

THERMODYNAMIK II

Teil II

Prof. Dr. Dimos Poulikakos

Inhaltsverzeichnis

1. Mechanismen der Wärmeübertragung

- 1.1 Allgemeine Betrachtungen
- 1.2 Arten der Wärmeübertragung
 - 1.2.1 Wärmeleitung
 - 1.2.2 Konvektion
 - 1.2.2.1 Erzwungene Konvektion
 - 1.2.2.2 Natürliche Konvektion
 - 1.2.2.3 Sieden
 - 1.2.2.4 Kondensation
 - 1.2.3 Wärmestrahlung
- 1.3 Kombiniertes Wärmeübergang

2. Die Wärmeleitungsgleichung

- 2.1 Grundsätzliche Überlegungen
- 2.2 Die Energieerhaltungsgleichung
 - 2.2.1 Differentielle Herleitung
 - 2.2.2 Integrale Herleitung
- 2.3 Rand- und Anfangsbedingungen
 - 2.3.1 Randbedingungen
 - 2.3.2 Anfangsbedingungen

3. Stationäre eindimensionale Wärmeleitung

- 3.1 Wärmefluss durch die ebene Wand
- 3.2 Der Begriff des Wärmeleitwiderstandes
- 3.3 Ebene Wand mit Konvektion an den Oberflächen
- 3.4 Wärmefluss durch eine Rohrisolation
- 3.5 die mehrschichtige Rohrisolation mit Konvektion
- 3.6 Wärmeleitung mit Quellen
 - 3.6.1 Die ebene Wand mit Wärmequellen
 - 3.6.2 Zylinder mit Wärmequellen
- 3.7 Eindimensionale, stationäre Wärmeleitung in Rippen
 - 3.7.1 Allgemeine Energieerhaltungsgleichung für Rippen
 - 3.7.2 Rippen an Wärmetauschern
 - 3.7.3 Der Rippenwirkungsgrad
 - 3.7.4 Kreisförmige Rippen

4. Instationäre Wärmeleitung

- 4.1 Instationäre, vom Raum unabhängige Wärmeleitung
- 4.2 Eindimensionale instationäre Wärmeleitung
- 4.3 Instationäre Wärmeleitung in der halbusendlichen Wand

5. Grundlagen der Konvektion

- 5.1 Einführung in den konvektiven Wärmeübergang
- 5.2 Erhaltungsgleichungen für 2D-Konvektion
 - 5.2.1 Die Kontinuitätsgleichung
 - 5.2.2 Die Impulserhaltungsgleichung
 - 5.2.3 Die Energieerhaltungsgleichung

6. Erzwungene Konvektion an umströmten Körpern

- 6.1 Das Grenzschichtproblem an der ebenen Wand
 - 6.1.1 Die Geschwindigkeitsgrenzschicht
 - 6.1.2 Die Temperaturgrenzschicht
- 6.2 Die Größenordnungslösung
 - 6.2.1 Strömungswiderstand
 - 6.2.2 Wärmeübertragung
- 6.3 Die integrale Näherung
 - 6.3.1 Herleitung der Integralgleichungen
 - 6.3.2 Lösung mit linearen Grenzschichtprofilen
- 6.4 Exakte Lösungen
 - 6.4.1 Die Geschwindigkeitsgrenzschicht
 - 6.4.2 Die Temperaturgrenzschicht
 - 6.4.3 Zusammenfassung
- 6.5 Turbulente Strömungen
- 6.6 Wärmeübergang an umströmten Körpern
 - 6.6.1 Quer angeströmte zylindrische Körper
 - 6.6.2 Die umströmte Kugel

7. Erzwungene Konvektion in durchströmten Kanälen

- 7.1 Hydrodynamische Betrachtungen
- 7.2 Thermische Betrachtungen
- 7.3 Die Energiebilanz der inneren Strömung
 - 7.3.1 Konstanter Wärmestrom durch die Wand
 - 7.3.2 Konstante Wandtemperatur
- 7.4 Wärmeübergangskoeffizienten bei laminaren Rohrströmungen
- 7.5 Turbulente Strömungen
- 7.6 Zusammenfassung

8. Natürliche Konvektion

- 8.1 Freie Konvektion an der ebenen Platte
- 8.2 Beziehungen für Nusseltzahlen in realen Fällen
 - 8.2.1 Laminare Grenzschicht an der senkrechten Platte
 - 8.2.2 Turbulente Grenzschicht an der senkrechten Platte
 - 8.2.3 Beziehung für laminare und turbulente Strömung
 - 8.2.4 Horizontale Platten
 - 8.2.5 Nicht ebene Oberflächen
- 8.3 Anwendungsbeispiel

9. Verdampfung (Sieden) und Kondensation

9.1 Wärmeübergang beim Sieden

9.1.1 Gefässverdampfung – Die Siedekurve

9.1.2 Grundlagen der Blasenbildung

9.1.3 Beziehungen zum Gefässsieden

9.2 Wärmeübertragung bei der Kondensation reiner Dämpfe

9.2.1 Arten der Kondensation

9.2.2 Laminare Filmkondensation an einer senkrechten Platte

9.2.3 Anwendungsbeispiel

1 Mechanismen der Wärmeübertragung

1.1 Allgemeine Betrachtungen

Bisher haben wir in der Thermodynamik gelernt, dass die Wechselwirkung mit einem System durch Arbeitsleistung oder Wärmeübertragung geschehen kann. Im Rahmen des 2. Hauptsatzes haben wir auch gesehen, dass Wärme immer von einem höheren zu einem tieferen Temperaturniveau fließen muss. Es wurde bisher aber nichts ausgesagt über die Mechanismen der Wärmeübertragung und deren physikalische Gesetzmässigkeiten. Diese Fragen sollen im folgenden erörtert werden.

Aus der allgemeinen Erfahrung kennen wir die folgenden Phänomene:

Sobald in einem System Regionen mit höherer und tieferer Temperatur vorhanden sind, wird Wärme fließen (bis zum Temperatúrausgleich), d.h.: **eine Temperaturdifferenz verursacht einen Wärmefluss**. (siehe Fig. 1.1)

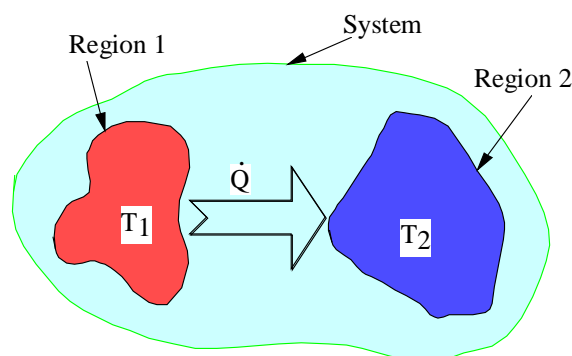


Fig. 1.1: Prinzip des Wärmeflusses bei $T_1 > T_2$

Isolation: Ein Mensch, der sich im Winter der kalten Umgebung aussetzt, würde ohne angemessene Bekleidung frieren, d.h. zu viel Wärme an die Umgebung verlieren. Die warme Kleidung verringert also diesen Wärmeverlust. (siehe Fig. 1.2). Allgemein können wir sagen, dass wir den Wärmeverlust minimieren können durch eine geeignete Materialwahl, der Wärmetransport ist also **materialabhängig**.

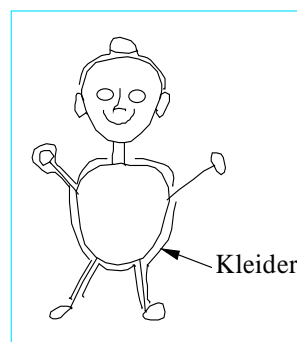


Fig. 1.2: Kleider als Wärmeisolation

Wärmetauscher: In der Technik treten oft Situationen auf, wo der Wärmefluss von der warmen zur kalten Region (siehe Fig. 1.1) möglichst gross sein soll. Dieses Problem wird so gelöst, dass die Kontaktfläche zwischen den beiden Regionen möglichst gross gemacht wird. Fig. 1.3 zeigt Wärmetauscherrohre für den Wärmeaustausch zwischen zwei Flüssigkeiten. Der Wärmeübergang kann durch das Anbringen von Rippen (=Vergrößerung der Oberfläche) intensiviert werden.

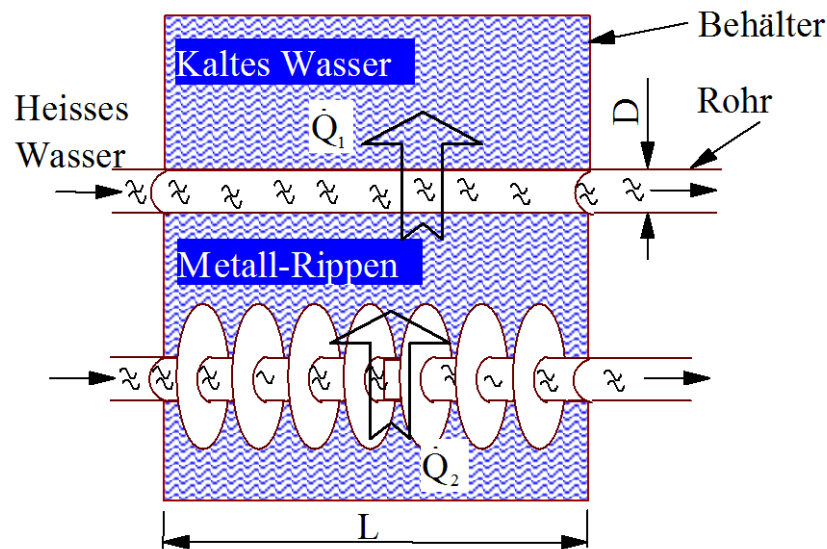


Fig. 1.3: verschiedene Wärmetauscher mit \dot{Q}_1 (ohne Rippen) < \dot{Q}_2 (mit Rippen)

Temperaturregelung: Wir haben manchmal auch den Wunsch, die Temperatur in einer Region konstant zu halten (z.B. Wohnraum). Wir betrachten ein Gebäude in einer Extremsituation (z.B. Sahara), wo die Aussentemperatur zwischen + 40 °C am Tag und 0 °C in der Nacht schwankt. Die Mitteltemperatur ist bei + 20 °C, wie wir uns das für das Gebäude-Innere wünschen. (siehe Fig. 1.4)

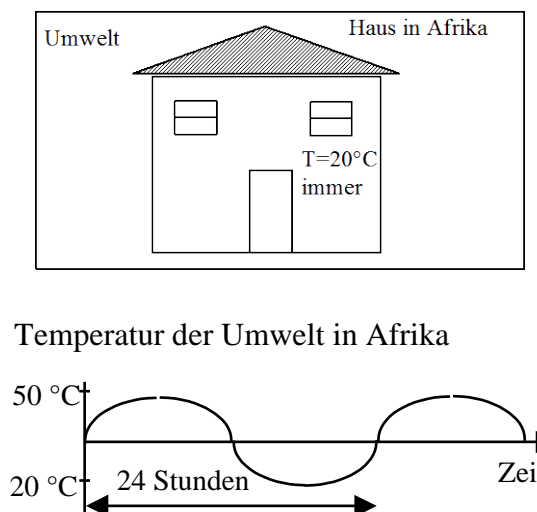


Fig. 1.4: Typische Situation für die Gebäudeklimatisierung

Die Aussenwelt wird also abwechselnd die warme Region und dann wieder die kalte Region darstellen. Um den Innenraum möglichst konstant zu halten, werden wir den Wärmefluss zwischen innen und aussen möglichst klein halten, d.h. wir werden die Gebäudehülle möglichst gut isolieren. Trotzdem müssen wir für die Temperaturregelung noch Wärme zu- oder abführen. Hierzu müssen wir ein technisches System einsetzen (Klimaanlage, Heizung), welches mit möglichst guten Wärmetauschern arbeiten wird.

1.2 Die Arten der Wärmeübertragung

In der Thermodynamik kennen wir drei grundverschiedene Arten der Wärmeübertragung:

Leitung (conduction) tritt in jeglicher Art von Materie auf, hauptsächlich aber in Festkörpern

Konvektion (convection) ist Wärmetransport, der mit fliessender Materie verbunden ist, also in Gasen und Flüssigkeiten auftritt

Strahlung (radiation) ist Wärmetransport, der in Form von elektromagnetischer Strahlung stattfindet und ist nicht an Materie gebunden

1.2.1 Wärmeleitung

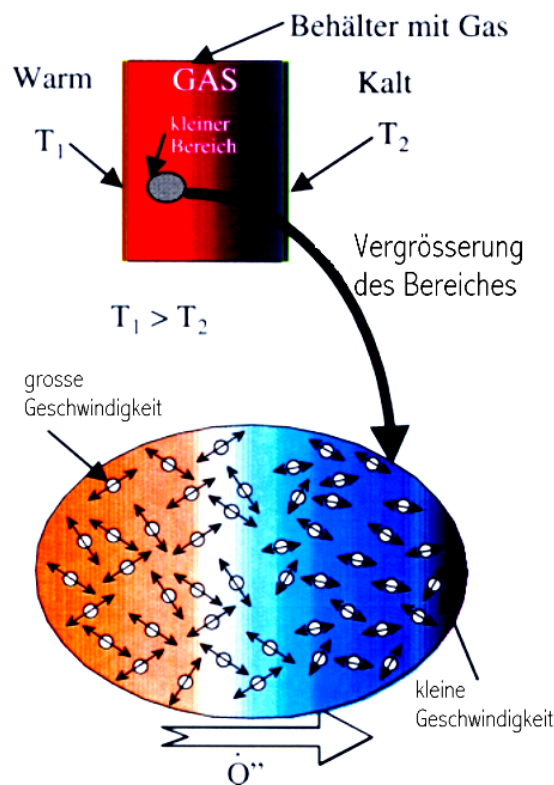


Fig. 1.5: Illustration zur Wärmeleitung

Obwohl Wärmeleitung im Gas meist nicht der dominante Wärmetransport ist, wollen wir zuerst den Mechanismus der Wärmeleitung an einem gasförmigen System untersuchen.

Betrachten wir einen Behälter, der auf der einen Seite mit heissem Gas und auf der anderen Seite mit kaltem Gas gefüllt ist (siehe Fig. 1.5). Wärmeenergie stellt in der molekularen Betrachtung die mittlere kinetische Energie der Moleküle dar, die mittlere (ungeordnete) Geschwindigkeit ist auf der warmen Seite höher als auf der kalten Seite. Im Grenzgebiet zwischen warm und kalt werden schnelle und langsame Moleküle aufeinander stossen. Bei diesen Stossprozessen übertragen die schnellen (warmen) Moleküle mehr Impuls auf die langsamen (kalten) Moleküle als umgekehrt, d.h. die kinetische Energie im kalten Bereich nimmt zu, es wird wärmer. Bei der Betrachtung des Gases als Kontinuum bezeichnet man diese Art der Wärmeübertragung als Wärmeleitung.

Die **Wärmeleitung** kann man auch als **Diffusion von thermischer Energie** bezeichnen.

Auch bei Flüssigkeiten sind die Moleküle frei beweglich, nur die mittleren Abstände sind entsprechend kleiner. Der Mechanismus der Wärmeleitung ist aber äquivalent.

Bei Festkörpern sitzen die Atome auf festen Gitterplätzen. Die thermische Energie manifestiert sich dort durch die Intensität der Gitterschwingungen. Ein Festkörper kann als System gekoppelter Oszillatoren betrachtet werden. Wird dieser auf der einen Seite erwärmt, werden dort die Atome zu heftigeren Schwingungen angeregt. Durch die Kopplung wird die Energie allmählich auch auf die kalte Seite übertragen. Bei elektrischen Leitern (Metallen) sind ein Teil der Elektronen im Festkörper drin frei beweglich, sie verhalten sich analog zu einem Gas. Dieses „Elektronengas“ bewirkt eine zusätzliche Wärmeleitung. Metalle leiten deshalb Wärme wesentlich schneller als andere Festkörper.

Das Gesetz von Fourier (Fourier's Law)

Wir haben bisher festgestellt, dass Wärme überall dorthin fliesst, wo Temperaturdifferenzen vorhanden sind. Diese qualitative Feststellung kann in der folgenden mathematischen Form ausgedrückt werden, welche man als Fourier'sches Gesetz bezeichnet:

$$\dot{q}'' = -\lambda \frac{dT}{dn}$$

mit:

\dot{q}'' : Wärmestromdichte = Wärmestrom durch eine Fläche [W/m²]

λ (in den USA k): Wärmeleitfähigkeit [W/mK] hängt vom Material ab.

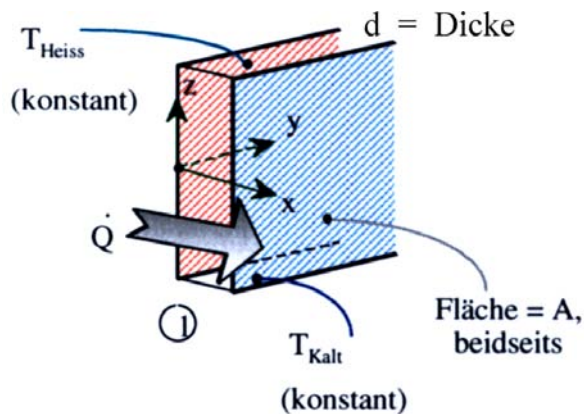
n : Richtung normal zur Fläche

In Worten ausgedrückt besagt das Fourier'sche Gesetz, dass die Wärmestromdichte proportional zum Temperaturgradienten (negatives Vorzeichen heisst in Richtung des Temperaturgefälles) ist. Die Proportionalitätskonstante (die sog.

Wärmeleitfähigkeit) ist eine Materialgrösse, welche in der Regel temperaturabhängig ist. Die folgende Tabelle zeigt ein paar typische Zahlenwerte.

Material	Wärmeleitfähigkeit (W/m.K)
Kupfer	380
Glas	1,05
Wasser	0,599
Luft	0,024
Styropor	0,03 – 0,05

Als Beispiel betrachten wir die in Fig. 1.6 gezeigte Platte der Dicke d mit der Temperatur T_H auf der einen und T_K auf der anderen Seite:



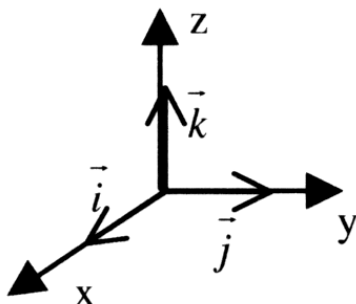
$$\dot{q}'' = \frac{\dot{Q}_1}{A} = -\lambda \cdot \left(\frac{dT}{dx} \right)_1 = \lambda \cdot \frac{T_H - T_K}{d}$$

Fig. 1.6 Beispiel zum Fourierschen Gesetz

Der Temperaturgradient wird oft durch den „Nabla-Operator“ ausgedrückt:

$$\dot{q}'' = -\lambda \cdot \nabla T$$

In einem 3D kartesischen Koordinatensystem schreibt sich der „Nabla“- resp. Gradient-Operator (siehe auch Fig. 1.7) wie folgt:



$$\dot{q}'' = -\lambda \cdot \left[\frac{dT}{dx} \cdot \vec{i} + \frac{dT}{dy} \cdot \vec{j} + \frac{dT}{dz} \cdot \vec{k} \right]$$

mit : $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ = Einheitsvektoren

Fig. 1.7: Einheitsvektoren im 3D Koordinatensystem

1.2.2 Konvektion

Der konvektive Wärmetransport ist (im Gegensatz zur Wärmeleitung) an die Bewegung eines Fluids (Gas, Flüssigkeit) gebunden. Das Prinzip des konvektiven Wärmeüberganges ist in Fig. 1.8 dargestellt.

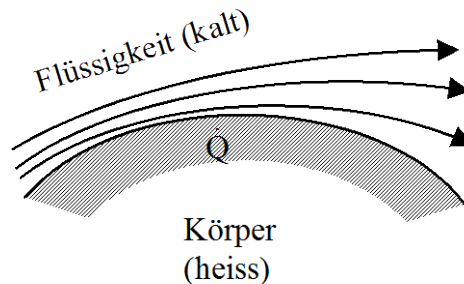


Fig. 1.8 Prinzip des konvektiven Wärmeüberganges

Ein heißer Körper wird von einem kalten Fluid angeströmt, dabei wird Wärme an das Fluid übertragen und in der Strömung abtransportiert. Für die quantitative Beschreibung des konvektiven Wärmeüberganges betrachten wir eine ebene Situation (siehe Fig. 1.9):

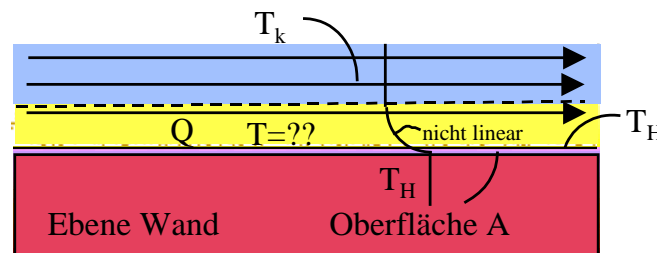


Fig. 1.9: Modellvorstellung zum konvektiven Wärmeübergang

Die Oberflächentemperatur der Wand beträgt T_H und die Temperatur des ungestörten Fluids sei T_K . Das Fluid strömt entlang der Wand. Der konvektive Wärmeübergang Wand/Fluid besteht aus zwei Teilprozessen:

- Entlang der Wand entsteht eine laminare Grenzschicht (hellgraue Zone, keine Geschwindigkeitskomponente senkrecht zur Wand). Die Wärme muss diese Grenzschicht durch **Wärmeleitung** durchqueren.
- Die so in das Fluid eingedrungene Wärme wird dann in der Strömung **konvektiv** abtransportiert.

Unsere Modellvorstellung besagt nun, dass der konvektive Wärmeübergang pro Fläche bei vorgegebenen Randbedingungen proportional zur Temperaturdifferenz ist:

$$\dot{q}'' = \frac{\dot{Q}}{A} = \alpha \cdot (T_H - T_K)$$

α ist der konvektive Wärmeübergangskoeffizient (englisch: h = heat transfer coefficient). Dieser Wärmeübergangskoeffizient ist nicht allgemein bekannt, er muss von Fall zu Fall bestimmt werden. Er hängt von verschiedenen Randbedingungen ab wie:

- Art der Strömung (laminar, turbulent)
- Oberflächenrauigkeit
- Geometrie (Ausdehnung, Ausrichtung wie waagrecht oder senkrecht)
- Art des Fluids
- Phasenübergänge (Sieden, Kondensieren)

Es ist dann Inhalt der detaillierten Diskussion über den konvektiven Wärmeübergang, Methoden anzugeben, wie die Wärmeübergangskoeffizienten für die einzelnen Fälle bestimmt werden können.

Je nach Randbedingungen unterscheidet man vier Arten des konvektiven Wärmeüberganges

1.2.2.1 Erzwungene Konvektion

Von erzwungener Konvektion sprechen wir, wenn die Strömungsbedingungen durch ein äusseres Element (Pumpe, Ventilator etc.) fest vorgegeben sind. Ein Beispiel dafür ist die Prozessorkühlung mittels Ventilator im PC (siehe Fig. 1.10).

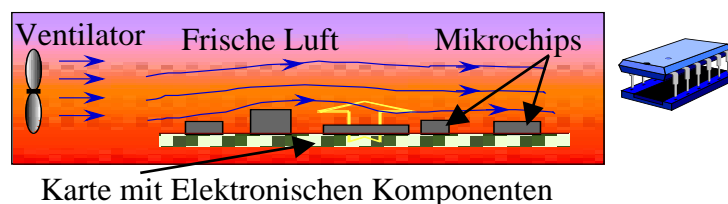


Fig. 1.10: Beispiel für erzwungene Konvektion

1.2.2.2 Natürliche Konvektion

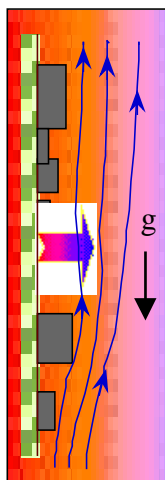


Fig. 1.11: Beispiel zur freien Konvektion

Natürliche Konvektion stellt sich an vertikal orientierten Flächen ein. Wenn zwischen Wand und Fluid eine Temperaturdifferenz herrscht, wärmt sich das Fluid in der Grenzschicht auf (resp. kühlt sich ab). Die damit verbundene Dichteänderung führt im Gravitationsfeld zu Auftriebs- (resp. Abtriebs)-Kräften, welche eine Strömung verursachen. Diese wird durch die vorhandene Temperaturdifferenz beeinflusst. Bei Elektronik-Karten mit kleinerer Wärmeabgabe kann die natürliche Konvektion für die Kühlung genutzt werden, indem diese senkrecht gestellt werden (siehe Fig. 1.11). Natürliche Konvektion spielt auch an Gebäudefassaden eine wichtige Rolle

1.2.2.3 Sieden

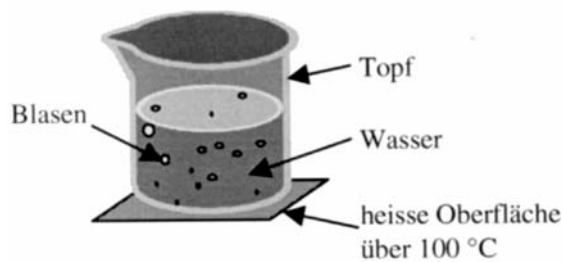


Fig. 1.12: Konvektiver Wärmeübergang beim Sieden

Liegt die Oberflächentemperatur oberhalb der Sättigungstemperatur einer Flüssigkeit bilden sich Dampfblasen. Im Beispiel des Kochtopfes (siehe Fig. 1.12) steigen diese senkrecht nach oben und erhöhen den Wärmeübergang enorm.

1.2.2.4 Kondensation

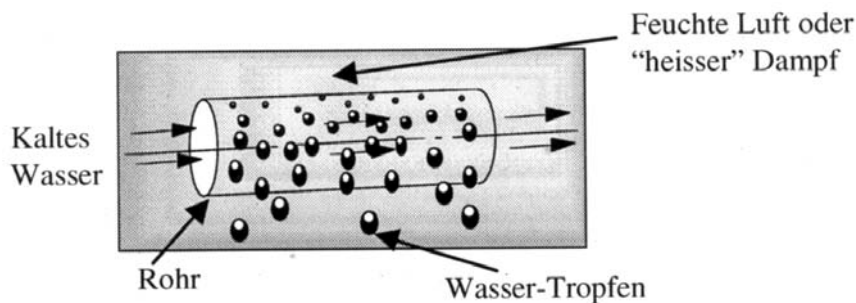


Fig. 1.13: Tropfenbildung bei der Kondensation

Liegt die Oberflächentemperatur unterhalb der Sättigungstemperatur des Dampfes, kondensiert dieser auf der Oberfläche. Der dabei entstehende Flüssigkeitsfilm bewegt sich durch die Schwerkraft nach unten und löst sich in Form von Tropfen ab (siehe Fig. 1.13). Bei dieser Art des konvektiven Wärmeüberganges können sehr hohe Wärmeübergangskoeffizienten erzielt werden.

Die folgende Tabelle gibt eine Übersicht über die Übergangskoeffizienten bei den verschiedenen Arten des konvektiven Wärmeüberganges:

Art der Konvektion	α [W/m ² ·K]
Natürliche Konvektion	
Gase	2 – 25
Flüssigkeiten	50 – 1'000
Erzwungene Konvektion	
Gase	25 – 250
Flüssigkeiten	50 – 20'000
Siedendes Wasser	2'000 – 25'000
Kondensation von Wasserdampf	5'000 – 100'000

1.2.3 Wärmestrahlung

Der Wärmetransport durch Wärmeleitung und Konvektion ist an Materie gebunden. Es gibt aber auch eine Wärmetransportart, die nicht an Materie gebunden ist und im Vakuum stattfinden kann, wie das in Fig. 1.14 dargestellte Beispiel zeigt.

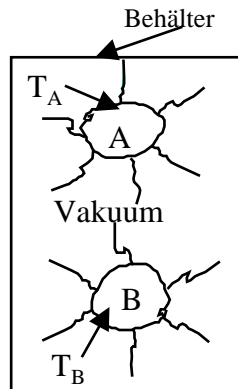


Fig. 1.14: Wärmetransport im Vakuum

Zwei Körper unterschiedlicher Temperatur sind in einem Behälter eingeschlossen. Der Behälter wird evakuiert (keine Leitung oder Konvektion).

Nach einer gewissen Zeit erreichen die Körper ein Temperaturgleichgewicht. Dieser Ausgleichsprozess beruht auf der sog.

Wärmestrahlung

Wärmestrahlung besteht aus elektromagnetischen Wellen. Diese werden von jedem Körper (auch Flüssigkeiten und Gase), der sich auf einer endlichen Temperatur befindet, emittiert, wenn Atome/Moleküle im Oberflächen nahen Bereich ihre Energiezustände ändern.

Das Wellenlängen-Spektrum der emittierten Strahlung hängt von der Temperatur ab. So liegt das Intensitätsmaximum für einen Körper auf Umgebungstemperatur (300 K) bei ca. 10 μ (Infrarot-Strahlung). Für unseren wichtigsten Wärmestrahler, die Sonne, deren Oberflächentemperatur bei ca. 5800 K liegt, befindet sich das Intensitätsmaximum im sichtbaren Bereich bei ca. 0.5 μ .

Für alle Körper besteht ein Zusammenhang zwischen dem Absorptionsvermögen und Emissionsvermögen einer Oberfläche. Ein Körper, der sämtliche auf ihn treffende Strahlung absorbiert, nennt man einen idealen **schwarzen Körper**. Ein solcher idealer Körper zeigt auch das maximal mögliche Emissionsvermögen (E_b), welches durch das Stefan-Boltzmann Gesetz beschrieben wird:

$$E_b = \sigma \cdot T^4 \quad \text{mit } \sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ W / m}^2 \cdot \text{K}^4$$

Dieses Gesetz lässt sich aus quanten-thermodynamischen Ueberlegungen herleiten. Für nicht ideale Körper (graue Körper) reduziert sich das Emissionsvermögen um einen Faktor ε :

$$E = \varepsilon \cdot \sigma \cdot T^4 \quad \text{mit } 0 < \varepsilon < 1$$

Für die Berechnung des netto Wärmeüberganges zwischen zwei verschiedenen Oberflächen betrachten wir die in Fig. 1.15 dargestellte Situation: Ein Hohlraum mit ideal schwarzer Oberfläche befindet sich auf der Temperatur T_1 . In diesen Hohlraum eingeschlossen ist ein schwarzer Körper mit der Temperatur T_2 .

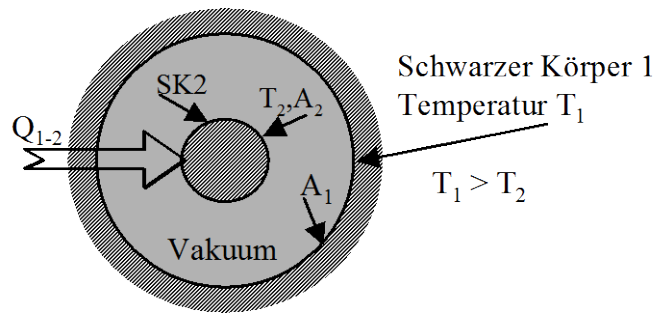


Fig. 1.15: Strahlungs-Wärmeaustausch zwischen zwei schwarzen Oberflächen

Der Netto-Wärmefluss kann nun allgemein beschrieben werden durch:

$$\frac{\dot{Q}_{1-2}}{A_1} = \sigma (T_1^4 - T_2^4)$$

Auf die genauere Bedeutung des Koeffizienten σ wird im Kapitel Strahlung eingegangen. Ist die Differenz $(T_1 - T_2) \ll T_1$ kann auch eine linearisierte Darstellung analog dem konvektiven Wärmeübergang gewählt werden:

$$\frac{\dot{Q}_{1-2}}{A_1} = \alpha_{Str} (T_1 - T_2)$$

wobei dann der Wärmeübergangskoeffizient für Strahlung α_{Str} unter anderem eine Funktion der mittleren Temperatur wird.

1.3 Kombiniertes Wärmeübergang

In praktisch jeder realen Situation treten die drei möglichen Arten der Wärmeübertragung kombiniert auf. Als Beispiel betrachten wir eine doppelwandige Isolierkanne für Kaffee, wo der Zwischenraum zwischen den Wänden mit Luft gefüllt ist (siehe Fig. 1.16)

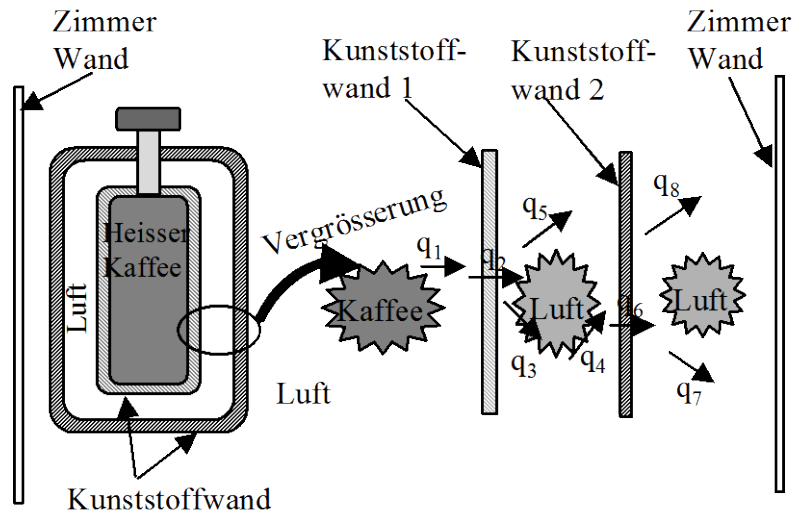


Fig. 1.16: Isolierkanne als Beispiel für kombinierten Wärmeübergang

Der Wärmetransport vom heißen Kaffee zur Zimmerwand (von wo er weiter in die Umgebung geht) kann in die folgenden Teil-Wärmeströme zerlegt werden:

- q_1 : **Natürliche Konvektion** vom Kaffee zur Wand 1.
- q_2 : **Leitung** durch Wand 1.
- q_3 : **Natürliche Konvektion** von der Wand 1 zur Luft.
- q_4 : **Natürliche Konvektion** von der Luft zur Wand 2.
- q_5 : **Netto - Wärmestrahlung** zwischen den Oberflächen der Wände 1 und 2.
- q_6 : **Leitung** durch Wand 2.
- q_7 : **Natürliche Konvektion** von der Wand 2 zur Luft ins Zimmer.
- q_8 : **Netto - Wärmestrahlung** zwischen der Oberfläche der Wand 2, und der Zimmer-Wand.

Grundsätzlich gibt es sowohl im Luftspalt als auch in der Zimmerluft zusätzliche Wärmeleitung, diese ist aber gegenüber der Konvektion vernachlässigbar. Diese detaillierte Analyse hilft uns nun, diesen Isolierkrug zu verbessern, so dass der Kaffee möglichst lange heiß bleibt. Eine optimierte Thermosflasche zeigt folgende Verbesserungen:

- Der Luftspalt wird evakuiert, so dass der konvektive Wärmeübergang zwischen den Wänden unterbunden wird.
- Die Oberflächen im Spalt werden mit einem Material (Metall) beschichtet, welches eine möglichst kleine Strahlungsemission aufweist, so kann der Wärmeübergang durch Strahlung reduziert werden

2 Die Wärmeleitungsgleichung

2.1 Grundsätzliche Überlegungen

Wir haben bis jetzt das Fourier'sche Gesetz kennengelernt, welches phänomenologisch den lokalen Wärmefluss mit dem vorhandenen Temperaturgradienten in Beziehung setzt, wobei die sogenannte Wärmeleitfähigkeit als (meist temperaturabhängige) Materialgrösse eine massgebende Rolle spielt.

Da sowohl die lokale Temperatur als auch der lokale Wärmefluss bei einem ingenieurmässig zu lösenden Problem unbekannt sein werden, genügt diese eine Gleichung mit zwei Unbekannten nicht. Für die zu berechnenden Wärmeflüsse muss das Temperaturfeld bekannt sein. Zudem ist der lokale Wärmefluss eine schlecht zu messende Grösse.

Um also zu einer Gleichung für das Temperaturfeld zu gelangen müssen wir eine der Unbekannten eliminieren, d.h. wir müssen ein zusätzliches physikalisches Prinzip anwenden, welches uns eine zweite Gleichung liefert. Ein solches Prinzip ist die Energieerhaltung (1. Hauptsatz der Thermodynamik), welches wir auf ein gedachtes Kontrollvolumen in ruhender Materie (fest, flüssig oder gasförmig) anwenden können.

In Worten ausgedrückt besagt dieses Prinzip:

Die zeitliche Änderung der inneren Energie im Kontrollvolumen ergibt sich aus der Differenz zwischen zu- und wegfliessendem Energiestrom und aus der innerhalb des Kontrollvolumens produzierten Wärme (aufgrund von Quellen).

Diesen Satz, mit dem wir so nicht rechnen können, wollen wir im folgenden als Gleichung formulieren, wobei wir schliesslich als Mass für die innere Energie die Temperatur verwenden wollen.

2.2 Die Energieerhaltungsgleichung

2.2.1 Differentielle Herleitung

Wie der oben formulierte Grundsatz für das Kontrollvolumen ($dx \cdot dy \cdot dz$) in mathematische Form gekleidet werden kann, ist in Fig. 2.1 erklärt.:

$$\frac{\partial E}{\partial t} = \sum_{i=x,y,z} \dot{Q}_i - \sum_{\substack{i=x+dx \\ y+dy \\ z+dz}} \dot{Q}_i + \dot{Q}_{\text{Quellen}}'''' dx \cdot dy \cdot dz \quad (1)$$

oder die Summen ausgeschrieben ($\dot{Q}_{\text{Quellen}}'''' = \text{Leistung pro Volumeneinheit}$):

$$\frac{\partial E}{\partial t} = \dot{Q}_x - \dot{Q}_{x+dx} + \dot{Q}_y - \dot{Q}_{y+dy} + \dot{Q}_z - \dot{Q}_{z+dz} + \dot{Q}_{\text{Quellen}}'''' \cdot dx \cdot dy \cdot dz \quad (2)$$

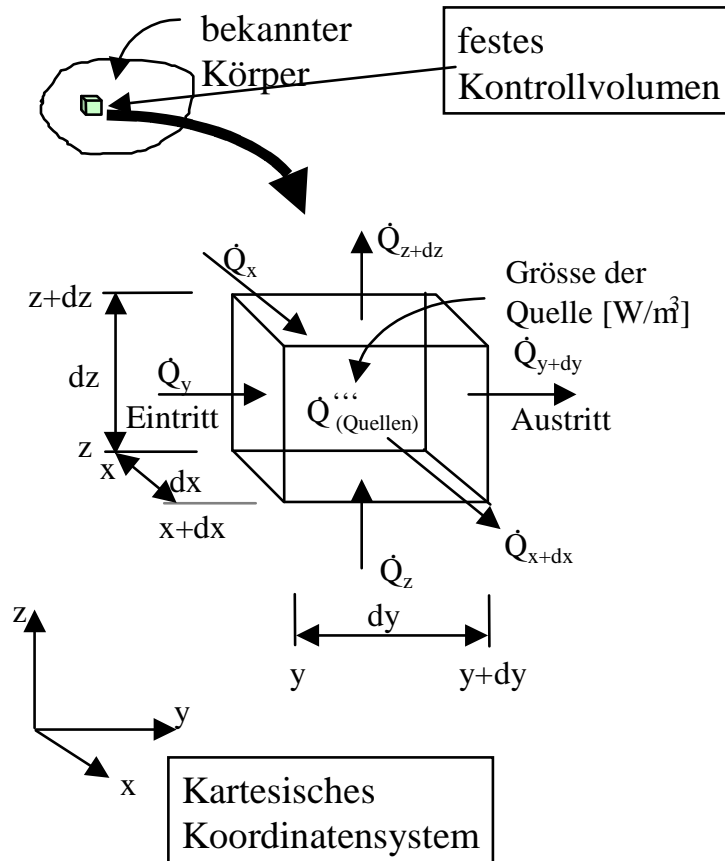


Fig. 2.1: Differentielle Darstellung der Wärmeflüsse am Kontrollvolumen

Die Terme \dot{Q}_{x+dx} , \dot{Q}_{y+dy} , \dot{Q}_{z+dz} können durch ihre entsprechenden Taylor-Entwicklungen dargestellt werden, wobei man die Glieder höherer Ordnung vernachlässigt:

$$\dot{Q}_{x+dx} = \dot{Q}_x + \frac{\partial \dot{Q}_x}{\partial x} dx + \underbrace{\left(\frac{1}{2!} \cdot \frac{\partial^2 \dot{Q}_x}{\partial x^2} \cdot dx^2 + \dots \right)}_{\text{Glieder höherer Ordnung}} \quad (3)$$

$$\dot{Q}_{y+dy} = \dot{Q}_y + \frac{\partial \dot{Q}_y}{\partial y} dy + (\text{G.h.O.}) \quad (4)$$

$$\dot{Q}_{z+dz} = \dot{Q}_z + \frac{\partial \dot{Q}_z}{\partial z} dz + (\text{G.h.O.}) \quad (5)$$

Die Darstellungen (3) – (5) können nun in (2) eingesetzt werden:

$$\frac{\partial E}{\partial t} = \dot{Q}_x - \dot{Q}_x - \frac{\partial \dot{Q}_x}{\partial x} dx + \dot{Q}_y - \dot{Q}_y - \frac{\partial \dot{Q}_y}{\partial y} dy + \dot{Q}_z - \dot{Q}_z - \frac{\partial \dot{Q}_z}{\partial z} dz + \dot{Q}_{\text{Quellen}}'' dx \cdot dy \cdot dz$$

resp:

$$\frac{\partial E}{\partial t} = - \frac{\partial \dot{Q}_x}{\partial x} dx - \frac{\partial \dot{Q}_y}{\partial y} dy - \frac{\partial \dot{Q}_z}{\partial z} dz + \dot{Q}_{\text{Quellen}}'' dx \cdot dy \cdot dz \quad (6)$$

Für den Wärmestrom kennen wir bereits das Fourier'sche Gesetz:

$$\dot{Q}_x = -\lambda \cdot dy \cdot dz \frac{\partial T}{\partial x} \quad (7)$$

$$\dot{Q}_y = -\lambda \cdot dx \cdot dz \frac{\partial T}{\partial y} \quad (8)$$

$$\dot{Q}_z = -\lambda \cdot dx \cdot dy \frac{\partial T}{\partial z} \quad (9)$$

Wenn wir die Ausdrücke (7) – (9) in die bisherige Form der Erhaltungsgleichung einsetzen, erhalten wir:

$$\frac{\partial E}{\partial t} = dx \cdot dy \cdot dz \cdot \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial z} \right) + \dot{Q}_{\text{Quellen}}''' \right] \quad (10)$$

Schliesslich wollen wir die Energie durch die Temperatur ausdrücken:

$$\text{mit:} \quad E = m \cdot c \cdot T = \rho \cdot dx \cdot dy \cdot dz \cdot c \cdot T$$

erhalten wir (die Dichte ρ und die spezifische Wärme c sind bekannte Materialgrössen und werden als konstant angenommen):

$$\frac{\partial E}{\partial t} = \rho \cdot c \cdot dx \cdot dy \cdot dz \frac{\partial T}{\partial t} \quad (11)$$

Wenn wir nun den Ausdruck (11) in die Energieerhaltungsgleichung (10) einsetzen, erhalten wir eine Gleichung, die nur die Temperatur T als Unbekannte enthält. Deren Lösung liefert uns bei bekannten Randbedingungen das Temperaturfeld

$$\rho \cdot c \cdot dx \cdot dy \cdot dz \frac{\partial T}{\partial t} = dx \cdot dy \cdot dz \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial z} \right) + \dot{Q}_{\text{Quellen}}''' \right],$$

was man noch durch das Volumenelement ($dx \cdot dy \cdot dz$) kürzen kann:

$$\boxed{\rho \cdot c \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial z} \right) + \dot{Q}_{\text{Quellen}}'''} \quad (12)$$

Diese Gleichung gilt für jede beliebig temperaturabhängige Wärmeleitfähigkeit λ , für deren Lösung muss aber natürlich die Funktion $\lambda(T)$ bekannt sein. Führen wir jetzt noch den sog. Nabla-Operator ein:

$$\vec{\nabla} T = \vec{i} \frac{\partial T}{\partial x}, \vec{j} \frac{\partial T}{\partial y}, \vec{k} \frac{\partial T}{\partial z}$$

erhalten wir die folgende elegante Form der Wärmeleitungsgleichung (heat conduction equation); (\bullet) steht für das Skalarprodukt von zwei Vektoren:

$$\boxed{\rho \cdot c \frac{\partial T}{\partial t} = \vec{\nabla} \cdot (\lambda \cdot \vec{\nabla} T) + \dot{Q}_{\text{Quellen}}'''} \quad (13)$$

In vielen Fällen können wir die Temperaturabhängigkeit der Wärmeleitfähigkeit vernachlässigen und λ als konstant annehmen. λ kann dann vor den Operator gezogen werden und (13) vereinfacht sich dann zu:

$$\rho \cdot c \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \cdot \nabla^2 T + \dot{Q}_{\text{Quellen}}''' \quad (14)$$

Wenn wir jetzt noch die Temperaturleitfähigkeit a einführen mit:

$$a = \frac{\lambda}{\rho \cdot c} \quad \left[\frac{\text{m}^2}{\text{sec}} \right]$$

und im folgenden den Laplace-Operator Δ benutzen:

$$\nabla^2 = (\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}) = \Delta = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right)$$

erhalten wir die folgende elegante Gleichung:

$$\boxed{\frac{1}{a} \frac{\partial T}{\partial t} = \Delta T + \frac{1}{\lambda} \cdot \dot{Q}_{\text{Quellen}}'''} \quad (15)$$

Wärmequellen im Material drin können entweder von dissipierter elektrischer Leistung, absorbierte Strahlung in semitransparenten Materialien oder im Material eingeschlossener Radioaktivität herrühren. Für die meisten Anwendungen der Maschineningenieure existieren keine solche Quellen. (15) vereinfacht sich weiter zu:

$$\boxed{\frac{1}{a} \frac{\partial T}{\partial t} = \Delta T} \quad (16)$$

Oft interessiert uns eine stationäre Lösung, wo alle zeitlichen Ableitungen verschwinden (z.B. die Temperaturverteilung in einem Maschinenteil bei stationärem Dauerbetrieb). Die für diesen Fall zu lösende Gleichung lautet dann:

$$\boxed{\Delta T = 0} \quad (17)$$

Diese Gleichung ist allgemein bekannt unter dem Namen **Laplace-Gleichung**. Für den stationären Fall mit eingeschlossenen Wärmequellen lautet die zu lösende Gleichung:

$$\Delta T + \frac{\dot{Q}_{\text{Quellen}}'''}{\lambda} = 0 \quad (18)$$

Diese Form der Gleichung ist bekannt unter dem Namen **Poisson-Gleichung**.

Jede Variante dieser Gleichungen (13) oder (15) – (18) erlauben die Berechnung des dreidimensionalen Temperaturfeldes, wenn die notwendigen Randbedingungen gegeben sind. Jede dieser Varianten gilt für einen speziellen Fall, der sich durch die folgenden Eigenschaften auszeichnet:

- Stationär/instationär
- mit/ohne innere Wärmequellen
- λ konstant oder temperaturabhängig.

Die Operator-Schreibweise der Gleichungen (15) – (18) hat den Vorteil, dass diese unabhängig vom gewählten Koordinatensystem ist. Sie gilt sowohl für kartesische, Zylinder- und Kugel-Koordinaten, indem die verwendeten Operatoren in jedem Koordinatensystem ihre spezifische Darstellung haben.

Zylinder-Koordinaten orientieren sich entlang der z-Achse eines Zylinders mit dem Abstand r zur Achse und dem Orientierungswinkel θ (siehe Fig. 2.2).

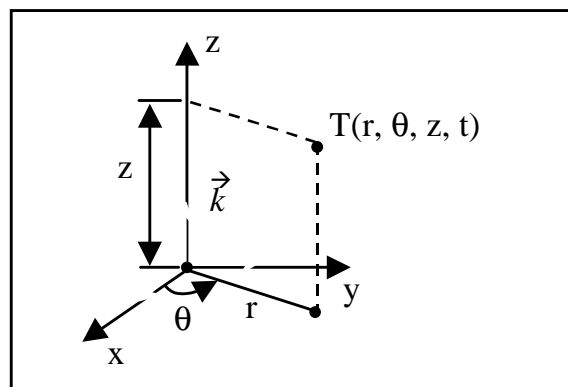


Fig. 2.2: Prinzip der Zylinder-Koordinaten

Der $\vec{\nabla}$ -Operator (resp. grad-Operator) in Zylinderkoordinaten:

$$\vec{\nabla} = \left[\frac{\partial}{\partial r}, \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}, \frac{\partial}{\partial z} \right]$$

Für den Δ -Operator (resp. Laplace Operator) gilt:

$$\Delta = \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right]$$

Mit Hilfe dieser Operatoren stellt sich die Wärmeleitungsgleichung (13) wie folgt dar:

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\lambda r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial z} \right) + \dot{Q}_{\text{Quellen}}'''$$

oder für den Fall, dass λ als konstant angenommen werden kann:

$$\frac{1}{a} \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{\dot{Q}_{\text{Quellen}}'''}{\lambda}$$

Kugel (resp. sphärische) Koordinaten werden vorzugsweise für punktsymmetrische Probleme angewendet. Sie werden durch den Abstand r vom Mittelpunkt, den Azimutwinkel θ und den Elevationswinkel ϕ festgelegt (siehe Fig. 2.3).

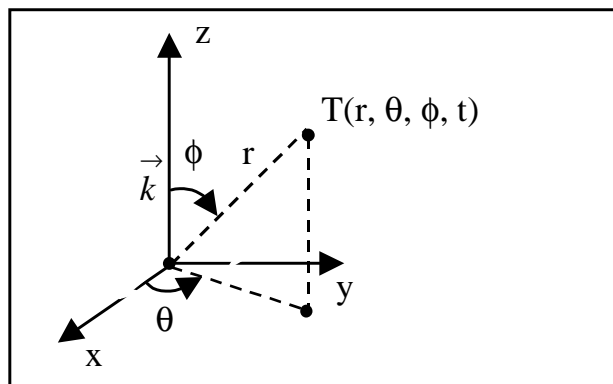


Fig. 2.3: Die Elemente der sphärischen resp. Kugelkoordinaten

Für die Operatoren gilt in der Darstellung für sphärische Koordinaten:

$$\vec{\nabla} - \text{Operator:} \quad \vec{\nabla} = \left[\frac{\partial}{\partial r}, \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \phi}; \frac{1}{r \cdot \sin \phi} \frac{\partial}{\partial \theta} \right]$$

$$\Delta - \text{Operator:} \quad \Delta = \left[\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \phi} \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\sin \phi \frac{\partial}{\partial \phi} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \phi} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right]$$

Mit diesen Operatoren schreibt sich die Wärmeleitungsgleichung als:

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(\lambda r^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \phi} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \phi} \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\lambda \sin \phi \frac{\partial T}{\partial \phi} \right) + \dot{Q}_{\text{Quellen}}'''$$

oder mit konstanter Wärmeleitfähigkeit λ

$$\frac{1}{a} \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \phi} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r^2 \sin \phi} \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\sin \phi \frac{\partial T}{\partial \phi} \right) + \frac{\dot{Q}_{\text{Quellen}}'''}{\lambda}$$

2.2.2 Integrale Herleitung

Bisher haben wir die Wärmeleitungsgleichung durch eine Betrachtung an einem infinitesimalen Volumenelement hergeleitet. Diese Herleitung kann aber auch durch eine integrale Betrachtung an einem endlichen Kontrollvolumen gemacht werden (siehe Fig. 2.4).

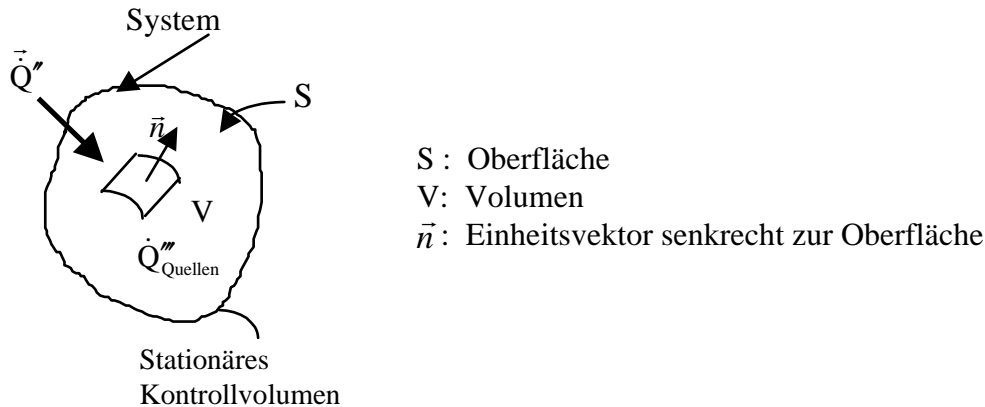


Fig. 2.4: Darstellung zur integralen Betrachtung

Sowohl die zeitliche Änderung der Energiedichte als auch die lokale Quellenstärke werden jetzt ersetzt durch die entsprechenden Volumenintegrale:

Energieinhalt:

$$\iiint_V \frac{\partial}{\partial t} (\rho \cdot e) \cdot dV$$

(1)

Gesamtheit der Quellen:

$$\iiint_V \dot{Q}'''_{\text{Quellen}} dV$$

(2)

Den Netto-Wärmefluss in das resp. aus dem Kontrollvolumen können wir durch ein Oberflächenintegral darstellen. Und zwar betrachten wir das Skalarprodukt zwischen dem Wärmeflussvektor und dem nach aussen gerichteten Normalenvektor auf der Oberfläche. Wir verwenden die folgende Definition:

Gesamter Wärmestrom:

$$\vec{Q} = - \iint_S (\vec{Q}'' \cdot \vec{n}) \cdot dS$$

(3)

Erinnern wir uns an die Bedeutung des Skalarproduktes:

$$(\vec{Q}'' \cdot \vec{n}) = |\vec{Q}''| |\vec{n}| \cos \theta$$

Für den Bereich $0^\circ < \theta < 90^\circ$ ist $\cos \theta$ und damit das Skalarprodukt positiv. Das ist der Bereich, wo der Wärmefluss wie der Normalenvektor nach aussen gerichtet ist. Für den Bereich $90^\circ < \theta < 180^\circ$ ist $\cos \theta$ negativ und damit auch das Skalarprodukt. Für diesen Winkelbereich ist der Wärmefluss nach innen gerichtet. Weil wir aber den nach **innen gerichteten Wärmefluss als positiv**

definieren, müssen wir in (3) das negative Vorzeichen einführen (siehe auch Fig. 2.5).

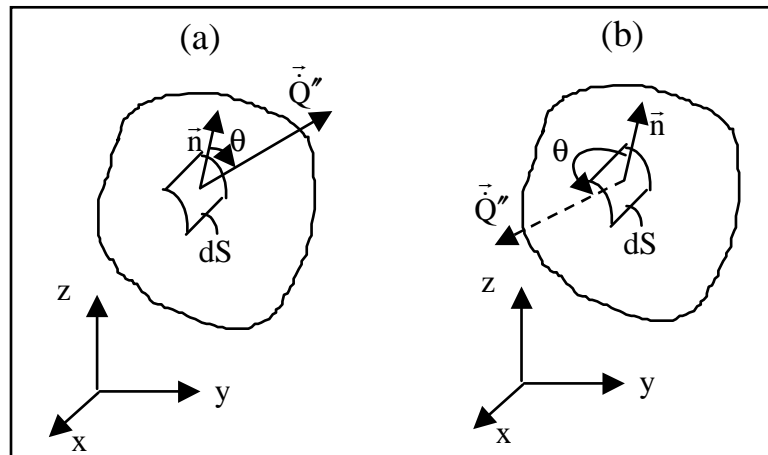


Fig. 2.5: Definitionen zum Oberflächenintegral des Wärmeflusses

Den Wärmefluss können wir durch das Fourier'sche Gesetz ausdrücken und in (3) einsetzen:

Wegen: $\vec{Q}'' = -\lambda \vec{\nabla} T$ wird
$$-\iint_S (\vec{Q}'' \cdot \vec{n}) dS = \iint_S \lambda \cdot (\vec{\nabla} T \cdot \vec{n}) \cdot dS$$

Mit Hilfe der neu gebildeten integralen Terme können wir jetzt den Energieerhaltungssatz in integraler Form aufstellen:

$$\iiint_V \frac{\partial}{\partial t} (\rho \cdot c \cdot T) \cdot dV = \iint_S \lambda \cdot \vec{\nabla} T \cdot \vec{n} dS + \iiint_V \dot{Q}_{\text{Quellen}} dV \quad (4)$$

(In Worten: Die zeitliche Änderung des Energieinhaltes unseres Kontrollvolumens ist gleich der netto zufließenden Wärme plus der durch die internen Quellen produzierten Wärme).

Die obige Gleichung 4 kann nun umgeformt werden, indem wir uns den aus der Mathematik bekannten Satz von Gauss (engl: Divergence Theorem) zu nutze machen. Für ein beliebiges Vektorfeld \vec{U} gilt:

$$\iint_S (\vec{U} \cdot \vec{n}) \cdot dS = \iiint_V \text{div}(\vec{U}) \cdot dV \quad \text{resp.:} \quad \iint_S (\vec{U} \cdot \vec{n}) \cdot dS = \iiint_V (\vec{\nabla} \cdot \vec{U}) \cdot dV$$

(Die Divergenz eines Vektorfeldes hat die anschauliche Bedeutung von dessen Quellen). Auf den Fall unseres Wärmefluss-Problems angewendet ergibt dies:

$$\iint_S \lambda \vec{\nabla} T \cdot \vec{n} dS = \iiint_V \vec{\nabla} \cdot (\lambda \vec{\nabla} T) dV$$

Das Oberflächenintegral kann also mit dem Gauss'schen Satz in ein Volumenintegral umgewandelt werden. Eingesetzt in (4) ergibt dies:

$$\iiint_V \frac{\partial}{\partial t} (\rho c T) dV = \iiint_V \vec{\nabla} \cdot (\lambda \vec{\nabla} T) dV + \iiint_V \dot{Q}_{\text{Quellen}}''' dV$$

Die drei Volumenintegrale können zu einem einzigen zusammengefasst werden:

$$\iiint_V \left\{ \frac{\partial}{\partial t} (\rho c T) - \vec{\nabla} \cdot (\lambda \vec{\nabla} T) - \dot{Q}_{\text{Quellen}}''' \right\} dV = 0$$

Was für das Integral gilt, gilt auch für den Integranden:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho c T) = \vec{\nabla} \cdot (\lambda \vec{\nabla} T) + \dot{Q}_{\text{Quellen}}'''$$

Wenn wir ρ und c konstant setzen, erhalten wir wiederum die zu (13) identische Wärmeleitungsgleichung:

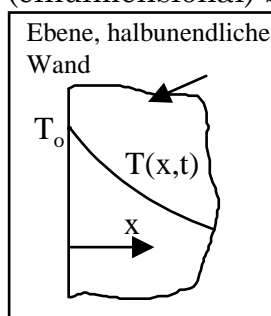
$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \vec{\nabla} \cdot (\lambda \vec{\nabla} T) + \dot{Q}_{\text{Quellen}}'''$$

2.3 Rand- und Anfangsbedingungen

Die Wärmeleitungsgleichung beschreibt das physikalische Phänomen der Wärmeleitung. Sie stellt eine partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung dar, welche uns erlaubt für vorgegebene Probleme die Temperaturfelder zu berechnen. Die Lösung von Differentialgleichungen bedarf immer die Vorgabe entsprechender Anfangs- oder Randbedingungen. Damit wird dann auch das zu lösende Problem beschrieben.

2.3.1 Randbedingungen

Damit ein ingenieurmässiges Problem definiert ist, müssen physikalische Grössen (Temperatur, Wärmefluss) auf den Rändern des zu untersuchenden Bereichs (Körpers) definiert werden. Solche Randbedingungen müssen während der ganzen Zeitdauer gelten, indem ein Problem untersucht werden soll. Sie können eine Funktion der Zeit sein. Je nach Art der physikalischen Grösse, die vorgegeben wird, unterscheiden wir **drei Arten von Randbedingungen**. Wir wollen diese hier anhand des Beispiels der halb unendlichen ebenen Wand (eindimensional) betrachten:



Randbedingung erster Art:

Die Temperatur der Oberfläche wird vorgegeben, d.h.

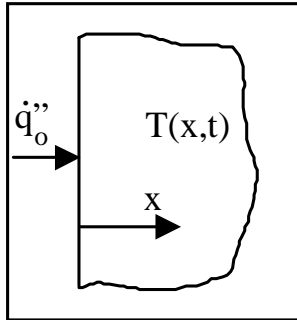
$$T(x=0, t) = T_0(t)$$

wobei T_0 auch eine Funktion der Zeit sein darf

Randbedingung zweiter Art:

Der Wärmestrom an der Oberfläche ist bekannt.

(Beispiel: vorgegebene absorbierte Strahlungsleistung)



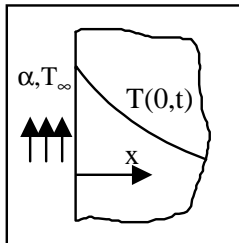
$$-\lambda \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right) \bigg|_{x=0} = \dot{q}''(0)$$

Eine spezielle Randbedingung gilt für den ideal isolierten Körper, dort verschwindet der Wärmestrom auf der Oberfläche:

$$\dot{q}''_0 = 0 \quad \text{resp.} \quad \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right) \bigg|_{x=0} = 0$$

Randbedingung dritter Art:

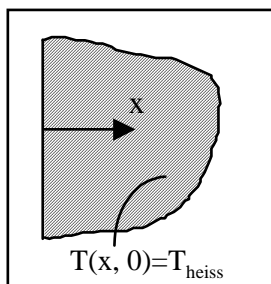
Es wird ein konvektiver Wärmeübergang auf der Aussenfläche vorgegeben.



$$\underbrace{\lambda \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right) \bigg|_{x=0}}_{\text{Körper}} = \underbrace{\alpha [T(0,t) - T_\infty]}_{\text{umgebendes Fluid}}$$

Diese Randbedingung beinhaltet sowohl einen konvektiven Wärmeübergangskoeffizienten als auch die Temperatur T_∞ des ungestörten, umgebenden Fluids.

2.3.2 Anfangsbedingungen



Die Anfangsbedingungen legen das dreidimensionale Feld entweder in Form der Temperatur oder des Wärmeflusses zu Beginn der Untersuchung fest:

Beispiel: $T(x, t = 0) = T_{\text{heiss}}$

(Werkstück, das zur Zeit $t = 0$ aus dem Ofen kommt.)

3 Stationäre eindimensionale Wärmeleitung

Die Wärmeleitungsgleichung ist eine lineare partielle Differentialgleichung 2. Ordnung. In diesem Kapitel wird die Lösung dieser Differentialgleichung für eine spezielle Klasse von Problemen diskutiert: wir beschränken uns auf eine einzige räumliche Dimension und betrachten nur stationäre Situationen, d.h. Fälle, wo die Temperatur und der Wärmefluss in jedem Punkt konstant bleiben. Wir werden sehen, dass diese Modellvorstellung für eine ganze Reihe von Ingenieurproblemen angewendet werden kann.

3.1 Wärmefluss durch die ebene Wand

Die Situation des Wärmeflusses durch die ebene Wand entspricht dem Wärmeverlust eines Hauses im Winter (siehe Fig. 3.1)

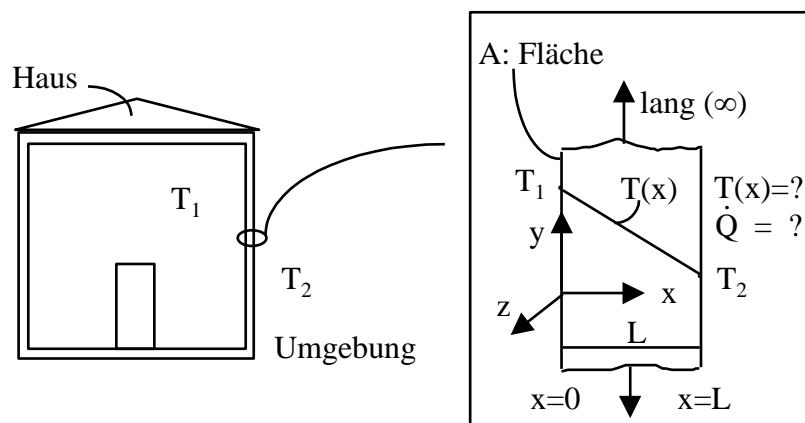


Fig. 3.1 Temperaturverteilung in einer Hauswand

Wenn Wärme aus dem inneren des Hauses nach aussen fließt, setzt sich dieser Vorgang aus folgenden Teilen zusammen:

- dem konvektiven Wärmeübergang von der Raumluft an die innere Oberfläche
- der Wärmeleitung durch die Wand
- dem konvektiven Wärmeübergang von der Wand an die Aussenluft.

Bekannt sind normalerweise die Aussenluft- und die Raumluft-Temperatur. Der konvektive Wärmeübergang ist mit einem Temperaturgefälle verbunden, die Oberflächentemperaturen sind somit unbekannt. Um das Problem einfach zu halten nehmen wir für den Moment an, dass die Oberflächentemperaturen bekannt sind.

Das mathematische Modell besteht aus der Wärmeleitungsgleichung:

$$\underbrace{\frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t}}_{\substack{=0 \\ \text{(stationär)}}} = \underbrace{\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}}_{\substack{=0 \\ \text{(eindimensional)}}} + \underbrace{\frac{\dot{Q}_{\text{Quellen}}'''}{\lambda}}_{\substack{=0 \\ \text{(keine Quellen)}}}$$

Für den stationären eindimensionalen Fall ohne innere Wärmequellen bleibt somit übrig:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0$$

Diese Gleichung ist mit folgenden Randbedingungen zu lösen:

$$\begin{array}{ll} x=0: & T(0)=T_1 \\ x=L: & T(L)=T_2 \end{array}$$

Die Lösung dieser Gleichung ist sehr einfach, wir erhalten sie durch zweifache Integration:

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial x} &= C_1 \\ T(x) &= C_1 \cdot x + C_2 \end{aligned}$$

Die beiden Integrationskonstanten können durch einsetzen der Randbedingungen ermittelt werden:

$$\begin{array}{lll} x=0: & T_1 = 0 + C_2 & C_2 = T_1 \\ x=L: & T_2 = C_1 \cdot L + T_1 & C_1 = \frac{T_2 - T_1}{L} \end{array}$$

Damit erhalten wir die vollständige Lösung des Problems, nämlich die Temperaturverteilung innerhalb der Wand (als Funktion von x):

$$T(x) = \frac{T_2 - T_1}{L} \cdot x + T_1$$

Da die Wärmeleitungsgleichung eine Differentialgleichung zweiter Ordnung ist, treten bei der Lösung zwei Integrationskonstanten auf, das bedeutet, dass auch zwei Randbedingungen gegeben sein müssen, damit die Lösung bestimmt ist.

Nachdem die Temperaturverteilung festgelegt ist, kann auch der Wärmefluss in jedem beliebigen Punkt bestimmt werden durch Anwendung des Fourier'schen Gesetzes:

$$\dot{Q}_x'' = -\lambda \frac{dT}{dx} = \lambda \cdot \frac{(T_1 - T_2)}{L} \quad \left[\frac{W}{m^2} \right]$$

Da T(x) eine lineare Funktion ist, bleibt der Wärmefluss (als Ableitung der Temperaturfunktion) überall konstant. Dies entspricht auch der Voraussetzung der stationären Lösung: der zufließende Wärmestrom muss für jede beliebige Querschnittsfläche gleich dem wegfließenden sein.

$$\dot{Q}_x''(0) = \dot{Q}_x''(L) = \frac{\lambda}{L}(T_1 - T_2)$$

Den gesamten Wärmestrom erhalten wir durch Multiplikation der Wärmestromdichte mit der gesamten Fläche A:

$$\dot{Q}_x = \dot{Q}_x'' \cdot A = \frac{\lambda \cdot A}{L}(T_1 - T_2) \quad [\text{W}]$$

3.2 Der Begriff des Wärmeleitwiderstandes

Zwischen Wärmeströmen und elektrischen Strömen existiert eine Analogie. Die Herleitung dieser Analogie ermöglicht es uns, gewisse Rechenregeln, die wir aus der Elektrizitätslehre kennen auch für Wärmeströme zu benutzen. Insbesondere können wir analog zum elektrischen Widerstand auch einen Wärmeleitwiderstand definieren.

Beginnen wir mit der Darstellung für den Wärmestrom:

$$\dot{Q}_x = \frac{\lambda \cdot A}{L}(T_1 - T_2) = \frac{\lambda \cdot A}{L} \cdot \Delta T$$

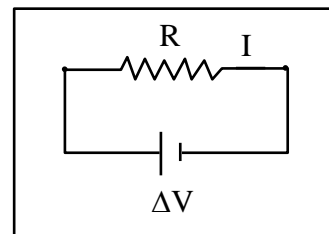
und stellen dem das Ohm'sche Gesetz gegenüber:

$$I = \frac{1}{R} \cdot \Delta V$$

R : Widerstand

I : Strom

ΔV : Potential



So können wir durch den einfachen Vergleich die folgende Analogie einführen:

$$(T_1 - T_2) = \Delta T \quad \rightarrow \quad \Delta V$$

$$\dot{Q}_x \quad \rightarrow \quad I$$

$$\frac{1}{\lambda \cdot A / L} = \frac{L}{\lambda \cdot A} \quad \rightarrow \quad R$$

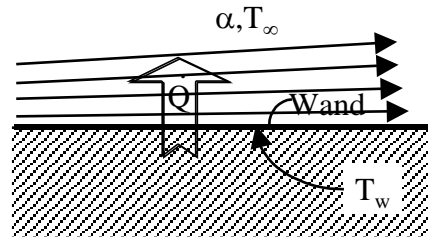
Aus dieser Analogie definieren wir also einen Wärmeleitwiderstand (auf englisch: R_{th} = thermal resistance):

$$R_w = \frac{1}{A} \cdot \frac{L}{\lambda}$$

Die selbe Analogie können wir auch auf den konvektiven Wärmeübergang an der Oberfläche anwenden. Diesen konvektiven Wärmeübergang haben wir bereits mittels des sog. konvektiven Wärmeübergangskoeffizienten α beschrieben:

$$\dot{Q} = \alpha \cdot A \cdot (T_w - T_\infty)$$

Fig. 3.2 Widerstand beim konvektiven Wärmeübergang



Die selbe Analogiebetrachtung wie oben führt zum konvektiven Wärmeleitwiderstand (oder auch: Oberflächen-Wärmeübergangswiderstand):

$$R_w = \frac{1}{A} \cdot \frac{1}{\alpha}$$

3.3 Ebene Wand mit Konvektion an den Oberflächen

Im vorherigen Beispiel haben wir den Wärmedurchgang durch die Wand nur zwischen den beiden Wandoberflächen betrachtet. Hier wird jetzt das gesamte Problem für den Wärmeübergang zwischen Raumluft und Aussenluft gelöst. Die Lösung gilt auch für den Wärmeaustausch zwischen zwei Flüssigkeiten durch die Wand eines Wärmetauschers (siehe Fig. 3.3).

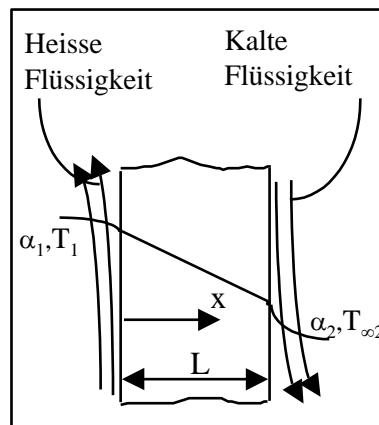


Fig. 3.3: Wärmedurchgang mit konvektivem Wärmeübergang

Für die Einfachheit der Lösung nehmen wir an, dass der innere und der äussere Wärmeübergangskoeffizient gleich ist, d.h. $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$. und durch einen bekannten Wert vorgegeben. Das mathematische Modell ist dasselbe wie im vorherigen Fall (stationäre eindimensionale Wärmeleitung):

$$\frac{d^2 T}{dx^2} = 0$$

Nur müssen die Randbedingungen jetzt anders formuliert werden. Anstelle der vorgegebenen Oberflächentemperatur sind jetzt die Fluid-Temperaturen beidseits der Wand sowie der konvektive Wärmeübergangskoeffizient vorgegeben. Die Randbedingung wird in Form des Wärmeflusses formuliert:

$$\begin{aligned} x=0: \quad \lambda \cdot \frac{dT}{dx} &= \alpha \cdot (T(0) - T_{\infty 1}) \\ x=L: \quad -\lambda \cdot \frac{dT}{dx} &= \alpha \cdot (T(L) - T_{\infty 2}) \end{aligned}$$

Für die allgemeine Lösung der Differentialgleichung gilt wiederum:

$$T(x) = C_1 \cdot x + C_2$$

Setzen wir diese Lösung in die Randbedingungen ein erhalten wir:

$$\begin{aligned} x=0: \quad \lambda \cdot C_1 &= \alpha \cdot [C_1 \cdot 0 + C_2 - T_{\infty 1}] \\ x=L: \quad -\lambda \cdot C_1 &= \alpha \cdot [C_1 \cdot L + C_2 - T_{\infty 2}] \end{aligned}$$

Die Lösung dieses Gleichungssystems führt zu:

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{\alpha \cdot \frac{T_{\infty 2} - T_{\infty 1}}{2 + \frac{\alpha \cdot L}{\lambda}}}{\lambda} = \frac{\alpha \cdot \frac{T_{\infty 2} - T_{\infty 1}}{2 + Bi}}{\lambda} \\ C_2 &= \frac{T_{\infty 1} \cdot \left(1 + \frac{\alpha \cdot L}{\lambda}\right) + T_{\infty 2}}{2 + \frac{\alpha \cdot L}{\lambda}} = \frac{T_{\infty 1} \cdot (1 + Bi) + T_{\infty 2}}{2 + Bi} \end{aligned}$$

Die Einführung der Dimensionslosen Biot-Zahl (Bi) vereinfacht offensichtlich die Schreibweise des Resultates.

$$Bi = \frac{\alpha \cdot L}{\lambda}$$

Die Biot-Zahl stellt das Verhältnis des Wärmeleitungswiderstandes im inneren eines Körpers (bezüglich einer charakteristischen Ausdehnung L) zum äusseren konvektiven Wärmeübergangswiderstand dar. Die Biot-Zahl ist eine charakteristische Grösse für unser Wärmeübergangsproblem. Für grosse Biot-Zahlen überwiegt der Wärmeleit-Widerstand im inneren des Körpers und wir werden die hauptsächlichen Temperaturdifferenzen auch innerhalb des Körpers finden. Für kleine Biot-Zahlen überwiegt der Widerstand des konvektiven Wärmeüberganges und wir finden die hauptsächliche Temperaturdifferenz zwischen Oberfläche des Körpers und umgebendem Fluid.

Das Temperaturfeld in der Wand ist somit bestimmt durch:

$$T(x) = \frac{T_{\infty 2} - T_{\infty 1}}{2 + Bi} \cdot \frac{\alpha}{\lambda} \cdot x + \frac{T_{\infty 2} - T_{\infty 1}}{2 + Bi} + T_{\infty 1}$$

Die Wärmestromdichte (resp. der gesamte Wärmestrom) ist wiederum unabhängig von x , was aus dem linearen Temperaturverlauf und der Vorgabe der stationären Situation folgt.

$$\dot{Q}_x'' = -\lambda \frac{dT}{dx} = \frac{T_{\infty 1} - T_{\infty 2}}{2 + Bi} \cdot \alpha \quad \left[\frac{W}{m^2} \right]$$

$$\dot{Q}_x = \dot{Q}_x'' \cdot A = \frac{T_{\infty 1} - T_{\infty 2}}{2 + Bi} \cdot \alpha \cdot A \quad [W]$$

Hier haben wir jetzt den Wärmestrom aus der Ableitung des zuvor berechneten Temperaturfeldes berechnet. Viel einfacher und direkter erhalten wir diesen Wärmestrom aber aus der Anwendung des Ohm'schen Gesetzes. Die Situation wird hier durch drei in Serie geschaltete Widerstände dargestellt (siehe Fig. 3.4), nämlich zwei für die Oberflächen-Übergangswiderstände und einen für den Wärmeleitwiderstand der Wand selbst.

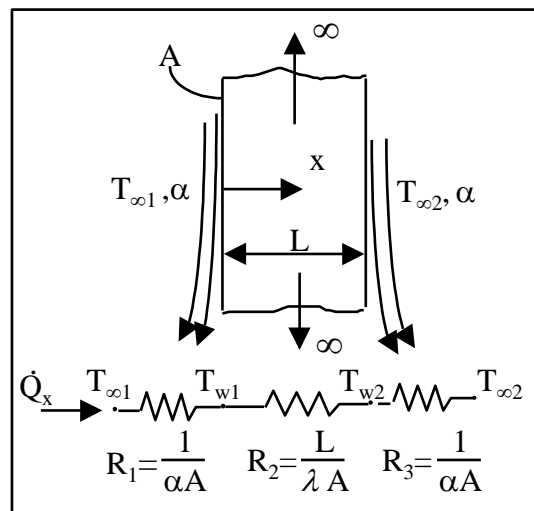


Fig. 3.4: Anwendung des Ohmschen Gesetzes auf die Wand mit konvektivem Wärmeübergang

Der Ausdruck für den Wärmestrom kann formuliert werden, ohne dass die Oberflächentemperaturen T_{w1} und T_{w2} bekannt sind:

$$\dot{Q}_x = \frac{T_{\infty 1} - T_{\infty 2}}{\sum R} = \frac{T_{\infty 1} - T_{\infty 2}}{\frac{1}{\alpha \cdot A} + \frac{L}{\lambda \cdot A} + \frac{1}{\alpha \cdot A}}$$

Dieser Ausdruck kann etwas umgeschrieben werden zu:

$$\dot{Q}_x = \underbrace{\frac{1}{\frac{2}{\alpha} + \frac{L}{\lambda}}}_{k\text{-Wert}} \cdot A \cdot \underbrace{(T_{\infty 1} - T_{\infty 2})}_{\Delta T}$$

Wir haben damit einen gesamten Wärmedurchgangskoeffizienten k eingeführt (im englischen Sprachraum: U-value):

$$k = \frac{1}{\frac{2}{\alpha} + \frac{L}{\lambda}} \quad \left[\frac{W}{m^2 \cdot K} \right]$$

Der sog. k -Wert spielt in der Bauindustrie eine grosse Rolle. Der Isolationsstandard von Bauteilen der Gebäudehülle wird durch ihren k -Wert beschrieben (Beispiel Fenster: $k = 1,4 - 3,1 \text{ W/m}^2 \cdot \text{K}$). Bauvorschriften beziehen sich oft auf maximal zulässige Werte für k . Der Wärmefluss durch solche Bauteile kann dann einfach geschrieben werden als:

$$\dot{Q}_x = k \cdot A \cdot \Delta T$$

Wir haben den k -Wert bis jetzt definiert für eine homogene Wand mit identischen konvektiven Wärmeübergängen. Wir können die getroffene Definition aber auf beliebige mehrschichtige Wandkonstruktionen (wie das bei heutigen Bauten üblich ist) mit unterschiedlichem konvektiven Wärmeübergang verallgemeinern (siehe Fig. 3.5):

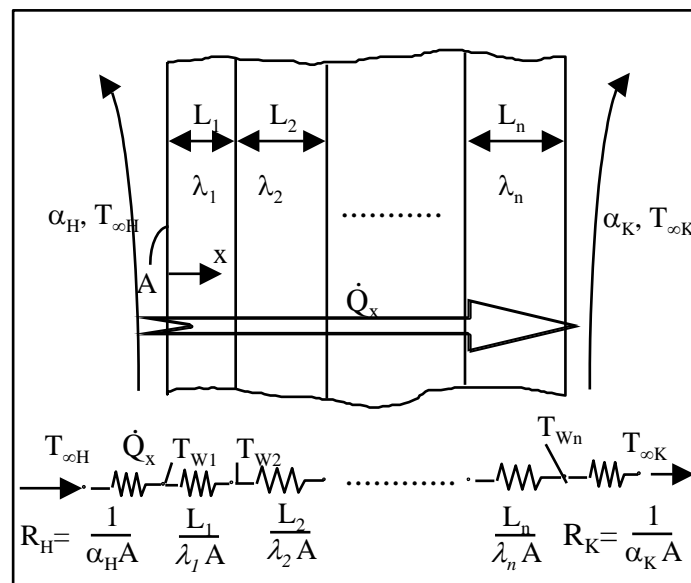


Fig. 3.5 Anwendung des Ohm'schen Gesetzes auf eine mehrschichtige Wandkonstruktion

Die oben angewendete Schreibweise ist immer noch gültig:

$$\dot{Q}_x = \frac{T_{\infty H} - T_{\infty K}}{R_G}$$

Der gesamte Wärmeleitwiderstand setzt sich jetzt aber aus beliebig vielen Teilwiderständen zusammen:

$$R_G = \frac{1}{\alpha_H A} + \sum_{i=1}^n \frac{L_i}{\lambda_i A} + \frac{1}{\alpha_K A}$$

Der Wärmefluss durch eine mehrschichtige Wandkonstruktion wird dann in seiner allgemeinen Form zu:

$$\dot{Q}_x = \frac{T_{\infty H} - T_{\infty K}}{\frac{1}{\alpha_H \cdot A} + \sum_{i=1}^n \frac{L_i}{\lambda_i \cdot A} + \frac{1}{\alpha_K \cdot A}} = \frac{A \cdot \Delta T}{\frac{1}{\alpha_H} + \sum_{i=1}^n \frac{L_i}{\lambda_i} + \frac{1}{\alpha_K}}$$

Der Wärmedurchgangskoeffizient k (k -Wert) für eine beliebige Wandkonstruktion ist somit folgendermassen definiert:

$$k = \frac{1}{\frac{1}{\alpha_H} + \sum_{i=1}^n \frac{L_i}{\lambda_i} + \frac{1}{\alpha_K}} \quad \left[\frac{W}{m^2 \cdot K} \right]$$

In Energienormen für Bauten werden für die konvektiven Wärmeübergänge die folgenden Werte festgelegt: innen $\alpha_H = 8 \text{ W/m}^2 \cdot \text{K}$; aussen $\alpha_K = 20 \text{ W/m}^2 \cdot \text{K}$.

3.4 Wärmefluss durch eine Rohrisolation

Der Wärmefluss durch eine Rohrisolation stellt ein typisches Problem mit zylindrischer Geometrie dar. Betrachten wir wiederum eine stationäre Situation. Auch hier kann die Temperaturverteilung durch die Lösung der eindimensionalen stationären Wärmeleitungsgleichung bestimmt werden (es gibt keine Temperaturgradienten und Wärmeflüsse in tangentialer und axialer Richtung). Die Situation wird in Fig. 3.6 dargestellt.

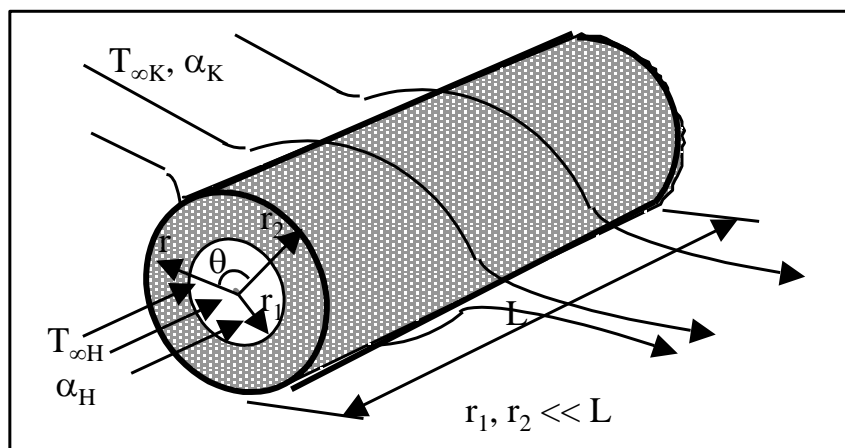


Fig. 3.6 Wärmefluss durch eine Rohrisolation

Die allgemeine Erhaltungsgleichung in Zylinderkoordinaten lautet:

$$\underbrace{\frac{\rho c}{\lambda} \frac{\partial T}{\partial t}}_{\substack{=0 \\ \text{stationär}}} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \underbrace{\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \vartheta^2}}_{\substack{=0 \\ \text{keine Änderung} \\ \text{tangential}}} + \underbrace{\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}}_{\substack{=0 \\ \text{keine Änderung} \\ \text{axial}}} + \underbrace{\frac{\dot{Q}_{\text{Quellen}}}{\lambda}}_{\substack{=0 \\ \text{keine Quellen}}}$$

Analog zum Fall in kartesischen Koordinaten bleibt damit übrig:

$$\Delta_r(T) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) = 0$$

Die allgemeine Lösung dieser Gleichung erhalten wir durch zweimalige Integration

$$\frac{dT}{dr} = \frac{C_1}{r}$$

$$T(r) = C_1 \cdot \ln r + C_2$$

Für die Bestimmung der Integrationskonstanten benötigen wir zwei Randbedingungen: Wir nehmen an, dass die Oberflächentemperaturen innen und aussen bekannt sind, d.h. wir vernachlässigen die konvektiven Wärmeübergangswiderstände.

$$\begin{aligned} r = r_1 : & \quad T(r_1) = T_1 = T_{\infty H} \\ r = r_2 : & \quad T(r_2) = T_2 = T_{\infty K} \end{aligned}$$

Diese Randbedingungen in die allgemeine Lösung eingesetzt ergibt:

$$T_{\infty H} = C_1 \cdot \ln r_1 + C_2$$

$$T_{\infty K} = C_1 \cdot \ln r_2 + C_2$$

Daraus können die Integrationskonstanten bestimmt werden:

$$C_1 = \frac{T_{\infty H} - T_{\infty K}}{\ln(r_1/r_2)}$$

$$C_2 = T_{\infty K} - \frac{(T_{\infty H} - T_{\infty K}) \cdot \ln r_2}{\ln(r_1/r_2)}$$

Damit haben wir die Temperaturverteilung $T(r)$ berechnet:

$$T(r) = \frac{T_{\infty H} - T_{\infty K}}{\ln(r_1/r_2)} \ln r + T_{\infty K} - \frac{(T_{\infty H} - T_{\infty K}) \ln r_2}{\ln(r_1/r_2)}$$

Diese Gleichung kann noch in eine etwas anschaulichere Form gebracht werden:

$$T(r) = \frac{T_{\infty H} - T_{\infty K}}{\ln(r_1/r_2)} \ln \frac{r}{r_2} + T_{\infty K}$$

Die Wärmestromdichte erhalten wir aus der Anwendung des Fourier'schen Gesetzes:

$$\dot{Q}_r''(r) = -\lambda \cdot \nabla_r(T) = -\lambda \cdot \frac{dT(r)}{dr} = -\lambda \cdot \frac{T_{\infty H} - T_{\infty K}}{\ln r_1/r_2} \cdot \frac{1}{r}$$

Die Wärmestromdichte nimmt also mit $1/r$ gegen aussen ab. Der gesamte Wärmestrom durch jeden beliebigen Zylindermantel im Abstand r bleibt hingegen konstant, wie es die Vorgabe der stationären Situation erfordert.

$$\dot{Q}_r = A \cdot \dot{Q}_r''(r) = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot L \cdot \lambda \cdot \frac{1}{r} \cdot \frac{T_{\infty H} - T_{\infty K}}{\ln(r_2/r_1)} = 2 \cdot \pi \cdot L \cdot \lambda \cdot \frac{T_{\infty H} - T_{\infty K}}{\ln(r_2/r_1)}$$

Aus dem Vergleich mit dem Ohm'schen Gesetz:

$$\dot{Q}_r = \frac{1}{R} \cdot \Delta T$$

erhalten wir für den Wärmeleitwiderstand einer zylindrischen Isolation:

$$R = \frac{\ln(r_2/r_1)}{2\pi \cdot \lambda \cdot L}$$

3.5 Die mehrschichtige Rohrisolation mit Konvektion

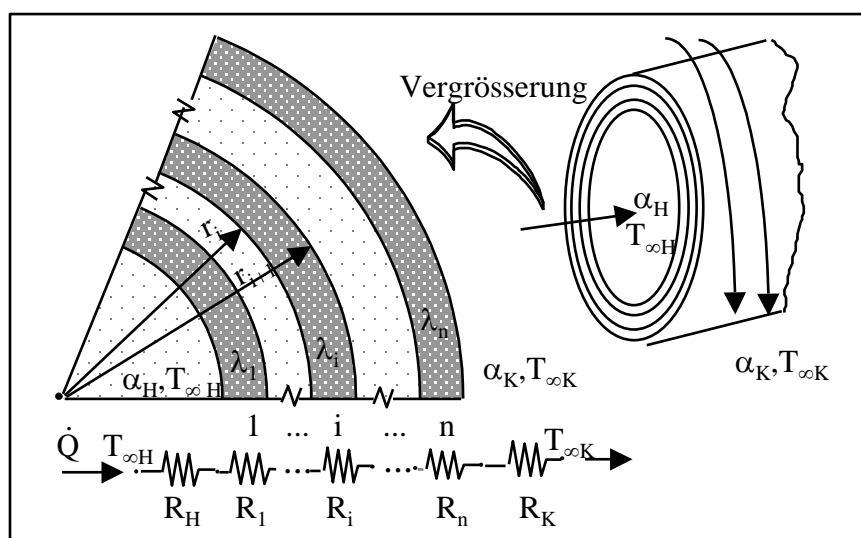


Fig. 3.7: Behandlung der mehrschichtigen Rohrisolation

Im Allgemeinen besteht eine isolierte Rohrkonstruktion aus mehreren Schichten (Rohrwand, Isolationsmaterial, Schutzhülle etc.). Ebenfalls gibt es innen wie aussen einen Oberflächen-Wärmeleitwiderstand zwischen Fluid und Oberfläche. Dieses Problem können wir wiederum durch die Anwendung des Ohm'schen Gesetzes behandeln (siehe Fig. 3.7). Die Oberflächen-Wärmeleitwiderstände definieren wir gleich wie im ebenen Fall:

$$R = \frac{1}{\alpha \cdot A} \quad \rightarrow \quad R_H = \frac{1}{2\pi \cdot r_1 \cdot L \cdot \alpha_H} \quad , \quad R_K = \frac{1}{2\pi \cdot r_{n+1} \cdot L \cdot \alpha_K}$$

Ferner haben wir bereits im letzten Abschnitt den Wärmeleitwiderstand einer Materialschicht, die zwischen r_i und r_{i+1} liegt, kennen gelernt:

$$R_i = \frac{\ln(r_{i+1}/r_i)}{2\pi \cdot L \cdot \lambda_i} \quad \text{mit } i = 1, 2, 3, \dots, n$$

Die Anwendung des Ohmschen Gesetzes liefert uns dann für den gesamten Wärmestrom in radialer Richtung (mit r_1 = Radius der heissen Innenfläche = r_H und r_{n+1} Radius der kalten Aussenfläche = r_K)

$$\dot{Q}_r = \frac{T_{\infty H} - T_{\infty K}}{\frac{1}{2\pi \cdot r_H \cdot L \cdot \alpha_H} + \sum_{i=1}^n \frac{\ln(r_{i+1}/r_i)}{2\pi \cdot L \cdot \lambda_i} + \frac{1}{2\pi \cdot r_K \cdot L \cdot \alpha_K}}$$

Wie im Falle der ebenen Wand können wir auch hier den Wärmedurchgang mittels eines k-Wertes beschreiben:

$$\dot{Q}_r = k(r) \cdot A(r) \cdot (T_{\infty H} - T_{\infty K})$$

Die Fläche hängt vom gewählten Radius ab: $A(r_x) = 2\pi \cdot r_x \cdot L$

Da der Wärmefluss \dot{Q}_r durch jede beliebige Zylinderfläche innerhalb der Rohrwand oder Isolation konstant bleibt, muss deshalb auch der k-Wert vom gewählten Radius abhängen. Der Vergleich ergibt:

$$k(r_x) = \frac{1}{\frac{r_x}{r_H \cdot \alpha_H} + r_x \sum_{i=1}^n \frac{\ln(r_{i+1}/r_i)}{\lambda_i} + \frac{r_x}{r_K \cdot \alpha_K}} \quad \left[\frac{W}{m^2 \cdot K} \right]$$

Grundsätzlich sind wir nicht an der lokalen Wärmeflussdichte interessiert sondern am gesamten Wärmeverlust pro Länge des Rohrstückes. Wir definieren deshalb einen **linearen k-Wert k_L** :

$$\dot{Q}_r = k_L \cdot L \cdot (T_{\infty H} - T_{\infty K}) \quad \rightarrow \quad k_L = k(r_x) \cdot 2\pi \cdot r_x$$

Damit erhalten wir für den linearen k-Wert k_L (Wärmeverlust pro Meter Rohrlänge)

$$k_L = \frac{\dot{Q}_r}{L \cdot \Delta T} = \frac{2\pi}{\frac{1}{r_H \cdot \alpha_H} + \sum_{i=1}^n \frac{\ln(r_{i+1}/r_i)}{\lambda_i} + \frac{1}{r_K \cdot \alpha_K}} \quad \left[\frac{W}{m \cdot K} \right]$$

Diese Darstellung ist dann, wie es sein muss, frei von einem zu wählenden Radius r_x .

Beispiel (kritischer Radius einer Isolation):

Wir betrachten ein Rohr der Länge L , in welchem eine Kühlflüssigkeit transportiert wird (siehe Fig. 3.8)

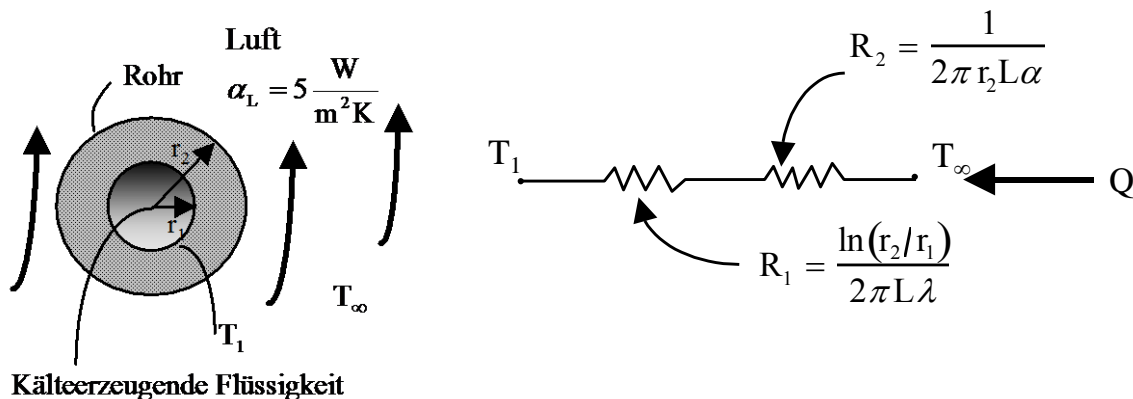


Fig. 3.8a zu optimierende Situation

Fig. 3.8b: System der thermischen Widerstände

Der konvektive Wärmeübergang zwischen Flüssigkeit und Rohrwand und auch die Wärmeleitfähigkeit der Rohrwand selbst (Metall) sei unendlich gross. Zu betrachten ist deshalb der Wärmeleitwiderstand (R_1) der Isolation (mit r_1 als innerem und r_2 als äusserem Radius) und der äussere konvektive Wärmeübergang (R_2) (siehe Fig. 3.8b).

Es gilt nun die Isolation zu optimieren, d.h. ein r_2 so zu bestimmen das die Isolation optimal wird. Der gesamte Widerstand setzt sich aus den beiden Teilwiderständen zusammen:

$$R_{tot} = \underbrace{\frac{\ln(r_2/r_1)}{2\pi L \lambda}}_A + \underbrace{\frac{1}{2\pi r_2 L \alpha}}_B$$

Der Teilwiderstand A wächst mit $\ln(r_2)$ während der Teilwiderstand B mit wachsendem r_2 proportional zu $1/r_2$ abnimmt. Es ist deshalb zu vermuten, dass es ein kritisches $r_{2,krit}$ gibt, welches ein Extremum darstellt. Dieses Extremum finden wir durch:

$$\frac{dR_{tot}}{dr_2} = 0$$

Für R_{tot} eingesetzt und differenziert:

$$\frac{r_1}{r_2} \cdot \frac{1}{r_1} \cdot \frac{1}{2\pi \cdot L \cdot \lambda} - \frac{1}{2\pi \cdot r_2^2 \cdot L \cdot \alpha} = 0 \quad \rightarrow \quad \boxed{r_{2,krit} = \frac{\lambda}{\alpha}}$$

Um die Art des Extremums zu bestimmen müssen wir die zweite Ableitung berechnen:

$$\frac{d^2 R_{tot}}{dr_2^2} = \frac{1}{2\pi \cdot L} \cdot \frac{d}{dr_2} \left(\frac{1}{\lambda \cdot r_2} - \frac{1}{\alpha \cdot r_2^2} \right) = \frac{1}{2\pi \cdot L} \cdot \left(-\frac{1}{\lambda \cdot r_2^2} + \frac{2}{\alpha \cdot r_2^3} \right)$$

eingesetzt mit $r_2 = r_{2krit}$ erhalten wir:

$$\frac{d^2 R_{tot}}{dr_2^2} = + \frac{\alpha^2}{2\pi \cdot L \cdot \lambda^3} > 0$$

Da die zweite Ableitung positiv ist, ist $R_{tot}(r_{2krit})$ ein Minimum. Es ist zu beachten, dass dieses Minimum (bei vorgegebenem α) nur von der Materialgrösse λ abhängt, und nicht vom inneren Radius r_1 .

Die Bedeutung des minimalen Wärmeleitwiderstandes kann an den folgenden Zahlenbeispielen eingesehen werden ($\alpha = 5 \text{ W/m}^2\text{K}$):

Für $\lambda = 60 \text{ W/m}\cdot\text{K}$	(Stahl, 300 K)	\rightarrow	$r_{2krit} = 60/5$	$=$	<u>12 m</u>
Für $\lambda = 0.039 \text{ W/m}\cdot\text{K}$	(Kork, 300 K)	\rightarrow	$r_{2krit} = 0.039/5$	$=$	<u>7.8 mm</u>

Die Lehre aus diesem Beispiel ist die folgende: Verwenden wir ein Material mit grosser Wärmeleitfähigkeit (weil wir Wärme übertragen wollen), wird in jedem praktisch relevanten Fall der Radius $r_2 < r_{2krit}$, d.h. eine Zunahme von r_2 führt zu einer Verbesserung der Wärmeübertragung. Verwenden wir ein Isolationsmaterial, weil wir die Wärmeverluste klein halten wollen, ist in jedem praktisch relevanten Fall $r_2 > r_{2krit}$, d.h. eine Zunahme von r_2 führt zu einer Verbesserung der Isolation.

Für $r_2 > r_{2krit}$ ist die Zunahme des Widerstandes stetig, d.h. es gibt keinen Wert für r_2 , wo der Wärmeleitwiderstand maximal wird.

3.6 Wärmeleitung mit Quellen

Bis anhin haben wir Fälle betrachtet, bei denen die Temperaturverteilung allein durch die vorgegebenen Randbedingungen bestimmt wurden. In diesem Abschnitt wollen wir Fälle untersuchen, wo im inneren des Materials Wärme erzeugt wird, welche schliesslich die Temperaturverteilung bestimmt. Solche Wärmequellen können auftreten durch:

- die Umwandlung von elektrischer Energie in Wärme (in elektrischen Widerständen)
- Absorption von elektromagnetischer Strahlung in semitransparenten Medien (z.B. Sonnenstrahlung in getönten Glasscheiben)
- exotherme chemische Reaktionen (z.B. beim Abbinden von Zement)
- Radioaktivität (z.B. in Glas eingegossene radioaktive Abfälle)

Betrachten wir als Beispiel einen elektrischen Kreis, wie in Fig. 3.9 abgebildet.

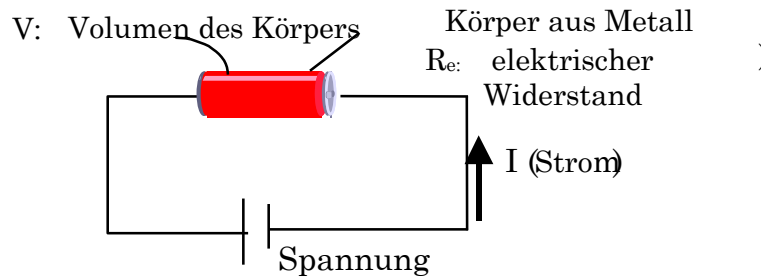


Fig. 3.9: Umwandlung von elektrischer Energie in Wärme in einem Widerstand

Die elektrische Leistungsaufnahme und damit die Stärke der Wärmequelle ist gegeben durch

$$E = \dot{Q}_{\text{Quellen}} = I^2 \cdot R_e$$

Für einen zylindrischen Körper der Länge l und mit der Querschnittsfläche a berechnet sich der Widerstand aus dem spezifischen Widerstand des Materials ρ_e [Ohm·m] wie folgt:

$$R_e = \frac{\rho_e \cdot l}{a}$$

Die spezifische Wärmeleistung pro Volumeneinheit ist dann (mit Stromdichte $i = I/a$):

$$\dot{Q}_{\text{Quellen}}''' = \frac{E}{V} = \frac{\dot{Q}_{\text{Quellen}}}{a \cdot l} = \frac{I^2 \cdot \rho_e \cdot l}{(a \cdot l) \cdot a} = i^2 \cdot \rho_e$$

Dieser Ausdruck ist auch bei einer differentiellen Betrachtung in einem inhomogenen Material gültig.

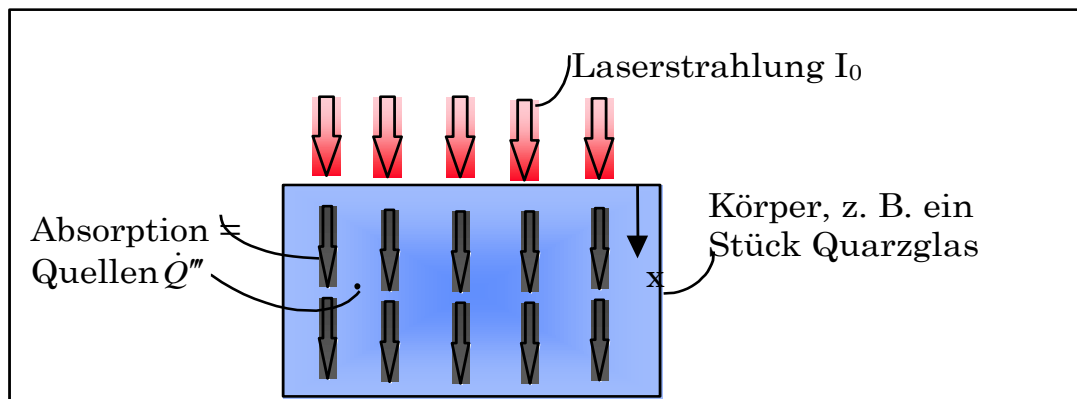


Fig. 3.10 Wärmequellen durch absorbierte Strahlung

Betrachten wir als zweites Beispiel Wärmequellen durch die Absorption von elektromagnetischer Strahlung wie z.B. ein Laserstrahl, der beim Eindringen in eine Quarzglasscheibe absorbiert wird (siehe Fig. 3.10).

Für das Eindringen von Strahlung gilt das Lambert-Beer'sche Gesetz, welches darauf beruht, dass es für ein Photon eine bestimmte Wahrscheinlichkeit gibt, dass es auf dem nächsten Wegstück dx absorbiert wird, d.h.

$$\frac{dI}{dx} = -a \cdot I$$

I = Intensität [W/m^2], I_0 = Anfangsintensität ausserhalb des Quarzstückes, a = Absorptionskoeffizient [m^{-1}]. Die Lösung für den Intensitätsverlauf des Laserstrahls innerhalb der Materie lautet (Lambert-Beer'sches Gesetz):

$$I(x) = I_0 \cdot e^{-a \cdot x}$$

Da die Strahlungsintensität mit der Eindringtiefe abnimmt, gilt dies auch für die Wärmequellen durch Absorption:

$$\dot{Q}_{\text{Quellen}}'''(x) = -\frac{dI(x)}{dx} = a \cdot I_0 \cdot e^{-a \cdot x}$$

3.6.1 Die Ebene Wand mit Wärmequellen

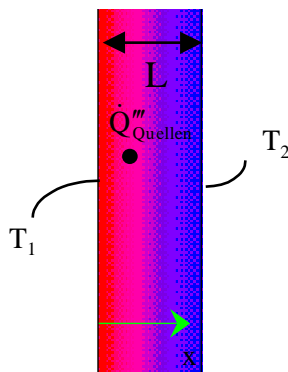


Fig. 3.11 1D-Wärmeleitung mit Quellen

Im folgenden wollen wir die ebene Wand als eindimensionale Wärmeleitung mit Quellen behandeln. Um die Sache einfach zu halten, nehmen wir an, dass die Oberflächentemperaturen bekannt sind (konvektiver Wärmeübergang an den Oberflächen unendlich gross). (siehe Fig. 3.11). Gehen wir zurück zu Kapitel 2, Gleichung (15), sehen wir dass der stationäre Fall durch folgende Gleichung beschrieben wird:

$$\frac{d^2 T}{dx^2} + \frac{\dot{Q}_{\text{Quellen}}'''}{\lambda} = 0$$

Diese Gleichung kann einfach gelöst werden, wenn die Wärmequelle $\dot{Q}_{\text{Quellen}}'''$ eine Konstante ist, d.h. nicht von x abhängt. Dies wollen wir hier voraussetzen. Die zweimalige Integration ergibt:

$$\frac{dT}{dx} = -\frac{\dot{Q}_{\text{Quellen}}'''}{\lambda} \cdot x + C_1$$

$$T = -\frac{\dot{Q}_{\text{Quellen}}'''}{2 \cdot \lambda} \cdot x^2 + C_1 x + C_2$$

Unser konkretes Problem wird durch die beiden Randbedingungen bestimmt:

$$\begin{aligned} x = 0 & \rightarrow T(0) = T_1 \\ x = L & \rightarrow T(L) = T_2 \end{aligned}$$

Setzen wir diese Randbedingungen oben ein, bestimmen wir die Integrationskonstanten zu:

$$\begin{aligned} x = 0 & \quad T_1 = C_2 \\ x = L & \quad T_2 = -\frac{\dot{Q}_{\text{Quellen}}'''}{2 \cdot \lambda} \cdot L^2 + C_1 \cdot L + T_1 \end{aligned}$$

Daraus lässt sich auch noch C_1 bestimmen:

$$C_1 = \frac{T_2 - T_1}{L} + \frac{\dot{Q}_{\text{Quellen}}'''}{2 \cdot \lambda} \cdot L$$

Damit haben wir auch die vollständige Lösung für die Temperaturverteilung $T(x)$ in der Wand:

$$T(x) = -\frac{\dot{Q}_{\text{Quellen}}'''}{2 \cdot \lambda} \cdot x^2 + \frac{T_2 - T_1}{L} \cdot x + \frac{\dot{Q}_{\text{Quellen}}'''}{2 \cdot \lambda} \cdot L \cdot x + T_1$$

oder die Terme nach Potenzen von x geordnet:

$$T(x) = -\frac{\dot{Q}_{\text{Quellen}}'''}{2 \cdot \lambda} \cdot x^2 + \left(\frac{T_2 - T_1}{L} + \frac{\dot{Q}_{\text{Quellen}}''' \cdot L}{2 \cdot \lambda} \right) \cdot x + T_1$$

In diesem Fall hängt $T(x)$ nicht mehr linear sondern quadratisch von x ab. Dass dies so sein muss ist bereits aus der ursprünglichen Gleichung ersichtlich. Die vorhandene konstante positive Wärmequelle verursacht, dass die 2. Ableitung der Temperaturverteilung konstant negativ sein muss.

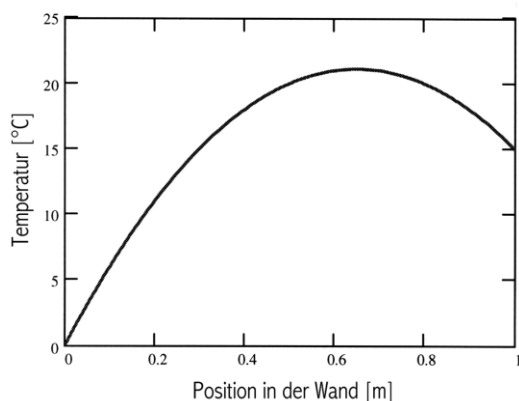


Fig. 3.12 zeigt die resultierende Temperaturverteilung in einer Wand für einen Fall mit folgenden Werten:

$$\begin{aligned} T_1 &= 0 \text{ °C} \\ T_2 &= 15 \text{ °C} \\ L &= 1 \text{ m} \\ \lambda &= 1 \text{ W/m·K} \\ \dot{Q}_{\text{Quellen}}''' &= 100 \text{ W/m}^3 \end{aligned}$$

Fig. 3.12 Temperaturverteilung in einer Wand mit Wärmequellen

Wir können nun auch die Lage des Extremums finden. Wir finden sie dort, wo die erste Ableitung der Temperaturverteilung verschwindet:

$$\left. \frac{dT}{dx} \right|_{x=x_e} = 0$$

angewendet auf die Temperaturverteilung erhalten wir:

$$-\frac{\dot{Q}_{\text{Quellen}}'''}{\lambda} \cdot x_e + \frac{T_2 - T_1}{L} + \frac{\dot{Q}_{\text{Quellen}}'''}{2 \cdot \lambda} \cdot L = 0$$

$$x_e = \frac{L}{2} + \frac{T_2 - T_1}{L} \frac{\lambda}{\dot{Q}_{\text{Quellen}}'''}$$

Die Art des Extremums erhalten wir aus der Betrachtung der 2. Ableitung, welche bereits in der ursprünglichen Gleichung definiert wurde:

$$\frac{d^2T}{dx^2} = -\frac{\dot{Q}_{\text{Quellen}}'''}{\lambda} \quad \text{für } \dot{Q}_{\text{Quellen}}''' > 0 \rightarrow \frac{d^2T}{dx^2} < 0$$

Für positive Wärmequellen ist die 2. Ableitung überall negativ, beim Extremum handelt es sich also um ein Temperaturmaximum wie auch aus Fig. 3.12 ersichtlich ist. Für negative Wärmequellen (sog. Wärmesenken wie sie z.B. bei endothermen chemischen Reaktionen auftreten) tritt dem entsprechend ein Temperaturminimum auf.

Durch Anwendung des Fourier'schen Gesetzes erhalten wir die Verteilung des Wärmeflusses, welcher wegen der vorhandenen Quellen jetzt vom Ort abhängt:

$$\dot{q}'' = -\lambda \cdot \frac{dT}{dx} = -\lambda \cdot \left(-\frac{\dot{Q}_{\text{Quellen}}'''}{\lambda} \cdot x + \frac{T_2 - T_1}{L} + \frac{\dot{Q}_{\text{Quellen}}''' \cdot L}{2 \cdot \lambda} \right)$$

oder mit Termen nach der Ordnung von x sortiert:

$$\dot{q}'' = \dot{Q}_{\text{Quellen}}''' \cdot x - \lambda \cdot \frac{T_2 - T_1}{L} - \frac{\dot{Q}_{\text{Quellen}}''' \cdot L}{2}$$

Durch die Bildung der Ableitung erhalten wir auch den folgenden physikalisch evidenten Zusammenhang: Die örtliche Änderung des Wärmeflusses wird durch die vorhandenen Quellen verursacht.

$$\frac{d\dot{q}''}{dx} = \dot{Q}_{\text{Quellen}}'''$$

Interessant sind für uns auch die Wärmeflüsse an den beiden Oberflächen der Wand:

$$\dot{q}''_{x=0} = -\lambda \cdot \frac{T_2 - T_1}{L} - \frac{\dot{Q}'''_{\text{Quellen}} \cdot L}{2}$$

$$\dot{q}''_{x=L} = \dot{Q}'''_{\text{Quellen}} \cdot L - \lambda \cdot \frac{T_2 - T_1}{L} - \frac{\dot{Q}'''_{\text{Quellen}} \cdot L}{2} = \frac{\dot{Q}'''_{\text{Quellen}} \cdot L}{2} - \lambda \cdot \frac{T_2 - T_1}{L}$$

Die Energieerhaltung verlangt, dass die Summe der an den Oberflächen austretenden Wärmeflüsse gleich der Gesamtheit der eingeschlossenen Wärmequellen ist. Zu beachten ist, dass der bei $x = 0$ austretende Wärmefluss in negativer x -Richtung verläuft.

$$\dot{q}''_{x=L} - \dot{q}''_{x=0} = \dot{Q}'''_{\text{Quellen}} \cdot L$$

3.6.2 Zylinder mit Wärmequellen

In diesem Abschnitt betrachten wir die stationäre Wärmeleitung in einem Zylinder mit Wärmequellen, bei dem die Oberflächentemperatur T_0 gegeben ist. Der Radius des Zylinders ist r_0 (siehe Fig. 3.13).

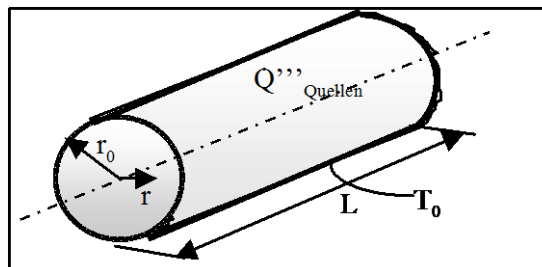


Fig. 3.13 Zylinder mit Wärmequellen

Wie bei der ebenen Wand wird das mathematische Modell durch die eindimensionale stationäre Wärmeleitungsgleichung beschrieben, hier jetzt in zylindrischer Geometrie (es treten nur Wärmeflüsse in radialer Richtung auf):

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dT}{dr} \right) + \frac{\dot{Q}'''_{\text{Quellen}}}{\lambda} = 0$$

Die erste Integration dieser Gleichung ergibt:

$$r \frac{dT}{dr} = -\frac{\dot{Q}'''_{\text{Quellen}}}{2 \cdot \lambda} r^2 + C_1$$

Hier können wir bereits eine **erste Randbedingung** anwenden: aus Symmetriegründen kann bei $r = 0$ (auf der Zylinderachse) kein Wärmefluss fließen:

$$r = 0: \quad \left. \frac{dT}{dr} \right|_{r=0} = 0 \quad \rightarrow \quad C_1 = 0$$

Damit erhalten wir:

$$\frac{dT}{dr} = -\frac{\dot{Q}_{\text{Quellen}}'''}{2 \cdot \lambda} r$$

und nach nochmaliger Integration:

$$T(r) = -\frac{\dot{Q}_{\text{Quellen}}'''}{4 \cdot \lambda} \cdot r^2 + C_2$$

Die zweite Randbedingung bezieht sich auf die Oberflächentemperatur:

$$r = r_0 : T(r_0) = T_0 \quad \rightarrow \quad C_2 = T_0 + \frac{\dot{Q}_{\text{Quellen}}'''}{4 \cdot \lambda} \cdot r_0^2$$

Damit ist die Temperaturverteilung $T(r)$ festgelegt:

$$T(r) = \frac{\dot{Q}_{\text{Quellen}}'''}{4 \cdot \lambda} \cdot r_0^2 \cdot \left(1 - \frac{r^2}{r_0^2}\right) + T_0$$

Die im Inneren erzeugte Wärme kann nur durch die Oberfläche des Zylinders abfließen. Wir finden deshalb das Temperaturmaximum auf der Achse des Zylinders ($r = 0$):

$$T_{\text{max}} = T(r = 0) = T_0 + \frac{\dot{Q}_{\text{Quellen}}'''}{4 \cdot \lambda} \cdot r_0^2$$

Den Wärmefluss durch die Oberfläche erhalten wir durch die Anwendung des Fourier'schen Gesetzes an der Stelle $r = r_0$:

$$\dot{q}_0'' = -\lambda \cdot \left(\frac{dT}{dr}\right)_{r=r_0} = \frac{\dot{Q}_{\text{Quellen}}'''}{2} \quad \left[\frac{\text{W}}{\text{m}^2}\right]$$

Die Energieerhaltung (für den stationären Zustand) verlangt, dass der gesamte Wärmefluss durch die Oberfläche der im Zylinder eingeschlossenen Wärmequelle entspricht:

$$\dot{q}_0 = \underbrace{2\pi \cdot r_0 \cdot L}_{\text{Oberfläche}} \cdot \dot{q}_0'' = 2\pi \cdot r_0 \cdot L \cdot \frac{\dot{Q}_{\text{Quellen}}'''}{2} = \underbrace{\pi \cdot r_0^2 \cdot L}_{\text{Volumen}} \cdot \dot{Q}_{\text{Quellen}}''' \quad [\text{W}]$$

Die Behandlung der stationären eindimensionalen Wärmeleitung mit Quellen für den Fall eines konvektiven Wärmeüberganges an den Aussenflächen kann sowohl in der ebenen als auch in der zylindrischen Geometrie analog behandelt werden. Anstelle der bekannten Oberflächentemperaturen müssen die entsprechenden Randbedingungen für den konvektiven Wärmeübergang eingesetzt werden:

$$\text{ebene Wand:} \quad \begin{cases} \lambda \cdot \left(\frac{dT}{dx} \right)_{x=0} = \alpha \cdot (T_{x=0} - T_{\infty}) \\ -\lambda \cdot \left(\frac{dT}{dx} \right)_{x=L} = \alpha \cdot (T_{x=L} - T_{\infty}) \end{cases}$$

$$\text{Zylinder:} \quad -\lambda \cdot \left(\frac{dT}{dr} \right)_{r=r_0} = \alpha \cdot (T_{r=r_0} - T_{\infty})$$

3.7 Eindimensionale, stationäre Wärmeleitung in Rippen

In der Energietechnik spielen Wärmetauscher, wo Wärmeenergie von einem Medium an ein anderes übergeben werden muss, eine wichtige Rolle. Es ist deshalb ein Anliegen, diese Wärmetauscher möglichst effizient zu gestalten. Ein Mittel hierzu ist die Vergrößerung der Wärmetauscherfläche durch das Anbringen von sog. Rippen. (siehe Fig. 3.14)

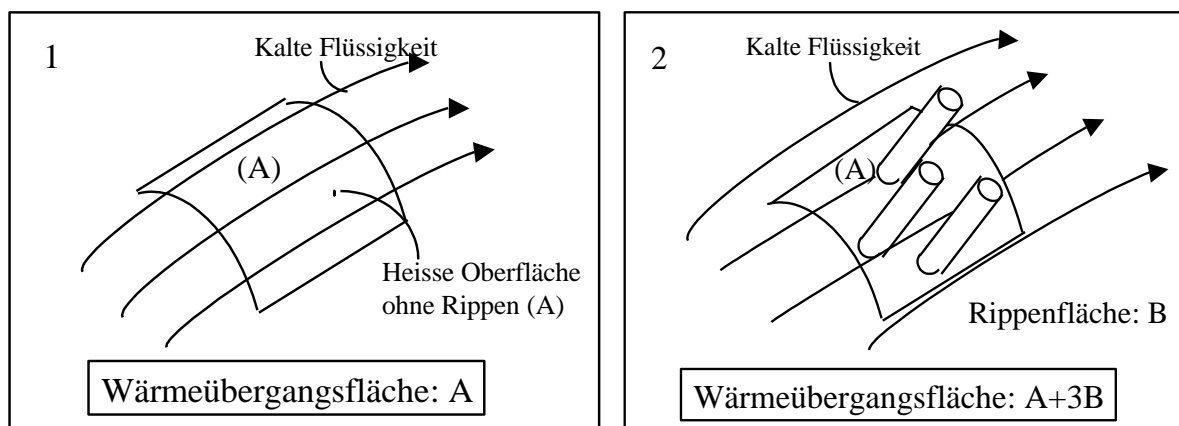


Fig. 3.14 Wärmeübergangsflächen mit und ohne Rippen

Solche Rippen können in verschiedenen Formen angebracht werden z.B. zylindrisch (wie in Fig. 3.14), eben oder kreisförmig etc. Ist die Dicke dieser Rippen klein im Vergleich zur Länge, können diese mit eindimensionaler Wärmeleitung behandelt werden.

3.7.1 Allgemeine Energieerhaltungsgleichung für Rippen

Im folgenden betrachten wir die allgemeinste Form der Energieerhaltung für eine eindimensionale Rippe. In dieser allgemeinen Form ist auch eine Bewegung der Rippe selbst zugelassen (z.B. Bewegung eines Drahtes bei dessen Ziehvorgang). Die entsprechende Situation wird in Fig. 3.15 dargestellt:

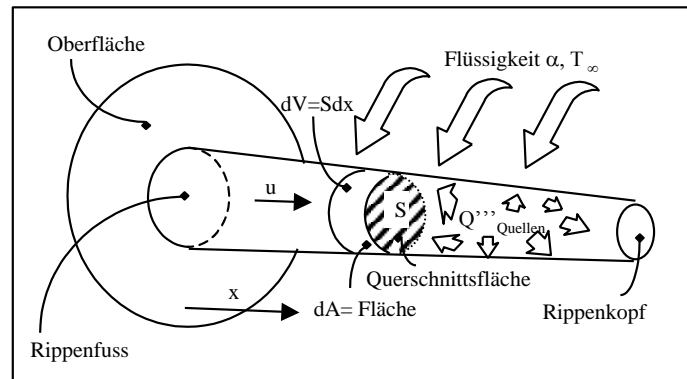


Fig. 3.15 Elemente der allgemeinen Energieerhaltungsgleichung einer Rippe

Die Rippe bewegt sich mit der Geschwindigkeit u in Längsrichtung. In Querrichtung wird sie von einem Fluid angeströmt, so dass an der Oberfläche ein konvektiver Wärmeübergang (Übergangskoeffizient α) entsteht. Die Rippe besitzt eine Querschnittsfläche $S(x)$, welche vom Ort abhängen kann. Temperaturverläufe innerhalb der Querschnittsfläche S können vernachlässigt werden (eindimensionale Wärmeleitung).

Die Energiebilanz für ein Kontrollvolumen dV der Länge dx , Querschnittsfläche S und Oberfläche dA lautet (die x -Achse entspricht der Längsachse der Rippe):

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \underbrace{\dot{Q}_{Leit} + \dot{E} + \dot{Q}_{Quellen} \cdot dV}_{\text{ins Kontrollvolumen hinein}} - \underbrace{\left[\dot{Q}_{Leit} + \frac{\partial \dot{Q}_{Leit}}{\partial x} dx \right] + \left[\dot{E} + \frac{\partial E}{\partial x} dx \right] + \dot{Q}_{Konv} + \dot{Q}_{Strahlung} \cdot dA}_{\text{aus dem Kontrollvolumen hinaus}}$$

Die Bedeutung der einzelnen Terme ist:

- U : innere Energie des Rippenelementes
- E : Energiefluss bedingt durch die Bewegung der Rippe
- \dot{Q}_{Leit} : Energiefluss durch Wärmeleitung
- \dot{Q}_{Konv} : Wärmeabgabe bedingt durch konvektiven Wärmeübergang
- $\dot{Q}_{Strahlung}''$: Wärmeabgabe bedingt durch Strahlung an der Oberfläche
- $\dot{Q}_{Quellen}'''$: die Energie (pro Volumen), die von den Quellen erzeugt wird

Im weiteren gelten die folgenden Beziehungen (Annahme: $\rho, \lambda, c = \text{konstant}$):

$$U = \rho \cdot c \cdot T \cdot dV$$

$$\dot{E} = \dot{m} \cdot c \cdot T = \rho \cdot u \cdot S \cdot c \cdot T$$

$$\dot{Q}_{Leit} = -\lambda \cdot S \cdot \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)$$

$$\dot{Q}_{Konv} = \alpha \cdot dA \cdot (T - T_{\infty})$$

Setzen wir diese Beziehungen in die obige Gleichung ein und dividieren diese gleichzeitig noch durch dx erhalten wir:

$$\rho \cdot c \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{dV}{dx} T \right] = \lambda \frac{\partial}{\partial x} \left(S \frac{\partial T}{\partial x} \right) - \rho \cdot c \frac{\partial}{\partial x} (S \cdot u \cdot T) - \frac{dA}{dx} \alpha \cdot (T - T_\infty) + \dot{Q}_{Quellen}''' \frac{dV}{dx} - \dot{Q}_{Strahl.}'' \frac{dA}{dx}$$

Die Strahlung hängt von den Eigenschaften der Oberfläche ab. Sie kann beschrieben werden durch die Strahlung eines schwarzen Körpers und einem Emissionsfaktor ε , welcher die Abweichung vom schwarzen Körper beinhaltet:

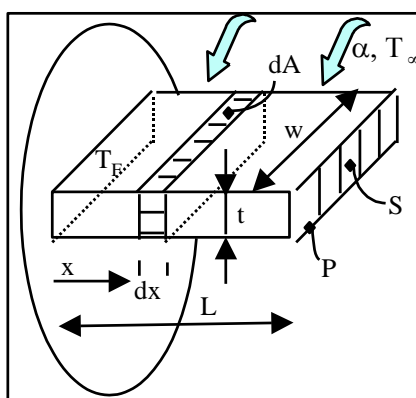
$$\dot{Q}_{Strahl.}'' = \sigma \cdot \varepsilon \cdot (T^4 - T_\infty^4)$$

3.7.2 Rippen an Wärmetauschern

Die in der Energietechnik relevante Situation der Rippen an Wärmetauschern beinhalten gegenüber der allgemeinsten Form der Energieerhaltungsgleichung eine Reihe von Vereinfachungen:

- Die Querschnittsfläche S ist konstant
- Die Rippe bewegt sich nicht ($u = 0$).
- Wir betrachten nur stationäre Zustände ($\partial/\partial t = 0$)
- Es existieren keine Quellen
- Strahlung spielt keine Rolle, d.h. die Rippe wird von einem undurchsichtigen Fluid angeströmt

Zwei Beispiele von typischen Rippen in Wärmetauschern werden in Fig. 3.16 dargestellt. Die für den konvektiven Wärmeübergang massgebende Oberfläche dA hängt von der Geometrie der Rippe ab.

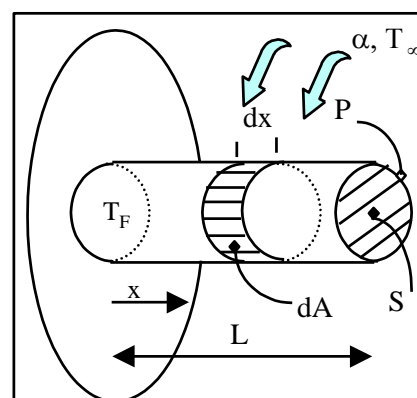


Ebene Rippe:

Querschnittsfläche: $S = w \cdot t$

Umfang: $P = 2 \cdot (w + t)$

$dA = P \cdot dx$



Stabrippe:

Querschnittsfläche: $S = \pi D^2 / 4$

Umfang: $P = \pi D$

$dA = \pi D \cdot dx$

Fig. 3.16: Darstellung von verschiedenen Rippenformen und zugehörige Definitionen

Mit den oben aufgezählten Vereinfachungen bleibt von der allgemeinen Energieerhaltungsgleichung für Rippen noch übrig:

$$0 = \lambda \cdot S \cdot \frac{d^2 T}{dx^2} - \frac{dA}{dx} \cdot \alpha \cdot (T - T_\infty)$$

Drücken wir jetzt noch die Oberfläche durch den Rippenumfang aus: $dA = P \cdot dx$, können wir die obige Gleichung umschreiben zu:

$$\frac{d^2 T}{dx^2} - \frac{\alpha \cdot P}{\lambda \cdot S} \cdot (T - T_\infty) = 0$$

Weitere Vereinfachungen erhalten wir durch die Einführung der folgenden Abkürzungen:

Rippenparameter m :
$$m^2 = \frac{\alpha \cdot P}{\lambda \cdot S}$$

Übertemperatur θ :
$$\theta = T - T_\infty$$

Damit erhalten wir die folgende kompakte Darstellung für die Wärmeleitungsgleichung in der Rippe:

$$\boxed{\frac{d^2 \theta}{dx^2} - m^2 \cdot \theta = 0}$$

Dies ist eine lineare homogene Differentialgleichung zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten. Diese Gleichung hat eine gewisse Ähnlichkeit mit der Wärmeleitung mit Wärmequellen. Anstelle der ortsunabhängigen Wärmequelle tritt hier die konvektive Wärmeabgabe der Rippe (proportional zur Übertemperatur θ), welche dafür sorgt, dass die zweite Ableitung der Temperaturverteilung $\neq 0$ wird. In diesem Fall, wo die zweite Ableitung der gesuchten Funktion proportional zur Funktion selbst ist, muss die Lösung eine e-Funktion sein, wobei der Exponent positiv oder negativ sein kann. Die allgemeine Lösung der obigen Differentialgleichung lautet deshalb:

$$\boxed{\theta(x) = C_1 \cdot e^{mx} + C_2 \cdot e^{-mx}}$$

Wie bei jeder Differentialgleichung zweiter Ordnung treten zwei Integrationskonstanten auf, für deren Bestimmung zwei Randbedingungen bekannt sein müssen.

Die **erste Randbedingung** folgt aus der Tatsache, dass die Temperatur des Rippenfusses bekannt ist:

$$\begin{aligned} x=0: \quad T(0) &= T_F & \text{resp.:} \quad \theta(0) &= T_F - T_\infty = \theta_F \\ & \rightarrow \quad \theta(0) = \theta_F = C_1 + C_2 \end{aligned}$$

Für die Formulierung der **zweiten Randbedingung** gibt es eine Reihe von Möglichkeiten, basierend auf unterschiedlichen Annahmen.

Annahme a) die Rippe ist bei $x = L$ isoliert. Diese Annahme gilt als Näherung für den Fall, dass der Wärmefluss am Rippenende vernachlässigbar ist im Vergleich zum Wärmefluss durch die Seitenflächen der Rippe.

$$x = L \quad \frac{d\theta}{dx} = 0$$

$$C_1 \cdot m \cdot e^{m \cdot L} - C_2 \cdot m \cdot e^{-m \cdot L} = 0$$

Annahme b) Auch am Rippenende herrscht ein konvektiver Wärmeübergang. Diese Annahme entspricht der realen Situation.

$$x = L \quad -\lambda \frac{d\theta}{dx} = \alpha \cdot (T - T_\infty) \quad \rightarrow \quad \frac{d\theta}{dx} = -\frac{\alpha}{\lambda} \cdot \theta$$

$$C_1 \cdot m \cdot e^{m \cdot L} - C_2 \cdot m \cdot e^{-m \cdot L} = -\frac{\alpha}{\lambda} \cdot (C_1 \cdot e^{m \cdot L} + C_2 \cdot e^{-m \cdot L})$$

Annahme c) Die Temperatur des Rippenkopfes ist bekannt. Diese Situation entspricht einer Rippe, die zwischen zwei Flächen bekannter Temperatur eingespannt ist.

$$x = L \quad T(L) = T_K \quad \rightarrow \quad \theta(L) = T_K - T_\infty = \theta_K$$

$$C_1 \cdot e^{m \cdot L} + C_2 \cdot e^{-m \cdot L} = \theta_K$$

Annahme d) Die Rippe ist sehr lang, d.h. $x \rightarrow \infty$, am Rippenkopf kommt kein Wärmefluss mehr an und die Temperatur nimmt Umgebungstemperatur an.

$$x = (L \rightarrow \infty) \quad T(L \rightarrow \infty) = T_\infty \quad \theta(L \rightarrow \infty) = 0$$

$$C_1 \cdot e^{m \cdot (L \rightarrow \infty)} = 0 \quad \rightarrow \quad C_1 = 0$$

Lösung für Annahme a: Die Annahme a ist meist eine gute Näherung für die reale Situation, welche durch Annahme b beschrieben wird. Das zu lösende Gleichungssystem ist aber wesentlich einfacher (2. Gleichung durch m dividiert):

$$C_1 + C_2 = \theta_F$$

$$C_1 \cdot e^{m \cdot L} - C_2 \cdot e^{-m \cdot L} = 0$$

Für dieses System finden wir die Lösung:

$$C_1 = \theta_F \cdot \frac{e^{-m \cdot L}}{e^{m \cdot L} + e^{-m \cdot L}}$$

$$C_2 = \theta_F \cdot \left(1 - \frac{e^{-m \cdot L}}{e^{m \cdot L} + e^{-m \cdot L}} \right)$$

Im weiteren benützen wir als Abkürzung die Definition für die Hyperbelfunktionen, für welche die beigefügten Rechenregeln gelten:

$$\begin{aligned}\cosh(x) &= \frac{e^x + e^{-x}}{2} & \cosh(x-y) &= \cosh(x) \cdot \cosh(y) + \sinh(x) \cdot \sinh(y) \\ \sinh(x) &= \frac{e^x - e^{-x}}{2} & \sinh(x-y) &= \sinh(x) \cdot \cosh(y) - \cosh(x) \cdot \sinh(y)\end{aligned}$$

Damit erhalten wir als Lösung für den Temperaturverlauf entlang der Rippe:

$$\theta(x) = \theta_F \cdot \left[\frac{e^{-m \cdot L}}{2 \cosh(m \cdot L)} e^{m \cdot x} + \left\{ 1 - \frac{e^{-m \cdot L}}{2 \cosh(m \cdot L)} \right\} e^{-m \cdot x} \right]$$

oder nach Anwendung der obigen Rechenregeln für Hyperbelfunktionen:

$$\theta(x) = \theta_F \frac{\cosh[m \cdot (L - x)]}{\cosh(m \cdot L)}$$

Für den Ingenieur ist die Wärmeübertragungsleistung einer Rippe die massgebende Grösse. Diese entspricht dem Wärmefluss, der am Rippenfuss in die Rippe hineinfliesst. Wir erhalten diesen durch die Anwendung des Fourier'schen Gesetzes an der Stelle $x = 0$ (für Hyperbelfunktionen gelten die selben Differentiationsregeln wie für trigonometrische Funktionen)

$$\dot{Q}_F = -\lambda \cdot S \cdot \left(\frac{dT}{dx} \right)_{x=0} = -\lambda \cdot S \cdot \theta_F \frac{m \cdot \sinh(m \cdot L)}{\cosh(m \cdot L)}$$

was sich noch weiter vereinfachen lässt zu:

$$\dot{Q}_F = \lambda \cdot S \cdot \theta_F \cdot m \cdot \tanh(m \cdot L)$$

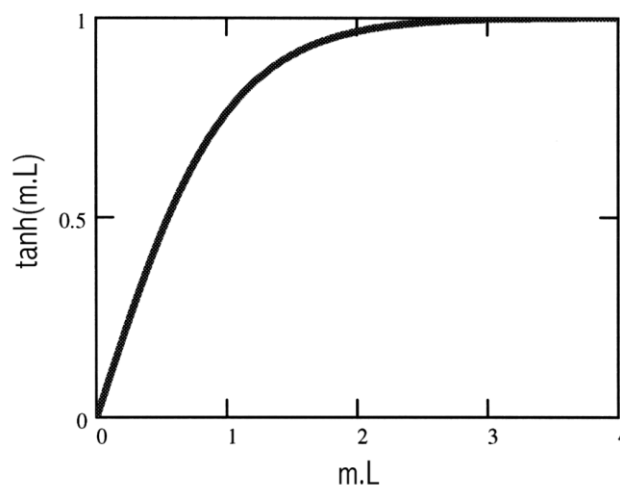


Fig. 3.17 Wärmeübertragungsleistung einer Rippe in Funktion des Rippenparameters $m \cdot L$

Die Wärmeübertragungsleistung ist proportional zur Funktion $\tanh(m \cdot L)$. Diese Funktion ist in Fig. 3.17 dargestellt. Eine Rippe erreicht nahezu ihre maximale Uebertragungsleistung bei einem Wert von $m \cdot L = 2$. Eine weitere Verlängerung der Rippe über diesen Wert hinaus trägt beinahe nichts mehr zu einer Erhöhung der Wärmeübertragung zu.

Ein effizienter Materialeinsatz für Rippen ist dann gewährleistet, wenn wir uns im linearen Bereich der \tanh -Funktion befinden, d.h. für Werte von $m \cdot L < 1$. (zwei Rippen mit je $m \cdot L = 1$ haben eine wesentlich höhere Wärmeübertragung als eine Rippe mit $m \cdot L = 2$). Die sinnvolle Rippenlänge berechnet sich deshalb als:

$$L_{opt} < \frac{1}{m} = \sqrt{\frac{\lambda \cdot S}{\alpha \cdot P}}$$

In Fig. 3.18 wird der Temperaturverlauf in der Rippe für verschiedene Werte von $m \cdot L$ veranschaulicht. Aufgetragen ist die Funktion:

$$\frac{\theta}{\theta_F} = \frac{\cosh\left[m \cdot L \cdot \left(1 - \frac{x}{L}\right)\right]}{\cosh(m \cdot L)}$$

Man beachte die horizontale Tangente am Ende der Rippe (Randbedingung: kein Wärmefluss).

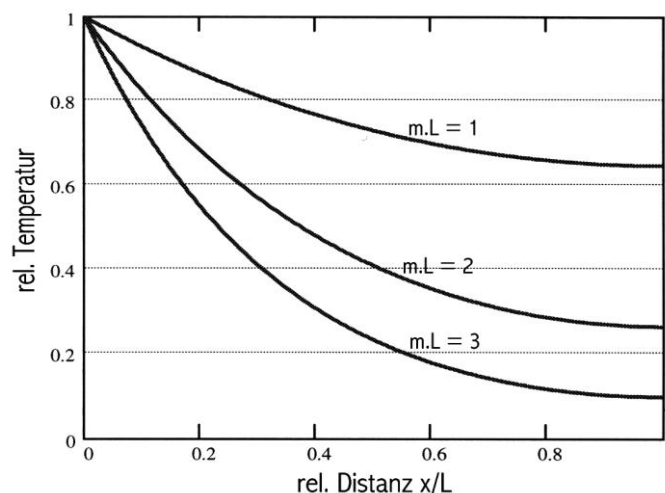


Fig. 3.18 Temperaturverläufe in der Rippe

Die folgende Tabelle zeigt Werte des Rippenparameters $m \cdot L$ für eine Länge $L = 40$ mm, Durchmesser $D = 8$ mm und einen konvektiven Wärmeübergangskoeffizienten (freie Konvektion in Luft) von $10 \text{ W/m}^2 \cdot \text{K}$ für einige typische Materialien:

Material	Wärmeleitfähigkeit λ	Rippenparameter $m \cdot L$
Kupfer	385 W/m·K	0,144
Cr-Ni-Stahl	16 W/m·K	0,707
Glas	0,8 W/m·K	3.162

Je grösser die Wärmeleitfähigkeit (um so kleiner ist $m \cdot L$) desto höher wird die Temperatur am Rippenende. Für unendlich grosse Wärmeleitfähigkeit ($\lambda \rightarrow \infty$) wird die Rippe isotherm. Die Berechnungen für die übrigen Randbedingungen verlaufen analog.

3.7.3 Der Rippenwirkungsgrad

Die Wirksamkeit der Rippe in Bezug auf ihre Wärmeübetragung wird durch den sog. Rippenwirkungsgrad η_R beschrieben. Dieser kann wie folgt definiert werden:

$$\eta_R = \frac{\text{Uebertragene Waermemenge}}{\text{Maximal uebertragbare Waermemenge}}$$

Übertragene Wärmemenge:

Die Wärmemenge, die effektiv durch den Rippenfuss (oder durch die Oberfläche der Rippe) übertragen wird.

Maximal übertragbare Wärmemenge:

Die Wärmemenge, die die Rippe übertragen könnte, wenn ihre gesamte Oberfläche die Temperatur des Rippenfusses annehmen würde.

Die durch den Rippenfuss fliessende Wärmemenge (für die Randbedingung a) wurde im letzten Abschnitt bestimmt als

$$\dot{Q}_F = -\lambda \cdot S \cdot \theta_F \cdot m \cdot \tanh(m \cdot L)$$

Die maximal übertragbare Wärmemenge berechnet sich aus dem konvektiven Wärmeübergang und der Oberfläche der Rippe:

$$\dot{Q}_M = \alpha \cdot \underbrace{P \cdot L}_A \cdot \theta_F$$

Damit können wir den Wirkungsgrad η_R berechnen:

$$\eta_R = \frac{\dot{Q}_F}{\dot{Q}_M} = \frac{\lambda \cdot S \cdot \theta_F \cdot m \cdot \tanh(mL)}{\alpha \cdot P \cdot L \cdot \theta_F} = \frac{\tanh(m \cdot L)}{m \cdot L}$$

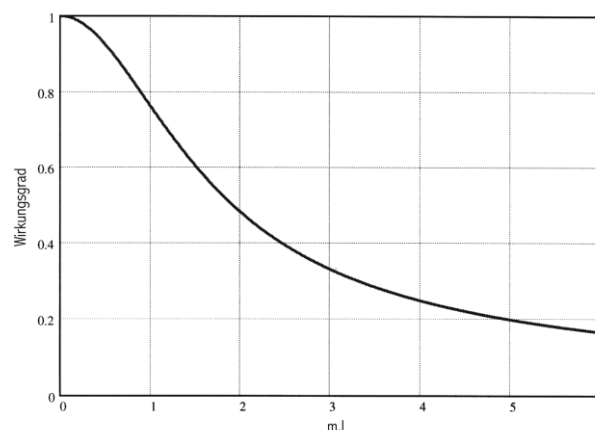


Fig. 3.19: Verlauf des Rippenwirkungsgrades in Funktion von $m \cdot L$

In Fig. 3.19 ist der Verlauf des Wirkungsgrades aufgezeichnet. Gute Wirkungsgrade erhält man für kleine Werte von $m \cdot L$ (nicht L alleine). Für $m \cdot L = 1$ liegt der Wirkungsgrad knapp unter 80 %, für $m \cdot L = 2$ liegt er bereits unter 50 %.

3.7.4 Kreisförmige Rippen

Kreisförmige Rippen sind eine übliche Lösung zur Erhöhung des Wärmeüberganges an Rohren. Sie sind ein spezieller Fall von Rippen mit variabler Querschnittsfläche S . Die entsprechende Situation ist in Fig. 3.20 für eine Rippe der Dicke d , Innenradius r_1 und Aussenradius r_2 dargestellt.

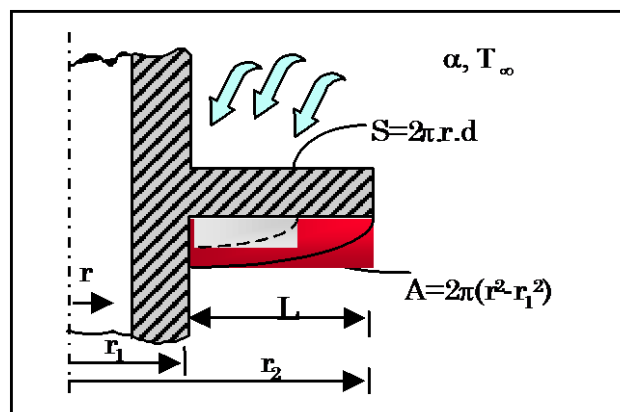


Fig. 3.20: kreisförmige Rippe (Querschnitt S ist variabel)

Wir behandeln den kreisförmigen Fall mit den gleichen Voraussetzungen wie die lineare Rippe:

$$\frac{\partial}{\partial t} = 0, \quad u = 0, \quad \dot{Q}_{\text{Quellen}}''' = 0, \quad \dot{Q}_{\text{Strahl.}}'' = 0$$

Die allgemeine Rippengleichung lautet somit:

$$\underbrace{\lambda \cdot \frac{d}{dr} \left(S(r) \cdot \frac{dT}{dr} \right)}_{\text{Term 1}} - \underbrace{\frac{dA}{dr} \cdot \alpha \cdot (T - T_{\infty})}_{\text{Term 2}} = 0$$

Term 1:

mit: $S(r) = 2\pi \cdot r \cdot d$

$$\lambda \cdot \frac{d}{dr} \left(S(r) \cdot \frac{dT}{dr} \right) = \lambda \cdot 2\pi \cdot d \cdot \left[\frac{dT}{dr} + r \cdot \frac{d^2 T}{dr^2} \right]$$

Term 2:

mit $A(r) = 2 \cdot \left[\pi \cdot (r^2 - r_1^2) \right]$

$$\frac{dA}{dr} \cdot \alpha \cdot (T - T_{\infty}) = 4\pi \cdot r \cdot \alpha \cdot (T - T_{\infty})$$

Damit erhält die allgemeine Rippengleichung wenn wir wieder die Übertemperatur θ einführen die folgende Form:

$$\frac{d^2\theta}{dr^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{d\theta}{dr} - \frac{2 \cdot \alpha}{\lambda \cdot d} \cdot \theta = 0$$

Verwenden wir wieder den Rippenparameter m wie bei der linearen Rippe

$$m^2 = \frac{\alpha \cdot P}{\lambda \cdot S} \quad \text{mit } P = 2 \cdot (2\pi \cdot r) \quad m^2 = \frac{\alpha \cdot 4\pi \cdot r}{\lambda \cdot 2\pi \cdot r \cdot d} = \frac{2 \cdot \alpha}{\lambda \cdot d}$$

erhalten wir die folgende kompakte Differentialgleichung:

$$\frac{d^2\theta}{dr^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{d\theta}{dr} - m^2 \cdot \theta = 0$$

Diese Gleichung ist eine sog. modifizierte Bessel'sche Differentialgleichung. Eine direkte Integration ist nicht möglich, die allgemeine Lösung wird durch die Besselfunktionen angegeben, welche man durch eine Reihenentwicklung erhält:

$$\theta(r) = C_1 \cdot I_0(m \cdot r) + C_2 \cdot K_0(m \cdot r)$$

Bei den Funktionen I_0 und K_0 handelt es sich um sog. Besselfunktionen 0-ter Ordnung der ersten resp. der zweiten Art. Die Bestimmung der Integrationskonstanten erfolgt wie üblich durch einsetzen in die Randbedingungen.

Diese sind für den Fall des isolierten Rippenkopfes:

$$\begin{array}{lll} r=r_1 & T(r_1)=T_F & \theta(r_1)=T_F-T_\infty=\theta_F \\ r=r_2 & \left. \frac{d\theta}{dr} \right|_{r_2}=0 & \text{Rippenkopf isoliert} \end{array}$$

Die Lösung dieses Systems führt zu (hier ohne Einzelheiten):

$$\theta = \theta_F \frac{I_0(m \cdot r) \cdot K_1(m \cdot r_2) + I_1(m \cdot r_2) \cdot K_0(m \cdot r)}{I_0(m \cdot r_1) \cdot K_1(m \cdot r_2) + I_1(m \cdot r_2) \cdot K_0(m \cdot r_1)}$$

Besselfunktionen werden durch iterative Formeln berechnet, man findet Funktionswerte auch tabelliert in der Literatur.

4 Instationäre Wärmeleitung

Bis anhin haben wir die Wärmeleitungsgleichung für eine Reihe von stationären Fällen gelöst, Situationen also, wo keine zeitlichen Änderungen auftreten. In der Technik treten aber oft auch instationäre (transiente) Vorgänge auf. Solche Vorgänge sind gezeichnet durch eine Änderung in den Randbedingungen, welche abrupt auftreten (ein heisses Werkstück, das aus dem Ofen genommen wird) oder langsam und kontinuierlich variieren können (Wirkung des Aussenklimas auf ein Gebäude).

4.1 Instationäre, vom Raum unabhängige Wärmeleitung

Als erstes wollen wir Fälle betrachten, wo die gesuchte Temperatur nur von der Zeit und nicht vom Ort abhängt, d.h. der thermische Zustand des Objektes wird durch eine einzige Temperatur beschrieben. Dies entspricht einem Objekt, welches zur Zeit $t = 0$ sich auf einer Temperatur $T_i(0)$ befindet und zu diesem Zeitpunkt einer anderen Umgebungstemperatur T_∞ ausgesetzt wird (siehe Fig. 4.1). Im folgenden, transienten Vorgang tauscht der Körper Wärme mit der Umgebung aus. Dazu muss natürlich innerhalb des Körpers Wärme zur Oberfläche oder von dieser weg transportiert werden, was im Allgemeinen mit einem Temperaturgradienten verbunden ist. Unter welchen Voraussetzungen diese innere Temperaturverteilung vernachlässigt werden kann, soll im Folgenden untersucht werden:

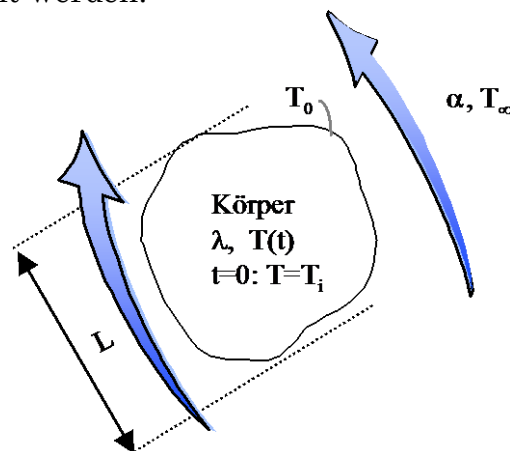


Fig. 4.1: Transienter Vorgang im Körper mit homogener Temperaturverteilung

Die Abschätzung beruht darauf, dass der Wärmetransport innerhalb eines Körpers (Wärmeleitfähigkeit λ , charakteristische Ausdehnung L) zur Oberfläche dem konvektiven Wärmeübergang (Uebergangskoeffizient α , Oberflächentemperatur T_0) an der Oberfläche entspricht:

$$\lambda \cdot \frac{T_i - T_0}{L} \approx \alpha \cdot (T_0 - T_\infty) \quad \text{oder} \quad T_i - T_0 \approx \text{Bi} \cdot (T_0 - T_\infty)$$

$$\text{mit der Biot-Zahl:} \quad \text{Bi} = \frac{\alpha \cdot L}{\lambda}$$

Die Beschreibung durch eine homogene Temperatur ist dann zulässig, wenn die Temperaturdifferenz $T_i - T_0$ vernachlässigt werden kann.

$$\frac{T_i - T_0}{T_0 - T_\infty} = Bi \ll 1$$

Diese Forderung ist erfüllt entweder für sehr kleine Körper:

$$\alpha \cdot L \ll 1$$

oder für Körper mit sehr guter Wärmeleitfähigkeit (metallische Körper):

$$\lambda \gg 1$$

Deshalb hängt für Objekte mit $Bi \ll 1$ bei transienten Vorgängen die Temperatur nur von der Zeit ab.

Als Beispiel betrachten wir eine heisse Metallkugel ($T(0) = T_i$, Masse M und Oberfläche A), welche zur Zeit $t = 0$ in ein kaltes Wasserbad ($T = T_\infty$) geworfen wird (Konvektion α) (siehe Fig. 4.2)

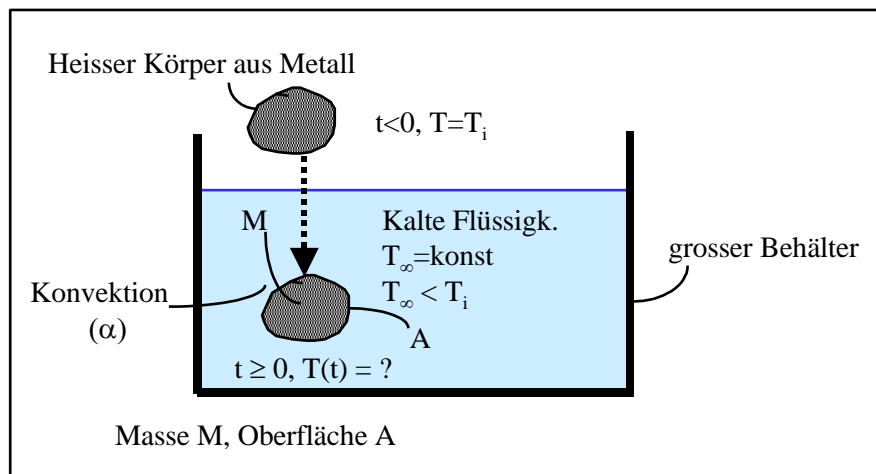


Fig. 4.2: Beispiel für transienten Vorgang

Wir betrachten diesen Körper als Kontrollvolumen und stellen dafür den Energiesatz auf:

$$\frac{dE}{dt} = \dot{Q}_{\text{ein}} - \dot{Q}_{\text{aus}} + \dot{Q}_{\text{Quellen}}$$

Auf der rechten Seite ist der einzige von Null verschiedene Term der austretende Wärmestrom durch Konvektion. Unter Benützung von

$$\text{Innere Energie } E = M \cdot c \cdot T \quad \text{Konvektion } \dot{Q}_{\text{aus}} = \dot{Q}_{\text{Konv}} = A \cdot \alpha \cdot (T - T_\infty)$$

$$\frac{d}{dt}(M \cdot c \cdot T) = -A \cdot \alpha \cdot (T - T_\infty)$$

Da die Masse und deren spezifische Wärme konstant sind erhalten wir:

$$\frac{dT}{dt} = -\frac{A \cdot \alpha}{M \cdot c} \cdot (T - T_\infty)$$

Diese Gleichung können wir in eine leicht lösbare Form überführen durch Einführung einer neuen Variablen (Uebertemperatur θ):

$$\theta = T - T_\infty \quad \theta_i = T_i - T_\infty$$

$$\frac{d\theta}{dt} = -\frac{A \cdot \alpha}{M \cdot c} \cdot \theta$$

Diese Gleichung kann nach der folgenden Umformung direkt integriert werden:

$$\frac{d\theta}{\theta} = -\frac{A \cdot \alpha}{M \cdot c} \cdot dt$$

resp. nach der Integration:

$$\ln \theta = -\frac{A \cdot \alpha}{M \cdot c} \cdot t + \ln C_1 \quad \rightarrow \quad \theta = C_1 \cdot e^{-\frac{A \cdot \alpha}{M \cdot c} \cdot t}$$

Die Integrationskonstante C_1 bestimmen wir aus der Anfangsbedingung:

$$\theta(0) = \theta_i = C_1 \cdot e^0 = K \quad \rightarrow \quad \theta(t) = \theta_i \cdot e^{-\frac{A \cdot \alpha}{M \cdot c} \cdot t}$$

oder nach Einsetzen der ursprünglichen Temperatur:

$$\frac{T - T_\infty}{T_i - T_\infty} = e^{-\frac{\alpha \cdot A}{M \cdot c} \cdot t} = e^{-t/\tau}$$

der transiente Vorgang wird dargestellt durch einen sog. exponentiellen Zerfall der Uebertemperatur (siehe Fig. 4.3)

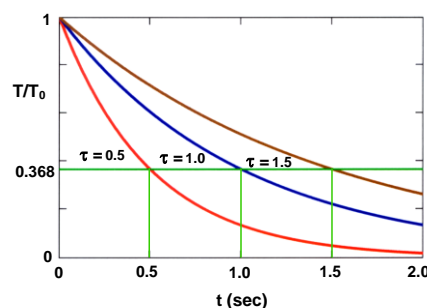


Fig. 4.3: exponentieller Zerfall der Uebertemperatur

Diese Lösung ist charakteristisch für alle Vorgänge, wo die zeitliche Änderung einer Grösse proportional zu dieser selbst ist. Es existiert eine charakteristische Zeitkonstante τ , d.h. die Zeit in der der ursprüngliche Wert auf $1/e$ zusammenfällt:

$$\tau = \frac{M \cdot c}{A \cdot \alpha} = [s]$$

Nach ∞ -langer Zeit nimmt T den Wert T_∞ an (was offensichtlich ist). Die Abkühlung erfolgt um so schneller, je kleiner die Zeitkonstante τ ist.

Die vom Körper während diesem transienten Vorgang insgesamt abgegebene Wärmemenge berechnet sich aus der Integration des konvektiven Wärmetransportes über die Dauer des Vorganges:

$$Q_{tot} = \int_0^{t \rightarrow \infty} \dot{Q}_{Konv.} \cdot dt = \int_0^{t \rightarrow \infty} \alpha \cdot A \cdot (T - T_\infty) \cdot dt$$

Wenn wir die für $T(t)$ berechnete Funktion einsetzen:

$$Q_{tot} = \int_0^{t \rightarrow \infty} \alpha \cdot A \cdot (T_i - T_\infty) \cdot e^{-\frac{\alpha \cdot A}{M \cdot c} t} \cdot dt = M \cdot c \cdot (T_i - T_\infty) \cdot \left[1 - e^{-\frac{\alpha \cdot A}{M \cdot c} (t \rightarrow \infty)} \right]$$

Damit erreicht die übertragene Wärmemenge nach dem vollständigen Ausgleich den Wert:

$$Q_{tot} = M \cdot c \cdot (T_i - T_\infty)$$

Die Beschreibung eines transienten Vorganges durch eine Mitteltemperatur nennt man auch das „Einknoten-Modell“ (engl: lumped capacity model).

Die Lösung für konvektiven Wärmeübergang allein und konstante Umgebungstemperatur ist sehr einfach. Für etwas allgemeinere Randbedingungen kompliziert sich die zu lösende Gleichung, d.h. wir erhalten inhomogene oder nicht lineare Gleichungen:

a) Die Umgebungstemperatur T_∞ variiert mit der Zeit, z. $T_\infty = C \cdot t + B$

$$\frac{dT}{dt} = -\frac{A \cdot \alpha}{M \cdot c} \cdot (T - C \cdot t - B)$$

Die Lösung dieser Gleichung kann numerisch ermittelt werden (siehe Fig. 7.4). Sie zeigt einen quasi-stationären Zustand, wo die Temperaturdifferenz zwischen Körper und Fluid einen konstanten Wert annimmt.

$$\Delta T(\infty) = C \cdot \tau$$

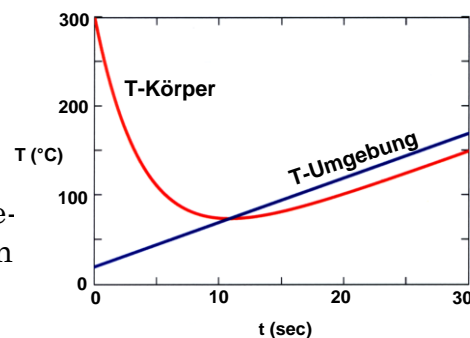


Fig. 4.4: Verlauf mit variabler Fluidtemperatur

b) Neben der Konvektion wird auch noch Wärmeübertragung durch Strahlung mit einbezogen:

$$M \cdot c \cdot \frac{dT}{dt} = -A \cdot \alpha \cdot (T - T_\infty) - \sigma \cdot \varepsilon \cdot A \cdot (T^4 - T_\infty^4)$$

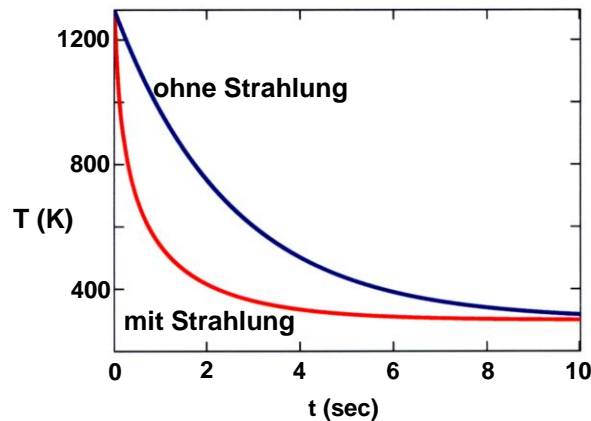


Fig. 4.5: Abkühlung mit Strahlung

Fig. 4.5 zeigt die entsprechende numerische Lösung. Insbesondere bei hohen Temperaturen bewirkt der zusätzliche Strahlungsterm eine viel raschere Abkühlung.

4.2 Eindimensionale instationäre Wärmeleitung

Ist die Forderung $Bi \ll 1$ nicht erfüllt, kann die Näherung der homogenen Temperaturverteilung innerhalb des betrachteten Objektes nicht mehr angewendet werden. In diesem Abschnitt wollen wir transiente Vorgänge betrachten, wo die Temperaturverteilung von einer Raumkoordinate und der Zeit abhängt. Dies ist der Fall für grosse plattenförmige Objekte, wo die Ausdehnung der Platte (y-z-Ebene) gross im Vergleich zu ihrer Dicke (in x-Richtung) ist. Aus Symmetriegründen fließen in der Plattenebene keine Wärmeströme (deshalb auch keine Temperaturgradienten).

Betrachten wir eine Panzerglasscheibe (Dicke $d = 0.01$ m), die bei einer Temperatur von ca. 700 °C (Wärmeleitfähigkeit $\lambda = 2$ W/m·K) aus dem Ofen gezogen wird und sich in der Luft durch Konvektion und Strahlung ($\alpha_{\text{tot}} = 200$ W/m²·K) abkühlt. In diesem Fall ist die Biot-Zahl in Bezug auf die Dicke der Scheibe:

$$Bi = \frac{\alpha \cdot d}{\lambda} = \frac{200 \cdot 0,01}{2} = 1$$

Die ähnliche Betrachtung gilt auch für heisse ebene metallische Werkstücke, welche z.B. in einem Wasserbad abgeschreckt werden (α sehr gross) (siehe Fig. 4.6).

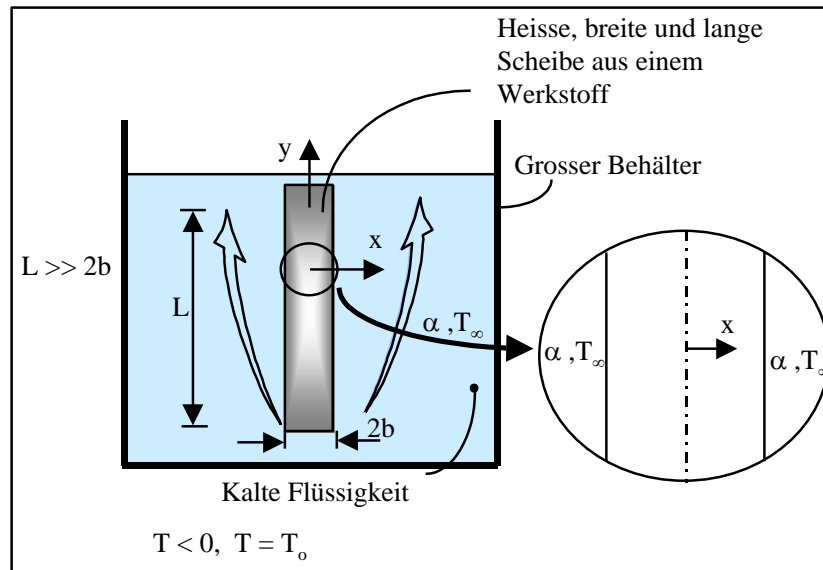


Fig. 4.6: Instationäre Wärmeleitung in einer ausgedehnten ebenen Platte

Die Energieerhaltungsgleichung ohne innere Wärmequellen lautet:

$$\frac{1}{a} \frac{\partial T}{\partial t} = \underbrace{\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}}_{\approx 0} + \underbrace{\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}}_{\approx 0} + \underbrace{\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}}_{\approx 0}$$

Dass wir die Ableitungen innerhalb der Plattenebene vernachlässigen können sehen wir aus der folgenden Betrachtung über die Grössenordnungen:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \sim O\left(\frac{T_0 - T_\infty}{b^2}\right)$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \sim O\left(\frac{T_0 - T_\infty}{L^2}\right)$$

Da wir nun voraussetzen $L \gg b$ resp. $L^2 \gg b^2$ folgt:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \gg \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}$$

und die für unser Problem zu lösende Gleichung lautet:

$$\frac{1}{a} \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

Für die Lösung der Gleichung legen wir den Ursprung der x-Koordinate in die Mitte der Platte, so dass sich diese von $-b$ bis $+b$ erstreckt. Wir benötigen nun zwei Rand- und eine Anfangsbedingung.

Anfangsbedingung: Zu Beginn befindet sich die Platte auf einer homogenen Temperatur:

$$t = 0: \quad T = T_0 \text{ (für } -b < x < +b)$$

Randbedingungen: In der Mitte der Platte befindet sich eine Symmetrieebene (kein Wärmefluss) und an den beiden Rändern herrscht konvektiver Wärmeübergang.

$$x = 0: \quad \frac{\partial T}{\partial x} = 0$$

$$x = b: \quad -\lambda \cdot \frac{\partial T}{\partial x} = \alpha \cdot (T - T_\infty)$$

Die Anfangsbedingung und die zweite Randbedingung sind nicht homogen. Wir führen deshalb die Übertemperatur als neue Variable ein.

$$\theta = T - T_\infty$$

Dies führt zur neuen Formulierung der Gleichung mit den zugehörigen Rand- und Anfangsbedingungen:

$$\frac{1}{a} \frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2}$$

$$x = 0: \quad \frac{\partial \theta}{\partial x} = 0$$

$$x = b: \quad -\lambda \frac{\partial \theta}{\partial x} = \alpha \cdot \theta$$

$$t = 0: \quad \theta(0, x) = T_0 - T_\infty = \theta_0$$

Auch in dieser Formulierung ist die Anfangsbedingung nicht homogen. Damit wir die Methode der Trennung der Variablen anwenden können, genügt es, wenn (im Falle der 1D instationären Wärmeleitung) die zwei Randbedingungen homogen sind. Analog wie bei der stationären 2D-Wärmeleitung wählen wir als Lösung den Produkte-Ansatz:

$$\theta(x, t) = X(x) \cdot S(t)$$

wobei X **nur** von x und S **nur** von t abhängt.

Setzen wir diesen Ansatz in die Grundgleichung ein:

$$\frac{1}{a} \cdot \underbrace{\frac{dS}{dt}}_{S'} \cdot X = \underbrace{\frac{d^2 X}{dx^2}}_{X''} \cdot S \quad \rightarrow \quad \frac{1}{a} \cdot S' \cdot X = X'' \cdot S$$

Damit lassen sich die beiden Funktionen separieren:

$$\frac{1}{a} \cdot \frac{S'}{S} = \frac{X''}{X}$$

$-\beta^2 \qquad -\beta^2$

Weil jede Seite von einer anderen Variablen abhängt, kann die Gleichung nur erfüllt werden, wenn jede Seite für sich eine Konstante (β^2) ist. Damit erhalten wir die beiden unabhängigen Teilgleichungen:

$$S' + \beta^2 \cdot a \cdot S = 0$$

$$X'' + \beta^2 \cdot X = 0$$

Diese Gleichungen haben als allgemeine Lösung:

$$S(t) = C_1 \cdot e^{-a \cdot \beta^2 \cdot t}$$

$$X(x) = C_2 \cdot \sin(\beta \cdot x) + C_3 \cos(\beta \cdot x)$$

Mit $C_1 \cdot C_2 = A$ und $C_1 \cdot C_3 = B$ können wir die vollständige Lösung angeben als:

$$\theta(t, x) = S(t) \cdot X(x) = e^{-a \cdot \beta^2 \cdot t} \cdot [A \cdot \sin(\beta \cdot x) + B \cdot \cos(\beta \cdot x)]$$

Zu bestimmen sind nun noch die beiden Integrationskonstanten A und B sowie die Konstante β . Wir verwenden zuerst die beiden Randbedingungen.

$$x = 0: \quad \frac{\partial \theta}{\partial x} = 0 \quad \rightarrow \quad \underbrace{e^{-a \cdot \beta^2 \cdot t}}_{>0} \left[\underbrace{A}_{=0} \cdot \underbrace{\beta}_{\neq 0} \cdot \underbrace{\cos(0)}_{=1} - B \cdot \beta \cdot \underbrace{\sin(0)}_{=0} \right] = 0 \quad \rightarrow \quad \underline{A = 0}$$

Da wir für eine nicht triviale Lösung $\beta \neq 0$ voraussetzen müssen folgt daraus $A = 0$.

Durch die Anwendung der zweiten Randbedingung:

$$x = b: \quad -\lambda \frac{\partial \theta}{\partial x} = \alpha \cdot \theta$$

erhält man [nach Kürzung beider Seiten mit der Zeitfunktion $S(t)$]:

$$-\lambda \cdot [-\beta \cdot B \sin(\beta \cdot b)] = \alpha \cdot B \cdot \cos(\beta \cdot b)$$

eine implizite Gleichung, welche die Bestimmung der Konstanten β erlaubt:

$$\beta = \frac{\alpha}{\lambda} \cot(\beta \cdot b) \quad \rightarrow \quad \underline{\beta \cdot b} = \underbrace{\frac{\alpha \cdot b}{\lambda}}_{\text{Biot-Zahl}} \cdot \cot(\beta \cdot b) = \underline{Bi \cdot \cot(\beta \cdot b)}$$

Da die cot-Funktion periodisch ist und Werte zwischen $+\infty$ und $-\infty$ annimmt, existiert in jedem Periodizitätsintervall ($0 \dots \pi$, $\pi \dots 2\pi$, $2\pi \dots 3\pi$ etc) eine Lösung für β , welche numerisch bestimmt werden kann, also

$$b \cdot \beta_n = \text{Bi} \cdot \cot(\beta_n \cdot b)$$

hat ∞ -viele Lösungen für $n = 1, 2, 3 \dots n \rightarrow \infty$. Dieser Satz von Lösungen hängt von der Biot-Zahl ab. Die Lösungen dieser impliziten Gleichung sind in Fig. 4.7 dargestellt. Für jeden Wert β_n erhalten wir somit eine partielle Lösung für θ . Die allgemeine Lösung für θ erhalten wir aus der Summe aller partiellen Lösungen:

$$\theta(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[B_n \cdot \cos(\beta_n \cdot x) \cdot e^{-a \cdot \beta_n^2 \cdot t} \right]$$

Für das weitere Vorgehen, nehmen wir an, dass die Lösungen für β_n bekannt sind, d.h. wir bestimmen die Biot-Zahl unseres spezifischen Problems und ermitteln dann den Satz von Lösungen für β_n . Die letzte Konstante B , welche für jede partielle Lösung einen spezifischen Wert B_n annimmt, erhalten wir aus der Anwendung der Anfangsbedingung.

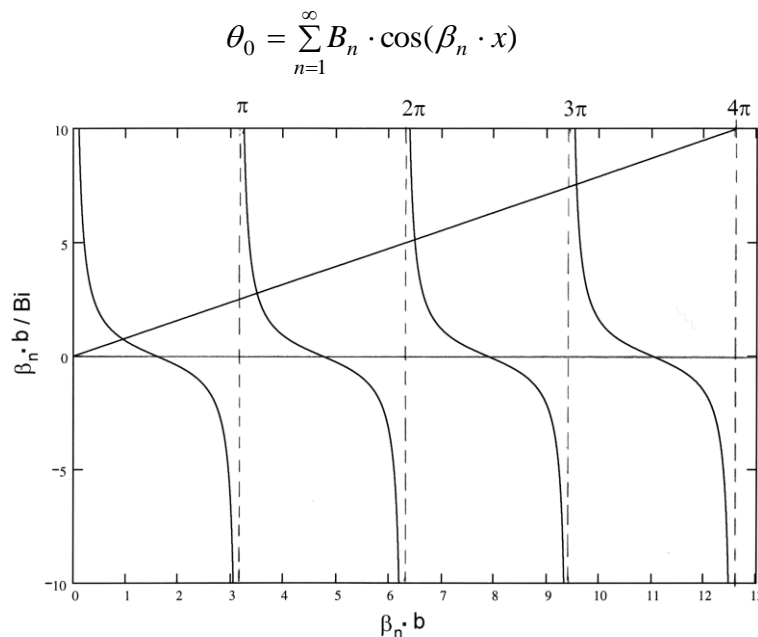


Fig. 4.7: Graphische Lösung der Gleichung für β_n (mit $\text{Bi} = 1,27$)

Die Funktionen $\cos(\beta_n \cdot x)$ bilden ein orthogonales System, wenn gilt $\beta_n \cdot b = n \cdot \pi$, was für genügend grosse Werte von $\beta_n \cdot b / \text{Bi}$ erfüllt ist (siehe Fig. 4.5). Wir können dann Bestimmungsgleichungen für alle Koeffizienten B_n herleiten. Dazu multiplizieren wir beide Seiten der obigen Gleichung mit $\cos(\beta_m \cdot x)$ und integrieren über das Intervall von 0 bis b :

$$\theta_0 \cdot \int_0^b \cos(\beta_m \cdot x) \cdot dx = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \cdot \int_0^b \cos(\beta_m \cdot x) \cdot \cos(\beta_n \cdot x) \cdot dx$$

Die rechte Seite ergibt:

$$\int_0^b \cos(\beta_m \cdot x) \cdot \cos(\beta_n \cdot x) \cdot dx = \begin{cases} \frac{\sin[(\beta_m - \beta_n) \cdot b]}{2 \cdot (\beta_m - \beta_n)} + \frac{\sin[(\beta_m + \beta_n) \cdot b]}{2 \cdot (\beta_m + \beta_n)} & \text{wenn } \beta_m \neq \beta_n \\ \left[\frac{b \cdot \beta_n}{2} + \frac{\sin(2 \cdot \beta_n \cdot b)}{4} \right] \frac{1}{\beta_n} & \text{wenn } \beta_m = \beta_n \end{cases}$$

Der Ausdruck für $\beta_m \neq \beta_n$ wird **null** für genügend grosse Werte von $\beta_n \cdot b / Bi$. Da unsere Lösung aber speziell für grosse Bi-Zahlen gelten soll, ist dies nicht immer erfüllt. Die Terme für $\beta_m \neq \beta_n$ müssen für kleine Werte von m und n mit berücksichtigt werden. Die weiteren Ausführungen gelten deshalb nur **näherungsweise**.

$$\theta_0 \cdot \int_0^b \cos(\beta_n \cdot x) \cdot dx = B_n \cdot \left[\frac{b \cdot \beta_n}{2} + \frac{\sin(2 \cdot \beta_n \cdot b)}{4} \right] \frac{1}{\beta_n}$$

Damit erhalten wir als Lösung für die Integrationskonstanten B_n :

$$B_n = \frac{\theta_0 \cdot \sin(\beta_n \cdot b)}{\left[\frac{b \cdot \beta_n}{2} + \frac{\sin(2 \cdot \beta_n \cdot b)}{4} \right]}$$

Diese Koeffizienten können wir jetzt einsetzen in die allgemeine Lösung unserer Differentialgleichung:

$$\theta(x, t) = T(x, t) - T_\infty = (T_0 - T_\infty) \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(\beta_n \cdot b)}{\left[\frac{b \cdot \beta_n}{2} + \frac{\sin(2 \cdot \beta_n \cdot b)}{4} \right]} \cdot \cos(\beta_n \cdot x) \cdot e^{-a \cdot \beta_n^2 \cdot t}$$

Diese Lösung gilt für eine konstante Anfangsbedingung θ_0 . Die Methode kann aber auch angewendet werden, wenn die Anfangsbedingung durch eine beliebige gegebene Funktion $\theta(0) = \theta_0(x)$ dargestellt wird. Die Bestimmungsgleichung für die Koeffizienten B_n lautet dann:

$$B_n = \frac{\int_0^b \theta_0(x) \cdot \cos(\beta_n \cdot x) \cdot dx}{\left[\frac{b \cdot \beta_n}{2} + \frac{\sin(2 \cdot \beta_n \cdot b)}{4} \right]}$$

Wie üblich können wir nun den Wärmestrom durch Anwendung des Fourier'schen Gesetzes berechnen. Von besonderem Interesse ist der Wärmestrom, welcher das Objekt an der Oberfläche bei $x = b$ verlässt:

$$\dot{q}_{x=b}'' = -\lambda \cdot \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_{x=b} = \lambda \cdot (T_0 - T_\infty) \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta_n \cdot \sin^2(\beta_n \cdot b)}{\left[\frac{b \cdot \beta_n}{2} + \frac{\sin(2 \cdot \beta_n \cdot b)}{4} \right]} \cdot e^{-a \cdot \beta_n^2 \cdot t}$$

Die gesamte übertragene Wärmemenge erhalten wir, wenn wir diesen Wärmestrom an der Stelle $x = b$ über die gesamte Dauer des Prozesses (d.h. von $t = 0$ bis $t = t_{\text{ende}}$ resp. $t \rightarrow \infty$) integrieren. Zwischen Wärmestromdichte und übertragener Wärmemenge pro Flächeneinheit besteht die Beziehung:

$$q''(\tau) = \int_0^\tau \dot{q}''(t) \cdot dt$$

Damit erhalten wir für die bei $x = b$ übertragene Wärmemenge:

$$\begin{aligned} q''_{x=b, t \rightarrow \infty} &= \lambda \cdot (T_0 - T_\infty) \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta_n \cdot \sin^2(\beta_n \cdot b)}{\left[\frac{b \cdot \beta_n}{2} + \frac{\sin(2\beta_n \cdot b)}{4} \right]} \cdot \int_0^{\infty} e^{-a \cdot \beta_n^2 \cdot t} \cdot dt \\ &= \frac{\lambda \cdot (T_0 - T_\infty)}{a} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2(\beta_n \cdot b)}{\left[\frac{b \cdot \beta_n}{2} + \frac{\sin(2\beta_n \cdot b)}{4} \right]} \cdot \frac{1}{\beta_n} \end{aligned}$$

Aus der Energieerhaltung folgt, dass die übertragene Wärmemenge dem ursprünglichen Wärmeinhalt (bezüglich der Uebertemperatur) entsprechen muss:

$$q'' = \frac{Q''}{A} = \frac{1}{A} \cdot \left[\underbrace{A \cdot b \cdot \rho \cdot c_p}_{\text{Masse}} \cdot (T_0 - T_\infty) \right] = \frac{\lambda \cdot (T_0 - T_\infty)}{a} \cdot b \quad \left[\text{mit } a = \frac{\lambda}{\rho \cdot c_p} \right]$$

Aus dem Vergleich der beiden obigen Formeln folgt:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2(\beta_n \cdot b)}{\left[\frac{b \cdot \beta_n}{2} + \frac{\sin(2\beta_n \cdot b)}{4} \right]} \cdot \frac{1}{\beta_n} = b$$

Die analytische Lösung für dieses nur 1D-Problem ist schon relativ aufwendig und nur näherungsweise gültig, entsprechend komplizierter werden diese Lösungen für 2D oder 3D Probleme. Deshalb sind für komplexere Fälle numerische Verfahren (Umwandlung der Differentialgleichung in ein System algebraischer Gleichungen durch Diskretisierung) vorzuziehen, die heute auf jedem besseren PC gelöst werden können.

4.3 Instationäre Wärmeleitung in der halbumendlichen Wand

Die Betrachtung der halbumendlichen Wand ist für viele Fälle von praktischer Bedeutung, obwohl wir es im allgemeinen nicht mit ∞ dicken Wänden zu tun haben. Wenn an einer Wand, die ursprünglich im thermischen Gleichgewicht ist, auf einer Seite eine plötzliche Störung anbringen, kann diese als ∞ dick behandelt werden für Zeiten, wo die Störung die Rückseite noch nicht erreicht hat. Für diese Situationen ist es einfach, analytische Lösungen zu erarbeiten.

Es können drei unterschiedliche Arten von Störungen unterschieden werden, die im Zeitpunkt $t = 0$ auf die Oberfläche zu wirken beginnen (siehe Fig. 4.8)

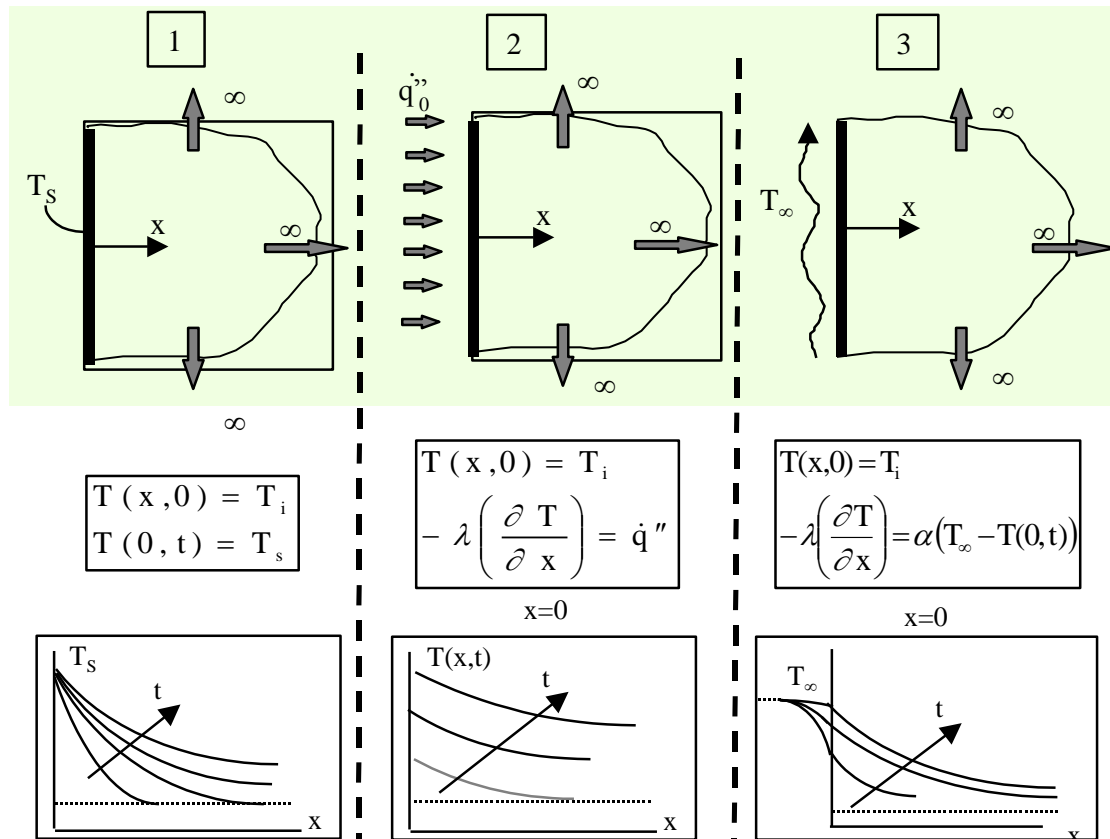
Es gilt wiederum die Erhaltungsgleichung für den 1D zeitabhängigen Fall:

$$\frac{1}{a} \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

Im folgenden werden wir den 1. Fall mit dem Temperatursprung an der Oberfläche behandeln. Die Anfangs- und Randbedingungen für diesen Fall lauten:

$$\begin{array}{lll} t < 0 & T = T_i & (\text{überall}) \\ t = 0 & T = T_s \text{ für } x=0 & T = T_i \text{ für } x>0 \\ x \rightarrow \infty & \text{und } t \rightarrow \infty & T = T_i \end{array}$$

Auch dieser Fall könnte mit der Methode der Trennung der Variablen gelöst werden. Hier bietet aber die Einführung einer sog. Ähnlichkeitsvariablen einen wesentlich einfacheren Lösungsweg. Solche Ähnlichkeitsvariablen sind im allgemeinen dimensionslos.



Im Zeitpunkt $t = 0$ wird die Temperatur der Oberfläche von T_i auf T_s erhöht

Vom Zeitpunkt $t = 0$ an beginnt ein konstanter Wärmestrom \dot{q}'' in die Oberfläche einzudringen.

Im Zeitpunkt $t = 0$ wird die Temperatur des angrenzenden Fluids von T_i auf T_∞ erhöht und es herrscht ein konvektiver Übergang zur Oberfläche.

Fig. 4.8: Zu betrachtende Störungen bei der halbunendlichen Wand

Wir wählen:

$$\eta = \frac{x}{\sqrt{4 \cdot a \cdot t}} \rightarrow \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{4 \cdot a \cdot t}} \rightarrow \frac{\partial \eta}{\partial t} = -\frac{x}{2 \cdot t \cdot \sqrt{4 \cdot a \cdot t}}$$

mit

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{dT}{d\eta} \frac{\partial \eta}{\partial t} \quad \text{und} \quad \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{d^2 T}{d\eta^2} \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2$$

wird die ursprüngliche Erhaltungsgleichung zu:

$$\frac{d^2 T}{d\eta^2} = -2 \cdot \eta \cdot \frac{dT}{d\eta}$$

Wir erhalten somit eine gewöhnliche Differentialgleichung, die nur noch von der Variablen η abhängt, die in den partiellen Ableitungen von η auftauchenden x und t können wiederum durch η ausgedrückt werden.

Die entsprechenden Randbedingungen lauten nun:

$$\begin{aligned}\eta \rightarrow 0 \quad (d.h. \ x \rightarrow 0 \text{ oder } t \rightarrow \infty) & \quad T(0) = T_s \\ \eta \rightarrow \infty \quad (d.h. \ x \rightarrow \infty \text{ oder } t \rightarrow 0) & \quad T(\infty) = T_i\end{aligned}$$

Man beachte, dass auch in den Randbedingungen die ursprünglichen Variablen x und t nicht mehr auftreten. Dies ist eine Grundbedingung, damit diese Methode angewendet werden kann. (Sowohl Gleichung als auch Randbedingungen müssen durch die neue Variable beschrieben werden können.)

Um die neue Gleichung zu lösen, schreiben wir diese wie folgt um:

$$\frac{d^2 T / d\eta^2}{dT / d\eta} = \frac{\frac{d}{d\eta} \left(\frac{dT}{d\eta} \right)}{dT / d\eta} = -2 \cdot \eta \quad \rightarrow \quad \frac{d \left(\frac{dT}{d\eta} \right)}{dT / d\eta} = -2 \cdot \eta \cdot d\eta$$

Die erste Integration führt zu:

$$\ln \left(\frac{dT}{d\eta} \right) = -\eta^2 + A \quad \rightarrow \quad \frac{dT}{d\eta} = B \cdot \exp(-\eta^2)$$

und nach der zweiten Integration erhalten wir:

$$\boxed{T(\eta) = B \cdot \int_0^\eta \exp(-u^2) \cdot du + C}$$

Aus der Benutzung der ersten Randbedingung bei $\eta = 0$ bestimmt man C :

$$T(\eta = 0) = T_s \quad \rightarrow \quad C = T_s$$

Die Integrationskonstante B folgt aus der zweiten Randbedingung bei $\eta \rightarrow \infty$:

$$T_i = B \cdot \int_0^\infty e^{-u^2} du + T_s \quad B = \frac{T_i - T_s}{\int_0^\infty e^{-u^2} du}$$

Der Wert des Integrals entspricht dem Normierungsfaktor des Gausschen Integrals:

$$\int_0^\infty e^{-u^2} du = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \quad \rightarrow \quad B = \frac{2 \cdot (T_i - T_s)}{\sqrt{\pi}}$$

Damit können wir die vollständige Lösung für $T(\eta)$ hinschreiben:

$$\frac{T - T_s}{T_i - T_s} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\eta e^{-u^2} du \equiv \operatorname{erf}(\eta)$$

$\text{erf}(\eta)$ ist die sog. Gauss'sche Fehlerfunktion (engl. error function). Die Funktionswerte müssen aus Tabellen bezogen werden. Die erf hat folgende Eigenschaften:

$$\begin{aligned}\text{erf}(-\eta) &= -\text{erf}(\eta) \\ \text{erf}(0) &= 0 \\ \text{erf}(\infty) &= 1\end{aligned}$$

Gebräuchlich für die Darstellung der Temperaturverteilung ist auch die Darstellung als Abweichung von der ursprünglichen Gleichgewichtstemperatur:

$$\frac{T - T_i}{T_s - T_i} = 1 - \text{erf}(\eta) = \text{erfc}(\eta)$$

wobei $\text{erfc}(\eta)$ die Komplementäre Fehlerfunktion (engl: complementary error function) genannt wird. Diese Darstellung gibt die Abweichung der lokalen Temperatur $T(\eta)$ von der Oberflächentemperatur T_s wieder.

Ein spezieller Punkt in dieser Verteilung ist die Stelle $\eta = 0.5$. Dies ergibt für Ort und Zeit die folgende Korrelation:

$$\begin{aligned}\eta = 0.5 &\quad \rightarrow \quad x_D = \sqrt{a \cdot t_D} \\ \text{erfc}(0.5) &= 0.48\end{aligned}$$

x_D wird die sogenannte **Diffusionslänge** (in Funktion der Diffusionszeit t_D) genannt. Sie bezeichnet die Stelle, wo abhängig von der Materialgrösse a nach der Zeit t_D die Störung einen Wert von 48 % von der gesamten an der Oberfläche angebrachten Störung erreicht. Für qualitative Abschätzungen bezeichnet x_D den Ort, wo die Störung signifikant geworden ist.

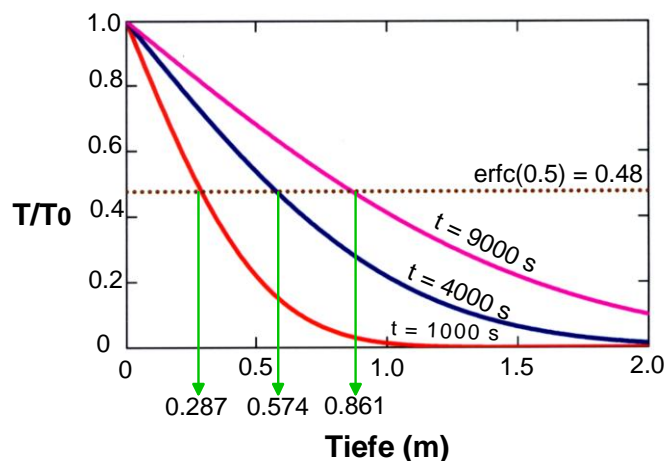


Fig. 4.9: Temperaturverläufe und Diffusionslänge

Fig. 4.9 zeigt die Temperaturverläufe in Aluminium ($a = 8,2 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2/\text{sec}$ und $x_D(1000 \text{ s}) = \sqrt{a \cdot t} = \sqrt{8,2 \cdot 10^{-5} \cdot 1000} = 0,287 \text{ m}$) und die Diffusionslängen für 1000, 4000 und 9000 sec.

Durch Anwendung des Fourier'schen Gesetzes erhalten wir nun auch den Wärmestrom. Von Interesse ist hier der Wärmefluss, welcher in die Oberfläche eindringt. ($x = \eta = 0$):

$$\dot{q}_{x=0}'' = -\lambda \cdot \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_{x=0} = -\lambda \cdot (T_i - T_s) \left(\frac{d(\operatorname{erf}(\eta))}{d\eta} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial x} \right)_{x=0} = \lambda \cdot (T_s - T_i) \cdot \left[\frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot e^{-\eta^2} \frac{1}{2 \cdot \sqrt{a \cdot t}} \right]_{\eta=0}$$

was noch vereinfacht werden kann zu:

$$\dot{q}_s'' = \frac{\lambda \cdot (T_s - T_i)}{\sqrt{\pi \cdot a \cdot t}}$$

Der Wärmestrom nimmt also proportional zu $1/\sqrt{t}$ ab.

Für die beiden übrigen Fälle (konstanter Wärmefluss und konvektiver Wärmeübergang an der Oberfläche) geben wir im folgenden die Resultate ohne Herleitung:

Konstanter Wärmestrom auf der Oberfläche: ($\dot{q}_s''(t) = \dot{q}_0'' = \text{const.}$)

$$T(x, t) - T_i = \frac{\dot{q}_0''}{\lambda} \cdot \left[\sqrt{\frac{4 \cdot a \cdot t}{\pi}} \cdot \exp\left(\frac{-x^2}{4 \cdot a \cdot t}\right) - x \cdot \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{at}}\right) \right]$$

Konvektiver Wärmeübergang auf der Oberfläche: (Übergangskoeffizient α)

$$\frac{T(x, t) - T_i}{T_\infty - T_i} = \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{a \cdot t}}\right) - \exp\left(\frac{\alpha \cdot x}{\lambda} + \frac{\alpha^2 \cdot a \cdot t}{\lambda^2}\right) \cdot \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{a \cdot t}} + \frac{\alpha \sqrt{a \cdot t}}{\lambda}\right)$$

Beispiel: Wir betrachten zwei ausgedehnte Körper von unterschiedlichen Materialeigenschaften, die sich auf zwei verschiedenen Temperaturen T_1 und T_2 befinden: (siehe Fig. 4.7). Im Zeitpunkt $t = 0$ werden die beiden Körper an einer ebenen Fläche miteinander in Kontakt gebracht. Die Ausdehnung der Körper ist gross genug, so dass wir diese als halbusendlich betrachten können.

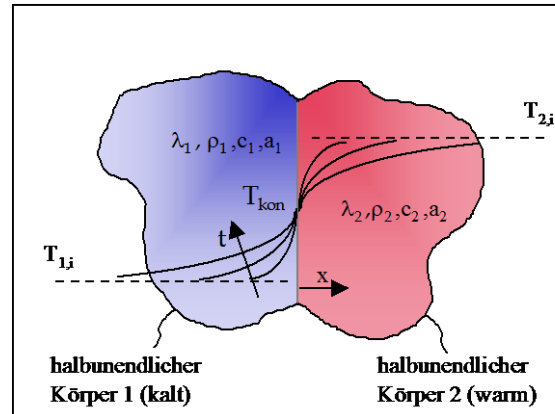


Fig. 4.7: Zwei halbunendliche Körper in thermischem Kontakt

Wir möchten nun den Temperaturverlauf in den Körpern sowie den Wärmefluss durch die Oberfläche bestimmen. Dazu nehmen wir an, dass die Temperatur an der Kontaktfläche T_{kon} einen konstanten Wert annimmt. Die Temperaturverläufe in den Körpern können wir somit angeben:

$$\frac{T_1(x) - T_{Kon}}{T_{1,i} - T_{Kon}} = \operatorname{erf}\left(\frac{(-x)}{2\sqrt{a_1 \cdot t}}\right)$$

$$\frac{T_2(x) - T_{Kon}}{T_{2,i} - T_{Kon}} = \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{a_2 \cdot t}}\right)$$

Ebenfalls können wir die Wärmeflüsse durch die Oberflächen in Bezug auf T_{Kon} angeben:

$$\begin{aligned}\dot{q}_{1,Kon}'' &= -\lambda_1 \cdot \left(\frac{\partial T_1}{\partial x}\right)_{x=0} = -\frac{\lambda_1 \cdot (T_{Kon} - T_{i,1})}{\sqrt{\pi \cdot a_1 \cdot t}} \\ \dot{q}_{2,Kon}'' &= -\lambda_2 \cdot \left(\frac{\partial T_2}{\partial x}\right)_{x=0} = \frac{\lambda_2 \cdot (T_{Kon} - T_{i,2})}{\sqrt{\pi \cdot a_2 \cdot t}}\end{aligned}$$

Nun müssen aber aus Kontinuitätsgründen die beiden Wärmeströme einander gleich sein: $\dot{q}_{2,Kon}'' = \dot{q}_{1,Kon}''$ d.h.:

$$-\frac{\lambda_1 \cdot (T_{Kon} - T_{i,1})}{\sqrt{\pi \cdot a_1 \cdot t}} = \frac{\lambda_2 \cdot (T_{Kon} - T_{i,2})}{\sqrt{\pi \cdot a_2 \cdot t}}$$

Aus dieser Beziehung lässt sich nun die Temperatur der Kontaktfläche berechnen:

$$T_{Kon} = \frac{\sqrt{\lambda_1 \cdot \rho_1 \cdot c_1} \cdot T_{1,i} + \sqrt{\lambda_2 \cdot \rho_2 \cdot c_2} \cdot T_{2,i}}{\sqrt{\lambda_1 \cdot \rho_1 \cdot c_1} + \sqrt{\lambda_2 \cdot \rho_2 \cdot c_2}}$$

Die Temperatur der Kontaktstelle hängt also von den physikalischen Eigenschaften der beiden Materialien ab. Wenn wir einen Körper in die Hand nehmen, dessen Temperatur sich von der Temperatur der Hand unterscheidet, spüren wir die Kontakttemperatur (und nicht die Temperatur T_i). Ein warmes Metallstück fühlt sich deshalb viel heisser an als ein Stück Holz der selben Temperatur.

5 Grundlagen der Konvektion

Unter Konvektion verstehen wir den Wärmetransport bedingt durch die Bewegung eines Fluids. Obwohl in jedem Fluid (Gas, Flüssigkeit) auch Wärmeleitung (Diffusion durch die ungeordnete Bewegung der Moleküle) vorhanden ist, ist der Wärmetransport durch die Fliessbewegung (geordnete Bewegung) dominant.

5.1 Einführung in den konvektiven Wärmeübergang

Bewegt sich ein Fluid entlang der Oberfläche eines festen Körpers unterschiedlicher Temperatur, wird Wärme ausgetauscht, wobei die Fliessbewegung des Fluids die massgebende Rolle spielt. Betrachten wir zuerst einen Körper beliebiger Form (siehe Fig. 5.1 links).

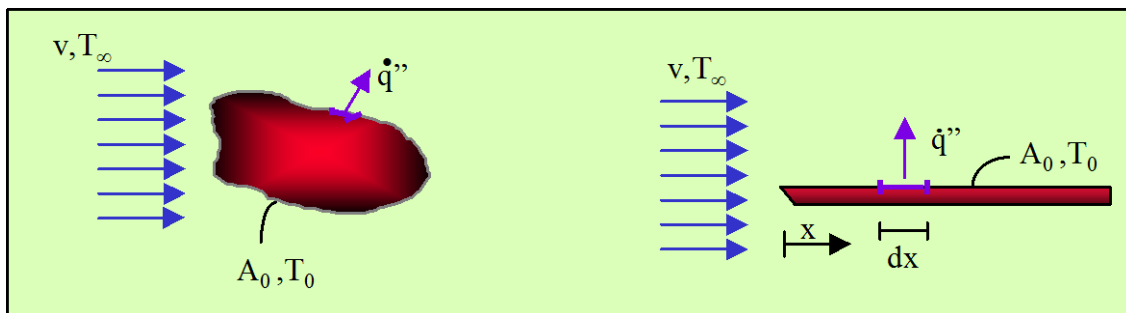


Fig. 5.1 Mögliche Situationen beim konvektiven Wärmeübergang

Wir nehmen an, dass der Körper selbst heiss ist und Wärme an das kalte Fluid abgibt. Die lokale Wärmeübertragungsrate (Wärmeflussdichte durch die Oberfläche) wird gegeben durch:

$$\dot{q}'' = \alpha \cdot (T_0 - T_\infty)$$

Da sich bei einer beliebigen Form des Körpers die Strömungsbedingungen von Punkt zu Punkt ändern, ist auch die Wärmeflussdichte lokal unterschiedlich. Den gesamten Wärmefluss erhalten wir deshalb durch Integration über die Oberfläche.

$$\dot{q} = \int_{A_0} \dot{q}'' \cdot dA_0 = (T_0 - T_\infty) \cdot \int_{A_0} \alpha \cdot dA_0$$

Bis anhin haben wir den konvektiven Wärmeübergang durch einen mittleren α -Wert beschrieben, der auf die gesamte Oberfläche angewendet wurde.

$$\dot{q} = \bar{\alpha} \cdot A_0 \cdot (T_0 - T_\infty)$$

Dieser mittlere α -Wert wird nach den üblichen Regeln der Mittelwertbildung berechnet, wie aus dem Vergleich der beiden Ausdrücke zu ersehen ist.

$$\bar{\alpha} = \frac{1}{A_0} \int_{A_0} \alpha \cdot dA_0$$

Für den Fall einer ebenen Platte (Fig. 5.1 rechts) reduziert sich das Problem um eine Dimension. Der Wärmeübergang hängt nur vom Abstand zur Anströmkannte ab:

$$\bar{\alpha} = \frac{1}{L} \cdot \int_0^L \alpha(x) \cdot dx$$

Die Berechnung des konvektiven Wärmeüberganges erfordert die Kenntnis der lokalen und mittleren Wärmeübergangskoeffizienten. Die Bestimmung dieser Koeffizienten ist das zentrale Thema der Behandlung des konvektiven Wärmeüberganges. Diese hängen von den lokalen Eigenschaften der sich ausbildenden Grenzschichten ab (thermisch und strömungsmässig). Die Einflussfaktoren sind vielfältig wie z.B.:

- Geometrie und Rauigkeit der Oberfläche
- Zustand der Strömung (laminar oder turbulent)
- Eigenschaften der Flüssigkeit (Viskosität, spezifische Wärme)

5.2 Erhaltungsgleichungen für 2D-Konvektion

Der allgemeine konvektive Wärmeübergang wird bestimmt durch die 3-dimensionalen Felder der Geschwindigkeit (u, v, w) der Temperatur T und der Druckverteilung p . Alle diese Variablen sind Funktionen der Raumkoordinaten (x, y, z). Ferner spielen die Eigenschaften des Fluids wie Dichte ρ , Wärmeleitfähigkeit λ und die Viskosität μ (resp. die dynamische Viskosität $\nu = \mu/\rho$) eine wichtige Rolle. Da sich alle diese Variablen gegenseitig beeinflussen, benötigen wir ein Gleichungssystem mit 5 Gleichungen, dessen simultane Lösung die 3D-Felder dieser Größen bestimmt. Dazu können wir die folgenden Erhaltungsgleichungen aufstellen:

- Massenerhaltung (resp. Kontinuitätsgleichung)
- je 1 Erhaltungsgleichung für jede der 3 Impulskomponenten.
- Energieerhaltung.

In den folgenden Abschnitten werden diese Gleichungen hergeleitet. Wir beschränken uns dabei auf den 2-dimensionalen und stationären Fall, was für die Betrachtung von Grenzschichten auf ebenen Flächen genügt.

5.2.1 Die Kontinuitätsgleichung

Wir betrachten ein infinitesimales Volumenelement mit dem Querschnitt $dx \cdot dy$ und der Länge l . Die ein- und austretenden Massenströme werden durch die Dichte und die Geschwindigkeiten bestimmt (siehe Fig. 5.2):

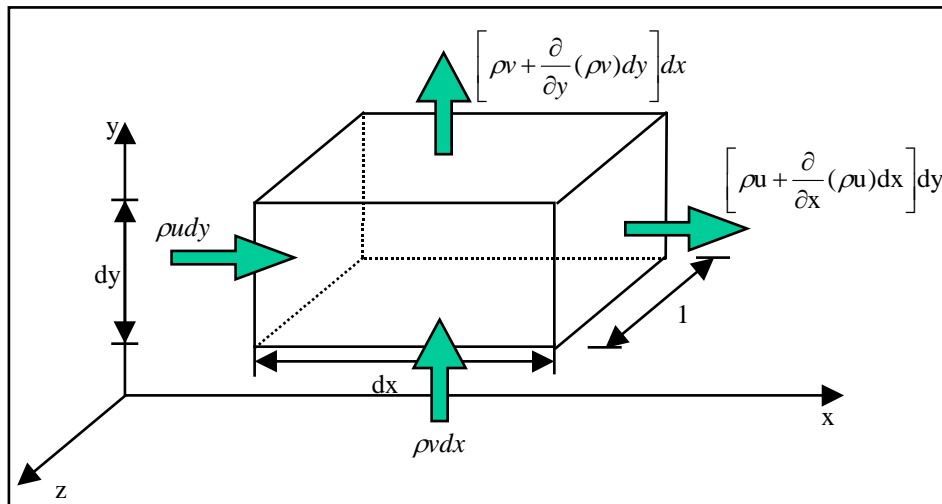


Fig. 5.2: Darstellung zur infinitesimalen Massenbilanz

Wir können die folgende Massenbilanz aufstellen:

eintretende Massenströme: $\rho \cdot u \cdot dy \cdot 1 + \rho \cdot v \cdot dx \cdot 1$

austretende Massenströme: $\left[\rho \cdot u + \frac{\partial}{\partial x}(\rho \cdot u) \cdot dx \right] dy \cdot 1 + \left[\rho \cdot v + \frac{\partial}{\partial y}(\rho \cdot v) \cdot dy \right] dx \cdot 1$

Im stationären Fall muss die Differenz natürlich null sein:

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho \cdot u) \cdot dx \cdot dy + \frac{\partial}{\partial y}(\rho \cdot v) \cdot dx \cdot dy = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{\partial(\rho \cdot u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho \cdot v)}{\partial y} = 0$$

Für eine inkompressible Flüssigkeit ($\rho = \text{konst.}$) vereinfacht sich diese Gleichung zu:

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0}$$

Die allgemeinste Form der stationären Kontinuitätsgleichung in Vektorform lautet:

$$\boxed{\text{div}(\rho \cdot \vec{v}) = 0}$$

5.2.2 Die Impulserhaltungsgleichung

Wenn wir über die Impulserhaltung sprechen müssen wir uns im Klaren sein, dass wir ein ortsfestes Kontrollvolumen betrachten, d.h. wir wenden die sog. Euler'sche Betrachtungsweise an und beschreiben die ein- und austretenden Impulsflüsse. Die steht im Gegensatz zur Lagrange'schen Betrachtung, die sich auf ein bestimmtes Fluidpartikel bezieht und damit dessen Impulsänderung beschrieben werden muss.

Wir führen hier die Herleitung für die x-Komponente des Impulses durch. Die Herleitung für die y- oder z-Komponente ist analog. Die für den 2D-Fall zu betrachtenden Impulsflüsse sind in Fig. 5.3 dargestellt.

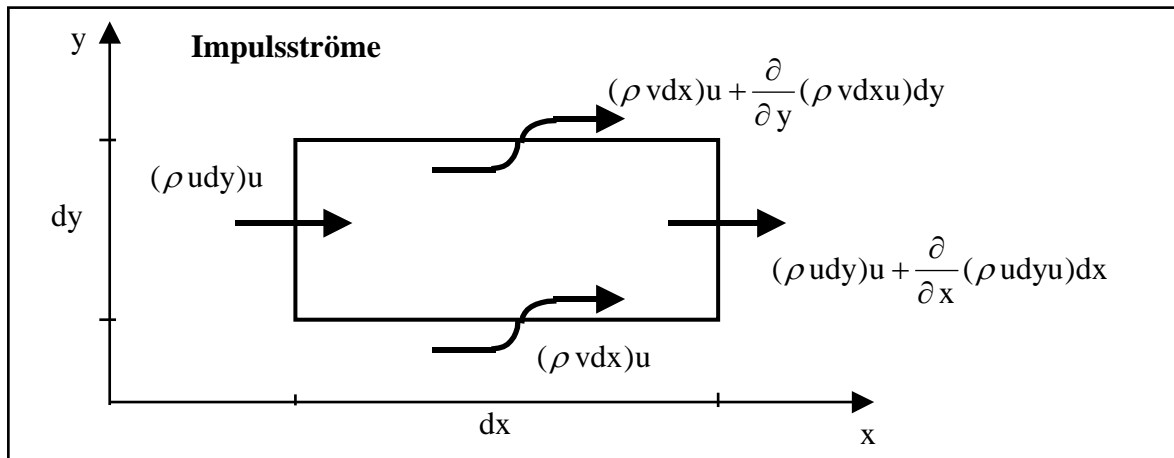


Fig. 5.3 Impulsströme (x-Komponente) im 2D-Fall

Der Impulsstrom ist das Produkt aus Impulsdichte und Volumenstrom. Wir erhalten somit:

eintretender Impulsstrom: $\underbrace{(\rho \cdot u)}_{\text{Impuls-dichte}} \cdot \underbrace{u \cdot dy \cdot l}_{\text{Volumen-strom}} + (\rho \cdot u) \cdot v \cdot dx \cdot l$

austretender Impulsstrom:

$$(\rho \cdot u) \cdot u \cdot dy \cdot l + \frac{\partial}{\partial x} ((\rho \cdot u) \cdot u \cdot dy \cdot l) \cdot dx + (\rho \cdot u) \cdot v \cdot dx \cdot l + \frac{\partial}{\partial y} ((\rho \cdot u) \cdot v \cdot dx \cdot l) \cdot dy$$

Die Differenz zwischen ein- und austretenden Impulsströmen kann (pro Einheitslänge in z-Richtung) dargestellt werden als:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} ((\rho \cdot u) \cdot u \cdot dy) \cdot dx + \frac{\partial}{\partial y} ((\rho \cdot u) \cdot v \cdot dx) \cdot dy &= \left[\frac{\partial}{\partial x} (\rho \cdot u \cdot u) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho \cdot u \cdot v) \right] \cdot dx \cdot dy \\ &= \left[u \frac{\partial(\rho \cdot u)}{\partial x} + \rho \cdot u \frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial(\rho \cdot v)}{\partial y} + \rho \cdot v \frac{\partial u}{\partial y} \right] \cdot dx \cdot dy \\ &= \left\{ \rho \cdot u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho \cdot v \frac{\partial u}{\partial y} + u \cdot \underbrace{\left[\frac{\partial(\rho \cdot u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho \cdot v)}{\partial y} \right]}_{=0 \text{ wegen Kontinuitätsgleichung}} \right\} \cdot dx \cdot dy \end{aligned}$$

Damit erhalten wir die folgende einfache Darstellung für die im Kontrollvolumen stattfindende Änderung des Impulsstromes:

$$\rho \cdot \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) \cdot dx \cdot dy$$

Diese im Kontrollvolumen stattfindende Änderung des Impulsstroms wird nach dem Newton'schen Gesetz der Mechanik durch die Summe der wirkenden Kräfte verursacht. (siehe Fig. 5.4)

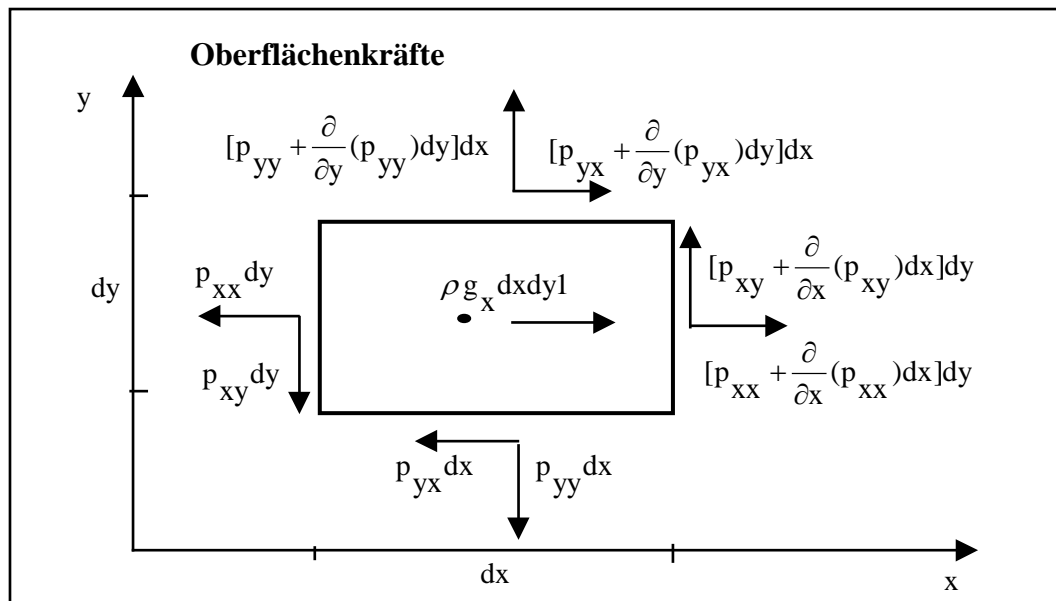


Fig. 5.4 Gesamtheit der Oberflächenkräfte, die am Kontrollvolumen auftreten

Wie in jedem Kontinuum können diese Kräfte sein:

- Viskose Normalspannungen (z.B. fließender Honig)
- Normalspannungen aus Druckkräften
- Schubspannungen

Für die Bezeichnung dieser Vielfalt von Kräften wollen wir die folgende Nomenklatur benutzen (siehe auch Fig. 5.5):

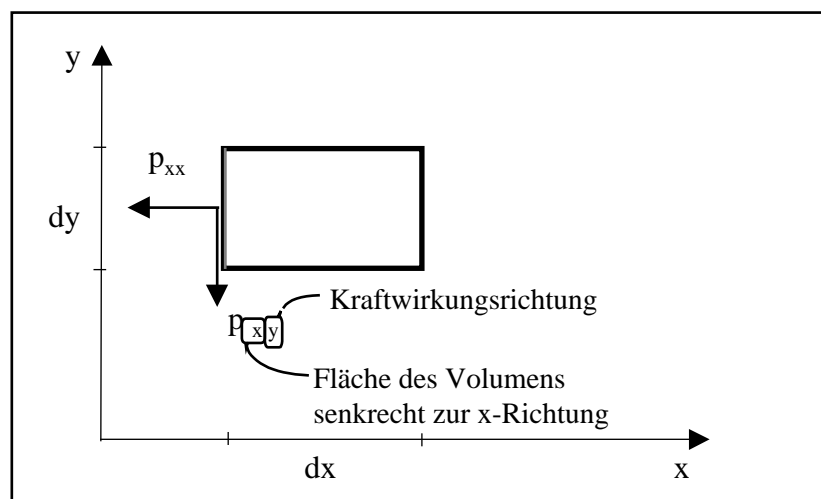


Fig. 5.5 Konvention der Kräftebezeichnung

- $P_{x,y}$
1. Index x: Richtung der Flächennormalen, auf die die Kraft wirkt
 2. Index y: Richtung der Kraftwirkung

Die Kräfte mit der Bezeichnung $_{x,x}$ oder $_{y,y}$ sind Normalspannungen und diejenigen mit $_{x,y}$ oder $_{y,x}$ sind Schubspannungen.

Für die x-Komponente der Impulserhaltungsgleichung müssen wir nur die in x-Richtung wirkenden Kräfte berücksichtigen. Wir erhalten für die Summe der wirkenden Kräfte:

$$\left(p_{xx} + \frac{\partial}{\partial x}(p_{xx})dx\right) \cdot dy + \left(p_{yx} + \frac{\partial}{\partial y}(p_{yx})dy\right) \cdot dx - p_{xx} \cdot dy - p_{yx} \cdot dx = \frac{\partial p_{xx}}{\partial x} \cdot dx \cdot dy + \frac{\partial p_{yx}}{\partial y} \cdot dx \cdot dy$$

Man beachte, dass sowohl bei den Druckspannungen als auch den Schubspannungen die Vorzeichen der Kraftwirkung an gegenüberliegenden Seiten entgegengesetzt sind.

Aus der Mechanik des Kontinuums beziehen wir (hier ohne Herleitung):

$$p_{xx} = -p + \sigma_x = -p - \frac{2}{3} \cdot \mu \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + 2 \cdot \mu \cdot \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$p_{yx} = \tau_{yx} = \tau_{xy} = \mu \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right)$$

wobei:

- μ : Zähigkeit (Viskosität) [kg/ms]
- p : der Druck
- u, v : Geschwindigkeiten
- p_{xx} : Normalspannung
- p_{yx} : Schubspannung

Damit erhalten wir als Summe der inneren Spanningskräfte:

$$\left\{ -\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left[-\frac{2}{3} \mu \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + 2 \mu \cdot \frac{\partial u}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\mu \cdot \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right] \right\} \cdot dx \cdot dy$$

Am Volumenelement wirken schliesslich noch Massenkkräfte, wobei im Falle der Thermodynamik nur die Schwerkraft (hier nur die x-Komponente davon) von Interesse ist (elektromagnetische Kräfte wären eine andere Art von Volumenkraft):

$$\rho \cdot g_x \cdot dx \cdot dy \cdot 1$$

Fasst man alles zur folgenden Gleichung zusammen: Die Änderung des **Impulsstromes** im Kontrollvolumen ist gleich den wirkenden **Oberflächenkräften** und der **Volumenkraft**, so erhält man (nach Division durch $dx \cdot dy$) die Impulserhaltungsgleichung in x-Richtung, bekannt unter dem Namen Navier-Stokes-Gleichung:

$$\rho \cdot \left[u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right] = \left[-\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left\{ -\frac{2}{3} \mu \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + 2 \cdot \mu \frac{\partial u}{\partial x} \right\} + \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \mu \cdot \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right\} \right] + \rho \cdot g_x$$

Diese allgemein gültige Erhaltungsgleichung für Impulsströme kann unter der Annahme konstanter Stoffeigenschaften (μ , ρ) und unter Berücksichtigung der Kontinuität für inkompressible Medien weiter vereinfacht werden:

Die Kontinuität für inkompressible Medien bedingt:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

Damit fällt auf der rechten Seite der folgende Term weg:

$$-\frac{2}{3}\mu \cdot \underbrace{\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right)}_{=0 \text{ wegen Kontinuität}}$$

Der verbleibende Rest auf der rechten Seite kann wie folgt umgeformt werden:

$$\begin{aligned} & -\frac{\partial P}{\partial x} + 2 \cdot \mu \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \mu \cdot \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \rho \cdot g_x \\ &= -\frac{\partial P}{\partial x} + \mu \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \mu \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \mu \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial x \cdot \partial y} + \mu \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \rho \cdot g_x \\ &= -\frac{\partial P}{\partial x} + \mu \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \mu \cdot \frac{\partial}{\partial x} \underbrace{\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right)}_{=0 \text{ wegen Kontinuität}} + \mu \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \rho \cdot g_x \end{aligned}$$

Damit erhalten wir für konstante Stoffeigenschaften die folgende einfache Form:

$$\rho \cdot \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = -\frac{\partial P}{\partial x} + \mu \cdot \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + \rho \cdot g_x$$

Durch die entsprechend analoge Herleitung erhalten wir die Impulserhaltungsgleichung in y-Richtung:

$$\rho \cdot \left(u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) = -\frac{\partial P}{\partial y} + \mu \cdot \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) + \rho \cdot g_y$$

Unter Benutzung des früher definierten ∇ -Operators können wir diese Gleichung auch in Vektorform schreiben:

$$\rho \cdot (\vec{V} \bullet \vec{\nabla}) \vec{V} = -\vec{\nabla} P + \mu \cdot \vec{\nabla}^2 \vec{V} + \rho \cdot \vec{g}$$

$$\text{wobei:} \quad \vec{V} = \vec{i} \cdot u + \vec{j} \cdot v \quad \vec{\nabla} = \vec{i} \cdot \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \cdot \frac{\partial}{\partial y} \quad \vec{\nabla}^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

5.2.3 Die Energieerhaltungsgleichung

Die Energieerhaltungsgleichung ist nichts anderes als der 1. Hauptsatz der Thermodynamik für ein offenes System (siehe Thermo 1) hier angewendet auf ein festes Kontrollvolumen in der Strömung. Die einzelnen Komponenten dieser Energiebilanz sind:

- Energieströme, die an die ein- und austretenden Massenströme gebunden sind (Konvektion)
- Wärmeströme bedingt durch Wärmeleitung
- innere Quellen (z.B. Reaktionswärme bei Verbrennungsreaktionen)
- Arbeitsleistung der Oberflächen- und Volumenkräfte

Wir werden die Erhaltungsgleichung für eine **stationäre** Strömung herleiten. Änderungen in der kinetischen Energie (relevant für Geschwindigkeiten grösser als die Schallgeschwindigkeit) und der potentiellen Energie (relevant ab Höhenunterschieden im Gravitationsfeld der Erde > 5000 m) werden vernachlässigt.

In Fig. 5.6 sind die Energieströme bedingt durch Konvektion \dot{E}_K und Wärmeleitung \dot{E}_L für den 2D-Fall zusammengestellt.

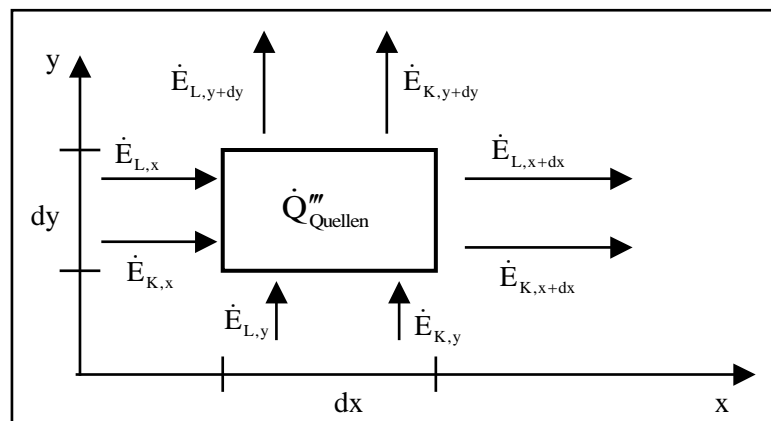


Fig. 5.6 Komponenten der Energieströme durch Konvektion und Wärmeleitung

Das Fluid besitzt eine spezifische innere Energie e (J/kg) und bewegt sich mit den Geschwindigkeitskomponenten u und v . Für die konvektiven Energieströme $\dot{E}_{K,tot}$ gilt die folgende Bilanz:

$$\begin{aligned}
 \dot{E}_{K,tot} &= (\dot{E}_{K,x} - \dot{E}_{K,x+dx}) + (\dot{E}_{K,y} - \dot{E}_{K,y+dy}) \\
 &= \left\{ (\rho \cdot e) \cdot u \cdot dy - \left[(\rho \cdot e) \cdot u \cdot dy + \frac{\partial}{\partial x} ((\rho \cdot e) \cdot u \cdot dy) dx \right] \right\} \\
 &\quad + \left\{ (\rho \cdot e) \cdot v \cdot dx - \left[(\rho \cdot e) \cdot v \cdot dx + \frac{\partial}{\partial y} ((\rho \cdot e) \cdot v \cdot dx) dy \right] \right\} \\
 &= - \left[\frac{\partial}{\partial x} (\rho \cdot e \cdot u) \cdot dx \cdot dy + \frac{\partial}{\partial y} (\rho \cdot e \cdot v) \cdot dx \cdot dy \right]
 \end{aligned}$$

Analog können wir vorgehen für die Bilanz der Wärmeströme bedingt durch Wärmeleitung $\dot{E}_{L,tot}$:

$$\begin{aligned}\dot{E}_{L,tot} &= (\dot{E}_{L,x} - \dot{E}_{L,x+dx}) + (\dot{E}_{L,y} - \dot{E}_{L,y+dy}) \\ &= \left\{ \dot{E}_{L,x} - \left[\dot{E}_{L,x} + \frac{\partial}{\partial x} (\dot{E}_{L,x}) \cdot dx \right] \right\} + \left\{ \dot{E}_{L,y} - \left[\dot{E}_{L,y} + \frac{\partial}{\partial y} (\dot{E}_{L,y}) \cdot dy \right] \right\} \\ &= -\frac{\partial}{\partial x} (\dot{E}_{L,x}) \cdot dx - \frac{\partial}{\partial y} (\dot{E}_{L,y}) \cdot dy\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{Anwendung des Fourier'schen Gesetzes} &= -\frac{\partial}{\partial x} \left\{ -\lambda \cdot dy \cdot \frac{\partial T}{\partial x} \right\} \cdot dx - \frac{\partial}{\partial y} \left\{ -\lambda \cdot dx \cdot \frac{\partial T}{\partial y} \right\} \cdot dy \\ &= \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \cdot \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda \cdot \frac{\partial T}{\partial y} \right) \right] \cdot dx \cdot dy\end{aligned}$$

Die infolge Oberflächen- und Volumenkräften entstehenden Arbeitsleistungen sind in Fig. 5.7 dargestellt.

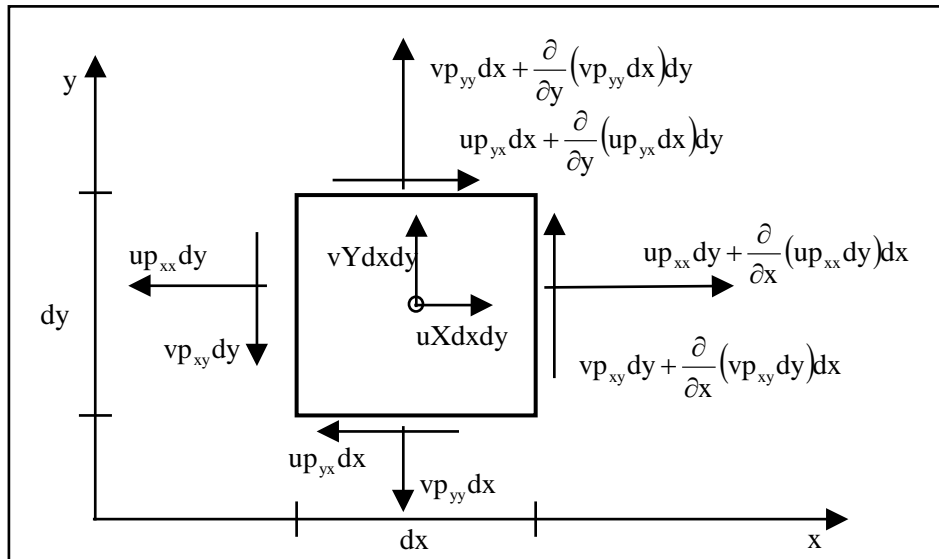


Fig. 5.7 Leistungen infolge Oberflächen- (=Reibung) und Volumenkräften

Die Bilanz der Leistungen $\dot{W}_{K,tot}$ dieser Kräfte sieht wie folgt aus (Leistung = Kraft mal Geschwindigkeit):

$$\begin{aligned}\dot{W}_{K,tot} &= \\ &u \cdot p_{xx} \cdot dy + \frac{\partial}{\partial x} (u \cdot p_{xx} \cdot dy) \cdot dx - u \cdot p_{xx} \cdot dy + v \cdot p_{yy} \cdot dy + \frac{\partial}{\partial y} (v \cdot p_{yy} \cdot dx) \cdot dy - v \cdot p_{yy} \cdot dy \\ &+ u \cdot p_{yx} \cdot dx + \frac{\partial}{\partial y} (u \cdot p_{yx} \cdot dx) \cdot dy - u \cdot p_{yx} \cdot dx + v \cdot p_{xy} \cdot dy + \frac{\partial}{\partial x} (v \cdot p_{xy} \cdot dy) \cdot dx - v \cdot p_{xy} \cdot dy \\ &+ u \cdot X \cdot dx \cdot dy + v \cdot Y \cdot dx \cdot dy \\ &= \frac{\partial}{\partial x} (u \cdot p_{xx} \cdot dy) \cdot dx + \frac{\partial}{\partial y} (v \cdot p_{yy} \cdot dx) \cdot dy + \frac{\partial}{\partial y} (u \cdot p_{yx} \cdot dx) \cdot dy + \frac{\partial}{\partial x} (v \cdot p_{xy} \cdot dy) \cdot dx \\ &+ u \cdot X \cdot dx \cdot dy + v \cdot Y \cdot dx \cdot dy\end{aligned}$$

Für die Oberflächenkräfte können wir die von der Impulsgleichung her bekannten Beziehungen für Druck, Normalspannungen und Schubspannungen einsetzen:

$$\begin{aligned}p_{xx} &= -p + \sigma_x \\p_{yy} &= -p + \sigma_y \\p_{xy} &= p_{yx} = \tau_{xy} = \tau_{yx}\end{aligned}$$

Damit wird die Leistungsbilanz zu:

$$\dot{W}_{K,tot} = \left\{ \frac{\partial}{\partial x} (u \cdot \sigma_x) - \frac{\partial}{\partial x} (u \cdot p) + \frac{\partial}{\partial y} (u \cdot \tau_{xy}) + u \cdot X + \frac{\partial}{\partial y} (v \cdot \sigma_y) - \frac{\partial}{\partial y} (v \cdot p) + \frac{\partial}{\partial x} (v \cdot \tau_{xy}) + v \cdot Y \right\} \cdot dx \cdot dy$$

Damit sind wir nun in der Lage, die gesamte stationäre Energiebilanz gemäss 1. Hauptsatz aufzustellen:

$$\begin{aligned}0 &= \dot{E}_{K,tot} + \dot{E}_{L,tot} + \dot{W}_{K,tot} + \dot{Q}_{Quellen}''' \\0 &= - \left[\frac{\partial}{\partial x} (\rho \cdot e \cdot u) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho \cdot e \cdot v) \right] \\&\quad + \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \cdot \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda \cdot \frac{\partial T}{\partial y} \right) \right] \\&\quad + \left[\frac{\partial}{\partial x} (u \cdot \sigma_x) - \frac{\partial}{\partial x} (u \cdot p) + \frac{\partial}{\partial y} (u \cdot \tau_{xy}) + u \cdot X + \frac{\partial}{\partial y} (v \cdot \sigma_y) - \frac{\partial}{\partial y} (v \cdot p) + \frac{\partial}{\partial x} (v \cdot \tau_{xy}) + v \cdot Y \right] \\&\quad + \dot{Q}_{Quellen}'''\end{aligned}$$

Setzen wir die angegebenen Terme für die Schub- und Normalspannungen ein (siehe Seite 5-6), können wir die Gleichung wie folgt umformen:

$$\boxed{\rho \cdot u \cdot \frac{\partial e}{\partial x} + \rho \cdot v \cdot \frac{\partial e}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \cdot \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda \cdot \frac{\partial T}{\partial y} \right) - p \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \mu \cdot \Phi + \dot{Q}_{Quellen}'''}\quad$$

wobei die Wärmeerzeugung durch die Oberflächenkräfte zu einem Quellterm Φ zusammengefasst wurden (die Volumenkraft = Gravitation wurde wie zu Beginn erwähnt vernachlässigt):

$$\Phi = \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + 2 \cdot \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \right] - \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2$$

Für ein inkompressibles Fluid können wir die entsprechende Kontinuitätsgleichung anwenden:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

Damit fällt der Term proportional zum Druck weg. Gleichzeitig können wir die Gleichung vollständig in Temperaturform umschreiben, indem wir die innere Energie für inkompressible Medien ausdrücken durch:

$$de = c_p \cdot dT = c_v \cdot dT = c \cdot dT$$

Damit erhalten wir die vollständige Form der Energiegleichung:

$$\rho \cdot c \cdot \left(u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \mu \cdot \Phi + \dot{Q}_{Quellen}'''$$

wobei sich auch noch der Quellterm Φ vereinfacht zu:

$$\Phi = \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 - 4 \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} \right)$$

Ferner können wir für viele Fälle voraussetzen, dass die Wärmeleitfähigkeit konstant ist und im Fluid auch keine Wärmequellen vorhanden sind. Der Quellterm Φ , der die Umwandlung von kinetischer Energie in Wärme durch die innere Reibung beschreibt, kann ebenfalls vernachlässigt werden. Wir haben ja schon zu Beginn festgestellt, dass die kinetische Energie insgesamt im Verhältnis zur thermischen Energie keine Rolle spielt. Wir erhalten damit die folgende einfache Form der Energiegleichung:

$$\left(u \cdot \frac{\partial T}{\partial x} + v \cdot \frac{\partial T}{\partial y} \right) = a \cdot \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right)$$

welche auch in Vektor-Schreibweise dargestellt werden kann

$$\vec{V} \bullet \vec{\nabla} T = a \cdot \vec{\nabla}^2 T$$

mit:

$$\vec{V} = u \cdot \vec{i} + v \cdot \vec{j}$$

$$\vec{\nabla} T = \vec{i} \frac{\partial T}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial T}{\partial y}$$

Anmerkungen:

Der Quellterm Φ beinhaltet nicht lineare Terme, die das chaotische Verhalten der Turbulenz beschreiben. Dessen Weglassung bedeutet, dass wir uns auf laminare Strömungen beschränken. Der Turbulente Fall wird in Abschnitt 7.5 behandelt.

Für instationäre Vorgänge erscheint in der Bilanzgleichung ein zusätzlicher Term: $\rho \cdot c_p \cdot \partial T / \partial t$, welcher die zeitliche Änderung des Energieinhaltes des Kontrollvolumens beschreibt.

Manchmal kann es auch vorteilhaft sein, die Energieerhaltungsgleichung in Form der Enthalpieerhaltung zu formulieren, z.B. wenn neben der thermischen Enthalpie noch chemische Reaktionsenthalpie im Spiel ist. Wir setzen:

$$h = e + \frac{P}{\rho} \quad \text{resp.} \quad e = h - \frac{P}{\rho} \quad \text{und} \quad dh = c_p \cdot dT$$

Dies angewendet auf die ursprüngliche Form der Energieerhaltungsgleichung (siehe Seite 6-10) ergibt:

$$\boxed{\rho \cdot c_p \cdot \left(u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \cdot \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda \cdot \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \dot{Q}_{\text{Quellen}}'' + \mu \cdot \Phi + \left(u \frac{\partial P}{\partial x} + v \frac{\partial P}{\partial y} \right)}$$

6 Erzwungene Konvektion an umströmten Körpern

Im letzten Abschnitt haben wir die grundlegenden Transportgleichungen kennen gelernt, die den konvektiven Wärmetransport in beliebigen Strömungen beschreiben. In diesem Abschnitt sollen diese Gleichungen auf Grenzschichten angewendet werden, um so den konvektiven Wärmeübergang (α -Wert) zwischen Fluid und Oberfläche zu berechnen. Durch die Anwendung auf den Oberflächen nahen Bereich vereinfachen sich die elliptischen partiellen Differentialgleichungen in parabolische, welche numerisch viel einfacher zu behandeln sind. Teilweise ergeben sich auch gewöhnliche Differentialgleichungen.

Die Anwendung erfolgt für eine fest vorgegebene Strömung, welche einen Körper aussen umströmt, das bedeutet, dass für alle Grenzschichten der ungestörte Wert T_∞ und u_∞ existiert; es gibt keine gegenüberliegenden Grenzschichten, die sich gegenseitig beeinflussen.

6.1 Das Grenzschichtproblem an der ebenen Wand

Der Einfachheit halber betrachten wir eine Strömung in x-Richtung entlang einer ebenen Wand, welche in z-Richtung ∞ ausgedehnt ist (keine Randeffekte). Die Flächennormale ist in y-Richtung. Diese Situation können wir rechnerisch gut behandeln, für andere Geometrien können die Erkenntnisse dann sinngemäss angewendet werden.

Das Fluid, das direkt mit der Oberfläche in Kontakt ist wird dort haften, die Geschwindigkeit u ist dort null. Durch die vorhandene Zähigkeit wird auch das angrenzende Fluid abgebremst und es bildet sich in Wandnähe ein Geschwindigkeitsprofil heraus (siehe Fig. 6.1)

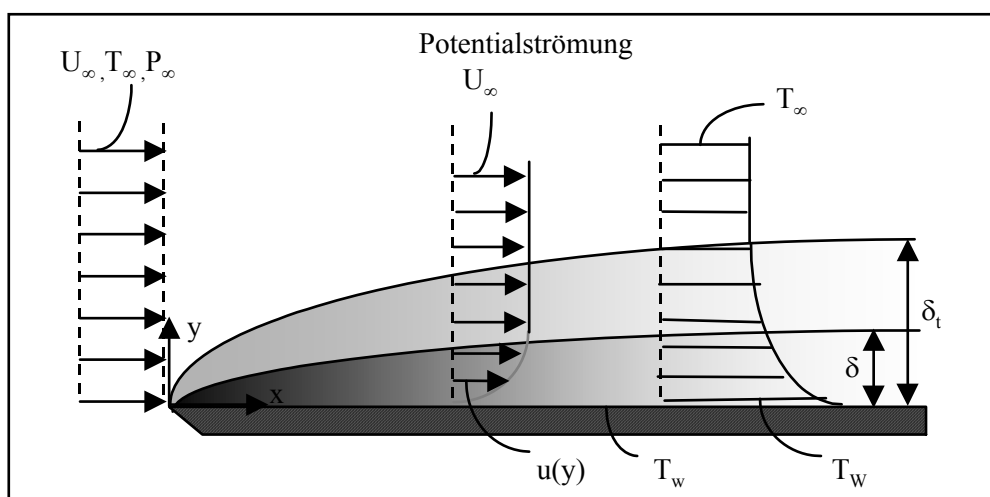


Fig. 6.1 Grenzschichtprofile der Geschwindigkeit und der Temperatur

Je weiter wir uns von der Wand entfernen, um so kleiner wird der durch die Zähigkeit übertragene Einfluss der Zähigkeit. Den Abstand $y = \delta_u$, wo die Geschwindigkeit $u(y)$ den Wert $0.99 \cdot u_\infty$ annimmt, nennt man die Dicke der

Grenzschicht. Weiter aussen hat die Zähigkeit keinen Einfluss mehr, die Strömung nimmt (im laminaren Fall) die Form einer Potentialströmung an.

Ähnliches gilt für die Temperatur. Gibt es einen Temperaturunterschied zwischen Fluid und Oberfläche, setzt ein Wärmetransport durch Wärmeleitung senkrecht zur Wandoberfläche ein, und es bildet sich eine Temperaturgrenzschicht aus, wobei deren Dicke δ_T analog definiert werden kann. Sowohl für die Grenzschicht der Geschwindigkeit als auch der Temperatur gilt, dass deren Dicke mit zunehmender Distanz x zur Anströmkante anwächst.

Für den Ingenieur sind nun zwei Grössen von grosser Wichtigkeit

- Die Kraft, welche die Strömung durch die Scherkräfte an der Oberfläche auf den Körper ausübt. Für eine Fläche mit der Breite B (in z -Richtung) und der Länge L (in x -Richtung) gilt:

$$F = \int_0^L \tau_w \cdot B \cdot dx$$

wobei τ_w die Schubspannung an der Oberfläche bedeutet.

- Wärmeaustausch zwischen Fluid und Oberfläche (Richtung des Wärmeflusses je nach Richtung der Temperaturdifferenz). Mit der lokalen Wärmeflussdichte \dot{q}'' können wir schreiben:

$$\dot{q} = \int_0^L \dot{q}'' \cdot B \cdot dx$$

Für eine Newton'sche Flüssigkeit ist die Schubspannung proportional zum Geschwindigkeitsgradienten

$$\tau_w = \mu \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=0} \quad \rightarrow \quad F = \mu \cdot B \int_0^L \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=0} \cdot dx$$

Für die Berechnung des Wärmestromes müssen wir das Fourier'sche Gesetz anwenden:

$$\dot{q}'' = -\lambda \cdot \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_{y=0} \quad \dot{q} = -\lambda \cdot B \int_0^L \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_{y=0} \cdot dx$$

Für die Berechnung der beiden geforderten Grössen müssen Geschwindigkeits- und Temperaturgradient an der Oberfläche ($y = 0$) bekannt sein. Wir müssen also die Kontinuitätsgleichung und die Erhaltungsgleichungen für Impuls und Energie in Wandnähe lösen. Nahe der Wand ist die Strömung immer laminar, wir können deshalb die vereinfachte Version der Energieerhaltungsgleichung (ohne Quellterm Φ) benutzen. Das zu lösende System für den 2D-Fall lautet:

$$K \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

$$I \quad \begin{cases} u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + \nu \cdot \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \\ u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} + \nu \cdot \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \end{cases} \quad \nu = \frac{\mu}{\rho}$$

$$E \quad u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = a \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) \quad a = \frac{\lambda}{\rho \cdot c_p}$$

Die Grenzschichtbetrachtung ergibt für eine Strömung parallel zur Oberfläche folgende Randbedingungen:

$$y = 0 \quad u(0) = 0, v(0) = 0, T(0) = T_w$$

$$y \rightarrow \infty \quad u(\infty) = u_\infty, v(\infty) = 0, T(\infty) = T_\infty, P(\infty) = P_\infty$$

Für das obige Gleichungssystem kann nicht so ohne weiteres eine analytische Lösung angegeben werden. Prandtl hat aber bereits 1904 durch eine Analyse der Grössenordnungen der einzelnen Terme die wichtigsten funktionalen Zusammenhänge für diese Grenzschichten hergeleitet. Das Verfahren beruht im wesentlichen darauf, dass die lokalen Differentialquotienten durch globale Mittelwerte ersetzt werden, welche im untersuchten Bereich wenigstens in der Grössenordnung ihre Gültigkeit haben.

6.1.1 Die Geschwindigkeitsgrenzschicht

Es gilt zuerst die einzelnen Grössenordnungen festzulegen, welche für alle Variablen gelten, die in den Impulserhaltungsgleichungen auftreten. Für einige Variablen sind diese Grössenordnungen offensichtlich (überstrichene Grössen stehen für Grössenordnung):

$$\begin{array}{lll} x: 0 \dots L & \rightarrow & \overline{\Delta x} \approx L \\ y: 0 \dots \delta & \rightarrow & \overline{\Delta y} \approx \delta \\ u: 0 \dots U_\infty & \rightarrow & \overline{u} = \overline{\Delta u} \approx U_\infty \end{array}$$

Die Grössenordnung der y-Komponente der Geschwindigkeit können wir vorerst noch nicht angeben, wir können diese aber aus der Kontinuitätsgleichung bestimmen. Da diese Komponente direkt auf der Oberfläche sicher null ist, gilt auch hier: $\overline{v} \approx \overline{\Delta v}$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{U_\infty}{L} + \frac{\overline{\Delta v}}{\delta} \approx 0 \quad \rightarrow \quad \overline{\Delta v} = \overline{v} \approx U_\infty \frac{\delta}{L} \quad (1)$$

Zu bemerken ist, dass in dieser Analyse Vorzeichen keine Rolle spielen, da man nur am Gewicht der einzelnen Terme interessiert ist. Mit diesen Resultaten können wir nun die Impulsgleichung in der Form der Grössenordnungsterme aufstellen, wobei die folgenden Druckterme vorderhand noch unbekannt sind:

$$(dP)_x \approx \overline{\Delta P}_x \quad (dP)_y \approx \overline{\Delta P}_y$$

$$U_\infty \cdot \frac{U_\infty}{L} + U_\infty \cdot \frac{\delta}{L} \cdot \frac{U_\infty}{\delta} \approx \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\overline{\Delta P}_x}{L} + \nu \cdot \left(\underbrace{\frac{U_\infty}{L^2}}_{\approx 0} + \frac{U_\infty}{\delta^2} \right)$$

Wegen $\delta \ll L$ kann der Term $\approx 1/L^2$ auf der rechten Seite weggelassen werden. Nach den entsprechenden Kürzungen erhalten wir dann (der Faktor 2 vor dem ersten Term auf der linken Seite kann ≈ 1 gesetzt werden, da es sich um eine Betrachtung von Grössenordnungen handelt):

$$\underbrace{2 \cdot \frac{U_\infty^2}{L}}_{\text{Trägheit}} \approx \underbrace{\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\overline{\Delta P}_x}{L}}_{\text{Druck}} + \underbrace{\nu \cdot \frac{U_\infty}{\delta^2}}_{\text{Reibung}} \quad (2)$$

Die Dimension der einzelnen Terme ist $[\text{m/sec}^2]$, diese stellen also eine Beschleunigung resp. massenspezifische Kraftwirkung dar. Es können hier drei verschiedene physikalische Ursachen für Kräfte unterschieden werden:

- Massenträgheit
- Druckdifferenz
- Reibung an der Oberfläche

Die gleichen Überlegungen führen zu einer analogen Darstellung für die y-Komponente der Impulsgleichung:

$$\frac{U_\infty^2}{L} \cdot \frac{\delta}{L} \approx \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\overline{\Delta P}_y}{\delta} + \nu \cdot \frac{U_\infty}{\delta^2} \cdot \frac{\delta}{L} \quad \rightarrow \quad \underbrace{\frac{U_\infty^2 \cdot \delta}{L^2}}_{\text{Trägheit}} \approx \underbrace{\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\overline{\Delta P}_y}{\delta}}_{\text{Druck}} + \underbrace{\nu \cdot \frac{U_\infty}{\delta \cdot L}}_{\text{Reibung}} \quad (3)$$

In den Gleichungen (2) und (3) sind die Grössenordnungen der Druckterme noch nicht bestimmt. Wir gewinnen weitere Informationen durch die Betrachtung des totalen Druckgradienten:

$$dP = \frac{\partial P}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial P}{\partial y} \cdot dy \quad \rightarrow \quad \overline{\Delta P} = \frac{\overline{\Delta P}_x}{L} \cdot L + \frac{\overline{\Delta P}_y}{\delta} \cdot \delta = \overline{\Delta P}_x + \overline{\Delta P}_y \quad (4)$$

Da der Druckabfall durch die vorhandenen Reibungskräfte erzeugt wird, müssen in den Gleichungen (2) und (3) der Druckterm und der Reibungsterm die gleiche Grössenordnung besitzen. Der Vergleich in Gleichung (2) ergibt ($\mu = \nu \cdot \rho$)

$$\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\overline{\Delta P}_x}{L} \approx \mu \cdot \frac{U_\infty}{\delta^2} \quad \rightarrow \quad \overline{\Delta P}_x \approx L \cdot \rho \mu \cdot \frac{U_\infty}{\delta^2} = L \cdot \mu \cdot \frac{U_\infty}{\delta^2} \quad (5)$$

Für die y-Komponente erhalten wir durch Vergleich in Gleichung (3):

$$\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\overline{\Delta P}_y}{\delta} \approx v \cdot \frac{U_\infty}{\delta \cdot L} \quad \rightarrow \quad \overline{\Delta P}_y \approx v \cdot \rho \cdot \frac{U_\infty}{L} = \mu \cdot \frac{U_\infty}{L} \quad (6)$$

Setzen wir die gefundenen Ausdrücke in Gleichung (4) ein (mit der Umformung $L = (L^2/L)$):

$$\overline{\Delta P} \approx \mu \cdot \frac{U_\infty}{L} \left(\frac{L}{\delta} \right)^2 + \mu \cdot \frac{U_\infty}{L}$$

Da wir ja voraussetzen, dass $L \gg \delta$, kann der zweite Term auf der rechten Seite, d.h. die Variation des Druckes in y-Richtung vernachlässigt werden. Dies ist nicht erstaunlich, da ja auch die Geschwindigkeiten und damit die Reibungskräfte in y-Richtung vernachlässigbar klein sind. Damit erhalten wir das wichtige Resultat, dass der Druck nur eine Funktion von x ist:

$$P = P(x) !!! \quad \text{und} \quad dP = \frac{\partial P}{\partial x} \cdot dx$$

Daraus folgt auch, dass dieser Druck gleich dem Druck ausserhalb der Grenzschicht sein muss:

$$P(x) = P_\infty(x)$$

Die x-Impulsgleichung kann deshalb reduziert werden auf:

$$u \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + v \cdot \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \cdot \frac{dP_\infty}{dx} + v \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

Druckgradienten entlang der Oberfläche werden erst bei sehr grossen Ausdehnungen der Objekte relevant, wie z.B. Windströmungen entlang der Erdoberfläche über Distanzen von mehreren hundert km. Für sehr viele Anwendungen kann P_∞ als konstant angenommen werden (z.B. bei der Strömung um den Flügel eines Flugzeuges, welches in stationärer Luft fliegt). Damit reduziert sich die x-Impulsgleichung weiter zu:

$$u \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + v \cdot \frac{\partial u}{\partial y} = v \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

Aus den bisherigen Überlegungen kann auch gezeigt werden, dass die gesamte y-Impulsgleichung vernachlässigbar ist, da im Bereich der Grenzschicht praktisch keine Geschwindigkeitskomponenten und damit auch keine Gradienten und Scherkräfte auftreten. Damit erhalten wir das folgende vereinfachte Gleichungssystem für die Berechnung der Geschwindigkeits-Grenzschicht:

$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$	<i>Kontinuität</i>
$u \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + v \cdot \frac{\partial u}{\partial y} = \nu \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$	<i>x - Impulsgleichung</i>

Dieses System ist mit den folgenden Randbedingungen zu lösen:

$y = 0$	$u = v = 0$
$y \rightarrow \infty$	$u = U_\infty$

6.1.2 Die Temperaturgrenzschicht

Während die Trägheitskräfte der vorgegebenen Strömung die Ausdehnung der Geschwindigkeitsgrenzschicht auf eine sehr geringe Ausdehnung beschränken, dehnt sich die Temperaturgrenzschicht mit zunehmender Distanz x von der Anströmkannte immer weiter aus. Wir treffen deshalb die Annahme (siehe Fig. 6.2):

$$\delta_T \gg \delta$$

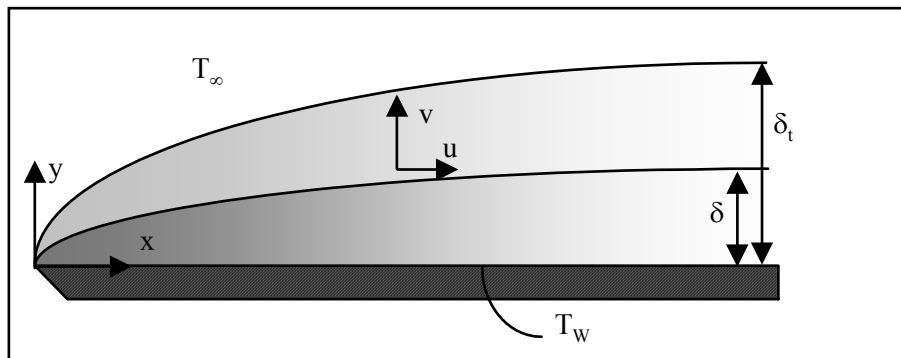


Fig. 6.2 Temperaturgrenzschicht in Relation zur Geschwindigkeitsgrenzschicht

Die Temperaturgrenzschicht erhalten wir, wenn die Geschwindigkeitsgrenzschicht bestimmt ist, aus der Lösung der Energieerhaltungsgleichung. Die Größenordnungsanalyse für alle auftretenden Größen ergibt:

$x: 0 \dots L$	\rightarrow	$\overline{\Delta x} \approx L$
$y: 0 \dots \delta_T$	\rightarrow	$\overline{\Delta y} \approx \delta_T$
$u: 0 \dots U_\infty$	\rightarrow	$\overline{u} = \overline{\Delta u} \approx U_\infty$
$v: 0 \dots U_\infty \cdot \frac{\delta_T}{L}$	\rightarrow	$\overline{v} = \overline{\Delta v} \approx U_\infty \cdot \frac{\delta_T}{L}$
$T: T_w \dots T_\infty$	\rightarrow	$\overline{\Delta T} \approx T_w - T_\infty$

Die Bedingung für v folgt wie bei der Geschwindigkeitsgrenzschicht aus der Anwendung der Kontinuitätsgleichung.

Damit können wir die ursprüngliche Energieerhaltungsgleichung in die Form der Gewichtsfaktoren umwandeln:

$$u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = a \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right)$$

$$\rightarrow U_{\infty} \cdot \frac{T_W - T_{\infty}}{L} + \left(U_{\infty} \cdot \frac{\delta_t}{L} \right) \frac{T_W - T_{\infty}}{\delta_T} \approx a \cdot \left(\underbrace{\frac{T_W - T_{\infty}}{L^2}}_{\substack{\approx 0 \text{ wegen} \\ L \gg \delta}} + \underbrace{\frac{T_W - T_{\infty}}{\delta_T^2}}_{\substack{\text{Leitung in} \\ y\text{-Richtung}}} \right)$$

Die Vernachlässigung des ersten Terms auf der rechten Seite bedeutet physikalisch, dass wir Wärmeleitung in x-Richtung vernachlässigen. Dies ist sicher zulässig, da wir ja für die ganze Wand eine uniforme Temperatur T_W voraussetzen, d.h. dass in der Wandebene keine Temperaturgradienten auftreten. Zu beachten ist, dass wir von den Termen auf der linken Seite keinen vernachlässigen dürfen, da beide von der selben Grössenordnung sind.

Wir können deshalb eine reduzierte Energieerhaltungsgleichung formulieren als:

$$u \cdot \frac{\partial T}{\partial x} + v \cdot \frac{\partial T}{\partial y} = a \cdot \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}$$

für welche die folgenden Randbedingungen gelten:

$$\begin{aligned} y=0: & \quad T = T_W \\ y \rightarrow \infty: & \quad T = T_{\infty} \end{aligned}$$

Die Annahme $\delta_T \gg \delta$ haben wir quasi unbemerkt benutzt, indem wir vorausgesetzt haben dass $u(\delta_T) = U_{\infty}$ ist und haben damit die entsprechenden Gewichtsfaktoren bestimmt. Wir müssen nun untersuchen, wie sich die Situation ändert, wenn die umgekehrte Annahme gültig ist, nämlich: $\delta_T \ll \delta$. In diesem Falle erreicht die Geschwindigkeit erst ausserhalb der Temperaturgrenzschicht den Wert U_{∞} : $u(\delta_T) < U_{\infty}$. (siehe Fig. 6.3 und 6.4)

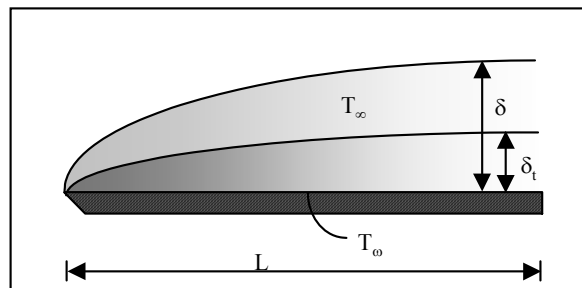
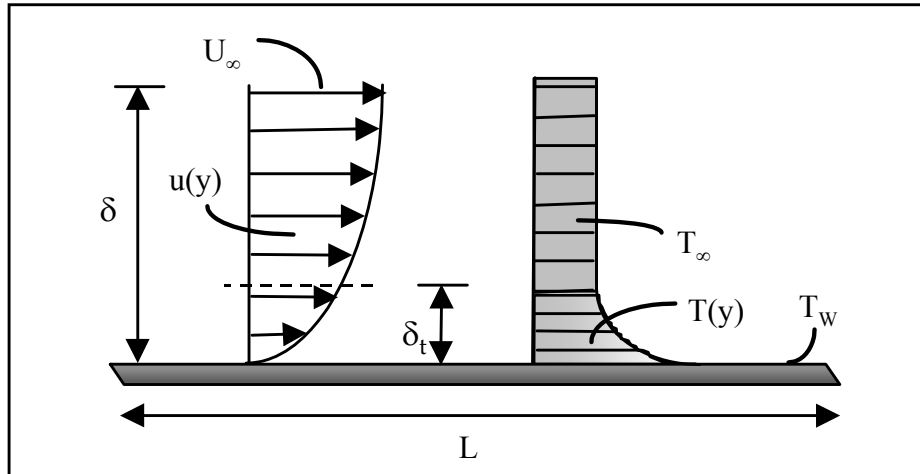


Fig. 6.3: Situation der Grenzschichten mit $\delta_T < \delta$

Fig. 6.4: Grenzschichtprofile für T und u

Die Abschätzung der Grössenordnung für $\bar{u}(\delta_T)$ können wir über die Annahme eines linearen Verlaufes innerhalb der Geschwindigkeitsgrenzschicht erreichen:

$$\frac{U_\infty}{\delta} \approx \frac{\bar{u}}{\delta_T} \quad \rightarrow \quad \bar{u} \approx U_\infty \cdot \frac{\delta_T}{\delta}$$

Damit können wir mit Hilfe der Kontinuitätsgleichung die Grössenordnung für \bar{v} abschätzen (das Resultat für \bar{u} von oben eingesetzt):

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{\bar{u}}{L} \approx \frac{\bar{v}}{\delta_T} \quad \rightarrow \quad \bar{v} \approx U_\infty \cdot \frac{\delta_T}{\delta} \cdot \left(\frac{\delta_T}{L} \right)$$

Diese Resultate können wir wiederum in die Energiegleichung einsetzen für die Abschätzung der Grössenordnung der einzelnen Terme:

$$u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = a \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) \quad \rightarrow$$

$$U_\infty \cdot \left(\frac{\delta_T}{\delta} \right) \cdot \frac{T_w - T_\infty}{L} + \left(U_\infty \cdot \frac{\delta_T}{L} \right) \cdot \left(\frac{\delta_T}{\delta} \right) \cdot \frac{T_w - T_\infty}{\delta_T} \approx a \cdot \left(\underbrace{\frac{T_w - T_\infty}{L^2}}_{\substack{\approx 0 \text{ wegen} \\ L \gg \delta}} + \underbrace{\frac{T_w - T_\infty}{\delta_T^2}}_{\substack{\text{Leitung in} \\ y\text{-Richtung}}} \right)$$

Im Vergleich zum vorherigen Fall ($\delta < \delta_T$) werden beide Terme auf der linken Seite mit dem Faktor δ_T/δ multipliziert, behalten also die selbe Grössenordnung. Die Energiegleichung behält also die Form wie sie auf Seite 6-7 angegeben ist und damit lautet das vollständige Gleichungssystem, das für die Berechnung des konvektiven Wärmeüberganges zu lösen ist:

$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$	<i>Kontinuität</i>
$u \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + v \cdot \frac{\partial u}{\partial y} = \nu \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$	<i>x – Impuls</i>
$u \cdot \frac{\partial T}{\partial x} + v \cdot \frac{\partial T}{\partial y} = a \cdot \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}$	<i>Energie</i>

Dieses System ist mit den folgenden Randbedingungen zu lösen:

$$\begin{array}{lll}
 y = 0 : & u(0) = v(0) = 0 & T(0) = T_w \\
 y \rightarrow \infty : & u(\infty) = U_\infty & T(\infty) = T_\infty \\
 x = 0 & u = U_\infty & T = T_\infty \quad \text{für alle } y
 \end{array}$$

Die vollständige Lösung dieses Systems beinhaltet dann auch die Kenntnis des lokalen Wärmeflusses zwischen Oberfläche und Fluid, so dass wir dann die gemittelten Wärmeübergangskoeffizienten (α -Werte) berechnen können. Im folgenden werden nun drei verschiedene Lösungsmethoden präsentiert, welche sich sowohl im Umfang des mathematischen Aufwandes als auch in der Genauigkeit der erhaltenen Informationen stark unterscheiden. Diese drei Lösungsmethoden sind:

- Grössenordnungslösung
- Integrale Näherung
- exakte analytische Lösung (mit Hilfe von Ähnlichkeitsvariablen)

6.2 Die Grössenordnungslösung

6.2.1 Strömungswiderstand

Die Grössenordnungslösung liefert, wie schon der Name sagt, keine genauen Resultate, aber sie bringt uns viele wertvolle qualitative Erkenntnisse über die funktionalen Zusammenhänge aller Einflussgrössen.

Wir können vorerst die Impulsgleichung in Form der Grössenordnungsfaktoren aufstellen:

$$u \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + v \cdot \frac{\partial u}{\partial y} = \nu \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad \rightarrow \quad \frac{U_\infty^2}{L} + \left(U_\infty \cdot \frac{\delta}{L} \right) \cdot \frac{U_\infty}{\delta} \approx \nu \cdot \frac{U_\infty}{\delta^2}$$

Nach entsprechendem Zusammenfassen von Termen und Kürzungen (ein Faktor 2 wird in dieser Grössenordnungsbetrachtung weggelassen) erhält man:

$$2 \cdot \frac{U_\infty^2}{L} \approx \nu \cdot \frac{U_\infty}{\delta^2} \quad \rightarrow \quad \frac{U_\infty}{L} \approx \nu \cdot \frac{1}{\delta^2}$$

Daraus können wir eine Abschätzung für die Dicke der Grenzschicht angeben:

$$\delta \approx \left(\frac{\nu \cdot L}{U_\infty} \right)^{\frac{1}{2}} \quad \rightarrow \quad \frac{\delta}{L} \approx (\text{Re}_L)^{-\frac{1}{2}}$$

wobei:

$$\text{Re}_L = \frac{U_\infty \cdot L}{\nu} = \frac{\rho \cdot U_\infty \cdot L}{\mu}$$

die Reynoldszahl in Bezug auf die Plattendimension L darstellt. Die Reynoldszahl ist eine dimensionslose Zahl. Sie stellt das Verhältnis der Massenträgheit (Zähler) zu den durch die Zähigkeit bedingten Kräften dar und ist die charakteristische Grösse einer Strömung in Bezug auf die Turbulenzintensität.

Mit der Kenntnis der Grenzschichtdicke können wir nun auch die an der Plattenoberfläche auftretende Schubspannung abschätzen:

$$\tau_w = \mu \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=0} \quad \rightarrow \quad \tau_w \approx \mu \cdot \frac{U_\infty}{\delta} \approx \mu \cdot \frac{U_\infty}{L} \cdot (\text{Re}_L)^{\frac{1}{2}} \approx \rho \cdot U_\infty^2 \cdot (\text{Re}_L)^{-\frac{1}{2}}$$

$$\tau_w \approx \rho \cdot U_\infty^2 \cdot (\text{Re}_L)^{-\frac{1}{2}}$$

Es ist allgemein üblich, Widerstandskräfte in Strömungen auszudrücken durch die Massenträgheit $\rho \cdot U_\infty^2$ und einen **Widerstandsbeiwert** c_f .

$$\tau_w \approx c_f \cdot \frac{\rho}{2} \cdot U_\infty^2 \quad \text{mit} \quad c_f = 2 \cdot (\text{Re}_L)^{-\frac{1}{2}}$$

Der Widerstandsbeiwert nimmt also proportional zu $(\text{Re}_L)^{-\frac{1}{2}}$ ab. Damit können wir nun die gesamte Kraftwirkung auf die Platte abschätzen (Breite der Platte = W):

$$F = \int_0^L \tau_w \cdot W \cdot dx \quad \rightarrow \quad F \sim \rho \cdot U_\infty^2 \cdot (\text{Re}_L)^{-\frac{1}{2}} \cdot W \cdot L$$

6.2.2 Wärmeübertragung

Der nächste Schritt ist nun die Bestimmung der Wärmeübertragung, welche wir als Grössenordnung aus der Kenntnis der Grenzschichtdicke für die Temperatur und der Temperaturdifferenz bestimmen können.

Wir betrachten zuerst den **Fall**: $\delta \ll \delta_T$. Dazu schreiben wir die Energieerhaltungsgleichung in Form der Koeffizienten für die Grössenordnung:

$$u \cdot \frac{\partial T}{\partial x} + v \cdot \frac{\partial T}{\partial y} = a \cdot \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \quad \rightarrow \quad U_\infty \frac{(T_w - T_\infty)}{L} + U_\infty \cdot \frac{\delta_T}{L} \cdot \frac{(T_w - T_\infty)}{\delta_T} \approx a \cdot \frac{T_w - T_\infty}{\delta_T^2}$$

Nach dem Zusammenfassen, Kürzen und Vernachlässigen eines Zahlenfaktors 2 erhalten wir:

$$\frac{U_\infty}{L} \approx \frac{a}{\delta_T^2} \quad \rightarrow \quad \frac{\delta_T}{L} \approx \left(\frac{a}{U_\infty \cdot L} \right)^{\frac{1}{2}} \approx \text{Re}^{-\frac{1}{2}} \cdot \left(\frac{a}{v} \right)^{\frac{1}{2}}$$

Der Quotient v/a stellt als Grössenordnung das Verhältnis zwischen dem Impulstransport infolge Zähigkeit und dem Wärmetransport infolge Wärmeleitung in der Grenzschicht dar. Diese ebenfalls dimensionslose Zahl ist die sog. **Prandtl-Zahl Pr**. Wir erhalten somit:

$$\frac{\delta_T}{L} \approx \text{Pr}^{-\frac{1}{2}} \cdot \text{Re}_L^{-\frac{1}{2}} \approx \text{Pe}^{-\frac{1}{2}}$$

wobei wir als neue Abkürzung die **Peclet-Zahl Pe** eingeführt haben. Insgesamt haben wir nun die folgenden dimensionslosen Verhältniszahlen eingeführt, die für die Entwicklung der Grenzschichten charakteristisch sind:

$$\textbf{Reynolds-Zahl:} \quad \text{Re} = \frac{U_\infty \cdot L}{v} = \frac{\text{Massenträgheit}}{\text{Zähigkeit}}$$

$$\textbf{Prandtl-Zahl:} \quad \text{Pr} = \frac{v}{a} = \frac{\text{Zähigkeit}}{\text{Wärmetransport}}$$

Peclet-Zahl:
$$Pe = Re \cdot Pr = \frac{U_\infty \cdot L}{a} = \frac{\text{Massenträgheit}}{\text{Wärmetransport}}$$

In der bisherigen Herleitung haben wir vorausgesetzt, dass $\delta \ll \delta_T$. Nachdem wir jetzt eine Grössenordnung für δ_T gefunden haben, können wir die Voraussetzungen angeben, wann dies erfüllt ist.

Durch einsetzen des früher gefundenen Wertes für die Geschwindigkeitsgrenzschicht erhalten wir:

$$\frac{\delta}{L} \approx Re_L^{-1/2} \quad \rightarrow \quad \frac{\delta_T}{\delta} \approx Pr^{-1/2} \gg 1$$

was gleichbedeutend ist mit der Forderung $Pr \ll 1$. Die Forderung ist somit erfüllt für Fluids mit geringer Viskosität und/oder sehr grosser Wärmeleitfähigkeit wie z.B. flüssige Metalle.

Mit der Kenntnis der Dicke der Temperaturgrenzschicht kann nun der Wärmeübergangskoeffizient α abgeschätzt werden:

$$\alpha = \frac{\dot{q}''}{\Delta T} = \frac{-\lambda \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_{y=0}}{T_W - T_\infty} \quad \rightarrow \quad \bar{\alpha} \approx \frac{\lambda \cdot \frac{T_W - T_\infty}{\delta_T}}{T_W - T_\infty} \approx \frac{\lambda}{\delta_T}$$

Mit: $\delta_T \approx L \cdot Pr^{-1/2} \cdot Re_L^{-1/2}$ finden wir:

$$\bar{\alpha} \approx \frac{\lambda}{L} \cdot Pr^{1/2} \cdot Re_L^{1/2}$$

Es ist nun sinnvoll, den Wärmeübergangskoeffizienten α ebenfalls in Beziehung zu setzen zu einer dimensionslosen Zahl. Es bietet sich die Definition der **Nusselt-Zahl Nu** an:

$$Nu \equiv \frac{\bar{\alpha} \cdot L}{\lambda} \approx Pr^{1/2} \cdot Re_L^{1/2}$$

Damit kann der Wärmestrom zwischen einer Wand der Breite W und dem Fluid beschrieben werden als:

$$\dot{q} = L \cdot W \cdot \bar{\alpha} \cdot (T_W - T_\infty) \approx W \cdot (T_W - T_\infty) \cdot \lambda \cdot Pr^{1/2} \cdot Re_L^{1/2}$$

Im Falle des umgekehrten Verhältnisses der Dicken der Grenzschichten, nämlich wenn $\delta \gg \delta_T$, beginnen wir wiederum mit der Darstellung der Energiegleichung in Grössenordnungen:

$$u \cdot \frac{\partial T}{\partial x} + v \cdot \frac{\partial T}{\partial y} = a \cdot \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \rightarrow U_\infty \cdot \frac{\delta_T}{\delta} \cdot \frac{(T_W - T_\infty)}{L} + U_\infty \cdot \frac{\delta_T}{\delta} \cdot \frac{\delta_T}{L} \cdot \frac{(T_W - T_\infty)}{\delta_T} \approx a \cdot \frac{T_W - T_\infty}{\delta_T^2}$$

was durch Zusammenfassen und Kürzen vereinfacht werden kann zu:

$$U_\infty \cdot \frac{\delta_T}{\delta \cdot L} \approx a \frac{1}{\delta_T^2} \quad \text{wobei} \quad \delta \approx L \cdot (\text{Re}_L)^{-\frac{1}{2}}$$

Durch entsprechendes Einsetzen und Umformen erhält man:

$$\frac{\delta_T^3}{L^3} \approx \frac{a \cdot \text{Re}_L^{-1/2}}{L \cdot U_\infty} \approx \frac{a}{\nu} \cdot \text{Re}_L^{-3/2}$$

Damit erhalten wir für die Ausdehnung der Temperaturgrenzschicht, die dünner als die Geschwindigkeitsgrenzschicht ist:

$$\boxed{\frac{\delta_T}{L} \approx \text{Pr}^{-1/3} \cdot \text{Re}_L^{-1/2}}$$

Für das Verhältnis zwischen den beiden Grenzschichten ergibt sich:

$$\frac{\delta_T}{\delta} \approx \text{Pr}^{-\frac{1}{3}} \ll 1$$

d.h. die getroffene Annahme über das Verhältnis der Grenzschichten ist erfüllt für Fluide mit **$\text{Pr} \gg 1$** .

Analog wie im Falle der umgekehrten Grössenverhältnisse für die Grenzschichten erhalten wir für den Wärmeübergangskoeffizienten, die Nusseltzahl und den Wärmestrom zwischen Wand und Fluid die folgenden Ausdrücke:

$$\boxed{\begin{aligned} \bar{\alpha} &\approx \frac{\lambda}{L} \cdot \text{Pr}^{1/3} \cdot \text{Re}_L^{1/2} \\ Nu &\equiv \frac{\bar{\alpha} \cdot L}{\lambda} \approx \text{Pr}^{1/3} \cdot \text{Re}_L^{1/2} \\ \dot{q} &\approx W \cdot (T_W - T_\infty) \cdot \lambda \cdot \text{Pr}^{1/3} \cdot \text{Re}_L^{1/2} \end{aligned}}$$

Damit können wir die aus der Betrachtung der Grössenordnungen gewonnenen Erkenntnisse wie folgt zusammenfassen:

In Bezug auf die Geschwindigkeitsgrenzschicht:

Dicke der Grenzschicht: $\frac{\delta}{L} \approx \text{Re}_L^{-1/2}$

Schubspannung: $\tau_w \approx \rho \cdot U_\infty^2 \cdot \text{Re}_L^{-1/2}$

Widerstandsbeiwert: $c_f \approx \text{Re}_L^{-1/2}$

Kraftwirkung: $F \approx \rho \cdot U_\infty^2 \cdot W \cdot L \cdot \text{Re}_L^{-1/2}$

In Bezug auf die Temperaturgrenzschicht

a) $\delta \ll \delta_T$ d.h. $Pr \ll 1$

Grenzschichtdicke: $\frac{\delta_T}{L} \approx \underbrace{(\text{Pr} \cdot \text{Re}_L)^{-1/2}}_{\text{Peclet-Zahl}}$

Wärmeübergang: $\bar{\alpha} \approx \frac{\lambda}{L} \cdot (\text{Pr} \cdot \text{Re}_L)^{1/2}$

Nusselt-Zahl: $Nu = \frac{\bar{\alpha} \cdot L}{\lambda} \approx (\text{Pr} \cdot \text{Re}_L)^{1/2}$

Wärmestrom: $\dot{q} \approx W \cdot (T_w - T_\infty) \cdot \lambda \cdot (\text{Pr} \cdot \text{Re}_L)^{1/2}$

b) $\delta \gg \delta_T$ d.h. $Pr \gg 1$

Grenzschichtdicke: $\frac{\delta_T}{L} \approx \text{Pr}^{-1/3} \cdot \text{Re}_L^{-1/2}$

Wärmeübergang: $\bar{\alpha} \approx \frac{\lambda}{L} \cdot \text{Pr}^{1/3} \cdot \text{Re}_L^{1/2}$

Nusselt-Zahl: $Nu = \frac{\bar{\alpha} \cdot L}{\lambda} \approx \text{Pr}^{1/3} \cdot \text{Re}_L^{1/2}$

Wärmestrom: $\dot{q} \approx W \cdot (T_w - T_\infty) \cdot \lambda \cdot \text{Pr}^{1/3} \cdot \text{Re}_L^{1/2}$

6.3 Die integrale Näherung

6.3.1 Herleitung der Integralgleichungen

Bei der integralen Näherung verwenden wir an sich exakte Gleichungen in einer integralen Form, d.h. wir betrachten wiederum Differenzen über die gesamte Grenzschicht, ähnlich wie bei der Grössenordnungslösung. Für die Verwertung dieses Ansatzes muss eine Annahme über die Form des Profils getroffen werden. Als Resultat erhalten wir quantitative Angaben, die über die Proportionalität der Grössenordnung hinaus auch die Proportionalitätskonstanten liefern. Diese Resultate sind in guter Übereinstimmung mit den exakten Lösungen.

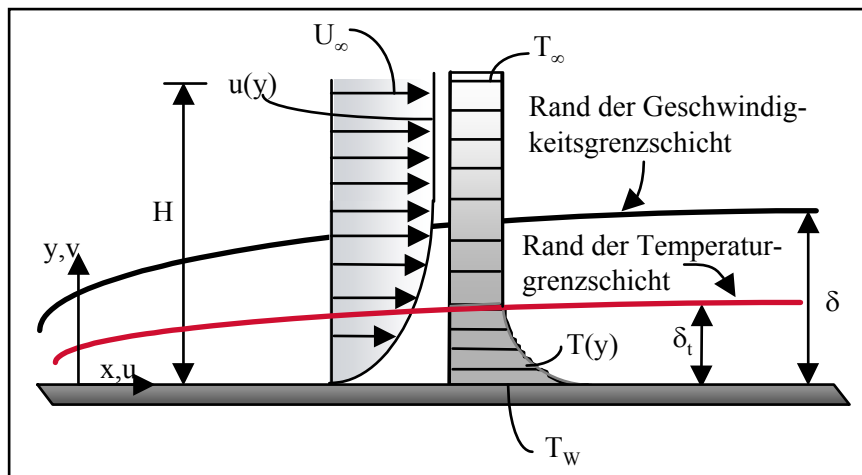


Fig. 6.5: Betrachtungsweise für die Integralnäherung

Wesentlich bei diesem Verfahren ist, dass die Integration über eine Höhe H erfolgt, die grösser als die Dicke der beiden Grenzschichten ist (siehe Fig. 6.5). Für die weitere Herleitung schreiben wir die Impuls- und die Energiegleichung folgendermassen um:

$$u \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + v \cdot \frac{\partial u}{\partial y} = \nu \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad \rightarrow \quad \frac{\partial}{\partial x}(u^2) + \frac{\partial}{\partial y}(u \cdot v) = \nu \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

Die linken Seiten der obigen zwei Gleichungen sind identisch, wenn wir die Kontinuität für inkompressible Medien voraussetzen:

$$\frac{\partial}{\partial x}(u^2) + \frac{\partial}{\partial y}(u \cdot v) = 2u \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + v \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + u \cdot \frac{\partial v}{\partial y} = u \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + v \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \underbrace{u \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right)}_{=0 \text{ wegen Kontinuität}}$$

Unter den gleichen Voraussetzungen können wir die Energiegleichung umschreiben:

$$u \cdot \frac{\partial T}{\partial x} + v \cdot \frac{\partial T}{\partial y} = a \cdot \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \quad \rightarrow \quad \frac{\partial}{\partial x}(u \cdot T) + \frac{\partial}{\partial y}(v \cdot T) = a \cdot \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}$$

Jetzt können wir in y -Richtung die Integration von 0 bis H ohne weiteres ausführen:

$$\frac{d}{dx} \int_0^H u^2 \cdot dy + (u \cdot v) \Big|_{y=0}^{y=H} = v \cdot \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y=0}^{y=H}$$

$$\frac{d}{dx} \int_0^H u \cdot T \cdot dy + (v \cdot T) \Big|_{y=0}^{y=H} = a \cdot \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{y=0}^{y=H}$$

Wenn wir nun die entsprechenden Werte an den Grenzen einsetzen, sind einige davon bekannt:

$$\frac{d}{dx} \int_0^H u^2 \cdot dy + U_\infty \cdot v \Big|_{y=H} - \underbrace{(u \cdot v) \Big|_{y=0}}_{=0} = v \cdot \left\{ \underbrace{\left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=H}}_{=0} - \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=0} \right\}$$

$$\frac{d}{dx} \int_0^H u \cdot T \cdot dy + v \Big|_{y=H} \cdot T_\infty - \underbrace{v \Big|_{y=0} \cdot T_w}_{=0} = a \cdot \left\{ \underbrace{\left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_{y=H}}_{=0} - \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_{y=0} \right\}$$

Damit bleiben von den obigen Gleichungen noch die folgenden Terme übrig:

$$\frac{d}{dx} \int_0^H u^2 \cdot dy + U_\infty \cdot v \Big|_{y=H} = -v \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=0}$$

$$\frac{d}{dx} \int_0^H u \cdot T \cdot dy + T_\infty \cdot v \Big|_{y=H} = -a \cdot \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_{y=0}$$

Die Geschwindigkeitskomponente $v \Big|_{y=H}$ können wir aus der Kontinuitätsgleichung bestimmen;

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial u}{\partial x}$$

Die gesuchte Komponente erhalten wir aus der Integration:

$$v \Big|_{y=H} - \underbrace{v \Big|_{y=0}}_{=0} = -\frac{d}{dx} \int_0^H u \cdot dy$$

Dieses Resultat können wir einsetzen und die beiden Integrale zusammenfassen:

$$\frac{d}{dx} \int_0^H u^2 \cdot dy - \frac{d}{dx} \int_0^H U_\infty \cdot u \cdot dy = \frac{d}{dx} \int_0^H u \cdot (u - U_\infty) \cdot dy = -v \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=0}$$

$$\frac{d}{dx} \int_0^H u \cdot T \cdot dy - \frac{d}{dx} \int_0^H T_\infty \cdot u \cdot dy = \frac{d}{dx} \int_0^H u \cdot (T - T_\infty) \cdot dy = -a \cdot \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_{y=0}$$

Die Integrale können jetzt noch aufgeteilt werden in den Bereich innerhalb der Grenzschicht und denjenigen ausserhalb der Grenzschicht, wobei die Anteile ausserhalb nichts mehr beitragen:

$$\begin{aligned} \int_0^H u \cdot (u - U_\infty) \cdot dy &= \int_0^{\delta} u \cdot (u - U_\infty) \cdot dy + \underbrace{\int_{\delta}^H u \cdot (u - U_\infty) \cdot dy}_{=0 \text{ wegen } u(\delta) = u(H) = U_\infty} \\ \int_0^H u \cdot (T - T_\infty) \cdot dy &= \int_0^{\delta_T} u \cdot (T - T_\infty) \cdot dy + \underbrace{\int_{\delta_T}^H u \cdot (T - T_\infty) \cdot dy}_{=0 \text{ wegen } T(\delta_T) = T(H) = T_\infty} \end{aligned}$$

Damit erhalten wir für die Impuls und Energiegleichung in integraler Form die folgende Darstellung:

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{d}{dx} \int_0^{\delta} u \cdot (u - U_\infty) \cdot dy &= -\nu \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=0} \\ \frac{d}{dx} \int_0^{\delta_T} u \cdot (T - T_\infty) \cdot dy &= -a \cdot \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_{y=0} \end{aligned}}$$

Die Herleitung dieser Integralgleichungen ist mathematisch exakt, neben den Voraussetzungen, die für die Gleichungen in differentieller Form (siehe Seite 6-9 oben) gelten, wurden keine weiteren Vereinfachungen eingeführt oder zusätzliche Annahmen getroffen.

Die obigen Gleichungen können jetzt nicht so ohne weiteres angewendet werden, da für die Integration die Funktionen $u(y)$ und $T(y)$ bekannt sein müssen. Die Anwendung, welche schliesslich die Berechnung des gesamten Wärmestromes \dot{q} und der wirkenden Kraft F erlaubt, führt über die folgenden Schritte:

Annahme eines funktionalen Zusammenhanges für die Grenzschichtprofile, wobei neben anderen auch die Grössen δ und δ_T als freie Parameter enthalten sein dürfen.

Einsetzen dieser Funktionen in die Integralgleichungen

Bestimmung aller Parameter inkl. der Grenzschichtdicken δ und δ_T

6.3.2 Lösung mit linearen Grenzschichtprofilen

Das Verfahren kann mit dem folgenden einfachen Beispiel erläutert werden. In diesem Beispiel setzen wir voraus $Pr > 1$, d.h. $\delta > \delta_T$. Für die funktionalen Zusammenhänge werden lineare Funktionen angesetzt. Diese Annahme ist physikalisch zwar unrealistisch, dafür mathematisch einfach zu behandeln (siehe Fig. 6.6)

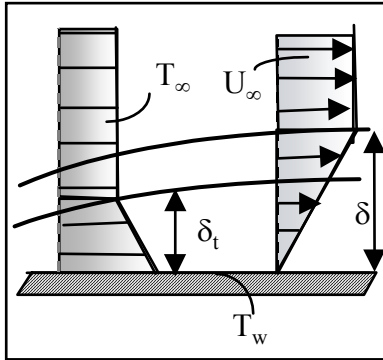


Fig. 6.6: vorgegebene lineare Grenzschichtprofile

$$\frac{u}{U_{\infty}} = A_1 \cdot \left(\frac{y}{\delta} \right) + A_2 \quad y < \delta$$

$$\frac{T - T_w}{T_{\infty} - T_w} = B_1 \cdot \left(\frac{y}{\delta_T} \right) + B_2 \quad y < \delta_T$$

Die Koeffizienten A_1 , A_2 , B_1 , und B_2 sind bereits durch die folgenden Randbedingungen bestimmt:

$$\begin{aligned} y = 0 : & \quad u(0) = 0 & T(0) = T_w \\ y = \delta : & \quad u(\delta) = U_{\infty} \\ y = \delta_T : & \quad T(\delta_T) = T_{\infty} \end{aligned}$$

Durch Einsetzen erhalten wir für die Konstanten:

$$\begin{aligned} A_2 &= 0 & A_1 &= 1 \\ B_2 &= 0 & B_1 &= 1 \end{aligned}$$

Die unbekannten Grenzschichtdicken δ und δ_T können nun durch die Anwendung der Integralgleichungen ermittelt werden, indem wir die entsprechenden Profile dort einsetzen. Für die Impulsgleichung ergibt dies:

$$\frac{d}{dx} \int_0^{\delta} U_{\infty} \cdot \frac{y}{\delta} \cdot \left(U_{\infty} \frac{y}{\delta} - U_{\infty} \right) \cdot dy = -\nu \cdot \frac{U_{\infty}}{\delta}$$

resp. nach Division durch $(U_{\infty})^2$ und Einführung der neuen Variablen $\zeta = \frac{y}{\delta}$:

$$\frac{d}{dx} \left\{ \underbrace{\delta \int_0^1 \zeta \cdot (\zeta - 1) \cdot d\zeta}_{=-1/6} \right\} = -\frac{\nu}{U_{\infty} \delta}$$

Analog verfahren wir mit der Energiegleichung:

$$\frac{d}{dx} \int_0^{\delta_T} U_\infty \cdot \frac{y}{\delta} \cdot \left([T_\infty - T_w] \cdot \frac{y}{\delta_T} - [T_\infty - T_w] \right) \cdot dy = -a \cdot \frac{T_\infty - T_w}{\delta_T}$$

resp. nach Division durch $(U_\infty) \cdot (T_\infty - T_w)$ und Einführung der neuen Variablen

$$\zeta_T = \frac{y}{\delta_T}:$$

$$\frac{d}{dx} \left\{ \frac{\delta_T^2}{\delta} \int_0^1 \underbrace{\zeta_T \cdot (\zeta_T - 1) \cdot d\zeta_T}_{=-1/6} \right\} = -\frac{a}{U_\infty \cdot \delta_T}$$

Die Integration über ζ resp. ζ_T kann einfach ausgeführt werden und ergibt je $-1/6$.

Die Gleichungen haben jetzt eine Form erhalten, die auch über x integriert werden kann. Beginnend mit der Impulsgleichung:

$$\delta \cdot \frac{d\delta}{dx} = \frac{6 \cdot \nu}{U_\infty} \quad \rightarrow \quad \delta \cdot d\delta = \frac{6 \cdot \nu}{U_\infty} \cdot dx \quad \rightarrow \quad \frac{\delta^2}{2} = \frac{6 \cdot \nu}{U_\infty} \cdot x$$

Die Lösung für die Dicke der Grenzschicht, welche sich proportional zu \sqrt{x} ausdehnt, kann auch als Funktion einer lokalen Reynoldszahl, welche sich auf die Lauflänge x bezieht, ausgedrückt werden:

$$\delta = \sqrt{\frac{12 \cdot \nu}{U_\infty} \cdot x} \quad \text{mit} \quad \text{Re}_x = \frac{x \cdot U_\infty}{\nu} \quad \frac{\delta}{x} = \sqrt{\frac{12}{\text{Re}_x}} = 3.464 \cdot \text{Re}_x^{-1/2}$$

Ist die Grenzschichtdicke bekannt, kann die Wandschubspannung wegen der Voraussetzung des linearen Profils einfach ermittelt werden:

$$\tau_w = \mu \cdot \left(\frac{du}{dy} \right)_{y=0} = \mu \cdot \frac{U_\infty}{\delta} = \frac{\rho \cdot U_\infty^2}{(12 \cdot \text{Re}_x)^{1/2}}$$

Damit lässt sich auch der dimensionslose Widerstandsbeiwert für diese Strömung angeben:

$$c_f = \frac{\tau_w}{\frac{1}{2} \cdot \rho \cdot U_\infty^2} = 0.577 \cdot \text{Re}_x^{-1/2}$$

Die Entwicklung der Temperaturgrenzschicht erhalten wir aus der Energiegleichung. Nach der Integration über ζ_T erhalten wir (unter der Annahme, dass das Verhältnis zwischen den Dicken der beiden Grenzschichten konstant ist):

$$\delta_T \frac{d}{dx} \left(\frac{\delta_T^2}{\delta} \right) = \left(\frac{\delta_T}{\delta} \right) \cdot \delta_T \cdot \frac{d}{dx} (\delta_T) = \left(\frac{\delta_T}{\delta} \right) \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{d}{dx} (\delta_T^2) = \frac{6 \cdot a}{U_\infty}$$

$$\rightarrow \frac{\delta_T}{\delta} \cdot \delta_T^2 = \frac{12 \cdot a \cdot x}{U_\infty}$$

Nach einer weiteren Umformung und nach Einsetzen des vorher gefundenen Wertes für δ ergibt sich:

$$\frac{\delta_T^3}{\delta^3} = \frac{12 \cdot a \cdot x}{U_\infty} \cdot \frac{1}{\delta^2} = \frac{a}{\underbrace{\frac{U_\infty}{x}}_{\frac{1}{\text{Pr}}}} \rightarrow \left(\frac{\delta_T}{\delta} \right) = \text{Pr}^{-1/3}$$

Nun können wir auch die Funktion für die Entwicklung der Grenzschicht für die Temperatur in x-Richtung angeben:

$$\boxed{\frac{\delta_T}{x} = \frac{\delta}{x} \cdot \text{Pr}^{-1/3} = 3.464 \cdot \text{Re}_x^{-1/2} \cdot \text{Pr}^{-1/3}}$$

Mit der Kenntnis dieser Grenzschichtdicke sind wir nun in der Lage den Wärmestrom und den Wärmeübergangskoeffizienten zu berechnen. Aus dem linearen Profilverlauf ergibt sich:

$$\dot{q}_w'' = -\lambda \cdot \left. \frac{dT}{dy} \right|_{y=0} = -\lambda \cdot \frac{T_w - T_\infty}{\delta_T}$$

Durch Einsetzen der gefundenen Resultate erhalten wir:

$$\dot{q}_w'' = \frac{\lambda}{x} \cdot 0.289 \cdot \text{Re}_x^{1/2} \cdot \text{Pr}^{1/3} \cdot (T_w - T_\infty)$$

wobei aus der Definition für den Wärmeübergangskoeffizienten α folgt:

$$\dot{q}_w'' = \alpha \cdot (T_w - T_\infty) \rightarrow \alpha = \frac{\dot{q}_w''}{T_w - T_\infty} = \frac{\lambda}{x} \cdot 0.289 \cdot \text{Re}_x^{1/2} \cdot \text{Pr}^{1/3}$$

Von wesentlich allgemeinerer Bedeutung ist die Nusselt-Zahl, welche von der Grösse des Objektes unabhängig ist:

$$\boxed{\text{Nu} = \frac{\alpha \cdot x}{\lambda} = 0.289 \cdot \text{Re}_x^{1/2} \cdot \text{Pr}^{1/3}}$$

Die Annahme eines linearen Profils bedeutet auch, dass wir einen konstanten Gradienten sowohl für die Geschwindigkeit als auch die Temperatur annehmen. Tatsächlich ist der Gradient auf der Oberfläche selbst am grössten (also höher als der Mittelwert) und nimmt dann gegen aussen ab. Die hier erhaltenen Werte sind deshalb eher etwas zu tief (siehe Resultat der exakten Lösungen im Abschnitt 6.4). Die Annahme z.B. eines Polynoms 3. Grades als Grenzschichtprofil, was mathematisch mit wenig Mehraufwand handhabbar ist, würde zu wesentlich genaueren Ergebnissen führen.

6.4 Exakte Lösungen

Die exakte Lösung beruht darauf, dass das vollständige Gleichungssystem von Seite 6-9 ohne weitere Annahmen und Vereinfachungen gelöst wird. Insbesondere werden keine Annahmen über die Form der Grenzschichtprofile getroffen.

6.4.1 Die Geschwindigkeitsgrenzschicht

Im folgenden wird die auf Selbstähnlichkeit basierende Lösung von Blasius für laminare Strömungen dargestellt.

Die Geschwindigkeitskomponenten können auf einer Potentialfunktion Ψ beruhend dargestellt werden (siehe Vorlesung über Fluidodynamik). Die Vorgabe einer Potentialströmung erfüllt implizit die Kontinuitätsgleichung.

$$u = \frac{\partial \Psi}{\partial y} \qquad v = -\frac{\partial \Psi}{\partial x}$$

Als unabhängige Ähnlichkeitsvariable definieren wir:

$$\eta = y \cdot \sqrt{\frac{U_\infty}{\nu \cdot x}} = \frac{y}{x} \cdot \text{Re}_x^{1/2} \qquad \text{mit} \quad \text{Re}_x = \frac{x \cdot U_\infty}{\nu}$$

Ferner führen wir eine von η abhängige Ähnlichkeitsfunktion $f(\eta)$ ein (anstelle der Potentialfunktion Ψ), so dass

$$u = U_\infty \frac{df}{d\eta}$$

Aus der Definition der Potentialfunktion Ψ folgt:

$$\begin{aligned} u &= \frac{\partial \Psi}{\partial y} = \frac{\partial \Psi}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial y} = U_\infty \frac{df}{d\eta} \\ \frac{\partial \eta}{\partial y} \cdot \Psi &= U_\infty \cdot f(\eta) \\ f(\eta) &= \frac{1}{\sqrt{U_\infty \cdot \nu \cdot x}} \cdot \Psi \end{aligned}$$

Aus der zweiten Definitionsgleichung für die Potentialfunktion können wir nun die v-Komponente der Geschwindigkeit bestimmen.

$$v = -\frac{\partial \Psi}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial x} \left(\sqrt{U_\infty \cdot \nu \cdot x} \cdot f(\eta) \right) = - \left(\sqrt{U_\infty \cdot \nu \cdot x} \cdot \frac{\partial f(\eta)}{\partial x} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{U_\infty \cdot \nu}{x}} \cdot f(\eta) \right)$$

$$\text{mit} \quad \frac{\partial f(\eta)}{\partial x} = \frac{\partial f(\eta)}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial x} \quad \text{und} \quad \frac{\partial \eta}{\partial x} = -\frac{y}{2 \cdot x} \sqrt{\frac{U_\infty}{\nu \cdot x}} = -\frac{\eta}{2 \cdot x} \quad \text{wird}$$

$$v = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\nu \cdot U_\infty}{x}} \cdot \left(\eta \cdot \frac{\partial f(\eta)}{\partial \eta} - f(\eta) \right)$$

Nun können auch die entsprechenden Ableitungen gebildet werden, die in der Impulsgleichung auftreten:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{U_\infty}{2 \cdot x} \cdot \eta \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = U_\infty \cdot \sqrt{\frac{U_\infty}{\nu \cdot x}} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{U_\infty^2}{\nu \cdot x} \cdot \frac{\partial^3 f}{\partial \eta^3}$$

Wenn wir die gewonnenen Terme in die Impulsgleichung einsetzen, erhalten wir die folgende Differentialgleichung:

$$2 \cdot \frac{\partial^3 f}{\partial \eta^3} + f \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} = 0$$

Die Randbedingungen können einfach auf die Form der Ähnlichkeitsvariablen angepasst werden:

$$\begin{array}{ll} \text{für endliche Werte von } x \text{ gilt:} & y = 0 : \quad \eta = 0 \\ & y \rightarrow \infty \quad \eta \rightarrow \infty \end{array}$$

Die physikalischen Randbedingungen lauten:

$$u(x,0) = v(x,0) = 0 \quad u(x,\infty) = U_\infty$$

Ausgedrückt in Form der Ähnlichkeitsvariablen erhalten wir:

$$\left. \frac{u}{U_\infty} \right|_{y=0} = \left. \frac{df}{d\eta} \right|_{\eta=0} = 0 \quad \left. \frac{u}{U_\infty} \right|_{y=\infty} = \left. \frac{df}{d\eta} \right|_{\eta=\infty} = 1$$

Die einfach aussehende Differentialgleichung ist eine gewöhnliche Differentialgleichung 3. Ordnung, aber nicht linear. Damit kann keine analytische Lösung angegeben werden. Man kann eine solche durch eine Reihenentwicklung oder numerisch gewinnen. Die Resultate der numerischen Lösung für die Funktion und deren notwendige Ableitungen sind in der untenstehenden Tabelle angegeben. (aus Incropera/DeWitt 1996).

$\eta = y \sqrt{\frac{u_\infty}{\nu x}}$	f	$\frac{df}{d\eta} = \frac{u}{u_\infty}$	$\frac{d^2 f}{d\eta^2}$
0	0	0	0.332
0.4	0.027	0.133	0.331
0.8	0.106	0.265	0.327
1.2	0.238	0.394	0.317
1.6	0.420	0.517	0.297
2.0	0.650	0.630	0.267
2.4	0.922	0.729	0.228
2.8	1.231	0.812	0.184
3.2	1.569	0.876	0.139
3.6	1.930	0.923	0.098
4.0	2.306	0.956	0.064
4.4	2.692	0.976	0.039
4.8	3.085	0.988	0.022
5.2	3.482	0.994	0.011
5.6	3.880	0.997	0.005
6.0	4.280	0.999	0.002
6.4	4.679	1.000	0.001
6.8	5.079	1.000	0.000

Diese Funktion ist bekannt unter dem Namen Blasius-Lösung. Das Profil der u-Geschwindigkeit ist in Fig. 6.7 dargestellt. Diese selbstähnliche Darstellung ist für beliebige x gültig. Als Dicke der Grenzschicht wird üblicherweise die Stelle bezeichnet, wo $u = 0.99 \cdot U_\infty$ wird.

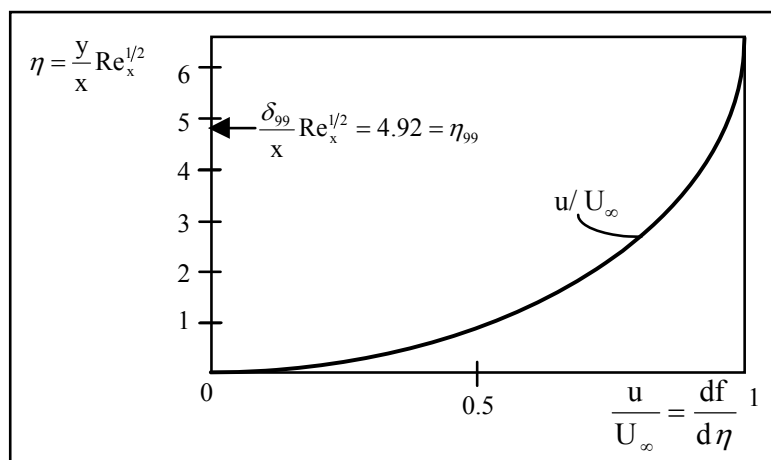


Fig. 6.7: Geschwindigkeitsprofil der Blasius-Lösung

Die Dicke der Grenzschicht erhalten wir aus (siehe Tabelle:

$$\frac{u}{U_\infty} = \frac{df}{d\eta} = 0.99 \quad \rightarrow \quad \eta_{99} = 4.92 = \frac{\delta}{x} \cdot \text{Re}_x^{1/2}$$

$$\boxed{\delta = 4.92 \cdot x \cdot \text{Re}_x^{-1/2}}$$

Zum Vergleich erinnern wir uns an das Resultat der Grössenordnungslösung:

$$\frac{\delta}{L} \approx \text{Re}_L^{-1/2}$$

Mit den vorhandenen Resultaten sind wir nun in der Lage, den Reibungskoeffizienten zu berechnen:

$$c_{f_x} = \frac{\nu \cdot \rho \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=0}}{\frac{1}{2} \rho \cdot U_\infty^2} = \frac{2 \cdot \nu}{U_\infty} \cdot \sqrt{\frac{U_\infty}{\nu \cdot x}} \cdot \underbrace{\left(\frac{d^2 f}{d\eta^2} \right)_{\eta=0}}_{=0.332 \text{ aus Tabelle}} = 0.664 \cdot \text{Re}_x^{-1/2}$$

Für die Berechnung der gesamten Schubkraft auf die Platte können wir zuerst einen Widerstandsbeiwert bestimmen, der über die gesamte Länge L der Platte gemittelt worden ist:

$$\bar{c}_{fL} = \frac{1}{L} \cdot \int_0^L c_{f_x} \cdot dx = 0.662 \cdot \frac{1}{L} \cdot \int_0^L \sqrt{\frac{\nu}{U_\infty \cdot x}} \cdot dx = 1.328 \cdot \text{Re}_L^{-1/2}$$

Die gesamte Schubkraft auf die Platte der Breite W und Länge L berechnet sich dann zu:

$$\underline{F_W} = \bar{c}_{fL} \cdot \frac{\rho}{2} \cdot U_\infty^2 \cdot W \cdot L = \underline{\bar{\tau}_L \cdot W \cdot L}$$

Auch diese Resultate haben wir bereits qualitativ durch die Grössenordnungslösung gefunden: $c_f \approx \text{Re}_L^{-1/2}$.

6.4.2 Die Temperaturgrenzschicht

Mit der Kenntnis der Grenzschicht der Geschwindigkeit kann nun auch die Energiegleichung gelöst und der Verlauf der Temperaturgrenzschicht bestimmt werden. Dazu führen wir eine dimensionslose und auf den Bereich 0 ... 1 normierte Temperaturdifferenz θ ein und verwenden die Prandtl-Zahl:

$$\theta = \frac{T - T_w}{T_\infty - T_w} \quad \text{Pr} = \frac{\nu}{a}$$

Wenn wir wiederum die selbe Ähnlichkeitsvariable η benutzen und $\theta = \theta(\eta)$ setzen, erhalten wir nach den notwendigen Substitutionen (hier nicht gezeigt):

$$\frac{d^2\theta}{d\eta^2} + \frac{\text{Pr}}{2} \cdot f \cdot \frac{d\theta}{d\eta} = 0$$

Die zugehörigen Randbedingungen lauten:

$$\eta = 0: \theta = 0 \quad \text{und} \quad \eta \rightarrow \infty: \theta = 1$$

Man beachte, dass die Fluidodynamik die Temperaturgrenzschicht mitbestimmt, indem die Funktion f auch in der Energiegleichung enthalten ist. Auch für diese Gleichung gibt es keine geschlossene Lösung und die Funktion $\theta(\eta)$ muss durch numerische Integration (für den entsprechenden Wert der Prandtl-Zahl) bestimmt werden, so dass wir hier nur die hauptsächlichen Resultate zusammenfassen können.

Aus der Definition für den Wärmeübergangskoeffizienten erhalten wir:

$$\alpha = \frac{\dot{q}_w''}{T_w - T_\infty} = \lambda \cdot \left(\frac{d\theta}{dy} \right)_{y=0} = \lambda \cdot \left(\frac{U_\infty}{\nu \cdot x} \right)^{1/2} \cdot \left(\frac{d\theta}{d\eta} \right)_{\eta=0} = \frac{\lambda}{x} \cdot \text{Re}_x^{1/2} \cdot \left(\frac{d\theta}{d\eta} \right)_{\eta=0}$$

Aus der numerischen Lösung erhalten wir:

$$\text{Für den Bereich } \text{Pr} \geq 0.6: \left(\frac{d\theta}{d\eta} \right)_{\eta=0} = 0.332 \cdot \text{Pr}^{1/3}$$

Damit erhalten wir für den α -Wert:

$$\alpha = \frac{\lambda}{x} \cdot \text{Re}_x^{1/2} \cdot 0.332 \cdot \text{Pr}^{1/3} \quad \text{Pr} \geq 0.6$$

Damit erhalten wir für die dimensionslose Nusseltzahl:

$$\text{Nu}_x = \frac{\alpha \cdot x}{\lambda} = 0.332 \cdot \text{Re}_x^{1/2} \cdot \text{Pr}^{1/3} \quad \text{Pr} \geq 0.6$$

Für die Berechnung des gesamten Wärmestromes zwischen Platte und Fluid benötigen wir den über die Fläche gemittelten α -Wert:

$$\bar{\alpha} = \frac{1}{L} \cdot \int_0^L \alpha(x) \cdot dx = \frac{1}{L} \cdot \int_0^L \lambda \cdot \left(\frac{U_\infty}{\nu \cdot x} \right)^{1/2} \cdot 0.332 \cdot \text{Pr}^{1/3} \cdot dx = 2 \cdot \alpha(L) \quad \text{Pr} \geq 0.6$$

Damit können wir auch eine gemittelte Nusselt-Zahl angeben:

$$\overline{\text{Nu}} = \frac{\bar{\alpha} \cdot L}{\lambda} = 2 \cdot \text{Nu}_L = 0.664 \cdot \text{Re}_L^{1/2} \cdot \text{Pr}^{1/3} \quad \text{Pr} \geq 0.6$$

Auch hier haben wir durch die Grössenordnungslösung die entsprechende Abhängigkeit bereits früher gefunden:

$$Nu \approx Re_L^{1/2} \cdot Pr^{1/3}$$

Die numerische Lösung kann natürlich auch für den Bereich $Pr \leq 0.6$ berechnet werden. Durch analoges Vorgehen wie oben finden wir:

$$\boxed{\begin{array}{l} Nu_x = 0.565 \cdot (Re_x \cdot Pr)^{1/2} \\ \overline{Nu} = 2 \cdot Nu_L \end{array} \quad Pr \leq 0.6}$$

Da die Aufteilung in zwei Bereiche bezüglich Prandtl-Zahlen unbequem ist, haben Churchill und Ozoe (1973) durch Kurvenanpassung einen Ausdruck hergeleitet, der für alle Prandtl-Zahlen gültig ist. Dieser Ausdruck ist gültig für $Pe > 100$:

$$\boxed{\begin{array}{l} Pe_x = Re_x \cdot Pr > 100 : \quad \rightarrow \quad Nu = \frac{0.3387 \cdot Re_x^{1/2} \cdot Pr^{1/3}}{\left[1 + \left(0.0468 / Pr\right)^{2/3}\right]^{1/4}} \\ \overline{Nu} = 2 \cdot Nu_L \end{array}}$$

6.4.3 Zusammenfassung

Die Resultate der exakten Lösung können wie folgt zusammengefasst werden:

a) Grenzschichtdicken und Widerstandsbeiwert:

$$\frac{\delta}{x} = 4.92 \cdot Re_x^{-1/2}$$

$$\frac{\delta}{\delta_T} = Pr^{1/3}$$

$$c_{f_x} = 0.664 \cdot Re_x^{-1/2}$$

$$\bar{c}_{f_x} = 1.328 \cdot Re_x^{-1/2}$$

b) Wärmeübergang

$$Pr > 0.6$$

$$Nu_x = \frac{\alpha \cdot x}{\lambda} = 0.332 \cdot Re_x^{1/2} \cdot Pr^{1/3}$$

$$Pr < 0.6$$

$$Nu_x = \frac{\alpha \cdot x}{\lambda} = 0.565 \cdot (Re_x \cdot Pr)^{1/2}$$

$$Pe_x = Re_x \cdot Pr > 100$$

$$Nu = \frac{0.3387 \cdot Re_x^{1/2} \cdot Pr^{1/3}}{\left[1 + \left(0.0468 / Pr\right)^{2/3}\right]^{1/4}}$$

In jedem Fall gilt die funktionale Abhängigkeit

$$\alpha(x) \approx \frac{\text{Re}_x^{1/2}}{x} \approx x^{-1/2} \quad \rightarrow \quad \overline{\alpha} = 2 \cdot \alpha(L) \quad \overline{Nu} = 2 \cdot Nu_L$$

6.5 Turbulente Strömungen

Bis anhin haben wir das Grenzschichtproblem für laminare Strömungen behandelt. Insbesondere haben wir in der Energiegleichung (siehe Seite 8-11) den nicht linearen Quellterm, welcher die Umwandlung von kinetischer Energie in Wärme durch innere Reibung beschreibt, vernachlässigt. Dieser Quellterm verursacht stochastische Fluktuationen sowohl im Geschwindigkeits- als auch im Temperaturfeld oder kurz gesagt Turbulenz. Turbulente Strömungen sind in den meisten technischen Anwendungen vorhanden, sobald die Reynoldszahl einen gewissen kritischen Wert übersteigt.

Grundsätzlich kann auch die entsprechende vollständige zeitabhängige Energiegleichung numerisch gelöst werden, nur ist der numerische Aufwand so enorm, dass dies wiederum nur für relativ kleine Reynoldszahlen überhaupt möglich ist. Deshalb muss das Problem der Turbulenten Grenzschicht mit Modellvorstellungen bearbeitet werden.

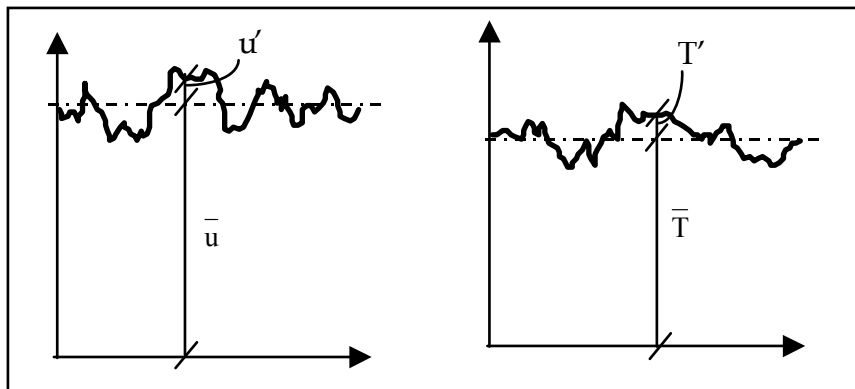


Fig. 6.8: Darstellung der Variablen als Mittelwert und Schwankungsanteil

Die in der Zeit sich ändernden Variablen (Geschwindigkeit, Temperatur, siehe Fig. 6.8) werden dargestellt durch einen Mittelwert und einen fluktuierenden Anteil.

$$u = \bar{u} + u', \quad v = \bar{v} + v', \quad w = \bar{w} + w', \quad P = \bar{P} + P', \quad T = \bar{T} + T'$$

Der zeitliche Mittelwert einer beliebigen Grösse Y ist definiert als:

$$\bar{Y} = \frac{1}{\Delta t} \cdot \int_0^{\Delta t} Y(t) \cdot dt$$

wobei das Zeitintervall Δt für die Mittelung so gross gewählt werden muss, dass sich der Mittelwert nicht mehr ändert.

Für den fluktuierenden Anteil muss dann natürlich gelten:

$$\int_0^{\Delta t} Y'(t) \cdot dt = \overline{Y'} = 0$$

Diese Aufteilung der Variablen kann nun in die Grenzschichtgleichungen eingesetzt und diese selbst zeitlich gemittelt werden, wobei zu beachten ist, dass Produkte von Fluktuationstermen $\overline{Y'Z'}$ (Korrelationsterme) nicht verschwinden. Die Herleitung ist relativ umfangreich. Sie kann in allen einschlägigen Lehrbüchern über Fluidodynamik gefunden werden. Sie führt zu:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} &= 0 \\ \rho \cdot \left(\bar{u} \cdot \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v} \cdot \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} \right) &= -\frac{d\bar{P}}{dx} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \cdot \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} - \rho \cdot \overline{u' \cdot v'} \right) \\ \rho \cdot c_p \cdot \left(\bar{u} \cdot \frac{\partial \bar{T}}{\partial x} + \bar{v} \cdot \frac{\partial \bar{T}}{\partial y} \right) &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda \cdot \frac{\partial \bar{T}}{\partial y} - \rho \cdot c_p \cdot \overline{v' \cdot T'} \right) \end{aligned}$$

In Analogie zur laminaren Form der Gleichungen für die Grenzschicht finden wir neue Terme für die Schubspannung und den Wärmetransport im turbulenten Fall:

$$\begin{aligned} \tau_g &= \left(\mu \cdot \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} - \rho \cdot \overline{u' \cdot v'} \right) \\ \dot{q}_g'' &= - \left(\lambda \cdot \frac{\partial \bar{T}}{\partial y} - \rho \cdot c_p \cdot \overline{v' \cdot T'} \right) \end{aligned}$$

Sowohl die Schubspannung als auch der Wärmetransport setzt sich aus zwei Teilen zusammen: dem bisherigen Anteil im laminaren Fall bedingt durch molekulare Diffusion und einem neuen Anteil durch die turbulente Mischung.

$$\tau_g = \tau + \tau_t \quad \text{mit} \quad \tau_t = -\rho \cdot \overline{u' \cdot v'}$$

wobei τ_t als turbulente resp. Reynoldsspannung bezeichnet wird. Die gleiche Aufteilung gilt für den Wärmetransport:

$$\dot{q}_g'' = \dot{q}'' + \dot{q}_t'' \quad \text{mit} \quad \dot{q}_t'' = \rho \cdot c_p \cdot \overline{v' \cdot T'}$$

Die Grösse \dot{q}'' wird als turbulenter Wärmetransport bezeichnet. Die Fluktuationsterme $\overline{u' \cdot v'}$ und $\overline{v' \cdot T'}$ sind nicht bekannt und müssen modelliert werden. Analog zum laminaren Fall definieren wir eine turbulente Zähigkeit und eine turbulente Wärmeleitfähigkeit:

$$-\rho \cdot \overline{u' \cdot v'} = \tau_t = \mu_t \cdot \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \qquad \rho \cdot c_p \cdot \overline{v' \cdot T'} = \dot{q}_t'' = -\lambda_t \cdot \frac{\partial \bar{T}}{\partial y}$$

Basierend auf diesen Definitionen können wir jetzt eine effektive Zähigkeit und eine effektive Wärmeleitfähigkeit formulieren:

$$\mu_{eff} = \mu + \mu_t \qquad \lambda_{eff} = \lambda + \lambda_t$$

Damit können wir jetzt die Impuls- und Energiegleichung in analoger Form zum laminaren Fall schreiben. Die Variablen werden durch die zeitlich gemittelten Werte ersetzt und an Stelle von Viskosität und Wärmeleitfähigkeit treten die beiden effektiven Transporteigenschaften. Wir erhalten das folgende Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} &= 0 \\ \rho \cdot \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \rho \cdot \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} &= -\frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu_{eff} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right) \\ \rho \cdot \bar{u} \cdot c_p \frac{\partial \bar{T}}{\partial x} + \rho \cdot \bar{v} \cdot c_p \frac{\partial \bar{T}}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda_{eff} \frac{\partial \bar{T}}{\partial y} \right) \end{aligned}$$

Die turbulenten Transporteigenschaften sind keine Stoffeigenschaften wie ihre molekularen Analogien, sondern sie werden durch die physikalischen Eigenschaften der turbulenten Strömung bestimmt. Halbempirische Ansätze zu ihrer Beschreibung findet man in der Literatur unter der Bezeichnung Turbulenzmodellierung.

Die exakte numerische Berechnung des vollständigen Modells ist wegen dem enorm hohen Rechenaufwand praktisch unmöglich. Auch die Lösungen mit modellierter Turbulenz sind sehr aufwendig, so dass die experimentelle Bestimmung des Wärmeübergangs in turbulenten Strömungen von grosser Bedeutung ist.

Durch semi-empirische Überlegungen und Experimente wurden für die turbulente Grenzschicht die folgenden Gesetze gefunden [1,2]:

$$\begin{aligned} c_{f_x} &= 0.0592 \cdot \text{Re}_x^{-1/5} & \text{Re}_x &\leq 10^7 \\ \text{Nu}_x &= 0.0296 \cdot \text{Re}_x^{4/5} \cdot \text{Pr}^{1/3} \\ \text{Re}_x &= \frac{U_\infty \cdot x}{\nu} & \text{Nu}_x &= \frac{\alpha \cdot x}{\lambda} \end{aligned}$$

wobei Re_x und Nu_x die lokale Reynolds- resp. Nusselt-Zahl bedeuten. Die kritische Reynoldszahl für Strömungen über ebene Flächen, wo der Umschlag zur turbulenten Strömung erfolgt liegt im Bereich $(1 - 2) \cdot 10^5$. Der genaue Wert hängt von der Oberflächenrauigkeit und dem Turbulenzgrad der ungestörten

Strömung ab. Die Reynoldszahl wächst mit zunehmendem Abstand von der Anströmkante. Wir finden deshalb zuerst eine Region, wo die Strömung noch laminar ist bis zu einem gewissen x_{krit} , wo der Umschlag zur Turbulenz beginnt. Es folgt dann ein sog. Übergangsgebiet, bis sich schliesslich die voll turbulente Strömung ausgebildet hat. (siehe Fig. 6.9)

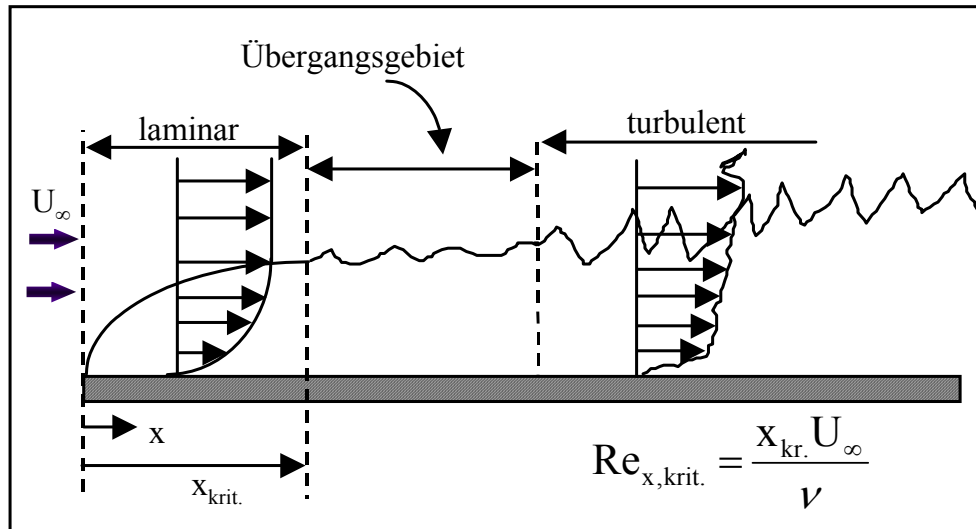


Fig. 6.9: Regionen bei der Ausbildung einer turbulenten Grenzschicht

- [1] Schlichting, H.: Boundary Layer Theorie, McGraw-Hill, 1968
- [2] F. Incropera and D. DeWitt: Intro. to Heat Transfer, Wiley, 1996

6.6 Wärmeübergang an umströmten Körpern

Für zwei- oder dreidimensionale Gebilde können natürlich keine geschlossenen Lösungen mehr angegeben werden wie im Fall der ebenen Platte. Die qualitativen Abhängigkeiten von Re und Pr bleiben aber erhalten. Die notwendigen Zahlenwerte müssen aber aus Experimenten bestimmt werden. (semi-empirische Lösungen).

6.6.1 Quer angeströmte zylindrische Körper

Wir betrachten zuerst einen kreisförmigen Zylinder mit dem Durchmesser D (siehe Fig. 6.10). Der Wärmeübergang wird natürlich an jedem Punkt des Kreisumfanges unterschiedlich sein. Für ingenieurmässige Berechnungen sind wir aber am Mittelwert über den ganzen Kreisumfang interessiert. Aus Analogie zum Wärmeübergang für die ebene Platte schreiben wir:

$$\overline{Nu}_D = \frac{\bar{\alpha} \cdot D}{\lambda} = C \cdot Re_D^m \cdot Pr^{1/3} \quad [1, 2]$$

wobei der Exponent der Reynoldszahl und ein Zahlenfaktor als freie Parameter erscheinen.

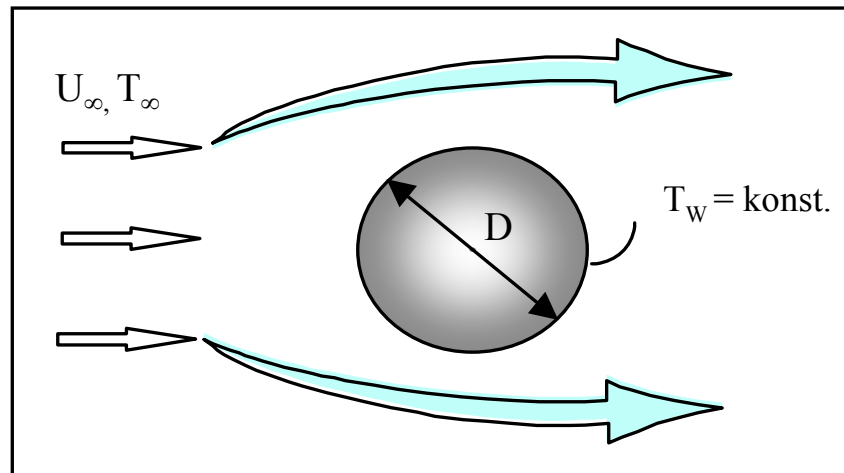


Fig. 6.10: Wärmeübergang am quer angeströmten Kreiszylinder

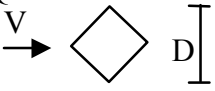
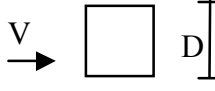
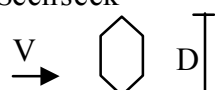


Die folgende Tabelle gibt die aus den Experimenten gewonnenen Zahlenwerte:

Re_D	C	m
0.4 – 4	0.989	0.330
4 – 40	0.911	0.385
40 – 4000	0.683	0.466
4000 – 40'000	0.193	0.618
40'000 – 400'000	0.027	0.805

Die Materialgrößen ρ , μ (resp. ν) und λ sind temperaturabhängig. Als massgebende Temperatur setzen wir die Filmtemperatur, d.h. den Mittelwert über die Grenzschicht ein:

$$T_{Film} = \frac{1}{2}(T_w + T_\infty) \quad Re_D = \frac{U_\infty \cdot D}{\nu(T_F)} \quad Pr = \frac{\nu(T_F)}{a(T_F)}$$

Die selbe Analogie können wir auch für Stäbe mit nicht kreisförmigen Querschnitten anwenden. Die folgende Tabelle [3] zeigt einen Überblick über einige Anwendungsmöglichkeiten.

Geometrie	Re_D	C	m
Quadrat 	$5 \cdot 10^3 - 10^5$	0.246	0.588
	$5 \cdot 10^3 - 10^5$	0.102	0.675
Sechseck 	$5 \cdot 10^3 - 1,95 \cdot 10^4$	0.160	0.638
	$1,95 \cdot 10^4 - 10^5$	0.0385	0.782
	$5 \cdot 10^3 - 10^5$	0.153	0.638
vertikale Platte 	$4 \cdot 10^3 - 1,5 \cdot 10^4$	0.228	0.731

6.6.2 Die umströmte Kugel

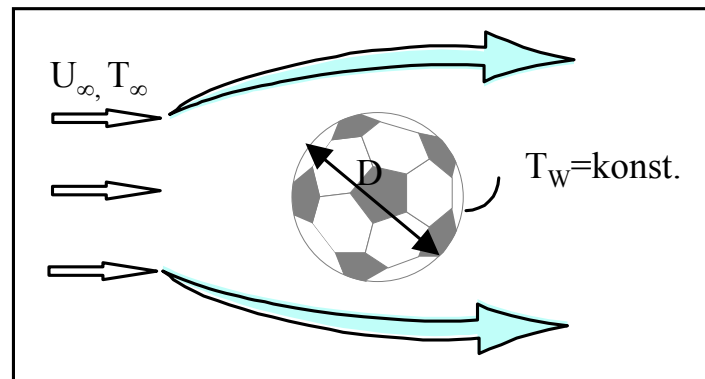


Fig. 6.11: Wärmeübergang an der umströmten Kugel

In der Technik ist auch das Problem des Wärmeaustausches zwischen kugelförmigen Gebilden und einem umgebenden Fluid von grosser Bedeutung. Die typische Anwendung ist bei Zweiphasen-Gemischen, wo eine Flüssigkeit in Form von kugelförmigen Tropfen mit einem umgebenden Gas Wärme austauscht (z.B. das Verdampfen eines Brennstoff-Sprays in heissen Verbrennungsgasen). (siehe Fig. 6.11).

Whitaker [4] gibt für die Nusselt-Zahl an der Kugel die folgende Korrelation an:

$$\overline{Nu}_D = 2 + (0.4 \cdot Re_D^{1/2} + 0.06 \cdot Re_D^{2/3}) \cdot Pr^{0.4} \left(\frac{\mu}{\mu_w} \right)^{1/4}$$

mit den folgenden Spezifikationen für den Gültigkeitsbereich:

$$\begin{array}{llll} 0.71 & < & Pr & < & 380 \\ 3.5 & < & Re_D & < & 7.6 \cdot 10^4 \\ 1.0 & < & \mu / \mu_w & < & 3.2 \end{array}$$

Alle Stoffeigenschaften müssen bei der Temperatur T_∞ abgeschätzt werden ausser der Viskosität μ_w , welche diejenige auf der Oberfläche bezeichnet. Der Bereich kleiner Reynoldszahlen ist von Bedeutung, da dieses Gesetz typischerweise auf Tropfen in technischer Umgebung mit Durchmessern $< 100 \mu$ angewendet wird.

- [1] Hilpert, R., Forsch Geb. Ing., Vol. 4, 215, 1933.
- [2] Knudsen, J.D. und Katz, D.L. Fluid Dynamics and Heat Transfer, McGraw-Hill, N.Y., 1958.
- [3] Jakob, M., Heat Transfer, Vol.1 Wiley, NY, 1949.
- [4] Whitaker, S., AIChEJ. Vol.18, 361, 1972.

7 Erzwungene Konvektion in durchströmten Kanälen

Bei der erzwungenen Konvektion an aussen umströmten Körpern haben wir vorausgesetzt, dass sich die Grenzschichten ungestört entwickeln können und dass die Grössen u_∞ und T_∞ existieren. Beim konvektiven Wärmeübergang im inneren von Kanälen ist diese Voraussetzung nicht erfüllt. Die Grenzschichten beginnen sich zu überlappen und beeinflussen sich damit gegenseitig.

7.1 Hydrodynamische Betrachtungen

Als typischen Fall für einen durchströmten Körper betrachten wir eine laminare Strömung in einem Rohr mit Radius r_0 . Am Rohreintritt nehmen wir eine homogene Geschwindigkeitsverteilung an (siehe Fig. 7.1). Durch die Einwirkung der Wandreibung wird sich diese Geschwindigkeitsverteilung ändern bis schliesslich nach einer gewissen Einlaufänge (auch Ausbildungslänge genannt) ein konstantes (wie wir sehen werden parabolisches) Geschwindigkeitsprofil einstellt, welches sich nicht mehr weiter ändert, solange der Strömungsquerschnitt konstant bleibt.

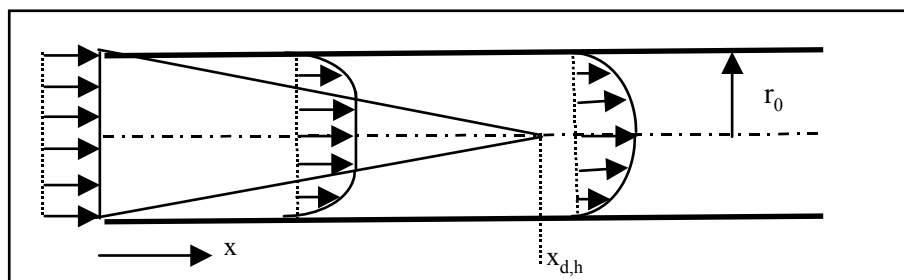


Fig. 7.1: Ausbildungslänge für das Geschwindigkeitsprofil.

Dieses stationäre Geschwindigkeitsprofil kann einfach hergeleitet werden durch die Anwendung des Impulssatzes auf einen infinitesimalen Hohlzylinder der Dicke dr und der Länge l (siehe Fig. 7.2).

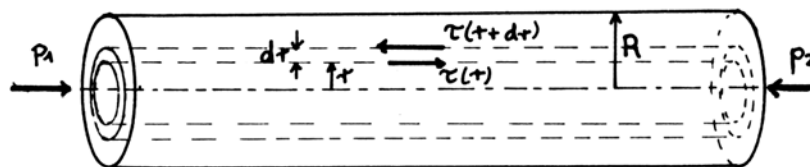


Fig. 7.2 Herleitung des Poiseuille- Gesetzes

Im stationären Fall muss ein Gleichgewicht herrschen zwischen den Druckkräften an den Stirnseiten und den Reibungsflächen auf dem Zylindermantel.

$$(p_1 - p_2) \cdot 2\pi \cdot r \cdot dr = 2\pi \cdot l \cdot (\tau \cdot r) \Big|_{r+dr} - 2\pi \cdot l \cdot (\tau \cdot r) \Big|_r$$

$$\frac{d}{dr}(\tau \cdot r) = (p_1 - p_2) \cdot \frac{r}{l}$$

Diese Gleichung kann einfach integriert werden und ergibt:

$$\tau \cdot r = (p_1 - p_2) \frac{r^2}{2 \cdot l} + C_1$$

Ferner gilt das Newton'sche Reibungsgesetz:

$$\tau = -\mu \cdot \frac{du}{dr} \quad (\text{wegen } \frac{du}{dr} < 0)$$

eingesetzt in die obige Gleichung erhalten wir:

$$-\mu \cdot r \cdot \frac{du}{dr} = (p_1 - p_2) \frac{r^2}{2 \cdot l} + C_1$$

Die Integrationskonstante C_1 bestimmen wir aus der Randbedingung:

$$r = 0: \quad \frac{du}{dr} = 0 \quad (\text{Symmetrie}) \quad C_1 = 0$$

Die weitere Integration ergibt:

$$u(r) = -(p_1 - p_2) \frac{r^2}{4 \cdot \mu \cdot l} + C_2$$

Als weitere Randbedingung haben wir:

$$u(r_0) = 0 = -(p_1 - p_2) \frac{r_0^2}{4 \cdot \mu \cdot l} + C_2$$

Damit erhalten wir für das Profil:

$$u(r) = (r_0^2 - r^2) \frac{(p_1 - p_2)}{4 \cdot \mu \cdot l} = -\frac{dp}{dx} \cdot \frac{1}{4 \cdot \mu} \cdot (r_0^2 - r^2)$$

Aus diesem Profil können wir auch eine mittlere Geschwindigkeit bestimmen durch die Benützung der folgenden Definition:

$$u_m = \frac{1}{A} \int_A u(r) \cdot dA$$

Wenn wir das obige Profil für $u(r)$ einsetzen erhalten wir:

$$u_m = -\frac{r_0^2}{8 \cdot \mu} \cdot \frac{dp}{dx} \quad \rightarrow \quad u(r) = 2 \cdot u_m \cdot \left[1 - \left(\frac{r}{r_0} \right)^2 \right]$$

In der Einströmzone hängt das Geschwindigkeitsprofil auch von der axialen Position x im durchströmten Körper ab. Für eine Strömung mit konstanter Dichte (inkompressible Medien) gilt dann allgemein:

$$\dot{m} = \rho \cdot u_m \cdot A = \rho \cdot \int_A u(x, r) \cdot dA$$

und angewendet auf eine Strömung im runden Rohr:

$$u_m = \frac{\dot{m}}{\rho \cdot A} = \frac{2\pi \cdot \rho \cdot \int_0^{r_0} u(x, r) \cdot r \cdot dr}{\rho \cdot \pi \cdot r_0^2} = \frac{2}{r_0^2} \cdot \int_0^{r_0} u(x, r) \cdot r \cdot dr$$

Wegen der Massenerhaltung ist der Mittelwert u_m an jeder Stelle x derselbe. Diese mittlere Geschwindigkeit ist die Grundlage für die Bestimmung der Reynoldszahl für die Rohrströmung:

$$\text{Re}_D = \frac{\rho \cdot u_m \cdot D}{\mu} \quad \text{Re}_{D,krit} \approx 2300$$

wobei eine kritische Reynoldszahl existiert, oberhalb der die Rohrströmung turbulent wird.

Für die Bestimmung der Einlaufänge existieren semi-empirische Formeln, die für laminare und turbulente Strömung unterschiedlich sind:

$$\text{laminar:} \quad \left(\frac{X_{d,h}}{D} \right)_{lam} \approx 0.05 \cdot \text{Re}_D$$

$$\text{turbulent:} \quad 10 \leq \left(\frac{X_{d,h}}{D} \right)_{turb} \leq 60$$

Der Druckverlust der Rohrströmung wird mit Hilfe eines Widerstandsbeiwertes (Moody friction factor) in der folgenden Art berechnet:

$$-\frac{dp}{dx} = \frac{\lambda}{D} \cdot \frac{\rho}{2} \cdot u_m^2 \quad \lambda \equiv \frac{-(dp/dx) \cdot D}{\rho \cdot u_m^2 / 2} = \frac{64}{\text{Re}_D} \quad (\text{für laminare Strömung})$$

Für turbulente Strömungen ist der Widerstandsbeiwert nicht direkt berechenbar. Empirische Werte findet man in der Literatur.

7.2 Thermische Betrachtungen

Für die Untersuchung thermischer Effekte betrachten wir eine Strömung mit einer anfänglich homogenen Temperaturverteilung. Besteht zwischen Rohrwand und Fluid eine Temperaturdifferenz wird ein konvektiver Wärmeübergang

eintreten und es bildet sich eine Temperaturgrenzschicht aus. Es ist zu erwarten, dass sich auch in Bezug auf die Temperatur ein stationäres Grenzschichtprofil ausbilden wird, dessen Form je nach Art der Randbedingung (konstante Wandtemperatur oder konstanter Wärmefluss) unterschiedlich sein wird. Die Änderung gegenüber der Eintrittstemperatur wird in beiden Fällen mit zunehmender Distanz x zunehmen. Diese Situation wird in Fig. 7.2 dargestellt.

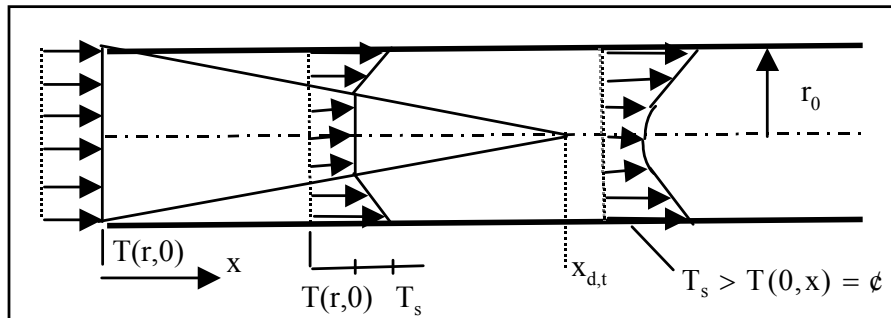


Fig. 7.2: Ausbildung des Temperaturprofils

Die Eintrittslänge für die Ausbildung des stationären Temperaturprofils berechnet sich im laminaren Fall zu:

$$\left(\frac{X_{d,T}}{D} \right)_{lam} \approx 0.05 \cdot \text{Re}_D \cdot \text{Pr}$$

und steht über die Prandtl-Zahl in direkter Beziehung zur hydrodynamischen Eintrittslänge.

Als nächstes gilt es eine mittlere Temperatur zu definieren, so dass wir damit über den Massenfluss die transportierte thermische Energie ausdrücken können.

$$\dot{E}_{konv} = \int_A \rho \cdot u \cdot c_v \cdot T \cdot dA \equiv \dot{m} \cdot c_v \cdot T_m$$

$$T_m = \frac{\int_A \rho \cdot u \cdot c_v \cdot T \cdot dA}{\dot{m} \cdot c_v}$$

Für die inkompressible Strömung mit konstantem c_v erhalten wir für T_m :

$$T_m = \frac{2}{u_m \cdot r_0^2} \int_0^{r_0} u \cdot T \cdot r \cdot dr$$

Damit können wir nun den Wärmestrom zwischen Wand und Fluid durch einen Wärmeübergangskoeffizienten ausdrücken:

$$\dot{q}'' = \alpha \cdot (T_s - T_m)$$

Da die Wärmeübertragung auf der ganzen Länge des Rohres wirksam ist, muss gelten:

$$T_m = T_m(x) \quad \text{und} \quad \frac{dT_m}{dx} \neq 0!$$

(Zum Vergleich: bei der äusseren Grenzschichtströmung existiert ein Wert $T_\infty = \text{konst.}$, nicht aber für die eingeschlossene Strömung.) Da sich das Temperaturprofil mit zunehmender Distanz vom Eintritt stetig ändern wird, kann sich der Ausdruck „ausgebildetes Temperaturprofil“ nur auf dessen Ähnlichkeit beziehen. Wir führen deshalb die folgende Ähnlichkeitsvariable ein:

$$\theta(r, x) = \frac{T_s - T(r, x)}{T_s - T_m}$$

Soll ein sog. ausgebildetes Temperaturprofil existieren, dessen Ähnlichkeit erhalten bleibt muss gelten:

$$\frac{\partial \theta(r, x)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{T_s - T(r, x)}{T_s - T_m} \right) = 0 \quad \text{d.h. } \theta = \theta(r) \neq f(x)$$

Diese Forderung kann erfüllt werden, wenn entweder die Oberflächentemperatur T_s des Rohres konstant ist oder aber ein konstanter Wärmestrom zwischen Fluid und Rohrwand herrscht.

Aus diesen Betrachtungen folgt auch, dass im Bereich des ausgebildeten Temperaturprofils ein konstanter α -Wert gilt. Im Bereich der Einlaufstrecke hingegen bilden sich zunächst steile Gradienten aus, der α -Wert ist deshalb zu Beginn noch sehr gross.

7.3 Die Energiebilanz

Für die Bestimmung des α -Wertes und des Wärmestromes ist die Kenntnis der Mitteltemperatur $T_m(x)$ notwendig. Wir stellen dafür eine Energiebilanz gemäss Fig. 7.3 auf.

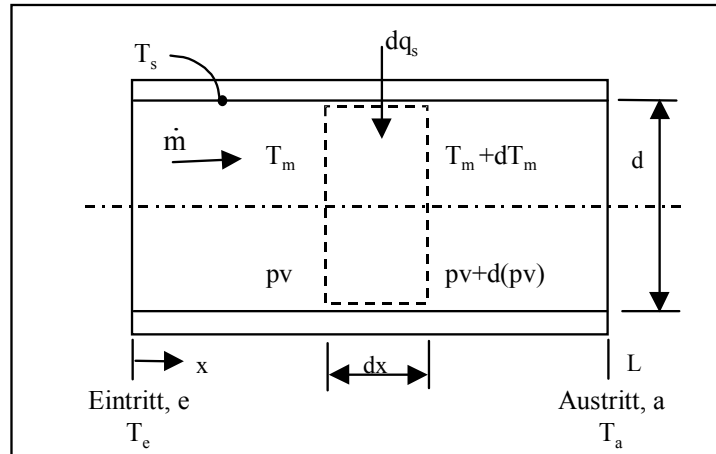


Fig. 7.3 Energiebilanz in der Rohrströmung

Die Herleitung gilt unter den folgenden Annahmen:

- Die Rohrströmung ist stationär, d.h. $\dot{m} = \text{const.}$
- Änderungen der kinetischen und der potentiellen Energie des Fluids sind vernachlässigbar
- Die Wärmeleitung in axialer Richtung ist gegenüber dem konvektiven Wärmetransport vernachlässigbar.

$$d\dot{q}_s + \dot{m} \cdot (c_v \cdot T_m + p \cdot v) - \left[\dot{m} \cdot (c_v \cdot T_m + p \cdot v) + \dot{m} \frac{d(c_v \cdot T_m + p \cdot v)}{dx} dx \right] = 0$$

$$\rightarrow d\dot{q}_s = \dot{m} \cdot d(c_v \cdot T_m + p \cdot v) = \dot{m} \cdot c_p \cdot dT_m$$

Integriert über die gesamte Rohrlänge erhalten wir den 1. Hauptsatz (am offenen System) für das entsprechende Rohr:

$$\dot{Q}_s = \dot{m} \cdot c_p \cdot (T_{m,a} - T_{m,e})$$

In der obigen differentiellen Form der Gleichung können wir die Wärmestromdichte einsetzen:

$$d\dot{q}_s = \dot{q}'' \cdot U \cdot dx = \dot{m} \cdot c_p \cdot dT_m \quad \text{mit } U = \pi \cdot d = \text{innerer Rohrumfang}$$

$$\rightarrow \frac{dT_m}{dx} = \frac{U}{c_p \cdot \dot{m}} \cdot \dot{q}'' = \frac{U}{c_p \cdot \dot{m}} \cdot \alpha \cdot (T_s - T_m)$$

Diese Differentialgleichung ist eine Bestimmungsgleichung für $T_m(x)$. Wie schon erwähnt ist der Wärmeübergangskoeffizient α nach der Einlaufstrecke eine Konstante.

Es gibt zwei spezielle Randbedingungen, die für den Ingenieur interessant sind:

- Der Wärmestrom an der Wand ist konstant (z.B. homogen bestrahltes Rohr in einem Absorber für Sonnenenergie)
- Die Oberflächentemperatur ist konstant (z.B. Wärmetauscherrohr in einem Kondensator eines Dampfkraftwerkes).

7.3.1 Konstanter Wärmestrom an der Wand

Da der Wärmestrom an der Wandoberfläche als Randbedingung vorgegeben ist, benützen wir die folgende Form der Gleichung:

$$\frac{dT_m}{dx} = \frac{U}{\dot{m} \cdot c_p} \cdot \dot{q}_s''$$

Nach Benutzung der Anfangsbedingung: $T_m(0) = T_{m,e}$ erhalten wir die Lösung:

$$T_m(x) = T_{m,e} + \frac{\dot{q}_s'' \cdot U}{\dot{m} \cdot c_p} \cdot x$$

Für das Gebiet nach der Einlaufstrecke ändert sich damit auch T_s linear mit der Distanz x , da sowohl Wärmestrom als auch Wärmeübergangskoeffizient konstant sind. Innerhalb der Einlaufstrecke ändert sich der α -Wert und die Änderung der Oberflächentemperatur verläuft nicht linear (siehe Fig. 7.4).

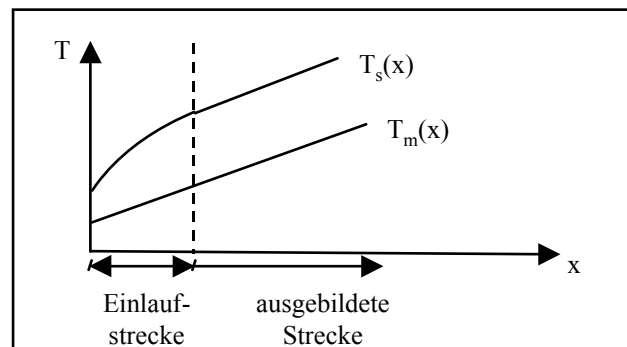


Fig. 7.4: Temperaturverläufe beim konstantem Wärmestrom

7.3.2 Konstante Wandtemperatur

Hier verwenden wir die Form der Gleichung, wo der Wärmestrom durch die Temperatur ausgedrückt wird:

$$\frac{dT_m}{dx} = \frac{U}{\dot{m} \cdot c_p} \alpha \cdot (T_s - T_m)$$

Die Differentialgleichung wird homogen, wenn wir die Temperaturdifferenz $\Delta T = T_s - T_m$ betrachten:

$$-\frac{d(\Delta T)}{dx} = \frac{U}{\dot{m} \cdot c_p} \cdot \alpha \cdot \Delta T$$

Nach Trennung der Variablen können wir über die ganze Rohrlänge integrieren:

$$\int_{\Delta T_e}^{\Delta T_a} \frac{d(\Delta T)}{\Delta T} = -\frac{U \cdot L}{\dot{m} \cdot c_p} \left(\frac{1}{L} \int_0^L \alpha \cdot dx \right)$$

Nach dem allgemeinen Verfahren für Mittelwertbildung gilt:

$$\bar{\alpha}_L = \frac{1}{L} \int_0^L \alpha \cdot dx$$

Dies eingesetzt lautet die Lösung:

$$\ln \frac{\Delta T_a}{\Delta T_e} = -\frac{U \cdot L}{\dot{m} \cdot c_p} \cdot \bar{\alpha}_L$$

Was umgeformt werden kann zu:

$$\frac{\Delta T_a}{\Delta T_e} = \frac{T_s - T_{m,a}}{T_s - T_{m,e}} = \exp \left(-\frac{U \cdot L}{\dot{m} \cdot c_p} \cdot \bar{\alpha}_L \right)$$

Für die Bestimmung der Temperatur an einer beliebigen Stelle x des Rohres erstrecken wir die Integration bis zu dieser Stelle x:

$$\frac{T_s - T_m(x)}{T_s - T_{m,e}} = \exp \left(-\frac{U \cdot x}{\dot{m} \cdot c_p} \cdot \bar{\alpha}_x \right)$$

Ist die Länge der Einlaufstrecke kurz gegenüber der betrachteten Länge x, können wir deren Einfluss vernachlässigen, deshalb:

$$\bar{\alpha}_x = \bar{\alpha}_L = \bar{\alpha}$$

In diesem Fall wird der Temperaturverlauf durch einen exponentiellen Zerfall der Temperaturdifferenz gekennzeichnet (siehe Fig. 7.5).

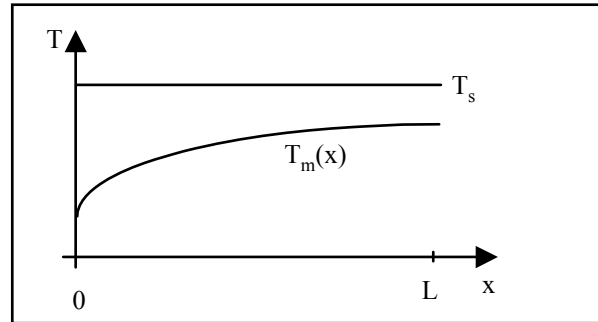


Fig. 7.5: Verlauf der Fluidtemperatur bei konstanter Wandtemperatur

Den gesamten Wärmeübertrag eines Rohres können wir schreiben als:

$$\dot{Q}_s = U \cdot L \cdot \bar{\alpha} \cdot \overline{\Delta T}$$

Die mittlere Temperaturdifferenz $\overline{\Delta T}$ können wir aus dem exponentiellen Temperaturverlauf nach den üblichen Regeln der Mittelwertbildung ermitteln:

$$\overline{\Delta T} = \frac{1}{L} \cdot \int_0^L \Delta T(x) \cdot dx$$

$$\text{wobei } \Delta T(x) = \Delta T_e \cdot e^{-\gamma \cdot x} \quad \text{mit} \quad \gamma = \frac{\bar{\alpha} \cdot U}{\dot{m} \cdot c_p}$$

Damit erhalten wir für die gemittelte Temperaturdifferenz:

$$\overline{\Delta T} = -\frac{\Delta T_e}{\gamma \cdot L} \cdot e^{-\gamma \cdot x} \Big|_0^L = -\frac{\Delta T_e}{\gamma \cdot L} \cdot (e^{-\gamma \cdot L} - 1)$$

Ferner gilt die Beziehung:

$$\Delta T_e \cdot e^{-\gamma \cdot L} = \Delta T_a \quad \rightarrow \quad \gamma \cdot L = \ln\left(\frac{\Delta T_e}{\Delta T_a}\right)$$

Wir können nun sowohl von der linken als auch von der rechten Form des obigen Ausdrucks Gebrauch machen und diese in der Gleichung für $\overline{\Delta T}$ einsetzen. Wir erhalten die sog. logarithmische Mitteltemperatur:

$$\overline{\Delta T} = \frac{\Delta T_a - \Delta T_e}{\ln\left(\frac{\Delta T_a}{\Delta T_e}\right)}$$

Bei den in der Praxis auftretenden Fällen ist in der Regel nicht die Temperatur der inneren Rohrwand als konstant vorgegeben sondern die Temperatur des äusseren Fluids. An den grundsätzlichen Überlegungen ändert sich in diesem Fall nichts. Es muss lediglich die Temperatur T_s der Wandoberfläche durch die

Temperatur T_∞ des ungestörten äusseren Fluids ersetzt werden und an die Stelle des gemittelten inneren Wärmeübergangskoeffizienten $\bar{\alpha}$ tritt der gemittelte Wärmedurchgangskoeffizient \bar{k} , wobei wir sinnvollerweise den über den Umfang integrierten linearen k-Wert \bar{k}_l benutzen (siehe Kap. 3, Seite 3-12).

$$\dot{Q}_s = \bar{k}_l \cdot L \cdot \overline{\Delta T} = \bar{k}_l \cdot L \cdot \frac{\Delta T_a - \Delta T_e}{\ln\left(\frac{\Delta T_a}{\Delta T_e}\right)}$$

7.4 Wärmeübergangskoeffizienten bei laminaren Rohrströmungen

Für die Berechnung des Wärmeüberganges an der Wandoberfläche müssen wir die entsprechenden Temperaturgradienten an dieser Stelle kennen, d.h. wir müssen eine Lösung für die Form des Temperaturprofiles finden. Wir benützen dafür die Energieerhaltungsgleichung in Grenzschichten, welche wir bereits für kartesische Koordinaten hergeleitet haben (siehe Seite 5-11, Kap. 5).

Umgeschrieben auf Zylinderkoordinaten erhalten wir (a = Temperaturleitfähigkeit):

$$u \cdot \frac{\partial T}{\partial x} + v \cdot \frac{\partial T}{\partial r} = \frac{a}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} r \cdot \left(\frac{\partial T}{\partial r} \right)$$

Die linke Seite der Gleichung bedeutet den Wärmetransport durch Konvektion und die rechte Seite beschreibt die Wärmeleitung. Wir setzen voraus, dass wir die Wärmeleitung in axialer Richtung gegenüber der Konvektion vernachlässigen können, d.h.

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0$$

Im Falle des konstanten Wandwärmestromes erhalten wir einen linearen Temperaturanstieg in axialer Richtung, weil wir diese Annahme bereits dort vorausgesetzt haben. Im voll ausgebildeten Bereich des Geschwindigkeitsprofils gelten ferner die Bedingungen:

$$v = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

Nach Anwendung dieser Bedingungen und Einsetzen der bereits gefundenen Lösung für das Geschwindigkeitsprofil $u(r)$ (siehe Seite 7-2) erhalten wir für den Fall $\dot{q}_s'' = \text{konst.}$:

$$\frac{1}{r} \cdot \frac{d}{dr} \left(r \cdot \frac{dT}{dr} \right) = \frac{2 \cdot u_m}{a} \left(\frac{dT_m}{dx} \right) \cdot \left[1 - \left(\frac{r}{r_0} \right)^2 \right]$$

Durch stufenweise Integration erhalten wir:

$$r \cdot \frac{dT}{dr} = \frac{2 \cdot u_m}{a} \left(\frac{dT_m}{dx} \right) \cdot \left(\frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4 \cdot r_0^2} \right) + C_1$$

$$T(r) = \frac{2 \cdot u_m}{a} \left(\frac{dT_m}{dx} \right) \cdot \left(\frac{r^2}{4} - \frac{r^4}{16 \cdot r_0^2} \right) + C_1 \cdot \ln(r) + C_2$$

Die Integrationskonstanten bestimmen wir aus den Randbedingungen

1. Für $r = 0$ muss die Temperatur endlich bleiben, d.h. $C_1 = 0$
2. Die Wandtemperatur $T_s(x)$ ist vorgegeben entweder über den linearen Verlauf bei konstantem Wärmestrom oder als konstante Temperatur:

$$T(r_0, x) = T_s(x) \quad \rightarrow \quad C_2 = T_s - \frac{2u_m}{a} \left(\frac{dT_m}{dx} \right) \left(\frac{3r_0^2}{16} \right)$$

Damit erhalten wir für das Temperaturprofil:

$$T(r) = T_s - \frac{2 \cdot u_m \cdot r_0^2}{a} \cdot \left(\frac{dT_m}{dx} \right) \cdot \left[\frac{3}{16} + \frac{1}{16} \left(\frac{r}{r_0} \right)^4 - \frac{1}{4} \left(\frac{r}{r_0} \right)^2 \right]$$

Die gemittelte Temperatur erhalten wir aus der Beziehung (siehe Seite 10-4):

$$T_m = \frac{2}{u_m \cdot r_0^2} \int_0^{r_0} u(r) \cdot T(r) \cdot r \cdot dr$$

durch Einsetzen der nun bekannten Profile $u(r)$ und $T(r)$ nach der notwendigen Algebra:

$$T_m = T_s - \frac{11}{48} \cdot \left(\frac{u_m \cdot r_0^2}{a} \right) \cdot \frac{dT_m}{dx}$$

Den axialen Temperaturgradienten bestimmen wir aus der Beziehung:

$$\rho \cdot c_p \cdot u_m \cdot \pi \cdot r_0^2 \cdot \frac{dT_m}{dx} = \dot{q}_s'' \cdot 2\pi \cdot r_0 \quad \rightarrow \quad \frac{dT_m}{dx} = \frac{2 \cdot \dot{q}_s''}{\rho \cdot c_p \cdot u_m \cdot r_0}$$

Damit ergibt sich für die Temperaturdifferenz zwischen Wand und Fluid (gemittelt)

$$T_m - T_s = -\frac{11}{48} \cdot \frac{\dot{q}_s'' \cdot D}{\lambda} = \frac{\dot{q}_s''}{\alpha}$$

Damit haben wir den Wärmeüberganskoeffizienten α bestimmt:

$$\alpha = \frac{48}{11} \frac{\lambda}{D} \quad \rightarrow \quad Nu_D = \frac{\alpha \cdot D}{\lambda} = 4.36 \quad \dot{q}_s'' = \text{konst.}$$

Für den Fall der konstanten Oberflächentemperatur wird die Energieerhaltungsgleichung etwas komplizierter und kann nicht mehr geschlossen gelöst werden. Durch ein iteratives Lösungsverfahren kann man zeigen, dass:

$$Nu_D = 3.66 \quad T_s = \text{konst.}$$

Rohreinlauf: Die Lösung der Energiegleichung wird für den Einlaufbereich kompliziert, da Geschwindigkeiten und Temperaturen sowohl von x als auch von r abhängen. Aus den vorangegangenen Überlegungen wissen wir, dass die Nusselt-Zahl bei $x=0$ sehr hoch ist und dass sie sich asymptotisch einem festen Wert nähert (am Ende der Einlaufstrecke). Verschiedene Ansätze wurden in der Vergangenheit vorgeschlagen. Eine wichtige Annahme bei der Formulierung dieser Ansätze ist die Ausbildung der Geschwindigkeitsprofile. So sieht der am Ende gewonnene Ausdruck für die Nusselt-Zahl unterschiedlich aus für die Fälle, wo man annimmt, dass die Ausbildung der Geschwindigkeitsprofile vor, gleichzeitig oder nach der Ausbildungsstrecke der Temperaturprofile stattfindet. Die Ergebnisse kann man der Literatur entnehmen. Sie werden in der Regel durch semi-empirische Lösungen erhalten.

Für den Fall einer gleich langen hydrodynamischen und thermischen Einlaufstrecke (=Ausbildungsstrecke), d.h. $Pr \approx 1$ und konstanter Wandtemperatur wird die mittlere Nusselt-Zahl Nu_d gegeben durch:

$$\overline{Nu_d} = \left[3.66 + \frac{0.067 \cdot \left(Re_d \cdot Pr \cdot \frac{d}{L} \right)^{1.33}}{1 + 0.1 Pr \cdot \left(Re_d \cdot \frac{d}{L} \right)^{0.83}} \right] \cdot \left(\frac{\mu}{\mu_w} \right)^{0.14}$$

Erneut sei betont, dass dies nur für laminare Strömungen gültig ist (d.h. $Re_d < 2300$).

7.5 Turbulente Strömungen

Die Lösung der Energiegleichung gestaltet sich hier besonders kompliziert und deshalb sind die meisten Berechnungsgleichungen für Nu_d experimentell und empirisch gewonnen. Sehr gebräuchlich ist der Ansatz:

$$\overline{Nu_d} = 0.0235 \cdot (Re_d^{0.8} - 230) \cdot (1.8 \cdot Pr^{0.3} - 0.8) \cdot \left[1 + \left(\frac{d}{L} \right)^{2/3} \right] \cdot \left(\frac{\mu}{\mu_w} \right)^{0.14}$$

Der Term $\left[1 + \left(\frac{d}{L}\right)^{2/3}\right]$ berücksichtigt auch den thermischen Einlauf, wobei bei turbulenten Strömungen sich die Länge des thermischen Einlaufs von 10 bis 40 Rohrdurchmesser erstreckt.

Das oben erwähnte Nusseltgesetz gilt für eine konstante Wandtemperatur. Für den Fall konstanter Wärmestromdichte wird der gleiche Ansatz benutzt. In diesem Fall unterscheiden sich die berechneten Wärmeübergangskoeffizienten um weniger als 5%. Flüssigmetall-Strömungen mit sehr niedrigen Prandtl-Zahlen können nicht mit diesem Gesetz behandelt werden.

In einem eingeschränkten Bereich von Reynolds und Prandtl-Zahlen kann die Nusselt-Zahl durch eine wesentlich einfachere Beziehung berechnet werden. Die Einschränkungen sind die folgenden:

$$\begin{array}{rcccl} 3000 & < & \text{Re}_d & < & 10^5 \\ 0.6 & < & \text{Pr} & < & 500 \\ & & L/d & > & 40 \end{array}$$

Es gilt dann:










$$\overline{Nu_d} = 0.027 \cdot \text{Re}_d^{0.8} \cdot \text{Pr}^{1/3} \cdot \left(\frac{\mu}{\mu_w}\right)^{0.14}$$

7.6 Nicht kreisförmige Kanäle

In der Technik treten oft auch Kanäle mit nicht kreisförmigen Querschnitten auf (z.B. Luftkanäle in der Klimatechnik). In einer ersten Näherung können die für kreisförmige Rohre hergeleiteten Resultate verwendet werden, wenn der Durchmesser durch den so genannten hydraulischen Durchmesser d_h ersetzt wird:

$$d_h = 4 \cdot \frac{\text{durchstroemter Querschnitt}}{\text{benetzter Umfang}}$$

Die folgende Tabelle zeigt eine Zusammenfassung der Nusselt-Zahlen und auch Reibungsbeiwerte für **laminare** Strömungen in rechteckigen und dreieckigen Querschnitten.

Querschnitt	b/a	$q_w'' = \text{konst}$	$T_w = \text{konst}$	$c_f R_{D_h}$
	-	4.36	3.66	64
	1.0	3.61	2.98	57
	1.43	3.73	3.08	50
	2.0	4.12	3.39	62
	3.0	4.79	3.96	69
	4.0	5.33	4.44	73
	8.0	6.49	5.60	82
	∞	8.23	7.54	96
	-	3.11	2.47	53

7.7 Zusammenfassung

Bei durchströmten Körpern, Rohren, Kanälen oder Düsen wird der Wärmeübergangs-Koeffizient durch die Beziehung $\dot{Q} = \bar{\alpha} \cdot A \cdot \Delta T_m$ definiert!

ΔT_m ist die repräsentative ("treibende") Temperaturdifferenz zwischen der Temperatur der Rohrwand T_s und der energetisch gemittelten Fluidtemperatur T_m

Im Falle der konstanten Wandtemperatur (exponentielles Verhalten der Temperaturdifferenz) ist für ΔT_m die logarithmisch gemittelte Temperaturdifferenz einzusetzen.

Die in den Kennzahlen auftretenden Stoffeigenschaften sind in der Regel für die über die Rohrlänge gemittelten (arithmetisch) Fluidtemperaturen zu ermitteln.

Die Reynolds-Zahl Re_d wird mit der mittleren Fluidgeschwindigkeit und dem Durchmesser definiert.

8 Natürliche Konvektion

Bis anhin haben wir den konvektiven Wärmeübergang untersucht in Situationen, wo eine Strömung durch einen Ventilator oder eine Pumpe fest vorgegeben wurde, d.h. im Falle der äusseren Konvektion ist eine Geschwindigkeit u_∞ vorgegeben und im Falle der Rohrströmung kennen wir den gesamten Massenfluss \dot{m} . Im Falle der natürlichen oder freien Konvektion existiert keine vorgegebene Strömung, das angrenzende Fluid befindet sich grundsätzlich in Ruhe, d.h. $u_\infty = 0$. Werden nun durch den Wärmeübergang von einer festen Oberfläche an das angrenzende Fluid in diesem Dichteunterschiede erzeugt, treten Auf- resp. Abtriebskräfte auf, welche in der Grenzschicht eine konvektive Strömung in Bewegung setzen. Freie Konvektion tritt z.B. auf beim äusseren Wärmeübergang von Rohrleitungen in ruhender Umgebungsluft, beim Wärmeübergang von Hausfassaden an die Umgebungsluft oder sie wird auch für die Kühlung von thermisch schwächer belasteten elektronischen Bauteilen genutzt.

Im folgenden betrachten wir einige Beispiele, wo freie Konvektionsströmungen auftreten:

a) horizontale Platten: Wir nehmen an, dass die Dichte des betrachteten Fluids bei einer Temperaturerhöhung abnimmt.

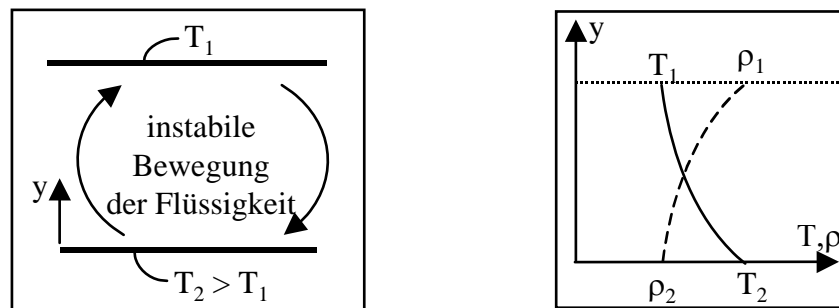


Fig. 8.1: instabile horizontale Temperaturschichtung

Im Falle dass die obere Platte kälter ist als die untere (siehe Fig. 8.1), d.h.

$$\frac{dT}{dy} < 0 \quad \text{und damit} \quad \frac{d\rho}{dy} > 0$$

ist die Schichtung instabil und es setzt eine entsprechende Bewegung der Flüssigkeit ein.

Im umgekehrten Fall wenn die obere Platte die wärmere ist (siehe Fig. 8.2), d.h.:

$$\frac{dT}{dy} > 0 \quad \text{und damit} \quad \frac{d\rho}{dy} < 0$$

ist die Schichtung stabil, ein Wärmetransport findet in diesem Fall nur durch Wärmeleitung statt.

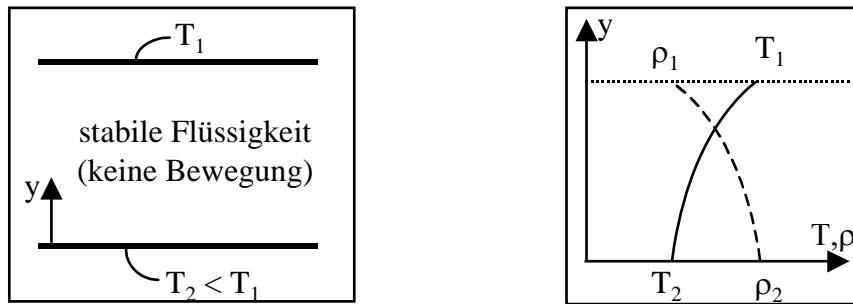


Fig. 8.2: stabile Temperaturschichtung

b) heisser Draht: Bei einem heissen Draht (siehe Fig. 8.3 links) erwärmt sich die angrenzende Luft und es bildet sich darüber eine thermische Auftriebsströmung (engl.: plume = Pilz)

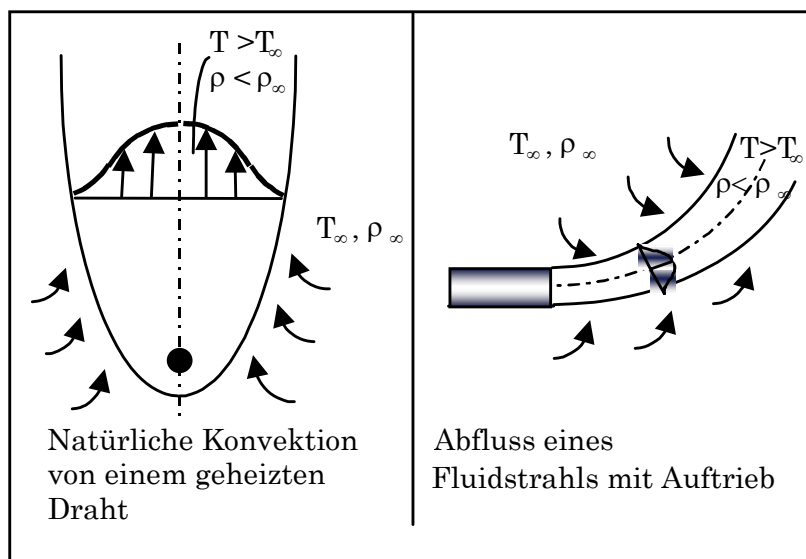


Fig. 8.3: Beispiele von Auftriebsströmungen

c) Jet mit Auftrieb: (siehe Fig. 8.3 rechts) Ein Fluidjet mit geringerer Dichte als diejenige des umgebenden Fluids erfährt eine Auftriebskraft. Obwohl die Hauptkomponente eine erzwungene Konvektion darstellt schafft der Auftrieb eine zusätzliche freie Komponente.

8.1 Freie Konvektion an der senkrechten Platte

Im Folgenden betrachten wir die Strömung, die sich an einer senkrechten ebenen Platte ausbildet. Die Oberflächentemperatur soll über der Fluidtemperatur liegen, so dass eine Auftriebsströmung entsteht. Die Situation ist in Fig. 8.4 dargestellt. Da die Geschwindigkeit auf der Platte selbst und im unendlichen null ist, bildet sich ein Geschwindigkeitsprofil aus mit einem Maximum in der Mitte der Grenzschicht. Die Grundgleichungen sind dieselben wie bei der erzwungenen Grenzschichtströmung. Zu beachten ist, dass die x-Achse jetzt senkrecht zur Oberfläche steht und sich die Strömung in y-Richtung mit der Geschwindigkeitskomponente v ausbildet. Der einzige Unterschied ist der Schwerkraftsterm auf der rechten Seite der Impulsgleichung. Die Schwerkraft und damit die potentielle

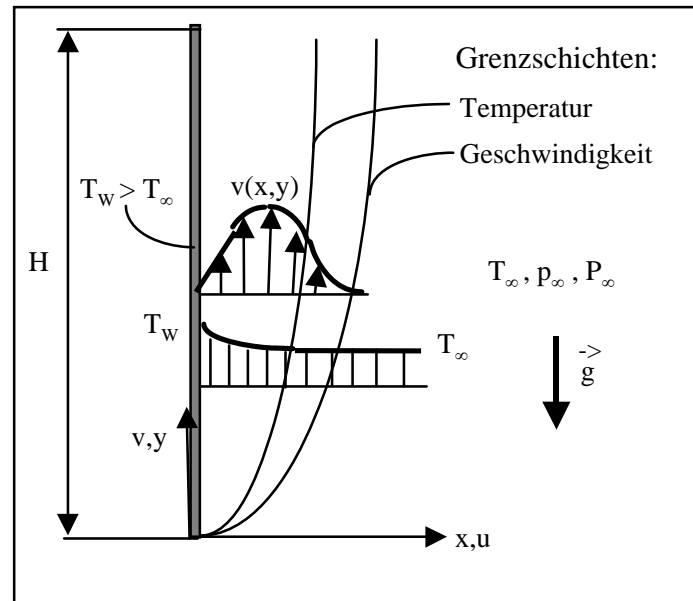


Fig. 8.4: Grenzschichten an der senkrechten Platte

Energie darf hier nicht mehr vernachlässigt werden, da diese für das Entstehen der konvektiven Strömung verantwortlich ist.

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad \mathbf{K}$$

$$\rho \cdot \left(u \cdot \frac{\partial v}{\partial x} + v \cdot \frac{\partial v}{\partial y} \right) = -\frac{dP}{dy} - \rho \cdot g + \mu \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \quad \text{I}$$

$$u \cdot \frac{\partial T}{\partial x} + v \cdot \frac{\partial T}{\partial y} = a \cdot \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad \mathbf{E}$$

In Analogie zur erzwungenen Konvektion gilt für die Druckverteilung in der Grenzschicht bei natürlicher Konvektion:

$$P(x, y) \approx P(y) \approx P_\infty(y)$$

P_∞ folgt der hydrostatischen Druckverteilung, deshalb gilt:

$$\frac{dP_{\infty}}{dy} = -\rho_{\infty} \cdot g$$

Damit kann die Impulsgleichung umgeschrieben werden zu:

$$\rho \cdot \left(u \cdot \frac{\partial v}{\partial x} + v \cdot \frac{\partial v}{\partial y} \right) = (\rho_\infty - \rho) \cdot g + \mu \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$$

Im weiteren verwenden wir die Boussinesq-Approximation, d.h. wir betrachten das Fluid grundsätzlich als inkompressibel und die Dichteänderung tritt nur im Schwerkraftsterm auf, welcher proportional zur Dichtedifferenz ist.

Diese Dichteänderung ist eine Funktion der Temperatur, die wir über die folgende Reihenentwicklung darstellen können:

$$\rho = \rho_{\infty} + \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_{\infty} \cdot (T - T_{\infty}) + \dots \dots$$

Wir führen nun den thermischen Ausdehnungskoeffizienten β ein, welcher die relative Dichteänderung nach der Temperatur beschreibt:

$$\beta = -\frac{1}{\rho} \cdot \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p$$

Setzen wir dies in der obigen Reihenentwicklung ein ergibt sich:

$$\rho = \rho_{\infty} - \rho_{\infty} \cdot \beta \cdot (T - T_{\infty}) \quad \rightarrow \quad (\rho_{\infty} - \rho) = \rho_{\infty} \cdot \beta \cdot (T - T_{\infty})$$

Damit können wir die Impulsgleichung neu schreiben (einsetzen und dividieren durch ρ_{∞}):

$$\underbrace{u \cdot \frac{\partial v}{\partial x} + v \cdot \frac{\partial v}{\partial y}}_{\text{Trägheit}} = \underbrace{g \cdot \beta \cdot (T - T_{\infty})}_{\text{Auftrieb}} + \underbrace{\nu \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}}_{\text{Reibung}}$$

Zusammengefasst lautet das zu lösende Modell:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad \mathbf{K}$$

$$u \cdot \frac{\partial v}{\partial x} + v \cdot \frac{\partial v}{\partial y} = g \cdot \beta \cdot (T - T_{\infty}) + \nu \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \quad \mathbf{I}$$

$$u \cdot \frac{\partial T}{\partial x} + v \cdot \frac{\partial T}{\partial y} = a \cdot \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad \mathbf{E}$$

$$x = 0: \quad u = v = 0 \quad , \quad T = T_W \quad \mathbf{RB}$$

$$x \rightarrow \infty: \quad v = 0 \quad , \quad T = T_{\infty}$$

Die Impuls- und Energiegleichung sind in diesem Fall über die Temperatur **gekoppelt**, d.h. es ist nicht mehr möglich, die einzelnen Grenzschichtprofile getrennt zu berechnen. Die simultane Lösung der beiden gekoppelten Gleichungen ist auf analytischem Wege nicht möglich. Wir werden uns deshalb auf eine Grössenordnungsanalyse beschränken. Dieses Gleichungssystem kann aber auf numerischem Wege gelöst werden. Entsprechende Lösungen werden ebenfalls diskutiert.

Für die Herleitung der **Temperaturgrenzschicht** $\delta_t(x, y)$ können wir im Gleichungssystem die folgenden **Gewichtsfaktoren** einsetzen:

$$\begin{aligned} x &\approx \delta_t & y &\approx H \\ \partial T &\approx T_w - T_\infty \\ u &\approx \bar{u} & v &\approx \bar{v} \end{aligned}$$

Wenn wir diese Gewichtsfaktoren in die Erhaltungsgleichungen einsetzen ergibt sich:

$$\frac{\bar{u}}{\delta_t} \approx \frac{\bar{v}}{H} \quad \mathbf{K}$$

$$\bar{u} \cdot \frac{\bar{v}}{\delta_t} + \bar{v} \cdot \frac{\bar{v}}{H} \approx g \cdot \beta \cdot \underbrace{(T_w - T_\infty)}_{\Delta T} + \nu \cdot \frac{\bar{v}}{\delta_t^2} \quad \mathbf{I}$$

$$\bar{u} \cdot \frac{T_w - T_\infty}{\delta_t} + \bar{v} \cdot \frac{T_w - T_\infty}{H} \approx a \cdot \frac{T_w - T_\infty}{\delta_t^2} \quad \mathbf{E}$$

Nach ersetzen von \bar{u} (mit Hilfe von K) in I erhalten wir:

$$\underbrace{\frac{\bar{v}^2}{H}}_{\text{Trägheit}} \approx \underbrace{g \cdot \beta \cdot \Delta T}_{\text{Auftrieb}} + \underbrace{\nu \cdot \frac{\bar{v}}{\delta_t^2}}_{\text{Reibung}} \quad (\mathbf{I'})$$

In der Grössenordnungsanalyse können wir wahlweise einen der Terme vernachlässigen. Da der Auftrieb verantwortlich ist für das Phänomen der freien Konvektion, ist dieser Term immer wichtig. Wir können deshalb zwei Grenzfälle definieren:

$$\begin{aligned} \text{Auftrieb} &\approx \text{Reibung} & (\text{Trägheit vernachlässigt}) \\ \text{Auftrieb} &\approx \text{Trägheit} & (\text{Reibung vernachlässigt}) \end{aligned}$$

Ferner erhalten wir aus der Kombination von **E + K** nach der für die Grössenordnungsanalyse üblichen Vernachlässigung des dabei auftretenden Faktors 2:

$$\frac{\bar{v}}{H} \approx \frac{a}{\delta_t^2} \quad (\mathbf{E'})$$

Grenzfall 1: Auftrieb \approx Reibung:

Die drei Unbekannten \bar{u} , \bar{v} und δ_t können aus den drei Gleichungen K, I' (ohne Trägheit) und E' bestimmt werden:

$$\bar{u} = \left(\frac{g \cdot \beta \cdot \Delta T \cdot a^3}{\nu \cdot H} \right)^{1/4} = Ra_H^{1/4} \cdot \frac{a}{H}$$

$$\bar{v} = \left(\frac{g \cdot \beta \cdot \Delta T \cdot a \cdot H}{\nu} \right)^{1/2} = Ra_H^{1/2} \cdot \frac{a}{H}$$

$$\delta_t = \left(\frac{\nu \cdot a \cdot H}{g \cdot \beta \cdot \Delta T} \right)^{1/4} = Ra_H^{-1/4} \cdot H$$

wobei wir eine neue dimensionslose Zahl, die Rayleigh-Zahl einführen mit:

$$Ra_H = \frac{g \cdot \beta \cdot \Delta T \cdot H^3}{\nu \cdot a} \quad \Delta T = T_w - T_\infty$$

Mit Hilfe dieser Grössenordnungsanalyse können wir auch den Wärmeübergang und die zugehörige Nusselt-Zahl bestimmen:

$$\dot{q}'' = \bar{\alpha} \cdot \Delta T \approx \lambda \cdot \frac{\Delta T}{\delta_t}$$

$$\bar{\alpha} \approx \frac{\lambda}{\delta_t} \approx \frac{\lambda \cdot Ra_H^{1/4}}{H} \quad Nu = \frac{\bar{\alpha} \cdot H}{\lambda} \approx Ra_H^{1/4}$$

Grenzfall 2: Auftrieb \approx Trägheit:

Diese Situation finden wir bei Fluids mit geringen Reibungskräften, d.h. bei der freien Konvektion von Gasen an festen Oberflächen. Wir verwenden die selben Gleichungen wie im Grenzfall 1, diesmal jedoch I' ohne Reibung und erhalten:

$$\bar{u} \approx \frac{a}{H} \cdot (Ra_H \cdot Pr)^{1/4} \quad Pr = \frac{\nu}{a}$$

$$\bar{v} \approx \frac{a}{H} \cdot (Ra_H \cdot Pr)^{1/2}$$

$$\delta_t \approx H \cdot (Ra_H \cdot Pr)^{-1/4}$$

Daraus erhalten wir für die Nusselt-Zahl:

$$Nu \approx \frac{\bar{\alpha} \cdot H}{\lambda} \approx (Ra_H \cdot Pr)^{1/4}$$

Aus der Kombination von Pr und Ra_H können zwei weitere dimensionslose Zahlen gebildet werden nämlich:

a) die Boussinesq-Zahl Bo_H :

$$Bo_H = Ra_H \cdot Pr = \frac{g \cdot \beta \cdot (T_w - T_\infty) \cdot H^3}{\alpha^2}$$

Sie stellt das Verhältnis von **Auftriebskräften** / **thermische Diffusion** dar.

b) die Grasshof Zahl Gr_H :

$$Gr_H = \frac{Ra_H}{Pr} = \frac{g \cdot \beta \cdot (T_w - T_\infty) \cdot H^3}{\nu^2}$$

Ihre Bedeutung ist das Verhältnis von **Auftriebskräften** / **Reibungskräften**.

Die Rayleigh-Zahl ist das geometrische Mittel von beiden:

$$Ra_H = (Bo_H \cdot Gr_H)^{1/2}$$

8.2 Beziehungen für Nusselt-Zahlen in realen Fällen

Die Größenordnungsanalyse hat uns die qualitative Abhängigkeit des Wärmeüberganges in den zwei Grenzfällen gezeigt, wo entweder die Reibung oder die Trägheit im strömenden Fluid vernachlässigt werden kann. In der Realität werden wir Situationen finden, die zwischen diesen beiden Grenzfällen liegen, wir müssen auch unterscheiden ob die Strömung turbulent oder laminar ist.

Wie bei der erzwungenen Konvektion werden auch hier die Lösungen durch semi-empirische Betrachtungen gefunden.

8.2.1 Laminare Grenzschicht an der senkrechten Platte

Mit H = Höhe der senkrechten Platte:

$$\overline{Nu} = \frac{\overline{\alpha} \cdot H}{\lambda} = \left(\frac{Pr}{Pr + 0.986 Pr^{1/2} + 0.492} \right)^{1/4} Ra_H^{1/4}$$

Diese Beziehung gilt für beliebige Prandtl-Zahlen: $0 < Pr < \infty$

8.2.2 Turbulente Grenzschicht an der senkrechten Platte

Diese Beziehung wurde aus Messungen in Luft gewonnen, gilt somit speziell für Gebäudefassaden etc.

$$\overline{Nu} = \frac{\overline{\alpha} \cdot H}{\lambda} = 0.13 \cdot Ra_H^{1/3}$$

Diese Beziehung ist gültig im Bereich $10^9 < Ra_H < 10^{12}$, d.h. damit die Strömung turbulent wird muss $Ra_{H,krit} \approx 10^9$ überschritten werden.

8.2.3 Beziehung für laminare und turbulente Strömung

1975 haben Churchill und Chu eine Beziehung für die Nusselt-Zahl an der senkrechten Platte veröffentlicht, welche sowohl für laminare als auch für turbulente Strömungen gültig ist, also für beliebige Werte von Ra_H .

$$\overline{Nu} = \frac{\overline{\alpha} \cdot H}{\lambda} = \left(0.825 + \frac{0.387 \cdot Ra_H^{1/6}}{\left[1 + (0.492 / Pr)^{9/16} \right]^{8/27}} \right)^2$$

8.2.4 Horizontale Platten

Bei horizontalen Flächen können je nach Situation verschiedene Arten von Strömungen auftreten. Wir betrachten eine Platte, die entweder geheizt oder gekühlt wird. (Siehe Fig. 8.5)

Wird die obere Seite gekühlt (a) bildet sich eine Abtriebsströmung aus, welche die Platte von oben nach unten umspült. Auf der unteren Seite ist dann die Situation instabil (b), es bildet sich eine Umkehrströmung aus, welche zu einer entsprechenden Zellenbildung führt.

Wird die Platte erwärmt, findet die stabile Strömung von unten nach oben statt (d) und die instabile Strömung mit Zellenbildung bildet sich auf der Oberseite aus (c).

Im Falle der horizontalen Platte bezieht sich die Rayleigh-Zahl auf eine charakteristische Ausdehnung L , welche aus der Fläche A und deren Umfang P gebildet wird:

$$L = \frac{A}{P}$$

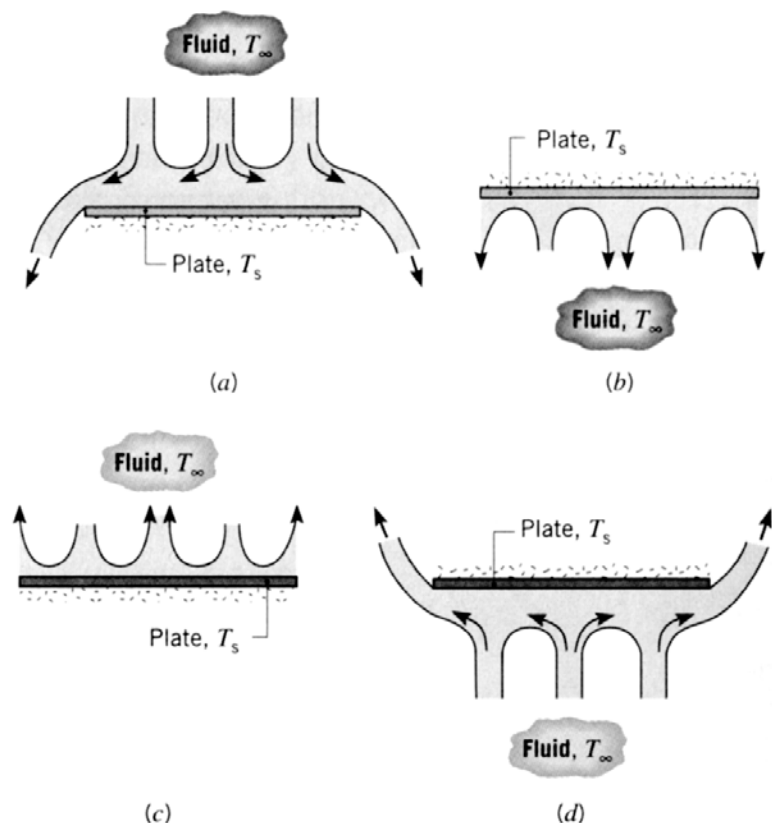


Fig. 8.5: Strömungssituationen an der ebenen Platte

Fall (a) und (d): stabile Strömungen

$$\overline{Nu}_L = \frac{\alpha \cdot L}{\lambda} = 0.27 \cdot Ra_L^{1/4} \quad 10^5 \leq Ra_L \leq 10^{10}$$

Fall (b) und (c): Strömungen mit Zellenbildung

$$\overline{Nu}_L = 0.54 \cdot Ra_L^{1/4} \quad 10^4 \leq Ra_L \leq 10^7$$

$$\overline{Nu}_L = 0.15 \cdot Ra_L^{1/3} \quad 10^7 \leq Ra_L \leq 10^{11}$$

8.2.5 Nicht ebene Oberflächen

a) Zylinder

In diesem Fall beziehen sich Nusselt- und Rayleigh-Zahl auf den Zylinderdurchmesser D . Es wird vorausgesetzt, dass sich die Oberfläche auf einer uniformen Temperatur befindet. Die folgende Beziehung wurde ebenfalls von Churchill und Chu erarbeitet.

$$\overline{Nu}_D = \left(0.6 + \frac{0.387 \cdot Ra_D^{1/6}}{\left[1 + (0.559 / Pr)^{9/16} \right]^{8/27}} \right)^2 \quad \text{für } Ra_D \leq 10^{12}$$

b) Kugel

In diesem Fall beziehen sich Nusselt- und Rayleigh-Zahl auf den Durchmesser D der Kugel. Es wird ebenfalls eine isotherme Oberfläche vorausgesetzt.

$$\overline{Nu}_D = 2 + \frac{0.589 \cdot Ra_D^{1/4}}{\left[1 + (0.469 / Pr)^{9/16} \right]^{4/9}} \quad \text{für } Pr \geq 0.7 \text{ und } Ra_D \leq 10^{11}$$

8.2.6 Senkrechte Kavitäten

In einer senkrechten Kavität, wo die eine Fläche warm und die andere kalt ist, findet der konvektive Wärmetransport zwischen diesen Flächen durch eine konvektive Kreisströmung statt (siehe Fig. 8.6). Sowohl Nu_L als auch Ra_L werden in Bezug auf den Plattenabstand L definiert, zusätzlich tritt ein Faktor mit dem Aspektverhältnis H/L auf. Die Nusselt-Beziehung und der zugehörige Geltungsbereich lauten:

$$\overline{Nu} = 0.42 \cdot Ra_L^{1/4} \cdot Pr^{0.012} \cdot \left(\frac{H}{L} \right)^{-0.3}$$

$$10 < \frac{H}{L} < 40$$

$$1 < Pr < 2 \cdot 10^4$$

$$10^4 < Ra_L < 10^7$$

Die konvektive Kreisströmung kann sich nur ausbilden, wenn der Abstand der senkrechten Wände genügend gross ist, ansonsten behindern sich die beiden Grenzschichten und bremsen einander. Die Kreisströmung kann sich ausbilden für $Ra_L > 1000$.

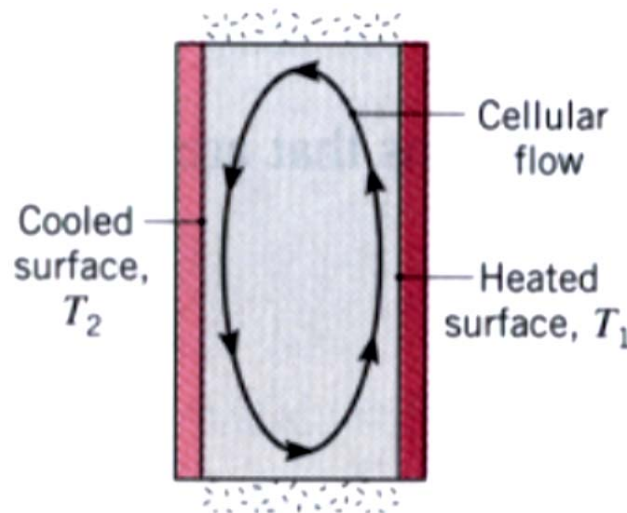


Fig. 8.6: Konvektiver Wärmetransport in einer senkrechten Kavität

Eine wichtige Anwendung sind die Kavitäten im Zwischenraum von doppelt verglasten Fensterscheiben. Hier will man den Wärmetransport möglichst klein halten und die Kreisströmung ausschalten, d.h.:

$$Ra_L < 1000 \quad \text{für Luft mit } \Delta T = 20 \text{ K} \quad \rightarrow \quad L < 0.008 \text{ m}$$

Dies entspricht dem typischen Scheibenabstand in einer Isolierverglasung. In diesem Fall findet der „konvektive“ Wärmetransport zwischen den Scheiben durch reine Wärmeleitung statt:

$$\dot{q}'' = \frac{\lambda}{L} \cdot \Delta T = \alpha \cdot \Delta T \quad \rightarrow \quad \alpha = \frac{\lambda}{L} \quad \rightarrow \quad Nu = \frac{\alpha \cdot L}{\lambda} = 1$$

8.3 Anwendungsbeispiel

Wir betrachten ein Cheminée in einem Wohnraum mit einem Feuer, wobei der Feuerraum mit einer gläsernen Brandschutztür gegen den Wohnraum abgeschlossen ist. (siehe Fig. 8.7). Diese Türe ist 0.71 m hoch und 1.02 m breit. Eine Messung ergibt eine äussere Oberflächentemperatur von 232 °C bei einer Lufttemperatur im Raum von 23 °C. Wie gross ist der konvektive Wärmeübergang von der Glastüre an die Raumluft?

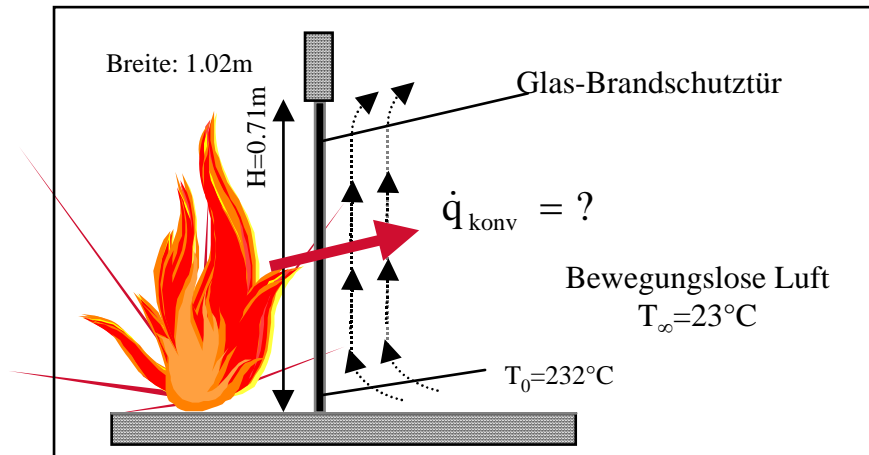


Fig. 8.7: Cheminée mit Brandschutztüre

Es handelt sich hier um ein Problem der freien Konvektion an einer senkrechten Platte. Für dessen Behandlung brauchen wir die entsprechenden physikalischen Daten von Luft.

In den entsprechenden Tabellen finden wir:

$$\begin{aligned}\lambda &= 33.8 \times 10^{-3} \text{ W/mK} \\ \nu &= 26.4 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s} \\ \alpha &= 38.3 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s} \\ \text{Pr} &= 0.69 \\ \beta &= 0.0025 \text{ K}^{-1} (=1/T_{\text{Film}})\end{aligned}$$

Damit können wir die massgebende Rayleigh-Zahl berechnen:

$$Ra_H = \frac{g \cdot \beta \cdot (T_0 - T_\infty) \cdot H^3}{\alpha \cdot \nu} = 1.813 \cdot 10^9$$

Diese Rayleigh-Zahl liegt im Bereich des kritischen Wertes, wo der Übergang von der laminaren zur turbulenten Strömung erfolgt. Es ist also angezeigt, für die Berechnung der Nusselt-Zahl die entsprechende Beziehung von Churchill und Chu zu benutzen:

$$\overline{Nu}_H = \frac{\overline{\alpha} \cdot H}{\lambda} = \left(0.825 + \frac{0.387 \cdot Ra_H^{1/6}}{\left[1 + (0.492 / \text{Pr})^{9/16} \right]^{8/27}} \right)^2 = 147$$

Damit können wir nun den Wärmeübergangskoeffizienten berechnen:

$$\overline{\alpha} = \frac{\lambda \cdot \overline{Nu}_H}{H} = \frac{33.8 \cdot 10^{-3} \cdot 147}{0.71} = 7.0 \text{ W} / \text{m}^2 \cdot \text{K}$$

Nun sind wir in der Lage, den konvektiven Wärmestrom zu bestimmen:

$$\dot{q} = \overline{\alpha} \cdot B \cdot H \cdot \Delta T = 7 \cdot 1.02 \cdot 0.71 \cdot (232 - 23) = \underline{1060 \text{ W}}$$

Anmerkung: Beim Vorhandensein eines Feuers kann der Wärmetransport infolge kurzweiliger Infrarotstrahlung durch die Glasscheibe hindurch ca. 1 Grössenordnung höher sein als der konvektive Wärmeübergang.

9 Verdampfung (Sieden) und Kondensation

9.1 Wärmeübergang beim Sieden

Befindet sich die Temperatur einer Oberfläche oberhalb der Sättigungstemperatur einer angrenzenden Flüssigkeit bilden sich auf dieser Dampfblasen, welche sich ablösen. Die Bewegung der Dampfblasen führt zu einer starken Erhöhung der Konvektionsbewegung der Flüssigkeit und des damit verbundenen Wärmetransportes. Die Dampfblasen bleiben bestehen, bis diese wieder auf die Sättigungstemperatur (entsprechend dem lokalen Druck in der Flüssigkeit) abgekühlt sind. Das Phänomen des Siedens spielt sich deshalb immer zwischen der Oberflächentemperatur und der Sättigungstemperatur ab. Für den Wärmeübergang können wir deshalb schreiben:

$$\dot{q}'' = \alpha \cdot (T_s - T_{sat}) = \alpha \cdot \Delta T_e$$

wobei ΔT_e die sogenannte Übertemperatur (excess temperature) darstellt. Siedevorgänge können auf sehr verschiedene Arten auftreten. Man kann sie unterscheiden in Bezug auf die Strömungsverhältnisse an der Oberfläche:

- Gefäßverdampfung (engl. pool boiling) Die konvektive Bewegung der Flüssigkeit an der Oberfläche wird rein durch die Auftriebskräften der Dampfblasen erzeugt.
- Verdampfung mit erzwungener Konvektion (forced convection boiling): Die Flüssigkeitsbewegung wird von aussen vorgegeben wie z.B. im Dampferzeuger eines Kraftwerkes.

Eine andere Unterscheidung von Siedevorgängen kann gemacht werden in Bezug auf den Temperaturbereich:

- Unterkühlte Verdampfung (subcooled boiling): Die Flüssigkeit befindet sich unterhalb der Sättigungstemperatur, Dampfblasen kondensieren sehr bald nach ihrer Ablösung.
- Gesättigte Verdampfung (saturated boiling): die Flüssigkeitstemperatur liegt bei der Sättigungstemperatur oder sogar leicht darüber, Dampfblasen bleiben bestehen und verlassen die Flüssigkeit, wenn eine freie Oberfläche vorhanden ist.

9.1.1 Gefäßverdampfung – Die Siedekurve

Einen guten Einblick in die Physik des Wärmeübergangs beim Sieden erhält man durch das Experiment von Nukiyama. (siehe Fig. 9.1). Ein Widerstandsdraht befindet sich horizontal in Wasser bei der Sättigungstemperatur. Dieser Draht wird durch einen elektrischen Strom beheizt. Wird nun gleichzeitig Strom und Spannung gemessen, ist die Wärmeleistung bekannt. Durch das Ohm'sche Gesetz ist dann auch der elektrische Widerstand bestimmbar:

$$R = \frac{U}{I} \quad T = T(R)$$

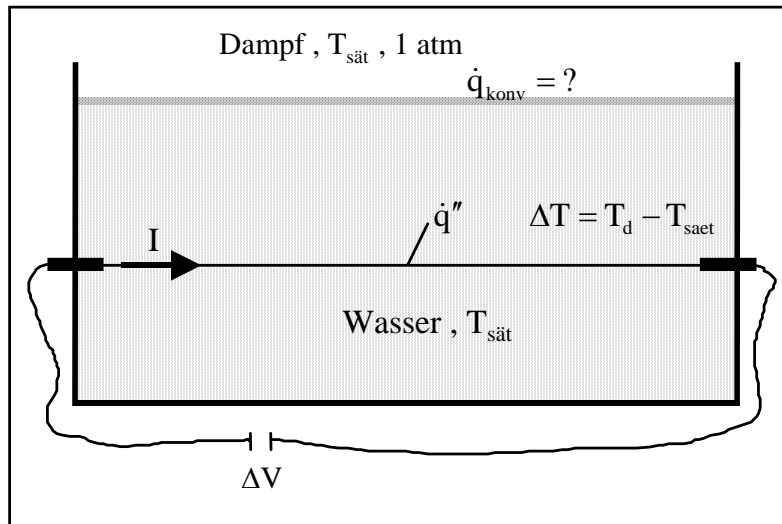


Fig. 9.1: Das Experiment von Nukiyama

Dieser Widerstand ist temperaturabhängig, man kennt also auch die Oberflächentemperatur des Drahtes (z.B. Platindraht wird oft für Temperaturmessungen eingesetzt). Mit diesem Experiment ist man also in der Lage, für eine vorgegebene Wärmeübertragungsleistung die zugehörige Übertemperatur zu bestimmen. Man erhält ein Resultat gemäss Fig. 9.2.

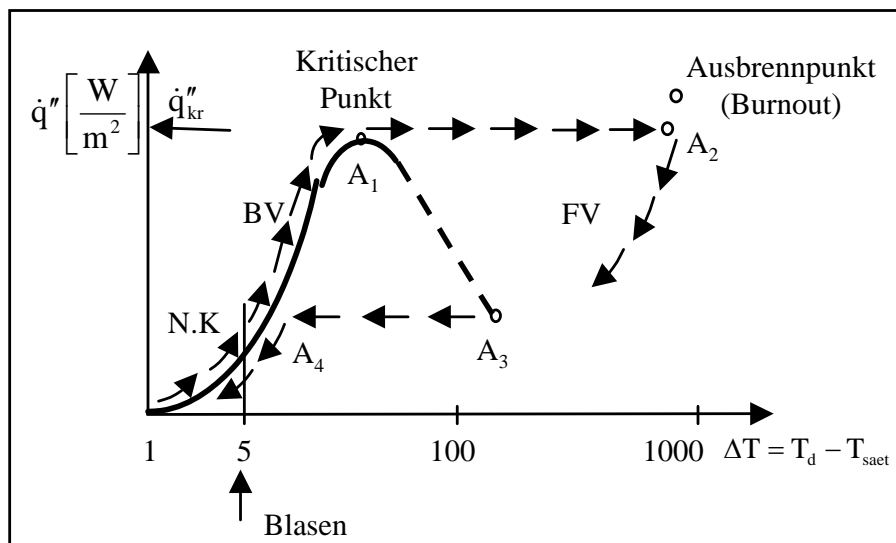


Fig. 9.2: Verlauf des Wärmeüberganges beim Nukiyama-Experiment

Die ersten Blasen treten auf, wenn ΔT_e ca. 5K übersteigt. Im Bereich ΔT_e 5K – 30 K steigt dann der Wärmeübergang sehr stark an, bis er schliesslich ein Maximum (A1) erreicht. Wird die Leistung dann noch wenig weiter erhöht, schnell ΔT_e dann auf über 1000 K hoch (A2) und der Draht schmilzt dann meistens. Kann das Schmelzen verhindert werden und man reduziert die Leistung wieder, folgt man einer anderen Kurve im Bereich hoher Temperaturen zum Punkt A3. Wird die Leistung unterhalb des Punktes A3 (Leidenfrostpunkt) weiter reduziert, springt die Temperatur zurück zum Punkt A4.

Beim Nukiyama Experiment kann nur die in den Draht gesteckte Leistung geregelt werden. Für einen Betrieb im Sprungbereich A1-A2 oder A3-A4 müsste

man die Temperatur regeln können. Die fehlenden Bereiche wurden später durch ein Experiment von Drew und Müller ergänzt, wobei sie die Temperatur einer Rohroberfläche durch Dampfkondensation im inneren bei verschiedenen Drücken kontrolliert haben. Die vollständige Siedekurve ist in Fig. 9.3 dargestellt.

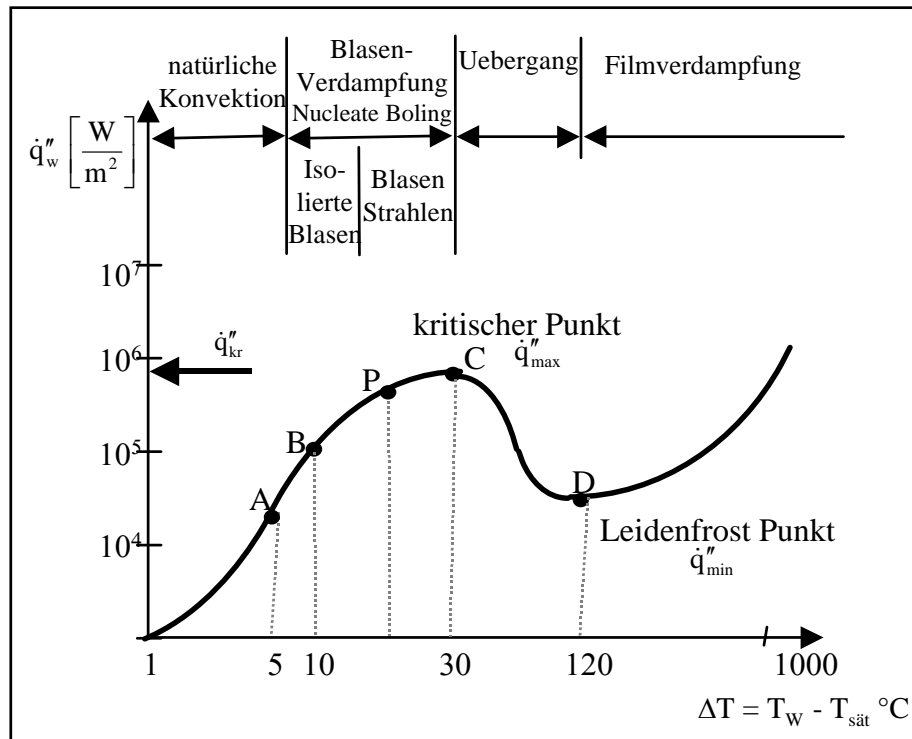


Fig. 9.3: Vollständiger Verlauf der Siedekurve

Auf dieser Kurve können vier Bereiche unterschieden werden:

a) Natürliche Konvektion ($\Delta T < \Delta T_A = \text{ca. } 5 \text{ K}$). Es bilden sich noch keine Blasen, die Wärme wird durch natürliche Konvektion der Flüssigkeit abtransportiert.

b) Blasensieden: Im Bereich ΔT_A bis $\Delta T_B = 10 \text{ K}$ bilden sich Blasen, welche die konvektive Strömung der Flüssigkeit verstärken, der Wärmetransport in der Flüssigkeit ist dominant. Im Bereich $\Delta T_B < \Delta T < \Delta T_C$ verstärkt sich die Blasenbildung, zwischen den sehr zahlreichen Blasen kommt es zu Wechselwirkungen und sie verschmelzen zu „Blasenjets“. Hier überwiegt der Wärmetransport durch Dampfbildung. Dazwischen existiert ein optimaler Punkt ΔT_P , wo der Wärmeübergangskoeffizient α ein Maximum wird.

c) Übergangsbereich ($\Delta T_C < \Delta T < \Delta T_D$): Die Oberfläche ist immer weniger benetzt und zunehmend mit einem Dampffilm bedeckt. Der Wärmeübergang nimmt ab, da nicht mehr genügend Wasser zum Verdampfen vorhanden ist.

d) Filmsieden: ($\Delta T > \Delta T_D$): Die Oberfläche ist vollständig mit einem Dampffilm belegt, der Wärmetransport findet vorwiegend durch Strahlung statt, welche den Wärmeübergangskoeffizienten bestimmt.

9.1.2 Grundlagen der Blasenbildung

Die Flüssigkeitsoberfläche einer Blase besitzt eine Oberflächenspannung γ , welche dazu tendiert, die Oberfläche zu verkleinern. Die Blase bleibt nur bestehen, wenn sich dieser Oberflächenspannung ein entsprechender Überdruck im inneren entgegensetzt. Es muss also ein Gleichgewicht bestehen zwischen dem Aussendruck und dem Innendruck plus die durch die Oberflächenspannung verursachten Kräfte (siehe Fig. 9.4).

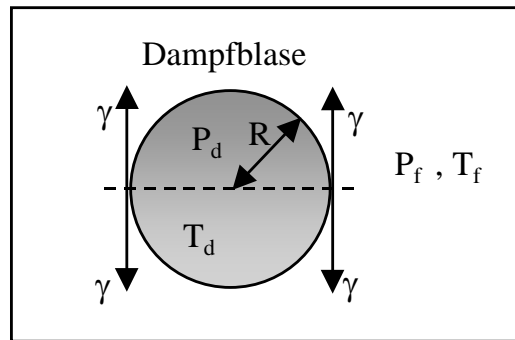


Fig. 9.4 Kräftegleichgewicht in der Dampfblase

Unter Annahme eines thermischen Gleichgewichtes ($T_d = T_f = T_{sat}$) lautet die Beziehung für das Kräftegleichgewicht:

$$\pi \cdot R^2 \cdot P_d = \pi \cdot R^2 \cdot P_f + 2\pi \cdot R \cdot \gamma$$

Der in der Blase notwendige Überdruck ist deshalb:

$$\Delta P = P_d - P_f = \frac{2 \cdot \gamma}{R}$$

Die Konsequenzen dieses Überdrucks lassen sich aus Fig. 9.5 ablesen. Die Flüssigkeitsoberfläche muss mit der Dampfphase im inneren im thermischen Gleichgewicht sein, d.h. im p-v-Diagramm müssen sie auf derselben Isothermen liegen. Da aber $P_f < P_d$ ist, muss die Flüssigkeit **überhitzt** sein.

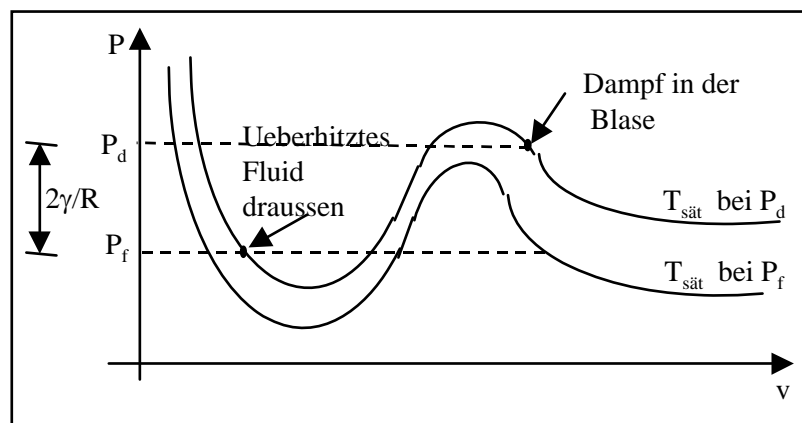


Fig. 9.5: Überhitzung des Fluids bei thermischem Gleichgewicht

Die Druckdifferenz ($\Delta P = P_d - P_f$) ist umso grösser, je kleiner der Blasenradius ist. Zum Radius $R=0$ gehört eine unendlich grosse Druckdifferenz mit entsprechender Überhitzung. Da diese nicht zu verwirklichen ist, muss bei der Bildung der Blase ein endlicher Anfangsradius vorliegen.

In technischen (realistischen) Oberflächen gibt es Kerben, Gaseinschlüsse oder auch kleine Stufen, welche die Flüssigkeit nicht vollständig ausfüllt. Sie sind gewöhnlich so gross, dass die Krümmungsradien der dort entstehenden Menisken Flüssigkeitsüberhitzungen von einigen Graden oder Bruchteilen von Graden entsprechen. Deshalb liegt beim Verdampfen in der Dampfblase ein Nichtgleichgewicht vor, was eine zusätzliche Überhitzung erfordert. Es entstehen also an diskreten Stellen der Heizfläche (Verdampfungskernen) periodisch Dampfblasen, die aufsteigen und dabei eine heftige Bewegung der Flüssigkeit an der Heizfläche bewirken. (siehe Fig. 9.6)

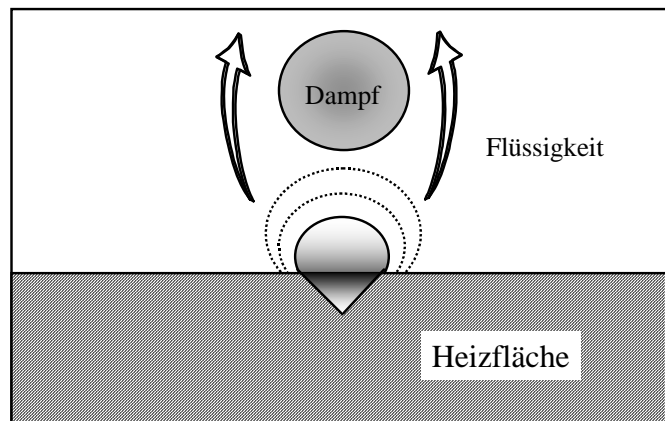


Fig. 9.6: Entstehung von Dampfblasen

9.1.3 Beziehungen zum Gefässsieden

Die Komplexität der physikalischen Vorgänge bei der Entstehung von Blasen bedingt, dass das Phänomen „Sieden“ nur durch empirische oder semi-empirische Beziehungen beschrieben werden kann.

a) Beziehung von Rohsenow

Eine gut brauchbare Beziehung ist diejenige von Rohsenow. Die spezielle Wechselwirkung zwischen Oberfläche und Fluid bei der Entstehung von Blasen wird über eine experimentell zu bestimmende Konstante A berücksichtigt.

$$\dot{q}_w'' = \mu_f \cdot h_{fg} \cdot \left[\frac{g \cdot (\rho_f - \rho_g)}{\gamma} \right]^{1/2} \left(\frac{c_{p,f} \cdot \Delta T}{A \cdot h_{fg} \cdot \text{Pr}_f^n} \right)^3$$

μ_f Viskosität der Flüssigkeit

h_{fg} Verdampfungswärme

ρ Dichte

γ Oberflächenspannung

f, g Indices für flüssig, gasförmig

A, n experimentelle Konstanten

Flüssigkeit / Oberfläche (Kombination)	A	n
Wasser/Kupfer rau	0.0068	1.0
glatt (poliert)	0.0130	1.0
Wasser/Stah poliert (masch.)	0.0130	1.0
Wasser/Nickel	0.006	1.0
Wasser/Platinum	0.0130	1.0
n-Pentan/Kupfer poliert	0.0154	1.7

Fig. 9.7: Tabelle mit experimentellen Konstanten

b) kritische Wärmestromdichte nach Zuber

Die kritische Wärmestromdichte ist von grosser technischer Bedeutung, da es ökonomisch sinnvoll ist, Anlagen möglichst nahe bei der kritischen Bedingung zu betreiben. Zuber erhielt durch eine Stabilitätsbetrachtung und den Gebrauch von experimentell bestimmten Konstanten die folgende Beziehung, welche vom Material unabhängig ist.:

$$\dot{q}_{w_{\max}} = 0.149 \cdot h_{fg} \cdot \rho_g \left[\frac{\gamma \cdot g \cdot (\rho_f - \rho_g)}{\rho_g^2} \right]^{1/4}$$

c) Minimale Wärmestromdichte nach Zuber

Die minimale Wärmestromdichte im Leidenfrostpunkt ist technisch von geringem Interesse. Ihre Bedeutung ist, dass wenn diese unterschritten wird, der Dampffilm zusammenbricht und die Oberfläche wieder mit dem Fluid benetzt wird. Zuber gibt dafür die folgende Beziehung an:

$$\dot{q}_{w_{\min}} = 0.09 \cdot h_{fg} \cdot \rho_g \cdot \left[\frac{\gamma \cdot g \cdot (\rho_f - \rho_g)}{(\rho_f + \rho_g)^2} \right]^{1/4}$$

Diese Beziehung ist Material unabhängig und zuverlässig innerhalb von ca. 50 % für nicht all zu hohe Drücke.

d) Filmsieden

Beim Filmsieden geschieht ein grosser Teil des Wärmeübergangs in Form von Strahlung, welche nicht linear von der Temperaturdifferenz abhängt. Deshalb muss auch die Nusselt-Zahl von der Temperaturdifferenz abhängen.

$$\bar{Nu}_D = \frac{\bar{\alpha} \cdot D}{\lambda_g} = C \cdot \left[\frac{g \cdot (\rho_f - \rho_g) \cdot h'_{fg} \cdot D^3}{\nu_g \cdot \lambda_g \cdot (T_w - T_{sat})} \right]^{1/4}$$

wobei man eine korrigierte Verdampfungswärme benutzen muss:

$$h'_{fg} = h_{fg} + 0.80 \cdot c_{p,v} \cdot (T_w - T_{sat})$$

Die Konstante C hängt von der Geometrie ab:

D = Durchmesser

C = 0,62 für horizontale Zylinder

C = 0.67 für Kugeln.

9.2 Wärmeübertragung bei der Kondensation reiner Dämpfe

9.2.1 Arten der Kondensation

Wird ein Dampf unter seine Sättigungstemperatur abgekühlt, tritt Kondensation ein. In der Technik geschieht dies meist durch den Kontakt des Dampfes mit einer kalten Oberfläche eines Wärmetauschers, welcher die latente Wärme an ein zweites Fluid überträgt. Für diese Oberflächenkondensation unterscheiden wir zwei verschiedene Arten (siehe Fig. 9.8):

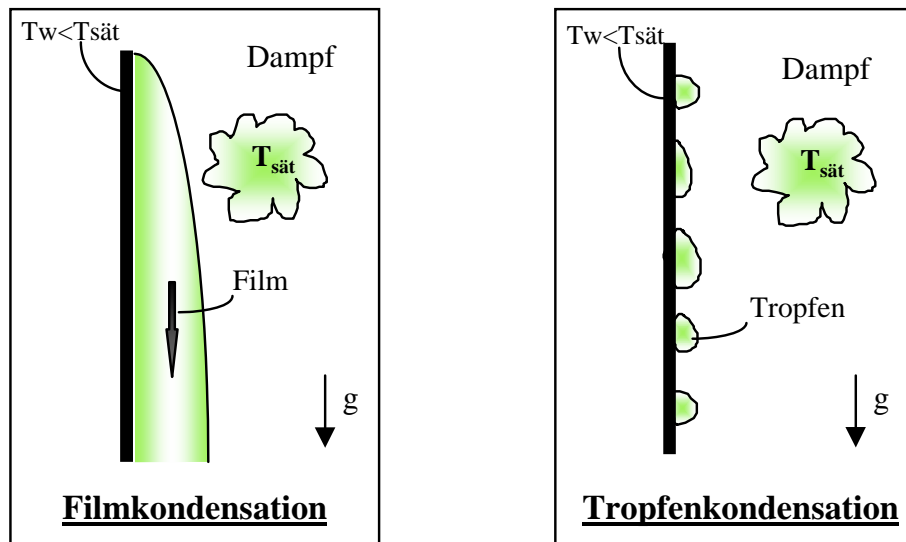


Fig. 9.8 Arten der Kondensation

- Benetzt die Flüssigkeit die Wand, so bildet sich ein **Flüssigkeitsfilm**, der durch die Schwerkraft nach unten beschleunigt wird. Diese Fließbewegung findet zuerst laminar und dann (nach einer gewissen Länge) turbulent statt. Dieser Prozess wird **Filmkondensation** genannt.
- Benetzt die Flüssigkeit die Wand nicht (was durch eine spezielle Beschichtung der Wärmetauscher-Oberfläche erreicht werden kann), so entstehen auf ihr viele kleine Tropfen, die mit der Zeit wachsen und wegen der Schwerkraft herunterfließen. Dieser Prozess wird **Tropfenkondensation** genannt.

Für die Technik weniger relevant sind die zwei weiteren Möglichkeiten:

- Wird ein Dampf direkt in die unterkühlte Flüssige Phase eingeblasen, kondensiert dieser dort durch **direkten Kontakt**.
- Aus den alltäglichen Vorgängen in der Atmosphäre kennen wir die **homogene Kondensation**. Wenn warme und feuchte Luft sich mit kalter Luft mischt, kondensiert Wasserdampf in der Luft in Form von kleinsten Tröpfchen aus und es bilden sich Wolken.

9.2.2 Laminare Filmkondensation an einer senkrechten Platte

Eine genaue physikalische Betrachtung des Problems der Filmkondensation ist äusserst komplex. Die kondensierende Flüssigkeit bewegt sich im Schwerfeld nach unten, wobei die Dicke durch weiteres Kondensieren zunimmt. Auf der einen Seite haftet der Film an der Wand, auf der Gasseite besteht eine Reibungskraft zwischen Gas und Flüssigkeit, welche in beiden Fluids ein entsprechendes Grenzschichtprofil der Geschwindigkeiten bewirkt. Für den Wärmetransport ist Wärmeleitung und Konvektion im fließenden Film mit einem konvektiven Wärmeübergang zwischen Flüssigkeit und Gas zu betrachten.

Hier wird die Analyse von Nusselt präsentiert, der mit folgenden vereinfachten Annahmen gearbeitet hat.

- Die Filmströmung ist laminar und die Eigenschaften der Flüssigkeit konstant.
- Die Gasphase besteht aus reinem Dampf, welcher sich auf der homogenen Temperatur T_{sat} befindet. Die Vernachlässigung eines Temperaturgradienten im Bereich der Oberfläche bedeutet, dass Wärmetransport nur durch Kondensation stattfinden kann (Ausschluss von Wärmeleitung).
- Die Reibung zwischen Gas und Flüssigkeit wird vernachlässigt, so dass
$$\left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{y=\delta} = 0$$
- Die beiden vorstehenden Vereinfachungen bedingen, dass die thermische Grenzschicht in der Gasphase nicht berücksichtigt werden muss.
- Impuls- und Wärmetransport bei Konvektion wird vernachlässigt. Diese Annahme ist gerechtfertigt wegen der kleinen Geschwindigkeiten in der Grenzschicht. Der Wärmetransport durch die Flüssigkeitsgrenzschicht geschieht rein durch Wärmeleitung.

Das nach diesen Vereinfachungen zu betrachtende System wird in Fig. 9.9 dargestellt.

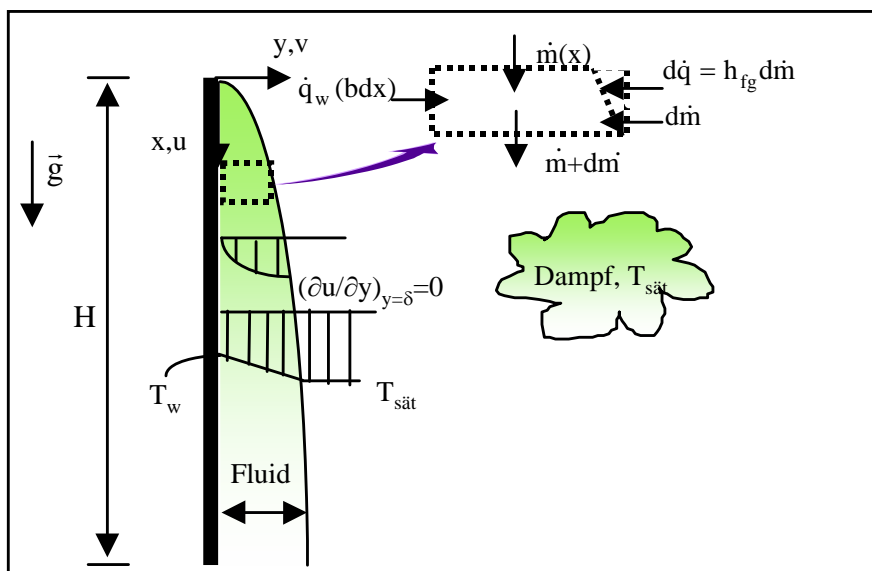


Fig. 9.9: Vereinfachtes Grenzschichtproblem der Filmkondensation

Das mathematische Modell für das kondensierte Fluid wird aus den folgenden Gleichungen aufgebaut:

$$\rho_f \left(\underbrace{u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y}}_{=0 \text{ (Konvektion vernachlässigbar)}} = - \underbrace{\frac{dp}{dx}}_{\rho_g \cdot g} + \mu \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \underbrace{\sum}_{\substack{\text{Massen-} \\ \text{kräfte} \\ \rho_f \cdot g}} \quad (\text{I})$$

$$\rho \cdot c_p \cdot \left(\underbrace{u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y}}_{=0 \text{ (Konvektion vernachlässigbar)}} \right) = a_f \cdot \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \quad (\text{E})$$

Für die Impulsgleichung erhalten wir somit in der vereinfachten Form eine gewöhnliche DGL 2. Ordnung:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = - \frac{g}{\mu_f} \cdot (\rho_f - \rho_g)$$

welche mit den folgenden Randbedingungen gelöst werden kann:

$$y = 0: \quad u = 0 \quad y = \delta: \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

Die Lösung ergibt:

$$u(y) = \frac{g \cdot (\rho_f - \rho_g) \cdot \delta^2}{\mu_f} \cdot \left[\frac{y}{\delta} - \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{y}{\delta} \right)^2 \right]$$

Damit können wir den Massenstrom bei einer vorgegebenen Dicke δ der Grenzschicht bestimmen:

$$\frac{\dot{m}(x)}{b} = \int_0^{\delta(x)} \rho_f \cdot u(y) \cdot dy = \Gamma(x) = \frac{\rho \cdot g_f \cdot (\rho_f - \rho_g) \cdot \delta^3}{3 \cdot \mu_f} \quad (1)$$

Die Dicke der Grenzschicht ist aber vorderhand noch nicht bestimmt. Wir gewinnen diese aus einer Energiebilanz: Die durch Kondensation frei gesetzte Wärme entspricht (im Gleichgewicht) dem Wärmefluss durch Wärmeleitung durch die Flüssigkeitsgrenzschicht:

$$\underbrace{\dot{q}_w'' \cdot b \cdot dx}_{\text{Wärmeleitung}} = - \lambda \cdot \frac{\partial T}{\partial y} \cdot b \cdot dx = \underbrace{h_{fg} \cdot d\dot{m}}_{\text{Kondensation}} \quad (2)$$

Die Wärmeleitungsgleichung für das angenommene Gleichgewicht (stationäre Wärmeleitung) lautet (mit den zugehörigen Randbedingungen:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0$$

$$\begin{aligned} y = 0 : & \quad T = T_w \\ y = \delta : & \quad T = T_{\text{saet}} \end{aligned}$$

was das folgende lineare Temperaturprofil ergibt:

$$T = \left(\frac{T_{\text{saet}} - T_w}{\delta} \right) \cdot y + T_w$$

und damit eine von y unabhängige Wärmeflussdichte:

$$\dot{q}_w'' = \lambda_f \cdot \left(\frac{dT}{dy} \right)_{y=0} = \lambda_f \cdot \frac{T_{\text{saet}} - T_w}{\delta} \quad (3)$$

Die Kombination der Gleichungen (1), (2) und (3) ergibt schliesslich:

$$\frac{d\Gamma}{dx} = \frac{\lambda_f \cdot (T_{\text{saet}} - T_w)}{\delta \cdot h_{fg}}$$

Die linke Seite ersetzen wir nun noch durch Differentiation von Gleichung (1):

$$\delta^3 \cdot d\delta = \frac{\lambda_f \cdot \mu_f \cdot (T_{\text{saet}} - T_w)}{g \cdot \rho_f \cdot (\rho_f - \rho_g) \cdot h_{fg}} \cdot dx \quad (4)$$

Den Verlauf der Grenzschichtdicke entlang der Wand erhalten wir durch Integration von Gleichung (4), (beginnend bei $x = 0$ und $\delta(0) = 0$):

$$\delta(x) = \left[\frac{4 \cdot \lambda_f \cdot \mu_f \cdot (T_{\text{saet}} - T_w)}{g \cdot \rho_f \cdot (\rho_f - \rho_g) \cdot h_{fg}} \cdot x \right]^{1/4}$$

Den gesamten Massenfluss $\Gamma(x)$ können wir nun für jede beliebige Stelle x berechnen durch einsetzen der Beziehung für $\delta(x)$.

Für den Wärmetransport durch den Film haben wir allein stationäre Wärmeleitung in y -Richtung angenommen. Da der Film aber eine Fließbewegung ausführt tritt auch **Konvektion** innerhalb des Films auf. Wird diese mit berücksichtigt, bleibt die obigen Gleichung für $\delta(x)$ unverändert, nur die Verdampfungswärme h_{fg} muss durch eine effektive Verdampfungswärme h'_{fg} ersetzt werden (Nusselt, Rohsenow):

$$h'_{fg} = h_{fg} \cdot (1 + 0.68 \cdot Ja) \quad \text{Jakob-number:} \quad Ja = \frac{c_{p,f} \cdot (T_{\text{sat}} - T_w)}{h_{fg}}$$

Aus der Beziehung für die Wärmeflussdichte ergibt sich direkt der Ausdruck für den lokalen α -Wert bei Kondensation:

$$\alpha(x) = \frac{-\lambda_f \cdot \left(\frac{dT}{dy} \right)_{y=0}}{T_w - T_{saet}} = \frac{\lambda_f}{\delta(x)}$$

oder mit dem Ausdruck für die Filmdicke eingesetzt:

$$\alpha(x) = \left[\frac{g \cdot \rho_f \cdot (\rho_f - \rho_g) \cdot \lambda_f^3 \cdot h'_{fg}}{4 \cdot \mu_f \cdot (T_{saet} - T_w) \cdot x} \right]^{1/4}$$

Für die Berechnung von Wärmetauscherrohren ist natürlich der über die ganze Höhe H gemittelte α -Wert massgebend:

$$\bar{\alpha} = \frac{1}{H} \int_0^H \alpha(x) \cdot dx = 0.943 \cdot \left[\frac{g \cdot \rho_f \cdot (\rho_f - \rho_g) \cdot \lambda_f^3 \cdot h'_{fg}}{\mu_f \cdot (T_{saet} - T_w) \cdot H} \right]^{1/4} = \frac{4}{3} \cdot \alpha|_{x=H}$$

Damit können wir die mittlere Nusseltzahl angeben:

$$\overline{Nu} = \frac{\bar{\alpha} \cdot H}{\lambda_f} = 0.943 \cdot \left[\frac{g \cdot \rho_f \cdot (\rho_f - \rho_g) \cdot h'_{fg} \cdot H^3}{\mu_f \cdot \lambda_f \cdot (T_{saet} - T_w)} \right]^{1/4}$$

Für ρ_f , μ_f und λ_f werden die Stoffwerte bei der mittleren Filmtemperatur $T_f = 1/2 \cdot (T_{sat} + T_w)$ eingesetzt. Für die Planung von Anlagen benötigen wir Werte für den gesamten übertragenen Wärmestrom \dot{q} und die anfallende Kondensatmenge \dot{m} .

$$\dot{q} = \bar{\alpha} \cdot A \cdot (T_{saet} - T_w)$$

$$\dot{m} = \frac{\dot{q}}{h'_{fg}} = \frac{\bar{\alpha} \cdot A \cdot (T_{saet} - T_w)}{h'_{fg}}$$

Wir haben hier die Beziehungen für eine ebene Platte hergeleitet. Beziehungen für andere Geometrien sowie für turbulente Strömung im Kondensat findet man in der Literatur

9.2.3 Anwendungsbeispiel

Wir betrachten den kondensierenden Wärmeübergang an einem senkrechten Rohr (siehe Fig. 9.10) mit einem Durchmesser von 0.08 m und einer Höhe H von 1 m. Da der Krümmungsradius viel grösser als die Filmdicke ist, können wir die Krümmung vernachlässigen und die Beziehungen für das Kondensieren an der Platte verwenden.

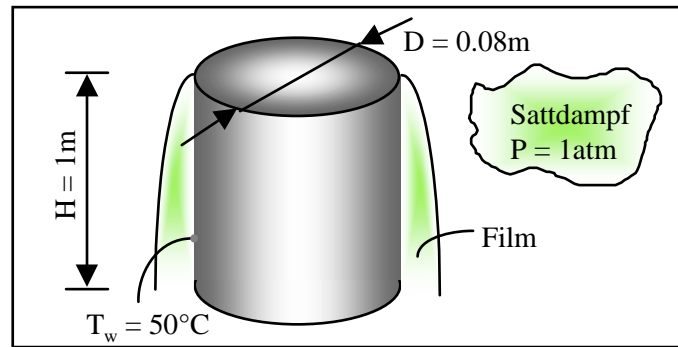


Fig. 9.10: Kondensation an einem dicken Rohr

Ausserhalb des Rohres befindet sich Sattedampf bei $p = 1 \text{ atm.} = 1.013 \text{ bar}$. Im Inneren wird die Wärme durch eine Flüssigkeit abgeführt, so dass überall $T_w = 50 \text{ °C}$ gilt.

In Tabellen finden wir die folgenden Stoffwerte (für die mittlere Filmtemperatur T_f):

$$T_{\text{sät}} = 100 \text{ °C}$$

$$\rho_g = 0.596 \text{ kg/m}^3$$

$$h_{fg} = 2257 \text{ kJ/kg}$$

$$\rho_f = 975 \text{ kg/m}^3$$

$$\mu_f = 375 \cdot 10^{-6} \text{ N·s/m}^2$$

$$\lambda_f = 0.668 \text{ W/m·K}$$

$$c_{p,f} = 4193 \text{ J/kg·K}$$

Der gesamte Wärmestrom berechnet sich mit Hilfe des mittleren α -Wertes:

$$\dot{q} = \bar{\alpha} \cdot A \cdot (T_{\text{sät}} - T_w) = \bar{\alpha} \cdot \pi \cdot D \cdot H \cdot (T_{\text{sät}} - T_w)$$

Für den mittleren α -Wert der Filmkondensation kennen wir die Beziehung:

$$\bar{\alpha} = 0.943 \cdot \left[\frac{g \cdot \rho_f \cdot (\rho_f - \rho_g) \cdot \lambda_f^3 \cdot h'_{fg}}{\mu_f \cdot (T_{\text{sät}} - T_w) \cdot H} \right]^{1/4}$$

wobei:

$$h'_{fg} = h_{fg} (1 + 0.68 \cdot Ja)$$

$$Ja = \frac{c_{p,f} \cdot (T_{\text{sät}} - T_w)}{h_{fg}}$$

Nach Einsetzen der entsprechenden Stoffwerte finden wir:

$$Ja = 0.0929$$

$$h'_{fg} = 2257 \cdot (1 + 0.0632) = 2400 \frac{\text{kJ}}{\text{kg}}$$

$$\bar{\alpha} = 4094 \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \text{K}}$$

Damit erhalten wir für die Wärmeübertragungsleistung des Rohres:

$$\dot{q} = 4,094 \cdot \pi \cdot 0.08 \cdot 50 = 51,446 \text{ kW}$$

wobei ein totaler Kondensatfluss entsteht von:

$$\dot{m} = \frac{\dot{q}}{h'_{fg}} = 0,0214 \frac{\text{kg}}{\text{s}}$$