



Eidgenössische Technische Hochschule Zürich
Swiss Federal Institute of Technology Zurich



IMES

Institute for Mechanical Systems
Institut für Mechanische Systeme

Dimensionieren 1

Notizen zur Vorlesung

Prof. Dr. Edoardo Mazza
Dr. Raoul Hopf

HS 2019

Dieses Skript repräsentiert eine Zusammenfassung des Stoffes der Vorlesung *Dimensionieren 1* von Prof. Dr. E. Mazza.

Das Skript ist eine Ergänzung zur Vorlesung und die Studierenden werden ermutigt den vorliegenden Text während der Vorlesung handschriftlich zu komplementieren.

Die Digitalisierung dieser Arbeit wurde von B. Müller vorgenommen. Hinweise auf Fehler im Skript werden jederzeit dankend angenommen.

Inhaltsverzeichnis

0 Einleitung	1
0.1 Folien aus 1. Vorlesung	1
0.2 Grundproblem der Kontinuumsmechanik	9
1 Methoden der Strukturanalyse:	
Kontinuumsmechanik und Strukturtheorien	10
1.1 Balken	10
1.1.1 Statische Formulierung	11
1.1.2 Kinematische Formulierung	13
1.1.3 Energiesätze	16
1.1.4 Energiesatz (SMPE) und Methode der Finiten Elementen (FE)	18
1.2 Scheibe	20
1.2.1 Approximativer Charakter der Scheibengleichung	23
1.2.2 Scheibe mit Loch	23
1.2.3 Scheibe mit Riss	25
1.3 Platte	28
1.3.1 Beispiel: Rechteckplatte allseitig aufgelegt unter Flächenlast	31
1.3.2 Schwingungen von Platten	33
2 Materialverhalten und Auslegungskriterien	36
2.1 Plastizität: eine Einführung	36
2.2 Grundlegendes zur Bestimmung von Auslegungskriterien: statische Belastung	43
2.3 Statischer Festigkeitsnachweis mit örtlichen Spannungen (FKM Richtlinie, Kap. 3)	49
2.4 Grundlegendes zur Bestimmung von Auslegungskriterien: zyklische Belastung	54
2.5 Ermüdungsfestigkeitsnachweis mit örtlichen Spannungen (FKM Richtlinien, Kap.4)	63
2.6 Kriechen	70
2.6.1 Kriechmodelle	71
2.6.2 Relaxation	72
2.6.3 Kriechschädigung	73
2.6.4 Methoden zur Dimensionierung	74
2.6.5 Interaktion Kriechen-Ermüdung	75
2.7 Einige Gedanken über Bruchmechanik	77
2.7.1 Griffith's Energiekriterium	79
2.7.2 Energiefreisetzungsraten in lastkontrollierten und verschiebungskontrollierten Systemen	81
2.7.3 Berechnung der Energiefreisetzungsraten	83
3 Stabilität	87
3.1 Einführung	87
3.2 Grundbegriffe am 1D-Problem (Balken)	88
3.2.1 System mit 1-Freiheitsgrad	89
3.2.2 Knicken eines Stabes	94

0 Einleitung

0.1 Folien aus 1. Vorlesung

Dimensionieren 1, HS 2019

Vorlesung 1: Einführung

Dozenten: Prof. Edoardo Mazza, Dr. Raoul Hopf

Vorlesung:

Dienstag 8-10 im ML D 28 mit Videoübertragung im ML E 12

Kolloquium und Einführung d. Übungen:

Dienstag 12-13 im HIL E 3 mit Videoübertragung im HIL E 8

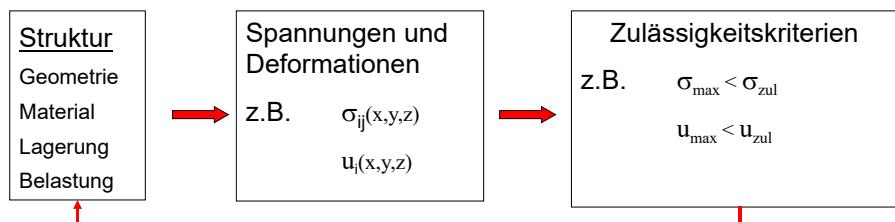
(ETH Hönggerberg: Unterricht von 12.15-13.00)

HEUTE: 10:15-11 im ETF E1

Dimensionieren 1, 2019

1

Ingenieurproblem “Strukturauslegung” oder “Dimensionierung”



Definiere: Geometrie, Material, Randbedingungen (Lasten+Lagerung)

Berechne: Spannungen, Deformationen

Beurteile: Zulässigkeit der Spannungen, Deformationen

Vorlesungsinhalt aufbauend auf Mechanik 1 und 2, Werkstoffe und Fertigung I und II und Maschinenelemente.

Prozeduren beinhalten Annahmen und Unsicherheiten beim jedem einzelnen Schritt.

Es ist die Aufgabe und die Verantwortung des Ingenieurs, die Dimensionierung so durchzuführen, dass die Bauteile ihre Funktion zuverlässig erfüllen.

Dimensionieren 1, 2019

2

Vermeiden von Versagen



Halifax



Kleine Scheidegg



St. Gallen



Eschede



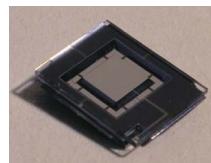
Genua

Dimensionieren 1, 2019

3

Beispiele

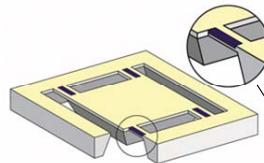
Beschleunigungssensor für Airbag



When a collision causes the frame to decelerate, the inertia of the mass in the centre induces a mechanical stress in the bridges. This mechanical stress is converted into an electric signal that is used to activate the airbag.

MEMS devices and applications, 2010

Stent für Öffnung einer Stenose, d.h. Verengung von Blutgefäßen



Stent delivery system in place

Stent expands as balloon inflates

Catheter removed, stent implanted



<http://www.vhlab.umn.edu/atlas/device-tutorial/stents/>

Diskussion:

Funktion → Dimensionierungskriterien

In beiden Fällen: Balken als Grundlement

→ Dimensionierung Kragarm, Beispiel besprechen

Dimensionieren 1, 2019

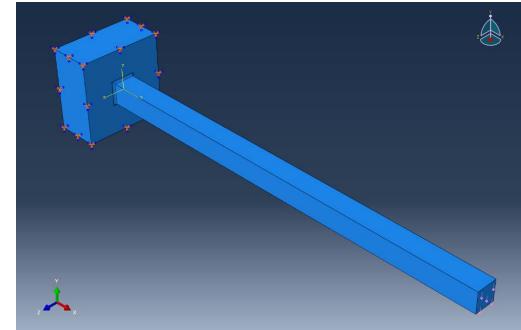
4

Cantilever beam

- Material properties:

Elastic: Young's modulus $E = 70 \text{ GPa}$
 Poisson's ratio $\nu = 0.3$

Elastic—Ideally plastic:
 Yield stress $\sigma_y = 200 \text{ MPa}$



- Geometry:

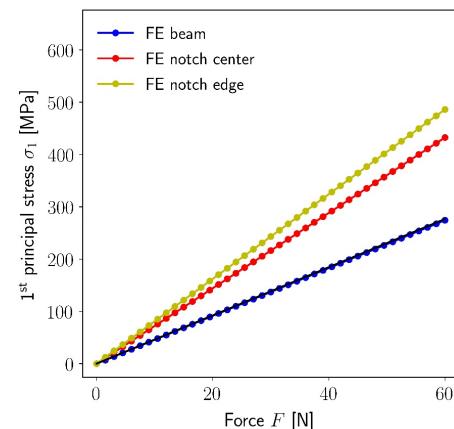
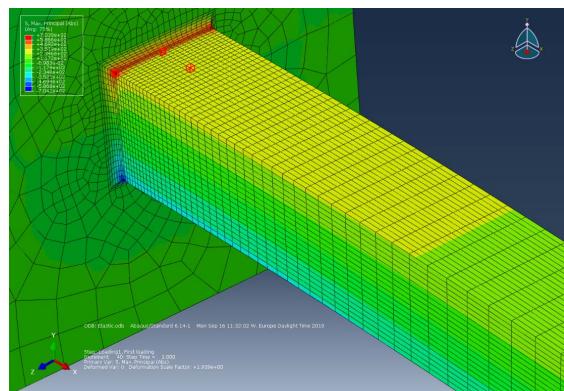
- Beam length: $L = 100 \text{ mm}$
- Square cross-sectional area: $W = H = 5 \text{ mm}$
- Fillet at notch: $R = 0.5 \text{ mm}$

Surface traction: $t = -\frac{F}{WH} e_y$

Dimensionieren 1, 2019

5

Cantilever beam, Elastic calculation

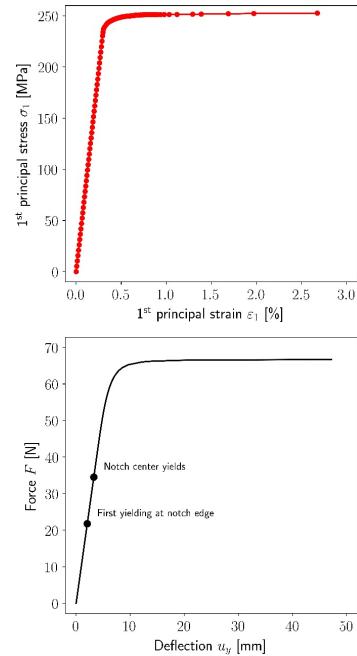
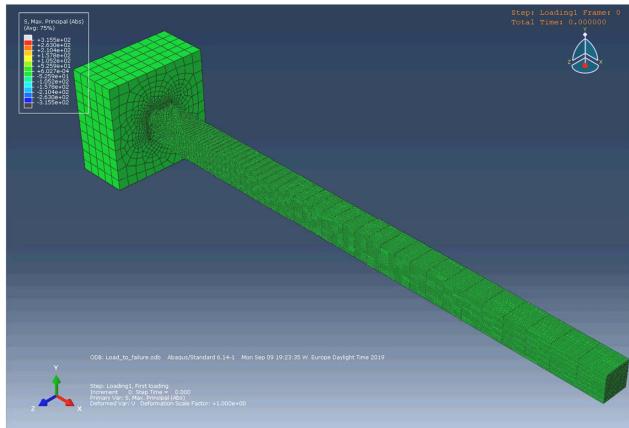


Dimensionieren 1, 2019

6

Cantilever beam, Load to failure

Elastic—ideally plastic calculation,
Load to failure (complete plastification)

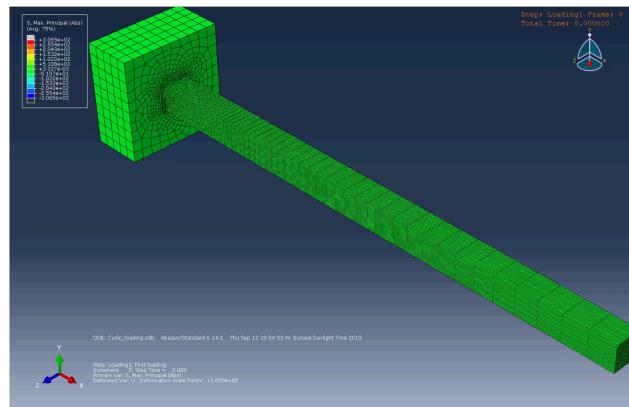


Dimensionieren 1, 2019

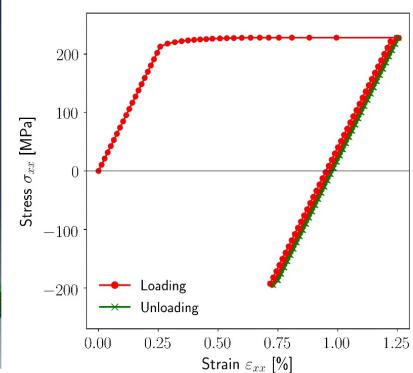
7

Cantilever beam, Cyclic loading

Elastic—ideally plastic calculation,
cyclic loading



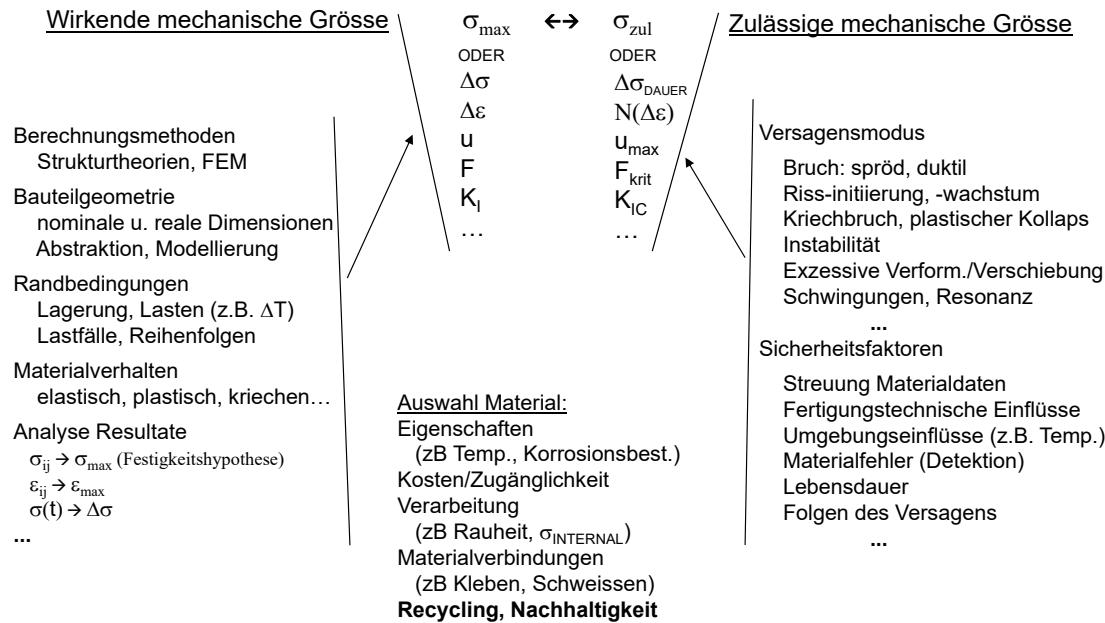
Stress-strain data evaluated at one integration point of the notch center element



Dimensionieren 1, 2019

8

Dimensionierung: eine komplexe Fragestellung



Vorlesung wird nur auf einige Aspekte eingehen

Dimensionieren 1, 2019

9

Dimensionierung, Ziel: prediktive Aussagen

Deterministische, berechnungsbasierter Auslegung als Alternative zum "trial and error", d.h. Bauteile (Prototype) realisieren und testen.

Letzteres ist aufwendig und teuer (zB Crash-test, Full-scale fatigue test, ... klinische Studien bei biomedizinischen Produkten)

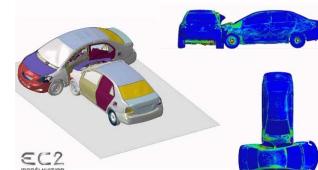


<https://mandanis.ch/bilder-und-beispiele/full-scale-fatigue-test/>

FULL SCALE FATIGUE TEST

Bei RUAG Aerospace wurde die F/A-18-Zelle mit dem Full Scale Fatigue Test (68 Hydraulikzylindern) auf Ermüdung untersucht. Wesentliche Informationen über das Verhalten des Flugzeuges, im Zusammenhang mit dem Schweizer Belastungsspektrum, welches sich grundsätzlich vom US-NAVY-Spektrum unterscheidet, wurden gewonnen. Damit wird ein technisch fundierter und wirtschaftlicher Unterhalt des Kampfjets für die langjährige Einsatzperiode ermöglicht.

<https://electrek.co/2018/10/09/tesla-model-3-crash-test-videos/>



<https://www.youtube.com/watch?v=5-dn4lnS3s0>

Dimensionieren 1, 2019

10

Dimensionierung, Ziel: prediktive Aussagen

Produktoptimierung aus Iterationen "auf Papier" (oder "in silico"). Experimente zur Verifikation am Ende der Prozedur (Bsp: Turbinengehäuse)



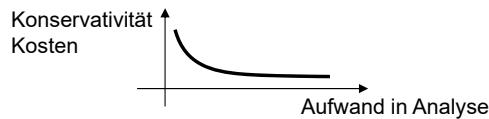
Lastfälle definieren, alle mögliche Einflüsse berücksichtigen, z.B.:

- einmalige, wiederkehrende, zyklische Lasten
- dynamische Antwort, Schwingungen (Mechanik 3)
- Instabilitäten (Knicken, Beulen)
- Thermische Lasten
- Kontakt, Tribologie

Relevante Materialparameter berücksichtigen und kritisch hinterfragen (zB: sind im Labor gemessene Materialeigenschaften auch für den vorliegenden Bauteil repräsentativ?).

Zusammenarbeit mit Konstrukteuren, Fabrik, Materialspezialisten.

Generell werden Unsicherheiten durch Sicherheitsfaktoren berücksichtigt → Konservativität.



Dimensionierung: Rolle der Normen

Beispiele:

ASME Boiler and Pressure Vessel Code

FKM Richtlinie. Rechnerischer Festigkeitsnachweis für Maschinenbauteile

DIN 743: Tragfähigkeitsberechnung von Wellen und Achsen

...

Normen und Regelwerke definieren vollständige Prozeduren zur Dimensionierung spezifischer Produkte / Komponenten mit entsprechenden Materialien. Sie sind in ihrer Gültigkeit eingeschränkt, werden aber oft als Referenz für weitere Anwendungsfelder verwendet, falls spezifischere Regelwerke nicht vorhanden sind.

Einige Industrien entwickeln eigene firmeninterne Normen, die die Qualität und Zuverlässigkeit der Produkte garantieren (Teil des vorteilbringenden Firmen-Know-How). Erlauben die mechanische Integrität zu gewährleisten ohne exzessive Konservativität.

Regelwerke definieren für jeden Sicherheitsnachweis die relevanten Lastfälle, klassifizieren Ergebnisse, definieren Materialeigenschaften und Sicherheitsfaktoren → siehe Beispiel FKM Richtlinie.

Es wird hier darauf Bezug genommen und spezifische Aspekte eingeführt (FKM Richtlinie). Auf die eingehende Behandlung einer spezifischen Norm wird verzichtet.

Normen: Struktur der FKM Richtline

Rechnerischer Festigkeitsnachweis für Maschinenbauteile,
Forschungskuratorium Maschinenbau

0 Allgemeines

Anwendungsbereich, Grundlagen, Erforderliche Nachweise, Spannungen und Bauteilarten, Berechnungsablauf

1 Statischer Festigkeitsnachweis mit Nennspannungen

Allgemeines, Spannungskennwerte, Werkstoffkennwerte, Konstruktionskennwerte, Bauteilfestigkeit, Sicherheitsfaktoren, Nachweis

2 Ermüdungsfestigkeitsnachweis mit Nennspannungen

Wie oben

3 Statischer Festigkeitsnachweis mit örtlichen Spannungen

Wie oben

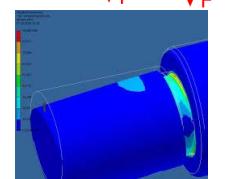
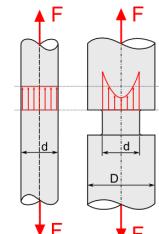
4 Ermüdungsfestigkeitsnachweis mit örtlichen Spannungen

Wie oben

5 Anhänge

Werkstofftabellen, Formzahlen, Kerbwirkungszahlen, Bauteilklassen für geschweißte Bauteile aus Baustahl und Aluminiumlegierungen, Abschätzung der Dauerfestigkeit randschichtverfestigter Bauteile, Experimentelle Bestimmung von Bauteil-Festigkeitswerten, Lastannahmen

6 Beispiele, 7 Formelzeichen, 8 Änderungen



ww3.cad.de

Dimensionieren 1, 2019

13

Aufbau der Vorlesung

Teil 1. Strukturtheorien (ca. 4 Vorlesungen)

Balkentheorie aus dem Grundproblem, Approximationen

Energiesätze, FE Methode

Scheibentheorie, Spannungskonzentration: Loch, Riss

Plattentheorie, PlattenSchwingungen

Teil 2. Materialverhalten und Auslegungskriterien (ca. 6 Vorlesungen)

Duktiles Verhalten, Plastizität, Festigkeitshypothesen

Grundlegendes zur Bestimmung von Auslegungskriterien: statische Belastung

Statischer Festigkeitsnachweis nach FKM

Grundlegendes zur Bestimmung von Auslegungskriterien: zyklisch Belastung

Ermüdungsfestigkeitsnachweis nach FKM

Kriechen, Bruchmechanik

Teil 3. Stabilität (ca. 3 Vorlesungen)

Stabilität von 1D Strukturen

Beulen von Platten

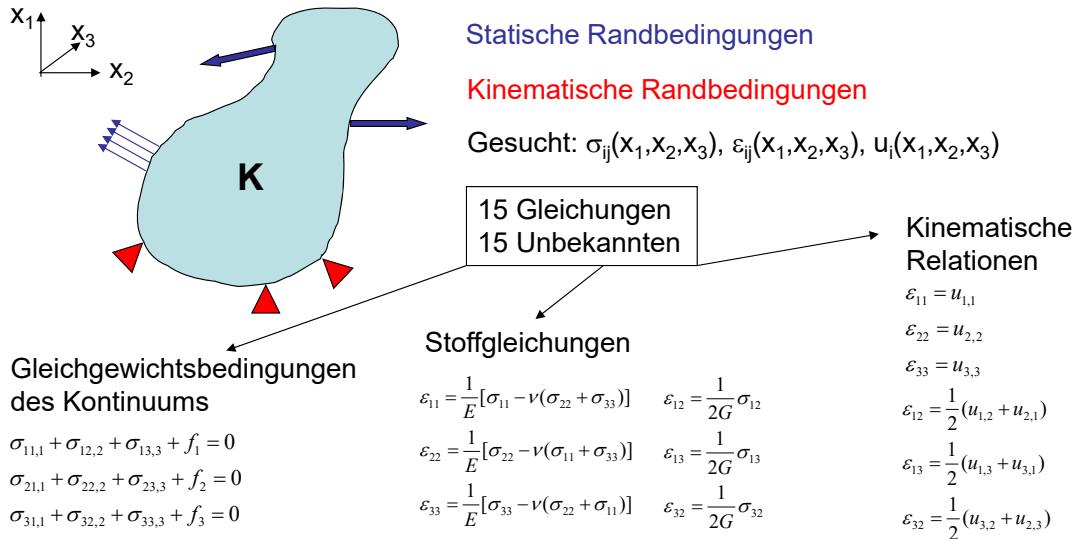
Anwendungsbeispiele aus der Praxis (Vorlesung und Kolloquium/Uebungen)

FE als Berechnungstool

Dimensionieren 1, 2019

14

Grundproblem der Kontinuumsmechanik

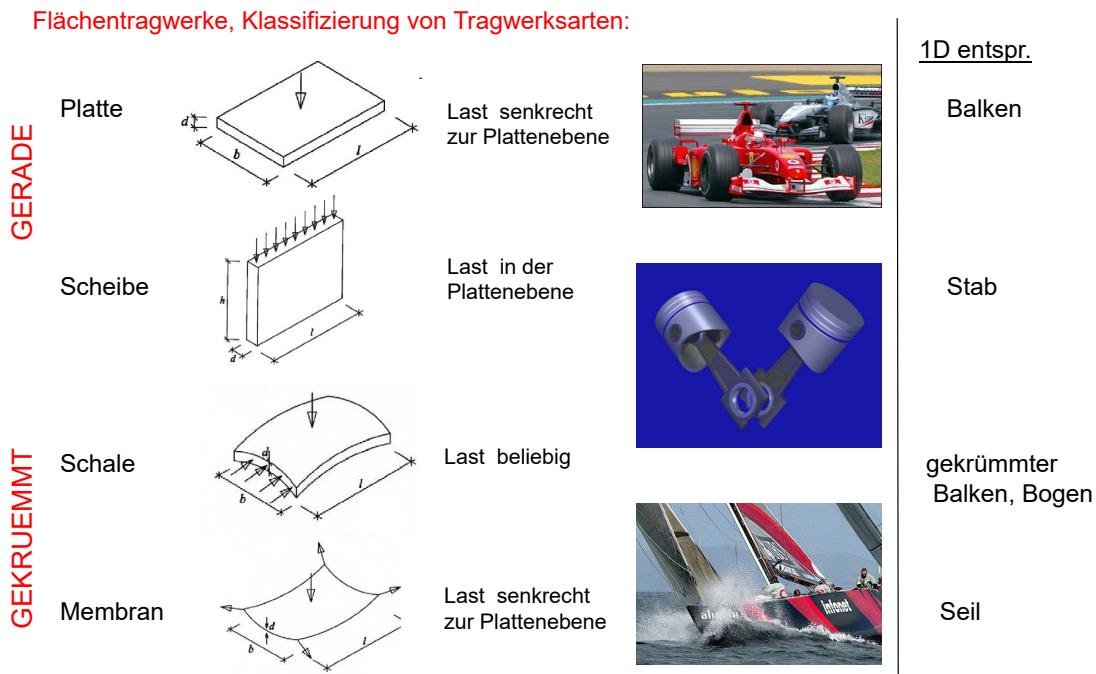


Problem i.A. nicht exakt lösbar (selbst für diese «einfache» Form).
Approximative Lösungen → Strukturtheorien (Balken, Platten, Scheiben, Schalen...), oder numerische Methoden (FEM).

Dimensionieren 1, 2019

15

Flächentragwerke

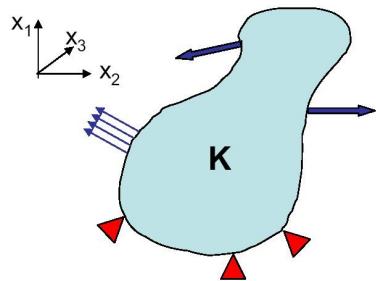


Dimensionieren 1, 2019

16

0.2 Grundproblem der Kontinuumsmechanik

(Für kleine Deformationen und linearelastisches isotropes Materialverhalten)



Gegeben:

- statische Randbedingungen (SRB)
- kinematische Randbedingungen (KRB)

Gesucht:

- $\sigma_{ij}(x_1, x_2, x_3)$
- $\varepsilon_{ij}(x_1, x_2, x_3)$
- $u_i(x_1, x_2, x_3)$

Abb. 1: Grundproblem der Kontinuumsmechanik.

Gleichgewichtsbedingungen des Kontinuums (GGB)

$$\begin{aligned}\sigma_{11,1} + \sigma_{12,2} + \sigma_{13,3} + f_1 &= 0 \\ \sigma_{21,1} + \sigma_{22,2} + \sigma_{23,3} + f_2 &= 0 \\ \sigma_{31,1} + \sigma_{32,2} + \sigma_{33,3} + f_3 &= 0\end{aligned}$$

Stoffgleichungen (SG)

$$\begin{aligned}\varepsilon_{11} &= \frac{1}{E}[\sigma_{11} - \nu(\sigma_{22} + \sigma_{33})] \\ \varepsilon_{22} &= \frac{1}{E}[\sigma_{22} - \nu(\sigma_{11} + \sigma_{33})] \\ \varepsilon_{33} &= \frac{1}{E}[\sigma_{33} - \nu(\sigma_{22} + \sigma_{11})] \\ \varepsilon_{12} &= \frac{1}{2G}\sigma_{12} \\ \varepsilon_{13} &= \frac{1}{2G}\sigma_{13} \\ \varepsilon_{23} &= \frac{1}{2G}\sigma_{23}\end{aligned}$$

Kinematische Relationen (KR)

$$\begin{aligned}\varepsilon_{11} &= u_{1,1} \\ \varepsilon_{22} &= u_{2,2} \\ \varepsilon_{33} &= u_{3,3} \\ \varepsilon_{12} &= \frac{1}{2}(u_{1,2} + u_{2,1}) \\ \varepsilon_{13} &= \frac{1}{2}(u_{1,3} + u_{3,1}) \\ \varepsilon_{23} &= \frac{1}{2}(u_{2,3} + u_{3,2})\end{aligned}$$

1 Methoden der Strukturanalyse: Kontinuumsmechanik und Strukturtheorien

Grundproblem aus Kapitel 0 nur selten analytisch exakt lösbar.

Hier:

Approximative Lösungen des Grundproblems für 1D-Strukturen (Balken, Abschnitt 1.1) und Flächentragwerke (Scheibe, Abschnitt 1.2 und Platte, Abschnitt 1.3).

Annahmen:

- kleine Deformationen
- linearelastische isotrope Werkstoffe

1.1 Balken

- Lösung des Grundproblems am Beispiel des Balkens unter Biegung (Kragarm)
- Differentialgleichungen und Randbedingungen: Siehe Übungsserie 1
- Es existiert keine analytische Lösung
- Bestimme approximative Lösungen durch “Ansätze“ statt durch aufintegrieren der Differentialgleichungen

Problemstellung:

Gegeben: Einseitig eingespannter Balken mit Endlast P (Kragarm)

Gesucht: Verschiebung des Lastangriffspunktes

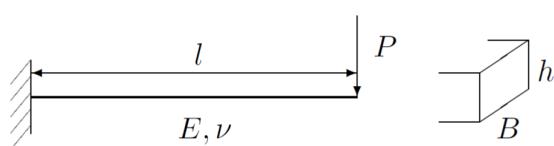


Abb. 2: Einseitig eingespannter Balken mit Endlast P .

Zwei mögliche Lösungswege:

- 1.1.1 Statische Formulierung
- 1.1.2 Kinematische Formulierung

1.1.1 Statische Formulierung

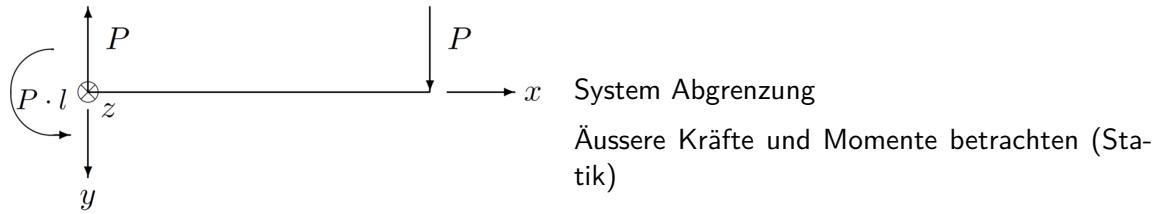


Abb. 3: Reaktionskräfte an einseitig eingespanntem Balken mit Last P .

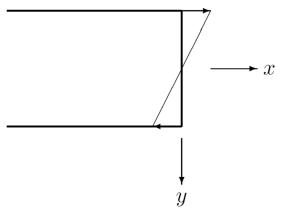
Beanspruchung:

- $M_z(x) = P(l - x)$
- $Q_y(x) = P$

Ansatz für Spannungen:

- $\sigma_{yy} = \sigma_{zz} = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$ (Balkenränder kräftefrei)
- $\sigma_{xx} \neq 0$ ($\leftrightarrow M_z$)
- $\tau_{xy} \neq 0$ ($\leftrightarrow Q_y$)

$\boxed{\sigma_{xx}}$



Lineare Verteilung

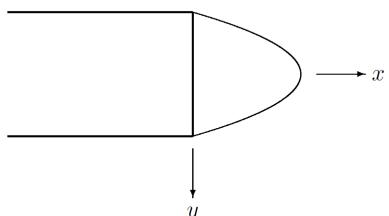
→ Resultierende Kraft $F_x = 0$

→ Resultierendes Moment M_z

$$\sigma_{xx} = -\frac{M_z(x)}{I} \cdot y = 12 \frac{P(x-l)}{Bh^3} \cdot y$$

Abb. 4: Spannungsverteilung σ_{xx} .

$\boxed{\tau_{xy}}$



Quadratische Verteilung

$$\rightarrow \tau_{xy} \left(y = \pm \frac{h}{2} \right) = 0$$

→ Resultierende Kraft Q_y

$$\tau_{xy} = \frac{3}{2} \frac{P}{Bh} \left(1 - 4 \frac{y^2}{h^2} \right)$$

Abb. 5: Spannungsverteilung τ_{xy} .

GGB:

$$\begin{aligned}\sigma_{xx,x} + \tau_{xy,y} + \tau_{xz,z} &= 0 \\ 12 \frac{P}{Bh^3} y + \frac{3}{2} \frac{P}{Bh} \cdot \left(-\frac{8}{h^2} \right) y + 0 &= 0: \quad \text{erfüllt!}\end{aligned}$$

daraus: ε_{ij}, u_i

SG:

$$\begin{aligned}\underline{\varepsilon_{xx}} = \frac{\sigma_{xx}}{E} &= -\frac{P}{EI}(l-x)y \quad \text{aus KR} \quad \xrightarrow{\int dx} \quad \underline{u_x} = \frac{P}{EI}y \left(\frac{x^2}{2} - lx \right) \\ \text{SG} \quad \underline{\varepsilon_{xy}} &= \frac{\tau_{xy}}{2G} = \frac{3}{4G} \frac{P}{Bh} \left(1 - 4 \frac{y^2}{h^2} \right) \\ \text{KR} \quad \frac{1}{2}(u_{x,y} + u_{y,x}) &= \varepsilon_{xy} \quad \rightarrow \quad \underline{u_y} = \frac{3}{2G} \frac{P}{Bh} \left(1 - 4 \frac{y^2}{h^2} \right) x + \frac{P}{EI} \left(l \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} \right) \\ \varepsilon_{xz} = \varepsilon_{yz} &= 0 \quad \rightarrow \quad u_{x,z} + u_{z,x} = 2\varepsilon_{xz} \quad \rightarrow \quad \underline{u_z} = 0\end{aligned}$$

ABER

$$\begin{aligned}\varepsilon_{yy} &= -\frac{\nu}{E} \sigma_{xx} = \frac{\nu}{EI} P(l-x)y \neq u_{y,y} \quad !! \\ \varepsilon_{zz} = \varepsilon_{yy} &\neq u_{z,z} \quad !!\end{aligned}$$

Zusammenfassung dieser Lösung:

- GGB: erfüllt
 - SG: erfüllt
 - KR: zum Teil nicht erfüllt
- Randbedingungen ?
- statische RB: (Siehe Übungen)
- kinematische RB: $x = 0, u_x = u_y = u_z = 0$
- Erfüllt

Die Lösung ist nun eine Approximation, weil zwar sind

GGB, SG, statische und kinematische RB *erfüllt*

aber einige kinematische Relationen sind nicht erfüllt:

$$\begin{aligned}u_{y,y} &\neq \varepsilon_{yy} \\ u_{z,z} &\neq \varepsilon_{zz}\end{aligned}$$

Resultat:

$$u_y(x = l, y = 0, z = 0) = \frac{Pl^3}{3EI} + \frac{P}{GI} l \frac{h^2}{8}$$

Balken als Feder:

$$u_y = \underbrace{\left(\frac{l^3}{3EI} + \frac{lh^2}{8GI} \right) P}_{\frac{1}{K_\sigma}}$$

K_σ : Steifigkeitskonstante aus statischer Formulierung

1.1.2 Kinematische Formulierung

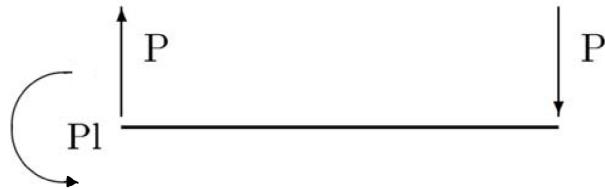


Abb. 6: Reaktionskräfte an einseitig eingespanntem Balken mit Last P .

Für diese Lösung betrachte zuerst die kinematischen Randbedingungen (KRB):

$$u_x(x = 0) = 0$$

$$u_y(x = 0) = 0$$

$$u_z(x = 0) = 0$$

- Ansatz für Verschiebung:

$$u_y(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2$$

und für

$$u_x = -u_{y,x} \cdot y = (-3ax^2 - 2bx)y$$

$$u_z = 0$$

Ansatz so gewählt, dass KRB erfüllt
a, b noch unbekannt

- Kinematische Relationen:

$$\varepsilon_{xx} = u_{x,x} = (-6ax - 2b)y$$

$$\varepsilon_{yy} = \varepsilon_{zz} = 0$$

$$\varepsilon_{xz} = \varepsilon_{yz} = 0$$

$$\varepsilon_{xy} = \frac{1}{2}(u_{x,y} + u_{y,x}) = 0$$

- Spannungsfeld: Stoffgleichungen (Umkehrung Hook'sches Gesetz)

$$\begin{aligned}\sigma_{xx} &= 2G \left(1 + \frac{\nu}{1-2\nu}\right) \varepsilon_{xx} = 2G \left(1 + \frac{\nu}{1-2\nu}\right) \cdot (-6ax - 2b)y \\ \sigma_{yy} = \sigma_{zz} &= 2G \frac{\nu}{1-2\nu} \cdot \varepsilon_{xx} = 2G \frac{\nu}{1-2\nu} \cdot (-6ax - 2b)y \quad (\neq 0!!) \\ \tau_{xy} = \tau_{xz} = \tau_{yz} &= 0\end{aligned}$$

Statische RB:

$$\begin{aligned}M_b(l) &= 0 \rightarrow \sigma_{xx}(x=l) = 0 \\ M_b(0) &= Pl \rightarrow \iint_A \sigma_{xx}(x=0) \cdot y dA = Pl \\ \Rightarrow a &= -\frac{P}{6\alpha I}, b = \frac{Pl}{2\alpha I} \\ \alpha &= 2G \left(1 + \frac{\nu}{1-2\nu}\right) \\ Q(0) = Q(l) &= 0 \neq P \Rightarrow \text{RB nicht erfüllt}\end{aligned}$$

Freie Balkenränder nicht Spannungsfrei!

Zusammenfassung dieser Lösung

Die Lösung ist eine Approximation (schlechte Approximation), weil zwar

u_i stetig
und kinematische Relationen + kinematische RB erfüllt

ABER

einige statische RB nicht erfüllt
und
GGB nicht erfüllt

$$\begin{aligned}\sigma_{xx,x} + \cancel{\tau_{xy,y}} &\stackrel{0}{\rightarrow} \cancel{\tau_{xz,z}} \neq 0 \\ \sigma_{yy,y} + \cancel{\tau_{yx,x}} &\stackrel{0}{\rightarrow} \cancel{\tau_{yz,z}} \neq 0\end{aligned}$$

$$u_y(x=l, y=0, z=0) = \frac{1}{3} \frac{P}{\alpha I} l^3$$

Balken als Feder:

$$u_y = \underbrace{\frac{l^3}{3\alpha I}}_{1/K_u} \cdot P \quad \nu = 0.3 \rightarrow \alpha \approx 1.35E$$

K_u : Steifigkeitskonstante für kinematische Formulierung

Darstellung beider Lösungen im Diagramm:

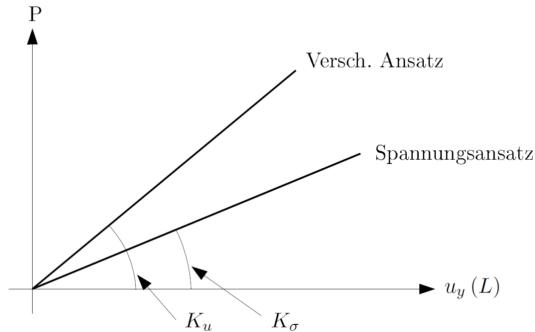


Abb. 7: Durchbiegung an freiem Ende des einseitig eingespannten Balken.

Diskussion

- Sowohl mit σ -Ansatz als auch mit u -Ansatz ist die Lösung nicht exakt.
- Vorgehen zur approximativen Lösung des Grundproblems

Ansatz für	σ	u
erfüllt	GGB/SRB	Stetig./KRB
Berechne	SG $\rightarrow \varepsilon, u$	SG $\rightarrow \sigma$
Versuche zu erfüllen:	KRB	SRB
Verifizierte ob erfüllt:	KR	GGB

- Steifigkeit der Struktur: $K_u > K_\sigma$

Aus Energiesätzen: $K_u > K_s > K_\sigma$

(eigentlich $K_s \approx K_\sigma$)

- Vergleich mit der FE-Berechnung

FEM σ -Ansatz u -Ansatz

K	100%	96%	133%
σ_{ij}			
σ_{11}	100%	100%	100%
σ_{12}	10%	10%	0%
σ_{13}	1%	0%	0%
σ_{23}	<1%	0%	0%
σ_{22}	<1%	0%	100%
σ_{33}	<1%	0%	100%

ε_{ij}	100%	100%	100%
ε_{11}	100%	100%	100%
ε_{12}	10%	10%	0%
ε_{13}	1%	0%	0%
ε_{23}	<1%	0%	0%
ε_{22}	100%	100%	0%
ε_{33}	100%	100%	0%

1.1.3 Energiesätze

Definitionen:

- Spannungsfeld $\sigma_{ij}(x, y, z)$ *zulässig* falls: *GGB* und *statische RB* erfüllt
- Verschiebungsfeld $u_i(x, y, z)$ *zulässig* falls: *stetig* und *kinematische RB* erfüllt
- Spannungsfeld und Verschiebungsfeld *verträglich* falls: *Stoffgleichungen* erfüllt
- Deformationsenergie:

$$U = \iiint_V \left(\oint_0^{\varepsilon_{ij}} \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij} \right) dV \stackrel{\text{lin. elast}}{=} \frac{1}{2} \iiint_V \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} dV$$

- Potential der äusseren Kräfte:

$$V = - \iiint_V f_i u_i dV - \sum_a F_a \cdot u_a$$

- Potentielle Energie:

$$E_p = U + V$$

- Komplementäre Deformationsenergie:

$$U_k = \iiint_V \left(\oint_0^{\sigma_{ij}} \varepsilon_{ij} d\sigma_{ij} \right) dV \stackrel{\text{lin. elast}}{=} \frac{1}{2} \iiint_V \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} dV \quad (= U)$$

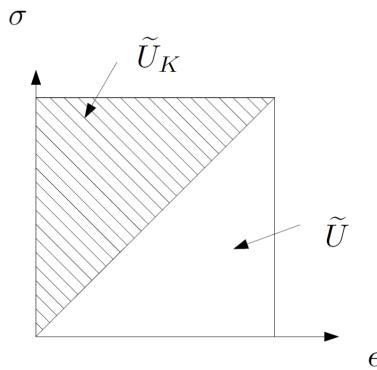


Abb. 8: linear $\tilde{U}_K = \tilde{U}$

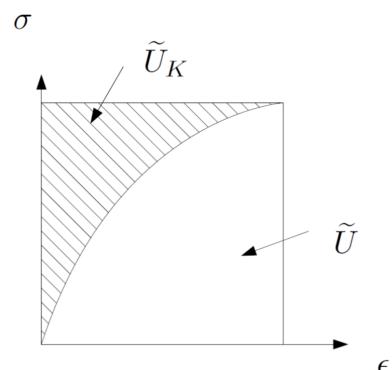


Abb. 9: nicht linear $\tilde{U}_K < \tilde{U}$

Energiesätze

- Satz vom Minimum der potentiellen Energie (SMPE)

Aus der Menge der zulässigen Verschiebungsfelder $u_i^*(x, y, z)$ und der damit verträglichen Spannungsfelder $\sigma_{ij}^*(x, y, z)$ macht das wirkliche Verschiebungsfeld $u_i(x, y, z)$ die potentielle Energie minimal.

$$E_p(u_i) < E_p(u_i^*)$$

Direkte Anwendung:

Ansatz für $u_i(x, y, z, a_\gamma)$, zulässig (stetig, KRB erfüllt).

Berechne ε_{ij}^* (aus KR) und verträgliche Spannungen σ_{ij}^* (aus SG).

σ_{ij}^* braucht nicht zulässig zu sein (GGB und SRB eventuell nicht erfüllt).

Berechne $E_p(u_i^*)$ und bestimme a_γ mit $\frac{\partial E_p}{\partial a_\gamma} = 0$

- *Anwendung für Biegebalken* (siehe 1.1.2)

Ansatz für Verschiebung (zulässig)

$$u_y = ax^3 + bx^2$$

$$u_x = (-3ax^2 - 2bx)y$$

$$u_z = 0$$

$\Downarrow KR$

$$\varepsilon_{xx} = (-6ax - 2b)y$$

$$\varepsilon_{yy} = \varepsilon_{zz} = \varepsilon_{xz} = \varepsilon_{yz} = \varepsilon_{xy} = 0$$

$\Downarrow SG$

$$\sigma_{xx} = \alpha(-6ax - 2b)y$$

$$\sigma_{yy} = \sigma_{zz} = 2G \frac{\nu}{1 - 2\nu} (-6ax - 2b)y$$

$$\sigma_{xy} = \sigma_{xz} = \sigma_{yz} = 0$$

Ist das Spannungsfeld zulässig? Zeige!

- *SMPE (Verfahren von Ritz)*

$$U = \frac{1}{2} \int_0^l \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \int_{-\frac{B}{2}}^{\frac{B}{2}} (\sigma_{xx} \cdot \varepsilon_{xx}) dz dy dx = 6 \cdot \alpha \cdot I \cdot l \left(\alpha^2 l^2 + \frac{1}{3} b^2 + abl \right)$$

$$V = -P \cdot u_y(x = l) = -P(al^3 + bl^2)$$

$$E_p = 6\alpha IL \left(\alpha^2 l^2 + \frac{1}{3} b^2 + abl \right) - P(al^3 + bl^2)$$

$$\frac{\partial E_p}{\partial a} = 0 \quad \Rightarrow \quad a = -\frac{P}{6\alpha I}$$

$$\frac{\partial E_p}{\partial b} = 0 \quad \Rightarrow \quad b = \frac{Pl}{2\alpha I}$$

in 1.1.2: gleiches Resultat mit Erfüllung statischer RB!!

Man kann zeigen, dass mit Ansatz (zulässig):

$$u_y = ax^2$$

$$u_x = -2axy$$

$$u_z = 0$$

die Steifigkeit ist: $K = K_u > K_{\bar{u}}$

(noch schlechtere Approximation: statische RB $M_b(0) = Pl, M_b(0) = 0$ erfüllt?)

Die Konstante „a“ wird mit SMPE bestimmt.

- Satz vom Minimum der komplementären Deformationsenergie (SMkDE)

Aus der Menge der zulässigen Spannungsfelder $\sigma_{ij}^*(x, y, z)$ und damit verträglichen ε_{ij}^* macht das wirkliche Spannungsfeld $\sigma_{ij}(x, y, z)$ die komplementäre Deformationsenergie minimal.

$$U_K(\sigma_{ij}) < U_K(\sigma_{ij}^*)$$

Direkte Anwendung:

Ansatz für $\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^*(x, y, z, a_\gamma)$, zulässig (GGB, SRB erfüllt).

Berechne ε_{ij}^* (aus SG), nicht unbedingt zulässig (KR, KRB eventuell nicht erfüllt).

Berechne $U_K(\sigma_{ij}^*)$ und bestimme a_γ mit $\frac{\partial U}{\partial a_\gamma} = 0$.

1.1.4 Energiesatz (SMPE) und Methode der Finiten Elementen (FE)

FE Methode:

Diskretisierung einer Struktur, Aufteilung in Elementen und dazugehörigen Knoten

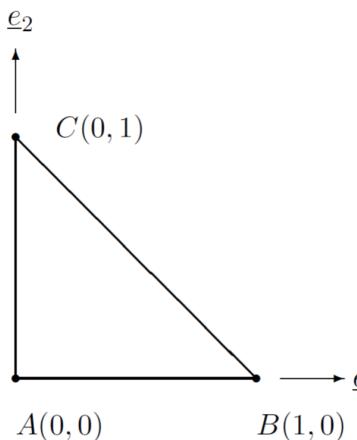
Beziehung zwischen Verschiebungsfreiheitsgrade der Knoten ($\{u\}$) und äusseren Kräften an den Knoten ($\{F\}$) über globale Steifigkeitsmatrix $\{C\}$

$$\{F\} = \{C\}\{u\}.$$

$\{C\}$ bestimmt man aus der Superposition der Elementsteifigkeitsmatrizen $\{K_i\}$.

Kernstück: Bestimmung der Elementsteifigkeitsmatrix. Dazu: Satz vom Minimum der potentiellen Energie (Verfahren von Ritz).

Beispiel: Dreieckselement im *ebenen Deformationszustand* (andere Elemente, insbesondere 3D Elemente, analog)



$$\{K\} \cdot \begin{pmatrix} u_1^A \\ u_2^A \\ u_1^B \\ u_2^B \\ u_1^C \\ u_2^C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_1^A \\ F_2^A \\ F_1^B \\ F_2^B \\ F_1^C \\ F_2^C \end{pmatrix}$$

6 Freiheitsgrade

Abb. 10: Dreieckselement im ebenen Deformationszustand

Linearer Verschiebungsansatz:

$$u_1 = ax_1 + bx_2 + c$$

$$u_2 = dx_1 + ex_2 + f$$

Damit zulässig:

$$u_1(x_1 = 0, x_2 = 0) = u_1^A$$

$$u_2(x_1 = 0, x_2 = 0) = u_2^A$$

usw.

Somit:

$$u_1 = (u_1^B - u_1^A)x_1 + (u_1^C - u_1^A)x_2 + u_1^A$$

$$u_2 = (u_2^B - u_2^A)x_1 + (u_2^C - u_2^A)x_2 + u_2^A$$

Ansatz nun Funktion von u_1^A, \dots, u_2^C statt a, \dots, f .

KR:

$$\left. \begin{array}{l} \varepsilon_{11} = (u_1^B - u_1^A) \\ \varepsilon_{22} = (u_2^C - u_2^A) \\ \varepsilon_{12} = \frac{1}{2}(u_2^B - u_2^A + u_1^C - u_1^A) \end{array} \right\} \varepsilon_{ij}(u_1^A, \dots, u_2^C)$$

Aus den Stoffgleichungen: $\sigma_{ij}(u_1^A, \dots, u_2^C, E, \nu)$

Totale Deformationsenergie:

$$U = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} (\sigma_{11} \cdot \varepsilon_{11} + \sigma_{22} \cdot \varepsilon_{22} + 2\sigma_{12} \cdot \varepsilon_{12}) \cdot t \text{ mit } t: \text{Dicke}$$

Der erste Term $\frac{1}{2}$ repräsentiert die Fläche.

Potential der äusseren Kräfte:

$$V = -(F_1^A \cdot u_1^A + F_2^A \cdot u_2^A + \dots + F_n^A \cdot u_n^A)$$

Potentielle Energie:

$$E_p = U + V = E_p(u_1^A, \dots, u_n^A, E, \nu, t) = \alpha_1(u_1^A)^2 + \alpha_2 u_1^A u_1^B + \dots - F_1^A u_1^A + \dots$$

Minimum der potentiellen Energie E_p :

$$\frac{\partial E_p}{\partial u_i^\kappa} = 0 \text{ mit } i = 1, 2 \text{ und } \kappa = A, B, C \quad (6 \text{ Gleichungen})$$

Beispiel:

$$\frac{\partial E_p}{\partial u_1^A} = \underbrace{\frac{\partial U}{\partial u_1^A}}_{\text{lineare Fkt. in } \{u_1^A, \dots, u_2^C\}} + \underbrace{\frac{\partial V}{\partial u_1^A}}_{-F_1^A}$$

daraus

$$\rightarrow F_1^A = \kappa_{11} u_1^A + \dots + \kappa_{16} u_2^C$$

$\kappa_{11} \dots \kappa_{16}$: Erste Zeile der Elementsteifigkeitsmatrix.

Bemerkungen:

- mit solchem Element: Spannungen, Dehnungen konstant im Element;
- falls Ansatz quadratisch: weitere Knoten notwendig (12 Freiheitsgrade)

$$u_1 = ax_1^2 + bx_1 + cx_2^2 + dx_2 + ex_1x_2 + f$$

$$u_2 = gx_1^2 + hx_1 + ix_2^2 + lx_2 + mx_1x_2 + n$$

1.2 Scheibe

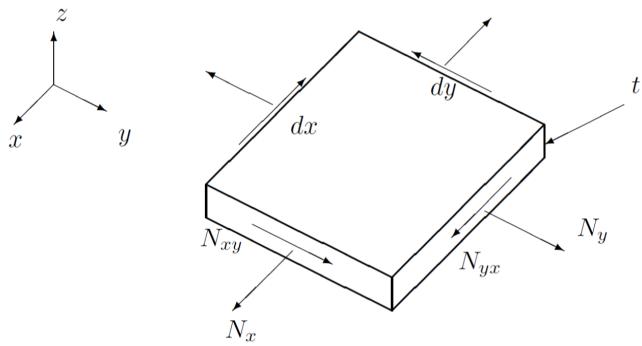


Abb. 11: Scheibenelement

Scheibenelement: dünnwandige ebene Struktur mit Belastung in der Ebene.

Äussere Kräfte am infinitesimalen Element dargestellt durch:

N_x, N_y, N_{xy}, N_{yx} : Kräfte pro Längeneinheit (\rightarrow Spannungen $\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \tau_{xy}$ über Dicke t integriert)

Annahmen zur approximativen Lösung des Problems:

- a) Ebener Spannungszustand ($\sigma_{zz}, \tau_{xz}, \tau_{yz} = 0$)
- b) Übrige Spannungskomponenten sind konstant verteilt in z-Richtung
- c) keine Volumenkräfte

a), b): Vernünftig, weil

- $t \ll$ planare Dimensionen
- keine Biegung

Lösung des Grundproblems mit diesen Annahmen:

GGB reduzieren sich zu:

$$\sigma_{xx,x} + \tau_{xy,y} = 0$$

$$\sigma_{yy,y} + \tau_{xy,x} = 0$$

Falls man eine Funktion $F(x, y)$ einführt, mit

$$\sigma_{xx} = F_{,yy}; \quad \sigma_{yy} = F_{,xx}; \quad \tau_{xy} = -F_{,xy}$$

sind die GGB identisch erfüllt (zeige!).

Die Funktion $F(x, y)$ heisst: *Airy'sche Spannungsfunktion*

Aus den Stoffgleichungen:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{1}{E}(\sigma_{xx} - \nu\sigma_{yy}) = \frac{1}{E}(F_{,yy} - \nu F_{,xx})$$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{1}{E}(\sigma_{yy} - \nu\sigma_{xx}) = \frac{1}{E}(F_{,xx} - \nu F_{,yy})$$

$$\varepsilon_{xy} = \frac{1+\nu}{E}\tau_{xy} = -\frac{1+\nu}{E}F_{,xy}$$

$$\varepsilon_{zz} = -\frac{\nu}{E}(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})$$

$$\varepsilon_{xz} = \varepsilon_{yz} = 0$$

$$\text{mit } G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

→ suche nun „verträgliche“ Verzerrungen

Lässt sich aus den Verzerrungen ein Verschiebungsfeld $\underline{u}(x, y, z)$ integrieren?

Aus den kinematischen Relationen:

$$\varepsilon_{xx} = u_{x,x} \quad \varepsilon_{xx,yy} = u_{x,xyy}$$

$$\varepsilon_{yy} = u_{y,y} \quad \rightarrow \quad \varepsilon_{yy,xx} = u_{y,yxx}$$

$$2\varepsilon_{xy} = u_{x,y} + u_{y,x} \quad 2\varepsilon_{xy,xy} = u_{x,yyx} + u_{y,xxy}$$

somit, Kompatibilitätsbedingung:

$$\varepsilon_{xx,yy} + \varepsilon_{yy,xx} = 2\varepsilon_{xy,xy}$$

Ergebnis aus SG einsetzen: es führt zu einer Differentialgleichung für $F(x, y)$:

$$\left. \begin{array}{l} F_{,yyyy} + F_{,xxxx} + 2F_{,xxyy} = 0 \\ \text{oder} \\ \Delta\Delta F = 0 \end{array} \right\} \text{„Bi-potential Gleichung“ für Airy'sche Spannungsfunktion}$$

Lösung des Grundproblems für den ebenen Spannungszustand (ESZ) reduziert sich auf die Bipotentialgleichung (Scheibengleichung) für $F(x, y)$.

Es gibt viele Funktionen $F(x, y)$, die die BPG erfüllen, z.B.:

$$x, x^2, x^3, xy, x^2y, x^3y, x^4 - y^4, x^4 - 3x^2y^2, \dots$$

$$y, y^2, y^3, y^2x, y^3x, y^4 - x^4, y^4 - 3x^2y^2, \dots$$

$$\cos(nx)\cosh(ny), \cos(ny)\cosh(nx) \quad (n = 1, 2, \dots)$$

und entsprechende Kombinationen wie

$$\sin(nx)\cosh(ny), \sin(nx)\sinh(ny), \sin(nx)e^{\pm ny}, \cos(nx)e^{\pm ny}, \sin(ny)e^{\pm nx}$$

$$x\cos(nx)\cosh(ny), x\cos(ny)\cosh(nx) \quad (n = 1, 2, \dots)$$

$$y\cos(nx)\cosh(ny), y\cos(ny)\cosh(nx), xe^{\pm ny}\cos(nx), xe^{\pm ny}\sin(nx)$$

Man soll eine geeignete Kombination obiger Funktionen so wählen, dass die Randbedingungen erfüllt werden (eigentliche Schwierigkeit des Problems!).

Beispiel:

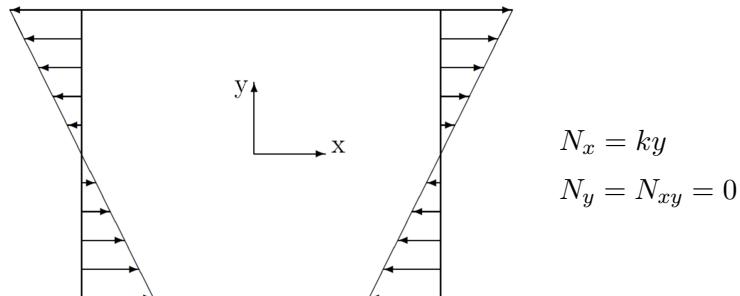


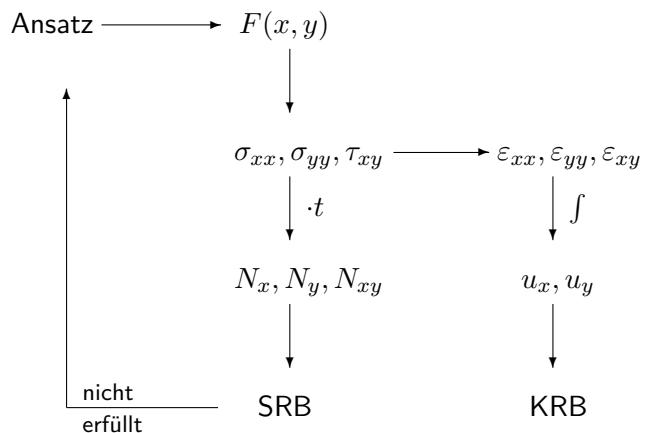
Abb. 12: Beispiel Scheibenelement

$$F(x, y) = a \cdot y^3 \rightarrow \Delta\Delta F = 0 \text{ (ok)}$$

$$\left. \begin{array}{l} \sigma_{xx} = F_{,yy} = 6 \cdot a \cdot y \\ N_x = \sigma_{xx} \cdot t = k y \end{array} \right\} a = \frac{k}{6t}$$

Hier nur statische RB.

Allgemein



1.2.1 Approximativer Charakter der Scheibengleichung

Die Scheibengleichung führt im allgemeinen nicht zur exakten Lösung des Grundproblems. Betrachten wir weitere „Kompatibilitätsbedingungen“:

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_{xx,zz} &= u_{x,xzz} & \varepsilon_{yy,zz} &= u_{y,yzz} \\
 \varepsilon_{zz,xx} &= u_{z,zxx} & \varepsilon_{zz,yy} &= u_{z,zyy} \\
 2\varepsilon_{xz,xz} &= u_{x,zzx} + u_{z,xzx} & 2\varepsilon_{yz,yz} &= u_{y,zzy} + u_{z,yyz} \\
 \cancel{\varepsilon_{xx,zz}}^0 + \varepsilon_{zz,xx} &= 2\cancel{\varepsilon_{xz,xz}}^0 & \cancel{\varepsilon_{yy,zz}}^0 + \varepsilon_{zz,yy} &= 2\cancel{\varepsilon_{yz,yz}}^0 \\
 && \Downarrow & \\
 \varepsilon_{zz} &= Ax + By + C
 \end{aligned}$$

ABER aus SG:

$$\varepsilon_{zz} = \frac{-\nu}{E}(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})$$

nur erfüllt, falls σ_{xx} und σ_{yy} lineare Funktionen in x und y . Dies stimmt nur in speziellen Fällen.

→ Scheibengleichung als Approximation

→ man kann zeigen (Timoshenko-Goodier, „Theory of Elasticity“, Abschnitt 9), dass Approximation sehr gut für $t \ll L$ ist.

1.2.2 Scheibe mit Loch

Die Scheibengleichung $\Delta\Delta F = 0$ gilt auch für Zylinderkoordinaten, $F(r, \varphi)$.

$$\begin{aligned}
 \Delta : \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \\
 \sigma_{rr} = \frac{1}{r} F_{,r} + \frac{1}{r^2} F_{,\varphi\varphi}; \quad \sigma_{\varphi\varphi} = F_{,rr} \\
 \tau_{r\varphi} = \frac{1}{r^2} F_{,\varphi} - \frac{1}{r} F_{,\varphi r}
 \end{aligned}$$

Annahmen:

- Lochradius $a \ll L$
- Belastung durch uniforme, einachsige Spannung s in grösserer Entfernung vom Loch

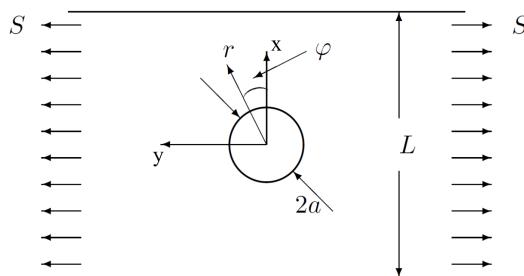


Abb. 13: Scheibe mit Loch

passender Ansatz für $F(r, \varphi)$:

$$F = \left(Ar^2 + Br^4 + \frac{C}{r^2} + D \right) \cos(2\varphi) + E \ln(r) + Gr^2$$

erfüllt $\Delta\Delta F = 0$

A ... G aus statischen Randbedingungen

$$\sigma_{rr} = \frac{E}{r^2} + 2G - \left(2A + 6\frac{C}{r^4} + 4\frac{D}{r^2} \right) \cos(2\varphi)$$

$$\sigma_{\varphi\varphi} = -\frac{E}{r^2} + 2G + \left(2A + 12Br^2 + 6\frac{C}{r^4} \right) \cos(2\varphi)$$

$$\tau_{r\varphi} = \left(2A + 6Br^2 - \frac{6C}{r^4} - 2\frac{D}{r^2} \right) \sin(2\varphi)$$

Randbedingungen:

$$r \gg a :$$

$$\sigma_{rr} = \frac{1}{2}s(1 - \cos(2\varphi))$$

$$\sigma_{\varphi\varphi} = \frac{1}{2}s(1 + \cos(2\varphi))$$

$$\tau_{r\varphi} = \frac{1}{2}s \cdot \sin(2\varphi)$$

$$r = a, \forall \varphi$$

$$\sigma_{rr} = 0$$

$$\tau_{r\varphi} = 0$$

Auswertung:

$$r \gg a \rightarrow \sigma_{rr} = 2G - 2A \cos(2\varphi)$$

$$\sigma_{\varphi\varphi} = 2G + (2A + 12Br^2) \cos(2\varphi)$$

$$\tau_{r\varphi} = (2A + 6Br^2) \sin(2\varphi)$$

$$\hookrightarrow B = 0; \quad A = \frac{s}{4}; \quad G = \frac{s}{4}$$

$$r = a \rightarrow \sigma_{rr} = \frac{E}{a^2} + \frac{s}{2} - \left(\frac{s}{2} + 6\frac{C}{a^4} + 4\frac{D}{a^2} \right) \cos(2\varphi)$$

$$\tau_{r\varphi} = \left(\frac{s}{2} - 6\frac{C}{a^4} - 2\frac{D}{a^2} \right) \sin(2\varphi)$$

$$\hookrightarrow E = -s\frac{a^2}{2}; \quad D = -s\frac{a^2}{2}; \quad C = \frac{1}{4}sa^4$$

somit:

$$\begin{aligned}\sigma_{rr} &= \frac{s}{2} \left(1 - \frac{a^2}{r^2} - \cos(2\varphi) \left(1 + 3\frac{a^4}{r^4} - 4\frac{a^2}{r^2} \right) \right) \\ \sigma_{\varphi\varphi} &= \frac{s}{2} \left(1 + \frac{a^2}{r^2} + \cos(2\varphi) \left(1 + 3\frac{a^4}{r^4} \right) \right) \\ \tau_{r\varphi} &= \frac{s}{2} \left(1 - 3\frac{a^4}{r^4} + 2\frac{a^2}{r^2} \right) \sin(2\varphi)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}r = a; \quad \varphi = 0, \pi \quad : \quad \sigma_{\varphi\varphi} &= 3s \quad \Rightarrow \text{Kerbfaktor} = 3 \\ \varphi = \pm \frac{\pi}{2} \quad : \quad \sigma_{\varphi\varphi} &= -s\end{aligned}$$

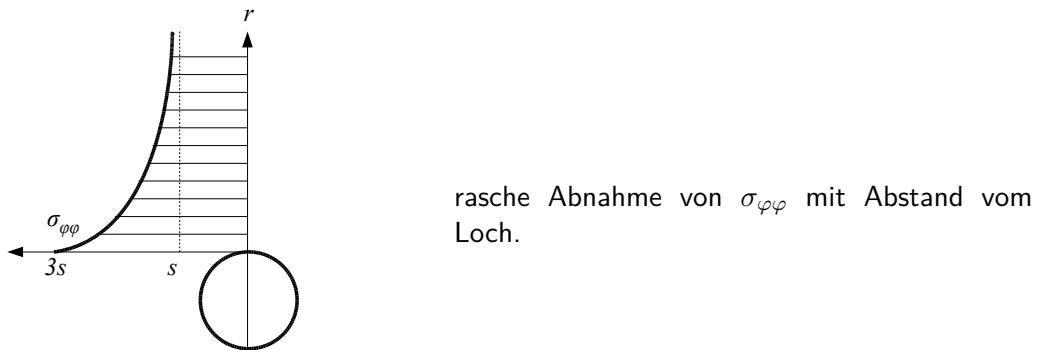


Abb. 14: Spannungsverteilung bei Scheibe mit Loch

1.2.3 Scheibe mit Riss

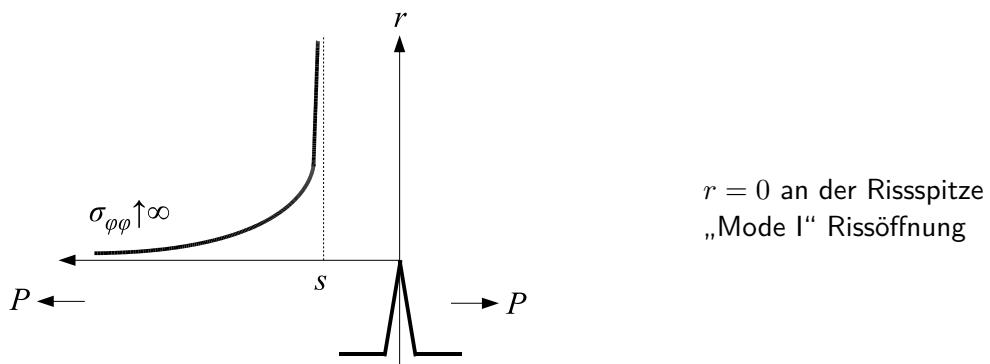


Abb. 15: Lösung von M.L. Williams (J.Appl.Mech, 19, 1952)

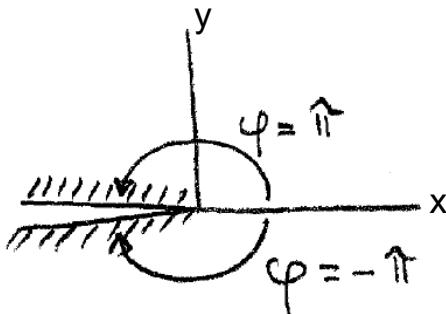
Ansatz für $F(r, \varphi)$:

$$F = r^{\lambda+1} \cdot [A_1 \cos((\lambda - 1)\varphi) + A_2 \cos((\lambda + 1)\varphi)]$$

erfüllt $\Delta\Delta F = 0$

A_1, A_2, λ aus statischen RB

$$\begin{aligned}\sigma_{rr} &= r^{\lambda-1} \cdot [-A_1(\lambda-1)^2 \cos((\lambda-1)\varphi) - A_2(\lambda+1)^2 \cos((\lambda+1)\varphi)] \\ &\quad + (\lambda+1)r^{\lambda-1}[A_1 \cos((\lambda-1)\varphi) + A_2 \cos((\lambda+1)\varphi)] \\ \sigma_{\varphi\varphi} &= \lambda \cdot (\lambda+1)r^{\lambda-1} \cdot [A_1 \cos((\lambda-1)\varphi) + A_2 \cos((\lambda+1)\varphi)] \\ \tau_{r\varphi} &= r^{\lambda-1} \cdot [-A_1(\lambda-1) \sin((\lambda-1)\varphi) - A_2(\lambda+1) \sin((\lambda+1)\varphi)] \\ &\quad - (\lambda+1)r^{\lambda-1}[-A_1(\lambda-1) \sin((\lambda-1)\varphi) - A_2(\lambda+1) \sin((\lambda+1)\varphi)]\end{aligned}$$

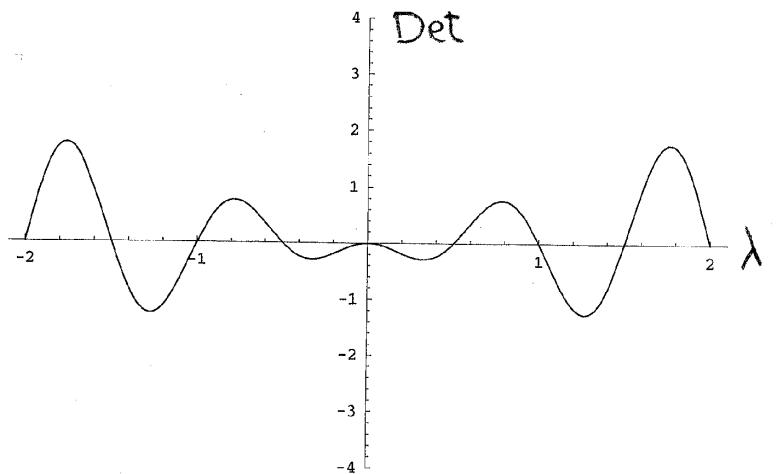


Spannungsfreie Rissflanken ($\forall r$):

$$\begin{aligned}\sigma_{\varphi\varphi} &= 0 \\ \tau_{r\varphi} &= 0\end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} \cos((\lambda-1)\pi) & \cos((\lambda+1)\pi) \\ [(\lambda-1) - (\lambda^2 - 1)] \sin((\lambda-1)\pi) & [(\lambda+1) - (\lambda+1)^2] \sin((\lambda+1)\pi) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

nicht-triviale Lösung nur falls: $\text{Det}=0 \leftrightarrow \lambda$



$\lambda = 0; \pm 0.5; \pm 1; \pm 1.5; \dots$ ∞ -viele Lösungen

$\sigma_{ij} \sim r^{\lambda-1} \rightarrow \varepsilon_{ij} \sim r^{\lambda-1}, \tilde{U} \sim r^{2\lambda-2}, \tilde{U} = \text{spez. Deformationsenergie}$

Deformationsenergie eines Volumenelementes an der Riss spitze:

$$U = t \int_0^R \int_{-\pi}^{\pi} \tilde{U}(r, \varphi) r d\varphi dr \sim R^{2\lambda}$$

Lösung physikalisch sinnvoll, falls $\lim r \rightarrow 0 U=0$

$\leftrightarrow 2\lambda > 0, \underline{\lambda > 0}$

$$\sigma_{ij} \sim r^{-0.5} + \epsilon + O(r^{0.5})$$

Der Term $r^{-0.5}$ dominiert für $r \rightarrow 0$ (Nähe Riss spitze, Nahfeldlösung)

Für $\lambda = 0.5 \rightarrow A_1 = 3A_2$

$r \ll L, a$ (Scheibendimensionen, Risslänge)

Nahfeldlösung:

$$\sigma_{rr} = \frac{3}{4} A_2 r^{-\frac{1}{2}} \left(5 \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) - \cos\left(\frac{3}{2}\varphi\right) \right)$$

$$\sigma_{\varphi\varphi} = \frac{3}{4} A_2 r^{-\frac{1}{2}} \left(3 \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) + \cos\left(\frac{3}{2}\varphi\right) \right)$$

$$\tau_{r\varphi} = \frac{3}{4} A_2 r^{-\frac{1}{2}} \left(\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) + \sin\left(\frac{3}{2}\varphi\right) \right)$$

für $r \rightarrow 0$:

$$\left. \begin{array}{l} \sigma_{ij} \rightarrow \infty \\ \varepsilon_{ij} \rightarrow \infty \end{array} \right\} \text{Verletzt Voraussetzungen des Grundproblems!}$$

Dennoch, Bruchmechanik (linear-elastisch):

$$\text{für } r \ll a : \sigma_{ij} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cdot f_{ij}(\varphi) + g_{ij}^o + O\left(\sqrt{r/a}\right)$$

- K_I resultiert aus Übergangsbedingung zum Fernfeld
- In Bruchmechanik: Methoden zur Bestimmung von K_I für gegebene Struktur, Belastung, Rissgeometrie
- Dimensionierung: $K_I < K_{I_{krit}}$, siehe später

1.3 Platte

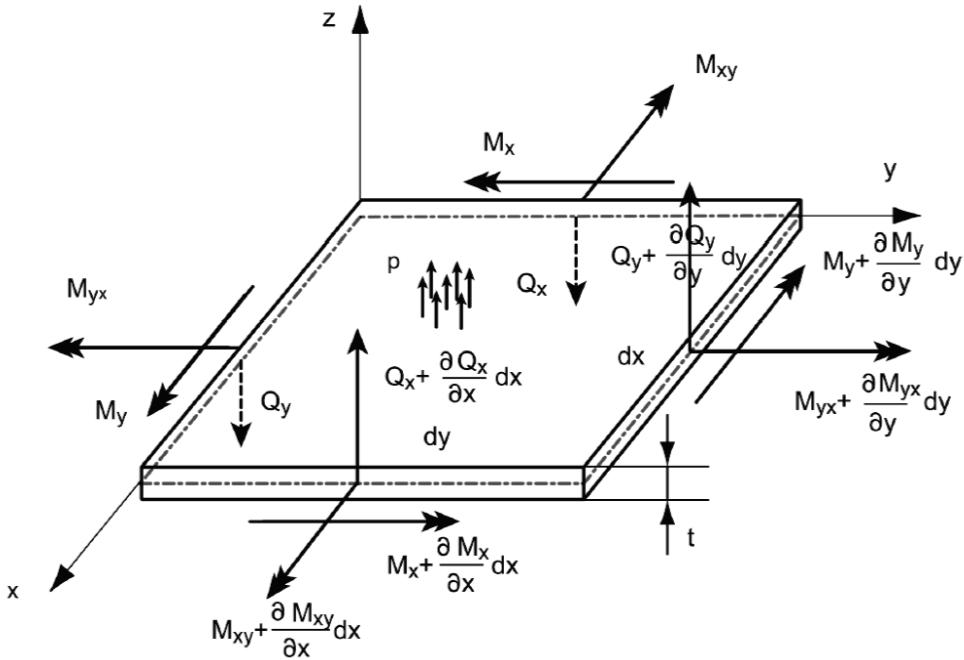


Abb. 16: *Platte*

Plattenelement: dünnwandige, ebene Struktur mit Belastung senkrecht zur Ebene.

Äussere Kräfte am infinitesimalen Element dargestellt durch:

- linearverteilte Kräfte (Q_x, Q_y)
- Momente (M_x, M_y, M_{xy})
- Flächenlast p in z -Richtung

Lösung des KM-Problems durch Ansatz für die Verschiebungen:

$$u_z = w(x, y) + f(x, y, z)$$

$$\left. \begin{array}{l} u_x = -z \cdot w_{,x} \\ u_y = -z \cdot w_{,y} \end{array} \right\} \text{analog Balken (Abschnitt 1.1)}$$

w : vertikale Verschiebung der Platten-Mittelebene ($z = 0$)

aus KR:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= -z \cdot w_{,xx} & \varepsilon_{zz} &= f_{,z} \\ \varepsilon_{yy} &= -z \cdot w_{,yy} & \varepsilon_{xz} &= \frac{1}{2} f_{,x} \\ \varepsilon_{xy} &= -z \cdot w_{,xy} & \varepsilon_{yz} &= \frac{1}{2} f_{,y} \end{aligned}$$

- Funktion $f(x, y, z)$ wird so gewählt, dass $\sigma_{zz} = 0$

$$\sigma_{zz} = (2\mu + \lambda)\varepsilon_{zz} + \lambda(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}) = (2\mu + \lambda) \cdot f_{,z} + \lambda(-z \cdot w_{,xx} - z \cdot w_{,yy}) = 0$$

$$\hookrightarrow f = \frac{1}{2}z^2 \frac{\lambda}{2\mu + \lambda} (w_{,xx} + w_{,yy}) \quad \rightarrow \text{Gleichung erfüllt.}$$

dabei sind λ und μ (Lamé-Konstanten):

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}; \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

- Somit, aus SG:

$$\begin{aligned}\sigma_{xx} &= \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_{xx} + \nu\varepsilon_{yy}) = -\frac{Ez}{1-\nu^2}(w_{,xx} + \nu w_{,yy}) \\ \sigma_{yy} &= \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_{yy} + \nu\varepsilon_{xx}) = -\frac{Ez}{1-\nu^2}(w_{,yy} + \nu w_{,xx}) \\ \tau_{xy} &= -\frac{Ez}{1+\nu}w_{,xy}\end{aligned}$$

Anstatt GGB für Spannungskomponenten: Globales Gleichgewicht für linienverteilte Kräfte und Momente.

$$\begin{aligned}M_x &= \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \sigma_{xx} \cdot z dz = -D \cdot (w_{,xx} + \nu w_{,yy}) \\ M_y &= \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \sigma_{yy} \cdot z dz = -D \cdot (w_{,xx} + \nu w_{,yy}) \\ -M_{xy} &= M_{yx} = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \tau_{xy} \cdot z dz = -D \cdot (1-\nu)w_{,xy}\end{aligned}$$

Plattensteifigkeit: $D = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)}$

Gleichgewicht: $\sum F_z = 0, \quad \sum M_x = 0, \quad \sum M_y = 0$

$$\left. \begin{array}{l} Q_{x,x} + Q_{y,y} + p = 0 \\ M_{xy,x} - M_{y,y} + Q_y = 0 \\ M_{x,x} - M_{xy,y} - Q_x = 0 \end{array} \right\} \text{Zeige!}$$

daraus:

$$-M_{xy,xy} + M_{y,yy} + M_{x,xx} - M_{xy,yx} + p = 0$$

oder

Plattengleichung

$$\begin{aligned}D \cdot (w_{,xxxx} + 2w_{,xxyy} + w_{,yyyy}) &= p(x, y) \\ \Delta\Delta w &= \frac{p(x, y)}{D}\end{aligned}$$

→ suche Funktion $w(x, y)$, die die Plattengleichung sowie kinematische und (wenn möglich) statische RB erfüllt.

→ Am besten werden die statischen RB (d.h. Bedingungen für Momente und Kräfte) als Funktionen von $w(x, y)$ ausgedrückt.

Randbedingungen

Einspannung:

$$w = 0 \\ w_{,x} = 0 \quad \text{oder} \quad w_{,y} = 0$$



Auflager:



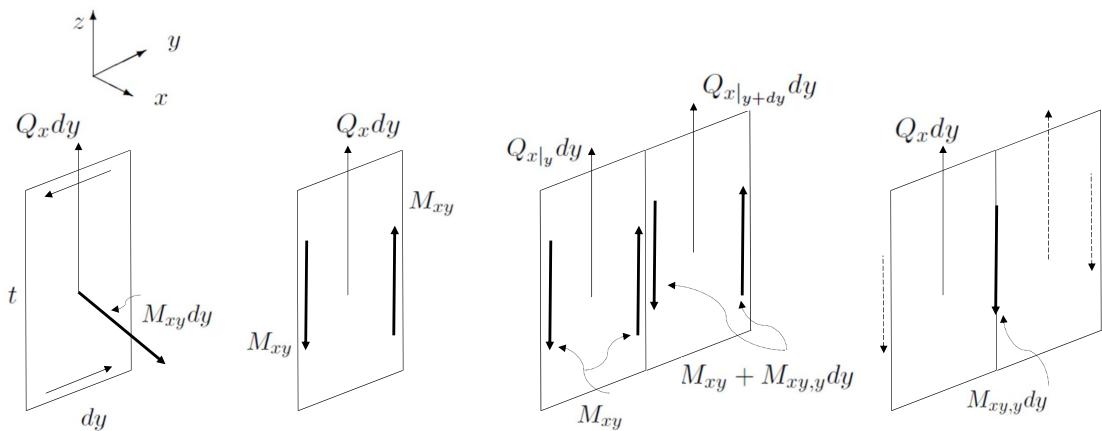
$$w = 0 \\ w_{,xx} + \nu w_{,yy} = 0 \quad \text{oder} \quad w_{,yy} + \nu w_{,xx} = 0 \\ \uparrow \\ M_x = 0$$



Frei:

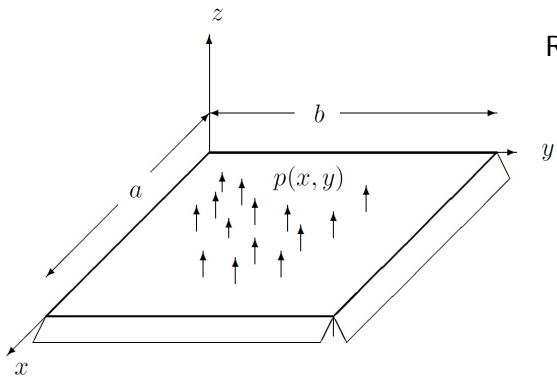
$$w_{,xx} + \nu w_{,yy} = 0 \quad \text{oder} \quad w_{,yy} + \nu w_{,xx} = 0 \\ \uparrow \\ M_x = 0 \\ w_{,xxx} + (2 - \nu)w_{,xyy} = 0 \quad \text{oder} \quad w_{,yyy} + (2 - \nu)w_{,yxx} = 0 \\ \uparrow \\ Q_x - M_{xy,y} = 0$$

Abb. 17: Platten Randbedingungen



$$Q_{x^*} = Q_x - M_{xy,y} = 0$$

1.3.1 Beispiel: Rechteckplatte allseitig aufgelegt unter Flächenlast



Randbedingungen:

$$\begin{aligned} x = 0 \quad & \left. w = 0 \right. \\ x = a \quad & \left. w_{,xx} + \nu w_{,yy} = 0 \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y = 0 \quad & \left. w = 0 \right. \\ y = b \quad & \left. w_{,yy} + \nu w_{,xx} = 0 \right. \end{aligned}$$

$$p(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} p_{mn} \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right)$$

Flächenlast $p(x, y)$ als Summe harmonischer Funktionen (Fourier-Transformation $\rightarrow p_{mn}$).

LOAD	EXPANSION COEFFICIENTS P_{mn}	LOAD	EXPANSION COEFFICIENTS P_{mn}
$p_1(x, y) = \sum_m \sum_n P_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}$	$P_{mn} = \frac{4P}{ab} \sin \frac{m\pi\xi}{a} \sin \frac{n\pi\eta}{b}$ ($m, n = 1, 2, 3, \dots$)	$p_2(x, y) = \sum_m \sum_n P_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}$	$P_{mn} = \frac{16p_0}{\pi^2 mn}$ ($m, n = 1, 3, 5, \dots$)
	$P_{mn} = \frac{8p_0}{\pi^2 mn}$ for $m, n = 1, 3, 5, \dots$ $P_{mn} = \frac{16p_0}{\pi^2 mn}$ for $\begin{cases} m = 2, 6, 10, \dots \\ n = 1, 3, 5, \dots \end{cases}$		$P_{mn} = -\frac{8p_0 \cos m\pi}{\pi^2 mn}$ ($m, n = 1, 3, 5, \dots$)
	$P_{mn} = \frac{4p_0}{\pi n} \sin \frac{m\pi\xi}{a}$ ($m, n = 1, 2, 3, \dots$)		$P_{mn} = \frac{16p_0}{\pi^2 mn} \sin \frac{m\pi\xi}{a} \sin \frac{n\pi\eta}{b}$ $\times \sin \frac{m\pi c}{2a} \sin \frac{n\pi d}{2b}$ ($m, n = 1, 2, 3, \dots$)

- Ansatz für $w(x, y)$:

$$w(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} w_{mn} \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right)$$

erfüllt kinematische und statische Randbedingungen (\rightarrow überprüfen!)

- Einsetzen in Plattengleichung $\Delta\Delta w = \frac{p}{D}$

$$0 = \sum_m \sum_n \left[Dw_{mn} \left[\left(\frac{m\pi}{a} \right)^4 + 2 \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b} \right)^4 \right] - p_{mn} \right] \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right)$$

$$\hookrightarrow w_{mn} = p_{mn} \cdot \frac{a^4 b^4}{D \pi^4 (m^2 b^2 + n^2 a^2)^2}$$

$$w(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} p_{mn} \cdot \frac{a^4 b^4}{D \pi^4 (m^2 b^2 + n^2 a^2)^2} \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right)$$

- Für

$$p(x, y) = p_0 \quad \rightarrow \quad p_{mn} = \frac{16p_0}{\pi^2 mn}; \quad m, n = 1, 3, 5, \dots$$

maximale Durchbiegung $w\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right) = w_{max}$ für

$$b = 2a \rightarrow w_{max} = \frac{16p_0 a^4}{D \pi^6} \sum_m^{\infty} \sum_n^{\infty} \frac{1}{\left(m^2 + \frac{n^2}{4}\right)^2 mn} \cong 0.1105 \frac{p_0 a^4}{E t^3}; \quad (\nu = 0.3)$$

- Analoges Vorgehen für unterschiedliche Randbedingungen:

$$w_{max} \cong \alpha \frac{p_0 a^4}{E t^3} \quad p(x, y) = p_0$$

$$\sigma_{max} \cong \beta \frac{p_0 a^2}{t^2} \quad x = \frac{a}{2}, y = \frac{b}{2}$$

\rightarrow Aufpassen: Spannungszustand ist nicht uniaxial.

b/a	All Sides Pinned		Long Sides Pinned Short Sides Clamped		Short Sides Pinned Long Sides Clamped		All Sides Clamped	
	α	β	α	β	α	β	α	β
1.0	0.0443	0.2874	0.0209	0.4200	0.0209	0.4200	0.0138	0.3078
1.2	0.0616	0.3756	0.0340	0.5220	0.0243	0.4620	0.0188	0.3834
1.4	0.0770	0.4518	0.0502	0.6000	0.0262	0.4860	0.0226	0.4356
1.6	0.0906	0.5172	0.0658	0.6640	0.0273	0.5000	0.0251	0.4680
1.8	0.1017	0.5688	0.0798	0.6900	0.0278	0.5020	0.0267	0.4872
2.0	0.1106	0.6102	0.0987	0.7140	0.0284	0.5040	0.0277	0.4974
3.0	0.1336	0.7134	0.1280	0.7600	-	-	-	-
4.0	0.1400	0.7410	-	-	-	-	-	-
5.0	0.1416	0.7476	-	-	-	-	-	-
∞	0.1422	0.7500	0.1422	0.7600	0.0284	0.4980	0.0284	0.4980

Abb. 18: aus Brunn, 1965, Analysis and Design of Flight Vehicle Structures

→ Vergleich mit FE-Lösung (3D-Kontinuumselemente)

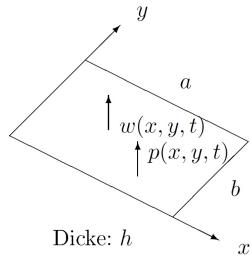
$$(b = a = 100t; \quad E = 10^7 p_0; \quad t = 1mm)$$

$$w_{max}^{anal} = 0.443mm$$

$$w_{max}^{FE} = 0.4475mm$$

1.3.2 Schwingungen von Platten

Dynamische Differentialgleichung für dünne Platten (kleine Durchbiegung):



$$\Delta\Delta w = \frac{1}{D} \cdot (p - \rho h \ddot{w})$$

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$$

Eigenschwingungen:

$$p = 0; \quad w = f(x, y) \cdot \sin(\omega t) \quad \text{Dieser Ansatz dient zur Beantwortung der Frage:}$$

Unter welchen Bedingungen ist die Bewegung aller Punkte sinusoidal mit gleichem ω ?

$$\rightarrow \Delta\Delta f - \omega^2 \frac{\rho h}{D} f = 0$$

→ Analytische Lösung für rechteckige und kreisförmige Platten. Sonst FE!

- allseitig aufgelegte Platte:

Ansatz für $f(x, y)$:

$$f(x, y) = f_{mn} \cdot \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cdot \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right); \quad m, n = 1, 2, \dots$$

in DG einsetzen

$$\omega_{mn}^2 = \frac{\pi^4 D}{\rho h} \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2 \quad \text{Eigenkreisfrequenzen, Resonanz}$$

f_{mn} bleibt unbestimmt. Die Amplitude der Schwingung bei Resonanz wird für den dämpfungsfreien Fall unendlich.

Siehe nächste Seiten für Beispiele mit Schwingungsmoden und Eigenkreisfrequenzen.

$$\omega_{11} = \frac{\pi^2}{\sqrt{12(1-\nu^2)}} \cdot \frac{h}{a^2} \sqrt{\frac{E}{\rho}} \cdot \left(1 + \frac{a^2}{b^2} \right)$$

Quadratische Platte

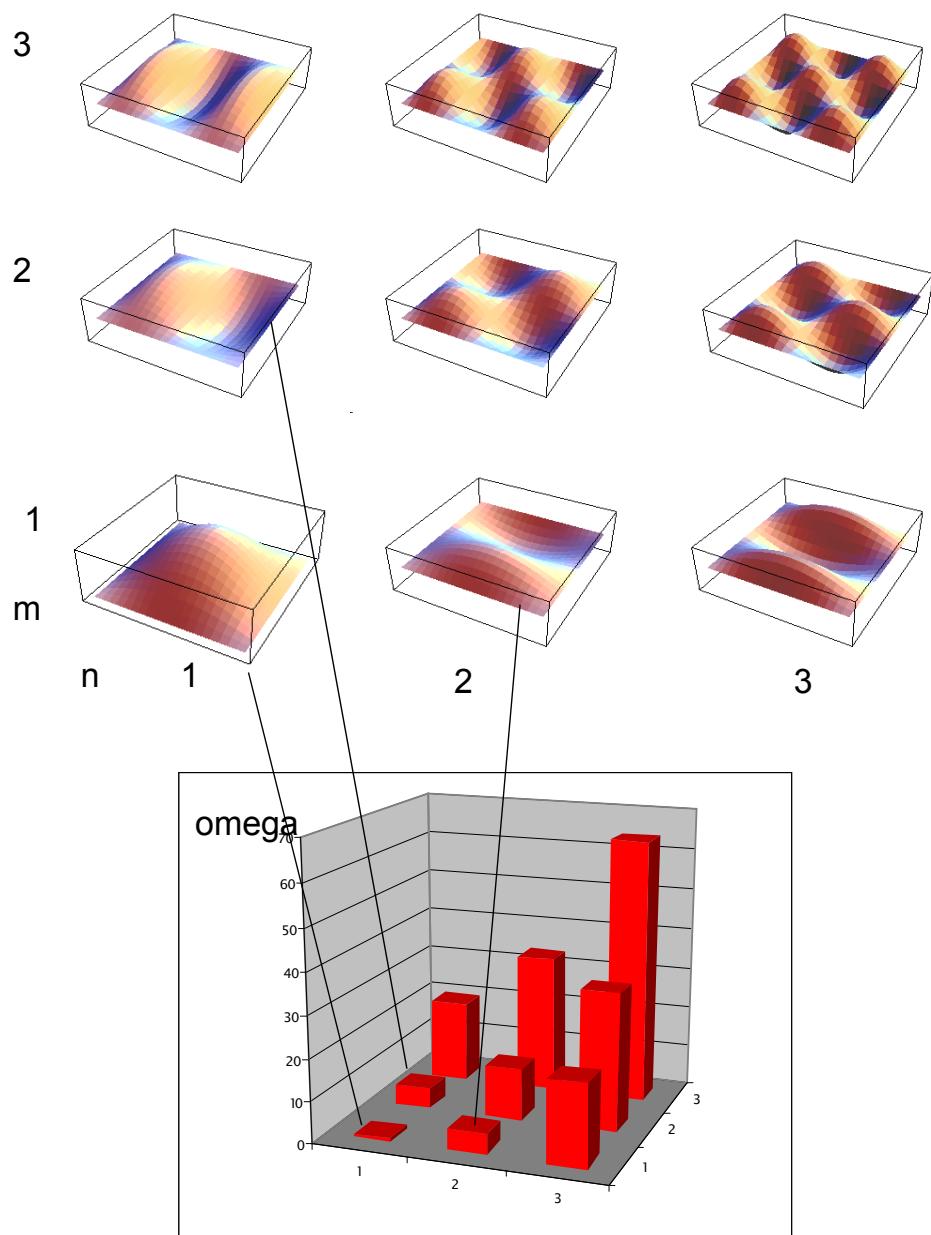


Abb. 19: Quadratische Platte

Rechteckige Platte mit $a = 2b$

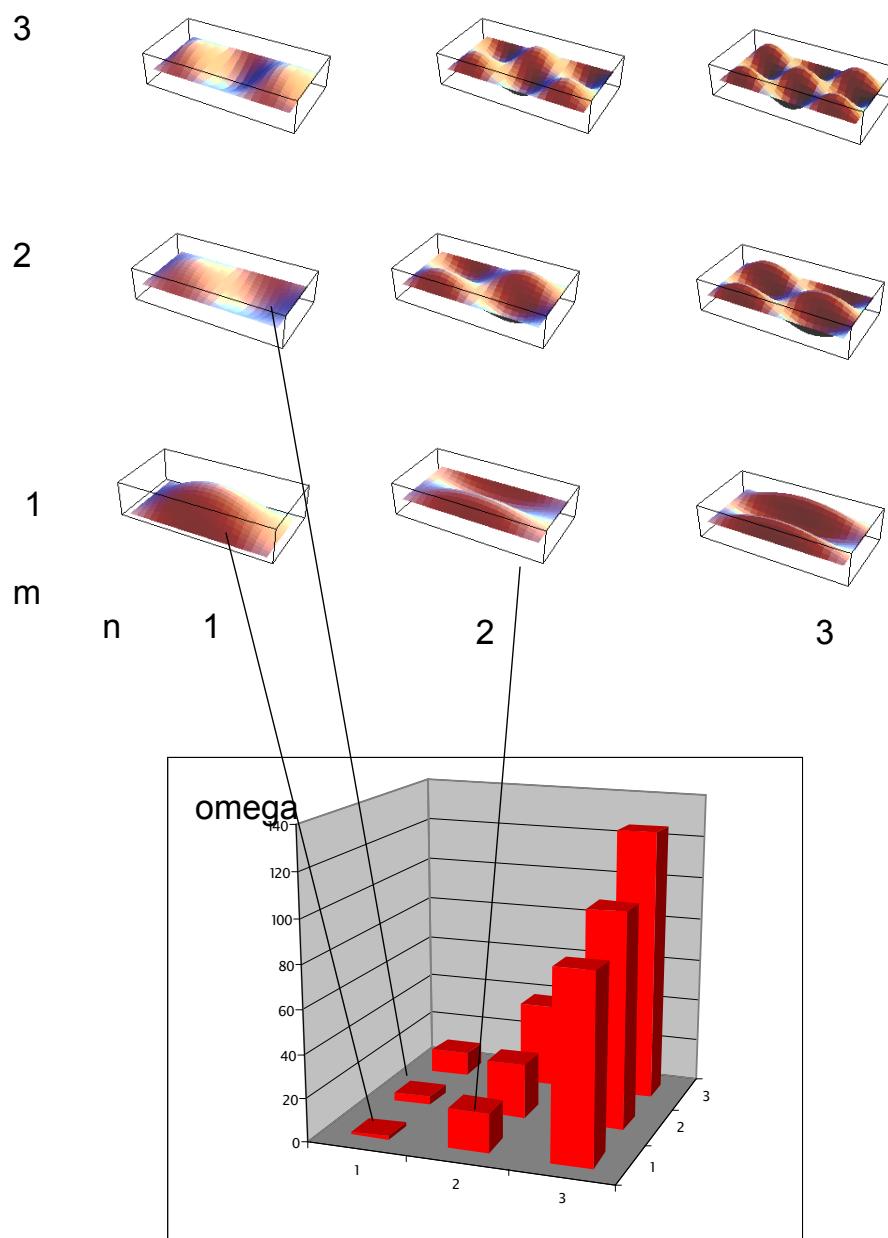


Abb. 20: Rechteckige Platte

2 Materialverhalten und Auslegungskriterien

Es werden hier einige Grundbegriffe und Konzepte zur Dimensionierung im Fall von monotoner ("statische") und zyklischer ("Ermüdung") Belastung eingeführt. Behandelt wird vor allem der Fall von duktilen metallischen Werkstoffen.

2.1 Plastizität: eine Einführung

Eindimensionaler Spannungszustand (Zugversuch)

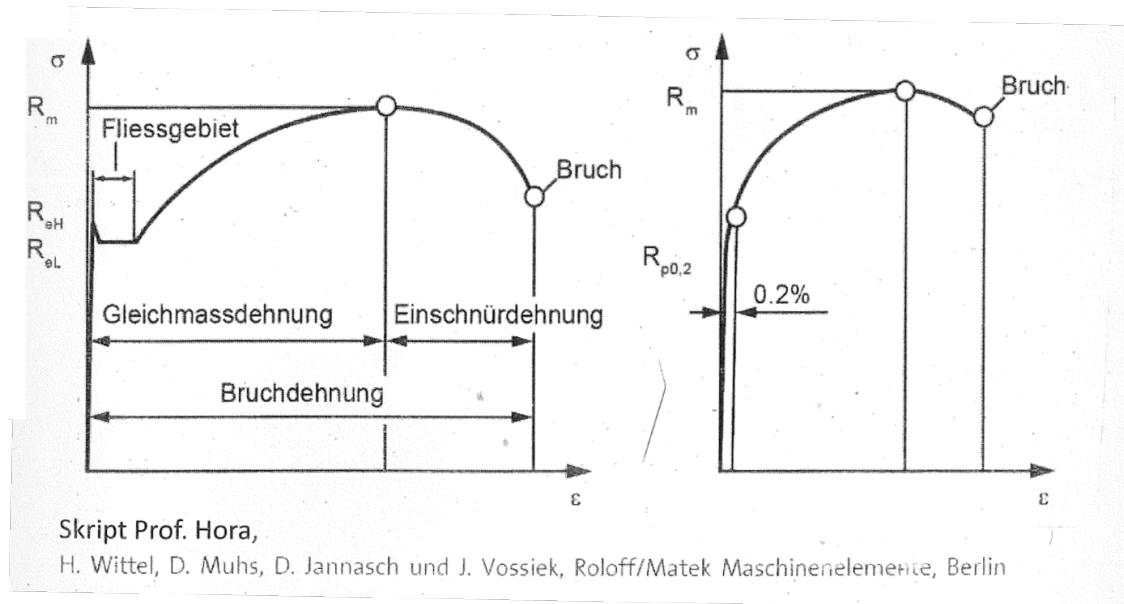


Abb. 21: Eindimensionaler Spannungszustand bei Zugversuch

$R_{p0,2}$: Fliessgrenze (0.2% bleibende Dehnung)

R_e : Streckgrenze

R_m : Zugfestigkeit;

A: Bruchdehnung

In der Plastizitätstheorie:

- werden Modelle definiert, zur Beschreibung der Funktion $\sigma(\varepsilon)$ in Abhängigkeit der Belastungsgeschichte → Verfestigungsgesetze
- werden Regeln definiert, zur Übertragung der Modelle aus 1D-Versuchen auf 3D-Spannungs- und Dehnungszustände:
 - Fliessbedingung für σ_{ij}
 - Verfestigungsgesetze für 3D-Belastungsgeschichte
 - Materialgesetz ($\varepsilon_{ij}^{pl} \longleftrightarrow \sigma_{ij}$) für 3D plastische Deformationen

Einflüsse: Wärmebehandlung, Dimensionen der Proben, Anisotropie (parallel oder senkrecht zur Walzrichtung), Rauheit, Dehnrate, Temperatur, ...

- Messungen an "normierten" Proben (poliert, Durchmesser: 7.5 mm)
- Normwerte von $R_{p0.2}$ und R_m werden als untere Grenze der Werteverteilung mit 97,5% "Überlebenswahrscheinlichkeit" angegeben.

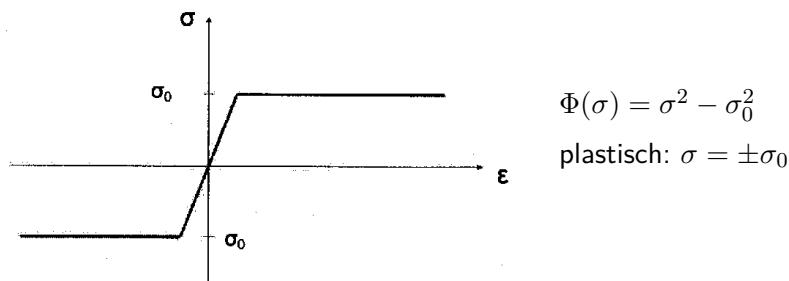
Fliessbedingung im 1D-Spannungszustand

Fliessfunktion: $\Phi(\sigma)$

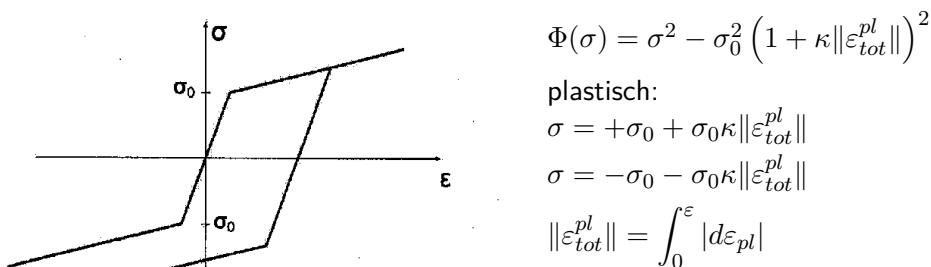
Fliessbedingung: $\Phi(\sigma) < 0$ elastisch

$\Phi(\sigma) = 0$ plastisch

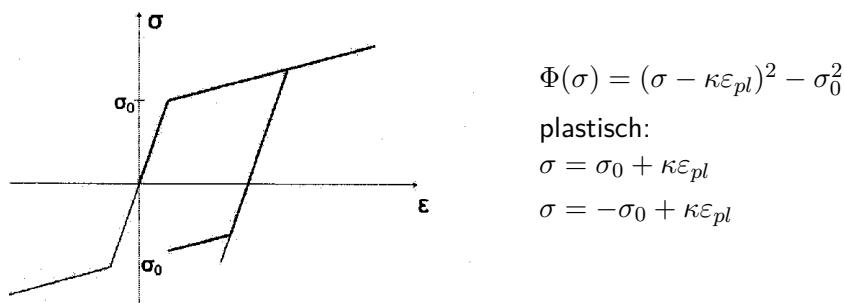
- Ideal elastisch-plastisch (keine Verfestigung)



- Lineare isotrope Verfestigung



- Lineare kinematische Verfestigung (Bauschinger-Effekt)



Räumlicher (3D) Spannungszustand, Festigkeitshypothesen

- Fliessfunktion:

$$\Phi(\sigma_{ij}) ; \quad \sigma_{ij}: 6 \text{ unabhängige Komponenten}$$

darstellbar auch als

$$\Phi(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, e_1, e_2, e_3)$$

(Hauptspannungen und Hauptrichtungen)

Falls Material isotrop:

$$\phi(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$$

- Fliessbedingung:

$$\Phi = 0$$

- Fliessfläche im Hauptspannungsraum \mathcal{H}_3

$$\phi(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = 0$$

- Experimente mit Metallen zeigen, dass das Fliessen unabhängig vom hydrostatischen Spannungszustand ist.
 ↳ Fliessfläche als Prisma um die Raumdiagonale $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$
 ↳ Einfachste Fliessfläche: Kreiszylinder mit Raumdiagonale als Achse

→ **Von Mises'sche Fliessbedingung**

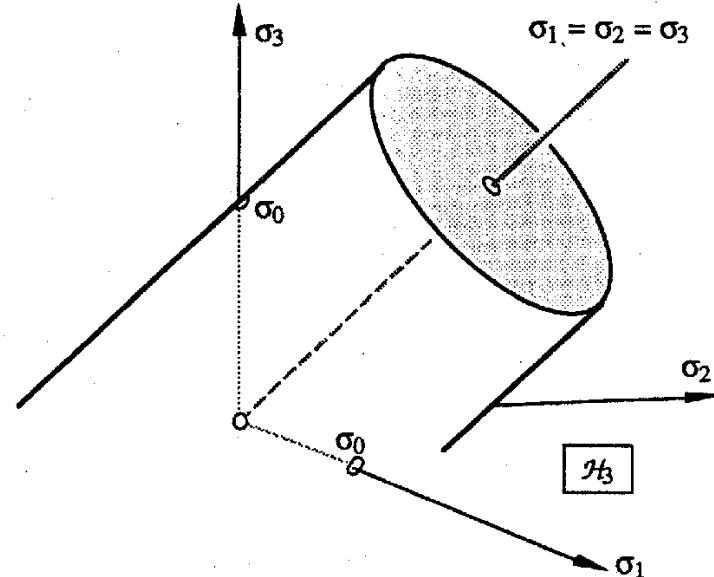


Abb. 22: Der von Mises'sche Kreiszylinder als Fliessfläche für Metalle

$$\Phi_{v.Mises} = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_2 - \sigma_2\sigma_3 - \sigma_3\sigma_1 - \sigma_0^2$$

Vergleichsspannung:

$$\sigma_{v.Mises}^{vg} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_2 - \sigma_2\sigma_3 - \sigma_3\sigma_1}$$

$$\sigma_{v.Mises}^{vgl} = \sqrt{\sigma_{11}^2 + \sigma_{22}^2 + \sigma_{33}^2 - \sigma_{11}\sigma_{22} - \sigma_{11}\sigma_{33} - \sigma_{22}\sigma_{33} + 3(\tau_{12}^2 + \tau_{13}^2 + \tau_{23}^2)}$$

$$\left(\sigma_{v.Mises}^{vgl}\right)^2 = 3T_{II}^D = 6G \cdot \tilde{U}_G \quad (2.1)$$

mit: T_{II}^D = 2. Invarianter Spannungsdeviator
 \tilde{U}_G = Verzerrungsenergie der Gestaltsänderung
 (Kap. 22, Ingenieurmechanik 2, Sayir et al.)

Die Fließbedingung nach v. Mises wird oft als *Theorie der Gestaltänderungsenergie* bezeichnet.

Zu Glch. (2.1):

Aufteilung Spannungstensor

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} - \frac{1}{3}\sigma_{ii} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} - \frac{1}{3}\sigma_{ii} & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} - \frac{1}{3}\sigma_{ii} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{3}\sigma_{ii} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3}\sigma_{ii} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3}\sigma_{ii} \end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{T}} = \underbrace{\underline{\underline{T}}^D}_{s_{ij}} + \underline{\underline{T}}^H$$

Für den Verzerrungstensor ist es auch ähnlich:

$$\underline{\underline{E}} = \underbrace{\underline{\underline{E}}^D}_{e_{ij}} + \underline{\underline{E}}^H$$

Volumenänderungs- und Gestaltänderungsenergie:

$$\begin{aligned} -A_i &= \frac{1}{2}\sigma_{ij}\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(s_{ij} + \delta_{ij} \cdot \frac{1}{3}\sigma_{aa}\right)\left(e_{ij} + \delta_{ij} \cdot \frac{1}{3}\varepsilon_{aa}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(s_{ij}e_{ij} + \underbrace{\delta_{ij}e_{ij}}_{ecc=0} \cdot \frac{1}{3}\sigma_{aa} + \underbrace{\delta_{ij}s_{ij}}_{sc=0} \cdot \frac{1}{3}\varepsilon_{aa} + \underbrace{\delta_{ij}\delta_{ij}}_3 \cdot \frac{1}{9}\varepsilon_{aa}\sigma_{aa}\right) \\ &= \underbrace{\frac{1}{2}s_{ij}e_{ij}}_{\tilde{U}_G} + \underbrace{\frac{1}{6}\varepsilon_{aa}\sigma_{aa}}_{\tilde{U}_V} \\ \text{mit } \tilde{U}_V &= \frac{1}{6} \cdot \frac{1-2\nu}{E} (\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33})^2 \end{aligned}$$

weil

$$s_{ij} = 2Ge_{ij} \rightarrow \tilde{U}_G = \frac{1}{4G}s_{ij}s_{ij} = \frac{1}{2G}T_{II}^D$$

Beispiel:

Dünnes Rohr mit Innendruck:

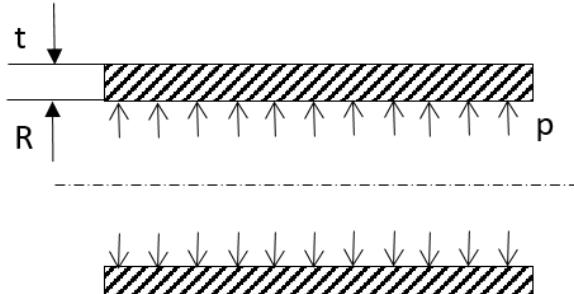


Abb. 23: Dünnwandiges Rohr mit Innendruck

A. Freie Enden : $\sigma_\varphi = p \cdot \frac{R}{t}$, $\sigma_r = 0$, $\sigma_x = 0$

B. Geschlossener Druckbehälter: $\sigma_\varphi = p \cdot \frac{R}{t}$, $\sigma_r = 0$, $\sigma_x = p \cdot \frac{R}{2t}$ ("Deckelkraft")

$$\sigma_{Mises}^A = p \cdot \frac{R}{t}$$

$$\sigma_{Mises}^B = \sqrt{\frac{3}{4}} p \cdot \frac{R}{t} \approx (1 - 15\%) \sigma_{Mises}^A$$

- Fliessbedingung 3D

$$\phi = \sigma_{Mises}^2 - \sigma_0^2 \quad \text{ideal elastisch-plastisch}$$

$$\phi = \sigma_{Mises}^2 - \sigma_0^2 (1 + \kappa \varepsilon_{pl}^{tot}) \quad \text{lineare isotrope Verfestigung}$$

$$\phi = J_2(\sigma_{ij} - \kappa \varepsilon_{ij}^{pl}) - \sigma_0^2 \quad \text{lineare kinematische Verfestigung}$$

Dimensionierung: Festigkeitshypothese nach v. Mises

$$\sigma_{ij} \rightarrow \sigma_{Mises} < R_p / J_S \quad J_S: \text{Sicherheitsfaktor } (> 1)$$

Alternativen:

Festigkeitshypothese nach Tresca (folgt)

Normalspannungshypothese → für spröde Werkstoffe, siehe 2.7

- Tresca'sche Fliessbedingung

Maximale Schubspannungshypothese:

Plastifizierung tritt beim Erreichen eines Grenzwertes für die maximale Schubspannung auf

$$\frac{1}{2} \operatorname{Max}(|\sigma_1 - \sigma_2|, |\sigma_2 - \sigma_3|, |\sigma_3 - \sigma_1|) = \tau_0$$

$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$: Hauptspannungen

Zugversuch:

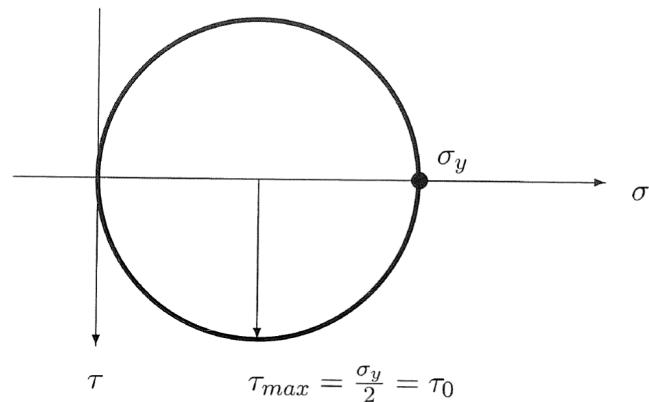


Abb. 24: Zugversuch im Mohr'schen Kreis

$$\sigma_{Tresca}^{vgl} = \operatorname{Max}(|\sigma_1 - \sigma_2|, |\sigma_2 - \sigma_3|, |\sigma_3 - \sigma_1|)$$

Darstellung im \mathcal{H}_3 :

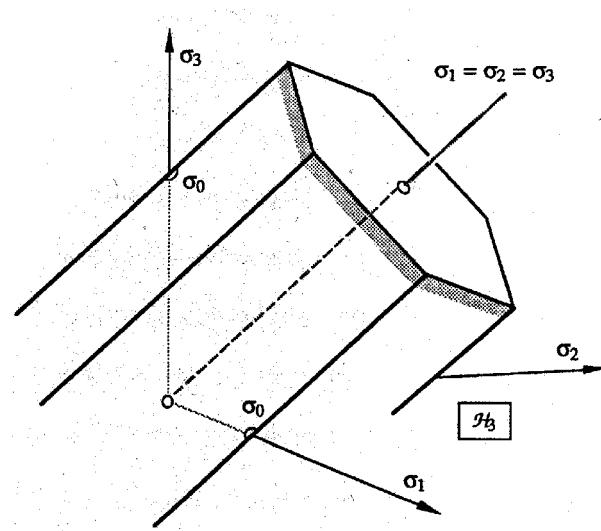


Abb. 25: Tresca'sche Fliessbedingung im \mathcal{H}_3

- Vergleich Mises-Tresca Festigkeitshypothesen

2D-Spannungszustand ($\sigma_3 = 0$)

Ausgehend vom Zugversuch:

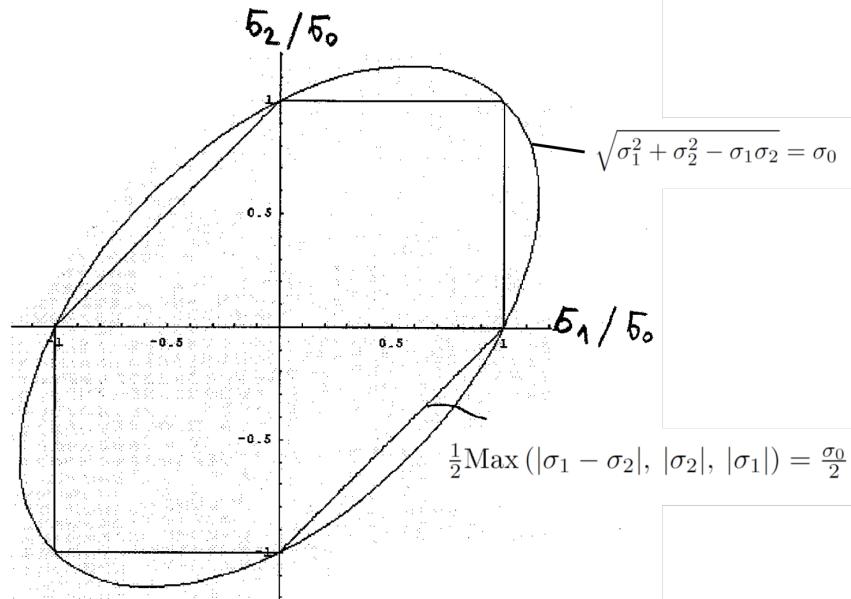


Abb. 26: Ausgehend von Zugversuch

→ Tresca konservativer

Ausgehend von Torsionsversuch:

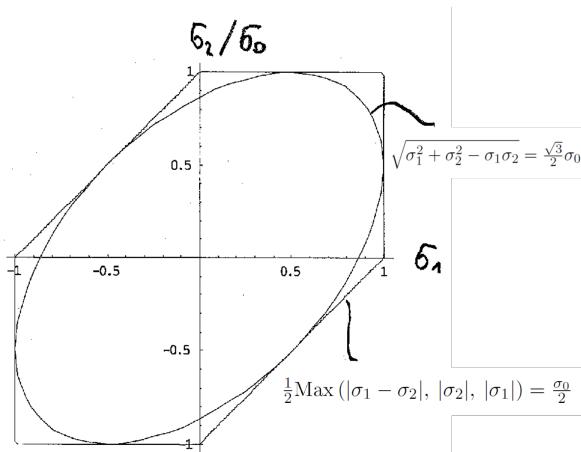


Abb. 27: Ausgehend von Torsionsversuch

hier: Mises konservativer

Normalerweise: Fließgrenze aus Zugversuch → Tresca konservativer

3D Fließgesetz

Prandtl-Reuss-Gleichung der isotropen Plastizität:

$$d\varepsilon_{ij}^{pl} = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{\sigma_{Mises}} \cdot s_{ij} \cdot f(\varepsilon_{tot}^{pl}) \cdot d\sigma_{Mises}$$

Inkremeante der Komponenten des plastischen Verzerrungstensors sind proportional dem Inkrement der Mises Vergleichsspannung und haben die Richtung des deviatorischen Spannungstensors.

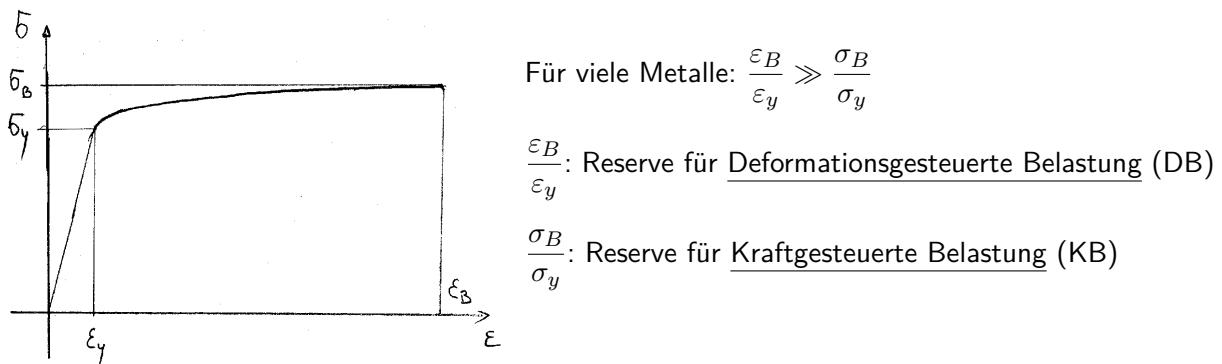
→ siehe Vorlesung: Continuum Mechanics 1

Solche Gesetze werden in FE-Programme implementiert → Berechnung der lokalen plastischen Dehnungen zur dehnungsbasierten Dimensionierung:

$$g(\varepsilon_{ij}^{pl}) < g_0$$

2.2 Grundlegendes zur Bestimmung von Auslegungskriterien: statische Belastung

Kraft- und Deformationsgesteuerte Belastung



DB:

- vorgespannte Schraube, Feder; thermische Spannungen ...
- hier ist die Begrenzung der auftretenden Spannungen weniger konservativ, da plastische Deformationen zur Reduktion der pseudo-elastischen Spannungen führen. Aufpassen: auch bei Deformationsgesteuerter Belastung kann Ermüdung zum Versagen führen! Siehe 2.4

KB:

- Gewicht; Kessel mit Innendruck, Zentrifugalspannung ...
- Beim Überschreiten der Streckgrenze oft wenig Reserve bis zum Bruch → konservativere Dimensionierung.

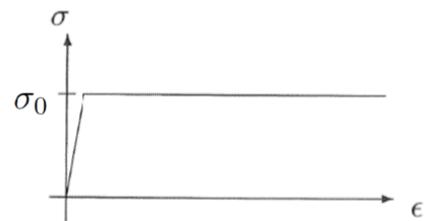
Homogene und lineare Spannungsverteilung

Falls Spannungsverteilung homogen: beim Erreichen der Fließgrenze wird es in der ganzen Struktur zur Plastifizierung kommen → Versagen

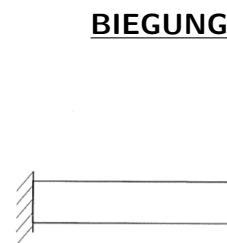
- Beispiel: Belastung auf Zug, ideal elastisch-plastisches Material

Falls Spannungsverteilung als lineare Funktion: beim Erreichen der Fließgrenze an einer Stelle bleibt der Großteil der Struktur elastisch → Versagen erst bei einer größeren Belastung

- Beispiel: Belastung auf Biegung, ideal elastisch-plastisch



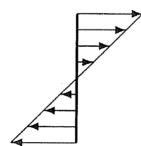
ZUG



Erste Plastifizierung:

Erste Plastifizierung:

$$F_{\text{Plast}} = \sigma_0 \cdot A$$



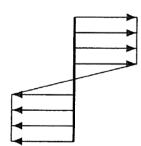
$$M_{\text{Plast}} = L \cdot P_{\text{Plast}}$$

$$M_{\text{Plast}} = \sigma_0 \cdot I \cdot \frac{2}{h} = \sigma_0 \frac{bh^2}{6}$$

$$P_{\text{Plast}} = \sigma_0 \cdot \frac{bh^2}{6} \cdot \frac{1}{L}$$

Vollständig plastifiziert (Kollaps):

$$F_{\text{Versagen}} = \sigma_0 \cdot A$$

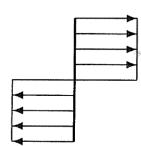


$$M_{\text{Versagen}} = 2 \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \int_0^{\frac{h}{2}} \sigma(y) y dy dz$$

Vollständig plastifiziert (Kollaps):

$$M_{\text{Versagen}} = \sigma_0 \frac{bh^2}{4}$$

$$P_{\text{Versagen}} = \sigma_0 \frac{bh^2}{4} \cdot \frac{1}{L}$$



$$\text{Zug (homogen): } \frac{F_{\text{Versagen}}}{F_{\text{Plast}}} = 1$$

$$\text{Biegung (linear): } \frac{P_{\text{versagen}}}{P_{\text{Plast}}} = \frac{1}{4} : \frac{1}{6} = 1.5 \quad (\text{Reserve!})$$

Resultat ist von Querschnittsgeometrie abhängig:

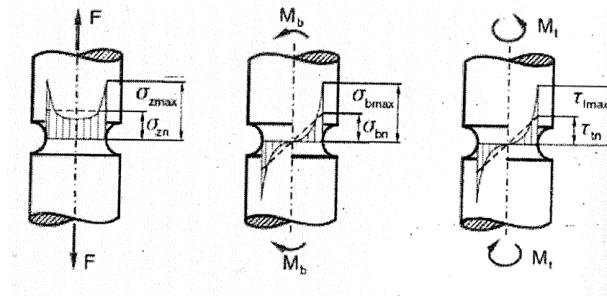
Formzahl 1.5	1.7	1.29 $h = b = 5t$

Vorteile eines Querschnittes mit mehr Material weit weg von Neutralachse sind zum Teil aufgrund kleineren "Reserve" (d.h. kleinere Formzahl) verloren (\rightarrow konservativeren Dimensionierung).

Spannungskonzentration - Kerben

Lokale Spannungsüberhöhung

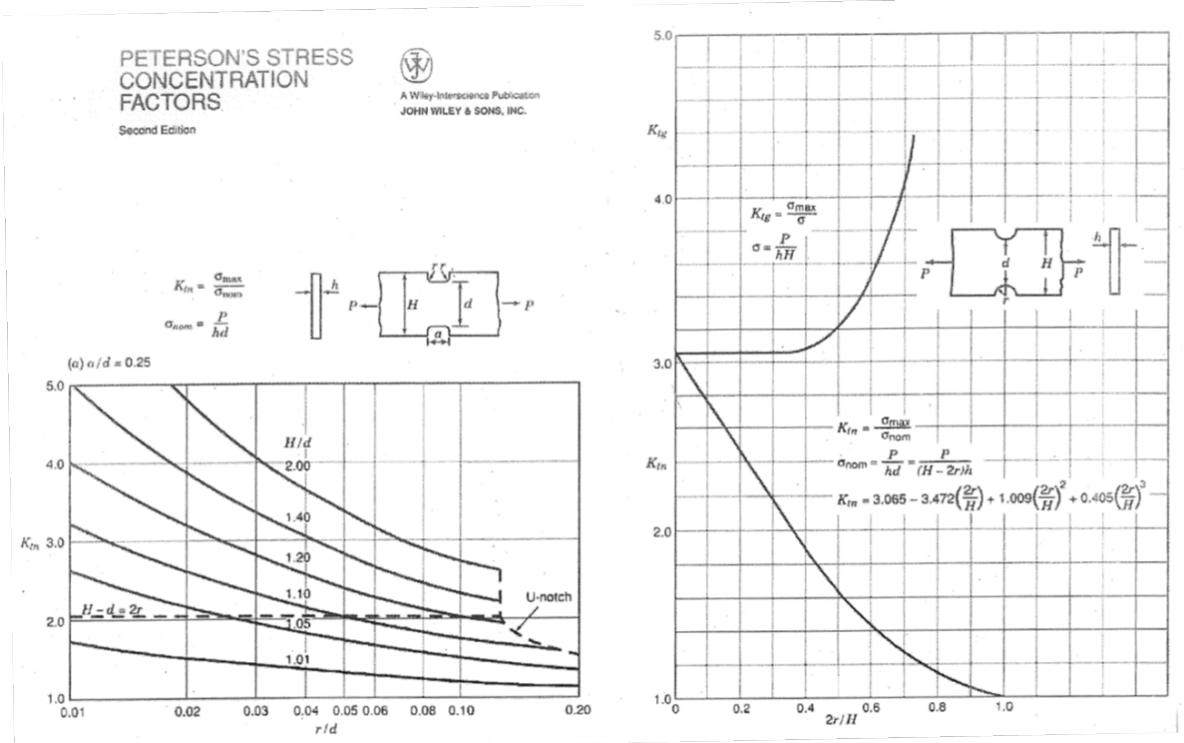
Für bestimmte Geometrien sind die lokalen Spannungswerte bekannt (berechnet oder gemessen).



Kerbfaktoren oder Formzahlen erlauben die Berechnung der Spannungsspitze aus der Spannung im Fernfeld:

$$\sigma_{\max} = K \cdot \sigma_n$$

Kerbfaktoren sind in Handbücher aufgelistet. Diese Berechnung setzt elastisches Verhalten voraus, auch an der Kerbspitze.



Ist es sinnvoll so zu dimensionieren, dass $\sigma_{max} < R_{p0.2}$?
Je nach Formzahl und Material kann das viel zu konservativ sein.

Betrachte folgende Berechnung:

gekerbter Stab, kreisförmiger Querschnitt, mit axialer Kraft belastet.

Material: ideal elastisch-plastisch

$$\sigma_0 = 200 \text{ MPa}$$

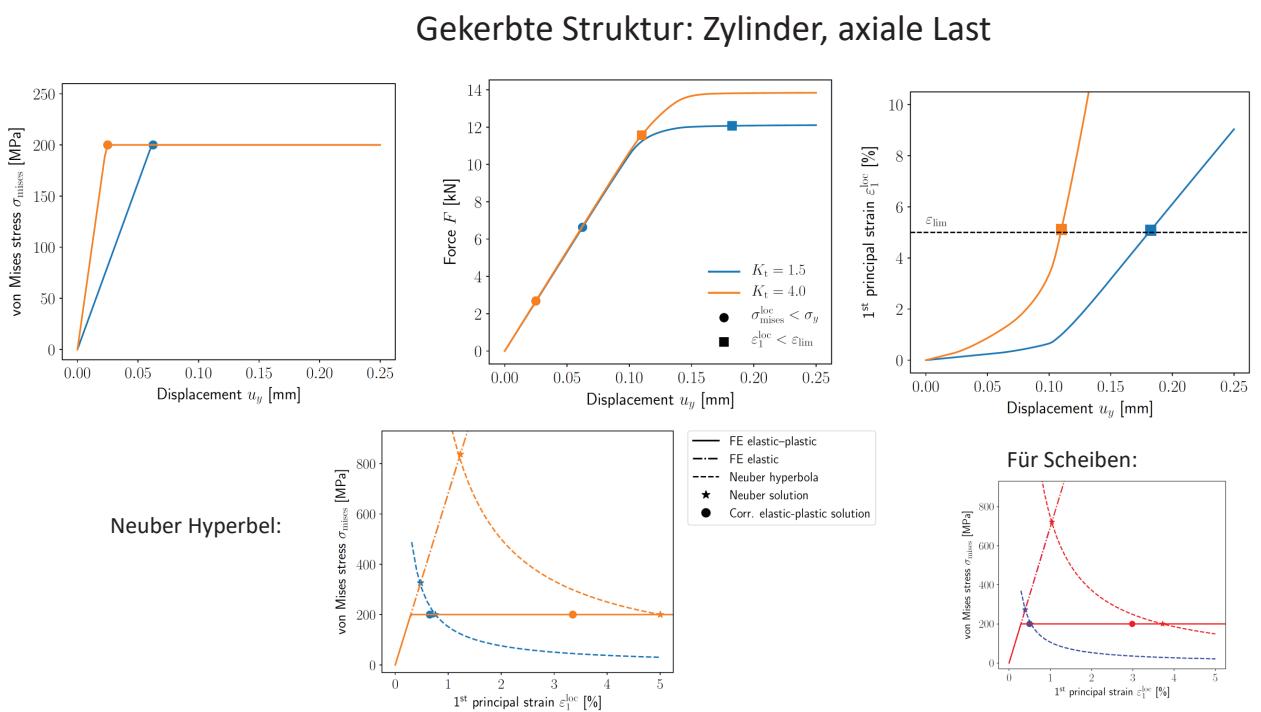
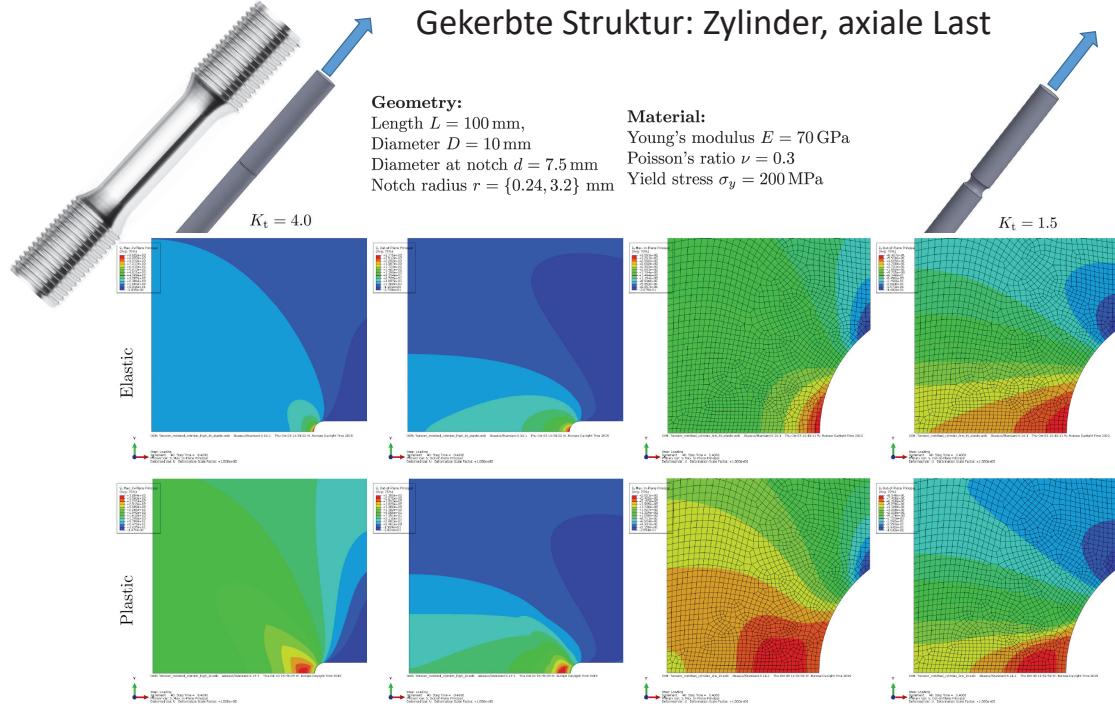
$$E\text{-Modul} = 70 \text{ GPa}$$

$$\nu = 0.3$$

2 Fälle:

$$K_{tn} = 1.5$$

$$K_{tn} = 4$$

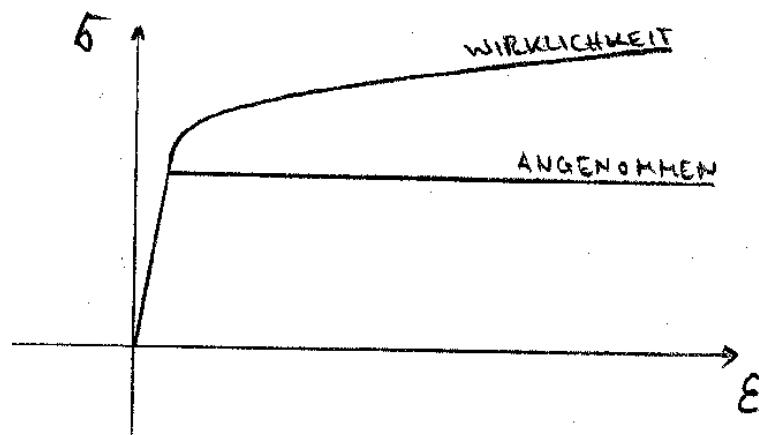


Grenzlastanalyse

FE basierte Festigkeitsberechnung bei KB

LIMIT LOAD ANALYSIS

- Materialgesetz: elastisch ideal-plastisch
- Berechnung mit zunehmender primärer Belastung (Beispiel Gehäuse mit Innendruck p)
- Beim Erreichen des plastischen Versagens konvergiert Berechnung nicht mehr: $p = p_{\text{Vers}}$
- Kriterium: $p_{\text{Vers}} > p_{\text{Betrieb}}$
- Sicherheitsfaktoren im angenommenen Materialgesetz:

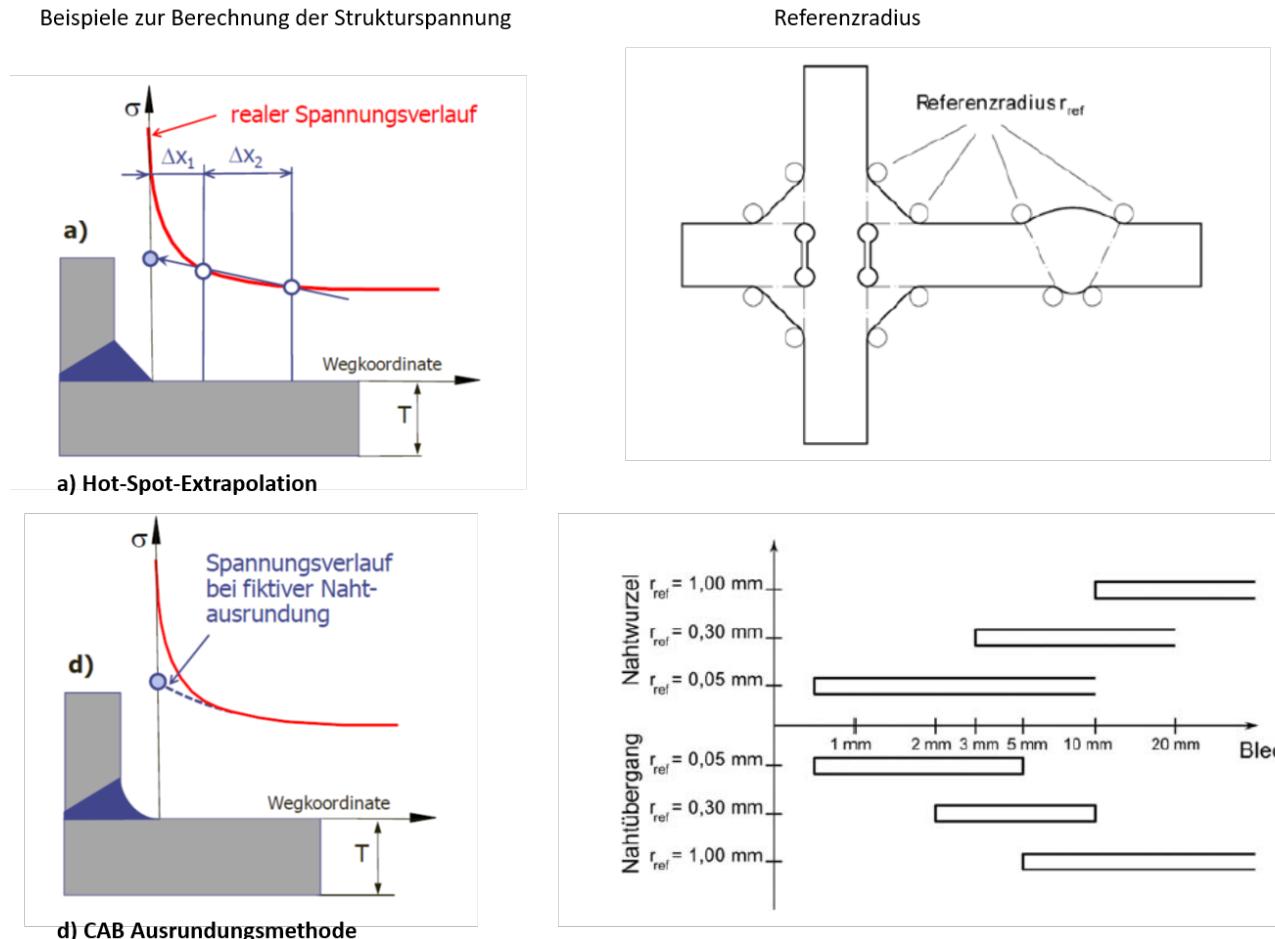


2.3 Statischer Festigkeitsnachweis mit örtlichen Spannungen (FKM Richtlinie, Kap. 3)

Die Spannungsberechnung erfolgt mittels FEM unter Verwendung eines linear-elastischen Materialgesetzes. Die Geometrie soll möglichst korrekt berücksichtigt werden. Eine Netzverfeinerung ist ausreichend für „Konvergenz“.

Probleme entstehen bei scharfen Ecken, wie z.B. Schweißnähte:

- reale Spannung $\uparrow \infty$ (lokale Abrundung nicht genau bekannt)
- Strukturspannung oder Referenzradius



B. Schmied und S. Kurmann, «Statischer Festigkeitsnachweis von Schweißnähten mit örtlichen Spannungen, «Manuskript zum Vortrag am Schweizer Maschinenelemente Kolloquium, SMK2010»

«Festigkeit geschweißter Bauteile,» DVS Berichte Band 256, 2009.

nach FKM wird ein „Auslastungsgrad“ berechnet:

$$a_{SK} = \frac{\sigma_v}{\sigma_{SK}/J_{ges}} ; \text{ Ziel des Nachweises: zeige, dass } a_{SK} < 100\%$$

- σ_v : Vergleichsspannung im Nachweispunkt
- σ_{SK} : Materialfestigkeit, bauteilspezifisch
- J_{ges} : Sicherheitsfaktor (Gesamtsicherheitsfaktor)

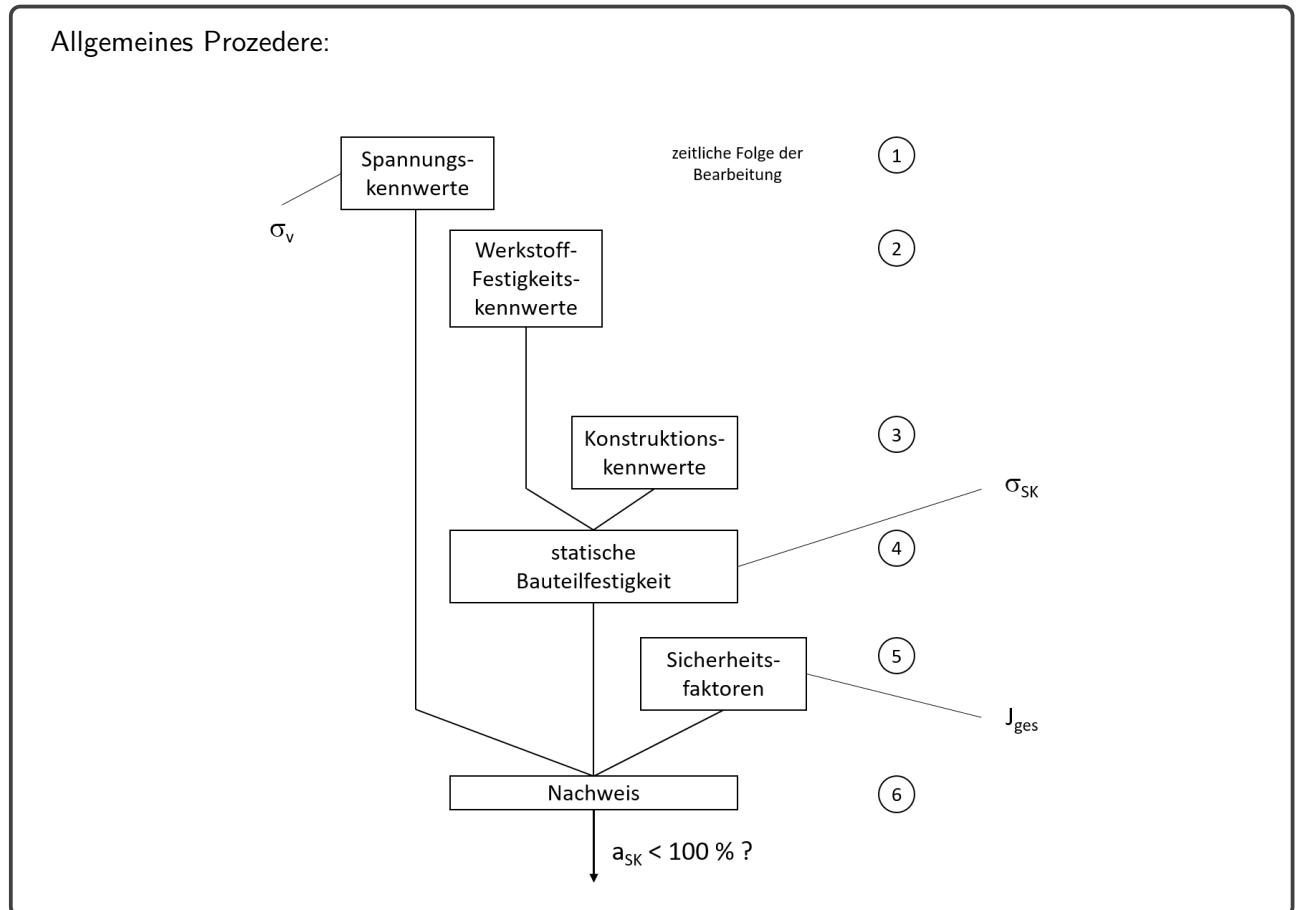
σ_v : aus FE Berechnung, mittels Festigkeitshypothese

$$\sigma_{ij} \rightarrow \sigma_v \text{ (z.B. Mises)}$$

Zusätzlich wird die Mehrachsigkeit im Nachweispunkt berechnet:

$$h = \frac{1}{3} \cdot \frac{Spur[T]}{\sigma_{Mises}} ; \quad [T]: \text{Spannungstensor}$$

Falls $h > 1.33$ zusätzlicher Nachweis erforderlich (Bruchdehnung und ev. maximale äquivalente Spannung sind bei starker Mehrachsigkeit kleiner → Versprödung)



Bestimmung der statischen Bauteilfestigkeit, σ_{SK}

Ist die an der Normprobe gemessene Fliessgrenze auch für das Bauteil gültig?
Meistens ist eine Korrektur erforderlich:

$$R_P = K_{d,p} \cdot K_A \cdot R_{P,N}$$

- R_P : Fliessgrenze am Bauteil
- $R_{P,N}$: Fliessgrenze der Normprobe
- $K_{d,p}$: "Technologischer Grösseneinflussfaktor" < 1
- K_A : Anisotropie des Materials ≤ 1

Bsp, für Stahl:

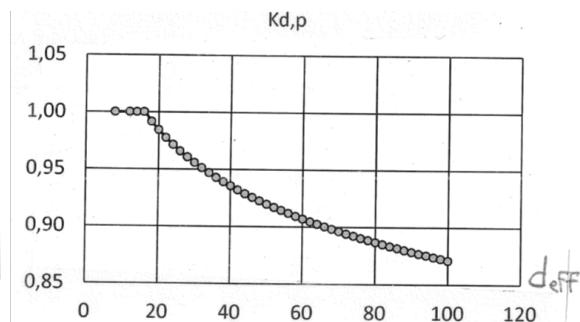
$$K_{d,p} = \frac{1 - 0.7686 \cdot a_{d,p} \cdot \log \left(\frac{d_{eff}}{7.5mm} \right)}{1 - 0.7686 \cdot a_{d,p} \cdot \log \left(\frac{d_{eff,N,m}}{7.5mm} \right)}$$

Vergütungsstahl, normalgeglüht: $a_{d,p} = 0.2$; $d_{eff,N,m} = 16mm$

$d_{eff,N,m}$: effektiver Durchmesser oder Dicke

Tabelle 3.2.3 Effektiver Durchmesser d_{eff}

Nr.	Querschnittsform	d_{eff} <i>Fall 1</i>	d_{eff} <i>Fall 2</i>
1		d	d
2		2s	s
3		2s	s
4		$\frac{2b \cdot s}{b + s}$	s
5		b	b



Falls keine Anisotropie vorhanden ist: $K_A = 1$

Sonst, z.B. Walzen: für Spannungen in Walzrichtung $K_A = 1$

senkrecht dazu: $K_A < 1$ (Bsp: 0.9)

Die Bauteilfestigkeit σ_{SK} soll die Zulässigkeit von lokaler Plastifizierung (also Überschreitung von R_p) berücksichtigen:

$$\sigma_{SK} = R_p \cdot n_{pl}$$

n_{pl} : plastische Stützzahl (>1)

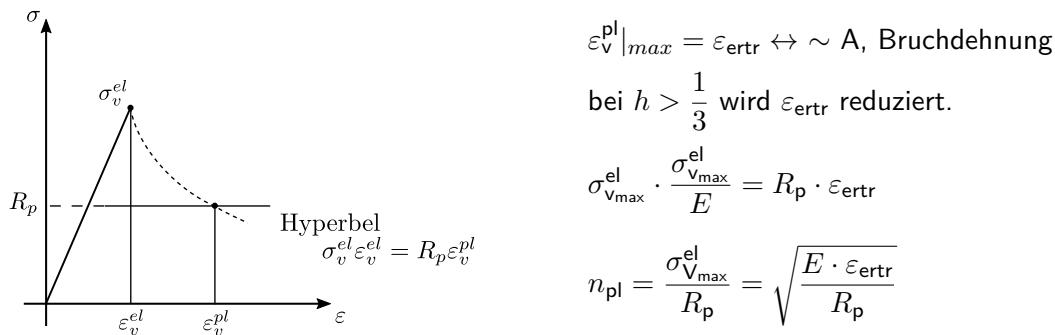
Für homogene Spannungsverteilung: $n_{pl} = 1$ (keine Reserve!) sonst:

$$n_{pl} = \min \left(\sqrt{\frac{E \cdot \varepsilon_{ertr}}{R_p}}, K_p \right)$$

K_p : plastische Formzahl = $\frac{\text{vollplastische Traglast}}{\text{elastische Grenzlast}}$

vollplastische Traglast: aus Grenzlastanalyse

elastische Grenzlast: wenn maximale σ_v den Wert R_p erreicht.



Sicherheitsfaktor J_{ges}

$$J_{ges} = \underbrace{J_s}_{\text{Belastung}} \cdot \underbrace{\left[J_z \cdot \max \left(\frac{J_m \cdot R_p}{R_m}; J_p \right) \right]}_{\text{Material: } J_{ges}^{MAT}} \text{ für „normale“ Temperatur, Stahl: -40°C bis 100°C}$$

J_s : Lastfaktor := 1 Falls Lastannahme sicher

Für „representative“ Lastannahme: > 1

→ von Überschreitungswahrscheinlichkeit und Standardabweichung der Verteilung abhängig.

$$J_{ges}^{MAT}$$

J_z : zusätzliche Sicherheit für geschweißte Teile oder Guss.

J_p : Sicherheit gegen Plastifizierung

Sicherheit gegen Bruch: $\frac{J_m \cdot R_p}{R_m}$ man hätte mit R_m vergleichen sollen.

$$\rightarrow \sigma < R_p \Rightarrow \sigma < \frac{R_m}{R_p} \cdot R_p$$

$$\text{daraus (für den Fall } J_z = 1\text{): } \sigma_{sk} \cdot \frac{R_m}{R_p} \cdot \frac{1}{J_m} = \sigma_{sk} \cdot \frac{1}{J_{ges}^{MAT}}$$

Maximaler Wert von $\frac{J_m \cdot R_p}{R_m}$ oder J_p

$J_m =$

2

1.8

1.75

1.6

$J_p =$

1.5

1.35

1.3

1.2

hohe Schadensfolgen

hohe S.

niedrige S.

niedrige S.

hohe Wahrscheinlichkeit

niedrige W.

hohe W.

niedrige W.

2.4 Grundlegendes zur Bestimmung von Auslegungskriterien: zyklische Belastung

Ermüdung: eine Einführung

Bei einem Ermüdungsproblem kann nach progressiver Schädigung durch zyklische Belastung ein Anriss entstehen und als Folge davon ein Dauerbruch.

Ermüdung als Prozess: Versagen tritt nicht bei Inbetriebsetzung auf, sondern später. Damit verknüpft ist der Begriff „Lebensdauer“.

Fragestellung:

Wie viele Belastungszyklen bis zum Anriss (N_{zul}) bei gegebener Spannungsschwingbreite $\Delta\sigma$ oder Dehnungsschwingbreite $\Delta\varepsilon$?

Antwort aus empirischen Ansätzen. Man kann auch die Belastung so klein halten dass

- unbegrenzte Anzahl Zyklen zulässig sind: Dauerfestigkeit
Spannungsamplitude $\sigma_a = \frac{1}{2}\Delta\sigma < \sigma_W$
- die notwendige Lebensdauer $N_{erforderlich}$ erreicht wird: Zeitfestigkeit
 $\sigma_a < \sigma_{a,zul}(N_{erforderlich})$

Allgemeines Vorgehen zur Ermüdungsanalyse:



Einflüsse (u.a.):

- 3D Spannungszustand
- Umgebung: Korrosion, Temperatur
- Zeit, Frequenz der Zyklen
 - x Kerbwirkung
 - x Mittelspannung
- Eigenspannungen
- Oberflächenzustand (Rauheit, Gefüge)
 - x Kumulative Ermüdung
- Streuung der Materialdaten

x: werden kurz eingeführt

Dauerfestigkeit und Zeitfestigkeit

Wöhlerdiagramm, aus Ermüdungsversuchen:

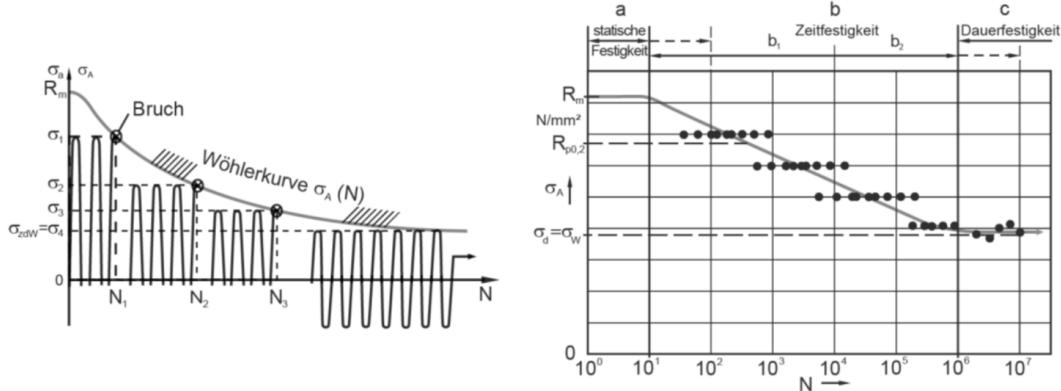


Abb. 28: B. Schlecht Maschinenelemente 1, 2007

Oft verwendet: Wöhlerkurve für 97.5% Überlebenswahrscheinlichkeit.

Bereiche:

- bis $10^3 - 10^4$ Zyklen: LCF (low cycle fatigue - Kurzzeitfestigkeit)
- $10^3 - 10^4$ bis 10^6 : HCF (high cycle fatigue) - Langzeitfestigkeit)
- ab $10^6 - 10^7$: Dauerfestigkeit - σ_W : Wechselfestigkeit

Bei gewissen Werkstoffen: Kein horizontaler Verlauf der Wöhlerkurve ab $10^6 - 10^7$ Zyklen.

Oft $\sigma_W = \sigma_A(10^8)$.

Beachten ob Versuche für behandelten Fall räpresentativ ist (Probengröße, Oberfläche, Mittelspannung, Korrosion, Temperatur ...).

Oft Verwendet: Normproben und Bedingungen.

Einfluss der Mittelspannung auf Dauerfestigkeit

$$\sigma_m = \frac{\sigma_u + \sigma_o}{2}; \quad R = \frac{\sigma_u}{\sigma_o} \quad \sigma_m \uparrow, R \uparrow (\sigma_o > 0) \rightarrow N_{zul} \downarrow$$

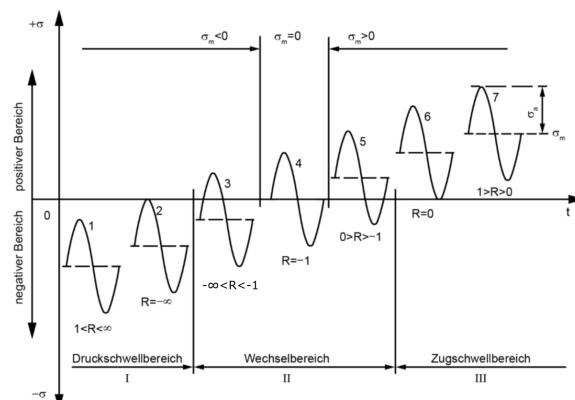


Abb. 29: aus Skript Prof. Hora

Aus Wöhler-Versuchen mit unterschiedlichen Mittelspannungen wird ein Smith- Diagramm gebildet:

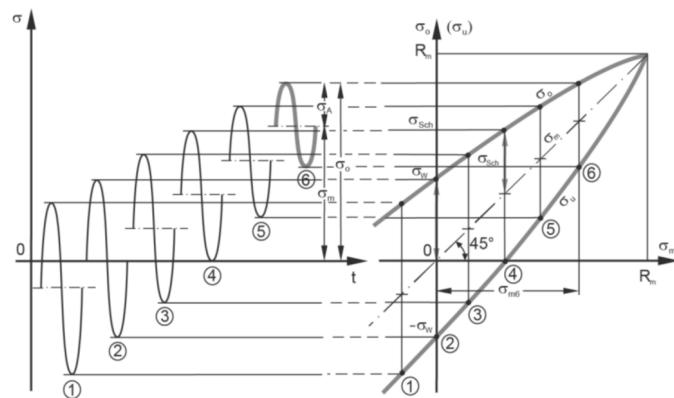
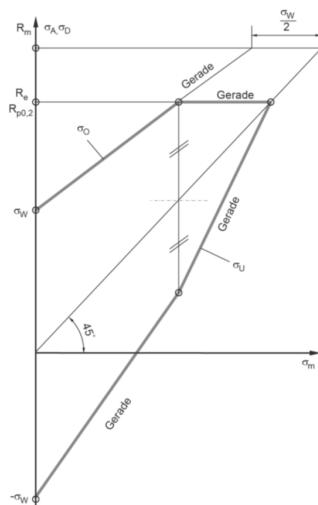


Abb. 30: B.Schlecht Maschinenelemente 1, 2007

Vereinfachte Konstruktion des Smith- Diagramms:



Alternative Darstellung: Haigh- Diagramm:

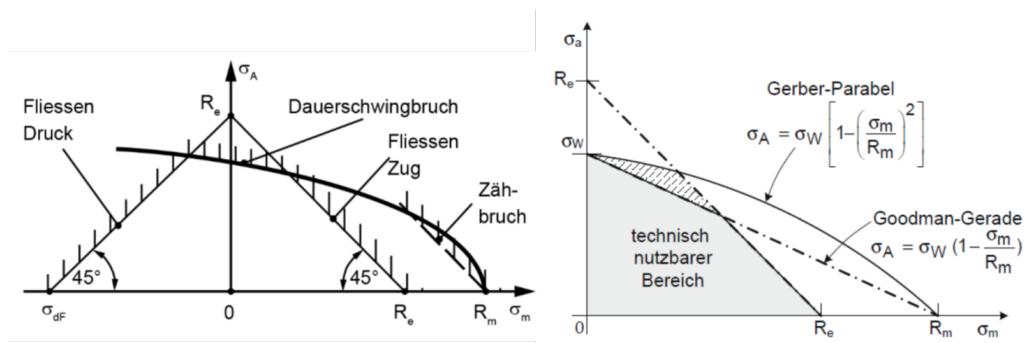


Abb. 31: aus Skript Prof. Hora

HCF

Materialverhalten: elastisch \rightarrow Beziehung $\Delta\sigma \leftrightarrow \Delta\varepsilon$ ist linear.

Kann mit hochfrequenten Belastungen auftreten,
z.B. Schwingung mit 100Hz, in 3 Stunden $3600 \cdot 3 \cdot 100 \approx 10^6$ Zyklen
 \rightarrow Kann schnell zu Versagen führen.

Erweiterung Haigh- Diagramm für $\sigma_m > 0$

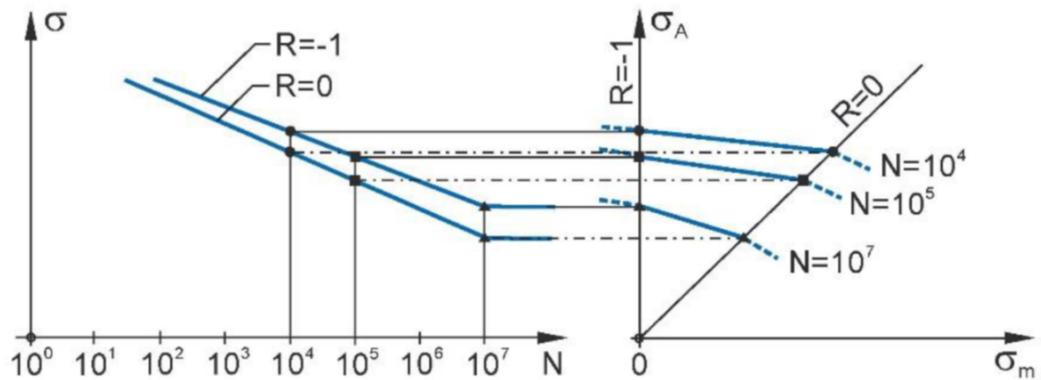
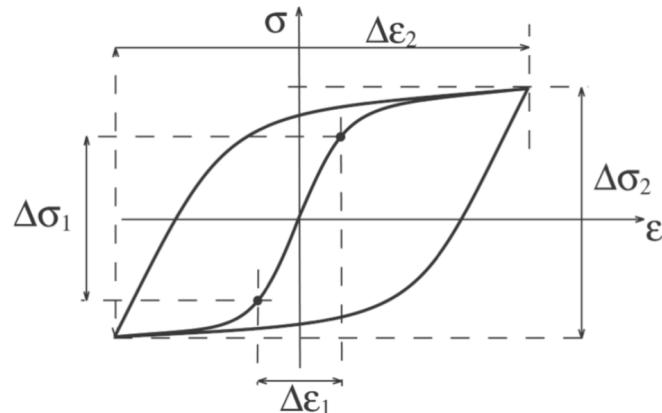


Abb. 32: B. Schlecht, 2007; Zeitfestigkeitsschaubild

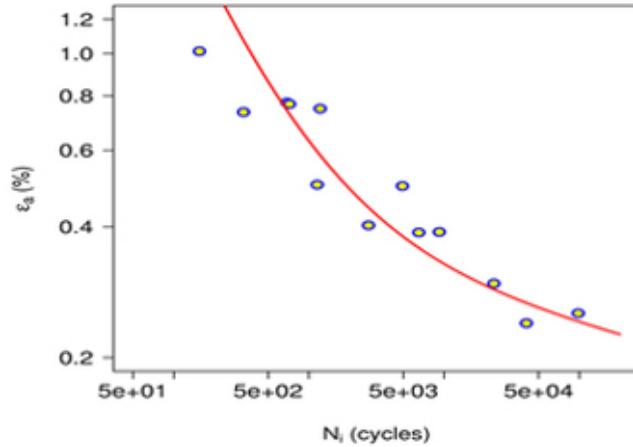
LCF

Materialverhalten: inelastisch (elastoplastisch)



Zyklisches Verhalten: Verfestigung oder Entfestigung ($R_{p_{0.2}}^{\text{zyklisch}} <> R_{p_{0.2}}$).
Bauschinger- Effekt, siehe 2.1.

Ermüdungsverhalten darstellbar als $N(\sigma_a)$ oder $N(\varepsilon_a)$. Bei LCF ist die Streuung kleiner mit $N(\varepsilon_a)$:



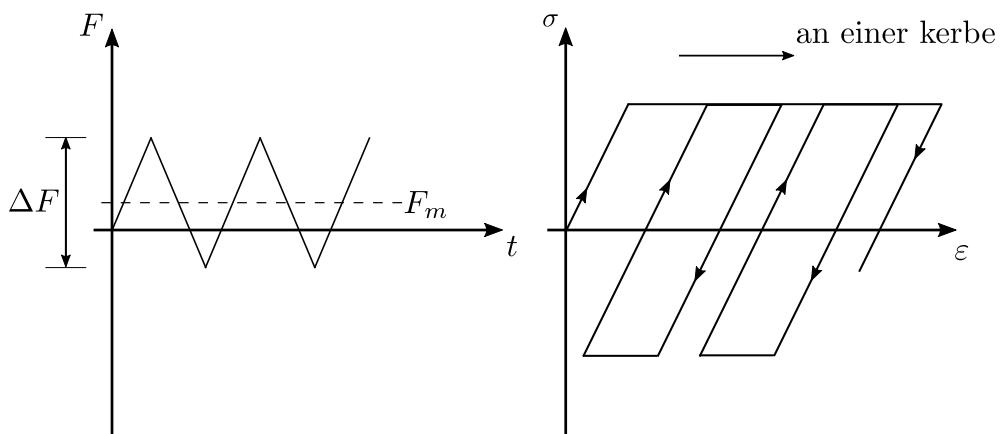
Einfluss der Mittelspannung auf Zeitfestigkeit bei LCF:

Für ideal elastisch-plastisches Verhalten und $\Delta\sigma > 2R_{p_{0.2}}^{\text{zyklisch}}$: $R = -1$, immer.

Hier kann die „Mitteldehnung“ ε_m einen Einfluss haben.

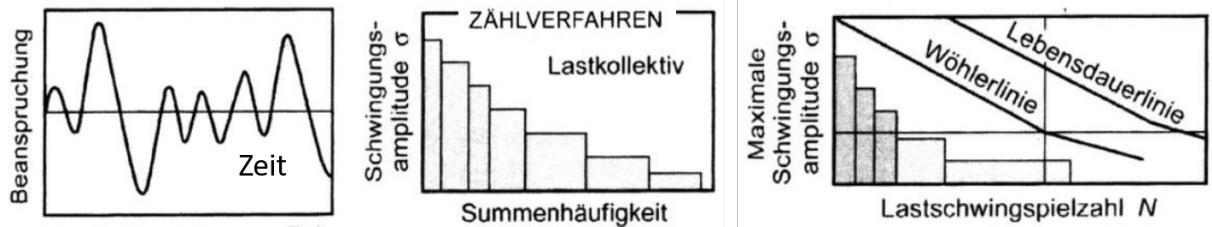
Bei „primärer“ Last (KB) ΔF mit $F_m \neq 0$

→ „Ratchetting“, $\varepsilon_m \uparrow$



Kumulative Ermüdung

Belastung oft komplexer als „einstufig“ → Mehrstufenkollektiv. Belastungs- Zeitfunktionen werden in Abschnitte aufgeteilt, mit je $\Delta\sigma_i, \sigma_{mi}$ (je nach Klassifizierung und Zählverfahren)



Betrachtung nach dem Prinzip der Schadensakkumulation:

$$\text{Anriss falls } D_{\text{Erm}} = \sum_i \frac{n_i}{N_{\text{Zul}}(\Delta\sigma_i, \sigma_{mi})} = 1$$

Miner's Regel: Schädigungsanteile lassen sich unabhängig von der Reihenfolge summieren. Ergebnisse sind nicht immer zuverlässig, zu konservativ oder nicht konservativ. Modifikationen für spezifische Werkstoffe und Anwendungen, z.B.:

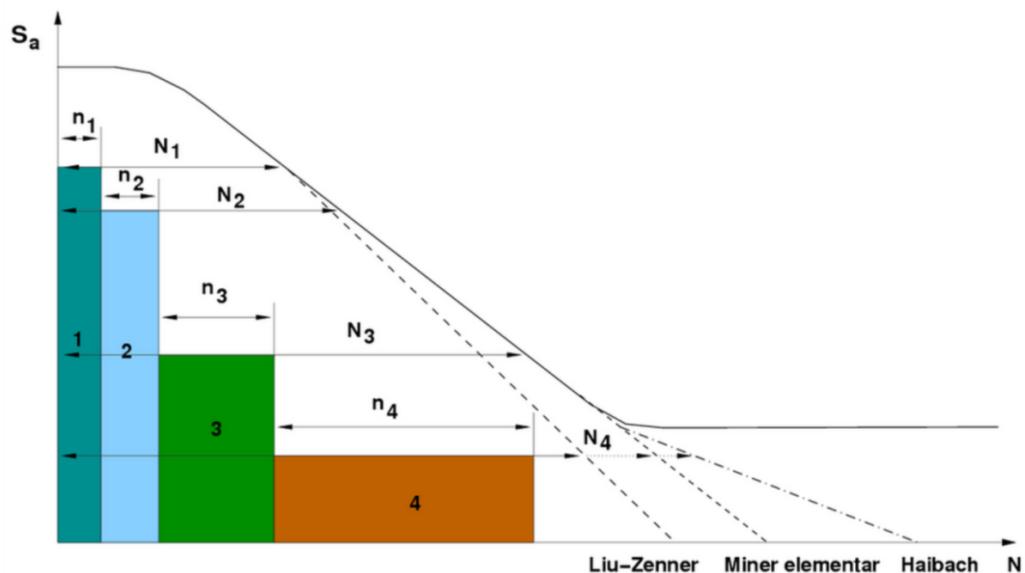
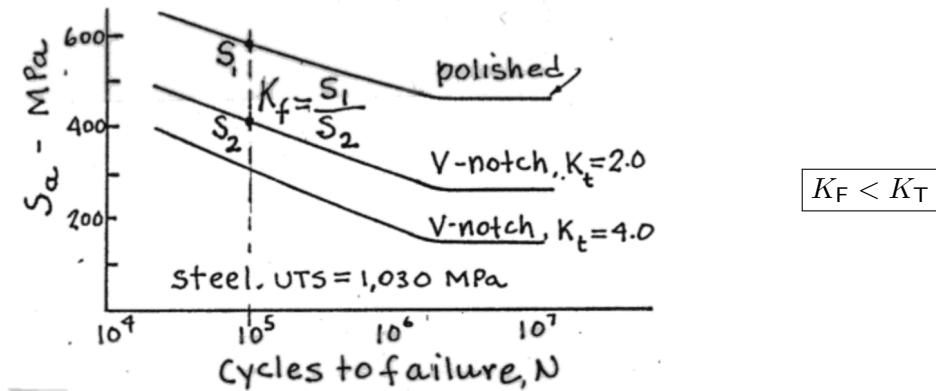


Abb. 33: aus Skript Prof. Hora

Kerben

Anriss erfolgt oft an Kerben, als Folge der Spannungs- und Dehnungskonzentrationen. An der kritischen Stelle herrscht meist ein ebener Spannungszustand (Spannungsfreie Oberfläche)

Wenn das Materialverhalten lokal elastisch bleibt ($\Delta\sigma_v < 2R_{p_{0.2}}^{\text{zyklisch}}$), dann wird die Abminderung der Ermüdungsfestigkeit durch die Kerbe anhand von Versuchen an gekerbten Proben bestimmt.



Da $K_F < K_T$ wäre eine Beurteilung basierend auf der lokalen Spannungsamplitude mit der Wöhlerkurve aus ungekerbten Proben zu konservativ. Die Wechselfestigkeit wird nach oben korrigiert. Oder die wirkende Spannung berechnet mit:

$$\sigma_{\max} = K_F \cdot \sigma_{\text{nom}} \quad \text{anstatt} \quad \sigma_{\max} = K_T \cdot \sigma_{\text{nom}}$$

$$K_F = q \cdot (K_T - 1) + 1$$

q: Index der Kerbsensitivität $q < 1$, siehe Beispiel

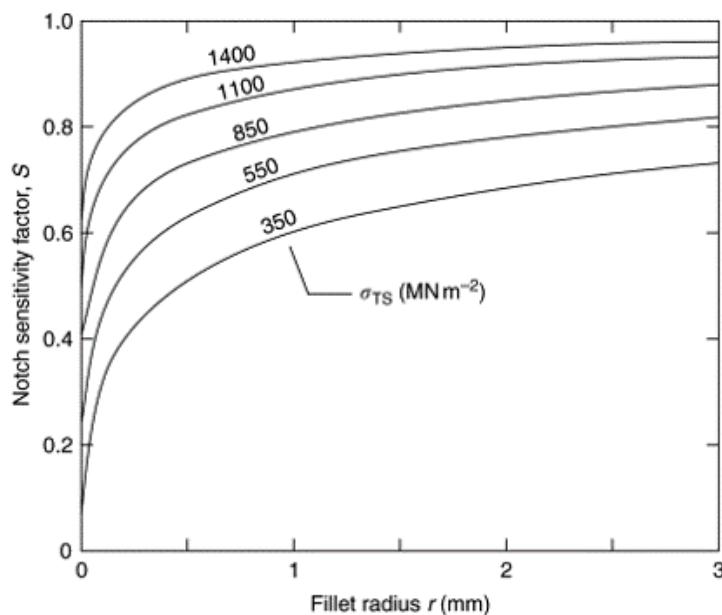


Abb. 34: Ashby, Jones Eng. Materials, 2012

Wenn das Materialverhalten lokal inelastisch ist (LCF an Kerben), dann wird die lokale (maximale) Dehnungsschwingbreite wie folgt ermittelt:

Δs : Schwingbreite der nominellen Spannung

$\Delta \sigma_K$: lokale Schwingbreite

$\Delta \varepsilon_K$: lokale Schwingbreite

$$\Delta \sigma_K = K_\sigma \cdot \Delta s$$

$$\Delta \varepsilon_K = K_\varepsilon \cdot \Delta e$$

$$\Delta e = \frac{\Delta s}{E}$$

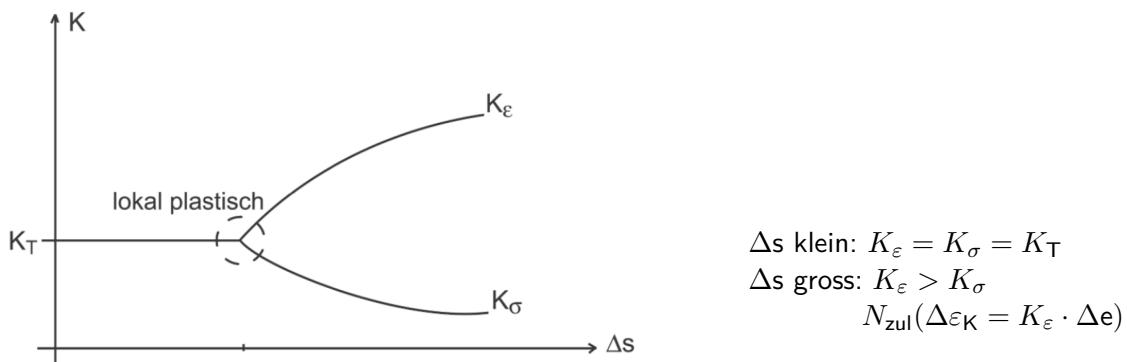
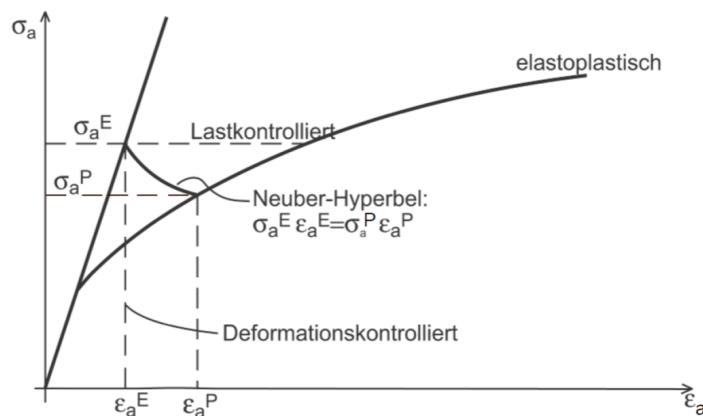


Abb. 35: Bestimmung von K_ε und $\Delta \varepsilon_K$ aus „pseudoelastischer“ Berechnung und Neuber-Hyperbel, nach Neuber, 1961, J. Appl. Mech., 28.

(Approximation wird schlechter mit zunehmender Plastifizierung und kleineren Werten von K_T ; Herleitung für ebenen Spannungszustand).

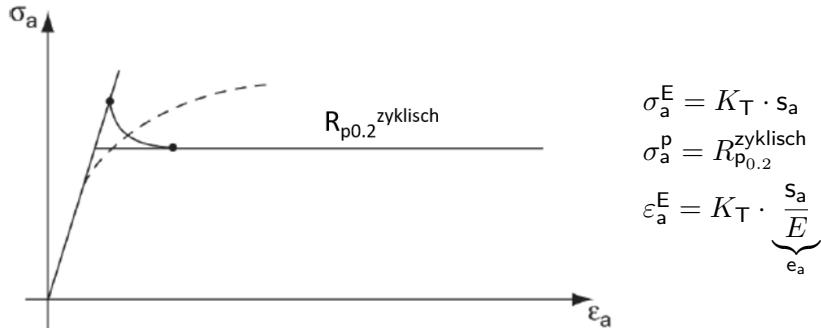
Neuber- Hyperbel



$$\varepsilon_a^p \sigma_a^p(\varepsilon_a^p) = K_T^2 \frac{s_a^2}{E}$$

falls $\sigma_a^p(\varepsilon_a^p)$ bekannt \rightarrow bestimme ε_a^p

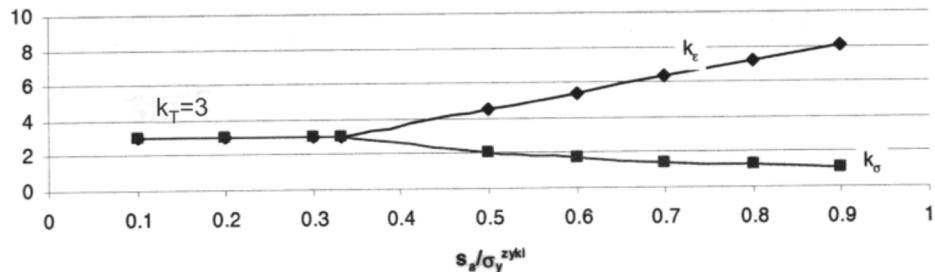
Konservatives Vorgehen:



$$\varepsilon_a^P \cdot R_{p0.2}^{\text{zyklisch}} = K_T^2 \frac{s_a^2}{E}$$

$$\varepsilon_a^P = K_T^2 \cdot \underbrace{\frac{s_a}{R_{p0.2}^{\text{zyklisch}}} e_a}_{K_\varepsilon}; \quad K_\sigma = \frac{R_{p0.2}^{\text{zyklisch}}}{s_a}$$

$$\Rightarrow K_\sigma \cdot K_\varepsilon = K_T^2$$



Verwendung von FE Berechnungen:

Es wird oft eine rein elastische Berechnung durchgeführt ($\rightarrow \sigma_a^E$) und dann mit der Neuberregel die lokale effektive Dehnungsamplitude berechnet.

Alternativ kann mit einem geeigneten konstruktiven Modell direkt ε_a^P an der Kerbe berechnet werden.

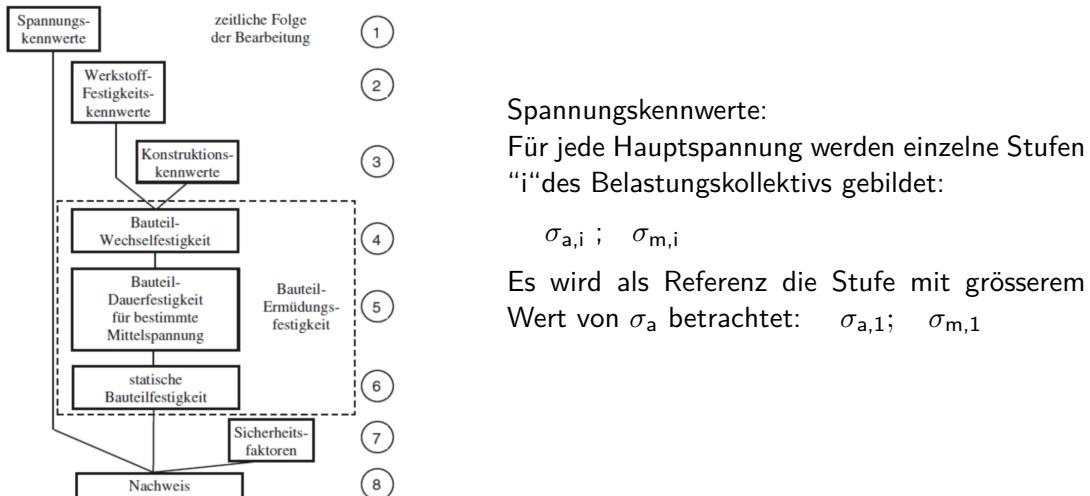
Solche Berechnungen zeigen, dass Neuber i.A. konservativ ist.

2.5 Ermüdungsfestigkeitsnachweis mit örtlichen Spannungen (FKM Richtlinien, Kap.4)

Ähnlich wie in 2.3, Spannungsberechnung mittels FEM, elastisches Material. Es werden hier nur einige Aspekte behandelt, siehe auch Wächter, Müller, Esderts, 2017.

Man betrachtet an der kritischen Stelle die Zeitverläufe der Hauptspannungen: $\sigma_1(t)$, $\sigma_2(t)$, $\sigma_3(t)$.

Für jede Hauptspannung wird die Analyse wie folgt durchgeführt:



Die entsprechenden Werkstoffkennwerte berücksichtigen (i) die Wechselfestigkeit des Materials; (ii) spezifische Konstruktionsfaktoren; (iii) Der Einfluss der Mittelspannung; (iv) die zu erreichende Lebensdauer (endliche Anzahl Zyklen, nicht dauerfest).

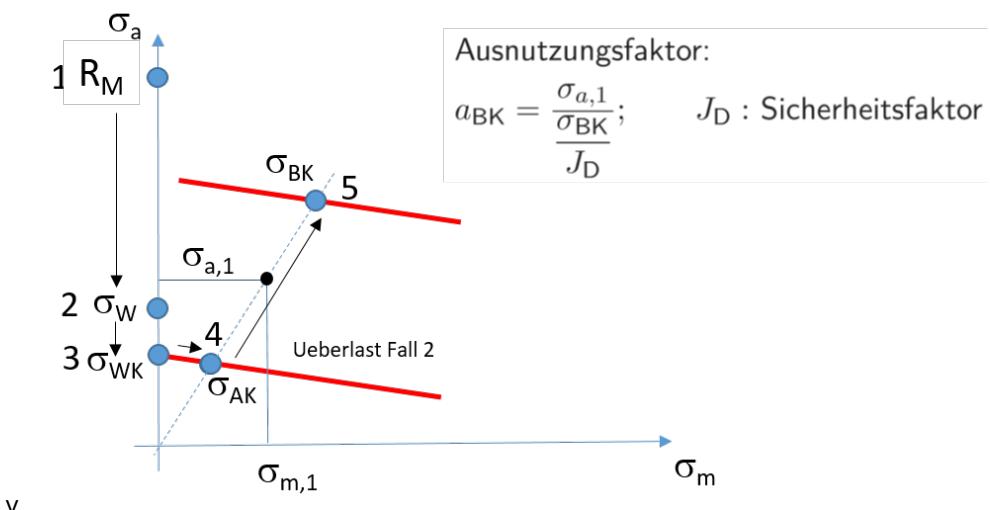


Abb. 36: Überblick (aus Skript Prof. Hora)

$$1 \rightarrow 2 \quad \sigma_W = F_W \cdot R_M$$

$$2 \rightarrow 3 \quad \sigma_{WK} = \sigma_W \cdot \frac{1}{K_{WK}}$$

$$3 \rightarrow 4 \quad \sigma_{AK} = \sigma_{WK} \cdot K_{AK}$$

$$4 \rightarrow 5 \quad \sigma_{BK} = \sigma_{AK} \cdot K_{BK}$$

Hier: Erklärung der Faktoren F_W , K_{WK} , K_{AK} , K_{BK} . Für duktile Material (z.B. Stahl), und „normale“ Temperatur.

- Schritt 1 → 2, F_W

Falls σ_W gemessen, Umrechnung aus R_M nicht nötig.

Ansonsten aus Werkstoff- spezifischer Abschätzung:

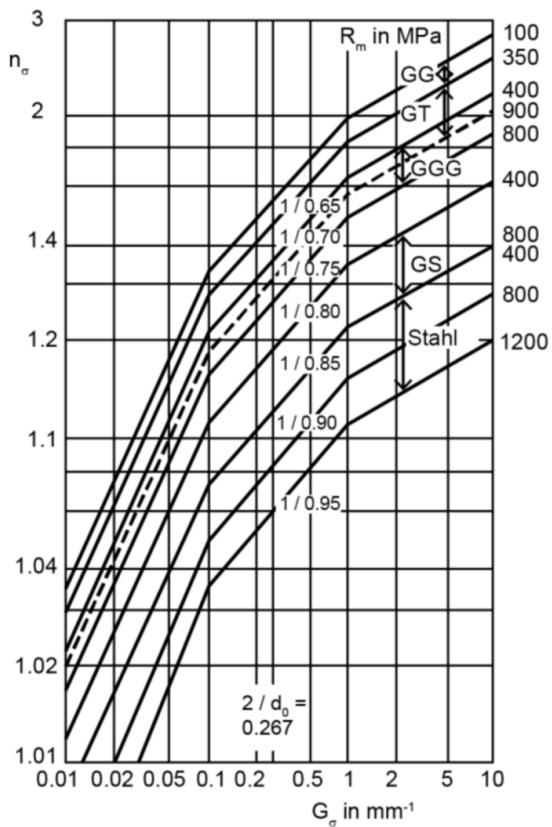
$$F_W : 0.3 \dots 0.4$$

- Schritt 2 → 3, K_{WK}

Hier wird die Oberflächenbeschaffenheit und die Kerbwirkung berücksichtigt:

$$K_{WK} = \left\{ \left[1 + \frac{1}{K_F} \left(\frac{1}{K_R} - 1 \right) \right] \frac{1}{K_v} \right\} \cdot \frac{1}{n_\sigma}$$

n_σ : Stützzahl aus Kerbwirkung, siehe n_{pl} in 2.3 und q in 2.4.



G_σ : Spannungsgefälle in Richtung senkrecht zur Hauptspannung am Kerbgrund

$\Delta\sigma_a$: Differenz der Spannungsamplitude zweier benachbarter Knoten an der Kerbe

Δs : Distanz der Knoten

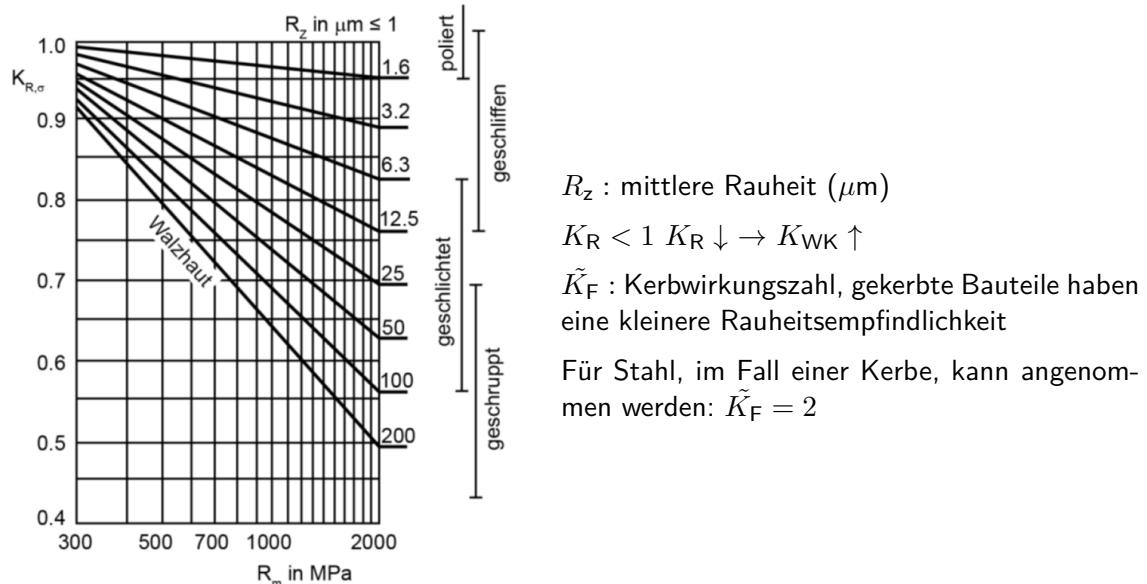
$$G_\sigma = \frac{\Delta\sigma_a}{\Delta s} \cdot \frac{1}{\sigma_{a,1}}$$

Keine Kerbe → $G_\sigma = 0 \rightarrow n_\sigma = 1$

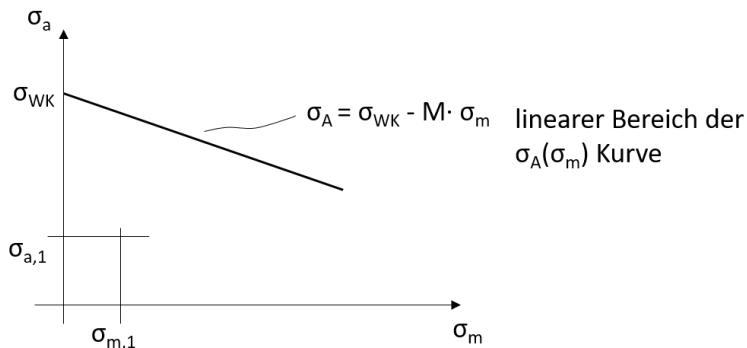
K_v : Randschichtfaktor. Je nach Oberflächenbehandlung (z.B. Kugelstrahlen, Flammhärtungen).

$K_v > 1$ (Normaler Zustand: $K_v = 1$)

K_R : Rauheitsfaktor, polierte Oberfläche: $K_R = 1$

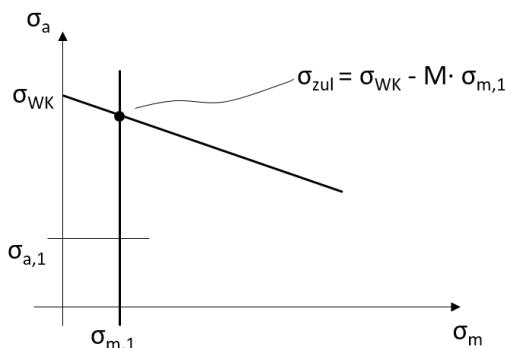


- Schritt 3 → 4, K_{AK}
Einfluss der Mittelspannung → Haigh - Diagramm:



K_{AK} ist von der Belastungsart abhängig.

- Fall 1: σ_a variiert bei konstantem σ_m



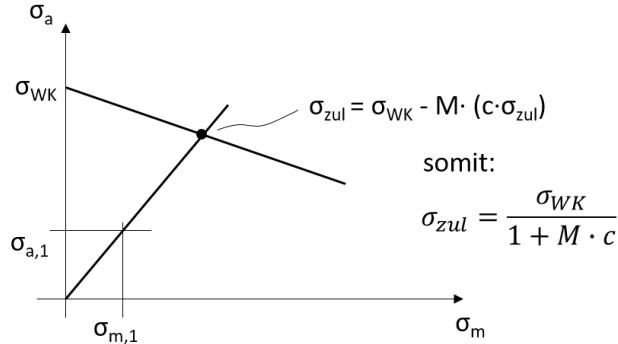
Berechnung des Ausnutzungsfaktors:

$$a = \frac{\sigma_{a,1}}{\sigma_{zul}} = \frac{\sigma_{a,1}}{K_{AK} \cdot \sigma_{WK}}$$

$$\rightarrow K_{AK} \cdot \sigma_{WK} = \sigma_{WK} - M\sigma_{m,1}$$

$$\text{allg. } \Rightarrow K_{AK,i} = 1 - M \frac{\sigma_{m,i}}{\sigma_{WK}}$$

- Fall 2: σ_a ist proportional zu σ_m ; $\sigma_{m,1} = c \cdot \sigma_{a,1}$



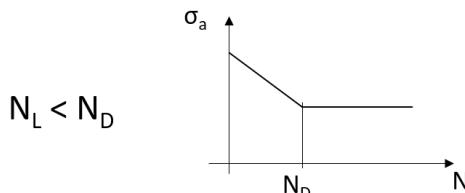
$$\text{mit } \sigma_{zul} = K_{AK} \cdot \sigma_{WK} \Rightarrow K_{AK} = \frac{1}{1 + M \cdot c}$$

(andere Fälle und Bereiche der $\sigma_A(\sigma_m)$ - Kurve in FKM Richtlinie.)

- Schritt 4 → 5, K_{BK}

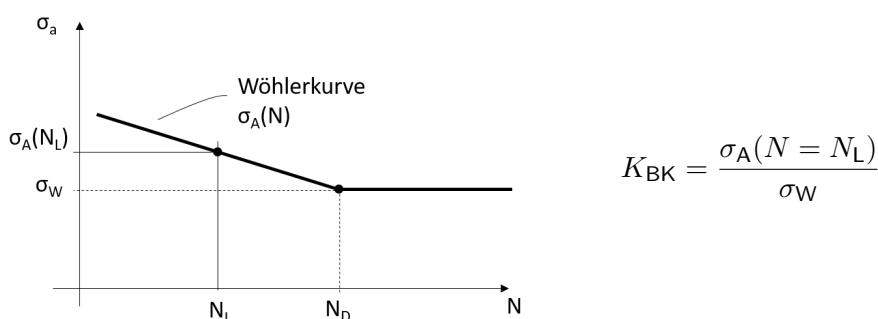
Es wird berücksichtigt, dass die erforderliche Anzahl Zyklen beschränkt ist.

Betriebsfestigkeit (statt Dauerfestigkeit)



Falls $N_L \geq N_D \rightarrow K_{BK} = 1$

- Einstufenkollektiv



$$\sigma_A = c_{10} \cdot N^{-\frac{1}{K}} \quad \left(\log \sigma_A = -\frac{1}{K} \log N + c_2 \right)$$

$$\sigma_W = c_0 \cdot N_D^{-\frac{1}{K}}$$

$$K_{BK} = \frac{c_{10} N_L^{-\frac{1}{K}}}{c_0 N_D^{-\frac{1}{K}}} = \left(\frac{N_D}{N_L} \right)^{\frac{1}{K}}$$

- Mehrstufenkollektiv, „FKM- Methode“

Berechnung bezüglich Referenzstufe $\sigma_{a,1}$; $\sigma_{m,1}$

Die Wöhlerkurve wird angepasst, um zu berücksichtigen, dass nicht alle Zyklen die gleiche Spannungsamplitude und Mittelspannungen haben.

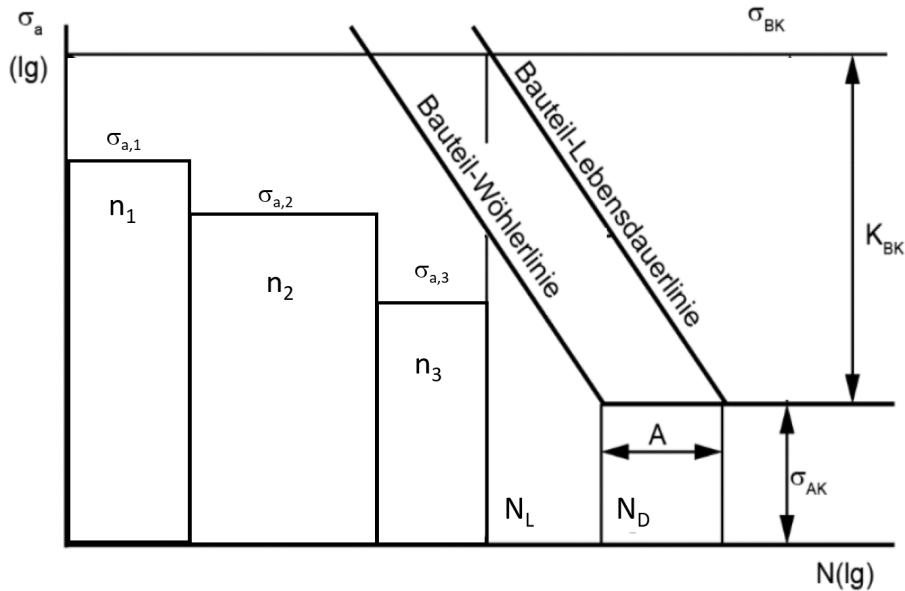


Illustration mit 3 Stufen

$$\sigma_{a,1} ; \sigma_{m,1} n_1$$

$$\sigma_{a,2} ; \sigma_{m,2} n_2$$

$$\sigma_{a,3} ; \sigma_{m,3} n_3$$

$$n_1 + n_2 + n_3 = \bar{N}$$

$\sigma_{a,1}$ als Referenz, d.h. :

$$K_{BK} = \frac{\sigma_A^*(N = \bar{N})}{\sigma_{AK}} ; \quad \sigma_A^*: \text{verschobene Wöhlerkurve} ; \quad \sigma_{AK} = \sigma_{WK} \cdot K_{AK,1}$$

Kriterium zur Bestimmung von $\sigma_A^*(N)$ oder $N_{zul}^*(\sigma_{a,1})$:

$$D_{Erm} = \frac{n_1}{N_{zul}(\sigma_{a,1})} + \frac{n_2}{N_{zul}(\sigma_{a,2})} + \frac{n_3}{N_{zul}(\sigma_{a,3})} \stackrel{!}{=} \frac{\bar{N}}{N_{zul}^*(\sigma_{a,1})}$$

→ gleiche totale Schädigung (Miner elementar).

$$N_{zul} = \left(\frac{1}{c_1} \cdot \sigma_{a,i} \right)^K \quad N_{zul}(\sigma_{a,1}) = c_1^K \cdot \frac{1}{\sigma_{a,1}^K}$$

$$N_{zul}(\sigma_{a,i}) = c_1^K \cdot \frac{1}{\sigma_{a,i}^K}$$

$$N_{zul}(\sigma_{a,2}) = N_{zul}(\sigma_{a,1}) \cdot \left(\frac{\sigma_{a,1}}{\sigma_{a,2}} \right)^K$$

$$N_{zul}(\sigma_{a,3}) = N_{zul}(\sigma_{a,1}) \cdot \left(\frac{\sigma_{a,1}}{\sigma_{a,3}} \right)^K$$

Berücksichtigung der Tatsache, dass i.A. $\sigma_{m,i} \neq \sigma_{m,1}$:
es wird eine angepasste Spannungsamplitude betrachtet

$$\sigma_{a,R,i} = \sigma_{a,i} \cdot \frac{K_{AK,1}}{K_{AK,i}}$$

z.B.: wenn $\sigma_{a,2}$ eine kleinere Mittelspannung $\sigma_{m,2} < \sigma_{m,1}$ hat, wird der entsprechende K_{AK} -Faktor (Schritt 3 → 4) für diese Stufe grösser: $K_{AK,2} > K_{AK,1}$

$$\text{Somit: } \sigma_{a,R,2} = \sigma_{a,2} \cdot \frac{K_{AK,1}}{K_{AK,2}} < \sigma_{a,2}$$

es wird mit einer reduzierten Spannungsamplitude berechnet.

$$N_{zul}(\sigma_{a,R,2}) = N_{zul}(\sigma_{a,1}) \cdot \left(\frac{\sigma_{a,1}}{\sigma_{a,R,2}} \right)^K$$

$$N_{zul}(\sigma_{a,R,3}) = N_{zul}(\sigma_{a,1}) \cdot \left(\frac{\sigma_{a,1}}{\sigma_{a,R,3}} \right)^K$$

Einsetzen in die Gleichung für D_{Erm} und mit \bar{N} dividieren:

$$\frac{n_1}{\bar{N}} \cdot \frac{1}{N_{zul}(\sigma_{a,1})} + \frac{n_2}{\bar{N}} \cdot \left(\frac{\sigma_{a,R,2}}{\sigma_{a,1}} \right)^K \cdot \frac{1}{N_{zul}(\sigma_{a,1})} + \frac{n_3}{\bar{N}} \cdot \left(\frac{\sigma_{a,R,3}}{\sigma_{a,1}} \right)^K \cdot \frac{1}{N_{zul}(\sigma_{a,1})} = \frac{1}{N_{zul}^*(\sigma_{a,1})}$$

$$N_{zul}^*(\sigma_{a,1}) = N_{zul}(\sigma_{a,1}) \cdot \left(\sum_i \frac{n_i}{\bar{N}} \cdot \left(\frac{\sigma_{a,R,i}}{\sigma_{a,1}} \right)^K \right)^{-1}$$

$$A = \frac{1}{\sum_i \frac{n_i}{\bar{N}} \left(\frac{\sigma_{a,R,i}}{\sigma_{a,1}} \right)^K}; \quad N_{zul}^*(\sigma_{a,1}) = N_{zul}(\sigma_{a,1}) \cdot A$$

Berücksichtigung von nicht konservativen Einflüssen in der Miner - Regel:

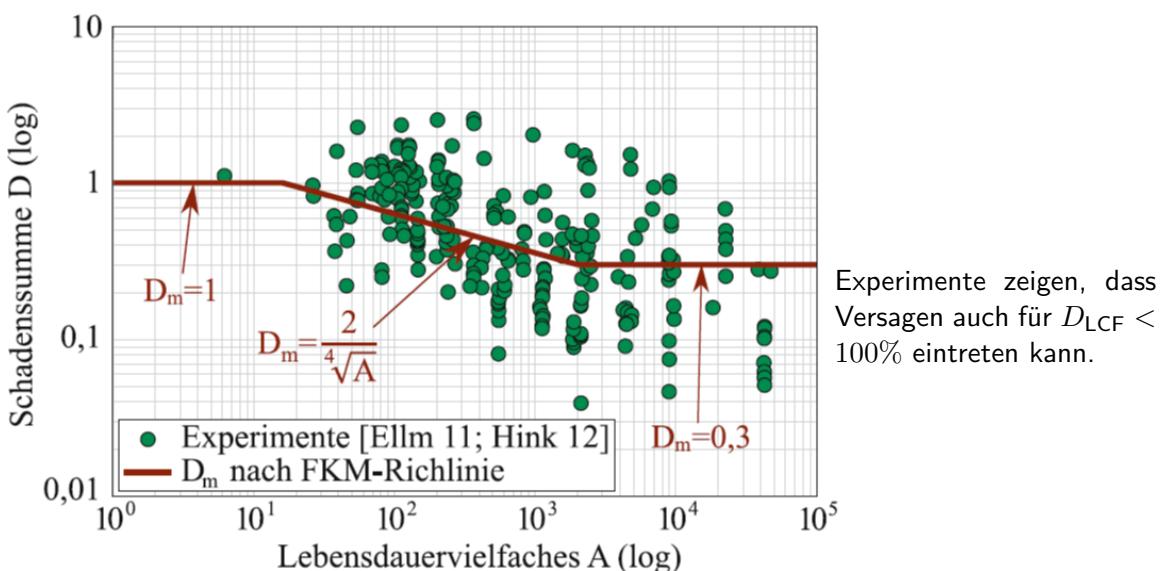


Abb. 37: Wächter, Müller, Esdends, 2017

Man verwendet eine reduzierte Grenze $D_M (< 1) : N_{zul}^{**}(\sigma_{a,1}) = D_M N_{zul}^*(\sigma_{a,1}); \quad D_M(A)$

so dass, für $\bar{N} = N_{zul}^{**} \rightarrow D_{Erm} = D_M$

Somit: $N_{zul}^{**}(\sigma_{a,1}) = N_{zul}(\sigma_{a,1}) \cdot A \cdot D_M$

$$N_{zul}^{**} = c^{**K} \cdot \frac{1}{\sigma_A^K}; \quad c^{**K} \cdot \frac{1}{\sigma_A^K} = A \cdot D_M \cdot c_1^K \cdot \frac{1}{\sigma_A^K}$$

$$\sigma_A^{**} = c^{**} \cdot N^{-\frac{1}{K}} = (AD_M)^{\frac{1}{K}} \cdot c_1 \cdot N^{-\frac{1}{K}}$$

$$\sigma_A^{**}(\bar{N}) = c_1 \cdot \left(\frac{AD_M}{\bar{N}} \right)^{\frac{1}{K}}$$

$$K_{BK} = \frac{\sigma_A^{**}(\bar{N})}{\sigma_A(N_D)} = \frac{c_1 \left(\frac{AD_M}{\bar{N}} \right)^{\frac{1}{K}}}{c_1 \cdot N_D^{-\frac{1}{K}}} = \left(\frac{AD_M N_D}{\bar{N}} \right)^{\frac{1}{K}}$$

- Nachweis:

$$\sigma_{BK} = \text{Min}\{K_{BK} \cdot \sigma_{AK}; \quad 0.75 \cdot R_p \cdot n_{pl}\}$$

n_{pl} : siehe 2.3 ; σ_{BK} gilt für spezifische $\sigma_{a,1}$

Ausnutzungsfaktor:

$$a_{BK} = \frac{\sigma_{a,1}}{\sigma_{BK}}; \quad J_D : \text{Sicherheitsfaktor}$$

$$J_D = J_S \cdot J_F \cdot J_G$$

J_S : Lastfaktor(siehe 2.3)

J_F : Materialsicherheitsfaktor, abhängig von Inspektionshäufigkeit und Schadensfolgen

z.B. für regelmässige Inspektion und geringe Folgen: $J_F = 1.2$

seltene Inspektion und schwere Folgen $J_F = 1.5$

J_G : zusätzlich für Guss

Nachweis für 3D Spannungszustand:

Analyse (Schritte 1 bis 5) wird für jede Hauptspannung durchgeführt: $\sigma_{1a,1}; \sigma_{2a,1}; \sigma_{3a,1}$

$$a_{BK_1} = \frac{\sigma_{1a,1}}{\sigma_{BK}}; \quad a_{BK_2} = \frac{\sigma_{2a,1}}{\sigma_{BK}}; \quad a_{BK_3} = \frac{\sigma_{3a,1}}{\sigma_{BK}}$$

$a_{BK_i} < 1$; Kombination für duktile Werkstoffe (z.B. Stahl), wie Mises - Spannung:

$$a_{ges} = \sqrt{\frac{1}{2} \left((a_{BK_1}^* - a_{BK_2}^*)^2 + (a_{BK_2}^* - a_{BK_3}^*)^2 + (a_{BK_3}^* - a_{BK_1}^*)^2 \right)}$$

Berücksichtigung des Vorzeichens der Hauptspannung: $a_{BK_i}^* = sign(c_{\sigma_i}) \cdot a_{BK_i}$

$c_{\sigma_i} = \sigma_i(t = t_{max})$; t_{max} : Zeitpunkt der extremalen Belastung

$$a_{ges} \leq 1$$

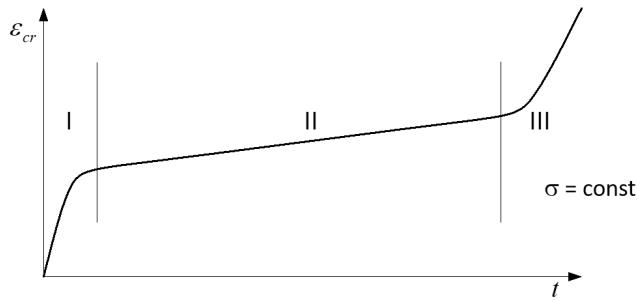
Man soll den Gültigkeitsbereich der Richtlinie beachten. Viele Produkte erfordern spezifische Anpassungen oder spezifische Prozeduren, siehe 2.6 und Beispiel Dampfturbinenrotor - in Vorlesung präsentiert.

2.6 Kriechen

Kriechen tritt in metallischen Werkstoffen bei höheren Temperaturen ($T > 0.3T_{\text{Schmelz}}$) auf.

Ursachen: Bewegung von Versetzungen, Gleit- und Diffusionsphänomene.

Folgen: Inelastische Deformationen (auch bei „kleinen“ Spannungen); Schädigung



→ Inelastische Deformation (ε_{cr}) ist zeitabhängig

→ Unterteilung in 3 Bereiche:

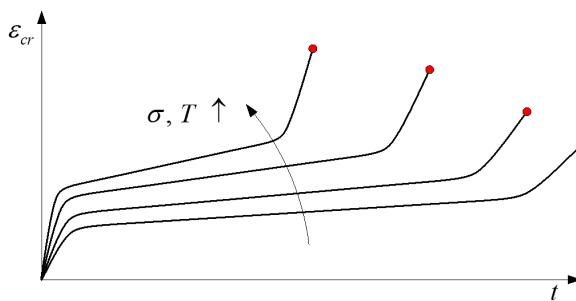
- I: Primäres Kriechen $\dot{\varepsilon}_{cr} < 0$
- II: Sekundäres Kriechen $\dot{\varepsilon}_{cr} = 0$
- III: Tertiäres Kriechen $\ddot{\varepsilon}_{cr} > 0$

I: Progressive Verfestigung wegen Aufbau von Hindernissen zur Versetzungsbewegung

II: $\dot{\varepsilon}_{cr} = \text{const.} <$ Gleichgewicht zwischen Verfestigung und thermisch induzierter Entfestigung

III: Beschleunigtes Kriechen aufgrund progressiver Schädigung im Material

Spannungs- und Temperaturabhängigkeit



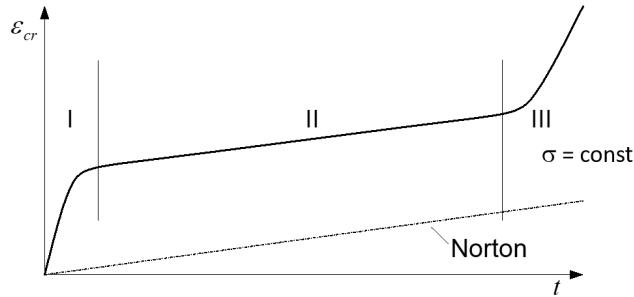
Höhere Spannungen und/oder Temperaturen führen zu:

- höheren Kriechraten
- niedrigeren Bruchzeiten
- höheren Bruchdehnungen

2.6.1 Kriechmodelle

Es existieren viele konstitutive Modelle zur Beschreibung der zeitabhängigen Plastizität, $\varepsilon_{cr}(\sigma, t)$, 1D mit entsprechenden 3D-Erweiterungen.

Hier: Norton-Modell (für II-Kriechen)



$$\dot{\varepsilon}_{cr} = A \cdot \sigma^n$$

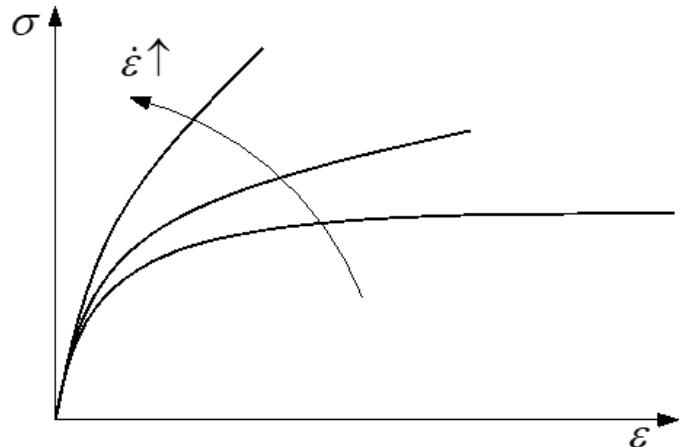
$$n: 4 \div 8$$

A: Funktion der Temperatur

Hier $\sigma(t) = \text{konst.}$, dann folgt:

$$\varepsilon_{cr} = A \cdot \sigma^n \cdot t$$

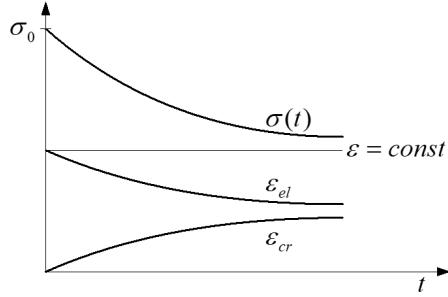
Konsequenz für Zugversuch:



- Dehnrateabhängig
- Inelastische Dehnungen mit ε_{el} und ε_{cr}

2.6.2 Relaxation

Bei vorgegebener Deformation eines kriechenden Materials reduziert sich die Spannung.



Spannungsrelaxation nach Norton Modell:

$$\varepsilon_{cr} + \varepsilon_{el} = \varepsilon = \text{const.}$$

$$\dot{\varepsilon}_{cr} + \dot{\varepsilon}_{el} = 0 \quad \rightarrow \quad A\sigma^n + \frac{1}{E}\dot{\sigma} = 0$$

$$\frac{d\sigma}{dt} = -AE\sigma^n \quad \rightarrow \quad \sigma^{-n}d\sigma = -AEdt$$

$$(-n+1)^{-1}\sigma^{-n+1} + C = -AEt$$

$$\Rightarrow C = -\frac{1}{1-n}\sigma_0^{1-n}; \quad t = 0, \sigma = \sigma_0$$

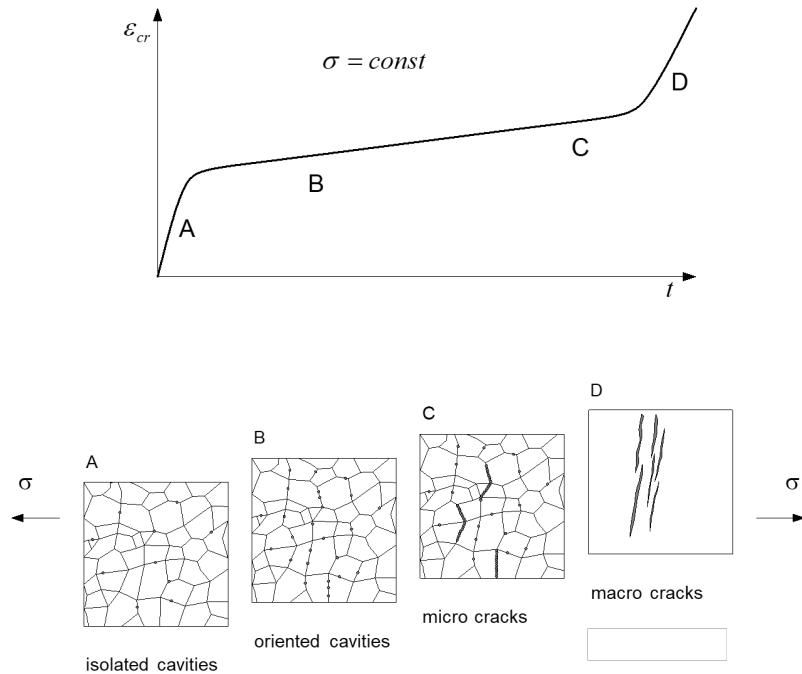
$$\sigma(t) = (\sigma_0^{1-n} + (n-1)AEt)^{\frac{1}{1-n}}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \varepsilon_{cr}(t) \\ \varepsilon_{el}(t) \end{cases} \quad \text{siehe Übung}$$

2.6.3 Kriechschädigung

Für die meisten technischen Anwendungen:

Versagen wegen Kriechen aufgrund interkristalliner Schädigung (Kriechporen).

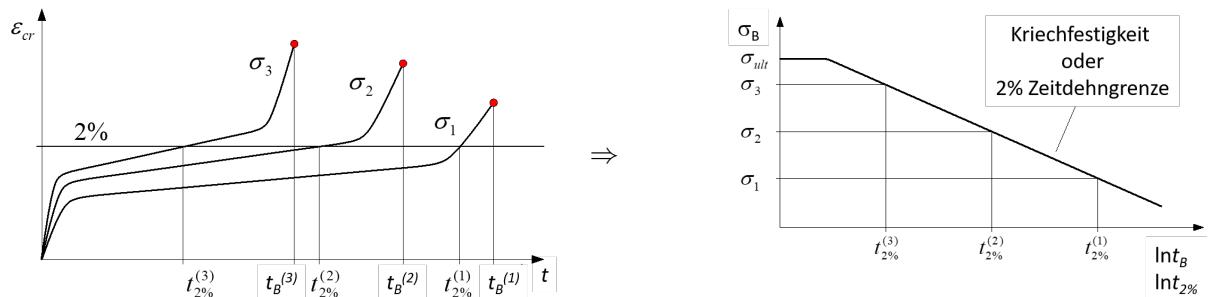


- Feststellen durch metallografische Analyse
- Porenwachstum beeinflusst durch
 - hydrostatischen Spannungszustand
 - superponierte Ermüdungsbelastung
 - Spannung und Temperatur
- Dimensionierung zur Vermeidung exzessiver Schädigung

2.6.4 Methoden zur Dimensionierung

- Kraftgesteuerte Belastung: $\sigma = \text{const.}$

Bsp: Rohr mit Innendruck, Zentrifugalspannungen in einem Rotor



→ für gegebene, zu erreichende Lebensdauer t_L :

$$\text{von Mises} \rightarrow \sigma < \sigma_B(t_L)$$

→ kummulative Schädigung („time fraction rule“)

$$D_{cr} = \sum_n \frac{\Delta t_n}{t_B(\sigma_n)} < 1$$

Aufteilung der Spannungsgeschichte $\sigma(t)$ in diskrete Intervalle Δt_n mit konstanter Spannung σ_n und zugehöriger „Rupture-Time“ $t_B(\sigma_n)$

- Deformationsgesteuerte Belastung: $\varepsilon_{\text{tot}} = \text{const.}$

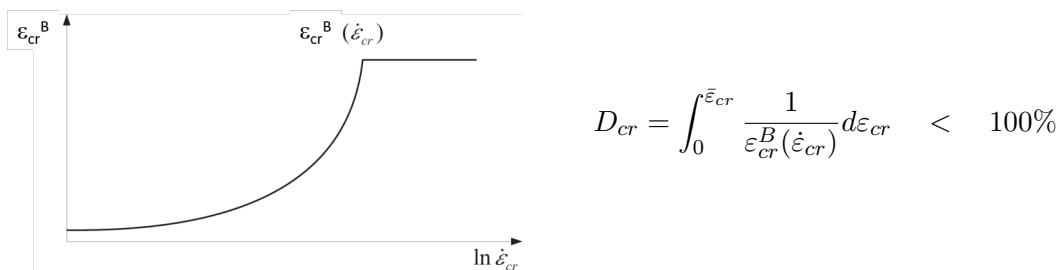
Spannungsrelaxation → $\sigma(t)$, mit $\dot{\sigma} < 0$

„Time Fraction rule“ für kontinuierliche Spannungsgeschichte:

$$D_{cr} = \int_0^t \frac{1}{t_B} dt < 100\%; \quad t_B = f(\sigma(t))$$

Alternativ: „ductility exhaustion“ - Methode

⇒ Kriechbruchdehnung \sim Kriechdehnrate



Experimentelle Beobachtungen zeigen:

$\varepsilon_{cr}^B \downarrow$ mit zunehmender hydrostatischen Belastung

2.6.5 Interaktion Kriechen-Ermüdung

Kriechen oder Relaxation innerhalb einer zyklischen Belastung führt zu niedrigerer N_{zul} für die gleiche Dehnungsschwingbreite $\Delta\epsilon$.

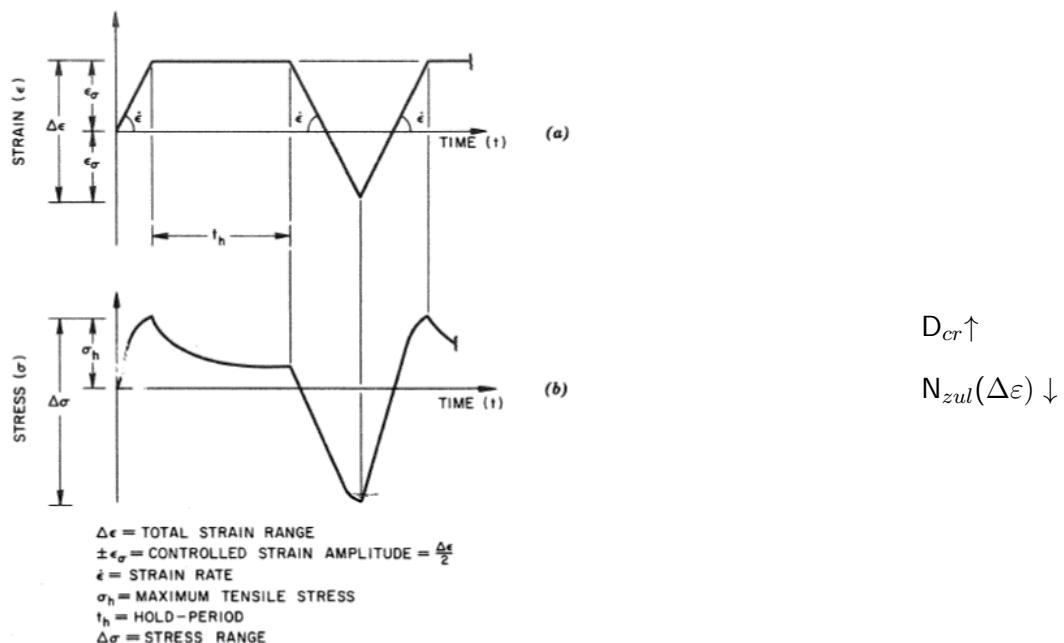
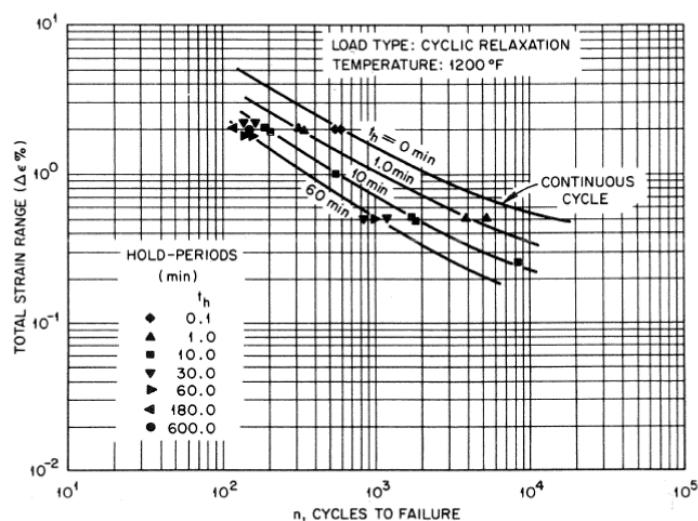
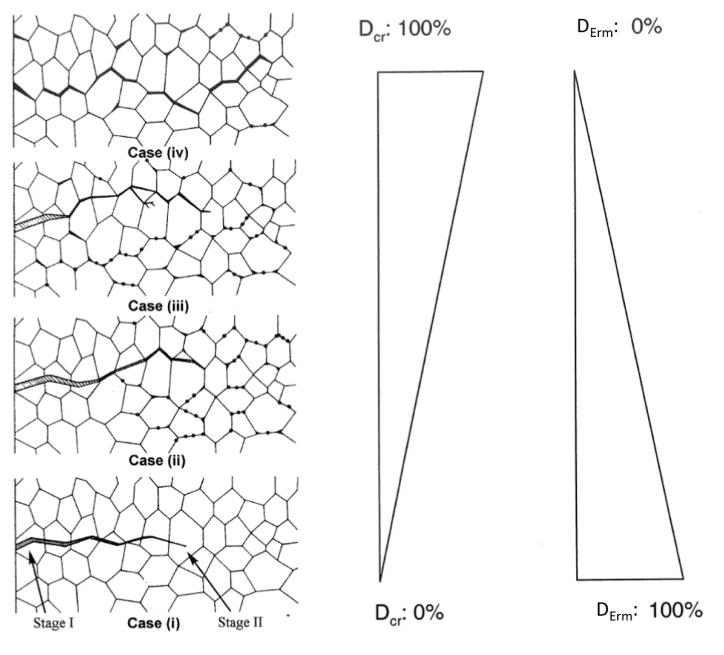


Abb. 38: aus H. Kraus „Creep Analysis“ John Wiley & sons, 1980



- Mechanismen der Interaktion: Von transkristalliner Schädigung (LCF) zu interkristalliner Schädigung (Kriechen)

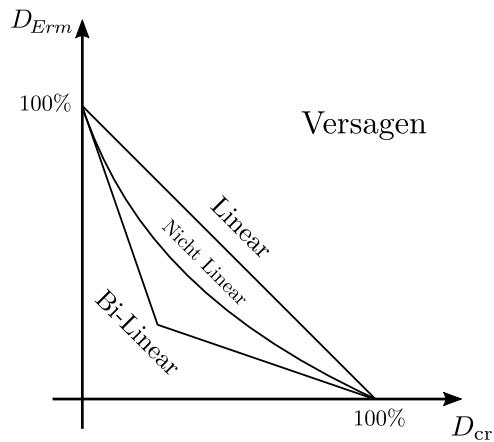


in 2.6.4: Methoden zur Berechnung von D_{cr}

in 2.4: Methode zur Berechnung von D_{Erm}

⇒ Wie kombinieren?

- Auslegung mit sog. „Damage summation diagram“



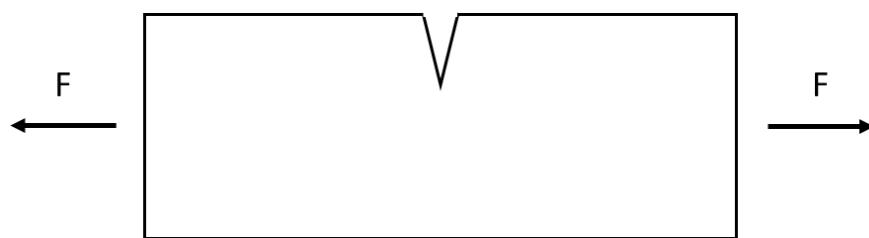
- Je nach Material, Temperatur, Auslegungsmethodik: Lokus für Begrenzung der Kombination D_{cr}, D_{Erm} festgelegt.
- Basiert auf experimentellen Beobachtungen
- Beispiel: Turbinen-Rotor

2.7 Einige Gedanken über Bruchmechanik

Duktile und spröde Materialien können rissartige Defekte enthalten.

- Wenn die Defekte homogen verteilt sind:
 - Auslegung basiert auf wirkenden Spannungen σ_{ij}
 - Insbesondere für spröde Materialien verwendet man die Hypothese der grössten Hauptspannung.
$$\sigma_v = \max\{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}, \text{ siehe 2.3, Seite 50}$$
- Wenn einzelne Defekte/Risse vorhanden sind:
 - ↪ Singularität im Spannungsfeld (siehe 1.2.3)
$$\sigma_x = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cdot f_x(\varphi) + \dots, \quad r \downarrow 0 \quad \Rightarrow \quad \sigma_x \uparrow \infty$$

K_I : Spannungsintensitätsfaktor
- Konsequenzen von Rissen in einer Struktur:



Scheibe mit Riss	\Rightarrow	$F_{zul}^{\text{Riss}} < F_{zul}^{\text{ohne Riss}}$ $N_{zul}^{\text{Riss}}(\Delta F) < N_{zul}^{\text{ohne Riss}}(\Delta F)$ $t_{zul}^{\text{Riss}}(F) < t_{zul}^{\text{ohne Riss}}(F)$
------------------	---------------	--

Reduktion der Festigkeit, Ermüdungsfestigkeit und Kriechfestigkeit der Struktur!

Fragestellungen: Ist die Reduktion quantifizierbar und um wie viel reduzieren sich die Festigkeiten?
Wie dimensioniert man, wenn $\sigma \uparrow \infty$?

„Bruchmechanik“ soll Antworten auf diese Fragen liefern.

Wie kommen Risse in eine Struktur?

1) Durch Zusammenwachsen von mikroskopischen Defekten, wegen:

- exzessiver plastischer Deformation
- Ermüdung
- Kriechen
- Korrosion (stress corrosion cracking)

Prozess der Rissentstehung heißt „Rissinitiierung“.

Hier unterscheidet man 2 Phasen der Auslegung:

- 1a) Auslegung gegen Rissinitiierung (siehe 2.2-2.6)
- 1b) Auslegung gegen überkritisches Risswachstum

2) Durch Herstellungsprozess, z.B.:

- Lunker in Gussteilen
- Eigenspannungsinduzierte Risse in Schweißnähten

Hier entfällt die erste Phase:

- 2b) Auslegung gegen überkritisches Risswachstum (Grenzfall: Sprödbruch)

Gegenstand der Bruchmechanik:

Mechanisches Verhalten (Festigkeit, Deformationen, Lebensdauer) von rissbehafteten Bauteilen voraussagen.

Insbesondere:

- (1) Definition geeigneter Dimensionierungsparameter. (Das heißt Parameter, die eine zuverlässige Übertragung der experimentellen Resultate von Laborproben zu den Maschinenkomponenten ermöglichen.)
- (2) Entwicklung von Methoden, um diese Parameter in den Maschinenkomponenten berechnen zu können.

Hier: (1) und (2) für einen Parameter: Energiefreisetzungsraten

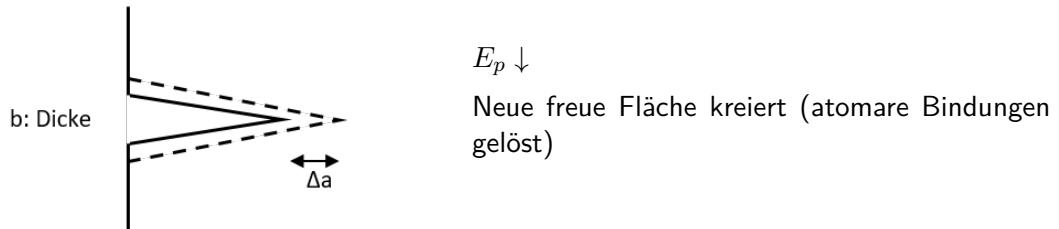
2.7.1 Griffith's Energiekriterium

Auf der Suche nach einem Dimensionierungskriterium.

Idee von Griffith (1920):

Wenn ein Riss wächst, muss die potentielle Energie des Systems abnehmen. Diese „verlorene“ Energie dient der „Zerstörungsarbeit“ an der Riss spitze.

$$\text{„surface energy“: } \gamma \quad \left(\frac{J}{m^2} \right)$$



$$2\gamma_0 \cdot b \cdot \Delta a = -\Delta E_p$$

Bedingung für Risswachstum

$$-\frac{dE_p}{da} \frac{1}{b} \geq 2\gamma_0$$

$-\frac{dE_p}{da} \cdot \frac{1}{b}$: Energiefreisetzungsr ate, „J-Integral“

γ_0 : Materialkonstante

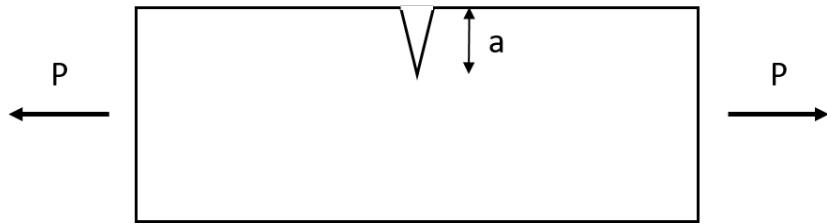
$$K_I = \sqrt{J \cdot E'}$$

Bemerkung: Für lin. elastische Systeme gilt:

$$E' = \begin{cases} E & ESZ \\ \frac{E}{(1 - \nu^2)} & EVZ \end{cases}$$

Muss die potentielle Energie abnehmen?

Zeige mit Energiesätzen!



$$u = C \cdot P \quad (C > 0)$$

für „kleines Risswachstum“:

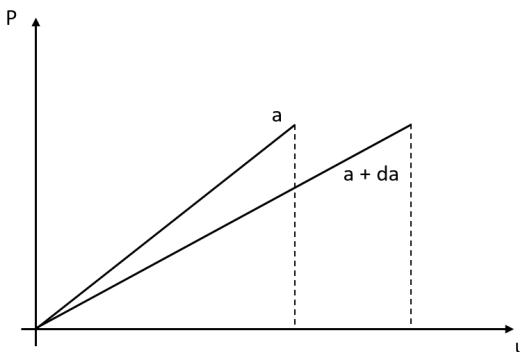
$$C_{a+da} = C + C_{,a} da$$

Wenn $u = C \cdot P$ die exakte Lösung für die Risslänge a ist, dann ist $u = C \cdot P$ eine Lösung für $a + da$ mit:

- zulässigem Verschiebungsfeld
- unzulässigem Spannungsfeld (neue spannungsfreie Rissflanken sind nicht spannungsfrei)

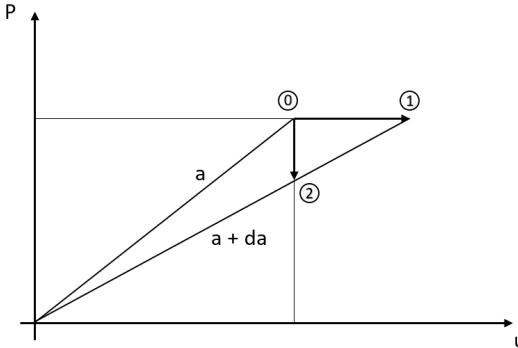
mit SMPE:

$$\begin{aligned} E_p(a + da) &< E_p^*(a + da) = \left(\frac{1}{2} C \cdot P^2 - C \cdot P^2 \right) = E_p(a) \\ \Rightarrow a &\rightarrow a + da \Rightarrow E_p \downarrow \\ \Rightarrow C_{,a} &> 0! \end{aligned}$$



2.7.2 Energiefreisetzungsraten in lastkontrollierten und verschiebungskontrollierten Systemen

- Vorheriges Beispiel: Last P ist vorgegeben. Man könnte auch die Verschiebung u vorschreiben.



$\textcircled{0} \rightarrow \textcircled{1}$ Lastkontrolliert

$\textcircled{0} \rightarrow \textcircled{2}$ Verschiebungskontrolliert

- Unterschied in Energiefreisetzungsraten (Dreieck $\textcircled{0} - \textcircled{1} - \textcircled{2}$) hat Ordnung $(da)^2$

Dennoch sind die zwei Situationen für eine bruchmechanische Analyse grundsätzlich anders! Im Folgenden betrachten wir die zwei Fälle.

Lastkontrolliertes System

$$P = P_K$$

$$u|_a = C \cdot P_K;$$

$$E_p|_a = -\frac{1}{2}C \cdot P_K^2;$$

$$u|_{a+da} = (C + C_{,a} da)P_K$$

$$E_p|_{a+da} = -\frac{1}{2}(C + C_{,a} da)P_K^2$$

$$\text{Energiefreisetzungsrate: } J = -\frac{dE_p}{da} \cdot \frac{1}{b}$$

$$b \cdot J = \frac{1}{2}P_K^2 C_{,a}$$

Die Struktur mit Risslänge a kann belastet werden, bis P_K so gross wird, dass:

$$\frac{1}{2}P_K^2 C_{,a} \cdot \frac{1}{b} \geq 2\gamma_0$$

$$P_{K,\text{kritisch}} = \sqrt{\frac{4\gamma_0 b}{C_{,a}}}$$

- Wenn $P_K \geq P_{K,\text{kritisch}}$ wird der Riss wachsen.

- Wenn

$$\begin{aligned} \frac{dJ}{da} &\geq 0 \quad \text{d.h. } C_{,aa} \geq 0 \Rightarrow n \geq 1 \\ C &= A \cdot a^n + C_0 \\ C_{,a} &= A \cdot n \cdot a^{n-1} \\ C_{,aa} &= A \cdot n \cdot (n-1) \cdot a^{n-2} \end{aligned}$$

wird der Riss **instabil** wachsen \Rightarrow Versagen

Verschiebungskontrolliertes System

$$\begin{aligned} u &= u_K \\ P|_a &= \frac{u_K}{C}; & P|_{a+da} &= \frac{u_K}{C + C_{,a} da} \\ E_p|_a &= \frac{1}{2} \frac{u_K^2}{C}; & E_p|_{a+da} &= \frac{1}{2} \frac{u_K^2}{(C + C_{,a} da)} \end{aligned}$$

$(E_p|_{a+da} - E_p|_a = \Delta U \leftarrow \text{Unterschied in Deformationsenergie})$

$$b J = -\frac{1}{2} u_K^2 \left(\frac{1}{C + C_{,a} da} - \frac{1}{C} \right) \frac{1}{da} \stackrel{da \downarrow 0}{=} \frac{1}{2} u_K^2 \frac{C_{,a}}{C^2}$$

Risswachstum für: $u_K \geq \sqrt{\frac{4\gamma_0 b}{C_{,a}}} C \quad (= P_{K,\text{krit.}} \cdot C)$

$$\begin{aligned} \frac{dJ}{da} &= \frac{1}{2} \cdot b \cdot u_K^2 \cdot \left(\frac{C_{,aa}^2 - 2 \cdot C \cdot C^2_{,a}}{C^4} \right); & C &= A \cdot a^n + C_0 \\ \frac{dJ}{da} &< 0 \quad \left(\rightarrow \frac{C_{,aa} \cdot C^2 - 2 \cdot C \cdot C^2_{,a}}{C^4} < 0 \right) \end{aligned}$$

Für $a^n > \frac{C_0}{A} \cdot \frac{n-1}{n+1}$ (zeige)

Ab einer gewissen Risslänge nimmt die „driving force“ ab, die Rissbildung wird gestoppt.
 → weniger gefährlich!

2.7.3 Berechnung der Energiefreisetzungsrates

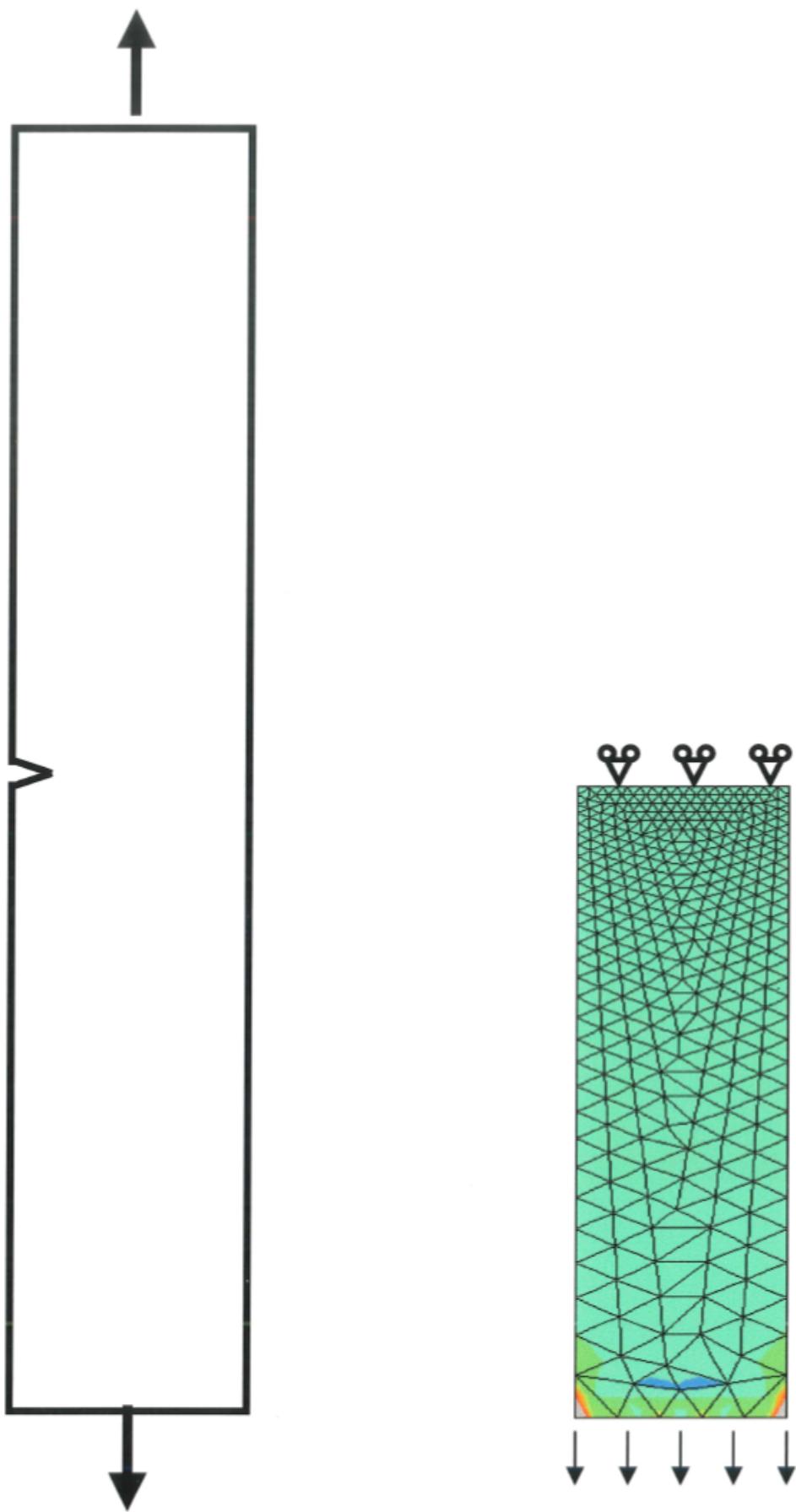
In der vorherigen Betrachtung kann man die kritische Last (P_k) oder Verschiebung (u_k) berechnen, falls folgendes bekannt:

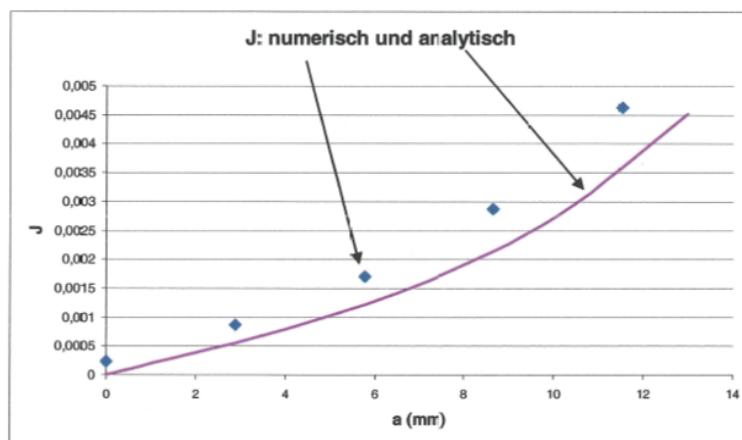
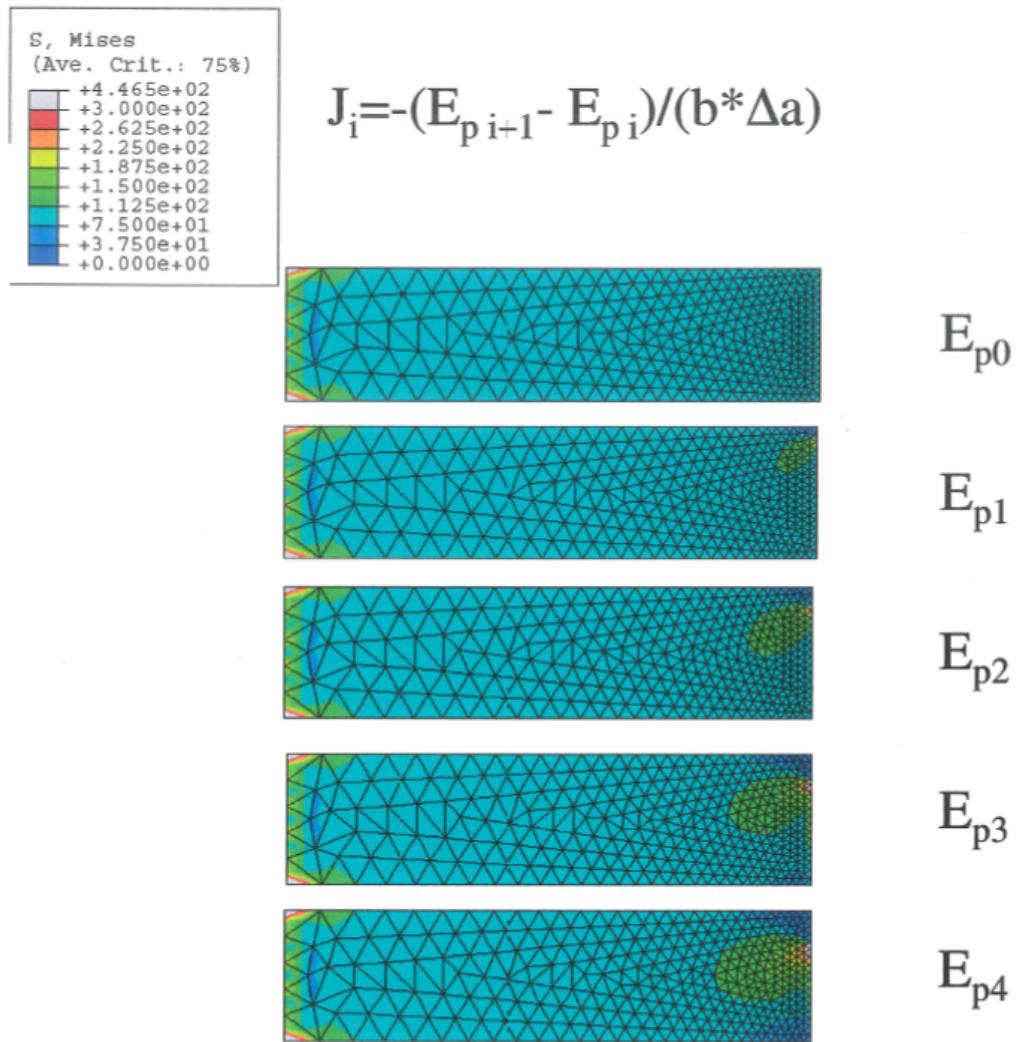
- Materialparameter γ_0 (im allg. gegeben)
- Geometrie (b) (im allg. gegeben)
- $C(a)$ („compliance“, Nachgiebigkeit in Funktion der Risslänge a)

Handbücher enthalten Methoden und Formeln zur Berechnung von $C(a)$, für spezielle Geometrien und Belastungen. Im allgemeinen kann man mit FEM $C(a)$ für alle Geometrien und Belastungen berechnen. Noch einfacher: direkte Berechnung von J mit FE

- FE Modell der Struktur (mit SRB/KRB) mit Riss a
- Löse einige Knoten: $a \rightarrow a + \Delta a$
- Wiederhole Berechnung

$$\text{- Berechne } J = \begin{cases} \frac{(\Delta U - \Delta V)}{\Delta a \cdot b} & \text{LK} \\ \frac{\Delta U}{\Delta a \cdot b} & \text{VK} \end{cases} \quad \leftarrow \text{linear elast. Systeme!}$$





Fehler in J- Berechnung in Abhangigkeit von FE Diskretisierung

$$J = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{b} \cdot P_K^2 * C_{a,a} \quad (\text{Last- kontrolliert})$$

$$J_{FE} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{b} \cdot P_K^2 \cdot \frac{C_{a+\Delta a} - C_a}{\Delta a}$$

$$\text{negativer Fehler} := \frac{J_{FE} - J}{J} = \frac{\frac{C_{a+\Delta a} - C_a}{\Delta a} - C_{a,a}}{C_{a,a}}$$

Taylor- Entwicklung:

$$C_{a+\Delta a} = C_a + C_{a,a} \cdot \Delta a + \frac{1}{2} C_{a,aa} \cdot \Delta a^2 + \frac{1}{6} C_{a,aaa} \cdot \Delta a^3 + \dots$$

$$C_a = C_0 + C_1 \cdot a^n$$

$$C_{a,a} = C_1 \cdot n \cdot a^{n-1} \quad (n > 0, \text{ SMPE})$$

$$C_{a,aa} = C_1 \cdot n(n-1) \cdot a^{n-2}$$

$$C_{a,aaa} = C_1 \cdot n(n-1)(n-2) \cdot a^{n-3}$$

$$\text{mit } \Delta a = \frac{a}{K} \quad (K: \text{Diskretisierungsparameter})$$

$$RE = \frac{1}{2}(n-1) \cdot \frac{1}{K} + \frac{1}{6} \cdot (n-1)(n-2) \cdot \frac{1}{K^2} + O\left(\frac{1}{K^3}\right)$$

Axialbelasteter Stab mit Riss:

a klein: n ≈ 2

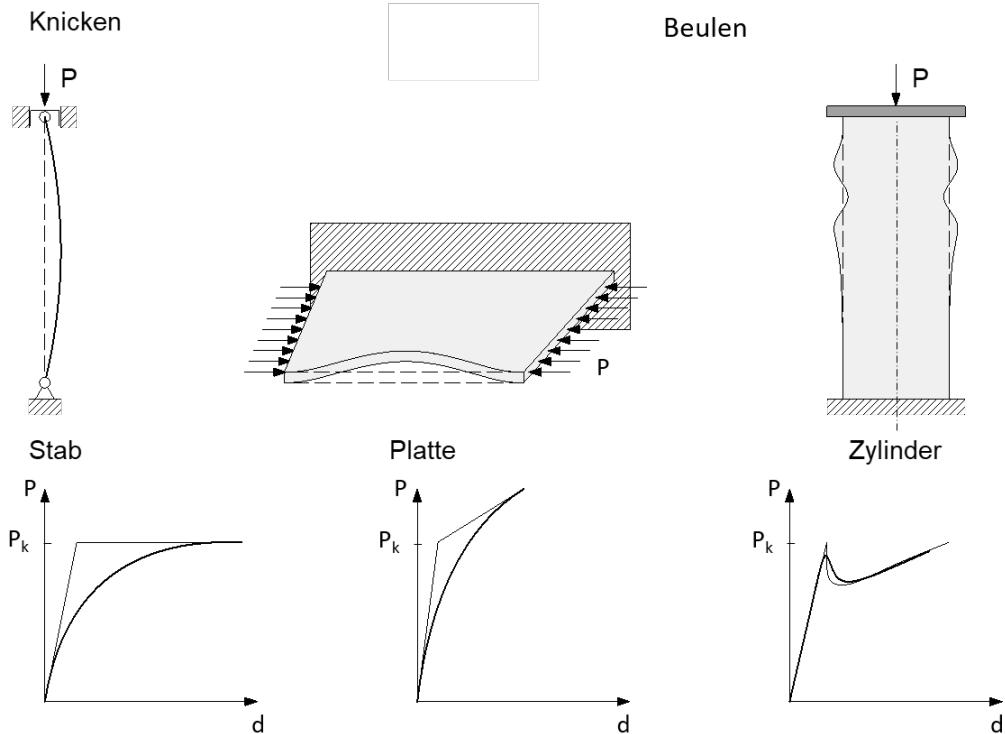
a gross: n ≈ 3

	Netz grob	Netz fein
RE	$\Delta a = a$	$\Delta a = \frac{1}{10}a$
	$K = 1$	$K = 10$
a klein	50%	5%
a gross	130%	10.3%

3 Stabilität

3.1 Einführung

Stabilitätsprobleme:



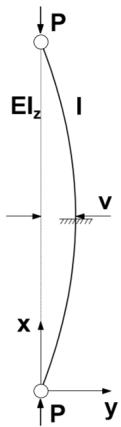
Stetiger oder plötzlicher Übergang zu stabilen aber meistens unerwünschten deformierten Zuständen

Allgemeine Fragen für Stabilitätsanalysen:

- Bei welcher Last findet der Übergang statt?
- Wie sieht das Deformationsbild aus?

3.2 Grundbegriffe am 1D-Problem (Balken)

Balken axial belastet, an den Enden axial geführt (oben) und gelenkig gelagert (unten).



Betrachte Balken im deformierten Zustand.

Für welche Lasten P ist eine nichttriviale Gleichgewichtslage $v \neq 0$ möglich?

$$v'' = \frac{-Pv}{EI_z}; \quad v(0) = 0, v(l) = 0$$

Eigenwertproblem:

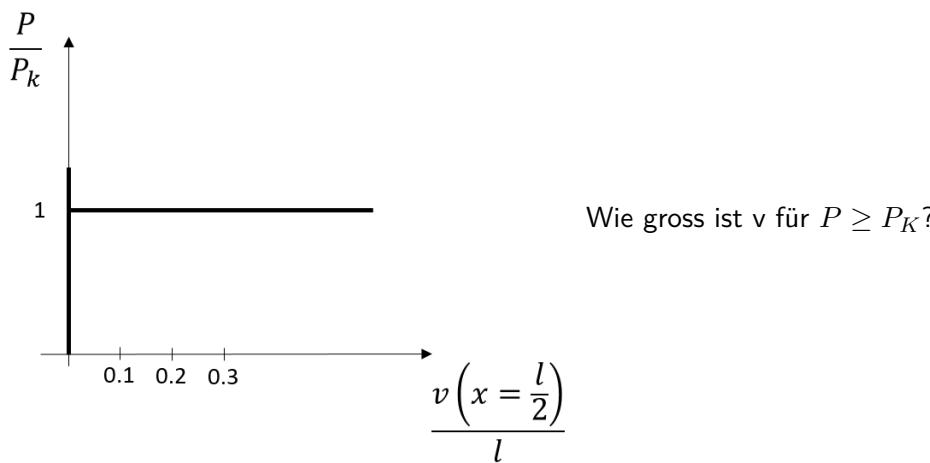
$$v = A \sin(\kappa x) + B \cos(\kappa x) \quad \kappa = \sqrt{\frac{P}{EI_z}}$$

$$\text{RB} \rightarrow \begin{array}{l} A \cdot 0 + B = 0 \\ A \sin(\kappa l) + B \cos(\kappa l) = 0 \end{array} \left. \right\} \text{Homogenes Gleichungssystem}$$

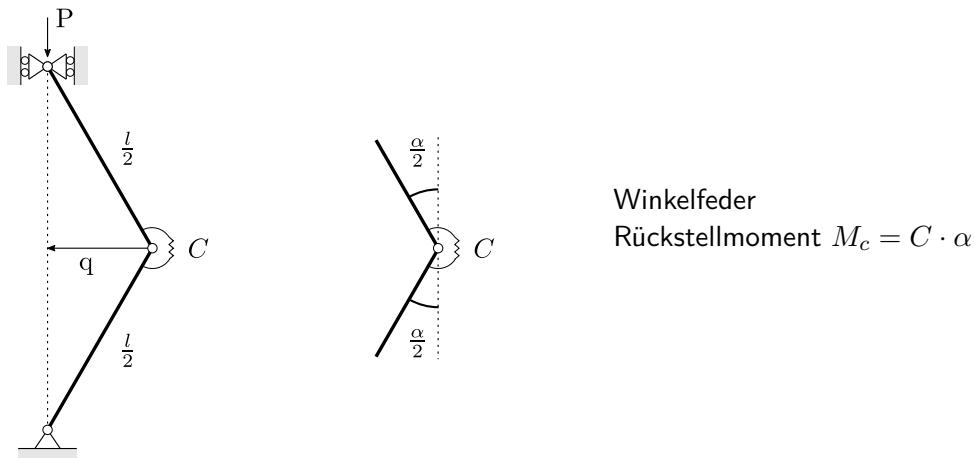
$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \sin(\kappa l) & \cos(\kappa l) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\det = 0 \longrightarrow \kappa l = \pi, 2\pi, \dots, n\pi \quad \kappa^2 = \frac{\pi^2}{l^2}, \frac{4\pi^2}{l^2}, \dots; \quad P_K = \kappa^2 \cdot EI_z$$

$$P_K = \frac{\pi^2 EI_z}{l^2} \quad (\text{kleinster Wert von } \kappa)$$



3.2.1 System mit 1-Freiheitsgrad



a) linearisiert (α klein):

$$\alpha = 2 \cdot \frac{q}{l} = 4 \cdot \frac{q}{l}$$

1-Freiheitsgrad Eigenwertproblem:

$$\frac{4C}{l} \cdot q - P \cdot q = 0$$

$$P < \frac{4C}{l}, \quad q = 0$$

$$P = \frac{4C}{l} = P_K, \quad q \neq 0, q = 0$$

b) für $q > 0$, nichtlinear:

$$\alpha = 2 \cdot \arcsin\left(\frac{q}{l}\right)$$

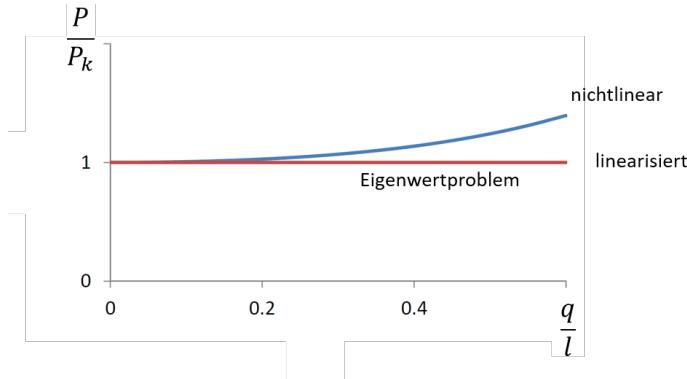
$$2C \cdot \arcsin\left(\frac{2q}{l}\right) - P \cdot q = 0$$

Entwicklung von $\arcsin(\varepsilon)$:

$$\arcsin(\varepsilon) = \varepsilon + \frac{1}{6}\varepsilon^3 + \frac{3}{40}\varepsilon^5 + \dots$$

$$\rightarrow 2C \cdot \left(\frac{2q}{l} + \frac{4}{3}\left(\frac{q}{l}\right)^3 + \frac{12}{5}\left(\frac{q}{l}\right)^5 + \dots \right) - P \cdot q = 0$$

$$q \neq 0 \quad P = P_K \left(1 + \frac{2}{3}\left(\frac{q}{l}\right)^2 + \frac{6}{5}\left(\frac{q}{l}\right)^4 + \dots \right)$$



→ Gleichgewicht am deformierten System (NL)

linearisierte Betrachtung → kritische Last
("kleine Deformationen")

nicht lineare Betrachtung → Verhalten nach dem Knicken
("grosse Deformationen")

$$P \geq P_K : \quad q = 0 \text{ oder } q > 0?$$

c) mehr als 1 Ruhelage:

"Verzweigungsproblem" , "Bifurkation"

Stabile oder instabile Ruhelage:

Stabil, falls "kleine" Veränderungen von Geometrie oder Belastung nur "kleine" Modifikationen der Ruhelage hervorrufen.

Aus Sayir, Mechanik 2, 24

Stabilitätssatz von Langrange:

In einer stabilen Gleichgewichtslage hat das Gesamtpotential ein Minimum

$$E_p = U + V$$

E_p : potentielle Energie

U : Deformationsenergie

V : Potential äussere Kräfte

Daraus:

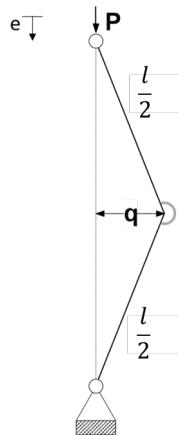
linearisierte Betrachtung:

Energieverfahren zur (approximativen) Bestimmung der kritischen Last.

nicht linearisierte Betrachtung:

Beurteilung der Stabilität einer Ruhelage bei Verzweigungsproblemen.

d) Stabilität der Ruhelagen:



$$e = 2 \cdot \left(\frac{l}{2} - \sqrt{\left(\frac{l}{2}\right)^2 - q^2} \right) = l \cdot \left(1 - \sqrt{1 - 4 \frac{q^2}{l^2}} \right)$$

$$U = \frac{1}{2} C \alpha^2$$

$$V = -P \cdot e$$

$$E_p = \frac{1}{2} \cdot C \cdot 4 \left(\arcsin \frac{2q}{l} \right)^2 - Pl \left(1 - \sqrt{1 - 4 \frac{q^2}{l^2}} \right)$$

$$\varepsilon : \frac{2q}{l}, \quad \text{Entwicklung von } \arcsin(\varepsilon):$$

$$E_p = \frac{P_K l}{2} \left(\varepsilon^2 + \frac{1}{3} \varepsilon^4 + \dots \right) - \frac{Pl}{2} \left(\varepsilon^2 + \frac{1}{4} \varepsilon^4 + \dots \right)$$

$$E'_p = P_K l \varepsilon \left(1 + \frac{2}{3} \varepsilon^2 + \dots \right) - Pl \varepsilon \left(1 + \frac{1}{2} \varepsilon^2 + \dots \right)$$

$$E''_p = P_K l \left(1 + 2\varepsilon^2 + \dots \right) - Pl \left(1 + \frac{3}{2} \varepsilon^2 + \dots \right)$$

$$E'_p = 0 \quad \rightarrow \varepsilon = 0$$

$$P = P_K \left(1 + \frac{1}{6} \varepsilon^2 + \dots \right)$$

$$E''_p \leqslant 0 \quad 1. \quad \varepsilon = 0$$

$$E''_p = (P_K - P)l, \quad > 0 \text{ für } P < P_K$$

$$P > P_K \rightarrow E''_p < 0 \quad \text{instabil}$$

$$2 \quad P = P_K \left(1 + \frac{1}{6} \varepsilon^2 + \dots \right)$$

$$E''_p = P_K l \left(\frac{1}{3} \varepsilon^2 + \dots \right) > 0 \quad \text{stabil}$$

e) Energieverfahren zur Bestimmung der kritischen Last:

$$E_p = U + V$$

linearisierte Betrachtung:

$$E_p = \frac{1}{2}C \cdot 16 \frac{q^2}{l^2} - P \cdot 2 \frac{q^2}{l^2} l$$

für $P < P_K$: $E_p(q=0) = 0$ Minimum

$$\Rightarrow E_p = \frac{8C}{l^2} q^2 - P \frac{2}{l^2} q^2 l > 0, \text{ für } q \neq 0$$

$$\text{Kritisch für } P = \frac{\frac{8C}{l^2} q^2}{\frac{2}{l^2} q^2 l} = 4 \frac{C}{l} = P_K, \quad (E_p = 0)$$

allg. $E_p = U - P \cdot X$

$$P_K = \frac{U}{X} := Q \quad \text{Rayleighscher Quotient}$$

noch allgemeiner:

mit $u_i(x_i)$: zulässiges Deformationsfeld

$$E_p(u_i(x_i)) = U(u_i(x_i)) - P \cdot X(u_i(x_i))$$

$$Q(u_i(x_i)) = \frac{U(u_i(x_i))}{X(u_i(x_i))}$$

$$P_K = \min(Q(u_i(x_i)))$$

Beweis: Satz vom Minimum der potentiellen Energie:

falls \tilde{u}_i das wirkliche Verschiebungsfeld ist

$\rightarrow E_p(\tilde{u}_i)$ **Minimum**, d.h.

$$dE_p(\tilde{u}_i) = dU(\tilde{u}_i) - PdX(\tilde{u}_i) = 0$$

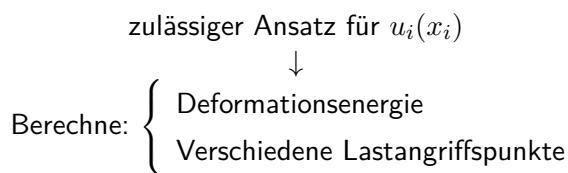
$$P_K = Q(\tilde{u}_i) = \frac{dU(\tilde{u}_i)}{dX(\tilde{u}_i)}$$

$$\begin{aligned} Q &= \frac{U}{X} \xrightarrow{\tilde{u}_i} \partial Q = \frac{1}{X} (\partial U - \frac{U}{X} \partial X) \\ &= \frac{1}{X} (\partial U - Q \partial X) = 0 \end{aligned}$$

$\Rightarrow Q(\tilde{u}_i)$ **Minimum**

$$P_K = Q(\tilde{u}_i) = \min(Q(u_i))$$

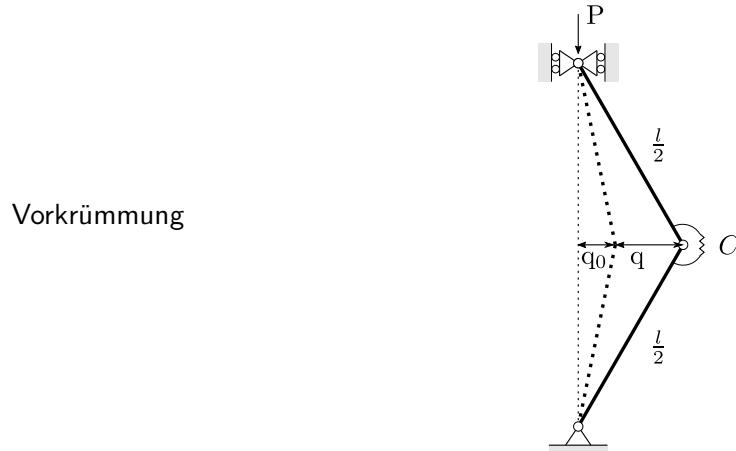
Für jede Struktur (Stab, Platte, Schale, ...):



$$\rightarrow P_K^A \text{ (approximativ)}$$

$$P_K^A \leftrightarrow \tilde{P}_K \iff u_i \leftrightarrow \tilde{u}_i$$

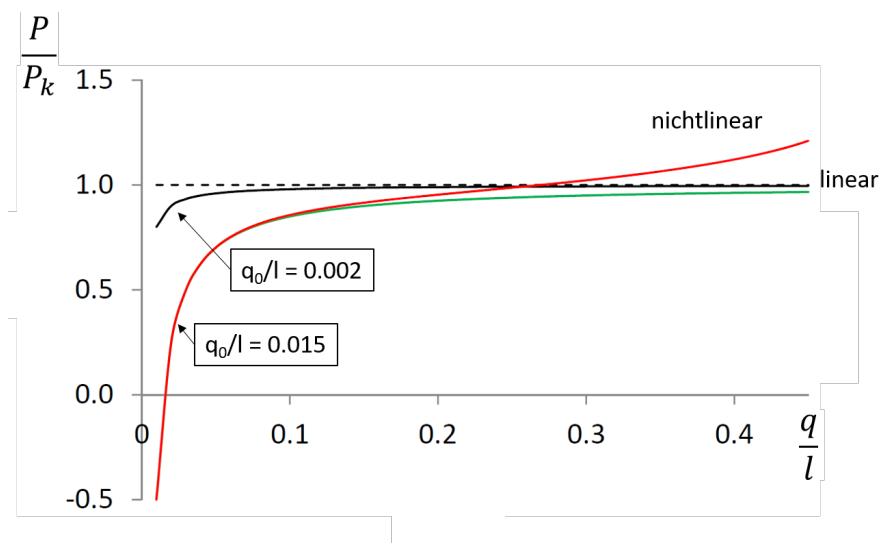
f) Einfluss von Strukturfehlern:



linear: $C \left(\frac{4q}{l} - \frac{4q_0}{l} \right) - Pq = 0$

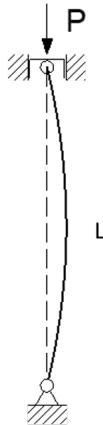
\rightarrow nur 1 Lsg.: $q = \frac{4C q_0}{P_K - P}$ oder $P = P_K \left(1 - \frac{q_0}{q} \right)$

nichtlinear: $2C \left(\arcsin \left(\frac{2q}{l} \right) - \arcsin \left(\frac{2q_0}{l} \right) \right) - Pq = 0$



Keine Bifurkation! Kleine Vorkrümmung führt zu grossen Deformationen für $P \leq P_K$.

3.2.2 Knicken eines Stabes

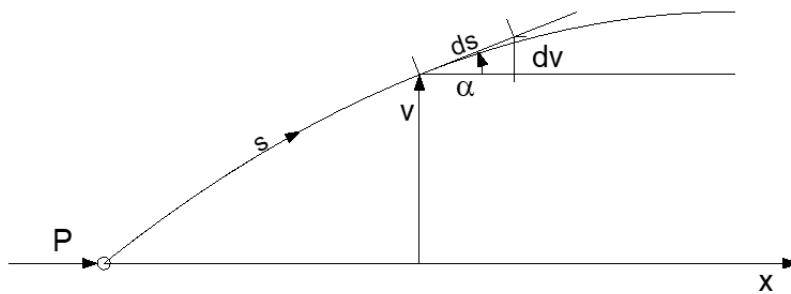


a) Linearisierte Betrachtung:

siehe Kap. 3.2, *Grundbegriffe am 1D-Problem* (Eigenwertproblem)

$$P_K = \frac{\pi^2 EI_z}{L^2}$$

b) nicht linear:



$$\frac{dv}{ds} = \sin(\alpha)$$

$$\frac{d\alpha}{ds} = M_b \cdot \frac{1}{EI_z}$$

$$M_b = -Pv$$

$$\alpha'' + \frac{P}{EI_z} \cdot \sin(\alpha) = 0 \quad \text{Nichtlineare DGL}$$

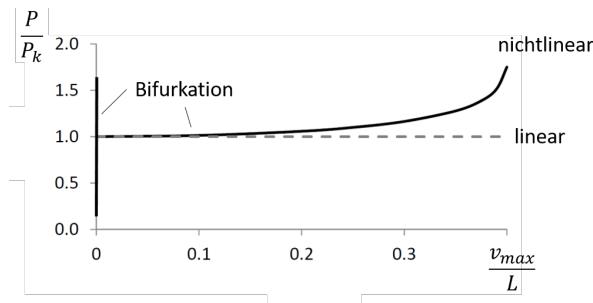
Nicht triviale Lösung: numerisch

$$P_i \rightarrow \alpha_i(s)$$

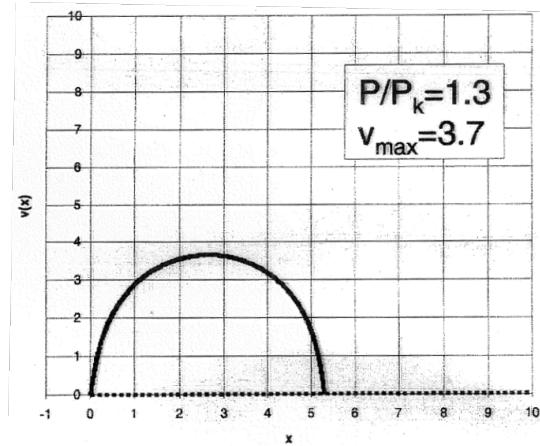
$$v(s) = \int_0^s \sin(\alpha_i(s')) ds'$$

$$v_{\max} = v\left(\frac{L}{2}\right)$$

Diagramm: $\frac{P}{P_k}$ vs $\frac{v_{\max}}{L}$



Beispiel



c,d) Bifurcation: stabile und instabile Ruhelage

für $P > P_k$

$$E_p(v \equiv 0) = 0$$

zu zeigen: $E_p(v > 0) < 0$

$$E_p = U + V$$

Deformationsenergie bei Biegung (Mech.II):

$$U = \int_0^l \frac{1}{2} M_b^2 \cdot \frac{1}{EI} dx \quad \text{LINEAR}$$

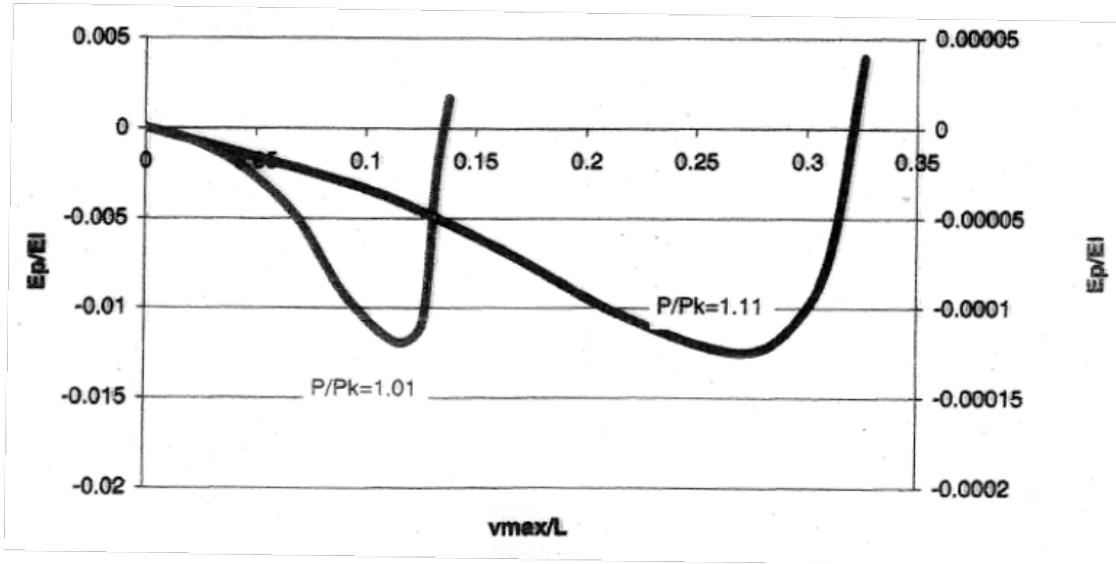
hier: $M_b = \alpha' \cdot EI \quad \rightarrow \quad U = \int_0^l \frac{1}{2} (\alpha'(s))^2 \cdot EI ds$

Verschiebung von P:

$dx = ds \cdot \cos(\alpha) \quad \rightarrow \quad$ deformierte Länge in x:

$$\int_0^l \cos(\alpha(s)) ds$$

$$V = -P \cdot X = -P \cdot (l - \int_0^l \cos(\alpha(s)) ds)$$



e) kritische Last aus Energiemethode

$$P_K = \min(Q(u_i(x_i))) \quad Q = \frac{U}{X} \quad \dots \text{aus linearisierter Betrachtung}$$

Bestimmung geeigneter $u_i(x_i)$?

Das Ritzsche Verfahren

Testfunktionen: $v_i(x) \quad (i = 1, \dots, n)$, welche als "zulässige Deformationen" gelten können

Beispiele: $x(l-x), x^2(l-x)^2, \dots; \sin\left(\frac{i\pi x}{l}\right); \dots$ usw.

Ansatz: $v(x) = q_1 \cdot v_1(x) + \dots + q_n \cdot v_n(x)$

q_1, \dots, q_n : unbekannte Koeffizienten

$v_i(x)$, bekannte (gewählte) Testfunktionen

Einsetzen in $Q(v(x))$: $\Rightarrow Q(q_1, \dots, q_n)$

Funktional $Q(v(x)) \quad \rightarrow$ Funktion $Q(q_1, \dots, q_n)$

∞ Freiheitsgrade \rightarrow endliche Freiheitsgrade

Bestimmung der q_i :

$$\boxed{\frac{\partial Q}{\partial q_i} = 0}$$

$$\boxed{P_K \leq Q(q_1, \dots, q_n)}$$

Am Beispiel (linearisierte Betrachtung)

Ansatz:

$$v(x) = a \cdot (Lx - x^2) + b \cdot \sin\left(3 \frac{\pi x}{L}\right)$$

$$\begin{array}{l} v(0) = 0 \\ v(L) = 0 \end{array} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \text{Ja!}$$

$$U = \frac{1}{2} EI \int_0^L (v'')^2 dx$$

$$X = L - \int_0^L \cos(\alpha(s)) ds$$

$$\cos(\alpha) = \sqrt{1 - \sin^2(\alpha)} = \sqrt{1 - (v')^2} \approx 1 - \frac{1}{2}(v')^2 + \dots$$

$$\rightarrow X \approx \frac{1}{2} \int_0^L (v')^2 dx$$

$$Q(a, b, EI, L) = \frac{U}{X}$$

$$\begin{array}{l} Q_{,a} = 0 \\ \text{oder} \\ Q_{,b} = 0 \end{array} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ a(b) \end{array} \right\}$$

$$\text{numerische Auswertung: } Q = P_K^{app} = 11.05 \frac{EI}{L^2}$$

$$P_K = \pi^2 \frac{EI}{L^2} < P_K^{app}$$

$$\text{mit } v = a \cdot (Lx - x^2) \quad \rightarrow \quad P_k^{app} = 12 \frac{EI}{L^2}$$

$$v = a \cdot (Lx - x^2) + bx^2(L - x)^2$$

$$\hookrightarrow P_K^{app} = 9.87 \cdot \frac{EI}{L^2} \quad (\pi^2 = 9.8696)$$