

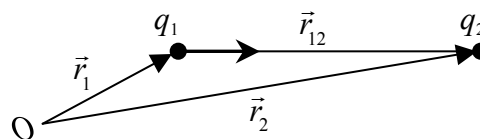
7. Forze centrali 3: *Elettricità*

7.5 La forza elettrostatica

7.5.1 La legge di Coulomb

Si trova sperimentalmente (ad esempio con una bilancia di torsione di Cavendish) che fra due cariche puntiformi in quiete e nel vuoto si esercita

una forza elettrica pari a: $\vec{F}_{21} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2} \hat{r}_{12}$



dove \vec{F}_{21} è la forza elettrostatica esercitata nel vuoto su q_2 da q_1 , $r \equiv |\vec{r}_{12}|$ è la distanza fra q_1 e q_2 , $\hat{r}_{12} \equiv \vec{r}_{12}/r$ è il versore diretto da q_1 verso q_2 , ed $\epsilon_0 \cong 8.854 \times 10^{-12} \text{ C}^2\text{N}^{-1}\text{m}^{-2}$ è una costante che prende il nome di *costante dielettrica del vuoto*.

Ovviamente, in base al Terzo principio della Dinamica, una forza di uguale modulo e direzione ma di verso opposto viene esercitata su q_1 da q_2 .

Oss. La forza di Coulomb risulta attrattiva tra cariche di segno opposto, repulsiva tra cariche dello stesso segno.

7.5.2 Energia potenziale elettrostatica

Per dimostrare che la forza elettrostatica è conservativa e per determinarne l'energia potenziale, calcoliamone l'integrale di linea tra due punti A e B (cambiato di segno):

$$-\int_{\vec{r}_A}^{\vec{r}_B} \vec{F}_{el}(\vec{r}') \cdot d\vec{l} = -\int_{r_A}^{r_B} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Qq}{r'^2} dr = \frac{Qq}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r'} \Big|_{r_A}^{r_B} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Qq}{r_B} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Qq}{r_A} = E_p(B) - E_p(A)$$

$$E_p(\vec{r}) - E_p(\infty) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Qq}{r} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Qq}{r_\infty} \implies E_p(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Qq}{r} \text{ avendo posto } E_p(r_\infty) = 0$$

Oss. Osserviamo che, come deve essere per la conservatività del campo di forze, vale la relazione differenziale: $\vec{F}_{el}(\vec{r}) = -\vec{\nabla} E_p(\vec{r})$.

7.5.3 Il campo elettrico statico

Def. Sia data una distribuzione arbitraria di cariche elettriche nello spazio, statica rispetto ad un sistema di riferimento inerziale. Allora si definisce **campo elettrico statico** \vec{E} in un generico punto dello spazio individuato dal vettore posizione \vec{r} la forza elettrica per unità di carica esercitata sulla carica di prova infinitesima in quel punto, cioè formalmente $\vec{E}(\vec{r}) \equiv \lim_{q \rightarrow 0} \vec{F}(\vec{r})/q$,

essendo $\vec{F}(\vec{r})$ la forza di Coulomb risultante esercitata sulla carica di prova q dalla distribuzione di carica in esame.

Def. Le cariche che appartengono alla distribuzione di carica elettrica responsabile del campo elettrico così definito sono dette **sorgenti** del campo elettrico.

Oss. sull'utilizzo dell'operazione di limite nella definizione di campo elettrico.

Si noti che l'introdurre in un punto dello spazio una carica di prova al fine di definire operativamente il campo elettrico generato dalle altre cariche in quel punto, comporta in linea di principio, che tale carica possa agire su tali altre cariche dello spazio, andando a perturbarne la disposizione originaria, e quindi ad alterarne il campo! Per tale motivo, si sceglie una carica di

prova infinitesima, e si definisce il campo attraverso una operazione di limite, operazione lecita perché la carica elementare è davvero piccolissima, e può senz'altro considerarsi infinitesima.

Oss. sull'unità di misura del campo elettrico.

Come conseguenza diretta della definizione, il campo elettrico si misura in NC^{-1} .

Ex. Campo elettrico generato da una carica puntiforme in quiete nello spazio vuoto.

Il campo elettrico generato in un generico punto P dello spazio da una singola carica puntiforme q posta nel vuoto e ferma in una certa posizione, nella quale prendiamo l'origine del sistema di riferimento, vale dunque $\vec{E}(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{u}_r$, dove $\hat{u}_r \equiv \frac{\vec{r}}{r}$ è il versore radiale “uscente” dalla

carica q . Si tratta di uno dei tre versori del sistema di *coordinate sferiche*, che sono una estensione al caso tridimensionale delle coordinate polari nel piano. La coordinata r di un punto P dello spazio è la distanza di P dall'origine: $\vec{r} \equiv \overrightarrow{OP}$, $r \equiv OP$.

Campo elettrico generato da una distribuzione di carica statica

In base al principio di sovrapposizione degli effetti, il campo elettrico generato in un punto P da

una distribuzione discreta di cariche statiche q_i vale $\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i \frac{q_i (\vec{r} - \vec{r}_i)}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^3}$,

dove \vec{r} è il vettore posizione del generico punto P in cui calcoliamo il potenziale ed \vec{r}_i è il vettore posizione della carica sorgente q_i ($|\vec{r} - \vec{r}_i|$ rappresenta perciò la distanza tra P e la carica sorgente q_i).

Per una distribuzione continua di cariche statiche avremo $\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dq(\vec{r}')(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$,

dove $dq(\vec{r}')$ è la carica infinitesima in posizione \vec{r}' , che corrisponde a $\rho(\vec{r}')d\tau$ per una distribuzione di cariche di volume, a $\sigma(\vec{r}')dS$ per una distribuzione di cariche di superficie, e infine a $\lambda(\vec{r}')dl$ per una distribuzione di cariche lineari, essendo poi contestualmente l'integrale in questione rispettivamente un integrale di volume, di superficie o di linea, e $\rho(\vec{r}')$, $\sigma(\vec{r}')$ e $\lambda(\vec{r}')$ sono densità di carica per unità di volume, di superficie e di lunghezza rispettivamente.

Oss. sulle distribuzioni continue di carica.

Si ricordi che l'evidenza sperimentale, mai smentita da alcun esperimento, è che la carica elettrica sia sempre e comunque quantizzata, cioè il valore di ogni carica in natura non è altro che multiplo della carica elementare, quindi una distribuzione di carica che sia rigorosamente continua non è in realtà mai stata osservata, e non vi è ragione di credere che possa esistere. Quindi ogni distribuzione di carica è in realtà una distribuzione discreta di carica, tuttavia, essendo la carica elementare molto piccola rispetto alle cariche in gioco nel mondo macroscopico, è possibile trattare spesso una distribuzione di carica come se fosse continua, e ciò risulta assai vantaggioso da un punto di vista formale, grazie alle potenti proprietà degli strumenti matematici di integrale e derivata.

Oss. sui limiti di validità della trattazione.

Da quanto abbiamo visto, il campo elettrico statico viene generato da cariche elettriche statiche, che prendono il nome di *sorgenti* del campo.

Le formule che abbiamo visto valgono solo nel caso statico e per ora solo nel vuoto, cioè in uno spazio in cui le uniche particelle presenti sono le cariche sorgenti ferme rispetto all'osservatore inerziale.

E' tuttavia possibile generalizzare la definizione operativa del concetto di campo elettrico al caso di cariche sorgenti in moto rispetto ad un osservatore inerziale. In questo caso si parla di Campo Elettrico non Statico, e la sua espressione verrà a dipendere anche dal tempo, cioè $\vec{E} = \vec{E}(\vec{r}, t)$ (campo elettrico variabile nel tempo).

7.5.4 Il potenziale elettrostatico

Si definisce *differenza di potenziale elettrostatico* fra due punti dello spazio A e B l'integrale di linea del campo elettrostatico, cambiato di segno, lungo un percorso qualunque che congiunga i punti A e B :

$$V(B) - V(A) = - \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l}.$$

Per quanto riguarda l'integrale di linea, si tratta dello stesso concetto che si trova nella definizione di lavoro. Il potenziale elettrostatico è quindi simile ad una energia potenziale, con la differenza che nell'integrale troviamo il campo elettrico anziché la forza conservativa (il segno meno è presente anche nell'energia potenziale).

E' possibile dare questa definizione perché si dimostra che questo integrale, nel caso statico, non dipende dal cammino particolare scelto, ma solo dai due estremi A e B , proprio come il lavoro di una forza conservativa. Questa proprietà del campo elettrostatico, che permette di definirne il potenziale in questo modo, si esprime dicendo che il campo elettrostatico è **un campo conservativo**.

Conseguenze importanti del fatto che il campo elettrico è conservativo:

$$1. \oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0.$$

L'integrale lungo una linea chiusa (*circuitazione*) del campo elettrostatico è sempre nullo.

$$2. \vec{E} = -\vec{\nabla} V.$$

Il campo elettrostatico è pari al gradiente del potenziale elettrostatico cambiato di segno, proprio come una forza conservativa è pari al gradiente dell'energia potenziale corrispondente cambiato di segno. Ciò implica che il campo elettrostatico è sempre ortogonale alle superfici equipotenziali, cioè alle superfici lungo le quali il potenziale elettrostatico è costante.

3. In base alla sua definizione, il potenziale elettrostatico risulta sempre definito a meno di una **costante additiva arbitraria** (come ogni tipo di energia potenziale), che infatti scompare facendo la differenza di potenziale fra due punti. Per una distribuzione di carica contenuta in una regione limitata dello spazio, si può sempre scegliere di porre pari a 0 il potenziale a distanza infinita da tale regione dello spazio: $V(\infty) = 0$.

Assumendo tale convenzione, che è la più usata, si ricava che il potenziale generato da una carica puntiforme q in un generico punto a distanza r dalla carica vale: $V(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}$.

Oss. Unità di misura

In base alla definizione, poi, l'unità di misura del potenziale elettrostatico è il $\text{NmC}^{-1} = \text{JC}^{-1}$ (Joule su Coulomb). A tale unità di misura derivata si dà per brevità un nome nuovo, cioè il Volt (V): $1\text{ V} \equiv 1\text{ JC}^{-1}$. Di conseguenza anche l'unità di misura del campo elettrico assume una seconda denominazione accanto alla prima: $[E] = \text{NC}^{-1} = \text{Vm}^{-1}$ (Volt su metro).

Potenziale Elettrostatico generato da una distribuzione di carica

Applicando il principio di sovrapposizione degli effetti, che vale anche per il potenziale oltre che per il campo elettrostatico (essendo queste due grandezze legate da un'equazione lineare), si ottiene il potenziale generato da una distribuzione di carica qualsiasi, sempre ponendo pari a 0 il potenziale a distanza infinita dalle cariche sorgenti.

Nel caso discreto avremo: $V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i \frac{q_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|}$, dove \vec{r} è il vettore posizione del generico punto P in cui calcoliamo il potenziale ed \vec{r}_i è il vettore posizione della carica sorgente q_i .

Nel caso di una distribuzione di cariche continua, invece, avremo: $V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dq(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$,

dove $dq(\vec{r}')$ è la carica infinitesima in posizione \vec{r}' .

Naturalmente tutte queste espressioni valgono solo nel caso di cariche ferme e nel vuoto.

7.6 Concetti accessori sulla gravitazionePotenziale gravitazionale

Definiamo ora, in ogni punto dello spazio, il *potenziale gravitazionale* come il rapporto tra l'energia potenziale gravitazionale della massa m nel campo generato da M e la massa m stessa:

$$V(r) \equiv \frac{E_{p,m}(r)}{m} = -\gamma \frac{M}{r}$$

Il potenziale V è l'energia potenziale della massa unitaria, cioè il lavoro compiuto dalla forza gravitazionale quando la massa unitaria si sposta dal punto considerato a distanza infinita dalla massa M che genera il campo. Come l'energia, anche il potenziale è una grandezza *scalare*; nel caso gravitazionale è negativo, come l'energia potenziale.

Potenziale generato da N masse puntiformi

Date N masse puntiformi M_1, M_2, \dots, M_N , il potenziale gravitazionale si calcola, in base al *principio di sovrapposizione degli effetti* (valido per le forze, quindi per il lavoro, l'energia ed il potenziale), come la *somma* dei rispettivi potenziali generati:

$$V(\vec{r}) = \sum_{i=1}^N V_i(r_i) = -\gamma \sum_{i=1}^N \frac{M_i}{r_i}$$

Potenziale generato da un corpo esteso (argomento facoltativo)

Se conosciamo l'andamento spaziale della densità del nostro corpo esteso, che schematizziamo come un *sistema continuo*, consideriamo anzitutto il potenziale generato in un punto $P(\vec{r})$ da un elemento di volume $d\tau' = dx'dy'dz'$ in posizione $P'(\vec{r}')$:

$$dV(\vec{r}) = -\gamma \frac{\rho(\vec{r}')d\tau'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

Utilizziamo da ora in poi il simbolo τ (e non V) per i volumi, per evitare confusione con il potenziale. Il potenziale gravitazionale generato da un corpo esteso in $P(\vec{r})$ si ricava applicando

il principio di sovrapposizione degli effetti: $V(\vec{r}) = \int_{\text{corpo}} dV = -\gamma \int_{\text{corpo}} \frac{\rho(\vec{r}')d\tau'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$.

Campo gravitazionale

L'interazione gravitazionale è una interazione *a distanza*, che non richiede il contatto dei corpi; in realtà, tuttavia, può essere descritta come una *modifica dello spazio circostante* prodotta da una

massa: ogni corpo genera un *campo gravitazionale* proporzionale alla sua massa, e la forza gravitazionale agente su ogni corpo è pari al prodotto della massa del corpo stesso per il campo generato da tutte le altre masse in gioco.

Def. Dunque possiamo dire che il *campo gravitazionale* generato da una massa M vale:

$$\vec{G}(\vec{r}) \equiv \frac{\vec{F}(M, m, \vec{r})}{m} = -\gamma \frac{M}{r^2} \hat{u}_r$$

dove \hat{u}_r è il versore radiale uscente dalla massa M . Il campo è dunque diretto verso la massa, come la forza; rappresenta infatti la forza agente su una massa unitaria.

Le dimensioni dell'intensità del campo gravitazionale sono quelle di un'accelerazione.

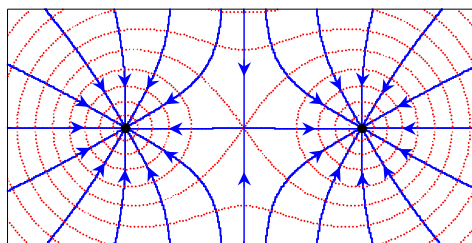
Una massa m in un punto $P(\vec{r})$ dello spazio sarà soggetta ad una forza gravitazionale:

$$\vec{F} = m \cdot \vec{G}(\vec{r})$$

dove il campo $\vec{G}(\vec{r})$ può anche essere prodotto da molte masse (anche estese). In questo caso si applica naturalmente il principio di sovrapposizione degli effetti, cioè si esegue una somma (vettoriale) dei singoli contributi. Il campo gravitazionale può essere rappresentato mediante le linee di forza e le superfici equipotenziali.

Esempio: campo gravitazionale di due masse puntiformi uguali.

Nelle regioni di spazio molto più vicine ad una massa che all'altra (principalmente all'esterno e nelle vicinanze di una delle due masse), il campo è pressoché solo quello generato dalla massa più vicina, e quindi ha le linee di forza radiali entranti e le superfici equipotenziali sferiche e concentriche. Altrove la situazione si complica; nel punto medio della congiungente si ha un punto di equilibrio instabile.



Oss. Osserviamo che l'integrale di linea del campo gravitazionale da un dato punto all'infinito coincide con il potenziale gravitazionale nel punto considerato:

$$\int_{\vec{r}}^{\infty} \vec{G}(\vec{r}') \cdot d\vec{l} = \int_{\vec{r}}^{\infty} -\gamma \frac{M}{r'^2} dr' = \gamma \frac{M}{r'} \Big|_{\vec{r}}^{\infty} = -\gamma \frac{M}{r} = V(\vec{r})$$

Oss. Tale risultato è l'ovvia conseguenza della conservatività della forza gravitazionale e delle definizioni di campo e di potenziale gravitazionale (rispettivamente forza per unità di massa ed energia potenziale per unità di massa). Infatti otteniamo immediatamente il risultato precedente se dividiamo per la massa m ciascun termine nella seguente relazione già nota:

$$\int_{\vec{r}}^{\infty} \vec{F}(\vec{r}') \cdot d\vec{l} = \int_{\vec{r}}^{\infty} -\gamma \frac{Mm}{r'^2} dr' = \gamma \frac{Mm}{r'} \Big|_{\vec{r}}^{\infty} = -\gamma \frac{Mm}{r} = E_p(\vec{r})$$

7.7 Modello classico di atomo (argomento facoltativo)

Il modello atomico di Thomson (statico)

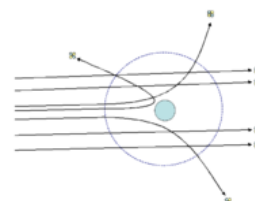
Il modello più semplice di atomo è quello proposto dallo scopritore dell'elettrone, Joseph John Thomson il quale nel 1902 ipotizzò che l'atomo fosse costituito da una sfera priva di massa ma dotata di carica positiva uniformemente distribuita nella quale si troverebbero immersi dei "grumi elementari" massivi di carica negativa, gli elettroni appunto.

Quando ad un atomo viene fornita energia, come nei suoi esperimenti con i tubi a raggi catodici, esso manifesta la tendenza a liberare degli elettroni, perdendo carica negativa (processo di

ionizzazione) e divenendo quindi uno ione positivo (a causa della disparità tra la carica totale positiva e la carica totale negativa che è diminuita a seguito della ionizzazione).

Questo modello pur fornendo una prima intuitiva descrizione microscopica dell'atomo presentava numerosi limiti:

- i) Attribuendo massa esclusivamente agli elettroni si trovava che già un singolo atomo dell'elemento più leggero in natura, l'idrogeno, doveva contenere circa 2000 elettroni (per poter tener conto della sua massa).
- ii) Non spiegava l'origine della diversa tendenza degli atomi di elementi diversi a perdere elettroni (diverse energie di ionizzazione).
- iii) E' in disaccordo con teoria dell'elettrostatica, in base alla quale si può dimostrare che nessun sistema di cariche ammette una configurazione di equilibrio statico.
- iv) Evidenze sperimentali dovute a Ernest Rutherford nei primi anni del 1900 dimostravano che la massa dell'atomo è concentrata in una regione molto più piccola dell'atomo stesso (il cosiddetto *nucleo*, di raggio circa 10^{-5} volte inferiore al raggio atomico). Si tratta di esperimenti di scattering di particelle alfa su sottili lamine di oro...



Il modello atomico di Rutherford (dinamico)

Per queste ragioni il modello di Thomson fu presto sostituito nel 1911 dal cosiddetto *modello* di Rutherford, che proponeva un modello per così dire *planetario* dell'atomo: un nucleo denso e piccolo carico positivamente circondato da elettroni in moto rotatorio su orbite di diverso raggio. Il modello di Rutherford è un modello dinamico dell'atomo che predice un equilibrio dinamico del sistema di cariche positiva del nucleo e negative degli elettroni dovuta ad un bilanciamento della forza di attrazione del nucleo con la forza centrifuga dovuta al moto rotatorio degli elettroni, esattamente come accade nel nostro sistema planetario per i pianeti in moto rotatorio intorno al Sole.

In base alla terza legge di Keplero, possiamo anche facilmente stimare il periodo di rivoluzione dell'elettrone intorno al nucleo su di un'orbita circolare di raggio R :

$$T = \sqrt{\frac{4\pi^2 m_e}{k}} R^3 = 4\pi R \sqrt{\frac{\pi \epsilon_0 m_e R}{e^2}}$$

Sapendo poi, dalla teoria dell'elettromagnetismo classico, che una carica che compie un moto oscillatorio di periodo T emette radiazione elettromagnetica alla frequenza ($1/T$) di tale oscillazione, è possibile stimare l'ordine di grandezza della frequenza della radiazione emessa dagli atomi nei processi di eccitazione e diseccitazione (osservata negli esperimenti di assorbimento o di emissione):

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{e}{4\pi R} \sqrt{\frac{1}{\pi \epsilon_0 m_e R}}$$

I valori dedotti da questo calcolo, note le costanti fisiche e posto R circa uguale al raggio dell'atomo (dell'ordine di 10^{-10} m), risultavano dello stesso ordine di grandezza delle frequenze realmente osservate (cioè centinaia di THz). Nonostante questo buon accordo qualitativo, anche questo modello presentava alcune fondamentali incongruenze sia con la teoria classica dell'elettromagnetismo sia con importanti evidenze sperimentali:

- i) Poichè l'elettrone ruotando intorno al nucleo irraggia esso dovrebbe perdere energia e quindi portarsi su orbite sempre più interne fino a cadere sul nucleo stesso.
- ii) I calcoli mostrano che il tempo impiegato per questo decadimento è dell'ordine di 10 ns circa, quindi l'atomo di Rutherford è estremamente instabile ed il modello planetario non può in alcun modo rendere conto della stabilità della materia nell'universo.

- iii) Infine, esperimenti di eccitazione e diseccitazione di numerose specie chimiche avevano dimostrato che ogni elemento quando si diseccita emette luce di particolari e caratteristiche lunghezze d'onda, cioè ogni elemento ha un caratteristico spettro di emissione a righe, mentre un decadimento alla Rutherford prevedrebbe la emissione di un continuo di lunghezze d'onda.

L'analisi critica di queste fondamentali incongruenze del modello planetario dell'atomo, e quindi della fisica classica su cui esso si fondava, determinò il nascere di una nuova teoria fisica, la *meccanica quantistica*.