

Physik I/II

Michael Van Huffel & Dino Colombo

This summary has been written based on the Lecture of Physik I/II by Prof. Dr. C. Degen and Prof. Dr. W. Wegscheider (Autumn 20/Spring 21). Use it at your own discretion

Version: 16. Juni 2022

0 Inhaltsverzeichnis

1 Konstanten	2	4.7.2 Reflexion und Transmission unter einem Winkel	18
1.1 Einheiten	2	4.7.3 Polarisationsfilter	19
2 Elektrizität	2	4.7.4 Doppelbrechung	19
2.1 Elektrische Felder	2	4.7.5 Systeme mehrerer Polarisatoren	19
2.1.1 Elektrische Ladung	2	4.8 Interferenz	19
2.1.2 Elektrostatische Kraft	2	4.8.1 Kohärenz	19
2.1.3 Elektrisches Feld	2	4.8.2 Superposition von zwei kohärenten Wellen	19
2.1.4 Feldlinien	2	4.8.3 Michelson-Interferometer	20
2.1.5 Elektrischer Dipol	3	4.8.4 Interferenz an dunnen Filmen	20
2.1.6 Elektrischer Fluss und Gesetz von Gauss	3	4.8.5 Interferenz am Doppelspalt	20
2.2 Potential und Spannung	4	4.8.6 Interferenz am Mehrfachspalt	21
2.2.1 Elektrostatische Energie	4	4.9 Beugung	21
2.2.2 Feldgleichungen der Elektrostatik	4	4.9.1 Beugung am Spalt	21
2.2.3 Leitende Körper	4	4.9.2 Beugung am Mehrfachspalt	21
2.2.4 Beispiele von Ladungsverteilung	5	4.9.3 Beugung an einer allgemeinen Blende	21
2.2.5 Influenz und Abschirmung	5	4.9.4 Beugung an Lochblende und Auflösungsvermögen	21
2.2.6 Spiegelladung	5		
2.3 Dielektrika	5	5 Welle-Teilchen Dualismus	21
2.3.1 Kondensator	5	5.1 Das Photon	21
2.3.2 Der Kondensator mit Dielektrikum	6	5.1.1 Energiequantisierung der elektromagnetischen Welle	21
2.3.3 Elektrische Polarisation	6	5.1.2 Energie des Photons	21
2.4 Elektrischer Strom	6	5.1.3 Impuls des Photons	22
2.4.1 Elektrischer Strom	6	5.2 Materialwellen	22
2.4.2 Ursache des elektrischen Stroms	6	5.2.1 De Broglie's Hypothese	22
2.4.3 Elektrischer Widerstand	6	5.2.2 Wahrscheinlichkeitsdichte	23
2.4.4 Elektrische Leistung	6	5.2.3 Erwartungswert und Unschärfe	23
3 Magnetismus	7	5.2.4 Energie und Impuls einer Teilchenwelle	23
3.1 Magnetfelder	7	5.2.5 Heisenberg'sche Unschärferelation	23
3.1.1 Allgemeine Beobachtung zu Magnetfeldern	7	5.3 Energieniveaus	23
3.1.2 Biot-Savard Gesetz	7	5.3.1 Schrödingergleichung	24
3.1.3 Magnetischer Dipol	7	5.3.2 Freie und gebundene Teilchen	24
3.1.4 Zylinderspule	7	5.3.3 Das Teilchen im Kasten	24
3.1.5 Gesetz von Gauss für Magnetfelder	8	5.3.4 Energieniveaus	24
3.1.6 Durchflutungsgesetz	8	5.3.5 Energieniveaus für ein Teilchen in einem dreidimensionalen Kastenpotential	24
3.1.7 Lorentzkraft und Ampere'sches Gesetz	8	5.4 Finite step	25
3.1.8 Anwendung: Halleffekt	8	5.5 The finite square well	25
3.2 Eigenschaftendes Magnetismus	8	5.6 Finite barrier	25
3.2.1 Magnetisierung	8		
3.2.2 Magnetische Kräfte	8	6 Atomphysik	25
3.2.3 Atomare Ursprung des Magnetismus	9	6.1 Das Atom	25
3.2.4 Oberflächenströme	9	6.1.1 Bohr'sches Atommodell	25
3.2.5 Grundbegriffe des Ferromagnetismus	9	6.1.2 Energieniveaus von Einelektronenatomen	25
3.3 Magnetische Induktion	10	6.1.3 Wellengleichung des Einelektronenatoms (Quantenmechanischen Modell)	25
3.3.1 Faraday'sches Induktionsgesetz	10	6.1.4 Quantenzahlen des Einelektronenatoms	27
3.3.2 Lenz'sche Regel	10	6.1.5 Eigendrehimpuls (Spin)	27
3.3.3 Induktivität	10	6.1.6 Periodensystem	28
3.3.4 Energie des Magnetfeldes	10	6.2 Absorption und Emission von Licht	28
3.4 Maxwell'sche Gleichungen	10	6.2.1 Atomspektren	28
3.4.1 Die Maxwell'schen Gleichungen	10	6.2.2 Einstein'sche Koeffizienten	28
3.4.2 Maxwell'scher Verschiebungstrom	11	6.2.3 Grundprinzip des Lasers	28
3.4.3 Elektromagnetisches Nah- und Fernfeld	11	6.2.4 Aufbau eines Lasers	29
3.4.4 Elektromagnetische Wellen	11		
4 Licht und Welle	12	7 Festkörperphysik	29
4.1 Grundlagen der Wellenlehre	12	7.1 Festkörper	29
4.1.1 Die eindimensionale Wellengleichung	12	7.1.1 Bändermodell - vom Atom zum Festkörper	29
4.1.2 Harmonische Wellen	12	7.1.2 Fermienergie	30
4.1.3 Superpositionsprinzip	12	7.1.3 Fermi-Dirac Verteilung	30
4.1.4 Energie, Leistung und Intensität	13	7.1.4 Leiter, Halbleiter und Isolatoren	31
4.1.5 Wellenimpedanz	13	7.2 Elektronische Leitfähigkeit von Festkörper	31
4.1.6 Dispersion	13	7.2.1 Drude-Modell	31
4.1.7 Absorption	13	7.2.2 Baendermodell und Streuung von Leitungselektronen:	31
4.1.8 Dreidimensionale Wellen	14	7.3 Halbleiter	32
4.2 Reflexion und Transmission	14	7.3.1 Dotierung von Halbleitern	32
4.2.1 Wellenausbreitung durch eine Grenzfläche	14	7.3.2 Kontaktpotential	32
4.2.2 Reflektierte und transmittierte Leistung	14	7.3.3 pn-Halbleiterübergänge	33
4.2.3 Spezialfälle	14	7.3.4 Diode	33
4.3 Stehende Wellen	14	7.3.5 Solarzelle, Photodiode und Leuchtdiode	33
4.3.1 Selbstüberlagerung	14	7.3.6 Transistor	34
4.3.2 Stehende Wellen	14	7.4 Supraleiter	34
4.3.3 Eigenfrequenzen	15	7.4.1 Grundlegende Beobachtung zur Supraleitung	34
4.4 Akustische Wellen	15	7.4.2 Mikroskopische Erklärung der Supraleitung (BCS)	34
4.4.1 Akustische Wellengleichung	15	7.4.3 Supraleiter 1. und 2. Art	34
4.4.2 Akustische Impedanz, Schallleistung und Schallpegel	15	7.4.4 Hochtemperatursupraleiter (HTC Supraleiter)	34
4.4.3 Schallausbreitung in Rohren	15		
4.4.4 Dopplereffekt und Überschall	16		
4.5 Elektromagnetische Wellen	16		
4.5.1 Wellengleichung für elektromagnetische Wellen	16		
4.5.2 Elektromagnetische Wellen im Vakuum	16		
4.5.3 Das elektromagnetische Spektrum	16		
4.5.4 Der Brechungsindex	16		
4.5.5 Lambert-Beer-Gesetz	17		
4.5.6 Reflexion an einer Metalloberfläche	17		
4.6 Brechung	17		
4.6.1 Ebene Wellen an Grenzflächen unter einem Winkel	17		
4.6.2 Reflexions- und Brechungsgesetz	17		
4.6.3 Totalreflexion	18		
4.6.4 Evaneszenz	18		
4.7 Polarisierung	18		
4.7.1 Polarisierung	18		

1 Konstanten

- Elementarladung: $e = 1.602 \cdot 10^{-19} C$
- Dielektrizitätskonstante: $\epsilon_0 = 8.854 \cdot 10^{-12} \frac{C^2}{Nm^2}$
- Kraftkonstante: $\frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 8.988 \cdot 10^9 \frac{Nm^2}{C^2}$
- Magnetische Feldkonstante: $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{N}{A^2}$
- Lichtgeschwindigkeit: $c = 2.998 \cdot 10^8 \frac{m}{s}$
- Wellenimpedanz des Vakuums: $Z_0 = 376.73 \Omega$
- Bohr-Magneton konstante: $\mu_b = 5.79 \cdot 10^{-5} \frac{eV}{T}$

Physik II

- Planck'sche Konst: $h = 2\pi\hbar = 6.626 \cdot 10^{-34} Js = 4.136 \cdot 10^{-15} \frac{eV}{Hz}$
- Planck'sche Konv: $\frac{h_{J/s}}{h_{Hz/s}} = 1.602 \cdot 10^{-19}$
- Rydberg-Energie: $-E_R = -\frac{m_e e^4}{32\pi^2 \epsilon_0^2 \hbar^2} = -13.6 eV$
- Rydbergkonstante: $R_H = \frac{E_R}{hc} = 1.10 \cdot 10^7 \frac{1}{m}$
- Atomradius (Bohrmodell): $a_0 = 0.0529 nm$

1.1 Einheiten:

- $[Q] = Coulomb = C = A \cdot s$
- $[E] = \frac{N}{C} = \frac{V}{m}$
- $[\vec{p}] = Debye = 3.335 \cdot 10^{-30} Cm$
- $[\Phi_E] = \frac{Nm^2}{C} = \text{elektrischer Fluss}$
- $[\sigma_\rho] = \frac{C}{m^2} = \text{Flächenladungsdichte}$
- $[\lambda_\rho] = \frac{C}{m} = \text{Längenladungsdichte}$
- $[E_{el}] = J = \frac{kg \cdot m^2}{s^2} = VAs = \text{Elektrostatische Energie}, (J) = \frac{(eV)(C)}{1.602 \cdot 10^{-19}(C)}; J = (V) \cdot (C)$
Ich habe $x(eV) \rightarrow x(eV) \cdot 1.60218 \cdot 10^{-19} = x'(J)$
Ich habe $y(J) \rightarrow y(J) \cdot 6.242 \cdot 10^{+18} = y'(eV)$

- $[U] = [\Phi] = Volt = V = \frac{J}{C} = \text{Spannung}$
- $[C] = \frac{F}{V} = Farad = F = \text{Kapazität}$
- $[I] = Ampere = A = \frac{C}{s} = \text{elektrischer Strom}$
- $[\sigma] = \frac{1}{\Omega m} = \text{spezifische Leitfähigkeit}$
- $[\rho] = \Omega m = \text{spezifischer Widerstand}$
- $[R] = \Omega = \text{Widerstand}$
- $[G] = \frac{1}{\Omega} = S = Simens = \text{Leitwert}$
- $[B] = \frac{N}{Am} = T(esla) = 10^4 G(auss) = \text{Magnetfelder}$
- $[j] = \frac{A}{m^2} = \text{Stromdichte}$
- $[j_A] = \frac{A}{m} = \text{Längenstromdichte}$
- $[\Phi_M] = Weber = Wb = Tm^2 = \text{magnetischer Fluss}$
- $[L] = Henry = H = \frac{Tm^2}{A} = \text{Induktivität}$
- $[R_{Atom}] = 1 \text{ Å} = 100 pm = 0,1 nm = 10^{-4} \mu m = 10^{-7} mm = 10^{-8} cm = 10^{-10} m$
- $[m_{u,Atomic}] = u = 1.661 \cdot 10^{-27} kg$

2 Elektrizität

2.1 Elektrische Felder:

2.1.1 Elektrische Ladung:

Eigenschaften

- Es gibt positive und negative Ladungen
- Gleiche Vorzeichen \rightarrow stoßen
- Kraftwirkung ist kugelsymmetrisch
- Ladung kann nicht erzeugt oder vernichtet werden
- Die kleinstmögliche Ladung ist die Elementarladung e
- Ladung \rightarrow Masse (aber nicht \leftarrow , es gibt keine Ladung ohne Masse)

2.1.2 Elektrostatische Kraft:

Coulumb'sches Gesetz: Coulombkraft

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} Q_0 Q_1 \frac{\vec{r}_0 - \vec{r}_1}{|\vec{r}_0 - \vec{r}_1|^3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} Q_0 Q_1 \frac{\vec{e}_r}{r^2}$$

Superpositionsprinzip: Die Kraftwirkung von Ladungen kann addiert werden.

Coulombkraft für N Ladungen/Kontinuierliche:

$$\vec{F} = \frac{Q_0}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N Q_i \frac{\vec{r}_0 - \vec{r}_1}{|\vec{r}_0 - \vec{r}_1|^3} = \frac{Q_0}{4\pi\epsilon_0} \int_V \rho(\vec{r}') \frac{\vec{r}_0 - \vec{r}'}{|\vec{r}_0 - \vec{r}'|^3} dx' dy' dz'$$

ρ ist (Volumen)Ladungsdichte, $[\rho] = \frac{C}{m^3}$

2.1.3 Elektrisches Feld:

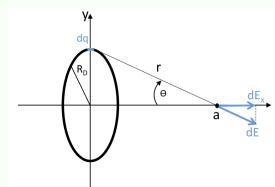
Der elektrische Feld ist gleich wie die Kraft, die auf eine Einheitsladung $Q_0 = 1C$ am Ort \vec{r}_0 wirkt. (An jedem Ort hat ein Betrag und eine Richtung)

$$\vec{E}(\vec{r}_0) = \frac{\vec{F}(\vec{r}_0)}{Q_0}$$

E-Feld für Diskrete/Kontinuirlich

$$\vec{E}(\vec{r}_0) = \sum_{i=1}^N \vec{E}_i(\vec{r}_0) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \rho(\vec{r}') \frac{\vec{r}_0 - \vec{r}'}{|\vec{r}_0 - \vec{r}'|^3} dx' dy' dz'$$

Beispiel: Drahtschleife E-Feld

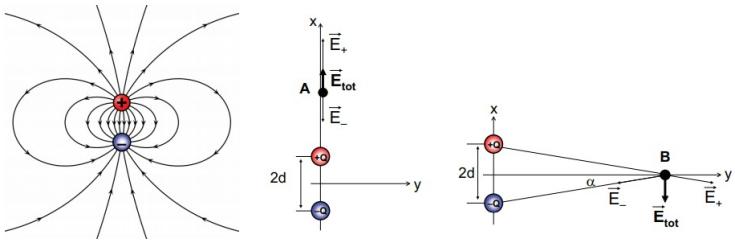


- $d\vec{E}_x = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{r^2} \cos(\theta) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{x \cdot dq}{(x^2 + R_D^2)^{3/2}}$
- $E_x = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{x}{(x^2 + R_D^2)^{3/2}}$

2.1.4 Feldlinien:

- Feldlinien zeigen die Richtung des elektrischen Feldes
- Feldlinien fangen bei einer Quelle an (+) und enden bei einer Senke (-)
- Feldlinien haben eine eindeutige Richtung (keine Kreuzung ist möglich)
- Dichte Feldlinie \propto Stärke elektrischen Feldes
- Die Feldlinienanzahl ist willkürlich, sie ist durch nichts vorgegeben

2.1.5 Elektrischer Dipol:



Zwei Ladungen, Abstand $2\vec{d}$, gleichen Betrag $|Q|$, Gesamtladung Null (ladungsneutral)

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[(+Q) \frac{\vec{r} - \vec{d}}{|\vec{r} - \vec{d}|^3} + (-Q) \frac{\vec{r} - \vec{d}}{|\vec{r} + \vec{d}|^3} \right]$$

Entlang der Achse:

$$\vec{E}(x) \stackrel{|x| > d}{=} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{4|x|d}{(x-d)^2 \cdot (x+d)^2} \vec{e}_x$$

Im Fernfeld: (Punktdipol) $x \gg d \rightarrow (x-d)^2(x+d)^2 \approx x^4$

$$\vec{E}(x) \approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{4Qd\vec{e}_x}{|x|^3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2\vec{p}}{|x|^3}$$

Dipolmoment: (zeigt von der negativen zu der positiven Ladung)

$$\vec{p} = Q \cdot 2\vec{d}$$

Senkrecht zur Achse:

$$\vec{E}(y) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{2d}{(y^2 + d^2)^{\frac{3}{2}}} \vec{e}_x$$

Im Fernfeld (Punktdipol) fällt das elektrische Feld mit r^3 ab

$$\vec{E}(y) \approx -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{4Qd\vec{e}_x}{|y|^3} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2\vec{p}}{|y|^3}$$

Allgemeines Dipolfeld (Fernfeld):

$$\vec{E}(\vec{r}) \approx -\vec{\nabla} \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{|\vec{r}|^3} \right) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{3(\vec{p} \cdot \vec{r})\vec{r}}{|\vec{r}|^5} - \frac{\vec{p}}{|\vec{r}|^3} \right)$$

Drehmoment: ($\vec{F}_+ = -\vec{F}_- = Q\vec{E}_0$)

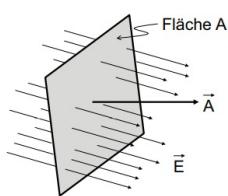
$$\vec{M} = \vec{d} \times \vec{F}_+ + (-\vec{d}) \times \vec{F}_- = \vec{p} \times \vec{E}_0$$

Potentielle Energie: hängt von Orientierung ab. Parallelien minimal, Antiparallelen maximal (nötige Arbeit um Status zu ändern: $2\vec{p} \cdot \vec{E}_0$)

$$\vec{E}_{el} = -\vec{p} \cdot \vec{E}_0$$

2.1.6 Elektrischer Fluss und Gesetz von Gauss:

Elektrischer Fluss: (proportional zur Anzahl Feldlinien die durch die Fläche hindurchgehen)



$$\Phi_E = \int_A \vec{E}(\vec{r}') \cdot d\vec{A}' \xrightarrow[\text{homogen}]{\text{Feld}} \Phi_E = \vec{E} \cdot \vec{A}$$

Theorem: Gesetz von Gauss

Discrete/kontinuierliche

$$\oint_A \vec{E}(\vec{r}') \cdot d\vec{A}' = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_i Q_i = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho(\vec{r}') dV'$$

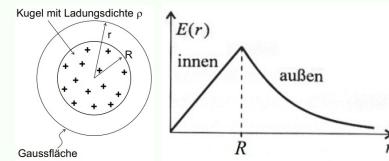
$Q \propto$ hinauslaufenden Feldlinien – hineinlaufende Feldlinien

Der Fluss durch die Oberfläche \vec{A} eines Volumens V ist proportional zur eingeschlossenen Ladung Q

Differentialform des Gesetzes von Gauss:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

Beispiel: Elektrisches Feld nichtleitenden Kugel



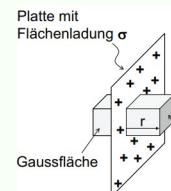
Kugel, Ladungsdichte ρ

$$\oint_A \vec{E}(\vec{r}') \cdot d\vec{A}' \underset{\text{Gesetz von Gauss}}{=} \frac{Q_{\text{Kugel}}}{\epsilon_0} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \frac{4\pi r^3}{3}$$

mit $r = R$ ausserhalb des Kugels

$$E(r) = \begin{cases} \frac{Q_{\text{Kugel}}}{4\pi\epsilon_0 r^2}, & (\text{ext}) \text{ if } r > R \\ \frac{Q_{\text{Kugel}} \cdot r}{4\pi\epsilon_0 R^3} = \frac{\rho r}{3\epsilon_0}, & (\text{int}) \text{ if } r < R \end{cases}$$

Beispiel: Elektrisches Feld ebener Platte

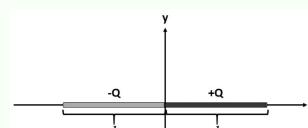


Unendlich ausgedehnte Platte mit $r \perp$ Platte

$$\oint_{A, \text{Quader}} \vec{E}(\vec{r}') \cdot d\vec{A}' = \int_{A, \text{Stirflaechen}} \dots \underset{\text{Gesetz von Gauss}}{=} \frac{\sigma_\rho A}{\epsilon_0}$$

$$E(r) = \frac{\sigma_\rho}{2\epsilon_0}$$

Beispiel: Elektrisches Feld 2 Seile-Ladungen



$$\bullet |\Delta\vec{E}| = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\Delta Q}{x^2 + y^2}$$

$$\bullet \Delta E_x = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\Delta Q}{x^2 + y^2} \cos(\theta) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\Delta Q}{x^2 + y^2} \frac{0-x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$\bullet \text{Mit } \frac{\Delta Q/Q}{-2Q} = \frac{\Delta x/l}{-\Delta x/l} \Rightarrow E_x(y) = \dots$$

Beispiel: Elektrisches Feld eines Drahtes

Unendlich langen, geraden Draht, $r \perp$ Draht

$$\oint_{A, \text{Zylinder}} \vec{E}(\vec{r}') \cdot d\vec{A}' = \int_{A, \text{Mantel}} \dots \stackrel{\text{Gesetz von Gauss}}{=} \frac{\lambda \rho L}{\varepsilon_0}$$

mit $A_{\text{Mantel}} = 2\pi r L$

$$\vec{E}(r) = \frac{\lambda \rho}{2\pi \varepsilon_0 r} \vec{e}_r = \frac{\lambda \rho \vec{r}}{2\pi \varepsilon_0 r^2}$$

2.2 Potential und Spannung:**2.2.1 Elektrostatische Energie:****Elektrostatische Energie**

Wird eine Ladung Q im elektrischen Feld \vec{E} vom Ort \vec{r}_1 zum Ort \vec{r}_2 verschoben, so muss dazu Arbeit aufgebracht werden. Da das elektrische Feld konservativ ist, hängt die aufgewendete Arbeit nur von Anfangs- und Endpunkt ab, aber nicht vom Weg, den die Ladung nimmt. Die Ladung nimmt dabei potentielle Energie auf

$$E_{el} = - \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = - \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} Q \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}$$

Mit $\vec{F}(\vec{r}) = Q \vec{E}(\vec{r})$ elektrostatische Kraft.

Im homogenen elektrischen Feld

$$E_{el/pot} = -Q \vec{E} \cdot (\vec{r}_2 - \vec{r}_1) = Q \cdot \Delta \Phi = Q \cdot (\Phi(P_2) - \Phi(P_1))$$

Elektrische Spannung

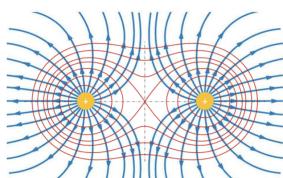
Die elektrostatische Energie pro Einheitsladung $Q = 1C$ ist die elektrische Spannung

$$U_{12} = \frac{E_{el}}{Q} = \Phi(P_1) - \Phi(P_2) = \int_{P_1}^{P_2} \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

Elektrisches Potential

Um Energie und Spannung absolut vergleichen zu können, wählt man einen Ort und bestimmt ihn als Energienullpunkt. Die Spannung **relativ zur unendlichen Entfernung** (∞) heisst elektrisches Potential

$$\Phi(\vec{r}) = - \int_{\infty}^{\vec{r}} \vec{E}(\vec{r}') \cdot d\vec{r}'$$

Potentialfeld von 2 Punktladungen:

Das elektrische Feld ist ein Vektorfeld und Feldlinien dürfen sich nicht kreuzen. Im Gegensatz dazu ist das Potential ein Skalarfeld (Gradient des E-Feldes). Das bedeutet jedem Punkt im Raum muss einem Skalar zugewiesen sein. Bei Sattelpunkten im Potential führt dies zum Kreuzen von Aquipotentiallinien. (**Hinweis:** Die Aquipotentiallinien müssen sich in der Skizze nicht schneiden.)

Beispiel: Potential einer Punktladung

Potential, mit Q & $r = |\vec{r}|$

$$\Phi(\vec{r}) = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_{\infty}^r \frac{Q}{r'^2} dr' = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q}{r}$$

Umgekehrt erhält man das elektrische Feld

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\vec{\nabla} \cdot \Phi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q}{r^2} \vec{e}_r$$

Beispiel: Potential eines Punktdipols

Punktdipol, mit $\vec{p} = 2Q\vec{d}$

$$\Phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{|\vec{r}|^3}$$

Beispiel: Potential einer Ladungsverteilung

Potential, Ladungsverteilung $\rho(\vec{r})$ (mit Superpositionsprinzip)

$$\Phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_{V'} \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV'$$

2.2.2 Feldgleichungen der Elektrostatik:

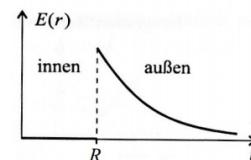
Umkehrung vom elektrischen Potential

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\vec{\nabla} \Phi(\vec{r}) = -\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}, \frac{\partial \Phi}{\partial y}, \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right)$$

Theorem: Poissongleichung

Funktioniert nur wenn die Ladungen nicht bewegen können, leitende Körper haben verschiebbliche Ladungen → Feldveränderungen → Poissongleichung nicht benutzbar

$$\frac{\rho(\vec{r})}{\varepsilon_0} = -\vec{\nabla}^2 \Phi(\vec{r}) = -\Delta \Phi(\vec{r})$$

2.2.3 Leitende Körper:

In einem leitendem Körper können sich die Ladungen verschieben.

- **Ruhelage**, wenn keine Ladungen eine elektrostatische Kraft erfahren
- Leitende Körper in einem elektrischen Feld → Oberflächenladungen Gruppierung → Feld im Innern ausgeglichen
- Alle Ladungen befinden sich auf der Oberfläche
- Auf der Oberfläche: Elektrische Feld \perp Oberfläche (tangentialer elektrisches Feld ist = 0)

$$\vec{n} \cdot \vec{E}(\vec{r}) = \frac{\sigma \rho(\vec{r})}{\varepsilon_0} \leftrightarrow \vec{n} \times \vec{E}(\vec{r}) = \vec{0}$$

- Auf der Oberfläche: Äquipotentialfläche

$$\Phi(\vec{r} = \Phi_0 = \text{konstant})$$

2.2.4 Beispiele von Ladungsverteilung:

Beispiel: E-Feld einer geladenen leitenden Kugel

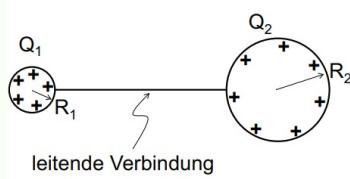
Kugel, leitende, Radius R , Gesamtladung Q_{Kugel}
Ausserhalb der Kugel ($r > R$), Mithilfe vom Gesetz von Gauss:

$$\oint \leftrightarrow E(r) \cdot A = \frac{Q_{Kugel}}{\epsilon_0} \leftrightarrow E(\vec{r}) = \frac{Q_{Kugel}}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

Innerhalb der Kugel ($r < R$): $Q = 0 \leftrightarrow E(r) = 0$

Beispiel: Krümmungsradius

Zwei leitende Kugeln, mit Radius R_1 & R_2 , Ladung Q_1 & Q_2



Das Potential auf der Oberfläche muss gleich sein

$$\Phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1}{R_1} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_2}{R_2}$$

Die Flächenladungsdichte ist dann:

$$\sigma_{\rho,i} = \frac{Q_i}{A_i} = \frac{Q_i}{4\pi R_i^2} = \frac{\Phi\epsilon_0}{R_i}$$

Und das elektrische Feld:

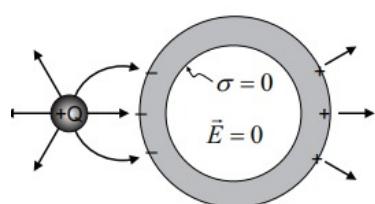
$$|\vec{E}_i| = \frac{\sigma_{\rho,i}}{\epsilon_0} = \frac{\Phi}{R_i}$$

Wichtig: elektrisches Feld nimmt mit R ab: engeren Krümmungsradius = stärkeres elektrisches Feld.

$$E \propto \frac{1}{R}$$

2.2.5 Influenz und Abschirmung:

Elektrische Leiter verschieben ihre Ladungen immer so, dass das elektrische Feld im Innern gleich Null ist. Nach Satz von Gauss die gesamte Ladung ist gleich 0



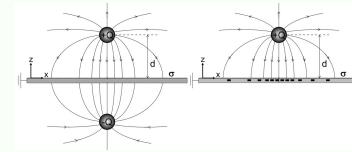
Der Innenraum ist elektrostatisch abgeschirmt (kein elektrisches Feld) solange die Oberflächenladungen effizient verschoben werden können und die Lücke nicht zu gross sind. Der leitende Hohlkörper wird auch Faraday'scher Käfig genannt.

2.2.6 Spiegelladung:

Eine Probeladung induziert auf einem elektrischen Leiter eine Flächenladung, die dasselbe Feld generiert wie eine spiegelbildliche Probeladung mit entgegengesetztem Vorzeichen. Im Falle mehrerer Probeladungen überlagern sich die Flächenladungen gemäss dem Superpositionsprinzip.

Beispiel: Spiegelladung

Ladung Q , mit Abstand d zur Leiterplatte



Leiter \rightarrow tangentiales Feld verschwindet, normale Komponente:

$$\lim_{z \rightarrow 0^-} E_z(x, y, z) = \frac{Q(-d)}{4\pi\epsilon_0(x^2 + y^2 + d^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{\sigma_\rho(x, y)}{2\epsilon_0} = 0$$

Durch Umformen:

$$\sigma_\rho(x, y) = \frac{-Qd}{2\pi(x^2 + y^2 + d^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow 0^+} E_z(x, y, z) &= \frac{Q(-d)}{4\pi\epsilon_0(x^2 + y^2 + d^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{\sigma_\rho(x, y)}{2\epsilon_0} \\ &= \frac{-2Qd}{2\pi(x^2 + y^2 + d^2)^{\frac{3}{2}}} \end{aligned}$$

Die Gesamtladung (induzierte Ladung) ist also genau gleich gross wie die Punktladung Q , aber mit entgegengesetztem Vorzeichen.

$$Q_{\text{Oberfläche}} = -\frac{Qd}{2\pi} \iint_A \frac{1}{(x^2 + y^2 + d^2)^{\frac{3}{2}}} dx dy = \dots = Q$$

2.3 Dielektrika:

2.3.1 Kondensator:

Ein Kondensator besteht aus zwei Leitern, die sich in Nähe zueinander befinden und eine gleich grosse, aber entgegengesetzte Ladung tragen. Der Kondensator ist ladungsneutral.

Plattenkondensator mit Platten mit Fläche A , Volum V Abstand d , Ladung $\pm Q$ und \vec{n} Flächennormale (elektrisches Feld im Innern ist homogen).

$$\vec{E} = \frac{\sigma_\rho}{\epsilon_0} \vec{n} = \frac{Q}{A\epsilon_0} \vec{n} \leftrightarrow U = |\vec{E}|d$$

Kapazität (Verhältnis von gespeicherter Ladung Q zur angelegten Spannung U)

$$C = \frac{Q}{U} \xrightarrow[\text{kondensator}]{\text{Platten}} C = \frac{A\epsilon_0}{d}$$

Energie (gespeichert für eine gewünschte Spannung U)

$$\begin{aligned} E_{el} &= \int_0^Q \frac{Q'}{C} dQ' = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2} QU = \frac{1}{2} U^2 C \\ &\xrightarrow[\text{kondensator}]{\text{Platten}} \frac{Q^2 d}{2A\epsilon_0} = \frac{U^2 A\epsilon_0}{2d} \end{aligned}$$

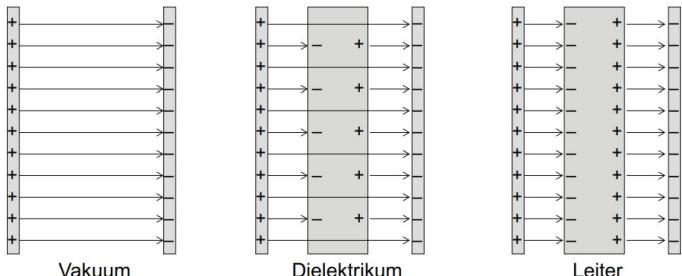
Energiedichte Speicherfähigkeit des Kondensators

$$\omega = \frac{E_{el}}{V} \xrightarrow[\text{kondensator}]{\text{Platten}} \frac{U^2 \epsilon_0}{2d^2} = \frac{1}{2} \epsilon_0 |\vec{E}|^2$$

Kraft Wirkende in Platten Kondensators

$$F = -\frac{\partial \vec{E}}{\partial x} \Big|_{d=x}$$

2.3.2 Der Kondensator mit Dielektrikum:



Material zwischen die beiden Platten (Dielektrikum) eingeführt.
 Q konstant (U_0 Spannung ohne Dielektrikum) Feld bei ϵ_r (Diellektrizitätszahl) abgeschwächt

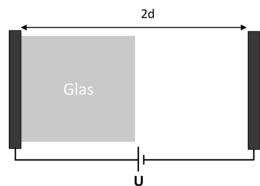
$$\epsilon_r = \frac{U_0}{U} = \frac{|\vec{E}_0|}{|\vec{E}|} = \frac{C}{C_0}$$

U konstant \rightarrow Erhöhung von der Ladung um ϵ_0
Diellektrizitätskonstante der Materie (elektrische Permittivität)

$$\epsilon = \epsilon_0 \epsilon_r$$

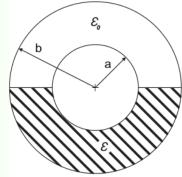
Gesamte Kapazität im Kondensator mit Dielektrikum:

- Parallel: $C_{tot} = C_{Vakuum} + C_{Diellektrikum}$
- Serie (Wie Bild): $\frac{1}{C_{tot}} = \frac{1}{C_{Vakuum}} + \frac{1}{C_{Diellektrikum}}$, mit $C_{Vakuum} = \frac{\epsilon_0}{d}$ und $C_{Vakuum} = \frac{\epsilon_0 \epsilon_r}{d}$ [Plattenkondensator Fall]



Beispiel: Kugelkondensator mit Dielektrikum

Es gilt so Superposition:



$$Q = 2\pi E_r(r)r^2 \epsilon_0 + 2\pi E_r(r)r^2 \epsilon$$

2.3.3 Elektrische Polarisation:

Verschiebungspolarisation (Schwach)

Das elektrische Feld zieht Atomkerne an und stösst Elektronen ab. Dadurch verschieben sich die Ladungen geringfügig, und es wird ein elektrischer Dipol aufgebaut (induziert). Polarisierbarkeit α nimmt mit Molekülgroße zu.

Orientierungspolarisation (Stark)

Nur für Moleküle mit permanenten Dipol: Molekül wird nach dem elektrischen Feld gerichtet. Die Polarisierung ist nicht vollständig, da die Moleküle durch thermische Bewegungen laufend in ihrer Ausrichtung gestört werden. Polarisierbarkeit α bestimmt durch Dipolmoment und Temperatur.

Polarisation Dipolmoment \propto elektrischen Feld, N = Anzahl von Molekülen, α Polarisierbarkeit.

$$\vec{P} = \frac{N}{V} \alpha \vec{E} = \frac{N}{V} \langle \vec{p} \rangle$$

Prinzip der Oberflächenladung Polarisierung erzeugt elektrisches Feld (\vec{E}_P)

$$\vec{P} = \frac{N}{V} Q \langle \vec{d} \rangle = \sigma_p \vec{n} \leftrightarrow \vec{E}_P = -\frac{P}{\epsilon_0} = -\frac{N \alpha}{V \epsilon_0} \vec{E} = -\chi_E \vec{E}$$

Elektrische Suszeptibilität

$$\chi_E = \frac{|\vec{E}_P|}{|\vec{E}|} = \epsilon_r - 1$$

$\epsilon_r =$	Vakuum	Verschiebungs-	Orientierungs-	Leiter
	1	1 – 10	10 – 100	∞

2.4 Elektrischer Strom:

2.4.1 Elektrischer Strom:

Elektrischer Strom Ladung pro Zeitintervall (oft auch J)

$$I = \frac{Q}{t} = \frac{dQ}{dt} = -neAv_D$$

Bewegungsmöglichkeiten:

- Elektronen in Metallen
- Ionen in (salzhaltigen Lösungen)
- Teilchenstrahlen im Vakuum (Teilchenbeschleuniger)

Die Stromrichtung wird von der Bewegungsrichtung der **positiven Ladung** definiert

2.4.2 Ursache des elektrischen Stroms:

Teilchen in ein elektrisches Feld \vec{E} erfahren eine Coulombkraft \vec{F}
Driftgeschwindigkeit

$$\vec{v}_D = -\frac{\vec{I}}{n \cdot e \cdot A} = -\frac{\vec{j}}{e \cdot n} \leftrightarrow \vec{j} = \frac{\vec{I}}{A}$$

mit $n = \frac{N}{V}$ = Ladungsdichte (Ladungsträgerdichte), \vec{j} = Stromdichte

2.4.3 Elektrischer Widerstand:

Spezifische Leitfähigkeit Verhältnis zwischen transportierter Ladung und elektrischem Feld (Materialkonstante)

$$\sigma = \frac{|\vec{j}|}{|\vec{E}|} = \frac{|\vec{v}_{D\text{en}}|}{|\vec{E}|} = \frac{1}{\rho}$$

Elektrischer Widerstand ($R(T)$, Temperaturabhängig) und **Leitwert** (G)

$$R = \frac{1}{G} = \frac{|\vec{E}|}{|\vec{j}|} \frac{L}{A} = \frac{\rho L}{A} = \frac{U}{I}$$

mit $j = \frac{I}{A}$ und $E = \frac{U}{L}$

Theorem: Ohm'sches Gesetz

$$U = RI \Rightarrow \blacksquare$$

- Der Strom ist proportional zur angelegten Spannung
- Die Driftgeschwindigkeit ist proportional zum angelegten elektrischen Feld
- Der elektrische Widerstand ändert sich nicht mit der angelegten Spannung
- Gilt für die meisten Metalle
- Gilt nicht für Halbleiter, Isolatoren, Supraleiter und Nicht-Ohm'sche Leiter

2.4.4 Elektrische Leistung:

Energieverlust pro Zeiteinheit

Elektrische Leistung eines Widerstandes

$$P = \frac{\Delta E}{\Delta t} = \frac{U \Delta Q}{\Delta t} = UI = RI^2 = \frac{U^2}{R}$$

3 Magnetismus

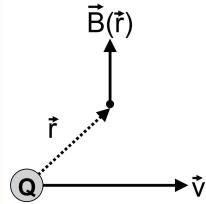
3.1 Magnetfelder:

3.1.1 Allgemeine Beobachtung zu Magnetfeldern:

- Magnetfelder haben eine Stärke und eine Richtung. Das Magnetfeld ist ein Vektorfeld.
- Magnetfelder werden durch elektrische Ströme (bewegte Ladungen) erzeugt.
- Ein Elementarmagnet ist ein magnetischer Dipol. Die zwei Pole werden mit N und S bezeichnet. Ein magnetischer Dipol wird durch einen Kreisstrom erzeugt.
- Es wurden noch nie magnetische Monopole gefunden.
- Magnetfelder können wie alle Vektorfelder durch Feldlinien beschrieben werden. Da es keine magnetischen Ladungen gibt, haben magnetische Feldlinien keinen Anfang und Ende. Magnetfeldlinien sind geschlossen.

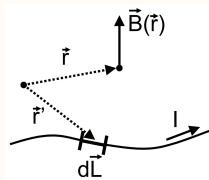
3.1.2 Biot-Savard Gesetz:

Theorem: Biot-Savard Gesetz



Eine bewgte Ladung Q erzeugt ein Magnetfeld \vec{B} im Ort \vec{r}

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Q \cdot \vec{v} \times \vec{r}}{|\vec{r}|^3}$$

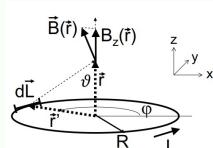


Ein Strom I erzeugt auch ein Magnetfeld \vec{B} ($dQ\vec{v} = I \cdot d\vec{L}$)

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_L \frac{I \cdot d\vec{L}' \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \vec{j}(\vec{r}') \times \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dV'$$

Beispiel: Kreisförmigen Leiterschleife

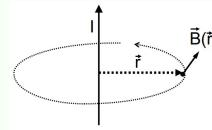
x, y Komponente sind = 0



$$\begin{aligned} B_z &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_L \frac{|d\vec{L}'| |\vec{r} - \vec{r}'|}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \sin(\vartheta) = \\ &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \frac{d\varphi R}{R^2 + z^2} \frac{R}{(R^2 + z^2)^{1/2}} = \\ &= B_z(z) = \frac{\mu_0 I R^2}{2(R^2 + z^2)^{3/2}} \end{aligned}$$

Beispiel: Gerader Leiter

Unendlich lange, gerade Leiter, Strom $\vec{I} = I\vec{e}_z$ und Abstand $\vec{r} = (x, 0, 0)$



$$\vec{B}(0) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{I \left(\begin{matrix} 0 \\ 0 \\ dz' \end{matrix} \right) \times \left(\begin{matrix} x - 0 \\ 0 - 0 \\ 0 - z' \end{matrix} \right)}{\left| \begin{matrix} x - 0 \\ 0 - 0 \\ 0 - z' \end{matrix} \right|^3} = \frac{\mu_0 I}{2\pi x} \vec{e}_y$$

Für eine beliebige Stromrichtung und Position

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{(\vec{I} \times \vec{e}_r)}{|\vec{r}|}$$

Achtung: Wenn dicke (a) gerade Leiter nicht $\rightarrow 0$ $\Rightarrow \vec{B}(r) = \frac{\mu_0 I r}{2\pi a^2} \vec{e}_\varphi$ for $r < a$

3.1.3 Magnetischer Dipol:

Das Magnetfeld eines Kreisstroms ist identisch mit dem Magnetfeld eines Dipols, wobei die Dipolstärke dem Produkt von Strom und Kreisfläche gleich ist

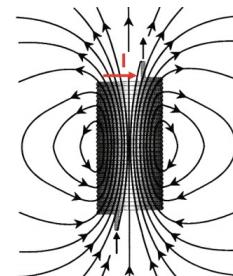
$$\vec{m} = IA \quad \xrightarrow[\text{strom}]{\text{Kreis}} \vec{m} = I\pi R^2 \vec{n} \Rightarrow \begin{cases} B_z(z) = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{2|\vec{m}|}{|z|^3} = \frac{\mu_0 I R^2}{2|z|^3} \\ B_z(r) \approx \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{3\vec{e}_r \cdot (\vec{m} \cdot \vec{e}_r) - \vec{m}}{|\vec{r}|^3} \end{cases}$$

Hinweis: $I = Q/t = Q/T = Q\omega/2\pi$

Drehmoment und potentielle Energie von einem Dipol in einem äusseren Magnetfeld \vec{B}_0

$$\vec{M} = \vec{m} \times \vec{B}_0 \leftrightarrow E_{pot} = -\vec{m} \cdot \vec{B}_0$$

3.1.4 Zylinderspule:



Spule, entlang der z-Achse ausgerichtet, N Leiterschleifen, Länge L , Strom I , Windungsdichte $\frac{N}{L}$, Längenstromdichte $j_A = \frac{IN}{L}$

$$\begin{aligned} B_z(z) &= \frac{N}{L} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} dz' \cdot \frac{\mu_0 I R^2}{2[R^2 + (z' - z)^2]^{\frac{3}{2}}} = \\ &= \frac{\mu_0 I N}{2L} \left[\frac{z + L/2}{\sqrt{R^2 + (z + \frac{L}{2})^2}} - \frac{z - L/2}{\sqrt{R^2 + (z - \frac{L}{2})^2}} \right] \end{aligned}$$

Im Zentrum der Spule oder falls die Spule sehr lang ist

$$B_z(0) \approx \frac{N}{L} \mu_0 I = \mu_0 j_A$$

Falls $L \gg R$ (Spule ist sehr Lang) die Feld im innern ist Konstant

3.1.5 Gesetz von Gauss für Magnetfelder:

Magnetischer Fluss durch eine Fläche A
 $\Phi_M \propto$ Anzahl Feldlinien durch A

$$\Phi_M = \int_A \vec{B}(\vec{r}) d\vec{A}' \xrightarrow{\text{homogen}} \Phi_M = \vec{B} \cdot \vec{A}$$

Theorem: Gesetz von Gauss für Magnetfelder

Magnetische Feldlinie sind geschlossen! (IN=OUT)

$$\oint_A \vec{B}(\vec{r}) \cdot d\vec{A}' = 0 \Leftrightarrow \nabla \cdot \vec{B}(\vec{r}) = 0$$

3.1.6 Durchfluchtungsgesetz:

Theorem: Durchfluchtungsgesetz

Der Strom durch eine Fläche \vec{A} ist proportional zum Magnetfeld, welches tangential dem Rand der Fläche entlangläuft. Die Proportionalitätskonstante hat den Wert μ_0 . Wenn $L = \text{Umfang}$

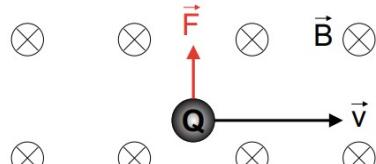
$$\oint_L \vec{B}(\vec{r}) \cdot d\vec{L}' = \mu_0 I = \mu_0 \int_A j(\vec{r}') d\vec{A}'$$

Differentialform Die Anzahl Feldlinien, welche parallel zum Rand einer Fläche entlangläuft, ist proportional zum Strom, der durch die Fläche fliesst

$$\nabla \times \vec{B}(\vec{r}) = \mu_0 j(\vec{r})$$

3.1.7 Lorentzkraft und Ampere'sches Gesetz:

Lorentzkraft Kraft von Magnetfeld auf Ladung mit Geschwindigkeit \vec{v}



$$\vec{F}(\vec{r}) = Q \vec{v} \times \vec{B}(\vec{r})$$

Für einen stromdurchflossenen Leiter ($dQ\vec{v} = Id\vec{L}$)

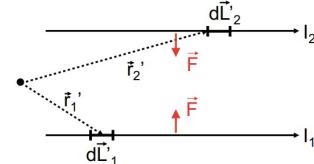
$$\vec{F} = \int_L Id\vec{L}' \times \vec{B}(\vec{r}')$$

Theorem: Ampere'sches Gesetz

Zwei Leiter nebeneinander generieren Magnetfelder die generieren Kräfte auf die andere Leiter.
Für zwei Ladungen (Q_i) und zwei Geschwindigkeiten (\vec{v}_i)

$$\vec{F} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Q_1 \vec{v}_1 \times (Q_2 \vec{v}_2 \times (\vec{r}_1 - \vec{r}_2))}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3}$$

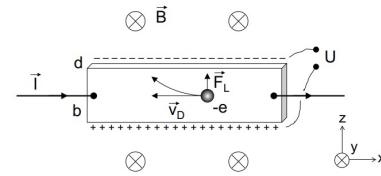
Für zwei Leiter mit Länge (L_i) und Ströme (I_i)



$$\vec{F} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{L_1} \int_{L_2} \frac{I_1 d\vec{L}'_1 \times (I_2 d\vec{L}'_2 \times (\vec{r}'_1 - \vec{r}'_2))}{|\vec{r}'_1 - \vec{r}'_2|^3}$$

Wenn in zwei geradlinigen, parallelen, sehr langen elektrischen Leitern mit dem Abstand 1 m Ströme gleicher Stärke fliessen, und wenn zwischen den Leitern pro Einheitslänge (1m) eine Kraft von $2 \cdot 10^{-7} N$ wirkt, dann ist der Strom in jedem Leiter gleich 1Ampere

3.1.8 Anwendung: Halleffekt:



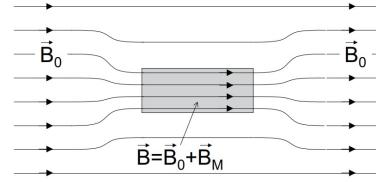
Lorentzkraft bewegt Elektronen \rightarrow Spannung \rightarrow Elektrostatische Kraft
Equilibrium wenn

$$\vec{F}_L = \vec{F}_C \Leftrightarrow U = \frac{IB}{end}$$

$$\left((-e)\vec{v}_D \times \vec{B} = -(-e)\vec{E} \Leftrightarrow \frac{IB}{nbd}\vec{e}_z = \frac{eU}{b}\vec{e}_z \Leftrightarrow \frac{IB}{nbd} = \frac{eU}{b} \right)$$

3.2 Eigenschaften des Magnetismus:

3.2.1 Magnetisierung:



Relative magnetische Feldkonstante (Verstärkung/Abschwächung von Feld, B_M = Feld von Material)

$$\mu_r = \frac{|\vec{B}|}{|\vec{B}_0|} \Leftrightarrow \vec{B} = \vec{B}_0 + \vec{B}_M = \mu_r \vec{B}_0$$

Magnetische Suszeptibilität \vec{B}_M relativ zu \vec{B}_0

$$\chi_m = \frac{|\vec{B}_M|}{|\vec{B}_0|} = \mu_r - 1$$

Magnetische Erregung $\vec{H} = \frac{\vec{B}_0}{\mu_0}$ und Magnetisierung $\vec{M} = \frac{\vec{B}_M}{\mu_0}$

3.2.2 Magnetische Kräfte:

Drehmoment homogenen und inhomogenen Magnetfeld $\vec{M} = \vec{m} \times \vec{B}$

Translatorische Kraft nur inhomogenen Magnetfeld $\vec{F} = -\vec{\nabla} E_{pot} = \vec{\nabla}(\vec{m} \cdot \vec{B})$

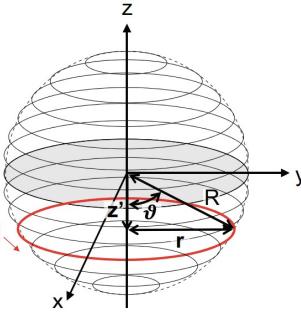
Wenn $\vec{m} \parallel \vec{B} \rightarrow \vec{F} = \pm |\vec{m}| |\vec{\nabla}| \vec{B}|$, $\vec{\nabla} |\vec{B}|$ = Feldgradient

3.2.3 Atomare Ursprung des Magnetismus:

	Diamagnetismus	Paramagnetismus	Ferromagnetismus
Ursache	Magnetfeld verstärkt/schwächt atomare Kreisströme	Unkompensierte Atomare Kreisströme generieren Dipol	Kollektive Ausrichtung von atomaren Dipolen
Wirkung	Magnetfeld wird abgeschwächt	Magnetfeld wird verstärkt	Magnetfeld wird verstärkt
Stärke	Sehr schwach	Schwach	Sehr Stark
μ_r	< 1	> 1	$\gg 1$
χ_m	< 0	> 0	$\gg 0$
T. abhängig	Nein	Nimmt mit steigender Temperatur ab	Verschwindet wenn Curietemperatur überschritten wird
Elektronen-polarisation	Keine Ungepaar-ten, (keine atomare Dipole)	Ungepaar-ten (atomare Dipole)	Orientierungs-Verschiebung

Magnetische Abschirmung Trifft eine magnetische Feldlinie auf eine Grenzfläche zwischen einem unmagnetischen und einem ferromagnetischen Material, so verläuft sie auf der unmagnetischen Seite fast senkrecht zur Oberfläche, und auf der magnetischen Seite fast parallel zur Oberfläche.

Beispiel: Homogener magnetisierter Kugel



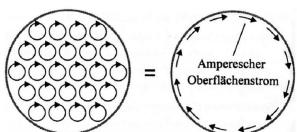
Kugel, Radius R , Magnetisierung \vec{M} (z-Achse). Gesucht ist das Feld auf der Achse

$$\begin{aligned} B_z &= \int \frac{\mu_0 r^2}{2(r^2 + [z' - z]^2)^{\frac{3}{2}}} dI \quad \rightarrow dI = j_A R d\vartheta \\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mu_0 r^2 j_A R}{2(r^2 + [z' - z]^2)^{\frac{3}{2}}} d\vartheta \quad \rightarrow \vec{j}_A = \vec{M} \times \vec{n} = |\vec{M}| \frac{r}{R} \\ &= \int_{-R}^R \frac{\mu_0 |\vec{M}| r^2}{2(r^2 + [z' - z]^2)^{\frac{3}{2}}} dz' \quad \rightarrow r = \sqrt{R^2 - z'^2} \\ &= \frac{2\mu_0 |\vec{M}| R^3}{3|z|^3} \end{aligned}$$

Von dieser Resultat ist es sichtbar, dass $\vec{m} = V\vec{M}$
Der Dipolmoment einer Kugel ist dann

$$\vec{m} = 4\pi R^3 \frac{\vec{M}}{3}$$

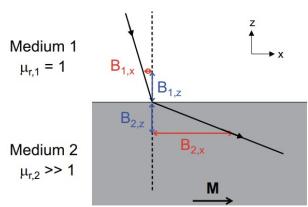
3.2.4 Oberflächenströme:



Das Magnetfeld eines Körpers mit Magnetisierung \vec{M} ist identisch mit dem Magnetfeld der zugehörigen Längenstromdichte \vec{j}_A eines Ringstroms I , welcher an der Oberfläche des Körpers um diesen herumläuft

$$\vec{M} = \frac{\vec{m}}{V} = \frac{IA}{Ad} = \vec{n} \times \vec{j}_A$$

Grenzfläche



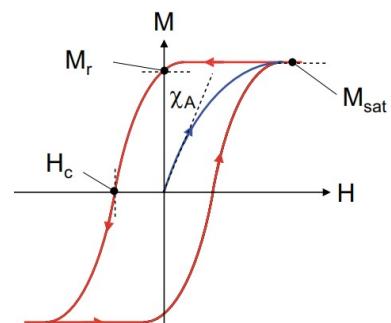
Der senkrechte Komponente des Magnetfeldes ist beim Oberflächendurchtritt stetig, während sich die parallele Komponente um den Betrag der Längenstromdichte ändert.

$$\vec{B} = \begin{cases} \vec{B}_0, & \text{ausserhalb} \\ \vec{B}_0 + \mu_0 \vec{M} = \vec{B}_0 + \mu_0 (\vec{n} \times \vec{j}_A) & \text{innerhalb} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \vec{n} \cdot (\vec{B}_2 - \vec{B}_1) = 0 & \perp \text{Komponente} \\ \vec{n} \times (\vec{B}_2 - \vec{B}_1) = -\mu_0 \vec{j}_A & \parallel \text{Komponente} \end{cases}$$

3.2.5 Grundbegriffe des Ferromagnetismus:

Hysteresis



- M_{sat} = Sättigungsmagnetisierung
- M_r = Remanenzmagnetisierung
- H_c = Koerzitivfeld
- $\chi_A \propto$ Steigung der Neukurve
- Hart/weich wenn schwierig/leicht zu magnetisieren

Magnetische Anisotropie wenn nicht jede Achse ist gleich schwierig zu magnetisieren.

Anisotropieparameter K (E Anisotropieenergie, V Volum und ϑ Winkel zwischen Magnetachse und Magnetisierung)

$$E = KV \sin^2(\vartheta)$$

Curie-Temperatur T_C Temperatur ab ein Ferromagnet ein Paragagnet wird.
(M_0 ist die Magnetisierung am absoluten Nullpunkt)

3.3 Magnetische Induktion:

3.3.1 Faraday'sches Induktionsgesetz:

Wir messen mit einem Voltmeter die Spannung an den Enden einer Leiterschleife, und beobachten was geschieht, wenn ein Magnet (Magnetfeld) in die Nähe gebracht wird.

- Die Spannung ist proportional zur Fläche der Schleife
- Die Spannung ist proportional zur Magnetfeldstärke
- Das Vorzeichen der Spannung wechselt mit dem Vorzeichen des Magnetfeldes
- Die Spannung ist proportional zur Geschwindigkeit, mit der das Magnetfeld oder die Fläche geändert wird

Theorem: Faraday'sches Induktionsgesetz

U Induktionsspannung (electromotive force, EMF, geleistete Arbeit pro Einheitsladung), es ist eine dynamische Spannung

$$U = -\frac{d}{dt} \int_A \vec{B}(\vec{r}') \cdot d\vec{A}' = -\frac{d\Phi_M}{dt}$$

mit A z.B. die Fläche einer Schleife **Differentialform**

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{d\vec{B}}{dt}$$

Hinweis: $U = RI$ und $R = \frac{L}{A} \frac{1}{\sigma} = \rho \frac{L}{A}$ mit A = Querschnittsfläche.

Hinweis: Effektive Strom ($P_{eff} = I_{eff}^2 R$)

$$I_{eff} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i^2(t) dt}$$

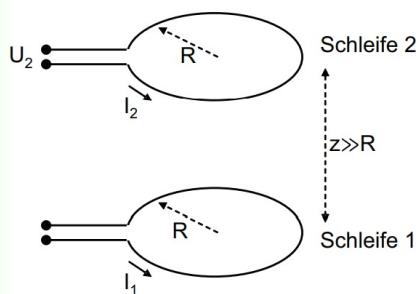
für $i(t) = I_0 \sin(\omega t)$ die eff. Wert ist $\frac{I_0}{\sqrt{2}}$

3.3.2 Lenz'sche Regel:

Theorem: Lenz'sche Regel

Die induzierte Spannung und der induzierte Strom sind so gerichtet, dass sie eine der Ursache entgegengerichtete Wirkung erzielen

Beispiel: Zwei Leiterschleifen



$$B = \frac{\mu_0 I_1 R^2}{2z^3} \rightarrow \Phi_M = \pi R^2 B = \frac{\mu_0 I_1 \pi R^4}{2z^3}$$

1. I_1 konstant $\rightarrow U_2 = 0$
2. I_1 wird erhöht $\rightarrow U_2 < 0$ (entgegengesetzt)
3. z wird vergrößert $\rightarrow U_2 > 0$

Wirbelströme führen zu Leistungsverlusten, sie nehmen zu mit \vec{v} von Leiter, \vec{B} , Dicke von Leitern und mit der Leitfähigkeit des Leiters

Skineffekt Der Skineffekt bezeichnet das Phänomen, dass hochfrequente Ströme nur in einer dünnen Oberflächenschicht eines Leiters fließen. Die Eindringtiefe δ ist für gute Leiter (z.B. Kupfer) bei $f = 1MHz$ etwa $70\mu m$.

$$\delta \propto \frac{1}{\sqrt{f}}$$

3.3.3 Induktivität:

Die induzierte Spannung ist direkt proportional zur $\frac{dI}{dt}$

$$U_2 = -\frac{d\Phi_M}{dt} = -L \frac{dI}{dt}$$

Die Proportionalitätskonstante L wird **Induktivität** genannt

$$L = \frac{\Phi}{I} = \int_A \vec{B}(\vec{r}') \cdot d\vec{A}'$$

Beispiel: Selbstinduktion

Im Zentrum einer langen Spule (N Windungen)

$$L = \frac{1}{I} \sum_{i=1}^N N \int_{A_i} \vec{B}(\vec{r}') \cdot d\vec{A}' = \frac{N}{I} \int_A \frac{\mu_0 I N}{l} d\vec{A}' = \frac{N^2 \mu_0 \pi R^2}{l}$$

3.3.4 Energie des Magnetfeldes:

Energie in einer Induktivität

$$E_{magn} = \int_{T_1}^{T_2} P(t) dt = \int_{T_1}^{T_2} U(t) I(t) dt$$

Beispiel: Induktivität

Gegeben: $I(t)$, $U(t)$, $T_1 = 0$, $T_2 = T$, Geometrie: Spule mit N Windungen

Gesucht: E_{magn}

$$I(t) = I_0 \frac{t}{T}$$

$$U(t) = L \frac{dI}{dt} = \frac{LI_0}{T}$$

$$E_{magn} = \int_0^T P(t) dt = \frac{1}{2} LI_0^2$$

Energiedichte des Magnetfeldes

$$w = \frac{E_{magn}}{V} \xrightarrow[\text{(B konstant)}]{\text{Induktivität}} \frac{B^2}{2\mu_0}$$

3.4 Maxwell'sche Gleichungen:

3.4.1 Die Maxwell'schen Gleichungen:

Kraftgesetz (Coulomb- und Lorentzkraft)

$$\vec{F}(\vec{r}) = Q_0 [\vec{E}(\vec{r}) + \vec{v} \times \vec{B}(\vec{r})]$$

Elektrische Felder durch:

- Elektrische Ladung (Coulomb- und Gaussgesetz)
- Zeitlich änderndes Magnetfeld (Induktion/Faraday)

Magnetfeld durch:

- Elektrischen Strom (Biot-Savart und Durchflutungsgesetz)
- Zeitlich änderndes e-Feld (Verschiebungstrom, Durchflutungsgesetz)

Theorem: Maxwell'sche Gleichungen

1. Gesetz von Gauss

$$\oint_A \vec{E}(\vec{r}') \cdot d\vec{A}' = \frac{Q}{\epsilon_0} \leftrightarrow \nabla \cdot \vec{E}(\vec{r}) = \frac{\rho(\vec{r})}{\epsilon_0}$$

2. Gesetz von Gauss für Magnetfelder

$$\oint_A \vec{B}(\vec{r}') \cdot d\vec{A}' = 0 \leftrightarrow \nabla \times \vec{B}(\vec{r}) = 0$$

3. Faraday'sche Induktionsgesetz

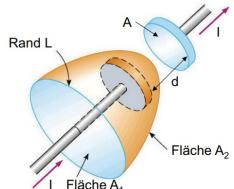
$$\oint_L \vec{E}(\vec{r}') \cdot d\vec{L}' = -\frac{d}{dt} \oint_A \vec{B}(\vec{r}') \cdot d\vec{A}' \leftrightarrow \nabla \cdot \vec{E}(\vec{r}) = -\frac{d\vec{B}(\vec{r})}{dt}$$

4. Erweitertes Durchflutungsgesetz

$$\begin{aligned} \oint_L \vec{B}(\vec{r}) \cdot d\vec{L}' &= \mu_0 \epsilon_0 \frac{d}{dt} \int_A \vec{E}(\vec{r}') \cdot d\vec{A}' \leftrightarrow \\ &\leftrightarrow \nabla \times \vec{B}(\vec{r}) = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{d\vec{E}(\vec{r})}{dt} \end{aligned}$$

Diese beiden Gesetze sind zusammen als die 4. Maxwell-Gleichung bekannt. Des Weiteren können Magnetfelder nicht durch eine magnetische Ladung erzeugt werden

3.4.2 Maxwell'scher Verschiebungstrom:



Verschiebungstrom für ein Plattenkondensator (durch A_2)

$$I_V = \epsilon_0 \frac{d\phi_E}{dt} = \epsilon_0 \frac{d}{dt} \int_A \vec{E}(\vec{r}') \cdot d\vec{A}'$$

Durchflutung mit Verschiebungstrom

$$\oint_L \vec{B}(\vec{r}') \cdot d\vec{L}' = \mu_0(I + I_V) = \mu_0 I + \mu_0 \epsilon_0 \frac{d}{dt} \int_A \vec{E}(\vec{r}') \cdot d\vec{A}'$$

3.4.3 Elektromagnetisches Nah- und Fernfeld:

Maxwellgleichungen für Nah und Fernfeld

Nahfeld In diesem Fall dominieren die Beiträge der Ladung und des Stromes, das heißt, die elektrischen Felder, die durch statische und bewegte Ladungen verursacht werden

$$\nabla \cdot \vec{E}(\vec{r}) = \frac{\rho(\vec{r})}{\epsilon_0}$$

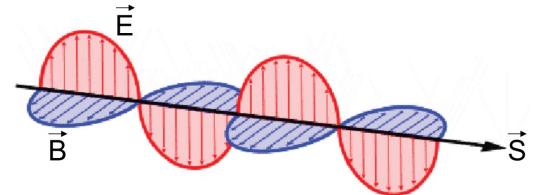
$$\nabla \times \vec{B}(\vec{r}) \approx \mu_0 \vec{j}$$

Fernfeld In diesem Fall dominieren genau die anderen Beiträge, da die zeitlichen Ableitungen von elektrischem Feld und Magnetfeld nun grosse Werte annehmen

$$\nabla \times \vec{E}(\vec{r}) = -\frac{d\vec{B}(\vec{r})}{dt}$$

$$\nabla \times \vec{B}(\vec{r}) \approx \mu_0 \epsilon_0 \frac{d\vec{E}(\vec{r})}{dt}$$

3.4.4 Elektromagnetische Wellen:



Die Maxwell'schen Gleichungen im Fernfeld lassen sich zu einer Wellengleichung umformen

$$\frac{d^2 \vec{B}(\vec{r})}{dt^2} = -\frac{1}{\mu_0 \epsilon_0} \nabla \times (\nabla \times \vec{B}(\vec{r})) = c^2 \nabla^2 \vec{B}(\vec{r})$$

$$\frac{d^2 \vec{E}(\vec{r})}{dt^2} = c^2 \nabla^2 \vec{E}(\vec{r})$$

Ausbreitungsgeschwindigkeit der e-Welle

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} = 2.998 \cdot 10^8 \frac{m}{s}$$

Poynting Vektor (\parallel Ausbreitungsrichtung)

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} (\vec{E} \times \vec{B}) = \vec{E} \times \vec{H}$$

Intensität Elektromagnetische Welle

$$I = |\vec{S}|$$

wobei \vec{S} der Poynting Vektor ist.

Der Poynting-Vektor ist eine nutzliche Größe mit einigen weiteren Bedeutungen; insbesondere entspricht sein Betrag der Leistungsdichte (Leistung pro Fläche), die durch die elektromagnetische Welle transportiert wird.

4 Licht und Welle

4.1 Grundlagen der Wellenlehre:

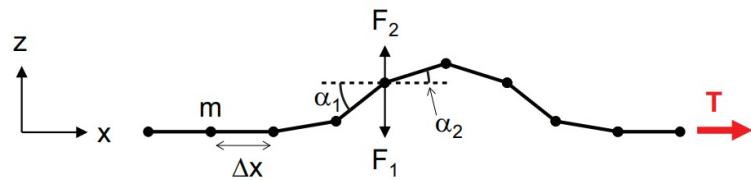
4.1.1 Die eindimensionale Wellengleichung:

Eindimensionale Wellengleichung:

$$\frac{d^2\psi(x,t)}{dt^2} = c^2 \frac{d^2\psi(x,t)}{dx^2}$$

mit c Wellengeschwindigkeit

Eindimensionale Seilwelle



Kraft auf ein Massenelement m

$$F_z \approx F_2 + F_1 \approx T \left(\frac{\Delta z_2}{\Delta x} - \frac{\Delta z_1}{\Delta x} \right) \approx T \Delta x \frac{d^2 z}{dx^2}$$

$$F_z = \mu \Delta x \frac{d^2 z}{dt^2}$$

mit $\mu = \frac{m}{\Delta x}$ die **Massenbelegung** (Masse pro Länge) **Wellengleichung der Seilwelle** (durch Gleichgewicht)

$$\frac{d^2 z}{dt^2} = \frac{T}{\mu} \frac{d^2 z}{dx^2} = c^2 \frac{d^2 z}{dx^2}$$

mit $c = \sqrt{\frac{T}{\mu}} = \sqrt{\frac{T}{\rho A}}$

4.1.2 Harmonische Wellen:

$$\psi(x,t) = \psi_0 e^{i(\omega t - kx + \varphi)}$$

mit:

- ψ_0 Amplitude der Welle
- φ Phase
- Zeitgrößen:
 - ω Kreisfrequenz
 - $f = \frac{\omega}{2\pi}$ Frequenz
 - $T = \frac{1}{f} = \frac{2\pi}{\omega}$ Periodendauer
- Ortsgrößen:
 - k Wellenvektor
 - $\tilde{\nu} = \frac{k}{2\pi}$ Wellenzahl
 - $\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{\omega} v_p$ mit v_p = Wellengeschwindigkeit

Wellengeschwindigkeit: (durch Einsetzen von der harmonischen Welle in die Wellengleichung)

$$c = \frac{\omega}{k}$$

Komplexe und reelle Schreibweise: (Physikalisch sind immer nur die reellen Teile sichtbar)

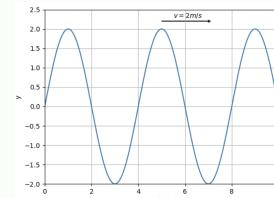
$$\psi(x,t) = \psi_0 e^{i(\omega t - kx + \varphi)} = \psi_0 \cos(\omega t - kx + \varphi)$$

Wellen-lauf-richtung

Rechtlaufende Welle mit $-kx$ Term, Linkslaufende Welle mit $+kx$ Term **Phase:** bestimmt Amplitude zur Zeit $t = 0$ am Ort $x = 0$. Oft spielt es keine Rolle und wird $\varphi = 0$ gesetzt werden.

Phasendifferenz: Unterschied zwischen der Phase von zwei Wellen. Siehe Interferenz.

Beispiel: Wellenfunktion



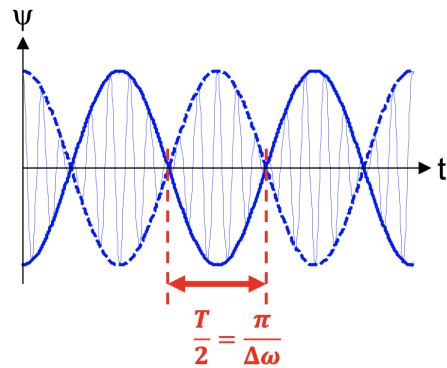
$$\psi(x,t) = 2 \sin\left(\frac{\pi}{2}x - \pi t\right)$$

4.1.3 Superpositionsprinzip:

Übertragung von Elementarwellen: ($N \leftrightarrow \infty$)

$$\psi(x,t) = \sum_{n=1}^N \psi_{0,n} e^{i(\omega_n t - k_n x + \varphi_n)} \leftrightarrow \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \psi_0(\omega) e^{i\varphi(\omega)} e^{i\omega[t - \frac{x}{c}]}$$

Schwebung:



Zwei Wellen, mit Frequenz ω_1 und ω_2 , gleicher Amplitude ψ_0 und Phase $\varphi = 0$ **Superposition:** ($x = 0$)

$$\psi(t) = \psi_0 e^{i\omega_1 t} + \psi_0 e^{i\omega_2 t} = \psi_0 e^{i\bar{\omega}t} (e^{-i\Delta\omega t} + e^{i\Delta\omega t})$$

$$\psi(t) = \psi_0 e^{i\bar{\omega}t} 2 \cos(\Delta\omega t)$$

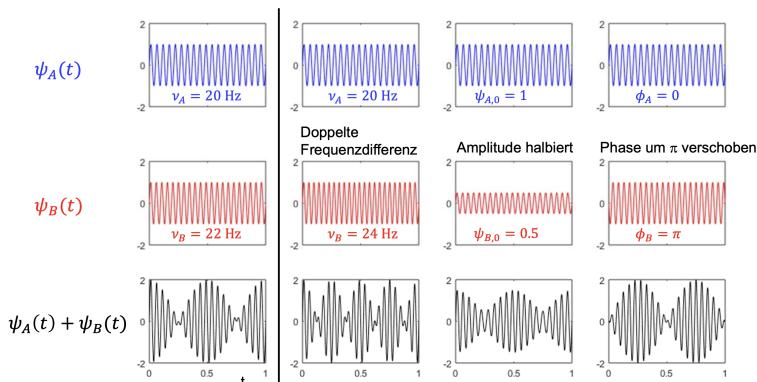
mit $\bar{\omega} = \frac{1}{2}(\omega_2 + \omega_1)$ die mittlere Frequenz und $\Delta\omega = \frac{1}{2}|\omega_2 - \omega_1|$ die Hälfte der Frequenzdifferenz.

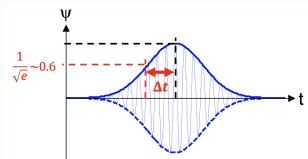
Die Amplitude wird mit der Periode der Frequenzdiff. moduliert. Schwebungsfrequenz:

$$f_{Schwebung} = 2\Delta\omega$$

Die Modulation $\cos(\Delta\omega t)$ ist die Einhüllende.

Die Frequenz die man hört der Schwebung ist: $w' = w \pm \Delta w$



Beispiel: Gaussförmiges Wellenpaket

Ein gaussförmiges Wellenpaket hat eine Einhüllende, welche einer Gausskurve entspricht.

$$\psi(t) = \psi_0 e^{i\bar{\omega}t} e^{-\frac{t^2}{2(\Delta t)^2}}$$

mit $\bar{\omega}$ die mittlere Frequenz der Welle und Δt die Breite des Wellenpakets. **Räumliche Ausdehnung des Wellenpaketes:**

$$\Delta x = c \cdot \Delta t$$

Wellenpaket durch das Frequenzspektrum ausgedrückt:

$$\psi(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \psi_0(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

Frequenzspektrum

$$\psi_0(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \omega_0 e^{i\bar{\omega}t} e^{-\frac{t^2}{2(\Delta t)^2}} e^{-i\omega t} = \psi_0 \cdot \Delta t \cdot e^{-\frac{(\omega - \bar{\omega})^2 (\Delta t)^2}{2}}$$

4.1.4 Energie, Leistung und Intensität:

Energie einer Seilwelle (bei Nulldurchgang, E_{kin} max, keine E_{pot})

$$E = E_{kin} = \frac{1}{2} m \left(\frac{d\psi}{dt} \right)^2 = \frac{1}{2} \mu \Delta x \left(\frac{d\psi}{dt} \right)^2$$

Energiedichte einer Seilwelle

$$w = \frac{E}{\Delta x} = \frac{1}{2} \mu \left(\frac{d\psi}{dt} \right)^2$$

Leistung einer Seilwelle

$$P = \frac{dE}{dt} = \frac{E}{\Delta x} c = \frac{1}{2} \mu c \left(\frac{d\psi}{dt} \right)_{max}^2$$

Intensität einer eindimensionalen Welle

$$I = P$$

Intensität einer zweidimensionalen Welle

$$I = \frac{P}{\tilde{U}}$$

mit \tilde{U} Umfang

Intensität einer dreidimensionalen Welle (Schall, Licht)

$$I = \frac{P}{A}$$

mit A Fläche von die Kugel

Intensität als Quadrat der Amplitude

$$I \equiv |\psi|^2 = \frac{1}{T} \int_0^T |\psi(x, t')|^2 dt' = \frac{1}{2} \psi_0^2$$

Mittlere Amplitude (rms, root mean square)

$$\psi_{rms} = \frac{1}{\sqrt{2}} |\psi_0|$$

4.1.5 Wellenimpedanz:

Die Wellenimpedanz ist das Verhältnis von auslenkender Kraft zur Geschwindigkeit der Auslenkung. **Wellenimpedanz eines Seils**

$$Z = \frac{F_z}{\frac{dz}{dt}} \approx \frac{T}{c} = \sqrt{\mu T}$$

mit T Spannung des Seils Ein Medium ist durch die Wellenimpedanz Z und die Wellengeschwindigkeit c charakterisiert.

4.1.6 Dispersion:

Tritt Frequenzabhängigkeit der Wellengeschwindigkeit auf, wird dies **Dispersion** genannt

$$c = c(\omega) = \frac{\omega}{k(\omega)}$$

Eine Welle, die sich in einem dispersiven Medium ausbreitet, erfüllt im Allgemeinen die Wellengleichung nicht mehr und verändert ihre Form während der Ausbreitung

Phasengeschwindigkeit (Geschwindigkeit eines Wellenmaximums)

$$v_p = \frac{\omega}{k}$$

Gruppengeschwindigkeit (Geschwindigkeit der Einhüllenden eines Wellenpaketes)

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = v_p + k \frac{dv_p}{dk}$$

Ohne Dispersion sind die zwei Geschwindigkeiten identisch

$$v_g = v_p = c$$

4.1.7 Absorption:

Neben einer Verlangsamung der Welle in einem Medium kann auch Absorption auftreten.

Das heisst, die Intensität der Welle nimmt mit der Distanz ab, welche sie im Medium zurücklegt. Dabei gibt die Welle Energie ans Medium ab **Amplitude als funktion der Zeit**

$$\psi(t) = \psi_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$$

mit ψ_0 Amplitude zur zeit $t = 0$ und τ **Exponentielle Abklingzeit** (Zeit nach welcher die Amplitude $\frac{1}{e} = 0.368$ der Ausgangsamplitude abgefallen ist)

Amplitude als funktion der Position und Zeit

$$\psi(x, t) = \psi_0 e^{-\frac{\alpha x}{2}} e^{i(\omega t - kx + \varphi)}$$

Charakteristische Abfalldistanz oder Eindringtiefe

$$\delta_e = c\tau = \frac{2}{\alpha}$$

mit α **Absorptionskoeffizient**
Intensität der Welle

$$I(x) = I_0 e^{-\alpha x}$$

Theorem: Kramers-Kronig-Beziehungen

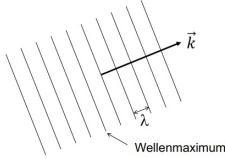
Eine Welle mit Absorption zeigt gleichzeitig auch Dispersion und umgekehrt.

4.1.8 Dreidimensionale Wellen:

3D harmonische Wellen oder Ebene Wellen

$$\psi(\vec{x}, t) = \psi_0 e^{\omega t - \vec{k} \cdot \vec{x} + \varphi}$$

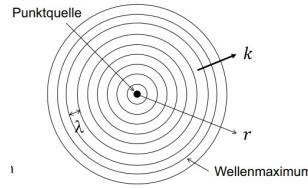
3D Wellengleichung, Planarwelle



$$\frac{d^2\psi(\vec{x}, t)}{dt^2} = c^2 \vec{\nabla} \psi(\vec{x}, t) = c^2 \left(\frac{d^2}{dx^2} + \frac{d^2}{dy^2} + \frac{d^2}{dz^2} \right) \psi(\vec{x}, t)$$

$$c = \frac{\omega}{|\vec{k}|}$$

Kugelwellen (Falls eine Welle von einer Punktquelle ausgeht)



$$\psi(\vec{x}, t) = \psi(r, t) = \frac{\psi_0}{\sqrt{4\pi r}} e^{i(\omega t - kr + \varphi)}$$

mit $r = |\vec{x}|$ und $k = \frac{\omega}{c}$

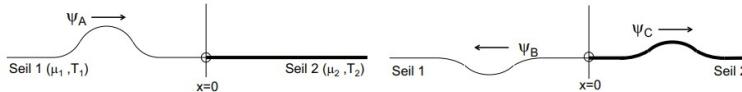
Hinweis die Amplitude nimmt mit der Entfernung ab.

Transfersalwelle (Seilwellen, elektromagnetische Wellen, ...) Die Schwingung ist senkrecht zur Ausbreitungsrichtung. Es gibt zwei Freiheitsgrade für die Schwingung, welche horizontale und vertikale Polarisation genannt werden

Longitudinalwellen (Schall, ...) Die Schwingung ist entlang der Ausbreitungsrichtung

4.2 Reflexion und Transmission:

4.2.1 Wellenausbreitung durch eine Grenzfläche:



Gegeben sei ein Seil, das aus zwei unterschiedlichen Abschnitten (Medien) mit unterschiedlicher Masse μ_1, μ_2 und Seilspannung T_1, T_2 besteht. Das Seil sei in der Mitte (bei $x = 0$) verbunden und so an einer Stange befestigt, ungehindert auf- und ab schwingen kann, aber sich horizontal nicht bewegen kann. Eine Welle bewegt sich von links nach recht und trifft die Grenze bei zeit $t = 0$ und Phase $\varphi = 0$

$$\begin{aligned}\psi_{ein, \rightarrow} &= \psi_A(x) = \psi_{0,A} e^{-ik_1 x} \\ \psi_{ref, \leftarrow} &= \psi_B(x) = \psi_{0,B} e^{+ik_1 x} \\ \psi_{tra, \rightarrow} &= \psi_C(x) = \psi_{0,C} e^{-ik_2 x} \\ \psi(x) &= \psi_A + \psi_B + \psi_C\end{aligned}$$

Stetigkeitsbedingung (bei $x = 0$, Amplitude/Kraft)

$$\psi_{0,C} = \psi_{0,A} + \psi_{0,B}$$

$$Z_2 \psi_{0,C} = Z_1 \psi_{0,A} - Z_1 \psi_{0,B}$$

Reflexionskoeffizienz (für alle Wellen gültig)

$$r = \frac{\psi_{0,B}}{\psi_{0,A}} = \frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2} = 1 + r$$

Transmissionskoeffizient (für alle Wellen gültig)

$$t = \frac{\psi_{0,C}}{\psi_{0,A}} = \frac{2Z_1}{Z_1 + Z_2} = 1 + r$$

Transmittierte Welle (sei $p(t)$ die initiale Welle)

$$p_{transmittiert} = t \cdot p(t)$$

4.2.2 Reflektierte und transmittierte Leistung:

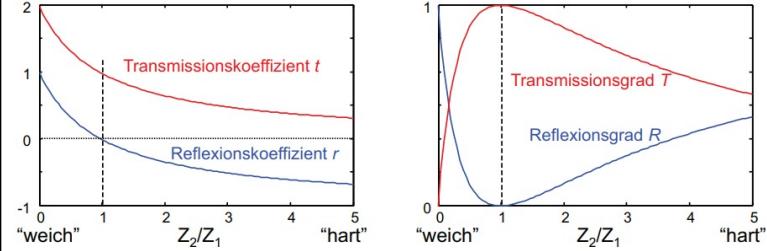
Reflexionsgrad

$$R = \frac{P_B}{P_A} = \left(\frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2} \right)^2 = r^2$$

Transmissionsgrad

$$T = \frac{P_C}{P_A} = \frac{4Z_1 Z_2}{(Z_1 + Z_2)^2} = \frac{Z_2}{Z_1} t^2 = 1 - R$$

4.2.3 Spezialfälle:



Für den Fall $Z_2 \rightarrow 0$: null Kraft wird benötigt, um die Welle auszulenken. Daher kann auch keine Energie transportiert werden

4.3 Stehende Wellen:

Stehende Wellen sind ein Spezialfall von überlagerten harmonischen Wellen, bei der die Amplitude nur eine Funktion des Ortes ist.

4.3.1 Selbstüberlagerung:

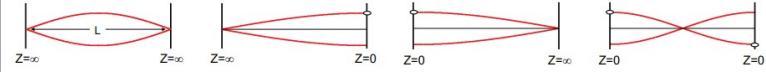
Bei einer stehenden Welle sind die zeitliche und die örtliche Schwingung voneinander separiert

$$\Re[\psi(x, t)] = 2\psi_0 \sin(kx) \sin(\omega t + \varphi)$$

Man sieht als Folge, dass die überlagerte Welle nicht mehr wandert. Die Welle schwingt an jedem Ort x synchron auf und ab mit der (ortsabhängigen) Amplitude $\sin(kx)$. Die Welle wird deshalb als stehende Welle bezeichnet.

4.3.2 Stehende Wellen:

Für bestimmte Verhältnisse von Wellenlänge λ zum Wandabstand L ergibt sich eine konstruktive Überlagerung



Gerader Fall (Fest-Fest oder Los-Los)

$$\lambda_n = \frac{2\pi}{k_n} = \frac{2L}{n} \leftrightarrow k_n = \frac{n\pi}{L}$$

mit $n = 1, 2, 3, \dots$

Ungerader Fall (Fest-los)

$$\lambda_n = \frac{4L}{2n-1} \leftrightarrow k_n = \frac{(n - \frac{1}{2}\pi)}{L}$$

mit $n = 1, 2, 3, \dots$

Beispiel: Musikinstrumente

$$\lambda = 2x, \text{ mit } x = \text{Seilenlaenge}$$

4.3.3 Eigenfrequenzen:

Bei einer gegebenen Wellengeschwindigkeit sind deshalb nur spezielle Frequenzen erlaubt

Gerader Fall

$$f_n = \frac{c}{\lambda_n} = n \frac{c}{2L} = n \Delta f$$

mit Δf die unterschied zwischen zwei Frequenzen

Ungerader Fall

$$f_n = \frac{c}{\lambda_n} = \left(n - \frac{1}{2}\right) \frac{c}{2L} = \left(n - \frac{1}{2}\right) \Delta f$$

Grundschwingung

$$n = 1$$

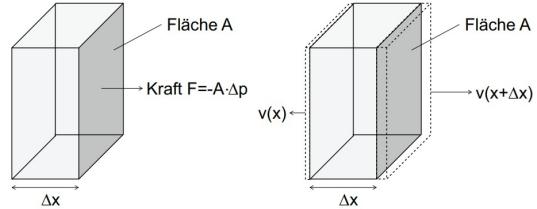
Oberschwingungen (Bei akustischen Wellen Obertöne)

$$n > 1$$

In der Physik werden die stehenden Wellen auch **Eigenschwingungen** oder **Moden** genannt.

4.4 Akustische Wellen:

4.4.1 Akustische Wellengleichung:



Schallwelle

Bei einer Schallwelle ändert sich die lokale Position und die Geschwindigkeit eines Gasteilchens, sowie der lokale Druck.

Auslenkung aus der Gleichgewichtslage

$$s(x, t) = s_0 \cos(\omega t - kx + \varphi)$$

Schallschnelle (Teilchengeschwindigkeit)

$$v(x, t) = \frac{ds(x, t)}{dt} = v_0 \sin(\omega t - kx + \varphi)$$

mit $v_0 = -\omega s_0 = \frac{\delta p}{\rho c}$ **Amplitude der Schallschnelle**

Schalldruck (Veränderung des lokalen Drucks)

$$p(x, t) = p_0 + \delta p_0 \sin(\omega t - kx + \varphi)$$

mit δp_0 **Amplitude des Schalldrucks** und p_0 der Gleichgewichtsdruck

Akustische Wellengleichung

$$\frac{d^2 p}{dt^2} = -K \frac{d}{dt} \frac{dv}{dx} = -k \frac{d}{dx} \frac{dv}{dt} = \frac{K}{\rho} \frac{d^2 p}{dx^2}$$

Schallgeschwindigkeit

$$c = \sqrt{\frac{K}{\rho}}$$

mit K Kompressionsmodul

Schallgeschwindigkeit in Gasen

$$c = \sqrt{\frac{K}{\rho}} = \sqrt{\frac{\gamma p_0}{\rho}} = \sqrt{\frac{\gamma RT}{M}}$$

mit $\gamma = \frac{c_p}{c_v}$ die **ISENTROOPENKOEFFIZIENT** (luft: $\gamma = 1.4$) **Schallimpedanz**

$$Z = \rho \cdot c = \sqrt{\frac{\gamma M p^2}{RT}}$$

4.4.2 Akustische Impedanz, Schallleistung und Schallpegel:

Akustische Impedanz

$$Z = \rho c = \sqrt{K\rho} = \frac{\delta p_0}{v_0}$$

Schallintensität (als Leistung pro Fläche)

$$I = \frac{1}{2} \rho c \left(\frac{ds}{dt} \right)_{max}^2 = \frac{1}{2} \rho c v_0^2 = \frac{1}{2} \frac{(\delta p_0)^2}{Z}$$

$$I(r) \propto A^2(r) \Rightarrow I \approx |A|^2 [A = \text{Amplitude}]$$

Schallleistung (auf eine Fläche A)

$$P = IA = \frac{1}{2} \rho A c v_0^2$$

$$P \propto I(r) \Rightarrow P \propto A^2 [A = \text{Amplitude}]$$

Schallpegel (Logarithmische Schallintensität)

$$L = 10 \log_{10} \left(\frac{I}{I_0} \right) \leftrightarrow I = I_0 \cdot 10^{L/10}$$

mit $I_0 = 1 \cdot 10^{-12} \frac{W}{m^2}$ für eines Tons mit 1000Hz **Transmission mit Schallpegel**

$$L' = L + 10 \log(T)$$

Hörgrenze 0dB

4.4.3 Schallausbreitung in Rohren:

Nur wenn $\sqrt{A} \ll \lambda$ Akustische Impedanz in Rohren (gilt nur wenn die Schallschenelle aller Teilchen dieselbe ist → keine Wandreibung)

$$Z_a = \frac{\delta p_0}{q_0} = \frac{\delta p_0}{v_0 A} = \frac{Z}{A} = \frac{\sqrt{K\rho}}{A}$$

Schallfluss

$$q_0 = v_0 A$$

Stehende Wellen in Rohren

Z _a =∞	Z _a ~Z/(πR ²)	Z _a ~Z/λ ²	Z _a ~Z/λ ²	Z _a ~Z/(πR ²)	Z _a ~Z/λ ²
Ende	Z _a	δp	v		
Geschlossenes	∞	δp = δp ₀	0		
Offenes	≈ $\frac{Z}{\lambda^2}$	0	v = v ₀		

Resonanzfrequenz (Offenes-Offenes oder Geschlossenes-Geschlossenes)

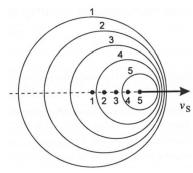
$$f_n = \frac{c}{\lambda_n} = \frac{nc}{2L}$$

Resonanzfrequenz (Offenes-Geschlossenes)

$$f_n = \left(n - \frac{1}{2} \right) \frac{c}{2L}$$

4.4.4 Dopplereffekt und Überschall:

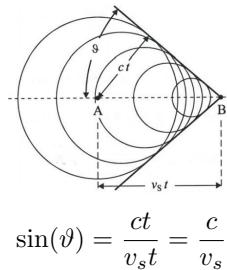
Notation: \square_S für Sender, \square_E für Empfänger



$$f_E = f_S \left(\frac{c - v_E}{c - v_S} \right)$$

- \cdot_S / \leftarrow_E nähern sich $f_E = f_S \left(\frac{c + v_E}{c} \right)$, entfernen sich $f_E = f_S \left(\frac{c - v_E}{c} \right)$
- \rightarrow_S / \cdot_E nähern sich $f_E = f_S \left(\frac{c}{c - v_S} \right)$, entfernen sich $f_E = f_S \left(\frac{c}{c + v_S} \right)$
- $\rightarrow_S / \leftarrow_E$ nähern sich $f_E = f_S \left(\frac{c + v_E}{c - v_S} \right)$
- $\leftarrow_S / \rightarrow_E$ entfernen sich $f_E = f_S \left(\frac{c - v_E}{c + v_S} \right)$
- $\rightarrow_S / \rightarrow_E$ $f_E = f_S \left(\frac{c - v_E}{c - v_S} \right) v_S > v_E$ nähern sich, $v_S < v_E$ entfernen sich
- $\leftarrow_S / \leftarrow_E$ $f_E = f_S \left(\frac{c + v_E}{c + v_S} \right) v_S < v_E$ nähern sich, $v_S > v_E$ entfernen sich

Überschall (Sender oder Empfänger schneller als die Schallgeschwindigkeit)



$$\sin(\vartheta) = \frac{ct}{v_s t} = \frac{c}{v_s}$$

Mach-Zahl: $Ma = \frac{v}{c}$

4.5 Elektromagnetische Wellen:

4.5.1 Wellengleichung für elektromagnetische Wellen:

Siehe Kapitel Maxwell'sche Gleichungen

Wellengleichungen

$$\frac{d^2 \vec{E}}{dt^2} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{d^2 \vec{E}}{dx^2} \quad \leftrightarrow \quad \frac{d^2 \vec{B}}{dt^2} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{d^2 \vec{B}}{dx^2}$$

4.5.2 Elektromagnetische Wellen im Vakuum:

Ebene elektromagnetische Wellen im Vakuum

$$\vec{E}(x, t) = \vec{E}_0 e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{x} + \varphi)} \quad \leftrightarrow \quad \vec{B}(x, t) = \vec{B}_0 e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{x} + \varphi)}$$

mit $|\vec{B}_0| = \frac{|\vec{E}_0|}{c_0}$

Lichtgeschwindigkeit

$$c_0 = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} = 299'792'458 \frac{m}{s}$$

Wellenimpedanz (und Wellenimpedanz des Vakuums)

$$Z = \frac{E_0}{H_0} = \frac{E_0}{\frac{B_0}{\mu_0}} \xrightarrow{\text{Vakuums}} Z_0 = \mu_0 c_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = 376.73 \Omega$$

mit E_0 die Amplitude E-Feld und H_0 der magnetischen Erregung

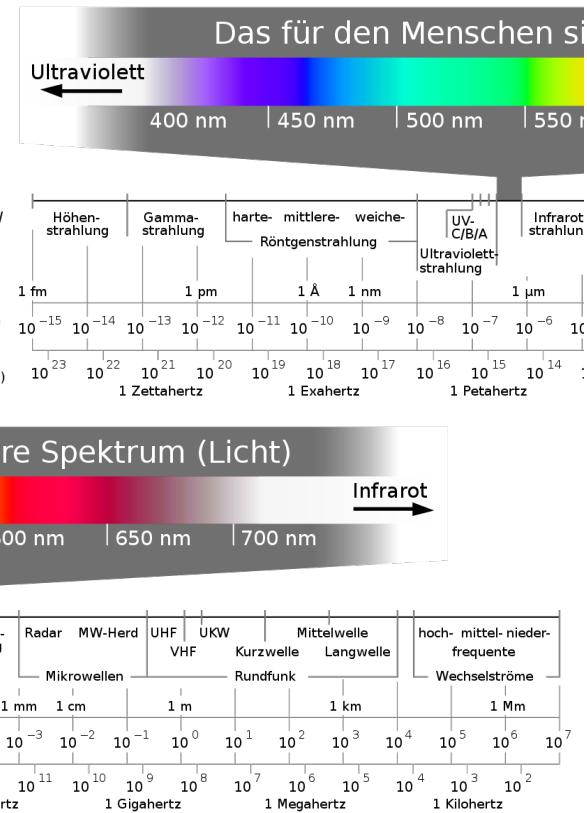
Energiedichte einer elektromagnetischen Welle als zeitlich gemittelte Amplitude (Summe der Energiedichten des gemittelten elektrischen Feldes und des Magnetfeldes)

$$w = \frac{1}{2} \epsilon_0 \frac{E_0^2}{2} + \frac{1}{2 \mu_0} \frac{B_0^2}{2} = \frac{1}{2} \epsilon_0 E_0^2$$

Intensität einer elektromagnetischen Welle (Energie E, welche pro Zeiteinheit auf einer Fläche A auftrifft)

$$I = \frac{1}{A} \frac{dE}{dt} = \frac{Ac_0 \epsilon_0}{2} E_0^2 = \frac{1}{2} c_0 \epsilon_0 E_0^2, \quad B = \frac{E}{c}$$

4.5.3 Das elektromagnetische Spektrum:



4.5.4 Der Brechungsindex:

Lichtgeschwindigkeit in der Materie

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu \epsilon}} = \frac{1}{\sqrt{\mu_r \mu_0 \epsilon_r \epsilon_0}} = \frac{c_0}{\sqrt{\mu_r \epsilon_r}} = \frac{c_0}{n}$$

mit ϵ_r und μ_r die Dielektrizitätszahl und die relative magnetische Feldkonstante des Materials. (Frequenzabhängig)

Wellengeschwindigkeit in Materie wird immer reduziert!

Brechungsindex

$$n = \frac{c_0}{c} = \sqrt{\mu_r \epsilon_r} \geq 1$$

Wellenimpedanz in Materie

$$Z = \mu c = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} = \sqrt{\frac{\mu_r}{\epsilon_r}} Z_0$$

Wellenimpedanz für nichtmagnetische Materialien: ($\mu_r \approx 1$)
 $Z \approx \frac{Z_0}{n} = \frac{Z_0}{\sqrt{\epsilon_r}} \leftrightarrow n \approx \sqrt{\epsilon_r}$

Reflexionsgrad und Transmissionsgrad (einer senkrecht einfallenden e-Welle)

$$R = \left(\frac{Z_2 - Z_1}{Z_2 + Z_1} \right)^2 \underset{\mu_1 \approx \mu_2}{\approx} \left(\frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} \right)^2$$

$$T = 1 - R = \frac{4n_1 n_2}{(n_1 + n_2)^2}$$

Mehrere Medien

$$T_{TOT} = T_1 \cdot T_2 \cdot \dots \cdot T_i$$

4.5.5 Lambert-Beer-Gesetz:

Theorem: Lambert-Beer-Gesetz

$$I(d) = e^{-\alpha d} I_0$$

E Extinktionskoeffizient

$$E = -\log_{10}(e^{-\alpha d}) = \log_{10}(e) \cdot \alpha d \approx 0.434 \cdot \alpha d = \varepsilon cd$$

mit ε der molaren Extinktionskoeffizient, welche eine Material Charakteristik ist und $\alpha \propto c$

4.5.6 Reflexion an einer Metalloberfläche:

Komplexer Wellenvektor

$$\tilde{k} = k - i \frac{\alpha}{2}$$

Gedämpfte Welle

$$E(x, t) = E_0 e^{i(\omega t - \tilde{k}x + \varphi)}$$

Komplexe Dielektrizitätskonstante

$$\tilde{\varepsilon}_r = \varepsilon_{r,1} + i\varepsilon_{r,2}$$

Komplexer Brechungsindex

$$\tilde{n} = \sqrt{\tilde{\varepsilon}_r} = \frac{\tilde{k}}{k_0} = n - i \frac{\alpha}{2k_0} = n - i\kappa$$

mit $k_0 = \frac{\omega}{c_0}$

$$n = \sqrt{\frac{1}{2} \sqrt{\varepsilon_{r,1}^2 + \varepsilon_{r,2}^2} + \frac{1}{2} \varepsilon_{r,1}}$$

$$\kappa = \sqrt{\frac{1}{2} \sqrt{\varepsilon_{r,1}^2 + \varepsilon_{r,2}^2} - \frac{1}{2} \varepsilon_{r,1}}$$

Hinweis $\alpha \propto \kappa$ mit α Absorptionskoeffizient

$$\kappa = \frac{\alpha}{2k_0} = \frac{\alpha\lambda}{4\pi} = \frac{\alpha c}{2\omega}$$

Reflexionsgrad bei Absorption

Medium 1: keine Absorption $\kappa = 0$

Medium 2: Absorption $\kappa > 0$

$$R = \left| \frac{\tilde{n}_1 - \tilde{n}_2}{\tilde{n}_1 + \tilde{n}_2} \right|^2 = \frac{(n_1 - n_2)^2 + \kappa_2^2}{(n_1 + n_2)^2 + \kappa_2^2}$$

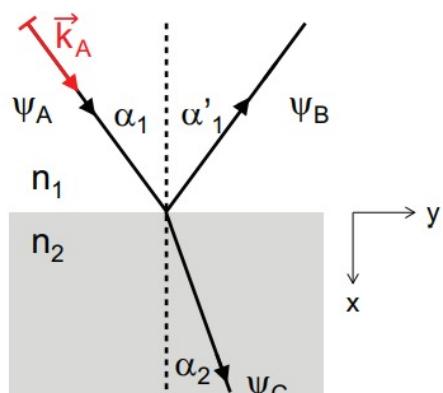
Hinweis wenn κ_2 gross ist (z.B. Metalle), ist das Material stark absorbierend und gut Reflektierend

Eindringtiefe (Skin depth) für einen Leiter

Bei hochfrequenten Feldern kommt die Abschirmung nicht durch Ladungsausgleich, sondern durch Induktion (Wirbelströme) zu stande

$$\delta_e \approx \left(\frac{c_0^2}{\omega^2} \frac{2\omega\epsilon_0}{\sigma} \right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{2}{\omega\sigma\mu_0}}$$

4.6 Brechung:



4.6.1 Ebene Wellen an Grenzflächen unter einem Winkel:

Einfallende Welle: $\vec{k}_A = (k_{A,x}, k_{A,y}, 0)$

Einfallswinkel: α_1 (zwischen \vec{k}_A und der Flächennormale)

Grenzfläche bei $x = 0$ und $y = 0$

Zeit $t = 0$ und Phase $\varphi = 0$

Einfallende Welle

$$\psi_A(x, y) = \psi_{0,A} e^{-i(k_{A,x}x + k_{A,y}y)}$$

Reflektierte Welle

$$\psi_B(x, y) = \psi_{0,B} e^{-i(k_{B,x}x + k_{B,y}y)}$$

Transmittierte Welle

$$\psi_C(x, y) = \psi_{0,C} e^{-i(k_{C,x}x + k_{C,y}y)}$$

Bedingung an der Grenze

$$\psi_{0,A} e^{-i k_{A,y} y} + \psi_{0,B} e^{-i k_{B,y} y} = \psi_{0,C} e^{-i k_{C,y} y}$$

$$k_{A,y} = k_{B,y} = k_{C,y}$$

4.6.2 Reflexions- und Brechungsgesetz:

Reflexionsgesetz (weil $k_{A,y} = k_{B,y}$)

$$\sin(\alpha_1) = \sin \alpha'_1$$

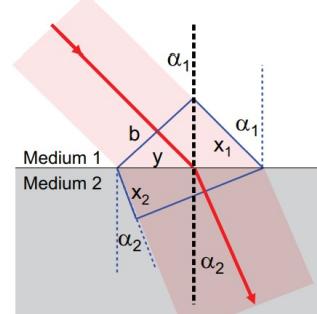
Theorem: Brechungsgesetz

$$k_{A,y} = k_1 \sin(\alpha_1) = k_{C,y} = k_2 \sin(\alpha_2)$$

$$n_1 \sin(\alpha_1) = n_2 \sin(\alpha_2)$$

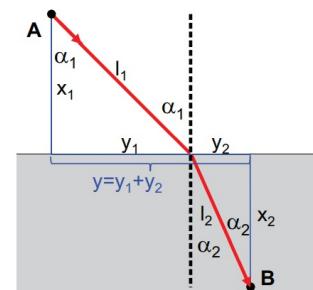
Drei äquivalente Gesetze:

- Snellius:** Beim Uebergang von einem optisch dünneren zu einem optisch dichteren Medium wird der Strahl zum Lot hin gebrochen (hier oben)
- Huygens:** Jeder Punkt einer bestehenden Lichtwelle produziert eine neue Kugelwelle. Alle Kugelwellen summieren sich zu einer neuen Lichtwelle zum späteren Zeitpunkt



$$x_i = \frac{c_0}{n_i} \Delta t \rightarrow \frac{x_1}{x_2} = \frac{n_2}{n_1} \rightarrow \sin(\alpha_i) = \frac{x_i}{y_i} \rightarrow n_1 = \dots$$

- Fermat:** Das Licht nimmt immer den schnellsten Weg, um von Punkt A zu Punkt B zu gelangen.



$$\Delta t = \frac{l_1}{c_1} + \frac{l_2}{c_2} = \dots \xrightarrow{y_2 = y - y_1} 0 = \frac{d\Delta t}{dy_1} = \dots \rightarrow n_1 = \dots$$

4.6.3 Totalreflexion:

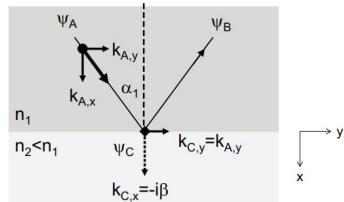
Von einem optisch dichteren in ein optisch dünneres Medium. Ausstrittswinkel $> 90^\circ$, dann Totalreflektion

Kritischer Winkel bei Totalreflektion

$$\alpha_{1,c} = \arcsin\left(\frac{n_2}{n_1}\right)$$

4.6.4 Evaneszenz:

Die transmittierte Welle fällt also in x-Richtung exponentiell ab. Das heisst, das elektrische Feld reduziert sich an der Mediengrenze nicht schlagartig auf Null, sondern erstreckt sich eine gewisse Distanz ins "verbotene" Medium hinein. Die Distanz ist bestimmt durch die Eindringtiefe $\delta = \frac{1}{\beta}$, bei welcher die Amplitude des Feldes auf $\frac{1}{e}$ abgefallen ist



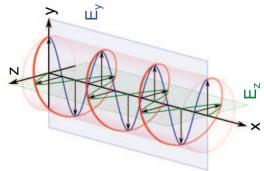
$$\beta = \sqrt{k_1^2 \sin^2(\alpha_1) - k_2^2}$$

$$\delta = \frac{\lambda_1}{2\pi \sqrt{\sin^2(\alpha_1) - \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2}}$$

mit $\lambda_1 = \frac{2\pi}{k_1}$ die Wellenlänge der einfallenden Welle

4.7 Polarisation:

4.7.1 Polarisation:

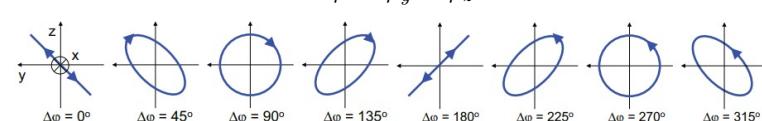


Für eine elektromagnetische Welle, die sich in x-Richtung ausbreitet, liegt die Schwingungsrichtung des elektrischen und magnetischen Feldes in der yz-Ebene. Der Einfachheit halber werden wir meist nur die Richtung des elektrischen Feldes betrachten:

$$\vec{E}(x, t) = \vec{E}_y(x, t) + \vec{E}_z(x, t) = \vec{E}_{0,y} e^{i(\omega t - kx + \varphi_y)} + \vec{E}_{0,z} e^{i(\omega t - kx + \varphi_z)}$$

Phasendifferenz

$$\Delta\varphi = \varphi_y - \varphi_z$$



Linearpolarisation (Fall 0° und 180°)

$$\Delta\varphi = m\pi \leftrightarrow \vec{E}(x, t) = (\vec{E}_{0,y} \pm i\vec{E}_{0,z}) e^{i(\omega t - kx + \varphi_y)}$$

mit $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

Hinweis: für ungerade m ist die Vorzeichen negativ!

Wenn $\vec{E}_{0,y}$ oder $\vec{E}_{0,z}$ gleich null sind ist die Welle vertikal, resp. horizontal Polariert

Zirkularpolarisation (Fall 90° und 270°)

$$\Delta\varphi = \left(m + \frac{1}{2}\right)\pi \leftrightarrow \vec{E}(x, t) = |\vec{E}_{0,y}|(\vec{e}_y \mp i\vec{e}_z) e^{i(\omega t - kx + \varphi_y)}$$

mit $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ und $|\vec{E}_{0,y}| = |\vec{E}_{0,z}|$

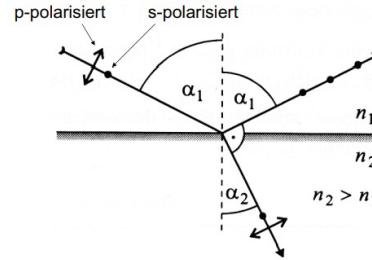
Hinweis: für gerade m ist die Vorzeichen negativ!

Hinweis: rechtsdrehende für $\Delta\varphi = 90^\circ$ und linksdrehende für $\Delta\varphi = -90^\circ$

Elliptische Polarisation

Falls nicht linear- oder zirkularpolarisiert: Der \vec{E} Vektor rotiert in der yz-Ebene und beschreibt eine Ellipse. Elliptische Wellen lassen sich als Superposition von linear oder zirkular polarisierten Wellen darstellen.

4.7.2 Reflexion und Transmission unter einem Winkel:



If nicht polarisiert $50\% I_{TE}, 50\% I_{TM}$

Horizontal polarisierte Wellen werden auch als s-polarisierte oder TE-Wellen (transverse electric) bezeichnet. Vertikal polarisiert bedeutet, dass der elektrische Feldvektor parallel zur Einfallsebene ist. Vertikal polarisierte Wellen werden auch als p-polarisierte oder TM-Wellen (transverse magnetic) bezeichnet

Reflexionsgrad für eine senkrecht einfallende Welle

$$R = \left(\frac{Z_2 - Z_1}{Z_2 + Z_1}\right)^2$$

Theorem: Fresnel Gleichungen

Horizontal polarisierte Welle (einfallende & transmittierte)

$$Z_{1s} = \frac{E_{1s}}{H_{1s}} = \frac{E_1}{H_1 \cos(\alpha_1)} = \frac{Z_1}{\cos(\alpha_1)} = \frac{Z_0}{n_1 \cos(\alpha_1)}$$

$$Z_{2s} = \frac{E_{2s}}{H_{2s}} = \frac{E_2}{H_2 \cos(\alpha_2)} = \frac{Z_2}{\cos(\alpha_2)} = \frac{Z_0}{n_2 \cos(\alpha_2)}$$

$$R_S = \left(\frac{Z_{2s} - Z_{1s}}{Z_{2s} + Z_{1s}}\right)^2 = \left(\frac{\cos(\alpha_1) - \sqrt{\left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2 - \sin^2(\alpha_1)}}{\cos(\alpha_1) + \sqrt{\left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2 - \sin^2(\alpha_1)}}\right)^2$$

Vertikal polarisierte Welle (einfallende & transmittierte)

$$Z_{1p} = \frac{E_{1p}}{H_{1p}} = \frac{E_1 \cos(\alpha_1)}{H_1} = Z_1 \cos(\alpha_1) = \frac{Z_0 \cos(\alpha_1)}{n_1}$$

$$Z_{2p} = \frac{E_{2p}}{H_{2p}} = \frac{E_2 \cos(\alpha_2)}{H_2} = Z_2 \cos(\alpha_2) = \frac{Z_0 \cos(\alpha_2)}{n_2}$$

$$R_P = \left(\frac{Z_{2p} - Z_{1p}}{Z_{2p} + Z_{1p}}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{\left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2 - \sin^2(\alpha_1)} - \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2 \cos(\alpha_1)}{\sqrt{\left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2 - \sin^2(\alpha_1)} + \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2 \cos(\alpha_1)}\right)^2$$

Allgemein:

$$T_{TE/TM} = \frac{\frac{n_2}{n_1} \sqrt{\left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2 - \sin^2(\alpha_1)}}{\cos(\alpha_1)} \cdot |t_{TE/TM}|^2$$

$$R_{tot} = \frac{1}{2}(R_P + R_S)$$

Theorem: Brewster-Gesetz

Es gibt einen Winkel α_1 , bei dem der **Reflexionsgrad für p-Wellen gleich null ist** und die reflektierte Welle somit komplett s-polarisiert ist.

Wenn die einfallende Welle zirkular polarisiert ist, dann wird rein linear reflektiert!

Brewster-Bedingung

$$\alpha_{1,B} + \alpha_2 = 90^\circ$$

Brewsterwinkel

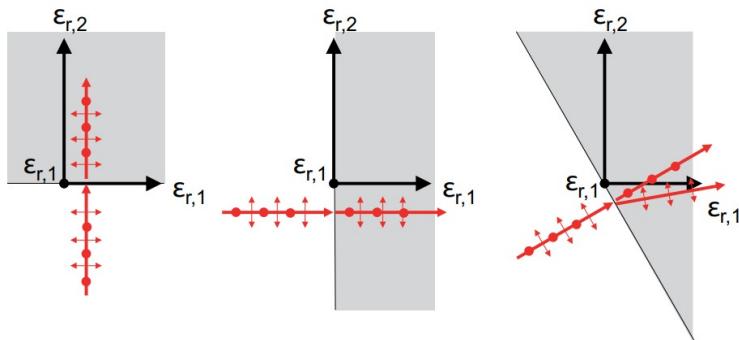
$$\alpha_{1,B} = \arctan\left(\frac{n_2}{n_1}\right)$$

4.7.3 Polarisationsfilter:

Anisotrope Materialien, die eine Polarisationsrichtung reflektieren (oder absorbieren) und die andere Polarisationsrichtung transmittieren lassen.

4.7.4 Doppelbrechung:

Anisotrope Materialien können verschiedene Brechungsindizes (resp. Dielektrizitätszahlen) in den drei verschiedenen Raumrichtungen haben.



Hinweis: $\epsilon_{r,i}$ sind **nicht** die Komponenten des komplexen Dielektrizitätszahl! $n_i = \sqrt{\epsilon_{r,i}}$, ein Material hat mehrere n -Werte.

Mit optische-Achse entlang die $\epsilon_{r,2}$ -Richtung

- Der Strahl fällt **entlang der optischen Achse** ein. Das elektrische Feld ist senkrecht zur optischen Achse polarisiert und erfährt die gleiche Dielektrizitätskonstante. Der Kristall **verhält sich wie ein normales Medium** mit Brechungsindex n_1 .
- Der Strahl fällt **senkrecht zur optischen Achse** ein. Das elektrische Feld entlang der Achse erfährt eine andere Dielektrizitätskonstante als das elektrische Feld senkrecht zur Achse. Es tritt keine Doppelbrechung auf, aber **eine Welle ist verlangsamt** und die Polarisation wechselt von linear zu zirkular.
- Der Strahl fällt **unter beliebigem Winkel** ein. Der eine Strahl (ordentlicher Strahl) wird unverändert transmittiert und dabei polarisiert, der andere Strahl (ausserordentlicher Strahl) wird gebrochen und ist senkrecht dazu polarisiert. **Doppelbrechung tritt auf.**

Falls Gangunterschied = $\frac{\lambda}{4}$ ($\Delta\varphi$ wird 90° verschoben) linear Polarisation wird zirkular und vice versa.

Falls Gangunterschied = $\frac{\lambda}{2}$: ($\Delta\varphi$ wird 180° verschoben)

- Lineare Polarisation wechselt von vertikal zum horizontal und vice versa
- Zirkulare Polarisation wechselt von rechts- zum linksdrehend und vice versa

4.7.5 Systeme mehrerer Polarisatoren:**Theorem: Gesetz von Malus**

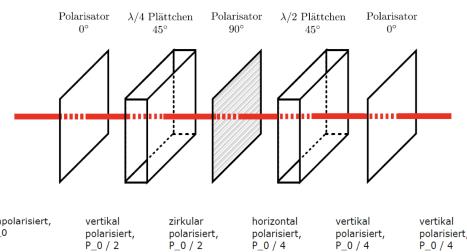
Die Energie einer linear polarisierten Welle nimmt um $\cos^2(\beta)$ ab, wenn sie einen Polarisator passiert, der um den Winkel β relativ zur Welle polarisiert ist.

Irradianz

$$I_1 = c\epsilon_0 |\vec{E}_y|^2$$

Licht durch Polarisationsfilter

$$I_2 = c\epsilon_0 |\vec{E}_y \cdot (\vec{e}_y \cos(\beta) + \vec{e}_z \sin(\beta))|^2 = I_1 \cos^2(\beta)$$

Beispiel: Filter

Optische Aktivität (Serie von n Polarisatoren mit Winkel $\frac{\beta}{n}$ zwischen einandere

$$I_{n+1} = I_1 \cos^{2n} \left(\frac{\beta}{n} \right) \stackrel{n \gg 1}{\approx} I_1 \left[1 - \frac{1}{2} \left(\frac{\beta}{n} \right)^2 \right]^{2n} \stackrel{n \rightarrow \infty}{=} I_1$$

Hinweis: Prüfen ob die Bedingungen erfüllt sind!

4.8 Interferenz:**4.8.1 Kohärenz:**

Zwei harmonische Wellen, gleicher Frequenz aber unterschiedlicher Phase und Amplitude

Zwei Wellen, deren Phasendifferenz an jedem Ort und zu jeder Zeit gleich ist, heißen **kohärent**.

Die Intervall wo zwei Wellen kohärenten sind heisst **Kohärenzlänge/Kohärenzzeit**. Definiert als Δd bei welcher die Differenz zwischen Interferenzmaximum und -minimum auf $\frac{1}{e} \approx 37\%$ abgefallen ist.

4.8.2 Superposition von zwei kohärenten Wellen:**Realteil von der Superposition**

$$\Re[\psi(x, t)] = 2 \cos(\Delta\varphi) \bar{\psi} \cos(\Upsilon) - 2 \sin(\Delta\varphi) \Delta\psi \sin(\Upsilon)$$

mit:

- $\Upsilon = \omega t - kx + \bar{\varphi}$
- $\bar{\psi} = \frac{1}{2}(\psi_{0,A} + \psi_{0,B})$ die mittlere Amplitude
- $\Delta\psi = \frac{1}{2}(\psi_{0,A} - \psi_{0,B})$ die halbe des Amplitudedifferenz
- $\bar{\varphi} = \frac{1}{2}(\varphi_A + \varphi_B)$ die mittlere Phase
- $\Delta\varphi = \frac{1}{2}(\varphi_A - \varphi_B)$ die halbe des Phasendifferenz

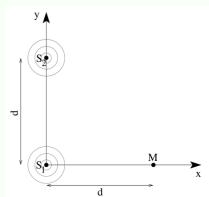
Interferenz Amplitude moduliert durch Phasendifferenz

$$2 \cos(\Delta\varphi)$$

Intensität der Superposition

$$I = |\psi|^2 = \frac{1}{T} \int_0^T |\psi(x, t')|^2 dt' = \frac{1}{2} \psi_0^2 4 \cos^2(\Delta\varphi)$$

Interferenz ist **konstruktiv** mit $\Delta\varphi = m\pi$ und destruktiv mit $\Delta\varphi = (m + \frac{1}{2})\pi$ ($m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$)

Beispiel: interferenz von akustische Wellen

Extra (non centra con problema)

- Max bei $\Delta d = x_2 - x_1 = d \cdot (\sqrt{2} - 1) = n \cdot \lambda$
- Min bei $\Delta d = (n + 1/2)\lambda$

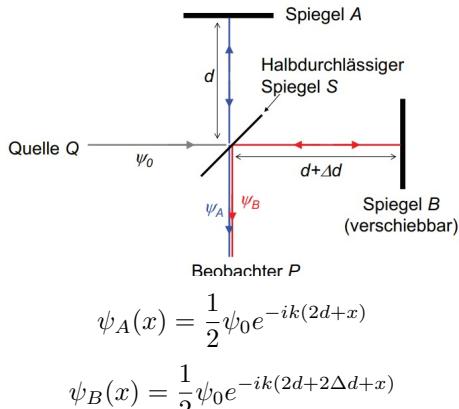
Gegeben: Quellen in Phase, harmonische Wellen mit derselben Kreisfrequenz ω aber mit unterschiedlichen Leistungen P_1, P_2 , Ausbreitung sei isotrop, in einem Medium mit Phasengeschwindigkeit v_p .

Gesucht:

- Auslenkung Welle $\psi_1(r_1, t), \psi_2(r_2, t)$
- Fuer welche Werte von d gibt es in M destruktive Interferenz?
- Fuer welchen Wert des Verhaeltnisses der Leistungen P_1/P_2 ist die Gesamtamplitude bei M immer gleich Null?
- Geschwindigkeit (in z-Richtung) der Teilchen des Mediums im Punkt M fuer $P_1 = P_2$

Vorgehen

- $I(r) = \frac{P}{2\pi r} \Rightarrow A(r) = \frac{A^0}{\sqrt{r}}$. Mit $k = \omega/v_p \Rightarrow \psi_1(r_1, t) = \frac{A^0}{\sqrt{r_1}} \cos(kr_1 - \omega t) \vec{e}_z$. Analog fuer ψ_2
- In M es gilt $r_1 = d, r_2 = \sqrt{2}d$. Destruktive Interferenz wenn: $k\sqrt{2}d - \omega t = kd - \omega t + (2n + 1)\pi \Rightarrow d = \dots$
- Die Gesamtamplitude in M ist immer gleich Null, falls die Amplituden der zwei Wellen dort gleich sind: $\frac{A_1^0}{\sqrt{d}} = \frac{A_2^0}{\sqrt{\sqrt{2}d}} \Rightarrow P \propto A^2 \rightarrow \dots$
- $v(\vec{t}) = \frac{d}{dt}(\psi_1 + \psi_2)(t) = \dots$

4.8.3 Michelson-Interferometer:

$$\psi_A(x) = \frac{1}{2} \psi_0 e^{-ik(2d+x)}$$

$$\psi_B(x) = \frac{1}{2} \psi_0 e^{-ik(2d+2\Delta d+x)}$$

Überlagerte Welle

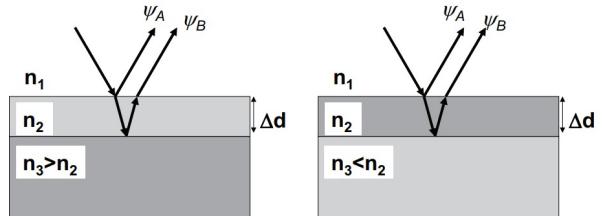
$$\psi(x) = \psi_A(x) + \psi_B(x) = \frac{1}{2} \psi_0 e^{-ik(2d+x)} (1 + e^{-ik2\Delta d})$$

Intensität

$$I = |\psi_A + \psi_B|^2 = I_0 \cos^2(k\Delta d)$$

Abstand zwischen zwei Intensitätsmaxima/minima (am Beobachter)

$$\Delta d = \frac{\pi}{k} = \frac{\lambda}{2}$$

4.8.4 Interferenz an dunnen Filmen:**Bedingungen für konstruktive Interferenz**

$$\Delta d = m \frac{\lambda_2}{2} \text{ für } n_3 > n_2$$

$$\Delta d = \left(m - \frac{1}{2}\right) \frac{\lambda_2}{2} \text{ für } n_3 < n_2$$

mit $m = 1, 2, 3, \dots$ **Bedingung fuer destruktive Interferenz**

Schichtdicke Δd , damit sich einfallende und reflektierte Lichtstrahlen gerade aufheben: Gangunterschied $\Delta s = 2 \cdot \Delta d \cdot n_2$.

$$2 \frac{\lambda}{4} = 2 \cdot \Delta d \cdot n_2 \Rightarrow \Delta d = \frac{\lambda}{4 \cdot n_2}$$

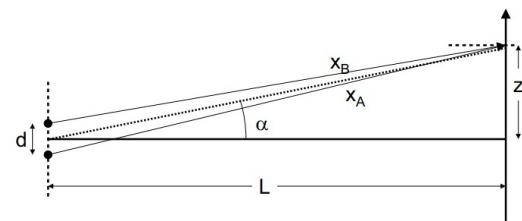
Optimale Entspiegelung

$$R_{12} = R_{23} \Rightarrow n_2 = \sqrt{n_1 \cdot n_3}$$

Hinweis: $\lambda = \frac{2\pi c}{\omega n}$

4.8.5 Interferenz am Doppelspalt:

$L \gg d$, Punktquellen und $\sin(\alpha) \approx \tan(\alpha)$



$$\psi_A(x) = \psi_0 e^{-ikx_A}$$

$$\psi_B(x) = \psi_0 e^{-ikx_B}$$

Überlagerte Wellenfunktion

$$\psi(x) = \psi_A(x) + \psi_B(x) = \psi_0 e^{-ik\frac{1}{2}(x_A+x_B)} 2 \cos\left(\frac{k}{2}[x_A - x_B]\right)$$

Intensität der überlagerte Wellenfunktion

$$I = |\psi(x)|^2 = 4I_0 \cos^2\left(\frac{k}{2}[x_A - x_B]\right)$$

mit $I_0 = \frac{1}{2} \psi_0^2$ **Intensität pro Spalt/Quelle**

mit $x_A - x_B \stackrel{L \gg d}{\approx} d \sin(\alpha)$

$$I(\alpha) = 4I_0 \cos^2\left(\frac{k}{2}d \sin(\alpha)\right) = 4I_0 \cos^2(\Delta\varphi)$$

mit $\Delta\varphi = \frac{\pi d}{\lambda} \sin(\alpha)$

Maxima

$$\sin(\alpha) = m \frac{\lambda}{d} \text{ mit } m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Minima

$$\sin(\alpha) = m \frac{\lambda}{d} \text{ mit } m = 0, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{3}{2}, \dots$$

Abstand zwischen zwei Intensitätmaxima/minima

$$\sin(\Delta\alpha) = \frac{\lambda}{d} \approx \frac{\Delta z}{L}$$

 N_{ten} Maximum/minimum

$$N \frac{\lambda}{d} \approx \frac{\Delta z}{L}$$

4.8.6 Interferenz am Mehrfachspalt:

Überlagerung von N Wellen

$$\psi(x) = \sum_{n=-\frac{N-1}{2}}^{\frac{N-1}{2}} \psi_0 e^{-ikx_n} \stackrel{\text{Dirichletkern}}{=} \psi_0 e^{-ik\bar{x}} \frac{\sin(N\Delta\varphi)}{\sin(\Delta\varphi)}$$

mit $\Delta\varphi = \frac{\pi d}{\lambda} \sin(\alpha)$ Intensität bei Interferenz an N Spalten

$$I(\alpha) = I_0 \frac{\sin^2(N\Delta\varphi)}{\sin^2(\Delta\varphi)} = I_0 \frac{\sin^2([\frac{N\pi d}{\lambda}] \sin(\alpha))}{\sin^2([\frac{\pi d}{\lambda}] \sin(\alpha))}$$

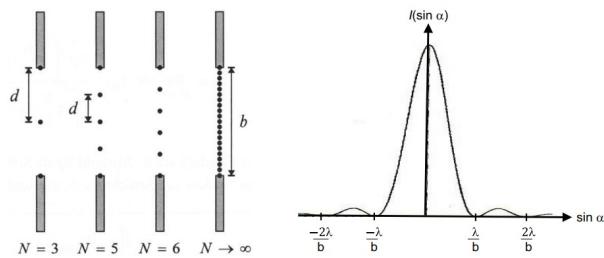
Intensität am zentralen Maximum

$$\sin(\alpha) \rightarrow 0 \leftrightarrow I(\alpha) \approx I_0 N^2$$

mit I_0 wieder Intensität pro Spalt

4.9 Beugung:

4.9.1 Beugung am Spalt:



Wie früher aber die Spalt hat eine Breite $b \rightarrow N$ Punktquellen. Intensität wird sei I_{tot} (und nicht I_0 , Intensität pro Spalt

Beugung am Spalt oder Intensitätsmuster

$$I(\alpha) = I_{tot} \frac{\sin^2([\frac{b\pi}{\lambda}] \sin(\alpha))}{([\frac{b\pi}{\lambda}] \sin(\alpha))^2}$$

Beugungsmaxima/minima

$$\sin(\alpha) = \frac{m\lambda}{b} \text{ mit } m = \pm\frac{3}{2}, \pm\frac{5}{2}, \pm\frac{7}{2}, \dots$$

$$\sin(\alpha) = \frac{m\lambda}{b} \text{ mit } m = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$$

Merke: bei $m = 0$ liegt einen Maximum!

4.9.2 Beugung am Mehrfachspalt:

Abstand zwischen Spalte $d \gg b$, N Spalte

Interferenzmuster

$$I(\alpha) = I_{tot} \frac{\sin^2([\frac{b\pi}{\lambda}] \sin(\alpha))}{([\frac{b\pi}{\lambda}] \sin(\alpha))^2} \frac{\sin^2([\frac{N\pi d}{\lambda}] \sin(\alpha))}{\sin^2([\frac{\pi d}{\lambda}] \sin(\alpha))}$$

Die erste Terme beschreibt die Beugung, die Zweite die Interferenz

4.9.3 Beugung an einer allgemeinen Blende:

Blende: beliebige 2D Öffnung

Allgemeines Beugungsbild

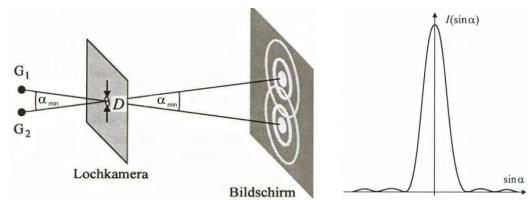
$$\psi(y, z) = \frac{\psi_0}{\sqrt{4\pi R}} e^{-ikR} \int_A e^{i(k_y y' + k_z z')} dy' dz'$$

Intensität eines allgemeinen Beugungsbildes

$$I(y, z) = \frac{I_{tot}}{4\pi R^2} \left| \int_A e^{i(k_y y' + k_z z')} dy' dz' \right|^2$$

Dieses Resultat zeigt, dass das Beugungsbild durch die räumliche Fouriertransformation der Blende gegeben ist.

4.9.4 Beugung an Lochblende und Auflösungsvermögen:



Beugung an einer kreisförmigen Offnung (Lochblende)

$$I(\alpha) = I_{tot} \left(\frac{2J_1(kR \sin(\alpha))}{kR \sin(\alpha)} \right)^2 = I_{tot} \left(\frac{2J_1([\frac{2\pi R}{\lambda}] \sin(\alpha))}{[\frac{2\pi R}{\lambda}] \sin(\alpha)} \right)^2$$

mit $R = \frac{D}{2}$ Besselfunktion erster Ordnung

$$J_1(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(n\varphi - x \sin(\varphi)) d\varphi$$

Beugungsminima

$$\sin(\alpha_{min}) = m \frac{\lambda}{2R} \text{ mit } m = 1.22, 2.23, 3.24, \dots$$

Auflösungsvermögen oder Rayleigh-Kriterium

$$\sin(\alpha_{min}) = 1.22 \frac{\lambda}{D} \stackrel{\lambda \ll D}{\approx} \alpha_{min} \approx \frac{z}{L}$$

5 Welle-Teilchen Dualismus

5.1 Das Photon:

5.1.1 Energiequantisierung der elektromagnetischen Welle:

$$\vec{E}(\vec{x}, t) = \vec{E}_0 e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{x} + \varphi)}$$

Intensität der elektromagnetischen Welle

$$I = \frac{1}{2} c \varepsilon_0 |\vec{E}_0|^2$$

Photon:

1. Tragt Energie
2. Tragt Impuls
3. Verhält sich wie ein Teilchen

5.1.2 Energie des Photons:

Der **Photoeffekt** ist eines der Experimente, welches demonstriert, dass die Energie des Lichts nur als ein ganzzahliges Vielfaches eines Energiequants auftritt.

Energieerhaltungsprinzip:

$$E_{kin} = \frac{1}{2} m_e v_e^2 = h\nu - W_{aus}$$

W_{aus} ist die Austrittsarbeit (ist für das jeweilige Metall charakteristisch) und ν ist die Frequenz der elektromagnetischen Welle

Energie eines Photons mit Frequenz ν :

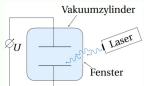
$$E = h\nu$$

Beispiel: Lichtteilenproduktion

Gegeben: $\lambda = 532\text{nm}$, $P = 5\text{mW}$

$$E_{photon} = h\nu = h \frac{c}{\lambda}$$

$$P = \frac{NE_{photon}}{1s} \leftrightarrow \frac{N}{1s} = \frac{P}{E_{photon}} \approx 1.34 \cdot 10^{16} \text{s}^{-1}$$

Beispiel: Photoeffekt und Kondensatoren

Kinetische Energie Elektronen: $E_{kin} = E_{photonen} - \Phi$, mit Φ = Austrittarbeit von Laser

Gesamte Energie Elektronen: $E_e = E_{kin} + E_{pot}$

Was ist die Spannung $U(t \rightarrow \infty) \Rightarrow E_{kin} = E_{pot}$ mit?

$$E_{pot} = e \cdot U_{konst}$$

Weil, wenn $|E_{pot}| \geq E_{kin}$, die Elektronen starten sich bewegen aber haben nicht genug Energie um die zweite Platte zu erreichen.

5.1.3 Impuls des Photons:

Strahlungsdruck: Wird ein Lichtstrahl von einem Objekt absorbiert (oder reflektiert), wird dadurch eine Kraft auf das Objekt ausgeübt ($P = \text{Strahlungsdruck}$).

$$P = \frac{I}{c}$$

(Wo $N = \text{Anzahl Photonen pro sekunde}$ $I = \frac{EN}{A \cdot 1s}$ und $E = h\nu$ die Energie eines Photon und A die absorbierende Fläche)

Impuls ein Photons (Energie und Wellenlänge):

$$p = \frac{E}{c} = \frac{h}{\lambda}$$

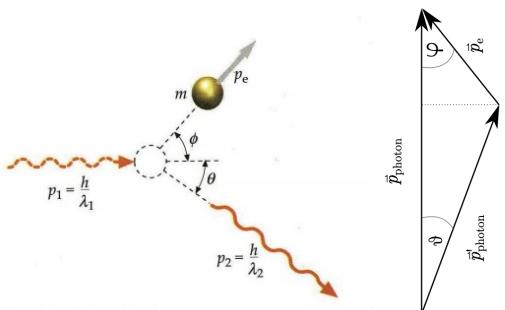
und $I = \frac{pN}{A \cdot 1s}$

Relativistische Energie eines Teilchens (um Impuls von Protonen zu verstehen)

$$E = \sqrt{p^2 c^2 + (mc^2)^2}$$

Für kleine Masse: $m \rightarrow 0$, $E = pc$

Compton-Effekt: Als Compton-Effekt bezeichnet man die Vergrößerung der Wellenlänge eines Photons bei der Streuung (=collision) an einem Elektron.



Impulserhaltung (Das Elektron ist anfänglich in Ruhe):

$$\vec{p}_1 = \vec{p}_2 + \vec{p}_e \leftrightarrow p_e^2 = p_1^2 + p_2^2 - 2p_1 p_2 \cos(\theta)$$

Energieerhaltung (mit relativistischen Energien, die Elektron bewegt sich nahe der Lichtgeschwindigkeit):

$$E_1 + E_{e,1} = E_2 + E_{e,2} \leftrightarrow p_1 c + m_e c^2 = p_2 c + \sqrt{p_e^2 c^2 + (m_e c^2)^2}$$

$$p_e^2 = p_1^2 - 2p_1 p_2 + p_2^2 + 2(p_1 - p_2)m_e c$$

Compton-Wellenlänge Kombination von Impuls- und Energieerhaltung ergibt:

$$\frac{E_2}{E_1} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{1}{1 + \frac{E_1}{m_e c^2} \cdot (1 - \cos(\theta))} \quad \text{mit } \lambda_{Compton} = \frac{h}{m_e c}$$

$$\text{Merke: } \cos(\varphi) = \frac{|p_{photon}| - |p_{photon} \cos(\theta)|}{|p_e|}, \sin(\varphi) = \frac{|p_{photon}|}{|p_e|}$$

$$1. \tan(\varphi) = \frac{\sin(\theta)}{\frac{\Delta\lambda}{\lambda_1} + 1 - \cos(\theta)}$$

$$2. \Delta\lambda = \lambda_{compton}(1 - \cos(\theta))$$

Beispiel: Max Kinetische Energie von Elektronen

Die kinetische Energie ist am Grössten, wenn die Differenz zwischen aus- und einfallender Wellenlänge am grössten ist.

$$\lambda_2 - \lambda_1 = \frac{h}{m_e c} (1 - \cos(\theta)) \stackrel{\max, \theta=\pi}{=} \frac{2h}{m_e c}$$

(**Erinnerung:** E_2 ist abhängig von E_1 , dannach stimmt es nicht $E_2 = 0$ zu setzen \rightarrow Impulserhaltung)

$$p_1 c + m_e c^2 = p_2 c + \sqrt{p_e^2 c^2 + (m_e c^2)^2} \leftrightarrow p_2 = \frac{p_1 mc}{2p_1 + mc}$$

Maximale kinetische Energie

$$E_{kin,max} = c(p_1 - p_2) = cp_1 \left(1 - \frac{mc}{2p_1 + mc}\right) = \frac{2cp_1^2}{2p_1 + mc}$$

5.2 Materialwellen:

”Normale“ Teilchen mit Masse (wie das Elektron) können Welleneigenschaften aufweisen.

5.2.1 De Broglie's Hypothese:**Theorem: De Broglie's Hypothese**

Alle Teilchen besitzen eine Wellenlänge und eine Frequenz und durch eine Wellenfunktion beschrieben werden können.
De Broglie frequenz und Wellenlänge:

$$\nu = \frac{E_{kin}}{h} \leftrightarrow \lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{\sqrt{2mE_{kin}}} = \frac{h}{\sqrt{2mQU}}$$

Hinweis benutzt E_{kin} in [J] und h in [Js] ($J = C \cdot V$).

Hinweis Geschwindigkeit aus de Broglie

$$mv = p = \hbar k = \frac{\hbar 2\pi}{\lambda} = \frac{h}{\lambda}$$

Hinweis: Mittlere Geschwindigkeit von Teilchen

$$\langle v \rangle = \sqrt{\frac{8k_B T}{\pi m}}$$

Hinweis: die Beziehung $c = \lambda\nu$ gilt NICHT! und $[J] = \frac{1}{e}[eV][C] = [V][A][s]$

Hinweis für grosse Objekte: die Wellenlänge kann um viele Größenordnungen kleiner als die Dimension der Materie und erscheint wie ein solides Objekt. So können schwere Objekte klassisch behandelt werden, die Phänomene der QM sind irrelevant.

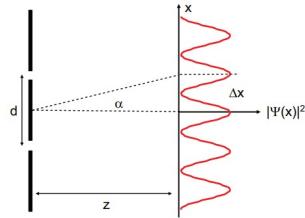
Hinweis: Um einen Beugungseffekt beobachten zu können, muss das Gitter des Festkörpers ähnlich gross wie die Wellenlänge (gleiche Größenordnung) des zu beugenden Teilchens sein.

Beispiel: Vergleich von Impuls und Energie

Wenn die de Broglie-Wellenlänge gleich ist:

- $p_{el} = p_{ph} = \frac{h}{\lambda}$ ein Elektron und ein Photon haben die gleiche Wellenlänge
- $E_{el} = \sqrt{c^2 p_e^2 + m_e^2 c^4} \neq pc = E_{ph}$ ein Elektron hat immer mehr Energie als ein Photon

5.2.2 Wahrscheinlichkeitsdichte:



Interferenz von Teilchen

Um die Welleneigenschaften eines Teilchens zu "beweisen", kann man ein Interferenz oder Beugungsexperiment durchföhren. Damit Beugung (=diffrazione) stattfindet, muss die Spaltbreite ähnlich gross wie die Wellenlänge sein.

Wahrscheinlichkeitsinterpretation

Gleiches Experiment, aber mit **einzelne Teilchen**. Wenn die Experiment mehrere mal wiederholt wird bildet es sich eine funktion die nähert sich dies dem Betragsquadrat der Wellenfunktion an. Diese Funktion entspricht die Position der Teilchen auf der Detektor.

Dies ist die **Wahrscheinlichkeitsinterpretation** der Quantenphysik.

Die Wahrscheinlichkeit $P(x)$, dass das Teilchen am Ort x auftrifft ist:

$$P(x) = |\psi(x)|^2$$

Normierungsbedingung der Wahrscheinlichkeitsdichte

$$\int_{-\infty}^{+\infty} P(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} |\psi(x)|^2 dx = 1$$

5.2.3 Erwartungswert und Unschärfe:

Den Mittelwert nennt man den Erwartungswert.

Allgemein:

$$\langle a \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi^*(x) \cdot a(x) \cdot \psi(x) dx$$

mit ψ^* = die komplexe konjugierte Funktion ψ

Position:

$$\begin{aligned} \langle x \rangle &= \int_{-\infty}^{+\infty} \psi^*(x) P(x) \psi(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x |\psi(x)|^2 dx \\ &\quad \int_{-\infty}^{+\infty} x P(x) dx \end{aligned}$$

Wahrscheinlichkeit im Intervall (a, b)

$$W = \int_a^b |\psi(x)|^2 dx$$

Impuls:

$$\langle p \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi^*(x) \cdot -i\hbar \frac{\partial}{\partial x} \cdot \psi(x) dx$$

$\psi^*(x)$ ist die komplexe konjugierte Funktion zu $\psi(x)$ und $P(x)$ die ortsabhängige Wahrscheinlichkeit. $p = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}$

Die Streuung der Messgrösse ist durch die **Standardabweichung** gegeben, und wird **Unsicherheit** oder **Ungenauigkeit** des Erwartungswertes genannt

$$\sigma_x = \sqrt{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2} = \sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 P(x) dx - \left(\int_{-\infty}^{+\infty} x P(x) dx \right)^2}$$

5.2.4 Energie und Impuls einer Teilchenwelle:

Photon mit der Wellenfunktion $\psi(x, t) = \psi_0 e^{i(kx - \omega t + \phi)}$ (=ebenen Welle)

Energie dieser Welle: $E = h\nu = \hbar\omega$

$$E\psi(x, t) = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(x, t)$$

Impuls dieser Welle: $p = \frac{\hbar}{\lambda} = \hbar k$

$$p\psi(x, t) = i\hbar \frac{\partial}{\partial x} \psi(x, t)$$

Beispiel: Erwartungswert einer ebenen Teilchenwelle

Gegeben: Welle mit funktion $\psi(x, t) = \psi_0 e^{i(kx - \omega t + \phi)}$, fixen Zeitpunkt t

$$\langle p \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi^*(x) p\psi(x) dx = \dots = p$$

(Gilt auch für E)

5.2.5 Heisenberg'sche Unschärferelation:

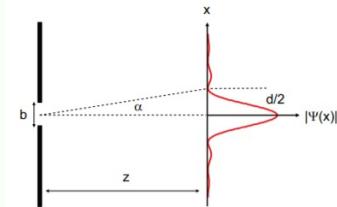
Der Ort und der Impuls einer Welle sind nie gleichzeitig exakt bestimmbar (die Welle oben erstreckt sich von $-\infty$ bis ∞).

Theorem: Heisenberg'sche Unschärferelation

(Wie genau kann die beiden Grössen bestimmt sein?)

$$\sigma_x \cdot \sigma_p \geq \frac{\hbar}{2}$$

Beispiel: Beugung am Spalt



Achtung: Damit Beugung: $b \approx \lambda_{Teilchen}$. Wir betrachten ein Teilchen, welches einen Spalt der Breite b passiert. Die Position des Teilchens hat einer Genauigkeit von $\sigma_x = \frac{b}{2}$. Wir können den vertikalen Impuls aus der Auftreffposition am Detektor bestimmen $p_x = p \sin \alpha$. Hier ist $\sin \alpha$ der Beugungswinkel und $p = \frac{\hbar}{\lambda}$ ist der Impuls des einfallenden Teilchens. Nehmen wir als typischen Ablenkungswinkel das erste Beugungsminimum, so ist $\sin \alpha_{min} \approx \frac{\lambda}{b}$.

$$\sigma_{px} \approx p \sin \alpha_{min} \approx \frac{h}{\lambda} \cdot \frac{\lambda}{b} = \frac{h}{b}$$

$$\sigma_x \cdot \sigma_{px} \approx \frac{h}{2}$$

Unschaerferelation für Zeit und Energie:

$$\sigma_E \cdot \sigma_t \geq \frac{\hbar}{2}$$

da $\sigma_x = c \cdot \sigma_t$ und $\sigma_p = \frac{\sigma_E}{c}$ Um die Energie eines Teilchens genau zu bestimmen, muss man das Teilchen über eine bestimmte Zeitdauer beobachten.

5.3 Energieniveaus:

In diesem Kapitel werden wir die Teilchen zugehörige Wellengleichung aufstellen, die sogenannte Schrödinger-Gleichung (gebundene Teilchen entsprechen stehenden Wellen).

5.3.1 Schrödinger-Gleichung:

Da es sich bei Materiewellen um Wellen handelt, lässt sich eine zugehörige Wellengleichung finden

Zeitabhängige Schrödinger-Gleichung (Wellengleichung für Materiewellen)

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \cdot \frac{\partial^2 \psi(x, t)}{\partial x^2} + E_{pot}(x, t) \cdot \psi(x, t) = i\hbar \cdot \frac{\partial \psi(x, t)}{\partial t}$$

Zeitunabhängige Schrödinger-Gleichung Wellen mit konstanter Energie (Frequenz $\omega = \frac{E}{\hbar}$)

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \cdot \frac{\partial^2 \psi(x)}{\partial x^2} + E_{pot}(x) \cdot \psi(x) = E \cdot \psi(x)$$

Stehende Wellen: örtliche und zeitliche Anteil der Wellenfunktion sind getrennt.

$$\psi(x, t) = \psi(x)e^{-i\omega t}$$

Ebene Welle: $\psi(\vec{r}) = A \cdot e^{-ik\vec{r}}$

Beispiel: Geschwindigkeitunscharfe aus Energieunscharfe

Gegeben: E und ΔE

Gesucht: v und Δv

Aus $E_{kin} = \frac{1}{2}mv^2$

$$v = \sqrt{\frac{2E}{m}}$$

$$\Delta v = \sqrt{\frac{2 \cdot (E + \Delta E)}{m}} - \sqrt{\frac{2E}{m}}$$

5.3.2 Freie und gebundene Teilchen:

Freie Teilchen sind äquivalent zu einem Wellenpaket, das sich wie eine ebene Welle ausbreitet. Freie Teilchen sind durch die zeitabhängige Schrödinger-Gleichung bestimmt. Beispiele sind Elektronenstrahlen, wie sie bei Interferenz- und Beugungsexperimenten vorkommen.

Gebundene Teilchen sind äquivalent zu stehenden Wellen. Die Gesamtenergie und die Wellenform (Wahrscheinlichkeitsdichte) sind konstant und durch die zeitunabhängige Schrödinger-Gleichung gegeben. Ein Beispiel ist das Elektron in der Atomhülle.

5.3.3 Das Teilchen im Kasten:

Wir wollen nun bestimmen, welche Wellen die Wellengleichung von gebundenen Teilchen (stehende Wellen) lösen.

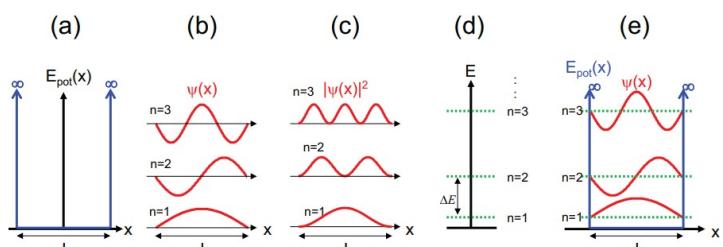
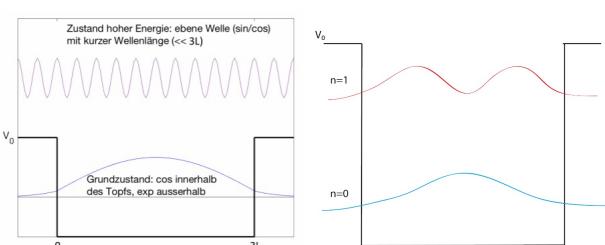


Abbildung 1.5: Teilchen im Kasten: (a) Potential. (b) Wellenfunktion. (c) Wahrscheinlichkeitsdichte. (d) Energieniveaus. (e) Kombiniertes Energieniveaudiagramm



(Links: Wellenfunktion, rechts Wahrscheinlichkeit)

Gebundene Teilchen: Das Teilchen wird zwischen zwei Wänden im Abstand L eingesperrt, zwischen denen es sich hin- und her bewegen kann. Die Wände bilden einen "Kasten" (oder "Potentialtopf"), aus dem das Teilchen nicht entweichen (=scappare) kann.

$$E_{pot}(x) = \begin{cases} 0 & \text{falls } 0 < x < L \\ \infty & \text{sonst} \end{cases}$$

Innerhalb des Kastens:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \cdot \frac{\partial^2 \psi(x)}{\partial x^2} = E \cdot \psi(x)$$

mit Ansatz $\psi(x) = \psi_{0,A} \sin(kx) + \psi_{0,B} \cos(kx)$ und RB $\begin{cases} \psi(0) = 0 \\ \psi(L) = 0 \end{cases}$. Ich muss die Parameter diese Funktion finden. Aus der RB, folgt:

$\psi_{0,B} = 0$ und $k_n = \frac{\pi}{L}n$ ist die Wellenvektor, mit $n = 1, 2, 3, \dots$

Die Werte von $\psi_{0,B}$ can be found using the Wahrscheinlichkeitsdichte (und die Normierungsbedingung, die Werte von $|\psi|^2$ muss ausserhalb des Kasten verschwinden):

$$1 = \int_{-\infty}^{+\infty} P(x) dx = \int_0^L |\psi_n(x)|^2 dx = \frac{L}{2} \psi_{0,A}^2 \leftrightarrow \psi_{0,A} = \sqrt{\frac{2}{L}}$$

Die Lösung für eine Wellenfunktion in Kasten mit $E_{pot} \rightarrow \infty$ ist:

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{\pi n x}{L}\right)$$

5.3.4 Energieniveaus:

Energieniveaus: erlaubte Energie, mit n Quantenzahl Aus der Tatsache, dass nur ganz bestimmte Wellenvektoren k_n erlaubt werden, folgt es unmittelbar, dass auch nur ganz bestimmte Energien E_n erlaubt sind

$$E_n = \frac{\hbar^2 k_n^2}{2m} = \frac{\hbar^2 n^2 \pi^2}{2m L^2} \quad \text{mit } n = 1, 2, 3, \dots$$

Ein gebundenes Teilchen kann sich nur in bestimmten Zuständen mit einer bestimmten Energie befinden. Quantenzahl!!!

Achtung: Die kinetische Energie eines Elektrons ist nur dann quantisiert, wenn es durch ein Potential an einem Ort lokalisiert.

Tiefste Energie: ($n = 1$) → Energieminimumprinzip: ein Teilchen bevorzugt im Zustand tiefster Energie: **Grundzustandenergie**

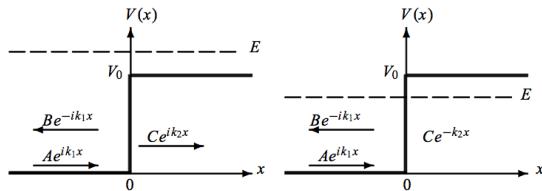
5.3.5 Energieniveaus für ein Teilchen in einem dreidimensionalen Kastenpotential:

$$E_{N_x, N_y, N_z} = \frac{\hbar^2}{8m_e} \left(\frac{N_x^2}{L_x^2} + \frac{N_y^2}{L_y^2} + \frac{N_z^2}{L_z^2} \right)$$

mit Quantenzahlen $N_{x,y,z}$ und $L_{x,y,z}$ die Breiten des Kastenpotentials. Wir wollen M Elektronen ins Kasten einfüllen und bis welche Energieniveaus ausgefüllt werden bestimmen. ($N = \frac{M}{2}$).

$$\psi_{n_x, n_y, n_z}(x) = \sqrt{\frac{8}{L_x L_y L_z}} \sin\left(\frac{\pi n_x x}{L_x}\right) \sin\left(\frac{\pi n_y y}{L_y}\right) \sin\left(\frac{\pi n_z z}{L_z}\right)$$

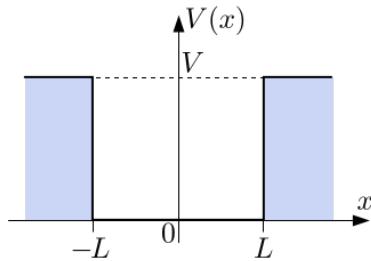
5.4 Finite step:



If $E > V(x = 0)$: The wave will be transmitted and reflected.
If $0 < E < V(x = 0)$ The wave will be reflected but not really transmitted (exponential decay).
For $E < 0$ there are no physical solutions.

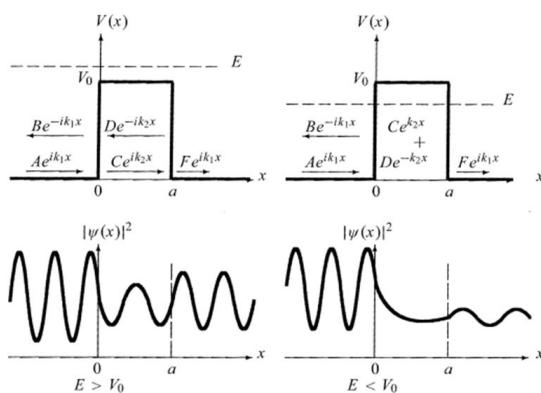
5.5 The finite square well:

Well with finite Potential barrier



- Refl. and Transm. ($E > 0$)
- Bounded particle with penetr. into wall ($0 \leq E \leq V$)
- If a single particle approaches a potential barrier, its wavefunction is NOT always completely transmitted if it has kinetic energy above the height of the barrier.
- For any finite square well, there is always at least one bound state.
- If an electron has an energy E that is higher than the minimum potential energy, V_{min} , of a finite well, then the particle could be in bound state or scattering state

5.6 Finite barrier:



If $E > V(x = 0)$: Transm. and refl. as for the finite step.
If $E < V(x = 0)$: Both transm. and refl. but with an exp. decay through the barrier. Lighter particles penetrate deeper. Energy is conserved.

$$\text{Tunneling: } T \approx \frac{16E(V_0 - E)}{V_0^2} \exp\left(-\frac{4a}{\hbar}\sqrt{2m(V_0 - E)}\right)$$

6 Atomphysik

6.1 Das Atom:

6.1.1 Bohr'sches Atommodell:

Im Bohr'schen Atommodell wird das Atom durch einen schweren, postiv geladenen Kern beschrieben, welcher von einem (oder mehreren) leichten, negativ geladenen Elektron auf einer geschlossenen Bahn umkreist wird.

Energie in einer kreisförmigen Umlaufbahn: Für ein Elektron, das sich auf einer stationären, kreisförmigen Umlaufbahn um den Atomkern befindet, muss die Coulombkraft gleich der Zentripetalkraft

$$-\frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} = -\frac{mv_e^2}{r}$$

Hier ist e die Elementarladung, Z die Kernladungszahl und r die Radius des Umlaufbahn.

$$E_{pot} = -2E_{kin} \leftrightarrow E = E_{pot} + E_{kin} = \frac{1}{2}E_{pot} = -\frac{Ze^2}{8\pi\epsilon_0 r}$$

E_{pot} ist die potentielle elektrostatische Energie.

Bohr'sche Postulate:

- Die Elektronen können sich nur in bestimmten Umlaufbahnen aufhalten (können sich auf bestimmte Radius des Umlaufbahn befinden). Die Länge einer Umlaufbahn muss einem Vielfachen der de-Broglie Wellenlänge genau entsprechen.
- Die Umlaufbewegung erfolgt ohne Energieverlust (strahlungsfrei).
- Wechselt das Elektron zwischen zwei Bahnen, so wird die Energie von aussen aufgenommen oder nach aussen abgegeben. Dabei gilt Energieerhaltung.

Erlaubten Radius:

$$2\pi r_n = n\lambda = \frac{nh}{p_n}$$

Hier n ist die Wellenlängen, die in den Umpfang passen.

$$L_n = p_n r_n = \frac{nh}{2\pi} = n\hbar \Rightarrow E_{kin} = \frac{1}{2m} \left(\frac{L_n}{r_n} \right)^2$$

Bei den erlaubten Umlaufbahnen ist der Drehimpuls ($=L_n$) ein ganzzahliges Vielfaches von \hbar .

6.1.2 Energieniveaus von Einelektronenatomen:

Elektronenradius im Bohrmodell

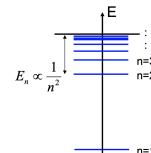
$$r_n = \frac{n^2}{Z} \left(\frac{4\pi\epsilon_0 \hbar^2}{e^2 m_e} \right) = \frac{n^2}{Z} a_0$$

Mit $a_0 = \frac{4\pi\epsilon_0 \hbar^2}{e^2 m_e} = 0.0529 \text{ nm}$ (ist die Bohrradius)

$$E_n = -\frac{Z^2}{n^2} E_R$$

mit $-E_R = -\frac{m_e e^4}{32\pi^2 \epsilon_0^2 \hbar^2} = -hc R_H = -13.6 \text{ eV}$ die Rydberg-Energie (Energie des Grundzustandes des Wasserstoffatoms). R_H ist die Rydbergkonstante

Achtung: Ortsunschaerfe $\Delta x \approx 2r_n$



6.1.3 Wellengleichung des Einelektronenatoms (Quantenmechanischen Modell):

Schrödinger-Gleichung auf drei Dimensionen:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \psi + E_{pot} \psi = E \psi$$

mit $E_{pot}(x, y, z) = E_{pot}(r) = -\frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r}$ die Coulombpotential des positiv geladenen Atomkern am Ursprung (Kugelsymmetrisch).

Schrödinger-Gleichung in Polarkoordinaten (Radiale- und Winkelableitung getrennt sind):

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \left(\underbrace{\frac{1}{r^2} \left[\frac{\partial}{\partial r} \right]}_{\text{radiale Abl}} + \underbrace{\frac{1}{r^2 \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left[\sin \vartheta \frac{\partial}{\partial \vartheta} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right]}_{\text{Winkelableitung}} \right) \cdot \phi(r, \vartheta, \varphi) + E_{pot}(r) \phi(r, \vartheta, \varphi) = E \phi(r, \vartheta, \varphi)$$

Lösungen der Schrödinger-Gleichung

$$\psi_{nlm_l}(r, \vartheta, \varphi) = R_{nl}(r) \cdot Y_l^{m_l}(\vartheta, \varphi)$$

Mit

$$1. \quad R_{nl}(r) = \underbrace{\sqrt{\left(\frac{2}{na_0}\right)^3 \frac{(n-l-1)!}{2n(n+l)!}}}_{\text{Normierung}} \cdot \underbrace{e^{-\frac{r}{2a_0}} \rho^l L_{n-l-1}^{2l+1}(\rho)}_{\text{radiale Wellenfunktion}}$$

$$2. \quad \underbrace{Y_l^{m_l}(\vartheta, \varphi)}_{\text{winkelabhängige Wellenfunktion}}$$

mit $L_{n-l-1}^{2l+1}(\rho)$ das erweiterte **Laguerre-Polynom** und $Y_l^{m_l}(\vartheta, \varphi)$ ist Kugelflächenfunktion und $\rho = \frac{2Zr}{na_0}$ ist reduzierte Radius.

Beispiel: Einige Lösungen des Schrödinger-Gleichungen

$$\psi_{100} = \sqrt{\frac{1}{\pi a_0^3}} \cdot e^{\frac{-r}{a_0}}$$

$$\psi_{210} = \sqrt{\frac{1}{32\pi a_0^3}} \cdot \frac{r}{a_0} e^{\frac{-r}{2a_0}} \cos(\vartheta)$$

$$\psi_{200} = \sqrt{\frac{1}{32\pi a_0^3}} \cdot \left(2 - \frac{r}{a_0}\right) \frac{r}{a_0} e^{\frac{-r}{2a_0}}$$

$$\psi_{21\pm 1} = \mp \sqrt{\frac{1}{64\pi a_0^3}} \cdot \frac{r}{a_0} e^{\frac{-r}{2a_0}} \sin(\vartheta) e^{\pm i\varphi}$$

$$\psi_{300} = \sqrt{\frac{1}{19683\pi a_0^3}} \cdot \left(27 - 18\frac{r}{a_0} + 2\frac{r^2}{a_0^2}\right) e^{\frac{-r}{3a_0}}$$

Energieniveaus in quantenmechanischen Modell:

$$E_{n,l,m_l} = E_n = \frac{-Z^2}{n^2} E_R$$

- Das Bohrmodell und das quantenmechanische Modell ergeben dieselben Energieniveaus
- Die Energie eines Niveaus hängt nur von der radialem Quantenzahl n ab.** Zustände mit unterschiedlichen Quantenzahlen l und m_l, aber demselben n haben dieselbe Energie (sind entartet)

Wahrscheinlichdichte: (Grundzustand)

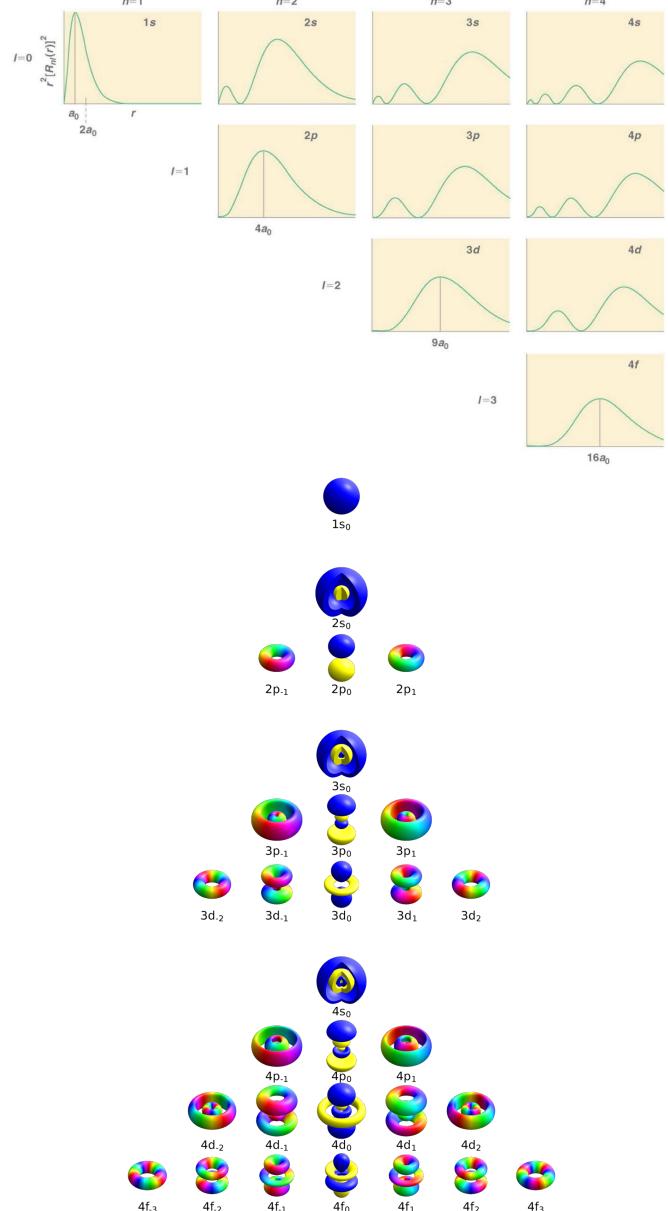
$$|\psi_{100}(r, \vartheta, \varphi)|^2 = \frac{1}{\pi a_0^3} \cdot e^{\frac{-2r}{a_0}}$$

Radiale Wahrscheinlichkeitsdichte: (Grundzustand)
P(r) ist die Wahrscheinlichkeit, das Elektron in einem bestimmten Abstand r vom Zentrum zu finden.

$$P_{100}(r) = \int_{\theta=0}^{\pi} r \cdot d\theta \int_{\varphi=0}^{2\pi} r \sin(\theta) d\varphi |\psi_{100}(r, \vartheta, \varphi)|^2$$

$$= 4\pi r^2 |\psi_{100}(r, \vartheta, \varphi)|^2 = \frac{4r^2}{a_0^3} \cdot e^{\frac{-2r}{a_0}}$$

- Geschwindigkeit finden: $E_n = E_{kin} = -\frac{1}{2}mv^2$



Beispiel: Wellenfunktion für H im Grundzustand

Ansatz für die Wellenfunktion:

$$\psi(r, \vartheta, \varphi) = \psi_0 e^{-\alpha r}$$

Einsetzen in die Schrödiger-G

$$\underbrace{\left(\frac{\hbar^2 \alpha}{m_e} - \frac{Z e^2}{4\pi \epsilon_0}\right) \frac{\psi}{r}}_{(a)} + \underbrace{\left(-\frac{\hbar^2 \alpha^2}{2m_e} - E\right) \psi}_{(b)} = 0$$

$$\begin{cases} (a) = 0 \rightarrow \alpha = \frac{1}{a_0} \\ (b) = 0 \rightarrow E = E_1 \end{cases}$$

Diese Energie ist identisch mit der Energie gefunden mit dem Bohrmodell. Die Amplitude ψ_0 der Wellenfunktion ist bestimmt durch die Normierungsbedingung:

$$1 = \int_{r=0}^{\infty} \int_{\vartheta=0}^{\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} |\psi(r, \vartheta, \varphi)|^2 dV$$

$$\psi_0 = \sqrt{\frac{1}{\pi a_0^3}} e^{-\frac{r}{a_0}} \rightarrow \psi(r, \vartheta, \varphi) = \sqrt{\frac{1}{\pi a_0^3}}$$

Beispiel: V und Radius aus Aufenthalts wahrscheinlichkeit

Gegeben: $\psi(r, \vartheta, \varphi)$, Aufenthalts wahrscheinlichkeit x **Gesucht:** V : Volumen von Kugel worin die Aufenthalts wahrscheinlichkeit x ist

$$x = \int_0^R \int_0^\Phi \int_0^\Theta |\psi(r', \vartheta, \varphi)|^2 r' \sin(\vartheta) dr' d\varphi d\theta$$

Für ψ_{100}

Gesucht: R : Radius von Kugel worin die Aufenthalts wahrscheinlichkeit x ist **Annahme:** die Wellenfunktion ist Kugel symmetrisch und kann ausgedrückt werden durch der Radialen Wahrscheinlichkeitsdichte $P_{n,l,m_l}(r)$

$$\begin{aligned} x &= \int_0^R P_{100}(r') dr' = \int_0^R \frac{4r'^2}{a_0^3} e^{-\frac{2r'}{a_0}} dr' \\ &= 1 - \left[\frac{e^{-\frac{2R}{a_0}} (a_0^2 + 2Ra_0 + 2R^2)}{a_0^2} \right] \end{aligned}$$

Um das Volumen bzw. den Radius abzuschätzen versucht man ein Vielfaches des Bohrradius $r = c \cdot a_0$

Beispiel: Betrachtung von He^+ in Bezug auf H

Würde man anstelle des Wasserstatoms ein einfacher positiv geladenes Heliumatom He^+ betrachten was passiert?

$$Z_{He^+} = 2 = 2Z_H$$

- Jede e^2 (H) Term wird $2e^2$ (He^+)
- $a_{0,H} = 2a_{0,He^+}$
- $4E(n)_H = E(n)_{He^+}$

Hinweis: Die Energieniveaus, die Energieübergänge, die Entartung und die Aufenthalts wahrscheinlichkeit werden geändert.

6.1.4 Quantenzahlen des Einelektronenatoms:

	Radiale Quantenzahl	Drehimpuls quantenzahl	Magnetische Quantenzahl
Symbol	n	l	m_l
Mögliche Werte	$n = 1, 2, 3, \dots$	$l = 0, 1, \dots, n-1$	$m_l = -l, -l+1, \dots, l-1, l$
Assozierte Polarkoordinate	r	ϑ	φ
Assozierte physikalische Größen	Energie: $E_n = -E_R Z^2 / n^2$	Drehimpuls (Betrag): $L = \sqrt{l(l+1)}\hbar$	Drehimpuls (z-Komponente): $L_z = m_l \hbar$ Magnetischer Dipol: $m_z = -\mu_B m_l$
Merkmal in Wellenfunktion	Ist gleich der totalen Anzahl Knoten plus eins	Ist gleich der Anzahl Knotenebenen	Bestimmt die Lage der Knotenebene(n)

- n: Raduale Quantenzahl (Hauptquantenzahl)** Die radiale Quantenzahl n bestimmt den radialen Anteil der Wellenfunktion und somit die Wahrscheinlichkeit, das Elektron in einem bestimmten Abstand vom Kern vorzufinden. Die Gesamtzahl "Knoten" ist gegeben durch $n - 1$. (Kreise mit niedrige Wahrscheinlichkeit dichte)
- l: Drehimpulsquantenzahl** Die Drehimpulsquantenzahl l bestimmt zusammen mit der magnetischen Quantenzahl m_l den winkelabhängigen Anteil der Wellenfunktion. l ist gleich der Anzahl Knotenebenen (Ebene mit niedrige Wahrscheinlichkeit dichte durch Feld). Der Betrag des Drehimpulses ist gegeben durch:

$$L = \sqrt{l(l+1)\hbar}$$

• **m_l : Magnetische Quantenzahl** Die magnetische Quantenzahl m_l gibt die Komponente des Drehimpulses entlang einer bestimmten Raumrichtung an. Die z-Komponente des Drehimpuls ist gegeben durch $L_z = m_l \hbar$.

Der Drehimpuls mit dem magnetischen Dipol des Atoms verknüpft ist. Die z-Komponente des (Moment/) Dipols ist dann gegeben durch:

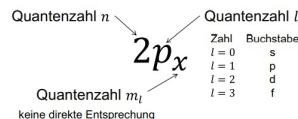
$$m_z = -\mu_B m_l$$

mit $\mu_b = 5.79 \cdot 10^{-5} \frac{eV}{T}$ Bohr-Magneton konstante

• Anzahl Zustände:

1. Fuer $n: \# = 2n^2$

2. Total $\# = 2 \sum_{i=1}^n n^2 = 2 \cdot \sum_{l=0}^{n-1} 2l + 1$

Orbitalsymbole

- s=sharp
- p=principal
- d=diffuse
- f=fundamental
- g...=alphabetic order

Beispiel: Einfluss des Radiale Quantenzahl

n	Zustände	Entartung	$\frac{E_n}{Z^2}$ [eV]
1	2	2	-13.60
2	8	10	-3.40
3	18	28	-1.51
4	32	60	-0.85
5	50	110	-0.54
6	72	182	-0.38
7	98	280	-0.28
8	128	408	-0.21
9	162	570	-0.17
10	200	770	-0.14

mit $E_R = 13.6 \text{ eV}$, Zustände = Anzahl Plätze für Elektronen auf den Niveau und Entartung = Anzahl Plätze für Elektronen auf jede Niveau bis diese $n = 2 \sum_{i=1}^{n_{max}} n_i^2$

n	1	2	3	4	5
1		122 nm	103 nm	97 nm	95 nm
2	10.20 eV		656 nm	486 nm	434 nm
3	12.09 eV	1.89 eV		1875 nm	1282 nm
4	12.75 eV	2.55 eV	0.66 eV		4052 nm
5	13.06 eV	2.86 eV	0.97 eV	0.31 eV	

mit $\cdots eV = \Delta E$ und $\cdots nm = \lambda_{Uebgang}$ (Betrag)

6.1.5 Eigendrehimpuls (Spin):

Neben dem Bahndrehimpuls besitzt das Elektron auch einen Eigendrehimpuls, der auch Spin genannt wird. Der Drehimpuls (Spin) ist eine fundamentale Eigenschaft eines Elementarteilchens, analog zu Masse und Ladung. Der Spin wird durch zwei Quantenzahlen beschrieben, einer Drehimpulsquantenzahl s ($s = \frac{1}{2}$) und einer zugehörigen magnetischen Quantenzahl m_s ($m_s = \pm \frac{1}{2}$).

Magnetische (moment/) dipol von Spin

$$m_z = -g_e \frac{e\hbar}{2m_e} m_s = -g_e \mu_B m_s$$

Mit $g_e = 2.002$ als Korrekturfaktor

6.1.6 Periodensystem:

Wellenfunktionen von Mehrelektronenatomen

In diesen Fällen ist die Schrödinger-Gleichung nicht exakt lösbar

Theorem: Pauli-Prinzip (Spin-Statistik-Theorem)

Zwei identische Teilchen mit halbzahligem Spin s können nie in allen Quantenzahlen übereinstimmen. Es können sich immer nur genau zwei Elektronen im selben Zustand (n, l, m_l) befinden und dieselbe Wellenfunktion haben

6.2 Absorption und Emission von Licht:

Wie können Elektronen zwischen Energieniveaus hin- und herwechseln (Energie aufnehmen oder abgeben).

6.2.1 Atomspektren:

Absorptions/Emissionsbedingung eines Atoms (gilt speziell in Festkörpern meist nicht genau, da ein Photon gleichzeitig mehrere Elektronen oder Gitterschwingungen anregen kann). Ein Elektron befindet sich in einem Energieniveau mit Energie E_1 . Nun absorbiert es ein Photon und gelangt damit auf ein höheres Energieniveau mit Energie E_2

$$E_2 - E_1 = E_{\text{Photon}} = h\nu = \frac{hc}{\lambda}$$

mit ν = Frequenz von Photon und λ = Wellenlänge von Photon. **Elektronen können nur Photonen einer ganz bestimmten Wellenlänge absorbieren oder emittieren**

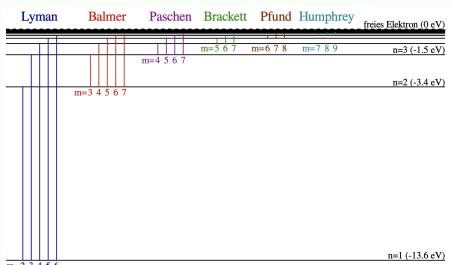
Atome absorbieren Licht von nur ganz bestimmten Wellenlängen:

Theorem: Rydbergformel für Einelektronenatome

Achtung: Gilt nur für wasserstoffähnliche Atome!

$$\frac{1}{\lambda} = R_H Z^2 \left(\frac{1}{n_2^2} - \frac{1}{n_1^2} \right)$$

Beispiel: Spektrallinien



1. Quantenzahl n für ein Material mit drei Spektrallinien?

- $n = 3$ weil 3 übergänge: $3 \rightarrow 1$, $3 \rightarrow 2$ & $2 \rightarrow 1$
- Spektrallinien werden von Photonen mit einer spezifischen Wellenlänge assoziiert. Jede Übergang ($\Delta E = E_{n+1} - E_n$) von einem Energieniveau zu einem anderen emittiert eine spezifische Wellenlänge (Spektralnenlinie).

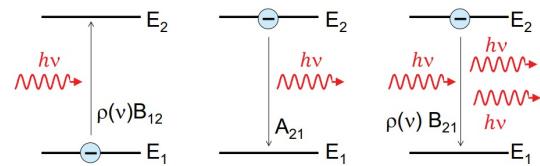
2. Welche zwei Serien mit den niedrigsten n überschneiden?

- Die ersten drei Serien des Wasserstoffs können dabei nicht spektral überschneiden, die Brackett-Serie und die Paschen-Serie dagegen erstmals schon:

Serie	n_1	n_2	$\frac{1}{\lambda}$ in R_H	n_2	$\frac{1}{\lambda}$ in R_H
Lyman	1	2	0.75	∞	1.00
Balmer	2	3	0.139	∞	0.25
Paschen	3	4	0.049	∞	0.11
Brackett	4	5	0.0225	∞	0.063

6.2.2 Einstein'sche Koeffizienten:

Wie schnell respektive wie häufig es zu einem Absorptions- oder Emissionsvorgang kommt.



1. **Absorption:** Das Elektron ist im Zustand tieferer Energie, absorbiert ein Photon, und geht in den Zustand höherer Energie über
2. **Spontane Emission:** Das Elektron ist im Zustand höherer Energie, emittiert spontan ein Photon und geht in den Zustand tieferer Energie über
3. **Stimulierte Emission:** Das Elektron ist im Zustand höherer Energie. Ein einfallendes Photon kann die Emission eines weiteren Photons durch Übergang des Elektrons in den Zustand tieferer Energie induzieren

Die Absorptions- und Emissionsraten gehorchen kinetischen Gleichungen (man betrachtet nicht 1 Atom, sondern N Atome)

$$\frac{\partial N_1}{\partial t} = -\rho(\nu)B_{12}N_1 + \rho(\nu)B_{21}N_2 + A_{21}N_2$$

$$\frac{\partial N_2}{\partial t} = \underbrace{+\rho(\nu)B_{12}N_1}_{\text{Absorption}} - \underbrace{\rho(\nu)B_{21}N_2}_{\text{stim. Em.}} - \underbrace{A_{21}N_2}_{\text{spont. Em.}}$$

wobei sei N_1 die Anzahl Atome, bei welchen das Elektron im tiefen Energieniveau mit Energie E_1 und so weiter ($N_1+N_2=N$).

Einstein'sche Koeffizienten

A_{21} ($[A_{21}] = \frac{1}{s}$) und $B_{21} = B_{12}$ ($[B_{21}] = \frac{m^3}{J_s}$)

Die Einstein'sche Koeff. ist eine spezifische Eigenschaft des Atoms.
Gleichgewicht/Statischer Fall

$$\frac{\partial N_i}{\partial t} = 0$$

Maxwell-Boltzmann Statistik:

$$N_2 = N_1 e^{-\frac{E_2 - E_1}{k_B T}}$$

Energiedichte des elektromagnetischen Feldes

$$\rho(\nu) = \frac{1}{2} \varepsilon \left| \vec{E}(\nu) \right|^2$$

mit $\vec{E}(\nu)$ die Amplitude des elektrischen Feldes mit Frequenz ν . Da die Anzahl der Photonen proportional zur Lichtintensität ist, gilt

$$\rho(\nu) \propto N_p$$

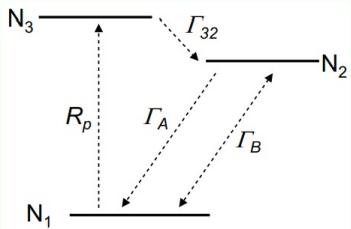
mit N_p die Anzahl der Photonen mit Energie $h\nu$ ist

6.2.3 Grundprinzip des Lasers:

Beim Laser wird künstlich (=artificialmente) das obere Energieniveau mit Elektronen aufgefüllt, und danach eine Kettenreaktion von stimulierter Emission ausgelöst. Als Resultat erhält man eine grosse Zahl von identischen Photonen innerhalb von sehr kurzer Zeit (Laserblitz).

Bedingung: das obere Energieniveau muss mehr Elektronen enthalten als das untere Energieniveau.

Funktioniert mit **mindestens 3 Niveaus!**

Beispiel: Dreiniveaulaser**Kinetische Gleicungen**

$$\frac{\partial N_1}{\partial t} = \underbrace{+\Gamma_B N_p(N_2 - N_1)}_{\text{Absorption und Stim. Em.}} \underbrace{+\Gamma_A N_2}_{\text{Spont. Em.}} \underbrace{-R_p N_1}_{\text{Pumpen}}$$

$$\frac{\partial N_2}{\partial t} = \underbrace{-\Gamma_B N_p(N_2 - N_1)}_{\text{Absorption und Stim. Em.}} \underbrace{-\Gamma_A N_2}_{\text{Spont. Em.}} \underbrace{+\Gamma_{32} N_3}_{\text{Bevölkern}}$$

$$\frac{\partial N_3}{\partial t} = \underbrace{R_p N_1}_{\text{Pumpen}} \underbrace{-\Gamma_{32} N_3}_{\text{Entfölkern}}$$

Wenn im Gleichgewicht

$$\frac{\partial N_1}{\partial t} = \frac{\partial N_2}{\partial t} = \frac{\partial N_3}{\partial t} = 0$$

Da Γ_{32} sehr schnell ist $N_3 \approx 0$

Differenz der beiden Gleichungen ($N_2 - N_1 = \Delta N$)

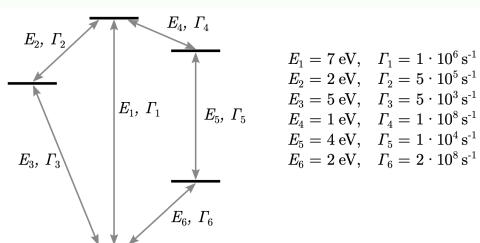
$$\frac{\partial \Delta N}{\partial t} = -2\Gamma_B N_p \Delta N - \Gamma_A (N + \Delta N) + R_p (N \Delta N) = 0$$

mit $\Delta N = N_2 - N_1$ und $N \approx N_2 + N_1$

Besetzungsinverson (falls R_p gross genug ist) $\Delta N > 0$ (mehr Elektronen in E_2 als E_1):

$$\frac{\Delta N}{N} = \frac{R_p - \Gamma_A}{2\Gamma_B N_p + R_p + \Gamma_A} > 0$$

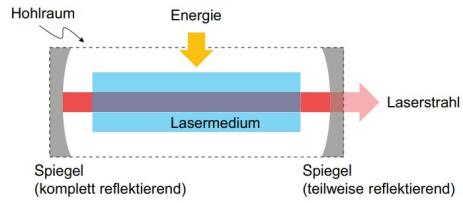
Bei Besetzungsinverson werden insgesamt mehr Photonen emittiert als absorbiert, es wird netto also Licht abgegeben: Laseraktivität tritt ein. Damit Besetzungsinverson eintritt, muss gemäss obiger Gleichung die Pumprate schneller als die Rate der spontanen Emission sein.

Beispiel: Vierniveaulaser

In dem abgebildeten Material koennte sich sowohl ein 3-Niveau-Laser wie auch ein 4-Niveau-Laser ausbilden. Die Pumpquelle hat eine Photonenergie von $E_{\text{Pump}} = 7 \text{ eV}$. Damit werden Elektronen vom Grundzustand in den Zustand mit der hoechsten Energie angeregt. Von dort gibt es zwei moegliche Zerfallspfade, nach links und nach rechts. Da die Uebergangsrate $\Gamma_4 \gg \Gamma_2$ ist, nehmen praktisch alle Elektronen den rechten Relaxationspfad. Da Γ_6 groesser als die Pumprate ist, bildet sich ein 4-Niveau-Laser aus. Der eigentliche Laseruebergang hat damit die Energie $E_5 = 4 \text{ eV}$. Zwar koennen auch wenige Photonen durch die anderen Uebergänge erzeugt werden, aber ein Laser- betrieb kommt nicht zustande, da $\Gamma_1 > \Gamma_2$.

Eigenschaft von Laserlicht (beide Photonen bei einer stimulierten Emission identisch sind):

- **Laserlicht ist kohärent:** Alle Photonen haben dieselbe Wellenlänge, Frequenz und Phase
- **Laserlicht ist polarisiert:** Normalerweise haben alle Photonen dieselbe Polarisation
- **Laserlicht ist in der Regel räumlich gerichtet** und hat ein wohldefiniertes, meist gaussförmiges, Intensitätsprofil. Dies ist eine Folge des Laserhohlraums

6.2.4 Aufbau eines Lasers:**Die Komponente eines Lasers sind**

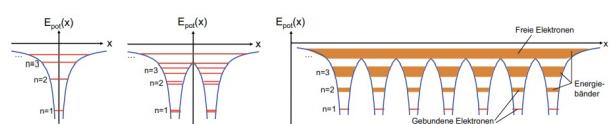
1. Der **Pumpmechanismus** liefert die Energie, welche nötig ist, um das Elektron vom Grundzustand ins Niveau 3 zu bringen.
2. Das **Lasermedium** ist das Medium, in welchem die stimulierte Emission stattfindet
3. Um die stimulierte Emission zu verstärken, wird Laserlicht häufig in einem resonanten Hohlraum (**Lasercavity**) generiert. Die elektromagnetische Welle wird von den Enden des Hohlraums kontinuerlich reflektiert und löst bei jedem Durchgang eine stimulierte Emission aus. Der Laserhohlraum hat eine weitere Funktion. Da die elektromagnetische Welle kontinuerlich reflektiert wird, entspricht sie einer stehenden Welle. Die Länge des Laserhohlraums muss deshalb exakt ein Vielfaches der halben Wellenlänge sein

7 Festkörperphysik**7.1 Festkörper:****7.1.1 Bändermodell - vom Atom zum Festkörper:**

Energieniveaus im Festkörper kontext: Wellengleichung niemals exakt lösbar.

Abbildung erklärung: Bandstruktur

- Die Energieniveaus in einem einzelnen Atom liegen weit auseinander. Wir können deshalb erwarten, dass die Reihenfolge der Energieniveaus in etwa erhalten (=invariante) bleibt.
- In grosser Entfernung sind die Energieniveaus von zwei gleichen Atomen identisch.
- Nähern sich zwei Atome an, so werden sich die entsprechenden Energieniveaus unter dem gegenseitigen Einfluss geringfügig verschieben. Im resultierenden zwei-Atom System erscheinen nun die beiden ursprünglich identischen Energieniveaus als zwei neue Niveaus mit leicht unterschiedlicher Energie (die erste etwas tiefer, das zweite etwas höher)
- Nähern sich N Atome an, so spaltet sich ein gegebenes atomares Energieniveau in N leicht unterschiedliche Niveaus auf. Energieband erzeugen.
- Je höher das ursprüngliche Energieniveau, desto breiter ist in der Regel der Bereich des Energiebandes.



Daraus folgt ins Festkörper:

- Energiebänder, welche aus tiefen Energieniveaus gebildet werden, haben nur eine sehr geringe Aufspaltung (=division). Das heisst, Elektronen in diesen Niveaus sind fast vollständig an dem ursprünglichen Atom lokalisiert und spüren fast nichts von den anderen Atomen. Diese Elektronen werden als **gebundene Elektronen** (core electrons) bezeichnet.
- Energiebänder aus hohen Energieniveaus sind breit. Die Elektronen können sich fast über den gesamten Festkörper bewegen, da die Kernladung durch die gebundenen Elektronen fast vollständig abgeschirmt wird. Diese Elektronen werden als **freie Elektronen oder Valenzelektronen** bezeichnet

7.1.2 Fermienergie:

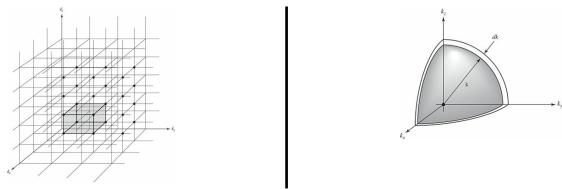
Valenzelektronen im Festkörper verhalten sich wie freie Elektronen in einem dreidimensionalen Kastenpotential (gegeben durch die Dimension des Festkörpers).

Hat ein Festkörper M Elektronen, nach Pauliprinzip er hat auch $\frac{M}{2}$ Energieniveau (zwei El pro Niveau). Die **Fermienergie** E_F ist das hoechst besetzte Energieniveau relativ zum Grundniveau E_1 , wobei nur die Ladungsträger mit $E \approx E_F$ zum Stromfluss beitragen. Zudem sind bei total M Elektronen die untersten $M/2$ Niveaus besetzt.

Austrittsarbeit W_{aus} , die Differenz zwischen der Fermienergie und der Energie eines freien Elektrons außerhalb des Festkörpers (Vakuumniveau E_{vac}).

Free electron model (good for metals):

k- Raum:



Electronic states are filled up to k_f (right picture), $k_{x,y,z} > 0$. Every solution in the k-space occupies the same space:

$$\frac{\pi^3}{l_x l_y l_z} = \frac{\pi^3}{V}$$

$$\text{Occupied volume in k-space} = \frac{1}{2} \# \text{of electrons} * \text{volume per electronic state}$$

with N being the number of atoms, q their respective number of valence electrons.

Fermi energy for 1D, 2D and 3D case: plugging the equation

above for $V(x) = 0$ into $E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$, $\hat{p} = \hbar \hat{k}$ ($1\text{eV} = 1.6 \cdot 10^{-19}\text{J}$) we get: (with $N \cdot q = M$)

$$1. \text{ 3D: } \frac{1}{8} V_{sphere} = \frac{1}{2} N * q * \frac{\pi^3}{V} \Rightarrow \text{where } V_{sphere} = \frac{4}{3} \pi k^3, k = \dots$$

$$(a) E_F = \frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{3\pi^2 N q}{V} \right)^{2/3}$$

$$(b) N q = M = \frac{V}{3\pi^2} \left(\frac{2m E_F}{\hbar^2} \right)^{3/2}$$

$$2. \text{ 2D: } \frac{1}{4} A_{circle} = \frac{1}{2} N * q * \frac{\pi^2}{A} \Rightarrow \text{where } A_{circle} = \pi k^2, k = \dots$$

$$(a) E_F = \frac{\hbar^2 \pi N q}{A m}$$

$$(b) N q = M = \frac{m E_F}{\hbar^2 \pi}$$

$$3. \text{ 1D: } 1 \cdot L_k = \frac{1}{2} N * q * \frac{\pi}{L} \Rightarrow \text{where } L_k = k$$

$$(a) E_F = \frac{\hbar^2 N^2 q^2 \pi^2}{8 m L^2}$$

$$(b) N q = M = \frac{2 L \sqrt{2 E_m}}{\hbar \pi}$$

Zustandsdichte: $g(E) = \frac{dNq}{dE}$ (represents $\#e^-$ per unit energy, # of one-electron-levels)

$$\bullet \text{ 3D: } g(E) = \frac{V}{2\pi^2} \left(\frac{2m}{\hbar^2} \right)^{3/2} E^{1/2}$$

$$\bullet \text{ 2D: } g(E) = \frac{m A}{\hbar^2 \pi}$$

$$\bullet \text{ 1D: } g(E) = \frac{m L}{\hbar \pi} \cdot \sqrt{\frac{2}{E_m}}$$

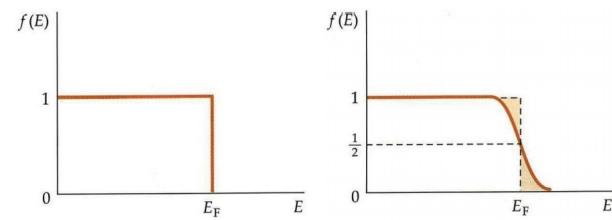
Im allgemein kann die $\#electrons/V := \tilde{n}$ geschrieben als:

$$\tilde{n} = \int_0^a g(E) \cdot f(E) dE$$

wobei $a = E_F$ if $T = 0$, $a = \infty$ else.

7.1.3 Fermi-Dirac Verteilung:

Gemäss dem Pauliprinzip sind alle Energieniveaus mit Energie $E < E_F$ mit Elektronen besetzt, und alle Energieniveaus mit Energie $E > E_F$ leer.



Besetzungswahrscheinlichkeit NUR für $T = 0$

$$f(E) = \begin{cases} 1 & \text{falls } E \leq E_F \\ 0 & \text{falls } E > E_F \end{cases}$$

Bei endlichen Temperaturen $T > 0$ werden die Elektronen thermisch angeregt (=animiert), sodass es immer Elektronen gibt, die eine etwas höhere Energie als E_F besitzen, während andere etwas weniger als E_F habe.

Fermi-Dirac Verteilung oder **Fermifaktor** oder **Besetzungswahrscheinlichkeit** für $T > 0$

$$f(E) = \frac{1}{1 + e^{\frac{E - E_F}{k_B T}}}$$

Breite des Übergangsbereich (Zwischen $f_{FD} = 1$ und $f_{FD} = 0$) (die thermische Energie im Mittel ist gleich $k_B T$).

$$\frac{\partial f_{FD}(E, T)}{\partial E} \Big|_{E=E_F} = m \stackrel{\text{lin. approx}}{\rightarrow} \Delta E = 4k_B T$$

Fermineveau/Fermienergie: Energie E bei $f(E) = 0.5$ Die Fermienergie entspricht der kinetischen Energie der Elektronen, die sich auf dem höchsten besetzten Energieniveau befinden.

Fermitemperatur (Temperatur die Elektronen thermisch so stark angeregt werden, dass das Pauliprinzip keine grosse Rolle mehr spielt)

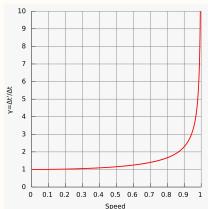
$$T_F = \frac{E_F}{k_B}$$

Fermigeschwindigkeit (spielt eine Rolle beim Betrachten der elektrischen Leitfähigkeit, da sie die Häufigkeit von Zusammenstößen zwischen Elektronen und Gitteratomen beeinflusst)

$$v_F = \sqrt{\frac{2 E_F}{m_e}}$$

Theorem: Zeitdilatation

Die Zeitdilatation bewirkt, dass alle Prozesse eines physikalischen Systems relativ zum Beobachter langsamer ablaufen, wenn sich dieses System relativ zum Beobachter bewegt:
 $\Delta t' = \gamma \Delta t = \frac{\Delta t}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$



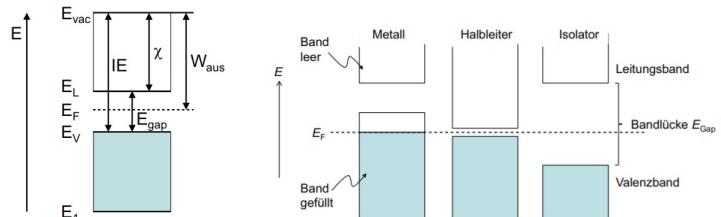
Hinweis: $Speed = \frac{v_{objekt}}{c}$, Wenn die Fermiegeschwindigkeit ist ca. gleich die Lichtgeschwindigkeit, ich sollte die Problem relativistischen betrachten. Sonst, wenn $v_F \ll c$, ich kann das klassischer Model benutzen.

7.1.4 Leiter, Halbleiter und Isolatoren:

Anhand der Bandstruktur und der Lage der Fermienergie kann man für ein Material vorhersagen, ob es einen elektrischen Strom grundsätzlich leiten kann (Leiter) oder nicht (Isolator).

- Nur die Elektronen mit Energie $E \approx E_F$ tragen zum Stromfluss bei. Elektronen mit tieferer Energie finden keine freien Energieniveaus vor.
- Falls das Energieband zufälligerweise gerade voll ist (und sich nicht mit einem anderen Band überschneidet), gibt es keine freien Zustände, und es kann kein Stromfluss stattfinden.
- If we add more electrons to a crystalline metallic solid, such that additional electronic states are occupied, the Fermi energy rises. The electronic density of states at the Fermi energy affects the ability of a solid to conduct electricity.

Bandlücke: $E_F = \frac{E_C + E_V}{2} + \frac{k_B T}{2} \ln\left(\frac{N_{n-doped}}{N_{p-doped}}\right)$



- Metall ($E_{Gap} = 0$): Die Fermienergie liegt in einem Band und die Elektronen können deshalb kinetische Energie aufnehmen oder abgeben. Wenn $T \uparrow, \sigma \downarrow$
- Halbleiter ($0eV < E_{Gap} < 4eV$): Das Material besitzt Bandlücke und die Fermienergie liegt zwischen zwei Bändern, aber die Energiedifferenz zwischen den beiden Bändern ist klein genug, dass Elektronen thermisch vom Valenz- ins Leitungsband angeregt werden können. Wenn $T \uparrow, \sigma \uparrow$
- Isolator ($E_{Gap} > 4eV$): Die Fermienergie liegt zwischen zwei Bändern, und die Energiedifferenz zwischen den beiden Bändern ist so gross, dass keine Elektronen ins Leitungsband angeregt werden und die Besetzungswahrscheinlichkeit im Leitungsband gleich null ist.

Die **Ionisierungsenergie** IE ist gleich der Energie, welche benötigt wird, um das oberste Elektron eines Atoms/Festkörpers zu entfernen, d.h. ins Vakuum zu überführen.

Die **Elektronenaffinität** χ ist gleich der Energie, welche benötigt wird, um das oberste Elektron eines einfach negativ geladenen Atoms/Festkörpers zu entfernen.

7.2 Elektronische Leitfähigkeit von Festkörpern:**7.2.1 Drude-Modell:**

Die Driftgeschwindigkeit aus der Häufigkeit von Zusammenstößen mit Gitterionen abzuschätzen. Dieses Modell wird Drude-Modell genannt.

Spezifische Leitfähigkeit nach Drude

$$\sigma = \frac{|\vec{v}_D| e n_e}{|\vec{E}|} = \frac{e^2 \tau n_e}{m_e^*} = \frac{e^2 \lambda n_e}{m_e^* v_F} \propto \frac{e^2 \lambda g(E_F)}{m_e * v_F}$$

mit: n_e die Ladungsträgerdichte, \vec{E} das elektrische Feld, m_e^* die effektive elektronenmasse ($= m_e$ wenn nicht spezifiziert), τ die Streuzeit und v_D die Driftgeschwindigkeit

Die **Driftgeschwindigkeit** ist die stationäre Endgeschwindigkeit, welche sich einstellt, nachdem das E-Feld angelegt wurde. Um die Modell zu erstellen nehmen wir an, dass das Elektron nach jedem Zusammenstoß inelastisch in eine beliebige Richtung abgelenkt (gestreut) wird. Dann ist $\tau = \langle t \rangle$ die mittlere Zeit zwischen zwei Zusammenstößen (Streuzzeit).

$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{v}_D = \vec{v}_0 - \frac{e}{m_e} \vec{E} \tau$ ist die Geschwindigkeit zu einer Zeit τ mit v_0 die Geschwindigkeit eines Elektrons direkt nach einem Stoß.

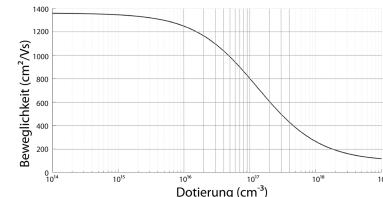
Während der Zeit τ legt das Elektron deshalb eine mittlere Strecke λ zurück.

$$\lambda = \langle |\vec{v}| \rangle \tau \stackrel{|\vec{v}_0| \gg |\vec{v}_D|}{\approx} \langle |\vec{v}_0| \rangle \tau$$

ist die mittlere freie Weglänge

$|\vec{v}_0| = \vec{v}_F$ die mittlere Geschwindigkeit (gleich zum Fermiegeschwindigkeit, nur die Elektronen in der Nähe des Fermiplateaus tragen zum elektrischen Stromfluss bei).

$n_e \propto g(E_F) = \frac{\partial n}{\partial E} \Big|_{E_F}$ die Ladungsträgerdichte ($g(E_F)$) die Zustandsdichte im Intervall $E > E_F$)

Beweglichkeit

Die Beweglichkeit ist definiert als $\mu = \frac{v_D}{E} \Rightarrow \sigma = e \mu n_e$, wobei v_D die Driftgeschwindigkeit ist und E das elektrische Feld. Je mehr Fremdatome in den Halbleiterkristall eingebracht werden, desto kürzer wird die mittlere Stoßzeit und damit sinkt die Beweglichkeit μ . Wieso steigt mit stärkerer Dotierung die Leitfähigkeit des Silizium stetig an, obwohl die Beweglichkeit sinkt? Der Effekt der reduzierten Mobilität ist signifikant im Verhältnis zur Ladungsträgerdichte für die Leitfähigkeit des Siliziumkristalls.

7.2.2 Baendermodell und Streuung von Leitungselektronen:

Wie oft ein Elektron mit einem Gitterion zusammenstößt? Zwei Gründe: es gibt Streuung von Elektronen und Metalle haben kein unendlich Leitfähigkeitswert:

- Streuung durch Gitterschwingungen**
Mittlere freie Weglänge

$$\lambda_{osc} = \frac{V_{ion}}{A_{ion}} = \frac{1}{n_{ion} A_{ion}} = \frac{m_{ion} \omega_0^2}{n_{ion} \pi k_B T}$$

mit n_{ion} die Anzahl Ionen pro m^3 (Ionendichte) und V_{ion} der Volumen, das pro Ion zur Verfügung steht und **Streuquerschnitt des Ions** (= mittlere Auslenkung des

Ions wenn es eine Schwingung um die Gleichgewichtslage ausfuert)

$$A_{\text{ion}} = \pi x_0^2 = \pi \frac{k_B T}{k_c} = \frac{\pi k_B T}{m_{\text{ion}} \omega_0^2}$$

mit x_0 Schwingungsamplitude, k_c die Federkonstante der Gitterschwingung, m_{ion} die Masse des Ions und ω_0 die Schwingungsfrequenz

- **Streuung durch Fehlstellen** (Fremdatome im Metallgitter)

Mittlere freie Weglänge

Die mittlere freie Weglänge kann als der Abstand zweier Störstellen angenommen werden.

$$\lambda_{SS} = \frac{1}{n_{SS} A_{SS}} = \frac{1}{n_{SS} \pi r_{SS}^2}$$

mit $n_{SS} \ll n_{\text{ion}}$ die Dichte an Störstellen, und $A_{SS} = \pi r_{SS}^2$ ist der Streuquerschnitt des Fremdatoms (r_{ss} Radius von Fremdatome)

$$\lambda = \frac{1}{N_{\text{Defekt}}^{\frac{1}{3}}}$$

(N_{Defekt} = Dichte)

Kombinierte mittlere freie Weglänge

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{1}{\lambda_{osc}} + \frac{1}{\lambda_{SS}}$$

Leitfähigkeit nach dem Bändermodell

$$\sigma = \frac{e^2 n_e}{m_e v_F} \left(\frac{n_{\text{ion}} \pi k_B T}{m_{\text{ion}} \omega_0^2} + n_{SS} \pi r_{SS}^2 \right)^{-1}$$

Voraussagen zur elektrischen Leitfähigkeit

- σ ist unabhängig vom elektrischen Feld (Ohm'sches Gesetz)
- σ ist proportional zur Zustandsdichte $g(E_F) \propto n_e$ und gibt also wieder, ob ein Material leitend oder nichtleitend ist
- σ ist für hohe Temperaturen proportional zu $\frac{1}{T}$ (wenn Gitterschwingungen der dominierende Mechanismus sind)
- σ ist für tiefe Temperaturen temperaturunabhängig (wenn Störstellen der dominierende Mechanismus sind)
- σ ist für tiefe Temperaturen abhängig von der Konzentration an Störstellen

Theorem: Bloch's

For periodic potentials:

$$V(x) = V(x+a) \Rightarrow \psi(x+a) = e^{iKa} \psi(x)$$

Note: $|\psi(x)|^2 = |\psi(x+a)|^2 \Rightarrow |\psi|^2$ is periodic but the wavefunction is not the same for every atom in the lattice!

7.3 Halbleiter:

Semi-cond. can be made more conductive through thermal and/or doping measures:

1. Thermal excitation:

$$n_{e^-} = N_i e^{-\frac{E_g}{k_B T}}, N_i = \text{undoped carrier concentration}$$

free electrons per unit Volume

2. Doping excitation:

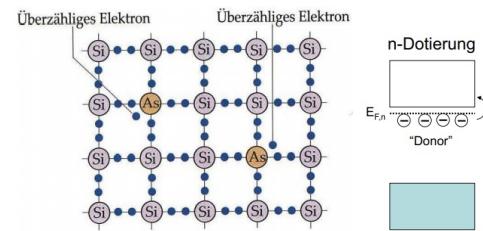
$$n_{e^-} = N_D e^{-\frac{E_d}{k_B T}}$$

Concentration of Donor atoms

7.3.1 Dotierung von Halbleitern:

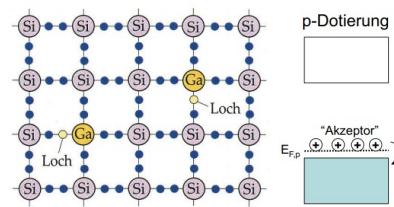
Halbleitern kann man gezielt Fremdatome einpflanzen, um positive oder negative Ladungen einzuführen.

Donator



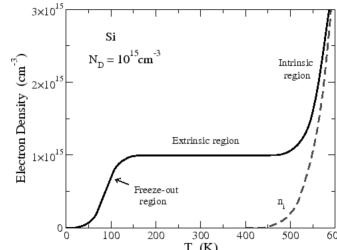
Falls das Fremdatom ein Elektron mehr hat, gibt das Fremdatom das Elektron ab und es wird zu einem Leitungselektron: electron doping oder **n-doping** (negative doping)

Akzeptor



Falls das Fremdatom ein Elektron weniger hat, nimmt das Fremdatom ein Elektron auf und hinterlässt ein mobiles "Loch": "hole doping" oder **p-doping** (positive doping).

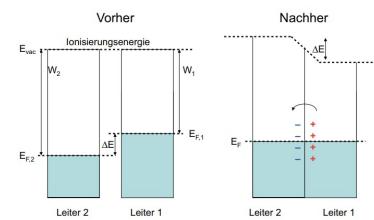
Die Energie zur Abgabe des Elektrons oder Lochs ist normalerweise viel kleiner als die Energie der Bandlücke. Damit kann man Materialien (wie intrinsische Halbleiter), die eigentlich nur bei sehr hoher Temperatur leitfähig wären halbleitend machen. AKA: Es gibt eine brauchbaren Temperaturbereich!



The plot shows free electron concentration vs T . It has three regions. At cold temperature (left side of plot) very few of the donors are ionized because $k_B T \ll E_d$, the binding energy. As we warm we ionize more and more of the donor electrons, which increases the free electron concentration. This low temperature regime is known as *freeze out*. As the sample is warmed further, eventually all the donors are ionized when $k_B \approx E_d$. Then further increases in the temperature do not introduce any additional free electrons. This regime is known as *saturation or extrinsic region*. However if we move far enough to the right, i.e. we heat the semiconductor hot enough, then $k_B T \approx E_g$ and we start thermally excite electrons from the valence band to the conduction band directly. This third regime is known as the *intrinsic regime*.

7.3.2 Kontaktpotential:

Zwei Leiter miteinander in Kontakt gebracht werden.



Austrittsarbeit

$$W_{aus} = E_{vac} - E_F$$

Merke: beim Kathode, $W_{aus} \downarrow, U \uparrow$

Kontaktpotential (Energiedifferenz), **Kontaktspannung** (U_k)
Kommen die beiden Leiter in Kontakt, fliessen Ladungen vom einen in den anderen Leiter (vom Leiter mit höher Fermienergie zu tieferen):

$$E_{\text{Kontakt}} = W_2 - W_1 = \Delta E = U_{\text{Kontakt}} \cdot e$$

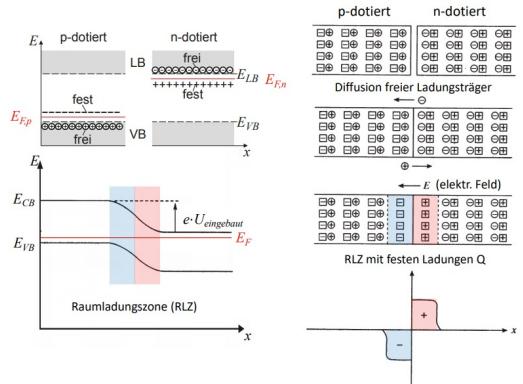
Die Ladungen fliessen so lange, bis sich ein elektrisches Gegenfeld aufgebaut hat, das die Kontaktspannung genau kompensiert und die Fermienergie über beide Leiter konstant ist.

Beispiel: Halbleiter Austrittsarbeit

Gegeben χ , E_{gap} , E_F $\delta_n = E_L - E_F$ und $\delta_p = E_F - E_V$
Gesucht ist W

$$\begin{aligned} W_n &= \chi + \delta_n \\ W_p &= \chi - \delta_p + E_{\text{gap}} \end{aligned}$$

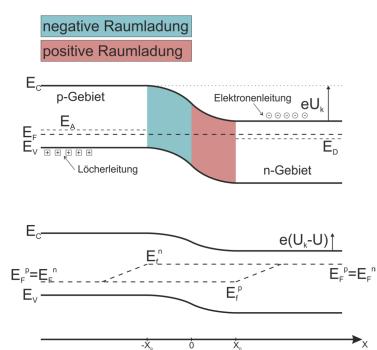
7.3.3 pn-Halbleiterübergänge:



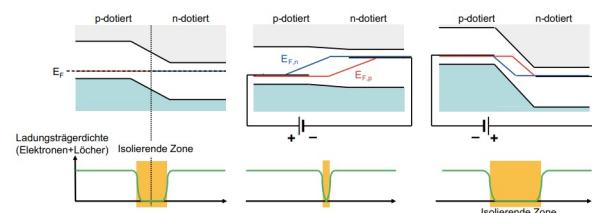
Bringt man zwei unterschiedlich dotierte Halbleiter (aus demselben Material) zusammen Elektronen diffundieren sich von der n-dotierten Seite auf die p-dotierte Seite und es bildet sich eine Raumladungszone (RLZ, frei von mobilen Ladungsträgern → Ladungsneutral)

Hinweis Der pn-Ubergang leitet keinen Strom, obwohl sowohl die p-dotierte wie auch die n-dotierte Seite leitend sind.

Merke: Die eingebaute Spannung an einem pn-Ubergang im Gleichgewicht resultiert aus: Angleichen der Fermi-Niveaus zwischen beiden Halbleitern und Diffusion von Löchern/Elektronen aus der p/n-Seite in die n/p-Seite.



7.3.4 Diode:



$$\text{Diffusionsspannung: } U_D = \frac{k_B T}{e} \ln\left(\frac{n_D n_A}{n_i^2}\right)$$

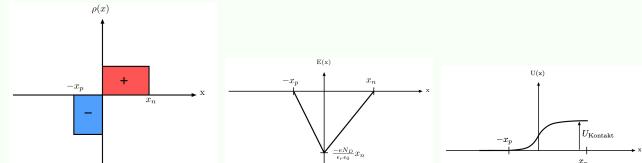
Die Leitfähigkeit des pn-Ubergangs kann durch eine Spannung verändert werden:

• **Vorwärtsspannung** (forward bias): Wird an die p-Seite eine positive Spannung angelegt, so **verringert sich das Kontaktpotential**. Die ladungsarme Zone wird dünner und es beginnt ein Strom zu fliessen

• **Rückwärtsspannung** (reverse bias): Wird an die p-Seite eine negative Spannung angelegt, so **erhöht sich das Kontaktpotential**. Die ladungsarme Zone wird breiter und der Halbleiter wird zum Isolator

Beispiel: pn-Übergang, Elektrische Feld

Elektrische Feld zwischen zwei Halbleiter im kontakt.



$$-\frac{d^2 U(x)}{dx^2} = \frac{\rho(x)}{\epsilon_r \epsilon_0}$$

mit

$$\rho(x) = \begin{cases} -eN_A & \text{für } -x_p \leq x \leq 0 \\ eN_D & \text{für } 0 \leq x \leq x_n \end{cases}$$

Durch Poisson

$$\frac{dE(x)}{dx} = -\frac{d^2 U(x)}{dx^2}$$

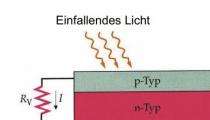
$$\rightarrow E(x) = \begin{cases} -\frac{eN_A}{\epsilon_r \epsilon_0}(x + x_p) \\ \frac{eN_D}{\epsilon_r \epsilon_0}(x - x_n) \end{cases}$$

Spannung: (mit $V(-x_p) = 0$ und $V(x_n) = U_k$)

$$V(x) = - \int E(x) dx + C$$

7.3.5 Solarzelle, Photodiode und Leuchtdiode:

Solarzelle Licht in Strom zu wandeln.



In einer Solarzelle wird ein e^- auf der p-Seite vom Valenzband ins Leitungsband angeregt, indem es ein Photon absorbiert. Dazu muss die Energie des Photons mindestens gross wie die Bandlücke sein, $h\nu > E_{\text{gap}}$. Das angeregte Elektron hinterlässt ein Loch.

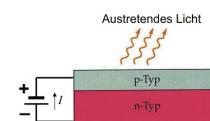
$$I = I_L - I_S(e^{eU/k_B T} - 1)$$

Photodiode

In der Photodiode wird zusätzlich eine Rückwärtsspannung angelegt. Dies führt zu einer viel schnelleren Reaktion auf ein absorbiertes Photon, da die Potentialdifferenz nun viel grösser ist. Da der resultierende Strom proportional zur Anzahl eintreffender Photonen ist, kann man die Lichtintensität direkt messen $E_{\text{gap}} = \frac{hc}{\lambda}$ mit λ = Wellenlänge Detektierbare Strahlung

$$I_{PD} = I_L - I_S(e^{eU/k_B T} - 1)$$

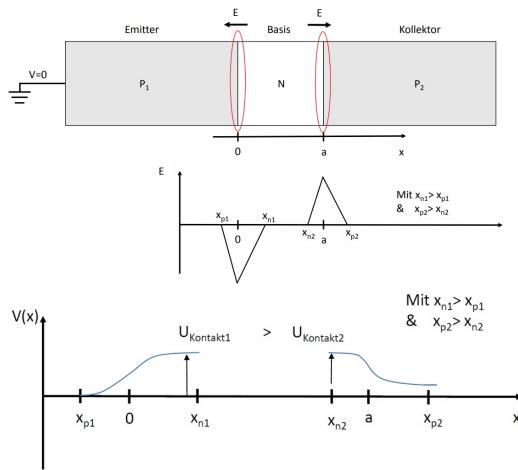
Leuchtdiode (LED)



Es wird eine Vorwärtsspannung angelegt, sodass eine grosse Zahl von Elektronen auf der p-Seite und Löchern auf der n-Seite entstehen. Elektronen und Löcher rekombinieren. Licht wird produziert.

7.3.6 Transistor:

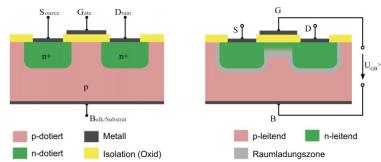
Bipolartransistor (npn oder pnp) [Bild == pnp]



Legt man eine Spannung zwischen Emitter und Kollektor an, so fliessst erst mal kein Strom, da je nach Vorzeichen der Spannung beim np- oder pn-Ubergang der Stromfluss blockiert wird.

Legt man nun zusätzlich eine Spannung an der Basis an, so wandern Ladungsträger in den p-Bereich, und die Blockade wird aufgelöst.

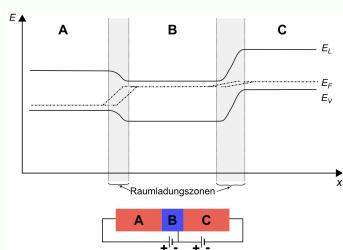
Feldeffekttransistor (Meistens werden Bulk und Source zusammengeschlossen und geerdet)



Wenn zwischen Source und Drain eine Spannung anliegt, kann kein Strom fliessen (wie beim Bipolartransistor). Durch Anlegen einer Gate-Spannung akkumulieren sich Minoritätsladungsträger (in diesem Fall die Elektronen) am Gate-Isolator und ein n-leitender Kanal bildet sich aus. Dadurch werden die beiden n-leitenden Schichten miteinander verbunden und ein Strom kann zwischen Source und Drain fliessen.

Hinweis es fliessst kein Strom durch das gate \rightarrow sehr effizient

Beispiel: pnp- Transistor

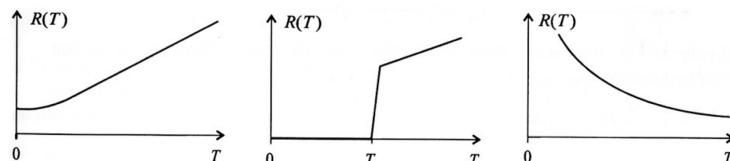


Es handelt sich um einen pnp-Bipolartransistor und der Übergang A-B ist in Durchlassrichtung geschalten.

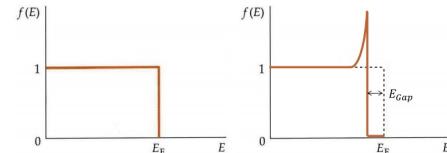
7.4 Supraleiter:

7.4.1 Grundlegende Beobachtung zur Supraleitung:

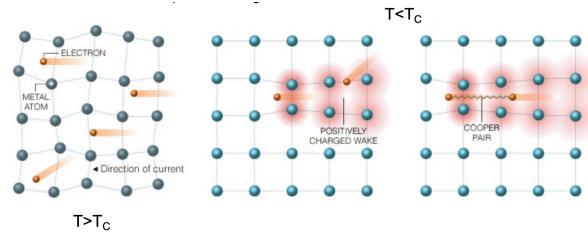
Widerstand im Supraleiter (Mitte), Metall (links) und Halbleiter (rechts) (unterhalb Sprungtemperatur)



7.4.2 Mikroskopische Erklärung der Supraleitung (BCS):



Elektronen ziehen sich an. \rightarrow Das erste Elektron uebt eine anziehende Kraft auf ein Gitter-atom aus, wodurch sich dieses etwas verschiebt. Dadurch entsteht eine positive Ladung, welche das zweite Elektron mitzieht. Das Resultat ist ein schwach gebundener Zustand zwischen $2 e^-$, welcher **Cooper-Paar** genannt wird. Cooper-Paar with entgegengesetzten Spin \rightarrow Pauliprinzip entfällt, alle Cooper-Paare haben dasselbe Energieniveau

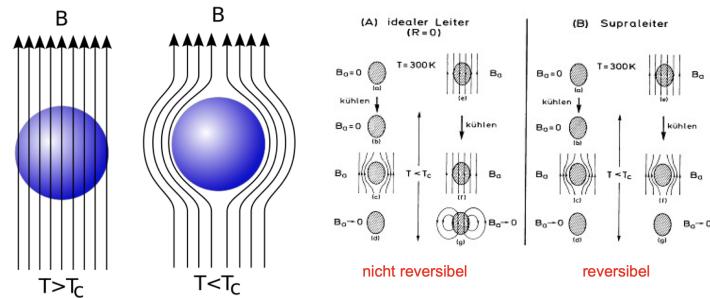


Um ein Cooper-Paar aufzubrechen

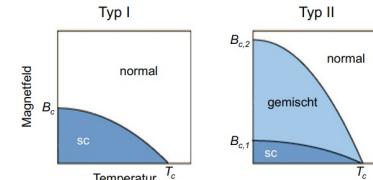
$$E_{\text{Gap}} = 3.52 k_B T_c$$

Eine weitere Möglichkeit sind Magnetfelder, welche eine gewisse kritische Feldstärke B_c überschreiten. Bei zu hohem Magnetfeld werden die Cooperpaare aufgebrochen. **Max Stromstärke** I_c wegen generierte Magnetfeld.

Supraleiter sind perfektes Diamagnete (Magnetfeld im Innern ist = 0!)



7.4.3 Supraleiter 1. und 2. Art:



1. Art (Typ 1) Magnetfeld wird bis zur krit. Feldstärke B_c komplett aus dem Material verdrängt Meistens chemischen Elementen

2. Art (Typ 2) Oberhalb der ersten kritischen Feldstärke bilden sich Flusssschläuche (Vortices) aus. Der magnetische Fluss durch einen Flussschlauch ist immer genau $\Phi_0 = \frac{\hbar}{2e}$. Diese Grösse wird **Fluxquantum** genannt.

Innerhalb der Flusssschläuche ist das Material im normalleitenden Zustand, ausserhalb im supraleitenden Zustand. Deshalb ist der elektrische Widerstand immer noch exakt Null. Mit steigendem Magnetfeld nimmt die Anzahl Flusssschläuche zu, bis oberhalb einer zweiten kritischen Feldstärke $B_{c,2}$ das Material komplett in den normalleitenden Zustand übergeht.

Meisten chemische Verbindungen
Sprungtemperaturen von Typ II > Typ I im Allgemein.

7.4.4 Hochtemperatursupraleiter (HTC Supraleiter):

Max temp für BCS Theorie: 30K
Max temp experimentell (1993): 130K

9 Appendix 2: Reminders

	$\int_0^{\pi/4}$	$\int_0^{\pi/2}$	\int_0^π	$\int_0^{2\pi}$	$\int_{-\pi/4}^{\pi/4}$	$\int_{\pi/2}^{\pi/2}$	$\int_{-\pi}^\pi$
sin	$\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}$	1	2	0	0	0	0
\sin^2	$\frac{\pi-2}{8}$	$\pi/4$	$\pi/2$	π	$\frac{\pi-2}{4}$	$\pi/2$	π
\sin^3	$\frac{8-5\sqrt{2}}{12}$	$2/3$	$4/3$	0	0	0	0
\sin^4	$\frac{3\pi-8}{32}$	$\frac{3\pi}{16}$	$\frac{3\pi}{8}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{3\pi-8}{16}$	$\frac{3\pi}{8}$	$\frac{3\pi}{4}$
cos	$1/\sqrt{2}$	1	0	0	$\sqrt{2}$	2	0
\cos^2	$\frac{2+\pi}{8}$	$\pi/4$	$\pi/2$	π	$\frac{2+\pi}{4}$	$\pi/2$	π
\cos^3	$\frac{5}{6\sqrt{2}}$	$2/3$	0	0	$\frac{5}{3\sqrt{2}}$	$4/3$	0
\cos^4	$\frac{8+3\pi}{32}$	$\frac{3\pi}{16}$	$\frac{3\pi}{8}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{8+3\pi}{16}$	$\frac{3\pi}{8}$	$\frac{3\pi}{4}$
sin cos	$1/4$	$1/2$	0	0	0	0	0
$\sin^2 \cos$	$\frac{2}{6\sqrt{2}}$	$1/3$	0	0	$\frac{1}{3\sqrt{2}}$	$2/3$	0
sin cos ²	$\frac{4-\sqrt{2}}{12}$	$1/3$	$2/3$	0	0	0	0

$$\int_{r\frac{\pi}{2}}^{s\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = \frac{n-1}{n} \int_{r\frac{\pi}{2}}^{s\frac{\pi}{2}} \sin^{(n-2)} x dx \quad \forall n \geq 2$$

$$\int_{r\frac{\pi}{2}}^{s\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx = \frac{n-1}{n} \int_{r\frac{\pi}{2}}^{s\frac{\pi}{2}} \cos^{(n-2)} x dx \quad r, s \in \mathbb{Z}$$

$$\int (ax+b)^n dx = \frac{1}{a(n+1)} (ax+b)^{n+1}$$

$$\int \frac{1}{ax+b} dx = \frac{1}{a} \ln |ax+b|$$

$$\int (ax^p+b)^n x^{p-1} dx = \frac{(ax^p+b)^{n+1}}{ap(n+1)}$$

$$\int (ax^p+b)^{-1} x^{p-1} dx = \frac{1}{ap} \ln |ax^p+b|$$

$$\int \frac{ax+b}{cs+d} dx = \frac{ax}{c} - \frac{ad-bc}{c^2} \ln |cx+d|$$

$$\int x(ax+b)^n dx = \frac{(ax+b)^{n+2}}{(n+2)a^2} - \frac{b(ax+b)^{n-1}}{(n+1)a^2}$$

$$\int \frac{x}{(ax+b)^n} dx = -\frac{1}{(n-2)a^2(ax+b)^{n-2}} + \frac{b}{(n-1)a^2(ax+b)^{n-1}}$$

$$\int \frac{x}{(x^2+a)^n} dx = -\frac{1}{2(n-1)(a^2+x^2)^{n-1}}$$

$$\int \frac{x}{(x^2-a^2)^n} dx = \frac{1}{2(n-1)(a^2+x^2)^{n-1}}$$

$$\int \frac{x}{x^2+a} dx = \frac{1}{2} \ln |x^2+a|$$

$$\int \frac{x}{ax^2+b} dx = \frac{1}{2a} \ln |ax^2+b|$$

$$\int \frac{1}{a^2+x^2} dx = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a}$$

$$\int \sqrt{x^2+a^2} dx = \frac{x}{2} \sqrt{x^2+a^2} + \frac{a^2}{2} \ln |x+\sqrt{x^2+a^2}|$$

$$\int \sqrt{a^2-x^2} dx = \frac{x}{2} \sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a}$$

$$\int \sqrt{x^2-a^2} dx = \frac{x}{2} \sqrt{x^2-a^2} - \frac{a^2}{2} \ln |x+\sqrt{x^2-a^2}|$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}} dx = \ln |x+\sqrt{a^2+x^2}|$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}} dx = \ln |x+\sqrt{x^2-a^2}|$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} dx = \arcsin \frac{x}{a}$$

$$\int \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} dx = x - 2 \tan^{-1} \left(\frac{x}{y} \right) \cdot y$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x$$

$$\int \frac{1}{1-x^2} dx = \operatorname{artanh} x = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right|, \quad |x| < 1$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} dx = \operatorname{arsinh} x = \ln |x+\sqrt{x^2+1}|$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} dx = \operatorname{arcosh} x = \ln |x+\sqrt{x^2-1}|, \quad |x| > 1$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x$$

$$\int \sin^2 x dx = \frac{1}{2}(x - \sin x \cos x)$$

$$\int \sin^3 x dx = \frac{1}{12}(\cos 3x - 9 \cos x)$$

$$\int \sin^4 x dx = \frac{1}{32}(12x - 8 \sin 2x + \sin 4x)$$

$$\int \frac{1}{\sin x} dx = \ln \left| \tan \frac{x}{2} \right|$$

$$\int \sin^n x dx = -\frac{1}{n} \sin^{n-1} x \cos x + \frac{n-1}{n} \int \sin^{n-2} x dx$$

$$\int \arcsin x dx = x \arcsin x + \sqrt{1-x^2}$$

$$\int \cos^2 x dx = \frac{1}{2}(x + \sin x \cos x)$$

$$\int \cos^3 x dx = \frac{1}{12}(9 \sin x + \sin 3x)$$

$$\int \cos^4 x dx = \frac{1}{32}(12x + 8 \sin 2x + \sin 4x)$$

$$\int \frac{1}{\cos x} dx = \ln \left| \tan \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right|$$

$$\int \cos^n x dx = \frac{1}{n} \sin x \cos^{n-1} x + \frac{n-1}{n} \int \cos^{n-2} x dx$$

$$\int \arccos x dx = x \arccos x - \sqrt{1-x^2}$$

$$\int \sin 2x dx = -\frac{1}{2} \cos 2x$$

$$\int \cos 2x dx = \sin x \cos x$$

$$\int \sin x \cos x dx = -\frac{1}{2} \cos^2 x$$

$$\int \sin^2 x \cos x dx = \frac{1}{3} \sin^3 x$$

$$\int \sin x \cos^2 x dx = -\frac{1}{3} \cos^3 x$$

$$\int \sin^2 x \cos^2 x dx = \frac{1}{32}(4x - \sin 4x)$$

$$\int \sin^n ax \cos ax dx = \frac{\sin^{n+1} ax}{a(n+1)}$$

$$\int \sin ax \cos^n ax dx = -\frac{\cos^{n+1} ax}{a(n+1)}$$

$$\int \tan x dx = -\ln |\cos x|$$

$$\int \tan^2 x dx = \tan x - x$$

$$\int \tan^3 x dx = \frac{1}{2 \cdot \cos(x)^2} + \ln |\cos x|$$

$$\int \tan^4 x dx = x + \frac{1}{3} \tan x \left(\frac{1}{\cos(x)^2} - 4 \right)$$

$$\int \frac{1}{\tan x} dx = \ln |\sin x|$$

$$\int \arctan x dx = x \arctan x - \frac{1}{2} \ln |1+x^2|$$

$$\int \coth x dx = \ln |\sinh x|$$

$$\int \frac{\cos ax}{\sin^n ax} dx = -\frac{1}{a(n-1) \sin^{n-1} ax}$$

$$\int \tanh x dx = \ln \cosh x$$

$$\int \operatorname{arsinh} x dx = x \operatorname{arsinh} x - \sqrt{x^2+1}$$

$$\int \operatorname{arcosh} x dx = x \operatorname{arcosh} x - \sqrt{x^2-1}$$

$$\int \operatorname{artanh} x dx = x \operatorname{artanh} x + \frac{1}{2} \ln |1-x^2|$$

$$\int \frac{1}{e^x+a} dx = \frac{x - \ln |a+e^x|}{a}$$

$$\int \frac{1}{x^2+x} dx = \ln |x| - \ln |x+1|$$

$$\int \frac{1}{ax^2+\sqrt{bx+c}} dx = \frac{2 \arctan \left(\frac{2ax+b}{\sqrt{4ac-b^2}} \right)}{\sqrt{4ac-b^2}}$$

$$\int x e^{ax} dx = \frac{ax-1}{a^2} e^{ax}$$

$$\int x^2 e^{ax} dx = \frac{a^2 x^2 - 2ax + 2}{a^3} e^{ax}$$

$$\int \frac{1}{p+qe^{ax}} dx = \frac{x}{p} - \frac{1}{ap} \ln |p+qe^{ax}|$$

$$\begin{aligned} \int xe^{kx^2} dx &= \frac{1}{2k} e^{kx^2} \\ \int \frac{\ln^n |x|}{x} dx &= \frac{\ln^{n+1} |x|}{x+1} \\ \int \sin^2 ax dx &= \frac{x}{2} - \frac{\sin 2ax}{4a} \\ \int x \cdot \sin ax dx &= \frac{\sin ax}{a^2} - \frac{x \cdot \cos ax}{a} \\ \int \cos^2 ax dx &= \frac{x}{2} + \frac{\sin 2ax}{4a} \\ \int x \cdot \cos ax dx &= \frac{\cos ax}{a^2} + \frac{x \cdot \sin ax}{a} \\ \int \sin ax \cos ax dx &= -\frac{\cos^2 ax}{2a} \\ \int e^x \sin x dx &= \frac{e^x}{2} (\sin x - \cos x) \\ \int e^x \cos x dx &= \frac{e^x}{2} (\sin x + \cos x) \\ \int x^2 \cdot \sin ax dx &= \frac{1}{a^3} (-a^2 x^2 \cos ax + 2 \cos ax + 2ax \sin ax) \\ \int x^2 \cdot \cos ax dx &= \frac{1}{a^3} (a^2 x^2 \sin ax - 2 \sin ax + 2ax \cos ax) \\ \int \tan ax dx &= -\frac{1}{a} \ln |\cos ax| \\ \int e^{ax} \sin nx dx &= \frac{e^{ax} (a \sin nx - n \cos nx)}{a^2 + n^2} \\ \int e^{ax} \cos nx dx &= \frac{e^{ax} (a \cos nx + n \sin nx)}{a^2 + n^2} \end{aligned}$$

9.1 Basic integrals:

$f(x)$	$F(x)$	$f(x)$	$F(x)$
a	ax	x^n	$\frac{x^{n+1}}{n+1} - \frac{1}{(n-1)x^{n-1}}$
$\frac{1}{x}$	$\ln x $	$\frac{1}{x^n}$	$2\sqrt{x}$
\sqrt{x}	$\frac{2}{3}x\sqrt{x}$	$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$\frac{ax}{c} - \frac{ad-bc}{c^2} \ln cx+d $
$\frac{1}{(x-a)(x-b)}$	$\frac{1}{a-b} \ln \frac{x-a}{x-b} $	$\frac{ax+b}{cx+d}$	$\frac{1}{2a} \ln \frac{x-a}{x+a} $
$\frac{1}{x^2+a^2}$	$\frac{1}{a} \arctan(\frac{x}{a})$	$\frac{1}{x^2-a^2}$	
e^x	e^x	$\ln(x)$	$x(\ln(x)-1)$
a^x	$\frac{a^x}{\ln(a)}$	$\log_a(x)$	$x(\log_a(x) - \log_a(e))$
$xe^a x$	$\frac{a^x}{\ln(a)}$	$x \ln(ax)$	$\frac{x^2}{4}(2 \ln(ax) - 1)$
$\sin(mx)$	$-\frac{\cos(mx)}{m}$	$\arcsin(x)$	$x \arcsin(x) + \sqrt{1-x^2}$
$\cos(mx)$	$\frac{\sin(mx)}{m}$	$\arccos(x)$	$x \arccos(x) - \sqrt{1-x^2}$
$\tan(mx)$	$-\frac{1}{m} \ln \cos(mx) $	$\arctan(x)$	$x \arctan(x) - \frac{1}{2} \ln(1+x^2)$
$\cot(mx)$	$\frac{1}{m} \ln \sin(mx) $	$\operatorname{arccot}(x)$	$x \operatorname{arccot}(x) + \frac{1}{2} \ln(1+x^2)$
$\frac{1}{1+\sin(x)}$	$-\frac{\cos(x)}{1+\sin(x)}$	$\frac{1}{1-\sin(x)}$	$\frac{\cos(x)}{1-\sin(x)}$
$\frac{1}{1+\cos(x)}$	$\frac{\sin(x)}{1+\cos(x)}$	$\frac{1}{1-\cos(x)}$	$\frac{-\sin(x)}{1-\cos(x)}$
$\sinh(x)$	$\cosh(x)$	$\operatorname{arsinh}(x)$	$x \operatorname{arsinh}(x) - \sqrt{x^2+1}$
$\cosh(x)$	$\sinh(x)$	$\operatorname{arcosh}(x)$	$x \operatorname{arcosh}(x) - \sqrt{x^2-1}$
$\tanh(x)$	$\ln(\cosh(x))$	$\operatorname{artanh}(x)$	$x \operatorname{artanh}(x) + \frac{1}{2} \ln(1-x^2)$
$\coth(x)$	$\ln \sinh(x) $	$\operatorname{arcoth}(x)$	$x \operatorname{arcoth}(x) + \frac{1}{2} \ln(x^2-1)$

Per Parts Resolution method:

$$\int_a^b f(x) \cdot g'(x) dx = f(b) \cdot g(b) - f(a) \cdot g(a) - \int_a^b f'(x)g(x) dx$$

9.2 Some Series:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} aq^k &= \frac{a}{1-q}, \quad 0 < |q| < 1 \\ \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)q^k &= \frac{1}{(1-q)^2}, \quad 0 < |q| < 1 \\ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} &= \frac{\pi}{4} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6} \\ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4} &= \frac{\pi^4}{90} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = \ln 2 \\ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k^2} &= \frac{\pi^2}{12} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k^4} = \frac{7\pi^4}{720} \\ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} &= e \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} = \frac{1}{e} \end{aligned}$$

9.3 Logarithm:

$$\begin{aligned} \log(uv) &= \log u + \log v \quad \log \frac{u}{v} = \log u - \log v \\ \log \frac{1}{v} &= -\log v \quad \log u^r = r \cdot \log u \\ \log_a x &= \frac{\log_b x}{\log_b a} \quad y = \log_a x \Leftrightarrow a^y = x \end{aligned}$$

9.4 Differential Calculus:

$$\begin{aligned} f(x) &= u(x) \pm v(x) & f'(x) &= u'(x) \pm v'(x) \\ f(x) &= c \cdot u(x) & f'(x) &= c \cdot u'(x) \\ f(x) &= u(x) \cdot v(x) & f'(x) &= u'(x)v(x) + u(x) \cdot v'(x) \\ f(x) &= \frac{u(x)}{v(x)} & f'(x) &= \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)} \\ f(x) &= u(v(x)) & f'(x) &= u'(v(x)) \cdot v'(x) \\ (\arcsin x)' &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} & (\arccos x)' &= -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\ (\arctan x)' &= \frac{1}{1+x^2} & (\tan x)' &= \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x \\ (\operatorname{arsinh} x)' &= \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} & (\operatorname{arcosh} x)' &= \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \\ (\operatorname{artanh} x)' &= \frac{1}{1-x^2} & (\tanh x)' &= \frac{1}{\cosh^2 x} = 1 - \tanh^2 x \end{aligned}$$

9.5 Standard ODE:

$$F''(x) = kF(x)$$

- $k = 0 \rightarrow F(x) = Ax + B$
- $k < 0 \rightarrow F(x) = C \cos(\sqrt{-k}x) + D \sin(\sqrt{-k}x)$
- $k > 0 \rightarrow F(x) = E e^{\sqrt{k}x} + I e^{-\sqrt{k}x}$
or $F(x) = E \sinh(\sqrt{k}x) + I \cosh(\sqrt{k}x)$
if $E = -I \rightarrow F(x) = C \sinh(\sqrt{k}x)$
if $E = I \rightarrow F(x) = C \cosh(\sqrt{k}x)$

$$F''(x) = -kF(x)$$

- $k = 0 \rightarrow F(x) = Ax + B$
- $k > 0 \rightarrow F(x) = C \cos(\sqrt{+k}x) + D \sin(\sqrt{+k}x)$
- $k < 0 \rightarrow F(x) = E e^{\sqrt{-k}x} + I e^{-\sqrt{-k}x}$
or $F(x) = E \sinh(\sqrt{-k}x) + I \cosh(\sqrt{-k}x)$
if $E = -I \rightarrow F(x) = C \sinh(\sqrt{-k}x)$
if $E = I \rightarrow F(x) = C \cosh(\sqrt{-k}x)$

$$F'(x) = aF(x) \Leftrightarrow F = L e^{ax}$$

9.6 Some Limits:

$$\begin{array}{lll} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x-1}}{x} = 1 & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a \\ \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x-1} = 1 & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1 & \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x^a} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^m}{e^{ax}} = 0 & \lim_{x \rightarrow 0} (x^a \ln x) = 0 & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(a+x)}{x} = \frac{1}{a} \\ \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x} = 1 & \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{ax}}{b} = \infty & \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e \\ \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1 & \lim_{x \rightarrow 0} x^a \ln^b x = 0 & \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x \\ \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^b}{e^{ax}} = 0 & \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\tan x}{x} = \mp\infty & \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^x = \frac{1}{e^2} \\ \lim_{x \rightarrow \pm \frac{\pi}{2}} \frac{\tan x}{x} = \mp\infty & \lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} = 1 & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin ax} = \frac{1}{a} & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{x} = a & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x}{x} = 1 & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1 & \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \arctan x = \pm\frac{\pi}{2} \end{array}$$

9.7 Limit:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \pm g(x)) &= \lim_{x \rightarrow a} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow a} g(x) \\ \lim_{x \rightarrow a} c \cdot f(x) &= c \cdot \lim_{x \rightarrow a} f(x) \\ \lim_{x \rightarrow a} (f(x) \cdot g(x)) &= \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x) \\ \lim_{x \rightarrow a} f(x) &= u_0, \quad g(u) \text{ stetig bei } u_0 \\ \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} g(f(x)) &= g\left(\lim_{x \rightarrow a} f(x)\right) = g(u_0)\end{aligned}$$

9.7.1 Bernoulli De L'Hôpital:

Sind f und g differenzierbar, $g(x) \neq 0$ auf (a, b) ,

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow a} f(x) &= \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0 \text{ (oder } \pm\infty\text{)} \text{ und existiert } \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}, \text{ so} \\ \text{gilt: } \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}\end{aligned}$$

9.8 Trigonometric Functions:

- $\cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) = 1$
- $\tan(\alpha) = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$
- $\cot(\alpha) = \frac{\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)}$
- $\cot(\alpha) = \frac{1}{\tan(\alpha)}$
- $\frac{1}{\cos^2(\alpha)} = 1 + \tan^2(\alpha)$
- $\frac{1}{\sin^2(\alpha)} = 1 + \cot^2(\alpha)$

9.8.1 Periodicity:

- $\cos(\alpha + 2\pi) = \cos(\alpha)$
- $\sin(\alpha + 2\pi) = \sin(\alpha)$
- $\tan(\alpha + 2\pi) = \tan(\alpha)$

9.8.2 Relation between trigonometric functions:

$\cos(-\alpha) = \cos(\alpha)$	$\sin(-\alpha) = -\sin(\alpha)$	$\tan(-\alpha) = -\tan(\alpha)$
$\cos(\pi - \alpha) = -\cos(\alpha)$	$\sin(\pi - \alpha) = \sin(\alpha)$	$\tan(\pi - \alpha) = -\tan(\alpha)$
$\cos(\pi + \alpha) = -\cos(\alpha)$	$\sin(\pi + \alpha) = -\sin(\alpha)$	$\tan(\pi + \alpha) = \tan(\alpha)$
$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin(\alpha)$	$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos(\alpha)$	$\tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cot(\alpha)$
$\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\sin(\alpha)$	$\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cos(\alpha)$	$\tan\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\cot(\alpha)$

9.8.3 Exact value of trigonometric functions:

α	deg	α	rad	$\cos(\alpha)$	$\sin(\alpha)$	$\tan(\alpha)$	$\cot(\alpha)$
0°	0		0	1	0	0	–
30°	$\frac{\pi}{6}$		$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\sqrt{3}$	
45°	$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1	
60°	$\frac{\pi}{3}$		$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	
90°	$\frac{\pi}{2}$		0	0	1	–	0

9.8.4 Trigonometric function with $t = \tan(\frac{\alpha}{2})$:

- $\cos(\alpha) = \frac{1-t^2}{1+t^2}$
- $\sin(\alpha) = \frac{2t}{1+t^2}$
- $\tan(\alpha) = \frac{2t}{1-t^2}$

9.8.5 Addition Theorems:

$$\begin{aligned}\sin x &= \frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix}) \\ \cos x &= \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix}) \\ \tan x &= \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{i(e^{ix} + e^{-ix})} \\ \sin(\alpha \pm \beta) &= \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta \\ \cos(\alpha \pm \beta) &= \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta\end{aligned}$$

$$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan \alpha \pm \tan \beta}{1 \mp \tan \alpha \tan \beta}$$

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 = 1 - 2 \sin^2 \alpha$$

$$\tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}$$

$$\sin 3\alpha = 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha$$

$$\cos 3\alpha = 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha$$

$$\tan 3\alpha = \frac{3 \tan \alpha - \tan^3 \alpha}{1 - 3 \tan^2 \alpha}$$

$$\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}$$

$$\sin^3 \alpha = \frac{1}{4}(3 \sin \alpha - \sin 3\alpha)$$

$$\sin^4 \alpha = \frac{1}{8}(\cos 4\alpha - 4 \cos 2\alpha + 3)$$

$$\sin^n \alpha = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cos((n-2k)(\alpha - \frac{\pi}{2}))$$

$$\cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}$$

$$\cos^3 \alpha = \frac{1}{4}(3 \cos \alpha + \cos 3\alpha)$$

$$\cos^4 \alpha = \frac{1}{8}(3 + 4 \cos 2\alpha + \cos 4\alpha)$$

$$\cos^n \alpha = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cos((n-k)\alpha)$$

$$\tan^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}$$

$$\tan \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha}$$

$$\binom{n}{k} = \frac{n \cdot (n-1) \cdots (n-k+1)}{n!}$$

9.8.6 Sums and Products:

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\tan(\alpha) + \tan(\beta) = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha) \cos(\beta)}$$

$$\tan(\alpha) - \tan(\beta) = \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\cos(\alpha) \cos(\beta)}$$

$$a \cos(\alpha) + b \sin(\alpha) = A \cos(\alpha - \varphi), \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow A = \sqrt{a^2 + b^2} \& \cos(\varphi) = \frac{a}{A} \& \sin(\varphi) = \frac{b}{A}$$

$$\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)]$$

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)]$$

$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta)]$$

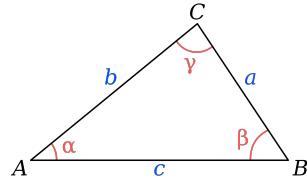
9.8.7 Inverse Functions:

$$\cos(\arcsin x) = \sqrt{1 - x^2} \quad \sin(\arccos x) = \sqrt{1 - x^2}$$

$$\sin(\arctan x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} \quad \cos(\arctan x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

$$\tan(\arcsin x) = \frac{x}{(1-x)^{1/4}} \quad \tan(\arccos x) = \frac{(1-x)^{1/4}}{x}$$

9.8.8 sinus and cosinus Regel:



$$\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)} = \frac{c}{\sin(\gamma)}$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos(\alpha)$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos(\beta)$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos(\gamma)$$

9.9 Hyperbolic Functions:

$$\sinh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) \quad \text{arsinh} x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$$

$$\cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) \quad \text{arcosh} x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$$

$$\tanh x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \quad \text{artanh} x = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}$$

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

$$\sinh(x_1 \pm x_2) = \sinh x_1 \cosh x_2 \pm \cosh x_1 \sinh x_2$$

$$\cosh(x_1 \pm x_2) = \cosh x_1 \cosh x_2 \pm \sinh x_1 \sinh x_2$$

$$\tanh(x_1 \pm x_2) = \frac{\tanh x_1 \pm \tanh x_2}{1 \pm \tanh x_1 \tanh x_2}$$

$$\sinh x_1 + \sinh x_2 = 2 \sinh \frac{x_1 + x_2}{2} \cosh \frac{x_1 - x_2}{2}$$

$$\sinh x_1 - \sinh x_2 = 2 \cosh \frac{x_1 + x_2}{2} \sinh \frac{x_1 - x_2}{2}$$

$$\cosh x_1 + \cosh x_2 = 2 \cosh \frac{x_1 + x_2}{2} \cosh \frac{x_1 - x_2}{2}$$

$$\cosh x_1 - \cosh x_2 = 2 \sinh \frac{x_1 + x_2}{2} \sinh \frac{x_1 - x_2}{2}$$

$$\tanh x_1 \pm \tanh x_2 = \frac{\sinh x_1 \pm x_2}{\cosh x_1 \cosh x_2}$$

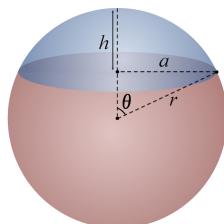
9.10 Geometrische Figuren:

9.10.1 Kugel:

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{\pi}{6} d^3 \approx 0.5236 \cdot d^3$$

$$A = 4\pi r^2$$

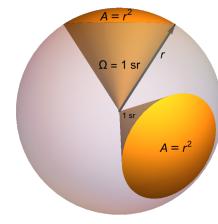
Kugelsegment (Spherical cap)



$$V = \frac{\pi h^2}{3} (3r - h) = \frac{1}{6} \pi h (3a^2 + h^2) = \frac{\pi}{3} r^3 (2 + \cos(\theta)) (1 - \cos(\theta))^2$$

$$A = 2\pi rh = \pi(a^2 + h^2) = 2\pi r^2(1 - \cos(\theta))$$

Raumwinkel



$$\Omega = \frac{A}{r^2}$$

9.11 Koordinaten:

	Kartesisch	Zylindrisch	Sphärisch
x	x	$\rho \cos(\varphi)$	$r \sin(\theta) \cos(\psi)$
y	y	$\rho \sin(\varphi)$	$r \sin(\theta) \sin(\psi)$
z	z	z	$r \cos(\theta)$
ρ	$\sqrt{x^2 + y^2}$	ρ	$r \sin(\theta)$
φ	$\arctan(\frac{y}{x})$	φ	ψ
z	z	z	$r \cos(\theta)$
r	$\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$	$\sqrt{\rho^2 + z^2}$	r
θ	$\arccos(\frac{z}{r})$	$\arctan(\frac{\rho}{z})$	θ
ψ	$\arctan(\frac{y}{x})$	φ	ψ

9.11.1 Integration term:

Zylindrisch

$$dxdydz \rightarrow \rho d\rho d\varphi dz$$

Sphärisch

$$dxdydz \rightarrow r^2 \sin(\theta) dr d\theta d\psi$$

9.12 ∇ und Δ Operator:

$$\vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$$

Laplace operator

$$\Delta = \vec{\nabla}^2$$

Gradient (Richtung die gemessene Größe am stärksten steigt)

$$\text{grad}(f) = \vec{\nabla} f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right)$$

Divergenz

$$\text{div}(\vec{f}) = \vec{\nabla} \cdot \vec{f} = \frac{\partial f_x}{\partial x} + \frac{\partial f_y}{\partial y} + \frac{\partial f_z}{\partial z}$$

Quellenfrei $\text{div}(\vec{f}) = 0$

Rotation

$$\text{rot}(\vec{f}) = \vec{\nabla} \times \vec{f} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_z}{\partial y} - \frac{\partial f_y}{\partial z} \\ \frac{\partial f_x}{\partial z} - \frac{\partial f_z}{\partial x} \\ \frac{\partial f_y}{\partial x} - \frac{\partial f_x}{\partial y} \end{pmatrix}$$

Wirbelfrei $\text{rot}(\vec{f}) = 0$

9.13 Wellenparameters:

$$\omega = 2\pi f$$

$$f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$$

$$k = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi}{\lambda}$$

9.14 Fehlerrechnung:

Gegeben $x, \Delta x, y, \Delta y, \dots, a = f(x, y, \dots)$
Gesucht ΔA

$$\Delta A = \sqrt{\left(\Delta x \cdot \frac{df(x, y, \dots)}{dx} \right)^2 + \left(\Delta y \cdot \frac{df(x, y, \dots)}{dy} \right)^2 + \dots}$$