Eidgenössische Technische Hochschule Zürich
Swiss Federal Institute of Technology Zurich
Institut für Fluiddynamik
Prof. Dr. T. Rösgen

Fluiddynamik I
Formelsammlung

Version Frühjahr 2021, 21.2.2021

Formelsammlung Teil A

Grundlagen der Vektor- und Tensoralgebra

A.1 Einsteinsche Summenkonvention

Komponenten der Vektoren werden mit Indizes geschrieben, wobei gilt, daß über einen Index, der in einem Term zweimal vorkommt, summiert werden muss.
Beispiele:

- $u_{ii} = u_{11} + u_{22} + u_{33}$
- Laplace-Operator eines Skalars:

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial a}{\partial x_i} = \frac{\partial^2 a}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 a}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 a}{\partial x_3^2} = \Delta a$$

- Vektorprodukt:

$$\underline{u} \times \underline{v} = \epsilon_{ijk} u_j v_k$$

wobei ϵ_{ijk} die folgenden Eigenschaften hat:

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{falls} \quad ijk = 123, 231 \text{ oder } 312 \\ 0 & \text{falls} \quad \text{zwei Indizes identisch sind} \\ -1 & \text{falls} \quad ijk = 321, 213 \text{ oder } 132 \end{cases}$$

A.2 Differentialoperatoren

Nabla-Operator

In kartesischen Koordinaten $\underline{x} = (x, y, z)^T$

$$\underline{\nabla} = \underline{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \underline{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \underline{e}_z \frac{\partial}{\partial z}$$

In Zylinderkoordinaten $\underline{x} = (r, \theta, x)^T$

$$\underline{\nabla} = \underline{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \underline{e}_\theta \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} + \underline{e}_x \frac{\partial}{\partial x}$$

Divergenz eines Vektors

$$\text{div } \underline{u} \equiv \underline{\nabla} \cdot \underline{u}$$

In kartesischen Koordinaten $\underline{x} = (x, y, z)^T$

$$\underline{\nabla} \cdot \underline{u} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}$$

In Zylinderkoordinaten $\underline{x} = (r, \theta, x)^T$

$$\underline{\nabla} \cdot \underline{u} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r u_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial u_x}{\partial x}$$

Gradient eines Skalars

$$\mathrm{grad}\ a \equiv \underline{\nabla}\ a$$

In kartesischen Koordinaten $\underline{x} = (x, y, z)^T$

$$\underline{\nabla}\ a = \underline{e}_x \frac{\partial a}{\partial x} + \underline{e}_y \frac{\partial a}{\partial y} + \underline{e}_z \frac{\partial a}{\partial z}$$

In Zylinderkoordinaten $\underline{x} = (r, \theta, x)^T$

$$\underline{\nabla}\ a = \underline{e}_r \frac{\partial a}{\partial r} + \underline{e}_\theta \frac{1}{r}\frac{\partial a}{\partial \theta} + \underline{e}_x \frac{\partial a}{\partial x}$$

Rotation eines Vektorfeldes

$$\mathrm{rot}\ \underline{u} \equiv \underline{\nabla} \times \underline{u}$$

In kartesischen Koordinaten $\underline{x} = (x, y, z)^T$

$$\underline{\nabla} \times \underline{u} = \underline{e}_x \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right) + \underline{e}_y \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right) + \underline{e}_z \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

In Zylinderkoordinaten $\underline{x} = (r, \theta, x)^T$

$$\underline{\nabla} \times \underline{u} = \underline{e}_r \left(\frac{1}{r}\frac{\partial u_x}{\partial \theta} - \frac{\partial u_\theta}{\partial x}\right) + \underline{e}_\theta \left(\frac{\partial u_r}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial r}\right) + \underline{e}_x \left(\frac{1}{r}\left[\frac{\partial (r u_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial u_r}{\partial \theta}\right]\right)$$

Laplace-Operator angewendet auf einen Skalar

$$\Delta a \equiv \underline{\nabla}^2 a$$

In kartesischen Koordinaten $\underline{x} = (x, y, z)^T$

$$\underline{\nabla}^2 a = \frac{\partial^2 a}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 a}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 a}{\partial z^2}$$

In Zylinderkoordinaten $\underline{x} = (r, \theta, x)^T$

$$\underline{\nabla}^2 a = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r \frac{\partial a}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 a}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 a}{\partial x^2}$$

Advektive / Konvektive Ableitung eines Skalars

$$\underline{u} \cdot \mathrm{grad}\, a \equiv (\underline{u} \cdot \underline{\nabla})\, a$$

In kartesischen Koordinaten $\underline{x} = (x, y, z)^T$

$$(\underline{u} \cdot \underline{\nabla})\, a = u \frac{\partial a}{\partial x} + v \frac{\partial a}{\partial y} + w \frac{\partial a}{\partial z}$$

In Zylinderkoordinaten $\underline{x} = (r, \theta, x)^T$

$$(\underline{u} \cdot \underline{\nabla})\, a = u_r \frac{\partial a}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r}\frac{\partial a}{\partial \theta} + u_x \frac{\partial a}{\partial x}$$

Advektive / Konvektive Ableitung eines Vektors

$$\underline{u} \cdot \operatorname{grad} \underline{a} \equiv (\underline{u} \cdot \underline{\nabla})\, \underline{a}$$

In kartesischen Koordinaten $\underline{x} = (x, y, z)^T$

$$\begin{aligned}
(\underline{u} \cdot \underline{\nabla})\, \underline{a} \quad &= \quad \underline{e}_x \left(u \frac{\partial a_x}{\partial x} + v \frac{\partial a_x}{\partial y} + w \frac{\partial a_x}{\partial z} \right) \\
&+ \quad \underline{e}_y \left(u \frac{\partial a_y}{\partial x} + v \frac{\partial a_y}{\partial y} + w \frac{\partial a_y}{\partial z} \right) \\
&+ \quad \underline{e}_z \left(u \frac{\partial a_z}{\partial x} + v \frac{\partial a_z}{\partial y} + w \frac{\partial a_z}{\partial z} \right)
\end{aligned}$$

In Zylinderkoordinaten $\underline{x} = (r, \theta, x)^T$

$$\begin{aligned}
(\underline{u} \cdot \underline{\nabla})\, \underline{a} \quad &= \quad \underline{e}_r \left(u_r \frac{\partial a_r}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial a_r}{\partial \theta} + u_x \frac{\partial a_r}{\partial x} - \frac{u_\theta a_\theta}{r} \right) \\
&+ \quad \underline{e}_\theta \left(u_r \frac{\partial a_\theta}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial a_\theta}{\partial \theta} + u_x \frac{\partial a_\theta}{\partial x} + \frac{u_\theta a_r}{r} \right) \\
&+ \quad \underline{e}_x \left(u_r \frac{\partial a_x}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial a_x}{\partial \theta} + u_x \frac{\partial a_x}{\partial x} \right)
\end{aligned}$$

Materielle / Substantielle Ableitung eines Skalars

$$\frac{\mathrm{D}a}{\mathrm{D}t} = \frac{\partial a}{\partial t} + (\underline{u} \cdot \underline{\nabla})\, a$$

Materielle / Substantielle Ableitung eines Vektors

$$\frac{\mathrm{D}\underline{a}}{\mathrm{D}t} = \frac{\partial \underline{a}}{\partial t} + (\underline{u} \cdot \underline{\nabla})\, \underline{a}$$

A.3 Integralsätze

Satz von Gauß

$$\int_V \operatorname{div} \underline{u} \; \mathrm{d}V = \int_S \underline{u} \cdot \underline{n} \; \mathrm{d}S$$

Satz von Stokes

$$\iint_S \operatorname{rot} \underline{u} \cdot \underline{n} \; \mathrm{d}S = \oint_K \underline{u} \cdot \mathrm{d}\underline{l}$$

Formelsammlung Teil B

Grundgleichungen

B.1 Massenerhaltung

Lagrange-Darstellung (materielles Kontrollvolumen)

$$\frac{\mathrm{D}m}{\mathrm{D}t} = 0 \qquad \text{mit} \qquad m = \int\limits_{\widetilde{V}} \varrho \, \mathrm{d}\widetilde{V} \tag{B.1}$$

Euler-Darstellung
Raumfestes Kontrollvolumen

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int\limits_V \varrho \, \mathrm{d}V + \int\limits_S \varrho \, (\underline{u} \cdot \underline{n}) \; \mathrm{d}S = 0 \tag{B.2}$$

Ein geradlinig-gleichförmig bewegtes Kontrollvolumen entspricht einem raumfesten Kontrollvolumen, wobei die Geschwindigkeiten $\underline{u}$ den Relativgeschwindigkeiten entsprechen.

Beliebig bewegtes Kontrollvolumen mit der Oberflächengeschwindigkeit $\underline{u}_S$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int\limits_V \varrho \, \mathrm{d}V + \int\limits_S \varrho \, [(\underline{u} - \underline{u}_S) \cdot \underline{n}] \; \mathrm{d}S = 0 \tag{B.3}$$

Differentielle Darstellung: Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \underline{\nabla} \cdot (\varrho \underline{u}) = \frac{\mathrm{D}\varrho}{\mathrm{D}t} + \varrho \, (\underline{\nabla} \cdot \underline{u}) = 0 \tag{B.4}$$

Komponentenschreibweise in kartesischen Koordinaten $\underline{x} = (x, y, z)^T$

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\varrho u) + \frac{\partial}{\partial y}(\varrho v) + \frac{\partial}{\partial z}(\varrho w) = 0 \tag{B.5}$$

Komponentenschreibweise in Zylinderkoordinaten $\underline{x} = (r, \theta, x)^T$

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(\varrho r u_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}(\varrho u_\theta) + \frac{\partial}{\partial x}(\varrho u_x) = 0 \tag{B.6}$$

Inkompressible Kontinuitätsgleichung – inkompressibles Fluid oder inkompressible Strömung

$$\varrho = konst. \qquad \text{oder} \qquad \frac{\mathrm{D}\varrho}{\mathrm{D}t} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \underline{\nabla} \cdot \underline{u} = 0 \tag{B.7}$$

Komponentenschreibweise in kartesischen Koordinaten $\underline{x} = (x, y, z)^T$

$$\underline{\nabla} \cdot \underline{u} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \tag{B.8}$$

Komponentenschreibweise in Zylinderkoordinaten $\underline{x} = (r, \theta, x)^T$

$$\underline{\nabla} \cdot \underline{u} = \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial u_x}{\partial x} \tag{B.9}$$

B.2 Impulserhaltung

Lagrange-Darstellung (materielles Kontrollvolumen)

$$\frac{\mathrm{D}\underline{P}}{\mathrm{D}t} = \sum_i \underline{F}_i \qquad \text{mit} \qquad \underline{P} = \int_{\widetilde{V}} \varrho \underline{u} \, \mathrm{d}\widetilde{V} \tag{B.10}$$

Euler-Darstellung
Raumfestes Kontrollvolumen

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_V (\varrho \underline{u}) \ \mathrm{d}V + \int_S \varrho \underline{u} \, (\underline{u} \cdot \underline{n}) \ \mathrm{d}S = \int_V \varrho \underline{f} \ \mathrm{d}V - \int_S p \underline{n} \ \mathrm{d}S + \int_S \underline{\underline{\tau}} \cdot \underline{n} \ \mathrm{d}S + \underline{F}_{ext} \tag{B.11}$$

Ein geradlinig-gleichförmig bewegtes Kontrollvolumen entspricht einem raumfesten Kontrollvolumen, wobei die Geschwindigkeiten $\underline{u}$ den Relativgeschwindigkeiten entsprechen.

Beliebig bewegtes Kontrollvolumen mit der Oberflächengeschwindigkeit $\underline{u}_S$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_V (\varrho \underline{u}) \ \mathrm{d}V + \int_S \varrho \underline{u} \, [(\underline{u} - \underline{u}_S) \cdot \underline{n}] \ \mathrm{d}S = \int_V \varrho \underline{f} \ \mathrm{d}V - \int_S p \underline{n} \ \mathrm{d}S + \int_S \underline{\underline{\tau}} \cdot \underline{n} \ \mathrm{d}S + \underline{F}_{ext} \tag{B.12}$$

Differentielle Darstellung: Cauchy-Impulsgleichung

$$\varrho \frac{\mathrm{D}\underline{u}}{\mathrm{D}t} = -\underline{\nabla} p + \underline{\nabla} \cdot \underline{\underline{\tau}} + \varrho \underline{f} \tag{B.13}$$

Komponentenschreibweise in kartesischen Koordinaten $\underline{x} = (x, y, z)^T$

$$(x) \quad : \qquad \varrho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + \varrho f_x \tag{B.14}$$

$$(y) \quad : \qquad \varrho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + \varrho f_y \tag{B.15}$$

$$(z) \quad : \qquad \varrho \left(\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} + \varrho f_z \tag{B.16}$$

Komponentenschreibweise in Zylinderkoordinaten $\underline{x} = (r, \theta, x)^T$

$$\begin{aligned}(r): \quad & \varrho \left[\frac{\partial u_r}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{u_\theta^2}{r} + u_x \frac{\partial u_r}{\partial x} \right] = \\ & \quad -\frac{\partial p}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \tau_{rr}) + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} - \frac{\tau_{\theta\theta}}{r} + \frac{\partial \tau_{rx}}{\partial x} + \varrho f_r \end{aligned} \tag{B.17}$$

$$\begin{aligned}(\theta): \quad & \varrho \left[\frac{\partial u_\theta}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_\theta u_r}{r} + u_x \frac{\partial u_\theta}{\partial x} \right] = \\ & \quad -\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \tau_{r\theta} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{\theta x}}{\partial x} + \varrho f_\theta \end{aligned} \tag{B.18}$$

$$\begin{aligned}(x): \quad & \varrho \left[\frac{\partial u_x}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_x}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_x}{\partial \theta} + u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} \right] = \\ & \quad -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \tau_{rx}) + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{\theta x}}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \varrho f_x \end{aligned} \tag{B.19}$$

Euler-Gleichungen – reibungsfreie Strömungen

$$\varrho \frac{\mathrm{D}\underline{u}}{\mathrm{D}t} = -\underline{\nabla} p + \varrho \underline{f} \tag{B.20}$$

Bernoulli-Gleichung – konservatives Kraftfeld, konstante Dichte, reibungsfreie Strömung entlang einer Stromlinie oder für wirbelfreie Strömungen ($\underline{\nabla} \times \underline{u} = 0$) im gesamten Feld

$$\int_1^2 \frac{\partial \underline{u}}{\partial t} \cdot \mathrm{d}\underline{s} + \left[\frac{p}{\varrho} + \frac{1}{2} |\underline{u}|^2 + U \right]_1^2 = 0 \tag{B.21}$$

für eine stationäre Strömung und die Gewichtskraft als einzige auf das System einwirkende Kraft

$$\frac{p_1}{\varrho} + \frac{1}{2} |\underline{u}_1|^2 + g z_1 = \frac{p_2}{\varrho} + \frac{1}{2} |\underline{u}_2|^2 + g z_2 \tag{B.22}$$

Schubspannungen eines Newtonschen Fluids für eine inkompressible Strömung $\underline{\nabla} \cdot \underline{u} = 0$
Komponentenschreibweise in kartesischen Koordinaten $\underline{x} = (x, y, z)^T$

$$\begin{aligned}
\tau_{xx} &= 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} \\
\tau_{yy} &= 2\mu \frac{\partial v}{\partial y} \\
\tau_{zz} &= 2\mu \frac{\partial w}{\partial z} \\
\tau_{xy} &= \tau_{yx} = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \\
\tau_{xz} &= \tau_{zx} = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\
\tau_{yz} &= \tau_{zy} = \mu \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right)
\end{aligned}$$

Komponentenschreibweise in Zylinderkoordinaten $\underline{x} = (r, \theta, x)^T$

$$\begin{aligned}
\tau_{rr} &= 2\mu \left(\frac{\partial u_r}{\partial r} \right) \\
\tau_{\theta\theta} &= 2\mu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r} \right) \\
\tau_{xx} &= 2\mu \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} \right) \\
\tau_{r\theta} &= \tau_{\theta r} = \mu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + r \frac{\partial}{\partial r} \frac{u_\theta}{r} \right) \\
\tau_{\theta x} &= \tau_{x\theta} = \mu \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_x}{\partial \theta} \right) \\
\tau_{xr} &= \tau_{rx} = \mu \left(\frac{\partial u_x}{\partial r} + \frac{\partial u_r}{\partial x} \right)
\end{aligned}$$

Navier-Stokes-Gleichungen – Newtonsches Fluid, inkompressibel, $\mu = \mathit{konst.}$

$$\varrho \frac{\mathrm{D}\underline{u}}{\mathrm{D}t} = -\underline{\nabla} p + \mu \underline{\nabla}^2 \underline{u} + \varrho \underline{f} \tag{B.23}$$

Komponentenschreibweise in kartesischen Koordinaten $\underline{x} = (x, y, z)^T$

$$(x) \quad : \quad \varrho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right] + \varrho f_x \tag{B.24}$$

$$(y) \quad : \quad \varrho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \mu \left[\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right] + \varrho f_y \tag{B.25}$$

$$(z) \quad : \quad \varrho \left(\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial z} + \mu \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right] + \varrho f_z \tag{B.26}$$

Komponentenschreibweise in Zylinderkoordinaten $\underline{x} = (r, \theta, x)^T$

$$(r): \quad \varrho\left[\frac{\partial u_r}{\partial t} + u_r\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r}\frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{u_\theta^2}{r} + u_x\frac{\partial u_r}{\partial x}\right] =$$

$$-\frac{\partial p}{\partial r} + \mu\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(ru_r)\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u_r}{\partial \theta^2} - \frac{2}{r^2}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 u_r}{\partial x^2}\right] + \varrho f_r \quad \text{(B.27)}$$

$$(\theta): \quad \varrho\left[\frac{\partial u_\theta}{\partial t} + u_r\frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_\theta u_r}{r} + u_x\frac{\partial u_\theta}{\partial x}\right] =$$

$$-\frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial \theta} + \mu\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(ru_\theta)\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{2}{r^2}\frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial x^2}\right] + \varrho f_\theta \quad \text{(B.28)}$$

$$(x): \quad \varrho\left[\frac{\partial u_x}{\partial t} + u_r\frac{\partial u_x}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r}\frac{\partial u_x}{\partial \theta} + u_x\frac{\partial u_x}{\partial x}\right] =$$

$$-\frac{\partial p}{\partial x} + \mu\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u_x}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u_x}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2}\right] + \varrho f_x \quad \text{(B.29)}$$

Schleichströmungen $Re \to 0$, Newtonsches Fluid

$$\underline{\nabla} p = \mu \underline{\nabla}^2 \underline{u} \quad \text{(B.30)}$$

Grenzschichtgleichungen $Re \to \infty$, $\delta \ll L$, 2D, Newtonsches Fluid

$$(x) \quad : \quad \frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial x} + \nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad \text{(B.31)}$$

$$(y) \quad : \quad \frac{\partial p}{\partial y} = 0 \quad \text{(B.32)}$$

Reynolds-gemittelte Navier-Stokes Gleichungen – turbulente Strömungen

$$\frac{\partial}{\partial x_j}(\varrho \overline{u}_i \overline{u}_j) = -\frac{\partial \overline{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial \overline{\tau}_{ij}}{\partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\varrho \overline{u_i' u_j'}\right) \quad \text{(B.33)}$$

Wirbeltransportgleichung – keine Volumenkräfte, Newtonsches Fluid

$$\frac{\mathrm{D}\underline{\omega}}{\mathrm{D}t} = (\underline{\omega} \cdot \underline{\nabla})\,\underline{u} + \nu \underline{\nabla}^2 \underline{\omega} \quad \text{(B.34)}$$

B.3 Energieerhaltung

Lagrange-Darstellung (materielles Kontrollvolumen)

$$\frac{\mathrm{D}E}{\mathrm{D}t} = \sum_i \underline{F}_i \cdot \underline{u} + \sum_i \dot{Q}_i \qquad \text{mit} \qquad E = \int_{\widetilde{V}} \varrho \left[e + \frac{1}{2} |\underline{u}|^2 \right] \, \mathrm{d}\widetilde{V} \tag{B.35}$$

Euler-Darstellung
Raumfestes Kontrollvolumen

$$\begin{aligned} &\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_V \left(\varrho \left[e + \frac{1}{2} |\underline{u}|^2 \right] \right) \, \mathrm{d}V + \int_S \left(\varrho \left[e + \frac{1}{2} |\underline{u}|^2 \right] \right) [\underline{u} \cdot \underline{n}] \, \mathrm{d}S = \\ &\quad = \int_V \varrho \underline{f} \cdot \underline{u} \, \mathrm{d}V - \int_S p \underline{u} \cdot \underline{n} \, \mathrm{d}S + \int_S (\underline{\underline{\tau}} \cdot \underline{u}) \cdot \underline{n} \, \mathrm{d}S + \int_V \varrho q_V \, \mathrm{d}V - \int_S \underline{q} \cdot \underline{n} \, \mathrm{d}S \end{aligned} \tag{B.36}$$

Ein geradlinig-gleichförmig bewegtes Kontrollvolumen entspricht einem raumfesten Kontrollvolumen, wobei die Geschwindigkeiten $\underline{u}$ den Relativgeschwindigkeiten entsprechen.

Beliebig bewegtes Kontrollvolumen mit der Oberflächengeschwindigkeit $\underline{u}_S$

$$\begin{aligned} &\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_V \left(\varrho \left[e + \frac{1}{2} |\underline{u}|^2 \right] \right) \, \mathrm{d}V + \int_S \left(\varrho \left[e + \frac{1}{2} |\underline{u}|^2 \right] \right) [(\underline{u} - \underline{u}_S) \cdot \underline{n}] \, \mathrm{d}S = \\ &\quad = \int_V \varrho \underline{f} \cdot \underline{u} \, \mathrm{d}V - \int_S p \underline{u} \cdot \underline{n} \, \mathrm{d}S + \int_S (\underline{\underline{\tau}} \cdot \underline{u}) \cdot \underline{n} \, \mathrm{d}S + \int_V \varrho q_V \, \mathrm{d}V - \int_S \underline{q} \cdot \underline{n} \, \mathrm{d}S \end{aligned} \tag{B.37}$$

Differentielle Energiegleichung
Gleichung für die Gesamtenergie $\varrho\,(e + |\underline{u}|^2/2)$

$$\varrho \frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t} \left(e + \frac{1}{2} |\underline{u}|^2 \right) = \varrho \, \underline{f} \cdot \underline{u} + \underline{\nabla} \cdot \left(\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{u} \right) + \varrho q_V - \underline{\nabla} \cdot \underline{q} \tag{B.38}$$

Gleichung für die kinetische Energie $\varrho\,|\underline{u}|^2/2$

$$\varrho \frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t} \left(\frac{1}{2} |\underline{u}|^2 \right) = \varrho \, \underline{f} \cdot \underline{u} + \underline{u} \cdot \underline{\nabla} \cdot \underline{\underline{\sigma}} \tag{B.39}$$

Gleichung für die innere Energie $\varrho\, e$

$$\varrho \frac{\mathrm{D}e}{\mathrm{D}t} = \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\nabla u}} + \varrho q_V - \underline{\nabla} \cdot \underline{q} \tag{B.40}$$

Gleichung für die Enthalpie $h = e + p/\varrho$

$$\varrho \frac{\mathrm{D}h}{\mathrm{D}t} = \frac{\mathrm{D}p}{\mathrm{D}t} + \underline{\underline{\tau}} : \underline{\underline{\nabla u}} + \varrho q_V - \underline{\nabla} \cdot \underline{q} \tag{B.41}$$

Differentielle Energiegleichung in Temperaturform – kalorisch perfektes Fluid

$$\varrho c \frac{\mathrm{D}T}{\mathrm{D}t} = \frac{p}{\varrho} \frac{\mathrm{D}\varrho}{\mathrm{D}t} + \underline{\underline{\tau}} : \underline{\underline{\nabla u}} + \varrho q_V - \underline{\nabla} \cdot \underline{q} \tag{B.42}$$

Dissipationsterm – doppeltes Skalarprodukt zweier Tensoren 2. Stufe
Komponentenschreibweise in kartesischen Koordinaten $\underline{x} = (x, y, z)^T$

$$
\begin{aligned}
\underline{\underline{\tau}} : \underline{\underline{\nabla u}} &= \tau_{xx}\frac{\partial u}{\partial x} + \tau_{xy}\frac{\partial v}{\partial x} + \tau_{xz}\frac{\partial w}{\partial x} \\
&+ \tau_{yx}\frac{\partial u}{\partial y} + \tau_{yy}\frac{\partial v}{\partial y} + \tau_{yz}\frac{\partial w}{\partial y} \\
&+ \tau_{zx}\frac{\partial u}{\partial z} + \tau_{zy}\frac{\partial v}{\partial z} + \tau_{zz}\frac{\partial w}{\partial z}
\end{aligned}
\tag{B.43}
$$

Komponentenschreibweise in Zylinderkoordinaten $\underline{x} = (r, \theta, x)^T$

$$
\begin{aligned}
\underline{\underline{\tau}} : \underline{\underline{\nabla u}} &= \tau_{rr}\frac{\partial u_r}{\partial r} + \tau_{r\theta} r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{u_\theta}{r}\right) + \tau_{rx}\frac{\partial u_x}{\partial r} \\
&+ \tau_{\theta r}\frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \tau_{\theta\theta}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r}\right) + \tau_{\theta x}\frac{1}{r}\frac{\partial u_x}{\partial \theta} \\
&+ \tau_{xr}\frac{\partial u_r}{\partial x} + \tau_{x\theta}\frac{\partial u_\theta}{\partial x} + \tau_{xx}\frac{\partial u_x}{\partial x}
\end{aligned}
\tag{B.44}
$$

Dissipationsterm für ein Newtonsches Fluid
Komponentenschreibweise in kartesischen Koordinaten $\underline{x} = (x, y, z)^T$

$$
\begin{aligned}
\underline{\underline{\tau}} : \underline{\underline{\nabla u}} &= 2\mu\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + 2\mu\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + 2\mu\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2 \\
&+ \mu\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \mu\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + \mu\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right)^2
\end{aligned}
\tag{B.45}
$$

Komponentenschreibweise in Zylinderkoordinaten $\underline{x} = (r, \theta, x)^T$

$$
\begin{aligned}
\underline{\underline{\tau}} : \underline{\underline{\nabla u}} &= 2\mu\left(\frac{\partial u_r}{\partial r}\right)^2 + 2\mu\left(\frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r}\right)^2 + 2\mu\left(\frac{\partial u_x}{\partial x}\right)^2 \\
&+ \mu\left(\frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial \theta} + r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{u_\theta}{r}\right)\right)^2 + \mu\left(\frac{\partial u_x}{\partial r} + \frac{\partial u_r}{\partial x}\right)^2 + \mu\left(\frac{\partial u_\theta}{\partial x} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_x}{\partial \theta}\right)^2
\end{aligned}
\tag{B.46}
$$

Wärmeleitungsterm mit dem Fourier-Gesetz – konstante Wärmeleitfähigkeit k

$$-\underline{\nabla} \cdot \underline{q} = -\underline{\nabla} \cdot \left(-k\,\underline{\nabla}T\right) = k\,\underline{\nabla}^2 T \tag{B.47}$$

In kartesischen Koordinaten $\underline{x} = (x, y, z)^T$

$$k\,\underline{\nabla}^2 T = k\left[\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right] \tag{B.48}$$

In Zylinderkoordinaten $\underline{x} = (r, \theta, x)^T$

$$k\,\underline{\nabla}^2 T = k\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\right] \tag{B.49}$$

Entropiegleichung

$$T\mathrm{d}s = \mathrm{d}h - \frac{\mathrm{d}p}{\varrho} \qquad \Rightarrow \qquad \varrho T\frac{\mathrm{D}s}{\mathrm{D}t} = \underline{\underline{\tau}} : \underline{\underline{\nabla u}} + \varrho q_V - \underline{\nabla} \cdot \underline{q} \tag{B.50}$$

reibungsfrei, adiabat

$$\frac{\mathrm{D}s}{\mathrm{D}t} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \varrho\frac{\mathrm{D}h}{\mathrm{D}t} = \frac{\mathrm{D}p}{\mathrm{D}t} \tag{B.51}$$

Formelsammlung Teil C

Diverses

C.1 Dimensionen und Einheiten ausgewählter Grössen

Größe, Bezeichnung	F, L, T, ϑ	M, L, T, ϑ	Einheiten
Länge	L	L	Meter, m
Kraft	F	MLT^{-2}	Newton, N
Masse	$FL^{-1}T^2$	M	Kilogramm, kg
Zeit	T	T	Sekunde, s
Temperatur	ϑ	ϑ	Kelvin, K
Geschwindigkeit	LT^{-1}	LT^{-1}	m/s
Beschleunigung	LT^{-2}	LT^{-2}	m/s^2
Druck, Spannung	FL^{-2}	$ML^{-1}T^{-2}$	Pascal, $Pa = N/m^2$
Moment, Arbeit, Energie	FL	ML^2T^{-2}	Joule, $J = Ws = Nm$
Leistung, Energiestrom	FLT^{-1}	ML^2T^{-3}	Watt, $W = Nm/s$
Dichte	$FL^{-4}T^2$	ML^{-3}	kg/m^3
Massenstrom	$FL^{-1}T^1$	MT^{-1}	kg/s
dynamische Viskosität	$FL^{-2}T$	$ML^{-1}T^{-1}$	$Pa\,s = Ns/m^2$
kinematische Viskosität	L^2T^{-1}	L^2T^{-1}	m^2/s
Oberflächenspannung	FL^{-1}	MT^{-2}	$N/m = kg/s^2$
spezifische Wärmekapazität	$L^2T^{-2}\vartheta^{-1}$	$L^2T^{-2}\vartheta^{-1}$	$J/(kg\,K)$
Wärmeleitfähigkeit	$FT^{-1}\vartheta^{-1}$	$MLT^{-3}\vartheta^{-1}$	$W/(m\,K)$
spezielle Gaskonstante R	$L^2T^{-2}\vartheta^{-1}$	$L^2T^{-2}\vartheta^{-1}$	$J/(kg\,K)$

C.2 Ausgewählte dimensionslose Kraftkoeffizienten

Reibungskoeffizient

$$c_f = \frac{\tau_W}{(\varrho/2) \cdot u^2} \tag{C.1}$$

Auftriebsbeiwert mit effektiv überströmter Fläche A

$$c_L = \frac{F_L}{(\varrho/2) \cdot u^2 A} \tag{C.2}$$

Widerstandsbeiwert mit effektiv überströmter Fläche A

$$c_D = \frac{F_D}{(\varrho/2) \cdot u^2 A} \tag{C.3}$$

C.3 Grenzschichtdicken

99 % **Grenzschichtdicke**

$$\delta = y(u = 0.99\ u_\infty) \tag{C.4}$$

Verdrängungsdicke

$$\delta_1 = \int\limits_0^\infty \left(1 - \frac{u}{u_\infty}\right)\ \mathrm{d}y \tag{C.5}$$

Impulsverlustdicke

$$\delta_2 = \int\limits_0^\infty \frac{u}{u_\infty}\left(1 - \frac{u}{u_\infty}\right)\ \mathrm{d}y \tag{C.6}$$

C.4 Blasius-Grenzschicht

99 % **Grenzschichtdicke**

$$\delta = 5\frac{x}{\sqrt{Re_x}} \tag{C.7}$$

Verdrängungsdicke

$$\delta_1 = 1.721\frac{x}{\sqrt{Re_x}} \approx \frac{\delta}{3} \tag{C.8}$$

Impulsverlustdicke

$$\delta_2 = 0.664\frac{x}{\sqrt{Re_x}} \approx \frac{\delta}{8} \tag{C.9}$$

Reibungskoeffizient

$$c_f = \frac{\tau_W}{(\varrho/2)\cdot u^2} = 0.664\frac{1}{\sqrt{Re_x}} \tag{C.10}$$

Widerstandsbeiwert mit effektiv überströmter Fläche $A = Lb$ (einseitig)

$$c_D = \frac{F_D}{(\varrho/2)\cdot u^2 Lb} = 1.328\frac{1}{\sqrt{Re_L}} \tag{C.11}$$

C.5 Charakteristische Grössen der wandnahen Turbulenz

Schubspannungsgeschwindigkeit

$$u_\tau = \sqrt{\frac{|\tau_W|}{\rho}} \tag{C.12}$$

Dimensionslose Geschwindigkeit

$$u^+ = \frac{u}{u_\tau} \tag{C.13}$$

Dimensionsloser Wandabstand

$$y^+ = \frac{u_\tau y}{\nu} \tag{C.14}$$

C.6 Verlustbehaftete Bernoulli-Gleichung

statistisch stationäre, gemittelte Strömung von 1 nach 2, konstante Dichte, Gewichtskraft als einzige konservative Kraft

$$\frac{p_1}{\varrho} + \frac{\overline{u}_1^2}{2} + gz_1 = \frac{p_2}{\varrho} + \frac{\overline{u}_2^2}{2} + gz_2 + \frac{\Delta p_{12}}{\varrho} \tag{C.15}$$

Verluste durch turbulente Rohrreibung mit Rohrreibungszahl λ

$$\frac{\Delta p}{\varrho} = \lambda \frac{L}{D} \frac{\overline{u}^2}{2} \tag{C.16}$$

Verluste durch Einbauten mit Verlustkoeffizient ζ

$$\frac{\Delta p}{\varrho} = \zeta \, \frac{\overline{u}^2}{2} \tag{C.17}$$

Druckänderungen durch Strömungsmaschinen mit Leistung N und Wirkungsgrad η

Pumpe

$$\Delta p_P = -\frac{\eta N}{\dot{V}} \tag{C.18}$$

Turbine

$$\Delta p_T = \frac{N}{\eta \dot{V}} \tag{C.19}$$

Moody-Diagramm