ANALISI MATEMATICA I - A.A. 2012/2013

INTEGRALI IMPROPRI / ESERCIZI SVOLTI

ESERCIZIO. *Calcolare, se esistono, i seguenti integrali:*

$$\int_0^1 \frac{1}{x\log x}dx, \qquad \int_1^{+\infty} \frac{1}{x\log x}dx.$$

Svolgimento. La funzione integranda $f(x) = \frac{1}{x\log x}$ è definita e continua su $(0,1)\cup(1,+\infty)$, quindi f è localmente integrabile su entrambi gli intervalli $(0,1)$ e $(1,+\infty)$. Inoltre f ha un asintoto verticale sia in $x=0$ che in $x=1$, quindi entrambi gli integrali sono singolari in entrambi gli estremi. Scegliendo ad esempio i punti $x=1/2$ e $x=2$ per separare le singolarità, per definizione di integrale improprio con singolarità in entrambi gli estremi si ha

$$\int_0^1 \frac{1}{x\log x}dx = \int_0^{1/2} \frac{1}{x\log x}dx + \int_{1/2}^1 \frac{1}{x\log x}dx \qquad \text{se entrambi gli integrali esistono e non danno forma indeterminata}$$

e

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x\log x}dx = \int_1^2 \frac{1}{x\log x}dx + \int_2^{+\infty} \frac{1}{x\log x}dx \qquad \text{se entrambi gli integrali esistono e non danno forma indeterminata.}$$

Calcoliamo allora i quattro integrali impropri evidenziati, che ora presentano un solo estremo singolare ciascuno:

$$\int_0^{1/2} \frac{1}{x\log x}dx = \lim_{t\to 0^+}\int_t^{1/2} \frac{1}{x\log x}dx, \qquad \int_{1/2}^1 \frac{1}{x\log x}dx = \lim_{t\to 1^-}\int_{1/2}^t \frac{1}{x\log x}dx,$$

$$\int_1^2 \frac{1}{x\log x}dx = \lim_{t\to 1^+}\int_t^2 \frac{1}{x\log x}dx, \qquad \int_2^{+\infty} \frac{1}{x\log x}dx = \lim_{t\to +\infty}\int_2^t \frac{1}{x\log x}dx.$$

Si ha

$$\int \frac{1}{x\log x}dx = \int \frac{1}{u}du = \log|u| + c = \log|\log x| + c$$

(sostituzione $u=\log x$, $du = \frac{1}{x}dx$) e quindi

$$\int_t^{1/2} \frac{1}{x\log x}dx = [\log|\log x|]_{x=t}^{x=1/2} = \log\left|\log\frac{1}{2}\right| - \log|\log t|$$

da cui

$$\begin{aligned}\int_0^{1/2} \frac{1}{x\log x}dx &= \lim_{t\to 0^+}\int_t^{1/2} \frac{1}{x\log x}dx = \lim_{t\to 0^+}\left(\log\left|\log\frac{1}{2}\right| - \log|\log t|\right) = \log\left|\log\frac{1}{2}\right| - \lim_{t\to 0^+}\log|\log t| \\ &= \log\left|\log\frac{1}{2}\right| - \lim_{y\to +\infty}\log y = -\infty\end{aligned}$$

(sostituzione $y = |\log t| \to +\infty$ per $t\to 0^+$). Analogamente, si ottiene

$$\int_{1/2}^1 \frac{1}{x\log x}dx = -\infty, \qquad \int_1^2 \frac{1}{x\log x}dx = +\infty, \qquad \int_2^{+\infty} \frac{1}{x\log x}dx = +\infty$$

e dunque risulta

$$\int_0^1 \frac{1}{x\log x}dx = -\infty - \infty = -\infty, \qquad \int_1^{+\infty} \frac{1}{x\log x}dx = +\infty + \infty = +\infty.$$

ESERCIZIO. *Determinare il carattere dei seguenti integrali:*

a) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^2-1}{\sqrt{x^7+1}}dx, \quad \int_0^{+\infty} \frac{x^2-1}{\sqrt[3]{1+8x^6}}dx,$

b) $\displaystyle\int_0^{1} \frac{1}{\log x}dx, \quad \int_1^{+\infty} \frac{1}{\log x}dx$

c) $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx, \quad \int_0^{+\infty} \frac{\sin\left(e^x-1\right)}{x^{3/2}}dx$

d) $\displaystyle\int_0^{3} \left(\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{1}{3-x}\right)dx, \quad \int_0^{1} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2-1}}dx.$

Ricordiamo i seguenti esempi notevoli:

$$\boxed{\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^\alpha}dx \begin{cases}\text{converge} & \text{se } \alpha>1\\ \text{diverge a } +\infty & \text{se } \alpha\le 1\end{cases}}, \quad \boxed{\int_a^{b}\frac{1}{(x-a)^\alpha}dx \begin{cases}\text{converge} & \text{se } \alpha<1\\ \text{diverge a } +\infty & \text{se } \alpha\ge 1\end{cases}}.$$

Analogamente

$$\boxed{\int_{-\infty}^{-1}\frac{1}{|x|^\alpha}dx \begin{cases}\text{converge} & \text{se } \alpha>1\\ \text{diverge a } +\infty & \text{se } \alpha\le 1\end{cases}}, \quad \boxed{\int_a^{b}\frac{1}{(b-x)^\alpha}dx \begin{cases}\text{converge} & \text{se } \alpha<1\\ \text{diverge a } +\infty & \text{se } \alpha\ge 1\end{cases}}.$$

Svolgimento.

a.1) La funzione integranda $f(x)=\frac{x^2-1}{\sqrt{x^7+1}}$ è continua su $[0,+\infty)$, quindi l'integrale non presenta singolarità interne all'intervallo di integrazione e l'unica singolarità è dovuta alla non limitatezza dell'intervallo di integrazione.
Per $x\to+\infty$ si ha

$$f(x)=\frac{x^2-1}{\sqrt{x^7+1}}\sim\frac{x^2}{\sqrt{x^7}}=\frac{1}{x^{\frac{7}{2}-2}}=\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}$$

e pertanto l'integrale $\int_1^{+\infty}f(x)\,dx$ converge per il criterio del confronto asintotico, in quanto ha lo stesso carattere dell'integrale $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^{3/2}}dx$ e

$$\alpha=\frac{3}{2}>1 \quad\Longrightarrow\quad \int_1^{+\infty}\frac{1}{x^\alpha}dx \quad \text{converge.}$$

Dunque, per additività, converge anche l'integrale

$$\int_0^{+\infty}f(x)\,dx=\int_0^{1}f(x)\,dx+\int_1^{+\infty}f(x)\,dx.$$

a.2) La funzione integranda è continua su $[0,+\infty)$, quindi l'integrale non presenta singolarità interne all'intervallo di integrazione e l'unica singolarità è dovuta alla non limitatezza dell'intervallo di integrazione.
Per $x\to+\infty$ si ha

$$\frac{x^2-1}{\sqrt[3]{1+8x^6}}\sim\frac{x^2}{\sqrt[3]{8x^6}}=\frac{x^2}{\sqrt[3]{8}\sqrt[3]{x^6}}=\frac{1}{2},$$

quindi risulta

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-1}{\sqrt[3]{1+8x^6}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\neq 0$$

e pertanto l'integrale diverge (positivamente perché $\frac{1}{2}>0$).

b.1) La funzione integranda $f(x)=\frac{1}{\log x}$ è definita e continua su $(0,1)$, quindi l'integrale non presenta singolarità interne all'intervallo di integrazione e può essere singolare in entrambi gli estremi. In effetti si ha $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=0$ e quindi l'estremo 0 non è singolare, perché

$$f\in C((0,1)) \text{ e } \lim_{x\to0^+}f(x) \text{ esiste finito} \quad\Longrightarrow\quad f\in\mathcal{R}_{loc}([0,1)).$$

Studiamo allora l'estremo 1 (che presenta invece singolarità perché $f(x) \to -\infty$ per $x \to 1^-$), cercando l'eventuale ordine di infinito di f per $x \to 1^-$ (rispetto al campione standard). Per $x \to 1^-$ si ha $\log x = \log(1 + x - 1) \sim x - 1$ e quindi risulta

$$\frac{1}{\log x} \sim \frac{1}{x-1}$$

(f è un infinito di ordine 1), da cui segue che gli integrali $\int_0^1 \frac{1}{\log x}dx$ e $\int_0^1 \frac{1}{x-1}dx$ hanno lo stesso carattere per il criterio del confronto asintotico. Dunque

$$\alpha = 1 \quad \Longrightarrow \quad \int_0^1 \frac{1}{(1-x)^\alpha}dx = +\infty$$

e quindi

$$\int_0^1 \frac{1}{x-1}dx = -\int_0^1 \frac{1}{1-x}dx = -\infty \quad \Longrightarrow \quad \int_0^1 \frac{1}{\log x}dx = -\infty.$$

b.2) La funzione integranda $f(x) = \frac{1}{\log x}$ è definita e continua su $(1, +\infty)$, quindi l'integrale non presenta singolarità interne all'intervallo di integrazione. L'estremo destro è ovviamente singolare e tale è pure l'estremo sinistro, in quanto $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = +\infty$. Scriviamo allora

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{\log x}dx = \int_1^2 \frac{1}{\log x}dx + \int_2^{+\infty} \frac{1}{\log x}dx$$

e studiamo separatamente i due integrali impropri.

- Ragionando come nel punto b.1 precedente, si ottiene $\frac{1}{\log x} \sim \frac{1}{x-1}$ per $x \to 1^+$ e quindi

$$\int_1^2 \frac{1}{x-1}dx = +\infty \quad \Longrightarrow \quad \int_1^2 \frac{1}{\log x}dx = +\infty.$$

- Studiamo adesso il secondo integrale. Si ha $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$, per cui l'integrale può convergere. Poiché f è un infinitesimo che non ha ordine per $x \to +\infty$ (rispetto al campione standard $\frac{1}{x}$), il criterio del confronto asintotico non è comodo per stabilire il carattere dell'integrale. D'altra parte, $\log x$ è un infinito di ordine inferiore rispetto ad ogni potenza e quindi $f(x) = \frac{1}{\log x}$ è un infinitesimo di ordine inferiore rispetto ad ogni potenza, per cui si congettura che l'integrale diverga. Proviamolo allora tramite il criterio del confronto, cercando di minorare $f(x)$ con una funzione dall'integrale divergente. Per ogni $\gamma > 0$ si ha

$$\log x = o(x^\gamma) \quad \text{per } x \to +\infty$$

e quindi esiste un intorno $I(+\infty)$ (dipendente da γ) in cui $0 < \log x \leq x^\gamma$ e perciò $\frac{1}{\log x} \geq \frac{1}{x^\gamma}$ Scegliendo un $\gamma \leq 1$ (in modo che $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^\gamma}dx$ diverga), ad esempio $\gamma = 1$, risulta allora

$$\frac{1}{\log x} \geq \frac{1}{x} \quad \text{per ogni } x \text{ in un opportuno } I(+\infty).$$

Il criterio del confronto permette allora di concludere che

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x}dx = +\infty \quad \Longrightarrow \quad \int_2^{+\infty} \frac{1}{\log x}dx = +\infty.$$

In definitiva

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{\log x}dx = +\infty + \infty = +\infty.$$

c.1) La funzione integranda $f(x) = e^{-x^2}$ è continua su $[0, +\infty)$, quindi l'integrale non presenta singolarità interne all'intervallo di integrazione e l'unica singolarità è dovuta alla non limitatezza dell'intervallo di integrazione. Risulta $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$, per cui l'integrale può convergere.

Poiché f è un infinitesimo che non ha ordine per $x \to +\infty$ (rispetto al campione standard $\frac{1}{x}$), il criterio del confronto asintotico non è comodo per stabilire il carattere dell'integrale. D'altra parte, f è un infinitesimo di ordine superiore rispetto ad ogni potenza, per cui si congettura che l'integrale converga. Proviamolo allora tramite il criterio del confronto, cercando di maggiorare $f(x)$ con una funzione dall'integrale convergente. Per ogni $\gamma > 0$, si ha

$$e^{-x^2} = o\left(\frac{1}{x^\gamma}\right) \quad \text{per } x \to +\infty$$

(ad esempio perché per ogni γ si ha $e^{-t} = o(1/t^\gamma)$ e quindi $e^{-x^2} = o\left(1/x^{2\gamma}\right)$, dove 2γ è ancora un esponente qualsiasi perché lo è γ) e quindi esiste un intorno $I(+\infty)$ (dipendente da γ) in cui $e^{-x^2} \leq \frac{1}{x^\gamma}$. Scegliendo un $\gamma > 1$ (in modo che $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\gamma} dx$ converga), ad esempio $\gamma = 2$, risulta allora

$$e^{-x^2} \leq \frac{1}{x^2} \quad \text{per ogni } x \text{ in un opportuno } I(+\infty).$$

Il criterio del confronto permette allora di concludere che

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx \quad \text{converge} \quad \Longrightarrow \quad \int_1^{+\infty} e^{-x^2} dx \quad \text{converge}$$

e dunque, per additività, converge anche

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \int_0^1 e^{-x^2} dx + \int_1^{+\infty} e^{-x^2} dx.$$

c.2) La funzione integranda $f(x) = \frac{\sin(e^x - 1)}{x^{3/2}}$ è definita e continua su $(0, +\infty)$, quindi l'integrale non presenta singolarità interne all'intervallo di integrazione. L'estremo destro è ovviamente singolare e tale può essere anche l'estremo sinistro.

Per $x \to 0^+$, si ha $\sin(e^x - 1) \sim e^x - 1 \sim x$ e quindi

$$\frac{\sin(e^x - 1)}{x^{3/2}} \sim \frac{x}{x^{3/2}} = \frac{1}{x^{\frac{3}{2} - 1}} = \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}.$$

Ciò evidenzia che l'estremo $x = 0$ è in effetti singolare (perché $\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} x^{-1/2} = +\infty$) e prova anche che

$$\int_0^1 \frac{\sin(e^x - 1)}{x^{3/2}} \quad \text{converge}$$

per il criterio del confronto asintotico, in quanto ha lo stesso carattere dell'integrale $\int_0^1 \frac{1}{x^{1/2}} dx$ e

$$\alpha = \frac{1}{2} < 1 \quad \Longrightarrow \quad \int_0^1 \frac{1}{x^\alpha} dx \text{ converge.}$$

Scriviamo allora

(1)
$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(e^x - 1)}{x^{3/2}} dx = \int_0^1 \frac{\sin(e^x - 1)}{x^{3/2}} dx + \int_1^{+\infty} \frac{\sin(e^x - 1)}{x^{3/2}} dx$$

e ragioniamo sul secondo integrale. Poiché l'integrando $f(x)$ cambia segno in ogni intorno di $+\infty$ (in cui $e^x - 1$ descrive tutto un intorno di $+\infty$, dove il seno cambia segno infinite volte), proviamo a studiare la convergenza assoluta dell'integrale proposto, cioè la convergenza dell'integrale

$$\int_1^{+\infty} \left| \frac{\sin(e^x - 1)}{x^{3/2}} \right| dx.$$

Si ha

$$\left| \frac{\sin(e^x - 1)}{x^{3/2}} \right| = \frac{|\sin(e^x - 1)|}{x^{3/2}} \leq \frac{1}{x^{3/2}} \quad \text{per ogni } x \in [1, +\infty)$$

e pertanto il criterio del confronto permette di concludere che

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{3/2}} dx \quad \text{converge} \quad \left(\alpha = \frac{3}{2} > 1\right) \quad \Longrightarrow \quad \int_1^{+\infty} \left| \frac{\sin(e^x - 1)}{x^{3/2}} \right| dx \quad \text{converge.}$$

Dunque

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin(e^x - 1)}{x^{3/2}} dx \quad \text{converge}$$

per il criterio di convergenza assoluta e pertanto converge anche l'integrale (1) (dove entrambi gli addendi convergono).

d.1) La funzione integranda $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{3-x}$ è definita e continua su $(0, 3)$, quindi l'integrale non presenta singolarità interne all'intervallo di integrazione. Entrambi gli estremi di integrazione sono invece chiaramente singolari, in quanto $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 3^-} f(x) = +\infty$. Scriviamo

$$\int_0^3 f(x)\,dx = \int_0^1 f(x)\,dx + \int_1^3 f(x)\,dx$$

e studiamo separatamente i due integrali impropri.

- Per $x \to 0^+$ si ha

$$\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{3-x} = \frac{1}{\sqrt{x}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) \sim \frac{1}{\sqrt{x}}$$

e quindi il primo integrale converge per il criterio del confronto asintotico, in quanto ha lo stesso carattere dell'integrale $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx$ e

$$\alpha = \frac{1}{2} < 1 \quad \Longrightarrow \quad \int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}dx \text{ converge.}$$

- Per $x \to 3^-$ si ha

$$\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{3-x} = \frac{1}{3-x} + o\left(\frac{1}{3-x}\right) \sim \frac{1}{3-x}$$

e quindi risulta

$$\int_1^3 f(x)\,dx = +\infty$$

per il criterio del confronto asintotico, in quanto tale integrale ha lo stesso carattere dell'integrale $\int_1^3 \frac{1}{3-x}dx$ e

$$\alpha = 1 \quad \Longrightarrow \quad \int_1^3 \frac{1}{(3-x)^\alpha}dx = +\infty.$$

In definitiva, poiché $\int_0^1 f(x)\,dx$ è un valore finito, si ottiene

$$\int_0^3 f(x)\,dx = \int_0^1 f(x)\,dx + \infty = +\infty.$$

d.2) La funzione integranda è continua su $[0, 1)$ (il denominatore si annulla solo in $x = \pm 1$), quindi l'integrale non presenta singolarità interne all'intervallo di integrazione e l'unica singolarità è nell'estremo destro, in cui si ha $\lim_{x\to 1^-} f(x) = -\infty$. Cerchiamo allora l'eventuale ordine di infinito di f per $x \to 1^-$ (rispetto al campione standard). Per $x \to 1^-$ si ha $x^2 - 1 = (x+1)(x-1) \sim 2(x-1)$, da cui segue $\sqrt[3]{x^2-1} \sim \sqrt[3]{2(x-1)} = \sqrt[3]{2}\,(x-1)^{1/3}$ e quindi

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2-1}} \sim \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \frac{1}{(x-1)^{1/3}}$$

(f è un infinito di ordine $1/3$). Allora gli integrali $\int_0^1 f(x)\,dx$ e $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \frac{1}{(x-1)^{1/3}}dx$ hanno lo stesso carattere per il criterio del confronto asintotico e si ha che

$$\alpha = \frac{1}{3} < 1 \quad \Longrightarrow \quad \int_0^1 \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \frac{1}{(x-1)^{1/3}}dx = -\frac{1}{\sqrt[3]{2}} \int_0^1 \frac{1}{(1-x)^{1/3}}dx \quad \text{converge.}$$

Dunque l'integrale proposto converge.

ESERCIZIO. *Per $a \in \mathbb{R}$ si consideri l'integrale improprio*

$$\int_0^{+\infty} \frac{(x+3)^a (2+\cos x)}{\left((x+1)^2 (x+2)\right)^a} dx. \tag{2}$$

a) *Discutere la convergenza dell'integrale per $a = 1$.*
b) *Determinare tutti i valori di a per cui l'integrale converge.*

Svolgimento. Osserviamo che per ogni $a \in \mathbb{R}$, l'integrando è continuo su $[0, +\infty)$, quindi l'integrale presenta una sola singolarità, dovuta alla non limitatezza del dominio di integrazione.

a) Per $a = 1$, si ottiene l'integrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{(x+3)(2+\cos x)}{(x+1)^2 (x+2)} dx. \tag{3}$$

Poiché

$$\frac{(x+3)(2+\cos x)}{(x+1)^2 (x+2)} \sim \frac{x(2+\cos x)}{x^3} = \frac{2+\cos x}{x^2} \quad \text{per } x \to +\infty, \tag{4}$$

il criterio del confronto asintotico assicura che l'integrale (3) ha lo stesso carattere dell'integrale

$$\int_1^{+\infty} \frac{2+\cos x}{x^2} dx. \tag{5}$$

Poiché $0 \le \frac{2+\cos x}{x^2} \le \frac{3}{x^2}$ nell'intorno di $+\infty$ (ovunque, in effetti) e l'integrale notevole $\int_1^{+\infty} \frac{3}{x^2} dx$ converge (infinitesimo di ordine $2 > 1$), il criterio del confronto assicura che l'integrale (5) converge. Dunque l'integrale (3) converge.

b) Ripetendo il conto (4), risulta

$$\frac{(x+3)^a (2+\cos x)}{\left((x+1)^2 (x+2)\right)^a} \sim \frac{x^a (2+\cos x)}{x^{3a}} = \frac{2+\cos x}{x^{2a}} \quad \text{per } x \to +\infty$$

e quindi l'integrale (2) ha lo stesso carattere dell'integrale

$$\int_1^{+\infty} \frac{2+\cos x}{x^{2a}} dx. \tag{6}$$

Nell'intorno di $+\infty$ (ovunque, in effetti), si ha

$$\frac{1}{x^{2a}} \le \frac{2+\cos x}{x^{2a}} \le \frac{3}{x^{2a}}$$

e quindi, ricordando che $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx$ converge se e solo se $\alpha > 1$ ed applicando due volte il criterio del confronto, si ottiene

$$a > \frac{1}{2} \Rightarrow \int_1^{+\infty} \frac{3}{x^{2a}} dx \text{ converge} \Rightarrow \text{l'integrale (6) converge,}$$

$$a \le \frac{1}{2} \Rightarrow \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{2a}} dx \text{ diverge} \quad \Rightarrow \text{l'integrale (6) diverge.}$$

Dunque l'integrale (2) converge se e solo se $a > \frac{1}{2}$.

ESERCIZIO. *Si consideri la funzione* $f(x) = 3 + \log\left(1 - 9x^2\right) - 3\sqrt{1-6x^2}$.

(a) *Determinare il dominio di* f.

(b) *Determinare lo sviluppo di MacLaurin di ordine* 4 *di* f.

(c) *Stabilire se l'integrale* $\displaystyle\int_0^{1/5} \frac{f(x)}{3x\sqrt{x}\sin^2 x}\,dx$ *è improprio e, in caso affermativo, studiarne il carattere.*

(d) *Studiare la convergenza dell'integrale improprio* $\displaystyle\int_{16}^{+\infty} f\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\sqrt{x}\,dx$.

Svolgimento.

(a) Si ha $\operatorname{dom} f = \left\{x \in \mathbb{R} : 1 - 9x^2 > 0,\ 1 - 6x^2 \geq 0\right\} = \left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$.

(b) Occorre procurarsi gli sviluppi di MacLaurin di $\log\left(1 - 9x^2\right)$ e $\sqrt{1-6x^2}$ di ordini opportuni. Ricordiamo che

$$\begin{aligned} \log(1+t) &= t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} - \frac{t^4}{4} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{t^n}{n} + o(t^n) \quad \text{per } t \to 0, \\ \sqrt{1+t} &= 1 + \frac{t}{2} - \frac{t^2}{8} + \frac{t^3}{16} + o\left(t^3\right) \quad \text{per } t \to 0 \end{aligned}$$

ed osserviamo che, per ottenere uno sviluppo di $f(x)$ con resto $o\left(x^4\right)$, basta arrestare tali sviluppi (in cui dovremo operare le sostituzioni $t = -9x^2$ e $t = -6x^2$ rispettivamente) all'ordine 2 (in modo che, con le precedenti sostituzioni, risulterà $o\left(t^2\right) = o\left(x^4\right)$). Si ha allora

$$\begin{aligned} \log\left(1-9x^2\right) &= -9x^2 - \frac{\left(-9x^2\right)^2}{2} + o\left(x^4\right) = -9x^2 - \frac{81}{2}x^4 + o\left(x^4\right) \quad \text{per } x \to 0, \\ \sqrt{1-6x^2} &= 1 + \frac{-6x^2}{2} - \frac{\left(-6x^2\right)^2}{8} + o\left(x^4\right) = 1 - 3x^2 - \frac{9}{2}x^4 + o\left(x^4\right) \quad \text{per } x \to 0 \end{aligned}$$

e quindi (tutto per $x \to 0$)

$$\begin{aligned} f(x) &= 3 + \log\left(1-9x^2\right) - 3\sqrt{1-6x^2} \\ &= 3 - 9x^2 - \frac{81}{2}x^4 + o\left(x^4\right) - 3\left(1 - 3x^2 - \frac{9}{2}x^4 + o\left(x^4\right)\right) \\ &= 3 - 9x^2 - \frac{81}{2}x^4 - 3 + 9x^2 + \frac{27}{2}x^4 + o\left(x^4\right) = -27x^4 + o\left(x^4\right). \end{aligned}$$

(c) La funzione integranda è continua sull'intervallo $\left(0, \frac{1}{5}\right]$ (si osservi che $\left(0, \frac{1}{5}\right]$ è contenuto in $\operatorname{dom} f$), quindi l'unico punto eventualmente singolare è l'estremo 0, dove il denominatore si annulla.
Lo sviluppo trovato al punto (b) significa $f(x) \sim -27x^4$ per $x \to 0$ e si ha $x\sqrt{x}\sin^2 x \sim x^{7/2}$ per $x \to 0^+$ (in quanto $\sin x \sim x$ implica $\sin^2 x \sim x^2$), per cui risulta

$$\frac{f(x)}{x\sqrt{x}\sin^2 x} \sim \frac{-27x^4}{x^{7/2}} = -27\sqrt{x} \quad \text{per } x \to 0^+$$

e quindi

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x)}{x\sqrt{x}\sin^2 x} = 0.$$

Ciò garantisce che l'integrale proposto esiste in senso non improprio, in quanto

$$f \in C\left(\left(0, \tfrac{1}{5}\right]\right) \text{ e } \lim_{x \to 0^+} f(x) \text{ esiste finito } \implies f \in \mathcal{R}\left(\left[0, \tfrac{1}{5}\right]\right).$$

(d) Osserviamo che $x \geq 16 \Rightarrow \sqrt{x} \geq 4 \Rightarrow 0 < \frac{1}{\sqrt{x}} \leq \frac{1}{4} < \frac{1}{3}$, per cui la funzione integranda è ben definita e continua sull'intervallo di integrazione $[16, +\infty)$.
Poiché lo sviluppo trovato al punto (b) significa $f(t) \sim -27t^4$ per $t \to 0$, risulta

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) \sim -27\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^4 = -27\frac{1}{x^2} \quad \text{per } x \to +\infty$$

(sostituzione $t = \frac{1}{\sqrt{x}} \to 0$ per $x \to +\infty$) e quindi

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\sqrt{x} \sim -\frac{27}{2}\frac{1}{x^2}\sqrt{x} = -\frac{27}{2}\frac{1}{x^{3/2}} \quad \text{per } x \to +\infty.$$

Dunque, per il criterio del confronto asintotico, l'integrale improprio proposto ha lo stesso carattere dell'integrale

$$\int_{16}^{+\infty}\left(-27\frac{1}{x^{3/2}}\right)dx = -27\int_{16}^{+\infty}\frac{1}{x^{3/2}}dx$$

e pertanto converge, in quanto $3/2 > 1$.

ESERCIZIO. *Sia* $f(x) = \left(4 - 3x^2\right)\sin 3x - 2x^2e^{2x} - 12x + 2x^2$.

(a) *Determinare lo sviluppo di MacLaurin di ordine 3 di* f.

(b) *Studiare la convergenza dell'integrale improprio* $\displaystyle\int_0^1 \frac{f(x)}{x^4\sqrt{\sin x}}dx$.

Svolgimento.

(a) Occorre procurarsi gli sviluppi di MacLaurin di $\sin 3x$ ed e^{2x}, di ordini opportuni. Poiché, tra gli addendi di $f(x)$, $\sin 3x$ appare moltiplicato per una costante (infatti $\left(4-3x^2\right)\sin 3x = 4\sin 3x - 3x^2\sin 3x$), mentre e^{2x} appare moltiplicato per x^2, volendo uno sviluppo di $f(x)$ con resto $o\left(x^3\right)$ occorre sviluppare $\sin 3x$ con resto almeno $o\left(x^3\right)$ ed e^{2x} con resto almeno $o(x)$. Per $x \to 0$, si ha

$$\sin 3x = 3x - \frac{(3x)^3}{3!} + o\left(x^3\right) = 3x - \frac{9}{2}x^3 + o\left(x^3\right), \qquad e^{2x} = 1 + 2x + o(x)$$

e quindi

$$\begin{aligned} f(x) &= 4\sin 3x - 3x^2\sin 3x - 2x^2e^{2x} - 12x + 2x^2 \\ &= 4\left(3x - \frac{9}{2}x^3 + o\left(x^3\right)\right) - 3x^2\left(3x - \frac{9}{2}x^3 + o\left(x^3\right)\right) - 2x^2\left(1 + 2x + o(x)\right) + \\ &\quad -12x + 2x^2 \\ &= 12x - 18x^3 + o\left(x^3\right) - 9x^3 + \frac{27}{2}x^5 + o\left(x^5\right) - 2x^2 - 4x^3 + o\left(x^3\right) - 12x + 2x^2 \\ &= -31x^3 + o\left(x^3\right), \end{aligned}$$

dove si è tenuto conto del fatto che $\frac{27}{2}x^5 + o\left(x^5\right) = o\left(x^3\right)$ per $x \to 0$.

(b) La funzione integranda è definita e continua su $(0,1]$, quindi l'eventuale singolarità dell'integrale risiede solo nell'estremo sinistro $x = 0$. Poiché $\sqrt{\sin x} \sim \sqrt{x}$ per $x \to 0^+$ e lo sviluppo trovato al punto (a) implica $f(x) \sim -31x^3$ per $x \to 0^+$, si ha

$$\frac{f(x)}{x^4\sqrt{\sin x}} \sim \frac{-31x^3}{x^4\sqrt{x}} = \frac{-31}{x^{3/2}} \quad \text{per } x \to 0^+.$$

Allora, per il criterio del confronto asintotico, l'integrale improprio proposto ha lo stesso carattere dell'integrale improprio $\int_0^1 \frac{-31}{x^{3/2}}dx$ e pertanto diverge a $-\infty$, in quanto

$$\frac{3}{2} > 1 \quad \Longrightarrow \quad \int_0^1 \frac{1}{x^{3/2}}dx = +\infty \quad \Longrightarrow \quad \int_0^1 \frac{-31}{x^{3/2}}dx = -31\int_0^1 \frac{1}{x^{3/2}}dx = -\infty.$$