2.3 Casi particolari di moto

Moto rettilineo

La traiettoria è una linea retta, l'accelerazione vettoriale si riduce alla sola componente tangenziale. Scegliendo un sistema di riferimento cartesiano opportuno, la legge oraria diventa monodimensionale:

$$\vec{r}(t) = x(t)\hat{u}_x \quad ; \quad \vec{v}(t) = \frac{dx(t)}{dt}\hat{u}_x \quad ; \quad \vec{a}(t) = \frac{d^2x(t)}{dt^2}\hat{u}_x$$

Un ulteriore caso particolare è quello del moto *rettilineo uniforme*, in cui la velocità è costante, quindi l'accelerazione è nulla e la legge oraria diventa:

$$\vec{r}(t) = (x_0 + v \cdot t)\hat{u}_x$$ legge oraria del moto rettilineo uniforme

Moto circolare

La traiettoria è una circonferenza; sia R il suo raggio. Conviene scegliere un sistema di riferimento cartesiano con l'origine nel centro della traiettoria e con i due assi (x, y) ad essa complanari. E' utile servirsi, anziché delle due coordinate cartesiane (x, y), dell'ascissa curvilinea s lungo la traiettoria, o equivalentemente dell'angolo ϑ formato dal raggio vettore con il versore dell'asse x. Il semplice legame fra queste due variabili è:

$$s = R\vartheta$$

La velocità vettoriale si può scrivere come:

$$\vec{v} = v\hat{u}_T \quad ; \quad v = \frac{ds}{dt} = R\frac{d\vartheta}{dt} \quad ; \quad \hat{u}_T \perp \vec{R}$$

Ricordando la definizione di *velocità angolare*, la velocità vettoriale si può anche scrivere come:

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{R} = \omega R \hat{u}_T$$

Oppure, applicando $\vec{\omega}$ in un altro punto dell'asse di rotazione:

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}\,'$$

(il risultato del prodotto vettore è lo stesso).

Moto circolare uniforme

Un caso particolare, molto importante, di moto circolare è il *moto circolare uniforme*, in cui la velocità angolare si mantiene costante nel tempo (e quindi anche la velocità scalare è costante). In questo caso l'accelerazione si riduce alla sua componente normale, che è diretta verso il centro della traiettoria e viene perciò detta *accelerazione centripeta*:

$$\omega = \text{cost.} \quad ; \quad v = \omega R = \text{cost.} \quad \Rightarrow \quad \vec{a}_T = 0 \quad ; \quad \vec{a} = \vec{a}_N = \vec{a}_C$$

$$\boxed{a = a_C = \frac{v^2}{R} = \omega^2 R}$$ (infatti il raggio di curvatura è costante e vale R)

Si tratta di un moto periodico, poiché

$$\vec{r}(t+T) = \vec{r}(t) \quad \forall t \text{, con} \quad T = \frac{2\pi R}{v} = \frac{2\pi}{\omega} \quad ; \quad [T] = s$$ (*Periodo* del moto)

La *frequenza* del moto vale:

$$\nu \equiv \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} \quad ; \quad [\nu] = Hz$$

La *legge oraria* può essere scritta come:

$$\vartheta(t) = \vartheta_0 + \omega t \qquad \text{ovvero} \qquad s(t) = s_0 + v t$$

Accelerazione angolare

Se la velocità angolare non è costante nel tempo si definisce un vettore *accelerazione angolare*, come derivata della velocità angolare stessa:

$$\vec{\alpha} \equiv \frac{d\vec{\omega}}{dt}$$

Nel caso di moto circolare, la velocità angolare non cambia mai direzione, perciò possiamo scrivere:

$$\vec{\alpha} = \frac{d}{dt}\left(\frac{d\vartheta}{dt}\hat{u}_z\right) = \frac{d^2\vartheta}{dt^2}\hat{u}_z$$

mentre più in generale l'accelerazione angolare può non essere parallela alla velocità angolare.

Componenti dell'accelerazione

Per il moto circolare, in generale, avremo

$$\vec{a}_T = \frac{dv}{dt}\hat{u}_T = R\frac{d\omega}{dt}\hat{u}_T = R\alpha(t)\hat{u}_T \qquad ; \qquad \vec{a}_N = \frac{v^2(t)}{R}\hat{u}_N = \omega^2(t)R\cdot\hat{u}_N$$

Ovvero, considerando l'espressione della velocità:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\vec{\omega}\times\vec{R}\right) = \frac{d\vec{\omega}}{dt}\times\vec{R} + \vec{\omega}\times\frac{d\vec{R}}{dt} = \vec{\alpha}\times\vec{R} + \vec{\omega}\times\vec{v} = \vec{\alpha}\times\vec{R} + \vec{\omega}\times\left(\vec{\omega}\times\vec{R}\right)$$

Quest'ultima espressione è particolarmente utile nel caso del moto circolare uniforme, per il quale diventa:

$$\vec{a} = \vec{\omega}\times\left(\vec{\omega}\times\vec{R}\right) = \omega^2 R\hat{u}_N$$

essendo nulla l'accelerazione angolare.

Ricordiamo che per un generico moto curvilineo valgono le espressioni:

$$\vec{a}_T = \frac{dv}{dt}\hat{u}_T \quad ; \qquad \vec{a}_N = \frac{v^2(t)}{\rho}\hat{u}_N = \omega^2(t)\rho\cdot\hat{u}_N$$

Il moto armonico semplice

Un caso di moto molto importante e frequente in natura è il moto oscillatorio (es.: pendolo, massa + molla, vibrazioni di un'asta, di una molecola, ecc.)

Il moto oscillatorio più semplice che si possa pensare e descrivere è il *moto armonico semplice*, cioè un moto *rettilineo* con legge oraria *sinusoidale*:

$$x(t) = A\sin(\omega t + \varphi)$$

A: *ampiezza* dell'oscillazione
$\omega t + \varphi$: *fase* dell'oscillazione
φ: *costante di fase* o *fase iniziale*.
ω: *pulsazione* dell'oscillazione

Si tratta di un moto periodico, di periodo $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$ e frequenza $\nu = \dfrac{1}{T} = \dfrac{\omega}{2\pi}$.
Se calcoliamo la velocità e poi l'accelerazione troviamo:

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = A\omega\cos(\omega t + \varphi)$$

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = -A\omega^2\sin(\omega t + \varphi) = -\omega^2 x(t)$$

L'ultima espressione prende il nome di *equazione caratteristica del moto armonico*:

$$\boxed{\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x(t) = 0}$$

- Quando $x = 0$, $|v| = v_{\max}$ ed $a = 0$
- Quando $|x| = x_{\max} = A$,

  $v = 0$ e $|a| = a_{\max} = \omega^2 A \Rightarrow$ <u>*punti di inversione del moto*</u>

Osservazione:
se descriviamo in coordinate cartesiane un moto circolare uniforme di raggio A otteniamo:
$x(t) = A\cos(\omega t + \varphi) = A\sin(\omega t + \varphi + \pi/2)$; $y(t) = A\sin(\omega t + \varphi)$

Si tratta della composizione di due moti armonici semplici, lungo le due direzioni ortogonali, di pari ampiezza e pulsazione, ma con *differenza di fase* pari a $\pi/2$.