

### Premessa

L'idea di confrontare grandezze da valutare con quelle piu' semplici e gia' note si perde nella notte dei tempi.

In particolare questo metodo euristico fu applicato al calcolo di aree e volumi. Non poche e valide tesi furono formulate.

E' del tutto evidente che volendo risalire alle origini ci si ferma al periodo greco che oltre al fatto che in quel periodo furono gettate le basi logiche della geometria, piu' di chiunque altro ha lasciato traccia indelebile e testimonianze di profondo pensiero. Si fa riferimento, nel contesto delle aree e volumi, al metodo di esaustione di Eudosso di Cnido. Questo metodo cerca di convalidare rigorosamente le innumerevoli tesi che si intuivano dal metodo empirico del confronto. L'esaustione non e' un metodo analitico di ricerca che conduce ad una scoperta, ma fornisce solo un mezzo di verifica e permette di dimostrare, per assurdo, un risultato che si suppone gia' noto.

Ad Archimede si riesce ad attribuire qualche larvata idea di calcolo integrale allorquando calcola, aree, volumi, baricentri con tecniche spesso geniali. Ad esempio, considera le figure piane costituite da fili pesanti e ne studia l'equilibrio.

E' il XVII secolo che porta alla definizione dei concetti dell'analisi infinitesimale. E' uno dei periodi piu' vivaci e fecondi dell'intera storia della matematica, dando i piu' e versatili strumenti che mai la matematica abbia messo a disposizione della ricerca scientifica. E' in questo periodo che nascono, contemporaneamente, il calcolo differenziale ed il calcolo integrale.

Nella fondazione del Calcolo sono coinvolte piu' scuole scientifiche che si intrecciano, si criticano e si completano. Essa culmina e si sostanzia con le opere di Isaac Newton e di Gottfried Leibnitz.

In Newton l'impostazione analitica e' rivolta alla derivazione dei "fluenti" (le funzioni). L'integrazione viene concepita come antiderivata (primitiva) ovvero conoscere la fluente (la funzione) una volta nota la flussione (la derivata): il teorema fondamentale del calcolo integrale.

E' a Leibnitz col suo "Calculus summatorum" che dobbiamo il concetto di integrale definito sommando tutti i rettangoli bidimensionali di base infinitesima  $dx$  ed altezza  $f(x)$ . A Leibnitz dobbiamo anche le notazioni che useremo. Certo questi concetti poggiavano su principi incerti come "gli evanescenti" ed altro.

La definitiva rigorizzazione e consolidamento dei principi fu compiuta da D'Alambert e da Cauchy.

### I problemi che conducono al concetto di integrale

Nella premessa abbiamo evidenziato due problemi che conducono al concetto di integrale: il problema delle aree di figure piane ed il problema dell'antiderivata o della primitiva.

#### *Calcolo dell'area di un trapezioide*

Imposteremo il problema con gli strumenti matematici che abbiamo a disposizione, ma seguiremo l'impostazione del "Calculus summatorum" di Leibnitz.

Sia  $y = f(x) > 0$  una funzione definita in  $[a, b]$ . Nel piano cartesiano il grafico della funzione, l'intervallo  $[a, b]$  ed i segmenti che congiungono i punti  $(a, 0)$  con  $(a, f(a))$  e  $(b, 0)$  con  $(b, f(b))$  definiscono una figura piana  $T$  che e' a forma di trapezio che chiameremo **trapezioide**. Vogliamo determinare l'area del trapezioide. A tal fine si utilizzano figure elementari ben note di cui conosciamo l'area e con una sufficiente generalita': i rettangoli. Possiamo iniziare l'approssimazione di  $T$  mediante un rettangolo

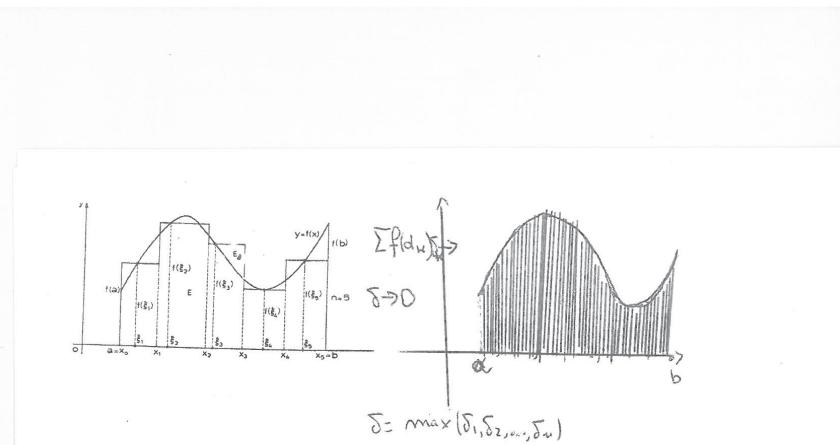
$r$  che ha base  $[a, b]$  ed altezza il minimo valore  $m$  della funzione oppure il rettangolo  $R$  con base  $[a, b]$  ed altezza il massimo valore  $M$  di  $f(x)$ . Visualizzando queste figure appare che le approssimazioni ottenute in questo modo con un solo rettangolo sono molto crude. E' più utile considerare più rettangoli come mostra la figura. La costruzione è semplice, si costruiscono le basi dei rettangoli dividendo l'intervallo  $[a, b]$  in  $n$  intervalli parziali utilizzando  $n + 1$  punti  $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$

$$I_1 = [x_0, x_1], I_2 = [x_1, x_2], I_3 = [x_2, x_3], \dots, I_n = [x_{n-1}, x_n].$$

Indicheremo con  $\delta_k$  l'ampiezza del  $k$ -esimo intervallo  $I_k$ ;  $\delta_k = x_k - x_{k-1}$ . Si prendono  $n$  punti arbitrariamente uno solo per ogni intervallo parziale:  $\alpha_1 \in I_1, \alpha_2 \in I_2, \dots, \alpha_n \in I_n$ . Si costruiscono  $n$  rettangoli del tipo:  $I_k$  come base ed  $f(\alpha_k)$  come altezza. La figura geometrica  $S$ , unione di tutti i rettangoli, è chiamata scaloide o plurirettangolo o multirettangolo, la cui area è la somma delle aree dei rettangoli componenti. Usando il simbolo di sommatoria possiamo scriverla (si osservi la figura)

$$\text{Area}(S) = f(\xi_1)\delta_1 + f(\xi_2)\delta_2 + \dots + f(\xi_n)\delta_n = \sum_{k=1}^n f(\xi_k)\delta_k$$

Indicando  $\delta = \max(\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n)$ ; dato che lo scaloide tende a confondersi con il trapezioide (si osservi la figura)



si può ben accettare come area del trapezioide il seguente limite (se esiste finito)

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(\xi_k)\delta_k := \text{area}(T).$$

La scelta di considerare  $\delta$  è dovuta al fatto che si vuole che per tutti i rettangoli l'ampiezza della base tenda a zero simultaneamente. Questo risultato lo possiamo ottenere facendo intervenire una sola variabile:  $\delta$ . Questa scelta rende la trattazione agevole ed efficace.

#### Ricerca delle funzioni primitive

Sia  $y = f(x)$  una funzione definita in  $[a, b]$  ( $a < b$ ). Si chiama funzione primitiva od antiderivata di  $f(x)$  una funzione  $F(x)$ , derivabile, tale che risulti in  $[a, b]$

$$i) \quad F'(x) = f(x).$$

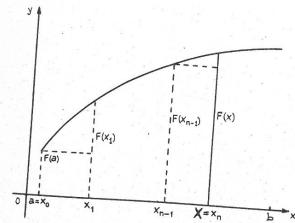
(Nella premessa abbiamo osservato che questo problema fu trattato da Newton per determinare il moto di un punto mobile conoscendone la velocità').

Una equazione di questo tipo l'abbiamo già incontrato fra le conseguenze del teorema di Lagrange. Esse sono dette equazioni differenziali poiché l'incognita  $F(x)$  appare sotto il segno di derivata. Sappiamo che, in generale, una equazione non sempre ha soluzione. Dalle nostre conoscenze possiamo indicare qualche proprietà di consistenza dell'equazione i).

Nella teoria delle funzioni fin qui trattata, dato che  $F$  è derivabile, la derivata  $F'(x)$  non può avere discontinuità di prima o terza specie. Quindi per rendere consistente l'equazione i)  $f$  deve essere continua o presentare discontinuità di seconda specie. Poi vedremo quali scelte dobbiamo operare per avere l'esistenza.

Dalle conseguenze del teorema di Lagrange ricaviamo che ogni altra primitiva  $G(x)$  di  $f(x)$  ha forma  $G(x) = F(x) + c$ ,  $c$  costante arbitraria, poiché  $F(x)$ ,  $G(x)$  hanno la stessa derivata.

Supponiamo che esista  $F$ , essa è continua. Cerchiamo una forma che leggi  $F$  ed  $f$  senza l'intervento della derivata. Tracciamone il grafico e supponiamo che sia della seguente forma



Scegliamo un punto  $X$  nell'intervallo  $[a, b]$ . Operiamo come nel punto 1) dividendo in  $n$  intervalli parziali l'intervallo  $[a, X]$  mediante  $n+1$  punti,  $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = X$

$$I_1 = [x_0, x_1], I_2 = [x_1, x_2], I_3 = [x_2, x_3], \dots, I_n = [x_{n-1}, x_n].$$

Indicheremo con  $\delta_k$  l'ampiezza del  $k$ -esimo intervallo  $I_k$ ;  $\delta_k = x_k - x_{k-1}$ . Calcoliamo i valori di  $F(x)$  in tali punti :

$$F(a) = F(x_0), F(x_1), F(x_2), \dots, F(x_k), \dots, F(x_n) = F(X).$$

Allora vale

$$F(X) - F(a) = (F(x_n) - F(x_{n-1})) + (F(x_{n-1}) - F(x_{n-2})) + (F(x_{n-2}) - F(x_{n-3})) + \dots +$$

$$(F(x_k) - F(x_{k-1})) + \dots + (F(x_1) - F(x_0)) = \sum_{k=1}^n (F(x_k) - F(x_{k-1}))$$

L'incremento  $F(X) - F(a)$  della funzione  $F(x)$  in  $[a, X]$  è uguale alla somma degli incrementi parziali tipo  $F(x_k) - F(x_{k-1})$  relativi agli intervalli parziali  $I_1, I_2, \dots, I_n$ .

Aplicando il teorema di Lagrange al generico intervallo  $I_k = [x_{k-1}, x_k]$  si ha

$$ii) \quad F(x_k) - F(x_{k-1}) = F'(\eta_k) \delta_k = f(\eta_k) \delta_k.$$

Possiamo quindi scrivere

$$F(X) - F(a) = \sum_{k=1}^n f(\eta_k) \delta_k.$$

Notiamo che  $\eta_k$  non e' un punto arbitrario ma e' dato dal teorema di Lagrange; inoltre qualunque sia la suddivisione dell'intervallo  $[a, X]$  la somma da' sempre lo stesso valore, possiamo quindi scrivere

$$iii) \quad F(X) - F(a) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(\eta_k) \delta_k$$

con  $\delta = \max(\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n)$ .

Il problema della ricerca di una funzione primitiva conduce alla ricerca del limite *iii*) per ogni  $X \in [a, b]$ . Allora per ogni  $X \in [a, b]$  ricaviamo il valore  $F(X)$  sotto l'assunzione che esista. Questo e' quanto formulava Newton (senza il processo di limite): nota la flussione (la velocita' di un punto mobile) determinare la fluente ovvero la posizione del punto mobile.

Il processo di limite completa e consolida l'idea di Newton.

$F(a)$  e' arbitrario. Notiamo che se  $F(a)$  cambia, il grafico di  $F(x)$  trasla rispetto all'asse delle ordinate.

Ci limitiamo a questi due esempi per osservare che entrambi, seppure molto diversi fra loro, conducono ad una stessa operazione: il limite delle somme della forma

$$\sum_{k=1}^n f(\eta_k) \delta_k.$$

Ebbene ora diamo la definizione della operazione considerata nei due esempi, in forma generale, senza alcun riferimento alle sue interpretazioni.

### Definizione di integrale definito

Ora definiamo il concetto che ci permetterà di risolvere entrambi i problemi considerati sopra. Lo introdurremo come una operazione matematica senza alcun riferimento alle varie interpretazioni.

Sia  $y = f(x)$  definita nell'intervallo  $[a, b]$  con  $a < b$ . Effettuiamo una suddivisione o partizione dell'intervallo  $[a, b]$  dividendo l'intervallo in  $n$  intervalli parziali utilizzando  $n + 1$  punti così ordinati

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b,$$

detti punti di suddivisione. L'intervallo e' suddiviso in  $n$  intervalli parziali:

$$I_1 = [x_0, x_1], I_2 = [x_1, x_2], I_3 = [x_2, x_3], \dots, I_n = [x_{n-1}, x_n].$$

Abbiamo effettuato una *partizione* dell'intervallo  $[a, b]$ .

Indicheremo con  $\delta_k$  l'ampiezza del  $k$ -esimo intervallo  $I_k$ ;  $\delta_k = x_k - x_{k-1}$ .

Allora

$$b - a = \sum_{k=1}^n \delta_k$$

Poniamo  $\delta = \max(\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n)$ .

In ogni intervallo parziale prendiamo un punto, arbitrariamente,

$$\alpha_1 \in I_1, \alpha_2 \in I_2, \dots, \alpha_n \in I_n$$

e calcoliamo i valori della funzione in tali punti:

$$f(\alpha_1), f(\alpha_2), \dots, f(\alpha_n).$$

Si costruiscono  $n$  prodotti del tipo  $f(\alpha_k)\delta_k$ .

Consideriamo la somma

$$S_\delta = f(\alpha_1)\delta_1 + f(\alpha_2)\delta_2 + \dots + f(\alpha_n)\delta_n = \sum_{k=1}^n f(\alpha_k)\delta_k.$$

Tale somma viene detta *somma integrale* di  $f(x)$ . Osserviamo che abbiamo posto il pedice  $\delta$  per indicare che facciamo dipendere il valore della somma integrale da  $\delta$ .

$$S : \delta \rightarrow \mathbb{R}.$$

Fissato  $\delta$  si possono costruire infinite partizioni di  $[a, b]$  con infinite scelte dei punti  $\alpha_k$  in modo tale che l'ampiezza degli intervalli parziali sia inferiore a  $\delta$ . Quindi abbiamo infinite partizioni che hanno massimo intervallo di ampiezza inferiore a  $\delta$ .  $\delta$  misura la quantità dei punti di suddivisione o la finezza della partizione. Pertanto la funzione che stiamo considerando è ad infinitissimi valori ovvero ad ogni valore di  $\delta$  corrispondono infiniti valori  $S_\delta$ . È difficile immaginare il grafico di questa funzione nel piano  $(\delta, S)$ .

C'è da tener presente che anche i punti  $\alpha_k$  godono di notevole libertà.

Non è facile trattare questa funzione. E non è nemmeno agevole rappresentare graficamente tale funzione nel piano  $(\delta, S)$ ; possiamo dire che ogni retta parallela all'asse  $S$  incontra il grafico in infiniti punti. Nonostante queste considerazioni, diamo la definizione di integrale definito di  $f(x)$  nel seguente modo.

### • Definizione di integrale definito

Sia  $y = f(x)$  definita nell'intervallo limitato  $[a, b]$  con  $a < b$ . Chiamiamo integrale definito di  $y = f(x)$  il limite

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} S_\delta = \lim_{\delta} \sum_{k=1}^n f(\alpha_k)\delta_k,$$

se esiste finito ed unico e lo indicheremo

$$\int_a^b f(x)dx$$

ovvero SI SCRIVE

$$i) \quad \lim_{\delta} S_\delta = \int_a^b f(x)dx.$$

Il simbolo di integrale ricorda la struttura della somma integrale:  $\sum \rightarrow \int$ ,  $\delta_k \rightarrow dx$  e  $f(\alpha_k) \rightarrow f(x)$ . Questa notazione è dovuta a Leibnitz. Mentre la definizione di integrale è dovuta a Cauchy. La stessa fu data da Mengoli per casi particolari.

Diamo la definizione del limite.

• Diremo che esiste il

$$\lim_{\delta} \sum_{k=1}^n f(\alpha_k)\delta_k := \int_a^b f(x)dx.$$

oppure

$$\lim_{\delta} S_\delta = \int_a^b f(x)dx.$$

se

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta_\epsilon : \text{per } 0 < \delta < \delta_\epsilon \Rightarrow$$

$$|\sum_{k=1}^n f(\alpha_k) \delta_k - \int_a^b f(x) dx| < \epsilon$$

oppure

$$|S_\delta - \int_a^b f(x) dx| < \epsilon.$$

L' integrale definito e' una applicazione che fa passare da funzioni a numeri ovvero

$$\int_a^b : f \mapsto c \in \mathbb{R}.$$

- Diremo che  $f(x)$  e' integrabile secondo Cauchy se esiste il limite i) ed e' unico.

Terminologia:  $f$  viene chiamata funzione integranda,  $[a, b]$  intervallo di integrazione,  $a$  primo estremo di integrazione e  $b$  secondo estremo di integrazione,  $x$  variabile di integrazione.

Se il limite i) esiste (unico)  $f$  e detta funzione integrabile secondo Cauchy.

Dalle considerazioni fatte sulle somme integrali sembra non agevole verificare l'esistenza di funzioni integrabili. Seppur la dimostrazione non e' agevole possiamo caratterizzare una ampia classe di funzioni integrabili data dal seguente

Teorema di Cauchy- Ogni funzione continua in  $[a, b]$  e' integrabile

Dimostreremo il teorema piu' avanti.

Il teorema di Cauchy ci da' un insieme di funzioni integrabili : le funzioni continue ( $C^0([a, b])$ ).

### • Proprieta' dell'integrale definito

L' integrazione definita combina l'operazione di somma con l'operazione di limite. Essa conserva le proprieta' della sommatoria e del limite.

Consideriamo funzioni  $f(x), g(x)$  etc. integrabili nell'intervallo  $[a, b]$  con  $a < b$ .

1. Sia  $c$  un numero reale. Allora  $f(x) = c$  e' integrabile e si ha

$$\int_a^b c dx = c(b - a).$$

Scriviamo la somma integrale di  $f(x) = c$

$$\sum_{k=1}^n f(\alpha_k) \delta_k = \sum_{k=1}^n c \delta_k = c \sum_{k=1}^n \delta_k = c(b - a)$$

passando al limite

$$\int_a^b c dx = \lim_{\delta \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n c \delta_k = c(b - a).$$

2. Se  $f(x)$  e' integrabile allora  $cf(x)$  con  $c \in \mathbb{R}$  e' integrabile e si ha

$$\int_a^b cf(x) dx = c \int_a^b f(x) dx \quad \text{proprieta' di omogeneita',}$$

ovvero le costanti possono essere portate fuori o dentro il simbolo di integrale.

Questa proprietà discende dalla proprietà di omogeneità del processo di limite e del simbolo di sommatoria (raccoglimento a fattor comune).

Mostriamo che  $\lim_{\delta \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n cf(\alpha_k)\delta_k$  esiste e lo scriviamo (per definizione)  $\int_a^b cf(x)dx$  e che risulta uguale a  $c \int_a^b f(x)dx$ .

Ora

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n cf(\alpha_k)\delta_k &= cf(\alpha_1)\delta_1 + cf(\alpha_2)\delta_2 + \dots + cf(\alpha_n)\delta_n = \\ c(f(\alpha_1)\delta_1 + f(\alpha_2)\delta_2 + \dots + f(\alpha_n)\delta_n) &= c \sum_{k=1}^n f(\alpha_k)\delta_k. \end{aligned}$$

Ricordando che le costanti commutano con il processo di limite si ha

$$i) \quad \lim_{\delta \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n cf(\alpha_k)\delta_k = c \lim_{\delta \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(\alpha_k)\delta_k = c \int_a^b f(x)dx.$$

Quindi il limite delle somme integrali di  $cf(x)$  esiste finito quindi la i) implica

$$\int_a^b cf(x)dx = c \int_a^b f(x)dx.$$

3. Siano  $f(x)$  e  $g(x)$  integrabili in  $[a, b]$  allora  $(f(x) + g(x))$  è integrabile e si ha

$$ii) \quad \int_a^b (f(x) + g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx.$$

ovvero l'integrazione si distribuisce sugli addendi della somma. Essa discende dalla proprietà distributiva del processo di limite e di sommatoria.

Il procedimento dimostrativo è analogo a quello del punto 2): sapendo che le somme integrali di  $f(x)$  e  $g(x)$  ammettono limite per  $\delta \rightarrow 0$  allora la somma integrale di  $(f(x) + g(x))$  ammette limite per  $\delta \rightarrow 0$  e vale ii).

Scriviamo la somma integrale di  $f(x) + g(x)$ ;

$$*) \quad \sum_{k=1}^n (f(\alpha_k) + g(x_k))\delta_k = (f(\alpha_1) + g(x_1))\delta_1 + (f(\alpha_2) + g(x_2))\delta_2 + \dots + (f(\alpha_n) + g(x_n))\delta_n =$$

$$f(\alpha_1)\delta_1 + g(x_1)\delta_1 + f(\alpha_2)\delta_2 + g(x_2)\delta_2 + \dots + f(\alpha_n)\delta_n + g(x_n)\delta_n =$$

$$\sum_{k=1}^n f(\alpha_k)\delta_k + \sum_{k=1}^n g(\alpha_k)\delta_k.$$

Applicando il limite alla (\*) e ricordando che il limite della somma è la somma del limite si ha

$$\begin{aligned} (***) \quad \lim_{\delta \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n (f(\alpha_k) + g(x_k))\delta_k &= \lim_{\delta \rightarrow 0} \left( \sum_{k=1}^n (f(\alpha_k)\delta_k + \sum_{k=1}^n g(x_k)\delta_k) \right) = \\ \lim_{\delta \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n (f(\alpha_k)\delta_k &+ \lim_{\delta \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n (g(\alpha_k)\delta_k) = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx \end{aligned}$$

Dalla (\*\*) si ha che  $\lim_{\delta \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n (f(\alpha_k) + g(x_k))\delta_k$  esiste finito e si scrive per definizione )  $\int_a^b (f(x) + g(x))dx$ , allora (\*\*) implica

$$\int_a^b (f(x) + g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx.$$

4. Dalle proprieta' 2), 3) si ha la *proprieta' di linearita'* dell'integrazione, ovvero

$$\int_a^b (cf(x) + dg(x))dx = c \int_a^b f(x)dx + d \int_a^b g(x)dx$$

con  $c, d \in \mathbb{R}$ .

5.

$$\int_a^b f(x)dx = - \int_b^a f(x)dx.$$

Cambiando l'ordine dei punti nella definizione di integrale di  $f$  in  $[a, b]$  (questo vuol dire cambiare ordine sull'asse) si ha

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\delta \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i)\delta_i = \lim_{\delta \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) = - \lim_{\delta \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_{i-1} - x_i) = - \int_b^a f(x)dt.$$

6.  $\int_a^a f(x)dx = 0$ . Dalla proprieta' (5)  $\int_a^a f(x)dx = - \int_a^a f(x)dx \Rightarrow 2 \int_a^a f(x)dx = 0 \Rightarrow \int_a^a f(x)dx = 0$ .

7. Se  $f(x) \geq c > 0$  allora  $\int_a^b f(x)dx > 0$  con  $a < b$ . Dal teorema inverso della permanenza del segno  $0 < c(b-a) \leq \sum_{i=1}^n f(\xi_i)\delta_i \Rightarrow \int_a^b f(x)dx = \lim_{\delta \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i)\delta_i \geq c(b-a) > 0$ . Pertanto

8. Se  $f(x) \geq c > 0$  allora  $\int_a^b f(x)dx > 0$  rappresenta l'area del trapezioide  $T$  sotteso dal grafico della funzione. Estendiamo questa interpretazione anche al caso  $f(x) \geq 0$ . Diremo che, per  $f(x) \geq 0$   $\int_a^b f(x)dx \geq 0$ . Se  $f(x)$  e' continua e  $\int_a^b f(x)dx = 0$  allora  $f(x) \equiv 0$  in  $[a, b]$ . Infatti se esistesse un punto  $x_0 \in [a, b]$  con  $f(x_0) > 0$  allora in un intorno  $U_0 = [a', b']$  di  $x_0$  si avrebbe  $f(x) > c > 0$  dal teorema della permanenza del segno. Essendo  $f(x)$  continua ogni sua restrizione e' continua e quindi integrabile. Allora, dalla definizione,  $\int_a^b f(x)dx \geq \int_{a'}^{b'} f(x)dx \geq c > 0$  assurdo. Pertanto se  $f(x) \geq 0$  e non identicamente nulla l' integrale rappresenta l'area del trapezioide  $T$ . Se  $f(x) < 0$  allora  $-f(x) > 0$  per cui  $\int_a^b f(x)dx = -\text{area}(T)$ .

9. *Monotonnia dell'integrale definito.*

Siano  $f(x)$  e  $g(x)$  integrabili. Se  $f(x) \geq g(x)$  in  $[a, b]$  con  $a < b$  allora  $\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$ . Basta applicare alla funzione  $F(x) = f(x) - g(x)$  i risultati del punto (8).

10. Sia  $f(x)$  definita e continua in  $[a, b]$  con  $a < b$  allora

$$|\int_a^b f(x)dx| \leq \int_a^b |f(x)|dx.$$

Ora se  $f(x)$  e' continua anche  $|f(x)|$  e' continua quindi sono entrambe integrabili. Ricordando il limite del valore assoluto e la monotonnia del processo di limite si ha

$$|\int_a^b f(x)dx| = \lim_{\delta \rightarrow 0} |\sum_{i=1}^n f(\xi_i)\delta_i| \leq \lim_{\delta \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n |f(\xi_i)|\delta_i = \int_a^b |f(x)|dx.$$

Si puo' anche applicare la monotonnia dell'integrale definito alla relazione  $-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$ .

Osservazione: abbiamo richiesto la continuita' della funzione  $f$  per avere la integrabilita' di  $|f(x)|$ . La sola integrabilita' di  $f(x)$  non garantisce la integrabilita'  $|f(x)|$ .

## 11. Proprieta' additiva dell'integrale rispetto all'intervallo di integrazione.

Sia  $f(x)$  una funzione continua in  $[a, b]$ ,  $[a, c]$  ed in  $[c, b]$  allora

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

Per la dimostrazione ricordiamo che per ogni partizione di  $[a, b]$  le somme integrali tendono all'integrale definito. Supponiamo  $a < c < b$ .

Consideriamo partizioni  $P_\delta^a$  relative all'intervallo  $[a, c]$  allora le somme integrali corrispondenti  $S_\delta^a$  tendono a  $\int_a^c f(x)dx$ . Altrettanto si puo' dire per  $[c, b]$  con partizioni  $P_\delta^b$  con lo stesso  $\delta$  e si ha che  $S_\delta^b$  tende a  $\int_c^b f(x)dx$ . Ora  $P_\delta^a \cup P_\delta^b$  e' una partizione di  $[a, b]$  con somma integrale  $S_\delta = S_\delta^a + S_\delta^b$ . Allora

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\delta} S_\delta = \lim_{\delta \rightarrow 0} S_\delta^a + S_\delta^b = \lim_{\delta \rightarrow 0} (S_\delta^a + \lim_{\delta \rightarrow 0} S_\delta^b) = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

Sia  $a < b < c$ , ripetendo la costruzione precedente si ha

$$\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx - \int_c^b f(x)dx$$

per cui

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

Tutti gli altri casi si dimostrano in modo analogo. Quindi la proprietा vale qualunque siano  $a, b, c$ .

Osservazione: anche per questa proprietा abbiamo richiesto la continuita' della funzione  $f(x)$  per avere la continuita' di ogni restrizione di  $f(x)$  e di conseguenza la integrabilita' di  $f(x)$  su ogni sottointervallo.

## 12. Interpretazione geometrica dell'integrale definito

Sia  $y = f(x)$  definita e continua in  $[a, b]$ . Consideriamo i sottointervalli di  $[a, b]$  in cui  $f(x)$  ha segno costante; cosi' supponiamo che  $f(x) \geq 0$  in  $[a, c]$ ,  $f(x) \leq 0$  in  $[c, d]$ , e  $f(x) \geq 0$  in  $[d, b]$ ,  $a < c < d < b$ . Indichiamo con  $T_1, T_2, T_3$  i trapezoidi sottesi dal grafico della funzione negli intervalli  $[a, c], [c, d], [d, b]$ , rispettivamente. Allora

$$\int_a^b f(x)dx = area(T_1) - area(T_2) + area(T_3).$$

Essa e' la somma algebrica delle aree dei trapezoidi sottesi.

Nota (1): nella definizione di somme integrale abbiamo scelto arbitrariamente i punti  $\alpha$  in cui calcolare la funzione ed arbitraria e' la costruzione delle partizioni. Questo modo di procedere conferisce alla definizione la massima generalita'. Dal punto di vista pratico (non solo) e' opportuno avere delle somme integrali comode e semplici per il calcolo anche approssimato. Ad esempio si possono usare partizioni particolari dividendo l'intervallo in parti uguali, scegliere i punti  $\alpha_i$  ove la funzione assume minimo  $m_i$  o massimo  $M_i$  nei rispettivi intervalli. Cosi' si hanno le seguenti sommatorie:

$$\sigma_\delta^m = m_1\delta_1 + m_2\delta_2 + \dots + m_n\delta_n = \sum_{i=1}^n m_i\delta_i.$$

Viene chiamata somma integrale per difetto. Se  $f(x)$  e' positiva lo scaloide corrispondente a questa sommatoria e' inscritto nel trapezioide.

Analogamente

$$\sigma_{\delta}^M = M_1 \delta_1 + M_2 \delta_2 + \dots + M_n \delta_n = \sum_{i=1}^n M_i \delta_i.$$

Viene chiamata somma integrale per eccesso.

Lo scaloide associato a tale sommatoria circoscrive il trapezioide se la funzione e' positiva.

Ogni altra somma integrale e' compresa fra queste due.

Nota 2- Le somme integrali per difetto e per eccesso  $\sigma_{\delta}^m$ ,  $\sigma_{\delta}^M$  possono essere estese alle funzioni limitate sostituendo  $m_i$  con  $\lambda_i$ , estremo inferiore della funzione nell'intervallo parziale  $[x_{i-1}, x_i]$  ed  $M_i$  con  $\Lambda_i$ , estremo superiore della funzione nell'intervallo parziale  $[x_{i-1}, x_i]$ . Così si ha

*Somma integrale inferiore*

$$\sigma_{\delta}^i = \sum_{i=1}^n \lambda_i \delta_i$$

e

*somma integrale superiore*

$$\sigma_{\delta}^s = \sum_{i=1}^n \Lambda_i \delta_i.$$

La teoria dell'integrazione secondo Riemann si basa sulla nozione di somma inferiore e di somma superiore e l'integrabilità di una funzione limitata (questa condizione e' imposta dall'uso di  $\lambda_i$  e di  $\Lambda_i$ ) richiede che l'insieme delle somme inferiori e quello delle somme superiori, al variare di  $\delta$ , costituiscano una coppia di classi contigue di numeri reali. L'elemento separatore di tale coppia e' detto integrale definito secondo Riemann. Si ricorda che l'elemento separatore e' unico.

Brevemente descriviamo la coppia di classi contigue delle somme inferiori e superiori. La costruzione poggia sulla monotonia dell'estremo superiore ed inferiore. Sia  $y = f(x)$  definita e limitata in  $[a, b]$  e sia  $[a, c]$  con  $a < c < b$  un sottointervallo di  $[a, b]$  al crescere di  $c$  otteniamo dei sottointervalli ordinati per inclusione e li diremo crescenti. Indichiamo  $\lambda_c = \inf_{x \in [a, c]} f(x)$  e  $\Lambda_c = \sup_{x \in [a, c]} f(x)$ . Ebbene  $\lambda_c$  decresce al crescere di  $c$  e  $\Lambda_c$  cresce al crescere di  $c$  ovvero per intervalli più ampi l'estremo inferiore diminuisce mentre l'estremo superiore aumenta.

In generale, consideriamo due sottointervalli di  $[a, b]$ ,  $[c, d] \subseteq [c_1, d_1]$  con  $c < d$  e  $c_1 < d_1$  si ha

$$\lambda_1 = \inf_{x \in [c_1, d_1]} f(x) \leq \lambda = \inf_{x \in [c, d]} f(x) \leq \Lambda = \sup_{x \in [c, d]} f(x) \leq \Lambda_1 = \sup_{x \in [c_1, d_1]} f(x).$$

Qualche osservazione. La funzione  $y = f(x)$  e' assunta limitata quindi l'insieme immagine e' limitato. Possiamo definire l'estremo inferiore ed estremo superiore di  $f$  in  $[a, b]$  così scriviamo  $\lambda = \inf_{x \in [a, b]} f(x)$ ,  $\Lambda = \sup_{x \in [a, b]} f(x)$  e dalle proprietà di monotonia dei due estremi si

$$\lambda = \inf_{x \in [a, b]} f(x) \leq \lambda_i = \inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x) \leq \Lambda_i = \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x) \leq \Lambda = \sup_{x \in [a, b]} f(x)$$

usando i simboli già introdotti si ha

$$\lambda(b-a) = \sum_{i=1}^n \lambda \delta_i \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i \delta_i \leq \sum_{i=1}^n \Lambda_i \delta_i \leq \sum_{i=1}^n \Lambda \delta_i \leq \Lambda(b-a).$$

Le somme inferiori e superiori, che chiameremo somme di Riemann, formano insiemi limitati.

Indichiamo con  $\mathfrak{D}$  una suddivisione e con  $s(\mathfrak{D})$  il valore della corrispondente somma integrale inferiore e con  $S(\mathfrak{D})$  il valore della corrispondente somma integrale superiore; si ha che per ogni suddivisione  $\mathfrak{D}$  si ha

$$s(\mathfrak{D}) \leq S(\mathfrak{D}).$$

Al variare di  $\mathfrak{D}$  (cambiando suddivisione),  $s(\mathfrak{D})$  e  $S(\mathfrak{D})$  formano due insiemi di numeri reali che denotiamo  $\mathbb{A}$  e  $\mathbb{B}$  rispettivamente. Questi formano una coppia separata di numeri reali ovvero ogni elemento  $s(\mathfrak{D}_1)$  e' inferiore di ogni  $S(\mathfrak{D}_2)$  con  $(\mathfrak{D}_1)$  e  $(\mathfrak{D}_2)$  suddivisioni arbitrarie di  $[a, b]$  non necessariamente uguali. Verifichiamo.

Ricordiamo la monotonia delle somme di Riemann rispetto alla ampiezza degli intervalli. Consideriamo la suddivisione  $(\mathfrak{D}_3) = (\mathfrak{D}_1) \cup (\mathfrak{D}_2)$  ovvero  $(\mathfrak{D}_3)$  e' ottenuta aggiungendo ai punti di  $(\mathfrak{D}_1)$  i punti di  $(\mathfrak{D}_2)$  quindi  $(\mathfrak{D}_3)$  ha piu' punti di suddivisione sia di  $(\mathfrak{D}_1)$  sia di  $(\mathfrak{D}_3)$  quindi ha intervalli parziali di suddivisione piu' "piccoli" delle altre o meglio gli intervalli parziali di  $(\mathfrak{D}_3)$  sono contenuti negli intervalli parziali di  $(\mathfrak{D}_2)$  e di  $(\mathfrak{D}_1)$ . Allora abbiamo

$$s(\mathfrak{D}_1) \leq s(\mathfrak{D}_3) \leq S(\mathfrak{D}_3) \leq S(\mathfrak{D}_2).$$

Allora gli insiemi  $\mathbb{A}$  e  $\mathbb{B}$  sono separati ovvero esistono numeri reali  $c$  tale che

$$\text{ogni } s(\mathfrak{D}) \in \mathbb{A} \leq c \leq \text{ogni } S(\mathfrak{D}) \in \mathbb{B}$$

oppure

$$\text{Sup}\mathbb{A} \leq c \leq \text{Inf}\mathbb{B}.$$

Come abbiamo visto negli appunti sui numeri reali tali coppie possono avere diversi elementi separatori. Per avere un solo elemento separatore gli insiemi  $\mathbb{A}$  e  $\mathbb{B}$  devono essere indefinitamente ravvicinati ovvero la coppia  $(\mathbb{A}, \mathbb{B})$  deve essere una coppia di classi contigue di numeri reali.

**Definizione** - Una funzione  $y = f(x)$  definita in  $[a, b]$  e' detta integrabile secondo Riemann se la coppia  $(\mathbb{A}, \mathbb{B})$  e' una coppia di classi contigue di numeri reali. L'elemento separatore viene chiamato integrale di Riemann di  $f(x)$  in  $[a, b]$  e viene indicato

$$\int_a^b f(x)dx.$$

Osserviamo che se  $f$  e' integrabile secondo Riemann allora  $\text{Sup}\mathbb{A} = \int_a^b f(x)dx = \text{Inf}\mathbb{B}$  per l'unicità dell'elemento separatore.

Dalla definizione di coppie di classi contigue possiamo fare la seguente affermazione.

Una funzione  $y = f(x)$  e' integrabile secondo Riemann se e soltanto se

$$\forall \epsilon > 0, \exists \mathfrak{D}_\epsilon : S(\mathfrak{D}_\epsilon) - s(\mathfrak{D}_\epsilon) < \epsilon.$$

Certo che non tutte le funzioni limitate sono integrabili secondo Riemann. Di sicuro ogni funzione continua e' integrabile secondo Riemann. Inoltre noto il carattere delle funzioni monotone si percepisce, dalla proprietà di monotonia considerate per definire l'integrale di Riemann, che ogni funzione definita in  $[a, b]$  limitata e monotona e' integrabile secondo Riemann.

La definizione di integrale che abbiamo usato (detta secondo Cauchy-Mengoli) invece, e' di natura topologica e valuta il comportamento delle somme integrali al variare di  $\delta$  e di conseguenza all'infittirsi della suddivisione (non vale il contrario). Si richiede che l'insieme delle somme integrali abbia un punto di accumulazione (in generale). E' vero che questa nozione di limite e' applicata a funzioni a piu' valori. Ma nulla cambia nel caso di un solo limite.

Abbiamo enunciato il teorema di integrabilità per le funzioni continue che dimostreremo piu' avanti. Ma la nostra definizione di sommatoria ben sopporta l'estensione alle funzioni limitate. Darboux ha dimostrato che se  $f(x)$  e' integrabile secondo Riemann allora e' integrabile secondo Cauchy. Possiamo affermare che se  $f(x)$  e' limitata allora le affermazioni

$f$  e' integrabile secondo Riemann,

$f$  e' integrabile secondo Cauchy,

sono equivalenti e i valori numerici degli integrali sono uguali.

In definitiva le due definizioni conducono a risultati equivalenti . La scelta di una definizione invece di un' altra dipende da ragioni storiche, dall'uso di certi strumenti, dalla interpretazione geometrica o fisica, dal calcolo approssimato. La definizione di Cauchy segue la scia del concetto di limite e tutto l'apparato ad esso riconducibile che si sostanzia nel concetto di derivata e dell'antiderivata. Non solo ma si collega con tutti i tentativi di calcolo ad esempio di Keplero, di Cavalieri etc. L'integrale di Riemann ha qualche rilevanza nella teoria della misura. In ogni modo fa uso dell'ordine dei numeri reali e di un mascherato concetto di limite che e' l'avvicinamento indefinito delle coppie di classi contigue. Sappiamo con questi strumenti ci si ferma ai reali altrimenti bisogna adottare delle opportune e non semplici variazioni .

### Teorema della media

Nella introduzione del calcolo integrale abbiamo discusso il problema della area di una figura piana. Le prime considerazioni fatte hanno coinvolto le aree di rettangoli con base l'intervallo di definizione della funzione ed altezze il massimo  $M$  o minimo  $m$  della funzione assunti nell'intervallo. Abbiamo ottenuto approssimazione per difetto con il minimo e per eccesso con il massimo. E' lecita la ricerca di un valore intermedio  $\lambda$  tra  $m$  e  $M$ , dato che consideriamo funzioni continue e positive, tale che il rettangolo con base l'intervallo  $[a, b]$  ed altezza  $\lambda$  sia equivalente al trapezioide ovvero abbia la stessa area del trapezioide. Senza alcun riferimento al problema geometrico abbiamo il seguente teorema:

**Teorema della media** - *Sia  $y = f(x)$  definita e continua in  $[a, b]$ . Allora esiste almeno un punto  $\xi \in [a, b]$  tale che*

$$f(\xi) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dt.$$

Dimostrazione

Siano  $m, M$  il minimo ed il massimo della funzione  $f(x)$  in  $[a, b]$ ,  $a < b$ . Vale

$$i) \quad m \leq f(x) \leq M.$$

Ricordando la monotonia dell'integrale definito, integrando membro a membro la i) si ha

$$ii) \quad m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a).$$

Dividendo per  $(b-a)$  i membri di ii) si ha

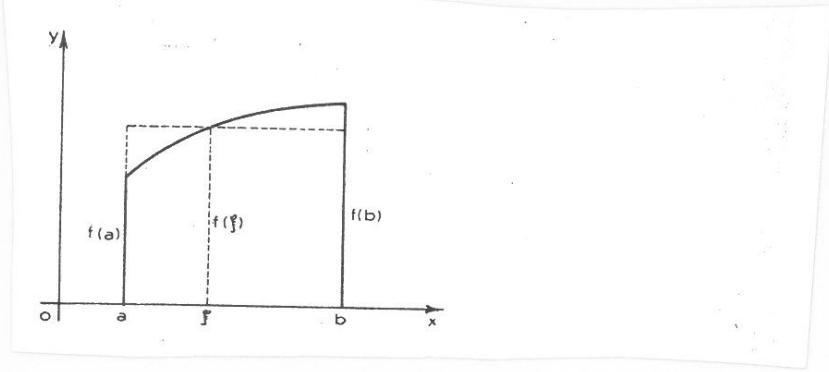
$$m \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dt \leq M.$$

Il numero  $\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dt$  e' compreso tra  $m$  ed  $M$  e dal teorema dei valori intermedi viene assunto dalla funzione ovvero esiste un punto  $\xi \in [a, b]$  tale che

$$f(\xi) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dt.$$

Il teorema e' dimostrato.

Se  $f(x) \geq 0$  la figura interpreta geometricamente la discussione fatta sopra.



### Primitiva - Esistenza - Teorema fondamentale del calcolo integrale

L'integrale definito e' un numero reale laddove gli estremi di integrazione siano fissati. Eseguita l'integrazione la variabile di integrazione scompare. Anzi essa e' una variabile muta ovvero qualunque sia il nome assegnata alla variabile di integrazione il risultato non cambia ovvero.

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(z)dz = \dots$$

Diversa e' la situazione se gli estremi di integrazione cambiano, come si deduce facilmente dal problema delle aree. L'integrale dipende dagli estremi di integrazione se questi cambiano. Questo e' apparso chiaramente quando abbiamo costruito una primitiva di  $f(x)$ , assunta la sua esistenza. La forma ottenuta e' la seguente, se la primitiva  $F$  di  $f(x)$  esiste :

$$F(X) = F(a) + \int_a^X f(x)dx.$$

Il risultato dell'integrazione dipende dal secondo estremo variabile. Le notazioni adottate nella ricerca della forma della primitiva sono state condizionate dal nome della variabile di integrazione per evitare confusione. Ora sappiamo che la variabile di integrazione e' muta. Quindi facciamo un piccolo cambio di notazione per scrivere come al solito la variabile indipendente con  $x$ . Poniamo

$$F(x) = F(a) + \int_a^x f(x)dx.$$

o meglio

$$F(x) = F(a) + \int_a^x f(t)dt.$$

La variabile della  $F$  e' il secondo estremo dell'integrale. Supponiamo che esista  $F(x)$  soluzione di  $F'(x) = f(x)$  con  $f(x)$  continua. Indicato con  $D$  l'insieme delle primitive e con  $Int$  l'insieme delle funzioni integrali di tipo  $\int_a^x f(t)dt$  con integranda continua, si ha l'inclusione  $D \subseteq Int \neq \emptyset$ . Sappiamo dal calcolo integrale che  $Int$  non e' vuoto mentre questo non lo possiamo affermare per  $D$ , ovvero per ora nulla sappiamo della esistenza delle primitive. E' evidente che abbiamo l'esistenza delle primitive se vale  $D = Int$ , in altri termini ogni funzione integrale  $\int_a^x f(t)dt$  e' una primitiva della sua funzione integranda continua.

**Teorema fondamentale del calcolo integrale (esistenza di una primitiva)** - *Sia  $y = f(x)$  definita e continua in un intervallo  $[a, b]$ . Allora ogni funzione integrale del tipo*

$$F(x) = F(a) + \int_a^x f(t)dt, \quad x \in [a, b]$$

e' una primitiva di  $f(x)$  ovvero

$$\frac{d}{dx}F(x) = \frac{d}{dx} \int_a^x f(t)dt = f(x).$$

*Si legge: la derivata della funzione integrale e' la funzione integranda calcolata nel secondo estremo variabile.  $F(a)$  e' una costante arbitraria.*

Dimostrazione

Calcoliamo la derivata di  $F(x)$  mediante la definizione facendo uso del teorema della media. Allora

$$\begin{aligned} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} &= \frac{F(a) + \int_a^{x+h} f(t)dt - F(a) - \int_a^x f(t)dt}{h} = \\ &= \frac{\int_a^{x+h} f(t)dt + \int_x^a f(t)dt}{h} = \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t)dt. \end{aligned}$$

Passando al limite per  $h \rightarrow 0$  nell'ultimo integrale si ha una forma di indecisione 0/0. Allora per risolvere l'induzione usiamo il teorema della media. All'ultimo integrale applichiamo il teorema della media e si ha

$$\frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t)dt = f(\alpha)$$

con  $\alpha$  compreso fra  $x$  ed  $x+h$ ; ad esempio, se  $h > 0$  si ha  $x < \alpha < x+h$  e per  $h \rightarrow 0$  ne segue  $\alpha \rightarrow x$ . Dalla continuita' di  $f$  si ha

$$\lim_{h \rightarrow 0} f(\alpha) = f(\lim_{h \rightarrow 0} \alpha) = f(x).$$

Quindi

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} f(\alpha) = f(x).$$

La derivata di  $F(x)$  esiste e coincide con  $f(x)$ . Il teorema e' dimostrato.

Nota: la scrittura delle primitive mediante l'integrale ci consente di affermare che la derivazione e' l'operazione inversa dalla sinistra dell'operazione di integrazione oppure che l'integrazione e' l'operazione inversa dalla destra della derivazione. Ancora consideriamo il seguente integrale:

$$F(x) = \int_a^x \frac{d}{dt} f(t)dt.$$

Dal teorema fondamentale del calcolo integrale si ha

$$\frac{d}{dx} F(x) = \frac{d}{dx} \int_a^x f(t)dt \Rightarrow F(x) = f(x) + c.$$

Scriviamo meglio

$$i) \quad \int_a^x \frac{d}{dt} f(t)dt = f(x) + c.$$

Se sorvoliamo sulle costanti (nei calcoli pero' si tengano presenti) possiamo affermare che l'integrazione e' operazione inversa sinistra della derivazione. Quindi possiamo senz'altro dire che l'integrazione e la derivazione sono operazioni una inversa dell'altra.

Notazione: Le primitive di una funzione continua  $f(x)$  sono infinite. Comunque esse differiscono per una costante, basta conoscerne una per avere tutte le altre.

Per indicare tutte le primitive di una funzione  $f(x)$  si usa il simbolo

$$\int f(x)dx$$

e viene chiamato integrale indefinito di  $f(x)$ . Scriviamo

$$\int f(x)dx = F(x) + c = \text{tutte le primitive di } f(x).$$

con  $F(x)$  una primitiva particolare.

Ricordando la proprieta' i) scriviamo

$$\int df = f + c$$

ove appare chiaro che l'integrazione indefinita e' l'inversa sinistra ( a meno di una costante) della derivazione. Useremo le stesse notazioni per l'inversa destra cosi' scriveremo simmetricamente

$$d \int f(x) = f(x).$$

In questo caso non compare la costante. La notazione si giustifica in quanto poniamo l'incremento  $dx$  uguale ad uno. Concludiamo questa parte osservando che l'integrazione definita e' una applicazione fra  $C^0([a, b])$  ed  $\mathbb{R}$ :

$$\int_a^b : C^0([a, b]) \rightarrow \mathbb{R}.$$

L'integrazione indefinita e' una applicazione fra spazi di funzioni continue e funzioni derivabili

$$\int : C^0([a, b] \rightarrow C^1([a, b]).$$

### Integrazioni elementari

Non e' facile calcolare gli integrali definiti direttamente. Il concetto di primitiva rende il problema un po' piu' agevole come vedremo. Infatti se di una funzione  $f(x)$  ne conosciamo le primitive ovvero abbiamo  $F(x) - F(a) = \int_a^x f(t)dt$  allora ponendo  $x = b$  abbiamo

$$F(b) - F(a) = \int_a^b f(t)dt.$$

La differenza dei valori delle primitive negli estremi  $a$  e  $b$  da' l'integrale definito :  $(F(b) + c) - (F(a) + c) = F(b) - F(a)$  quindi e' sufficiente usare una primitiva particolare.

Quindi basta avere una primitiva per calcolare l'integrale definito.

Data l'importanza della formula essa viene detta:

#### il secondo teorema fondamentale del calcolo integrale

Il calcolo dell'integrale definito e' ricondotto alla ricerca delle primitive.

Con questo non vuol dire che il problema e' risolto. La ricerca delle primitive non e' semplice. Con le primitive possiamo costruire piu' strumenti di calcolo. Per esempio, dalle nostre conoscenze sulle derivate di funzioni note possiamo ricavarne le primitive.

1.  $x^\alpha$  con  $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\} \rightarrow$

$$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c.$$

2.  $|x|^\alpha$  con  $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\} \rightarrow$

$$\int |x|^\alpha dx = \frac{x|x|^\alpha}{\alpha+1} + c.$$

3.  $\frac{1}{x}$  ( $x \neq 0$ )  $\rightarrow$

$$\int \frac{1}{x} dx = \int d\log|x| = \log|x| + c.$$

4.  $\sin x \rightarrow$

$$\int \sin x dx = - \int d\cos x = -\cos x + c.$$

5.  $\cos x \rightarrow$

$$\int \cos x dx = \int d\sin x = \sin x + c.$$

6.  $e^x \rightarrow$

$$\int e^x dx = \int de^x = e^x + c.$$

7.  $a^x$  con  $a > 0 \rightarrow$

$$\int a^x dx = \frac{1}{\log a} \int da^x = \frac{a^x}{\log a} + c.$$

8.  $\frac{1}{(\cos x)^2} \rightarrow$

$$\int \frac{1}{(\cos x)^2} dx = \int dtgx = tgx + c.$$

9.  $\frac{1}{(\sin x)^2} \rightarrow$

$$\int \frac{1}{(\sin x)^2} dx = - \int dcotgx = -ctgx + c.$$

10.  $Shx \rightarrow$

$$\int Shx dx = \int dChx = Chx + c.$$

11.  $Chx \rightarrow$

$$\int Chx dx = \int dShx = Shx + c.$$

12.  $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \rightarrow$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int darcsenx = arc senx + c.$$

13.  $\frac{1}{1+x^2} \rightarrow -$

$$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \int darctgx = arctgx + c.$$

## Metodi di integrazione

Il calcolo degli integrali della tabella sopra costruita e' stato alquanto agevole perche' si e' gia' a conoscenza delle derivate di funzioni "elementari". Integrali di funzioni piu' complicate richiede qualche strumento che ci permetta di ricondurli ad integrali noti. I metodi che presentiamo sono strumenti di calcolo di integrali ma di trasformazione di un integrale in un altro piu' "semplice".

### • Metodo di decomposizione in somma

Piu' che un metodo e' una riscrittura della funzione integranda in modo da poterla esprimere come somma di funzioni i cui integrali sono noti o facilmente calcolabili ed usando la linearita' dell'integrale.

Esempi

1.

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{\sin^x 2 \cos^2 x} dx &= \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin x^2 \cos^2 x} dx = \\ \int \frac{\sin^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x} dx + \int \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x} dx &= \int \frac{1}{\cos^2 x} dx + \\ \int \frac{1}{\sin^2 x} dx &= \tan x - \cot x + c \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x(x-1)} dx &= \int \frac{1-x+x}{x(x-1)} dx = \int \frac{x}{x(x-1)} dx - \int \frac{x-1}{x(x-1)} dx = \int \frac{1}{(x-1)} dx - \int \frac{1}{x} dx = \\ \log|x-1| - \log|x| + c &= \log \frac{|x-1|}{|x|} + c \end{aligned}$$

### • Metodo di integrazione per parti

Questo metodo utilizza la commutativita' fra la derivata e l'integrazione oppure che le due operazioni sono una inversa dell'altra (a meno di una costante).

Siano  $f(x)$  e  $g(x)$  due funzioni definite, continue e derivabili in  $[a, b]$  e sia (usiamo i differenziali per comodita')

$$i) \quad d(f(x)g(x)) = g(x)df(x) + f(x)dg(x).$$

Applichiamo alla (i) l'operatore integrale, usando la linearita'

$$\begin{aligned} \int d(f(x)g(x)) &= \int g(x)df(x) + \int f(x)dg(x) \Rightarrow \\ f(x)g(x) &= \int g(x)df(x) + \int f(x)dg(x) \Rightarrow \\ \int f(x)dg(x) &= f(x)g(x) - \int g(x)df(x) \end{aligned}$$

(c'e' una costante nascosta ma essa verra' evidenziata dopo l'integrazione).

Osserviamo che non c'e' alcuna risoluzione bensì c'e' il legame fra due integrali con la stessa struttura, cambia solo il ruolo delle funzioni. Nell'ultima equazione, nell'integrale a primo membro  $f$  e' libera da derivazione mentre  $g$  e' sotto il segno di derivata. A secondo membro c'e' il prodotto  $f(x)g(x)$  libero da derivata e da integrale mentre il secondo termine e' un integrale dove ora  $g$  e' libera da derivazione mentre  $f$  e' sotto il segno di derivata. Leggendo la formula da sinistra a destra, se si vuole trasferire la derivazione su  $f$  occorre aggiungere all'integrale risultante il prodotto  $f(x)g(x)$  con gli opportuni segni. L'opportunita' di questo trasferimento sta nella possibilita' che la derivazione su  $f$  renda l'integrale piu' semplice.

Negli integrali sopra il fattore libero da derivata e' detto **fattore finito** mentre il fattore con derivata e' detto **fattore differenziale**. Nell'integrale di sinistra dell'ultima equazione  $f$  e' il fattore finito e  $dg$  il fattore differenziale; nell'integrale di destra il ruolo dei fattori e' scambiato.

Esempio:

1. Consideriamo un classico esempio:

$$\int \log x dx$$

$\log x$  e' il fattore finito e  $dx$  e' il fattore differenziale ovvero c'e' il differenziale di  $x$  allora  $\log x$  ha il ruolo di  $f$  ed  $x$  il ruolo di  $g(x)$ . Questo non e' un integrale elementare e cosi' come e' scritto c'e' poco da fare. La forma letteraria  $\log x$  poco si adatta alle nostre capacita' algebriche. Pero' la sua derivata e' una espressione algebrica piu' trattabile almeno in via ipotetica. Allora applichiamo l'integrazione per parti

$$\begin{aligned} \int \log x dx &= x \log x - \int x d \log x = x \log x - \int x \frac{1}{x} dx = x \log x - \int dx = \\ &= x \log x - x + c. \end{aligned}$$

In generale se si presenta un logaritmo conviene integrare per parti.

- 2.

$$\int (\log x) x dx$$

Questo integrale e' simile al primo pero' non e' messa in evidenza la funzione  $g$ ; e' facile capire che  $xdx$  e' il differenziale di  $\frac{x^2}{2}$  quindi abbiamo  $g(x) = \frac{x^2}{2}$ , allora

$$\begin{aligned} \int (\log x) x dx &= \int \log x d \frac{x^2}{2} = \frac{x^2}{2} \log x - \int \frac{x^2}{2} d \log x = \\ &= \frac{x^2}{2} \log x - \int \frac{x^2}{2} \frac{1}{x} dx = \frac{x^2}{2} \log x - \int \frac{x}{2} dx = \\ &= \frac{x^2}{2} \log x - \frac{x^2}{4} + c \end{aligned}$$

- 3.

$$\int e^x x dx.$$

In questo integrale abbiamo il problema della scelta del fattore differenziale. Scegliamo come fattore differenziale  $xdx = d\frac{x^2}{2}$  e risolviamo

$$\int e^x x dx = \int e^x d \frac{x^2}{2} = \frac{x^2}{2} e^x - \int \frac{x^2}{2} e^x dx.$$

a questo punto conviene fermarsi perche' l'integrale ottenuto e' piu' complicato di quello di partenza. Riprendiamo il calcolo dall'inizio e prendiamo come fattore finito  $e^x dx = de^x$  quindi

$$\int e^x x dx = \int x de^x = xe^x - \int e^x dx = \int x de^x = xe^x - 2e^x + c.$$

Una maggiore attenzione sulla struttura della funzione integranda ci avrebbe portato subito a fare la seconda scelta perche' la derivata diminuisce la potenza della  $x$  rendendo il secondo integrale piu' semplice.

- 4.

$$\int e^x x^2 dx.$$

Non v'e' dubbio che il fattore differenziale deve essere  $e^x dx = de^x$ . Allora

5.

$$\int e^x x^2 dx = \int x^2 de^x = x^2 e^x - 2 \int xe^x dx = x^2 e^x - 2 \int x de^x = x^2 e^x - 2(xe^x - e^x) + c.$$

Esercizio: Calcolare  $\int x \operatorname{sen} x dx$ ,  $\int \operatorname{arcsen} x dx$ ,  $\int \operatorname{arctg} x dx$ ,  $\int e^x \operatorname{sen} x dx$

### • Metodo di integrazione per sostituzione

Il metodo di sostituzione consiste nel passare da una variabile all'altra con lo scopo di semplificare la struttura della funzione integranda in modo da avere un integrale o già noto o più facilmente riconducibile ad uno noto. Un semplice esempio.

$$\int \operatorname{sen} 2x dx$$

La forma è semplice e familiare ma c'è una importante variazione. La variabile di integrazione è  $x$  e la variabile della funzione è  $2x$  ovvero fra loro c'è un cambio di scala o di unità di misura. La definizione di integrale richiede la stessa scala o unità di misura come si evince dalla interpretazione geometrica di integrale. Ripristiniamo la ugualanza delle scale in questo modo: introduciamo una nuova variabile:  $t = 2x$  ed adattiamo l'integrale a questa nuova variabile.  $\operatorname{sen} 2x \rightarrow \operatorname{sent}$  e  $dt = 2dx$  (si ricorda che se  $t = f(x)$  allora  $dt = f'(x)dx$ ) allora abbiamo

$$\int \operatorname{sen} 2x dx \stackrel{x=\frac{t}{2}}{\rightarrow} \int \operatorname{sent} \frac{dt}{2} = \frac{1}{2} \int \operatorname{sent} dt = \left(-\frac{1}{2} \operatorname{cost} + c\right) \stackrel{t=2x}{\rightarrow} -\frac{1}{2} \operatorname{cos} 2x + c$$

Quindi

$$\int \operatorname{sen} 2x dx = -\frac{1}{2} \operatorname{cos} 2x + c.$$

In sostanza abbiamo due integrali una nella variabile  $x$  e l'altro nella variabile  $t$  che si corrispondono tramite composizione con una funzione e la sua inversa. Poi si sceglie quale integrare: naturalmente quello più semplice.

Nell'esempio notiamo che la derivata di una funzione composta ha un ruolo importante.

Scriviamo in forma generale il procedimento sopra esposto.

Sia  $y = f(x)$  una funzione definita e continua in  $[a, b]$  con  $a < b$ . Si considera l'integrale indefinito

$$i) \quad \int f(x) dx = F(x) + c.$$

Operiamo un cambiamento di variabile  $x = \phi(t)$  ( $\phi : t \mapsto x$  oppure  $\phi : [\alpha, \beta] \rightarrow [a, b]$ ) con  $\phi(t)$  una funzione definita e continua in un intervallo  $[\alpha, \beta]$  con

$$a = \phi(\alpha), \quad b = \phi(\beta)$$

ed invertibile:

$$t = \phi^{-1}(x) \quad (\phi^{-1} : [a, b] \rightarrow [\alpha, \beta]).$$

Inoltre  $dx = \phi'(t)dt$ ; abbiamo  $f(x)dx = f(\phi(t))\phi'(t)dt$ .

Consideriamo l'integrale indefinito

$$ii) \quad \int f(\phi(t))\phi'(t) dt = G(t) + c.$$

e che  $F(x)$  è primitiva di  $f(x)$  mentre  $G(t)$  è primitiva di  $f(\phi(t))\phi'(t)$  ovvero (trascuriamo le costanti)

$$F'(x) = f(x), \quad G'(t) = f(\phi(t))\phi'(t).$$

E' intuitivo che nota  $F$  si ricavi  $G$  e viceversa nota  $G$  si ricavi  $F$  ovvero si ha

$$(*) \quad G(t) = F(\phi(t)) \quad e \quad F(x) = G(\phi^{-1}(x))$$

La prima e' semplice da verificare, infatti usando la regola della derivata di funzione composta

$$(F(\phi(t))' = F'(x)_{x=\phi(t)}\phi'(t) = f(\phi(t))\phi'(t) = G(t).$$

Formalmente e' piu' elaborata la dimostrazione della seconda relazione.

Infatti ricordando la derivata di funzione composta ed inversa si ha

$$\begin{aligned} (G(\phi^{-1}(x)))' &= G'(t)_{t=\phi^{-1}(x)}(\phi^{-1}(x))' = (f(\phi(t))\phi'(t))_{t=\phi^{-1}(x)}(\phi^{-1}(x))' = \\ &(f(\phi(\phi^{-1}(x)))\phi'(\phi^{-1}(x)))(\phi^{-1}(x))' = f(x) = F'(x) \\ \text{dato che } \phi(\phi^{-1}(x)) &= x \text{ e } (\phi^{-1}(x))' = \frac{1}{\phi'(t)_{t=\phi^{-1}(x)}}. \end{aligned}$$

Percio' calcolato

$$\int f(x)dx = F(x) + c$$

risulta

$$\int f(\phi(t))\phi'(t)dt = F(\phi(t)) + c = G(t) + c$$

Analogamente se si calcola l'integrale indefinito

$$\int f(\phi(t))\phi'(t)dt = G(t) + c$$

si ottiene

$$\int f(x)dx = G(\phi^{-1}(x)) = F(x) + c$$

Nel caso di integrale definito nota la primitiva si ha

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

e considerando la prima relazione in (\*) si ha

$$\int_\alpha^\beta f(\phi(t))\phi'(t)dt = F(\phi(t))|_\alpha^\beta = F(\phi(\beta)) - F(\phi(\alpha)) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)dx.$$

Per questa formula non interviene la funzione inversa di  $\phi(t)$  quindi non occorre richiederla.

Esempi: consideriamo delle generalizzazioni degli integrali elementari:

### Integrazioni elementari generalizzate

1.  $f(x)^\alpha$  con  $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\} \rightarrow$

$$\int f(x)^\alpha f'(x)dx \underset{y=f(x)}{\longrightarrow} \int y^\alpha dy = \frac{y^{\alpha+1}}{\alpha+1}|_{y=f(x)} + c = \frac{f(x)^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c.$$

2.  $|f(x)|^\alpha$  con  $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\} \rightarrow$

$$\int |f(x)|^\alpha f'(x)dx \underset{y=f(x)}{\longrightarrow} \int |y|^\alpha dy =$$

$$\frac{y|y|^\alpha}{\alpha+1}|_{y=f(x)} + c = \frac{f(x)|f(x)|^\alpha}{\alpha+1} + c.$$

$$3. \frac{1}{f(x)} (f(x) \neq 0) \rightarrow$$

$$\int \frac{1}{f(x)} f'(x) dx = -y=f(x) \rightarrow \int \frac{1}{y} dy = \int d\log|y| = \log|y|_{y=f(x)} + c = \log|f(x)| + c.$$

4.

$$\int \operatorname{sen} f(x) f'(x) dx = -y=f(x) \rightarrow \int \operatorname{sen} y dy = \int d\cos y = -\cos y|_{y=f(x)} + c = -\cos f(x) + c.$$

5.

$$\int \cos f(x) f'(x) dx = -y=f(x) \rightarrow \int \cos y dy = \int d\sin y = \sin y|_{y=f(x)} + c = \sin f(x) + c.$$

6.

$$\int e^{f(x)} f'(x) dx = -y=f(x) \rightarrow \int e^y dy = \int d e^y = e^y|_{y=f(x)} + c = e^{f(x)} + c.$$

7.  $a^{f(x)}$  con  $a > 0 \rightarrow$

$$\int a^{f(x)} f'(x) dx = -y=f(x) \rightarrow \int a^y dy = \frac{1}{\log a} \int d a^y = \frac{a^y}{\log a}|_{y=f(x)} + c = \frac{a^{f(x)}}{\log a} + c.$$

8.

$$\int \frac{1}{(\cos f(x))^2} f'(x) dx = -y=f(x) \rightarrow \int \frac{1}{(\cos y)^2} dy = \int dt g y = t g y|_{y=f(x)} + c = t g f(x) + c.$$

$$\int \frac{1}{(\operatorname{sen} f(x))^2} f'(x) dx = -y=f(x) \rightarrow \int \frac{1}{(\operatorname{sen} y)^2} dy = -\int d c t g y = -c t g y|_{y=f(x)} + c = c t g f(x) + c.$$

9.

$$\int S h f(x) f'(x) dx = -y=f(x) \rightarrow \int S h y dy = \int d C h y = C h y|_{y=f(x)} + c = C h f(x) + c$$

10.

$$\int C h f(x) f'(x) dx = -y=f(x) \rightarrow \int C h y dy = \int d S h y = S h y|_{y=f(x)} + c = S h f(x) + c$$

11.

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-f(x)^2}} f'(x) dx = -y=f(x) \rightarrow \int \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} dy = \int d \arcsen y = \arcsen y|_{y=f(x)} + c = \arcsen f(x) + c.$$

12.

$$\int \frac{1}{1+f(x)^2} f'(x) dx = -y=f(x) \rightarrow \int \frac{1}{1+y^2} dy = \int d \arctg y = \arctg y|_{y=f(x)} + c = \arctg f(x) + c$$

Osservazione: negli integrali sopra descritti e' palese la derivata della funzione componente ed il procedimento e' consistito nel sostituire la funzione derivata per ottenere il differenziale della nuova variabile nella scala degli integrali elementari. Questo e' una buona indicazione di come procedere col metodo di sostituzione. In questa ottica si osservino i seguenti esempi.

Esempi: 1)  $\int e^{x^2} x dx$ . Ponendo  $x^2 = t$  e  $dt = 2x dx$  si ha

$$\frac{1}{2} \int e^t dt = \frac{1}{2} e^t \rightarrow \int e^{x^2} x dx = \frac{1}{2} e^{x^2} + c.$$

2)  $\int \frac{dx}{x \sqrt[3]{1+\log x}}$ .

Osserviamo che  $\frac{dx}{x} = d\log x$ , appare naturale o la sostituzione  $\log x = t$  oppure  $1 + \log x = t$ . Meglio la seconda infatti si ha  $dt = \frac{dx}{x}$  e si ha

$$\int \frac{dx}{x \sqrt[3]{1+\log x}} \rightarrow \int t^{-\frac{1}{3}} dt = \frac{3}{2} t^{\frac{2}{3}}.$$

Quindi

$$\int \frac{dx}{x \sqrt[3]{1+\log x}} = \frac{3}{2} (1 + \log x)^{\frac{2}{3}} + c.$$

3)  $\int \frac{1}{1+(\sin x)^2} \cos x dx$ .

Anche in questo caso osserviamo che  $\cos x dx = d\sin x$  allora ponendo  $y = \sin x$

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{1+(\sin x)^2} \cos x dx &\rightarrow \int \frac{1}{1+y^2} dy = \arctg y + c \Rightarrow \\ \int \frac{1}{1+(\sin x)^2} \cos x dx &= \arctg \sin x + c. \end{aligned}$$

### Dimostrazione del teorema di integrabilità delle funzioni continue

Per dimostrare questo teorema dobbiamo considerare due concetti. La condizione di Cauchy sulla esistenza del limite finito ed il concetto di continuità uniforme.

**Criterio di Cauchy per l'esistenza del limite finito** - Sia  $y = f(x)$  una funzione definita in  $[a, b]$  anche a più valori. Allora condizione necessaria e sufficiente affinché esista  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$  (unico) è che per ogni  $\epsilon > 0$  esista un  $\delta_\epsilon > 0$  tale per ogni coppia di punti  $x'$  e  $x''$  appartenenti all'intervallo  $[x_0 - \delta_\epsilon, x_0 + \delta_\epsilon]$  si ha

$$|f(x') - f(x'')| < \epsilon.$$

La parte necessaria è semplice. La condizione sufficiente è più elaborata.

### Continuità uniforme

Quando abbiamo definito la continuità in un punto  $x_0$  abbiamo commentato la dipendenza della definizione dal punto in cui si saggia la continuità.

Il numero  $\delta$  non solo dipende da  $\epsilon$  ma anche dalla posizione del punto  $x_0$ .

Abbiamo caratterizzato la situazione ove  $\delta$  non dipende da  $x_0$  ed anche una classe di funzioni che hanno questa proprietà.

Richiamiamo questa proprietà.

Sia  $y = f(x)$  definita e continua in un dominio  $T$ . Diremo che  $f(x)$  è uniformemente continua in  $T$  se: per ogni  $\epsilon > 0$  esiste in corrispondenza un  $\delta(\epsilon) > 0$  (dipendente solo da  $\epsilon$ ) tale per ogni coppia di punti  $x', x'' \in T$  e  $|x' - x''| < \delta(\epsilon)$  si ha

$$|f(x') - f(x'')| < \epsilon.$$

Questa e' una nozione globale.

**Teorema di Heine-Cantor** - Ogni funzione definita e continua in un intervallo I chiuso e limitato e' uniformemente continua.

Ora passiamo alla dimostrazione del teorema di esistenza. Sia  $y = f(x)$  una funzione definita e continua in un intervallo chiuso e limitato  $[a, b]$  quindi uniformemente continua. Vogliamo dimostrare che esiste finito ed unico

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} S_\delta = J.$$

Ovvero, dal criterio di Cauchy,

$\forall \epsilon > 0, \exists \delta_{\epsilon} > 0$  tale che per ogni coppia di numeri  $\delta' > 0$  e  $\delta'' > 0$  soddisfacenti alle condizioni

$$i) \quad 0 < \delta' < \delta_{\epsilon} \quad 0 < \delta'' < \delta_{\epsilon}$$

si ha

$$ii) \quad |S_{\delta'} - S_{\delta''}| < \epsilon.$$

$f(x)$  e' uniformemente continua quindi dal teorema di Heine-Cantor per ogni  $\epsilon > 0$  esiste un  $\delta_{\epsilon} > 0$  tale per ogni coppia di punti  $\xi$  ed  $\eta$  soddisfacenti la limitazione  $|\xi - \eta| < \delta_{\epsilon}$  si ha

$$iii) \quad |f(\xi) - f(\eta)| < \frac{\epsilon}{2(b-a)}.$$

Proviamo che con tale  $\delta_{\epsilon}$  e' soddisfatta la ii).

Consideriamo una somma integrale  $S_{\delta}$  con  $\delta < \delta_{\epsilon}$ . Sia poi  $S_{\bar{\delta}}$  un'altra somma integrale relativa ad una partizione piu' fine di quella di  $\delta$  cioe' contiene tutti i punti di suddivisione di  $\delta$  piu' altri. Allora diremo  $S_{\bar{\delta}}$  successiva a  $S_{\delta}$ . E' chiaro che  $\bar{\delta} \leq \delta$ . Allora si ha con  $p > n$

$$S_{\bar{\delta}} = \sum_{i=1}^p f(\eta_i) \delta_i.$$

I punti di suddivisione relativi a  $\bar{\delta}$  formano partizione piu' fine e piu' ricca di soottointervalli di quella relativa a  $\delta$ .

Indichiamo con  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_i < \dots < x_n = b$  i punti di suddivisione relativi a  $\delta$  e con  $a = t_0 < t_1 < \dots < t_k < \dots < t_p = b$  quelli relativi a  $\bar{\delta}$ . Quindi in intervalli  $[x_{i-1}, x_i]$  ci sono punti  $t_k$  di conseguenza ci sono intervalli della suddivisione  $\bar{\delta}$ . Per esempio supponiamo  $x_{i-1} < t_r < x_i$ , in questo caso la partizione relativa a  $\bar{\delta}$  ha due intervalli in piu' di quella relativa a  $\delta$ , rispettivamente  $[x_{i-1}, t_r]$  e  $[t_r, x_i]$ . Al contributo  $f(\xi_i) \delta_i$  nella somma  $S_{\delta}$  corrisponde il contributo  $f(\eta_{r-1})(t_r - x_{i-1}) + f(\eta_r)(x_i - t_r)$ . Dalla uniforme continuita' e dalla scelta di  $\delta_{\epsilon}$  si ha

$$|f(\xi_i) \delta_i - f(\eta_{r-1})(t_r - x_{i-1}) + f(\eta_r)(x_i - t_r)| = |(f(\xi_i) - f(\eta_{r-1})(t_r - x_{i-1}) + (f(\xi_i) - f(\eta_r)(x_i - t_r))| \leq$$

$$|(f(\xi_i) - f(\eta_{r-1})(t_r - x_{i-1}) + (f(\xi_i) - f(\eta_r)(x_i - t_r))| \leq \frac{\epsilon}{2(b-a)} \delta_k$$

dato che  $\xi_i, \eta_{r-1}, \eta_r$  appartengono allo stesso intervallo  $[x_{i-1}, x_i]$ . Generalizziamo le considerazioni fatte sopra a piu' punti che decompongono l'intervallo  $[x_{i-1}, x_i]$  in piu' intervalli.

Allora fra i punti  $t_k$  ci sono i punti  $x_i$  se ad esempio  $x_{i-1}$  coincide con  $t_{r-1}$  e  $x_i$  con  $t_s$  allora l'intervalllo  $[x_{i-1}, x_i]$  e' decomposto dai punti  $t_{r-1} = x_{i-1}, t_r, \dots, t_{s-1}, t_s = x_i$  in  $s - (r - 1)$  intervalli di ampiezze

$$\bar{\delta}_r = t_r - t_{r-1}, \bar{\delta}_{r+1} = t_{r+1} - t_r, \dots, \bar{\delta}_s = t_s - t_{s-1}.$$

In altri termini essendo la suddivisione relativa ad  $\bar{\delta}$  piu' ricca di punti rispetto a quella di  $\delta_{\epsilon}$ , tra due punti  $x_{i-1}$  e  $x_i$  possono esserci piu' punti  $t$  della suddivisione relativa a  $\bar{\delta}$ ; quindi  $S_{\bar{\delta}}$  ha piu' termini di  $S_{\delta}$ .

Infatti, come abbiamo visto sopra, il contributo di questi punti alla somma  $S_{\bar{\delta}}$  e'

$$f(\eta_r)\bar{\delta}_r + f(\eta_{r+1})\bar{\delta}_{r+1} + \dots + f(\eta_s)\bar{\delta}_s,$$

mentre il contributo a  $S_{\delta}$  dovuto all'intervallo  $[x_{i-1}, x_i]$  e'

$$f(\xi_i)\delta_k = f(\xi_i)(\bar{\delta}_r + \bar{\delta}_{r+1} + \dots + \bar{\delta}_s).$$

La differenza  $\lambda_i$  fra i due contributi e'

$$\lambda_i = (f(\xi_i) - f(\eta_r))\bar{\delta}_r + (f(\xi_i) - f(\eta_{r+1}))\bar{\delta}_{r+1} + \dots + (f(\xi_i) - f(\eta_s))\bar{\delta}_s.$$

Dato che i punti  $\xi_i, \eta_r, \dots, \eta_s$  appartengono allo stesso intervallo  $[x_{i-1}, x_i]$  e  $\delta_i < \delta_\epsilon$  si ha

$$|\xi_i - \eta_r| < \delta_\epsilon, \dots, |\xi_i - \eta_s| < \delta_\epsilon,$$

dalle ii), iii) si ha

$$\begin{aligned} |\lambda_i| &\leq |f(\xi_i) - f(\eta_r)|\bar{\delta}_r + |(f(\xi_i) - f(\eta_{r+1}))|\bar{\delta}_{r+1} + \dots + |(f(\xi_i) - f(\eta_s))|\bar{\delta}_s \leq \\ &\frac{\epsilon}{2(b-a)}(\bar{\delta}_r + \bar{\delta}_{r+1} + \dots + \bar{\delta}_s) \leq \frac{\epsilon}{2(b-a)}\delta_i. \end{aligned}$$

Ripetendo questa costruzione per ogni intervallo  $[x_{i-1}, x_i]$  al variare di i da 1 ad n si ha

$$|S_{\delta} - S_{\bar{\delta}}| = |\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n| = \left| \sum_{i=1}^n \lambda_i \right| \leq$$

$$\sum_{i=1}^n |\lambda_i| \leq \sum_{i=1}^n \frac{\epsilon}{2(b-a)}\delta_i \leq \frac{\epsilon}{2(b-a)} \sum_{i=1}^n \delta_i \leq \frac{\epsilon}{2(b-a)}(b-a) \leq \frac{\epsilon}{2}.$$

Siano ora  $S_{\delta'}$  e  $S_{\delta''}$  due somme integrali soddisfacenti alla i). Sia ora  $S_{\bar{\delta}}$  una somma relativa all'unione delle suddivisioni relative a  $\delta'$  e  $\delta''$ . Allora  $S_{\bar{\delta}}$  e' una somma successiva a  $S_{\delta'}$  e  $S_{\delta''}$ . Allora

$$|S_{\delta'} - S_{\delta''}| = |S_{\delta'} - S_{\bar{\delta}} + S_{\bar{\delta}} - S_{\delta''}| \leq$$

$$|S_{\delta'} - S_{\bar{\delta}}| + |S_{\bar{\delta}} - S_{\delta''}| \leq \epsilon.$$

Il teorema e' dimostrato.

9. $\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) dx$	<p><b>Sostituzioni di EULERO:</b></p> <p>1) <math>\sqrt{ax^2 + bx + c} = \pm \sqrt{a}x + t \quad (a &gt; 0)</math></p> <p>2) <math>\sqrt{ax^2 + bx + c} = xt \pm \sqrt{c} \quad (c &gt; 0)</math></p> <p>3) <math>\sqrt{ax^2 + bx + c} = (x - \alpha)t</math></p> <p>quando è <math>b^2 - 4ac &gt; 0</math>, ove <math>\alpha</math>: una radice di <math>ax^2 + bx + c</math>.</p>
10. $\int \frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} dx,$ con $P_n(x)$ polinomio di grado $n$ .	<p>Si scrive l'eguaglianza:</p> $\int \frac{P_n(x) dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} = Q_{n-1}(x) \sqrt{ax^2 + bx + c} + K \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}},$ <p>dove <math>Q_{n-1}(x)</math> è un polinomio di grado <math>n-1</math>. Differenziando i due membri di questa eguaglianza e moltiplicando per <math>\sqrt{ax^2 + bx + c}</math>, si ottiene l'identità:</p> $P_n(x) = Q'_{n-1}(x)(ax^2 + bx + c) + \frac{1}{2} Q_{n-1}(x)(2ax + b) + K,$ <p>dalla quale si ottiene un sistema di <math>n+1</math> equazioni lineari, atte a determinare i coefficienti del polinomio <math>Q_{n-1}(x)</math> e il fattore <math>K</math>. Infine, l'integrale:</p> $\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}$ <p>si calcola come indicato al n. 8.</p>
11. $\int \frac{dx}{(x - x_1)^m \sqrt{ax^2 + bx + c}}$	<p>Questo integrale si riduce a quello sopra considerato, con la sostituzione:</p> $x - x_1 = \frac{1}{t}$

**Tabella dei principali metodi di integrazione.**

<i>Integrale</i>	<i>Metodo di integrazione</i>
$\int f[g(x)]g'(x) dx$	Sostituzione: $g(x) = t$
$\int u(x)v'(x) dx$	<p>Integrazione per parti (semplice e multipla):</p> $\int u(x)v'(x) dx = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x) dx$ <p>Questo metodo si usa, per esempio, per integrali del tipo:</p> $\int p(x)f(x) dx,$ <p>dove <math>p(x)</math> è un polinomio e <math>f(x)</math> è una delle seguenti funzioni:</p> $e^{\alpha x}; \cos \alpha x; \sin \alpha x, \ln x;$ $\operatorname{arctg} x; \operatorname{arcsen} x; \dots$ <p>così pure quando si hanno prodotti tra funzioni esponenziale e goniometriche.</p>

12. $\int x^m (a + bx^n)^p dx,$ dove $m, n, p$ sono numeri naturali	<p>Si hanno tre casi:</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1) Se <math>p</math> è <i>intero</i>, si pone:  <math>x = t^k</math>,          dove <math>k</math> è <i>m.c.m.</i> dei denominatori di <math>m</math> ed <math>n</math>.</li> <li>2) Se <math>\frac{m+1}{n}</math> è <i>intero</i>, si pone:  <math>a + bx^n = t^h</math>,          dove <math>h</math> è il denominatore di <math>p</math>.</li> <li>3) Se <math>\frac{m+1}{n} + p</math> è <i>intero</i>, si pone:  <math>a + bx^n = x^n t^h</math>,          dove <math>h</math> è il denominatore di <math>p</math></li> </ol>
13. $\int R(\sin x, \cos x) dx$	<p>Sostituzione universale: <math>\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t</math>.</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Se risulta <math>R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)</math>: porre: <math>\cos x = t</math>.</li> <li>- Se risulta <math>R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)</math>: porre: <math>\sin x = t</math>.</li> <li>- Se risulta <math>R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)</math>: porre: <math>\operatorname{tg} x = t</math></li> </ul>
14. $\int R(\operatorname{sh} x, \operatorname{ch} x) dx$	<p>Porre <math>\operatorname{th} \frac{x}{2} = t</math>. In questo caso, è:  <math>\operatorname{sh} x = \frac{2t}{1-t^2}, \operatorname{ch} x = \frac{1+t^2}{1-t^2}; dx = \frac{2dt}{1-t^2}</math></p>

15. $\int \sin mx \sin nx dx$ $\int \sin mx \cos nx dx$ $\int \cos mx \cos nx dx$	Usare le trasformazioni (formule di WERNER) $\sin \alpha \cdot \cos \beta = \frac{1}{2} [\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)]$ $\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)]$ $\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)].$
16. $\int \sin^m x \cos^n x dx$	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Se <math>m</math> è dispari: porre <math>\cos x = t</math>.</li> <li>- Se <math>n</math> è dispari: porre <math>\sin x = t</math>.</li> <li>- Se <math>m + n</math> è negativo pari: porre <math>\operatorname{tg} x = t</math>.</li> <li>- Se <math>m, n</math> sono pari e positivi, usare le formule:</li> </ul> $\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}; \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2};$ $\sin x \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x.$
17. $\int R(e^{ax}) dx$	Porre $e^{ax} = t$

## 6. — Integrazione per decomposizione.

Consiste nel decomporre la funzione che si deve integrare nella somma (algebrica) di funzioni, di ciascuna delle quali è noto l'integrale indefinito o del quale per lo meno è più facile il calcolo; si applica poi la proprietà 2<sup>a</sup>) degli integrali indefiniti enunciata nel n. 1.

### ESEMPI.

1) Calcolare l'integrale:  $\int \frac{1}{\sin^2 x \cos^2 x} dx$ .

Ricordando che è:  $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ , si ha:  $\frac{1}{\sin^2 x \cos^2 x} = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x} = \frac{\sin^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x} + \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{\sin^2 x}$ , e quindi:

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{\sin^2 x \cos^2 x} dx &= \int \left( \frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{\sin^2 x} \right) dx = \int \frac{1}{\cos^2 x} dx + \int \frac{1}{\sin^2 x} dx = \\ &= \operatorname{tg} x - \operatorname{cotg} x + c. \end{aligned}$$

2) Calcolare l'integrale:  $\int \frac{x}{x+1} dx$ .

Avendosi:  $\frac{x}{x+1} = \frac{x+1-1}{x+1} = \frac{x+1}{x+1} - \frac{1}{x+1} = 1 - \frac{1}{x+1}$ , si ha:

$$\int \frac{x}{x+1} dx = \int \left( 1 - \frac{1}{x+1} \right) dx = \int dx - \int \frac{1}{x+1} dx = x - \log|x+1| + c.$$

se coniugate, cioè si suppone  $p^2 - 4q < 0$ , ossia:  $q - \frac{p^2}{4} > 0$ .

Posto, per brevità,  $k^2 = q - \frac{p^2}{4}$ , abbiamo:

$$x^2 + px + q = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + q - \frac{p^2}{4} = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + k^2,$$

$$ax + b = \frac{a}{2}(2x + p) + b - \frac{ap}{2},$$

e perciò:

$$\int \frac{ax + b}{x^2 + px + q} dx = \frac{a}{2} \int \frac{2x + p}{x^2 + px + q} dx + \left(b - \frac{ap}{2}\right) \int \frac{1}{k^2 + \left(x + \frac{p}{2}\right)^2} dx.$$

Risulta:

$$\frac{a}{2} \int \frac{2x + p}{x^2 + px + q} dx = \frac{a}{2} \log(x^2 + px + q),$$

perchè il numeratore è la derivata del denominatore; inoltre, in base al secondo degli esercizi svolti in 4) nel n. 3, risulta:

$$\begin{aligned} \left(b - \frac{ap}{2}\right) \int \frac{1}{k^2 + \left(x + \frac{p}{2}\right)^2} dx &= \left(b - \frac{ap}{2}\right) \int \frac{1}{k^2 + \left(x + \frac{p}{2}\right)^2} d\left(x + \frac{p}{2}\right) = \\ &= \left(b - \frac{ap}{2}\right) \cdot \frac{1}{k} \operatorname{arctg} \frac{x + \frac{p}{2}}{k} = \frac{b - \frac{ap}{2}}{\sqrt{q - \frac{p^2}{4}}} \operatorname{arctg} \frac{x + \frac{p}{2}}{\sqrt{q - \frac{p^2}{4}}}. \end{aligned}$$

In definitiva si ha quindi:

$$I_1 = \int \frac{ax + b}{x^2 + px + q} dx = \frac{a}{2} \log(x^2 + px + q) + \frac{b - \frac{ap}{2}}{\sqrt{q - \frac{p^2}{4}}} \operatorname{arctg} \frac{x + \frac{p}{2}}{\sqrt{q - \frac{p^2}{4}}} + c.$$

$$= -\log \left| \cos \frac{x}{2} \right| + \log \left| \sin \frac{x}{2} \right| + c = \log \left| \tan \frac{x}{2} \right| + c.$$

Si ha quindi :

$$\boxed{\int \frac{1}{\sin x} dx = \log \left| \tan \frac{x}{2} \right| + c}.$$

9) Calcolare l'integrale :  $\int \frac{1}{\cos x} dx$ .

Essendo :  $\cos x = \sin \left( \frac{\pi}{2} - x \right)$ , si ha :

$$\boxed{\int \frac{1}{\cos x} dx = -\log \left| \tan \left( \frac{\pi}{4} - \frac{x}{2} \right) \right| + c}.$$

10) Calcolare l'integrale :  $\int \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} dx$ .

Si può scrivere :  $\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} = \frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x}} = \frac{1+x}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ ,

e quindi :

$$\int \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} dx = \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx + \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsen x - \sqrt{1-x^2} + c.$$

$$10) \int \frac{dx}{x+1} = x - 2 \log|x+1| + c.$$

$$11) \int \left( \sqrt[3]{x^2} - x^{-\frac{2}{3}} \right) dx = \frac{3}{5} x^{\frac{3}{2}} \sqrt[3]{x^2} - 3 \sqrt[3]{x} + c.$$

$$12) \int \frac{1-x^4+x}{1+x^2} dx = x - \frac{x^3}{3} + \frac{1}{2} \log(1+x^2) + c.$$

$$13) \int \frac{2x}{2x+5} dx = x - \frac{5}{2} \log|2x+5| + c.$$

$$14) \int \cot g^2 x dx = -\cot g x - x + c.$$

$$15) \int \frac{a^3+x^3}{a+x} dx = a^2 x - \frac{ax^2}{2} + \frac{x^3}{3} + c.$$

$$16) \int \frac{1}{\sqrt[3]{x+a} + \sqrt[3]{x+b}} dx = \frac{2}{3(a-b)} \left[ \sqrt[3]{(x+a)^3} - \sqrt[3]{(x+b)^3} \right] + c.$$

$$17) \int \frac{a+b \sqrt[3]{\log x}}{x} dx = \log x \left[ a + \frac{3b}{4} \sqrt[3]{\log x} \right] + c.$$

$$18) \int \frac{5 + \arctg x}{1+x^2} dx = \arctg x \left( 5 + \frac{\arctg x}{2} \right) + c.$$

$$19) \int x(x^3 + e^{x^2}) dx = \frac{x^5}{5} + \frac{1}{2} e^{x^2} + c.$$

$$20) \int \sin^3 x dx = -\cos x \left( 1 - \frac{\cos^2 x}{3} \right) + c.$$

$$21) \int \cos x (\operatorname{tg} x + e^{\operatorname{sen} x}) dx = -\cos x + e^{\operatorname{sen} x} + c.$$

$$1) \text{ Calcolare l'integrale: } \int \frac{1 + e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx.$$

Posto:  $\sqrt{x} = t$ , da cui:  $x = t^2$ ,  $dx = 2t dt$ , si ottiene:

$$\int \frac{1 + e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx = \int \frac{1 + e^t}{t} 2t dt = 2 \int (1 + e^t) dt = 2(t + e^t) + c.$$

Per la posizione fatta, in definitiva, si ha:

$$\int \frac{1 + e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx = 2(\sqrt{x} + e^{\sqrt{x}}) + c.$$

$$2) \text{ Calcolare l'integrale: } \int \frac{1}{x \sqrt{1 - \log^2 x}} dx.$$

Poniamo:  $\log x = t$ , ossia  $x = e^t$ , da cui:  $dx = e^t dt$ . Si ha allora:

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x \sqrt{1 - \log^2 x}} dx &= \int \frac{1}{e^t \sqrt{1 - t^2}} e^t dt = \int \frac{1}{\sqrt{1 - t^2}} dt = \arcsen t + c = \\ &= \arcsen \log x + c. \end{aligned}$$

$$3) \text{ Calcolare l'integrale: } \int \sqrt{a^2 - x^2} dx, \text{ con } a > 0.$$

Posto:  $x = a \operatorname{sen} t$ , si ha:  $dx = a \operatorname{cost} dt$ , e quindi:

$$\begin{aligned} \int \sqrt{a^2 - x^2} dx &= \int \sqrt{a^2 - a^2 \operatorname{sen}^2 t} \cdot a \operatorname{cost} dt = \int a \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 t} \cdot a \operatorname{cost} dt = \\ &= a^2 \int \cos^2 t dt = \frac{1}{2} a^2 (t + \operatorname{sen} t \operatorname{cost}) + c \text{ (1).} \end{aligned}$$


---

e perciò, in definitiva, si ha :

$$\int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{1}{2} a^2 \left( \arcsen \frac{x}{a} + \frac{x}{a} \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} \right) + c = \\ = \frac{1}{2} \left( a^2 \cdot \arcsen \frac{x}{a} + x \sqrt{a^2 - x^2} \right) + c .$$

Si ha quindi :

$$\boxed{\int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{1}{2} \left( a^2 \cdot \arcsen \frac{x}{a} + x \sqrt{a^2 - x^2} \right) + c , \quad (a > 0)} .$$

4) Calcolare l'integrale :  $\int \sqrt{e^x - 1} dx .$

Posto :  $e^x - 1 = t^2 ,$  da cui :  $x = \log(1 + t^2) ,$   $dx = \frac{2t}{1 + t^2} dt ,$

otteniamo :

$$\int \sqrt{e^x - 1} dx = \int t \frac{2t}{1 + t^2} dt = 2 \int \frac{t^2 + 1 - 1}{1 + t^2} dt = 2 \left( \int \frac{t^2 + 1}{1 + t^2} dt - \int \frac{1}{1 + t^2} dt \right) = \\ = 2(t - \arctg t) + c = 2(\sqrt{e^x - 1} - \arctg \sqrt{e^x - 1}) + c .$$

Si osservi che questo integrale è stato calcolato applicando ambedue i metodi finora noti.

5) Calcolare l'integrale :  $\int \operatorname{tg}^4 x dx .$

Posto :  $\operatorname{tg} x = t ,$  onde :  $x = \arctg t ,$   $dx = \frac{1}{1 + t^2} dt ,$

$$\begin{aligned}
&= \int (t^2 - 1) dt + \int \frac{1}{1+t^2} dt = \frac{t^3}{3} - t + \arctgt + c = \\
&= \frac{1}{3} \operatorname{tg}^3 x - \operatorname{tg} x + \arctg(\operatorname{tg} x) + c = \frac{1}{3} \operatorname{tg}^3 x - \operatorname{tg} x + x + c.
\end{aligned}$$

6) Calcolare l'integrale:  $\int \sqrt{\operatorname{sen} x} \cdot \cos^3 x dx$ .

Posto:  $\operatorname{sen} x = t$ , da cui:  $\cos x dx = dt$ , si ha:

$$\begin{aligned}
\int \sqrt{\operatorname{sen} x} \cdot \cos^3 x dx &= \int \sqrt{\operatorname{sen} x} \cdot \cos^2 x \cdot \cos x dx = \int \sqrt{\operatorname{sen} x} (1 - \operatorname{sen}^2 x) \cos x dx = \\
&= \int \sqrt{t} (1 - t^2) dt = \int t^{\frac{1}{2}} dt - \int t^{\frac{5}{2}} dt = \frac{2}{3} t^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{7} t^{\frac{7}{2}} + c = \\
&= 2 \operatorname{sen} x \sqrt{\operatorname{sen} x} \left( \frac{1}{3} - \frac{\operatorname{sen}^2 x}{7} \right) + c.
\end{aligned}$$

7) Calcolare l'integrale:  $\int \frac{1}{\sqrt[3]{(1+x^2)^3}} dx$ .

Posto:  $x = \operatorname{tg} t$ , da cui:  $dx = (1 + \operatorname{tg}^2 t) dt$ , otteniamo:

$$\int \frac{1}{\sqrt[3]{(1+x^2)^3}} dx = \int \frac{1}{\sqrt[3]{(1+\operatorname{tg}^2 t)^3}} (1 + \operatorname{tg}^2 t) dt = \int \frac{1}{\sqrt[3]{1+\operatorname{tg}^2 t}} dt.$$

Ricordando ora le formule che esprimono il seno e il coseno in funzione della tangente:  $\operatorname{sent} = \frac{\operatorname{tg} t}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 t}}$ ,  $\operatorname{cost} = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 t}}$ , in definitiva, si ha:

$$\int \frac{1}{\sqrt[3]{(1+x^2)^3}} dx = \int \operatorname{cost} dt = \operatorname{sent} + c = \frac{\operatorname{tg} t}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 t}} + c = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + c.$$

del seno, si può scrivere :

$$\sin mx \cos mx = \frac{1}{2} \sin 2mx,$$

si ha :

$$I = \frac{1}{2} \int \sin 2mx dx = \frac{1}{4m} \int \sin 2mx d(2mx) = -\frac{1}{4m} \cos 2mx + c.$$

Ora si verifica facilmente che le due funzioni:  $\frac{1}{2m} \sin^2 mx$  e  $-\frac{1}{4m} \cos 2mx$ , differiscono per la costante additiva  $-\frac{1}{4m}$ . Infatti, ricordando la formula di duplicazione del coseno si ha :

$$\begin{aligned} -\frac{1}{4m} \cos 2mx &= -\frac{1}{4m} (\cos^2 mx - \sin^2 mx) = \\ &= -\frac{1}{4m} (1 - 2\sin^2 mx) = \frac{1}{2m} \sin^2 mx - \frac{1}{4m}, \end{aligned}$$

che è quello che si voleva provare.

Calcolare l'integrale :  $\int \frac{1}{\sin^2 x \cos^2 x} dx$ .

Questo integrale l'abbiamo calcolato, con il metodo di scomposizione nel n. 6 ed abbiamo trovato :

$$\int \frac{1}{\sin^2 x \cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x - \operatorname{cotg} x + c.$$

$$10) \int \frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}} dx = \arcsen e^x + c.$$

$$11) \int \frac{\sqrt[3]{x^3}}{1+x} dx = \frac{2}{3} \sqrt[3]{x^3} - 2\sqrt{x} + 2\arctg \sqrt{x} + c.$$

$$12) \int \frac{\operatorname{tg}^3 x + \operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} x + 4} dx = \operatorname{tg} x - 4\log |4 + \operatorname{tg} x| + c.$$

$$13) \int \frac{1}{x - \sqrt{x}} dx = 2\log |\sqrt{x} - 1| + c.$$

$$14) \int \frac{1}{\sqrt{x(1+\sqrt{x})}} dx = 4\sqrt{1+\sqrt{x}} + c.$$

$$15) \int \frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{sen}^2 x + 1} dx = \frac{1}{4} \log(2\operatorname{tg}^2 x + 1) + c.$$

$$16) \int \frac{1}{x \sqrt{x^2 - 1}} dx = \arctg \sqrt{x^2 - 1} + c.$$

$$17) \int \frac{x^2}{\sqrt[3]{(x^3 + 1)^2}} dx = \sqrt[3]{x^3 + 1} + c.$$

$$18) \int \frac{x^5}{\sqrt[3]{x^3 - 1}} dx = \frac{2}{9} (x^3 + 2) \sqrt[3]{x^3 - 1} + c.$$

$$19) \int \frac{1}{(a^2 - x^2) \sqrt{a^2 - x^2}} dx = \frac{x}{a^2 \sqrt{a^2 - x^2}} + c.$$

$$20) \int x^2 \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{1}{8} \left[ a^4 \arcsen \frac{x}{a} + x(2x^2 - a^2) \sqrt{a^2 - x^2} \right] + c.$$

Si assuma  $\log x$  come fattore finito e  $dx$  come fattore differenziale. Si ottiene :

$$\int x^2 \log x \, dx = \frac{1}{3} \left( \log x \cdot x^3 - \int x^3 \cdot \frac{1}{x} \, dx \right) = \frac{1}{3} \left( x^3 \log x - \frac{x^3}{3} \right) + c .$$

2) Calcolare l'integrale :  $\int x \operatorname{sen} x \, dx$ .

Si assuma  $x$  come fattore finito e  $\operatorname{sen} x \, dx$  come fattore differenziale. Si ha :

$$\int x \operatorname{sen} x \, dx = -x \cos x - \int -\cos x \, dx = -x \cos x + \operatorname{sen} x + c .$$

3) Calcolare l'integrale :  $\int \operatorname{arcsen} x \, dx$ .

Si assuma  $\operatorname{arcsen} x$  come fattore finito e  $dx$  come fattore differenziale. Si ha :

$$\int \operatorname{arcsen} x \, dx = \operatorname{arcsen} x \cdot x - \int x \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \, dx = x \operatorname{arcsen} x + \sqrt{1-x^2} + c .$$

renziale. Si ha :

$$\int x \arctg x dx = \frac{1}{2} \left( \arctg x \cdot x^2 - \int x^2 \frac{1}{1+x^2} dx \right).$$

L'integrale :  $\int \frac{x^2}{1+x^2} dx$ , si calcola per decomposizione :

$$\int \frac{x^2}{1+x^2} dx = \int \frac{x^2+1-1}{1+x^2} dx = \int \left( 1 - \frac{1}{1+x^2} \right) dx = x - \arctg x + c.$$

Sostituendo, si ha dunque :

$$\int x \cdot \arctg x dx = \frac{1}{2} (x^2 \cdot \arctg x - x + \arctg x) + c.$$

5) Calcolare l'integrale :  $\int \arctg \sqrt{x} dx$ .

Posto :  $\sqrt{x} = t$ , onde :  $x = t^2$  e  $dx = 2t dt$ , si ha :

$$\int \arctg \sqrt{x} dx = 2 \int t \cdot \arctg t dt,$$

e siamo così ricondotti all'integrale precedente.

Si ha quindi :

$$\int \arctg \sqrt{x} dx = t^2 \cdot \arctg t - t + \arctg t + c = (x+1) \arctg \sqrt{x} - \sqrt{x} + c.$$

6) Calcolare l'integrale :  $\int \frac{\sin x}{\cos^3 x} e^{\operatorname{tg} x} dx$ .

Si può scrivere :

$$\int \frac{\sin x}{\cos^3 x} e^{\operatorname{tg} x} dx = \int \operatorname{tg} x \frac{1}{\cos^2 x} e^{\operatorname{tg} x} dx, \text{ e posto : } \operatorname{tg} x = t, \text{ onde : } \frac{1}{\cos^2 x} dx = dt,$$

si ha :

$$\int \frac{\sin x}{\cos^3 x} e^{\operatorname{tg} x} dx = \int t \cdot e^t dt = t \cdot e^t - \int e^t dt = e^t(t-1) + c = e^{\operatorname{tg} x}(\operatorname{tg} x - 1) + c.$$

Si ha :

$$\int e^x \cdot \log(1 + e^x) dx = \log(1 + e^x) \cdot e^x - \int e^x \frac{e^x}{1 + e^x} dx = \\ = e^x \cdot \log(1 + e^x) - \int \frac{e^{2x}}{1 + e^x} dx.$$

Posto :  $e^x = t$ , ossia :  $x = \log t$ , e quindi :  $dx = \frac{1}{t} dt$ , si ha :

$$\int \frac{e^{2x}}{1 + e^x} dx = \int \frac{t^2}{1 + t} \cdot \frac{1}{t} dt = \int \frac{t + 1 - 1}{1 + t} dt = \int \left(1 - \frac{1}{1 + t}\right) dt = \\ = t - \log(1 + t) + c = e^x - \log(1 + e^x) + c;$$

quindi, in definitiva, si ha :

$$\int e^x \cdot \log(1 + e^x) dx = e^x \cdot \log(1 + e^x) - e^x + \log(1 + e^x) + c.$$

8) Calcolare l'integrale :  $\int e^x \sin x dx$ .

Scelto  $e^x$  come fattore finito, si ha :

$$\int e^x \sin x dx = -e^x \cos x + \int e^x \cos x dx.$$

Integrando un'altra volta per parti, prendendo ancora  $e^x$  come fattore finito, si ha :

$$\int e^x \sin x dx = -e^x \cos x + e^x \sin x - \int e^x \sin x dx.$$

Ne segue :

$$2 \int e^x \sin x dx = e^x (\sin x - \cos x),$$

e quindi :

$$\int e^x \sin x dx = \frac{e^x}{2} (\sin x - \cos x) + c.$$

$$2) \int x e^x dx = e^x(x - 1) + c .$$

$$3) \int \log x dx = x(\log x - 1) + c .$$

$$4) \int \frac{x}{\cos^2 x} dx = x \operatorname{tg} x + \log |\cos x| + c .$$

$$5) \int \log(x + \sqrt{1+x^2}) dx = x \log(x + \sqrt{1+x^2}) - \sqrt{1+x^2} + c .$$

$$6) \int \arctg x dx = x \arctg x - \frac{1}{2} \log(1+x^2) + c .$$

$$7) \int x \cdot 3^x dx = \frac{3^x}{\log 3} \left( x - \frac{1}{\log 3} \right) + c .$$

$$8) \int x^2 e^x dx = e^x(x^2 - 2x + 2) + c .$$

$$9) \int x^2 \cos x dx = x^2 \sin x + 2x \cos x - 2 \sin x + c .$$

$$10) \int x^2 \sin x dx = -x^2 \cos x + 2x \sin x + 2 \cos x + c .$$

$$11) \int \log^2 x dx = x(\log^2 x - 2 \log x + 2) + c .$$

$$12) \int e^x \cos x dx = \frac{e^x}{2} (\sin x + \cos x) + c .$$

Per decomporre la frazione secondo il metodo enunciato, cominciamo col trovare le radici dell'equazione :

$$x^2 - x - 2 = 0,$$

che sono : - 1 e 2, e quindi possiamo scrivere, come è noto :

$$x^2 - x - 2 = (x + 1)(x - 2).$$

Poniamo allora :

$$(1) \quad \frac{2x - 3}{x^2 - x - 2} = \frac{A}{x + 1} + \frac{B}{x - 2},$$

dove  $A$  e  $B$  sono costanti da determinare. Per determinare queste costanti eliminiamo nella (1) i denominatori. Si ottiene :

$$2x - 3 = A(x - 2) + B(x + 1),$$

ossia :

$$2x - 3 = (A + B)x + (-2A + B).$$

Siccome questa eguaglianza deve essere soddisfatta per ogni valore della  $x$ , allora i coefficienti dei termini di egual grado della  $x$  dei due membri devono essere eguali. Dovrà quindi risultare :

$$\begin{cases} A + B = 2 \\ -2A + B = -3 \end{cases}$$

Risolvendo questo sistema lineare, si trova :

$$A = \frac{5}{3}, \quad B = \frac{1}{3}.$$

$$\frac{2x-3}{x^2-x-2} = \frac{\frac{5}{3}}{x+1} + \frac{\frac{1}{3}}{x-2},$$

e quindi (1) :

$$\begin{aligned} \int \frac{2x-3}{x^2-x-2} dx &= \frac{5}{3} \int \frac{1}{x+1} dx + \frac{1}{3} \int \frac{1}{x-2} dx = \\ &= \frac{5}{3} \log(x+1) + \frac{1}{3} \log(x-2) + c = \log(x+1)^{\frac{5}{3}} + \log(x-2)^{\frac{1}{3}} + c = \\ &= \log \left[ (x+1)^{\frac{5}{3}} \cdot (x-2)^{\frac{1}{3}} \right] + c. \end{aligned}$$

2) Calcolare l'integrale :  $\int \frac{4x^2 - 16x + 4}{x^3 - 3x^2 - x + 3} dx.$

Si verifica subito che l'equazione (2) :

$$(1) \quad x^3 - 3x^2 - x + 3 = 0,$$

ha come radice 1; cosicchè il primo membro della (1) è divisibile per  $x-1$ . Eseguendo questa divisione si trova che il quoziente è  $x^2 - 2x - 3$ , e la (1) può perciò scriversi sotto la forma :

$$(x-1)(x^2 - 2x - 3) = 0.$$

Posto allora :

$$\frac{4x^2 - 16x + 4}{x^3 - 3x^2 - x + 3} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x-3},$$

dovrà essere :

$$4x^2 - 16x + 4 = A(x+1)(x-3) + B(x-1)(x-3) + C(x-1)(x+1),$$

ossia :

$$4x^2 - 16x + 4 = (A+B+C)x^2 + (-2A-4B)x + (-3A+3B-C);$$

quindi :

$$\begin{cases} A + B + C = 4 \\ -2A - 4B = -16 \\ -3A + 3B - C = +4 \end{cases}$$

Risolvendo questo sistema lineare, si trova :

$$A = 2, \quad B = 3, \quad C = -1.$$

Ne segue che :

$$\begin{aligned} \int \frac{4x^2 - 16x + 4}{x^3 - 3x^2 - x + 3} dx &= 2 \int \frac{1}{x-1} dx + 3 \int \frac{1}{x+1} dx - \int \frac{1}{x-3} dx = \\ &= 2 \log(x-1) + 3 \log(x+1) - \log(x-3) + c = \log \frac{(x-1)^2(x+1)^3}{x-3} + c. \end{aligned}$$

3) Calcolare l'integrale :  $\int \frac{x^5 - 7x^4 + 8x^3 + 15x^2 - 26x + 13}{x^2 - 7x + 10} dx.$

In questo caso, come è noto dalla teoria, si dimostra che vale la seguente decomposizione :

$$\begin{aligned} \frac{M(x)}{N(x)} &= \frac{A_1}{x - \alpha_1} + \frac{A_2}{(x - \alpha_1)^2} + \dots + \frac{A_r}{(x - \alpha_1)^r} + \\ &+ \frac{B_1}{x - \alpha_2} + \frac{B_2}{(x - \alpha_2)^2} + \dots + \frac{B_s}{(x - \alpha_2)^s} + \\ &+ \frac{C_1}{x - \alpha_3} + \frac{C_2}{(x - \alpha_3)^2} + \dots + \frac{C_t}{(x - \alpha_3)^t}, \end{aligned}$$

con :  $A_1, A_2, \dots, A_r$ ;  $B_1, B_2, \dots, B_s$ ;  $C_1, C_2, \dots, C_t$ , costanti convenienti. Anche in questo caso quindi l'integrale della funzione  $\frac{M(x)}{N(x)}$  si scomponete nella somma di più integrali che sappiamo già calcolare perché, per  $p > 1$ , risulta :

$$\int \frac{A}{(x-\alpha)^p} dx = A \int (x-\alpha)^{-p} d(x-\alpha) = A \frac{(x-\alpha)^{-p+1}}{-p+1} + c = -\frac{A}{p-1} \cdot \frac{1}{(x-\alpha)^{p-1}} + c.$$

#### ESEMPI.

1) Calcolare l'integrale :  $\int \frac{3x-1}{x^3-5x^2+8x-4} dx$ .

Si verifica subito che l'equazione (1) :

$$x^3 - 5x^2 + 8x - 4 = 0,$$

ha per radice  $x = 1$ . Dividendo allora il primo membro di questa equazione per  $x - 1$ , si trova per quoziente :  $x^2 - 4x + 4$ , e perciò si può scrivere :

$$(x-1)(x^2-4x+4) = 0.$$


---

Le radici della nostra equazione sono perciò 1 e 2, la prima *semiplice* e la seconda *doppia*. Porremo quindi :

$$\frac{3x-1}{x^3-5x^2+8x-4} = \frac{A}{x-1} + \frac{B_1}{x-2} + \frac{B_2}{(x-2)^2}.$$

Eliminando i denominatori, si ottiene :

$$3x-1 = A(x-2)^2 + B_1(x-1)(x-2) + B_2(x-1),$$

ossia :

$$3x-1 = (A+B_1)x^2 + (-4A-3B_1+B_2)x + (4A+2B_1-B_2),$$

e quindi :

$$\begin{cases} A + B_1 = 0 \\ -4A - 3B_1 + B_2 = 3 \\ 4A + 2B_1 - B_2 = -1 \end{cases}$$

Risolvendo questo sistema lineare, si ottiene :  $A = 2$ ,  $B_1 = -2$ ,  $B_2 = 5$ .

Pertanto :

$$\begin{aligned} \int \frac{3x-1}{x^3-5x^2+8x-4} dx &= 2 \int \frac{1}{x-1} dx - 2 \int \frac{1}{x-2} dx + 5 \int (x-2)^{-2} d(x-2) = \\ &= 2 \log(x-1) - 2 \log(x-2) + 5 \frac{(x-2)^{-1}}{-1} + c = \\ &= \log \frac{(x-1)^2}{(x-2)^2} - \frac{5}{x-2} + c. \end{aligned}$$

$$ax + b = \frac{a}{2} (2x + p) + b - \frac{ap}{2},$$

e perciò :

$$\int \frac{ax + b}{x^2 + px + q} dx = \frac{a}{2} \int \frac{2x + p}{x^2 + px + q} dx + \left( b - \frac{ap}{2} \right) \int \frac{1}{k^2 + \left( x + \frac{p}{2} \right)^2} dx.$$

Risulta :

$$\frac{a}{2} \int \frac{2x + p}{x^2 + px + q} dx = \frac{a}{2} \log(x^2 + px + q),$$

perchè il numeratore è la derivata del denominatore ; inoltre, in base al secondo degli esercizi svolti in 4) nel n. 3, risulta :

$$\begin{aligned} \left( b - \frac{ap}{2} \right) \int \frac{1}{k^2 + \left( x + \frac{p}{2} \right)^2} dx &= \left( b - \frac{ap}{2} \right) \int \frac{1}{k^2 + \left( x + \frac{p}{2} \right)^2} d\left( x + \frac{p}{2} \right) = \\ &= \left( b - \frac{ap}{2} \right) \cdot \frac{1}{k} \arctg \frac{x + \frac{p}{2}}{k} = \frac{b - \frac{ap}{2}}{\sqrt{q - \frac{p^2}{4}}} \arctg \frac{x + \frac{p}{2}}{\sqrt{q - \frac{p^2}{4}}}. \end{aligned}$$

In definitiva si ha quindi :

$$I_1 = \int \frac{ax + b}{x^2 + px + q} dx = \frac{a}{2} \log(x^2 + px + q) + \frac{b - \frac{ap}{2}}{\sqrt{q - \frac{p^2}{4}}} \arctg \frac{x + \frac{p}{2}}{\sqrt{q - \frac{p^2}{4}}} + c.$$

se  $q > p^2$ , cioè se si suppone  $p^2 - 4q < 0$ , ossia :  
dove si suppone che l'equazione  $x^2 + px + q = 0$  abbia radici complesse .

$$xp \frac{b + xd + \frac{p}{2}x}{q + xv} \int = I$$

(a) Ossolare l'integrale :