

Mechanik I: Kinematik und Statik

Mitschrift der Vorlesung von Prof. E. Mazza

ETH Zürich

Inhalt

1	Bewegung eines materiellen Punktes	3
1.1	Vektorielle Darstellung von Lage und Bewegung	5
1.1.1	Kartesische Basis	5
1.1.2	Zylindrische Basis	6
1.1.3	Sphärische Basis	6
2	Geschwindigkeit	7
2.1	Differential	7
2.2	Geschwindigkeitsvektor	8
2.3	Explizite Darstellung der Geschwindigkeit	8
3	Starrer Körper	11
3.1	Ebene Bewegung	25
3.2	Fachwerk	27
4	Kräfte	29
5	Leistung	33
6	Statik	37
6.1	Statische Äquivalenz v. Kräftegruppen	37
6.2	Resultierende einer Kräftegruppe	38
6.3	Moment einer Kraft bezüglich eines Punktes	39
6.4	Moment einer Kraft bezüglich einer Achse	40
6.5	Moment einer Kräftegruppe bezüglich eines Punktes	40
6.6	Dyname	41
6.7	Spezielle Kräftegruppen	41
6.8	Kräftegruppe im Gleichgewicht	43
6.9	Reduktion einer Kräftegruppe {G}	45
7	Verteilte Kräfte	47
7.1	Kräftemittelpunkt der parallelen linienverteilten Kraft	49
8	Ruhe und Gleichgewicht	51
8.1	Reibungskräfte und Momente	53
8.2	Virtueller Bewegungszustand	53
8.3	Hauptsatz der Statik	55
9	Standfestigkeit	57
9.1	Lagerbindungen und Lagerkräfte	58
10	Statisch unbestimmte/überbestimmte Systeme	61

11 Ebene Fachwerke	67
11.1 Statisch bestimmte Fachwerke	68
12 Reibung	75
12.1 Haftreibungsgesetz	76
12.2 Gleitreibungsgesetz	77
12.3 Rollreibung	79
13 Seilstatik	81
13.1 Seilreibung, Haftung	82
13.2 Seilreibung, Gleiten	84
14 Beanspruchung	87

1 Bewegung eines materiellen Punktes

Materielles System: Menge von materiellen Punkten.

Lage eines materiellen Punktes M zur Zeit t : $M(t)$, geometrischer Punkt im 3D-Raum

Bewegung eines materiellen Punktes: Lageänderung als Funktion der Zeit $\rightarrow M(t_1), M(t_2), \dots$

Beschreibung der Lage eines materiellen Punktes? \rightarrow starrer Bezugskörper (d.h., Abstand zwischen 2 Punkten des Körpers ist konstant)

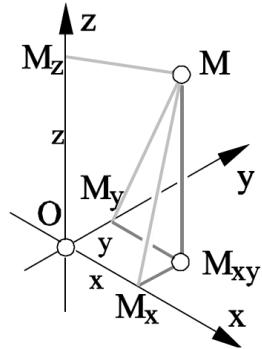


Fig. 1.4:
kartesische Koordinaten

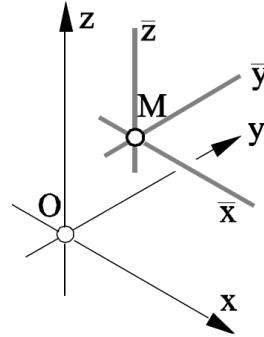


Fig. 1.7:
Koordinatenlinien

$x' Ox, y' Oy, z' Oz$: gerichtete orthogonale Achsen

x, y, z : kartesische Koordinaten beschreiben die Lage von M (zur Zeit t)

Bewegung von M :

$$x = F_x(t)$$

$$y = F_y(t)$$

$$z = F_z(t)$$

Zylindrische Koordinaten: ρ, φ, z

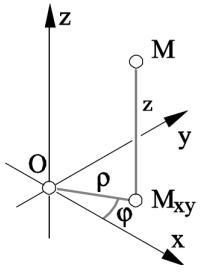


Fig. 1.8:
zylindrische Koordinaten

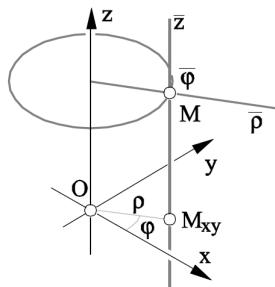


Fig. 1.10:
Koordinatenlinien

Bahnkurve von M in zylindrischen Koordinaten:

$$\rho = F_\rho(t)$$

$$\varphi = F_\varphi(t)$$

$$z = F_z(t)$$

Beziehung zwischen kartesische Koordinaten und zylindrische Koordinaten:

$$x = \rho \cos \varphi$$

$$y = \rho \sin \varphi$$

$$z = z$$

Und umgekehrt:

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\varphi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$z = z$$

Sphärische Koordinaten: r, θ, ψ

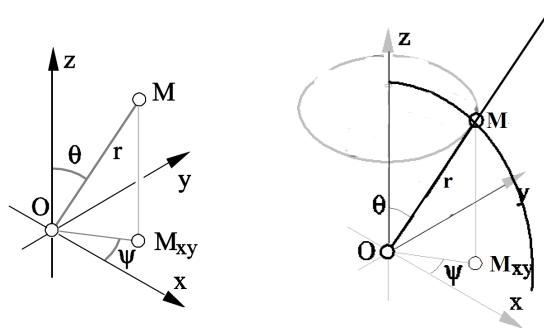


Fig. 1.12:
sphärische Koordinaten

Koordinatenlinien

Bahnkurve von M in sphärischen Koordinaten:

$$r = F_r(t)$$

$$\theta = F_\theta(t)$$

$$\psi = F_\psi(t)$$

Beziehung zwischen kartesischen Koordinaten und sphärische Koordinaten:

$$x = r \sin \theta \cos \psi$$

$$y = r \sin \theta \sin \psi$$

$$z = r \cos \theta$$

Und umgekehrt:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$\theta = \arctan\left(\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z}\right)$$

$$\psi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$$

1.1 Vektorielle Darstellung von Lage und Bewegung

Vektor: Pfeil mit bestimmter Länge und Richtung/Orientierung → Informationsträger!

\underline{r} : Ortsvektor (punktgebunden) definiert eindeutig Lage von M (die Koordinaten)

Bewegung:

$$t \rightarrow \underline{r} = \underline{r}(t), \text{ Vektorfunktion}$$

Zur expliziten Darstellung: brauchen wir eine Basis

Hier: orthonomisierte Basisvektoren

$$\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3 \text{ (3, 3D-Raum)}$$

$$\underline{e}_1 \perp \underline{e}_2 \perp \underline{e}_3$$

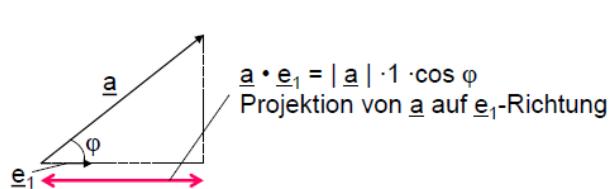
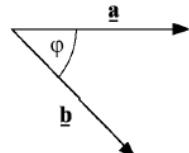
$$|\underline{e}_1| = |\underline{e}_2| = |\underline{e}_3| = 1$$

Skalarprodukt:

$$\underline{a} \cdot \underline{b} = |\underline{a}| |\underline{b}| \cos \varphi$$

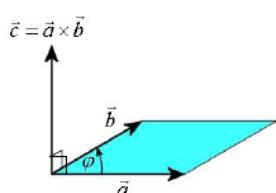
$$\underline{e}_1 \cdot \underline{e}_1 = 1 \rightarrow |\underline{e}_1|^2 = 1 \rightarrow |\underline{e}_1| = 1$$

$$\underline{e}_1 \cdot \underline{e}_2 = 0 \rightarrow \varphi = \pi/2 \rightarrow \underline{e}_1 \perp \underline{e}_2$$



Kreuzprodukt (Vektorprodukt):

$$|\underline{c}| = |\underline{a}| |\underline{b}| \sin \varphi$$



$$\underline{e}_1 \times \underline{e}_2 = \underline{e}_3$$

$$\underline{e}_2 \times \underline{e}_3 = \underline{e}_1 \quad \rightarrow \text{ Rechtssystem}$$

$$\underline{e}_3 \times \underline{e}_1 = \underline{e}_2$$

1.1.1 Kartesische Basis

$$\underline{e}_x, \underline{e}_y, \underline{e}_z$$

$$\underline{r} = r_x \underline{e}_x + r_y \underline{e}_y + r_z \underline{e}_z$$

Skalare und vektorielle Komponenten:

$$r_x = \underline{r} \cdot \underline{e}_x = x$$

$$r_y = \underline{r} \cdot \underline{e}_y = y$$

$$r_z = \underline{r} \cdot \underline{e}_z = z$$

Bewegung:

$$\underline{r}(t) = x(t) \underline{e}_x + y(t) \underline{e}_y + z(t) \underline{e}_z \quad (1)$$

Allgemein: Basis \longleftrightarrow Koordinaten

Basisvektoren: Einheitsvektoren sind parallel bzw. tangential zu Koordinatenlinien im betrachteten Punkt!

1.1.2 Zylindrische Basis

$$\underline{e}_\rho, \underline{e}_\varphi, \underline{e}_z$$

$$\underline{r} = \rho \underline{e}_\rho + z \underline{e}_z$$

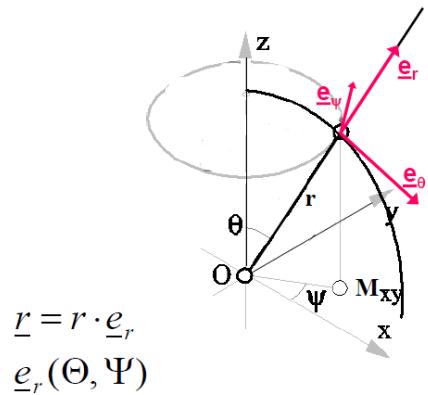
$\underline{e}_\rho(\varphi)$, auch hier sind 3 Informationen nötig!

Bewegung:

$$\underline{r}(t) = \rho(t) \cdot \underline{e}_\rho(\varphi(t)) + z(t) \underline{e}_z \quad (2)$$

1.1.3 Sphärische Basis

Sphärische Basis, tangential zu Koordinatenlinien

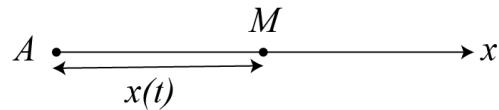


$$\underline{r} = r \cdot \underline{e}_r$$

$$\underline{e}_r(\Theta, \Psi)$$

2 Geschwindigkeit

Geradlinige Bewegung :



$x(t)$: skalare Funktion

Geschwindigkeit $v = \frac{dx(t)}{dt} = \dot{x} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t}$

Gesucht für 3D Bewegung:

$$\underline{v} \iff \underline{r}(t) : \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \\ \dot{z}(t) \end{pmatrix}$$

Geschwindigkeitsvektor: \underline{v} , liegt tangential an Bahnkurve

$$\underline{v} = \dot{\underline{r}} = \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \\ \dot{z}(t) \end{pmatrix}$$

2.1 Differential

Für $x(t) \rightarrow$ Differential $dx := \dot{x}dt$

Differential \rightarrow lineare Approximation der Differenz

$$\Delta x = x(t + \Delta t) - x(t)$$

für $\Delta t = dt \rightarrow \Delta x = dx$

Beispiel: $x = \frac{1}{2}t^2; \quad \dot{x} = t$

Vektorfunktion $\underline{r}(t)$:

$$\begin{aligned} d\underline{r} &:= \dot{\underline{r}}dt \\ \dot{\underline{r}} &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\underline{r}(t + \Delta t) - \underline{r}(t)}{\Delta t} \end{aligned}$$

für $\Delta t = dt \rightarrow \Delta \underline{r} = d\underline{r}$

$d\underline{r}$: Tangential an Bahnkurve

$\dot{\underline{r}}$: Tangential an Bahnkurve

2.2 Geschwindigkeitsvektor

Bogenlänge $s := \overbrace{AM}$

$s(t)$: beschreibt Bewegung auf Bahnkurve

$\dot{s} = \frac{ds}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{s(t+\Delta t) - s(t)}{\Delta t}$, Schnelligkeit

$\underline{\tau}$: tangentialer Einheitsvektor in M

\underline{v} : Geschwindigkeitsvektor (Schnelligkeit und Bewegungsrichtung)

$$\underline{v} := \dot{s} \cdot \underline{\tau} \quad (3)$$

$\dot{\underline{r}} \parallel \underline{v}$ (beide Tangential an Bahnkurve)

$$\underline{r}(t) \rightarrow \underline{r}(s) = \underline{r}(s(t))$$

$$\frac{d\underline{r}}{dt} = \dot{\underline{r}} = \frac{d\underline{r}}{ds} \underbrace{\frac{ds}{dt}}_{\dot{s}}$$

$$\frac{d\underline{r}}{ds} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta \underline{r}}{\Delta s} = \underline{\tau}$$

$$\dot{\underline{r}} = \dot{s} \cdot \underline{\tau} = \underline{v}$$

2.3 Explizite Darstellung der Geschwindigkeit

Darstellung von $\underline{r} = \dot{\underline{r}}$, d.h. \underline{v} :

- Kartesische Basis:

$$\underline{r}(t) = x(t)\underline{e}_x + y(t)\underline{e}_y + z(t)\underline{e}_z$$

$$\dot{\underline{r}} = \dot{x}\underline{e}_x + \cancel{x\underline{e}_x} + \dot{y}\underline{e}_y + \cancel{y\underline{e}_y} + \dot{z}\underline{e}_z + \cancel{z\underline{e}_z}$$

$$\dot{\underline{r}} = \dot{x}\underline{e}_x + \dot{y}\underline{e}_y + \dot{z}\underline{e}_z$$

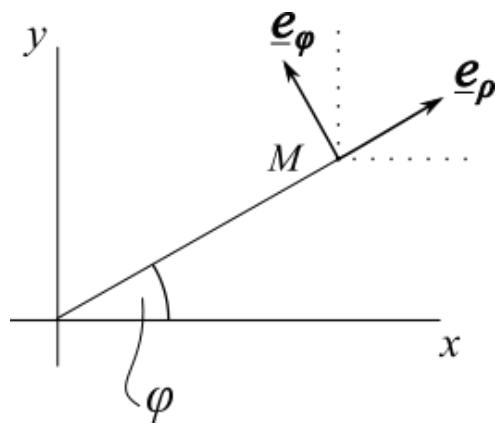
- Zylindrische Basis:

$$\underline{r} = \rho(t) \cdot \underline{e}_\rho(\varphi(t)) + z(t)\underline{e}_z$$

$$\dot{\underline{r}} = \dot{\rho}\underline{e}_\rho + \rho\dot{\underline{e}}_\rho + \dot{z}\underline{e}_z + \cancel{z\underline{e}_z}$$

$$\dot{\underline{e}}_\rho \neq 0$$

\underline{e}_ρ : als Vektor in einer konstanten Basis!



$$\dot{r} = \dot{\rho}e_\rho + \rho\dot{\varphi}e_\varphi + \dot{z}e_z = \underline{v}$$

- Sphärische Basis:

$$\underline{r}(t) = r(t)e_r$$

$$\dot{\underline{r}}(t) = \dot{r}e_r + r\dot{\theta}e_\theta + r\sin\theta\dot{\psi}e_\psi = \underline{v}$$

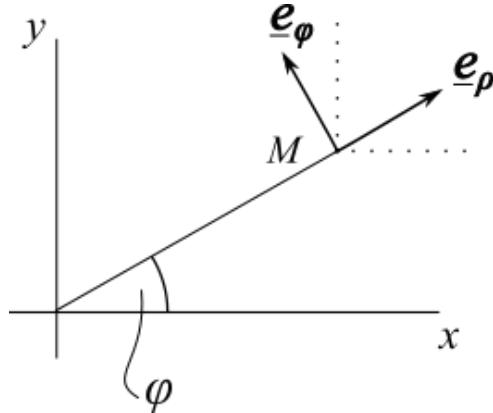
Beispiel:

Gegeben : $\underline{r} : \begin{pmatrix} at \\ at \\ ba^2t^2 \end{pmatrix}$ Bahnkurve von M in kartesischer Basis

Gesucht : $\underline{v}(t), \dot{\underline{s}}(t), \tau(t)$

Kreisbewegung

$$\rho = R, \varphi = \varphi(t), z = z_o$$



$$\underline{r}(t) = R\underline{e}_\rho + z_o \underline{e}_z, \underline{e}_\rho(\phi(t))$$

$$\underline{r} : \begin{pmatrix} R \\ \varphi(t) \\ z_o \end{pmatrix} \rightarrow \underline{r} : \begin{pmatrix} R \\ 0 \\ z_o \end{pmatrix}$$

$$\underline{v} = \dot{\rho}\underline{e}_\rho + \rho\dot{\varphi}\underline{e}_\varphi + \dot{z}\underline{e}_z = R\dot{\varphi}\underline{e}_\varphi : \text{tangential zum Kreis}$$

$$\dot{s} = R\dot{\varphi}, \quad \underline{\tau} = \underline{e}_\varphi$$

$\dot{\varphi}$: Winkelschnelligkeit in $\frac{\text{rad}}{\text{s}}$

? → "Winkelgeschwindigkeit"

$$\underline{\omega} = \dot{\varphi}\underline{e}_z$$

Kreisbewegung:

$$\underline{v} = R\dot{\varphi}\underline{e}_\varphi$$

Umformung:

$$\underline{e}_\varphi = \underline{e}_z \times \underline{e}_\rho \rightarrow \underline{v} = R\dot{\varphi}(\underline{e}_z \times \underline{e}_\rho) = \dot{\varphi}\underline{e}_z \times R\underline{e}_\rho$$

$$\underline{r} = R\underline{e}_\rho + z_o \underline{e}_z \rightarrow R\underline{e}_\rho = \underline{r} - z_o \underline{e}_z$$

$$\underline{v} = \dot{\varphi}\underline{e}_z \times (\underline{r} - z_o \underline{e}_z) = \dot{\varphi}\underline{e}_z \times \underline{r} - z_o \dot{\varphi}\underline{e}_z \times \underline{e}_z$$

$$\underline{v} = \dot{\varphi}\underline{e}_z \times \underline{r} = \underline{\omega} \times \underline{r} : \text{Kreisbewegung}$$

Allgemein! $\underline{\omega} \parallel$ Achse der Bewegung und $\underline{v} = \underline{0}$

Mit kartesischen Basisvektoren:

$$\underline{\omega} = \dot{\varphi}\underline{e}_z, \quad \underline{r} = R \cos \varphi \underline{e}_x + R \sin \varphi \underline{e}_y + z_o \underline{e}_z$$

$$\underline{v} = \underline{\omega} \times \underline{r} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\varphi} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} R \cos \varphi \\ R \sin \varphi \\ z_o \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\dot{\varphi} R \sin \varphi \\ \dot{\varphi} R \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\underline{e}_\varphi = -\sin \varphi \underline{e}_x + \cos \varphi \underline{e}_y$$

$$\underline{v} = -\dot{\varphi} R \sin \varphi \underline{e}_x + \dot{\varphi} R \cos \varphi \underline{e}_y = \dot{\varphi} R \underline{e}_\varphi$$

3 Starrer Körper

- Eigenschaften:
- Abstand zwischen 2 beliebige Punkte konstant
 - Winkel zwischen Verbindungsvektoren konstant
- keine Gestaltänderung/Volumenänderung, keine Deformation

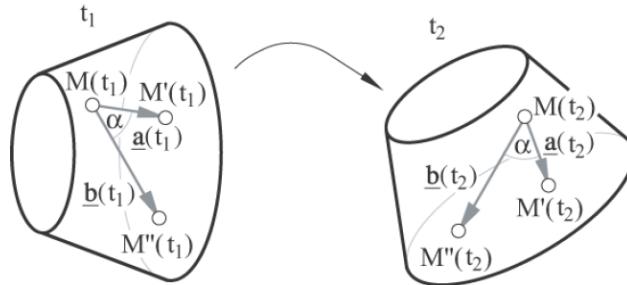


Fig. 3.1: zur Definition eines starren Körpers

$$\underline{a} = \underline{MM}', \quad \underline{b} = \underline{MM}''$$

$$\text{i.A.: } \underline{a}(t_1) \neq \underline{a}(t_2), \quad \underline{b}(t_1) \neq \underline{b}(t_2)$$

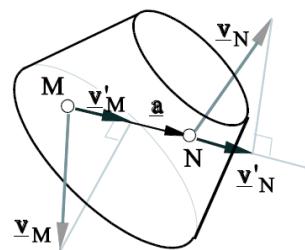
$$|\underline{a}(t_1)| = |\underline{a}(t_2)|; \quad |\underline{b}(t_1)| = |\underline{b}(t_2)|; \quad \alpha(t_1) = \alpha(t_2) \quad \forall t_1, t_2, \underline{a}, \underline{b}, M, M', M''$$

$$\rightarrow \text{damit: } \underline{a}(t) \cdot \underline{b}(t) = |\underline{a}| \cdot |\underline{b}| \cdot \cos \alpha : \text{konstant}$$

Für Betrag von \underline{a} und $\underline{a}(t) \cdot \underline{a}(t) = |\underline{a}|^2$: konstant → daraus folgt: **Satz der projizierten Geschwindigkeiten (SdpG)**

Satz der projizierten Geschwindigkeiten

Die Geschwindigkeiten $\underline{v}_M, \underline{v}_N$ zweier beliebiger Punkte M und N eines starren Körpers weisen zu allen Zeiten gleiche Projektionen $\underline{v}'_M = \underline{v}'_N$ in Richtung ihrer Verbindungsgeraden MN auf.



Beweis des SdpG

$$\underline{a} \cdot \underline{a} = \text{konst.} \rightarrow (\underline{a} \cdot \underline{a}) = 0$$

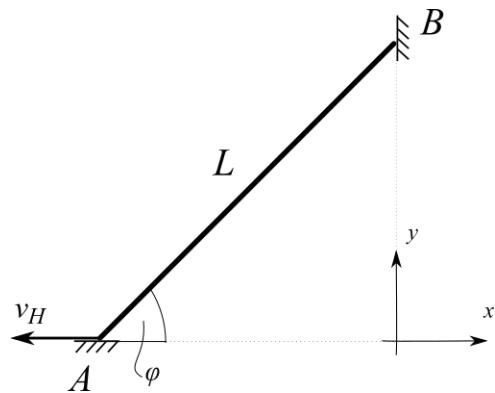
$$\underline{a} \cdot \dot{\underline{a}} + \dot{\underline{a}} \cdot \underline{a} = 2(\underline{a} \cdot \dot{\underline{a}}) = 0, \quad \underline{a}, \dot{\underline{a}} \neq 0$$

$$\underline{a} = \underline{r}_n - \underline{r}_m, \quad \dot{\underline{a}} = \underline{v}_n - \underline{v}_m$$

$$\underline{a} \cdot (\underline{v}_n - \underline{v}_m) = 0$$

$$\underline{v}_n \cdot \underline{a} = \underline{v}_m \cdot \underline{a}$$

Beispiel: gleitende Leiter



Translation

M, N: 2 beliebige Punkte des Körpers $\rightarrow \underline{a} = \underline{r}_n - \underline{r}_m$

Starrer Körper: Betrag von \underline{a} , $|\underline{a}|$, ist konstant $\forall t$; Richtung von \underline{a} ist veränderlich

\rightarrow Falls \underline{a} konstant ist in Betrag und Richtung \rightarrow Bewegungszustand ist Translation

Konsequenz:

$$\underline{a} = \text{konst} \rightarrow \dot{\underline{a}} = 0 = \dot{\underline{r}}_n - \dot{\underline{r}}_m = \dot{\underline{v}}_n - \dot{\underline{v}}_m$$

$\underline{v}_n = \underline{v}_m$, alle Punkte haben die gleiche Geschwindigkeit

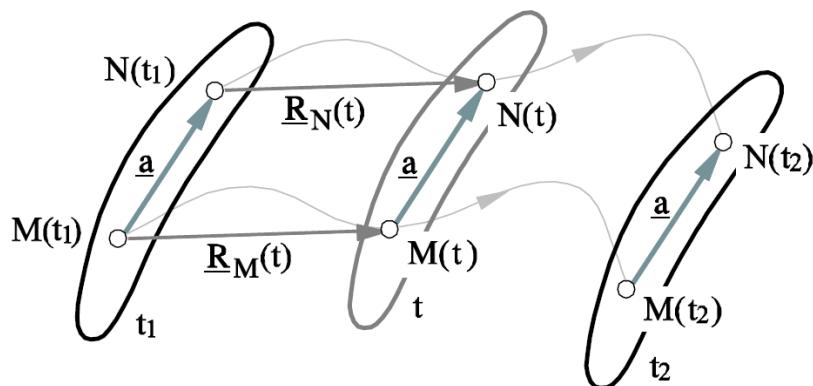
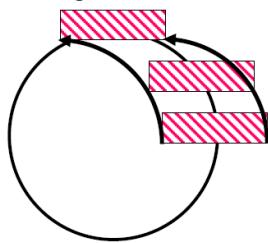


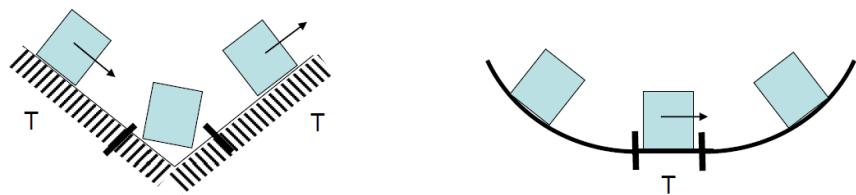
Fig. 3.4: Translation, kongruente Bahnkurven

Alle Bahnkurven kongruent: geradlinige Translation oder krummlinige Translation

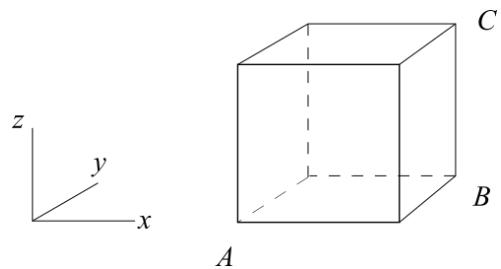
Kreisförmige Translation



Momentane Translation



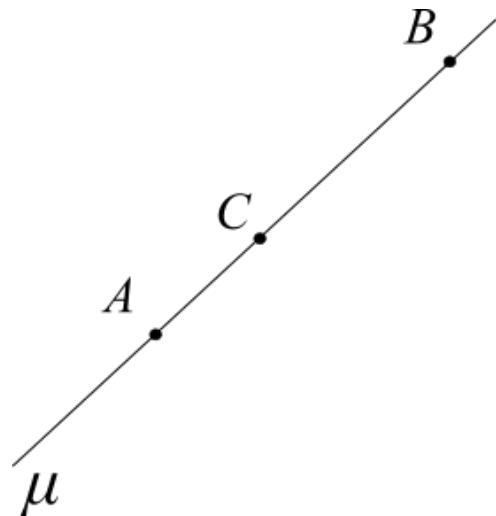
Beispiel: Würfel



Rotation

Rotation liegt vor, falls 2 Punkte des Körpers in Ruhe sind.

Rotationsachse: μ , Achse durch 2 Punkte des Körpers, die in Ruhe sind



Eigenschaften:

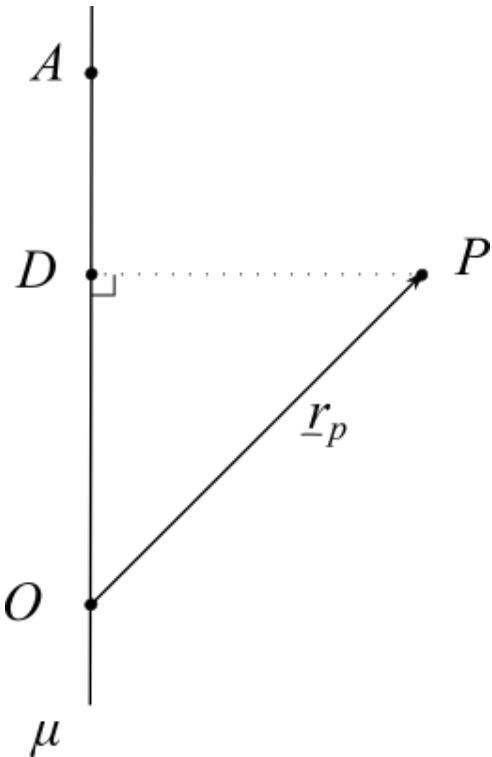
- Alle Punkte auf μ in Ruhe
- Alle Punkte $\notin \mu$: Kreisbewegung
- Winkelschnelligkeit gleich \forall Punkte

Anschaulich:

$$\underline{v}_c \parallel \mu = \underline{0} \text{ aus SdpG}$$

$$\underline{v}_c \perp \mu = \underline{0} \text{ sonst Winkeländerung}$$

Beweis: 2. Alle Punkte $\notin \mu$: Kreisbewegung



$$\text{SdpG: } P \longleftrightarrow D \rightarrow \underline{v}_p \cdot \underline{DP} = \underline{v}_d \cdot \underline{DP}, \rightarrow \underline{v}_p \perp \underline{DP}$$

Zu zeigen: $\underline{v}_p \perp \mu$

$$(\underline{DP} \cdot \underline{DA})^\cdot = ((\underline{r}_p - \underline{r}_d) \cdot (\underline{r}_a - \underline{r}_d))^\cdot = 0$$

$$(\underline{r}_p - \underline{r}_d)^\cdot \cdot (\underline{r}_a - \underline{r}_d) + ((\underline{r}_p - \underline{r}_d)) \cdot (\underline{r}_a - \underline{r}_d)^\cdot = 0, \quad \underline{v}_a = \underline{v}_d = 0$$

$$\dot{\underline{r}}_p \cdot (\underline{r}_a - \underline{r}_d) = 0 \rightarrow \underline{v}_p \perp \mu$$

Zylindrische Basis:

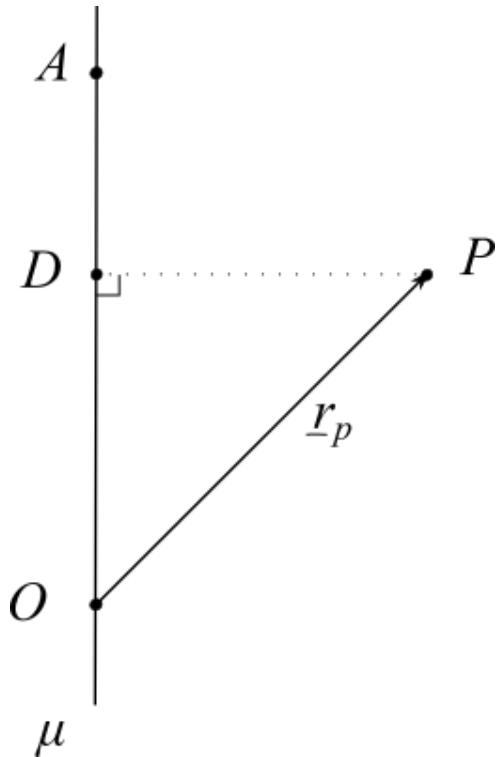
$$\underline{r}_p = \rho(t) \underline{e}_\rho + z(t) \underline{e}_z, \quad \underline{v}_p = \dot{\underline{r}}_p = \dot{\rho} \underline{e}_\rho + \rho \dot{\varphi} \underline{e}_\varphi + \dot{z} \underline{e}_z$$

$$\rightarrow \underline{v}_p \perp \mu \longleftrightarrow \underline{e}_z \Rightarrow \dot{z} = 0 \quad z(t) = z_o$$

$$\rightarrow \underline{v}_p \perp \underline{DP} \longleftrightarrow \underline{e}_\rho \Rightarrow \dot{\rho} = 0 \quad \rho(t) = R$$

$$\underline{r}_p = R \underline{e}_\rho + z_o \underline{e}_z : \text{Kreisbewegung!}$$

Beweis: 1., 2., 3.



$$\underline{v}_p = \dot{\varphi}_p \underline{e}_z \times \underline{r}_p, \quad \underline{v}_q = \dot{\varphi}_q \underline{e}_z \times \underline{r}_q$$

Zu zeigen:

$$\dot{\varphi}_p \times \dot{\varphi}_q$$

Aus dem SdpG:

$$\begin{aligned} \underline{v}_p \cdot \underline{PQ} &= \underline{v}_q \cdot \underline{PQ} \\ \dot{\varphi}_p (\underline{e}_z \times \underline{r}_p) \cdot (\underline{r}_q - \underline{r}_p) &= \dot{\varphi}_q (\underline{e}_z \times \underline{r}_q) \cdot (\underline{r}_q - \underline{r}_p) \\ \dot{\varphi}_p (\underline{e}_z \times \underline{r}_p) \underline{r}_q &= -\dot{\varphi}_q (\underline{e}_z \times \underline{r}_q) \underline{r}_p = \dot{\varphi}_q (\underline{r}_q \times \underline{e}_z) \underline{r}_p, \quad \text{Mit: } -(\underline{a} \times \underline{b}) = \underline{b} \times \underline{a} \\ &= \dot{\varphi}_q (\underline{e}_z \times \underline{r}_q) \underline{r}_q, \quad \text{Mit Spatprodukt: } (\underline{a} \times \underline{b}) \cdot \underline{c} = (\underline{b} \times \underline{c}) \cdot \underline{a} \end{aligned}$$

Somit:

- Rotation: alle Punkte führen Kreisbewegung mit "Winkelgeschwindigkeit" oder "Rotationsgeschwindigkeit"

$$\underline{\omega} = \dot{\varphi} \underline{e}_\mu \text{ mit } \mu = z' O z \rightarrow \underline{\omega} = \dot{\varphi} \underline{e}_z$$

- Geschwindigkeit:

$$\underline{v} = \underline{\omega} \times \underline{r} = \dot{\varphi} \underline{e}_z \times \underline{r} \tag{4}$$

$$\underline{v}_M = \underline{\omega} \times \underline{OM}$$

$$|\underline{v}_M| = |\underline{\omega}| \cdot |\underline{AM}|$$

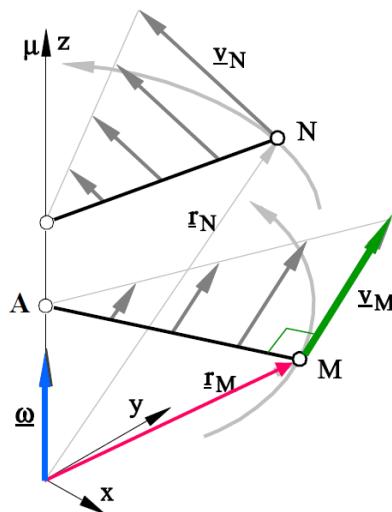
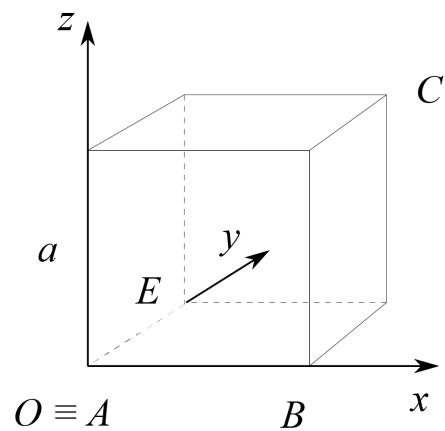


Fig. 3.8: Geschwindigkeitsverteilung bei Rotation

Gleichung $\underline{v} = \underline{\omega} \times \underline{r}$ gültig auf Falls $\mu \neq z' Oz$, solange Ursprung O auf μ ist!

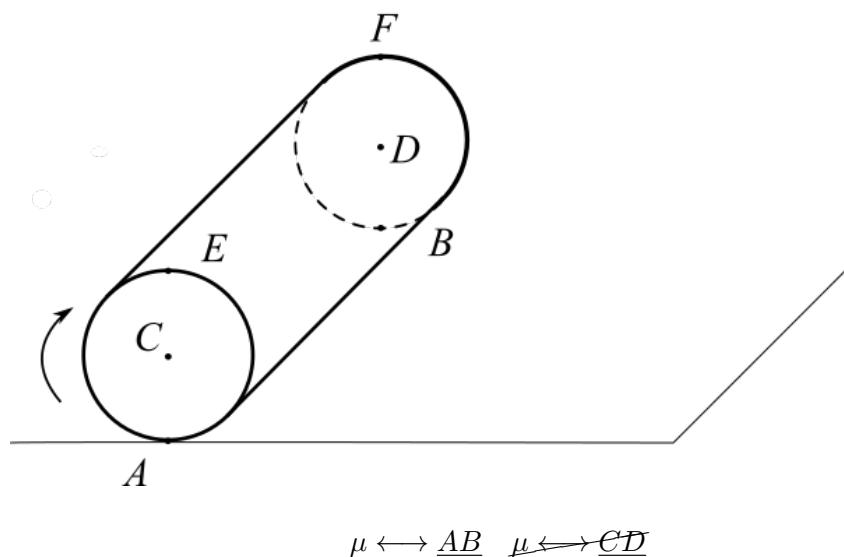
Beispiel: Würfel, Rotation



Gegeben: Rotation, $\underline{v}_a = \begin{pmatrix} v \\ 0 \\ v \end{pmatrix}, \quad \underline{v}_b = \begin{pmatrix} v \\ v \\ -v \end{pmatrix}, \quad \underline{v}_e = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

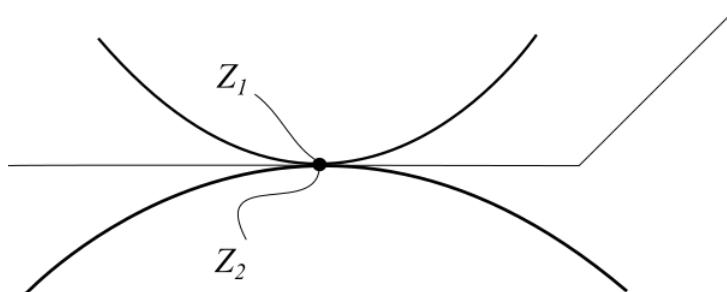
Gesucht: $\underline{\omega}$

Rollen: momentane Rotation



Gleiten/Rollen

Kontakt (ohne Eindringen)



$$\text{"Kontakt"} \rightarrow \underline{v}_n(z_1) = \underline{v}_n(z_2)$$

$$\text{Gleiten: } \underline{v}_t(z_1) \neq \underline{v}_t(z_2)$$

$$\text{Rollen: } \underline{v}_t(z_1) = \underline{v}_t(z_2)$$

speziell z_2 in Ruhe : $\underline{v}(z_1) = \underline{0} \longleftrightarrow \text{Rollen} ; \underline{v}(z_1) = \underline{v}_t(z_1) \neq \underline{0} \longleftrightarrow \text{Gleiten}$

Kreiselung

Kreiselung liegt vor, falls nur 1 Punkt in Ruhe ist $\rightarrow 0$

Bahnkurven: auf Kugel mit Radius $|\underline{r}| \rightarrow$ Ortsvektor

Behauptung: Momentan ist nicht nur O in Ruhe, sondern eine ganze Achse durch O.

Beweis: aus Fig 3.11: 2 Ebenen mit E_m, E_n

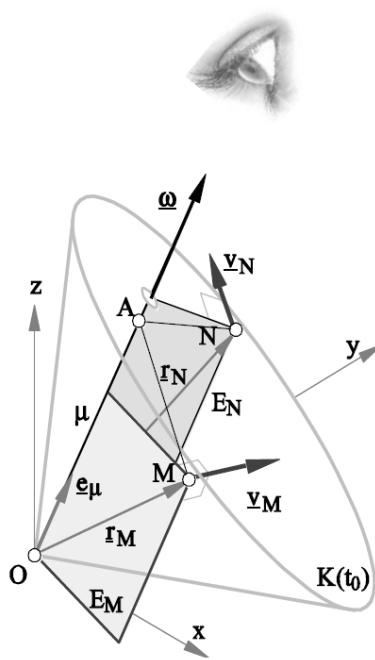


Fig. 3.11: Kreiselung als momentaner Rotation

$$E_m \perp \underline{v}_m; \quad E_n \perp \underline{v}_n$$

$$\rightarrow A \in E_m, \quad A \in E_n$$

Aus SdpG:

$$\underline{v}_a \cdot \underline{AM} = \underline{v}_m \cdot \underline{AM}$$

$$\underline{v}_a = 0 \text{ oder } \underline{v}_a \perp \underline{AM}$$

Aus SdpG:

$$\underline{v}_a \cdot \underline{AN} = \underline{v}_n \cdot \underline{AN}$$

$$\underline{v}_a = 0 \text{ oder } \underline{v}_a \perp \underline{AN}$$

Ansicht $\perp \underline{AO}$:

$$\underline{v}_a \parallel \underline{AO}?$$

$$\text{Nein, da: } \underline{v}_a \cdot \underline{AO} = \underline{\omega} \cdot \underline{AO}$$

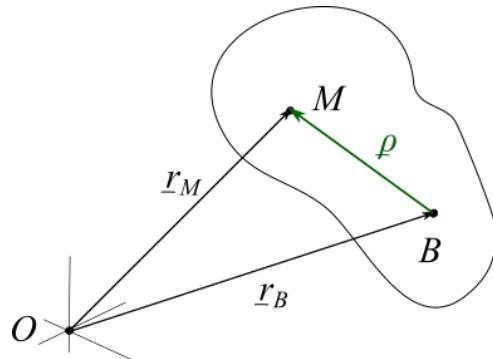
$$\underline{v}_a \perp \underline{AO} \rightarrow \underline{v}_a = 0$$

Kreiselung als momentane Rotation

1 Punkt (O) in Ruhe: $\underline{v} = \underline{\omega} \times \underline{r}$

Kombination von Kreiselung und Translation \rightarrow allgemeinster Bewegungszustand des starren Körpers!

Allgemeinste Bewegung:



$$\underline{r}_m = \underline{r}_n + \rho$$

$$\dot{\underline{r}}_m = \underline{v}_m = \dot{\underline{r}}_b + \dot{\rho} = \underline{v}_b + \dot{\rho}$$

$\dot{\rho}$: Geschwindigkeit von M bezüglich B

→ B als Bezugspunkt auf K : bez. B führen alle Punkte eine Kreiselung aus!

$\underline{\omega}^*$: Winkelgeschwindigkeit der Kreiselung um B

$$\dot{\rho} = \underline{v}_m^* = \underline{\omega}^* \times \rho = \underline{\omega}^* \times \underline{BM}$$

$$\underline{v}_m = \underline{v}_b + \underline{\omega}^* \times \underline{BM}$$

Falls anderer Bezugspunkt C :

$$\underline{v}_m = \underline{v}_c + \underline{\omega}^{**} \times \underline{CM}$$

Behauptung:

$$\underline{v}_m = \underline{v}_b + \underline{\omega} \times \underline{BM} = \underline{v}_c + \underline{\omega}^{**} \times \underline{CM}$$

d.h. $\underline{\omega}^* = \underline{\omega}^{**} = \underline{\omega}$ → $\underline{\omega}$ gleich für alle Bezugspunkte!

$$\underline{v}_m = \underline{v}_b + \underline{\omega}^* \times \underline{BM} = \underline{v}_c + \underline{\omega}^{**} \times \underline{CM}$$

$$\underline{v}_b + \underline{\omega}^* \times (\underline{BC} + \underline{CM}) = \underline{v}_c + \underline{\omega}^{**} \times \underline{CM}$$

$$\underline{v}_b + \underline{\omega}^* \times \underline{BC} + \underline{\omega}^* \times \underline{CM} = \underline{v}_c + \underline{\omega}^{**} \times \underline{CM}$$

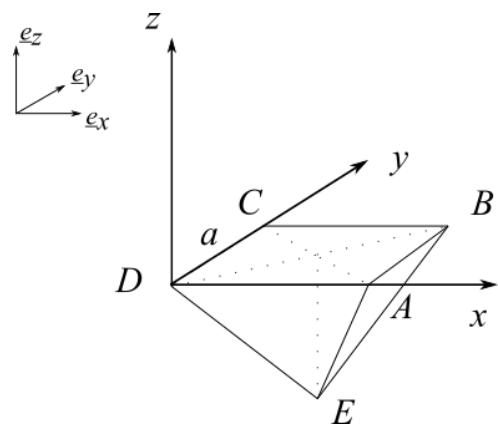
$$\rightarrow \underline{\omega}^* = \underline{\omega}^{**} \text{ da } B, C, M \text{ beliebig}$$

Grundgleichung des Bewegungszustandes eines starren Körpers:

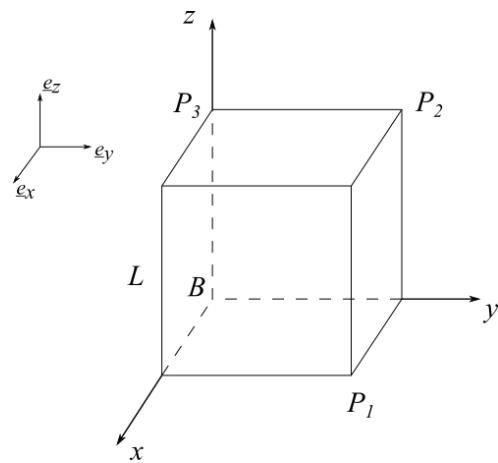
$$\underline{v}_m = \underline{v}_b + \underline{\omega} \times \underline{BM} \quad \forall M, B \in K$$

aus $\underline{v}_p, \underline{\omega} \Rightarrow$ Geschwindigkeit in jedem Punkt berechnen!

Beispiel: Tetraeder, allgemeine Bewegung



Beispiel: Würfel, allgemeine Bewegung



Allgemeine Bewegung: $\underline{v}_m = \underline{v}_b + \underline{\omega} \times \underline{BM}$

Spezialfälle: • $\underline{\omega} = \underline{0} \rightarrow \underline{v}_m = \underline{v}_d$ Translation

• $\underline{v}_b = \underline{0} \rightarrow \underline{v}_m = \underline{\omega} \times \underline{BM}$ Rotationsachse durch B

• i.A.: $\{\underline{v}_b, \underline{\omega}\}$: Kinemate in B \rightarrow charakterisiert Bewegungszustand!

• Wie verändert sich Kinemate je nach Ort?

$$\{\underline{v}_p, \underline{\omega}'\} \longleftrightarrow \{\underline{v}_b, \underline{\omega}\}$$

$\rightarrow \underline{\omega}' = \underline{\omega} \rightarrow$ 1. Invariante (invariant mit Ort!)

$$\underline{v}_p = \underline{v}_b + \underline{\omega} \times \underline{BP} \neq \underline{v}_b$$

Aus SdpG:

$$\underline{v}_p \cdot \underline{BP} = \underline{v}_b \cdot \underline{BP} + (\underline{\omega} \times \underline{BP}) \cdot \underline{BP}$$

\rightarrow 2. Invariante?

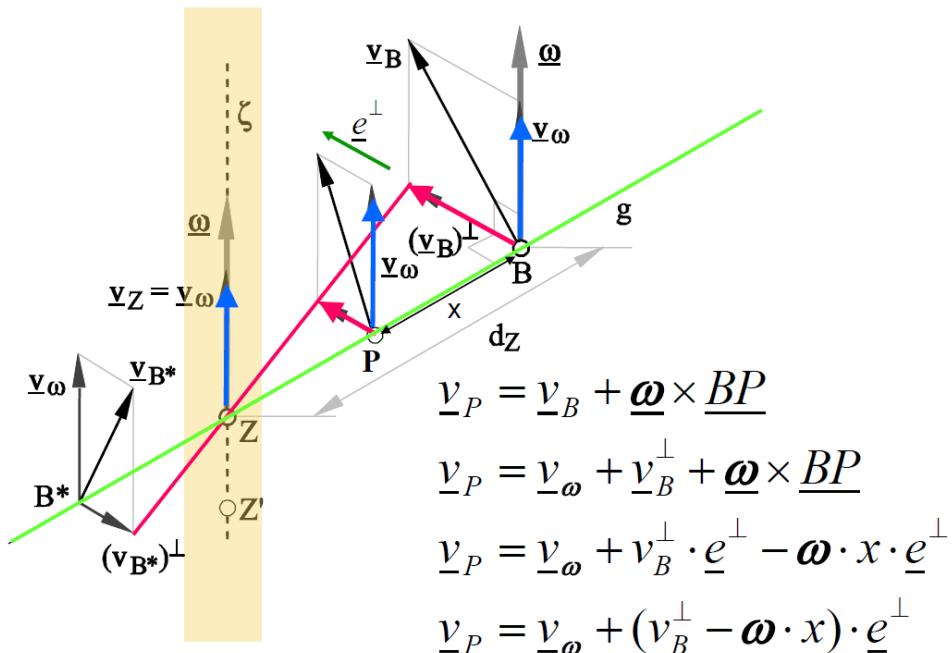
$$\underline{v}_p = \underline{v}_b + \underline{\omega} \times \underline{BP}$$

$$\underline{v}_p e_{\omega} = \underline{v}_b e_{\omega} + (\underline{\omega} \times \underline{BP}) e_{\omega}$$

Projektion von \underline{v} in Richtung von $\underline{\omega}$: \underline{v}_{ω} in jedem Punkt gleich $\rightarrow \underline{v}_{\omega}$: 2. Invariante

Physikalisch / anschauliche Interpretation:

Fig. 3.16: Zentralachse und Schraube

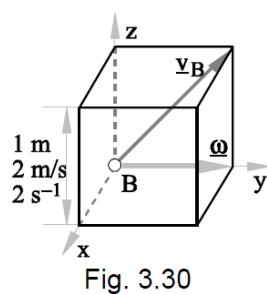


Allgemeine Bewegung als "Schraubung" um Zentralachse ζ

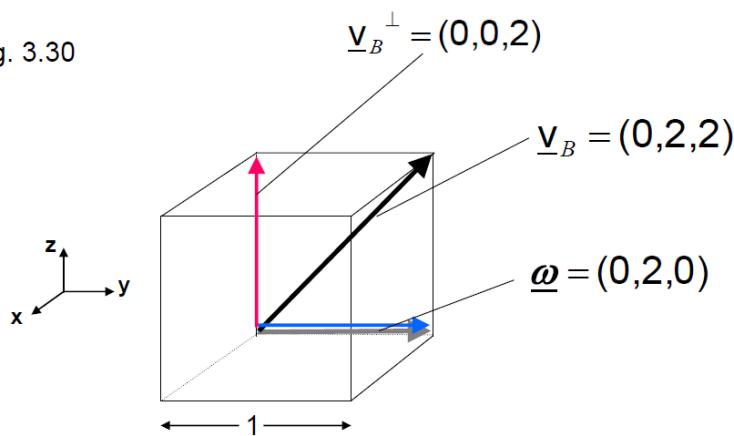
ζ : Zentralachse / Schraubungsachse

Kinematik der Punkte auf ζ : $\{\underline{v}_\omega, \underline{\omega}\}$, "Schraube"

→ Bestimmung der Lage der Zentralachse bei allgemeinen Bewegungszustand.



Problem Figur 3.30



$|\underline{v}|_{max}$: Maximaler Abstand von ζ

$|\underline{v}|_{min}$: Minimaler Abstand von ζ

Merke: ζ braucht nicht materieller Bestandteil von Körper zu sein.

- Schraube $\{\underline{v}_\omega, \underline{\omega}\}$: Kinematik der Punkte auf ζ
- 1. Invariante: $\underline{\omega}$, 2. Invariante: $\underline{v}_\omega : \rightarrow |\underline{v}_\omega| = \underline{v}_b \cdot \frac{\underline{\omega}}{|\underline{\omega}|}$

Spezialfälle: • $\underline{\omega} = \underline{0} \rightarrow$ Translation

- $\underline{\omega} \neq \underline{0}, \underline{v}_b = \underline{0} \rightarrow$ Rotation, $B \in \mu$
- $\underline{\omega} \neq \underline{0}, \underline{v}_b \perp \underline{\omega} \rightarrow$ Rotation, $B \not\in \mu$

→ Wichtige Anwendung: Ebene Bewegung

3.1 Ebene Bewegung

Bahnkurven aller Punkte bleiben in parallelen Ebenen!

Ebene $E \parallel$ zu $x - y$ Ebene, Punkt $P \in E \rightarrow \underline{v}_p = \begin{pmatrix} v_{px} \\ v_{py} \\ 0 \end{pmatrix}$ und Punkt A im gleichen Körper:

$$\underline{v}_a = \underline{v}_p + \underline{\omega} \times \underline{PA}$$

$$\begin{pmatrix} v_{ax} \\ v_{ay} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_{bx} \\ v_{by} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} PA_x \\ PA_y \\ PA_z \end{pmatrix}$$

$$v_{az} = 0 = 0 + \omega_x PA_y - \omega_y PA_x$$

$$\rightarrow \underline{\omega} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_z \end{pmatrix}}_{\text{Rotation!}} \quad \text{oder} \quad \underbrace{\underline{\omega} = \underline{0}}_{\text{Translation}}$$

da $\underline{\omega} = \underline{0}, \mu \perp$ Ebene E

Satz vom Momentanzentrum (S. 56)

Bei jeder ebenen Bewegung eines starren Körpers K mit $\underline{\omega} \neq \underline{0}$

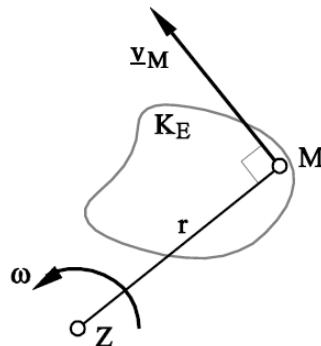
beschreibt der ebene Schnitt K_E von K in der Bewegungsebene E eine momentane Rotation um einen Punkt $Z \equiv \mu \cap E$, der **Momentanzentrum** der ebenen Bewegung heißt.

Das Momentanzentrum Z ist der einzige momentan ruhende Punkt des in Gedanken auf die ganze Ebene E ausgedehnten Körpers K_E .

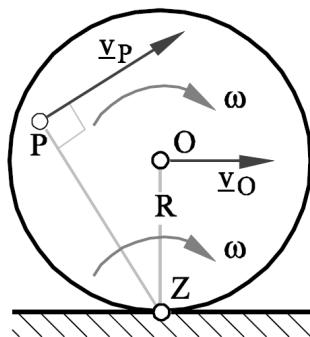
Die Geschwindigkeit \underline{v}_M eines beliebigen Punktes M von K in E ist dann nach Fig. 3.19 senkrecht zur Verbindungsgeraden

mit dem Momentanzentrum Z und besitzt den durch den Drehsinn von $\underline{\omega} = \omega \underline{e}_z = \dot{\phi} \underline{e}_z$ vorgeschriebenen Richtungssinn sowie den mit dem Abstand r von Z gebildeten Betrag

$$v_M = \omega r .$$



Figur 3.19



Z: Momentanzentrum

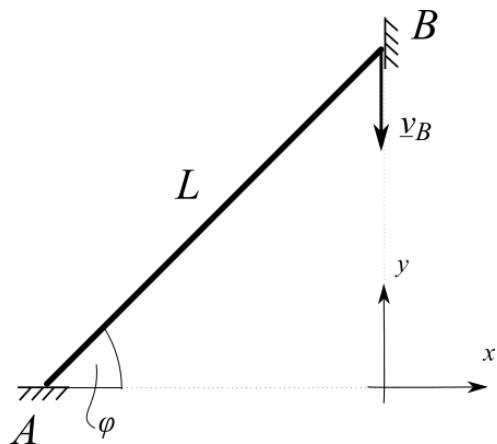
$$\underline{v}_P \perp \underline{ZP}, v_P = \omega \cdot |ZP|$$

$$\underline{v}_O \perp \underline{ZO}, v_O = \omega \cdot R$$

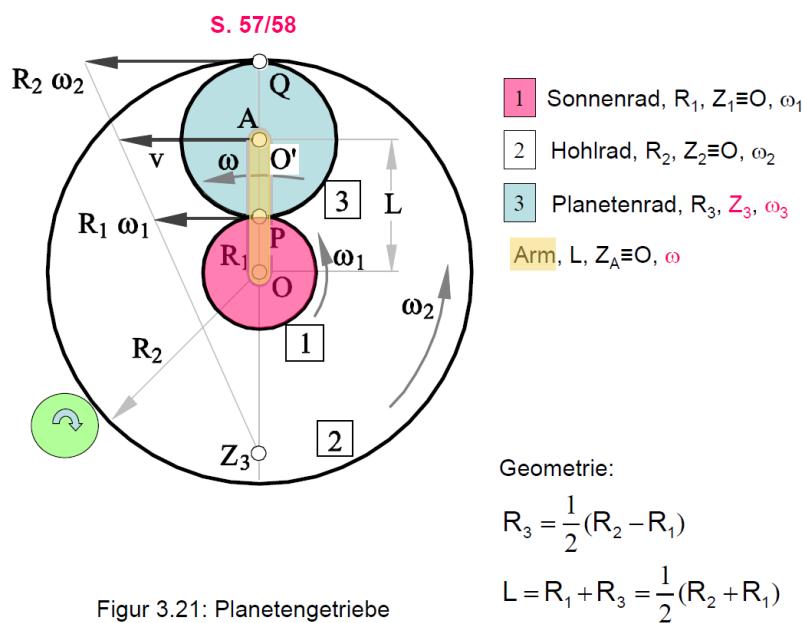
Figur 3.20: rollendes Rad

Beispiel: Leiter, geführte Ebene Bewegung

Aus SdpG: $v_V = v_H \cdot \frac{1}{\tan \varphi}$



Löse mit SMZ:

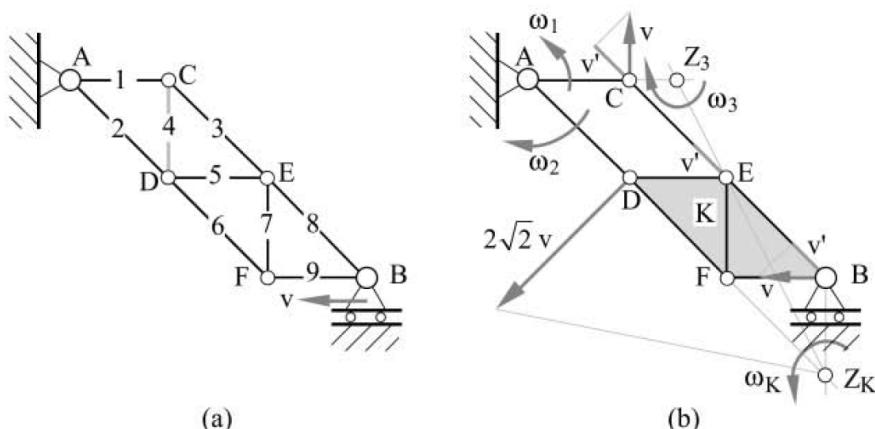


3.2 Fachwerk

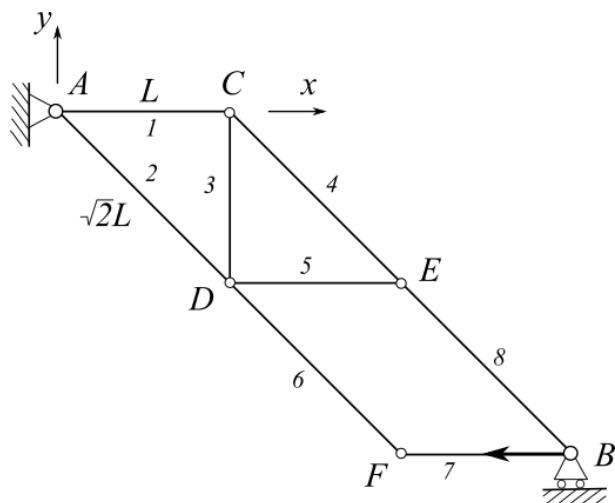
Fachwerke bestehen aus Stäben und sind verbunden in Knotenpunkten

Hier: ebene, ideale Fachwerke

- Eigenschaften:
- Stäbe und Bahnkurven aller Punkte in einer Ebene
 - Stäbe sind in Knotenpunkten frei drehbar
 - Stäbe sind starre Körper
 - Bsp. Fig 3.24



Beispiel:



Parallelogrammregel

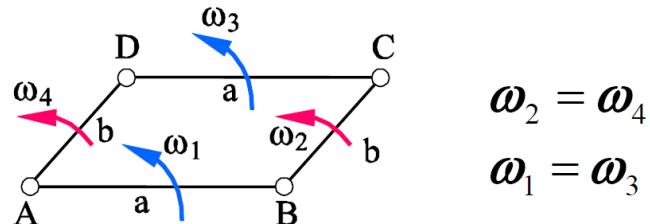


Fig. 3.25: Parallelogrammregel

Beweis:

$$\underline{v}_A = \underline{v}_B + \underline{\omega}_1 \times \underline{BA}$$

$$\underline{v}_B = \underline{v}_C + \underline{\omega}_2 \times \underline{CB}$$

$$\underline{v}_C = \underline{v}_D + \underline{\omega}_1 \times \underline{AD}$$

$$\underline{v}_A = \underline{v}_A + \underline{\omega}_4 \times \underline{AB} + \underline{\omega}_3 \times \underline{CB} + \underline{\omega}_2 \times \underline{CA} + \underline{\omega}_1 \times \underline{BA}$$

$$\underline{v}_A = \underline{v}_A + (\underline{\omega}_4 - \underline{\omega}_2) \times \underline{BC} + (\underline{\omega}_3 - \underline{\omega}_1) \times \underline{AB}$$

$$\rightarrow \quad \underline{\omega}_4 = \underline{\omega}_2, \quad \underline{\omega}_3 = \underline{\omega}_1 \quad q.e.d.$$

4 Kräfte

Eigenschaften:

- Beschreiben Wechselwirkung zwischen materiellen Systemen
- Ursachen für Veränderung von v oder Veränderung der Gestalt
- Statik: Wie sollen Kräfte sein, damit ein System in Ruhe bleibt?

Mathematische Beschreibung:

→ Charakterisierung der Wirkung durch Richtung, Betrag und Angriffspunkt

⇒ Kraft: punktgebundener Vektor $\{A|\underline{F}\}$

Einheit: $N := \frac{Kgm}{s^2}$ (Newton)

- Kontaktkräfte: Wechselwirkung mit Berührung
- Fernkräfte: Wechselwirkung ohne Berührung
- Kräftegruppe: mehrere Kräfte am System

$$\{A_i|\underline{F}_i\}, \quad i = 1, 2, 3, \dots \rightarrow \{\{A_1|\underline{F}_1\}, \{A_2|\underline{F}_2\}, \{A_3|\underline{F}_3\}, \dots\}$$

$$\{A|\underline{F}_i\}, \quad i = 1, 2, 3, \dots \rightarrow \{A|\underline{R}\}, \quad \underline{R} = \sum_i \underline{F}_i$$

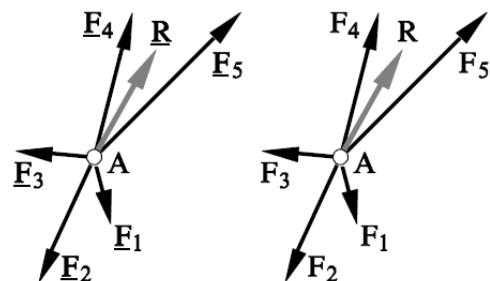
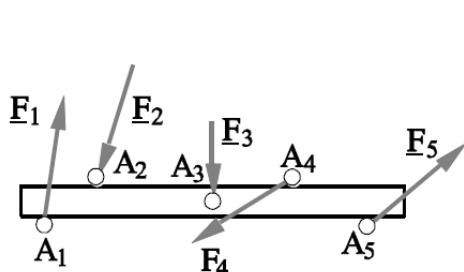


Fig. 4.1: Kräfte als
punktgebundene Vektoren

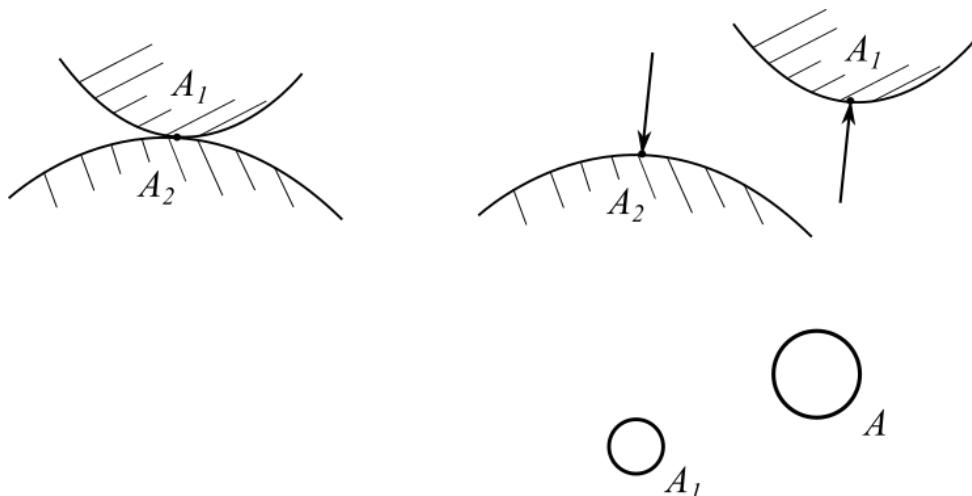
Fig. 4.2: Kräfte mit
gleichem Angriffspunkt

Reaktionsprinzip

Das Reaktionsprinzip

POSTULAT: Übt ein erster materieller Punkt A_1 auf einen zweiten A_2 die Kraft $\{A_2 | \underline{F}\}$ aus (*Actio*), so wirkt seinerseits der materielle Punkt A_2 auf A_1 mit der **Gegenkraft** $\{A_1 | -\underline{F}\}$ (*Reactio*).

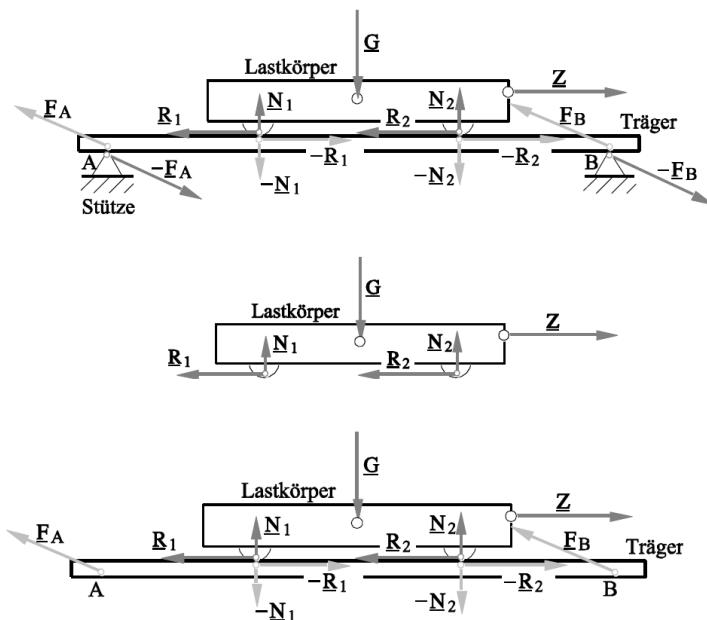
ZUSATZPOSTULAT: Bei Fernkräften liegen die Wirkungslinien von Kraft und Gegenkraft auf der Verbindungsgerade durch A_1 und A_2 .



- Es existiert keine Kraft ohne Reaktion
- Innere und äussere Kräfte \leftrightarrow Systemabgrenzung

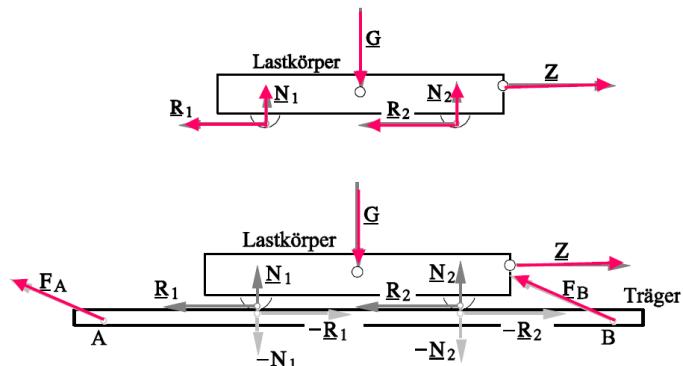
Innere Kraft: Angriffspunkt der Reaktion auch im System

Äussere Kraft: Angriffspunkt der Reaktion ausserhalb vom System



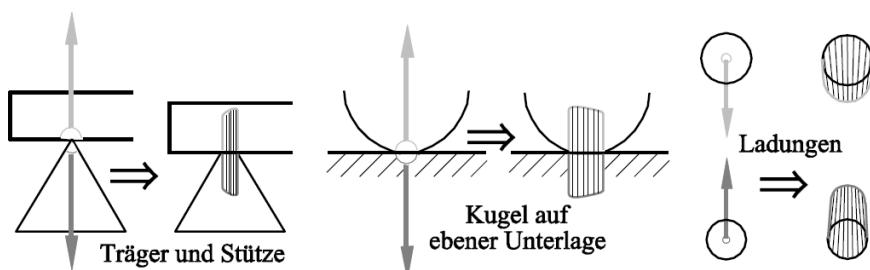
äussere Kräfte

innere Kräfte



Systemabgrenzung System: Teilbereich des 3D Raumes, besteht i.A. aus mehreren Körpern

Abgrenzung: je nach Ziel der Analyse



Figur 4.8: verteilte Kräfte

Kontaktkräfte → Flächenverteilt
 Fernkräfte → Volumenverteilt } Kraftdichte - verteilte Kräfte

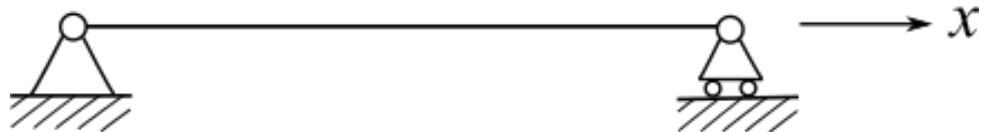
Flächenkräfte → Flächenkraftdichte [$\frac{N}{m^2}$]: $\underline{s} = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta F}{\Delta A}$

→ Kraft am infinitesimalen Flächenelement: $d\underline{F} = \underline{s} dA$

Summe aller Kräfte: $\underline{R} = \int \int_A \underline{s} dA$

Volumenkräfte → Raumkraftdichte [$\frac{N}{m^3}$]: $\underline{F} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta F}{\Delta V}$

→ Kraft am infinitesimalen Volumenelement: $d\underline{F} = \underline{F} dV$



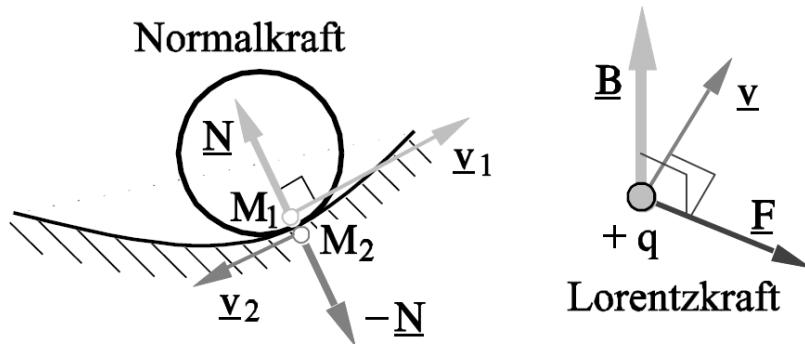
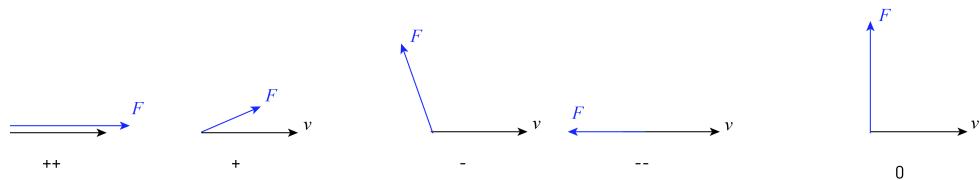
Linienkräfte → Linienkraftdichte [$\frac{N}{m}$]: $\underline{q} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta F}{\Delta x}$

$d\underline{F} = \underline{q} dx \quad \rightarrow \quad \underline{R} = \int \underline{q}(x) dx$

5 Leistung

$$\{A|\underline{F}\} : P = \underline{F} \cdot \underline{v}_A \quad [N \frac{m}{s}] = [W]$$

$$P = |\underline{F}| |\underline{v}_A| \cos \alpha$$



Figur 5.2: Kraft ohne Leistung

Leistung einer Einzelkraft \underline{F} bei Rotation:

$$\{P|\underline{F}\}, P \not\propto \mu :$$

$$\underline{v}_P = \underline{\omega} \times \underline{OP}$$

$$P = (\underline{\omega} \times \underline{OP}) \cdot \underline{F} = \underline{\omega} \cdot \underbrace{(\underline{OP} \times \underline{F})}_{M_O}$$

\underline{M}_O : "Moment der Kraft $\{P|\underline{F}\}$ bez. O "

$$\underline{M}_O = \underline{OP} \times \underline{F} = \underline{F} \times \underline{PO}$$

$$P = \underline{F} \cdot \underline{v}_P = \underline{M}_O \cdot \underline{\omega}$$

$$O' \in \mu : \underline{M}_{O'} = \underline{OP} \times \underline{F}; \underline{O}'\underline{P} = \underline{O}'\underline{O} + \underline{OP}$$

$$\underline{M}_{O'} \cdot \underline{\omega} = \underline{\omega} [(\underline{O}'\underline{O} + \underline{OP}) \times \underline{F}] = \underbrace{\underline{\omega} \cdot (\underline{O}'\underline{O} \times \underline{F})}_0 + \underbrace{\underline{\omega} \cdot (\underline{OP} \times \underline{F})}_{\underline{\omega} \cdot \underline{M}_O}$$

$$P = \underline{M}_{O'} \cdot \underline{\omega} = \underline{M}_O \cdot \underline{\omega}$$

Merke: $\underline{M}_O = \underline{OP} \times \underline{F} \neq \underline{M}_{O'} = \underline{O}'\underline{P} \times \underline{F}$

$\mu \equiv z$: $P = M_z \cdot \omega = M_{z'} \cdot \omega$, Projektion von M in z-Richtung.

$$M_{z'} = \underline{M}_{O'} \cdot \underline{e}_z; M_z = \underline{M}_O \cdot \underline{e}_z$$

$$M_z = M'_z$$

$$\underbrace{(\underline{OP} \times \underline{F}) \cdot \underline{e}_z}_{\underline{M}_O} \stackrel{?}{=} \underbrace{((\underline{O}'\underline{O} + \underline{OP}) \times \underline{F}) \cdot \underline{e}_z}_{\underline{M}_{O'}} = \underbrace{(\underline{O}'\underline{O} \times \underline{F}) \cdot \underline{e}_z}_0 + (\underline{OP} \times \underline{F}) \cdot \underline{e}_z$$

Mehrere Kräfte am System:

Leistung einer Kräftegruppe

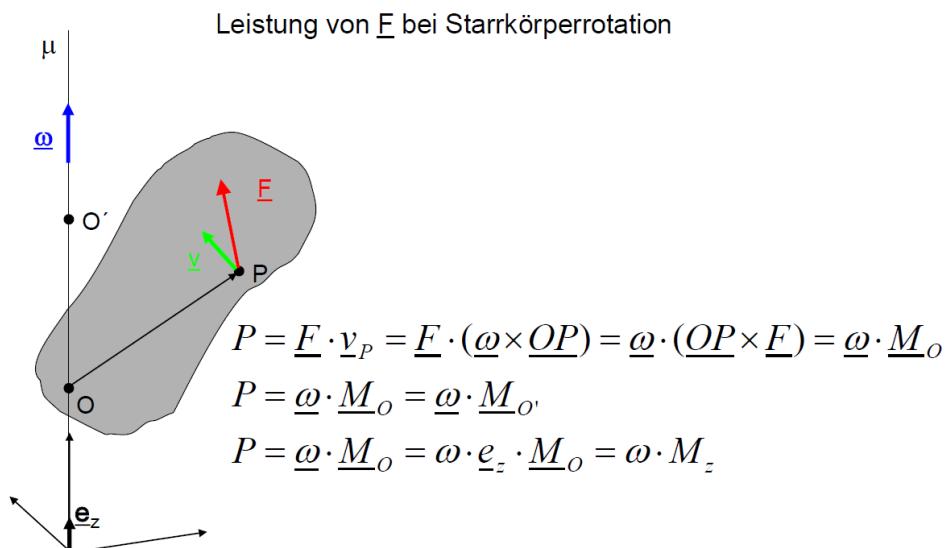
$$P(\underline{F}_1, \underline{F}_2, \dots, \underline{F}_n) = P(\underline{F}_1) + P(\underline{F}_2) + \dots + P(\underline{F}_n)$$

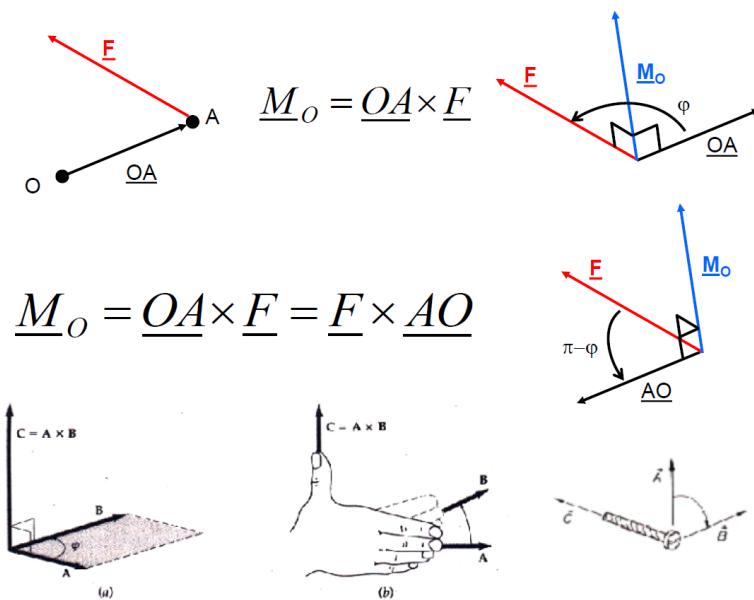
$$\{A_i|\underline{F}_i\} \rightarrow P = \underline{F}_1 \cdot \underline{v}_A + \underline{F}_2 \cdot \underline{v}_A + \dots + \underline{F}_n \cdot \underline{v}_A = \underbrace{(\sum_{i=1}^n \underline{F}_i)}_R \cdot \underline{v}_A = \underline{R} \cdot \underline{v}_A$$

$$\{A_i|\underline{F}_i\} \rightarrow P = \underline{F}_1 \cdot \underline{v}_1 + \underline{F}_2 \cdot \underline{v}_2 + \dots + \underline{F}_n \cdot \underline{v}_n$$

System = starre Körper \Rightarrow Einfacher!

$$P = \underline{R} \cdot \underline{v}_B + \underline{M}_B \cdot \underline{\omega}$$





Leistung berechnen:

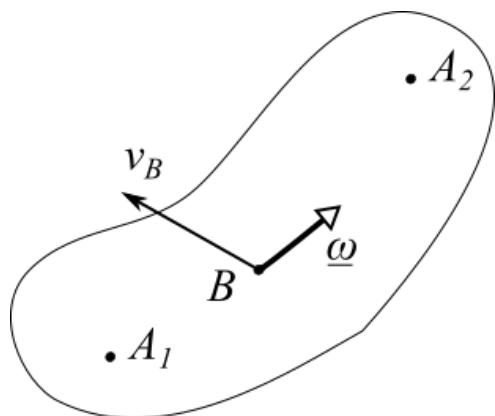
- starrer Körper K ,
- Kinemate in B : $\{\underline{v}_B, \underline{\omega}\}$
- Kräftegruppe $\{A_i, \underline{F}_i\}$

$$\rightarrow P = \underline{R} \cdot \underline{v}_B + \underline{M}_B \cdot \underline{\omega}$$

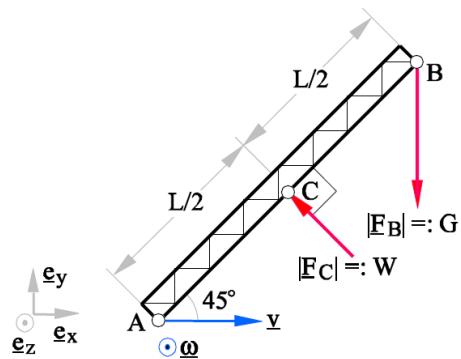
$\underline{R} = \sum_i \underline{F}_i$: Resultierende der Kräftegruppe

$\underline{M}_B = \sum_i (BA_i \times \underline{F}_i)$: Moment der Kräftegruppe bez. B

Beispiel: 2 Kräfte in B



Figur 5.6



$$P = \sum_i \underline{F}_i \cdot \underline{v}_i = \underline{F}_B \cdot \underline{v}_B + \underline{F}_C \cdot \underline{v}_C$$

$$P = \underline{R} \cdot \underline{v}_A + \underline{M}_A \cdot \underline{\omega} = (\underline{F}_B + \underline{F}_C) \cdot \underline{v}_A + (\underline{AB} \times \underline{F}_B + \underline{AC} \times \underline{F}_C) \cdot \underline{\omega}$$

6 Statik

Kräfte an ruhenden Systemen
 $\underbrace{v=0}_{\forall \text{ Punkte!}}$

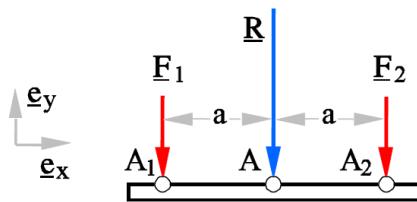
Dennoch sprechen wir hauptsächlich über "Leistung": Ruhend \leftrightarrow Kräfte im "Gleichgewicht"

Aussage zu Gleichgewicht \leftrightarrow Aussage über Leistung

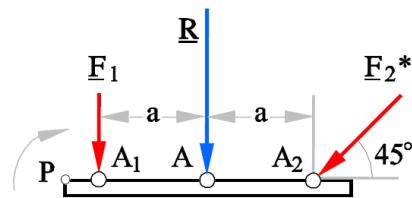
6.1 Statische Äquivalenz v. Kräftegruppen

$$P\{G\} = P\{G^*\} \forall \text{ Starrkörperbewegungen}$$

G, G^* : Gruppen v. Kräften am (starren) Körper K



Figur 6.1: statisch äquivalente Gruppe



Figur 6.2: statisch NICHT äquivalente Gruppe

THEOREM zur statischen Äquivalenz

Zwei Kräftegruppen $\{G\}$ und $\{G^*\}$ am Körper K sind dann und nur dann statisch äquivalent, wenn ihre Resultierenden und ihre Gesamtmomente bezüglich eines beliebigen Bezugspunktes gleich sind.

Beweis:

$$P(G) = \underline{v}_o \cdot \underline{R} + \underline{\omega} \cdot \underline{M}_o$$

$$P(G^*) = \underline{v}_o \cdot \underline{R}^* + \underline{\omega} \cdot \underline{M}_o^*$$

$$P(G) - P(G^*) = \underline{v}_o \cdot \underbrace{(\underline{R} - \underline{R}^*)}_{0} + \underline{\omega} \cdot \underbrace{(\underline{M}_o - \underline{M}_o^*)}_{0} \stackrel{!}{=} 0 \quad \forall \underline{v}_o, \underline{\omega}$$

$$\underline{R} = \underline{R}^*; \quad \underline{M}_o = \underline{M}_o^*$$

6.2 Resultierende einer Kräftegruppe

F_1, \dots, F_n : n-Einzelkräfte \leftrightarrow Kräftegruppe

$$\underline{R} = \sum_{i=1}^n \underline{F}_i = R_x \underline{e}_x + R_y \underline{e}_y + R_z \underline{e}_z \quad R_x = \sum_{i=1}^n F_{xi}; R_y = \sum_{i=1}^n F_{yi}; R_z = \sum_{i=1}^n F_{zi}$$

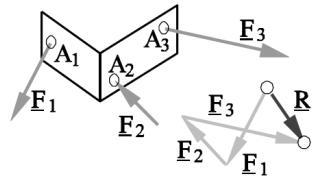


Fig. 6.3: Resultierende von Einzelkräften

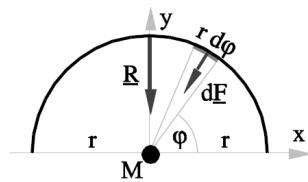


Fig. 6.4: Resultierende von Kräfteverteilung

Beispiel:

6.3 Moment einer Kraft bezüglich eines Punktes

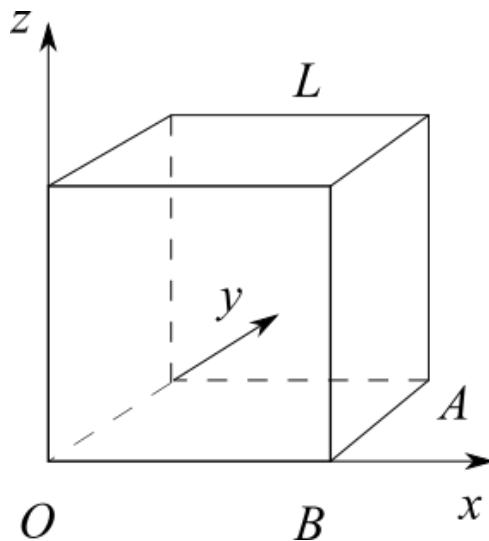
$$\underline{M}_o = \underline{OA} \times \underline{F} = \underline{F} \times \underline{AO}$$

$$|\underline{M}_o| = |\underline{F}| \cdot |\underline{AO}| \cdot \sin \alpha \times \underline{AO}$$

$$\underline{M}_o : |\underline{M}_o| = |\underline{F}| \cdot a, \quad \underline{M}_o \perp \underline{AO}, W \quad \rightarrow \quad \text{"Verschiebungssatz"}$$

Verschiebungssatz

Das Moment einer Kraft bezüglich eines beliebigen Punktes O bleibt gleich, wenn bei gleich bleibendem Vektoranteil der Angriffspunkt der Kraft längs ihrer Wirkungslinie verschoben wird.



6.4 Moment einer Kraft bezüglich einer Achse

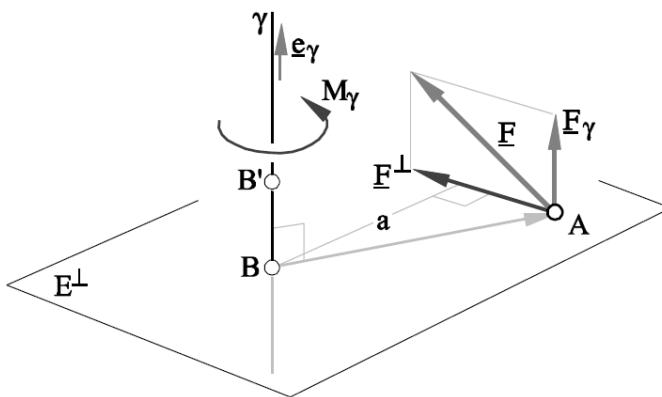


Fig. 6.6: Moment einer Kraft bezüglich der Achse γ

KOROLLAR 1: Das Moment einer Kraft $\{A \mid \underline{F} \neq \underline{0}\}$ bezüglich einer Achse γ verschwindet dann und nur dann, wenn die Wirkungslinie die Achse γ schneidet oder zu ihr parallel ist.

KOROLLAR 2: Um das Moment einer Kraft $\{A \mid \underline{F} \neq \underline{0}\}$ bezüglich einer Achse γ zu erhalten, zerlege man \underline{F} vorerst in zwei Komponenten \underline{F}_γ und \underline{F}^\perp und multipliziere den Betrag der zu γ normalen Komponente \underline{F}^\perp mit dem Abstand a zwischen der Achse und der Wirkungslinie von \underline{F}^\perp in A. Es gilt also

$$|M_\gamma| = a |\underline{F}^\perp|. \quad (6.11)$$

Das Vorzeichen ergibt sich aus dem Drehsinn von \underline{F}^\perp bezüglich des Einheitsvektors e_γ auf der Achse.

6.5 Moment einer Kräftegruppe bezüglich eines Punktes

$$\left. \begin{array}{l} O: \underline{M}_o = \sum_{i=1}^n \underline{OA}_i \times \underline{F}_i \\ P: \underline{M}_p = \sum_{i=1}^n \underline{PA}_i \times \underline{F}_i \end{array} \right\} \quad \underline{M}_o \neq \underline{M}_p \text{ Punktgebundener Vektor}$$

$$\underline{M}_o \overset{?}{\leftrightarrow} \underline{M}_p; \underline{PA}_i = \underline{PO} + \underline{OA}_i$$

$$\underline{M}_p = \sum_{i=1}^n (\underline{PO} + \underline{OA}_i) \times \underline{F}_i = \underline{PO} \times \underline{F}_1 + \underline{PO} \times \underline{F}_2 + \dots + \underline{OA}_1 \times \underline{F}_1 + \underline{OA}_2 \times \underline{F}_2 + \dots$$

$$= \underline{PO} \times (\underbrace{\underline{F}_1 + \dots + \underline{F}_n}_{R}) + \sum_{i=1}^n \underbrace{\underline{OA}_i \times \underline{F}_i}_{\underline{M}_o}$$

$$\underline{M}_p = \underline{PO} \times \underline{R} + \underline{M}_o = \underline{M}_o + \underline{PO} \times \underline{R} = \underline{M}_o + \underline{R} \times \underline{OP}$$

6.6 Dyname

Für eine Kräftegruppe G

\underline{R} : Resultierende, \underline{M}_P : Moment der Kräftegruppe bezüglich P

$\{\underline{R}, \underline{M}_P\}$: Dyname in P

→ charakterisiert die Kräftegruppe:

Leistung von G bei Starrkörperbewegung:

$$P = \underline{v}_o \cdot \underline{R} + \underline{\omega} \cdot \underline{M}_o$$

$$\begin{aligned} P' &= \underline{v}_P \cdot \underline{R} + \underline{\omega} \cdot \underline{M}_P = (\underline{v}_o + \underline{\omega} \times \underline{OP}) \cdot \underline{R} + \underline{\omega} \cdot (\underline{M}_o + \underline{R} \times \underline{OP}) \\ &= \underline{v}_o \cdot \underline{R} + \underline{\omega} \cdot \underline{M}_o + \underline{\omega} \cdot (\underline{OP} \times \underline{R}) - \underline{\omega} \cdot (\underline{OP} \times \underline{R}) = P \end{aligned}$$

6.7 Spezielle Kräftegruppen

$G \leftrightarrow G^*$ statisch äquivalent?

$$\underline{R} = \underline{R}^*; \quad \underline{M}_P = \underline{M}_P^*$$

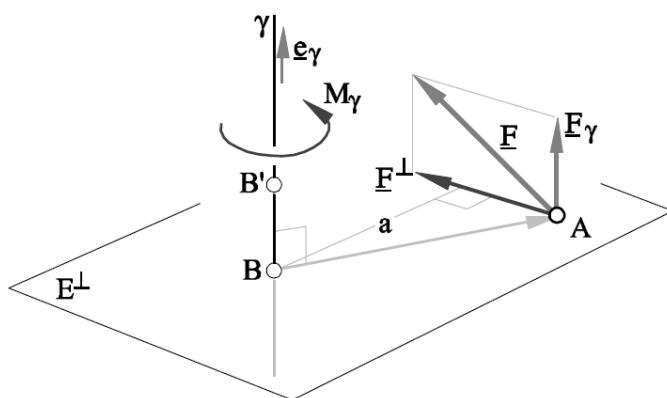


Fig. 6.6: Moment einer Kraft bezüglich der Achse γ

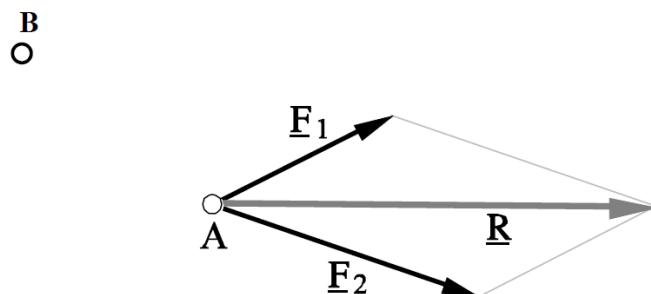


Fig. 6.11: 2 Kräfte mit gemeinsamem Angriffspunkt

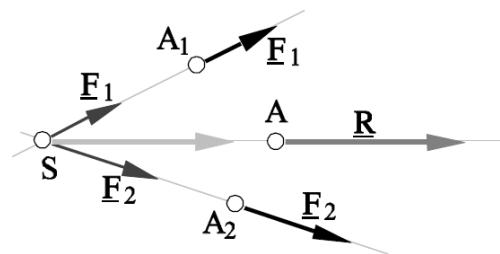


Fig. 6.12: 2 nichtparallele Kräfte in der gleichen Ebene

2 ebene Kräfte auf Einzelkraft reduzierbar, falls nicht parallel

Beispiel: 2 parallele Kräfte mit $\underline{R} \neq 0$

Beispiel: 2 parallele Kräfte mit $\underline{F}_1 = -\underline{F}_2$

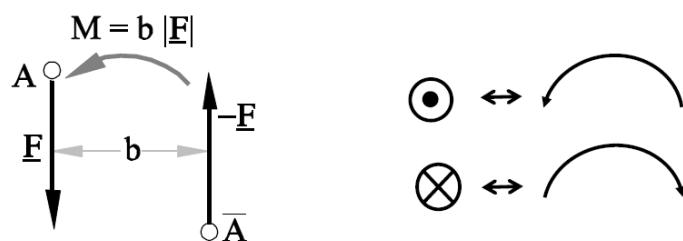


Fig. 6.15: Kräftepaar

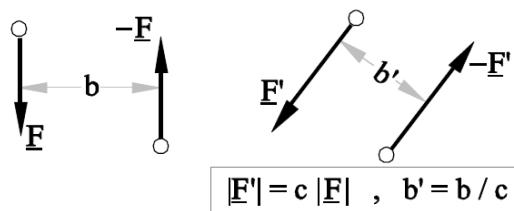


Fig. 6.16: statisch äquivalente Kräftepaare

6.8 Kräftegruppe im Gleichgewicht

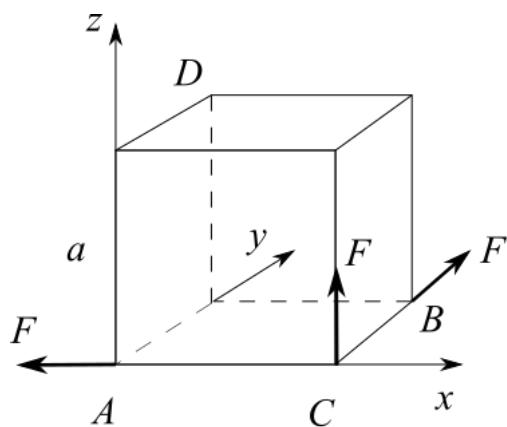
Falls: $\underline{R} = \underline{0}$ und $\underline{M}_P = \underline{0}$

$\underline{R} = \underline{0}$: Komponentenbedingungen

$\underline{M}_P = \underline{0}$: Momentenbedingungen

In 3D : 6 Gleichungen

Beispiel:



Beispiel:

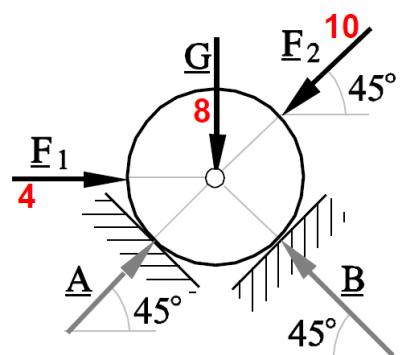


Fig. 6.23: zu Aufgabe 1

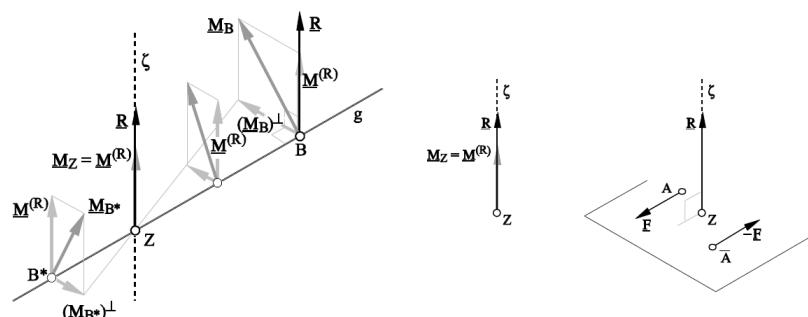
6.9 Reduktion einer Kräftegruppe {G}

Dyname in B : $\underline{R}, \underline{M}_B$ Einfachste statisch äquivalente Kräftegruppe: G^*

→ in B : Einzelkraft in $B: \underline{R}$, Kräftepaar \underline{M}_B

→ in A : Einzelkraft in $A: \underline{R}$, Kräftepaar \underline{M}_A

- \underline{R} : 1. Invariante der Kräftegruppe
- $\underline{M}_A = \underline{M}_B + \underline{R} \times \underline{BA}$, vom Punkt abhängig
- $\underline{R} \cdot \underline{M}_A = \underline{R} \cdot \underline{M}_B$: 2. Invariante
- Es gilt auch: $\underline{M}_A \cdot \underline{BA} = \underline{M}_B \cdot \underline{BA} \rightarrow$ Zentralachse ζ



Reduktionssatz.

Jede Kräftegruppe mit $\underline{R} \neq \underline{0}$ lässt sich statisch äquivalent auf eine resultierende Kraft $\{Z | \underline{R}\}$ mit Angriffspunkt Z auf der Zentralachse ζ der Kräftegruppe und ein Kräftepaar in einer Ebene senkrecht zur Zentralachse reduzieren. Das Moment dieses Kräftepaars muss gleich der 2. Invariante $\underline{M}^{(R)}$ der Kräftegruppe sein, die Zentralachse fällt mit der Wirkungslinie der resultierenden Kraft $\{Z | \underline{R}\}$ zusammen.

Dyname und Kinemate

$$\{\underline{R}, \underline{M}_B\}$$

$$\{\underline{\omega}, \underline{v}_B\}$$

$$\underline{R}$$

1. Invariante

$$\underline{\omega}$$

$$\underline{M}_B$$

Punktgebundener Vektor

$$\underline{v}_B$$

$$\underline{M}_A = \underline{M}_B + \underline{R} \times \underline{BA}$$

$$\underline{v}_A = \underline{v}_B + \underline{\omega} \times \underline{BA}$$

$$\{\underline{R}, \underline{M}^{(R)}\}$$

auf ζ , Zentralachse

$$\{\underline{\omega}, \underline{v}_{\omega}\}$$

2. Invariante

$$\boxed{P = \underline{R} \cdot \underline{v}_B + \underline{M}_B \cdot \underline{\omega}}$$

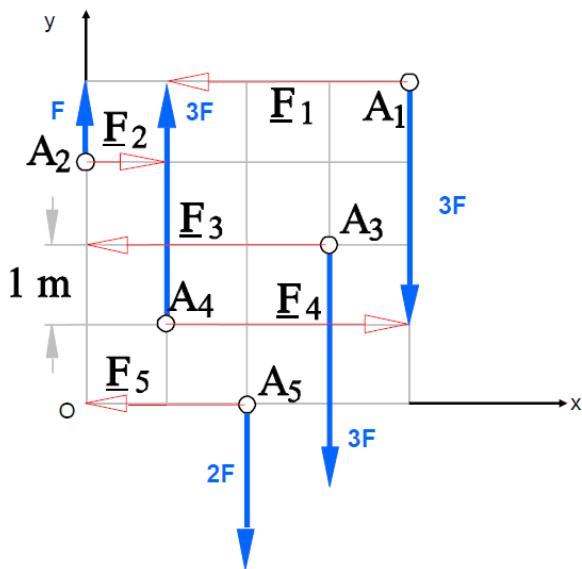
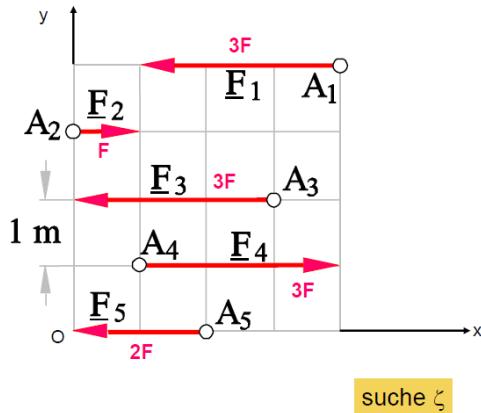
$$\boxed{\underline{M}_B = \underline{0}, \quad \underline{R} = \underline{0}}$$

Für einfachste Dyname für G : $\underline{R}, \underline{M}^R$ auf ζ

- Falls $\underline{R} = 0$
 - → Konstruktion von ζ versagt
 - → G als Kräftepaar, $\underline{M}_0 = \underline{M}_P$
- Falls $\underline{M}^R = 0 \rightarrow$ Reduktion auf Einzelkraft möglich!
 1. Ebene Kräftegruppe: $\rightarrow \underline{M}_P \perp \underline{R} \forall P$
 2. Parallele (verteilte) Kräfte $\rightarrow \underline{M}_P \perp \underline{R} \forall P$

Beispiel : Quadratischer Rahmen mit parallelen Kräften

Figur 7.7, Aufgabe 1: quadratischer Rahmen mit parallelen Kräften



7 Verteilte Kräfte

G aus n parallelen Kräften im Raum, $F_i e_F ; R \neq 0$

$\rightarrow M_R = 0 \rightarrow$ Reduktion auf Einzelkraft möglich ! $\rightarrow R$ auf ζ

Kräftemittelpunkt S (auf ζ): $r_S = \frac{\sum_{i=1}^n F_i r_i}{\sum_{i=1}^n F_i}$

r_i : Ortsvektoren der Angriffspunkte der Kräfte

Für parallele Flächen- und Volumenverteilte Kräfte \rightarrow analog den Kräftemittelpunkt bestimmen

$\sum \rightarrow \int$

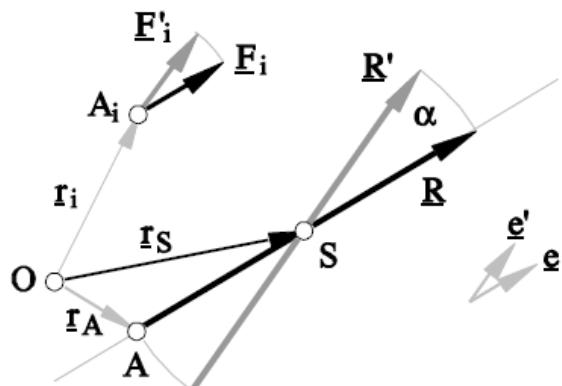


Fig. 7.1: Kräftemittelpunkt

$$\underline{r}_S = \frac{\sum_{i=1}^n F_i \underline{r}_i}{\sum_{i=1}^n F_i}$$

Flächenverteilte Kräfte: $s(\underline{r}) \cdot e$ [N/m²] Volumenverteilte Kräfte: $f(\underline{r}) \cdot e$ [N/m³]

$$\underline{r}_s = \frac{\iint_A \underline{r} \cdot s(\underline{r}) dA}{\iint_A s(\underline{r}) dA}$$

$$\underline{r}_s = \frac{\iiint_V \underline{r} \cdot f(\underline{r}) dV}{\iiint_V f(\underline{r}) dV}$$

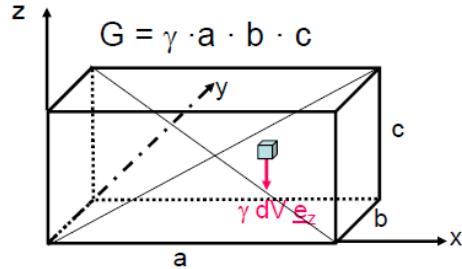


Gravitationskraft, $f(\underline{r})$: spezifisches Gewicht, γ (konstant, homogener Körper)

Schwerpunkt $\underline{r}_s = \frac{1}{G} \cdot \gamma \cdot \iiint_V \underline{r} dV$

↑
Gewicht

$$\underline{r}_s = \frac{1}{G} \cdot \gamma \cdot \iiint_V \underline{r} dV$$



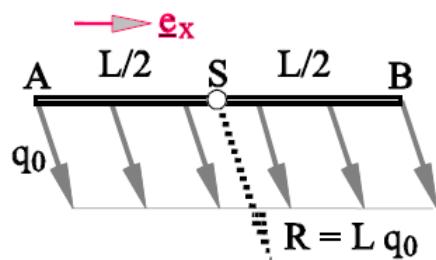
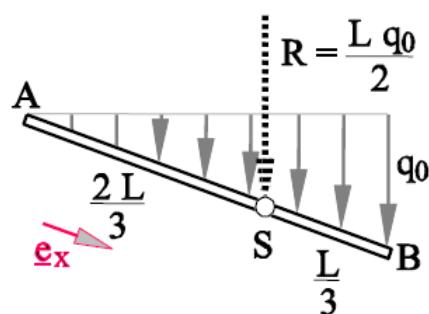
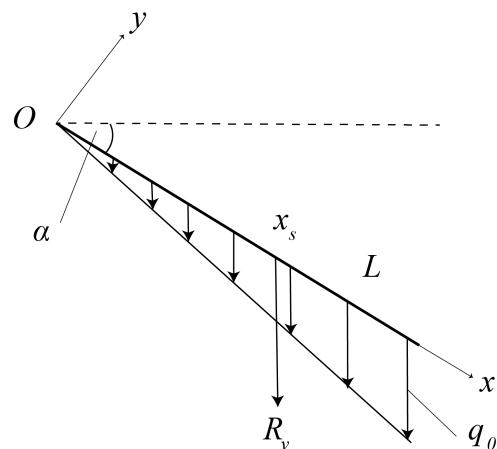
$$\underline{r}_s = \frac{1}{\gamma \cdot a \cdot b \cdot c} \cdot \gamma \cdot \int_0^c \int_0^b \int_0^a \underline{r} dxdydz$$

$$\begin{pmatrix} x_s \\ y_s \\ z_s \end{pmatrix} = \frac{1}{a \cdot b \cdot c} \cdot \int_0^c \int_0^b \int_0^a \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \cdot dxdydz = \frac{1}{a \cdot b \cdot c} \cdot \begin{pmatrix} \frac{a^2}{2} bc \\ \frac{b^2}{2} ac \\ \frac{c^2}{2} ba \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{a}{2} \\ \frac{b}{2} \\ \frac{c}{2} \end{pmatrix}$$

$$\int_0^c \int_0^b \int_0^a x \cdot dxdydz = \int_0^c \int_0^b \frac{a^2}{2} dy dz = \int_0^c \frac{a^2}{2} bdz = \frac{a^2}{2} bc$$

7.1 Kräftemittelpunkt der parallelen linienverteilten Kraft

Beispiel: Dreiecksverteilung



Figur 7.3

8 Ruhe und Gleichgewicht

Ruhe: $\underline{v}_M = 0 \forall$ Punkte $M \in$ Körper S

Ruhelage: Ruhe für Körper S für gegebene Kräftegruppe {G} bei $t = t_0 \rightarrow$ Ruhe $\forall t$

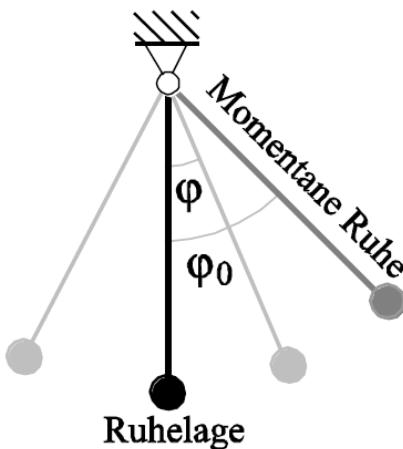


Fig. 8.1: Pendel, Ruhelage

Bindungen: Einschränkungen der Bewegungsfreiheit

- innere Bindungen: zwischen Bestandteile des Systems (innere Bindungskräfte)
- äussere Bindungen: ab Randpunkten des Systems (äußere Bindungskräfte)

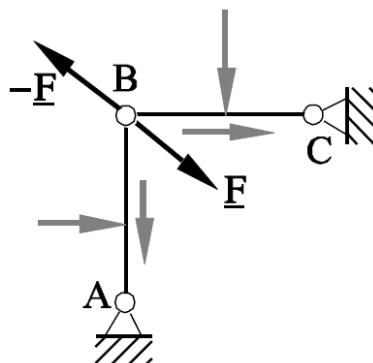
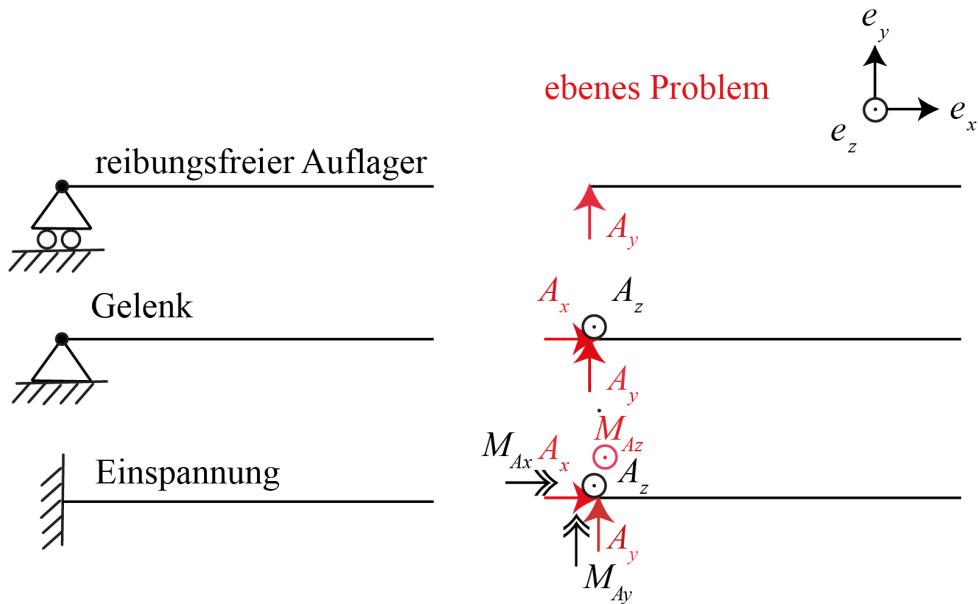


Fig. 8.2: innere, äussere Bindungen

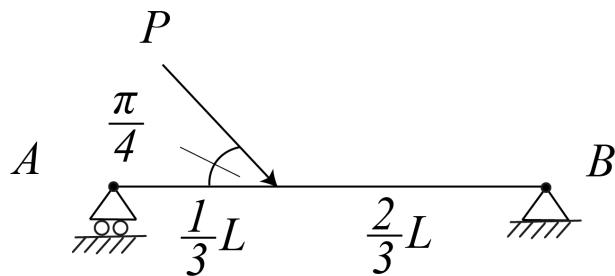
Lagerbindungen und Lagerkräfte: Welche Bewegungsmöglichkeiten sind verboten?

- $v \leftrightarrow F$ (Verbotene translatorische Bewegungen durch Bindungskräfte dargestellt)
- $\omega \leftrightarrow M$ (Verbotene rotatorische Bewegungen durch Momente dargestellt)

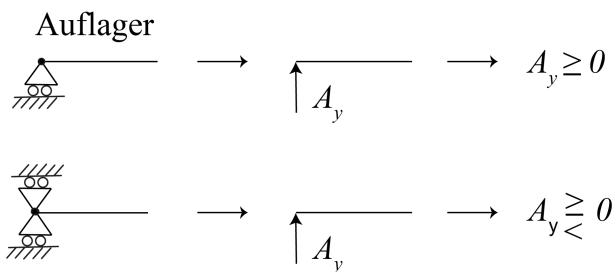
Beispiel: Bindungen am Stabträger



Beispiel: Ebenes Problem

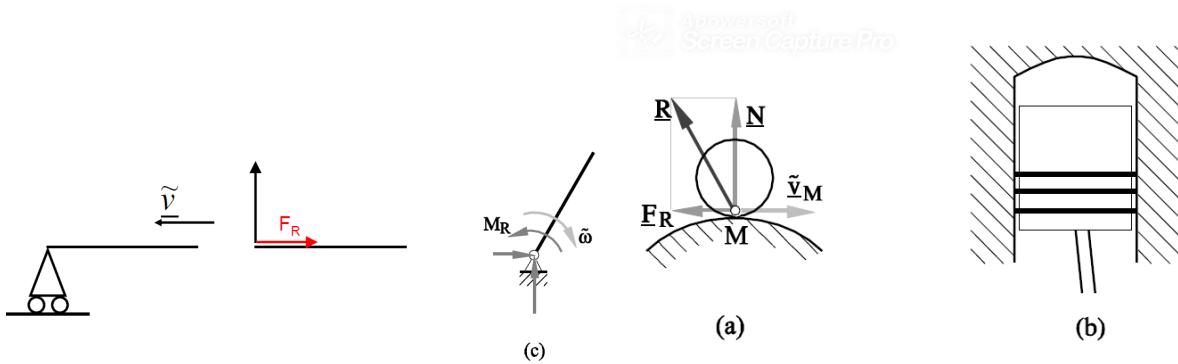


Einseitige und vollständige Bindungen: Können durch Bewegung aufgelöst werden



8.1 Reibungskräfte und Momente

An Bindungen und in Richtung von der zulässigen Bewegung



Reibungskraft und Moment

Fig. 8.6: einseitige, vollständige Bindung

8.2 Virtueller Bewegungszustand

Hypothetischer Bewegungszustand des Systems \tilde{v}_i

Zulässiger virtueller Bewegungszustand: Virtueller Bewegungszustand, welcher mit inneren und äusseren Bindungen verträglich ist → einseitige Bindungen werden nicht gelöst!

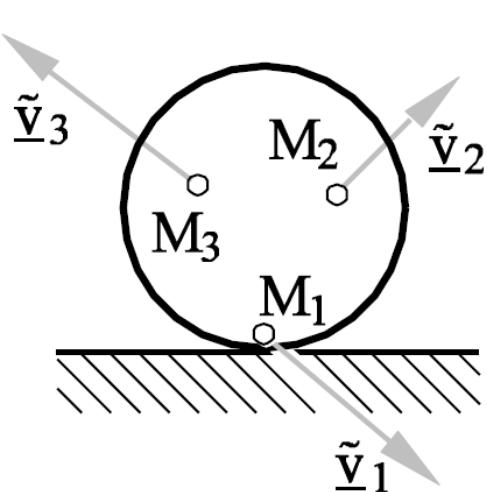


Fig. 8.4: virtueller Bewegungszustand

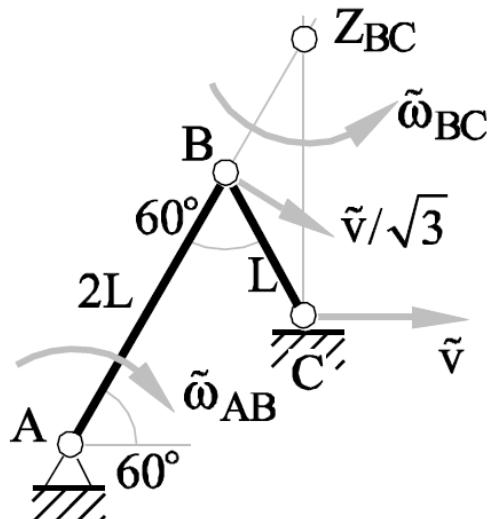
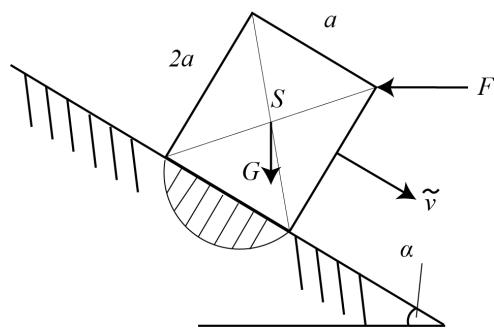


Fig. 8.5: zulässiger Bewegungszustand

Virtuelle Leistung: $P = \sum_{i=1}^n \underline{F}_i \cdot \tilde{\underline{v}}_i$

Beispiel: Quader auf schiefer Unterlage (reibungsfrei)



POSTULAT: Ein beliebig abgegrenztes materielles System befindet sich dann und nur dann in einer Ruhelage, wenn in dieser Lage die virtuelle Gesamtleistung aller inneren und äußereren Kräfte, einschließlich der inneren und äußereren Bindungskräfte, bei jedem virtuellen Bewegungszustand des Systems null ist (und wenn die Eigenschaften des Systems und seiner Lagerung diese Kräfte zulassen).

THEOREM:

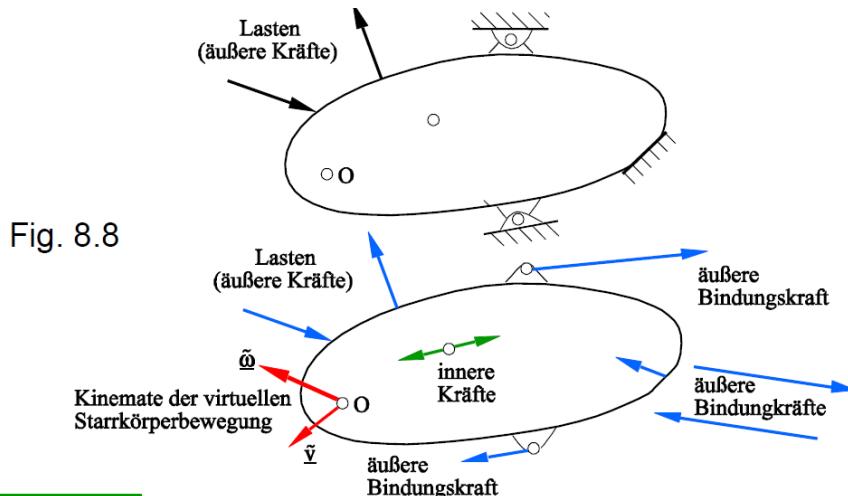
Alle äußeren Kräfte,
einschließlich der äußeren Bindungskräfte,
welche auf ein materielles System in einer **Ruhelage** wirken,
müssen *notwendigerweise im Gleichgewicht* sein.

$$\underline{\mathbf{R}}^{(a)} = \underline{\mathbf{0}} \quad \underline{\mathbf{M}}_O^{(a)} = \underline{\mathbf{0}}$$

8.3 Hauptsatz der Statik

Ruhelage $\rightarrow \underline{R} = \underline{0}, \underline{M}_O = \underline{0}$

Beweis:

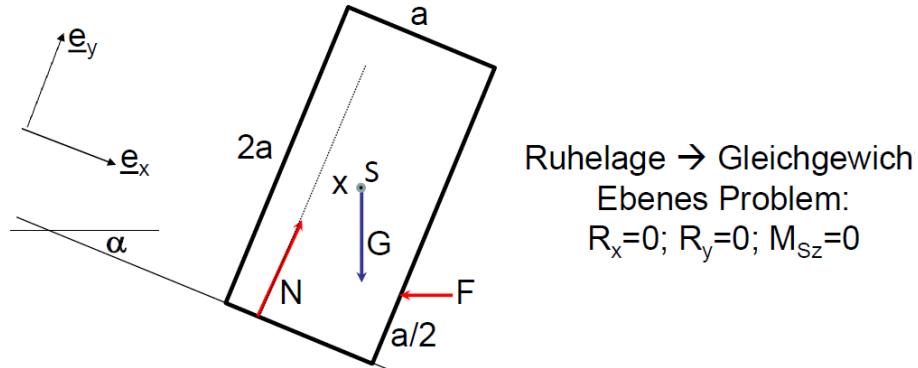


$$\boxed{\begin{aligned}\underline{R}^{(i)} &= \underline{0} \\ \underline{M}_O^{(i)} &= \underline{0}\end{aligned}}$$

$$P = \underline{v}_O \cdot (\underline{R}^{(a)} + \underline{R}^{(i)}) + \underline{\omega} \cdot (\underline{M}_O^{(a)} + \underline{M}_O^{(i)}) = 0 \quad (\text{PdvL})$$

$$P = \underline{v}_O \cdot \underline{R}^{(a)} + \underline{\omega} \cdot \underline{M}_O^{(a)} = 0 \quad \forall \underline{v}_O, \underline{\omega}$$

$$\hookrightarrow \underline{R}^{(a)} = \underline{0} \quad \underline{M}_O^{(a)} = \underline{0}$$



$$G \sin \alpha - F \cos \alpha = 0$$

$$-G \cos \alpha - F \sin \alpha + N = 0$$

$$-Nx - F \cos \alpha \frac{a}{2} - F \sin \alpha \frac{a}{2} = 0$$

$$F = G \tan \alpha$$

$$N = G / \cos \alpha$$

$$x = f(\alpha)$$

Ruhe möglich falls
 $-a/2 < x < a/2 \rightarrow \text{«standfest»}, \text{ sonst «kippen»}$

9 Standfestigkeit

Standfest: Angriffspunkt der resultierenden Normalkraft \underline{N} innerhalb der Standfläche

Für einen starren Körper auf einer ebenen Unterlage: Standfest = Körper kippt nicht

Berührungsfläche vs Standfläche

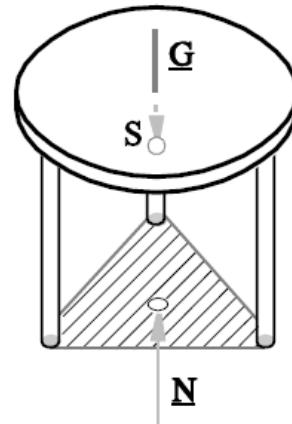
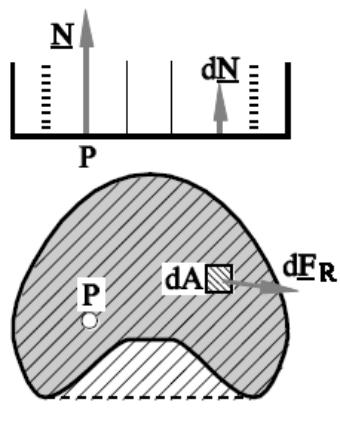
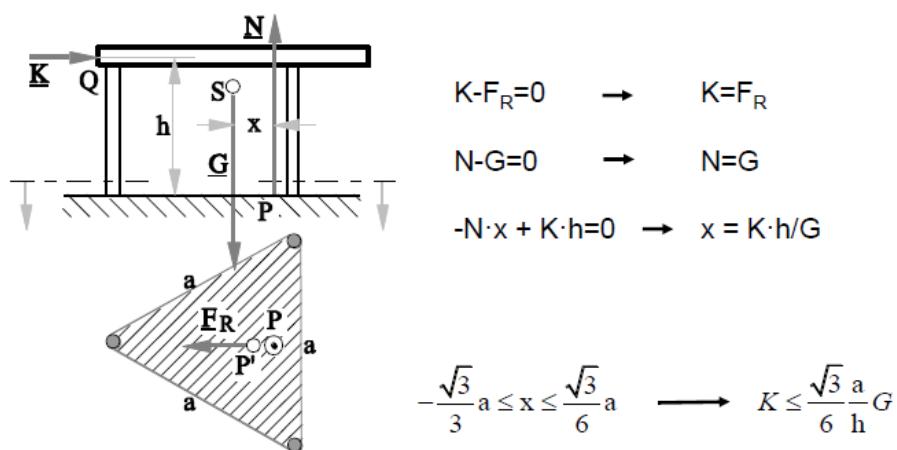


Fig. 9.1:
Berührungsfläche,
Standfläche

Fig. 9.2:
3-beiniger Tisch

Standfläche: Kleinste konvexe Fläche, die die Berührungsfläche einschliesst



9.1 Lagerbindungen und Lagerkräfte

Welche virtuelle Bewegungszustände sind unzulässig (Siehe Kap. 8)?

- Für unzulässige \underline{v} entsprechende \underline{F}
- Für unzulässige $\underline{\omega}$ entsprechende \underline{M}

Oft einfacher: Welche virtuellen Bewegungszustände sind zulässig?

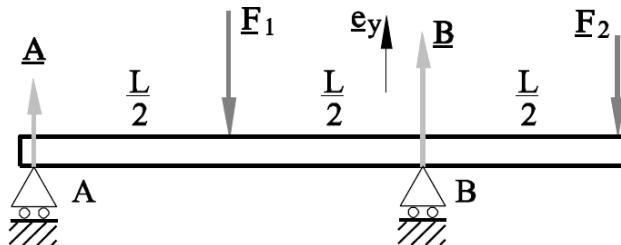


Fig. 9.4: reibungsfreier Auflager

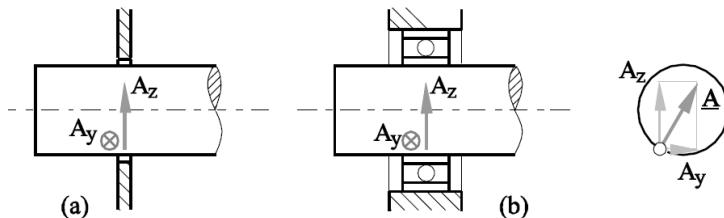


Fig. 9.5: kurze Querlager

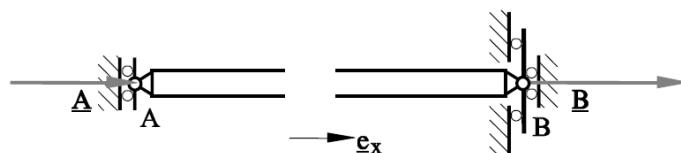


Fig. 9.7: Längslager

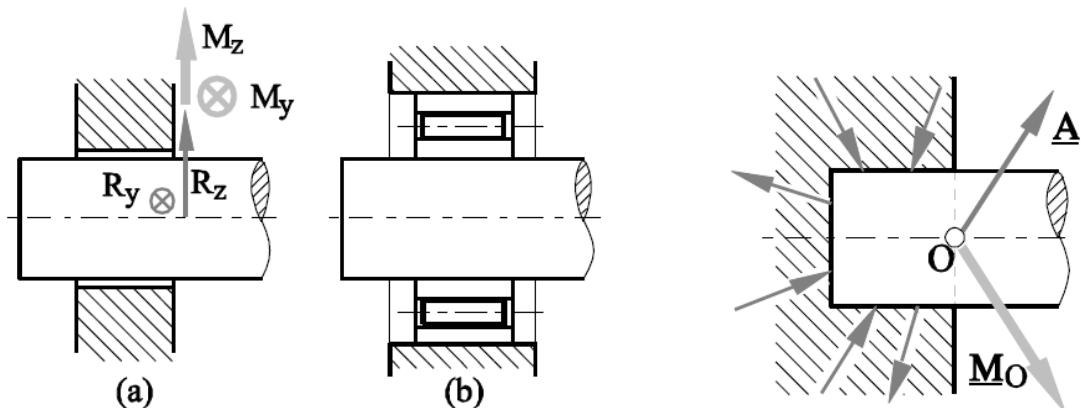


Fig. 9.8: lange Querlager

Fig. 9.9: Einspannung

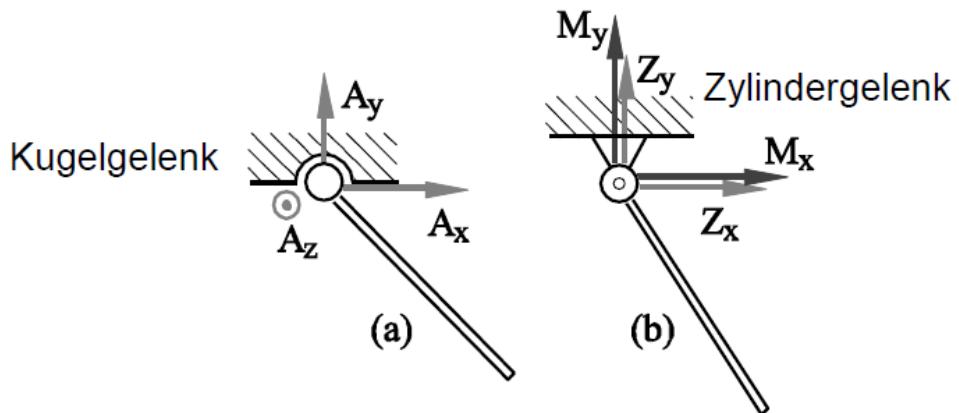


Fig. 9.12: Gelenke

Vorgehen zur Bestimmung der Lagerkräfte

- 1. Systemabgrenzung
- 2. Kräfte einführen
- 3. Basis einführen
- 4. Gleichungen formulieren (max 3 für ebenes Problem, max 6 für 3D)
- 5. Problem lösbar? (statisch unbestimmt?)
- 6. Eventuell: Systemtrennung
- 7. Gleichungen auflösen
- 8. Diskussion

10 Statisch unbestimmte/überbestimmte Systeme

n : Anzahl unbekannte Lagerkräfte bzw. -momente (Komponenten)

m : Anzahl Gleichungen (aus GGB)

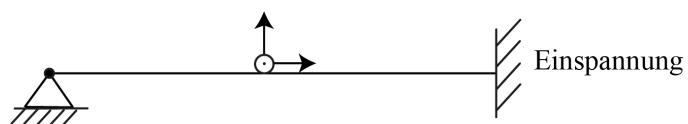
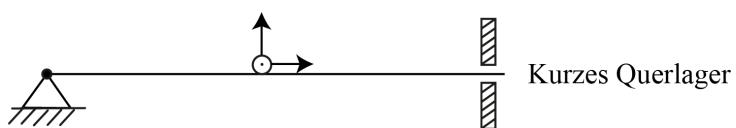
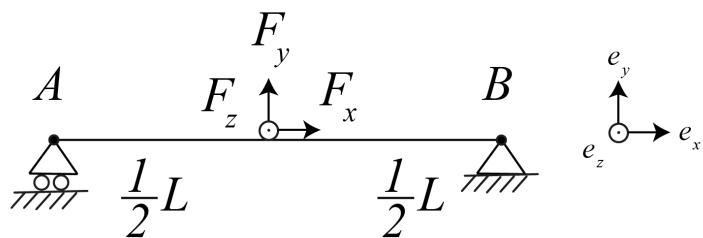
$m = n$ System statisch bestimmt

$m < n$ System ($n-m$)-fach unbestimmt

$m > n$ System ($n-m$)-fach überbestimmt

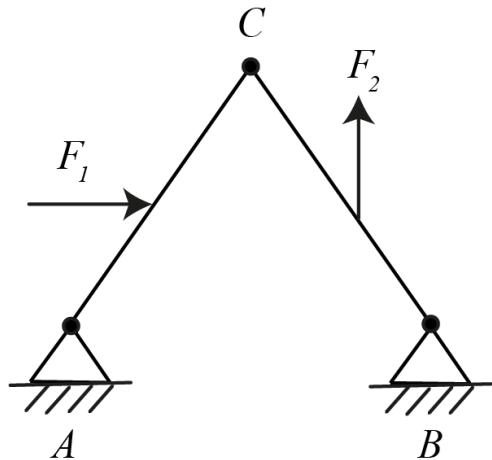
→ Beispiel ist statisch unbestimmt

Beispiel:

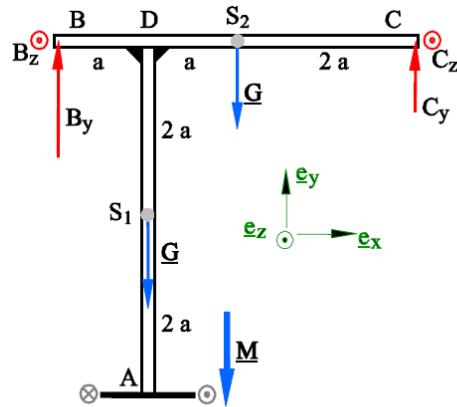
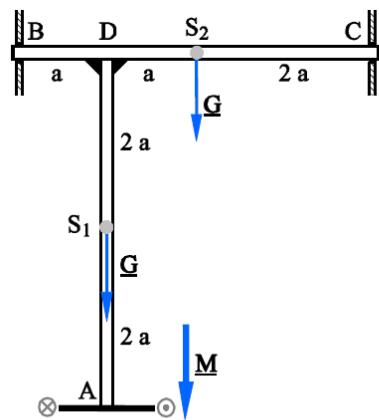


Statisch bestimmt? → Falls System aus mehreren Körpern: Systemtrennung

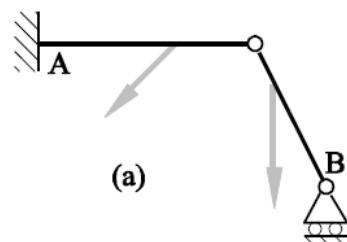
Beispiel: Dreigelenkbogen



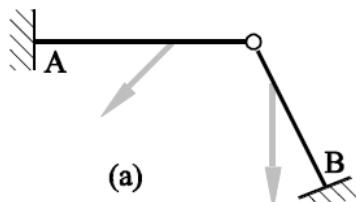
Beispiel:



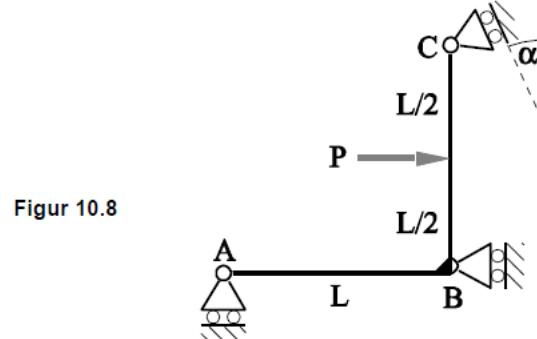
4 Unbekannte, 4 Gleichungen



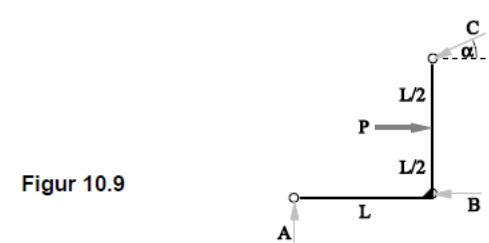
Figur 10.6



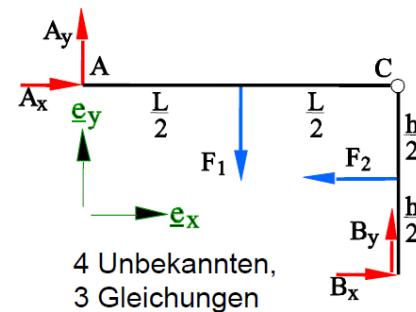
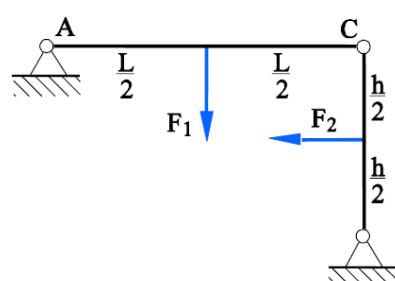
Figur 10.7



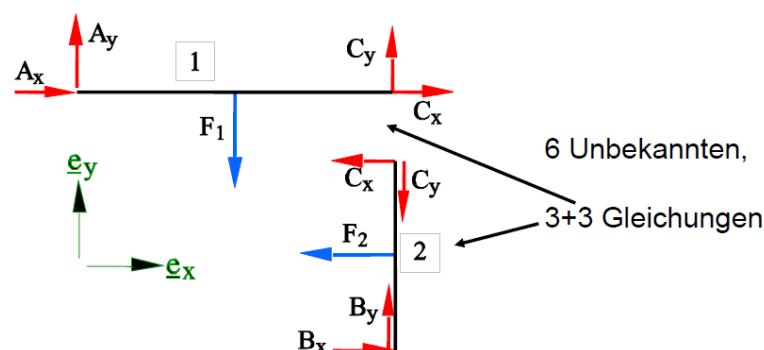
Figur 10.8



Figur 10.9

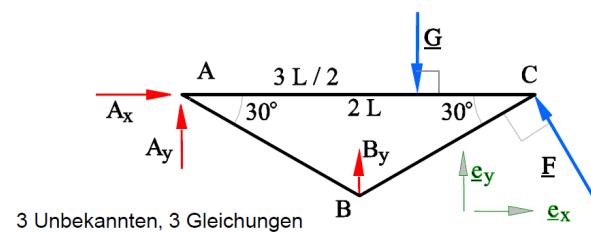
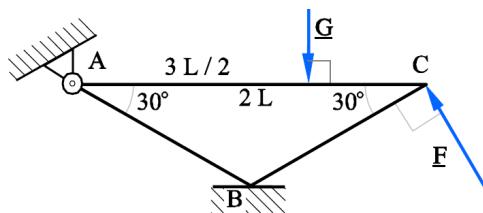


4 Unbekannte,
3 Gleichungen

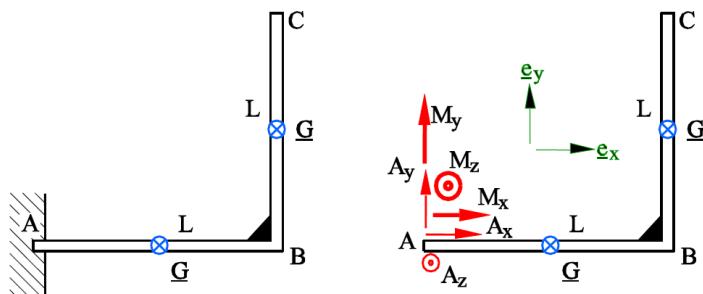


6 Unbekannte,
3+3 Gleichungen

Beispiel:

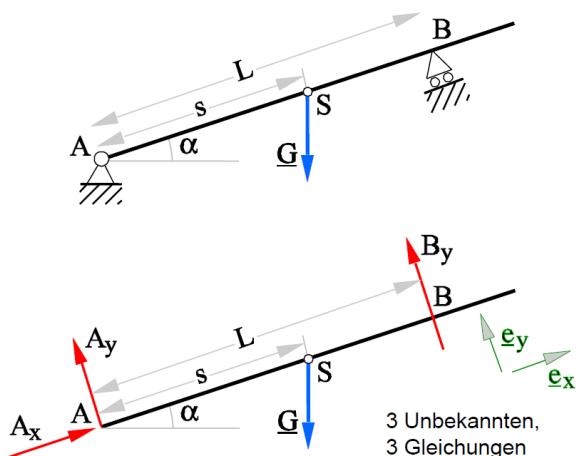


Beispiel:

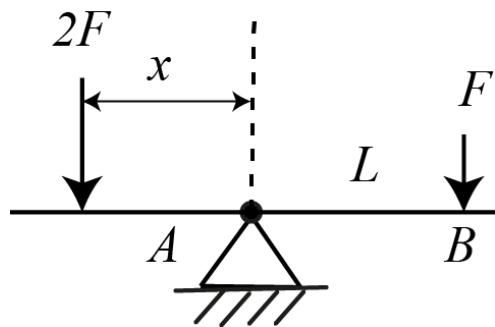


6 Unbekannten, 6 Gleichungen

Beispiel:

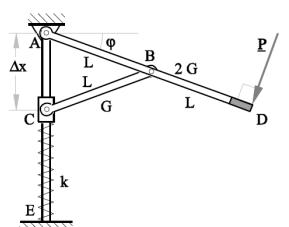


Mechanismen: Bedingungen für Lasten und für die Ruhelage

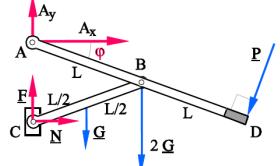


Beispiele: Figur 10.1-10.4

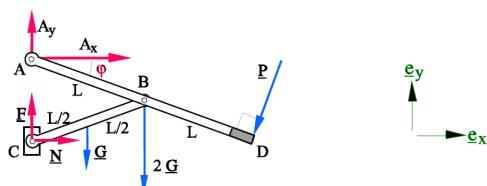
Gesucht: $\phi \leftrightarrow P$



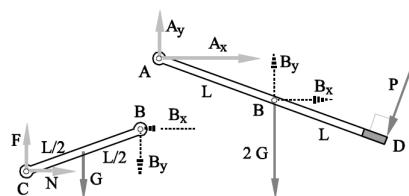
Figur 10.1



4 Unbekannte,
3 Gleichungen



Figur 10.3



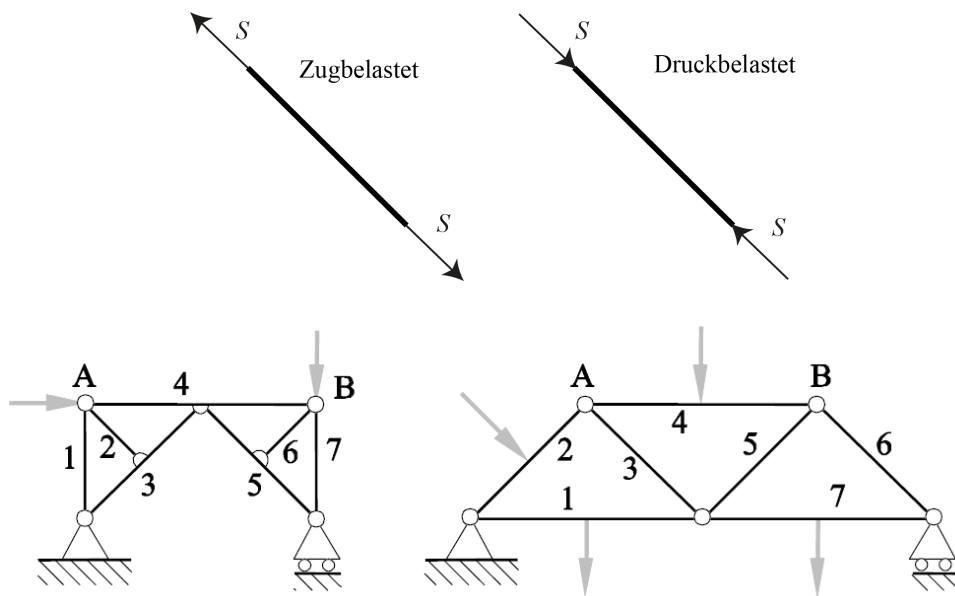
6 Unbekannte,
6 Gleichungen

11 Ebene Fachwerke

Ideale Fachwerke:

- Eigenschaften:
- Knoten als reibungsfreie Gelenke
 - Stäbe gewichtslos
 - Knoten an Stabenden
 - Lasten in Knoten angreifend

→ wichtige Konsequenz: Stäbe sind "Pendelstützen"- D.h. sie übertragen nur Kräfte in Stabrichtung.



Figur 11.4

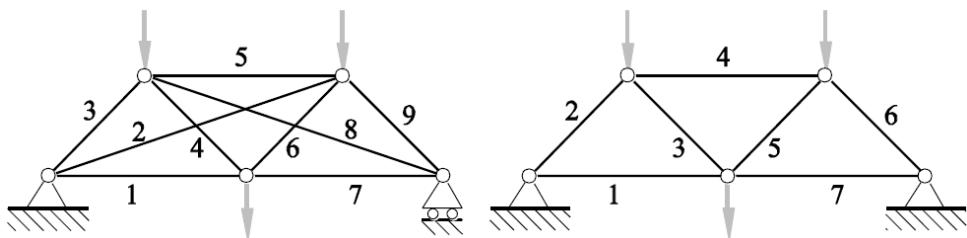
11.1 Statisch bestimmte Fachwerke

Falls mittels GGB alle Stabkräfte und Lagerkräfte bestimmt werden können, dann ist das Fachwerk statisch bestimmt

"unbestimmt" : Zu viele Stäbe und/oder zu viele Bindungskräfte

Für ideale und statisch bestimmte ebene Fachwerke sind Lagerkräfte und Stabkräfte bestimmbar mit folgenden 3 Methoden:

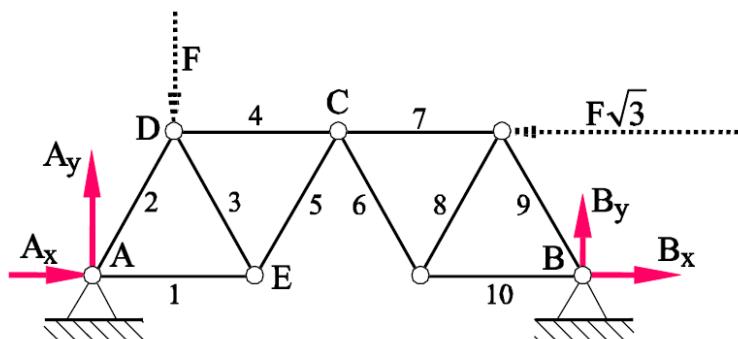
- Knotengleichgewicht
- 3-Kräfteschnitt
- Prinzip der virtuellen Leistungen



Figur 11.5

Beispiel: Figur 11.6

Figur 11.6

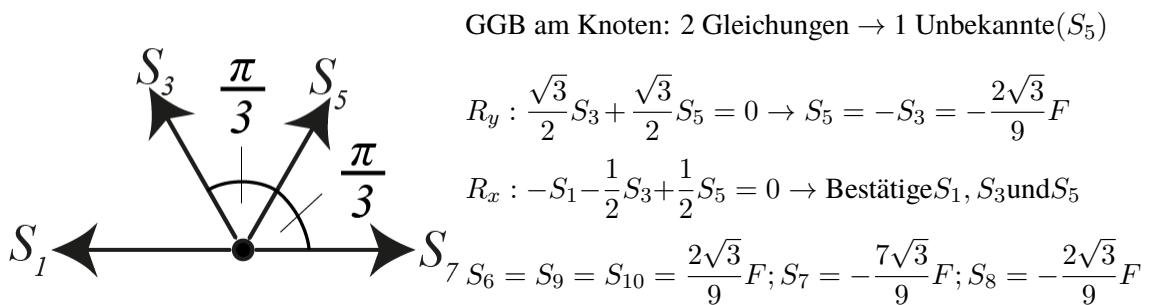
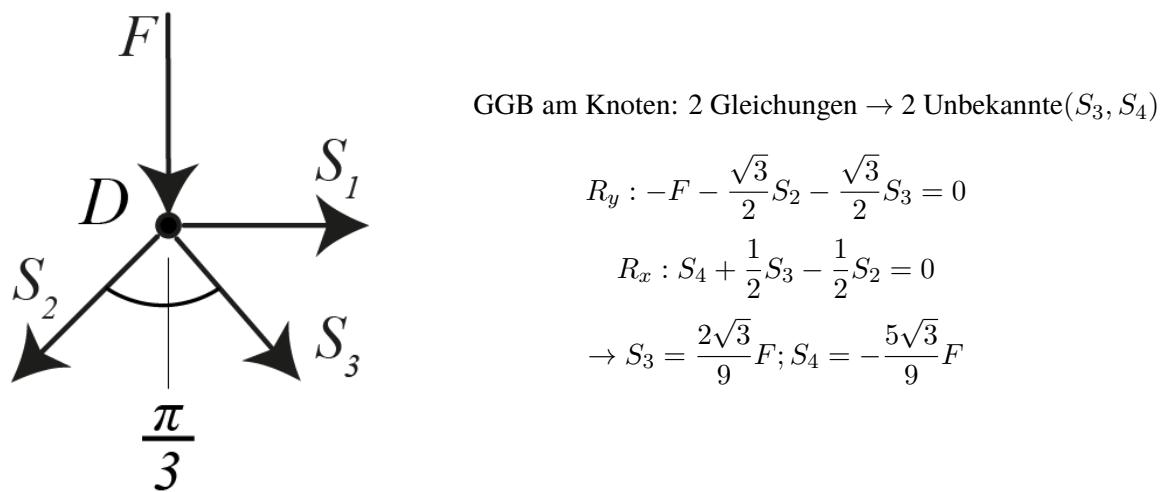
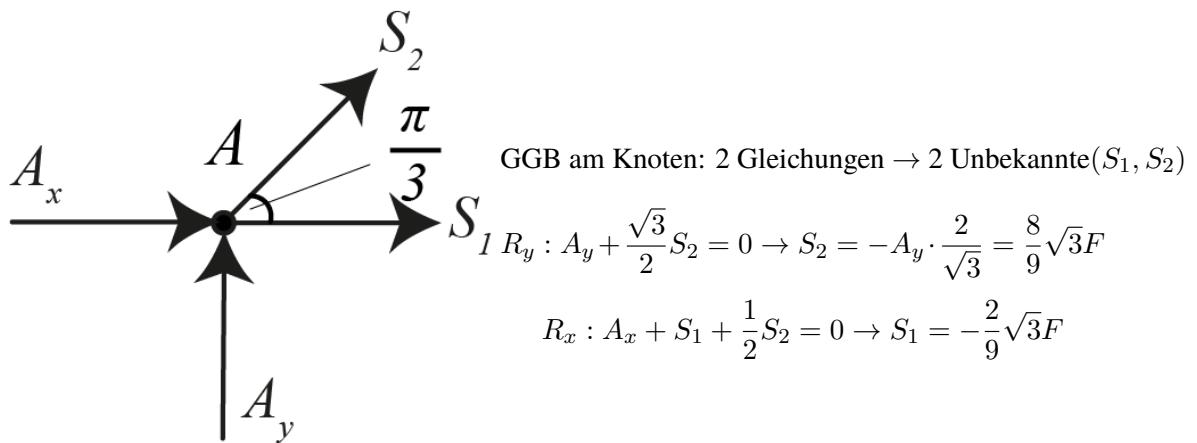


$$A_y = \frac{4}{3}F \quad B_y = -\frac{1}{3}F$$

$$A_x = \frac{2\sqrt{3}}{3}F \quad B_x = \frac{\sqrt{3}}{3}F$$

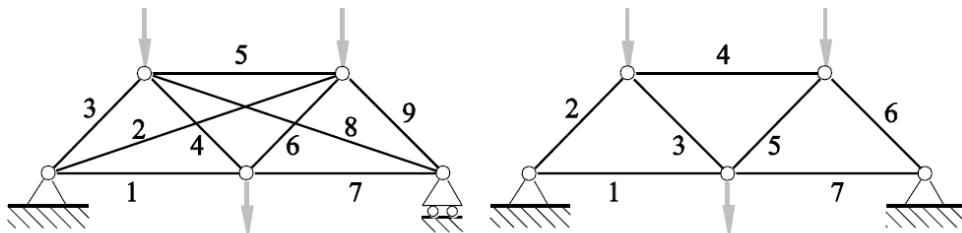
Knotengleichgewicht

Knoten bzw. Gelenke werden einzeln betrachtet:



Mit Gleichgewichtsbedingungen am Knoten folgt: 2 Gleichungen ($\sum F_x$ und $\sum F_y$) \rightarrow 2 Unbekannte
Betrachte zerlegtes System mit k Knoten, s Stäbe und r Lagerkräften:

- Anzahl Gleichungen: k Knoten mit jeweils 2 Gleichungen pro Knoten \rightarrow 2k Gleichungen
- Unbekannte: s + r (Anzahl Stäbe + Lagerkräfte)

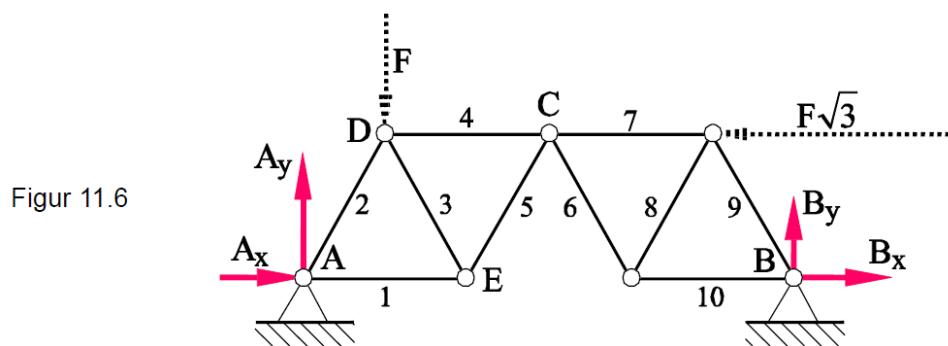


Figur 11.5

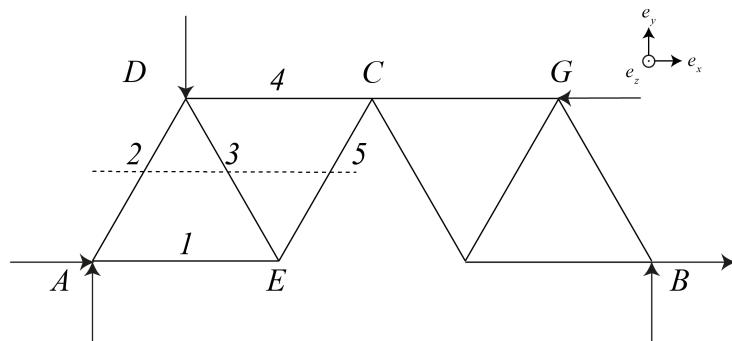
3-Kräfteschnitt

Mit dieser Methode kann eine spezifische Stabkraft schnell berechnet werden
Schneide Fachwerk so, dass:

- 3 Stäbe geschnitten werden (darunter die gesuchte Stabkraft)
- 3 Stäbe dürfen nicht alle aus dem gleichen Knoten kommen



$$\begin{aligned} A_y &= \frac{4}{3}F & B_y &= -\frac{1}{3}F \\ A_x &= \frac{2\sqrt{3}}{3}F & B_x &= \frac{\sqrt{3}}{3}F \end{aligned}$$



$$M_{E_Z} : -S_2 \frac{\sqrt{3}}{2}L - A_y L = 0 \rightarrow S_2 = -A_y \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} = -\frac{8}{9}\sqrt{3}F$$

Suche S_5 :

$$M_{D_Z} : \frac{\sqrt{3}}{2}L S_5 + \frac{\sqrt{3}}{2}L A_x - \frac{1}{2}L A_y = 0 \rightarrow S_5 = -\frac{2\sqrt{3}}{9}F$$

Suche S_3 :

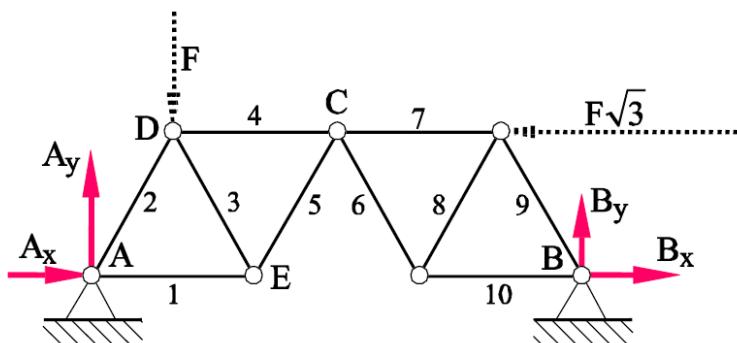
$$\frac{\sqrt{3}}{2}S_3 - \frac{\sqrt{3}}{2}A_x + \frac{1}{2}A_y = 0 \rightarrow S_3 = \frac{2\sqrt{3}}{9}F$$

Prinzip der virtuellen Leistung

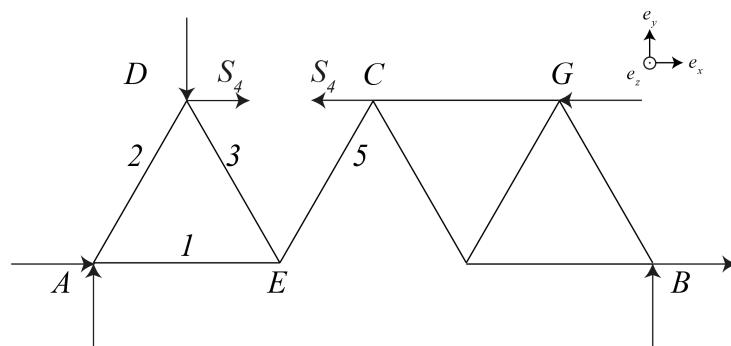
Am Besten für eine spezifische Stabkraft geeignet!

1. Entferne Stäbe → Mechanismus (d.h es existiert ein virtueller zulässiger Bewegungszustand). Die Wirkung dieses Stabes auf das System wird durch entsprechende Stabkräfte modelliert.
2. Führe Stabkräfte ein
3. Berechne Leistung P für virtuellen zulässigen Bewegungszustand.
4. $P = 0 \rightarrow$ Gleichung für die gesuchte Stabkraft (Beweis siehe ...)

Figur 11.6



$$\begin{aligned} A_y &= \frac{4}{3}F & B_y &= -\frac{1}{3}F \\ A_x &= \frac{2\sqrt{3}}{3}F & B_x &= \frac{\sqrt{3}}{3}F \end{aligned}$$



$$P = \text{Leistung an } G + \text{Leistung an } C + \text{Leistung an } D$$

$$\begin{aligned} P &= \sqrt{3}F \cdot \tilde{\omega} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}L + S_4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\tilde{\omega}L + F \cdot 2\tilde{\omega} \cdot \frac{1}{2}L + 2\tilde{\omega} \frac{\sqrt{3}}{2}L \cdot S_4 = 0 \\ \rightarrow S_4 &= -\frac{5}{9}\sqrt{3}F \end{aligned}$$

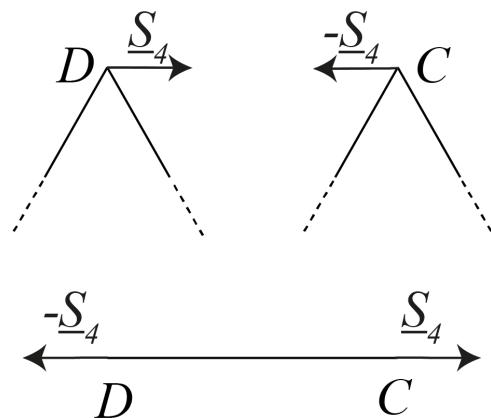
Beweis : Gültigkeit der Methode aus PdvL

$$P^{(a)} + P^{(i)} = 0 \rightarrow \text{virtueller Bewegungszustand}$$

- Rotation $\tilde{\omega}$ um Knoten B für Stäbe 6-10
- Rotation $2\tilde{\omega}$ um Knoten A für Stäbe 3-10
- Rotation $\tilde{\omega}$ um Knoten B für Stab EC
- Translation des Systems mit \tilde{v}

→ Bindungen in C und D werden verletzt

→ Unzulässiger Bewegungszustand (Aber: PdvL ist gültig für ALLE virtuellen Bewegungszustände)



Leistung:

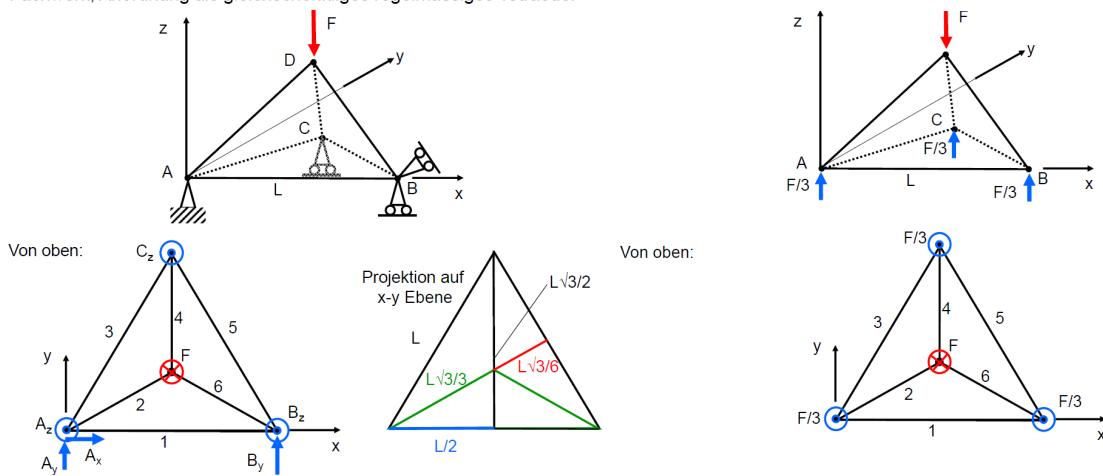
$$P^{(a)} = \underline{F}_D \cdot \tilde{v}_D + \underline{F}_G \cdot \tilde{v}_G$$

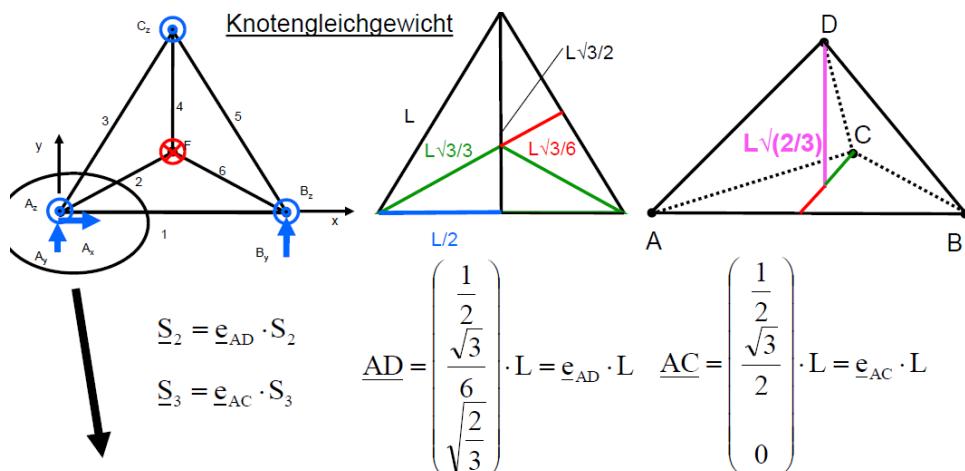
$$P^{(i)} = \tilde{v}_D \cdot \underline{S}_4 + \tilde{v}_C \cdot -\underline{S}_4 \quad \text{ODER} \quad P^{(i)} = \tilde{v}_D \cdot -\underline{S}_4 + \tilde{v}_C \cdot \underline{S}_4$$

$$\rightarrow P = \underline{F}_D \cdot \tilde{v}_D + \underline{F}_G \cdot \tilde{v}_G + \tilde{v}_D \cdot \underline{S}_4 + \tilde{v}_C \cdot -\underline{S}_4$$

$$P = 0 \quad \text{aus PdvL}$$

3D Fachwerk, Anordnung als gleichschenkliges regelmässiges Tetraeder

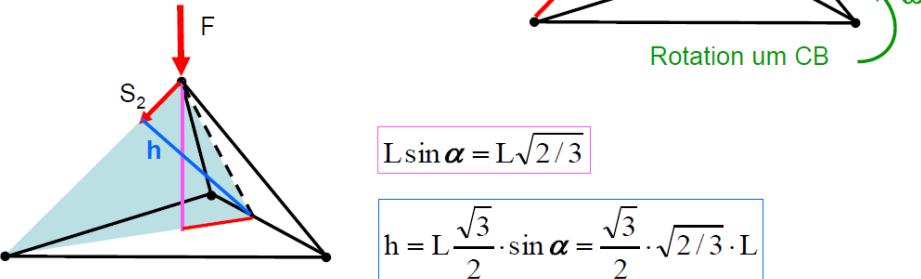
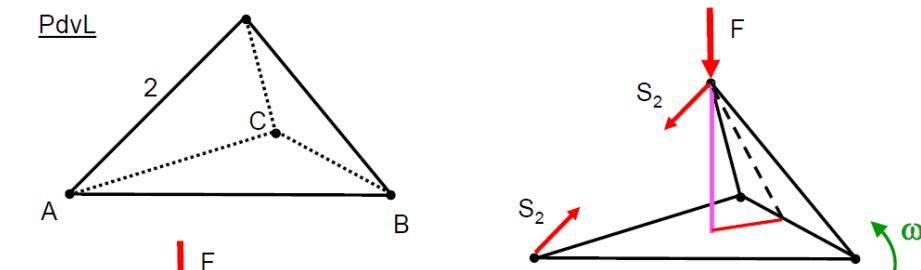




$$\underline{A} + \underline{S}_1 + \underline{S}_2 + \underline{S}_3 = 0$$

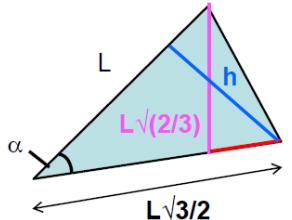
$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1/3 \end{pmatrix} F + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} S_1 + \begin{pmatrix} 1/2 \\ \sqrt{3}/6 \\ \sqrt{2}/3 \end{pmatrix} S_2 + \begin{pmatrix} 1/2 \\ \sqrt{3}/2 \\ 0 \end{pmatrix} S_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$S_1 = S_3 = F\sqrt{3/2}/9 \quad S_2 = -F\sqrt{3/2}/3$$



$$L \sin \alpha = L\sqrt{2/3}$$

$$h = L \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \sqrt{2/3} \cdot L$$

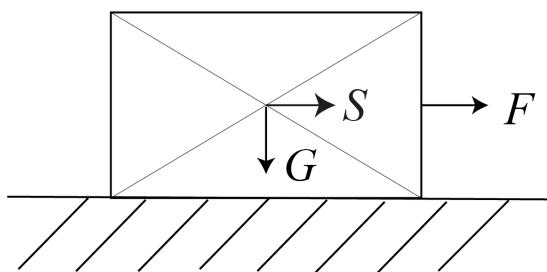


$$P = F \cdot \frac{\sqrt{3}}{6} L \cdot \omega + S_2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \sqrt{2/3} \cdot L \cdot \omega = 0$$

$$S_2 = -\frac{F}{3} \cdot \sqrt{3/2}$$

12 Reibung

Experimentelle Beobachtungen:



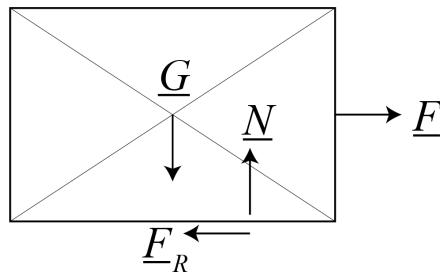
$$\text{a) } F > F_0 \rightarrow v = 0$$

- Ruhelage $\rightarrow \underline{R} = \underline{0}; \underline{M}_O = \underline{0}$

$$\text{b) } F < F_0 \rightarrow v \neq 0$$

- F so gewählt, dass v konstant ist
gleichförmige Translation $\rightarrow \underline{R} = \underline{0}; \underline{M}_O = \underline{0}$

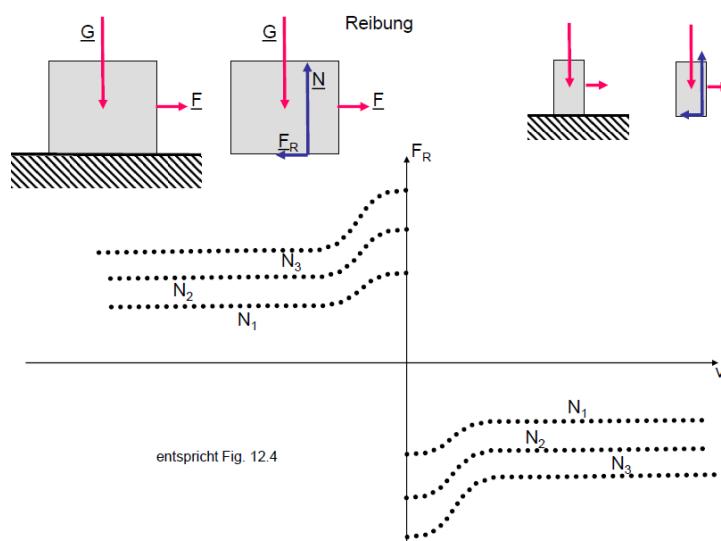
Lagerkräfte:



Aus GGB:

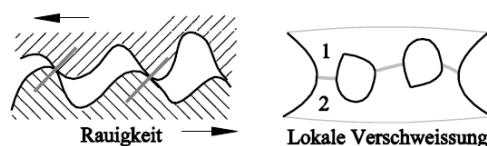
- Horizontal: $\underline{F} + \underline{F}_R = \underline{0} \rightarrow \underline{F}_R = -\underline{F}$ Es braucht eine Reibungskraft \underline{F}_R !
- Vertikal: $\underline{N} = -\underline{G}$

Für verschiedene Geschwindigkeit $v_{konst.}$, können wir F_R messen und dabei $N = -G$ variieren (Klötzte mit unterschiedlichen Gewicht).



Beobachtungen: • \underline{F}_R in entgegengesetzter Richtung zu \underline{v}

- $|F_R| \uparrow$ falls $N \uparrow$ (proportional)
- $|F_R|_{max}$ mit $v \rightarrow 0$ (siehe Figur 12.2, Lokale Verschweissung)



Figur 12.2

Unabhängig von Form und Grösse der Berührungsfläche gilt $F_R \leftrightarrow N$ je nach v

Darstellung als $\frac{F_R}{N} = f(v)$ (siehe Figur 12.4)

	Trocken		Gefettet	
	μ_0	μ_1	μ_0	μ_1
Stahl / Stahl	0.11 - 0.33	0.10 - 0.11	0.10	0.01 - 0.06
Stahl / Grauguss	0.19 - 0.20	0.16 - 0.20	0.10	0.01 - 0.06
Holz / Metall	0.50 - 0.65	0.20 - 0.50	0.10	0.02 - 0.10
Lederdichtung / Metall	0.60	0.20 - 0.25	0.20	0.12
Bremsbelag / Stahl		0.50 - 0.60		0.20 - 0.50

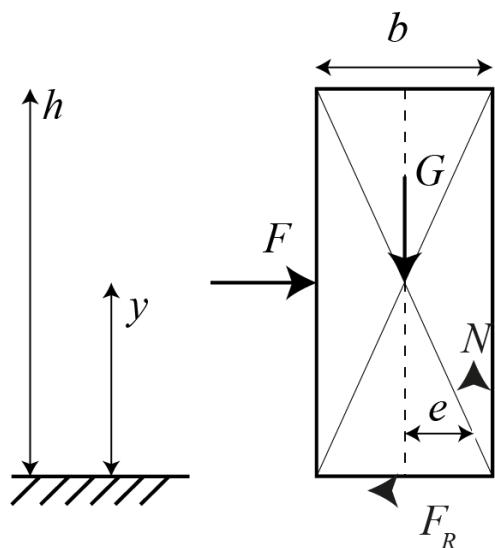
Tabelle 12.1: Richtwerte für Haft- und Gleitreibungszahlen

12.1 Hafreibungsgesetz

$$|F_R| < \mu_0 \cdot |N| \rightarrow \text{Ruhe}$$

Da es sich hierbei um eine Ungleichung handelt, dient sie nicht der Bestimmung von F_R . Diese wird aus den Gleichgewichtsbedingungen bestimmt. Das Hafreibungsgesetz dient vielmehr zur Diskussion!

Beispiel : Metallschrank auf Parkettboden

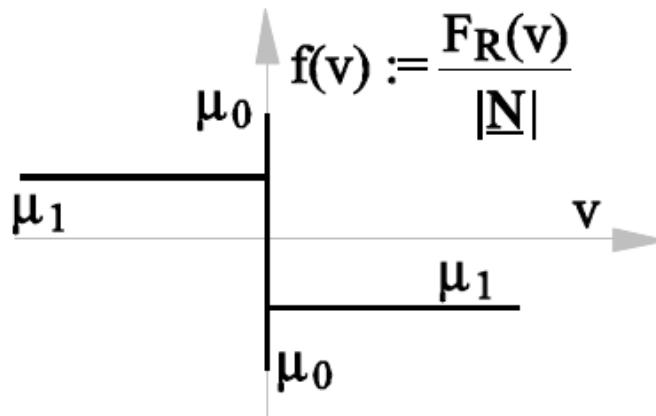


12.2 Gleitreibungsgesetz

$$|\underline{F}_R| = -\mu_1 \cdot |\underline{N}| \cdot \frac{v}{|v|} \quad (\mu_1 : \text{Gleitreibungszahl})$$

Gleiten: $v \neq 0$, $\frac{F_R}{|\underline{N}|} = f(v)$

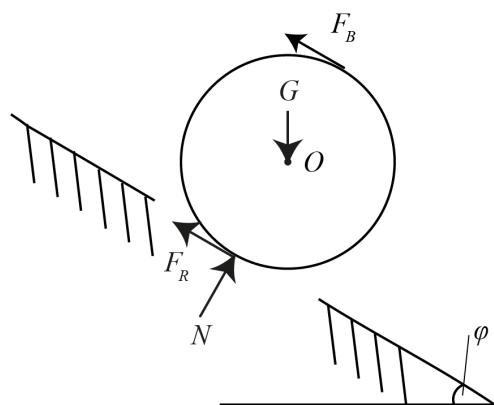
→ Vereinfachung: $\frac{F_R}{|\underline{N}|} = \mu_1 \rightarrow$ (Figur 12.5)



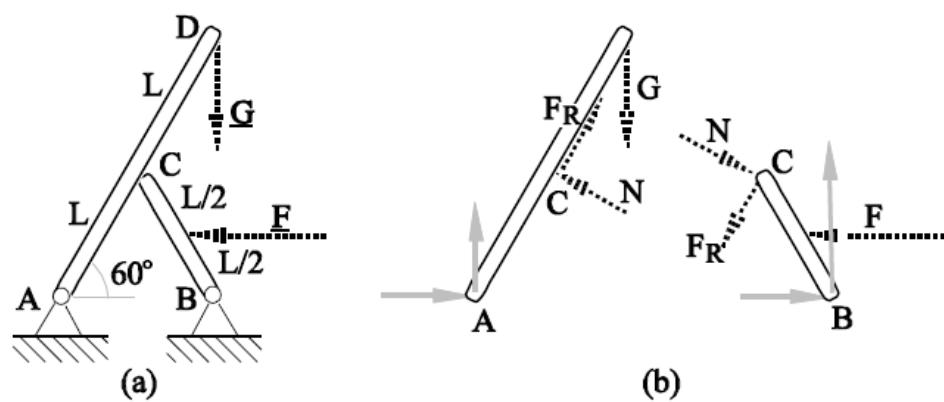
Figur 12.5

An Systemen mit gleichförmigen Bewegungszustand sind die Gleichgewichtsbedingungen erfüllt. Das Gleitreibungsgesetz bietet zusammen mit den Gleichgewichtsbedingungen eine Analyse des Problems!

Beispiel: Kreisscheibe (Radius r) auf schiefer Ebene



Beispiel: Figur 12.7



Figur 12.7

$$F_R = \frac{G_2}{2}$$

$$N = (G_2 + G_1) \cdot \frac{1}{2} \operatorname{tg} \varphi$$

$$F_R = \frac{G_2}{2} < \mu_0 \cdot N = \mu_0 \cdot (G_2 + G_1) \cdot \frac{1}{2} \operatorname{tg} \varphi$$

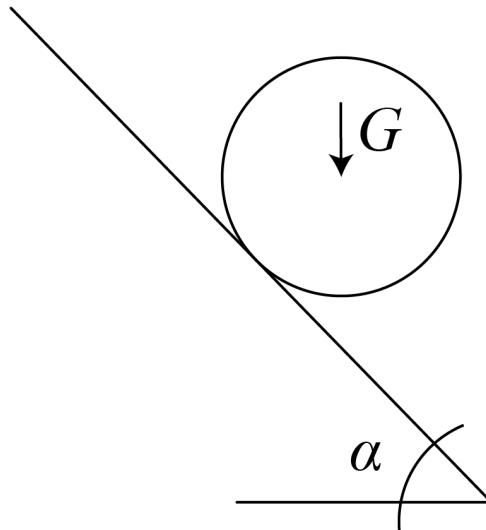
$$\operatorname{tg} \varphi > \frac{G_2}{\mu_0 \cdot (G_2 + G_1)} \longrightarrow \text{Haften}$$

$$\mu_0 \cdot \operatorname{tg} \varphi \cdot \left(\frac{G_1}{G_2} + 1 \right) > 1$$

$$\mu_0 \cdot \operatorname{tg} \varphi > 1$$

$$\operatorname{tg} \varphi > 1 / \mu_0 \longrightarrow \text{Selbsthemmung, Haften } \forall G_2$$

12.3 Rollreibung

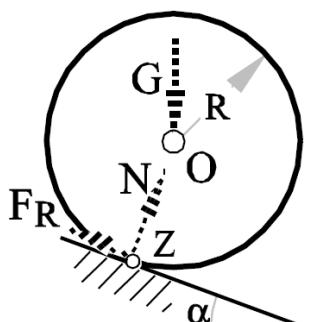


Rad auf schiefer Ebene

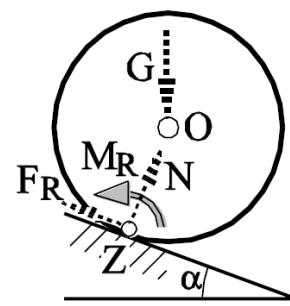
- Erfahrung: Für ein Rad ist $v = 0$ auch wenn $\alpha \neq 0$, falls α klein ist.
- $\alpha_{limit} \uparrow$ falls Rad oder Unterlage "weicher" ist.

Deformation am Kontakt → Standfläche

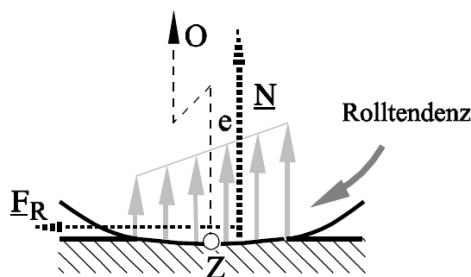
Resultierende Normalkraft ist verschoben um e.



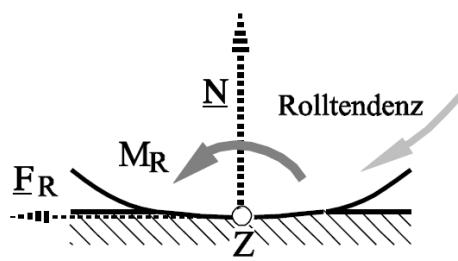
Figur 12.14



Figur 12.17



Figur 12.15



Figur 12.16

- In Z:
- N (Normalkraft)
 - F_R (sonst Gleiten)
 - M_R (Richtung: Entgegen der Rollbewegung (entgegen ω))

$$M_R = e \cdot N \quad \text{Rollreibungsmoment}$$

$$|e| < \mu_2 \leftarrow \text{Rollreibungslänge [m]}$$

$$|M_R| < \mu_2 \cdot |N| \quad \text{Ungleichung der Rollreibung}$$

$$|M_R| = \mu_2 \cdot |N| \quad \text{Gleichung der Rollreibung}$$

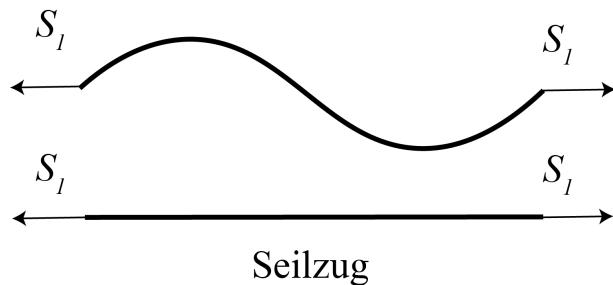
Beispiel:

13 Seilstatik

- Seil:
- Verbindungselement
 - Deformierbar: beliebig biegsam, vernachlässigbare Verlängerung
 - gewichtslos

→ Seilkraft, ist immer eine Zugkraft → Seilzug

2 Kräfte an Seilenden:

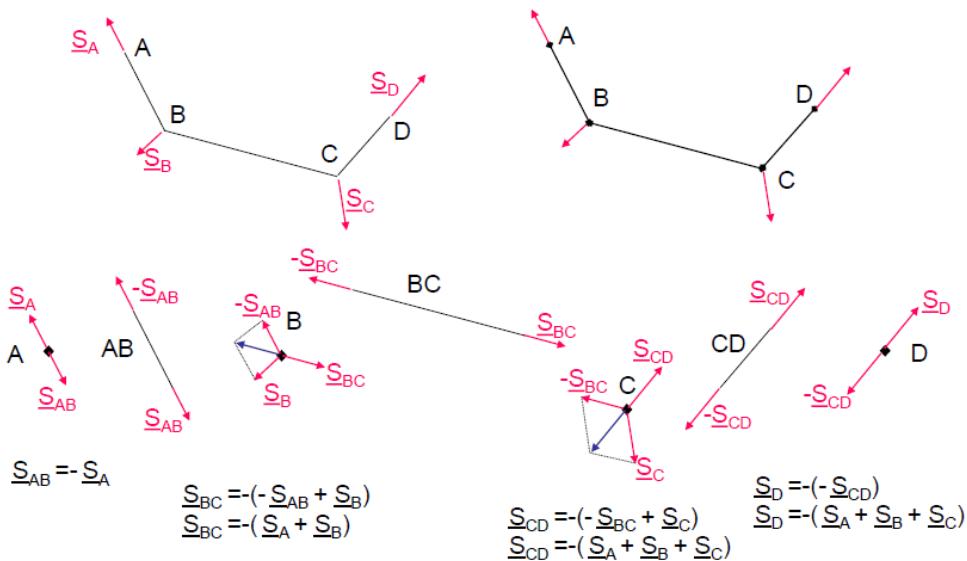


Gleichgewichtsbedingungen erfüllt!

Form des Seils: Die Gerade der Wirkungslinie der 2 Kräfte!

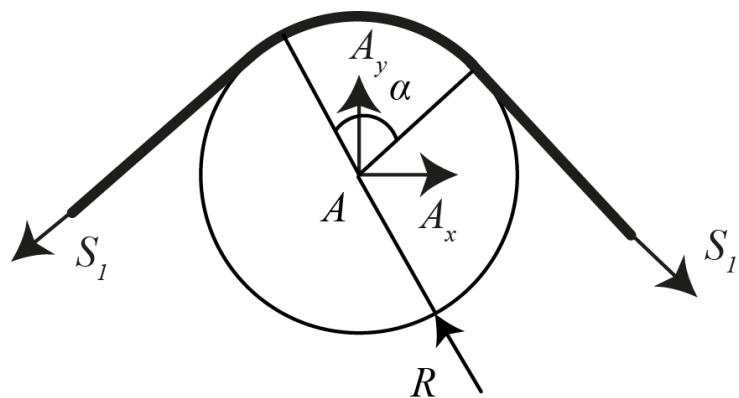
Kräftegruppe am Seil → Seilpolygon (Figur 13.1)

Kräftegruppe am Seil (aus Figur 13.1).
Seil als Vieleck, „Seilpolygon“, Bestimmung aus Knotengleichgewicht



$$\boxed{AB \parallel \underline{S}_A \quad BC \parallel \underline{S}_A + \underline{S}_B \quad CD \parallel \underline{S}_A + \underline{S}_B + \underline{S}_C, \underline{S}_D}$$

Beispiel: Seil auf Rolle: reibungsfrei in A gelenkig gelagert



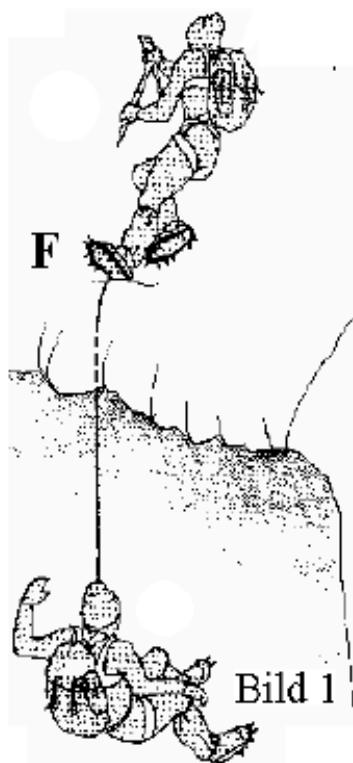
13.1 Seilreibung, Haftung

Beispiel: Seil auf Rolle, SEILREIBUNG (Haften)

Seil am festen Zylinder $\rightarrow S_2 \neq S_1$ möglich

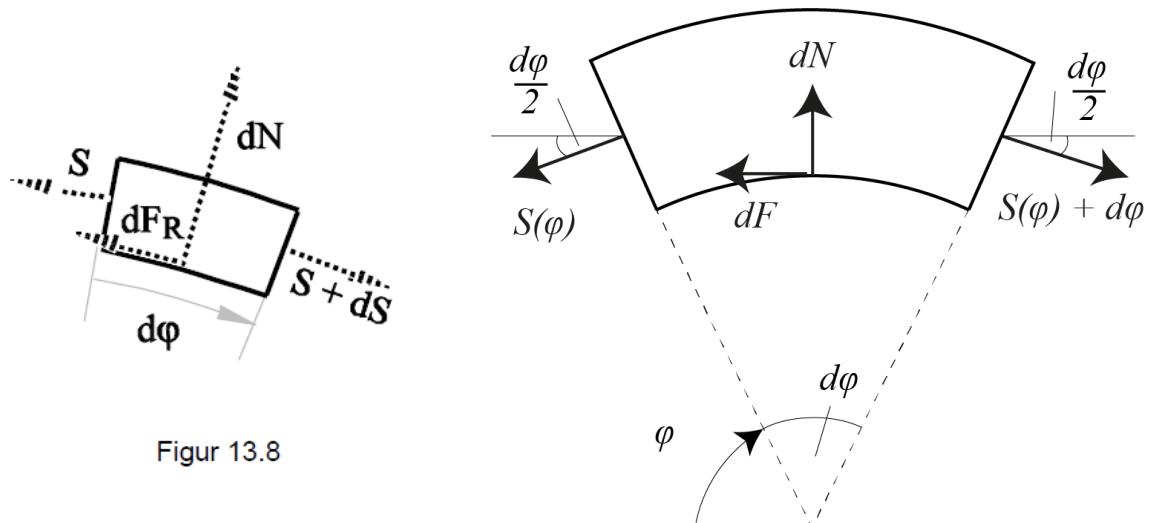
Seilreibung: $S_2 < S_1 \cdot e^{\mu_0 \alpha}$ (α : Umschlingungswinkel)

\rightarrow Resultat: Haftreibungsbedingung und Gleichgewichtsbedingung am infinitesimalen Seilelement \rightarrow mit Versuchen verifiziert!



Herleitung:

Gleichgewichtsbedingungen am infinitesimalen Element (Figur 13.8)



Gleichgewichtsbedingungen:

$$R_V : dN - S(\phi) \cdot \sin \frac{d\phi}{2} - S(\phi + d\phi) \cdot \sin \frac{d\phi}{2} = 0 \rightarrow dN = (S(\phi) + S(\phi + d\phi)) \frac{d\phi}{2}$$

$$R_H : S(\phi + d\phi) \cdot \cos \frac{d\phi}{2} - S(\phi) \cdot \cos \frac{d\phi}{2} - dF_R = 0 \rightarrow dF_R = S(\phi + d\phi) - S(\phi)$$

$$d\phi \downarrow 0 \rightarrow \sin \frac{d\phi}{2} = \frac{d\phi}{2}; \cos \frac{d\phi}{2} = 1$$

$$d\phi \downarrow 0 : S(\phi + d\phi) - S(\phi) = dS = S' d\phi \rightarrow dF_R = S' d\phi$$

$$R_V : dN = (S + S + S' d\phi) \frac{d\phi}{2} = 2S \frac{d\phi}{2} + S' d\phi \frac{d\phi}{2}$$

$$d\phi \frac{d\phi}{2} \rightarrow 0 \rightarrow dN = S d\phi$$

Haftreibungsgesetz:

$$dF_R < \mu_0 dN; \max dF_R = \mu_0 dN \rightarrow dF_R = \mu_0 dN$$

$$S' d\phi = \mu_0 S d\phi \rightarrow S' = \mu_0 S$$

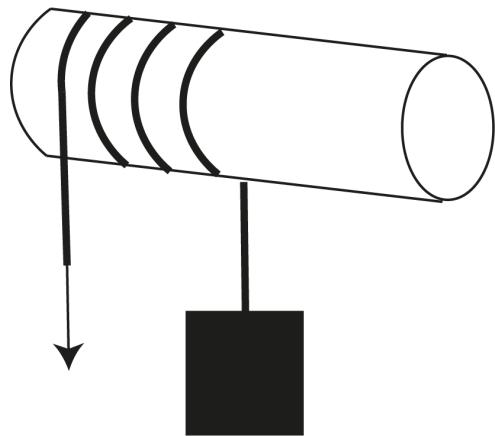
$$S' = \mu_0 : \text{Differentialgl. f\"ur } S(\phi), S = K \cdot e^{\mu_0 \phi}, S' = K \cdot \mu_0 \cdot e^{\mu_0 \phi}$$

$$\text{L\"osung : } A = K \cdot e^{\mu_0 \phi}, \phi = 0 \rightarrow S = S_1 = k$$

$$\rightarrow S = S_1 \cdot e^{\mu_0 \phi}, \text{ f\"ur } \phi = \alpha \rightarrow S_2 = S_1 \cdot e^{\mu_0 \alpha}$$

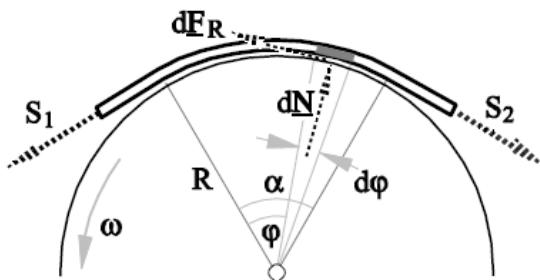
$$\rightarrow \text{besser : } S_2 < S_1 \cdot e^{\mu_0 \alpha}$$

Beispiel:

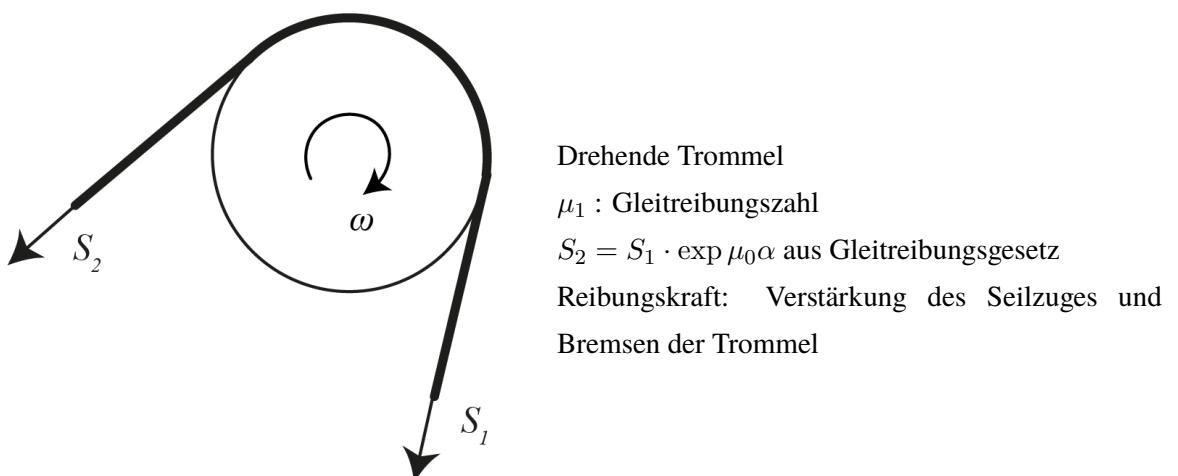


13.2 Seilreibung, Gleiten

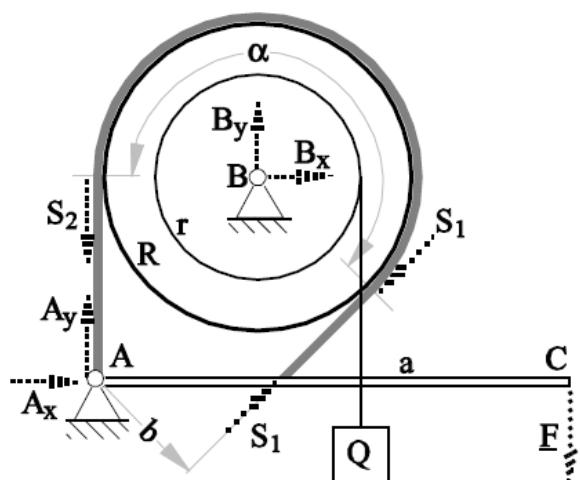
Beispiel: Seilreibung (GLEITEN)



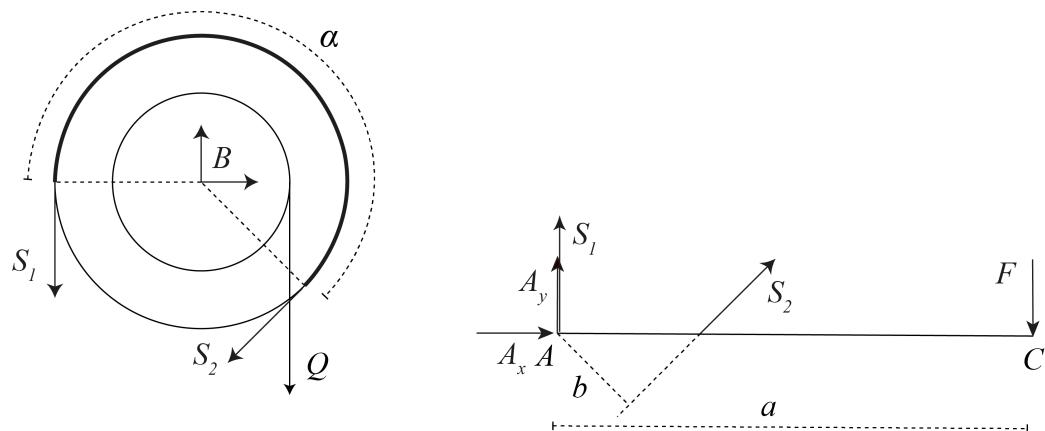
Figur 13.7



Beispiel : Bandbremse (Figur 13.9)

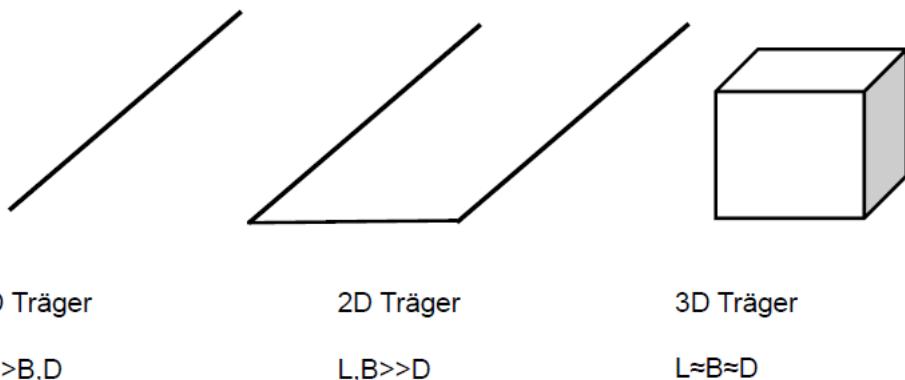


Figur 13.9



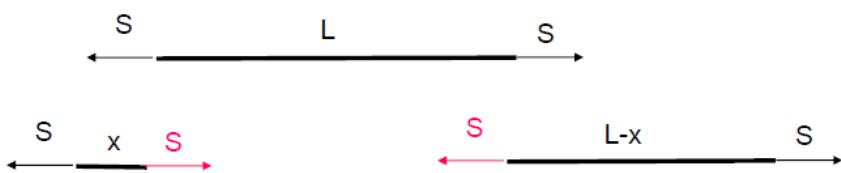
14 Beanspruchung

Beschreibt die inneren Kräften in einem Querschnitt eines Stabträgers (schlanke Träger, 1D Tragelemente)



Beispiel: Pendelstütze

Beispiel Pendelstütze:

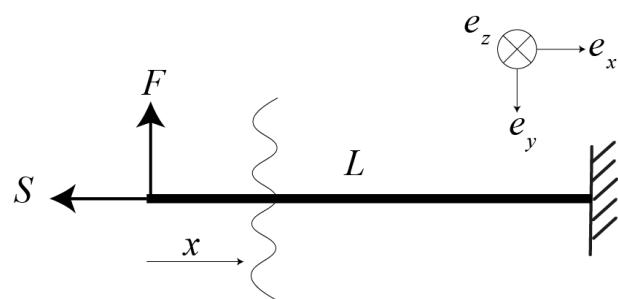


Beanspruchung:

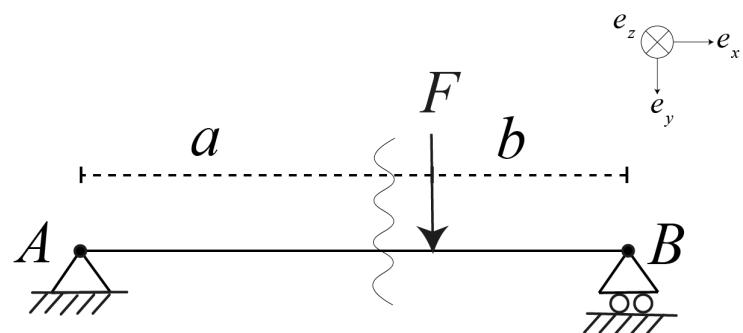
- Kraft parallel zur Stabachse
- Konstant entlang Stab
- Betrag: Stabkraft S

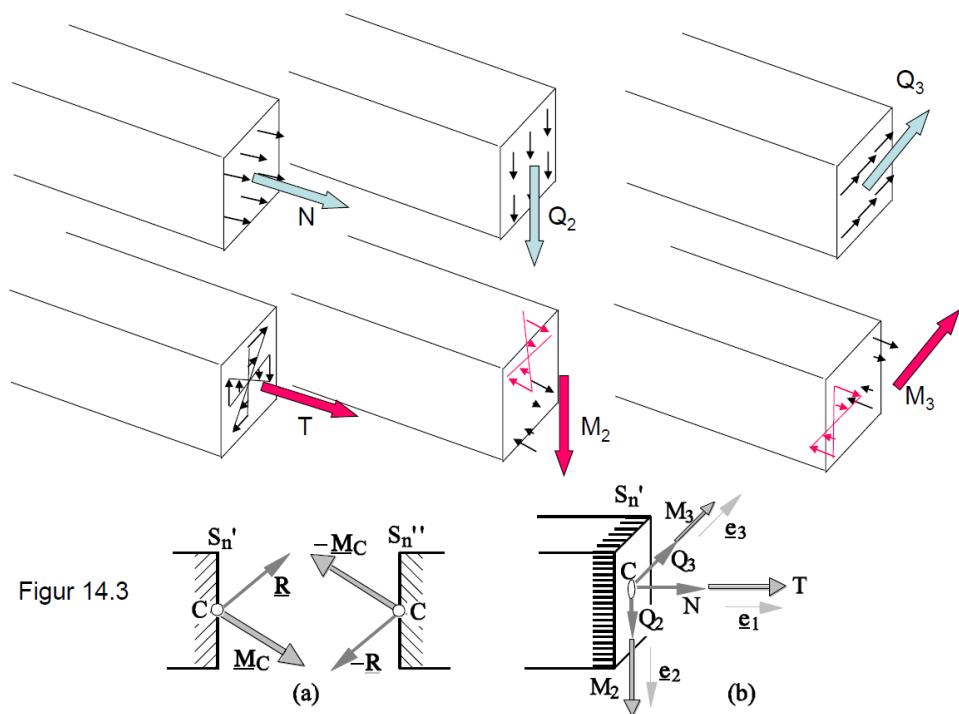
Alle Querschnitte gleich gefährdet

Beispiel: Beanspruchung mit Querschnitt am Stabträger



Beispiel:





Beanspruchung: innere Kräfte im Stabträger

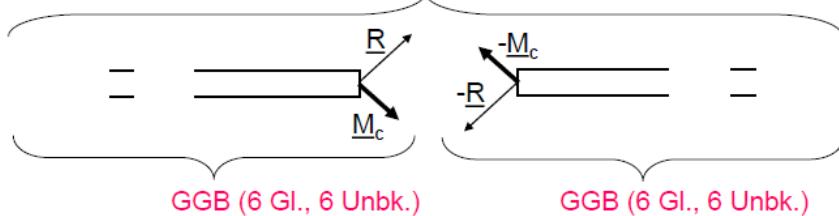
→ Kräfte und Momente an einem Querschnitt sind Flächenverteilte Kräfte (siehe oben)

Dyname $\{R, M_C\}$ im Flächenmittelpunkt des Querschnittes C heisst Beanspruchung des Stabträgers im Querschnitt!

Beanspruchung

- innere Kräfte in Stabträger (\rightarrow Dimensionierung)

GG am System \rightarrow Lagerkräfte



- Dyname $\{R, M_C\}$ im Flächenmittelpunkt:
aus Reduktion der flächenverteilten Kräften am Querschnitt

- Darstellung in Form von Diagrammen

Komponenten:

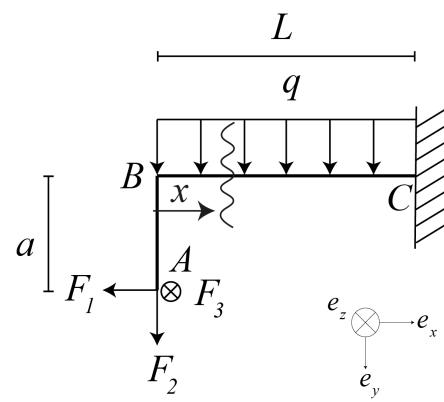
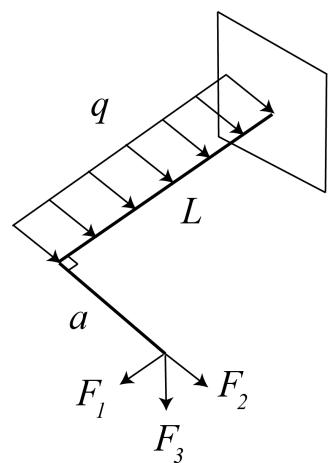
N : Zug/Druck

T : Torsion

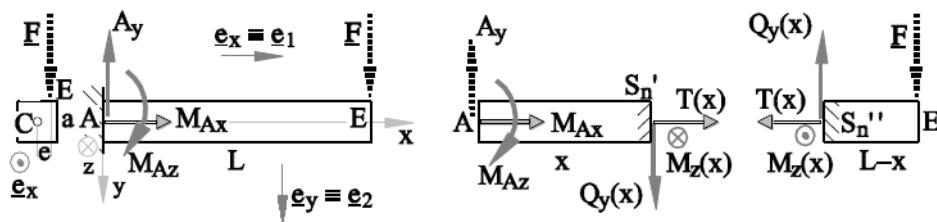
Q_2, Q_3 : Schub (in Richtung 2 und 3)

M_2, M_3 : Biegung (in Richtung 2 und 3)

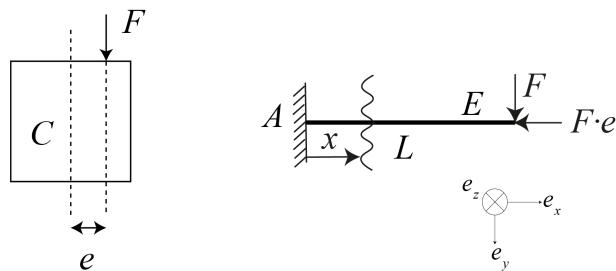
Beispiel: 3D



Beispiel: Figur 14.4

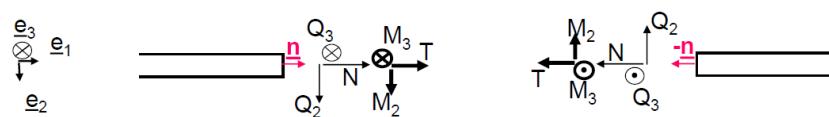


Figur 14.4

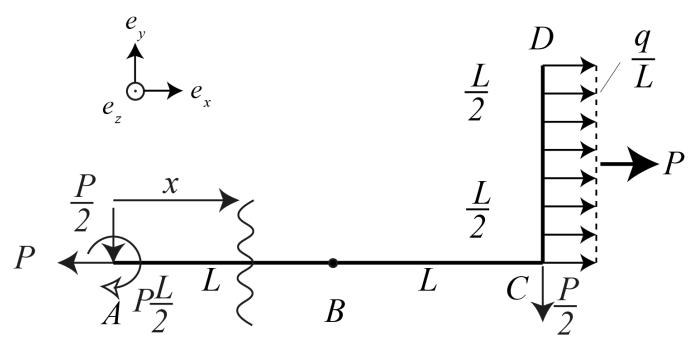


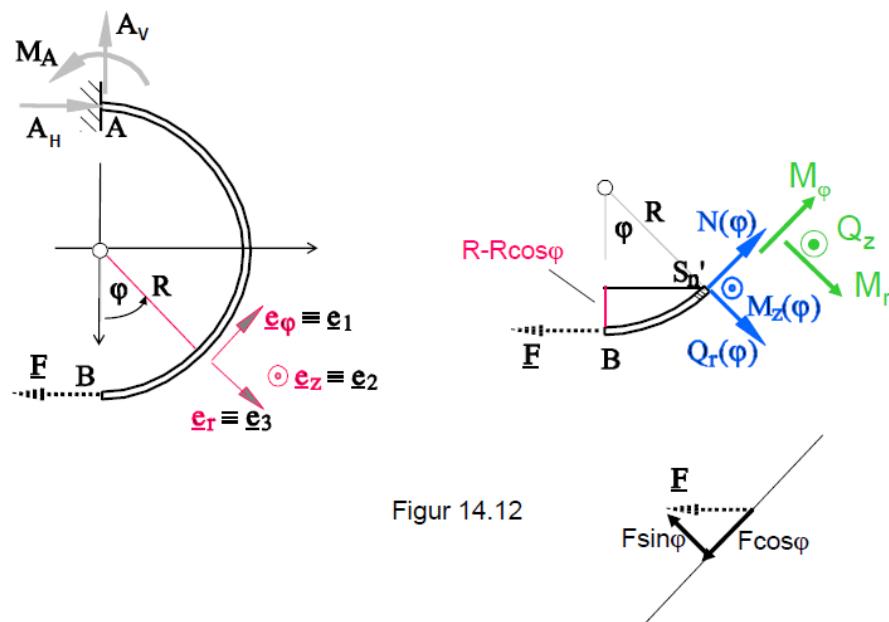
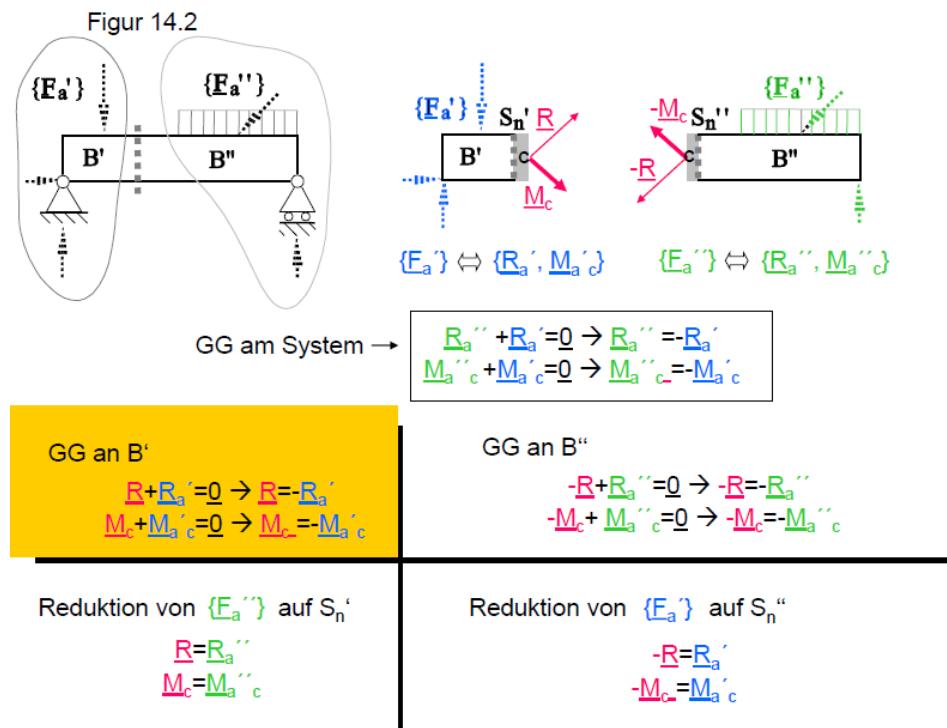
Vorgehen bei der Bestimmung der örtlichen Verteilung der Beanspruchung

1. Bestimmung der äusseren Bindungskräfte (GG am System)
2. Einführung eines achsennormalen ebenen Schnittes in allgemeiner Lage (Einteilung der Bereiche, je nach Angriffspunkt der äusseren Kräften); Achtung mit verteilten Kräften!
3. Einführung einer orthogonalen Basis
4. Einführung der Dyname $\{R, M_C\}$ im Flächenmittelpunkt des Querschnittes
5. Berechnung von R und M_C (vier Möglichkeiten)
6. Veranschaulichung der Resultate in Diagramme



Beispiel: L-Träger

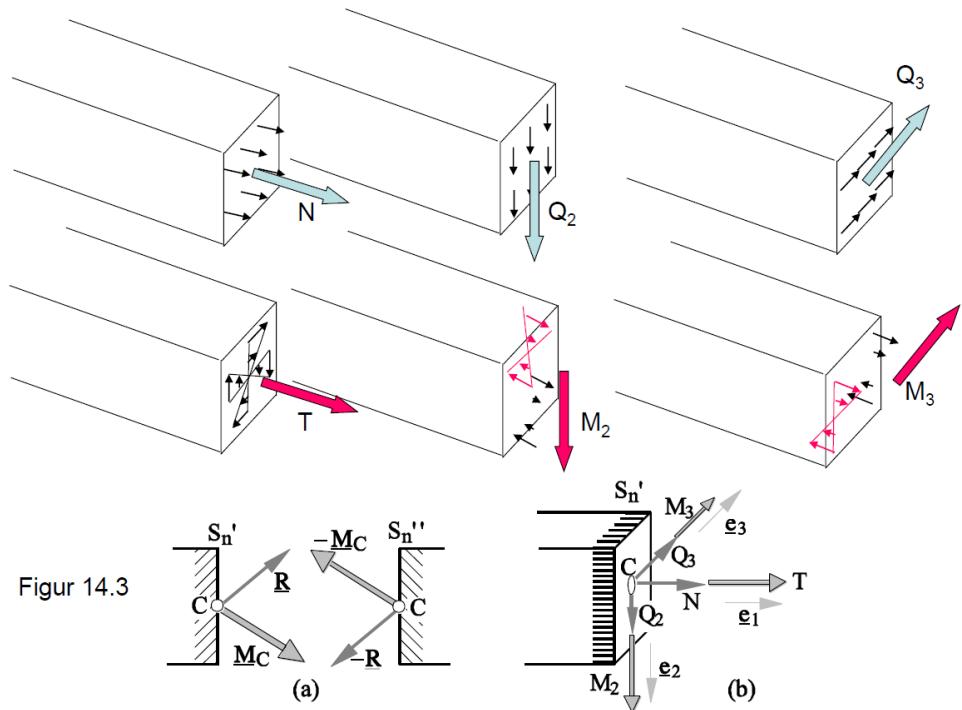




Beispiel : Beanspruchung entlang kreisförmiger Trägerachse (Figur 14.12)

Differentialbeziehung an geraden Stabträgern

Belastung durch linienverteile Querkraft $q_y(x)$



Beanspruchung: $Q_y(x), M_z(x)$

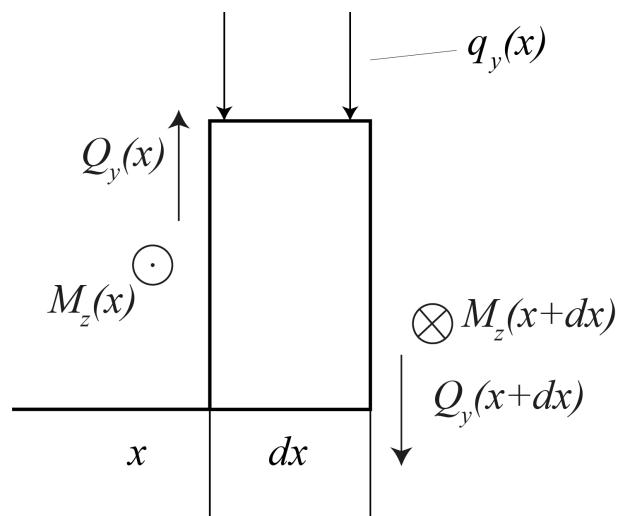
Zu zeigen:

$$Q'_y = \frac{dQ_y(x)}{dx} = -q_y$$

$$M'_z = \frac{dM_z(x)}{dx} = -Q_y$$

Beweis:

Betrachte GGB am infinitesimalen Element dx !



Gleichgewichtsbedingungen:

$$R_y : Q_y(x + dx) + q_y dx - Q_y(x) = 0$$

$$\rightarrow Q_y(x + dx) - Q_y(x) = -q_y dx$$

$$\sum M_z \text{ in } x + dx : M_z(x + dx) - M_z(x) + Q_y(x)dx - q_y \frac{dx^2}{2} = 0$$

Für $dx \downarrow 0$:

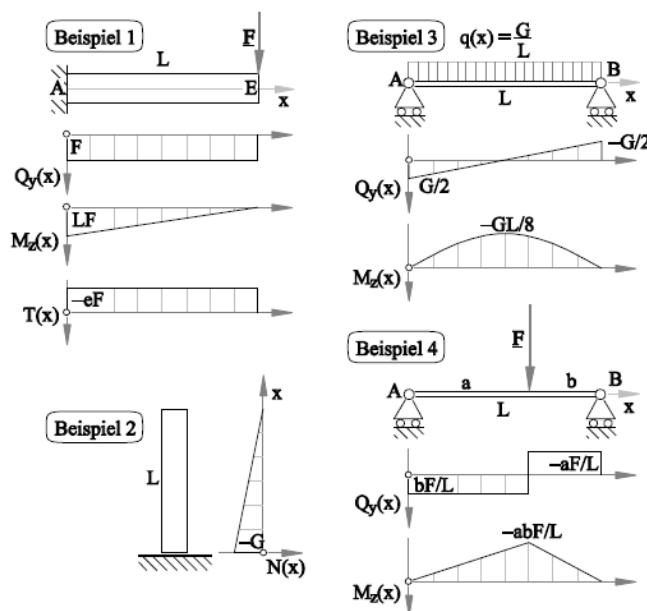
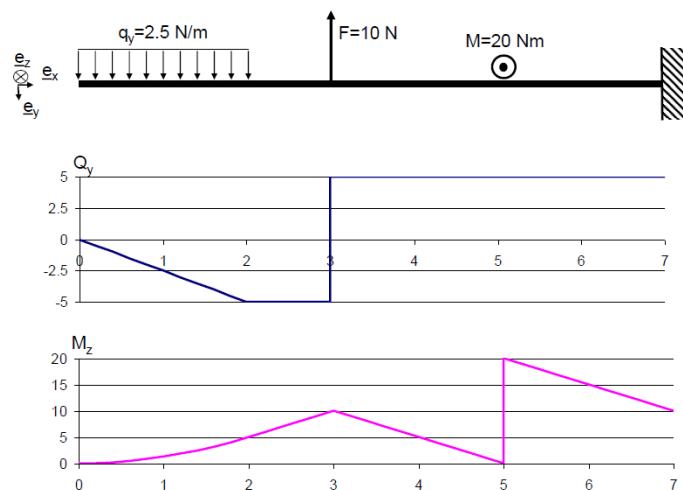
$$Q_y(x + dx) - Q_y(x) = dQ_y = Q'_y dx$$

$$\rightarrow Q'_y = -q_y$$

$$O(dx^2) = 0 \rightarrow M_z(x + dx) - M_z(x) = M'_z dx$$

$$\rightarrow M'_z dx + Q_y(x)dx = 0$$

$$\rightarrow M'_z = -Q_y$$



Figur 14.9

Beispiel: Dreiecksverteilung, 3D Problem

