

FEDERICO BIZZARRI

# ELETROTECNICA

INGEGNERIA INFORMATICA – POLITECNICO DI MILANO



Copyright © 2014 Federico Bizzarri

*First printing, April 2014*

# *Indice*

<b>1</b>	<b><i>Capitolo 1</i></b>	<b>11</b>
1.1	<i>La carica elettrica e il principio di conservazione della carica</i>	11
1.2	<i>Il campo elettrico</i>	13
1.3	<i>La legge di Coulomb</i>	14
1.4	<i>Campo elettrico generato da una carica puntiforme nel vuoto</i>	14
1.5	<i>Tensione elettrica</i>	15
1.6	<i>Legge di Kirchhoff per le tensioni</i>	19
1.7	<i>Flusso di un campo vettoriale</i>	20
1.8	<i>Legge di Gauss</i>	20
1.9	<i>Dielettrici (o isolanti)</i>	21
1.10	<i>La corrente elettrica</i>	21
1.11	<i>La formalizzazione del principio di conservazione della carica</i>	22
1.12	<i>Conduttori</i>	23
1.13	<i>La legge di Ohm</i>	25
1.14	<i>La legge di Kirchhoff per le correnti</i>	25
1.15	<i>Il primo circuito elettrico</i>	26
<b>2</b>	<b><i>Capitolo 2</i></b>	<b>29</b>
2.1	<i>Teoria dei circuiti - il modello circuitale</i>	29
2.2	<i>Componenti e variabili descrittive - Amperometro e Voltmetro ideali</i>	30
2.3	<i>Cenni di teoria dei grafi</i>	33
2.4	<i>Grafo di un componente e grafo di un circuito</i>	34

2.5 <i>Esercizio: circuito e grafo</i>	36
2.6 <i>Nota sulle equazioni algebriche</i>	37
2.7 <i>Le leggi di Kirchhoff</i>	38
2.8 <i>La matrice di incidenza e la matrice di incidenza ridotta</i>	43
2.9 <i>Equazioni di Tableau</i>	45
<b>3 Capitolo 3</b>	<b>47</b>
3.1 <i>Potenza ed energia elettrica</i>	47
3.1.1 <i>Bipoli attivi e passivi</i>	48
3.1.2 <i>Potenza assorbita da un <math>n</math>-terminali</i>	48
3.2 <i>Il teorema di Tellegen</i>	48
3.2.1 <i>Esempio 1</i>	49
3.2.2 <i>Esempio 2</i>	50
3.3 <i>Classificazione di un componente</i>	51
3.3.1 <i>Classificazione dei bipoli adinamici in termini energetici</i>	52
3.4 <i>Le basi di definizione</i>	53
3.5 <i>Bipoli notevoli</i>	54
3.5.1 <i>Il resistore lineare</i>	54
3.5.2 <i>Il corto circuito</i>	54
3.5.3 <i>Il circuito aperto</i>	55
3.5.4 <i>Le sorgenti impressive: generatori indipendenti di tensione e di corrente</i>	55
3.6 <i>Esercizio: il primo circuito elementare</i>	56
3.7 <i>Il principio di equivalenza</i>	57
3.7.1 <i>Connessione in serie di bipoli</i>	57
3.7.2 <i>Il partitore di tensione</i>	59
3.7.3 <i>Connessione in parallelo di bipoli</i>	59
3.7.4 <i>Il partitore di corrente</i>	61
3.8 <i>Esercizio</i>	62
3.9 <i>Circuiti equivalenti di Thevènin e Norton</i>	62
3.10 <i>Esercizio</i>	64
3.11 <i>Esercizio</i>	65

<b>4</b>	<b>Capitolo 4</b>	<b>67</b>
4.1	<i>Le sorgenti pilotate</i>	67
4.2	<i>Esempi</i>	69
4.2.1	<i>Un resistore di resistenza negativa</i>	69
4.2.2	<i>Esercizio: risoluzione di una rete</i>	69
4.2.3	<i>Modello equivalente di Thevènin</i>	70
4.2.4	<i>Modello equivalente di Norton 1</i>	70
4.2.5	<i>Modello equivalente di Norton 2</i>	71
4.3	<i>L'analisi nodale</i>	71
4.4	<i>Un esempio guida</i>	72
4.5	<i>Un altro esempio</i>	73
4.6	<i>Analisi nodale con componenti non controllabili in tensione</i>	75
4.6.1	<i>Il caso "a": connessione k – 0</i>	76
4.6.2	<i>Il caso "b": connessione k – h</i>	77
4.6.3	<i>Un caso più complesso</i>	79
4.6.4	<i>Sempre peggio</i>	80
<b>5</b>	<b>Capitolo 5</b>	<b>83</b>
5.1	<i>Teorema di esistenza e unicità</i>	83
5.2	<i>Il principio di sovrapposizione degli effetti</i>	85
5.2.1	<i>Esempio</i>	88
5.3	<i>Il teorema di Thevénin e Norton</i>	89
5.3.1	<i>Esempi di applicazione dei teoremi di Thevénin e Norton</i>	91
<b>6</b>	<b>Capitolo 6</b>	<b>93</b>
6.1	<i>I doppi bipoli</i>	93
6.2	<i>Le rappresentazioni cardinali</i>	94
6.2.1	<i>Forma esplicita con parametri R</i>	94
6.2.2	<i>Forma esplicita con parametri G</i>	95
6.2.3	<i>Forma esplicita con parametri H</i>	96
6.2.4	<i>Forma esplicita con parametri H'</i>	97

6	<i>Matrice T di trasmissione diretta</i>	97
6.4	<i>Esempi</i>	98
6.4.1	<i>Esempio 1</i>	98
6.4.2	<i>Esempio 2</i>	99
6.4.3	<i>Esempio 3</i>	99
6.5	<i>Doppi bipoli lineari affini</i>	99
6.6	<i>Connessione di doppi bipoli</i>	102
6.6.1	<i>Collegamento in serie</i>	102
6.6.2	<i>Collegamento in parallelo</i>	103
6.6.3	<i>Connessione in cascata</i>	103
6.7	<i>Doppi bipoli notevoli</i>	103
6.7.1	<i>Il trasferitore ideale di potenza</i>	103
6.7.2	<i>L'amplificatore operazionale ideale</i>	105
7	<i>Capitolo 7</i>	107
7.1	<i>L'interazione magnetica</i>	107
7.2	<i>Forze magnetiche su cariche in moto - La forza di Lorenz</i>	108
7.3	<i>Campo magnetico di una carica in moto (non relativistico)</i>	109
7.4	<i>Forza magnetica su di una corrente elettrica</i>	110
7.5	<i>Legge di Ampère-Laplace</i>	111
7.6	<i>Campo magnetico di una spira di corrente circolare</i>	113
7.7	<i>La legge di Ampère</i>	114
7.8	<i>Flusso magnetico</i>	116
7.9	<i>Equazioni del campo elettromagnetostatico</i>	117
8	<i>Capitolo 8</i>	119
8.1	<i>Il campo elettromagnetico dipendente dal tempo</i>	119
8.2	<i>La legge di Faraday-Henry</i>	119
8.3	<i>La legge di Ampère-Maxwell</i>	122
8.4	<i>Equazioni di Maxwell (in forma integrale) del campo elettromagnetico</i>	125

9	<i>Capitolo 9</i>	127
9.1	<i>La capacità elettrica - il condensatore</i>	127
9.2	<i>L'autoinduzione - l'induttore</i>	129



*Queste tracce sono il risultato della rielaborazione di appunti, dispense, libri di diversi autori. La loro stesura in formato elettronico è frutto anche del lavoro degli studenti Gloria Ficili, Enrico Fregnan, Gledian Kruja e Paola Muscato durante l'anno accademico 2012-2013. A loro va il mio ringraziamento.*

*Gli studenti, ai quali raccomando di essere ora e sempre lettori critici, che trovassero imprecisioni, errori, lacune nelle tracce sono invitati a segnalarli.*



# 1

## 1.1 La carica elettrica e il principio di conservazione della carica

TUTTA LA MATERIA di cui siamo formati e che ci circonda è composta da particelle elementari (elettroni, protoni, neutroni) che costituiscono atomi e molecole. Queste particelle contengono in sé la proprietà **carica elettrica**.

L'ESISTENZA DI FENOMENI ELETTRICI (**elettrificazione**) era nota già in antichità (in greco antico *ηλεκτρον* – elektron – significa ambra) tanto che Talete di Mileto (640-546 a.C.) riteneva che tali fenomeni — ad esempio l'elettrificazione ottenuta per strofinio dell'ambra che attirava così piccoli corpi — fossero dovuti ad una forza vitale (o "anima") contenuta nella materia stessa. Oggi è per noi esperienza comune che l'ambra, strofinata alla lana, attiri piccoli pezzetti di carta e che il vetro strofinato alla seta faccia lo stesso "attirando" inoltre l'ambra stessa. Diciamo allora che l'ambra e il vetro si "caricano" per strofinio in modo opposto. L'ambra si carica positivamente perché lo strofinio le sottrae alcune particelle cariche negativamente. Il vetro, invece, si carica negativamente perché è esso stesso a sottrarre cariche negative alla seta. Sia l'ambra sia il vetro sono, dopo essere stati "elettrificati", due *corpi carichi*, caratterizzati cioè da un eccesso di carica positiva e negativa, rispettivamente.

IN GENERALE, un corpo carico è un oggetto che non è "neutro" rispetto alla proprietà carica elettrica. Sempre in generale, corpi caratterizzati dal medesimo eccesso di carica si respingono e corpi caratterizzati da eccessi di tipo opposto si attraggono. Si osserva una forza orientata lungo la congiungente i due corpi carichi (figura 1.1), così come avviene per l'attrazione gravitazionale tra due masse.

Lo studente interessato ad approfondire i concetti presentati in questo primo capitolo può fare riferimento al libro "Campi e onde", Marcelo Alonso, Edward J. Finn, edizione italiana a cura di Emilio Gatti, traduzione di Mario Bertolaccini, Camillo Bussolati, Francesca Demichelis, - 2. ed. - Milano: Masson; Reading: Addison-Wesley, ©1991.

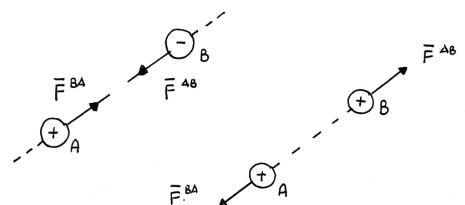


Figura 1.1: Due corpi carichi *A* e *B* esercitano l'uno sull'altro una forza orientata lungo la congiungente i due corpi. Le due forze  $\bar{F}^{AB}$  (esercitata da *A* su *B*) e  $\bar{F}^{BA}$  (esercitata da *B* su *A*) hanno il verso che dipende da come sono caricati i due corpi l'uno rispetto all'altro.

LA CARICA ELETTRICA è **quantizzata**, cioè non esiste una carica più piccola di quella dell'elettrone, che vale  $q_E = -1.602564 \cdot 10^{-19}$  C (C sta per Coulomb dall'omonimo celebre fisico francese). Fu misurata in modo definitivo dal fisico Robert Millikan (1869-1953) ed è uguale ma di segno opposto a quella  $q_P$  del protone. Ogni corpo carico presenta una carica multipla di  $|q_E|$ . La **carica complessiva** di un corpo è data dalla somma algebrica delle sue cariche positive  $q^+$  e negative  $q^-$ .

Una **carica puntiforme**, equivalente del *punto materiale* in meccanica, è una carica ideale, concentrata in un punto singolo dello spazio e priva di dimensioni.

LA CARICA ELETTRICA gode del principio fondamentale di **conservazione**. È infatti stato constatato sperimentalmente che in tutti i fenomeni naturali osservati la carica totale di un sistema **isolato** rimane costante. In altri termini,

*la carica totale di un sistema isolato rimane invariata in qualsiasi fenomeno fisico<sup>1</sup>.*

Il principio di conservazione della carica, è considerato valido dalla fisica classica, dalla teoria della relatività e dalla meccanica quantistica. L'unico modo in cui la carica interna ad un sistema, racchiuso in un volume  $V$ , può variare è in presenza di una **corrente elettrica** che fluisce attraverso la superficie di separazione del volume stesso dal mondo esterno. Approfondiremo questo argomento nel seguito (cfr. capitolo 1.11).

PER DESCRIVERE COME LA CARICA ELETTRICA SI DISTRIBUISCE all'interno di un corpo e/o sulla superficie che lo delimita, introduciamo la **densità volumetrica** di carica  $\rho_V$  propria di un corpo di volume  $V$  e la **densità superficiale** di carica  $\rho_S$  associata ad una superficie  $S$ . In figura 1.2 la superficie  $S$  è stata suddivisa in tante areole  $dS_k$  ( $k = 1, 2, \dots$ ) centrate nel punto  $(x_k, y_k)$ . La densità superficiale di carica  $\rho_S(x, y)$  su ogni areola  $dS_k$  esprime la quantità di carica per unità di superficie che è possibile misurare muovendosi su  $S$ . Se si assume che tale densità sia costante e pari a  $\rho_{S_k} = \rho_S(x_k, y_k)$  su ogni areola  $dS_k$ , allora la carica complessiva  $Q$  sulla superficie è, approssimativamente, data da

$$Q \approx \sum_k \rho_{S_k} dS_k . \quad (1.1)$$

Più precisamente, passando al limite in cui le singole areole  $dS_k$  si considerano infinitesime, possiamo scrivere,

$$Q = \iint_S \rho_S(x, y) dx dy = \int_S \rho_S dS . \quad (1.2)$$

<sup>1</sup> Un sistema isolato è un sistema che non scambia con l'ambiente circostante né massa, né calore, né lavoro. Da un punto di vista sperimentale, è un sistema che ha interazioni trascurabili con l'ambiente circostante (probabilmente il solo universo è considerabile un vero sistema isolato).

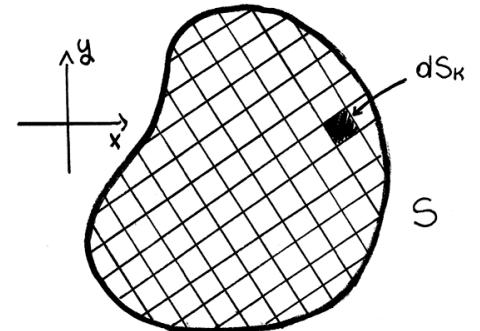


Figura 1.2: Una superficie  $S$  suddivisa in areole elementari  $dS_k$ .

Analogamente, se considerassimo un volume  $V$ , la carica  $Q$  in esso contenuta si otterrebbe, a partire dalla densità volumetrica di carica  $\rho_V(x, y, z)$ , come

$$Q = \iiint_V \rho_V(x, y, z) dx dy dz = \int_V \rho_V dV . \quad (1.3)$$

## 1.2 Il campo elettrico

INTRODUCIAMO IN PRIMIS il concetto generale di **campo**. Possiamo darne due definizioni:

1. campo è una regione dello spazio in cui si studia un fenomeno fisico;
2. campo è una grandezza fisica, qualunque, funzione dello spazio ed eventualmente del tempo.

Un campo può essere **scalare**, se descritto da una funzione scalare  $f(x, y, z, t)$  dello spazio ed eventualmente del tempo (ad esempio la temperatura dell'aria in una stanza è un campo scalare), oppure **vettoriale** se descritto da una funzione vettoriale  $\vec{A}(x, y, z, t)$  dello spazio ed eventualmente del tempo (ad esempio la velocità dell'acqua di un fiume è un campo vettoriale).

In figura 1.3,  $\vec{A}$  è rappresentato in una terna cartesiana destrorsa (cfr. figura 1.4), identificata dai versori  $\hat{i}$ ,  $\hat{j}$  e  $\hat{k}$  che indicano la direzione e il verso degli assi  $x$ ,  $y$ , e  $z$ , rispettivamente. Il vettore  $\vec{A}$  può essere espresso in funzione delle sue proiezioni sugli assi coordinati scrivendo  $\vec{A} = A_x \hat{i} + A_y \hat{j} + A_z \hat{k}$ . Il suo modulo, grandezza scalare che ne esprime l'intensità, è  $A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}$ .

PER POTER DEFINIRE OPERATIVAMENTE IL CAMPO ELETTRICO, introduciamo il concetto di **carica di prova**. Prendiamo una carica puntiforme  $q$  positiva e mettiamola in una regione dello spazio<sup>2</sup>. Se  $q$  risente di una forza  $\vec{F}$  proporzionale a se stessa, allora *affermiamo* che in quella regione dello spazio è presente un **campo elettrico**  $\vec{E} = \vec{F}/q$ .  $\vec{E}$  è un campo vettoriale che ha direzione e verso dati da  $\vec{F}$ ,  $q$  è infatti positiva per definizione, e modulo proporzionale al modulo di  $\vec{F}$  attraverso  $q^{-1}$ . Il campo elettrico si misura in  $\text{NC}^{-1}$ . Rifacendoci alla definizione "1" di campo, ogni regione in cui una carica è soggetta ad una forza proporzionale ad essa è detta campo elettrico.

In generale, se  $\vec{E} = \vec{E}(x, y, z, t)$ , abbiamo a che fare con un campo elettrico tempo-variante. Si parla invece di campo stazionario (con-

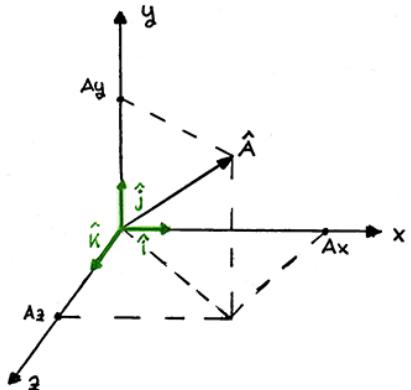


Figura 1.3: Rappresentazione di un vettore in  $\mathbb{R}^3$ .

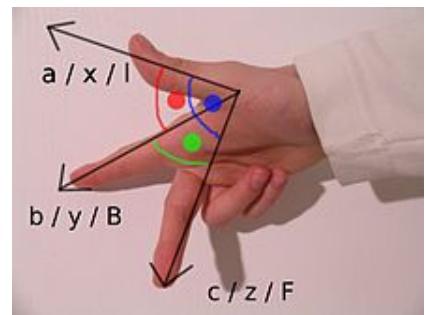


Figura 1.4: Un modo semplice per determinare l'orientazione degli assi di una terna destrorsa o normale è dato dalla *regola della mano destra* che è schematizzata in figura.

<sup>2</sup> La definiamo carica di prova nel senso che con la sua presenza non è in grado di alterare i fenomeni fisici (elettrici) presenti nella regione di spazio in cui la poniamo. In altre parole, dopo aver definito il campo elettrico prodotto da una carica puntiforme, potremmo dire che il campo prodotto da  $q$  è trascurabile rispetto ai campi presenti nella regione di spazio che stiamo considerando. In questo senso possiamo vederla come una sonda che immagazzino nello spazio e che ci permette di misurare grandezze elettriche senza influenzarle.

dizione statica) se  $\frac{\partial \bar{E}(x, y, z, t)}{\partial t} = 0$  e di campo quasi-stazionario se  $\frac{\partial \bar{E}(x, y, z, t)}{\partial t} \approx 0$ .

Come è possibile generare un campo elettrico? Ad esempio con una carica puntiforme.

### 1.3 La legge di Coulomb

**LA LEGGE DI COULOMB È UNA LEGGE STATICÀ.** Prendiamo  $q_1$  e  $q_2$  cariche puntiformi, ferme rispetto ad un osservatore in un sistema inerziale nel vuoto<sup>3</sup>. L'interazione elettrostatica tra  $q_1$  e  $q_2$  (che si manifesta mediante una forza) è proporzionale alle loro cariche e inversamente proporzionale al quadrato della loro distanza. La direzione della forza è quella della linea congiungente le cariche stesse. Il verso dipende dal segno delle cariche.

In figura 1.5 la forza esercitata da  $q_1$  su  $q_2$  è esprimibile come

$$\begin{aligned}\bar{F}_{q_1 q_2} &= k_e \frac{q_1 q_2}{|\bar{r}_2 - \bar{r}_1|^3} (\bar{r}_2 - \bar{r}_1) \\ &= k_e \frac{q_1 q_2}{|\bar{r}_2 - \bar{r}_1|^2} \hat{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{|\bar{r}_2 - \bar{r}_1|^2} \hat{r}\end{aligned}, \quad (1.4)$$

dove  $\epsilon_0$  è la costante dielettrica del vuoto e vale  $8.854 \cdot 10^{-12} \text{ N}^{-1} \text{ m}^{-2} \text{ C}^2$ . Se  $q_1 q_2 > 0$ , allora  $\bar{F}_{q_1 q_2}$  è orientata come  $\hat{r}$  altrimenti ha il verso opposto.  $\bar{F}_{q_2 q_1}$  è applicata in  $q_1$  e ha verso opposto a quello di  $\bar{F}_{q_1 q_2}$  perché è opposto ad  $\hat{r}$  il verso di  $\bar{r}_1 - \bar{r}_2$ .

### 1.4 Campo elettrico generato da una carica puntiforme nel vuoto

**LA CARICA PUNTIFORME CHE GENERA IL CAMPO** in figura 1.6 è  $Q > 0$ , ferma rispetto all'osservatore, in un sistema inerziale, nel vuoto.  $q$  è invece una carica di prova che ricordiamo essere positiva per definizione. Se posizioniamo  $q$  in  $P$ , in base a quanto detto a proposito della forza di Coulomb, rileviamo  $\bar{F}_{Qq} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qQ}{r^2} \hat{r}$  (esercitata da  $Q$  su  $q$ ). Dalla definizione operativa di campo elettrico si ricava quindi

$$\bar{E} = \frac{\bar{F}}{q} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \hat{r}. \quad (1.5)$$

Notiamo che se  $P \rightarrow \infty$  l'intensità del campo  $E(P) \rightarrow 0$ . Viceversa, se  $P \rightarrow 0$ , l'intensità del campo  $E(P) \rightarrow \infty$ . Il campo elettrico generato

<sup>3</sup> Un sistema inerziale è un sistema di riferimento tale per cui se un punto materiale libero, cioè non sottoposto a forze o ad una risultante di forze nulle, viene posto in condizione di quiete esso rimane in tale condizione.

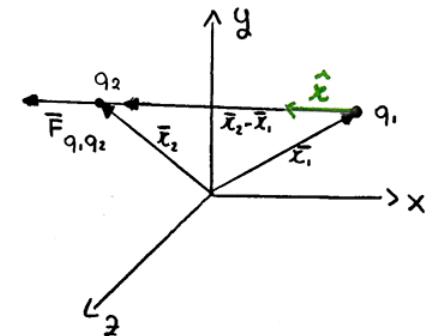


Figura 1.5: Due cariche nello spazio e la forza che esercitano l'una sull'altra.

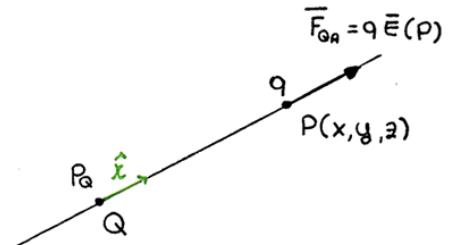


Figura 1.6: Campo elettrico generato da una carica puntiforme.

da una carica puntiforme è un **campo radiale**, cioè in ogni punto  $P$  dello spazio è diretto come un “raggio” che congiunge  $P$  alla carica puntiforme che genera il campo.

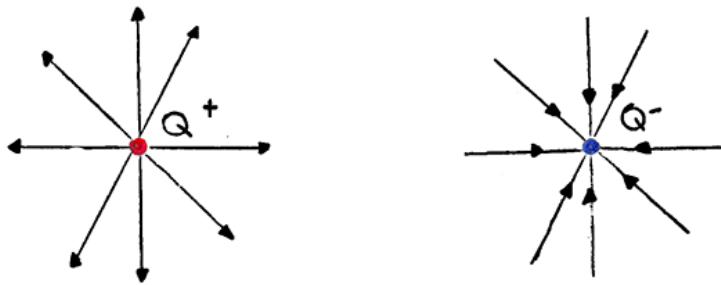


Figura 1.7: Linee di forza di un campo elettrico generato da una carica puntiforme  $Q$ .

SE CI FOSERO  $N$  CARICHE ELETTRICHE  $Q_k$  ( $k = 1, 2, \dots, N$ ) posizionate in  $P_k$  (figura 1.8), potremmo definire un *campo elettrico risultante* nel punto  $P$  sovrapponendo gli effetti delle diverse cariche che distano  $r_k$  da  $P$ .

$$\bar{E} = \sum_{k=1}^N \bar{E}_k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{k=1}^N \frac{Q_k}{r_k^2} \hat{r}_k . \quad (1.6)$$

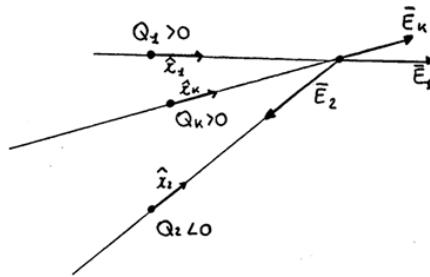


Figura 1.8: Campo elettrico risultante dalla sovrapposizione dei campi generati da più cariche puntiformi.

LE LINEE DI FIGURA 1.9 SI CHIAMANO **linee di forza** del campo e, in ogni loro punto, il campo elettrico è ad esse tangente. Si chiamano linee di forza perché definiscono la direzione in cui una carica positiva di prova tenderebbe a muoversi “spinta” dal campo.

Esempi di linee di forza per campi elettrici generati da cariche puntiformi poste su un piano sono riportati nelle figure 1.10 e 1.11. Un caso tridimensionale è esemplificato in figura 1.12.

## 1.5 Tensione elettrica

SE UNA CARICA VIENE LASCIATA LIBERA DI MUOVERSI in una regione in cui c’è campo elettrico, essa subisce una forza e quindi si

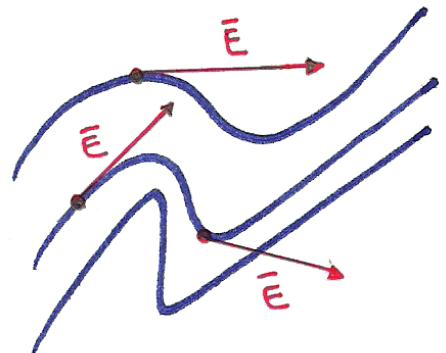


Figura 1.9: Linee di forza: in ogni punto il campo è ad esse tangente. Dove le linee di forza sono maggiormente concentrate il campo è più intenso.

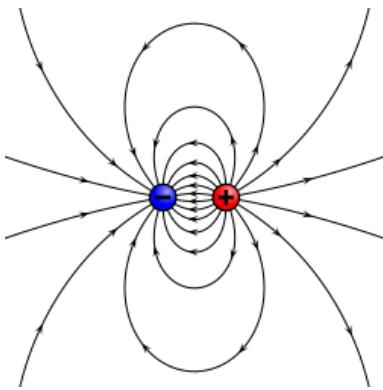


Figura 1.10: Linee di forza del campo elettrico planare generato da un *dipolo elettrico* costituito da due cariche uguali ma di segno opposto.

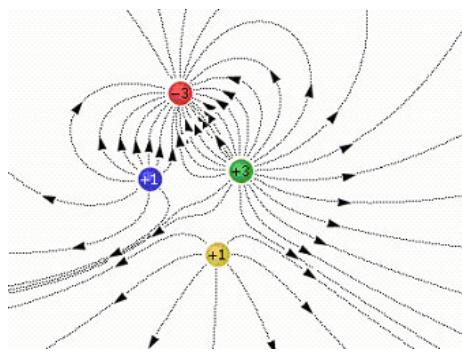


Figura 1.11: Linee di forza del campo elettrico planare generato da più cariche elettriche, di segno e valore diverse.

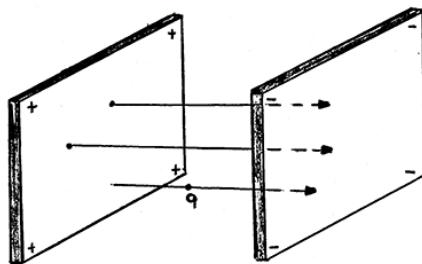


Figura 1.12: Due piastre caricate di segno opposto generano un campo elettrico uniforme che ha medesima intensità direzione e verso.

mette in moto. La forza prodotta dal campo elettrico tende a farla muovere lungo le linee di forza del campo stesso<sup>4</sup>. Nel muovere la carica nella regione di spazio in cui è presente il campo elettrico, esso stesso compie lavoro e quindi modifica l'energia della carica. Cosa accade se voglio muovere una carica da un punto  $A$  ad un punto  $B$ , ad esempio lungo il percorso  $\gamma_1$  rappresentato in figura 1.13? In questo caso non sarà il campo a compiere lavoro, ma sono io che debbo oppormi alla forza generata dal campo elettrico.

SPEZZIAMO IL PERCORSO  $\gamma_1$  in tanti piccoli tratti  $d\bar{l}_k$  rettilinei, cioè approssimiamo la curva con una spezzata (figura 1.14). Il lavoro che devo compiere lungo il tratto  $d\bar{l}_1$  è pari a<sup>5</sup>  $\mathcal{L}_1 = -q\bar{E}_1 \cdot d\bar{l}_1 = -qE_1 dl_1 \cos \alpha_1$  e quindi, sommando i contributi lungo tutto il percorso, ricavo l'approssimazione

$$\mathcal{L}_{AB}^{\gamma_1} \approx -q \sum_{k=1}^N E_k dl_k \cos \alpha_k . \quad (1.7)$$

Al limite in cui considero infinitesimi i singoli tratti  $d\bar{l}_k$ , la 1.7 può essere scritta in forma integrale

$$\mathcal{L}_{AB}^{\gamma_1} = -q \int_{\gamma_1} \bar{E} \cdot d\bar{l} . \quad (1.8)$$

SE PRENDO UN ALTRO PERCORSO per andare da  $A$  a  $B$  e lo chiamo  $\gamma_2$ , in generale si avrà  $\mathcal{L}_{AB}^{\gamma_2} \neq \mathcal{L}_{AB}^{\gamma_1}$ . Siamo interessati a quelle situazioni in cui il lavoro per portare una carica elettrica da  $A$  a  $B$  non dipende dal percorso. In quel caso il campo elettrico si dice **conservativo** e, come accade ad esempio per il campo gravitazionale, possiamo definire un'**energia potenziale**  $W(P)$  che dipende dal generico punto  $P$  della regione di spazio in cui viene definita e in cui è presente il campo. Tale funzione consente di esprimere il lavoro che si deve compiere per muovere una carica dal  $A$  a  $B$  lungo un qualunque percorso come  $\mathcal{L}_{AB}^{\gamma_1} = \mathcal{L}_{AB}^{\gamma_2} = W(B) - W(A)$ .

NORMALIZZANDO LA FUNZIONE  $W$  RISPETTO ALLA CARICA  $q$  si definisce la funzione  $V(P) = W(P)/q$  che chiamiamo **potenziale elettrico**. Inoltre definiamo **tensione elettrica**  $V_{BA}$  la differenza di potenziale  $V_B - V_A$ , cioè il lavoro (normalizzato rispetto alla carica) che dobbiamo compiere per muovere una carica da  $A$  a  $B$ . La tensione elettrica si misura in Volt [V]. Una tensione di 1V è il lavoro necessario per spostare una carica di 1C lungo un percorso rettilineo di 1m in una regione in cui ci sia un campo elettrico, diretto come il percorso che voglio far compiere alla carica ma di verso opposto, di intensità pari a  $1\text{Nm}^{-1}$ .

<sup>4</sup> Da notare che siamo sempre nel vuoto.

<sup>5</sup> Si noti il segno “-” che compare in  $\mathcal{L}_1$  e quindi nella 1.7 e che tiene in conto il fatto che per muovere la carica debbo compiere un lavoro opponendomi alla forza  $q\bar{E}$  esercitata dal campo sulla carica  $q$ .

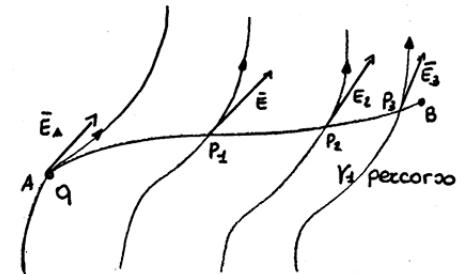


Figura 1.13: Il percorso  $\gamma_1$  lungo il quale voglio muovere la carica  $q$  dal punto  $A$  al punto  $B$ .

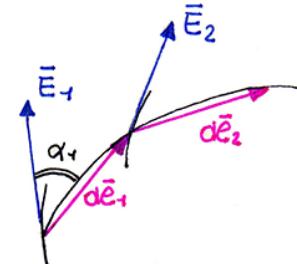


Figura 1.14: Suddivisione del percorso  $\gamma_1$  in piccoli spostamenti rettilinei lunghi i quali il campo elettrico è assunto costante.

È IMPORTANTE NOTARE CHE se il campo elettrico è conservativo allora il lavoro fatto per spostare una carica lungo un percorso chiuso (figura 1.15) è identicamente nullo:

$$\begin{aligned} - \int_{\gamma_1} \bar{E} \cdot d\bar{l} &= \frac{\mathcal{L}_{AB}^{\gamma_1}}{q} = V_{BA} \\ - \int_{\gamma_2} \bar{E} \cdot d\bar{l} &= \frac{\mathcal{L}_{BA}^{\gamma_2}}{q} = - \frac{\mathcal{L}_{AB}^{\gamma_2}}{q} = -V_{BA} \\ \int_{\gamma_1 \cup \gamma_2} \bar{E} \cdot d\bar{l} &= \oint_{\gamma} \bar{E} \cdot d\bar{l} = \frac{\mathcal{L}_{AB}^{\gamma_1} + \mathcal{L}_{BA}^{\gamma_2}}{q} = V_{BA} - V_{BA} = 0 \end{aligned} \quad (1.9)$$

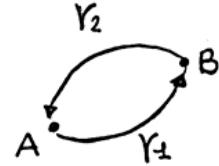


Figura 1.15: Percorso chiuso  $\gamma$  da  $A$  ad  $A$  passando per  $B$ :  $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2$ .

VEDREMO IN SEGUITO introducendo le equazioni di Maxwell che *in condizioni statiche (stazionarietà) il campo elettrico è conservativo*. Ai fini della nostra trattazione, se non esplicitamente specificato, assumeremo la conservatività del campo elettrico nell'ipotesi più debole di quasi-stazionarietà. Torneremo su quest'ipotesi nell'introdurre il modello circuitale.

VERIFICHIAMO ADESSO CHE il campo elettrico generato da una carica puntiforme  $Q$  (figura 1.16) ammette un potenziale ovvero è conservativo. Suddividendo il percorso  $\gamma$  in figura 1.16 in tratti rettilinei  $d\bar{l}$  rappresentati in figura 1.17, il lavoro necessario per muovere una carica  $q$  lungo ciascun tratto  $d\bar{l}$  può essere scritto come

$$d\mathcal{L} = -q \bar{E} \cdot d\bar{l} = -q \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^2} \frac{Q}{r^2} \hat{r} \cdot d\bar{l}. \quad (1.10)$$

Facendo riferimento alla figura 1.17 notiamo come sia possibile scomporre il vettore  $d\bar{l}$  nella somma di due contributi, uno ( $d\bar{l}_{||}$ ) diretto come il versore  $\hat{r}$  e uno ( $d\bar{l}_{\perp}$ ) normale ad esso. Possiamo allora riscrivere la 1.10 come

$$\begin{aligned} d\mathcal{L} &= -q \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^2} \frac{Q}{r^2} \hat{r} \cdot (d\bar{l}_{\perp} + d\bar{l}_{||}) = -q \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^2} \frac{Q}{r^2} \hat{r} \cdot d\bar{l}_{||} = \\ &= -q \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^2} \frac{Q}{r^2} \hat{r} \cdot \underbrace{\hat{r} dr}_{d\bar{l}_{||}} = -q \frac{1}{4\pi\epsilon r^2} \frac{Q}{r^2} dr \end{aligned} \quad (1.11)$$

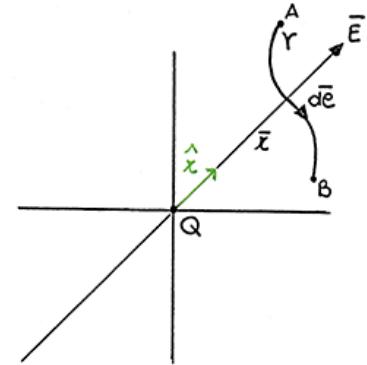


Figura 1.16: Un percorso  $\gamma$  immerso nel campo radiale generato da una carica puntiforme.

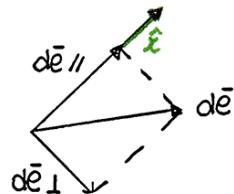


Figura 1.17: Scomposizione del passo infinitesimo  $d\bar{l}$ .

e quindi ottenere

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}_{AB}^{\gamma} &= - \int_A^B \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0} \frac{dr}{r^2} \\
 &= -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0} q \left( -\frac{1}{r} \right) \Big|_{r_A}^{r_B} = -q \left( -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r_B} + \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r_A} \right) \\
 &= -q \left( \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r_A} - \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r_B} \right) = -q(V_A - V_B) = -qV_{AB} = qV_{BA}
 \end{aligned} \tag{1.12}$$

che non dipende dal percorso ma solo da  $A$  e  $B$ . Il campo elettrico ammette quindi un potenziale  $V(r) = \frac{Q}{(4\pi\epsilon_0 r)}$ .

È IMPORTANTE SOTTOLINEARE come qualunque energia potenziale, e di conseguenza il potenziale elettrico, sia una grandezza definita a meno di una costante additiva. In altre parole, se scrivessimo a partire da  $V(P)$  una nuova funzione potenziale  $\tilde{V}(P) = V(P) + V_0$  con  $V_0$  costante, il lavoro necessario per spostare un carica  $q$  da  $A$  a  $B$  (normalizzato rispetto alla carica) resterebbe invariato essendo  $\frac{\tilde{\mathcal{L}}_{AB}}{q} = \tilde{V}(B) - \tilde{V}(A) = V(B) + V_0 - (V(A) + V_0) = \frac{\mathcal{L}_{AB}}{q}$ . Per convenzione, si definisce  $V(\infty) = 0$  e quindi si ottiene che

$$\frac{\mathcal{L}_{\infty,A}}{q} = - \int_{\infty}^A \bar{E} \cdot d\bar{l} = V_A - V(\infty) = V_A \tag{1.13}$$

e quindi  $qV_A$  è il lavoro necessario per portare una carica  $q$  dall'infinito al punto  $A$  nell'ipotesi che in tutto lo spazio ci sia il medesimo campo elettrico conservativo.

## 1.6 Legge di Kirchhoff per le tensioni

Possiamo quindi enunciare la legge di Kirchhoff per la tensione che, in regime quasi-stazionario, afferma che

*lungo una qualunque linea chiusa, la somma algebrica delle tensioni, prese con il segno opportuno in base al verso di percorrenza della linea, è nulla.*

A titolo di esempio, in figura 1.18 è rappresentata una linea chiusa  $\gamma$ , che immaginiamo di percorre dal punto  $A$  in senso antiorario, in una regione dello spazio in cui è presente un campo elettrico  $\bar{E}$ .

Dato che ipotizziamo di essere in regime quasi-stazionario, il campo  $\bar{E}$  ammette un potenziale ed è conservativo. Spostandomi dal punto  $A$  con l'idea di tornarci, posso immaginare di spezzare il percorso in "tappe": da  $A$  a  $B$ , da  $B$  a  $C$ , da  $C$  a  $D$  e da  $D$  in  $A$ , caratterizzate dalla tensione  $V_{BA}$ ,  $V_{CB}$ ,  $V_{DC}$  e  $V_{DA}$ , rispettivamente. Posso

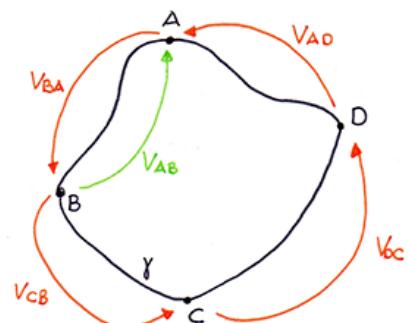


Figura 1.18: Legge di Kirchhoff per le tensioni: un esempio.

dunque scrivere

$$\left( \oint_{\gamma} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \right) V_{BA} + V_{CB} + V_{DC} + V_{AD} = 0 , \quad (1.14)$$

dove le tensioni hanno tutte il segno “+” perché orientate come il percorso. Se avessi deciso di scegliere la tensione  $V_{AB}$  invece della tensione  $V_{BA}$ , avrei dovuto scrivere  $-V_{AB} + V_{BC} + V_{CD} + V_{DA} = 0$ , essendo  $V_{AB}$  orientata nel senso opposto rispetto al percorso.

### 1.7 Flusso di un campo vettoriale

**DATA UNA SUPERFICIE APERTA  $S$**  (figura 1.19), identifichiamo il suo bordo  $\gamma$  e decidiamo arbitrariamente di percorrerlo in senso antiorario. Il verso di percorrenza di  $\gamma$  fissa il verso del versore  $\hat{u}_N$  normale alla superficie  $S$  in ogni suo punto in base alla regola del cavatappi<sup>6</sup>.

Presi la generica areola piana  $dS$  come in figura 1.19,  $\theta$  è l'angolo fra  $\hat{u}_N$  (versore perpendicolare a  $dS$ ) e  $\vec{A}$  (il campo vettoriale di cui voglio definire il flusso  $\Phi_S(\vec{A})$  attraverso  $S$ ) sul piano individuato dai 2 vettori. In modo approssimato, considerando  $\vec{A}$  costante e pari a  $\vec{A}_k$  su tutte le areole piane  $dS_k$  ( $k = 1, 2, \dots$ ) che possono essere individuate su  $S$  (ho quindi approssimato  $S$  con una superficie “piana a tratti”), si può scrivere  $\Phi_S(\vec{A}) \approx \sum_k A_k \cos \theta_k dS_k$ . Passando quindi al limite in cui le areole vengono assunte infinitesime possiamo scrivere

$$\Phi_S(\vec{A}) = \int_S \vec{A} \cdot \hat{u}_N dS . \quad (1.15)$$

### 1.8 Legge di Gauss

**PRENDIAMO UNA CARICA  $Q$**  e posizioniamola nel vuoto al centro di una sfera  $S$  di raggio  $R$ . Il campo elettrico generato da  $Q$  è  $\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r}$  diretto radialmente rispetto al centro della sfera. Si ottiene

$$\Phi_S(\vec{E}) = \oint_S \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r} \cdot \hat{u}_N dS = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \underbrace{\oint_S dS}_{4\pi r^2} = \frac{Q}{\epsilon_0} , \quad (1.16)$$

essendo  $\hat{r} \cdot \hat{u}_N = 1$ , poiché il raggio della sfera è orientato come la normale alla sfera in ogni suo punto.

In generale, la legge di Gauss per il campo elettrico afferma che, data una superficie chiusa  $S$ , il flusso del campo elettrico  $\vec{E}$  attraverso

<sup>6</sup> La regola del cavatappi è esemplificata in figura 1.20 in cui la mano che con le dita segue il verso di percorrenza della linea è la mano destra.

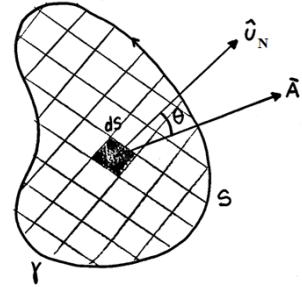


Figura 1.19: Flusso di un campo vettoriale.

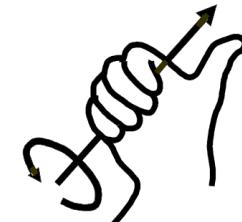


Figura 1.20: La regola del cavatappi.

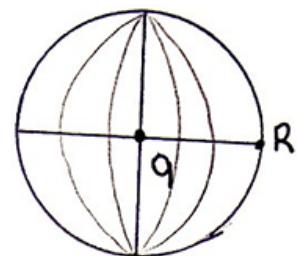


Figura 1.21: Legge di Gauss: un caso particolare.

di essa è proporzionale alla carica elettrica netta contenuta al suo interno (figura 1.22):

$$\Phi_S(\bar{E}) = \frac{\sum_k q_k}{\epsilon_0} . \quad (1.17)$$

Si noti che nella 1.17 la carica netta  $\sum_k q_k$  all'interno di  $S$  potrebbe essere nulla qualora fosse nullo il bilancio tra le cariche positive e quelle negative.

### 1.9 Dielettrici (o isolanti)

**IN UN DIELETTRICO NON CI SONO PARTICELLE LIBERE DI MUOVERSI** ma in presenza di un campo elettrico gli atomi e le molecole che lo compongono si **polarizzano** cioè divengono dipoli elettrici orientati in base al campo elettrico locale (figura 1.23). La polarizzazione fa nascere una distribuzione netta di carica positiva e negativa sulle diverse facce del materiale. È il motivo per cui la carta si muove se la mettiamo vicino all'ambra "elettrificata": si polarizza a causa del campo elettrico generato dall'ambra elettrificata e, siccome è leggera, la forza esercitata sulle cariche la sposta vincendo gli attriti e la forza di gravità. Se spacchiamo un dielettrico polarizzato (figura 1.24) si ottengono due pezzi di materia con carica superficiale tanto positiva quanto negativa e potremmo andare avanti fino al livello atomico. Complessivamente, quindi, otterremmo per scissione sempre corpi a carica netta nulla.

### 1.10 La corrente elettrica

**LA CORRENTE ELETTRICA  $I$** , misurata in Ampere ( $A = Cs^{-1}$ ), è definita, in termini operativi, come la carica elettrica che fluisce, nell'unità di tempo, attraverso una superficie di controllo posta in una regione dello spazio. La possiamo introdurre facendo riferimento alla situazione semplice e semplificata riportata in figura 1.25. Immaginiamo un piccolo cilindretto di lunghezza  $v\Delta t$  che contiene  $n$  cariche  $q$  che si muovono a velocità costante  $\bar{v}$  parallelamente al cilindretto stesso. Nell'intervallo di tempo  $\Delta t$ , tutte le  $n$  cariche attraversano la superficie di base  $dS$  del cilindretto.

Si rileva dunque una (intensità media di) corrente  $I$  attraverso  $dS$  pari a  $nq/\Delta t = \Delta Q/\Delta t$ . Se si assume  $\Delta t = t - t_0$  e  $\Delta Q = Q(t) - Q(t_0)$ , cioè la carica che attraversa  $dS$  in  $\Delta t$  viene espressa come l'incremento della carica che aveva attraversato la superficie fino a  $t_0$ ,

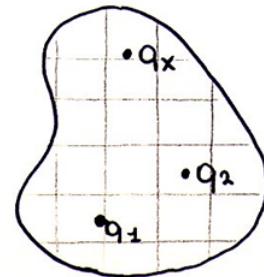


Figura 1.22: Legge di Gauss: un caso più generale.

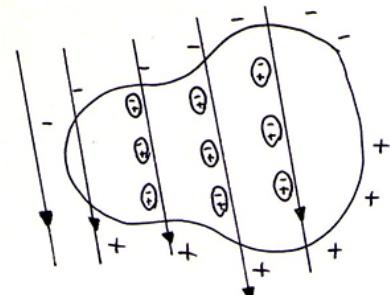


Figura 1.23: Un dielettrico immerso nelle linee di forza di un campo elettrico.

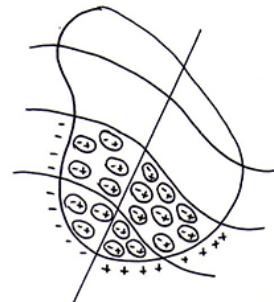


Figura 1.24: La linea di "taglio" separa il dielettrico in due porzioni a carica netta nulla.

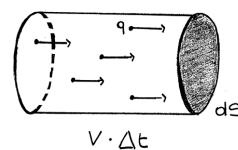


Figura 1.25: Cariche elettriche in moto.

passando al limite per  $\Delta t \rightarrow 0$  si ottiene

$$I = \frac{dQ}{dt} . \quad (1.18)$$

È evidente che, in base alla sua definizione, la corrente  $I$  è una grandezza scalare. Tuttavia, nei circuiti elettrici che studieremo, indicheremo abitualmente la corrente con una freccia dotata di verso. In questa rappresentazione assumeremo, per convenzione, che una corrente  $I$  abbia il verso e la direzione delle cariche positive. In altre parole, quando indicheremo con una freccia il verso in cui fluisce una corrente  $I$ , indicheremo che in quel verso si stanno muovendo cariche positive o che cariche negative si stanno muovendo nel verso opposto.

PER INTRODURRE IL CONCETTO DI CORRENTE abbiamo fatto riferimento finora ad una situazione particolare, quella in cui particelle cariche con carica  $q$  si muovono con velocità costante  $\bar{v}$ , nella medesima direzione e con lo stesso verso. Più in generale, consideriamo una superficie di controllo infinitesima  $dS$  con versore normale  $\hat{u}_N$ , attraverso la quale sono in moto con velocità  $\bar{v}$  particelle cariche la cui densità per unità di volume sia  $\rho_V$ . La carica netta passante attraverso l'unità di area nell'unità di tempo è dunque

$$\rho_V \bar{v} \cdot \hat{u}_N dS = \bar{j} \cdot \hat{u}_N dS , \quad (1.19)$$

essendo  $\bar{j} = \rho_V \bar{v}$  (misurato in  $\text{Am}^{-2}$ ) il campo vettoriale che indica la **densità di corrente**. Se indichiamo adesso con  $S$  una superficie orientata (mediante il versore  $\hat{u}_N$ ) che si trovi in una regione dello spazio in cui è presente il campo  $\bar{j}$ , la corrente elettrica  $I$  attraverso  $S$  è espressa come

$$I = \Phi_S(\bar{j}) = \int_S \bar{j} \cdot \hat{u}_N dS . \quad (1.20)$$

Se  $S$  è in ogni suo punto perpendicolare a  $\bar{j}$ , la corrente è lo scalare  $I = \rho_V v S$ .

### 1.11 La formalizzazione del principio di conservazione della carica

NEL CAPITOLO 1.1 È STATO PRESENTATO il principio di conservazione della carica elettrica e si è concluso che *l'unico modo in cui la carica interna ad un sistema, racchiuso in un volume  $V$ , può variare è in presenza di una corrente elettrica che fluisce attraverso la superficie di separazione del volume stesso dal mondo esterno*. Avendo introdotto il concetto

di corrente elettrica, possiamo adesso formalizzare il principio di conservazione della carica.

**CONSIDERIAMO IL VOLUME** in figura 1.26 delimitato dalla superficie  $S$  e sia  $q$  la carica netta che è presente all'interno di esso in un dato istante di tempo  $t$ . Possiamo immaginare che ci sia un flusso di cariche, attraverso  $S$ , che entrano nel volume e/o che ne fuoriescono. Queste cariche in moto definiscono un campo densità di corrente  $\bar{j}$  e la corrente  $I$  attraverso  $S$  sarà pari a

$$I = \oint_S \bar{j} \cdot \hat{u}_N dS . \quad (1.21)$$

La corrente  $I$ , in base alla 1.18, esprime la variazione della carica  $q$  rispetto al tempo ovvero  $\oint_S \bar{j} \cdot \hat{u}_N dS = I = -\frac{dq}{dt}$ . Per giustificare la presenza del segno “-” possiamo ragionare nel modo seguente. Ipotizziamo che la carica netta  $q$  nel volume  $V$  sia positiva. Qualora si rilevi una corrente  $I > 0$  (presa con il verso uscente dal volume  $V$ ) allora o delle carica positiva sta uscendo attraverso  $S$  oppure della carica negativa sta entrando. In entrambi i casi, la carica netta interna al volume  $V$  sta diminuendo, cioè  $\frac{dq}{dt} < 0$ . Si procederebbe con un ragionamento analogo qualora la corrente  $I$  fosse negativa.

**UTILIZZANDO IL TEOREMA DI GAUSS PER IL CAMPO ELETTRICO**,  $q = \epsilon_0 \oint_S \bar{E} \cdot \hat{u}_N dS$  e quindi il principio di conservazione della carica può essere formalizzato come

$$\oint_S \bar{j} \cdot \hat{u}_N dS + \epsilon_0 \frac{d}{dt} \oint_S \bar{E} \cdot \hat{u}_N dS = 0 , \quad (1.22)$$

dove il campo elettrico  $\bar{E}$  è quello sulla superficie  $S$ .

## 1.12 Conduttori

I CONDUTTORI SONO MATERIALI IN CUI CI SONO DEI PORTATORI DI CARICA (elettroni o ioni) in grado di muoversi più o meno liberamente attraverso il mezzo. In presenza di un campo elettrico i conduttori manifestano un comportamento detto **induzione elettrostatica**. Le cariche elettriche mobili si accumulano in superficie, disponendosi in modo tale da indurre all'interno del conduttore un campo elettrico che annulla gli effetti di quello esterno.

LE LINEE DI FORZA DI  $\bar{E}$  ALL'ESTERNO DEL CONDUTTORE sono perpendicolari alla sua superficie, altrimenti metterebbero in moto la carica superficiale rompendo l'equilibrio dovuto all'induzione

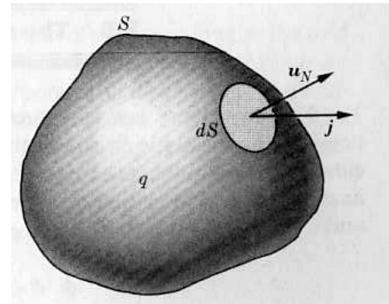


Figura 1.26: La superficie  $S$  chiusa racchiude la carica  $q$ .

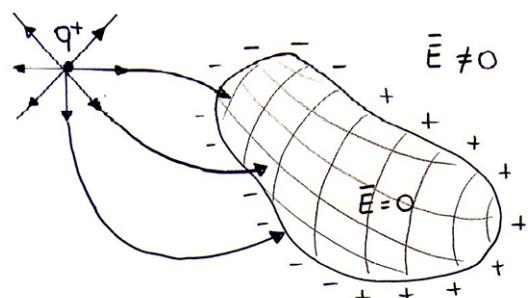


Figura 1.27: Un conduttore inserito in un campo elettrico ne deforma le linee di forza.

elettrostatica. Se  $\bar{E}$  all'interno di un conduttore è nullo,  $\int_{\gamma} \bar{E} \cdot d\bar{l}$  su qualunque percorso  $\gamma$  aperto all'interno del conduttore è nullo. Se ne deduce quindi che *un conduttore è equipotenziale*.

Inoltre, preso un volume  $V$  qualunque all'interno del conduttore delimitato da una superficie  $S$ , applicando il teorema di Gauss possiamo scrivere<sup>7</sup>

$$\Phi_S(\bar{E}) = \oint_S \bar{E} \cdot \hat{n}_N ds = 0 = \frac{Q}{\epsilon_r \epsilon_0}, \quad (1.23)$$

dove  $Q$  è la carica netta all'interno del volume  $V$ . Se ne deduce quindi che  $Q = 0$  ma ciò non vuol dire che in  $V$  non ci sia carica elettrica, ma che è nullo il bilancio tra cariche positive e cariche negative. Il ragionamento può essere esteso a superfici chiuse che giacciono all'interno del conduttore e che si estendano fino allo spessore di alcuni strati atomici dalla sua superficie. Nell'intorno della superficie del conduttore, infatti, le cariche sono sbilanciate per generare il campo elettrico necessario a rendere nullo all'interno del volume il campo elettrico complessivo.

**COME SI PUÒ** generare e quali caratteristiche ha la corrente elettrica in un conduttore?

**IN UN MATERIALE CONDUTTORE** con portatori gli elettroni, esiste una struttura reticolare periodica nello spazio, costituita dagli atomi del conduttore privati degli elettroni mobili che sono in grado di spostarsi a causa del legame metallico che li lega debolmente al nucleo. Esso genera un campo elettrico interno, a livello microscopico, che mette in moto disordinato gli elettroni. Questo movimento non genera però un flusso netto di corrente. Presa infatti una superficie di controllo  $S$  (figura 1.28), in media nel tempo tanti elettroni la passano in un verso e altrettanti nel verso opposto e quindi si rileva, mediamente, un flusso netto nullo di carica attraverso  $S$ . Per avere corrente elettrica  $I$  mediamente non nulla, bisogna generare un campo elettrico all'interno del conduttore che generi un moto di deriva (*drift*) degli elettroni, rendendo ordinato il moto casuale che li caratterizza invece in assenza di campo imposto dall'esterno.

**MUOVENDOSI, PERÒ, GLI ELETTRONI URTANO** con il reticolo e gli perdono energia, quindi l'effetto del campo  $\bar{E}$  non sarà di accelerarli indefinitamente, come accadrebbe nel vuoto, ma di fare loro assumere una velocità di deriva costante che si sperimenta essere  $\bar{v}_{drift} = -\mu \bar{E}$  con  $\mu > 0$  *mobilità* delle cariche libere ( $[\mu] = \text{mCs}^{-1}\text{N}^{-1}$ ). Questa relazione è valida per valori di  $\bar{E}$  relativamente bassi, tipici dei componenti elettrici ed elettronici.

<sup>7</sup> Nella 1.23 la costante  $\epsilon_r$  è la *permittività relativa*, chiamata anche *costante dielettrica*, che caratterizza il mezzo (materiale) che stiamo considerando. È un numero puro e per la maggior parte dei materiali è maggior di 1.

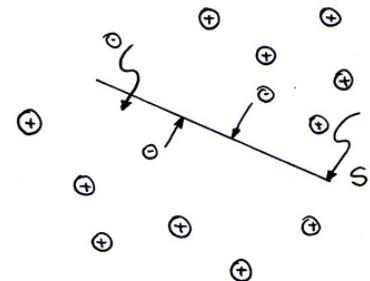


Figura 1.28: Flusso netto di cariche.

Si noti il segno “-” nell'espressione della  $\bar{v}_{drift}$  dovuto al fatto che l'orientamento di  $\bar{E}$ , per definizione (cfr. paragrafo 1.2) riferito ad una carica di prova positiva mentre l'elettrone ha carica negativa.

### 1.13 La legge di Ohm

CONSIDERIAMO UN CILINDRETTO  $dV$  di materiale conduttore (figura 1.29) caratterizzato da una densità volumetrica di carica  $\rho_V$  costante e applichiamo una differenza di potenziale  $\Delta V = V_A - V_B > 0$  tra i punti  $A$  e  $B$  che identificano due sezioni  $dS$ . Essa genera un campo elettrico costante  $\bar{E}$ , all'interno del conduttore, che diretto da  $A$  verso  $B$ , cioè dalla sezione a potenziale maggiore a quella a potenziale minore. Data la lunghezza  $dl = \underbrace{\mu E}_{|\vec{v}_{drift}|} \Delta t$  del cilindretto, la quantità di

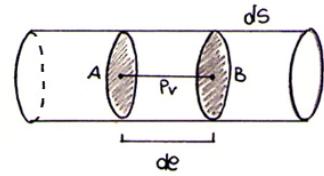


Figura 1.29: Un cilindretto di materiale conduttore.

carica libera contenuta nella regione delimitata da  $A$  e  $B$ , che in  $\Delta t$  è in grado di oltrepassare la sezione  $dS$  in  $B$ , è pari a  $\Delta Q = \rho_V \underbrace{dV}_{dS} \Delta t$ .

Il lavoro (normalizzato rispetto alla carica) compiuto dal campo  $\bar{E}$  (diretto come  $\vec{v}$ ) per portare le cariche libere da  $B$  e  $A$  è pari a

$$\int_B^A \bar{E} \cdot d\bar{l}_{BA} = \int_A^B \bar{E} \cdot d\bar{l}_{AB} = V_B - V_A = -\Delta V . \quad (1.24)$$

Dall'equazione precedente, essendo  $E$  costante in  $dV$ , si ottiene  $V_B - V_A = Edl_{AB}$  da cui di ricava banalmente  $E = -\frac{\Delta V}{dL}$ . La corrente media nel cilindretto è dunque data dalla relazione

$$\Delta I = -\frac{\Delta Q}{\Delta t} = \mu \rho_V \frac{dS}{dl_{AB}} \Delta V = \gamma \frac{dS}{dl_{AB}} \Delta V , \quad (1.25)$$

dove  $\gamma$  è la *conducibilità* del materiale. Portando la 1.25 al limite per  $\Delta t$  che tende a zero possiamo scrivere  $V = RI$  (legge di Ohm) con  $R = \rho \frac{dl_{AB}}{dS}$  che chiamiamo **resistenza** ( $\rho = \gamma^{-1}$  è la *resistività* del materiale).

### 1.14 La legge di Kirchhoff per le correnti

RECUPERIAMO IL PRINCIPIO di conservazione della carica per enunciare la legge di Kirchhoff per le correnti. In condizioni (quasi-)stazionarie, ovvero in presenza di campi (pressochè) costanti, l'equazione 1.22 diventa

$$I = \oint_S \bar{J} \cdot \hat{n}_N dS = 0 , \quad (1.26)$$

ovvero possiamo affermare che

*in regime (quasi-)stazionario il bilancio delle correnti entranti e delle correnti uscenti da una superficie chiusa è nullo.*

Si noti il segno “-” che precede  $\frac{\Delta Q}{\Delta t}$ . Come nel caso del principio di conservazione della carica (crf. paragrafo 1.11), la corrente  $I$  esprime la variazione della carica all'interno del cilindretto.

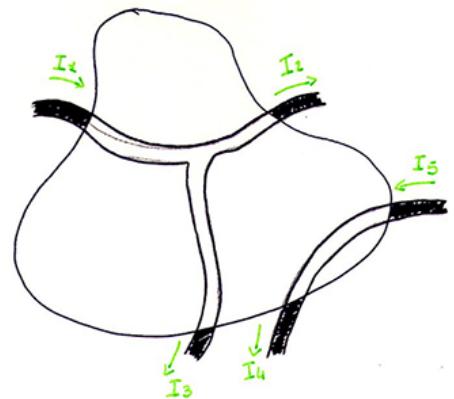


Figura 1.30: La legge di Kirchhoff per le correnti.

A TITOLO DI ESEMPIO, in figura 1.30, sono riportati alcuni corpi conduttori tagliati da una superficie di controllo  $S$  e sono indicate le correnti che fluiscono in essi. Alcune di queste correnti ( $I_1$  e  $I_5$ ) sono entranti nella superficie di controllo e altre uscenti ( $I_2$ ,  $I_3$ ,  $I_4$ ). La somma di queste correnti costituisce la corrente  $I$  complessiva che attraversa  $S$ , cioè

$$\sum_{k=1}^5 a_k I_k = I = 0 , \quad (1.27)$$

con  $a_k = 1$  se la corrente  $I_k$  è uscente da  $S$  e  $a_k = -1$  altrimenti (è evidente che questa scelta è assolutamente arbitraria, la scelta duale lascerebbe inalterato il risultato).

### 1.15 Il primo circuito elettrico

**COSTRUIAMO UN PICCOLO FILO SOTTILE** di materiale conduttore (spira conduttrice), di lunghezza  $l$  e sezione  $S$ , che identifica un percorso chiuso  $\gamma$  (figura 1.31). Esso sarà caratterizzato da una resistenza  $R$  che dipende da  $l$ ,  $S$  e dal tipo di materiale.

**SUPPONIAMO DI POTER** generare un campo elettrico  $\bar{E}$ , stazionario, all'interno del conduttore. Tale campo è conservativo e quindi  $\oint_{\gamma} \bar{E} \cdot d\bar{l} = 0$ . Se ne deduce che il campo  $\bar{E}$  non è in grado di generare

una corrente costante  $I$  all'interno della spira conduttrice dal momento che, in base alla legge di Ohm, è necessaria una differenza di potenziale  $V = RI$  per permettere alle cariche libere di percorrere un tragitto  $\gamma$  che, da un punto di partenza all'interno della spira, si snoda all'interno di essa per richiudersi nel punto di partenza stesso. In altre parole, il campo nel compiere il suo lavoro lungo il tragitto  $\gamma$  cede energia alle cariche ma queste la perdono urtando tra loro e contro il reticolo fisso. Quindi, se non viene fornita una quantità netta di energia agli elettroni, essi non possono muoversi continuamente lungo un percorso chiuso.

È STATO POSSIBILE L'UTILIZZO di correnti elettriche solo dopo che Alessandro Volta nel 1799 inventò la **pila**, un convertitore di energia chimica in energia elettrica. All'interno della pila si genera un campo elettrico non conservativo che è in grado di produrre una differenza di potenziale costante  $V$  tra i poli + e - della pila stessa. L'effetto che questo produce, quando un filamento di materiale conduttore con resistenza  $R$  viene collegato tra i due morsetti, è di mettere in movimento le cariche, generando una corrente  $I$ , le quali, nel tragitto

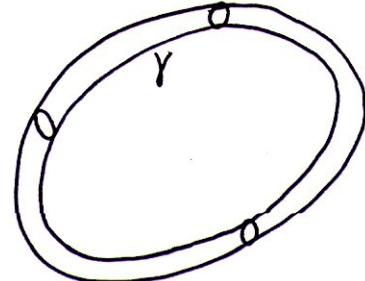


Figura 1.31: Una spira conduttrice.

lungo il filamento, vedono la loro energia diminuire di una quantità  $V = RI$  che viene “ripristinata” quando attraversano la pila.

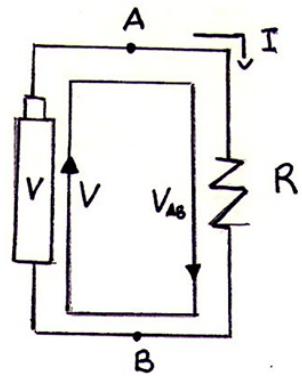


Figura 1.32: Un circuito elementare



# 2

## 2.1 Teoria dei circuiti - il modello circuitale

LA TEORIA DEI CIRCUITI è una disciplina fondamentale, che pervade tutta l'ingegneria elettrica, e trova applicazione in modo significativo anche nell'ambito dell'ingegneria elettronica.

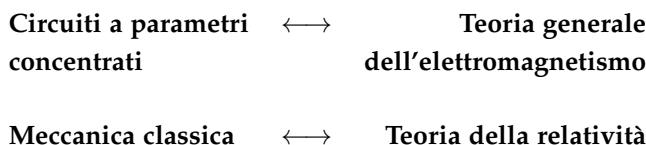
LA TEORIA DEI CIRCUITI si occupa dello studio di **circuiti ideali**, che sono *modelli* di circuiti fisici. Un circuito fisico è il risultato dell'interconnessione di componenti fisici (dispositivi). La teoria dei circuiti, invece, studia l'interconnessione di **componenti ideali** che modellano, in modo più o meno dettagliato in base alle esigenze specifiche, i componenti fisici. Il suo scopo è quello di predire il comportamento di un corrispondente circuito fisico (con diversi gradi di approssimazione) in termini di correnti e tensioni (ai terminali) e non si occupa dei fenomeni elettromagnetici, meccanici, termici o chimici che si manifestano nei componenti fisici e che sono, eventualmente, alla base del loro funzionamento.

$$\begin{array}{ccc} \text{Componenti fisici} & \longleftrightarrow & \text{Componenti ideali} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \text{Circuiti fisici} & \longleftrightarrow & \text{Circuiti ideali} \end{array}$$

IN QUESTO CORSO considereremo solo circuiti elettrici a **parametri concentrati** (lumped circuit), cioè circuiti con dimensioni tali da fare sì che la propagazione elettromagnetica tra due punti qualunque del circuito sia pressoché istantanea. I circuiti non a parametri concentrati si dicono a parametri distribuiti. Ne sono un esempio le linee di trasmissione e le antenne. In un circuito a parametri concentrati, data l'ipotesi di propagazione istantanea, la posizione reciproca dei componenti non altera il comportamento del circuito. In queste ipotesi, quindi, come avremo modo di sperimentare nel seguito, la geometria del circuito non è discriminante per il suo funzionamento mentre

fondamentale è il modo in cui i componenti sono interconnessi. In altre parole, avendo cura di preservare le connessioni tra i componenti, saremo liberi, quando occorre, di "ridisegnare" il circuito senza per questo alterarne il comportamento.

NELLO SCHEMA SEGUENTE è evidenziato come, in termini qualitativi, la teoria dei circuiti, che si occupa di circuiti a parametri concentrati, sta alla teoria generale dell'elettromagnetismo come la meccanica classica sta alla teoria della relatività. Questo accostamento vuole solo evidenziare come la teoria dei circuiti, che utilizza modelli semplificati dei componenti fisici (che costituiscono i componenti o elementi circuitali), sia in grado di descrivere con ottima approssimazione il comportamento dei circuiti reali che potrebbero, in modo assai più complesso, essere studiati mediante le leggi generali dell'elettromagnetismo. Allo stesso modo, la meccanica classica è in grado di descrivere fenomeni fisici di interesse applicativo in modo più semplice di quanto non si dovrebbe fare ricorrendo alla più completa teoria della relatività. È comunque opportuno avere ben presente che, tanto la teoria dei circuiti quanto la meccanica classica, si basano su modelli (più) semplificati della realtà e che, al cadere delle ipotesi sulla quale si basano, non sono in grado di descrivere e/o predire in modo corretto i fenomeni fisici di nostro interesse.



## 2.2 Componenti e variabili descrittive - Amperometro e Voltmetro ideali

IL **componente** è un oggetto limitato da una superficie chiusa, detta **superficie limite del componente** da cui escono almeno 2 **terminali** alle estremità dei quali si trovano i **morsetti** (figura 2.1).

ATTRaverso i **terminali** possiamo raggiungere altri componenti ai quali collegarci con i morsetti (figura 2.2) per formare così circuiti elettrici o meglio reti elettriche. Per essere rigorosi, si definisce circuito la semplice interconnessione di componenti (anche più di due) che formino una sola maglia (il concetto sarà chiaro in seguito) come in figura 2.2. Interconnessioni più complesse, che formino cioè più maglie, si definiscono reti elettriche. Per semplicità, utilizzeremo indifferentemente le parole circuito e rete.

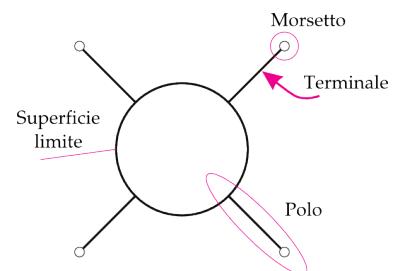


Figura 2.1: Il componente, i suoi terminali e i suoi morsetti.

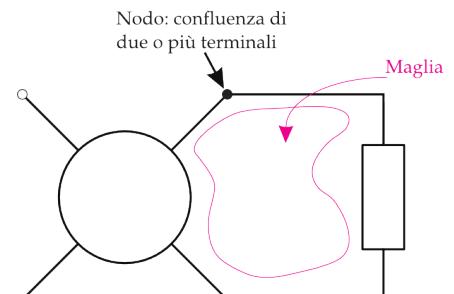


Figura 2.2: Una connessione elementare tra componenti

IN BASE AL NUMERO DI TERMINALI un componente si chiamerà

- 2-terminali  $\rightarrow$  bipolo
- 3-terminali  $\rightarrow$  tripolo
- 4-terminali  $\rightarrow$  quadripolo
- :
- $n$ -terminali  $\rightarrow$   $n$ -polo

In generale non si è interessati a ciò che “accade” all’interno della superficie limite del componente (cioè ai fenomeni elettromagnetici, ma anche meccanici, chimici o termici, che sono responsabili del suo funzionamento specifico), ma si è interessati alle grandezze elettriche misurabili ai morsetti (cioè dall’esterno) che sono in grado di caratterizzare il comportamento del componente. Tali grandezze possono essere corrente o tensione ma andrebbero bene anche la carica elettrica o il flusso magnetico. Tuttavia, queste ultime sono più difficili da misurare e quindi ci limiteremo all’uso della corrente e della tensione in qualità di **variabili descrittive**.

MISUREREMO LE CORRENTI mediante l'**amperometro** e la tensione mediante il **voltmetro**. Questi due bipoli particolari si rappresentano a terminali collassati mettendo in evidenza solo i loro morsetti identificati dai simboli + e -. Sono componenti ideali nel senso che non alterano il comportamento del circuito nel quale sono inseriti. L’amperometro (figura 2.3), attraversato dalla corrente che si vuole misurare dal morsetto + al morsetto -, non manifesta caduta di tensione tra di essi, nel senso che non è necessario compiere lavoro per portare le cariche elettriche da un morsetto all’altro attraversando la sua superficie limite.

IL VOLTMETRO, invece, collegato con i morsetti + e - ai morsetti tra i quali si vuole misurare la tensione (figura 2.4), non “preleva” corrente dal circuito.

CIASCUN COMPONENTE è caratterizzato da un’**equazione descrittiva** o **costitutiva** che può essere costituita da più relazioni che legano tra loro le variabili descrittive del componente. Quante correnti e quante tensioni servono, dato un  $n$ -terminali, per descrivere in modo esauritivo il suo comportamento? In altre parole, quante correnti e quante tensioni descrittive servono per costituire un insieme completo di tali variabili? È facile infatti convincersi, facendo ad esempio riferimento a figura 2.5, che per ciascun terminale è possibile misurare due diverse correnti, una entrante e una uscente dalla superficie limite del

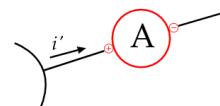


Figura 2.3: Un amperometro ideale rappresentato con i terminali collassati. La corrente che si vuole misurare lo attraversa dal morsetto + al morsetto -.

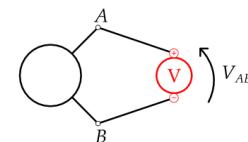


Figura 2.4: La tensione (cioè la differenza di potenziale tra due morsetti) si misura con il voltmetro (bipolo con terminali collassati), che non lascia fluire corrente al suo interno.

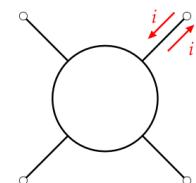


Figura 2.5: La corrente  $i$  e la corrente  $i'$  non sono indipendenti:  $i = -i'$ .

componente. Tuttavia è altrettanto facile convincersi che queste due “diverse” correnti non portano informazioni diverse sul comportamento del componente essendo, di fatto, l’una l’opposta dell’altra (la verifica a partire per dalla legge di Kirchhoff per le correnti è semplice e lasciata allo studente).

**CONCENTRIAMOCI SUL BIPOLO** rappresentato in figura 2.6. Utilizzando le leggi di Kirchhoff per le correnti e le tensioni possiamo scrivere

$$\text{KCL} \rightarrow \begin{cases} i_A = -i'_A \\ i_B = -i'_B \\ i_A = i_B \end{cases} . \quad (2.1)$$

$$\text{KVL} \rightarrow V_{AB} = -V_{BA}$$

Sono sufficienti quindi solo due variabili descrittive, ad esempio la corrente  $i_A$  e la tensione  $V_{AB}$ .

QUESTO RISULTATO può essere esteso ad un  $n$ -terminali per il quale sono necessarie e sufficienti  $n - 1$  correnti e  $n - 1$  tensioni descrittive. Un modo possibile per selezionare un insieme completo di tali variabili nel caso di un  $n$ -terminali è esemplificato in figura 2.7. In particolare, si sceglie un morsetto di riferimento rispetto al quale misurare le tensioni dei restanti  $n - 1$  morsetti, ai quali si misura anche la corrente di terminale. È evidente che la corrente al terminale corrispondente al morsetto di riferimento è banalmente deducibile dalle altre  $n - 1$  correnti misurate.

Nel caso di un tripolo, in figura 2.8 è evidenziata una possibile scelta alternativa a quella finora illustrata. In particolare, nella parte sinistra della figura, si vede come l’insieme alternativo di variabili descrittive scelte ( $V_{BA}, V_{CB}$ ) e ( $\hat{i}_B, \hat{i}_C$ ), può essere ricavato a partire da quello canonico riportato a destra. È facile infatti convincersi che  $\hat{i}_C = -i_C$  e che  $V_{CB} = V_{CA} - V_{BA}$ .

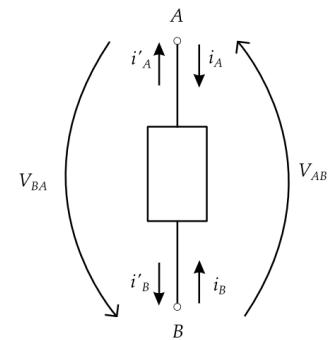


Figura 2.6: Le possibili correnti e tensioni descrittive per un bipolo.

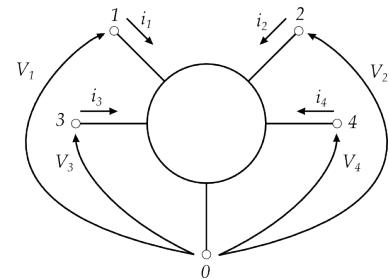


Figura 2.7: Tensioni e correnti descrittive per un  $n$ -terminali scelti sulla base di un arbitrario morsetto (e terminale) di riferimento.

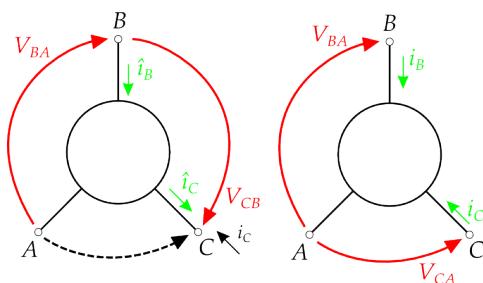


Figura 2.8: Le variabili descrittive per un tripolo: alcune scelte possibili.

## 2.3 Cenni di teoria dei grafi

MOLTI RISULTATI legati alla topologia delle reti elettriche (cioè, su come i componenti sono interconnessi tra loro e non su come si comportano) si basano sulla **teoria dei grafi**. La introduciamo in modo molto superficiale nonostante sia uno strumento concettuale importante, ampiamente utilizzato in molti settori, con ricadute anche nel campo informatico.

UN **grafo** è SPECIFICATO DA un insieme di  $n$  **nodi** e un insieme di  $l$  **lati**. Se i lati hanno un specifico orientamento, allora si parla di **grafo orientato**. Usiamo l'esempio riportato in figura 2.9 per introdurre alcuni concetti chiave.

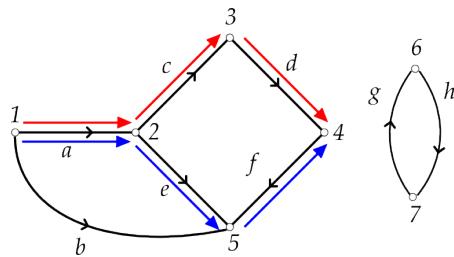


Figura 2.9:  $n = 7$  nodi e  $l = 8$  lati. I lati orientati del grafo sono rappresentati in nero e sono etichettati con una lettera. I nodi sono etichettati invece con un numero. La scelta delle etichette è assolutamente arbitraria. In rosso e in blu sono evidenziati due diversi percorsi che si possono identificare sul grafo.

**Percorso** Catena di lati che congiunge due nodi, gli estremi del percorso. Nel percorso ogni nodo e ogni lato si incontra una sola volta. In figura 2.9 sono riportati due esempi di percorso in rosso ed in blu. Nella definizione di un percorso, l'orientamento relativo dei lati che lo costituiscono rispetto al senso di percorrenza del percorso non è discriminante. Ad esempio il lato  $f$  in figura 2.9 è orientato in modo discorde al percorso.

**Maglia** Percorso in cui ciascun nodo ha un solo lato che entra e uno solo che esce (nodi di ordine due). In figura 2.9 il percorso dal nodo 6 al nodo 6 ( $6 \rightarrow 7 \rightarrow 6$ ), che comprende il lati  $g$  ed  $h$  e i nodi 6 e 7, è una maglia così come, ad esempio, il percorso da 2 a 2 ( $2 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 5 \rightarrow 2$ ) che comprende i lati  $c$ ,  $d$ ,  $f$  ed  $e$  e i nodi 2, 3, 4 e 5.

**Sottografo** Un sottoinsieme di nodi e lati di un grafo. Ad esempio, in figura 2.10 è mostrato un sottografo del grafo in figura 2.9 che si riduce all'insieme di nodi  $\{1, 6, 7\}$  e all'insieme di lati  $\{g, h\}$ .

**Grafo connesso** Un grafo si dice connesso se esiste sempre un percorso che unisce due suoi nodi qualsiasi.

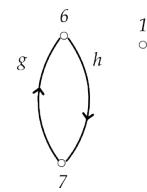


Figura 2.10: Un sottografo del grafo in figura 2.9. Da notare il nodo 1 che, non raggiunto da nessun lato del sottografo, rimane *appeso*.

*Albero* Un grafo in cui ogni coppia di nodi è unita da uno e un solo percorso. Dato un grafo connesso, è possibile definire un albero ad esso associato prendendo un suo sottografo che contenga tutti ed  $n$  i suoi nodi e gli  $n - 1$  lati che li connettono formando un percorso che rispetti la definizione di albero. Un esempio di albero è mostrato in figura 2.11.

*Grafo incernierato* È un grafo che contiene nodi *cerniera*. Un nodo si dice cerniera se, eliminando tutti i lati incidenti in esso, il sottografo risultante è composto da un nodo appeso (il nodo cerniera) e due sottografi tra loro non connessi (figura 2.12).

## 2.4 Grafo di un componente e grafo di un circuito

SE PER OGNI COMPONENTE definiamo un grafo e poi interconnettiamo i grafi tra loro otteniamo il grafo di un circuito. Il grafo di un circuito dipende solo dalla topologia della rete (cioè da come i componenti sono tra loro interconnessi) e non dalla natura (equazioni caratteristiche) dei componenti.

PER DEFINIRE IL GRAFO DI UN COMPONENTE a  $n$  terminali possiamo prendere un nodo di riferimento e costruire un grafo che ha come nodi gli  $n$  morsetti e come  $n - 1$  lati le tensioni descrittive del componente prese tra  $n - 1$  morsetti e il morsetto di riferimento.

Un esempio è mostrato in figura 2.13. Per come sono state scelte le tensioni e le correnti descrittive del tripolo in 2.13, è evidente che il grafo del componente potrà essere *orientato come le tensioni o come le correnti descrittive*. Nell'orientamento secondo le tensioni, ciascun lato ha una freccia orientata come la tensione descrittiva identificata tra i due morsetti nei quali incide il lato stesso. Nel grafo orientato come le correnti, i lati sono orientati con una freccia nella direzione fissata dalla corrente presa sul terminale che non identifica il morsetto di riferimento.

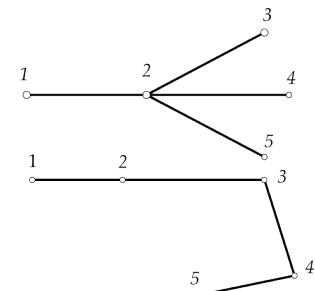
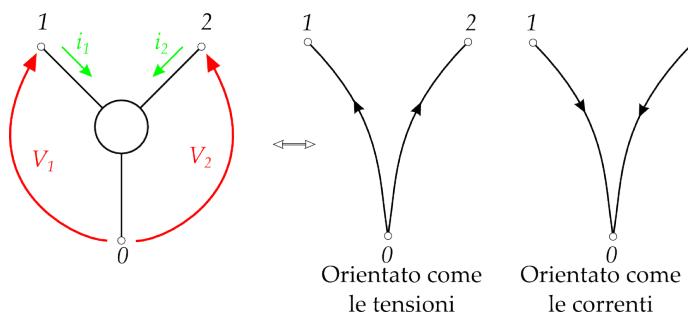


Figura 2.11: Del grafo in figura 2.9 non è possibile ottenere l'albero associato perché si tratta di un grafo non connesso. Se ci limitiamo però a considerare il sottografo composto dai nodi  $\{1, 2, 3, 4, 5\}$  e dai lati  $\{a, b, c, d, e, f\}$  è possibile identificare i due alberi evidenziati in questa figura che hanno 5 nodi e 4 lati.

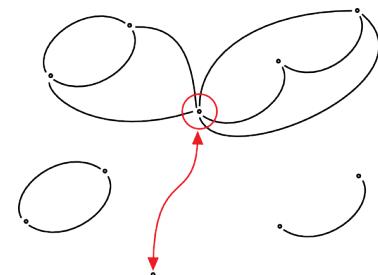


Figura 2.12: Un esempio di grafo incernierato e di nodo cerniera che rimane appeso dopo aver eliminato i lati che in esso confluiscono.

Figura 2.13: Tripolo: grafo a stella orientato come le tensioni o come le correnti.

ESISTONO PERÒ ALTRE SCELTE possibili per definire il grafo di un componente che non siano quella descritta la quale fornisce un *grafo (albero) a stella*. Un esempio è mostrato in figura 2.14. In questo caso le tensioni e le correnti descrittive del tripolo sono state scelte diversamente e il grafo è costituito dai 3 morsetti del componente e dai 2 lati identificati dalle tensione descrittive. Anche in questo caso è possibile orientare il grafo come le tensioni (il che è immediato) oppure come le correnti. In quest'ultima soluzione, si prenderà per ogni lato l'orientamento fissato dalla corrente del terminale che corrisponde al morsetto su cui insiste la freccia della tensione che identifica il lato stesso.

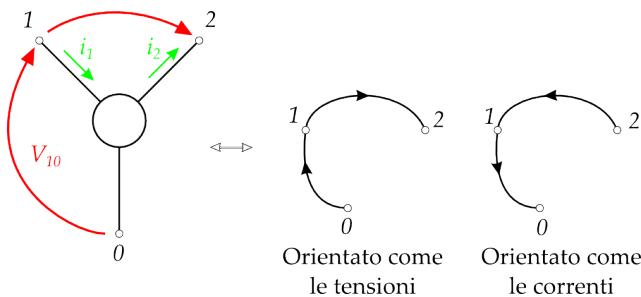


Figura 2.14: Tripolo: grafo non a stella orientato come le tensioni o come le correnti.

È EVIDENTE CHE se non si adotta un modo sistematico per scegliere le tensioni e le correnti descrittive, l'informazione contenuta nel grafo di un circuito orientato come le tensioni non permette di ricavare l'orientamento delle correnti e viceversa. A questo proposito si possono adottare due diverse convenzioni: la **convenzione normale** o degli **utilizzatori** e la **convenzione dei generatori**. Sceglieremo tipicamente la prima per la quale, dato un lato del grafo di un componente orientato come le tensioni, si fissa il verso della corrente in quel lato in modo che scorra nel verso opposto a quello indicato dalla tensione (figura 2.15). Analogamente se il grafo fosse orientato come le correnti. La convenzione dei generatori orienta tensioni e correnti in modo concorde.

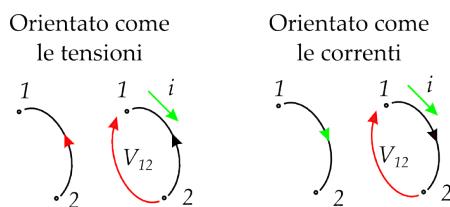


Figura 2.15: Lato di un grafo orientato come la tensione o come la corrente nell'ipotesi di convenzione normale o degli utilizzatori.

## 2.5 Esercizio: circuito e grafo

PER ESERCIZIO si provi a disegnare il grafo del circuito, orientato come le tensioni con convenzione normale del circuito in figura 2.16. Quanti nodi  $n$  e quanti lati  $l$  ha il grafo del circuito?

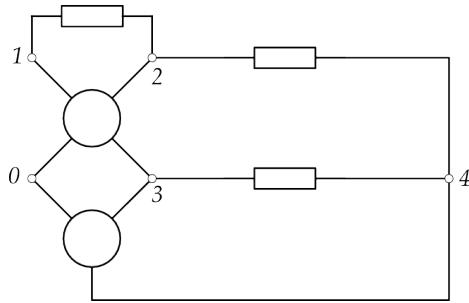


Figura 2.16: Schema di un circuito di cui si vuole disegnare il grafo corrispondente

Il grafo ha  $n = 5$  nodi e  $l = 8$  lati dato che il quadripolo contribuisce con 3 lati, il tripolo con 2, e ciascuno dei tre bipoli con un lato. Per ciascun componente sceglieremo le tensioni descrittive e quindi il loro orientamento. Le correnti vanno scelte in modo da rispettare la convenzione degli utilizzatori (figura 2.17). Il grafo del circuito è mostrato in figura 2.18

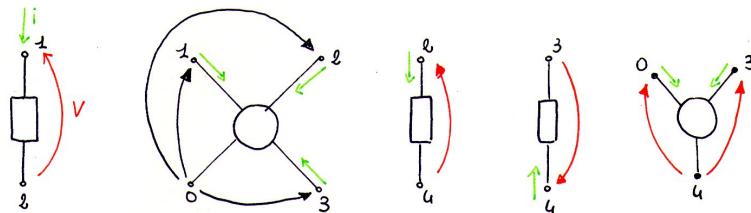


Figura 2.17: Grafo dei componenti che costituiscono il circuito in figura 2.16.

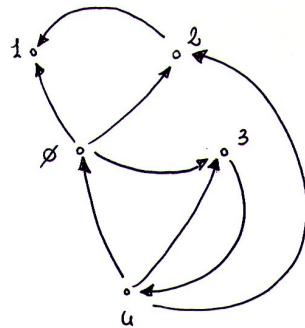


Figura 2.18: Grafo del circuito in figura 2.16.

## 2.6 Nota sulle equazioni algebriche

DATA UNA FUNZIONE  $f$  definita su di un dominio  $D \subset \mathbb{R}$  e che assume valori reali<sup>1</sup>, l'espressione

$$f(x) = b , \quad (2.2)$$

con  $b \in \mathbb{R}$  costante che non dipende da  $x$ , è un'equazione **algebrica** nella variabile  $x$  e le sue soluzioni (ammesso che esistano) sono l'insieme dei valori assumibili da  $x$  tale che la 2.2 sia identicamente soddisfatta.

L'equazione 2.2 si dice **lineare** se la funzione  $f$  è lineare in  $x$  ovvero se, presi due valori  $x^{(1)}$  e  $x^{(2)}$  appartenenti a  $D$  e due costanti reali  $\alpha_1$  ed  $\alpha_2$  non nulle,

$$f(\alpha_1 x^{(1)} + \alpha_2 x^{(2)}) = \alpha_1 f(x^{(1)}) + \alpha_2 f(x^{(2)}) . \quad (2.3)$$

Una funzione  $g$  di più variabili, cioè  $g(x_1, x_2, \dots, x_N) : D_N \subset \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ , definisce un'equazione algebrica in  $N$  incognite del tipo

$$g(x_1, x_2, \dots, x_N) = b , \quad (2.4)$$

con  $b \in \mathbb{R}$  costante che non dipende da  $(x_1, x_2, \dots, x_N)$ . La 2.4 si dice lineare se  $g$  è una funzione lineare in  $(x_1, x_2, \dots, x_N)$  ovvero se, prese due  $N$ -ple  $(x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \dots, x_N^{(1)})$  e  $(x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, \dots, x_N^{(2)})$  appartenenti a  $D_N$  e due costanti reali  $\alpha_1$  ed  $\alpha_2$  non nulle,

$$\begin{aligned} g\left(\alpha_1\left(x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \dots, x_N^{(1)}\right) + \alpha_2\left(x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, \dots, x_N^{(2)}\right)\right) &= \\ &= \alpha_1 g\left(x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \dots, x_N^{(1)}\right) + \alpha_2 g\left(x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, \dots, x_N^{(2)}\right) . \end{aligned} \quad (2.5)$$

Prese  $M$  equazioni del tipo 2.4, possiamo definire il **sistema** di  $M$  equazioni algebriche in  $N$  incognite ( $M \geq 2$  e, in generale,  $N \neq M$ )

$$\begin{cases} g_1(x_1, x_2, \dots, x_N) = b_1 \\ \vdots \\ g_M(x_1, x_2, \dots, x_N) = b_M \end{cases} , \quad (2.6)$$

di cui i sistemi lineari sono un caso particolare.

Le  $M$  equazioni del sistema 2.6 sono **linearmente dipendenti** se esiste almeno un insieme di  $M$  costanti  $(k_1, \dots, k_M)$ , di cui almeno 2 non nulle, tali che

$$\sum_{j=1}^M k_j [g_j(x_1, x_2, \dots, x_N) - b_j] = 0 \quad (2.7)$$

per qualunque  $N$ -pla  $(x_1, x_2, \dots, x_N) \in \mathbb{R}^N$ . Le  $M$  equazioni algebriche sono linearmente indipendenti se e solo se non sono linearmente dipendenti.

<sup>1</sup> Le definizioni che daremo in questo paragrafo sono limitate a funzioni reali di variabile reale ma possono essere estese in modo del tutto naturale al campo complesso  $\mathbb{C}$ .

## 2.7 Le leggi di Kirchhoff

AVENDO INTRODOTTO gli strumenti basilari per studiare la topologia di un circuito possiamo introdurre le leggi di Kirchhoff per le correnti (KCL) e per le tensioni (KVL) non come un prodotto delle leggi dell'elettromagnetismo ma come se fossero assiomi della teoria dei circuiti.

**KVL-I:** dato un circuito a parametri concentrati con  $n$  nodi e il cui grafo sia connesso, prendiamo uno dei suoi nodi come riferimento  $u_0$  per misurare il potenziale elettrico e indichiamo con  $u_1, \dots, u_{n-1}$  i rimanenti potenziali di nodo<sup>2</sup>. Ad ogni istante di tempo  $t$ , la tensione  $V_{kj}$  misurata tra il nodo  $k$  e il nodo  $j$  è pari a  $u_k - u_j$ .

**KVL-II:** dato un circuito a parametri concentrati con  $n$  nodi e il cui grafo sia connesso, preso un percorso chiuso che passi per  $m$  nodi del grafo, ad ogni istante di tempo  $t$ , la somma algebrica delle tensioni fra i nodi consecutivi che si incontrano lungo il percorso è nulla. La somma si intende algebrica poiché le tensioni che si incontrano lungo il percorso e che sono orientate come il verso di percorrenza del percorso stesso vengono prese con il segno "+". Quelle orientate invece nel senso opposto vengono prese con il segno "-".

È FACILE VERIFICARE che i due enunciati della legge di Kirchhoff per le tensioni sono equivalenti. A titolo di esempio, consideriamo il circuito in figura 2.19 del quale, dopo aver indicato le tensioni descrittive dei componenti che lo costituiscono, abbiamo ricavato il grafo orientato come le tensioni. Utilizzando le KVL-I e scegliendo il nodo 0 come riferimento per il potenziale elettrico, possiamo scrivere  $V_{21} = u_2 - u_1$ ,  $V_{32} = u_3 - u_2$ ,  $V_{31} = u_3 - u_1$ ,  $V_{10} = V_1 = u_1$ ,  $V_{20} = V_2 = u_2$  e  $V_{30} = u_3$ . Utilizzando poi le KVL-II lungo il percorso segnato in verde e percorso in senso orario possiamo scrivere  $V_{10} + V_{21} - V_{23} - V_{30} = 0$ . Sostituendo le relazioni dedotte dalle KVL-I al primo membro della KVL-II, si ottiene  $u_1 + u_2 - u_1 - (u_2 - u_3) - u_3$  che è identicamente nullo come richiesto da quest'ultima.

**KCL:** Prendiamo una superficie orientata che tagli solo terminali e che non attraversi superfici limite dei componenti. Per un circuito a parametri concentrati, in ogni istante di tempo  $t$ , la somma algebrica di tutte le correnti uscenti e entranti dalla superficie orientata sopra definita è nulla. La somma si intende algebrica nel senso che, avendo ad esempio scelto di orientare la superficie

<sup>2</sup> Senza perdere generalità possiamo assumere  $u_0 = 0$ .

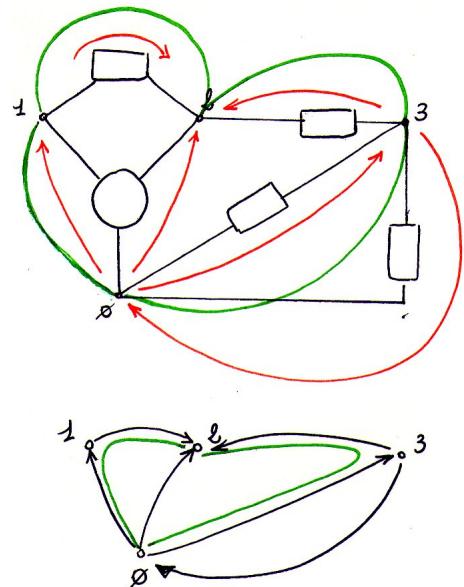


Figura 2.19: Equivalenza tra KVL-I e KVL-II.

positivamente dall'interno verso l'esterno, le correnti uscenti da essa saranno prese con segno “+” e quelle entranti con segno “−”. Viceversa se si fosse scelto di orientare la superficie positivamente dall'esterno verso l'interno.

A titolo di esempio si consideri il circuito in figura 2.20 del quale si è ricavato il grafo orientato come le tensioni. Entrambe le due superfici rappresentate in figura sono state orientate positivamente dall'esterno verso l'interno. In questo caso il bilancio delle correnti alla superficie più piccola tracciata intorno ad uno dei nodi del grafo è pari a  $i_1 - i_2 + i_3 = 0$  mentre il bilancio alla superficie più grande è  $i_3 - i_4 - i_5 = 0$ . Notiamo che le equazioni di Kirchhoff per le tensioni e per le correnti sono equazioni lineari algebriche.

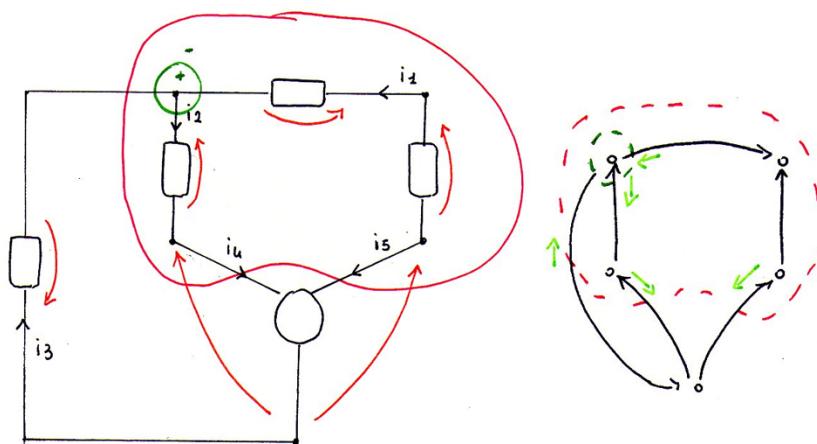


Figura 2.20: Un esempio di superfici chiuse da impiegare per scrivere i bilanci in corrente di tipo KCL.

UNA DOMANDA che è necessario porsi è la seguente: *dato un circuito a parametri concentrati il cui grafo sia connesso, quante equazioni KCL e quante KVL-II è possibile scrivere affinché siano tutte e sole quelle che servono per esprimere la topologia della rete?* In linea di principio, se il grafo del circuito avesse  $l$  lati, avremmo bisogno di conoscere  $2l$  grandezze ( $l$  tensioni descrittive e  $l$  correnti descrittive) per risolvere la rete. Le equazioni descrittive dei componenti forniscono  $l$  relazioni in  $2l$  incognite che legano le variabili descrittive tra loro<sup>3</sup> e la topologia dovrebbe fornire le informazioni mancanti per riuscire a scrivere, complessivamente,  $2l$  relazioni in  $2l$  incognite. Utilizzando la teoria dei grafi è possibile dimostrare che dal grafo di un circuito con  $n$  nodi ed  $l$  lati, è possibile ricavare  $n - 1$  **KCL linearmente indipendenti** e  $l - n + 1$  **KVL-II linearmente indipendenti**, ovvero complessivamente  $l$  equazioni di tipo topologico.

<sup>3</sup> Ogni  $m$ -polo ha un grafo composto da  $m - 1$  lati che contribuiscono al grafo complessivo del circuito. Inoltre ogni  $m$ -polo ha un'equazione costitutiva composta da  $m - 1$  relazioni che legano le sue  $m - 1$  correnti descrittive e le sue  $m - 1$  tensioni descrittive.

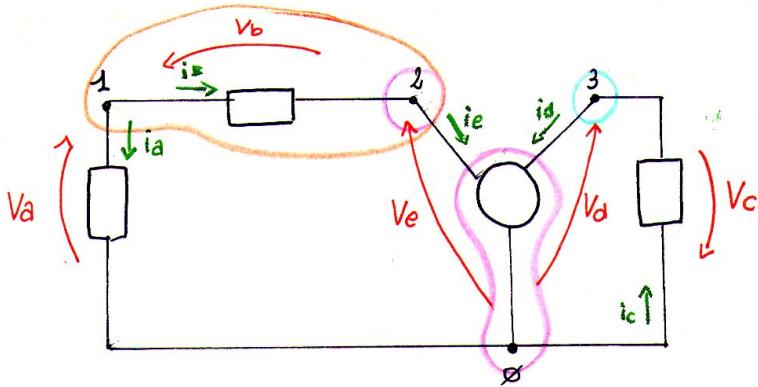


Figura 2.21: KCL: un esempio.

FACENDO RIFERIMENTO AL CIRCUITO in figura 2.21 proviamo a scrivere un insieme di equazioni KCL linearmente indipendenti. Il circuito ha  $n = 4$  nodi e quindi dobbiamo aspettarci al più 3 KCL linearmente indipendenti. Possiamo prendere, orientandole tutte positivamente dall'interno verso l'esterno, la superficie A che racchiude il bipolo descritto da  $i_b$  e  $v_b$ , la superficie B che racchiude il nodo 3, e la superficie C che racchiude il tripolo e il nodo di riferimento. I bilanci delle correnti sono i seguenti

$$\begin{aligned} A : i_a + i_e &= 0 \\ B : i_d - i_c &= 0 \\ C : i_c - i_e - i_d - i_a &= 0 \end{aligned} \quad . \quad (2.8)$$

TUTTAVIA, sommando membro a membro i bilanci alle superfici A e B, si ottiene il bilancio alla superficie C cambiato di segno il che vuol dire che la scelta fatta non ha prodotto 3 equazioni linearmente indipendenti (cfr. paragrafo 2.6). È quindi necessario scegliere un'altra superficie, ad esempio quella che chiameremo D e che racchiude il nodo 2, orientata anch'essa positivamente all'interno verso l'esterno, scrivendo così il bilancio

$$D : i_e - i_b = 0 . \quad (2.9)$$

È immediato verificare che il bilanci alle superfici A, B e D sono linearmente indipendenti ad esempio osservando che la corrente  $i_b$  non è presente in A e B e la corrente  $i_a$  non è presente in B e D.

IN GENERALE, si dimostra che prendere i bilanci alle  $n - 1$  superfici, che racchiudono ciascuna soltanto uno dei nodi del circuito il cui grafo ha  $n$  nodi (tipicamente non viene scelto il bilancio al nodo di riferimento), garantisce la scelta di  $n - 1$  equazioni KCL linearmente indipendenti<sup>4</sup>. Nell'esempio considerato si scriverebbero dunque i

<sup>4</sup> Non sempre è la scelta migliore dal punto di vista della complessità del sistema di equazioni lineari algebriche che ne deriva, ma è un'ottima scelta algoritmica per codificare una procedura di risoluzione automatica di un circuito con il calcolatore.

seguenti bilanci:

$$\begin{aligned} 1 : i_a + i_b &= 0 \\ 2 : i_e - i_b &= 0 \\ 3 : i_d - i_c &= 0 \end{aligned} \quad (2.10)$$

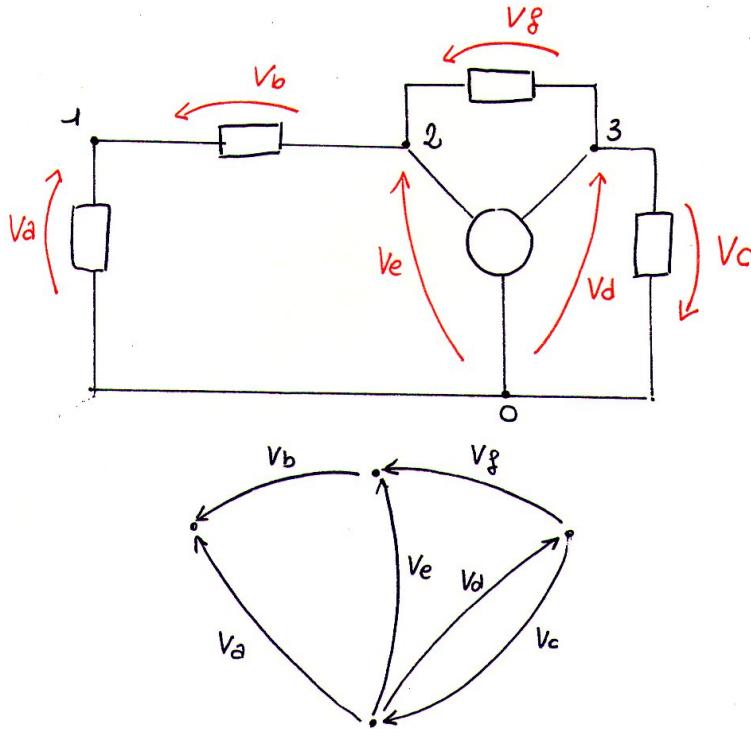


Figura 2.22: KVL-II: un esempio.

ANALOGAMENTE SI PUÒ PROCEDERE, facendo riferimento alla figura 2.22, per verificare che avendo un grafo connesso con  $l$  lati ed  $n$  nodi, è possibile trovare  $l - n + 1$  maglie che producono altrettante equazioni KVL-II linearmente indipendenti. Nell'esempio in questione  $l = 6$  e  $n = 4$  e quindi ci aspettiamo  $l - n + 1 = 6 - 4 + 1 = 3$  KVL-II linearmente indipendenti. Iniziamo col considerare la maglia I che interessa il percorso  $2 \rightarrow 1 \rightarrow 0 \rightarrow 2$

$$I : V_b - V_a + V_e = 0 , \quad (2.11)$$

la maglia II, che interessa il percorso  $2 \rightarrow 3 \rightarrow 0 \rightarrow 1 \rightarrow 2$

$$II : -V_g + V_c + V_a - V_b = 0 , \quad (2.12)$$

la maglia III, che interessa il percorso  $0 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 0$

$$III : V_e - V_g + V_c = 0 . \quad (2.13)$$

Facendo la somma delle KVL-II alle maglie I e II si ottiene

$$(V_b - V_a + V_e) + (-V_g + V_c + V_a - V_b) = V_e - V_g + V_c = 0 , \quad (2.14)$$

e si deduce quindi che le tre equazioni non sono linearmente indipendenti. Prendiamo invece la maglia  $IV$  che interessa il percorso  $0 \rightarrow 3 \rightarrow 0$ :

$$IV : V_d + V_c = 0 , \quad (2.15)$$

è facile verificare che  $I$ ,  $II$  e  $IV$  sono linearmente indipendenti dato che  $V_d$  compare solo nella  $IV$  e  $V_g$  solo nella  $II$ .

Anche nel caso delle KVL-II esiste una procedura sistematica che permette di selezionare  $l - n + 1$  maglie linearmente indipendenti. Si basa su una costruzione che richiede la scelta di un albero e di un co-albero<sup>5</sup> associati al grafo del circuito e non verrà affrontata in questo corso.

LA TOPOLOGIA DEL CIRCUITO riportato in figura 2.23 può essere riassunta dal grafo di figura 2.24 (orientato come le tensioni) caratterizzato da  $n = 4$  nodi e da  $l = 6$  lati. Conseguentemente ci aspettiamo  $n - 1 = 3$  equazioni KCL linearmente indipendenti e  $l - n + 1 = 6 - 4 + 1 = 3$  equazioni KVL-II linearmente indipendenti.

Per quanto riguarda le KCL possiamo scrivere (orientando le superfici di controllo dall'interno verso l'esterno)

$$\begin{aligned} A &: i_1 + i_2 - i_3 = 0 \\ B &: -i_1 + i_3 - i_5 - i_6 = 0 \\ C &: i_1 - i_1 - i_2 + i_5 + i_6 = -i_2 + i_5 + i_6 = 0 \end{aligned} \quad (2.16)$$

ma  $A + B : (i_1 + i_2 - i_3) + (-i_1 + i_3 - i_5 - i_6) = -i_2 + i_5 + i_6 = 0$  ovvero  $A - B \rightarrow C$ . Possiamo allora scegliere il bilancio alla superficie  $D : -i_1 - i_4 - i_5 = 0$  che è linearmente indipendente da  $A$  e  $B$  che non contengono  $i_4$ .

Per quanto riguarda le KVL-II, con riferimento alla figura 2.25 possiamo scrivere il bilancio seguenti maglie:

$$\begin{aligned} I &: V_{13} + V_{41} - V_{43} = 0 \\ II &: V_{12} + V_{41} + V_{24} = 0 \\ III &: V_{13} - V_{12} - V_{23} = 0 \\ IV &: V_{23} - V_{24} - V_{43} = 0 \end{aligned} \quad (2.17)$$

Sappiamo però che almeno uno dei quattro bilanci deve essere linearmente dipendente dagli altri ed infatti  $II + III + IV : V_{12} + V_{41} + V_{24} + V_{12} - V_{12} - V_{23} + V_{23} - V_{24} - V_{43} = V_{41} + V_{13} - V_{43} = 0$  ovvero  $II + III + IV \rightarrow I$ . È altrettanto facile verificare che  $II$ ,  $III$  e  $IV$  sono linearmente indipendenti.

COME ULTERIORE ESEMPIO possiamo considerare il circuito in figura 2.26 per il quale, noti  $i_A = 2A$ ,  $i_C = 3A$  e  $i_E = 1A$ , si richiede di calcolare  $i_F$ ,  $i_D$  e  $i_B$ .

<sup>5</sup> Un co-albero è il sottografo rimanente dopo aver eliminato da un grafo tutti i lati che costituiscono un possibile albero ad esso associato.

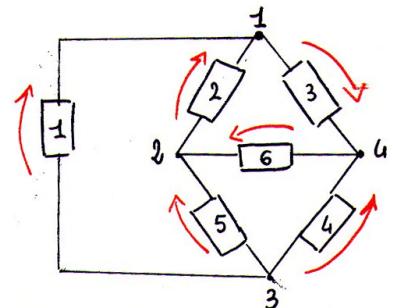


Figura 2.23: Un altro esempio

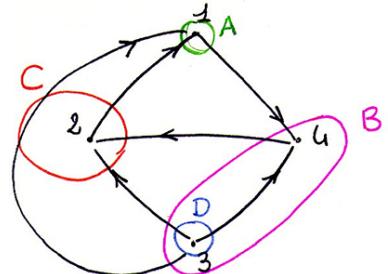


Figura 2.24: KCL. Il grafo è orientato come le tensioni.

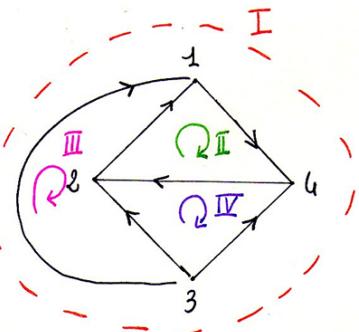


Figura 2.25: KVL-II. Il grafo è orientato come le tensioni.

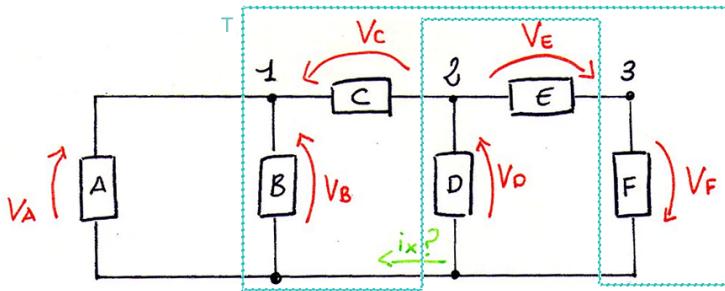


Figura 2.26: Ancora un altro esempio.

Prendendo il nodo 0 come riferimento,  $n - 1$  KCL linearmente indipendenti possono essere certamente scritte prendendo il bilancio delle correnti alle tre superfici che racchiudono ciascuna uno dei restanti 3 nodi del grafo.

$$\begin{aligned} i_A + i_B + i_C &= 0 \rightarrow i_B = -i_A - i_C = -2A - 3A = -5A \\ -i_C - i_E + i_D &= 0 \rightarrow i_D = i_C + i_E = 3A + 1A = 4A \\ i_E - i_F &= 0 \rightarrow i_E = i_F \rightarrow i_F = 1A \end{aligned} \quad . \quad (2.18)$$

SE FOSSIMO INVECE INTERESSATI alla corrente  $i_x$  in figura 2.26 potremmo scrivere il bilancio alla superficie  $T$  riportata nella figura stessa:  $i_A - i_A - i_F + i_E + i_C - i_x = 0$  da cui  $i_X = i_D - i_F = 4A - 1A = 3A$ . È importante notare come la corrente  $i_x$  non compare sul grafo del circuito in quanto è prelevata su di una parte della rete che di fatto è stata fatta collassare nel nodo 0. La superficie  $T$  che è stata tracciata sul circuito non può essere infatti tracciata sul grafo. Il tratto di circuito che è stata fatto collassare in 0 e sul quale misuriamo la corrente  $i_x$  è un bipolo particolare che è stato aggiunto per completezza in figura 2.28. Si chiama, come vedremo nel seguito, *corto circuito* (cfr. paragrafo 3.5.2) ed ha la caratteristica di poter essere attraversato da qualunque corrente mostrando una tensione nulla tra i suoi due morsetti. Data questa sua caratteristica può essere fatto collassare nel nodo 0 senza perdere nessuna informazione dal punto di vista delle tensioni della rete ma, se interessati alla corrente che lo attraversa ( $i_x$  nell'esempio), deve invece essere considerato nel grafo del circuito che avrà così un lato in più e, nell'esempio in questione, anche un nodo in più.

## 2.8 La matrice di incidenza e la matrice di incidenza ridotta

Si consideri un grafo orientato costituito da  $n$  nodi ed  $l$  lati<sup>6</sup>. È possibile assegnare la *relazione di incidenza* tra i lati e i nodi del grafo utilizzando una tabella ordinata e costituita da  $n$  righe e  $l$  colonne,

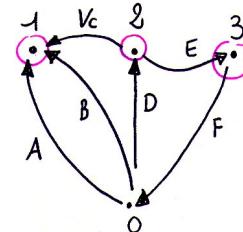


Figura 2.27: Grafo orientato come le tensioni con  $n = 4$ ,  $l = 6$ . KCL:  $n - 1 = 3$ . KVL-II:  $l - n + 1 = 6 - 4 + 1 = 3$ .

<sup>6</sup> Prenderemo arbitrariamente un grafo orientato come le correnti e adotteremo la convenzione normale o degli utilizzatori.

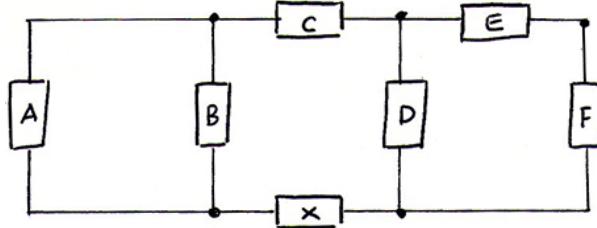


Figura 2.28: Lo schema del circuito in figura 2.27 con l'aggiunta del corto circuito (il bipolo  $x$ ) per prelevare la corrente  $i_x$ .

cioè una **matrice di incidenza** rettangolare  $n \times l$  denominata  $A_a$ <sup>7</sup>. C'è corrispondenza biunivoca tra un grafo e la sua matrice di incidenza. Rappresentazione geometrica del grafo e matrice di incidenza sono una diversa rappresentazione della relazione di incidenza del grafo.

<sup>7</sup> Se il grafo è connesso  $l \geq n - 1$ .

PER SCRIVERE LA MATRICE  $A_a$ , prendiamo gli  $n$  nodi del grafo e assegniamo un numero naturale ad ognuno di essi e lo stesso facciamo con gli  $l$  lati. La  $k$ -esima riga di  $A_a$  rappresenta il nodo  $k$  e la  $j$ -esima colonna di  $A_a$  il lato  $j$ . Il valore del generico elemento  $a_{kj}$  della matrice  $A_a$  sarà scelto in base alla regola seguente

$$a_{kj} = \begin{cases} +1 & \text{il lato } j \text{ incide nel nodo } k \text{ ed è uscente} \\ -1 & \text{il lato } j \text{ incide nel nodo } k \text{ ed è entrante} \\ 0 & \text{il lato } j \text{ non incide nel nodo } k \end{cases} . \quad (2.19)$$

Notiamo come ogni colonna di  $A_a$  abbia *sempre* due soli elementi non nulli, uno  $+1$  e uno  $-1$ , dato che ciascun lato è uscente da un solo nodo ed entrante in un solo nodo. Quindi, la somma di tutte le righe  $R_k$  di  $A_a$  ( $k = 1, \dots, n$ ) restituisce un vettore riga nullo. Da ciò si deduce che le righe di  $A_a$  non sono linearmente indipendenti. Inoltre, dal momento che le colonne  $C_j$  di  $A_a$  ( $j = 1, \dots, l$ ) sono dei vettori di  $\mathbb{R}^n$  possiamo aspettarci al più  $n$  colonne linearmente indipendenti della matrice  $A_a$ .

UNA PROPRIETÀ INTERESSANTE della matrice di incidenza è la seguente:  $n - 1$  lati corrispondenti a  $n - 1$  colonne di  $A_a$  linearmente indipendenti identificano un albero associato al grafo descritto da  $A_a$ . Questa proprietà può servire per realizzare procedure automatiche (al calcolatore) per localizzare un albero associato ad un grafo dato.

CONSIDERIAMO A TITOLO DI ESEMPIO il grafo in figura 2.29 e pensiamolo orientato come le correnti descrittive di un circuito ad esso abbinato.

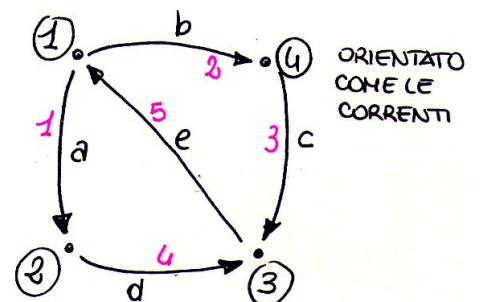


Figura 2.29:  $n = 4$  e  $l = 5$ .

La matrice di incidenza risulta essere

$$A_a = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (2.20)$$

Osservando la matrice  $A_a$  di quest'esempio possiamo notare che,

come previsto,  $\sum_{k=1}^4 R_k = 0$ . Inoltre  $C_5 = [-1, 0, 1, 0]^T = -C_3 - C_2$ .

DAL FATTO CHE LE RIGHE DI  $A_a$  siano linearmente dipendenti, si intuisce che  $A_a$  contiene "troppe informazioni". Del resto, se pensiamo all'esempio considerato, ci accorgiamo facilmente come le righe di  $A_a$  altro non sono se non i bilanci (KCL), a ciascuno degli  $n$  nodi del grafo, delle correnti entranti e uscenti dai nodi stessi. Dal momento che sappiamo che un grafo ad  $n$  nodi ammette al più  $n - 1$  equazioni KCL linearmente indipendenti, una delle righe di  $A_a$  è senz'altro ridondante. Possiamo allora prendere delle  $n$  righe di  $A_a$ , solo le  $n - 1$  righe che corrispondono agli  $n - 1$  nodi ai quali vogliamo considerare le KCL. Otteniamo così una **matrice di incidenza ridotta**  $A$  con  $n - 1$  righe ed  $l$  colonne. Nell'esempio possiamo scartare arbitrariamente il nodo 4 e ottenerne

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (2.21)$$

Organizzando in un vettore  $i$  ciascuna delle correnti  $i_j$  abbinata al lato  $j$ -esimo, possiamo scrivere le  $n - 1$  KCL linearmente indipendenti in forma vettoriale come  $Ai = 0$ . Nell'esempio:

$$Ai = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \\ i_4 \\ i_5 \end{bmatrix}. \quad (2.22)$$

## 2.9 Equazioni di Tableau

DATO UN CIRCUITO IL CUI GRAFO SIA CONNESSO, con  $n$  nodi ed  $l$  lati, fissiamo per ogni nodo  $k$  il potenziale di nodo  $u_k$  avendo scelto un nodo di riferimento per il potenziale elettrico. Per la legge di Kirchhoff per le tensioni di tipo I, dati due nodi  $j$  e  $k$  del grafo,  $V_{jk} =$

$u_j - u_k$ . Riprendiamo l'esempio in figura 2.29 e scriviamo

$$\begin{aligned} V_{12} &= u_1 - u_2 \\ V_{14} &= u_1 - u_4 \\ V_{31} &= u_3 - u_1 \\ V_{23} &= u_2 - u_3 \\ V_{43} &= u_4 - u_3 \end{aligned} \quad . \quad (2.23)$$

È facile verificare che, definiti i vettori

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_a &= [u_1, u_2, u_3, u_4]^T \\ \mathbf{v} &= [V_{12}, V_{14}, V_{43}, V_{23}, V_{31}]^T \end{aligned} \quad , \quad (2.24)$$

le equazioni in 2.23 possono essere scritte in forma matriciale come

$$A_a^T \mathbf{u}_a = \mathbf{v} \quad . \quad (2.25)$$

SE PRENDIAMO ADESSO LO STESSO NODO di riferimento preso per introdurre la matrice di incidenza  $A$  e definiamo il vettore dei potenziali ridotto  $\mathbf{u}$  (cioè il vettore  $u_a$  dal quale si elimina l'elemento corrispondente al nodo che scegliamo come riferimento), possiamo introdurre le Equazioni di Tableau<sup>8</sup>

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{A}\mathbf{i} = \mathbf{0} \\ \mathbf{v} - \mathbf{A}^T \mathbf{u} = \mathbf{0} \end{array} \right. \quad . \quad (2.26)$$

NOTIAMO CHE LE EQUAZIONI della 2.26 sono  $n - 1$  equazioni di tipo KCL e  $l$  equazioni di tipo KVL I: in totale  $l + n - 1$  equazioni in  $2l + n - 1$  incognite. Se confrontiamo questi numeri con quelli in gioco utilizzando le KCL e le KVL-II, che introducono complessivamente  $(n - 1) + (l - n + 1) = l$  equazioni in  $2l$  incognite, le equazioni di Tableau risultano essere più onerose in termini computazionali. È necessario però sottolineare come questo approccio necessiti solo della matrice  $A$  e come, tipicamente,  $l \gg n$ . Quest'ultima considerazione implica che, in generale, per le reti di interesse pratico,  $l + n - 1 \approx l$ , il che non rende penalizzante l'uso delle equazioni di Tableau.

<sup>8</sup> Notiamo che, scegliere il nodo 4 come riferimento per il potenziale elettrico, significa di fatto scegliere  $u_4 = 0V$ . Ciò è assolutamente corretto essendo il potenziale elettrico definito, come tutti i potenziali, a meno di una costante additiva.

# 3

## 3.1 Potenza ed energia elettrica

CONSIDERIAMO UN GENERICO BIPOLO e supponiamo che sia attraversato dalla carica  $\Delta Q > 0$  nell'intervallo di tempo  $\Delta t$  in base al verso della freccia indicata in figura 3.1. Se supponiamo  $V_{AB} = v > 0$  (ovvero il campo elettrico all'interno del bipolo compie un lavoro positivo per muovere la carica  $\Delta Q$ ) la carica perde una quantità di energia pari a  $\Delta w_a = v\Delta Q$  nell'attraversare il bipolo. Se definiamo  $p_a = \frac{\Delta w_a}{\Delta t}$  l'energia perduta per unità di tempo. Passando al limite possiamo scrivere

$$p_a(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta w_a}{\Delta t} = \frac{dw_a}{dt} . \quad (3.1)$$

L'equazione 3.1 può essere riscritta come (cfr. equazione 1.18)

$$p_a(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{v\Delta Q}{\Delta t} = v \frac{dQ}{dt} = vi . \quad (3.2)$$

$p_a(t)$  è la **potenza istantanea assorbita** dal bipolo e si misura in Watt [W].

PER IL PRINCIPIO DI CONSERVAZIONE DELL'ENERGIA<sup>1</sup>, l'energia perduta dalla carica che attraversa il bipolo sarà assorbita dal bipolo stesso che, in generale, è libero di trasformarla (si pensi l'energia assorbita da una lampadina che si trasforma in energia termica e luminosa). La potenza assorbita può essere positiva o negativa. Nel caso sia positiva, all'istante  $t$ , il bipolo sta effettivamente incamerando energia, altrimenti la sta *erogando*. Si può quindi definire la **potenza istantanea erogata**  $p_e(t) = -p_a(t)$ . Si noti che, qualora il bipolo fosse descritto con la convenzione dei generatori, si avrebbe  $p_e(t) = vi$ .

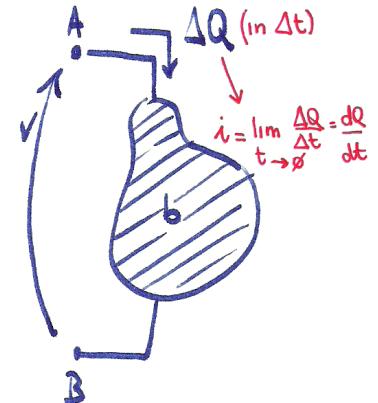


Figura 3.1: Definizione della potenza assorbita da un generico bipolo.

<sup>1</sup> In fisica, la legge di conservazione dell'energia è una delle più importanti leggi di conservazione osservata nella natura. Nella sua forma più intuitiva questa legge afferma che, sebbene l'energia possa essere trasformata e convertita da una forma all'altra, la quantità totale di essa in un sistema isolato non varia nel tempo.

### 3.1.1 Bipoli attivi e passivi

ASSUNTA LA CONVENZIONE NORMALE O DEGLI UTILIZZATORI, i bipoli per i quali la potenza assorbita  $p_a(t)$  è positiva sempre (cioè in qualunque condizione di funzionamento) vengono detti **passivi**. Questa definizione implica che, se  $t > t_0$ ,

$$w_a(t) = w_a(t_0) + \int_{t_0}^t p_a(\tau) d\tau > w_a(t_0) . \quad (3.3)$$

DAL PUNTO DI VISTA DELL'ENERGIA  $w_a(t)$  assorbita da un bipolo in un dato intervallo di tempo, si definiscono passivi anche quei bipoli che non sono in grado di erogare più energia di quella che abbiano incamerato precedentemente. In altre parole, nell'equazione 3.3,  $w_a(t) \geq 0$ . Questo aspetto sarà esemplificato chiaramente quando introdurremo il condensatore e l'induttore.

GLI UNICI BIPOLI NON PASSIVI, ovvero **attivi**, sono quelli in grado di erogare energia elettrica senza limitazioni e per quest'ultimi  $w_a(t)$  potrà essere negativa.

### 3.1.2 Potenza assorbita da un $n$ -terminali

COME GENERALIZZAZIONE della potenza assorbita da un bipolo è possibile ricavare l'espressione della potenza assorbita da un generico  $n$ -terminali. In particolare, se si assume di associare ad esso un grafo costituito da  $n - 1$  lati e di scegliere la convenzione degli utilizzatori, essendo  $v_k(t)$  e  $i_k(t)$  la tensione e la corrente descrittiva associate al lato  $k$ -esimo all'istante  $t$ , la potenza istantanea assorbita dall' $n$ -terminali è pari a

$$p_a(t) = \sum_{k=1}^n v_k(t)i_k(t) . \quad (3.4)$$

## 3.2 Il teorema di Tellegen

CONSIDERIAMO UN CIRCUITO ARBITRARIO il cui grafo connesso ad  $n$  nodi sia stato orientato come le correnti degli  $l$  lati, rispettando la convenzione normale o degli utilizzatori per le tensioni. Siano  $\mathbf{i} = (i_1, i_2, \dots, i_l)^T$  e  $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \dots, v_l)^T$  due insiemi qualunque di correnti e tensioni di lato che soddisfano le equazioni di Kirchhoff per il grafo (e quindi per il circuito).  $\mathbf{i}$  e  $\mathbf{v}$  si dicono **compatibili** con il

grafo. Il teorema di Tellegen afferma che

$$\mathbf{v}^T \mathbf{i} = \mathbf{i}^T \mathbf{v} = \sum_{k=1}^l v_k i_k = 0 . \quad (3.5)$$

PER DIMOSTRARE IL TEOREMA utilizziamo le equazioni di Tableau introdotte nel capitolo 2.9, cioè  $A\mathbf{i} = 0$  e  $\mathbf{v} = A^T \mathbf{u}$  essendo  $\mathbf{u}$  il vettore dei potenziali di nodo ridotto. Possiamo quindi scrivere

$$\mathbf{v}^T \mathbf{i} = (A^T \mathbf{u})^T \mathbf{i} = \mathbf{u}^T A\mathbf{i} = \mathbf{u}^T 0 = 0 . \quad (3.6)$$

SI NOTI che i vettori  $\mathbf{i}$  e  $\mathbf{v}$  sono compatibili con il grafo ma non hanno alcuna relazione particolare tra loro. Non sono infatti legate alle equazioni descrittive dei componenti che compogono il circuito e delle quali non si è detto nulla. Se prendessimo quindi due insiemi di tensioni  $\mathbf{v}'$  e  $\mathbf{v}''$  compatibili con il grafo e due insiemi di correnti  $\mathbf{i}'$  e  $\mathbf{i}''$ , anch'esse compatibili con il grafo, potremmo scrivere

$$\mathbf{v}'^T \mathbf{i}' = \mathbf{v}''^T \mathbf{i}'' = \mathbf{v}'^T \mathbf{i}'' = \mathbf{v}''^T \mathbf{i}' = 0 . \quad (3.7)$$

**IL TEOREMA DI TELLEGGEN** racchiude in sè il **teorema di conservazione dell'energia**. Infatti, se considerassimo un circuito e *miserissimo* ad ogni istante  $t$  la tensione e la corrente di ogni suo lato  $k$  ( $k = 1, \dots, l$ ) secondo la convenzione degli utilizzatori osserveremmo che  $\sum_{k=1}^l v_k(t)i_k(t) = 0$  dove  $v_k(t)i_k(t)$  è la potenza assorbita in  $t$  dal lato  $k$ -esimo. Per i circuiti a parametri concentrati la conservazione dell'energia è conseguenza diretta delle leggi di Kirchhoff.

LE "POTENZE"  $v_k i_k$  tirate in gioco dal teorema di Tellegen si definiscono **potenze virtuali** dato che non necessariamente rappresentano un flusso reale di energia.

### 3.2.1 Esempio 1

SI CONSIDERI IL CIRCUITO in figura 3.2. Vogliamo verificare per questo circuito il teorema di Tellegen prendendo il nodo 0 come riferimento per il potenziale elettrico. Scegliamo un insieme di correnti di lato e di tensioni di lato compatibili con il grafo del circuito (lo studente lo verifichi per esercizio). Si noti che il grafo del circuito è stato orientato come le correnti.

$$\begin{aligned} \mathbf{i} &= (i_1, i_2, i_3, i_4)^T = (3, 1, 3, -4)^T \\ \mathbf{v} &= (V_1, V_2, V_3, V_4)^T = (1, 5, 4, 5)^T \end{aligned} \quad (3.8)$$

Per verificare il teorema di Tellegen è sufficiente calcolare  $\mathbf{v}^T \mathbf{i}$  ovvero  $1 \cdot 3 + 5 \cdot 1 + 4 \cdot 3 + 5 \cdot (-4) = 0$ . Proviamo a scegliere un altro vettore

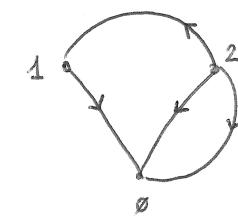
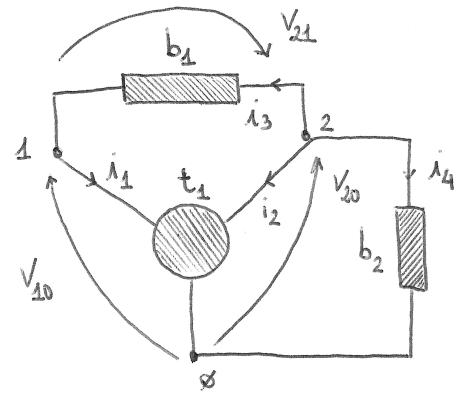


Figura 3.2: Un circuito e il suo grafo orientato come le correnti.

di correnti  $\mathbf{i} = (10, -8, 10, -2)^T$  compatibili con il grafo. Questa volta dovremo valutare  $1 \cdot 10 + 5 \cdot (-8) + 4 \cdot 10 + 5 \cdot (-2) = 0$ .

### 3.2.2 Esempio 2

SIANO DATI I DUE CIRCUITI in figura 3.3 e si supponga di conoscere un insieme  $v''$  di tensioni compatibili con il grafo del secondo circuito (quello sulla destra della figura) e le corrente  $i'_4$  del primo circuito (quello sulla sinistra della figura). Ricavare la corrente  $i'_1$ .

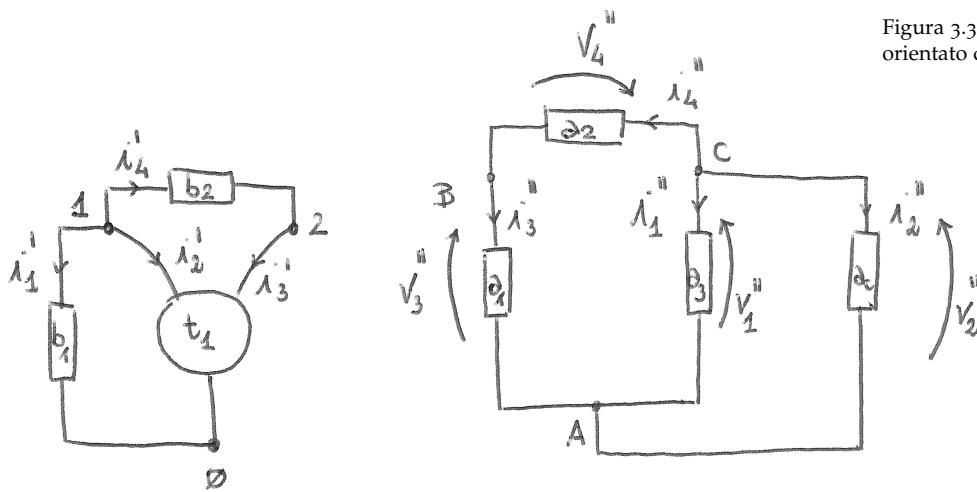
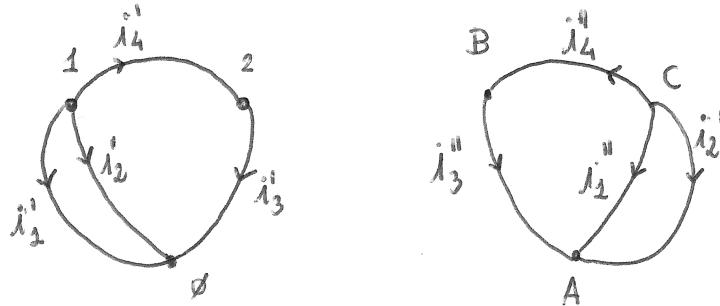


Figura 3.3: Un circuito e il suo grafo orientato come le correnti.



PER RISOLVERE L'ESERCIZIO ricaviamo come prima cosa i grafi dei due circuiti e orientiamoli come le correnti. Analizzando quindi i grafi ottenuti e riportati in figura, ci rendiamo conto che se  $0 \equiv A$ ,  $2 \equiv B$  e  $1 \equiv C$ , essi sono identici anche come orientamento dei lati. Questo vuol dire che l'insieme di tensioni  $v''$  è compatibile anche con il grafo del primo circuito. Inoltre si noti che, applicando la KCL ai nodi 1 e 2, si ottiene, rispettivamente,  $i'_2 = -i'_1 - i'_4$  e  $i'_3 = i'_4$ .

Applicando il teorema di Tellegen possiamo scrivere

$$v_1''i_1' + v_2''i_2' + v_3''i_3' + v_4''i_3' = v_1''i_1' - v_2''(i_1' + i_4') + v_3''i_4' + v_4''i_4' = 0 . \quad (3.9)$$

Nella precedente equazione l'unica incognita è  $i_1'$  e quindi possiamo ricavare

$$i_1' = \frac{v_2'' - v_3'' - v_4''}{v_1'' - v_2''} i_4' . \quad (3.10)$$

### 3.3 Classificazione di un componente

SUDDIVIDIAMO LA CLASSE dei componenti generici nel modo seguente

- Un componente si dice **adinamico** se la sua relazione costitutiva non contiene derivate e/o integrali delle variabili descrittive rispetto al tempo. Viceversa si dice **dinamico**.
- Un componente si dice **tempo-invariante** se la sua relazione costitutiva non cambia nel tempo. Le variabili descrittive dipendono (in generale) dal tempo, ma il modo in cui sono legate tra loro no. Viceversa si dice **tempo-variante**.
- Un componente si dice **lineare** se, dati due vettori ammissibili (compatibili con il grafo) di variabili descrittive, anche una loro combinazione lineare è un vettore ammissibile. Viceversa si dice **non lineare**.

Consideriamo ad esempio il bipolo la cui tensione descrittiva  $v$  sia legata alla corrente descrittiva  $i$  nel modo seguente

$$i + \alpha v + \beta \frac{di}{dt} + \delta v^2 + \epsilon t = 0 , \quad (3.11)$$

con  $[\alpha] = \text{AV}^{-1}$   $[\beta] = \text{s}$ ,  $[\delta] = \text{AV}^{-2}$  e  $[\epsilon] = \text{As}^{-1}$ .

In base alla classificazione proposta il bipolo è dinamico, tempo-variante e non lineare. Verifichiamo quest'ultima proprietà dato che le prime due derivano banalmente dalla loro stessa definizione. Per farlo iniziamo da un caso particolare, quello in cui  $\delta = 0$  e  $\epsilon = 0$ . Siano  $i_1$  e  $v_1$  compatibili con l'equazione del componente, cioè  $i_1 + \alpha v_1 \beta + \frac{d}{dt} i_1$  e analogamente  $i_2$  e  $v_2$ . Affinchè il componente si dica lineare è necessario che, prese due costanti  $a$  e  $b$  generiche, anche  $ai_1 + bi_2$  e  $av_1 + bv_2$  siano compatibili con l'equazione del

Si noti che un bipolo, in generale tempo-variante, avente come equazione caratteristica  $v + b(t)i + c(t) = 0$ , con  $b(t)$  e  $c(t)$  non identicamente nulli, (oppure  $a(t)v + i + c(t) = 0$ , con  $a(t)$  e  $c(t)$  non identicamente nulli) è un bipolo non lineare o, più specificamente, è un bipolo **lineare affine**. Lo studente verifichi per esercizio la non linearità.

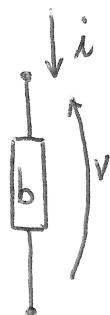


Figura 3.4: Generico bipolo  $b$  con  $v$  e  $i$  variabili descrittive.

componente. Proviamo dunque a valutare

$$\begin{aligned}
 & ai_1 + bi_2 + \alpha(av_1 + bv_2) + \beta \frac{d}{dt}(ai_1 + bi_2) \\
 &= a \left( i_1 + \alpha v_1 + \beta \frac{d}{dt} i_1 \right) + b \left( i_2 + \alpha v_2 + \beta \frac{d}{dt} i_2 \right) \quad . \quad (3.12) \\
 &= a \cdot 0 + b \cdot 0 = 0
 \end{aligned}$$

In questo caso il bipolo è lineare. Nel caso più generale dovremmo scrivere

$$\begin{aligned}
 & ai_1 + bi_2 + \alpha(av_1 + bv_2) + \beta \frac{d}{dt}(ai_1 + bi_2) + \delta(av_1 + bv_2)^2 + \epsilon t \\
 &= a \left( i_1 + \alpha v_1 + \beta \frac{d}{dt} i_1 + \delta v_1^2 + \epsilon t \right) - a\epsilon t + \delta a(a-1)v_1^2 \\
 &+ b \left( i_2 + \alpha v_2 + \beta \frac{d}{dt} i_2 + \delta v_2^2 + \epsilon t \right) - b\epsilon t + \delta b(b-1)v_2^2 \\
 &+ 2\delta abv_1 v_2 + \epsilon t \\
 &= \epsilon t(1-a-b) + \delta a(a-1)v_1^2 + \delta b(b-1)v_2^2 + 2\delta abv_1 v_2 \neq 0 \quad (3.13)
 \end{aligned}$$

e quindi il bipolo è non-lineare. Sarebbe tempo-invariante con  $\delta = 0$  e adinamico con  $\beta = 0$ .

### 3.3.1 Classificazione dei bipoli adinamici in termini energetici

LA CLASSIFICAZIONE PER I COMPONENTI GENERICI presentata nel paragrafo precedente può essere ulteriormente dettagliata qualora ci si riferisca a **bipoli adinamici**.

Tali componenti sono rappresentati da un'equazione costitutiva che, in forma implicita, è del tipo  $f(i, v) = 0$ , dove  $i$  e  $v$  sono le variabili descrittive del bipolo che si assumono scelte in base alla convenzione normale o degli utilizzatori. L'equazione costitutiva del componente individua sul piano  $(i, v)$  un *luogo di punti* che, in generale giace in uno o più quadranti del piano stesso. Tale luogo di punti viene visitato dalla coppia  $(i(t), v(t))$  al variare del tempo e ciascun punto corrisponde ad un valore di potenza  $p_a(t) = i(t)v(t)$  assorbita dal componente. Si introduce quindi la seguente classificazione:

- il bipolo si dice **inerte** se  $p_a(t) = i(t)v(t) \equiv 0$  per ogni valore di  $t$  e per ogni possibile situazione elettrica (ovvero la proprietà non dipende da *come è collegato* il componente e *a che cosa è collegato* ma solo dal componente stesso). Ciò equivale a dire che il luogo dei punti tali che  $f(i, v) = 0$  appartiene agli assi coordinati  $i = 0, v = 0$  (cfr. figura 3.5).

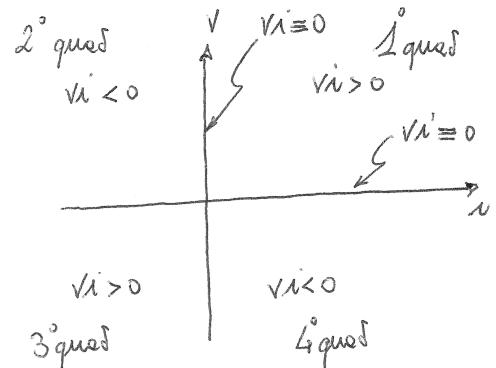


Figura 3.5: Il piano  $(i, v)$  e la suddivisione in quadranti.

- il bipolo si dice **dissipativo** o **passivo** se se  $p_a(t) = i(t)v(t) \geq 0$  per ogni valore di  $t$  e per ogni possibile situazione elettrica. Ciò equivale a dire che il luogo dei punti tali che  $f(i, v) = 0$  giace nel primo e/o nel terzo quadrante (cfr. figura 3.5).
- il bipolo si dice **strettamente attivo** se se  $p_a(t) = i(t)v(t) \leq 0$  per ogni valore di  $t$  e per ogni possibile situazione elettrica. Ciò equivale a dire che il luogo dei punti tali che  $f(i, v) = 0$  giace nel secondo e/o nel quarto quadrante (cfr. figura 3.5).
- il bipolo si dice **attivo** se se  $p_a(t) = i(t)v(t)$  può essere negativa, nulla o positiva. Ciò equivale a dire che il luogo dei punti tali che  $f(i, v) = 0$  appartiene almeno ad un quadrante pari e uno dispari (cfr. figura 3.5).

### 3.4 Le basi di definizione

DATO UN  $n$ -terminali esso si dice **controllabile in tensione** o **definito su base tensione** se, assegnate  $n - 1$  tensioni descrittive, è possibile ricavare in modo univoco le corrispondenti  $n - 1$  correnti descrittive<sup>2</sup>.

NEL CASO DUALE, cioè quello in cui dato un  $n$ -terminali è possibile assegnare  $n - 1$  correnti descrittive e ricavare in modo univoco le corrispondenti  $n - 1$  tensioni descrittive, il componente si dice **controllabile in corrente** o **definito su base corrente**.

UN  $n$ -TERMINALI si dice **definito su base mista** se assegnate  $n - 1$  delle sue variabili descrittive (un insieme di tensioni e correnti) è possibile ricavare le restanti  $n - 1$  (un insieme di correnti e tensioni).

A TITOLO DI ESEMPIO si consideri il tripolo descrittico dall'equazione costitutiva

$$\begin{cases} v_1 = \alpha i_1 \\ v_2 = \beta i_1 + \gamma i_2 \end{cases} \quad (3.14)$$

con  $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}^+$ .

Dalla sua equazione costitutiva è evidente che ammette la base corrente ( $i_1, i_2$ ). Inoltre, dato che l'equazione 3.14 può essere riscritta come

$$\begin{cases} i_1 = \frac{v_1}{\alpha} \\ i_2 = \frac{1}{\gamma} \left( -\frac{\beta}{\alpha} v_1 + v_2 \right) \end{cases} \quad (3.15)$$

il tripolo ammette anche la base tensione. Dalla 3.15, infatti, si deduce banalmente che, assegnate  $v_1$  e  $v_2$ , è possibile ricavare univocamente  $i_1$  e  $i_2$ .

<sup>2</sup> Per corrente descrittiva  $\bar{i}$ , corrispondente ad una data tensione descrittiva  $\bar{v}$  (e viceversa), si intende la corrente individuata sul lato del grafo del componente sul quale si indica la tensione  $\bar{v}$ .

Per assegnare la tensione o la corrente ad un lato del grafo di un componente si utilizzano sorgenti impressive di tensione o di corrente che verranno introdotte nel seguito (cfr. paragrafo 3.5.4). In quella sede sarà evidenziato come, con tali sorgenti, non sia possibile impostare contemporaneamente la tensione e la corrente al medesimo lato.

Analogamente si ricava che sono ammissibili la base  $(i_1, v_2)$

$$\begin{cases} v_1 = \alpha i_1 \\ i_2 = \frac{1}{\gamma} \left( -\frac{\beta}{\alpha} v_1 + v_2 \right) \end{cases} \quad (3.16)$$

e la base  $(i_2, v_1)$

$$\begin{cases} i_1 = \frac{v_1}{\alpha} \\ v_2 = \frac{\beta}{\alpha} v_1 + \gamma i_2 \end{cases} . \quad (3.17)$$

Nel caso in cui, ad esempio,  $\alpha = 0$  e  $\beta, \gamma \in \mathbb{R}^+$ , il tripolo ammette solo le basi  $(i_1, i_2)$  e  $(v_2, i_2)$ .

**SI PROVI PER ESERCIZIO** a verificare cosa accade se  $\beta = 0$  e  $\alpha, \gamma \in \mathbb{R}^+$ ,  $\gamma = 0$  e  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$ ,  $\alpha = \beta = 0$  e  $\gamma \in \mathbb{R}^+$ .

### 3.5 Bipoli notevoli

#### 3.5.1 Il resistore lineare

IL RESISTORE LINEARE è un componente la cui tensione descrittiva  $v$  e corrente descrittiva  $i$  sono legate dalla relazioni lineari (equazione caratteristica - cfr. figura 3.6)

$$v = Ri , \quad (3.18)$$

dove il parametro  $R > 0$  si chiama **resistenza** e si misura in Ohm [ $\Omega$ ]. Il resistore è un componente lineare, adinamico, tempo-invariante. È definito su base corrente, come si deduce immediatamente dall'equazione 3.18, e su base tensione essendo  $i = vR^{-1}$ . La grandezza  $R^{-1} = G$  si chiama **conduttanza** e si misura in Siemens [S]. Si noti come la caratteristica del resistore sia simmetrica rispetto all'origine degli assi coordinati, il che implica che invertire i morsetti del resistore non provoca alcuna variazione nel suo funzionamento.

DA UN PUNTO DI VISTA ENERGETICO il resistore è un bipolo passivo essendo

$$p = vi = Ri^2 = \frac{v^2}{R} > 0 , \quad (3.19)$$

per qualunque valore di  $i$  e  $v$ .

#### 3.5.2 Il corto circuito

IL CORTO CIRCUITO può essere visto come un caso limite di resistore lineare nel senso che la sua equazione caratteristica è

$$v = Ri|_{R=0} = 0 . \quad (3.20)$$

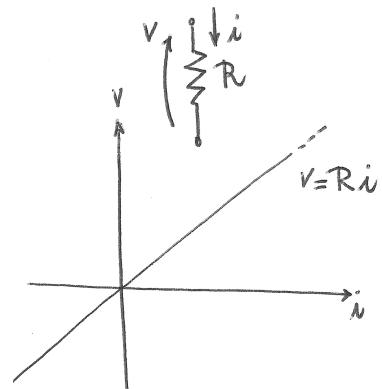


Figura 3.6: Il resistore lineare: simbolo e caratteristica sul piano  $(i, v)$ .

Vedremo nel seguito che il corto circuito e il circuito aperto possono essere visti anche come casi particolari del generatore indipendente di tensione e di corrente, rispettivamente.

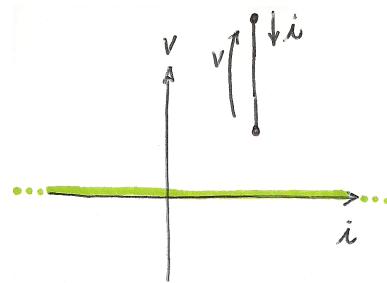


Figura 3.7: Il corto circuito.

Il corto circuito è un componente adinamico e tempo-invariante.

Dal punto di vista energetico è un componente chiaramente inerte dato che  $p = vi = 0$  per qualunque  $i$ . È un bipolo definito su base corrente dato che non è possibile scegliere liberamente la tensione tra i suoi morsetti. Per quanto riguarda l'essere linerare o non lineare applichiamo la definizione. Se si impongono  $i_1$  o  $i_2$  la tensione ai capi del bipolo sarà  $v_1$  o  $v_2$ , entrambi nulle. Prese due costanti arbitrarie  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$  e imponendo  $\alpha_1 i_1 + \alpha_2 i_2$  si ottiene ai capi la tensione 0 ovvero  $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2$ . Il bipolo è dunque lineare.

### 3.5.3 Il circuito aperto

IL CIRCUITO APERTO è il componente duale del corto circuito:

$$i = \frac{v}{R} \Big|_{R \rightarrow +\infty} = 0 . \quad (3.21)$$

È un bipolo adinamico, tempo-invariante, lineare e passivo. È definito solo su base tensione dato che non è consentito assegnare liberamente la corrente che lo attraversa in quanto essa, a prescindere dalla tensione ai capi del bipolo, è sempre nulla.

### 3.5.4 Le sorgenti impressive: generatori indipendenti di tensione e di corrente

IL GENERATORE INDIPENDENTE DI TENSIONE ha come equazione caratteristica

$$v = e(t) . \quad (3.22)$$

In generale  $e(t)$  è una funzione del tempo  $t$  e quindi il bipolo è tempo variante. Tipici esempi sono il generatore di tensione sinusoidale  $e(t) = V_0 \cos(\omega t + \phi)$  o il generatore a gradino  $e(t) = V_0 u(t - t_0)$  con  $u(t - t_0) = 0$  se  $t < t_0$  e  $u(t - t_0) = 1$  se  $t > t_0$  ( $t_0 \geq 0$ ).

Il generatore indipendente di tensione è adinamico dato che la sua equazione caratteristica non contiene derivate o integrali rispetto al tempo delle sue variabili descrittive. Nel caso in cui  $e(t) \equiv 0$  per ogni valore di  $t$  il componente degenera in un corto circuito e solo in quel caso è lineare. Più in generale è un componente non lineare. Definito solo su base corrente, infatti, se si impongono  $i_1$  o  $i_2$  la tensione ai capi del bipolo sarà  $v_1$  o  $v_2$ , entrambi pari a  $e(t)$ . Prese due costanti arbitrarie  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$  e imponendo  $\alpha_1 i_1 + \alpha_2 i_2$  si ottiene ai capi la tensione  $e(t) \neq \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 = (\alpha_1 + \alpha_2)e(t)$ .

Da un punto di vista energetico il bipolo è attivo dato che la sua caratteristica giace in quadrante pari e uno dispari del piano  $(i, v)$ .

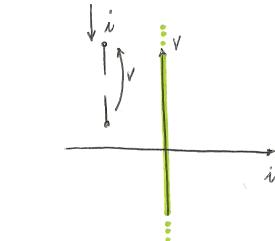


Figura 3.8: Il circuito aperto.

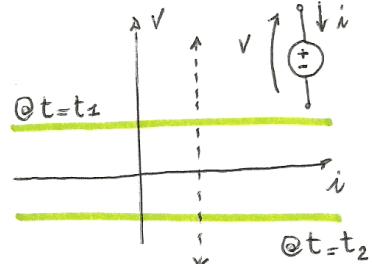


Figura 3.9: Il generatore di tensione.

Bisogna infatti pensare che in tale piano la caratteristica del generatore è una retta parallela all'asse  $i$  che, al variare del tempo, eventualmente trasla verso l'alto e/o verso il basso. Ad un dato istante di tempo giace quindi nel primo o secondo quadrante, oppure nel terzo o nel quarto.

**IL GENERATORE INDEPENDENTE DI CORRENTE** ha come equazione caratteristica

$$i = -a(t) . \quad (3.23)$$

Il segno “-” nell'equazione 3.23 non deve trarre in inganno. Si noti infatti come in figura 3.10 la corrente  $i$ , presa con la convenzione normale o degli utilizzatori, punta nel verso opposto alla freccia che si trova all'interno del simbolo proprio del generatore. Questo vuol dire che, scelta la forma d'onda  $a(t)$  impressa dal generatore, la corrente  $i$  ha semplicemente il segno opposto ad essa. Se invece scegliessimo la convenzione dei generatori, la corrente  $i' = -i$  sarebbe concorde con  $a(t)$ . Quello che conta, quindi, per definire in modo non ambiguo il componente sono la scelta di  $a(t)$  e la convenzione con cui descrivere il componente. Ad esempio, scelta  $a(t) = A_0 u(t - t_0)$ , con  $u(t - t_0) = 0$  se  $t < t_0$  e  $u(t - t_0) = 1$  se  $t > t_0$  ( $t_0 \geq 0$ ), con la convenzione degli utilizzatori usata in figura 3.10,  $i = -A_0 u(t - t_0)$ .

Come il generatore indipendente di tensione, il generatore indipendente di corrente è non lineare (salvo il caso  $a(t) \equiv 0$  per ogni  $t$ , cioè degenera in un circuito aperto), adinamico, tempo-variante e attivo. È un bipolo definito solo su base tensione.

### 3.6 Esercizio: il primo circuito elementare

SIA DATO IL CIRCUITO in figura 3.11: si determinino  $v_1$  e  $i_2$ .

COME PRIMA COSA ricaviamo il grafo del circuito (cfr. figura 3.12). Il circuito è costituito da 3 componenti a due terminali ovvero da  $2 \cdot 3 = 6$  variabili descrittive. Si verifica banalmente che il grafo del circuito è caratterizzato da  $n = 3$  nodi e  $l = 3$  lati. Sappiamo quindi (cfr. paragrafo 2.7) che è possibile scrivere  $n - 1 = 2$  KCL linearmente indipendenti e  $l - n + 1 = 1$  equazioni KVL-II. Ogni bipolo ha un'equazione costitutiva, per un totale di 3 equazioni, e quindi possiamo scrivere

$$\underbrace{3}_{\text{eq.ni costitutive}} + \underbrace{3}_{\text{eq.ni topologiche}} = 6 \quad (3.24)$$

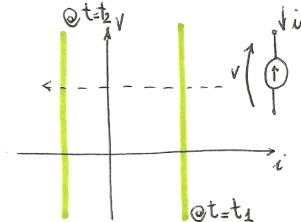


Figura 3.10: Il generatore di tensione.

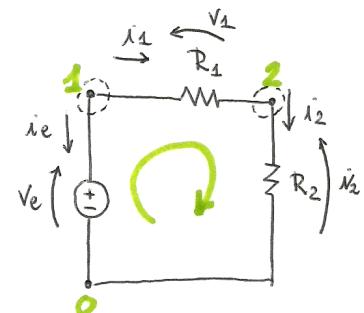


Figura 3.11: Un primo esempio di circuito da risolvere.



Figura 3.12: Il grafo del circuito in figura 3.11 orientato come le tensioni.

equazioni in 6 incognite.

Iniziamo con le KCL. Facendo riferimento alla figura 3.11 scriviamo i bilanci di corrente ai nodi 1 e 2 (assumendo arbitrariamente positive le correnti uscenti dalle linee chiuse tracciate attorno ai nodi):

$$\begin{aligned} i_e + i_1 &= 0 \\ i_2 - i_1 &= 0 \end{aligned} \quad (3.25)$$

Possiamo poi scrivere l'equazione KVL-II per l'unica maglia del circuito, scegliendo come verso di percorrenza quello orario

$$v_e - v_1 - v_2 = 0 \quad (3.26)$$

Le equazioni dei componenti sono infine

$$\begin{aligned} v_e &= e(t) \\ v_1 &= R_1 i_1 \\ v_2 &= R_2 i_2 \end{aligned} \quad (3.27)$$

Possiamo quindi riscrivere la 3.26 come

$$e(t) - v_1 - R_2 i_2 = e(t) - v_1 - R_2 i_1 = e(t) - v_1 - R_2 \frac{v_1}{R_1} = 0 \quad (3.28)$$

Si ricava dunque  $v_1 = \frac{R_1 e(t)}{R_1 + R_2}$  e  $i_2 = i_1 = \frac{v_1}{R_1} = \frac{e(t)}{R_1 + R_2}$ .

### 3.7 Il principio di equivalenza

*Due bipoli di diversa costituzione si dicono equivalenti quando le loro relazioni caratteristiche coincidono.*

DATO UN CIRCUITO GENERICO è quindi possibile sostituire un bipolo con un suo equivalente senza produrre cambiamenti nel funzionamento del circuito stesso. Il principio di equivalenza lo useremo, ad esempio, ogni qualvolta si farà riferimento alla connessione *in serie* o *in parallelo* di due o più bipoli, quando useremo gli equivalenti di Thevenin e Norton.

#### 3.7.1 Connessione in serie di bipoli

DUE BIPOLI SI DICONO connessi in serie se sono attraversati dalla stessa corrente. Quando ciò avviene è possibile ridisegnare il circuito in modo tale che i due bipoli siano collegati in modo esclusivo ad uno dei nodi del circuito, ovvero siano gli unici bipoli incidenti in quel nodo.

POSSENO VERIFICARSI DIVERSE situazioni che vanno prese in considerazione con cura.

In generale quando si debbano determinare una o più grandezze incognite in un dato circuito, la scelta di scrivere tutte le equazioni possibili non è sempre la migliore. In generale impareremo a scrivere molti risultati intermedii direttamente sullo schema del circuito e a selezionare solo le equazioni indispensabili per risolvere il problema. Sapere però che, a partire dalla topologia e dalle equazioni dei componenti, è possibile scrivere sempre tutte in modo sistematico permette di concepire metodi automatici (al calcolatore) per analizzare reti anche molto complesse.

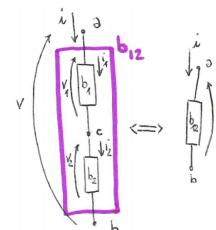


Figura 3.13: Due bipoli connessi in serie hanno un nodo (*c* in figura) al quale sono connessi in modo esclusivo.

La connessione in serie  $b_{12}$  di due bipoli  $b_1$  e  $b_2$  si indica con il simbolo  $+$ . Ovvero si scrive che  $b_{12} = b_1 + b_2$ .

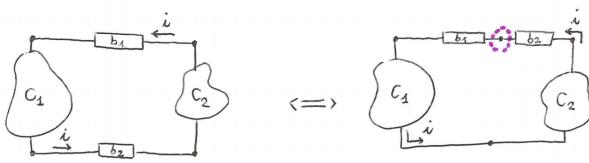


Figura 3.14: Due bipoli  $b_1$  e  $b_2$  sono attraversati dalla stessa corrente  $i$ . Dato che compongono un maglia insieme a  $C_1$  e  $C_2$ , è possibile “spostarli” senza alterare il funzionamento del circuito e ridisegnarli in modo che abbiano in comune un nodo in modo esclusivo.

- Siano  $b_1$  e  $b_2$  due bipoli connessi in serie che ammettono entrambi la base di definizione corrente. Se le equazioni costitutive dei due bipoli sono  $v_1 = f_1(i_1)$  e  $v_2 = f_2(i_2)$ , la caratteristica del bipolo equivalente alla loro connessione in serie sarà  $v = f_1(i) + f_2(i)$ . Ciò si ricava osservando che i due bipoli sono per definizione attraversati dalla medesima corrente (cioè  $i_1 = i_2$ ) e la tensione  $v$  è fissata a  $v_1 + v_2$  da una KVL-II. Da un punto di vista grafico, la caratteristica equivalente di due bipoli connessi in serie e definiti su base corrente si ottiene sul piano  $(i, v)$  sommando punto a punto le caratteristiche dei due bipoli.
- Siano  $b_1$  e  $b_2$  due bipoli connessi in serie e solo  $b_1$  ammetta la base di definizione corrente. In questo caso il bipolo equivalente coincide con  $b_2$  dato che la tensione ai suoi capi non è vincolata ed è esso stesso ad imporre la corrente nella serie.

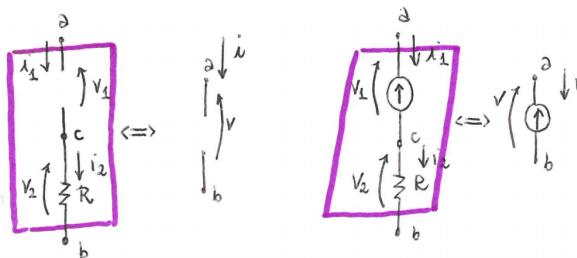


Figura 3.15: Due esempi in cui la connessione serie di bipoli corrisponde al bipolo non definito su base corrente.

- Siano  $b_1$  e  $b_2$  due bipoli connessi in serie e nessuno dei due ammetta la base corrente. In questo caso si possono produrre situazioni in cui la tensione ai capi dei singoli bipoli che costituiscono la serie rimane indeterminata (ad esempio se si connettono in serie due circuiti aperti) e situazioni in cui la connessione non è possibile perché viola la legge di Kirchhoff per le correnti (si pensi alla connessione in serie di due generatori indipendenti di corrente che imprimono correnti arbitrarie).

IL RAGIONAMENTO SVILUPPATO per una coppia di bipoli connessi in serie si applica in modo ricorsivo qualora i bipoli siano più di due. Se fossero tre, ad esempio  $b_1$ ,  $b_2$  e  $b_3$ , ad essere attraversati dalla medesima corrente, dovrebbe essere possibile ridisegnare il circuito

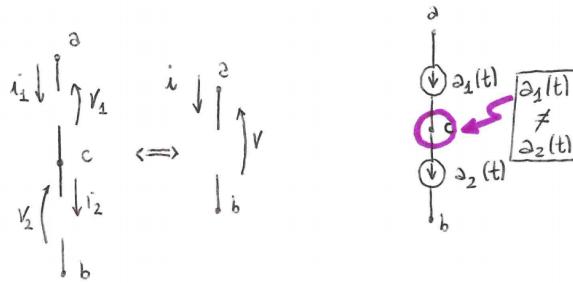


Figura 3.16: Nel caso di sinistra la connessione in serie equivale ad un circuito aperto ma le tensioni  $v_1$  e  $v_2$ , data la  $v$ , sono indeterminate. Nel caso di destra la connessione non è lecita dato che, in generale, viola la KCL al nodo evidenziato.

in modo tale che i bipoli, a due a due, siano collegati in modo esclusivo ad un nodo del circuito. A questo punto, per trovare il bipolo equivalente, si applicano i criteri esposti trovando, ad esempio, prima l'equivalente  $b_{12}$  di  $b_1$  e  $b_2$  e poi l'equivalente  $b_{123}$  di  $b_{12}$  e  $b_3$ .

SI RICAVA QUINDI FACILMENTE l'equivalente di  $M$  resistori lineari connessi in serie ciascuno con equazioni caratteristica  $v_k = R_k i_k$  ( $k = 1, \dots, M$ ). Possiamo infatti scrivere

$$v = v_1 + \dots + v_M = R_1 i_1 + \dots + R_M i_M = (R_1 + \dots + R_M) i = R_{eq} i , \quad (3.29)$$

con  $R_{eq} = \sum_{k=1}^M R_k$ .

### 3.7.2 Il partitore di tensione

IL PARTITORE DI TENSIONE è una regola che si applica *esclusivamente* a resistori lineari connessi in serie. Si immagini di voler calcolare la tensione ai capi del generico resistore  $j$ -esimo che appartiene a  $M$  resistori connessi in serie.

Dal momento che l'equazione costitutiva del bipolo equivalente alla serie è  $v = (\sum_{k=1}^M R_k) i$ , la corrente  $i$  che attraversa il generico resistore  $j$ -esimo è pari a  $i = \frac{v}{\sum_{k=1}^M R_k}$  e quindi

$$v_j = \frac{v R_j}{\sum_{k=1}^M R_k} . \quad (3.30)$$

Si nota quindi come la caduta di tensione maggiore sia ai capi del resistore caratterizzato da resistenza maggiore.

### 3.7.3 Connessione in parallelo di bipoli

DUE BIPOLI SI DICONO connessi in parallelo se sono collegati alla medesima coppia di nodi e quindi hanno ai loro capi la medesima tensione.

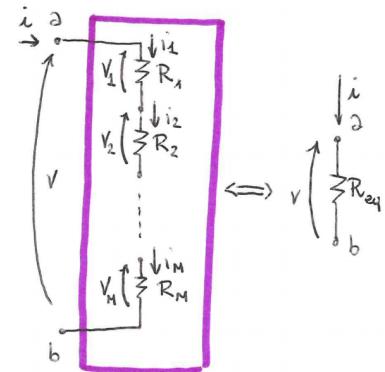


Figura 3.17: Connessione in serie di  $M$  resistori lineari.

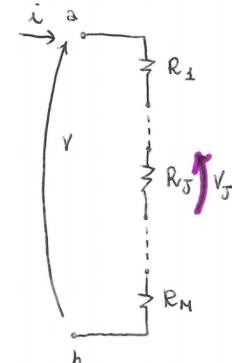


Figura 3.18: La regola del partitore di tensione permette di ricavare facilmente  $v_j$  in funzione di  $R_1, \dots, R_M$  e  $v$ .

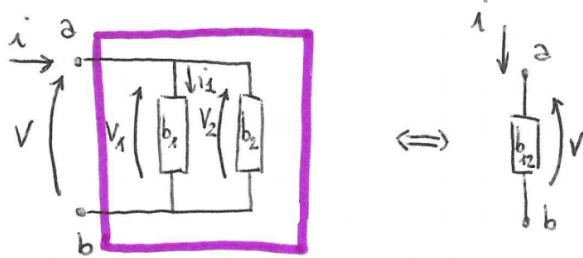


Figura 3.19: Due bipoli connessi in parallelo.

POSSONO VERIFICARSI DIVERSE situazioni che vanno prese in considerazione con cura.

- Siano  $b_1$  e  $b_2$  due bipoli connessi in parallelo che ammettono entrambi la base di definizione tensione. Se le equazioni costitutive dei due bipoli sono  $i_1 = g_1(v_1)$  e  $i_2 = g_2(v_2)$ , la caratteristica del bipolo equivalente alla loro connessione in parallelo sarà  $i = g_1(v) + g_2(v)$ . Ciò si ricava osservando che i due bipoli condividono per definizione la medesima tensione, ovvero  $v = v_1 = v_2$ , la corrente  $i$  è fissata ad  $i_1 + i_2$  da una KCL. Da un punto di vista grafico, la caratteristica equivalente di due bipoli connessi in parallelo e definiti su base tensione si ottiene sul piano  $(v, i)$  sommando punto a punto le caratteristiche dei due bipoli.
- Siano  $b_1$  e  $b_2$  due bipoli connessi in parallelo e solo  $b_1$  ammetta la base di definizione tensione. In questo caso il bipolo equivalente coincide con  $b_2$  dato che la corrente che lo attraversa non è vincolata ed è esso stesso ad imporre la tensione del parallelo (cfr. figura 3.20).
- Siano  $b_1$  e  $b_2$  due bipoli connessi in parallelo e nessuno dei due ammetta la base tensione. In questo caso si possono produrre situazioni in cui la corrente nei singoli bipoli connessi in parallelo rimane indeterminata (ad esempio se si connettono in parallelo due corti circuiti, figura 3.21) e situazioni in cui la connessione non è possibile perché viola la legge di Kirchhoff per le tensioni (si pensi alla connessione in parallelo di due generatori indipendenti di tensione che imprimono tensioni arbitrarie, figura 3.21).

COME PER IL COLLEGAMENTO IN SERIE di più di due bipoli si è mostrato come si può procedere in modo ricorsivo per ottenere il bipolo equivalente, analogamente si agisce per la connessione in parallelo.

IN PARTICOLARE l'equivalente di  $M$  resistori lineari connessi in parallelo, ciascuno con equazione caratteristica  $v_k = R_k i_k$  ( $k = 1, \dots, M$ )

La connessione in parallelo  $b_{eq}$  di due bipoli  $b_1$  e  $b_2$  si indica con il simbolo  $\parallel$ . Ovvero si scrive che  $b_{eq} = b_1 \parallel b_2$ .

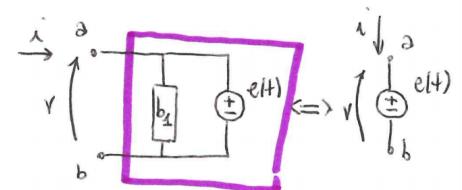


Figura 3.20: Un esempio in cui la connessione parallelo di bipoli corrisponde al bipolo non definito su base tensione.

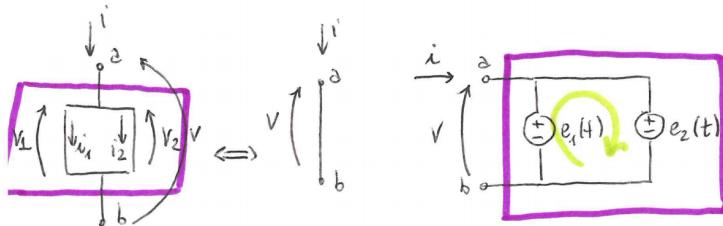


Figura 3.21: Nel caso di sinistra la connessione in parallelo equivale ad un corto circuito ma le correnti  $i_1$  e  $i_2$ , data la  $i$ , sono indeterminate. Nel caso di destra la connessione non è lecita dato che, in generale, viola la KVL-II per la maglia evidenziata.

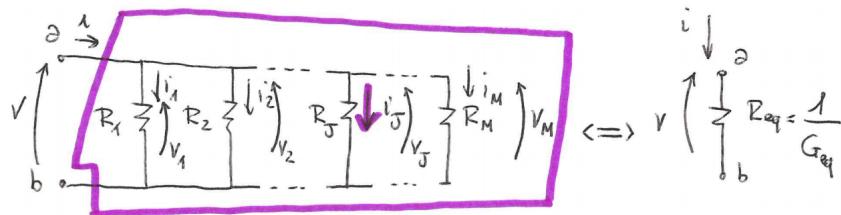


Figura 3.22: Connessione in parallelo di  $M$  resistori lineari. La regola del partitore di corrente permette di ricavare facilmente  $i_j$  in funzione di  $G_1 = R_1^{-1}, \dots, G_M = R_M^{-1}$  e  $i$ .

ovvero  $i_k = R_k^{-1}v_k = G_kv_k$  è scrivibile come

$$i = i_1 + \dots + i_M = G_1v_1 + \dots + G_Mv_M = (G_1 + \dots + G_M)v = G_{eq}v , \quad (3.31)$$

con  $G_{eq} = \sum_{k=1}^M G_k$  la conduttanza equivalente al parallelo.

La resistenza equivalente al parallelo è  $R_{eq} = \frac{1}{\sum_{k=1}^M G_k}$ . Nel caso di due resistori collegati in parallelo si ottiene

$$R_{eq} = \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}} = \frac{R_1R_2}{R_1 + R_2} , \quad (3.32)$$

e nel caso di tre resistori collegati in parallelo si ottiene

$$R_{eq} = \frac{R_1R_2R_3}{R_1R_2 + R_1R_3 + R_2R_3} . \quad (3.33)$$

### 3.7.4 Il partitore di corrente

**IL PARTITORE DI CORRENTE** è il duale del partitore di tensione e si applica *esclusivamente* a resistori lineari connessi in parallelo.

Si immagini di voler calcolare la corrente che scorre nel generico resistore  $j$ -esimo che appartiene a  $M$  resistori connessi in parallelo (cfr. figura 3.22). Dal momento che l'equazione costitutiva del bipolo equivalente alla serie è  $i = (\sum_{k=1}^M G_k)v$ , la tensione  $v$  ai capi del generico resistore  $j$ -esimo è pari a  $v = \frac{i}{\sum_{k=1}^M G_k}$  e quindi

$$i_j = \frac{iG_j}{\sum_{k=1}^M G_k} . \quad (3.34)$$

Si nota quindi come la corrente maggiore scorra nel resistore caratterizzato da conduttanza maggiore ovvero da resistenza minore.

NEL CASO SEMPLICE di due soli resistori  $R_1$  ed  $R_2$  connessi in parallelo, la formula 3.34 può essere facilmente riscritta in termini delle resistenze (lo si verifichi per esercizio)

$$\begin{aligned} i_1 &= \frac{iR_2}{R_1 + R_2} \\ i_2 &= \frac{iR_1}{R_1 + R_2} \end{aligned} . \quad (3.35)$$

### 3.8 Esercizio

CHE VALORE DEVE AVERE  $R_1$  (cfr figura 3.23) affinché il voltmetro ai connesso in parallelo ad  $R_2$  legga la tensione  $E/4$ ? Si assumano  $R_k = r$  per  $k \in \{2, 3, 4, 5\}$ .

PER RISOLVERE IL PROBLEMA è necessario calcolare la corrente  $i$  in funzione di  $R_1$  e poi risolvere, sempre in funzione di  $R_1$ , l'equazione  $R_2i(R_1) = E/4$ . Si noti che  $R_2$  ed  $R_3$ , così come  $R_4$  ed  $R_5$ , sono collegate in serie e possiamo quindi ricavare  $R_{23} = R_2 + R_3 = 2r$  e  $R_{45} = R_4 + R_5 = 2r$ . Del resto  $R_{23}$  e  $R_{45}$  sono collegate in parallelo ( $R_{23} \parallel R_{45} = r$ ) e il bipolo ad esse equivalente è in serie ad  $R_1$ .

LA TENSIONE AI CAPI di  $R_{23} \parallel R_{45}$  è quindi pari a  $\frac{Er}{R_1+r}$  e la corrente che scorre in  $R_{23}$  è pari a

$$i(R_1) = \frac{Er}{2r(R_1+r)} = \frac{E}{2(R_1+r)} . \quad (3.36)$$

Per risolvere il problema occorre dunque risolvere in funzione di  $R_1$

$$\frac{Er}{2(R_1+r)} = \frac{E}{4} , \quad (3.37)$$

che ammette l'unica soluzione  $R_1 = r$ .

### 3.9 Circuiti equivalenti di Thevenin e Norton

CONSIDERIAMO IL CIRCUITO in figura 3.24 di cui vogliamo calcolare la tensione  $v$  tra i morsetti  $A$  e  $B$  in funzione dei suoi parametri  $R_k$  ed  $E_k$  per  $k \in \{1, 2, 3\}$ . La corrente  $i_k$  può essere ottenuta come

$$i_k = \frac{v - E_k}{R_k} . \quad (3.38)$$

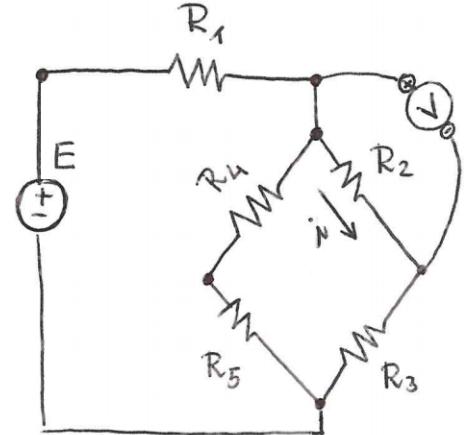


Figura 3.23: Esercizio: connessione serie, parallelo, partitore di tensione.

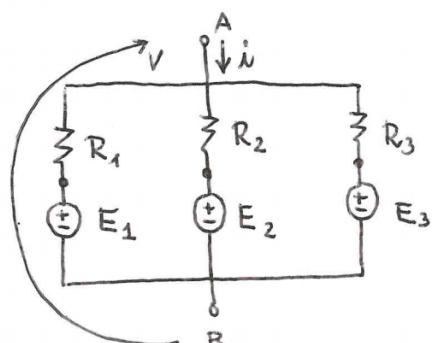


Figura 3.24: Esercizio: determinare la tensione tra i morsetti  $A$  e  $B$ .

Osservando che  $\sum_{k=1}^3 i_k = 0$ , dato che la corrente  $i$  è nulla perché il morsetto  $A$  è appeso, la tensione  $v$  può essere ricavata risolvendo l'equazione lineare

$$\frac{v - E_1}{R_1} + \frac{v - E_2}{R_2} + \frac{v - E_3}{R_3} = 0 , \quad (3.39)$$

ottenendo così

$$v = \frac{R_2 R_3 E_1 + R_1 R_3 E_2 + R_1 R_2 E_3}{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1} . \quad (3.40)$$

SE CONOSCESSI una regola che permette di ridisegnare il circuito in figura 3.24 come in figura 3.25, cioè se sapessi trasformare un generatore indipendente di tensione con in serie un resistore lineare in un generatore di corrente con un resistore lineare in parallelo, potrei risolvere il problema scrivendo

$$v = -(r_1 || r_2 || r_3)(A_1 + A_2 + A_3) = -\frac{A_1 + A_2 + A_3}{g_1 + g_2 + g_3} , \quad (3.41)$$

essendo  $g_k = r_k^{-1}$  per  $k \in \{1, 2, 3\}$ .

QUESTO ESEMPIO è solo un pretesto per introdurre un risultato molto importante della teoria dei circuiti. È comunque istruttivo, facendo riferimento alla figura 3.26, provare a vedere come sono legati  $E_{th}$  ed  $R_{th}$  (parametri del circuito di Thevenin) con  $A_{nr}$  e  $G_{nr}$  (parametri del circuito di Norton). Analizzando i due circuiti possiamo ricavare facilmente

$$\begin{aligned} v_1 &= R_{th} i_1 + E_{th} \\ i_2 &= G_{nr} v_2 + A_{nr} \end{aligned} . \quad (3.42)$$

Se ricaviamo  $v_2 = \frac{i_2}{G_{nr}} - \frac{E_{th}}{G_{nr}}$  e  $i_1 = \frac{v_1}{R_{th}} - \frac{E_{th}}{R_{th}}$  possiamo dunque affermare, utilizzando il principio di equivalenza (cfr. capitolo 3.7), che i due bipoli composti sono equivalenti (funzionano cioè allo stesso modo in termini della tensione e della corrente descrittiva) rispettivamente se

$$R_{th} = \frac{1}{G_{nr}} \text{ e } E_{th} = -\frac{A_{nr}}{G_{nr}} , \quad (3.43)$$

ovvero

$$G_{nr} = \frac{1}{R_{th}} \text{ e } A_{nr} = -\frac{E_{th}}{R_{th}} . \quad (3.44)$$

PER QUANTO RIGUARDA l'esempio di partenza, allora,  $A_k = -\frac{E_k}{R_k}$  e  $G_k = \frac{1}{R_k}$  (ovvero  $r_k = R_k$ ) per  $k \in \{1, 2, 3\}$ . Si verifichi per esercizio che il valore di  $v$  che si ottiene è ovviamente lo stesso!

ENUNCIAMO ADESSO il risultato generale

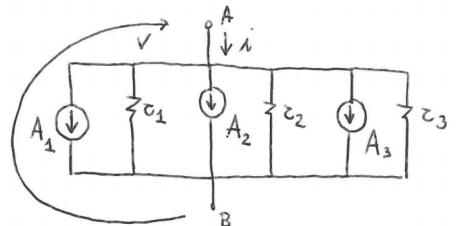


Figura 3.25: Il bipolo composito collegato ai morsetti  $A$  e  $B$  potrebbe essere equivalente a quello in figura 3.24 se e sapessi trasformare un generatore indipendente di tensione con in serie un resistore lineare in un generatore di corrente con un resistore lineare in parallelo.

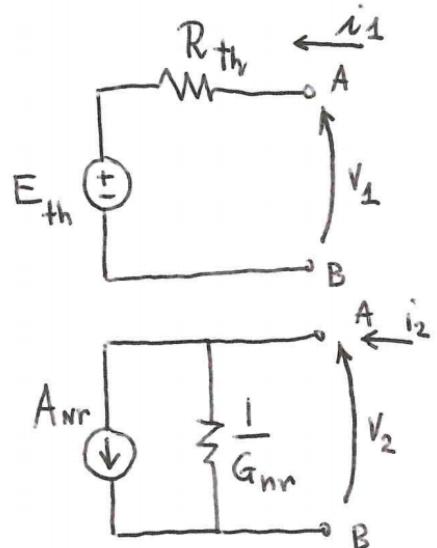


Figura 3.26: Il circuito equivalente di Thevenin, in alto, e il circuito equivalente di Norton, in basso.

Si noti che i segni nelle equazioni 3.43 e 3.44 dipendono dal come sono stati connessi i generatori  $E_{th}$  e  $A_{nr}$ . Si verifichi, ad esempio, che invertendo il verso di  $A_{nr}$  si ottiene  $E_{th} = \frac{A_{nr}}{G_{nr}}$ . Questo deve quindi stimolare lo studente a non imparare a memoria le formule senza aver capito lo schema da cui derivano, ma l'invito è a saper ricavare le formule una volta disegnato lo schema elettrico.

Dato un bipolo adinamico, non impressivo, lineare affine, se ammette la base di definizione tensione lo si definisce circuito di Norton (cfr. figura 3.26). Se ammette la base corrente lo si definisce circuito di Thevenin (cfr. figura 3.26)<sup>3</sup>.

È possibile passare da un modello all'altro, quando esistono entrambi, usando le formule 3.43 e 3.44 avendo cura di scegliere con coerenza il modo in cui si connettono  $E_{th}$  e  $A_{nr}$ .

**IN GENERALE** l'interconnessione di bipoli lineari adinamici e bipoli impressivi (generatori indipendenti) dà origine ad un bipolo composito lineare affine e adinamico che può essere rappresentato con un modello equivalente di Thevenin e/o di Norton in base alle caratteristiche di controllabilità del bipolo stesso.

### 3.10 Esercizio

PER IL CIRCUITO in figura 3.27, ricavare, se esiste, il circuito equivalente di Thevenin ai morsetti A e B.

PER DETERMINARE I PARAMETRI  $R_{th}$  ed  $E_{th}$ , possiamo impostare tra i morsetti A e B una corrente  $i$  e ricavare  $V_{AB}(i)$ . Se riusciremo a ricavare  $V_{AB}(i) = \alpha i + \beta$  potremo allora identificare  $\alpha = R_{th}$  e  $\beta = E_{th}$ .

PROVIAMO PER LA PRIMA VOLTA a risolvere il circuito in figura 3.27 scrivendo sul suo schema le informazioni che si possono facilmente dedurre applicando le equazioni di Kirchhoff (cfr. figura 3.28) e sfruttando le equazioni costitutive dei componenti. Si può subito scrivere che (in base a come sono stati arbitrariamente scelti i loro versi)

- la corrente in  $R_2$  vale  $i + A_2$ ;
- la corrente in  $R_1$  vale  $i + A_2 - A_1$ ;
- la corrente in  $R_3$  vale  $i + A_2$ .

<sup>3</sup> Se ammette entrambe le basi sono definiti entrambi i circuiti, Norton e Thevenin.

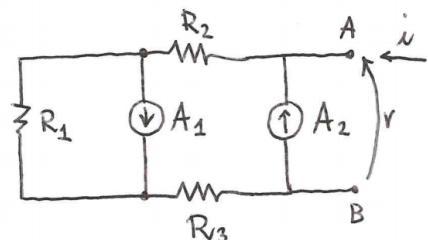


Figura 3.27: Esercizio: ricavare, se esiste, il circuito equivalente di Thevenin ai morsetti A e B.

Si noti che si è scelto di impostare una corrente  $i$  perché il modello equivalente di Thevenin richiede che il bipolo composito sia controllabile in corrente. Se fosse stato richiesto il modello equivalente di Norton avremmo dovuto impostare la tensione  $V_{AB}$  e ricavare la corrente  $i$ .

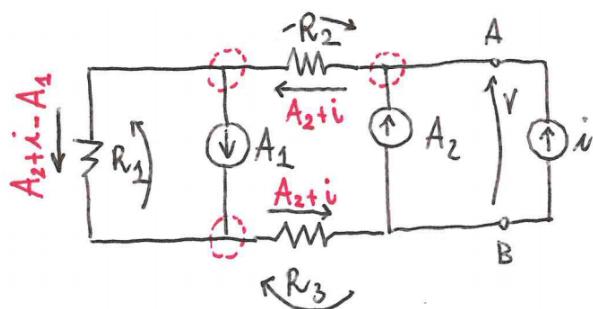


Figura 3.28: Ai morsetti A e B è stato connesso un generatore di corrente  $i$  e si vuole ricavare  $v(i) = R_{th}i + E_{th}$ .

Dalla maglia esterna percorsa in senso antiorario si può scrivere

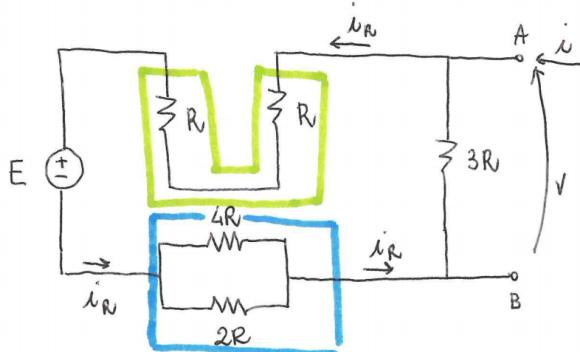
$$\begin{aligned} V_{AB} &= R_2(i + A_2) + R_1(i + A_2 - A_1) + R_3(i + A_2) \\ &= (R_1 + R_2 + R_3)i - R_1A_1 + (R_1 + R_2 + R_3)A_2 \end{aligned} \quad (3.45)$$

e quindi  $R_{th} = R_1 + R_2 + R_3$  e  $E_{th} = -R_1A_1 + (R_1 + R_2 + R_3)A_2$ .

SI LASCIA ALLO STUDENTE ricavare il valore di  $A_1$  tale da far sì che il bipolo composito si comporti ai morsetti  $A$  e  $B$  come un resistore.

SI NOTI ANCORA, vedremo poi che è in realtà un risultato generale, che se  $A_1 = 0$  e  $A_2 = 0$  allora  $E_{th} = 0$ . La rete con i generatori indipendenti spenti si dice **passivata**, i generatori di tensione diventano dei cortocircuiti e quelli di corrente dei circuiti aperti.

### 3.11 Esercizio



SI DETERMININO i parametri del circuito di Norton equivalente, ai morsetti  $A$  e  $B$ , al bipolo composito in figura 3.29.

Poichè i resistori di resistenza  $R$  (cfr. figura 3.29, nel box verde, sono in serie e quelli di resistenza  $2R$  e  $4R$ , nel box blu, sono in parallelo, il circuito in esame può essere ridisegnato come in figura 3.30. La corrente  $i$  sarà dunque

$$i(v) = \frac{v}{3R} + \frac{v - E}{R_{eq}} = \left( \frac{1}{3R} + \frac{1}{R_{eq}} \right) v - \frac{E}{R_{eq}} . \quad (3.46)$$

Essendo  $R_{eq} = \frac{10}{3}R$ , si ricava  $G_{nr} = \frac{19}{30R}$  e  $A_{nr} = -\frac{3E}{10R}$ .

Figura 3.29: Esercizio: ricavare, se esiste, il circuito equivalente di Norton ai morsetti  $A$  e  $B$ . Si noti che i resistori di resistenza  $R$ , nel box verde, sono in serie e quelli di resistenza  $2R$  e  $4R$ , nel box blu, sono in parallelo.

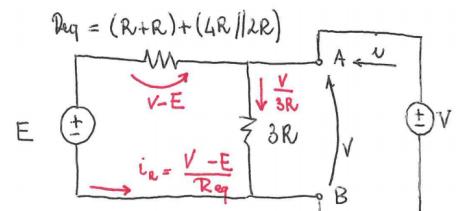


Figura 3.30: Ai morsetti  $A$  e  $B$  è stato connesso un generatore di tensione  $v$  e si vuole ricavare  $i(v) = G_{nr}v + A_{nr}$ .



# 4

## 4.1 Le sorgenti pilotate

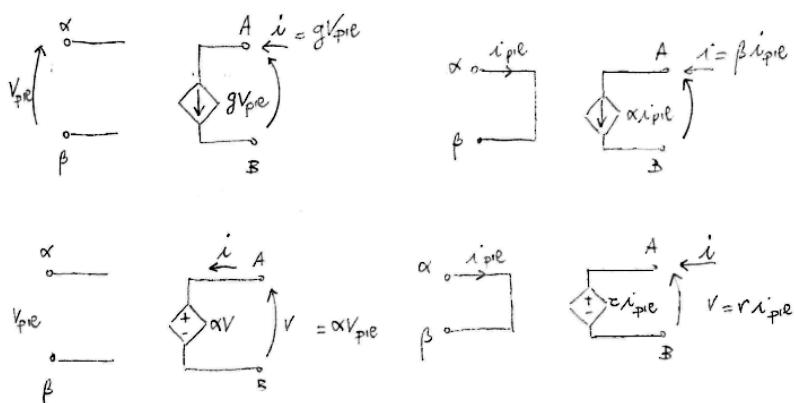


Figura 4.1: Da sinistra a destra e dall'alto verso il basso: Voltage controlled current source (VCCS) è il generatore di corrente controllato in tensione ( $[g] = \Omega^{-1}$ ). Voltage controlled voltage source (VCVS) è il generatore di tensione controllato in tensione. Current controlled current source (CCCS) è il generatore di corrente controllato in corrente. Current controlled voltage source (CCVS) è il generatore di tensione controllato in corrente ( $[r] = \Omega$ ).

LE SORGENTI PILOTATE o controllate o generatori pilotati sono dei componenti *lineari*<sup>1</sup> a 4 terminali (cfr. figura 4.2) e modellano il comportamento di componenti fisici (o di più componenti fisici connessi per formare un 4 terminali) in opportune condizioni di funzionamento. Ce ne sono 4 tipi possibili e sono rappresentati in figura 4.1.

Prima di tutto è necessario soffermarci sulla loro struttura dal momento che le sorgenti pilotate sono dei 4-terminali ma si nota facilmente come siano costituiti da 2 bipoli. In generale, quindi, necessiterebbero di 3 tensioni descrittive e 3 correnti descrittive ma per come sono realizzati si ha che  $i_1 = -i_0$  e  $i_3 = -i_2$  (cfr. figure 4.1 e 4.2). Questo fa sì che il grafo del componente sia quello in figura 4.3 e che quindi siano sufficienti 2 correnti descrittive e 2 tensioni. Si noti che il grafo del componente è non connesso il che implica che il grafo

<sup>1</sup> La linearità delle sorgenti pilotate sarà evidente dopo aver introdotto i doppi bipoli (cfr. paragrafo 6.1).

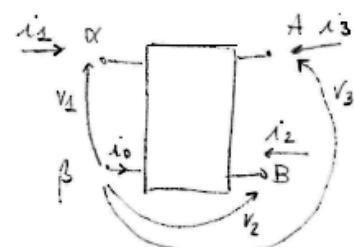


Figura 4.2: Un generico 4-terminali le cui tensioni descrittive sono state riferite al morsetto  $\beta$ .

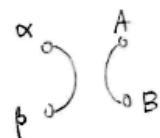
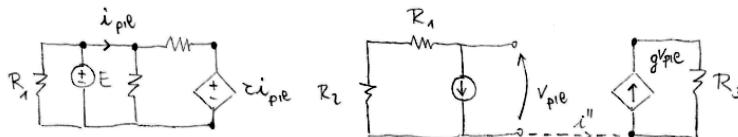


Figura 4.3: Il grafo di un generatore pilotato.

di un eventuale circuito in cui venga inserito potrà essere connesso o non connesso (cfr. figura 4.4).



**VEDREMO MEGLIO** come trattare questa situazione quando parleremo di doppi bipoli, ampia famiglia di componenti alla quale i generatori pilotati di fatto appartengono. Per il momento, se servisse, potremmo rendere il grafo del circuito connesso come è stato fatto per il circuito di destra in figura 4.4: si aggiunge un lato di connessione (che crea un nodo cerniera) che non altera il funzionamento del circuito dato che è facile convincersi che è percorso da corrente nulla.

**PER QUANDO RIGUARDA** le basi di definizione, le sorgenti pilotate ammettono ciascuna una sola base, dato che impogono la tensione o la corrente alle loro due coppie di morsetti.

VCCS: base tensione ( $v_{\text{pil}}, v$ )

VCVS: base mista ( $v_{\text{pil}}, i$ )

CCCS: base mista ( $i_{\text{pil}}, v$ )

CCVS: base tensione ( $i_{\text{pil}}, i$ )

**LA POTENZA ASSORBITA** da un generatore pilotato, facendo riferimento alla formulazione generale della potenza assorbita da un  $n$ -terminali (cfr. paragrafo 3.1.2), può essere ricavata a partire dalla relazione (cfr. figura 4.5)

$$p_a = v_{\alpha\beta}i_\alpha + v_{B\beta}i_B + v_{A\beta}i_A \quad (4.1)$$

Tuttavia, ricordando che nel caso specifico  $i_B = -i_A$ , l'equazione 4.1 può essere riscritta come

$$p_a = v_{\alpha\beta}i_\alpha + (v_{A\beta} - v_{B\beta})i_A = v_{\alpha\beta}i_\alpha + v_{AB}i_A \quad (4.2)$$

che per le quattro sorgenti pilotate diventa (cfr. figura 4.1)

VCCS:  $p_a = v_{\text{pil}} \cdot 0 + v \cdot g v_{\text{pil}} = v \cdot g v_{\text{pil}}$

VCVS:  $p_a = v_{\text{pil}} \cdot 0 + i \cdot \beta v_{\text{pil}} = i \cdot \beta v_{\text{pil}}$

CCCS:  $p_a = i_{\text{pil}} \cdot 0 + v \cdot \alpha i_{\text{pil}} = v \cdot \alpha i_{\text{pil}}$

Figura 4.4: Il circuito di sinistra, dove è inserito un generatore di tensione pilotato in corrente ha un grafo connesso. Il circuito di destra, dove è inserito un generatore di corrente pilotato in tensione ha invece un grafo non connesso. Per renderlo connesso si è inserito un lato di connessione (creando un nodo cerniera) che non altera il funzionamento del circuito dato che  $i'' = 0$ .

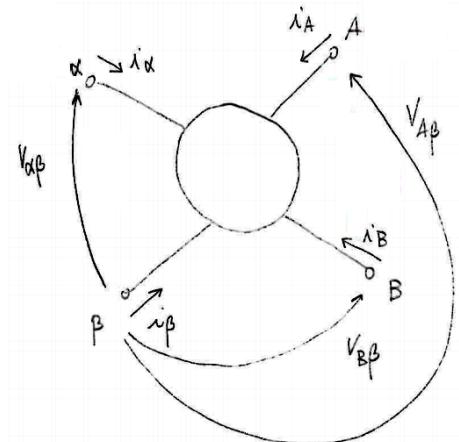


Figura 4.5:  $v_{AB} = v_{A\beta} - v_{B\beta}$ .

$$\text{CCVS: } p_a = i_{\text{pil}} \cdot 0 + i \cdot r i_{\text{pil}} = i \cdot r i_{\text{pil}}$$

SPESSO LE SORGENTI PILOTATE vengono inserite nei circuiti elettrici senza avere cura di specificare la coppia di morsetti che identifica il lato pilotante (cfr. figura 4.6), ma si evidenzia solo la porzione del 4-terminali che corrisponde alla sorgente di tensione o corrente. Questo tipo di approccio, che ha come unico scopo quello di semplificare ove possibile la struttura delle reti che interessano, verrà spesso adottato anche in questo corso. Si invita tuttavia lo studente a tenere ben presente la natura a 4 terminali di questi componenti. Infatti, dato che i generatori pilotati sono solo modelli di circuiti che in opportune condizioni possono essere descritti come tali, la coppia di morsetti che corrisponde al lato da cui si preleva la grandezza pilotante ha un significato fisico ben preciso.

PER QUANTO RIGUARDA i modelli equivalenti di Thevenin e Norton (cfr. paragrafo 3.9), essi possono essere definiti anche per bipoli composti che comprendono anche sorgenti pilotate. La dimostrazione di questa affermazione sarà presentata in capitoli successivi.

## 4.2 Esempi

### 4.2.1 Un resistore di resistenza negativa

ANALIZZANDO LA FIGURA 4.7 si ricava banalmente che  $v = Ri_1$  e  $i = -i_1$  da cui si può scrivere la caratteristica ai morsetti A e B,  $v = -Ri$ . Si ottiene così un bipolo strettamente attivo.

### 4.2.2 Esercizio: risoluzione di una rete

PER LA RETE IN FIGURA 4.8 si ricavino tutte le variabili elettriche di lato evidenziate in rosso.

IL GRAFO DEL CIRCUITO è composto da  $n = 4$  nodi e  $l = 5$  lati il che implica che si potranno scrivere al più  $n - 1 = 3$  KCL e  $l - n + 1 = 2$  KVL-II linearmente indipendenti. Si noti che il lato pilotante che preleva la corrente  $i_1$  è stato omesso e la corrente viene indicata come quella che attraversa il resistore  $R_2$ . Utilizzando le prime si può ricavare semplicemente  $i_e = -i_1$ ,  $i_2 = -\alpha i_1$  e  $i_0 = (1 + \alpha)i_1$ . Le equazioni di Kirchhoff per le tensioni alle maglie evidenziate in figura e percorse in senso orario permettono di scrivere  $E - v_1 - v_0 = 0$  e  $v_g - v_2 + v_0 = 0$  che, utilizzando le equazioni costitutive dei bipoli

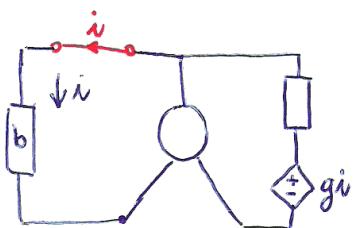
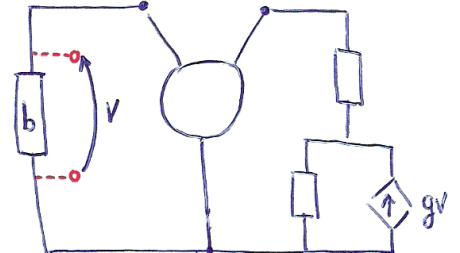


Figura 4.6: Nel circuito in alto si omette tipicamente il circuito aperto, in parallelo al bipolo b, che preleva la tensione  $v$ . Nel circuito in basso, il corto circuito in serie a b viene omesso: diventa a tutti gli effetti un "pezzo di filo" e la corrente pilotante  $i$  si indica nel bipolo b.

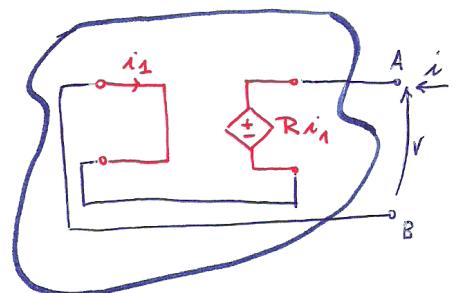


Figura 4.7:  $R > 0$ .

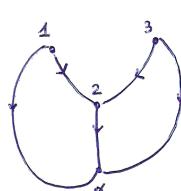
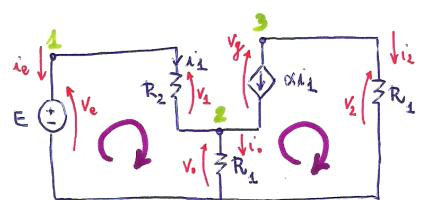


Figura 4.8: Per il circuito in figura sono state evidenziate anche le due maglie che verranno utilizzate per scrivere le KVL-II e il grafo che è stato orientato come le correnti.

della rete e il risultato delle 2 KCL, diventano

$$\begin{aligned} E - R_2 i_1 - R_1(1 + \alpha) i_1 &= 0 \\ v_g - R_1(-\alpha i_1) + R_1(1 + \alpha) i_1 &= 0 \end{aligned} \quad (4.3)$$

$$\text{da cui } i_1 = \frac{E}{R_2 + R_1(1 + \alpha)} \text{ e } v_g = -\frac{R_1(1 + 2\alpha)}{R_2 + R_1(1 + \alpha)} E.$$

Il calcolo delle rimanenti grandezze di lato è immediato e si lascia allo studente.

#### 4.2.3 Modello equivalente di Thevènin

PER IL BIPOLO COMPOSITO in figura 4.9 si ricavino i parametri del modello equivalente di Thevènin ai morsetti A e B (se esiste).

SI NOTI CHE la tensione  $v$  tra i morsetti A e B e la tensione  $v_2$  ai capi di  $R_2$  sono identiche. La maglia esterna percorsa in senso antiorario permette quindi di scrivere

$$v + \alpha v - R_1 \left( A_0 + i - \frac{v}{R_2} \right) = 0, \quad (4.4)$$

da cui

$$v = \underbrace{\frac{R_2 R_1}{R_1 + R_2(1 + \alpha)} i}_{R_{th}} + \underbrace{\frac{R_2 R_1 A_0}{R_1 + R_2(1 + \alpha)}}_{E_{th}}. \quad (4.5)$$

L'ESISTENZA del modello equivalente di Thevènin è verificata a posteriori se sono definite  $E_{th}$  ed  $R_{th}$ . A questo proposito è necessario che  $R_1 + R_2(1 + \alpha) \neq 0$ , ovvero  $\alpha \neq -\frac{R_1}{R_2} - 1$ .

INFINE NOTIAMO CHE (i) se passivassimo la sorgente indipendente  $A_0$  il termine  $E_{th}$  si annulla e (ii), nonostante si passivi  $A_0$ ,  $R_{th}$  dipende da  $\alpha$  dato che per ricavare  $R_{th}$  si deve inserire il generatore  $i$ . Questa ultima considerazione si estende facendo notare che, in generale, il termine  $R_{th}$  dipende da eventuali generatori pilotati che non è lecito passivare!

#### 4.2.4 Modello equivalente di Norton 1

PER IL BIPOLO COMPOSITO in figura 4.10 si ricavino i parametri del modello equivalente di Norton ai morsetti A e B (se esiste).

SI NOTI CHE la tensione  $v$  tra i morsetti A e B e la tensione ai capi di  $R_3$  sono identiche. La maglia esterna percorsa in senso antiorario

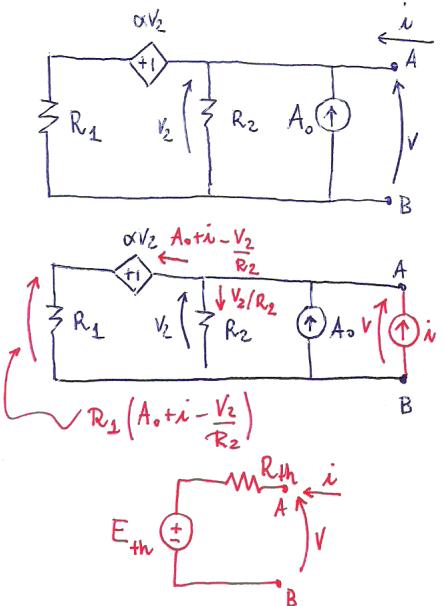


Figura 4.9: Si è evidenziato in rosso il circuito equivalente di Thevènin del quale si vogliono determinare i parametri  $E_{th}$  ed  $R_{th}$ . Inoltre, sempre in rosso, sono stati evidenziati sullo schema del circuito i risultati parziali dell'analisi della rete che si possono ricavare semplicemente osservandone lo schema.

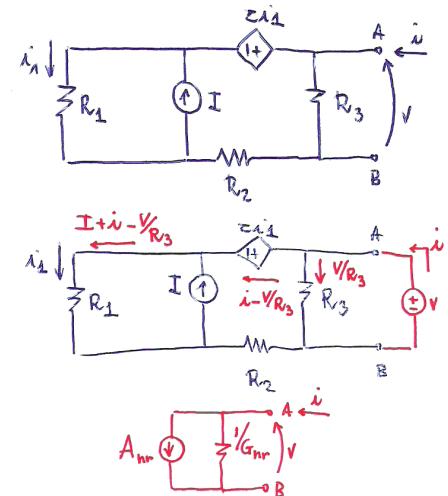


Figura 4.10: Si è evidenziato in rosso il circuito equivalente di Norton del quale si vogliono determinare i parametri  $A_{nr}$  ed  $G_{nr}$ . Inoltre, sempre in rosso, sono stati evidenziati sullo schema del circuito i risultati parziali dell'analisi della rete che si possono ricavare semplicemente osservandone lo schema.

permette quindi di scrivere

$$v - r(I + i - \frac{v}{R_3}) - R_1(I + i - \frac{v}{R_3}) - R_2(i - \frac{v}{R_3}) = 0 , \quad (4.6)$$

da cui

$$i = \underbrace{\frac{R_1 + R_2 + R_3 + r}{R_3(R_1 + r)} v}_{G_{nr}} - \underbrace{\frac{R_1 + r}{R_1 + R_2 + r} I}_{A_{nr}} . \quad (4.7)$$

L'ESISTENZA del modello equivalente di Norton è verificata a posteriori se sono definite  $A_{nr}$  ed  $G_{nr}$ . A questo proposito è necessario che  $R_1 + r \neq 0$ , ovvero  $r \neq -R_1$ , e  $R_3 \neq 0$ . Nuovamente, se passivassimo  $I$  otterremmo  $A_{nr} = 0$ .

#### 4.2.5 Modello equivalente di Norton 2

PER IL BIPOLO COMPOSITO in figura 4.11 si ricavino i parametri del modello equivalente di Norton ai morsetti  $A$  e  $B$  (se esiste).

CON UN PROCEDIMENTO ANALOGO a quello usato negli esercizi precedenti si ricava

$$i = \underbrace{\frac{1}{R_2} v + gE}_{G_{nr}} . \quad (4.8)$$

PER L'ESISTENZA del modello equivalente di Norton è necessario che  $R_2 \neq 0$ . Nuovamente, se passivassimo  $E$  otterremmo  $A_{nr} = 0$ . Si noti però che, in questo caso specifico, passivare  $E$  corrisponde a passivare anche  $gv_1$ , inoltre, se si passiva  $E$ ,  $ri_2$  non viene passivato ma non assorbe e non eroga potenza dato che è percorso da corrente nulla.

#### 4.3 L'analisi nodale

INTRODUCIAMO IN QUESTO PARAGRAFO una procedura sistematica per risolvere i circuiti (cioè per ricavare univocamente il valore delle variabili elettriche) che si basa sulle equazioni di Tableau (cfr. paragrafo 2.9). Nell'introdurre queste ultime per un circuito con un grafo connesso, con  $n$  nodi ed  $l$  lati, abbiamo scritto un sistema del tipo

$$\begin{cases} Ai = 0 \\ v - A^T u = 0 \end{cases} , \quad (4.9)$$

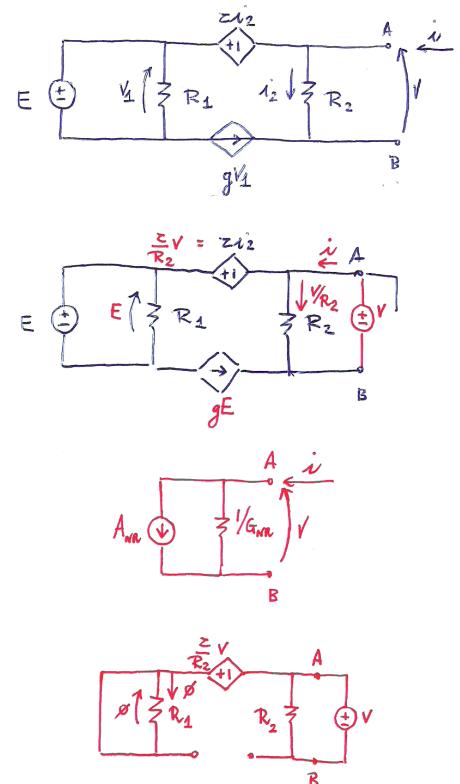


Figura 4.11: Si è evidenziato in rosso il circuito equivalente di Norton del quale si vogliono determinare i parametri  $A_{nr}$  ed  $G_{nr}$ . Inoltre, sempre in rosso, sono stati evidenziati sullo schema del circuito i risultati parziali dell'analisi della rete che si possono ricavare semplicemente osservandone lo schema. L'ultima schema circuitale in basso rappresenta il circuito equivalente che si ottiene passivando la sorgente impressiva  $E$  nel calcolo dei parametri  $A_{nr}$  ed  $G_{nr}$ .

in  $l + n - 1$  equazioni e  $2l + n - 1$  incognite. A tale sistema è necessario aggiungere le  $l$  equazioni costitutive dei componenti che permettono di avere complessivamente tante incognite quante equazioni. Ci occuperemo nel seguito di formalizzare questo aspetto, ottenendo anche un teorema di esistenza ed unicità della soluzione, per adesso introduciamo un metodo che consente di ridurre le equazioni di Tableau e ricavare tutti gli  $n - 1$  potenziali di nodo del circuito in esame (da qui il nome di **analisi nodale**) e da essi ricavare le tensioni e le correnti di lato incognite. Per fare ciò fissiamo un'ipotesi di lavoro che poi andremo a rimuovere

*il circuito contiene solo componenti definiti su base tensione.*

Passo 0: Si sceglie, tra gli  $n$  nodi del circuito, un nodo di riferimento per il potenziale. Lo chiameremo nodo 0 e il suo potenziale  $u_0$  può essere scelto arbitrariamente nullo.

Passo 1: Tutte le tensioni di lato del circuito sono ricavate in funzione dei potenziali di nodo usando le KVL-I. Di fatto si utilizza l'equazione  $v - A^T u = \mathbf{0}$ .

Passo 2: Mediante le equazioni costitutive dei componenti, che sono stati assunti controllabili in tensione (cioè  $i = i(v)$ ), si ricavano le correnti di lato in funzione dei potenziali nodi (cioè  $i = i(A^T u)$ ).

Passo 3: Si risolvono le KCL in funzione dei potenziali di nodo, cioè  $Ai = Ai(A^T u) = \mathbf{0}$ .

L'ULTIMO PASSO DEL METODO comporta la risoluzione di un sistema di  $n - 1$  equazioni (le KCL) in  $n - 1$  incognite (i potenziali di nodo). Una volta determinati i potenziali di nodo, è possibile ripercorre i passi a ritroso e ricavare le correnti e le tensioni di lato.

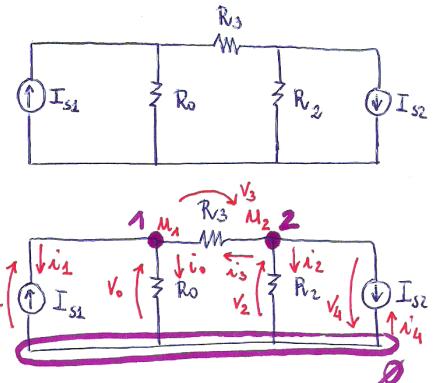
APPARENTEMENTE, per come abbiamo risolto i circuiti finora, si potrebbe erroneamente pensare che mediante l'analisi nodale non si utilizzino le KVL ma solo le KCL. Ciò è ovviamente falso: si usano le KVL-I al "Passo 1", che sappiamo corrispondere alle KVL-II (cfr. paragrafo 2.7), quelle che abbiamo sempre usato e che sembrano mancare all'appello.

#### 4.4 Un esempio guida

UTILIZZANDO L'ANALISI NODALE si vuole risolvere il circuito in figura 4.12. Il "Passo 0" del metodo è stato applicato direttamente sullo schema del circuito in analisi scegliendo il nodo 0 come riferimento per il potenziale fissando  $u_0 = 0$ .

Passo 1:

$$\begin{aligned} v_0 &= u_1 \\ v_1 &= u_1 \\ v_2 &= u_2 \\ v_3 &= u_2 - u_1 \\ v_4 &= -u_2 \end{aligned} \quad . \quad (4.10)$$



Passo 2:

$$\begin{aligned} i_0 &= \frac{v_0}{R_0} = \frac{u_1}{R_0} \\ i_1 &= -I_{s1} \\ i_2 &= \frac{v_2}{R_2} = \frac{u_2}{R_2} \\ i_3 &= \frac{v_3}{R_3} = \frac{u_2 - u_1}{R_3} \\ i_4 &= -I_{s2} \end{aligned} \quad . \quad (4.11)$$

Passo 3:

$$\begin{aligned} \text{KCL nodo 1: } i_1 + i_0 - i_3 &= -I_{s1} + \frac{u_1}{R_0} - \frac{u_2 - u_1}{R_3} = 0 \\ \text{KCL nodo 2: } i_2 + i_3 - i_4 &= \frac{u_2}{R_2} + \frac{u_2 - u_1}{R_3} + I_{s2} = 0 \end{aligned} \quad . \quad (4.12)$$

L'ULTIMO PASSO del metodo restituisce 2 equazioni in 2 incognite che può essere riscritto evidenziandone incognite e termini noti

$$\begin{cases} \left( \frac{1}{R_0} + \frac{1}{R_3} \right) u_1 - \frac{u_2}{R_3} = I_{s1} \\ -\frac{u_1}{R_3} + \left( \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right) u_2 = -I_{s2} \end{cases} \quad (4.13)$$

e risolto ottenendo

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{I_{s1}R_0(R_2 + R_3) - I_{s2}R_0R_2}{R_0 + R_2 + R_3} \\ u_2 &= -\frac{I_{s2}R_2(R_0 + R_3) - I_{s1}R_0R_2}{R_0 + R_2 + R_3} \end{aligned} \quad . \quad (4.14)$$

## 4.5 Un altro esempio

UTILIZZANDO L'ANALISI NODALE si vuole risolvere il circuito in figura 4.13 per il quale si è scelto ("Passo 0") il nodo 0 come riferimento per il potenziale fissando  $u_0 = 0$ . Il circuito ha 3 nodi e quindi l'analisi nodale dovrà fornire un sistema di 3 equazioni lineari avente come incognite i tre potenziali di nodo  $u_1$ ,  $u_2$  e  $u_3$ .

Figura 4.12: Per il circuito in alto si è ridisegnato lo schema evidenziando il nodo 0 scelto come riferimento per il potenziale, i nodi 1 e 2 con i potenziali  $u_1$  e  $u_2$ , le grandezze elettriche di ogni lato prese con la convenzione degli utilizzatori.

Si noti che le correnti  $i_1$  e  $i_4$  non dipendono dai potenziali di noto dato che corrispondono a generatori indipendenti di corrente.

Si noti come nell'espressione dei potenziali 4.14 di nodo sia evidente il contributo distinto dei due generatori indipendenti.

Passo 1:

$$\begin{aligned} v_1 &= u_1 - u_2 \\ \bar{v} &= u_2 \\ v_3 &= u_3 \\ v_g &= u_2 - u_3 \\ v_a &= u_1 \end{aligned} \quad (4.15)$$

Passo 2:

$$\begin{aligned} i_1 &= \frac{v_1}{R_1} = \frac{u_1 - u_2}{R_1} \\ i_2 &= \frac{\bar{v}}{R_2} = \frac{u_2}{R_2} \\ i_3 &= \frac{v_3}{R_3} = \frac{u_3}{R_3} \\ i_g &= g\bar{v} = gu_2 \\ i_a &= -A \end{aligned} \quad (4.16)$$

Passo 3:

$$\begin{aligned} \text{KCL nodo 1: } -i_a - i_1 &= A - \frac{u_1 - u_2}{R_1} = 0 \\ \text{KCL nodo 2: } i_1 - i_g - i_2 &= \frac{u_1 - u_2}{R_1} - gu_2 - \frac{u_2}{R_2} = 0 \quad . \quad (4.17) \\ \text{KCL nodo 3: } i_g - i_3 &= gu_2 - \frac{u_3}{R_3} = 0 \end{aligned}$$

L'ULTIMO PASSO del metodo restituisce 3 equazioni in 3 incognite che può essere risolto

$$\begin{aligned} u_1 &= R_1 A + u_2 \\ (R_1 A + u_2 - u_2)R_2 - R_1(gR_2 + R_1)u_2 &= R_1 [R_2 A - (gR_2 + R_1)u_2] = 0 \quad , \\ u_3 &= gR_3 u_2 \end{aligned} \quad (4.18)$$

per ottenere

$$\begin{aligned} u_1 &= \left( R_1 + \frac{R_2}{gR_2 + R_1} \right) A \\ u_2 &= \frac{R_2}{gR_2 + R_1} A \\ u_3 &= \frac{gR_3 R_2}{gR_2 + R_1} A \end{aligned} \quad (4.19)$$

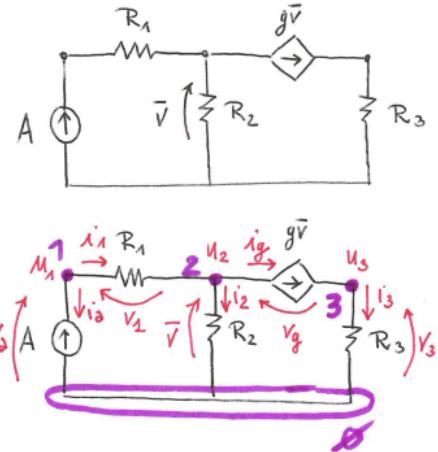


Figura 4.13: Per il circuito in alto si è ridisegnato lo schema evidenziando il nodo 0 scelto come riferimento per il potenziale, i nodi 1, 2 e 3 con i potenziali  $u_1$ ,  $u_2$  e  $u_3$ , le grandezze elettriche di ogni lato prese con la convenzione degli utilizzatori.

## 4.6 Analisi nodale con componenti non controllabili in tensione

IN QUESTO PARAGRAFO, con l'ausilio di alcuni esempi, si discuterà come l'analisi nodale possa essere estesa a quei circuiti che contengano componenti non controllabili in tensione.

SI CONSIDERI IL CIRCUITO in figura 4.14 e si applichi l'analisi nodale per ricavare i potenziali di nodo  $u_1$  e  $u_2$ .

Passo 1:

$$\begin{aligned} v_1 &= u_1 \\ v_2 &= u_2 \\ v_3 &= u_1 - u_2 \quad . \\ v_a &= -u_2 \\ v_E &= u_1 \end{aligned} \quad (4.20)$$

Passo 2:

$$\begin{aligned} i_1 &= \frac{v_1}{R_1} = \frac{u_1}{R_1} \\ i_2 &= \frac{v_2}{R_2} = \frac{u_2}{R_2} \\ i_3 &= \frac{v_3}{R_3} = \frac{u_1 - u_2}{R_3} \quad . \\ i_a &= -A_0 \\ i_E &= \dots \end{aligned} \quad (4.21)$$

Passo 3:

$$\begin{aligned} \text{KCL nodo 1: } i_E + i_1 + i_3 &= i_E + \frac{u_1}{R_1} + \frac{u_1 - u_2}{R_3} = 0 \\ \text{KCL nodo 2: } i_2 - i_3 - i_a &= \frac{u_2}{R_2} - \frac{u_1 - u_2}{R_3} + A_0 \quad . \end{aligned} \quad (4.22)$$

DALL'ESEMPIO PROPOSTO si nota come la presenza di un componente non controllabile in tensione<sup>2</sup> lascia una corrente incognita,  $i_E$ , nelle equazioni dei potenziali di nodo dato che tale corrente non può essere espressa in funzione dei potenziali stessi.

TUTTAVIA È POSSIBILE estendere il sistema dell'analisi nodale aggiungendo l'equazione del componente non controllabile in tensione, cioè  $v_E = u_1 = E$ , ripristinando così un numero di equazioni pari al numero di incognite<sup>3</sup>

$$\left\{ \begin{array}{l} i_E + i_1 + i_3 = i_E + \frac{u_1}{R_1} + \frac{u_1 - u_2}{R_3} = 0 \\ i_2 - i_3 - i_a = \frac{u_2}{R_2} - \frac{u_1 - u_2}{R_3} + A_0 \\ u_1 - E = 0 \end{array} \right. \quad (4.23)$$

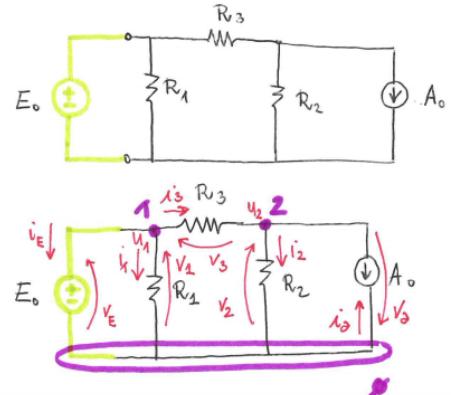


Figura 4.14: Per il circuito in alto si è ridisegnato lo schema evidenziando il nodo 0 scelto come riferimento per il potenziale, i nodi 1 e 2 con i potenziali  $u_1$  e  $u_2$ , le grandezze elettriche di ogni lato prese con la convenzione degli utilizzatori. Da notare che il generatore di tensione indipendente  $E_0$  non è definito su base tensione.

<sup>2</sup> Nel caso di un bipolo esso corrisponde direttamente ad un lato non controllabile in tensione. Più in generale potrebbe essere anche un  $n$ -terminali, che ammette come base la  $n$ -upla costituita da  $m$  correnti ( $m \leq n$ ) e  $n - m$  tensioni, che comporta  $m$  lati non controllabili in tensione.

<sup>3</sup> Nel caso in cui ci fossero  $m$  lati non controllabili in tensione per un circuito con  $n - 1$  nodi, si avrebbe un sistema finale in  $n - 1 + m$  equazioni e  $n - 1 + m$  incognite.

LA SOLUZIONE PROPOSTA è quella che potrebbe essere codificata in modo sistematico in un calcolatore. Tuttavia noi, per risolvere i circuiti con "carta e matita", useremo un ulteriore passo che permette di riportarci nuovamente nella condizione di avere  $n - 1$  equazioni in  $n - 1$  incognite. Per fare ciò distinguiamo due casi possibili

- a: il lato non controllabile in tensione è connesso tra un generico nodo  $k$  e il nodo 0;
- b: il lato non controllabile in tensione è connesso tra due generici nodi  $k$  e  $h$ .

Ipotiziamo che al nodo  $k$ , nel caso "a" e "b", e al nodo  $h$ , nel caso "b", non siano connessi altri lati non controllabili in tensione.

EVIDENTEMENTE, in generale, ci troveremo nella situazione di avere contemporaneamente alcuni lati non controllabili in tensione nel caso "a" ed altri nel caso "b". Per ciascuno di essi si dovrà applicare la procedura corrispondente.

#### 4.6.1 Il caso "a": connessione $k - 0$

QUESTO CASO È QUELLO che abbiamo incontrato in figura 4.14 ed è facile convincersi che porterà sempre ad avere una KCL al nodo  $k$  in cui il lato non controllabile incide (uscente o entrante non è rilevante). Inoltre ci sarà un'equazione del componente del tipo  $u_k = u_k(\mathbf{i}, \mathbf{v})$ , dove  $\mathbf{i}$  e  $\mathbf{v}$  sono i vettori delle correnti e delle tensioni di lato del circuito.

LA TECNICA DI RIDUZIONE delle equazioni, in questo caso, prevede la rimozione della KCL al nodo  $k$ , che contiene la corrente nel lato non controllabile in tensione, e l'aggiunta tra le KCL dell'equazione descrittiva del componente.

Facendo riferimento al circuito in figura 4.14, il sistema di equazioni 4.23 diventerebbe

$$\begin{cases} i_2 - i_3 - i_a = \frac{u_2}{R_2} - \frac{u_1 - u_2}{R_3} + A_0 \\ u_1 - E = 0 \end{cases}, \quad (4.24)$$

cioè un sistema di 2 equazioni in 2 incognite (i soli potenziali di nodo). Risolto il sistema 4.24, sarà poi possibile percorre a ritroso i passi compiuti e ricavare la  $i_E$  dall'equazione rimossa, in cui ormai tutto sarà noto tranne la  $i_E$  stessa, e poi ricavare come al solito tutte le grandezze di lato incognite.

UN ESEMPIO ULTERIORE del caso discusso è rappresentato in figura 4.15: Applicheremo direttamente l'analisi nodale *modificata* per risolverlo.

Passo 1:

$$\begin{aligned} v_1 &= u_1 - u_2 \\ v_2 &= -u_2 \\ v_{g1} &= u_1 \\ v_{g2} &= -u_2 \end{aligned} \quad (4.25)$$

Passo 2:

$$\begin{aligned} i_1 &= \frac{u_1 - u_2}{R_1} \\ i_2 &= -\frac{u_2}{R_2} \\ i_{g2} &= -gu_1 \end{aligned} \quad (4.26)$$

Passo 3:

$$\begin{aligned} \text{KCL nodo 2: } i_1 + i_2 + i_{g2} &= \frac{u_1 - u_2}{R_1} - \frac{u_2}{R_2} - g(u_1 - u_2) = 0 \\ \text{Eq. cost. VCVS: } v_{g1} - \beta v_2 &= u_1 - \beta(-u_2) = u_1 + \beta u_2 = 0 \end{aligned} \quad (4.27)$$

Si ottiene quindi  $u_1 = 0$  e  $u_2 = 0$ , risultato che non deve sorprendere dato che la rete contiene solo elementi non impressivi, tempo invarianti e adinamici.

SI NOTI CHE non è possibile avere in un circuito ben posto più lati di tipo  $k - 0$  che incidano nel medesimo nodo  $k$ . Questa situazione degenera, infatti, violerebbe in generale le equazioni di Kirchhoff per le tensioni dato che si avrebbero componenti non definiti su base tensione connessi in parallelo tra i nodi  $k$  e 0.

#### 4.6.2 Il caso "b": connessione $k - h$

INTRODUCIAMO QUESTO caso con un esempio. Consideriamo il circuito in figura 4.16 per il quale sceglieremo il nodo 0 di riferimento per il potenziale.

Passo 1:

$$\begin{aligned} v_1 &= u_1 \\ v_2 &= u_2 \\ v_{A_0} &= u_1 \\ v_{A_1} &= -u_2 \\ v_E &= u_1 - u_2 \end{aligned} \quad (4.28)$$

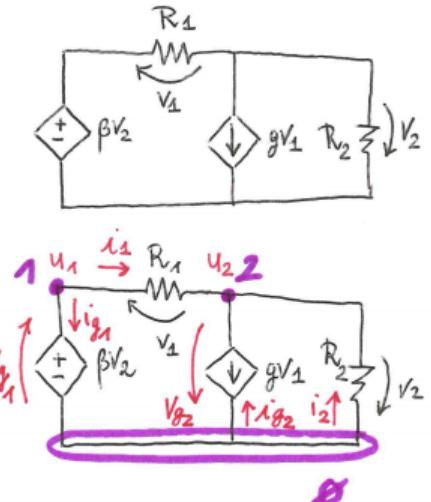


Figura 4.15: Per il circuito in alto si è ridisegnato lo schema evidenziando il nodo 0 scelto come riferimento per il potenziale, i nodi 1 e 2 con i potenziali  $u_1$  e  $u_2$ , le grandezze elettriche di ogni lato prese con la convenzione degli utilizzatori. Da notare che il generatore di tensione pilotato  $\beta v_2$ , di cui non è stato riportato il lato pilotante, non è definito su base tensione.

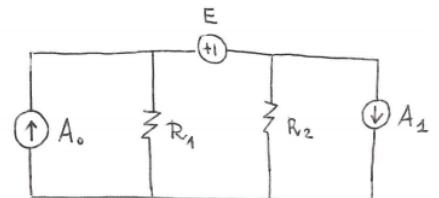


Figura 4.16: Per il circuito in alto si è ridisegnato lo schema evidenziando il nodo 0 scelto come riferimento per il potenziale, i nodi 1 e 2 con i potenziali  $u_1$  e  $u_2$ , le grandezze elettriche di ogni lato prese con la convenzione degli utilizzatori. Da notare che il generatore di tensione indipendente  $E$  non è definito su base tensione.

Passo 2:

$$\begin{aligned} i_1 &= \frac{u_1}{R_1} \\ i_2 &= \frac{u_2}{R_2} \\ i_{A_0} &= -A_0 \\ i_{A_1} &= -A_1 \end{aligned} \quad . \quad (4.29)$$

Passo 3:

$$\begin{aligned} \text{KCL nodo 1 : } i_{A_0} + i_1 + i_E &= -A_0 + \frac{u_1}{R_1} + i_E = 0 \\ \text{KCL nodo 2 } i_2 - i_{A_1} - i_E &= \frac{u_2}{R_2} + A_1 + \frac{u_1}{R_1} - i_E = 0 \end{aligned} \quad . \quad (4.30)$$

IN QUESTO CASO si nota come le due KCL contengono entrambe la corrente  $i_E$  del lato non controllabile in tensione. Ciò non sorprende dato che il lato non è incidente nel nodo 0 e, dato che il grafo è connesso, deve quindi entrare ed uscire, rispettivamente, da altri due nodi del circuito. Non possiamo procedere eliminando le due equazioni dato che, in questo modo, ci troveremmo solo con l'equazione del componente non controllabile in tensione,  $v_E = u_1 - u_2 = E$ . Non possiamo neppure toglierne una delle due perché avremmo 2 equazioni e 3 incognite.

DATO CHE il lato non controllabile in tensione entra in 2 ed esce da 1, nelle due KCL la  $i_E$  appare con segno opposto. Questo fa sì che, sommandole, si elimini la corrente  $i_E$

$$i_{A_0} + i_1 + i_2 - i_{A_1} = 0 . \quad (4.31)$$

Di fatto questa nuova equazione è la KCL alla superficie  $\Pi$  evidenziato in figura 4.16. Tale superficie prende il nome di **supernodo** dal momento che racchiude entrambi i nodi ai quali è connesso il lato non controllato in tensione.

A LIVELLO SISTEMATICO, questo tipo di situazione è trattabile evidenziando il componente non controllato in tensione, connesso da due generici nodi  $k$  e  $h$ , disegnando il supernodo  $\Pi_{kh}$  corrispondente e scrivendo al "Passo 3" la KCL al supernodo, utilizzando infine l'equazione costitutiva del componente non controllato in tensione. Per l'esempio considerato, il "Passo 3" diventa quindi

$$\begin{aligned} \text{KCL supernodo } \Pi_{12} : \quad i_{A_0} + i_1 + i_2 - i_{A_1} &= -A_0 + \frac{u_1}{R_1} + \frac{u_2}{R_2} = 0 \\ \text{Eq. cost. Gen : } u_1 - u_2 - E &= 0 \end{aligned} \quad . \quad (4.32)$$

Risolvendo si ottiene  $u_2 = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \left( A_0 - \frac{E}{R_1} \right)$  e  $u_1 = E + u_2$ .

IN QUESTO CASO, se avessimo considerato il nodo 1 o il nodo 2 come riferimento per la tensione, il generatore di tensione sarebbe ricaduto nel caso "a" precedentemente discusso. Si lascia allo studente verificare che si sarebbe trovata una soluzione del circuito coerente con quella proposta.

#### 4.6.3 Un caso più complesso

UN ESEMPIO PIÙ COMPLESSO in cui, se si sceglie 0 come nodo di riferimento, si ha a che fare con i casi " $k - 0$ " e " $k - h$ " contemporaneamente è riportato in figura 4.17. Evidentemente se avessimo scelto 1 come nodo di riferimento avremmo avuto due lati non controllabili in tensione del tipo " $k - 0$ " e si lascia allo studente verificare la coerenza dei risultati che si sarebbero ottenuti.

NEL CIRCUITO SCELTO possiamo notare che al nodo 1 sono connessi due lati non controllabili in tensione e questo richiederà un approccio leggermente diverso da quelli precedentemente descritti.

Passo 1:

$$\begin{aligned} v_1 &= u_3 \\ v_E &= u_1 \\ v_2 &= u_1 - u_3 \\ v_g &= u_1 - u_2 \\ v_3 &= u_2 - u_3 \end{aligned} \quad (4.33)$$

Passo 2:

$$\begin{aligned} i_1 &= \frac{u_3}{R_1} \\ \bar{i} &= \frac{u_1 - u_3}{R_2} \\ i_3 &= \frac{u_2 - u_3}{R_3} \end{aligned} \quad (4.34)$$

Passo 3:

$$\text{KCL nodo 3 : } \bar{i} + i_3 - i_1 = \frac{u_1 - u_3}{R_2} + \frac{u_2 - u_3}{R_3} - \frac{u_3}{R_1} = 0$$

$$\text{KCL supernodo } \Pi_{12} : i_E + \bar{i} + i_3 = i_E + \frac{u_1 - u_3}{R_2} + \frac{u_2 - u_3}{R_3} = 0$$

$$\text{Eq. cost. Gen : } u_1 - E = 0$$

$$\text{Eq. cost. CCVS : } u_1 - u_2 - r \frac{u_1 - u_3}{R_2} = 0 \quad (4.35)$$

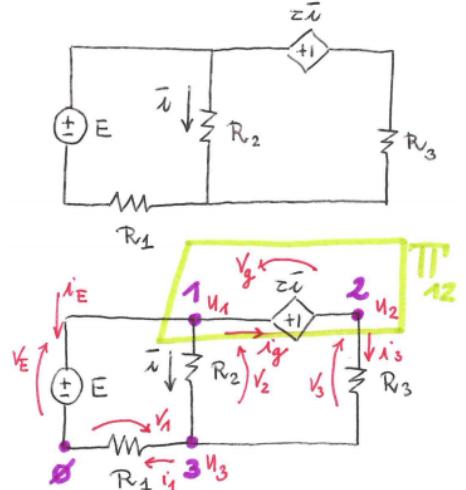


Figura 4.17: Per il circuito in alto si è ridisegnato lo schema evidenziando il nodo 0 scelto come riferimento per il potenziale, i nodi 1 e 2 con i potenziali  $u_1$  e  $u_2$ , le grandezze elettriche di ogni lato prese con la convenzione degli utilizzatori. Sono due gli elementi non controllabili in tensione: il generatore di tensione indipendente  $E$  e il CCVS  $r\bar{i}$  (di cui non si è evidenziato il lato pilotante).

ANALIZZANDO LE ultime equazioni scritte al Passo "3", si evince che compare ancora la corrente  $i_E$ . Il sistema ottenuto è di 4 equazioni in 4 incognite, ovvero una in più rispetto a quelle dell'analisi nodale, dato che il circuito ha 4 nodi. Il sistema può essere ridotto dato che eliminando la KCL al supernodo  $\Pi_{12}$ . Questo può essere fatto perché al supernodo incide il anche generatore indipendente  $E$  che fissa il potenziale  $u_1$ . Il nodo 1, infatti, è chiamato in causa dal una lato di tipo  $k - 0$  e da uno di tipo  $k - h$ .

$$\begin{cases} \frac{u_1}{R_2} + \frac{u_2 - u_3}{R_3} - \frac{u_3}{R_1} = 0 \\ u_1 - E = 0 \\ u_1 - u_2 - r \frac{u_1 - u_3}{R_2} = 0 \end{cases} . \quad (4.36)$$

Risolvendole si ricava

$$\begin{aligned} u_1 &= E \\ u_3 &= \frac{R_1(R_3 + R_2 - r)}{R_2 R_3 + R_1 R_2 - r R_1} E \\ u_2 &= \left(1 - \frac{r}{R_2}\right) E + \frac{r}{R_2} u_2 \end{aligned} . \quad (4.37)$$

#### 4.6.4 Sempre peggio

UN CASO ANCORA PIÙ COMPLESSO di quelli trattati precedentemente è riportato in figura 4.18. Il circuito contiene 3 bipoli non controllabili in tensione e saremmo tentati di dire che servono i supernodi  $\Pi_{21}$  e  $\Pi_{24}$ . Si noti tuttavia che al nodo 2 sono connessi due lati non controllabili in tensione.

Passo 1:

$$\begin{aligned} v_1 &= u_3 - u_2 \\ v_{E_1} &= u_3 \\ v_{E_2} &= u_2 - u_4 \\ v_2 &= u_4 \\ v_g &= u_2 - u_1 \\ v_a &= u_1 \end{aligned} . \quad (4.38)$$

Passo 2:

$$\begin{aligned} i_1 &= \frac{u_3 - u_2}{R_1} \\ i_2 &= \frac{u_4}{R_2} \\ i_a &= -A \end{aligned} . \quad (4.39)$$

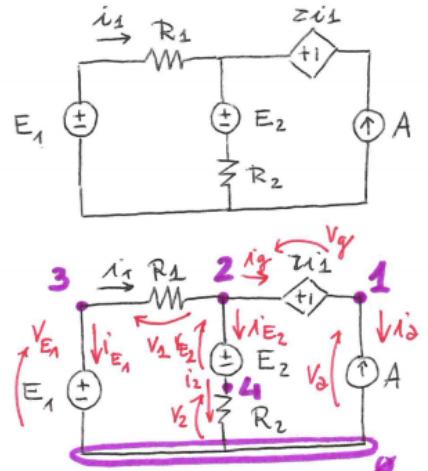


Figura 4.18: Per il circuito in alto si è ridisegnato lo schema evidenziando il nodo 0 scelto come riferimento per il potenziale, i nodi 1, 2, 3 e 4, con i potenziali  $u_1, u_2, u_3$  e  $u_4$ , le grandezze elettriche di ogni lato prese con la convenzione degli utilizzatori. Da notare che il circuito contiene 3 bipoli non definiti su base tensione.

Passo 3:

$$\begin{aligned}
 \text{KCL supernodo } \Pi_{21} : \quad & i_a + i_{E_2} - i_1 = -A + i_{E_2} - \frac{u_3 - u_2}{R_1} = 0 \\
 \text{KCL supernodo } \Pi_{24} : \quad & i_1 + i_g - i_2 = \frac{u_3 - u_2}{R_1} - i_g - \frac{u_4}{R_2} = 0 \\
 \text{Eq. cost. } E_1 : \quad & u_3 - E_1 = 0 \\
 \text{Eq. cost. } E_2 : \quad & u_2 - u_4 - E_2 = 0 \\
 \text{Eq. cost. CCVS : } & u_2 - u_1 - r \frac{u_3 - u_2}{R_1} = 0
 \end{aligned} \tag{4.40}$$

SEGUENDO LA PROCEDURA descritta in precedenza, cioè,

- eliminando la KCL al nodo 3 e inserendo l'equazione costitutiva del generatore  $E_1$  (connessione  $k - 0$ ),
- usando la KCL al supernodo  $\Pi_{21}$  e inserendo l'equazione costitutiva del generatore pilotato,
- usando la KCL al supernodo  $\Pi_{24}$  e inserendo l'equazione costitutiva del generatore  $E_2$ ,

si ottiene un sistema di 5 equazioni in 6 incognite contro le 4 in 4 incognite che ci saremmo aspettati. Questo si deve al fatto che al nodo 2 sono connessi 2 lati non controllabili in tensione di tipo  $k - h$ .

SI RICHIEDE di utilizzare il supernodo  $\Pi_{124}$  che racchiude completamente 2 lati non controllati in tensione di tipo  $k - h$ , e nasconde quindi le correnti  $i_{E_2}$  e  $i_g$ , e tagli solo lati controllabili in tensione (quelli dei componenti  $R_1$ ,  $R_2$  ed  $A$ ). Le equazioni del "Passo 3" modificato diventano quindi

$$\begin{aligned}
 \text{KCL supernodo } \Pi_{124} : \quad & i_2 + i_a - i_1 = \frac{u_4}{R_2} - A - \frac{u_3 - u_2}{R_1} = 0 \\
 \text{Eq. cost. } E_1 : \quad & u_3 - E_1 = 0 \\
 \text{Eq. cost. } E_2 : \quad & u_2 - u_4 - E_2 = 0 \\
 \text{Eq. cost. CCVS : } & u_2 - u_1 - r \frac{u_3 - u_2}{R_1} = 0
 \end{aligned} \tag{4.41}$$

Risolvendo si ottiene

$$\begin{aligned}
 u_1 &= \frac{R_1(E_2 + AR_2 + E_1R_2)}{R_1 + R_2} \left( 1 + \frac{r}{R_1} \right) - \frac{r}{R_1} E_1 \\
 u_2 &= \frac{R_1(E_2 + AR_2 + E_1R_2)}{R_1 + R_2} \\
 u_3 &= E_1 \\
 u_4 &= \frac{R_2(AR_1 - E_2 + E_1R_1)}{R_1 + R_2}
 \end{aligned} \quad . \quad (4.42)$$

TANTO IN QUESTO ULTIMO ESEMPIO quanto in quello precedente qualora si fosse scelto come nodo di riferimento il nodo 3, il circuito contiene un nodo (il nodo 2 in questo caso e il nodo 1 nel precedente) in cui incidono due lati del grafo non controllabili in tensione di tipo  $k - h$ . In questo tipo di situazione, anche quando siano più di due i lati incidenti, si interviene individuando delle superfici di controllo più complesse del supernodo che **racchiudono completamente solo lati non controllabili in tensione e tagliano solo lati controllabili in tensione**.

# 5

## 5.1 Teorema di esistenza e unicità

SI CONSIDERI UN CIRCUITO LINEARE costituito da  $N$ –terminali, adinamici e eventualmente tempo-varianti, e sorgenti impressive, che corrisponda ad un grafo connesso con  $n$  nodi e  $l$  lati. Facendo riferimento al formalismo usato introducendo le equazioni di Tableau (cfr. paragrafo 2.9), si considerino i vettori  $\mathbf{i} \in \mathbb{R}^l$ ,  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^l$  e  $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^{n-1}$ , delle correnti e delle tensioni di lato, e dei potenziali di nodo ridotti (cioè non si considera il nodo scelto come riferimento per il potenziale) e si scrivano le equazioni

$$\begin{cases} A\mathbf{i} = \mathbf{0} \\ \mathbf{v} - A^T\mathbf{u} = \mathbf{0} \end{cases} . \quad (5.1)$$

COME POSSIAMO ASPETTARCI che siano formulabili le equazioni costitutive dei componenti nelle ipotesi di lavoro (linearità, adinamicità e tempo-varianza)? Verificheremo con alcuni esempi che è possibile scrivere la relazione matriciale

$$M(t)\mathbf{v}(t) + N(t)\mathbf{i}(t) = \mathbf{z}(t) , \quad (5.2)$$

con  $M(t) \in \mathbb{R}^{l \times l}$ ,  $N(t) \in \mathbb{R}^{l \times l}$  e  $\mathbf{z}(t) \in \mathbb{R}^l$ , che introduce  $l$  equazioni lineari in  $2l$  incognite.

COME PRIMO ESEMPIO consideriamo il circuito in figura 5.1. Possiamo scrivere banalmente  $v_1 = R_1 i_1$ ,  $v_2 = R_2 i_2$  e  $v_E = e(t)$ . Queste tre equazioni costitutive possono essere riorganizzate in forma matriciale nel modo seguente

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_E \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -R_1 & 0 & 0 \\ 0 & -R_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_E \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ e(t) \end{bmatrix} . \quad (5.3)$$

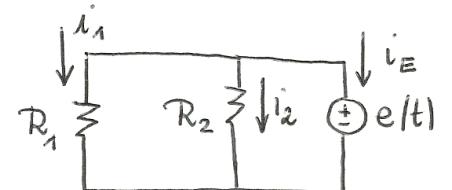


Figura 5.1: Per questo circuito le matrici  $M$  ed  $N$  sono diagonali.

UN ALTRO ESEMPIO lo costruiamo a partire dal circuito in figura 5.2 in cui è stato evidenziato anche il lato pilotante del CCVS, cioè il cortocircuito tra i nodi 3 e 0. Le equazioni costitutive dei componenti sono  $v_1 - R_1 i_1 = 0$  e  $v_2 - R_2 i_2 = 0$  per i due resistori lineari,  $v_G - r\bar{t} = 0$  e  $\bar{v} = 0$  per il generatore pilotato,  $i_a = a(t)$  per il generatore indipendente di corrente. In questo caso l'equazione 5.2 diventa

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_G \\ v_1 \\ v_a \\ v_2 \\ \bar{v} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -r \\ 0 & -R_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -R_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_G \\ i_1 \\ i_a \\ i_2 \\ \bar{t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ a(t) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (5.4)$$

Si noti che la presenza del generatore pilotato fa sì che la matrice  $N$  presenti un termine fuori dalla diagonale. Infatti il CCVS ha un'equazione costitutiva che lega la sua tensione di lato alla corrente di un altro lato del circuito.

In tutti e due gli esempi scelti,  $M(t)$  ed  $N(t)$  sono matrici costanti dato che i componenti non sono tempo-varianti.

INTRODUCIAMO ADESSO IL VETTORE  $w(t)$  così organizzato

$$\begin{bmatrix} u(t) \\ v(t) \\ i(t) \end{bmatrix}, \quad (5.5)$$

grazie al quale possiamo riscrivere le equazioni 5.1 e 5.2 nel modo seguente

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \mathbb{O}_{n-1 \times (n-1)} & \mathbb{O}_{(n-1) \times l} & A \\ -A^T & \mathbb{1}_l & \mathbb{O}_{l \times l} \\ \mathbb{O}_{l \times (n-1)} & M(t) & N(t) \end{bmatrix}}_{T(t)} \underbrace{\begin{bmatrix} u(t) \\ v(t) \\ i(t) \end{bmatrix}}_{w(t)} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbb{O}_{l \times 1} \\ \mathbb{O}_{l \times 1} \\ z(t) \end{bmatrix}}_{y(t)}, \quad (5.6)$$

dove  $\mathbb{O}_{m \times n}$  è una matrice di 0 con  $m$  righe e  $n$  colonne e  $\mathbb{1}_l$  è la matrice identità di taglia  $l \times l$ .

Un circuito lineare, composto da  $N$ -terminali adinamici e eventualmente tempo-varianti, e sorgenti impressive, ammette quindi una ed una sola soluzione in  $t = \hat{t}$  se e solo se  $\det(T(\hat{t})) \neq 0$ . Tale soluzione unica è pari a  $w(\hat{t}) = T(\hat{t})^{-1}y(\hat{t})$ .

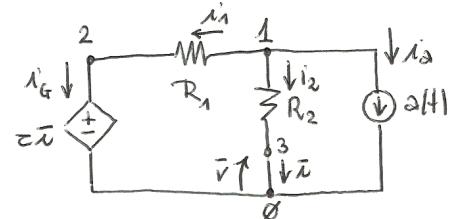


Figura 5.2: Per questo circuito la matrice  $N$  non è diagonale a causa della presenza del generatore pilotato. Si noti il lato pilotante (corto circuito) tra i nodi 3 e 0.

LA CONDIZIONE DI ESISTENZA ED UNICITÀ che è stata ricavata, nonostante la sua valenza teorica, è di scarsa utilità pratica e di difficile applicazione. Esistono metodi di analisi che possono essere applicati a grandi classi di circuiti lineari e non lineari che contengono elementi resistivi (incluse le sorgenti pilotate) che consentono di determinare, spesso per ispezione, se il circuito ammette soluzione unica.

## 5.2 Il principio di sovrapposizione degli effetti

INTRODUCIAMO IL PRINCIPIO o teorema di sovrapposizione degli effetti mediante un esempio. Risolviamo, in particolare, il circuito in figura 5.3 con il metodo dell'analisi nodale modificata per determinarne il potenziale ai nodi 1 e 2.

Passo 1:

$$\begin{aligned} v_1 &= u_1 \\ v_2 &= u_2 - u_1 \\ v_3 &= u_1 \\ v_4 &= u_1 \\ v_E &= u_2 \end{aligned} \quad . \quad (5.7)$$

Passo 2:

$$\begin{aligned} i_1 &= \frac{u_1}{R_1} \\ i_2 &= \frac{u_2 - u_1}{R_2} \\ i_3 &= g v_2 = g(u_2 - u_1) \\ i_4 &= -I \end{aligned} \quad . \quad (5.8)$$

Passo 3:

$$\begin{aligned} \text{KCL nodo 1 : } i_4 + i_3 + i_1 - i_2 &= -I + \frac{u_1}{R_1} + g(u_2 - u_1) - \frac{u_2 - u_1}{R_2} = 0 \\ \text{Eq. cost. Gen : } v_E &= u_2 = E \end{aligned} \quad . \quad (5.9)$$

Svolgendo i conti è possibile ricavare agilmente

$$u_1 = \underbrace{\frac{R_1 R_2}{R_2 - g R_1 R_2 + R_1}}_{h_1} I + \underbrace{\frac{R_1 (1 - g R_2)}{R_2 - g R_1 R_2 + R_1}}_{k_1} E \quad (5.10)$$

e si noti come  $h_1$  e  $k_1$  non dipendono dai generatori indipendenti ma solo dalle grandezze "non impressive" del circuito.  $h_1$  rappresenta l'effetto di  $I$  su  $u_1$  e  $k_1$  l'effetto di  $E$ . Passivando uno alla volta i due

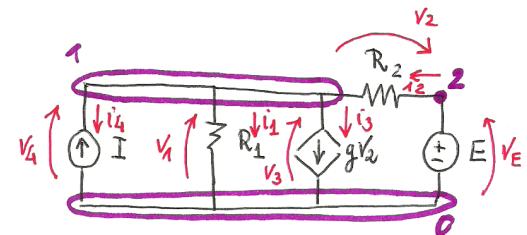


Figura 5.3: Il generatore indipendente di tensione  $E$  non è controllabile in tensione ed è connesso al nodo di riferimento 0. Il potenziale al nodo 2 è quindi pari ad  $E$ .

generatori, il potenziale  $u_1$  è esprimibile come uno dei due effetti preso singolarmente. Inoltre, se i generatori venissero passivati contemporaneamente il circuito sarebbe in quiete e  $u_1$  sarebbe nullo. Analogamente si ricava  $u_2 = 0 \cdot I + 1 \cdot E$ . Tuttavia, affinché, il circuito in figura 5.3 abbia una soluzione, è necessario che  $R_2 - gR_1R_2 + R_1 \neq 0$ . Il circuito deve quindi essere *ben posto*.

DALL'ESEMPIO CONSIDERATO si nota come i potenziali di nodo siano una combinazione lineare degli ingressi del circuito. Dato che tensioni di lato e correnti di lato sono esprimibili come combinazioni lineari dei potenziali di nodo, anche quest'ultime sono scrivibili come combinazione lineare degli ingressi del circuito.

PER GENERALIZZARE L'ESEMPIO proposto, consideriamo un circuito elettrico costituito da multi-terminali lineari, adinamici, eventualmente tempo-varianti e da sorgenti impressive di tensione e di corrente, che ammetta una sola soluzione. Il principio di sovrapposizione degli effetti afferma che

*l'intensità di corrente e la tensione associata a ciascun lato del grafo corrispondente al circuito sono pari, rispettivamente, alla somma delle intensità di corrente e delle tensioni che ciascuno dei generatori indipendenti produrrebbe se agisse da solo con tutti gli altri generatori spenti.*

La situazione è rappresentata graficamente in figura 5.4 dove il generico il lato a cui ci si riferisce nell'enunciato del principio di sovrapposizione degli effetti è indicato dal bipolo  $b$  (lineare, adinamico e non impressivo).

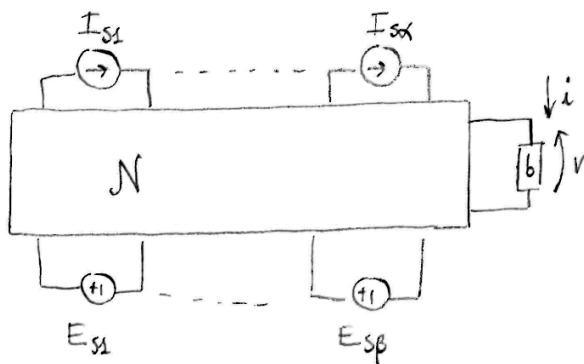


Figura 5.4: La figura evidenzia un generico circuito dal quale sono state messe in evidenza tutte le sorgenti impressive e un lato al quale è connesso un generico bipolo  $b$  (lineare, adinamico e non impressivo).  $N$  contiene solo multi-terminali lineari, adinamici, eventualmente tempo-varianti.

Il principio di sovrapposizione degli effetti afferma quindi che

$$\begin{aligned} v &= h_1(t)I_{S_1} + \cdots + h_\alpha(t)I_{S_\alpha} + k_1(t)E_{S_1} + \cdots + k_\beta(t)E_{S_\beta}, \\ i &= \hat{h}_1(t)I_{S_1} + \cdots + \hat{h}_\alpha(t)I_{S_\alpha} + \hat{k}_1(t)E_{S_1} + \cdots + \hat{k}_\beta(t)E_{S_\beta} \end{aligned} \quad (5.11)$$

dove  $\{h_1(t), \dots, h_\alpha(t)\}$ ,  $\{k_1(t), \dots, k_\beta(t)\}$ ,  $\{\hat{h}_1(t), \dots, \hat{h}_\alpha(t)\}$  e  $\{\hat{k}_1(t), \dots, \hat{k}_\beta(t)\}$  non dipendono dai generatori indipendenti e si

può quindi calcolare l'effetto complessivo ad esempio su  $v$  delle sorgenti impressive "accendendole" una alla volta.

Dopo aver introdotto il principio di sovrapposizione degli effetti, se ne propone una dimostrazione nel caso in cui il circuito in esame sia costituito, eccezion fatta per le sorgenti impressive, da  $N$ -terminali controllabili in tensione e ammetta, come richiesto dal principio stesso, una ed una sola soluzione. Si considerino quindi le equazioni di 5.1 e 5.2 e si ricavino le correnti di lato  $i$  in funzione delle tensioni di lato  $v$  e degli ingressi  $z(t)$ .

$$i = N^{-1} (z(t) - Mv) . \quad (5.12)$$

In base alla seconda delle equazioni 5.1, si ottiene ancora

$$i = N^{-1} (z(t) - MA^T u) \quad (5.13)$$

che, sostituita nella prima delle 5.1 ci consente di scrivere

$$AN^{-1} (z(t) - MA^T u) = 0 , \quad (5.14)$$

ovvero

$$\underbrace{AN^{-1} MA^T}_{a \in \mathbb{R}^{(n-1) \times (n-1)}} \underbrace{u}_{b \in \mathbb{R}^{(n-1) \times l}} = \underbrace{AN^{-1}}_{b \in \mathbb{R}^{(n-1) \times l}} z(t) . \quad (5.15)$$

I potenziali di nodo si ottengono quindi come  $u = a^{-1} b z(t)$ , le tensioni di lato come

$$v = \underbrace{A^T a^{-1} b}_{d \in \mathbb{R}^{l \times l}} z(t) \quad (5.16)$$

e le correnti di lato come

$$\begin{aligned} i &= N^{-1} (z(t) - MA^T a^{-1} b z(t)) \\ &= \underbrace{N^{-1} (1_l - MA^T a^{-1} b)}_{f \in \mathbb{R}^{l \times l}} z(t) . \end{aligned} \quad (5.17)$$

A questo punto, se ci focalizziamo per esempio sulle correnti di lato e ne consideriamo la  $j$ -esima ( $j = 1, \dots, l$ ), l'equazione 5.17 ci consente di scrivere

$$i_j = \sum_{k=1}^l f_{jk} z_k(t) \quad (5.18)$$

in cui si evidenziano i singoli *effetti* delle sorgenti  $z$  sulla corrente  $i_j$ . Lo stesso può essere fatto per le tensioni di lato e per i potenziali di nodo.

Se  $\mathcal{N}$  non contenesse componenti tempo-varianti i coefficienti  $\{h_1(t), \dots, h_\alpha(t)\}$ ,  $\{k_1(t), \dots, k_\beta(t)\}$ ,  $\{\hat{h}_1(t), \dots, \hat{h}_\alpha(t)\}$  e  $\{\hat{k}_1(t), \dots, \hat{k}_\beta(t)\}$  sarebbero costanti e non dipenderebbero quindi dal tempo  $t$ .

### 5.2.1 Esempio

SI CONSIDERI IL CIRCUITO in figura 5.5 e si calcoli la potenza assorbita dal resistore  $R_1$ . Possiamo risolvere il problema considerando uno alla volta l'effetto dei generatori  $I$  ed  $E$  e poi sommare i risultati. Passivando il generatore  $E$  lo dobbiamo sostituire con un corto circuito e si ottiene il circuito in figura 5.6.

Si ricava facilmente

$$i_3^I = -\frac{R_4 I}{(R_1||R_2) + R_3 + R_4} = -6A \quad (5.19)$$

e

$$i_1^I = \frac{R_2 i_3^I}{R_1 + R_2} = -3A \quad (5.20)$$

La potenza assorbita da  $R_1$  inserendo solo  $I$  dunque pari a  $p_a^I = R_1(i_1^I)^2 = 9W$ .

Passivando adesso  $I$  ed inserendo  $E$  si ottiene il circuito in figura 5.7.

$$v_1^E = -\frac{R_1 E}{R_1 + [R_2||(R_3 + R_4)]} = -10V \quad (5.21)$$

La potenza assorbita da  $R_1$  inserendo solo  $E$  dunque pari a  $p_a^E = \frac{(v_1^E)^2}{R_1} = 100W$ . La potenza assorbita dal resistore  $R_1$  in figura 5.5 è quindi  $p_a^I + p_a^E = 109W$ .

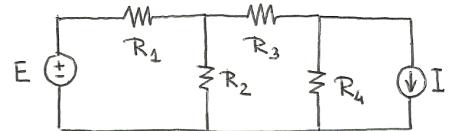


Figura 5.5:  $E = 15V$ ,  $I = 18A$ ,  $R_1 = R_2 = 1\Omega$ ,  $R_3 = R_4 = 0.5\Omega$ .

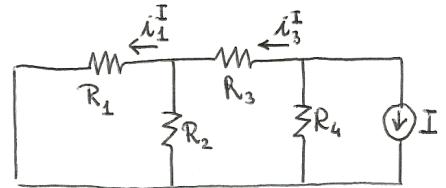


Figura 5.6: La corrente  $i_3^I$  può essere ricavata applicando la regola del partitore di corrente tra  $R_4$  e  $(R_1||R_2) + R_3$ .

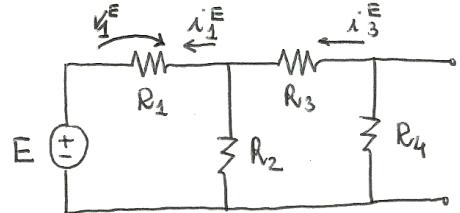


Figura 5.7: La tensione  $v_1^E$  può essere ricavata applicando la regola del partitore di tensione tra  $R_1$  e  $R_2||(R_3 + R_4)$ .

### 5.3 Il teorema di Thevénin e Norton

SIA DATO UN BIPOLO composito  $\mathcal{N}$  costituito da elementi lineari adinamici, eventualmente tempo varianti, e da sorgenti imperative di corrente e/o di tensione. Il suo comportamento ai morsetti  $A$  e  $B$  è equivalente (cfr. il principio di equivalenza al paragrafo 3.7) a quello di un bipolo equivalente  $\mathcal{N}_{eq}$  del tipo **Thevénin** se ammette una ed una sola soluzione, per ogni  $i$ , il circuito che si ottiene collegando ai morsetti  $A$  e  $B$  un generatore di corrente  $i$  come in figura 5.9. Il bipolo  $\mathcal{N}$  deve quindi essere **controllabile in corrente**.

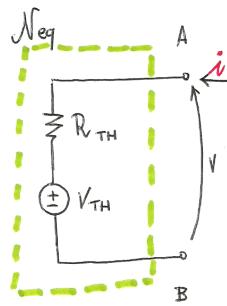


Figura 5.8: Il circuito equivalente di Thevénin.

Il comportamento ai morsetti  $A$  e  $B$  di  $\mathcal{N}$  è invece equivalente a quello di un bipolo equivalente  $\mathcal{N}_{eq}$  del tipo **Norton** se ammette una ed una sola soluzione, per ogni  $v$ , il circuito che si ottiene collegando ai morsetti  $A$  e  $B$  un generatore di tensione  $v$  come in figura 5.11. Il bipolo  $\mathcal{N}$  deve quindi essere **controllabile in tensione**.

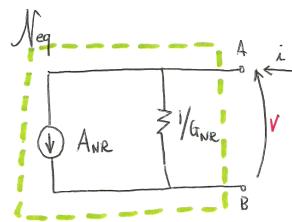


Figura 5.10: Il circuito equivalente di Norton.

Qualora  $\mathcal{N}$  ammetta sia la base corrente sia la base tensione, sono definiti entrambi i bipoli equivalenti.

**FORNIAMO LA DEMOSTRAZIONE** nel caso del circuito equivalente di Thevénin. Si consideri il circuito in figura 5.9: se per ogni  $i$  ammette una ed una sola soluzione, allora è possibile applicare il principio di sovrapposizione degli effetti (cfr. paragrafo 5.2) e scrivere la tensione di lato  $v$  tra i morsetti  $A$  e  $B$  come

$$v = ri(t) + \sum_{j=1}^{\alpha} h_j I_{Sj} + \sum_{i=1}^{\beta} k_i E_{Si} , \quad (5.22)$$

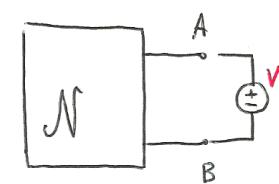


Figura 5.9: Il composito  $\mathcal{N}$  collegato al generatore di prova  $i$ .



Figura 5.11: Il composito  $\mathcal{N}$  collegato al generatore di prova  $v$ .

dove  $I_{s_j}$  e  $E_{s_i}$  sono i generatori indipendenti di corrente e tensione eventualmente presenti in  $\mathcal{N}$ .

La tensione  $v$ , quando si passivino tutte le sorgenti indipendenti interne è pari a

$$\left. \begin{array}{l} v \\ I_{s_j} = 0, \forall j \\ E_{s_i} = 0, \forall i \end{array} \right| = ri(t) , \quad (5.23)$$

e si definisce

$$\left. \begin{array}{l} v \\ i \\ I_{s_j} = 0, \forall j \\ E_{s_i} = 0, \forall i \end{array} \right| = R_{TH} . \quad (5.24)$$

Analogamente, se  $i \equiv 0$ , se cioè si lavora in condizioni di **circuito aperto** (c.a.),

$$v|_{c.a.} = \sum_{j=1}^{\alpha} h_j I_{s_j} + \sum_{i=1}^{\beta} k_i E_{s_i} = E_{th} . \quad (5.25)$$

Si lascia allo studente la dimostrazione del caso Norton che equivale a

$$\left. \begin{array}{l} i \\ v \\ I_{s_j} = 0, \forall j \\ E_{s_i} = 0, \forall i \end{array} \right| = G_{NR} \quad (5.26)$$

e

$$i|_{c.c.} = \sum_{j=1}^{\alpha} h_j I_{s_j} + \sum_{i=1}^{\beta} k_i E_{s_i} = A_{NR} , \quad (5.27)$$

dove il pedice "c.c" sta per **corto circuito**.

**LA DEMOSTRAZIONE DEL TEOREMA** è di tipo costruttivo, nel senso che fornisce un'indicazione precisa su come poter ricavare i parametri dei circuiti equivalenti. Per ricavare  $R_{TH}$  si passivano tutti i generatori interni alla rete e si impone una corrente  $i$  ai morsetti  $A$  e  $B$  e si misura il rapporto tra la tensione  $v$  ai morsetti  $A$  e  $B$  e la corrente  $i$  stessa. Nel caso Norton, cioè per ricavare  $G_{NR}$ , si impone una tensione  $v$ , si misura una corrente  $i$ , si valuta il loro rapporto  $i/v = G_{NR}$ . Per ricavare invece  $E_{TH}$  e  $A_{NR}$ , si considerano la tensione di circuito aperto e la corrente di cortocircuito, rispettivamente. Ovvero, si lasciano appesi  $A$  e  $B$  e si misura  $E_{TH}$  ai morsetti, oppure si impone un cortocircuito tra  $A$  e  $B$  e si misura la corrente  $A_{NR}$  che attraversa il cortocircuito stesso.

L'**APPROCCIO DESCRITTO SOPRA**, che prende il nome di **prove semplici**, non è l'unico e neppure il meno laborioso. A volte è più conveniente impostare la corrente  $i$  o la tensione  $v$ , a seconda del modello che si sta cercando, e ricavare la tensione  $v$  o la corrente  $i$  corrispondenti esattamente come si è fatto introducendo i circuiti equivalenti

di Thevénin e Norton nel paragrafo 3.9. Da un punto di vista sperimentale, però, è il modo più semplice per ricavare i parametri dei circuiti equivalenti.

### 5.3.1 Esempi di applicazione dei teoremi di Thevénin e Norton

PER IL BIPOLO composito in figura 5.12 si ricavi, ai morsetti *A* e *B*, il circuito equivalente di Norton descritto dall'equazione costitutiva  $i = G_{NR}v + A_{NR}$ .

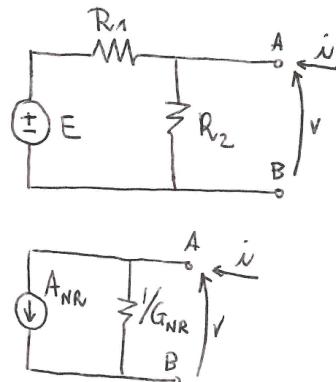


Figura 5.12: Per il bipolo composito connesso ai morsetti *A* e *B* si vogliono ricavare i parametri del circuito equivalente di Norton.

Si ricorda che  $G_{NR} = \frac{i}{v}|_{A_{NR}=0}$  e che  $A_{NR} = i|_{v=0}$ .

Imporre  $A_{NR} = 0$  equivale a passivare il generatore indipendente di tensione *E* (cfr. figura 5.13). Ai morsetti *A* e *B* rimangono quindi, connessi in parallelo,  $R_1$  ed  $R_2$ . Possiamo quindi ricavare  $G_{NR} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$ , ovvero il rapporto tra la corrente *i* entrante al morsetto *A* qualora si colleghi un generatore di prova *v* tra i morsetti *A* e *B*.

Collegando invece un cortocircuito ai morsetti *A* e *B* (cfr. figura 5.14), il resistore  $R_2$  non ha alcun effetto nella rete avendo ai suoi capi una tensione nulla. La corrente *i* di corto circuito sarà dunque  $i = -\frac{E}{R_1} = A_{NR}$ .

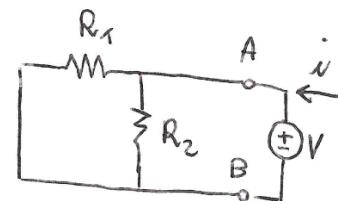


Figura 5.13: Prove semplici per il circuito in figura 5.12: calcolo di  $G_{NR}$ .

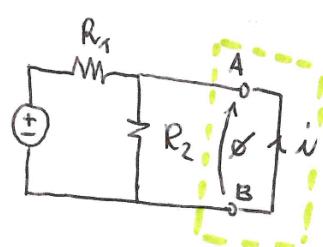


Figura 5.14: Prove semplici per il circuito in figura 5.12: calcolo di  $A_{NR}$ .

L'equazione costitutiva del circuito equivalente di Norton è dunque

$$i = \frac{v}{R_1} + \frac{v}{R_2} - \frac{E}{R_1} = \underbrace{\frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2} v}_{G_{NR}} - \underbrace{\frac{E}{R_1}}_{A_{NR}} . \quad (5.28)$$

A questo risultato si poteva arrivare collegando il generatore  $v$  ai morsetti  $A$  e  $B$  ricavando poi la corrente  $i$ . Si sarebbe scritto  $i_{R_1} = \frac{E-v}{R_1}$  e  $i = \frac{v}{R_2} - \frac{E-v}{R_1}$  che equivale all'equazione 5.28.

**SI CALCOLI ADESSO** per i circuito in figura 5.15, la resistenza equivalente  $R_{eq}$  "sentita" tra  $A$  e  $B$ .

Per risolvere il problema possiamo come prima cosa calcolare il circuito equivalente di Thevenin tra i morsetti  $C$  e  $D$ , rimuovendo  $R_C$ , e poi ricollegare come in figura 5.16 il circuito equivalente ad  $R_C$ . A questo punto, passivando  $E_{TH}$ , la resistenza sentita ai morsetti  $A$  e  $B$  è  $R_{eq} = R_{TH} \parallel R_C$ .

Si ricorda che, in figura 5.16,  $v = R_{TH}i + E_{TH}$  e che, se  $E_{TH} = 0$  (ovvero  $E = 0$ ),  $\frac{v}{i} = R_{TH}$ . In particolare,  $v_B = R_B i$ ,  $v_A = R_A i$  e  $v_{GS} = -v_A$ . Quindi  $v - iR_B - \mu R_A i - R_A i = 0$  e cioè  $R_{TH} = R_B + (1 + \mu)R_A$ .

La resistenza cercata è quindi pari a  $R_{eq} = R_C \parallel (R_B + (1 + \mu)R_A)$ .

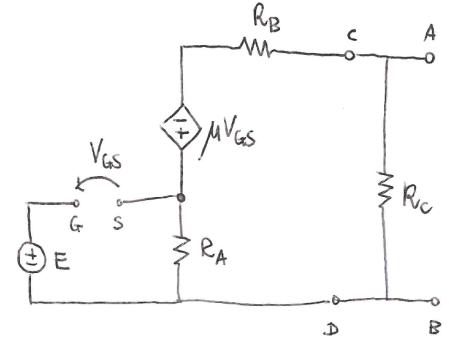


Figura 5.15: Quanto vale la resistenza equivalente  $R_{eq}$  "sentita" tra  $A$  e  $B$ ?

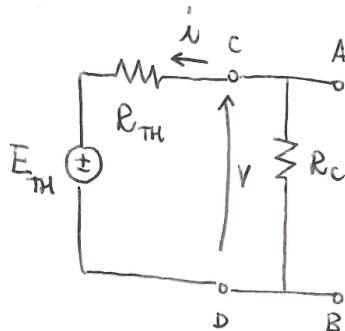


Figura 5.16: Dopo aver ricavato il circuito equivalente di Thevenin riconnetto  $R_C$ .

# 6

## 6.1 I doppi bipoli

IN QUESTA SEZIONE DEL CORSO ci dedicheremo allo studio di una particolare famiglia di 4-terminali, i **doppi bipoli** (adinamici e tempo-invarianti). Abbiamo visto introducendo i generatori pilotati (cfr. paragrafo 4.1), come alcuni 4-terminali godono di una particolare proprietà tale per cui non necessitano di 3 correnti e 3 tensioni descrittive ma sono pienamente caratterizzati da solo 2 tensioni e 2 correnti.

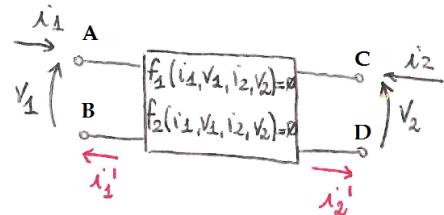


Figura 6.1: Un generico doppio bipolo.

In particolare, se per il 4-terminali in figura 6.1, le proprietà  $i'_1 = i_1$  e  $i'_2 = i_2$  non dipendono dal circuito cui il componente è collegato, allora si parla di **doppio bipolo proprio**, altrimenti di **doppio bipolo improprio**. Le sorgenti pilotate sono esempi di doppi bipoli propri.

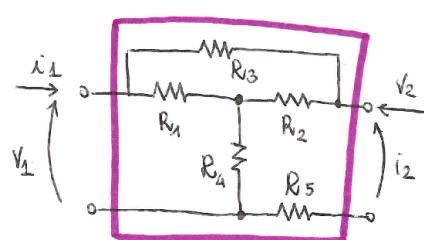


Figura 6.2: Un particolare 4-terminali che non è un doppio bipolo proprio.

Il 4-terminali in figura 6.2, invece, è un doppio bipolo improrio dato che, se collegato come in figura 6.3, si comporta come un doppio bipolo, ma, se collegato come in figura 6.4, invece no.

Le coppie di morsetti ( $A, B$ ) e ( $C, D$ ) in figura 6.1, si definiscono **porte** e il doppio bipolo si chiama anche 2-porte. Quando un 4-terminali si comporta come un doppio bipolo, il suo grafo si riduce a due lati disgiunti, come accadeva per i generatori pilotati (cfr. figura 4.3).

### SE LE EQUAZIONI 2 COSTITUTIVE

$$\begin{cases} f_1(i_1, i_2, v_1, v_2) = 0 \\ f_2(i_1, i_2, v_1, v_2) = 0 \end{cases} \quad (6.1)$$

necessarie e sufficienti per descrivere il comportamento del generico doppio bipolo, sono lineari, allora il doppio bipolo si dice lineare<sup>1</sup>. Ci limiteremo allo studio di doppi bipoli **lineari affini**:

$$\begin{cases} m_{11}V_1 + m_{12}V_2 + n_{11}i_1 + n_{12}i_2 + c_1 = 0 \\ m_{21}V_1 + m_{22}V_2 + n_{21}i_1 + n_{22}i_2 + c_2 = 0 \end{cases} \quad (6.3)$$

PARTIAMO DAL CASO **omogeneo**, con  $c_1 = c_2 = 0$  nell'equazione 6.3. Omogeno equivale a dire che all'interno del doppio bipolo non ci sono sorgenti impressive indipendenti. Ciò deriva direttamente da principio di sovrapposizione degli effetti (cfr. paragrafo 5.2). Possiamo infatti pensare alle due porte del doppio bipolo come a due lati per i quali Ad esempio, se il componente è controllabile in tensione ad entrambe le porte, le correnti di porta si potranno esprimere come somma di contributi dovuti ai generatori di controllo imposti alle porte e delle sorgenti interne. Nel caso omogeneo, restando solo i contributi alle porte, di fatto non sono presenti sorgenti impressive interne.

## 6.2 Le rappresentazioni cardinali

**IN GENERALE, UN DOPPIO BIPOLO** ammette 4 possibili basi di definizione che implicano altrettante **rappresentazioni cardinali**. Le basi possibili sono la base tensione ( $v_1, v_2$ ), la base corrente ( $i_1, i_2$ ) e le due basi miste ( $v_1, i_2$ ) e ( $i_1, v_2$ ).

### 6.2.1 Forma esplicita con parametri R

**SE È POSSIBILE ASSEGNAME** alle due porte le correnti  $i_1$  e  $i_2$  e ricavare univocamente le tensioni  $v_1$  e  $v_2$ , allora il doppio bipolo ammette

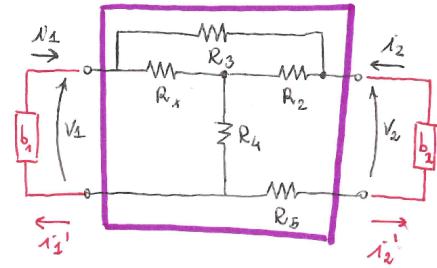


Figura 6.3: Il 4-terminali di figura 6.2, collegato a due generici bipoli  $b_1$  e  $b_2$ , si comporta come doppio bipolo per come è realizzata la connessione.

<sup>1</sup> I generatori pilotati sono dunque lineari dato che, considerando ad esempio un CCCS (cfr. figura 4.1), l'equazione 6.1 diventa

$$\begin{cases} v_{\alpha\beta} = 0 \\ i_A - \gamma i_\alpha = 0 \end{cases} \quad (6.2)$$

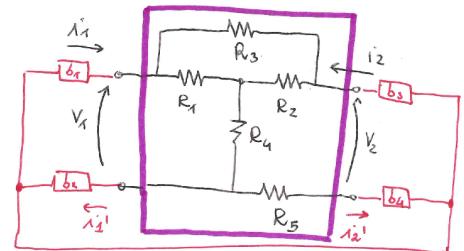


Figura 6.4: Il 4-terminali di figura 6.2, in questa configurazione, non si comporta come doppio bipolo dato che  $i'_1 \neq i_1$  e  $i'_2 \neq i_2$ .

la base di definizione corrente ed è possibile risolvere il sistema di equazioni 6.3 con  $c_1 = c_2 = 0$  e scrivere

$$\begin{cases} v_1 = R_{11}i_1 + R_{12}i_2 \\ v_2 = R_{21}i_1 + R_{22}i_2 \end{cases}, \quad (6.4)$$

che in forma matriciale possiamo riscrivere come

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{bmatrix}}_{\mathcal{R}} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix}. \quad (6.5)$$

**COME SI RICAVANO I PARAMETRI** della matrice di resistenze  $\mathcal{R}$  dato un 4-terminali che si comporta come un doppio bipolo? Usiamo la sovrapposizione degli effetti. In base all'equazione 6.4, infatti, possiamo scrivere

$$\begin{aligned} R_{11} &= \frac{v_1}{i_1} \Big|_{i_2=0} & R_{21} &= \frac{v_2}{i_1} \Big|_{i_2=0} \\ R_{12} &= \frac{v_1}{i_2} \Big|_{i_1=0} & R_{22} &= \frac{v_2}{i_2} \Big|_{i_1=0} \end{aligned} \quad (6.6)$$

La prima riga di equazioni nella 6.6 equivale, dal punto di vista operativo, a lasciare aperta la porta 2 del doppio bipolo e a collegare un generatore indipendente di corrente  $i_1$  alla porta 1 (cfr. figura 6.5).

Si misurano quindi le tensioni  $v_1$  e  $v_2$  e si ricavano i parametri  $R_{11}$  e  $R_{21}$ . Analogamente, per la seconda riga di equazioni, si lascia aperta la porta 1 del doppio bipolo e si collega un generatore indipendente di corrente  $i_2$  alla porta 2 (cfr. figura 6.5). Si misurano ancora le tensioni  $v_1$  e  $v_2$  e si ricavano i parametri  $R_{12}$  e  $R_{22}$ .

Questo approccio, detto delle **prove semplici**, è fondamentale per **misurare** praticamente i parametri della matrice  $\mathcal{R}$  distinguendo i contributi e gli effetti alle porte delle sorgenti di controllo. Quando invece si debbono **ricavare simbolicamente** i parametri della matrice  $\mathcal{R}$  per un 4-terminali di cui si conosce la struttura interna, questo approccio non è sempre più vantaggioso, in termini di complessità, rispetto a quello diretto nel quale si impongono contemporaneamente le correnti  $i_1$  ed  $i_2$  e si misurano le tensioni  $v_1$  e  $v_2$ . Dopo di che, per ispezione diretta si identificano i parametri  $R_{jk}$  ( $j = 1, 2$  e  $k = 1, 2$ ).

### 6.2.2 Forma esplicita con parametri $G$

QUESTA È LA RAPPRESENTAZIONE duale di quella con parametri  $R$ . Il doppio bipolo deve ammettere la base di definizione tensione e

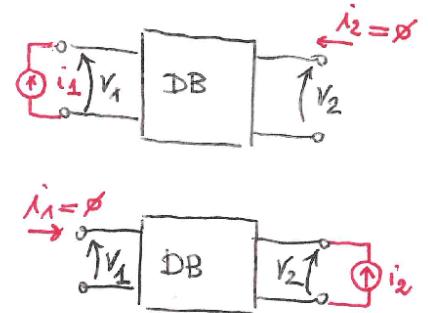


Figura 6.5: Le prove semplici per determinare i parametri della matrice  $\mathcal{R}$ .

quindi possiamo scrivere

$$\begin{cases} i_1 = G_{11}v_1 + G_{12}v_2 \\ i_2 = G_{21}v_1 + G_{22}v_2 \end{cases}, \quad (6.7)$$

che in forma matriciale possiamo riscrivere come

$$\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{bmatrix}}_{\mathcal{G}} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}. \quad (6.8)$$

Anche in questo caso, per ricavare i parametri della matrice di conduttanze  $\mathcal{G}$  possiamo scrivere

$$\begin{aligned} G_{11} &= \frac{i_1}{v_1} \Big|_{v_2=0} & G_{21} &= \frac{i_2}{v_1} \Big|_{v_2=0} \\ G_{12} &= \frac{i_1}{v_2} \Big|_{v_1=0} & G_{22} &= \frac{i_2}{v_2} \Big|_{v_1=0} \end{aligned} \quad (6.9)$$

Le prove semplici per ricavare i parametri della matrice  $\mathcal{G}$  sono illustrate graficamente in figura 6.6.

SE UN DOPPIO BIPOLO è controllabile in tensione e in corrente, allora ammette la rappresentazione mediante matrici  $\mathcal{R}$  e  $\mathcal{G}$ . Condizione necessaria e sufficiente affinche ciò avvenga è che  $\mathcal{R}^{-1} = \mathcal{G}$  e quindi le due matrici non sono singolari o, in modo equivalente, il loro determinante è non nullo.

### 6.2.3 Forma esplicita con parametri $H$

QUESTA RAPPRESENTAZIONE SI DICE ibrida di tipo 1 e per essere ammessa il doppio bipolo deve essere controllabile almeno con la base mista  $(i_1, v_2)$ .

$$\begin{cases} v_1 = H_{11}i_1 + H_{12}v_2 \\ i_2 = H_{21}i_1 + H_{22}v_2 \end{cases}, \quad (6.10)$$

In forma matriciale

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{bmatrix}}_{\mathcal{H}} \begin{bmatrix} i_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \quad (6.11)$$

Per ricavare i parametri della matrice  $\mathcal{H}$  possiamo scrivere

$$\begin{aligned} H_{11} &= \frac{v_1}{i_1} \Big|_{v_2=0} & H_{21} &= \frac{i_2}{i_1} \Big|_{v_2=0} \\ H_{12} &= \frac{v_1}{v_2} \Big|_{i_1=0} & H_{22} &= \frac{i_2}{v_2} \Big|_{i_1=0} \end{aligned} \quad (6.12)$$

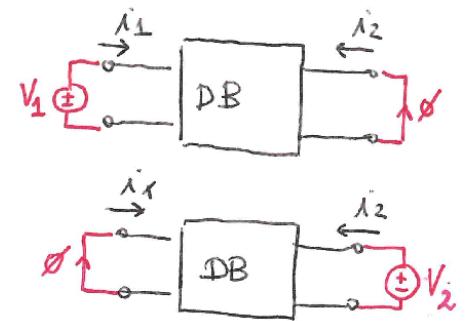


Figura 6.6: Le prove semplici per determinare i parametri della matrice  $\mathcal{G}$ .

#### 6.2.4 Forma esplicita con parametri $H'$

QUESTA RAPPRESENTAZIONE SI DICE ibrida di tipo 2 e per essere ammessa il doppio bipolo deve essere controllabile almeno con la base mista  $(v_1, i_2)$ .

$$\begin{cases} i_1 = H'_{11}v_1 + H'_{12}i_2 \\ v_2 = H'_{21}v_1 + H'_{22}i_2 \end{cases} . \quad (6.13)$$

In forma matriciale

$$\begin{bmatrix} i_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} H'_{11} & H'_{12} \\ H'_{21} & H'_{22} \end{bmatrix}}_{\mathcal{H}'} \begin{bmatrix} v_1 \\ i_2 \end{bmatrix} \quad (6.14)$$

Per ricavare i parametri della matrice  $\mathcal{H}'$  possiamo scrivere

$$\begin{aligned} H'_{11} &= \frac{i_1}{v_1} \Big|_{i_2=0} & H'_{21} &= \frac{v_2}{v_1} \Big|_{i_2=0} \\ H'_{12} &= \frac{i_1}{i_2} \Big|_{v_1=0} & H'_{22} &= \frac{v_2}{i_2} \Big|_{v_1=0} \end{aligned} . \quad (6.15)$$

#### 6.3 Matrice $T$ di trasmissione diretta

IN QUESTO CASO non si parla di basa di definizione perché imporre alla stessa coppia di morsetti tensione e corrente non è fattibile mediante il solo utilizzo di sorgenti impressive. Diciamo che deve essere possibile algebricamente ricavare  $(v_1, i_1)$  date  $(v_2, i_2)$ .

$$\begin{cases} v_1 = T_{11}v_2 + T_{12}(-i_2) \\ i_1 = T_{21}v_2 + T_{22}(-i_2) \end{cases} . \quad (6.16)$$

Nell'equazione 6.16 si noti la presenza di  $-i_2$ . Con questa rappresentazione, infatti, si considera la corrente che esce dalla porta 2 (ovvero  $-i_2$ ). Da qui il nome *trasmissione*: se si collegasse alla porta 2 un altro doppio bipolo, la corrente  $-i_2$  sarebbe la corrente in ingresso alla porta 1 del nuovo elemento. La potremmo quindi vedere come la corrente *trasmessa* da un doppio bipolo all'altro. In forma matriciale

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ i_1 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{bmatrix}}_{\mathcal{T}} \begin{bmatrix} v_2 \\ -i_2 \end{bmatrix} \quad (6.17)$$

Per ricavare i parametri della matrice  $\mathcal{T}$  non si possono effettuare direttamente le prove semplici, dato che non possiamo assegnare

contemporaneamente  $v_2$  e  $i_2$ . Possiamo scrivere

$$\begin{aligned} \frac{1}{T_{11}} &= \left. \frac{v_2}{v_1} \right|_{i_2=0} & \frac{1}{T_{21}} &= \left. \frac{v_2}{i_1} \right|_{i_2=0} \\ \frac{1}{T_{12}} &= -\left. \frac{i_2}{v_1} \right|_{v_2=0} & \frac{1}{T_{22}} &= -\left. \frac{i_2}{i_1} \right|_{v_2=0} \end{aligned} \quad . \quad (6.18)$$

Si noti quindi che per ricavare  $T_{11}$  si assegnano  $v_1$  e  $i_2$ ; per ricavare  $T_{21}$  si assegnano  $i_1$  e  $i_2$ ; per ricavare  $T_{12}$  si assegnano  $v_1$  e  $v_2$ ; per ricavare  $T_{22}$  si assegnano  $i_1$  e  $i_2$ . Di fatto, quindi si sfruttano tutte e quattro le rappresentazioni cardinali per ricavare i parametri della matrice  $\mathcal{T}$ .

## 6.4 Esempi

### 6.4.1 Esempio 1

PER IL DOPPIO BIPOLO in figura 6.7 si ricavi la rappresentazione mediante la matrice  $\mathcal{G}$ .

In base alla richiesta dell'esercizio, dobbiamo quindi assumere che il doppio bipolo sia almeno controllabile in tensione da  $v_1$  e  $v_2$ . Possiamo procedere impiegando le prove semplici e impostare  $v_2 = 0$ , cioè mettendo in corto circuito la porta 2, e impostare  $v_1$  alla porta 1 con un generatore indipendente di tensione (cfr. figura 6.8). Così facendo si ottiene

$$v_1 = (R_1 \parallel R_3)i_1 \text{ e } i_2 = -\frac{v_1}{R_3}. \text{ Quindi}$$

$$\begin{aligned} G_{11} &= \frac{i_1}{v_1} = \frac{R_1 + R_3}{R_1 R_3} \\ G_{21} &= \frac{i_2}{v_1} = -\frac{1}{R_3} \end{aligned} \quad . \quad (6.19)$$

Analogamente (cfr. figura 6.9), cortocircuitando la porta 1 e imponendo  $v_2$  si ricava  $v_2 = (R_2 \parallel R_3)i_2$  e  $i_1 = -\frac{v_2}{R_3}$  da cui

$$\begin{aligned} G_{12} &= -\frac{1}{R_3} \\ G_{22} &= \frac{R_2 + R_3}{R_2 R_3} \end{aligned} \quad . \quad (6.20)$$

In forma matriciale quindi

$$\mathcal{G} = \begin{bmatrix} \frac{R_1 + R_3}{R_1 R_3} & -\frac{1}{R_3} \\ -\frac{1}{R_3} & \frac{R_2 + R_3}{R_2 R_3} \end{bmatrix} \quad . \quad (6.21)$$

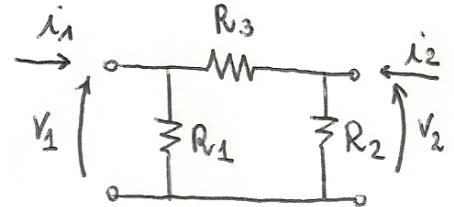


Figura 6.7: Un doppio bipolo di cui si vuole ricavare la matrice  $\mathcal{G}$ .

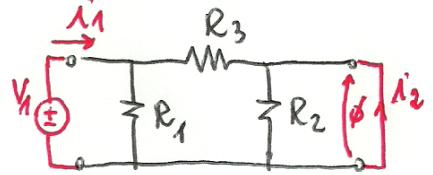


Figura 6.8: Prove semplici per il doppio bipolo in figura 6.7 di cui si vuole ricavare  $\mathcal{G}$ : la porta 2 viene cortocircuitata e si impone  $v_1$  alla porta 1.

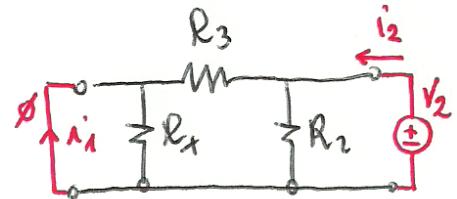


Figura 6.9: Prove semplici per il doppio bipolo in figura 6.7 di cui si vuole ricavare  $\mathcal{G}$ : la porta 1 viene cortocircuitata e si impone  $v_2$  alla porta 2.

### 6.4.2 Esempio 2

PER IL DOPPIO BIPOLO in figura 6.10 si ricavi la rappresentazione mediante la matrice  $\mathcal{R}$ .

Proviamo a farlo senza utilizzare le prove semplici ma collegando i generatori  $i_1$  e  $i_2$  alle porte 1 e 2, rispettivamente, e ricavando  $v_1(i_1, i_2)$  e  $v_2(i_1, i_2)$ . Dalla maglia più esterna al circuito e da quella di sinistra si ottiene

$$\begin{aligned} v_1 + v - \alpha v + 3Ri_2 - v_2 &= 0 \\ v_1 + v - R(i_1 + i_2) &= 0 \end{aligned} \quad . \quad (6.22)$$

Dato che la grandezza pilotante  $v$  è pari a  $-2Ri_1$  si ricava

$$\mathcal{R} = \begin{bmatrix} 3R & R \\ R(1+2\alpha) & 4R \end{bmatrix} \quad . \quad (6.23)$$

### 6.4.3 Esempio 3

PER IL DOPPIO BIPOLO in figura 6.7 si ricavi la rappresentazione mediante la matrice  $\mathcal{R}^2$ .

Procediamo questa volta imponendo la corrente  $i_1$  alla porta 1 e lasciamo aperta la porta 2 (cfr. figura 6.11 in alto). Si ricava, impiegando ad esempio il partitore di corrente tra  $R_1$  e  $R_3 + R_2$ , che

$$\begin{aligned} v_1 &= R_1 i_{R_1} = R_1 \frac{R_2 + R_3}{R_1 + R_2 + R_3} i_1 \\ v_2 &= R_2 i_{R_2} = R_2 \frac{R_1}{R_1 + R_2 + R_3} i_1 \end{aligned} \quad . \quad (6.24)$$

Procedendo con la prova duale (cfr. figura 6.11 in basso) si ottiene

$$\begin{aligned} v_1 &= R_1 i_{R_1} = R_1 \frac{R_2}{R_1 + R_2 + R_3} i_2 \\ v_2 &= R_2 i_{R_2} = R_2 \frac{R_1 + R_3}{R_1 + R_2 + R_3} i_1 \end{aligned} \quad . \quad (6.25)$$

In forma matriciale

$$\mathcal{R} = \begin{bmatrix} R_1(R_2 + R_3) & R_1 R_2 \\ R_1 + R_2 + R_3 & R_1 + R_2 + R_3 \\ R_2 R_1 & R_2(R_1 + R_3) \\ R_1 + R_2 + R_3 & R_1 + R_2 + R_3 \end{bmatrix} \quad . \quad (6.26)$$

## 6.5 Doppii bipoli lineari affini

QUANDO LE EQUAZIONI COSTITUTIVE 6.3 contengono le costanti  $c_1$  e  $c_2$  non entrambi nulle, il doppio bipolo è adinamico, tempo-invariante, lineare affine.

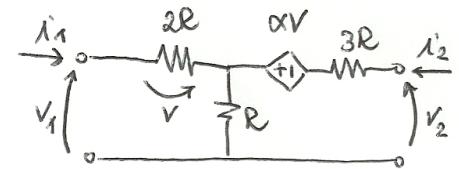


Figura 6.10: Un doppio bipolo di cui si vuole ricavare la matrice  $\mathcal{R}$ .

<sup>2</sup> Dato che se ne è calcolata la matrice  $\mathcal{G}$  si potrebbe ricavare  $\mathcal{R} = \mathcal{G}^{-1}$  assicurandosi che  $\mathcal{G}$  sia non singolare.

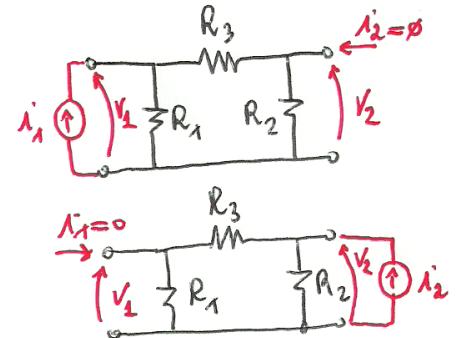


Figura 6.11: Prove semplici per il doppio bipolo in figura 6.7 di cui si vuole ricavare  $\mathcal{R}$ .

Nel caso in cui ammetta la base di definizione corrente, possiamo riscrivere le sue equazioni costitutive nella forma

$$\begin{cases} v_1 = R_{11}i_1 + R_{12}i_2 + E_1 \\ v_2 = R_{21}i_1 + R_{22}i_2 + E_2 \end{cases}, \quad (6.27)$$

che in forma matriciale possiamo riscrivere come

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{bmatrix}}_{\mathcal{R}} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \end{bmatrix}. \quad (6.28)$$

Possiamo quindi rappresentare il componente come in figura 6.12 in cui si nota la presenza di un doppio bipolo lineare definito dalla matrice  $\mathcal{R}$  e due generatori di tensione *opportunamente* connessi. Si noti infatti il verso delle tensioni  $E_1$  ed  $E_2$  scelto in modo coerente con il segno + nell'equazione 6.28.

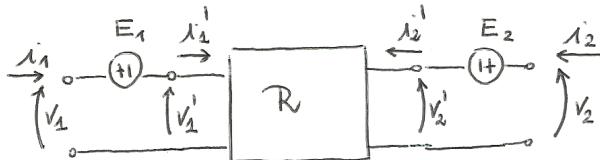


Figura 6.12: Rappresentazione di un doppio bipolo lineare affine che ammette la base corrente  $(i_1, i_2)$ .

POSSIAMO PENSARE un doppio bipolo lineare affine come una generalizzazione per i doppi bipoli del circuito equivalente di Thevenin (cfr. paragrafi 3.9 e 5.3). Il doppio bipolo descritto da  $\mathcal{R}$  equivale a  $R_{TH}$  e i due generatori  $E_1$  ed  $E_2$  sono l'analogo di  $E_{TH}$ . Dato un circuito che contiene elementi lineari e adinamici e generatori indipendenti di corrente e/o tensione, nel quale individuiamo una coppia di porte, è possibile ricavarne un modello come quello dell'equazione 6.28

- passivando tutti i generatori indipendenti (il cui effetto si *riassume* in  $E_1$  ed  $E_2$ ) per ottenere un doppio bipolo descritto da  $\mathcal{R}$  in cui parametri si ricavano come descritto per i doppi bipoli lineari;
- determinare  $E_1$  ed  $E_2$  come le tensioni a vuoto (con le porte aperte) alle porte 1 e 2, rispettivamente.

PER ESEMPLIFICARE QUANTO DETTO consideriamo il circuito in figura 6.13. Si cerca il modello equivalente alle porte 1 e 2 nella forma 6.28. Le tensioni  $v_1$  e  $v_2$  risentono dell'effetto del generatore di corrente  $A$ . Se si procede passivandolo, i generatori  $E_1$  ed  $E_2$  impongono

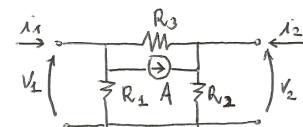


Figura 6.13: Un doppio bipolo lineare affine di cui si vuole ricavare la rappresentazione di tipo 6.28.

tensione nulla ed in questa condizione possiamo ricavare  $\mathcal{R}$ . Il circuito con le sorgenti passivate è lo stesso dell'esercizio al paragrafo 6.4.3 figura 6.7 e pertanto

$$\mathcal{R} = \begin{bmatrix} \frac{R_1(R_2 + R_3)}{R_1 + R_2 + R_3} & \frac{R_1R_2}{R_1 + R_2 + R_3} \\ \frac{R_2R_1}{R_1 + R_2 + R_3} & \frac{R_2(R_1 + R_3)}{R_1 + R_2 + R_3} \end{bmatrix}. \quad (6.29)$$

Lasciando invece aperte le porte 1 e 2, cioè  $i_1 = 0$  e  $i_2 = 0$ , dall'equazione 6.28 si deduce  $v_1 = E_1$  e  $v_2 = E_2$ . Nel caso specifico  $E_1 = -\frac{R_1R_3}{R_1+R_2+R_3}A$  e  $E_2 = \frac{R_2R_3}{R_1+R_2+R_3}A$ .

Complessivamente quindi

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{R_1(R_2 + R_3)}{R_1 + R_2 + R_3} & \frac{R_1R_2}{R_1 + R_2 + R_3} \\ \frac{R_2R_1}{R_1 + R_2 + R_3} & \frac{R_2(R_1 + R_3)}{R_1 + R_2 + R_3} \end{bmatrix}}_{\mathcal{R}} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{R_1R_3A}{R_1 + R_2 + R_3} \\ \frac{R_2R_3A}{R_1 + R_2 + R_3} \end{bmatrix}. \quad (6.30)$$

**QUALORA IL DOPPIO BIPOLO LINEARE AFFINE** ammetta la base tensione, lo possiamo pensare come un'estensione ai doppi bipoli del circuito equivalente di Norton (cfr. paragrafi 3.9 e 5.3). La sua schematizzazione è quella in figura 6.14 e corrisponde alle equazioni descrittive

$$\begin{cases} i_1 = G_{11}v_1 + G_{12}v_2 + A_1 \\ i_2 = G_{21}v_1 + G_{22}v_2 + A_2 \end{cases}, \quad (6.31)$$

che in forma matriciale possiamo riscrivere come

$$\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{bmatrix}}_{\mathcal{G}} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix}. \quad (6.32)$$

**NEL CASO IN CUI IL DOPPIO BIPOLO LINEARE AFFINE** ammetta la base mista  $(i_1, v_2)$  o  $(v_1, i_2)$ , sono possibili rappresentazioni mediante matrici  $\mathcal{H}$  ed  $\mathcal{H}'$ , rispettivamente. I due casi sono riportati in figura 6.15 e le corrispondenti equazioni costitutive in forma matriciale diventano

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{bmatrix}}_{\mathcal{H}} \begin{bmatrix} i_1 \\ v_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} E \\ A \end{bmatrix} \quad (6.33)$$

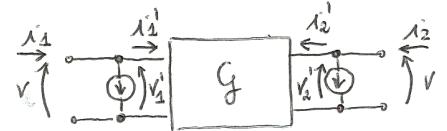


Figura 6.14: Rappresentazione di un doppio bipolo lineare affine che ammette la base tensione  $(v_1, v_2)$ .

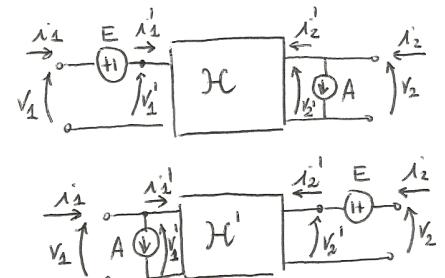


Figura 6.15: Rappresentazione di un doppio bipolo lineare affine che ammette la base mista  $(i_1, v_2)$  (in alto) e  $(v_1, i_2)$  (in basso). Si notino i versi dei generatori di corrente e di tensione che sono scelti in modo da essere coerenti con le equazioni costitutive del doppio bipolo (cfr. equazioni 6.33 e 6.34).

e

$$\begin{bmatrix} i_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} H'_{11} & H'_{12} \\ H'_{21} & H'_{22} \end{bmatrix}}_{\mathcal{H}} \begin{bmatrix} v_1 \\ i_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A \\ E \end{bmatrix} . \quad (6.34)$$

ANCHE ALLA MATRICE DI TRASMISSIONE  $\mathcal{T}$  è possibile associare un bipolo lineare affine che ha la struttura riportata in 6.16. Le sue equazioni costitutive sono

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ i_1 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{bmatrix}}_{\mathcal{H}} \begin{bmatrix} v_2 \\ -i_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} E \\ A \end{bmatrix} . \quad (6.35)$$

## 6.6 Connessione di doppi bipoli

AFFINCHÈ ABbia UN SENSO interconnettere doppi bipoli, è necessario che le porte che si collegano tra loro ammettano basi di definizione compatibili. Inoltre, le regole valgono solo per doppi bipoli propri.

### 6.6.1 Collegamento in serie

IL COLLEGAMENTO IN SERIE DI DUE DOPPI BIPOLI è schematizzato in figura 6.17.

Affinché la connessione sia possibile, i doppi bipoli devono ammettere entrambi almeno base corrente. Del resto si tratta di una generalizzazione del collegamento in serie tra bipoli (cfr. paragrafo 3.7.1) che richiede la definizione su base corrente dei componenti coinvolti.

Si verifica facilmente che, se i doppi bipoli ammettano, rispettivamente, rappresentazione mediante matrice  $\mathcal{R}_1$  ed  $\mathcal{R}_2$ , la connessione equivale ad una matrice equivalente  $\mathcal{R}_{eq} = \mathcal{R}_1 + \mathcal{R}_2$ . Infatti, facendo riferimento alla figura 6.17, possiamo scrivere

$$\begin{bmatrix} v'_1 \\ v'_2 \end{bmatrix} = \mathcal{R}_1 \begin{bmatrix} i'_1 \\ i'_2 \end{bmatrix} \quad (6.36)$$

e

$$\begin{bmatrix} v''_1 \\ v''_2 \end{bmatrix} = \mathcal{R}_2 \begin{bmatrix} i''_1 \\ i''_2 \end{bmatrix} . \quad (6.37)$$

Ma  $i_1 = i'_1 = i''_1$  e  $i_2 = i'_2 = i''_2$  da cui

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v'_1 \\ v'_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v''_1 \\ v''_2 \end{bmatrix} = (\underbrace{\mathcal{R}_1 + \mathcal{R}_2}_{\mathcal{R}_{eq}}) \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} . \quad (6.38)$$

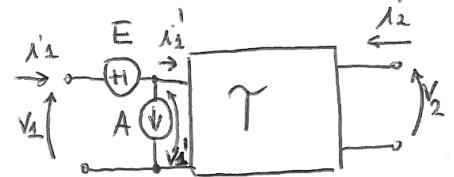


Figura 6.16: Un doppio bipolo lineare affine rappresentato con la matrice di trasmissione  $\mathcal{T}$ .

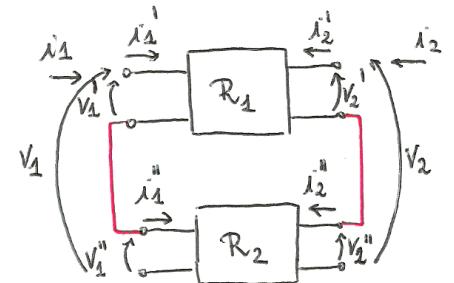


Figura 6.17: Collegamento in serie di due doppi bipoli. Da notare che  $i'_1 = i''_1$  e  $i'_2 = i''_2$ .

### 6.6.2 Collegamento in parallelo

IL COLLEGAMENTO IN PARALLELO DI DUE DOPPI BIPOLI è schematizzato in figura 6.18.

Affinché la connessione sia possibile, i doppi bipoli devono ammettere entrambi almeno base tensione. Del resto si tratta di una generalizzazione del collegamento in parallelo tra bipoli (cfr. paragrafo 3.7.3) che richiede la definizione su base tensione dei componenti coinvolti.

Si verifica facilmente che, se i doppi bipoli ammettano, rispettivamente, rappresentazione mediante matrice  $\mathcal{G}_1$  e  $\mathcal{G}_2$ , la connessione equivale ad una matrice equivalente  $\mathcal{G}_{eq} = \mathcal{G}_1 + \mathcal{G}_2$ . Infatti, facendo riferimento alla figura 6.18, possiamo scrivere

$$\begin{bmatrix} i'_1 \\ i'_2 \end{bmatrix} = \mathcal{G}_1 \begin{bmatrix} v'_1 \\ v'_2 \end{bmatrix} \quad (6.39)$$

e

$$\begin{bmatrix} i''_1 \\ i''_2 \end{bmatrix} = \mathcal{G}_2 \begin{bmatrix} v''_1 \\ v''_2 \end{bmatrix}. \quad (6.40)$$

Ma  $v_1 = v'_1 = v''_1$  e  $v_2 = v'_2 = v''_2$  da cui

$$\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i'_1 \\ i'_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} i''_1 \\ i''_2 \end{bmatrix} = (\underbrace{\mathcal{G}_1 + \mathcal{G}_2}_{\mathcal{G}_{eq}}) \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}. \quad (6.41)$$

### 6.6.3 Connessione in cascata

LA CONNESSIONE IN CASCATA (o a catena) sfrutta la rappresentazione mediante la matrice  $\mathcal{T}$ . In particolare, con riferimento alla figura 6.19, due doppi bipoli, che ammettono rispettivamente matrice  $\mathcal{T}_1$  e  $\mathcal{T}_2$ , connessi in modo tale che i morsetti della porta 2 del primo coincidano con i morsetti della porta 1 del secondo, danno origine ad un doppio bipolo che ammette una  $\mathcal{T}_{eq} = \mathcal{T}_1 \mathcal{T}_2$  tale che

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ i_1 \end{bmatrix} = \underbrace{\mathcal{T}_1 \mathcal{T}_2}_{\mathcal{T}_{eq}} \begin{bmatrix} v_2 \\ -i_2 \end{bmatrix}. \quad (6.42)$$

## 6.7 Doppii bipoli notevoli

### 6.7.1 Il trasferitore ideale di potenza

IL TRASFERITORE IDEALE DI POTENZA, talvolta chiamato anche trasformatore ideale, è un *doppio bipolo inerte*. La potenza che quindi as-

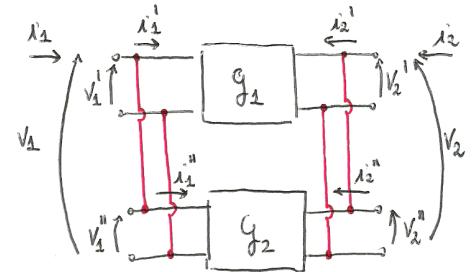


Figura 6.18: Collegamento in parallelo di due doppi bipoli. Da notare che  $v'_1 = v''_1$  e  $v'_2 = v''_2$ .

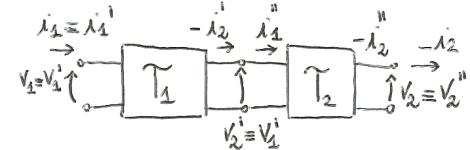


Figura 6.19: Collegamento a catena di due doppi bipoli. Da notare che  $-i'_2 = i''_1$ .

sorbe istante per istante è sempre nulla, in qualunque condizione di funzionamento. In formule possiamo scrivere che  $p_a(t) = i_1(t)v_1(t) + i_2(t)v_2(t) \equiv 0$  per ogni  $t$ . Dato che, essendo inerte, di fatto *trasferisce* dalla porta 1 alla porta 2 la potenza  $i_1(t)v_1(t) = -i_2(t)v_2(t)$ , proviamo a ricavarne le equazioni costitutive usando la rappresentazione mediante matrice di trasmissione  $\mathcal{T}$ :

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ i_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_2 \\ -i_2 \end{bmatrix} \quad (6.43)$$

Così facendo possiamo scrivere

$$\begin{aligned} p_a(t) &= i_1(t)v_1(t) + i_2(t)v_2(t) \\ &= (T_{21}v_2(t) - T_{22}i_2(t))(T_{11}v_2(t) - T_{12}i_2(t)) + i_2(t)v_2(t) \\ &= T_{11}T_{21}v(t)_2^2 - (T_{11}T_{22} + T_{12}T_{21})v_2(t)i_2(t) + T_{12}T_{22}i(t)_2^2 + i_2(t)v_2(t) \\ &= T_{11}T_{21}v(t)_2^2 + (1 - T_{11}T_{22} + T_{12}T_{21})i_2(t)v_2(t) + T_{12}T_{22}i(t)_2^2 \end{aligned} \quad (6.44)$$

e, affinchè  $p_a(t)$  sia nulla per ogni  $t$  è necessario imporre

$$\begin{cases} T_{11}T_{21} = 0 \\ 1 - T_{11}T_{22} + T_{12}T_{21} = 0 \\ T_{12}T_{22} = 0 \end{cases} \quad (6.45)$$

Il sistema 6.45 è non lineare, in 3 equazioni e 4 incognite. Non stupisce quindi che ammetta più di una soluzione. Sono infatti soluzioni ammissibili

$$\begin{cases} T_{11} = 0 \\ T_{12}T_{21} = 1 \\ T_{22} = 0 \end{cases}, \quad (6.46)$$

oppure

$$\begin{cases} T_{12} = 0 \\ T_{21} = 0 \\ T_{12}T_{22} = 1 \end{cases}. \quad (6.47)$$

Entrambe le soluzioni rappresentano un insieme infinito di possibilità e, tra le due, scegliamo la 6.47 che porta ad avere un componente *reciproco*<sup>3</sup>. Una matrice  $\mathcal{T}$  che soddisfa la 6.47 è

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ i_1 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} n & 0 \\ 0 & \frac{1}{n} \end{bmatrix}}_{\mathcal{T}} \begin{bmatrix} v_2 \\ -i_2 \end{bmatrix} \quad (6.48)$$

che equivale alle equazioni costitutive

$$\begin{cases} v_1 = nv_2 \\ i_1 = -\frac{1}{n}i_2 \end{cases}. \quad (6.49)$$

<sup>3</sup> Il concetto di *reciprocità* non verrà affrontato in questo corso. Lo studente interessato può fare riferimento alla letteratura inerente la teoria dei circuiti lineari per approfondire l'argomento.

Il parametro  $n$  è il *rapporto di trasformazione* del trasferitore ideale di potenza il cui simbolo è rappresentato in figura 6.20.

**IN TERMINI DI RAPPRESENTAZIONI CARDINALI**, il trasferitore ideale di potenza ammette la rappresentazione mediante matrici  $\mathcal{H}$  ed  $\mathcal{H}'$  dato che, a partire dalla 6.49, è facile convincersi che ammette solo le basi miste  $(i_1, v_2)$  e  $(v_1, i_2)$ .

**LA SINTESI DEL TRASFERITORE IDEALE DI POTENZA** mediante generatori pilotati è riportata in figura 6.21. Si verifica facilmente che le due soluzioni proposte corrispondono alle due basi miste ammesse dal doppio bipolo e che equivalgono entrambe alle equazioni costitutive 6.49.

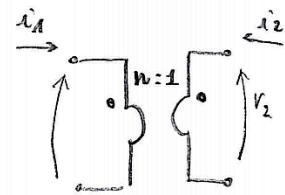


Figura 6.20: Il trasferitore ideale di potenza. Si noti la presenza dei due "pallini" alle porte del doppio bipolo. La posizione del pallino indica, alla porta corrispondente, il morsetto al quale è riferita la punta della freccia che indica la tensione di porta.

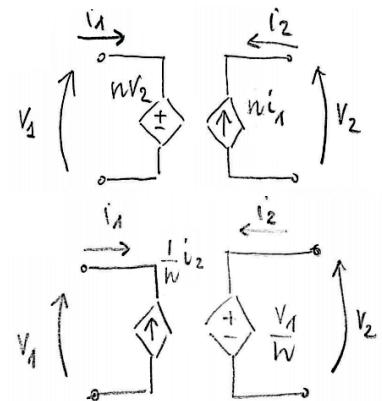


Figura 6.21: Il trasferitore ideale di potenza sintetizzato mediante generatori pilotati.