Concetto di integrale

Premessa

L'idea di confrontare grandezze da valutare con quelle piu' semplici e gia' note si perde nella notte dei tempi.

In particolare questo metodo euristico fu applicato al calcolo di aree e volumi. Non poche e valide tesi furono formulate.

E' del tutto evidente che volendo risalire alle origini ci si ferma al periodo greco che oltre al fatto che in quel periodo furono gettate le basi logiche della geometria, piu' di chiunque altro ha lasciato traccia indelebile e testimonianze di profondo pensiero. Si fa riferimento, nel contesto delle aree e volumi, al metodo di esaustione di Eudosso di Cnido. Questo metodo cerca di convalidare rigorosamente le innumerevoli tesi che si intuivano dal metodo empirico del confronto. L'esaustione non e' un metodo analitico di ricerca che conduce ad una scoperta, ma fornisce solo un mezzo di verifica e permette di dimostrare, per assurdo,un risultato che si suppone gia' noto.

Ad Archimede si riesce ad attribuire qualche larvata idea di calcolo integrale allorquando calcola, aree, volumi, baricentri con tecniche spesso geniali. Ad esempio, considera le figure piane costituite da fili pesanti e ne studia l'equilibrio.

E' il XVII secolo che porta alla definizione dei concetti dell'analisi infinitesimale. E' uno dei periodi piu' vivaci e fecondi dell'intera storia della matematica, dando i piu' e versatili strumenti che mai la matematica abbia messo a disposizione della ricerca scientifica. E' in questo periodo che nascono, contemporaneamente , il calcolo differenziale ed il calcolo integrale.

Nella fondazione del Calcolo sono coinvolte piu' scuole scientifiche che si intrecciano, si criticano e si completano. Essa culmina e si sostanzia con le opere di Isaac Newton e di Gottfried Leibnitz.

In Newton l'impostazione analitica e' rivolta alla derivazione dei " fluenti" (le funzioni). L'integrazione viene concepita come antiderivata (primitiva) ovvero conoscere la fluente (la funzione) una volta nota la flussione (la derivata)):il teorema fondamentale del calcolo integrale.

E' a Leibnitz col suo " Calculus summatorium " che dobbiamo il concetto di integrale definito sommando tutti i rettangoli bidimensionali di base infinitesima dx ed altezza $f(x)$. A Leibnitz dobbiamo anche le notazioni che useremo. Certo questi concetti poggiavano su principi incerti come "gli evanescenti" ed altro.

La definitiva rigorizzazione e consolidamento dei principi fu compiuta da D'alambert e da Cauchy.

I problemi che conducono al concetto di integrale

Nella premessa abbiamo evidenziato due problemi che conducono al concetto di integrale: il problema delle aree di figure piane ed il problema dell'antiderivata o della primitiva.

Calcolo dell' area di un trapezioide

Imposteremo il problemi con gli strumenti matematici che abbiamo a disposizione, ma seguiremo l'impostazione del "Calculus summatorium " di Leibnitz.

Sia $y = f(x) > 0$ una funzione definita in $[a, b]$. Nel piano cartesiano il grafico della funzione, l'intervallo $[a, b]$ ed i segmenti che congiungono i punti $(a, 0)$ con $(a, f(a)$ e $(b, 0)$ con $(b, f(b)$ definiscono una figura piana T che e' a forma di trapezio che chiameremo **trapezioide** . Vogliamo determinare l'area del trapezioide. A tal fine si utilizzano figure elementari ben note di cui conosciamo l'area e con una sufficiente generalita': i rettangoli. Possiamo iniziare l'approssimazine di T mediante un rettangolo

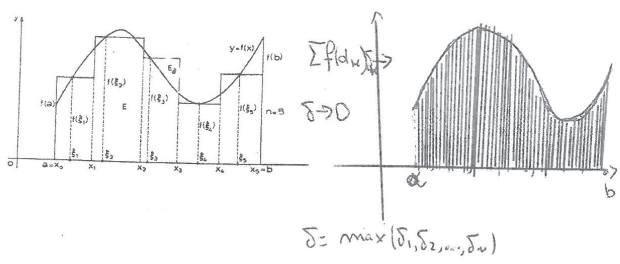
r che ha base $[a, b]$ ed altezza il minimo valore m della funzione oppure il rettangolo R con base $[a, b]$ ed altezza il massimo valore M di $f(x)$. Visualizzando queste figure appare che le approssimazioni ottenute in questo modo con un solo rettangolo sono molto crude. E' piu utile considerare piu' rettangoli come mostra la figura. La costruzione e' semplice, si costruiscono le basi dei rettangoli dividendo l'intervallo $[a, b]$ in n intervalli parziali utilizzando $n + 1$ punti $a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_n = b$

$$I_1 = [x_0, x_1],\ I_2 = [x_1, x_2],\ I_3 = [x_2, x_3], ..., I_n = [x_{n-1}, x_n].$$

Indicheremo con δ_k l'ampiezza del $k - esimo$ intervallo I_k; $\delta_k = x_k - x_{k-1}$. Si prendono n punti arbitrariamente uno solo per ogni intervallo parziale : $\alpha_1 \in I_1$, $\alpha_2 \in I_2$,...,$\alpha_n \in I_n$. Si costruiscono n rettangoli del tipo: I_k come base ed $f(\alpha_k)$ come altezza. La figura geometrica S, unione di tutti i rettangoli, e' chiamata scaloide o plurirettangolo o multirettangolo, la cui area e' la somma delle aree dei rettangoli componenti. Usando il simbolo di sommatoria possiamo scriverla (si osservi la figura)

$$Area(S) = f(\xi_1)\delta_1 + f(\xi_2)\delta_2 + ... + f(\xi_n)\delta_n) = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\delta_k$$

Indicando $\delta = max(\delta_1, \delta_2, ..., \delta_n)$; dato che lo scaloide tende a confondersi con il trapezioide (si osservi la figura)



si puo' ben accettare come area del trapezioide il seguente limite (se esiste finito)

$$\lim_{\delta \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\delta_k := area(T).$$

La scelta di considerare δ e' dovuta al fatto che si vuole che per tutti i rettangoli l'ampiezza della base tenda a zero simultaneamente. Questo risultato lo possiamo ottenere facendo intervenire una sola variabile: δ. Questa scelta rende la trattazione agevole ed efficace.

Ricerca delle funzioni primitive

Sia $y = f(x)$ una funzione definita in $[a, b]$ $(a < b)$. Si chiama funzione primitiva od antiderivata di $f(x)$ una funzione $F(x)$, derivabile, tale che risulti in $[a, b]$

$$i) \qquad F'(x) = f(x).$$

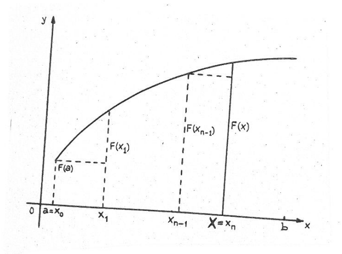
(Nella premessa abbiamo osservato che questo problema fu trattato da Newton per determinare il moto di un punto mobile conoscendone la velocita').

Una equazione di questo tipo l'abbiamo gia' incontrato fra le conseguenze del teorema di Lagrange. Esse sono dette equazioni differenziali poiche' l'incognita $F(x)$ appare sotto il segno di derivata. Sappiamo che, in generale, una equazione non sempre ha soluzione. Dalle nostre conoscenze possiamo indicare qualche proprieta' di consistenza dell'equazione i).

Nella teoria delle funzioni fin qui' trattata, dato che F e' derivabile, la derivata $F'(x)$ non puo' avere discontinuita' di prima o terza specie. Quindi per rendere consistente l'equazione i) f deve essere o continua o presentare discontinuita' di seconda specie. Poi vedremo quali scelte dobbiamo operare per avere l'esistenza.

Dalle conseguenze del teorema di Lagrange ricaviamo che ogni altra primitiva $G(x)$ di $f(x)$ ha forma $G(x) = F(x) + c$, c costante arbitraria, poiche' $F(x)$, $G(x)$ hanno la stessa derivata.

Supponiamo che esista F, essa e' continua. Cerchiamo una forma che leghi F ed f senza l'intervento della derivata. Tracciamone il grafico e supponiamo che sia della seguente forma



Scegliamo un punto X nell'intervallo $[a, b]$. Operiamo come nel punto 1) dividendo in n intervalli parziali l'intervallo $[a, X]$ mediante $n + 1$ punti, $a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_n = X$

$$I_1 = [x_0, x_1],\ I_2 = [x_1, x_2],\ I_3 = [x_2, x_3], ..., I_n = [x_{n-1}, x_n].$$

Indicheremo con δ_k l'ampiezza del $k - esimo$ intervallo I_k; $\delta_k = x_k - x_{k-1}$. Calcoliamo i valori di $F(x)$ in tali punti :

$$F(a) = F(x_0),\ F(x_1),\ F(x_2), ..., F(x_k), ..., F(x_n) = F(X).$$

Allora vale

$$F(X) - F(a) = (F(x_n) - F(x_{n-1})) + (F(x_{n-1}) - F(x_{n-2}) + (F(x_{n-2}) - F(x_{n-3})) + ...+$$

$$(F(h_k) - F(x_{k-1})) + ... + (F(x_1) - F(x_0)) = \sum_{k=1}^{n} (F(x_k) - F(x_{k-1}))$$

L'incremento $F(X) - F(a)$ della funzione $F(x)$ in $[a, X]$ e' uguale alla somma degli incrementi parziali tipo $F(x_k) - F(x_{j-1})$ relativi agli intervalli parziali I_1, I_2, ..., I_n.

Aplicando il teorema di Lagrange al generico intervallo $I_k = [x_{k-1}, x_k]$ si ha

$$ii) \qquad F(x_k) - F(x_{k-1}) = F'(\eta_k)\delta_k = f(\eta_k)\delta_k.$$

Possiamo quindi scrivere

$$F(X) - F(a) = \sum_{k=1}^{n} f(\eta_k)\delta_k.$$

Notiamo che η_k non e' un punto arbitrario ma e' dato dal teorema di Lagrange; inoltre qualunque sia la suddivisione dell'intervallo $[a, X]$ la somma da' sempre lo stesso valore, possiamo quindi scrivere

$$iii) \qquad F(X) - F(a) = \lim_{\delta \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\eta_k)\delta_k$$

con $\delta = max(\delta_1, \delta_2, ..., \delta_n)$.

Il problema della ricerca di una funzione primitiva conduce alla ricerca del limite $iii)$ per ogni $X \in [a, b]$. Allora per ogni $X \in [a, b]$ ricaviamo il valore $F(X)$ sotto l' assunzione che esista. Questo e' quanto formulava Newton (senza il processo di limite): nota la flussione (la velocita' di un punto mobile) determinare la fluente ovvero la posizione del punto mobile.

Il processo di limite completa e consolida l'idea di Newton.

$F(a)$ e' arbitrario. Notiamo che se $F(a)$ cambia, il grafico di $F(x)$ trasla rispetto all'asse delle ordinate.

Ci limitiamo a questi due esempi per osservare che entrambi, seppure molto diversi fra loro, conducono ad una stessa operazione: il limite delle somme della forma

$$\sum_{k=1}^{n} f(\eta_k)\delta_k.$$

Ebbene ora diamo la definizione della operazione considerata nei due esempi, in forma generale, senza alcun riferimento alle sue interpretazioni.

Definizione di integrale definito

Ora definiamo il concetto che ci permettera' di risolvere entrambi i problemi considerati sopra. Lo introdurremo come una operazione matematica senza alcun riferimento alle varie interpretazioni.

Sia $y = f(x)$ definita nell'intervallo $[a, b]$ con $a < b$. Effettuiamo una suddivisione o partizione dell'intervallo $[a, b]$ dividendo l'intervallo in n intervalli parziali utilizzando $n + 1$ punti cosi' ordinati

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_n = b,$$

detti punti di suddivisione. L' intervallo e' suddiviso in n intervalli parziali:

$$I_1 = [x_0, x_1],\ I_2 = [x_1, x_2],\ I_3 = [x_2, x_3], ..., I_n = [x_{n-1}, x_n].$$

Abbiamo effettuato una *partizione* dell'intervallo $[a, b]$.

Indicheremo con δ_k l'ampiezza del k-esimo intervallo I_k; $\delta_k = x_k - x_{k-1}$.

Allora

$$b - a = \sum_{k=1}^{n} \delta_k$$

.

Poniamo $\delta = max(\delta_1, \delta_2, ..., \delta_n)$.

In ogni intervallo parziale prendiamo un punto, arbitrariamente,

$$\alpha_1 \in I_1,\ \alpha_2 \in I_2,\ ..., \alpha_n \in I_n$$

.

e calcoliamo i valori della funzione in tali punti:

$$f(\alpha_1),\ f(\alpha_2),\ ..., f(\alpha_n).$$

Si costruiscono n prodotti del tipo $f(\alpha_k)\delta_k$.
Consideriamo la somma

$$S_\delta = f(\alpha_1)\delta_1 + f(\alpha_2)\delta_2 + ... + f(\alpha_n)\delta_n = \sum_{k=1}^{n} f(\alpha_k)\delta_k.$$

Tale somma viene detta *somma integrale* di $f(x)$. Osserviamo che abbiamo posto il pedice δ per indicare che facciamo dipendere il valore della somma integrale da δ.

$$S : \delta \to \mathbb{R}.$$

Fissato δ si possono costruire infinite partizioni di $[a, b]$ con infinite scelte dei punti α_k in modo tale che l' ampiezza degli intervalli parziali sia inferiore a δ. Quindi abbiamo infinite partizioni che hanno massimo intervallo di ampiezza inferiore a δ. δ misura la quantita dei punti di suddivisione o la finezza della partizione. Pertanto la funzione che stiamo considerando e' ad infinitissimi valori ovvero ad ogni valore di δ corrispondono infiniti valori S_δ. E' difficile immaginare il grafico di questa funzione nel piano (δ, S).

C'e' da tener presente che anche i punti α_k godono di notevole liberta'.

Non e' facile trattare questa funzione. E non e' nemmeno agevole rappresentare graficamente tale funzione nel piano (δ, S); possiamo dire che ogni retta parallela all'asse S incontra il grafico in infiniti punti. Nonostante queste considerazioni, diamo la definizione di integrale definito di $f(x)$ nel seguente modo.

• **Definizione di integrale definito**

Sia $y = f(x)$ definita nell'intervallo limitato $[a, b]$ con $a < b$. Chiamiamo integrale definito di $y = f(x)$ il limite

$$\lim_{\delta \to 0} S_\delta = \lim_{\delta} \sum_{k=1}^{n} f(\alpha_k)\delta_k,$$

se esiste $\underline{finito}$ ed <u>unico</u> e lo indicheremo

$$\int_a^b f(x)dx$$

ovvero SI SCRIVE

$$i) \qquad \lim_{\delta} S_\delta = \int_a^b f(x)dx.$$

Il simbolo di integrale ricorda la struttura della somma integrale :$\sum \to \int$, $\delta_k \to dx$ e $f(\alpha_k) \to f(x)$. Questa notazione e' dovuta a Leibnitz. Mentre la definizione di integrale e' dovuta a Cauchy. La stessa fu data da Mengoli per casi particolari.

Diamo la definizione del limite.

• Diremo che esiste il

$$\lim_{\delta} \sum_{k=1}^{n} f(\alpha_k)\delta_k := \int_a^b f(x)dx.$$

oppure

$$\lim_{\delta} S_\delta = \int_a^b f(x)dx.$$

se

$$\forall \epsilon > 0 \; \exists \delta_\epsilon : \; per \; 0 < \delta < \delta_\epsilon \Rightarrow$$

$$\left| \sum_{k=1}^{n} f(\alpha_k)\delta_k - \int_a^b f(x)dx \right| < \epsilon$$

oppure

$$|S_\delta - \int_a^b f(x)dx| < \epsilon.$$

L' integrale definito e' una applicazione che fa passare da funzioni a numeri ovvero

$$\int_a^b : f \mapsto c \in \mathbb{R}.$$

• Diremo che $f(x)$ e' *integrabile secondo Cauchy* se esiste il limite i) ed e' unico.

Terminologia: f viene chiamata funzione integranda, $[a, b]$ intervallo di integrazione, a primo estremo di integrazione e b secondo estremo di integrazione, x variabile di integrazione.

Se il limite i) esiste (unico) f e detta funzione integrabile secondo Cauchy.

Dalle considerazioni fatte sulle somme integrali sembra non agevole verificare l'esistenza di funzioni integrabili. Seppur la dimostrazione non e' agevole possiamo caratterizzare una ampia classe di funzioni integrabile data dal seguente

Teorema di Cauchy- Ogni funzione continua in $[a, b]$ e' integrabile

Dimostreremo il teorema piu' avanti.

Il teorema di Cauchy ci da' un insieme di funzioni integrabili : le funzioni continue $(C^0([a, b])$.

• **Proprieta' dell'integrale definito**

L' integrazione definiita combina l'operazione di somma con l'operazione di limite. Essa conserva le proprieta' della sommatoria e del limite.

Consideriamo funzioni $f(x)$, $g(x)$ etc. integrabili nell'intervallo $[a, b]$ con $a < b$.

1. Sia c un numero reale. Allora $f(x) = c$ e' integrabile e si ha

$$\int_a^b c dx = c(b - a).$$

Scriviamo la somma integrale di $f(x) = c$

$$\sum_{k=1}^{n} f(\alpha_k)\delta_k = \sum_{k=1}^{n} c\delta_k = c\sum_{k=1}^{n} \delta_k = c(b - a)$$

passando al limite

$$\int_a^b c dx = \lim_{\delta \to 0} \sum_{k=1}^{n} c\delta_k = c(b - a).$$

2. Se $f(x)$ e' integrabile allora $cf(x)$ con $c \in \mathbb{R}$ e' integrabile e si ha

$$\int_a^b cf(x)dx = c\int_a^b f(x)dx \quad proprieta' \; di \; omogeneita',$$

ovvero le costanti possono essere portate fuori o dentro il simbolo di integrale.

Questa proprieta' discende dalla proprieta' di omogeneita' del processo di limite e del simbolo di sommatoria (raccoglimento a fattor comune).

Mostriamo che $\lim_{\delta\to 0}\sum_{k=1}^{n} cf(\alpha_k)\delta_k$ esiste e lo scriviamo (per definizione) $\int_a^b cf(x)dx$ e che risulta uguale a $c\int_a^b f(x)dx$.

Ora

$$\sum_{k=1}^{n} cf(\alpha_k)\delta_k = cf(\alpha_1)\delta_1 + cf(\alpha_2)\delta_2 + ... + cf(\alpha_n)\delta_n =$$

$$c(f(\alpha_1)\delta_1 + f(\alpha_2)\delta_2 + ... + f(\alpha_n)\delta_n) = c\sum_{k=1}^{n} f(\alpha_k)\delta_k.$$

Ricordando che le costanti commutano con il processo di limite si ha

$$i) \qquad \lim_{\delta\to 0}\sum_{k=1}^{n} cf(\alpha_k)\delta_k = c\lim_{\delta\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\alpha_k)\delta_k = c\int_a^b f(x)dx.$$

Quindi il limite delle somme integrali di $cf(x)$ esiste finito quindi la i) implica

$$\int_a^b cf(x)dx = c\int_a^b f(x)dx.$$

3. Siano $f(x)$ e $g(x)$ integrabili in $[a,b]$ allora $(f(x)+g(x)$ e' integrabile e si ha

$$ii) \qquad \int_a^b (f(x)+g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx.$$

ovvero l'integrazione si distribuisce sugli addendi della somma. Essa discende dalla proprieta' distributiva del processo di limite e di sommatora.

Il procedimento dimostrativo e' analogo a quello del punto 2): sapendo che le somme integrali di $f(x)$ e $g(x)$ ammettono limite per $\delta\to 0$ allora la somma integrale di $(f(x)+g(x))$ ammette limite per $\delta\to 0$ e vale ii).

Scriviamo la somma integrale di $f(x)+g(x)$;

$$*) \qquad \sum_{k=1}^{n}(f(\alpha_k)+g(x_k))\delta_k = (f(\alpha_1)+g(x_1))\delta_1 + (f(\alpha_2)+g(x_2))\delta_2 + ... + (f(\alpha_n)+g(x_n))\delta_n =$$

$$f(\alpha_1)\delta_1 + g(x_1)\delta_1 + f(\alpha_2)\delta_2 + g(x_2)\delta_2 + ... + f(\alpha_n)\delta_n + g(x_n)\delta_n =$$

$$\sum_{k=1}^{n} f(\alpha_k)\delta_k + \sum_{k=1}^{n} f(\alpha_k)\delta_k.$$

Applicando il limite alla (*) e ricordando che il limite della somma e' la somma del limite si ha

$$(**) \qquad \lim_{\delta\to 0}\sum_{k=1}^{n}(f(\alpha_k)+g(x_k))\delta_k = \lim_{\delta\to 0}(\sum_{k=1}^{n}(f(\alpha_k)\delta_k + \sum_{k=1}^{n} g(x_k))\delta_k) =$$

$$\lim_{\delta\to 0}\sum_{k=1}^{n}(f(\alpha_k)\delta_k + \lim_{\delta\to 0}\sum_{k=1}^{n}(g(\alpha_k)\delta_k = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b (x)dx$$

Dalla (**) si ha che $\lim_{\delta\to 0}\sum_{k=1}^{n}(f(\alpha_k)+g(x_k))\delta_k$ esiste finito e si scrive per definizione) $\int_a^b(f(x)+g(x))dx$, allora (**) implica

$$\int_a^b (f(x)+g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx.$$

4. Dalle proprieta' 2), 3) si ha la*proprieta' di linearita'* dell'integrazione, ovvero

$$\int_a^b (cf(x)+dg(x))dx = c\int_a^b f(x)dx + d\int_a^b g(x)dx$$

con $c, d \in \mathbb{R}$.

5.

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx.$$

Cambiando l'ordine dei punti nella definizione di integrale di f in $[a,b]$ (questo vuol dire cambiare ordine sull'asse) si ha

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\delta\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\delta_i = \lim_{\delta\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i-x_{i-1}) = -\lim_{\delta\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_{i-1}-x_i) = -\int_b^a f(x)dt.$$

6. $\int_a^a f(x)dx = 0$. Dalla proprieta' (5) $\int_a^a(f(x)dx = -\int_a^a f(x)dx \Rightarrow 2\int_a^a f(x)dx = 0 \Rightarrow \int_a^a f(x)dx = 0.$

7. Se $f(x) \geq c > 0$ allora $\int_a^b f(x)dx > 0$ con $a < b$. Dal teorema inverso della permanenza del segno $0 < c(b-a) \leq \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\delta_i \Rightarrow \int_a^b f(x)dx = \lim_{\delta\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\delta_i \geq c(b-a) > 0$. Pertanto

8. Se $f(x) \geq c > 0$ allora $\int_a^b f(x)dx > 0$ rappresenta l'area del trapezioide T sotteso dal grafico della funzione. Estendiamo questa interpretazione anche al caso $f(x) \geq 0$. Diremo che, per $f(x) \geq 0$ $\int_a^b f(x)dx \geq 0$. Se $f(x)$ e' continua e $\int_a^b f(x)dx = 0$ allora $f(x) \equiv 0$ in $[a,b]$. Infatti se esistesse un punto $x_0 \in [a,b]$ con $f(x_0) > 0$ allora in un intorno $U_0 = [a', b']$ di x_0 si avrebbe $f(x) > c > 0$ dal teorema della permanenza del segno. Essendo $f(x)$ continua ogni sua restrizione e' continua e quindi integrabile. Allora, dalla dedinizione, $\int_a^b f(x)dx \geq \int_{a'}^{b'} f(x) \geq c > 0$ assurdo. Pertanto se $f(x) \geq 0$ e non identicamente nulla l' integrale rapresenta l'area del trapezioide T. Se $f(x) < 0$ allora $-f(x) > 0$ per cui $\int_a^b f(x)dx = -area(T)$.

9. *Monotonia dell'integrale definito.*

   Siano $f(x)$ e $g(x)$ integrabili. Se $f(x) \geq g(x)$ in $[a,b]$ con $a < b$ allora $\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b f(x)dx$. Basta applicare alla funzione $F(x) = f(x) - g(x)$ i risultati del punto (8).

10. Sia $f(x)$ definita e continua in $[a,b]$ con $a < b$ allora

$$|\int_a^b f(x)dx| \leq \int_a^b |f(x)|dx.$$

Ora se $f(x)$ e' continua anche $|f(x)|$ e' continua quindi sono entrambe integrabili. Ricordando il limite del valore assoluto e la monotonia del processo di limite si ha

$$|\int_a^b f(x)dx| = \lim_{\delta\to 0}|\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\delta_i| \leq \lim_{\delta\to 0}\sum_{i=1}^{n}|f(\xi_i)|\delta_i = \int_a^b |f(x)|dx.$$

Si puo' anche applicare la monotonia dell'integrale definito alla relazione $-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$.

Osservazione: abbiamo richiesto la continuita' della funzione f per avere la integrabilita' di $|f(x)|$. La sola integrabilita' di $f(x)$ non garantisce la integrabilita' $|f(x)|$.

11. *Proprieta' additiva dell'integrale rispetto all'intervallo di integrazione.*

    Sia $f(x)$ una funzione continua in $[a,b]$, $[a,c]$ ed in $[c,b]$ allora

    $$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

    Per la dimostrazione ricordiamo che per ogni partizione di $[a,b]$ le somme integrali tendono all'integrale definito. Supponiamo $a < c < b$.

    Consideriamo partizioni P_δ^a relative all'intervallo $[a,c]$ allora le somme integrali corrispondenti S_δ^a tendono a $\int_a^c f(x)dx$. Altrettanto si puo' dire per $[c,b]$ con partizioni P_δ^b con lo stesso δ e si ha che S_δ^b tende a $\int_c^b f(x)dx$. Ora $P_\delta^a \cup P_\delta^b$ e' una partizione di $[a,b]$ con somma integrale $S_\delta = S_\delta^a + S_\delta^b$. Allora

    $$\int_a^b f(x)dx = \lim_\delta S_\delta = \lim_{\delta\to 0} S_\delta^a + S_\delta^b = \lim_{\delta\to 0}(S_\delta^a + \lim_{\delta\to 0} S_\delta^b) = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

    Sia $a < b < c$, ripetendo la costruzione precedente si ha

    $$\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx - \int_c^b f(x)dx$$

    .

    per cui

    $$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

    Tutti gli altri casi si dimostrano in modo analogo. Quindi la proprieta' vale qualunque siano a, b, c.

    Osservazione: anche per questa proprieta' abbiamo richiesto la continuita' della funzione $f(x)$ per avere la continuita' di ogni restrizione di $f(x)$ e di conseguenza la integrabilita' di $f(x)$ su ogni sottointervallo.

12. *Interpretazione geometrica dell'integrale definito*

    Sia $y = f(x)$ definita e continua in $[a,b]$. Consideriamo i sottointervalli di $[a,b]$ in cui $f(x)$ ha segno costante; cosi' supponiamo che $f(x) \geq 0$ in $[a,c]$, $f(x) \leq 0$ in $[c,d]$, e $f(x) \geq 0$ in $[d,c]$, $a < c < d < b$. Indichiamo con T_1, T_2, T_3 i trapezioidi sottesi dal grafico della funzione negli intervalli $[a,c]$, $[c,d]$, $[d,b]$, rispettivamente. Allora

    $$\int_a^b f(x)dx = area(T_1) - area(T_2) + area(T_3).$$

Essa e' la somma algebrica delle aree dei trapezoidi sottesi.

Nota (1): nella definizione di somme integrale abbiamo scelto arbitrariamente i punti α in cui calcolare la funzione ed arbitraria e' la costruzione delle partizioni. Questo modo di procedere conferisce alla definizione la massima generalita'. Dal punto di vista pratico (non solo) e' opportuno avere delle somme integrali comode e semplici per il calcolo anche approssimato. Ad esempio si possono usare partizioni particolari dividendo l'intervallo in parti uguali, scegliere i punti α_i ove la funzione assume minimo m_i o massimo M_i nei rispettivi intervalli. Cosi' si hanno le seguenti sommatorie:

$$\sigma_\delta^m = m_1\delta_1 + m_2\delta_2 + ... + m_n\delta_n = \sum_{i=1}^n m_i\delta_i.$$

Viene chiamata somma integrale per difetto. Se $f(x)$ e' positiva lo scaloide corrispondente a questa sommatoria e' inscritto nel trapezioide.

Analogamente

$$\sigma_\delta^M = M_1\delta_1 + M_2\delta_2 + ... + M_n\delta_n = \sum_{i=1}^{n} M_i\delta_i.$$

Viene chiamata somma integrale per eccesso.

Lo scaloide associato a tale sommatoria circoscrive il trapezioide se la funzione e' positiva.

Ogni altra somma integrale e' compresa fra queste due.

Nota 2- Le somme integrali per difetto e per eccesso σ_δ^m, σ_δ^M possono essere estese alle funzioni limitate sostiluendo m_i con λ_i, estremo inferiore della funzione nell'intervallo parziale $[x_{i-1}, x_i]$ ed M_i con Λ_i, estremo superiore della funzione nell'intervallo parziale $[x_{i-1}, x_i]$. Cosi' si ha

Somma integrale inferiore

$$\sigma_\delta^i = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i\delta_i$$

e

somma integrale superiore

$$\sigma_\delta^s = \sum_{i=1}^{n} \Lambda_i\delta_i.$$

La teoria dell'integrazione secondo Riemann si basa sulla nozione di somma inferiore e di somma superiore e l'integrabilita' di una funzione limitata (questa condizione e' imposta dall'uso di λ_i e di Λ_i) richiede che l'insieme delle somme inferiori e quello delle somme superiori, al variare di δ, costituiscano una coppia di classi contigue di numeri reali. L'elemento separatore di tale coppia e' detto integrale definito secondo Riemann. Si ricorda che l'elemento separatore e' unico.

Brevemente descriviamo la coppia di classi contigue delle somme inferiori e superiori. La costruzione poggia sulla monotonia dell'estremo superiore ed inferiore. Sia $y = f(x)$ definita e limitata in $[a, b]$ e sia $[a, c]$ con $a < c < b$ un sottointervallo di $[a, b]$ al crescere di c otteniamo dei sottointervalli ordinati per inclusione e li diremo crescenti. Indichiamo $\lambda_c = inf_{x\in[a,c]}f(x)$ e $\Lambda_c = Sup_{x\in[a,c]}f(x)$. Ebbene λ_c decresce al crescere di c e Λ_c cresce al crescere di c ovvero per intervalli piu' ampi l'estremo inferiore diminuisce mentre l'estremo superiore aumenta.

In generale, consideriamo due sottointervalli di $[a, b]$, $[c, d] \subseteq [c_1, d_1]$ con $c < d$ e $c_1 < d_1$ si ha

$$\lambda_1 = inf_{x\in[c_1,d_1]}f(x) \le \lambda = inf_{x\in[c,d]}f(x) \le \Lambda = sup_{x\in[c,d]}f(x) \le \Lambda_1 = sup_{x\in[c_1,d_1]}f(x).$$

Qualche osservazione. La funzione $y = f(x)$ e' assunta limitata quindi l'insieme immagine e' limitato. Possiamo definire l'estremo inferiore ed estremo superiore di f in $[a, b]$ cosi' scriviamo $\lambda = Inf_{x\in[a,b]}f(x)$, $\Lambda = Sup_{x\in[a,b]}f(x)$ e dalle proprieta' di monotonia dei due estremi si

$$\lambda = Inf_{x\in[a,b]}f(x) \le \lambda_i = Inf_{x\in[x_{i-1},x_i]}f(x) \le \Lambda_i = Sup_{x\in[x_{i-1},x_i]}f(x) \le \Lambda = Sup_{x\in[a,b]}f(x)$$

usando i simboli gia' introdotti si ha

$$\lambda(b-a) = \sum_{i=1}^{n} \lambda\delta_i \le \sum_{i=1}^{n} \lambda_i\delta_i \le \sum_{i=1}^{n} \Lambda_i\delta_i \le \sum_{i=1}^{n} \lambda\delta_i \le \Lambda(b-a).$$

Le somme inferiori e superiori, che chiameremo somme di Riemann, formano insiemi limitati.

Indichiamo con $\mathfrak{D}$ una suddivisione e con $s(\mathfrak{D})$ il valore della corrispondente somma integrale inferiore e con $S(\mathfrak{D})$ il valore della corrispondente somma integrale superiore; si ha che per ogni suddivisione $\mathfrak{D}$ si ha

$$s(\mathfrak{D}) \leq S(\mathfrak{D}).$$

Al variare di $\mathfrak{D}$ (cambiando suddivisione), $s(\mathfrak{D})$ e $S(\mathfrak{D})$ formano due insiemi di numeri reali che denotiamo $\mathbb{A}$ e $\mathbb{B}$ rispettivamente. Questi formano una coppia separata di numeri reali ovvero ogni elemento $s(\mathfrak{D}_1)$ e' inferiore di ogni $S(\mathfrak{D}_2)$ con $(\mathfrak{D}_1)$ e $(\mathfrak{D}_2)$ suddivisioni arbitrarie di $[a, b]$ non necessariamente uguali. Verifichiamo.

Ricordiamo la monotonia delle somme di Riemann rispetto alla ampiezza degli intervalli. Consideriamo la suddivisione $(\mathfrak{D}_3) = (\mathfrak{D}_1) \cup (\mathfrak{D}_2)$ ovvero $(\mathfrak{D}_3)$ e' ottenuta aggiungendo ai punti di $(\mathfrak{D}_1)$ i punti di $(\mathfrak{D}_2)$ quindi $(\mathfrak{D}_3)$ ha piu' punti di suddivisione sia di $(\mathfrak{D}_1)$ sia di $(\mathfrak{D}_3)$ quindi ha intervalli parziali di suddivisione piu' " piccoli" delle altre o meglio gli intervalli parziali di $(\mathfrak{D}_3)$ sono contenuti negli intervalli parziali di $(\mathfrak{D}_2)$ e di' $(\mathfrak{D}_2)$. Allora abbiamo

$$s(\mathfrak{D}_1) \leq s(\mathfrak{D}_3) \leq S(\mathfrak{D}_3) \leq S(\mathfrak{D}_2).$$

Allora gli insiemi $\mathbb{A}$ e $\mathbb{B}$ sono separati ovvero esistono numeri reali c tale che

$$ogni\ s(\mathfrak{D}) \in \mathbb{A} \leq c \leq\ ogni\ S(\mathfrak{D}) \in \mathbb{B}$$

oppure

$$Sup\mathbb{A} \leq c \leq Inf\mathbb{B}.$$

Come abbiamo visto negli appunti sui numeri reali tali coppie possono avere diversi elementi separatori. Per avere un solo elemento separatore gli insiemi $\mathbb{A}$ e $\mathbb{B}$ devono essere indefinitamente ravvicinati ovvero la coppia ($\mathbb{A}$, $\mathbb{B}$) deve essere una coppia di classi contigue di numeri reali.

Definizione - *Una funzione $y = f(x)$ definita in $[a, b]$ e' detta integrabile secondo Riemann se la coppia ($\mathbb{A}$, $\mathbb{B}$) e' una coppia di classi contigue di numeri reali. L'elemento separatore viene chiamato integrale di Riemann di $f(x)$ in $[a, b]$ e viene indicato*

$$\int_a^b f(x)dx.$$

Osserviamo che se f e' integrabile secondo Riemann allora $Sup\mathbb{A} = \int_a^b f(x)dx = Inf\mathbb{B}$ per l'unicita' dell'elemento separatore.

Dalla definizione di coppie di classi contigue possiamo fare la seguente affermazione.

Una funzione $y = f(x)$ e' integrabile secondo Riemann se e soltanto se

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists \mathfrak{D}_\epsilon : S(\mathfrak{D}_\epsilon) - s(\mathfrak{D}_\epsilon) < \epsilon.$$

Certo che non tutte le funzioni limitate sono integrabili secondo Riemann. Di sicuro ogni funzione continua e' integrabile secondo Riemann. Inoltre noto il carattere delle funzioni monotone si percepisce, dalla proprieta' di monotonia considerate per definire l'integrale di Riemann, che ogni funzione definita in $[a, b]$ limitata e monotona e' integrabile secondo Riemnann.

La definizione di integrale che abbamo usato (detta secondo Cauchy-Mengoli) invece, e' di natura topologica e valuta il comportamento delle somme integrali al variare di δ e di conseguenza all' infittirsi della suddivisione (non vale il contrario). Si richiede che l'insieme delle somme integrali abbia un punto di accumulazione (in generale). E' vero che questa nozione di limite e' applicata a funzioni a piu' valori. Ma nulla cambia nel caso di un solo limite.

Abbiamo enunciato il teorema di integrabilita' per le funzioni continue che dimostreremo piu' avanti. Ma la nostra definizione di sommatoria ben sopporta l' estensione alle funzioni limitate. Darboux ha dimostrato che se $f(x)$ e' integrabile secondo Riemann allora e' integrabile secondo Cauchy. Possiamo affermare che se $f(x)$ e' limitata allora le affermazioni

f e' integrabile secondo Riemann,

f e' integrabile secondo Cauchy,

sono equivalenti e i valori numerici degli integrali sono uguali.

In definitiva le due definizioni conducono a risultati equivalenti . La scelta di una definizione invece di un' altra dipende da ragioni storiche, dall'uso di certi strumenti, dalla interpretazione geometrica o fisica, dal calcolo approssimato. La definizione di Cauchy segue la scia del concetto di limite e tutto l'apparato ad esso riconducibile che si sostanzia nel concetto di derivata e dell'antiderivata. Non solo ma si collega con tutti i tentativi di calcolo ad esempio di Keplero, di Cavalieri etc. L'integrale di Riemann ha qualche rilevanza nella teoria della misura. In ogni modo fa uso dell'ordine dei numeri reali e di un mascherato concetto di limite che e' l'avvicinamento indefinito delle coppie di classi contigue. Sappiamo con questi strumenti ci si ferma ai reali altrimenti bisogna adottare delle opportune e non semplici variazioni .

Teorema della media

Nella introduzione del calcolo integrale abbiamo discusso il problema della area di una figura piana. Le prime considerazioni fatte hanno coinvolto le aree di rettangoli con base l'intervallo di definizione della funzione ed altezze il massimo M o minimo m della funzione assunti nell'intervallo. Abbiamo ottenuto approsimazione per difetto con il minimo e per eccesso con il massimo. E' lecita la ricerca di un valore intermedio λ tra m e M, dato che consideriamo funzioni continue e positive, tale che il rettangolo con base l'intervallo $[a, b]$ ed altezza λ sia equivalente al trapezioide ovvero abbia la stessa area del trapezioide. Senza alcun riferimento al problema geometrico abbiamo il seguente teorema:

Teorema della media - *Sia* $y = f(x)$ *definita e continua in* $[a, b]$. *Allora esiste almeno un punto* $\xi \in [a, b]$ *tale che*

$$f(\xi) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dt.$$

Dimostrazione

Siano m, M il minimo ed il massimo della fnzione $f(x)$ in $[a, b]$, $a < b$. Vale

$$i) \qquad m \leq f(x) \leq M.$$

Ricordando la monotonia dell'integrale definito, integrando membro a membro la i) si ha

$$ii) \qquad m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a).$$

Dividendo per $(b-a)$ i membri di ii) si ha

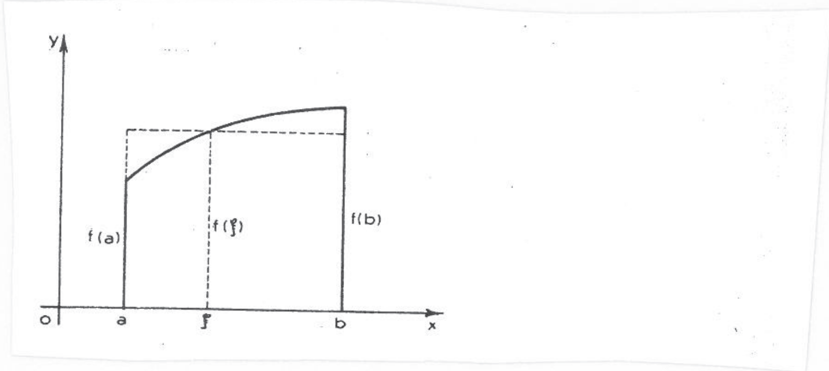
$$m \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dt \leq M.$$

Il numero $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dt$ e' compreso tra m ed M e dal teorema dei valori intermedi viene assunto dalla funzione ovvero esiste un punto $\xi \in [a, b]$ tale che

$$f(\xi) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dt.$$

Il teorema e' dimostrato.

Se $f(x) \geq 0$ la figura interpreta geometricamente la discussione fatta sopra.



Primitiva - Esistenza - Teorema fondamentale del calcolo integrale

L'integrale definito e' un numero reale laddove gli estremi di integrazione siano fissati. Eseguita l'integrazione la variabile di integrazione scompare. Anzi essa e' una variabile muta ovvero qualunque sia il nome assegnata alla variabile di integrazione il risultato non cambia ovvero.

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(z)dz = ...$$

Diversa e' la situazione se gli estremi di integrazione cambiano, come si deduce facilmente dal problema delle aree. L'integrale dipende dagli estremi di integrazione se questi cambiano. Questo e' apparso chiaramente quando abbiamo costruito una primitiva di $f(x)$, assunta la sua esistenza. La forma ottenuta e' la seguente, se la primitiva F di $f(x)$ esiste :

$$F(X) = F(a) + \int_a^X f(x)dx.$$

Il risultato dell'integrazione dipende dal secondo estremo variabile. Le notazioni adottate nella ricerca della forma della primitiva sono state condizionate dal nome della variabile di integrazione per evitare confusione. Ora sappiamo che la variabile di integrazione e' muta. Quindi facciamo un piccolo cambio di notazione per scrivere come al solito la variabile indipendente con x. Poniamo

$$F(x) = F(a) + \int_a^x f(x)dx.$$

o meglio

$$F(x) = F(a) + \int_a^x f(t)dt.$$

La variabile della F e' il secondo estremo dell'integrale. Supponiamo che esista $F(x)$ soluzione di $F'(x) = f(x)$ con $f(x)$ continua. Indicato con D l'insieme delle primitive e con Int l'insieme delle funzioni integrali di tipo $\int_a^x f(t)dt$ con integranda continua, si ha l'inclusione $D \subseteq Int \neq \emptyset$. Sappiamo dal calcolo integrale che Int non e' vuoto mentre questo non lo possiamo affermare per D, ovvero per ora nulla sappiamo della esistenza delle primitive. E' evidente che abbiamo l'esistenza delle primitive se vale $D = Int$, in altri termini ogni funzione integrale $\int_a^x f(t)dt$ e' una primitiva della sua funzione integranda continua.

Teorema fondamentale del calcolo integrale (esistenza di una primitiva) - *Sia $y = f(x)$ definita e continua in un intervallo $[a, b]$. Allora ogni funzione integrale del tipo*

$$F(x) = F(a) + \int_a^x f(t)dt, \quad x \in [a, b]$$

e' una primitiva di $f(x)$ ovvero

$$\frac{d}{dx}F(x) = \frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = f(x).$$

Si legge: la derivata della funzione integrale e' la funzione integranda calcolata nel siecondo estremo variabile. $F(a)$ e' una costante arbitraria.

Dimostrazione

Calcoliamo la derivata di $F(x)$ mediante la definizione facendo uso del teorema della media. Allora

$$\frac{F(x+h)-F(x)}{h} = \frac{F(a)+\int_a^{x+h} f(t)dt - F(a) - \int_a^x f(t)dt}{h} =$$

$$\frac{\int_a^{x+h} f(t)dt + \int_x^a f(t)dt}{h} = \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)dt.$$

Passando al limite per $h \to 0$ nell'ultimo integrale si ha una forma di indecisione $0/0$. Allora per risolvere l'indecisione usiamo il teorema della media. All'ultimo integrale applichiamo il teorema della media e si ha

$$\frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)dt = f(\alpha)$$

con α compreso fra x ed $x+h$; ad esempio, se $h > 0$ si ha $x < \alpha < x+h$ e per $h \to 0$ ne segue $\alpha \to x$. Dalla continuita' di f si ha

$$\lim_{h\to 0} f(\alpha) = f(\lim_{h\to 0}\alpha) = f(x).$$

Quindi

$$\lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h} = \lim_{h\to 0} f(\alpha) = f(x).$$

La derivata di $F(x)$ esiste e coincide con $f(x)$. Il teorema e' dimostrato.

Nota: la scrittura delle primitive mediante l'integrale ci consente di affermare che la derivazione e' l'operazione inversa dalla sinistra dell'operazione di integrazione oppure che l'integrazione e' l'operazione inversa dalla destra della derivazione. Ancora consideriamo il seguente integrale:

$$F(x) = \int_a^x \frac{d}{dt}f(t)dt.$$

Dal teorema fondamentale del calcolo integrale si ha

$$\frac{d}{dx}F(x) = \frac{d}{dx}f(x) \Rightarrow F(x) = f(x) + c.$$

Scriviamo meglio

$$i) \qquad \int_a^x \frac{d}{dt}f(t)dt = f(x) + c.$$

Se sorvoliamo sulle costanti (nei calcoli pero' si tengano presenti) possiamo affermare che l'integrazione e' operazione inversa sinistra della derivazione. Quindi possiamo senz'altro dire che l'integrazione e la derivazione sono operazioni una inversa dell'altra.

Notazione: Le primitive di una funzione continua $f(x)$ sono infinite. Comunque esse differiscono per una costante, basta conoscerne una per avere tutte le altre.

Per indicare tutte le primitive di una funzione $f(x)$ si usa il simbolo

$$\int f(x)dx$$

e viene chiamato integrale indefinito di $f(x)$. Scriviamo

$$\int f(x)dx = F(x) + c = \textit{ tutte le primitive di } f(x).$$

con $F(x)$ una primitiva particolare.

Ricordando la proprieta' i) scriviamo

$$\int df = f + c$$

ove appare chiaro che l'integrazione indefinita e' l'nversa sinistra (a meno di una costante) della derivazione. Useremo le stesse notazioni per l'inversa destra cosi' scriveremo simmetricamente

$$d \int f(x) = f(x).$$

In questo caso non compare la costante. La notazione si giustifica in quanto poniamo l' incremento dx uguale ad uno. Concludiamo questa parte osservando che l'integrazione definita e' una applicazione fra $C^0([a,b])$ ed $\mathbb{R}$:

$$\int_a^b : C^0([a,b]) \to \mathbb{R}.$$

L'integrazione indefinita e' una applicazione fra spazi di funzioni continue e funzioni derivabili

$$\int : C^0([a,b] \to C^1([a,b]).$$

Nota: nellaintroduzione abbiamo osservato che il teorema fondamentale e' stato impostato da Newton. A suo tempo abbiamo motivato l'introduzione del concetto di derivata per valutare la velocita' istantanea: nota la legge oraria $s(t)$ di un punto mobile abbiamo definito la velocita' istantanea $v(t)$ del punto come la derivata di $s(t)$. Nota $s(t)$ si ha $v(t) = \frac{ds(t)}{dt}$.

Consideriamo il problema inverso: nota $v(t)$ cerchiamo $s(t)$. In questo caso $s(t)$ e' l'incognita. Per determinare $s(t)$ abbiamo la definizione di velocita' istantanea, ovvero abbiamo l'equazione differenziale

$$v(t) = \frac{ds(t)}{dt}$$

ove v e' nota e $s(t)$ e' incognita. Il teorema fondamentale dice che se v e' continua allora $s(t)$ ha la forma:

$$s(t) = s(a) + \int_a^t v(\tau)d\tau.$$

In questo modo conosciamo la legge oraria del punto mobile.

Integrazioni elementari

Non e' facile calcolare gli integrali definiti direttamente. Il concetto di primitiva rende il problema un po' piu' agevole come vedremo. Infatti se di una funzione $f(x)$ ne conosciamo le primitive ovvero abbiamo $F(x) - F(a) = \int_a^x f(t)dt$ allora ponendo $x = b$ abbiamo

$$F(b) - F(a) = \int_a^b f(t)dt.$$

La differenza dei valori delle primitive negli estremi a e b da' lintegrale definito : $(F(b)+c)$- $(F(b)+c) = F(b) - F(a)$ quindi e' sufficiente usare una primitiva particolare.

Quindi basta avere una primitiva per calcolare l'integrale definito.

Data l'importanza della formula essa viene detta:

il secondo teorema fondamentale del calcolo integrale

Il calcolo dell'integrale definito e' ricondotto alla ricerca delle primitive.

Con questo non vuol dire che il problema e' risolto. La ricerca delle primitive non e' semplice. Con le primitive possiamo costruire piu' strumenti di calcolo. Per esempio, dalle nostre conoscenze sulle derivate di funzioni note possiamo ricavarne le primitive.

1. x^α con $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\} \to$
$$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c.$$

2. $|x|^\alpha$ con $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\} \to$
$$\int |x|^\alpha dx = \frac{x|x|^\alpha}{\alpha+1} + c.$$

3. $\frac{1}{x}$ $(x \neq 0) \to$
$$\int \frac{1}{x} dx = \int dlog|x| = log|x| + c.$$

4. $senx \to$
$$\int senx dx = -\int dcosx = -cosx + c.$$

5. $cosx \to$
$$\int cosx dx = \int dsenx = senx + c.$$

6. $e^x \to$
$$\int e^x dx = \int de^x = e^x + c.$$

7. a^x con $a > 0 \to$
$$\int a^x dx = \frac{1}{loga} \int da^x = \frac{a^x}{loga} + c.$$

8. $\frac{1}{(cosx)^2} \to$
$$\int \frac{1}{(cosx)^2} dx = \int dtgx = tgx + c.$$

9. $\frac{1}{(senx)^2} \to$
$$\int \frac{1}{(senx)^2} dx = -\int dcotgx = -ctgx + c.$$

10. $Shx \to$
$$\int Shx dx = \int dChx = Chx + c.$$

11. $Chx \to$
$$\int Chx dx = \int dShx = Shx + c.$$

12. $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \to$
$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int darcsenx = arcsenx + c.$$

13. $\frac{1}{1+x^2} \to$ -

$$\int \frac{1}{1+x^2}dx = \int darctgx = arctgx + c.$$

Metodi di integrazione

Il calcolo degli integrali della tabella sopra costruita e' stato alquanto agevole perche' si e' gia' a conoscenza delle derivate di funzioni "elementari". Integrali di funzioni piu' complicate richiede qualche strumento che ci permetta di ricondurli ad integrali noti. I metodi che presentiamo sono strumenti di calcolo di integrali ma di trasformazione di un integrale in un altro piu' "semplice".

• Metodo di decomposizione in somma

Piu' che un metodo e' una riscrittura della funzione integranda in modo da poterla esprimere come somma di funzioni i cui integrali sono noti o facilmente calcolabili ed usando la linearita' dell'integrale.

Esempi

1.

$$\int \frac{1}{sen^x 2cos^2 x}dx = \int \frac{sen^2 x + cos^2 x}{senx^2 cos^2 x}dx =$$

$$\int \frac{sen^2 x}{sen^2 x cos^2 x}dx + \int \frac{cos^2 x}{sen^2 x cos^2 x}dx = \int \frac{1}{cos^2 x}dx +$$

$$\int \frac{1}{sen^2 x}dx == tgx - cotx + c$$

.

2.

$$\int \frac{1}{x(x-1)}dx = \int \frac{1-x+x}{x(x-1)}dx = \int \frac{x}{x(x-1)}dx - \int \frac{x-1}{x(x-1)}dx = \int \frac{1}{(x-1)}dx - \int \frac{1}{x}dx =$$

$$log|x-1| - log|x| + c = log\frac{|x-1|}{|x|} + c$$

• Metodo di integrazione per parti

Questo metodo utilizza la commutativita' fra la derivata e l'integrazione oppure che le due operazioni sono una inversa dell'altra (a meno di una costante).

Siano $f(x)$ e $g(x)$ due funzioni definite, continue e derivabili in $[a, b]$ e sia (usiamo i differenziali per comodita')

$$i) \qquad d(f(x)g(x)) = g(x)df(x) + f(x)dg(x).$$

Applichiamo alla (i) l' operatore integrale, usando la linearita'

$$\int d(f(x)g(x)) = \int g(x)df(x) + \int f(x)dg(x) \Rightarrow$$

$$f(x)g(x) = \int g(x)df(x) + \int f(x)dg(x) \Rightarrow$$

$$\int f(x)dg(x) = f(x)g(x) - \int g(x)df(x)$$

(c'e' una costante nascosta ma essa verra' evidenziata dopo l'integrazione).

Osserviamo che non c'e alcuna risoluzione bensi' c'e il legame fra due integrali con la stessa struttura, cambia solo il ruolo delle funzioni. Nell'ultima equazione, nell'integrale a primo membro f e' libera da derivazione mentre g e' sotto il segno di derivata. A secondo membro c'e' il prodotto $f(x)g(x)$ libero da derivata e da integrale mentre il secondo termine e' un integrale dove ora g e' libera da derivazione mentre f e' sotto il segno di derivata. Leggendo la formula da sinistra a destra, se si vuole trasferire la derivazione su f occorre aggiungere all'integrale risultante il prodotto $f(x)g(x)$ con gli opportuni segni. L'opportunita' di questo trasferimento sta nella possibilita' che la derivazione su f renda l'integrale piu' semplice.

Negli integrali sopra il fattore libero da derivata e' detto **fattore finito** mentre il fattore con derivata e' detto **fattore differenziale**. Nell' integrale di sinistra dell'ultima equazione f e' il fattore finito e dg il fattore differenziale; nell'integrale di destra il ruolo dei fattori e' scambiato.

Esempio:

1. Consideriamo un classico esempio:

$$\int logxdx$$

$logx$ e' il fattore finito e dx e' il fattore differenziale ovvero c'e' il differenziale di x allora $logx$ ha il ruolo di f ed x il ruolo di $g(x)$. Questo non e' un integrale elementare e cosi' come e' scritto c'e' poco da fare. La forma letteraria $logx$ poco si adatta alle nostre capacita' algebriche. Pero' la sua derivata e' una espressione algebrica piu' trattabile almeno in via ipotetica. Allora applichiamo l'integrazione per parti

$$\int logxdx = xlogx - \int xdlogx = xlogx - \int x\frac{1}{x}dx = xlogx - \int dx =$$

$$xlogx - x + c.$$

In generale se si presenta un logaritmo conviene integrare per parti.

2.

$$\int (logx)xdx$$

Questo integrale e' simile al primo pero' non e' messa in evidenza la funzione g; e' facile capire che xdx e' il differenziale di $\frac{x^2}{2}$ quindi abbiamo $g(x) = \frac{x^2}{2}$, allora

$$\int (logx)xdx = \int logxd\frac{x^2}{2} = \frac{x^2}{2}logx - \int \frac{x^2}{2}dlogx =$$

$$\frac{x^2}{2}logx - \int \frac{x^2}{2}\frac{1}{x}dx = \frac{x^2}{2}logx - \int \frac{x}{2}dx =$$

$$\frac{x^2}{2}logx - \frac{x^2}{4} + c$$

.

3.

$$\int e^x xdx.$$

In questo integrale abbiamo il problema della scelta del fattore differenziale. Scegliamo come fattore differenziale $xdx = d\frac{x^2}{2}$ e risolviamo

$$\int e^x xdx = \int e^x d\frac{x^2}{2} = \frac{x^2}{2}e^x - \int \frac{x^2}{2}e^x dx.$$

a questo punto conviene fermarsi perche' l'integrale ottenuto e' piu' complicato di quello di partenza. Riprendiamo il calcolo dall'inizio e prendiamo come fattore finito $e^x dx = de^x$ quindi

$$\int e^x x dx = \int x de^x = xe^x - \int e^x dx = \int x de^x = xe^x - 2e^x + c.$$

Una maggiore attenzione sulla struttura sulla funzione integranda ci avrebbe portato subito a fare la seconda scelta perche' la derivata diminuisce la potenza della x rendendo il secondo integrale piu' semplice.

4.

$$\int e^x x^2 dx.$$

Non v'e' dubbio che il fattore differenziale deve essere $e^x dx = de^x$. Allora

5.

$$\int e^x x^2 dx = \int x^2 de^x = x^2 e^x - 2\int x e^x dx = x^2 e^x - 2\int x de^x = x^2 e^x - 2(xe^x - e^x) + c.$$

Esercizio: Calcolare $\int xsenxdx$, $\int arcsenxdx$, $\int arctgxdx$, $\int e^x senxdx$

• Metodo di integrazione per sostituzione

Il metodo di sostituzione consiste nel passare da una variabile all'altra con lo scopo di semplificare la struttura della funzione integranda in modo da avere un integrale o gia' noto o piu' facilmente riconducibile ad uno noto. Un semplice esempio.

$$\int sen2xdx$$

.

La forma e' semplice e familiare ma c'e' una importante variazione. La variabile di integrazione e' x e la variabile della funzione e' $2x$ ovvero fra loro c'e' un cambio di scala o di unita' di misura. La definizione di integrale richiede la stessa scala o unita' di misura come si evince dalla interpretazione geometrica di integrale. Ripristiniamo la ugualianza delle scale in questo modo: introduciamo una nuova variabile: $t = 2x$ ed adattiamo l'integrale a questa nuova variabile. $sen2x \to sent$ e $dt = 2dx$ (si ricorda che se $t = f(x)$ allora $dt = f'(x)dx$) allora abbiamo

$$\int sen2xdx - .^{x=\frac{t}{2}} - \to \int sent\frac{dt}{2} = \frac{1}{2}\int sentdt = (-\frac{1}{2}cost + c) - -^{t=2x}. \to -\frac{1}{2}cos2x + c$$

Quindi

$$\int sen2xdx = -\frac{1}{2}cos2x + c.$$

In sostanza abbiamo due integrali una nella variabile x e l'altro nella variabile t che si corrispondono tramite composizione con una funzione e la sua inversa. Poi si sceglie quale integrare: naturalmente quello piu' semplice.

Nell'esempio notiamo cha la derivata di una funzione composta ha in ruolo importante.

Scriviamo in forma generale il procedimento sopra esposto.

Sia $y = f(x)$ una funzione definita e continua in $[a, b]$ con $a < b$. Si considera l'integrale indefinito

$$i) \qquad \int f(x)dx = F(x) + c.$$

Operiamo un cambiamento di variabile $x = \phi(t)$ ($\phi : t \mapsto x$ oppure $\phi : [\alpha, \beta] \to [a, b]$) con $\phi(t)$ una funzione definita e continua in un intervallo $[\alpha, \beta]$ con

$$a = \phi(\alpha), \quad b = \phi(\beta)$$

ed invertibile:

$t = \phi^{-1}(x)$ $(\phi^{-1} : [a, b] \to [\alpha, \beta])$.

Inoltre $dx = \phi'(t)dt$; abbiamo $f(x)dx = f(\phi(t))\phi'(t)dt$.

Consideriamo l'integrale indefinito

$$ii) \qquad \int f(\phi(t))\phi'(t)d = G(t) + c.$$

e che $F(x)$ e' primitiva di $f(x)$ mentre $G(t)$ e' primitiva di $f(\phi(t))\phi'(t)$ ovvero (trascuriamo le costanti)

$$F'(x) = f(x), \quad G'(t) = f(\phi(t))\phi'(t).$$

E' intuibile che nota F si ricavi G e viceversa nota G si ricavi F ovvero si ha

$$(*) \qquad G(t) = F(\phi(t)) \quad e \quad F(x) = G(\phi^{-1}(x))$$

La prima e' semplice da verificare, infatti usando la regola della derivata di funzione composta

$$(F(\phi(t))' = F'(x)_{x=\phi(t)}\phi'(t) = f(\phi(t))\phi'(t) = G(t).$$

Formalmente e' piu' elaborata la dimostrazione della seconda relazione.

Infatti ricordando la derivata di funzione composta ed inversa si ha

$$(G(\phi^{-1}(x)))' = G'(t)_{t=\phi^{-1}(x)}(\phi^{-1}(x))' = (f(\phi(t))\phi'(t))_{t=\phi^{-1}(x)}(\phi^{-1}(x))' =$$
$$(f(\phi(\phi^{-1}(x)))\phi'(\phi^{-1}(x)))(\phi^{-1}(x))' = f(x) = F'(x)$$

dato che $\phi(\phi^{-1}(x)) = x$ e $(\phi^{-1}(x))' = \frac{1}{\phi'(t)_{t=\phi^{-1}(x)}}$.

Percio' calcolato

$$\int f(x)dx = F(x) + c$$

risulta

$$\int f(\phi(t)\phi'(t)dt = F(\phi(t)) + c = G(t) + c$$

Analogamente se si calcola l'integrale indefinito

$$\int f(\phi(t))\phi'(t)d = G(t) + c$$

si ottiene

$$\int f(x)dx = G(\phi^{-1}(x)) = F(x) + c$$

Nel caso di integrale definito nota la primitiva si ha

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

e considerando la prima relazione in (*) si ha

$$\int_\alpha^\beta f(\phi(t))\phi'(t)dt = F(\phi(t))|_\alpha^\beta = F(\phi(\beta)) - F(\phi(\alpha)) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)dx.$$

Per questa formula non interviene la funzione inversa di $\phi(t)$ quindi non occorre richiederla.

Esempi: consideriamo delle generalizzazioni degli integrali elementari:

Integrazioni elementari generalizzate

1. $f(x)^\alpha$ con $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\} \rightarrow$

$$\int f(x)^\alpha f'(x)dx - -^{y=f(x)} - - \rightarrow \int y^\alpha dy = \frac{y^{\alpha+1}}{\alpha+1}|_{y=f(x)} + c = \frac{f(x)^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c.$$

2. $|f(x)|^\alpha$ con $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\} \rightarrow$

$$\int |f(x)|^\alpha f'(x)dx - -^{y=f(x)} - - \rightarrow \int |y|^\alpha dy =$$

$$\frac{y|y|^\alpha}{\alpha+1}|_{y=f(x)} + c = \frac{f(x)|f(x)|^\alpha}{\alpha+1} + c.$$

3. $\frac{1}{f(x)}$ $(f(x) \neq 0) \rightarrow$

$$\int \frac{1}{f(x)} f'(x)dx - -^{y=f(x)} - - \rightarrow \int \frac{1}{y} dy = \int dlog|y| = log|y|_{y=f(x)} + c = log|f(x)| + c.$$

4.

$$\int senf(x)f'(x)dx = - -^{y=f(x)} -- \rightarrow \int senydy = \int dcosy = -cosy|_{y=f(x)} + c = -cosf(x) + c.$$

5.

$$\int cosf(x)f'(x)dx - -^{y=f(x)} - - \rightarrow \int cosydy = \int dseny = seny|_{y=f(x)} + c = senf(x) + c.$$

6.

$$\int e^{f(x)} f'(x)dx - -^{y=f(x)} - - \rightarrow \int e^y dy = \int de^y = e^y|_{y=f(x)} + c = e^{f(x)} + c.$$

7. $a^{f(x)}$ con $a > 0 \rightarrow$

$$\int a^{f(x)} f'(x)dx - -^{y=f(x)} - - \rightarrow \int a^y dy = \frac{1}{loga} \int da^y = \frac{a^y}{loga}|_{y=f(x)} + c = \frac{a^{f(x)}}{loga} + c.$$

8.

$$\int \frac{1}{(cosf(x))^2} f'(x)dx - -^{y=f(x)} - - \rightarrow \int \frac{1}{(cosy)^2} dy = \int dtgy = tgy|_{y=f(x)} + c = tgf(x) + c.$$

$$\int \frac{1}{(senf(x))^2} f'(x)dx - -^{y=f(x)} - - \rightarrow \int \frac{1}{(seny)^2} dy = -\int dctgy = -ctgy|_{y=f(x)} + c = ctgf(x) + c.$$

9.

$$\int Shf(x)f'(x)dx - -^{y=f(x)} - - \rightarrow \int Shydy = \int dChy = Chy|_{y=f(x)} + c = Chf(x) + c$$

10.

$$\int Chf(x)f'(x)dx - -^{y=f(x)} - - \rightarrow \int Chydy = \int dShy = Shy|_{y=f(x)} + c = Shf(x) + c$$

11.

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-f(x)^2}} f'(x)dx - -^{y=f(x)} - - \rightarrow \int \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} dy = \int darcseny = arcseny|_{y=f(x)} + c = arcsenf(x) + c.$$

12.

$$\int \frac{1}{1+f(x)^2}f'(x)dx - -^{y=f(x)} - - \int \frac{1}{1+f(x)^2}dy = \int darctgy = arctgy|_{y=f(x)} + c = arctgf(x) + c$$

Osservazione: negli integrali sopra descritti e' palese la derivata della funzione componente ed il procedimento e' consistito nel sostituire la funzione derivata per ottenere il differenziale della nuova variabile nella scala degli integrali elementari. Questo e' una buona indicazione di come procedere col metodo di sostituzione. In questa ottica si osservino i seguenti esempi.

Esempi: 1) $\int e^{x^2} xdx$. Ponendo $x^2 = t$ e $dt = 2xdx$ si ha

$$\frac{1}{2}\int e^t dt = \frac{1}{2}e^t \rightarrow \int e^{x^2} xdx = \frac{1}{2}e^{x^2} + c.$$

2) $\int \frac{dx}{x\sqrt[3]{1+logx}}$.

Osserviamo che $\frac{dx}{x} = dlogx$, appare naturale o la sostituzione $logx = t$ oppure $1 + logx = t$. Meglio la seconda infatti si ha $dt = \frac{dx}{x}$ e si ha

$$\int \frac{dx}{x\sqrt[3]{1+logx}} \rightarrow \int t^{-\frac{1}{3}} dt = \frac{3}{2}t^{\frac{2}{3}}.$$

Quindi

$$\int \frac{dx}{x\sqrt[3]{1+logx}} = \frac{3}{2}(1+logx)^{\frac{2}{3}} + c.$$

3) $\int \frac{1}{1+(senx)^2} cosxdx$.

Anche in questo caso osserviamo che $cosxdx = dsenx$ allora ponendo $y = senx$

$$\int \frac{1}{1+(senx)^2} cosxdx \rightarrow \int \frac{1}{1+y^2} y = arctgy + c \Rightarrow$$

$$\int \frac{1}{1+(senx)^2} cosxdx = arctgsenx + c.$$

Dimostrazione del teorema di integrabilita' delle funzioni continue

Per dimostrare questo teorema dobbiamo considerare due concetti. La codizione di Cauchy sulla esistenza del limite finito ed il concetto di continuita' uniforme.

Criterio di Cauchy per l'esistenza del limite finito - *Sia $y = f(x)$ una funzione definita in $[a, b]$ anche a piu' valori. Allora condizione necessaria e sufficiente affinche' esista $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$ (unico) e' che per ogni $\epsilon > 0$ esista un $\delta_\epsilon > 0$ tale per ogni coppia di punti x'e x'' appartenenti all'intervallo $[x_0 - \delta_\epsilon, x_0 + \delta_\epsilon]$ si ha*

$$|f(x') - f(x'') < \epsilon.$$

La parte necessaria e' semplice. La condizione sufficiente e' piu' elaborata.

Continuita' uniforme

Quando abbiamo definito la continuita' in un punto x_0 abbiamo commentato la dipendenza della definizione dal punto in cui si saggia la continuita'.

Il numero δ non solo dipende da ϵ ma anche dalla posizione del punto x_0.

Abbiamo caratterizzato la situazione ove δ non dipende da x_0 ed anche una classe di funzioni che hanno questa proprieta'.

Richiamiamo questa proprieta'.

Sia $y = f(x)$ definita e continua in un dominio T. Diremo che $f(x)$ e' uniformemente continua in T se: per ogni $\epsilon > 0$ esiste in corrispondenza un $\delta(\epsilon) > 0$ (dipendente solo da ϵ) tale per ogni coppia di punti $x', x'' \in T$ e $|x' - x''| < \delta(\epsilon)$ si ha

$$|f(x') - f(x'')| < \epsilon.$$

Questa e'una nozione globale.

Teorema di Heine-Cantor - Ogni funzione definita e continua in un intervallo I chiuso e limitato e' uniformemente continua.

Ora passiamo alla dimostrazione del teorema di esistenza. Sia $y = f(x)$ una funzione definita e continua in un intervallo chiuso e limitato $[a, b]$ quindi uniformemente continua. Vogliamo dimostrare che esiste finito ed unico

$$\lim_{\delta \to 0} S_\delta = J.$$

Ovvero, dal criterio di Cauchy,

$\forall \epsilon > 0$, $\exists\ \delta_{\epsilon>0}$ tale che per ogni coppia di numeri $\delta' > 0$ e $\delta'' > 0$ soddisfacenti alle condizioni

$$i) \qquad 0 < \delta' < \delta_\epsilon \quad 0 < \delta'' < \delta_\epsilon$$

si ha

$$ii) \qquad |S_{\delta'} - S_{\delta''}| < \epsilon.$$

$f(x)$ e' uniformemente continua quindi dal teorema di Heine-Cantor per ogni $\epsilon > 0$ esiste un $\delta_\epsilon > 0$ tale per ogni coppia di punti ξ ed η soddisfacenti la limitazione $|\xi - \eta| < \delta_\epsilon$ si ha

$$iii) \qquad |f(\xi) - f(\eta)| < \frac{\epsilon}{2(b-a)}.$$

Proviamo che con tale δ_ϵ e' soddisfatta la ii).

Consideriamo una somma integrale S_δ con $\delta < \delta_\epsilon$. Sia poi $S_{\bar{\delta}}$ un'altra somma integrale relativa ad una partizione piu' fine di quella di δ cioe' contiene tutti i punti di suddivisione di δ piu' altri. Allora diremo $S_{\bar{\delta}}$ successiva a S_δ. E' chiaro che $\bar{\delta} \leq \delta$. Allora si ha con $p > n$

$$S_{\bar{\delta}} = \sum_{i=1}^{p} f(\eta_i)\delta_i.$$

I punti di suddivisione relativi a $\bar{\delta}$ formano partizione piu' fine e piu' ricca di soottointervalli di quella relativa a δ.

Indichiamo con $a = x_0 < x_1 < ... < x_i < .... < x_n = b$ i punti di suddivisione relativi a δ e con $a = t_0 < t_1 < ... < t_k < .... < t_p = b$ quelli relativi a $\bar{\delta}$. Quindi in intervalli $[x_{i-1}, x_i]$ ci sono punti t_k di consequenza ci sono intervalli della suddivisione $\bar{\delta}$. Per esempio supponiamo $x_{i-1} < t_r < x_i$, in questo caso la partizione relativa a $\bar{\delta}$ ha due intervalli in piu' di quella relativa a δ, rispettivamente $[x_{i-1}, t_r]$ e $[t_r, x_i]$. Al contributo $f(\xi_i)\delta_i$ nella somma S_δ corrisponde il contributo $f(\eta_{r-1})(t_r - x_{i-i}) + f(\eta_r(x - i - t_r)$. Dalla uniforme continuita' e dalla scelta di δ_ϵ si ha

$$|f(\xi_i)\delta_i - f(\eta_{r-1})(t_r - x_{i-i}) + f(\eta_r(x - i - t_r)| = |(f(\xi_i) - f(\eta_{r-1})(t_r - x_{i-i}) + (f(\xi_i) - f(\eta_r)(x_i - t_r)| \leq$$

$$|(f(\xi_i) - f(\eta_{r-1})(t_r - x_{i-i}) + (f(\xi_i) - f(\eta_r)(x_i - t_r)| \leq \frac{\epsilon}{2(b-a)}\delta_k$$

dato che ξ_i, η_{r-1}, η_r appartengono allo stesso intevallo $[x_{i-1}, x_i]$. Generalizziamo le considerazioni fatte sopra a piu' punti che decompongono l'intervallo $[x_{i-1}, x_i]$ in piu' intervalli.

Allora fra i punti t_k ci sono i punti x_i se ad esempio x_{i-1} coincide con t_{r-1} e x_i con t_s allora l'intervallo $[x_{i-1}, x_i]$ e' decomposto dai punti $t_{r-1} = x_{i-1}$, t_r,....,t_{s-1}, $t_s = x_i$ in $s-(r-1)$ intervalli di ampiezze

$$\bar{\delta}_r = t_r - t_{r-1},\ \bar{\delta}_{r+1} = t_{r+1} - t_r, ...,\ \bar{\delta}_s = t_s - t_{s-1}.$$

In altri termini essendo la suddivisione relativa ad $\bar{\delta}$ piu ricca di punti rispetto a quella di δ_ϵ, tra due punti x_{i-1} e x_i possono esserci piu punti t della suddivisione relativa a $\bar{\delta}$; quindi $S_{\bar{\delta}}$ ha piu' termini di S_δ.

Infatti, come abbiamo visto sopra, il contributo di questi punti alla somma $S_{\bar{\delta}}$ e'

$$f(\eta_r)\bar{\delta}_r + f(\eta_{r+1})\bar{\delta}_{r+1} + ... + f(\eta_s)\bar{\delta}_s,$$

mentre il contributo a S_δ dovuto all'intervallo $[x_{i-1}, x_i]$ e'

$$f(\xi_i)\delta_k = f(\xi_i)(\bar{\delta}_r + \bar{\delta}_{r+1} + ... + \bar{\delta}_s).$$

La differenza λ_i fra i due contributi e'

$$\lambda_i = (f(\xi_i) - f(\eta_r))\bar{\delta}_r + (f(\xi_i) - f(\eta_{r+1}))\bar{\delta}_{r+1} + ... + (f(\xi_i) - f(\eta_s))\bar{\delta}_s.$$

Dato che i punti ξ_i,η_r, ...,η_s appartengono allo stesso intervallo $[x_{i-1}, x_i]$ e $\delta_i < \delta_\epsilon$ si ha

$$|\xi_i - \eta_r| < \delta_\epsilon, ..., |\xi_i - \eta_s| < \delta_\epsilon,$$

dalle ii), iii) si ha

$$|\lambda_i| \leq |f(\xi_i) - f(\eta_r))|\bar{\delta}_r + |(f(\xi_i) - f(\eta_{r+1}))|\bar{\delta}_{r+1} + ... + |(f(\xi_i) - f(\eta_s)|\bar{\delta}_s \leq$$

$$\frac{\epsilon}{2(b-a)}(\bar{\delta}_r + \bar{\delta}_{r+1} + ... + \bar{\delta}_s) \leq \frac{\epsilon}{2(b-a)}\delta_i.$$

Ripetendo questa costruzione per ogni intervallo $[x_{i-1}, x_i]$ al variare di i da 1 ad n si ha

$$|S_\delta - S_{\bar{\delta}}| = |\lambda_1 + \lambda_2 + ... + \lambda_n| = |\sum_{i=1}^{n} \lambda_i| \leq$$

$$\sum_{i=1}^{n} |\lambda_i| \leq \sum_{i=1} \frac{\epsilon}{2(b-a)}\delta_i \leq \frac{\epsilon}{2(b-a)} \sum_{i=1}^{n} \delta_i \leq \frac{\epsilon}{2(b-a)}(b-a) \leq \frac{\epsilon}{2}.$$

Siano ora $S_{\delta'}$ e $S_{\delta''}$ due somme integrali soddisfacenti alla i). Sia ora $S_{\bar{\delta}}$ una somma relativa all'unione delle suddivisioni relative a δ' e δ''. Allora $S_{\bar{\delta}}$ e' una somma successiva a $S_{\delta'}$ e $S_{\delta''}$. Allora

$$|S_{\delta'} - S_{\delta''}| = |S_{\delta'} - S_{\bar{\delta}} + S_{\bar{\delta}} - S_{\delta''} \leq$$

$$|S_{\delta'} - S_{\bar{\delta}}| + |S_{\bar{\delta}} - S_{\delta''}| \leq \epsilon.$$

Il teorema e' dimostrato.