Concetto di derivata

In questo paragrafo introduciamo il concetto fondamentale dell'analisi matematica e dell'analisi infinitesimale. Prima del XVII secolo la scienza ed il calcolo infinitesimale erano fermi al periodo Greco. La fisica restava un capitolo della filosofia e i componimenti scientifici erano narrazioni con componimenti irrazionali e superstiziosi che affiancavano qualche concetto di fisica o di chimica. Nessun progresso fu fatto fino al XVII secolo quando la meccanica condusse i matematici ad esaminare problemi come il centro di gravita', (con Keplero) i volumi di solidi , problemi di massimo e minino ed aree di settori di ellissi utilizzando un rudimentale calcolo integrale; Cavalieri e Roberval studiarono l'integrazione; Fermat, tra le altre cose, investigo' il problema dei massimi e minimi (relativi) considerando i casi in cui la tangente alla linea era parallela all'asse delle ascisse. Newton (con Leibitz) diede un notevolo contributo alla nascita del calcolo differenziale ed integrale considerando anche l'antiderivata per il calcolo delle aree: sostanzialmente formulo' il teorema fondamentale del calcolo integrale. Con questi strumenti a disposizione, la scienza prese consapevolezza della sua autonomia ed originalita' ed ebbe inizio la scienza moderna. Si simulavano problemi concreti che venivano analizzati attraverso concetti e strumenti matematici. I risultati furono notevoli. Stimolato da queste certezze, Kant si propose di cercare un metodo filosofico rigoroso per approdare ad una certezza metafisica che fosse paragonabile a quella raggiunta nell'ambito delle scienze sperimentali. Egli critica la metafisica tradizionale, contrapponendole una metafisica intesa come scienza dei limiti della ragione. In altri termini cercava di costruire una logica per la filosofia che avesse la stessa potenza della matematica per la fisica e le scienze in generale.

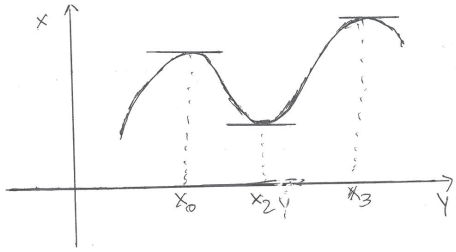
Da questo excursus storico si evince che diversi sono stati i problemi che hanno dato origine al concetto di derivata e quale importanza questa ha avuto per l'affermazione e lo sviluppo della scienza. Ne evidenziamo due che rientrano nel contesto dello studio delle funzioni e nella cinematica del punto mobile:

il problema della tangente ed **il problema della velocita' istantanea**.

• 1) Problema della equazione della retta tangente ad una linea.

Si osservi attentamete il grafico. Conoscere la posizione dei punti x_1, x_2, x_3 e' di notevole importanza per conoscere l'andamento della funzione almeno in un loro intorno. Il concetto capace di individuare tali punti, si faccia il confronto con il concetto di continuita', e' un potente strumento per identificare le proprieta' salienti di una funzione e del suo grafico.

Fermat osservo' che tutti i punti indicati hanno una proprieta' comune. La retta tangente alla linea e' parallela all'asse delle ascisse. Con le nostre



conoscenze diciamo che il coefficiente angolare e' zero. Il problema che si pone e' dunque quello di determinare la direzione della retta tangente in un punto arbitrario della linea o meglio quello di determinare l'equazione della retta tangente alla linea in un punto arbitrario.

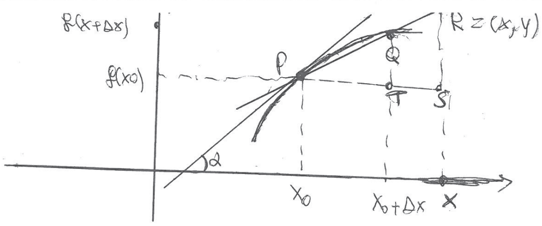
Ricaviamo la equazione della retta tangente considerandola come una retta avente due întersezioni coincidenti con la linea. Formalizziamo questa definizione inquadrando il problema nella teoria delle funzioni fino ad ora costruito e con le conoscenze di geometria analitica gia' acquisite.

Useremo notazioni e scritture che saranno utili, in seguito, nella definizione di derivata.

Sia $y = f(x)$ una funzione definita in un intervallo (a, b) e sia $x_0 \in (a, b)$ che chiameremo punto iniziale. Determiniamo la retta tangente alla linea di equazione $y = f(x)$ nel punto $P = (x_0, f(x_0))$. Sia Δx una grandezza arbitraria che chiameremo incremento della variabile indipendente e costruiamo il punto $x_0 + \Delta x$ chiamato punto incrementato. Consideriamo i punti

$$P = (x_0, f(x_0)); \quad Q = (x_0 + \Delta x, f(x_0 + \Delta x)).$$

Esiste una ed una sola retta passante per tali punti. Scriviamo dapprima l'equazione della retta passante per il punto P. Indichiamo $R = (x, y)$ il punto corrente sulla retta o meglio il punto che descrive la retta. Pertanto le sue cordinate non sono indipendenti ma legate una all'altra da una relazione che si trova facilmente.



Dalla figura considerando il triangolo PRS si ricava che il rapporto fra le misura (con segno) $y - f(x_0)$ del cateto SR e della misura (con segno) $x -$

x_0 del cateto PS resta costante rispetto ad x ed y ed e' uguale alla tangente trigonometrica dell'angolo α che chiamiamo coefficiente angolare della retta e lo denotiamo m. Quindi l'equazione di una retta passante per il punto P e'

$$\frac{y - f(x_0)}{x - x_0} = m.$$

Al variare di m otteniamo infinite rette "incernierate" in P. Per determinare una sola retta dobbiamo imporre il passaggio per un altro punto ovvero dobbiamo determinare m. Consideriamo una retta che passi anche per il punto Q. Considerando il triangolo PQT e ragionando come sopra possiamo determinare m o la tangente dell' angolo α completamente dai dati ed e'

$$\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = m(\Delta x).$$

Allora l'equazione della retta secante PQ e'

$$\frac{y - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} (= m(\Delta x).)$$

Per ottenere la retta tangente basta far coincidere i due punti P e Q. Questa coincidenza la otteniamo facendo tendere Δx a zero. E' ragionevole chiamare coefficiente angolare della retta tangente alla linea nel punto P il seguente limite

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

(Questo processo di limite mancava alla costruzione di Fermat, di Newton e di Leibnitz e fu introdotta circa un secolo dopo da Cauchy).

In conclusione, l' equazione della retta tangente alla linea nel punto P e'

$$\frac{y - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

• **Problema della velocita' istantanea**

Consideriamo un punto mobile che si muove di moto rettilineo sull'asse s con legge oraria $s = s(t)$. t e' la variabile temporale. $s(t)$ indica lo spazio percorso al tempo t. Sia t_0 l'istante iniziale e $t_0 + \Delta t$ l'istante incrementato (il significato dei simboli e' chiaro). Allora $\Delta s = s(t_0 + \Delta t) - s(t_0)$ e' lo spazio percorso nel tempo Δt. La velocita' media del punto mobile e'

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(t_0 + \Delta t) - s(t_0)}{\Delta t}.$$

Questa e' una velocita' mediata su tanti istanti ed in generale si discosta dalla velocita' in un istante. E' intuibile che diminuendo la quantita' degli istanti si ottiene un valore piu' prossimo a quello istantaneo. Questa osservazione conduce ad effettuare un processo di limite per Δt tendente a zero per avere la velocita' nell'istante t_0. Allora chiameremo velocita' istantanea del punto mobile in t_0 il limite

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{s(t_0 + \Delta t) - s(t_0)}{\Delta t}.$$

I due problemi esposti, di natura molto diversa, conducono a considerare la stessa operazione, ovvero il limite del rapporto incrementale.

Definizione di derivata

Diamo ora la definizione di derivata senza considerare l'interpretazione delle grandezze interessate.

Sia $y = f(x)$ una funzione definita in un intervallo (a, b) e sia $x_0 \in (a, b)$ che chiameremo punto iniziale.

Sia $P = (x_0, f(x_0))$.

• diremo incremnto o accrescimento della variabile indipendete x nel passaggio dal punto iniziale x_0 al punto variato $x = x_0 + \Delta x$ la differenza

$$\Delta x = x - x_0.$$

Questo incremento puo' essere positivo, negativo o nullo, cosi' x si trova rispettivamente alla destra di x_0, alla sinistra di x_0 o coincidente con x_0.

• Siano $f(x_0)$ ed $f(x_0 + \Delta x)$ i valori della funzione nei punti iniziale e variato, rispettivamente. Chiamiamo incremento o accrescimento della funzione $y = f(x)$ (o della variabile dipendente) relativo al passaggio dal punto iniziale x_o al punto variato $x_0 + \Delta x$ la differenza

$$\Delta y = \Delta f(x) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0).$$

Questa differenza puo' essere positiva, negativa o nulla. Nelle notazioni Δy, $\Delta f(x)$ restano sottintesi il punto iniziale ed il punto variato.

Quando sara' utile chiameremo incremento destro o incremento sinistro l'incremento Δy a seconda che Δx e' positiva o negativa. Cosi' nell'estremo sinistro a dell'intervallo $[a, b]$ si considera l'incremento destro mentre in b si considera l'incremento sinistro.

• Si chiama rapporto incrementale della funzione $y = f(x)$ relativo al passaggio dal punto iniziale x_0 al punto variato $x_0 + \Delta x$ il rapporto

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Se Δx e ' positivo o negativo parleremo di rapporto incrementale destro o sinistro.

Il rapporto incremetale e' il saggio medio di incremento della funzione nell'intervallo $[x_0, x_0 + \Delta x]$.

Chiameremo derivata della funzione $y = f(x)$ nel punto x_0 il seguente limite, se esiste finito,

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \text{ oppure } \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

e si indica con i seguenti simboli (a fianco i nomi di chi li ha introdotti) :

$$f'(x_0) \ (Lagrange), \ \ y'(x_0), \ \ Df(x_0) \ (Cauchy), \ \ \frac{df(x_0)}{dx}, \ \ \frac{dy}{dx}(Leibnitz), \ \ \dot{f}(x_0) \ (Newton).$$

Pertanto la derivata $f'(x_0)$ di $f(x)$ e' definita dalla relazione

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

ed il suo significato geometrico e' il coefficiente angolare della retta tangente al grafico della funzione nel pumto $P = (x_0, f(x_0))$. Ancora, e' la pendenza del grafico nel punto x_0 ed anche il saggio di incremento della funzione nel punto x_0. L'operazione con la quale si calcola la derivata e' detta la derivazione di $f(x)$. Ricordiamo anche che il significato geometrico del rapporto incrementale e' il coefficiente angolare della secante PQ.

Diamo ora la definizione di limite (finito):

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

quando

$$\forall \epsilon > 0 \ \exists \delta_\epsilon > 0 : \ per \ |\Delta x| < \delta_\epsilon \Rightarrow |\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} - f'(x_0)| < \epsilon.$$

• Altri modi di scrivere la derivata (e' chiaro il significato dei simboli).

1)

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h};$$

2)

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Abbiamo visto nel capitolo dei limiti che possiamo considerare il limite destro ed il limite sinistro cioe' considerare la restrizione di $f(x)$ ai punti $x > x_0$ e la restrizione di $f(x)$ ai punti $x < x_0$. Consideriamo, quindi, i limiti per $\Delta x > 0$ e $\Delta x < 0$ del rapporto incrementale. Cosi abbiamo

• Derivata destra : $\Delta x > 0$

$$f'_+(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

• Derivata sinistra : $\Delta x < 0$

$$f'_-(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{f(x_0 + \Delta) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

E' ovvio che i limiti devono essere finiti.

Inoltre abbiamo

$$f'(x_0) \Leftrightarrow f'_+(x_0) = f'_-(x_0).$$

Considerazioni geometriche.

Per definire la derivata destra abbiamo considerato il grafico destro della funzione, ovvero punti $x > x_0$, pertanto il significato geometrico di $f'_+(x_0)$ e' il coefficiente angolare della semiretta t^+ tangente destra o alla destra del punto x_0.

Analogamente il significato geometrico di $f'_-(x_0)$ e' il coefficiente angolare della semiretta t^- tangente alla sinistra del punto x_0 o sinistra del grafico della restrizione sinistra. (si veda il grafico). Quindi quando esiste la derivata in x_0, t^+ e t^- sono semirette opposte di una stessa retta che e' la retta tangente. Dalla teoria dei limiti, sappiamo che i limiti possono esistere o non esistere, essere finiti o infiniti oppure esistere i limiti destro e sinistro finiti ma diversi. Queste circostanze denotano un particolare comportamento della funzioni nel punto x_0 che ora precisiamo.

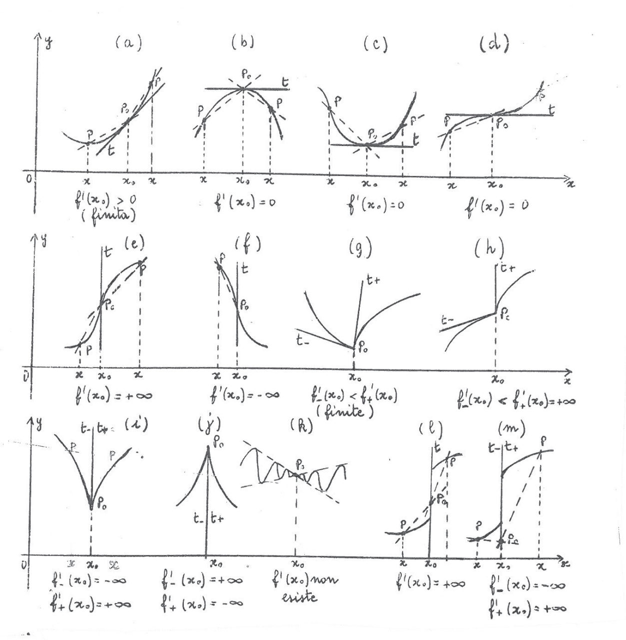
x_0 punto in cui la funzione e' definita ma non derivabile. Allora

• $f'_+(x_0) \neq f'_-(x_0)$ finiti, x_0 viene detto punto angoloso.

• $f'_+(x_0) = f'_-(x_0) = +\infty(-\infty)$, il punto x_0 viene detto punto di flesso verticale o a tangente verticale;

• $f'_+(x_0) = +\infty$; $f'_-(x_0) = -\infty$ il punto x_0 e' detto punto di cuspide rivolta verso l'alto,

• $f'_+(x_0) = -\infty$; $f'_-(x_0) = +\infty$ il punto x_0 e' detto punto di cuspide rivolta verso il basso,



Continuita' e derivabilita'

Consideriamo il legame fra continuita' e derivabilita'. Dalla discussione fatta sui punti in cui la funzione non e' derivabile e da semplici esempi come $y = |x|$ si puo' affermare che la continuita' non implica la derivabilita' ovvero non e' vera l'inferenza

continuita'$\Rightarrow$ derivabilita'.

Possiamo pero ' affermare che la derivabibilita' implica la continuita'. Vale il

Teorema - *Sia $y = f(x)$ definita in (a,b) e $x_0 \in (a,b)$. Se f e' derivabile in x_0 allora e' continua in x_0.*

Dimostrazione.

Continuita' di f in x_0 e' espressa da: $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0) \Leftrightarrow \lim_{x\to x_0}(f(x) - f(x_0) = 0$.

Dunque

$$f(x)-f(x_0) = (x-x_0)\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \Rightarrow \lim_{x\to x_0} f(x)-f(x_0) = \lim_{x\to x_0}(x-x_0)\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} =$$

$$\lim_{x\to x_0}(x-x_0)\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = 0f'(x_0) = 0.$$

La continuita' e' dimostrata.

Derivate di alcune funzioni elementari

Indichiamo l'incremento della variabile indipendente con la lettera h, il punto iniziale con x invece di x_0 ed il punto variato con $x+h$ invece di x_0+h. Applicando la definizione calcoliamo le derivate delle seguenti funzioni:

1. *Sia $y = f(x) = c$ una funzione costante. La sua derivata e' nulla: $y = c \to y' = 0$*

   Infatti
   $$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{c-c}{h} = 0 \to 0$$
   per $h \to 0$. Allora $y' = 0$.

2. *Sia $y = f(x) = x$. Allora $y' = 1$.*

   Infatti
   $$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{(x+h)-x}{h} = 1 \to 1$$
   per $h \to 0$.

   Allora $y' = 1$.

3. *Sia $y = f(x) = x^2$. Allora $y' = 2x$.*

   Infatti
   $$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{(x+h)^2-x^2}{h} = \frac{2xh+h^2}{h} = 2x+h \to 2x$$
   per $h \to 0$.

   Allora $y' = 2x$.

   Osservando la forma della derivata di x^2 si intuisce che la derivata di x^α e' $\alpha x^{\alpha-1}$.

   Nota : nei calcoli precedenti non e' necessario il passaggio al limite, al piu' nella espressione semplificata si puo' porre $h = 0$ come nel terzo caso. Questo e' stato il modo di procedere di Fermat, di Newton ed altri. Come vedremo fra poco questo procedimento non si adatta a situazioni piu' generali. Occorre far intervenire il processo di limite, cosa che fece Cauchy.

4. *Sia* $y = f(x) = x^{\alpha}$ *con* α *reale ed* $x > 0$. *Allora* $y' = \alpha x^{\alpha-1}$.

   Infatti

   $$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{(x+h)^{\alpha}-x^{\alpha}}{h} = x^{\alpha}\frac{(1+\frac{h}{x})^{\alpha}-1}{h} = x^{\alpha}\frac{(1+\frac{h}{x})^{\alpha}-1}{x\frac{h}{x}} \Longrightarrow \alpha x^{\alpha-1}$$

   per $h \to 0$

   grazie ad un limite che si deduce da quello del numero e (vedi gli appunti " Funzioni in R ").

5. *Sia* $y = f(x) = a^{x}$ *con* $a > 0$ *reale* . *Allora* $y' = a^{x} loga$.

   Infatti

   $$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{(a)^{x+h}-a^{x}}{h} = a^{x}\frac{a^{h}-1}{h} =\rightarrow a^{x} loga$$

   per $h \to 0$,

   grazie ad un limite che si deduce da quello del numero e (vedi gli appunti " Funzioni in R ").

6. *Sia* $y = f(x) = log_{a}x$ *con* $a > 0, \neq 1$ *reale e* $x > 0$. *Allora* $y' = \frac{1}{xloga}$.

   Infatti

   $$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{log_{a}(x+h)-log_{a}x}{h} = \frac{log_{a}(1+\frac{h}{x})}{h} \Longrightarrow \frac{1}{xloga}$$

   per $h \to 0$, grazie ad un limite che si deduce da quello del numero e(vedi gli appunti " Funzioni in R " II pag 13).

7. *Sia* $y = f(x) = senx$. *Allora* $y' = cosx$.

   Infatti

   $$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{sen(x+h)-senx}{h} = \frac{senxcosh+cosxsenh-senx}{h} =$$

   $$\frac{senx(cosh-1)}{h} + cosx\frac{senh}{h} \Longrightarrow cosx$$

   per $h \to 0$.

   Analogamente si dimosta: $Dcosx = -senx$.

Regole di derivazione

Abbiamo ricavato le derivate di alcune funzioni direttamente dalla definizione. Ora stabiliamo alcune regole che ci permettono di calcolare le derivate di funzioni ottenute da altre per via algebrica.

• **Teorema della derivata della somma -** *Siano $y = f(x)$ e $y = g(x)$ funzioni numeriche definite in (a, b) ed ivi derivabile. Allora la funzione somma $y = F(x) = f(x) + g(x)$ e' derivabile e si ha*

$$DF(x) = D(f(x) + g(x)) = Df(x) + Dg(x).$$

Si noti che l'operazione di derivazione si distribisce sui termini della somma.

Dimostrazione.

$$\frac{\Delta F}{h} = \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \frac{f(x+h) + g(x+h) - f(x) - g(x)}{h} =$$

$$(\frac{f(x+h) - f(x)}{h}) + (\frac{g(x+h) - g(x)}{h}) \to Df(x) + Dg(x)$$

per $h \to 0$.

Naturalmente il teorema vale per la differenza. Inoltre si estende alla somma di piu' funzioni

• **Teorema della derivata del prodotto -** Siano $y = f(x)$ e $y = g(x)$ funzioni numeriche definite in (a, b) ed ivi derivabili. Allora la funzione prodotto $y = F(x) = f(x)g(x)$ e' derivabile e si ha

$$DF(x) = D(f(x)g(x)) = g(x)Df(x) + f(x)Dg(x).$$

Dimostrazione.

$$\frac{\Delta F}{h} = \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} =$$

$$\frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x+h) - f(x)g(x) + f(x)g(x+h)}{h} =$$

$$g(x+h)(\frac{f(x+h) - f(x)}{h}) + f(x)(\frac{g(x+h) - g(x)}{h}) \to$$

$$g(x)Df(x) + f(x)Dg(x).$$

per $h \to 0$.
Si ricorda che $g(x)$ e' continua per cui e' $g(x + h) \to g(x)$ per $h \to 0$.

• **Teorema della derivata del rapporto** - *Siano $y = f(x)$ e $y = g(x) \neq 0$ funzioni numeriche definite in (a, b) ed ivi derivabili. Allora la funzione rapporto $y = F(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ e' derivabile e si ha*

$$DF(x) = D\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{g(x)Df(x) - f(x)Dg(x)}{(g(x))^2}.$$

Dimostrazione.

$$\frac{\Delta F}{h} = \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \frac{\frac{f(x+h)}{g(x+h)} - \frac{f(x)}{g(x)}}{h} = \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{g(x)g(x+h)h} =$$

$$\frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x+h) + f(x)g(x+h) - f(x)g(x)}{g(x)g(x+h)h} =$$

$$\frac{1}{g(x+h)g(x)}(g(x)\frac{f(x+h) - f(x)}{h} + f(x)\frac{g(x+h) - g(x)}{h}) \to$$

$$\frac{g(x)Df(x) - f(x)Dg(x)}{(g(x))^2}.$$

Esempi: Consideriamo le funzioni $y = sen(x)$ e $y = cosx$ di cui conosciamo le derivate. Allora abbiamo

$$y' = (senxcosx)' = cosxcosx - senxsenx = (cosx)^2 - (senx)^2$$

;

$$y' = Dtgx = D\frac{senx}{cosx} = \frac{(cosx)^2 + (senx)^2}{(cosx)^2} = \begin{cases} \frac{1}{(cosx)^2}, \\ 1 + (tgx)^2. \end{cases}$$

Derivata di funzione composta e di funzione inversa

Nel paragrafo precedente abbiamo considerato le regole di derivazioni di funzioni ottenute per via algebra da altre funzioni. Sappiamo che possiamo ottenere in altri due modi funzioni da altre funzioni. I modi sono la composizione e l'inversione. Valutiamo quindi la derivata della funzione composta e della funzione inversa.

• **Derivata di funzione composta**

Dapprima alcune osservazioni.

Sia $y = f(x)$ una funzione definita in (a, b) ed ivi derivabile. Dalla scrittura fuori dal segno di limite si ha

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x) + \alpha(h) \;\; con \;\; \alpha \to 0 \;\; per \; h \to 0,$$

da cui
$$f(x+h)-f(x)=hf'(x)+h\alpha(h).$$

La notazione di Leibnitz per indicate la derivata di $y=f(x)$ e'
$$\frac{dy}{dx}=f'(x);$$

al numeratore c'e' l'incremento " infinitesmo" della variabile indipendente ed al denominatore c'e' l'incremento "infimitesimo" della variabile dipendente.

Cosi' per $z=g(t)$ si ha $g'(t)=\frac{dz}{dt}$.

- **Teorema della derivata della funzione composta**

Siano $z=g(x)$ definita in (a,b) e $y=f(z)$ definita in (c,d), derivabili nei loro domini. Inoltre siano componibili ovvero $Im\ g\subseteq(c,d)$. Allora esiste la funzione composta $y=F(x)=f\circ g(x)=f(g(x))=f(x)_{|z=g(x)}$, e' derivabile con derivata
$$F'(x)=f'(g(x))g'(x)=f'(z)_{z=g(x)}g'(x).$$

Dimostrazione.

Dapprima diamo una dimostrazione formale utilizzando i simboli di Leibnitz. Osserviamo che:
$$g'(x)=\frac{dz}{dx},\ \ f'(z)=\frac{dy}{dz},\ \ F'(x)=\frac{dy}{dx},$$
e che nella funzione composta $z=g(x)$.

Allora si ha
$$F'(x)=\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dz}\frac{dz}{dx}=f'(z)_{|z=g(x)}g'(x).$$
che e' la formula cercata.

Per rendere rigorosa la dimostrazione bisogna considerare il processo di limite.

Per la variabile x usiamo l'incremento h e per la variabile z usiamo l'incremento k. Quindi abbiamo dalla scrittura fuori dal segno di limite
$$g(x+h)-g(x)=g'(x)h+h\alpha(h)\ \ e\ \ f(z+k)-f(z)=f'(z)k+k\beta(k).$$

Se poniamo $k=g(x+h)-g(x)$ si ha che $k\to 0$ per $h\to 0$ ed $k/h\to g'(x)$.

Allora
$$\frac{F(x+h)-F(x)}{h}=\frac{f(g(x+h))-f(g(x))}{h}=$$
$$\frac{f(g(x)+k)-f(g(x)}{k}\frac{k}{h}=(f'(g(x))+\beta(k))\frac{k}{h}\to f'(g(x))g'(x).$$
per $h\to 0$.

Facciamo notare che $\frac{f(g(x)+k)-f(g(x))}{k}$ e' il rapporto incrementale di $f(z)$ con punto iniziale $g(x)$ e punto incrementato $g(x)+k$. Il teorema e' dimostrato.

Esempi: calcolare la derivata di $y = F(x) = \sqrt[3]{senx}$. Questa e' composta da $y = \sqrt[3]{z}$ e da $z = senx$. Quindi si fa la derivata della funzione piu' esterna (la radice)considerando $senx$ come variabile indipendente poi la si moltiplica per la derivata della funzione piu' interna cioe' la derivata di $senx$:

$$y' = D(z^{1/3})_{|z=senx} Dsenx = \frac{cosx}{3(senx)^{2/3}};$$

$y = log(x^2+3)$ e' costituita da $y = logz$ e $z = x^2+3$. Quindi si fa la derivata del logaritmo rispetto al suo argomento, considerato variabile indipendente, e poi la si moltiplca per la derivata dell'argomento considerato funzione della x; quindi

$$y' = (Dlogz)_{|z=x^2+3} D(x^2+3) = \frac{2x}{x^2+3}.$$

Esercizio: calcolare le derivate delle seguenti funzioni

$$y = e^{1/x}; \;\; y = sen(cosx); \;\; y = tg(\sqrt{x}); \;\; y = |x| \;\; (e\,dopo) \;\; y = log|x|.$$

La derivata di $y = logf(x)$ e' $y' = \frac{f'(x)}{f(x)}$. Ricordando l'identita'

$$f(x)^{g(x)} = e^{g(x)logf(x)}$$

calcolare la derivata delle seguenti funzioni:

$$y = x^x; \;\; y = (senx)^x; \;\; y = (cosx)^{logx}.$$

. • **Derivata di funzione inversa**

E' nostra consuetudine avere la funzione oggetto delle nostre considerazioni col dominio sull'asse delle x e l' immagine sull'asse delle y. A tale scopo consideriamo una funzione $x = f(y)$ e la sua inversa , se esiste, $y = g(x) = f^{-1}(x)$. Vogliamo conoscere la derivata di g o f^{-1} una volta nota f'.

Teorema della derivata della funzione inversa

Sia $x = f(y)$ definita nell'intervallo $[c,d]$ sull'asse delle y ed immagine $[a,b]$ sull'asse delle x. Invertibile con inversa $y = f^{-1}(x)$ definita in $[a,b]$ ed immagine $[c,d]$. Se f e' derivabile nel punto $y \in (c,d)$ con $f'(y) \neq 0$ allora f^{-1} e' derivabile nel punto $x = f(y)$ in (a,b) e si ha:

$$D(f^{-1}(x)) = \frac{1}{Df(y)_{|y=f^{-1}(x)}}.$$

Dimostrazione.

Tra la funzione diretta e la funzione inversa sussistono le seguenti relazioni

$$f^{-1}(f(y)) = y \;\; e \;\; f(f^{-1}(x)) = x.$$

Deriviamo la seconda identita' rispetto ad x e. usando la regola di derivazione delle funzioni composte, si ha

$$1 = D(x) = D(f(f^{-1}(x)) = (Df(y)_{|f^{-1}(x)})Df^{-1}(x).$$

Dividendo l' uguaglianza per $(Df(y)_{|f^{-1}(x)})$ si ottiene

$$D(f^{-1}(x)) = \frac{1}{Df(y)_{|y=f^{-1}(x)}}.$$

Si puo' dimostrarare il teorema in modo classico usando la definizione di derivata .

Infatti, consideriamo la funzione inversa $y = f^{-1}(x)$ (se lo studente trova pesante la notazione la sostituisca con y=g(x)). Posto $\Delta y = f^{-1}(x + \Delta x)) - f^{-1}(x)$ si ha

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

perche' le funzioni f e f^{-1} sono entrambe continue e monotone per cui Δx e Δy sono infinitesimi equivalenti ovvero

$$(\Delta x \to 0) \Leftrightarrow (\Delta y \to 0).$$

Cio' che succede per $(\Delta x \to 0)$ succede per $(\Delta y \to 0)$ e viceversa. Allora si ha

$$Df^{-1}(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{\lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta y}} = \frac{1}{Df(y)}_{|y=f^{-1}(x)}.$$

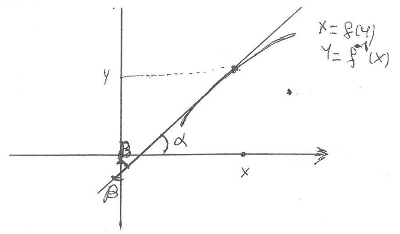
Il teorema e' dimostrato.

Nota: si osserva che nelle notazioni Δx, Δy le variabili sono considerate in modo simmetrico e nulla sappiamo a priori se sono variabili dipendenti o indipendenti. E' nel processo di limite che si sceglie il ruolo della variabile: se e' $\Delta x \to 0$ allora e' x variabile indipendente, se e' $\Delta y \to 0$ e' y variabile indipendente.

• Interpretazione geometrica

I grafici di $y = f^{-1}(x)$ e di $x = f(x)$ sono gli stessi. I punti $(x, f^{-1}(x))$ e $(f(y), y)$ sono gli stessi; la differenza consiste nello scambio del ruolo delle variabile. Per $x = f(y)$, y e' variabile indipendente ed x variabile dipendente; per $y = f^{-1}(x)$, x e' variabile indipendente ed y variabile dipendente. Abbiamo mostrato che geometricamente la derivata e' il coefficiente angolare della retta tangente alla linea nel punto; ancora, e' la pendenza della retta rispetto " all'asse della variabile indipendente", si faccia attenzione a questa affermazione. Allora per la funzione $y = f^{-1}(x)$ si ha $Df^{-1}(x) = tg\alpha$, per la funzione $x = f(y)$ si ha

$$Df(y) = tg\beta = tg(\pi/2 - \alpha) = \frac{1}{tg(\alpha)}.$$



Esempi:

• **La derivata di $y = logx$ e' $y' = \frac{1}{x}$.**

Infatti, $y = logx$ e' l'inversa di $x = e^y$ da cui si ha

$$x = e^y \Rightarrow \frac{dx}{dy} = e^y.$$

Ne segue

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{e^y} = \frac{1}{x}.$$

• La derivata di $y = arcsenx$ e' $y = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Si e' visto che $y = arcsenx$ e' la funzione inversa di $x = seny$ per $-\pi/2 \leq y \leq \pi/2$ ed $-1 \leq x \leq 1$.

Ora si ha per $1 < x < 1$ ($cosy > 0$)

$$y' = \frac{1}{cosy} = \frac{1}{\sqrt{1-(seny)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

• La derivata di $y = arccosx$ e' $y = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Si e' visto che $y = arccosx$ e' la funzione inversa di $x = cosy$ per $0 \leq y \leq \pi$ ed $-1 \leq x \leq 1$.

Ora si ha per $1 < x < 1$ ($seny > 0$)

$$y' = -\frac{1}{seny} = -\frac{1}{\sqrt{1-(cosy)^2}} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

.

• La derivata di $y = arctgx$ e' $y = \frac{1}{1+x^2}$.

Si e' visto che $y = arctgx$ e' la funzione inversa di $x = tgy$ per $-\pi/2 < y < \pi/2$ e per ogni x.

Ora si ha
$$y' = \frac{1}{D(tgy)} = \frac{1}{1+(tgy)^2} = \frac{1}{1+x^2}.$$

Nello stesso modo si dimostra
$$D(arccoty) = -\frac{1}{1+x^2}.$$

per $0 < y < \pi$.

Esempi:

$y = Shx = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \to y' = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = Chx$; $y = Chx \to y' = Shx$; $y = Thx \to y' = Cothx$; $y = x^2 logx \to y' = 2xlogx + x$; $y = e^x cos2x \to y' = e^x cos2x - 2e^x sen2x$; $y = |x| \to y' = 1$ se $x > 0$; $y' = -1$ se $x < 0 \Rightarrow y' = x/|x|$; $y = log|x| \to y' = Dlogz_{|z=|x|} D|x| = \frac{1}{|x|}\frac{x}{|x|} = 1/x$; $y = senx^{senx} = e^{senxlogsenx} \to y' = e^{senxlogsenx}(cosxlogsenx + senxDlogsenx) = senx^{senx}(cosxlogsenx + cosx)$; $y = \sqrt[n]{x} \to y' = \frac{x^{(1-n)/n}}{n}$; $y = x - actg\sqrt{x} \to y' = 1 - Darctgz_{|z=\sqrt{x}} D\sqrt{x} = 1 - \frac{1}{2(1+x)\sqrt{x}}$

Teoremi fondamentali del calcolo differenziale

In questo paragrafo studiamo le proprieta' delle fnzioni derivabili: dapprima untroduciamo i concetti di massimo e minimo locali o relativi

Sia $y = f(x)$ una funzione definita in un intervallo $[a, b]$. Diremo che $x_0 \in [a, b]$ e' un punto di *massimo relativo o locale* per $y = f(x)$ se esiste un intorno U di x_0 per cui
$$f(x) \leq f(x_0)$$
per $x \in U$. $f(x_0)$ e' detto massimo relativo (locale) della funzione.

Analogamente, x_0 e' punto di *minimo relativo (locale)* se esiste un intorno U di x_0 tale che
$$f(x) \geq f(x_0)$$
per $x \in U$. $f(x_0)$ e' detto minimo relativo (locale) della funzione. Massimi e minimi relativi sono detti estremi relativi (locali) e i punti corrispondenti sono detti estremanti relativi (locali).

Il massimo dei massimi relativi e' detto massimo assoluto ed e' il massimo del teorema di Weierstrass per le funzioni continue.

Analogamente il minimo dei minimi relativi e' detto minimo assoluto ed e' il minimo del teorema di Weierstrass per le funzioni continue. Ora formalizziamo le considerazione che abbiamo fatto nell'introduzione del concetto di derivata.

Il primo teorema fondamentale del calcolo differenziale e' il seguente

• **Teorema di Fermat** - *Sia $y = f(x)$ una funzione definita e continua in $[a,b]$. Sia $x_0 \in (a,b)$ (interno all'intervallo) di massimo o minimo relativo (un estremante relativo) in cui esiste la derivata. Allora $f'(x_0) = 0$. ($f'(x_0) = 0$ e' una condizione necessaria per l'esistenza di estremi relativi).*

Dimostrazione.

Supponiamo che x_0 (interno ad (a,b)) sia punto di massimo assoluto (per comodita' di esposizione). Allora essendo x_0 punto di massimo si ha

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \leq 0 \;\; \forall \Delta x \;\; con \;\; x_0 + \Delta x \in (a,b).$$

Allora

$$\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \begin{cases} \leq 0 & se \;\; \Delta x \geq 0, \\ \geq 0 & se \;\; \Delta x \leq 0. \end{cases}$$

Ne consegue, dal teorema inverso della permanenza del segno,

$$\begin{cases} \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} = f'_-(x_0) \geq 0 & , \\ \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} = f'_+(x_0) \leq 0 & . \end{cases}$$

Dato che la funzione e' derivabile tutte le derivate sono uguali

$$f'(x_0) = f'_-(x_0) = f'_+(x_0).$$

Allora $f'(x_0)$ e' contemporaneamente ≥ 0 e ≤ 0. Il segno compatibile e' $= 0$. Da cui $f'(x_0) = 0$. Per un punto di minimo la dimostrazione e' analoga . Si faccia attenzione ai segni. Il teorema e' dimostrato.

Nota - Per la dimostrazione del teorema e' essenziale che il punto x_0 sia interno. Nei punti estremi si puo' dire, se sono di massimo, che $f'_+(a) \leq 0$ e $f'_-(b) \geq 0$. Naturalmente i segni cambiano se sono punti di minimo.

Si osserva ancora che il teorema evidenzia una proprieta' della funzione in un punto estremante (locale).

Il prossimo teorema da' qualche informazione dell'esistenza di un punto estremante ed ha una notevole importanza per quello che verra' esposto in questo paragrafo. Si potebbero fare significative variazioni del teorema ma queste esulano dagli scopi di questi appunti.

• **Teorema di Rolle** - *Sia $y = f(x)$ definita e continua in un intervallo $[a,b]$, chiuso e limitato. Sia derivabile in (a,b) e $f(a) = f(b)$. (non e' richiesta la derivabilita' negli estremi dell'intervallo).*

Allora esiste almeno un punto x_0 interno ad $[a,b]$ $(a < x_0 < b)$ tale che

$$f'(x_0) = 0.$$

Dimostrazione.

Consideriamo due casi.

1. Assumiamo $f(x) = costante$. Abbiamo verificato che la derivata di una funzione costante e' identicamente nulla. I punti del teorema sono tutti i punti dell'intervallo.

2. Sia $f(x)$ non costante. Dal teorema di Weierstrass esiste massimo M e minimo m assoluti con $M \neq m$; quindi esiste in $[a,b]$ almeno un punto x_M tale $f(x_M) = M$ ed almeno un punto x_m tale che $f(x_m) = m$. Dato che $f(a) = f(b)$, questi punti non posono essere ambedue agli estremi (ad esempio se $x_M = a$ e $x_m = b$ si avrebbe $f(x_M) = f(a) = f(b) = f(x_m)$, una contraddizione poiche' la funzione non e' costante). Quindi uno almeno dei due punti deve essere interno ad $[a,b]$, supponiamo x_M. Siamo nelle condizioni del teorema di Fermat per cui $f'(x_M) = 0$ ed il teorema e' dimostrato.

Come conseguenza del teorema di Rolle si ricava un teorema fondamentale del calcolo differenziale che va sotto il nome di teorema di Lagrange o dell' incremento finito.

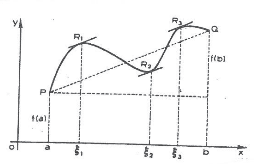
• **Teorema di Lagrange o dell'accrescimento finito o di Cavalieri -** *Sia $y = f(x)$ una funzione definita e continua in $[a,b]$ un intervallo chiuso e limitatao. Inoltre e' derivabile in (a,b) (non e' richiesta la derivata negli estremi). Allora esiste almeno un punto c interno ad $[a,b]$ tale che*

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c).$$

(il rapporto incrementale relativo al passaggio da a a b e' uguale alla derivata di $f(x)$ in un punto intermedio c.)

• *Interpretazione geometrica (B. Cavalieri ,1635)*

Esiste un punto c interno ad $[a,b]$ tale che la retta tangente al grafico nel punto di ascissa c e' parallela alla retta passante per i punti $A = (a, f(a))$ e $B = (b, f(b))$ punti estremi del grafico.



Dimostrazione.

Scriviamo l'equazione della retta secante passante per A e B.

$$y = g(x) = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a).$$

Si consideri la funzione ausiliaria $F(x)$ differenza fra $f(x)$ e $g(x)$ (equazione della secante):

$$y = F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a).$$

$F(x)$ soddisfa le ipotesi del teorema di Rolle, infatti :

1. $F(x)$ e' continua in $[a, b]$ perche' somma di funzioni continue.
2. $F(x)$ e' derivabile in (a, b) quale somma di funzioni derivabili.
3. $F(a) = F(b) = 0$, infatti $F(a) = f(a) - f(a) = 0$ e $F(b) = f(b) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(b - a) = 0$.

Pertanto esiste almeno un punto c in $[a, b]$ per cui $F'(c) = 0$. Essendo

$$F'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a},$$

Si ha

$$F'(c) = 0 \Rightarrow \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$

Il teorema e' dimostrato.

Conseguenze notevoli

1. Il teorema continua a valere per ogni restrizione di f a qualsiasi sottointervallo di $[a, b]$.

   Poniamo x_0 e $x_0 + h$ in luogo di a e b (h e' un incremento); allora si puo' porre $c = x_0 + \theta h$ con $0 < \theta < 1$ (questa scrittura ci ricorda che c e' compreso fra x_0 e $x_0 + h$) allora si ha

   $$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0 + \theta h)$$

   e riducendola a forma intera si ha

   $$f(x_0 + h) = f(x_0) + hf'(x_0 + \theta h).$$

   Si osservi attentamente questa espressione e la si colleghi alla scrittura fuori dal segno di limite per le funzioni continue. La conoscenza del valore della funzione in un punto x_0 piu' la continuita' ci permette di avere qualche informazione del comportamento della funzioni vicino al punto x_0, in intorni di x_0 ed abbiamo ricavato la scrittura :

$$f(x) = f(x_0) + \alpha(x, x_0)$$

con $\alpha(x, x_0)$ un infinitesimo per $x \to x_0$. Ponendo $x = x_0+h$, il teorema di Lagrange da' una forma ad α. Possiamo affermare che il valore di $f(x)$ in un punto incrementato (vicino a x_0) x_0+h e' uguale alla somma del valore $f(x_0)$ nel punto iniziale e del prodotto dell'incremento h per la derivata $f'(x_0 + \theta h)$ calcolata in punto intermedio. In termini di approsimazioni, se ad $f(x_0 + h)$ si sostituisce $f(x_0)$ si commette un errore il cui ordine di grandezza e' misurato da $hf'(x_0 + \theta h)$.

Va da se' che se possediamo piu' derivate della funzione in x_0 l'approssimazione puo' essere migliore. Cosa che vedremo piu' avanti.

2. Dalla definizione di derinvata e dalla scrittura fuori dal segno di limite abbiamo

$$i) \ \lim_{h \Rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0) \to f(x_0 + h) - f(x_0) = h(f'(x_0)+\alpha(h))$$

Il teorema di Lagrange conduce alla forma

$$ii) \ \ f(x_0 + h) = f(x_0) + hf'(x_0 + \theta h).$$

Abbiamo due modi per valutare il valore della funzione nel punto variato. La i) richiede la derivata solo nel punto x_0 con l'incertezza α, la ii) richiede la derivata in un intorno di x_0 e non in x_0 con l'incertezza θ.

3. **Carattrizzazione delle funzioni costanti**

Teorema

Sia $y = f(x)$ una funzione definita e derivabile in $[a, b]$. Inoltre $f'(x) \equiv 0$ in $[a, b]$ (negli estremi a e b si intende derivata destra e sinistra, rispettivamente). Allora $f(x) =$ costante.

Abbiamo calcolato la derivata di una funzione costanre direttamente dalla definizione ottenendo che la sua derivata e' identicamente nulla . Ora dimostriamo il contrario: se

$$i) \quad y' \equiv 0$$

allora $y = c$. Si osservi che i) e' una equazione nell'incognica y, ma a differenza dell'equazioni cui siamo abituati ora l'incognita y appare sotto il segno di derivata. Equazioni di questo tipo vengono chiamate equazioni differenziali. Queste equazioni sono di notevole importanza nell'analisi matematica e nelle scienze applicate. Il nostro caso e' molto semplice la cui risoluzione e' facile. Non cosi' e' per le equazioni un po' piu' complicate.

Dimostrazione

$f(x)$ e' continua in tutto l'intervallo $[a, b]$ perche' derivabile. Preso un punto x in $[a, b]$ ed applicando il teorema di Lagrange all'intervallo $[a, x]$ si ha

$$f(x) = f(a) + hf'(c) = f(a).$$

per ogni $x \in (a, b]$, da cui l'asserto.

4. *Se $y = f(x)$ e $y = g(x)$ sono definite e continue in $[a, b]$ ed ivi derabibili con le derivate identicamente uguali : $f'(x) \equiv g'(x)$ allora $f(x) = g(x) +$ costante.*

   Basta osservare che la funzione ausiliaria $F(x) = f(x) + g(x)$ ha derivata $F'(x) = f'(x) - g'(x)$ identicamente nulla per cui $F(x) = costante$.

• Proprieta' locali. Monotonia puntuale: crescere e decrescere in un punto

Dalla introduzione del concetto di derivata e dal teorema di Lagrange si intuisce che la conoscenza della derivata nel punto x_0 identifica il grafico della funzione in un intorno di x_0 con le sue caratteristiche essenziali. Ora formalizziamo questi concetti.

Crescita in un punto

Sia $y = f(x)$ definita in un intervallo $[a, b]$. Sia x_0 in (a, b). Diremo che $f(x)$ e' crescente nel punto x_0 quando per ogni incremento h con $|h|$ sufficientemente piccolo si ha

$$\begin{cases} f(x_0 + h) - f(x_0) & \geq & 0 \;\; se \;\; h \geq 0, \\ f(x_0 + h) - f(x_0) & \leq & 0 \;\; se \;\; h \leq 0, . \end{cases}$$

L'incremento della funzione e l'incremento della variabile indipendente hanno lo stesso segno. Possiamo conchiudere in una sola relazione le due sopra:

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \geq 0 \Rightarrow crescita \;\; in \;\; x_0.$$

se si sotituisce $\geq$ con $>$ si dice crescita in senso stretto.

Analogamente si procede per la decrescita

Sia $y = f(x)$ definita in un intervallo $[a, b]$. Sia x_0 in (a, b). Diremo che $f(x)$ e' decrescente nel punto x_0 quando per ogni incremento h con $|h|$ sufficientemente piccolo si ha

$$\begin{cases} f(x_0+h)-f(x_0) & \leq & 0 \ \ se \ \ h \geq 0, \\ f(x_0+h)-f(x_0) & \geq & 0 \ \ se \ \ h \leq 0,. \end{cases}$$

L'incremento della funzione e l'incremento della variabile indipendente hanno lo segno opposto. Possiamo conchiudere in una sola relazione le due sopra:

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \leq 0 \Rightarrow decrescita \ \ in \ \ x_0.$$

se si sotituisce $\leq$ con $<$ si dice decrescita in senso stretto.

Se la funzione $f(x)$ e' derivabile in x_0, il comportamento locale dato dalle relazioni sopra descritte e' determinato dalla conoscenza della derivata di f nel solo punto x_0; questo non ci sorprende; oramai abbiamo acquisito il fatto che il limite sintetizza il comportamento locale delle grandezze implicate. Cosi' abbiamo il seguente

- **I Teorema di monotonia**

Sia $y = f(x)$ una funzione definita e continua in $[a, b]$ e derivabile in $x_0 \in (a, b)$ (interno) con $f'(x_0) > 0$. Allora $f(x)$ e' crescente in senso stretto in x_0. Analogamente, se $f'(x_0) < 0$ la funzione e' decrescente (in senso stretto) nel punto x_0.

Dimostrazione.

Dimostriamo solo il caso di crescita. La funzione e' derivabile in x_0 quindi

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = f'(x_0) > 0.$$

Dal teorema della permanenza del segno esistono h, in valore assoluto opportunamente piccoli, tale che

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} > 0$$

e questa e' la definizione di crescita nel punto x_0.

Diamo una versione globale del teorema.

- **II Teorema di monotonia**

Sia $y = f(x)$ una funzione definita e derivabile in $[a, b]$ (negli estremi con derivata destra e sinistra). Sia $f'(x) > 0$ in tutti i punti x dell'intervallo. Allora $f(x)$ e' crescente globalmente e in senso stretto in $[a, b]$. Analogamente, se $f'(x) < 0$ la funzione e' decrescente globalmente in senso stretto in $[a, b]$.

Dimostrazione.

Dimostriamo la crescita.

La proprieta' richiesta e' globale quindi utilizzeremo una relazione globale: il teorema di Lagrange. Siano x_1, x_2 due punti arbitrari di $[a.b]$ con $x_1 < x_2$. Consideriamo il teorema di Lagrange relativo all'intervallo $[x_1, x_2]$. Si ha

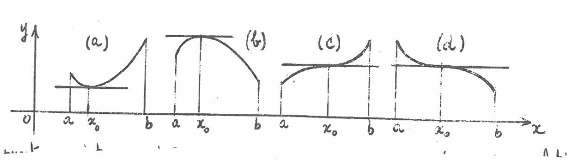
$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(c) > 0 \Rightarrow f(x_2) - f(x_1) = (x_2 - x_1)f'(c) > 0,$$

Da cui $f(x_1) < f(x_2)$. Il teorema e' dimostrato.

Questi teoremi danno una condizione sufficiente per la monotonia in senso stretto.

Massimi, minimi , derivate e condizione sufficiente

Consideriamo ora il fondamentale problema di identificazione delle proprieta' del grafiico di una funzione. La ricerca dei massimi e minimi (relativi) utilizzando le derivate.



I grafici (a), (b), (c), (d), evidenziano che un punto x_0 interno all'intervallo di definizione con derivata nulla puo' non essere ne' di massimo ne' di minimo relativo . Il punto x_0 dei grafici (c) e (d) e' detto punto flesso o di inflessione. Preciseremo queste nozioni piu' avanti.

Chiameremo punti stazionari o di stazionarieta' o a valori stazionari quei punti in cui si annulla la derivata

Il teorema di Fermat da' un legame fra il valore della derivata di una funzione ed i punti di massimo o minimo; se esiste la derivata in un punto (interno all'intervallo di definizione)) di massimo o di minimo essa e' nulla . L'annullarsi della derivata in un punto e' una condizione necessaria per l'esistenza di estremanti. In questo momento della teoria non abbiamo strumenti per poter trovare condizioni sufficienti considerando proprieta' della funzione solo nel punto x_0. La condizione che ci apprestiamo a dare implica i punti che si trovano in un intorno di x_0. Il seguente teorema da' una condizione sufficiente per l'esistenza di massimo e minimo relativi. Condizione sufficiente affinche' punti stazionari siano estremanti cioe' di massimo o minimo.

Dai teoremi di monotonia abbiamo il seguente corollario

• **Corollario** *Sia* $y = f(x)$ *una funzione definita e derivabile in* (a, b) *ed* $f'(x_0) = 0$ *con* $x_0 \in (a, b)$*(punto di stazionarieta') e sia* $\delta > 0$ *un numero opportuno .*

$$Se \;\; f'(x) \begin{cases} < 0 & per \;\; x_0 - \delta < x < x_0, \\ > 0 & per \;\; x_0 < x < x_0 + \delta \end{cases}$$

allora x_0 *e' un punto di minimo relativo.*

$$Se \;\; f'(x) \begin{cases} > 0 & per \;\; x_0 - \delta < x < x_0, \\ < 0 & per \;\; x_0 < x < x_0 + \delta \end{cases}$$

allora x_0 *e' un punto di massimo relativo.*