Integrali impropri o generalizzati

La definizione di integrale che e' stata data all'inizio della trattazione non richiede alcuna particolare proprieta' della $f(x)$ se non quella della esistenza del limite delle somme integrali. Abbiamo introdotto il concetto di integrale (secondo Cauchy) considerando funzioni definite in un intervallo limitato. La verifica dell' esistenza del limite ci ha condotto a considerare funzioni continue o limitate con monotonia.

Ora intendiamo estendere il concetto di integrale a funzioni piu' generali ovvero che non sono continue o limitate anche in intervalli di integrazione illimitati.

Questioni di questo tipo anche suggerite da problemi pratici rappresentano un naturale completamento della teoria sviluppata. Non daremo una nuova definizione di integrale. Resteremo nell'ambito di quanto gia' costruito solo lo coadiuveremo con il concetto di limite. A titolo di informazione altri tipi di integrale sono stati definiti per trattare funzioni non continue. Citiamo uno per tutti " l'integrale secondo Lebesgue ". Ci fermiamo qui.

Riprendiamo la nostra teoria. Come e' nostra consuetudine presentiamo con qualche esempio il metodo e le difficolta' del problema con qualche semplice esempio.

1) **Integrale di funzioni continue a tratti o generalmente continue**

Consideriamo una funzione definita in un intervallo limitato $[a, b]$ ivi limitata e continua tranne in un numero finito di punti. Supponiamo che tali punti siano di discontinuita' di I specie e che indichiamo $c_1, c_2, ..., c_n$.

Dunque la funzione puo' essere considerata continua negli intervalli $[a, c_1]$, $[c_1, c_2]$,...,$[c_{n-1}, c_n]$ (discontinuita' di terza specie in ogni sottointervallo). Funzioni di questo tipo sono dette continue a tratti o generalmente continue. In ogni "tratto" la funzione e' continua quindi integrabile. Ricordandoci della proprieta' additiva dell'integrale rispetto all'intervallo di integrazione possiamo dare la seguente definizione di integrale definito di una funzione continua a tratti:

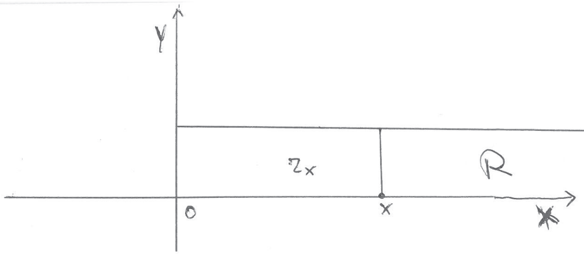
$$\int_a^b f(x)dx := \sum_{i=0}^{n} \int_{c_i}^{c_{i+1}} f(x)dx.$$

ove abbiamo posto $a = c_0$ e $b = c_{n+1}$.

Osserviamo che se la funzione $f(x)$ e' continua in $[a, b]$ ritroviamo il vecchio integrale. Inoltre le proprieta' si conservano. Per questo integrale abbiamo conservato lo stesso simbolo adottato per le funzioni continue. Li distingueremo dal tipo di funzioni su cui operiano.

2) **Funzioni continue su intervallo illimitato**

Partiamo dal seguente semplice problema con chiara evidenza geometrica.



1) Sia $y = f(x) = c > 0$ una costante e cerchiamo l' area del rettangolo che ha come altezza c e come base l'intervallo illimitato $[0, +\infty)$.

Su ogni intervallo $[0, x] \subset [0, +\infty)$ con $x \in [0, +\infty)$ finito, la funzione e' costante e quindi e' integrabile ovvero si ha

$$\int_0^x cdx = c(x-a)$$

dal teorema sulle funzioni integrabili. Geometricamente abbiamo calcolato l'area del rettangolo di base $[0, x]$ ed altezza c.

Ogni funzione che e' integrabile su sottointervalli di $[0, +\infty)$ diremo che e' localmente integrabile.

Ebbene con gli strumenti che abbiamo a disposizione, per calcolare l'area del rettangolo di altezza c e base $[0, +\infty)$, appare naturale usare il processo di limite ovvero calcolare

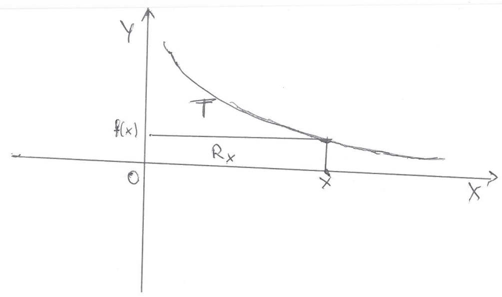
$$\lim_{x\to+\infty} \int_0^x cdx.$$

Risolviamo il problema di aree di figure piane "illimitate" con un processo di limite su figure piane limitate. Questi strumenti fanno parte della teoria che costruiremo. C'e' un inconveniente nel nostro esempio:

$$\lim_{x\to+\infty} \int_0^x cdx = \lim_{x\to+\infty} cx = +\infty.$$

Di questo risultato non sappiamo cosa farcene, integrali di valore infinito sono impraticabili non sappiamo governali. Questo non ci permette di costruire una teoria come abbiamo fatto per l'integrale secondo Cauchy o Riemann. Per costruire una teoria, come abbiamo gia' visto, occorre che i risultati siano finiti. Quindi le funzioni costanti negli intervalli illimitati non sono integrabili.

2) Consideriamo una funzione $y = f(x) > 0$ definita in $[0, +\infty)$ il cui grafico e' quello in figura.



E' monotona decrescente con $lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$. Questo ci evita di avere l'effetto dell'esempio 1). Vogliamo calcolare l'area A_T del trapeziode illimitato sotteso dalla funzione. Sia x un punto positivo. $f(x)$ e'il minimo valore di f nell'intervallo $[0, x]$. Appare chiaro che l'area del trapezioide A_T e' maggiore dell'area A_R del rettangolo di altezza $f(x)$ e base $[0, x]$. Allora abbiamo

$$* \qquad \int_0^x f(x)dx \geq f(x)x.$$

Effettuando il limite per $x \to +\infty$ nella (*) otteniamo

$$\lim_{x\to+\infty} \int_0^x f(x)dx \geq lim_{x\to\infty} x f(x).$$

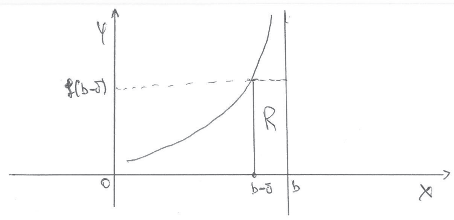
Una condizione necessaria per avere il limite finito e' che sia finito

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)x.$$

Siamo in presenza della forma di indecisione $0 \cdot \infty$. Per avere un limite finito la funzione $f(x)$ deve tendere a zero in modo opportuno. Conclusione per trattare l'integrale su intervalli illimitati dobbiamo richidere che

$f(x)$ **sia un infinitesimo, temporaneamente, di ordine superiore o uguale al primo per** x **tendente all'infinito.**

3) Integrale di funzione illimitata in intervalli limitati.



Si osservi il grafico. La situazione ora e' la stessa dell'esempio 2) solo con parti invertite delle grandezze.

$$AreaA_T = lim_{\delta \to 0^+} \int_0^{b-\delta} f(x)dx \geq lim_{\delta \to 0^+} f(b-\delta)\delta.$$

Anche in questo caso troviamo una forma di indecisione $0 \cdot \infty$. Ora e' la funzione che tende all'infinito. Affinche' lo forma di indecisione dia un numero la funzione deve essere un infinito di ordine inferiore ad $\frac{1}{\delta}$

In queste richieste risiede la sostanziale difficolta' della generalizzazione dell'integrale di Cauchy o di Riemanni. Osserviamo le espressioni ottenute negli esempi contengono l'ampiezza x dell' intervallo approsimante che tende all'infinito. Per avere un integrale finito dobbiamo operare sulla funzione. Nel primo caso la funzione non aiuta; $f(x) = c$ ha limite c, un numero diverso dallo zero. In questa situazione non si puo' fare niente.

La situazione e' la stessa anche quando la funzione integranda tende ad un valore finito diverso dallo zero. Da queste semplici osservazioni concludiamo che per parlare di integrali generalizzati su intervalli illimitati occorre che la funzione integranda tenda a zero per $x \to \infty$ e dato che deve competere con x bisogna che tenda a zero abbastanza rapidamente. Questo vale, con parti invertite, per intervalli limitati e funzioni illimitate

A conclusione di questi esempi per trattare con integrali generalizzati su intervalli illimitati o no dobbiamo trattare con funzioni con le seguenti proprieta'

1. funzioni localmente integrabili;
2. funzioni tendenti a zero con opportuna rapidita' per $x \to \infty$ o tendenti all'infinito per alcuni punti con opportuna rapidita'.

L integrale che definiremo sara' detto improprio o generalizzato.

• Intevalli limitati

Definizione di integrale improprio su intervallo limitato.

1) Sia $y = f(x)$ una funzione definita in $[a, b)$ con b punto singolare (la funzione e' "illimitata" in b) e sia localmente integrabile in tale intervallo (in b la funzione non e' definita ma e' integrabile in ogni sottointervallo $[a, c]$ con $c < b$). Allora esiste l'integrale con $\delta > 0$

$$I(\delta) = \int_a^{b-\delta} f(x)dx.$$

Definizione 1-*Se esiste finito il limite*

$$\lim_{\delta\to 0^+} I(\delta) = \lim_{\delta\to 0^+} \int_a^{b-\delta} f(x)dx.$$

lo chiameremo **integrale improprio o generalizzato** *di $f(x)$ in $[a,b)$ e lo indicheremo ancora*

$$\int_a^b f(x)dx.$$

La funzione e' detta integrabile in senso improprio o generalizzato in $[a,b)$.

Il simbolo adottato e' lo stesso di quello dell'integrale di funzioni continue. Ci accorgiamo che e' un integrale improprio dal fatto che la funzione non e' definita in b: in breve

$$\lim_{\delta\to 0^+} \int_a^{b-\delta} f(x)dx := \int_a^b f(x)dx.$$

Esempio 1. Calcolare l'integrale improprio

$$\int_0^1 \frac{1}{1-x}dx.$$

Dobbiamo calcolare il limite con $\delta > 0$

$$\lim_{\delta\to 0^+} \int_0^{1-\delta} \frac{1}{x-1}dx$$

.

Ora

$$\int_0^{1-\delta} \frac{1}{1-x}dx = -log(1-x)|_0^{1-\delta} = -log(\delta) \to +\infty \ se \ \delta \to 0.$$

L'integrale diverge.
La funzione $\frac{1}{1-x}$ non e' integrabile in $[0,1)$.

1) Calcolare l'integrale improprio

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x}}dx.$$

E' un integrale improprio perche' la funzione integranda non e' definita in $x=1$. Allora calcoliamo l'integrale e dopo calcoliamo il limite rispetto a δ del risultato.

$$I(\delta) = \int_0^{1-\delta} \frac{1}{\sqrt{1-x}}dx = -2\sqrt{(1-x)}|_0^{1-\delta} = -2(\sqrt{\delta}-1)$$

allora

$$\lim_{\delta\to 0^+} I(\delta) = \lim_{\delta\to 0^+} (-2(\sqrt{\delta}-1)) = 2.$$

l'integrale converge.

3) Calcolare l'integrale improprio

$$\int_0^1 \frac{1}{(1-x)^2}dx.$$

Seguiamo il precedente esempio e calcoliamo

$$\lim_{\delta\to 0^+} I(\delta) = \lim_{\delta\to 0^+} \int_0^{1-\delta} \frac{1}{(1-x)^2}dx = \lim_{\delta\to 0^+} \frac{1}{(1-x)}|_0^{1-\delta} = \lim_{\delta\to 0^+} \frac{1}{\delta} - 1 = +\infty).$$

—

La funzione $y = \frac{1}{(1-x)^2}$ non e' integrabile sull'intervallo $[0,1)$. Prevedibile, e' un infinito di ordine maggiore di uno per x tendente a 1.

Commento: Questi esempi ci dicono che la funzione nei punti singolari al finito puo' divergere all'infinito ma non eccedere. L'integrazione tende a portare i denominatori al numeratore ma in modo limitato; aumenta di una sola unita' l'esponente delle potenze dunque riesce a gestire bene le potenze x^α $\alpha = -1+\epsilon$ con $\epsilon > 0$. Con $\alpha \le -1$ l'integrale e' infinito, diverge.

Riepologo:

$$\int_a^b \frac{1}{(b-x)^\alpha}dx = \begin{cases} \frac{1}{\alpha-1}(b-a)^{-\alpha+1}) \ se \ \alpha < 1; \\ +\infty \ se \ \alpha \ge 1. \end{cases}$$

2) **Consideriamo ora funzioni non limitate nell'estremo a.**

Sia $y = f(x)$ una funzione definita in $(a,b]$ e sia localmente integrabile in tale intervallo (in a la funzione non e' definita ma e' integrabile in ogni sottointervallo $[c,b]$ con $c > a$. Allora esiste l'integrale

$$I(\delta) = \int_{a+\delta}^b f(x)dx.$$

$\delta > 0$.

Definizione 2- *Se esiste finito il limite*

$$\lim_{\delta\to 0^+} I(\delta) = \lim_{\delta\to 0^+} \int_{a+\delta}^b f(x)dx.$$

lo chiameremo **integrale improprio o generalizzato** *di $f(x)$ in $(a,b]$ e lo indicheremo ancora*

$$\int_a^b f(x)dx$$

e la funzione e' detta **integrabile in senso improprio o generalizzato in** $(a,b]$.

In breve

$$\lim_{\delta\to 0} \int_{a+\delta}^b f(x)dx := \int_a^b f(x)dx$$

3) **Consideriamo funzioni non definite in un un punto c interno all'intervallo $[a,b]$.**

In questo cansidereremo la integrabilita' della funzione in $[a,c)$ ed in $(c,b]$.

Detta $y = f(x)$ una tale funzione integrabile in $[a, c-\delta]$ ed in $[c+\delta, b]$.

Definizione 3- *Diremo che $y = f(x)$ e' integrabile in senso generalizzato in $[a,b]$ se esistono finiti i limiti*

$$\lim_{\delta\to 0^+} \int_{c+\delta}^b f(x)dx, \quad e \quad \lim_{\delta\to 0^+} \int_a^{c-\delta} f(x)dx.$$

e poniamo

$$\int_a^b f(x)dx := \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

4)**Caso in cui la funzione non e' definita in a ed in b.**

Sia $y = f(x)$ definita in (a, b) ed integrabile in ogni sottointervallo $[c, d]$ con $c > a$ e $d < d$. Sia p un punto interno ad (a, b)

Definizione 4 - Se la funzione e' integrabile in senso improprio in $(a, p]$ ed in $[p, b)$ diremo che $f(x)$ e' integrabile in senso improprio in (a, b) e si pone

$$\int_a^b f(x)dx := \int_a^p f(x)dx + \int_p^b f(x)dx.$$

Si fa notare che i due integrali o meglio i loro limiti sono calcolati uno indipendentemente dall'altro. Ognuno ha una storia propria.

Se la funzione non e' definita in un numero finiti di punti $x_1 < x_2 < x_3 < ... < x_n$ in $[a, b]$ e' di tutta evidenza che considereremo la integrabilita' impropria in ogni intervallo $[a, x_1)$, (x_1, x_2), ...,$(x_n, b]$. Se la funzione e' integrabile in tutti questi intervalli allora diremo che e' integrabile in $[a, b]$ e si pone

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=0}^{n+1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx.$$

Si e' posto $a = x_1$ e $b = x_{n+1}$.

Esercizio: valutare la integrabilita' di $y = x^{-\alpha}$ in $(0, 1]$ con $\alpha > 0$.

Confrontare con gli esercizi fatti sopra.

• **Integrabilita' in intervalli illimitati**

Definizione 5 - *Sia $y = f(x)$ definita in $[a, +\infty)$ e localmente integrabile ovvero in ogni intervallo limitato $[a, b]$ la funzione e' integrabile con b finito e maggiore di a.*

Diremo che $y = f(x)$ e' integrabile in senso improprio in $[a, +\infty)$ se esiste finito

$$\lim_{b\to+\infty} \int_a^b f(x)dx$$

e si scrive

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx, := \lim_{b\to+\infty} \int_a^b f(x)dx.$$

Definizione 6 - *Sia $y = f(x)$ definita in $(-\infty, a]$ e localmente integrabile ovvero in ogni intervallo limitato $[c, a]$ la funzione e' integrabile con $c < a$ finito.*

Diremo che $y = f(x)$ e' integrabile in senso improprio in $(-\infty, a]$ se esiste finito

$$\lim_{c\to-\infty} \int_c^a f(x)dx$$

e si scrive

$$\int_{-\infty}^a f(x)dx := \lim_{c\to-\infty} \int_c^a f(x)dx.$$

Definizione 7 - *Sia $y = f(x)$ definita in $(-\infty, +\infty)$ e localmente integrabile ovvero in ogni intervallo limitato $[c, d]$ la funzione e' integrabile.*

Diremo che $y = f(x)$ e' integrabile in senso improprio in $(-\infty, +\infty)$ se preso un punto a finito esistono finiti

$$\lim_{c\to-\infty} \int_c^a f(x)dx \text{ e } \lim_{d\to+\infty} \int_a^d f(x)dx$$

e si scrive

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx := \int_{-\infty}^{a} f(x)dx + \int_{a}^{+\infty} f(x)dx.$$

Nota: Nelle definizioni, in generale, abbiamo sempre considerato funzioni integrabili, non c'e' bisogno della loro continuita'. Molte proprieta' dell'integrale che abbiamo provato per le funzioni integrabili secondo Cauchy e quando e' necessario anche continue valgono per gli integrali generalizzati: la proprieta' di omogeneita' (la commutativita' fra le costanti e l'operazione di integrazione);la proprieta' additiva rispetto alle funzioni integrande e rispetto all'intervallo di integrazione; per intervalli limitati, se la funzione e' localmente continua vale il teorema della media ed il teorema fondamentale del calcolo integrale. Sorge invece il problema fra l'integrabilita' di $f(x)$ e quella di $|f(x)|$ che discuteremo dopo.

Ad esempio sia $y = f(x)$ una funzione continua in $[a, b)$ ovvero la funzione non e' definita in b. Se scegliamo $x \in [a, c]$ con $c < b$, in $[a, c]$ la funzione $y = f(x)$ e' continua, per il teorema fondamentale del calcolo integrale esiste una funzione $F(x)$ della forma

$$F(x) = F(a) + \int_{a}^{x} f(t)dt.$$

primitiva di $f(x)$ contimua in $[a, c]$. Se $f(x)$ e' integrabile in senso improprio allora esiste

$$\lim_{x\to b^-} F(x) = F(a) + \lim_{x\to b^-} \int_{a}^{x} f(t)dt = F(a) + \int_{a}^{b} f(t)dt$$

$F(x)$ e' continua dalla sinistra nel punto b o piu' precisamente ha una discontinuita' eliminabile dalla sinistra in b.

Analogamente, se $y = f(x)$ e' continua in $(a, b]$ allora $F(x) = F(b) + \int_b^x f(t)dt$. Se $f(x)$ e' integrabile in senso generalizzato allora $F(x)$ e' continua in $[a, b]$ e si ha

$$F(a) = F(b) + \int_{b}^{a} f(t)dt = F(b) - \int_{a}^{b} f(t)dt.$$

Ritroviamo quanto abbiamo ottenuto con l'integrale di Cauchy.

Se il punto singolare c e' interno ad $[a, b]$ dobbiamo considerare la restrizione di $f(x)$ ai sottointervalli $[a, c)$ e $(c, b]$ se le restrizioni sono integrabili in senso generalizzato allora esiste la funzione primitiva $F(x)$ in $[a, b]$ con discontinuita' di prima specie in c.

Anche il teorema della media puo' essere formulato per gli integrali impropri.

Sia $y = f(x)$ una funzione definita e continua in $[a, b)$ ed ivi integrabile in senso improprio. Sia c in $[a, b)$ con $c < b$ allora il teorema della media per la funzione continua da'

$$\int_{a}^{c} f(x)dx = (c - a)f(\alpha(c)).$$

con $\alpha(c)$ un punto appartenente all'intervallo $[a, c]$.

Scriviamo

$$\alpha(c) = \frac{\int_a^c f(x)dx}{c - a}.$$

Il rapporto a secondo membro ammette limite per $c \to b$ allora

$$\lim_{c\to b} f(\alpha(c)) = lim_{c\to b}\frac{\int_a^c f(x)dx}{c - a} = \frac{\int_a^b f(x)dx}{b - a}$$

Quindi $f(\alpha(c))$ ammette limite finito e lo indichiamo $\bar{f}$ in generale e' punto di accumulazione dell'insieme immagine di $f(x)$ ed essendo finito appartiene all'insieme immagine quindi viene assunto dalla funzione ovvero esiste un punto $\alpha \in [a, b)$ tale che $f(\alpha) = \bar{f}$. Si osserva che $Imf = \cup_c Imf_{[a,c]}$.

Esempio: Valutare

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{(x)^\alpha} dx.$$

Calcoliamo

$$\int_1^b \frac{1}{(x)^\alpha} dx = \frac{1}{-\alpha+1}((b)^{-\alpha+1} - 1) - 1) \; (per \; b \to +\infty) = \begin{cases} \frac{1}{-\alpha+1}(-1 \; se \; \alpha > 1; \\ \qquad +\infty \; se \; \alpha < 1. \end{cases}$$

Notiamo che per il pumto $+\infty$ a differenza dello 0 l' integrale e' convergente se dopo l'integrazione sopravvive la frazione e questo porta alle scelte fatte su α.

Criteri di convergenza

In tutti gli esempi precedenti nel verificare se una funzione sia integrabile o no in senso improprio abbiamo applicato la definizione e quindi calcolato il limite; in tal modo nei casi in cui esiste l'integrale improprio riusciamo a calcolarlo. Non sempre e' agevole il calcolo del limite. Prima del calcolo sarebbe opportuno avere qualche certezza della convergenza dell'integrale.

Abbiamo gia' considerato questo problema per l'esistenza del limite di funzioni ed in particolare per le successioni. La monotonia e' una valido strumento per valutare l'esistenza del limite senza calcolarlo.

Se $y = f(x)$ e' positiva in $[a, b)$ o in $(a, b]$ o in (a, b) o in $[a, +\infty)$, etc. e' possibile, dai teoremi di monotonia, avere informazioni sul carattere del limite. Infatti sia $x \in [a, b)$ ed $f(x)$ positiva allora

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

e' una funzione monotona crescente in $[a, b)$. Allora esiste

$$\lim_{x \to b^-} F(x) = sup_{x \in [a,b)} \int_a^x f(t)dt.$$

Sappiamo che il limite esiste. Non sappiamo se sia finito o no. Di certo se $F(x)$ fosse limitata il limite sarebbe finito. Ma questa condizione e' troppo forte. Indeboliamola nel seguente modo. Confrontiamo $f(x)$ con un'altra funzione $g(x)$ di cui abbiamo molte informazioni . Usiamo $g(x)$ come una funzione test o di prova. Ebbene abbiamo il seguente criterio detto del confronto

Teorema (criterio del confronto)- *Siano $f(x)$ e $g(x)$ due funzioni continue e non negative in un intervallo $[a, b)$ $((a, b], [a, +\infty), ...)$. Supponiamo che esista una costante $A > 0$ tale che $f(x) \leq Ag(x)$ nell' intervallo $[a, b)$ $((a, b]...)$, allora*

1. *g integrabile in senso improprio in $[a, b) \Rightarrow f$ integrabile in senso improprio in $[a, b)$*
2. *f non integrabile in senso improprio in $[a, b) \Rightarrow g$ non integrabile in senso improprio in $[a, b)$.*

Il teorema e' una semplice conseguenza dei teoremi di monotonia osservando che

$$\lim_{x \to b^-} F(x) = sup_{x \in [a,b)} \int_a^x f(t)dt \leq A sup_{x \in [a,b)} \int_a^x g(x)dx = L.$$

Analogo teorema vale per funzioni negative.

Possiamo rendere piu' generale il criterio del confronto indebolendo le ipotesi . Infatti che una funzione sia integrabile o no dipende esclusivamente dal comportamento di questa vicino al punto singolare o all' infinito. Questa osservazione porta a considerare il comportamento asintotico delle funzioni.

Allora abbiamo

Teorema (criterio del comportamento asintotico) -*Siano $f(x)$ e $g(x)$ due funzioni continue e non negative in un intervallo $[a,b)$ $([a,b),[a,+\infty),...)$ e supponiamo che esista*

$$\lim_{x\to b^-}\frac{f(x)}{g(x)}=l\ (\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)}{g(x)}=l,\ \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=l, etc.).$$

Allora

1. *se $l=0$ si ha*
   g integrabile in senso improprio $\Rightarrow$ f integrabile in senso improprio,
2. *se $l=\infty$ si ha*
   g non integrabile in senso improprio $\Rightarrow$ f non integrabile in senso improprio,
3. *se $l\in(0,+\infty)$ si ha g integrabile in senso improprio $\Leftrightarrow$ f integrabile in senso improprio.*

La 3) afferma che le funzioni sono asintoticamente equivalenti e da' una condizione molto forte.

Dimostriamo solo il terzo caso . Se il limite vale $l>0$ dal teorema della permanenza del segno esiste un intorno sinistro di b, $(b-\delta,b)$, in cui vale

$$\frac{l}{2}\le\frac{f(x)}{g(x)}\le\frac{3l}{2}.$$

Dal criterio del confronto deduciamo che f e' integrabile in $(b-\delta;b)$ se e solo se g e' integrabile in $(b-\delta;b)$. Inoltre essendo le funzioni f e g continue (integrabili) in $[a,b-\delta]$ esse sono integrabili in tale intervallo da cui abbiamo la tesi.

Nota: Dalle considerazioni sul comportamento asintotico non occorre che le funzioni abbiamo lo stesso segno dappertutto ma solo localmente nei punti singolari.

Certo non tutte le funzioni hanno lo stesso segno nel loro dominio. Cerchiamo allora di estendere i risultati di monotonia a funzioni che cambiano segno. A tal fine introduciamo una classe di funzioni a cui i risultati di monotonia possono essere applicati. Introduciamo la classe delle funzioni dette assolutamente integrabili o sommabili.

Come al solito prendiamo come riferimento l'intervallo $[a,b)$. Con le consuete modifiche si estendono i risultati agli altri intervalli considerati sopra.

- **Assoluta integrabilita'**

Definizione - *Sia $y=f(x)$ una funzione definita e continua in $[a,b)$ con b punto singolare. Diremo che f e' assolutamente integrabile o sommabile in $[a,b)$ se $|f|$ e' integrabile.*

Valutiamo ora quali riflessi ha questa proprieta' sulla funzione f. Consideriamo la parte positiva e negativa della funzione, ovvero consideriamo le restrizioni di f agli insiemi ove la funzione ha valori positivi e valori negativi.

$$f_+(x)=\begin{cases} f(x)\ se\ f(x)\ge 0;\\ 0\ se\ f(x)<0.\end{cases}$$

e

$$f_-(x)=\begin{cases} -f(x)\ se\ f(x)\le 0;\\ 0\ se\ f(x)>0.\end{cases}$$

Si ha: $f_+(x)$ e $f_-(x)$ sono maggiori od uguali a zero per ogni $x\in[a,b)$, inoltre
$f_+(x)+f_-(x)=|f(x)|$; $f_+(x)-f_-(x)=f(x)$ e per ogni $x\in[a,b)$ si ha $f_+(x)\le|f(x)|$ e $f_-(x)\le|f(x)|$.
Trattandosi di funzioni positive applichiamo il teorema del confronto ed abbiamo che:

1. se $|f(x)|$ e' integrabile su $[a,b)$, allora anche $f_+(x)$ e $f_-(x)$ sono integrabili su $[a,b)$.

2. se le funzioni non negative $f_+(x)$ e $f_-(x)$ sono integrabili, da $f_+(x) + f_(x) = |f(x)|$ e dalla proprieta' additiva degli integrali impropri rispetto alla somma delle funzioni segue che anche $|f(x)|$ e' integrabile su $[a, b)$.

Di conseguenza abbiamo il seguente

Teorema - *Condizione necessaria e sufficiente affinche' $|f(x)|$ sia integrabile su $[a, b)$ e' che $f_+(x)$ e $f_-(x)$ siano integrabili.*

Corollario - Se $f(x)$ e' assolutamente integrabile in $[a, b)$ allora $f(x)$ e' integrabile in senso improprio in $[a, b)$.

Il corollario e' conseguenza della relazione $f(x) = f_+(x) - f_-(x)$.

Va da se' che se una funzione e' integrabile in senso improprio non e' detto che sia assolutamente integrabile. Anzi non e' stato mai detto che se una somma di funzioni e' integrabile allora gli addendi sono integrabili.

In se' questi teoremi dicono poco. Ma se abbiamo gia' conoscenza del comportamento di alcune funzioni " test " allora possiamo apprezzare la loro utilita'.

Esempi:

Sia $f(x) = \frac{1}{(b-x)^\alpha}$ per $\alpha \neq 1$.

Calcoliamo

$$\int_0^b \frac{1}{(b-x)^\alpha} dx$$

Calcoliamo l'integrale approssimante con $0 < t < b$

$$\int_0^t \frac{1}{(b-x)^\alpha} dx = \frac{-1}{1-\alpha}(b-x)^{1-\alpha}|_0^t = \frac{-1}{1-\alpha}((b-t)^{1-\alpha} - b^{1-\alpha})$$

da cui

$$\lim_{t \to b^-} \int_0^t \frac{1}{(b-x)^\alpha} dx = \begin{cases} +\infty \ se \ \alpha > 1; \\ \frac{b^{1-\alpha}}{1-\alpha} \ se \ \alpha < 1. \end{cases}$$

Per $\alpha = 1$ si ha

$$\lim_{t \to b^-} \int_0^t \frac{1}{b-x} dx = \lim_{t \to b^-} (logb - log(b-t)) = +\infty$$

l'integrale e' divergente.

2) Calcolare

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx$$

Procedendo come prima

$$\int_1^t \frac{1}{x^\alpha} dx = \frac{1}{1-\alpha}[t^{1-\alpha} - 1]$$

da cui

$$\lim_{t \to +\infty} \int_0^t \frac{1}{(x)^\alpha} dx = \begin{cases} +\infty \ se \ \alpha < 1; \\ \frac{1}{1-\alpha} \ se \ \alpha > 1. \end{cases}$$

Allora possiamo affermare dal criterio del confronto che per f continua e positiva si ha

1. se esiste $\alpha > 0$ tale che $\lim_{x \to b^-} f(x)(b-x)^\alpha = l > 0$, allora se $\alpha \geq 1$ l'integrale
$$\int_a^b f(x)dx$$
e' divergente; se $\alpha < 1$ l'integrale converge;
2. se esiste $\alpha < 1$ tale $\lim_{x \to b^-} f(x)(b-x)^\alpha = 0$ allora l'integrale converge;
3. se $\lim_{x \to b^-} f(x)(b-x) = +\infty$ l'integrale diverge.

Dalla seconda, se $f(x)$ e' un infinito, per la convergenza dell'integrale deve essere di ordine < 1 rispetto all'infinito campione $\frac{1}{b-x}$.

Ad esempio
$$\int_{-1/2}^{0} \frac{1}{xlog(-x)}dx = \lim_{t \to 0^-} \int_{-1/2}^{t} \frac{1}{xlog(-x)}dx = \lim_{t \to 0^-} (log|log(-x)||_{-1/2}^{t} = +\infty$$

Questo dice che il logaritmo e' di nessuno aiuto per la convergenza in quanto e' infinito di oerdine inferiore a qualsias potenza x^k. Nel caso di integrale su un intervallo illimitato si ha per f continua e positiva

1. se esiste $\alpha > 0$ tale $\lim_{x \to +\infty} f(x)x^\alpha = l > 0$, allora se $\alpha \leq 1$ l'integrale
$$\int_a^{+\infty} f(x)dx$$
e' divergente; se $\alpha > 1$ l'integrale converge;
2. se esiste $\alpha > 1$ tale $\lim_{x \to +\infty} f(x)x^\alpha = 0$ allora l'integrale converge;
3. se $\lim_{x \to +\infty} f(x)x = +\infty$ allora l'integrale diverge.

Allora per funzioni positive e punti singolari finiti come a , b si considerano infiniti campione
$$\frac{1}{x-a}, \frac{1}{b-x}$$
e per ∞ si usa l'infinitesimo campione
$$\frac{1}{x}.$$
Quindi con b punto singolare
$$\lim_{x \to b^-} \frac{f(x)}{\frac{1}{(b-x)^\alpha}} = \begin{cases} 0 & se\ \alpha < 1\ allora\ \int_a^b f(x)dx\ converge; \\ \infty & se\ \alpha \geq 1\ allora\ \int_a^b f(x)dx\ diverge; \\ l \neq 0 & allora\ \int_a^b f(x)dx\ coverge\ se\ e\ solo\ se\ \alpha < 1. \end{cases}$$
Per il punto a
$$\lim_{x \to a^+} \frac{f(x)}{\frac{1}{(x-a)^\alpha}} = \begin{cases} 0 & se\ \alpha < 1\ allora\ \int_a^b f(x)dx\ coverge; \\ \infty & se\ \alpha \geq 1\ allora\ \int_a^b f(x)dx\ diverge; \\ l \neq 0 & allora\ \int_a^b f(x)dx\ converge\ se\ e\ solo\ se\ \alpha < 1. \end{cases}$$

Per punto infinito

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x^\alpha}=\begin{cases} 0 & se\ \alpha>1\ allora\ \int_a^{+\infty} f(x)dx\ converge;\\ \infty & se\ \alpha=1\ allora\ \int_a^{+\infty} f(x)dx\ diverge;\\ l\neq 0 & allora\ \int_a^{+\infty} f(x)dx\ diverge\ se\ \alpha\leq 1\ e\ se\ \alpha>1\ l'integrale\ converge \end{cases}$$

Abbiamo gia' osservato che l' integrazione aumenta di una unita' l'esponente della potenza $x^{-\alpha}$ con $\alpha>0,\neq 1$ quindi dopo l'integrazione la potenza diventa $x^{-\alpha+1}$. Allora distinguiamo i due casi infinito e finito:

1) all'infinito per l'integrabilita' la funzione deve tendere a zero allora $-\alpha+1$ deve essere negativo ovvero $\alpha>1$

2) Per $x=0$ per l'integrabilita' occorre che $x^{-\alpha+1}$ abbia limite finito per cui $-\alpha+1$ deve essere positivo allora deve essere $\alpha<1$. Questa osservazione si estende ad punto finito c con $|x-c|^{-\alpha}$.

3) il caso $\alpha=1$ ha vita propria poiche' l'integrale e' il logaritmo e da' risposte negative.

Nota - Nelle considerazioni fatte abbiamo evitato il caso della non esistenza del limite per le funzioni. Queste producono integrali oscillanti il cui studio e' alquanto complicato oppure porta sovente a risposte negative.

Esempi:

1) Valutiamo $\int_0^{+\infty} senxdx$ ovvero dobbiamo valutare il

$$\lim_{t\to+\infty}\int_0^t senxdx=\lim_{t\to+\infty} cost|_0^t\ non\ esiste.$$

2) Valutiamo

$$\int_0^{+\infty}\frac{senx}{x}dx$$

La funzione integranda cambia segno continuamente per cui siamo in presenza di un integrale oscillante. Si potrebbe tentare l'assoluta convergenza. Eppure non funziona, lo dimostreremo piu' avanti. Allora cerchiamo dapprima di integrarlo secondo la definizione .

Innanzitutto non preoccupiamoci dello 0 la funzione integranda in tale punto ha una discontinuita' eliminabile e la poniamo uguale ad 1. In $[0,\pi/2]$ e' integrabile quindi valutiamolo integrando per parti

$$\int_{\pi/2}^t\frac{senx}{x}dx=-\frac{cost}{t}-\int_{\pi/2}^t\frac{cosx}{x^2}dx$$

ora $-\frac{cost}{t}$ per t tendente a ∞ tende a zero perche' prodotto di una funzione limitata per un infinitesimo. L'integrale

$$\int_{\pi/2}^t\frac{cosx}{x^2}dx$$

e' assolutamente integrabile perche'

$$\frac{|cosx|}{x^2}<\frac{1}{x^2}.$$

Allora

$$\int_{\pi/2}^{+\infty}\frac{senx}{x}dx=\int_{\pi/2}^{+\infty}\frac{cosx}{x^2}dx.$$

Con le stesse ossevazioni di sopra si dimostra che e' convergente

$$\int_{\pi/2}^{+\infty}\frac{senx}{x^2}dx.$$

Basta osservare che

$$\frac{|senx|}{x^2} \leq \frac{1}{x^2}.$$

Non e'certamente convergente

$$\int_0^{+\infty} \frac{senx}{x^2} dx.$$

Basta utilizzare il confronto asintotico sapendo che $\frac{senx}{x}$ e' positiva e limitato vicino a 0 allora

$$\frac{senx}{x^2} = \frac{1}{x}\frac{senx}{x^2} \sim \frac{1}{x}.$$

vicino a 0 quindi non integrabile

oindent 3) Calcolare

$$\int_0^1 \frac{1}{x} cos\frac{1}{x} dx.$$

Allora

$$\int_t^1 \frac{1}{x} cos\frac{1}{x} dx = \int_t^1 x\frac{1}{x^2} cos\frac{1}{x} dx = -xsen\frac{1}{x}|_t^1 + \int_t^1 sen\frac{1}{x} dx =$$

$$-xsen\frac{1}{x}|_t^1 + \int_t^1 x^2 \frac{1}{x^2} sen\frac{1}{x} dx = -xsen\frac{1}{x}|_t^1 + x^2 cos\frac{1}{x}|_t^1 - 2\int_t^1 xcos\frac{1}{x} dx =$$

Ora

$$\lim_{t\to 0} tsen\frac{1}{t} = \lim_{t\to 0} t^2 cos\frac{1}{t} = 0.$$

Allora

$$\int_t^1 \frac{1}{x} cos\frac{1}{x} dx = cos1 - sen1 - \int_0^1 x^2 cos\frac{1}{x} dx.$$

La funzione integranda nell'ultimo integrale e' continua $[0, 1]$.

4) Valutare

$$\int_0^1 \frac{logx}{x} dx.$$

Calcoliamo l'integrale

$$\int_t^1 \frac{logx}{x} dx = log^2|x|/2|_t^1 \to +\infty,$$

per $t \to 0$ quindi l'integrale diverge.

5) Valutare

$$\int_0^{1/2} \frac{1}{xlogx} dx.$$

Calcoliamo

$$\int_t^1 \frac{1}{xlogx} dx = log|log(x)|_t^{1/2} \to +\infty$$

per $t \to 0$.

Quindi l'integrale diverge.

6) Valutare

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{x(logx)^\beta} dx$$

con $\beta \neq 1$ ($\beta = 1$ l'abbiamo gia' considerato)

Calcoliamo l'integrale definito

$$\int \frac{1}{x(logx)^\beta} dx = \frac{(logx)^{1-\beta}}{1-\beta}.$$

Allora se $\beta > 1$ lintegrale converge per $x \to +\infty$, per $\beta < 1$ diverge.

7) Calcolare

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} dx.$$

Calcoliamo l'integrale

$$\int_1^t \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \frac{\sqrt{x}}{2}|_1^t \to +\infty$$

per $t \to \infty$.

L'integrale e' convergente

Mostriamo che

$$\int_0^{+\infty} \frac{senx}{x} dx$$

non e' assolutamente integrabile. $|senx|$ e' periodica di periodo π.

Osserviamo che

$$\int_{2k\pi}^{2(k+1)\pi} \frac{|senx|}{x} dx \geq \frac{1}{2(k+1)\pi} \int_{2k\pi}^{2(k+1)\pi} |senx| dx =$$

$$\frac{2}{(k+1)\pi}.$$

Inoltre dal teorema della permanenza del segno si ha

$$\frac{1}{2n} < log(1 + \frac{1}{n}) < \frac{3}{2n}$$

per n suficientemente grande. Allora

$$\int_{2\pi}^{2n\pi} \frac{|senx|}{x} dx = \sum_{k=1}^{n-1} \int_{2k\pi}^{2(k+1)\pi} \frac{|senx|}{x} dx \geq$$

$$\frac{4}{3\pi} \sum_{k=1}^{n-1} log \frac{k+2}{k+1} = \frac{4}{3\pi}(log(n+1) - log2)$$

Da cui l'imtegrale diverge per n tendente all'infinitp.