Numeri Razionali Relativi

Premessa

Dopo i numeri naturali abbiamo costruito una struttura numerica piu' ricca onde poter eseguire senza alcuna limitazione, oltre alle operazioni di somma e di prodotto, anche l'operazione inversa della somma, ovvero la differenza. Questo sistema numerico l'abbiamo chiamato **sistema degli interi relativi**. Anzi abbiamo caratterizzato operativamente i numeri interi come un ampliamento dei numeri naturali ove sono possibili, illimitatamente, le operazioni di somma, prodotto e differenza.

Comunque, in $\mathbb{Z}$, resta ancora da risolvere il problema del rapporto. Questa operazione e' solo parzialmente possibile.

Ci accingiamo, ora, a costruire un sistema numerico ove sia possibile eseguire, illimitatamente, le quattro operazioni razionali: somma, prodotto, differenza e rapporto (con la piccola eccezione che abbiamo gia' evidenziato).

Gia' dalla aritmetica dei numeri naturali, abbiamo rappresentato il rapporto di due numeri come una frazione o come una coppia di numeri naturali. Su queste coppie di numeri naturali abbiamo eseguito le operazioni di somma e prodotto con le leggi del'aritmetica dei naturali. Abbiamo anche osservato che il rapporto r non e' rappresentato da una sola frazione ma da infinite frazioni soddisfacenti ad una particolare legge di equivalenza. Osserviamo, inoltre, che il quoziente in $\mathbb{Z}$ non e' possibile illimitatamente perche' non contiene tutte le " frazioni ". A questo punto appare chiaro che, per risolvere il problema del rapporto, dobbiamo avere un sistema numerico che contenga tutte le "frazioni". Passiamo, ora, a formalizzare i concetti sopra espressi costruendo il sistema dei numeri razionali tenendo presente il principio di massima economia che e' il principio della permanenza delle proprieta' formali. Inoltre, intendiamo ritrovare nei razionali i numeri gia' costruiti: i naturali e gli interi relativi.

Numeri Razionali

Introduciamo ora l'insieme delle coppie ordinate di numeri interi con la seconda componente positiva e lo denotiamo $\mathbb{F}$. Ovvero, consideriamo l'insieme

$$\mathbb{F} = \{(a, b) : a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}_+\}.$$

Per comodita', denoteremo le coppie con il simbolo di frazione cosi' $(a, b) \equiv \frac{a}{b}$. Questa rappresentazione ci e' familiare. Ricordando quanto abbiamo gia' osservato sulle frazioni, su questo insieme fissiamo le seguenti operazioni:

• **Legge di equivalenza**

Diremo che $\frac{a}{b}$ e' equivalente a $\frac{c}{d}$ e lo denotiamo

$$\frac{a}{b} \sim \frac{c}{d}$$

quando

$$ad = bc.$$

Questa legge ha le seguenti proprieta' che si dimostrano facilmente:

1. riflessiva: $\frac{a}{b} \sim \frac{a}{b}$
2. simmetrica: $\frac{a}{b} \sim \frac{c}{d}$ allora $\frac{c}{d} \sim \frac{a}{b}$.
3. transitiva: $\frac{a}{b} \sim \frac{c}{d}$ e $\frac{c}{d} \sim \frac{e}{f}$ allora $\frac{a}{b} \sim \frac{e}{f}$.

- **Defnizione di somma - simbolo +**
  Siano $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$ due elementi di $\mathbb{F}$. La somma di $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$ e' definita nel seguente modo:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}.$$

  (L'abbiamo gia' incontrata).
  Questa operazione gode delle proprieta' commutativa ed associativa. Non insistiamo su queste perche' esse sono una semplice conseguenza delle analoghe proprieta' dei numeri interi.

- **Defnizione di prodotto - simbolo $\cdot$**

Siano $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$ due elementi di $\mathbb{F}$. Il prodotto di $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$ e' definita nel seguente modo:

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}.$$

Anche questa operazione gode delle proprieta' commutativa ed associativa. Non insistiamo su queste perche' esse sono una semplice conseguenza delle analoghe proprieta' dei numeri interi. Ora, per continuare a costruire una aritmetica su $\mathbb{F}$, dobbiamo operare una riduzione di $\mathbb{F}$ considerandolo come unione di sottoinsiemi di frazioni o coppie fra loro equivalenti. Questi sottoinsiemi di oggetti equivalenti sono chiamati classi di equivalenza. Ad esempio saranno nella stessa classe gli elementi $\frac{3}{2}$ e $\frac{6}{4}$ perche' $3 \cdot 4 = 2 \cdot 6$, possiamo individuare un'altra classe prendendo gli elamenti $\frac{-3}{-2}$ e $\frac{15}{10}$ perche' $-3 \cdot 10 = -2 \cdot 15$.

Tutte le classi di equivalenza sono insiemi disgiunti. Questo dice che una frazione appartiene ad una ed ad una sola classe di equivalenza. La forma frazionaria delle coppie ci aiuta a capire che le frazioni posssono essere ridotte ad una forma semplice laddove numeratore e denominatore sono primi fra loro (ed e' unica), ovvero sono stati eliminati i fattori comuni. Questa e' detta la forma tipo della frazione. Quindi, per ogni classe di equivalenza, possiamo scegliere un rappresentante tipo in cui denominatore e numeratore sono primi fra loro. Osserviamo, inoltre, che la somma ed il prodotto di elementi equivalenti sono equivalenti, in altre parole, se si sommano o si fa il prodotto in una classe di equivalenza si rimane nella stessa classe di equivalenza. A differenza dei numeri naturali e degli interi, i numeri razionali devono essere pensati come classi di equivalenza. Parleremo ancora di coppia (a, b) o di frazione $\frac{a}{b}$ considerandola, pero', come rappresentante di una classe di equivalenza. Chiameremo, allora, sistema di numeri razionali, e lo denoteremo $\mathbb{Q}$ l'unione delle classi di equivalenza di $\mathbb{F}$; chiameremo numero razionale una classe di equivalenza con rappresentazione $\frac{a}{b}$. Ora continuiamo la costruzione della struttura aritmetica.

Elementi neutri

In $\mathbb{Q}$ esistono (e sono unici) gli elementi neutri rispetto alla somma ed al prodotto.

- $\frac{0}{1} := 0$ e' l' elemento (classe di equivalenza) neutro rispetto alla somma: infatti

$$\frac{a}{b} + \frac{0}{1} = \frac{a}{b}.$$

- $\frac{1}{1} := 1$ e' l' elemento (classe di equivalenza di frazioni $\frac{a}{a}$) neutro rispetto al prodotto: infatti

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{1}{1} = \frac{a \cdot 1}{b \cdot 1} = \frac{a}{b}.$$

Quindi abbiamo l' elemento nullo e l' elemento unita' nel sistema. Inoltre e' del tutto evidente che

$$\frac{-a}{b}$$

e' l' opposto di

$$\frac{a}{b}.$$

L'esistenza dell'opposto garantisce l'operazione di differenza, illimitatamente, come abbiamo dimostrato in $\mathbb{Z}$. Discutiamo, ora, la novita' dei numeri razionali. **L' esistenza del reciproco**.

Chiameremo reciproco di $\frac{a}{b}$ un numero razionale $\frac{c}{d}$ tale che

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{1}{1}=1.$$

Il reciproco $\frac{c}{d}$ viene indicato $(\frac{a}{b})^{-1}$.

Esistenza del reciproco

Sia $a \neq 0$.

Se $a>0$ il reciproco di $\frac{a}{b}$ e' $\frac{b}{a}$. Infatti

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{a}=\frac{ab}{ba}\sim\frac{1}{1}.$$

Se $a<0$ il reciproco di $\frac{a}{b}$ e' $\frac{-b}{-a}$ (il denominatore e' positivo). Si ha

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{-b}{-a}=\frac{-ab}{-ba}\sim\frac{1}{1}.$$

(Questa distinzione e' dovuta alla scelta di considerare coppie con la seconda componente positiva). Il reciproco esiste per numeri non nulli.

L'esistenza del reciproco garantisce l'esistenza del rapporto o quoziente di due elementi $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$ con $c \neq 0$; ovvero esiste sempre un numero razionale $\frac{e}{f}$ tale che

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\cdot\frac{e}{f}.$$

Bastera' assumere

$$\frac{e}{f}=\frac{a}{b}(\frac{c}{d})^{-1}.$$

Infatti

$$\frac{c}{d}\cdot\frac{a}{b}\cdot(\frac{c}{d})^{-1}=\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}\cdot(\frac{c}{d})^{-1}=\frac{a}{b}.$$

Nel sistema dei numeri razionali, come per gli interi relativi, possiamo distinguere i numeri in positivi e negativi. I razionali positivi sono le frazioni (o coppie) con numeratore positivo e i razionali negativi sono le frazioni con numeratore negativo. Lo zero l'abbiamo gia' definito. E' facile istituire per il sistema dei razionali una legge di ordinamento. Diremo che

1. $\frac{a}{b}>\frac{c}{d}$ se $\frac{a}{b}-\frac{c}{d}$ e' un numero positivo,
2. $\frac{a}{b}<\frac{c}{d}$ se $\frac{a}{b}-\frac{c}{d}$ e' un numero positivo,
3. $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ se $\frac{a}{b}-\frac{c}{d}$ e' il numero nullo.

Per questo ordine valgono tutte le proprieta' dell' ordine dei numeri interi relativi: tricotomia e monotonia. Per questo argomento il lettore puo' consultare gli appunti sui numeri interi relativi.

Nel sistema dei razionali, come per i numeri interi, vale la legge di cancellazione per la somma che e' una immediata conseguenza dell'esistenza dell' opposto. Parimenti, l'esistenza del reciproco garantisce la legge di cancellazione del prodotto: infatti da

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\cdot\frac{e}{f}$$

si ottiene

$$(\frac{a}{b})^{-1}\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=(\frac{a}{b})^{-1}\frac{a}{b}\cdot\frac{e}{f}.$$

Allora

$$\frac{1}{1} \cdot \frac{c}{d} = \frac{1}{1} \cdot \frac{e}{f} \Rightarrow \frac{c}{d} = \frac{e}{f}.$$

Infine, vale la legge di annullamento del prodotto, infatti, la uguaglianza (si ricorda che $\frac{0}{1}$ e' lo zero dei razionali)

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{0}{1} \; con \; \frac{a}{b} \neq \frac{0}{1}$$

si puo' scrivere

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{0}{1}.$$

La legge di cancellazione implica

$$\frac{c}{d} = \frac{0}{1}.$$

Per completare la costruzione dei numeri razionali, cerchiamo di ritrovare i numeri interi relativi in

$$\mathbb{Q}$$

in modo tale da considerare questo come un ampliamento degli interi relativi. Dalla definizione di rapporto o quoziente data nei numeri naturali e' facile intuire che i razionali, candidati a rappresentare i numeri interi, sono le coppie della forma $(a, 1)$; ovvero le frazioni $\frac{a}{1}$; Quindi, dal punto di vista operativo, i numeri interi a e le coppie $(a, 1)$ si comportano nello stesso modo.

Consideriamo la corrispondenza suriettiva fra $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{Z}$ data da

$$(a, 1) \mapsto a.$$

Questa corrispondenza conserva i risultati di somme e di prodotti.

$$(a, 1) + (b, 1) = (a + b, 1) \mapsto a + b;$$
$$(a, 1) \cdot (b, 1) = (a \cdot b, 1) \mapsto a \cdot b.$$

La corrispondenza ci dice che fare la somma dei numeri razionali $(a, 1)$, $(b, 1)$ in $\mathbb{Q}$ da' lo "stesso" risulato della somma degli interi a , b in $\mathbb{Z}$. Lo stesso vale per il prodotto. Quindi, dal punto di vista operativo, i due oggetti possono essere identificati. Questa osservazione ci permette di concludere che i numeri interi relativi sono contenuti in $\mathbb{Q}$ e sono rappresentati dalle coppie $(a, 1)$ con $a \in \mathbb{Z}$.

Possiamo fare una semplificazione simbolica. In $\mathbb{Q}$ i numeri razionali $(a, 1)$ o $\frac{a}{1}$ li denoteremo semplicemente a. Non ci dilunghiamo sulle regole del calcolo e sulle regole simboliche delle frazioni ritenendo lo studente gia' sufficientemente addestrato. E per concludere, possiamo affermare che con i numeri razionali abbiamo costruito un sistema numerico ove sono possibili tutte le quattro operazioni aritmetiche, illimitatamente (tranne il piccolo problema del rapporto). Ma, come vedremo in seguito, altri problemi ci condurranno a costruire altri sistemi numerici ovvero i numeri reali ed i numeri complessi.