1 Lezione del 8 marzo 2013

Esercizio 1. Risolvere con il metodo di eliminazione di Gauss il seguente sistema lineare:

$$\begin{cases} -2x+3y-z=-9 \\ x-4y=8 \\ 5x-2y+2z=10. \end{cases}$$

Soluzione: $(0,-2,3)^t$.

Esercizio 2. Risolvere con il metodo di eliminazione di Gauss il seguente sistema lineare:

$$\begin{cases} x-y-z=1 \\ x-2z=1 \\ x-y+z=1. \end{cases}$$

Soluzione: $(1,0,0)^t$.

Esercizio 3. Risolvere con il metodo di eliminazione di Gauss il seguente sistema lineare:

$$\begin{cases} x_1+x_2-3x_3+4x_4=5 \\ 2x_1+x_2-x_4=0 \\ 3x_1+2x_2-3x_3+3x_4=5 \\ 4x_1+4x_2-12x_3+16x_4=20. \end{cases}$$

Soluzione: $(-5-3\alpha+5\beta, 10+6\alpha-9\beta, \alpha, \beta)^t$, $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$.

Esercizio 4. Risolvere con il metodo di eliminazione di Gauss il seguente sistema lineare:

$$\begin{cases} 3x+5y+z=1 \\ x+y+2z=1 \\ 6x+3y+4z=1 \\ x+z=0. \end{cases}$$

Soluzione: $\varnothing$.

Esercizio 5. Risolvere con il metodo di eliminazione di Gauss il seguente sistema lineare:

$$\begin{cases} x_2-2x_3+3x_4+4x_5=0 \\ 2x_1+2x_2-4x_3+6x_4+7x_5=2 \\ x_1+x_2-2x_3+3x_4+3x_5=1 \\ -2x_1-x_2-2x_3-3x_4-2x_5=-2. \end{cases}$$

Soluzione: $(0,-2\alpha-3\beta,\alpha,\beta,0)^t$, $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$.

2 Lezione del 15 marzo 2013

Esercizio 6. Risolvere il seguente sistema lineare e darne un'interpretazione geometrica:

$$\begin{cases} x + 3y - z = 1 \\ -3x + 2y + 2z = 0. \end{cases}$$

Soluzione: $(-2 + 8t, t, -3 + 11t)^t$, cioè una retta.

Esercizio 7. Discutere, al variare del parametro $a \in \mathbb{R}$, la risolubilità del sistema lineare con matrice e termine noto

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ a & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \underline{\boldsymbol{b}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Si dia inoltre un'interpretazione geometrica dei risultati ottenuti.

Soluzione: se $a = 0$ i piani si intersecano in una retta, se $t \neq 0$ i piani si intersecano in un punto.

Esercizio 8. Discutere, al variare del parametro $a \in \mathbb{R}$, la risolubilità del sistema lineare con matrice e termine noto

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \underline{\boldsymbol{b}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ a \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Si dia inoltre un'interpretazione geometrica dei risultati ottenuti.

Soluzione: se $a = 0$ i piani si intersecano nell'origine, se $a = -1$ i piani si intersecano in un altro punto, se $t \neq 0, -1$ non esiste soluzione.

Esercizio 9. Discutere, al variare dei parametri $h, k \in \mathbb{R}$, la risolubilità del sistema lineare con matrice e termine noto

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ k & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 \end{pmatrix}, \qquad \underline{\boldsymbol{b}} = \begin{pmatrix} h \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Si dia inoltre un'interpretazione geometrica dei risultati ottenuti.

Soluzione: se $k = h = 1$ ci sono ∞^2 soluzioni, se $k = 1$ e $h \neq 1$ non esiste soluzione, se $k \neq 1$ esiste una e una sola soluzione.

Esercizio 10. Discutere, al variare del parametro $a \in \mathbb{R}$, la risolubilità del sistema lineare con matrice e termine noto

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & a-1 \\ 3-a & 2 & 1 \\ 1 & a & 1 \end{pmatrix}, \qquad \underline{\boldsymbol{b}} = \begin{pmatrix} a \\ 3 \\ a+1 \end{pmatrix}.$$

Si dia inoltre un'interpretazione geometrica dei risultati ottenuti e si dica per quali valori di a il vettore $(2, -1, 1)^t$ è soluzione del sistema.

Soluzione: se $a = 2$ non esiste soluzione, se $a = 1$ vi sono ∞^1 soluzioni, se $a \neq 1, 2$ esiste una e una sola soluzione.

Esercizio 11. Sia $\mathcal{B}_0$ un sistema di riferimento.

Trovare la retta s parallela a

$$r : \begin{cases} x + y - 2z = 3 \\ 2x + y - 2z = 7 \end{cases}$$

e passante per il punto $P_{|\mathcal{B}_0} = (1, 0, 2)^t$. Trovare inoltre il piano π contenente r e parallelo al vettore $u_{|\mathcal{B}_0} = (1, 1, 1)^t$. Determinare infine la mutua posizione di π e $\bar{\pi} : 2x + 2y - 4z - 10 = a$ al variare del parametro $a \in \mathbb{R}$.

Soluzione:

$$s : \begin{cases} x = 1 \\ y - 2z = 4 \end{cases}, \qquad \pi : x + y - 2z - 5 = 0;$$

se $a = 0$ abbiamo $\pi = \bar{\pi}$, se $a \neq 0$ risulta $\pi \parallel \bar{\pi}$.

Esercizio 12. Eseguire le seguenti operazioni tra matrici:

$$\begin{pmatrix} -1 \\ \pi \\ 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 5 & -3 & -4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -2 & -1 \\ -4 & 3 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix},$$

$$3 \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 5 & -3 & -4 \end{pmatrix},$$

$$-\frac{1}{2} \left[\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \right].$$

Esercizio 13. Eseguire il seguente prodotto tra matrici:

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -5 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 1 \\ 3 & -3 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 14. Date la matrici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \\ 4 & -2 \end{pmatrix},$$

calcolare, se possibile, i prodotti AB e BA.

3 Lezione del 4 aprile 2013

Esercizio 15. Calcolare con il metodo di Gauss-Jordan l'inversa della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -4 & 7 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Soluzione:

$$\begin{pmatrix} -\frac{9}{2} & -\frac{5}{2} & 2 \\ -2 & -1 & 1 \\ 4 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 16. Data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 3 & -1 \\ 1 & -4 & 0 \\ 5 & -2 & 2 \end{pmatrix},$$

calcolarne il determinante con la regola di Sarrus, lo sviluppo di Laplace e il metodo di eliminazione di Gauss.

Soluzione: -8.

Esercizio 17. Calcolare con il metodo dei complementi algebrici l'inversa della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Soluzione:
$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 18. Data la matrice
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & k \\ k & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$
dire per quali valori del parametro $k \in \mathbb{R}$ il sistema lineare
$$A\underline{\boldsymbol{x}} = \underline{\boldsymbol{b}} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$
è determinato; per tali valori calcolare la soluzione del sistema con il metodo di Cramer e tramite inversione.

Soluzione: $\left(\frac{1}{k}b_2 + \frac{3}{k}b_3, b_3, \frac{1}{k}b_1 - \frac{1}{k^2}b_2 - \frac{3}{k^2}b_3\right)^t$.

Esercizio 19. Calcolare con il metodo dei minori il rango della matrice
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 3 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -4 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Soluzione: 4.

4 Lezione del 11 aprile 2013

Esercizio 20. Stabilire quali tra i seguenti insiemi sono spazi vettoriali:

- $V_1 = \{\underline{v} \in \mathbb{R}^3 \mid z = 0\}$;
- $V_2 = \{\underline{v} \in \mathbb{R}^3 \mid z \geq 0\}$;
- $V_3 = \{\underline{v} \in \mathbb{R}^3 \mid y - z^2 = 0\}$;

- $V_4 = \{\underline{v} \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = z - 1 = 0\}$.

  Soluzione: solo V_1.

Esercizio 21. Dimostrare che $V = \{A \in \mathrm{Mat}_2(\mathbb{R}) \mid a_{11} = a_{21} = 0\}$ è spazio vettoriale su $\mathbb{R}$.

Esercizio 22. Dimostrare che $V = \{p \in \mathbb{R}[x] \mid p(1) = 0\}$ è spazio vettoriale su $\mathbb{R}$.

Esercizio 23. Dato lo spazio vettoriale $V = \{\underline{\boldsymbol{v}} \in \mathbb{R}^3 \mid x + y = 0\}$ su $\mathbb{R}$, dire quali tra i seguenti insiemi sono una base di V:

- $\mathscr{S}_1 = \{(1, -1, 0)^t\}$;
- $\mathscr{S}_2 = \{(0, 0, 1)^t, (1, 3, -2)^t\}$;
- $\mathscr{S}_3 = \{(1, -1, 0)^t, (0, 0, 1)^t\}$;
- $\mathscr{S}_4 = \left\{(0, 0, 1)^t, (-4, 4, 2)^t, (-3, 3, \frac{5}{2})^t\right\}$.

  Soluzione: solo $\mathscr{S}_3$.

Esercizio 24. Dato lo spazio vettoriale su $\mathbb{R}$

$$V = \{f \in \mathbb{R}_2[x] \mid f(2) = 0\},$$

dimostrare che $\mathcal{B} = \{x - 2, x^2 - 2x\}$ è una base di V.

Esercizio 25. Dimostrare che

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 8 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$$

è una base di $\mathbb{R}^3$.

Esercizio 26. In $\mathbb{R}^3$, calcolare le componenti del vettore $\underline{\boldsymbol{v}} = (2, -1, 1)^t$ rispetto alle seguenti basi:

- $\mathcal{B}_1 = \{\underline{\boldsymbol{e}}_1, \underline{\boldsymbol{e}}_2, \underline{\boldsymbol{e}}_3\}$;
- $\mathcal{B}_2 = \{(1, 1, 0)^t, (0, 1, 1)^t, (0, 2, -4)^t\}$.

Soluzione: $(2,-1,1)^t$; $(2,-\frac{5}{3},-\frac{2}{3})^t$.

Esercizio 27. In $\mathbb{R}_2[x]$, scrivere le componenti di $p(x) = -x^2+7$ rispetto alla base $\mathcal{B} = \{x^2-2x+5, 2x^2, x+1\}$.

Soluzione: $(1,-1,2)^t$.

Esercizio 28. Calcolare una base e la dimensione dello spazio vettoriale su $\mathbb{R}$

$$V = \left\{ \underline{\boldsymbol{v}} \in \mathbb{R}^3 \mid x = 2z \right\}.$$

Soluzione: $\{(2,0,1)^t, (0,1,0)^t\}$; $\dim V = 2$.

Esercizio 29. Calcolare una base e la dimensione dello spazio vettoriale su $\mathbb{R}$

$$U = \left\{ A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} \mid a,b,c \in \mathbb{R} \right\}.$$

Soluzione:

$$\left\{ I_3, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}; \ \dim U = 3.$$

Esercizio 30. Completare $\mathscr{S} = \{(2,0,1)^t, (3,0,-2)^t\}$ a una base di $\mathbb{R}^3$.

Esercizio 31. In $\mathbb{R}^2$, scrivere la matrice di passaggio:

- da $\mathcal{B}_1 = \{(3,-1)^t, (1,2)^t\}$ a $\mathcal{B}_2 = \{(0,2)^t, (1,1)^t\}$;
- da $\mathcal{B}_3 = \{\underline{\boldsymbol{e}}_1, \underline{\boldsymbol{e}}_2\}$ a $\mathcal{B}_1 = \{(-2,1)^t, (0,3)^t\}$.

Soluzione:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

5 Lezione del 12 aprile 2013

Esercizio 32. In $\mathbb{R}^3$, scrivere la matrice di cambiamento di base da $\mathcal{B}_1 = \{(1,2,0)^t, (-3,0,1)^t, (1,1,1)^t\}$ a $\mathcal{B}_2 = \{(1,0,0)^t, (2,6,-1)^t, (-7,1,0)^t\}$.

Soluzione:
$$\begin{pmatrix} 15 & -47 & 52 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & -6 & 7 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 33. Dire se
$$L\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \\ -17 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}\right) = \mathbb{R}^4.$$

In caso di risposta negativa, dire quali tra questi vettori sono linearmente indipendenti.

Soluzione: il primo, il secondo e il quarto.

Esercizio 34. Siano
$$\begin{aligned} V &= \left\{\underline{\boldsymbol{v}} \in \mathbb{R}^3 \mid x - y = 0\right\}, \\ W &= \left\{\underline{\boldsymbol{v}} \in \mathbb{R}^3 \mid z = 0\right\}. \end{aligned}$$

Trovare una base e la dimensione di $V \cap W$ e $V + W$.

Soluzione: $\dim(V \cap W) = 1,\ \dim(V + W) = 3$.

Esercizio 35. Siano
$$\begin{aligned} V &= \{p \in \mathbb{R}_3[x] \mid p(0) = 0\}, \\ W &= \{p \in \mathbb{R}_3[x] \mid p(x) = p(-x)\}. \end{aligned}$$

Trovare una base e la dimensione di $V \cap W$ e $V + W$.

Soluzione: $\dim(V \cap W) = 1,\ \dim(V + W) = 4$.

Esercizio 36. Siano
$$\begin{aligned} V &= \{p \in \mathbb{R}_2[x] \mid p(0) = 0\}, \\ W &= \{p \in \mathbb{R}_2[x] \mid p'(0) = 0\}. \end{aligned}$$

Trovare una base e la dimensione di $V \cap W$ e $V + W$.

Soluzione: $\dim(V \cap W) = 1$, $\dim(V + W) = 3$.

Esercizio 37. In $\mathrm{Mat}_2(\mathbb{R})$, siano

$$X_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad X_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad X_3 = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}, \quad X_4 = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}.$$

- Verificare che X_1 e X_2 sono linearmente indipendenti, X_3 e X_4 sono linearmente indipendenti e $L(X_1, X_2) = L(X_3, X_4)$.
- Siano $U = L(X_1, X_2)$, $\mathcal{B}_1 = \{X_3, X_4\}$ e $\mathcal{B}_2 = \{X_1, X_2\}$ due basi di U. Dimostrare che
$$U' = \left\{ X \in U \mid X_{|\mathcal{B}_1} = X_{|\mathcal{B}_2} \right\}$$
è un sottospazio di $\mathrm{Mat}_2(\mathbb{R})$.
- Trovare una base e la dimensione di U'.

Soluzione: l'esercizio è tratto dalla prima prova in itinere del 2 maggio 2012.

Esercizio 38. Siano

$$r : \begin{cases} x = 1 - t \\ y = 1 + t \\ z = t \end{cases}, \qquad s : \begin{cases} x + y = 1 \\ y + z = 1 \end{cases};$$

stabilire la mutua posizione di r ed s.

Soluzione: rette sghembe.

Esercizio 39. Siano

$$r : \begin{cases} x = -3 + 4t \\ y = -4 - 3t \\ z = 0 \end{cases}, \qquad \pi : 3x + 4y = 0;$$

stabilire la mutua posizione di r ed π.

Soluzione: $r \parallel \pi$.

Esercizio 40. Siano

$$r : \begin{cases} x = k + t \\ y = 1 + 2t \\ z = -1 \end{cases}, \qquad s : \begin{cases} 3x - 2y = 0 \\ x + 2z = 4 \end{cases};$$

discutere la mutua posizione di r ed s al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$. Posto inoltre $k = 0$, determinare il piano passante per r e parallelo ad s.

Soluzione: r, s incidenti per $k = 2$, sghembe altrimenti; $2x - y + z + 2 = 0$.

6 Lezione del 19 aprile 2013

Esercizio 41. Verificare che

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} 2x \\ -y \\ x+z \end{pmatrix} \end{array}$$

è un'applicazione lineare.

Esercizio 42. Sia $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ un'applicazione lineare con matrice associata

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & k \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dire per quali valori del parametro $k \in \mathbb{R}$ l'applicazione risulta essere biiettiva; per tali valori calcolare la matrice associata a f^{-1}.

Soluzione: per $k \neq 1$,

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{1-k} & \frac{k-2}{2-2k} & \frac{k}{k-1} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{k-1} & \frac{1}{2-2k} & \frac{1}{1-k} \end{pmatrix}.$$

Esercizio 43. Data l'applicazione lineare

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} x \\ y-x \\ y-2x \end{pmatrix}, \end{array}$$

determinare la matrice che rappresenta l'applicazione f rispetto alle basi $\mathcal{B}_1 = \{(1,3)^t, (2,4)^t\}$ e $\mathcal{B}_2 = \{(1,-2,0)^t, (3,-7,1)^t, (0,2,-1)^t\}$.

Soluzione:

$$A = \begin{pmatrix} -17 & -16 \\ 6 & 6 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 44. Data l'applicazione lineare

$$\begin{array}{cccc} f: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} x+2y \\ x-y \end{pmatrix}, \end{array}$$

scrivere la matrice che rappresenta f rispetto alla base $\mathcal{B} = \{(-1,2)^t, (0,3)^t\}$.

Soluzione:

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 6 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 45. Data l'applicazione lineare

$$\begin{array}{cccc} f: & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} x-y \\ z+2x \end{pmatrix}, \end{array}$$

calcolare una base e la dimensione di $\ker f$ e $\mathrm{Im} f$.

Soluzione: $\mathrm{dimIm} f = 2$, $\dim \ker f = 1$.

Esercizio 46. Data l'applicazione lineare

$$\begin{array}{cccc} f: & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} x+3y+4z \\ 2x+y+3z \\ -x+2y+z \end{pmatrix}, \end{array}$$

scrivere la matrice che rappresenta f e calcolare dimensione e basi per $\ker f$ e $\mathrm{Im} f$. Dire inoltre per quali valori del parametro $h \in \mathbb{R}$ il vettore $(2,3,h)^t \in \mathrm{Im} f$ e se f è iniettiva e/o suriettiva.

Soluzione:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix};$$

$\mathrm{dimIm} f = 2$, $\dim \ker f = 1$; $h = -1$; f non è né iniettiva né suriettiva.

Esercizio 47. Data l'applicazione lineare $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ con matrice associata

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix},$$

trovare una base e la dimensione di $\mathrm{Im}T$, $\ker T$ e $\ker T^2$.

Soluzione: $\mathrm{dimIm}T = 2$, $\dim\ker T = 1$, $\dim\ker T^2 = 2$.

Esercizio 48. Data l'applicazione lineare

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}^4 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} -x+2z \\ x-2z \\ t \end{pmatrix}, \end{array}$$

trovare una base e la dimensione di $\mathrm{Im}f$, $\ker f$ e $\ker A$, con A matrice che rappresenta f rispetto alle basi $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^4} = \{\underline{\boldsymbol{e}}_\mathbf{1}, \underline{\boldsymbol{e}}_\mathbf{1} - \underline{\boldsymbol{e}}_\mathbf{2}, \underline{\boldsymbol{e}}_\mathbf{3} + \underline{\boldsymbol{e}}_\mathbf{4}, \underline{\boldsymbol{e}}_\mathbf{4}\}$ e $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^3} = \{(1,-2,-1),(3,-5,0),(0,1,2)\}$.

Soluzione: $\{(-1,1,0),(2,-2,1)\}$, $\{-\underline{\boldsymbol{e}}_\mathbf{2}, -2\underline{\boldsymbol{e}}_\mathbf{1} - \underline{\boldsymbol{e}}_\mathbf{3}\}$, $\{(-1,1,0,0)^t, (-2,0,-1,1)^t\}$.

Esercizio 49. Data l'applicazione lineare

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} x+y \\ x+y \\ z-x \end{pmatrix}, \end{array}$$

trovare una base e la dimensione di $\mathrm{Im}f$ e $\ker f$; trovare inoltre le controimmagini del vettore $\underline{\boldsymbol{v}} = (2,2,-1)^t$.

Soluzione: $\{(1,1,-1)^t,(1,1,0)^t\}$, $\{(-1,1,-1)^t\}$, $(1,1,0)^t + L((-1,1,-1)^t)$.

Esercizio 50. Siano

$$\underline{\boldsymbol{b}}_\mathbf{1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \underline{\boldsymbol{b}}_\mathbf{2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \underline{\boldsymbol{b}}_\mathbf{3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix};$$

sia inoltre $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tale che

$$\begin{aligned} f(\underline{\boldsymbol{b}}_1) &= \underline{\boldsymbol{b}}_1 + 2\underline{\boldsymbol{b}}_2 + \underline{\boldsymbol{b}}_3 \\ f(\underline{\boldsymbol{b}}_2) &= 2\underline{\boldsymbol{b}}_1 + 3\underline{\boldsymbol{b}}_2 \\ f(\underline{\boldsymbol{b}}_3) &= 3\underline{\boldsymbol{b}}_1 + \underline{\boldsymbol{b}}_2 - \underline{\boldsymbol{b}}_3. \end{aligned}$$

Dimostrare che $\mathcal{B} = \{\underline{\boldsymbol{b}}_1, \underline{\boldsymbol{b}}_2, \underline{\boldsymbol{b}}_3\}$ è una base di $\mathbb{R}^3$, scrivere la matrice che rappresenta f rispetto a $\mathcal{B}$, trovare una base e la dimensione di $\mathrm{Im} f$ e $\ker f$, dire se f è iniettiva e/o suriettiva e trovare le eventuali controimmagini di $\underline{\boldsymbol{b}}_1 + \underline{\boldsymbol{b}}_2 + \underline{\boldsymbol{b}}_3$.

Soluzione:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix};$$

f è biiettiva; $f^{-1}(\underline{\boldsymbol{b}}_1 + \underline{\boldsymbol{b}}_2 + \underline{\boldsymbol{b}}_3)_{|\mathcal{B}} = (\frac{4}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3})$.

7 Lezione del 23 aprile 2013

Esercizio 51. Siano

$$\begin{aligned} U &= \{p \in \mathbb{R}_2[x] \mid p'(1) - p(1) = 0\}, \\ W &= \{p \in \mathbb{R}_2[x] \mid p(1) = 0\}. \end{aligned}$$

Trovare una base e la dimensione di $U \cap W$ e $U + W$. Dire a quale dei sottospazi vettoriali appartengono i polinomi $(x+1)^2$ e $(x-1)^2$ ed indicarne le coordinate rispetto alla rispettiva base.

Soluzione:
(1) $\dim(U \cap W) = 1$, $\dim(U + W) = 3$.
(2) $(x+1)^2 \in U$ con coord. $(1, 2, 1)^t$; $(x-1)^2 \in U \cap W$ con coord. (1).

Esercizio 52. Sia data l'applicazione lineare:

$$f : V = \left\{A \in \mathrm{Mat}_2(\mathbb{R}) \mid A^T = A\right\} \longrightarrow W = \mathbb{R}^3 \tag{1}$$

e siano assegnate le seguenti basi per V e W:

$$B_V = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\} \quad B_W = \{\underline{\boldsymbol{e}}_1, \underline{\boldsymbol{e}}_1 + \underline{\boldsymbol{e}}_2, \underline{\boldsymbol{e}}_1 + \underline{\boldsymbol{e}}_2 + \underline{\boldsymbol{e}}_3\} \tag{2}$$

rispetto alle quali l'applicazione f è rappresentata dalla seguente matrice:

$$A_f = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix};$$

(1) Determinare la dimensione e una base per Im $f, \ker A, \ker f$.
(2) Determinare se l'applicazione $P(f) = f^2 + f$ è invertibile.

Soluzione:
(1)
Dim (Im f) = 2, Base (Im f) = $((2,1,1)^t, (2,2,1)^t)$
Dim ($\ker A$) = 1, Base ($\ker A$) = $(-1,-1,1)^t$
Dim ($\ker f$) = 1, Base ($\ker f$) = $\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$
(2) $\mathrm{Det}(A^2 + A) = 0$, dunque $P(f)$ non è invertibile.

Esercizio 53. Si considerino le rette r ed s di equazioni parametriche $r : x = t, y = 1 + t, z = 1$, ed $s : x = t, y = 1, z = -t$.
(1) Discutere la loro posizione reciproca.
(2) Determinare l' equazione cartesiana del piano contenente r e parallelo ad s.

Soluzione:
(1) rette sghembe
(2) $\pi : x - y + z = 0$

Esercizio 54. Siano P, Q ed R i punti di coordinate $(1,1,1)^t$, $(0,2,0)^t$, $(3,3,3)^t$ rispettivamente. Verificare che i tre punti non sono allineati e scrivere l'equazione del piano π passante per P, Q ed R. Fissate le coordinate di un punto T non appartenente a π, verificare che le rette PR e QT sono sghembe. Scrivere l'equazione di una retta passante per O complanare sia con PR sia con QT.

Soluzione:
(1) il piano passante per P, Q, R è $\pi : x - z = 0$.
(2) la retta passante per O e complanare a PR e QT è l'asse y.

8 Lezione del 17 maggio 2013

Esercizio 55. Dire se esiste:

(a) un'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ tale che $\mathcal{B} = \{(1,0,1,0),(1,1,1,0)\}$ sia una base per $\ker f$, $f(0,0,0,1) = (1,-1,2,-5)$ e $f(1,0,0,1) = (-1,3,-2,2)$;

(b) un'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tale che $f(1,1,0) = (1,-3)$, $f(2,3,1) = (-4,0)$ e $f(0,1,1) = (3,-1)$;

(c) un'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tale che $\mathrm{Im} f = L((-1,2,4),(0,3,-1))$ e $\ker f = L(1,2,1)$.

Soluzione: esiste nei casi a e c.

Esercizio 56. Sia $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare definita, rispetto alla base canonica, dalla matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 9 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Calcolare gli autovalori e gli autovettori di f e dire se $\mathbb{R}^3$ ammette una base di autovettori di f.

Soluzione: $V_1 = L(2,1,-2)$, $V_2 = L(1,0,1)$, $V_{10} = L(-1,4,1)$.

Esercizio 57. Determinare autovalori, autovettori e stabilire se è diagonalizzabile o meno la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Soluzione: $V_0 = L((-2,1,0),(-3,0,1))$, $V_6 = L(1,1,1)$; la matrice è diagonalizzabile.

Esercizio 58. Sia $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare definita dalla matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

rispetto alla base $\mathcal{B} = \{(0,0,1),(1,1,0),(1,0,1)\}$; trovare autovalori e autovettori di T, dire se T è diagonalizzabile e se esiste una base $\mathcal{B}'$ di $\mathbb{R}^3$ tale che $M_{T,\mathcal{B},\mathcal{B}'} = I$.

Soluzione: si veda la soluzione del tema esame del 4 maggio 2010.

Esercizio 59. Sia $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare definita, rispetto alla base canonica, dalla matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Determinare autovalori e autovettori di f e stabilire se è diagonalizzabile.

Soluzione: la matrice è diagonalizzabile su $\mathbb{C}$; $V_1 = L(1,0,0)$, $V_i = L(0,i,1)$, $V_{-i} = L(0,-i,1)$.

Esercizio 60. Sia $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare definita nel seguente modo:

$$\begin{aligned} \underline{\boldsymbol{e}}_1 &\longmapsto \underline{\boldsymbol{e}}_1 + \underline{\boldsymbol{e}}_2 \\ \underline{\boldsymbol{e}}_2 &\longmapsto \underline{\boldsymbol{e}}_2 \\ \underline{\boldsymbol{e}}_3 &\longmapsto -4\underline{\boldsymbol{e}}_1 - 2\underline{\boldsymbol{e}}_2 - \underline{\boldsymbol{e}}_3. \end{aligned}$$

Determinare autovalori e autovettori di f e stabilire se è diagonalizzabile.

Soluzione: l'applicazione non è diagonalizzabile.

Esercizio 61. Data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dimostrare che A non è diagonalizzabile e trovare una matrice diagonalizzabile che abbia lo stesso polinomio caratteristico di A.

Soluzione:

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 62. Sia $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare definita nel seguente modo:

- $(1,1,0)$ è un autovettore di f relativo all'autovalore -1;
- $(1,0,1) \in \ker f$;
- $f(0,1,1) = (2,1,1)$.

Scrivere la matrice che rappresenta l'applicazione lineare rispetto alla base $\mathcal{B} = \{(1,1,0),(1,0,1),(0,1,1)\}$, calcolare autovalori e autovettori e dire se è diagonalizzabile.

Soluzione: si veda la soluzione del tema esame del 6 febbraio 2012.

Esercizio 63. Data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ k & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

stabilire per quali valori del parametro reale k la matrice risulta diagonalizzabile. Per tali valori determinare una base di $\mathbb{R}^3$ costituita da autovettori di A.

Soluzione: A è diagonalizzabile per $k = 0$; $\mathcal{B} = \{(1,1,0),(-1,1,0),(0,0,1)\}$.

9 Lezione del 30 maggio 2013

Esercizio 64. Dire per quali valori del parametro reale k sono simili le matrici

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ k-2 & 3 & 0 \\ 0 & k-1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Soluzione: $k = 1, 2$.

Esercizio 65. Dire per quali valori del parametro reale h sono simili le matrici

$$A = \begin{pmatrix} h+2 & 0 & 0 \\ 0 & h & 2 \\ 0 & -h & -2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & h+2 & 0 \\ 0 & 1 & h-2 \end{pmatrix}.$$

Soluzione: $h \neq 2$.

Esercizio 66. Dire per quali valori del parametro reale k l'applicazione lineare

$$\begin{array}{rccc} T: & \mathbb{R}_2[x] & \longrightarrow & \mathbb{R}_2[x] \\ & \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ x^2 \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} (k-1)+(k-2)x^2 \\ (k-2)+x+(k-2)x^2 \\ (2-k)+(3-k)x^2 \end{pmatrix} \end{array}$$

è diagonalizzabile; per tali valori scrivere una matrice diagonale simile alla matrice che rappresenta l'applicazione lineare e la matrice di passaggio.

Soluzione: $k=2$; $D=P=I_3$.

Esercizio 67. Si consideri l'applicazione lineare

$$\begin{array}{rccc} T: & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} 0 \\ 3x+3y+z \\ -x-y+z \end{pmatrix}; \end{array}$$

dire se l'applicazione è diagonalizzabile e determinare un vettore di Im T che non sia un autovettore.

Soluzione: si veda il tema esame del 9 febbraio 2010.

Esercizio 68. Date le matrici

$$A=\begin{pmatrix} 3 & -3 & 0 \\ -h & h & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} 1 & h & -h \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3+h \end{pmatrix}:$$

(a) determinare autovalori e autovettori di A per $h=-2$;

(b) dire per quali valori di h la matrice A è diagonalizzabile;

(c) dire per quali valori di h le due matrici sono simili.

Soluzione: si veda il tema esame del 6 maggio 2011.

Esercizio 69. Si consideri l'applicazione lineare

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} -4x-2hy \\ hx+5y \end{pmatrix}; \end{array}$$

(a) dire per quali h $\underline{\boldsymbol{v}} = \underline{\boldsymbol{e}_1} - \underline{\boldsymbol{e}_2}$ è un autovettore di f;

(b) per tale valore, dire se f è semplice;

(c) per tale valore diagonalizzare $f^4 - 3f^3$;

(d) dimostrare che $\ker(f^{n+2} - f^{n+1} - 2f^n) = \mathbb{R}^2$ $\forall n \in \mathbb{N}$ e calcolare f^{-1}.

Soluzione: $h = 3$; sì; $M_{f^4-3f^3}$ è simile a $D = \operatorname{diag}\{-8, 4\}$; $f^{-1} = \frac{f-id}{2}$.

10 Lezione del 4 giugno 2013

Esercizio 70. Senza calcolarli esplicitamente, dire se gli autovalori delle seguenti matrici sono reali o complessi, e nel primo caso determinarne il segno:

$$A = \begin{pmatrix} 1000 & 2000 \\ 500 & 4 \end{pmatrix};$$

$$B = \begin{pmatrix} -25 & 800 \\ -800 & 25 \end{pmatrix};$$

$$C = \begin{pmatrix} -2 & t & 0 \\ t & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Soluzione: reali e discordi; immaginari puri; reali e discordi.

Esercizio 71. Sia $\langle , \rangle : \mathbb{R}_2[x] \times \mathbb{R}_2[x] \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$\langle p, q \rangle = \int_0^1 p(x)q(x)dx.$$

- Dimostrare che $\langle , \rangle$ è un prodotto scalare;
- dati $p(x) = x-1$, $q(x) = x+2$, $f(x) = x - \frac{1}{2}$, $g(x) = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2$, calcolare $\langle p, q \rangle$ e $\langle f, g \rangle$;
- calcolare la matrice di Gram rispetto alla base canonica e rispetto alla base $\mathcal{B} = \left\{1, x - \frac{1}{2}, \left(x - \frac{1}{2}\right)^2\right\}$;
- calcolare $\|p\|$.

Soluzione: $\langle p, q\rangle = -\frac{7}{6}, \langle f, g\rangle = 0$; $\|p\| = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Esercizio 72. Sia $\langle,\rangle : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ il prodotto scalare standard, $\langle,\rangle' : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ il prodotto scalare definito dalla matrice di Gram

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 9 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix};$$

siano inoltre $\underline{\boldsymbol{v}}_1 = (1, 2, 1)^t$, $\underline{\boldsymbol{v}}_2 = (1, -1, 2)^t$.

Per entrambi i prodotti scalari calcolare norma e coseno dell'angolo compreso tra i due vettori.

Soluzione: $\|\underline{\boldsymbol{v}}_1\| = \sqrt{6}$, $\|\underline{\boldsymbol{v}}_1\|' = 3\sqrt{6}$, $\|\underline{\boldsymbol{v}}_2\| = \sqrt{6}$, $\|\underline{\boldsymbol{v}}_2\|' = \sqrt{2}$, $\cos(\underline{\boldsymbol{v}}_1, \underline{\boldsymbol{v}}_2) = \frac{1}{6}$, $\cos(\underline{\boldsymbol{v}}_1, \underline{\boldsymbol{v}}_2)' = -\frac{7}{6\sqrt{3}}$.

Esercizio 73. Calcolare il complemento ortogonale del vettore $\underline{\boldsymbol{n}} = (1, 2, 3, 0)^t$ rispetto al prodotto scalare standard.

Soluzione: $L((-2, 1, 0, 0)^t, (-3, 0, 1, 0)^t, (0, 0, 0, 1))$.

Esercizio 74. Calcolare la proiezione ortogonale di $\underline{\boldsymbol{v}} = (2, 1, 0)$ su $\underline{\boldsymbol{w}}_1 = (1, 0, 0)$, $\underline{\boldsymbol{w}}_2 = (-1, 1, 1)$, $\underline{\boldsymbol{w}}_3 = (0, 1, 1)$.

Soluzione: $(2, 0, 0), (\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}), (0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

Esercizio 75. Calcolare la proiezione di $\underline{\boldsymbol{v}} = (1, 2, 3, 4)^t$ su $U = L((1, 1, 1, 1)^t)$, calcolare $d(\underline{\boldsymbol{v}}, U)$ e darne un'interpretazione geometrica.

Soluzione: $\frac{5}{2}(1, 1, 1, 1)^t$, $\sqrt{5}$.

Esercizio 76. Sia

$$H = \left\{ \underline{\boldsymbol{x}} \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 + x_2 + x_3 = x_2 + x_3 + x_4 = 0 \right\};$$

trovare una base ortonormale per H e $H^\perp$, calcolare la proiezione di $\underline{\boldsymbol{v}} = (3, 2, 1, 0)$ su H e $H^\perp$ e determinare $d(\underline{\boldsymbol{v}}, H)$ e $d(\underline{\boldsymbol{v}}, H^\perp)$.

Soluzione: $\mathcal{B}_H = \left\{ \frac{1}{\sqrt{3}}(-1, 1, 0, -1), \frac{1}{\sqrt{15}}(-1, -2, 3, -1) \right\}$,
$\mathcal{B}_{H^\perp} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1, 0), \frac{1}{\sqrt{15}}(-2, 1, 1, 3) \right\}$, $\underline{\boldsymbol{v}}_H = \frac{1}{5}(3, 1, -4, 3)$, $\underline{\boldsymbol{v}}_{H^\perp} = \frac{1}{5}(12, 9, 9, -3)$, $d(\underline{\boldsymbol{v}}, H) = 3\sqrt{\frac{7}{5}}$, $d(\underline{\boldsymbol{v}}, H^\perp) = \sqrt{\frac{7}{5}}$.

Esercizio 77. Sia $\langle \underline{\boldsymbol{x}}, \underline{\boldsymbol{y}} \rangle := x_1y_1 + 2x_2y_2 - x_2y_3 - x_3y_2 + 2x_3y_3$.

- Dimostrare che $\langle , \rangle$ è un prodotto scalare;
- trovare una base di $\mathbb{R}^3$ ortogonale rispetto a questo prodotto scalare.

Soluzione: $\mathcal{B} = \left\{ \underline{\boldsymbol{e}}_1, \underline{\boldsymbol{e}}_2, \underline{\boldsymbol{e}}_3 + \frac{1}{2}\underline{\boldsymbol{e}}_2 \right\}$.

Esercizio 78. Dimostrare che

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}x + \frac{2}{3}y + \frac{1}{3\sqrt{2}}z \\ -\frac{1}{3}y + \frac{4}{3\sqrt{2}}z \\ -\frac{1}{\sqrt{2}}x + \frac{2}{3}y + \frac{1}{3\sqrt{2}}z \end{pmatrix} \end{array}$$

è un'isometria.

Esercizio 79. Sia $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare definita da

$$\begin{aligned} T(\underline{\boldsymbol{e}}_1) &= 3\underline{\boldsymbol{e}}_1 + \underline{\boldsymbol{e}}_3; \\ T(\underline{\boldsymbol{e}}_2) &= \underline{\boldsymbol{e}}_2; \\ T(\underline{\boldsymbol{e}}_3) &= \underline{\boldsymbol{e}}_1 + 3\underline{\boldsymbol{e}}_3. \end{aligned}$$

Determinare, se esiste, una matrice Q ortogonale tale che Q^tAQ sia diagonale, dove A è la matrice che rappresenta T.

Soluzione:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 80. Trovare una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$ formata da autovettori di

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

scrivere la decomposozione spettrale di A e le matrici di proiezione.

Soluzione: $\mathcal{B} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}(-1,1,0), \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0), (0,0,1) \right\}$; $A = 2P_2 + 4P_4$,

$$P_4 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$P_2 = I - P_4$.

11 Lezione del 6 giugno 2013

Esercizio 81. Dire per quali valori del parametro reale k la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 9 & 2 & k \\ 2 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

risulta ortogonalmente diagonalizzabile; per tali valori di k determinare una matrice Q ortogonale e una matrice D diagonale tali che $D = Q^t AQ$. Calcolare inoltre il polinomio caratteristico di A^3.

Soluzione: $k = -2$; $p_{A^3}(\lambda) = (1-\lambda)(8-\lambda)(1000-\lambda)$.

Esercizio 82. Trovare un vettore $\underline{\boldsymbol{w}}$ di $\mathbb{R}^3$ perpendicolare a $\underline{\boldsymbol{u}} = (1, 2, 3)^t$ e $\underline{\boldsymbol{v}} = (3, 2, 1)^t$; calcolare inoltre il volume del parallelepipedo generato da $\underline{\boldsymbol{u}}$, $\underline{\boldsymbol{v}}$ e $\underline{\boldsymbol{w}}$.

Soluzione: $(-4, 8, -4)^t$, 96.

Esercizio 83. In $\mathbb{R}^2$, siano dati il punto $P_0 = (2, 3)$ e il vettore $\underline{\boldsymbol{n}} = (1, 3)^t$.

- Determinare la retta r passante per P_0 e ortogonale a $\underline{\boldsymbol{n}}$.
- Calcolare la distanza di $Q = (0, 1)$ da P_0 e da r.
- Determinare il punto simmetrico di $S = (6, -2)$ rispetto alla retta $a : x - 2y = 0$.

Soluzione: $x + 3y - 11 = 0$; $2\sqrt{2}$, $\frac{8}{\sqrt{10}}$; $(2, 6)$.

Esercizio 84. Trovare il piano di $\mathbb{R}^3$:

- passante per $P_1 = (0, 1, 2)$, $P_2 = (1, 2, 3)$ e $P_3 = (1, 3, 5)$;
- passante per $P_0 = (2, -1, 1)$ e con parametri direttori $\underline{\boldsymbol{u}}_1 = (0, 0, 1)^t$ e $\underline{\boldsymbol{u}}_2 = (-1, 3, 1)^t$;
- passante per $P_0 = (0, 1, 2)$ e ortogonale a $r : x+y+z = x-2y+3z = 0$.

Determinare infine un piano che sia ortogonale ai piani dei due punti precedenti.

Soluzione: $x - 2y + z = 0$; $3x + y - 5 = 0$; $5x - 2y - 3z + 8 = 0$; $3x - 9y + 11z = 0$.

Esercizio 85. Siano $P = (1, 0, 2)$, $\pi_\alpha : x - \alpha y + z + 2 = 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

- Scrivere l'equazione della retta r_α passante per P_0 e ortogonale al piano π_α.
- Calcolare $Q_\alpha = \pi_\alpha \cap r_\alpha$ e dire per quali valori di α sono massime le distanze $d(P, Q_\alpha)$ e $d(P, \pi_\alpha)$.
- Scrivere l'equazione del piano π' passante per P e parallelo a π_α.

Soluzione: $\alpha x + y - \alpha = x - z + 1 = 0$; $\alpha = 0$ in entrambi i casi; $x - \alpha y + z - 3 = 0$.

Esercizio 86. In $\mathbb{R}^2$:

- scrivere l'equazione della circonferenza concentrica a $\gamma : x^2 + y^2 + 2x - 2y = 0$ e passante per $A = (1, 1)$;
- trovare le tangenti a $\gamma' : x^2 + y^2 - 2x - 4y + 1 = 0$ condotte da $P = (-1, 2)$.

Soluzione: $(x + 1)^2 + (y - 1)^2 = 4$; $x = -1$.

Esercizio 87. In $\mathbb{R}^3$, trovare l'equazione della circonferenza Γ passante per $A = (1, 1, 0)$, $B = (1, 0, 1)$, $C = (0, 1, 1)$ e calcolarne centro e raggio.

Soluzione: $x^2 + y^2 + z^2 - 2 = x + y + z - 2 = 0$, $\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$, $\sqrt{\frac{2}{3}}$.

12 Lezione del 14 giugno 2013

Esercizio 88. Classificare e ridurre in forma canonica le seguenti coniche:

- $x^2 - y^2 + 2x = 0$;
- $x^2 + 2y^2 + 12y + 10 = 0$;
- $x^2 + 2y^2 + 12y + 20 = 0$;
- $x^2 + y^2 - 2xy - y = 0$.

Soluzione: iperbole equilatera, $X^2-Y^2=1$; ellisse a punti reali, $\frac{X^2}{8}+\frac{Y^2}{4}=1$; ellisse a punti immaginari; parabola, $2Y^2-\frac{1}{\sqrt{2}}X=0$.

Esercizio 89. Sia data la conica $\Gamma: x^2+y^2-4xy-2x-2y+1=0$; classificare Γ e calcolarne la tangente nel punto $A=(1,0)$.

Soluzione: iperbole; $y=0$.

Esercizio 90. Scrivere l'equazione del luogo dei punti di $\mathbb{R}^2$ tali che la distanza da $r: x-y=1$ sia metà della distanza da $F=(0,2)$.

Soluzione: $x^2+y^2-4xy-4x+8y-2=0$, un'iperbole.

Esercizio 91. Scrivere l'equazione dell'ellisse γ, centrata in $C=(1,2)$, avente i semiassi paralleli agli assi cartesiani e di lunghezza $a=2\sqrt{2}, b=1$. Scrivere poi l'equazione dell'ellisse Γ ottenuta ruotando γ in modo che il semiasse maggiore appartenga alla retta $r: x-y+1=0$.

Soluzione: si veda la soluzione del tema esame del 24 gennaio 2011.

Esercizio 92. Sia dato il fascio di coniche $\mathcal{C}_k: kx^2+2(2-k)xy+ky^2-x-y+1-k=0$.

1. Classificare $\mathcal{C}_3$;
2. dire per quali valori di k si ottengono coniche degeneri;
3. determinare i punti base del fascio;
4. dire per quali valori di k si ottengono iperboli equilatere o circonferenze;
5. classificare le coniche al variare di k.

Soluzione: per $k>1$ ellissi reali; per $k=1$ una parabola degenere; per $k<1$ ($k\neq\frac{3}{4}$) iperboli; per gli altri punti si veda la soluzione del tema esame del 29 giugno 2011.

Esercizio 93. Sia dato il fascio di coniche $\Gamma_h: x^2+(1-h)xy+y^2-3x+hy=0$.

1. Dire per quali valori di h si hanno parabole;
2. studiare Γ_{-1};
3. dimostrare che l'origine è un punto del fascio per ogni h e studiare le tangenti a Γ_h nell'origine al variare di h;
4. trovare i punti base del fascio.

Soluzione: si veda la soluzione del tema esame del 28 giugno 2010.

13 Lezione del 21 giugno 2013

Esercizio 94. Sia $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita da:

$$T(\mathbf{e_1}) = \mathbf{e_1} + 2\mathbf{e_2}, \qquad T(-\mathbf{2e_2}) = -4\mathbf{e_1} - 2\mathbf{e_2}, \qquad T(-\mathbf{e_3}) = \mathbf{e_3}.$$

1. Scrivere la matrice rappresentativa M dell'applicazione rispetto alla base canonica.

2. Dire se l'applicazione è simmetrica rispetto al prodotto scalare canonico.

3. Classificare la quadrica $Q: \ \mathbf{x}^T \cdot M \cdot \mathbf{x} - 1 = 0$ e trovarne una forma canonica.

4. Determinare se la quadrica è una superficie di rotazione.

Esercizio 95. Sia il fascio di coniche dipendente dal parametro $t \in \mathbb{R}$:

$$\gamma_t: \ x^2 - 2(t+1)xy - ty^2 - 2tx - 2ty = 0.$$

1. Determinare t per cui γ_t è una conica degenere.

2. Determinare t per cui γ_t è una circonferenza e calcolarne il centro ed il raggio.

3. Costruire il cilindro C avente:

   - direttrice la conica γ_1 nel piano $z = 0$;
   - generatrici le rette parallele a $r: \begin{cases} x - y = 0 \\ y - z + 1 = 0 \end{cases}$.

4. Classificare l'intersezione di C con un generico piano.

5. Costruire il cono C' avente:

   - direttrice la conica γ_2 nel piano $z = 0$;
   - vertice il punto $V = (0, 0, 1)$.

Esercizio 96. Siano $F = (0, 0, 1)^T$ e $\Pi : x - y - 1 = 0$.

1. Determinare il luogo Q dei punti P soddisfacenti $d(P,F) = \sqrt{2}\, d(P,\Pi)$ e dimostrare che è una superfice algebrica quadrica.

2. Classificare Q, trovarne una sua rappresentazione canonica e dire se Q è una quadrica di rotazione.

3. Trovare l'asse di rotazione di Q ed i piani che intersecano Q secondo una circonferenza.

Esercizio 97. Siano

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1+h & -h \\ 0 & h & 1+h \end{pmatrix}$$

e

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ h & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

.

1. Determinare per quali valori di h le matrici A e B sono simili.

2. Nelle situazioni del punto precedente, supponendo A rappresentante di un'applicazione lineare rispetto ad una base ortonormale, interpretare geometricamente l'applicazione.

3. Interpretare geometricamente l'applicazione lineare rappresentata (rispetto ad una base ortonormale) da

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

.