1 Lezione del 14 marzo 2014

Esercizio 1. Risolvere con il metodo di eliminazione di Gauss il seguente sistema lineare:

$$\begin{cases} -2x + 3y - z = -9 \\ x - 4y = 8 \\ 5x - 2y + 2z = 10. \end{cases}$$

Soluzione: $(0, -2, 3)^t$.

Esercizio 2. Risolvere con il metodo di eliminazione di Gauss il seguente sistema lineare:

$$\begin{cases} x_2 - 2x_3 + 3x_4 + 4x_5 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 - 4x_3 + 6x_4 + 7x_5 = 2 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 + 3x_5 = 1 \\ -2x_1 - x_2 - 2x_3 - 3x_4 - 2x_5 = -2. \end{cases}$$

Soluzione: $(1, -2\alpha - 3\beta, \alpha, \beta, 0)^t$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Esercizio 3. Risolvere con il metodo di eliminazione di Gauss il seguente sistema lineare:

$$\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + x_3 - 2x_4 = 5 \\ 6x_1 + 3x_3 - 2x_4 = 15 \\ 2x_2 + x_4 = -3 \\ -2x_1 - x_3 - 2x_4 = -10. \end{cases}$$

Soluzione: $\varnothing$.

Esercizio 4. Risolvere con il metodo di eliminazione di Gauss il seguente sistema lineare:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 5 \\ 2x_1 + x_2 - x_4 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 3x_4 = 5 \\ 4x_1 + 4x_2 - 12x_3 + 16x_4 = 20. \end{cases}$$

Soluzione: $(-5 - 3\alpha + 5\beta, 10 + 6\alpha - 9\beta, \alpha, \beta)^t$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Esercizio 5. Risolvere con il metodo di eliminazione di Gauss il seguente sistema lineare:

$$\begin{cases} 3x + 5y + z = 1 \\ x + y + 2z = 1 \\ 6x + 3y + 4z = 1 \\ x + z = 0. \end{cases}$$

Soluzione: $\emptyset$.

Esercizio 6. Risolvere con il metodo di eliminazione di Gauss il seguente sistema lineare:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 - 3x_4 = 0 \\ -x_2 + 3x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 - 3x_3 = -1. \end{cases}$$

Soluzione: $\left(-\frac{2}{3} + \frac{4}{3}\alpha, \frac{1}{3} + \frac{1}{3}\alpha, \frac{1}{9} + \frac{4}{9}\alpha, \alpha\right)^t$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

2 Lezione del 21 marzo 2014

Esercizio 7. Discutere, al variare del parametro $a \in \mathbb{R}$, la risolubilità del sistema lineare con matrice

$$(A \mid \underline{\boldsymbol{b}}) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & a \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right).$$

Si dia inoltre un'interpretazione geometrica dei risultati ottenuti.

Soluzione: un punto per $a = -1, 0$, rette sghembe per $a \neq -1, 0$.

Esercizio 8. Discutere, al variare del parametro $a \in \mathbb{R}$, la risolubilità del sistema lineare con matrice

$$(A \mid \underline{\boldsymbol{b}}) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & a-1 & a \\ 3-a & 2 & 1 & 3 \\ 1 & a & 1 & a+1 \end{array}\right).$$

Si dia inoltre un'interpretazione geometrica dei risultati ottenuti e si dica per quali valori di a il vettore $(2, -1, 1)^t$ è soluzione del sistema.

Soluzione: se $a = 2$ non esiste soluzione, se $a = 1$ vi sono ∞^1 soluzioni, se $a \neq 1, 2$ esiste una e una sola soluzione; $a = 1$.

Esercizio 9. Discutere, al variare dei parametri $h, k \in \mathbb{R}$, la risolubilità del sistema lineare con matrice e termine noto

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ k & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 \end{pmatrix}, \qquad \underline{\boldsymbol{b}} = \begin{pmatrix} h \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Si dia inoltre un'interpretazione geometrica dei risultati ottenuti.

Soluzione: se $k = h = 1$ ci sono ∞^2 soluzioni, se $k = 1$ e $h \neq 1$ non esiste soluzione, se $k \neq 1$ esiste una e una sola soluzione.

Esercizio 10. Siano

$$r : \begin{cases} x = k + t \\ y = 1 + 2t \\ z = -1 \end{cases}, \qquad s : \begin{cases} 3x - 2y = 0 \\ x + 2z = 4 \end{cases};$$

discutere la mutua posizione di r ed s al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$. Posto inoltre $k = 0$, determinare il piano passante per r e parallelo ad s.

Soluzione: r, s incidenti per $k = 2$, sghembe altrimenti; $2x - y + z + 2 = 0$.

Esercizio 11. Sia $\mathcal{B}_0$ un sistema di riferimento.

Trovare la retta s parallela a

$$r : \begin{cases} x + y - 2z = 3 \\ 2x + y - 2z = 7 \end{cases}$$

e passante per il punto $P_{|\mathcal{B}_0} = (1, 0, 2)^t$. Trovare inoltre il piano π contenente r e parallelo al vettore $u_{|\mathcal{B}_0} = (1, 1, 1)^t$. Determinare infine la mutua posizione di π e $\bar{\pi} : 2x + 2y - 4z - 10 = a$ al variare del parametro $a \in \mathbb{R}$.

Soluzione:

$$s : \begin{cases} x = 1 \\ y - 2z = -4 \end{cases}, \qquad \pi : x + y - 2z - 3 = 0;$$

se $a = -4$ abbiamo $\pi = \bar{\pi}$, se $a \neq -4$ risulta $\pi \parallel \bar{\pi}$.

Esercizio 12. Eseguire la seguente moltiplicazione tra matrici:

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -5 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 1 \\ 3 & -3 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Soluzione:

$$\begin{pmatrix} -7 & 9 \\ -14 & -6 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 13. Eseguire la seguente moltiplicazione tra matrici:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Soluzione: $(27, -15)^t$.

Esercizio 14.

- Dimostrare l'associatività della moltiplicazione tra matrici.
- Dimostrare che, se A e B sono matrici simmetriche (antisimmetriche) e $\alpha \in \mathbb{R}$, allora anche $A+B$ e αA sono simmetriche (antisimmetriche).
- Dimostrare che, se A e B sono simmetriche, allora AB è simmetrica se e solo se $AB = BA$.
- Dimostrare che $A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{K})$ si può scrivere come $A = A_S + A_A$, A_S simmetrica e A_A antisimmetrica.
- Dimostrare che, se $A \in \mathrm{Mat}_{m,n}(\mathbb{K})$, allora $AA^t \in \mathrm{Mat}_m(\mathbb{K})$ e $A^tA \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{K})$ sono simmetriche.

3 Lezione del 28 marzo 2014

Esercizio 15. Calcolare con il metodo di Gauss-Jordan l'inversa della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 5 \\ 1 & 0 & 1 \\ 4 & -3 & -2 \end{pmatrix}.$$

Soluzione:

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 2 & -\frac{20}{3} & \frac{5}{3} \\ -1 & 4 & -1 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 16. Calcolare con il metodo di Gauss-Jordan l'inversa della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -4 & 7 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Soluzione:

$$\begin{pmatrix} -\frac{9}{2} & -\frac{5}{2} & 2 \\ -2 & -1 & 1 \\ 4 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 17. Data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 3 & -1 \\ 1 & -4 & 0 \\ 5 & -2 & 2 \end{pmatrix},$$

calcolarne il determinante con la regola di Sarrus, lo sviluppo di Laplace e il metodo di eliminazione di Gauss.

Soluzione: -8.

Esercizio 18. Calcolare con il metodo dei complementi algebrici l'inversa della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Soluzione:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 19. Risolvere con il metodo di Cramer e tramite inversione il sistema lineare con matrice

$$(A \mid \underline{\boldsymbol{b}}) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 6 & 6 \\ 6 & -3 & 0 & 12 \\ 0 & 1 & 0 & -4 \end{array}\right)$$

Soluzione: $(0, -4, 1)^t$.

Esercizio 20. Calcolare con il metodo dei minori il rango della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 4 \\ 3 & 0 & 7 \end{pmatrix}.$$

Soluzione: 2.

Esercizio 21. Calcolare con il metodo dei minori il rango della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 3 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -4 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Soluzione: 4.

4 Lezione dell'8 aprile 2014

Esercizio 22. Stabilire quali tra i seguenti insiemi sono spazi vettoriali:

- $V_1 = \left\{\underline{v} \in \mathbb{R}^3 \mid z = 0\right\};$
- $V_2 = \left\{\underline{v} \in \mathbb{R}^3 \mid xy = 0\right\};$
- $V_3 = \left\{\underline{v} \in \mathbb{R}^3 \mid y - z^2 = 0\right\};$
- $V_4 = \left\{\underline{v} \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = z - 1 = 0\right\}.$

Soluzione: solo V_1.

Esercizio 23. Dimostrare che $V = \{A \in \mathrm{Mat}_2(\mathbb{R}) \mid a_{11} = a_{21} = 0\}$ è un sottospazio vettoriale di $\mathrm{Mat}_2(\mathbb{R})$.

Esercizio 24. Dimostrare che $V = \{p \in \mathbb{R}[x] \mid p(1) = 0\}$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}[x]$.

Esercizio 25. Dato lo spazio vettoriale su $\mathbb{R}$

$$V = \{f \in \mathbb{R}_2[x] \mid f(2) = 0\},$$

dimostrare che $\mathcal{B} = \left\{x - 2, x^2 - 2x\right\}$ è una base di V.

Esercizio 26. Dimostrare che

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 8 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$$

è una base di $\mathbb{R}^3$.

Esercizio 27. Calcolare una base e la dimensione dello spazio vettoriale su $\mathbb{R}$

$$V = \left\{ \underline{\boldsymbol{v}} \in \mathbb{R}^3 \mid x = 2z \right\}.$$

Soluzione: $\left\{ (2,0,1)^t, (0,1,0)^t \right\}$; $\dim V = 2$.

Esercizio 28. Calcolare una base e la dimensione dello spazio vettoriale su $\mathbb{R}$

$$U = \left\{ A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{R} \right\}.$$

Soluzione:

$$\left\{ I_3, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\};\ \dim U = 3.$$

Esercizio 29. In $\mathbb{R}^3$, calcolare le coordinate del vettore $\underline{\boldsymbol{v}} = (-1,-5,-7)^t$ rispetto alla base $\mathcal{B} = \left\{ (2,0,-1)^t, (1,-1,-2)^t \right\}$.

Soluzione: $\underline{\boldsymbol{v}}_{|\mathcal{B}} = (-3,5)^t$.

Esercizio 30. In $\mathbb{R}_2[x]$, scrivere le coordinate di $p(x) = -x^2 + 7$ rispetto alla base $\mathcal{B} = \left\{ x^2 - 2x + 5, 2x^2, x + 1 \right\}$.

Soluzione: $(1,-1,2)^t$.

Esercizio 31. Completare $\mathscr{S} = \left\{ (2,0,1)^t, (3,0,-2)^t \right\}$ a una base di $\mathbb{R}^3$.

Esercizio 32. Siano

$$\begin{aligned} V &= \left\{ \underline{\boldsymbol{v}} \in \mathbb{R}^3 \mid x - y = 0 \right\}, \\ W &= \left\{ \underline{\boldsymbol{v}} \in \mathbb{R}^3 \mid z = 0 \right\}. \end{aligned}$$

Trovare una base e la dimensione di $V \cap W$ e $V + W$.

Soluzione: $\dim(V \cap W) = 1$, $\dim(V + W) = 3$.

Esercizio 33. Siano

$$\begin{aligned} V &= \left\{ p \in \mathbb{R}_3[x] \mid p(0) = 0 \right\}, \\ W &= \left\{ p \in \mathbb{R}_3[x] \mid p(x) = p(-x) \right\}. \end{aligned}$$

Trovare una base e la dimensione di $V \cap W$ e $V + W$.

Soluzione: $\dim(V \cap W) = 1, \ \dim(V + W) = 4$.

Esercizio 34. Siano

$$\begin{aligned} V &= \{p \in \mathbb{R}_2[x] \mid p(0) = 0\}, \\ W &= \left\{p \in \mathbb{R}_2[x] \mid p'(0) = 0\right\}. \end{aligned}$$

Trovare una base e la dimensione di $V \cap W$ e $V + W$.

Soluzione: $\dim(V \cap W) = 1, \ \dim(V + W) = 3$.

Esercizio 35. Dire se

$$L\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \\ -17 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}\right) = \mathbb{R}^4.$$

In caso di risposta negativa, dire quali tra questi vettori sono linearmente indipendenti.

Soluzione: il primo, il secondo e il quarto.

5 Lezione del 15 aprile 2014

Esercizio 36. Verificare che

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} 2x \\ -y \\ x + z \end{pmatrix} \end{array}$$

è un'applicazione lineare.

Esercizio 37. Data l'applicazione lineare

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} x \\ y - x \\ y - 2x \end{pmatrix}, \end{array}$$

determinare la matrice che rappresenta l'applicazione f

- rispetto alle basi canoniche;

- rispetto alle basi $\mathcal{B}_1 = \{(1,3)^t, (2,4)^t\}$ e $\mathcal{B}_2 = \{(1,-2,0)^t, (3,-7,1)^t, (0,2,-1)^t\}$.

Soluzione:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -17 & -16 \\ 6 & 6 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 38. Data l'applicazione lineare

$$\begin{array}{cccc} f: & \mathrm{Mat}_2(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathrm{Mat}_2(\mathbb{R}) \\ & A & \longmapsto & A^t \end{array}$$

scrivere la matrice che rappresenta f rispetto alla base canonica di $\mathrm{Mat}_2(\mathbb{R})$.

Soluzione:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 39. Data l'applicazione lineare

$$\begin{array}{cccc} f: & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} x-y \\ z+2x \end{pmatrix}, \end{array}$$

determinare la matrice che rappresenta l'applicazione f

- rispetto alle basi canoniche;
- rispetto alle base canonica di $\mathbb{R}^3$ e $\mathcal{B}_2 = \{(1,-2)^t, (0,4)^t\}$.

Soluzione:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}.$$

Esercizio 40. Data l'applicazione lineare

$$\begin{array}{cccc} f: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} x+2y \\ x-y \end{pmatrix}, \end{array}$$

scrivere la matrice che rappresenta f rispetto alla base $\mathcal{B} = \{(-1,2)^t, (0,3)^t\}$.

Soluzione:
$$A = \begin{pmatrix} -3 & 6 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 41. Siano $f, g : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ le applicazioni lineare definite, rispetto alla base canonica, dalle matrici
$$A_f = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & -4 \end{pmatrix}, A_g = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & h & 0 \end{pmatrix}.$$
Dire per quali valori di h l'applicazione $f + g$ risulta invertibile.

Soluzione: $h \neq 1$.

Esercizio 42. Data l'applicazione lineare
$$\begin{array}{cccc} f: & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} x - y \\ z + 2x \end{pmatrix}, \end{array}$$
calcolare una base e la dimensione di $\ker f$ e $\mathrm{Im} f$.

Soluzione: $\dim \mathrm{Im} f = 2$, $\dim \ker f = 1$.

Esercizio 43. Data l'applicazione lineare
$$\begin{array}{cccc} f: & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} x + 3y + 4z \\ 2x + y + 3z \\ -x + 2y + z \end{pmatrix}, \end{array}$$
scrivere la matrice che rappresenta f e calcolare dimensione e basi per $\ker f$ e $\mathrm{Im} f$. Dire inoltre per quali valori del parametro $h \in \mathbb{R}$ il vettore $(2, 3, h)^t \in \mathrm{Im} f$ e se f è iniettiva e/o suriettiva.

Soluzione:
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix};$$
$\dim \mathrm{Im} f = 2$, $\dim \ker f = 1$; $h = -1$; f non è né iniettiva né suriettiva.

Esercizio 44. Data l'applicazione lineare

$$\begin{array}{cccc} f: & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} x+y \\ x+y \\ z-x \end{pmatrix}, \end{array}$$

trovare una base e la dimensione di $\mathrm{Im} f$ e $\ker f$; trovare inoltre le controimmagini del vettore $\underline{\boldsymbol{v}} = (2,2,-1)^t$.

Soluzione: $\{(1,1,-1)^t, (1,1,0)^t\}$, $\{(1,-1,1)^t\}$, $(1,1,0)^t + \mathscr{L}((-1,1,-1)^t)$.

Esercizio 45. Data l'applicazione lineare $T: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ con matrice associata

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix},$$

trovare una base e la dimensione di $\mathrm{Im} T$, $\ker T$ e $\ker T^2$.

Soluzione: $\dim \mathrm{Im} T = 2$, $\dim \ker T = 1$, $\dim \ker T^2 = 2$.

Esercizio 46. Siano

$$P_1 = 1 + x^2,\ P_2 = x + 2x^2,\ P_3 = 1 - x$$

e sia f l'endomorfismo di $\mathbb{R}_2[x]$ tale che

$$f(P_1) = 2P_1 + 2P_2,\ f(P_2) = 2P_1 + P_2 + P_3,\ f(P_3) = 2P_1 + 3P_2 - P_3.$$

- Dimostrare che $\mathcal{B} = \{P_1, P_2, P_3\}$ è una base di $\mathbb{R}_2[x]$.
- Scrivere la matrice che rappresenta f rispetto a $\mathcal{B}$ e calcolarne il rango.
- Calcolare dimensioni e basi di $\ker f$ e $\mathrm{Im} f$.
- Dato $U = \{P \in \mathbb{R}_2[x] \mid P(-1) = P(0)\}$, trovare una base di $\mathrm{Im} f \cap U$.
- Scrivere la matrice che rappresenta f rispetto alla base canonica.

Soluzione:

$$A_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix},$$

$\mathrm{rk}(A_{\mathcal{B}}) = 2$, $\mathrm{Im} f = \mathscr{L}(2 + 2x + 6x^2, 3 + 4x^2)$, $\ker f = \mathscr{L}(1)$, $\mathrm{Im} f \cap U = \mathscr{L}(1 - 2x - 2x^2)$,

$$A_{b.c.} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 0 & -4 & 2 \\ 0 & -8 & 6 \end{pmatrix}.$$

6 Lezione del 22 aprile 2014

Esercizio 47. Discutere e, ove possibile, risolvere il seguente sistema lineare (h è un parametro reale). Interpretare geometricamente i risultati.

$$\begin{cases} 2x + hy + (h-1)z = 1 \\ x + hz = 0 \\ x - hy + (h+2)z = -1 \end{cases}$$

Soluzione: Per $h = 0$, impossibile (tre piani paralleli all'asse y, che si intersecano due a due lungo rette parallele all'asse y). Per $h = 1$, ∞^1 soluzioni (tre piani appartenenti a uno stesso fascio). Per $h \neq 0, 1$, unica soluzione $(0, 1/h, 0)$ (tre piani che si intersecano in un punto).

Esercizio 48. Discutere la mutua posizione della retta r e del piano α.

$$r : \begin{cases} x = -3 + 4t \\ y = -4 - 3t \\ z = 0 \end{cases}, \qquad \alpha : \; 3x + 4y = 0$$

Soluzione: paralleli perché il sistema è impossibile.

Esercizio 49. Dati i punti $P = (1, 1, 1)$, $Q = (0, 2, 0)$, $P = (3, 3, 3)$:

- verificare che i tre punti non sono allineati
- scrivere l'equazione del piano π contenente i tre punti
- dato un punto T non appartenente a π, verificare che le rette PR e QT sono sghembe.

Soluzione: $\pi : x - z = 0$

Esercizio 50. Dimostrare che

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

è una base di $\mathbb{R}^3$, e scrivere la matrice di passaggio dalla base $\mathcal{B}$ alla base canonica.

Soluzione:
$$A = -\frac{1}{10}\begin{pmatrix} 7 & -2 & -3 \\ 3 & 2 & 3 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix},$$

Esercizio 51. Data l'applicazione lineare

$$\begin{array}{cccc} f: & \mathbb{R}^4 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} x+2y-z+w \\ z+w \end{pmatrix}, \end{array}$$

- calcolare le dimensioni di ker(f) e Im(f)
- determinare una base B di ker(f)
- completare B a una base di $\mathbb{R}^4$

Soluzione: $\dim(Im(f)) = \dim(ker(f)) = 2$; $B = ((-2,1,0,0),(-2,0,-1,1))$; aggiungere $((1,0,0,0),(0,0,1,0))$.

Esercizio 52. Data l'applicazione lineare

$$\begin{array}{cccc} f: & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^4 \\ & \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} x+3y+4z \\ x+z \\ x+y+tz \\ 2x+2y+tz \end{pmatrix}, \end{array}$$

- per quali valori di t il vettore (0,0,0,t) appartiene a Im(f)?
- determinare una base B di $\mathbb{R}^3$ e una base B' di $\mathbb{R}^4$ tali che la matrice che rappresenta l'applicazione f rispetto a queste due basi sia

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

Soluzione: t=0, t=2 ; B=base canonica di $\mathbb{R}^3$; $B' = ((1,1,1,2),(3,0,1,2),(4,1,0,0),(0,0,0,1))$.

Esercizio 53. Dato il sottospazio U di $\mathbb{R}^4$ costituito dai vettori (x, y, z, t) di $\mathbb{R}^4$ che risolvono il sistema lineare

$$\begin{cases} x + y - z = 0 \\ x - z + t = 0 \\ 2x + y - 2z + t = 0 \end{cases}$$

e dato il sottospazio V di $\mathbb{R}^4$ definito come $V = L((1, 0, 1, 0), (0, 0, 1, 2)(1, 0, 2, 2))$, calcolare basi e dimensioni di $U, V, U \cap V, U + V$.

Soluzione: $\dim(U) = \dim(V) = 2, \dim(U + V) = 3, \dim(U \cap V) = 1$; $B_U = ((1, 0, 1, 0), (-1, 1, 0, 1))$; $B_V = ((1, 0, 1, 0), (0, 0, 1, 2))$; $B_{U \cap V} = ((1, 0, 1, 0))$; $B_{U+V} = ((1, 0, 1, 0), (0, 0, 1, 2)), (-1, 1, 0, 1))$.