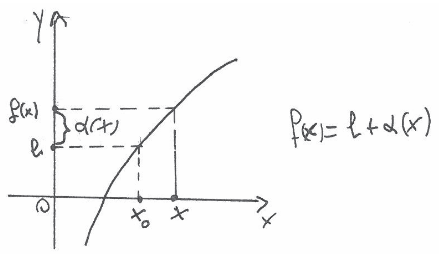
Con queste convenzioni i teoremi del limite della somma e della differenza possono essere estesi anche ai simboli $(+\infty)$, $(-\infty)$, ∞ ed avremo che il limite della somma e della differenza e' la somma o la differenza dei limiti tranne nei casi di indecisione. Cosi avremo

l_1 e' finito e $l_2 = +\infty$ allora il limite della somma e' $+\infty$ e cosi' via.

• *Scrittura fuori dal segno di limite*

Una interessante conseguenza dei teoremi considerati e' la cosiddetta " scrittura fuori del segno di limite ". Con il concetto di limite abbiamo informazioni sull'andamento della funzione in intorni di x_0. Da questi dati e' possibile ricavare qualche informazione sulla forma della funzione? La scrittura fuori dal segno di limite e' l'inizio di un lungo percorso che attraverso il concetto di continuita', di derivata ed i suoi teoremi si arrivera' a dare una risposta completa ed esauriente a questa domanda con la formula di Taylor, una delle piu' importanti formule dell'analisi matematica.

Il primo risultato e' modesto perche' modeste sono le informazioni che abbiamo.



Se e'

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l$$

allora vale

$$1) \quad \lim_{x \to x_0} (f(x) - l) = 0$$

(questa e' una semplice conseguenza del teorema del limite della somma e del fatto che il limite di una costante e' la costante stessa).

Posto allora

$$\alpha(x) = f(x) - l$$

si ha

$$2) \quad f(x) = l + \alpha(x).$$

con

$$\lim_{x \to x_0} \alpha(x) = 0,$$

un infinitesimo.

Per cancellare il processo di limite dalla (1) si deve aggiungere ad l una funzione $\alpha(x)$ di cui, in questo momento, sappiamo solo che e' un infinitesimo.

La (2) viene chiamata *scrittura di $f(x)$ fuori dal segno di limite.*

Consideriamo altre proprieta' delle funzioni dovute al concetto di limite.

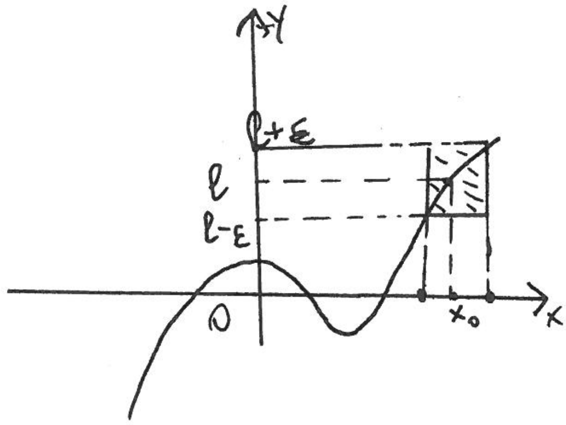
- *Teorema della permanenza del segno*

Se risulta

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l > 0$$

finito (o infinito), esiste <u>*un*</u> *intorno di x_0 (escluso x_0) nel quale $f(x) > 0$.*

Si osservi con attenzione il grafico.



Dalla definizione metrica di limite si ha:

$$\forall \epsilon > 0 \; \exists \delta_\epsilon > 0 : x \in D \text{ e } 0 < |x - x_0| < \delta_\epsilon \Rightarrow |f(x) - l| < \epsilon,$$

da cui si ha

$$|f(x) - l| < \epsilon \Leftrightarrow l - \epsilon < f(x) < l + \epsilon.$$

Dalla disuguaglianza a sinistra, scegliendo $\epsilon < l$ ad esempio $\epsilon = \frac{l}{2}$, si ha $f(x) > 0$. (attenzione la particolare scelta di ϵ condiziona l'intorno di x_0) . Va da se' che se $l < 0$ allora $f(x) < 0$.

Osserviamo che $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$ pur essendo $\frac{1}{x} > 0$ per $x > 0$.

Possiamo, allora, considerare il teorema inverso della permanenza del segno nella seguente forma.

- *Teorema inverso della permanenza del segno.*

Se $f(x) \geq 0$ *e* $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$ *allora* $l \geq 0$.

Essendo un teorema inverso lo dimostriamo per assurdo. Supponiamo non vera la tesi, allora, dalla proprieta' di tricotomia dei numeri reali, deve essere $l < 0$. Il teorema della permanenza del segno impone $f(x) < 0$, localmente. Questa e' una contraddizione.

Da questi teoremi si ricava la proprieta' di monotonia del processo di limite: se $f(x) \geq g(x)$ e

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l_1, \quad \lim_{x \to x_0} g(x) = l_2$$

allora $l_1 \geq l_2$.

In forma espressiva

$$f(x) \geq g(x) \Rightarrow \lim_{x \to x_0} f(x) \geq \lim_{x \to x_0} g(x).$$

Il processo di limite conserva l'ordine.

La dimostrazione e' immediata. Si consideri $y = F(x) = f(x) - g(x) \geq 0$ e dal teorema inverso della permaneza del segno si ha $l_1 - l_2 \geq 0$, da cui l'asserto.

- *Teorema della locale limitatezza*

Se una funzione ha un limite finito per x tendente a x_0*, allora esiste un intorno di* x_0 *(privato di* x_0*) dove la f e' limitata.*

Dalla definizione di limite, si ha

$$\forall \epsilon > 0 \; \exists \delta_\epsilon > 0 : x \in D \; e \; 0 < |x - x_0| < \delta_\epsilon \Rightarrow |f(x) - l| < \epsilon \Downarrow$$

$$l - \epsilon < f(x) < l + \epsilon.$$

Scegliendo un opportuno ϵ, ad esempio 1, si ha in corrispondenza un opportuno intorno di x_0 di semiampiezza δ_1 in cui

$$l - 1 < f(x) < l + 1.$$

Osservazione: se la funzione e' definita nel punto x_0 allora la funzione e' limitata in tutto l'intorno di x_0 compreso x_0, ovvero

$$min(f(x_0), l - 1) < f(x) < max(f(x_0), l + 1).$$

- *Teorema del limite del modulo*

Se risulta

$$lim_{x \to x_0} f(x) = l$$

finito, allora

$$lim_{x \to x_0} |f(x)| = |l|.$$

Dalla disuguaglianza triangolare si ha

$$||f(x)| - |l|| \leq |f(x) - l|$$

per cui $|f(x) - l| < \epsilon \Rightarrow ||f(x)| - |l|| < \epsilon$ (con le stesse "x") ovvero

$$lim_{x \to x_0} f(x) = l \Rightarrow lim_{x \to x_0} |f(x)| = |l|.$$

Da questa osservazione otteniamo la limitatezza scritta con il modulo : $|f(x)| < |l| + 1$.

• *Proposizione*

Siano $y = f(x)$ una funzione limitata in un intorno di x_0 e $y = g(x)$ infinitesima per $x \to x_0$, ovvero

$$lim_{x \to x_0} g(x) = 0.$$

Allora

$$lim_{x \to x_0} f(x)g(x) = 0.$$

La limitatezza si scrive $|f(x)| \leq k$ per qualche numero positivo k. Il limite nullo di $g(x)$ e' espresso dalla disequazione $|g(x)| < \epsilon$. Allora in un intorno di x_0 si ha

$$|f(x)g(x)| = |f(x)||g(x)| < k\epsilon.$$

Ne consegue che $f(x)g(x)$ e' un infinitesimo per $x \to x_0$, oppure

$$lim_{x \to x_0} f(x)g(x) = 0.$$

• *Teorema del limite del prodotto*

Siano $y = f(x)$ e $y = g(x)$ definite in D ed $x_0 \in \bar{D}$; inoltre $f(x) \to l_1$, $g(x) \to l_2$ (finiti) per $x \to x_0$.

Allora

$$lim_{x \to x_0} f(x)g(x) = lim_{x \to x_0} f(x) lim_{x \to x_0} g(x) = l_1 l_2.$$

Dimostazione:

Usiamo la scrittura fuori dal segno di limite, scriviamo:

1. $f(x) = l_1 + \alpha(x)$ con $\alpha \to 0$ per $x \to x_0$;
2. $g(x) = l_2 + \beta(x)$ con $\beta \to 0$ per $x \to x_0$.

Allora

$$f(x)g(x) = (l_1 + \alpha(x))(l_2 + \beta(x)) = l_1 l_2 + l_2\alpha + l_1\beta + \alpha\beta.$$

Il secondo ed terzo termine sono il prodoto di una funzione limitata (una costante) per un infinitesimo dunque sono infinitesimi. Altrettanto possiamo dire per il prodotto $\alpha\beta$: entrambe le funzioni sono limitate essendo degli infimitesimi quindi possiamo considerare $\alpha\beta$ un infinitesimo quale prodotto di una funzione limitata per un infinitesimo. Quindi scriviamo, dal teorema del limite della somma,

$$\lim_{x\to x_0} f(x)g(x) = \lim_{x\to x_0}(l_1 l_2 + l_2\alpha + l_1\beta + \alpha\beta) =$$

$$\lim_{x\to x_0} l_1 l_2 + \lim_{x\to x_0} l_2\alpha + \lim_{x\to x_0} l_1\beta + \lim_{x\to x_0} \alpha\beta = l_1 l_2.$$

Il teorema e' dimostrato.

- *Teorema del limite del rapporto*

Siano $y = f(x)$ e $y = g(x)$ definite in D ed $x_0 \in \bar{D}$; inoltre $f(x) \to l_1$, $g(x) \to l_2 \neq 0$ (finiti) per $x \to x_0$.

Allora

$$lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{lim_{x\to x_0} f(x)}{lim_{x\to x_0} g(x)} = \frac{l_1}{l_2}.$$

Dimostrazione:

$l_2 \neq 0$. Dal teorema della permanenza del segno si ha $g(x) \neq 0$, allora il rapporto $\frac{f(x)}{g(x)}$ ha significato in un intorno di x_0. Inoltre $|g(x)| \to |l_2| > 0$, dal teorema della permanenza del segno si ha $|g(x)| > \frac{l_2}{2}$, da cui

$$\frac{1}{|g(x)|} < \frac{2}{l_2}.$$

$g(x)$ e' localmente limitata.

Inoltre abbiamo

$lim_{x\to x_0}(l_2 f(x) - l_1 g(x)) = 0.$

Passiamo, ora, alla dimostrazione

$$lim_{x\to x_0}(\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{l_1}{l_2}) = lim_{x\to x_0}\frac{l_2 f(x) - l_1 g(x)}{l_2 g(x)} = lim_{x\to x_0}\frac{1}{l_2 g(x)}(l_2 f(x) - l_1 g(x)) = 0$$

perche' e' il prodotto di un infinitesimo $(l_2 f(x) - l_1 g(x))$ e di una funzione limitata $\frac{1}{l_2 g(x)}$ perche' e' $\frac{1}{|l_2 g(x)|} < \frac{2}{l_2^2}$.

Il teorema e' dimostrato.

Estensione dei teoremi ai valori infiniti.

Ricordiamo la parziale aritmetica degli infiniti.

1. $l\infty = \infty$ con $l \neq 0$,
2. $\infty\infty = \infty$, vale la regola dei segni,
3. $\frac{l}{0} = \infty$ con $l \neq 0$,
4. $\frac{l}{\infty} = 0$ con l finito,
5. $\frac{\infty}{l} = \infty$ con l finito.

Non daremo alcun significato alle seguenti forme che vengono dette di indecisione:

$$0\infty, \quad \frac{0}{0}, \quad \frac{\infty}{\infty}.$$

I teoremi del limite del prodotto (uguale al prodotto dei limiti) del rapporto (uguale al rapporto dei limiti) continuano a valere anche in presenza degli infiniti tranne nei casi di indecisione. Cosi' avremo, in breve, $f(x) \to l \neq 0$ e $g(x) \to \infty \Rightarrow f(x)g(x) \to \infty$; $\quad f(x)/g(x) \to 0$....e cosi' via.

• *Teorema del confronto*

Siano $y = f(x)$, $y = g(x)$, $y = h(x)$ definite in D e $x_0 \in \bar{D}$. Inoltre $h(x) \leq f(x) \leq g(x)$ ed esistono i limiti

$$h(x) \to l, \quad g(x) \to l$$

per $x \to x_0$.
Allora

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l.$$

Dalle considerazioni fatte sui limiti simultanei, esiste un intorno di x_0 in cui valgono simultaneamente le seguente relazioni

$$\begin{cases} l - \epsilon < & h(x) & < l + \epsilon, \\ l - \epsilon < & g(x) & < l + \epsilon. \end{cases} \tag{2}$$

Allora nello stesso intorno si ha

$$l - \epsilon < h(x) \leq f(x) \leq g(x) < l + \epsilon.$$

Questa e' la definizione del limite

$$lim_{x \to x_0} f(x) = l.$$

Il teorema e' dimostrato.

• *Applicazione*

Dimostriamo che

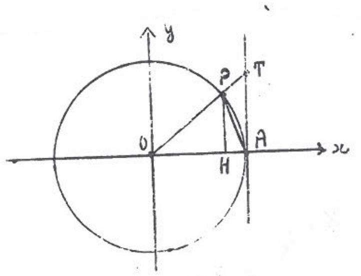
$$\lim_{x \to 0} \frac{senx}{x} = 1$$

con x espresso in radianti.

Alcune osservazioni:
1) $\frac{senx}{x}$ e' funzione pari quindi la consideriamo solo per x positivi;
2) Le funzioni sono di natura differente per questo non facilmente confrontabili.
3) x e' espresso in radianti. Il radiante e' l'unita' di misura degli angoli. Si ricorda che il radiante e' l' angolo che intercetta un arco di circonferenza, con centro nel vertice dell'angolo, di lunghezza pari al raggio della circonferenza.

(x e' la misura di un arco rispetto al raggio).

Passiamo alla dimostrazione.



Poniamo $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ e riferendoci al cerchio trigonometrico (cfr. la figura) si ha

$$\overline{OA} = 1, \quad \widehat{AP} = x \ \ (misura \ \ dell' \ \ arco), \ \overline{HP} = senx, \ tgx = \overline{AT}.$$

E' evidente che

$$area\ triangolo(OAP) \leq area\ settore(OAP) \leq area\ triangolo(OAT),$$

e queste aree sono rispettivamente

$$senx/2, \ x/2, \ tgx/2,$$

da cui ricaviamo

$$senx \leq x \leq tgx.$$

(Questa relazione giustifica la scelta di misurare gli angoli in radianti).
Dividendola per $senx$ (positivo) si ha

$$1 \leq \frac{x}{senx} \leq \frac{1}{cosx},$$

ovvero

$$cosx < \frac{senx}{x} < 1.$$

Dato che per $x \to 0$ si ha $cosx \to 1$. il teorema del confronto ci da'

$$\frac{senx}{x} \to 1$$

.

Osserviamo la struttura del limite: c'e' la misura di un angolo, il seno di tale angolo e la misura tende a zero. Se si denota $f(x)$ la misura di tale angolo allora il limite assume la seguente forma

$$\frac{senf(x)}{f(x)} \to 1 \ \ per \ \ f(x) \to 0.$$

Con questa generalizzazione in mente, calcolare

$$\lim_{x\to 0} \frac{sen5x}{x}, \ \lim_{x\to 0} \frac{senx^2}{x}, \ \lim_{x\to 0} \frac{sen(sen^2x)}{x^2}, \ \lim_{x\to 0} \frac{senx(x-1)}{x}.$$

Esiste un legame della misura in radianti x ed in gradi α dello stesso angolo:

$$\frac{x}{\alpha} = \frac{\pi}{180}; \ \ senx = sen\alpha.$$

Dunque abbiamo

$$\frac{sen\alpha}{\alpha} = \frac{\pi}{180}\frac{senx}{x},$$

da cui

$$lim_{\alpha\to 0}\frac{sen\alpha}{\alpha} = \frac{\pi}{180}.$$

Funzioni monotone e l'esistenza del limite

• *Funzione monotona crescente o decrescente*

Sia $y = f(x)$ definita in D. Si dice che $f(x)$ e' monotona crescente o crescente in D quando vale

$$\forall x_1, x_2 \in D, \ \ x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2).$$

Se vale il segno $<$ invece di $\leq$ allora si dice crescente in senso stretto.

• *Funzione monotona decrescente o decrescente*

Sia $y = f(x)$ definita in D. Si dice che $f(x)$ e' monotona decrescente o decrescente in D quando vale

$$\forall x_1, x_2 \in D, \ \ x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2).$$

Se vale il segno $>$ invece di $\geq$ allora si dice decrescente in senso stretto.

A piu' riprese abbiamo osservato che funzioni con carattere "eccessivamente" oscillante in vicinanza del punto x_0 non hanno limite relativamente a tale punto. Basti pensare alla funzione $y = sen\frac{1}{x}$ in un intorno dell'origine.

Fatto questo che non ci aspettiamo dalle funzioni monotone, anzi riteniamo che per tali funzioni l'esistenza sia garantita. Questo e' vero se rilassiamo un po' le nostre pretese ed accettiamo come esistenza anche l'esistenza parziale cioe' l'esistenza dei limiti destro e sinistro. Allora abbiamo i seguenti teoremi. Per, semplicita' di esposizione, consideriamo funzioni definite in intervalli limitati. I teoremi valgono in domini molto piu' generali ed anche illimitati.

- *Teorema 1*

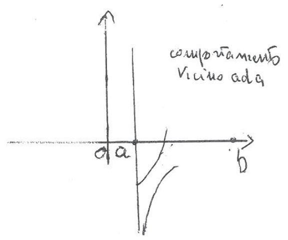
Sia $y = f(x)$ definita in (a, b) ed ivi crescente. Allora si ha

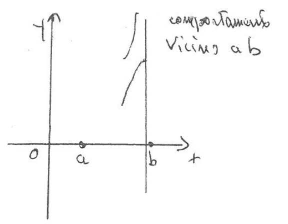
$$\exists \lim_{x\to a^+} f(x) = \lambda = Inf_{x\in(a,b)}\, f(x) = \begin{cases} -\infty & se\ f(x)\ e'\ illimitata\ inferiormente; \\ finito & se\ f(x)\ e'\ limitata\ inferiormente; \end{cases}$$

Inoltre, se esiste $f(a)$ si ha $f((a) \leq \lambda$. Anzi possiamo assegnare alla funzione un qualsiasi valore in a minore di λ senza alterare la monotonia.

$$\exists \lim_{x\to b^-} f(x) = \Lambda = Sup_{x\in(a,b)}\, f(x) = \begin{cases} +\infty, & se\ f(x)\ e'\ illimitata\ superiormente; \\ finito, & se\ f(x)\ e'\ limitata\ superiormente; \end{cases}$$

Inoltre, se esiste $f(b)$ si ha $f((b) \geq \Lambda$. Anzi possiamo conservare la monotonia assegnando alla funzione in b un qualsiasi valore maggiore di Λ .





- *Teorema 2*

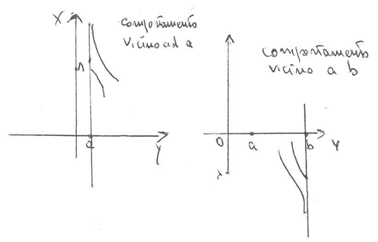
Sia $y = f(x)$ definita in (a, b) ed ivi decrescente. Allora si ha

$$\exists \lim_{x \to a^+} f(x) = \Lambda = Sup_{x \in (a,b)}\, f(x) = \begin{cases} +\infty, & se\ f(x)\ e'\ illimitata\ superiormente; \\ finito, & se\ f(x)\ e'\ limitata\ superiormente; \end{cases}$$

Inoltre se esiste $f(a)$ si ha $f((a) \geq \Lambda$. Anche in questo caso vale l'osservazione fatta nel teorema 1.

$$\exists \lim_{x \to b^-} f(x) = \lambda = Inf_{x \in (a,b)}\, f(x) = \begin{cases} -\infty, & se\ f(x)\ e'\ illimitata\ inferiormente; \\ finito, & se\ f(x)\ e'\ limitata\ inferiormente; \end{cases}$$

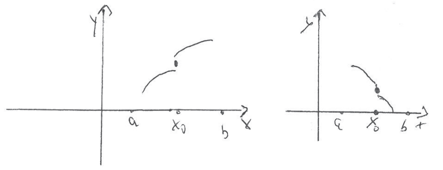
Inoltre, se esiste $f(b)$ si ha $f((b) \leq \lambda$.



- *Teorema 3*

Sia $y = f(x)$ definita in (a, b), $x_0 \in (a, b)$ ed ivi crescente. Allora si ha

$$\exists \lim_{x \to x_0^-} f(x) = Sup_{x \in (a,x_0)}\, f(x) \leq f(x_0) \leq lim_{x \to x_0^+} f(x) = Inf_{x \in (x_0,b)}\, f(x).$$

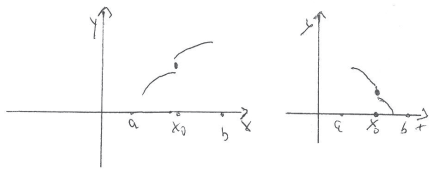


- *Teorema 4*

Sia $y = f(x)$ definita in (a, b), $x_0 \in (a, b)$ ed ivi decrescete. Allora si ha

$$\exists \lim_{x \to x_0^-} f(x) = Inf_{x \in (a,x_0)} \, f(x) \geq f(x_0) \geq lim_{x \to x_0^+} f(x) = Sup_{x \in (x_0,b)} \, f(x).$$

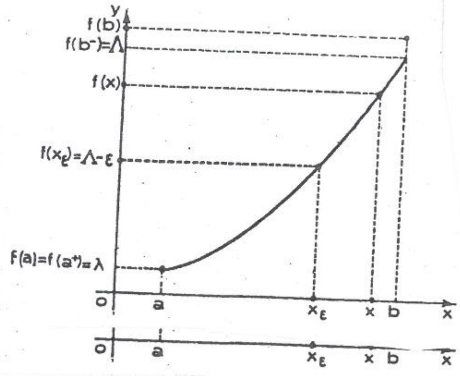
Appare evidente che qualsiasi valore assegnato alla funzione nel punto x_0,



compreso fra il limite destro e sinistro, conserva la monotonia della funzione

Dimostriamo il teorema 1) solo per l'estremo b per funzioni limitate e crescenti; tutti gli altri casi si dimostrano in modo analogo.

Si osservi la figura.



L'immagine della funzione e' un insieme limitato. Allora l'estremo superiore Λ dell'immagine e' un numero (ogni $f(x) \leq \Lambda$ per $x \in (a,b)$). Dalle proprieta' dell'estremo superiore, $\forall \epsilon > 0$ esiste un elemento $y_\epsilon \in Im_{x \in (a,b)}\ f(x)$ tale che

$$\Lambda - \epsilon < y_\epsilon \leq \Lambda.$$

Dato che y_ϵ appartiene all'immagine della funzione, esiste un punto $x_\epsilon \in (a,b)$ tale che $f(x_\epsilon) = y_\epsilon$

(nel grafico si e' assunto, per semplicita', $y_\epsilon = \Lambda - \epsilon$ e la funzione e' strettamente monotona). Ora, la funzione e' crescente per cui in ogni punto $x \in (x_\epsilon, b)$ vale

$$\Lambda - \epsilon < f(x_\epsilon) \leq f(x) \leq \Lambda.$$

Questa e' la definizione di $\lim_{x \to b^-} f(x) = \Lambda$.

Il teorema e' dimostrato

Nota - Possiamo dare la definizione di monotonia in forma piu' generale nel seguente modo:

data $y = f(x)$ definita in D, diremo che essa e' monotona in D se per ogni coppia di punti $x_1, x_2 \in D$ si ha

$$(f(x_1) - f(x_2))(x_1 - x_2) \geq 0.$$

Diremo che e' strettamente monotona quando la disequazione e' stretta per $x_1 \neq x_2$.

La definizione data contiene sia la crescita sia la decrescita della funzione f. Questa definizione si adatta a spazi molto piu' generali di $\mathbb{R}$. Inoltre la monotonia, oltre a dare informazioni sulla esistenza di limiti, ha notevole importanza nel trovare soluzioni della equazione

$$f(x) = a$$

con a numero dato. Nel capitolo sulla continuita' studieremo questo problema.

Successioni e numero e.

In questo paragrafo consideriamo particolari funzioni dette successione. Il concetto di successione, storicamente, e' precedente al concetto di funzione. L'idea di successione viene descritta esplicitamente nel " Liber Abaci " (1202 circa) di Fibonacci (Leonardo Pisano detto Fibonacci). Noi presenteremo le successione nel contesto piu' generale della teoria delle funzioni, impostata da Cauchy nella prima meta' dell'ottocento, che stiamo considerando.

Si chiama successione una funzione (numerica) che ha come insieme di definizione i numeri naturali:

$$f : \mathbf{N} \to \mathbf{R};$$

$$f : n \mapsto y = f(n).$$

L' immagine della successione e' : Im $f = \{y \in \mathbf{R} : y = f(n), n \in \mathbf{N}\}$,
in forma tabellare, piu' semplice,

$$\{f(1), f(2), f(3), ...\}.$$

Il grafico di una successione e' un insieme di punti nel piano con ascisse i numeri naturali.

Per ragioni storiche e per ragioni di semplicita', la successione si scrive :

$$\{a_n\} \ \textit{oppure} \ \{s_n\}$$

ovvero una lettera con pedice n.

a_n, detto termine generico, rappresenta la legge con cui si determinano gli elementi della successione. In altri termini a_n sostituisce $f(n)$.

Considerata una successione come una funzione possiamo traslare su di essa i concetti gia' costruiti, ad esempio il concetto di limite. Dal momento che i numeri naturali hanno un solo punto di accumulazione che e' $+\infty$, si considera la sola scrittura

$$\lim_{n \to +\infty} s_n = \beta$$

e si sostituisce la variabile continua x con la variabile discreta n nelle definizioni gia' date. Cosi' abbiamo

1. (ϵ, N_ϵ) : $\alpha = +\infty$ e $\beta = l$.

$$\lim_{n \to +\infty} s_n = l$$

se vale

$$\forall \epsilon > 0 \; \exists N_\epsilon > 0 : \forall n \in \mathbf{N}, \; n > N_k \Rightarrow |s_n - l| < \epsilon.$$

ove N_ϵ e' un numero naturale.

2. (K, N_K) : $\alpha = +\infty$ e $\beta = +\infty$.

$$\lim_{n \to +\infty} s_n = +\infty$$

se vale

$$\forall K > 0 \; \exists N_K > 0 : \forall n \in \mathbf{N}, \; n > N_k \Rightarrow s_n > K.$$

ove N_K e' un numero naturale.

3. (K, N_K) : $\alpha = +\infty$ e $\beta = -\infty$.

$$\lim_{n \to +\infty} s_n = -\infty$$

se vale

$$\forall K > 0 \; \exists N_K > 0 : \forall n \in \mathbf{N}, \; n > N_k \Rightarrow s_n < -K.$$

ove N_K e' un numero naturale.

4. (K, N_K) : $\alpha = +\infty$ e $\beta = \infty$.

$$\lim_{n \to +\infty} s_n = \infty$$

se vale

$$\forall K > 0 \; \exists N_K > 0 : \forall n \in \mathbf{N}, \; n > N_k \Rightarrow |s_n| > K.$$

ove N_K e' un numero naturale.

- *Carattere di una successione*

1. Se $s_n \to l$ finito si dice che la successione e' convergente;
2. Se $s_n \to \infty$ (di segno qualsiasi) si dice che la successione e' divergente;
3. $\nexists \lim_{n \to +\infty} s_n$ si dice che la successione e' oscillante o indeterminata (ad esempio $\{(-1)^n\}$).

Tutti i teoremi sui limiti delle funzioni considerati sopra valgono per le successioni. Come al solito trasliamo i teoremi sostituendo la variabile continua x con la variabile discreta n. Osserviamo che tutte le funzioni a noi note della variabile x definite su tutto l'asse delle ascisse positive, ristrette ai numeri naturali, sono delle successioni il cui grafico geometrico e' l'insieme dei punti con ascissa n.

Osserviamo che, come per le funzioni, anche per le successioni possiamo considerare l'operazione di restrizione ad un sottoinsieme di $\mathbb{N}$; si puo' operare nel seguente modo. Sia $\{a_n\}$ una successione. Consideriamo un certo numero di elementi di $\{a_n\}$ e li ordiniamo in una successione $\{b_n\}$ nello stesso ordine che hanno in $\{a_n\}$. In questo modo otteniamo una sottosuccessione o successione estratta da $\{a_n\}$. E' ovvio che l'elemento b_n occupera' un posto in $\{a_n\}$ che e' in corrispondenza di n e che indicheremo n'.

Sottosuccessione

Si chiama sottosuccessione della successione $\{a_n\}$ una successione $\{b_n\}$ tale che

$$\{b_n\} \quad con \quad b_n = a_{n'} \quad con \quad n \in \mathbb{N}.$$

e $\{n'\}$ e' una sottosuccessione crescente di numeri naturali.

Come per le funzioni possiamo affermare che

se $\{a_n\}$ ha limite allora ogni sua sottosuccessione ha limite e i due limiti sono uguali.

In generale non vale il contrario.

Il seguente teorema ci da' una condizione necessaria e sufficiente perche' una successione abbia limite.

- *Teorema*

Condizione necessaria e sufficiente affinche' una successione $\{a_n\}$ abbia limite e' che ogni sua sottosuccessione sia convergente.

- *Successioni monotone*

Possiamo dare la definizione di monotonia per le successioni in modo naturale e semplice. Dal momento che le successioni sono sequenze di numeri ordinati che hanno un succesivo, allora possiamo scrivere:

1. $\{s_n\}$ e' crescente se per ogni $n \in \mathbf{N}$ si ha :

   $$s_n \leq s_{n+1};$$

   se vale $<$ si dice crescente in senso stretto;

2. $\{s_n\}$ e' decrescente se per ogni $n \in \mathbf{N}$ si ha :

$$s_n \geq s_{n+1};$$

se vale $>$ si dice decrescente in senso stretto.

Tutti i teoremi sui limiti delle funzioni monotone valgono per le successioni, tenendo presente che in questo caso $b = +\infty$; in particolare

• se $\{s_n\}$ e' monotona allora o converge o diverge;

• se $\{s_n\}$ e' monotona e limitata, ovvero

$$\begin{cases} s_n \leq s_{n+1} \; o \; s_n \geq s_{n+1}, \\ |s_n| \leq K \; \forall n \in \mathbf{N}, \; K \in \mathbb{R}, \end{cases} \tag{3}$$

allora $\{s_n\}$ e' convergente.

Il numero "e" e sue conseguenze.

In questa sezione definiamo il numero "e" come limite di una successione convergente e ne trarremo alcune interessanti conseguenze. E' un numero irrazionale trascendente ben noto, ad esempio e' base dei logaritmi Neperiani.

Proposizione

La successione $\{s_n\}$ con

$$s_n = (1 + \frac{1}{n})^n$$

e' convergente.

Il limite presenta la forma di indecisione di tipo potenza $1^{+\infty}$. Per la dimostrazione della convergenza useremo i teoremi di monotonia o meglio la crescita e la limitatezza della successione. Questo limite sara' un punto di riferimento per sciogliere la forma di indecisione 1^{∞}. Inoltre, useremo la disuguaglianza di Bernoulli nella forma

$$(*) \qquad (1 - \frac{1}{n^2})^n \geq (1 - \frac{1}{n}).$$

(Questa e' un caso particolare di

$$(**) \qquad (1 + \alpha)^n \geq 1 + n\alpha.$$

con $\alpha \geq -1$, gia' considerata. Basta porre $\alpha = -\frac{1}{n^2}$ ed otteniamo (*).

(**) si dimostra per induzione.

E' vera per n=2. Supponiamola vera per n e dimostriamola per $(n+1)$.

$$(1+\alpha)^{n+1} = (1+\alpha)^n(1+\alpha) > (1+n\alpha)(1+\alpha) = 1+n\alpha+\alpha+n\alpha^2 \geq 1+(n+1)\alpha.$$

Dunque (**) vale anche per $n+1$. La disuguaglianza e' dimostrata.

Dimostriamo il teorema.

1) s_n e' crescente. infatti

$s_1 = 2$ e per $n \geq 2$

$$\frac{s_n}{s_{n-1}} = \frac{(1+\frac{1}{n})^n}{(1+\frac{1}{n-1})^{n-1}} = \frac{(\frac{n+1}{n})^n(\frac{n-1}{n})^n}{\frac{n-1}{n}} =$$

$$\frac{(1-\frac{1}{n^2})^n}{1-\frac{1}{n}} > 1,$$

per la disuguaglianza di Bernoulli.

2) Limitatezza

Sia

$$b_n = (1+\frac{1}{n})^{n+1}.$$

E' chiaro che $b_n \geq s_n$ e $b_2 = 4$; allora per $n \geq 2$ si ha (come al punto (1))

$$\frac{b_n}{b_{n-1}} = \frac{(1+\frac{1}{n})^{n+1}}{(1+\frac{1}{n-1})^n} = (1+\frac{1}{n})\frac{(\frac{n+1}{n})^n}{(\frac{n}{n-1})^n} =$$

$$\frac{1+\frac{1}{n}}{(1+\frac{1}{n^2-1})^n} < 1$$

perche' dalla disuguaglianza di Bernoulli si ha

$$(1+\frac{1}{n^2-1})^n > (1+n\frac{1}{n^2-1}) > 1+\frac{1}{n}.$$

Quindi

$s_n \leq b_n \leq b_{n-1} < ... < 4$. Quindi la successione (**) e' convergente.

ll teorema e' dimostrato.

• *Definizione*

Chiameremo e il limite della successione

$$\{(1+\frac{1}{n})^n\}.$$

e e' un numero irrazionale trascendente (non e' soluzione di equazioni algebriche a coefficienti interi). E' uno di quei numeri come π non previsti dalle osservazioni iniziali sui numeri reali, come il problema delle potenze ennesime perfette, che hanno portato alla costruzione dei numeri "reali".

Si presti attenzione alla struttura del termine generale nella successione. La base e' la somma di 1 piu' una funzione che tende a zero e l' esponente e' il reciproco di tale funzione. Questa proprieta', mediante la disuguaglianza di Bernoulli, e' stata cruciale per stabilire la crescita e la limitatezza della successione. Non v'e' dubbio che una tale forma con funzioni che rispettano le caratteristiche di struttura di $\{s_n\}$ hanno limite e. Questa osservazione la verifichiamo col passaggio alla variabile continua.

Mostriamo che

$$***) \qquad (1+\frac{1}{y})^y \to e$$

per $y \to \pm\infty$ o $y \to \infty$.

Verifichiamo il limite per $y \to +\infty$.

Dato $y > 0$ esiste $n \in \mathbb{N}$ per cui $n \leq y \leq n+1$; dalle varie proprieta' di monotonia dell'ordine si ottiene

$$(*) \qquad \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{y} \leq \frac{1}{n} \Rightarrow 1+\frac{1}{n+1} \leq 1+\frac{1}{y} \leq 1+\frac{1}{n} \Rightarrow$$
$$(1+\frac{1}{n+1})^n \leq (1+\frac{1}{y})^y \leq (1+\frac{1}{n})^{n+1}.$$

Ora

$$(1+\frac{1}{n+1})^{n+1} = (1+\frac{1}{n})^n(1+\frac{1}{n}) \to e$$

per $n \to +\infty$.

Inoltre

$$(1+\frac{1}{n+1})^n = (1+\frac{1}{n+1})^{n+1}(1+\frac{1}{n+1})^{-1} \to e$$

perche'

$$\{(1+\frac{1}{n+1})^{n+1}\}$$

e' la stessa successione del numero e per $n \geq 0$.

Nella (*) le funzioni esterne nella ultima disuguaglianza convergono ad e, allora il teorema del confronto implica la convergenza ad e per $n \to +\infty$ $y \to +\infty$ della funzione intermedia.

$***)$ e' dimostrata.

Si hanno ora i seguenti limiti notevoli:

1. $$i) \qquad (1+\frac{a}{x})^x \to e^a, \quad a \in \mathbb{R}$$

   per $x \to \pm\infty$ o $x \to \infty$;

2.
$$ii) \qquad (1+ax)^{\frac{1}{x}} \to e^a, \quad a \in \mathbb{R}$$
per $x \to 0$;

3.
$$iii) \qquad \frac{log_b(1+x)}{x} \to log_b e, \quad (a,b) \in \mathbb{R}, b > 0 \neq 1$$
per $x \to 0$;

4.
$$iv) \qquad \frac{a^x - 1}{x} \to loga, \quad a > 0 \in \mathbb{R}$$
per $x \to 0$.

5.
$$v) \qquad \frac{(1+x)^a - 1}{x} \to a, \quad a > 0 \in \mathbb{R}$$
per $x \to 0$.

Dimostrazione:

1. Se $a = 0$ i) e' ovvia; se $a \neq 0$ si pone $y = \frac{x}{a}$ e dalla (***) si ha
$$[(1+\frac{1}{y})^y]^a \to e^a$$
per $x \to +\infty \Rightarrow y \to +\infty$.
2. ponendo $y = \frac{1}{x}$ in ii) si ottiene il limite i).
3. accettando che i simboli lim e log_b si possono scambiare (lo verificheremo piu' avanti), applicando il logaritmo alla ii) con $a = 1$ si ottiene iii).
4. posto $a^x - 1 = y$ si ha $y \to 0$ per $x \to 0$ e $x = log_a(y+1)$
allora abbiamo dalla iii)
$$\frac{a^x - 1}{x} = \frac{y}{log_a(y+1)} \to \frac{1}{log_a e} = loga$$
per $x \to 0$;
5. posto $y = (1+x)^a - 1$ risulta $log(y+1) = alog(1+x)$ e $y \to 0$ quando $x \to 0$. Quindi abbiamo che il limite iii) implica
$$\frac{(1+x)^a - 1}{x} = \frac{y}{log(y+1)} \frac{log(1+x)}{x} a \to a$$
per $x \to 0$.

Anticipiamo i seguenti risultati che giustificheremo piu' avanti nel contesto delle funzioni composte. Consideriamo il calcolo del limite della potenza $f(x)^{g(x)}$ con $f(x) > 0$. Si afferma che se esistono finiti

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = l \neq 0, \ \lim_{x\to x_0} g(x) = L$$

allora esiste finito

$$\lim_{x\to x_0} f(x)^{g(x)} = l^L.$$

Questo si estende a qualsiasi valore di $l \geq 0, L$ (con le ovvie estensioni alla aritmetica dell'infinito) tranne quando si hanno le seguenti forme di indecisione

$$0^0, \quad 1^\infty \ (\textit{indecisione del numero } e), \quad \infty^0.$$

Tutte queste forme di indecisione di tipo esponenziale possono essere ridotte ad indecisioni di tipo algebrico ricordando che il logaritmo e la potenza sono leggi inverse per cui si ha

$$f(x)^{g(x)} = e^{log f(x)^{g(x)}} = e^{g(x) log f(x)}.$$

Allora la forma di indecisione di tipo esponenziale si trasforma nella forma di indecisione algebrica $0 \cdot \infty$.

Ad esempio calcolare il limite

$$\lim_{x\to 0^+} x^x = \lim_{x\to 0} e^{xlogx}.$$

quindi si e' condotti a considerare il

$$lim_{x\to 0} xlogx.$$

Fino a questo punto non abbiamo considerato il criterio di Cauchy per l'esistenza del limite finito non avendo avuto l'opportunita' di usarlo. Ora lo enunciamo per completezza.

Criterio di Cauchy per l'esistenza del limite finito - *Sia $y = f(x)$ una funzione definita in $[a, b]$ anche a piu' valori. Allora, condizione necessaria e sufficiente affinche' esista $\lim_{x\to x_0} f(x) = l$ (unico) e' che per ogni $\epsilon > 0$ esiste un $\delta_\epsilon > 0$ tale per ogni coppia di punti x' e x'' appartenenti all'intervallo $[x_0 - \delta_\epsilon, x_0 + \delta_\epsilon]$ si ha*

$$*) \qquad |f(x') - f(x'')| < \epsilon.$$

La parte necessaria e' semplice. La condizione sufficiente e' piu' elaborata. Per future applicazioni, per le successioni daremo, anche. dimostrazione completa.

• La condizione e' necessaria.

Infatti, supponiamo che
$$\lim_{x\to x_0} f(x) = l,$$
finito.

Allora , fissato $\epsilon > 0$, si puo' determinare un $\delta_\epsilon > 0$ tale che, per ogni x soddisfacente alla condizione
$$0 < |x - x_0| < \delta_\epsilon,$$
si ha
$$|f(x) - l| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Siano x' e x" due punti dell'intervallo $(x_0 - \delta_\epsilon, x_0 + \delta_\epsilon)$ distinti da x_0. Si ha
$$|f(x') - f(x")| = |f(x') - l + l - f(x")| \leq |f(x') - l| + |f(x") - l| < \epsilon.$$

La condizione necessaria e' dimostrata.

• La condizione e' sufficiente. La dimostrazione si articola in diversi punti.

1) La funzione e' localmente limitata.

La condizione (*) afferma che, fissato $\epsilon > 0$, esiste un intorno di x_0, $I_{\delta_\epsilon} := (x_0 - \delta_\epsilon, x_0 + \delta_\epsilon) \setminus x_0$ in cui vale $|f(x') - f(x'')| < \epsilon$. Assunto $\epsilon = 1$, $x" = x$, x' $(fissato) \in I_{\delta_1}$, si ha
$$|f(x) - f(x')| < 1 \Rightarrow |f(x)| < |f(x')| + 1.$$
Quindi la funzione e' limitata in I_{δ_1};

2)La funzione f, ristretta a I_δ con $0 < \delta < \delta_1$, ha estremo superiore $\Lambda(\delta)$ ed estremo inferiore $\lambda(\delta)$ finiti. Tali numeri dipendono da δ. Inoltre , $\lambda(\delta) < \Lambda(\delta)$ (non trattiamo le funzioni costanti).

3) $\lambda(\delta)$, $\Lambda(\delta)$ sono funzioni limitate. Inoltre, dalle proprieta' dell'estremo superiore ed inferiore, si ha che per ogni $\epsilon > 0$ esistono due punti $x"_\delta$ e x'_δ tale che
$$f(x"_\delta) > \Lambda(\delta) - \epsilon \quad e \quad f(x'_\delta) < \lambda(\delta) + \epsilon,$$
da cui
$$**) \qquad 0 < \Lambda(\delta) - \lambda(\delta) < f(x"_\delta) - f(x'_\delta) + 2\epsilon.$$
Inoltre, $\Lambda(\delta)$ e' monotona crescente rispetto a δ e $\lambda(\delta)$ e' monotona decrescente rispettoa δ. Pertanto esistono finiti:
$$\lim_{\delta\to 0} \Lambda(\delta) = L" \; e \; \lim_{\delta\to 0} \lambda(\delta) = L',$$
con $L" \leq L'$. Dalla (**) si ha
$$0 \leq L" - L' < f(x"_\delta) - f(x'_\delta) + 2\epsilon.$$

Dato che $L", L'$ non dipendono da δ, possiamo scegliere $\delta = \delta_{epsilon}$ e i punti $x"_{\delta_\epsilon}, x'_{\delta_\epsilon} \in I_{\delta_\epsilon}$ soddisfacenti la condizione (*): dunque $\forall \epsilon > 0$ si ha:

$$0 \leq L" - L' < |f(x"_{\delta_\epsilon} - f(x'_{\delta_\epsilon})| + 2\epsilon < 3\epsilon.$$

Infine abbiamo, $\forall \epsilon > 0$,

$$0 \leq L" - L' < 3\epsilon \Rightarrow L" = L' := l \rightarrow |f(x) - l| < \epsilon$$

per $x \in I_{\delta_\epsilon}$. Il candidato ad essere il limite della funzione per $x \rightarrow x_0$ e' l. Infatti, dalla (*) ponendo $x = x"_{\delta_\epsilon}$ si ha

$$|f(x) - l| = |f(x) - f(x'_{\delta_\epsilon}) + f(x'_{\delta_\epsilon}) - l| < 2\epsilon$$

con $x \in I_{\delta_\epsilon}$.

Il teorema e' dimostrato.

Nota: $\lim_{\delta\rightarrow 0} \Lambda(\delta)$ viene chiamato massimo limite. $\lim_{\delta \rightarrow 0} \lambda(\delta)$ viene chiamato minimo limite.

Criterio di convergenza di Cauchy per le successioni

Condizione necessaria e sufficiente affinche' la successione $\{a_n\}$ sia convergente ed abbia limite a e' che (CC=condizione di Cauchy):

$$CC \qquad \forall \epsilon > 0 \; \exists \; N_\epsilon > 0 : \forall n, m > N_\epsilon \Rightarrow |a_n - a_m| < \epsilon.$$

1) (CC) e' necessaria, ovvero e' conseguenza dell'esistenza del limite. L'abbiamo gia' dimostrata. Ripetiamola. Supponiamo che esista il limite: $a_n \rightarrow a$. Allora per ogni $\epsilon > 0$ esiste $N_\epsilon > 0$ (naturale) tale che per $n > N_\epsilon$ si ha $|a_n - a| < \epsilon$. Allora scelti $n, m > N_\epsilon$ si ha $|a_n - a| < \epsilon$ e $|a_m - a| < \epsilon$ da cui

$$|a_n - a_m| = |a_n - a + a - a_m| < |a_n - a| + |a_m - a| < 2\epsilon.$$

2) CC e' sufficiente, ovvero se essa vale la successione e' convergente.

Dalla condizione si ha che fissato $\epsilon > 0$ esiste $N_\epsilon > 0$ tale che per ogni $n, m > N_\epsilon$

$$|a_n - a_m| < \epsilon.$$

Anzitutto la successione risulta limitata; infatti fissato $\epsilon > 0$ ed $n > N_\epsilon > 0$ si ha $a_n - \epsilon < a_m < a_n + \epsilon$ per ogni $m > N_\epsilon$. Quindi la successione e' definitivamente limitata e di consequenza e' limitata. Per il Teorema di Bolzano-Weierstrass l'insieme $\{a_n\}$ ha un punto di accumulazione $a \in \mathbb{R}$ ovvero esiste una sottosuccessione $\{a_{n_k}\}$ di $\{a_n\}$ convergente ad a. Dunque, per ogni $\epsilon > 0$ esiste un intero $\nu_\epsilon > 0$ tale che per ogni $k > \nu_\epsilon$ si ha $|a_{n_k} - a| < \epsilon$; dalla condizione (CC) si ha anche che $|a_n - a_m| < \epsilon$ per ogni $n, m > N_\epsilon$. Quindi scelto $n_k > sup(n_{\nu_\epsilon}, N_\epsilon)$ si ha

$$|a_n - a| = |a_n - a_{n_k} + a_{n_k} - a| \leq |a_n - a_{n_k}| + |a_{n_k} - a| < 2\epsilon.$$

Infinitesimi ed infiniti

Frequentemente nel calcolo abbiamo usato un linguaggio colloquiale quale " corre piu' velocemente" "corrono con la stessa velocita " etc. Fissiamo dei termini piu' appropriati per indicare i comportamenti delle funzioni nel processo di limite.

- **Infinitesimi**

Per semplicita' consideriamo funzioni definite in intervalli limitati o no. Sia $y = f(x)$ una funzione definita in (a, b) e sia $x_0 \in (a, b)$. Diremo che $f(x)$ e' un infinitesimo per $x \to x_0$ quando

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = 0.$$

Relativamente al punto x_0 possiamo costruire molti infinitesimi. Confrontiamo gli infinitesimi relativi ad un punto x_0 valutando il limite del loro rapporto. Siano $y = f(x)$ e $g(x) \neq 0$ infinitesimi per $x \to x_0$ allora

$$Se \quad \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} \begin{cases} = & 0 \; si \; dice \; che \; f(x) \; e' \; infinitesimo \; di \; ordine \; superiore \; a \; g(x), \\ = & l \neq 0 \; si \; dice \; che \; f(x) \; e \; g(x) \; sono \; infinitesimi \; dello \; stesso \; ordine \\ = & \infty \; si \; dice \; che \; f(x) \; e' \; infinitesimo \; di \; ordine \; inferiore \; a \; g(x), \\ \nexists & si \; dice \; che \; f(x) \; e \; g(x) \; non \; sono \; confrontabili. \end{cases}$$

Ad esempio $y = xsen\frac{1}{x}$ e $y = x$ sono infinitesimi per $x \to 0$ e non confrontali.

Tra tutti gli infinitesimi per $x \to x_0$ si puo' scegliere un infinitesimo di riferimento o principale che indichiamo $h(x)$. Allora misuriamo ogni infinitesimo rispetto ad $h(x)$ e diciamo che $f(x)$ e' un infinitesimo (per $x \to x_0$) di ordine $c \in \mathbb{R}^+$ rispetto ad $h(x)$ se $f(x)$ e $(h(x))^c$ sono infinitesimi dello stesso ordine.

(da svolgere dopo la regola di De L'Hospital) Ad esempio se prendiamo come infinitesimo principale $y = x$ relativamente al punto $x = 0$ allora si ha che l'nfinitesimo $y = e^x - 1 - x$ e' del secondo ordine rispetto ad x; per verificarlo basta applicare la regola di De L'Hospital al limite

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{2x} = \frac{1}{2},$$

oppure sempre mediante la regola di De l'Hospital determinare c affinche' esista finito il limite

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^c}.$$

)

indicare i comportamenti delle funzioni nel processo di limite.

• **Infiniti**

Per semplicita' consideriamo funzioni definite in intervalli limitati o no. Sia $y = f(x)$ una funzione definita in (a, b) e sia $x_0 \in (a, b)$. Diremo che $f(x)$ e' un infinito per $x \to x_0$ quamdo

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty.$$

Relativamente al punto x_0 possiamo costruire molti infiniti Confrontiamo gli infiniti relativi ad un punto x_0 valutando il limite del loro rapporto. Siano $y = f(x)$ e $g(x) \neq 0$ infiniti per $x \to x_0$ allora

$$Se\ \ lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}\begin{cases} = & \infty\ si\ dice\ che\ f(x)\ e'\ infinito\ di\ ordine\ superiore\ a\ g(x),\\ = & l\neq 0\ si\ dice\ che\ f(x)\ e\ g(x)\ sono\ infiniti\ dello\ stesso\ ordine,\\ = & 0\ si\ dice\ che\ f(x)\ e'\ infinito\ di\ ordine\ inferiore\ a\ g(x),\\ \nexists & si\ dice\ che\ f(x)\ e\ g(x)\ non\ sono\ confrontabili.\end{cases}$$

Come per gli infinitesimi anche per gli infiniti possiamo considerare un infinito principale. Diciamo che $f(x)$ e' un infinito (per $x \to x_0$) di ordine $c \in \mathbb{R}^+$ rispetto ad $h(x)$ se $f(x)$ e $(h(x))^c$ sono infiniti dello stesso ordine.

Esercizio. Provare che $y = \sqrt{1 + x^4}$ e' un infinito del secondo ordine rispetto ad $y = x$ per $x \to \infty$.

E' frequente considerare come infinitesimi ed infiniti principali,rispettivamente, relativamente al punto x_0 (finito)

$$x - x_0, \qquad \frac{1}{x - x_0}.$$

Se invece $x_0 = \infty$ si assumono come infinitesimo ed infinito principali rispettivamente

$$\frac{1}{x}, \qquad x.$$

• **Parte principale**

Se $y = f(x)$ e' un infinitesimo (infinito) relativamente al punto x_0 di ordine $c > 0$ rispetto ad $h(x)$ si ha

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{(h(x))^c} = l \neq 0$$

allora dalla scrittura fuori dal segno di limite si ha

$$\frac{f(x)}{(h(x))^c} = l + \alpha(x)$$

con $\alpha(x)$ infinitesimo (infinito) per $x \to x_0$. Ne segue che

$$f(x) = l((h(x))^c + \alpha(x)(h(x))^c.$$

Il prodotto $l((h(x))^c$ e' chiamato parte principale di $f(x)$ e viene indicata $p.p.f$. Supponiamo che l'infinitesimo (infinito) $y = g(x)$ sia di ordine d con parte principale $l_1(h(x))^d$. Allora vale

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{p.p.f(x)}{p.p.g(x)}.$$

Quindi il limite del rapporto di infinitesimi (infiniti) e' ricondotto al limite del rapporto delle loro parti principali. Quindi nel calcolo di limite di rapporto di somme di infinitesimi (infiniti) gli addendi che sono infinitesimi di ordine superiore (infiniti di ordine inferiore) sia al numeratore che al denominatore possono essere trascurati.

• **Simboli (di Landau) $\sim$ (asintotico) e $o(.)$ (o piccolo) di rapporto infinitesimo**

• $\sim$

Date due funzioni f(x) e g(x) , definite in un intorno di x_0 (finito o infinito) si dice che $f(x)$ e $g(x)$ sono asintotiche (o asintoticamente equivalenti) per $x \to x_0$, e si scrive:

$$f(x) \sim g(x) \ \ per \ \ x \to x_0$$

se

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1.$$

La relazione $f(x) \sim c(\neq 0)$ e' da interdersi $f(x) \to c$ per $x \to x_0$.

Nell'insieme delle funzioni asintotiche $\sim$ e' riflessiva, simmetrica e transitiva.

Valgono le seguenti relazioni

Se $f(x) \sim h(x)$ e $g(x) \sim l(x)$ allora

$$f(x)g(x) \sim h(x)l(x), \quad \frac{f(x)}{g(x)} \sim \frac{h(x)}{l(x)}.$$

In tutte le altre situazioni bisogna avere notevole cautela: vale $f \pm g \sim h \pm l$?

$e^x - 1 \sim x$ e $senx \sim x$ per $x \to 0$ a quale funzione e' asintotica $e^x - 1 - senx$?

• $o(.)$

Date due funzioni $f(x)$ e $g(x)$, definite in un intorno di x_0 (finito o infinito) si dice che $f(x)$ e' o piccolo di $g(x)$ per $x \to x_0$, e si scrive:

$$f(x) = o(g(x)) \ \ per \ \ x \to x_0$$

se

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0.$$

Se $g(x)$ e' un infinitesimo, quanto definito equivale a dire che $f(x)$ e' un infinitesimo di ordine superiore a $g(x)$. In particolare $o(1)$ rappresenta una quantita infinitesima.

Nell'insieme delle funzione non nulle vicine ad x_0 la relazione $o(.)$ e' (solo) transitiva: se $f(x) = o(g(x)$e $g(x) = o(h(x)$ allora $f(x) = o(h(x))$.

Inoltre $o(.)$ si conserva per moltiplicazione di funzioni limitate. Per il resto, quanto detto per $\sim$ vale per $o(.)$.

Esercizi sui limiti

• Verifica mediante la definizione

1) Verificare che

$$lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2} = +\infty.$$

Occorre verificare che la funzione $1/x^2$ e' prossima a $+\infty$ per x prossimi a 0. La vicinanza della funzione al limite la misuriamo con la relazione:

$$*) \qquad |\frac{1}{x^2}| > K,$$

con $K > 0$ arbitrario. La verifica consiste nel mostrare che $(*)$ vale per x in un intorno di 0 (che dipende da K).

Basta, dunque, risolvere la disequazione (*). Si ottiene

$$|\frac{1}{x^2}| > K \to \frac{1}{x^2} \to x^2 < 1/K \to -1\sqrt{x} < x < 1|\sqrt{k}.$$

Dunque (*) e'vera per x appartenenti ad un intorno simmetrico di 0 di semiampiezza $1|\sqrt{k}$.

La simmetria dell'intornoe' dovuta alla parita' della funzione.

2) Verificare che

$$lim_{x\to 1}2^x = 2.$$

Occorre verificare che la funzione 2^x e' prossima a 2 per x prossimi a 1. La vicinanza della funzione al limite lamisuriamo con la relazione:

$$*) \qquad |2^x - 2| < \epsilon,$$

con $\epsilon > 0$ arbitrario. La verifica consiste nel mostrare che $(*)$ vale per x in un intorno di 1 (che dipende da ϵ).

Basta, dunque, risolvere la disequazione (*). Si ottiene

$$|2^x - 2| < \epsilon \to -\epsilon < 2^x - 2 < \epsilon \to 2 - \epsilon < 2^x < 2 + \epsilon \to \log_2(2-\epsilon) < x < \log_2(2+\epsilon).$$

Dunque (*) e'vera per x appartenenti ad un intorno di 1 (prendiamo $\epsilon < 2$). L'intorno non e' simmetrico. Per simmetrizzarlo occorre ovviamente considerare solo i punti trovati. Allora si prende un intorno di semiampiezza $delta_\epsilon min(\log_2(2+\epsilon) - 1; 1 - \log_2(2-\epsilon))$.

$\delta_\epsilon = \log_2(2+\epsilon) - 1$. Infatti dalla monotonia del logaritmo si ha

$$\log_2(2+\epsilon) - 1 < 1 - \log_2(2-\epsilon) \to \log_2(2+\epsilon)(2-\epsilon) < 2 \to (2+\epsilon)(2-\epsilon) < 4,$$

sempre vera.

3) Verificare che

$$lim_{x\to 0} senx = 0.$$

Occorre verificare che la funzione $senx$ e' prossima a 0 per x prossimi a 0. La vicinanza della funzione al limite la misuriamo con la relazione:

$$*) \qquad |senx| < \epsilon,$$

con $\epsilon > 0$ arbitrario. La verifica consiste nel mostrare che $(*)$ vale per x in un intorno di 0 (che dipende da ϵ).

Basta, dunque, risolvere la disequazione (*). Per evitare di utilizzare $arcsenx$ si puo' rafforzare la disequazione (*) con una funzione comoda maggiorante di $senx$. ad esempio si puo' considerare.

$$|senx| \leq |x| < \epsilon,$$

e risolvere l'ultima disequazione che e' piu0 semplice. Certo non troveremo il migliore intorno (il piu'grande) ma la definizione ce lo permette quando dice che " e' possibile determinare "un intorno " di x_0". Quindi abbiamo

$$|x| < \epsilon \to -\epsilon < x < \epsilon,$$

un intorno dello zero in cui vale (*).

4) Verificare che

$$lim_{x\to +\infty} \frac{2^x+3}{2^x-3} = 1.$$

Sappiamo che basta risolvere la disequazione

$$* \qquad |\frac{2^x+3}{2^x-3} - 1| < \epsilon$$

Si ottiene (per $x > 3$)

$$|\frac{2^x+3}{2^x-3} - 1| < \epsilon \to -\epsilon < \frac{2^x+3}{2^x-3} - 1 < \epsilon \to -\epsilon + 1 < \frac{2^x+3}{2^x-3} < \epsilon + 1 \leftrightarrow$$

$$(2^x-3)(1-\epsilon) < (2^x+3) < (2^x-3)(1+\epsilon).$$

La disequazione a sinistra e' sempre verificata, mentre la disequazione a destra vale per

$$x > \log_2(\frac{6}{\epsilon} + 3),$$

che e' intorno dell'infinito.

In conclusione, per la verifica di un limite si deve risolvere la disequazione

$$|f(x) - l| < \epsilon,$$

quando il limite e' finito; oppure

$$|f(x)| > K,$$

quando il limite e' infinito.

Calcolare i seguenti limiti:

1)

$$lim_{x \to 0^-} \frac{e^{1/x}}{sen 1/x}.$$

Il limite e' zero perche' $e^{1/x}$ e' un infinitesimo per x tendente a zero e la funzione $sen 1/x$ e' limitata.

$$lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x+5}.$$

Si presenta la forma di indecisione ∞/∞. Osserviamo che

$$\frac{\sqrt{x^2+1}}{x+5} = \frac{x+1}{x+5} = \frac{1+\frac{1}{x}}{1+\frac{5}{x}} \to 1.$$

Quindi il limite proposto e' 1.

2)

$$lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}-x}{x+5}.$$

Si presenta una forma di indecisione $\infty - \infty$.
Conviene razionalizzare:

$$\frac{(\sqrt{x^2+1}-x)(\sqrt{x^2+1}+x)}{(x+5)(\sqrt{x^2+1}+x)} = \frac{x^2+1-x^2)}{(x+5)(\sqrt{x^2+1}+x)} \to 0.$$

Il valore del limite e' zero

3)

$$lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x^2-2}-x}{xtg(1/x^2)}.$$

Dapprima osserviamo che $tg(1/x^2) \sim 1/x^2$ per $x \to +\infty$. Possiamo considerare il limite di

$$(\sqrt{x^2-2}-x)x.$$

Si razionalizza

$$(\sqrt{x^2-2}-x)x = \frac{(\sqrt{x^2-2}-x)(\sqrt{x^2-2}+x)x}{\sqrt{x^2-2}+x} = \frac{-2x}{\sqrt{x^2-2}+x} \to -1.$$

il limite proposto tende a -2.

4)

$$lim_{x \to 1}(\frac{2x+1}{2x-1})^x.$$

Osserviamo che la funzione del limite, calcolata in $x = 1$, assume valore 3. Non si presenta alcuna forma di indecisione. Quindi, il limite e' 3.

5)

$$lim_{x \to +\infty}(\frac{2x+1}{2x-1})^x.$$

Si presenta la forma di indecisione $1^{+\infty}$, forma di indecisione del numero e. Dobbiamo ricavare forme riconducibile al limite del numero e.

$$(\frac{2x+1}{2x-1})^x = (\frac{1+1/2x}{1-1/2x})^x = \frac{(1+1/2x)^x}{(1-1/2x)^x} \to \frac{e^{1/2}}{e^{-1/2}} = e.$$

Quindi il limite e' e.

6)

$$lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} e^{-x^2 logx}.$$

Dal limite notevole: $xlogx \to 0$ per $x \to 0^+$ si ha $\frac{1}{x} e^{-x^2 logx} \to +\infty$.

7)

$$lim_{x \to 0^+}(\frac{1+x}{1-x})^{1/x}.$$

Il limite presenta una forma di indecisione $1^{+\infty}$.
Operiamo nel seguente modo:

$$(\frac{1+x}{1-x})^{1/x} = (\frac{(1+x)^{1/x}}{(1-x)^{1/x}}) \to e/e^{-1} = e^2.$$

8)

$$lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} e^{x - x^2 logx}.$$

Dal limite notevole: $xlogx \to 0$ per $x \to 0^+$ si ha $\frac{1}{x} e^{x-x^2 logx} = \frac{1}{x} e^x e^{-x^2 logx} = e^{-x^2 logx} \to 1.$

9)

$$\lim_{\to -2}(\frac{x^3+8}{x^2-4}).$$

Si presenta la forma di indecisione 0/0.
Osserviamo che

$$\frac{x^3+8}{x^2-4} = \frac{x+2)(x^2-2x+4)}{(x+2)(x-2)} = \frac{(x^2-2x+4)}{(x-2)} \to -3.$$

Il limite vale -3.

10)

$$\lim_{\to 0}(\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x} = \lim_{\to 0}(\frac{1+x-1+x}{x(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}} =$$

$$\lim_{\to 0}(\frac{2}{(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}} = 1.$$

$$\lim_{\to 0}(1+senx)^{1/x} = \lim_{\to 0}((1+senx)^{1/senx})^{senx/x} = e$$

11)

$$\lim_{\to 0}\frac{logcosx}{x}^2 = \lim_{\to 0}\frac{log(1+(cosx-1))}{(cosx-1)}\frac{cosx-1}{x^2} = -1/2.$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2+5}{x^2-3} \qquad \lim_{x\to 0}\frac{x^3-3x+1}{x-4}+1 \qquad \lim_{x\to 1}\frac{x}{1-x}$$

$$\lim_{x\to 1^\pm}\frac{x}{1-x} \qquad \lim_{x\to 1}\frac{x^2-2x+1}{x^3-x} \qquad \lim_{x\to \frac{1}{2}}\frac{8x^3-1}{6x^2-5x+1}$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3+x-2}{x^3-x^2-x+1} \qquad \lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{1-x}-\frac{3}{1-x^2}\right) \qquad \lim_{x\to 2}\left(\frac{1}{x(x-2)}-\frac{1}{x^2-3x+2}\right)$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^m-1}{x^n-1} \qquad \lim_{x\to a}\frac{x^m-a^m}{x^n-a^n} \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{1-\cos(x)}$$

$$\lim_{x\to \pi}\frac{1+\cos(x)}{\tan(x)} \qquad \lim_{x\to \pi}\frac{\sin(x)}{\cot(\frac{x}{2})} \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\sin^3(2x)}{\tan(x)-\sin(x)}$$

$$\lim_{x\to \infty}\frac{x^4-5x}{x^2-3x+1} \qquad \lim_{x\to \infty}\Big(\ln(x+1)-\ln(x)\Big) \qquad \lim_{x\to \infty}\frac{x^3+x}{x^4-3x^2+1}$$

$$\lim_{x\to \infty}\frac{x^2-1}{2x^2+1} \qquad \lim_{x\to \infty}\frac{1+x-3x^3}{1+x^2+3x^3} \qquad \lim_{x\to \infty}\left(\frac{x^3}{x^2+1}-x\right)$$

$$\lim_{x\to \infty}\left(\frac{x^3}{2x-1}-\frac{x^2}{2x+1}\right) \qquad \lim_{x\to +\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x^3+x}-x} \qquad \lim_{x\to \infty}\frac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt[3]{x^2+1}}{\sqrt[4]{x^4+1}-\sqrt[5]{x^4+1}}$$

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{\sqrt[5]{x^7+3}+\sqrt[4]{2x^3-1}}{\sqrt[6]{x^8+x^7+1}-x} \qquad \lim_{x\to \infty}\frac{\sqrt[3]{x^4+3}-\sqrt[5]{x^3+4}}{\sqrt[3]{x^7+1}} \qquad \lim_{x\to +\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}$$

$$\lim_{x\to -\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x} \qquad \lim_{x\to \infty}\left(\sqrt{x^2+x}-x\right)\cdot x \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} \qquad \lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[n]{x}-1}{\sqrt[n]{x-1}} \qquad \lim_{x\to \infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$$

$$\lim_{x\to \infty}\left(\sqrt{x^2+1}-2x\right) \qquad \lim_{x\to \infty}\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}\right) \qquad \lim_{x\to \infty}\left(\sqrt{x^2-1}-x\right)$$

$$\lim_{x\to \infty}x\left(\sqrt{x^2+1}-x\right) \qquad \lim_{x\to \infty}\left(\sqrt{x^2+3x+7}-\sqrt{x^2+1}\right)$$

$$\lim_{x\to \infty}\left(\sqrt{x^2-2x-1}-\sqrt{x^2-7x+3}\right) \qquad \lim_{x\to \infty}\left(\sqrt[3]{(x+1)^2}-\sqrt[3]{(x-1)^2}\right)$$

$$\lim_{x\to +\infty}x^{\frac{3}{2}}\left(\sqrt{x^3+1}-\sqrt{x^3-1}\right) \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[3]{x}}-1}{x}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+2x}-1-\sqrt{x}}{\sqrt{x}} \qquad \lim_{x\to \infty}\frac{(x+1)^{10}+(x+2)^{10}+\ldots+(x+100)^{10}}{x^{10}+10^{10}}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+16}-4} \qquad \lim_{x\to 5}\frac{\sqrt{x-1}-2}{x-5} \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+x^2}-1}{x^2}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}{x} \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+x^2}-\sqrt[4]{1-2x}}{x+x^2} \qquad \lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{7+x^3}-\sqrt{3+x^2}}{x-1}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+2x}-1-x}{x} \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+2x}-1-x}{x^2}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(3x)}{x} \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\sin(\alpha x)}{\sin(\beta x)} \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\tan(kx)}{x}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x^2)}{(\sin(x))^3} \qquad \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x)}{x^2} \qquad \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^3(x)}{x\cdot\sin(2x)}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan(x)}{\sqrt[3]{(1-\cos(x))^2}} \qquad \lim_{x\to 0}\frac{1+\sin(x)-\cos(x)}{1-\sin(x)-\cos(x)} \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\tan(x)-\sin(x)}{x^3}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos(x))^2}{\tan^3(x)-\sin^3(x)} \qquad \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin(x)}-\frac{1}{\tan(x)}\right) \qquad \lim_{x\to \frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin(x)}{\left(\frac{\pi}{2}-x\right)^2}$$

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}}\frac{\cos(x)}{\sqrt[3]{(1-\sin(x))^2}} \qquad \lim_{x\to \pi}\frac{\sin(3x)}{\sin(2x)} \qquad \lim_{x\to \frac{\pi}{2}}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\cdot\tan(x)$$

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{4}}\frac{\cos(x)-\sin(x)}{\cos(2x)} \qquad \lim_{x\to \pi}\frac{1-\sin(\frac{x}{2})}{\cos(\frac{x}{2})\cdot\left(\cos(\frac{x}{4})-\sin(\frac{x}{2})\right)}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos(\alpha+x)-\cos(\alpha-x)}{x} \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\sin(\alpha+x)-\sin(\alpha-x)}{\tan(\alpha+x)-\tan(\alpha-x)}$$

$$\lim_{x\to +\infty} x\cdot\sin\frac{\pi}{x} \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{2}-\sqrt{1+\cos(x)}}{\sin^2(x)}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+\sin(x)}-\sqrt{1-\sin(x)}}{\tan(x)} \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x\sin(x)}-\sqrt{\cos(2x)}}{\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x)\cdot\sqrt{\cos(2x)}}{x^2} \qquad \lim_{x\to \pm\infty} x\left(\sqrt{x^2+\sqrt{x^4+1}}-x\sqrt{2}\right)$$

$$\lim_{x\to \infty}\frac{\sin(x)}{x} \qquad \lim_{x\to \infty}\frac{x+\sin(x)}{x+\cos(x)} \qquad \lim_{x\to \infty} x^2\left(1-\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right)$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(1-\cos(x))}{x^4} \qquad \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x)}{|x|+x^2} \qquad \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(\alpha x)}{|x|^\alpha+|x|^{4-\alpha}}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{|\sin(\alpha x)|}{|x|^\alpha} \qquad \lim_{x\to \infty}\left(\frac{x}{x+1}\right)^x \qquad \lim_{x\to \infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)^x$$

$$\lim_{x\to \infty}\left(\frac{x+1}{x-2}\right)^{2x-1} \qquad \lim_{x\to \infty}\left(\frac{2x+1}{2x-1}\right)^x \qquad \lim_{x\to \infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x^2}$$

$$\lim_{x\to 0^+}\left(1+\tan^2(\sqrt{x})\right)^{\frac{1}{2x}} \qquad \lim_{x\to +\infty}\frac{\log(x)}{x} \qquad \lim_{x\to 0^+} x\cdot\log(x)$$

$$\lim_{x\to 0^+} x\cdot\log(\sin(x)) \qquad \lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\cdot\log\big(\cos(x)\big) \qquad \lim_{x\to 0^+} x^x$$

$\lim_{x \to 0^+} \left(\frac{1}{x}\right)^x$ $\lim_{x \to +\infty} \Big(\log(x) - x\Big)$ $\lim_{x \to 0^+} (\sin(x))^x$

$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \Big(\cos(x)\Big)^{(x-\frac{\pi}{2})}$ $\lim_{x \to 1^+} \Big(x - 1\Big)^{\log(x)}$ $\lim_{x \to 2^+} (x^2 - 5x + 6)^{x-2}$

$\lim_{x \to +\infty} \Big(1 + x\Big)^{\frac{1}{x}}$ $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \Big(\tan(x)\Big)^{\frac{1}{\log\left(\cos(x)\right)}}$ $\lim_{x \to 0^+} \left(\frac{1}{x}\right)^{\tan(x)}$

$\lim_{x \to 0^+} \Big(\cot(x)\Big)^{\sin(x)}$ $\lim_{x \to 1^+} \left(\frac{1}{x-1}\right)^{\log(x)}$ $\lim_{x \to +\infty} x^{\log\left(1+\frac{1}{x}\right)}$

$\lim_{x \to 1} x^{\frac{1}{1-x}}$ $\lim_{x \to 1} (1 - x) \cdot \tan\left(\frac{\pi}{2} x\right)$ $\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{\log(x)}{x}\right)^{\frac{1}{x}}$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{\log(x-1)}{\log(\log(x))}$ $\lim_{x \to 1^+} \log^{\alpha}(x) \cdot \log\Big(\log(x)\Big)$ $\lim_{x \to 0} \frac{\log|\sin(x)|}{\cot(x)}$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{\log^2(x) + e^x}{x^2}$