

Regelungstechnik I/II

Michael Van Huffel, Dino Colombo

This summary has been written based on the Lecture of Regelungstechnik II by Prof. Lino Guzzella (Spring 21) and the summary of Joshua Naef. There is no guarantee for completeness and/or correctness regarding the content of this summary. Use it at your own discretion

Version: 17. September 2021

0 Inhaltsverzeichnis		
1 System	3	
1.1 Systemklassifikationen	3	
1.2 Steuerung/Regelung/Vorsteuerung	3	
2 Modellierung	3	
2.1 Arten der Modellierung	3	
2.2 Speichermethode	4	
2.3 Zustandsgleichung	4	
2.4 Normierung	4	
2.5 Linearisierung	4	
2.6 Entlinearisierung	4	
3 Systemanalyse im Zeitbereich	5	
3.1 Allgemeine Lösung	5	
3.2 Testsignale auf Systeme erster Ordnung	5	
3.2.1 Impulsantwort	5	
3.2.2 Sprungantwort (Step response)	6	
3.2.3 Rampenantwort	6	
3.2.4 Harmonic Response	6	
3.3 Stabilitätseigenschaften	6	
3.4 Lyapunov Stabilität	7	
3.5 Steuerbarkeit / Erreichbarkeit	7	
3.5.1 Stabilisierbar	7	
3.6 Beobachtbarkeit	7	
3.6.1 Detektierbarkeit	8	
3.7 Koordinatentransformationen	8	
3.8 Input/Output (I/O) Darstellung	8	
3.9 Zustandsraum Normalformen	8	
3.10 Zustandsraumzersetzung	8	
4 Systemanalyse im Frequenzbereich	9	
4.1 Laplace-Transformation	9	
4.1.1 Anwendungen	9	
4.2 Inverse Laplace-Transformation	10	
4.3 Systeme 2. Ordnung	10	
4.4 Nullstelleneinfluss	11	
4.5 BIBO Stabilität	11	
4.6 Frequenzantworten	11	
5 Visualisierung	12	
5.1 Bode Diagramme	12	
5.1.1 Systeme 1. Ordnung	12	
5.1.2 Systeme 2. Ordnung	12	
5.1.3 Einfluss von Polen & Nullstellen auf das Bode Diagramm	13	
5.2 Nyquist Diagramme	13	
5.2.1 Systeme 1. Ordnung	13	
5.2.2 Systeme 2. Ordnung	14	
5.3 Asymptotische Eigenschaften von Frequenzantworten	14	
5.3.1 Systemtyp k	14	
5.3.2 Relativer Grad $r = n - m$	14	
5.4 Modellunsicherheit	14	
5.4.1 Nichtparametrische Unsicherheit	15	
5.4.2 Unsicherheitsübertragungsfunktion $W_2(s)$.	15	
6 Systemidentifikation	16	
6.1 Modelle	16	
6.1.1 White Box model	16	
6.1.2 Grey Box model	16	
6.1.3 Black Box model	16	
6.1.4 Systemidentifikation mittels Frequenzgang .	16	
7 Analyse von Regelsystemen	16	
7.1 Signale im Regelkreis	16	
7.2 Stabilität des geschlossenen Regelkreises	17	
7.3 Nyquist Theorem	17	
7.3.1 Vorgehen zu Auswertung des Stabilitätskriteriums	17	
7.4 Verstärkung und Phasenreserve	17	
7.4.1 Vorgehen um Phasenreserve herauszufinden .	18	
7.5 Auslesen der Reserven bei Bode-Diagrammen . . .	18	
7.6 Robustes Nyquist Theorem	18	
8 Design von Regelungssystemen	19	
8.1 Frequenzbedingung des geschlossenen Regelkreises	19	
8.1.1 Frequenzeigenschaften von Störungen und Rauschen	19	
8.1.2 Beschränkung der Sensitivität	19	
8.2 Beschränkung der Durchtrittsfrequenz	19	
8.2.1 Beschränkung durch Modellunsicherheiten W_2	19	
8.2.2 Beschränkung durch eine Totzeit τ	20	
8.2.3 Beschränkung durch nicht-minimalphasige Nullstellen $\omega_{\zeta+}$	20	
8.2.4 Beschränkung durch instabile Pole π^+ . .	20	
8.3 Statischer Nachlauffehler	20	
8.3.1 $U(s) = \text{Sprung}$	20	
8.3.2 $U(s) = \text{Stoerung}$	21	
8.4 Spezifikationen basierend auf Systeme 2. Ord .	21	
8.5 Frequenzbereich - Spezifikationen	22	
8.5.1 geometrische Interpretation	22	
9 Reglerauslegung	22	
9.1 PID-Regler	22	
9.1.1 P-Term	23	
9.1.2 I-Term	23	
9.1.3 D-Term	23	
9.1.4 Bodediagramm eines PID-Reglers mit roll-off	23	
9.1.5 Regler aus Sprungantwort von $T(s)$	23	
9.2 PID-Regler Parameter Tuning nach Ziegler Nichols	24	
9.3 Iterative Loop Shaping	24	
9.4 Lead-Lag Elemente 1. Ordnung	24	
9.5 Lead-Lag Elemente 2. Ordnung	25	
9.6 Inversion der Regelstrecke	25	
9.7 PID - Tuning	25	
9.7.1 Åström-Hägglund Verfahren	25	
9.7.2 Direktspezifikationen	26	
9.8 Prädiktive PI Regler	26	
9.8.1 Prädiktive PI Regler für einfache Regelstrecken	26	
9.8.2 Smith Predictor	26	
10 Spezifikation der Sensitivität	27	
10.1 Multiplikative Unsicherheit von $T(s)$	27	
10.2 Multiplikative Spezifikation von $S(s)$	27	
10.2.1 Nominelle Regelgüte	27	
10.2.2 Konstruktion der nominellen Regelgüte .	27	
10.2.3 Robuste Regelgüte	27	
10.2.4 Approximative Spezifikation	27	
10.2.5 Kompatibilitätsbedingung	28	
11 Kaskadierte Systeme	28	
11.1 Kaskadierte Regelsysteme	28	
12 Wurzelortskurven/Root Locus	29	
12.1 Wurzelortskurven/Root locus	29	
12.2 Regeln des Wurzelortskurven-Verfahren	29	
12.2.1 Vorgehen	29	
12.2.2 Zugehörigkeitstest	29	
12.2.3 Skizzierhilfen	29	
12.3 Kompensierung mit Wurzelortskurven	30	
12.4 Pol- Nullstellen-Kuerzung	30	
13 PID in der Praxis	31	
13.1 Set point Weights	31	
13.2 Saturation und Anti Reset Windup (ARW)	31	
13.2.1 ARW/Bumpless Transfer	31	
13.3 Gain Scheduling	31	
13.4 Analoge Realisierung	32	
13.5 Zeitdiskrete Realisierung	32	
13.5.1 Z-Transform	32	
13.5.2 Emulation	32	
14 Numerische Verfahren	32	
15 Algebraische Stabilität	33	

16 MIMO	34
16.1 Systembeschreibung	34
16.2 Sensitivitäten	34
16.3 Stabilität, Steuerbarkeit und Beobachtbarkeit	34
16.3.1 Stabilität nach Lyapunov	34
16.3.2 Steuerbarkeit	34
16.3.3 Beobachtbarkeit	34
16.3.4 System Minimalisierung	34
16.4 Pole und Nullstellen	34
16.4.1 Polstellen von MIMO Systemen	34
16.4.2 Nullstellen von MIMO Systemen	34
17 RGA	35
18 Singulärwerte	36
18.1 Singulärwerte	36
18.1.1 Vorgehen:	37
19 Frequenzantworten	38
19.1 SISO - Recap	38
19.2 Frequenzantwort MIMO	38
19.3 Singulärwertverläufe als Werkzeug	39
20 LQR	39
20.1 Infinite Horizon LQR Formulierung	39
20.1.1 Lösung der LQR-Formulierung	39
20.1.2 algebraische Riccati Gleichung	40
20.1.3 Eigenschaften von Infinite Horizon Reglern	40
20.2 Folgeregelung	40
20.3 Störungsunterdrückung - LQRI	40
20.4 Folgeregelung mit Störungsunterdrückung	41
20.5 Finite Horizon LQR	41
20.5.1 Folgeregelung	41
21 Zustandsbeobachter	42
21.1 Zustandsbeobachter	42
21.2 Luenberger Beobachter	42
21.2.1 Pole Placement	42
21.2.2 LQR Formulierung	42
21.3 Kalman Filter	42
21.4 Vergleich	42
22 LQG	43
22.1 LQG-Regler	43
22.2 Stabilität des LQG	43
22.2.1 Separation Principle	43
22.3 LQG mit Folgeregelung	43
22.3.1 Folgeregelung durch Vorsteuerung	43
22.4 LQGI zur Disturbance Rejection	44
22.5 LQGI mit Folgeregelung	44
22.5.1 Auslegungsvorgehen	44
22.6 Resultierende Regelkreise	44
22.6.1 LQG-Regler	44
22.6.2 LQG-Regler mit Folgeregelung	45
22.6.3 LQGI-Regler zur Störungsunterdrückung .	45
22.6.4 LQGI-Regler mit Folgeregelung	45
22.7 Berechnung der Übertragungsfunktionen	45
23 Wiederherstellung der Robustheit	45
23.1 Minimum Return difference LQR/LQG	45
23.2 Loop-Transfer Recovery LTR	45
23.2.1 Dynamik des Fehlers in der Zustandsschätzung	45
24 MATLAB Cheat Sheet	47
25 Appendix A	48

1 System

Ein System ist ein Operator der ein Signal ändert.

1.1 Systemklassifikationen:

SISO/MIMO: Single input ($\in \mathcal{R}$, single output)/ Multiple input, multiple output z.B. $\in \mathcal{R}^2$

Lineares System: Ein System heisst linear, falls gilt:

$$\Sigma(\alpha \cdot u_1 + \beta \cdot u_2) = \alpha \cdot \Sigma(u_1) + \beta \cdot \Sigma(u_2)$$

Linear:	Nichtlinear:
$y(t) = \frac{d}{dt}u(t)$	$y(t) = \alpha \cdot u(t) + \beta$
$y(t) = \int_0^t u(\tau)d\tau$	$y(t) = \sin(u(t))$
$y(t) = \alpha \cdot u(t)$	$y(t) = \sqrt{u(t)}$

Time delay

Kausal/Akausal: Ein kausales System hängt nicht von Eingängen in der Zukunft ab. **Akausale Systeme** in FD: #Nullstelle > #Polstelle

→ Alle physikalische Systeme sind kausal. Bei Kausale Systeme:
Closed Loop Poles = # Open Loop Poles.

Kausal:

$$\begin{aligned} y(t) &= u(t - \tau) \quad \forall \tau \geq 0 & y(t) &= u(t + 5) \\ y(t) &= \int_0^{-\infty} u(\tau)d\tau & y(t) &= \int_{-\infty}^{t+1} u(\tau)d\tau \end{aligned}$$

Akausal:

$$y(t) = u(t + 5)$$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{t+1} u(\tau)d\tau$$

$$y(t) = \frac{1}{2}u(t)$$

$$y(t) = \sin(u(t))$$

Dynamisch/Statisch: Der Ausgang bei **Statischen** Systemen zur Zeit t^* hängt nur vom Eingang zur Zeit t^* ab. **Statische** Systeme haben keine Speichergrösse. (Bsp: $u(t - \tau)$, $\Sigma(s) \rightarrow$ Integrator/Differentiator/DGL → Dynamisch)

Dynamisch:

$$\begin{aligned} y(t) &= u(t - \tau) \quad \forall \tau \neq 0 & y(t) &= \sqrt{u(t)} \\ y(t) &= \int_0^t u(t - \tau)d\tau & y(t) &= 3 \cdot u(t) \\ y(t) &= x(t) \cdot u(t) & y(t) &= \sin(u(t)) \end{aligned}$$

Statisch:

$$y(t) = \sqrt{u(t)}$$

$$y(t) = 3 \cdot u(t)$$

$$y(t) = \sin(u(t))$$

Zeitvariant/Zeitinvariant: Zeitvariante Systeme geben bei gleichen Eingängen zu unterschiedlichen Zeitpunkten und gleicher Anfangsbedingungen unterschiedliche Ausgänge.

Zeitinvariant:

$$y(t) = 3 \cdot u(t) \quad y(t) = \sin(t) \cdot u(t)$$

$$y(t) = \frac{d}{dt}u(t) \quad y(t) = u(t) + t$$

$$y(t) = x(t) \cdot u(t)$$

Zeitvariant:

$$y(t) = \sin(t) \cdot u(t)$$

$$y(t) = u(t) + t$$

$$y(t) = x(t) \cdot u(t)$$

Transfer Functions $\Sigma(s)$ sind immer linear und zeitinvariant.

Zeitinvariante Systeme haben konstanten koefizienten. **Zeitvariante** Systeme haben nicht konstante koefizienten.

Beispiel: Eigenschaften von Systeme

- $\frac{dy(t)}{dt} = a^2y(t) + \frac{1}{\sqrt{t}}u(t), u(t), y(t) \in \mathbb{R}$: SISO, Zeitvariant, linear, dynamisch, 1. Ordnung.

- $y(t) = L \sin(u(t)), u(t), y(t) \in \mathbb{R}^2$: MIMO, Zeitinvariant, nichtlinear, statisch, 0. Ordnung.

- $\frac{dx(t)}{dt} = t^2x(t) + bu(t), y(t) = \cos(c)x(t) + du(t), x(t), u(t), y(t) \in \mathbb{R}$: SISO, Zeitvariant, linear, dynamisch, 1. Ordnung.

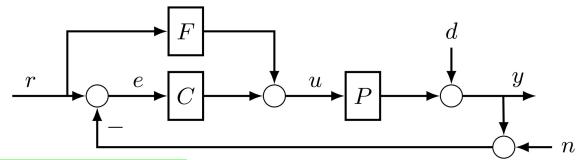
- $\frac{dx(t)}{dt} = M(t)x(t) + Nu(t), y(t) = Ox(t) + Pu(t), M \in \mathbb{R}^{4 \times 4}, N \in \mathbb{R}^{4 \times 2}, O \in \mathbb{R}^{5 \times 4}, P \in \mathbb{R}^{5 \times 2}$: MIMO, Zeitinvariant, linear, dynamisch, 4. Ordnung.

1.2 Steuerung/Regelung/Vorsteuerung:

Feed forward/Open Loop: (Steuerung) Ausgangsgrösse y wird schnell erreicht aber kann bei kleinen Störungen schon nicht mehr exakt reguliert werden, da die Ausgangsgrösse nicht mit der Führungsgrösse r verglichen wird.

Feedback/Closed Loop: (Regelung) Man fängt 'bei Null' an und schaut was die Ausgangsgrösse y ist. Diese wird auf Führungsgrösse r zurückgeführt um Fehler e zu bilden, der durch den Controller zu einer Regelung der Strecke führt. Gewünschte Ausgangsgrösse kann auch bei Störungen erreicht werden.

Vorsteuerung: Ziel der Vorsteuerung ist es, das System durch Vorwissen des Verhalten der Regelstrecke in die Umgebung des gewünschten Operationspunktes zu steuern. Der Fehler der durch die Vorsteuerung verursacht wird, wird durch die Regelung korrigiert



Beispiel: Systeme

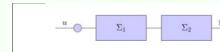


Figure 1: Feed forward serial.

$$\Sigma = \Sigma_2 \cdot \Sigma_1$$



Figure 2: Feed forward parallel.

$$\Sigma = \Sigma_1 + \Sigma_2$$

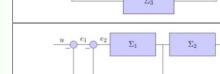


Figure 3: Feedback.

$$\Sigma = \Sigma_1 \cdot (1 \mp \Sigma_1 \cdot \Sigma_2)^{-1}$$



$$y = \frac{\Sigma_2 \Sigma_1}{1 + \Sigma_2 \Sigma_1 \Sigma_3} \cdot r$$



$$y = \frac{\Sigma_2 \Sigma_1}{1 + \Sigma_1 + \Sigma_2 \Sigma_1} \cdot u$$



$$y = -\frac{\Sigma_1}{1 + \Sigma_2 \Sigma_3} \cdot u$$

2 Modellierung

- Zustände: was gebraucht wird um ein system zu beschreiben
- Ausgang: was wird observiert (was interessant ist)
- Eingang: was zum system gegeben wird

Um Differentialgleichungen eines Systems herzuleiten:

2.1 Arten der Modellierung:

Impulserhaltung:

$$\frac{d}{dt}(m\dot{x}) = \Sigma_i F_i$$

Drehimpulserhaltung:

$$\frac{d}{dt}(J_B \dot{\theta}) = \Sigma_i T_i$$

2.2 Speichermethode:

$$\frac{d}{dt}(\text{Speicherinhalt}) = \sum \text{Input} - \sum \text{Output}$$

Vorgehen:

1. Identifizierte die Systemgrenze (Input, Output)
2. Identifizieren die relevanten Speicher im System (Masse, Energie, Ladung)
3. Formuliere die DGL
- $\frac{d}{dt}(\text{Speicherinhalt}) = \sum \text{Input} - \sum \text{Output}$
4. Formuliere algebraische Relationen der Input/Output eines Speichers als Funktion der Pegelvariablen.
5. Identifizieren Systemparameter durch Experimente, Designspezifikationen oder Systemoptimierung
6. Validiere das Modell mit Experiment

Beispiel: Totzeit in TD

$$y(t) = u(t - \tau), \text{ mit } \tau = \text{Totzeit.}$$

Beispiel: Eigenschaften von Systemen

- $\frac{dy(t)}{dt} = a^2 y(t) + \frac{1}{\sqrt{t}} u(t), u(t), y(t) \in \mathbb{R}$: SISO, Zeitvariant, linear, dynamisch, 1. Ordnung.
- $y(t) = L \sin(u(t)), u(t), y(t) \in \mathbb{R}^2$: MIMO, Zeitinvariant, nichtlinear, statisch, 0. Ordnung.
- $\frac{dx(t)}{dt} = t^2 x(t) + bu(t), y(t) = \cos(c)x(t) + du(t), x(t), u(t), y(t) \in \mathbb{R}$: SISO, Zeitvariant, linear, dynamisch, 1. Ordnung.
- $\frac{dx(t)}{dt} = M(t)x(t) + Nu(t), y(t) = Ox(t) + Pu(t), M \in \mathbb{R}^{4 \times 4}, N \in \mathbb{R}^{4 \times 2}, O \in \mathbb{R}^{5 \times 4}, P \in \mathbb{R}^{5 \times 2}$: MIMO, Zeitinvariant, linear, dynamisch, 4. Ordnung.

2.3 Zustandsgleichung:

von nicht-linearer DGL in eine Zustandsgleichung erster Ordnung.

$$\vec{z} = \begin{bmatrix} z \\ z' \\ z'' \\ \vdots \\ z^{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ \vdots \\ z_n \end{bmatrix} \xrightarrow{\frac{d}{dt}} \vec{z} = \begin{bmatrix} z' \\ z'' \\ \vdots \\ z^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ q(z_n, \dots, z_2, z_1, v) \end{bmatrix}$$

2.4 Normierung:

Die Größen im Zustandsvektor \vec{z} weisen verschiedene Einheiten auf. Durch Normierung erhalten wir eine vereinfachte Interpretation und beugen numerische Probleme vor.

$$z_i(t) = z_{i,0} \cdot x_i(t), \quad z_{i,0} \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

In Vektornotation:

$$z = T \cdot x, \quad T = \text{diag}(z_{1,0}, \dots, z_{n,0})$$

$$\Rightarrow x = T^{-1}z$$

Die Ein- und Ausgangsgrößen werden analog normiert:

$$v(t) = v_0 \cdot u(t) \quad v_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$$w(t) = w_0 \cdot y(t) \quad w_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

Generell gilt

$$T \cdot \dot{x} = \dot{z} = f(z, v)$$

$$w_0 \cdot \dot{y} = w = g(z, v)$$

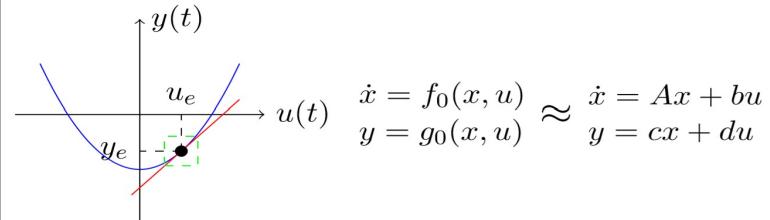
Nun normiert man das System:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= T^{-1} \cdot f(T \cdot x, v_0 \cdot u) = f_0(x, u) \\ y &= w_0^{-1} \cdot g(T \cdot x, v_0 \cdot u) = g_0(x, u) \end{aligned}$$

Die normierte Gleichung $\dot{x} = T^{-1} \cdot f(T \cdot x, v_0 \cdot u) = f_0(x, u)$ hat Einheit: $[\frac{1}{s}]$.

2.5 Linearisierung:

Nach Normierung wird das System um den Gleichgewichtspunkt linearisiert.



Um das System zu linearisieren wird zuerst die Gleichgewichtslage berechnet. Im Gleichgewichtszustand gilt per Definition:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = f(x_e, u_e)$$

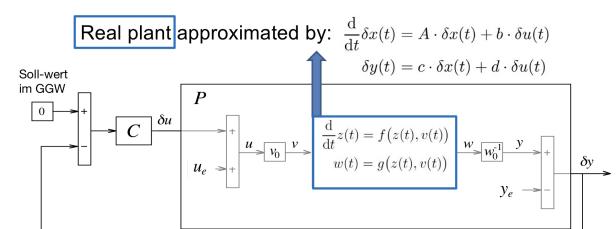
Dies ist ein lineares Gleichungssystem in x_1, x_2, \dots, x_n und u . Für einen gewünschten Zustand x_e lässt sich ein u_e berechnen. Dabei ist zu beachten, dass nicht alle gewünschten x_e möglich sind. Umgekehrt lässt sich für ein konstantes u_e der resultierende Gleichgewichtszustand x_e berechnen.

Um das System um den Gleichgewichtspunkt zu linearisieren, werden die Matrizen A,b,c,d berechnet:

$$A \stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} \frac{\partial f_{0,1}}{\partial x_1} & \frac{\partial f_{0,1}}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_{0,1}}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_{0,2}}{\partial x_1} & \frac{\partial f_{0,2}}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_{0,2}}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_{0,n}}{\partial x_1} & \frac{\partial f_{0,n}}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_{0,n}}{\partial x_n} \end{bmatrix}_{x_e, u_e} \quad b \stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} \frac{\partial f_{0,1}}{\partial u} \\ \vdots \\ \frac{\partial f_{0,n}}{\partial u} \end{bmatrix}_{x_e, u_e}$$

$$c \stackrel{\text{def}}{=} \left[\frac{\partial g_0}{\partial x_1} \quad \frac{\partial g_0}{\partial x_2} \quad \dots \quad \frac{\partial g_0}{\partial x_n} \right]_{x_e, u_e} \quad d \stackrel{\text{def}}{=} \left[\frac{\partial g_0}{\partial u} \right]_{x_e, u_e}$$

2.6 Entlinearisierung:



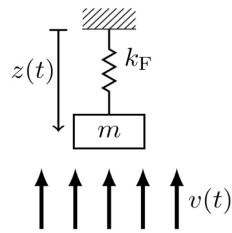
Beispiel: Normierung von ein System

Abbildung 1: Angestromte, aufgehängte Masse

$$\begin{aligned} m\ddot{z} &= F_G - F_{\text{Feder}} - F_{\text{Wind}} \\ &= mg - k_F z - k(\dot{z} + v(t))^2 \end{aligned}$$

Dieses Beispiel wird in den folgenden Abschnitten normiert und linearisiert.

Zustandsgleichung:

$$\frac{1}{m}(mg - k_F z - k(\dot{z} + v(t))^2) = \ddot{z}$$

$$\dot{z} = \begin{bmatrix} z \\ \dot{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}$$

$$\dot{z} = \begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_2 \\ \frac{1}{m}(mg - k_F z_1 - k(z_2 + v(t))^2) \end{bmatrix}$$

Normierung:

Es liegt im Interesse des Betrachters, dass die normierte Position x_1 der Masse m im Gleichgewichtszustand p_e (bei Wind v_e), $x_{1,e} = 1$ entspreche. Ausserdem weiss der Betrachter, dass gilt: $0 < v(t) < v_{max}$. Dies ist hilfreich, um die Eingangsgrösse in die Region $0 < u(t) < 1$ zu normieren. Die maximale Geschwindigkeit \dot{z}_{max} sei h :

$$T = \begin{bmatrix} p_e & 0 \\ 0 & h \end{bmatrix}, \quad v(t) = v_{max} \cdot u(t)$$

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} \frac{h}{p_e} \cdot x_2 \\ \frac{1}{h \cdot m} (mg - k_F \cdot p_e \cdot x_1 - k(h \cdot x_2 + v_{max} \cdot u(t))^2) \end{bmatrix}$$

Beispiel: Linearisierung von ein System

$$\dot{x}_e = \begin{bmatrix} \frac{h}{p_e} \cdot x_{2,e} \\ \frac{1}{h \cdot m} (mg - k_F \cdot p_e \cdot x_{1,e} - k(h \cdot x_{2,e} + v_{max} \cdot u_e)^2) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow x_{2,e} = 0, \quad u_e = \frac{1}{v_{max}} \sqrt{\frac{1}{k} (mg - k_F p_e \cdot x_{1,e})},$$

mit $x_{1,e} = 1$.

Um das System um den Gleichgewichtspunkt zu linearisieren, werden die Matrizen A,b,c,d berechnet:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & \frac{h}{p_e} \\ -\frac{1}{h \cdot m} \cdot k_F \cdot p_e & -\frac{1}{m} \cdot 2k \cdot (h \cdot x_{2,e} + v_{max} \cdot u_e) \end{bmatrix},$$

$$b = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{h \cdot m} \cdot 2k \cdot v_{max} \cdot (h \cdot x_{2,e} + v_{max} \cdot u_e) \end{bmatrix}$$

$$c = [1 \ 0]; \quad d = 0$$

3 Systemanalyse im Zeitbereich

Für ein lineares zeitinvariantes SISO System gilt:

3.1 Allgemeine Lösung:

$$\dot{x}(t) = A \cdot x(t) + b \cdot u(t) \quad A \in \mathbb{R}^{n \times n}, b \in \mathbb{R}^{n \times 1}$$

$$y(t) = c \cdot x(t) + d \cdot u(t) \quad c \in \mathbb{R}^{1 \times n}, d \in \mathbb{R}$$

$$x(0) = x_0$$

die allgemeine Lösung der Zustandsgrösse $x(t)$ ist gegeben als:

$$x(t) = e^{A \cdot t} \cdot x_0 + \int_0^t e^{A \cdot (t-p)} \cdot b \cdot u(p) dp$$

Setzt man die allgemeine Lösung in die Gleichung der Ausgangsgrösse $y(t)$ ein, erhält man die Superposition dreier Grössen:

$$y(t) = \underbrace{c \cdot e^{A \cdot t} \cdot x_0}_I + \underbrace{c \cdot \int_0^t e^{A \cdot (t-p)} \cdot b \cdot u(p) dp}_II + \underbrace{d \cdot u(t)}_{III}$$

Die **natürliche Antwort** des Systems (I) ist unabhängig von der Eingangsgrösse u . Der Eingang u trägt einerseits zum Beitrag der **Systemdynamik** (II) bei, und andererseits zum **Feedthrough Term** (III)

3.2 Testsignale auf Systeme erster Ordnung:

Eingänge für Systeme erster Ordnung mit Zeitkonstante τ und Eingangsstärke k :

$$\dot{x}(t) = -\frac{1}{\tau} x(t) + \frac{k}{\tau} u(t), \quad y(t) = x(t), \quad x(0) = x_0$$

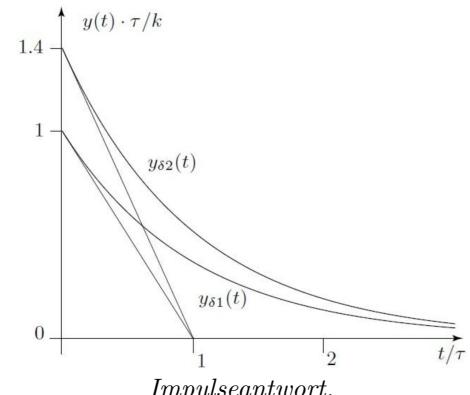
Beachte: eine Serienschaltung von zwei Systemen erster Ordnung bei einer Sprungantwort nicht zum Schwingen gebracht werden kann da zwei Pole mit negativem Realteil hat. Um bei der Laplace Ruecktransformation eine Loesung zu erhalten in der sin- und cos-Terme vorkommen müssen konjugiert komplexe Pole vorliegen.

3.2.1 Impulsantwort:

$$u(t) = \delta(t) = \lim_{\Delta \rightarrow \infty} \begin{cases} \Delta, & t < \frac{1}{\Delta}, \\ 0, & t \geq \frac{1}{\Delta} \end{cases}, \quad \int_0^\infty \delta dt = \Delta \cdot \frac{1}{\Delta} = 1 \quad \text{Allgemeine Lösung:}$$

$$y_\delta(t) = e^{-\frac{t}{\tau}} \cdot (x_0 + \frac{k}{\tau})$$

Ein Impuls ändert die Anfangsbedingung x_0 um k/τ .



(Hier obere linie: $x_0 = 0.4 \cdot \frac{\tau}{k}$)

Die Tangente an die Impulsantwort zum Zeitpunkt $t = 0$ schneidet die Zeitachse zum Zeitpunkt $t = \tau$. (**ACHTUNG: nur wenn nicht normiert**). Impulsantwort hat bei $t = 0$ den Wert $x_0 + \frac{k}{\tau}$ (x_0 nur mit normierte systeme, sonst nur $\frac{k}{\tau}$).

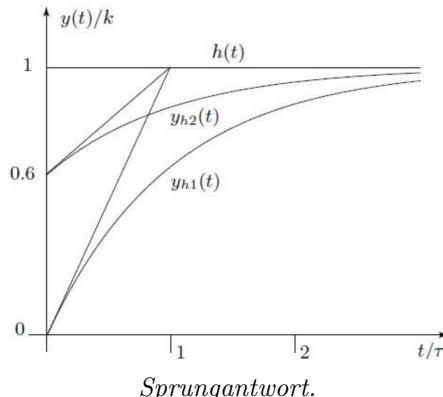
→ Impuls induziert eine Anfangsbedingung, System entwickelt sich von der neuen Anfangsbedingung, als ob $u(t) = 0$ wäre.

3.2.2 Sprungantwort (Step response):

$$h(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t \geq 0 \end{cases}$$

Allgemeine Lösung:

$$y_h(t) = e^{-\frac{t}{\tau}} \cdot x_0 + k \cdot (1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$$



Die Zeitkonstante τ ist gleich der Zeit, bei der die Tangente an $y(0)$ den finalen Wert $y(\infty)$ erreicht. **Beachte:** $y(\infty) = k$ (wenn nicht normiert).

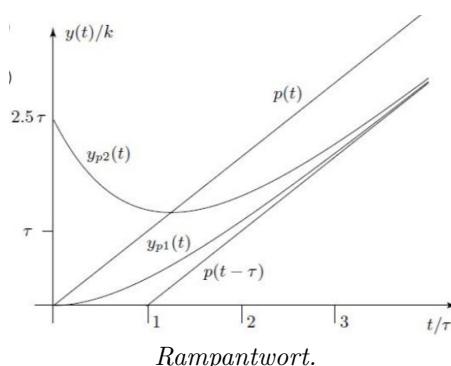
⇒ Je kleiner τ , desto schneller konvergiert das System.

3.2.3 Rampenantwort:

$$p(t) = h(t) \cdot t$$

Allgemeine Lösung:

$$y_p(t) = e^{-\frac{t}{\tau}} x_0 + k(t + (e^{-\frac{t}{\tau}} - 1)\tau)$$

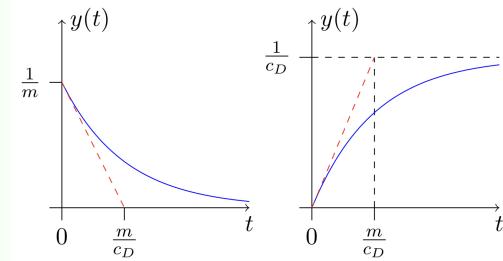


- k = Asymptotische Steigung

- Um τ zu finden muss man: traccio asintoto e vedo dove tocca inizialmente curva.

Beispiel: Rampenantwort

$$\dot{x}(t) = -\frac{c_D}{m}x(t) + \frac{1}{m}u(t) \Rightarrow \tau = \frac{m}{c_D}; \quad k = \frac{\tau}{m} = \frac{1}{c_D}$$

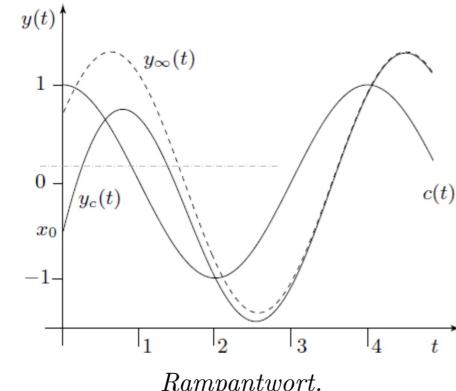


3.2.4 Harmonic Response:

$$c(t) = h(t) \cdot \cos(\omega t)$$

Allgemeine Lösung:

$$y_c = e^{-\frac{t}{\tau}} \cdot x_0 + (\cos(\omega t) + \omega \tau \sin(\omega t) - e^{-\frac{t}{\tau}}) \cdot \frac{k}{1 + \omega^2 \cdot \tau^2}$$



Output bei $t = \infty$:

$$y_{c,\infty} = m(\omega) \cdot \cos(\omega t + \varphi(\omega))$$

wobei: $m(\omega) = \frac{k}{\sqrt{1+\omega^2 \cdot \tau^2}}$ und $\varphi(\omega) = -\arctan(\omega \cdot \tau)$.

Beachte: Bei linearen Systemen $c(t)$ und $y_{c,\infty}$ schwingen mit den selben Frequenz!

3.3 Stabilitätseigenschaften:

Um die Stabilität eines Systems zu bestimmen betrachtet man die natürliche Antwort des Systems ($u(t) = 0$). Da die Zustandsgleichungen im Allgemeinen gekoppelt sind führt man eine Koordinatentransformation durch (Diagonalisierung).

$$\tilde{x} = V^{-1} \cdot e^{A \cdot t} \cdot V \cdot \tilde{x}(0) = e^{\tilde{A} \cdot t} \cdot \tilde{x}(0)$$

$$\tilde{x} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 \cdot t} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 \cdot t} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & e^{\lambda_n \cdot t} \end{bmatrix} \tilde{x}_0 = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 \cdot t} \cdot \tilde{x}_{0,1} \\ e^{\lambda_2 \cdot t} \cdot \tilde{x}_{0,2} \\ \vdots \\ e^{\lambda_n \cdot t} \cdot \tilde{x}_{0,n} \end{bmatrix}$$

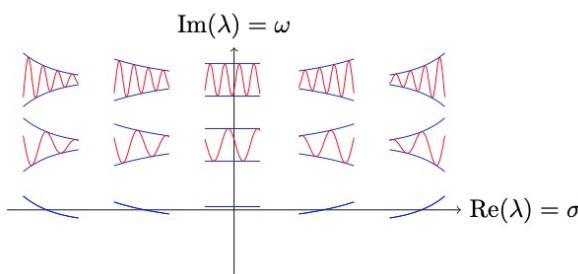
wobei λ_i die Eigenwerte von A (resp. a^{-1}) sind. Da die EW generell Komplex sind ($\lambda_i = \sigma_i + j\omega_i$) kann man die obige Gleichung auch umschreiben.

$$\begin{bmatrix} e^{\lambda_1 \cdot t} \cdot \tilde{x}_{0,1} \\ e^{\lambda_2 \cdot t} \cdot \tilde{x}_{0,2} \\ \vdots \\ e^{\lambda_n \cdot t} \cdot \tilde{x}_{0,n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{\sigma_1 \cdot t} \cdot (\cos(\omega_1 t) + j \cdot \sin(\omega_1 t)) \cdot \tilde{x}_{0,1} \\ e^{\sigma_2 \cdot t} \cdot (\cos(\omega_2 t) + j \cdot \sin(\omega_2 t)) \cdot \tilde{x}_{0,2} \\ \vdots \\ e^{\sigma_n \cdot t} \cdot (\cos(\omega_n t) + j \cdot \sin(\omega_n t)) \cdot \tilde{x}_{0,n} \end{bmatrix}$$

- $e^{\sigma_i \cdot t} \cdot \tilde{x}_{0,i} \rightarrow$ amplitude

- $e^{\omega_i \cdot t} = (\cos(\omega_i t) + j \cdot \sin(\omega_i t)) \rightarrow$ Schwingungskomponente

$$\text{Periode} = T = \frac{2\pi}{\omega}$$



(Links: asymptotisch stabil, Mitte: stabil, Recht: instabil)

3.4 Lyapunov Stabilität:

Stabilität nach Lyapunov erlaubt die Stabilitätsanalyse von Gleichgewichtspunkten (GGWP) von linearen und linearisierten Systemen.

WICHTIG! Falls ein GGWP eines linearisierten Systems Eigenwerte mit $\sigma_i = 0$ hat, lässt sich keine Aussage über die Stabilität dieses GGWP des nicht linearen Systems machen.

1. **Asymptotisch stabil:** $\lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t)\| = 0$, falls alle EW $\text{Re}(\lambda_i) < 0$.
2. **Stabil:** ($\|x(t)\| < \infty \forall t \in [0, \infty]$), falls mehrere EW $\text{Re}(\lambda_k) = 0$ und kein EW $\text{Re}(\lambda_i) > 0$.
3. **Instabil:** $\lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t)\| = \infty$ falls mindestens ein EW $\text{Re}(\lambda_i) > 0$.

Beispiel: Lyapunov Stabilität

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= -c_D\dot{x} - k_F x + u(t) \\ \Rightarrow \ddot{x} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -k_F/m & -c_D/m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \\ \text{Det}(A - \lambda \mathbb{I}) &\Rightarrow \lambda_i = -\frac{c_D}{2m} \pm \sqrt{\frac{c_D^2}{4m^2} - \frac{k_F}{m}} \end{aligned}$$

$$1. \frac{c_D^2}{4m^2} - \frac{k_F}{m} \geq 0 \Leftrightarrow c_D^2 \geq 4k_F m \Rightarrow \sigma_i < 0, \omega_i = 0$$

Falls der Dämpfer relativ zur Feder und zur Masse genug stark ist, sind alle EW reellwertig negativ. Dh, das System konvergiert ohne Oszillation zum GGWP.

Asymptotisch stabil nach Lyapunov.

$$2. c_D^2 \leq 4k_F m \Rightarrow \sigma_i < 0, \omega_i \neq 0$$

Falls der Dämpfer schwach ist, werden die EW komplex, mit negativem Realteil. Dh, das System oszilliert um den GGWP mit abnehmender Amplitude.

Asymptotisch stabil nach Lyapunov.

$$3. c_D = 0 \Rightarrow \sigma_i = 0, \omega_i \neq 0$$

Falls kein Dämpfer im System vorhanden ist, werden alle Eigenwerte Komplex mit Realteil $\sigma_i = 0$. Das System oszilliert für immer um den GGWP.

Stabil nach Lyapunov.

$$4. k_F = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0, \sigma_2 < 0, \omega_2 = 0$$

Falls keine Feder im System ist, wird ein EW 0 und der andere wird reell negativ. Falls das System mehrmals angestossen wird, kommt es jedes mal ohne Oszillation zum Stillstand, jedoch nicht zwingend um den GGWP.

Stabil nach Lyapunov.

3.5 Steuerbarkeit / Erreichbarkeit:

Steuerbar falls für $x_c \in \mathbb{R}^n$ ein Eingangssignal $u(t)$ existiert, das den Zustandsvektor des Systems von $x(0) = x_c$ zum Zustand $x(\tau) = 0$ (zum Ursprung) in endlicher Zeit τ bringt.

Falls alle Punkte in \mathbb{R}^n steuerbar sind, heisst das System *vollständig steuerbar*. Falls alle nicht-steuerbaren Zustände asymptotisch stabil sind, ist das System *potentiell stabilisierbar*,

Erreichbar falls für $x_r \in \mathbb{R}^n$ ein Eingangssignal $u(t)$ existiert, das den Zustandsvektor des Systems von Zustand $x(t) = 0$ zum Zustand $x(\tau) = x_r$ in endlicher Zeit τ bringt.

Falls alle Punkte in \mathbb{R}^n erreichbar sind, heisst das System *vollständig erreichbar*.

WICHTIG: Für LTI Systeme sind die Teilmengen der erreichbaren und steuerbaren Zustände identisch.

Ein System ist vollständig steuerbar/erreichbar, wenn die **Steuerbarkeitsmatrix \mathcal{R}** vollen Rang hat ($\text{Det}(\mathcal{R}) \neq 0$).

$$\mathcal{R} = [b, \quad A \cdot b, \quad A^2 \cdot b, \quad \dots, \quad A^{n-1} \cdot b]$$

Alle Steuerbaren Zustände sind Linearkombinationen der Spalten von \mathcal{R}

Beispiel: Steuerbarkeit

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathcal{R} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\text{Det}(\mathcal{R}) \neq 0 \rightarrow \text{Steuerbar}$

$\text{Rank}(\mathcal{R}) = 1 < n \rightarrow \text{System ist nicht vollständig erreichbar. Aus } \{A, b\} \text{ folgt, dass der zweite Zustand nicht direkt vom Eingang beeinflusst wird.}$

3.5.1 Stabilisierbar:

Ein (instabiles) System ist potentiell Stabilisierbar, falls alle Zustände, die nicht steuerbar sind asymptotisch stabil sind.

Remarks:

Stabilizability is a weaker condition than controllability. To stabilize an unstable system, the unstable but controllable variables have to be observable as well.

3.6 Beobachtbarkeit:

Ein System ist vollständig beobachtbar, wenn man mit der Messung des Ausgangssignals $y(t), t \in [0, \tau], \tau > 0$ eindeutig auf den Anfangszustand $x(0)$ des Systems schliessen kann.

Ein LTI System ist dann vollständig beobachtbar, wenn die **Beobachtbarkeitsmatrix \mathcal{O}** vollen Rang hat ($\text{Det}(\mathcal{O}) \neq 0$).

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} c \\ c \cdot A \\ c \cdot A^2 \\ \vdots \\ c \cdot A^{n-1} \end{bmatrix}$$

nicht vollständig beobachtbar $\rightarrow \det \mathcal{O} = 0$

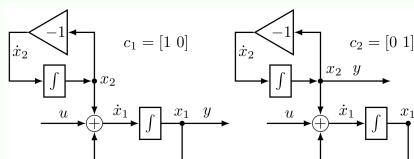
Beispiel: Beobachtbarkeit

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad c_1 = [1 \ 0], \quad c_2 = [0 \ 1],$$

Es sei möglich entweder x_1 , oder x_2 zu messen.

$$\mathcal{O}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{O}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Falls man x_1 misst, ist das System **vollständig beobachtbar**: $\text{Rank}(\mathcal{O}_1) = 2$ D.h. man kann durch messen von x_1 auf die Anfangsbedingungen von $x_1(0)$ & $x_2(0)$ schliessen. Falls man nur x_2 misst, erhält man $\text{Rank}(\mathcal{O}_2) = 1 < n$. Das System ist somit nicht vollständig beobachtbar. Das ist auch in der graphischen Darstellung ersichtlich:

**3.6.1 Detektierbarkeit:**

Ein System ist nur detektierbar, falls alle seine nicht-beobachtbaren Zustände asymptotisch stabil sind.

Remarks:

Detectability is a weaker condition than observability.

An (unstable) system is stabilizable, if the system is potentially stabilizable *and* detectable.

3.7 Koordinatentransformationen:

Ein Zustandsraum mit Koordinaten x kann durch eine Koordinatentransformation in anderen Koordinaten \tilde{x} beschrieben werden.

$$x(t) = T \cdot \tilde{x}(t) \quad T \in \mathbb{R}^{n \times n}, \det(T) \neq 0$$

$$\frac{d}{dt} \tilde{x}(t) = T^{-1} \cdot A \cdot T \cdot \tilde{x}(t) + T^{-1} \cdot b \cdot u(t)$$

$$y(t) = c \cdot T \cdot \tilde{x}(t) + d \cdot u(t)$$

Fundamentale Systemeigenschaften (Stabilität, Steuerbarkeit, Beobachtbarkeit, I/O-Verhalten) sind Transformationsinvariant.

3.8 Input/Output (I/O) Darstellung:

Eine Zustandsraumdarstellung $\{A, b, c, d\}$ beschreibt das gesamte System (Zustände $x(t)$ und Ausgang $y(t)$ für gegebene $x(0)$ & $u(t)$). Oftmals ist man aber nur am I/O Zusammenhang $u(t) \rightarrow y(t)$ interessiert.

I/O-Beschreibung:

$$y^{(n)}(t) + a_{n-1} \cdot y^{(n-1)}(t) + \cdots + a_1 \cdot y^{(1)}(t) + a_0 \cdot y(t) = b_m \cdot u^{(m)}(t) + \cdots + b_1 \cdot u^{(1)}(t) + b_0 \cdot u(t)$$

Wichtig: $y^{(n)} \neq 0, \forall n$

3.9 Zustandsraum Normalformen:

Zustandsraumdarstellungen, welche sich für Analyse-Methoden besonders eignen, sind Normalformen oder eine kanonische Form.

Eine wichtige Normalform ist die **Reglernormalform**.

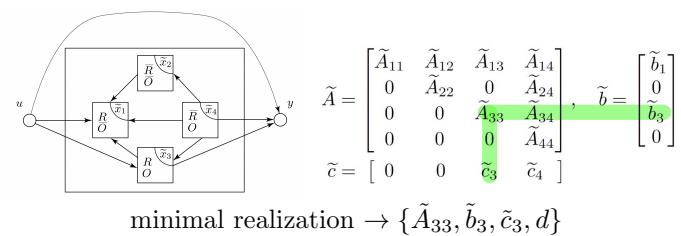
$$\left[\begin{array}{c|c} A & b \\ \hline c & d \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & & \vdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ \hline -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} & 1 \\ b_0 & \cdots & b_m & 0 & \cdots & d \end{array} \right]$$

wobei a_i, b_j aus der I/O-Darstellung oder aus $\Sigma(s)$ kommen:

$$\Sigma(s) = \frac{b_m s^m + \cdots + b_3 s^3 + b_2 s^2 + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_3 s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0} + d$$

3.10 Zustandsraumzerlegung:

Entfernung von nicht steuer und/and beobachtbar Zustände. Die Sets von erreichbaren (\mathcal{R}) und/oder beobachtbaren (\mathcal{O}) Punkten sind **invariante Unterräume** im Zustandsraum. Durch eine geeignete Koordinatentransformation $x = T \cdot \tilde{x}$ kann der gesamte Zustandsraum in die invarianten Unterräume $\{\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3, \tilde{x}_4\}$ zerlegt werden: Für die Beschreibung des I/O-Verhaltens ist also nur der Zustand \tilde{x}_3 relevant, da er der einzige ist, der gleichzeitig beobachtbar UND steuerbar ist. Die Anzahl Zustände n im Unterraum \tilde{x}_3 entspricht der minimalen Anzahl Zustände, die zur Beschreibung des I/O-Verhaltens nötig sind. Deshalb wird die Darstellung des Systems in den Koordinaten \tilde{x}_3 **minimale Zustandsraumdarstellung** genannt:



minimal realization $\rightarrow \{\tilde{A}_{33}, \tilde{b}_3, \tilde{c}_3, d\}$

Vollständig steuerbar und beobachtbar (falls keine Pol-NST-Kürzung möglich, ist das System bereits in minimaler Form).

Beispiel: I/O Darstellung

Bestimme ob $\{A, b\}$ steuerbar ist, ohne \mathcal{R} zu berechnen.

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

\Downarrow diagonalisieren $\dot{\tilde{x}} = D \cdot \tilde{x} + V^{-1} \cdot b \cdot u$

$$\begin{bmatrix} \dot{\tilde{x}}_1 \\ \dot{\tilde{x}}_2 \\ \dot{\tilde{x}}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \\ \tilde{x}_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \sqrt{2} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot u$$

System hat einen Zustand \tilde{x}_3 , der instabil ($\lambda_3 = 1$) & nicht steuerbar ist.

4 Systemanalyse im Frequenzbereich

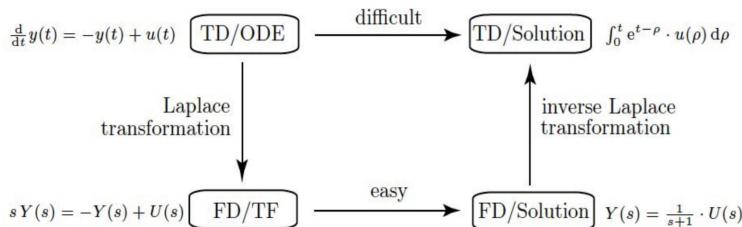
4.1 Laplace-Transformation:

Wichtige Singaltransformationen:

$x(t)$	$X(S)$
$\delta(t)$	1
$h(t) (= 1)$	$\frac{1}{s}$
$p(t) (= t)$	$\frac{1}{s^2}$
$h(t) \cdot t^n \cdot e^{\alpha \cdot t}$	$\frac{n!}{(s-\alpha)^{n+1}}$
$h(t) \cdot \sin(\omega \cdot t)$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$
$h(t) \cdot \cos(\omega \cdot t)$	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$
$h(t) \cdot \sinh(\omega \cdot t)$	$\frac{\omega}{s^2 - \omega^2}$
$h(t) \cdot \cosh(\omega \cdot t)$	$\frac{s}{s^2 - \omega^2}$
$h(t) \cdot (e^{at} - 1)$	$\frac{a}{s(s-a)}$
$h(t) \cdot \frac{e^{at} - e^{bt}}{a-b}$	$\frac{1}{(s-a)(s-b)}$
$h(t) \cdot \frac{ae^{at} - be^{bt}}{a-b}$	$\frac{s}{(s-a)(s-b)}$

Wichtige Eigenschaften:

Linearität	$\mathcal{L}\{ax_1(t) + bx_2(T)\} = aX_1(s) + bX_2(s)$
Ähnlichkeit	$\mathcal{L}\left\{\frac{1}{a} \cdot x\left(\frac{t}{a}\right)\right\} = X(s \cdot a)$
Verschiebung	$\mathcal{L}\{x(t - T)\} = e^{-T \cdot s} \cdot X(s)$
Dämpfung	$\mathcal{L}\{(x(t) \cdot e^{a \cdot t})\} = X(s - a)$
Ableitung t	$\mathcal{L}\left\{\frac{d}{dt}x(t)\right\} = s \cdot X(s) - x(0)$
2. Ableitung t	$\mathcal{L}\left\{\frac{d^2}{dt^2}x(t)\right\} = s^2 \cdot X(s) - s \cdot x(0) - \frac{d}{dt}x(0)$
n-te Abl. t	$s^n \cdot X(s) - s^{n-1}x(0) - \dots - s^0 \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}$
Ableitung s	$\mathcal{L}\{t \cdot x(t)\} = -\frac{d}{ds}X(s)$
Integration t	$\mathcal{L}\left\{\int_0^t x(\tau)d\tau\right\} = \frac{1}{s} \cdot X(s)$
Integration s	$\mathcal{L}\left\{\frac{1}{t} \cdot x(t)\right\} = \int_s^\infty X(\sigma)d\sigma$
Convolution t	$\mathcal{L}\{x_1(t) * x_2(t)\} = X_1(s) \cdot X_2(s)$
Convolution s	$\mathcal{L}\{x_1(t) \cdot x_2(t)\} = X_1(s) * X_2(s)$
Anfangswert	$\lim_{t \rightarrow 0^+} x(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} s \cdot X(s)$
Endwert	$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot X(s)$



4.1.1 Anwendungen:

Übertragungsfunktion (Lineare):

Da Ableitungen im Zeitbereich zu algebraischen Größen im Frequenzbereich werden. Lässt sich die Lösung einer Zustandsgleichung erster Ordnung folgendermassen finde:

$$\dot{x}(t) = A \cdot x(t) + b \cdot u(t), \quad y(t) = c \cdot x(t), \quad x(0) = 0$$

$$\Downarrow \mathcal{L}\{\}$$

$$s \cdot X(s) = A \cdot X(s) + b \cdot U(s), \quad Y(s) = c \cdot X(s)$$

$$\Downarrow \text{Umformen}$$

$$Y(s) = c \cdot (sI - A)^{-1} \cdot b \cdot U(s) = \Sigma(s) \cdot U(s)$$

Wobei $\Sigma(s)$ Übertragungsfunktion heisst, $\Sigma(s)$ ist im Allgemeinen ein Bruch rationaler Funktionen, wobei der Nenner bei physikalischen Systemen mindestens die Ordnung des Zählers hat ($n \geq m$)

$$\begin{aligned} \Sigma(s) &= \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{c \cdot \text{Adj}(sI - A) \cdot b}{\det(sI - A)} + d \\ &= \frac{b_m \cdot s^m + \dots + b_1 \cdot s + b_0}{s^n + a_{n-1} \cdot s^{n-1} + \dots + a_1 \cdot s^1 + a_0} + d \end{aligned}$$

Der Nenner $\det(sI - A)$ entspricht der charakteristischen Gleichung der Matrix A. D.h. Stabilitätseigenschaften der GGWP lassen sich am Nenner ablesen. **Beachte:** wenn eine Pol/Nullstelle kurzung möglich ist, dann ist das System nicht beobachtbar oder nicht steuerbar. Diese Zustände beeinflussen das I/O-Verhalten nicht.

Adjunkte berechnen

Adjunkte für eine $n \times n$ Matrix:

$$\text{adj}(A) = C^T = ((-1)^{i+j} M_{ji})_{1 \leq i,j \leq n}$$

Adjunkte für eine 2×2 -Matrix:

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{adjungieren}} \text{Adj}(A) = \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

Adjunkte für eine 3×3 -Matrix:

$$\begin{aligned} \text{adj} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} &= C^T = \\ \begin{pmatrix} a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32} & a_{13}a_{32} - a_{12}a_{33} & a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22} \\ a_{23}a_{31} - a_{21}a_{33} & a_{11}a_{33} - a_{13}a_{31} & a_{13}a_{21} - a_{11}a_{23} \\ a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31} & a_{12}a_{31} - a_{11}a_{32} & a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \end{pmatrix} &= \\ \left(+ \det \begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} - \det \begin{pmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \right. \\ \left. - \det \begin{pmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{pmatrix} - \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{pmatrix} \right. \\ \left. + \det \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} - \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \right) \end{aligned}$$

Theorem: Anfangs- und Endwerte:

Laesst sich mithilfe des Anfangs-/Endwerttheoremen im Frequenzbereich berechnen. **Beachte:** Es gilt nur wenn das System stabyl (stable Pole hat) ist!

$$Y(s) = \Sigma(s) \cdot U(s), \quad U(s) = \mathcal{L}\{h(t)\} = \frac{1}{s}$$

$$\Rightarrow Y(s) = \Sigma(s) \cdot \frac{1}{s}$$

$$y(0+) = \lim_{s \rightarrow \infty} s \cdot Y(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} \Sigma(s)$$

$$y(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0+} s \cdot Y(s) = \lim_{s \rightarrow 0+} \Sigma(s)$$

Übertragungsfunktionen haben die allgemeine Form:

$$\Sigma(s) = b_m \cdot \frac{\prod_{j=1}^m (s - \xi_j)}{\prod_{i=1}^n (s - \pi_i)}, \quad \xi_j, \pi_i \in \mathbb{C}$$

wobei π_i Pole (**Achtung: #Pole = Ordnung des Systems**) und ξ_j Nullstellen genannt werden. Jeder Pol π_i entspricht einem Eigenwert λ_i von A. Aber nicht alle λ sind pole!

Vorsicht: Nicht alle Eigenwerte von A sind Pole π_i von $\Sigma(s)$, da sich Nullstellen und Pole kürzen können! Wenn die Übertragungsfunktion aus einer minimalen Systemrealisierung $\{A, b, c, d\}$ berechnet wird, lassen sich keine Pole und Nullstellen aufheben.

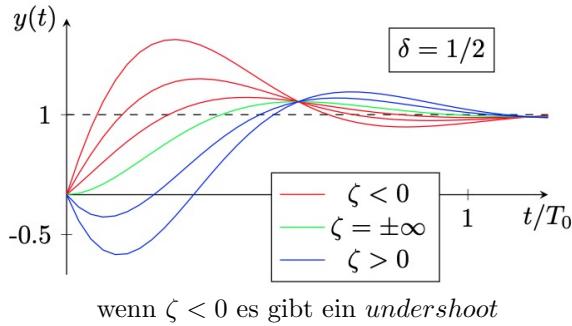
4.4 Nullstelleneinfluss:

$$\Sigma(s) = \frac{a \cdot s + 1}{\dots}$$

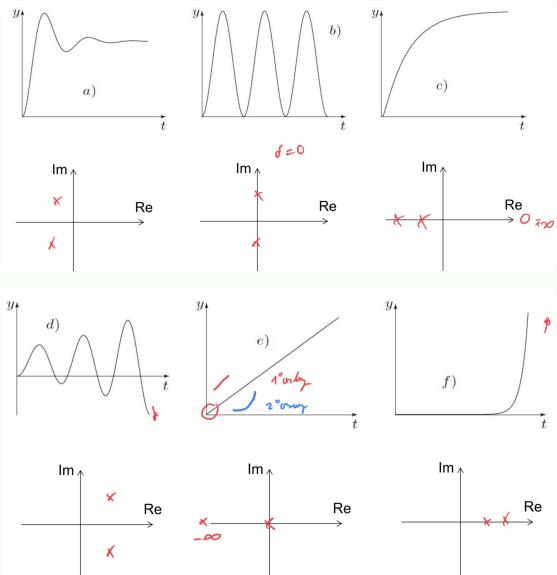
Je näher die Nullstelle $\zeta = -1/a$ am Ursprung ist, desto stärker ist der Einfluss dieser Nullstelle. Dies widerspiegelt sich an einem stärkeren Überschuss in der Systemantwort. Für $\zeta > 0$ hat die Systemantwort einen **Undershoot**. Das heisst das System antwortet zuerst in die falsche Richtung. ein System mit einer Nullstelle der Form $\zeta > 0$ ($Re(\zeta) > 0$) wird als **nicht-minimalphasig** bezeichnet.

Bemerkung: Die initiale Sprungantwort in die ‘falsche’ Richtung tritt bei einer ungeraden Anzahl positiver Nullstellen ($Re(\zeta) > 0$) auf.

Falls Steigung gleich 0 in $t = 0$ ist, ist keine NST vorhanden



Beispiel: Polen von Systeme



4.5 BIBO Stabilität:

BIBO Stabilität bezieht sich auf das **I/O-Verhalten** von $\Sigma(S)$, wobei **Lyapunov Stabilität** sich auf das GGW der **Zustände** bezieht.

Ein System ist **BIBO Stabil**, falls für die Impulsantwort $\delta(t)$ folgendes gilt:

$$\int_0^\infty |\delta(t)| dt < \infty$$

- Das System ist **BIBO stabil falls alle Pole π_i negativen Realteil haben.**
- Das System ist nicht **BIBO stabil** in allen anderen Fällen.

Dabei ist wichtig, dass nicht beobachtbare Zustände und nicht steuerbare Zustände die BIBO Stabilität nicht beeinflussen, da sie sich in $\Sigma(s)$ wegkürzen. Obwohl BIBO und Lyapunov Stabilität sehr ähnlich wirken muss man sie auseinander halten, denn ein BIBO stabiles System kann Lyapunov instabil sein und ein

Lyapunov stabiles System kann BIBO instabil sein. Für ein **komplett steuerbares und beobachtbares** (\Leftrightarrow minimales) System gilt:

asymptotisch stabil	\rightarrow	BIBO stabil
asymptotisch stabil	\leftarrow	BIBO stabil
Lyap. stabil oder instabil	\rightarrow	BIBO instabil
Lyap. stabil oder instabil	\leftarrow	BIBO instabil

Für ein System, welches **nicht komplett steuerbar und beobachtbar** ist gilt:

asymptotisch stabil	\rightarrow	BIBO stabil
? \leftarrow	BIBO stabil	
Lyap. stabil oder instabil	\rightarrow	?
Lyap. stabil oder instabil	\leftarrow	BIBO instabil

Beispiel: BIBO Stabyl

Gegeben:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u, \quad y = [1 \ 0] x = x_1$$

$\lambda_1 = -1; \lambda_2 = 1$ Das System ist **Lyapunov instabil**. Nachvollziehbar für $x_2(0) \neq 0$, dann divergiert der zustand $x_2 \rightarrow \infty$. Da der instabile zustand weder steuerbar, noch beobachtbar ist, ist das System trotzdem BIBO stabil.

$$\Sigma(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{s+1}$$

Der Pol hat einen negativen Realteil, ist also **BIBO Stabil** und gleichzeitig Lyapunov instabil.

Beispiel: BIBO Stabyl

BIBO stabil: $y(t) = 3 \cdot e^{-\alpha t} \cdot u(t)$ oder $y(t) = u(t) \cdot \cos \omega t$ (endlich wegen die beschraenkenden Termen)

BIBO unstable: $Y(s) = \frac{1}{s} \cdot U(s)$ oder $y(t) = \frac{1}{u^2(t)}$ (unendlich).

4.6 Frequenzantworten:

Zusätzlich zur **Sprung-** ($h(t)$) und der **Impuls-Eingangsgrösse** ($\delta(t)$) gibt es die **harmonische Eingangsgrösse**:

$$u(t) = \alpha \cdot \cos(\omega \cdot t + \Phi)$$

wobei α die **Amplitude**, ω die **Frequenz** in $\frac{rad}{s}$, und Φ die **Phasenverschiebung** ist.

der Ausgang eines Systems $\Sigma(s)$ mit harmonischen Eingang hat die Form:

$$y(t) = y_{\text{transient}}(t) + y_\infty(t)$$

Angenommen das System ist linear, zeitinvariant und asymptotisch stabil, gilt:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y_{\text{transient}}(t) \rightarrow 0 \Rightarrow y(t) \rightarrow y_\infty$$

Die asymptotische Systemantwort ist eine verstärkter und phasenverschobener Cosinus bei derselben Frequenz wie der Eingang:

$$y_\infty(t) = m(\omega) \cdot \alpha \cdot \cos(\omega \cdot t + \Phi + \varphi(\omega))$$

die Verstärkung $m(\omega)$ und die Phasenverschiebung $\varphi(\omega)$ sind systemabhängig. Es gilt:

$$y_\infty(t) = |\Sigma(j\omega)| \cdot \alpha \cdot \cos(\omega \cdot t + \Phi + \angle \Sigma(j\omega))$$

D.h die Verstärkung entspricht der Systemverstärkung bei der Eingangs frequenz und die Phasenverschiebung entspricht der Systemphase bei der Eingangs frequenz.

Wichtig! Lineare Systeme generieren keine neuen Frequenzen. Es kommen immer dieselben Frequenzen aus dem System, wie in das System gehen. D.h die Phasenverschiebung und Verstärkung ist nur frequenzabhängig und somit eine Eigenschaft des Systems.

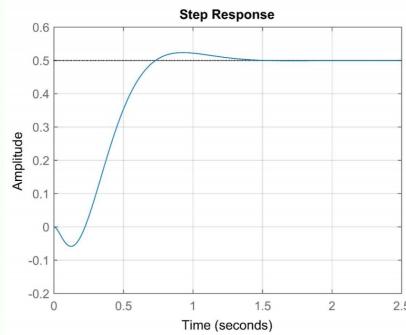
$$|\Sigma_1(S) \cdot \Sigma_2(S)| = |\Sigma_1(S)| \cdot |\Sigma_2(S)|$$

$$\angle(\Sigma_1(S) \cdot \Sigma_2(S)) = \angle\Sigma_1(S) + \angle\Sigma_2(S)$$

Beispiel: Statische Verhalten von System

Fuer ein stabiles System gilt: $k = \Sigma(0)$.

Mit $\Sigma(s) = 40 \cdot \frac{-s+8}{(s+20) \cdot (s^2+8s+32)}$



5 Visualisierung

$$u(t) = \cos(\omega t) \Rightarrow y(t) = |P(j\omega)| \cdot \cos(\omega t + \angle P(j\omega))$$

5.1 Bode Diagramme:

Die Magnitude und Phase wird gegenüber einer logarithmischen Frequenzskala eingezeichnet. Dabei ist die Magnitude üblicherweise in Dezibel, und Die Phase in Grad dargestellt.

Umrechnung zwischen dezimal und dezibel:

$$|\Sigma(s)|_{dB} = 20 \cdot \log_{10} |\Sigma(s)| = 20 \cdot \frac{\ln(|\Sigma(s)|)}{\ln(10)}$$

$$|\Sigma(s)| = 10^{\frac{|\Sigma(s)|_{dB}}{20}}$$

- $\frac{1}{\Sigma_{dB}(s)} = -\Sigma_{dB}(s)$
- $\Sigma_{dB} + 6dB = 2 \cdot \Sigma_{Dec}$
- $x_{dB} + y_{dB} \neq (x + y)_{dB}$
- $|\frac{a+ib}{c+id}| = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{\sqrt{c^2+d^2}}$
- $|(a+ib)^4| = (\sqrt{a^2+b^2})^4$
- $|k_p \cdot \frac{a+ib}{c+id}| = k_p |\frac{a+ib}{c+id}|$

Dezimalskala	Dezibelskala [dB]
100	40
10	20
5	13.97..
$\sqrt{10} = 3.16..$	10
2	6.02..
1	0
$\frac{1}{\sqrt{2}}$	-3.0103
0.316..	-10
0.1	-20
0.01	-40
0	$-\infty$

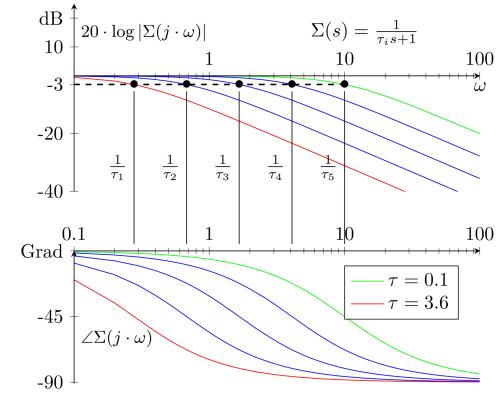
$$|\Sigma(j\omega)|_{dB} = |\Sigma_1(j\omega)|_{dB} + |\Sigma_2(j\omega)|_{dB} = \Sigma_1(j\omega) \cdot \Sigma_2(j\omega)$$

$$\arctan\left(\frac{Im}{Re}\right) = \angle\Sigma = \angle\Sigma_1 + \angle\Sigma_2$$

$$\angle\Sigma(j\omega) = \begin{cases} \arctan\left(\frac{x}{y}\right) & x > 0 \\ \arctan\left(\frac{x}{y}\right) + \pi & x < 0 \end{cases}$$

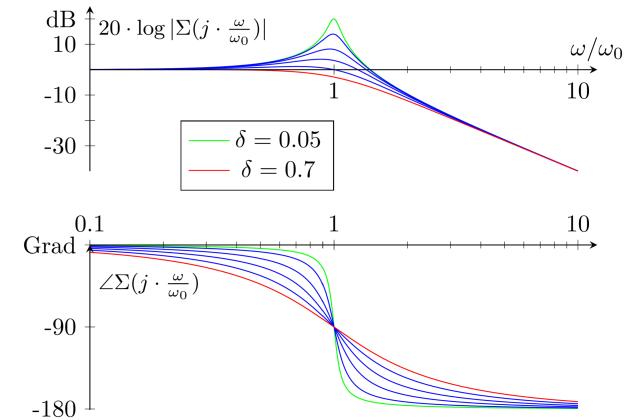
5.1.1 Systeme 1. Ordnung:

Viele reale Regelkreise können als Systeme erster Ordnung approximiert werden. Ein solches System reagiert auf tiefe Frequenzen, die kleiner als die Eckfrequenz (Cutoff Frequency) $\omega_g = \frac{1}{\tau}$ sind. Bei Anregungsfrequenzen höher als ω_g verhindert die Trägheit des Systems eine starke Änderung des Ausgangs. Ausserdem reagiert das System für $\omega > \omega_g$ zunehmend verzögert, wie an der Phase des Bode Diagramms ersichtlich ist. Eine wichtiges Merkmal: die Magnitude bei $\omega_g = \frac{1}{\tau}$ ist immer bei $\frac{1}{\sqrt{2}} \approx -3dB$.



5.1.2 Systeme 2. Ordnung:

Viele mechanischen Systeme zeigen resonantes Verhalten (grössere Verstärkung bei mittleren Frequenzen als bei tiefen - eine sogenannte Resonanzüberhöhung). Solche Systeme werden oft als Systeme zweiter Ordnung approximiert.



Vorsicht! Die rezonante Frequenz (maximale Verstärkung) ist nicht bei der natürlichen Frequenz $\frac{\omega}{\omega_0} = 1$, sondern bei:

$$\sum_{max} = \frac{1}{2 \cdot \delta \sqrt{1 - \delta^2}}$$

$$\omega_{max} = \omega_0 \cdot \sqrt{1 - 2 \cdot \delta^2}, \quad 0 < \delta < \frac{1}{\sqrt{2}}$$

jedoch gilt für kleine Dämpfungsparameter $\omega_{max} \approx \omega_0$. Ausserdem zeigen Systeme 2. Ordnung für $\delta > \frac{1}{\sqrt{2}}$ kein rezonantes Verhalten.

5.1.3 Einfluss von Polen & Nullstellen auf das Bode Diagramm:

Standardelemente	Verstärkung [$\frac{dB}{dec}$]	Phase
Stabiler Pol	-20 bei ω_g	-90° bei ω_g
Instabiler Pol	-20 bei ω_g	+90° bei ω_g
Minimalphasige NST	+20 bei ω_g	+90° bei ω_g
Nichtminimalphasige NST	+20 bei ω_g	-90° bei ω_g
Delay um $\tau(\forall\omega)$	0	$-\frac{180}{\pi} \cdot \omega \cdot \tau^\circ$
MP NST+Instabiler P	0	+180° bei ω_g
Nicht-MP NST+Stab. P	0	-180° bei ω_g

Für Pole oder Nullstellen mit Vielfachheit grösser als eins, muss sowohl die Änderung der Verstärkung wie auch die gesamte Phasenaenderung mit der Vielfachheit multipliziert werden. Beispielsweise führt eine doppelte minimalphasige Nullstelle zu einer Steigung von +40 dB/Dekade und einer Phasenänderung von +180°. Doppel Polstelle bei $\omega = \frac{1}{\tau} \Rightarrow \Sigma(s) = \frac{a(s)}{s^2\tau^2+1}$ (System 2 Order mit $\delta = 0$).

Beispiel: Bode-Plot

Zeichne Bode-Plot von $\Sigma(s) = \frac{100s}{(10s+1)(s+10)}$. Vorgehen:

1. In Standardelemente Zerlegen:

$$\Sigma(s) = (100s)\left(\frac{1}{10s+1}\right)\left(\frac{1}{s+10}\right)$$

2. NST/Pole der Standardelemente bestimmen:

$$\zeta_1 = 0; \quad \pi_2 = -\frac{1}{10}; \quad \pi_3 = -10$$

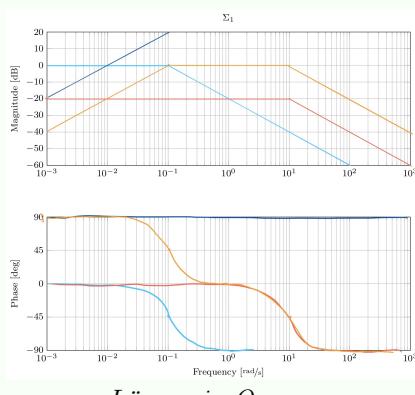
3. Betrag der NST/Pole bestimmen.

$$w_\zeta = |\zeta_1| = 0; \quad w_{c_2} = |\pi_2| = \frac{1}{10}; \quad w_{c_3}|\pi_3| = 10$$

4. $\Sigma(0)$ der einzelnen Elemente bestimmen.

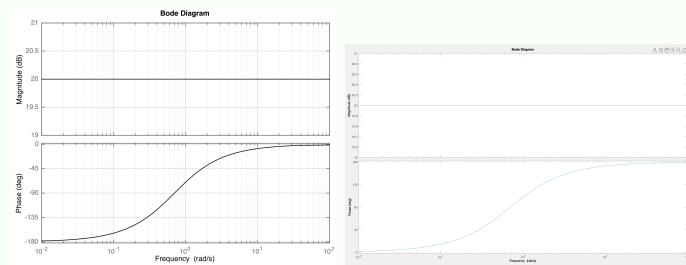
$$\Sigma_1(10^{-3}) = 0.1 = -20dB; \quad \Sigma_2(0) = 1 = 0dB; \\ \Sigma_3(0) = \frac{1}{10} = -20dB$$

5. Bode-Plot zeichnen



Beispiel: $\Sigma(s)$ finden

Identifizierte Übertragungsfunktion in der Form $\Sigma(s) = k \frac{s-\zeta}{s-\pi}$.



Links: $\Sigma(s)$ mit negativer statischer Verstärkung
Rechts: $-1 \cdot \Sigma(s) =: \Sigma(s)_{pos}$ mit positiver statischer Verstärkung

- $|\Sigma(s)| = 20dB \quad \forall \omega \rightarrow$ Pol und Nullstelle müssen an der selben Stelle sein. Da das System eine neg. stat. Verstärkung hat rechnen wir das gesamte System mal -1. Dadurch gewinnt das System π Phase. So können wir das System aus Standardelementen darstellen.
- System gewinnt an 180° Phase \rightarrow eine stabile NST und ein instabiler Pol.
- Auslesen aus Bode Plot ergibt für $|\pi| = |\zeta| = 0.7$ und $|\Sigma(s)_{pos}| = k \frac{\sqrt{\omega^2+0.7^2}}{\sqrt{\omega^2+0.7^2}} \Rightarrow k = 20dB = 10$
- $\Sigma(s)_{pos} = -10 \frac{s+0.7}{s-0.7} \Leftrightarrow \Sigma(s) = 10 \frac{s+0.7}{s-0.7}$

Falls Anzahl mini-phasige NST + instabile Pole ungerade, hat das System neg. stat. Verstärkung

5.2 Nyquist Diagramme:

In Nyquist-Diagrammen werden Übertragungsfunktionen direkt in der komplexen Ebene dargestellt. Die Frequenz ω ist dabei nicht direkt sichtbar, ist aber trotzdem als Kurvenparameter im Realteil wie auch im Imaginärteil der Darstellung im Nyquist-Diagramm vorhanden. Nyquist-Diagramme werden oftmals für eine qualitative Analyse von Systemen verwendet.

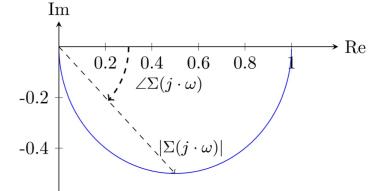
Wichtig:

- Anfangspunkt $\rightarrow \lim_{\omega \rightarrow 0} L(j\omega)$
- Endpunkt: $\rightarrow \lim_{\omega \rightarrow \infty} L(j\omega)$

5.2.1 Systeme 1. Ordnung:

Ein allgemeines System 1. Ordnung bei der Frequenz $s = j\omega$ hat folgende Magnituden und Phasen:

$$|\Sigma(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{\tau^2\omega^2 + 1}} \quad \angle \Sigma(j\omega) = -\arctan(\tau \cdot \omega)$$



Hinweis: \forall Sys. 1. Ordnung $\Sigma(s) = \frac{k}{T \cdot s + 1}$ mit $\omega \in (-\infty, \infty)$ ist die Nyquist-Kurve ein Kreis mit Mittelpunkt $(k/2, 0)$.

Beispiel: Bode diagramm $\rightarrow \Sigma(j\omega)$

Lesen $|\dots|$ und $\angle \Sigma$ von Bode und

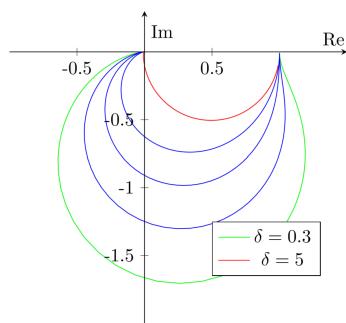
$$\Sigma(j\omega) = |\Sigma| \cdot e^{j\angle \Sigma \cdot j}$$

5.2.2 Systeme 2. Ordnung:

Ein allgemeines System 2. Ordnung hat bei der Frequenz $s = j\omega$ folgende Magnituden und Phasen:

$$|\Sigma(j\omega)| = \frac{\omega_0^2}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4 \cdot \delta^2 \cdot \omega_0^2 \cdot \omega^2}}$$

$$\angle \Sigma(j\omega) = \begin{cases} -\arctan\left(\frac{2 \cdot \delta \cdot \omega_0 \cdot \omega}{\omega_0^2 - \omega^2}\right) & \forall 0 \leq \omega \leq \omega_0 \\ -\arctan\left(\frac{2 \cdot \delta \cdot \omega_0 \cdot \omega}{\omega_0^2 - \omega^2}\right) - \pi & \forall \omega_0 < \omega \end{cases}$$

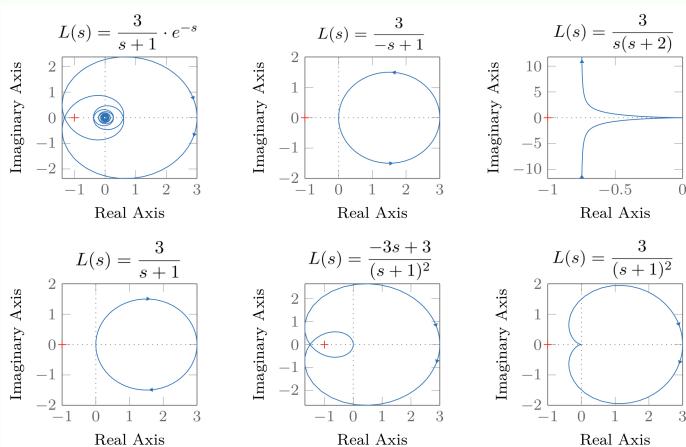


Für sehr hohe Frequenzen gilt:

offener Integrator $\frac{1}{s^k}$	$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \angle L(j\omega) = -k \cdot \frac{\pi}{2}$
#instabiler Pol	$\# + \frac{\pi}{2}$
#stabil Pol	$\# - \frac{\pi}{2}$
#minimalphasige Nullstelle	$\# + \frac{\pi}{2}$
#Nicht-minimalphasige Nullstelle	$\# - \frac{\pi}{2}$

Beispiel: Nyquist diagramme von $\Sigma(s)$

Siehe Nyquist Theorem 7.3.1



5.3 Asymptotische Eigenschaften von Frequenzantworten:

Gegeben sei die folgender Struktur einer allgemeinen Übertragungsfunktion:

$$\Sigma(s) = \frac{b_m \cdot s^m + \dots + b_1 \cdot s + b_0}{s^k \cdot (s^{n-k} + a_{n-1-k} \cdot s^{n-1-k} + \dots + a_1 \cdot s + a_0)}$$

Aus der Übertragungsfunktion kann man direkt die **Phase** bei $\omega = 0$ aus dem **Systemtyp** k bestimmen. Zusätzlich kann man das Asymptotische Verhalten der Magnitude $|\Sigma(j\omega)|$ für $\omega \rightarrow \infty$ direkt aus dem **relativen Grad** $r = n - m$ bestimmen.

5.3.1 Systemtyp k :

Der **Systemtyp** k entspricht der Vielfachheit offener Integratoren $\frac{1}{s^k}$ des Systems. Die Phase bei $\omega = 0$ lässt sich folgendermassen bestimmen.

$$\angle \Sigma(0) = \begin{cases} -k \cdot \frac{\pi}{2}, & \text{sgn}\left(\frac{b_0}{a_0}\right) > 0 \\ -\pi - k \cdot \frac{\pi}{2}, & \text{sgn}\left(\frac{b_0}{a_0}\right) < 0 \quad (\text{neg. stat. Gain}) \end{cases}$$

5.3.2 Relativer Grad $r = n - m$:

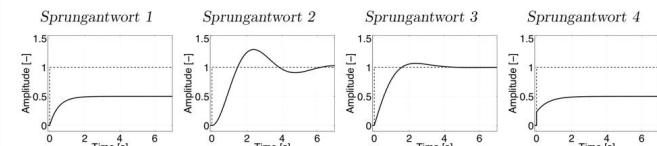
Die Steigung des Magnitudenverlauf im Bode-Diagramm konvergiert asymptotisch zu:

$$\frac{\partial |\Sigma(j\omega)|_{dB}}{\partial \log(\omega)} = -r \cdot 20 \frac{dB}{decade}$$

Ein höher relativer Grad r ergibt eine grösseren Phasenverzögerung (phase lag), der begrenzt die erreichbare Bandbreite (bandwidth limit). ($r > 0$)

Beispiel: Relativer Grad und Sprungantwort

Geben: Graph in ZB und Funktion in FB



Fkt	r	T(0)
$T_1(s) = \frac{1}{s+2}$	1	$\frac{1}{2}$
$T_2(s) = \frac{2}{s^2+s+2}$	2	0
$T_3(s) = \frac{s+2}{s^2+2s+2}$	1	0
$T_4(s) = \frac{0.3s+1}{1.3s+2}$	0	$\frac{1}{2}$

Relativer Grad $r = 0$ ergibt einen Sprung bei $t = 0$ in der Sprungantwort, relativer Grad $r = 1$ ergibt eine positive Steigung bei $t = 0$ in der Sprungantwort und relativer Grad $r > 1$ ergibt eine Steigung von Null bei $t = 0$ in der Sprungantwort. **Bemerkung:** die statische Nachlauffehler ist hilfreich um die endwert zu bestimmen.

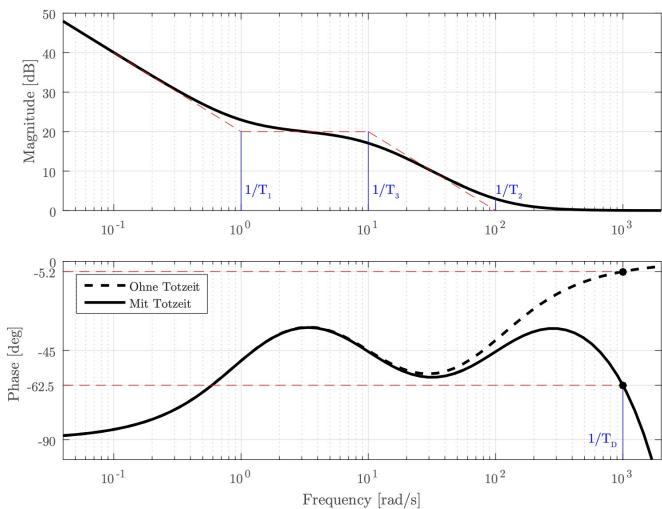
5.4 Modellunsicherheit:

Ein Modell eines physikalischen Systems kann das wahre System nicht perfekt reproduzieren. Durch die Berücksichtigung der maximal zu erwartenen Modellierungsunsicherheit beim Entwurf eines Regelsystems kann robustes Verhalten garantiert werden.

Beispiel: Asymptotische Eigenschaften von $\Sigma(s)$

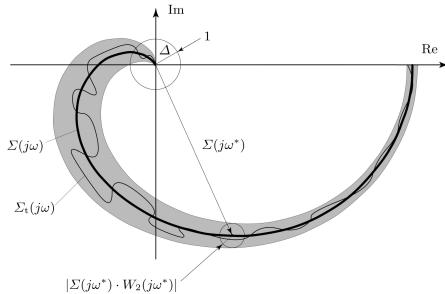
Für Abbildung siehe naechste Beispiel

1. Hohen Frequenzen Gradient Amplitude $0 \frac{dB}{dec} \rightarrow r = 0$.
2. Tiefen Frequenzen \rightarrow konstanten Wert (90°), amplitud Aenderung von $-20 \frac{dB}{dec} \rightarrow k = 1$.
3. Bei tiefen Frequenzen beträgt der Gradient der Amplitude $-20 \frac{dB}{dec}$ und die Phase beträgt -90° . Dies deutet auf einen Pol im Ursprung hin.
4. Im mittleren Frequenzbereich steigen die Amplitude und die Phase zuerst an (\rightarrow Nullstelle), dann sinken sie (\rightarrow Pol) und steigen beider wieder an (\rightarrow nochmals eine Nullstelle).
5. Bei hohen Frequenzen fällt die Phase sehr schnell ab, während die Amplitude konstant bleibt. Dies impliziert eine Zeitverzögerung (Delay).

Beispiel: Bode Diagramm $\rightarrow \Sigma(s)$ 

Finde die Parameter k, T_1, T_2, T_3, T_D, k von diese Funktion (gleiche Graph als die vorherige Beispiel): $\Sigma(s) = k \cdot \frac{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)}{s(T_3 s + 1)} \cdot e^{-s T_D}$

1. Lese T_1, T_2, T_3 direkt vom Bode diagramm ab (Phase \rightarrow max geschwindigkeit, Magnitude \rightarrow "Knickpunkt") $\rightarrow T_1 = 1, T_2 = 0.01, T_3 = 0.1$.
2. T_D abschätzen: $\angle \Sigma_{nodelay}(s) = \angle \frac{\Sigma(s)}{e^{-s T_D}}$ berechnen. Interpolieren (ω ändern) $\angle \Sigma(s) - \angle \Sigma_{nodelay}(s)$ bis die Wert $-1\text{rad} = -57.3^\circ$ gefunden ist. $\rightarrow T_D = 0.001$
3. Bestimme k : $\lim_{\omega \rightarrow \infty} |\Sigma(j\omega)| = \lim_{\omega \rightarrow \infty} k \cdot \frac{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)}{s(T_3 s + 1)} |e^{-s T_D}| = 0\text{dB}$

5.4.1 Nichtparametrische Unsicherheit:

Annahme: es existiert eine lineare, zeitinvariante wahre Übertragungsfunktion $\Sigma_t(s)$, die das System exakt beschreibt, die jedoch wegen Modellunsicherheiten nicht bekannt ist. Die wahre Übertragungsfunktion $\Sigma_t(s)$ liegt in der Menge \mathcal{S} :

$$\mathcal{S} = \left\{ \Sigma(s) \cdot (1 + \Delta \cdot W_2(s)) \mid \Delta \left\{ \begin{array}{l} |\Delta| \leq 1 \\ \angle \Delta \in [-\pi, \pi] \end{array} \right\} \right\}$$

$\Sigma(\mathbf{S})$: Nominelle Übertragungsfunktion, durch (imperfekte) Systemmodellierung gefunden.

Δ : Unsicherheitsgenerator: Kreis in der komplexen Ebene.

$W_2(s)$: Übertragungsfunktion der Unsicherheits: quantifiziert die frequenzabhängige Unsicherheit des Modells

Bei jeder Frequenz ω^* liegt die wahre Übertragungsfunktion $\Sigma_t(j\omega^*)$ innerhalb von einem Kreis mit Radius $|\Sigma(j\omega^*) \cdot W_2(j\omega^*)|$ um die nominelle Übertragungsfunktion $\Sigma(j\omega^*)$.

5.4.2 Unsicherheitsübertragungsfunktion $W_2(s)$:

Es gibt mehrere Methoden, um ein Modell für die Unsicherheitsübertragungsfunktion zu bestimmen. (Für RT1 ist jedoch nur eine Relevant)

Diese Methode verwendet Messungen am realen System, um die Unsicherheitsgrenzen des Modells davon zu bestimmen:

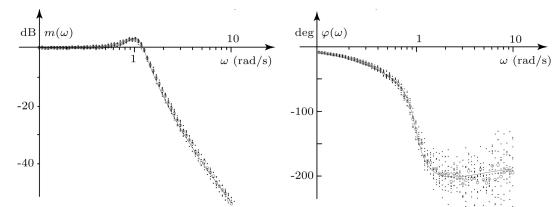
Vorgehen:

• Unsicherheitsschätzung mittels Messdaten:

Diese Methode verwendet Messungen am realen System, um die Unsicherheitsgrenzen des Modells davon zu bestimmen.

Vorgehen:

1. Es werden $k = 1, \dots, K$ Messungen des Frequenzgangs durchgeführt. Für jede Messung bei Frequenz $\omega_i, i = 1, \dots, I$ werden die Werte $|\Sigma(j\omega_{i,k})|$ und $\angle \Sigma(j\omega_{i,k})$ identifiziert.



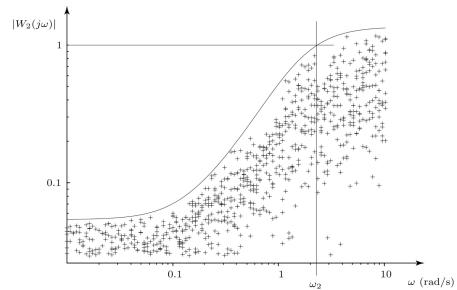
2. Eine nominelle Übertragungsfunktion $\Sigma(s)$ wird an die experimentellen Daten angepasst (analog zur Methode der Systemidentifikation).

$$\Sigma(j\omega_i) = m_i \cdot e^{j \cdot \varphi_i}$$

3. Bei jeder Frequenz ω_i sind die Werte der K Messungen von $|\Sigma(j\omega_{i,k})|$ verteilt um den Wert der nominellen Übertragungsfunktion $|\Sigma(j\omega_i)|$. Die Unsicherheitsübertragungsfunktion bildet einen Kreis mit Radius $|W_2(j\omega_i)|$ um $|\Sigma(j\omega_i)|$ so dass alle Messpunkte von $|\Sigma(j\omega_{i,k})|$ darin enthalten sind:

$$E_{rel}(j\omega) = \frac{\Sigma(j\omega_{i,k})}{\Sigma(j\omega_i)} - 1 < |W_2(j\omega_i)| \quad k \in [1, K], i \in [1, I]$$

Die Ungleichung definiert eine Bedingung bei jeder Frequenz ω_i . Wird die Linke Seite der Ungleichung als Funktion der Frequenz dargestellt, ergibt sich:

**Bemerkungen:**

Die Unsicherheit steigt bei höheren Frequenzen, den Daten kann eine Unsicherheitsübertragungsfunktion $W_2(s)$ zugeordnet werden.

Die Unsicherheitsübertragungsfunktion $W_2(s)$ enthält keine Phaseninformation.

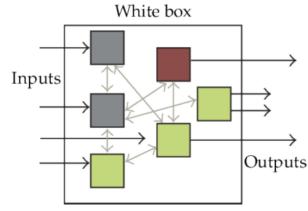
6 Systemidentifikation

6.1 Modelle:

In der Regelungstechnik arbeitet man mit verschiedenen Modellen. Generell unterscheidet man zwischen folgenden drei Arten.

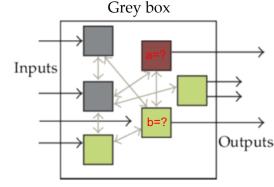
6.1.1 White Box model:

Es existiert eine Explizite Darstellung der Physik des Systems mit bekannten Parameterwerten. Das Verhalten, die Werte und der Zusammenhang zwischen den Zuständen ist vollständig bekannt.



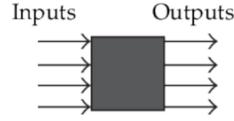
6.1.2 Grey Box model:

Es existiert eine explizite Darstellung der Physik des mit *unbekannten* Parameterwerten. Die Zusammenhänge und Verhalten der Zustände sind jedoch bekannt.



6.1.3 Black Box model:

Es existiert keine explizite Darstellung der Physik des Systems. Das Systemverhalten muss durch empirische Datenanalyse ermittelt werden.



Black box Modelle werden verwendet wenn die Physik des Systems nicht genau bekannt oder zu komplex ist um einfach modelliert zu werden. Durch experimentelle Modellbildung (Systemidentifikation) kann ein Modell des Systems abgeleitet werden, das für die Reglerentwicklung erforderlich ist.

6.1.4 Systemidentifikation mittels Frequenzgang:

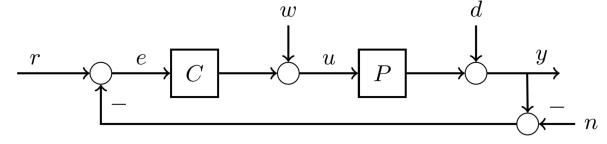
Ein unbekanntes System kann wie folgt identifiziert werden:

- Das System wird mit einem bekannten harmonischen Eingangssignal angeregt: $u(t) = \cos(\omega t)$, $\omega \in [0, \infty)$.
- Die Verstärkung $|\Sigma(j\omega)|$ und die Phase $\angle\Sigma(j\omega)$ der Systemantwort $y_\infty = |\Sigma(j\omega)| \cdot \cos(\omega t + \angle\Sigma(j\omega))$ werden gemessen. Somit kann das Bodediagramm des Systems experimentell bestimmt werden.
- Eine Übertragungsfunktion wird an die Daten angepasst. Hier ist es wichtig, die Auswirkung verschiedener Standardelementen auf Magnitude und Phase zu verstehen.

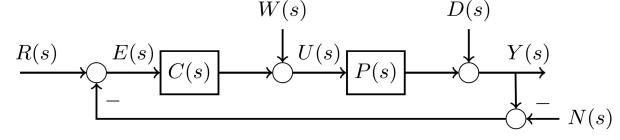
7 Analyse von Regelsystemen

7.1 Signale im Regelkreis:

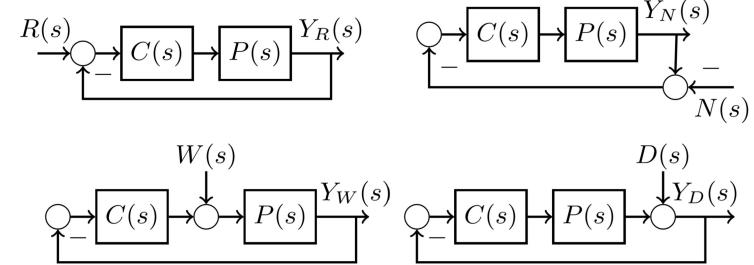
$r(t)$	Referenz (Sollzustand des Systems)
$w(t)$	Störung der Eingangsgröße u
$d(t)$	Störung der Ausgangsgröße y
$n(t)$	Sensorrauschen
$e(t)$	Regelfehler (error)
$y(t)$	Ist-Wert/Ausgangsgröße
$u(t)$	Stellgröße



Um die Beziehung zwischen zwei beliebigen Signalen zu beschreiben, wird der Regelkreis zuerst in den Frequenzbereich transformiert:



Dabei soll die **Ausgangsgröße $Y(s)$** als Funktion des **Reglers $C(s)$** , der **Regelstrecke $P(s)$** und der **Eingänge $R(s)$, $N(s)$, $D(s)$, und $W(s)$** geschrieben werden. Durch die Linearität der Regelstruktur und Annahme von unkorrelierten Eingängen können die Eingangsbeiträge einzeln betrachtet werden.



Daraus folgt:

$$Y_R(s) = \frac{P(s)C(s)}{1+P(s)C(s)} \cdot R(s), \quad Y_N(s) = \frac{P(s)C(s)}{1+P(s)C(s)} \cdot N(s)$$

$$Y_W(s) = \frac{P(s)}{1+P(s)C(s)} \cdot W(s), \quad Y_D(s) = \frac{1}{1+P(s)C(S)} \cdot D(s)$$

Die gesamte Ausgangsgröße $Y(s)$ lautet somit:

$$Y(s) = Y_R(s) + Y_N(s) + Y_W(s) + Y_D(s)$$

$$Y(s) = S(s)[D(s) + P(s) \cdot W(s)] + T(s)[R(s) + N(s)]$$

Es Werde folgende Komponenten definiert:

Open Loop gain	$L(s) = P(s)C(s)$	$(e \rightarrow y)$
Sensitivität	$S(s) = \frac{1}{1+L(s)}$	$(d \rightarrow y, r \rightarrow e)$
Komplementäre Sensitivität	$T(s) = \frac{L(s)}{1+L(s)}$	$(r \rightarrow y, n \rightarrow y)$

Open Loop gain=Kreisverstärkung
Grundsätzlich gilt:

$$\text{Übertragungsfunktion} = \frac{\text{Vorwärtspfad}}{1 + \text{Kreisverstärkung}}$$

Es gilt: $S(s) + T(s) = 1$

Die Pol-Nullstellen Kurzung stellt kein Problem dar, wenn nur minimalphasige Nullstelle und asymptotisch stabilen Pol handelt. Interne Stabilität ist somit automatisch gegeben, falls das Nyquist-Kriterium auch erfüllt ist.

7.2 Stabilität des geschlossenen Regelkreises:

Für geschlossene Regelkreise muss das Konzept der Stabilität erweitert werden. Ein System ist **intern stabil**, wenn alle Übertragungsfunktionen, welche die Eingänge w, d, r im Regelkreis auf die Ausgänge u, y, e abbilden, asymptotisch stabil sind ($\text{Re}(\lambda_i) < 0, \forall i = 1, \dots, n$). Die Beziehungen sind durch diese Matrix gegeben:

$$\begin{bmatrix} U(s) \\ Y(s) \\ E(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S(s) & -S(s) \cdot C(s) & S(s) \cdot C(s) \\ S(s) \cdot P(s) & S(s) & T(s) \\ -S(s) \cdot P(s) & -S(s) & S(s) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} W(s) \\ D(s) \\ R(s) \end{bmatrix}$$

Intern Stabil: $\Rightarrow S(s), T(s), S(s) \cdot C(s), S(s) \cdot P(s)$ dürfen nur asymptotisch stabile Pole ($\text{Re} < 0$) haben.

Falls $P(s)$ und $C(s)$ nur asymptotisch stabile Pole haben, genügt es also, die asymptotische Stabilität von $S(s)$ oder $T(s)$ zu überprüfen um interne Stabilität zu garantieren.

Wenn wir nur an $r \rightarrow y$ interessiert sind darf das **charakteristische Polynom** $1 + L(s) = 0$ nur NST mit $\text{Re}(\zeta) < 0$ haben. (Falls $C(s)$ oder $P(s)$ instabile Pole haben muss interne Stabilität separat noch überprüft werden.)

7.3 Nyquist Theorem:

Durch das Nyquist Theorem kann die asymptotische Stabilität eines geschlossenen Regelkreissystems $T(s) = \frac{L(s)}{1+L(s)}$ durch Analyse seiner Kreisverstärkung $L(s)$ (offener Regelkreis) bestimmt werden. Dabei wird angenommen, dass keine Modellunsicherheit $W_2(s)$ vorhanden ist.

Theorem: Stabilitätskriterium von Nyquist

Der geschlossene Regelkreis mit Übertragungsfunktion $T(s)$ ist asymptotisch stabil, falls für $L(s)$ gilt:

$$n_c = \frac{n_0}{2} + n_+$$

n_c : Anzahl Umrundungen um den kritischen Punkt $(-1,0)$ Positiv falls Umrundung geg. Uhrzeigersinn.
(zählen die Umdrehung von $(-\infty; +\infty)$)

n_0 : Anzahl Pole von $L(s)$ mit Realteil = 0
 n_+ : Anzahl Pole von $L(s)$ mit Realteil > 0

Wichtig: Stabilität nach Nyquist gilt nur, falls **keine Kürzung von instabilen Polen mit nicht minimalphasigen NST auftreten** in $L(s) = C(s) \cdot P(s)$. Andernfalls kann nicht von $L(s)$ auf die interne Stabilität des geschlossenen Regelkreises geschlossen werden.

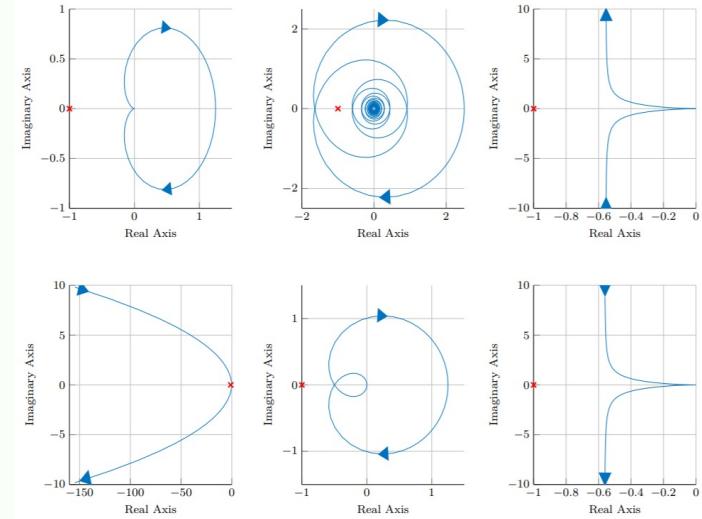
7.3.1 Vorgehen zu Auswertung des Stabilitätskriteriums:

- Betrachte das Nyquist-Diagramm von $L(j\omega)$ in der komplexen Ebene mit $\omega \in [0, \infty)$.
- Spiegle das Diagramm um die reelle Achse. Die gespiegelte Kurve entspricht dem Bereich $\omega \in (-\infty, 0]$. die kombinierte Kurven entspricht also $L(j\omega)$, $\omega \in (-\infty, \infty)$
- Zähle n_c die Anzahl Umrundungen von $L(j\omega)$ um den Punkt $(-1 + j0)$ wenn ω von $-\infty$ bis ∞ variiert wird. Ein Umlauf in \circlearrowleft wird positiv gezählt, und in \circlearrowright negativ.

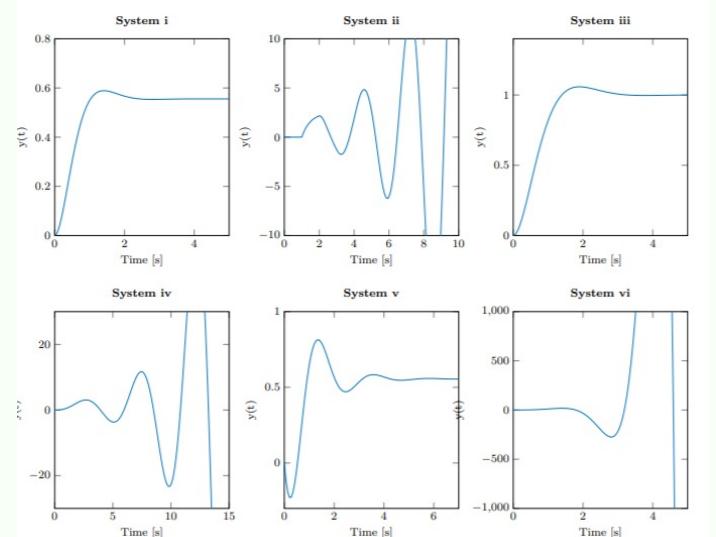
Beispiel: Anzahl von Encirclement

$$(i) \quad L(s) = \frac{5}{(s+2)^2} \quad (ii) \quad L(s) = \frac{5}{s+2} \cdot e^{-s} \quad (iii) \quad L(s) = \frac{5}{s \cdot (s+3)}$$

$$(iv) \quad L(s) = \frac{5}{s^2 \cdot (s+2)} \quad (v) \quad L(s) = \frac{-2-s+s^5}{(s+2)^2} \quad (vi) \quad L(s) = \frac{9}{s \cdot (s-4)}$$



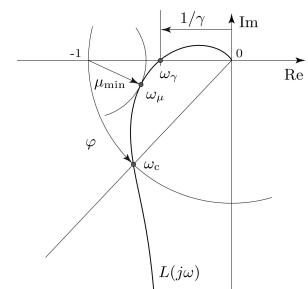
- $n_c = 0, n_+ = 0, n_0 = 0$. Das geschlossene Regelsystem ist somit asymptotisch stabil.
- $n_c = -2, n_+ = 0, n_0 = 0$. Das geschlossene Regelsystem ist somit instabil.
- $n_c = \frac{1}{2}, n_+ = 0, n_0 = 1$. Das geschlossene Regelsystem ist somit asymptotisch stabil.
- $n_c = -1, n_+ = 0, n_0 = 2$. Das geschlossene Regelsystem ist somit instabil.
- $n_c = 0, n_+ = 0, n_0 = 0$. Das geschlossene Regelsystem ist somit asymptotisch stabil.
- $n_c = -\frac{1}{2}, n_+ = 1, n_0 = 1$. Das geschlossene Regelsystem ist somit instabil.



7.4 Verstärkung und Phasenreserve:

Wie nahe sind wir an eine weitere Umdrehung?" (Nyquist diagramm)
Falls $L(s)$ eines Systems das nominelle Stabilitätskriterium **nicht erfüllt**, hat das resultierende $T(s) = \frac{L(s)}{1+L(s)}$ instabile Pole.

Falls $L(s)$ eines Systems das nominale Stabilitätskriterium **erfüllt** kann mittels Verstärkungs- und Phasenre-



serve eine Aussage bezüglich der Stabilität (Robustheit) gemacht werden. Es werden drei Robustheitsmasse eingeführt:

γ	Verstärkungsreserve	Verstärkungsreserve zu $(-1 + 0j)$ bei $\angle L(j\omega) = -\pi$
φ	Phasenreserve	Phasenabstand zu $-\pi$ bei der Durchtrittsfrequenz ω_c
μ	kritische Abstand	Kleinste Distanz zwischen $(-1 + 0j)$ und $L(j\omega)$

- Phasenreserve bei instabilen Systemen nicht well defined
- Es ist möglich mit 2 verschiedenen ω_c 2 gleiche φ zu haben!

$\gamma = \text{Distanz von 0db in Magnitude plot in Betrag} (> 0)$

$$\varphi = \pi + \arg\{L(j\omega_c)\}$$

$$\mu = \min_{\mu} |1 + L(j\omega)| = \frac{1}{\max_{\omega} |S(j\omega)|} \quad S \text{ gain maximal bei } \omega_{\mu}$$

Beispiel: Kritische Verstärkung k_p

Gegeben seien: $P(s) = \frac{1}{(s+2)(s^2+0.3s+1)}$ und $C(s) = k_p$.
Ab welche Verstärkung k_p wird das geschlossene System $T(s)$ stabil/unstabil?

$$r = 3 \text{ & } \alpha_{Ursprung} = 270^\circ$$

Stabil?

- Links von $(-1, 0) \rightarrow$ stabil
- Recht von $(-1, 0) \rightarrow$ instabil

Berechne kritische frequenz (ω_*): Frequenz wo Nyquistkurve die reelle Achse schneidet $\rightarrow \text{Im}(L(j\omega)) = 0 \rightarrow \omega_* = \sqrt{1.6}$.

$L(j\omega) = -\frac{k_p}{1.68}$ kritischer stelle wenn $L(j\omega) = -1$: geht durch den punkt. $\rightarrow k_{p,krit} = 1.68$ ($k_p < 1.68 \rightarrow \text{stabil}, k_p > 1.68 \rightarrow \text{instabil}$)

7.4.1 Vorgehen um Phasenreserve herauszufinden:

Um die Phasenreserve berechnen zu können, muss man die Phasen des offenen Regelkreises bei der Durchtrittsfrequenz berechnen.

1. Die Durchtrittsfrequenz durch Lösen der Gleichung $|C(j\omega_c)| = 1$
2. Nun wird die Phase bei der Durchtrittsfrequenz ω_c ausgerechnet. $\angle(L(j\omega_c))$
3. Um die Phasenreserve auszurechnen wird $-\pi$ mit der soeben erhaltenen Phase bei der Durchtrittsfrequenz subtrahiert

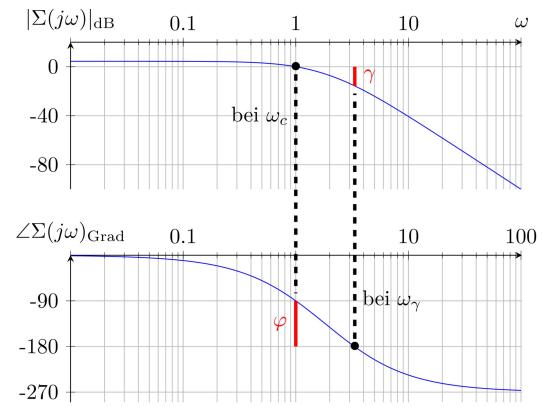
Beispiel: Phasenreserven

Das nominelle System $L(s)$ hat Phasenfehler α oder Verstärkungsfehler k gegenüber dem wahren System:

$$L_{t,\alpha}(s) = e^{-\alpha \cdot s / \omega_c} \cdot L(s), \quad L_{t,k}(s) = k \cdot L(s)$$

$L_{t,\alpha}$ ist stabil für $\alpha < \varphi$ und $L_{t,k}$ für $k < \gamma$. Falls beide Fehler gleichzeitig vorhanden sind, sind γ und φ keine guten Robustheitsmasse, Sie messen beide nur eindimensional.

7.5 Auslesen der Reserven bei Bode-Diagrammen:



7.6 Robustes Nyquist Theorem:

Ein wahres Modell der linearen und zeitinvarianten Regelstrecke $P_t(s)$ existiert, ist aber wegen Modellierungunsicherheit nicht bekannt. Stattdessen wurde ein Nominalmodell der Regelstrecke $P(s)$ und eine zugehörige multiplikative Unsicherheitübertragungsfunktion $W_2(s)$ gefunden. Der Regler $C(s)$ ist exakt bekannt. die wahre Kreisverstärkung des Systems $L_t(s) = P_t(s) \cdot C(s)$ ist Teil der Menge \mathcal{S}_L :

$$\mathcal{S}_L = \{P(s) \cdot C(s) \cdot (1 + \Delta \cdot W_2(s))\}$$

$$\text{mit } |\Delta| \leq 1, \angle \Delta \in [-\pi, \pi]$$

Es wird angenommen, dass $L(s)$ und $L_t(s)$ dieselbe Anzahl instabile ($n+$) und stabile (n_0) Pole haben.

Theorem: Robustes Stabilitätskriterium von Nyquist

Das robuste Stabilitätskriterium von Nyquist wird aus dem nominalen Nyquist-Stabilitätskriterium abgeleitet: Falls nämlich das nominale Nyquist-Stabilitätskriterium für jedes $L_t(j\omega) \in \mathcal{S}_L$ in Gl.(3) erfüllt ist, dann ist der Regelkreis garantiert asymptotisch stabil.

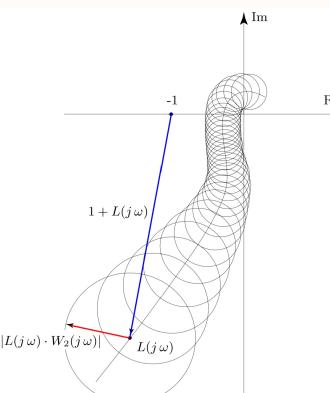
Umsetzung des robusten Stabilitätskriteriums: Durch betrachten der grössten Modellunsicherheit, d.h. mit $|\Delta| = 1$ und für alle möglichen Richtungen (Phasen) von Δ beschränken wir unsere Überlegung auf den schlimmsten Fall, d.h.

$$L_t(s) = L(s) + L(s) \cdot W_2(s)$$

\Rightarrow Kreise die durch $(0, 0)$ gehen. Um zusätzliche Umlenkungen des Punktes $(-1+0j)$ zu verhindern, darf der Unsicherheitsradius $|L(j\omega) \cdot W_2(j\omega)|$ nie grösser als $|1 + L(j\omega)|$ werden. Daraus folgt das robuste Stabilitätskriterium nach Nyquist:

$$|L(j\omega) \cdot W_2(j\omega)| < |1 + L(j\omega)|, \forall \omega \in [0, \infty)$$

$$\Rightarrow |T(j\omega)| < |W_2(j\omega)^{-1}|, \forall \omega \in [0, \infty)$$



8 Design von Regelungssystemen

8.1 Frequenzbedingung des geschlossenen Regelkreises:

8.1.1 Frequenzeigenschaften von Störungen und Rauschen:

Die Übertragungsfunktionen des geschlossenen Regelkreises $S(s)$ und $T(s)$ sind intrinsisch gekoppelt:

$$T(s) + S(s) = \frac{L(s)}{1 + L(s)} + \frac{1}{1 + L(s)} = 1, \forall s \in \mathbb{C}$$

$$Y(s) = S(s) \cdot D(s) + T(s) \cdot N(s)$$

- T : minimiert noise (Rausch) \rightarrow klein für hohe frequenzen $\omega > \omega_c$.
- S : minimiert disturbance ((Störungen)) \rightarrow klein für niedrige/tiefe frequenzen $\omega < \omega_c$.

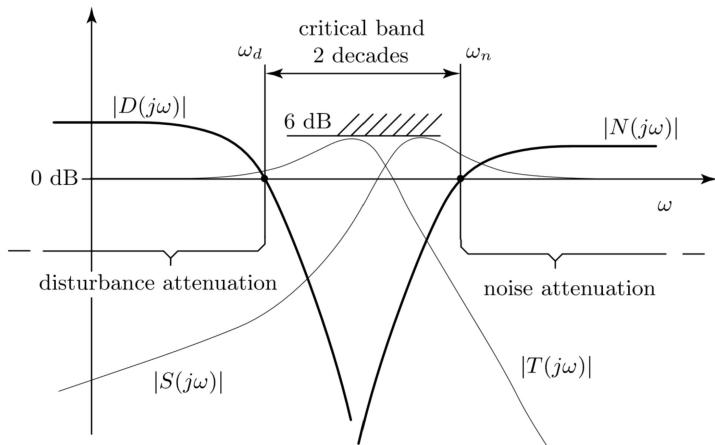
Dies setzt voraus, dass bei gegebener Frequenz ω^* entweder $|T(j\omega^*)|$ oder $|S(j\omega^*)|$ viel kleiner als 1 sein kann. **Störungen** werden mit $S(s)$ auf den Ausgang übertragen und **Rauschen** mit $T(s)$. Die generelle Aufgabe eines Reglers ist die gleichzeitige Unterdrückung von Rauschen und Störungen. Dies ist jedoch nur möglich wenn die Signale in unterschiedlichen Frequenzbändern auftreten. Dabei tritt Rauschen in der Regel bei hohen Frequenzen ($\omega > \omega_n$) auf und Störungen in der Regel bei tiefen Frequenzen ($\omega < \omega_d$). Daraus ergibt sich folgende Erkenntnis:

Niedrige Frequenzen $\omega < \omega_d$

$$|S(j\omega)| = \left| \frac{1}{1 + L(j\omega)} \right| \stackrel{!}{<} 1 \Rightarrow |L(j\omega)| \gg 1$$

Hohe Frequenzen $\omega > \omega_n$

$$|T(j\omega)| = \left| \frac{L(j\omega)}{1 + L(j\omega)} \right| \stackrel{!}{<} 1 \Rightarrow |L(j\omega)| \ll 1$$



Wichtig: $L(s) = \frac{T(s)}{S(s)}$; bei ω_c gilt $|S(j\omega_c)| = |T(j\omega_c)|$.

\Rightarrow Amplification of high frequency sensor noise: $\omega_n \rightarrow \infty \Rightarrow |T(s \rightarrow \infty)| = \dots$

8.1.2 Beschränkung der Sensitivität:

Der Frequenzgang der Sensitivität $S(j\omega)$ kann durch Einstellen des Reglers $C(j\omega)$ lokal beeinflusst werden.

Global betrachtet, über alle ω , muss die Sensitivität für alle stabilen geschlossenen Regelkreise (d.h. Stabilität durch das Nyquist Theorem bestimmt) folgende Gleichung erfüllen:

$$\int_0^\infty \ln|S(j\omega)| d\omega = \pi \cdot \sum_{i=1}^{n_+} \pi_i^+$$

wobei n^+ die Anzahl der instabilen Pole π^+ der Kreisverstärkung $L(s)$ ist. Diese Gleichung impliziert dass eine Verringerung von $|S(j\omega)|$ in einem Frequenzband durch eine Erhöhung in einem anderen Frequenzband kompensiert wird. Falls die Kreisverstärkung $L(s)$ keine instabilen Pole ($n_+ = 0$) vereinfacht sich die Gleichung zu:

$$\int_0^\infty \ln|S(j\omega)| d\omega = 0$$

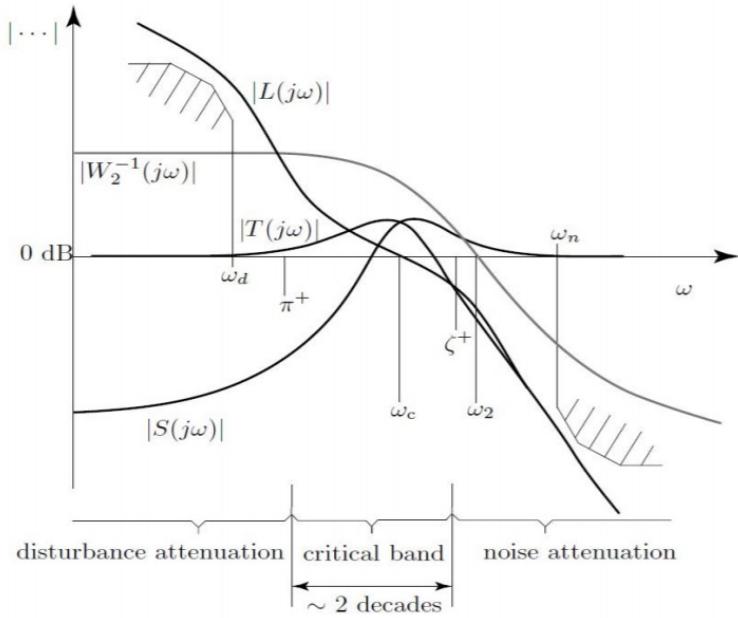
8.2 Beschränkung der Durchtrittsfrequenz:

ω_c ist die **Durchtrittsfrequenz**, und entspricht der Frequenz bei der das Bode-Diagramm von $L(j\omega)$ die 0dB-Linie schneidet. ω_b ist die **Bandbreite** des geschlossenen Regelkreises. Die Bandbreite ist ein Mass für die höchste Frequenz des Eingangssignals, die der geschlossene Regelkreis verfolgen kann.

Beim **geschlossenen Regelkreis**: $\omega_b := |T(j\omega_b)| = -3dB \approx 0.7$. Die Bandbreite entspricht ungefähr der Durchtrittsfrequenz. $\omega_b \approx \omega_c$

Zusammenfassend kann man folgende Formel für die Beschränkung Anwenden:

$$\omega_c = \begin{cases} \omega_c > \max\{10 \cdot \omega_d, 2 \cdot \omega_{\pi^+}\} \\ \omega_c < \min\{\frac{1}{10} \cdot \omega_n, \frac{1}{10} \cdot \omega_2, \frac{1}{2} \cdot \omega_\tau, \frac{1}{2} \cdot \omega_{\zeta^+}\} \end{cases}$$



8.2.1 Beschränkung durch Modellunsicherheiten W_2 :

aus dem robusten Stabilitätskriterium folgt:

$$|L(j\omega) \cdot W_2(j\omega)| < |1 + L(j\omega)|, \forall \omega \in [0, \infty)$$

$$\Rightarrow \left| \frac{L(j\omega)}{1 + L(j\omega)} \right| < \left| \frac{1}{W_2(j\omega)} \right|$$

$$\Rightarrow |T(j\omega)| < |W_2^{-1}(j\omega)|$$

Da die Unsicherheit $|W_2(j\omega)|$ tendenziell mit der Frequenz zunimmt ergibt sich dadurch eine **obere Grenze** der Bandbreite, und somit eine Beschränkung der Durchtrittsfrequenz von $|L(j\omega)|$.

Man will die Unsicherheit auf jeden Fall vermeiden. Deswegen wählt man als obere Schranke für die Durchtrittsfrequenz eine Dekade kleiner als die Unsicherheitsfrequenz.

$$\boxed{\omega_c < \frac{1}{10} \cdot \omega_2}$$

$$|W_2(j\omega_2)| = 1$$

8.2.2 Beschränkung durch eine Totzeit τ :

Die Übertragungsfunktion der Kreisverstärkung mit Verzögerung im Regler und der Regelstrecke ist gegeben durch:

$$L_\tau(s) = C(s) \cdot P(s) \cdot e^{-(\tau C + \tau P) \cdot s} = C(s) \cdot P(s) \cdot e^{-\tau \cdot s}$$

Die Totzeit induziert eine **obere** Grenze für die Durchtrittsfrequenz. Um die Totzeitsfrequenz gut zu vermeiden wird als Grenze die halbe Totzeitfrequenz gewählt.

$$\omega_c < \frac{1}{2} \cdot \omega_\tau = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\tau} \quad (\text{konservativer mit } \frac{1}{5} \text{ als Faktor})$$

8.2.3 Beschränkung durch nicht-minimalphasige Nullstellen ω_{ζ^+} :

Gegeben sei eine Regelstrecke $P(s) = \frac{n(s)}{d(s)}$ mit mindestens einer nicht-minimalphasigen Nullstelle. Um die Wirkung der Nullstellen zu veranschaulichen, wählt man einen konstanten Regler $C(s) = k_p$, $k_p \in \mathbb{R}$.

$$S(s) = \frac{d(s)}{d(s) + k_p \cdot n(s)}, \quad T(s) = \frac{k_p \cdot n(s)}{d(s) + k_p \cdot n(s)}$$

Wenn $k_p \rightarrow \infty$ strebt, nähern sich die Pole von $S(s)$ und $T(s)$, gegeben durch $d(s) + k_p \cdot n(s) = 0$, an die Lösung von $n(s) = 0$. Da $n(s)$ mindestens eine nicht-minimalphasige Nullstelle hat, wird das System bei $k_p = k_{p,\text{crit}}$ instabil. Dies impliziert, dass die Bandbreite durch eine **obere** Grenze beschränkt ist.

$$\omega_c < \frac{1}{2} \cdot \omega_{\zeta^+} \quad (\text{konservativer mit } \frac{1}{5} \text{ als Faktor})$$

wobei ω_{ζ^+} = kleinster positiver Nullstelle.

8.2.4 Beschränkung durch instabile Pole π^+ :

• Instabile Pole π^+ ohne Modellierungsunsicherheit

Nominelles Stabilitätskriterium von Nyquist prüfen der Regler so auslegen, dass das Kriterium für die Kreisverstärkung $L(S)$ erfüllt ist

Daraus folgt eine **untere** Schranke für die Durchtrittsfrequenz:

$$\omega_c > 2 \cdot \omega_{\pi^+} \quad (\text{konservativer mit } 5 \text{ als Faktor})$$

wobei ω_{π^+} = grossten positiven Pol.

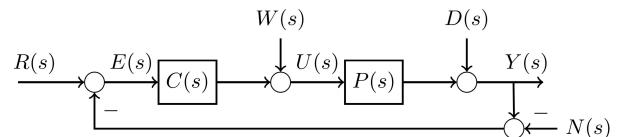
• Instabile Pole π^+ mit Modellierungsunsicherheit

zusätzlich zum Vorhergehenden Vorgehen müssen wir für instabile Pole mit Modellierungsunsicherheit zusätzlich noch

$$|W_2(\pi_i^+)| < 1, \forall i$$

8.3 Statischer Nachlauffehler:

Einfluss des Fehlers $e(t)$ im eingeschwungenen Zustand. Dazu wird der Regelkreis im Frequenzbereich betrachtet:



$E(s)$ als Funktion der Eingänge beschrieben:

$$E(s) = E_R(s) + E_N(s) + E_D(s) + E_W(s) \\ = \mathbf{S}(\mathbf{s}) \cdot [\mathbf{R}(\mathbf{s}) + \mathbf{N}(\mathbf{s}) - \mathbf{D}(\mathbf{s}) - \mathbf{P}(\mathbf{s}) \cdot \mathbf{W}(\mathbf{s})]$$

Achtung: Aufpassen bei $D(s)$ & $W(s)$! Bei $D(s)$ das - und bei $W(s)$ multiplizieren mit $-P(s)$ nicht vergessen.

Statische Regelfehler: $e_\infty = r - y_\infty$ mit r = Sollwert

Theorem: Statische Regelfehler Endwerttheorem

$$e_\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot E(s)$$

Achtung: Falls $e_\infty \neq 0 \Rightarrow |L(0)| \neq \infty$.

8.3.1 $U(s) = \text{Sprung}$:

Falls der Eingang $(R(s), N(s), -D(s))$ ein • (Sprung) ist, kann man den Fehler aus dem Endwerttheorem berechnen durch:

$$e_\infty^h = \lim_{s \rightarrow 0^+} s \cdot S(s) \cdot \frac{1}{s} = \lim_{s \rightarrow 0^+} S(s) = S(0)$$

$$y_\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot Y(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot T(s) \cdot \frac{1}{s} = T(0)$$

Alternativ: $e_\infty = 1 - T(0) = S(0)$

Man schreibt $S(0)$ als Funktion des offenen Regelkreises $L(0)$:

$$e_\infty^h = S(0) = \frac{1}{1 + L(0)}$$

$L(0)$ haengt vom Systemtyp k der Kreisverstaerzung $L(s)$ ab:

$$L(s) = \frac{b_m \cdot s^m + \dots + b_1 \cdot s + b_0}{s^k \cdot (s^{n-k} + a_{n-1-k} \cdot s^{n-1-k} + \dots + a_1 \cdot s + a_0)}$$

Es geben so 2 Faelle:

$$1. \quad k = 0 \Rightarrow L(0) = \frac{b_0}{a_0} \Rightarrow e_\infty^h = \frac{a_0}{a_0 + b_0}$$

$$2. \quad k > 0 \Rightarrow L(0) \rightarrow \infty \Rightarrow e_\infty^h \rightarrow 0$$

In anderen Worten kann ein System mit Systemtyp $k > 0$ einem konstanten Wert in der Referenz nach (un)-endlicher Zeit fehlerfrei folgen, als auch konstante Stoerungen unterdrucken. Fuer ein Systemtyp $k = 0$ wird die Antwort $y(t)$ vom konstant vorgegebenen Referenzsignal abweichen.

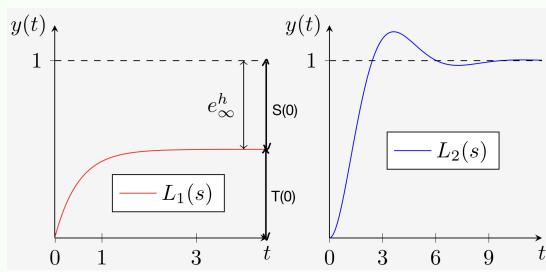
Beispiel: Nachlauffehler

$$L_1(s) = \frac{1}{s+1} (k=0), \quad L_2(s) = \frac{1}{s(s+1)} (k=1)$$

$$T_1 = \frac{1}{s+2}, \quad T_2 = \frac{1}{s^2+s+1}$$

Erstes System hat Systemtyp $k=0$ und weist somit einen Fehler in der Sprungantwort auf: $S_1(0) = \frac{1}{2}$.

Der zweite offene Regelkreis $L_2(s)$ hat Systemtyp $k=1$ ($L_2(s)$ strebt für $s \rightarrow 0$ linear gegen ∞). Daraus folgt, dass das zweite System fehlerfrei zum Sprung konvergiert.

**Beispiel: Statische Fehler Rampantwort**

Das Konzept des statischen Regelfehlers kann auch auf Referenzen höherer Ordnung erweitert werden:

$r_m(t) = \frac{1}{m!} \cdot t^m, t \geq 0, m \in \{0, 1, 2, \dots\}$ Aehnlich wie beim speziellen Fall der Sprungantwort ergibt sich mit Hilfe der Ordnung der Referenz m , und der Anzahl der offenen Integratoren von $L(s)$ (Systemtyp k) eine Fallunterscheidung:

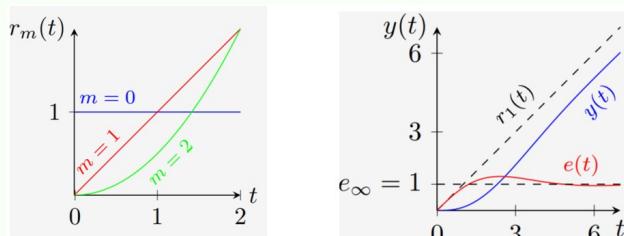
$$1. m < k \rightarrow e_\infty = \lim_{s \rightarrow 0+} \frac{1}{s^m \cdot (1+L(s))} = 0$$

$$2. m > k \rightarrow e_\infty = \lim_{s \rightarrow 0+} \frac{1}{s^m \cdot (1+L(s))} = \infty$$

$$3. m = k \rightarrow e_\infty = \lim_{s \rightarrow 0+} \frac{S(s)}{s^k} \notin \{0, \infty\}$$

Beispielhaft wird eine Rampenantwort ($m=1$) des zweiten Systems $T_2(s)$ ($k=1$) aus dem vorherigen Beispiel betrachtet. Da $k=m$ gilt, hat die Rampenantwort einen statischen Regelfehler.

$$S_2(s) = \frac{s(s+1)}{s^2+s+1} \rightarrow e_\infty = \lim_{s \rightarrow 0+} \frac{S(s)}{s^k} = 1$$

**8.3.2 $U(s) = \text{Stoerung:}$**

Falls der Eingang eine sprunghafte Stoerung ist (Betrag 1) dann ist die Uebertragung von stoerungen durch $S(s)$ beschrieben:

$$y_\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot Y(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot S(s) \cdot \frac{1}{s} = S(0)$$

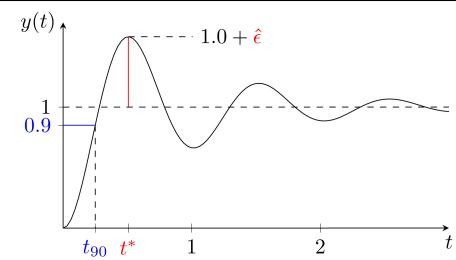
Alternativ: $e_\infty = 0 - S(0) = -S(0)$

8.4 Spezifikationen basierend auf Systeme 2. Ord:

Es wird angenommen, dass der **geschlossene Regelkreis $T(s)$** einem System zweiter Ordnung entspricht:

$$T(s) = \frac{\omega_0^2}{s^2 + 2 \cdot \delta \cdot \omega_0 \cdot s + \omega_0^2}$$

Dieser Regelkreis $T(s)$ soll Spezifikationen in der Anstiegszeit t_{90} und im relativen Überschwingen $\hat{\epsilon}$ erfüllen.



gewünschte $\hat{\epsilon}$ und t_{90} können durch auswählen der typischen Parametern eines System 2- Ordnung erreicht werden.

$$\delta = \frac{-\ln(\hat{\epsilon})}{\sqrt{\pi^2 + \ln^2(\hat{\epsilon})}}, \quad \omega_0 = (0.14 + 0.4 \cdot \delta) \cdot \frac{2 \cdot \pi}{t_{90}}$$

Nun werden die Spezifikationen an $T(s)$ in Anforderungen an die Kreisverstärkung $L(s)$ umgewandelt, unter Anwendung von $T(s) = \frac{L(s)}{1+L(s)}$.

Die Anforderungen des geschlossenen Regelkreises können in Anforderungen an die Durchtrittsfrequenz ω_c und die Phasenreserve φ der Kreisverstärkung $L(s)$ umformuliert werden:

$$\omega_c = \omega_0 \cdot \sqrt{\sqrt{4 \cdot \delta(\hat{\epsilon})^4 + 1} - 2 \cdot \delta(\hat{\epsilon})^2}$$

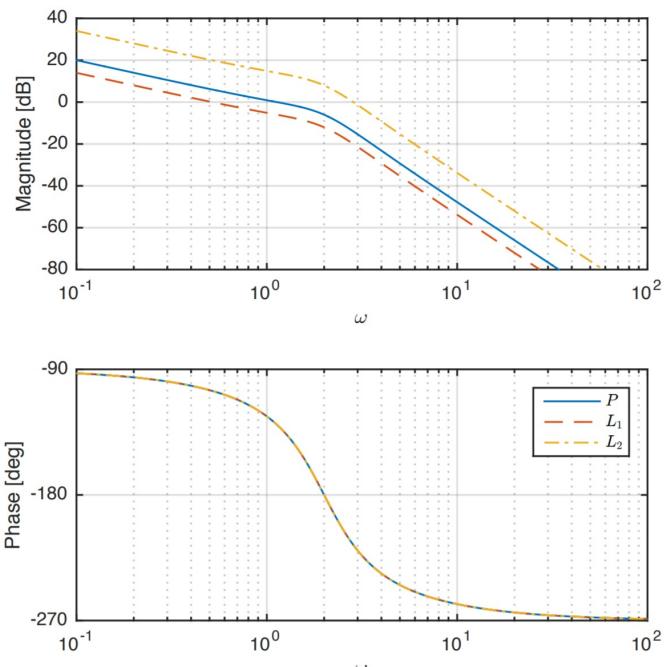
$$\varphi = \frac{\pi}{2} - \arctan \left(\frac{\sqrt{\sqrt{4 \cdot \delta(\hat{\epsilon})^4 + 1} - 2 \cdot \delta(\hat{\epsilon})^2}}{2 \cdot \delta(\hat{\epsilon})} \right)$$

diese Gleichungen können für $0.45 < \delta < 1$ mit den folgenden vereinfachten Zusammenhängen angennähert werden:

Durchtrittsfrequenz ω_c	$\approx \frac{1.7}{t_{90}}$
Phasenreserve φ	$\approx 71^\circ - 117^\circ \cdot \hat{\epsilon}$

(Systeme mit Dämpfungen δ ausserhalb der Menge $(0.45, 1)$ sind in der Praxis nicht relevant, weil sie entweder sehr stark überschwingen oder extrem langsam sind.)

Achtung: wenn die Verstaerkung k_p vergroessert wird, steigt/sinkt die magnitude um k_p . Somit wird die Durchtrittsfrequenz ω_c verschoben! Wir koennen so die jeweilige ω_c von $L(j\omega)$ in den richtigen Bereich verschieben (siehe 8.2 - Beschräenkung der Durchtrittsfrequenz-). Die Phasendiagramm bleibt unverändert bei einer Erhöhung/Niedrigung von k_p .

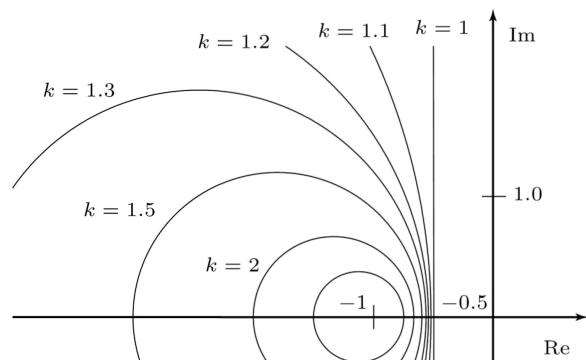


Beispiel: Erhöhung der Verstärkung k_p

Was passiert in $T(s)$ für steigende k_p und somit steigende ω_c ?

Wir definieren: $L(s) = k_p \cdot \frac{n(s)}{d(s)}$. Somit ist $T(s) = \frac{n(s) \cdot k_p}{d(s) + n(s) \cdot k_p}$.

- für $k_p = 0$: Polstelle $T(s) \rightarrow$ Nullstellen $d(s) \rightarrow$ Polstellen $L(s)$.
- für $k_p = \infty$: Polstelle $T(s) \rightarrow$ Nullstellen $n(s) \rightarrow$ Nullstellen $L(s)$. **Problem:** Polstellen $T(s)$ wandern von Polstellen $L(S)$ zu Nullstellen L_8S mit steigender k_p . Für ζ^+ kriegen wir π^+ in $T(s)$.



$L(j\omega)$ darf nicht in einem in $\frac{-T_{max}^2}{T_{max}^2 - 1}$ zentrierten Kreis mit Radius $\frac{T_{max}}{T_{max}^2 - 1}$ eintreten.

8.5 Frequenzbereich - Spezifikationen:

Die Störung $D(s)$ und das Rauschen $N(s)$ werden durch die Sensitivität $S(s)$ und durch die komplementäre Sensitivität $T(s)$ auf den Ausgang abgebildet:

$$Y(j\omega) = S(j\omega) \cdot D(j\omega) + T(j\omega) \cdot N(j\omega)$$

Um die Auswirkung von Störungen und Rauschen um die Durchtrittsfrequenz ω_c zu minimieren, beschränkt man den Maximalwert von $S(s)$ und $T(s)$.

$$\|S\|_\infty < S_{max}, \quad \|T\|_\infty < T_{max}, \quad S_{max}, T_{max} > 1,$$

wobei per Definition $\|\Sigma\|_\infty = \max_\omega |\Sigma(j\omega)|$.

Diese Bedingungen werden in Anforderungen an die Kreisverstärkung $L(s)$ umgewandelt:

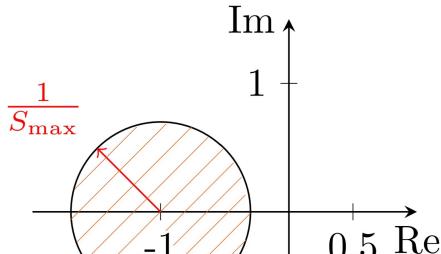
$$\begin{aligned} \|S\|_\infty < S_{max} &\Leftrightarrow L(j\omega) \notin \left\{ |1+z| \leq \frac{1}{S_{max}} \right\} \\ \|T\|_\infty < T_{max} &\Leftrightarrow L(j\omega) \notin \left\{ \left| \frac{T_{max}^2}{T_{max}^2 - 1} + z \right| \leq \frac{T_{max}}{T_{max}^2 - 1} \right\} \end{aligned}$$

mit $z \in \mathbb{C}$.

8.5.1 geometrische Interpretation:

Die geometrische Interpretation von

$$L(j\omega) \notin \left\{ |1+z| \leq \frac{1}{S_{max}} \mid z \in \mathbb{C} \right\}$$



$L(j\omega)$ darf nicht in einem in -1 zentrierten Kreis mit Radius $\frac{1}{S_{max}}$ eintreten.

Die geometrische Interpretation von

$$L(j\omega) \notin \left\{ \left| \frac{T_{max}^2}{T_{max}^2 - 1} + z \right| \leq \frac{T_{max}}{T_{max}^2 - 1} \mid z \in \mathbb{C} \right\}$$

9 Reglerauslegung

9.1 PID-Regler:

Proportionalregler	(P-Term)	$e(t)$
Integralregler	(I-Term)	$\frac{1}{T_i} \cdot \int_0^t e(\tau) d\tau$
Derivative-Term	(D-Term)	$T_d \cdot \frac{d}{dt} e(t)$

Der **I**-Term wird betragsmäßig grösser, je länger ein einseitiger Fehler (z.B. $e(t) > 0$) vorhanden ist. Der **D**-Term wirkt auf schnelle Änderungen im Fehlersignal. Ein Nachteil des D-Terms ist, dass er Rauschen auf dem Fehlersignal $e(t)$ verstärkt.

Eine Transformation in den Frequenzbereich ergibt

Proportionalregler	(P-Term)	$\frac{1}{T_i \cdot s}$
Integralregler	(I-Term)	$\frac{1}{T_i \cdot s}$
Derivative-Term	(D-Term)	$T_d \cdot s$

Im Zeitbereich sieht ein PID-Regler folgendermassen aus.

$$U_{PID}(t) = k_p \cdot \left(e(t) + \frac{1}{T_i} \cdot \int_0^t e(\tau) d\tau + T_d \cdot \frac{d}{dt} e(t) \right)$$

in den Frequenzbereich transformiert ergibt sich folgendes:

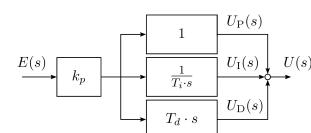
$$C_{PID}(s) = k_p \cdot \left(1 + \frac{1}{T_i \cdot s} + T_d \cdot s \right) = \frac{U(s)}{E(s)}$$

Da der D-Term sehr empfindlich auf Rauschen ist werden hohe Frequenzen ganz einfach unterdrückt, indem man eine hochfrequente doppelte Nullstelle an den Regler hängt. Sogenannte **roll-off** Term $\rightarrow \frac{1}{(\tau \cdot s + 1)^2}$.

$$C_{PID}(s) = k_p \cdot \underbrace{\left(\frac{T_d \cdot T_i \cdot s^2 + T_i \cdot s + 1}{T_i \cdot s} \right)}_{\text{nicht kausal}} \cdot \underbrace{\frac{1}{(\tau \cdot s + 1)^2}}_{\text{kausal}}$$

Ohne den roll-off Term wäre die Übertragungsfunktion $\frac{U(s)}{E(s)}$ nicht kausal und entsprechen nicht praktisch realisierbar. Um $u(t)$ ohne roll-off zu berechnen, bräuchte man Zukunftswerte des Fehlersignals $e(t)$.

PID-Regler als Standardform im Frequenzbereich



Pro Term ein Freiheitsgrad: Dh. mit einem P Regler kann nur die Durchtrittsfrequenz ODER die Phasenreserve eines Systems individuell verändert werden. Um beide Terme beinflussen zu können braucht man mehr Freiheitsgrade!

9.1.1 P-Term:

$$u_P(t) = k_p \cdot e(t), \quad U_P(s) = k_p \cdot E(s)$$

Der P-Term reagiert auf momentanen Wert des Fehlers $e(t)$. Die Stärke der Reaktion ist proportional zur Grösse des momentanen Fehlers. Wenn k_p zu gross ist kann zur Instabilität führen! Es kommt nicht immer mit ein e_∞ !

9.1.2 I-Term:

$$u_I(t) = \frac{k_p}{T_i} \cdot \int_0^t e(\tau) d\tau, \quad U_I(s) = \frac{k_p}{T_i} \cdot \frac{1}{s} \cdot E(s)$$

Der I-Term reagiert zum Zeitpunkt t proportional auf den kumulierten Fehler, für $t \in [0, t]$. Falls ein statischer Nachlauffehler vorhanden ist, wird dieser auf integriert, und der Reglerausgang wird immer grösser, bis kein Fehler mehr vorhanden ist. Ein Nachteil des Integrators ist, dass der Reglerausgang theoretisch beliebig gross werden kann.

I-Terme führen immer zu einem Phasenverlust.

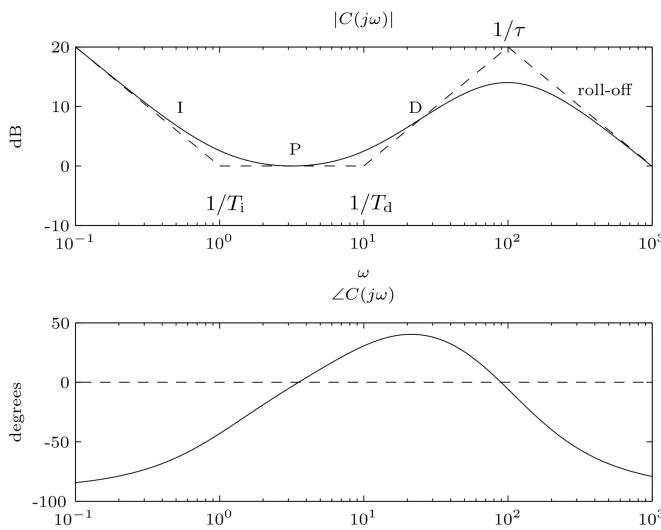
9.1.3 D-Term:

$$u_D(t) = k_p \cdot T_d \cdot \frac{d}{dt} e(t), \quad U_D(s) = k_p \cdot T_d \cdot s \cdot E(s)$$

Der D-Term wirkt antizipierend, er reagiert zum Zeitpunkt t auf die momentane Änderungsrate des Fehlers. Der D-Term wirkt wie ein Dämpfer gegen ein schnelles Erhöhen oder Verringern des Fehlers. Eine starke Änderung im Fehler resultiert in einem erhöhten Reglerausgang. Falls die Änderung zu stark ist, kann der gewünschte Reglerausgang grösser als der grösst mögliche Eingang eines Systems werden.

D-Term is sensitive to measurement noise, often fed with filtered error signal. As D-Term \uparrow , e_∞ is not affected! D-Terme führen immer zu einem Phasenanstieg.

9.1.4 Bodediagramm eines PID-Reglers mit roll-off:

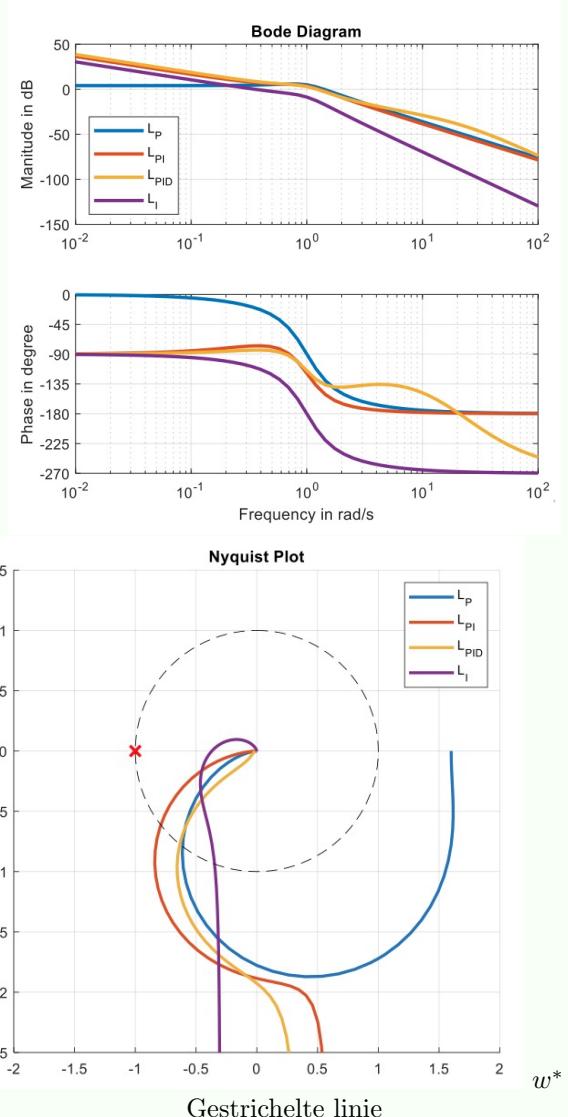


9.1.5 Regler aus Sprungantwort von $T(s)$:

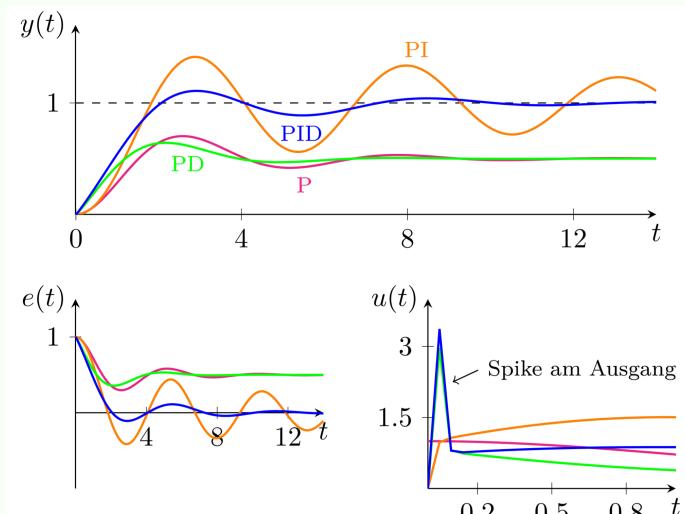
- P - Regler:** mit statische Nachlauffehler, higher gain, mehr oscillation.
- PI - Regler:** ohne statische Nachlauffehler, higher integrator time constant $T_i \rightarrow$ langsamer.
- PD - Regler:** mit statische Nachlauffehler, schnelle Antwort, wenige oscillation. Kann Phase um höchstens 90° erhöhen.
- PID - Regler:** ohne statische Nachlauffehler, schneller initial response, wenige oscillation.

Beispiel: Bode and Nyquist Plots of mass-oscillator

$$P(s) = \frac{1}{(s+1)^2}$$



Beispiel: Regelung eines Systems 2. Ordnung



Es ist ersichtlich, dass ein statischer Fehler durch den Integrator eliminiert werden kann. Der D-Term ermöglicht es, schneller auf die Fehleränderung zu reagieren, jedoch wird dadurch der Reglerausgang auch grösser.

9.2 PID-Regler Parameter Tuning nach Ziegler Nichols:

Beachte: wenn $P(s) = \text{Beliebig asymptotische stabile Reglerstrecke ist, dann ist } P(s) = \frac{1}{k_p^+}$

Die Parameter k_p , T_i und T_d können durch extensives Testen des Systems bestimmt werden. Ein anderer Ansatz ist, der von Ziegler-Nichols. Hier geht man davon aus, dass das System $P(s)$ ein System erster Ordnung, mit zusätzlicher relativ kleiner Totzeit ist

$$P(s) \approx \frac{k}{\tau \cdot s + 1} \cdot e^{-T \cdot s}, \quad \text{wobei: } \frac{T}{\tau + T} < 0.3$$

Zur Bestimmung der Ziegler-Nichols Parameter startet man mit einem reinen P-Regler und erhöht die Verstärkung k_p soweit, bis der geschlossene Regelkreis grenzstabil wird bei der Verstärkung k_p^* (Pole von $T(s)$ auf der imaginären Achse). Falls die Modellannahme ungefähr stimmt, oszilliert das grenzstabile System bei k_p^* mit einer Periode von T^* . Man kann diese Parameter des grenzstabilen System in folgende Tabellen einsetzen um Reglerparameter für verschiedene PID Kombinationen zu erhalten.

Die Ziegler und Nichols Methode benötigt kein mathematisches Modell der Regelstrecke. Wenn die Regelstrecke nicht grenzstabil angeregt werden darf, ist die Ziegler und Nichols Methode ungeeignet.

ω^* : Frequenz, bei der Phase = $-\pi$.

$$|k_p^* \cdot P(j\omega^*)| = 1 \quad \angle k_p^* \cdot P(j\omega^*) = -\pi \quad T^* = \frac{2\pi}{\omega^*}$$

Regler	k_p	T_i	T_d
P	$0.5 \cdot k_p^*$	$\infty \cdot T^*$	$0 \cdot T^*$
PI	$0.45 \cdot k_p^*$	$0.85 \cdot T^*$	$0 \cdot T^*$
PD	$0.55 \cdot k_p^*$	$\infty \cdot T^*$	$0.15 \cdot T^*$
PID	$0.6 \cdot k_p^*$	$0.5 \cdot T^*$	$0.125 \cdot T^*$

Beispiel: Winkel Scomposition

$$\angle \frac{k_p}{(j\omega + 1)^4} = ?$$

$$\angle = \arctan\left(\frac{0}{k_p}\right) - 4 \arctan\left(\frac{\omega}{1}\right)$$

Beispiel: PID Regler mit Ziegler Nichols

Gegeben sei folgendes System:

$$P(s) = \frac{1}{s(s+1)(s+2)}$$

man soll mit Ziegler /Nichols ein Regler auslegen. Zur Bestimmung der kritischen Verstärkung k_p^* und der kritischen Frequenz ω^* können die folgenden Beziehungen verwendet werden:

$$k_p^* \cdot P(j\omega^*) = -1 + 0j$$

Es folgt somit

$$\begin{aligned} \frac{k_p^*}{-j(\omega^*)^3 - 3(\omega^*)^2 + 2j\omega^*} &= -1 \\ k_p^* &= -(-3(\omega^*)^2 - j((\omega^*)^3 - 2\omega^*)) \\ k_p^* &= 3(\omega^*)^2 + j((\omega^*)^3 - 2\omega^*) \end{aligned}$$

Aus dem Vergleich des Imaginärteils findet man

$$(\omega^*)^3 - 2\omega^* = \omega^* \cdot ((\omega^*)^2 - 2) = 0$$

Da wir nur an positiven realen Frequenzen ($k_p^* \in \mathbb{R}$) interessiert sind, folgt $\omega^* = \sqrt{2}$ Aus dem Vergleich der Realteilen folgt

$$k_p^* = 3(\omega^*)^2 = 6$$

9.3 Iterative Loop Shaping:

Loop shaping is used to ensure that the open-loop transfer function has a crossover frequency that is sufficiently faster than its unstable poles.

Ein System, das mit einem PID-Regler ausgelegt wird, erfüllt unter Umständen nicht alle Designspezifikationen. Um gewisse Frequenzbänder nach Wunsch abzuändern, kann man einen beliebigen Regler zum Beispiel mit Lead-/Lag- Elementen erweitern oder einen Regler von Grund auf neu erstellen.

9.4 Lead-Lag Elemente 1. Ordnung:

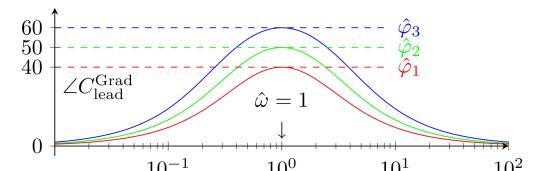
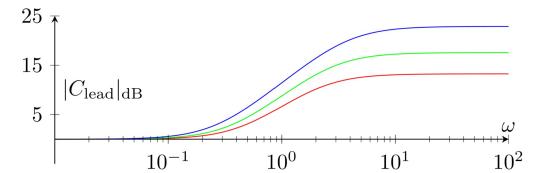


Abb. 1: Lead-Element für $\hat{\omega} = 1$ und $\phi = \{40, 50, 60\}$

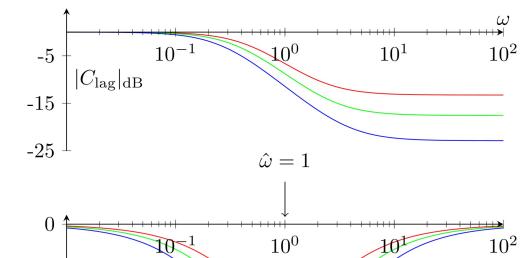


Abb. 2: Lag-Element für $\hat{\omega} = 1$ und $\phi = \{-40, -50, -60\}$

Lead and Lag-elements are used to influence the frequency response of the open loop system in selected frequency bands.

Der Term 'Lead-Lag' bezeichnet zwei Arten von Systemen mit gleicher Struktur und den zwei Parametern α und T :

$$C(s) = \frac{T \cdot s + 1}{\alpha \cdot T \cdot s + 1}, \quad \alpha, T \in \mathbb{R}_+$$

Der Wert von α definiert ob es sich um ein Lead- oder ein Lag-Element handelt:

$$\begin{array}{ll} 0 < \alpha < 1 & \Leftrightarrow \text{Lead-Element} \\ 1 < \alpha & \Leftrightarrow \text{Lag- Element} \end{array}$$

Bei einer Lead-Element liegt der Nullstelle bei tiefen Frequenzen als das Polstelle. Bei einer Lag-Element ist die Situation das umgekehrt.

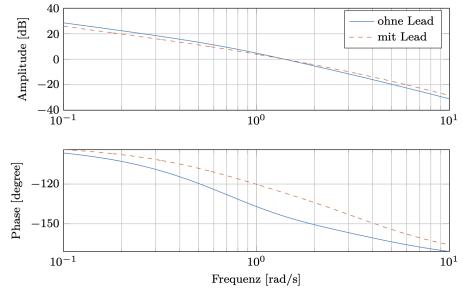
Die Parameter α und T werden gezielt gewählt, sodass bei der Frequenz $\hat{\omega}$ eine maximale Phasenänderung von $\hat{\phi}$ vorliegt:

$$\alpha = \left(\sqrt{\tan^2(\hat{\phi}) + 1} - \tan(\hat{\phi}) \right)^2, \quad T = \frac{1}{\hat{\omega} \cdot \sqrt{\alpha}}$$

Ein Lag- Element (decreases System bandwidth) mit $-\hat{\phi}$ entspricht einer Spiegelung des Magnituden und Phasendiagramms des Lead-Elements mit $\hat{\phi}$.

Beispiel: Lead-Lag Elemente System 1-Ordnung

Gegeben sei das Bode Diagramm von $L(S)$. Der Ueberschwingen soll halbiert werden, w_c soll gleich bleiben um t_{90} nicht zu veraendern.



Aus dem Bode Diagramm kann die Phasenreserve abgelesen werden: $\varphi \approx 35.6^\circ \Rightarrow \hat{\epsilon} = \frac{71^\circ - 35.6^\circ}{117^\circ} \approx 0.3 \Rightarrow \epsilon_{neu} \approx 0.15 \Rightarrow \varphi_{neu} = 71^\circ - 117^\circ \cdot \epsilon_{neu} \approx 53.3^\circ$.

Bei ω_c muss die Phase um $\hat{\varphi} = \varphi_{neu} - \varphi \approx 17.7^\circ$ erhoeht werden.

Phasenantieg bei ω_c , so ist $\hat{\omega} = \omega_c \Rightarrow \alpha = \dots, T = \dots$

Damit sich ω_c und somit t_{90} nicht aendern, muss $k_{p,neu}$ angepasst werden: $L(j\omega_c) = k_{p,neu} \cdot C(j\omega_c) = x \cdot k_p \cdot C(j\hat{\omega}) = 1 \Rightarrow k_{p,neu} = \frac{1}{|C(j\hat{\omega})|} \cdot k_p = \frac{1}{1.37} \cdot k_p$

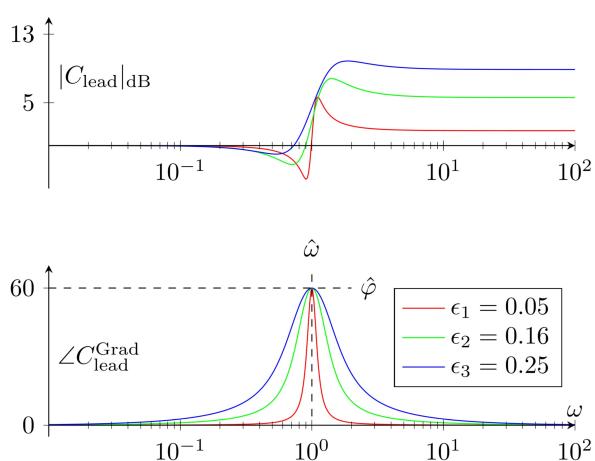
9.5 Lead-Lag Elemente 2. Ordnung:

Die Verwendung eines Elements 1. Ordnung beeinflusst Frequenzen in der grösseren Umgebung von $\hat{\omega}$. Die Idee eines Elements 2. Ordnung ist, dass der gewünschte Effekt an einer bestimmten Frequenz besser isoliert ist. Die Struktur erfordert die Parameter κ, ϵ , und ω_0

$$C(s) = k \cdot \frac{s^2 + 2 \cdot \kappa \cdot \epsilon \cdot (1 - \epsilon) \cdot \omega_0 \cdot s + (1 - \epsilon)^2 \cdot \omega_0^2}{s^2 + 2 \cdot \kappa \cdot \epsilon \cdot (1 + \epsilon) \cdot \omega_0 \cdot s + (1 + \epsilon)^2 \cdot \omega_0^2}$$

Zusätzlich zur Wahl der mittleren Frequenz $\hat{\omega}$ und der maximalen Phasenverschiebung $\hat{\varphi}$ kann man nun zusätzlich die Breite des Frequenzbands durch den Parameter ϵ wählen (ϵ = Bandbreite):

$$k = \frac{(1 + \epsilon)^2}{(1 - \epsilon)^2}, \quad \kappa = \frac{\cot(\hat{\varphi}/2)}{\sqrt{1 - \epsilon^2}}, \quad \omega_0 = \frac{\hat{\omega}}{\sqrt{1 - \epsilon^2}}$$



9.6 Inversion der Regelstrecke:

Wenn die Regelstrecke $P(s) = \frac{n_p(s)}{d_p(s)}$ mit relativem Grad r asymptotisch stabil ist und nur minimalphasige Nullstellen enthält, kann ein Regler $C(s)$ gewählt werden, der die Dynamik der Regelstrecke exakt kompensiert und gleichzeitig in einer gewünschten Übertragungsfunktion $L(s)$ des offenen Regelkreises resultiert:

$$\begin{aligned} L(s) &= P(s) \cdot P(s)^{-1} \cdot \underbrace{\frac{1}{T_i \cdot s} \cdot \frac{1}{(\tau \cdot s + 1)^{r-1}}}_{C(s)} \\ \Rightarrow C(s) &= P(s)^{-1} \cdot \frac{1}{T_i \cdot s} \cdot \frac{1}{(\tau \cdot s + 1)^{r-1}} \\ C(s) &= \frac{d_p(s)}{n_p(s)} \cdot \frac{1}{T_i \cdot s} \cdot \frac{1}{(\tau \cdot s + 1)^{r-1}} \end{aligned}$$

Der Regler invertiert die Dynamik der Regelstrecke, und somit haben die Pole und Nullstellen von $P(s)$ keinen Einfluss auf die Übertragungsfunktion des offenen Regelkreises $L(s)$. Die übrigen Elemente von $C(s)$ stellen sicher, dass die gewünschte Übertragungsfunktion $L(s)$ des offenen Regelkreises resultiert:

$$L(s) = \frac{1}{T_i \cdot s} \cdot \frac{1}{(\tau \cdot s + 1)^{r-1}}$$

Mit der Verstärkung $T_i = \omega_c^{-1}$ kann die gewünschte Durchtrittsfrequenz ω_c eingestellt werden. Zusätzlich wählen wir $\tau < T_i$ und $\omega_c < \omega_2$.

Beispiel: Maximale Totzeit

Für welche maximale Totzeit $e^{-\tau s}$ ist der geschlossene Regelkreis (mit $C(s) = k_p = 1$ noch stabil?

1. ω_c bei dem $|\Sigma(S)| = 0dB$ aus Bode auslesen.
2. Phasenreserve φ in radian berechnen
3. $\tau_{max} = \frac{\varphi}{\omega_c}$

9.7 PID - Tuning:

9.7.1 Åström-Hägglund Verfahren:

Spezifikation des Reglers anhand von $\{k_p^*, T^*, |P(0)|\}$. Zusätzliche Auswahl zwischen aggressiven/robusten Regler ($\mu_{min} \approx 0.5 / \mu_{min} \approx 0.7$)

$$\{k_p^*, T^*, |P(0)|, \mu_{min}\} \rightarrow \{k_p, T_i, T_d\}$$

x	$\mu_{min} = 0.7$			$\mu_{min} = 0.5$		
	$\alpha_{0,x}$	$\alpha_{1,x}$	$\alpha_{2,x}$	$\alpha_{0,x}$	$\alpha_{1,x}$	$\alpha_{2,x}$
k_p/k_p^*	0.053	2.90	-2.60	0.13	1.90	-1.30
T_i/T^*	0.90	-4.40	2.70	0.90	-4.40	2.70
a	1.10	-0.0061	1.8	0.48	0.40	-0.17

Åström-Hägglund Koeffizienten für PI-Regler

x	$\mu_{min} = 0.7$			$\mu_{min} = 0.5$		
	$\alpha_{0,x}$	$\alpha_{1,x}$	$\alpha_{2,x}$	$\alpha_{0,x}$	$\alpha_{1,x}$	$\alpha_{2,x}$
k_p/k_p^*	0.33	-0.31	-1.00	0.72	-1.60	1.20
T_i/T^*	0.76	-1.60	-0.36	0.59	-1.30	0.38
T_d/T^*	0.17	-0.46	-2.10	0.15	-1.40	0.56
a	0.58	-1.3000	3.5	0.25	0.56	-1.20

Åström-Hägglund Koeffizienten für PID-Regler

mit diesen Parametern können wir $\square \in \{a, k_p, T_i, T_d\}$ bestimmen.

$$\square = \square^* \cdot \alpha_{0,x} \cdot e^{\alpha_{1,x} \cdot \kappa + \alpha_{2,x} \cdot \kappa^2} \text{ mit } \kappa = \frac{1}{|P(0)| \cdot k_p^*}$$

Note:

- $T^* = T_i^*$, T_d^* oftmals gibt Åström-Häggblund Verfahren bessere Resultate als Ziegler-Nichols. Dies ist jedoch nicht immer der Fall.
- Beim set point weight a wählt man für $a^* = 1$
- Das Design ist nicht garantiert gut oder stabil, dementsprechend soll ein a posteriori Test der closed-loop Stabilität, Frequenz Antwort der Kreisverstärkung, Simulation der Störungsunterdrückung des closed-loop System durchgeführt werden.

9.7.2 Direktspezifikationen:

Ziel der Direktspezifikation ist die PID- parameter so zu wählen, dass die Kreisverstärkung $L(s)$ die gewünschte **Übergangsfrequenz** ω_c , **Phasenereserve** φ und **Steigung** ψ erzielt. Zusätzlich brauchen wir noch

$$\begin{aligned} r_P &= |P(j\omega_c)| & \varphi_P &= \angle P(j\omega_c) \\ r'_P &= \left. \frac{\partial r_P(\omega)}{\partial \omega} \right|_{\omega=\omega_c} & \varphi'_P &= \left. \frac{\partial \varphi_P(\omega)}{\partial \omega} \right|_{\omega=\omega_c} \end{aligned}$$

Mit diesen Werten können wir nun die PID-Parameter bestimmen:

$$k_P = -\frac{1}{r_P} \cos(\varphi - \varphi_P)$$

$$\begin{aligned} T_d &= \frac{1}{2} \cdot \left(\tan(\psi - \varphi_P) \left(\frac{r'_P}{r_P} - \varphi'_P \tan(\varphi - \varphi_P) \right) \right. \\ &\quad \left. + \tan(\varphi - \varphi_P) \left(\frac{1}{\omega_c} - \frac{r'_P}{r_P} \right) - \varphi'_P \right) \end{aligned}$$

$$T_i = (T_d \cdot \omega_c^2 - \tan(\varphi - \varphi_P) \cdot \omega_c)^{-1}$$

Note:

Die Stabilität ist mit diesem Verfahren nicht garantiert. Phase muss in der Formel in Radian angegeben werden.

9.8 Prädiktive PI Regler:

für Regelstrecken mit wesentlicher Totzeit, das heisst falls

$$\frac{T}{T + \tau} > 0.3$$

kann man nicht einfach einen PID-Regler auslegen. Stattdessen legt man einen Controller aus der mit der Totzeit umgehen kann.

9.8.1 Prädiktive PI Regler für einfache Regelstrecken:

Annahme: Regelstrecke erster Ordnung

$$P(s) \approx \frac{k}{\tau s + 1} \cdot e^{-Ts}$$

man wählt die gewünschte **Sensitivität**

$$S(s) = 1 - \frac{1}{s \cdot \sigma \cdot \tau + 1 \cdot e^{-Ts}} = 1 - T(s)$$

mit σ = Tuning-Parameter Der Kontroller der die gewünschte Kreisverstärkung erfüllt hat folgende Form

$$C(s) = \frac{1 - S(s)}{S(s) \cdot P(s)} = \frac{\tau \cdot s + 1}{k \cdot (\sigma \cdot \tau \cdot s + 1 - e^{-Ts})}$$

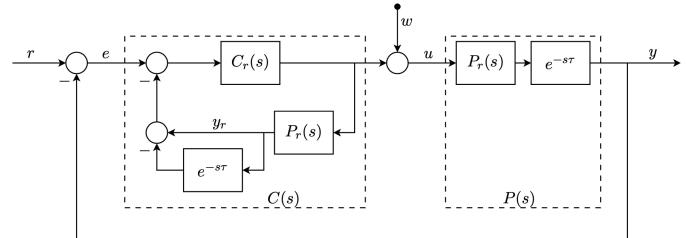
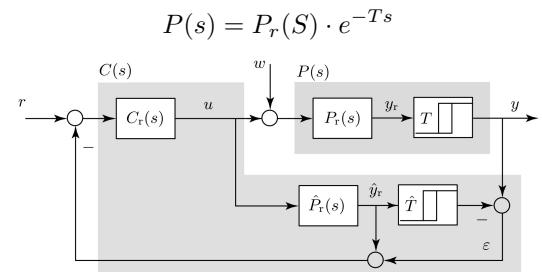
Somit lautet die Eingangsgrösse:

$$U(s) = \underbrace{\frac{1}{\sigma k} \left(1 + \frac{1}{\tau \cdot s} \right) E(s)}_{\text{PI-Regler}} - \underbrace{\frac{1}{\sigma \tau s} (1 - e^{-Ts}) \cdot U(s)}_{\text{Prädiktive Korrektur}}$$

Note: Falls $T = 0$ wird die prädiktive Korrektur 0 und der resultierende Eingang wird zu einem einfachen PI - Regler.

9.8.2 Smith Predictor:

Annahme: System hat einen rationalen Teil und eine Totzeit



wenn es keine Modellfehler gibt ($P_r(s) = \hat{P}_r(s)$, $T = \hat{T}$) und keine Störung ($\omega = 0$) ($\Rightarrow \epsilon = 0$), resultiert folgende komplementäre Sensitivität:

$$L_{\text{pred}} = \underbrace{\frac{C_r(s)}{1 + C_r(s) \cdot \hat{P}_r(s) \cdot (1 - e^{-s\hat{T}})}}_{C(s)} \cdot P_r(s) \cdot e^{-sT}$$

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = e^{-Ts} \cdot \frac{P_r(s) C_r(S)}{1 + P_r(S) C_r(s)} = e^{-Ts} \cdot T_{\text{ref}}(S) = T(s)$$

Auflösen der obigen Gleichung nach $C(s)$ liefert

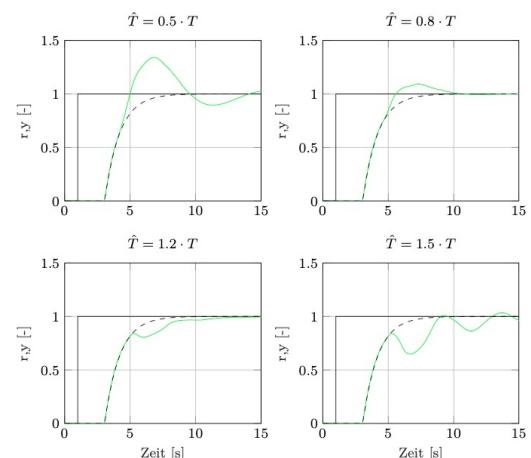
$$C_r(s) = \frac{T_{\text{ref}}(s)}{P_r(s) \cdot (1 - T_{\text{ref}}(s))}$$

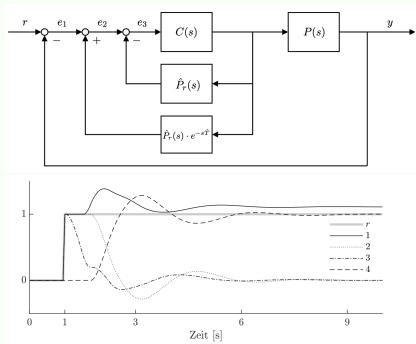
Achtung: Der Regler enthaelt die Invertierung der Strecke, weist die Strecke nich-minimalphasige Nullstellen oder instabile Pole auf, so kommt es zu einer Kuerzung eines Instabilen Poles mit einer nicht-minimalphasigen Nullstelle.

Note:

- Falls Modellfehler und Störungen vorhanden sind wird die Gleichung für die komplementäre Sensitivität wesentlich komplizierter!
- Nicht minimalphasige NST von $P(s)$ werden zu instabilen Polen
- Damit der Smith-Praediktor gut funktioniert, muss die modellierte Totzeit \hat{T} ziemlich genau der Totzeit T entsprechen.

Schätzungsfehler von der Totzeit T kann grosse Auswirkungen auf das Systemverhalten haben. Bei einem Schätzfehler von $\pm 20\%$ kann immer noch eine schnelle und robuste Systemantwort ohne übermässige Abweichungen vom Referenzsystem erzielt werden.



Beispiel: Prediktive Regler interne fehler

- $y \Rightarrow 4$
- $e_1 \Rightarrow 2$
- $e_2 \Rightarrow 1$
- $e_3 \Rightarrow 3$

Die gezeigten Kurven sind die Ergebnisse der Simulation für die vier Parameter.

Die gestrichelten Kurven stellen die tatsächlichen Werte dar, während die durchgehenden Linien die gesuchten Werte darstellen.

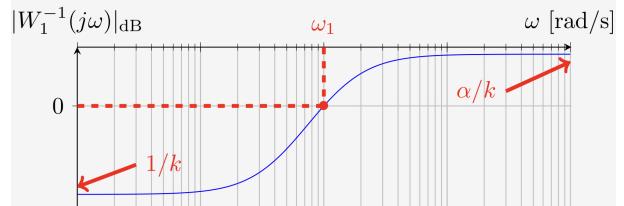
Die Kurven zeigen, dass die Systeme mit den Parametern 1 und 2 instabil sind, während die Systeme mit den Parametern 3 und 4 stabil sind.

10.2.2 Konstruktion der nominellen Regelgüte:

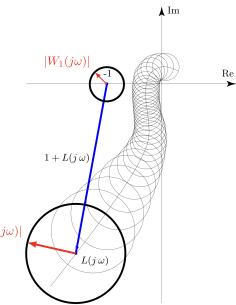
$W_1(s)$ kann als Lowpass-Filter konstruiert werden:

$$W_1(s) = k \cdot \frac{\tau \cdot s + 1}{\alpha \cdot \tau \cdot s + 1}, \quad k > 1, \alpha > k$$

$$\tau^2 = \frac{k^2 - 1}{\omega_1^2 \cdot (\alpha^2 - k^2)}, \quad |W_1(j\omega_1)| = 1$$

**10.2.3 Robuste Regelgüte:**

Wenn gleichzeitig das robuste Nyquist Theorem und die nominelle Spezifikation erfüllt sein sollen spricht man von der *Robusten Regelgüte*.



$$|W_1(j\omega) \cdot S(j\omega)| + |W_2(j\omega) \cdot T(j\omega)| < 1$$

$$|W_1(j\omega)| + |W_2(j\omega) \cdot L(j\omega)| < |1 + L(j\omega)|$$

Um Spezifikationen der Sensitivität und Modellunsicherheit in jedem Fall zu berücksichtigen darf die summierte Länge der beiden roten Pfeile nie länger sein als der blaue Pfeil. Die Beiden Kreise dürfen sich für keine Frequenz berühren/schneiden. Damit robuste Regelgüte erfüllt ist, muss nun $|W_2(j\tilde{\omega})| < 1$ sein, so dass sich der Kreis mit Radius $|W_1(j\tilde{\omega})|$ und der Kreis mit Radius $|W_2(j\tilde{\omega})L(j\tilde{\omega})|$ nicht überschneiden.

Erinnerung: Fuer jede reale Regelsystem gilt fuer $\omega \rightarrow \infty \rightarrow |L(j\omega)| = 0$ und $|S(j\omega)| \rightarrow 1, |T(j\omega)| \rightarrow 0$

10.2.4 Approximative Spezifikation:

Um einen Regler zu finden, der robuste Regelgüte garantiert ist es einfacher wenn man diese nach $L(j\omega)$ umformuliert. Dies ist einfach für sehr hohe und sehr tiefe Frequenzen

Tiefe Frequenzen: $\omega < 0.1 \cdot \omega_c \Rightarrow |L(j\omega)| \gg 1$

Robuste Regelgüte vereinfacht sich zu

$$|W_1(j\omega)| + |W_2(j\omega) \cdot L(j\omega)| < |L(j\omega)|$$

$$\Rightarrow |L(j\omega)| > \frac{|W_1(j\omega)|}{1 - |W_2(j\omega)|}$$

Lösung kann nur existieren falls $|W_2(j\omega)| < 1$.

Hohe Frequenzen: $\omega > 10 \cdot \omega_c \Rightarrow |L(j\omega)| \ll 1$

Robuste Regelgüte vereinfacht sich zu

$$|W_1(j\omega)| + |W_2(j\omega) \cdot L(j\omega)| < 1$$

$$\Rightarrow |L(j\omega)| < \frac{1 - |W_1(j\omega)|}{|W_2(j\omega)|}$$

Diese Approximation betrachtet $[0.1 \cdot \omega_c, 10 \cdot \omega_c]$ nicht. In diesem band ist es vor allem wichtig Stabilität und Robustheit zu garantieren.

10 Spezifikation der Sensitivität**10.1 Multiplikative Unsicherheit von $T(s)$:**

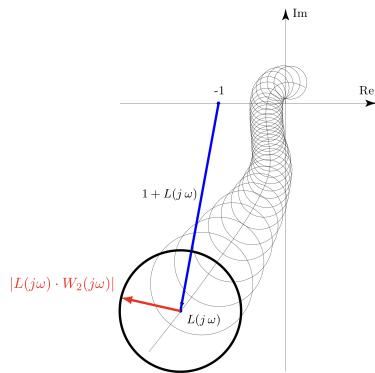
Modellunsicherheit $W_2(s)$ ist multiplikativ für die komplementäre Sensitivität eingeführt. Dies führt zum *robusten Nyquist Theorem*:

$$|T(j\omega) \cdot W_2(j\omega)| < 1 \Rightarrow |L(j\omega) \cdot W_2(j\omega)| < |1 + L(j\omega)|$$

Im Bode-Plot kann man das relativ einfach überprüfen, indem man schaut ob folgende Ungleichung erfüllt ist.

$$|T(j\omega)| < |W_2^{-1}(j\omega)|$$

Man kann das wie folgt geometrisch interpretieren:



Der rote Radius darf nicht grösser werden als der blaue Abstand vom Punkt $(-1 + j0)$ um zusätzliche Umrundungen vom krit. Punkt zu verhindern.

10.2 Multiplikative Spezifikation von $S(s)$:

Wir wünschen eine betragsmässig kleine Sensitivität um Störungsunterdrückung und gutes reference tracking zu garantieren. Es ist daher sinnvoll den Betrag $|S(s)|$ frequenzabhängig zu limitieren (Disturbances nicht bei allen Frequenzen gleich relevant).

10.2.1 Nominelle Regelgüte:

Um die Sensitivität zu Betragsmässig zu begrenzen wird eine rationale TF $W_1(s)$ eingeführt, wobei gelten muss:

$$\|S(s) \cdot W_1(s)\|_\infty < 1 \Rightarrow |S(j\omega)| < |W_1^{-1}(j\omega)|$$

$$|W_1(j\omega)| < |1 + L(j\omega)|$$

Die geometrische Interpretation von $W_1(s)$ ist, dass $L(j\omega)$ nicht in einen um $(-1+j0)$ zentrierten Kreis mit Radius $|W_1(j\omega)|$ eintreten darf.

10.2.5 Kompatibilitätsbedingung:

Aus RT1: Durchtrittsfrequenz ω_c von $L(j\omega)$ soll folgende Bedingungen erfüllen:

$$\omega_c = \begin{cases} \omega_c > \max\{10 \cdot \omega_d, 2 \cdot \omega_{\pi^+}\} \\ \omega_c < \min\{\frac{1}{10} \cdot \omega_n, \frac{1}{10} \cdot \omega_2, \frac{1}{2} \cdot \omega_\tau, \frac{1}{2} \cdot \omega_{\zeta^+}\} \end{cases}$$

Für konservativere Bedingungen wählt man $5 \cdot \omega_{\pi^+}$ und/oder $\frac{1}{5} \cdot \omega_\tau, \frac{1}{5} \cdot \omega_{\zeta^+}$

Dabei sind $\omega_d, \omega_{\pi^+}, \omega_n, \omega_2, \omega_\tau, \omega_{\zeta^+}$ die Frequenzen der Störung, des schnellsten instabilen Poles von $L(s)$, des Rauschens, von $|W_2(j\omega_2)| = 1$, der Totzeit und der langsamsten nicht-minphasigen NST.

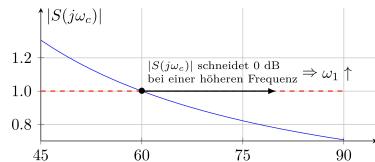
Die Frequenz ω_1 bei $|W_1(j\omega_1)| = 1$ muss kleiner sein als ω_2 , so dass ω_c genügend Marge hat. Zudem muss ω_1 aber schneller sein als die untere Schranke für ω_c . Man wählt als erste Schätzung

$$\omega_1 \approx \max\{10 \cdot \omega_d, 2 \cdot \omega_{\pi^+}\}$$

Zusätzlich muss ω_1 grösser gewählt werden, je grösser die gewünschte Phasenreserve φ sein soll. Dies kann mit der Magnitude der Sensitivität bei ω_c interpretiert werden:

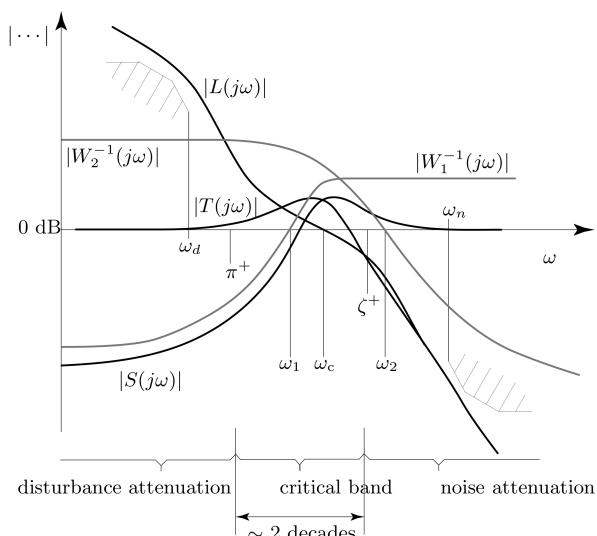
$$|S(j\omega)| = \frac{1}{|1 + L(j\omega_c)|} = \frac{1}{|1 + 1 \cdot e^{-j(\pi - \varphi)}|} = \frac{1}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{1 - \cos \varphi}}$$

In der Regel nimmt $|S(j\omega)|$ mit ansteigender Frequenz zu und schneidet die 0 dB Linie einmalig.



In Abb. oben ist die Magnitude der Sensitivität als Funktion der Phasenreserve dargestellt. Magnitude wird kleiner, je grösser die gewünschte Phasenreserve ist. Dh, die Sensitivität muss die 0 dB Linie bei einer höheren Frequenz schneiden, je grösser φ sein soll. $\Rightarrow \omega_1$ muss höher spezifiziert werden.

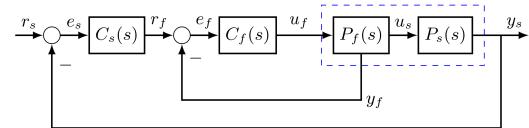
Man kann auch mit Abb. in 12.2.1 argumentieren. $|W_1(j\omega)|$ wird bis zu ω_1 grösser als 1 sein. Je grösser $|W_1(j\omega)|$ ist, desto grösser muss φ sein, da ansonst $L(j\omega)$ den Kreis von $|W_1(j\omega)|$ eintreten würde.



11 Kaskadierte Systeme

11.1 Kaskadierte Regelsysteme:

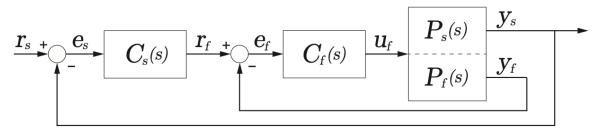
Kaskadierte Regelsysteme eignen sich für SIMO Systeme mit einer schnellen und einer langsamen Teildynamik. Um die olle Bandbreite der schnellen Dynamik auszunützen werden verschiedene Regler für das schnelle und das langsame Teilsystem ausgelegt.



Um die Bandbreite des schnellen Systems auszunützen wird für $C_f(s)$ oftmals kein Integrator verwendet (verlangsamt). Der Integrator wird in $C_s(s)$ integriert um einen statischen Nachlauffehler zu eliminieren.

$$T_f(s) = \frac{L_f(s)}{1 + L_f(s)} = \frac{P_f(s) \cdot C_f(s)}{1 + P_f(s) \cdot C_f(s)}$$

$$T_s(s) = \frac{L_s(s)}{1 + L_s(s)} = \frac{P_s(s) \cdot T_f(s) \cdot C_s(s)}{1 + P_s(s) \cdot T_f(s) \cdot C_s(s)}$$



$$\frac{y_f}{r_f} = \frac{P_f(s) \cdot C_f(s)}{1 + P_f(s) \cdot C_f(s)}$$

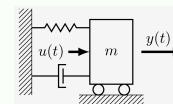
$$\frac{y_s}{r_f} = \frac{P_s(s) \cdot C_f(s)}{1 + P_f(s) \cdot C_f(s)}$$

$$\frac{y_s}{r_s} = \frac{P_s(s) \cdot C_f(s) \cdot C_s(s)}{1 + P_f(s) \cdot C_f(s) + P_s(s) \cdot C_f(s) \cdot C_s(s)}$$

Erinnerung: Pole mit groesser reale Anteil sind schneller

Beispiel: Einfluss des Poles auf Geschwindigkeit

Masse auf einem Wagen mit einem Feder Dämpfer System an der Wand befestigt.



Man will die Position regeln. Man stellt jedoch fest, dass $u(t)$ direkt auf $v(t)$ wirkt und nur auf indirekt die Position $x(t)$.

$$u \rightarrow v : \quad P_f(s) = \frac{s}{s^2 + s + 1}$$

$$v \rightarrow x : \quad P_s(s) = \frac{1}{s}$$

$$u \rightarrow x : \quad P(s) = \frac{1}{s^2 + s + 1}$$

Auch stellt man fest, dass die Pole von $P_f(s)$ $\pi(P_f(s)) = -\frac{1}{2} \pm j\frac{\sqrt{3}}{2}$ einen negativeren Realteil haben als der Pol von $P_s(s)$. **Pole mit grösserem negativen Realteil klingen schneller ab.**

P_f ist definitiv schneller als P_s . Obwohl $\pi(P) = \pi(P_f)$ wird P_f schneller sein, da das System P durch den zusätzlichen offenen Integrator einen grösseren Phasenverlust hat.

Es bietet sich an für C_f einen P-Regler und für C_s einen PI-Regler zu verwenden.

Beispiel: Schnelle und langsame Strecke

Gegeben seien $P_1(s) = \frac{5}{s^2+2s+2}$ und $P_2(s) = \frac{1}{s(s+1)}$. Da im Gegensatz zu $P_2(s)$ alle Pole von $P_1(s)$ negativen Realteil haben ist diese Regelstrecke schneller als $P_2(s)$ und somit geeignet fuer den inneren (schnellen) Regelkreis.

Beispiel: Direkte berechnung SIMO

Um die Regelstrecke $P_2(s) = \frac{\Phi}{U(s)}$ (Übertragungsfunktion von Stellgrösse $u(t)$ auf Regelgrösse $\varphi(t)$) ohne die Systemmatrizen zu bestimmen, muss man die Laplace Transformation auf die Bewegungsgleichungen aus der Aufgabenstellung anwenden.

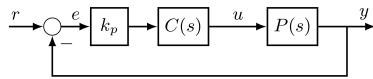
$$\frac{d\dot{\varphi}}{dt} = a_2\varphi(t) + b_2u(t)$$

$$\xrightarrow{\text{Laplace}} s^2\Phi(s) = a_2\Phi(s) + b_2U(s) \leftrightarrow \frac{\Phi(s)}{U(s)} = \frac{b_2}{s^2 - a_2}$$

12 Wurzelortskurven/Root Locus

12.1 Wurzelortskurven/Root locus:

Mit diesem Verfahren kann man die Pole des geschlossenen Regelkreises setzen wo man will. Man bezeichnet dabei $C(s)$ als Komensator. Dabei betrachtet man diese Regelstruktur:



k_p wird aus $C(s)$ herausgenommen, da es zu einem freien Parameter wird. Zeichnet man die Pole des geschlossenen Regelkreises für alle $k_p \in (0, \infty)$ erhält man die Wurzelortskurven.

Vorsicht! Wir gehen von einem stabilen, miniphasigen $L(s)$ aus. For the root locus of a causal system, the number of closed-loop poles is equal to the number of open-loop poles.

12.2 Regeln des Wurzelortskuven-Verfahrens:

Der geschlossene Regelkreis hat folgende TF:

$$T(s) = \frac{k_p \cdot C(s) \cdot P(s)}{1 + k_p \cdot C(s) \cdot P(s)}$$

Die Pole von $T(s)$ sind also

$$1 + k_p \cdot L(s) = 0 \quad \text{mit } L(s) = \frac{b(s)}{a(s)} \\ a(s) + k_p \cdot b(s) =: p(s, k_p)$$

Die Schar der NST von $p(s, k_p)$ repräsentiert die Wurzelortskurven. Das Polynom $p(s, k_p)$ hat Ordnung n .

In den Extremfällen gilt:

$k_p \rightarrow 0 \Rightarrow p(s, k_p) \approx a(s)$ Für kleine k_p sind die n NST von $p(s, k_p)$ die n NST von $a(s) \Rightarrow$ die Pole von $T(s)$ nähern sich den Polen von $L(s)$.

$k_p \rightarrow \infty \Rightarrow p(s, k_p) \approx k_p \cdot b(s)$ Für sehr grosse k_p konvergieren m NST von $p(s, k_p)$ zu den m endlichen NST von $b(s)$. \Rightarrow Die Pole von $T(s)$ nähern sich den NST von $L(s)$. Jedoch hat $p(s, k_p)$ Ordnung n . Dh. es bleiben $n - m$ NST von $p(s, k_p)$ übrig. Diese divergieren zu ∞ . (Reminder: NST im unendlichen beeinflussen Systemdynamik nicht)

12.2.1 Vorgehen:

1. Ursprung der Asymptoten berechnen:

$$\sigma_a = \frac{1}{n-m} \left(\sum_{i=1}^n \text{Re}(\pi_i) - \sum_{i=1}^m \text{Re}(\zeta_i) \right)$$

die Asymptoten verlassen den Punkt $(\sigma_a + j \cdot 0)$.

2. Winkel der Asymptoten bestimmen:

$$\delta_i = \frac{\pi}{n-m} \cdot (2 \cdot (i-1) + 1) [\text{rad}], \quad i = 1, \dots, n-m$$

12.2.2 Zugehörigkeitstest:

Man kann testen ob ein Punkt $z \in \mathbb{C}$ auf der Wurzelortskurven liegt, indem man ihn in diese Gleichung einsetzt ($k_p > 0$)

$$\sum_{i=1}^m \angle(z - \zeta_i) - \sum_{i=1}^n \angle(z - \pi_i) \stackrel{!}{=} \begin{cases} -\pi \pm 2\pi \cdot k, k \in \mathbb{N} & k_p > 0 \\ 0 \mod 2\pi & k_p < 0 \end{cases}$$

12.2.3 Skizzierhilfen:

- Root Locus ist Symmetrisch zur Re-Achse.
- Except the constant transfer function $P(s) = 0$ there is no other rational transfer function for which the positive and the negative root locus curve is identical.
- Treffen sich 2 Pole, dann drehen beide sich um 90° in der komplexen Ebene.
- A Pkt auf der Re-Achse kann sein Teil der RL nur wenn das # reelle Pole und Nullstelle auf sein rechts ist ungerade.
- $r = n - m$ Pole divergen entlang gerader Asymptoten $\rightarrow \infty$.
- Consider an open loop function $L(s) = k \cdot \frac{N(s)}{D(s)}$ with $k > 0$. If the degree of $N(s)$ and $D(S)$ are at most 1, then the root locus curve lies only on the real axis.

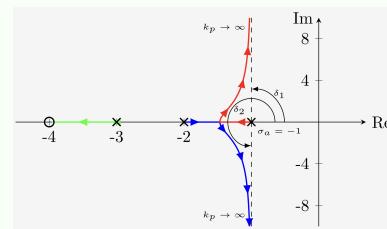
Beispiel: Root Locus of System 1

$$L(s) = \frac{s+4}{(s+1)(s+2)(s+3)}$$

$\rightarrow n = 3, m = 1, n - m = 2$. Wir wissen also, dass 2 Pole sich für $k_p \rightarrow \infty$ den Asymptoten, welche bei $(\sigma_a + j \cdot 0)$ und steigung δ_i haben, annähern.

$$\sigma_a = \frac{1}{2}(-1 - 2 - 3 - (-4)) = -1$$

$$\delta_1 = \frac{\pi}{2}(2 \cdot 0 + 1) = \frac{\pi}{2}, \quad \delta_2 = \frac{\pi}{2}(2 \cdot (2-1) + 1) = \frac{3\pi}{2}$$



Achtung: Pole kennzeichnet man mit \times und NST mit \circlearrowleft

Ist $(-3.5 + j \cdot 0)$ auf den WOK?

$$\angle(-3.5+4) - (\angle(-3.5+1) + \angle(-3.5+2) + \angle(-3.5+3)) = 0 - 3\pi \\ \rightarrow k = 2 \in \mathbb{N} \quad \checkmark$$

Beispiel: Adding a Pole to root locus

If a pole at $-24/20$ is added to $P(s)$, two closed-loop poles have real part $-1/8$ for large values of $k_p > 0$.

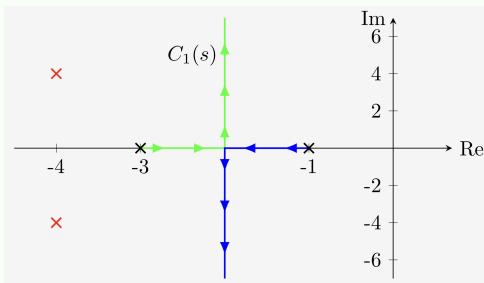
12.3 Kompensierung mit Wurzelortskurven:

Man kann mit dem Zugehörigkeitsstest einen Kompensator/Regler finden, den die Pole des geschlossenen Regelkreises an einen gewünschten Ort bringt.

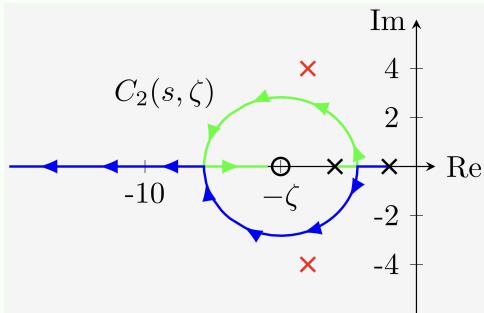
Beispiel: Root Locus of System 2

$$P(s) = \frac{1}{(s+1)(s+3)}$$

Wir wollen Pole von $T(s)$ bei $s_{1,2}^* = -4 \pm j \cdot 4$ rad/s. Wir testen zuerst einen einfachen Kompensator $C_1(s) = 1$, stellen aber fest, dass die gewünschten Pole (\times) nicht auf den WOK liegen. Dh es existiert für $C_1(s)$ kein k_p für dass die gewünschten Pole platziert werden.



Die Pole Liegen Links der WOK. Um die WOK nach links zu biegen nehmen wir mit $C_2(s) = s + \zeta$ eine parametrisierte NST als Kompensator.



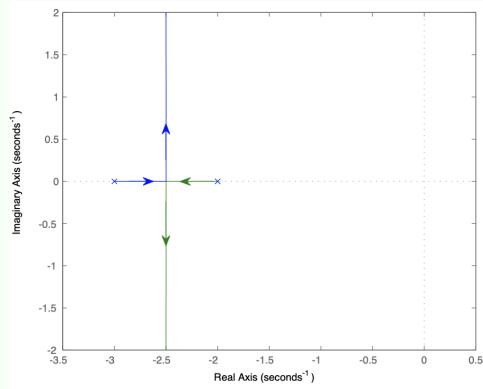
Um ζ zu finden benutzen wir den Test ob ein Punkt auf den WOK ist:

$$\begin{aligned} L(s) &= \frac{s + \zeta}{(s+1)(s+3)} \angle L(s) = \angle(s + \zeta) - \angle(s+1) - \angle(s+3) \\ &\stackrel{s=s^*}{=} \angle(-4 + 4j + \zeta) - \angle(-4 + 4j + 1) - \angle(-4 + 4j + 3) = \\ &\quad \underbrace{\arctan\left(\frac{4}{\zeta - 4}\right)}_{\gamma} - \underbrace{\arctan\left(\frac{4}{-3}\right)}_{\alpha} - \underbrace{\arctan\left(\frac{4}{-1}\right)}_{\beta} \stackrel{!}{=} -\pi \\ &\Rightarrow \gamma = -\pi + \alpha + \beta \Leftrightarrow \zeta = 4 + \frac{4}{\tan \gamma} \approx 7.25 \text{ rad/s} \end{aligned}$$

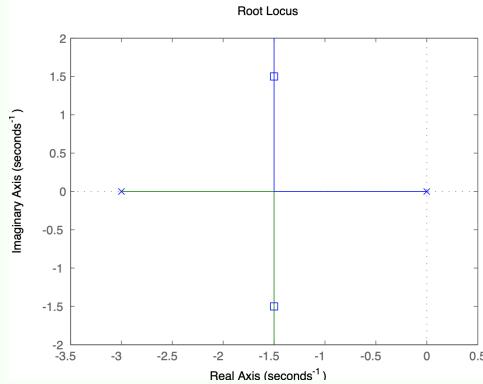
12.4 Pol- Nullstellen-Kuerzung:

Beispiel: Pol- Nullstellen-Kuerzung in Root Locus

Gegeben sei der folgende Strecke: $P(s) = \frac{1}{(s+2)(s+3)}$.



- Wir wollen die Strecke regeln somit das Root Locus durch die pole $-1.5 \pm j1.5$ geht. Wir benutzen ein PI controller mit $k_p = 1 \Rightarrow C = k_p \cdot (1 + \frac{1}{T_i S})$. In order to make the root-locus plot to pass over the desired poles $-1.5 \pm j1.5$, a straightforward solution is the zero/pole cancellation approach. Since the asymptotes must start at the point $\sigma_a = -1.5$ the zero of the controller must be placed on -2 , which implies $T_i = 0.5$.



- Nun betrachten Sie bei der Anwendung der Methode der Wurzelortskurve den Verstärkungsfaktor k_p des PI-Reglers als statische Kreisverstärkung k und bestimmen Sie ihn so, dass das interne Regelsystem genau die Pole $-1.5 \pm j1.5$ besitzt.

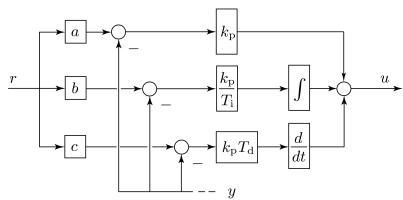
The proportional gain k_p is calculated as: $1 + k_p \cdot L(s) = 1 + k_p \cdot \frac{s+2}{s} \cdot \frac{1}{(s+2)(s+3)} = 1 + \frac{k_p}{s^2 + 3s} = 0$. So:

$$s^2 + 3s + k_p = (s+1.5 + 1.5j) \cdot (s+1.5 - 1.5j) \Rightarrow k_p = 4.5$$

13 PID in der Praxis

13.1 Set point Weights:

Mit den set point weights kann das Regelverhalten verbessert werden (sie beeinflussen nicht die Stabilität des Systems). Die Set Point Weights beeinflussen die Auswirkung des Referenzwertes auf den dazugehörigen Teil eines PID Reglers.). Dabei wird die Referenz $r(t)$ separat mit einer Verstärkung (a, b, c) multipliziert.



- $b = 1$ um einen statischen Nachlauffehler zu verhindern falls die Referenz möglichst konstant werden soll.
- $c = 0$ Normalerweise will man nur Änderungen aufgrund des Ausgangssignals dämpfen. Ein Step in $h(t)$ würde $(\frac{d}{dt}h(t))$ auf dem Differential-Pfad zu einem Dirac-Stoss führen. Nur y kommt so in Ableitung, ist physikalisch und ändert sich nicht sprunghaft.

Wenn man den Set Point Weight $c = 0$ setzt, dann entspricht dies ein PI-Regler NICHT!

- a wird mit Åström-Hägglund bestimmt. Typischerweise wählt man $a \in (0, 1)$. Ein guter Wert für a verbessert häufig das closed-loop Verhalten.

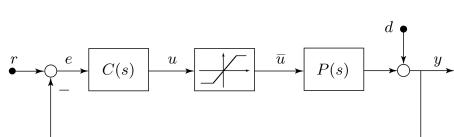
Bemerkung: Die Gewichtungen Beeinflussen die Stabilität und Robustheitseigenschaften des geschlossenen Reglekreises **nicht!**

$$T(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{P \cdot \overbrace{\left(a \cdot k_p + b \cdot \frac{k_p}{T_i \cdot s} + c \cdot k_p \cdot T_d \cdot s \right)}^{C_{PID, weighted}}}{1 + P \cdot \overbrace{\left(k_p + \frac{k_p}{T_i \cdot s} + k_p \cdot T_d \cdot s \right)}^{C_{PID, unweighted}}}$$

13.2 Saturation und Anti Reset Windup (ARW):

Eine Saturation ist eine Nichtlinearität, die in allen technischen Systemen vorhanden ist, da Aktuatoren nie beliebig kleine/große Sollsignale $u(t)$ umsetzen können.

$$\bar{u}(t) = \begin{cases} u_{\min} & \text{if } u(t) < u_{\min} \\ u_{\max} & \text{if } u(t) > u_{\max} \\ u(t) & \text{else} \end{cases}$$



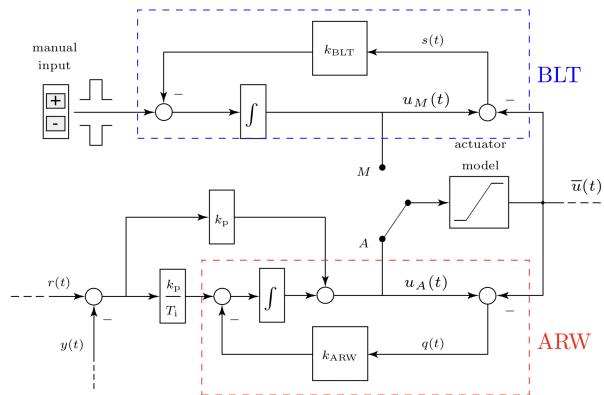
Wie kommt es zu Saturation? Da das System langsamer reagiert als man erwartet, haben Integratoren mehr Zeit um sich zu füllen. Sobald dann aber das Vorzeichen des Fehlers ändert Überschreitet der Regler zuerst das Ziel, da sich der Integrator zuerst wieder Entleeren muss um eine Änderung im Aktuatorsignal hervorzurufen.

Hinweis: man kann nicht das Nyquistkriterium anwenden. Um die Stabilität eines Regelsystems mit Aktuatorbeschränkung und Anti Reset Windup zu analysieren.

13.2.1 ARW/Bumpless Transfer:

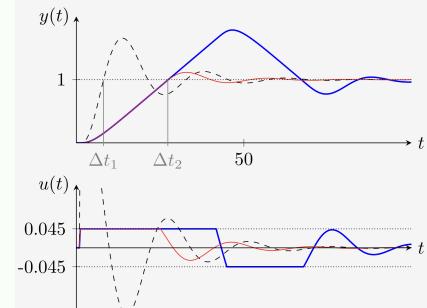
Um diese Saturation zu verhindern, wird der Integrator um ein *Anti-Reset Windup* (ARW) erweitert, der das "überfüllen" des Integrators verhindert. Dazu wird die Differenz $q(t) = u(t) - \bar{u}(t)$ vom Integrator abgezogen. Falls $u(t)$ nicht saturiert, ist $q(t) = 0$.

Meist ist es sinnvoll, nebst einem Automatischen Modus, einen Manuellen Modus für die Steuerung des Systems zu haben. Möchte man von einem Modus in den Anderen wechseln, so soll das so reibungslos/smooth wie möglich passieren, um Stöße auf das System zu verhindern. Dazu verwendet man den *Bumpless Transfer*. **Beachte:** Um die Stabilität eines Regelsystems mit Aktuatorbeschränkung und Anti Reset Windup zu analysieren, kann man nicht das Nyquistkriterium anwenden.



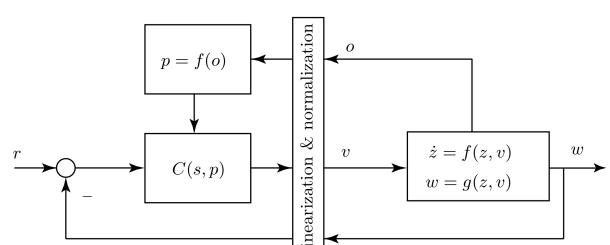
Beispiel: ARW System

Für ein System wurde ein PI-Regler ausgelegt und das resultierende System wurde simuliert. Man stellt fest, dass die Performance ohne ARW schlechter ist, als mit ARW.



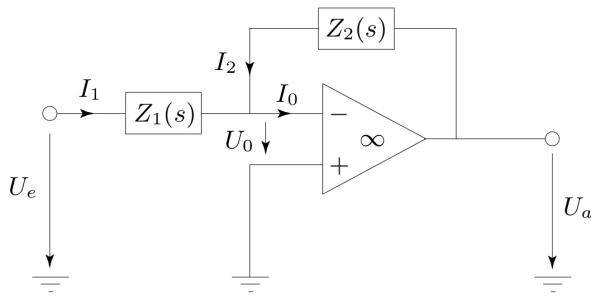
13.3 Gain Scheduling:

Bei nichtlinearen Systemen will man meist um verschiedene Betriebspunkte linearisieren. Dafür braucht es bei jedem Betriebspunkt einen anderen linearen Regler. Bei einem PI-Regler werden $k_p(o)$, $T_i(o)$ zu Funktionen des Betriebspunktes o .



13.4 Analoge Realisierung:

In manchen Anwendungen macht es Sinn, den Regler durch analoge Schaltungen anstatt durch Software zu realisieren. Mit diesen kann man eine Eingangsspannung U_e in eine Ausgangsspannung U_a umwandeln. Dabei kann man folgender Grundstruktur folgen:



Die Übertragungsfunktion lautet dabei

$$\Sigma(s) = \frac{U_a(s)}{U_e(s)} = -\frac{Z_2(s)}{Z_1(s)}$$

Dabei konstruiert man $Z_1(s)$, $Z_2(s)$ aus Widerständen (R), Induktoren (L) und Kapazitäten (C)

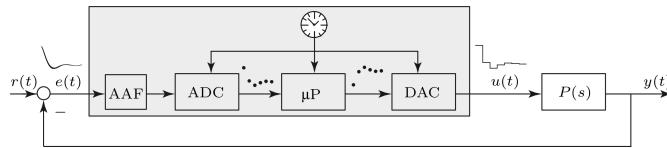
$$Z_r(s) = R, \quad Z_L(s) = s \cdot L, \quad Z_c(s) = \frac{1}{s \cdot C}$$

Die Kirchhoffsschen Regeln für Serie- und Parallelschaltungen von Elementen helfen bei der Realisierung der TF.

13.5 Zeitdiskrete Realisierung:

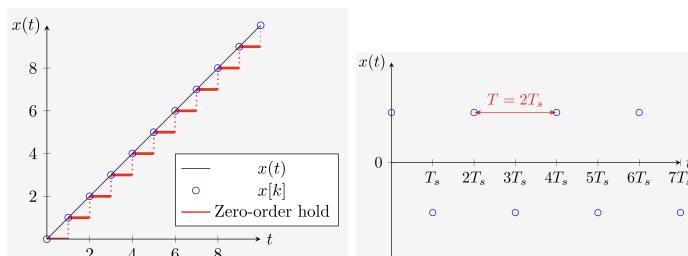
Da ein Regler, der auf Software basiert nur bei einer fixen Taktfrequenz f_s an diskreten Stellen den Regel auswerten kann, muss man einen continuous-time Regler $C(s)$ in einen discrete-time Regler $C(z)$ umwandeln. Es können nur an fixen Zeitpunkten t_n neue eingänge $u(n \cdot T_s) := u[k]$ berechnet werden:

$$t_n = \frac{n}{f_s} = n \cdot T_s, \quad n \in 0, 1, \dots$$



- **AAF:** Anti-Aliasing Filter. Ist notig, da ein zeitdiskretes Signal nicht beliebig hohe Frequenzen repräsentieren kann. Energien der Frequenzen im analogen Signal, die höher als die maximal repräsentierbare Frequenz sind, werden bei der Diskretisierung ungewollt auf das gesamte Frequenzspektrum verteilt und verzerrten dieses somit. Deshalb wählt man für den AAF einen Tiefpassfilter um hohe Frequenzen vor der Diskretisierung zu eliminieren.
- **ADC:** Analog-to-Digital Converter. Konvertiert zeitkontinuierliche Signale in zeit-diskrete.
- **μP:** Mikroprozessor. Berechnet zeit-diskrete Eingang $u[k]$.
- **DAC:** Digital-to-Analog-Converter Konvertiert zeit-diskrete Signale in zeit-kontinuierliche (meistens ein Zero-order Hold).

$$u(t) = u[k] \quad \forall t \in [k \cdot T_s, (k+1) \cdot T_s]$$



Für eine fixe Rate $f_s = \frac{1}{T_s}$ soll man ein Signal Zeichnen, welches die höchstmögliche Frequenz hat. Die höchstmögliche Frequenz, die man in das Zeitraster $\{0, T_s, \dots\}$ legen kann lautet ($f_{max} = \text{Nyquist-frequenz} = \frac{1}{2} f_s$, $f_s = \text{Arbeitsfrequenz von Prozessor}$):

$$f_{max} = \frac{1}{T} = \frac{1}{2T_s} \quad (\text{Nyquist Frequenz})$$

13.5.1 Z-Transform:

$$X(z) = \mathbb{Z}\{x(k)\} = \sum_{k=0}^{\infty} z^{-k} \cdot x(k)$$

$$x(k+1) = z \cdot X(z) - z \cdot x(0)$$

$$x(k-1) = z^{-1} \cdot X(z)$$

$$z = e^{sT_s}$$

13.5.2 Emulation:

Da $z(s)$ nichtlinear ist benutzt man Approximationen um einen Regler zu emulieren. Emulationen sind dann sinnvoll, wenn die diskreten Zeitschritte T_s sehr klein sind im Vergleich zur Systemdynamik.

$z = e^{sT_s}$	$\approx 1 + sT_s$	$\Rightarrow s \approx \frac{z-1}{T_s}$	Euler Forward
$z = \frac{1}{e^{-sT_s}}$	$\approx \frac{1}{1-sT_s}$	$\Rightarrow s \approx \frac{z-1}{zT_s}$	Euler Backward
$z = \frac{e^{sT_s/2}}{e^{-sT_s/2}}$	$\approx \frac{1+sT_s/2}{1-sT_s/2}$	$\Rightarrow s \approx \frac{2(z-1)}{T_s(z+1)}$	Tustin Emulation

Die Tustin Emulation ist die am häufigste verwendete Emulation, insbesondere weil damit die ganze linke s -Halbebene in der z -Ebene in einen Kreis mit Radius kleiner eins ($|z| < 1$) gemappt wird. D.h. ein stabiles kontinuierliches System resultiert in einem stabilen diskreten System (Stabil in $z \Leftrightarrow |z| < 1$). Euler backward erfüllt diese Kriterium auch, Euler forward hingegen nicht.

14 Numerische Verfahren

Mit numerischen Verfahren kann man für fixe Regelstrukturen (z.B. PI) ein Optimierungsproblem lösen, um die Parameter k_p , T_i zu bestimmen. Dazu stellt man eine Kostenfunktion $J(k_p, T_i)$ auf, welche man durch die Wahl der optimalen Parameter k_p^* und T_i^* minimieren will.

Beispiele für Gütekriterien:

- kumulativer Fehler über den quadrierten Fehler:

$$g_1 = \int_0^\infty e^2(t) dt$$

- Der maximale Überchuss von $y(t)$:

$$g_2 = \max_{t \in [0, \infty)} (y(t) - 1)$$

- Robustheit über Minimum return difference μ_{min}

$$g_3 = 1 - \mu_{min} = 1 - \max_{\omega \in [0, \infty)} |1 + L(j\omega)|$$

Die Kostenfunktion ist daher $J(k_p, T_i) = \kappa_1 \cdot g_1 + \kappa_2 \cdot g_2 + \kappa_3 \cdot g_3$. Das resultierende Optimierungsproblem

$$\min_{k_p, T_i} J(k_p, T_i)$$

kann in MATLAB mit `fminsearch` gelöst werden, wobei $\kappa_{(.)}$ ein Mass für die Wichtigkeit einer Größe $g_{(.)}$ sind. Je größer ein $\kappa_{(.)}$ ist, desto mehr wird das dazugehörige $g_{(.)}$ bestraft. Dadurch werden die anderen Kriterien, relativ zum höher gewichteten Kriterium, weniger gewichtet.

15 Algebraische Stabilität

Man möchte wissen, ob ein Polynom

$$a_n \cdot s^n + a_{n-1} \cdot s^{n-1} + \dots + a_1 \cdot s + a_0, \quad a_n > 0$$

alle NST in der linken komplexen Halbebene hat. Bedingung $a_i > 0 \forall i$ ist notwendig aber nicht hinreichend (alle NST MMP $\not\Rightarrow a_i > 0$).

Theorem: Hurwitz Kriterium

Koeffizienten a_i bekannt. Falls alle führenden Hauptminoren der Hurwitzmatrix

$$H_1 = a_{n-1}, H_2 = \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_n \\ a_{n-3} & a_{n-2} \end{vmatrix}, H_3 = \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_n & 0 \\ a_{n-3} & a_{n-2} & a_{n-1} \\ a_{n-5} & a_{n-4} & a_{n-3} \end{vmatrix}$$

usw

positive sind, dann sind alle NST in der linken komplexen Halbebene.

Theorem: Kharitonov Kriterium

Die Koeffizienten a_i seien nicht exakt bekannt, man weiss jedoch, dass sie in einer gewissen Region liegen:

$$p(s, a) = [a_n, \bar{a}_n] \cdot s^n + [a_{n-1}, \bar{a}_{n-1}] \cdot s^{n-1} + \dots + [a_0, \bar{a}_0]$$

Das Problem reduziert sich auf die Ecken eines Rechtecks in der komplexen Ebene und es müssen nur folgende Polynome mit dem Hurwitz Kriterium getestet werden:

$$p_1(s) = \bar{a}_0 + \underline{a}_1 \cdot s + \underline{a}_2 \cdot s^2 + \bar{a}_3 \cdot s^3 + \dots$$

$$p_2(s) = \bar{a}_0 + \bar{a}_1 \cdot s + \underline{a}_2 \cdot s^2 + \underline{a}_3 \cdot s^3 + \dots$$

$$p_3(s) = \underline{a}_0 + \bar{a}_1 \cdot s + \bar{a}_2 \cdot s^2 + \underline{a}_3 \cdot s^3 + \dots$$

$$p_4(s) = \underline{a}_0 + \underline{a}_1 \cdot s + \bar{a}_2 \cdot s^2 + \bar{a}_3 \cdot s^3 + \dots$$

Beispiel: Stabilität

Wir wollen $k_{p,\max}$ bestimmen, für welche folgende Strecke noch stabil bleibt.

$$P(s) = -42 \frac{(2 - 6.8)(s + 6.8)}{s(s + 5.8)(s^2 + 22.2s + 126.9)}$$

Mithilfe Nyquist-Stabilitätskriterium:

- $\hat{\omega}$ bestimmen, wo $\text{Im}(P(j\hat{\omega})) = 0$ wird.

$$\begin{aligned} P(j\omega) &= \frac{42\omega^2 + 1946}{\omega^4 - j \cdot 28\omega^3 - 255\omega^2 + j \cdot 731\omega} \\ &= \frac{42\omega^2 + 1946}{\omega^4 - 255\omega^2 + j \cdot (731\omega - 28\omega^3)} \\ &\Rightarrow 731\hat{\omega} - 28\hat{\omega}^3 \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow \hat{\omega} = \sqrt{\frac{731}{28}} \end{aligned}$$

- $|P(j\hat{\omega})|$ bestimmen.

$$|P(j\hat{\omega})| = \left| \frac{42\hat{\omega}^2 + 1946}{\hat{\omega}^4 - 255\hat{\omega}^2} \right| \approx 0.51$$

- $k_{p,\max}$ bestimmen.

$$k_{p,\max} = \frac{1}{0.51} = 1.96$$

Anhand Hurwitz-Kriterium:

- $T(s)$ als Funktion von k_p bestimmen.

$$\begin{aligned} P(s) &= \frac{a(s)}{b(s)}, \quad C(s) = k_p \\ L(s) &= k_p \frac{a(s)}{b(s)} \\ T(s) &= \frac{k_p \cdot a(s)}{b(s) + k_p \cdot a(s)} \end{aligned}$$

Für die Stabilität interessiert uns also ob $b(s) + k_p \cdot a(s)$ alle NST in der linken Halbebene hat.

$$b(s) + k_p \cdot a(s) = s^4 + 28s^3 + (255 - 42k_p)s^2 + 731s + 1946k_p$$

- Nun prüfen wir das Hurwitz-Kriterium:

$$\begin{aligned} H_4 &= \begin{bmatrix} a_{n-1} & a_n & 0 & 0 \\ a_{n-3} & a_{n-2} & a_{n-1} & a_n \\ a_{n-5} & a_{n-4} & a_{n-3} & a_{n-2} \\ a_{n-7} & a_{n-6} & a_{n-5} & a_{n-4} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 28 & 1 & 0 & 0 \\ 731 & 255 - 42k_p & 28 & 1 \\ 0 & 1946k_p & 731 & 255 - 42k_p \\ 0 & 0 & 0 & 1946k_p \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Für die führenden Hauptminoren muss gelten: $d_i > 0$

$$\begin{aligned} d_1 &= 28 > 0, \quad d_2 = (6409 - 1176k_p) > 0 \Rightarrow k_p < 5.45 \\ d_3 &= 4684979 - 2385320k_p \Rightarrow k_p < 1.96, d_4 = d_3 \cdot 1946k_p \end{aligned}$$

Somit muss für Stabilität gelten: $k_p \in (0, 1.96)$

16 MIMO

16.1 Systembeschreibung:

MIMO systeme haben mehrere Ein- und Ausgänge, d.h. $u(t) \in \mathbb{R}^m$, $y(t) \in \mathbb{R}^p$ und $x(t) \in \mathbb{R}^n$ dementsprechend sind Matrizen B , C , D auf die Dimensionen angepasst werden, dabei gilt für das I/O verhalten die selbe Herleitung, wie bei einem SISO System

$$s \cdot X(s) = A \cdot X(s) + B \cdot U(s)$$

$$\Rightarrow X(s) = (s \cdot I_{n \times n} - A)^{-1} \cdot B \cdot U(s)$$

$$\Rightarrow Y(s) = \underbrace{(C \cdot (s \cdot I_{n \times n} - A)^{-1} \cdot B + D)}_{P(s)} \cdot U(s)$$

da $U(s) \in \mathbb{C}^m$ und $Y(s) \in \mathbb{C}^p$ wird $P(s)$ eine Matrix:

$$P(s) = \begin{bmatrix} P_{1,1}(s) & P_{1,2}(s) & \dots & P_{1,m}(s) \\ P_{2,1}(s) & P_{2,2}(s) & \dots & P_{2,m}(s) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ P_{p,1}(s) & P_{p,2}(s) & \dots & P_{p,m}(s) \end{bmatrix}$$

Wobei jede Übertragungsfunktion $P_{i,j}(s) : u_j \rightarrow y_i$

$$P_{i,j}(s) = \frac{b_{m,i,j}s^m + \dots + b_{1,i,j}s + b_{0,i,j}}{s^n + a_{n-1,i,j}s^{n-1} + \dots + a_{1,i,j}s + a_{0,i,j}} = \frac{b_{i,j}(s)}{a_{i,j}(s)}$$

eine gebrochenrationale Funktion darstellt. Note: $P(s)$ beinhaltet nur steuerbare und beobachtbare Teile des Systems.

Beispiel: Uebertragungsfunktion von MIMO



$$P_{out} = [P_1(s) \cdot u_1 \quad P_2(s) \cdot u_1]^T \text{ und } Q_{out} = [Q_1(s) \cdot P_2(s) \cdot u_1 + Q_2(s) \cdot u_2]. \text{ So: } y =$$

$$\begin{bmatrix} R_{11}(s) \cdot P_1(s) \cdot u_1 + R_{12}(s) \cdot Q_1(s) \cdot P_2(s) \cdot u_1 + R_{12}(s) \cdot Q_2(s) \cdot u_2 \\ R_{21}(s) \cdot P_1(s) \cdot u_1 + R_{22}(s) \cdot Q_1(s) \cdot P_2(s) \cdot u_1 + R_{22}(s) \cdot Q_2(s) \cdot u_2 \end{bmatrix}$$

$$\text{And } \Sigma(s) = Y/U$$

16.2 Sensitivitäten:

Wie auch im SISO Fall können wir die Sensitivitäten für ein MIMO System beschreiben:

$$\begin{aligned} L(s) &= \frac{Y(s)}{E(s)} = P(s) \cdot C(s) \\ S(s) &= \frac{E(s)}{R(s)} = (I + L(s))^{-1} \\ T(s) &= \frac{Y(s)}{R(s)} = L(s) \cdot (I + L(s))^{-1} \end{aligned}$$

Es gilt die Identität: $G_1(I - G_2G_1)^{-1} = (I - G_1G_2)^{-1}G_1$

16.3 Stabilität, Steuerbarkeit und Beobachtbarkeit:

Die Analyse von MIMO Systemen ist identisch zu derjenigen von SISO Systemen.

16.3.1 Stabilität nach Lyapunov:

asymptotisch stabil nach Lyapunov: Alle Eigenwerte von A haben negativen Realteil, $Re(\lambda_i) < 0$

stabil nach Lyapunov: Mindestens ein Eigenwert λ_k von A hat Realteil $Re(\lambda_k) = 0$ und alle anderen Eigenwerte haben negative Realteile.

instabil nach Lyapunov: Mindestens ein Eigenwert λ_k von A hat einen positiven Realteil $Re(\lambda_k) > 0$

16.3.2 Steuerbarkeit:

Das System $\{A, B, C, D\}$ ist vollständig steuerbar, falls die Steuerbarkeitsmatrix \mathcal{R}_n vollen Rang n hat

$$\mathcal{R}_n = [B, AB, \dots, A^{n-1}B] \in \mathbb{R}^{n \times (n \cdot m)}$$

16.3.3 Beobachtbarkeit:

Das System $\{A, B, C, D\}$ ist vollständig beobachtbar, falls die Beobachtbarkeitsmatrix \mathcal{O}_n vollen Rang n hat

$$\mathcal{O}_n = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(n \cdot p) \times n}$$

16.3.4 System Minimalisierung:

Zustandsraummodell ist nur dann eine Minimalrealisierung, wenn es vollständig Steuerbar und Beobachtbar ist. (# Zustände = # Pole)

Minimale Systemordnung := #Pole, Pole kann man bei MIMO-Systemen nur mit Nullstellen kürzen falls auf den selben Input-Output-Pfad wirken.

16.4 Pole und Nullstellen:

Theorem: Matrix Minoren

Minoren einer Matrix sind die Determinanten aller quadratischen Submatrizen. Die Submatrizen werden durch Streichen einzelner Zeilen und Spalten der Matrix gebildet.

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \end{bmatrix}$$

Die Minoren der Matrix A sind:

$$\begin{aligned} A_{11}, A_{12}, A_{13}, A_{21}, A_{22}, A_{23}, A_{31}, A_{32}, A_{33}, \\ A_{11}A_{22} - A_{21}A_{12}, A_{11}A_{23} - A_{21}A_{13}, A_{12}A_{23} - A_{22}A_{13}. \end{aligned}$$

16.4.1 Polstellen von MIMO Systemen:

Die Pole von $P(s)$ sind die Nullstellen des kleinsten gemeinsamen Vielfachen (kgV) der Nennerpolynome aller Minoren von $P(s)$

16.4.2 Nullstellen von MIMO Systemen:

Die Nullstellen von $P(s)$ sind die Nullstelle des grössten gemeinsamen Teilers (ggT) der Zähler der Minoren höchster Ordnung von $P(s)$ nach der Normalisierung, bei der alle Pole von $P(s)$ im Nenner stehen.

Note: Nullstellen $s = \zeta_i$ sind nicht triviale Frequenzen, bei denen für ein spezifisches Eingangssignal $u(t)$ und spezifische Anfangsbedingungen $x(0)$ gilt: $y(t) = 0 \forall t$

D.h. die folgende Laplace Transformation erfüllt

$$\begin{aligned} (sI_{n \times n} - A) \cdot x - B \cdot u &= 0 \\ C \cdot x + D \cdot u &= 0 \end{aligned}$$

wobei nur eine nichtriviale Lösung besteht, falls die folgende Matrix singulär ist:

$$\det \begin{bmatrix} (sI_{n \times n} - A) & -B \\ C & D \end{bmatrix} = 0$$

Beispiel: Complementare Sensitivität für MIMO

Wir wollen ein MIMO System mit einen P-Regler regeln. Dabei vernachlässigen wir die Kreuzkopplungen und gehen davon aus, dass $u_1 \rightarrow y_1$ und $u_2 \rightarrow y_2$ regelt.

$$P(s) = \begin{bmatrix} \frac{2}{s+1} & \frac{3}{s+2} \\ \frac{1}{s+1} & \frac{1}{s+1} \end{bmatrix} \quad C(s) = \begin{bmatrix} K_1 & 0 \\ 0 & K_2 \end{bmatrix}$$

Q: Wie gross können wir K_i wählen, ohne die Stabilität zu gefährden?

A:

$$T_1(s) = \frac{K_1 \frac{2}{s+1}}{1 + K_1 \frac{2}{s+1}} = \frac{2K_1}{s + (2K_1 + 1)},$$

$$T_2(s) = \frac{K_2 \frac{1}{s+1}}{1 + K_2 \frac{1}{s+1}} = \frac{K_2}{s + (K_2 + 1)}$$

$$\Rightarrow 2K_1 + 1 > 0, K_2 + 1 > 0; \Rightarrow K_1 > -\frac{1}{2}, K_2 > -1, \text{ bzw: } K_i > 0$$

Beispiel: MIMO Pole

Bestimme die Pol- und Nullstellen von

$$P(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s+1} & 0 & \frac{s-1}{(s+1)(s+2)} \\ \frac{1}{s-1} & \frac{1}{s+2} & \frac{1}{s+2} \end{bmatrix}$$

bestimmen.

Für die Pole bestimmen wir zuerst die Minoren:

$$\begin{aligned} \frac{1}{s+1}, \quad 0, \quad \frac{s-1}{(s+1)(s+2)}, \quad \frac{-1}{s-1}, \quad \frac{1}{s+2}, \quad \frac{1}{s+2} \\ \frac{1}{(s+1)(s+2)}, \quad \frac{2}{(s+1)(s+2)}, \quad \frac{(-1)(s-1)}{(s+1)(s+2)^2} \end{aligned}$$

KGV_Nenner ist daher:

$$(s+1)(s+2)^2(s-1) \Rightarrow \pi_1 = -1, \pi_{2,3} = -2, \pi_4 = 1$$

Um die (Übertragungs-)Nullstellen des Systems zu bestimmen erweitern wir die Minoren höchster Ordnung (Von den "grössten" Determinanten):

$$\begin{aligned} \frac{(s+2)(s-1)}{(s+1)(s+2)^2(s-1)}, \quad \frac{2(s+2)(s-1)}{(s+1)(s+2)^2(s-1)}, \\ \frac{(-1)(s-1)^2}{(s+1)(s+2)^2(s-1)} \end{aligned}$$

GGT_Zähler ist somit: $(s-1) \Rightarrow \zeta_1 = 1$

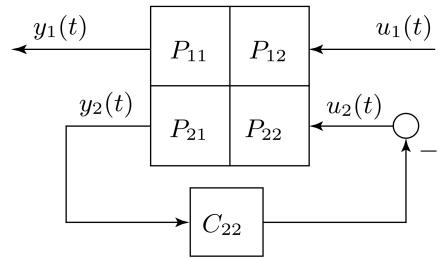
Q: Was ist die minimale Ordnung einer internen Beschreibung? ODER Wie viele Zustandsvariablen werden mindestens benötigt, um das Ein-/Ausgangsverhalten des Systems zu beschreiben?

A: Es wurden 4 Pole gefunden, somit besitzt eine interne Beschreibung des Systems mindestens 4. Ordnung. **Bemerkung:** Ein Mehrgrößensystem kann Pole und NST bei den gleichen Frequenzen haben, ohne dass sich diese kürzen, da es darauf ankommt, ob die dieselbe Frequenz und Richtung haben.

17 RGA

RGA wird benutzt, um systematisch zu überprüfen, wie SISO ähnlich ein System ist. Das Ziel ist es zu bestimmen ob ein $m \times m$ MIMO-System auch mit m SISO-Kontrollern eine befriedigende Kreisverstärkung erzielen kann.

Das RGA ist schlussendlich eine Matrix mit den Verhältnissen aller Übertragungsfunktionen bei einer gegebenen Frequenz ω



Der Regler C_{22} sollte dabei als eine Art hypothetische Grösse verstanden werden, mit der entweder $u_2(t) = 0$ oder $y_2(t) = 0$ gesetzt werden kann.

Extremfall 1: 'open-loop' $C_{22} = 0$

Das System wird 'open-loop' betrachtet: Es wird angenommen dass der Regler $C_{22} = 0$ ist, d.h dass nur der Eingang u_1 den Ausgang y_1 beeinflusst. während im allgemeinen Fall alle anderen Eingänge null sind: $u_j = 0 \forall j \setminus \{1\}$ in diesem Fall ist die Übertragungsfunktion von u_1 auf y_1 :

$$P_{u_1 \rightarrow y_1}(s) = P_{11}(s)$$

Extremfall 2: 'perfect closed-loop' $C_{22} = \infty$

Es wird angenommen, dass im allgemeinen Fall alle Ausgänge außer der betrachtete Ausgang y_1 perfekt auf null geregelt werden, d.h. $y_i = 0 \forall i \setminus \{1\}$. Im gegebenen Beispiel heisst das, dass $u_2(t)$ so gewählt ist, dass $y_2(t) = 0 \forall t$. Dies wird schematisch mit einem Regler unendlicher Verstärkung $C_{22} = \infty$ dargestellt. Dann ist die Übertragungsfunktion von u_1 auf y_1 :

$$P_{u_1 \rightarrow y_1}(s) = \frac{P_{11}(s) \cdot P_{22}(s) - P_{12}(s) \cdot P_{21}(s)}{P_{22}}$$

Der Relative Gain ist das resultierende Verhältnis zwischen open-loop und closed-loop Verhalten:

$$[RGA(s)]_{11} = \frac{P_{11}(s) \cdot P_{22}(s)}{P_{11}(s) \cdot P_{22} - P_{12}(s) \cdot P_{21}(s)}$$

Dieses Verhältnis wiederspiegelt die Änderung der Verstärkung von Eingang u_1 auf Ausgang y_1 im Fall , dass alle anderen Regelkreise des MIMO Systems perfekt geschlossen werden. Der Relative Gain beantwortet also die Frage: *Wenn ein Regler vom Eingang u_1 auf den Ausgang y_1 basierend auf dem open-loop System P_{11} ausgelegt wird, welche veränderten Verhältnisse trifft dieser Regler an, wenn er schlussendlich im geregelten MIMO-System verwendet wird?*

SISO-fähiges $P_{i,j}(s)$ $[RGA(s)]_{ij} \approx 1$

Die Verstärkung von Eingang u_j auf den Ausgang y_i im MIMO-System ist identisch zu Verstärkung der Übertragungsfunktion $P_{ij}(s)$. Es kann also von $P(s)_{ij}$ ein Regler entworfen werden, der den Ausgang y_i mit dem Eingang u_j regelt.

Nicht SISO-fähiges $P_{ij}(s)$ $[RGA(s)]_{ij} \approx 0$

Die Verstärkung der Übertragungsfunktion $P_{ij}(s)$ ist vernachlässigbar im Vergleich zur resultierenden Verstärkung von Eingang u_j auf Ausgang y_i im MIMO System. Basierend auf $P_{ij}(s)$ kann also kein sinnvoller Regler entworfen werden der den Ausgang y_i mit dem Eingang u_j regelt.

Instabiles Verhalten für $P_{ij}(s)$ $[RGA(s)]_{ij} < 0$

Das Vorzeichen der Verstärkung der Übertragungsfunktion von u_j auf y_i im MIMO System ist unterschiedlich vom Vorzeichen von $P_{ij}(s)$. D.h. ein SISO-Regler, ausgelegt basierend auf $P_{ij}(s)$, hat wenn er im MIMO-System verwendet wird, eine entgegengesetzte Wirkung. Ein Sollsprung in u_j führt dazu, dass y_i nach unten anstatt nach oben geregt wird, das MIMO System kann mit diesem Regler also destabilisiert werden.

Das RGA ist die Matrix mit den relativen gains aller Übertragungsfunktionen als Einträgen.

Das RGA einer 2×2 Regelstrecke $P(s)$ ist:

$$RGA(s) = \begin{bmatrix} \frac{P_{11}P_{22}}{P_{11}P_{22}-P_{12}P_{21}} & \frac{-P_{12}P_{21}}{P_{22}P_{11}-P_{21}P_{12}} \\ \frac{-P_{12}P_{21}}{P_{22}P_{11}-P_{21}P_{12}} & \frac{P_{11}P_{22}}{P_{11}P_{22}-P_{12}P_{21}} \end{bmatrix}$$

das RGA eines allgemeinen MIMO-Systems $P(s)$ kann wie folgt berechnet werden:

$$RGA(s) = P(s) \cdot P(s)^{-\top}$$

wobei \cdot eine elementweise Multiplikation beschreibt und $P(s)^{-\top}$ die Inverse der Transponierten ist.

Eigenschaften des RGA:

- Falls $P(s)$ eine **obere Dreieckmatrix** ist, dann ist das RGA $= \mathbb{I}$
- Die Summe der Spalten und der Zeilen des RGA ergeben immer 1.
- Ist das RGA bei einer gegebenen Frequenz ω ungefähr eine Einheitsmatrix:

$$[RGA(j\omega)] \approx \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

dann ist das betrachtete MIMO-System bei dieser Frequenz mit individuellen SISO-Reglern regelbar.

Allgemein: falls in jeder Zeile/Spalte ein Eintrag sehr nahe bei 1 ist und die anderen nahe bei 0, sind diese Kombinationen von Ein- und Ausgängen gut mit einem SISO-Regler regelbar.

Beispiel: RGA umgekehrte diagonal

Gegeben:

$$RGA(0) = \begin{bmatrix} -0.3 & 1.3 \\ 1.3 & -0.3 \end{bmatrix}$$

Q: Ist es sinnvoller, y_1 durch u_1 und y_2 durch u_2 oder umgekehrt zu regeln? Erwarten Sie fuer Ihre Wahl durch die Wechselwirkungen ein schnelleres oder langsameres Regelverhalten?

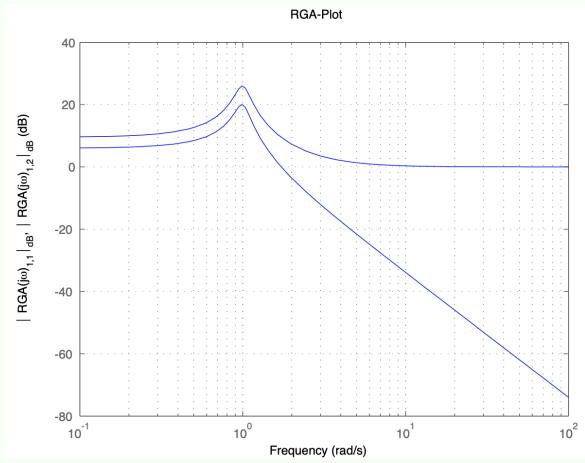
A: Der(i,j)-Eintrag der RGA-Matrix beschreibt das Verhältnis zwischenden Übertragungsfunktionen $u_j \rightarrow y_i$ im "offenen" (alle anderen Eingänge Null) und "geschlossenen" (alle anderen Ausgänge Null durch perfekte Regelung) System.

D.h. ein Eintrag < 0 bedeutet, dass die Verstärkung von u_j nach y_i durch Einflüsse der anderen Kreise das Vorzeichen wechselt kann → das System wird leicht instabil. Eine solche Ein- / Ausgangspaarung ist immer zu vermeiden.

Ein Eintrag > 1 bedeutet, dass die Verstärkung im offenen Fall grösser als im geschlossenen ist. D.h. wenn wir einen Regler für den offenen Kreis entwerfen und dann den zweiten Kreis schliessen, wird die resultierende Verstärkung kleiner. Das Regelverhalten wird dadurch träge.

Somit ist der Fall > 1 , also die Paarung $u_1 \rightarrow y_2, u_2 \rightarrow y_1$ klar zu bevorzugen. Dabei ist ein langsameres Regelverhalten zu erwarten.

Beispiel: RGA und Durchtrittsfrequenz



Sie beabsichtigen, einen Regulator mit vollständiger Zustandsrückführung zu entwerfen. Der eigentliche Entwurf ist nicht Gegenstand dieser Aufgabe. Sie möchten die Kanäle möglichst entkoppeln (one-loop-at-the-time), aber gleichzeitig soll der Regler bei den Eingangsgroessen keine grossen Amplituden generieren. Bereich ω_c ?

Ab einer Frequenz von ca. 10 rad/s ist die RGA-Matrix praktisch diagonal und eine Entkopplung der Kanäle ist praktisch gewährleistet (one-loop-at-the-time). Deshalb ist es sinnvoll die Durchtrittsfrequenz ω_c mindestens bei 10 rad/s auszuwählen. Die Auswahl einer viel höheren ω_c würde verursachen, dass der Regulator grössere Inputamplituden erzeugt. Ein sinnvoller Bereich wäre deshalb: $10 < \omega_c < 30$ rad/s.

18 Singulärwerte

18.1 Singulärwerte:

Im folgenden werden Eigenschaften zur linearen Abbildung

$$y = M \cdot u, \quad u \in \mathbb{C}^m, \quad y \in \mathbb{C}^p, \quad M \in \mathbb{C}^{p \times m}$$

beschrieben. Insbesondere erfüllt der Ausgang y folgende wichtige Eigenschaft:

$$\sigma_{\min}(M) \leq \frac{\|y\|}{\|u\|} \leq \sigma_{\max}(M),$$

wobei $\|\cdot\|$ die euklidische Norm ist und

$$\sigma_i(M) = \sqrt{\lambda_i(\overline{M}^T \cdot M)} > 0,$$

Wichtig: die Eigenwert von $\overline{M}^T \cdot M$.

\overline{M}^T bedeutet komplexe konj. des Elementes der Matrix.

Die Singulärwerte der Matrix M sind.

\overline{M}^T ist die Transponierte der Komplex-Konjugierten von M . Die Singulärwertzerlegung (SVD) der Matrix M lautet:

$$M = U \cdot \Sigma \cdot V^T,$$

Wobei Σ die **Singulärwerte** σ_i auf der **Hauptdiagonale** hat. U und V^T sind unitäre (längenerhaltende) Transformationsmatrizen:

$$U \cdot U^T = V \cdot V^T = I$$

note: Die Anzahl Singulärwerte eines Systems mit q -Eingängen und P -Ausgängen ist: $\min(p, q)$.

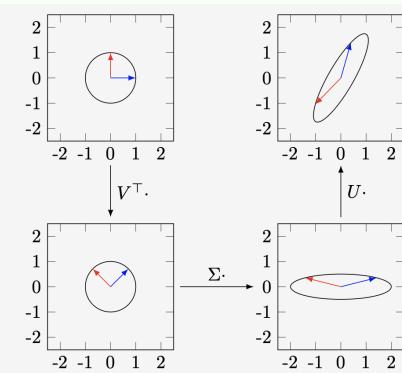
Beispiel: Phasoren 1

Alle Eingaenge $\{u \mid \|u\| = 1\}$ sollen mit:

$$M = \begin{bmatrix} 0.4009 - 1.0133 \\ 1.4015 - 1.0480 \end{bmatrix}$$

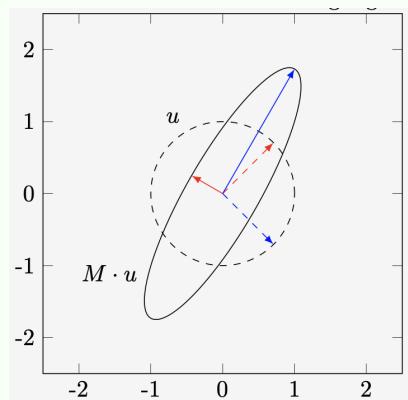
abgebildet werden. Die Singulaerwertzerlegung lautet:

$$M = \underbrace{\begin{bmatrix} 1/2 - \sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/21/2 \end{bmatrix}}_U \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} 20 \\ 0.5 \end{bmatrix}}_{\Sigma} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} - 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{21}/\sqrt{2} \end{bmatrix}}_{V^T}$$

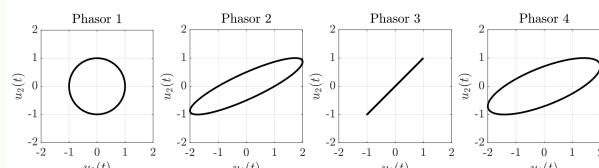


Die Transformationen V^T und U beschreiben in diesem Beispiel reine Rotationen. Spiegelungen sind auch moeglich und erfuellen somit auch Unitaritaet. Zusaetzlich sollen die Eingaenge gefunden werden, die den Ausgang maximal und minimal anregen. Da die Zeilen der Matrix V^T orthonormal sind, entsprechen die Zeilen von V^T den Eingaengen, die die Hauptachsen anregen. Das heisst

- $\|Y\| = \sigma_{min}$ fuer $u = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$
- $\|Y\| = \sigma_{max}$ fuer $u = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$

**Beispiel: Phasoren 2**

$u(t)$	$\left(\begin{array}{c} 2 \cdot \cos(\omega t) \\ \cos(\omega t + \frac{\pi}{6}) \end{array} \right)$	$\left(\begin{array}{c} \cos(\omega t) \\ \cos(\omega t) \end{array} \right)$	$\left(\begin{array}{c} \cos(\omega t) \\ \cos(\omega t + \frac{\pi}{2}) \end{array} \right)$	$\left(\begin{array}{c} 2 \cdot \cos(\omega t) \\ \cos(\omega t + \frac{\pi}{4}) \end{array} \right)$
Phasor Nr.	2	3	1	4

**18.1.1 Vorgehen::****1. Singulärwerte bestimmen:**

$$\sigma_i = \sqrt{\lambda_i(\overline{M}^T M)} = \sqrt{\lambda_i(M \overline{M}^T)}$$

2. $\Sigma \in \mathbb{R}^{P \times m}$ konstruieren

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & 0 & \sigma_r & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_r \geq 0$$

3. v_i : Normalisierte Eigenvektoren von $M^T M \Rightarrow$ input-Richtungen

4. u_i : Normalisierte Eigenvektoren von $MM^T \Rightarrow$ output-Richtungen

5. Wenn die matrix $M \in \mathbb{C}^{p \times m}$ nicht vollen Rank hat \rightarrow mindestens 1 $SW = 0$ (dependig on haow many dependent rows does Mhave)

note: Falls $\sigma_i \neq 0$ geht auch: $u_i = \frac{1}{\sigma_i} M v_i$

Beispiel: Groesste Verstaerkung in SVD

Gegeben:

$$\begin{aligned} U &= \begin{bmatrix} -0.5299 + 0.6813i & -0.3101 + 0.3987i \\ 0.0558 + 0.5020i & -0.0953 - 0.8578i \end{bmatrix} \\ S &= \begin{bmatrix} 0.9591 & 0 \\ 0 & 0.4570 \end{bmatrix} \\ V &= \begin{bmatrix} -0.6314 + 0.0000i & -0.7755 + 0.0000i \\ -0.5483 + 0.5483i & 0.4465 - 0.4465i \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Die groesste Verstaerkung des Eingangssignals erreicht man, wenn man in Richtung des groessten Singularwertes anregt. Die Anregungsrichtung, die dem groessten Singularwert entspricht, ist der erste Vektor der Transformationsmatrix V. Die Phasenverschiebung ist: $\angle v_2 - \angle v_1 = 0.75 \cdot \pi - \pi = -0.25 \cdot \pi$

19 Frequenzantworten

19.1 SISO - Recap:

Ein lineares, asymptotisch stabiles System $P(s)$, welches mit einem harmonischen Eingang

$$u(t) = \cos(\omega t) \cdot h(t)$$

bei einer fixen Frequenz ω angeregt wird, produziert im eingeschwungenen Zustand ein harmonisches Signal bei derselben Frequenz:

$$y_\infty(t) = |P(j\omega)| \cdot \cos(\omega t + \angle P(j\omega))$$

Dabei ist die Systemantwort um $\varphi(\omega) = \angle P(j\omega)$ phasenverschoben und um $m(\omega) = |P(j\omega)|$ skaliert. Um die Frequenzantwort übersichtlich darzustellen, können $|P(j\omega)|$ und $\angle P(j\omega)$ im Nyquist- oder Bode-Plot dargestellt werden.

19.2 Frequenzantwort MIMO:

Im MIMO Fall ist der Eingang $u(t)$ ein Vektor harmonischer Funktionen:

$$u(t) = \begin{bmatrix} \mu_1 \cdot \cos(\omega t + \varphi_1) \cdot h(t) \\ \mu_2 \cdot \cos(\omega t + \varphi_2) \cdot h(t) \\ \vdots \\ \mu_m \cdot \cos(\omega t + \varphi_m) \cdot h(t) \end{bmatrix}$$

Die Frequenzanalyse beschränkt sich auf eine gemeinsame frei wählbare Anregungsfrequenz ω auf allen Kanälen. Die Anregungsmagnituden μ_i und -phasen φ_i können separat gewählt werden. Laplace-Transformation von $u(t)$ führt zu:

$$U(s) = \begin{bmatrix} e^{\varphi_1 \cdot s/\omega} \cdot \mu_1 \cdot \frac{s}{s^2 + \omega^2} \\ e^{\varphi_2 \cdot s/\omega} \cdot \mu_2 \cdot \frac{s}{s^2 + \omega^2} \\ \vdots \\ e^{\varphi_m \cdot s/\omega} \cdot \mu_m \cdot \frac{s}{s^2 + \omega^2} \end{bmatrix} = e^{\Phi \cdot s/\omega} \cdot \mu \cdot \frac{s}{s^2 + \omega^2}$$

mit $\Phi = \text{diag}(\varphi_i) \in \mathbb{R}^{m \times m}$ und $\mu = [\mu_1, \dots, \mu_m]^\top \in \mathbb{R}^m$

Damit ergibt sich für den Ausgang im eingeschwungenen Zustand:

$$y_\infty(t) = \begin{bmatrix} \nu_1 \cdot \cos(\omega t + \psi_1) \\ \nu_2 \cdot \cos(\omega t + \psi_2) \\ \vdots \\ \nu_m \cdot \cos(\omega t + \psi_m) \end{bmatrix}$$

$$Y(s) = e^{\Psi \cdot s/\omega} \cdot \nu \cdot \frac{s}{s^2 + \omega^2}$$

mit $\Psi = \text{diag}(\psi_i) \in \mathbb{R}^{m \times m}$ und $\nu = [\nu_1, \dots, \nu_m]^\top \in \mathbb{R}^m$

Da für $Y(j\omega) = P(j\omega) \cdot U(j\omega)$ gilt ergibt sich:

$$e^{\Psi} \cdot \nu = P(j\omega) \cdot e^{\Phi} \cdot \mu$$

$$\underbrace{y}_{e^{\Psi} \cdot \nu} = \underbrace{P(j\omega)}_{M} \cdot \underbrace{u}_{e^{\Phi} \cdot \mu}$$

Wir stellen fest, dass der Ausgang y eine lineare Abbildung von u ist. Es gilt daher:

$$\sigma_{\min}(P(j\omega)) \leq \frac{\|\nu\|}{\|\mu\|} \leq \sigma_{\max}(P(j\omega)), \quad \max \|y_\infty(t)\|_2 \leq \sigma_{\min}(\omega) \cdot \|\mu\|_2$$

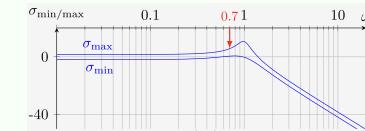
Die Singulärwerte geben für den eingeschwungenen Zustand Schranken für den Betrag der Amplituden $\|\nu\|$. Sie sind ein Mass für den worst-case Amplitude die man bei der Anregung einer gegebenen Frequenz ω erwarten kann.

Beispiel: Frequenzantworten

Wir wollen das System

$$P(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s^2 + 0.3s + 1} & \frac{0.2}{s^2 + 0.5s + 1} \\ \frac{0.2}{s^2 + s + 1} & \frac{0.1}{s^2 + s + 1} \end{bmatrix}$$

für $\{\mu \mid \|\mu\| = 1\}$ bei $\omega = 0.7$ rad/s so anregen, dass $\|\nu\| = \sigma_{\max}(P(j \cdot 0.7))$ gilt.



Wir stellen fest, dass $\sigma_{\max}(P(j \cdot 0.7)) = 1.914$. Die Ausgänge y_1 und y_2 werden je Amplituden ν_1 und ν_2 haben, die kleiner als 1.914 sind. Bei der maximalen Anregung wird die Norm jedoch $\|\nu\| = 1.914$ sein.

Um die Anregungsrichtung zu finden, bei der $\|\nu\|$ maximal wird, verwendet man die Singulärwertzerlegung der Matrix $P(j \cdot 0.7)$:

$$P(j \cdot 0.7) = U \cdot \Sigma \cdot V^\top =$$

$$\begin{bmatrix} -0.8724 + 0.3635j & 0.3089 - 0.1068j \\ -0.2167 + 0.2247j & -0.6691 + 0.6675j \end{bmatrix} \cdot$$

$$\begin{bmatrix} 1.914 & 0 \\ 0 & 1.056 \end{bmatrix} \cdot$$

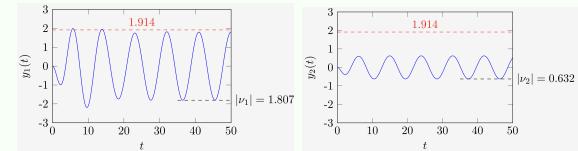
$$\begin{bmatrix} -0.9344 & -0.3525 + 0.0515j \\ 0.3562 & -0.9246 + 0.1351j \end{bmatrix}$$

Ausgangsrichtung der Maximalen Verstärkung entspricht der ersten Spalte von U , die **Maximale Verstärkung** entspricht dem höchsten Singulärwert, welcher an erster Stelle steht und die **Eingangsrichtung der maximalen Verstärkung** entspricht der ersten Zeile von V^\top . (MATLAB: $V(:,1)$)

Die Maximale Richtung ist somit:

$$\zeta_{\max} = \begin{bmatrix} -0.9344 \\ -0.3525 + 0.0515j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{j\pi} & 0 \\ 0 & e^{j2.9965} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0.9344 \\ 0.3562 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow u(t) = \begin{bmatrix} 0.9344 \cdot \cos(0.7 \cdot t + \pi) \\ 0.3562 \cdot \cos(0.7 \cdot t + 2.9965) \end{bmatrix}$$



Bemerkungen:

- **ACHTUNG** Beim Eingangssignal T ablesen und $\omega = 2\pi/T$
- $|\nu_1| < \sigma_{\max} \Rightarrow y_{1,\infty} < \sigma_{\max}$
- $|\nu_2| < \sigma_{\max} \Rightarrow y_{2,\infty} < \sigma_{\max}$
- $\|\nu\| = \sigma_{\max} \cdot \underbrace{\|\mu\|}_{=1}$
- $\max(\|y(t)\|) < \|\nu\|$, da der Ausgang nicht unbedingt in Phase schwingt
- $\sqrt{|\nu_1|^2 + |\nu_2|^2} = 1.914 = \sigma_{\max}$ (Da maximale Richtung angeregt)

19.3 Singulärwertverläufe als Werkzeug:

Singulärwertverläufe sind das MIMO Analogon zu den SISO Bode-Plots. Der entscheidende Unterschied ist aber, dass man bei den SWV keine Information über die Phase hat und dass sie **worst-case Abschätzungen** sind im Gegensatz zu effektiven Verstärkungen im Bode-Plot.

Da bei Singulärwertverläufen die euklidische Norm des Eingangs = 1 ist, muss die euklidische Norm des Ausgangsvektors $\in [\sigma_{\min}, \sigma_{\max}]$ sein!

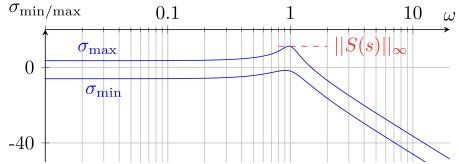
Die Singulärwertverläufe können für beliebige Übertragungsfunktionen ($S(s)$, $T(s)$, $L(s)$, $Q(s)$) erstellt werden:

$$\begin{aligned} T(s) &= (I + P(s) \cdot C(s))^{-1} \cdot P(s) \cdot C(s) \\ S(s) &= (I + P(s) \cdot C(s))^{-1} \\ Q(s) &= I + P(s) \cdot C(s) \quad (\text{Return Difference}) \end{aligned}$$

Mit der Definition der Systemnorm

$$\|G(s)\|_\infty = \max_\omega \left(\max_i \sigma_i(G(s)) \right),$$

hat dann z.B. die Sensitivität eine veranschaulichende Interpretation: Die Systemnorm $\|S(s)\|_\infty$ ist die maximal zu erwartende/worst-case Verstärkung des Störsignals.



Bei einer kleinen Systemnorm $\|S(s)\|_\infty$ weiß man, dass man eine gute Störungsunterdrückung hat.

Die **Return Difference** gibt ein Mass für die Robustheit des Regelkreises:

$$\mu_{\min} = \min_\omega \left(\min_i \sigma_i \{I + L(j\omega)\} \right)$$

Erinnerung: Stationäre Regelfehler: $S(0) = \frac{1}{\sigma_{\min}(I+L(0))}$

20 LQR

20.1 Infinite Horizon LQR Formulierung:

Der LQ-Regler beruht auf einem intuitiven Ansatz bei dem man beliebig einen Trade-off zwischen Regelfehler und Regelaufwand wählt. Mit dem LQR Verfahren kann für jedes beliebige, vollständig steuerbare lineare System ein stabilisierender Regler gefunden werden.

LQR ist eine Abkürzung für *linear quadratic regulator*.

Linear: da das System linear ist:

$$\frac{d}{dt}x(t) = A \cdot x(t) + B \cdot u(t), \quad x(t) \in \mathbb{R}^n, \quad u(t) \in \mathbb{R}^m$$

Quadratic: Definition einer *quadratischen* Kostenfunktion J:

$$J(u(t)) = \int_0^\infty \left(x(u(t))^T \cdot Q \cdot x(u(t)) + u(t)^T \cdot R \cdot u(t) \right) dt$$

der optimale Eingang $u^*(t)$ minimiert die Kostenfunktion J:

$$u^*(t) = \arg \min J(u(t))$$

Die Zustände $x(t)$ und Eingänge $u(t)$ werden in Optimierungsproblem mit Q und R gewichtet, wobei

$$Q = Q^T \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad Q \succeq 0, \quad \text{und} \quad R = R^T \in \mathbb{R}^{m \times m}, \quad R \succ 0$$

Die Definitheit der Matrizen Q und R ist notwendig, damit das Argument des Integrals quadratisch konvex ist. Somit ist das Minimum von $J(u)$ einzigartig, falls es existiert.

Regulator: der Regler löst das *regulator Problem*:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$$

$$Q \uparrow \hat{=} R \downarrow, \quad \frac{q}{R} \uparrow^1 \quad \text{Cheap Control. Je grösser } Q \text{ relativ zu } R, \text{ desto teurer ist es wenn } x(t) \text{ nicht im Ursprung ist.}$$

Je grösser Q relativ zu R , desto teurer ist es wenn $x(t)$ nicht im Ursprung ist. Das System wird schnell an den Ursprung geregt, um die Kosten tiefstmöglich zu halten. Dabei wird $u(t)$ jedoch betragsmäßig gross sein.

$$Q \downarrow \hat{=} R \uparrow, \quad \frac{q}{R} \downarrow \quad \text{Je grösser } R \text{ relativ zu } Q, \text{ desto teurer ist es viel Energie mit den Ausgangsgrößen auszugeben. Das System wird langsam (mit betragsmäßig kleinem Regelsignal } u(t) \text{) in den Ursprung geregt.}$$

Note: eine Erhöhung der Eigenwerte von Q hat den gleichen Effekt wie eine Reduzierung derer von R . Die relative Grösse ist von Relevanz.

20.1.1 Lösung der LQR-Formulierung:

Die Lösung der LQR-Formulierung ist eine **lineare Zustandsrückführung** und lautet

$$u^*(t) = -K \cdot x(t), \quad \text{wobei } K = R^{-1} \cdot B^T \cdot \Phi$$

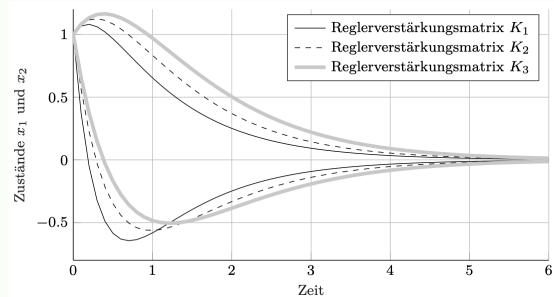
Note: Die Matrix K ist **statisch**, sie muss für gegebene $\{A, B, Q, R\}$ nur einmal berechnet werden.

Beispiel: Polplatzierung im LQR

Die gewünschten closed-loop Spezifikationen sind dabei, dass das System nicht ueberschwingt und dass der Regulatorfehler in beiden Zustandsvariablen mit e^{-3t} abklingen. (Gegeben ist: A, B, Q, R)

- Polpaar: $\pi_1 = \pi_2 = -3$
- Zustandrückführungsmatrix K zue oben Polen: $\text{solve}(\text{eig}\{A - B \cdot K\} == -3)$

Beispiel: Verstärkungsmatrix K



MATLAB Befehl	K_1	K_2	K_3
$K = \text{lqr}(A, B, [1 \ 0; 0 \ 1], 0.1);$	x		
$K = \text{lqr}(A, B, [1 \ 0; 0 \ 1], 1);$			x
$K = \text{lqr}(A, B, [3 \ 0; 0 \ 3], 1);$		x	

¹Mit $Q = q \cdot \mathbb{I}$ und $R = R$.

20.1.2 algebraische Riccati Gleichung:

Dabei ist Φ die einzige positive Lösung der algebraischen Riccati-Gleichung

$$\Phi \cdot B \cdot R^{-1} \cdot B^T \cdot \Phi - \Phi \cdot A - A^T \cdot \Phi - Q = 0$$

Wählt man

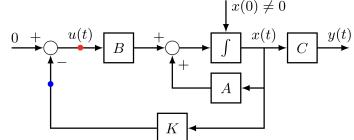
$$Q = \bar{C}^T \cdot \bar{C}, \quad \bar{C} \in \mathbb{R}^{p \times n} \text{ wobei } p = \text{rank}(Q),$$

dann ist Φ garantiert positiv definit, falls $\{A, B\}$ **steuerbar** und $\{A, \hat{C}\}$ **beobachtbar** sind. Diese Bedingungen sind hinreichen aber nicht notwendig.

Hinweis: Für jedes lineare System kann eine fiktive Ausgangsmatrix \hat{C} gefunden werden, mit welcher das System $(\{A, \hat{C}\})$ vollständig beobachtbar ist und somit existiert garantiert eine eindeutige Lösung (falls $\{A, B\}$ vollständig steuerbar ist).

Note:

1. Die Matrix \bar{C} hat nichts mit der Matrix C zu tun. Falls jedoch $\bar{C} = C$ gewählt wird, wird $\|y(t)\|_2$ in der Kostenfunktion berücksichtigt.
2. Der open loop gain lautet $L_{LQR}(s) = K \cdot (sI - A)^{-1} \cdot B$



3. Robust Stability ist auch bei Modellunsicherheit gewährleistet.

20.1.3 Eigenschaften von Infinite Horizon Reglern:

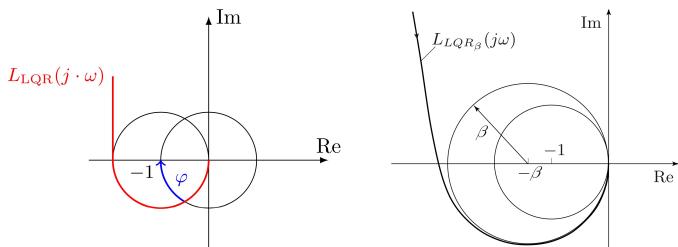
Stabilität: Die Matrix $A - B \cdot K$ des geschlossenen Regelkreises ist **garantiert Hurwitz** (stabil).

$$\dot{x}(t) = (A - B \cdot K) \cdot x(t)$$

Robustheit: Für die Wahl $R = r \cdot I$ hat die minimum return difference μ_{min} folgende Eigenschaft:

$$\mu_{min,LQR} = \min_{\omega} \left(\min_i \sigma_i(I + L_{LQR}(j\omega)) \right) \geq 1$$

Im SISO-Fall lässt sich diese Eigenschaft folgendermassen darstellen. Dies garantiert eine Verstärkungsreserve von $\gamma \in [0.5, \infty)$ und eine Phasenreserve von $\varphi \geq 60^\circ$



Durch modifizieren der Riccati-Gleichung mit $\beta > 1$ wie folgt:

$$\frac{1}{\beta} \cdot \Phi_{\beta} \cdot B \cdot R^{-1} \cdot B^T \cdot \Phi_{\beta} - \Phi_{\beta} \cdot A - A^T \cdot \Phi_{\beta} - Q = 0$$

so resultiert die Lösung Φ_{β} . Damit wird der Regelkreis noch robuster, da dann gilt:

$$\mu_{min,LQR} = \min_{\omega} \left(\min_i \sigma_i(\beta I + L_{LQR}(j\omega)) \right) \geq \beta$$

Das heisst, der Nyquist-Plot tritt nie in den um $-\beta + j \cdot 0$ zentrierten Kreis mit Radius β ein.

20.2 Folgeregelung:

Zur Erinnerung: Ein lineares System beschreibt die Dynamik der Differenzen. Wir können den Ursprung des Systems demnach in einen neuen Punkt verschieben, mit den Definitionen $\Delta x = x - x_{\infty}$ und $\Delta u = u - u_{\infty}$. Die Dynamik des Systems in den neuen Variablen lautet:

$$\Delta \dot{x} = A \cdot \Delta x + B \cdot \Delta u,$$

Wobei die Kostenfunktion nun auch angepasst werden muss:

$$J(\Delta u) = \int_0^{\infty} (\Delta x^T(t) \cdot Q \cdot \Delta x(t) + \Delta u^T(t) \cdot R \cdot \Delta u(t)) dt$$

das neue Regulator Problem lautet somit:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \Delta x(t) = 0$$

Somit linearisiert man das System um einen neuen Punkt $\{x_{\infty}, u_{\infty}\}$. Dies eintspricht bei einem linearen System ein Ursprungverschiebung. Die Lösung des Regulatorsproblems der Dynamik der Differenz lautet nun

$$\Delta u = u - u_{\infty} = -K \cdot \Delta x = -K \cdot (x - x_{\infty})$$

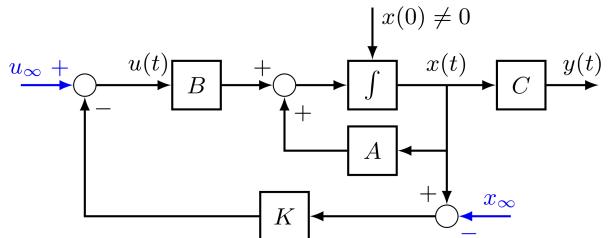
Der Eingang auf das originale System $\dot{x} = A \cdot x + B \cdot u$ lautet somit:

$$u = u_{\infty} - K \cdot (x - x_{\infty}),$$

wobei u_{∞} ein statisches feedforward Signal ist, welches das System am gewünschten Punkt x_{∞} hält.

Im Gleichgewicht sind alle Ableitungen null:

$$0 = A \cdot x_{\infty} + B \cdot u_{\infty}$$



Bemerkungen:

- Die Stellgrösse u_{∞} ist statisch für eine statische Referenz x_{∞} .
- Die Folgeregelung mit feedforward kann keine Störungen unterdrücken.

20.3 Störungsunterdrückung - LQRI:

Um Störung und Modelfehler zu unterdrücken greift man zum LQRI, welcher zusätzlich zum standard LQR-Regler noch ein integratives Verhalten eingeführt wird. Um Störungen zu unterdrücken wird das Integral des Fehlers als neuer Zustand definiert:

$$v(t) = \int_0^t e(\tau) d\tau = \int_0^t (r(\tau) - y(\tau)) d\tau.$$

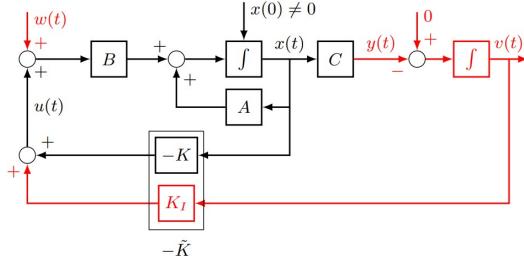
der neue Gesamtzustand lautet somit:

$$\tilde{x}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ v(t) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n+m}$$

Die Ableitung des Zustands lautet

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \tilde{x}(t) &= \begin{bmatrix} A \cdot x(t) + B \cdot (u(t) + w(t)) \\ -y(t) \end{bmatrix} \\ &= \underbrace{\begin{bmatrix} A & 0 \\ -C & 0 \end{bmatrix}}_{\tilde{A}} \cdot \begin{bmatrix} x(t) \\ v(t) \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix}}_{\tilde{B}} \cdot (u(t) + w(t)) \end{aligned}$$

Das neue System erfüllt im Gleichgewicht $\dot{v} = y(t) = 0$



Die Standard LQR Formulierung kann nun mit den Matrizen \tilde{A} und \tilde{B} gelöst werden, wobei die Dimension der Q Matrix angepasst werden muss:

$$\tilde{Q} = \begin{bmatrix} Q & 0 \\ 0 & Q_I \end{bmatrix}, \quad Q_I = \begin{bmatrix} \gamma_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \gamma_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \gamma_m \end{bmatrix}$$

Mit Q_I kann man einstellen, wie stark die Integratoren wirken sollen. Die Lösung des LQRI-Problems lautet:

$$\{\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{Q}, R\} \rightarrow \tilde{K} = [K, -K_I] \in \mathbb{R}^{m \times (n+m)},$$

$$u(t) = -\tilde{K} \cdot \tilde{x}(t) = u_K + u_{K_I} = -K \cdot x(t) + K_I \cdot v(t).$$

note:

- Die Matrix \tilde{K} ist statisch, sie muss für gegebene $\{\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{Q}, R\}$ nur einmal berechnet werden.
- Mit $Q = C^T \cdot C$ kann wiederum direkt $y(t)$ in der Kostenfunktion berücksichtigt werden.

Note: Wenn Sie legen einen Regler nach dem LQRI Verfahren aus, indem Sie die lineare Systembeschreibung um einen Integrator am Ausgang erweitern um dann fuer das erweiterte System einen LQR Regler auszulegen und keine Stoerungseinflusse vorhanden sind, wird der zusaetzliche Integrator auf null geregelt fuer $\lim_{t \rightarrow \infty}$, unabhaengig vom Anfangszustand $x(0)$ des Systems.

20.4 Folgeregelung mit Störungsunterdrückung:

Wenn man den LQRI-Ansatz um die feedforward Signale u_∞ und x_∞ erweitert, um auf eine Referenz mit Störungsunterdrückung zu regeln.

Da nun auf eine Referenz geregelt wird, muss der Fehler im Zustand $v(t)$ neu definiert werden:

$$v(t) = \int_0^t e(\tau) d\tau = \int_0^t (r(\tau) - y(\tau)) d\tau$$

Die Ableitung des Zustands lautet nun:

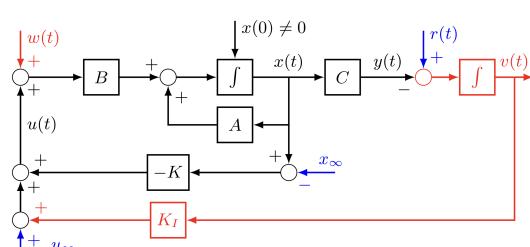
$$\frac{d}{dt} \tilde{x}(t) = \begin{bmatrix} A \cdot x(t) + B \cdot (u(t) + w(t)) \\ r(t) - y(t) \end{bmatrix}$$

$$= \underbrace{\begin{bmatrix} A & 0 \\ -C & 0 \end{bmatrix}}_{\tilde{A}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} x(t) \\ v(t) \end{bmatrix}}_{\tilde{B}} + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} \cdot (u(t) + w(t)) + \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} \cdot r(t).$$

Die Lösung des Problems folgt:

$$\{\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{Q}, R\} \rightarrow \tilde{K} = [K, -K_I] \in \mathbb{R}^{m \times (n+m)},$$

$$u(t) = u_\infty - K \cdot (x(t) - x_\infty) + K_I \cdot v(t).$$



Dieser Regler würde auch ohne Feedforward Teil $\{u_\infty(r(t)), x_\infty(r(t))\}$ funktionieren, wäre aber deutlich langsamer.

20.5 Finite Horizon LQR:

Das Integral der Kostenfunktion geht im Gegensatz zur Standardformulierung nur über ein Zeitintervall t_a bis t_b . Dementsprechend lautet die Kostenfunktion:

$$J(u) = x^T(t_b) \cdot P \cdot x(t_b) + \int_{t_a}^{t_b} (x^T \cdot Q(t) \cdot x + u^T \cdot R(t) \cdot u) dt.$$

Mit der Kostenmatrix $P \in \mathbb{R}^{n \times n}, P = P^T \succeq 0$ wird eine Abweichung des finalen Zustands $x(t_b)$ vom Ursprung bestraft. Das System kann in diesem Fall zeitinvariant sein:

$$\frac{d}{dt} x(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t), \quad x(t) \in \mathbb{R}^n, \quad u(t) \in \mathbb{R}^m, \quad x(t_a) = x_a$$

Die Lösung der finite Horizon Formulierung lautet:

$$u(t) = -K(t)x(t), \quad \text{wobei } K(t) = R^{-1}(t)B^T(t)\Phi(t).$$

Die Matrix $\Phi(t)$ ist die Lösung der differential matrix Riccati Gleichung:

$$\frac{d}{dt}\Phi(t) = \Phi(t)B(t)R^{-1}(t)B^T(t)\Phi(t) - \Phi(t)A(t) - A^T(t)\Phi(t) - Q(t)$$

wobei $\Phi(t)$ durch Rückwärtsintegration von $\Phi(t_b) = P$ gefunden werden kann. **Bemerkungen:**

- Die Matrix $K(t)$ ist zeitabhängig. Sie muss entsprechend der Zeitabhängigkeit der Matrizen $\{A(t), B(t), Q(t), R(t)\}$ berechnet werden.
- Die Matrix P ist eine neue Tuninggrösse.
- Die Matrix $K(t)$ ist nur für das Zeitintervall $[t_a, t_b]$ gültig. Für Zeiten $t > t_b$ muss $K(t)$ neu evaluiert werden.
- asymptotische Stabilität kann nicht garantiert werden, da für $t > t_b$ nicht optimiert wird.

20.5.1 Folgeregelung:

Zusätzlich zur zeitinvarianten Dynamik wird nun der zeitvariante Ausgang eingeführt:

$$y(t) = C(t) \cdot x(t)$$

Die Kosten die über ein Zeitintervall $[t_a, t_b]$ integriert werden lauten:

$$J(u) = (r(t_b) - y(t_b))^T \cdot P \cdot (r(t_b) - y(t_b))$$

$$+ \int_{t_a}^{t_b} ((r(t) - y(t))^T \cdot Q(t) \cdot (r(t) - y(t)) + u(t)^T \cdot R(t) \cdot u(t)) dt$$

Die Lösung der finiten horizon Folgeregelung lautet:

$$u(t) = -K(t) \cdot x(t) + v(t)$$

Bemerkungen:

- Die Referenztrajektorie $r(t)$ ist eine Wahl, die vor dem Lösen des Optimierungsproblems festgelegt wird.
- Die Matrix $K(t)$ ist zeitabhängig. Sie muss entsprechend der Zeitabhängigkeit der Matrizen $\{A(t), B(t), Q(t), R(t)\}$ berechnet werden.
- Die Matrix $K(t)$ ist nur für das Zeitintervall $t \in [t_a, t_b]$ gültig. Für Zeiten $t > t_b$ muss $K(t)$ neu evaluiert werden.
- $v(t)$ ist ein zeitabhängiges feedforward Signal, welches nur im Zeitintervall $t \in [t_a, t_b]$ für eine spezifische Referenz $r(t)$ gültig ist.

21 Zustandsbeobachter

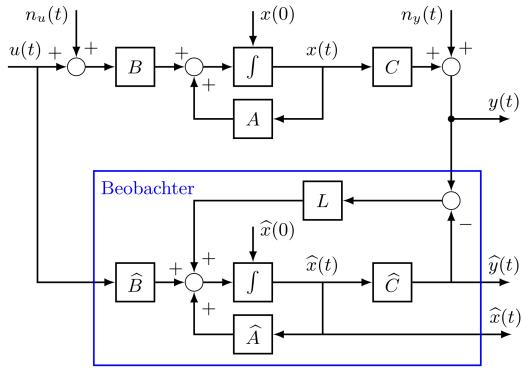
21.1 Zustandsbeobachter:

Lineare Zustandsregler (wie z.B. LQR) basieren auf der Kenntnis von $x(t)$. Das ist praktisch aber nicht umsetzbar. Deshalb benutzt man *Zustandsbeobachter* um durch $u(t)$ und $y(t)$ eine Schätzung $\hat{x}(t)$ zu erhalten.

21.2 Luenberger Beobachter:

Man will eine Beobachterdynamik $\frac{d}{dt}\hat{x}(t)$ s.t. der Beobachtungsfehler $e(t) = x(t) - \hat{x}(t)$ asymptotisch zu Null konvergiert $\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0$.

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\hat{x}(t) &= \hat{A} \cdot \hat{x}(t) + \hat{B} \cdot u(t) + L \cdot (y(t) - \hat{y}(t)) + \hat{d}(t) \\ \hat{y}(t) &= \hat{C} \cdot \hat{x}(t)\end{aligned}$$



Unter der Annahme, dass ein perfektes Modell vorliegt (i.e. $\widehat{(\cdot)} = (\cdot)$) ergibt sich Folgende Fehlerdynamik:

$$\frac{d}{dt}e(t) = (A - L \cdot C) \cdot e(t), \quad e(0) = x(0) - \hat{x}(0) \neq 0$$

Fehler konvergiert zu 0 falls $A - L \cdot C$ Hurwitz ist. Dies kann unter anderem durch zwei Arten erreichen:

21.2.1 Pole Placement:

Man platziert die gewünschten Polynome von Hand indem man L durch folgende Gleichung bestimmt:

$$\det(A - L \cdot C - \lambda I) = (\lambda_1 - \lambda)(\lambda_2 - \lambda) \dots (\lambda_n - \lambda) = 0$$

Dabei sind λ_i die gewünschten EW. Die Einträge der Matrix L folgen dann aus den Vergleichen mit den λ_i .

21.2.2 LQR Formulierung:

Da die L und C Matrizen "vertauscht" sind für die LQR Formulierung und da gilt

$$\text{eig}(X) = \text{eig}(X^\top), \quad X \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

können wir mit LQR Formulierung für die Matrix $A^\top - C^\top \cdot L^\top$ die Matrix L bestimmen, welche uns die Matrix $A - L \cdot C$ Hurwitz macht.

Mit den Änderungen

$$\begin{aligned}A &\rightarrow A^\top, & B &\rightarrow C^\top \\ Q = \bar{C}^\top \cdot \bar{C} &\rightarrow \bar{B} \cdot \bar{B}^\top & R = r \cdot I &\rightarrow q \cdot I \\ K &\rightarrow L^\top & \Phi &\rightarrow \Psi\end{aligned}$$

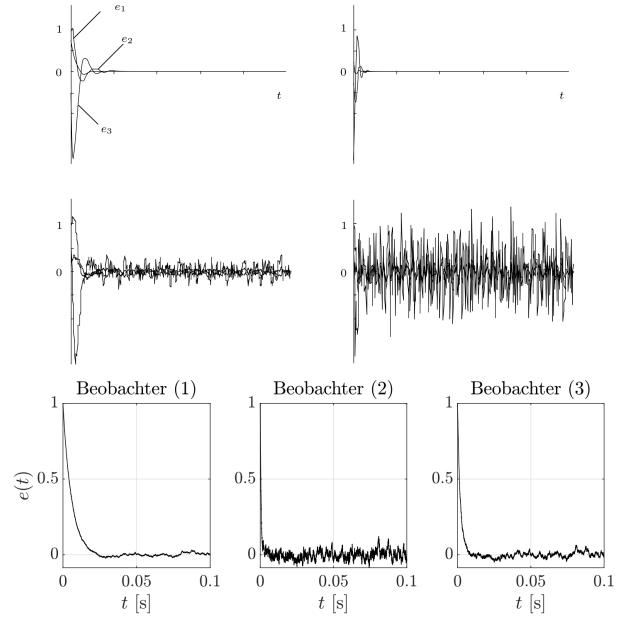
foglt für die Lösung der LQR Formulierung:

$$\begin{aligned}L^\top &= \frac{1}{q} \cdot C \cdot \Psi \\ \Psi \cdot C^\top \cdot \frac{1}{q} \cdot C \cdot \Psi - \Psi \cdot A^\top - A \cdot \Psi - \bar{B} \cdot \bar{B}^\top &= 0\end{aligned}$$

Falls die Matrizen $\{A, C\}$ beobachtbar und $\{A, \bar{B}\}$ steuerbar sind, existiert eine eindeutige positiv definite Lösung Ψ .

Bemerkungen:

- L ist statisch (muss nur einmal berechnet werden)
- Matrizen \bar{B} und q werden iterativ getunet bis Resultat zufriedenstellend ist.
- Falls $n_y \neq 0$ ist $\frac{d}{dt}e(t)$ noch um $-L \cdot n_y(t)$ erweitert. L kann nicht beliebig gross gewählt werden.
- Je grösser die Verstärkung L , umso stärker fließt das Messrauschen in die Fehlerdynamik mit ein. $L_2 > L_3 > L_1$ beim Bild unten.



21.3 Kalman Filter:

Falls das Rauschen $n_u(t)$ und $n_y(t)$ *Gaussian zero mean white noise Signale* sind und die Varianz der Gaussverteilung bekannt ist, kann man ein "optimales" L finden, welches die Varianz des Beobachtungsfehlers $e(t)$ minimiert. Man ändert dabei

$$\begin{aligned}\bar{B} \cdot \bar{B}^\top &\rightarrow B \cdot R_u \cdot B^\top \\ q \cdot I &\rightarrow R_y\end{aligned}$$

Bemerkungen:

- L_K ist statisch
- Kalman Filter hat keine tuning-Parameter mehr. R_u, R_y werden durch statische Analyse bestimmt.

21.4 Vergleich:

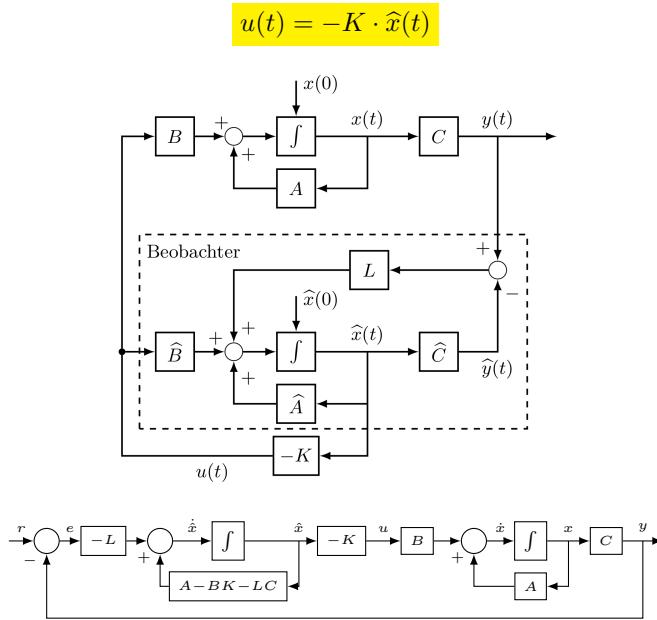
Vergleich der LQR Formulierung der verschiedenen Methoden

LQR	Luenberger	Kalman
K	L^\top	L_K^\top
A	A^\top	A^\top
B	C^\top	C^\top
$Q = \bar{C}^\top \cdot \bar{C}$	$\bar{B} \cdot \bar{B}^\top$	$B \cdot R_u \cdot B^\top$
R	$q \cdot I$	R_y
Φ	Ψ	P

22 LQG

22.1 LQG-Regler:

Die Kombination eines LQR-Reglers und eines Luenberger-Observer nennt man *LQG* (*Linear Quadratic Gaussian*). Anstatt den realen Zustand $x(t)$ wird nun seine Schätzung $\hat{x}(t)$ zurückgeführt.



22.2 Stabilität des LQG:

Unter der Annahme, dass die Matrizen $\{A, B, C\}$ exakt bekannt sind ergibt sich folgende Dynamik

$$\tilde{x}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ \hat{x}(t) \end{bmatrix}, \quad \frac{d}{dt} \tilde{x}(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} A & -B \cdot K \\ L \cdot C & A - B \cdot K - L \cdot C \end{bmatrix}}_{\tilde{A}_{cl}} \cdot \tilde{x}(t)$$

Die Stabilität ist durch die Eigenwerte von \tilde{A}_{cl} gegeben. Sind aber in dieser Form nicht einfach zu berechnen.

22.2.1 Separation Principle:

Das separation principle erlaubt es, die Beobachterverstärkungsmatrix L und die Reglerverstärkungsmatrix K unabhängig voneinander zu entwerfen und trotzdem einen stabilen geschlossenen Regelkreis zu erhalten.

Verwendet man die Koordinatentransformation

$$\tilde{z} = \begin{bmatrix} x(t) \\ e(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x(t) \\ x(t) - \hat{x}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{n \times n} & 0 \\ I_{n \times n} & -I_{n \times n} \end{bmatrix} = \underbrace{T^{-1}}_T \cdot \hat{x}(t)$$

Daraus ergibt sich folgende Dynamik

$$\frac{d}{dt} \tilde{z}(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} A - B \cdot K & B \cdot K \\ 0 & A - L \cdot C \end{bmatrix}}_{\text{gleiche EW wie } \tilde{A}_{cl}} \cdot \tilde{z}(t) = T^{-1} \cdot \tilde{A}_{cl} \cdot T \cdot \tilde{z}(t)$$

Daraus folgt direkt (pole Geschlossener Regelkreis)

$$\text{eig}(T^{-1} \cdot \tilde{A}_{cl} \cdot T) = \text{eig}(\tilde{A}_{cl}) = \text{eig}(A - B \cdot K) \cup \text{eig}(A - L \cdot C) \\ \therefore \tilde{A}_{cl} \text{ ist Hurwitz}$$

Das separation principle erlaubt es, die Beobachterverstärkungsmatrix L und die Reglerverstärkungsmatrix K unabhängig voneinander zu entwerfen und trotzdem einen stabilen geschlossenen Regelkreis zu erhalten.

Hinweis: die Robustheitseigenschaften werden nicht übertragen

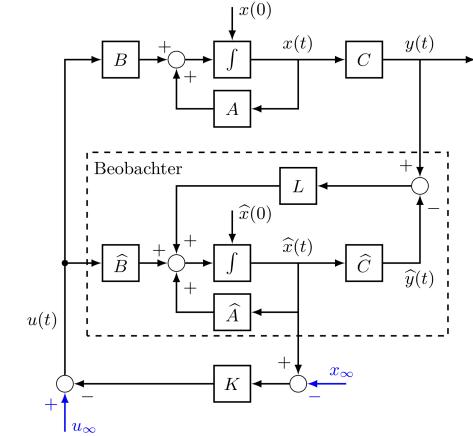
22.3 LQG mit Folgeregelung:

Analog zum LQR-Regler können wir den Gleichgewichtspunkt nach $\{x_\infty, u_\infty\}$ verschieben.

Das resultierende Stellsignal ist

$$u(t) = u_\infty - K \cdot (\hat{x}(t) - \hat{x}_\infty) = u_\infty - K \cdot (\hat{x}(t) - x_\infty)$$

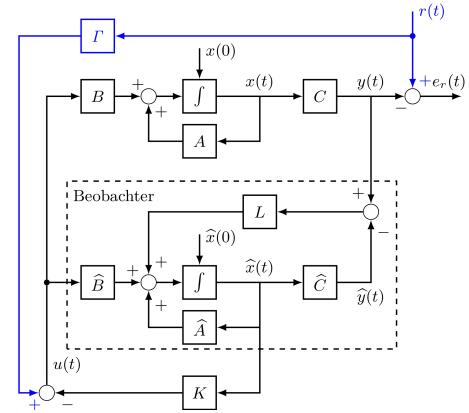
Da der Fehler $e(t) = x(t) - \hat{x}(t)$ asymptotisch zu null konvergiert gilt $x_\infty = \hat{x}_\infty$.



22.3.1 Folgeregelung durch Vorsteuerung:

Die Struktur aus Abb. unten kann auch durch eine Folgeregelung auf die Referenz $r(t)$ umsetzen.

$$r(t) = \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_m \end{bmatrix}, \quad r(t) = \underbrace{y_\infty}_{=\text{Const.}} = C \cdot x_\infty$$



Daraus ergeben sich folgende steady-state Gleichungen

$$0 = A \cdot x_\infty + B \cdot u_\infty \\ r(t) = C \cdot x_\infty \\ \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ r(t) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} A & B \\ C & 0 \end{bmatrix}}_F \cdot \begin{bmatrix} x_\infty \\ u_\infty \end{bmatrix}$$

Falls F vollen Rang hat, kann man für $r(t) \rightarrow \{x_\infty, u_\infty\}$ folgende Beziehung herleiten.

$$u_\infty + K \cdot x_\infty = \underbrace{- \left(C \cdot (A - B \cdot K)^{-1} \cdot B \right)}_{\Gamma}^{-1} \cdot r(t) \\ = \Gamma \cdot r(t)$$

22.4 LQGI zur Disturbance Rejection:

Eine unbekannte Störung $w(t)$ wirkt additiv auf den Eingang $u(t)$ von $P(t)$ (kann auch an anderen Stellen angreifen. Ist für LQGI egal) aber nicht auf den Beobachter.

Wir führen einen neuen Zustand für das System ein:

$$v(t) = \int_0^t (0 - y(\tau)) d\tau$$

$$\tilde{x}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ \hat{x}(t) \\ v(t) \end{bmatrix}, \quad \tilde{x}(t) \in \mathbb{R}^{2n+m}$$

Das Eingangssignal erweitert sich zu

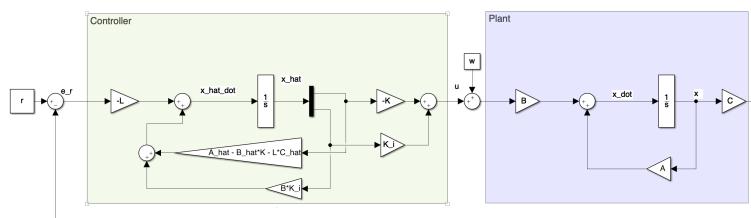
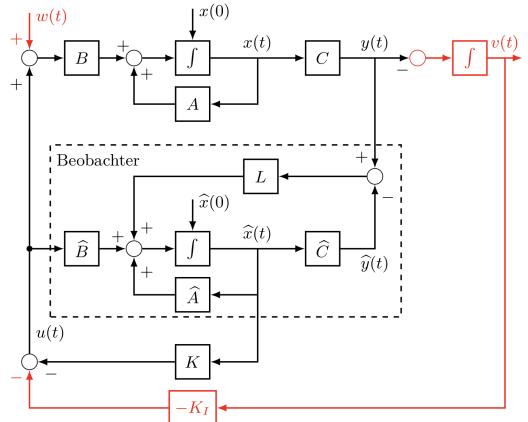
$$-K \cdot \hat{x}(t) + K_I \cdot v(t),$$

wobei die Variablen K, K_I aus der LQRI-Formulierung stammen:

$$\{\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{Q}, R\} \rightarrow \tilde{K} = [K, -K_I]$$

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ -C & 0 \end{bmatrix}, \quad \tilde{B} = \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \tilde{Q} = \begin{bmatrix} Q & 0 \\ 0 & \gamma \cdot I \end{bmatrix}$$

Je Tiefer γ , desto langsamer das Integratorverhalten.



In der obigen Figur entspricht $\tilde{x} = \begin{bmatrix} \hat{x} \\ v \end{bmatrix}$ und $-L = \begin{bmatrix} -L \\ I \end{bmatrix}$. Die Dynamik des Observers ist dadurch gegeben als:

$$\dot{\tilde{x}}(t) = \begin{bmatrix} \hat{A} - \hat{B}K - L\hat{C} & BK_I \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \tilde{x} + \begin{bmatrix} -L \\ I \end{bmatrix} e \quad (e = r - y = -y)$$

$$u = [-K \quad K_I] \tilde{x}$$

22.5 LQGI mit Folgeregelung:

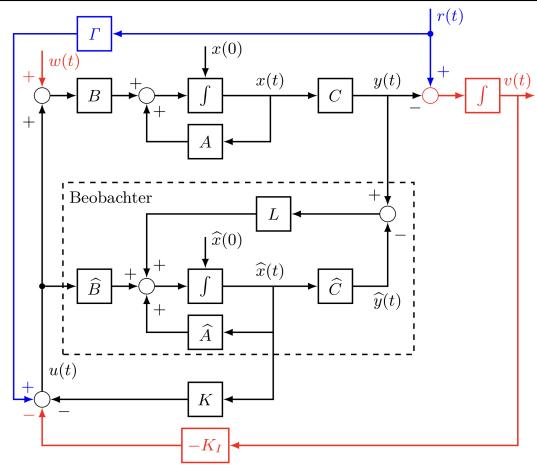
LQGI mit Folgeregelung folgt aus der Kombination der beiden Ansätze. Dabei ändert sich der Zustand $v(t)$ zu

$$v(t) = \int_0^t (r(\tau) - y(\tau)) d\tau.$$

Das Eingangssignal resultiert als:

$$u(t) = \Gamma \cdot r(t) - K \cdot \hat{x}(t) + K_I \cdot v(t),$$

wobei Γ gleich definiert ist wie in Abschnitt 22.3.1.



22.5.1 Auslegungsvorgehen:

Die Auslegung eines LQGI-Reglers mit Folgeregelung verläuft nach diesem Rezept:

1. LQRI-Regler designen: $\{\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{Q}, \tilde{R}\} \rightarrow \tilde{K} = [K, -K_I]$, dabei werden \tilde{Q}, \tilde{R} iterativ eingestellt
2. Obersever designen: $\{A^\top, C^\top, \bar{B} \cdot \bar{B}^\top, q \cdot I\} \rightarrow L^\top$, dabei werden \bar{B}, q iterativ eingestellt.
3. Hinzufügen der Vorsteuerung für die Folgeregelung über die Matrix Γ .

22.6 Resultierende Regelkreise:

Für alle betrachteten Regelkreise ist es möglich die resultierenden Systemgleichungen der offenen und geschlossenen Regelkreise darzustellen, wobei $e_r = r - y$:

Offener Regelkreis $L(s) : e_r \rightarrow y$

Geschlossener Regelkreis $T(s) : r \rightarrow y$

Betrachtung offener Regelkreis → Robustheitsbetrachtungen,

Geschlossener Regelkreis → Stabilitätsverhalten, transientes Verhalten.

$$\frac{d}{dt}x(t) = A \cdot x(t) + B \cdot u(t)$$

$$\frac{d}{dt}\hat{x}(t) = A \cdot \hat{x}(t) + B \cdot u(t) + L(y(t) - \hat{y}(t))$$

$$\frac{d}{dt}v(t) = r(t) - y(t), \quad (\text{nur bei integrativen Strukturen})$$

$$y(t) = C \cdot x(t), \quad \text{mit}$$

$$\tilde{x}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ \hat{x}(t) \end{bmatrix} \quad \text{oder} \quad \tilde{x}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ \hat{x}(t) \\ v(t) \end{bmatrix}$$

22.6.1 LQG-Regler:

Regelgesetz:

$$u(t) = -K \cdot \hat{x}(t), \quad \text{mit } r(t) = 0 \text{ und } e_r = 0 - y(t)$$

Offener Regelkreis:

$$\frac{d}{dt}\tilde{x}(t) = \begin{bmatrix} A & -BK \\ 0 & A - BK - LC \end{bmatrix} \cdot \tilde{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ -L \end{bmatrix} \cdot e_r(t)$$

Geschlossener Regelkreis:

$$\frac{d}{dt}\tilde{x}(t) = \begin{bmatrix} A & -BK \\ LC & A - BK - LC \end{bmatrix} \cdot \tilde{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ -L \end{bmatrix} \cdot r(t)$$

22.6.2 LQG-Regler mit Folgeregelung:

Regelgesetz:

$$u(t) = \Gamma - K \cdot \hat{x}(t)$$

Offener Regelkreis:

$$\frac{d}{dt} \tilde{x}(t) = \begin{bmatrix} A + B\Gamma C & -BK \\ LC + B\Gamma C & A - BK - LC \end{bmatrix} \cdot \tilde{x}(t) + \begin{bmatrix} B \\ B \end{bmatrix} \cdot \Gamma \cdot e_r(t)$$

Geschlossener Regelkreis:

$$\frac{d}{dt} \tilde{x}(t) = \begin{bmatrix} A & -BK \\ LC & A - BK - LC \end{bmatrix} \cdot \tilde{x}(t) + \begin{bmatrix} B \\ B \end{bmatrix} \cdot \Gamma \cdot r(t)$$

22.6.3 LQGI-Regler zur Störungsunterdrückung:

Regelgesetz:

$$u(t) = -K \cdot \hat{x}(t) + K_I \cdot v(t), \quad \text{mit } r(t) = 0$$

Offener Regelkreis:

$$\frac{d}{dt} \tilde{x}(t) = \begin{bmatrix} A & -BK & BK_I \\ 0 & A - BK - LC & BK_I \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \tilde{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ -L \\ I \end{bmatrix} \cdot e_r(t)$$

Geschlossener Regelkreis:

$$\frac{d}{dt} \tilde{x}(t) = \begin{bmatrix} A & -BK & BK_I \\ LC & A - BK - LC & BK_I \\ -C & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \tilde{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 & B \\ -L & 0 \\ I & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} r(t) \\ w(t) \end{bmatrix}$$

22.6.4 LQGI-Regler mit Folgeregelung:

Regelgesetz:

$$u(t) = \Gamma - K \cdot \hat{x}(t) + K_I \cdot v(t), \quad \text{mit } r(t) = 0$$

Offener Regelkreis:

$$\frac{d}{dt} \tilde{x}(t) = \begin{bmatrix} A + B\Gamma C & -BK & BK_I \\ LC + B\Gamma C & A - BK - LC & BK_I \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \tilde{x}(t) + \begin{bmatrix} B\Gamma \\ B\Gamma \\ I \end{bmatrix} \cdot e_r(t)$$

Geschlossener Regelkreis:

$$\frac{d}{dt} \tilde{x}(t) = \begin{bmatrix} A & -BK & BK_I \\ LC & A - BK - LC & BK_I \\ -C & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \tilde{x}(t) + \begin{bmatrix} B\Gamma & B \\ B\Gamma & 0 \\ I & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} r(t) \\ w(t) \end{bmatrix}$$

22.7 Berechnung der Übertragungsfunktionen:

Die offenen Regelkreise haben die Struktur

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \tilde{x}(t) &= \tilde{A}_{\text{cl}} \cdot \tilde{x}(t) + \tilde{B}_{\text{cl}} \cdot e_r(t) \\ y(t) &= \underbrace{\begin{bmatrix} C & 0 \end{bmatrix}}_{\tilde{C}_{\text{cl}}} \cdot \tilde{x}(t) \end{aligned}$$

Für die geschlossenen Regelkreise folgen die Systemmatrizen $\{\tilde{A}_{\text{cl}}, \tilde{B}_{\text{cl}}, \tilde{C}_{\text{cl}}\}$ analog.

Die Übertragungsfunktion der offenen Regelkreise $L(s)$ von $e_r \rightarrow y$ lautet somit:

$$L_{\text{LQG}}(s) = \tilde{C}_{\text{cl}} \cdot (s \cdot I - \tilde{A}_{\text{cl}})^{-1} \cdot \tilde{B}_{\text{cl}}$$

Identisch kann man mit $(\cdot)_{\text{cl}}$ die komplementäre Sensitivität $T(s)$ von $r \rightarrow y$ berechnen:

$$T_{\text{LQG}}(s) = \tilde{C}_{\text{cl}} \cdot (s \cdot I - \tilde{A}_{\text{cl}})^{-1} \cdot \tilde{B}_{\text{cl}}$$

Beispiel: open-loop gain fuer LQG

Der open-loop gain für den Standard LQG-Regler ergibt sich also aus

$$\begin{aligned} L_{\text{LQG}}(s) &= \underbrace{\begin{bmatrix} C & 0 \end{bmatrix}}_{\tilde{C}_{\text{ol}}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} s \cdot I - A & BK \\ 0 & s \cdot I - (A - BK - LC) \end{bmatrix}}_{(sI - A_{\text{ol}})^{-1}}^{-1} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ -L \end{bmatrix}}_{\tilde{B}_{\text{ol}}} \\ &= \underbrace{C \cdot (s \cdot I - A)^{-1} \cdot B \cdot K}_{\text{Plant}} \cdot \underbrace{(s \cdot I - (A - BK - LC))^{-1} \cdot L}_{\text{Controller}} \end{aligned}$$

Aufgrund der Struktur von \tilde{C}_{ol} und \tilde{B}_{ol} muss in diesem Fall nur der Eintrag oben rechts der Inversen berechnet werden.

23 Wiederherstellung der Robustheit

23.1 Minimum Return difference LQR/LQG:

Der offene LQR-Regelkreis

$$L_{\text{LQR}} = K \cdot (s \cdot I - A)^{-1}$$

besitzt hervorragende Robustheitseigenschaften:

$$\mu_{\min, \text{LQR}} = \min_{\omega} \left(\min_i \sigma_i(I + L_{\text{LQR}}(j\omega)) \right) \geq 1$$

Jedoch kann keine Aussage zur minimum return difference des LQG-Reglers gemacht werden.

$$\mu_{\min, \text{LQG}} = \min_{\omega} \left(\min_i \sigma_i(I + L_{\text{LQG}}(j\omega)) \right) \geq ?$$

Man muss nach der Reglerauslegung deshalb zwingend die Robustheit des Reglers überprüfen.

23.2 Loop-Transfer Recovery LTR:

Man kann die Robustheit des ursprünglichen LQR-Reglers mit einem LQG Regler approximieren. Dafür muss der Observer sehr schnell gewählt werden. Dadurch konvergiert der Fehler $e(t) = x(t) - \hat{x}(t)$ schnell zu Null (im Grenzfall unendlich schnell). Diese Wiederherstellung der Robustheit nennt man *loop-transfer recovery (LTR)*.

Achtung: Je kleiner man den tuning-Parameter q wählt, desto schneller wird die Dynamik des Fehlers (Schneller $\hat{\equiv}$ eig($(A - L(q) \cdot C)$) sind weiter links in der komplexen Ebene) → desto näher an die offenen Regelkreise von LQR (behrucht nicht Kreis um -1 mit Radius 1).

23.2.1 Dynamik des Fehlers in der Zustandsschätzung:

Analyse des Fehlers für $\lim_{q \rightarrow 0} (\cdot)$.

$$\lim_{q \rightarrow 0} e(t) = \lim_{q \rightarrow 0} (A - L(q) \cdot C)^{-1} \cdot \dot{e}(t) = 0$$

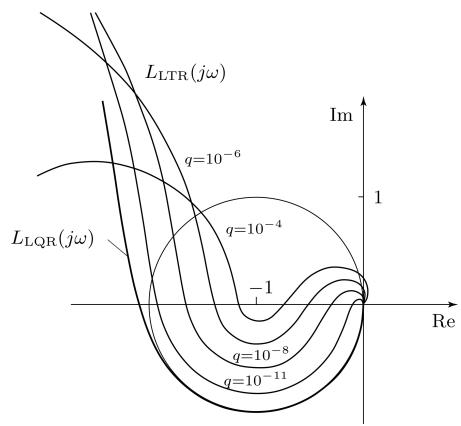
Da $(A - L(q) \cdot C)$ Hurwitz ist und $\text{eig}(X^{-1}) = 1 / \text{eig}(X)$ gilt, konvergieren die Eigenwerte von $(A - L(q) \cdot C)$ asymptotisch gegen null. Mit $e(t) = x(t) - \hat{x}(t)$ folgt:

$$\lim_{q \rightarrow 0} \hat{x}(t) = x(t), \quad \forall t$$

Das System verhält sich für kleine q als ob keine Beobachterdynamik vorhanden wäre. Für $q \rightarrow 0$ verhält sich ein LQG-Regler wie ein LQR-Regler und besitzt somit die gleichen Robustheitseigenschaften.

Bemerkungen:

- q kann in der Realität nicht beliebig klein gewählt werden, da ansonst hochfrequentes Rauschen massiv verstärkt wird.
- Falls die Regelstrecke nicht-miniphasige NST hat, approximiert der LTR-Ansatz den LQR-Regler häufig so gut wie möglich. (Bei nicht-miniphasigen Systemen ist die Durchtrittsfrequenz nah oben beschränkt und dadurch ist eine perfekte Approximation der LQR-Regelung nicht möglich.)



24 MATLAB Cheat Sheet

Command	Description
<code>bode(SYS)</code>	Draws the Bode plot of the dynamic system SYS.
<code>[MAG,PHASE] = bode(SYS,W)</code>	Return the response magnitudes and phases in degrees (along with the frequency vector W if unspecified).
<code>[MAG,PHASE,W] = bode(SYS)</code>	No plot is drawn on the screen.
<code>W = logspace(-2,3,1e3)</code>	$10^{-2} < w < 10^3$ mit 1000 log-Werten
<code>nyquist(SYS)</code>	Draws the Nyquist plot of the dynamic system SYS.
<code>[RE,IM] = nyquist(SYS,W)</code>	Return the real parts RE and imaginary parts IM of the frequency response (along with the frequency vector W if unspecified).
<code>[RE,IM,W] = nyquist(SYS)</code>	
<code>sys = ss(A,B,C,D)</code>	Creates an object SYS representing the continuous-time state-space model
<code>(E =) [V,D] = eig(A)</code>	Produces a diag matrix D of eigenvalues and a matrix V whose columns are eigenvectors so that $A^*V = V^*D$. (Column vector E containing the Eigval of a matrix A.)
<code>co = ctrb(A,B) (= ctrb(SYS))</code>	Returns the controllability matrix $[BABA^2B\dots]$.
<code>ob = obsv(A,C) (= obsv(SYS))</code>	Returns the observability matrix $[C; CA; CA^2\dots]$
<code>s = tf('s')</code>	Specifies the transfer function $H(s) = s$ (Laplace variable).
<code>SYS = tf(NUM,DEN, Ts, 'InputDelay', T)</code>	Creates a continuous-time transfer function SYS with numerator NUM and denominator DEN and optimal time delay T. (For discrete-time models add a sample time T_s)
<code>P = tf(sys)</code>	Converts any dynamic system SYS to the transfer function representation.
<code>MSYS = minreal(SYS)</code>	Produces, for a given LTI model SYS, an equivalent model MSYS where all cancelling pole/zero pairs or non minimal state dynamics are eliminated. For state-space models, minreal produces a minimal realization MSYS of SYS where all uncontrollable or unobservable modes have been removed.
<code>X = fminsearch(FUN,X0)</code>	Starts at X0 and attempts to find a local minimizer X of the function FUN. FUN is a function handle. FUN accepts input X and returns a scalar function value F evaluated at X. X0 can be a scalar, vector or matrix.
<code>P = pole(SYS)</code>	Returns poles P of the dynamic system SYS as a column vector. For state-space models, the poles are the eigenvalues of the A matrix. (Bei MIMO System die Pole der SISO-Elemente)
<code>[Z,G] = zero(SYS)</code>	Computes the zeros Z and gain G of the single-input, single-output dynamic system SYS.
<code>Z = tzero(SYS,TOL)</code>	Computes invariant zeros of the dynamic system SYS. For state-space models with matrices A,B,C,D,E (= I), the invariant zeros are the complex values s for which the rank of the matrix $\begin{bmatrix} A - sE & B \\ C & D \end{bmatrix}$ drops below its normal value. For minimal realizations, this coincides with the transmission zeros of SYS (values of s for which its transfer function drops rank).
<code>Ydb = mag2db(Y)</code>	Converts magnitude data Y into dB values. (db2mag analog)
<code>[NUM,DEN] = tfdata(SYS)</code>	Returns the num. and denom. of the transfer function SYS.
<code>[Z,P,K] = tf2zp(NUM,DEN)</code>	Finds the zeros, poles, and gains from a transferfunction in the form of $H(s) = K \cdot \frac{(s - z_1)(s - z_2)\dots(s - z_n)}{(s - p_1)(s - p_2)\dots(s - p_m)}$
<code>[Z,P,K] = zpkdata(SYS)</code>	Returns the zeros, poles, and gain for each I/O channel of the dynamic system SYS.
<code>K = dcgain(SYS)</code>	Computes the steady-state (D.C. or low frequency) gain of the dynamic system SYS ($P(j \cdot 0)$)
<code>eye(M)/ eye(M,N)/ eye(size(A))</code>	M-by-M/M-by-N/siz(A) matrix with 1's on the diagonal and zeros elsewhere.
<code>zeros(M)/ zeros(M,N)/ zeros(size(A))</code>	M-by-M/M-by-N/siz(A) matrix of zeros.
<code>rga = P.*inv(P')</code>	MATLAB code to compute the RGA matrix of P
<code>bodemag(SYS)</code>	Plots the magnitude of the frequency response of the linear system SYS (useful for RGA/Bode plot without the phase diagram).
<code>sigma(SYS)</code>	Produces a singular value (SV) plot of the frequency response of the dynamic system SYS.
<code>[U,S,V] = svd(X)</code>	Produces a diagonal matrix S, of the same dimension as X and with nonnegative diagonal elements in decreasing order, and unitary matrices U and V so that $X = U \cdot S \cdot V^\top$.
<code>FRESP = evalfr(SYS,X)</code>	Evaluates the transfer function of the continuous- or discrete-time linear model SYS at the complex number S=X or Z=X. $X = j \cdot \omega$ (Eval System, then plug it into svd)
<code>SimOut = sim('MODEL', PARAMETERS)</code>	Simulates your Simulink model, where 'PARAMETERS' represents a list of parameter name-value pairs.
<code>L = series(C,P)</code>	Connects the input/output models C and P in series.
<code>M = feedback(M1,M2)</code>	$(M1, M2) = (1, L) \Rightarrow S(s)$ and $(M1, M2) = (L, 1) \Rightarrow T(s)$. Computes a closed-loop model M (assumes negative feedback: for positive add ",+1")
<code>$\mu_{\min} = \min(\text{abs}(\text{bode}(1 + L)))$</code>	Computes the minimum return difference of a given open loop gain L
<code>[Gm,Pm,Wcg,Wcp] = margin(SYS)</code>	Computes the gain margin Gm, the phase margin Pm, and the associated frequencies Wcg and Wcp, for the SISO open-loop model SYS. The gain margin Gm is defined as $1/G$ where G is the gain at the -180 phase crossing. The phase margin Pm is in degrees. $k_p^* = Gm$, $T^* = \frac{2\pi}{Wcg}$
<code>margin(SYS)</code>	Creates a Bode plot of the open loop and marks the gain and phase margins in the plot.
<code>B = squeeze(A)</code>	Returns an array B with the same elements as A but with all the singleton dimensions removed.
<code>SYSD = c2d(SYSC,TS,METHOD)</code>	Computes a discrete-time model SYSD with sample time TS that approximates the continuous-time model SYSC (method = zoh, foh, impulse, tustin,...)
<code>SYSC = d2c(SYSD,METHOD)</code>	Computes a continuous-time model SYSC that approximates the discrete-time model SYSD. (method = as above)
<code>[K,S,CLP] = lqr(SYS,Q,R) = lqr(A,B,Q,R)</code>	Calculates the optimal gain matrix K for the continuous or discrete state-space model SYS. lqr also returns the solution S of the associated algebraic Riccati equation and the closed-loop poles CLP = eig(A-B*K).
<code>K_ilqri = -K_tilde(:,n+1:end)</code>	Extraction of K_I from \tilde{K}

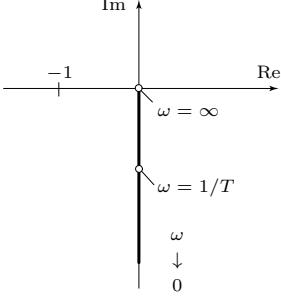
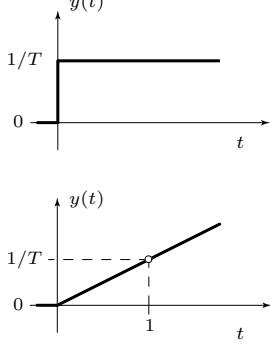
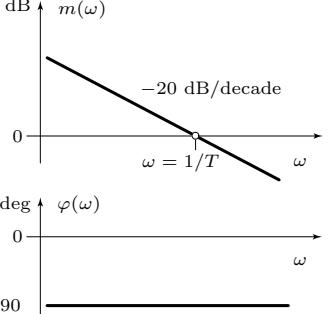
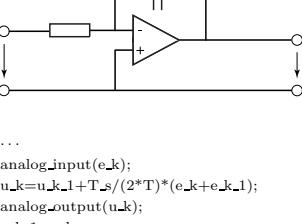
A.1 Integrator Element

Element Acronym: **I**

Transfer Function: $\Sigma(s) = \frac{1}{T \cdot s}$

Poles/Zeros: $\pi_1 = 0, \zeta_1 = \infty$

Internal Description: $\frac{d}{dt}x(t) = \frac{1}{T} \cdot u(t)$
 $y(t) = x(t)$

Nyquist Diagram	Impulse/Step Response
	
Bode Diagram	Analog/Digital Realization
	 <pre> ... analog_input(e_k); u_k=u_{k-1}+T_s/(2*T)*(e_k+e_{k-1}); analog_output(u_k); u_{k-1}=u_k; e_{k-1}=e_k; ... </pre>

A.2 Differentiator Element

Element Acronym: **D**

Transfer Function: $\Sigma(s) = T \cdot s$

Poles/Zeros: $\pi_1 = \infty, \zeta_1 = 0$

Internal Description: $y(t) = T \cdot \frac{d}{dt} u(t)$

Nyquist Diagram	Impulse/Step Response
Bode Diagram	Analog/Digital Realization
 	<pre> ... analog_input(e_k); u_k=2*T*(e_k-e_k_1)/T_s - u_k_1; analog_output(u_k); u_k_1=u_k; e_k_1=e_k; ... </pre>

A.3 First-Order Element

Element Acronym: LP-1

Transfer Function: $\Sigma(s) = \frac{k}{\tau \cdot s + 1}$

Poles/Zeros: $\pi_1 = -\frac{1}{\tau}, \zeta_1 = \infty$

Internal Description: $\begin{aligned} \frac{d}{dt}x(t) &= -\frac{1}{\tau} \cdot x(t) + \frac{1}{\tau} \cdot u(t) \\ y(t) &= k \cdot x(t) \end{aligned}$

Nyquist Diagram	Impulse/Step Response
Bode Diagram	Analog/Digital Realization
	<pre> ... analog_input(e_k); u_k=u_k_1*(2*tau-T_s)/(2*tau+T_s)+... (e_k_1+e_k)*(k*T_s)/(2*tau+T_s); analog_output(u_k); u_k_1=u_k; e_k_1=e_k; ... </pre>

A.4 Realizable Derivative Element

Element Acronym: HP-1

Transfer Function: $\Sigma(s) = k \cdot \frac{\tau \cdot s}{\tau \cdot s + 1} = k \cdot \left(1 - \frac{1}{\tau \cdot s + 1}\right)$

Poles/Zeros: $\pi_1 = -\frac{1}{\tau}, \zeta_1 = 0$

Internal Description: $\begin{aligned} \frac{d}{dt}x(t) &= -\frac{1}{\tau} \cdot x(t) + \frac{1}{\tau} \cdot u(t) \\ y(t) &= -k \cdot x(t) + k \cdot u(t) \end{aligned}$

Nyquist Diagram	Impulse/Step Response
Bode Diagram	Analog/Digital Realization
	<pre> analog_input(e_k); u_k=1/(T_s+2*tau)*(u_k-1*(2*tau-T_s)+... (e_k-e_k_1)*2*k*tau); analog_output(u_k); u_k_1=u_k; e_k_1=e_k; ... </pre>

A.5 Second-Order Element

Element Acronym: LP-2

Transfer Function: $\Sigma(s) = k \cdot \frac{\omega_0^2}{s^2 + 2 \cdot \delta \cdot \omega_0 \cdot s + \omega_0^2}$

Poles/Zeros: $\pi_{1,2} = -w_0 \cdot \delta \pm w_0 \sqrt{\delta^2 - 1}$, $\zeta_{1,2} = \infty$

Internal Description:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}x_1(t) &= x_2(t), \\ \frac{d}{dt}x_2(t) &= -\omega_0^2 \cdot x_1(t) - 2 \cdot \delta \cdot \omega_0 \cdot x_2(t) + \omega_0^2 \cdot u(t) \\ y(t) &= k \cdot x_1(t)\end{aligned}$$

Nyquist Diagram	Impulse/Step Response
Bode Diagram	Analog/Digital Realization
	<pre> analog_input(e_k); ... use Matlab's c2dm ... analog_output(u_k); u_k_2=u_k_1; e_k_2=e_k_1; u_k_1=u_k; e_k_1=e_k; ... </pre>

A.6 Lag Element

Element Acronym: **LG-1**

Transfer Function: $\Sigma(s) = k \cdot \frac{T \cdot s + 1}{\alpha \cdot T \cdot s + 1} = \frac{k}{\alpha} + k \cdot \frac{1 - 1/\alpha}{\alpha \cdot T \cdot s + 1} \quad 1 < \alpha$

Poles/Zeros: $\pi_1 = -\frac{1}{\alpha \cdot T}, \zeta_1 = -\frac{1}{T}$

Internal Description: $\frac{d}{dt}x(t) = -\frac{1}{\alpha \cdot T} \cdot x(t) + \frac{1}{\alpha \cdot T} \cdot u(t)$
 $y(t) = \frac{k \cdot (\alpha - 1)}{\alpha} \cdot x(t) + \frac{k}{\alpha} \cdot u(t)$

Phase minimum: $\hat{\varphi} = \arctan(1/\sqrt{\alpha}) - \arctan(\sqrt{\alpha})$ at $\hat{\omega} = (T \cdot \sqrt{\alpha})^{-1}$

Nyquist Diagram	Impulse/Step Response
Bode Diagram	Analog/Digital Realization
	<pre> analog_input(e_k); u_k=u_k_1*(2*T*s*alpha)/... (T_s+2*T*alpha)+... e_k*k(T_s+2*T*alpha)+... e_k_1*k(T_s-2*T)/(T_s+2*T*alpha); analog_output(u_k); u_k_1=u_k; e_k_1=e_k; ... </pre>

A.7 Lead Element

Element Acronym: LD-1

Transfer Function: $\Sigma(s) = k \cdot \frac{T \cdot s + 1}{\alpha \cdot T \cdot s + 1} = \frac{k}{\alpha} + k \cdot \frac{1 - 1/\alpha}{\alpha \cdot T \cdot s + 1} \quad 0 < \alpha < 1$

Poles/Zeros: $\pi_1 = -\frac{1}{\alpha \cdot T}, \zeta_1 = -\frac{1}{T}$

Internal Description: $\frac{d}{dt}x(t) = -\frac{1}{\alpha \cdot T} \cdot x(t) + \frac{1}{\alpha \cdot T} \cdot u(t)$
 $y(t) = \frac{k \cdot (\alpha - 1)}{\alpha} \cdot x(t) + \frac{k}{\alpha} \cdot u(t)$

Phase maximum: $\hat{\varphi} = \arctan(1/\sqrt{\alpha}) - \arctan(\sqrt{\alpha})$ at $\hat{\omega} = (T \cdot \sqrt{\alpha})^{-1}$

Nyquist Diagram	Impulse/Step Response
Bode Diagram	Analog/Digital Realization
	<pre> analog_input(e_k); u_k=u_k_1*(2*T*T_s*alpha)/ ... (T_s+2*T*alpha)+... e_k*k(T_s+2*T)/(T_s+2*T*alpha)+... e_k_1*k*(T_s-2*T)/(T_s+2*T*alpha); analog_output(u_k); u_k_1=u_k; e_k_1=e_k; ... </pre>

A.8 PID Element

Element Acronym: PID

Transfer Function: $\Sigma(s) = k_p \cdot \frac{T_d \cdot T_i \cdot s^2 + T_i \cdot s + 1}{T_i \cdot s} = k_p \cdot (1 + \frac{1}{T_i \cdot s} + T_d \cdot s)$

Poles/Zeros: $\pi_1 = 0, \pi_2 = \infty, \zeta_{1,2} = -\frac{1}{2 \cdot T_d} \pm \sqrt{\frac{1}{4 \cdot T_d^2} - \frac{1}{T_i \cdot T_d}}$

Internal Description: $\frac{d}{dt}x_1(t) = \frac{1}{T_i} \cdot u(t)$
 $y(t) = k_p \cdot (u(t) + x_1(t) + T_d \cdot \frac{d}{dt}u(t))$

Nyquist Diagram	Impulse/Step Response
Bode Diagram	Analog/Digital Realization
 	<pre> analog_input(e_k); u_k=e_k*kp*(1+T_s/(2*T_i)+2*T_d/T_s)+... e_k_1*kp*(T_s/T_i-4*T_d/T_s)+... e_k_2*kp*(-1+T_s/(2*T_i)+2*T_d/T_s)+... u_k2; analog_output(u_k); u_k_1=u_k; e_k_1=e_k; ... </pre>

A.9 First-Order All-Pass Element

Element Acronym: AP-1

Transfer Function: $\Sigma(s) = \frac{-T \cdot s + 1}{T \cdot s + 1} = -1 + \frac{2}{T \cdot s + 1}$

Poles/Zeros: $\pi_1 = -\frac{1}{T}, \zeta_1 = \frac{1}{T}$

Internal Description: $\begin{aligned} \frac{d}{dt}x(t) &= -\frac{1}{T} \cdot x(t) + \frac{1}{T} \cdot u(t) \\ y(t) &= 2 \cdot x(t) - u(t) \end{aligned}$

Nyquist Diagram	Impulse/Step Response
Bode Diagram	Analog/Digital Realization
	<pre> ... analog_input(e_k); u_k=(e_k-u_k_1)*(T_s-2*T)/(T_s+2*T)+e_k_1; analog_output(u_k); u_k_1=u_k; e_k_1=e_k; ... </pre>

A.10 Delay Element

Element Acronym: 

Transfer Function: $\Sigma(s) = e^{-s \cdot T}$

Poles/Zeros: not a real-rational element

Internal Description: $y(t) = u(t - T)$

Nyquist Diagram 	Impulse/Step Response
Bode Diagram 	Analog/Digital Realization <p>Analog: use Padé elements (allpass elements) as approximation</p> <pre> KTZ=integer(T/T_s); ... analog_input(e_k); u_k=e_alt(KTZ); analog_output(u_k); for i=1:KTZ-1 e_alt(i+1)=e_alt(i); end; e_alt(1)=e_k; ... </pre>

