

Thermodynamik I/II

Michael Van Huffel & Dino Colombo

Version: 20. August 2021

0 Inhaltsverzeichnis		
1 Konzepte und Definitionen	2	
1.1 Konstanten & Kenngrößen	2	
1.2 Einheiten	2	
1.3 Vorzeichenkonvention	2	
1.4 SI Präfixe	2	
1.5 Allgemeine Begriffe	2	
1.6 Thermodynamisches System	2	
2 Elemente der kinetischen Gastheorie	3	
2.1 Innere Energie bei perfekten Gasen	3	
2.2 Innere Energie bei idealen Gasen	3	
2.3 Innere Energie bei realen Gasen	3	
2.4 Enthalpie bei perfekten Gasen	3	
2.5 Enthalpie bei idealen Gasen	3	
2.6 Enthalpie bei realen Gasen	3	
3 1. Hauptsatz	3	
3.1 1. HS als Leistungsbilanz	3	
3.2 Kreisprozesse	3	
3.3 Die pVT Beziehung	3	
3.3.1 Dampfmassenanteil	3	
3.3.2 Lineare Interpolation	3	
3.4 Ideale Gasgleichung	3	
4 Polytrope Zustandsänderungen	3	
4.1 Ideale Gase	3	
4.1.1 Isothermer Prozess ($n = 1$)	4	
4.1.2 Isobarer Prozess ($n = 0$)	4	
4.1.3 Isochorer Prozess ($n = \infty$)	4	
4.1.4 Isentroper Prozess ($n = \kappa$)	4	
4.1.5 Allgemeiner Prozess ($n \neq 1$)	4	
4.2 Reale Gase	4	
5 Thermodynamische Zustandsdaten	4	
6 1. HS für offene Systeme	5	
6.1 Massenstrombilanz	5	
6.2 Energiestrombilanz	5	
6.3 1. HS für halboffenes System	5	
6.4 Düse	5	
6.5 Diffusor	5	
6.6 Drossel/Ventil	5	
6.7 Pumpe	5	
6.8 Kompressor/Verdichter	5	
6.9 Wärmetauscher/Verdampfer/Kondensator	5	
6.10 Turbine	6	
7 2. HS der Thermodynamik	6	
7.1 (Ir-)Reversible Prozesse	6	
7.1.1 Expansion ($W > 0$)	6	
7.1.2 Kompression ($W < 0$)	6	
8 Carnot Kreisprozess	6	
8.1 Kraftmaschine	6	
8.2 Kältemaschine/Wärmepumpe	6	
9 Thermische Wirkungsgrade	7	
9.0.1 Kreisprozesse	7	
9.0.2 Carnot-Wirkungsgrad	7	
9.0.3 Isentrope Prozesse	7	
10 Entropie	7	
10.1 $T-S$ Diagramm	7	
10.2 $H-S$ (Mollier) Diagramm	7	
10.3 TdS Gleichungen	7	
10.4 Clausius Ungleichung	7	
10.5 Entropieänderung - Ideale Gase	7	
10.6 Isentrope Prozesse - Ideale Gase	8	
10.7 Entropiebilanz für geschlossene Systeme	8	
10.8 Entropiebilanz für offene Systeme	8	
11 Exergie	8	
11.1 Energieverlust - Guoy-Stodola Theorem	8	
11.2 Exergiebilanz für geschlossene Systeme	8	
11.2.1 Exergie - geschlossenes System	8	
11.2.2 Exergiedifferenz - geschlossenes System	8	
11.2.3 Exergieänderungsgeschwindigkeit	9	
11.3 Exergiebilanz für offene Systeme	9	
11.3.1 Exergie - offenes System	9	
11.3.2 Exergiedifferenz - offenes System	9	
11.4 Exergetische Wirkungsgrad	9	
12 Verbrennungsprozesse	9	
12.1 λ bestimmen	9	
13 1. HS für offene Systeme	12	
13.1 Reaktionenthalpie ΔH_R und -wärme ΔQ_R	12	
13.2 \bar{h}_{TOT} eines Zustandes einer Komponente	12	
13.2.1 Heizwert	12	
13.3 Adiabate Flammttemperatur (AFT)	12	
13.3.1 Anwendung der AFT	13	
13.4 Abgasrückführung (AGR)	13	
14 2. Hauptsatz für Systeme mit chemischen Reaktionen	13	
14.1 Gibb'sche Freie Enthalpie	13	
14.2 Chemisches Gleichgewicht	14	
14.3 Dissoziation und Vermischung	14	
14.4 Chemische Exergie	15	
14.4.1 Wirkungsgrade (Erinnerung)	15	
15 Brennstoffzellen	15	
15.1 Elektrische Leistung	16	
15.1.1 Berechnung des Stroms	16	
15.1.2 Berechnung der Spannung	16	
15.2 Wärmeströme	16	
15.2.1 Wirkungsgrad	16	
15.2.2 Stacks	16	
16 Wärmeübertragung in Festkörpern	16	
16.1 Wärmeströme	16	
16.2 Erster Hauptsatz bezogen auf Wärmeübertragung	17	
16.3 Arten der Wärmeübertragung	17	
16.4 Wärmeleitungsgleichung	17	
16.4.1 Temperaturverläufe im stationären Fall	17	
16.4.2 Randbedingungen	18	
16.5 Stationäre Wärmeleitung mit Widerständen	18	
16.5.1 Wärmeleitwiderstände [$K W^{-1}$]	19	
16.5.2 Schaltbilder	19	
17 Eindimensionale Wärmeleitung in Rippen	19	
17.1 Allgemeine Energieerhaltungsgleichung für Rippen	19	
17.2 Rippen an Wärmetauschern	20	
17.2.1 Optimale Rippenlänge	20	
17.2.2 Rippenwirkungsgrad	21	
17.2.3 Rippenwiderstände	21	
17.2.4 Wärmefluss durch den Rippenfuss	21	
17.2.5 Approximation von Rippen	21	
17.3 Kreisförmige Rippen	21	
18 Instationäre Wärmeleitung	22	
18.1 Biot-Zahl/Zylindrisch/sphärisch	22	
18.2 Nulldimensionale Instationäre Wärmeleitung	22	
18.3 Eindimensionale instationäre Wärmeleitung	23	
18.3.1 Instat Wärmeleitung in der halbunendlichen Wand	23	
19 Erzwungene Konvektion	24	
19.1 Erhaltungsgleichungen für 2D und stationär Konvektion	24	
19.2 Definitionen für Erzwungene Konvektion	25	
19.3 Das Grenzschichtproblem an der ebenen Wand	26	
19.3.1 Lösungen	26	
19.3.2 Turbulente Strömungen	28	
19.3.3 Wärmeübergang an umströmten Körpern	28	
20 Erzwungene Konvektion in Kanälen	28	
20.1 Erzwungene Konvektion in durchstroemten Kanälen	28	
20.1.1 Konstante Wärmestrom an der Wand	29	
20.1.2 Konstante Wandtemperatur	29	
20.1.3 Einlauflänge einer Laminaren Rohrströmung	29	
20.1.4 Einlauflänge einer Turbulenten Rohrströmung	29	
21 Natürliche Konvektion	30	
21.1 Natürliche Konvektion an senkrechter Wand	30	
21.1.1 Dimensionslose Parameter der Natürlichen Konvektion	30	
21.1.2 Bestimmung des Wärmeübergangskoeffizienten für Natürliche Konvektion	30	

1 Konzepte und Definitionen

1.1 Konstanten & Kenngrößen:

- Avogadro-Zahl $N_A = 6.022 \cdot 10^{26} \text{ kmol}^{-1}$
- Boltzmannkonstante $k_B = 1.38 \cdot 10^{-23} \text{ JK}^{-1}$
- Gaskonstante $\bar{R} = R_0 = 8.314 \frac{\text{J}}{\text{mol K}} = N_A \cdot k_B$
- Normalfallbeschleunigung $g_0 = 9.81 \text{ ms}^{-2}$
- Normtemperatur $T_0 = 298 \text{ K} \cong 25^\circ\text{C}$
- Tripelpunkt Wasser $T_c = 273.16 \text{ K} = 0.01^\circ\text{C}$
- Referenzdruck $p_{ref} = 1 \text{ atm} = 1.01325 \text{ bar}$
- Referenztemperatur $T_{ref} = 298 \text{ K}$
- Molar \leftrightarrow Massenspezifisch $n = \frac{m}{M} \quad M : [\text{kg/k mol}], n : [\text{k mol}], m : [\text{kg}]$
- Molanteil (Volumenanteil) $X_i = \frac{n_i}{\sum_i n_i} = \frac{n_i}{n_{tot}} = \frac{M M_i}{\sum_i M M_i} = \frac{V_i}{V_{tot}}$
- Partialdruck $p_i = X_i \cdot p_{tot}$
- Konzentration $c_i = \frac{n_i}{V_{tot}}$
- Massenanteil $Y_i = \frac{m_i}{m_{tot}} = X_i \cdot M_i \cdot \frac{\sum_j n_j}{\sum_j [n_j \cdot M_j]}$
- Luftüberschussfaktor $\lambda = \frac{[m_L/m_B]}{[m_L/m_B]_{stoch}} = \frac{[\dot{m}_L/\dot{m}_B]}{[\dot{m}_L/\dot{m}_B]_{stoch}} = \frac{[n_L/n_B]}{[n_L/n_B]_{stoch}} = \frac{1}{\phi}$ (equivalence ratio)
 - Stationary (small) burner: $\lambda = 1.1 - 1.2$
 - Gasoline engine with 3-way catalyst: $\lambda = 1.0$
 - Diesel engine (full load / partial load): $\lambda = 1.2 - 5$
 - Stationary gas turbine (power plant): $\lambda = 2.0 - 2.3$
 - $\lambda < 1$ Fette Mischung
 - $\lambda = 1$ Stöchiometrische Mischung
 - $\lambda > 1$ Magere Mischung
- Isentropenkoeffizient $\kappa = \frac{c_p}{c_v} = \frac{c_v + R}{c_v} = 1 + \frac{R}{c_v} = \frac{c_p}{c_p - R}$
- Dichte $\rho = \frac{m}{v}$
- Brennstoffstrom $\dot{m}_{Br} = \frac{\dot{Q}}{\Delta H_F}$ $\dot{n}_{Br} = \frac{p \dot{V}_{Br}}{RT}$
- Abgasmassenstrom $\dot{m}_A = \dot{m}_{Br} + \dot{m}_L$ (Abgase = RHS der Verbrennungsgleichung)
- Molare Masse Abgas $(\lambda \geq 1) M_{Abgas} = \frac{x M_{CO_2} + \frac{y}{2} M_{H_2O} + (\lambda - 1)(x + \frac{y}{4}) M_{O_2} + 3.76\lambda(x + \frac{y}{4}) M_{N_2}}{4.76\lambda x + \frac{1}{4}(1 + 4.76\lambda)y}$
- L-B-Verhältnis (\dot{V}) $\frac{\dot{V}_L}{\nu'_{O_2} + \nu'_{N_2}} = \frac{\dot{V}_B}{\sum \nu'_B}$
- L-B-Verhältnis (\dot{m}) $\dot{m}_L = \dot{n}_B \cdot (\nu'_{O_2} M_{O_2} + \nu'_{N_2} M_{N_2})$
- Abgegeb. Wärme [kJ kmol] $Q = \frac{\dot{Q}}{\dot{n}_B} \left[\frac{\text{kJ s}^{-1}}{\text{kmol s}^{-1}} \right]$

1.2 Einheiten:

- Molmasse $M : \left[\frac{\text{kg}}{\text{kmol}} \right] N = \frac{m}{M} \cdot N_A = n \cdot N_A$
- Druck $p : \left[\frac{\text{N}}{\text{m}^2} \right] = [\text{Pa}] \quad 1 \text{ bar} = 10^5 \text{ Pa}$
- Spezifisches Volumen $v = \frac{V}{m} = \frac{1}{\rho} \left[\frac{\text{m}^3}{\text{kg}} \right]$
- Innere Energie $U : [\text{kJ}] \quad u : \left[\frac{\text{kJ}}{\text{kg}} \right] \quad \bar{u} : \left[\frac{\text{kJ}}{\text{kmol}} \right]$
- Enthalpie $H : [\text{kJ}] \quad h : \left[\frac{\text{kJ}}{\text{kg}} \right] \quad \bar{h} : \left[\frac{\text{kJ}}{\text{kmol}} \right]$
- Entropie $S : \left[\frac{\text{kJ}}{\text{K}} \right] \quad s : \left[\frac{\text{kJ}}{\text{kg K}} \right] \quad \bar{s} : \left[\frac{\text{kJ}}{\text{kmol K}} \right]$
- Gaskonst. $R : \left[\frac{\text{J}}{\text{kg K}} \right] = \frac{\bar{R} \cdot 1000}{M} \quad R : \left[\frac{\text{kJ}}{\text{kg K}} \right] = \frac{\bar{R}}{M}$
- Kraft $F : [\text{N}] = \left[\frac{\text{kg m}}{\text{s}^2} \right]$
- Energie $E : [\text{J}] = \left[\frac{\text{kg m}^2}{\text{s}^2} \right]$
- Exergie $Ex : [\text{J}] = \left[\frac{\text{kg m}^2}{\text{s}^2} \right]$
- Leistung $P : [\text{W}] = \left[\frac{\text{J}}{\text{s}} \right] = \left[\frac{\text{kg m}^2}{\text{s}^3} \right]$
- Arbeit $W : [\text{Nm}] = [\text{J}]$

1.3 Vorzeichenkonvention:

- $W > 0$ vom System geleistet (abgeführte Arbeit)
 $W < 0$ am System geleistet (zugeführte Arbeit)
 $Q > 0$ dem System zugeführte Wärme
 $Q < 0$ vom System abgegebene Wärme

1.4 SI Präfixe:

P	Peta-	10^{15}	k	Kilo-	10^3	m	Milli-	10^{-3}
T	Tera-	10^{12}	h	Hekto-	10^2	μ	Mikro-	10^{-6}
G	Giga-	10^9	d	Dezi-	10^{-1}	n	Nano-	10^{-9}
M	Mega-	10^6	c	Zenti-	10^{-2}	p	Pico-	10^{-12}

1.5 Allgemeine Begriffe:

- **Zustandsgrößen:** absolute Größen wie Druck, Temperatur, Volumen, Masse, Stoffmenge (thermisch) und innere Energie, Entropie (ΔS , Beachte: *S_{erz} ist keine Zustandsgroesse*), Enthalpie (kalorisch)
- **Prozessgrößen:** Wärme, Arbeit; wegabhängig
- **Intensive Größen:** keine Wertänderung bei gedachter Teilung des (homogenen) Systems; Druck, Temperatur, extensive Größen als spezifische Größen angegeben
- **Extensive Größen:** abhängig von Stoffmenge; Masse, Volumen, Energie
- **Spezifische Größen:** $x = X/m$
- **Molare Größen:** extensive Zustandsgrößen in intensive umgewandelt:

$$\bar{u} : U = n \cdot \bar{u} = \frac{m}{MM} \cdot \bar{u}, u = \frac{\bar{u}}{MM}$$

Bezieht sich auf N_A Moleküle.

Bsp: Molares Volumen $\bar{v} = MM/\rho \left[\frac{\text{m}^3}{\text{kmol}} \right]$

- **Prozess:** Veränderung eines thermodyn. Zustandes durch eindeutig bestimmten Vorgang

- **Ideales Gas:** kein Nassdampfgebiet

- **Perfektes Gas:** ideal, einatomig

1.6 Thermodynamisches System:

- Massenstrom-System
 - **geschlossenes** System: kein Massenaustausch (Anzahl Moleküle im System konstant)
 - **offenes** System: Massenströme fliessen über Systemgrenze
- Wärmestromsystem
 - **adiabates** Systeme: kein Wärmeaustausch über Systemgrenze ($Q = 0 \iff$ isoliert)
 - **diathermes** Systeme: nicht isoliert
- physikalisch-chemisches System
 - **homogenes** System: physikalische und chemische Zusammensetzung überall gleich
 - **heterogenes** System: Bsp. Mineralien

Beachte: ein chemisch homogenes System kann auch zwei Phasen beinhalten (z.B. das System $[H_2O_{(l)} \text{ und } H_2O_{(g)}]$ ist chemisch homogen aber physikalisch heterogen)

Nullter Hauptsatz: Wenn sich zwei Systeme mit einem dritten im Gleichgewicht befinden, sind sie auch untereinander im thermischen GGW. Aus $T_1 = T_2$ und $T_2 = T_3$ folgt $T_1 = T_3$.

Quasistatische Näherung: Homogenität der Zustandsgrößen (keine Gradienten im System) zu allen Zeiten.

2 Elemente der kinetischen Gastheorie

- Thermische Energie:** Bewegung aller Moleküle (Translation, Rotation, Oszillation) ergibt eine endliche Menge $E_K = E_{th}$.

$$E_{th} = \sum_{i=1}^N \frac{m_M}{2} \cdot w_i^2, \quad \overline{E_{th}} = \frac{E_{th}}{N} = \frac{m_M}{2} \cdot \overline{w_i^2}$$

$$e_{th} = \frac{E_{th}}{N \cdot m_M} = \frac{\overline{w_i^2}}{2}$$

- Wärme Q :** über Systemgrenze transportierte thermische Energie
- Absolute Temperatur:** thermischen Energie dividiert durch die Anzahl Freiheitsgrade f

$$E_{th} = N \cdot \frac{f}{2} k_b T, \quad \overline{E_{th}} = \frac{f}{2} k_b T, \quad e_{th} = \frac{f}{2} \frac{k_b T}{m_M}$$

(k_b beschreibt Umrechnung der Temperatur als Energie in Joule nach Kelvin)

- Druck:** Kraftwirkung der Moleküle bezogen auf eine Flächeneinheit

$$p_0 = \frac{1}{3} \cdot m \cdot n \cdot w_0^2, \quad p = n \cdot k_b \cdot T, \quad p \propto T, n$$

2.1 Innere Energie bei perfekten Gasen:

$$\Delta U = \Delta E_{th}, \quad u = \frac{3}{2} RT$$

2.2 Innere Energie bei idealen Gasen:

$$\Delta U = \Delta E_{th}, \quad u = \frac{f}{2} RT$$

Daraus folgt: $c_v = \frac{f}{2} R$ und $c_p = (\frac{f}{2} + 1)R$
 $c_p - c_v = R$ gilt weiterhin für alle Gase.

Einatomig	$f = 3$	Transl. in 3 Rtg. [Ne]
Zweiatomig	$f = 5$	Transl. und Rot. [O ₂]
Dreiatomic	$f = 5$	Transl. und Rot. [CO ₂]
Dreiatomic	$f = 12$	ab 1800K Oszillation

2.3 Innere Energie bei realen Gasen:

Wärme-, Bindungs- und elektrische Energie

$$\Delta U = \Delta E_{th} + \Delta E_p$$

2.4 Enthalpie bei perfekten Gasen:

$$h = u + pv = \frac{5}{2} RT$$

2.5 Enthalpie bei idealen Gasen:

$$h = u + pv = u + RT = \left(\frac{f}{2} + 1\right) RT$$

Für ideale Gase gilt $u = u(T)$, $h = h(T)$

2.6 Enthalpie bei realen Gasen:

Siehe Tabellen

3 1. Hauptsatz

Energie im System $E = E_k + E_p + U$ konstant

$$\Delta E = \underbrace{\Delta E_k + \Delta E_p}_{\text{oft vernachlässigbar}} + \Delta U = Q - W$$

Beachte die Vorzeichen:

- $Q > 0 \Rightarrow$ Dem System zugefuehrte Waerme.
- $Q < 0 :$ Dem System abgefuehrte Waerme.
- $W > 0 :$ Vom System geleistete Arbeit.
- $W < 0 :$ Am System geleistete Arbeit.

3.1 1. HS als Leistungsbilanz:

$$\frac{dE}{dt} = \dot{Q} - \dot{W}, \quad \frac{dU}{dt} = mc \frac{dT}{dt}$$

$$U(T_2) - U(T_1) = m \int_{T_1}^{T_2} c(T) dT$$

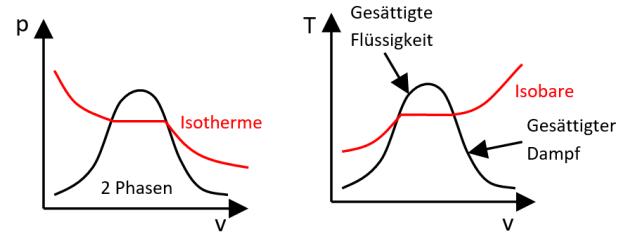
3.2 Kreisprozesse:

$$\Delta E = \Delta U = 0 \implies Q_{KP} = W_{KP}$$

(Zustandsgrößen nach Kreisprozess unverändert)

$W > 0$ falls rechtslaufend
 $W < 0$ falls linkslaufend

3.3 Die pVT Beziehung:



- Triple-Linie: alle 3 Aggregatzustände zugleich
- Nassdampfgebiet: Wasser und Dampf zugleich

3.3.1 Dampfmassenanteil:

Prozentualer Anteil Dampf im Nassdampfgebiet:

$$x = \frac{v_x - v_f}{v_g - v_f} = \frac{u_x - u_f}{u_g - u_f} = \frac{m_x - m_f}{m_g - m_f}$$

$$\implies v_x(x, T) = v_f(T) + x \cdot (v_g(T) - v_f(T))$$

3.3.2 Lineare Interpolation:

$$y = y_1 + \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} (x - x_1)$$

3.4 Ideale Gasgleichung:

$$pv = RT, \quad pV = mRT, \quad pV = n\bar{R}T, \quad p = \rho RT$$

$$\rho = \frac{1}{v}, \quad R = \frac{\bar{R}}{MM}, \quad c_p - c_v = R, \quad v = \frac{V}{m}$$

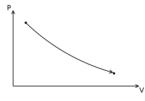
4 Polytrope Zustandsänderungen

4.1 Ideale Gase:

n: Polytropenkonstante

$$pV^n = \text{konst.} \leftrightarrow \frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{n-1}{n}} = \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{n-1}$$

$|W| \uparrow$ je $\downarrow n$ (weniger steil)

4.1.1 Isothermer Prozess ($n = 1$):

$$T = \text{konst.} \implies pV = \text{konst.}$$

$$\Delta U = 0 \implies Q_{12} = W_{12}$$

$$W_{12} = \int_{V_1}^{V_2} p(V)dV = p_1 V_1 \cdot \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right) = p_1 V_1 \cdot \ln\left(\frac{p_1}{p_2}\right)$$

$$= mRT_1 \cdot \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right) = mRT_1 \cdot \ln\left(\frac{p_1}{p_2}\right)$$

Isenthalp = isotherm (ideales Gas)

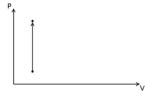
4.1.2 Isobarer Prozess ($n = 0$):

$$p = \text{konst.} \implies \frac{T}{V} = \text{konst.} \implies \frac{T_1}{V_1} = \frac{T_2}{V_2}$$

$$\Delta Q = \Delta H = m \cdot c_p \cdot \Delta T$$

$$\Delta U = m \cdot c_v \cdot \Delta T$$

$$W_{12} = p_1(V_2 - V_1) = mp_1(v_2 - v_1) = mR(T_2 - T_1)$$

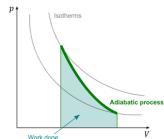
4.1.3 Isochorer Prozess ($n = \infty$):

$$V = \text{konst.} \implies \frac{T}{p} = \text{konst.} \implies \frac{T_1}{p_1} = \frac{T_2}{p_2}$$

$$W_{12} = 0$$

$$\Delta U = Q_{12} = m(u_2 - u_1)$$

$$Q_{12} = mc_v(T_2 - T_1)$$

4.1.4 Isentroper Prozess ($n = \kappa$):

Isentrop \leftarrow adiabat und reversibel $s_1 = s_2$

$$n = \kappa = \frac{c_p}{c_v}, \quad c_p = c_v + R$$

$$Q_{12} = 0 \implies -\Delta U = W_{12}$$

$$W_{12} = m(u_1 - u_2) = mc_v(T_1 - T_2)$$

$$= \frac{p_1 V_1^\kappa}{1 - \kappa} (V_2^{1-\kappa} - V_1^{1-\kappa})$$

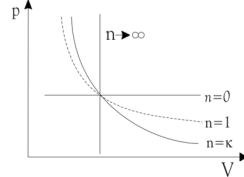
$$= \frac{p_1 V_1}{1 - \kappa} \left(\frac{p_1}{p_2}^{\frac{1-\kappa}{\kappa}} - 1 \right)$$

$$S = \text{konst.} \implies pV^\kappa = \text{konst.}$$

$$TV^{\kappa-1} = \text{konst.}, \quad p^{1-\kappa} T^\kappa = \text{konst.}$$

$$c_v = \frac{\bar{R}}{\kappa - 1}, \quad c_p = \frac{\bar{R} \cdot \kappa}{\kappa - 1}$$

$$w_{12} = c_v(T_1 - T_2) = \frac{1}{\kappa - 1} (p_1 v_1 - p_2 v_2)$$

4.1.5 Allgemeiner Prozess ($n \neq 1$):

$$pV^n = \text{konst.}$$

$$T^n p^{1-n} = \text{konst.}, \quad T v^{n-1} = \text{konst.}$$

$$W_{12} = \frac{mR}{1-n}(T_2 - T_1) = \frac{p_2 V_2 - p_1 V_1}{1-n}$$

$$= \frac{p_1 V_1^n}{1-n} (V_2^{1-n} - V_1^{1-n})$$

4.2 Reale Gase:

- Allgemein: $\Delta U = m(u_2 - u_1) = m(c_v T_2 - c_v T_1)$
- Isotherm: $\Delta U = Q - W \iff W = Q - \Delta U \rightarrow$ wenn Reversibel: $q_{12} = T_1 \cdot (s_2 - s_1)$
- Isobar: $W_{12} = p_1(V_2 - V_1) = mp_1(v_2 - v_1)$
- Isochor: $W_{12} = 0$
- Isentrop/adiabat: $s_1 = s_2$

5 Thermodynamische Zustandsdaten

- Enthalpie:** (Wärmefunktion)

$$H = U + pV,$$

und, $h = \frac{h}{M} u + pV$, wobei pV der benötigten Arbeit entspricht, um das Volumen V des Systems gegen die Wirkung des Außen-drucks p aufzuspannen.

- Verdampfungsenthalpie:** $h_{fg} = h_g - h_f$ nötige Energie, um ein Fluid unter konst. Druck und Temperatur gasförmig zu machen

- Wärmemenge:**

$$\Delta Q = mc\Delta T$$

(Grundgleichung der Kalorik, $c \rightarrow$ Tab A-19).

- Spezifische Wärmekapazität c**
nötige Energie, um 1 kg um 1 K zu erwärmen

- **isochore Wärmekapazität:** c_v (Tab A-20)

Wärmezufuhr bei konstantem Volumen

$$u = u(T, v) \rightarrow du = \left(\frac{\partial u}{\partial T}\right)_v dT + \left(\frac{\partial u}{\partial v}\right)_T dv$$

$$\implies du = c_v dT \text{ wenn } dv = 0, \quad c_v : \left[\frac{kJ}{kgK} \right]$$

$$\Delta u = \int_{T_1}^{T_2} c_v(T) \cdot dT \approx c_v \left(\frac{T_1 + T_2}{2} \right) \Delta T$$

- **isobare Wärmekapazität:** c_p (Tab A-20)
(Wärmezufuhr bei konstantem Druck)

$$h = h(T, p) \rightarrow du = \left(\frac{\partial h}{\partial T}\right)_p dT + \left(\frac{\partial h}{\partial p}\right)_T dp$$

$$\implies dh = c_p dT \text{ wenn } dp = 0, \quad c_p : \left[\frac{kJ}{kgK} \right]$$

$$\Delta h = h_2 - h_1 = \int_{T_1}^{T_2} c_p(T) dT = c_p(T_2 - T_1)$$

- Inkompressive Medien:**

Spezifisches Volumen hängt nur schwach von Druck ab. $v(T, p) \approx v_f(T)$, $u(T, p) \approx u_f(T)$, $h(T, p) \approx h_f(T)$. Ab einem bestimmten Sättigungsdruck nicht mehr inkompressibel (Wasser ist bis 25 bar inkompressibel) $c_p = c_v = c = \text{konst.}$

$$\Delta u = u_2 - u_1 = c(T_2 - T_1)$$

$$\Delta h = h_2 - h_1 = c(T_2 - T_1) + v(p_2 - p_1)$$

- **Perfekte Gase:**

Waermekapazitäten nur wenig ändern: $c_p = \text{konst.}$, $c_v = \text{konst.}$

$$\Delta u = u_2 - u_1 = c_v(T_2 - T_1)$$

$$\Delta h = h_2 - h_1 = c_p(T_2 - T_1)$$

- Allgemein: $c_p = c_v + R$, $\kappa(T) = \frac{c_p(T)}{c_v(T)}$, wobei $\kappa = \text{Isentropenkonstante}$

Verfahren: Endtemperatur

Gegeben seien 2 Stoffe: $m_{1/2}, c_{1/2}, T_{1/2}$. $\Delta U_1 + \Delta U_2 = 0 \Rightarrow$

$$m_1 c_1 (T_x - T_1) = m_2 c_2 (T_2 - T_x)$$

$$T_x = \frac{m_1 c_1 T_1 + m_2 c_2 T_2}{m_1 c_1 + m_2 c_2}$$

6 1. HS für offene Systeme

Massenstrom über Systemgrenze und damit verbundenen Energieströme werden in die Energiebilanz mit einbezogen.

Stationärer Betrieb: $\sum \dot{m}_{\text{in}} = \sum \dot{m}_{\text{out}}$, $\frac{d(\cdot)}{dt} = 0$

6.1 Massenstrombilanz:

$$\frac{dM_s}{dt} = \sum \dot{m}_{\text{in}} - \sum \dot{m}_{\text{out}}$$

6.2 Energiestrombilanz:

Energiezunahme abhängig von Wärme und Arbeit sowie den Energien ein- und austretender Massen.

Arbeit in zwei Komponenten unterteilt:

- gewünschte Arbeit W_s (ungebunden)
(nicht mit Massenstrom verbunden)
- Einschiebeleistung \dot{W}_{in} und Ausschiebeleistung \dot{W}_{out} des bewegten Fluids (an Masse gebunden)

$$\frac{dE_s}{dt} = \dot{Q} - \dot{W}_s + \sum \dot{m}_i (h_i + \frac{w_i^2}{2} + gz_i) - \sum \dot{m}_o (h_o + \frac{w_o^2}{2} + gz_o)$$

- Stationär, 1 Massenstrom \rightarrow

$$\dot{Q} - \dot{W}_s = \dot{m}(h_o - h_i + \frac{1}{2}(w_o^2 - w_i^2) + g(z_o - z_i))$$

- Isoliert $\Rightarrow \dot{Q} = 0$
- Keine Arbeit verrichtet $\Rightarrow \dot{W}_s = 0$
- $T = \text{const} \Rightarrow h_0 = h_i$
- Wenn $\dot{Q} \neq 0 \Rightarrow$ Entropiebilanz

- Nützliche Beziehungen

$$m = \frac{V}{v} \Rightarrow \dot{m} = \frac{\dot{V}}{v} = \rho \dot{V} = \rho A w = \frac{A w}{v}$$

$$\text{Ideale Gase: } \dot{m} = \frac{p \dot{V}}{RT} = \frac{p A w}{RT} = \frac{A w}{v} [\frac{kg}{sec}]$$

6.3 1. HS für halboffenes System:

$$m_2 u_2 - m_1 u_1 = Q - W + (m_2 - m_1)(h_{\text{Tank}} + \Delta E_p + \Delta E_K)$$

- Halboffenes System: Verbindung mit variablem System (z.B. Ballon)
- Zustandsgrößen von Tank/Reservoir unverändert

6.4 Düse:

- Verengung in einer Strömung
- Enthalpie des Fluids zu E_K (Beschleunigung); U konst.
- Stationär, isoliert, $\dot{W}_s = 0 \rightarrow$

$$h_i + \frac{1}{2} w_i^2 = h_a + \frac{1}{2} w_a^2$$

$$w_2 > w_1, p_2 < p_1, h_2 < h_1$$

• Isentroper Düsenwirkungsgrad

$$\eta_{D,s} = \frac{w_2^2}{w_{2,\text{max}}^2} \stackrel{\text{adiabat}}{=} \frac{h_2 - h_1}{h_{2,s} - h_1}$$

6.5 Diffusor:

- Erweiterung in einer Strömung (Düsenvorgang umgekehrt)
- Verlangsamung des Fluids

$$w_2 < w_1, p_2 > p_1, h_2 > h_1$$

6.6 Drossel/Ventil:

- Fluid in Drosselelement entspannt (Bsp. Ventil) (Kompressionswärmepumpen und -Kältemaschinen)
- Adiabat, Isenthalp

$$h_1 = h_2, p_2 < p_1, W_{12} = 0, Q_{12} = 0$$

6.7 Pumpe:

- Erzeugung Massenstrom (bei möglichst geringem Druckanstieg) durch Arbeitsaufwand
- Isentrop, inkompressibel $\rightarrow h_{2,s} - h_1 = v \Delta p \approx v_1(p_2 - p_1)$
Stationär $\rightarrow \dot{W}_s - \dot{Q} = \dot{m} \cdot (h_{\text{in}} - h_{\text{out}})$, wobei $\dot{m} = \frac{\dot{V}}{v_i}$, mit $\dot{V} [\frac{m^3}{s}]$.
- **Beachte:** mit Wirkungsgrad und $\dot{Q} = 0$

$$\frac{\dot{W}_s}{\dot{m}} = h_1 - h_2 = \frac{h_1 - h_{2,s}}{\eta_s}$$

6.8 Kompressor/Verdichter:

- Druckerhöhung des Fluids durch Arbeitsaufwand

• Isentroper Verdichterwirkungsgrad

Vergleich der minimal aufzuwendenden Arbeit (isentrop, $\dot{Q} = 0$) mit realer Arbeit. $s_{2,s} = s_1$.

$$\eta_{V,s} = \frac{\frac{W_{\text{min}}}{\dot{m}}}{\frac{W_{\text{effektive}}}{\dot{m}}} = \frac{h_{2,s} - h_1}{h_2 - h_1}$$

$$\dot{W}_{!2} = \dot{m} \cdot (h_1 - h_2)$$

6.9 Wärmetauscher/Verdampfer/Kondensator:

- Wärme mittels Durchströmung aufgenommen ($\dot{Q} > 0$) oder abgegeben ($\dot{Q} < 0$)
- Stationär (Systemgrenze: ein Massenstrom), **iff** $\dot{W} = 0 \rightarrow$

$$\dot{Q} = \dot{m}(h_{\text{out}} - h_{\text{in}})$$

• Beachte:

$$Q_{WT} = \eta \cdot Q_{max}$$

- Stationär, $\dot{Q} = 0$ (Bsp. Gegenstrom-Wärmetauscher; Systemgrenze: beide Massenströme) \rightarrow

$$0 = \dot{m}_1(h_{\text{out},1} - h_{\text{in},1}) + \dot{m}_3(h_{\text{out},2} - h_{\text{in},2})$$

6.10 Turbine:

- Gas von hohem Druckniveau auf tiefes ($\dot{W} > 0$)
- $\dot{E} = 0, E_P = 0 \rightarrow$

$$\dot{W}_S = \dot{Q} + \dot{m}_{in} \left(h_1 + \frac{w_1^2}{2} \right) - \dot{m}_{out} \left(h_2 + \frac{w_2^2}{2} \right)$$

- Beachte:** mit Wirkungsgrad $\frac{\dot{W}_s}{\dot{m}} = \eta \cdot (\dots)$ (Enthalpie tabelliert, 2. Zustand evtl. im Zweiphasengebiet)

- ISENTROPER TURBINENWIRKUNGSGRAD**

$$\eta_{T,s} = \frac{\dot{W}}{\dot{W}_{rev}} \stackrel{\text{adiabat}}{=} \frac{h_1 - h_2}{h_1 - h_{2,s}}$$

7 2. HS der Thermodynamik

Wärme fliesst nicht spontan von einem kalten zu einem wärmeren Reservoir (Clausius). Ein Kreisprozess kann zugeführte Wärme nicht zu 100% in Wärme umwandeln (laut Kelvin-Planck gibt es immer Abwärme).

7.1 (Ir-)Reversible Prozesse:

- Reversibel: umkehrbar; Anfangszustand im System und der Umgebung kann wiederhergestellt werden (dafür nötige Arbeit ohne Verlust gespeichert); abgeführte Temperatur muss somit bei gleicher Temperatur gespeichert werden.
- Irreversibel: unumkehrbar; irreversible Teilprozesse enthalten (Bsp. Wärmeübertragung, Reibung)

7.1.1 Expansion ($W > 0$):

$$|W_{rev}| > |W_{irr}|$$

$$\Delta U_{rev} = \Delta U_{irr}$$

$$|Q_{rev}| > |Q_{irr}|$$

Adiabat $\rightarrow |Q_{rev}| > |Q_{irr}| = 0$

7.1.2 Kompression ($W < 0$):

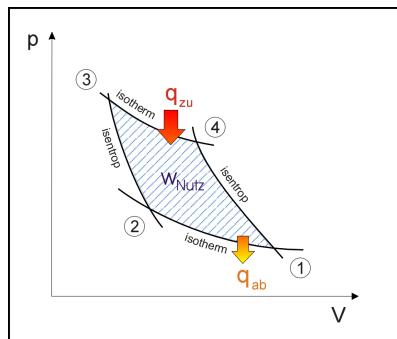
$$|W_{rev}| < |W_{irr}|$$

$$\Delta U_{rev} = \Delta U_{irr}$$

$$|Q_{rev}| < |Q_{irr}|$$

8 Carnot Kreisprozess

Idealisierter, reversibler Kreisprozess um die theoretisch max. umsetzbare Wärmemenge in Arbeit zu definieren.



- 1 \rightarrow 2: Isotherm Kompr. ($W_{12} < 0, Q_K < 0$ bei T_K) $\rightarrow \Delta U = 0$
 $\Delta Q_K = W_{12} = \int_1^2 p dV = RT_K \ln(\frac{v_2}{v_1}) > 0$
- 2 \rightarrow 3: Adiabate Kompr. ($W_{23} < 0, S = \text{konst.}$) $\rightarrow \Delta Q = 0$
 $0 = W_{23} = -\Delta U = c_v \cdot (T_K - T_H)$
- 3 \rightarrow 4: Isotherm Exp. ($W_{34} > 0, Q_H > 0$ bei T_H) $\rightarrow \Delta U = 0$
 $\Delta Q_H = W_{34} = \int_3^4 p dV = RT_H \ln(\frac{v_4}{v_3}) > 0$
- 4 \rightarrow 1: Adiabate Exp. ($W_{41} > 0, S = \text{konst.}$) $\rightarrow \Delta Q = 0$
 $0 = W_{41} = -\Delta U = c_v \cdot (T_H - T_K) = -W_{23}$

Nettoarbeit:

$$W_{KP} = W_{12} + W_{34} = R(T_H \ln(\frac{v_2}{v_1}) - T_K \ln(\frac{v_3}{v_4})) = q_{zu} - q_{ab}$$

Wirkungsgrad:

$$\eta_{KP} = \frac{W_{KP}}{q_{zu}} = 1 - \frac{T_K \ln(\frac{v_3}{v_4})}{T_H \ln(\frac{v_2}{v_1})}$$

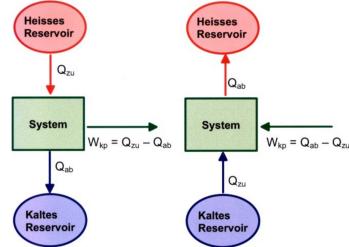
Andere Eigenschaften:

- $U_1 = U_2 \ \& \ U_3 = U_4$
- $\frac{Q_{12}}{Q_{34}} = \frac{T_K}{T_H}$

8.1 Kraftmaschine:

- Carnotprozess im UZS (Nettoarbeit > 0)
- Wärme aus T_H und Abwärme an T_K
- $W_{KP} = |Q_{zu}| - |Q_{ab}|$ (Uhrzeigersinn)
 - 1 \rightarrow 2: $W_{12} = p_1 V_1 \cdot \ln(V_2/V_1) = Q_{34}$
 - 2 \rightarrow 3: $W_{23} = m(u_2 - u_3), Q_{23} = 0$
 - 3 \rightarrow 4: $W_{34} = p_3 V_3 \cdot \ln(V_4/V_3) = Q_{34}$
 - 4 \rightarrow 1: $W_{41} = m(u_4 - u_1), Q_{41} = 0$

8.2 Kältemaschine/Wärmepumpe:



- Carnotprozess im Gegen-UZS (Nettoarbeit < 0)
- Wärme aus T_K an T_H
- $-W_{KP} = Q_{zu} - Q_{ab}$
 - 1 \rightarrow 2: $W_{12} = m(u_1 - u_2), Q_{12} = 0$
 - 2 \rightarrow 3: $W_{23} = p_2 V_2 \cdot \ln(V_3/V_2) = Q_{23}$
 - 3 \rightarrow 4: $W_{34} = m(u_3 - u_4), Q_{34} = 0$
 - 4 \rightarrow 1: $W_{41} = p_4 V_4 \cdot \ln(V_1/V_4) = Q_{41}$

Wobei Zustand 1 = Zustand 3 (Bild),
2 = 2 (Bild), 3 = 1 (Bild), 4 = 4 (Bild)

Kältemaschine:

Nutzen ist aus T_K zugeführte Wärme: KP in gegenuhzeigersinn (RHR, Nettiarbeit < 0)

- Leistungszahl: (Nutzwärme \div Arbeitsaufwand (Arbeitsleistung))

$$\epsilon_K = \frac{Q_{zu}}{W_{KP}} = \frac{Q_K}{-W_{netto}} = \frac{Q_K}{|Q_H| - |Q_K|} = \frac{Q_{zu}}{|Q_{ab}| - |Q_{zu}|}$$
- Reversibel $\rightarrow \epsilon_K = \epsilon_{K,max} = \frac{T_K}{T_H - T_K}$

Wärmepumpe:

Nutzen ist nach T_H abgeführte Wärme

- Leistungszahl

$$\epsilon_W = \frac{Q_{zu}}{W_{KP}} = \frac{Q_H}{-W_{netto}} = \frac{Q_H}{|Q_H| - |Q_K|} = \frac{Q_{ab}}{|Q_{ab}| - |Q_{zu}|}$$

- Reversibel $\rightarrow \epsilon_W = \epsilon_{W,max} = 1 + \frac{T_K}{T_H - T_K} = 1 + \epsilon_K$

Verfahren: Leistung einer laufenden Kreisprozesse

$$P = \dot{W}_{net} = \frac{U_{mdrehungen(Drehzahl)}}{sec} \cdot \frac{Zyklen}{U_{mdrehungen}} \cdot W_{net,proZyklus} \cdot a.$$

Aufmerksam: es könnte sei dass nicht alle Zyklen leisten Arbeit ($a = \frac{Zyklen_{W \neq 0}}{Zyklen_{tot}}$). Es: $a = 4$ fuer 4 Takt Motor.

Theorem: Kompressionsrate

Die Kompressionsrate ist: $r = \frac{V_1}{V_2} = \frac{v_{ra}}{v_{rb}}$ (aus die Tabellen).

- Ausgehend von der Gleichung der Entropieänderung für ein ideales Gas:
 $s_2(T_2, p_2) - s_1(T_1, p_1) = s^0(T_2) - s^0(T_1) - R \ln\left(\frac{p_2}{p_1}\right)$
- Isentropen Fall: $s_2 - s_1 = 0 \rightarrow \frac{p_2}{p_1} = \frac{e^{s^0 \frac{T_2}{R}}}{e^{s^0 \frac{T_1}{R}}}$
- Definition als relativer druck: $p_r(T) = C_1 e^{s^0 \frac{T}{R}}$
- Damit gilt für isentrope Prozesse bei Luft als idealem Gas
 $\frac{p_2}{p_1} = \frac{p_{r2}}{p_{r1}}$ und $\frac{v_2}{v_1} = \frac{v_{r2}}{v_{r1}}$

Theorem: Weitere Beziehungen

- 1.T-dS-Gleichung:
 $dU = TdS - pdV = dU(S, V)$
- formales Differential:
 $dU = \left(\frac{\partial U}{\partial S}\right)_V dS + \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_S dV$
- aus Koeffizientenvergleich:
 $T = \left(\frac{\partial U}{\partial S}\right)_V, p = -\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_S$
- 2.T-dS-Gleichung:
 $dH = TdS + Vdp = dH(S, p)$
- formales Differential:
 $dH = \left(\frac{\partial H}{\partial S}\right)_p dS + \left(\frac{\partial H}{\partial p}\right)_S dp$
- aus Koeffizientenvergleich:
 $T = \left(\frac{\partial H}{\partial S}\right)_p, V = -\left(\frac{\partial H}{\partial p}\right)_S$

9 Thermische Wirkungsgrade

Verhältnis zwischen Nutzen und Energieaufwand

$$\eta_{th} = \frac{\text{Nutzen}}{\text{Aufwand}} = \frac{W_{\text{Nutz}}}{Q_{\text{zu}}} = \frac{\dot{W}_{\text{Nutz}}}{\dot{Q}_{\text{zu}}}$$

9.0.1 Kreisprozesse:

$$\eta_{th} = \frac{(\sum)Q_{\text{zu}} - (\sum)Q_{\text{ab}}}{(\sum)Q_{\text{zu}}} = 1 - \frac{Q_{\text{ab}}}{Q_{\text{zu}}} = 1 - \frac{Q_K}{Q_H}$$

9.0.2 Carnot-Wirkungsgrad:

- Höchstmögliche Umwandlungsgrad von Q in W
 $\eta_{\text{Carnot}} \rightarrow 1$ für $T_H \rightarrow \infty, T_K \rightarrow 0$
- Thermische Wirkungsgrad eines irreversiblen KP immer geringer als derjenige eines reversiblen
- 2. HS: ein Teil von Q_{zu} muss zwingend an das kalte Reservoir abgegeben werden $\Rightarrow \eta_{\text{Carnot}} < 1$

$$\frac{Q_K}{Q_H} = \frac{T_K}{T_H} \Rightarrow \eta_{th} = 1 - \frac{T_K}{T_H}$$

9.0.3 Isentrope Prozesse:

- Zustandsdreieck (aus zwei folgt die dritte Eigenschaft)



10 Entropie

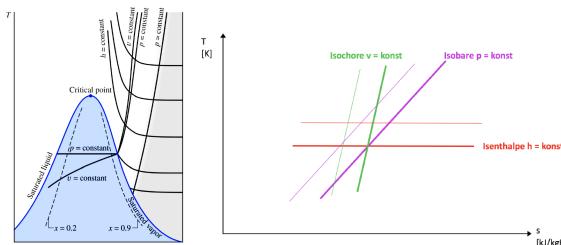
Ein Prozess kann nur Entropie zunahme fahren wenn irreversibilitäten während der prozess erscheinen: **FALSCH**:

$\Delta S < 0$ aber $S_{erz} > 0$

Entropie Änderung: $\Delta S = m(s_2 - s_1)$

- Entropie S : Mass für Unordnung/Irreversibilität
- Prozess spontan immer in Richtung \uparrow Entropie ablaufen
- Isentrop: $dS = 0$ (adiabat und reversibel)

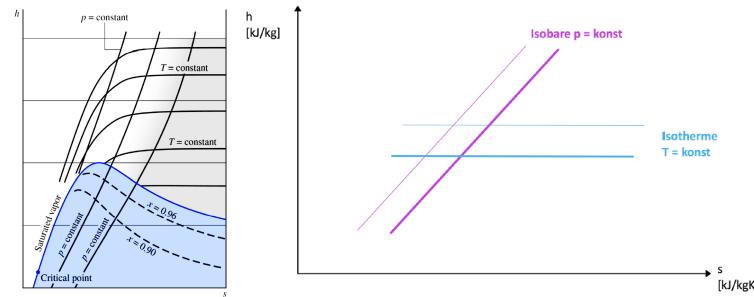
10.1 T-S Diagramm:



Wenn $\Delta S \nearrow \nearrow$ dann Steigung $\rightarrow 0$

Adiabat: $S = \text{const.}$ **Wichtig:** Steigung isochore > isobare.

10.2 H-S (Mollier) Diagramm:



10.3 TdS Gleichungen:

$$\begin{array}{ll} \Delta Q > 0 \text{ (Wärmezufuhr)} & dS > 0 \text{ (Entropie (sys) nimmt zu)} \\ \Delta Q < 0 \text{ (Wärmeabfuhr)} & dS < 0 \text{ (Entropie (sys) nimmt ab)} \\ \Delta Q = 0 \text{ (Adiabates System)} & dS = 0 \text{ (Entropie (sys) konstant)} \end{array}$$

Zusammenfassung der Beziehungen der verschiedenen thermodynamischen Größen.

$$\begin{aligned} T \cdot ds &= du + p \cdot dv \\ T \cdot ds &= dh - v \cdot dp \end{aligned}$$

- Verdampfung/Kondensation:**
 $(p = \text{konst.}, T = \text{konst.}) \Rightarrow T \cdot ds = dh$

- Inkompressible Stoffe:**
 $v, c = \text{konst.} \Rightarrow ds = dU = \int c \cdot \frac{1}{T} dT = c \cdot \ln \frac{T_2}{T_1}$

- Ideale Gase:**
 $du = c_v(T)dT, pv = RT \Rightarrow ds = c_v(T) \cdot \frac{dT}{T} + R \cdot \frac{dp}{p}$

$$Q = \int m T dS \leftrightarrow m T (\tilde{s}_2 - \tilde{s}_1), \frac{S}{m} = \tilde{s}$$

10.4 Clausius Ungleichung:

$$\oint \frac{\delta Q}{T_G} = \frac{Q_H}{T_H} - \frac{Q_C}{T_C} \leq 0 \stackrel{\text{reversibel}}{=} \Delta S_{\text{zu}} - \Delta S_{\text{ab}} = 0$$

(Umlaufintegral über Kreisprozess)

$$S_2 - S_1 \geq \sum_{j=1}^n \frac{Q_j}{T_j} \leftrightarrow S_{erz} = S_2 - S_1 - \sum_{j=1}^n \frac{Q_j}{T_j} \geq 0$$

10.5 Entropieänderung - Ideale Gase:

- Luft (TAB A-22)

$$s(T_2, p_2) - s(T_1, p_1) = s^0(T_2) - s^0(T_1) - R \cdot \ln\left(\frac{p_2}{p_1}\right)$$

Merke: bei isothermen Prozessen ist $\Delta s^0 = 0$

- Andere Gase (TAB A-23ff)

$$\bar{s}(T_2, p_2) - \bar{s}(T_1, p_1) = \bar{s}^0(T_2) - \bar{s}^0(T_1) - \bar{R} \cdot \left(\frac{p_2}{p_1} \right)$$

$$c = \text{konst.} \implies s^0(T, p) = c_p(T) \cdot \ln \left(\frac{T}{T_0} \right):$$

$$\begin{aligned}s_2 - s_1 &= c_p \cdot \ln \left(\frac{T_2}{T_1} \right) - R \cdot \ln \left(\frac{p_2}{p_1} \right) \\s_2 - s_1 &= c_v \cdot \ln \left(\frac{T_2}{T_1} \right) - R \cdot \ln \left(\frac{v_2}{v_1} \right)\end{aligned}$$

10.6 Isentrope Prozesse - Ideale Gase:

$$\begin{aligned}\kappa &= \frac{c_p}{c_v} \\c_p &= c_v + R \implies c_p = R \cdot \frac{\kappa}{\kappa - 1} \\c_v &= R \cdot \frac{1}{\kappa - 1} \\T_2 &= \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} = \left(\frac{v_2}{v_1} \right)^{1-\kappa} \\\eta_{rev} &= \frac{h_2 - h_1}{h_{2,s} - h_1}\end{aligned}$$

10.7 Entropiebilanz für geschlossene Systeme:

ΔS ist eine Zustandgrösse,
 $S_{erz} = S_{produziert}$ ist **keine** Zustandgrösse.

$$\begin{aligned}\dot{S}_{erz} &= \Delta S - \sum \frac{Q}{T_G} \\ \dot{S}_{erz} &= \dot{S} - \sum \frac{\dot{Q}}{T_G} = \dot{m} \cdot \Delta s - \sum \frac{\dot{Q}}{T_G} \\\dot{S}_{irr} \cdot T &= n_B \cdot T \cdot [\sum \nu'' s_i(T, p) - \sum \nu' s_i(T, p)] - \dot{Q} \quad (\text{THII})\end{aligned}$$

(T_G ist Temperatur an Grenze der Wärmeübertragung und $s_i(T, p) = s_i^0(T, p_{ref}) - R \cdot \ln \left[\frac{p}{p_{ref}} \right]$)

- Stationär $\rightarrow \Delta S = 0$
- Kreisprozess $\rightarrow \Delta S = 0$ aber i.A. $S_{erz} \neq 0$
- Reversibel $\rightarrow S_{erz} = 0$ [Keine Irrersibilitäten]
- Irreversibel $\rightarrow S_{erz} > 0, \Delta S >< 0 \leftrightarrow S_{irreversibel} > S_{reversibel}$.
- (THII) Wenn $\dot{S}_{irr} < 0$ Reaktion nicht komplett gelaufen ist (z.B nicht komplett Umwandlung in Wasserdampf für den Reaktor mit $H_2O(E), H_2$ und $O_2(P)$)

10.8 Entropiebilanz für offene Systeme:

$$\dot{S}_{erz} = \underbrace{\dot{S}}_1 - \underbrace{\sum \frac{\dot{Q}}{T_G}}_3 + \underbrace{\sum \dot{m}_{out} s_{out}}_4 - \underbrace{\sum \dot{m}_{in} s_{in}}_5$$

1. Erzeugungsrate im System (intrinsisch)
 2. Zunahme Entropie des Systems
 3. Entropietransp. über Systemgrenze per Wärmetransfer
 4. Mit Masse austretender Entropiestrom
 5. Mit Masse eintretender Entropiestrom
- Stationär, 1 Massenstrom \rightarrow

$$\dot{S}_{erz} = - \sum \frac{\dot{Q}}{T_G} + \dot{m}(s_{out} - s_{in})$$

- Stationär, 1 Massenstrom, intern reversibel ($\dot{S}_{erz} = 0$) \rightarrow

$$\begin{aligned}\frac{\dot{Q}_{rev}}{\dot{m}} &= T_G(s_{out} - s_{in}) \stackrel{\text{TdS}}{=} (h_{out} - h_{in}) - \int_1^2 v \cdot dp \\\frac{\dot{W}_{rev}}{\dot{m}} &= - \int_1^2 v \cdot dp - \frac{w_2^2 - w_1^2}{2} - g(z_2 - z_1)\end{aligned}$$

Berechnung von $\int v \cdot dp$ mit $p \cdot v^n = \text{konst.}$

$$\begin{aligned}-n &= 1 \text{ (isotherm): } p_1 v_1 \cdot \ln \left(\frac{p_2}{p_1} \right) \stackrel{\text{id. Gas}}{=} RT_1 \cdot \ln \left(\frac{p_2}{p_1} \right) \\-n &\neq 1: \frac{n}{n-1} (p_2 v_2 - p_1 v_1) \stackrel{\text{id. Gas}}{=} \frac{n}{n-1} R(T_2 - T_1)\end{aligned}$$

Düse/Diffusor: mit $W_{rev} = 0$ folgt Bernoulli

$$\int_1^2 v \cdot dp + \frac{w_2^2 - w_1^2}{2} - g(z_2 - z_1) = 0$$

Isotherm:

$$\frac{\dot{W}_{rev}}{\dot{m}} = T(\Delta s) - (p_2 \frac{\dot{V}_2}{\dot{m}} - p_1 \frac{\dot{V}_1}{\dot{m}}) - \frac{w_2^2 - w_1^2}{2} - g(\Delta z)$$

11 Exergie

- Mass für vorhandene Arbeitsmöglichkeit der Energie
- Anteil des Energieinhaltes eines Systems, der maximal mittels eines reversiblen Prozesses in Arbeit umgewandelt werden kann (bis GGW mit Umgebung)
- Exergie eines isolierten Systems kann nur abnehmen.

Anergie: Energieanteil, der nach Erreichen des Gleichgewichtes mit der Umgebung im System zurückbleibt und nicht mehr in Arbeit umgewandelt werden kann.

11.1 Exergieverlust - Guoy-Stodola Theorem:

Die verlorene Arbeitsmöglichkeit ist die Differenz zwischen der maximal möglichen und der effektiv vorhandenen Arbeitsleistung. Die maximal verlorene Arbeit kann als Exergieverlust betrachtet werden.

$$E_{x,rev} - E_x = E_{x,V} = T_0 \cdot S_{erz} = W_{Verlust} = W_{rev} - W$$

11.2 Exergiebilanz für geschlossene Systeme:

$$\Delta E_x = \underbrace{\int \left(1 - \frac{T_0}{T_G} \right) \delta Q}_{E_{x,Q}} - \underbrace{(W - p_0 \Delta V)}_{E_{x,W}} - \underbrace{T_0 \cdot S_{erz}}_{E_{x,V}}$$

($E_{x,V}$ ist die exergie Verlust).

(T_0, p_0) ist Umgebungszustand (i.d.R. $p_0 = 1$ bar)

- Stationär $\rightarrow \Delta E_x = 0$
- Reversibel $\rightarrow E_{x,V} = T_0 \cdot S_{erz} = 0$
- Keine Arbeit $\rightarrow E_{x,W} = (W - p_0 \Delta V) = 0$
- Isobare $\rightarrow E_{x,W} = 0$
- Adiabat $\rightarrow E_{x,Q} = 0$

$$\int \left(1 - \frac{T_0}{T_G} \right) \delta Q = Q_{12} - T_0 \cdot \Delta S$$

11.2.1 Exergie - geschlossenes System:

$$E_x = U - U_0 + p_0(V - V_0) - T_0(S - S_0) + E_K + E_P$$

11.2.2 Exergiedifferenz - geschlossenes System:

$$\Delta E_x = E_{x,2} - E_{x,1} = \Delta U + p_0 \Delta V - T_0 \Delta S + \Delta E_K + \Delta E_P$$

11.2.3 Exergieänderungsgeschwindigkeit:

$$\dot{E}_x = \sum \dot{Q}_i \left(1 - \frac{T_0}{T_i} \right) - \left(\dot{W} - p_0 \frac{dV}{dt} \right) - T_0 \cdot \dot{S}_{\text{erz}}$$

- Guoy-Stodola: $-\dot{E}_{x,\text{irr}} = E_{x,V} = T_0 \cdot \dot{S}_{\text{erz}}$
- Stationär, keine Arbeit (Wärmeübergang) \rightarrow

$$\dot{E}_{x,V} = T_0 \cdot \dot{S}_{\text{erz}} = \sum \left(1 - \frac{T_0}{T_i} \right) \dot{Q}_i = \dot{Q} \left(\frac{T_0}{T_1} - \frac{T_0}{T_2} \right)$$

11.3 Exergiebilanz für offene Systeme:

$$\begin{aligned} \dot{E}_x &= \sum \dot{m}_{\text{in}} \cdot e_{x,\text{str,in}} - \sum \dot{m}_{\text{out}} \cdot e_{x,\text{str,out}} \\ &\quad - (\dot{W}_S - p_0 \frac{dV}{dt}) + \sum \dot{Q}_i \left(1 - \frac{T_0}{T_i} \right) - T_0 \cdot \dot{S}_{\text{erz}} \end{aligned}$$

- Reversibel $\rightarrow T_0 \cdot \dot{S}_{\text{erz}} = 0$
- Stationär ($\dot{E}_x = 0$), 1 Massenstrom \rightarrow

$$\begin{aligned} \sum \dot{Q}_i \left(1 - \frac{T_0}{T_i} \right) - \dot{W}_S - T_0 \cdot \dot{S}_{\text{erz}} \\ = \dot{m}(h_2 - h_1 - T_0(s_2 - s_1) + \Delta E_K + \Delta E_P) \\ = \dot{E}_{x,\text{str,out}} - \dot{E}_{x,\text{str,in}} \end{aligned}$$

- Stationär, adiabat, keine Leistung \rightarrow

$$\dot{E}_{x,V} = T_0 \cdot \dot{S}_{\text{erz}} = \sum_i \dot{m}_i (e_{x,\text{str,i,in}} - e_{x,\text{str,i,out}})$$

11.3.1 Exergie - offenes System:

$$\dot{E}_{x,\text{str}} = \dot{m} \cdot e_{x,\text{str}} = \dot{m} [(h - h_0) - T_0(s - s_0) + e_k + e_p]$$

11.3.2 Exergedifferenz - offenes System:

$$\begin{aligned} \Delta \dot{E}_{x,\text{str}} &= \dot{E}_{x,\text{str,2}} - \dot{E}_{x,\text{str,1}} \\ &= \dot{m} [(h_2 - h_1) - T_0(s_2 - s_1) + \Delta e_k + \Delta e_p] \end{aligned}$$

(Stationär)

11.4 Exergetische Wirkungsgrad:

- ϵ bewertet die quantitative Nutzung der Exergie (und damit die qualitative Nutzung der Energie)
- i.A. $(T_N - T_0) \uparrow, (T_Q - T_N) \downarrow$ führt zu $\epsilon \uparrow$
- $\epsilon \rightarrow \eta$ führt zu $E_{x,V} \rightarrow 0$
- $T_N \rightarrow T_Q$ führt zu $S_{\text{erz}} \rightarrow 0$ oder $T_0 \rightarrow 0$

$$\epsilon = \frac{\text{gen. Exergiestrom}}{\text{zugef. Exergiestrom}} \stackrel{\text{Wärmeströme}}{=} \frac{\dot{Q}_N \cdot \left(1 - \frac{T_0}{T_N} \right)}{\dot{Q}_Q \cdot \left(1 - \frac{T_0}{T_Q} \right)}$$

Indizes: Q : Quelle, N : Nutz, 0 : Umgebung

Verfahren: Exergetische Wirkungsgrad

- Offenes System mit Leistung

$$\epsilon = \frac{\dot{E}_{x,N}}{\dot{m}(e_{x,\text{str,1}} - e_{x,\text{str,2}})} = \frac{\dot{E}_{x,N}}{\dot{E}_{x,N} + T_0 \cdot S_{\text{erz}}}$$

- Nutzung der Abwärme $\dot{E}_{x,N} = \dot{Q}_A \cdot \left(1 - \frac{T_0}{T_A} \right) + \dot{W}_S$
- keine Nutzung der Abwärme $\dot{E}_{x,N} = \dot{W}_S$

- Turbine

$$\epsilon = \frac{\dot{W}_S}{\dot{m}(e_{x,\text{str,1}} - e_{x,\text{str,2}})} = \frac{\dot{W}_S}{\dot{W}_S + T_0 \cdot S_{\text{erz}}}$$

- Pumpe/Kompressor

$$\begin{aligned} \epsilon &= \frac{\dot{m}(e_{x,\text{str,1}} - e_{x,\text{str,2}})}{\dot{W}_{\text{invest}}} = \frac{\dot{W}_{\text{invest}} - E_{x,V}}{\dot{W}_{\text{invest}}} \\ &= \frac{-\dot{W}_S - T_0 \cdot S_{\text{erz}}}{-\dot{W}_S} \stackrel{Q_{\text{Verlust}}=0}{=} \frac{(h_2 - h_1) - T_0(s_2 - s_1)}{h_2 - h_1} \end{aligned}$$

- Wärmetauscher

- ohne Vermischung

$$\epsilon = \frac{\dot{m}_C(e_{x,\text{str,C,out}} - e_{x,\text{str,C,in}})}{\dot{m}_H(e_{x,\text{str,H,in}} - e_{x,\text{str,H,out}})}$$

- mit Vermischung

$$\epsilon = \frac{\dot{m}_{C,i}(e_{x,\text{str,C,out}} - e_{x,\text{str,C,in}})}{\dot{m}_{H,i}(e_{x,\text{str,H,in}} - e_{x,\text{str,H,out}})}$$

12 Verbrennungsprozesse

Seit hier sei $R = \bar{R}$

12.1 λ bestimmen:

Air ratio (percent excess air):

$$\lambda = \frac{\frac{m_L}{m_B}}{\left(\frac{m_L}{m_B}\right)_{\text{stöch}}} = \frac{\frac{n_L}{n_B}}{\left(\frac{n_L}{n_B}\right)_{\text{stöch}}}$$

mit $n_L = n_{O_2}$ oder $n_L = n_{N_2}$

1. Reaktionsgleichung abhängig von λ aufstellen (von $\lambda \geq 1$ ausgehen)
 - $\lambda < 1$ fett
 - $\lambda = 1$ stoch.
 - $\lambda > 1$ mager [$X_{O_2} > X_{CO}$]
2. 1.HS aufstellen (bei Verbrennung $W = 0$, ausgehen von $Q = 0$)
 $\rightarrow \sum_E \dots = \sum_P \dots$
3. Tabelle wie bei ad. Flammttemperatur aufstellen, wenn nichts anderes gegeben: ausgehen von $h_{Br}(T_E) = h_{Br}(T_{ref})$
4. `solve(n1(hf0b+(heb-hrb))+n2(heo-8682)+n3(hen-8669) = n4(-393520+(hpc-9364))+n5(-241820+(hph-9904))+n6(hpo-8682)+n7(hpn-8669))`, wo n_i die stoikiometrische Koeffizienten sind.

Verfahren: Alkanen vs Alkoholen

Auf Grund des im Brennstoff vorhandenen Sauerstoffs, sinkt das stoikiometrische Luft-Brennstoff-Verhältnis bei Alkoholen gegenüber Alkanen.

Die rechte Seite der Reaktionsgleichung wird bei Verbrennungen auch als **Rauchgas/Abgase** bezeichnet. (Siehe Tafeln)

C_xH_y an Luft

	C _x H _y	O ₂	N ₂	→ C _x H _y	CO ₂	H ₂ O	O ₂	N ₂	(m _L /m _B) _{stöch}	h _f ^o [kJ/kmol]
$\lambda < 1$	allg.	1	$\lambda(x + \frac{y}{4})$	$3.76\lambda(x + \frac{y}{4})$	→ 1 - λ	$\lambda\frac{y}{2}$	0	$3.76\lambda(\textcolor{red}{x} + \frac{y}{4})$	$(\frac{x+y}{4})(M_{O_2} + 3.76 \cdot M_{N_2})$	
	CO	1	1.25 λ	4.7 λ	→ 1 - λ	0.5λ	0	4.7 λ	$(\frac{x+y}{4})(M_{O_2} + 3.76 \cdot M_{N_2})$	13.2 17.16
	CH ₄	1	2 λ	7.52 λ	→ 1 - λ	2 λ	0	7.52 λ	$(\frac{x+y}{4})(M_{O_2} + 3.76 \cdot M_{N_2})$	9.4 λ 13.2
	C ₂ H ₂	1	2.5 λ	9.4 λ	→ 1 - λ	2 λ	0	2.5 λ	$(\frac{x+y}{4})(M_{O_2} + 3.76 \cdot M_{N_2})$	11.28 λ 13.16 λ
	C ₂ H ₄	1	3 λ	11.28 λ	→ 1 - λ	2 λ	0	3 λ	$(\frac{x+y}{4})(M_{O_2} + 3.76 \cdot M_{N_2})$	14.7086 16.016
	C ₂ H ₆	1	3.5 λ	13.16 λ	→ 1 - λ	2 λ	0	3 λ	$(\frac{x+y}{4})(M_{O_2} + 3.76 \cdot M_{N_2})$	13.16 λ 16.92 λ
	C ₂ H ₆	1	4.5 λ	16.92 λ	→ 1 - λ	3 λ	0	4 λ	$(\frac{x+y}{4})(M_{O_2} + 3.76 \cdot M_{N_2})$	18.8 λ 24.44 λ
	C ₃ H ₆	1	5 λ	18.8 λ	→ 1 - λ	3 λ	0	5 λ	$(\frac{x+y}{4})(M_{O_2} + 3.76 \cdot M_{N_2})$	30.08 λ 6 λ
	C ₄ H ₁₀	1	6.5 λ	24.44 λ	→ 1 - λ	4 λ	0	6 λ	$(\frac{x+y}{4})(M_{O_2} + 3.76 \cdot M_{N_2})$	15.3848 28.2 λ
	C ₅ H ₁₂	1	8 λ	30.08 λ	→ 1 - λ	5 λ	0	7 λ	$(\frac{x+y}{4})(M_{O_2} + 3.76 \cdot M_{N_2})$	30.08 λ 41.36 λ
	C ₆ H ₆	1	14.5 λ	28.2 λ	→ 1 - λ	6 λ	0	8 λ	$(\frac{x+y}{4})(M_{O_2} + 3.76 \cdot M_{N_2})$	28.2 λ 47 λ
	C ₇ H ₁₆	1	11 λ	41.36 λ	→ 1 - λ	7 λ	0	9 λ	$(\frac{x+y}{4})(M_{O_2} + 3.76 \cdot M_{N_2})$	20.592 47 λ
	C ₈ H ₁₈	1	12.5 λ	47 λ	→ 1 - λ	8 λ	0	9 λ	$(\frac{x+y}{4})(M_{O_2} + 3.76 \cdot M_{N_2})$	15.0526 -208450
$\lambda = 1$	allg.	1	$(x + \frac{y}{4})$	$3.76(x + \frac{y}{4})$	→ 0	x	$\frac{y}{2}$	0	$3.76(\textcolor{red}{x} + \frac{y}{4})$	$(\frac{x+y}{4})(M_{O_2} + 3.76 \cdot M_{N_2})$
	CO	1	1.25	4.7	→ 0	1	0.5	0	4.7	13.2 17.16
	CH ₄	1	2	7.52	→ 0	1	2	0	7.52	9.4 13.2
	C ₂ H ₂	1	2.5	9.4	→ 0	2	1	0	11.28	14.7086
	C ₂ H ₄	1	3	11.28	→ 0	2	2	0	13.16	16.016
	C ₂ H ₆	1	3.5	13.16	→ 0	2	3	0	16.92	14.7086
	C ₃ H ₆	1	4.5	16.92	→ 0	3	3	0	18.8	15.6
	C ₃ H ₈	1	5	18.8	→ 0	3	4	0	24.44	15.3848
	C ₄ H ₁₀	1	6.5	24.44	→ 0	4	5	0	30.08	15.2533
	C ₅ H ₁₂	1	8	30.08	→ 0	5	6	0	28.2	13.2
	C ₆ H ₆	1	14.5	28.2	→ 0	6	3	0	41.36	20.592
	C ₇ H ₁₆	1	11	41.36	→ 0	7	8	0	47	15.0526 -208450
$\lambda > 1$	allg.	1	$\lambda(x + \frac{y}{4})$	$3.76\lambda(x + \frac{y}{4})$	→ 0	x	$\frac{y}{2}$	$(\lambda - 1)(\textcolor{red}{x} + \frac{y}{4})$	$(\frac{x+y}{4})(M_{O_2} + 3.76 \cdot M_{N_2})$	
	CO	1	1.25 λ	4.7 λ	→ 0	1	0.5	1.25 $(\lambda - 1)$	$(\frac{x+y}{4})(M_{O_2} + 3.76 \cdot M_{N_2})$	13.2 17.16
	CH ₄	1	2 λ	7.52 λ	→ 0	1	2	2 $(\lambda - 1)$	$(\frac{x+y}{4})(M_{O_2} + 3.76 \cdot M_{N_2})$	9.4 λ 13.2
	C ₂ H ₂	1	2.5 λ	9.4 λ	→ 0	2	1	2.5 $(\lambda - 1)$	$(\frac{x+y}{4})(M_{O_2} + 3.76 \cdot M_{N_2})$	3 $(\lambda - 1)$ 11.28 λ
	C ₂ H ₄	1	3 λ	11.28 λ	→ 0	0	2	3 $(\lambda - 1)$	$(\frac{x+y}{4})(M_{O_2} + 3.76 \cdot M_{N_2})$	3.5 $(\lambda - 1)$ 13.16 λ
	C ₂ H ₆	1	3.5 λ	13.16 λ	→ 0	0	3	4.5 $(\lambda - 1)$	$(\frac{x+y}{4})(M_{O_2} + 3.76 \cdot M_{N_2})$	4.5 $(\lambda - 1)$ 16.92 λ
	C ₃ H ₆	1	4.5 λ	16.92 λ	→ 0	0	3	5 $(\lambda - 1)$	$(\frac{x+y}{4})(M_{O_2} + 3.76 \cdot M_{N_2})$	18.8 λ 24.44 λ
	C ₃ H ₈	1	5 λ	18.8 λ	→ 0	0	4	5 $(\lambda - 1)$	$(\frac{x+y}{4})(M_{O_2} + 3.76 \cdot M_{N_2})$	6.5 $(\lambda - 1)$ 8 $(\lambda - 1)$
	C ₄ H ₁₀	1	6.5 λ	24.44 λ	→ 0	0	5	6 $(\lambda - 1)$	$(\frac{x+y}{4})(M_{O_2} + 3.76 \cdot M_{N_2})$	24.44 λ 30.08 λ
	C ₅ H ₁₂	1	8 λ	30.08 λ	→ 0	0	6	7 λ	$(\frac{x+y}{4})(M_{O_2} + 3.76 \cdot M_{N_2})$	15.3848 28.2 λ
	C ₆ H ₆	1	14.5 λ	28.2 λ	→ 0	0	6	8 λ	$(\frac{x+y}{4})(M_{O_2} + 3.76 \cdot M_{N_2})$	14.5 $(\lambda - 1)$ 41.36 λ
	C ₇ H ₁₆	1	11 λ	41.36 λ	→ 0	0	7	9	$(\frac{x+y}{4})(M_{O_2} + 3.76 \cdot M_{N_2})$	22.592 47 λ
	C ₈ H ₁₈	1	12.5 λ	47 λ	→ 0	0	8	9	$(\frac{x+y}{4})(M_{O_2} + 3.76 \cdot M_{N_2})$	12.5 $(\lambda - 1)$ -208450

C_xH_yO_z an Luft

		C _x H _y O _z	O ₂	N ₂	→ C _x H _y O _z	CO ₂	H ₂ O	O ₂	N ₂	(m _L /m _B) _{stöch}	h _f [°]
λ < 1	allg.	1	λ(x + $\frac{y}{4} - \frac{z}{2}$)	3.76λ(x + $\frac{y}{4} - \frac{z}{2}$)	→ 1 - λ	λx	λ $\frac{y}{2}$	0	3.76λ(x + $\frac{y}{4} - \frac{z}{2}$)	$(\mathbf{x} + \frac{y}{4} - \frac{z}{2})(M_{O_2} + 3.76 \cdot M_{N_2})$	$\frac{(\mathbf{x} + \frac{y}{4} - \frac{z}{2})(M_{O_2} + 3.76 \cdot M_{N_2})}{\mathbf{x} \cdot M_C + \mathbf{y} \cdot M_H + \mathbf{z} \cdot M_O}$
CH ₃ OH	1	1.5λ	5.64λ	→ 1 - λ	λ	2λ	0	5.64λ	6.435	-200890	
C ₂ H ₅ OH	1	3λ	11.28λ	→ 1 - λ	2λ	3λ	0	11.28λ	8.953	-235310	
C ₄ H ₉ OH	1	6λ	22.56λ	→ 1 - λ	4λ	5λ	0	22.56λ	11.1308	—	
λ = 1	allg.	1	(x + $\frac{y}{4} - \frac{z}{2}$)	3.76(x + $\frac{y}{4} - \frac{z}{2}$)	→ 0	x	y/2	0	3.76(x + $\frac{y}{4} - \frac{z}{2}$)	$(\mathbf{x} + \frac{y}{4} - \frac{z}{2})(M_{O_2} + 3.76 \cdot M_{N_2})$	$\frac{(\mathbf{x} + \frac{y}{4} - \frac{z}{2})(M_{O_2} + 3.76 \cdot M_{N_2})}{\mathbf{x} \cdot M_C + \mathbf{y} \cdot M_H + \mathbf{z} \cdot M_O}$
CH ₃ OH	1	1.5	5.64	→ 0	1	2	0	5.64	6.435	-200890	
C ₂ H ₅ OH	1	3	11.28	→ 0	2	3	0	11.28	8.953	-235310	
C ₄ H ₉ OH	1	6	22.56	→ 0	4	5	0	22.56	11.1308	—	
λ > 1	allg.	1	λ(x + $\frac{y}{4} - \frac{z}{2}$)	3.76λ(x + $\frac{y}{4} - \frac{z}{2}$)	→ 0	x	y/2	(λ - 1)(x + $\frac{y}{4}$)	3.76λ(x + $\frac{y}{4} - \frac{z}{2}$)	$(\mathbf{x} + \frac{y}{4} - \frac{z}{2})(M_{O_2} + 3.76 \cdot M_{N_2})$	$\frac{(\mathbf{x} + \frac{y}{4} - \frac{z}{2})(M_{O_2} + 3.76 \cdot M_{N_2})}{\mathbf{x} \cdot M_C + \mathbf{y} \cdot M_H + \mathbf{z} \cdot M_O}$
CH ₃ OH	1	1.5λ	5.64λ	→ 0	1	2	0	5.64λ	6.435	-200890	
C ₂ H ₅ OH	1	3λ	11.28λ	→ 0	2	3	0	11.28λ	8.953	-235310	
C ₄ H ₉ OH	1	6λ	22.56λ	→ 0	4	5	0	22.56λ	11.1308	—	
		(A-23)	N ₂	(A-24) O ₂	(A-25) H ₂ O	(A-26) CO	(A-27) CO ₂	(A-28) H ₂			
h _f kJ/kmol	0	0	0	-241820	-110530	-393520	0				
h(T _{ref}) kJ/kmol	8'669	8'682	9'904	8'669	9'364	8'468					

Ist z < x werden OH-Gruppen unter Wasserabspaltung eliminiert:
C_xH_yO_z = C_xH_{y-z}(OH)_z → C_xH_{y-2z} + zH₂O

11

Basisreaktion (BR)	K _P $\left(\frac{p_{M_d}}{p_0}\right)^c = \frac{c^2}{a(a+c)} \cdot \frac{p_{tot}}{p_0}$	K _c	K _n	Dissoziationsreaktion (DR)	Vermischungsreaktion (VR)
aM _b ↔ cM _d	$\left(\frac{p_{M_d}}{p_0}\right)^c \cdot \left(\frac{p_{ref}}{p_{tot}}\right)$	$\frac{n_H^2}{n_{H_2}^2} \cdot \left(\frac{p_{ref}}{p_{tot}}\right)$	$\frac{n_H^2}{n_{H_2}^2} \cdot \frac{1}{V}$	$\frac{n_H^2}{n_{H_2}^2}$	H ₂ → (1 - x)H ₂ + 2xH
H ₂ ↔ 2H	$\frac{n_H^2}{n_{H_2}^2} \cdot \left(\frac{p_{ref}}{p_{tot}}\right)$	$\frac{n_O^2}{n_O^2} \cdot \left(\frac{p_{ref}}{p_{tot}}\right)$	$\frac{n_O^2}{n_O^2} \cdot \frac{1}{V}$	$\frac{n_O^2}{n_O}$	O ₂ → (1 - x)O ₂ + 2xO
O ₂ ↔ 2O	$\frac{n_O^2}{n_O^2} \cdot \left(\frac{p_{ref}}{p_{tot}}\right)$	$\frac{n_N^2}{n_N^2} \cdot \left(\frac{p_{ref}}{p_{tot}}\right)$	$\frac{n_N^2}{n_N^2} \cdot \frac{1}{V}$	$\frac{n_N^2}{n_N}$	N ₂ → (1 - x)N ₂ + 2xN
N ₂ ↔ 2N	$\frac{n_{NO}^2}{n_{NO}^2} \cdot \left(\frac{p_{ref}}{p_{tot}}\right)$	$\frac{n_{N_2}^2}{n_{N_2}^2} \cdot \left(\frac{p_{ref}}{p_{tot}}\right)$	$\frac{n_{N_2}^2}{n_{N_2}^2} = K_p$	K _p	NO → (1 - x)NO + 0.5xO ₂ + 0.5xN ₂
0.5O ₂ + 0.5N ₂ ↔ NO	$\frac{n_{NO}^2}{n_{NO}^2} \cdot \left(\frac{p_{ref}}{p_{tot}}\right)^{0.5}$	$\frac{n_{H_2} \cdot n_{O_2}^{0.5}}{n_{H_2} \cdot n_{O_2}^{0.5}} \cdot \left(\frac{p}{p_{ref}} \cdot \frac{1}{n_{tot}}\right)^{0.5}$	$\frac{n_{H_2} \cdot n_{O_2}^{0.5}}{n_{H_2} \cdot n_{O_2}^{0.5}} \cdot V^{-0.5}$	$\frac{n_{H_2} \cdot n_{O_2}^{0.5}}{n_{H_2} \cdot n_{O_2}^{0.5}}$	H ₂ O → (1 - x)H ₂ O + xH ₂ + 0.5xO ₂
H ₂ O ↔ H ₂ + 0.5O ₂	$\frac{n_{H_2} \cdot n_{O_2}^{0.5}}{n_{H_2} \cdot n_{O_2}^{0.5}} \cdot \left(\frac{p}{p_{ref}} \cdot \frac{1}{n_{tot}}\right)^{0.5}$	$\frac{n_{OH} \cdot n_{H_2}^{0.5}}{n_{OH} \cdot n_{H_2}^{0.5}} \cdot V^{-0.5}$	$\frac{n_{OH} \cdot n_{H_2}^{0.5}}{n_{OH} \cdot n_{H_2}^{0.5}}$	$\frac{n_{OH} \cdot n_{H_2}^{0.5}}{n_{OH} \cdot n_{H_2}^{0.5}}$	H ₂ O → (1 - x)H ₂ O + xOH + 0.5xH ₂
H ₂ O ↔ OH + 0.5H ₂	$\frac{n_{OH} \cdot n_{H_2}^{0.5}}{n_{OH} \cdot n_{H_2}^{0.5}} \cdot \left(\frac{p}{p_{ref}} \cdot \frac{1}{n_{tot}}\right)^{0.5}$	$\frac{n_{CO} \cdot n_{O_2}^{0.5}}{n_{CO} \cdot n_{O_2}^{0.5}} \cdot V^{-0.5}$	$\frac{n_{CO} \cdot n_{O_2}^{0.5}}{n_{CO} \cdot n_{O_2}^{0.5}}$	$\frac{n_{CO} \cdot n_{O_2}^{0.5}}{n_{CO} \cdot n_{O_2}^{0.5}}$	CO ₂ → (1 - x)CO ₂ + xCO + 0.5xO ₂
CO ₂ ↔ CO + 0.5O ₂	$\frac{n_{CO} \cdot n_{O_2}^{0.5}}{n_{CO} \cdot n_{O_2}^{0.5}} \cdot \left(\frac{p}{p_{ref}} \cdot \frac{1}{n_{tot}}\right)^{0.5}$	$K_c = K_p$	$K_n = K_p$	K _p	CO ₂ + H ₂ → (1 - x)CO + (1 - x)H ₂ O + xCO ₂ + xH ₂
CO ₂ + H ₂ ↔ CO + H ₂ O	$\frac{n_{CO} \cdot n_{H_2}^{0.5}}{n_{CO} \cdot n_{H_2}^{0.5}}$				$\frac{n_{N_2}^2}{N_2 H_3^2}$
N ₂ + 3H ₂ ↔ 2NH ₃					$x N_2 + y H_2 \rightarrow z NH_3 + (x - \frac{3}{2}z) H_2$

x Dissoziationsgrad

13 1. HS für offene Systeme

Wir betrachten einen Reaktor (Brennkammer) als offenes System mit $p=\text{konst}$ (keine Arbeit von außen geleistet).

$$\Delta H = Q - \dot{W}^0 = Q = H_P - H_E$$

(if adiabatic $Q=0$)

$$\begin{aligned}\Delta H|_{E \rightarrow P} &= cm\Delta T = m(\Delta h + h_{\text{Verlust}}) \\ &= n_B \sum \nu_j'' \underbrace{\left[\bar{h}_{f,j}^\circ + (\bar{h}_j(T_P) - \bar{h}_j(T_{\text{ref}})) \right]}_{\text{Enthalpie der Produkte}} - \\ &\quad - n_B \sum \nu_j' \underbrace{\left[\bar{h}_{f,j}^\circ + (\bar{h}_j(T_E) - \bar{h}_j(T_{\text{ref}})) \right]}_{\text{Enthalpie der Edukte}}\end{aligned}$$

Falls \dot{Q} oder \dot{W} in [J/s] gegeben, muss auf [J/mol] umgerechnet werden: $\frac{\dot{Q} [\text{W}]}{n_B [\text{mol/s}]} = Q [\text{J/mol}]$

- $\bar{h}_{f,j}^\circ$ Bildungsenthalpie (A-30)
- $\bar{h}_j(T_{\text{ref}})$ molare Enthalpie bei Referenztemperatur ($T_{\text{ref}} = 298K$) (A-23 bis A-28)
- $\bar{h}_j(T_{E,P})$ molare Enthalpie der Edukte/Produkte bei effektiver Temperatur (A-23 bis A-28)

13.1 Reaktionsenthalpie ΔH_R und -wärme ΔQ_R :

Reaktionsenthalpie/-wärme: maximal gewonnene Wärme aus einer Verbrennungsreaktion ($W = 0$)

$$\begin{aligned}\Delta H_R &= -\Delta Q_R = Q_{\max} \\ &= n_B \left\{ \sum_j^P \nu_j'' \left[\bar{h}_{f,j}^\circ + (\bar{h}_j(T_P) - \bar{h}_j(T_{\text{ref}})) \right] - \right. \\ &\quad \left. - \sum_j^E \nu_j' \left[\bar{h}_{f,j}^\circ + (\bar{h}_j(T_E) - \bar{h}_j(T_{\text{ref}})) \right] \right\}\end{aligned}$$

Wo n_B die # mol von Brennstoff ist.

Hinweis: die Bildungsenthalpie kann durch die Reaktionsenthalpie berechnet werden! ($\lambda = 1$)

Adiabatic (isoliert) ($\Delta H = Q = 0$)

$$\begin{aligned}\frac{\Delta H_R|_{T_{\text{ref}}}}{n_B} &= -\frac{\Delta Q_R}{n_B} = \frac{Q_{\max}}{n_B} = \sum_j (\nu_j'' - \nu_j') \bar{h}_{f,j}^\circ \\ &= \sum_j \nu_j' (\bar{h}_j(T_E) + \bar{h}_j(T_{\text{ref}})) - \\ &\quad - \sum_j \nu_j'' (\bar{h}_j(T_P) + \bar{h}_j(T_{\text{ref}}))\end{aligned}$$

Von jetzt es wird ausgenommen das $n_B = 1$ ist als Annahme.

$\Delta H_R < 0$ exotherm $\Delta H_R > 0$ endotherm

13.2 \bar{h}_{TOT} eines Zustandes einer Komponente:

$$\begin{aligned}\bar{h}_{\text{tot}} &= \bar{h}_f^\circ + \Delta \bar{h} = \bar{h}_f^\circ + [\bar{h}(T) - \bar{h}(T_{\text{ref}})] \\ &= \bar{h}_f^\circ + \int_{T_{\text{ref}}}^T c_p(T) dT\end{aligned}$$

Hinweis: Die Gleichung gilt nur fuer den Fall $p = \text{konst}$.

13.2.1 Heizwert:

Unterscheidung zwischen oberen und unteren Heizwert bei Aggregatzustand von Wasser: (differenz ist die heat of condensation)

1. Unterer Heizwert: $H_U = \Delta H_R$, Wasser ist gasförmig, verwende $h_{H_2O}(g)$
2. Oberer Heizwert: $H_O = \Delta H_R$, Wasser ist flüssig, verwende $h_{H_2O}(l)$

13.3 Adiabate Flammtemperatur (AFT):

Theorem: Adiabate Flammtemperatur

Maximal erreichbare Temperatur für eines verlustfreien, adiabaten Reaktors, der keine Arbeit leistet. ($Q = W = 0$)
Annehmen: vollständig Kombustion ($\lambda > 1$) und Temperatur von Produkten ist nicht zu hohe ($T < 2000K$).

- Ist der Temperatur der Produkte: $T_{\text{Produkte}} = T_{f,ad}$
- Faustregel 1: Verbrennung an luft: $T_{f,ad,air} - T_E \approx 1900K$ bis $2300K$
- Faustregel 2: Je mehr intergase (N_2, C, \dots) und je grösser deren c_p (siehe Graphic unten), desto tiefer ist $T_{f,ad}$ (thermische Ballaststoffe). Zusaetzlich gelten fur erste Schätzungen:
 1. Verbrennung an O_2 : $T_{f,ad,O_2} = T_{f,ad,air} + 800K$: einfluss bei Verbrennung mit O_2 viel grösser als bei verbrennung mit Luft
 2. $T_{f,ad,\lambda=2} = T_{f,ad,\lambda=1} - 800K$
 3. $T_{f,ad,\lambda=0.5} = T_{f,ad,\lambda=1} + -300K$
- Faustregel 3: AFT beeinflusst durch:
 1. Drueck erhöht: Dissoziationsvorgänge nehmen ab und $T_{f,ad,max} \uparrow$
 2. Thermischer Ballast nimmt ab: $T_{f,ad,max} \uparrow$
 3. Waermekapazitaet sinkt: Thermischer Ballast nimmt ab und $T_{f,ad,max} \uparrow$
 4. Eine höhere Temperatur der Edukte verschiebt alle Kurven (von der Graph $T_{f,ad}$ vs λ) nach oben, eine tiefere dementsprechend nach unten.
- Note: $\Delta T \approx T_{f,ad} - T_{\text{ref}} \approx \frac{\Delta H_R}{MM_{\text{Fuel}}} \cdot \frac{1}{c_p} \cdot \frac{1}{\frac{m_{\text{Abgas}}}{m_B}}$

Verfahren: Reaktionsenthalpie/-wärme bekannt

- Wenn system adiabatisch und ist und keine info auf $h_{Br}(T_{f,ad})$ habe:

$$\Delta H = \Delta Q = \sum n_p (h_p(T_p) - h_p(T_{\text{ref}})) \begin{cases} > 0 \rightarrow T_{f,ad} \downarrow \\ < 0 \rightarrow T_{f,ad} \uparrow \end{cases}$$
- Wenn gefragt ist ob die gegebene Flammtemperatur erreicht werden kann: Ja wenn $\text{af1}(T_{f,ad,geg}) \leq \text{afr}$.

1. Reaktionsgleichung aufstellen
2. ersten HS aufstellen und vereinfachen (**Achtung wenn $W \neq 0$ oder $Q \neq 0$ sind, vorzeichen!**) $\rightarrow \Delta H|_{E \rightarrow P} = 0$ und umformen auf:

$$\begin{aligned}\sum n_P \cdot h_P(T_{f,ad}) &= \cancel{\Delta Q} - \cancel{\Delta W} + \sum n_E h_{f,E}^\circ - \sum n_P h_{f,P}^\circ + \\ &\quad + \sum n_E \cdot (h_E(T_E) - h_E(T_{\text{ref}})) + \\ &\quad + \sum n_P \cdot h_P(T_{\text{ref}})\end{aligned}$$

	Br	O ₂	N ₂	CO ₂	H ₂ O	O ₂	N ₂
<i>n</i>	<i>n</i> ₁	<i>n</i> ₂	<i>n</i> ₃	<i>n</i> ₄	<i>n</i> ₅	<i>n</i> ₆	<i>n</i> ₇
<i>h</i> ^o _f	<i>h</i> ^o _{f0b}	0	0	-393520	-241820	0	0
<i>h</i> (<i>T_{ref}</i>)	<i>h</i> _b	8682	8669	9364	9904	8682	8669
<i>h</i> (<i>T_E</i>)	<i>h</i> _e	<i>h</i> _e	<i>h</i> _e	-	-	-	-
<i>h</i> (<i>T_P</i>)	-	-	-	<i>h</i> _p	<i>h</i> _p	<i>h</i> _p	<i>h</i> _p

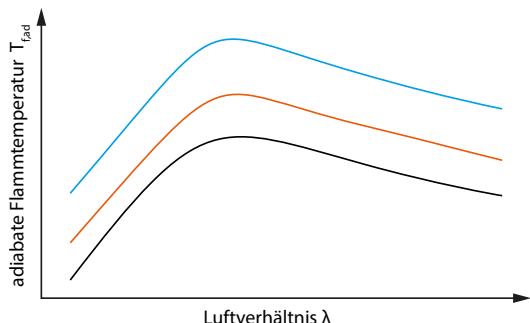
3. rechte Seite der Gleichung berechnen:
 $\text{afr}(n_1, n_2, n_3, n_4, n_5, n_6, n_7, h_{f0b}, h_{rb}, h_e, h_{eo}, h_{en})$.
4. schätze $T_{f,ad} = T_1$ gemäss Faustregel
5. linke Seite der Gleichung berechnen:
 $\text{afl}(n_4, n_5, n_6, n_7, h_{pc}, h_{ph}, h_{po}, h_{pn})$
6. vergleiche die Ergebnisse von **afr** und **afl**
 - { $\text{afl} > \text{afr}$ schätze $T_{f,ad}$ tiefer $\Rightarrow T_2 = T_1 - 300K$
 - { $\text{afl} < \text{afr}$ schätze $T_{f,ad}$ höher $\Rightarrow T_2 = T_1 + 300K$
7. wiederhole 5. und 6. bis zwei Temperaturen ($T_{f,ad,x}, T_{f,ad,y}$) gefunden wurden, fuer welche gilt:

$$h(T_{f,ad,y}) < h(T_{Edukte}) < h(T_{f,ad,x})$$

$$\text{mit } \left(\frac{T_{f,ad,x}}{T_{f,ad,y}} \approx \frac{11}{9} \right)$$

8. interpoliere $T_{f,ad}$ aus den abgeschätzten Werten:

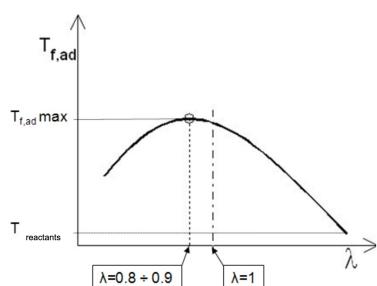
$$T_{f,ad} = T_{f,ad,x} + \left(\frac{h(T_{Edukte}) - h(T_{f,ad,x})}{h(T_{f,ad,y}) - h(T_{f,ad,x})} \right) \cdot (T_{f,ad,y} - T_{f,ad,x})$$



- Brennstoff + O₂
 - Brennstoff + X, $c_p X < c_p Y$
 - Brennstoff + Y, $c_p Y > c_p X$
- 13.3.1 Anwendung der AFT:**

Faustregel 4: $\lambda_{T_{max}} \in (0.8, 0.9)$ in reale Anwendungen, nicht wie theoretisch erwartet bei $\lambda = 1$ (maximum bei $\lambda = 0.8/0.9$):

- Grund sind die Dissoziationseffekte \rightarrow in der links Bereich von $\lambda_{T_{max}}$ fñhrt Erwärmung des überschüssigen Treibstoff zu tieferen Temperaturen.
- Im rechten Bereich von $\lambda_{T_{max}}$ fñhrt der thermische Ballast der Luft zu tieferen Temperaturen



Limits for $T_{f,ad}$ for technical applications:

- maximal load on parts of the combustion chamber or the expansion engine
- avoiding high, very temperature dependent noxious emissions (e.g. NO_x)

In the reality we get deviation from the adiabaticity, why?

1. convective heat transfer (from gaseous working medium to inner wall of combustion chamber)
2. conduction of heat through the wall of combustion chamber
3. convective heat transfer from outer wall of combustion chamber to coolant or environment

13.4 Abgasrückführung (AGR):

Hohe Temperaturen in Verbrennungsprozessen führen zu Dissoziationsreaktionen bei denen unerwünschte Schadstoff (z.B. Stickoxide) produziert werden. AGR senkt die Temperatur und so die Produktion von Stickoxiden.

Idee: Thermischer Ballast infolge AGR erhöhen \Rightarrow AFT sinkt \Rightarrow Stickoxidproduktion (NO_x) sinkt.

1. Reaktionsgleichung aufstellen:
stelle normale Reaktionsgleichung auf. Linke Seite wird mit *L* und Rechte Seite mit *R* bezeichnet. Die Reaktionsgleichung mit Abgasrückführung lautet: $L + n_x(R) \rightarrow (1 + n_x)(R)$

2. erster HS umgeformt und mit Koeffizienten *n_x* für Abgasrückführung:

$$A = (1 + n_x)(\sum n_P h_P(T_{f,ad}) - \sum n_P h_P(T_{ref}))$$

$$B = \sum n_E h_{f,E}^o + n_x \sum n_P h_{f,P}^o$$

$$C = (1 + n_x) \sum n_P h_{f,P}^o$$

$$D = \sum n_E (h_E(T_E) - h_E(T_{ref})) + n_x (\sum n_P h_P(T_{ein}) - \sum n_P h_P(T_{ref}))$$

$$A = B - C + D \rightarrow (1 + n_x) \left(\sum n_P h_P(T_{f,ad}) - \sum n_P h_P(T_{ref}) \right) \rightarrow \sum n_E h_{f,E}^o - \sum n_P h_{f,P}^o + D \xrightarrow{\text{i.d.R.}} = 0$$

$T_{f,ad}$ ist dabei gegeben.

3. löse nach *n_x* auf

$$n_x = \frac{\sum n_E h_{f,E}^o - \sum n_P h_{f,P}^o + D \xrightarrow{\text{i.d.R.}} = 0}{(\sum n_P h_P(T_{f,ad}) - \sum n_P h_P(T_{ref}))} - 1$$

4. Der Molanteil an benötigter Abgasrückführung berechnet sich aus:

$$X_{AGR} = \frac{n_{AGR}}{n_{tot}} = \frac{n_x \cdot n_E}{(1 + n_x \cdot n_E)}$$

14 2. Hauptsatz für Systeme mit chemischen Reaktionen

$$dU = dQ - dW = (TdS + \sum \mu_i dn) - (pdV)$$

with μ_i = sum of the changed chemical potentials and dn = change in the number of moles of the *i*-th component.
für ideale Gase:

$$dU = c_V dT$$

14.1 Gibb'sche Freie Enthalpie:

$$G = H - T \cdot s$$

Differentiell

$$dG = dH - TdS - SdT = -SdT + Vdp + \sum \mu_i dn$$

$$\mu_i = \left(\frac{\delta G}{\delta n_i} \right)_{T,p,n_j}$$

(it can be also U or H, change of the energetic quantity)
Spezifisch

$$g(T, p) = h(T) - T \cdot s(T, p) = g_f^o + R \cdot T \cdot \ln \left(\frac{p}{p_0} \right)$$

14.2 Chemisches Gleichgewicht:

- Closed system: sind die Reaktionsgeschwindigkeiten von Hin- und Rueckreaktion gleich ($u, v = \text{const}$, $T \cdot \delta S = 0$, also change in energetic quantity is = 0)
- ist die Entropie maximiert
- Open system: $p, T = \text{const}$, $\mu_i = 0$, also ist die Gibbs'sche freie Enthalpie G minimiert $\Rightarrow dG = 0$, mit der spezifische Komponente der Gibb's freien Enthalpie gegeben als:

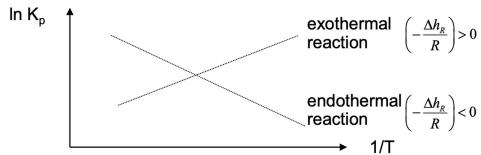
$$\bar{g}_i(T, p) = \bar{g}_{i,f}^\circ + [\bar{g}(T, p) - \bar{g}(T_{ref}, p_{ref})] = \bar{g}_{i,f}^\circ + R \cdot T \cdot \ln\left(\frac{p_i}{p_0}\right), \quad p_i = \text{Partial p}$$

$$\begin{aligned} \ln \left[\prod \left(\frac{X_i \cdot p}{p_{ref}} \right)^{(\nu''_i - \nu'_i)} \right] &= \frac{-\sum (\nu''_i - \nu'_i) \cdot g_{f,i}^\circ(T)}{RT} = \\ &= \frac{\Delta G^\circ}{RT} = \ln(K_p(T)) \end{aligned}$$

Hinweis: $\log_{10}(K_p)$ is tabulated, K_p = equilibrium function.

Theorem: Van't Hoff Gleichung

Relationship between endothermicity and exothermicity of a chemical reaction and the temperature dependence of the corresponding equilibrium function. ($p = \text{constant}$)



$$\frac{d \ln(k)}{dT} = \frac{\Delta H_R}{R \cdot T^2} \Rightarrow \ln\left(\frac{K(T_2)}{K(T_1)}\right) = \frac{-\Delta H_R}{R} \cdot \left(\frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_1}\right)$$

Lineare Beziehung zwischen $\frac{1}{T}$ und $\ln(\dots)$. Die Gleichung ergibt eine positive Steigung von $-\frac{\Delta H_R}{R}$
 → In a global exothermic reaction, such as combustion, at very high temperatures, complete conversion to the products becomes more difficult.

$$K_p(T) = \prod_i \left(\frac{p_i}{p_{ref}} \right)^{(\nu''_i - \nu'_i)} = \left(\frac{p_{tot}}{p_{ref}} \frac{1}{n_{tot, P, DR}} \right)^{(\sum \nu''_i - \sum \nu'_i)} \cdot \frac{\prod n_{P, BR}^{\nu''_i, BR}}{\prod n_{E, BR}^{\nu'_i, BR}}$$

mit n_i berechnet mit DR und $p_i V = n_i \bar{R} T$

$$\begin{aligned} \bullet K_c(T) &= \prod c_i^{(\nu''_i - \nu'_i)} = K_p(T) \cdot \prod \left(\frac{p_{ref}}{RT} \right)^{(\nu''_i - \nu'_i)} \quad \text{und } c_i = \frac{n_i}{V} = \frac{p_i}{\bar{R} T} \\ \bullet K_n(T) &= \prod n_i^{(\nu''_i - \nu'_i)} = K_p(T) \cdot \prod \left(\frac{V_{pref}}{RT} \right)^{(\nu''_i - \nu'_i)} \quad \text{and } n_i = \frac{p_i}{p} \cdot n_{tot} = \frac{p_i V}{\bar{R} T} \end{aligned}$$

Mit ν_i aus Standardreaktionsgleichung (ν' = Edukte, ν'' = Produkte)

Achtung:

- $K > 1$ Es sind mehr Produkte als Edukte vorhanden
- $K = 1$ Es sind genau so viele Produkte wie Edukte vorhanden
- $K < 1$ Es sind mehr Edukte als Produkte vorhanden

Merke: wenn ich ΔH_R° berechne:

1. wenn $\Delta H_R^\circ < 0$ ist \Rightarrow Exothermreaktion $\Rightarrow K_P \uparrow$ wenn $T \downarrow$. (besser betrieben mit tiefen T so)
2. wenn $\Delta H_R^\circ > 0$ ist \Rightarrow Endothermreaktion $\Rightarrow K_P \uparrow$ wenn $T \uparrow$. (besser betrieben mit hohen T so)

Theorem: Prinzip von Le Chatelier

Druck

- Druckerhöhung fördert die Reaktion, die unter Volumenabnahme verläuft.
- Druckerniedrigung fördert die Reaktion, die unter Volumenzunahme verläuft.

Temperatur

- Temperaturerhöhung fördert die endotherme Reaktion (Spaltung)
- Temperaturerniedrigung fördert die exotherme Reaktion (Fusion)

Konzentration

- Konzentrationserhöhung eines Stoffes begünstigt die Reaktion, bei der dieser Stoff verbraucht wird
- Konzentrationerniedrigung eines Stoffes, z.B. durch Entnahme aus dem System begünstigt die Reaktion, bei der dieser Stoff gebildet wird

K_p

- Inerte Gase sowie Änderungen des Partialdruckes verändern die Gleichgewichtskonstante nicht! (z.B. hinzufügen von N_2 in $CO + H_2O \leftrightarrow CO_2 + H_2$)

14.3 Dissoziation und Vermischung:

Dissoziation (siehe Tabellen oben)

Teilung einer chemischen Verbindung in zwei oder mehrere Moleküle, Ione oder Atome. Dissoziationsreaktionen sind stark endotherm und treten vorwiegend bei hohen Temperaturen auf.

Wenn BR (Tabelle) umgekehrt ist $\rightarrow K_{p, \text{umgekehrt}} = 1/K_{p, \text{Tabelle}}$ da $\Delta G_{\text{umgekehrt}}^\circ = -\Delta G^\circ$

Vorgehen bei Dissoziation

1. Reaktionsgleichung der Verbrennung aufstellen (ohne Dissoziation)
2. DR stur in Reaktionsgleichung einsetzen
3. n_i der Dissoziationsprodukte abhängig von x bestimmen
4. je nach Aufgabe n_{tot} der Gesamtreaktion oder der DR (beides mal P-Seite) abhängig von x bestimmen
5. Gleichgewichtsbeziehung auflösen:
 - (a) x gegeben: $\log_{10}(K_p(T))$ berechnen $\rightarrow T$ aus A-32
 - (b) T gegeben: $\log_{10}(K_p(T))$ auslesen $\rightarrow x$ berechnen

Hinweis im GGW gilt: $\frac{p_{Ende}}{p_{Start}} \cdot \frac{V_{Ende}}{V_{Start}} = \frac{T_{Ende}}{T_{Start}}$

Vorgehen bei Vermischung

1. n_i der Edukte vor Vermischung bestimmen
2. im GGW (nach Vermischung): $n_z = (n_i - (\nu''_z - \nu'_z) \cdot x)$
3. n_{tot} der Reaktion (P-Seite) bestimmen
4. Gleichgewichtsbeziehung auflösen:
 - (a) x gegeben: $\log_{10}(K_p(T))$ berechnen $\rightarrow T$ aus A-32
 - (b) T gegeben: $\log_{10}(K_p(T))$ auslesen $\rightarrow x$ berechnen

Verfahren: λ in Gleichgewichtreaktionen

- $H_2 + O_2 \rightarrow H_2O + \frac{1}{2}O_2 \Rightarrow \lambda = 2$
- $H_2 + O_2 \rightarrow H_2O \Rightarrow \lambda = 1$

Verfahren: Dissoziation in Verbrennungsreaktion

1. Methan Verbrennung: $CH_4 + 2O_2 + 2 \cdot 3.76N_2 \leftrightarrow CO_2 + 2H_2O + 2 \cdot 3.76N_2$
2. Dissoziation von N_2 : $N_2 \rightarrow (1-x)N_2 + 2xN$
3. Einsetzen ergibt: $CH_4 + 2O_2 + 2 \cdot 3.76N_2 \leftrightarrow CO_2 + 2H_2O + 2 \cdot 3.76 \cdot ((1-x)N_2 + 2xN)$
4. K_p aus Tabelle, $n_{tot_P} = 1 + 2 + 2 \cdot 3.76 \cdot (2x + (1-x))$, $n_{P,N_2} = 2 \cdot 3.76 \cdot (1-x)$, $n_{P,N} = 2 \cdot 3.76 \cdot 2x \Rightarrow x = \dots$

14.4 Chemische Exergie:

Bezeichnet die in Arbeit umwandelbare Energie. Ist die Temperatur bei der Abgabe höher als die bei der Aufnahme, geht Energie verloren.

Die chemische Exergie eines Brennstoffes ist die maximal nutzbare Arbeit (Leistung) einer Verbrennungsreaktion, wenn der Brennstoff bei Umgebungsbedingungen (T_0, p_0) eintritt und dort vollständig umgesetzt wird.

$$\Delta E_{x,R} = \sum \nu'' e_{x,P} - \sum \nu' e_{x,E}$$

$$\Delta G_R = \sum \nu'' g_{i,P} - \sum \nu' g_{i,E}$$

$$\Delta G_{R_U} = \underbrace{n_B \sum_j (\nu''_j - \nu'_j) h_j}_{\text{Reaktion Enthalpy}} - \underbrace{n_B T_U \sum_j (\nu''_i - \nu'_i) s_i}_{\text{Reaktion Entropy}}$$

$$\text{mit } h_j(T) = h_{f,j}^\circ + h_j(T) - h_j(T_{ref}), s_i(T, p) = s_i^\circ(T, p_{ref}) - R \cdot \ln \left[\frac{p}{p_{ref}} \right]$$

ν_i aus Verbrennungsreaktion

(A-31) Standard Molar chemical exergie $ex_{ch} = \Delta E_{x,R}$ vs Umgebung

Arbeit

$$W = \Delta Ex - T_0 \Delta S_{irrev} = \Delta G_{R_U} - T_0 \Delta S_{irrev}$$

mit die zweite Term Verluste

bei Standardbedingungen: $\Delta E_{x,R} = \Delta G_R$

$$e_{x,i} = -\bar{R}T_0 \ln \left(\frac{p_i}{p_0} \right) = -\bar{R}T_0 \ln(X_i)$$

Hinweis $X_i = X_i$ aller Stoffe außer Brennstoff \rightarrow setze in $\Delta E_{x,R}$ ein und löse nach $e_{x,Br}$ auf Bestimmte Energieberechnungen:

1. Die **Exergiedifferenz** (offenes System) berechnet sich zu:

$$\Delta \dot{E}x_{12} = \dot{m}_{12} \cdot (h_2 - h_1 - T_0 \cdot (s_2 - s_1))$$

2. Die **Exergie gegenüber einer bestimmten Umgebung** (geschlossenes System) ergibt sich aus:

$$Ex = (U - U_0) + p_0 \cdot (V - V_0) - T_0 \cdot (S - S_0) + \Delta E_{x,R}$$

3. Die **Exergieverlust** eines offenen Systems berechnet sich zu:

$$(a) \dot{E}x_v = \sum_i (1 - \frac{T_0}{T_i}) \cdot \dot{Q}_i - \dot{W} + \sum \dot{m}_{ein} \cdot e_{xein} - \sum \dot{m}_{out} \cdot e_{xoout}$$

$$(b) \text{ oder ueber die Exiergeerzeugungsrate: } \dot{E}x_v = T_0 \cdot \dot{S}_{erz} = T_0 \cdot \left[\sum \dot{m}(s_{out} - s_{in}) - \sum_i \frac{\dot{Q}_i}{T_i} \right]$$

Exergy in a Brennstoffzelle (Brennstoff Exergie)

$$ex_B = \underbrace{-\Delta h_R + T_0 \Delta s_{R,0}}_{-\Delta g_{R,0}} - RT_0 \ln \left[\frac{X_{CO_2}^x \cdot X_{H_2O}^{\frac{y}{2}}}{X_{O_2}^{x+\frac{y}{4}}} \right]$$

Theorem: Ideale Gase Vereinfachungen

Für ideale Gase ergeben sich die folgenden Vereinfachungen:

- $\Delta s = s_2 - s_1 = \int_{T_1}^{T_2} \frac{c_p(T)}{T} dT - \frac{\bar{R}}{M} \cdot \ln(\frac{p_2}{p_1}) = c_p \cdot \ln(\frac{T_2}{T_1}) - \frac{\bar{R}}{M} \cdot \ln(\frac{p_2}{p_1})$
- $\Delta h = h_2 - h_1 = \int_{T_1}^{T_2} c_p(T) dT = c_p \cdot (T_2 - T_1)$

14.4.1 Wirkungsgrade (Erinnerung):

- **Carnot** $\eta_C = \frac{T_H - T_K}{T_H}$
- **Energetisch** $\eta_{en} = \frac{\dot{W}}{\dot{Q}}$
- **Exergetisch** $\eta_{ex} = \frac{\dot{W}}{\dot{E}_{ex}} = 1 - \frac{T_0 \cdot \Delta S_{irr}}{\bar{a}^{ch}}, \bar{a}^{ch} \rightarrow \text{TAB [A31]}$

15 Brennstoffzellen

In Brennstoffzellen wird ein Grossteil der chemischen Energie direkt in elektrische Energie umgewandelt. Daher braucht es keine Wärmeabfuhr um Arbeit zu erzeugen, was sich in viel geringeren Exergieverlusten auswirkt.

Anoden-/Kathoden-Reaktion bestimmen

1. Bestimme die Oxidationszahlen (OZ) der Globalreaktion (O = - II (2); H = +I (1); X₂ = 0, Rest ausgleichen)
2. vergleiche OZ der Einzelnen Elemente (ausser O & H) zwischen E- und P-Seite
Hinweis Wenn O₂ alleine auf E-Seite \rightarrow vergleiche mit H₂O
OZ $\uparrow \Rightarrow$ Oxidation = Anoden-Reaktion
OZ $\downarrow \Rightarrow$ Reduktion = Kathoden-Reaktion
3. schreibe die beiden Halbreaktionen auf. Folgende Schritte gelten für beide Halbreaktionen gleichermaßen
4. Anzahl von Elementen (ausser O & H) auf E- und P-Seite ausgleichen
5. so viele H₂O addieren, bis auf E- und P-Seite gleich viele O stehen
6. so viele H⁺ addieren, bis auf E- und P-Seite gleich viele H stehen (+ ignorieren)
7. so viele e⁻ addieren, bis Reaktionsgleichung ladungsneutral (auf der Seite wo + stehen)

Gesamtreaktion bestimmen

1. alle e⁻ und H⁺ streichen
2. bei beiden Reaktionen so viele H₂O streichen bis eine der Reaktionen keine H₂O mehr hat
3. zusammensetzen: $\sum_{E,A} + \sum_{E,K} \rightarrow \sum_{P,A} + \sum_{P,K}$

Einige Reaktionen

Typ	Gesamt	Anode	Kathode
AFC	$H_2 + 0.5O_2 \rightarrow H_2O$	$H_2 + 2OH^- \rightarrow 2H_2O + 2e^-$	$0.5O_2 + H_2O + 2e^- \rightarrow 2OH^-$
PAFC & PEMFC	$H_2 + 0.5O_2 \rightarrow H_2O$	$H_2 \rightarrow 2H + +2e^-$	$0.5O_2 + 2H + +2e^- \rightarrow H_2O$
MCFC	$2H_2 + O_2 + 2CO_2(K) \rightarrow 2H_2O + 2CO_2(A)$	$H_2 + CO_2^2- \rightarrow H_2O + CO_2 + 2e^-$	$0.5O_2 + CO_2 + 2e^- \rightarrow CO_3^{2-}$
SOFC	$2H_2 + O_2 \rightarrow 2H_2O$	$H_2 + O_2^- \rightarrow H_2O + 2e^-$	$0.5O_2 + 2e^- \rightarrow O_2^-$
		$O_2^- + CO \rightarrow CO_2 + 2e^-$	$0.5O_2 + 2e^- \rightarrow O_2^-$
		$2CO + O_2 \rightarrow 2CO_2$	

AFC = Alkaline Fuel Cell, **PEMFC** = Proton Exchange Fuel Cell, **PAFC** = Phosphoric Acid Fuel Cell, **MCFC** = Molten Carbonate Fuel Cell, **SOFC** = Solid Oxide Fuel Cell

Hinweis $N_e = 2$ für alle diese Reaktionen

Hinweis Falls eine Reaktionsgleichung einen Multiplikator x gegenüber den hier genannten aufweist gilt $N_e = 2x$

15.1 Elektrische Leistung:

$$\tilde{I} = \frac{I}{I_{max}}, \tilde{I} \in [0, 1]$$

Normierter Strom:

$$P_{BZ}(\tilde{I}) = -U(\tilde{I}) \cdot I = -U(\tilde{I}) \cdot \tilde{I} \cdot I_{max}$$

Leistung der Brennstoffzelle (nicht normiert):

$$P_{BZ}(I) = -U \cdot I$$

Maximale Leistung:

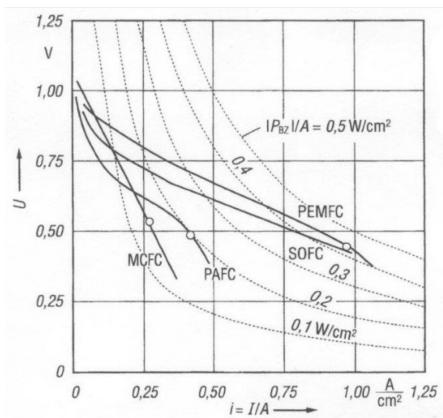
$$\frac{dP(I)}{dI} = \frac{dP(\tilde{I})}{d\tilde{I}} = \frac{dP(I)}{d\dot{n}} = \frac{dP(I)}{d\dot{m}} = 0$$

15.1.1 Berechnung des Stroms:

$$I = \dot{n}_e \cdot e \cdot N_A \cdot \eta_I = \dot{n}_e \cdot F \cdot \eta_I = N_e \cdot F \cdot \dot{n}_{Br} \cdot \nu_{Br} \cdot \eta_I = N_e \cdot F \cdot \frac{\dot{m}_{Br}}{M_{Br}} \cdot \eta_I$$

- \dot{n}_e Elektronenfluss (mol/s)
- \dot{n}_{Br} Brennstofffluss (mol/s)
- ν_{Br} Stekiometrische Koeffizient Brennstoff in Zelle (z.B. $H_2 \rightarrow \nu_{H_2} = 1, O_2 \rightarrow \nu_{O_2} = 0.5$)
- \dot{m}_{Br} Massenfluss des Brennstoffs [\dot{m}_{Br}] = [$SIg \cdot s^{-1}$]
- M_{Br} Molmasse des Brennstoffs [M_{Br}] = [$SIg \cdot mol^{-1}$]
- e Elementarladung eines Elektrons $e = 1.602 \cdot 10^{-19} C$
- N_A Anzahl Moleküle pro Mol (Avogadro-Konstante) $N_A = 6.022 \cdot 10^{23} mol^{-1}$
- F Faraday-Konstante $F = N_A \cdot e = 96485.3 \frac{A \cdot s}{mol} = \frac{C}{mol}$
- N_e Anzahl frei werdender Elektronen pro Molekül Brennstoff, aus Reaktion in der Br in reiner Form vorkommt
- η_I Umsetzungswirkungsgrad (gegeben, ansonsten $\eta_I = 1$)

15.1.2 Berechnung der Spannung:



Entweder gegeben als **Graph** in Funktion der Stromstärke oder **analytisch**:

$$U(\tilde{I}) = a \cdot \tilde{I}^2 - b \cdot \tilde{I} + c \quad \text{mit } \tilde{I} = \frac{I}{I_{max}}$$

- **Kalorische Spannung:** $U_H = \frac{-\Delta H_R}{N_e \cdot F} = \frac{H_u}{N_e \cdot F}$ maximale Spannung bezogen auf die Reaktionsenthalpie ΔH_R ($U_H < U_{rev} \approx 1V$), H_u = Untere Heitzwert. [TAB A-30] (h_f° , es fuer PEM $\rightarrow H_u = 241820 kJ/kmol$ fur $T = T_{ref}$)
- **Reversible Spannung:** $U_{rev} = \frac{-\Delta G_R}{N_e \cdot F}$ maximal erreichbare Spannung bei reversiblem Prozess ($\dot{S}_{erz} = 0$)

15.2 Wärmeströme:

Gesamter Abwärmestrom

$$\dot{Q} = -(U_H - U(I)) \cdot I$$

$$|\dot{Q}| = |\dot{Q}_{rev} + \dot{Q}_{irrev}|$$

$$\dot{Q} = \dot{n}_{Br} \cdot \Delta H_R - P_{BZ}$$

Reversibel nutzbarer Abwärmestrom

$$\dot{Q}_{rev} = -(U_H - U_{rev}) \cdot I$$

Irreversibler, verlorener Abwärmestrom (bei T_0 an Umgebung abgegeben)

$$\dot{Q}_{irrev} = -(U_{rev} - U(I)) \cdot I$$

15.2.1 Wirkungsgrad:

Auxillaries (Kompressor, Pumpe, ...) brauchen Energie auch wenn Zelle produziert keine Energie \rightarrow höchste Effizienz im mittleren Leistung

$$\eta_{BZ} = \eta_I \cdot \eta_U = \eta_I \cdot \frac{U(I)}{U_H(T)} = \eta_I \cdot \frac{|P_{BZ}|}{|P_{BZ}| + |\dot{Q}|}$$

- η_{BZ} = Energetischer Wirkungsgrad (Thermischer Wirkungsgrad)
- $\eta_I = \frac{\dot{n}_{Br}}{\dot{n}_{Br,zu}} = \frac{\text{umgesetzter Brennstoff}}{\text{zugeführter Brennstoff}}$ Umsetzungswirkungsgrad (gegeben, ansonsten $\eta_I = 1$)
- $\eta_U = \frac{U(I)}{U_H(T)} = \frac{|P_{BZ}|}{|P_{BZ}| + |\dot{Q}|}$

Electrochemical efficiency (kann grösser als 1 sein)

$$\eta_{Cell} = \frac{\Delta G_R}{\Delta H_R} = 1 - T \frac{\Delta S_R}{\Delta H_R}$$

15.2.2 Stacks:

Erhöhung der Ausgangsspannung durch **Serienschaltung** (Stack) mehrerer Brennstoffzellen

$$U_{stack} = N \cdot U_{BZ}$$

$$P_{stack} = N \cdot P_{BZ}$$

mit $N = \#$ Zellen

16 Wärmeübertragung in Festkörpern

16.1 Wärmeströme:

Pro Länge

$$\dot{Q}' = \frac{\dot{Q}}{L}$$

Pro Fläche

$$\dot{Q}'' = \frac{\dot{Q}}{A} = \frac{\dot{Q}}{L \cdot B} = \int_{x_0}^{x_1} \dot{Q}''' dx$$

$$\dot{q}'' = \frac{\dot{Q}''' \cdot V}{A}$$

Pro Volumen

$$\dot{Q}''' = \frac{\dot{Q}}{V} = \frac{\dot{Q}}{L \cdot B \cdot H}$$

16.2 Erster Hauptsatz bezogen auf Wärmeübertragung:

$$\Delta U = \rho \cdot \Delta V \cdot c \cdot T = Q - \dot{W}^0 \rightarrow \dot{Q} = \dot{m} \cdot \Delta h = (\rho \cdot b \cdot d \cdot w) \cdot (c_p \cdot \Delta T)$$

16.3 Arten der Wärmeübertragung:

Wärmeleitung Tritt in jeglicher Materie auf (hauptsächlich Festkörper). **Gesetz von Fourier:** Wärme überall dorthin fliesst, wo Temperaturdifferenzen vorhanden sind:

$$\dot{q}_{leit}'' = -\lambda \cdot \frac{dT}{dx}, \quad [\lambda] = \left[\frac{W}{m \cdot K} \right] \text{ (Wärmeübergangskoeffizient)}$$

δx = Richtung normal zur Fläche. (Im 3D System, benutzen wir Nabla Operator ∇)

Konvektion tritt in Verbindung mit Fluiden auf

$$\dot{q}_{conv}'' = \alpha \cdot (T_w - T_\infty), \quad [\alpha] = \left[\frac{W}{m^2 \cdot K} \right] \text{ (Wärmeleitfähigkeit)}$$

Wärmestrahlung elektromagnetische Strahlung, nicht an Materie gebunden

$$\dot{q}_{rad}'' = \varepsilon \cdot \sigma \cdot (T_1^4 - T_2^4)$$

mit ε = Umrechnungsfaktor von schwarz zu graue Körper

Linearisierte Wärmestrahlung, $\varepsilon = 1$ (perfekt schwarzer Körper)

$$\dot{q}_{rad}'' = 4 \cdot \varepsilon \cdot \sigma \cdot T_{avg}^3 \cdot (T_1 - T_2)$$

Elektrischer Strom elektrischer Strom fliesst durch einen Draht von einem Fluid umgeben: $\dot{Q} = \chi \alpha (T - T_\infty)$, mit

- $\chi = \pi D$ wenn Strom senkrecht zur Zylinderhöhe (quer Stromung)
- $\chi = \frac{\pi}{4} D^2$ wenn Strom parallel zur Zylinderhöhe

$$\dot{Q} = I^2 R = I^2 \frac{\rho_{el}}{A} = UI = \frac{U^2}{R}$$

Erinnerung: $\Delta f = f(x + \Delta x) - f(x) \approx f(x) + \frac{\partial f(x)}{\partial x} \Delta x - f(x)$

16.4 Wärmeleitungsgleichung:

Wärmeleitungsgleichung durch eine Betrachtung an einem **infinitesimalen Volumenelement**.

$$\rho c \cancel{\frac{\partial T}{\partial t}} = \vec{\nabla} \cdot (\lambda \cdot \vec{\nabla} T) + \dot{Q}_Q'''$$

kartesisch

$$\cancel{\rho c \frac{\partial T}{\partial t}} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \cancel{\left(\lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right)} + \frac{\partial}{\partial z} \cancel{\left(\lambda \frac{\partial T}{\partial z} \right)} + \dot{Q}_Q'''$$

zylindrisch

$$\cancel{\rho c \frac{\partial T}{\partial t}} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\lambda r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \cancel{\left(\lambda \frac{\partial T}{\partial \theta} \right)} + \frac{\partial}{\partial z} \cancel{\left(\lambda \frac{\partial T}{\partial z} \right)} + \dot{Q}_Q'''$$

sphärisch

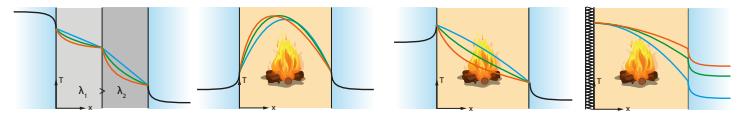
$$\cancel{\rho c \frac{\partial T}{\partial t}} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(\lambda r^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2(\phi)} \cancel{\frac{\partial}{\partial \theta} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial \theta} \right)} + \frac{1}{r^2 \sin(\phi)} \frac{\partial}{\partial \phi} \cancel{\left(\lambda \sin(\phi) \frac{\partial T}{\partial \phi} \right)} + \dot{Q}_Q'''$$

Mit $a = \frac{\lambda}{\rho c}$, **Term = 0**, falls

- **stationär \Rightarrow Achtung:** Falls stationär ohne Quelle \rightarrow als stationär linear approximiert.

- **keine Quellen**
- **1-dimensional**
- **unendlich lang**
- **rotationssymm.**

16.4.1 Temperaturverläufe im stationären Fall:



mit

- **kartesisch**
- **zylindrisch**
- **sphärisch**
- **Wärmequelle**
- Materialschicht (keine Quelle)
- $\Delta T_i = Q \cdot R_i \rightarrow$ wenn unterschiedliche Wärmestrome wird bei gleichen Schichten nicht die gleiche Temperaturdifferenz sein
- bei **Parallelschaltung** (Bsp. Kühlrippen + Grundfläche zw. Rippen) Konvektion im Bereich der Rippe, logarithmische Abnahme auf T_∞ , im Bereich der Grundplatte noch Linear

Kartesisch

- ohne Quellen (1D Fall)

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0 \leftrightarrow \frac{\partial T}{\partial x} = C_1 \leftrightarrow T(x) = C_1 \cdot x + C_2$$

dann C_1 und C_2 mit RB berechnen.

Wärmefluss durch Anwendung des **Fourier'schen Gesetzes** berechnen (der zufließend Wärmestrom muss für jede beliebige Querschnittsfläche gleich dem wegfließenden sein).

Hinweis: Im Fall zwei Gassen, RB in Form des Wärmeflusses formuliert! (Siehe section RB und Bio-Zahl)

- mit konstante Quellen (1D Fall)

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = -\frac{1}{\lambda} \cdot \dot{Q}_{Quellen}''' \leftrightarrow \frac{\partial T}{\partial x} &= -\frac{1}{\lambda} \cdot \dot{Q}_{Quellen}''' \cdot x + C_1 \\ \leftrightarrow T(x) &= -\frac{1}{2 \cdot \lambda} \cdot \dot{Q}_{Quellen}''' \cdot x^2 + C_1 \cdot x + C_2 \end{aligned}$$

Zylindrisch

- ohne Quellen (1D Fall, radiale Richtung)

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) = 0 \leftrightarrow \frac{\partial T}{\partial r} = \frac{C_1}{r} \leftrightarrow T(r) = C_1 \cdot \ln(r) + C_2$$

- mit konstante Quellen

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) &= -\frac{1}{\lambda} \cdot \dot{Q}_{Quellen}''' \cdot r + C_1 \leftrightarrow \\ \leftrightarrow \frac{\partial T}{\partial r} &= -\frac{1}{2 \cdot \lambda} \cdot \dot{Q}_{Quellen}''' \cdot r + \frac{C_1}{r} \leftrightarrow \\ \leftrightarrow T(r) &= -\frac{1}{4 \cdot \lambda} \cdot \dot{Q}_{Quellen}''' \cdot r^2 + C_1 \cdot \ln(r) + C_2 \end{aligned}$$

Sphärisch

- ohne Quellen

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right) = 0 \leftrightarrow \frac{\partial T}{\partial r} = \frac{C_1}{r^2} \leftrightarrow T(r) = -\frac{C_1}{r} + C_2$$

- mit konstante Quellen

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right) &= -\frac{1}{\lambda} \cdot \dot{Q}_{\text{Quellen}}''' \cdot r^2 \leftrightarrow \\ \leftrightarrow \frac{\partial T}{\partial r} &= -\frac{1}{3 \cdot \lambda} \cdot \dot{Q}_{\text{Quellen}}''' \cdot r + \frac{C_1}{r^2} \leftrightarrow \\ \leftrightarrow T(r) &= -\frac{1}{6 \cdot \lambda} \cdot \dot{Q}_{\text{Quellen}}''' \cdot r^2 - \frac{C_1}{r} + C_2 \end{aligned}$$

Hinweis wenn Wärmequelle $\dot{Q}_{\text{Quellen}}'''$ abhängig von x , muss man selber integrieren und darf obige Formeln nicht verwenden

Verfahren: Wärmeleitung durch mehrere Schichten

(Mit fixem Wärmestrom)

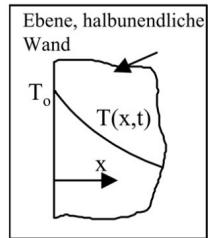
- Wärmestrom am Rand muss gegeben oder berechenbar sein (meist konvektive Randbedingung) $\Rightarrow \dot{Q}_1''$
- wegen Energieerhaltung: $\dot{Q}_1'' = \dot{Q}_2'' = \dots = \dot{Q}_n'' = \dot{Q}''$
- $\dot{Q}'' = -\lambda \frac{\partial T_1}{\partial x}$ integrieren $\rightarrow T_1(x) = -\frac{\dot{Q}''}{\lambda} x + C_1$
 $\rightarrow C_1 = T_1(x) + \frac{\dot{Q}''}{\lambda} x$
- folgende Grenztemperaturen oder Schichtdicken iterativ berechnen:

$$T_{i+1} = d_i \cdot \dot{Q}'' \cdot \frac{1}{\lambda_i} + T_i d_i = \frac{\lambda_i}{\dot{Q}''} \cdot (T_{i+1} - T_i) \lambda_i = \frac{d_i \cdot \dot{Q}''}{T_{i+1} - T_i}$$

16.4.2 Randbedingungen:

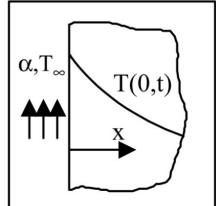
Fixe Oberflächentemperatur Oberflächentemperatur ist vorgegeben

$$T(x=0) = T_0$$



Fixer Wärmestrom fixer Wärmestrom wird bei x_0 zu-/abgeführt

$$-\lambda \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right) \Big|_{x=x_0} = \dot{q}_0''(x_0)$$



Theorem: Vorzeichen Konvention

$$\pm \lambda \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right) \Big|_{x=0} = \pm \dot{q}_0''(0, t)$$

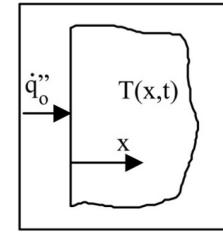
- Für λ : Auswärtsnormalvektor zeichnen. Mit der positiven Richtung der Koordinate (x) vergleichen. Sind die Richtungen gleich, minus nehmen. Sind die Richtungen entgegengesetzt, plus nehmen.
- Für $\dot{q}_0''(0, t)$: Minus nehmen, wenn in die Richtung der Oberfläche (Wie in zweite Bild). Weg von der Oberfläche \Rightarrow plus nehmen.

Isolation/ Adiabat kein Wärmestrom, horizontaler Temperaturverlauf

$$-\lambda \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right) \Big|_{x=x_0} = 0$$

Konvektive Randbedingung Wärmestrom Wärmeleitung = Wärmestrom Konvektion

$$-\lambda \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right) \Big|_{x=x_0} = \alpha(T_0 - T_\infty)$$



Zylinder/Kugel aufgrund der Symmetrie

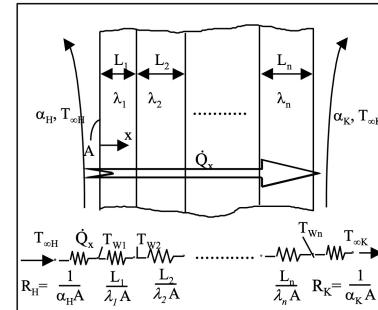
$$-\lambda \left(\frac{\partial T}{\partial r} \right) \Big|_{r=0} = 0$$

Übergang zw. 2 Medien Stetigkeitsbedingung und da $\dot{Q}_1'' = \dot{Q}_2''$

$$T_1(x_0) = T_2(x_0)$$

$$\lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial x}(x_0) = \lambda_2 \frac{\partial T_2}{\partial x}(x_0)$$

16.5 Stationäre Wärmeleitung mit Widerständen:



Analogie mit elektrische Strömen:

$$\begin{cases} \Delta T & \rightarrow \Delta V \\ \dot{Q}_x & \rightarrow I \\ \frac{L}{\lambda A}; \frac{1}{\lambda A} & \rightarrow R \end{cases}$$

Voraussetzungen: **stationäres** Problem **ohne Quellen** von dissipater elektrischer Leistung, absorbiert Strahlung oder eingeschlossener Radioaktivität (kein Temperaturverlauf berechenbar). Erhalten wir die Wärmestrom aus der Anwendung des Ohm'schen Gesetzes.

$$\dot{Q}_x = \frac{T_{\infty,H} - T_{\infty,K}}{R_g}$$

Wobei $R_g = \frac{1}{\alpha_H A} + \sum_{i=1}^n \frac{L_i}{\lambda_i A} + \frac{1}{\alpha_K A}$.

$$\dot{Q}_x = \frac{A \cdot \Delta T}{\frac{1}{\alpha_H} + \sum_{i=1}^n \frac{L_i}{\lambda_i} + \frac{1}{\alpha_K}} = k \cdot A \cdot \Delta T$$

Der Wärmedurchgangskoeffizient k (k-Wert) für eine beliebige Wandkonstruktion ist somit folgendermassen definiert:

$$\frac{1}{k} = \frac{1}{\alpha_H} + \sum_{i=1}^n \frac{L_i}{\lambda_i} + \frac{1}{\alpha_K} \quad \left[\frac{W}{m^2 \cdot K} \right]$$

Der **Kritische Radius** (um Isolation/Übertragung optimal zu haben) $\rightarrow \frac{\delta R_g}{\delta r} = 0$.

16.5.1 Wärmeleitwiderstände [K W^{-1}]:

Im Allgemein: $\dot{Q}R = \overline{\Delta T}$ (Erinnerung: $\dot{Q} = \dot{m} \cdot c_p \cdot \Delta T$, $\overline{\Delta T} = \Delta T$ im allgemeinen Fall, beachte Logarithmische Mitteltemperatur im Rohr!)

Kartesisch

$$R_{th,\lambda} = \frac{d}{\lambda \cdot A}$$

$$\begin{aligned}\dot{Q} &= -A \cdot \lambda \frac{dT}{dx} \rightarrow \int_0^d dx = \int_{T_1}^{T_2} -\frac{A\lambda}{\dot{Q}} dT \\ &= \frac{\lambda A}{d} (T_1 - T_2) \rightarrow R = \frac{d}{\lambda A}\end{aligned}$$

Zylindrisch

$$R_{th,\lambda} = \frac{\ln(r_a/r_i)}{2 \cdot \pi \cdot \lambda \cdot L}$$

(mit L = die lange von ein beliebige Rohr)

$$\begin{aligned}\dot{Q} &= -A \cdot \lambda \frac{dT}{dr} \rightarrow \int_{r_1}^{r_2} r^{-1} dr = \int_{T_1}^{T_2} -\frac{2\pi\lambda L}{\dot{Q}} dT \\ &= \frac{2\pi\lambda L}{\ln\left(\frac{r_a}{r_i}\right)} (T_1 - T_2) \rightarrow R = \frac{\ln(r_a/r_i)}{2 \cdot \pi \cdot \lambda \cdot L}\end{aligned}$$

sphärisch

$$R_{th,\lambda} = \frac{(1/r_i) - (1/r_a)}{4 \cdot \pi \cdot \lambda}$$

$$\begin{aligned}\dot{Q} &= -A \cdot \lambda \frac{dT}{dr} \rightarrow \int_{r_1}^{r_2} r^{-2} dr = \int_{T_1}^{T_2} -\frac{4\pi\lambda}{\dot{Q}} dT \\ &= \frac{4\pi\lambda}{\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}} (T_1 - T_2) \rightarrow R = \frac{1}{4\pi\lambda} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)\end{aligned}$$

Konvektiv

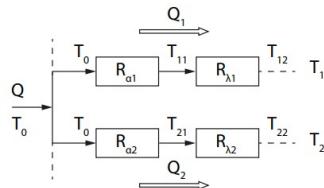
$$R_{th,\alpha} = \frac{1}{\alpha \cdot A}, \quad (\text{Zylinder } A = A_{lat})$$

Strahlung

$$R_{th,\sigma} = \frac{T_H - T_K}{\varepsilon \cdot \sigma \cdot A_m \cdot (T_H^4 - T_K^4)} \rightarrow \text{linearisiert: } \frac{1}{4 \cdot \varepsilon \cdot \sigma \cdot T_{avg}^3 \cdot A_m}$$

immer $R_{th,\sigma} || R_{th,\alpha}, [T_{avg}] = [\text{K}]$

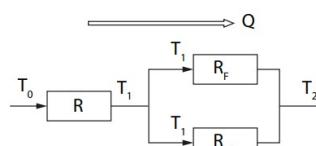
16.5.2 Schaltbilder:



- Konvektives Medium mit Wärmequelle
- Falls direkt an leitende Fläche angrenzt, ersetze $R_{\alpha,i}$ mit $R_{\lambda,i}$, Ansatz:

$$Q_1 = \frac{T_H - T_1}{R_{tot,1}}$$

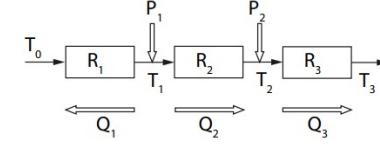
$$Q_2 = \frac{T_H - T_2}{R_{tot,2}}$$



- Kühlrippen

- Oder parallel geschaltete Wärmeleitung (ersetze $R_{F,\alpha}$ mit $R_{\lambda,i}$)

$$R_{||} = \left(\frac{1}{R_F} + \frac{1}{R_\alpha} \right)^{-1}$$



- Wärmezufuhr $P_1 \& P_2$

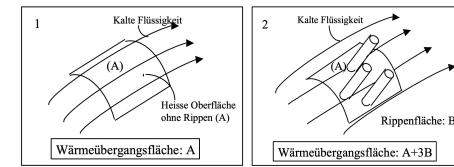
- Ansatz:

$$Q_1 = \frac{T_1 - T_{\infty,1}}{R_1} = P_1 - Q_2$$

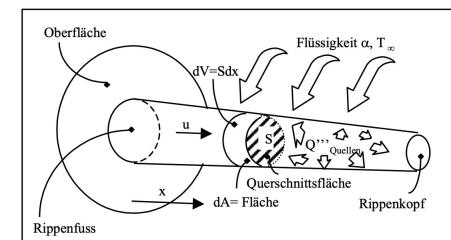
$$Q_2 = \frac{T_1 - T_2}{R_2} = P_1 - Q_1 = Q_3 - P_2$$

$$Q_3 = \frac{T_2 - T_{\infty,2}}{R_3} = P_2 + Q_2$$

17 Eindimensionale Wärmeleitung in Rippen



In der Energietechnik spielen Wärmetauscher, wo Wärmeenergie von einem Medium an ein anderes übergeben werden muss, eine wichtige Rolle. Es ist deshalb ein Anliegen, diese Wärmetauscher möglichst effizient zu gestalten. Ein Mittel hierzu ist die Vergrößerung der Wärmetauscherfläche durch das Anbringen von sog. Rippen. (Temperaturverläufe innerhalb der Querschnittsfläche S können vernachlässigt werden (eindimensionale Wärmeleitung)).



17.1 Allgemeine Energieerhaltungsgleichung für Rippen:

$$\begin{aligned}\frac{\partial U}{\partial t} &= \dot{Q}_{\text{Leit}} + \dot{E} + \dot{Q}_{\text{Quellen}}''' \cdot dV - \left[\dot{Q}_{\text{Leit}} + \frac{\partial \dot{Q}_{\text{Leit}}}{\partial x} dx \right] \\ &\quad - \left[\dot{E} + \frac{\partial E}{\partial x} dx \right] - \dot{Q}_{\text{Konv}} - \dot{Q}_{\text{Strahlung}}'' \cdot dA\end{aligned}$$

Mit:

- $U = \rho c T dV$ [=innere Energie des Rippenelements]
- $\dot{E} = \dot{m} c T = \rho u S c T$ [E=Energiefluss bedingt (=causato) durch die Bewegung der Rippe]
- $\dot{Q}_{\text{Leit}} = -\lambda S \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)$
- $\dot{Q}_{\text{Konv}} = \alpha dA (T - T_\infty)$

Es gilt so:

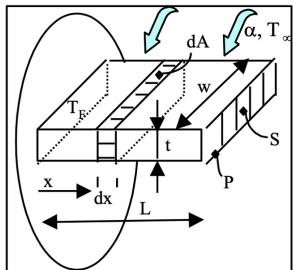
$$\rho \cdot c \cdot \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{dV}{dx} T \right) = \underbrace{\lambda \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left(S \frac{\partial T}{\partial x} \right)}_{I} - \underbrace{\rho \cdot c \cdot \frac{\partial}{\partial x} (S \cdot u \cdot T)}_{II} - \underbrace{-\alpha \cdot (T - T_\infty) \frac{dA}{dx}}_{III} + \underbrace{\dot{Q}_{Quellen}''' \frac{dV}{dx}}_{IV} - \underbrace{\dot{Q}_{Strahl}''' \frac{dA}{dx}}_{V}$$

- *I* Wärmetransport durch Leitung (in x -Richtung)
- *II* Energiefluss durch Bewegung der Rippe (in x -Richtung)
- *III* Wärmetransport durch Konvektion (gewollt: Wärmeabfuhr)
- *IV* Energieerzeugung durch Quellen
- *V* Wärmetransport durch Strahlung (nur bei sehr hohen T relevant)

Term = 0, falls:

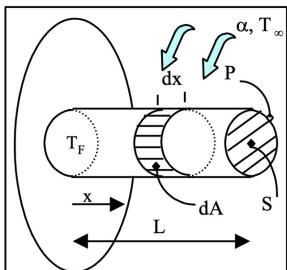
- stationäres Problem
- keine Bewegung
- quellenfreies Material
- Strahlung vernachlässigt

17.2 Rippen an Wärmetauschern:



Ebene Rippe:

Querschnittsfläche: $S=w \cdot t$
Umfang: $P=2(w+t)$
 $dA=P \cdot dx$



Stabriipse:

Querschnittsfläche: $S=\pi D^2/4$
Umfang: $P=\pi D$
 $dA=\pi D \cdot dx$

- Die Querschnittsfläche S ist konstant
- Die Rippe bewegt sich nicht ($u = 0$).
- Wir betrachten nur stationäre Zustände
- Es existieren keine Quellen
- Strahlung spielt keine Rolle, d.h. die Rippe wird von einem undurchsichtigen Fluid angeströmt

$$\lambda \cdot S \cdot \frac{d^2 T}{dx^2} - \alpha \cdot P \cdot (T - T_\infty) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{d^2 \theta}{dx^2} - m^2 \cdot \theta = 0$$

$$\text{mit } \begin{cases} P = \frac{dA}{dx} & \text{Rippenumfang} \\ m^2 = \frac{\alpha P}{\lambda S} & \text{Rippenparameter (rund Quers.: } m^2 = \frac{4\alpha}{\lambda D}) \\ \theta = T - T_\infty & \text{Übertemperatur} \end{cases}$$

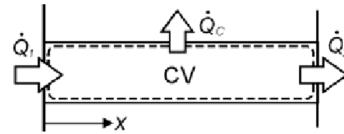
Allgemeine Lösung

$$\theta(x) = T(x) - T_\infty = C_1 \cdot e^{mx} + C_2 \cdot e^{-mx}$$

Dies führt mit den Randbedingungen zu den Lösungen:

- bekannte Temperatur am Rippenfuss T_F quasi immer bekannt

$$T(0) = T_F \rightarrow \theta(0) = T_F - T_\infty = \theta_F \Rightarrow \theta_F = C_1 + C_2$$



$$\text{Merke: } \dot{Q}_c + \dot{Q}_2 = \dot{Q}_1$$

- Sehr lange Rippe kein Wärmeübergang zum Rippenkopf

$$\theta(L \rightarrow \infty) = T(L \rightarrow \infty) - T_\infty = 0$$

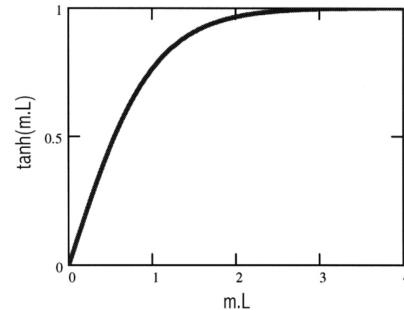
$$\rightarrow C_1 \cdot e^{m(L \rightarrow \infty)} = 0 \Rightarrow C_1 = 0$$

$$\theta(x) = \theta_F \cdot e^{-mx}$$

- Isolierter Rippenkopf Wärmeübergang am Rippenende vernachlässigbar

$$\frac{d\theta}{dx} \Big|_{x=L} = 0 \Rightarrow C_1 \cdot m \cdot e^{mL} - C_2 \cdot m \cdot e^{-mL} = 0$$

$$\theta(x) = \theta_F \cdot \frac{\cosh[m \cdot (L-x)]}{\cosh(mL)}$$



- bekannte Temperatur am Rippenkopf Rippe zwischen zwei Flächen $T(L) = T_K$

$$\theta(L) = T_K - T_\infty = \theta_K \Rightarrow \theta_K = C_1 \cdot e^{mL} + C_2 \cdot e^{-mL}$$

$$\theta(x) = \theta_F \cdot \frac{\left(\frac{\theta_K}{\theta_F}\right) \cdot \sinh(mx) + \sinh[m \cdot (L-x)]}{\sinh(mL)}$$

- Konvektion am Rippenkopf entspricht der Realität

$$-\lambda \frac{d\theta}{dx} \Big|_{x=L} = \alpha(T(L) - T_\infty) \rightarrow \lambda \frac{d\theta}{dx} \Big|_{x=L} = -\frac{\alpha}{\lambda} \cdot \theta(L)$$

$$\Rightarrow C_1 \cdot m \cdot e^{mL} - C_2 \cdot m \cdot e^{-mL} = -\frac{\alpha}{\lambda} \cdot (C_1 \cdot e^{mL} + C_2 \cdot e^{-mL})$$

$$\theta(x) = \theta_F \cdot \frac{\cosh[m \cdot (L-x)] + \left(\frac{\alpha}{m\lambda}\right) \sinh[m \cdot (L-x)]}{\cosh(mL) + \left(\frac{\alpha}{m\lambda}\right) \sinh(mL)}$$

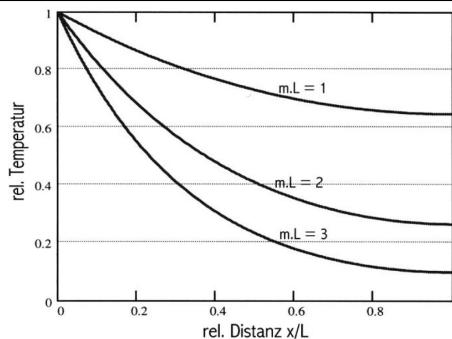
17.2.1 Optimale Rippenlänge:

Eine Rippe hat nahezu ihre maximale Übertragungsleistung bei $mL = 2$

Effizienter Materialeinsatz bei $mL < 1$

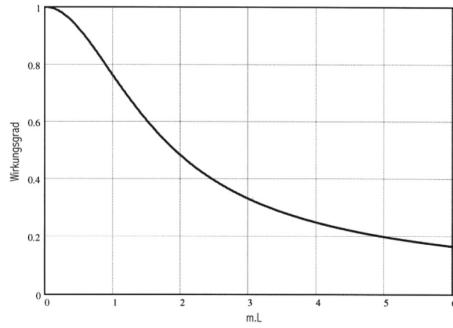
$$L_{opt} < \frac{1}{m} = \sqrt{\frac{\lambda \cdot S}{\alpha \cdot P}}$$

mit S Querschnittsfläche und P Rippenumfang In den nächsten Bild wird der Temperaturverlauf in der Rippe (Fall isolierter Rippenkopf) für verschiedene Werte von mL veranschaulicht.



Man beachte die horizontale Tangente am Ende der Rippe
Je grösser die Wärmeleitfähigkeit (um so kleiner ist $m \cdot L$) desto höher wird die Temperatur am Rippenende. Für unendlich grosse Wärmeleitfähigkeit ($\lambda \rightarrow \infty$) wird die Rippe isotherm.

17.2.2 Rippenwirkungsgrad:



$$\eta_R = \frac{\text{übertragene Wärmemenge, } \theta_{\text{Oberfläche}=\theta(x)}}{\text{maximal übertragbare Wärmemenge, } \theta_{\text{Oberfläche}}}$$

mit Maximal übertragbare Wärmemenge = die Wärmemenge, die die Rippe übertragen könnte, wenn ihre gesamte Oberfläche die Temperatur des Rippenfusses annehmen würde.

$$\eta_R = \theta_F = \frac{\dot{Q}_F}{\dot{Q}_{max}} = \frac{\dot{Q}_F}{\alpha \cdot A \cdot (T_F - T_\infty)} = \frac{\dot{Q}_F}{\alpha \cdot P \cdot L \cdot \theta_F}$$

wobei:

- \dot{Q}_F : effektiv abgegebene Wärme (Berechnung wie in 17.2.4)
- \dot{Q}_M : theoretische maximale Wärmeabgabe, wenn die gesamte Rippe die Fusstemperatur hätte ($\theta(x) = \theta_F$).

Sehr lange Rippe

$$\eta_R = \frac{1}{m \cdot L}$$

Isolierter Rippenkopf

$$\eta_R = \frac{\tanh(mL)}{mL}$$

Rippe zwischen zwei Flächen

$$\eta_R = \frac{\cosh(mL) - \frac{\theta_K}{\theta_F}}{mL \cdot \sinh(mL)}$$

17.2.3 Rippenwiderstände:

Sehr lange Rippe

$$R_F = \frac{1}{n \cdot \lambda \cdot S \cdot m}$$

Isolierter Rippenkopf

$$R_F = \frac{1}{n \cdot \lambda \cdot S \cdot m \cdot \tanh(mL)}$$

Konvektion am Rippenkopf

$$R_F = \frac{1}{n \cdot \lambda \cdot S \cdot m} \cdot \frac{\cosh(mL) + \frac{\alpha}{m \cdot \lambda} \cdot \sinh(mL)}{\sinh(mL) + \frac{\alpha}{m \cdot \lambda} \cdot \cosh(mL)}$$

Wirkungsgrad gegeben

$$R_F = \frac{1}{n \cdot \eta_R \cdot A \cdot \alpha}$$

mit n Anzahl Rippen pro Einheitflänge/Einheitsfläche, $m = \sqrt{\frac{\alpha \cdot P}{\lambda \cdot S}}$ (für runde Rippen $m = \sqrt{\frac{4\alpha}{\lambda D}}$), P = Umfang und S = Querschnittsfläche Rippen müssen mit dem konvektiven Widerstand an der Oberfläche **parallel** geschaltet werden. Der konvektive Widerstand ändert sich abhängig von der Rippen-bedeckten fläche: $\frac{R_{\text{mit Rippen}}}{R_{\text{ohne Rippen}}} = \frac{A_{\text{ohne Rippen}} - A_{\text{mit Rippen}}}{A_{\text{ohne Rippen}}}$

17.2.4 Wärmefluss durch den Rippenfuss:

$$\dot{Q}_F = -\lambda \cdot S \cdot \frac{\partial \theta}{\partial x} \Big|_{x=0} = \frac{T_F - T_\infty}{R_F} = \frac{\theta_F}{R_F}$$

mit R_F Rippenwiderstand

mit Ableiten der Lösungen und Einsetzen von $x = 0$ erhält man:
Sehr lange Rippe

$$\dot{Q}_F = \lambda \cdot S \cdot m \cdot \theta_F$$

Isolierter/ Adiabat Rippenkopf

$$\dot{Q}_F = \lambda \cdot S \cdot m \cdot \theta_F \cdot \tanh(mL)$$

Temp. am Rippenkopf bekannt

$$\dot{Q}_F = \lambda \cdot S \cdot m \cdot \frac{1}{\cosh(mL)} \cdot (\theta_F \cdot \cosh(mL) - \theta_K)$$

Konvektion am Rippenkopf

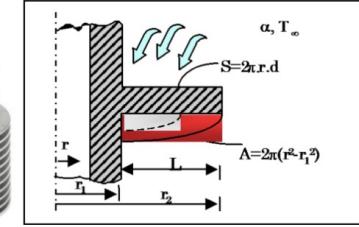
$$\dot{Q}_F = \lambda \cdot S \cdot \theta_F \cdot \frac{\frac{\alpha}{\lambda} \cdot \cosh(mL) + m \cdot \sinh(mL)}{\cosh(mL) + \frac{\alpha}{m \cdot \lambda} \sinh(mL)}$$

17.2.5 Approximation von Rippen:

$mL \gg 1$ Rippe kann als unendlich lang approximiert werden
 $mL \approx 1$ Rippe muss mit adiabatem Kopf approximiert werden

17.3 Kreisförmige Rippen:

Mit variabler Querschnitt!



$$\lambda \cdot \frac{d}{dr} \left(S(r) \cdot \frac{dT}{dr} \right) - \frac{dA}{dr} \cdot \alpha(T - T_\infty) = 0$$

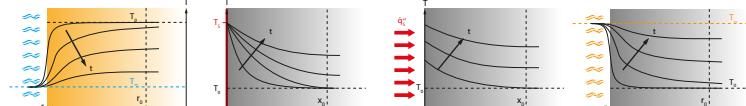
Mit der Randbedingungen: $r = r_1, T(r_1) = T_F, \theta(r_1) = T_F - T_\infty = \theta_F, r = r_2, \frac{d\theta}{dr}|_{r_2} = 0$.

Loesung:

$$\theta = \theta_F \frac{I_0(mr) \cdot K_1(mr_2) + I_1(mr_2) \cdot K_0(mr)}{I_0(mr_1) \cdot K_1(mr_2) + I_1(mr_2) \cdot K_0(mr_1)}$$

Merke: Bei den Funktionen I_0 und K_0 handelt es sich um sog. Besselfunktionen 0-ter Ordnung der ersten resp. der zweiten Art.

18 Instationäre Wärmeleitung



18.1 Biot-Zahl/Zylindrisch/sphärisch:

Kartesisch

$$Bi = \frac{\alpha \cdot d}{\lambda} = \frac{R_\lambda}{R_\alpha}$$

Hinweis Wenn Platte von beiden Seiten mit gleichem Fluid angeströmt, $d = \frac{d}{2}$

- $Bi \ll 1$ und $R_\alpha \gg R_\lambda$ Konvektion nicht vernachlässigbar, Verbesserung der Wärmeleitfähigkeit: $\alpha \uparrow$. **Achtung:** Annahme mittlere Temperatur nur für diese Fall gültig (Wärmeverlust in mittleren drin vernachlässigt).
- $Bi \approx 1$ und $R_\alpha \approx R_\lambda$ beides nicht vernachlässigbar, Verbesserung der Wärmeleitung: $\alpha \uparrow, \lambda \uparrow$
- $Bi \gg 1$ und $R_\alpha \ll R_\lambda$ Wärmeleitung nicht vernachlässigbar, Verbesserung der Wärmeleitung: $\lambda \uparrow$
- $Bi \rightarrow 0$ (α sehr klein oder λ sehr gross) Temperatur im Körper nur von Zeit abhängig
- $Bi \rightarrow \infty$ (α sehr gross oder λ sehr klein) Oberflächentemperatur nähert sich T_∞ an

18.2 Nulldimensionale Instationäre Wärmeleitung:

Bedingung

$$\lambda \cdot \frac{T_i - T_0}{L} \approx \alpha \cdot (T_0 - T_\infty) \leftrightarrow T_i - T_0 \approx Bi \cdot (T_0 - T_\infty)$$

Homogene Temperatur (die Temperatur hängt nur von der Zeit) wenn:

- Sehr kleine Körper ($\alpha \cdot L \ll 1$)
- Körper mit sehr guter Wärmeleitfähigkeit ($\lambda \gg 1$):

$$\frac{T_i - T_0}{T_0 - T_\infty} = Bi \ll 1$$

Verfahren: Körper in Fluid mit vergleichbarer Masse

$$\begin{aligned} -\dot{Q} &= m_1 c_1 \frac{dT_1}{dt} \\ \dot{Q} &= m_2 c_2 \frac{dT_2}{dt} \end{aligned} \quad \left. \begin{aligned} \dot{Q} &= \alpha A (T_1 - T_2) \\ \Rightarrow \int_{T_{A1}}^{T_1} \frac{d(T_1 - T_2)}{T_1 - T_2} &= \int_0^t \underbrace{\alpha A \left(\frac{1}{m_1 c_1} + \frac{1}{m_2 c_2} \right)}_{=n : \text{Lumped-Parameter}} dt \end{aligned} \right\}$$

mit T_1, T_{A1} Temperatur und Anfangstemperatur des Körpers mit Oberfläche A und T_2, T_{A2} Temperatur und Anfangstemperatur des Fluids

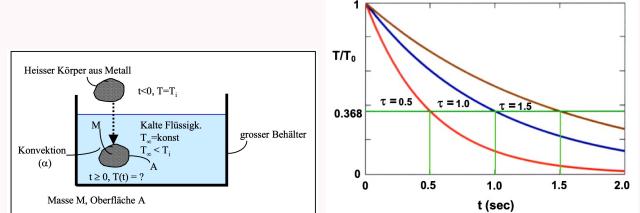
$$\Rightarrow T_1 - T_2 = (T_{A1} - T_{A2}) \cdot e^{-nt}$$

$$\Rightarrow T_\infty = \frac{m_1 c_1 T_{A1} + m_2 c_2 T_{A2}}{m_1 c_1 + m_2 c_2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} T_1 &= T_\infty + (T_{A1} - T_\infty) \cdot e^{-nt} \\ T_2 &= T_\infty + (T_{A2} - T_\infty) \cdot e^{-nt} \end{cases}$$

von $(T_1 - T_2)$ zu T_∞ mit $Q(t \rightarrow \infty) = m_1 c_1 (T_{A1} - T_1) = m_2 c_2 (T_2 - T_{A2})$ mit T_∞ ausgetauschte Temperatur für $t \rightarrow \infty$ ($T_1 = T_2 = T_\infty$)

Verfahren: Körper in ein Fluid viel grösserer Masse



$$\begin{aligned} \frac{dE}{dt} &= \dot{Q}_{ein} - \dot{Q}_{aus} + \dot{Q}_{Quellen} \\ \Rightarrow m \cdot c \cdot \frac{dT}{dt} &= -\alpha \cdot A \cdot (T(t) - T_\infty) + \dot{Q}_{Quellen} \\ \Rightarrow \int_{T_0}^{T_1} -\frac{1}{T(t) - T_\infty - \frac{m \dot{Q}_{Quellen}}{\rho A \alpha}} dT &= \int_{t_0}^{t_1} \frac{\alpha \cdot A}{m \cdot c} dt \end{aligned}$$

mit

- $\dot{Q}_{ein}, \dot{Q}_{Quellen}$ meistens gilt: $\dot{Q}_{ein} = \dot{Q}_{Quellen} = 0$
- $\dot{Q}_{aus} = \dot{Q}_{conv} = \alpha \cdot A \cdot (T(t) - T_\infty)$
- $E = m \cdot c \cdot T \rightarrow \frac{dE}{dt} = m \cdot c \cdot \frac{dT}{dt}$
- α bei angrenzenden Flüssigkeiten gilt: $\alpha = \left(\frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2} \right)^{-1}$

$$\frac{T(t) - T_\infty - \Xi}{T_0 - T_\infty - \Xi} = e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow T(t) &= e^{-\frac{t}{\tau}} \cdot (T_0 - T_\infty - \Xi) + T_\infty + \Xi \\ \Rightarrow t &= -\tau \cdot \ln \left(\frac{T(t) - T_\infty - \Xi}{T_0 - T_\infty - \Xi} \right) \end{aligned}$$

mit

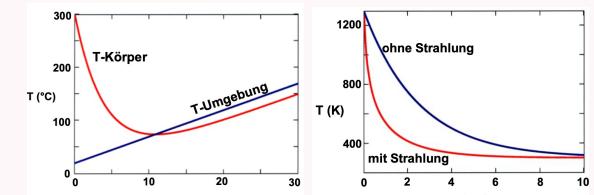
- τ Zeitkonstante $\tau = \frac{mc}{\alpha A}$, $\tau_{Zyl} = \frac{c\rho D}{4\alpha}$, $\tau_{Kugel} = \frac{D\rho c}{6\alpha}$, je kleiner desto schneller die Abkühlung, bei zusätzlicher Isolationsschicht: $\tau = mcR_{tot}$
- Ξ Quellenkonstante, mit Quellen: $\Xi = \frac{m \dot{Q}_{Quellen}'''}{\rho A \alpha}$, ohne Quellen: $\Xi = 0$
- A Oberfläche (Zylinder: $A = \text{Mantelfläche } A_M = \pi DL + \text{evtl. Stirnflächen } A_S = \frac{1}{2}\pi D^2$)
- m Masse des Körpers $m = \rho \cdot V$
- T_0 Temperatur des Körpers zum Zeitpunkt t_0

$$Q_{tot} = \int_{t_0}^{t_1} \dot{Q}_{aus} = \int_{t_0}^{t_1} \alpha \cdot A \cdot (T(t) - T_\infty) dt$$

$$t \rightarrow \infty : T(t) = T_\infty \rightarrow Q_{tot} = m \cdot c \cdot (T_0 - T_\infty)$$

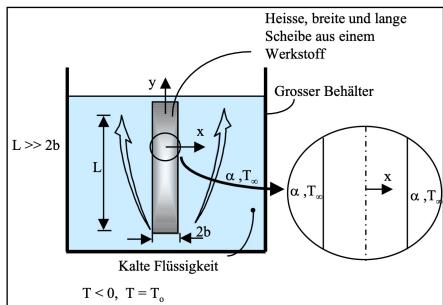
Spezielle Fälle:

- Die Umgebungstemperatur T variiert mit der Zeit, z. $T = Ct + B \frac{dT}{dt} = -\frac{A\alpha}{Mc} \cdot (T - Ct - B) \Delta T(\infty) = C \cdot \tau$
- Neben der Konvektion wird auch noch Wärmeübertragung durch Strahlung mit einbezogen $Mc \frac{dT}{dt} = -A\alpha(T - T_\infty) - \sigma\varepsilon A(T^4 - T_\infty^4)$



18.3 Eindimensionale instationäre Wärmeleitung:

$Bi \ll 1$ nicht erfüllt, kann die Näherung der homogenen Temperaturverteilung nicht mehr angewendet werden. Aus Symmetriegründen fliessen in der Ebene keine Wärmeströme.



Energieerhaltungsgleichung (ohne Wärmequellen), y und z haben Größenordnung \ll (siehe 19.1 für generell Formulierung)

$$\frac{\rho c}{\lambda} \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \stackrel{0}{=} 0$$

Anfangs- und Randbedingung

Homogene Temperatur:

$$t = 0 \Leftrightarrow T = T_0 \text{ für } -b < x < b$$

Symmetrische Ebene in der Mitte und an den beiden Rändern herrscht konvektiver Wärmeübergang:

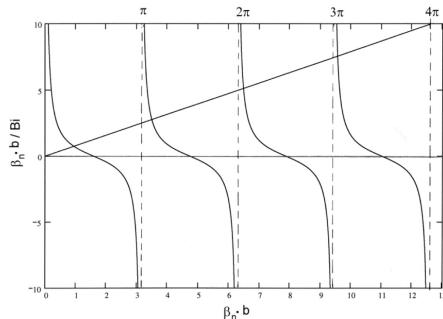
$$x = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial T}{\partial x} = 0 \text{ (isoliert)}$$

$$x = b \Leftrightarrow -\lambda \cdot \frac{\partial T}{\partial x} = \alpha(T - T_\infty) \text{ (Konvektion)}$$

Lösung (durch Anwendung von $\theta(x, t) = X(x) \cdot S(t)$, weil **homogen**)

$$\theta(x, t) = X(x) \cdot S(t) = e^{-\alpha\beta^2 \cdot t} \cdot [A \sin(\beta x) + B \cos(\beta x)]$$

Durch erste RB $\rightarrow A = 0$ Durch zweite RB: $b\beta_n = Bi \cdot \cot(\beta_n b)$



Dieser Satz von Lösungen hängt von der Biot-Zahl ab. Die Lösungen dieser impliziten Gleichung sind in Figur dargestellt. Für jeden Wert β_n erhalten wir somit eine partielle Lösung für θ . Die allgemeine Lösung für θ erhalten wir aus der Summe aller partiellen Lösungen:

$$\theta(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \cos(\beta_n x) \cdot e^{-\alpha\beta_n^2 t}$$

Für das weitere Vorgehen, nehmen wir an, dass die Lösungen für β_n bekannt sind, d.h. wir bestimmen die Biot-Zahl unseres spezifischen Problems und ermitteln dann den Satz von Lösungen für β_n . Die letzte Konstante B , welche für jede partielle Lösung einen spezifischen Wert B_n annimmt, erhalten wir aus der Anwendung der Anfangsbedingung.

$$\theta_0 = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \cdot \cos(\beta_n x)$$

Integrationskonstante B_n für θ und $\theta(x)$

$$B_n = \frac{\theta_0 \sin(\beta_n b)}{\frac{b\beta_n}{2} + \frac{\sin(2\beta_n b)}{4}}$$

$$B_n = \frac{\int_0^b \theta_0(x) \cos(\beta_n x) dx}{\frac{b\beta_n}{2} + \frac{\sin(2\beta_n b)}{4}}$$

Lösung

$$\theta(x, t) = T(x, t) - T_\infty = (T_0 - T_\infty) \cdot \sum_{n=1}^{\infty} B_n \cos(\beta_n x) e^{-\alpha\beta_n^2 t}$$

Übertragene Wärmemenge

$$q''_{x=b, t \rightarrow \infty} = \frac{\lambda(T_0 - T_\infty)}{a} \sum_{n=1}^{\infty} B_n \cdot \sin(\beta_n b) \cdot \frac{1}{\beta_n}$$

Aus der Energieerhaltung folgt, dass die übertragene Wärmemenge dem ursprünglichen Wärmeinhalt (bezüglich der Übertemperatur) entsprechen muss:

$$\begin{cases} \alpha = a = \frac{\lambda}{\rho c_p} \\ q'' = \frac{Q''}{A} = \lambda \frac{T_0 - T_\infty}{\alpha} \cdot b \\ \sum_{n=1}^{\infty} B_n \cdot \sin(\beta_n b) \cdot \frac{1}{\beta_n} = b \end{cases}$$

Übertragene innere Energie

- Spezifische innere Energie für $t = t_0 \Rightarrow u_i = u_{ref} + c \cdot T_0$
- Spezifische innere Energie für $t \rightarrow \infty \Rightarrow u_\infty = u_{ref} + c \cdot T_\infty$

$$\Delta u = c \cdot (T_\infty - T_0)$$

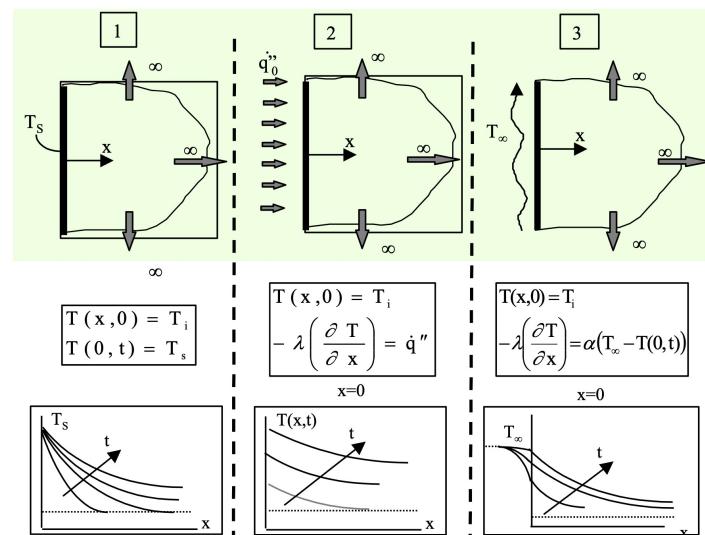
18.3.1 In stat Wärmeleitung in der halbunendlichen Wand:

Hier gilt wiederum die Erhaltungsgleichung für den 1D zeitabhängigen Fall:

$$\frac{1}{a} \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

Im folgenden werden wir den 1. Fall mit dem Temperatursprung an der Oberfläche behandeln. Die Anfangs- und Randbedingungen für diesen Fall lauten:

- $t < 0 \Rightarrow T = T_i$ überall
- $t = 0 \Rightarrow T = T_s$ für $x = 0$, $T = T_i$ für $x > 0$
- $x \rightarrow \infty$ und $t \rightarrow \infty \Rightarrow T = T_i$



Im Zeitpunkt $t = 0$ wird die Temperatur der Oberfläche von T_i auf T_s erhöht

Vom Zeitpunkt $t = 0$ an beginnt ein konstanter Wärmestrom \dot{q}'' in die Oberfläche einzudringen.

Im Zeitpunkt $t = 0$ wird die Temperatur des angrenzenden Fluids von T_i auf T_∞ erhöht und es herrscht ein konvektiver Übergang zur Oberfläche.

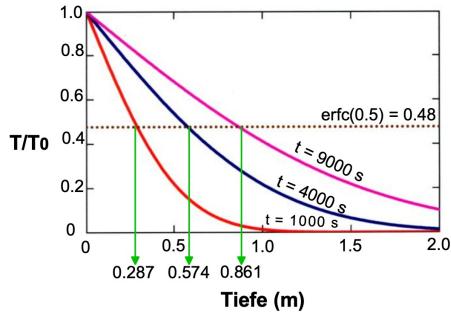
$Bi \ll 1$ nicht erfüllt.

Lösung mit die einföhrung von die Variable η :

$$\frac{T(\eta) - T_i}{T_S - T_i} = 1 - \text{erf}(\eta) = \text{erfc}(\eta) \leftrightarrow \eta = \frac{x}{\sqrt{4at}}$$

mit T_i Temperatur des Körpers im Punkt x zur Zeit $t = 0$ und T_S die Temperatur für $x = 0$, $\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\eta e^{-u^2} du = \text{erf}(\eta)$

Diffusionslänge spezieller Punkt ist die Stelle $\eta = 0.5$.



$$x_D = \sqrt{a \cdot t_D} = \sqrt{\frac{\lambda}{\rho \cdot c} \cdot t_D}$$

Hier gilt:

$$T(x = x_D, t = t_D) - T_\infty = 0.48 \cdot (T_S - T_\infty)$$

mit $a = \frac{\lambda}{\rho \cdot c}$ und x_D : Stelle an der nach der Zeit t_D 48 % der Störung an der Oberfläche wirkt ($\eta = 0.5, \text{erfc}(\eta) = 0.48$)

- Wärmestrom der in die Oberfläche eindringt

$$\dot{q}_S'' = \frac{\lambda \cdot (T_S - T_i)}{\sqrt{\pi \cdot a \cdot t}}$$

Abnahme proportional zu $\frac{1}{\sqrt{t}}$

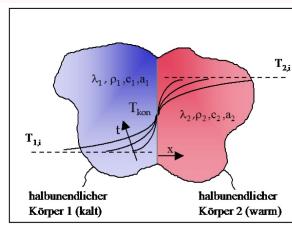
- Wärmestrom auf der Oberfläche $\dot{q}_S'' = \dot{q}_0'' = \text{const}$

$$T(x, t) - T_i = \frac{\dot{q}_S''}{\lambda} \cdot \left[\sqrt{\frac{4 \cdot a \cdot t}{x}} \cdot e^{-\frac{x^2}{4 \cdot a \cdot t}} - x \cdot \text{erfc} \left(\frac{x}{2 \cdot \sqrt{a \cdot t}} \right) \right]$$

- Konvektiver Wärmeübergang auf der Oberfläche

$$\frac{T(x, t) - T_i}{T_\infty - T_i} = \text{erfc} \left(\frac{x}{2 \cdot \sqrt{a \cdot t}} \right) - e^{\frac{a \cdot x}{\lambda} + \frac{\alpha^2 \cdot a \cdot t}{\lambda^2}} \cdot \text{erfc} \left(\frac{x}{2 \cdot \sqrt{a \cdot t}} + \frac{\alpha \cdot \sqrt{s \cdot t}}{\lambda} \right)$$

Verfahren: Kontakttemperatur / gekoppelte Systeme



$$\dot{q}_{1,K}'' = \dot{q}_{2,K}'' \Rightarrow T_K = \frac{\sqrt{\lambda_1 \cdot \rho_1 \cdot c_1} \cdot T_{A1} + \sqrt{\lambda_2 \cdot \rho_2 \cdot c_2} \cdot T_{A2}}{\sqrt{\lambda_1 \cdot \rho_1 \cdot c_1} + \sqrt{\lambda_2 \cdot \rho_2 \cdot c_2}}$$

mit

- T_K Kontakttemperatur der Körper
- Warme Seite: $\frac{T_2(x) - T_K}{T_{A2} - T_K} = \text{erf}(\frac{x}{2\sqrt{a_2 \cdot t}})$ und bei $x = 0 \Rightarrow \dot{q}_{2,K}'' = \lambda_2 \cdot (\frac{\partial T_2}{\partial x})_{x=0} = -\frac{\lambda_2 (T_K - T_{A2})}{\sqrt{\pi \cdot a_2 \cdot t}}$
- Kalte Seite: $\frac{T_1(x) - T_K}{T_{A1} - T_K} = \text{erf}(\frac{-x}{2\sqrt{a_1 \cdot t}})$ und bei $x = 0 \Rightarrow \dot{q}_{1,K}'' = \lambda_1 \cdot (\frac{\partial T_1}{\partial (-x)})_{x=0} = -\frac{\lambda_1 (T_K - T_{A1})}{\sqrt{\pi \cdot a_1 \cdot t}}$

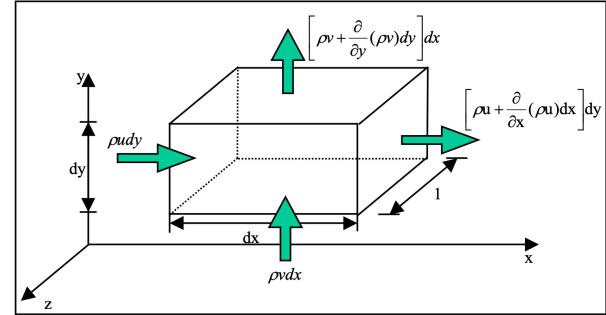
19 Erzwungene Konvektion

Einflussfaktoren von Konvektion:

- Geometrie und Rauigkeit der Oberfläche
- Zustand der Strömung (laminar oder turbulent)
- Eigenschaften der Flüssigkeit (Viskosität, spezifische Wärme)

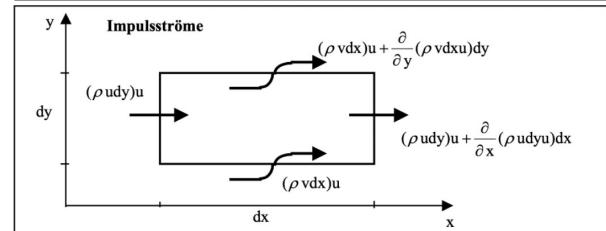
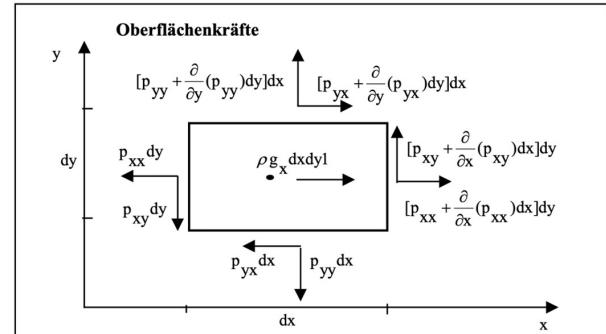
19.1 Erhaltungsgleichungen für 2D und stationär Konvektion:

Kontinuitätsgleichung: stationärer Fall, inkompressibel Flüssigkeit. Die ein- und austretenden **Massenströme** werden durch die Dichte und die Geschwindigkeiten bestimmt.



$$\text{div}(\rho \vec{v}) = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

Impulserhaltungsgleichung: Orfeste Kontrollvolumen. Produkt aus Impulsdichte und Volumenstrom. Der **Impulsstrom** ist das Produkt aus Impulsdichte und Volumenstrom. Die Änderung des Impulsstroms wird durch die Summe der wirkenden Kräfte verursacht:



$$\rho \cdot \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) dx dy \rightarrow \text{Änderung des Impulsstromes}$$

Navier-Stokes Gleichung (Die Änderung des Impulsstromes im Kontrollvolumen ist gleich den wirkenden Oberflächenkräften und der Volumenkraft):

$$\rho \left[u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right] = \rho g_x + \\ + \left[-\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left\{ -\frac{2}{3} \mu \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} \right\} + \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \mu \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right\} \right]$$

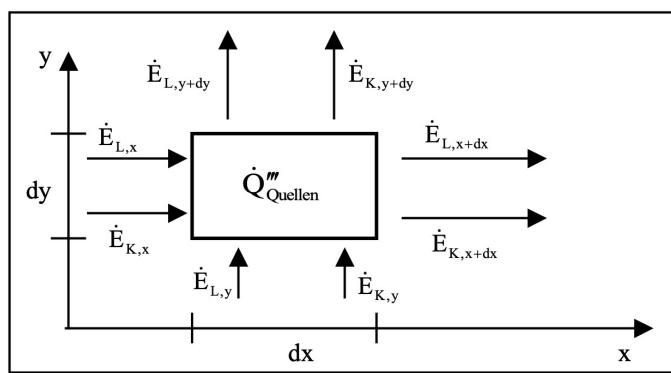
Merke, für konstante Stoffeigenschaften (+Kontinuität-Gl):

$$\begin{cases} \rho \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = -\frac{\partial P}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + \rho g_x \\ \rho \left(u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) = -\frac{\partial P}{\partial y} + \mu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) + \rho g_y \\ \rho (\vec{V} \cdot \vec{\nabla}) \vec{V} = -\vec{\nabla} P + \mu \vec{\nabla}^2 \vec{V} + \rho \vec{g} \end{cases}$$

Energieerhaltungsgleichung: Komponenten für Bilanz:

- Energieströme, die an die ein- und austretenden Massenströme gebunden sind (Konvektion)
- Wärmeströme bedingt durch Wärmeleitung
- innere Quellen (z.B. Reaktionswärme bei Verbrennungsreaktionen)
- Arbeitsleistung der Oberflächen- und Volumenkräfte

Erhaltungsgleichung für eine stationäre Strömung herleiten. Änderungen in der kinetischen Energie (relevant für Geschwindigkeiten grösser als die Schallgeschwindigkeit) und der potentiellen Energie (relevant ab Höhenunterschieden im Gravitationsfeld der Erde $> 5000m$) werden vernachlässigt. (K → Konvektion, L→ Wärmeleitung).



$$\rho u \frac{\partial e}{\partial x} + \rho v \frac{\partial e}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\nabla \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\nabla \frac{\partial T}{\partial y} \right) - p \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \mu \Phi + \dot{Q}'''_{\text{Quelle}}$$

mit e = spez. innere Energie.

- mit Wärmeerzeugung durch die Oberflächenkräfte zu einem Quellterm Φ zusammengefasst. Quellenterm:

$$\Phi = \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + 2 \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \right] - \frac{2}{3} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2$$

- für inkompressibel Fluid (Kont.-Gl. benutzt)

$$\underbrace{\rho c \left(u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right)}_{= \frac{\partial T}{\partial t}} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \mu \Phi + \dot{Q}'''_{\text{Quellen}}$$

1. mit Quellenterm

$$\Phi = \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 - 4 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} \right)$$

2. keine Quelle und kleine einfluss von kinetische energie

$$\begin{cases} \left(u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right) = a \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) \\ \vec{V} \cdot \vec{\nabla} T = a \vec{\nabla}^2 T \end{cases}$$

Reminder: Der Quellterm Φ beinhaltet beschreibt das chaotische Verhalten der Turbulenz. Dessen Weglassung bedeutet, dass wir uns auf laminare Strömungen beschränken.

Instationäre Vorgänge: erscheint in der Bilanzgleichung ein zusätzlicher Term: $\rho \cdot c_p \cdot \frac{\delta T}{\delta t}$

Energieerhaltungsgleichung mit Enthalpie:

$$h = e + \frac{P}{\rho}$$

$$dh = c_p \cdot dT$$

$$\rho c_p \left(u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right) =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \dot{Q}'''_{\text{Quellen}} + \mu \Phi + \left(u \frac{\partial P}{\partial x} + v \frac{\partial P}{\partial y} \right)$$

19.2 Definitionen für Erzwungene Konvektion:

Reynolds-Zahl beschreibt die Anströmung (Platte: $Re_{krit} = 3 \cdot 10^5 \dots 3 \cdot 10^6$, Rohr $Re_{krit} = 2300 \dots 3000$)

$$Re_x = \frac{\rho \cdot u_\infty \cdot x}{\mu} = \frac{u_\infty \cdot x}{\nu} = \frac{u_\infty \cdot d}{\nu} = \frac{u_\infty \cdot d \cdot \rho}{\mu} = \frac{2 \cdot \dot{m}}{\mu \cdot \pi \cdot \nu}$$

Prandtl-Zahl beschreibt die Wärmeleitung im Fluid

$$Pr = \frac{c_p \cdot \mu}{\lambda_{Fluid}} = \frac{c_p \cdot \nu \cdot \rho}{\lambda_{Fluid}} = \frac{\nu}{a}$$

mit $a = \frac{\lambda}{\rho c}$

Nusselt-Zahl beschreibt den konvektiven Wärmeübergang

$$Nu_x = \frac{\alpha \cdot x}{\lambda_{Fluid}} = \frac{\alpha \cdot d}{\lambda_{Fluid}}$$

Wärmefluss:

$$\dot{q}'' = \alpha(T_0 - T_\infty)$$

Mittelwertbildung (α - Wert):

$$\bar{\alpha} = \frac{1}{A_0} \int_{A_0} \alpha \cdot dA_0$$

- Für eine ebene Platte: $\bar{\alpha} = \frac{1}{L} \int_0^L \alpha(x) dx$

Verfahren: Bestimmung Wärmeübergangskoeffizient

1. bestimme die Reynolds-Zahl Re in Abhängigkeit von x oder d
 2. bestimme die Prandtl-Zahl Pr
 3. bestimme die Nusselt-Zahl Nu mithilfe der gegebenen Korrelation: $Nu = f(Re, Pr)$
 4. bestimme anhand der Definition der Nusselt-Zahl ein $\alpha(x)$ nur in Abhängigkeit von x oder d : $\alpha(x) = \lambda \cdot Nu(x) \cdot \frac{1}{x} \alpha(d) = \lambda \cdot Nu(d) \cdot \frac{1}{d}$
- Hinweis** Korrelation von Nu bereits gemittelt gegeben (Nu): $\bar{\alpha}$ direkt (ohne Integration) über die Def. von Nu bestimmen $\rightarrow \bar{\alpha} = \overline{Nu} \cdot \frac{\lambda}{x} \Big|_{x=L}$

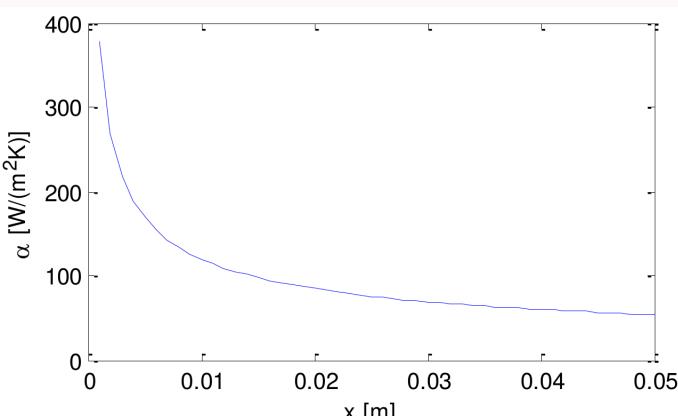
5. Integriere $\alpha(x)$ um ein globales $\bar{\alpha}$ zu erhalten: $\bar{\alpha} = \frac{1}{\Delta x} \int_{x_1}^{x_2} \alpha(x) dx$

Hinweis Δx ist immer die gesamte Länge, auch wenn das Integral aufgeteilt wird umgeformt und alles eingesetzt ergibt sich:

$$\bar{\alpha} = \frac{1}{\Delta x} \int_{x_1}^{x_2} \frac{\lambda}{x} \cdot a_1 \cdot \left(\frac{u_\infty \cdot x}{\nu} \right)^{a_2} \cdot \left(\frac{c \cdot \mu}{\lambda} \right)^{a_3} dx$$

mit

- (a) λ Wärmeleitfähigkeit des Fluids
- (b) μ Dynamische Viskosität des Fluids
- (c) ν Kinematische Viskosität des Fluids $\nu = \frac{\mu}{\rho}$
- (d) ρ Dichte des Fluids
- (e) c Wärmekapazität des Fluids
- (f) u_∞ Strömungsgeschwindigkeit des Fluids
- (g) $a_{1,2,3}$ Parameter aus der Nusseltbeziehung $Nu = f(Re, Pr)$



Wegen der Reynolds-Zahl:

$$\alpha \propto \sqrt{x}$$

Wegen der Nusselt-Zahl:

$$\alpha \propto \frac{1}{x}$$

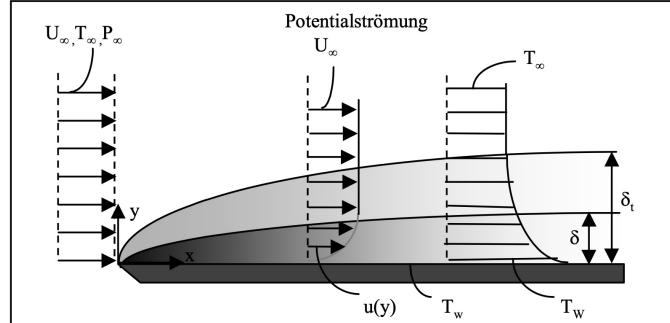
Total:

$$\alpha \propto \frac{1}{\sqrt{x}}$$

Temperaturgrenzschicht entwickelt sich von links nach rechts (wird grösser) $\rightarrow \alpha$ nimmt ab

Hinweis zum prüfen ob $T(x, t)$ nur zeit- oder ortsabhängig siehe Biot-Zahl

19.3 Das Grenzschichtproblem an der ebenen Wand:



Das Fluid, das direkt mit der Oberfläche in Kontakt ist wird dort haften, die Geschwindigkeit ist dort null. Durch die vorhandene Zähigkeit wird auch das angrenzende Fluid abgebremst und es bildet sich in Wandnähe ein Geschwindigkeitsprofil heraus $y = \delta_u$ Abstand, wo die Geschwindigkeit $u(y) = 0.99u_\infty$ (analog fuer δ_T):

Gleichungen und Randbedingungen

Vereinfachte (durch Größenordnung) Gleichungssystem für die Berechnung der Geschwindigkeits/Temperatur-Grenzschicht:

- Druck (nur eine Funktion von x !), oft P kann als Konstant angenommen

$$\Delta P \approx \mu \frac{U_\infty}{L} \left(\frac{L}{\delta} \right)^2 + \mu \frac{U_\infty}{L}$$

$$P(x) = P_\infty(x)$$

- Kontinuität

$$\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} = 0$$

- x-Impuls

$$u \frac{du}{dx} + v \frac{du}{dy} = \nu \frac{d^2 u}{dy^2}$$

- Energie (nur für Temperaturgrenzschicht)

$$u \frac{dT}{dx} + v \frac{dT}{dy} = a \frac{d^2 T}{dy^2}$$

- Randbedingung (dritte Zeile nur für Temperaturgrenzschicht)

$$y = 0 \rightarrow u(0) = v(0) = 0; T(0) = T_W$$

$$y \rightarrow \infty \rightarrow u(\infty) = U_\infty; T(\infty) = T_\infty$$

$$x = 0 \rightarrow u = U_\infty; T = T_\infty \text{ für alle } y$$

Wichtig! Größenordnungen: die lokalen Differentialquotienten durch globale Mittelwerte ersetzt werden, welche im untersuchten Bereich wenigstens in der Größenordnung ihre Gültigkeit haben.

19.3.1 Lösungen:

Reynolds-Zahl

$$Re = \frac{U_\infty L}{\nu} = \frac{\text{Massentraegheit}}{\text{Zähigkeit}}$$

Prandtl-Zahl

$$Pr = \frac{\nu}{a} = \frac{\text{Zähigkeit}}{\text{Wärmetransport}}$$

Peclet-Zahl

$$Pe = Re \cdot Pr = \frac{U_\infty L}{a} = \frac{\text{Massentraegheit}}{\text{Wärmetransport}}$$

(A) Größenordnungslösung

1. In Bezug auf die Geschwindigkeitsgrenzschicht:

$$(a) \text{ Dicke der Grenzschicht } \frac{\delta}{L} \approx \text{Re}_L^{-\frac{1}{2}}$$

$$(b) \text{ Schubspannung an der Plattenoberfläche } \tau_w \approx \rho U_\infty^2 \text{Re}_L^{-\frac{1}{2}}$$

$$(c) \text{ Widerstandsbeiwert } c_f = \text{Re}_L^{-\frac{1}{2}}$$

$$(d) \text{ Kraftwirkung } F \approx \rho U_\infty^2 W L \text{Re}_L^{-\frac{1}{2}}$$

2. In Bezug auf die Temperaturgrenzschicht:

$$(a) \delta \ll \delta_t \leftrightarrow \text{Pr} \ll 1$$

$$\text{i. Grenzschichtdicke } \frac{\delta_T}{L} \approx (\text{Pr} \cdot \text{Re}_L)^{-\frac{1}{2}}$$

$$\text{ii. Wärmeübergang } \bar{\alpha} = \frac{\lambda}{L} (\text{Pr} \cdot \text{Re}_L)^{\frac{1}{2}}$$

$$\text{iii. Nusselt-Zahl } \text{Nu} = \frac{\bar{\alpha} L}{\lambda} \approx (\text{Pr} \cdot \text{Re}_L)^{\frac{1}{2}}$$

$$\text{iv. Wärmestrom } \dot{q} \approx W(T_w - T_\infty) \lambda (\text{Pr} \cdot \text{Re}_L)^{\frac{1}{2}}$$

$$(b) \delta \gg \delta_t \leftrightarrow \text{Pr} \gg 1$$

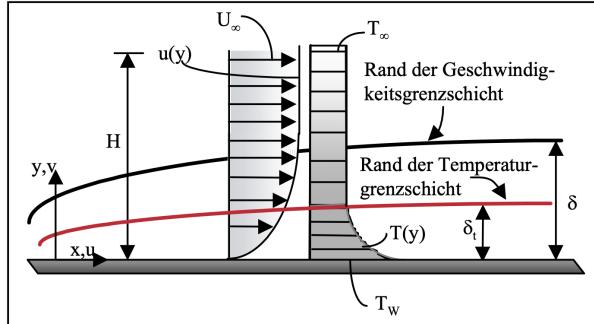
$$\text{i. Grenzschichtdicke } \frac{\delta_T}{L} \approx \text{Pr}^{-\frac{1}{3}} \cdot \text{Re}_L^{-\frac{1}{2}}$$

$$\text{ii. Wärmeübergang } \bar{\alpha} \approx \frac{\lambda}{L} \text{Pr}^{\frac{1}{3}} \cdot \text{Re}_L^{\frac{1}{2}}$$

$$\text{iii. Nusselt-Zahl } \text{Nu} = \frac{\bar{\alpha} L}{\lambda} \approx \text{Pr}^{\frac{1}{3}} \cdot \text{Re}_L^{\frac{1}{2}}$$

$$\text{iv. Wärmestrom } \dot{q} \approx W(T_w - T_\infty) \lambda \text{Pr}^{\frac{1}{3}} \cdot \text{Re}_L^{\frac{1}{2}}$$

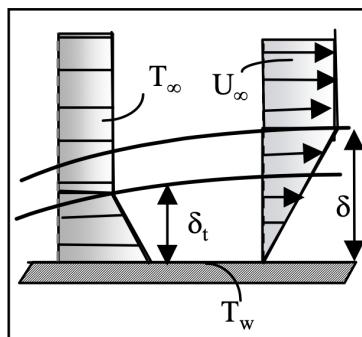
(B) Integrale Näherung



Impuls- und Energiegleichung in integraler Form:

$$\begin{cases} \frac{d}{dx} \int_0^\delta u(u - U_\infty) dy = -\nu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=0} \\ \frac{d}{dx} \int_0^{\delta_T} u(T - T_\infty) dy = -a \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=0} \end{cases}$$

Lösung mit linearen Grenzschichtprofilen: $\text{Pr} > 1$ und $\delta > \delta_T$



$$\frac{u}{U_\infty} = A_1 \left(\frac{y}{\delta} \right) + A_2$$

$$\frac{T - T_w}{T_\infty - T_w} = B_1 \left(\frac{y}{\delta_T} \right) + B_2$$

Mit der RB:

$$\bullet y = 0 : u(0) = 0 \quad T(0) = T_w,$$

$$\bullet y = \delta : u(\delta) = U_\infty,$$

$$\bullet y = \delta_T : T(\delta_T) = T_\infty$$

Ins Integral einsetzen liefert zu:

$$\begin{cases} \delta \cdot \frac{d\delta}{dx} = \frac{6\nu}{U_\infty} \\ \delta = \sqrt{\frac{12\nu}{U_\infty} x} \text{ mit } \text{Re}_x = \frac{xU_\infty}{\nu} \\ \frac{\delta}{x} = \sqrt{\frac{12}{\text{Re}_x}} = 3.464 \text{Re}_x^{-\frac{1}{2}} \\ \tau_w = \mu \left(\frac{du}{dy} \right)_{y=0} = \mu \frac{U_\infty}{\delta} = \frac{\rho U_\infty^2}{(12 \text{Re}_x)^{\frac{1}{2}}} \end{cases}$$

(Dimensionlose) Widerstandbeiwert

$$c_f = \frac{\tau_w}{\frac{1}{2} \rho U_\infty^2} = 0.577 \text{Re}_x^{\frac{1}{2}}$$

Entwicklung der Grenzschicht

$$\frac{\delta_T}{x} = \frac{\delta}{x} \text{Pr}^{-\frac{1}{3}} = 3.464 \text{Re}_x^{-\frac{1}{2}} \text{Pr}^{-\frac{1}{3}}$$

Nusselt-Zahl

$$\text{Nu} = \frac{\alpha x}{\lambda} = 0.289 \text{Re}_x^{\frac{1}{2}} \text{Pr}^{\frac{1}{3}}$$

Erhaltene Werte sind eher etwas zu tief

(C) Exakte Lösungen

Geschwindigkeitsgrenzschicht

$$\frac{\delta}{x} = 4.92 \text{Re}_x^{-\frac{1}{2}} \quad \text{und} \quad \frac{\delta}{\delta_T} = \text{Pr}^{\frac{1}{3}}$$

Reibungskoeffizient

$$c_{f_x} = 0.664 \text{Re}_x^{-\frac{1}{2}}$$

Widerstandbeiwert

$$\bar{c}_{f_L} = 1.328 \text{Re}_L^{-\frac{1}{2}}$$

Schubkraft auf die Platte der Breite W und Länge L

$$F_W = \bar{c}_{f_L} \frac{\rho}{2} U_\infty^2 W L = \bar{\tau}_L W L$$

Wärmeübergang:

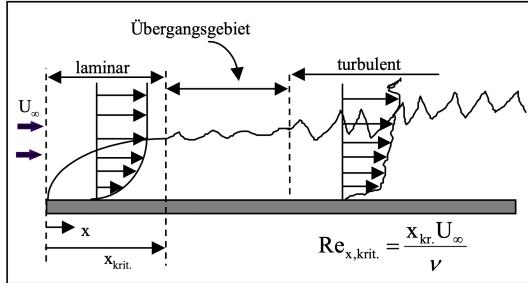
$$\bullet \text{Pr} > 0.6: \text{Nu}_x = \frac{\alpha x}{\lambda} = 0.332 \text{Re}_x^{\frac{1}{2}} \text{Pr}^{\frac{1}{3}}$$

$$\bullet \text{Pr} < 0.6: \text{Nu}_x = \frac{\alpha x}{\lambda} = 0.565 (\text{Re}_x \text{Pr})^{\frac{1}{2}}$$

$$\bullet \text{Pe}_x = \text{Re}_x \text{Pr} > 100: \text{Nu} = \frac{0.3387 \text{Re}_x^{\frac{1}{2}} \text{Pr}^{\frac{1}{3}}}{\left[1 + \left(\frac{0.0468}{\text{Pe}_x} \right)^{\frac{2}{3}} \right]^{\frac{1}{4}}}$$

Achtung: immer gültig $\Rightarrow \alpha(x) \approx \frac{\text{Re}_x^{\frac{1}{2}}}{x} \approx x^{-\frac{1}{2}} \rightarrow \bar{\alpha} = 2\alpha(L) \quad \bar{\text{Nu}} = 2\text{Nu}_L$

19.3.2 Turbulente Strömungen:



$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} = 0$$

$$\rho \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \rho \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu_{eff} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right)$$

$$\rho \bar{u} c_p \frac{\partial \bar{T}}{\partial x} + \rho \bar{v} c_p \frac{\partial \bar{T}}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda_{eff} \frac{\partial \bar{T}}{\partial y} \right)$$

mit

$$\mu_{eff} = \mu + \mu_t$$

und

$$\lambda_{eff} = \lambda + \lambda_t$$

Durch semi-empirische Überlegungen und Experimente wurden für die turbulente Grenzschicht die folgenden Gesetze gefunden

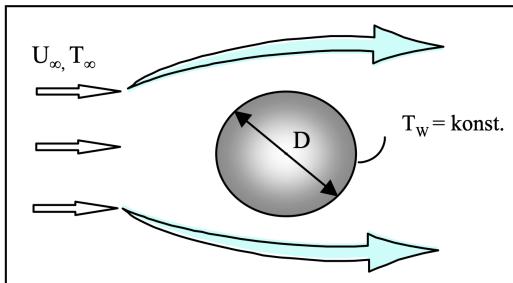
$$c_{f_x} = 0.0592 \text{Re}_x^{-\frac{1}{5}} \leftrightarrow \text{Re}_x \leq 10^7$$

$$\text{Nu}_x = 0.0296 \text{Re}_x^{\frac{4}{5}} \text{Pr}^{\frac{1}{3}}$$

$$\text{Re}_x = \frac{U_\infty x}{\nu}$$

$$\text{Nu}_x = \frac{\alpha x}{\lambda}$$

19.3.3 Wärmeübergang an umströmten Körpern:



Zylindrische Körper:

$$\bar{\text{Nu}}_D = \frac{\bar{\alpha} D}{\lambda} = C \text{Re}_D^m \text{Pr}^{\frac{1}{3}}$$

$$T_{film} = \frac{1}{2}(T_w + T_\infty)$$

$$\text{Re}_D = \frac{U_\infty D}{\nu(T_F)}$$

$$\text{Pr} = \frac{v(T_F)}{a(T_F)}$$

Re_D	C	m
0.4 – 4	0.989	0.330
4 – 40	0.911	0.385
40 – 4000	0.683	0.466
4000 – 40'000	0.193	0.618
40'000 – 400'000	0.027	0.805

Geometrie	Re_D	C	m
Quadrat	$5 \cdot 10^3 \cdot 10^5$	0.246	0.588
Sechseck	$5 \cdot 10^3 \cdot 1.95 \cdot 10^5$	0.160	0.638
vertikale Platte	$1.95 \cdot 10^4 \cdot 10^5$	0.0385	0.782
	$5 \cdot 10^3 \cdot 10^5$	0.153	0.638
	$4 \cdot 10^3 \cdot 1.5 \cdot 10^5$	0.228	0.731

Die umströmte Kugel

$$\bar{\text{Nu}}_D = 2 + \left(0.4 \text{Re}_D^{\frac{1}{2}} + 0.06 \text{Re}_D^{\frac{2}{3}} \right) \text{Pr}^{0.4} \left(\frac{\mu}{\mu_w} \right)^{\frac{1}{4}}$$

mit den folgenden Spezifikationen für den Gültigkeitsbereich:

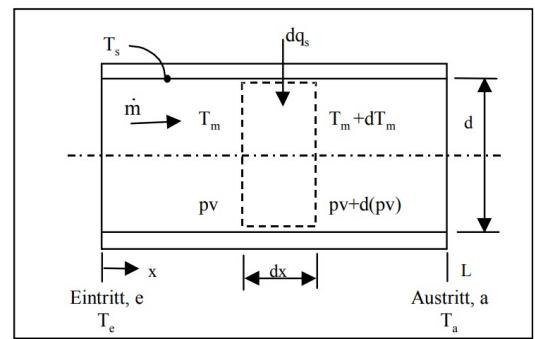
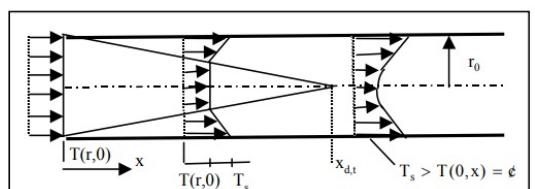
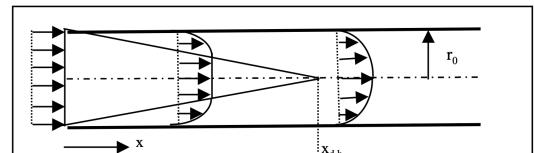
$$0.71 < \text{Pr} < 380$$

$$3.5 < \text{Re}_D < 7.6 \cdot 10^4$$

$$1.0 < \frac{\mu}{\mu_w} < 3.2$$

20 Erzwungene Konvektion in Kanaelen

20.1 Erzwungene Konvektion in durchstroemten Kanälen:



Im stationären Fall (wird zwei mal integriert)

$$(p_1 - p_2) \cdot 2\pi r dr = 2\pi l(\tau r)|_{r+dr} - 2\pi l(\tau r)|_r$$

$$\frac{d}{dr} \tau r = (p_1 - p_2) \frac{r}{l}$$

Randbedingungen

$$r = 0 : \frac{du}{dr} = 0 \text{ Symmetrie} \leftarrow C_1 = 0$$

$$u(r_0) = 0 = -(p_1 - p_2) \frac{r_0^2}{4\mu l} + C_2$$

Lösung (Geschwindigkeitsprofil)

$$u(r) = (r_0^2 - r^2) \frac{(p_1 - p_2)}{4\mu l} = -\frac{dp}{dx} \frac{1}{4\mu} (r_0^2 - r^2)$$

Mittelere Geschwindigkeit

$$u_m = \frac{1}{A} \int_A u(r) dA \rightarrow u_m = -\frac{r_0^2}{8\mu} \frac{dp}{dx}$$

$$u(r) = 2u_m \left[1 - \left(\frac{r}{r_0} \right)^2 \right]$$

Massenstrom

$$\dot{m} = \rho u_m A = \rho \int_A u(x, r) dA$$

Mittelere Geschwindigkeit in runden Rohr

$$u_m = \frac{\dot{m}}{\rho A} = \frac{2}{r_0^2} \int_0^{r_0} u(x, r) r dr$$

Reynoldszahl für Rohrströmung

$$Re_D = \frac{\rho u_m D}{\mu}$$

$$Re_{D, \text{Krit}} \approx 2300$$

Laminar

$$\left(\frac{X_{d,h}}{D} \right)_{lam} \approx 0.05 Re_D$$

Turbulent

$$10 \leq \left(\frac{X_{d,h}}{D} \right)_{Turbulent} \leq 60$$

Druckverlust (laminare Strömung)

$$-\frac{dp}{dx} = \frac{\lambda}{D} \frac{\rho}{2} u_m^2 \leftrightarrow \lambda \equiv \frac{\left(\frac{dp}{dx} \right) D}{\rho \frac{u_m^2}{2}} = \frac{64}{Re_D}$$

Mittlere Temperatur

$$T_m = \frac{\dot{E}_{Konv}}{\dot{mc}_v} = \frac{\int_A \rho u c_v T dA}{\dot{mc}_v} \underset{Inkompr.}{=} \frac{2}{u_m r_0^2} \int_0^{r_0} u T r dr$$

Temperaturprofil

$$\frac{\partial \theta(r, x)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{T_s - T(r, x)}{T_s - T_m} \right) = 0$$

$$(\theta = \theta(r) \neq f(x))$$

Energiebilanz

$$\dot{Q}_s = \dot{mc}_p (T_{m,a} - T_{m,e})$$

$$\frac{dT_m}{dx} = \frac{U}{c_p \dot{m}} \dot{q}'' = \frac{U}{c_p \dot{m}} \alpha (T_s - T_m)$$

mit $U = \pi d$ innere Rohrumfang, stationäre Rohrströmug, vernachlässigbar Wärmeleitung in axialer Richtung/kinetische Energie/Potentiellen Energie

20.1.1 Konstante Wärmestrom an der Wand:

$$T_m(x) = T_{m,e} + \frac{\dot{q}_s'' U}{\dot{mc}_p} x$$

mit $T_m(0) = T_{m,e}$

20.1.2 Konstante Wandtemperatur:

$$\frac{\Delta T_a}{\Delta T_e} = -\frac{T_s - T_{m,a}}{T_s - T_{m,e}} = \exp \left(-\frac{UL}{\dot{mc}_p} \bar{\alpha}_L \right)$$

Bestimmung der Temperatur an einer beliebigen Stelle x

$$\frac{T_s - T_m(x)}{T_s - T_{m,e}} = \exp \left(-\frac{Ux}{\dot{mc}_p} \bar{\alpha}_x \right)$$

mit $\bar{\alpha}_x = \bar{\alpha}_L = \bar{\alpha}$ wenn die Einlaufstrecke kurz gegenüber der betrachteten Länge x ist **Gesamten Wärmeübertrag eines Rohres**

$$\dot{Q}_s = UL\bar{\alpha}\bar{\Delta T}$$

Mittlere Temperaturdifferenz (logarithmisch)

$$\bar{\Delta T} = \frac{1}{L} \int_0^L \Delta T(x) dx = \dots = \frac{\Delta T_{aus} - \Delta T_{ein}}{\ln(\Delta T_{aus}/\Delta T_{ein})}$$

Mit $\Delta T_i = T_\infty - T_i$

$$\dot{Q}_s = \bar{k}_l L \bar{\Delta T} = m \cdot c \cdot \Delta T = m \cdot c \cdot (T_{out} - T_{in}) = \frac{\Delta T}{R}$$

Achtung: Nicht logarithmische: $\bar{\Delta T} = \frac{T_w + T_\infty}{2}$

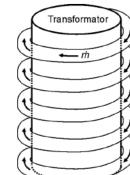
20.1.3 Einlauflänge einer Laminaren Rohrströmung:

Laminar wenn $Re_D < 2300$

$$\left(\frac{X_{d,h}}{D} \right)_{lam} \approx 0.05 Re_D$$

- Wenn $X \ll L$ oder $X \ll P_T$ ($\pi \cdot D_T$ = Circonferenza cilindro a cui è avvolto il tubo ad es.):

$$Nu_D = 3.66$$



- Sonst

$$\overline{Nu_D} = \left[3.66 + \frac{0.067 \cdot (Re_D \cdot Pr \cdot \frac{D}{L})^{1.33}}{1 + 0.1 \cdot Pr \cdot (Re_D \cdot \frac{D}{L})^{0.83}} \right] \cdot \left(\frac{\mu}{\mu_W} \right)^{0.14}$$

20.1.4 Einlauflänge einer Turbulenten Rohrströmung:

Turbulent wenn $Re_D > 2300$

$$\overline{Nu_D} = 0.0235 (Re^{0.8} - 230) \cdot (1.8 \cdot Pr^{0.3} - 0.8) \cdot (1 + \left(\frac{d_i}{L} \right)^{2/3}) \cdot \left(\frac{\mu}{\mu_w} \right)^{0.14}$$

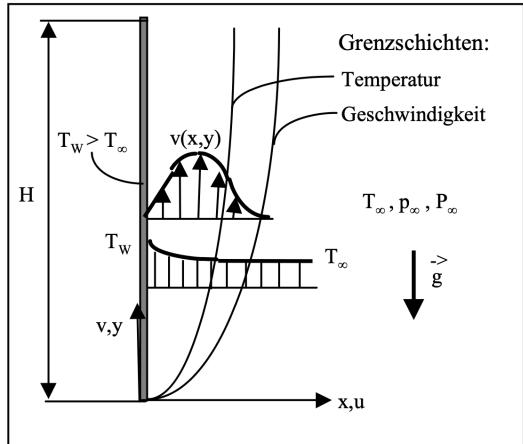
$$Pr = \frac{\mu c_p}{\lambda}$$

Beachte: wenn $3000 < Re_{d_i} < 10^5$ und $0.6 < Pr < 500$ und $L/d > 40$ es gilt:

$$\overline{Nu_D} = 0.027 \cdot Re_{d_i}^{0.8} \cdot Pr^{1/3} \cdot \left(\frac{\mu}{\mu_w} \right)^{0.14}$$

21 Natürliche Konvektion

21.1 Natürliche Konvektion an senkrechter Wand:



Tritt auf wenn keine Anströmung vorhanden ist ($Re = 0$), viel schwächer als erzwungene Konvektion (kleineres α)

Auftrieb (Grenzfall)

1. Reibung
2. Trägheit

21.1.1 Dimensionslose Parameter der Natürlichen Konvektion:

- **Prandtl-Zahl:** beschreibt die Wärmeleitung im Fluid

$$Pr = \frac{c_p \cdot \mu}{\lambda_{Fluid}}$$

- **Grashof-Zahl:** Verhältnis von Auftriebskraft zu Reibungskraft

$$Gr_H = \frac{g \cdot \beta \cdot (T_w - T_\infty) \cdot H^3}{\nu^2}$$

- **Rayleigh-Zahl:** beschreibt die „Anströmung“ bei natürlicher Konvektion

$$\begin{aligned} Ra_H &= \sqrt{Bo \cdot Gr} = Gr_H \cdot Pr = \\ &= \frac{g \cdot \beta \cdot (T_w - T_\infty) \cdot H^3 \cdot c_p \cdot \mu}{\nu^2 \cdot \lambda_{Fluid}} = \\ &= \frac{g \cdot \beta \cdot (T_w - T_\infty) \cdot H^3}{\nu \cdot \alpha} \end{aligned}$$

- **Nusselt-Zahl:** beschreibt den konvektiven Wärmeübergang

$$\bar{Nu} = \frac{\bar{\alpha} \cdot H}{\lambda_{Fluid}}$$

- **Boussinesq-Zahl:** Auftriebkrafte vs thermische Diffusion

$$Bo = Ra \cdot Pr = \frac{g \cdot \beta \cdot (T_w - T_\infty) \cdot H^3}{\alpha^2}$$

senkrechte Wand
horizontale Platte
Zylinder/Kugel
thermischer Ausdehnungskoeffizient

kinematische Viskosität [m^2/s]
Temperaturleitfähigkeit [m^2/s]

H = Höhe der Wand
 $H = \frac{A}{P} = \frac{\text{Fläche}}{\text{Umfang}}$
 $H = D$ (Durchmesser)
 $\beta = -\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p$,
für ideales Gas:
 $\beta = \frac{1}{T}, \bar{T} = \frac{T_\infty + T_w}{2}$

ν

α

21.1.2 Bestimmung des Wärmetebergangskoeffizienten für Natürliche Konvektion:

Fall 1: Reibung

1. berechne die Grashof- und die Prandtl-Zahl (Hinweis achte auf die Geometrie wegen H)
2. berechne die Rayleigh-Zahl $Ra_H = Gr_H \cdot Pr$
3. Strömung laminar oder turbulent? (für senkrechte Wand: $Ra_{H,krit} = 10^9$)
 - (a) Turbulente Stroemung: ($Ra_H > Ra_{H,krit}$)
 - (b) Laminare Stroemung: ($Ra_H < Ra_{H,krit}$)
4. Fuer beide Fälle gilt: $Nu \approx (Ra \cdot Pr)^{1/4} \Rightarrow \bar{\alpha} \approx \frac{\lambda \cdot (Ra \cdot Pr)^{1/4}}{H}$

Fall 2: Trägheit

1. berechne die Grashof- und die Prandtl-Zahl (Hinweis achte auf die Geometrie wegen H)
2. berechne die Rayleigh-Zahl $Ra_H = Gr_H \cdot Pr$
3. (berechne Bo und so berechne Nu und α) → nur wenn ich die Parameter von Bo kenne.
4. Strömung laminar oder turbulent? (für senkrechte Wand: $Ra_{H,krit} = 10^9$)
 - (a) Turbulente Stroemung: ($Ra_H > Ra_{H,krit}$)

$$\bar{Nu} = \frac{\bar{\alpha} \cdot H}{\lambda} = 0.13 \cdot Ra_H^{1/3}$$

Gültig fuer $Ra_H \in [10^9, 10^{12}]$.

- (b) Laminare Stroemung: ($Ra_H < Ra_{H,krit}$)

$$\bar{Nu} = \frac{\bar{\alpha} \cdot H}{\lambda} = \left(\frac{Pr}{Pr + 0.986 Pr^{1/2} + 0..492} \right)^{1/4} \cdot Ra_H^{1/4}$$

Gültig fuer beliebige Werte Pr .

Name	Symbol	mass	Artificiel
Alcalins			
Alcalino-terreux			
Métal			
Métalloïde			
Non-métal			
Halogène			
Gaz noble			
Lanthanide/Actinide			
57 La Lanthanum	58 Ce Cérium	138.91 140.12	140.91 Prasodymium
59 Pr Prasodymium	60 Nd Neodymium	144.24 150.36	145 Prométhium
61 Pm Prométhium	62 Sm Samarium	151.96 Europium	157.25 Gadolinium
64 Gd Gadolinium	65 Tb Terbium	158.93 Dysprosium	162.50 Holmium
66 Dy Dysprosium	67 Ho Holmium	164.93 Erbium	167.26 Thulium
68 Er Erbium	69 Tm Thulium	168.93 Ytterbium	173.04 Yb
71 Lu Lutetium			174.97
89 Ac Actinium	90 Th Thorium	227 232.04	231.04 Protactinium
	91 Pa Protactinium	91 Neptunium	92 Uranium
	92 U Uranium	238.03 Plutonium	237 Americium
	93 Np Neptunium	93 Curium	243 Curium
	94 Pu Plutonium	94 Berkelium	247 Californium
	95 Am Americium	95 Einsteinium	247 Fermium
	96 Cf Californium	96 Mendelevium	251 Fermium
	97 Bk Berkelium	97 Nobelium	257 Nobélium
	98 Cf Einsteinium	98 Lawrencium	101 Mendelevium
	99 Es Einsteinium	99 Néobélium	102 Lawrencium
	100 Fm Fermium	100 Néobélium	103 Néobélium
	101 Md Mendelevium	101 Lawrencium	103 Néobélium
	102 No Néobélium	102 Lawrencium	103 Néobélium
	103 Lr Lawrencium	103 Néobélium	103 Néobélium

- █ Alcalins
- █ Alcalino-terreux
- █ Metal
- █ Métalloïde
- █ Non-métaux
- █ Halogène
- █ Gaz noble

*Artifi-
ciel*