3. Dinamica del punto materiale

3.1 Generalità

La dinamica si occupa del moto dei corpi in relazione alle ***cause*** che lo producono.

Il moto di un corpo è il risultato delle sue "***interazioni***" con i corpi che lo circondano.

Ogni interazione è descritta formalmente attraverso una grandezza fisica vettoriale: le ***forza***.

Il moto di un corpo è anche il risultato di una proprietà intrinseca del corpo, la sua "***inerzia***", che rappresenta la tendenza del corpo a mantenere invariata la propria velocità (nulla o non nulla che sia).

Tale proprietà è descritta formalmente attraverso una grandezza fisica scalare: la ***massa***.

<u>Def.</u> ***Sistema di riferimento inerziale.***

*Un sistema di riferimento <u>solidale con un punto materiale non soggetto ad interazioni</u> si dice "**sistema di riferimento inerziale**".*

<u>Oss.</u> ***Proprietà dei sistemi di riferimento inerziali.***

- Si verifica sperimentalmente che un punto materiale (più in generale un <u>*corpo*</u>) non soggetto ad interazioni (situazione realizzabile solo con un certo grado di approssimazione nella realtà) è in ***quiete*** oppure si muove di ***moto rettilineo uniforme***, quindi un sistema di riferimento inerziale è in quiete oppure si muove di moto rettilineo uniforme.
- Un sistema di riferimento in quiete o in moto rettilineo uniforme rispetto ad un sistema di riferimento inerziale è anch'esso un sistema di riferimento inerziale. Quindi tutti i sistemi inerziali si trovano reciprocamente in quiete o in moto di trascinamento rettilineo uniforme l'uno rispetto all'altro.

<u>Ex.</u> Un sistema di riferimento solidale con la Terra è, nella maggior parte dei casi, una buona approssimazione per un sistema inerziale; un sistema solidale con il Sole è un'ottima approssimazione, valida in prima approssimazione anche per il moto dei pianeti; un sistema solidale con il centro della Galassia è un'approssimazione ancora migliore.

La "dinamica del punto materiale" si dice anche *meccanica newtoniana*, perché si riassume in tre fondamentali leggi o "principi" enunciati da Isaac Newton (1686).

3.2 Primo principio della dinamica e principi di relatività

<u>I principio della dinamica o "principio d'inerzia"</u>
In un sistema di riferimento inerziale, un corpo non soggetto ad interazioni con altri corpi permane nello stato di quiete o di moto rettilineo uniforme.

Strettamente connesso con il principio d'inerzia è il seguente:

<u>Principio di relatività galileiano (fisica classica => invarianza delle leggi meccaniche)</u>
Le leggi della meccanica assumono la stessa forma per tutti gli osservatori inerziali.

<u>Oss.</u> Conseguenza notevole del principio di relatività galileiano.
Il principio di relatività galileiano esclude la possibilità di individuare un *sistema di riferimento* ***assoluto*** (fra quelli inerziali) eseguendo esperimenti di <u>meccanica</u>. Tuttavia i fisici tentarono a

lungo di capire se in natura esistesse un sistema di riferimento assoluto, e a tale fine idearono esperimenti nei quali taluni fenomeni non meccanici, ad esempio fenomeni luminosi, potessero apparire diversamente se osservati da due diversi osservatori inerziali. Il fallimento di tali esperimenti condusse all'idea che il principio di relatività galileiano fosse da rivedere. Albert Einstein propose nel 1905 una soluzione straordinariamente elegante di questo problema, basata sulla assunzione che la velocità della luce fosse uguale in tutti i sistemi di riferimento inerziali. Diretta conseguenze di tale ipotesi, in effetti comprovata da tutti gli esperimenti condotti sino a quel momento, fu la necessità di abbandonare i concetti di spazio e di tempo assoluti, su cui i meccanismi della percezione umana e con essi il principio di relatività galileiano sono basati. Invece di quest'ultimo si assunse quindi il più generale:

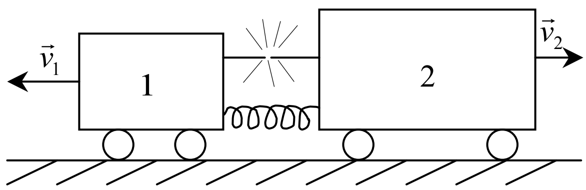
Principio di relatività ristretta (fisica relativistica => invarianza di tutte le leggi fisiche)
Tutte le leggi fisiche assumono la stessa forma per tutti gli osservatori inerziali.

Oss. Conseguenza notevole del principio di relatività ristretta.
Il principio di relatività ristretta implica che non solo le leggi della meccanica ma anche quelle dell'elettromagnetismo, ed in generale tutte le leggi fisiche assumono la stessa forma per tutti gli osservatori inerziali. Dunque, la *teoria della relatività*, che ha validità più generale della fisica classica, afferma (assume) in sostanza che il sistema di riferimento assoluto non esiste!

3.3 La massa inerziale

Si considerino due carrelli diversi tra loro posti su di un binario rettilineo. Siano essi **in quiete**, vincolati da un cavo, e tra di essi sia compressa una molla. Se ad un dato istante il cavo viene tagliato, si osservano i carrelli muoversi in direzioni opposte, con velocità $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$.
Ripetendo la prova con molle diverse, si osserva come le velocità dei due carrelli cambino (diciamole ad esempio $\vec{v}\,'_1$ e $\vec{v}\,'_2$), ma il rapporto tra di esse rimane invariato:

$$\left|\frac{\vec{v}_1}{\vec{v}_2}\right| = \left|\frac{\vec{v}'_1}{\vec{v}'_2}\right| = c_{21}$$



- *non dipende dall'entità dell'interazione*
- *è una costante caratteristica dei due corpi*

Più in generale, se i due carrelli hanno **velocità iniziali diverse da zero**, si osserva che, sempre operando nelle condizioni in cui essi siano soggetti esclusivamente alla mutua interazione, è il rapporto tra le variazioni delle loro velocità a mantenersi costante.

$$\left|\frac{\Delta\vec{v}_1}{\Delta\vec{v}_2}\right| = \left|\frac{\Delta\vec{v}'_1}{\Delta\vec{v}'_2}\right| = c_{21}$$

Ma poichè tali variazioni sono considerate rispetto allo stesso intervallo di tempo Δt, peraltro arbitrario (quindi eventualmente infinitesimo) possiamo ben dire che anche il rapporto tra le accelerazioni (anche istantanee) subite dai due carrelli è sempre costante:

$$\left|\frac{\vec{a}_1}{\vec{a}_2}\right| = c_{21}$$

Se ripetiamo lo stesso esperimento con un terzo carrello, diverso dai precedenti, troveremo altre due costanti per le diverse coppie di carrelli:

$$\left|\frac{\vec{a}_1}{\vec{a}_3}\right| = c_{31} \qquad \left|\frac{\vec{a}_3}{\vec{a}_2}\right| = c_{23}$$

e si verifica sperimentalmente che risulta sempre $c_{23} = \dfrac{c_{21}}{c_{31}}$.

Esperimenti diversi, ma concettualmente analoghi, compiuti con corpi differenti in condizioni di interazione differenti portano a risultati identici.
Concludiamo dicendo che se si considerano <u>due</u> corpi puntiformi soggetti alla <u>sola interazione reciproca</u>, in un <u>sistema di riferimento inerziale</u>, si verifica sperimentalmente quanto segue:

- le <u>velocità</u> dei due corpi variano per effetto dell'interazione;
- tali <u>variazioni</u> dipendono dall'intensità dell'interazione stessa;
- ma <u>il rapporto tra tali variazioni</u> è una costante caratteristica dei due corpi.

Alla luce di quanto osservato, possiamo dare la seguente definizione operativa di:

<u>Def.</u> Massa inerziale.
La quantità $c_{21}\left(c_{31}\right)$ può essere assunta come misura della <u>massa inerziale</u>: una grandezza scalare caratteristica del corpo 2 (3) rispetto alla medesima grandezza del corpo 1, scelto come unità campione.

Ora, dette m_1, m_2 ed m_3 le tre masse dei carrelli, avremo:

$$\left|\frac{\vec{a}_1}{\vec{a}_2}\right| = \frac{m_2}{m_1} \qquad \left|\frac{\vec{a}_1}{\vec{a}_3}\right| = \frac{m_3}{m_1} \qquad \left|\frac{\vec{a}_3}{\vec{a}_2}\right| = \frac{m_2}{m_3}$$

<u>Oss.</u> Si dice massa *inerziale* perché esprime l'inerzia del corpo, cioè la sua resistenza a cambiare velocità, quando è soggetto ad interazioni.

<u>Oss.</u> Nel S.I. la massa è una grandezza fondamentale e si misura in chilogrammi (*kg*).

<u>Oss.</u> Definizione dinamica del punto materiale.
Un *punto materiale* è un corpo di dimensioni e struttura interna trascurabili, ma *dotato di massa*, che è la sua proprietà fondamentale dal punto di vista dinamico.

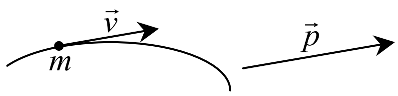
<u>Prp.</u> Proprietà additiva della massa inerziale.
La massa è una grandezza ***estensiva***, e non locale: riguarda cioè tutto il corpo, non solo una parte di esso. Come tutte le grandezze estensive, gode quindi della ***proprietà additiva***:

Se due corpi di massa m_1 ed m_2 vengono uniti a formarne uno solo, la massa m_3 del corpo risultante è la somma delle singole masse: $m_3 = m_1 + m_2$

3.4 La quantità di moto e la forza

<u>Def.</u> Quantità di moto
Si definisce *quantità di moto* $\vec{p}$ di un punto materiale la grandezza vettoriale data dal prodotto della massa per la velocità istantanea (vettoriale) del punto materiale:

$\vec{p} = m \cdot \vec{v}$



<u>Def.</u> Un sistema (insieme) di n punti materiali si dice ***isolato*** quando non è soggetto a interazioni con l'esterno, cioè gli n punti materiali interagiscono solo fra di loro, e non con altri (corpi o punti materiali esterni). Diciamo anche che essi sono soggetti *alla sola mutua interazione*.

<u>Oss.</u>
Dall'esperimento con i carrelli sappiamo che, dati due punti materiali soggetti *alla sola mutua interazione*:

$$\frac{m_2}{m_1} = \left|\frac{\vec{a}_1}{\vec{a}_2}\right| = \left|\frac{\Delta\vec{v}_1 / \Delta t}{\Delta\vec{v}_2 / \Delta t}\right| = \left|\frac{\Delta\vec{v}_1}{\Delta\vec{v}_2}\right|$$, quindi possiamo scrivere $m_1\Delta\vec{v}_1 = -m_2\Delta\vec{v}_2$

ove il segno negativo tiene conto del fatto che le due accelerazioni subite hanno la stessa direzione, ma verso opposto.
Dunque, la variazione della quantità di moto di tali punti materiali è sempre uguale in modulo e direzione, ed opposta in verso:

$$\Delta\vec{p}_1 = -\Delta\vec{p}_2 \quad \Rightarrow \quad \Delta\vec{p}_1 + \Delta\vec{p}_2 = 0$$

In altri termini, se indichiamo con $\vec{p}_1$ e $\vec{p}_2$ le quantità di moto dei corpi prima dell'interazione, con $\vec{p}_1'$ e $\vec{p}_2'$ quelle dopo l'interazione, avremo:

$$\left(\vec{p}_1' - \vec{p}_1\right) + \left(\vec{p}_2' - \vec{p}_2\right) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{p}_1' + \vec{p}_2' \quad \Leftrightarrow \quad \vec{p}_{\text{tot}} = \vec{p}_{\text{tot}}'$$

Quanto osservato per due corpi, si verifica sperimentalmente anche per un sistema di più corpi, e perciò si assume il seguente:

Principio di conservazione della quantità di moto

La quantità di moto totale di un sistema <u>*isolato*</u> *di n punti materiali rimane costante nel tempo*.

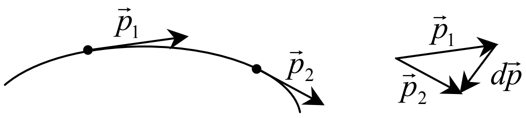
$$\boxed{\vec{p}_{\text{tot}} \equiv \sum_{i=1}^{n} \vec{p}_i = \text{cost.}}$$

In un sistema inerziale, un punto materiale non soggetto ad interazioni si muove con velocità costante (principio d'inerzia), e quindi ha anche quantità di moto costante (conservazione della quantità di moto), essendo costante la sua massa.
Se invece la quantità di moto di un punto materiale varia, significa che esso è soggetto ad interazioni.

<u>Def.</u> Forza (totale) agente su di un punto materiale

Si dice *forza (totale)* agente su di un punto materiale dotato di quantità di moto $\vec{p}$ la grandezza vettoriale:

$$\vec{F} \equiv \frac{d\vec{p}}{dt}$$



<u>Oss.</u> Come $\vec{a}$, anche $d\vec{p}$ e quindi $\vec{F}$ sono sempre dirette verso la concavità della traiettoria.

<u>Oss.</u> La forza è una misura dell'*entità dell'interazione*; è rappresentata da un <u>*vettore applicato*</u>, cioè possiede sempre anche un *punto di applicazione*, oltre che modulo, direzione e verso.

<u>Oss.</u> Spesso non conosciamo direttamente la forza totale agente su di un punto materiale, ma sappiamo che esso è soggetto a diverse interazioni. Da un punto di vista operativo è sempre possibile definire per ciascuna di queste interazioni un vettore forza corrispondente. Infatti, se compiamo esperimenti sul punto materiale in modo da far agire di volta in volta solo una di tali interazioni, essa sarà di volta in volta la forza risultante, e potremo definirla operativamente come la forza i-esima $\vec{F}_i$ responsabile della variazione infinitesima i-esima della quantità di moto del punto materiale $d\vec{p}_i$, cioè:

$$\underline{\vec{F}_i \equiv \frac{d\vec{p}_i}{dt}.}$$

Oss. Osserviamo che tale definizione stabilisce un legame lineare tra la forza considerata (causa) e la variazione di quantità di moto da essa prodotta (effetto), indipendentemente dalla natura di tale forza! Questo semplicemente perchè l'operazione di derivazione è una operazione lineare. Dunque alle forze si applica il principio di sovrapposizione degli effetti:

Principio di sovrapposizione degli effetti
Dato un insieme di cause tra loro indipendenti agenti contemporaneamente sul medesimo sistema, se il legame tra ciascuna singola causa e l'effetto da essa prodotto è ti tipo lineare, allora l'effetto complessivo prodotto da tutte le cause è dato dalla somma algebrica dei singoli effetti prodotti da ciascuna causa.

Avremo quindi, in accordo con la definizione di forza totale data in precedenza:

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i = \sum_{i=1}^{N} \frac{d\vec{p}_i}{dt} = \frac{\sum_{i=1}^{N} d\vec{p}_i}{dt} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

La forza totale è perciò anche detta *forza risultante*.

3.5 Secondo e Terzo principio delle dinamica

3.5.1 Secondo principio della dinamica

Come diretta conseguenza delle definizioni di forza risultante e di quantità di moto otteniamo:

$$\vec{F} \equiv \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d(m \cdot \vec{v})}{dt} = m\frac{d\vec{v}}{dt} = m \cdot \vec{a}$$

II Principio della dinamica (newtoninana)
La forza risultante agente su di un punto materiale è il prodotto della massa del punto materiale per l'accelerazione.

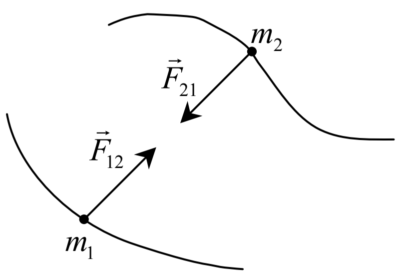
Oss. Questa legge permette di ricavare le leggi del moto di un punto materiale, nota che sia la legge della forza e le condizioni iniziali di posizione e velocità.

Oss. La forza è una grandezza *derivata*, le cui dimensioni sono $[F]=[m]\cdot[a]=[M]\cdot[L]\cdot[T]^{-2}$.
Nel S.I. la forza si misura in Newton (*N*); un Newton è la forza che, applicata ad un corpo di massa 1 *kg*, gli imprime un'accelerazione pari ad 1 $m \cdot s^{-2}$, cioè 1 $N = 1\, kg \cdot m \cdot s^{-2}$

Oss. E' possibile misurare *dinamicamente* la forza: nota infatti la massa del corpo soggetto alla forza da misurare, si misura la sua accelerazione e quindi si calcola la forza in base al II principio.

3.5.2 Terzo principio della dinamica o principio di "azione e reazione"

Consideriamo due corpi soggetti alla sola interazione reciproca. Dal principio di conservazione della quantità di moto, derivando rispetto al tempo, otteniamo:



$$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \text{cost.} \Rightarrow \frac{d\vec{p}_1}{dt} + \frac{d\vec{p}_2}{dt} = 0 \Rightarrow \vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$$

Si può quindi enunciare il seguente:

<u>III Principio della dinamica (newtoninana)</u>

Nell'interazione mutua tra due punti materiali, la forza che il primo esercita sul secondo è uguale in modulo, ha la stessa direzione ed è opposta in verso rispetto a quella che il secondo esercita sul primo.