Repetition

Geometrie

## Beschreibung des Gauss-Algorithmus

- 1 Bestimme die am weitesten links stehende Spalte, die von Null verschiedene Elemente enthält.
- 2 Ist die oberste Zahl in der in Schritt 1 gefundenen Spalte Null, so vertausche man die erste Zeile mit einer andern, wo keine Null steht (Pivot).
- 3 Addiere ein passendes Vielfaches der obersten Zeile zu den übrigen Zeilen, um unterhalb des Pivots Nullen zu erzeugen.
- 4 Wende Schritt 1 bis 3 auf die Untermatrix an, die durch Streichen der ersten Zeile entsteht, und zwar solange, bis es nicht mehr geht. Dann ist die **Zeilenstufenform** erreicht.
- 5 Bestimme die Lösungsmenge durch Rückwärtseinsetzen.

## Zeilenstufenform

<i>x</i> <sub>1</sub>	<i>x</i> <sub>2</sub>	 Xi	$x_j$	 Xn	1
*	*			 *	<i>c</i> <sub>1</sub>
0	0	 0 (*) *		 *	<i>c</i> <sub>2</sub>
:		·		* * :	:
0			0 * *	 *	Cr
0			0	 0	$c_{r+1}$
:			:	:	:
0			0	 0	c <sub>m</sub>

Pivots

Rot: Pivot-Variable Blau: freie Parameter

Grün: Verträglichkeitsbedingungen  $c_{r+1} = \ldots = c_m = 0$ 

Repetition

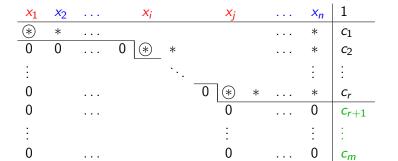
Lineare Algebra

Zeilenstufenform

2::+--

Geometrie

# Zeilenstufenform



## **Definition**

Die Zahl r heisst **Rang** des LGS.

- ▶  $0 \le r = \text{Anzahl Pivotvariablen} \le \min\{m, n\}$
- ightharpoonup n-r= Anzahl freie Parameter

Repetition

Lineare Algebra

Gauss-Algorithmus
Zeilenstufenform

ätze

eometrie

#### **Satz 1.1**

Ein LGS hat mindestens eine Lösung genau dann, wenn

- entweder r = m (keine Nullzeilen)
- oder r < m und  $c_{r+1} = \ldots = c_m = 0$  (Verträglichkeitsbedingungen erfüllt)

In beiden Fällen liefert Rückwärtseinsetzen die Lösungsmenge.

#### **Satz 1.2**

Falls ein LGS eine Lösung besitzt, so ist diese eindeutig genau dann, wenn r = n gilt.

#### **Definition**

Ein LGS Ax = b heisst **homogen**, wenn b = 0.

## Bemerkungen:

- Ein homogenes LGS (HLGS) besitzt immer die triviale Lösung x = 0.
- ► Falls bei einem HLGS *n* > *m* gilt, so besitzt es nichttriviale Lösungen.

### Korollar 1.3

Ein HLGS hat genau dann eine nicht-triviale Lösung, wenn r < n gilt.

Repetition

Lineare Algebra

Gauss-Algorithmus

Zeilenstufen:

Sätze

eometrie

# **Geometrische Interpretation**

Sei

$$a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \neq 0$$

ein Vektor in  $\mathbb{R}^n$ .

Eine Gleichung der Form

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = d$$
 (\*)

stellt geometrisch dar:

- eine Gerade in der Ebene, falls n=2
- eine Ebene im Raum, falls n = 3
- eine Hyperebene, im allgemeinen

## Schnittmenge

Die Lösungsmenge eines linearen Gleichungssystems stellt somit die Schnittmenge der Hyperebenen im LGS dar.

Repetition

Lineare Algebra

Gauss-Algorithmus

Sätze

Geometrie

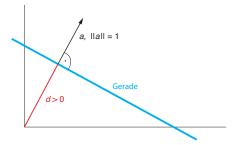
# **Geometrische Interpretation**

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = d$$
 (\*)

#### Hessesche Normalform

Falls ||a|| = 1 heisst (\*) **Hessesche Normalform**. Dann ist a ein Einheitsnormalenvektor auf der Hyperebene, und d der orientierte Abstand der Hyperebene vom Ursprung.

Dabei ist  $||a|| = \sqrt{a_1^2 + \ldots + a_n^2}$  die **Länge** (auch **Norm** genannt) des Vektors a.



Repetition

Lineare Algebra

Gauss-Algorithmus

Geometrie