Esame di Geometria
Politecnico di Milano – Ingegneria

Secondo compito in itinere – 28 Giugno 2013

1. Siano
$$A = \begin{bmatrix} 1 & k & k \\ 0 & 2k & 1 \\ 0 & 1 & 2k \end{bmatrix} \qquad \text{e} \qquad B = \begin{bmatrix} 2k & 1 & 0 \\ 1 & 2k & 0 \\ k & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$
   (a) [8] Determinare i valori del parametro reale k in corrispondenza dei quali le matrici A e B sono simili.
   (b) [2] Per $k=0$, riconoscere la trasformazione $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ rappresentata, rispetto alla base canonica, dalla matrice A.

2. Siano
$$X = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \ : \ x+y+t=0\,,\ x+2y-z+t=0\}$$
   e $\mathbf{v} = (1,2,1,0)$.
   (a) [3] Determinare una base ortogonale $\mathscr{B}$ del sottospazio X.
   (b) [2] Determinare la proiezione ortogonale $p_X(\mathbf{v})$ del vettore $\mathbf{v}$ sul sottospazio X.
   (c) [2] Determinare il simmetrico ortogonale $s_X(\mathbf{v})$ del vettore $\mathbf{v}$ rispetto al sottospazio X.
   (d) [1] Determinare l'angolo ϑ tra i vettori $\mathbf{v}$ e $\mathbf{v}' = p_X(\mathbf{v})$.
   (e) [1] Sia $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ una trasformazione ortogonale. Determinare l'angolo ϑ' tra i vettori $f(\mathbf{v})$ e $f(\mathbf{v}')$.

3. Siano
$$\begin{aligned} &Q \ : \ x^2+3y^2+z^2-4xz+6y=0 \\ &\pi \ : \ x-2y+z+2=0 \\ &\Gamma = Q \cap \pi\,. \end{aligned}$$
   (a) [2] Riconoscere la quadrica Q.
   (b) [2] Scrivere l'equazione canonica di Q.
   (c) [2] Stabilire se Q è una quadrica a centro. In caso affermativo, determinare il centro di Q.
   (d) [2] Stabilire se Q è una quadrica di rotazione. In caso affermativo, determinare l'asse di rotazione di Q.
   (e) [2] Scrivere le equazioni della curva Γ' proiezione ortogonale di Γ sul piano coordinato xy.
   (f) [1] Riconoscere la curva Γ'.
   (g) [1] Riconoscere la curva Γ.
   (h) [2] Determinare (se esiste) il centro di Γ.

Soluzioni

1. (a) Le matrici A e B possiedono gli stessi autovalori $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2k+1$ e $\lambda_3 = 2k-1$. poiché tali autovalori dipendono dal parametro k, bisogna vedere se esistono autovalori multipli. Si ha che $\lambda_1 = \lambda_2$ per $k = 0$, $\lambda_1 = \lambda_3$ per $k = 1$, mentre $\lambda_2 = \lambda_3$ non è mai possibile. Si hanno i seguenti casi.

   - Per $k \neq 0, 1$, le due matrici date possiedono tre autovalori reali distinti e quindi sono entrambe diagonalizzabili. Quindi sono simili.
   - Per $k = 0$, si ha che A è diagonalizzabile (essendo reale e simmetrica), mentre B non lo è. Quindi le due matrici date non sono simili.
   - Per $k = 1$, entrambe le matrici risultano diagonalizzabili. Quindi sono simili.

   In conclusione, le matrici A e B sono simili per $k \neq 0$.

   (b) Per $k = 0$, si ha la matrice di permutazione

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

   Tale matrice è ortogonale e ha determinate -1. Quindi la trasformazione $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ rappresentata dalla matrice A è una rotazione impropria. Tuttavia, poiché A è reale e simmetrica e ha come autovalori 1 (contato due volte) e -1, la trasformazione f è una riflessione rispetto al piano dato dall'autospazio $V_1 = \langle (1,0,0), (0,1,1) \rangle$.

2. (a) Risolvendo il sistema lineare che definisce il sottospazio X, si trova che il generico vettore di tale sottospazio è $\mathbf{x} = (x, y, y, -x-y)$. Scegliamo $\mathbf{x}_1 = (1, 0, 0, -1)$ (per $x = 1$ e $y = 0$). Cerchiamo ora i vettori $\mathbf{x} = (x, y, y, -x-y) \in X$ ortogonali a $\mathbf{x}_1$. Si deve avere $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x}_1 \rangle = 0$, ossia $2x + y = 0$. Pertanto si hanno i vettori $\mathbf{x} = (x, -2x, -2x, x)$. Scegliamo il vettore $\mathbf{x}_2 = (1, -2, -2, 1)$. Una base ortogonale di X è pertanto data da $\mathscr{B} = \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2\}$.

   (b) Utilizzando la base ortogonale $\mathscr{B} = \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2\}$ di X trovata nel punto precedente, si ha che la proiezione ortogonale di $\mathbf{v}$ su X è data dal vettore

$$\begin{aligned} p_X(\mathbf{v}) &= \frac{\langle v, \mathbf{x}_1 \rangle}{\langle \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_1 \rangle}\, \mathbf{x}_1 + \frac{\langle v, \mathbf{x}_2 \rangle}{\langle \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_2 \rangle}\, \mathbf{x}_2 \\ &= \frac{1}{2}\,(1, 0, 0, -1) - \frac{1}{2}(1, -2, -2, 1) \\ &= (0, 1, 1, -1). \end{aligned}$$

(c) Il simmetrico ortogonale di $\mathbf{v}$ rispetto a X è il vettore

$$s_X(\mathbf{v}) = 2p_X(\mathbf{v}) - \mathbf{v} = 2(0,1,1,-1) - (1,2,1,0) = (-1,0,1,-2)\,.$$

(d) L'angolo ϑ tra i vettori $\mathbf{v}$ e $p_X(\mathbf{v})$ è l'angolo compreso tra 0 e π tale che

$$\cos\vartheta = \frac{\langle \mathbf{v}, \mathbf{v}' \rangle}{||\mathbf{v}||\,||\mathbf{v}'||} = \frac{3}{\sqrt{6}\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\,.$$

Quindi $\vartheta = \pi/4$.

(e) Poiché le trasformazioni ortogonali conservano il prodotto scalare, esse conservano anche gli angoli. Infatti, si ha

$$\cos\vartheta' = \frac{\langle f(\mathbf{v}), f(\mathbf{v}') \rangle}{||f(\mathbf{v})||\,||f(\mathbf{v}')||} = \frac{\langle \mathbf{v}, \mathbf{v}' \rangle}{||\mathbf{v}||\,||\mathbf{v}'||} = \cos\vartheta\,.$$

Di conseguenza, si ha $\vartheta' = \vartheta = \pi/4$.

3. (a) Gli invarianti ortogonali della quadrica sono $I_4 = 27$, $I_3 = -9$, $I_2 = 3$, $I_1 = 5$. Poiché $I_4 > 0$, $I_3 \neq 0$, $I_2 > 0$ e $I_1 I_3 < 0$, la quadrica Q è un iperboloide iperbolico (a una falda).

(b) Gli autovalori della matrice B che rappresenta la parte quadratica dell'equazione di Q sono $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 3$, $\lambda_3 - 1$. Quindi l'equazione canonica di Q

$$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \lambda_3 z^2 + \frac{I_4}{I_3} = 0$$

diventa

$$3x^2 + 3y^2 - z^2 = 3\,.$$

(c) Poiché $I_3 \neq 0$, Q è una quadrica a centro. Le coordinate del centro C di Q soddisfano il sistema lineare

$$\begin{cases} x - 2z = 0 \\ y + 1 = 0 \\ z - 2x = 0 \end{cases}$$

da cui si ha $C \equiv (0,-1,0)$.

(d) Poiché possiede due autovalori uguali, Q è una quadrica di rotazione. L'asse di rotazione di Q è la retta a che passa per il centro e che ha come direzione quella individuata dall'autospazio $V_{-1} = \langle (1,0,1) \rangle$ relativo all'unico autovalore semplice. Pertanto

$$a : \begin{cases} x = t \\ y = -1 \\ z = t \end{cases} \qquad \text{ossia} \qquad a : \begin{cases} x = z \\ y = -1\,. \end{cases}$$

(e) Le equazioni di Γ sono

$$\Gamma : \begin{cases} x^2 + 3y^2 + z^2 - 4xz + 6y = 0 \\ x - 2y + z + 2 = 0 \,. \end{cases}$$

Dalla seconda equazione si ha $z = -x + 2y - 2$. Sostituendo nella prima equazione e semplificando, si ottiene

$$\Gamma : \begin{cases} 6x^2 - 12xy + 7y^2 + 12x - 2y + 4 = 0 \\ x - 2y + z + 2 = 0 \,. \end{cases}$$

Pertanto, si ha

$$\Gamma' : \begin{cases} 6x^2 - 12xy + 7y^2 + 12x - 2y + 4 = 0 \\ z = 0 \,. \end{cases}$$

(f) Poiché è l'intersezione di una quadrica con un piano, la curva Γ è una conica. Poiché Γ' è la proiezione di Γ sul piano xy parallelamente alla direzione dell'asse z, anche Γ' è una conica. Nel piano xy, abbiamo la conica di equazione

$$6x^2 - 12xy + 7y^2 + 12x - 2y + 4 = 0 \,.$$

Gli invarianti ortogonali sono $I_3 = -162 \neq 0$ e $I_2 = 6 > 0$. Quindi Γ' è una ellisse reale (irriducibile).

(g) Poiché le proiezioni parallele conservano la natura delle coniche, anche la conica Γ è una ellisse reale (irriducibile) come Γ'.

(h) Essendo una ellisse reale, Γ è una conica a centro. In particolare, il centro K di Γ giace sul piano $\pi : x - 2y + z + 2 = 0$ che contiene la curva Γ e sulla retta n parallela all'asse z passante per il centro $K' \equiv (-6, -5)$ di Γ'. Poiché

$$n : \begin{cases} x = -6 \\ y = -5 \\ z = t \,, \end{cases}$$

intersecando questa retta con π, si ottiene $t = -6$ e quindi $K \equiv (-6, -5, -6)$.