5.4 La dinamica in sistemi non inerziali

Secondo principio della dinamica

In un sistema di riferimento inerziale il secondo principio della dinamica si scrive

$$\vec{F} = m\vec{a},$$

dove $\vec{a}$ rappresenta l'accelerazione *assoluta*, cioè riferita al sistema fisso, o meglio inerziale, del punto materiale soggetto alla forza $\vec{F}$.
Ricordiamo, tuttavia, che un sistema solidale con la Terra *non è inerziale*; molti altri sistemi di riferimento comunemente usati non sono inerziali. In questo caso, sappiamo dalla *cinematica dei moti relativi* che l'accelerazione assoluta viene così scomposta:

$$\vec{a}_a = \vec{a}_r + \vec{a}_c + \vec{a}_t$$

dove $\vec{a}_r$ rappresenta l'accelerazione *relativa*, $\vec{a}_c$ l'accelerazione *di Coriolis* ed $\vec{a}_t$ l'accelerazione *di trascinamento*.

Oss. L'accelerazione *relativa* misurata in un sistema di riferimento non inerziale *non coincide* con l'accelerazione *assoluta* riferita al sistema inerziale. Poiché la forza $\vec{F}$ è la stessa in entrambi i sistemi di riferimento, nel sistema non inerziale non può valere il secondo principio della dinamica:

$$\vec{F} = m\vec{a}_a \neq m\vec{a}_r$$

Forze apparenti

Avremo invece la legge:

$$\vec{F} - m\vec{a}_c - m\vec{a}_t = m\vec{a}_r$$

che può essere ricondotta alla forma classica del secondo principio introducendo le cosiddette *forze apparenti*:

$$\vec{F}_c \equiv -m\vec{a}_c \quad ; \quad \vec{F}_t \equiv -m\vec{a}_t \quad ; \quad \vec{F}_{app} \equiv \vec{F}_c + \vec{F}_t$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{F} + \vec{F}_c + \vec{F}_t = \vec{F} + \vec{F}_{app} = m\vec{a}_r}$$

Oss. Le *forze apparenti* non corrispondono ad una interazione tra corpi, e quindi *non rispettano la terza legge della dinamica*; sono percepite solo da un osservatore non inerziale.

Esempio: la *forza centrifuga* che spinge gli occupanti di un'automobile verso l'esterno di una curva è una forza apparente.

Moto di un corpo non soggetto ad interazioni

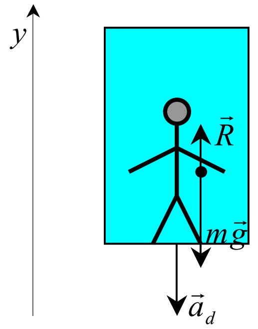
In un sistema non inerziale non vale neppure il *principio d'inerzia*: un corpo non soggetto ad interazioni si muove in generale di moto accelerato!

Infatti: $\vec{F} = 0 \;\Rightarrow\; \vec{a}_a = 0 \;;\; \vec{a}_r = -\vec{a}_c - \vec{a}_t \neq 0 \;;\; \vec{a}_r = \frac{1}{m}\vec{F}_{app}$

Sistema in moto traslatorio puro

Esempio: **ascensore in discesa accelerata**. Come sistema inerziale si può scegliere un sistema solidale con la Terra (in questo caso è un'ottima approssimazione); come sistema mobile quello dell'ascensore. Studiamo le forze che agiscono su un passeggero.

L'accelerazione di trascinamento è la stessa per tutti i punti del sistema (essendo il moto puramente traslatorio) e vale per ipotesi:



$$\vec{a}_t = -a_d\hat{u}_y$$

Il passeggero è fermo rispetto alla cabina:

$$\vec{v}_r = 0 \Rightarrow \vec{a}_c = 2\vec{\omega}\times\vec{v}_r = 0$$

$$\vec{a}_r = 0 \Rightarrow m\vec{a}_r = \vec{F}+\vec{F}_t = 0$$

La forza $\vec{F}$ è la somma della forza peso e della reazione vincolare, perciò avremo:

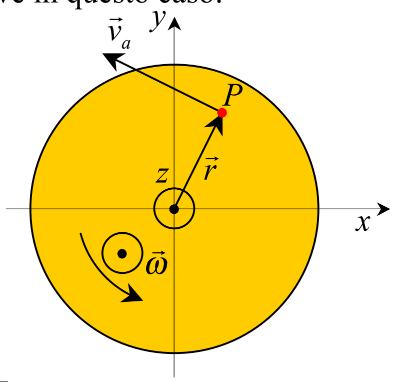
$$\vec{F} = (-mg+R)\hat{u}_y \quad ; \quad \vec{F}_t = -m\vec{a}_t = +ma_d\hat{u}_y \quad \Rightarrow \quad R = m(g-a_d)$$

E' come se all'interno dell'ascensore l'accelerazione di gravità fosse diminuita al valore $g-a_d$ per effetto della discesa accelerata. Se risulta $a_d = g$ il passeggero ha la sensazione di essere privo di peso; la forza in grado di contrastare la sensazione di peso è una *forza apparente*.

Sistema in moto rotatorio puro

Consideriamo un punto materiale *P* di massa *m* che sia *vincolato* ad una piattaforma rotante con velocità angolare costante. Siano *r* la distanza di *P* dall'asse di rotazione ed $\vec{\omega}$ il vettore velocità angolare (costante). La legge di composizione delle velocità si scrive in questo caso:

$$\vec{v}_r = 0 \Rightarrow \vec{v}_a = \vec{v}_t = \vec{\omega}\times\vec{r}_r = \vec{\omega}\times\vec{r}$$



Il punto *P* si muove di moto *circolare uniforme* per un osservatore inerziale, mentre rispetto al sistema rotante solidale con la piattaforma è *fermo*. Avremo perciò:

$$\vec{a}_r = 0 \Rightarrow \vec{F}+\vec{F}_{app} = \vec{F}+\vec{F}_t+\vec{F}_c = 0$$

Le forze *reali* sono la forza peso e la reazione vincolare; avremo dunque:

$$\vec{W}+\vec{R}-m(\vec{a}_c+\vec{a}_t) = 0 \Rightarrow m\vec{g}+\vec{R}-m\left[2\vec{\omega}\times\vec{v}_r+\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r})\right]=0$$

Il primo termine fra parentesi è la *forza di Coriolis*, che si annulla se la velocità relativa è zero (come nel nostro caso), oppure se è parallela all'asse di rotazione.
Il secondo termine, dovuto all'accelerazione di trascinamento, prende il nome di *forza centrifuga*, e vale in questo caso: $\vec{F}_t = m\omega^2 r\hat{u}_r$. E' diretta radialmente verso l'esterno (da cui il nome *centrifuga*), in verso opposto all'accelerazione di trascinamento, che è poi l'accelerazione centripeta del moto circolare.

L'equazione di equilibrio diventa:

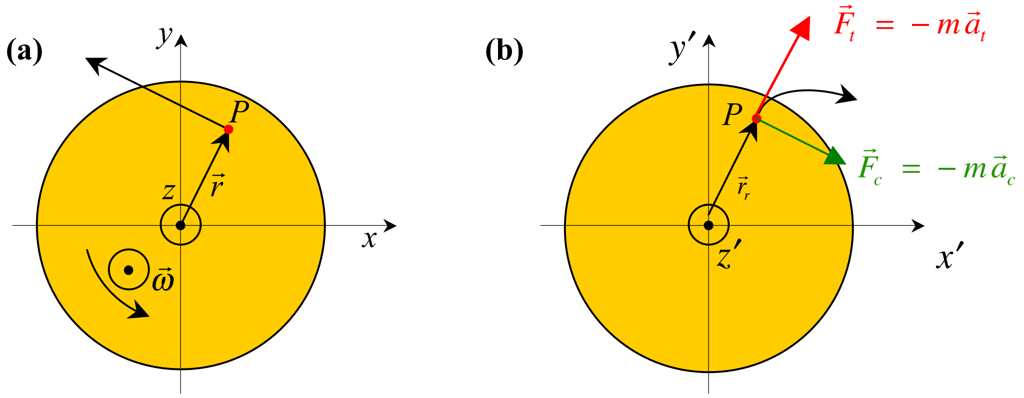
$$-mg\hat{u}_z+\vec{R}+m\omega^2 r\hat{u}_r = 0 \Rightarrow \vec{R} = mg\hat{u}_z - m\omega^2 r\hat{u}_r = \vec{R}_N+\vec{R}_T$$

La reazione vincolare ha perciò una componente *normale* alla piattaforma, che bilancia la forza peso, ed una ad essa *tangente*, che bilancia la forza centrifuga.

Supponiamo che ad un certo istante di tempo il punto materiale P si *stacchi* dalla piattaforma: non abbiamo più alcuna reazione vincolare tangente (supponendo per semplicità che la superficie della piattaforma sia priva di attrito), la velocità relativa non è più vincolata a zero. Si avrà che:

- per un osservatore inerziale, il punto P "fugge" lungo la tangente alla traiettoria circolare, con una velocità $v = \omega r$, muovendosi di moto rettilineo uniforme sulla piattaforma (la reazione vincolare bilancia la forza peso e la risultante delle forze reali è nulla);
- Per un osservatore solidale con la piattaforma, il punto si muove in maniera più complessa, sotto l'azione della forza centrifuga e della forza di Coriolis (mentre *le forze reali si annullano*). La traiettoria sarà curvilinea, diretta verso l'esterno (a causa della forza centrifuga) e in direzione opposta a quella del moto della piattaforma, per effetto della forza di Coriolis.

In figura è schematizzato il moto del punto materiale P a partire dall'istante in cui si stacca dalla piattaforma, nel riferimento inerziale (a) e nel sistema solidale con la piattaforma (b).



5.5 Rotazione della terra e moto di caduta dei gravi

Impostazione del problema

Un moto di trascinamento qualunque può essere sempre scomposto in un moto di traslazione ed uno di rotazione, che sono i casi visti finora. Per quanto riguarda quest'ultimo caso, studiamo più in dettaglio il moto di rotazione della Terra intorno al proprio asse e le conseguenze di tale moto sulla caduta dei gravi.

Assumiamo come *sistema relativo* un sistema di riferimento con origine nel centro della Terra e solidale ad essa, cioè in moto rotatorio puro con la Terra, mentre come *sistema assoluto approssimativamente inerziale* assumiamo un sistema con origine sempre nel centro della Terra ma che non partecipa al suo moto di rotazione (partecipa invece al moto di rivoluzione intorno al Sole, al moto del Sistema Solare intorno al centro della via Lattea, ecc., che però sono molto più lenti del primo e perciò possono essere qui trascurati).

L'accelerazione *assoluta* di un grave in caduta libera è dovuta alla sola forza *gravitazionale*:

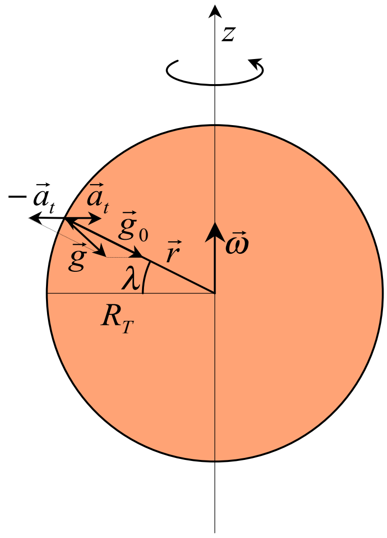
$$\vec{a}_a = \vec{g}_0 = \frac{1}{m}\vec{F}_{\text{grav}}(m, M_T) = -\gamma\frac{M_T}{R_T^2}\hat{u}_r \qquad \text{diretta verso il centro della Terra}$$

Per un osservatore solidale con la Terra, lo stesso grave subisce un'accelerazione *relativa*:

$$\vec{a}_r = \vec{a}_a - \vec{a}_c - \vec{a}_t$$

Vediamo allora quali sono le conseguenze in alcuni casi importanti.

<u>Grave fermo</u>



Se il grave è fermo nel sistema relativo, l'accelerazione di Coriolis si annulla (come nel caso del punto materiale *vincolato* alla piattaforma rotante). L'accelerazione di trascinamento vale:

$$\vec{a}_t = \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}_r) = +\omega^2 R_T \cos(\lambda)\,\hat{u}_N$$

dove abbiamo indicato con $\hat{u}_N$ il versore uscente da P diretto perpendicolarmente verso l'asse di rotazione z, e con λ la *latitudine* del punto P, cioè l'angolo che la congiungente con il centro della Terra forma con il piano equatoriale. L'accelerazione di trascinamento $\vec{a}_t$, dunque, è diretta verso l'interno della Terra e dipende, in modulo, dalla latitudine: è nulla ai poli e massima all'equatore.
L'accelerazione di gravità effettiva vale allora:

$\vec{g} = \vec{a}_r = \vec{a}_a - \vec{a}_t = \vec{g}_0 - \omega^2 R_T \cos(\lambda)\,\hat{u}_N$. Si noti che:

<u>Oss.1</u> Il termine *centrifugo* dovuto all'accelerazione di trascinamento *riduce* il valore dell'accelerazione di gravità di un fattore che dipende dalla latitudine:

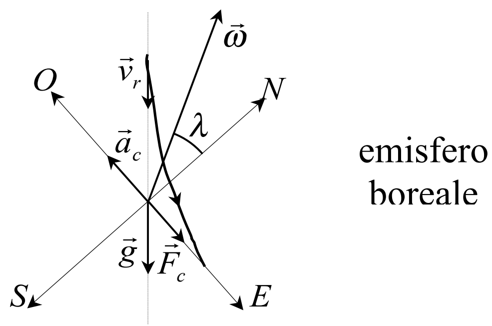
$$|\vec{g}| \le |\vec{g}_0|; \quad |\vec{g}| = f(\lambda).$$

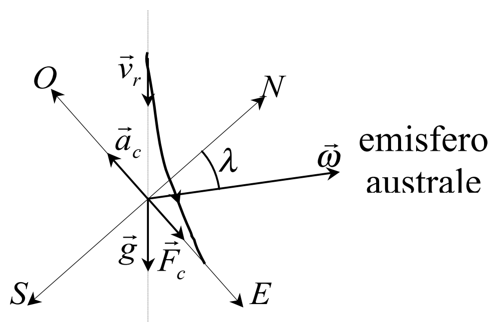
<u>Oss.2</u> La variazione indotta dall'accelerazione di trascinamento è comunque abbastanza piccola, infatti:

$$|\vec{a}_t| \le \omega^2 R_T \cong 3.3\cdot 10^{-2}\, m\cdot s^{-2} << 9.81\, m\cdot s^{-2} = |\vec{g}_0|$$

<u>Oss.3</u> Lo stesso termine centrifugo, inoltre, *sposta la verticale* (cioè la direzione indicata dal *filo a piombo*) rispetto alla congiungente con il centro della Terra: nell'emisfero boreale (risp. australe) la direzione di $\vec{g}$ punta lievemente verso sud (risp. nord). Questo secondo effetto si annulla ai poli, dove è nullo il termine centrifugo, ma anche all'equatore dove esso è massimo ma è parallelo all'accelerazione assoluta $\vec{g}_0$.

<u>Corpo in caduta</u>





Se un grave non è fermo al suolo, ma sta cadendo, la sua velocità relativa al sistema "Terra" non è nulla, perciò avremo un'accelerazione di Coriolis diversa da zero. **Per semplicità consideriamo ora *solo gli effetti dell'accelerazione di Coriolis*, sapendo che ad essi vanno sommati gli effetti dell'accelerazione di trascinamento.**
La *forza di Coriolis* è una forza apparente in grado di produrre un'accelerazione uguale ed opposta all'accelerazione di Coriolis:

$$\vec{F}_c = -m\vec{a}_c - m\, 2\vec{\omega}\times\vec{v}_r$$

Per analizzarne gli effetti dal punto di vista qualitativo, immaginiamo che la velocità relativa sia diretta verticalmente, come l'accelerazione di gravità effettiva (perturbata dall'accelerazione di trascinamento), cosa che avverrebbe in *assenza* della forza di Coriolis. Si noti che:

Oss.1 La Forza di Coriolis ha direzione perpendicolare alla verticale, oltre che all'asse di rotazione della Terra (risulta cioè ortogonale al piano meridiano passante per P) ed è diretta *verso oriente* in entrambi gli emisferi.
Di conseguenza la direzione di caduta dei gravi risulta spostata verso est rispetto alla verticale.

Oss.2 Il suo modulo vale circa $F_c = 2m\omega v_r \cos\lambda$ (l'angolo tra i vettori $\vec{\omega}$ e $\vec{v}_r$ è $\lambda + \pi/2$, da cui $\sin(\lambda + \pi/2) = \cos\lambda$). Esso quindi dipende oltre che dalla velocità relativa del grave anche dalla latitudine. In particolare è, a parità di altre condizioni, massimo all'equatore e nullo ai poli.

Oss.3 Per quanto riguarda il caso della Terra, la forza di Coriolis ha una grande influenza sui moti dei venti e delle correnti d'acqua. In particolare, si ha che nell'emisfero boreale (risp. australe):
- la sponda destra (risp. sinistra) dei fiumi è più erosa della sponda sinistra (risp. destra);
- i cicloni(#) ruotano in senso antiorario (risp. orario);
- gli anticicloni(#) ruotano in senso orario (risp. antiorario).

Oss.4 L'origine della forza di Coriolis risiede nella differente velocità di trascinamento (rispetto al sistema assoluto) dei diversi punti della traiettoria del corpo (nel sistema relativo).