

Dimensionieren 1 Zusammenfassung

Michael Van Huffel, Dino Colombo

This summary has been written based on the Lecture of Dimensionieren I by Prof. Bekim Berisha (Autumn 20) and the summary of Joshua Naef. There is no guarantee for completeness and/or correctness regarding the content of this summary. Use it at your own discretion

Methoden der Strukturanalyse

Gleichungen des Kontinuums:

$$\begin{aligned}\sigma_{11,1} + \sigma_{12,2} + \sigma_{13,3} + f_1 &= 0 \\ \sigma_{21,1} + \sigma_{22,2} + \sigma_{23,3} + f_2 &= 0 \\ \sigma_{31,1} + \sigma_{32,2} + \sigma_{33,3} + f_3 &= 0\end{aligned}$$

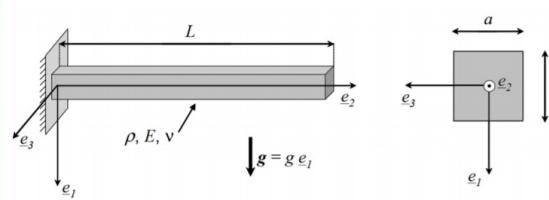
Kinematische Relationen (KR):

$$\varepsilon_{ii} = u_{i,i}, \quad \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i})$$

Stoffgleichungen (SG):

$$\begin{aligned}\varepsilon_{11} &= \frac{1}{E}[\sigma_{11} - \nu(\sigma_{22} + \sigma_{33})] \quad \sigma_{11} = \frac{E}{1+\nu}[\varepsilon_{11} + \frac{\nu}{1-2\nu}(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33})] \\ \varepsilon_{22} &= \frac{1}{E}[\sigma_{22} - \nu(\sigma_{11} + \sigma_{33})] \quad \sigma_{22} = \frac{E}{1+\nu}[\varepsilon_{22} + \frac{\nu}{1-2\nu}(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33})] \\ \varepsilon_{33} &= \frac{1}{E}[\sigma_{33} - \nu(\sigma_{22} + \sigma_{11})] \quad \sigma_{33} = \frac{E}{1+\nu}[\varepsilon_{33} + \frac{\nu}{1-2\nu}(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33})] \\ \sigma_{ij} &= G(u_{i,j} + u_{j,i}); \quad \varepsilon_{ij} = \frac{\sigma_{ij}}{2G}; \quad 2G = \frac{E}{1+\nu}\end{aligned}$$

Beispiel: Belastete Balken



1. Obere und untere Fläche des Balkens

- $\sigma_{11} = \sigma_{12} = \sigma_{13} = 0$
- $\sigma_{11} = 0 \rightarrow u_{1,1} + \frac{\nu}{1-2\nu}(u_{1,1} + u_{2,2} + u_{3,3}) = 0$
- $\sigma_{12} = 0 \rightarrow \frac{E}{2(1+\nu)}(u_{1,2} + u_{2,1}) = 0 \rightarrow u_{1,2} + u_{2,1} = 0$
- $\sigma_{13} = 0 \rightarrow \frac{E}{2(1+\nu)}(u_{1,3} + u_{3,1}) = 0 \rightarrow u_{1,3} + u_{3,1} = 0$

2. Längsseite des Balkens

- $\sigma_{33} = \sigma_{32} = \sigma_{31} = 0$
- $u_{3,3} + \frac{\nu}{1-2\nu}(u_{1,1} + u_{2,2} + u_{3,3}) = 0$
- $u_{3,2} + u_{2,3} = 0$
- $u_{3,1} + u_{1,3} = 0$

3. Freies Ende des Balkens

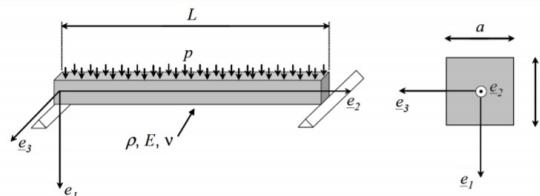
- $\sigma_{22} = \sigma_{21} = \sigma_{23} = 0$
- $u_{2,2} + \frac{\nu}{1-2\nu}(u_{1,1} + u_{2,2} + u_{3,3}) = 0$
- $u_{2,1} + u_{1,2} = 0$
- $u_{2,3} + u_{3,2} = 0$

4. Eingespanntes Ende des Balkens

- $u_1 = u_2 = u_3 = 0$

5. Außenseite Kräfte

- $f_1 = \rho g$
- $f_2 = f_3 = 0$

1. Außenseite Kräfte (kinematische Randbedingung): $f_1 = f_2 = f_3 = 0$

2. Obere Fläche des Balkens

- $\sigma_{11} = -p, \sigma_{12} = \sigma_{13} = 0$
- $u_{1,1} + \frac{\nu}{1-2\nu}(u_{1,1} + u_{2,2} + u_{3,3}) = -\frac{1+\nu}{E}p$
- $u_{1,2} + u_{2,1} = 0$
- $u_{1,3} + u_{3,1} = 0$

3. Untere Fläche des Balkens

- $\sigma_{11} = \sigma_{12} = \sigma_{13} = 0$
- $u_{1,1} + \frac{\nu}{1-2\nu}(u_{1,1} + u_{2,2} + u_{3,3}) = 0$
- $u_{1,2} + u_{2,1} = 0$
- $u_{1,3} + u_{3,1} = 0$

4. Längsseite des Balkens (siehe 1)

5. Enden des Balkens **Achtung:** $x_1 \leq \frac{a}{2}$ (siehe 1, auf beide Seiten)

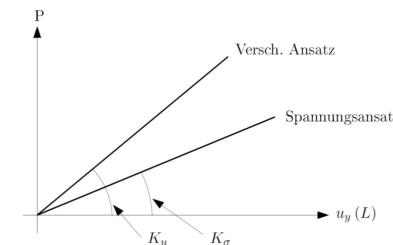
6. Auflager

- $u_1 = 0$

Beachte: Eine Ansatz erfüllt immer die GGB, die Randbedingungen und ist keine exakte Lösung!

Balken

Formulierungen:



Statische Formulierung (Spannungsansatz):

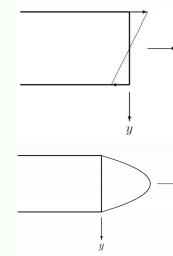
GGB & SG erfüllt, Kinetische Randbedingung zum Teil nicht. Generell weicher als echt.

Ansatz: Balkenränder Spannungsfrei ($\sigma_{22} = \sigma_{33} = \tau_{13} = \tau_{23} = 0$). $\sigma_{11} \neq 0$ aus M_z und $\tau_{12} \neq 0$ aus Q_y . $\sigma_{xx,max} = |\frac{N(x)}{A}| + |\frac{M_y(x)}{I_y} \cdot z| + |\frac{M_z(x)}{I_z} \cdot y|$

Vorgehen:

- Beanspruchung am Balken ermitteln (MechII/Formel oben)
- Spannungen σ_{11} und τ_{12} aus Beanspruchung berechnen (MechII). (Muss GGB erfüllen)
- Dehnung ε mit SG ermitteln
- $H_z(y) = \int_y^{y_{max}} \eta \cdot b(\eta) d\eta$ und $\tau_{xy}(x, y) = \frac{Q_y}{I_z} \cdot \frac{H_z}{b(y)}$

Beispiel: Spannungsverteilung in einem Balken



$$\text{Spannungsverteilung: } \sigma_{xx} = -\frac{M_z(x)}{I} \cdot y$$

$$\text{Spannungsverteilung: } \tau_{xy} = \frac{3}{2} \frac{P}{Bh} (1 - 4 \frac{y^2}{h^2})$$

Kinematische Formulierung (Verschiebungsansatz):

GGB & SG & Spannungsrandbedingung (Spannungsrandbedingung == SG in spezifische Punkte) nicht erfüllt, KR schon, muss stetig sein. Steifer als echt. Schlechte approx mit nur einer Funktion. Approximation wird besser durch besseren Ansatz und mehrere Elemente.

Ansatz: Verschiebungsfeld \underline{u} auswählen, welches KR erfüllt (Bsp. $u_y(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2$)

Vorgehen:

- Falls möglich Koeff mit KR bestimmen
- Spannungen σ_{ij} mit SG bestimmen
- Restliche Koeff durch Verfahren von Ritz bestimmen.

Energiesätze:

Optimieren die Verschiebungsansatz (u -Ansatz)

Definitionen:

- Spannungsfeld $\sigma_{ij}(x, y, z)$ zulässig falls: GGB & stat RB erfüllt.
- Verschiebungsfeld $u_i(x, y, z)$ zulässig falls: stetig & kin RB erfüllt (schwächere Bedingung).
- Verschiebungsfeld & Spannungsfeld verträglich iff SG erfüllt.
- Deformationsenergie: $U = \frac{1}{2} \iiint_V \sigma_{ij} \cdot \varepsilon_{ij} dV = (\frac{1}{2} \iiint_V [\sigma_{11} \cdot \varepsilon_{11} + \sigma_{22} \cdot \varepsilon_{22} + \sigma_{33} \cdot \varepsilon_{33} + \sigma_{12} \cdot \varepsilon_{12} + \dots] dV + \dots)$
- Potentielle Energie: $V = - \iiint_V f_i \cdot u_i dV - \sum_a F_a \cdot u_a$
- Komplementäre Deformationsenergie: $U_K = \iiint_V (f_{ij}^T \sigma_{ij}) dV := U$ (lin. elast.)

Satz vom Minimum der potentiellen Energie (SMPE):

Aus der Menge der zulässigen Verschiebungsfelder $u_i^*(x, y, z)$ & der damit verträglichen Spannungsfelder $\sigma_{ij}^*(x, y, z)$ macht das wirkliche Verschiebungsfeld $u_i(x, y, z)$ E_P minimal.

$$E_P(u_i) < E_P(u_i^*)$$

Direkte Anwendung:

- Ansatz für $u_i(x, y, z, a_\gamma)$
- ε_{ij}^* und σ_{ij}^* berechnen (GGB & SRB evtl. nicht erfüllt)
- E_P berechnen
- Koeff (z.B. a_γ) mit Verfahren von Ritz ermitteln.

$$\frac{\partial E_P}{\partial a_\gamma} = 0$$

Satz vom Min. der kompl. Deform.-energie (SMkDE):

Aus der Menge der zulässigen Spannungsfelder $\sigma_{ij}^*(x, y, z)$ & damit verträglichen $\varepsilon_{ij}^*(x, y, z)$ macht das wirkliche Spannungsfeld $\sigma_{ij}(x, y, z)$ die komplementäre Deformationsenergie U_K minimal.

$$U_K(\sigma_{ij}) < U_K(\sigma_{ij}^*)$$

Direkte Anwendung:

1. zulässiger Ansatz für $\sigma_{ij}^*(x, y, z, a_\gamma)$ (GGB & SRB erfüllt)
2. ε_{ij}^* berechnen (KR evtl. nicht erfüllt)
3. $U_K(\sigma_{ij}^*)$ berechnen
4. Koeff mit Verfahren von Ritz ermitteln (siehe oben)

Beispiel: Verschiebungsansatz Biegebalken (Breite B, Hohe H)

Ansatz ($\alpha = 2G \frac{1-\nu}{1-2\nu}$):

$$u_y = ax^3 + bx^2; \quad u_x = -\frac{du_y}{dx}y = -(3ax^2 + 2bx)y; \quad u_z = 0$$

$$\text{KR: } \varepsilon_{xx} = (-6ax - 2b)y; \quad \varepsilon_{yy} = \varepsilon_{zz} = \varepsilon_{xy} = \varepsilon_{yz} = \varepsilon_{xz} = 0$$

$$\text{SG: } \sigma_{xx} = \alpha(-6ax - 2b)y; \quad \sigma_{xy} = \sigma_{xz} = \sigma_{yz} = 0$$

$$\sigma_{yy} = \sigma_{zz} = 2G \frac{\nu}{1-2\nu}(-6ax - 2b)y$$

SMPE/ Verfahren von Ritz:

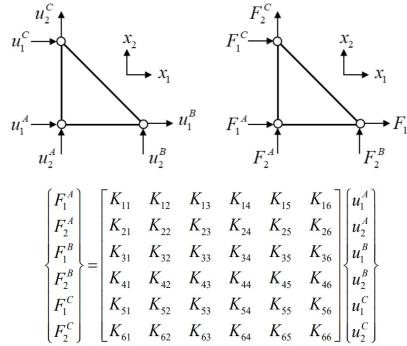
$$U = \frac{1}{2} \int_0^l \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \int_{-\frac{B}{2}}^{\frac{B}{2}} (\sigma_{xx} \cdot \varepsilon_{xx}) dz dy dx = 6 \cdot \alpha \cdot I \cdot l (a^2 l^2 + \frac{b^2}{3} + abl)$$

$$V = -P \cdot u_y(x = l) = -P(al^3 + bl^2)$$

$$E_p = 6\alpha I l (a^2 l^2 + \frac{b^2}{3} + abl) - P(al^3 + bl^2)$$

$$\frac{\partial E_p}{\partial a} = 0 \Rightarrow a = -\frac{P}{6\alpha I}; \quad \frac{\partial E_p}{\partial b} = 0 \Rightarrow b = \frac{Pl}{2\alpha I}; \quad M_b(x) = -B \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{xx} y dy$$

SMPE & FEM:



Relation der Verschiebungsfreiheitsgrade der Knoten ($\{u\}$) und äusseren Kräften an den Knoten ($\{F\}$) über die Elementsteifigkeitsmatrix ($\{K\} \in \mathbb{R}^{6 \times 6}$): $\{F\} = \{K\}\{u\}$

n Knoten, d Freiheitsgrade $\rightarrow nd \times nd$ Matrix.

Beispiel: Steifigkeitsmatrix K

Ansatz: $u_1 = ax_1 + bx_2 + c; u_2 = dx_1 + ex_2 + f$

- Koeff aus RB: $\Rightarrow u_1 = (u_1^B - u_1^A)x_1 + (u_1^C - u_1^A)x_2 + u_1^A; u_2 = \dots$
- $\varepsilon_{ij}((u_1^A, \dots, u_2^C), \sigma_{ij}(u_1^A, \dots, u_2^C, E, \nu))$ bestimmen
- $U = \frac{1}{2} \frac{1}{2} l^2 (\sigma_{11} \cdot \varepsilon_{11} + \sigma_{22} \cdot \varepsilon_{22} + 2\sigma_{12} \cdot \varepsilon_{12}) \cdot t$ mit Dicke t und Fläche $\frac{1}{2}l^2$.
- $V = -(F_1^A \cdot u_1^A + F_2^A \cdot u_2^A + \dots + F_2^C \cdot u_2^C)$
- $E_p = U + V = E_p(u_1^A, \dots, u_2^C, E, \nu, t) = \alpha_1(u_1^A)^2 + \alpha_2 u_1^A u_1^B + \dots - (F_1^A u_1^A + \dots)$
- Minimum $E_p: \frac{\partial E_p}{\partial u_i^\kappa} = 0$ mit $i = 1, 2$ & $\kappa = A, B, C$ (6Gl)
- Bsp: $\frac{\partial E_p}{\partial u_1^A} = 0 \Leftrightarrow -\frac{\partial V}{\partial u_1^A} = \frac{\partial U}{\partial u_1^A}$ (lin. Fkt. in u_1^A, \dots, u_2^C)
- $\Rightarrow F_1 = \kappa_{11} u_1^A + \dots + \kappa_{16} u_2^C; \kappa_{11}, \dots, \kappa_{16}$: 1. Zeile von $\{K\}$

Scheibe

Definition:

Scheibenelement: Dünnewandige Struktur mit Belastung in der Ebene normal zu z-Richtung. Äussere Kräfte dargestellt durch N_x, N_y, N_{xy}, N_{yz} : Kräfte pro Längeneinheit (\rightarrow Spannungen $\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \tau_{xy}$ über Dicke t integriert).

Annahmen:

1. Ebener Spannungszustand ($\sigma_{zz}, \tau_{xz}, \tau_{yz} = 0$)

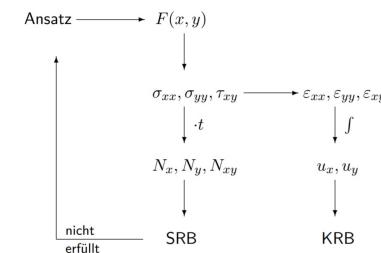
2. Übrige Spannungskomponenten sind konstant verteilt in z-Richtung (homogene Spannungsverteilung)
3. Keine Volumenkräfte
4. Spannungsansatz (GGB erfüllt)
5. Scheibengleichung ($\Delta\Delta F = 0$) immer erfüllt fuer die Ebene-Spannungszustand.

1, 2: Vernünftig, weil planare Dimensionen $\gg t$ & keine Biegung. GGB reduziert sich zu: $\sigma_{xx,x} + \tau_{xy,y} = 0; \sigma_{yy,y} + \tau_{xy,x} = 0 \rightarrow$ Definiere $F(x, y)$ (Airy'sche Spannungsfkt) mit:

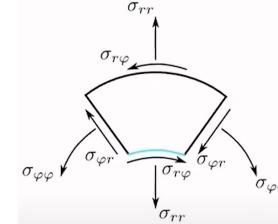
$$\sigma_{xx} = F_{,yy}; \quad \sigma_{yy} = F_{,xx}; \quad \tau_{xy} = -F_{,xy}.$$

Aus Kompatibilitätsbedingung (Verzerrung \leftrightarrow distortion, Verschiebung \leftrightarrow shift): $\varepsilon_{xx,yy} + \varepsilon_{yy,xx} = 2\varepsilon_{xy,xy}$
 $\rightarrow F_{,xxxx} + F_{,yyyy} + 2F_{,xxyy} = 0 \Leftrightarrow \Delta\Delta F = 0$.
 Funktion $F(x, y)$ so wählen, damit RB erfüllt.

Aufmerksam: Das Lösen der Scheibengleichung führt zu einem zulässigen Spannungsfeld, nicht aber zwangsweise zur exakten Lösung



Scheibe mit Loch:



$$\text{Ansatz: } F = (Ar^2 + Br^4 + \frac{C}{r^2} + D) \cos(2\varphi) + E \ln(r) + Gr^2$$

• Spannungstensor erstellen.

$$\bullet \text{ (Hauptsp. Mohr Kreis: } \hat{\sigma}_{1,2} = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) \pm \sqrt{\frac{1}{4}(\sigma_x - \sigma_y)^2 + \tau_{xy}^2}$$

$$\text{Hauptschubspannung: } \tau_{max} = \sqrt{\frac{1}{4}(\sigma_x - \sigma_y)^2 + \tau_{xy}^2}$$

$$\sigma_{\frac{rr}{\rho\varphi}} = \sigma_{xx} \left(\frac{1 + \cos(2\varphi)}{2} \right) + \sigma_{yy} \left(\frac{1 - \cos(2\varphi)}{2} \right) - \tau_{xy} \cos(2\varphi)$$

$$\tau_{r\varphi} = \frac{(\sigma_{yy} - \sigma_{xx})}{2} \sin(2\varphi) + \tau_{xy} \sin(2\varphi)$$

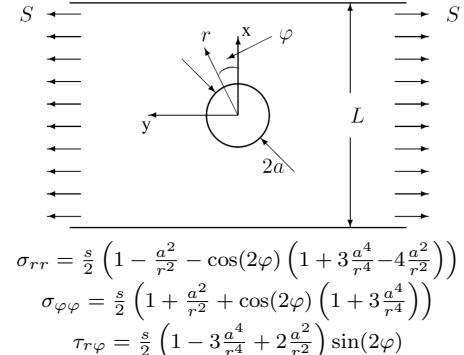
• $\sigma_{rr}, \sigma_{\varphi\varphi}, \tau_{r\varphi}$ mit diese 3 Equationen vergleichen und System fuer Lochradius a $\ll r$ und Spannungsfreie Rissflanken ($r = a; \forall \varphi \in \mathbb{R}$): $\sigma_{rr} = 0, \tau_{r\varphi} = 0$ loesen:

$$\sigma_{rr} = \frac{E}{r^2} + 2G - (2A + 6\frac{C}{r^4} + 4\frac{D}{r^2}) \cos(2\varphi)$$

$$\sigma_{\varphi\varphi} = -\frac{E}{r^2} + 2G + (2A + 12Br^2 + 6\frac{C}{r^4}) \cos(2\varphi)$$

$$\tau_{r\varphi} = (2A + 6Br^2 - \frac{6C}{r^4} - \frac{2D}{r^2}) \sin(2\varphi)$$

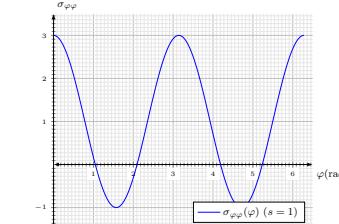
Einachsige Spannung:

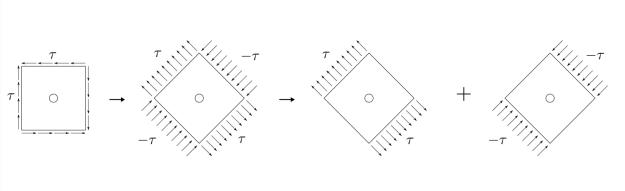


Wenn $r = a$ dann $\sigma_{rr} = \tau_{r\varphi} = 0$ und $\sigma_{\varphi\varphi}(\varphi) = s(1 + 2\cos(2\varphi))$

Max $\sigma_{\varphi\varphi} = 3s$ (a.d.S. $\varphi = 0$), $\sigma_{\varphi\varphi} = -s$ (a.d.S. $\varphi = \frac{\pi}{2}$). $\sigma_{rr} = 0 \Rightarrow$ Hauptspannungstensor (max):

$$[T_{max}]_{xy} = [T(\varphi = 0, r = a)]_{xy} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3s & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



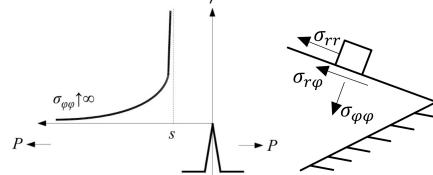
Beispiel: Schubspannungbelastung

Am Loch:

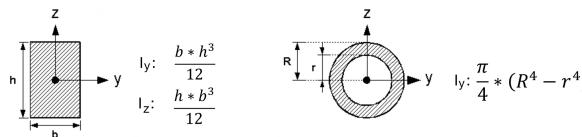
$$\begin{aligned} & -\tau \quad 3\tau \\ & + \quad -3\tau \\ \rightarrow & \quad -4\tau \quad 4\tau \end{aligned}$$

Scheibe mit Riss:

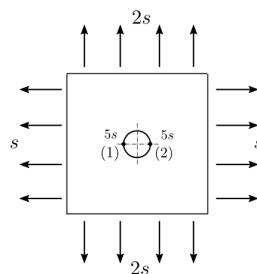
Spannungsfreie Rissflanken ($\forall r, \varphi = \pm\pi$): $\sigma_{\varphi\varphi} = 0, \tau_{r\varphi} = 0, r \ll L, a$.



- $\sigma_{rr} = \frac{3}{4} A_2 r^{-\frac{1}{2}} (5 \cos(\frac{\varphi}{2}) - \cos(\frac{3}{2}\varphi))$
- $\sigma_{\varphi\varphi} = \frac{3}{4} A_2 r^{-\frac{1}{2}} (3 \cos(\frac{\varphi}{2}) + \cos(\frac{3}{2}\varphi))$
- $\tau_{r\varphi} = \frac{3}{4} A_2 r^{-\frac{1}{2}} (\sin(\frac{\varphi}{2}) + \sin(\frac{3}{2}\varphi))$

Flächenträgheitsmomente**Kesselgleichungen**

Kesselgleichung für dünnwandiges Rohr:



Für geschlossene, dünnwandige Behälter ($\frac{d}{R_m} \ll 1, R_m = R + \frac{d}{2}$):

$$\sigma_{\varphi\varphi} = \frac{R_m}{d} p = 2\sigma_{zz} = 2s; \quad \sigma_{zz} = \frac{R_m}{2d} p = s \quad (\text{offen: } \sigma_{zz} = 0); \quad \sigma_{rr} = 0$$

Für dünnwandige, kugelförmige Behälter:

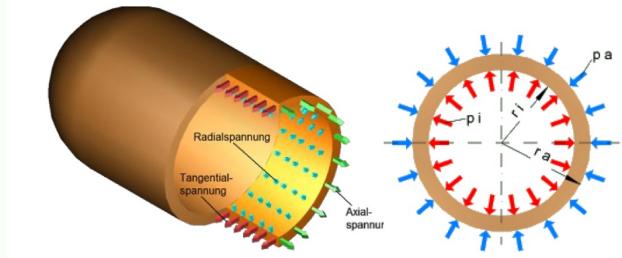
$$\sigma_{\varphi\varphi} = \sigma_{\theta\theta} = \frac{R_m}{2d} p; \quad \sigma_{rr} = 0$$

Kesselgleichung für dickwandiges Rohr:

p = interne Druck, r_i = innere Radius, r_a = externe Radius, r = aktuelle radius.
(MAX $r = r_i$, MIN $r = r_a$)

$$\sigma_{\varphi\varphi} = p \cdot \frac{r_i^2}{r_a^2 - r_i^2} \left(\frac{r_a^2}{r^2} + 1 \right)$$

$$\sigma_{rr} = -p \cdot \frac{r_i^2}{r_a^2 - r_i^2} \left(\frac{r_a^2}{r^2} - 1 \right)$$

Beispiel: Geometrische Fehlerabschätzungen am Rohr

Umfangsspannung σ_φ :

$$\sigma_\varphi^{(geo)} = \frac{R}{d} p \Rightarrow \sigma_\varphi^{(T)} = \frac{R_M}{d} p$$

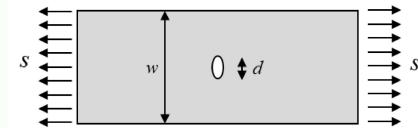
Wir definieren $\alpha := \frac{\sigma_\varphi^{(T)}}{\sigma_\varphi^{(geo)}} = 1 + \frac{d}{2R}$

Axialspannung σ_z : GGW freischneiden: $-\sigma_z \pi ((R+d)^2 - R^2) + p \pi^2 = 0$

$$\sigma_z^{(geo)} = \dots$$

Wir definieren $\beta := \frac{\sigma_z^{(T)}}{\sigma_z^{(geo)}} = \frac{\frac{R+d/2}{2R} p}{\frac{(R+d)^2 - R^2}{((R+d)^2 - R^2)} p} = \dots = \alpha^2$ Gemaess diesen

Resultat wird somit der Fehler in der Axialspannung schneller ansteigen als in der Umfangsspannung.

Beispiel: K_p für ein elliptisches Loch

Gesucht: K_p , Gegeben: $\alpha_k > 1$.

- $K_p = \frac{L_p}{L_e} = \frac{R_p \omega t}{L_e}$
- Nennspannung $\sigma_N = \frac{L_e}{\omega t} \leftrightarrow \sigma_{max} = \alpha_k \sigma_N = \alpha_k \frac{L_e}{\omega t} = R_p$
- Elastische Grenzfall mit $L_e = \frac{1}{\alpha_k} R_p \omega t$
- $K_p = \alpha_k$ (siehe 1.)

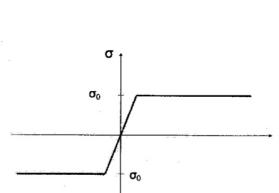
Beispiel: ε_{rr} von Radius Zunahme

Gesucht: ε_{rr} , Gegeben: $\Delta R = 0.5\%$, Geometrie (Kugel), Material (Stahl)

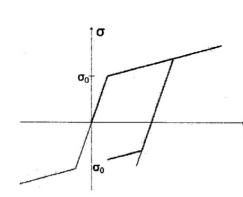
- Kugel, äquiaxialer Dehnungszustand: $\varepsilon_{\theta\theta} = \varepsilon_{\varphi\varphi}$
- Inkompressibel Materialien: $\varepsilon_{rr} + \varepsilon_{\theta\theta} + \varepsilon_{\varphi\varphi} = 0$
- $R \nearrow \leftrightarrow \text{Umfang} \nearrow \rightarrow \varepsilon_{\theta\theta} \nearrow \rightarrow \varepsilon_{rr} = -(\varepsilon_{\theta\theta} + \varepsilon_{\varphi\varphi}) = -1\%$

Materialverhalten**Festigkeitshypothesen:****Fliessbedingung/Fliessfunktion $\Phi(\sigma)$:**

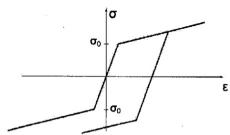
Fliessbedingung: $\Phi(\sigma) < 0$ (elastisch), $\Phi(\sigma) = 0$ (plastisch)



Ideal elastisch-plastisch (keine Verfestigung/Reserve):
 $\Phi(\sigma) = \sigma^2 - \sigma_0^2$
Plastisch: $\sigma = \pm \sigma_0$



Lineare isotrope Verfestigung $\Phi(\sigma) = \sigma^2 - \sigma_0^2 (1 + \kappa ||\varepsilon_{tot}^{pl}||)^2$
Plastisch: $\sigma = \pm (\sigma_0 + \sigma_0 \kappa ||\varepsilon_{tot}^{pl}||)$ und $||\varepsilon_{tot}^{pl}|| = \int_0^\varepsilon |d\varepsilon_{pl}|$



Lineare kinematische Verfestigung
(Bauschinger-Effekt): $\Phi(\sigma) = (\sigma - \kappa\varepsilon_{pl})^2 - \sigma_0^2$
Plastisch: $\sigma = \pm\sigma_0 + \kappa\varepsilon_{pl}$

von Mises'sche Vergleichsspannung:

$$\Phi_{v, \text{Mises}} = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_2 - \sigma_1\sigma_3 - \sigma_2\sigma_3 - \sigma_0^2 \quad (= 0)$$

$$\Leftrightarrow \sigma_{v, \text{Mises}}^{vgl} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_2 - \sigma_1\sigma_3 - \sigma_2\sigma_3 + 3(\tau_{12}^2 + \tau_{13}^2 + \tau_{23}^2)}$$

Beachte: $(\sigma_{v, \text{Mises}}^{vgl})^2 = 3T_{II}^D = 6G \cdot \tilde{U}_G$

Fliessen ist unabhängig vom hydrostatischen Spannungszustand.

$T_{II}^D = 2$. Invariante Spannungsdeviator

\tilde{U}_G = Verzerrungsenergie der Gestaltsänderung (Defomation-energy)

Tresca'sche Vergleichsspannung (maximale Schubspannungshypothese):

Konservativer als von Mises'sche Vergleichsspannung (Zugversuch) (Grenzfläche von Sechseck schneller erreicht als von Ellipse). **ABER:** Torsionversuch: Mises Konservativer

$$\sigma_{\text{Tresca}}^{vgl} = \max(|\sigma_1 - \sigma_2|, |\sigma_2 - \sigma_3|, |\sigma_3 - \sigma_1|) = 2\tau_0$$

Statische Belastung:

Kraft- & Deformationsgesteuerte Belastung::

Deformationsgesteuerte Belastung: Bspw vorgespannte Schraube oder thermische Spannungen. Begrenzung der auftretenden Spannungen weniger konservativ, da plastische Deformationen zur Reduktion der pseudo-elastischen Spannungen führen. σ - ε -Diagramm: gr. Dehnung führt zu nur kl. Spannungserhöhung. Beeinflussen Grenzlast nicht.

Kraftgesteuerte Belastung: (Für viele Metalle $\frac{\varepsilon_b}{\varepsilon_0} \gg \frac{\sigma_B}{\sigma_0}$) Beim Überschreiten von $R_{p0.2}$ oft weniger Reserve → konservativer Dimensionierung.

Spannungsverteilung (quadratische Querschnitt):

Falls homogen: bei Fliessgrenze wird die ganze Struktur plastifiziert. → Versagen.

Falls linear: es kommt an lokalen Stellen zu Plastifizierungen → Versagen erst bei einer grösseren Belastung.

Zug:

- Erste plastifizierung = vollständige Plastifizierung:

$$F_{\text{plast}} = \sigma_0 \cdot A$$

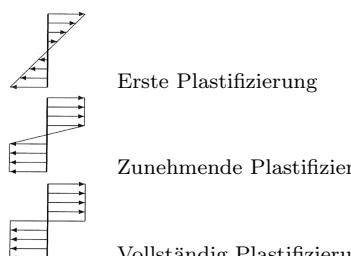
Biegung:

- Erste Plastifizierung:

$$M_{\text{plast}} = \sigma_0 \cdot I \cdot \frac{1}{y_{\text{max}}} \quad (\text{mit bspw } \sigma_0 = R_p)$$

- Vollständige Plastifizierung:

$$M_{\text{versagen}} = 2 \int_{-b/2}^{b/2} \int_0^{h/2} \sigma(y) y dy dz = \frac{1}{2} \sigma \cdot A \cdot y_{\text{max}} \quad \text{mit } \sigma(y) = \sigma_0$$



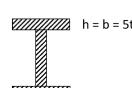
Formfaktoren:

Spannungsverteilung homogen: (Zug ideal plastisch) $f = 1$.

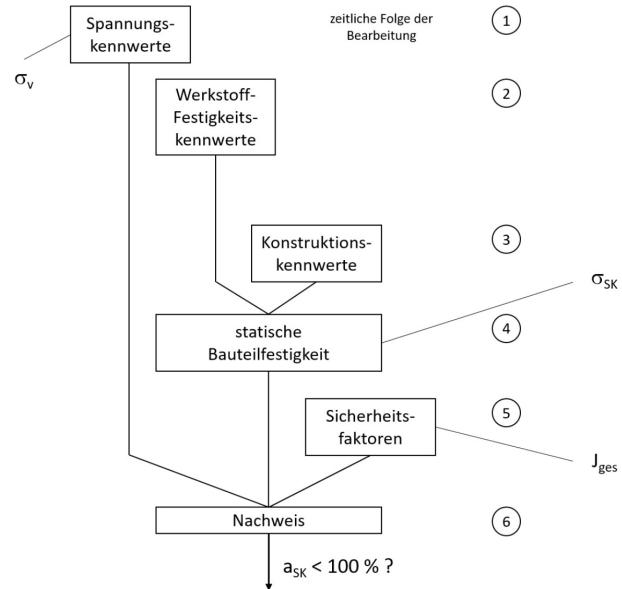
Spannungsverteilung als lineare Funktion: Fliessgrenze an einem Ort überschritten (1. Plastifizierung) aber grösster Teil des Querschnittes noch elastisch → Reserve. (Bsp. Biegung bei elastisch ideal-plastisch)

$$f = \frac{M_{\text{versagen}}}{M_{\text{erste plastifizierung}}} = \frac{P_{\text{versagen}}}{P_{\text{erste plastifizierung}}}$$

f = Mass für Reserve, "worst case" → $f = 1$, P = Kraft



FKM Richtlinien



Mehrachsigkeit:

Falls $h > 1.33$ zusätzlicher Nachweis erforderlich! (Bruchdehnung und ev. maximale äquivalente Spannung bei starker Mehrachsigkeit kleiner)

$$h = \frac{\frac{1}{2} \text{Spur}[T]}{\sigma_{v, \text{Mises}}} = \frac{\text{Reine hydrostatische Druck}}{\text{Abweichung von hydro. Druck}} \quad [T]: \text{Spannungstensor}$$

Bauteilfestigkeit σ_{SK} :

Pl. Formzahl:

$$K_p = \frac{\text{Last beim Versagen}}{\text{Last bei erster Plast}} = \frac{L_p (= R_p \cdot A)}{L_e}$$

vollpl.: aus FE; el. Grenzl.: wenn $\sigma_v = R_p$ erreicht. Für Kleine oder punktförmige Spannungserhöhung: $K_p = \frac{\sigma_{\text{Mises}}^{\text{MAX}}}{\sigma_{\text{Mises}}^{\text{MIN}}}$

An Normprobe gemessene Fliessgrenze erfordert meistens Korrektur!

R_p : Fliessgrenze Bauteil; $R_{p,N} \approx R_e$: Fliessgrenze Normprob;

K_d, p : Technologischer Grösseneinflussfaktor/Erstellungsverfahren (< 1); K_A : Anisotropie des Materials (≤ 1 , 1 wenn keine Anisotropie, Walzen: 1 in Walzrichtung < 1 andere Richtungen). $\sigma_{\text{Neuber}}^2 = E \cdot R_p \cdot \varepsilon_{\text{ertr}}$

$$R_p = K_d, p \cdot K_A \cdot R_{p,N};$$

$n_{\text{pl}} \geq 1$: plastische Stützzahl.

$n_{\text{pl}} = 1$: homogene Spannungsverteilung (Keine Reserve → Wenn R_p erreicht → total Versagt).

$n_{\text{pl}} > 1$: R_p wird zuerst lokal erreicht.

$$n_{\text{pl}} = \min \left(\sqrt{\frac{E \cdot \varepsilon_{\text{ertr}}}{R_p}}, K_p \right)$$

$$\sigma_{\text{SK}} = R_p \cdot n_{\text{pl}}$$

Sicherheitsfaktor J_{ges} :

$$J_{\text{ges}} = J_s \cdot \left[J_z \cdot \underbrace{\max \left(\frac{J_m \cdot R_p}{R_m}; J_p \right)}_{\text{Versagenskonsequenz}} \right]$$

J_s : Lastfaktor (Sicher := 1, Representative > 1); J_z : Schweißsteile; J_p : plastifizierung

$J_m =$	2	1.8	1.75	1.6
$J_p =$	1.5	1.35	1.3	1.2
hohe Schadensfolgen		hohe S.	niedrige S.	niedrige S.
hohe Wahrscheinlichkeit		niedrige W.	hohe W.	niedrige W.

Auslastungsgrad:

1. a_{SK} : Auslastungsgrad, Ziel: < 1
2. σ_v : Vergleichsspannung im Nachweispunkt
3. σ_{SK} : Materialfestigkeit, bauteilspezifisch
4. J_{ges} : Sicherheitsfaktor (Gesamtsicherheitsfaktor)

$$a_{SK} = \frac{\sigma_v \cdot J_{\text{ges}}}{\sigma_{SK}}$$

Beispiel: Reaktorkessel

Finde den Formfaktor K_p der den Kessel, Kerbfaktoren am Loch, → gegeben: maximale Innendrucke p , R , H , d , r , E , R_m , R_e , ϵ_{ertr} , $K_{d,p}$, σ_v .

Plastische Formzahl an einem Druckkessel mit Loch

1. Loch belastet mit $2s, s$ (Siehe Kesselgleichungen) wobei $s = \sigma_{zz}$ → kritische Stelle = 5s
2. $R_e = 5s = 5 \cdot \sigma_{zz} = \frac{5R}{2d} p \Leftrightarrow p_{pl} = \frac{2d}{5R} R_e$ = Last bei erster Plast.
3. Versagenslast: $R_e = \sigma_{v,Mises}^{vgl}(\sigma_{rr}, \sigma_{\varphi\varphi}, \sigma_{zz}) = \frac{\sqrt{3}R}{2d} R_e \Leftrightarrow p_{vers} = \frac{2d}{\sqrt{3}R} R_e$
4. $K_p = \frac{p_{vers}}{p_{pl}} \approx 2.88$

Zyklische Belastung**Ermüdung:**

Progressive Schädigung durch zyklische Belastung → Riss → Dauerbruch
Einfüsse: 3D Spannungszustand, Temp., Korrs., Zeit, Frequenz d Zyklen, Kerbwirkung, Mittelspannung, Eigenspannungen, Kumulative Ermüdung, Oberfläche

Allgemeines Vorgehen:**Dauer- & Zeitfestigkeit:**

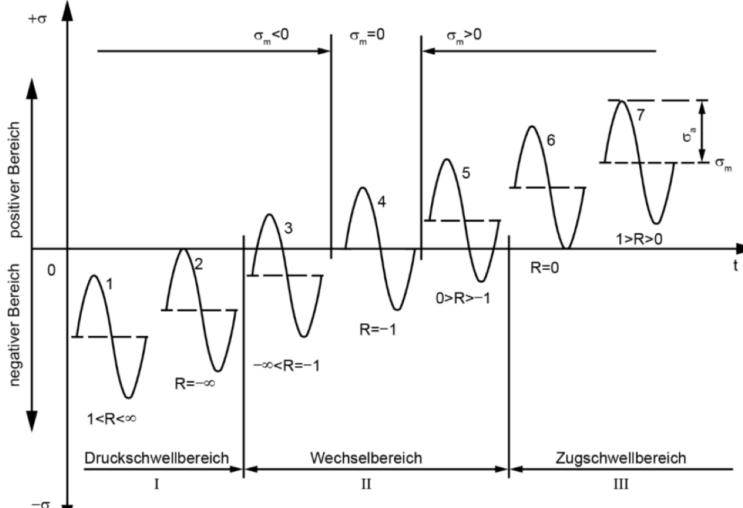
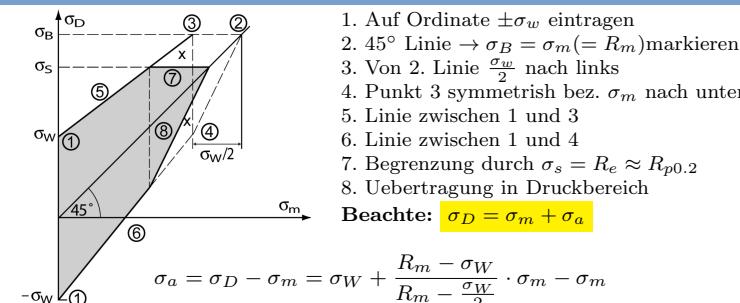
- bis $10^3 - 10^4$ Zyklen: LCF (low cycle fatigue - Kurzzeitfestigkeit)
- $10^3 - 10^4$ bis 10^6 : HCF (high cycle fatigue - Langzeitfestigkeit)
- ab $10^6 - 10^7$: Dauerfestigkeit - σ_W : Wechselfestigkeit

Einfluss der Mittelspannung auf Dauerfestigkeit:

$$\sigma_m = \frac{\sigma_u + \sigma_o}{2} \quad \sigma_a = \frac{\sigma_o - \sigma_u}{2} \quad R = \frac{\sigma_u}{\sigma_o} \quad \Delta\sigma = \sigma_o - \sigma_u$$

$$\sigma_m \uparrow, R \uparrow (\sigma_o > 0) \rightarrow N_{zul} \downarrow$$

$$\Rightarrow \sigma_o = \sigma_m + \sigma_a \\ \Rightarrow \sigma_u = \sigma_m - \sigma_a$$

**Smith-Diagramm $\sigma_W(\sigma_m)$:****Kumulative Ermüdung (Miner-Regel):**

Belastung oft komplexer als 'einstufig' → Mehrstufenkollektiv. Belastungsfunktion wird in Abschnitte aufgeteilt.

$$D_{BK} = \sum_i \frac{n_i}{N_{zul}(\Delta\sigma_i, \sigma_{m,i})}$$

$$D_{BK} : \frac{\text{Schädigung}}{\text{Belastungskollektive}}$$

Wenn $D_{BK} = 1 \rightarrow$ Versagen

$$T_L = \frac{1}{D_{BK}} \cdot T_{BK} \quad T_{BK} : \frac{\text{Belastungszeit}}{\text{Belastungskollektive}}$$

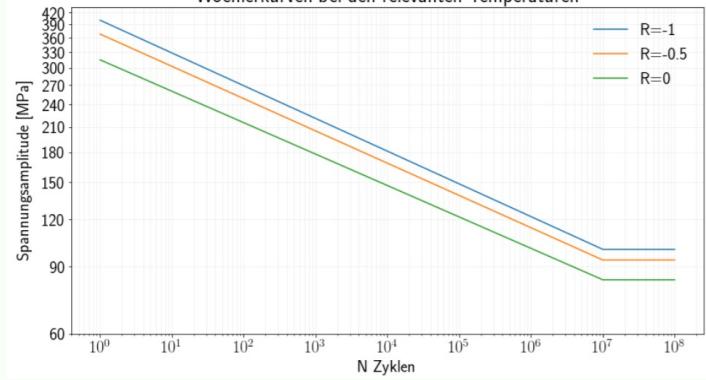
$$T_{Lebensdauer} = \frac{1}{D_{BK}}$$

Beachte: $Hz = \frac{\text{Zyklen}}{\text{Sekunde}} \Leftrightarrow n_i = f \cdot \text{Zeit unter belastung pro Benutzung} \cdot \text{Anzahl Benutzungen}$

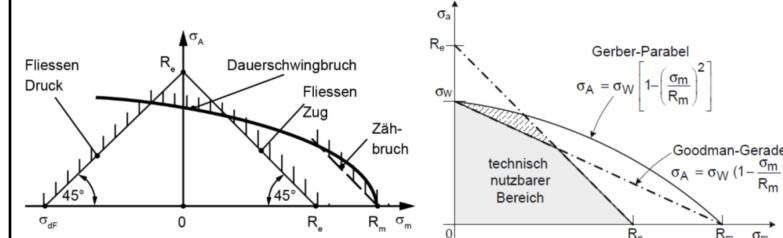
Beispiel: Benutzung Woehlerkurve

Gegeben: σ_a, σ_m , Woehlerkurve. **Gesucht:** Lebensdauer.

Woehlerkurven bei den relevanten Temperaturen



- Finde σ_o und σ_u ($\sigma_m \pm \sigma_a$)
- Finde $R = \frac{\sigma_u}{\sigma_o} \rightarrow$ Kurve auf Woehler wählen
- Finde N_{Zyklen}^{Zul} mit σ_a aus Wohelerdiagramm
- Finde $N_{Zyklen}^{Actual} = f \cdot [\text{Zeit unter belastung pro Benutzung}] \cdot [\text{Anzahl Benutzungen}]$ und vergleiche mit N_{Zyklen}^{Zul} . Wenn $N_{Zyklen}^{Actual} > N_{Zyklen}^{Zul}$ zulässig, sonst nicht zulässig

Haigh-Diagramm:

Beachte: Gerber-Parabel ⇒ Zähe Werkstoffe, Goodman-Gerade ⇒ Sproede. **Kerben:**

Lokal Elastisch:

Anriß erfolgt oft an Kerben (weil da eine Spannungserhöhung gibt, und muss σ_w von einem Faktor K_T oder K_F reduziert werden). An den kritischen Stellen herrscht oft ein Ebener Spannungszustand (Spannungsfreie Oberfläche).

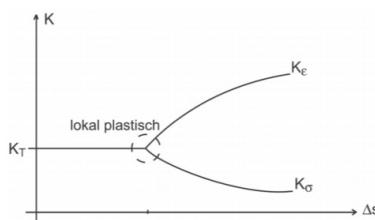
K_T : Abminderung der Zeitfestigkeit; K_F : Abminderung der Wechselfestigkeit. Da $K_F < K_T$ wäre eine Beurteilung basierend auf der lokalen Spannungsamplitude mit der Wöhlerkurve aus ungekerbten Proben zu konservativ. $\sigma_{max} = K_F \cdot \sigma_{nom}$ statt K_T , $q = \text{Kerbindex/Kerbsensitivität } (q < 1)$.

$$K_F = q \cdot (K_T - 1) + 1$$

$$\text{Biegespannungsamplitude : } \sigma_{max}^a = K_F \cdot \sigma_{max}^b = K_F \frac{L_e}{A} (= R_p)$$

wobei $\sigma^b = \frac{M_b}{I} \cdot y_{max} \Rightarrow$ Mittelspannung $\sigma_m = 0 \rightarrow \begin{cases} \sigma^{b+} = \text{valore} \\ \sigma^{b-} = -\text{valore} \end{cases} \Rightarrow$ Mitte-value = 0.

Lokal inelastisch (LCF an Kerbe):



Bis zum lokalen plastischen Deformation des Kerbes (in linear elastischer Kerbgrund) $K_\sigma = K_\varepsilon = K_T$.

Ab erster Plastifizierung ($\Delta s \nearrow$):

- $K_\sigma \searrow \rightarrow$ Spannung werden reduziert durch plastische Deformation
- $K_\varepsilon \nearrow \rightarrow$ plastische Dehnung auftritt und den Stuck hat eine grössere Deformation (kleinere Fläche tragt den Last)

$$K_\varepsilon \cdot K_\sigma = K_T^2$$

$$\Delta\sigma_K = K_\sigma \cdot \Delta s \quad \Delta s : \text{Fernfeld Schwingbreite}$$

$$\Delta\varepsilon_K = K_\varepsilon \cdot \Delta e \quad \Delta\sigma_K : \text{lok. Schwingbreite}$$

$$\Delta e = \frac{\Delta s}{E} \quad \Delta\varepsilon_K : \text{lok. Schwingbreite}$$

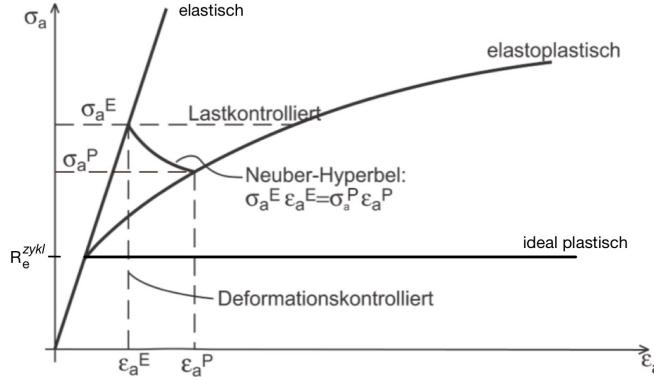
Neuber Hyperbel:

Abschätzung von Dehnungsamplituden bei lokaler plast. im Kerbgrund.

$$\sigma_A^E \cdot \varepsilon_A^E = \sigma_A^P \cdot \varepsilon_A^P \quad (\text{für elastoplastisch})$$

Neuber setzt voraus, dass:

- Im Kerbgrund ein einachsiger Spannungszustand besteht.
- σ_a^E bekannt (aus FE oder Kerbfaktor)
- $\varepsilon_a^E = \frac{\sigma_{vmax}}{E}$
- $\sigma_A^P = R_e \approx R_{p0.2}$
- $\varepsilon_A^P = \varepsilon_{ertr}$



$$\sigma_a^E = K_T \cdot s; \quad \sigma_a^E = E \cdot \varepsilon_a^E \quad \Rightarrow \quad \varepsilon_a^E = K_T \cdot \frac{s}{E} = \frac{\sigma_{max}}{E}$$

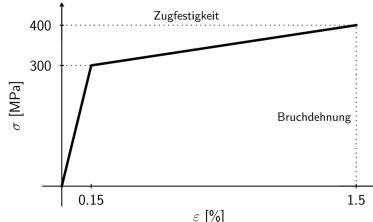
$$\varepsilon_a^P \cdot R_e^{zykl.} = K_T^2 \cdot \frac{s^2}{E}; \quad K_\sigma = \frac{R_e^{zykl.}}{s_a} \quad \Rightarrow \quad K_\sigma \cdot K_\varepsilon = K_T^2$$

$$\varepsilon_a^P = \frac{\sigma_{max}^2}{E \cdot R_e^{zykl.}} \quad (\text{für ideal plastisch})$$

Falls ideal plastisches Material: ($\sigma_a^P = \text{const.} = R_e^{zykl.}$)

Nützliche Beziehung: $\Delta\varepsilon = 2\varepsilon_a^P$

Reserven:



- $\varepsilon_B \rightarrow$ Dehnung beim Bruch (Versagen)
- $\varepsilon_P \rightarrow$ Dehnung beim ersten Plastifizierung
- $\sigma_B \rightarrow$ Spannung beim Bruch
- $\sigma_P \rightarrow$ Spannung beim ersten Plastifizierung (R_e)

Elastische reserve:

Homogener uniaxialer Spannungszustand

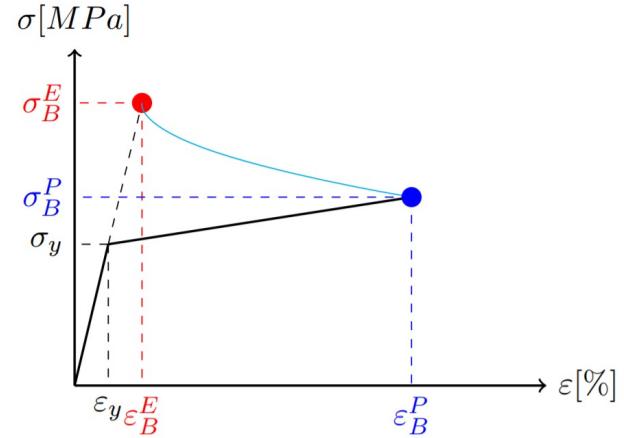
$$\frac{\varepsilon_B}{\varepsilon_P} = \frac{1.5\%}{0.15\%} = 10$$

Spannungsreserve:

Homogener uniaxialer Spannungszustand

$$\frac{\sigma_B}{\sigma_P} = \frac{400}{300} = \frac{4}{3}$$

Reserve mit Kerbe und Neuber:



k ist der Faktor, um welchen die Belastung erhöht werden kann, bis Bauteil bricht. $\sigma_B^E = k \cdot \sigma_y$ und $\varepsilon_B^E = k \cdot \varepsilon_y$

$$\text{Neuber} \rightarrow \sigma_B^E \varepsilon_B^E = \sigma_B^P \varepsilon_B^P \rightarrow k = \sqrt{\frac{\sigma_B^P \varepsilon_B^P}{\sigma_B^E \varepsilon_B^E}} = \sqrt{\frac{40}{3}}$$

Ermüdung mit örtlichen Spannungen (FKM Richtlinie)

Lastkollektive Bilden:

Aus elast. FEM Hauptspannungen an den kritischen Stellen bestimmen. aus $\sigma_1(t) - t$ Diagramm Belastungskollektiven einteilen. $\rightarrow \sigma_{1a,1}, \sigma_{1m,1}; \sigma_{1a,i}, \sigma_{1m,i}$ bestimmen.

1. Subskript: Welche HS-Richtung (Index tiefer \rightarrow HS höher);
2. Subskript: Welches Kollektiv (Index tiefer $\rightarrow \sigma_a$ höher)

Vorgehen FKM:

- 1 \rightarrow 2 : $\sigma_W = F_W \cdot R_m$
- 2 \rightarrow 3 : $\sigma_{WK} = \sigma_W \cdot \frac{1}{K_{WK}}$
- 3 \rightarrow 4 : $\sigma_{AK} = \sigma_{WK} \cdot K_{AK}$
- 4 \rightarrow 5 : $\sigma_{BK} = \sigma_{AK} \cdot K_{BK}$

Schritt 1 \rightarrow 2:

Falls σ_W gemessen, Umrechnung aus R_M nicht notig. Ansichten aus Werkstoff- spezifischer Abschätzung: $F_W : 0.3 \dots 0.4$.

$$\sigma_W = F_W \cdot R_m$$

Schritt 2 \rightarrow 3:

$$K_{WK} = \left(\left[1 + \frac{1}{\tilde{K}_F} \left(\frac{1}{K_R} - 1 \right) \right] \frac{1}{K_v} \right) \frac{1}{n_\sigma}$$

\tilde{K}_F : Rauheitsfaktor ; K_R : Sensitivität auf Rauheit bei Kerben (polierte $\rightarrow K_R = 1$); K_v : Randschichtfaktor (Norm. Zustand $\rightarrow K_v = 1$); n_σ : Stützzahl aus Kerbwirkung (siehe n_{pl})

σ_{WK} kann grösser sein als σ_W

$n_\sigma = 1$ ist konservativ. (Falls Material $q = 1$ wählt man $n_\sigma = 1$)

$$\sigma_{WK} = \sigma_W \cdot \frac{1}{K_{WK}}$$

Schritt 3 \rightarrow 4:

Aus Haigh-Diagramm:

$$\text{Fall 1: } K_{AK,i} = 1 - M \frac{\sigma_{m,i}}{\sigma_{a,i}} \quad \text{Fall 2: } K_{AK,i} = \frac{1}{1 + M \frac{\sigma_{m,i}}{\sigma_{a,i}}}$$

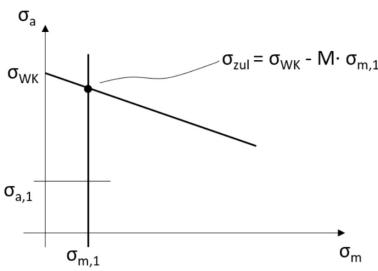
Fall 1 ist für varierende σ_a und konstantem σ_m

Im Fall von Betriebsfestigkeit oder Überlast benutzt man immer Fall 2!. Wenn ich $\sigma_{a,i}$ fuer $i = 1, 2$ hätte, würde ich $K_{AK,i}$ fuer $I = 1, 2$ berechnen und der grösste Wert für die Oberflächenabsicherungsfaktor nehmen.

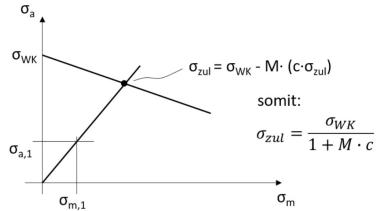
σ_{AK} immer $\leq \sigma_{WK}$ aber nicht immer $\leq \sigma_W$

$$\sigma_{AK} = \sigma_{WK} \cdot \max |K_{AK,i}|$$

Fall 1



Fall 2



Weitere Formeln:

Wir definieren $c = \frac{\sigma_{m,i}}{\sigma_{a,i}}$

$$\sigma_{AK} = c \cdot N_D^{-1/K}; \quad \sigma_{a,1} = c \cdot N_{zul}(\sigma_{a,1})^{-1/k}$$

$$\Rightarrow \sigma_{AK} = \sigma_{a,1} \left(\frac{N_{zul}}{N_D} \right)^{1/k}$$

$$N_{zul}(\sigma_{a,R,i}) = N_{zul}(\sigma_{a,1}) \left(\frac{\sigma_{a,1}}{\sigma_{a,R,i}} \right)^K$$

Schritt 4 → 5:

Einstufenkollektiv: $K_{BK} = \frac{\sigma_a(N = N_L)}{\sigma_w}$

Mehrstufenkollektiv: $\bar{N}: \Sigma n_i; \quad D_m: \text{Schadensgrenze} < 1$

$$A = \left[\sum_{i=1}^n \frac{n_i}{\bar{N}} \cdot \left(\frac{\sigma_{a,R,i}}{\sigma_{a,1}} \right)^K \right]^{-1}$$

$$K_{BK} = \frac{\sigma_a^{**}(\bar{N})}{\sigma_a(N_D)} = \frac{c_1 \left(\frac{AD_m}{\bar{N}} \right)^{1/K}}{c_1 \cdot N_D^{-1/K}} = \left(\frac{A \cdot D_m \cdot N_D}{\bar{N}} \right)^{1/K}$$

$$\sigma_{a,R,i} = \sigma_{a,i} \cdot \frac{K_{AK,1}}{K_{AK,i}}$$

$$N_{zul}^* = N_{zul} \cdot A$$

$$\sigma_{BK} = \min(\sigma_{AK} \cdot K_{BK}, 0.75 \cdot R_p \cdot n_{pl})$$

Dehnungsschwingsbreite im Elastischen Bereich:

1. Finde σ_o, σ_u
2. Hooke's Gesetz $\Rightarrow \begin{cases} \varepsilon_o = \frac{\sigma_o}{E} \\ \varepsilon_u = \frac{\sigma_u}{E} \end{cases}$
3. Dehnungsschwingsbreite: $\Delta\varepsilon = \varepsilon_o - \varepsilon_u$

Ausnutzungsfaktor für jede HS:

Ziel: $a_{BK,i} < 1$ mit $a_{BK,i} = \frac{\max|\sigma_{a,i}|}{\sigma_{BK}/J_D} < 1$; $J_D = J_S \cdot J_F \cdot J_G$, wobei

$J_S = 1$ fuer sichere Lastnahme, $J_F = 1.5$, $J_G = 1$ wenn kein Guss.

Durchführen für alle Hauptspannungen.

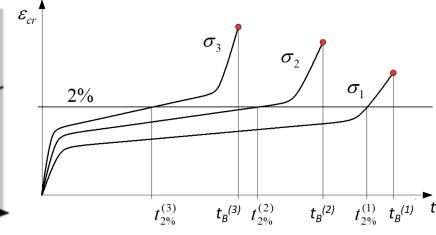
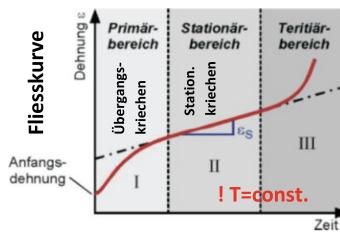
$$a_{ges} = \sqrt{\frac{1}{2} \left((a_{BK1}^*)^2 + (a_{BK2}^*)^2 + (a_{BK3}^*)^2 \right)}$$

$$a_{BK,i}^* = \text{sign}(c_{\sigma i}) \cdot a_{BK,i} \quad c_{\sigma i} = \sigma_i(t = t_{max})$$

Kriechen

Definiton:

- Inelastische Dehnungen
- Für Sekundärkriechen: $\dot{\varepsilon}_{cr} = f(T, \sigma)$; $\sigma = \text{const.} \Rightarrow \dot{\varepsilon}_{cr} = \text{const.}$



Ursachen:

Kriechen tritt bei metallischen Stoffen bei $T > T_{schmelz} \cdot 0.3$ auf. Bewegung von Versetzungen, Gleit- und Diffusionsphänomene.

→ inelastische Deformation

Relaxation nach Norton:

$$\varepsilon_{cr} + \varepsilon_{el} = \varepsilon_0 = \text{const.} \quad \dot{\varepsilon}_{cr} + \dot{\varepsilon}_{el} = 0 \Rightarrow A\sigma^n + \frac{\dot{\sigma}}{E} = 0$$

Analytische Lösung:

$$\sigma(t) = \left(\sigma_0^{1-n} - (1-n)A \cdot E \cdot t \right)^{\frac{1}{1-n}}$$

Hooke'sches Gesetz:

$$\sigma_0 = E \cdot \varepsilon_0$$

Kriechschädigung:

Kumulative Schädigung/ Time Fraction Rule:

Spannungsgeschichte $\sigma(t)$ in diskrete Intervalle Δt_n mit konstanter Spannung σ_n & zugehöriger Rupture-Time $t_B(\sigma_n)$ aufteilen.

$$D_{cr} = \sum_n \frac{\Delta t_n}{t_B(\sigma_n)} < 1$$

kontinuierliche Spannungsgeschichte:

$$D_{cr} = \int_0^t \frac{1}{t_B(\sigma(t))} dt < 1$$

Spannungsrelaxation $\rightarrow \sigma(t)$ mit $\dot{\sigma} < 0$

Ductility Exhaustion Method:

$$D_{cr} = \int_0^{\varepsilon_{cr}} \frac{1}{\varepsilon_{cr}^B(\dot{\varepsilon}_{cr})} d\varepsilon_{cr} \approx \int_0^{t^*} \frac{\dot{\varepsilon}_{cr}}{\varepsilon_{cr}^B(\dot{\varepsilon}_{cr})} dt < 1$$

Achtung: $\bar{\varepsilon}_{cr} = \varepsilon_{cr}(t^*) = \varepsilon_0 - \frac{\sigma(t^*)}{E} \Rightarrow \dot{\varepsilon}_{cr}(t^*) = -\frac{\dot{\sigma}(t^*)}{E}$

Beobachtung: $\varepsilon_{cr}^B \downarrow$ mit zunehmender Hydrostatischer Belast.

Lebensdauer:

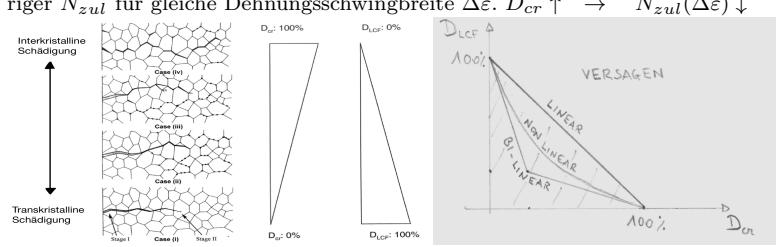
$$N \cdot D_{cr}^{BK} = 1$$

N: Anzahl Zyklen bis zu Versagen (siehe Miner Regel)

D_{cr}^{BK} : Kriechschädigung pro Belastungskollektiv

Interaktion Kriechen-Ermüdung:

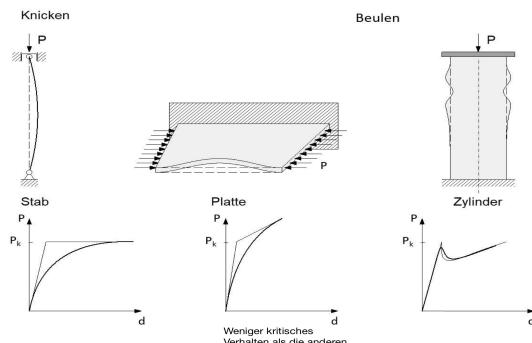
Kriechen oder Relaxation innerhalb einer zyklischen Belastung führen zu niedriger N_{zul} für gleiche Dehnungsschwingsbreite $\Delta\varepsilon$. $D_{cr} \uparrow \rightarrow N_{zul}(\Delta\varepsilon) \downarrow$



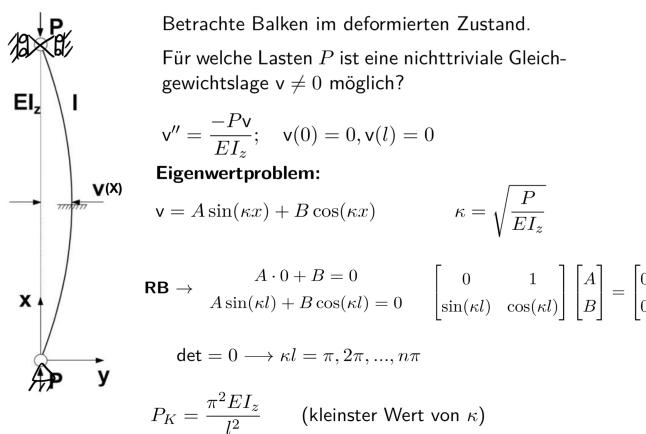
Stabilität**Stabilitätsprobleme:**

Stetiger oder plötzlicher Übergang zu stabilen aber meistens unerwünschten deformierten Zuständen.

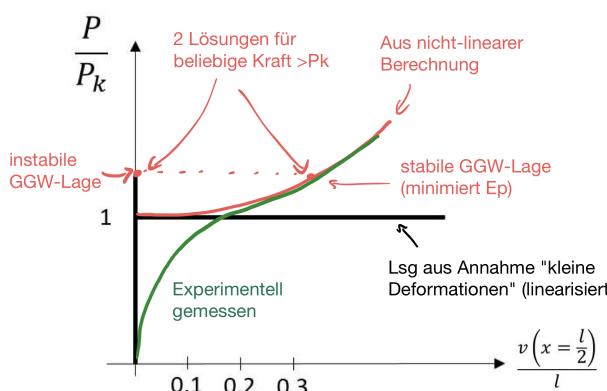
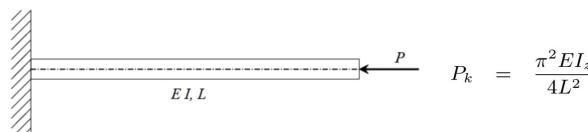
- Bei welcher Last findet der Übergang statt?
- Wie sieht das Deformationsbild aus?

**2D-Stabilitätsproblem:**

Balken axial belastet, an den Enden axial geführt (oben) und gelenkig gelagert (unten).

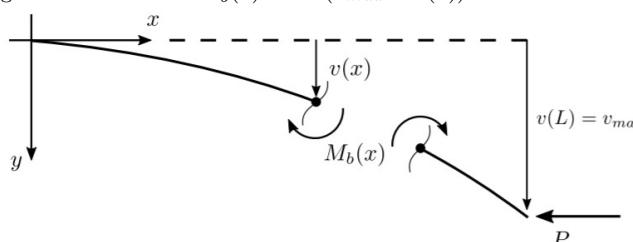
**3D-Stabilitätsproblem:**

Balken auf einer Seite eingespannt und andere Seite los.



Gegeben: E, R_e, I, L ; Gesucht: kritische Last P_K .

- Biegemomentverlauf → $M_b(x) = P \cdot (v_{max} - v(x))$



- Krümmung eines Biegebalkens gilt: $v''(x) = \frac{M_b}{EI}$
- Einsetzen: $v'' = \frac{P}{EI} \cdot (v_{max} - v(x)) \leftrightarrow v''(x) + \frac{P}{EI} v(x) = \frac{P}{EI} v_{max}$

- Lsg. des Dgl: $v(x) = A \sin(\kappa x) + B \cos(\kappa x)$, $\kappa = \sqrt{\frac{P}{EI}}$ und $v_p(x) = v_{max} = const.$
- Allgemeine Lösung: $v(x) = A \sin(\kappa x) + B \cos(\kappa x) + v_{max}$ mit Randbedingungen
 - $v(0) = 0$
 - $v'(0) = 0$
 - $v(L) = v_{max}$
- Einsetzen → $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ \kappa & 0 & 0 \\ \sin(\kappa L) & \cos(\kappa L) & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A \\ B \\ v_{max} \end{pmatrix} = \vec{0} \leftrightarrow Mx = b$
- Lösungen:
 - $\det(M) \neq 0$ nur triviale Lösung: $x = 0$
 - $\det(M) = 0$ Lösung
- $\det(M) = \dots = \kappa \cdot \cos(\kappa L) = 0 \leftrightarrow \cos(\kappa L) = 0 \leftrightarrow \kappa L = \frac{\pi}{2} + n \cdot \pi \leftrightarrow \kappa = \frac{1}{L}(\frac{\pi}{2} + n\pi)$
- Aus Definition: $\kappa^2 = \frac{P_K}{EI} \leftrightarrow P_K = \kappa^2 EI \xrightarrow{\text{kleinste 1}} P_K = \frac{\pi^2}{4L^2} EI$

Vollplastische Traglast:

$$L_p = R_{p/e} \cdot A$$

Plastifizierung vor Instabilität (Knicken) bei:

$$R_e < \frac{P_K}{A}$$

System mit 1-Freiheitsgrad:

2 Pendelstützen von Länge $l/2$ gelenkig mit einer Winkelfeder mit Rückstellmoment $M_c = C \cdot \alpha$ verbunden.

- linear:** $P = \frac{4C}{l} = P_K$
- nichtlinear:** $P = P_K \left(1 + \frac{2}{3} \left(\frac{q}{l} \right)^2 + \frac{6}{5} \left(\frac{q}{l} \right)^4 + \dots \right)$ mit $P_K = \frac{4C}{l}$

Bei nichtlinearer Betrachtung mehr als 1 Ruhelage (meist instabil) bei $P \geq P_K$ ($q = 0$ oder $q > 0$) → Verzweigungsproblem/ **Bifurcation**

Bei Strukturfehler tritt keine Bifurcation auf!

Stabilitätssatz von Lagrange:

In einer stabilen GGW-Lage hat das Gesamtpotential E_p ein Minimum ($E'_p = 0; E''_p > 0$)

$$E_p = U + V$$

U: Deformationsenergie (z.B. E_p von Feder)

V: Potential äußere Kräfte

Rayleighscher Quotient:

$$P_K = \frac{U}{\chi} := Q$$

mit P : Angriffskraft; χ : Verschiebung der Kraft

Vorgehen:

- Wähle zulässiges Verschiebungsfeld $v(x)$
- Finde $U(v) \rightarrow U = \frac{1}{2} EI \int_0^L (v'')^2 dx$ (MechII)
- Finde $\chi(v) \rightarrow \chi = \frac{1}{2} \int_0^L (v')^2 dx$ (Geometrie)
- $Q = \frac{U}{\chi}$ Rayleighscher Quotient
- $\frac{\partial Q}{\partial \alpha} = 0$ oder $\frac{\partial Q}{\partial \beta} = 0 \rightarrow$ Bedingung für α und β
- $\hat{P}_K = \min(Q)$

Trigonometrie

α	$\cos(\alpha)$	$\sin(\alpha)$	$\tan(\alpha)$	$\cot(\alpha)$
0°	1	0	0	-
30°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$
45°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1
60°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
90°	0	1	-	0

$$\cos^2(\frac{\alpha}{2}) = \frac{1+\cos(\alpha)}{2}$$

$$\sin^2(\frac{\alpha}{2}) = \frac{1-\cos(\alpha)}{2}$$

$$\cos(2\alpha) = \cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha)$$

$$\sin(2\alpha) = 2 \sin(\alpha) \cos(\alpha)$$