

Mechanik II PVK

Nick Bührer, Ben Spöttling

Sommer 2018

Inhaltsverzeichnis

1 Spannungen	3
1.1 Spannungstensor	3
1.1.1 Spannungsvektor	3
1.1.2 Beispiel	4
1.2 Koordinatentransformation	4
1.2.1 Beispiel	4
1.3 Hauptspannungen	5
1.3.1 2D	5
1.3.2 3D	5
1.3.3 Beispiel	5
1.3.4 Mohrscher Kreis	5
2 Verzerrungen	7
2.1 Verzerrungstensor	7
2.1.1 Beispiel	7
2.1.2 Beispieldurchrechnung	8
2.2 Stoffgesetze	8
2.2.1 Spannung \Rightarrow Dehnung	9
2.2.2 Dehnung \Rightarrow Spannung	9
2.2.3 Beispiel Randbedingungen Dehnungsprobleme	9
2.2.4 Beispieldurchrechnung	10
3 Biegung	11
3.1 Flächenträgheitsmomente	11
3.2 Zusammengesetzter Schwerpunkt	11
3.2.1 Beispiel	12
3.3 Trägheitsmoment im Schwerpunkt	12
3.3.1 Beispiel	12
3.4 Biegelinie	13
3.4.1 Randbedingungen der Biegung	13
3.4.2 Standardlösungen	13
3.5 Normalspannung aus Biegung	15
3.6 Statisch unbestimmte Systeme	16
3.6.1 Beispiel	16
3.7 Allgemeine Biegung mit Hauptachsen	17
3.8 Schubspannung infolge Biegung	18
3.8.1 Vollquerschnitt	19
3.8.2 Dünnwandige und offene Querschnitte	19
3.9 Schubmittelpunkt	20
4 Torsion	22
4.0.1 Beispieldurchrechnung	23

5 Energiemethoden	25
5.1 Arbeitssatz	25
5.1.1 Integraltabellen	25
5.1.2 Beispiel	28
5.2 Verschiebung an einem beliebigen Punkt	29
5.2.1 Beispiel	29
5.3 1-fach statisch unbestimmte Systeme: <i>Lagerkraft</i>	30
5.4 1-fach statisch unbestimmte Systeme: <i>Verschiebung</i>	31
5.5 Kreisbogenbeanspruchung	32

Kapitel 1

Spannungen

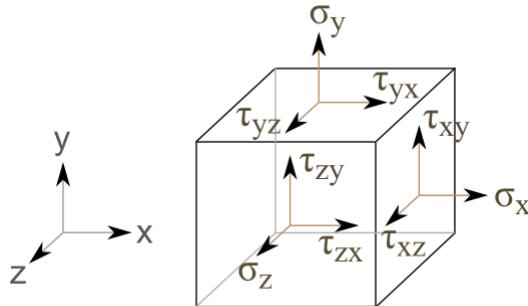
1.1 Spannungstensor

Der Spannungstensor fasst alle Spannungszustände eines Körpers an **nur einem** Punkt auf. Unterschieden werden:

$$\text{Normalspannung: } \sigma_n = \frac{F_{\text{normal}}}{A}$$

$$\text{Schubspannung: } \tau_n = \frac{F_{\text{quer}}}{A}$$

Hierzu betrachtet wird ein infinitesimales Würfelement, dass sozusagen aus dem Körpers herausgeschnitten wird.



Grafik 1.1 2D Spannungszustand am Würfelement

Der Spannungstensor ergibt sich dann zu:

$$\underline{\underline{T}} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix}$$

Dabei gilt: $\tau_{ij} = \tau_{ji}$

1.1.1 Spannungsvektor

Der Spannungsvektor stellt den Spannungszustand an einer Fläche dar

$$\underline{S}(n) = \underline{\sigma}(n) + \underline{\tau}(n) = \underline{\underline{T}} * \underline{n}$$

Dabei ist \underline{n} der Normalenvektor mit $\|\underline{n}\| = 1$

Normalspannungvektor
= senkrechter Teil von $\underline{S}(n)$

Schubspannungsvektor
= paralleler Teil von $\underline{S}(n)$

$$\underline{\sigma}(n) = \underline{n} * (\underline{S} * \underline{n})$$

$$\underline{\tau}(n) = \underline{S} - \underline{\sigma}$$

1.1.2 Beispiel

Gegeben sei der Spannungstensor im x-y-z-Koordinatensystem:

$$\underline{\underline{T}} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} * k \text{ mit } k > 0$$

Man bestimme die Normalspannung σ_p , die auf ein Flächenelement wirkt, das durch den Normalenvektor $\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ im x-y-z-Koordinatensystem definiert ist.

Wir wissen, dass $\sigma(n) = \underline{\underline{S}} * \underline{n} = (\underline{\underline{T}} * \underline{n}) * \underline{n}$. Nun ist \vec{n} aber **nicht normiert** und muss entsprechend normiert werden: $\hat{\vec{n}} = \frac{\vec{n}}{\|\vec{n}\|} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} * \frac{1}{\sqrt{6}}$. Somit erhalten wir $\hat{\sigma}_p = (\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} * \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} * \frac{1}{\sqrt{6}}) * \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} * \frac{1}{\sqrt{6}} * k = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} * \frac{1}{6} * k = k$.

1.2 Koordinatentransformation

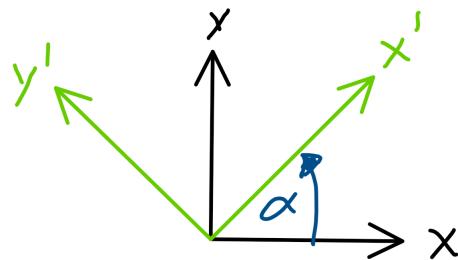
Wird die Fläche um einen Winkel α gedreht, so ändern sich die Spannungen zu:

$$\sigma_x' = \sigma_x * \cos^2(\alpha) + \sigma_y * \sin^2(\alpha) + 2 * \tau_{xy} * \sin(\alpha) * \cos(\alpha)$$

$$\sigma_y' = \sigma_y * \cos^2(\alpha) + \sigma_x * \sin^2(\alpha) - 2 * \tau_{xy} * \sin(\alpha) * \cos(\alpha)$$

$$\tau_{xy}' = (\sigma_y - \sigma_x) * \sin(\alpha) * \cos(\alpha) + \tau_{xy} * (\cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha))$$

Diese Formeln lassen sich auch für Dehnungen und Flächenträgheitsmomente anwenden.



Grafik 1.2 2D Koordinatentransformation

1.2.1 Beispiel

An der Oberfläche eines Stahlträgers sind Dehnungen $\epsilon_x = 3 * 10^{-4}$ und $\epsilon_y = -1 * 10^{-4}$ bekannt. Zudem ist die Dehnung $\epsilon_{45} = 3 * 10^{-4}$ entlang der um 45° gedrehten x-Achse bekannt. Man bestimme die Komponenten des Dehnungstensors im x-y-Koordinatensystem.

Wir nutzen die Koordinatentransformationsformeln:

$$\epsilon_x' = \epsilon_x * \cos^2(45^\circ) + \epsilon_y * \sin^2(45^\circ) + 2 * \epsilon_{xy} * \sin(45^\circ) * \cos(45^\circ) = \epsilon_{45} = 3 * 10^{-4}.$$

Die einzige Unbekannte in der Gleichung ist ϵ_{xy} und wir erhalten: $\epsilon_{xy} = 2 * 10^{-4}$.

Der ursprüngliche Dehnungstensor lautet also:

$$\underline{\underline{E}} = \begin{bmatrix} \epsilon_x & \epsilon_{xy} \\ \epsilon_{xy} & \epsilon_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} * 10^{-4}.$$

1.3 Hauptspannungen

Die Hauptspannungen stellen die maximalen Normalspannungen am infinitesimalen Würfelement dar. Damit verbunden sind die Hauptrichtungen, die die Richtung der maximalen Spannungen sind.

1.3.1 2D

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

$$\alpha = \frac{1}{2} * \arctan\left(\frac{2 * \tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}\right)$$

1.3.2 3D

Hauptspannungen	Hauptrichtungen
$\det(\underline{\underline{T}} - \lambda I) = 0$	$(\underline{\underline{T}} - \lambda I) * (\underline{n})_i = 0$
$\Rightarrow \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$	$\Rightarrow n_1, n_2, n_3$

Man bemerke, dass der neue Spannungstensor im Hauptachsensystem nur noch diagonale Elemente aufweist.

$$\underline{\underline{\underline{T}}} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix}$$

1.3.3 Beispiel

Gegeben sei der Spannungstensor $\underline{\underline{T}} = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -3 \end{bmatrix} * \frac{\sigma_0}{2}$ im x-y-z-Koordinatensystem mit $\sigma_0 > 0$.

Bestimme die maximale Hauptspannung σ_1 .

Wir haben es mit einem 3-D Problem zu tun. Die Hauptspannungen müssten also theoretisch durch Lösen des Eigenwertproblems gefunden werden.

Hier vereinfacht sich die Aufgabe jedoch, da eine Hauptspannung direkt aus dem Spannungstensor ausgelesen werden kann. So muss σ_y eine Hauptspannung sein, da alle Schubspannungen τ_{xy} und τ_{yz} verschwinden.

Wir müssen also nur die zwei verbleibenden Hauptspannungen berechnen und können das Problem auf den 2D-Fall reduzieren: $\underline{\underline{T}}_{xz} = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & -3 \end{bmatrix} * \frac{\sigma_0}{2}$. Hier lassen sich die Hauptspannungen leicht bestimmen:

$$\sigma_{1,3} = \frac{\sigma_x + \sigma_z}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_z}{2}\right)^2 + \tau_{xz}^2} = \left(\frac{5-3}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{5+3}{2}\right)^2 + 3^2}\right) * \frac{\sigma_0}{2}$$

$$\sigma_1 = 3 * \sigma_0$$

$$\sigma_3 = -2 * \sigma_0$$

1.3.4 Mohrscher Kreis

Der Mohrsche Kreis ist ein Hilfsmittel zur Berechnung der Spannungen im gedrehten Koordinatensystem. Im folgenden ein Kochrezept zur Konstruktion:

gegeben: $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$

1. Zeichne in Koordinatensystem.

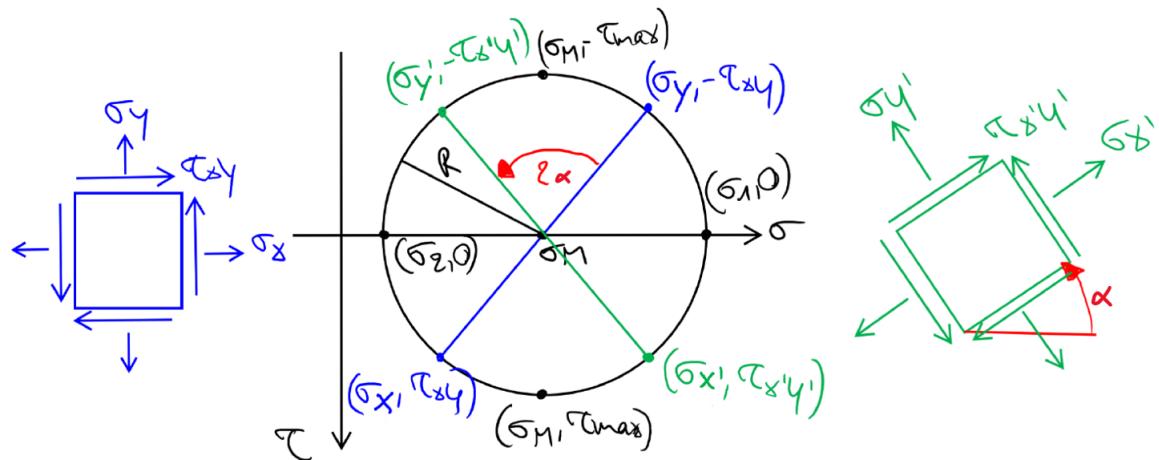
x-Achse = σ

y-Achse = τ (nach unten gerichtet)

2. Trage die Punkte $P_1(\sigma_x, \tau_{xy})$ und $P_2(\sigma_y, -\tau_{xy})$ ein.
 3. Verbinde P_1 und P_2 miteinander. Der Schnittpunkt mit der x-Achse ist der Mittelpunkt des Kreises. Die Länge der Strecke P_1P_2 entspricht dem Durchmesser des Kreises. Mathematisch:

Mittelpunkt	Radius
$\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}$	$\sqrt{(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2})^2 + \tau_{xy}^2} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}$

- 4 Drehe die Strecke P_1P_2 um 2α , um die Spannung in der **um α gedrehten Fläche** zu erhalten



Grafik 1.3 2D Mohrscher Kreis für das gedrehte Flächenelement

Kapitel 2

Verzerrungen

Aufgrund von inneren Spannungen verzerren sich Bauteile. Diese Verzerrungen bestehen aus Längenänderungen in die x,y,z - Richtungen, den Dehnungen, sowie aus Winkeländerungen, den Schubverzerrungen.

Mit den gleichen Formeln wie bei den Spannungen können die Hauptdehnungen und Hauptrichtungen bestimmt werden.

Anstatt σ_i setzt man ϵ_i ein. τ_{xy} wird durch ϵ_{xy} ersetzt.

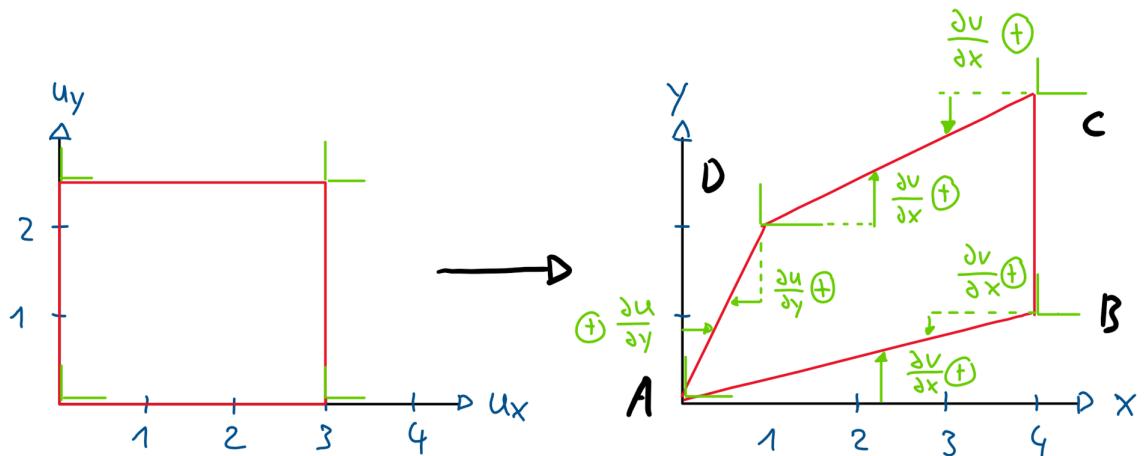
2.1 Verzerrungstensor

Der Verzerrungstensor $\underline{\underline{E}}$ lässt sich aus dem Verschiebungsfeld $\underline{u} = (u \ v \ w)^T$ bestimmen.

$$\underline{\underline{E}} = \begin{bmatrix} \epsilon_x & \epsilon_{yx} & \epsilon_{zx} \\ * & \epsilon_y & \tau_{zy} \\ * & * & \epsilon_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} u & \frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial y} u + \frac{\partial}{\partial x} v) & \frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial z} u + \frac{\partial}{\partial x} w) \\ * & \frac{\partial}{\partial y} v & \frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial y} w + \frac{\partial}{\partial z} v) \\ * & * & \frac{\partial}{\partial z} w \end{bmatrix}$$

2.1.1 Beispiel

Gegeben sei folgender Körper, der sich unter einem Spannungszustand verformt. Wir interessieren uns für das Vorzeichen der Schubverzerrung.



Um das Vorzeichen heraus zu bekommen, müssen wir schauen, ob die Winkel grösser oder kleiner geworden sind.

Eine positive Winkeländerung bedeutet eine negative Schubverzerrung.

Eine negative Winkeländerung bedeutet eine positive Schubverzerrung.

Aus mathematischer Sicht wird geschaut, ob die partiellen Ableitungen grösser oder kleiner werden. Es gilt:

$$\epsilon_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \quad \text{Ein positives } \epsilon_{xy} \text{ ist eine positive Schubverzerrung}$$

Bei der Lösung dieses Beispiels wollen wir den mathematischen Ansatz verwenden. Dazu malt man sich am besten **Minikoordinatensystem** an jedem Punkt des verformten Körpers. Nun wird evaluiert, ob die partiellen Ableitungen grösser oder kleiner geworden sind.

Betrachten wir zum Beispiel die partielle Ableitung $\frac{\partial v}{\partial x}$ in **Punkt C**. Diese Ableitung beschreibt, wie sich die Verschiebung des Körpers in y-Richtung in Funktion von x verändert.

Bei Ecke C gehen wir in negative x Richtung. Das bedeutet ∂x ist **negativ**.

Nun schauen wir, wie sich die y-Komponente verändert. Wir sehen, dass je weiter wir in negative x-Richtung gehen, desto negativer wird unser y-Abstand respektive des **Minikoordinatensystems**. Also ist ∂v ebenfalls **negativ**.

Negativ durch negativ ergibt positiv, also ist $\epsilon_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)$ **positiv**, da $\frac{\partial v}{\partial x} = 0$

Analog kann man für die Ecken A,B und D vorgehen.

Positive Schubverzerrung haben wir bei **A, B , C, D**

2.1.2 Beispieldaufgabe

Gegeben sei das Verschiebungsfeld einer Scheibe:

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_0 + 4 * 10^{-3} * x + 7 * 10^{-3} * y \\ v_0 + 3 * 10^{-3} * x + 2 * 10^{-3} * y \end{pmatrix}$$

Man bestimme die Komponenten des Verzerrungstensor $\underline{\underline{E}}_{xy}$.

Die Dehnungen berechnen sich als:

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = 4 * 10^{-3}$$

$$\epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = 2 * 10^{-3}$$

$$\epsilon_{xy} = \frac{1}{2} * \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) = \frac{1}{2} * (7 + 3) * 10^{-3} = 5 * 10^{-3}.$$

Der Verzerrungstensor lautet somit:

$$\underline{\underline{E}}_{xy} = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} * 10^{-3}.$$

2.2 Stoffgesetze

Stoffgesetze helfen uns Spannungen mit Verzerrungen in Korrelation zu setzen. Im Rahmen der Mechanik II Vorlesung finden unsere Betrachtungen ausschliesslich im elastischen Bereich statt.

Hook

$$\sigma_n = E * \epsilon$$

Dehnung

$$\epsilon = \frac{\Delta l}{l_0}$$

Querkontraktionszahl $\nu = \frac{\epsilon_{\text{lang}}}{\epsilon_{\text{quer}}}$

2.2.1 Spannung \Rightarrow Dehnung

$$\left| \begin{array}{l} \epsilon_x = \frac{1}{E} * [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)] + \alpha\Delta T \quad \epsilon_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{2G} \\ \epsilon_y = \frac{1}{E} * [\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)] + \alpha\Delta T \quad \epsilon_{xz} = \frac{\tau_{xz}}{2G} \\ \epsilon_z = \frac{1}{E} * [\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)] + \alpha\Delta T \quad \epsilon_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{2G} \end{array} \right.$$

Hierbei entspricht $\alpha\Delta T$ der **thermischen Dehnung**

2.2.2 Dehnung \Rightarrow Spannung

$$\sigma_x = \frac{E}{1+\nu} [\epsilon_x + \frac{\nu}{1-2\nu} (\epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z)] - \frac{E}{1-2\nu} \alpha\Delta T$$

$$\sigma_y = \frac{E}{1+\nu} [\epsilon_y + \frac{\nu}{1-2\nu} (\epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z)] - \frac{E}{1-2\nu} \alpha\Delta T$$

$$\sigma_z = \frac{E}{1+\nu} [\epsilon_z + \frac{\nu}{1-2\nu} (\epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z)] - \frac{E}{1-2\nu} \alpha\Delta T$$

2.2.3 Beispiel Randbedingungen Dehnungsprobleme

Samstag Abend: Du machst Käsefondue mit deinen Freunden und hattest ein paar Flaschen choppfab Bier zu viel. Plötzlich interessiert du dich für den Spannungszustand deines Käses. Um diese Aufgabe zu lösen, musst du Randbedingungen aufstellen:



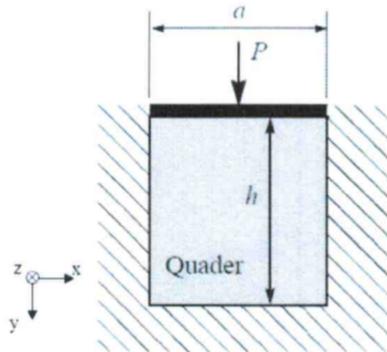
Grafik 2.1 Mit Schwerkraft g belastetes heißes Käsefondue

1. Verschiebung des Käses ist in x-y Richtung durch die Pfanne blockiert

$$\Rightarrow u = v = \epsilon_x = \epsilon_y = 0$$

2. Die Spannungen in x und y Richtung nur durch die Wärmedehnung verursacht. Da diese in alle Richtungen gleich ist gilt:

$$\Rightarrow \sigma_x = \sigma_y$$



2.2.4 Beispielaufgabe

Ein elastischer Quader (Höhe h , Breite a , Tiefe b , im spannungsfreien Zustand) wird durch die Kraft $P = \sigma_0 * A > 0$ in einen Hohlraum derselben Querschnittsfläche $A = a * b$ gepresst.

Sowohl der Stempel als auch die Wände des Hohlraums können als starr angenommen werden und Reibung mit der Wand ist zu vernachlässigen. Die lineare Beziehung zwischen den Normalspannungen und Dehnungen im x-y-z-Koordinatensystem sei durch die folgende Gleichung gegeben:

$$\begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \end{pmatrix} = C * \begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{bmatrix} * \begin{pmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_z \end{pmatrix} \text{ mit } C > 0$$

Bestimme die axiale Dehnung ϵ_y und die Normalspannung σ_x .

Wie oben diskutiert, muss gelten $\epsilon_x = \epsilon_z = 0$, $\sigma_x = \sigma_z$. Wir erhalten das folgende Gleichungssystem:

$$\sigma_x = C * \epsilon_y \quad (1)$$

$$\sigma_y = 4 * C * \epsilon_y \quad (2)$$

$$\sigma_z = C * \epsilon_y \quad (3)$$

Die Normalspannung in y-Richtung lässt sich leicht berechnen:

$$\sigma_y = \frac{P}{A} = \frac{\sigma_0 * A}{A} = -\sigma_0 \text{ (Negativ, da es sich um eine Druckspannung handelt)}$$

Aus (2) können wir nun ϵ_y bestimmen:

$$\epsilon_y = \frac{-\sigma_0}{4C}$$

Aus (1) oder (3) berechnet sich σ_x als:

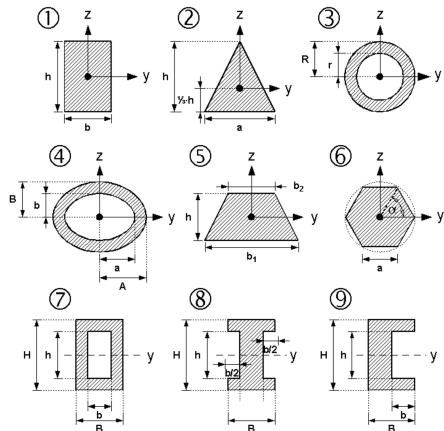
$$\sigma_x = -\frac{\sigma_0}{4}$$

Kapitel 3

Biegung

3.1 Flächenträgheitsmomente

Das Flächenträgheitsmoment ist ein Mass für die Verbieg- und Verdrehbarkeit eines Körpers. Für die häufigsten Geometrien gibt es Standardtabellen.



	I_y	I_z
1	$\frac{b * h^3}{12}$	$\frac{h * b^3}{12}$
2	$\frac{a * h^3}{36}$	$\frac{h * a^3}{36}$
3	$\frac{\pi}{4} * (R^4 - r^4)$	$= I_y$
4	$\frac{\pi}{4} * (AB^3 - ab^3)$	$\frac{\pi}{4} * (BA^3 - ba^3)$
5	$\frac{h^3 * (b_1 + b_2)^2 + 2b_1b_2}{36 * (b_1 + b_2)}$	$\frac{h}{48} * (b_1 + b_2)(b_1^2 + b_2^2)$
6	$\frac{na^4}{96} * \frac{2 + \cos \alpha}{(1 - \cos \alpha)^2} * \sin \alpha$	$= I_y$
7	$\frac{1}{12} * (BH^3 - bh^3)$	$\frac{1}{12} * (HB^3 - hb^3)$
8	$\frac{1}{12} * (BH^3 - bh^3)$	$\frac{1}{12} * [(H-h)B^3 + h(B-h)^3]$
9	$\frac{1}{12} * (BH^3 - bh^3)$	

Grafik 3.1 Standardflächenmomente. Falls y in der Aufgabe nach unten zeigt, sind I_y und I_z aus der Tabelle zu vertauschen

3.2 Zusammengesetzter Schwerpunkt

Für einen aus Elementargeometrien zusammengesetzten Körper lassen sich folgende Formeln verwenden:

$$x_{ges} = \frac{1}{A_{ges}} * (A_1 x_1 + \dots + A_i x_i)$$

x_i = Abstand von $x=0$ zum Schwerpunkt x_s des Körpers i (Abstand zur y - Achse)

$$y_{ges} = \frac{1}{A_{ges}} * (A_1 y_1 + \dots + A_i y_i)$$

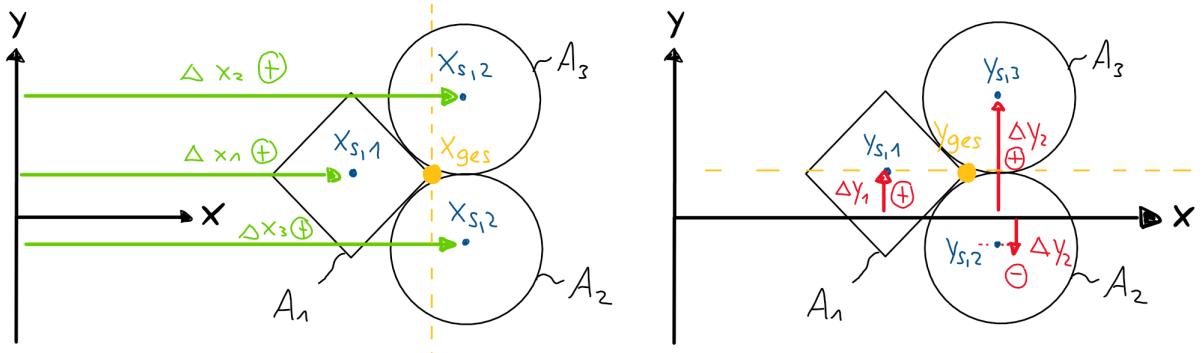
y_i = Abstand von $y=0$ zum Schwerpunkt y_s des Körpers i (Abstand zur x - Achse)

Besonderes Augenmerk bei dieser Formel muss darauf gelegt werden, ob die Abstände positiv oder negativ sind

Das Koordinatensystem von dem aus man misst, kann an willkürlicher Position gesetzt werden

3.2.1 Beispiel

Körper A bestehend aus Teilkörpern A_1, A_2, A_3



Grafik 3.2 Beispiel zur Verdeutlichung der positiven und negativen Abstände

3.3 Trägheitsmoment im Schwerpunkt

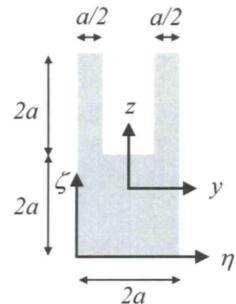
Gegeben sei ein Körper K, der sich aus den Teilkörpern K_1, \dots, K_n mit Flächen A_1, \dots, A_n zusammen setzt. Das Trägheitsmoment des gesamten Körpers K ergibt sich dann aus

$$I_{ys} = [I_{1y} + (\Delta z_1)^2 A_1] + \dots + [I_{ny} + (\Delta z_n)^2 A_n]$$

$$I_{zs} = [I_{1z} + (\Delta y_1)^2 A_1] + \dots + [I_{nz} + (\Delta y_n)^2 A_n]$$

$$C_{yz,s} = [C_1 - \Delta z_1 * \Delta y_1 * A_1] + \dots + [C_n - \Delta z_n * \Delta y_n * A_n]$$

3.3.1 Beispiel



Gegeben sei ein rechteckiger Querschnitt (Breite $2a$, Höhe $4a$) aus dem eine rechteckige Fläche der Breite a und Höhe $2a$ ausgeschnitten wurde. Zudem ist der Schwerpunkt des Systems bekannt: $\zeta_s = \frac{5}{3}a$, $\eta_s = a$.

Man bestimme das Flächenträgheitsmoment I_z des Systems.

Für diese Aufgabe lohnt es sich, das gegebene System in Teilsysteme aufzuteilen und mit den Standardtabellen zu arbeiten. Die Wahl der Teilsysteme ist jedem selbst überlassen, hier werden wir den Querschnitt aber in eine quadratische Teilfläche ($2a \times 2a$) und zwei Rechtecke ($2a \times \frac{a}{2}$) aufteilen. Nun gilt:

$I_{zs} = [I_{1z} + (\Delta y_1)^2 A_1] + \dots + [I_{nz} + (\Delta y_n)^2 A_n] = [I_{1z} + (\Delta y_1)^2 A_1] + 2 * [I_{2z} + (\Delta y_2)^2 A_2]$ (Da das Problem bezüglich der z-Achse symmetrisch ist, werden die Flächenträgheitsmomente der beiden Rechtecke identisch sein).

Setzen wir ein, erhalten wir:

$$[I_{1z} + (\Delta y_1)^2 A_1] + 2 * [I_{2z} + (\Delta y_2)^2 A_2] = [\frac{2a*(2a)^3}{12} + 0] + 2 * [\frac{2a*(\frac{a}{2})^3}{12} + (\frac{3a}{4})^2 * a^2] = \frac{5a^4}{2}.$$

3.4 Biegelinie

Bei der Biegelinie schauen wir uns die vertikale Verschiebung eines Balkens infolge Biegung an. Dabei wird angenommen, dass die Verschiebung in horizontale Richtung, sowie die Querkraftbeanspruchung zu vernachlässigen sei.

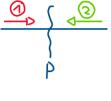
Die **Verformung** $v(x)$ und der **Neigungswinkel** $v'(x)$ ergeben sich aus:

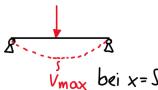
$$v(x) = \int v'(x) dx = \frac{1}{E} \int \int \frac{M_z(x)}{I_z(x)} dx$$

3.4.1 Randbedingungen der Biegung

Auflager:  ,  $v(x = \text{Lagerstelle}) = 0$

Einspannung:  $v(x = \text{Lagerstelle}) = 0$
 $v'(x = \text{Lagerstelle}) = 0$

Schnittübergang  $v_1(x = P) = v_2(x = P)$
 $v'_1(x = P) = -v'_2(x = P)$

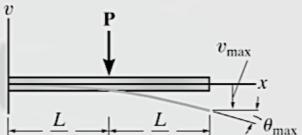
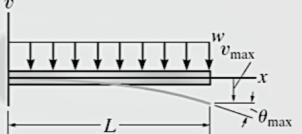
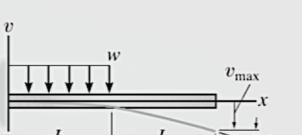
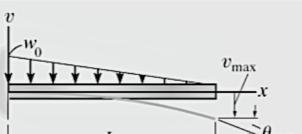
Punkt der maximalen Durchbiegung  $v'(x = S) = 0$
 $v_{\max} \text{ bei } x = S$

Grafik 3.3 Randbedingungen für statisch bestimmte Systeme

3.4.2 Standardlösungen

Für die meisten Aufbauten gibt es bereits vorgerechnete Standardlösungen. Insbesondere in einer Prüfung kann es zeitsparend sein, einfach die Verschiebung aus einer Tabelle abzulesen und sich den fehleranfälligen Rechenweg zu sparen. Dies ist eine Alternative zu den Energiemethoden, die in Kapitel 6 noch vorgestellt werden.

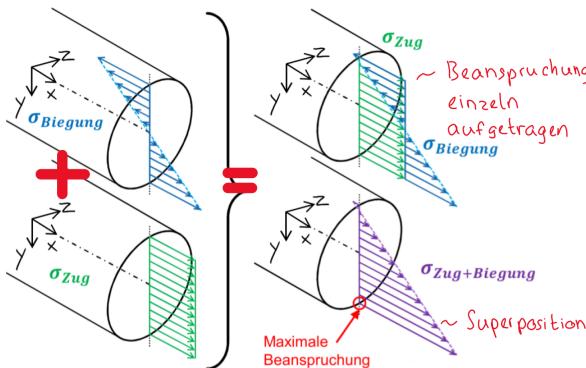
System	Anfangssteigung	Maximale Durchbiegung	Biegelinie
	$\theta_{\max} = \frac{-PL^2}{16EI}$	$v_{\max} = \frac{-PL^3}{48EI}$	$v = \frac{-Px}{48EI}(3L^2 - 4x^2)$ $0 \leq x \leq L/2$
	$\theta_1 = \frac{-Pab(L+b)}{6EI L}$ $\theta_2 = \frac{Pab(L+a)}{6EI L}$	$v \Big _{x=a} = \frac{-Pba}{6EI L}(L^2 - b^2 - a^2)$	$v = \frac{-Pbx}{6EI L}(L^2 - b^2 - x^2)$ $0 \leq x \leq a$
	$\theta_1 = \frac{-M_0 L}{6EI}$ $\theta_2 = \frac{M_0 L}{3EI}$	$v_{\max} = \frac{-M_0 L^2}{\sqrt{243EI}}$ at $x = 0.5774L$	$v = \frac{-M_0 x}{6EI L}(L^2 - x^2)$
	$\theta_{\max} = \frac{-wL^3}{24EI}$	$v_{\max} = \frac{-5wL^4}{384EI}$	$v = \frac{-wx}{24EI}(x^3 - 2Lx^2 + L^3)$
	$\theta_1 = \frac{-3wL^3}{128EI}$ $\theta_2 = \frac{7wL^3}{384EI}$	$v \Big _{x=L/2} = \frac{-5wL^4}{768EI}$ $v_{\max} = -0.006563 \frac{wL^4}{EI}$ at $x = 0.4598L$	$v = \frac{-wx}{384EI}(16x^3 - 24Lx^2 + 9L^3)$ $0 \leq x \leq L/2$ $v = \frac{-wL}{384EI}(8x^3 - 24Lx^2 + 17L^2x - L^3)$ $L/2 \leq x < L$
	$\theta_1 = \frac{-7w_0L^3}{360EI}$ $\theta_2 = \frac{w_0L^3}{45EI}$	$v_{\max} = -0.00652 \frac{w_0L^4}{EI}$ at $x = 0.5193L$	$v = \frac{-w_0x}{360EI L}(3x^4 - 10L^2x^2 + 7L^4)$

System	Anfangssteigung	Maximale Durchbiegung	Biegelinie
	$\theta_{\max} = \frac{-PL^2}{2EI}$	$v_{\max} = \frac{-PL^3}{3EI}$	$v = \frac{-Px^2}{6EI}(3L - x)$
	$\theta_{\max} = \frac{-PL^2}{8EI}$	$v_{\max} = \frac{-5PL^3}{48EI}$	$v = \frac{-Px^2}{6EI}\left(\frac{3}{2}L - x\right) \quad 0 \leq x \leq L/2$ $v = \frac{-PL^2}{24EI}\left(3x - \frac{1}{2}L\right) \quad L/2 \leq x \leq L$
	$\theta_{\max} = \frac{-wL^3}{6EI}$	$v_{\max} = \frac{-wL^4}{8EI}$	$v = \frac{-wx^2}{24EI}(x^2 - 4Lx + 6L^2)$
	$\theta_{\max} = \frac{M_0L}{EI}$	$v_{\max} = \frac{M_0L^2}{2EI}$	$v = \frac{M_0x^2}{2EI}$
	$\theta_{\max} = \frac{-wL^3}{48EI}$	$v_{\max} = \frac{-7wL^4}{384EI}$	$v = \frac{-wx^2}{24EI}(x^2 - 2Lx + \frac{3}{2}L^2) \quad 0 \leq x \leq L/2$ $v = \frac{-wL^3}{192EI}(4x - L/2) \quad L/2 \leq x \leq L$
	$\theta_{\max} = \frac{-w_0L^3}{24EI}$	$v_{\max} = \frac{-w_0L^4}{30EI}$	$v = \frac{-w_0x^2}{120EIL}(10L^3 - 10L^2x + 5Lx^2 - x^3)$

3.5 Normalspannung aus Biegung

Die *Biegespannung* ist eine Normalspannung, die aus einem Biegemoment resultiert. Sie kann mit anderen Normalspannungen superponiert werden:

$$\sigma_x = \frac{N(x)}{A} - \frac{M_z(x)}{I_z} * y + \frac{M_y(x)}{I_y} * z$$



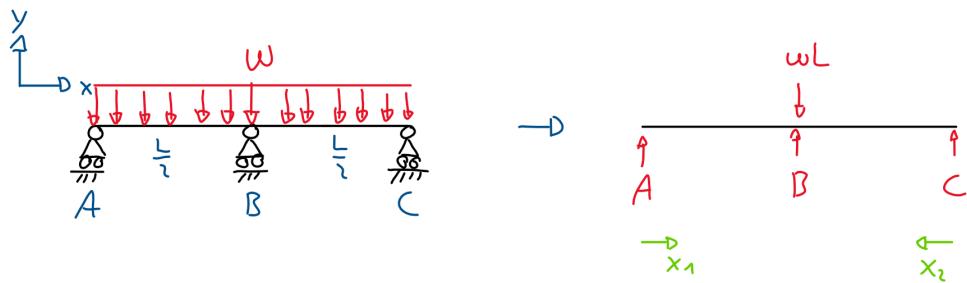
3.6 Statisch unbestimmte Systeme

In einem statisch unbestimmten System haben wir n mehr Unbekannte als Gleichungen
Das System ist n - fach statisch unbestimmt.

Kochrezept:

1. GGW lösen, Unbekannte als Funktion von n - Lagerparametern ausdrücken
2. Beanspruchung und Biegelinie berechnen
3. Durch Randbedingungen $K_1 \dots K_n$ und n - Lagerparameter bestimmen
4. Restliche Lagerreaktionen aus n - Lagerparametern bestimmen

3.6.1 Beispiel



1 GGW

$$R_x : 0=0$$

$$R_y : A + B + C = wL$$

$$M_z^{(A)} : B * \frac{1}{2}L + C * L = \frac{1}{2}wL^2$$

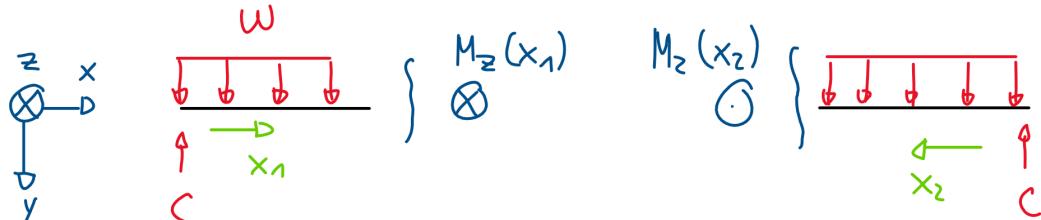
1-fach statisch unbestimmt, $n=1$. Wähle C als Lagerparameter

$$B = wL - 2C$$

$$A = wL - B - C = wL - (wL - 2C) - C$$

$$A = C$$

2 Beanspruchung



$$M_z(x_1) = \frac{1}{2}wx_1^2 - Cx_1 \quad M_z(x_2) = \frac{1}{2}wx_2^2 - Cx_2$$

Aufgrund der Symmetrie des Problems brauchen wir uns nur die x_1 Seite anzuschauen. Die Biegelinie von x_2 ist identisch.

Biegelinie:

$$v'_1 EI_z = \int (\frac{1}{2}wx_1^2 - Cx_1)dx = \frac{1}{6}wx_1^3 - \frac{1}{2}Cx_1^2 + K_1$$

$$v_1 EI_z = \int \frac{1}{6}wx_1^3 - \frac{1}{2}Cx_1^2 + K_1 = \frac{1}{24}wx_1^4 - \frac{1}{6}Cx_1^3 + K_1x_1 + K_2$$

3 Randbedingungen



Grafik 3.4 Erwartete Biegelinie, Pfeil markiert Stelle B bei $x = \frac{L}{2}$

$$v_1(x_1 = 0) = v_1(x_1 = \frac{L}{2}) = 0$$

$$v_2(x_2 = 0) = v_2(x_2 = \frac{L}{2}) = 0$$

$$v'_1(x_1 = \frac{L}{2}) = v'_2(x_2 = \frac{L}{2})$$

Anwenden der Randbedingungen:

$$v_1(x_1 = 0) = K_2 = 0$$

$$v_1(x_1 = \frac{L}{2}) = \frac{1}{24}w * \frac{L^4}{16} - \frac{1}{6}C * \frac{L^3}{8} + K_1 * \frac{L}{2} = 0 \Rightarrow C = \frac{1}{8}wL + \frac{24}{L^2}K_1$$

$$v_2(x_2 = \frac{L}{2}) = \frac{1}{24}w * \frac{L^4}{16} - \frac{1}{6}C * \frac{L^3}{8} + K_3 * \frac{L}{2} = 0 \Rightarrow K_1 = K_3$$

$$v'_1(x_1 = \frac{L}{2}) = \frac{1}{6}w(\frac{L}{2})^3 - \frac{1}{2}C(\frac{L}{2})^2 + K_1 = v'_2(x_2 = \frac{L}{2}) = -\frac{1}{6}w(\frac{L}{2})^3 + \frac{1}{2}C(\frac{L}{2})^2 - K_1$$

$$\Rightarrow K_1 = \frac{1}{384}wL^3$$

$$\Rightarrow C = \frac{1}{8}wl + \frac{24}{L^2}K_1 = \frac{3}{16}wL$$

4 Restliche Lagerbedingungen

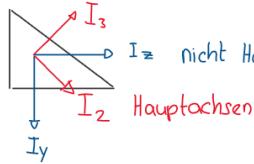
$$A = C = \frac{3}{16}wL$$

$$B = \frac{5}{8}wL$$

3.7 Allgemeine Biegung mit Hauptachsen

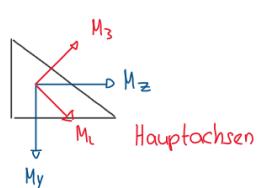
Bei manchen Aufgaben ist ein asymmetrischer Querschnitt gegeben. Diese Asymmetrie äussert sich in dem gemischten Flächenträgheitsmoment C_{yz} das ungleich Null ist. Um die Biegelinie und die Absenkung zu berechnen, muss im Hauptachsensystem gerechnet werden. Hier das Kochrezpt.

1. Berechnung der Hauptrichtungen und Hauptflächenträgheitsmomenten I_2, I_3



2. Berechnung der Beanspruchung und Projektion in Hauptrichtung 2 und 3

$\rightarrow M_2, M_3$

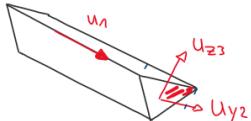


$$\begin{pmatrix} M_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} (M_y) & (e_2) \\ (M_z) & (0) \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e_2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ M_3 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} (M_y) & (0) \\ (M_z) & (e_3) \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ e_3 \end{pmatrix}$$

mit e = Einheitsvektor des Hauptachsensystems

3. Die Biegelinie ergibt sich dann in 2 und 3 Richtung als

$$u_{x1}' = \frac{N(x)}{E A} \quad u_{y2}'' = \frac{M_3(x)}{EI_3} \quad u_{z3}''' = -\frac{M_2(x)}{EI_2}$$



Wie ersichtlich ist, zeigen die Verschiebungen nicht in $y-z$ -Richtung, sondern in e_1, e_2 und e_3 Richtung

Wir projizieren wieder zurück:

$$\begin{pmatrix} u_y \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} (u_{y2}) & (e_y) \\ (u_{z3}) & (0) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} e_y \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ u_z \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} (u_{y2}) & (0) \\ (u_{z3}) & (e_z) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ e_z \end{pmatrix}$$

4. Berechnung der Normalspannung

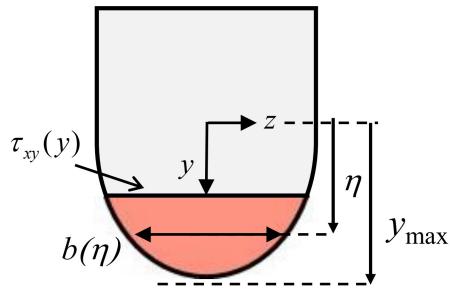
$$\sigma_n(x, y, z) = \frac{N(x)}{A} - \frac{M_3(x)}{I_3} y + \frac{M_2(x)}{I_2} z$$

3.8 Schubspannung infolge Biegung

Ein Biegemoment induziert nicht nur Normalspannungen, sondern auch Schubspannungen. Diese sorgen für eine Scherung des Bauteils. Zu unterscheiden sind, Schubspannungen aus Biegung und Schubspannungen aus Torsion (Kapitel 4). Im Allgemeinen sorgen Schubspannungen aus Torsion für eine stärkere Verdrehung des Querschnitts als durch Biegung.

Für die Berechnung müssen die zwei Querschnittsarten unterschieden werden:

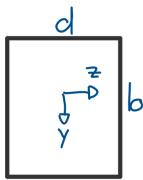
3.8.1 Vollquerschnitt



$$\tau_{xy}(x, y) = \frac{Q_y(x)}{I_z} * \frac{H_z(y)}{b(y)}$$

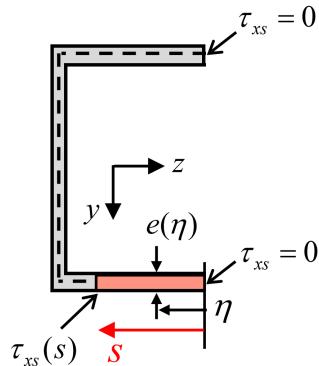
mit $H_z(y) = \int_y^{y_{max}} \eta * b(\eta) d\eta$

Beispiel für H_z



$$H_z(y) = \int_y^{\frac{b}{2}} \eta * d d\eta = \frac{1}{2} [\frac{b^2}{4} - y^2] * d$$

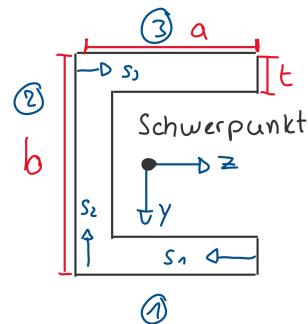
3.8.2 Dünnwandige und offene Querschnitte



$$\tau_{xs}(x, s) = -\frac{Q_y(x)}{I_z} * \frac{H_z(s)}{b(s)}$$

mit $H_z(s) = \int_0^s y(\eta) * e(\eta) d\eta$

Beispiel für H_z



Hierfür teilen wir das Linienintegral $\int_0^s \dots d\eta$ in die Teilintegrale ①, ②, ③ auf.

①

$$H_z(s_1) = \int_0^{s_1} \frac{b}{2} t d\eta = \frac{bt}{2} * s_1$$

$$\tau_{xs_1}(x, s_1) = -\frac{Q_y(x)}{I_z} * \frac{b}{2} * s_1$$

②

$$H_z(s_2) = \int_0^{s_2} (\frac{b}{2} - \eta) * t d\eta = t(\frac{b}{2}s_2 - \frac{1}{2}s_2^2)$$

$$\tau_{xs_2}(s_2) = -\frac{Q}{I} * [H_z(s_1 = a) + H_z(s_2)] = -\frac{Q}{I} * [\frac{b}{2}a + (\frac{b}{2}s_2 - \frac{1}{2}s_2^2)]$$

③

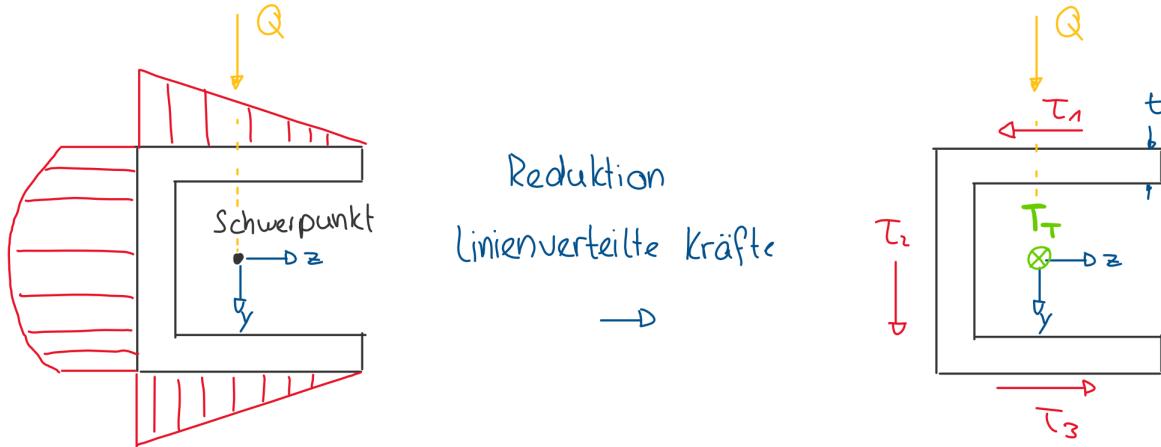
$$H_z(s_3) = \int_0^{s_3} -\frac{b}{2} t d\eta = -\frac{bt}{2} * s_3$$

$$\tau_{xs_3}(s_3) = -\frac{Q}{I} * [H_z(s_1 = a) + H_z(s_2 = b) + H_z(s_3)] = -\frac{Q}{I} * [\frac{b}{2}a + \frac{b^2}{2} - \frac{b}{2} - \frac{b}{2}s_3]$$

Bemerkung: Bei τ_{xs_2} und τ_{xs_3} darf das H_z des vorangegangenen Abschnittes nicht vergessen werden!

3.9 Schubmittelpunkt

Gegeben sei folgendes Beispiel mit Schubspannungsprofil:



Wir führen das Torsionsmoment T_T ein, um das GGW im Schwerpunkt zu erfüllen.

Hierbei seien x_1, x_2, x_3 die Abstände von τ_1, τ_2, τ_3 zum Schwerpunkt

(GGW gilt nur für Kräfte $F = \sigma * A$. $A = dx * t$)

$$M_x^{Schwerpunkt}: -T_T + \tau_1 * (dx * t) - \tau_2 * (dx * t) * x_2 + \tau_3 * (dx * t) * x_3 = 0$$

Aufgrund der Symmetrie des Querschnittes gilt: $\tau_1 = \tau_3$ und $x_1 = x_3$.

Die Gleichung vereinfacht sich zu:

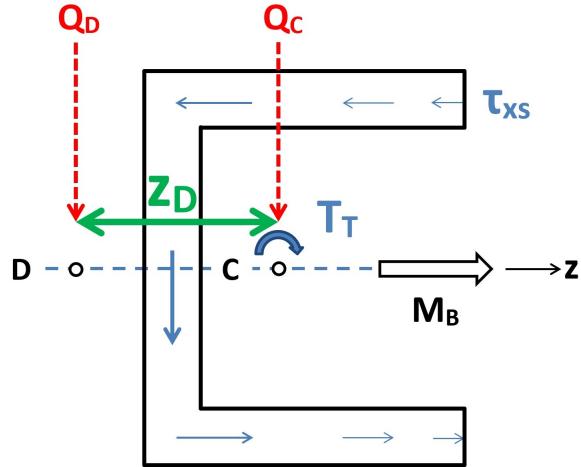
$$T_T = (\tau_2 x_2 + 2 * \tau_1 x_1) dx * t$$

Das bedeutet, wir hätten eine Torsionsbeanspruchung und somit eine Verdrehung des Querschnittes. In manchen Aufgaben ist gefordert, dass keine Torsion herrscht. Hierzu führen wir das Prinzip des **Schubmittelpunktes** ein.

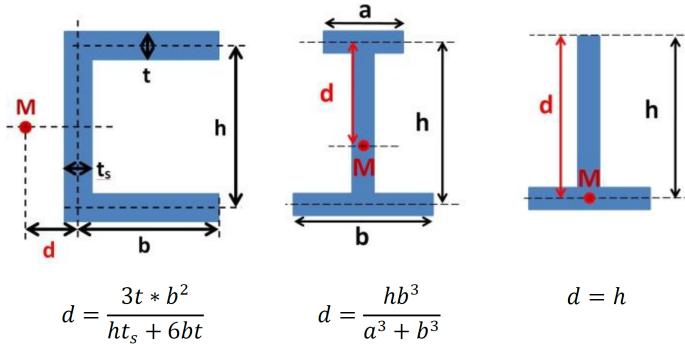
Dazu verschieben wir die Querkraft Q vom Schwerpunkt um den Abstand z_D sodass gilt:

$$Q_C * z_D + T_T = 0$$

Die neue Querkraft Q_D greift im Schubmittelpunkt D an:



Einige spezielle Schubmittelpunkte



Kapitel 4

Torsion

Ein Torsionsmoment bewirkt eine Verdrehung des Querschnittes θ infolge von induzierten Schubspannungen.

Im Allgemeinen gilt:

$$\theta' = \frac{T}{GI_T}$$

$$\tau_{max} = \frac{T}{W_T}$$

mit Schubmodul G, Torsionsträgheitsmoment I_T und Torsionswiderstandsmoment W_T

Bei Kreisquerschnitten entspricht das Torsionsträgheitsmoment dem polaren Trägheitsmoment. Für andere Querschnitte, wird das Torsionsträgheitsmoment empirisch approximiert.

Das Widerstandsmoment lässt sich aus Tabellen auslesen (vgl. Maschinenelemente).

Zu unterscheiden sind 3 Arten von Querschnitten zur Berechnung der Torsionsspannung

Kreis und Vollquerschnitte

Für Kreisquerschnitte :		$\tau_{x\varphi}(r) = \frac{T}{I_T} r$	und	$I_T = I_p = I_z + I_y$
I_T	$\frac{\pi R^4}{2}$	$\frac{\pi(D^4 - d^4)}{32}$	$2\pi R_m^3 t$	$\frac{\pi a^3 b^3}{a^2 + b^2}$
W_T	$\frac{\pi R^3}{2}$	$\frac{\pi(D^4 - d^4)}{16D}$	$2\pi R_m^3 t$	$0.141a^4$
				$0.23ht^3$
				$0.28ht^3$
				$\frac{ht^3}{3}$
Verwölbung	nein	nein	nein	$\frac{ht^2}{3}$
			ja	

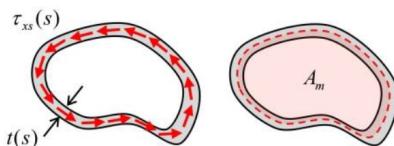
Dünnwandig geschlossene Querschnitte

$$I_T = \frac{(2A_m)^2}{U}$$

$$U = \oint \frac{1}{t(s)} ds$$

$$W_T = 2 A_m * \min(t)$$

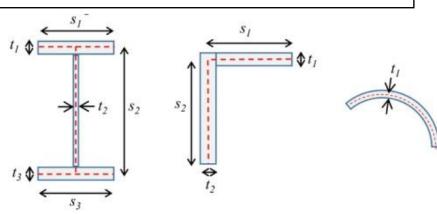
$$\tau_{xs}(r) = \frac{T}{2 A_m * t(s)}$$



Dünnwandig offene Querschnitte

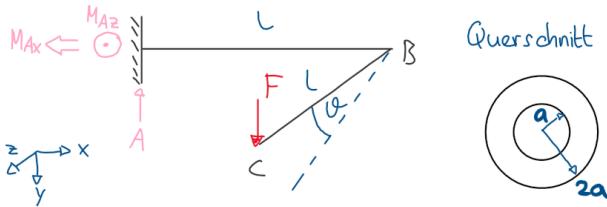
$$I_T \approx \frac{1}{3} \sum_i s_i * t_i^3$$

$$W_T \approx \frac{I_T}{\max(t_i)}$$



Beispiel

Gegeben sei folgender Aufbau. Wir interessieren uns für die maximale Torsion im Querschnitt und die Verdrehung θ im Punkt B.

**1. Lagerkräfte**

$$R_y: \quad A = F$$

$$M_z^{(A)}: \quad M_{Az} = F \cdot L$$

$$M_x^{(A)}: \quad M_{Ax} = F \cdot L$$

2. Beanspruchung

$$M_{Ax} \leftarrow \quad \left\{ \Rightarrow T(x) \right.$$

$$T(x) = M_{Ax} = F \cdot L$$

3. Torsionsträgheitsmoment

Aus Zusammenfassung:

$$I_T = \frac{\pi (D^4 - d^4)}{32} = \frac{\pi [(2a)^4 - a^4]}{32} = \frac{15\pi}{32} a^4$$

4. Torsion

$$\begin{array}{c} \text{Diagram of a rectangular cross-section with width } b \text{ and height } h. \\ \text{The shear stress } \tau_{xy}(r) \text{ at radius } r \text{ is given by:} \\ \tau_{xy}(r) = \frac{T}{I_T} r \end{array}$$

$$\tau_{xy}(z, y) = \frac{FL}{15\pi a^4} \cdot 32 \cdot r$$

\rightarrow Maximale Torsion bei
 $r = 2a$

5. Verdrehung

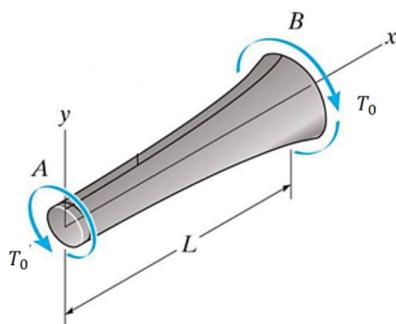
$$\vartheta' = \frac{T}{G I_T} \quad \rightarrow \quad \vartheta = \int \frac{T}{G I_T} dx$$

$$\vartheta G I_T = \int F L dx$$

$$\vartheta G I_T = F L x + C \quad \text{mit } \vartheta(x=0)=0$$

$$\vartheta(x=L) = \frac{32}{15\pi a^4 G} F L^2$$

Punkt B

4.0.1 Beispielaufgabe

Eine elastische Welle (Schubmodul G) der Länge L mit Kreisvollquerschnitt und variablem Durchmesser $D(x) = D_0 * e^{\frac{x}{2L}}$ wird durch ein konstantes Torsionsmoment $T_0 > 0$ belastet.
Man bestimme den Betrag der Relativverdrehung $\Delta\theta$ um die x-Achse der Endquerschnitte.

Für den spezifischen Drehwinkel erhält man:

$$\theta' = \frac{T}{G I_T} = \frac{T_0}{G * \frac{(D(x))^4 * \pi}{32}} = \frac{T_0}{G * \frac{D_0^4 * e^{\frac{2x}{L}} * \pi}{32}}$$

Nun integriert man den spezifischen Winkel über die Länge der Welle:

$$\Delta\theta = \int_0^L \theta' dx = \int_0^L \frac{T_0}{G * \frac{D_0^4 * e^{\frac{2x}{L}} * \pi}{32}} dx = [\frac{32 * T_0}{G * D_0^4 * \pi} * (\frac{-L}{2} * e^{\frac{-2x}{L}})]_0^L = \frac{16 * T_0 * L}{G * D_0^4 * \pi} * (1 - e^{-2})$$

Kapitel 5

Energiemethoden

5.1 Arbeitssatz

Der Arbeitssatz wird verwendet, um die Absenkung v im Kraftangriffspunkt zu berechnen. Nach der Energieerhaltung ist die benötigte Energie für die Absenkung v genau der inneren Verformungsenergie U :

$$\frac{1}{2}F * v = \sum U_i$$

Natürlich kann nicht nur eine Kraft eine Verformung induzieren, sondern im Allgemeinen gilt:

$$W_{ext} = \sum U_i$$

$$\text{mit } 2W_{ext} = \sum F_i v_i + \sum M_i v'_i + \int_L q(x) * v(x) dx$$

$$\text{und } 2\sum U_i = \int_L \frac{M_z^2}{EI_z} dx + \int_L \frac{M_y^2}{EI_y} dx + \int_L \frac{N^2}{EA} dx + \int_L \frac{T^2}{GI_T} dx + \int_L \frac{Q_y^2}{GA_s^y} dx + \int_L \frac{Q_z^2}{GA_s^z} dx$$

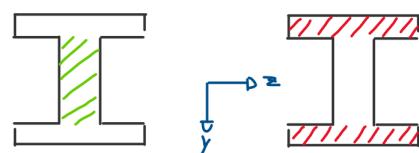
Anmerkung zu A_s^y und A_s^z

Das Problem bei dünnwandigen Bauteilen ist, dass nicht alle Sektionen Querkraft tragen können. Beim Beispiel des T-Trägers kann nur der vertikale Teil die Querkraft in y-Richtung aufnehmen. In Dimensionieren I im nächsten Jahr taucht dies nochmals bei den Schweißverbindungen auf.

Das bedeutet, die Größen A_s^y und A_s^z sind mit Korrekturfaktoren angepasste Flächen. In einer Klausur wird nicht erwartet diese Korrekturfaktoren zu bestimmen. Die Querschnittswerte sind direkt gegeben.

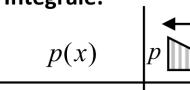
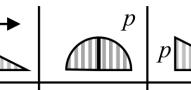
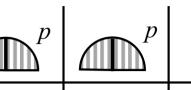
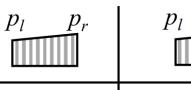
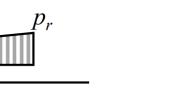
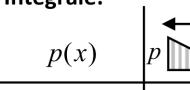
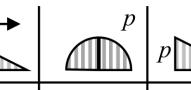
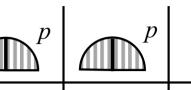
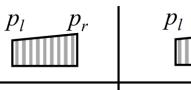
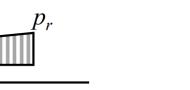
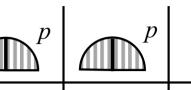
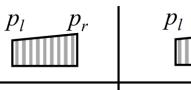
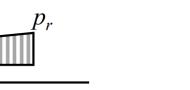
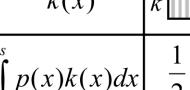
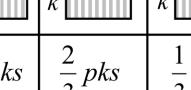
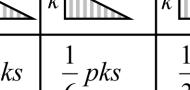
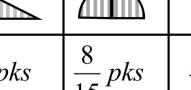
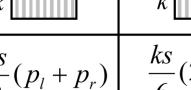
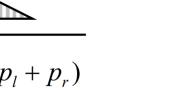
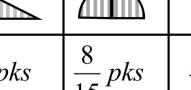
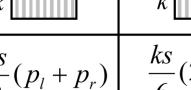
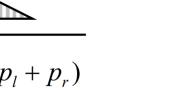
Mit A_s^y = Vertikaler Anteil

Und A_s^z = Horizontaler Anteil



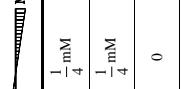
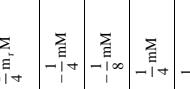
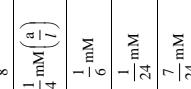
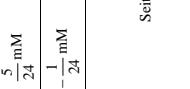
5.1.1 Integraltabellen

Beanspruchungen miteinander zu multiplizieren und zu integrieren ist mühsam und fehleranfällig. Kennen wir die geometrische Verteilung der Beanspruchung über den Querschnitt (Linear, Dreieck, Parabel, Trapez,...) so können wir auf Standardlösungen zurückgreifen.

Integrale:								
$p(x)$			 <th></th> <th></th> <th></th>					
$k(x)$			 <th></th> <th></th> <th></th>					
$\int_0^s p(x)k(x)dx$	$\frac{1}{2} pks$	$\frac{2}{3} pks$	$\frac{1}{3} pks$	$\frac{1}{6} pks$	$\frac{1}{3} pks$	$\frac{8}{15} pks$	$\frac{ks}{2}(p_l + p_r)$	$\frac{ks}{6}(2p_l + p_r)$

Weit ausführlichere Tabellen haben die Bauingenieure. Verwendet man diese, darf man nicht vergessen das **s** wie in $\frac{1}{2}pk\textcolor{red}{s}$ dazu zu multiplizieren. Das fehlt nämlich in der Bauingenieurtafel.

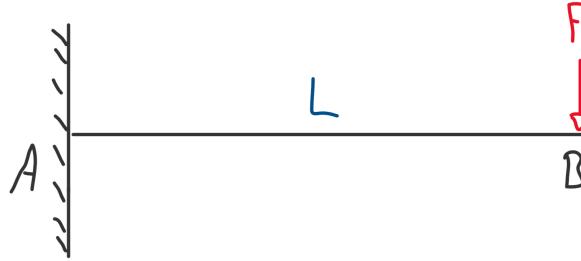
Integrationstabelle

				
mM	$\frac{1}{2}mM$	$\frac{1}{2}mM$	$\frac{1}{2}m(M_l + M_r)$	0
$\frac{1}{2}mM$	$\frac{1}{3}mM$	$\frac{1}{6}mM$	$-\frac{1}{6}mM$	$\frac{1}{4}mM$
$\frac{1}{3}mM$	$\frac{1}{6}mM$	$\frac{1}{3}mM$	$-\frac{1}{6}mM$	$\frac{1}{4}mM$
$\frac{1}{6}mM$	$\frac{1}{6}mM$	$\frac{1}{6}m(2M_l + 2M_r)$	$\frac{1}{6}mM$	0
$\frac{1}{2}mM$	$\frac{1}{2}mM$	$\frac{1}{3}mM$	$\frac{1}{6}(m_l(2M_l + M_r) + m_r(M_l + 2M_r))$	$\frac{1}{4}m_lM$
$\frac{1}{3}mM$	$\frac{1}{3}mM$	$\frac{1}{6}mM$	$\frac{1}{6}m(M_l - M_r)$	$\frac{1}{4}mM$
$\frac{1}{6}mM$	$\frac{1}{6}mM$	$\frac{1}{6}mM$	$\frac{1}{3}mM$	$-\frac{1}{4}mM$
0	$-\frac{1}{6}mM$	$-\frac{1}{6}mM$	$-\frac{1}{3}mM$	$-\frac{1}{4}mM$
$\frac{1}{4}mM$	0	$\frac{1}{4}mM$	$\frac{1}{4}mM$	$\frac{1}{4}mM$
$\frac{1}{2}mM$	$\frac{1}{4}mM$	$\frac{1}{4}mM$	$\frac{1}{4}mM$	$\frac{1}{8}mM$
$\frac{1}{4}mM$	$\frac{1}{4}mM$	0	$-\frac{1}{4}mM$	$-\frac{1}{8}mM$
$\frac{1}{2}mM$	$\frac{1}{2}mM$	$\frac{1}{4}mM$	$\frac{1}{4}mM$	$\frac{1}{8}mM$
$\frac{1}{4}mM$	$\frac{1}{3}mM$	$\frac{1}{3}mM$	0	$\frac{1}{4}mM$
$\frac{1}{6}mM$	$\frac{1}{6}mM$	$\frac{1}{6}mM\left(1+\frac{a}{l}\right)$	$\frac{1}{6}mM\left(\frac{1+b}{l}\right) + M_l\left(\frac{1+a}{l}\right)$	$\frac{1}{4}mM\left(\frac{1-2\frac{a}{l}}{l}\right)$
$\frac{1}{3}mM$	$\frac{1}{3}mM$	$\frac{1}{3}mM$	$\frac{1}{3}m(M_l + M_r)$	0
$\frac{1}{2}mM$	$\frac{1}{4}mM$	$\frac{5}{12}mM$	$\frac{1}{12}m(5M_l + 3M_r)$	$\frac{1}{6}mM$
$\frac{1}{4}mM$	$\frac{1}{2}mM$	$\frac{1}{4}mM$	$\frac{1}{12}m(3M_l + 2M_r)$	$-\frac{1}{6}mM$
$\frac{1}{3}mM$	$\frac{1}{3}mM$	$\frac{1}{12}mM$	$\frac{1}{12}m(M_l + 3M_r)$	$-\frac{1}{6}mM$
$\frac{1}{6}mM$	$\frac{1}{12}mM$	$\frac{1}{4}mM$	$\frac{1}{12}m(3M_l + M_r)$	$\frac{1}{6}mM$
$\frac{1}{12}mM$	$\frac{1}{12}mM$	0	$-\frac{1}{24}mM$	$-\frac{1}{24}mM$

					
\mathbf{m}	$\frac{1}{2} \text{ mM}$	$\frac{1}{2} \text{ mM}$	$\frac{2}{3} \text{ mM}$	$\frac{2}{3} \text{ mM}$	$\frac{1}{3} \text{ mM}$
\mathbf{m}	$\frac{1}{6} \text{ mM} \left(1 + \frac{c}{l}\right)$	$\frac{1}{6} \text{ mM} \left(1 + \frac{d}{l}\right)$	$\frac{1}{4} \text{ mM}$	$\frac{5}{12} \text{ mM}$	$\frac{1}{4} \text{ mM}$
\mathbf{m}	$\frac{1}{6} \text{ mM} \left(1 + \frac{d}{l}\right)$	$\frac{1}{6} \text{ mM} \left(1 + \frac{c}{l}\right)$	$\frac{5}{12} \text{ mM}$	$\frac{1}{4} \text{ mM}$	$\frac{1}{4} \text{ mM}$
$\mathbf{m}_l \quad \mathbf{m}_r$	$\frac{1}{6} \text{ M} \left(m_l + m_r\right)$	$\frac{1}{6} \text{ M} \left[m_l \left(1 + \frac{d}{l}\right) + m_r \left(1 + \frac{c}{l}\right)\right]$	$\frac{1}{3} \text{ M} \left(m_l + m_r\right)$	$\frac{1}{12} \text{ M} \left(5m_l + 3m_r\right)$	$\frac{1}{12} \text{ M} \left(3m_l + 3m_r\right)$
\mathbf{m}	$\frac{1}{6} \text{ mM} \left(1 - 2 \frac{c}{l}\right)$	0	$\frac{1}{6} \text{ mM}$	$-\frac{1}{6} \text{ mM}$	$-\frac{1}{6} \text{ mM}$
\mathbf{m}	$\frac{1}{8} \text{ mM}$	$\frac{1}{4} \text{ mM} \left(\frac{d}{l}\right)$	$\frac{7}{24} \text{ mM}$	$\frac{1}{24} \text{ mM}$	$-\frac{1}{24} \text{ mM}$
\mathbf{m}	$\frac{1}{8} \text{ mM}$	$\frac{1}{4} \text{ mM} \left(\frac{c}{l}\right)$	$\frac{1}{24} \text{ mM}$	$\frac{7}{24} \text{ mM}$	$\frac{5}{24} \text{ mM}$
\mathbf{m}	$\frac{17}{48} \text{ mM}$	$\frac{1}{12d} \text{ M} \left(3 - 4 \left(\frac{c}{l}\right)^2\right)$	$\frac{5}{12} \text{ mM}$	$\frac{17}{48} \text{ mM}$	$\frac{7}{48} \text{ mM}$
\mathbf{m}	$\frac{\text{mM}I^2}{12b} \left(3 - 4 \left(\frac{a}{l}\right)^2\right)$	$\frac{\text{mM}I^2}{6ad} \left(2 \frac{a}{l} - \left(\frac{a}{l}\right)^2 - \left(\frac{c}{l}\right)^2\right)$	$\frac{1}{3} \text{ mM} \left(1 + \frac{ab}{l^2}\right)$	$\frac{1}{12} \text{ mM} \left(5 - \frac{a}{l} - \left(\frac{a}{l}\right)^2\right)$	$\frac{1}{12} \text{ mM} \left(1 + \frac{a}{l} + \left(\frac{b}{l}\right)^2\right)$
\mathbf{m}	$\frac{5}{12} \text{ mM}$	$\frac{1}{3} \text{ mM} \left(1 + \frac{cd}{l^2}\right)$	$\frac{8}{15} \text{ mM}$	$\frac{7}{15} \text{ mM}$	$\frac{1}{5} \text{ mM}$
\mathbf{m}	$\frac{17}{48} \text{ mM}$	$\frac{1}{12} \text{ mM} \left(5 - \frac{c}{l} - \left(\frac{c}{l}\right)^2\right)$	$\frac{7}{15} \text{ mM}$	$\frac{8}{15} \text{ mM}$	$\frac{2}{15} \text{ mM}$
\mathbf{m}	$\frac{17}{48} \text{ mM}$	$\frac{1}{12} \text{ mM} \left(5 - \frac{d}{l} - \left(\frac{d}{l}\right)^2\right)$	$\frac{7}{15} \text{ mM}$	$\frac{11}{30} \text{ mM}$	$\frac{3}{10} \text{ mM}$
\mathbf{m}	$\frac{7}{48} \text{ mM}$	$\frac{1}{12} \text{ mM} \left(1 + \frac{c}{l} + \left(\frac{c}{l}\right)^2\right)$	$\frac{1}{5} \text{ mM}$	$\frac{2}{15} \text{ mM}$	$\frac{1}{30} \text{ mM}$
\mathbf{m}	$\frac{7}{48} \text{ mM}$	$\frac{1}{12} \text{ mM} \left(1 + \frac{d}{l} + \left(\frac{d}{l}\right)^2\right)$	$\frac{1}{5} \text{ mM}$	$\frac{3}{10} \text{ mM}$	$\frac{1}{5} \text{ mM}$

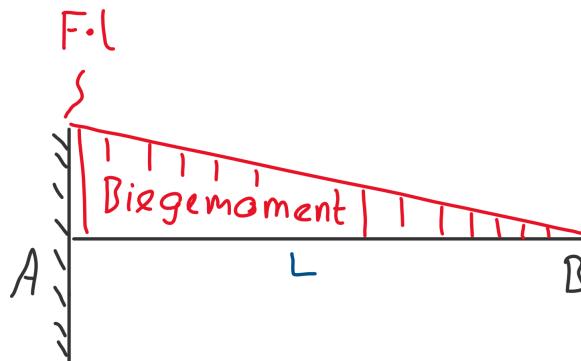
5.1.2 Beispiel

Gegeben sei folgender Aufbau. Wir interessieren uns für die Absenkung am Punkt B. Die Deformation durch Querkraft sei zu vernachlässigen.



Bei diesen Aufgaben berechnen wir die Beanspruchung nicht expliziert, sondern interessieren uns nur für die *Form*, sowie signifikante Punkte.

In unserem Beispiel sehen wir, dass das Biegemoment von B nach A linear zunimmt. Der signifikante Punkt ist das Maximum an der Stelle A mit $M_b^{(A)} = F * L$



Externe Arbeit

$$2W_{ext} = \sum F_i * v_i + \sum M_i v'_i + \int q(x)v(x)dx = F * v$$

Deformationsarbeit

$$2U = \int_L \frac{M_z^2}{EI_z} dx$$

Die Beanspruchung $M_z(x)$ hat die Form eines Dreiecks. Also multiplizieren wir praktisch Dreieck mit Dreieck. Aus der Formelsammlung entnehmen wir:

Integrale:		s	p	k	$\int_0^s p(x)k(x)dx$
$p(x)$		p		p	$\frac{1}{2} pks$
$k(x)$		k		k	$\frac{2}{3} pks$
					$\frac{1}{3} pks$

In unserem Fall gilt $p(x) = k(x) = FL$ und $s = L$.

$$\Rightarrow 2U = \frac{1}{3} F^2 L^2 L * \frac{1}{EI_z}$$

Bestimmen der Verschiebung

Es gilt: $2U = 2W_{ext}$

$$F * v = \frac{1}{3} F L^3 \frac{1}{EI_z} \quad \Rightarrow v = \frac{L^3}{3EI_z}$$

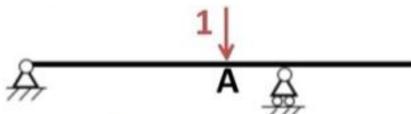
5.2 Verschiebung an einem beliebigen Punkt

Gesucht sei die Verschiebung an einem beliebigen Punkt A.

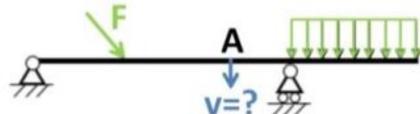
Dazu führen wir das **1 - System** ein, das aus einer Einheitskraft 1 besteht. Die Beanspruchung am 1 - System wird mit dem Index 1 bezeichnet.

Das echte **0 - System** erhält für die Beanspruchung den Index 0

1 System: Virtuelle Last 1



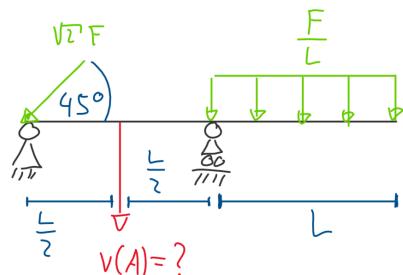
0 System: Wirkliches System



$$\text{Ergebnis: } v = \int_l \frac{M_0 * M_1}{EI_z} dx + \int_l \frac{N_0 * N_1}{EA} dx + \int_l \frac{T_0 * T_1}{GI_T} dx + \dots$$

5.2.1 Beispiel

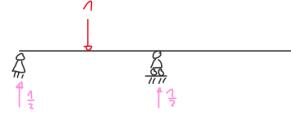
Gegeben sei folgender Aufbau. Wir interessieren uns für die Verschiebung am Punkt A



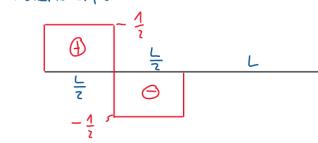
$$v = \int_L \frac{M_0 * M_1}{EI_z} dx + \int \frac{Q_0 * Q_1}{GAy} dx$$

Lösung:

1 System



Querkraft



Biegemoment



Zusammen

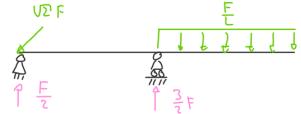
Querkraft

$$\left(\begin{array}{c} + \\ \frac{L}{2} \\ - \\ \frac{L}{2} \end{array} \right) + \left(\begin{array}{c} - \\ \frac{L}{2} \\ - \\ \frac{L}{2} \end{array} \right) + 0 \\ = \frac{1}{2} \cdot (-\frac{F}{2}) \cdot \frac{L}{2} + (-\frac{1}{2}) \cdot (-\frac{F}{2}) \cdot \frac{L}{2} = 0$$

Biegemoment

$$\left(\begin{array}{c} \frac{L}{4} \\ L \\ + \frac{FL}{2} \end{array} \right) + \left(\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right) \\ = \frac{1}{4} \cdot (-\frac{L}{4}) \cdot \frac{FL}{2} \cdot L + 0 = -\frac{FL^3}{32}$$

0 System



Querkraft



Biegemoment

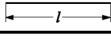
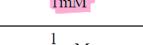
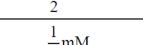
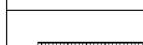
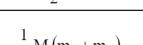
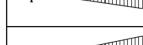
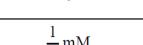
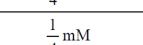
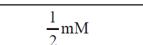


Ergebnis

$$v = \int_L \frac{M_0 * M_1}{EI_z} dx + \int \frac{Q_0 * Q_1}{GAy} dx = \frac{1}{EI_z} \left(-\frac{FL^3}{32} \right) + 0$$

Hierzu verwendet habe ich:

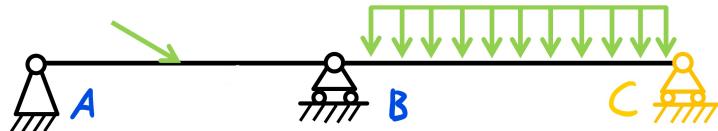
Integrationstabelle

				
		$\frac{1}{2}mM$	$\frac{1}{2}mM$	$\frac{1}{2}m(M_1 + M_r)$
		$\frac{1}{2}mM$	$\frac{1}{3}mM$	$\frac{1}{6}m(2M_1 + 2M_r)$
		$\frac{1}{2}mM$	$\frac{1}{6}mM$	$\frac{1}{6}m(2M_1 + M_r)$
		$\frac{1}{2}M(m_l + m_r)$	$\frac{1}{6}M(m_l + 2m_r)$	$\frac{1}{6}M(2m_l + m_r)$
		0	$-\frac{1}{6}mM$	$\frac{1}{6}m(M_1 - M_r)$
		$\frac{1}{4}mM$	0	$\frac{1}{4}mM_l$
		$\frac{1}{4}mM$	$\frac{1}{4}mM$	0
		$\frac{1}{2}mM$	$\frac{1}{4}mM$	$\frac{1}{4}m(M_1 + M_r)$

5.3 1-fach statisch unbestimmte Systeme: Lagerkraft

Energiemethoden sind sehr praktisch, um unbekannte Lagerkräfte in statisch unbestimmten Systemen zu berechnen, da man sich nicht wie bei der Biegelinie mit den vielen Randbedingungen herumschlagen muss. Hier ein Kochrezept für das Lösen:

Gegeben sei folgendes System:



Dieses System ist 1-fach statisch unbestimmt. Im ersten Schritt wollen wir versuchen alle Lagerkräfte zu bestimmen.

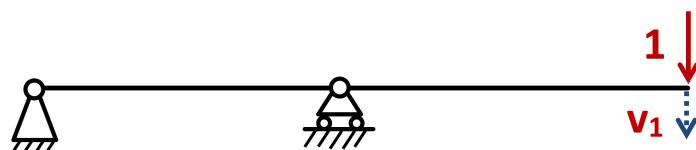
1 Umwandlung in ein statisch bestimmtes System

Um ein statisch bestimmtes System zu erzeugen, müssen wir eine Lagerkraft auflösen. Das bedeutet, wir können das Lager in A, B, oder C entfernen. Für dieses Beispiel entfernen wir **Lager C**



2 1-System

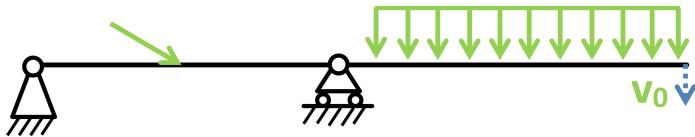
Beim 1-System führen wir eine virtuelle Einheitskraft mit Betrag 1 an der Stelle des entfernten Lagers ein und berechnen die Verschiebung v_1 .



$$v_1 = \int_L \frac{M_1^2}{EI_z} dx + \int_L \frac{N_1^2}{EA} dx + \dots$$

3 0-System

Im 0-System bringen wir alle realen Lasten auf. Das Lager C bleibt entfernt und wir bringen an dieser Stelle **keine** zusätzliche Kraft auf. Wieder berechnen wir eine Verschiebung, hier v_0 .



$$v_0 = \int_L \frac{M_1 M_0}{EI_z} dx + \int_L \frac{N_1 N_0}{EA} dx + \dots$$

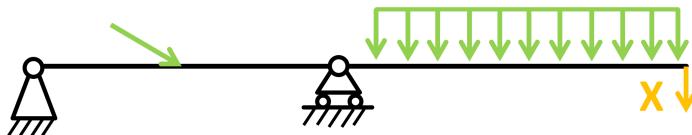
Dabei steht der Index 0 für die Beanspruchung im 0-System und 1 für das 1-System

4 Berechnung der unbekannten Lagerkraft X (hier C)

An der Stelle C ist ein Lager. Folglich muss die Verschiebung an dieser Stelle gleich null sein. Es ergibt sich folgender mathematischer Zusammenhang:

$$v_c = v_0 + X * v_1 = 0 \quad \rightarrow \text{Auflösen nach } x:$$

$$X = -\frac{v_0}{v_1}$$

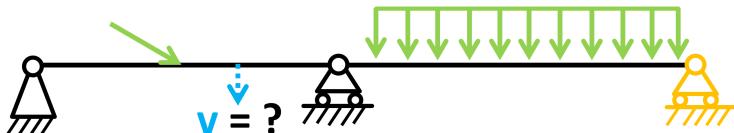


Wichtig zu wissen ist, dass die Richtung der Lagerkraft X in die Richtung der **Einheitskraft 1** zeigt, die wir im 1-System eingeführt haben.

Bekommen wir in diesem Beispiel einen negativen Wert für X, so wird die Lagerkraft nach oben zeigen.

5.4 1-fach statisch unbestimmte Systeme: Verschiebung

Haben wir alle unbekannten Lagerkräfte bestimmt, so können wir Verschiebungen an beliebigen Punkten berechnen.



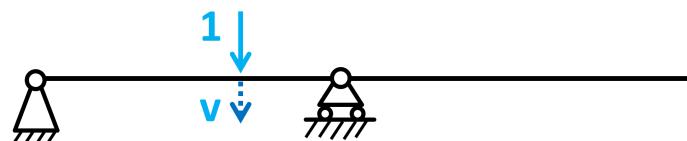
1 Wirkliches System

$$M = M_0 + X * M_1$$

$$N = N_0 + X * N_1$$

$$M = M_0 + X * M_1$$

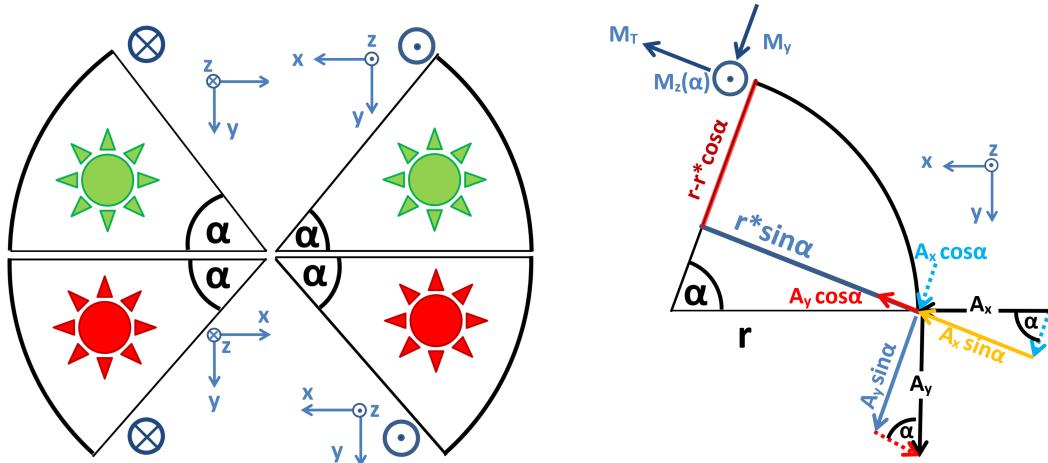
2 2-System für Verschiebung



$$v = \int_L \frac{M M_2}{EI_z} dx + \int_L \frac{N N_2}{EA} dx + \dots$$

5.5 Kreisbogenbeanspruchung

Es kann zeitaufwändig und mühsam sein Kreisbogenbeanspruchungen auszurechnen. Hier eine Hilfe, wie man alle Schnittgrößen schnell bestimmen kann.



$$\begin{bmatrix} M_z \\ M_T \\ M_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -A_x & A_y \\ 0 & -A_z \\ -A_z & 0 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} r * \sin(\alpha) \\ r * [1 - \cos(\alpha)] \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} M_{A,z} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} N \\ Q_y \\ Q_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -A_x & -A_y & 0 \\ -A_y & A_x & 0 \\ 0 & 0 & -A_z \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \sin(\alpha) \\ \cos(\alpha) \\ 1 \end{bmatrix}$$

Wie benutze ich dieses Hilfsmittel?

Zuerst einmal muss man identifizieren von welcher Seite man aus schneidet. Entweder ist man dann auf der Seite einer **grünen** oder **roten** Sonne.

Die Lagerkräfte A_x, A_y, A_z sind in positive Koordinatenrichtung einzuführen.

Han man eine **grüne Sonne** auf der Seite, schreibt man überall dort, wo ein grünes Minus ist, das Minus hin. Die roten Minuse werden nicht beachtet.

Anders herum, wenn man von der Seite der **roten Sonne** schneidet, beachtet man nur die **roten Minuse**.

Die Beanspruchung erhält man, wenn man alle Werte in die Matrizen mit dem richtigen **färbigen** Vorzeichen einsetzt. Die Richtung der Beanspruchungselemente (M_T, M_z und M_y) sind in Koordinatensystemrichtung.