10. Tabella dei principali metodi di integrazione.

	Integrale	*Metodo di integrazione*
1.	$\int f[g(x)]\, g'(x)\, dx$	Sostituzione: $g(x) = t$
2.	$\int u(x)\, v'(x)\, dx$	Integrazione per parti (semplice e multipla): $$\int u(x)\, v'(x)\, dx = u(x)\, v(x) - \int v(x)\, u'(x)\, dx$$ Questo metodo si usa, per esempio, per integrali del tipo: $$\int p(x) f(x)\, dx,$$

3.	$\int \frac{ax+b}{x^2+px+q}\, dx$, con $p^2 - 4q < 0$.	Sostituzione: $x + \frac{p}{2} = t$.
4.	$I_n = \int \frac{dx}{(x^2+1)^n}$	Si usa la formula di riduzione: $$I_n = \frac{x}{(2x-2)(x^2+1)^{n-1}} + \frac{2x-3}{2x-2} I_{n-1}$$
5.	$\int \frac{M(x)}{N(x)}$, dove $\frac{M(x)}{N(x)}$ è una funzione razionale fratta propria. $N(x) = (x - x_1)^r \cdot (x - x_2)^s \ldots$ $\ldots (x^2 + px + q)^t \ldots$	Si usa la scomposizione: $$\frac{M(x)}{N(x)} = \frac{A_1}{(x-a_1)} + \frac{A_2}{(x-a_1)^2} + \ldots + \frac{A_r}{(x-a_1)^r} + \frac{B_1}{(x-a_2)} + \frac{B_2}{(x-a_2)^2} + \ldots + \frac{B_s}{(x-a_2)^s} + \ldots + \frac{C_1x+D_1}{x^2+px+q} + \frac{C_2x+D_2}{(x^2+px+q)^2} + \ldots + \frac{C_tx+D_t}{(x^2+px+q)^t}.$$
6.	$\int R\left(x, x^{\frac{m}{n}}, \ldots, x^{\frac{r}{s}}\right) dx$	Porre: $x = t^k$ dove $k = m.c.m.(n, \ldots, s)$.
7.	$\int R\left[x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{1}{n}}\right] dx$	Porre: $\frac{ax+b}{cx+d} = t^n$.
8.	$\int \frac{Mx+N}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\, dx$	Porre: $x + \frac{b}{2a} = t$ e si ottiene: $$\int \frac{Mx+N}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\, dx = A \int \frac{t\, dt}{\sqrt{at^2+m}} + B \int \frac{dt}{\sqrt{at^2+m}};$$ così l'integrale dato si riduce alla somma di un integrale riconducibile al I caso e di un'integrale noto.

3.	$\int \frac{ax+b}{x^2+px+q}\,dx$, con $p^2 - 4q < 0$.	Sostituzione: $x + \frac{p}{2} = t$.
4.	$I_n = \int \frac{dx}{(x^2+1)^n}$	Si usa la formula di riduzione: $I_n = \frac{x}{(2x-2)(x^2+1)^{n-1}} + \frac{2x-3}{2x-2} I_{n-1}$
5.	$\int \frac{M(x)}{N(x)}$, dove $\frac{M(x)}{N(x)}$ è una funzione razionale fratta propria. $N(x) = (x - x_1)^r \cdot (x - x_2)^s \ldots$ $\ldots (x^2+px+q)^t \ldots$	Si usa la scomposizione: $\frac{M(x)}{N(x)} = \frac{A_1}{(x-a_1)} + \frac{A_2}{(x-a_1)^2} + \ldots + \frac{A_r}{(x-a_1)^r} + \frac{B_1}{(x-a_2)} + \frac{B_2}{(x-a_2)^2} + \ldots + \frac{B_s}{(x-a_2)^s} + \ldots + \frac{C_1x+D_1}{x^2+px+q} + \frac{C_2x+D_2}{(x^2+px+q)^2} + \ldots + \frac{C_tx+D_t}{(x^2+px+q)^t}$.
6.	$\int R\left(x, x^{\frac{m}{n}}, \ldots, x^{\frac{r}{s}}\right) dx$	Porre: $x = t^k$ dove $k = m.c.m.(n, \ldots, s)$.
7.	$\int R\left[x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{1}{n}}\right] dx$	Porre: $\frac{ax+b}{cx+d} = t^n$.
8.	$\int \frac{Mx+N}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx$	Porre: $x + \frac{b}{2a} = t$ e si ottiene: $\int \frac{Mx+N}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx = A \int \frac{t\,dt}{\sqrt{at^2+m}} + B \int \frac{dt}{\sqrt{at^2+m}}$; così l'integrale dato si riduce alla somma di un integrale riconducibile al I caso e di un'integrale noto.

9.	$\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right) dx$	Sostituzioni di EULERO: 1) $\sqrt{ax^2+bx+c} = \pm \sqrt{a}\, x + t \quad (a > 0)$ 2) $\sqrt{ax^2+bx+c} = xt \pm \sqrt{c} \quad (c > 0)$ 3) $\sqrt{ax^2+bx+c} = (x - \alpha)\, t$ quando è $b^2 - 4ac > 0$, ove α: una radice di $ax^2 + bx + c$.
10.	$\int \frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}} dx$, con $P_n(x)$ polinomio di grado n.	Si scrive l'eguaglianza: $\int \frac{P_n(x)\, dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = Q_{n-1}(x) \sqrt{ax^2+bx+c} + K \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$, dove $Q_{n-1}(x)$ è un polinomio di grado $n-1$. Differenziando i due membri di questa eguaglianza e moltiplicando per $\sqrt{ax^2+bx+c}$, si ottiene l'identità: $P_n(x) = Q'_{n-1}(x)(ax^2+bx+c) + \frac{1}{2} Q_{n-1}(x)(2ax+b) + K$, dalla quale si ottiene un sistema di $n+1$ equazioni lineari, atte a determinare i coefficienti del polinomio $Q_{n-1}(x)$ e il fattore K. Infine, l'integrale: $\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$ si calcola come indicato al n. 8.
11.	$\int \frac{dx}{(x-x_1)^m \sqrt{ax^2+bx+c}}$	Questo integrale si riduce a quello sopra considerato, con la sostituzione: $x - x_1 = \frac{1}{t}$

12.	$\int x^m (a + bx^n)^p \, dx$, dove m, n, p sono numeri naturali	Si hanno tre casi: 1) Se p è *intero*, si pone: $x = t^k$, dove k è *m.c.m.* dei denominatori di m ed n. 2) Se $\frac{m+1}{n}$ è *intero*, si pone: $a + bx^n = t^h$, dove h è il denominatore di p. 3) Se $\frac{m+1}{n} + p$ è *intero*, si pone: $a + bx^n = x^n t^h$, dove h è il denominatore di p
13.	$\int R(\operatorname{sen} x, \cos x) \, dx$	Sostituzione universale: $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$. – Se risulta $R(-\operatorname{sen} x, \cos x) = -R(\operatorname{sen} x, \cos x)$: porre: $\cos x = t$. – Se risulta $R(\operatorname{sen} x, -\cos x) = -R(\operatorname{sen} x, \cos x)$: porre: $\operatorname{sen} x = t$. – Se risulta $R(-\operatorname{sen} x, -\cos x) = R(\operatorname{sen} x, \cos x)$: porre: $\operatorname{tg} x = t$
14.	$\int R(\operatorname{sh} x, \operatorname{ch} x) \, dx$	Porre $\operatorname{th} \frac{x}{2} = t$. In questo caso, è: $\operatorname{sh} x = \frac{2t}{1 - t^2}$, $\operatorname{ch} x = \frac{1 + t^2}{1 - t^2}$; $dx = \frac{2dt}{1 - t^2}$

6. — Integrazione per decomposizione.

Consiste nel decomporre la funzione che si deve integrare nella somma (algebrica) di funzioni, di ciascuna delle quali è noto l'integrale indefinito o del quale per lo meno è più facile il calcolo; si applica poi la proprietà 2ª) degli integrali indefiniti enunciata nel n. 1.

ESEMPI.

1) *Calcolare l'integrale*: $\int \frac{1}{\operatorname{sen}^2 x \cos^2 x} dx$.

Ricordando che è: $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$, si ha: $\frac{1}{\operatorname{sen}^2 x \cos^2 x} =$

$$= \frac{\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x}{\operatorname{sen}^2 x \cos^2 x} = \frac{\operatorname{sen}^2 x}{\operatorname{sen}^2 x \cos^2 x} + \frac{\cos^2 x}{\operatorname{sen}^2 x \cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{\operatorname{sen}^2 x}, \text{ e quindi:}$$

$$\int \frac{1}{\operatorname{sen}^2 x \cos^2 x} dx = \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{\operatorname{sen}^2 x} \right) dx = \int \frac{1}{\cos^2 x} dx + \int \frac{1}{\operatorname{sen}^2 x} dx =$$

$$= \operatorname{tg} x - \operatorname{cotg} x + c.$$

2) *Calcolare l'integrale*: $\int \frac{x}{x+1} dx$.

Avendosi: $\frac{x}{x+1} = \frac{x+1-1}{x+1} = \frac{x+1}{x+1} - \frac{1}{x+1} = 1 - \frac{1}{x+1}$, si ha:

$$\int \frac{x}{x+1} dx = \int \left(1 - \frac{1}{x+1}\right) dx = \int dx - \int \frac{1}{x+1} dx = x - \log|x+1| + c.$$

3) *Calcolare l'integrale* : $\displaystyle\int \frac{1 - x^6 + x^2}{1 + x^3}\, dx$.

Avendosi : $\displaystyle\frac{1 - x^6 + x^2}{1 + x^3} = \frac{1 - x^6}{1 + x^3} + \frac{x^2}{1 + x^3} =$

$$= \frac{(1 + x^3)(1 - x^3)}{1 + x^3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{3x^2}{1 + x^3} = 1 - x^3 + \frac{1}{3} \cdot \frac{3x^2}{1 + x^3}, \quad \text{si ha :}$$

$$\int \frac{1 - x^6 + x^2}{1 + x^3}\, dx = \int dx - \int x^3 dx + \frac{1}{3} \int \frac{3x^2}{1 + x^3}\, dx =$$

$$= x - \frac{x^4}{4} + \frac{1}{3} \log |1 + x^3| + c \,.$$

4) *Calcolare l'integrale* : $\displaystyle\int \mathrm{sen}3x \cos5x\, dx$.

Per le formule di prostaferesi si ha : $\mathrm{sen}8x - \mathrm{sen}2x = 2\mathrm{sen}3x \cos5x$, e quindi : $\mathrm{sen}3x \cos5x = \dfrac{1}{2}(\mathrm{sen}8x - \mathrm{sen}2x)$. Si ha allora :

$$\int \mathrm{sen}3x \cos5x\, dx = \frac{1}{2}\left(\int \mathrm{sen}8x\, dx - \int \mathrm{sen}2x\, dx\right) = \frac{1}{2}\left(-\frac{\cos8x}{8} + \frac{\cos2x}{2}\right) + c \,.$$

5) *Calcolare l'integrale* : $\displaystyle\int \mathrm{sen}^2 x\, dx$.

Per la formula di bisezione del seno si ha : $\mathrm{sen}x = \sqrt{\dfrac{1 - \cos2x}{2}}$, quindi :

$$\int \mathrm{sen}^2 x\, dx = \int \frac{1 - \cos2x}{2}\, dx = \frac{1}{2}\left(\int dx - \int \cos2x\, dx\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(x - \frac{\mathrm{sen}2x}{2}\right) + c = \frac{1}{2}(x - \mathrm{sen}x \cos x) + c \,.$$

Abbiamo quindi :

$$\boxed{\int \mathrm{sen}^2 x\, dx = \frac{1}{2}(x - \mathrm{sen}x \cos x) + c} \,.$$

e quindi :

$$\int \frac{1}{\operatorname{sen} x}\, dx = \int \frac{\operatorname{sen}\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}\, d\frac{x}{2} + \int \frac{\cos\frac{x}{2}}{\operatorname{sen}\frac{x}{2}}\, d\frac{x}{2} =$$

$$= -\log\left|\cos\frac{x}{2}\right| + \log\left|\operatorname{sen}\frac{x}{2}\right| + c = \log\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + c\,.$$

Si ha quindi :

$$\boxed{\int \frac{1}{\operatorname{sen} x}\, dx = \log\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + c}\,.$$

9) *Calcolare l'integrale* : $\int \frac{1}{\cos x}\, dx$.

Essendo : $\cos x = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$, si ha :

$$\boxed{\int \frac{1}{\cos x}\, dx = -\log\left|\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)\right| + c}\,.$$

10) *Calcolare l'integrale* : $\int \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\, dx$.

Si può scrivere : $\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} = \frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x}} = \frac{1+x}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$,

e quindi :

$$\int \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\, dx = \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx + \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = \operatorname{arcsen} x - \sqrt{1-x^2} + c\,.$$

9) $\int \frac{3x}{3x+2}\,dx = x - \frac{2}{3}\log|3x+2| + c$.

10) $\int \frac{x-1}{x+1}\,dx = x - 2\log|x+1| + c$.

11) $\int \left(\sqrt[3]{x^2} - x^{-\frac{2}{3}}\right) dx = \frac{3}{5}\, x\sqrt[3]{x^2} - 3\sqrt[3]{x} + c$.

12) $\int \frac{1 - x^4 + x}{1 + x^2}\,dx = x - \frac{x^3}{3} + \frac{1}{2}\log(1 + x^2) + c$.

13) $\int \frac{2x}{2x+5}\,dx = x - \frac{5}{2}\log|2x+5| + c$.

14) $\int \mathrm{cotg}^2 x\,dx = -\,\mathrm{cotg}x - x + c$.

15) $\int \frac{a^3 + x^3}{a + x}\,dx = a^2x - \frac{ax^2}{2} + \frac{x^3}{3} + c$.

16) $\int \frac{1}{\sqrt{x+a} + \sqrt{x+b}}\,dx = \frac{2}{3(a-b)}\left[\sqrt{(x+a)^3} - \sqrt{(x+b)^3}\right] + c.$

17) $\int \frac{a + b\sqrt[3]{\log x}}{x}\,dx = \log x\left[a + \frac{3b}{4}\sqrt[3]{\log x}\right] + c.$

18) $\int \frac{5 + \mathrm{arctg}x}{1 + x^2}\,dx = \mathrm{arctg}x\left(5 + \frac{\mathrm{arctg}x}{2}\right) + c.$

19) $\int x\,(x^3 + e^{x^2})dx = \frac{x^5}{5} + \frac{1}{2}e^{x^2} + c$.

20) $\int \mathrm{sen}^3 x\,dx = -\cos x\left(1 - \frac{\cos^2 x}{3}\right) + c$.

21) $\int \cos x\,(\mathrm{tg}x + e^{\mathrm{sen}x})dx = -\cos x + e^{\mathrm{sen}x} + c.$

Integrazione per sostituzione

ESEMPI.

1) *Calcolare l'integrale*: $\int \frac{1+e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx$.

Posto: $\sqrt{x}=t$, da cui: $x=t^2$, $dx=2t\,dt$, si ottiene:

$$\int \frac{1+e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx=\int \frac{1+e^t}{t}\,2t\,dt=2\int\left(1+e^t\right)dt=2\left(t+e^t\right)+c.$$

Per la posizione fatta, in definitiva, si ha:

$$\int \frac{1+e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx=2\left(\sqrt{x}+e^{\sqrt{x}}\right)+c.$$

2) *Calcolare l'integrale*: $\int \frac{1}{x\sqrt{1-\log^2 x}}\,dx$.

Poniamo: $\log x=t$, ossia $x=e^t$, da cui: $dx=e^t dt$. **Si ha allora**:

$$\int \frac{1}{x\sqrt{1-\log^2 x}}\,dx=\int \frac{1}{e^t\sqrt{1-t^2}}\,e^t dt=\int \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,dt=\operatorname{arcsen} t+c=$$

$$=\operatorname{arcsen}\log x+c.$$

3) *Calcolare l'integrale*: $\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx$, *con* $a>0$.

Posto: $x=a\,\mathrm{sen}\,t$, si ha: $dx=a\cos t\,dt$, e quindi:

$$\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx=\int \sqrt{a^2-a^2\mathrm{sen}^2 t}\cdot a\cos t\,dt=\int a\sqrt{1-\mathrm{sen}^2 t}\cdot a\cos t\,dt=$$

$$=a^2\int \cos^2 t\,dt=\frac{1}{2}\,a^2(t+\mathrm{sen}\,t\cos t)+c\ (^1).$$

Dalla posizione fatta si ricava: $\operatorname{sen} t = \frac{x}{a}$, e quindi: $t = \operatorname{arcsen} \frac{x}{a}$, e perciò, in definitiva, si ha:

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = \frac{1}{2} a^2 \left(\operatorname{arcsen} \frac{x}{a} + \frac{x}{a} \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} \right) + c =$$

$$= \frac{1}{2} \left(a^2 \cdot \operatorname{arcsen} \frac{x}{a} + x \sqrt{a^2 - x^2} \right) + c \, .$$

Si ha quindi:

$$\boxed{\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = \frac{1}{2} \left(a^2 \cdot \operatorname{arcsen} \frac{x}{a} + x \sqrt{a^2 - x^2} \right) + c} \, , \quad (a > 0) \, .$$

4) *Calcolare l'integrale*: $\int \sqrt{e^x - 1}\, dx$.

Posto: $e^x - 1 = t^2$, da cui: $x = \log(1 + t^2)$, $dx = \frac{2t}{1 + t^2} dt$, otteniamo:

$$\int \sqrt{e^x - 1}\, dx = \int t \frac{2t}{1 + t^2} dt = 2 \int \frac{t^2 + 1 - 1}{1 + t^2} dt = 2 \left(\int \frac{t^2 + 1}{1 + t^2} dt - \int \frac{1}{1 + t^2} dt \right) =$$

$$= 2(t - \operatorname{arctg} t) + c = 2\left(\sqrt{e^x - 1} - \operatorname{arctg} \sqrt{e^x - 1}\right) + c \, .$$

Si osservi che questo integrale è stato calcolato applicando ambedue i metodi finora noti.

5) *Calcolare l'integrale*: $\int \operatorname{tg}^4 x \, dx$.

Posto: $\operatorname{tg} x = t$, onde: $x = \operatorname{arctg} t$, $dx = \frac{1}{1 + t^2} dt$, otteniamo:

$$\int \mathrm{tg}^4 x\, dx = \int \frac{t^4}{1+t^2}\, dt = \int \frac{t^4-1+1}{1+t^2}\, dt = \int \frac{t^4-1}{1+t^2}\, dt + \int \frac{1}{1+t^2}\, dt =$$

$$= \int (t^2-1)\,dt + \int \frac{1}{1+t^2}\, dt = \frac{t^3}{3} - t + \mathrm{arctg}\, t + c =$$

$$= \frac{1}{3}\,\mathrm{tg}^3 x - \mathrm{tg}\, x + \mathrm{arctg}(\mathrm{tg}\, x) + c = \frac{1}{3}\,\mathrm{tg}^3 x - \mathrm{tg}\, x + x + c\,.$$

6) *Calcolare l'integrale*: $\int \sqrt{\mathrm{sen}\, x}\cdot \cos^3 x\, dx$.

Posto: $\mathrm{sen}\, x = t$, da cui: $\cos x\, dx = dt$, si ha:

$$\int \sqrt{\mathrm{sen}\, x}\cdot \cos^3 x\, dx = \int \sqrt{\mathrm{sen}\, x}\cdot \cos^2 x \cdot \cos x\, dx = \int \sqrt{\mathrm{sen}\, x}\,(1-\mathrm{sen}^2 x)\cos x\, dx =$$

$$= \int \sqrt{t}\,(1-t^2)\,dt = \int t^{\frac{1}{2}}\,dt - \int t^{\frac{5}{2}}\,dt = \frac{2}{3}\, t^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{7}\, t^{\frac{7}{2}} + c =$$

$$= 2\,\mathrm{sen}\, x \sqrt{\mathrm{sen}\, x}\left(\frac{1}{3} - \frac{\mathrm{sen}^2 x}{7}\right) + c\,.$$

7) *Calcolare l'integrale*: $\int \frac{1}{\sqrt{(1+x^2)^3}}\, dx$.

Posto: $x = \mathrm{tg}\, t$, da cui: $dx = (1+\mathrm{tg}^2 t)\,dt$, otteniamo:

$$\int \frac{1}{\sqrt{(1+x^2)^3}}\, dx = \int \frac{1}{\sqrt{(1+\mathrm{tg}^2 t)^3}}\,(1+\mathrm{tg}^2 t)\,dt = \int \frac{1}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2 t}}\, dt\,.$$

Ricordando ora le formule che esprimono il seno e il coseno in funzione della tangente: $\mathrm{sen}\, t = \frac{\mathrm{tg}\, t}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2 t}}$, $\cos t = \frac{1}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2 t}}$, in definitiva, si ha:

$$\int \frac{1}{\sqrt{(1+x^2)^3}}\, dx = \int \cos t\, dt = \mathrm{sen}\, t + c = \frac{\mathrm{tg}\, t}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2 t}} + c = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + c\,.$$

Calcolare l'integrale : $I = \int \operatorname{sen} mx \cos mx \, dx$.

Osservato che è : $d \operatorname{sen} mx = m \cos mx \, dx$, si ha :

$$I = \frac{1}{m} \int \operatorname{sen} mx \, d\operatorname{sen} mx = \frac{1}{2m} \operatorname{sen}^2 mx + c \, .$$

Se invece osserviamo che, in base alla formula di duplicazione del seno, si può scrivere :

$$\operatorname{sen} mx \cos mx = \frac{1}{2} \operatorname{sen} 2mx \, ,$$

si ha :

$$I = \frac{1}{2} \int \operatorname{sen} 2mx \, dx = \frac{1}{4m} \int \operatorname{sen} 2mx \, d(2mx) = -\frac{1}{4m} \cos 2mx + c \, .$$

Ora si verifica facilmente che le due funzioni : $\frac{1}{2m} \operatorname{sen}^2 mx$ e $-\frac{1}{4m} \cos 2mx$, differiscono per la costante additiva $-\frac{1}{4m}$. Infatti, ricordando la formula di duplicazione del coseno si ha :

$$-\frac{1}{4m} \cos 2mx = -\frac{1}{4m} (\cos^2 mx - \operatorname{sen}^2 mx) =$$

$$= -\frac{1}{4m} (1 - 2\operatorname{sen}^2 mx) = \frac{1}{2m} \operatorname{sen}^2 mx - \frac{1}{4m} \, ,$$

che è quello che si voleva provare.

Calcolare l'integrale : $\int \frac{1}{\operatorname{sen}^2 x \cos^2 x} \, dx$.

Questo integrale l'abbiamo calcolato, con il metodo di scomposizione nel n. 6 ed abbiamo trovato :

$$\int \frac{1}{\operatorname{sen}^2 x \cos^2 x} \, dx = \operatorname{tg} x - \operatorname{cotg} x + c \, .$$

Calcolare l'integrale : $I = \int \operatorname{sen} mx \cos mx \, dx$.

Osservato che è : $d \operatorname{sen} mx = m \cos mx \, dx$, si ha :

$$I = \frac{1}{m} \int \operatorname{sen} mx \, d\operatorname{sen} mx = \frac{1}{2m} \operatorname{sen}^2 mx + c \, .$$

Se invece osserviamo che, in base alla formula di duplicazione del seno, si può scrivere :

$$\operatorname{sen} mx \cos mx = \frac{1}{2} \operatorname{sen} 2mx \, ,$$

si ha :

$$I = \frac{1}{2} \int \operatorname{sen} 2mx \, dx = \frac{1}{4m} \int \operatorname{sen} 2mx \, d(2mx) = -\frac{1}{4m} \cos 2mx + c \, .$$

Ora si verifica facilmente che le due funzioni : $\frac{1}{2m} \operatorname{sen}^2 mx$ e $-\frac{1}{4m} \cos 2mx$, differiscono per la costante additiva $-\frac{1}{4m}$. Infatti, ricordando la formula di duplicazione del coseno si ha :

$$-\frac{1}{4m} \cos 2mx = -\frac{1}{4m} (\cos^2 mx - \operatorname{sen}^2 mx) =$$

$$= -\frac{1}{4m} (1 - 2\operatorname{sen}^2 mx) = \frac{1}{2m} \operatorname{sen}^2 mx - \frac{1}{4m} \, ,$$

che è quello che si voleva provare.

Calcolare l'integrale : $\int \frac{1}{\operatorname{sen}^2 x \cos^2 x} \, dx$.

Questo integrale l'abbiamo calcolato, con il metodo di scomposizione nel n. 6 ed abbiamo trovato :

$$\int \frac{1}{\operatorname{sen}^2 x \cos^2 x} \, dx = \operatorname{tg} x - \operatorname{cotg} x + c \, .$$

Integrazione per parti

ESEMPI.

1) *Calcolare l'integrale*: $\int x^2 \log x \, dx$.

Si assuma $\log x$ come fattore finito e $x^2 \, dx$ come fattore differenziale. Si ottiene:

$$\int x^2 \log x \, dx = \frac{1}{3}\left(\log x \cdot x^3 - \int x^3 \cdot \frac{1}{x} \, dx\right) = \frac{1}{3}\left(x^3 \log x - \frac{x^3}{3}\right) + c .$$

2) *Calcolare l'integrale*: $\int x \operatorname{sen} x \, dx$.

Si assuma x come fattore finito e $\operatorname{sen} x \, dx$ come fattore differenziale. Si ha:

$$\int x \operatorname{sen} x \, dx = - x \cos x - \int - \cos x \, dx = - x \cos x + \operatorname{sen} x + c .$$

3) *Calcolare l'integrale*: $\int \operatorname{arcsen} x \, dx$.

Si assuma $\operatorname{arcsen} x$ come fattore finito e dx come fattore differenziale. Si ha:

$$\int \operatorname{arcsen} x \, dx = \operatorname{arcsen} x \cdot x - \int x \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \, dx = x \operatorname{arcsen} x + \sqrt{1 - x^2} + c .$$

4) *Calcolare l'integrale:* $\int x \operatorname{arctg} x \, dx$.

Si assuma $\operatorname{arctg} x$ come fattore finito e $x\,dx$ come fattore differenziale. Si ha:

$$\int x \operatorname{arctg} x \, dx = \frac{1}{2}\left(\operatorname{arctg} x \cdot x^2 - \int x^2 \frac{1}{1+x^2} dx\right).$$

L'integrale: $\int \frac{x^2}{1+x^2} dx$, si calcola per decomposizione:

$$\int \frac{x^2}{1+x^2} dx = \int \frac{x^2+1-1}{1+x^2} dx = \int\left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right) dx = x - \operatorname{arctg} x + c.$$

Sostituendo, si ha dunque:

$$\int x \cdot \operatorname{arctg} x \, dx = \frac{1}{2}\left(x^2 \cdot \operatorname{arctg} x - x + \operatorname{arctg} x\right) + c.$$

5) *Calcolare l'integrale:* $\int \operatorname{arctg} \sqrt{x} \, dx$.

Posto: $\sqrt{x} = t$, onde: $x = t^2$ e $dx = 2t\,dt$, si ha:

$$\int \operatorname{arctg} \sqrt{x} \, dx = 2 \int t \cdot \operatorname{arctg} t \, dt,$$

e siamo così ricondotti all'integrale precedente.

Si ha quindi:

$$\int \operatorname{arctg} \sqrt{x} \, dx = t^2 \cdot \operatorname{arctg} t - t + \operatorname{arctg} t + c = (x+1)\operatorname{arctg}\sqrt{x} - \sqrt{x} + c.$$

6) *Calcolare l'integrale:* $\int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos^3 x} e^{\operatorname{tg} x} dx$.

Si può scrivere:

$$\int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos^3 x} e^{\operatorname{tg} x} dx = \int \operatorname{tg} x \frac{1}{\cos^2 x} e^{\operatorname{tg} x} dx, \text{ e posto: } \operatorname{tg} x = t, \text{ onde: } \frac{1}{\cos^2 x} dx = dt,$$

si ha:

$$\int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos^3 x} e^{\operatorname{tg} x} dx = \int t \cdot e^t dt = t \cdot e^t - \int e^t dt = e^t(t-1) + c = e^{\operatorname{tg} x}(\operatorname{tg} x - 1) + c.$$

11. — *Integrando con il metodo per parti, dimostrare che si ha:*

1) $\int x \cos x \, dx = x \operatorname{sen} x + \cos x + c$.

2) $\int x e^x dx = e^x(x - 1) + c$.

3) $\int \log x \, dx = x(\log x - 1) + c$.

4) $\int \frac{x}{\cos^2 x} dx = x \operatorname{tg} x + \log |\cos x| + c$.

5) $\int \log(x + \sqrt{1 + x^2}) dx = x \log(x + \sqrt{1 + x^2}) - \sqrt{1 + x^2} + c$.

6) $\int \operatorname{arctg} x \, dx = x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \log(1 + x^2) + c$.

7) $\int x \cdot 3^x dx = \frac{3^x}{\log 3}\left(x - \frac{1}{\log 3}\right) + c$.

8) $\int x^2 e^x dx = e^x(x^2 - 2x + 2) + c$.

9) $\int x^2 \cos x \, dx = x^2 \operatorname{sen} x + 2x \cos x - 2 \operatorname{sen} x + c$.

10) $\int x^2 \operatorname{sen} x \, dx = - x^2 \cos x + 2x \operatorname{sen} x + 2 \cos x + c$.

11) $\int \log^2 x \, dx = x(\log^2 x - 2 \log x + 2) + c$.

12) $\int e^x \cos x \, dx = \frac{e^x}{2} (\operatorname{sen} x + \cos x) + c$.

11. — *Integrando con il metodo per parti, dimostrare che si ha:*

1) $\int x \cos x \, dx = x \operatorname{sen} x + \cos x + c$.

2) $\int x e^x dx = e^x(x - 1) + c$.

3) $\int \log x \, dx = x(\log x - 1) + c$.

4) $\int \frac{x}{\cos^2 x} dx = x \operatorname{tg} x + \log |\cos x| + c$.

5) $\int \log(x + \sqrt{1 + x^2}) dx = x \log(x + \sqrt{1 + x^2}) - \sqrt{1 + x^2} + c$.

6) $\int \operatorname{arctg} x \, dx = x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \log(1 + x^2) + c$.

7) $\int x \cdot 3^x dx = \frac{3^x}{\log 3}\left(x - \frac{1}{\log 3}\right) + c$.

8) $\int x^2 e^x dx = e^x(x^2 - 2x + 2) + c$.

9) $\int x^2 \cos x \, dx = x^2 \operatorname{sen} x + 2x \cos x - 2 \operatorname{sen} x + c$.

10) $\int x^2 \operatorname{sen} x \, dx = - x^2 \cos x + 2x \operatorname{sen} x + 2 \cos x + c$.

11) $\int \log^2 x \, dx = x(\log^2 x - 2 \log x + 2) + c$.

12) $\int e^x \cos x \, dx = \frac{e^x}{2} (\operatorname{sen} x + \cos x) + c$.