Formula di Grassmann (dimostrazione alternativa al libro)

Definizione 1. Dato U spazio vettoriale su campo $\mathbb{K}$ e V, W sottospazi, definiamo l'insieme diagonale

$$\Delta(V,W) = \{(\mathbf{v},\mathbf{w}) \in V \times W \mid \mathbf{v} = \mathbf{w}\} = \{(\mathbf{v},\mathbf{v}) \in V \times W\} \subseteq V \times W.$$

Proposizione 2. *$\Delta(V,W)$ è un sottospazio dello spazio prodotto $V \times W$ ed è isomorfo a $V \cap W$.*

Dimostrazione. $\Delta(V,W)$ è un sottospazio:

- $(\mathbf{0},\mathbf{0}) \in \Delta(V,W)$;
- $(\mathbf{v},\mathbf{v}) + (\mathbf{w},\mathbf{w}) = (\mathbf{v}+\mathbf{w},\mathbf{v}+\mathbf{w}) \in \Delta(V,W)$;
- $t\,(\mathbf{v},\mathbf{v}) = (t\,\mathbf{v}, t\,\mathbf{v}) \in \Delta(V,W)$.

Definiamo la funzione

$$\begin{array}{rccc} i: & V \cap W & \longrightarrow & \Delta(V,W) \\ & \mathbf{v} & \longmapsto & (\mathbf{v},\mathbf{v}) \end{array}.$$

Valgono le seguenti proprietà:

- $i(t_1\mathbf{v_1} + t_2\mathbf{v_2}) = (t_1\mathbf{v_1} + t_2\mathbf{v_2}, t_1\mathbf{v_1} + t_2\mathbf{v_2}) = t_1(\mathbf{v_1},\mathbf{v_1}) + t_2(\mathbf{v_2},\mathbf{v_2}) = t_1\, i(\mathbf{v_1}) + t_2\, i(\mathbf{v_2})$;
- $\ker(i) = \{\mathbf{0}\}$, quindi i è iniettiva;
- dato $(\mathbf{v},\mathbf{v}) \in \Delta(V,W)$, per definizione si ha $\mathbf{v} \in V$ e $\mathbf{v} \in W$, quindi $\mathbf{v} \in V \cap W$. Questo implica che $(\mathbf{v},\mathbf{v}) = i(\mathbf{v})$, quindi i è suriettiva.

Abbiamo dimostrato che i è lineare e biunivoca, pertanto i è un isomorfismo. □

Corollario 3. $\dim(V \cap W) = \dim(\Delta(V,W))$.

Lemma 4. *Dati V e W spazi vettoriali su campo $\mathbb{K}$, vale* $\dim(V \times W) = \dim(V) + \dim(W)$.

Dimostrazione. siano $\mathcal{B}_V = \{\mathbf{v_1}, \dots, \mathbf{v_n}\} \subset V$ e $\mathcal{B}_W = \{\mathbf{w_1}, \dots, \mathbf{w_m}\} \subset W$ basi dei rispettivi spazi. Allora, è lasciato al lettore verificare che $\mathcal{B}_{V\times W} = \{(\mathbf{v_1},\mathbf{0}), \dots, (\mathbf{v_n},\mathbf{0}), (\mathbf{0},\mathbf{w_1}), \dots, (\mathbf{0},\mathbf{w_m})\} \subset V \times W$ è una base di $V \times W$. Pertanto $\dim(V \times W) = n + m = \dim(V) + \dim(W)$. □

Esempio 5. $\dim(\mathbb{K}^m \times \mathbb{K}^n) = \dim(\mathbb{K}^m) + \dim(\mathbb{K}^n) = m+n$. Pertanto, per il teorema di isomorfismo, $\mathbb{K}^m \times \mathbb{K}^n \simeq \mathbb{K}^{m+n}$.

Teorema 6. *Dato U spazio vettoriale su campo $\mathbb{K}$ e V, W sottospazi, allora*

$$\dim(V) + \dim(W) = \dim(V+W) + \dim(V \cap W).$$

Dimostrazione. Definiamo la funzione

$$\begin{array}{rccc} j: & V \times W & \longrightarrow & V + W \\ & (\mathbf{v},\mathbf{w}) & \longmapsto & \mathbf{v} - \mathbf{w} \end{array}.$$

Valgono le seguenti proprietà:

- j è una applicazione lineare (esercizio);
- $\ker(j) = \{(\mathbf{v},\mathbf{w}) \in V \times W \mid \mathbf{v} - \mathbf{w} = \mathbf{0}\} = \Delta(V,W) \simeq V \cap W$, quindi $\dim(\ker(j)) = \dim(V \cap W)$;
- dato $\mathbf{u} \in V + W$, per definizione esistono $\mathbf{v} \in V$ e $\mathbf{w} \in W$ tali che $\mathbf{u} = \mathbf{v} + \mathbf{w}$. Questo implica che $\mathbf{u} = j(\mathbf{v}, -\mathbf{w})$, quindi j è suriettiva e $\mathrm{r}(j) = \dim(V+W)$.

Applicando ora il teorema di nullità più rango alla funzione j, otteniamo:

$$\dim(V \times W) = \dim(\ker(j)) + \mathrm{r}(j) \qquad \Longrightarrow \qquad \dim(V) + \dim(W) = \dim(V \cap W) + \dim(V+W).$$

□

Corollario 7. *Se $U = V \oplus W$, l'applicazione j è un isomorfismo tra $V \times W$ e U e vale* $\dim(V \oplus W) = \dim(V) + \dim(W)$.

Dimostrazione. Se $U = V \oplus W$ allora $\ker(j) \simeq U \cap W = \{\mathbf{0}\}$, cioè j è anche iniettiva e quindi un isomorfismo. □