2.2 Moto del punto materiale

2.2.1 Vettore Posizione, Velocità ed Accelerazione Vettoriale

Fissato un opportuno sistema di riferimento cartesiano dello spazio, la posizione occupata dal punto materiale P può essere descritta attraverso le tre ***coordinate cartesiane*** (x,y,z) oppure più sinteticamente attraverso il ***vettore posizione***:

$$\vec{r} \equiv \overrightarrow{OP} = x\hat{u}_x + y\hat{u}_y + z\hat{u}_z$$

Oss.1 **Componenti scalari del vettore posizione.**
Il vettore posizione ha per componenti scalari cartesiane le coordinate cartesiane del punto materiale da esso individuato.

Oss.2 **Modulo, direzione e verso del vettore posizione.**
Il modulo del vettore posizione vale $r \equiv |r| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$
mentre la sua direzione ed il suo verso sono individuati dagli angoli (α,β,γ) formati con i versori degli assi cartesiani, che sono legati alle coordinate del punto attraverso i coseni direttori:

$$x = r\cos\alpha \quad ; \quad y = r\cos\beta \quad ; \quad z = r\cos\gamma \quad ; \quad \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$

Velocità vettoriale

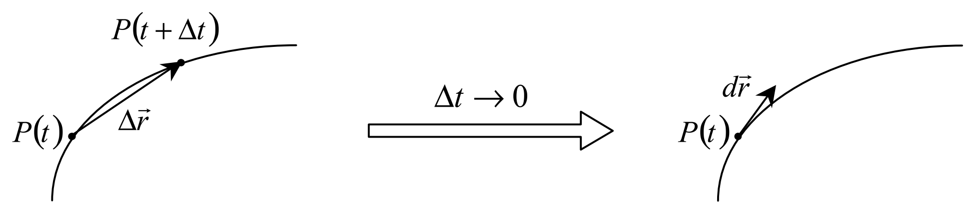
$$\vec{v}_m(t_1,t_2) \equiv \frac{\vec{r}(t_2)-\vec{r}_1(t_1)}{t_2-t_1} = \frac{\Delta\vec{r}(t_1,t_2)}{t_2-t_1} \qquad \text{(velocità vettoriale media)}$$

$$\vec{v}(t) \equiv \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\vec{r}(t+\Delta t)-\vec{r}(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} \qquad \text{(velocità vettoriale istantanea)}$$

Oss.1 **Scomposizione della velocità vettoriale istantanea in componenti cartesiane.**
Dall'espressione del vettore posizione in componenti cartesiane si ricava immediatamente:

$$\vec{v} = \frac{dx}{dt}\hat{u}_x + \frac{dy}{dt}\hat{u}_y + \frac{dz}{dt}\hat{u}_z = v_x\hat{u}_x + v_y\hat{u}_y + v_z\hat{u}_z$$

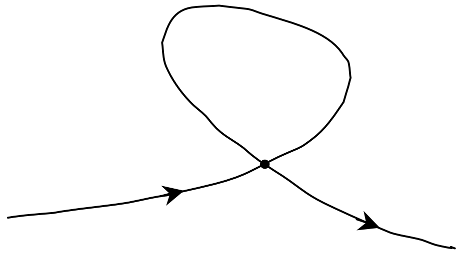
Oss.2 **Proprietà di tangenza della velocità vettoriale istantanea.**
Nella definizione di velocità vettoriale, si noti che passando al limite per $\Delta t \to 0$ si ha che lo spostamento $\Delta\vec{r}$ diventa tangente alla traiettoria, allora anche ***la velocità vettoriale istantanea risulta essere sempre tangente alla traiettoria***.



NB: Le grandezze cinematiche scalari e vettoriali sono assai diverse tra loro, infatti quando si passa al limite per $\Delta t \to 0$ la misura della corda ($|\Delta\vec{r}|$) e quella dell'arco corrispondente ($|\Delta s|$) possono differire anche radicalmente. Addirittura, nel caso di traiettoria non "semplice", cioè che presenta un "nodo", possiamo avere una velocità vettoriale media nulla, senza che si annulli la velocità scalare media!

$$\Delta\vec{r} = 0 \Rightarrow \vec{v}_m = 0$$

$$\Delta s \neq 0 \Rightarrow v_m \neq 0$$



Oss.3 **Determinazione della legge oraria dalla legge della velocità vettoriale istantanea.**
Se conosciamo la posizione iniziale $\vec{r}_0$ e l'andamento nel tempo della velocità vettoriale istantanea $\vec{v}(t)$ possiamo ricavare la legge oraria $\vec{r} = \vec{r}(t)$ esattamente come nel caso scalare.

$$\Delta\vec{r}_{\text{tot}} = \sum_i \Delta\vec{r}_i = \sum_i \vec{v}_{m,i}\Delta t_i \quad \Rightarrow \quad \vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \int_{t_0}^{t} \vec{v}(t')dt',$$

ovvero, in termini di coordinate cartesiane:

$$\boxed{\begin{aligned} x(t) &= x_0 + \int_{t_0}^{t} v_x(t')dt' \\ y(t) &= y_0 + \int_{t_0}^{t} v_y(t')dt' \\ z(t) &= z_0 + \int_{t_0}^{t} v_z(t')dt' \end{aligned}}$$

Accelerazione vettoriale

$$\vec{a}_m(t_1,t_2) \equiv \frac{\vec{v}(t_2)-\vec{v}_1(t_1)}{t_2-t_1} = \frac{\Delta\vec{v}(t_1,t_2)}{t_2-t_1} = \frac{\Delta v_x}{\Delta t}\hat{u}_x + \frac{\Delta v_y}{\Delta t}\hat{u}_y + \frac{\Delta v_z}{\Delta t}\hat{u}_z$$

(accelerazione vettoriale media)

$$\vec{a}(t) \equiv \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\vec{v}(t+\Delta t)-\vec{v}(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dv_x}{dt}\hat{u}_x + \frac{dv_y}{dt}\hat{u}_y + \frac{dv_z}{dt}\hat{u}_z$$

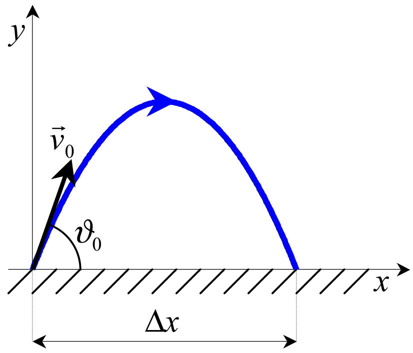
(accelerazione vettoriale istantanea)

OSS. **Calcolo della legge oraria a partire dall'accelerazione**

$$\vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \int_{t_0}^{t}\vec{a}(t')dt' \qquad ; \qquad \vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \int_{t_0}^{t}\vec{v}(t')dt'$$

Esempio: *Calcolo del moto parabolico di un grave, nota la velocità iniziale.*
Un proiettile viene lanciato da terra con velocità iniziale $\vec{v}_0$ inclinata di un angolo ϑ_0 rispetto alla direzione orizzontale, ed è soggetto all'accelerazione $\vec{g}$ diretta verso il basso, per effetto del campo gravitazionale. Calcoliamo le leggi del moto del proiettile, in funzione del modulo della velocità v_0 e dell'angolo di inclinazione ϑ_0.

Assumiamo un sistema cartesiano con l'origine nella posizione iniziale del proiettile e con l'asse y diretto verso l'alto, l'asse x orizzontale e diretto come la componente orizzontale di $\vec{v}_0$. In questo sistema di riferimento sarà:



$$\vec{v}_0 = v_0 \cos\vartheta_0 \, \hat{u}_x + v_0 \sin\vartheta_0 \, \hat{u}_y \quad ; \quad \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{g} = -g\,\hat{u}_y$$

Le leggi del moto del proiettile, perciò, sono:

$$\begin{cases} x(t) = v_{0x}\, t = v_0 \cos\vartheta_0 \, t \\ y(t) = \dfrac{1}{2} a_y t^2 + v_{0y}\, t = -\dfrac{1}{2} g t^2 + v_0 \sin\vartheta_0 \, t \end{cases}$$

La gittata Δx (distanza del punto di impatto del proiettile al suolo rispetto al punto di lancio, o sparo) si calcola determinando l'ascissa della posizione del proiettile alla quota di impatto (il suolo). Formalmente ciò equivale ad imporre $y = 0$ nelle equazioni della legge oraria:

$$\begin{cases} y(t_f) = -\dfrac{1}{2} g t_f^2 + v_0 \sin\vartheta_0 \, t_f = \left(-\dfrac{1}{2} g t_f + v_0 \sin\vartheta_0\right) t_f = 0 \\ \Delta x = x(t_f) - x(t_i) = v_0 \cos\vartheta_0 \, t_f \end{cases}$$

$$\begin{cases} t_f = \dfrac{2 v_0 \sin\vartheta_0}{g} = \dfrac{2 v_{0y}}{g} \\ \Delta x = 2 \sin\vartheta_0 \cos\vartheta_0 \dfrac{v_0^2}{g} = \sin(2\vartheta_0) \dfrac{v_0^2}{g} \end{cases}$$

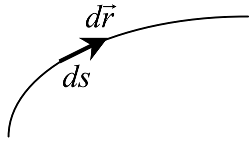
Si noti che, assegnato il modulo della velocità iniziale $\underline{v_0}$, la gittata risulta massima quando ϑ_0 vale 45°.

2.2.2 Scomposizione dell'accelerazione in componenti ortogonali

Possiamo scomporre l'acelerazione in componenti cartesiane:

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right) = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{d^2x}{dt^2}\hat{u}_x + \frac{d^2y}{dt^2}\hat{u}_y + \frac{d^2z}{dt^2}\hat{u}_z$$

Un'altra utile scomposizione dell'accelerazione è quella in componenti *tangenziale* e *normale*. Vedremo che essa sarà alla base della comprensione del moto circolare.
Per compiere una tale scomposizione occorre innanzitutto definire un ***versore tangente***. Esso è definito come il versore $\hat{u}_T$ tangente, punto per punto, alla traiettoria, con verso concorde a quello scelto per la misura dell'ascissa curvilinea s.



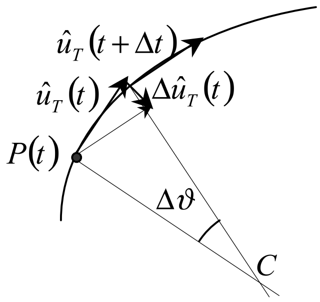
Oss. Osserviamo che:

$$\lim_{\Delta t\to 0}\Delta\vec{r} = \lim_{\Delta t\to 0}\Delta s\,\hat{u}_T \quad\Rightarrow\quad \vec{v}(t) = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s\,\hat{u}_T}{\Delta t} = \frac{ds}{dt}\hat{u}_T = v(t)\hat{u}_T(t)$$

cioè la velocità vettoriale istantanea ha per modulo la velocità scalare istantanea.

Dunque abbiamo:

$$\vec{v}(t) = v(t)\hat{u}_T(t) \quad\Rightarrow\quad \vec{a} = \frac{d}{dt}\left(v\,\hat{u}_T\right) = \frac{dv}{dt}\hat{u}_T + v\frac{d\hat{u}_T}{dt}$$



Ricordando che **<u>la derivata di un versore è sempre ortogonale al versore stesso</u>**, osserviamo che abbiamo scomposto l'accelerazione vettoriale in una componente tangente ed una normale alla traiettoria.
La derivata del versore tangente è diretta verso la concavità della traiettoria (vedi figura).
Se poi indichiamo con C il punto di incontro delle rette ortogonali al versore tangente nei due punti successivi, avremo che per $\Delta t \to 0$ anche l'angolo in C tende a zero, e C è il centro del *cerchio osculatore alla traiettoria in P* (cerchio che meglio approssima la traiettoria nell'intorno della posizione considerata).
Allora la distanza $\rho \equiv \overline{CP}$ prende il nome di *raggio di curvatura* della traiettoria nel punto *P*.
Sfruttando questa definizione e le proprietà di similitudine tra i due triangoli rettangoli in figura, possiamo scrivere:

$$\left|d\hat{u}_T\right| = \left|\hat{u}_T\right|\cdot\left|d\vartheta\right| = \left|d\vartheta\right| = \frac{|ds|}{\rho} \quad\Rightarrow\quad \left|\frac{d\hat{u}_T}{dt}\right| = \left|\frac{ds}{dt}\right|\frac{1}{\rho} = \frac{|v|}{\rho}$$

Considerando anche direzione e verso della derivata del versore tangente avremo:

$$\frac{d\hat{u}_T}{dt} = \frac{v}{\rho}\hat{u}_N\,,$$

dove il versore $\hat{u}_N$ è normale ad $\hat{u}_T$ ed è sempre diretto verso l'interno della traiettoria (la nostra derivata lo è, come risulta dalla figura, se la velocità istantanea è positiva). In definitiva, l'accelerazione vettoriale istantanea può essere scritta come:

$$\boxed{\vec{a} = \vec{a}_T + \vec{a}_N \quad ; \quad \vec{a}_T = \frac{dv}{dt}\hat{u}_T \quad ; \quad \vec{a}_N = \frac{v^2}{\rho}\hat{u}_N}$$

Oss.1 **Significato della scomposizione in componenti tangenziale e normale**
La componente tangente dell'accelerazione rende conto della variazione del *modulo* della velocità, mentre la componente normale dipende dalla variazione in *direzione* della velocità vettoriale.

Oss.2 **Alcuni importanti tipi di moto**
Due casi particolari di moto si ottengono per:

a) $\rho \to \infty \quad\Rightarrow\quad \vec{a}_N = 0$ moto rettilineo

b) $v = \text{cost.} \quad\Rightarrow\quad \vec{a}_T = 0$ moto uniforme

2.2.3 Il moto piano in coordinate polari

<u>Le coordinate polari nel piano</u>

Se il *<u>moto</u>* avviene in un *<u>piano</u>*, le sole coordinate cartesiane x ed y sono sufficienti a descriverlo. In alternativa, possiamo utilizzare le coordinate polari nel piano, che talora risultano assai più convenienti delle cartesiane. Le coordinate polari del piano sono così definite:

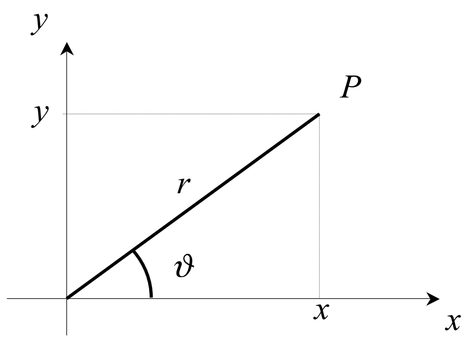
$r \equiv |\vec{r}| = \overline{OP}$ *raggio vettore* (distanza di P dall'origine, numero reale positivo)

$\vartheta \equiv \sphericalangle(\vec{r}, \hat{u}_x)$ *anomalia* (angolo formato da $\vec{r} = \overrightarrow{OP}$ con $\hat{u}_x$, definito tra 0 e 2π)

Legame con le coordinate cartesiane:

$$\boxed{\begin{aligned} r &= \sqrt{x^2+y^2} \\ \vartheta &= \arctan(y/x) \end{aligned}}$$

$$\boxed{\begin{aligned} x &= r\cos\vartheta \\ y &= r\sin\vartheta \end{aligned}}$$



<u>Legge oraria in coordinate polari del piano</u>

Si può scrivere con la coppia di equazioni

$$\begin{cases} r = r(t) \\ \vartheta = \vartheta(t) \end{cases} \quad \text{in alternativa alla coppia} \quad \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$$

<u>Traiettoria</u>

Si può scrivere come

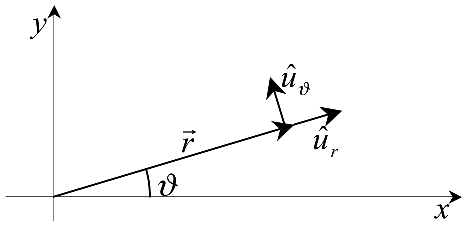
$\vartheta = \vartheta(r)$ oppure come $r = r(\vartheta)$

<u>Versori</u>

Si definisce una coppia di versori:

$\hat{u}_r \equiv \dfrac{\vec{r}}{r}$ *versore radiale*

$\hat{u}_\vartheta \equiv \hat{u}_z \times \hat{u}_r$ *versore trasversale*

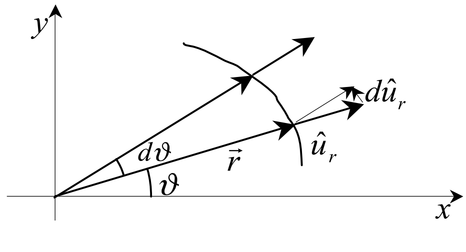


***<u>Nota bene</u>*: i versori $\hat{u}_r$ ed $\hat{u}_\vartheta$ variano con il punto *P*, al contrario di $\hat{u}_x$ ed $\hat{u}_y$. *Non* vanno confusi con la coppia $\hat{u}_N$ ed $\hat{u}_T$, che è riferita alla traiettoria e non al sistema di riferimento scelto.**

<u>Velocità vettoriale in coordinate polari e Velocità angolare</u>

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt}(r\,\hat{u}_r) = \frac{dr}{dt}\hat{u}_r + r\frac{d\hat{u}_r}{dt}$$

Ma:



$$\frac{d\hat{u}_r}{dt} = \frac{|\hat{u}_r|d\vartheta}{dt}\hat{u}_\vartheta = \frac{d\vartheta}{dt}\hat{u}_\vartheta = \omega\hat{u}_\vartheta = \omega\hat{u}_z \times \hat{u}_r = \vec{\omega}\times\hat{u}_r$$

Nei passaggi precedenti abbiamo definito una nuova importante grandezza:

Def. **Velocità angolare**

Vettore definito dalla relazione $\vec{\omega} = \frac{d\vartheta}{dt}\hat{u}_z$, ove ϑ rappresenta l'anomalia del punto materiale in un sistema di coordinate polari (r,ϑ) nel piano (eventualmente locale) del moto, ed $\hat{u}_z$ è il versore dell'asse ortogonale al piano stesso ($\hat{u}_z = \hat{u}_r \times \hat{u}_\vartheta$).

Per quanto detto, la velocità vettoriale istantanea può scomporsi come segue:

$\vec{v} = \vec{v}_r + \vec{v}_\vartheta$

$\vec{v}_r = \frac{dr}{dt}\hat{u}_r$ *velocità radiale*

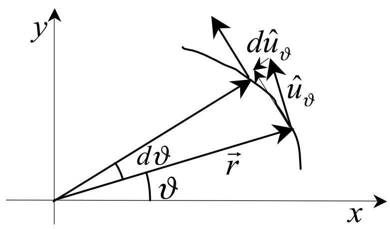
$\vec{v}_\vartheta = \omega r\,\hat{u}_\vartheta$ *velocità trasversale*

Accelerazione vettoriale in coordinate polari (cenno)

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dr}{dt}\hat{u}_r + r\frac{d\vartheta}{dt}\hat{u}_\vartheta\right) = \frac{d^2r}{dt^2}\hat{u}_r + \frac{dr}{dt}\frac{d\hat{u}_r}{dt} + \frac{dr}{dt}\frac{d\vartheta}{dt}\hat{u}_\vartheta + r\frac{d^2\vartheta}{dt^2}\hat{u}_\vartheta + r\frac{d\vartheta}{dt}\frac{d\hat{u}_\vartheta}{dt}, \text{ con}$$

$\frac{d\hat{u}_r}{dt} = \frac{d\vartheta}{dt}\hat{u}_\vartheta$ (vedi sopra)

$\frac{d\hat{u}_\vartheta}{dt} = -\frac{d\vartheta}{dt}\hat{u}_r$ (vedi figura)



e quindi: $$\vec{a} = \frac{d^2r}{dt^2}\hat{u}_r + \frac{dr}{dt}\frac{d\vartheta}{dt}\hat{u}_\vartheta + \frac{dr}{dt}\frac{d\vartheta}{dt}\hat{u}_\vartheta + r\frac{d^2\vartheta}{dt^2}\hat{u}_\vartheta + r\frac{d\vartheta}{dt}\left(-\frac{d\vartheta}{dt}\right)\hat{u}_r$$

In definitiva:

$$\boxed{\vec{a} = \left[\frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2\right]\hat{u}_r + \left(r\frac{d^2\vartheta}{dt^2} + 2\frac{dr}{dt}\frac{d\vartheta}{dt}\right)\hat{u}_\vartheta = \vec{a}_r + \vec{a}_\vartheta}$$