ESAME DI GEOMETRIA E ALGEBRA LINEARE
Politecnico di Milano – Ingegneria informatica

Prima prova in itinere – 30 Aprile 2014

Al termine dell'esame verranno ritirati solo i fogli di protocollo contenenti la bella copia della risoluzione, sui quali andrà indicato nome, cognome e numero di matricola. Il testo dell'esame e qualsiasi altro materiale non deve essere consegnato. La risoluzione deve essere completa di tutti i passaggi necessari alla comprensione dello svolgimento degli esercizi.

1. Siano
$$r: \begin{cases} x + h^2 z - h + 1 = 0 \\ x - y + 2 = 0 \end{cases} \qquad \Pi: \ x + y + (h^2+1)z - h - 1 = 0.$$
   (a) Determinare, al variare del parametro reale h, la mutua posizione di r e Π.
   (b) Per $h = \sqrt{2}$ trovare l'intersezione tra r e Π invertendo la matrice associata al sistema lineare.

2. (a) Fissato un sistema di riferimento nello spazio, scrivere l'equazione cartesiana del piano Π contenente i punti di coordinate:
$$P_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad P_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad P_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$
   Π è uno spazio vettoriale? Se non lo è trovare un piano $\tilde{\Pi}$ parallelo a Π che lo sia e calcolarne una base.
   (b) Sia $V = \mathcal{L}(\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \mathbf{v_3})$, dove
$$\mathbf{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{v_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{v_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$
   Trovare dimensioni e basi di V, $V + \tilde{\Pi}$ e $V \cap \tilde{\Pi}$.
   (c) Stabilire se il vettore $\mathbf{v} = (1,\ 1,\ 2)^T$ appartiene a $\tilde{\Pi}$, V, $V + \tilde{\Pi}$ e $V \cap \tilde{\Pi}$.

3. Siano $V = \mathbb{R}_3[x]$, $W = \mathbb{M}\mathrm{at}_{\mathbb{R}}(2,2)$ ed $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(V, W)$ l'applicazione rappresentata, rispetto alle basi canoniche $\mathcal{S}_V = \{1, x, x^2, x^3\}$ e $\mathcal{S}_W = \{E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}\}$, dalla matrice
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$
   (a) Trovare la dimensione ed una base del nucleo $\ker(A)$ e dello spazio delle colonne $C(A)$.
   (b) Calcolare $f(1 + x^2 - x^3)$.
   (c) Trovare una base di $\ker(f)$ e di $\mathrm{Im}(f)$. Si riesce a riconoscere $\mathrm{Im}(f)$?
   (d) Completare le basi del punto precedente rispettivamente ad una base $\mathcal{B}_V$ di V e ad una base $\mathcal{B}_W$ di W. Ricavare le matrici del cambiamento di base $M_{\mathcal{S}_V \mathcal{B}_V}$ e $M_{\mathcal{B}_W \mathcal{S}_W}$.
   (e) Dato $P \in V$, verificare che A rappresenta l'applicazione f definita come
$$f(P) = \begin{pmatrix} P(1) - P(0) & P(-1) - P(0) \\ P(-1) - P(0) & P(0) \end{pmatrix}$$
   rispetto alle basi canoniche.
   (f) Dopo aver scritto la matrice $\tilde{A}$ che rappresenta l'applicazione f del punto precedente rispetto alle basi $\mathcal{B}_V$ e $\mathcal{B}_W$, verificare la regola del cambiamento di base tra A e $\tilde{A}$.

Soluzioni

1. (a) Studiamo il sistema lineare $(A|\mathbf{b})$ associato a r e Π :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & h^2 & h-1 \\ 1 & -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & h^2+1 & h+1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & h^2 & h-1 \\ 0 & -1 & -h^2 & -h-1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & h^2 & h-1 \\ 0 & 1 & h^2 & h+1 \\ 0 & 0 & 1-h^2 & -h+1 \end{array}\right).$$

Abbiamo $r(A) = 2$ se $h = \pm 1$, altrimenti $r(A) = 3$. Inoltre $r(A|\mathbf{b}) = 2$ se $h = 1$, altrimenti $r(A|\mathbf{b}) = 3$. Pertanto, per il teorema di Rouchè-Capelli, si hanno:

$$\begin{cases} \infty^1 & \text{soluzioni se} \quad h = 1 \quad \Rightarrow \quad r \text{ è contenuta in } \Pi; \\ 0 & \text{soluzioni se} \quad h = -1 \quad \Rightarrow \quad r \text{ è parallela a } \Pi; \\ 1 & \text{soluzione se} \quad h \neq \pm 1 \quad \Rightarrow \quad r \text{ interseca } \Pi \text{ in un unico punto.} \end{cases}$$

(b) Utilizzando il metodo di inversione tramite il calcolo dell'aggiunta abbiamo:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 2 \\ -3 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{x} = A^{-1} \cdot \mathbf{b} = \begin{pmatrix} -\sqrt{2}+1 \\ -\sqrt{2}+3 \\ \sqrt{2}-1 \end{pmatrix}.$$

2. (a) Definiamo i due vettori

$$[\overrightarrow{P_0P_1}] = P_1 - P_0 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad [\overrightarrow{P_0P_2}] = P_2 - P_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

È evidente che i due vettori sono indipendenti, pertanto i tre punti P_0, P_1, P_2 non sono allineati e definiscono un'unico piano Π, descritto in forma parametrica come:

$$\mathbf{x}(t_1, t_2) = P_0 + t_1[\overrightarrow{P_0P_1}] + t_2[\overrightarrow{P_0P_2}].$$

Un'equazione algebrica del piano si può ottenere eliminando i parametri t_1, t_2 dalla descrizione parametrica:

$$\left(\begin{array}{cc|c} -1 & 0 & x-1 \\ 0 & -1 & y-1 \\ -1 & 1 & z-1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -x+1 \\ 0 & 1 & -y+1 \\ 0 & 0 & -x+y+z-1 \end{array}\right)$$

quindi $\Pi : \ x - y - z + 1 = 0$. Il piano Π non è uno spazio vettoriale in quanto non contiene l'origine. Un piano parallelo contenente l'origine è $\tilde{\Pi} : \ x - y - z = 0$ ed una sua base è $\mathcal{B}_{\tilde{\Pi}} = \{[\overrightarrow{P_0P_1}], [\overrightarrow{P_0P_2}]\}$.

(b) Abbiamo

$$r(\mathbf{v_1}|\mathbf{v_2}|\mathbf{v_3}) = r\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2,$$

quindi $\dim(V) = 2$ e $\mathcal{B}_V = \{\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}\}$. Lo spazio somma è generato da

$$V + \tilde{\Pi} = \mathcal{L}\left([\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, [\overrightarrow{P_0P_1}], [\overrightarrow{P_0P_2}]\right) = \mathcal{L}\left(\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, [\overrightarrow{P_0P_2}]\right),$$

essendo $[\overrightarrow{P_0P_1}] = -\mathbf{v_1}$. Dato che

$$r(\mathbf{v_1}|\mathbf{v_2}|[\overrightarrow{P_0P_2}]) = r\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 3,$$

si ha che $V + \tilde{\Pi} = \mathbb{R}^3$ e quindi una sua base è la base canonica $S_3 = \{\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \mathbf{e_3}\}$. Per la formula di Grassmann, abbiamo

$$\dim(V \cap \tilde{\Pi}) = \dim(V) + \dim(\tilde{\Pi}) - \dim(V + \tilde{\Pi}) = 1$$

e quindi $\mathcal{B}_{V\cap\tilde{\Pi}} = \{\mathbf{v_1}\}$.

(c) Abbiamo

- $\tilde{\Pi} = \left\{ (x\ y\ z)^T \in \mathbb{R}^3 \,|\, x - y - z = 0 \right\}$, ma $1 - 1 - 2 = -2 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{v} \notin \tilde{\Pi}$;
- $\det(\mathbf{v_1}|\mathbf{v_2}|\mathbf{v}) = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{v} \in V$;
- dato che in generale $V \subseteq V + \tilde{\Pi}$, segue che $\mathbf{v} \in V + \tilde{\Pi}$;
- $\mathbf{v} \notin \tilde{\Pi}$ quindi $\mathbf{v} \notin V \cap \tilde{\Pi}$.

3. (a) Riduciamo a scala la matrice A:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Abbiamo $\dim(C(A)) = r(A) = 3$ ed una sua base è

$$\mathcal{B}_{C(A)} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Per il teorema del rango, $\dim(\ker(A)) = n - r(A) = 4 - 3 = 1$. Risolvendo il sistema lineare omogeneo associato ad A, abbiamo:

$$\mathcal{B}_{\ker(A)} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}.$$

(b) Per il teorema di rappresentazione, abbiamo:

$$f(1 + x^2 - x^3)|_{\mathcal{S}_W} = A \cdot (1 + x^2 - x^3)|_{\mathcal{S}_V} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

quindi $f(1 + x^2 - x^3) = 0\, E_{11} + 2\, E_{12} + 2\, E_{21} + E_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

(c) Per l'isomorfismo della mappa delle coordinate, abbiamo $\mathrm{Im}(f) \simeq C(A)$ e $\ker(f) \simeq \ker(A)$ e quindi:

$$\mathcal{B}_{\mathrm{Im}(f)} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}, \qquad \mathcal{B}_{\ker(f)} = \{x - x^3\}.$$

È evidente che l'immagine di f coincide con il sottospazio delle matrici simmetriche reali di tipo 2×2.

(d) Un possibile completamento delle basi è:

$$\mathcal{B}_W = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}, \quad \mathcal{B}_V = \{x - x^3, 1, x, x^2\}.$$

Allora le matrici del cambiamento di base sono:

$$M_{\mathcal{S}_V \mathcal{B}_V} = \begin{pmatrix} 1|_{\mathcal{B}_V} & x|_{\mathcal{B}_V} & x^2|_{\mathcal{B}_V} & x^3|_{\mathcal{B}_V} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$M_{\mathcal{B}_W\mathcal{S}_W} = \left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}|_{\mathcal{S}_W} \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}|_{\mathcal{S}_W} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}|_{\mathcal{S}_W} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}|_{\mathcal{S}_W} \right) =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

(e) La matrice che rappresenta l'applicazione f rispetto alle basi canoniche è:

$$A_{f,\{\mathcal{S}_V,\mathcal{S}_W\}} = \begin{pmatrix} f(1)|_{\mathcal{S}_W} & f(x)|_{\mathcal{S}_W} & f(x^2)|_{\mathcal{S}_W} & f(x^3)|_{\mathcal{S}_W} \end{pmatrix} =$$

$$= \left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}|_{\mathcal{S}_W} \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}|_{\mathcal{S}_W} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}|_{\mathcal{S}_W} \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}|_{\mathcal{S}_W} \right) =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = A.$$

(f) La matrice che rappresenta l'applicazione f rispetto alle basi $\mathcal{B}_V, \mathcal{B}_W$ è:

$$A_{f,\{\mathcal{B}_V,\mathcal{B}_W\}} = \begin{pmatrix} f(x+x^3)|_{\mathcal{B}_W} & f(1)|_{\mathcal{B}_W} & f(x)|_{\mathcal{B}_W} & f(x^2)|_{\mathcal{B}_W} \end{pmatrix} =$$

$$= \left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}|_{\mathcal{B}_W} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}|_{\mathcal{B}_W} \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}|_{\mathcal{B}_W} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}|_{\mathcal{B}_W} \right) =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \tilde{A}.$$

È una semplice questione di calcolo verificare che

$$A_{f,\{\mathcal{S}_V,\mathcal{S}_W\}} = M_{\mathcal{B}_W\mathcal{S}_W} \cdot A_{f,\{\mathcal{B}_V,\mathcal{B}_W\}} \cdot M_{\mathcal{S}_V\mathcal{B}_V}.$$