Diagonalizacja macierzy metodą potęgową

Michał Saturczak
Informatyka Stosowana, Akademia Górniczo-Hutnicza
Metody Numeryczne

22 marca 2024

1 Wstęp teoretyczny

Metoda potęgowa to iteracyjna technika numeryczna stosowana do znajdowania dominującej wartości własnej (największej co do wartości bezwzględnej) i odpowiadającego jej wektora własnego macierzy. Jest to jedna z najprostszych i najstarszych metod stosowanych w tej dziedzinie, a jej korzenie sięgają początku XX wieku.

Podstawowym założeniem metody potęgowej jest to, że dla dowolnej kwadratowej macierzy A o rozmiarze $n \times n$, istnieje wektor własny v i wartość własna λ taki, że $Av = \lambda v$. W kontekście metody potęgowej, interesuje nas znalezienie dominującej wartości własnej, to jest wartości λ o największej wartości bezwzględnej, oraz odpowiadającego jej wektora własnego.

Podstawowy algorytm metody potęgowej jest dość prosty i składa się z następujących kroków:

1. Wybierz dowolny wektor początkowy x_0.
2. Dla $k = 0, 1, 2, \ldots$ oblicz $y_{k+1} = Ax_k$ i $x_{k+1} = y_{k+1}/||y_{k+1}||$.
3. Powtarzaj kroki, aż osiągniesz zadaną tolerancję.

Zaletą metody potęgowej jest jej prostota i łatwość implementacji. Jest ona szczególnie skuteczna dla macierzy o dużej różnicy między największą a drugą co do wielkości wartością własną.

Jednak metoda potęgowa ma również swoje ograniczenia. Przede wszystkim, jest ona zdolna do znalezienia tylko jednej, dominującej wartości własnej. Ponadto, może ona zbiegać bardzo wolno, jeśli różnica między największą a drugą co do wielkości wartością własną jest mała. Dodatkowo, metoda potęgowa może nie zbiegać w przypadku niektórych macierzy, takich jak te złożone z samych zer.

Mimo tych ograniczeń, metoda potęgowa jest nadal użytecznym narzędziem w wielu zastosowaniach, w których dominująca wartość własna ma szczególne znaczenie, takich jak analiza sieci, ranking stron internetowych (np. algorytm PageRank Google), statystyka i wiele innych.

2 Problem

Funkcja wypełniająca macierz wszystkie wyrazy macierzy A wypełniono poniższym wzorem:

$$A_{ij} = (2 + |i + j|)^{-|i+j|/2} \tag{1}$$

```
void fillMatrix(gsl_matrix *A)
{
  for (size_t i = 0; i < A->size1; ++i)
  {
    for (size_t j = 0; j < A->size2; ++j)
    {
      gsl_matrix_set(A, i, j, pow(2 + abs((int)i + (int)j), -abs((int)i + (int)j) / 2.0));
    }
  }
}
```

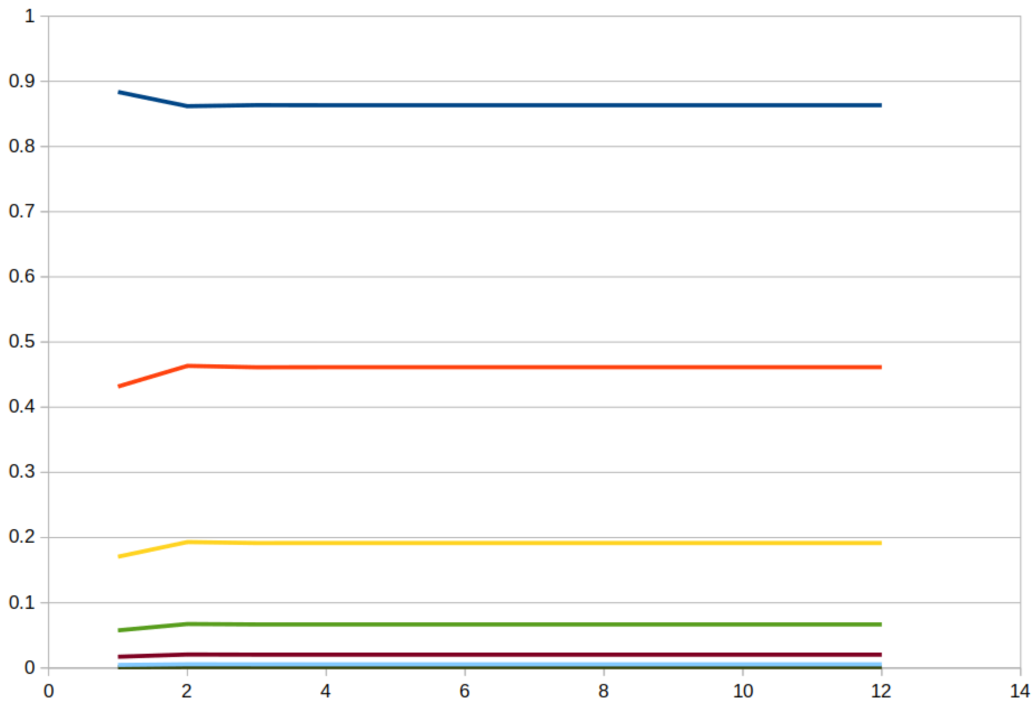
Funkcja obliczająca wektory własne metodą potęgową:

```
void powerMethod(gsl_matrix *A, int maxIter)
{
  size_t size = A->size1;
  gsl_vector *x = gsl_vector_alloc(size);
  gsl_vector_set_all(x, 1.0);
  double lambda = 0.0;

  std::ofstream file;
  file.open("data.csv");

  for (int i = 0; i < maxIter; ++i)
  {
    gsl_vector *Ax = gsl_vector_alloc(size);
    gsl_blas_dgemv(CblasNoTrans, 1.0, A, x, 0.0, Ax);
    double xAx;
    gsl_blas_ddot(x, Ax, &xAx);
    double xx;
    gsl_blas_ddot(x, x, &xx);
    lambda = xAx / xx;
    gsl_vector_memcpy(x, Ax);
    gsl_vector_scale(x, 1.0 / gsl_blas_dnrm2(x));

    file << i + 1 << '\t';
    for (size_t j = 0; j < size; ++j)
    {
      file << gsl_vector_get(x, j) << "\t";
    }
    file << std::endl
         << std::endl;

    gsl_vector_free(Ax);
  }

  file.close();
  gsl_vector_free(x);
}
```

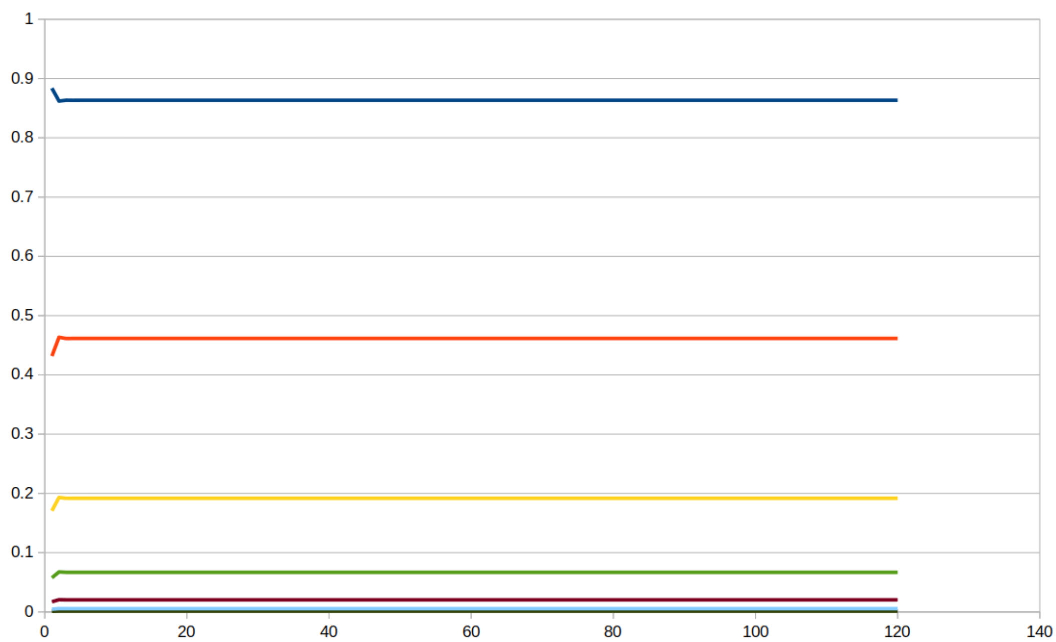
3 Wyniki

Na wykresach na osi X przedstawiono ilość iteracji a na osi Y zauważono zmienność wartości wektorów własnych dla poszczególnej ilości iteracji.

3.1 Wykres dla 12 iteracji



3.2 Wykres dla 120 iteracji



4 Wnioski

Na podstawie przeprowadzonej analizy, można wyciągnąć następujące wnioski dotyczące metody potęgowej:

- Metoda potęgowa jest skutecznym narzędziem do znajdowania dominującej wartości własnej i odpowiadającego jej wektora własnego. Wyniki przeprowadzonych obliczeń potwierdzają tę obserwację, pokazując stabilizację wartości wektorów własnych już po 4-5 iteracjach.
- Przy zastosowaniu metody potęgowej, obserwuje się szybką zbieżność wyników. Już po kilku iteracjach, wartości wektorów własnych ustabilizowały się, co wskazuje na efektywność metody w kontekście szybkości zbieżności.
- Wyniki dla 12 iteracji są już stabilne, co sugeruje, że dalsze iteracje (jak w przypadku 120 iteracji) mogą nie przynieść znaczących zmian w wynikach. To pokazuje, że metoda potęgowa może być efektywna nawet przy stosunkowo małej liczbie iteracji, co jest korzystne pod względem efektywności obliczeniowej.
- Należy jednak zauważyć, że szybkość zbieżności i skuteczność metody potęgowej mogą zależeć od specyficznych właściwości analizowanej macierzy, takich jak różnica między największą a drugą co do wielkości wartością własną. W przypadkach, gdy ta różnica jest mała, metoda potęgowa może zbiegać wolniej.
- Pomimo tych ograniczeń, metoda potęgowa jest nadal użytecznym narzędziem w wielu zastosowaniach, szczególnie tam, gdzie dominująca wartość własna ma szczególne znaczenie.