



Eidgenössische Technische Hochschule Zürich  
Swiss Federal Institute of Technology Zurich

Institut für Fluidodynamik  
Prof. Dr. T. Rösgen

# Fluidodynamik I

## Skript zur Vorlesung



# Inhaltsverzeichnis

---

<b>1</b>	<b>Fragestellungen, Anwendungen, Methoden</b>	<b>7</b>
<b>2</b>	<b>Definition und Eigenschaften von Fluiden</b>	<b>9</b>
<b>3</b>	<b>Dimensionsanalyse und Ähnlichkeitstheorie</b>	<b>13</b>
3.1	Dimensionen und Einheiten . . . . .	13
3.2	Dimensionsmatrix . . . . .	14
3.3	Buckingham II-Theorem . . . . .	15
3.4	Formalismus zur Dimensionsanalyse . . . . .	15
3.5	Ähnlichkeit und Modellierung . . . . .	17
3.6	Dimensionslose Kennzahlen . . . . .	18
<b>4</b>	<b>Kinematische Beschreibung des Strömungsfeldes</b>	<b>19</b>
4.1	Lagrangesche und Eulersche Beschreibung . . . . .	19
4.2	Substantielle Ableitung . . . . .	20
4.3	Reynolds-Transporttheorem . . . . .	20
4.4	Kinematische Eigenschaften von Strömungen . . . . .	21
4.5	Ausgezeichnete Linien . . . . .	22
4.6	Stromfunktion . . . . .	24
<b>5</b>	<b>Erhaltungssätze</b>	<b>25</b>
5.1	Massenerhaltung . . . . .	25
5.1.1	Integrale Formulierung . . . . .	25
5.1.2	Stromröhren . . . . .	25
5.1.3	Differentielle Form - Kontinuitätsgleichung . . . . .	25
5.2	Impulserhaltung . . . . .	26
5.2.1	Integrale Formulierung . . . . .	26
5.2.2	Stromröhren . . . . .	26
5.2.3	Differentielle Form . . . . .	28
5.2.4	Impulserhaltung für reibungsfreie Strömungen . . . . .	28
5.3	Energieerhaltung . . . . .	30
5.3.1	Integrale Formulierung . . . . .	30
5.3.2	Differentielle Formulierung . . . . .	31
5.3.3	Sonderfälle . . . . .	31
<b>6</b>	<b>Reibungsbehaftete Strömungen</b>	<b>33</b>
6.1	Navier-Stokes-Gleichung . . . . .	33
6.2	Exakte Lösungen . . . . .	33
6.3	Näherungslösungen . . . . .	36
6.3.1	Einfluß der Reynolds-Zahl . . . . .	36
6.3.2	Stokes Flow: Schleichende Umströmung einer Kugel . . . . .	37
<b>7</b>	<b>Grenzschichten</b>	<b>39</b>
7.1	Grenzschichtgleichungen . . . . .	39
7.2	Exakte Lösungen der Grenzschichtgleichungen . . . . .	40
7.3	Impulssatz der Grenzschichttheorie . . . . .	43

<b>8</b>	<b>Turbulenz</b>	<b>45</b>
8.1	Phänomenologie . . . . .	45
8.2	Statistische Modellierung der Turbulenz . . . . .	46
8.3	Empirischer Ansatz für die turbulente Schubspannung . . . . .	47
8.4	Geschwindigkeitsverteilung in der turbulenten Grenzschicht . . . . .	48
8.5	Turbulente Rohrströmung . . . . .	50
8.6	Verlustbehaftete Bernoulli-Gleichung . . . . .	53
<b>A</b>	<b>Grundlagen der Vektor- und Tensoralgebra</b>	<b>55</b>
A.1	Einsteinsche Summenkonvention . . . . .	55
A.2	Differentialoperatoren . . . . .	55
A.3	Integralsätze . . . . .	57
<b>B</b>	<b>Grundgleichungen</b>	<b>59</b>
B.1	Massenerhaltung . . . . .	59
B.2	Impulserhaltung . . . . .	60
B.3	Energieerhaltung . . . . .	63

## Nomenklatur

---

### Lateinische Buchstaben:

$a$	Schallgeschwindigkeit
$b$	Abmessung in $z$ (senkrecht zur Zeichenebene)
$c_A$	Auftriebsbeiwert 3D-Körper (dimensionslose Kraft, deutsche Nomenklatur)
$c_a$	Auftriebsbeiwert 2D-Profil (dimensionslose Kraft, deutsche Nomenklatur)
$c_D$	Widerstandsbeiwert (dimensionslose Kraft, englische Nomenklatur)
$c_f$	lokaler Widerstandsbeiwert (dimensionslose Wandschubspannung)
$c_L$	Auftriebsbeiwert (dimensionslose Kraft, englische Nomenklatur)
$c_p$	spezifische isobare Wärmekapazität; Druckbeiwert (dimensionsloser Druck)
$c_v$	spezifische isochore Wärmekapazität
$c_W$	Widerstandsbeiwert (dimensionslose Kraft, deutsche Nomenklatur)
$D$	baroklines Drehmoment
$d$	Profildicke
$E$	Energie
$e$	innere Energie
$F$	Kraft
$F(t)$	Bernoulli-Konstante
$F(z)$	komplexes Potential
$f$	Profilwölbung
$g$	Erdbeschleunigung
$h$	Enthalpie
$k$	Boltzmann-Konstante
$k$	Wärmeleitfähigkeit
$L$	Länge
$M$	Molekülmasse
$m$	Masse, Dipolmoment
$m^*$	virtuelle Masse
$\dot{m}$	Massenstrom
$n$	Normale
$P$	Impuls
$Pr$	Prandtl-Zahl
$p$	Druck
$Q$	Wärme
$Q_C$	Quellstärke
$\dot{Q}$	Wärmestrom
$R$	Radius; Gaskonstante
$S$	Fläche
$T$	Temperatur, Umlaufzeit
$t$	Zeit
$U$	Potential
$u$	Geschwindigkeit, Geschwindigkeit in $x$ -Richtung
$V$	Volumen
$\dot{V}$	Volumenstrom
$v$	Geschwindigkeit in $y$ -Richtung
$W$	Wirbelstreckungsterm

**Griechische Buchstaben:**

$\alpha$	Wärmeübergangskoeffizient, Anstellwinkel
$\delta$	Grenzschichtdicke
$\Gamma_C$	Zirkulation
$\gamma$	Adiabatexponent
$\zeta$	Widerstandsbeiwert
$\zeta_M$	Momentenbeiwert
$\lambda$	Wärmeleitfähigkeit
$\mu$	dynamische Zähigkeit
$\nu$	kinematische Zähigkeit
$\varrho$	Dichte
$\sigma$	Oberflächenspannung
$\tau$	Schubspannung
$\Phi$	Potentialfunktion
$\Psi$	Stromfunktion
$\omega$	Wirbelstärke
$\Omega$	Mittlere Winkelgeschwindigkeit

**Koordinaten:**

$x, x_1$	Koordinate eines kartesischen Koordinatensystems oder Axialkoordinate eines Zylinderkoordinatensystems
$y, x_2$	Koordinate eines kartesischen Koordinatensystems
$z, x_3$	Koordinate eines kartesischen Koordinatensystems, komplexe Variable
$\theta$	Koordinate eines Zylinderkoordinatensystems (Winkel), Längenkoordinate eines Kugelkoordinatensystems oder Argument der komplexen Variable $z$
$r$	Radialkoordinate eines Kugel- oder Zylinderkoordinatensystems
$\psi$	Breitenkoordinate eines Kugelkoordinatensystems
$u, u_1$	Geschwindigkeitskomponente in $x$ -Richtung (kartesische oder Zylinderkoordinaten), in $r$ -Richtung (Kugelkoordinaten)
$v, u_2$	Geschwindigkeitskomponente in $y$ -Richtung oder $\phi$ -Richtung
$w, u_3$	Geschwindigkeitskomponente in $z$ -Richtung (kartesische Koordinaten), in $r$ -Richtung (Zylinderkoordinaten), in $\psi$ -Richtung (Kugelkoordinaten)

**Indizes:**

$W$	Widerstand
$W$	Wand
$\infty$	unendlich

# Kapitel 1

## Fragestellungen, Anwendungen, Methoden

---

In einer Vielzahl von Bereichen in Natur und Technik hat das Verhalten von Fluiden einen entscheidenden Einfluß, z.B.

- bei der Bestimmung von Kräften auf frei umströmte Körper (Autos, Flugzeuge, Schiffe, ...)
- bei der Bestimmung von Energieverlusten bzw. -gewinnen in "internen" Strömungen (Rohrleitungen, Strömungsmaschinen, ...)
- bei der Vorhersage des lokalen und globalen Strömungsverhaltens (Wetter, Verbrennung, aerodynamischer Entwurf, ...)
- bei der passiven und aktiven Beeinflussung von Strömungen (Reibungswiderstand, Lärm, Schwingungen, ...), oder
- bei der Erweiterung des physikalischen Grundlagenverständnisses von Strömungsphänomenen (Turbulenz, Mischungsverhalten, Verbrennung).

Man kann die ingenieurwissenschaftliche Behandlung solcher Probleme in 3 methodische Gruppen unterteilen.

Bei der *theoretischen Vorgehensweise* werden u.a. die folgenden Methoden angewandt:

- Formulierung von relevanten (Erhaltungs-)Gleichungen;
- Finden von exakten Lösungen;
- Finden von Ähnlichkeitslösungen (Umwandlung von partiellen in gewöhnliche Differentialgleichungen);
- Modellbildung und Parametrisierung;
- Vereinfachung von Gleichungen durch Approximationen und Näherungslösungen.

Bei *experimentellen Untersuchungen* werden primär folgende Ziele verfolgt:

- Direkte Sichtbarmachung und Visualisierung von Strömungsphänomenen;
- Quantitative Messungen von Kräften, Momenten (integral) oder Feldgrößen (Druck, Dichte, Geschwindigkeiten, ...);
- Modellversuche basierend auf Ähnlichkeitsbetrachtungen (Wind- u. Wasserkanäle, etc.).

Im Rahmen der *numerischen Modellierung* schließlich werden die relevanten Gleichungen mit dem Computer gelöst und gemäss der ursprünglichen Vorgaben (Anfangs- und Randbedingungen) ausgewertet. In allen Fällen werden die kontinuierlichen (Differential-)Gleichungen diskretisiert und gelöst. Je nach dem Diskretisierungsansatz unterscheidet man insbesondere

- DNS-Verfahren (Direct Numerical Simulation): die vollständige Auflösung aller zeitlichen und räumlichen Skalen, Erzeugung "exakter" Lösungen und Durchführung "numerischer Experimente". Es wird keine empirische Modellbildung für die Turbulenz benötigt. DNS Rechnungen sind sehr aufwendig, und aufgrund des Rechenbedarfs nur geeignet für "einfache" Probleme.
- LES-Verfahren (Large Eddy Simulation): eine Vereinfachung durch reduzierte räumliche Auflösung und Mittelung der Gleichungen. Eine empirische Modellierung der "irrelevanten" kleinen Skalen wird benutzt. Der Vorteil gegenüber den DNS Methoden ist ein deutlich reduzierter Rechenaufwand
- RANS (Reynolds-Averaged Navier-Stokes) Verfahren: hier findet eine zeitliche Mittelung der Gleichungen statt. Der Einsatz empirischer Turbulenzmodelle ist notwendig. RANS Rechnungen sind geeignet für grössere Anwendungsprobleme, soweit die Turbulenzmodellierung funktioniert.



## Kapitel 2

### Definition und Eigenschaften von Fluiden

---

Die Strömungsmechanik befasst sich im Allgemeinen mit der Beschreibung des dynamischen Verhaltens von Flüssigkeiten und Gasen, oder - verallgemeinert ausgedrückt - von sogenannten Fluiden.

Als **Fluid** wird dabei ein von der molekularen Struktur abstrahiertes *Kontinuum* bezeichnet. Im Ruhezustand kann ein Fluid nur Druckkräfte (Kompression) aufnehmen. Andere Kräfte, wie Zug- und Scherkräfte führen zu Fließbewegungen. Mit dieser Definition können Fluide von anderen Materialien wie z.B. Festkörpern unterschieden werden.

Das **Kontinuumsprinzip** vereinfacht dabei die physikalische Modellierung der betrachteten Fluide. Anstatt auf die detaillierte molekulare Struktur einzugehen, nimmt man an, daß ein Fluid aus einer dichten Packung von einzelnen Elementen, den *Fluidpartikeln* bzw. *Fluidelementen* besteht, die den Raum kontinuierlich ausfüllen.

Die **Fluidpartikel** sind klein gegenüber relevanten Strömungsskalen, aber groß gegenüber molekularen Skalen. Es gilt:

- Fluidpartikel und Raumpunkte sind einander eineindeutig zugeordnet, d.h. an jedem Raumpunkt existiert genau ein Fluidpartikel und jedes Fluidpartikel hat eine eindeutige Raumkoordinate,
- die physikalischen Eigenschaften des Fluids werden als Eigenschaften in jedem Punkt (und damit der Fluidpartikel) durch die *Feldgrößen* erfasst.

**Feldgrößen** sind i.a. stetige und differenzierbare Funktionen. Ausnahmen sind Diskontinuitäten, wie sie z.B. bei Trennflächen oder in Verdichtungsstößen auftreten. Sie lassen sich als Ergebnis einer lokalen Mittelung über die tatsächlichen physikalisch vorhandenen Moleküle auffassen.

Für Strömungen sind oftmals folgende Feldgrößen und Materialkonstanten von Bedeutung:

- $\varrho$  Dichte,  $[\varrho] = \text{kg}/\text{m}^3$
- $p$  Druck,  $[p] = \text{N}/\text{m}^2 = \text{Pa}$
- $T$  Temperatur,  $[T] = \text{K}$
- $\underline{u}$  Geschwindigkeit,  $[u_i] = \text{m}/\text{s}$
- $\mu$  dynamische Viskosität,  $[\mu] = \text{kg}/(\text{m} \cdot \text{s}) = \text{N} \cdot \text{s}/\text{m}^2 = \text{Pa} \cdot \text{s}$

Die **Dichte**  $\varrho$  eines Fluidelementes der Masse  $\Delta m$  und mit dem Volumen  $\Delta V$  ist definiert als

$$\varrho = \lim_{\Delta V \rightarrow \lambda^3} \frac{\Delta m}{\Delta V},$$

wobei  $\lambda^3$  das limitierende Volumen ist, unterhalb dessen die Anzahl von Molekülen ungenügend für statistische Aussagen ist. Im Allgemeinen ist die Dichte eine Funktion von Druck und Temperatur

$$\varrho = \varrho(p, T).$$

Auf ein beliebig orientiertes Flächenelement  $\Delta S$  wirkt eine **Druckkraft** in Richtung der Flächennormale. Der Druck  $p$  in einem ruhenden Fluid ist definiert als der Quotient aus dem Betrag  $\Delta F$  der Druckkraft und der Grösse des Flächenelements  $\Delta S$ , wobei der Grenzübergang  $\Delta S \rightarrow \lambda^2$  vorgenommen wird

$$p = \lim_{\Delta S \rightarrow \lambda^2} \frac{\Delta F}{\Delta S} .$$

Der Druck hängt nicht von der Orientierung des Flächenelements im Fluid ab, er ist eine skalare Grösse.

Gemäß der kinetischen Theorie ist die **Temperatur**  $T$  über die Varianz der Molekülgeschwindigkeit  $\underline{v}$  definiert

$$\frac{3}{2} kT = \langle \frac{1}{2} M \underline{v} \cdot \underline{v} \rangle ,$$

wobei  $k$  die Boltzmann-Konstante und  $M$  die Molekülmasse ist. (Durch die Klammern  $\langle \rangle$  wird gekennzeichnet, daß der Ausdruck statistisch gemittelt wird.)

Die Temperatur ist also direkt proportional zu der mittleren kinetischen Energie der molekularen Bewegung.

Die **Viskosität** ist auf den molekularen Queraustausch von Impuls zwischen benachbarten Fluidschichten mit einem Geschwindigkeitsgradienten zurückzuführen. Die Schubspannung  $\tau$  in einem Fluid ist eine Funktion der Deformationsgeschwindigkeit  $\dot{\gamma}$

$$\tau = f(\dot{\gamma}) .$$

In *Newtonschen Fluiden* ist die Schubspannung proportional zur Deformationsgeschwindigkeit:

$$\tau = \mu \dot{\gamma}$$

Komponentenweise gilt:

$$\tau_{ij} = \mu \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$$

wobei  $u_i$  die Geschwindigkeitskomponenten und  $x_i$  die Ortskoordinaten bezeichnen. Die Proportionalitätskonstante  $\mu$  ist die dynamische Viskosität. Die kinematische Viskosität  $\nu$  leitet sich aus der dynamischen ab:

$$\nu = \frac{\mu}{\rho}$$

Für Wasser und Luft gelten bei Umgebungstemperatur näherungsweise die Werte gemäß Tabelle 2.1.

	Wasser	Luft
$\mu$	$10^{-3} \text{ Pa} \cdot \text{s}$	$18 \cdot 10^{-6} \text{ Pa} \cdot \text{s}$
$\nu$	$10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$	$15 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$

Tabelle 2.1: Kinematische und dynamische Viskosität von Luft und Wasser bei Umgebungstemperatur

Die kinematischen Viskositäten von Wasser und Luft stehen demnach im Verhältnis

$$\nu_L \approx 15 \nu_W .$$

Die Viskosität hängt i.a. von der Temperatur  $T$  ab. Bei Gasen steigt sie mit der Temperatur an, es gilt näherungsweise das Potenzgesetz

$$\frac{\mu}{\mu_0} = \left( \frac{T}{T_0} \right)^\omega .$$

Für Luft bei  $p_0 = 10^5 \text{ Pa}$  werden die Bezugswerte  $T_0 = 273.15 \text{ K}$  und  $\omega \simeq 0.7$  verwendet.

Das Sutherland-Gesetz beschreibt die Temperaturabhängigkeit der Gase exakter,

$$\frac{\mu}{\mu_0} = \frac{T_0 + S}{T + S} \cdot \left( \frac{T}{T_0} \right)^{\frac{3}{2}} .$$

Die Bezugswerte für Luft bei  $p_0 = 10^5 \text{ Pa}$  sind hier  $T_0 = 273.15 \text{ K}$ ,  $\mu_0 = 17.10 \cdot 10^{-6} \text{ Pa} \cdot \text{s}$  und  $S = 110.4 \text{ K}$  (Sutherland-Konstante).

Bei Flüssigkeiten nimmt die Viskosität mit steigender Temperatur ab. Im Bereich  $273.15 \text{ K} < T < 373.15 \text{ K}$  gilt die logarithmische Beziehung

$$\ln \frac{\mu}{\mu_0} = a + b \frac{T_0}{T} + c \left( \frac{T_0}{T} \right)^2 .$$

Für Wasser gelten die Konstanten  $a = -2.10$ ,  $b = -4.45$ ,  $c = 6.55$  und beim Druck  $p_0 = 10^5 \text{ Pa}$  die Bezugswerte  $T_0 = 273.15 \text{ K}$  und  $\mu_0 = 0.00179 \text{ Pa} \cdot \text{s}$ .

Die **Oberflächenspannung** ist durch unsymmetrische molekulare Kraftwirkungen an der Trennfläche zweier Medien bedingt. Im Inneren eines Fluids heben sich die intermolekularen Kräfte, die auf ein Teilchen wirken, im Mittel auf. An der Trennfläche hingegen tritt ein asymmetrisches Kraftfeld auf, das eine Resultierende bedingt.

Die Young-Laplace-Gleichung beschreibt das Verhältnis von Drucksprung  $\Delta p$  und Oberflächenspannung  $\sigma$  für eine durch zwei Krümmungsradien  $R_1$  und  $R_2$  beschriebene Oberfläche:

$$\Delta p = \sigma \cdot \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)$$

Die **Schallgeschwindigkeit**  $a$  ist die Geschwindigkeit, mit welcher sich kleine Druckstörungen im Raum ausbreiten. Sie ergibt sich für eine isentrope Strömung zu

$$a^2 = \left. \frac{\partial p}{\partial \rho} \right|_{s=\text{konst.}} . \quad (2.1)$$

Für ein ideales Gas lässt sich dieser Ausdruck schreiben als

$$a^2 = \gamma R T . \quad (2.2)$$



## Kapitel 3

### Dimensionsanalyse und Ähnlichkeitstheorie

---

#### 3.1 Dimensionen und Einheiten

Die Gleichungen der Fluidodynamik (wie auch alle anderen naturwissenschaftlichen Gesetze) lassen sich in allgemeiner Form als Gleichungen verschiedener Kenngrößen bzw. Parameter darstellen, also

$$p_1 = f(p_2, p_3, \dots, p_n) ,$$

oder auch

$$\tilde{f}(p_1, p_2, p_3, \dots, p_n) = 0 .$$

Hierbei stellen  $f$  bzw.  $\tilde{f}$  die beschreibenden Gesetze dar und  $\{p_1, p_2, p_3, \dots, p_n\}$  die dazugehörigen Parameter, d.h. die für den betrachteten Vorgang relevanten Größen.

Eine solche Gleichung ist immer homogen, und alle Terme müssen dieselbe Dimension oder Masseinheit haben. Die einzelnen Parameter eines Problems können aber durchaus unterschiedliche Dimensionen haben (Länge, Geschwindigkeit, Dichte, etc.). Als Konsequenz sind nur bestimmte Kombinationen der einzelnen Parameter erlaubt, damit die Homogenität gewährleistet ist.

Insbesondere kann eine dimensionslose Schreibweise der Form

$$\Phi(\Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_k) = 0$$

eingeführt werden. Die Kombinationen (genauer: Potenzprodukte) der ursprünglichen Parameter  $\{p_1, p_2, p_3, \dots, p_n\}$  sind so zusammengefaßt, daß die neuen, dimensionslosen Parameter  $\{\Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_k\}$  entstehen. Diese haben keine Masseinheit mehr.

Der Formalismus, mit dem eine dimensionsbehaftete Gleichung in die äquivalente, dimensionslose Form überführt werden kann, wird vom Buckingham II-Theorem beschrieben.

In der Mechanik werden als Basisgrößen die Masseinheiten *Masse*, *Länge*, *Zeit* ( $M$ ,  $L$ ,  $T$ ) verwendet. Spielen zusätzlich z.B. thermische oder elektrische Effekte eine Rolle, so werden als zusätzliche Basisgrößen oft die Temperatur  $\vartheta$  oder der elektrische Strom  $I$  verwendet. Prinzipiell sind auch andere Mass-Systeme möglich, solange nur die Dimensionen ihrer Masseinheiten ausreichen, um alle Parameter dimensionsmässig zu beschreiben. Die Tabelle 3.1 enthält einige Beispiele.

Größe, Bezeichnung	$F, L, T, \vartheta$	$M, L, T, \vartheta$	Einheiten
Länge	$L$	$L$	Meter, $m$
Kraft	$F$	$MLT^{-2}$	Newton, $N$
Masse	$FL^{-1}T^2$	$M$	Kilogramm, $kg$
Zeit	$T$	$T$	Sekunde, $s$
Temperatur	$\vartheta$	$\vartheta$	Kelvin, $K$
Geschwindigkeit	$LT^{-1}$	$LT^{-1}$	$m/s$
Beschleunigung	$LT^{-2}$	$LT^{-2}$	$m/s^2$
Druck, Spannung	$FL^{-2}$	$ML^{-1}T^{-2}$	Pascal, $Pa = N/m^2$
Moment, Arbeit, Energie	$FL$	$ML^2T^{-2}$	Joule, $J = Ws = Nm$
Leistung, Energiestrom	$FLT^{-1}$	$ML^2T^{-3}$	Watt, $W = Nm/s$
Dichte	$FL^{-4}T^2$	$ML^{-3}$	$kg/m^3$
Massenstrom	$FL^{-1}T^1$	$MT^{-1}$	$kg/s$
dynamische Viskosität	$FL^{-2}T$	$ML^{-1}T^{-1}$	$Pa\ s = Ns/m^2$
kinematische Viskosität	$L^2T^{-1}$	$L^2T^{-1}$	$m^2/s$
Oberflächenspannung	$FL^{-1}$	$MT^{-2}$	$N/m = kg/s^2$
spezifische Wärmekapazität	$L^2T^{-2}\vartheta^{-1}$	$L^2T^{-2}\vartheta^{-1}$	$J/(kg\ K)$
Wärmeleitfähigkeit	$FT^{-1}\vartheta^{-1}$	$MLT^{-3}\vartheta^{-1}$	$W/(m\ K)$
spezielle Gaskonstante $R$	$L^2T^{-2}\vartheta^{-1}$	$L^2T^{-2}\vartheta^{-1}$	$J/(kg\ K)$

Tabelle 3.1: Ausgewählte Größen, ihre Dimensionen und Einheiten

### 3.2 Dimensionsmatrix

Gegeben seien  $n$  dimensionsbehaftete, physikalische Größen  $\{p_1, p_2, \dots, p_n\}$ . Zwischen ihnen bestehe ein Zusammenhang der Form

$$\tilde{f}(p_1, p_2, \dots, p_n) = 0.$$

Es sei  $\{A_1, A_2, \dots, A_m\}$  eine aus  $m \leq n$  dimensionsbehafteten Masseinheiten bestehende Basis. Für die Basis wird vorausgesetzt, daß sich keine ihrer Größen als Potenzprodukt der anderen Basisgrößen darstellen läßt.

Die Dimension  $[p_i]$  jeder der  $n$  physikalischen Größen läßt sich nun als Potenzprodukt der  $m$  Basisgrößen  $A_j$  darstellen,

$$\begin{aligned}
[p_1] &= A_1^{b_{11}} \cdot A_2^{b_{21}} \cdot \dots \cdot A_m^{b_{m1}} \\
[p_2] &= A_1^{b_{12}} \cdot A_2^{b_{22}} \cdot \dots \cdot A_m^{b_{m2}} \\
&\vdots \\
[p_n] &= A_1^{b_{1n}} \cdot A_2^{b_{2n}} \cdot \dots \cdot A_m^{b_{mn}}.
\end{aligned}$$

Es stellt sich nun die folgende Grundfrage: Gibt es dimensionslose Kombinationen der Form

$$\Pi_i = p_1^{k_{1i}} \cdot p_2^{k_{2i}} \cdot \dots \cdot p_n^{k_{ni}},$$

und wieviele unabhängige solcher Kombinationen, d.h. Exponentenvektoren  $\underline{k}_i = (k_{1i}, k_{2i}, \dots, k_{ni})$  gibt

es? Man geht in der obigen Gleichung zu den Dimensionen über:

$$\begin{aligned} [\Pi_i] = 1 &= A_1^0 \cdot A_2^0 \cdot \dots \cdot A_r^0 \\ &= \left( A_1^{b_{11}} \cdot \dots \cdot A_m^{b_{m1}} \right)^{k_{1i}} \cdot \left( A_1^{b_{12}} \cdot \dots \cdot A_m^{b_{m2}} \right)^{k_{2i}} \cdot \dots \cdot \left( A_1^{b_{1n}} \cdot \dots \cdot A_m^{b_{mn}} \right)^{k_{ni}}. \end{aligned}$$

Ein Vergleich der Exponenten für jede der Basisgrößen  $A_j$  ergibt dann die Gleichungen

$$\begin{aligned} b_{11} \cdot k_{1i} + b_{12} \cdot k_{2i} + \dots + b_{1n} \cdot k_{ni} &= 0 \\ b_{21} \cdot k_{1i} + b_{22} \cdot k_{2i} + \dots + b_{2n} \cdot k_{ni} &= 0 \\ &\vdots \\ b_{m1} \cdot k_{1i} + b_{m2} \cdot k_{2i} + \dots + b_{mn} \cdot k_{ni} &= 0. \end{aligned}$$

Dies ist ein homogenes, lineares Gleichungssystem von  $m$  Gleichungen für  $n$  Unbekannte  $k_{1i}, k_{2i}, \dots, k_{ni}$ . Die Lösbarkeit dieses Gleichungssystems ist bestimmt durch den Rang  $r$  der *Dimensionsmatrix*  $\underline{\underline{B}} = \{b_{ij}\}$ , ( $i = 1 \dots m, j = 1 \dots n$ ). Die Exponenten können besonders übersichtlich in einer Matrix aufgeführt werden,

	$p_1$	$p_2$	$\dots$	$p_n$
$A_1$	$b_{11}$	$b_{12}$	$\dots$	$b_{1n}$
$A_2$	$b_{21}$	$b_{22}$	$\dots$	$b_{2n}$
$\vdots$	$\vdots$			
$A_m$	$b_{m1}$	$b_{m2}$	$\dots$	$b_{mn}$

Aus der linearen Algebra ist bekannt, dass ein homogenes, lineares Gleichungssystem der Ordnung  $n$ , dessen Koeffizientenmatrix den Rang  $r$  besitzt, genau  $n - r$  linear unabhängige Lösungen hat.

Es gibt also  $n - r$  unabhängige Exponentenvektoren  $\underline{k}_i$ .

### 3.3 Buckingham $\Pi$ -Theorem

Gegeben seien  $n$  dimensionsbehaftete meßbare physikalische Größen  $p_1, p_2, \dots, p_n$  und eine Relation  $\tilde{f}(p_1, p_2, \dots, p_n) = 0$  zwischen ihnen. Dann gibt es genau  $k = n - r$  unabhängige dimensionslose  $\Pi$ -Größen  $\Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_k$ , wobei  $r$  der Rang der zugehörigen Dimensionsmatrix  $\underline{\underline{B}}$  ist. Die Beziehung  $\tilde{f}(p_1, p_2, \dots, p_n) = 0$  läßt sich auf eine Beziehung von  $k$  dimensionslosen Größen reduzieren,

$$\Phi(\Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_k) = 0$$

.

### 3.4 Formalismus zur Dimensionsanalyse

Für die Dimensionsanalyse kann der Lösungsweg formalisiert und vereinfacht werden:

1. Aufstellen einer Liste aller dimensionsbehafteten Parameter  $\{p_1, p_2, p_3, \dots, p_n\}$  des Problems. Hierzu kann die Dimensionsmatrix verwendet werden.
2. Notieren der Anzahl  $n$  dieser Parameter.
3. Bestimmung der Anzahl  $r$  der unabhängigen Basisgrößen (Masseinheiten) des Problems.
4. Errechnen der Anzahl der möglichen dimensionslosen Parameter  $k = n - r$ .

5. Auswahl von  $r$  Parametern aus der Liste  $\{p_1, p_2, p_3, \dots, p_n\}$ , mit denen die unabhängigen Masseneinheiten erfasst werden, d.h. Einführung einer Liste mit Referenzparametern

$$\{\tilde{p}_1, \tilde{p}_2, \dots, \tilde{p}_r\} \subset \{p_1, p_2, p_3, \dots, p_n\} .$$

6. Beschreibung der Dimensionen der  $k$  restlichen Originalparameter mittels eines Produktansatzes aus den Dimensionen dieser Referenzparameter

$$[p_i] = [\tilde{p}_1]^{\alpha_{i1}} [\tilde{p}_2]^{\alpha_{i2}} \dots [\tilde{p}_r]^{\alpha_{ir}} \quad (i = 1 \dots k) .$$

7. Durch Vergleich der Exponenten im zugrundegelegten Masssystem ergibt sich für jeden der  $k$  Parameter ein lineares  $r \times r$  Gleichungssystem, welches gelöst werden kann und die Exponentengruppen  $\{\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \dots, \alpha_{ir}\}$ ,  $(i = 1 \dots k)$  festlegt.

8. Die  $k$  dimensionslosen Parameter können dann geschrieben werden als

$$\begin{aligned} \Pi_1 &= \frac{p_1}{\tilde{p}_1^{\alpha_{11}} \tilde{p}_2^{\alpha_{12}} \dots \tilde{p}_r^{\alpha_{1r}}} \\ \Pi_2 &= \frac{p_2}{\tilde{p}_1^{\alpha_{21}} \tilde{p}_2^{\alpha_{22}} \dots \tilde{p}_r^{\alpha_{2r}}} \\ &\vdots \\ \Pi_k &= \frac{p_k}{\tilde{p}_1^{\alpha_{k1}} \tilde{p}_2^{\alpha_{k2}} \dots \tilde{p}_r^{\alpha_{kr}}} \end{aligned}$$

**Beispiel:** Volumenstrom in einem Kreisrohr

Gegeben sei die Gesetzmässigkeit für den Volumenstrom in einem Kreisrohr, in Abhängigkeit von Parametern

$$\dot{V} = f\left(\mu, R, \frac{\partial p}{\partial x}\right) .$$

Eine andere Schreibweise für diesen Ausdruck ist

$$0 = \dot{V} - f\left(\mu, R, \frac{\partial p}{\partial x}\right) .$$

Die Parameter werden in einer Dimensionsmatrix aufgelistet:

	$\dot{V}$	$\mu$	$R$	$\partial p / \partial x$
M	0	1	0	1
L	3	-1	1	-2
T	-1	-1	0	-2

Die Gesamtzahl der Parameter ist  $n = 4$ , die Anzahl der benötigten Referenzparameter ist  $r = 3$ . Als diese Referenzparameter werden gewählt

$$\mu, \quad R \quad \text{und} \quad \frac{\partial p}{\partial x} .$$

Es kann somit nur ein dimensionsloser Parameter berechnet werden wegen

$$k = n - r = 4 - 3 = 1 .$$



Das Gleichungssystem für die Exponenten der Masseneinheiten ergibt sich zu

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_{11} \\ \alpha_{12} \\ \alpha_{13} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

(Anmerkung: Die Matrix des Gleichungssystems ergibt sich aus der Dimensionsmatrix.)

Die Lösung führt zu den Exponenten

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} \\ \alpha_{12} \\ \alpha_{13} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Im letzten Schritt wird der dimensionslose Parameter formuliert

$$\Pi_1 = \frac{\dot{V}}{\frac{1}{\mu} R^4 \frac{\partial p}{\partial x}} = \frac{\mu \dot{V}}{R^4 \frac{\partial p}{\partial x}},$$

bzw. die Proportionalität der Parameter zueinander, die im Sonderfall ( $k = 1$ ) folgt:

$$\frac{\mu \dot{V}}{R^4 \frac{\partial p}{\partial x}} = \text{konst.} \quad \Rightarrow \quad \dot{V} \propto \frac{R^4}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x}.$$

### 3.5 Ähnlichkeit und Modellierung

Die dimensionslose Beschreibung eines funktionalen Zusammenhangs kann dazu genutzt werden, Skalierungsgesetze für Ähnlichkeitsuntersuchungen herzuleiten. Dazu betrachte man zwei Messreihen, eine für ein Modell (Index  $m$ ) und eine für das Originalproblem (Index  $o$ )

$$\begin{aligned} \Phi^m(\Pi_1^m, \Pi_2^m, \dots, \Pi_k^m) &= 0 \\ \Phi^o(\Pi_1^o, \Pi_2^o, \dots, \Pi_k^o) &= 0. \end{aligned}$$

Man fordert nun, daß die Versuchsergebnisse am Modell denselben Gesetzmässigkeiten unterliegen wie das Original. Dann gilt für die Meßreihen

$$\Phi^m(\dots) = \Phi^o(\dots) = \Phi(\dots).$$

Daraus folgt automatisch (unter der Annahme einer eindeutigen Funktion  $\Phi$ ), daß auch gelten muß

$$\Pi_1^m = \Pi_1^o, \quad \Pi_2^m = \Pi_2^o, \quad \dots, \quad \Pi_k^m = \Pi_k^o,$$

d.h. die dimensionslosen Parameter von Modellversuch und Originalproblem sind identisch. Diese Identität erlaubt es nun, Messungen am Original durch Modellmessungen zu ersetzen. Insbesondere kann man auf die dimensionsbehafteten (und gegebenenfalls unbekannten) Parameter des Originals zurückschliessen, da gilt

$$\Pi_j^m = \frac{p_j^m}{(\tilde{p}_1^m)^{\alpha_{j1}} (\tilde{p}_2^m)^{\alpha_{j2}} \dots (\tilde{p}_r^m)^{\alpha_{jr}}} = \Pi_j^o = \frac{p_j^o}{(\tilde{p}_1^o)^{\alpha_{j1}} (\tilde{p}_2^o)^{\alpha_{j2}} \dots (\tilde{p}_r^o)^{\alpha_{jr}}} \quad (j = 1 \dots k)$$

oder

$$p_j^o = p_j^m \cdot \left( \frac{\tilde{p}_1^o}{\tilde{p}_1^m} \right)^{\alpha_{j1}} \cdot \left( \frac{\tilde{p}_2^o}{\tilde{p}_2^m} \right)^{\alpha_{j2}} \dots \left( \frac{\tilde{p}_r^o}{\tilde{p}_r^m} \right)^{\alpha_{jr}}.$$

### Strömungsmechanische Ähnlichkeit

Damit Modellversuch und korrespondierende Originalströmung sich ähnlich verhalten, müssen die dimensionslosen  $\Pi$ -Größen identisch sein. Man spricht in einem solchen Fall von strömungsmechanischer Ähnlichkeit.

### Reynolds-Ähnlichkeit

Bei Strömungen, bei denen als Parameter nur die Reynolds-Zahl auftritt, spricht man auch statt von strömungsmechanischer Ähnlichkeit einfach von Reynolds-Ähnlichkeit.

**Beispiel:** Kräfte auf ein Modell im Windkanal

Es werde ein Modellversuch durchgeführt, bei dem sich eine (gemessene) Beziehung zwischen der Kraft  $F$  auf das Modell und zwei weiteren dimensionslosen Parametern, der Reynolds-Zahl  $Re$  und der Mach-Zahl  $Ma$  ergibt:

$$\Phi^m \left( \frac{F}{\varrho U^2 L^2}, Re, Ma \right) = \Phi^m \left( \frac{F}{\varrho U^2 L^2}, \frac{\varrho U L}{\mu}, \frac{U}{a} \right) = 0.$$

Unter der Annahme, daß die Reynolds- und die Mach-Zahl zwischen Modell und Original übereinstimmen, ergeben sich die folgenden Beziehungen aus der Identität der dimensionslosen Parameter

$$\begin{aligned} Re^m = Re^o &\implies \frac{\varrho^m U^m L^m}{\mu^m} = \frac{\varrho^o U^o L^o}{\mu^o} \\ Ma^m = Ma^o &\implies \frac{U^m}{a^m} = \frac{U^o}{a^o} \end{aligned}$$

und damit für die gesuchte Kraft am Original

$$\frac{F^m}{\varrho^m (U^m)^2 (L^m)^2} = \frac{F^o}{\varrho^o (U^o)^2 (L^o)^2} \implies F^o = F^m \frac{\varrho^o}{\varrho^m} \left( \frac{U^o}{U^m} \right)^2 \left( \frac{L^o}{L^m} \right)^2.$$

### 3.6 Dimensionslose Kennzahlen

---

Reynolds-Zahl	$Re = u L / \nu$
Froude-Zahl	$Fr = u / \sqrt{g L}$
Mach-Zahl	$Ma = u / a$
Euler-Zahl	$Eu = p / (\varrho u^2) = (\gamma Ma^2)^{-1}$
Knudsen-Zahl	$Kn = \lambda_m / L = Ma / Re$
Weber-Zahl	$We = \varrho u^2 L / \sigma$
Strouhal-Zahl	$Str = L / (u t)$
Eckert-Zahl	$Ec = u^2 / (c_p \Delta T)$
Fourier-Zahl	$Fo = k t / L^2$
Grashof-Zahl	$Gr = g L^3 \alpha (T_{\text{Wand}} - T_\infty) / \nu^2$
Nusselt-Zahl	$Nu = \alpha L / k$
Péclet-Zahl	$Pe = u L / k$
Prandtl-Zahl	$Pr = \nu / k$
Rayleigh-Zahl	$Ra = Gr Pr$
Stokes-Zahl	$St = p L / (\mu u)$
Reibungskoeffizient	$c_f = \tau_W / ((\varrho/2) u^2)$
Druckkoeffizient	$c_p = \Delta p / ((\varrho/2) u^2)$
Auftriebsbeiwert	$c_L = F_L / ((\varrho/2) u^2 A)$
Widerstandsbeiwert	$c_D = F_D / ((\varrho/2) u^2 A)$
Momentenbeiwert	$\zeta_M = Ma / ((\varrho/2) R^5 \omega^2)$

---

Tabelle 3.2: Ausgewählte dimensionslose Kennzahlen

## Kapitel 4

### Kinematische Beschreibung des Strömungsfeldes

---

#### 4.1 Lagrangesche und Eulersche Beschreibung

##### Lagrangesche Beschreibung

In dieser Betrachtungsweise wird das Fluidpartikel in seiner Bewegung im Raum verfolgt. Die einzelnen Partikel können durch ihre Referenzposition  $\underline{\xi}_0$  zur Referenzzeit  $t_0$  identifiziert werden, und die Teilchenbahnen ergeben sich als

$$\underline{\xi} = \underline{\xi}(t; \underline{\xi}_0, t_0) .$$

Für die Geschwindigkeit  $\underline{u}$  des Partikels gilt

$$\underline{u}|_{\underline{\xi}_0, t_0} = \frac{d}{dt}\underline{\xi}(t) = \frac{\partial \underline{\xi}}{\partial t} \Big|_{\underline{\xi}_0, t_0} ,$$

für seine Beschleunigung

$$\underline{a}|_{\underline{\xi}_0, t_0} = \frac{d^2}{dt^2}\underline{\xi}(t) = \frac{\partial^2 \underline{\xi}}{\partial t^2} \Big|_{\underline{\xi}_0, t_0} .$$

Der Index  $\underline{\xi}_0, t_0$  manifestiert, daß die Ableitung bei fester Referenzlage, also für ein und dasselbe Teilchen, durchgeführt wird. Es handelt sich um eine **massen- bzw. teilchenfeste Beschreibung**.

##### Eulersche Beschreibung

Bei diesem Ansatz wird die Änderung der Strömungsgrößen an einer festen Stelle des Raumes betrachtet. An jedem Ort  $\underline{x}$  und zu jedem Zeitpunkt  $t$  ist der Wert einer Strömungsgrösse  $\phi(\underline{x}, t)$  eindeutig definiert durch den Wert von  $\phi$  für das zur Zeit  $t$  gerade im Punkt  $\underline{x}$  befindliche Fluidteilchen. Die Strömungsgrößen werden als **Feldgrößen** dargestellt, z.B.:

$$\underline{u}(\underline{x}, t) , \quad \varrho(\underline{x}, t) , \quad T(\underline{x}, t) \dots$$

	<b>Lagrange</b> (partikelbezogen)	<b>Euler</b> (raumfest)
Ort	Partikelposition $\underline{\xi}(t) = \underline{\xi}(t; \underline{\xi}_0, t_0)$	unabhängige Variable $\underline{x}, t$
Geschwindigkeit	Partikelgeschwindigkeit $\frac{d\underline{\xi}}{dt}$	Geschwindigkeitsfeld $\underline{u}(\underline{x}, t)$
Beschleunigung	Beschleunigung des Partikels $\frac{d^2\underline{\xi}}{dt^2}$	Beschleunigung, die ein strömendes Partikel in $(\underline{x}, t)$ erfährt $\frac{D}{Dt}\underline{u} = \frac{\partial}{\partial t}\underline{u} + (\underline{u} \cdot \nabla)\underline{u}$

Tabelle 4.1: Kinetische Beschreibung der Fluidbewegung

## 4.2 Substantielle Ableitung

Die Änderung einer Strömungsgrösse  $\phi$  für ein einzelnes Fluidpartikel, daß sich entlang seiner Bahnlinie bewegt, berechnet sich über die substantielle Ableitung:

$$\frac{D\phi}{Dt} = \underbrace{\frac{\partial\phi}{\partial t}}_{\text{lokale Ableitung}} + \underbrace{(\underline{u} \cdot \nabla)\phi}_{\text{konvektive Ableitung}}$$

Die im mitbewegten System wahrgenommene Änderung hat zwei Komponenten. Die *lokale Ableitung* beschreibt die Änderung, die ein (möglicherweise unbewegtes) Fluidpartikel dadurch wahrnimmt, daß sich das lokale Strömungsumfeld zeitlich ändert. Die *konvektive Ableitung* beschreibt die Änderung, die ein mit der Geschwindigkeit  $\underline{u}$  bewegtes Teilchen in einem räumlich variablen (aber möglicherweise zeitlich konstanten) Strömungsfeld erfährt.

In mathematischen Sinne stellt die konvektive Ableitung die Richtungsableitung von  $\phi$  in Richtung der lokalen Bewegungsrichtung des Fluidpartikels dar, multipliziert mit dem Betrag der lokalen Geschwindigkeit.

## 4.3 Reynolds-Transporttheorem

$\tilde{V}(t)$  sei ein mit dem Strömungsfeld  $\underline{u}(\underline{x}, t)$  mitbewegtes, “materielles” Volumen mit dem geschlossenen Rand  $\partial\tilde{V}(t) = \tilde{S}$  und der äußeren Normalen  $\underline{n}$ . Die Grösse  $\Psi(t)$  sei definiert durch

$$\Psi(t) = \int_{\tilde{V}(t)} \phi(\underline{x}, t) \, d\tilde{V} \quad ,$$

wobei  $\phi(\underline{x}, t)$  eine beliebige Funktion ist. Für die zeitliche Ableitung von  $\Psi$  gilt:

$$\frac{d\Psi}{dt} = \int_{\tilde{V}(t)} \frac{\partial\phi}{\partial t} \, d\tilde{V} + \int_{\partial\tilde{V}(t)=\tilde{S}} \phi \underline{u} \cdot \underline{n} \, d\tilde{S} \quad .$$

Sei  $V(t)$  ein beliebig bewegter, zeitabhängiger Integrationsbereich (“Kontrollvolumen”) mit dem Rand  $S(t) = \partial V(t)$  und der Geschwindigkeit des Randes  $\underline{u}_S$ . Dann gilt:

$$\frac{D\Psi}{Dt} = \frac{d}{dt} \int_{V(t)} \phi \, dV + \int_{S(t)} \phi [(\underline{u} - \underline{u}_S) \cdot \underline{n}] \, dS .$$

Wenn  $V$  ein ortsfestes Kontrollvolumen ist, ergibt sich

$$\frac{D\Psi}{Dt} = \frac{d}{dt} \int_V \phi \, dV + \int_S \phi \underline{u} \cdot \underline{n} \, dS .$$

#### 4.4 Kinematische Eigenschaften von Strömungen

##### Inkompressible Strömung und inkompressibles Fluid

Der thermodynamische Term “inkompressibles Fluid” und der fluiddynamische Begriff der “inkompressiblen Strömung” sind nicht notwendigerweise äquivalent. Es ist durchaus möglich, daß ein kompressibles Fluid inkompressibel strömt.

Von *inkompressibler Strömung* kann ausgegangen werden, wenn die Dichteänderungen eines Fluidpartikels vernachlässigbar sind. Mathematisch ist die Inkompressibilität über die Bedingung

$$\frac{D\rho}{Dt} = 0$$

definiert. Die Fluidpartikel müssen nicht alle die gleiche Dichte haben. Die einzige Bedingung ist, daß die Definition für jedes Fluidpartikel einzeln erfüllt ist. Ein Beispiel ist die Atmosphäre: Ihre Dichte ändert sich mit der Entfernung von der Erdoberfläche, die Dichte der einzelnen Fluidpartikel bleibt aber konstant in einer Strömungsebene (geschichtete Strömung).

In einem *inkompressiblen Fluid* hingegen wird die stärker einschränkende Annahme

$$\rho = \text{konst.}$$

gemacht.

##### Stationäre Strömung

Eine Strömung wird als stationär bezeichnet, wenn alle ihre Eigenschaften (Druck, Geschwindigkeit, Dichte etc.) an einem festen Ort zeitunabhängig sind, d.h. es gilt im Eulerschen Sinne

$$\frac{\partial}{\partial t} = 0 .$$

Dabei impliziert weder  $\partial/\partial t = 0$ , daß  $D/Dt = 0$ , noch folgt aus  $D/Dt = 0$ , daß  $\partial/\partial t = 0$ .

**Beispiel:** Stationäre Strömung eines inkompressiblen Fluids in einer Düse

Es gilt hier für das Geschwindigkeitsfeld

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial u}{\partial x} \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{Du}{Dt} \neq 0,$$

d.h. ein Fluidpartikel erfährt eine Beschleunigung entlang seiner Trajektorie in der Düse, obwohl das Strömungsfeld zeitlich konstant bleibt.

### Gleichförmige Strömung

Eine Strömung wird als gleichförmig (uniform) bezeichnet, wenn die Strömungsgeschwindigkeit im gesamten Raum ortsunabhängig ist, d.h.

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_j} = 0 .$$

Die Stromlinien solcher Strömungen müssen gerade und parallel sein. Sind sie nicht gerade, wird der Geschwindigkeitsvektor eine Richtungsänderung erfahren. Sind sie nicht parallel, ändert sich die Geschwindigkeit entlang der Stromlinien.

### Ausgebildete Strömung

Die ausgebildete Strömung ist eine schwächere Form der gleichförmigen Strömung. Es wird nur angenommen, daß sich die Strömungsgeschwindigkeit nicht entlang der Hauptströmungsrichtung ändert. Als Beispiel diene die Rohrströmung ( Strömungsrichtung  $x$ ). Hier sind  $\partial p / \partial x = \text{konst.}$  bzw.  $\partial T / \partial x = \text{konst.}$  zugelassen,  $\underline{u}(x)$  aber nicht.

### Wirbelstärke

Der Wirbelstärkevektor  $\underline{\omega}$  ist über die Rotation des Geschwindigkeitsfeldes definiert:  $\underline{\omega} = \nabla \times \underline{u} = \text{rot } \underline{u}$ . In kartesischen Koordinaten  $\underline{x} = (x, y, z)^T$  gilt

$$\underline{\omega} = \nabla \times \underline{u} = \underline{e}_x \left( \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) + \underline{e}_y \left( \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \underline{e}_z \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) ,$$

in Zylinderkoordinaten  $\underline{x} = (r, \theta, x)^T$

$$\underline{\omega} = \nabla \times \underline{u} = \underline{e}_r \left( \frac{1}{r} \frac{\partial u_x}{\partial \theta} - \frac{\partial u_\theta}{\partial x} \right) + \underline{e}_\theta \left( \frac{\partial u_r}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial r} \right) + \underline{e}_x \left( \frac{1}{r} \left[ \frac{\partial(r u_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right] \right) .$$

## 4.5 Ausgezeichnete Linien

Eine **Stromlinie** ist eine Kurve, die in jedem Punkt tangential zum momentanen Geschwindigkeitsfeld verläuft, d.h. es gilt

$$d\underline{x} \times \underline{u} \equiv 0 ,$$

bzw. in parameterfreier Darstellung

$$\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v} = \frac{dz}{w} .$$

Stromlinien können als “Momentaufnahme” der Strömung aufgefasst werden. Sie sind auch als Integralkurven  $\underline{x}(s)$  des momentanen Geschwindigkeitsfeldes definierbar

$$\frac{d\underline{x}}{ds} = \underline{u}(\underline{x}(s); t) ,$$

wobei  $s$  der Kurvenparameter ist. Für eine stationäre Strömung sind Stromlinien zeitlich unveränderliche Kurven im Raum.

Eine **Bahnlinie** ist der Pfad eines Fluidpartikels. Sie entspricht der Trajektorie  $\underline{\xi}(t)$  eines Partikels, die bei “Langzeitbelichtung” der Strömung entsteht. Sie wird beschrieben durch

$$\frac{d\underline{\xi}}{dt} = \underline{u}(\underline{\xi}(t), t) , \quad \underline{\xi}(t_0) = \underline{\xi}_0 .$$

Eine **Streichlinie** ist der Pfad aller Fluidpartikel, die durch einen festen Referenzpunkt gelaufen sind. Der sich bei einer Rauchsonde ergebende Rauchfaden entspricht einer Streichlinie.

Eine **Zeitlinie** ist die Linie von Teilchen, die sich zu einem früheren Zeitpunkt  $t_0$  auf einer Kurve befanden. Eine Zeitlinie kann z.B. durch Wasserstoffbläschen visualisiert werden, die entlang einer Linie momentan erzeugt wurden.

Für eine stationäre Strömung gilt der wichtige Sonderfall:

$$\boxed{\text{Stromlinie} = \text{Bahnlinie} = \text{Streichlinie}}$$

#### Beispiel: 2D Staupunktströmung

Gegeben seien die Teilchenbahnen in einer 2D Strömung,

$$\underline{\xi}(t; \underline{\xi}_0, t_0) = \begin{pmatrix} \xi(t) \\ \eta(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi_0 \exp[A(t - t_0)] \\ \eta_0 \exp[-A(t - t_0)] \end{pmatrix}$$

Die Geschwindigkeit der Teilchen ergibt sich damit zu

$$\dot{\underline{\xi}} = \frac{d\underline{\xi}}{dt} = \begin{pmatrix} A\xi_0 \exp[A(t - t_0)] \\ -A\eta_0 \exp[-A(t - t_0)] \end{pmatrix}$$

Das Eulersche Geschwindigkeitsfeld ist definiert durch die Geschwindigkeit des Teilchens, das zum Zeitpunkt  $t$  durch den Punkt  $(x, y)$  fließt,

$$\underline{\xi} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi_0 \exp[A(t - t_0)] \\ \eta_0 \exp[-A(t - t_0)] \end{pmatrix},$$

womit folgt

$$\underline{u}(\underline{\xi} = \underline{x}, t) = \begin{pmatrix} A\xi_0 \exp[A(t - t_0)] \\ -A\eta_0 \exp[-A(t - t_0)] \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix}.$$

Man beachte, daß keine explizite Zeitabhängigkeit mehr vorhanden ist - die Strömung ist stationär. Die Stromlinien ergeben sich aus dem Geschwindigkeitsfeld mit der Definition

$$\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v} \quad ; \quad \frac{dx}{x} = \frac{-dy}{y}$$

nach Bestimmung der Integrationskonstante zu

$$y = \frac{x_0 y_0}{x}.$$

Da die Strömung stationär ist, sind die Stromlinien und Bahnlinien identisch; es gilt

$$xy = \text{konst.} = x_0 y_0$$

bzw.

$$\xi\eta = \text{konst.} = \xi_0 \eta_0$$

entlang der Integralkurven.

## 4.6 Stromfunktion

Das Geschwindigkeitsfeld wird definiert über die Rotation der Stromfunktion  $\underline{\Psi}$ , die im allgemeinen Fall ein Vektorfeld ist. Im 2D-Fall hat  $\underline{\Psi}$  nur eine Komponente und kann als Skalar  $\Psi$  aufgefasst werden.

$$\underline{u} = \underline{\nabla} \times \underline{\Psi} \text{ , } \quad 2\text{D-Fall : } \underline{u} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \Psi}{\partial y} \\ -\frac{\partial \Psi}{\partial x} \end{pmatrix}_{x,y}$$

Das so definierte Geschwindigkeitsfeld erfüllt die (inkompressible) Kontinuitätsgleichung (da  $\text{div } \underline{u} = \text{div rot } \underline{\Psi} = 0$ ).

Auf Stromlinien gilt  $\Psi = \text{konst.}$  Der Volumenstrom zwischen zwei Stromlinien kann aus der Differenz der entsprechenden Werte der Stromfunktion berechnet werden

$$\dot{V}_{21} = \Psi_2 - \Psi_1 \text{ .}$$

Der Massenfluß berechnet sich über

$$\dot{m}_{21} = \rho b (\Psi_2 - \Psi_1)$$

mit  $b$  als Breite der Fluidschicht in z-Richtung.



## Kapitel 5

### Erhaltungssätze

---

#### 5.1 Massenerhaltung

Die Masse eines materiellen Volumens Fluidelementes bleibt per Definition erhalten, d.h. es gilt im mitbewegten System:

$$\frac{Dm}{Dt} = 0$$

##### 5.1.1 Integrale Formulierung

Begreift man die Masse als das Integral der Dichte über das Volumen  $V$

$$m = \int_V \varrho \, dV$$

ergibt sich der Massenerhaltungssatz aus dem Transporttheorem für ein raumfestes Kontrollvolumen zu

$$\frac{Dm}{Dt} = \underbrace{\frac{d}{dt} \int_V \varrho \, dV}_{\text{Massenänderung im Gebiet}} + \underbrace{\int_S \varrho \underline{u} \cdot \underline{n} \, dS}_{\text{Massenfluss über den Gebietsrand}} = 0 .$$

##### 5.1.2 Stromröhren

Aus dem Massenerhaltungssatz für stationäre Strömungen ( $\partial/\partial t = 0$ ) durch Stromröhren mit Endflächen senkrecht zur Anströmung folgt:

$$\int_S \varrho \underline{u} \cdot \underline{n} \, dS = 0 \quad \Rightarrow \quad \varrho_1 \cdot u_1 \cdot S_1 = \varrho_2 \cdot u_2 \cdot S_2 \quad \Rightarrow \quad \dot{m}_1 = \dot{m}_2$$

(Die Fläche  $|_1$  wird hierbei als die Einströmfläche verstanden, die Fläche  $|_2$  als die Ausströmfläche.)

##### 5.1.3 Differentielle Form - Kontinuitätsgleichung

Die differentielle Form des Massenerhaltungssatzes ergibt sich aus der integralen Form unter Anwendung des Gaußschen Satzes zu

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \nabla \cdot (\varrho \underline{u}) = 0 .$$

Diese Gleichung wird auch *Kontinuitätsgleichung* genannt.

Für *inkompressible Strömungen* vereinfacht sich der obige Ausdruck zu

$$\nabla \cdot \underline{u} = 0 .$$

## 5.2 Impulserhaltung

Die zeitliche Änderung des Impulses eines Fluidelementes ist gleich der Summe der daran angreifenden Kräfte:

$$\frac{D\underline{P}}{Dt} = \sum \underline{F}$$

### 5.2.1 Integrale Formulierung

Wird der Impuls  $\underline{P}$  integral beschrieben als

$$\underline{P} = \int_V \varrho \underline{u} dV,$$

geht der Impulserhaltungssatz für ein raumfestes Kontrollvolumen unter Aufzählung aller auftretenden Kräfte über in:

$$\frac{D\underline{P}}{Dt} = \underbrace{\frac{d}{dt} \int_V \varrho \underline{u} dV}_{\text{Impulsänderung im Gebiet}} + \underbrace{\int_S \varrho \underline{u} (\underline{u} \cdot \underline{n}) dS}_{\text{Impulsfluss über den Gebietsrand}} = \underbrace{- \int_S p \underline{n} dS}_{\text{Druckkräfte}} + \underbrace{\int_V \varrho \underline{f} dV}_{\text{Volumenkräfte}} + \underbrace{\int_S \underline{\tau} \cdot \underline{n} dS}_{\text{Oberflächenscherkräfte}} + \underbrace{\underline{F}_{ext}}_{\text{äussere Kräfte}}$$

Die äusseren Kräfte stellen dabei z.B. Haltekräfte dar.

### 5.2.2 Stromröhren

Es sei vorausgesetzt, daß die Strömung stationär ( $\partial/\partial t = 0$ ) und reibungsfrei ( $\underline{\tau} = 0$ ) ist, es sollen keine Volumenkräfte wirken ( $\underline{f} = 0$ ), ebensowenig wie äussere Kräfte ( $\underline{F}_{ext} = 0$ ). Die Endflächen der Stromröhre seien senkrecht zur Anströmung orientiert. Dann gilt:

$$\begin{aligned} \int_S \varrho \underline{u} (\underline{u} \cdot \underline{n}) dS &= - \int_S p \underline{n} dS \\ \Rightarrow (p_1 + \varrho_1 u_1^2) S_1 \underline{n}_1 + (p_2 + \varrho_2 u_2^2) S_2 \underline{n}_2 &= - \int_{Mantel} p \underline{n} dS = \underline{F}_M \end{aligned}$$

$\underline{F}_M$  entspricht hier der Druckkraft auf den Mantel der Stromröhre. Es wurde wiederum angenommen, daß die Fläche  $|_1$  die Einstromfläche bezeichnet, die Fläche  $|_2$  die Ausstromfläche.

**Vorgehensweise** bei der Anwendung des Impulssatzes:

1. Koordinatensystem festlegen
2. Wahl des Kontrollvolumens
  - einfach zusammenhängend
  - unter Ausnutzung von Randbedingungen (Kanalwand,  $p_\infty$ )
  - unter Ausnutzung geometrischer Vereinfachungen ( $\underline{u}$  senkrecht zu den Grenzen des Kontrollvolumens, Grenzen parallel zu den Achsen des Koordinatensystems)
3. Impulsströme eintragen
4. Körperkräfte eintragen
5. Drücke eintragen
6. Impulssatz aufstellen

**Hinweise:**

- A. Für die Berechnung der Geschwindigkeitsänderungen wird die Kontinuitätsgleichung herangezogen.
- B. Beim Berechnen der Drücke kann die Bernoulli-Gleichung helfen (siehe Kapitel 5.2.4.2).

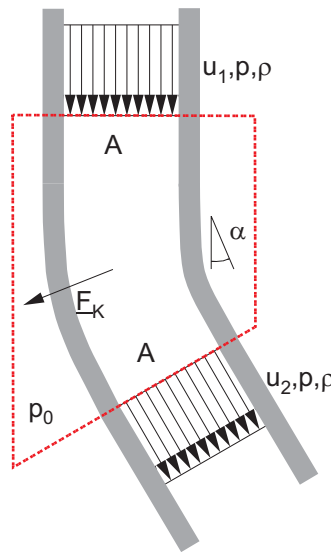
**Beispiel:** Kraft auf einen Rohrkrümmer

Abbildung 5.1: Strömung durch einen Rohrkrümmer

Die Strömung sei stationär und inkompressibel. Der Querschnitt  $A$  bleibe unverändert ebenso wie der Druck  $p$  im Rohr.

Die Kontinuitätsgleichung liefert für das Kontrollvolumen

$$u_1 = u_2 .$$

Der Impulssatz hat als Vektorgleichung zwei Komponenten, die beide ausgewertet werden müssen. Es ergibt sich für die  $x$ -Komponente

$$\rho (+u_2 \sin \alpha) (+u_2) A = - (p - p_0) A \sin \alpha + F_x ,$$

und für die  $y$ -Komponente

$$\rho (-u_1) (-u_1) A + \rho (-u_2 \cos \alpha) (+u_2) A = - (p - p_0) A - (p - p_0) A (-\cos \alpha) + F_y .$$

Die Kraftkomponenten im Impulssatz,  $F_x$  und  $F_y$ , beschreiben die Kraft *auf das Fluid*. Die Kraft auf den Krümmer hat dementsprechend genau die umgekehrte Richtung, d.h.

$$\underline{F}_K = - \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} - (\rho u_2^2 + p - p_0) A \sin \alpha \\ - (\rho u_1^2 + p - p_0) A (1 - \cos \alpha) \end{pmatrix} .$$

### 5.2.3 Differentielle Form

Die differentielle Form des Impulserhaltungssatzes ergibt sich aus der integralen Form zu:

$$\frac{\partial(\varrho \underline{u})}{\partial t} + \nabla \cdot (\varrho \underline{u} \underline{u}) = \underbrace{-\nabla p}_{\text{Druck-}} + \underbrace{\varrho \underline{f}}_{\text{Kraft-}} + \underbrace{\nabla \cdot \underline{\tau}}_{\text{Schub-}}$$

Die externen Kräfte haben keine Entsprechung in der differentiellen Formulierung. Unter Verwendung der Kontinuitätsgleichung kann man auch schreiben:

$$\varrho \frac{D\underline{u}}{Dt} = -\nabla p + \varrho \underline{f} + \nabla \cdot \underline{\tau}.$$

### 5.2.4 Impulserhaltung für reibungsfreie Strömungen

#### 5.2.4.1 Euler-Gleichung

Die Impulsgleichung wird unter Annahme eines perfekten Fluides, d.h. durch Vernachlässigung der Reibung ( $\underline{\tau} = 0$ ), vereinfacht:

$$\frac{D\underline{u}}{Dt} = \frac{\partial \underline{u}}{\partial t} + (\underline{u} \cdot \nabla) \underline{u} = -\frac{1}{\varrho} \nabla p + \underline{f}$$

Diese Beziehung wird *Euler-Gleichung* genannt. Als **Randbedingungen** gelten:

1. An einer festen Wand:  
 $\underline{n} \cdot \underline{u} = 0$ , d.h.  $u_{\perp} \equiv 0$  und  $u_{\parallel}$  ist nicht bestimmt.
2. An der Trennfläche zweier Fluide (ohne Grenzflächenspannung):  
 $\underline{n} \cdot \underline{u}_1 = \underline{n} \cdot \underline{u}_2$ , d.h.  $u_{\perp,1} = u_{\perp,2}$  wobei  $u_{\parallel,1}$  und  $u_{\parallel,2}$  unbestimmt bleiben.  
Ausserdem gilt  $p_1 = p_2$ , d.h. die Gleichheit der Drücke.

#### 5.2.4.2 Bernoulli-Gleichung

Aus der Euler-Gleichung kann durch Integration entlang einer Stromlinie unter Annahme der Inkompressibilität ( $\varrho = \text{konst.}$ ) die *Bernoulli-Gleichung* hergeleitet werden. Das Kraftfeld sei konservativ und es existiere ein Potential  $U$  für die Kräfte

$$\underline{f} = -\nabla U.$$

Zwischen zwei Punkten einer Stromlinie gilt unter diesen Voraussetzungen zu einem festen Zeitpunkt:

$$\int_1^2 \frac{\partial \underline{u}}{\partial t} \cdot d\underline{s} + \left[ \frac{u^2}{2} + \frac{p}{\varrho} + U \right]_1^2 = 0$$

Die Annahme einer stationären Strömung vereinfacht die Gleichung zusätzlich:

$$\left[ \frac{u^2}{2} + \frac{p}{\varrho} + U \right]_1^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{u^2}{2} + \frac{p}{\varrho} + U = \text{konst.}$$

Die spezifische mechanische Energie oder *Bernoulli-Konstante* ist entlang einer Stromlinie konstant, aber von Stromlinie zu Stromlinie im allgemeinen verschieden.

(Die Bernoulli-Gleichung kann auch ausgehend von der Navier-Stokes-Impulsgleichung hergeleitet werden. Dabei wird die Strömung als rotations- ( $\nabla \times \underline{u} = \underline{0}$ ) und reibungsfrei ( $\underline{\tau} = 0$ ) angenommen. Unter diesen Voraussetzungen gilt die Gleichung im ganzen Strömungsfeld.)

Die Bernoulli-Gleichung kann dimensionell als eine Bilanzgleichung für die spezifische mechanische Energie interpretiert werden. Sie sollte jedoch *nicht* für die Energiegleichung substituiert werden.

**Vorgehensweise** bei der Anwendung der Bernoulli-Gleichung:

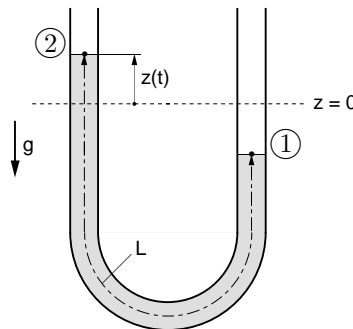
1. Anfangs- und Endpunkt der Stromlinie festlegen
2. Bernoulli-Gleichung aufstellen
3. Bekannte Größen einsetzen
4. Umformen

**Hinweise:**

- A. An freien Oberflächen herrscht meist Umgebungsdruck.
- B. Die Gleichung darf nicht über Stellen angewendet werden, an denen mechanische Energie zugeführt oder entzogen wird (Propeller, Turbulenz durch Strömungsabrisß etc.).
- C. In sehr grossen Querschnitten (relativ zur betrachteten Stromröhre) kann die Geschwindigkeit meist vernachlässigt werden.

**Beispiel:** Schwingung in einem U-Rohr

Ein inkompressibles, reibungsfreies Fluid befindet sich in einem offenen U-Rohr mit konstantem Querschnitt.



Gesucht ist die Schwingungsgleichung des Systems. Diese folgt aus der Bernoulli-Gleichung von 1 nach 2. An den Stellen 1 und 2 herrscht Umgebungsdruck:  $p_2 = p_1 = p_0$ . Aus der Kontinuität für eine Stromröhre folgt, dass die Geschwindigkeit im ganzen U-Rohr ausschliesslich eine Funktion der Zeit ist:  $u_1(t) = u_2(t) = \dot{z}(t)$ . Das Integral der Geschwindigkeitsänderung  $\frac{\partial u}{\partial t}$  wird zu  $L\ddot{z}$ . Das Potential an der Stelle 1 ist  $U_1 = -gz$ , an der Stelle 2  $U_2 = gz$ . Einsetzen in die instationäre Bernoulli-Gleichung ergibt die Schwingungsgleichung

$$\ddot{z} + \frac{2g}{L}z = 0 .$$

### 5.2.4.3 Barotrope und barokline Strömungen

Eine Strömung wird *barotrop* genannt, wenn die Dichte nur vom Druck abhängt:

$$\varrho = \varrho(p)$$

Dies ist trivialerweise erfüllt für inkompressible ( $\varrho = \text{konst.}$ ) Strömungen eines Fluids, aber gilt auch für isotherme ( $T = \text{konst.}$ ) bzw. isentrope ( $s = \text{konst.}$ ) Strömungen eines idealen Gases.

Im allgemeinen ist die Dichte auch von der Temperatur abhängig. Man spricht dann von einer *baroklinen* Strömung:

$$\varrho = \varrho(p, T)$$

Für barotrope Strömungen ist  $1/\varrho \nabla p$  rotationsfrei (für barokline Strömungen gilt das nicht). Unter Berücksichtigung dieser Annahme kann eine allgemeinere Form der Bernoulli-Gleichung hergeleitet werden:

$$\int_1^2 \frac{\partial \underline{u}}{\partial t} \cdot d\underline{s} + \left[ \frac{\underline{u}^2}{2} + U \right]_1^2 + \int_1^2 \frac{dp}{\varrho(p)} = 0$$

In Sonderfall einer isentropen Strömung eines idealen Gases gilt wegen  $dh = Tds + dp/\varrho = dp/\varrho$

$$\int_2^1 \frac{\partial \underline{u}}{\partial t} \cdot d\underline{s} + \left[ \frac{\underline{u}^2}{2} + U + h \right]_1^2 = 0$$

### 5.3 Energieerhaltung

Die Energie eines Systems ändert sich durch Zuführen bzw. Abführen von Wärmeströmen oder durch Abgabe bzw. Aufnahme von mechanischer Leistung:

$$\frac{DE}{Dt} = \sum_i \underline{F}_i \cdot \underline{u} + \sum_i \dot{Q}_i$$

#### 5.3.1 Integrale Formulierung

Die totale innere Energie  $e_T$  ist definiert durch:

$$e_T = \varrho \left( e + \frac{\underline{u}^2}{2} \right)$$

Für die Erhaltung der totalen inneren Energie in einem raumfesten Kontrollvolumen  $V$ , das durch den Rand  $S$  umschlossen ist, gilt:

$$\begin{aligned} \frac{DE}{Dt} &= \underbrace{\frac{d}{dt} \int_V \varrho \left( e + \frac{\underline{u}^2}{2} \right) dV}_{\text{Energieänderung im KV}} + \underbrace{\int_S \varrho \left( e + \frac{\underline{u}^2}{2} \right) (\underline{u} \cdot \underline{n}) dS}_{\text{Energiefluss über die Grenzen des KV}} \\ &= \underbrace{\int_V \varrho \underline{f} \cdot \underline{u} dV}_{\text{Volumenarbeit}} + \underbrace{\int_S (\underline{\sigma} \cdot \underline{u}) \cdot \underline{n} dS}_{\text{Oberflächenarbeit}} + \underbrace{\int_V \varrho q_V dV}_{\text{volumetrische Quellen}} - \underbrace{\int_S \underline{q} \cdot \underline{n} dS}_{\text{Wärmeströme}} \end{aligned}$$

Die Wärmestromdichte  $\underline{q}$  kann über das *Gesetz von Fourier* berechnet werden:

$$\underline{q} = -k \nabla T .$$

### 5.3.2 Differentielle Formulierung

Aus der obigen Form des Energiesatzes kann die differentielle Form für die *Gesamtenergie* hergeleitet werden:

$$\frac{d}{dt} \left[ \rho \left( e + \frac{u^2}{2} \right) \right] + \operatorname{div} \left[ \rho \underline{u} \left( e + \frac{u^2}{2} \right) \right] = \rho \underline{f} \cdot \underline{u} + \operatorname{div} (\underline{\sigma} \cdot \underline{u}) + \rho q_V - \operatorname{div} \underline{q}$$

Eine Erhaltungsgleichung für die *innere Energie* kann hergeleitet werden, indem man eine Gleichung für die kinetische Energie (aus dem Impulssatz, durch Multiplikation mit dem Geschwindigkeitsvektor) subtrahiert:

$$\underbrace{\rho \frac{\partial e}{\partial t} + \rho \underline{u} \cdot \nabla e}_{\text{substantielle Ableitung}} = - \underbrace{\nabla \cdot \underline{q}}_{\text{Wärmeleitung}} - \underbrace{p \nabla \cdot \underline{u}}_{\text{Druckarbeit}} + \underbrace{\underline{\tau} : \nabla \underline{u}}_{\text{Dissipation}} + \underbrace{\rho q_V}_{\text{Wärmequellen}}$$

Der Energiesatz kann auch unter Verwendung der *Enthalpie* formuliert werden:

$$\rho \frac{Dh}{Dt} = \frac{Dp}{Dt} - \nabla \cdot \underline{q} + \underline{\tau} : \nabla \underline{u} + \rho q_V$$

Die Enthalpie  $h$  ist definiert über

$$h = e + \frac{p}{\rho}.$$

**Vorgehensweise** bei der Anwendung:

1. Kontinuitätsgleichung und Impulssatz lösen für alle Koordinaten
2. Einsetzen in den Energiesatz
3. Differentialgleichung lösen

Bedeutung möglicher **Hinweise** in der Aufgabenstellung:

- A. Vernachlässigbare Wärmeleitung  $-\nabla \cdot \underline{q} = 0$
- B. Vernachlässigbare Dissipation  $\underline{\tau} : \nabla \underline{u} = 0$
- C. Newtonsches Fluid  $\tau_{ij} = \mu (\partial u_j / \partial x_i + \partial u_i / \partial x_j)$
- D. Stationär  $\partial / \partial t = 0$
- E. Adiabate Wand  $\underline{q}_W = 0$
- F. Isotherme Wand  $T_W = \text{konst.}$
- G. Mit konstantem Wärmestrom geheizte Wand  $\underline{q}_W = \text{konst.}$

### 5.3.3 Sonderfälle

#### 5.3.3.1 Energieerhaltung für inkompressible Strömungen

Es gilt die Kontinuitätsgleichung für inkompressible Strömungen

$$\nabla \cdot \underline{u} = 0.$$

Es wird nicht zwischen isobarer ( $c_p$ ) und isochorer ( $c_v$ ) Wärmekapazität unterschieden. Für ein kalorisch perfektes Fluid gilt für das Differential von  $e$ :

$$De = c DT$$

Unter diesen Bedingungen vereinfacht sich der Energiesatz zu:

$$\varrho c \frac{DT}{Dt} = -\underline{\nabla} \cdot \underline{q} + \underline{\tau} : \underline{\nabla} \underline{u} + \varrho q_V$$

Treten keine Wärmeleitung und keine Reibung auf, und sind keine Wärmequellen oder -senken vorhanden, gilt  $DT/Dt = 0$ , und damit ist  $T = konst.$  für ein mitbewegtes Fluidpartikel.

### 5.3.3.2 Perfektes Gas ohne Reibung

Ein perfektes Gas ist ein ideales Gas mit konstanten Wärmekapazitäten. Es gilt

$$\frac{p}{\varrho} = RT, \quad dh = c_p dT, \quad a^2 = \gamma RT.$$

Aus dem Energiesatz folgt:

$$\varrho \frac{D}{Dt} \left( h + \frac{\underline{u}^2}{2} \right) = -\underline{\nabla} \cdot \underline{q} + \frac{\partial p}{\partial t} + \underline{\nabla} \cdot (\underline{\tau} \cdot \underline{u}) + \varrho \underline{f} \cdot \underline{u} + \varrho q_V$$

Tritt keine Wärmeleitung auf, sind keine Wärmequellen vorhanden und ist die Strömung reibungsfrei sowie stationär mit  $\underline{f} = 0$ , vereinfacht sich die Aussage zu

$$\underline{u} \cdot \underline{\nabla} \left( h + \frac{\underline{u}^2}{2} \right) = 0.$$

Entlang der Stromlinien gilt die Gleichung

$$c_p T + \frac{1}{2} \underline{u}^2 = konst.,$$

die auch *kompresible Bernoulli-Gleichung* genannt wird.



## Kapitel 6

### Reibungsbehaftete Strömungen

---

#### 6.1 Navier-Stokes-Gleichung

Mit dem Newtonschen Schubspannungsansatz unter Annahme konstanter kinematischer Viskosität  $\nu = \text{konst.}$  geht aus dem Impulssatz für reibungsbehaftete inkompressible Strömungen die Navier-Stokes-Gleichung

$$\frac{D\underline{u}}{Dt} = -\frac{1}{\varrho}\nabla p + \nu\Delta\underline{u} + \underline{f}$$

hervor. Analog zur vektoriellen kann auch die tensorielle Schreibweise benutzt werden. In kartesischen Koordinaten gilt:

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial}{\partial x_j} u_i = -\frac{1}{\varrho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} u_i + f_i .$$

Die Kontinuitätsgleichung für den inkompressiblen Fall lautet

$$\nabla \cdot \underline{u} = 0 ,$$

bzw. in Tensor-Notation

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 .$$

**Randbedingungen:**

1. An festen Wänden gilt die Haftbedingung ("no-slip condition"):

$$\underline{u}_{Fluid} = \underline{u}_{Wand} .$$

2. An Phasentrennflächen ohne Grenzflächenspannung gilt:

$\underline{u}_1 = \underline{u}_2$  , d.h. die Geschwindigkeiten sind kontinuierlich über die Trennfläche, sowie  $\underline{\sigma}_1 \cdot \underline{n} = \underline{\sigma}_2 \cdot \underline{n}$  .  
Die zweite Bedingung lässt sich weiter aufspalten in die Gleichheit der Drücke,  $p_1 = p_2$  ,  
und die Gleichheit der Scherkraftkomponenten an der Trennfläche,  $\underline{\tau}_1 \cdot \underline{n} = \underline{\tau}_2 \cdot \underline{n}$  .

Bedeutung möglicher **Hinweise** in der Aufgabenstellung:

- A. Keine Feldkräfte  $\underline{f} = 0$
- B. Reibung sei vernachlässigbar  $\nu \Delta \underline{u} = 0$
- C. Stationär  $\partial/\partial t = 0$

#### 6.2 Exakte Lösungen

##### Ebene Couette-Strömung

Vorausgesetzt sei eine ausgebildete Schichtenströmung eines inkompressiblen Mediums im ebenen Spalt ( $-h \leq y \leq h$ ), wobei die untere Wand ruht und die obere sich in einer Ebene mit  $U$  bewegt. Es gilt:

$$u = u(y) , \quad w = 0 .$$

Die Kontinuitätsgleichung führt zur Aussage  $v = 0$ . Unter Vernachlässigung der Volumenkräfte vereinfachen sich die Impulsgleichungen zu:

$$\frac{1}{\varrho} \frac{\partial p(x)}{\partial x} = \nu \frac{d^2 u(y)}{dy^2}$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial p}{\partial z} = 0$$

Aus der ersten Gleichung folgt:

$$\frac{dp(x)}{dx} = \text{konst.} = \mu \frac{d^2 u(y)}{dy^2} .$$

Der Druckgradient ist also konstant. Das Geschwindigkeitsprofil ergibt sich, unter Einbeziehung der Randbedingungen

$$u(-h) = 0 , \quad u(h) = U , \quad \frac{dp}{dx} = 0 ,$$

zu einer linearen Funktion

$$u(y) = \frac{U}{2} \left( 1 + \frac{y}{h} \right) .$$

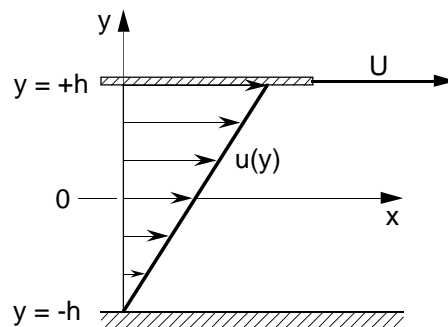


Abbildung 6.1: Ebene Couette-Strömung

### Poiseuille-Strömung im Spalt

Wieder wird eine ausgebildete Schichtenströmung eines inkompressiblen Mediums im ebenen Spalt betrachtet, wobei jetzt ein Druckgradient  $dp/dx$  aufgeprägt sei und beide Wände in Ruhe sind (Wandhaftung wird bei  $y = h$  und  $y = -h$  angenommen).

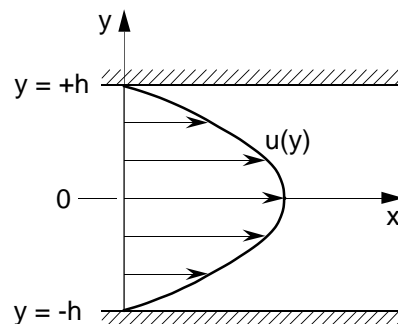


Abbildung 6.2: Poiseuille-Strömung im Spalt

Das Geschwindigkeitsprofil ergibt sich zu einer parabolischen Funktion

$$u(y) = -\frac{h^2}{2\mu} \frac{dp}{dx} \left(1 - \frac{y^2}{h^2}\right) = u_{max} \left(1 - \frac{y^2}{h^2}\right), \quad u_{max} = u(y=0).$$

Die Lösung entspricht völlig der Rohrströmung, die im folgenden diskutiert wird.

### Hagen-Poiseuille-Strömung

Eine horizontale, kreisrunde Rohrstrecke wird betrachtet, die Strömung sei stationär, inkompressibel und ausgebildet. Die Volumenkräfte werden vernachlässigt. Das Problem ist axialsymmetrisch und unabhängig von der Winkelkoordinate  $\theta$ . Somit gilt

$$u_\theta = 0, \quad \frac{\partial u_x}{\partial r} \Big|_{r=0} = 0.$$

Wandhaftung ist an den Rohrwänden anzunehmen

$$u_x(r=R) = 0, \quad u_r(r=R) = 0.$$

Aus der Kontinuitätsgleichung folgt

$$u_r = 0.$$

Aus den Navier-Stokes-Gleichungen ergibt sich das Geschwindigkeitsprofil

$$u_x(r) = -\frac{R^2}{4\mu} \frac{dp}{dx} \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) = u_{max} \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right), \quad u_{max} = u(r=0).$$

### 1. Stokessches Problem (Rayleigh-Stokessches Problem)

Es wird eine unendlich ausgedehnte horizontale Platte betrachtet, die in einer ruhenden Umgebung ruckartig auf die Geschwindigkeit  $U$  gebracht wird. Durch die Reibung wird das (inkompressible) Fluid über der Platte allmählich mitgenommen.

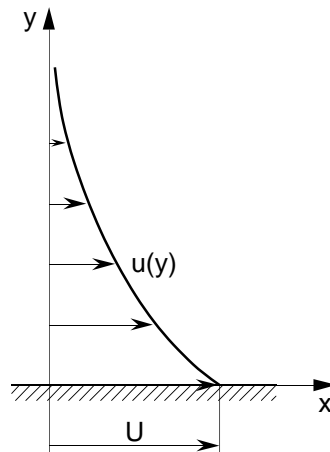


Abbildung 6.3: 1. Stokessches Problem, Strömungsprofil über einer plötzlich bewegten Platte

Die Strömung sei ausgebildet, so daß alle Ableitungen nach  $x$  gleich null sind. Da eine Parallelströmung vorliegt, ist  $v \equiv 0$ . Die Volumenkräfte seien auch in diesem Fall vernachlässigt. Die Navier-Stokes-Gleichungen ergeben

$$\frac{\partial u(y,t)}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 u(y,t)}{\partial y^2}$$

und für den Druck ergibt sich Konstanz quer zur Strömungsrichtung

$$\frac{\partial p}{\partial x} = 0 .$$

Die DGL für die Geschwindigkeit kann unter Einbeziehung der Anfangs- und Randbedingungen des Problems

$$\begin{aligned} u(y \geq 0, t \leq 0) &= 0 , \\ u(y = 0, t > 0) &= U , \\ u(y = \infty, t > 0) &= 0 \end{aligned}$$

gelöst werden. Die Lösung für  $t > 0$  ist eine Fehlerfunktion

$$u(x, t) = U \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{y/\sqrt{\nu t}} \exp\left(-\frac{\xi^2}{4}\right) d\xi \right) = U \left( 1 - \operatorname{erf}\left(\frac{y}{2\sqrt{\nu t}}\right) \right) .$$

Benutzt man Ähnlichkeitsvariablen, fallen die Lösungskurven auf eine einzige Kurve zusammen (‘‘Selbstähnlichkeit’’).

## 6.3 Näherungslösungen

### 6.3.1 Einfluß der Reynolds-Zahl

Die Navier-Stokes-Gleichung wird mit Hilfe der dimensionslosen Kennzahlen

$$x_i' = \frac{x_i}{L} , \quad t' = \frac{U}{L} t , \quad u_i' = \frac{u_i}{U} , \quad p' = \frac{p}{\mu U} L , \quad Re = \frac{UL}{\nu}$$

skaliert. Unter Vernachlässigung der Schwere ergibt sich die Impulsbilanz zu

$$Re \left[ \frac{\partial \underline{u}'}{\partial t'} + (\underline{u}' \nabla') \underline{u}' \right] = -\nabla' p' + \Delta' \underline{u}' .$$

**Fall**  $Re \ll 1$  ,  $Re \rightarrow 0$

In bestimmten Fällen kann die Reynolds-Zahl klein ( $Re \rightarrow 0$ ) angenommen werden:

- wenn  $L$  klein ist (z.B. Tröpfchen),
- wenn  $u$  klein ist (z.B. Gletscher),
- wenn  $\nu$  groß ist (zähe Fluide).

Strömungen dieses Typs werden *schleichende Strömungen* (creeping flow) genannt. Im Impulssatz können mit dieser Annahme die Beschleunigungsterme auf der linken Seite vernachlässigt werden und man erhält die vereinfachte Beziehung

$$\nabla' p' = \Delta' \underline{u}' ,$$

bzw. ausgedrückt in dimensionsbehafteten Größen

$$\nabla p = \mu \Delta \underline{u} .$$

Diese Gleichung wird auch *Stokes-Gleichung* genannt. Es lässt sich ableiten:

A. *Laplace-Gleichung für den Druck* aus der Divergenz der Stokes-Gleichung

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} p = \mu \operatorname{div} (\Delta \underline{u}) = \mu \underbrace{\Delta (\operatorname{div} \underline{u})}_{=0, \text{ inkompr.}} \Rightarrow \Delta p = 0$$

B. *Laplace-Gleichung für die Wirbelstärke* aus dem Rotor der Stokes-Gleichung

$$0 = \operatorname{rot} \operatorname{grad} p = \mu \operatorname{rot} (\Delta \underline{u}) = \mu \underbrace{\Delta (\operatorname{rot} \underline{u})}_{=\underline{\omega}} \Rightarrow \Delta \underline{\omega} = 0$$

Die Gleichungen unter A und B sind linear, es können also einzelne Lösungen überlagert werden.

**Fall**  $Re \gg 1$ ,  $Re \rightarrow \infty$

Der Fall, daß die Reynolds-Zahl groß ist ( $Re \rightarrow \infty$ ), kommt recht häufig vor:

- wenn  $L$  groß ist (z.B. Schiffe),
- wenn  $u$  groß ist (z.B. Flugzeuge),
- wenn  $\nu$  klein ist.

Die Elimination des Terms

$$\frac{1}{Re} \Delta \underline{u}$$

in der Navier-Stokes-Gleichung führt sie auf die *Euler-Gleichung* zurück:

$$\frac{\partial \underline{u}}{\partial t} + (\underline{u} \cdot \nabla) \underline{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla p.$$

Die Euler-Gleichung erfüllt allerdings nicht die Haftbedingungen, sie beschreibt daher die Strömung in der Nähe eines Körpers nicht korrekt. Dort müssen die *Grenzschichtgleichungen* (siehe Kapitel 7) verwendet werden.

### 6.3.2 Stokes Flow: Schleichende Umströmung einer Kugel

Es wird eine sehr langsame Strömung um eine Kugel betrachtet. Die Reynolds-Zahl sei dementsprechend klein ( $Re \rightarrow 0$ ). Aufgrund der Geometrie des Problems sind Kugelkoordinaten für die Beschreibung vorteilhaft.

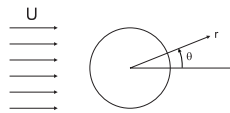


Abbildung 6.4: Umströmung einer Kugel

Es wird die Stromfunktion eingeführt:

$$\Psi(r, \theta) = f(r) \cdot g(\theta)$$

Die Geschwindigkeitskomponenten sind

$$u_r = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial \Psi}{\partial \theta}, \quad u_\theta = -\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \Psi}{\partial r}.$$

Die Lösung der Impulsgleichung liefert für eine Kugel mit Radius  $R$  und den Randbedingungen  $u_r(r = R, \theta) = 0, u_\theta(r = R, \theta) = 0$  bei gleichförmiger Anströmung  $U$

$$\begin{aligned}\Psi(r, \theta) &= U r^2 \sin^2 \theta \left[ \frac{1}{2} - \frac{3}{4} \frac{R}{r} + \frac{1}{4} \left( \frac{R}{r} \right)^3 \right], \\ u_r &= U \cos \theta \left[ 1 - \frac{3}{2} \frac{R}{r} + \frac{1}{2} \left( \frac{R}{r} \right)^3 \right], \\ u_\theta &= -U \sin \theta \left[ 1 - \frac{3}{4} \frac{R}{r} - \frac{1}{4} \left( \frac{R}{r} \right)^3 \right], \\ p &= p_\infty - \frac{3}{2} \mu U R \frac{\cos \theta}{r^2}, \\ \omega &= -\frac{3}{2} U R \frac{\sin \theta}{r^2}.\end{aligned}$$

Der Widerstand  $F$  durch Druck- und Scherkräfte ergibt sich gemäß Stokes zu

$$F = 6\pi\mu UR.$$

Die dimensionslose Widerstandszahl  $c_D$  ist umgekehrt proportional zur Reynolds-Zahl

$$c_D = \frac{F}{\frac{\rho}{2} U^2 \cdot \pi R^2} = \frac{24}{Re},$$

wobei die Reynolds-Zahl mit dem Kugeldurchmesser gebildet wird.

Die Lösung wurde durch Oseen für kleine, aber endliche Reynolds-Zahlen verbessert. Er hat den Term  $(\underline{u} \cdot \nabla) \underline{u}$  nicht vernachlässigt, sondern linearisiert zu

$$U \frac{\partial u}{\partial x}.$$

Damit ergibt sich die dimensionslose Widerstandszahl zu:

$$c_D = \frac{24}{Re} \left( 1 + \frac{3}{16} Re \right)$$

für Reynolds-Zahlen  $Re \leq 5$ . Das Widerstandsgesetz ist für kleine Reynolds-Zahlen experimentell sehr gut bestätigt. Für höhere Reynolds-Zahlen gelten andere Gesetzmäßigkeiten aufgrund zusätzlicher Phänomene wie Ablösung und Turbulenz. Im folgenden ist die Widerstandszahl  $c_D$  in Abhängigkeit von der Reynolds-Zahl  $Re$  aufgetragen.

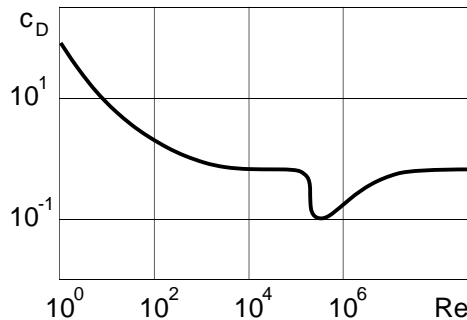


Abbildung 6.5:  $c_D$ -Wert in Abhängigkeit von der  $Re$ -Zahl bei schleichender Umströmung einer Kugel

## Kapitel 7

### Grenzschichten

---

Das Grenzschichtkonzept beruht auf der Aufteilung des Strömungsfeldes in eine reibungsfreie Aussenströmung und eine reibungsbehaftete, dünne Grenzschicht unmittelbar am Körper, welche die Wandhaftbedingung erfüllen kann.

#### 7.1 Grenzschichtgleichungen

Die Grenzschicht soll dünn sein, d.h. ihre Dicke  $\delta$  ist sehr viel kleiner als die Bezugslänge  $L$ . Damit nicht alle Reibungsterme in der Navier-Stokes-Gleichung wegfallen, muss für die Grenzschichtdicke gelten

$$\delta \sim \sqrt{\frac{\nu L}{u_\infty}} .$$

Dieser Ausdruck kann hergeleitet werden aus einer Betrachtung des Verhältnisses von Reibungs- und Beschleunigungstermen.

Für die Grenzschicht (hier: stationär, inkompressibel, 2D kartesisch) gilt die Kontinuitätsgleichung in der Form

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 ,$$

der Impulssatz in  $x$ -Richtung vereinfacht sich zu

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

und der Impulssatz in  $y$ -Richtung reduziert sich zu

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 0 ,$$

d.h. der Druck normal zur Wand ist in der Grenzschicht *konstant* und wird *von der Aussenströmung aufgeprägt*. Der Druckgradient in der Grenzschicht wird also von der Euler-Gleichung

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = -u_\infty \frac{du_\infty}{dx}$$

bestimmt, die in der Aussenströmung ( $u_\infty(x)$ ) gilt.

Für die Grenzschichtgleichungen gelten die folgenden **Randbedingungen**:

1. Wandhaftung:  
 $u(x, y = 0) = 0 , \quad v(x, y = 0) = 0 ,$
2. Aussenströmung:  
 $u(x, y \rightarrow \infty) = u_\infty(x) .$

### Grenzschichtkenngrößen

- Die Grenzschichtdicke  $\delta$  ist üblicherweise festgelegt als der Abstand vom Körper, an dem die Strömungsgeschwindigkeit 99% der Geschwindigkeit der Aussenströmung erreicht hat:

$$u(y = \delta) = 0.99 u_\infty$$

- Die Verdrängungsdicke  $\delta_1$  ist der Betrag, um den die Grenzschicht die reibungsfreie Aussenströmung von der Wand verdrängt:

$$\delta_1 = \delta^* = \int_0^\infty \left(1 - \frac{u}{u_\infty}\right) dy$$

- Die Impulsverlustdicke  $\delta_2$  ist ein Mass für den Reibungswiderstand, den der überströmte Körper erfährt (vgl. Kapitel 7.3):

$$\delta_2 = \theta = \int_0^\infty \frac{u}{u_\infty} \left(1 - \frac{u}{u_\infty}\right) dy$$

(Anmerkung: Die Integranden der beiden Integrale verschwinden für  $y > \delta$ .)

## 7.2 Exakte Lösungen der Grenzschichtgleichungen

### Blasius-Grenzschicht

Man betrachte eine ebene Platte, die mit der Geschwindigkeit  $u_\infty$  überströmt wird. Die Strömung sei inkompressibel und stationär und die Aussenströmung sei ausgebildet, d.h. der Druckgradient in  $x$ -Richtung ist Null.

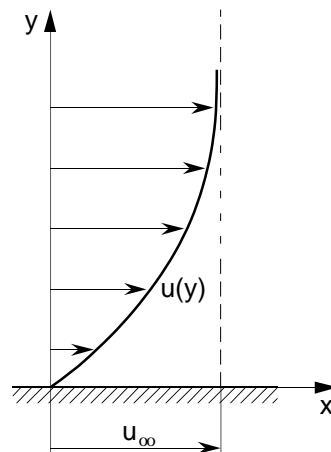


Abbildung 7.1: Blasius-Grenzschicht

Die Ähnlichkeitsvariable  $\eta$  und ein Ansatz für die Stromfunktion  $\Psi$  werden definiert als

$$\eta(x, y) = \frac{y}{x} \sqrt{Re_x},$$

$$\Psi(x, y) = f(\eta) \sqrt{u_\infty \nu x},$$



wobei die Reynolds-Zahl mit der Lauflänge  $x$  gebildet wird

$$Re_x = \frac{u_\infty x}{\nu} .$$

Aus den Grenzschichtgleichungen folgt mit diesem Ansatz die *Blasius-Gleichung*

$$2 f''' + f f'' = 0 ,$$

eine gewöhnliche Differentialgleichung dritter Ordnung. Die Randbedingungen für dieses Problem sind entsprechend

$$\begin{aligned} f(\eta = 0) &= 0 , \\ f'(\eta = 0) &= 0 , \\ f'(\eta \rightarrow \infty) &= 1 . \end{aligned}$$

Aus der DGL berechnet sich, mit angenäherten Zahlenwerten:

- Grenzschichtdicke

$$\delta = 5 \frac{x}{\sqrt{Re_x}} \propto \sqrt{x}$$

- Verdrängungsdicke

$$\delta_1 = 1.721 \frac{x}{\sqrt{Re_x}} \approx \frac{\delta}{3}$$

- Impulsverlustdicke

$$\delta_2 = 0.664 \frac{x}{\sqrt{Re_x}} \approx \frac{\delta}{8}$$

- lokaler Widerstandskoeffizient (dimensionslose Wandschubspannung)

$$c_f = \frac{\tau_W}{\varrho/2 u_\infty^2} = 0.664 \frac{1}{\sqrt{Re_x}}$$

- Widerstandskoeffizient (dimensionslose Reibungskraft)

$$c_D = \frac{F_D}{\varrho/2 u_\infty^2 L b} = \frac{1}{L} \int_0^L c_f(x) dx = 1.328 \frac{1}{\sqrt{Re_L}}$$

Bemerkung: Diese Beziehungen gelten für eine laminare Grenzschicht, d.h. bis zu einer kritischen Reynolds-Zahl von etwa  $Re_{x,krit.} = 100\,000$  .

### Falkner-Skan-Grenzschicht

Man betrachte die Strömung um einen Keil mit dem Öffnungswinkel  $\beta$ , der mit  $U_0$  angeströmt wird.

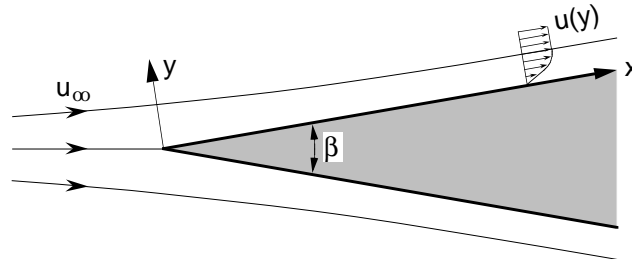


Abbildung 7.2: Strömung um einen Keil

Die Geschwindigkeit am Rand der Grenzschicht ist

$$u_\infty(x) = u_0 \left( \frac{x}{L} \right)^m = cx^m$$

mit  $m$  als Funktion des Öffnungswinkels:

$$m = \frac{\beta}{2\pi - \beta}$$

Im Gegensatz zu Blasius gilt

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = -mc^2 x^{2m-1} \neq 0.$$

Die Ähnlichkeitsvariable  $\eta$  und ein Ansatz für die Stromfunktion  $\Psi$  werden ähnlich wie bei Blasius definiert:

$$\begin{aligned} \eta(x, y) &= \frac{y}{x} \sqrt{Re_x} \\ \Psi(x, y) &= f(\eta) \cdot cx^m \sqrt{\frac{\nu}{cx^{m-1}}} \\ &= f(\eta) \cdot u_\infty x \sqrt{Re_x} \end{aligned}$$

Aus den Grenzschichtgleichungen folgt mit diesem Ansatz die Falkner-Skan-Gleichung:

$$f''' + \frac{m+1}{2} f f'' + m(1 - f'^2) = 0$$

Die Randbedingungen für dieses Problem sind:

$$\begin{aligned} f(\eta = 0) &= 0, \\ f'(\eta = 0) &= 0, \\ f'(\eta \rightarrow \infty) &\rightarrow 1. \end{aligned}$$

Mehrere Spezialfälle der Problemstellung können unterschieden werden:

- $-0.0905 < m < 0$  Diffusorströmung,
- $m = 0$  ebene Plattenströmung (Blasius),
- $0 < m < 1$  Keilströmung,
- $m = 1$  Staupunktströmung,
- $1 < m < 2$  Strömung in eine Ecke.

Darüber hinaus kann mit dem Exponenten  $m$  auch noch zwischen

- beschleunigten Strömungen  $\partial p/\partial x < 0$  für  $m > 0$  und
- verzögerten Strömungen  $\partial p/\partial x > 0$  für  $m < 0$

unterschieden werden. Für all diese Fälle existieren Lösungen.

Die Grenzschichtgleichungen können immer dann eingesetzt werden, wenn die Dicke der Grenzschicht klein ist im Vergleich zu den Längenskalen der Aussenströmung. Es gibt dementsprechend auch Bereiche, wo diese Annahme *nicht* zu halten ist. Für den Fall einer endlichen Rohrströmung gilt z.B. nahe am Einlauf  $\delta \approx x$  und im ausgebildeten Bereich  $\delta \approx D$ . In beiden Bereichen wäre die "Grenzschichtdicke" vergleichbar mit den externen Skalen.

### 7.3 Impulssatz der Grenzschichttheorie

Der integrale Impulssatz der Grenzschichttheorie lautet:

$$\frac{d}{dx} \delta_2 + \left( 2 + \frac{\delta_1}{\delta_2} \right) \frac{\delta_2}{u_\infty(x)} \frac{du_\infty}{dx} = \frac{c_f}{2}$$

Er dient als Grundlage zur Berechnung von Grenzschichten mit "Integralverfahren".

In der Blasius-Grenzschicht mit  $du_\infty/dx = 0$  gilt z.B.

$$\frac{d}{dx} \delta_2 = \frac{c_f}{2} > 0 ,$$

d.h. das räumliche Wachstum der Grenzschicht ist direkt proportional zur Wandreibung.



## Kapitel 8

### Turbulenz

---

#### 8.1 Phänomenologie

*Notwendige Bedingungen* für den turbulenten Strömungszustand sind:

- Instationarität, Unstetigkeit (Zufallsbewegung);
- Dreidimensionale Geschwindigkeitsfluktuationen (10% – 30% der mittleren Geschwindigkeit);
- Rotationsbehaftete Strömung ( $\omega = \underline{\nabla} \times \underline{u} \neq 0$ ).

Darüber hinaus sind folgende Eigenschaften charakteristisch:

- Es treten Wirbelstrukturen auf verschiedenen Längenskalen auf.
- Turbulenz ist selbsterzeugend, d.h. Turbulenz erzeugt neue Turbulenz.
- Es ist ein externer “Antrieb” bzw. Energiezufuhr vorhanden durch die mittlere Scherbewegung / Geschwindigkeitsgradienten.
- Es gibt einen Umschlag von laminarer zu turbulenter Strömung, die sog. Transition.
- Die Wirbeldiffusion, die ca. 100 mal grösser ist als die molekulare Diffusion, dominiert den Impulsaustausch und die anderen diffusiven Transportprozesse.
- Turbulente Energie wird durch Dissipation, d.h. durch Umwandlung in Reibungswärme “vernichtet”.

#### Transition

Der Übergang von laminarer zu turbulenter Strömung hängt nicht nur von der Reynolds-Zahl ab, sondern auch von der Geometrie und anderen Faktoren wie z.B. dem Strömungszustand der Zuströmung. Bei einer ebenen Platte erfolgt der Umschlag bei

$$Re_{x,krit} = 3 \cdot 10^5 \dots 3 \cdot 10^6 ,$$

mit einer Reynolds-Zahl gebildet mit der Lauflänge  $x$  und der Geschwindigkeit der Außenströmung  $u$

$$Re_x = \frac{ux}{\nu} .$$

Für die Rohrströmung erfolgt der Umschlag bei

$$Re_{D,krit} = 2300 \dots 3000 ,$$

wobei die Reynolds-Zahl mit dem Rohrdurchmesser  $D$  und der mittleren Geschwindigkeit  $\bar{u}$  im Rohrquerschnitt gebildet wird

$$Re_D = \frac{\bar{u}D}{\nu} .$$

## 8.2 Statistische Modellierung der Turbulenz

### Statistisches Modell der Turbulenz

Das Modell bedient sich der Annahme, daß die lokale Geschwindigkeit  $\underline{u}$  der Strömung in einen Mittelwert  $\langle \underline{u} \rangle$  und in die Fluktuation  $\underline{u}'$  aufgespalten werden kann

$$\underline{u}(\underline{x}, t) = \langle \underline{u}(\underline{x}, t) \rangle + \underline{u}'(\underline{x}, t) .$$

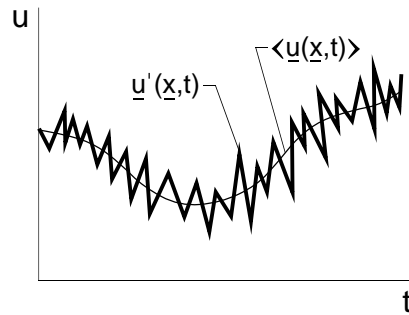


Abbildung 8.1: Signal einer turbulenten Geschwindigkeit

Es ist zu beachten, daß die Mittelung der Fluktuation Null ergibt:

$$\langle \underline{u}'(\underline{x}, t) \rangle \equiv 0 .$$

Die Mittelung kann verschieden realisiert werden:

- ensemble (über unabhängige Realisationen),
- zeitlich (Standard; Reynolds-gemittelte Navier-Stokes-Gleichungen),
- räumlich (Grobstruktur-Ansatz),
- über die Phasenzyklen einer periodischen Strömung.

### Reynolds-gemittelte Navier-Stokes-Gleichungen

Für einen statistisch stationären Prozess folgt:

$$\langle \underline{u}(\underline{x}, t) \rangle \iff \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \underline{u}(\underline{x}, t) dt = \underline{u}(\underline{x}) = \overline{\underline{u}(\underline{x}, t)}$$

Für die Kontinuitätsgleichung folgt durch Mittelung

$$\underline{\nabla} \cdot \underline{u} = 0 .$$

Und durch Subtraktion der obigen Gleichung von der Kontinuitätsgleichung ergibt sich

$$\underline{\nabla} \cdot \underline{u}' = 0 .$$

Unter der Annahme der Inkompressibilität ergeben sich die gemittelten Impulsgleichungen zu

$$\frac{\partial}{\partial x_j} (\varrho \bar{u}_i \bar{u}_j) = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \bar{\tau}_{ij} - \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_j} (\varrho \overline{u_i' u_j'})}_{\text{Turbulenz-einfluss}}$$

$\bar{\tau}_{ij} = \tau^{mol}$  ist der *molekulare* Schubspannungstensor und  $-\varrho \overline{u_i' u_j'} = \tau^{turb}$  ist der *turbulente* Schubspannungstensor, der vorerst nur formal und als Analogie zum molekularen Anteil definiert wird.

### 8.3 Empirischer Ansatz für die turbulente Schubspannung

#### Boussinesq-Annahme

Unter der Annahme, daß die Schwankungsterme auf die zeitlich gemittelten Größen der Grundströmung zurückzuführen sind, kann der turbulente Schubspannungstensor unter Einführung der turbulenten Viskosität  $\nu_T$  analog zum Newtonschen Ansatz beschrieben werden:

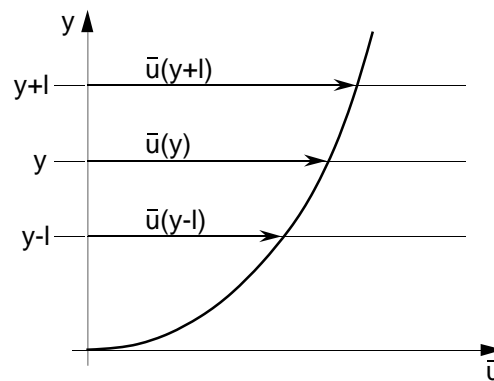
$$\tau_{ij}^{turb} = -\varrho \overline{u_i' u_j'} = \varrho \nu_T \frac{d\bar{u}}{dy}$$

$\nu_T$  ist im Gegensatz zur molekularen Viskosität  $\mu$  keine Stoffkonstante, sondern eine Funktion des Strömungszustandes, die empirisch bestimmt werden muß.

#### Prandtlscher Mischungswegansatz

Ein möglicher Ansatz zur Bestimmung der turbulenten Viskosität und des turbulenten Schubspannungstensor geht von einer turbulenten zweidimensionalen Grenzschicht in der  $x, y$ -Ebene aus, in der eine mittlere Bewegung in  $x$ -Richtung vorliegt:

$$u = \bar{u}(y) + u', \quad v = v'$$



Ein Turbulenzelement legt im Mittel den Weg  $l$  zurück bevor es sich mit der Umgebung vermischt und seine Individualität verliert.  $l$  wird als *Prandtlscher Mischungsweg* bezeichnet. In Anlehnung an die Skizze kann die Untergeschwindigkeit im Niveau  $y + l$  gegenüber der Umgebung berechnet werden, sie wird als Geschwindigkeitsschwankung im besagten Niveau aufgefasst:

$$u'(y + l) = \bar{u}(y) - \bar{u}(y + l) = -l \cdot \left. \frac{d\bar{u}}{dy} \right|_y$$

Aus der Kontinuität ergibt sich für  $v'$

$$v' = l \cdot \left. \frac{d\bar{u}}{dy} \right|_y .$$

Für den turbulenten Schubspannungstensor ergibt sich damit

$$\tau_{xy}^{turb} = -\overline{\rho u'v'} = \rho l^2 \left| \frac{d\bar{u}}{dy} \right| \frac{d\bar{u}}{dy} .$$

Die Abhängigkeit vom Quadrat des Geschwindigkeitsgradienten weist auf signifikante Unterschiede zur laminaren Strömung hin.

Die turbulente Viskosität ergibt sich gemäß der Bestimmungsgleichung zu

$$\nu_T = l^2 \cdot \left| \frac{d\bar{u}}{dy} \right| ,$$

wobei der Mischungsweg  $l$  weiterhin empirisch bestimmt werden muss.

## 8.4 Geschwindigkeitsverteilung in der turbulenten Grenzschicht

Die Grenzschicht wird modellhaft in drei Bereiche unterteilt:

- Wandbereich (viskose Unterschicht)

$$\tau = \tau_W(x) , \quad \tau^{mol} \gg \tau^{turb}$$

- Wandnaher Bereich (logarithmische Schicht)

$$\tau = \tau_W(x) , \quad \tau^{turb} \gg \tau^{mol}$$

- Außenbereich

$$\tau = \tau(x, y) , \quad \tau^{turb} \gg \tau^{mol}$$

Zur Lösung des Problems in den ersten beiden Bereichen wird ein dimensionsanalytischer Ansatz herangezogen. Zur Normierung der Strömungsgeschwindigkeit wird die charakteristische "Schubspannungsgeschwindigkeit"  $u_\tau$  benutzt

$$u_\tau = \sqrt{\frac{|\tau_W|}{\rho}} ,$$

zur Normierung des Wandabstands das viskose Längenmass

$$y_\tau = \frac{\nu}{u_\tau} .$$

Auch die Reynolds-Zahl wird mit  $u_\tau$  gebildet. Für die *viskose Unterschicht* ergibt sich die Geschwindigkeitsverteilung

$$u^+ = \frac{u}{u_\tau} = \frac{u_\tau y}{\nu} ,$$

dies gilt für

$$y^+ = \frac{u_\tau y}{\nu} < 5 .$$

Die *logarithmische Schicht*, d.h. der Bereich

$$30 < \frac{u_\tau y}{\nu} < 0.2 \frac{u_\tau \delta}{\nu} ,$$



weist die folgende Geschwindigkeitsverteilung auf

$$\frac{u}{u_\tau} = \frac{1}{0.41} \ln \left( \frac{u_\tau y}{\nu} \right) + C .$$

Die additive Konstante  $C$  ist abhängig von der Wandrauhigkeit, in erster Näherung kann  $C = 5.0$  angenommen werden.

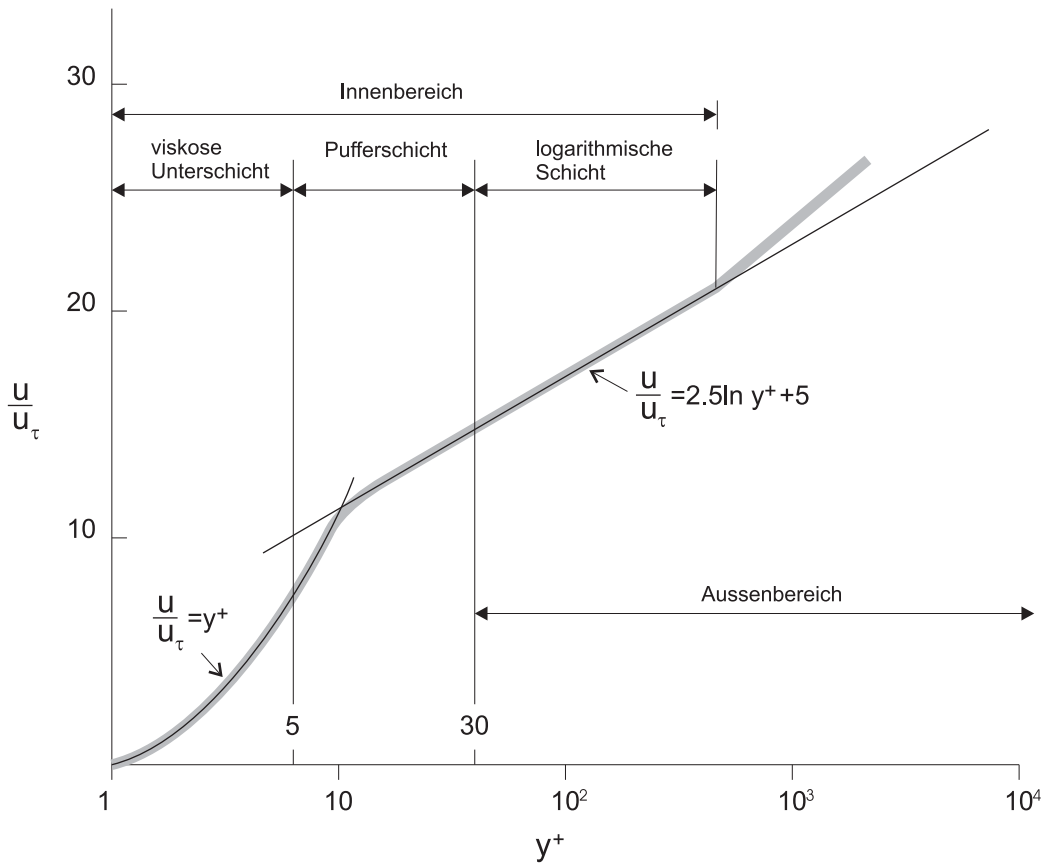


Abbildung 8.2: Geschwindigkeitsverteilung in der turbulenten Grenzschicht

Im *Außenbereich* kann die Geschwindigkeitsverteilung nur experimentell ermittelt werden, die Abhängigkeiten sind sehr komplex und nicht mehr allgemein herleitbar. Für das Gesamtprofil der beiden äusseren Bereiche (d.h. logarithmische Schicht + Außenbereich) gibt es Ansätze zur Beschreibung, z.B.

$$\frac{u}{u_\tau} = \frac{1}{k} \ln \left( \frac{u_\tau y}{\nu} \right) + C + \frac{2\Pi}{k} \sin^2 \left( \frac{\pi y}{2\delta} \right)$$

$$k \approx 0.41, \quad C \approx 5.0, \quad \Pi \approx 0.6, \quad \Pi = \Pi \left( \frac{\partial p}{\partial x} \right) .$$

Ein anderer empirischer Ansatz ist das  $\frac{1}{7}$ -Potenz-Gesetz

$$\frac{\bar{u}}{u_\infty} = \left( \frac{y}{\delta} \right)^{\frac{1}{n}}, \quad n \cong 7 .$$

Die Grenzschichtdicke einer ebenen, turbulenten Plattengrenzschicht errechnet sich damit zu

$$\delta(x) \approx 0.37 x Re_x^{-\frac{1}{5}} .$$

### 8.5 Turbulente Rohrströmung

Die Gleichungen für die turbulente Rohrströmung werden aus der entsprechenden RANS-Gleichung

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial x} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \bar{\tau})$$

hergeleitet. Der Schubspannungstensor  $\bar{\tau}$  besteht wiederum aus einem molekularen und einem turbulenten Anteil

$$\bar{\tau} = \tau^{mol} + \tau^{turb} = \mu \frac{d\bar{u}}{dr} - \overline{\rho u'v'} .$$

Zur Beschreibung des turbulenten Anteils wird der Ansatz der Wirbelviskosität herangezogen:

$$-\overline{u'v'} = \nu_T \frac{d\bar{u}}{dr}$$

Zusätzlich wird die turbulente Viskosität  $\nu_T$  durch den Ansatz

$$\nu_T = k \cdot u_\tau \cdot l , \quad l = \frac{R}{2} \left( 1 - \frac{r^2}{R^2} \right)$$

modelliert. Für die turbulente Strömung in einem *hydraulisch glatten Rohr* ergibt sich die logarithmische Geschwindigkeitsverteilung

$$\frac{u}{u_\tau} = \frac{1}{k} \ln \left[ 1 + k \frac{u_\tau R}{\nu} \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{r^2}{R^2} \right) \right]$$

(Anmerkung: Für  $(R-r)/R \ll 1$ ,  $ku_\tau(R-r)/\nu \gg 1$  ergibt sich aus dieser Gleichung wieder das logarithmische Wandgesetz für Grenzschichten:

$$\frac{u}{u_\tau} \rightarrow \frac{1}{k} \ln \left( \frac{u_\tau \cdot (R-r)}{\nu} \right) + C$$

#### Druckverlust

Der Druckverlust  $\Delta p$  in einem Rohr ist der Rohrlänge  $L$  proportional und wird geschrieben als

$$\frac{\Delta p}{\varrho} = \lambda \frac{L}{D} \frac{\bar{u}^2}{2} .$$

$D$  ist der Rohrdurchmesser und  $\bar{u}$  ist die mittlere Strömungsgeschwindigkeit im Rohrquerschnitt,  $\lambda$  ist die Rohrreibungszahl. Bei *laminarer Strömung*, d.h. wenn  $Re_D < Re_{D,krit}$ , gilt

$$\lambda = \frac{64\nu}{\bar{u}D} = \frac{64}{Re_D} .$$

Im Falle *turbulenter Strömung* muß im Hinblick auf eine materialabhängige, äquivalente "Rauigkeitshöhe"  $k_S$  unterschieden werden:

- Ein Rohr ist hydraulisch glatt, wenn die Rauigkeit in der laminaren Unterschicht liegt

$$\frac{u_\tau k_S}{\nu} \leq 5 .$$

In diesem Fall hat die Rauigkeit keinen Einfluss auf die Rohrreibungszahl und es gilt:

$$\lambda = \lambda(Re_D) .$$

- Ein Rohr ist sehr rauh, wenn gilt

$$\frac{u_\tau k_S}{\nu} \geq 70 .$$

In diesem Bereich hat die Reynolds-Zahl keinen Einfluss auf die Rohrreibungszahl,

$$\lambda = \lambda \left( \frac{k_S}{R} \right) .$$

- Im Zwischenbereich , d.h. für

$$5 \leq \frac{u_\tau k_S}{\nu} \leq 70$$

hängt die Rohrreibungszahl sowohl von der Reynolds-Zahl als auch von der Rauigkeit ab:

$$\lambda = \lambda \left( Re_D, \frac{k_S}{R} \right) .$$

Im allgemeinen muß die Rohrreibungszahl im Bereich  $Re_{D,krit} < Re_D$  aus einer impliziten Gleichung berechnet werden. Für *hydraulisch glatte Rohre* gilt:

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 2.0 \log_{10} \left( Re_D \cdot \sqrt{\lambda} \right) - 0.8 .$$

Im Bereich von  $Re_{D,krit} \leq Re_D \leq 10^5$  kann alternativ eine explizite Beziehung verwendet werden:

$$\lambda = \frac{0.3164}{\sqrt[4]{Re_D}} .$$

Zur Ermittlung der Rohrreibungszahl im *Zwischenbereich glatt-rauh* wird im allgemeinen das *Moody-Diagramm* herangezogen. In diesem Bereich gilt die Näherungsformel von Colebrook-White:

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2.03 \log_{10} \left( \frac{2.51}{Re_D \sqrt{\lambda}} + 0.27 \frac{k_S}{D} \right)$$

Für *hydraulisch raue Rohre* gilt:

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 1.14 - 2 \log_{10} \left( \frac{k_S}{D} \right)$$

Die äquivalenten Rauigkeiten für ausgewählte Materialien sind in der Tabelle 8.1 zusammengefaßt.

Material	$k_S$
Beton	0.9 ... 9 mm
Holz	0.2 ... 0.9 mm
Gußeisen	0.25 mm
Verzinktes Eisen	0.15 mm
Baustahl	0.059 mm
Gezogene Rohre	0.0015 mm

Tabelle 8.1: Rauigkeiten für ausgewählte Materialien

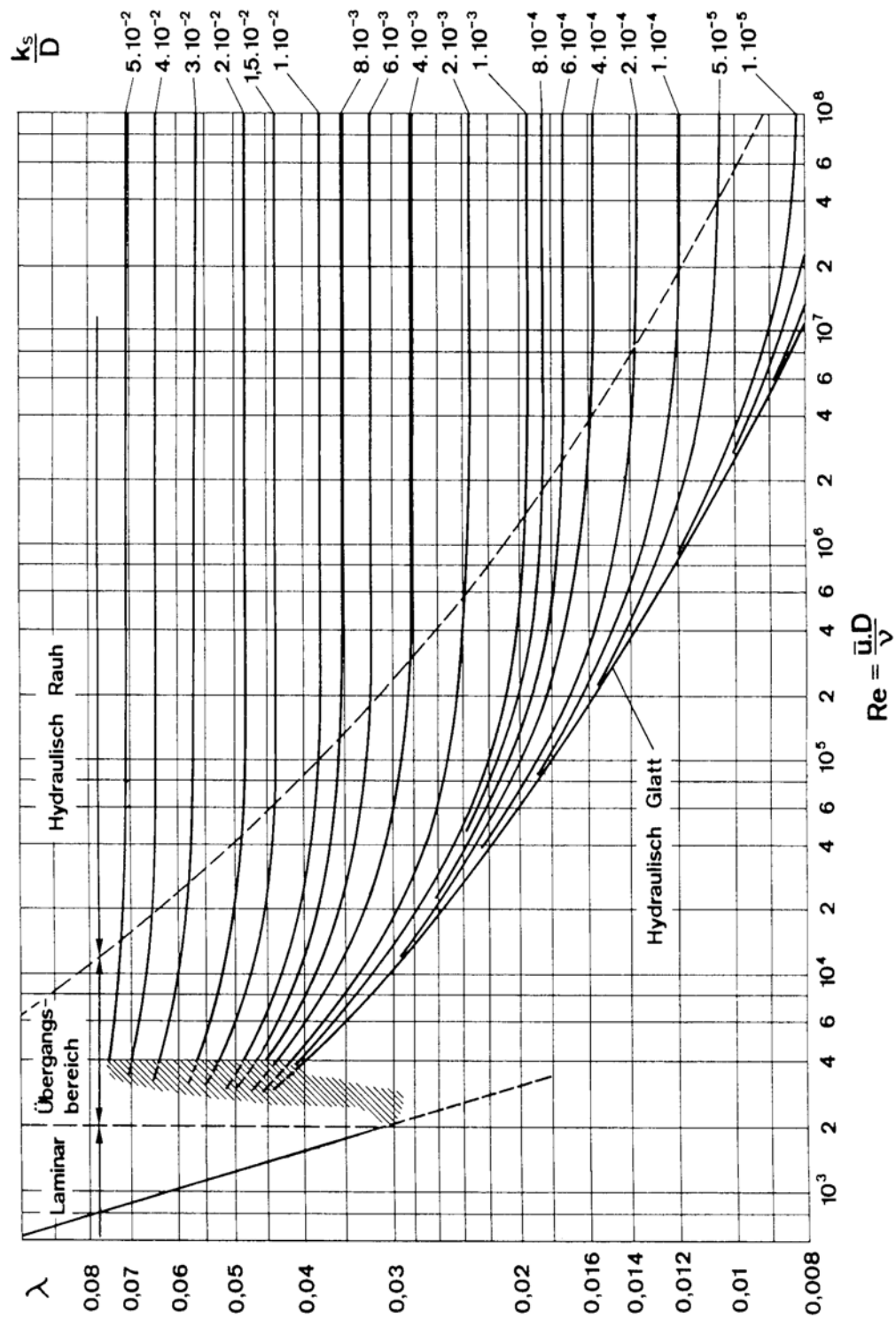


Abbildung 8.3: Moody-Diagramm

Bei nichttrunden Querschnitten wird der *hydraulische Durchmesser*  $D_H$  verwendet. Er berechnet sich aus der Querschnittsfläche des Fluidstroms  $S$  und dem benetzten Umfang (ohne freie Oberflächen)  $U$ :

$$D_H = 4 \cdot \frac{S}{U} .$$

Bei einem durchströmten kreisförmigen Rohr ergibt sich gerade der Rohrdurchmesser.

## 8.6 Verlustbehaftete Bernoulli-Gleichung

Im Falle turbulenter Strömung kann die Bernoulli-Gleichung nicht direkt angewendet werden, anwendbar ist jedoch ein ähnlicher Ausdruck

$$p_1 + \frac{\rho}{2} \bar{u}_1^2 + \rho g h_1 = p_2 + \frac{\rho}{2} \bar{u}_2^2 + \rho g h_2 + \Delta p_{12} - \Delta p_{ext} .$$

Hierbei wird die mittlere Geschwindigkeit aus dem Massenstrom  $\dot{m}$  und dem durchströmten Querschnitt  $S$  berechnet

$$\bar{u} = \frac{\dot{m}}{\rho S} .$$

Der Druckverlust  $\Delta p_{12}$  errechnet sich aus der Summe aller Verluste zwischen den Punkten 1 und 2.

Der letzte Term  $\Delta p_{ext}$  modelliert den möglichen Einfluß einer Energiezufuhr ( $\Delta p_{ext} > 0$ ) bzw. -abfuhr ( $\Delta p_{ext} < 0$ ) durch Strömungsmaschinen wie Pumpen oder Turbinen.

### Verluste durch turbulente Rohrreibung

Um den Beitrag der Rohrreibung zu erfassen, werden die Druckverluste mit dem oben erläuterten Ansatz einbezogen:

$$\frac{\Delta p}{\rho} = \lambda \frac{L}{D} \frac{\bar{u}^2}{2} .$$

### Verluste durch Einbauten und Maschinen

Durch einen allgemeinen Term

$$\frac{\Delta p}{\rho} = \zeta \frac{\bar{u}^2}{2} ,$$

werden Verluste durch Einbauten (Meßdüse, -blende), Querschnittsänderungen, Einlaufeffekte, Umlenkungen, Ablösungen etc. beschrieben. Der Verlustkoeffizient  $\zeta$  hängt von der Geometrie ab.

Druckänderungen durch Strömungsmaschinen können ähnlich beschrieben werden. Bei einer Pumpe gilt

$$\Delta p_P = \frac{\eta N}{\dot{V}} ,$$

für eine Turbine hingegen

$$\Delta p_T = -\frac{N}{\eta \dot{V}} .$$

$N$  ist die Leistung der Maschine in Watt,  $\eta$  ihr Wirkungsgrad und  $\dot{V}$  der Volumenstrom.



## Anhang A

### Grundlagen der Vektor- und Tensoralgebra

---

#### A.1 Einsteinsche Summenkonvention

Komponenten der Vektoren werden mit Indizes geschrieben, wobei gilt, daß über einen Index, der in einem Term zweimal vorkommt, summiert werden muss.

Beispiele:

- $u_{ii} = u_{11} + u_{22} + u_{33}$

- Laplace-Operator eines Skalars:

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial a}{\partial x_i} = \frac{\partial^2 a}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 a}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 a}{\partial x_3^2} = \Delta a$$

- Vektorprodukt:

$$\underline{u} \times \underline{v} = \epsilon_{ijk} u_j v_k$$

wobei  $\epsilon_{ijk}$  die folgenden Eigenschaften hat:

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{falls } ijk = 123, 231 \text{ oder } 312 \\ 0 & \text{falls zwei Indizes identisch sind} \\ -1 & \text{falls } ijk = 321, 213 \text{ oder } 132 \end{cases}$$

#### A.2 Differentialoperatoren

##### Nabla-Operator

In kartesischen Koordinaten  $\underline{x} = (x, y, z)^T$

$$\underline{\nabla} = \underline{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \underline{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \underline{e}_z \frac{\partial}{\partial z}$$

In Zylinderkoordinaten  $\underline{x} = (r, \theta, x)^T$

$$\underline{\nabla} = \underline{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \underline{e}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \underline{e}_x \frac{\partial}{\partial x}$$

**Divergenz** eines Vektors

$$\text{div } \underline{u} \equiv \underline{\nabla} \cdot \underline{u}$$

In kartesischen Koordinaten  $\underline{x} = (x, y, z)^T$

$$\underline{\nabla} \cdot \underline{u} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}$$

In Zylinderkoordinaten  $\underline{x} = (r, \theta, x)^T$

$$\underline{\nabla} \cdot \underline{u} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r u_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial u_x}{\partial x}$$

**Gradient** eines Skalars

$$\text{grad } a \equiv \underline{\nabla} a$$

In kartesischen Koordinaten  $\underline{x} = (x, y, z)^T$

$$\underline{\nabla} a = \underline{e}_x \frac{\partial a}{\partial x} + \underline{e}_y \frac{\partial a}{\partial y} + \underline{e}_z \frac{\partial a}{\partial z}$$

In Zylinderkoordinaten  $\underline{x} = (r, \theta, x)^T$

$$\underline{\nabla} a = \underline{e}_r \frac{\partial a}{\partial r} + \underline{e}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial a}{\partial \theta} + \underline{e}_x \frac{\partial a}{\partial x}$$

**Rotation** eines Vektorfeldes

$$\text{rot } \underline{u} \equiv \underline{\nabla} \times \underline{u}$$

In kartesischen Koordinaten  $\underline{x} = (x, y, z)^T$

$$\underline{\nabla} \times \underline{u} = \underline{e}_x \left( \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) + \underline{e}_y \left( \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \underline{e}_z \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right)$$

In Zylinderkoordinaten  $\underline{x} = (r, \theta, x)^T$

$$\underline{\nabla} \times \underline{u} = \underline{e}_r \left( \frac{1}{r} \frac{\partial u_x}{\partial \theta} - \frac{\partial u_\theta}{\partial x} \right) + \underline{e}_\theta \left( \frac{\partial u_r}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial r} \right) + \underline{e}_x \left( \frac{1}{r} \left[ \frac{\partial(r u_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right] \right)$$

**Laplace-Operator** angewendet auf einen Skalar

$$\Delta a \equiv \underline{\nabla}^2 a$$

In kartesischen Koordinaten  $\underline{x} = (x, y, z)^T$

$$\underline{\nabla}^2 a = \frac{\partial^2 a}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 a}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 a}{\partial z^2}$$

In Zylinderkoordinaten  $\underline{x} = (r, \theta, x)^T$

$$\underline{\nabla}^2 a = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial a}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 a}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 a}{\partial x^2}$$

**Advektive / Konvektive Ableitung** eines Skalars

$$\underline{u} \cdot \text{grad } a \equiv (\underline{u} \cdot \underline{\nabla}) a$$

In kartesischen Koordinaten  $\underline{x} = (x, y, z)^T$

$$(\underline{u} \cdot \underline{\nabla}) a = u \frac{\partial a}{\partial x} + v \frac{\partial a}{\partial y} + w \frac{\partial a}{\partial z}$$

In Zylinderkoordinaten  $\underline{x} = (r, \theta, x)^T$

$$(\underline{u} \cdot \underline{\nabla}) a = u_r \frac{\partial a}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial a}{\partial \theta} + u_x \frac{\partial a}{\partial x}$$



**Advective / Konvektive Ableitung** eines Vektors

$$\underline{u} \cdot \text{grad } \underline{a} \equiv (\underline{u} \cdot \nabla) \underline{a}$$

In kartesischen Koordinaten  $\underline{x} = (x, y, z)^T$

$$\begin{aligned} (\underline{u} \cdot \nabla) \underline{a} &= \underline{e}_x \left( u \frac{\partial a_x}{\partial x} + v \frac{\partial a_x}{\partial y} + w \frac{\partial a_x}{\partial z} \right) \\ &+ \underline{e}_y \left( u \frac{\partial a_y}{\partial x} + v \frac{\partial a_y}{\partial y} + w \frac{\partial a_y}{\partial z} \right) \\ &+ \underline{e}_z \left( u \frac{\partial a_z}{\partial x} + v \frac{\partial a_z}{\partial y} + w \frac{\partial a_z}{\partial z} \right) \end{aligned}$$

In Zylinderkoordinaten  $\underline{x} = (r, \theta, x)^T$

$$\begin{aligned} (\underline{u} \cdot \nabla) \underline{a} &= \underline{e}_r \left( u_r \frac{\partial a_r}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial a_r}{\partial \theta} + u_x \frac{\partial a_r}{\partial x} - \frac{u_\theta a_\theta}{r} \right) \\ &+ \underline{e}_\theta \left( u_r \frac{\partial a_\theta}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial a_\theta}{\partial \theta} + u_x \frac{\partial a_\theta}{\partial x} + \frac{u_\theta a_r}{r} \right) \\ &+ \underline{e}_x \left( u_r \frac{\partial a_x}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial a_x}{\partial \theta} + u_x \frac{\partial a_x}{\partial x} \right) \end{aligned}$$

**Materielle / Substantielle Ableitung** eines Skalars

$$\frac{Da}{Dt} = \frac{\partial a}{\partial t} + (\underline{u} \cdot \nabla) a$$

**Materielle / Substantielle Ableitung** eines Vektors

$$\frac{D\underline{a}}{Dt} = \frac{\partial \underline{a}}{\partial t} + (\underline{u} \cdot \nabla) \underline{a}$$

### A.3 Integralsätze

**Satz von Gauß**

$$\int_V \text{div } \underline{u} \, dV = \int_S \underline{u} \cdot \underline{n} \, dS$$

**Satz von Stokes**

$$\iint_S \text{rot } \underline{u} \cdot \underline{n} \, dS = \oint_K \underline{u} \cdot d\underline{l}$$



## Anhang B

### Grundgleichungen

---

#### B.1 Massenerhaltung

**Lagrange-Darstellung** (materielles Kontrollvolumen)

$$\frac{Dm}{Dt} = 0 \quad \text{mit} \quad m = \int_{\tilde{V}} \varrho \, d\tilde{V} \quad (\text{B.1})$$

**Euler-Darstellung**

Raumfestes Kontrollvolumen

$$\frac{d}{dt} \int_V \varrho \, dV + \int_S \varrho (\underline{u} \cdot \underline{n}) \, dS = 0 \quad (\text{B.2})$$

Ein geradlinig-gleichförmig bewegtes Kontrollvolumen entspricht einem raumfesten Kontrollvolumen, wobei die Geschwindigkeiten  $\underline{u}$  den Relativgeschwindigkeiten entsprechen.

Beliebig bewegtes Kontrollvolumen mit der Oberflächengeschwindigkeit  $\underline{u}_S$

$$\frac{d}{dt} \int_V \varrho \, dV + \int_S \varrho [(\underline{u} - \underline{u}_S) \cdot \underline{n}] \, dS = 0 \quad (\text{B.3})$$

**Differentielle Darstellung: Kontinuitätsgleichung**

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \nabla \cdot (\varrho \underline{u}) = \frac{D\varrho}{Dt} + \varrho (\nabla \cdot \underline{u}) = 0 \quad (\text{B.4})$$

Komponentenschreibweise in kartesischen Koordinaten  $\underline{x} = (x, y, z)^T$

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\varrho u) + \frac{\partial}{\partial y}(\varrho v) + \frac{\partial}{\partial z}(\varrho w) = 0 \quad (\text{B.5})$$

Komponentenschreibweise in Zylinderkoordinaten  $\underline{x} = (r, \theta, x)^T$

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(\varrho r u_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}(\varrho u_\theta) + \frac{\partial}{\partial x}(\varrho u_x) = 0 \quad (\text{B.6})$$

**Inkompressible Kontinuitätsgleichung** – inkompressibles Fluid oder inkompressible Strömung

$$\varrho = \text{konst.} \quad \text{oder} \quad \frac{D\varrho}{Dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad \nabla \cdot \underline{u} = 0 \quad (\text{B.7})$$

Komponentenschreibweise in kartesischen Koordinaten  $\underline{x} = (x, y, z)^T$

$$\nabla \cdot \underline{u} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \quad (\text{B.8})$$

Komponentenschreibweise in Zylinderkoordinaten  $\underline{x} = (r, \theta, x)^T$

$$\nabla \cdot \underline{u} = \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial u_x}{\partial x} \quad (\text{B.9})$$

## B.2 Impulserhaltung

**Lagrange-Darstellung** (materielles Kontrollvolumen)

$$\frac{D\underline{P}}{Dt} = \sum_i \underline{F}_i \quad \text{mit} \quad \underline{P} = \int_{\tilde{V}} \varrho \underline{u} \, d\tilde{V} \quad (\text{B.10})$$

**Euler-Darstellung**

Raumfestes Kontrollvolumen

$$\frac{d}{dt} \int_V (\varrho \underline{u}) \, dV + \int_S \varrho \underline{u} (\underline{u} \cdot \underline{n}) \, dS = \int_V \varrho \underline{f} \, dV - \int_S p \underline{n} \, dS + \int_S \underline{\tau} \cdot \underline{n} \, dS + \underline{F}_{ext} \quad (\text{B.11})$$

Ein geradlinig-gleichförmig bewegtes Kontrollvolumen entspricht einem raumfesten Kontrollvolumen, wobei die Geschwindigkeiten  $\underline{u}$  den Relativgeschwindigkeiten entsprechen.

Beliebig bewegtes Kontrollvolumen mit der Oberflächengeschwindigkeit  $\underline{u}_S$

$$\frac{d}{dt} \int_V (\varrho \underline{u}) \, dV + \int_S \varrho \underline{u} [(\underline{u} - \underline{u}_S) \cdot \underline{n}] \, dS = \int_V \varrho \underline{f} \, dV - \int_S p \underline{n} \, dS + \int_S \underline{\tau} \cdot \underline{n} \, dS + \underline{F}_{ext} \quad (\text{B.12})$$

**Differentielle Darstellung: Cauchy-Impulsgleichung**

$$\varrho \frac{D\underline{u}}{Dt} = -\underline{\nabla} p + \underline{\nabla} \cdot \underline{\tau} + \varrho \underline{f} \quad (\text{B.13})$$

Komponentenschreibweise in kartesischen Koordinaten  $\underline{x} = (x, y, z)^T$

$$(x) : \quad \varrho \left( \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + \varrho f_x \quad (\text{B.14})$$

$$(y) : \quad \varrho \left( \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + \varrho f_y \quad (\text{B.15})$$

$$(z) : \quad \varrho \left( \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} + \varrho f_z \quad (\text{B.16})$$

Komponentenschreibweise in Zylinderkoordinaten  $\underline{x} = (r, \theta, x)^T$

$$(r) : \quad \varrho \left[ \frac{\partial u_r}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{u_\theta^2}{r} + u_x \frac{\partial u_r}{\partial x} \right] = -\frac{\partial p}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \tau_{rr}) + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} - \frac{\tau_{\theta\theta}}{r} + \frac{\partial \tau_{rx}}{\partial x} + \varrho f_r \quad (\text{B.17})$$

$$(\theta) : \quad \varrho \left[ \frac{\partial u_\theta}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_\theta u_r}{r} + u_x \frac{\partial u_\theta}{\partial x} \right] = -\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \tau_{r\theta}) + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{\theta x}}{\partial x} + \varrho f_\theta \quad (\text{B.18})$$

$$(x) : \quad \varrho \left[ \frac{\partial u_x}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_x}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_x}{\partial \theta} + u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} \right] = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \tau_{rx}) + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{\theta x}}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \varrho f_x \quad (\text{B.19})$$

**Euler-Gleichungen** – reibungsfreie Strömungen

$$\varrho \frac{D\underline{u}}{Dt} = -\underline{\nabla} p + \varrho \underline{f} \quad (\text{B.20})$$

**Bernoulli-Gleichung** – konservatives Kraftfeld, konstante Dichte, reibungsfreie Strömung entlang einer Stromlinie oder für wirbelfreie Strömungen ( $\nabla \times \underline{u} = 0$ ) im gesamten Feld

$$\int_1^2 \frac{\partial \underline{u}}{\partial t} \cdot d\underline{s} + \left[ \frac{p}{\varrho} + \frac{1}{2} |\underline{u}|^2 + U \right]_1^2 = 0 \quad (\text{B.21})$$

für eine stationäre Strömung und die Gewichtskraft als einzige auf das System einwirkende Kraft

$$\frac{p_1}{\varrho} + \frac{1}{2} |\underline{u}_1|^2 + gz_1 = \frac{p_2}{\varrho} + \frac{1}{2} |\underline{u}_2|^2 + gz_2 \quad (\text{B.22})$$

**Schubspannungen eines Newtonschen Fluids** für eine inkompressible Strömung  $\nabla \cdot \underline{u} = 0$   
Komponentenschreibweise in kartesischen Koordinaten  $\underline{x} = (x, y, z)^T$

$$\begin{aligned} \tau_{xx} &= 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} \\ \tau_{yy} &= 2\mu \frac{\partial v}{\partial y} \\ \tau_{zz} &= 2\mu \frac{\partial w}{\partial z} \\ \tau_{xy} &= \tau_{yx} = \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \\ \tau_{xz} &= \tau_{zx} = \mu \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\ \tau_{yz} &= \tau_{zy} = \mu \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \end{aligned}$$

Komponentenschreibweise in Zylinderkoordinaten  $\underline{x} = (r, \theta, z)^T$

$$\begin{aligned} \tau_{rr} &= 2\mu \left( \frac{\partial u_r}{\partial r} \right) \\ \tau_{\theta\theta} &= 2\mu \left( \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r} \right) \\ \tau_{xx} &= 2\mu \left( \frac{\partial u_x}{\partial x} \right) \\ \tau_{r\theta} &= \tau_{\theta r} = \mu \left( \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + r \frac{\partial}{\partial r} \frac{u_\theta}{r} \right) \\ \tau_{\theta x} &= \tau_{x\theta} = \mu \left( \frac{\partial u_\theta}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_x}{\partial \theta} \right) \\ \tau_{xr} &= \tau_{rx} = \mu \left( \frac{\partial u_x}{\partial r} + \frac{\partial u_r}{\partial x} \right) \end{aligned}$$

**Navier-Stokes-Gleichungen** – Newtonsches Fluid, inkompressibel,  $\mu = \text{konst.}$

$$\varrho \frac{D\underline{u}}{Dt} = -\nabla p + \mu \nabla^2 \underline{u} + \varrho \underline{f} \quad (\text{B.23})$$

Komponentenschreibweise in kartesischen Koordinaten  $\underline{x} = (x, y, z)^T$

$$(x) : \quad \varrho \left( \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left[ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right] + \varrho f_x \quad (\text{B.24})$$

$$(y) : \quad \varrho \left( \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \mu \left[ \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right] + \varrho f_y \quad (\text{B.25})$$

$$(z) : \quad \varrho \left( \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial z} + \mu \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right] + \varrho f_z \quad (\text{B.26})$$

Komponentenschreibweise in Zylinderkoordinaten  $\underline{x} = (r, \theta, x)^T$

$$(r) : \quad \varrho \left[ \frac{\partial u_r}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{u_\theta^2}{r} + u_x \frac{\partial u_r}{\partial x} \right] = -\frac{\partial p}{\partial r} + \mu \left[ \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r u_r) \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_r}{\partial \theta^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 u_r}{\partial x^2} \right] + \varrho f_r \quad (\text{B.27})$$

$$(\theta) : \quad \varrho \left[ \frac{\partial u_\theta}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_\theta u_r}{r} + u_x \frac{\partial u_\theta}{\partial x} \right] = -\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \mu \left[ \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r u_\theta) \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial x^2} \right] + \varrho f_\theta \quad (\text{B.28})$$

$$(x) : \quad \varrho \left[ \frac{\partial u_x}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_x}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_x}{\partial \theta} + u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} \right] = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial u_x}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_x}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} \right] + \varrho f_x \quad (\text{B.29})$$

**Schleichströmungen**  $Re \rightarrow 0$ , Newtonsches Fluid

$$\underline{\nabla} p = \mu \underline{\nabla}^2 \underline{u} \quad (\text{B.30})$$

**Grenzschichtgleichungen**  $Re \rightarrow \infty$ ,  $\delta \ll L$ , 2D, Newtonsches Fluid

$$(x) : \quad \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\varrho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (\text{B.31})$$

$$(y) : \quad \frac{\partial p}{\partial y} = 0 \quad (\text{B.32})$$

**Reynolds-gemittelte Navier-Stokes Gleichungen** – turbulente Strömungen

$$\frac{\partial}{\partial x_j} (\varrho \bar{u}_i \bar{u}_j) = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial \bar{\tau}_{ij}}{\partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \overline{\varrho u'_i u'_j} \right) \quad (\text{B.33})$$

**Wirbeltransportgleichung** – keine Volumenkräfte, Newtonsches Fluid

$$\frac{D \underline{\omega}}{Dt} = (\underline{\omega} \cdot \underline{\nabla}) \underline{u} + \nu \underline{\nabla}^2 \underline{\omega} \quad (\text{B.34})$$

### B.3 Energieerhaltung

**Lagrange-Darstellung** (materielles Kontrollvolumen)

$$\frac{DE}{Dt} = \sum_i \underline{F}_i \cdot \underline{u} + \sum_i \dot{Q}_i \quad \text{mit} \quad E = \int_{\tilde{V}} \varrho \left[ e + \frac{1}{2} |\underline{u}|^2 \right] d\tilde{V} \quad (\text{B.35})$$

**Euler-Darstellung**

Raumfestes Kontrollvolumen

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_V \left( \varrho \left[ e + \frac{1}{2} |\underline{u}|^2 \right] \right) dV + \int_S \left( \varrho \left[ e + \frac{1}{2} |\underline{u}|^2 \right] \right) [\underline{u} \cdot \underline{n}] dS = \\ = \int_V \varrho \underline{f} \cdot \underline{u} dV - \int_S p \underline{u} \cdot \underline{n} dS + \int_S (\underline{\tau} \cdot \underline{u}) \cdot \underline{n} dS + \int_V \varrho q_V dV - \int_S \underline{q} \cdot \underline{n} dS \end{aligned} \quad (\text{B.36})$$

Ein geradlinig-gleichförmig bewegtes Kontrollvolumen entspricht einem raumfesten Kontrollvolumen, wobei die Geschwindigkeiten  $\underline{u}$  den Relativgeschwindigkeiten entsprechen.

Beliebig bewegtes Kontrollvolumen mit der Oberflächengeschwindigkeit  $\underline{u}_S$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_V \left( \varrho \left[ e + \frac{1}{2} |\underline{u}|^2 \right] \right) dV + \int_S \left( \varrho \left[ e + \frac{1}{2} |\underline{u}|^2 \right] \right) [(\underline{u} - \underline{u}_S) \cdot \underline{n}] dS = \\ = \int_V \varrho \underline{f} \cdot \underline{u} dV - \int_S p \underline{u} \cdot \underline{n} dS + \int_S (\underline{\tau} \cdot \underline{u}) \cdot \underline{n} dS + \int_V \varrho q_V dV - \int_S \underline{q} \cdot \underline{n} dS \end{aligned} \quad (\text{B.37})$$

**Differentielle Energiegleichung**

Gleichung für die Gesamtenergie  $\varrho(e + |\underline{u}|^2/2)$

$$\varrho \frac{D}{Dt} \left( e + \frac{1}{2} |\underline{u}|^2 \right) = \varrho \underline{f} \cdot \underline{u} + \underline{\nabla} \cdot (\underline{\sigma} \cdot \underline{u}) + \varrho q_V - \underline{\nabla} \cdot \underline{q} \quad (\text{B.38})$$

Gleichung für die kinetische Energie  $\varrho |\underline{u}|^2/2$

$$\varrho \frac{D}{Dt} \left( \frac{1}{2} |\underline{u}|^2 \right) = \varrho \underline{f} \cdot \underline{u} + \underline{u} \cdot \underline{\nabla} \cdot \underline{\sigma} \quad (\text{B.39})$$

Gleichung für die innere Energie  $\varrho e$

$$\varrho \frac{De}{Dt} = \underline{\sigma} : \underline{\nabla} \underline{u} + \varrho q_V - \underline{\nabla} \cdot \underline{q} \quad (\text{B.40})$$

Gleichung für die Enthalpie  $h = e + p/\varrho$

$$\varrho \frac{Dh}{Dt} = \frac{Dp}{Dt} + \underline{\tau} : \underline{\nabla} \underline{u} + \varrho q_V - \underline{\nabla} \cdot \underline{q} \quad (\text{B.41})$$

**Differentielle Energiegleichung in Temperaturform** – kalorisch perfektes Fluid

$$\varrho c \frac{DT}{Dt} = \frac{p}{\varrho} \frac{D\varrho}{Dt} + \underline{\tau} : \underline{\nabla} \underline{u} + \varrho q_V - \underline{\nabla} \cdot \underline{q} \quad (\text{B.42})$$

**Dissipationsterm** – doppeltes Skalarprodukt zweier Tensoren 2. Stufe  
Komponentenschreibweise in kartesischen Koordinaten  $\underline{x} = (x, y, z)^T$

$$\begin{aligned}\underline{\tau} : \underline{\nabla u} &= \tau_{xx} \frac{\partial u}{\partial x} + \tau_{xy} \frac{\partial v}{\partial x} + \tau_{xz} \frac{\partial w}{\partial x} \\ &+ \tau_{yx} \frac{\partial u}{\partial y} + \tau_{yy} \frac{\partial v}{\partial y} + \tau_{yz} \frac{\partial w}{\partial y} \\ &+ \tau_{zx} \frac{\partial u}{\partial z} + \tau_{zy} \frac{\partial v}{\partial z} + \tau_{zz} \frac{\partial w}{\partial z}\end{aligned}\quad (\text{B.43})$$

Komponentenschreibweise in Zylinderkoordinaten  $\underline{x} = (r, \theta, x)^T$

$$\begin{aligned}\underline{\tau} : \underline{\nabla u} &= \tau_{rr} \frac{\partial u_r}{\partial r} + \tau_{r\theta} r \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{u_\theta}{r} \right) + \tau_{rx} \frac{\partial u_x}{\partial r} \\ &+ \tau_{\theta r} \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \tau_{\theta\theta} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r} \right) + \tau_{\theta x} \frac{1}{r} \frac{\partial u_x}{\partial \theta} \\ &+ \tau_{xr} \frac{\partial u_r}{\partial x} + \tau_{x\theta} \frac{\partial u_\theta}{\partial x} + \tau_{xx} \frac{\partial u_x}{\partial x}\end{aligned}\quad (\text{B.44})$$

**Dissipationsterm für ein Newtonsches Fluid**

Komponentenschreibweise in kartesischen Koordinaten  $\underline{x} = (x, y, z)^T$

$$\begin{aligned}\underline{\tau} : \underline{\nabla u} &= 2\mu \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + 2\mu \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + 2\mu \left( \frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 \\ &+ \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \mu \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \mu \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2\end{aligned}\quad (\text{B.45})$$

Komponentenschreibweise in Zylinderkoordinaten  $\underline{x} = (r, \theta, x)^T$

$$\begin{aligned}\underline{\tau} : \underline{\nabla u} &= 2\mu \left( \frac{\partial u_r}{\partial r} \right)^2 + 2\mu \left( \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r} \right)^2 + 2\mu \left( \frac{\partial u_x}{\partial x} \right)^2 \\ &+ \mu \left( \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + r \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{u_\theta}{r} \right) \right)^2 + \mu \left( \frac{\partial u_x}{\partial r} + \frac{\partial u_r}{\partial x} \right)^2 + \mu \left( \frac{\partial u_\theta}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_x}{\partial \theta} \right)^2\end{aligned}\quad (\text{B.46})$$

**Wärmeleitungsterm mit dem Fourier-Gesetz** – konstante Wärmeleitfähigkeit  $k$

$$-\underline{\nabla} \cdot \underline{q} = -\underline{\nabla} \cdot (-k \underline{\nabla} T) = k \underline{\nabla}^2 T \quad (\text{B.47})$$

In kartesischen Koordinaten  $\underline{x} = (x, y, z)^T$

$$k \underline{\nabla}^2 T = k \left[ \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right] \quad (\text{B.48})$$

In Zylinderkoordinaten  $\underline{x} = (r, \theta, x)^T$

$$k \underline{\nabla}^2 T = k \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right] \quad (\text{B.49})$$

**Entropiegleichung**

$$T ds = dh - \frac{dp}{\varrho} \quad \Rightarrow \quad \varrho T \frac{Ds}{Dt} = \underline{\tau} : \underline{\nabla u} + \varrho q_V - \underline{\nabla} \cdot \underline{q} \quad (\text{B.50})$$

reibungsfrei, adiabat

$$\frac{Ds}{Dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad \varrho \frac{Dh}{Dt} = \frac{Dp}{Dt} \quad (\text{B.51})$$



## Literaturverzeichnis

---

- [1] J.D. Anderson: Modern Compressible Flow. 2nd Edition, McGraw-Hill, 1990
- [2] E. Becker: Technische Strömungslehre. Teubner, 1985
- [3] E. Becker: Technische Thermodynamik; (Kap. 5: Stationäre Fadenströmung). Teubner, 1984
- [4] M. van Dyke: An Album of Fluid Motion. The Parabolic Press, 1982.
- [5] K. Gersten: Einführung in die Strömungsmechanik. 6. Auflage, Vieweg, 1991
- [6] E.L. Houghton, P.W. Carpenter: Aerodynamics for Engineering Students. Butterworth-Heinemann, 2003
- [7] H. Kuhlmann: Strömungsmechanik. Pearson, 2014
- [8] **P.K. Kundu, I.M. Cohen, D.R. Dowling: Fluid Mechanics. 6th Edition, Academic Press, 2016**
- [9] H.W. Liepmann, A. Roshko: Elements of Gasdynamics. Dover, 2001
- [10] H.J. Lugt: Introduction to Vortex Theory. Vortex Flow Press, 1996
- [11] L.M. Milne-Thomson: Theoretical Hydrodynamics. Macmillan, 1968
- [12] Y. Nakayama, Y. Tanida (Editors): Atlas of Visualization II. The Visualization Society of Japan, 1996
- [13] Y. Nakayama, Y. Tanida (Editors): Atlas of Visualization III. The Visualization Society of Japan, 1997
- [14] R.L. Panton: Incompressible Flow. Wiley, 1984
- [15] S.B. Pope: Turbulent Flows. Cambridge University Press, 2000
- [16] L. Prandtl, K. Oswatitsch, K. Wieghardt: Führer durch die Strömungslehre. Vieweg, 1990
- [17] M. Samimy, K.S. Breuer, L.G. Leal, P.H. Steen: A Gallery of Fluid Motion. Cambridge, 2003
- [18] H. Schade, E. Kunz: Strömungslehre. 4. Auflage, de Gruyter, 2013
- [19] H. Schlichting, K. Gersten: Grenzschicht-Theorie. 9. Auflage, Springer, 1997
- [20] H. Sigloch: Technische Fluidmechanik. 3. Auflage, VDI, 1996
- [21] J.H. Spurk: Fluid Mechanics. Springer, 1997
- [22] J.H. Spurk: Aufgaben zur Strömungslehre. 2. Auflage, Springer, 1996
- [23] J.C. Tannehill, D.A. Anderson, R.H. Pletcher: Computational Fluid Mechanics and Heat Transfer. 2nd Edition, Taylor and Francis, 1997
- [24] D.J. Tritton: Physical Fluid Dynamics. Clarendon Press, 1988
- [25] P.P. Wegener: What Makes Airplanes Fly? History, Science, and Applications of Aerodynamics. 2nd Edition, Springer, 1997

- [26] D.C. Wilcox: Basic Fluid Mechanics. DCW Industries, 1998
- [27] F.M. White: Fluid Mechanics. McGraw-Hill, 1986
- [28] F.M. White: Viscous Fluid Flow. 2nd Edition, McGraw-Hill, 1991
- [29] W.A. Woods (Editor): Visualized Flow. Japan Society of Mechanical Engineering
- [30] J. Zierep, K. Bühler: Grundzüge der Strömungslehre. Springer, 2018
- [31] J. Zierep: Ähnlichkeitstheorie und Modellregeln der Strömungslehre. G. Braun, 1991
- [32] J. Zierep: Theoretische Gasdynamik. G. Braun, 1976

Begleitend zur Vorlesung besonders empfohlen ist das Lehrbuch von Kundu und Cohen [8].

Einige Web-Adressen zur Fluidodynamik:

[www.efluids.com](http://www.efluids.com)

[www.desktopaero.com/appliedaero/welcome.html](http://www.desktopaero.com/appliedaero/welcome.html)

[www.grc.nasa.gov/WWW/K-12/airplane/index.html](http://www.grc.nasa.gov/WWW/K-12/airplane/index.html)