6. Dinamica dei sistemi di punti materiali

6.1 Sistemi di particelle, forze interne ed esterne

La dinamica dei sistemi

Un *sistema di punti* è costituito da un insieme di n punti materiali soggetti ad interazioni reciproche e con il mondo esterno.
Il problema generale della dinamica consiste nel determinare la legge oraria per ciascuno di tali punti (anche se nei casi con $n >> 2$ ciò risulta praticamente impossibile).
La *dinamica dei sistemi* si occupa invece di determinare le proprietà del moto del sistema nel suo complesso.

Def. Forze interne e forze esterne
Indicheremo le forze agenti sul punto *i*-esimo del sistema come:

$\vec{F}_i^{(I)}$ *forze interne* (dovute alle interazioni con gli altri punti del sistema)

$\vec{F}_i^{(E)}$ *forze esterne* (dovute alle interazioni con l'esterno, cioè con un altro sistema)

La *risultante* delle forze agenti sul punto *i*-esimo verrà indicata come $\vec{F}_i$, pari alla somma

$$\vec{F}_i = \vec{F}_i^{(I)} + \vec{F}_i^{(E)}$$

della risultante $\vec{F}_i^{(I)}$ delle forze interne e della risultante $\vec{F}_i^{(E)}$ delle forze esterne.
Le forze interne sono quelle dovute alle interazioni con gli altri $n-1$ punti del sistema:

$$\vec{F}_i^{(I)} = \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} \vec{F}_{i,j} \ ,$$

dove con $\vec{F}_{i,j}$ abbiamo indicato la forza (interna) esercitata sull'*i*-esimo punto dal *j*-esimo punto.

Oss. Per la III legge della dinamica di Newton avremo che $\vec{F}_{j,i} = -\vec{F}_{i,j}$ e quindi la *risultante di tutte le forze interne è nulla*:

$$\vec{F}^{(I)} \equiv \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i^{(I)} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} \vec{F}_{i,j} = 0$$

Oss. Di conseguenza, *la somma di tutte le forze agenti sul sistema è pari alla risultante delle sole forze esterne*:

$$\vec{F} \equiv \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i^{(I)} + \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i^{(E)} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i^{(E)} = \vec{F}^{(E)}$$

6.2 Quantità di moto, I eq. cardinale della dinamica dei sistemi e teorema dell'impulso

Def. Quantità di moto di un sistema di n punti materiali
La *quantità di moto totale del sistema* è per definizione la somma delle quantità di moto dei singoli punti materiali:

$$\vec{p} \equiv \sum_{i=1}^{n} \vec{p}_i$$

Osserviamo che in base alla II legge della dinamica di Newton, il moto di ciascun punto obbedisce all'equazione:

$$\vec{F}_i = \vec{F}_i^{(I)} + \vec{F}_i^{(E)} = m_i \vec{a}_i = \frac{d\vec{p}_i}{dt}, \quad \overset{n}{\underset{i=1}{\forall}}.$$

Sommando sull'indice i tutte queste equazioni si ottiene:

$$\vec{F}^{(E)} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{d\vec{p}_i}{dt} = \frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{n} \vec{p}_i = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

Quest'ultima equazione esprime la ***I Equazione Cardinale della Dinamica dei Sistemi***:

THR. *La risultante delle forze esterne applicate ad un sistema di punti è pari alla derivata temporale della quantità di moto totale del sistema*

$$\boxed{\vec{F}^{(E)} = \frac{d\vec{p}}{dt}}$$

Teorema dell'impulso

Se poi integriamo nel tempo ambo i membri otteniamo il ***Teorema dell'impulso***:

Thr. *L'impulso in un certo intervallo di tempo delle forze agenti su un sistema materiale è uguale alla variazione della quantità di moto totale del sistema nello stesso intervallo di tempo.*

$$\boxed{\vec{I}_{t_1,t_2}\left(\vec{F}^{(E)}\right) = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}^{(E)} dt = \Delta\vec{p} = \vec{p}(t_1) - \vec{p}(t_2)}$$

Principio di conservazione della quantità di moto

Thr. *In un sistema di riferimento inerziale, un sistema di punti materiali isolato oppure soggetto ad un sistema di forze esterne con risultante nulla conserva la quantità di moto totale.*

$$\boxed{\vec{F}^{(E)} = 0 \Rightarrow \vec{p} = \text{cost.}}$$

Cor. Più in generale, se si annulla la componente della risultante delle forze esterne lungo un dato asse, allora si conserva la componente della quantità di moto totale lungo quell'asse e viceversa:

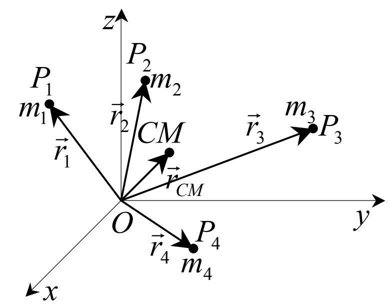
$$F_z^{(E)} = 0 \Rightarrow p_z = \text{cost.}$$

Oss. Notiamo infine che, in base al teorema dell'impulso, la quantità di moto di un sistema di punti materiali si conserva in un intervallo di tempo infinitesimo anche in presenza di una risultate delle forze esterne non nulla, purchè tale risultante sia non impulsiva. Vedremo che tale circostanza ricoprirà un ruolo chiave nello studio degli urti tra punti materiali.

6.3 Centro di massa, teorema del centro di massa e sistema trasposto.

Centro di massa

Il *centro di massa*, che indicheremo con il simbolo *CM*, è un punto (fittizio) la cui posizione è la media delle posizioni dei punti materiali del sistema, pesate sulla loro massa.



Il raggio vettore corrispondente vale dunque:

$$\vec{r}_{CM} \equiv \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i}{M}\vec{r}_i = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r}_i}{M}, \text{ con } M \equiv \sum_{i=1}^{n} m_i \text{ massa totale del sistema.}$$

Teorema del centro di massa

Nota la risultante delle forze esterne, senza bisogno di conoscere le singole interazioni interne ed esterne, possiamo ricavare il moto del *CM* grazie alla I Equazione cardinale. Infatti, se deriviamo l'equazione che definisce il raggio vettore del centro di massa rispetto al tempo, otteniamo che:

$$\vec{v}_{CM} \equiv \frac{d\vec{r}_{CM}}{dt} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{v}_i}{M} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \vec{p}_i}{M} = \frac{\vec{p}}{M} \Rightarrow \vec{p} = M \cdot \vec{v}_{CM}$$

Oss. La quantità di moto totale è pari al prodotto della massa totale per la velocità del centro di massa.

Derivando ancora rispetto al tempo e tenendo conto della I Equazione cardinale si ottiene:

$$\vec{F}^{(E)} = \frac{d\vec{p}}{dt} = M \cdot \vec{a}_{CM}$$

Siamo allora in grado di enunciare il seguente:

Thr. *Teorema del centro di massa*

In un sistema di riferimento inerziale, il centro di massa di un sistema di punti materiali si muove come un punto materiale di massa pari alla massa totale del sistema e soggetto alla risultante delle forze esterne applicate al sistema.

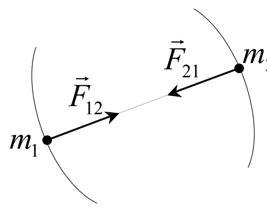
Oss. L'utilità del *CM* si comprende immediatamente alla luce del suddetto teorema, infatti il moto del *CM*, al contrario del moto dell'*i*-esimo punto del sistema, dipende solo dalla risultante delle forze esterne, non dalla configurazione di tali forze e neppure dalle forze interne.
Tale moto fornisce tuttavia solo delle *informazioni medie* sul sistema.

Oss. Dal teorema del centro di massa discende immediatamente una importante proprietà: se il sistema è isolato le forze esterne sono nulle e quindi il *CM* si muove di moto rettilineo uniforme oppure è in quiete in un sistema di riferimento inerziale.

Massa ridotta (argomento facoltativo)

Consideriamo un sistema composto da *due* punti materiali P_1 e P_2, soggetti alla *sola interazione reciproca*. La risultante delle forze esterne, cioè, sia nulla.
Studiamo, in un riferimento inerziale, e per l'effetto delle forze $\vec{F}_{1,2}$ ed $\vec{F}_{2,1}$ (uguali ed opposte tra loro), il moto relativo di un punto rispetto all'altro.
Si tratta di calcolare la differenza fra le due leggi orarie di P_1 e P_2.
Le equazioni del moto dei due punti sono:

$$\begin{cases} \vec{F}_{12} = m_1\vec{a}_1 = m_1 \dfrac{d^2\vec{r}_1}{dt^2} \\ \vec{F}_{21} = m_2\vec{a}_2 = m_2 \dfrac{d^2\vec{r}_2}{dt^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{\vec{F}_{12}}{m_1} = \dfrac{d^2\vec{r}_1}{dt^2} \\ \dfrac{\vec{F}_{21}}{m_2} = \dfrac{d^2\vec{r}_2}{dt^2} = -\dfrac{\vec{F}_{12}}{m_2} \end{cases}$$



Facendo la differenza fra le due equazioni a destra, e ricordando che le due forze sono uguali e contrarie per la III legge della dinamica, otteniamo:

$$\frac{d^2(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)}{dt^2} = \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right)\vec{F}_{12}$$

Risulta allora utile introdurre la *massa ridotta* μ, definita come la massa che soddisfa la relazione:

$$\frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \quad \Leftrightarrow \quad \mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$$

Se inoltre definiamo il vettore posizione di P_1 rispetto a P_2 come $\vec{r} \equiv \vec{r}_1 - \vec{r}_2$ l'equazione del moto relativo diventa:

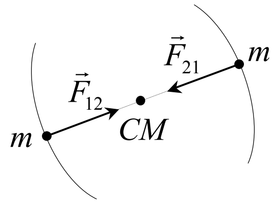
$$\vec{F}_{12} = \mu \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \mu \vec{a}$$

Oss. Il moto relativo di due punti materiali soggetti alla sola interazione reciproca equivale al moto di un punto di massa pari alla *massa ridotta* e soggetto ad una forza pari all'interazione originale.

Un sistema di due punti materiali interagenti solo tra loro può essere descritto attraverso il suo *sistema trasposto*, costituito da *due punti virtuali*:
- il *centro di massa CM* (con massa pari alla massa totale del sistema)
- un punto di *massa ridotta* μ la cui posizione corrisponde alla posizione relativa di uno dei due punti rispetto all'altro.

E' possibile passare dal sistema trasposto $(\vec{r}_{CM}, \vec{r})$ al sistema reale $(\vec{r}_1, \vec{r}_2)$ e viceversa attraverso le equazioni:

$$\begin{cases} \vec{r}_{CM} = \dfrac{m_1}{m_1 + m_2}\vec{r}_1 + \dfrac{m_2}{m_1 + m_2}\vec{r}_2 \\ \vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{r}_1 = \vec{r}_{CM} + \dfrac{m_2}{m_1 + m_2}\vec{r} \\ \vec{r}_2 = \vec{r}_{CM} - \dfrac{m_1}{m_1 + m_2}\vec{r} \end{cases}$$



Oss.1 La *massa ridotta* permette di studiare il *moto relativo* di due punti materiali <u>come se</u> si trattasse del moto di un solo punto materiale interagente con un punto materiale fisso (origine di un sistema di riferimento inerziale per la descrizione del moto dell'altro punto materiale).
Oss.2 Il moto del *centro di massa* è determinato solo dalla risultante delle forze esterne.

<u>Casi particolari</u>

a) Interazione di due particelle di uguale massa *m*:

$$\mu = \frac{m \cdot m}{m + m} = \frac{m}{2}$$

b) Interazione di due particelle di massa molto differente:

$$m_1 << m_2 \quad \Rightarrow \quad \vec{r}_{CM} \cong \vec{r}_2 \quad ; \quad \mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} = \frac{m_1}{1 + \dfrac{m_1}{m_2}} \cong m_1\left(1 - \frac{m_1}{m_2}\right) \cong m_1$$

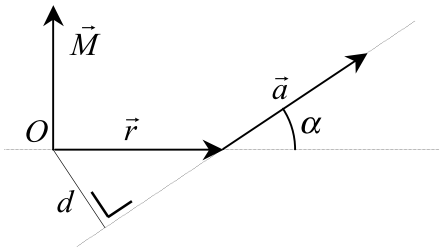
6.4 Momento angolare e II equazione cardinale della dinamica

Prima di proseguire con lo studio della dinamica dei sistemi di punti materiali, introduciamo alcune nuove grandezze fisiche relative al moto di un singolo punto materiale. Tali grandezze e l'equazione fondamentale che le lega tra loro troveranno applicazioni importanti in seno alla dinamica dei sistemi.

Momento di un vettore applicato

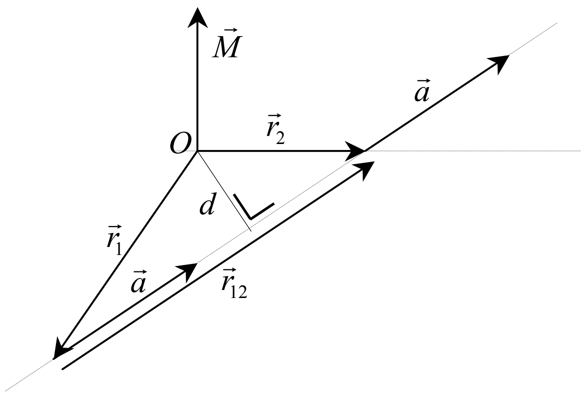
Dati un vettore applicato $\vec{a}$ ed un punto *O*, detto *polo*, si dice *momento* $\vec{M}$ di $\vec{a}$ rispetto ad *O* il vettore:

$$\vec{M}_O = \vec{r} \times \vec{a},$$



dove $\vec{r}$ è il vettore che va da *O* al punto di applicazione di $\vec{a}$.
Come conseguenza della definizione, il momento è ortogonale al piano individuato da $\vec{a}$ e da *O* ed ha per modulo $M_O = r \cdot a \cdot \sin\alpha = d \cdot a$, dove α è l'angolo compreso tra $\vec{r}$ ed $\vec{a}$, *d* è la distanza della retta di applicazione di $\vec{a}$ dal polo *O*.

Oss. Se trasliamo il vettore applicato $\vec{a}$ lungo la sua retta di applicazione, il momento rispetto allo stesso polo *O* non cambia:



$$\vec{M}'_O = \vec{r}_2 \times \vec{a} = (\vec{r}_1 + \vec{r}_{12}) \times \vec{a} =$$
$$= \vec{r}_1 \times \vec{a} + \vec{r}_{12} \times \vec{a} = \vec{r}_1 \times \vec{a} = \vec{M}_O$$

essendo $\vec{r}_{12} \parallel \vec{a} \;\Rightarrow\; \vec{r}_{12} \times \vec{a} = 0$.

Momento di una forza

In particolare, dati una forza $\vec{F}$ ed un polo *O*, si definisce *momento* $\vec{\tau}$ *della forza* $\vec{F}$ *rispetto ad O* il vettore:

$$\vec{\tau}_O = \vec{r} \times \vec{F},$$

dove $\vec{r}$ è il vettore che va da *O* al punto di applicazione di $\vec{F}$. Le dimensioni del momento di una forza sono:

$$[\tau] = [r][F] = [L]^2[M][T]^{-2}$$

Nel S.I. il momento di una forza si misura in $N \cdot m$.

Momento della quantità di moto

Dati un punto materiale *P*, avente quantità di moto $\vec{p}$, ed un polo *O*, si definisce *momento della quantità di moto* o *momento angolare* $\vec{L}_O$ di *P* rispetto ad *O* il vettore

$$\vec{L}_O = \vec{r} \times \vec{p},$$

dove $\vec{r}$ è il vettore che va da *O* a *P*.

<u>II equazione cardinale della dinamica per un singolo punto materiale</u>

Consideriamo un sistema di riferimento inerziale, ed un punto materiale *P* in moto in esso; se deriviamo rispetto al tempo l'espressione del momento angolare di *P* rispetto ad un polo *O,* che supporremo in quiete in un sistema di riferimento inerziale, troviamo:

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\vec{r}\times\vec{p}\right) = \frac{d\vec{r}}{dt}\times\vec{p}+\vec{r}\times\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{v}\times\vec{p}+\vec{r}\times\vec{F} = \vec{r}\times\vec{F} = \vec{\tau}_O$$

essendo $\vec{v}\parallel\vec{p} \quad\Rightarrow\quad \vec{v}\times\vec{p} = 0$.

Abbiamo così dimostrato la *Seconda equazione cardinale della dinamica del punto materiale:*

In ogni istante, la derivata temporale del momento angolare di un punto materiale P rispetto a un dato polo fisso O è pari al momento della risultante delle forze applicate a P rispetto al medesimo polo O

$$\boxed{\vec{\tau}_O = \frac{d\vec{L}_O}{dt}}$$