

7. Forze centrali 2: *Gravitazione*

7.3 La forza gravitazionale

7.3.1 Legge di gravitazione universale

Possiamo così esprimere la **Legge di gravitazione universale** formulata da Newton:

Due corpi qualsiasi, di masse m_1 ed m_2 e di dimensioni trascurabili rispetto alla loro distanza, si attraggono con una forza diretta lungo la congiungente, di intensità direttamente proporzionale al prodotto delle masse ed inversamente proporzionale al quadrato della distanza:

$$\vec{F} = -G \frac{m_1 m_2}{r^2} \hat{u}_r$$

Oss. La forza gravitazionale non richiede contatto fra i due corpi interagenti, ma agisce a distanza; anzi, ha raggio d'azione infinito.

7.3.2 Verifica della legge di gravitazione universale

Storicamente, Isaac Newton nel 1666 formulò la legge di gravitazione universale come spiegazione dinamica delle leggi di Keplero per il moto dei pianeti, e fece poi la prima verifica della legge di gravitazione confrontando tra loro:

- l'accelerazione gravitazionale g sulla Terra
- l'accelerazione centripeta a_L della Luna.

Infatti, se vale la legge di gravitazione universale si deve avere che l'accelerazione di gravità

$$\text{sulla Terra } g = \frac{F(M_T, m, R_T)}{m} = G \frac{M_T}{R_T^2}, \text{ mentre } a_L = \frac{F(M_T, m_L, r_L)}{m_L} = G \frac{M_T}{r_L^2}$$

dove con R_T abbiamo indicato il raggio della Terra e con r_L il raggio dell'orbita lunare.

Stiamo inoltre considerando la Terra, nel calcolo di g , come se la sua massa fosse tutta concentrata nel centro: non si tratta di un'approssimazione, ma ciò avviene per tutti i corpi sferici omogenei oppure con andamento della densità a simmetria sferica.

Dunque, deve essere $\frac{g}{a_L} = \left(\frac{r_L}{R_T}\right)^2$. Ricordando infine la relazione che lega l'accelerazione

centripeta della Luna al raggio r_L ed al periodo T_L della sua orbita, $a_L = \left(\frac{2\pi}{T_L}\right)^2 r_L$ otteniamo

$$\text{infine la relazione } g R_T^2 = 4\pi^2 \frac{r_L^3}{T_L^2}.$$

Notiamo che tale relazione non dipende né da G né da M_T , ed è piuttosto semplice da verificare in epoca moderna. Tuttavia, all'epoca di Newton, delle quattro grandezze coinvolte in tale relazione:

- R_T era noto fin dall'antichità;
- g poteva essere facilmente misurata con esperimenti sulla caduta dei gravi;
- T_L si ricava da osservazioni astronomiche;

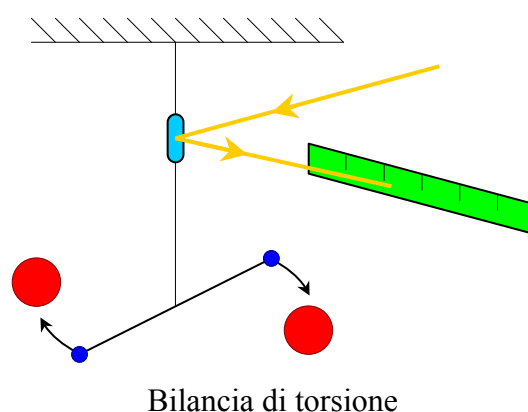
- r_L era noto con un certo grado di approssimazione, e per questo motivo il calcolo che Newton fece per verificare la sua teoria, e che abbiamo qui ripercorso brevemente, non quadrava esattamente.

Newton scelse allora di non pubblicare alcuno dei suoi risultati in attesa di un dato più preciso, che confermasse la validità della sua legge. Trascorsero 20 anni prima che egli pubblicasse le sue scoperte! La sua opera (*Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*) vide la luce nel 1685, e in breve tempo divenne così famosa da rivoluzionare non solo il pensiero scientifico ma anche il pensiero di ogni intellettuale dell'epoca.

7.3.3 Misura della costante di gravitazione universale

Una misura abbastanza precisa della costante di gravitazione universale G fu realizzata per la prima volta dal fisico Cavendish nel 1798, mediante la cosiddetta *bilancia di torsione*.

In questo celebre apparato sperimentale, due sfere di piombo fisse attraggono due sferette più piccole vincolate tra loro da un'asticella molto leggera appesa ad un filo. L'attrazione gravitazionale tra le sfere (grande e piccola) provoca una torsione del filo, fino a raggiungere un punto di equilibrio in cui la forza di torsione bilancia esattamente la forza di attrazione gravitazionale. Dalla misura dell'angolo di torsione, fatta con precisione grazie ad uno specchietto incollato sul filo ed un raggio luminoso che, riflesso dallo specchietto, incide su una scala graduata, si ricava l'intensità del momento torcente e quindi del momento della forza di interazione gravitazionale (che all'equilibrio si devono eguagliare). Note le masse in gioco e misurata la distanza tra di esse all'equilibrio si calcola la costante di gravitazione universale.



Il valore più preciso noto oggi è: $G = 6.67 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$

7.3.4 Massa inerziale e massa gravitazionale

Come conseguenza della legge di gravitazione universale abbiamo che ogni corpo possiede la capacità di attrarre i corpi circostanti con un'intensità direttamente proporzionale alla propria massa. In base alla legge di gravitazione, dunque, si può dare una definizione di *massa* alternativa a quella data in dinamica: la grandezza caratteristica di un corpo che ne risulta viene detta *massa gravitazionale*, indicata anche con m_g . La *massa inerziale* m_i , invece, è definita come la costante di proporzionalità esistente tra la forza applicata ad un corpo e la sua accelerazione (in un riferimento inerziale), e misura perciò la *resistenza* o *inerzia* di un corpo alle variazioni del moto.

Sperimentalmente si verifica che sulla Terra tutti i gravi cadono con la stessa accelerazione di gravità g , il che significa che il rapporto fra la loro *massa gravitazionale*, che influenza la forza di attrazione verso la Terra, e la loro *massa inerziale*, che influenza l'accelerazione g , è una costante.

Raffinati esperimenti hanno permesso di stabilire che, in tutti i fenomeni finora osservati, esiste una *rigorosa proporzionalità* fra la massa gravitazionale e la massa inerziale. Risulta legittimo, pertanto, imporre l'*uguaglianza* fra queste due grandezze ed utilizzare la stessa unità di misura per entrambe (il kg), benché non esista alcuna *prova teorica* né una comprensione delle cause di

questo fatto. Non si conosce, cioè, la genesi comune di queste due importanti proprietà della materia, l'inerzia e la gravità.

7.3.5 Energia potenziale gravitazionale

La forza gravitazionale generata da una massa puntiforme M è una forza *centrale* e quindi *conservativa*; per introdurre la sua energia potenziale basta calcolare il lavoro compiuto dalla forza gravitazionale per spostare una massa m da una distanza r dalla massa che genera il campo ad un punto a distanza infinita, che prendiamo come stato di riferimento (ad energia potenziale nulla).

$$E_p(r) = E_p(r) - E_p(\infty) = \mathcal{L}_{r \rightarrow \infty} = \int_r^{\infty} -G \frac{Mm}{r^2} \hat{u}_r \cdot d\vec{r} = \int_r^{\infty} -G \frac{Mm}{r^2} dr = -G \frac{Mm}{r}$$

In base alla scelta fatta per il riferimento, l'energia potenziale gravitazionale risulta sempre *negativa*: infatti la forza è attrattiva, quindi compie lavoro positivo per avvicinare le due masse e lavoro negativo per allontanarle.

7.4 Moto dei pianeti e leggi di Keplero

Moto di un punto materiale in un campo gravitazionale

Il concetto di energia potenziale efficace appena introdotto è utile per studiare il moto di un punto materiale di massa m immerso nel campo gravitazionale generato dalla massa $M \gg m$. Osserviamo che:

1. Le condizioni iniziali stabiliscono il *momento angolare* \vec{L} e l'*energia totale* E , che si conservano durante il moto; la direzione di \vec{L} stabilisce il *piano del moto*, mentre dal suo modulo dipende l'entità dell'energia potenziale centrifuga, e quindi i valori r_z , r_{\min} ed $E_{p,\min}^{(eff)}$.

2. Poiché risulta $E = \frac{1}{2} m \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + E_p^{(eff)}(r) \geq E_p^{(eff)}(r)$, avremo anzitutto che, fissato il valore di

$$L, \text{ sarà certamente } -\frac{G^2 M^2 m^3}{2L^2} = E_{p,\min}^{(eff)} \leq E_p^{(eff)}(r) \leq E.$$

Abbiamo quindi che:

3. Se l'energia totale è negativa ($E = E_1 < 0$), avremo che anche l'energia potenziale efficace deve sempre restare negativa, ed in particolare al di sotto del valore $E_1 < 0$. Di conseguenza il punto materiale P si trova *confinato* entro una *buca di potenziale*, e la sua distanza dal centro delle forze varierà tra un valore minimo ed un valore massimo (vedi figura); la traiettoria, pertanto si dimostra essere una *ellisse*.

Il *perielio* e l'*afelio* si trovano alle distanze $r_{per,af}$ tali che sia:

$$E_p^{(eff)}(r) = -\frac{GMm}{r_{per,af}} + \frac{L^2}{2mr_{per,af}^2} = -|E_1| \Rightarrow 2m|E_1|r_{per,af}^2 - 2GMm^2r_{per,af} + L^2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r_{per} = \frac{GMm}{2|E_1|} - \sqrt{\left(\frac{GMm}{2E_1}\right)^2 - \frac{L^2}{2m|E_1|}} \quad ; \quad r_{af} = \frac{GMm}{2|E_1|} + \sqrt{\left(\frac{GMm}{2E_1}\right)^2 - \frac{L^2}{2m|E_1|}}.$$

4. Se, in particolare, l'energia totale negativa coincide con l'energia potenziale efficace minima, la traiettoria è una *circonferenza*, ed infatti le distanze corrispondenti al perielio e all'afelio vanno a coincidere perché la radice si annulla, ed entrambe valgono proprio r_{\min} .

5. Se l'energia totale è positiva ($E = E_2 > 0$), il punto materiale P è libero di sfuggire alle forze del campo (vedi figura), e la traiettoria è un'iperbole; il *massimo avvicinamento* consentito al centro delle forze si determina imponendo velocità radiale nulla e quindi uguaglianza fra l'energia potenziale efficace e l'energia totale. Si ottiene il valore:

$$r_0 = \sqrt{\left(\frac{GMm}{2E_2}\right)^2 + \frac{L^2}{2mE_2}} - \frac{GMm}{2E_2} \quad \text{con } E_2 > 0.$$

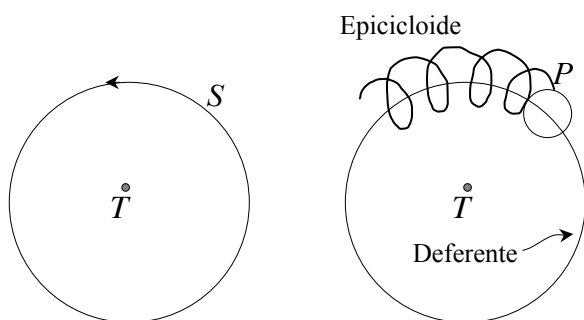
(l'altra soluzione dell'equazione va scartata perché risulta negativa)

6. Se infine l'energia totale della particella è nulla, avremo che essa possiede l'energia *minima* necessaria per sfuggire al campo, e la sua traiettoria risulta *parabolica*. Il punto di *massimo avvicinamento* è a distanza r_z , ove l'energia potenziale efficace si annulla, e quindi coincide con l'energia totale.

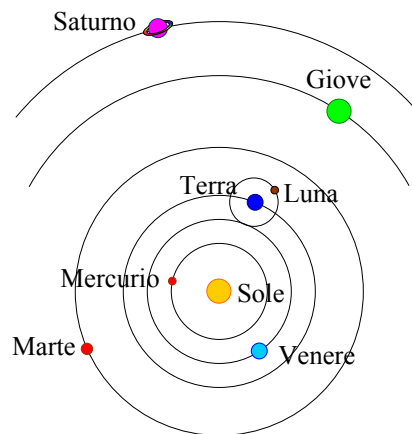
Le leggi empiriche di Keplero

Nel II sec. d.C. Tolomeo di Alessandria propose il modello *geocentrico* dell'Universo, in cui il Sole ruota intorno alla Terra. I pianeti descrivono orbite abbastanza complicate intorno alla Terra (*epicicloidali*). Si tratta di un sistema complesso, ma capace di prevedere la posizione dei pianeti. Nel 1510 l'astronomo polacco Nikolaï Kopernik (Niccolò Copernico) propose il modello *eliocentrico* del Sistema Solare, in cui la Terra e gli altri pianeti ruotano intorno al Sole. Copernico utilizzava, in pratica, un sistema di riferimento con buona approssimazione inerziale (solidale col Sole), che permette una descrizione analitica molto più semplice del moto dei pianeti.

Sistema Tolemaico (semplificato)



Sistema Copernicano



L'astronomo danese Tycho Brahe (1546-1601) fece accurate osservazioni astronomiche del moto dei pianeti.

In base ai dati raccolti da Brahe, il matematico ed astronomo tedesco Johannes Kepler (1571-1630) formulò le 3 *leggi empiriche sulla cinematica del moto dei pianeti*:

- I. Ogni pianeta descrive un'orbita ellittica ed il Sole occupa uno dei due fuochi dell'ellissi.
- II. Il vettore posizione di ogni pianeta rispetto al Sole descrive aree uguali in tempi uguali.
- III. Il quadrato del tempo di rivoluzione di ciascun pianeta è proporzionale al cubo del semiasse maggiore della sua orbita $T^2 \propto a^3$.

Le leggi di Keplero possono essere dedotte dalla teoria della dinamica del moto sotto l'azione di una forza centrale che dipende dall'inverso del quadrato della distanza.

La seconda legge risulta particolarmente semplice da dimostrare, cioè si può facilmente dimostrare che la *velocità areolare* dA/dt , cioè l'area spazzata dal vettore posizione nell'unità di tempo, è costante.

$$\vec{L} = m r^2 \vec{\omega} = \text{cost} \Rightarrow r^2 \frac{d\vartheta}{dt} = \text{cost.}$$

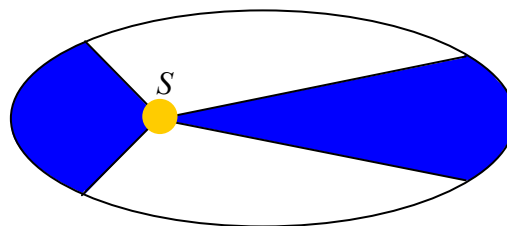
$$\text{ma: } dA = \frac{1}{2} r \cdot (r d\vartheta) = \frac{1}{2} r^2 d\vartheta$$

(possiamo approssimare l'areola dA a quella di un triangolo che ha per altezza r e per base l'arco di cerchio $r d\vartheta$)

Allora abbiamo che la velocità areolare risulta

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \frac{d\vartheta}{dt} = \frac{1}{2} \frac{L}{m} = \text{cost.}$$

(*seconda legge di Keplero* per il moto dei pianeti: il vettore posizione "spazza" aree uguali in tempi uguali).



Per quanto riguarda la terza legge, consideriamo il caso particolare di un'orbita circolare di raggio R . Allora dalla I eq. cardinale abbiamo:

$$\vec{F} = m \vec{a}_N = m \vec{a}_C \Rightarrow -\frac{k}{R^2} \hat{u}_r = -m \omega^2 R \hat{u}_r \Rightarrow \frac{k}{R^3} = m \frac{4\pi^2}{T^2} \Rightarrow T^2 = \frac{4\pi^2 m}{k} R^3,$$

ove m è la massa del pianeta. Sostituendo l'espressione di k per il sistema Sole-Pianeta, cioè $k = GM_S m$, ove M_S è la massa del Sole, otteniamo:

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{GM_S} R^3$$

Si noti che la costante di proporzionalità tra il cubo del raggio dell'orbita ed il quadrato del tempo di rivoluzione è la stessa per tutte le orbite.

Le dimostrazioni della prima legge e della terza legge nel caso generale delle orbite ellittiche sono più laboriose e richiedono di risolvere analiticamente il problema bidimensionale del moto del pianeta sotto l'effetto dell'attrazione gravitazionale del Sole. Per un approfondimento (facoltativo) su tali dimostrazioni, si vedano le appendici 1, 2 e 3.

E' da ricordare che in una lezione del 1964 (andata perduta per alcuni decenni e poi ritrovata e pubblicata da D. L. Goodstein e J. R. Goodstein nel saggio intitolato "Il moto dei pianeti intorno al sole: una lezione inedita di Richard Feynman") il famoso fisico Richard Feynman fornì una dimostrazione della prima legge senza fare uso dei metodi dell'analisi matematica (cioè della geometria analitica del calcolo integrale e differenziale, ecc.), ma utilizzando solo metodi di geometria elementare (da riga e compasso, per così dire).

Velocità di fuga

La velocità minima con cui un corpo deve essere lanciato per poter sfuggire al campo gravitazionale della Terra, ipotizzando di trascurare l'attrito dell'aria, prende il nome di *velocità di fuga*.

Per calcolarla, in base a quanto visto sulla forma delle orbite, basta imporre che l'energia totale del corpo sia nulla. Se allora il corpo si trova sulla superficie terrestre, avremo:

$$E_{p,i} = -G \frac{M_T m}{R_T} \quad ; \quad E_{c,i} = \frac{1}{2} m v_i^2 \quad \Rightarrow \quad E_i = -G \frac{M_T m}{R_T} + \frac{1}{2} m v_i^2$$

$$E_i = 0 \quad \Rightarrow \quad v_i = v_{fuga} = \sqrt{\frac{2GM_T}{R_T}}$$

Nota: la velocità di fuga è la stessa in tutte le direzioni, essendo stata ricavata da un'equazione scalare. Tuttavia nel nostro calcolo abbiamo implicitamente assunto un SdR inerziale (in quiete rispetto alla Terra, con origine nel centro del pianeta), ma dovendo lanciare un corpo dalla superficie terrestre è significativo determinare con quale velocità rispetto alla superficie terrestre debba essere effettuato il lancio. Tale velocità di fuga relativa alla Terra sarà data, in base alla legge di trasformazione delle velocità, dalla velocità di fuga calcolata nel SdR assoluto meno la velocità di trascinamento nel punto della superficie terrestre da cui viene effettuato il lancio. E' chiaro quindi che risulta conveniente effettuare lanci da punti della superficie terrestre ove la velocità di trascinamento è più alta, cioè in prossimità dell'equatore.

Orbita geostazionaria

La terza legge di Keplero può essere applicata al moto di un satellite in orbita intorno alla Terra, quindi il periodo di tale orbita sarà proporzionale al cubo del raggio dell'orbita (supposta circolare):

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{GM_T} R^3, \text{ con } M_T \text{ la massa della Terra, pari a circa } 6 \times 10^{24} \text{ kg.}$$

Un satellite geostazionario ruota intorno alla Terra con la stessa velocità angolare di rotazione della Terra, quindi ha un periodo T di 24 ore (circa), pari a 86400 s. Dalla precedente equazione ricaviamo quindi il raggio dell'orbita di un satellite terrestre geostazionario:

$$R = \sqrt[3]{\frac{GM_T T^2}{4\pi^2}} \approx 42000 \text{ km.}$$

APPENDICE 1. Dimostrazione della I legge di Keplero (argomento facoltativo)

Vogliamo ricavare la forma più generale dell'equazione della traiettoria del moto di un punto materiale (pianeta) sotto l'azione della forza di gravitazione universale (esercitata dal Sole). Poichè tale forza è centrale, abbiamo già dimostrato che il momento angolare del punto materiale rispetto al centro di forza del campo si conserva, e ciò implica che il moto è piano, e possiamo descriverlo mediante un sistema di coordinate polari del piano con origine nel centro di forze del campo (che coincide approssimativamente con la posizione del Sole). Sia m la massa del generico pianeta.

$$\vec{L} = m r^2 \vec{\omega} = \text{cost} \Rightarrow \frac{d\vartheta}{dt} = \frac{L}{m r^2} \quad \text{da cui} \quad \frac{d\vartheta}{dt} = -\frac{L}{m} \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{r} \right) \Rightarrow \frac{dr}{dt} = -\frac{L}{m} \frac{d}{d\theta} \left(\frac{1}{r} \right)$$

Anche l'energia totale del sistema si conserva e vale $E = -\frac{k}{r} + \frac{1}{2} m \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + \frac{1}{2} m r^2 \left(\frac{d\vartheta}{dt} \right)^2$ da cui

$$E = -\frac{k}{r} + \frac{1}{2} \frac{L^2}{m} \left[\frac{d}{d\theta} \left(\frac{1}{r} \right) \right]^2 + \frac{L^2}{2 m r^2} \Rightarrow \left[\frac{d}{d\theta} \left(\frac{1}{r} \right) \right]^2 = \frac{2mE}{L^2} + \frac{2mk}{L^2} \frac{1}{r} - \frac{1}{r^2}.$$

Posto ora $\frac{mk}{L^2} = \frac{1}{C}$ si ha

$$\frac{d}{d\theta} \left(\frac{1}{r} \right) = \sqrt{\frac{2mE}{L^2} + \frac{2}{C} \frac{1}{r} - \frac{1}{r^2}} = \sqrt{\frac{2mE}{L^2} + \frac{1}{C^2} - \left(\frac{1}{r^2} - \frac{2}{C} \frac{1}{r} + \frac{1}{C^2} \right)},$$

Poniamo ora $\frac{2mE}{L^2} + \frac{1}{C^2} = \frac{e^2}{C^2}$, così che risulti definita una grandezza adimensionale, costante

del moto, $e = \sqrt{1 + \frac{2L^2 E}{mk^2}}$, ed una grandezza $D = \frac{C}{e}$ che ha le dimensioni di una lunghezza.

Sostituendo tali grandezze nell'equazione differenziale precedente giungiamo alla seguente

equazione differenziale $\frac{d}{d\theta} \left(\frac{1}{r} \right) = \frac{1}{D} \sqrt{1 - \left(\frac{D}{r} - \frac{1}{e} \right)^2}$ che possiamo integrare per separazione

delle variabili. Infatti l'equazione può essere riscritta come segue:

$$\frac{d \left(\frac{D}{r} \right)}{\sqrt{1 - \left(\frac{D}{r} - \frac{1}{e} \right)^2}} = d\theta, \text{ e ponendo } s = \frac{D}{r} - \frac{1}{e}, \text{ abbiamo } \frac{1}{\sqrt{1-s^2}} ds = d\theta.$$

Integrando ad ambo i membri tra troviamo $\arcsin(s) = \theta + A$, con A una costante arbitraria. Se

scegliamo $A = \pi$, otteniamo $s = \sin(\theta + \pi) = -\cos(\theta)$, da cui infine $\frac{D}{r} - \frac{1}{e} = -\cos(\theta)$. Tale

equazione può essere riscritta come segue:

$$r = \frac{eD}{1 + e \cos(\theta)}$$

Essa è l'equazione della traiettoria del pianeta in coordinate polari, e riconosciamo che tale equazione rappresenta una conica di eccentricità e e parametro della direttrice D (si veda l'appendice 4).

Osserviamo quindi che in base al valore dell'eccentricità, dato dall'espressione $e = \sqrt{1 + \frac{2L^2 E}{mk^2}}$, risulteranno le seguenti orbite:

Eccentricità	$e = 0$	$0 < e < 1$	$e = 1$	$e > 1$
Orbita	Circonferenza	Ellisse	Parabola	Iperbole
Energia E	Negativa	Negativa	Nulla	Positiva

Dunque le orbite legate, che per quanto visto nel paragrafo precedente sono quelle con energia totale negativa, sono tutte e sole le ellissi che hanno il Sole in uno dei fuochi.

APPENDICE 2. Dimostrazione della III legge di Keplero (argomento facoltativo)

Consideriamo una generica orbita ellittica di semiasse maggiore a ed eccentricità e . E' noto dalla geometria elementare che l'area di tale ellisse vale: $A = \pi a^2 \sqrt{1-e^2}$. D'altra parte possiamo esprimere questa stessa area come l'integrale della velocità areolare (ricavata in precedenza)

integrata sull'intero periodo T dell'orbita: $A = \int_0^T \frac{dA}{dt} dt = \int_0^T \frac{1}{2} \frac{L}{m} dt = \frac{LT}{2m}$.

Eguagliando le due espressioni troviamo $LT = 2m\pi a^2 \sqrt{1-e^2}$. Inoltre si può dimostrare che il momento angolare del sistema in funzione dei parametri dell'orbita ellittica può scriversi nella forma seguente: $L = \sqrt{mka(1-e^2)}$ (si veda l'appendice 3). Quindi abbiamo:

$$T\sqrt{mka} = 2m\pi a^2 \Rightarrow T^2 = \frac{4\pi^2 m}{k} a^3 = \frac{4\pi^2}{GM_s} a^3$$

Si noti che la costante di proporzionalità tra il cubo del semiasse maggiore ed il quadrato del tempo di rivoluzione è la stessa per tutte le orbite, dipendendo solo dalla massa del Sole M_s .

APPENDICE 3. Proprietà delle orbite ellittiche (argomento facoltativo)

E' noto che le sezioni coniche sono definite da una coppia di parametri: la distanza D di uno dei fuochi da una retta (detta direttrice della conica) e l'eccentricità e , (entrambi tali parametri possono assumere solo valori maggiori o uguali a zero).

L'equazione di una sezione conica in coordinate polari del piano con l'origine nel fuoco a distanza D dalla direttrice si dimostra essere la seguente: $\frac{eD}{r} = 1 + e \cos(\theta)$.

Derivando tale equazione rispetto all'anomalia θ si ha $-\frac{eD}{r^2} \frac{dr}{d\theta} = -e \sin(\theta)$, da cui

$$\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 = \frac{r^4}{D^2} \sin^2(\theta) = \frac{r^4}{D^2} (1 - \cos^2(\theta)), \text{ e ricordando l'equazione della conica abbiamo infine:}$$

$$\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 = \frac{r^4}{D^2} \left[1 - \left(\frac{D}{r} - \frac{1}{e}\right)^2\right] \quad (1)$$

Ricordiamo poi che l'energia totale vale $E = \frac{1}{2} m \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + E_{p,eff}(r) = \frac{1}{2} m \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + E_p(r) + \frac{L^2}{2mr^2}$, da

$$\text{cui ricaviamo } \frac{dr}{dt} = \sqrt{\frac{2}{m} (E - E_p(r)) - \frac{L^2}{mr^2}}.$$

Ma in generale è $L = mr^2(d\theta / dt)$, quindi possiamo scrivere $\frac{d\theta}{dt} = \frac{L}{mr^2}$ e perciò combinando le ultime due relazioni per eliminare la derivata temporale avremo:

$$\left(\frac{dr}{dt} \frac{dt}{d\theta}\right)^2 = \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 = \frac{m^2 r^4}{L^2} \left[\frac{2}{m} (E - E_p(r)) - \frac{L^2}{m^2 r^2} \right] \quad (2)$$

Combinando ora l'equazione (1) con la (2) troviamo:

$$1 - \frac{D^2}{r^2} + \frac{2D}{er} - \frac{1}{e^2} = \frac{2D^2 mE}{L^2} - \frac{2D^2 mE_p(r)}{L^2} - \frac{D^2}{r^2}$$

Eliminando ora i due termini in r^2 , ed eguagliando i termini costanti e quelli che dipendono da r si trova $\frac{2D^2 mE}{L^2} = 1 - \frac{1}{e^2}$ e $\frac{2D^2 mE_p(r)}{L^2} = -\frac{2D}{er}$ da cui rispettivamente:

$$E = -\frac{L^2}{2mD^2} \left(\frac{1-e^2}{e^2} \right), \text{ e}$$

$$E_p(r) = -\frac{L^2}{mDe r}.$$

Dall'ultima equazione, ricordando che $E_p(r) = -\frac{k}{r}$ si trova $L = \sqrt{mkeD} = \sqrt{mka(1-e^2)}$, ove nell'ultimo passaggio si è utilizzata la relazione che lega il semiasse maggiore dell'ellisse a ai parametri e e D , cioè $a = eD / (1 - e^2)$.

APPENDICE 4. Equazione di una conica in coordinate polari (argomento facoltativo)

Le sezioni coniche possono essere definite a partire da due parametri, la distanza D tra un punto, detto fuoco, ed una retta d , detta direttrice, e l'eccentricità e , che può assumere un qualunque valore reale non nullo. Dato un assegnato valore di D e di e , è univocamente definito un luogo di punti P , giacenti nel piano individuato dalla direttrice e dal fuoco, attraverso la relazione:

$$\frac{\overline{PF}}{\overline{Pd}} = e,$$

ove \overline{PF} è la distanza di P dal fuoco e \overline{Pd} la distanza di P dalla direttrice.

Se definiamo un sistema di coordinate polari centrato nel fuoco, e con l'anomalia misurata da un asse ortogonale alla direttrice e passante per il fuoco stesso, abbiamo che $\overline{PF} = r$ e \overline{Pd} si può esprimere in funzione di r , θ e D . Risulta infatti immediatamente $\overline{Pd} = D - r \cos(\theta)$.

L'equazione definitoria della conica diviene dunque:

$$\frac{r}{D - r \cos(\theta)} = e,$$

che risolta rispetto ad r diviene

$$r = \frac{eD}{1 + e \cos(\theta)}.$$

Si noti che il caso particolare di una circonferenza, corrispondente all'equazione $r = R \quad \forall \theta$, si ha per una direttrice all'infinito ($D \rightarrow \infty$) ed eccentricità che tende a zero, tali che $R = eD$. Nel caso dell'ellissi invece dovrà essere $0 < e < 1$ e D finito. Si noti poi che il semiasse maggiore dell'ellissi risulta pari ad $a = (r_1 + r_2) / 2 = eD / (1 - e^2)$, ove $r_1 = r(\theta = 0) = \frac{eD}{1 + e}$ e

$r_2 = r(\theta = \pi) = \frac{eD}{1-e}$, essendo $\theta = 0$ e $\theta = \pi$ le anomalie dei due punti dell'ellissi a minima e massima distanza dal fuoco (detti perielio ed afelio per le orbite dei pianeti).