Elementi della teoria intuitiva degli insiemi

La teoria degli insiemi e' una branca della matematica creata principalmente dal matematico tedesco Georg Cantor alla fine de XIX secolo. Inizialmente controversa, la teoria degli insiemi e' arrivata ad avare il ruolo di teoria fondamentale della matematica moderna, nel senso di una teoria di riferimento per giustificare le assunzioni fatte riguardo alla esistenza degli oggetti matematici (come i numeri o le funzioni) e delle loro proprieta'. Ma anche senza questo, la nozione di insieme e' cosi' naturale da stimolarne l' investigazione.

Giacche' non ci sono restrizioni sugli oggetti che compongono gli insiemi, si potrebbe pensare di specificare un insieme precisando, per ciascun oggetto dell'universo se quell'oggetto e' o no un elemento dell'insieme. Comunque, questo modo di intendere un insieme conduce direttamente al paradosso di Russel.

Se costruiamo un insieme A specificando un oggetto x e' un membro di A se (e soltanto se) x e' un insieme e non e' un elemento di x. Allora A e' un membro di A se e soltanto se A non e' membro di A.

Un piu' attento esame del paradosso mostra che non e' certo una contraddizione della nozione intuitiva di un insieme.

In accordo alla definizione intuitiva, un insieme A e' formato (e' definito) " radunando " o "scegliendo" certi oggetti per formare un singolo oggetto che e' l'insieme A. Allora prima che l'insieme A sia formato o definito bisogna avere a disposizione tutti gli oggetti che sono membri di A. Ne consegue che l'insieme A non e' un possibile oggetto di A. In modo informale gli oggetti e gli insiemi sono da considerarsi enti diversi.

In questa ottica il paradosso di Russel scompare.

Tutto cio' non elimina l'esigenza di un maggior rigore formale e di codificare i concetti intuitivi della teoria degli insiemi in modo piu' solido. Ovvero considerare teorie assiomatiche degli insiemi con un non nascosto intendimento di rifondare su basi rigorose l'intera matematica. Il metodo assiomatico poggia su una iniziale lista di principi (assiomi) che saranno gli unici assunti come validi.

Gli assiomi della teoria degli insiemi piu' studiati e utilizzati ora, benche' posti nella loro forma finale da Skolem, costituiscono la teoria degli insiemi di Zermelo-Fraenkel (ZF). La trattazione di questa teoria richiede una lunga ed articolata costruzione (non senza incertezze). Essa esula dagli scopi di questi appunti. Per fortuna le nozioni fondamentali della teoria sono poche e di intuitiva comprensione. E' facile impadronirsi dei concetti e dei metodi in misura sufficiente per l'uso che ne faremo. Non travalicheremo mai i confini che possono rendere incerte le nostre affermazioni. Confini piu' o meno estesi che valgono per tutte le teorie. Seguiremo il metodo costruttivo e lo manterremo anche quando affronteremo la teoria dei numeri. Privilegeremo l' induzione (dal particolare al generale) rispetto alla deduzione (dal generale al particolare). Sceglieremo i concetti base o assiomi col requisito che siano percepiti evidenti dalla natura degli argomenti trattati.

Dapprima introduciamo i simboli che formano il linguaggio della teoria degli insiemi.

Per simboli logici si intendono i seguenti simboli:

- **Connettivi:**

negazione : $\neg$ ("non") ; congiunzione $\wedge$ ("e"); disgiunzione $\vee$ ("o"); implicazione $\Rightarrow$ (" se ... allora); equivalenza $\Leftrightarrow$ ("se e solo se").

- **Quantificatori:**

Esistenziale:$\exists$ ("esiste"); universale:$\forall$ ("per ogni").

- **Simboli non logici o extralogici:**

$=$ (" uguale "); $\in$ ("appartiene").

Il significato di questi simboli puo' sembrare evidente, ma un loro uso corretto e' essenziale.

Al connettivo "e" ($\vee$) si assegna lo stesso significato del linguaggio comune di contemporaneita', simultaneita', l'uno e l'altro; mentre al connettivo "o" ($\wedge$) si assegna un significato un po' diverso da quello del linguaggio comune. Con esso si intende " o l'uno o l'altro od entrambi". Nel linguaggio comune e' esclusa l'ultima possibilita'.

Questa ambiguita' di significato che la disgiunzione ha nella lingua italiana, non sussisteva invece nel latino. In quella lingua si usavano due congiunzioni diverse: "vel" per denotare la "o" inclusiva (quella corrispondente al nostro connettivo "o"), ed "aut" per la disgiunzione esclusiva (o l'uno o l'altro).

Definizione di insieme . Notazioni e rappresentazioni

Definizione di insieme

Un insieme e' una collezione (o un aggregato di oggetti) priva di ogni struttura
(Un insieme e' completamente determinato dai suoi elementi).

Denoteremo gli insiemi con le lettere maiuscole dell'alfabeto: A, B, C,... ed i suoi oggetti con le lettere minuscole dell'afabeto: a, b, c,....

Modi di rappresentare gli insiemi.

1. per tabulazione:

   Si rappresenta l'insieme elencando i suoi oggetti all'interno di parentesi graffe:

   esempio
   $$A = \{1, 2, 4, 6, ..., 76, ...\}.$$

2. per caratteristica:

   si racchiude fra parentesi graffe la proprieta' P soddisfatta dagli oggetti:
   $$A = \{x|P(x)\}$$
   si legge : le x che verificano $P(x)$.

   Esempio: nell'ambito numerico, P sia la proprieta' di essere maggiore di zero, allora
   $$A = \{x|x > 0\}.$$

3. per via grafica

   A e' la parte di piano contenuta in una linea chiusa.

La rappresentazione grafica e' molto espressiva e ci permette di seguire visivamente le operazioni sugli insiemi e le relative proprieta'.

Subito osserviamo che nella rappresentazione grafica gli oggetti sono rappresentati da punti. Questo fatto ha indotto a considerare sinonimi le parole punto ed oggetto. Cosi' noi diremo punto od elemento di A, indifferentemente.

Ora possiamo formalizzare l'espressione " a punto di A" o " a appartiene ad A" utilizzando il linguaggio della teoria defli insiemi.

$$a \in A.$$

La negazione di $\in$ e' denotata "$\neg \in$" o " $\notin$".

Operazioni sugli insiemi

In seguito indicheremo con S l'insieme universo ovvero l'insieme che contiene tutti gli oggetti.

• **Uguaglianza**

Siano A e B due insiemi. Diremo che due insiemi sono uguali e lo indicheremo

$$A = B$$

quando sono formati dagli stessi elementi.

Le seguenti proprieta' sono ben note

1. $A = A$ proprieta' riflessiva;
2. $A = B \Rightarrow B = A$ proprieta' simmetrica;
3. $A = B$ e $B = C \Rightarrow A = C$ proprieta' transitiva.

• **Relazione di inclusione**

Dati due insiemi A e B diremo che A e' un sottoinsieme o parte di B se

$$\forall x \in A \Rightarrow x \in B.$$

La relazione viene comunemente indicata

$$A \subseteq B,$$

scrittura metalinguistica usando il metasimbolo di inclusione $\subseteq$ (non appartiene al linguaggio della teoria degli insiemi come gli altri che introdurremo piu' avanti).

Proprieta'.

1. $A \subseteq A$ proprieta' riflessiva;
2. $A \subseteq B \wedge B \subseteq A \Rightarrow A = B$ proprieta' antisimmetrica;
3. $A \subseteq B \wedge B \subseteq C \Rightarrow A \subseteq C$ proprieta' transitiva.

Osserviamo che la inclusione sopra definita non esclude la coincidenza dei due insiemi. Se vogliamo indicare la inclusione stretta di A in B ovvero escludere l'uguaglianza dobbiamo rafforzare la precedente relazione, allora si scrive

$$\forall x \in A \Rightarrow x \in B \; e \; \exists b \, (b \in B \; e \; b \notin A).$$

Per indicare l'inclusione stretta si usa il simbolo $\subset$.

Introduciamo le operazioni binarie su insiemi ovvero operazioni che dati due insiemi individuano un terzo insieme.

Osservando l'immagine dei grafici nelle ultime pagine si nota che le linee che delimitano gli insiemi A e B formano una linea che delimita un altro insieme. Descriviamo l'immagine.

Definizione di unione

Dati due insiemi A e B chiamiamo unione e la indichiamo $\cup$ l'operazione

$$\cup : (A, B) \to C,$$

ove C e' l'insieme

$$C := A \cup B = \{x | x \in A \; o \; x \in B\}.$$

Dalle proprieta' del connettivo "o" si hanno le seguenti

• **Proprieta'**

1. $A \cup A = A$ *idempotenza;*
2. $A \cup B = B \cup A$ *proprieta' commutativa;*
3. $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ *proprieta' associativa;*
4. $A, B \subseteq A \cup B$;
5. $B \cup A = A \Leftrightarrow B \subseteq A$.

Definizione di intersezione

Dati due insiemi A e B chiamiamo intersezione e la indichiamo $\cap$ l'operazione

$$\cap : (A, B) \to C,$$

ove C e' l'insieme

$$C := A \cap B = \{x | x \in A \text{ e } x \in B\}.$$

L'insieme C e' formato da elementi comuni ad A ed a B.

• **Proprieta'**

1. $A \cap A = A$ *idempotenza;*
2. $A \cap B = B \cap A$ *proprieta' commutativa;*
3. $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ *proprieta' associativa;*
4. $A \cap B \subseteq A, B$;
5. $A \subseteq B \Leftrightarrow A \cap B = A$.

La teoria fino ad ora sviluppata non consente di eseguire l'operazione di intersezione per ogni coppia di insiemi. Per insiemi privi di punti ovvero insiemi disgiunti non riusciamo a definire l'intersezione. Per superare questo problema siamo costretti ad introdurre l'insieme vuoto ovvero l'insieme privo di elementi e che indichiamo $\emptyset$.

Considerando l'insieme vuoto l'operazione di intersezione e' illimitatamente possibile.

Vediamo ora come si comporta questo nuovo insieme rispetto alle operazioni di unione e di intersezione.

1. $A \cap \emptyset = \emptyset$;
2. $A \cup \emptyset = A$;

La (1) e la proprieta' (5) dell' operazione di unione implicano che $\emptyset$ e' sottoinsieme di ogni insieme.

Usando i connettivi "e" ed "o" con le loro proprieta' ci e' facile dimostrare le seguenti proprieta'

• **Proprieta' distributive**

1. $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B\ capC)$ *proprieta' distributiva della intersezione rispetto alla unione;*
2. $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$ *proprieta' distributiva della unione rispetto alla intersezione;*

• **Differenza**

Dati due insiemi A e B chiameremo differenza tra A e B un terzo insieme C che indicheremo $A \setminus B$ cosi' definito

$$C := A \setminus B = \{x \in S | x \in A \wedge x \notin B\}.$$

Proprieta'

1. $A \setminus B \subseteq A$;

2. $A \setminus A = \emptyset$;

3. $A \setminus \emptyset = A$;

4. $A \cap B = \emptyset \Leftrightarrow A \setminus B = A$.

Operazione di complemento di A in S

Dato un insieme A chiameremo complementare di A e lo indicheremo A^c un unsieme cosi' definito

$$A^c = \{x \in S | x \notin S\}.$$

- **Proprieta'**

1. $A \cup A^c = S$;

2. $A \cap A^c = \emptyset$;

3. $(A^c)^c = A$;

4. $A \setminus B = A \cap B^c$;

5. $A = B \Leftrightarrow A^c = B^c$;

6. $A \subseteq B \Leftrightarrow B^c \subseteq A^c$.

- **Regole di De Morgan**

1. $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$;

2. $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$.

Dimostriamo la 1) come esempio dell'uso del predicato (in quanto intervengono variabili) binario $\in$.

1. $(A \cup B)^c = \{x \in S | x \notin (A \cup B)\} = \{x \in S | x \notin A \wedge x \notin B\}$;

2. $A^c \cap B^c = \{x \in S | x \in A^c \wedge B^c\} = \{x \in S | x \notin A \wedge x \notin B\}$.

Prodotto Cartesiano

Dati due insiemi A e B costruiamo un nuovo insieme considerando contemporaneamente oggetti di A e di B ovvero considerismo coppie formate da oggetti di A e di B.

- **Prodotto Cartesiano**

$$A \times B := \{(a, b) | a \in A \text{ e } b \in B\}.$$

Osserviamo che

$$A \times B \neq B \times A.$$

Esempio

$A = \{1, 2\}$ *e* $B = \{5, 6\}$ *allora*

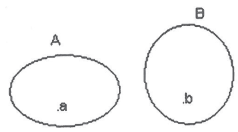
$$A \times B = \{(1, 5), (1, 6), (2, 5), (2, 6)\}.$$

Questo esempio giustifica il termine prodotto.

Prima immagine

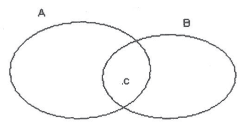
DIAGRAMMI DI EULERO-VENN

Insiemi DISGIUNTI



Seconda immagine

Insiemi CONGIUNTI



Sia $A = \mathbb{R}$ *l'insieme dei numeri reali o retta reale, e* $B = \{y \in \mathbb{R} | 1 < y < 2\}$.
Disegnare nel piano cartesiano (x, y) *i seguenti insiemi*

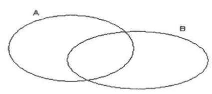
$$A \times A,\ A \times \{1\},\ A \times B.$$

Terza immagine

Operazioni insiemistiche

1. Intersezione:

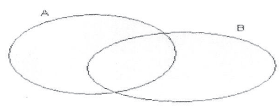
$$A \cap B = \{x \in S : x \in A \wedge x \in B\}$$



Quarta immagine

2. Unione:

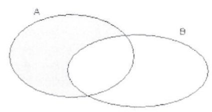
$$A \cup B = \{x \in S : x \in A \vee x \in B\}$$



Quinta immagine

3. Differenza:

$$A \setminus B = \{x \in S : x \in A \wedge x \notin B\}$$



Sesta immagine

4. Operazione di complemento di A (in S)

$$A^c = S \setminus A = \{x \in S : x \notin A\}$$