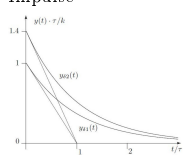
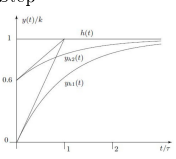
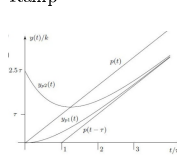
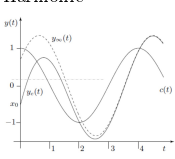


Regelungstechnik: *FAST Reference sheet*

Dino Colombo, Michael van Huffel

January 21, 2021

Testsignale 1. Ordnung

| Name | Impulse | Step | Ramp | Harmonic |
|---------|--|---|---|---|
| Picture |  |  |  |  |
| Input | $\delta(t) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \begin{cases} \Delta, & t < \frac{1}{\Delta} \\ 0, & t \geq \frac{1}{\Delta} \end{cases}$ | $h(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t \geq 0 \end{cases}$ | $p(t) = h(t) \cdot t$ | $c(t) = h(t) \cdot \cos(\omega t)$ |
| Output | $y_\delta(t) = e^{-\frac{t}{\tau}} \cdot (x_0 + \frac{k}{\tau})$ | $y_h(t) = e^{-\frac{t}{\tau}} \cdot x_0 + k \cdot (1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$ | $y_p(t) = e^{-\frac{t}{\tau}} x_0 + k(t + (e^{-\frac{t}{\tau}} - 1)\tau)$ | $y_{c,\infty} = m(\omega) \cdot \cos(\omega t + \varphi(\omega))$ |

Aussage über ein system

Lyapunov Stabilität

1. **Asymptotisch stabil:** $\lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t)\| = 0$, falls alle EW $\text{Re}(\lambda_i) < 0$.
2. **Stabil:** ($\|x(t)\| < \infty \forall t \in [0, \infty]$), falls mehrere EW $\text{Re}(\lambda_k) = 0$ und kein EW $\text{Re}(\lambda_i) \neq 0$.
3. **Instabil:** $\lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t)\| = \infty$ falls mindestens ein EW $\text{Re}(\lambda_i) > 0$.

BIBO Stabilität

Ein System ist BIBO Stabil, falls für die Impulsantwort $\delta(t)$ folgendes gilt: $\int_0^\infty |\delta(t)| dt < \infty$

- $\text{Re}(\pi_i) < 0, \forall i \in \mathcal{N}$
- Nicht BIBO stabil in allen anderen Fällen.

-barkeit

- **Steuer-/Erreich-:** $\mathcal{R} = [b, \quad A \cdot b, \quad A^2 \cdot b, \quad \dots, \quad A^{n-1} \cdot b]$: vollen Rang ($\text{Det}(\mathcal{R}) \neq 0$).
- **Stabilisier-:** Ein (instabiles) System ist potentiell Stabilisierbar, falls alle Zustände, die nicht steuerbar sind asymptotisch stabil sind.

- **Beobachtbar-:** $\mathcal{O} = \begin{bmatrix} c \\ c \cdot A \\ c \cdot A^2 \\ \vdots \\ c \cdot A^{n-1} \end{bmatrix}$: vollen Rang ($\text{Det}(\mathcal{O}) \neq 0$)

- **Detektier-:** Ein System ist nur detektierbar, falls alle seine nicht-beobachtbaren Zustände asymptotisch stabil sind.

Übertragungsfunktion

Achtung: #Pole = Ordnung des Systems

$$\Sigma(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{c \cdot \text{Adj}(s\mathbb{I} - A) \cdot b}{\det(s\mathbb{I} - A)} + d$$

Most common $\text{adj}()$

Adjunkte für eine $n \times n$ Matrix:

$$\text{adj}(A) = C^T = ((-1)^{i+j} M_{ji})_{1 \leq i, j \leq n}$$

Adjunkte für eine 2×2 -Matrix:

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{adjungieren}} \text{Adj}(A) = \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

Adjunkte für eine 3×3 -Matrix:

$$\text{adj} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = C^T = \begin{pmatrix} +\det \begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} & -\det \begin{pmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} & +\det \begin{pmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \\ -\det \begin{pmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{pmatrix} & +\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{pmatrix} & -\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{pmatrix} \\ +\det \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} & -\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} & +\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

Laplace-Transformation

Wichtige Singaltransformationen:

| $x(t)$ | $X(s)$ |
|--|---------------------------------|
| $\delta(t)$ | 1 |
| $h(t) \quad (=1)$ | $\frac{1}{s}$ |
| $p(t) \quad (=t)$ | $\frac{1}{s^2}$ |
| $h(t) \cdot t^n \cdot e^{\alpha \cdot t}$ | $\frac{n!}{(s-\alpha)^{n+1}}$ |
| $h(t) \cdot \sin(\omega \cdot t)$ | $\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$ |
| $h(t) \cdot \cos(\omega \cdot t)$ | $\frac{s}{s^2 + \omega^2}$ |
| $h(t) \cdot \sinh(\omega \cdot t)$ | $\frac{\omega}{s^2 - \omega^2}$ |
| $h(t) \cdot \cosh(\omega \cdot t)$ | $\frac{s}{s^2 - \omega^2}$ |
| $h(t) \cdot (e^{at} - 1)$ | $\frac{a}{s(s-a)}$ |
| $h(t) \cdot \frac{e^{at} - e^{bt}}{a-b}$ | $\frac{1}{(s-a)(s-b)}$ |
| $h(t) \cdot \frac{ae^{at} - be^{bt}}{a-b}$ | $\frac{s}{(s-a)(s-b)}$ |

Wichtige Eigenschaften:

| | |
|----------------|--|
| Linearität | $\mathcal{L}\{ax_1(t) + bx_2(t)\} = aX_1(s) + bX_2(s)$ |
| Ähnlichkeit | $\mathcal{L}\{\frac{1}{a} \cdot x(\frac{t}{a})\} = X(s \cdot a)$ |
| Verschiebung | $\mathcal{L}\{x(t-T)\} = e^{-T \cdot s} \cdot X(s)$ |
| Dämpfung | $\mathcal{L}\{x(t) \cdot e^{a \cdot t}\} = X(s-a)$ |
| Ableitung t | $\mathcal{L}\{\frac{d}{dt}x(t)\} = s \cdot X(s) - x(0)$ |
| 2. Ableitung t | $\mathcal{L}\{\frac{d^2}{dt^2}x(t)\} = s^2 \cdot X(s) - s \cdot x(0) - \frac{d}{dt}x(0)$ |
| n -te Abl. t | $s^n \cdot X(s) - s^{n-1}x(0) - \dots - s^0 \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}x(0)$ |
| Ableitung s | $\mathcal{L}\{t \cdot x(t)\} = -\frac{d}{ds}X(s)$ |
| Integration t | $\mathcal{L}\{\int_0^t x(\tau) d\tau\} = \frac{1}{s} \cdot X(s)$ |
| Integration s | $\mathcal{L}\{\frac{1}{t} \cdot x(t)\} = \int_s^\infty X(\sigma) d\sigma$ |
| Convolution t | $\mathcal{L}\{x_1(t) * x_2(t)\} = X_1(s) \cdot X_2(s)$ |
| Convolution s | $\mathcal{L}\{x_1(t) \cdot x_2(t)\} = X_1(s) * X_2(s)$ |
| Anfangswert | $\lim_{t \rightarrow 0^+} x(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} s \cdot X(s)$ |
| Endwert | $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot X(s)$ |

dB Skala

| Dec | dB | dB | Dec |
|----------------------------|-----------|--------------|-------------------------|
| ∞ | ∞ | ∞ | ∞ |
| 1000 | 60 | 1000 | $1 \cdot 10^{50}$ |
| 100 | 40 | 100 | $100000 = 10^5$ |
| 50 | 33.98 | 80 | $10000 = 10^4$ |
| 20 | 26.02 | 60 | $1000 = 10^3$ |
| 10 | 20 | 40 | 100 |
| 9 | 19.08 | 30 | 31.62 |
| 8 | 18.06 | 20 | 10 |
| 7 | 16.90 | 15 | 5.62 |
| 6 | 15.56 | 10 | $3.16 = \sqrt{10}$ |
| 5 | 13.98 | 9 | 2.82 |
| 4 | 12.04 | 8 | 2.51 |
| 3 | 9.54 | 7 | 2.24 |
| 2 | 6.02 | 6 | ≈ 2 |
| 1 | 0 | 5 | $1.78 = \sqrt[4]{10}$ |
| $\frac{1}{2} = 0.5$ | -6.02 | 4 | 1.58 |
| $\frac{1}{3} \approx 0.33$ | -9.54 | 3 | $1.41 \approx \sqrt{2}$ |
| $\frac{1}{4} = 0.25$ | -12.04 | 2 | $1.26 = \sqrt[10]{10}$ |
| $\frac{1}{5} = 0.2$ | -13.98 | 1 | $1.12 = \sqrt[20]{10}$ |
| $\frac{1}{6} \approx 0.17$ | -15.56 | 0.1 | ≈ 1.01 |
| $\frac{1}{7} \approx 0.14$ | -16.90 | 0.01 | ≈ 1.001 |
| 0.1 | -20.00 | 0 | 1 |
| 0.01 | -40.00 | $x_{dB} < 0$ | $-\frac{1}{x_{dec}}$ |
| 0 | $-\infty$ | $-\infty$ | 0 |

$$\frac{1}{x_{dB}} = -x_{dB} \leftrightarrow \frac{1}{5dB} = -5dB$$

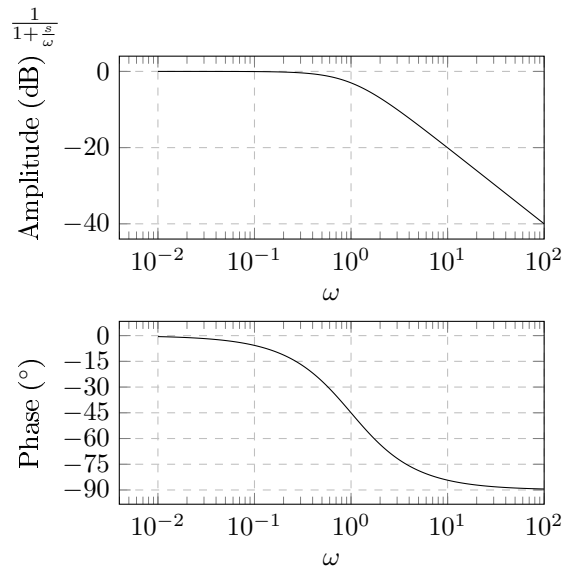
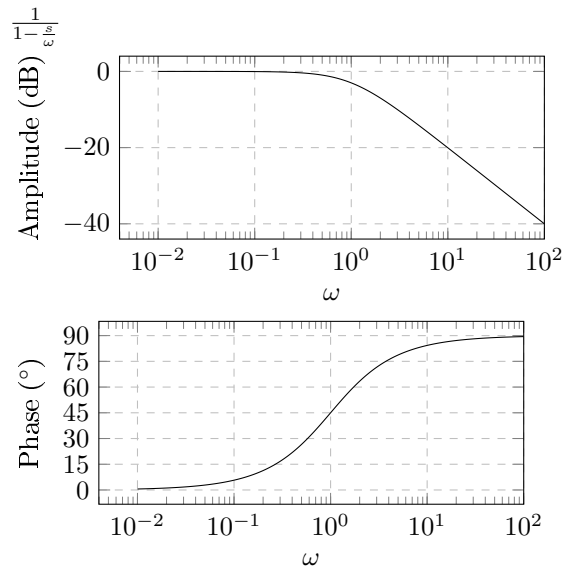
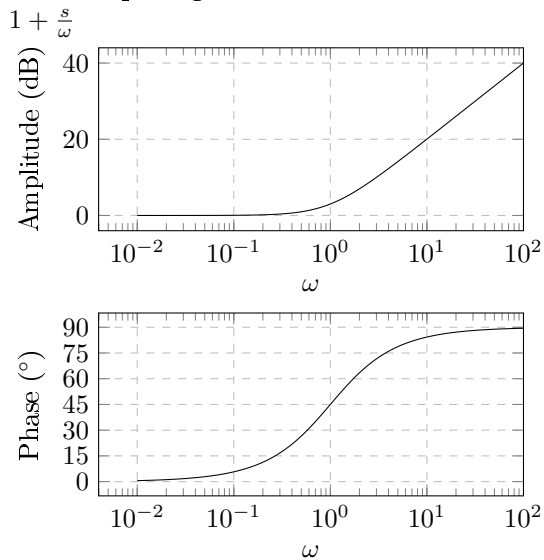
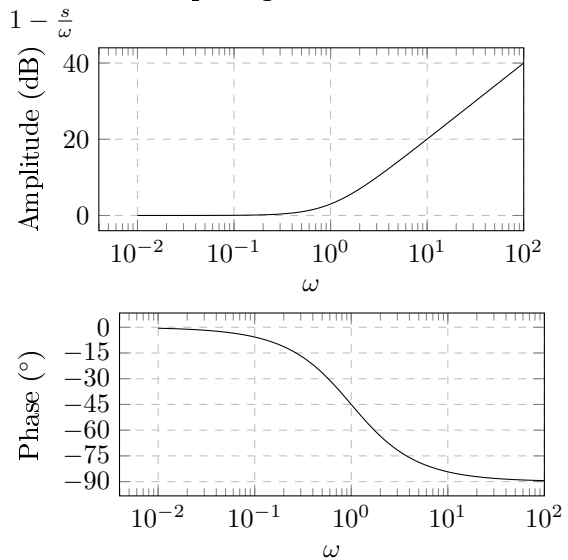
Trigonometric function

| α deg | α rad | $\cos(\alpha)$ | $\sin(\alpha)$ | $\tan(\alpha)$ | $\cot(\alpha)$ |
|--------------|-----------------|----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|
| 0° | 0 | 1 | 0 | 0 | — |
| 30° | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | $\sqrt{3}$ |
| 45° | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | 1 | 1 |
| 60° | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\sqrt{3}$ | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ |
| 90° | $\frac{\pi}{2}$ | 0 | 1 | — | 0 |

Einfluss von Nullstellen

| Standardelemente | Verstärkung [$\frac{dB}{dec}$] | Phase |
|---------------------------------|----------------------------------|--|
| Stabiler Pol | -20 bei ω_g | -90° bei ω_g |
| Instabiler Pol | -20 bei ω_g | +90° bei ω_g |
| Minimalphasige NullST | +20 bei ω_g | +90° bei ω_g |
| Nichtminimalphasige NullST | +20 bei ω_g | -90° bei ω_g |
| Delay um $\tau(\forall \omega)$ | 0 | $-\frac{180}{\pi} \cdot \omega \cdot \tau^\circ$ |

$\omega_g = \frac{1}{\tau}$: Cutoff-frequency (Eckfrequenz) immer bei $-3dB$

Graph bei $\omega = 1$ **Stabiler Pol****Instabiler Pol****Minimalphasige Nullstelle****Nichtminimalphasige Nullstelle****Systemtyp k**

Der **Systemtyp** k = Vielfachheit offener Integratoren ($\frac{1}{s^k}$)

$$\angle \Sigma(0) = \begin{cases} -k \cdot \frac{\pi}{2}, & \text{sgn}(\frac{b_0}{a_0}) > 0 \\ -\pi - k \cdot \frac{\pi}{2}, & \text{sgn}(\frac{b_0}{a_0}) < 0 \text{ (neg. stat. Gain)} \end{cases}$$

Relativer Grad $r = n - m$

Die Steigung des Magnitudenverlauf im Bode-Diagramm konvergiert asymptotisch zu:

$$\frac{\partial |\Sigma(j\omega)|_{dB}}{\partial \log(\omega)} = -r \cdot 20 \frac{dB}{\text{decade}}$$

Nyquist

Asymptotisch – stabil $\leftrightarrow n_c \stackrel{!}{=} \frac{n_0}{2} + n_+$

n_c : Anzahl Umrundungen um den kritischen Punkt $(-1,0)$
Positiv falls Umrundung gegen Uhrzeigersinn.

n_0 : Anzahl Pole von $L(s)$ mit Realteil = 0

n_+ : Anzahl Pole von $L(s)$ mit Realteil > 0

Frequenzbedingung des geschlossenen Regelkreises

$$\omega_c = \text{Durchtrittsfrequenz } \omega_c = \begin{cases} \omega_c > \max\{10 \cdot \omega_d, 2 \cdot \omega_{\pi+}\} \\ \omega_c < \min\{\frac{1}{10} \cdot \omega_n, \frac{1}{10} \cdot \omega_2, \frac{1}{2} \cdot \omega_\tau, \frac{1}{2} \cdot \omega_{\zeta+}\} \end{cases}$$

1. $\omega_2 \leftrightarrow |W_2(j\omega_2)| = 1$
2. $\omega_\tau = \frac{1}{\tau}$, mit $L_\tau(s) = C(s) \cdot P(s)e^{-\tau \cdot s}$. Wenn konservativ Faktor $\frac{1}{5}$
3. $\omega_{\zeta+}$ kleinster positiver Nullstelle. Wenn konservativ Faktor $\frac{1}{5}$
4. $\omega_n \leftrightarrow |N(j\omega_n)| = 0$
5. $\omega_{\pi+}$ grossten positiver Pol. Wenn konservativ Faktor 5
6. $\omega_d \leftrightarrow |D(j\omega_d)| = 0$

PID-Regler

$$C_{\text{PID}}(s) = k_p \cdot \overbrace{\left(\frac{T_d \cdot T_i \cdot s^2 + T_i \cdot s + 1}{T_i \cdot s} \right)}^{\text{kausal}} \cdot \frac{1}{(\tau \cdot s + 1)^2}$$

nicht kausal

Ziegler-Nicholas Parameter

$$|k_p^* \cdot P(j\omega^*)| \stackrel{!}{=} 1 \quad \angle k_p^* \cdot P(j\omega^*) \stackrel{!}{=} -\pi \quad T^* = \frac{2\pi}{\omega^*}$$

| Regler | k_p | T_i | T_d |
|--------|--------------------|--------------------|-------------------|
| P | $0.5 \cdot k_p^*$ | $\infty \cdot T^*$ | $0 \cdot T^*$ |
| PI | $0.45 \cdot k_p^*$ | $0.85 \cdot T^*$ | $0 \cdot T^*$ |
| PD | $0.55 \cdot k_p^*$ | $\infty \cdot T^*$ | $0.15 \cdot T^*$ |
| PID | $0.6 \cdot k_p^*$ | $0.5 \cdot T^*$ | $0.125 \cdot T^*$ |

Phasenreserve

| | | |
|-----------|---------------------|---|
| γ | Verstärkungsreserve | Verstärkungsreserve zu $(-1 + 0j)$ bei $\angle L(j\omega) = -\pi$ |
| φ | Phasenreserve | Phasenabstand zu $-\pi$ bei der Durchtrittsfrequenz ω_c |
| μ | kritische Abstand | Kleinste Distanz zwischen $(-1 + 0j)$ und $L(j\omega)$ |

More Laplace transform

| $\{f(t)\}$ | $f(t)$ | $\{f(t)\}$ | $f(t)$ |
|--------------------------------------|------------------------------------|--|--|
| $1/s$ | 1 | e^{-as}/s | $u(t-a)$ |
| $1/s^2$ | t | e^{-as} | $\delta(t-a)$ |
| $1/s^n$ | $t^{n-1}/(n-1)!$ | $\frac{1}{\sqrt{s}}e^{-\omega/s}$ | $\frac{1}{\sqrt{\pi t}}\cos 2\sqrt{\omega t}$ |
| $1/\sqrt{s}$ | $1/\sqrt{\pi t}$ | $e^{-k\sqrt{s}}$ | $\frac{k}{2\sqrt{\pi t^3}}e^{-k^2/4t}$ |
| $1/s^{3/2}$ | $2\sqrt{t/\pi}$ | $\frac{1}{(s-a)(s-b)}$ | $\frac{1}{a-b}(e^{at}-e^{bt})$ |
| $1/s^k$ | $t^{k-1}/\Gamma(k)$ | $\frac{s}{(s-a)(s-b)}$ | $\frac{1}{a-b}(ae^{at}-be^{bt})$ |
| $\frac{1}{s-a}$ | e^{at} | $\frac{1}{2\omega^3}$ | $\sin \omega t - \omega t \cos \omega t$ |
| $\frac{1}{(s-a)^2}$ | te^{at} | $\frac{(s^2+\omega^2)^2}{2\omega s}$ | $t \sin \omega t$ |
| $\frac{1}{(s-a)^n}$ | $\frac{1}{(n-1)!}t^{n-1}e^{at}$ | $\frac{(s^2+\omega^2)^2}{2\omega s^2}$ | $\sin \omega t + \omega t \cos \omega t$ |
| $\frac{1}{(s-a)^k}$ | $\frac{1}{\Gamma(k)}t^{k-1}e^{at}$ | $\frac{(s^2+\omega^2)^2}{s^2}$ | $\frac{1}{b^2-a^2}(\cos at - \cos bt)$ |
| $\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$ | $\sin \omega t$ | $\frac{(s^2+a^2)(s^2+b^2)}{4\omega^3}$ | $\sin \omega t \cos \omega t - \cos \omega t \sinh \omega t$ |
| $\frac{a}{s^2-a^2}$ | $\sinh at$ | $\frac{s^4+4\omega^4}{2\omega^2 s}$ | $\sin \omega t \sinh \omega t$ |
| $\frac{\omega}{(s-a)^2+\omega^2}$ | $e^{at} \sin \omega t$ | $\frac{s^4+4\omega^4}{2\omega^3}$ | $\sinh \omega t - \sin \omega t$ |
| $\frac{\omega}{(s-a)^2-\omega^2}$ | $e^{at} \sinh \omega t$ | $\frac{2\omega^2 s}{s^4-\omega^4}$ | $\cosh \omega t - \cos \omega t$ |
| $\frac{s}{s^2+\omega^2}$ | $\cos \omega t$ | $\ln \frac{s-a}{s-b}$ | $\frac{1}{t}(e^{bt}-e^{at})$ |
| $\frac{s}{s^2-a^2}$ | $\cosh at$ | $\ln \frac{s^2+\omega^2}{s^2}$ | $\frac{2}{t}(1-\cos \omega t)$ |
| $\frac{s-a}{(s-a)^2+\omega^2}$ | $e^{at} \cos \omega t$ | $\ln \frac{s^2-\omega^2}{s^2}$ | $\frac{2}{r}(1-\cosh \omega t)$ |
| $\frac{s-a}{(s-a)^2-\omega^2}$ | $e^{at} \cosh \omega t$ | | |
| $\frac{\omega^2}{s(s^2+\omega^2)}$ | $1 - \cos \omega t$ | | |
| $\frac{\omega^3}{s^2(s^2+\omega^2)}$ | $\omega t - \sin \omega t$ | | |

$k > 0, n \in \mathbb{N}, a \neq b, \gamma \approx 0.5772$