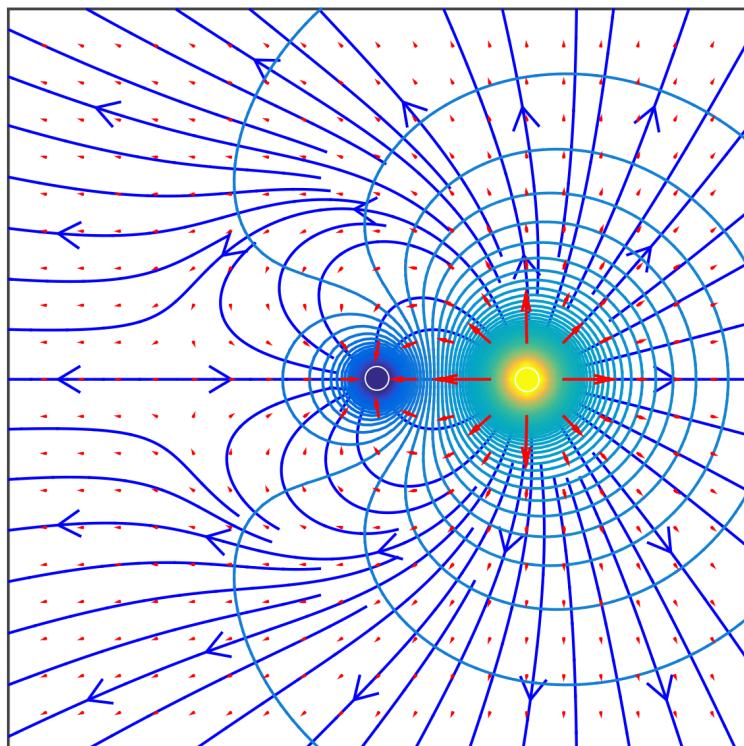


Physik I

Vorlesung gehalten an der ETH Zürich

Prof. Christian Degen

HS 2020



4. September 2020

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung	1
1.1 Die Physik als Naturwissenschaft	1
1.2 Aufbau der Vorlesung	2
2 Elektrizität	5
2.1 Elektrische Felder	5
2.1.1 Elektrische Ladung	5
2.1.2 Elektrostatische Kraft (Coulombkraft)	6
2.1.3 Elektrisches Feld	8
2.1.4 Feldlinien	8
2.1.5 Elektrischer Dipol	9
2.1.6 Elektrischer Fluss und Gesetz von Gauss	12
2.1.7 Beispiele: Elektrisches Feld von Kugel, Platte und Draht	15
2.2 Potential und Spannung	17
2.2.1 Elektrostatische Energie, Potential und Spannung	17
2.2.2 Feldgleichungen der Elektrostatik	18
2.2.3 Leitende Körper	19
2.2.4 Beispiele von Ladungsverteilungen leitender Körper	20
2.2.5 Influenz und Abschirmung	21
2.2.6 Prinzip der Spiegelladung	22
2.3 Dielektrika	25
2.3.1 Der Kondensator	25
2.3.2 Der Kondensator mit Dielektrikum	27
2.3.3 Elektrische Polarisation	29
2.4 Elektrischer Strom	33

2.4.1	Elektrischer Strom	33
2.4.2	Ursache des elektrischen Stroms	33
2.4.3	Elektrischer Widerstand	34
2.4.4	Elektrische Leistung	35
3	Magnetismus	37
3.1	Magnetfelder	37
3.1.1	Allgemeine Beobachtungen zu Magnetfeldern	37
3.1.2	Biot-Savart Gesetz	38
3.1.3	Magnetischer Dipol	40
3.1.4	Zylinderspule	42
3.1.5	Gesetz von Gauss für Magnetfelder	43
3.1.6	Durchflutungsgesetz	44
3.1.7	Lorentzkraft und Ampere'sches Gesetz	45
3.1.8	Anwendung: Halleffekt	47
3.2	Eigenschaften des Magnetismus	48
3.2.1	Magnetisierung	48
3.2.2	Magnetische Kräfte	49
3.2.3	Atomarer Ursprung des Magnetismus	50
3.2.4	Oberflächenströme	52
3.2.5	Grundbegriffe des Ferromagnetismus	56
3.3	Magnetische Induktion	59
3.3.1	Faraday'sches Induktionsgesetz	59
3.3.2	Lenz'sche Regel	61
3.3.3	Induktivität	64
3.3.4	Energie des Magnetfeldes	64
3.4	Maxwell'sche Gleichungen	65
3.4.1	Die Maxwell'schen Gleichungen	66
3.4.2	Maxwell'scher Verschiebungsstrom	67
3.4.3	Elektromagnetisches Nah- und Fernfeld	69
3.4.4	Elektromagnetische Wellen	70

4 Licht und Wellen	73
4.1 Grundlagen der Wellenlehre	73
4.1.1 Die eindimensionale Wellengleichung	73
4.1.2 Harmonische Wellen	74
4.1.3 Superpositionsprinzip	76
4.1.4 Energie, Leistung und Intensität	78
4.1.5 Wellenimpedanz	79
4.1.6 Dispersion	80
4.1.7 Absorption	81
4.1.8 Dreidimensionale Wellen	82
4.2 Reflexion und Transmission	85
4.2.1 Wellenausbreitung durch eine Grenzfläche	85
4.2.2 Reflektierte und transmittierte Leistung	86
4.2.3 Spezialfälle	87
4.3 Stehende Wellen	88
4.3.1 Selbstüberlagerung	88
4.3.2 Stehende Wellen	89
4.3.3 Eigenfrequenzen	90
4.4 Akustische Wellen	91
4.4.1 Akustische Wellengleichung	91
4.4.2 Akustische Impedanz, Schallleistung und Schallpegel	93
4.4.3 Schallausbreitung in Rohren	93
4.4.4 Dopplereffekt und Überschall	95
4.5 Elektromagnetische Wellen	98
4.5.1 Wellengleichung für elektromagnetische Wellen	98
4.5.2 Elektromagnetische Wellen im Vakuum	99
4.5.3 Das elektromagnetische Spektrum	100
4.5.4 Der Brechungsindex	100
4.5.5 Lambert-Beer-Gesetz	102
4.5.6 Reflexion an einer Metalloberfläche	103
4.6 Brechung	107
4.6.1 Ebene Wellen an Grenzflächen unter einem Winkel	107
4.6.2 Reflexions- und Brechungsgesetz	108

4.6.3	Totalreflexion	110
4.6.4	Evaneszenz	111
4.7	Polarisation	113
4.7.1	Polarisation	113
4.7.2	Reflexion und Transmission unter einem Winkel	115
4.7.3	Polarisationsfilter	118
4.7.4	Doppelbrechung	118
4.7.5	Systeme mehrerer Polarisatoren	121
4.8	Interferenz	122
4.8.1	Kohärenz	122
4.8.2	Superposition von zwei kohärenten Wellen	123
4.8.3	Michelson-Interferometer	124
4.8.4	Interferenz an dünnen Filmen	125
4.8.5	Interferenz am Doppelspalt	127
4.8.6	Interferenz am Mehrfachspalt	128
4.9	Beugung	130
4.9.1	Beugung am Spalt	130
4.9.2	Beugung am Mehrfachspalt	130
4.9.3	Beugung an einer allgemeinen Blende	131
4.9.4	Beugung an Lochblende und Auflösungsvermögen	132
A	Symbole	135
B	Mathematische Formeln	137

Danksagung

Besonderer Dank gilt:

- Herrn Prof. C. Degen und Herrn Prof. W. Wegscheider, auf deren Vorlesungszyklus Physik I und II dieses Skript beruht.
- Herrn Dr. W. Stumpf, der das Skript in L^AT_EX übertragen und die Abbildungen nachbearbeitet hat.

Zum Skript

Dieses Skript stellt kein Lehrbuch dar, sondern eine Zusammenfassung der Themen zur Vorlesung, wie sie im Unterricht präsentiert werden. Das Skript ist der „rote Faden“ der Vorlesung, *es ersetzt jedoch kein Lehrbuch!* Der Aufbau des Skripts folgt mehrheitlich dem Lehrbuch von F. Kuypers, und teilweise P. Tipler. Besorgen Sie sich eines der beiden Bücher, und lesen Sie es parallel zur Vorlesung. Zu jedem Kapitel im Skript ist das entsprechende Kapitel in den beiden Lehrbüchern angegeben. Ohne Lehrbuch und nur Anhand des Skripts wird es schwierig sein, den Stoff zu meistern.

Literaturangaben

Literaturangaben beziehen sich auf die folgenden zwei Lehrbücher. Die beiden Lehrbücher decken den Inhalt von Physik 1 ab. Der „Tipler“ kann auch für Physik 2 verwendet werden. Die Literaturangaben sind zum einfachen Quervergleich angegeben, verbindlicher Lernstoff sind jedoch das Skript und die Übungen.

*Friedhelm Kuypers: Physik für Ingenieure und Naturwissenschaftler
Band 2: Elektrizität, Optik, Wellen (3. Auflage), 2012, 436 Seiten.
ISBN-13: 978-3527411443*

*Paul A. Tipler, Gene Mosca: Physik für Wissenschaftler und Ingenieure
Spektrum Akademischer Verlag (6. Deutsche Auflage), 2009, 1636 Seiten.
ISBN: 382741945X*

Experimenthinweise

Hintergrundinformationen zu den Vorlesungsexperimenten sind auf
<http://experimente.phys.ethz.ch/>

(Tab: Vorlesungsexperimente) zu finden. Die Experimenthinweise in der PDF Version des Skripts sind verlinkt.

Kapitel 1

Einleitung

1.1 Die Physik als Naturwissenschaft

Die Physik hat ihren Ursprung beim griechischen Philosophen Aristoteles, der sich in einem seiner Hauptwerke mit Naturvorgängen beschäftigt. Die fundamentale Physik als „Naturlehre“ versucht alle natürlichen Phänomene zu verstehen. Ausgehend von Naturbeobachtungen mit Hilfe unserer Sinnesorgane oder mittels physikalischer Instrumente (Mikroskope, Teleskope, Beschleuniger etc.) bzw. getrieben durch unsere Neugier, entwickelt sich eine wissenschaftliche Fragestellung. Meist ist das beobachtete Phänomen, d.h. die Realität sehr komplex und zur ihrer Beschreibung wird ein vereinfachendes Modell abstrahiert. Im Rahmen dieser Modellbildung entstehen unterschiedliche Arbeitshypothesen, welche durch Experimente verifiziert werden müssen. Diese Experimente können vereinfachende „Nachstellungen“ der Natur sein, welche im Labor durchgeführt werden, oder weitergehende Beobachtungen von Naturvorgängen (wie etwa in der Astrophysik). Wird ein Modell im Experiment bestätigt so liefert die mathematische Beschreibung des Modellbildes eine gesicherte physikalische Theorie bzw. ein Naturgesetz. Dieses lässt wiederum Vorhersagen auf die Realität, also auf weitere Naturphänomene zu. Das Experiment alleine entscheidet über die Validität einer physikalischen Theorie. Oft kommt es bei der Abstraktion im Rahmen der Modellbildung zu Vereinfachungen, welche nur unter gewissen Voraussetzungen gültig sind und bei weitergehenden Experimenten/Naturbeobachtungen werden Abweichungen zur Theorie festgestellt. Dies führt dann zu Modifikationen/Erweiterungen der physikalischen Theorie. Ein Beispiel hierzu ist etwa die klassische Mechanik welche nur im Grenzfall kleiner Geschwindigkeiten gültig ist und im allgemeineren Fall durch die spezielle Relativitätstheorie ersetzt werden muss. Es kann demnach keine allgemeingültige physikalische Theorie zur Beschreibung der Natur geben. Experimentelle Resultate erfordern vielmehr eine kontinuierliche Weiterentwicklung des, einer physikalischen Theorie zugrunde liegenden, Modells.

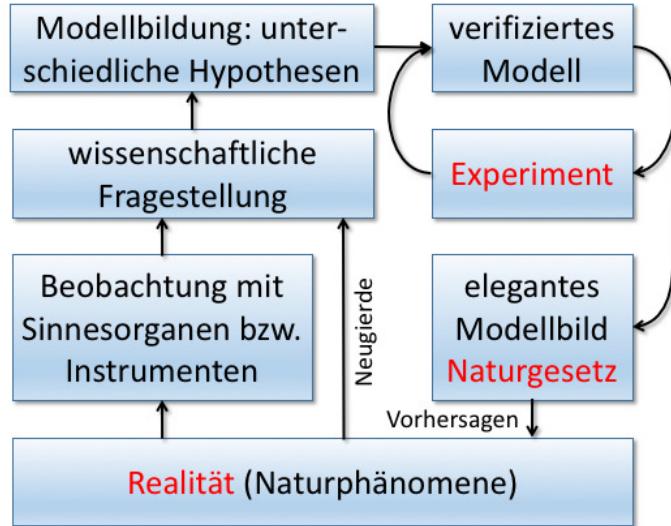


Abbildung 1.1: Methode des wissenschaftlichen Denkens (nach Demtröder, Experimentalphysik 1)

1.2 Aufbau der Vorlesung

Die Vorlesung lässt sich grob in zwei Themenkomplexe einteilen, der Elektrizitätslehre und der Optik und Wellenlehre.

Im ersten Teil der Vorlesung (Kap. 2 und 3) werden wir die Kraftwirkungen zwischen ruhenden und bewegten elektrischen Ladungen betrachten. Die ersten drei Unterkapitel (Kap. 2.1, 2.2 und 2.3) behandeln die Elektrostatik, das heisst, elektrische Felder und Kraftwirkungen, die von ruhenden Ladungen ausgehen. Unterkapitel 2.4 beschreibt elektrische Ströme. In Kapitel 3 wird der Magnetismus eingeführt. Die Unterkapitel 3.1 und 3.2 behandeln die Magnetostatik. Hier werden wir Magnetfelder und magnetische Kraftwirkungen berechnen, die von konstanten elektrischen Strömen oder von magnetischen Materialien ausgehen. Unterkapitel 3.3 zeigt, wie dynamische Magnetfelder ihrerseits elektrische Felder und Ströme induzieren können. Unterkapitel 3.4 fasst den ersten Teil zusammen und zeigt, wie die verschiedenen Gesetze des Elektromagnetismus zusammenhängen. Dazu werden wir die Maxwell'schen Gleichungen verwenden.

Der zweite Teil der Vorlesung (Kap. 4) gibt eine Einführung in die Wellenlehre, mit einem speziellen Fokus auf elektromagnetischen Wellen. In den ersten drei Unterkapiteln (Kap. 4.1–4.3) werden die grundlegenden Eigenschaften von Wellen, die Reflexion von Wellen an Mediengrenzen, und das Auftreten von stehenden Wellen besprochen. Unterkapitel 4.4 behandelt akustische Wellen und akustische Phänomene. Unterkapitel 4.5 beschreibt die Grundlagen der elektromagnetischen Welle. In den Unterkapiteln 4.6–4.9 werden schliesslich die Wellenphänomene der Brechung, Totalreflexion, Evaneszenz, Polarisation, Inter-

ferenz und Beugung anhand der elektromagnetischen Welle besprochen. Diese sind zwar allgemein gültig, aber für elektromagnetische Wellen besonders wichtig.

Kapitel 2

Elektrizität

In Kapitel 2.1, 2.2 und 2.3 werden elektrische Felder behandelt, welche von elektrischen Ladungen ausgehen. Kapitel 2.1 diskutiert statische Ladungsverteilungen, Kapitel 2.2 diskutiert bewegliche Ladungsverteilungen in leitenden Körpern, und Kapitel 2.3 betrachtet den Einfluss elektrischer Felder auf allgemeine Materialien (sogenannte „Dielektrika“). Kapitel 2.4 beschreibt elektrische Ströme.

Experiment: Perücke

2.1 Elektrische Felder

Literatur: Kuypers Kap. 17, Tipler Kap. 21,22

2.1.1 Elektrische Ladung

Allgemeine Beobachtungen:

- Es gibt positive (+) und negative (-) Ladungen.
- Ladungen mit gleichem Vorzeichen stoßen sich ab, solche mit ungleichem Vorzeichen ziehen sich an.
- Die (Kraft)wirkung der Ladung ist kugelsymmetrisch.
- Ladung ist erhalten. Ladung kann nicht erzeugt oder vernichtet, sondern nur getrennt werden.
- Es gibt eine kleinstmögliche Einheit der Ladung, genannt Elementarladung (Symbol e). Elektronen und Protonen tragen je eine Elementarladung.

- Bisher wurde keine Ladung ohne Masse gefunden (aber Masse ohne Ladung).

Das Symbol der elektrischen Ladung ist Q , die Einheit ist $[Q] = 1 \text{ Coulomb} = 1 \text{ C} = 1 \text{ A s}$. Die Elementarladung ist $e = 1.602 \cdot 10^{-19} \text{ C}$. Die elektrische Ladung ist eine fundamentale Eigenschaft der Materie: Elementarteilchen sind definiert durch ihre Masse und Ladung (und durch ein paar weitere fundamentale Größen wie zum Beispiel dem Eigendrehimpuls).

Experiment: Ladung klebt am Scotchtape

Experiment: Ladung schöpfen

Beispiel: Eine Kugel mit $r = 5 \text{ cm}$ auf $U = 10 \text{ kV}$: Spannung ist $U = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}$, Ladung ist $Q = U4\pi\varepsilon_0 r = 5.6 \cdot 10^{-8} \text{ C}$

2.1.2 Elektrostatische Kraft (Coulombkraft)

Zwischen zwei Ladungen herrscht eine Kraft. Die Kraft, die auf eine „Probeladung“ Q_0 am Ort \vec{r}_0 durch eine zweite Ladung Q_1 am Ort \vec{r}_1 ausgeübt wird, ist (siehe Abb. 2.1):

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} Q_0 Q_1 \frac{\vec{r}_0 - \vec{r}_1}{|\vec{r}_0 - \vec{r}_1|^3} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} Q_0 Q_1 \frac{\vec{e}_r}{r^2} \quad \text{Coulomb'sches Gesetz} \quad (2.1)$$

Hier sind $\vec{e}_r = (\vec{r}_0 - \vec{r}_1)/|\vec{r}_0 - \vec{r}_1|$ der Einheitsvektor, $r = |\vec{r}_0 - \vec{r}_1|$ der Abstand, und $1/4\pi\varepsilon_0 = 8.988 \cdot 10^9 \text{ N m}^2/\text{C}^2$ die Kraftkonstante. ε_0 ist die Dielektrizitätskonstante:

$$\varepsilon_0 = 8.854 \cdot 10^{-12} \frac{\text{C}^2}{\text{N m}^2} \quad \text{Dielektrizitätskonstante} \quad (2.2)$$

Die Kraft \vec{F} heisst Coulombkraft und das Kraftgesetz ist das *Coulombgesetz*. Vergleicht man das Coulombgesetz mit dem Gravitationsgesetz so sieht man, dass die beiden genau dieselbe Form haben. Der einzige Unterschied ist die unterschiedliche Kraftkonstante, und die Tatsache, dass es negative Ladungen, hingegen keine negativen Massen gibt.

Falls mehrere Ladungen vorhanden sind, gilt das *Superpositionsprinzip*:

Die Kraftwirkung von Ladungen kann addiert werden.

Daraus folgt das allgemeine Coulombgesetz:

$$\vec{F} = \frac{Q_0}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{i=1}^N Q_i \frac{\vec{r}_0 - \vec{r}_i}{|\vec{r}_0 - \vec{r}_i|^3} \quad \text{Coulombkraft für } N \text{ Ladungen} \quad (2.3)$$

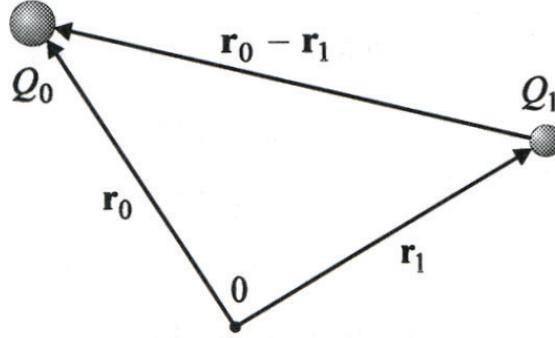


Abbildung 2.1: Coulombkraft zwischen zwei Ladungen Q_0 und Q_1 im Abstand $r = |\vec{r}_0 - \vec{r}_1|$

$$\boxed{\vec{F} = \frac{Q_0}{4\pi\epsilon_0} \int_V dV' \rho(\vec{r}') \frac{\vec{r}_0 - \vec{r}'}{|\vec{r}_0 - \vec{r}'|^3}} \quad \text{Coulombkraft für kontinuierliche Ladungsverteilung} \quad (2.4)$$

Hier ist ρ die (Volumen)Ladungsdichte, mit Einheit $[\rho] = 1 \text{ C/m}^3$. (Hinweis: Integrationsvariablen sind, wenn nötig, mit einem ' bezeichnet. Im obigen Fall bedeutet dies, dass über das dreidimensionale Volumen V integriert wird und \vec{r}' die Integrationsvariable ist).

Experiment: Coulomb'sches Gesetz mit Drehwaage

Experiment: Christbaumkugeln

2.1.3 Elektrisches Feld

Man kann die Coulombkraft, die auf eine Probeladung am Ort \vec{r}_0 wirkt, systematisch für alle \vec{r}_0 ausmessen. Dies ist die Definition des elektrischen Feldes:

Das elektrische Feld ist gleich der Kraft, die auf eine Einheitsladung $Q_0 = 1 \text{ C}$ am Ort \vec{r}_0 wirkt.

$$\boxed{\vec{E}(\vec{r}_0) = \frac{\vec{F}(\vec{r}_0)}{Q_0}} \quad \text{Definition des elektrischen Feldes} \quad (2.5)$$

Das Symbol des elektrischen Feldes ist \vec{E} , und die Einheit ist $[E] = 1 \text{ N/C} = 1 \text{ V/m}$. Das elektrische Feld einer diskreten und einer kontinuierlichen Ladungsverteilung ist:

$$\vec{E}(\vec{r}_0) = \sum_{i=1}^N \vec{E}_i(\vec{r}_0) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N Q_i \frac{\vec{r}_0 - \vec{r}_i}{|\vec{r}_0 - \vec{r}_i|^3} \quad \text{diskrete Ladungsverteilung} \quad (2.6)$$

$$\vec{E}(\vec{r}_0) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V dV' \rho(\vec{r}') \frac{\vec{r}_0 - \vec{r}'}{|\vec{r}_0 - \vec{r}'|^3} \quad \text{kontinuierliche Ladungsverteilung} \quad (2.7)$$

Beispiel: Elektrisches Feld einer Punktladung

Das elektrische Feld einer Punktladung, welche sich am Ort $\vec{r}_1 = \vec{0}$ befindet, ist:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{\vec{F}(\vec{r})}{Q} = \frac{Q_1 \vec{r}}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r}|^3} \quad (2.8)$$

(Ab hier werden wir das Subskript von \vec{r} und Q weglassen).

Experiment: Fischerrute

2.1.4 Feldlinien

Das elektrische Feld ist ein Beispiel eines *Vektorfeldes*. Es hat an jedem Ort einen *Betrag* und eine *Richtung*. Zur anschaulichen Darstellung des elektrischen Feldes werden häufig *Feldlinien* (Kraftlinien) verwendet (siehe Abb. 2.2).

- Feldlinien zeigen entlang der Richtung des elektrischen Feldes.

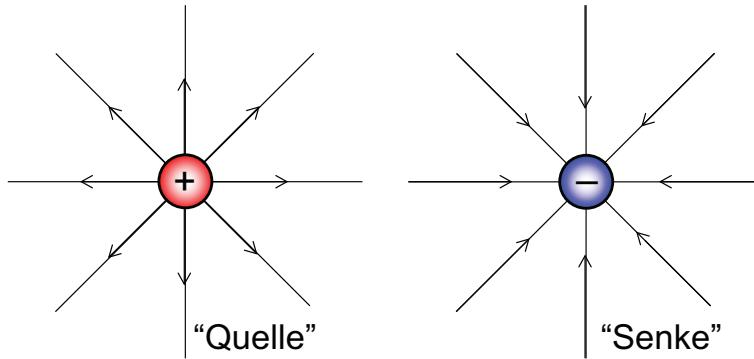


Abbildung 2.2: Feldlinien einer Punktladung

- Elektrische Feldlinien haben immer einen Anfang und ein Ende. Sie beginnen bei positiven Ladungen (Quellen) und enden bei negativen Ladungen (Senken). (In Kap. 3.3 werden wir bei der magnetischen Induktion auch geschlossene elektrische Feldlinien antreffen).
- Feldlinien können sich nicht schneiden, da ein Vektorfeld immer eine eindeutige Richtung hat.
- Je enger die Feldlinien beieinander liegen, desto stärker ist an diesem Ort das elektrische Feld. Die Dichte der Feldlinien (Anzahl Feldlinien pro Einheitsfläche) ist proportional zur Stärke des elektrischen Feldes.
- Die Feldlinienanzahl ist willkürlich, sie ist durch nichts vorgegeben.

Experiment: Elektrische Feldlinien

2.1.5 Elektrischer Dipol

Ein elektrischer Dipol besteht aus zwei Ladungen im Abstand $2\vec{d}$, die den gleichen Betrag $|Q|$, aber das umgekehrte Vorzeichen haben:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[(+Q) \frac{\vec{r} - \vec{d}}{|\vec{r} - \vec{d}|^3} + (-Q) \frac{\vec{r} + \vec{d}}{|\vec{r} + \vec{d}|^3} \right] \quad (2.9)$$

wobei sich die Ladungen am Ort $\pm\vec{d}$ befinden. Die Feldlinien des elektrischen Dipols sind in der Abbildung 2.3 dargestellt.

Als Beispiel berechnen wir nun das elektrische Feld an zwei wichtigen Positionen: (A) Entlang der Achse des Dipols, und (B) senkrecht zur Achse des Dipols. Hier nehmen wir an, dass der Dipol entlang der x-Achse ausgerichtet ist, wie in Abbildung 2.3 dargestellt.

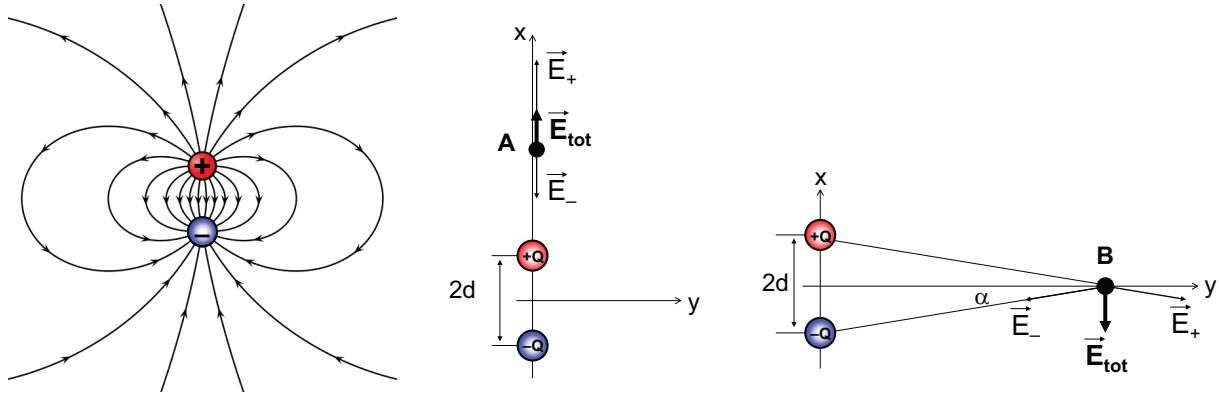


Abbildung 2.3: Links: Feldlinien eines elektrischen Dipols. Mitte: Elektrisches Feld des Dipols (A) entlang und rechts: (B) senkrecht zur Achse

Fernfeld eines Dipols entlang der Achse

Dies ist Punkt (A) in der Abbildung. Wir nehmen an, dass wir uns ausserhalb der beiden Ladungen befinden ($|x| > d$):

$$\begin{aligned} \vec{E}(x) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{Q(x-d)\vec{e}_x}{|x-d|^3} + \frac{-Q(x+d)\vec{e}_x}{|x+d|^3} \right] \\ &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{x-d}{|x-d|} \frac{1}{(x-d)^2} - \frac{x+d}{|x+d|} \frac{1}{(x+d)^2} \right] \vec{e}_x \\ &\stackrel{|x|>d}{=} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{4|x|d}{(x-d)^2(x+d)^2} \vec{e}_x \end{aligned} \quad (2.10)$$

Im Fernfeld ($|x| \gg d$) ist $(x-d)^2(x+d)^2 \approx x^4$ und:

$$\vec{E}(x) \approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{4Qd\vec{e}_x}{|x|^3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2\vec{p}}{|x|^3} \quad (2.11)$$

In dieser Näherung wird der Dipol auch *Punktdipol* genannt, da die beiden Ladungen sehr nahe beisammen liegen. \vec{p} ist das *elektrische Dipolmoment*:

$$\boxed{\vec{p} = Q \cdot 2\vec{d}} \quad \text{elektrisches Dipolmoment} \quad (2.12)$$

Die Einheit des Dipolmoments ist $[\vec{p}] = 1 \text{ Debye} = 3.335 \cdot 10^{-30} \text{ C m}$. Die Richtung des Dipolmoments zeigt definitionsgemäss von der negativen zu der positiven Ladung.

Fernfeld eines Dipols senkrecht zur Achse

Dies ist Punkt (B) in der Figur 2.3:

$$\begin{aligned}\vec{E}(y) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{Q(\vec{e}_y \cos \alpha - \vec{e}_x \sin \alpha)}{y^2 + d^2} + \frac{(-Q)(\vec{e}_y \cos \alpha + \vec{e}_x \sin \alpha)}{y^2 + d^2} \right] \\ &= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2Q\vec{e}_x \sin \alpha}{y^2 + d^2} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q\vec{e}_x}{y^2 + d^2} \frac{2d}{\sqrt{y^2 + d^2}} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2dQ\vec{e}_x}{(y^2 + d^2)^{3/2}}\end{aligned}\quad (2.13)$$

Im Fernfeld ($|y| \gg d$) ist $(y^2 + d^2)^{3/2} \approx |y|^3$ und:

$$\vec{E}(y) \approx -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2Qd\vec{e}_x}{|y|^3} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{p}}{|y|^3} \quad (2.14)$$

Allgemeines Dipolfeld (Fernfeld)

Das elektrische Feld eines Dipols lässt sich auch allgemein an einem Ort \vec{r} angeben, der sich nicht auf einer der beiden Achsen befindet. Da die Herleitung kompliziert ist, geben wir hier nur das Resultat an:

$$\vec{E}(\vec{r}) \approx -\vec{\nabla} \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{|\vec{r}|^3} \right) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{3(\vec{p} \cdot \vec{r})\vec{r}}{|\vec{r}|^5} - \frac{\vec{p}}{|\vec{r}|^3} \right) \quad \text{Fernfeld statischer Dipol} \quad (2.15)$$

(Hinweis: Dies ist der Gradient des elektrostatischen Potentials des Dipols, siehe Kapitel 2.2.1).

Kraftwirkung auf einen Dipol im elektrischen Feld

Ein Dipol erfährt in einem elektrischen Feld \vec{E}_0 ein Drehmoment. (Hinweis: \vec{E}_0 ist ein äusseres elektrisches Feld, und nicht das elektrische Feld, das vom Dipol generiert wird). Um das Drehmoment zu bestimmen, berechnen wir zuerst die Kraft, die auf die beiden Ladungen wirkt (siehe Abbildung 2.4):

$$\vec{F}_+ = Q\vec{E}_0 \quad (2.16)$$

$$\vec{F}_- = -Q\vec{E}_0 \quad (2.17)$$

Da der Abstand der Ladungen konstant ist, wirkt ein Drehmoment um den Mittelpunkt P der beiden Ladungen. Das Drehmoment ist:

$$\begin{aligned}\vec{M} &= \vec{d} \times \vec{F}_+ + (-\vec{d}) \times \vec{F}_- = Q \cdot 2\vec{d} \times \vec{E}_0 = \vec{p} \times \vec{E}_0 \\ \Rightarrow \boxed{\vec{M} = \vec{p} \times \vec{E}_0} \quad &\text{Drehmoment auf einen elektrischen Dipol im äusseren Feld}\end{aligned}\quad (2.18)$$

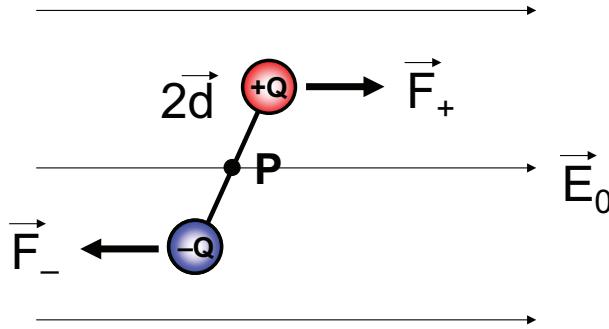


Abbildung 2.4: Kraft auf einen Dipol im elektrischen Feld

Die potentielle elektrostatische Energie E_{el} eines Dipols hängt also von seiner Orientierung ab. Ist er entlang des äusseren Feldes ausgerichtet, so ist seine Energie minimal; ist er antiparallel ausgerichtet, so ist sie maximal:

$$E_{el} = -\vec{p} \cdot \vec{E}_0 \quad \text{Potentielle Energie eines elektrischen Dipols im äusseren Feld} \quad (2.19)$$

Die aufzubringende Arbeit, um den Dipol von einer parallelen in eine antiparallele Position zu bringen, ist also $2\vec{p} \cdot \vec{E}_0$.

Zusammengefasst sind die wichtigsten Eigenschaften eines elektrischen Dipols:

- Die Gesamtladung eines Dipols ist Null. Der Dipol ist *ladungsneutral*.
- Im Fernfeld fällt das elektrische Feld eines Dipols mit r^3 ab, wobei r der Abstand ist.
- In einem äusseren elektrischen Feld erfährt der Dipol ein *Drehmoment*. Er richtet sich *entlang den Feldlinien* aus.

2.1.6 Elektrischer Fluss und Gesetz von Gauss

Wir lernen nun ein nützliches Gesetz kennen, um das elektrische Feld von kontinuierlichen Ladungsverteilungen zu berechnen. Das „Gesetz von Gauss“ ist eine quantitative Formulierung der Regeln zu den Feldlinien, und ist eines der vier fundamentalen Gesetze der Elektrodynamik. Das Gesetz von Gauss ist äquivalent zum Coulomb'schen Gesetz.

Elektrischer Fluss:

Als Vorbereitung definieren wir den elektrischen Fluss:

$$\Phi_E = \int_A \vec{E}(r') \cdot d\vec{A}' \quad \text{Elektrischer Fluss} \quad (2.20)$$

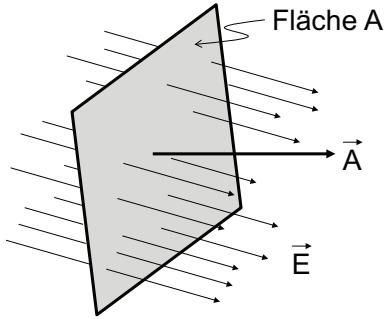


Abbildung 2.5: Elektrischer Fluss

Die Einheit des elektrischen Flusses ist $[\Phi_E] = 1 \text{ N m}^2/\text{C}$. (Hinweis: Dies ist ein zweidimensionales Flächenintegral über die Fläche A . Der Integrand ist $d\vec{A}'$ und der Vektorpfeil bezeichnet die Flächennormale). Im Bild der Feldlinien bedeutet dies:

Der elektrische Fluss ist proportional zur Anzahl Feldlinien, die durch die Fläche A hindurchgehen. (siehe Abb. 2.5)

Im homogenen elektrischen Feld vereinfacht sich das Integral zu:

$$\Phi_E = \vec{E} \cdot \vec{A} \quad (2.21)$$

Gesetz von Gauss:

Der Fluss durch die Oberfläche \vec{A} eines Volumens V ist proportional zur eingeschlossenen Ladung Q :

$$\oint_A \vec{E}(\vec{r}') \cdot d\vec{A}' = \frac{Q}{\epsilon_0} \quad \text{Gesetz von Gauss} \quad (2.22)$$

Die Proportionalitätskonstante hat den Wert $1/\epsilon_0$. (Hinweis: Der Kreis im Integralzeichen bedeutet, dass über eine geschlossene Fläche integriert wird. Die geschlossene Fläche ist immer auch die Oberfläche eines Volumens.)

Im Bild der Feldlinien bedeutet der Satz von Gauss (siehe Abb. 2.6, Gaussfläche 1):

Die in einem Volumen eingeschlossene Gesamtladung ist proportional zur Differenz der Anzahl hinauslaufenden minus der Anzahl hineinlaufenden Feldlinien.

Im Fall von $Q = 0$ gilt (siehe Abb. 2.6, Gaussfläche 2):

Falls die Anzahl Feldlinien, die in ein Volumen hineingehen gleich der Anzahl Feldlinien ist, die aus dem Volumen herausführen, so ist die eingeschlossene Gesamtladung gleich Null.

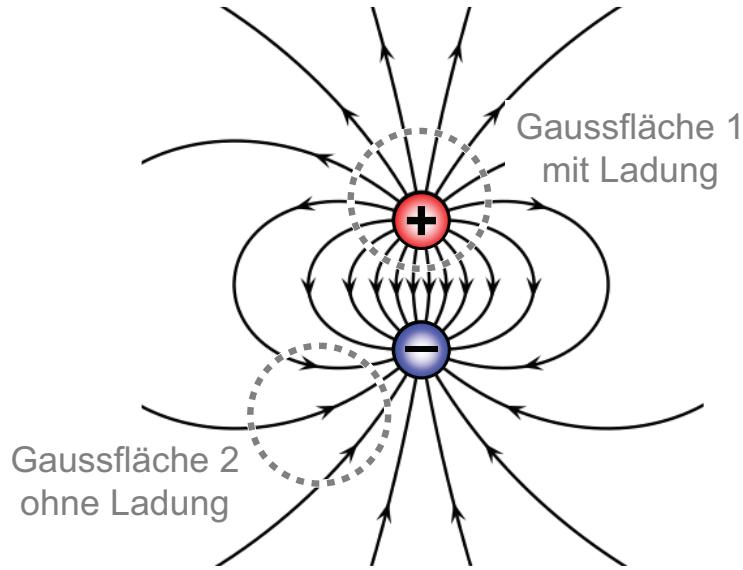


Abbildung 2.6: Satz von Gauss am Beispiel des elektrischen Dipols. Gaussfläche 1 umschliesst eine Ladung, und es führen nur Feldlinien aus dem Volumen heraus. Gaussfläche 2 umschliesst keine Ladung, und die Anzahl Feldlinien, die ins Volumen hinein- und hinausführen, sind gleich.

Wir können das Gesetz von Gauss für Ladungsverteilungen angeben:

$$\oint_A \vec{E}(\vec{r}') \cdot d\vec{A}' = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_i Q_i \text{ diskrete Ladungsverteilung} \quad (2.23)$$

$$\oint_A \vec{E}(\vec{r}') \cdot d\vec{A}' = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho(\vec{r}') dV' \text{ kontinuierliche Ladungsverteilung} \quad (2.24)$$

Das Gesetz von Gauss kann auch in einer kompakten „Differentialform“ ausgedrückt werden, indem man den Satz von Gauss anwendet (siehe Anhang Kap. B), „Mathematische Formeln“):

$$\oint_A \vec{E}(\vec{r}') \cdot d\vec{A}' \stackrel{\text{Satz von Gauss}}{=} \int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{E}(\vec{r}') dV' = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho(\vec{r}') dV' \quad (2.25)$$

Daraus folgt:

$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$

Differentialform des Gesetzes von Gauss (1. Maxwellgleichung) (2.26)

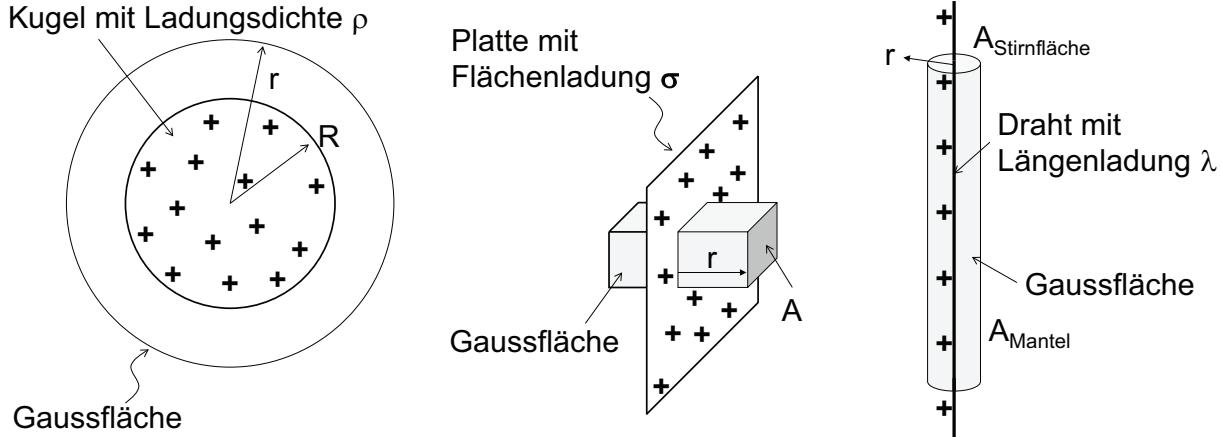


Abbildung 2.7: Links: Elektrisches Feld einer Kugel, Mitte: Elektrisches Feld einer ebenen Platte, rechts: Elektrisches Feld eines langen Drahtes.

Herleitung des Coulombgesetz aus dem Gesetz von Gauss

Das Coulombgesetz und das Gesetz von Gauss sind gleichwertig. Zur Herleitung des Coulombgesetz aus dem Gesetz von Gauss betrachten wir eine separierte Punktladung Q :

$$\oint_A \vec{E}(\vec{r}') \cdot d\vec{A}' = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

und wählen als geschlossene Oberfläche A eine konzentrische Kugelschale mit Radius r . Aufgrund der Kugelsymmetrie ist $|\vec{E}| = E = \text{const.}$ auf dieser Oberfläche und wir können $\vec{E} = E \cdot \vec{e}_r$ schreiben. Somit ist

$$\begin{aligned} \oint_A \vec{E}(\vec{r}') \cdot d\vec{A}' &= E \cdot \oint_A dA' = E \cdot 4\pi r^2 \implies E(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}, \text{ bzw.} \\ &\implies \vec{E}(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{e}_r \end{aligned} \tag{2.27}$$

2.1.7 Beispiele: Elektrisches Feld von Kugel, Platte und Draht

Als Anwendung des Gesetzes von Gauss berechnen wir das elektrische Feld von drei wichtigen Geometrien: Einer Kugel, einer Fläche, und eines Drahtes (siehe Abb. 2.7). Wir nehmen an, dass das Material nichtleitend und dass die Ladung homogen verteilt ist.

Elektrisches Feld einer nichtleitenden Kugel

Wir betrachten eine Kugel mit Radius R , welche mit einer Ladungsdichte ρ geladen ist (siehe Abb. 2.7, links). Ausserhalb der Kugel ($r > R$) gilt:

$$\oint_A \vec{E}(\vec{r}') \cdot d\vec{A}' = \oint_A E(r') dA' = E(r)A = E(r)4\pi r^2 \xrightarrow{\text{Gesetz von Gauss}} \frac{Q_{Kugel}}{\varepsilon_0} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \frac{4\pi R^3}{3}$$

$$\implies E(r) = \frac{Q_{Kugel}}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$
(2.28)

Das Resultat bedeutet, dass eine Kugel im Außenraum dasselbe Feld wie eine Punktladung mit Ladung Q_{Kugel} hat!

Innerhalb der Kugel ($r < R$) ist:

$$\oint_A \vec{E}(\vec{r}') \cdot d\vec{A}' = \oint_A E(r') dA' = E(r)A = E(r)4\pi r^2 \xrightarrow{\text{Gesetz von Gauss}} \frac{\rho}{\varepsilon_0} \frac{4\pi r^3}{3}$$

$$\implies E(r) = \frac{\rho r}{3\varepsilon_0} = \frac{Q_{Kugel}r}{4\pi\varepsilon_0 R^3}$$
(2.29)

Elektrisches Feld einer ebenen Platte

Wir betrachten eine unendlich ausgedehnte Platte mit r senkrecht zur Platte (siehe Abb. 2.7, Mitte):

$$\oint_{A_{Quader}} \vec{E}(\vec{r}') \cdot d\vec{A}' = \int_{A_{Stirnflächen}} E(r') dA' = 2E(r)A \xrightarrow{\text{Gesetz von Gauss}} \frac{\sigma A}{\varepsilon_0}$$

$$\implies E(r) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$
(2.30)

Hier ist σ die (Ober)Flächenladungsdichte, mit Einheit $[\sigma] = 1 \text{ C/m}^2$. Das elektrische Feld der Platte ist also *unabhängig vom Abstand*, und von der Platte weg gerichtet.

Elektrisches Feld eines Drahtes

Wir betrachten einen unendlich langen, geraden Draht mit r senkrecht zum Draht (siehe Abb. 2.7, rechts):

$$\oint_{A_{Zylinder}} \vec{E}(\vec{r}') \cdot d\vec{A}' = \int_{A_{Mantel}} E(r') dA' = E(r)2\pi r L \xrightarrow{\text{Gesetz von Gauss}} \frac{\lambda L}{\varepsilon_0}$$

$$\implies E(r) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}$$
(2.31)

Hier ist λ die Längenladungsdichte, mit Einheit $[\lambda] = 1 \text{ C/m}$.

Experiment: Elektrische Feldlinien

2.2 Potential und Spannung

Literatur: Kuypers Kap. 18, Tipler Kap. 23

In diesem Kapitel betrachten wir Ladungsverteilungen in leitenden Körpern mit beweglichen Ladungen. Dazu werden wir zuerst die elektrische Energie, das elektrische Potential, und die Äquipotentialfläche definieren. Damit werden wir dann das elektrische Feld einiger Ladungsverteilungen berechnen. Als Anwendung werden wir sehen, dass leitende Materialien zur elektrostatischen Abschirmung benutzt werden können.

2.2.1 Elektrostatische Energie, Potential und Spannung

Elektrostatische Energie

Wird eine Ladung Q im elektrischen Feld \vec{E} vom Ort \vec{r}_1 zum Ort \vec{r}_2 verschoben, so muss dazu Arbeit aufgebracht werden. Da das elektrische Feld konservativ ist, hängt die aufgewendete Arbeit nur von Anfangs- und Endpunkt ab, aber nicht vom Weg, den die Ladung nimmt. Die Ladung nimmt dabei potentielle Energie auf:

$$\boxed{E_{el} = - \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = - \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} Q\vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}} \quad \text{Elektrostatische Energie} \quad (2.32)$$

Hier ist $\vec{F}(\vec{r}) = Q\vec{E}(\vec{r})$ die elektrostatische Kraft. Im homogenen elektrischen Feld vereinfacht sich das Integral zu:

$$E_{el} = -Q\vec{E} \cdot (\vec{r}_2 - \vec{r}_1) \quad (2.33)$$

Elektrische Spannung

Die elektrostatische Energie pro Einheitsladung $Q = 1 \text{ C}$ ist die *elektrische Spannung*:

$$\boxed{U = \frac{E_{el}}{Q} = - \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}} \quad \text{Elektrische Spannung} \quad (2.34)$$

Die Einheit der Spannung ist $[U] = 1 \text{ Volt} = 1 \text{ V} = 1 \text{ J/C}$.

Elektrisches Potential

Die elektrostatische Energie (wie oben definiert) und die Spannung sind relative Größen, das heißt, sie geben immer nur den Unterschied zwischen Ausgangspunkt \vec{r}_1 und Endpunkt \vec{r}_2 an. Um Energie und Spannung absolut vergleichen zu können, wählt man

(willkürlich) einen Ort und bestimmt ihn als Energienullpunkt. Dieser Ort ist gemäss Konvention die unendliche Entfernung. Die Spannung relativ zur unendlichen Entfernung heisst elektrisches Potential:

$$\boxed{\Phi(\vec{r}) = - \int_{\infty}^{\vec{r}} \vec{E}(\vec{r}') \cdot d\vec{r}'} \quad \text{Elektrisches Potential} \quad (2.35)$$

Beispiele

Das Potential einer Punktladung Q ist ($r = |\vec{r}|$):

$$\Phi(\vec{r}) = - \int_{\infty}^r d\vec{r}' \cdot \vec{E}(\vec{r}') = - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\infty}^r dr' \cdot \frac{Q}{r'^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r} \quad (2.36)$$

Umgekehrt erhält man das elektrische Feld einer Punktladung aus dem Potential durch:

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\vec{\nabla} \cdot \Phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \vec{e}_r$$

Das Potential eines Punktdipols $\vec{p} = 2Q\vec{d}$ ist:

$$\begin{aligned} \Phi(\vec{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{|\vec{r} - \vec{d}|} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{(-Q)}{|\vec{r} + \vec{d}|} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{|\vec{r} + \vec{d}| - |\vec{r} - \vec{d}|}{|\vec{r} - \vec{d}| |\vec{r} + \vec{d}|} \\ &\stackrel{|\vec{r}| \gg |\vec{d}|}{\approx} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{(|\vec{r}| + \vec{d} \cdot \vec{r}/|\vec{r}|) - (|\vec{r}| - \vec{d} \cdot \vec{r}/|\vec{r}|)}{|\vec{r}|^2} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{2\vec{d} \cdot \vec{r}}{|\vec{r}|^3} \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{|\vec{r}|^3} \end{aligned} \quad (2.37)$$

Das Potential einer kontinuierlichen Ladungsverteilung $\rho(\vec{r})$ ist:

$$\boxed{\Phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V dV' \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}} \quad (2.38)$$

2.2.2 Feldgleichungen der Elektrostatisik

Das elektrische Potential $\Phi(\vec{r})$ hängt wie in den obigen Beispielen gezeigt direkt von der Ladungsdichte $\rho(\vec{r})$ ab. Umgekehrt lässt sich bei gegebenem Potential das elektrische Feld und daraus die zugehörige Ladungsverteilung bestimmen (analog zur Mechanik, wo beim Gravitationsfeld gilt: $\vec{F} = -m \cdot \vec{\nabla}\Phi$):

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\vec{\nabla}\Phi(\vec{r}) = -\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}, \frac{\partial\Phi}{\partial y}, \frac{\partial\Phi}{\partial z}\right) \quad (2.39)$$

$$\begin{aligned} \frac{\rho(\vec{r})}{\varepsilon_0} &= \vec{\nabla} \cdot \vec{E}(\vec{r}) = -\vec{\nabla} \cdot [\vec{\nabla} \Phi(\vec{r})] = -\vec{\nabla}^2 \Phi(\vec{r}) = -\Delta \Phi(\vec{r}) \\ &= -\left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} \right) \end{aligned} \quad (2.40)$$

Dies ist die sogenannte Poissongleichung:

$$\boxed{\frac{\rho(\vec{r})}{\varepsilon_0} = -\Delta \Phi(\vec{r})} \quad \text{Poissongleichung} \quad (2.41)$$

Durch Lösen der Poissongleichung kann man das elektrische Feld und Potential einer beliebigen Ladungsverteilung berechnen. Bisher sind wir jeweils so vorgegangen, dass wir eine Ladungsverteilung angenommen haben (definiert durch die Geometrie, wie zum Beispiel einer homogen geladenen Kugel) und daraus das elektrische Feld und das Potential bestimmt haben.

Dieser Ansatz funktioniert jedoch nur, wenn sich die Ladungen nicht bewegen können. Mobile Ladungen in leitenden Körpern werden sich unter der gegenseitigen Wirkung der elektrostatischen Kraft verschieben. Dadurch ändert sich die Ladungsverteilung, was wiederum das elektrische Feld verändert.

2.2.3 Leitende Körper

Die Situation kommt erst zur Ruhe, wenn keine Ladung mehr eine elektrostatische Kraft erfährt. Dies bedeutet, dass das elektrische Feld für ein leitendes Material über den ganzen Körper gleich Null sein muss. Das hat wichtige Konsequenzen:

- (a) Wird ein leitender Körper in ein elektrisches Feld gebracht, gruppieren sich die Oberflächenladungen so um, dass das elektrische Feld im Innern ausgeglichen wird.
- (b) Alle Ladungen eines leitenden Körpers befinden sich auf der Oberfläche. Im Innern eines leitenden Körpers hat es keine Ladung.
- (c) Das elektrische Feld auf der Oberfläche steht senkrecht zur Oberfläche.
- (d) Das Potential über einen leitenden Körper ist konstant. Die Oberfläche eines leitenden Körpers ist eine *Äquipotentialfläche*.

Daraus ergeben sich folgende *Randbedingungen* für die Oberfläche:

$$\begin{aligned} \vec{n} \cdot \vec{E}(\vec{r}) &= \frac{\sigma(\vec{r})}{\varepsilon_0} & (b) \\ \vec{n} \times \vec{E}(\vec{r}) &= \vec{0} & (c) \\ \Phi(\vec{r}) &= \Phi_0 = \text{konstant} & (d) \end{aligned} \quad (2.42)$$

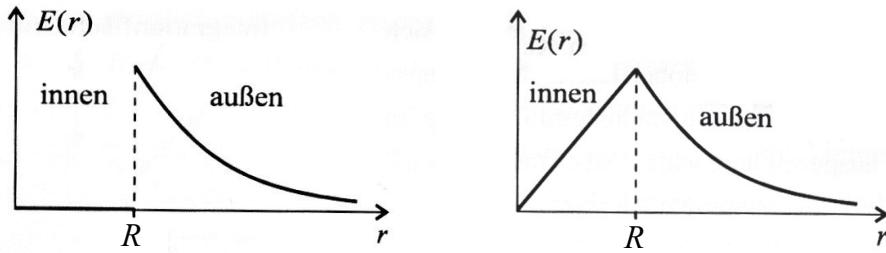


Abbildung 2.8: Links: Elektrisches Feld einer leitenden Kugel und rechts elektrisches Feld einer nichtleitenden Kugel

Hier ist $\sigma(\vec{r})$ die Oberflächenladungsdichte, \vec{n} der Normalenvektor der Oberfläche, und \vec{r} umfasst alle Punkte, die auf der Oberfläche liegen.

Man sieht leicht, dass (b,c) unmittelbar aus (a) folgen: Wenn das Potential auf der Oberfläche konstant ist, so kann es kein tangentiales elektrisches Feld geben, und das senkrechte elektrische Feld ist alleine durch die Oberflächenladung gegeben.

(Hinweis: Exakt formuliert heissen die Bedingungen (b) und (c), dass sich der senkrechte Anteil des elektrischen Feldes an der Oberfläche um den Wert σ/ε ändert, während sich der waagrechte Anteil nicht ändert.)

Experiment: Elektrolytischer Trog (Äquipotentiallinien)

2.2.4 Beispiele von Ladungsverteilungen leitender Körper

Elektrisches Feld einer geladenen leitenden Kugel

Wir betrachten eine leitende Kugel mit Radius R und Gesamtladung Q_{Kugel} . Ausserhalb der Kugel ($r > R$) ist:

$$\begin{aligned} \oint_A \vec{E}(\vec{r}') \cdot d\vec{A}' &= \oint_A E(r') dA' = E(r) A = E(r) 4\pi r^2 \stackrel{\text{Gesetz von Gauss}}{=} \frac{Q_{Kugel}}{\varepsilon_0} \\ \implies E(r) &= \frac{Q_{Kugel}}{4\pi \varepsilon_0 r^2} \end{aligned} \quad (2.43)$$

Dies ist dasselbe Resultat wie bei der nichtleitenden Kugel. Innerhalb der Kugel ($r < R$) ist jedoch:

$$Q = 0 \implies E(r) = 0 \quad (2.44)$$

Im Innern ist das elektrische Feld für eine leitende und eine nichtleitende Kugel also verschieden. Die Feldverteilungen sind in der Abbildung 2.8 dargestellt.

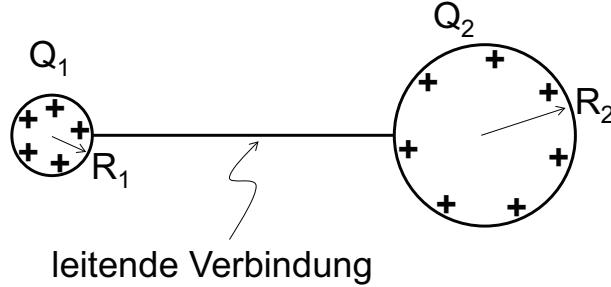


Abbildung 2.9: Zwei verbundene leitende Kugeln

Krümmungsradius

Zwei leitende Kugeln mit Radien R_1 und R_2 seien über einen langen, leitenden Draht miteinander verbunden (siehe Abb. 2.9). Die Kugeln tragen die Ladungen Q_1 und Q_2 , die Gesamtladung sei konstant, und der Abstand zwischen den Kugeln sei so gross, dass elektrostatische Abstossung vernachlässigbar ist. Was ist die Oberflächenladung und das elektrische Feld auf den beiden Kugeln?

Das Potential auf der Oberfläche (und im Innern) ist:

$$\Phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1}{R_1} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_2}{R_2} \quad (2.45)$$

Die Flächenladungsdichte und das elektrische Feld der beiden Kugeln sind:

$$\sigma_1 = \frac{Q_1}{A_1} = \frac{Q_1}{4\pi R_1^2} = \frac{\Phi\epsilon_0}{R_1} \quad \text{und} \quad \sigma_2 = \frac{Q_2}{A_2} = \frac{Q_2}{4\pi R_2^2} = \frac{\Phi\epsilon_0}{R_2} \quad (2.46)$$

$$\left| \vec{E}_1 \right| = \frac{\Phi}{R_1} \quad \text{und} \quad \left| \vec{E}_2 \right| = \frac{\Phi}{R_2} \quad (2.47)$$

Man sieht, dass das elektrische Feld mit engerem Krümmungsradius R zunimmt. Das bedeutet, dass elektrische Durchschläge an Orten mit starker Krümmung auftreten. Dies wird zur kontrollierten Ableitung von Spannungen, z.B. in Blitzableitern, benutzt.

2.2.5 Influenz und Abschirmung

Influenz

Elektrische Leiter verschieben ihre Ladungen immer so, dass das elektrische Feld im Innern gleich Null ist. Dies führt dazu, dass Ladungen in einem leitenden Körper separiert werden können, auch wenn der Körper die Gesamtladung Null hat (siehe Abb. 2.10).

Experiment: Gesetz von Gauss 1

Experiment: Gesetz von Gauss 2

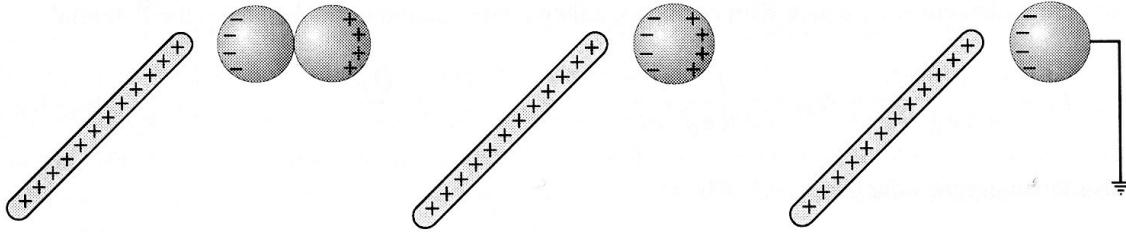


Abbildung 2.10: Ladungstrennung mit Influenz

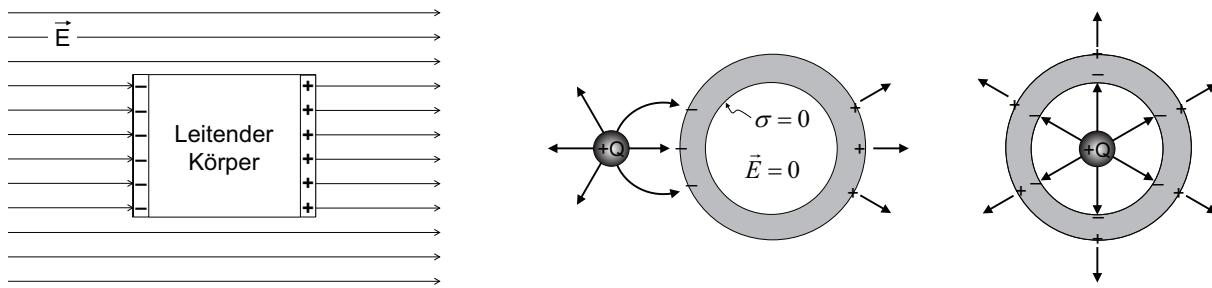


Abbildung 2.11: Links: Faraday-Abschirmung. Rechts: Punktladung ausserhalb und innerhalb einer leitenden Kugel

Abschirmung (Faraday'scher Käfig)

Wird ein leitender Hohlkörper (wie die Hohlkugel in der Abbildung 2.11) in ein elektrisches Feld gebracht, so wird eine Oberflächenladung induziert, und das elektrische Feld im Innern des Leiters verschwindet. Nach dem Gesetz von Gauss bedeutet das gleichzeitig, dass sich im Innern des Leiters keine Ladung befinden darf. Daher erstreckt sich der feldfreie Raum auch über den Hohlraum: Der Innenraum ist elektrostatisch abgeschirmt. Der leitende Hohlkörper wird auch *Faraday'scher Käfig* genannt.

Die Abschirmung funktioniert nur solange, wie sich die Oberflächenladung effizient verschieben kann. Hat ein Faraday'scher Käfig eine Lücke, so kann das elektrische Feld bis auf eine Distanz ähnlich der Lücke eindringen.

Experiment: Faraday-Käfig

Experiment: Feldfreier Raum

Experiment: Bandgenerator

2.2.6 Prinzip der Spiegelladung

Das elektrische Feld von geladenen, leitenden Körpern ist durch die Poissons-Gleichung und die Randbedingungen (Kap. 2.2.3) eindeutig bestimmt. Die Berechnung der Feld-

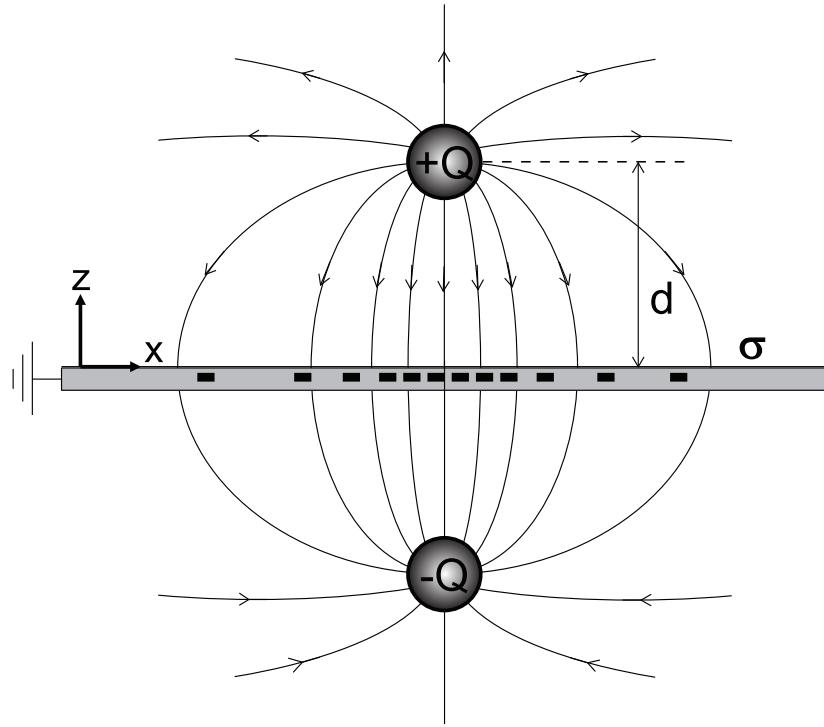


Abbildung 2.12: Punktladung und Spiegelladung einer dünnen Leiterplatte

Verteilung ist aber häufig nur numerisch möglich (z.B. mit finiten Elementen). Für Punktladungen in der Nähe von leitenden Körpern gibt es jedoch eine elegante Methode, die elektrische Feldverteilung abzuschätzen und manchmal explizit zu berechnen. Diese Methode wird das *Prinzip der Spiegelladung* genannt:

Eine Probelaadung induziert auf einem elektrischen Leiter eine Flächenladung, die dasselbe Feld generiert wie eine spiegelbildliche Probelaadung mit entgegengesetztem Vorzeichen. Im Falle mehrerer Probelaadungen überlagern sich die Flächenladungen gemäss dem Superpositionsprinzip.

Als Beispiel berechnen wir im folgenden die Spiegelladung einer Punktladung in der Nähe einer unendlich ausgedehnten leitenden Platte.

Beispiel: Spiegelladung einer Punktladung in der Nähe einer Leiterplatte

Wir betrachten eine Ladung Q im Abstand d einer dünnen Leiterplatte, wie in Abbildung 2.12 dargestellt. Was ist das elektrische Feld direkt unter oder über der Platte?

Das elektrische Feld parallel zur Platte muss Null sein, da die Feldlinien immer senkrecht auf der Oberfläche des Leiters stehen müssen:

$$E_x(x, y, 0) = E_y(x, y, 0) = 0 \quad (2.48)$$

Die vertikale Komponente des elektrischen Feldes verändert sich beim Durchgang durch die Oberfläche um σ/ε_0 , wobei $\sigma = \sigma(x, y)$ die induzierte Oberflächenladung ist. Da die vertikale Komponente unterhalb der Platte ebenfalls gleich Null ist, folgt:

$$E_z(x, y, -0) = \frac{Q(-d)}{4\pi\varepsilon_0(x^2 + y^2 + d^2)^{3/2}} - \frac{\sigma(x, y)}{2\varepsilon_0} = 0 \quad (2.49)$$

(Wir schreiben $z = -0$ um zu verdeutlichen, dass wir uns direkt unter der Platte befinden). Die Oberflächenladung ist also:

$$\sigma(x, y) = \frac{-Qd}{2\pi(x^2 + y^2 + d^2)^{3/2}} \quad (2.50)$$

Daraus folgt für das elektrische Feld direkt über der Leiteroberfläche ($z = +0$):

$$E_z(x, y, +0) = \frac{-Qd}{4\pi\varepsilon_0(x^2 + y^2 + d^2)^{3/2}} + \frac{\sigma(x, y)}{2\varepsilon_0} = \frac{-2Qd}{4\pi\varepsilon_0(x^2 + y^2 + d^2)^{3/2}} \quad (2.51)$$

Dies ist genau das Feld, welches man erwartet, wenn sich anstelle der Flächenladung eine Punktladung $-Q$ am Ort $-d$ befinden würde. Das heisst, die Flächenladung generiert oberhalb des Leiters genau dasselbe elektrische Feld wie eine gespiegelte Punktladung umgekehrten Vorzeichens.

Die induzierte Gesamtladung auf der Oberfläche der Platte ist dabei:

$$Q_{Oberfläche} = -\frac{Qd}{2\pi} \int_x \int_y \frac{dxdy}{(x^2 + y^2 + d^2)^{3/2}} = -\frac{Qd}{2\pi} \cdot \frac{2\pi}{d} = -Q \quad (2.52)$$

Die induzierte Gesamtladung ist also genau gleich gross wie die Punktladung Q und hat das entgegengesetzte Vorzeichen.

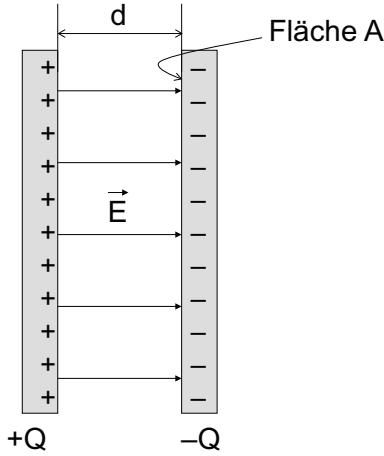


Abbildung 2.13: Plattenkondensator

2.3 Dielektrika

Literatur: Kuypers Kap. 19, Tipler Kap. 24

In diesem Kapitel wird zuerst der Kondensator und die Kapazität als wichtige Anwendung zur Erzeugung von elektrischen Feldern und zum Speichern von Energie besprochen. Danach wird betrachtet, was geschieht, wenn nichtleitende Materialien („Dielektrika“) in das elektrische Feld gebracht werden. Wir werden sehen, dass das Material polarisiert und das elektrische Feld abgeschwächt wird.

2.3.1 Der Kondensator

Eine praktische Anordnung, um elektrische Felder zu erzeugen und deren Einfluss auf Materialien zu messen, ist der *Kondensator*. Ein Kondensator besteht aus zwei Leitern, die sich in Nähe zueinander befinden und eine gleich grosse, aber entgegengesetzte Ladung tragen (siehe Abb. 2.13). Der Kondensator ist also *ladungsneutral*. Der Kondensator ist (neben Spule und Widerstand) eines der wichtigsten Bauelemente in elektrischen Schaltkreisen.

Wir betrachten die Eigenschaften von Kondensatoren im folgenden anhand des *Plattenkondensators*.

Plattenkondensator

Ein Plattenkondensator besteht aus zwei ausgedehnten, parallelen Platten der Fläche A in engem Abstand d , die mit Ladung $+Q$ und $-Q$ geladen sind (siehe Abb. 2.13). Das elektrische Feld zwischen den Platten ist:

$$\vec{E} = \frac{(+\sigma)}{2\epsilon_0}(+\vec{n}) + \frac{(-\sigma)}{2\epsilon_0}(-\vec{n}) = \frac{\sigma}{\epsilon_0}\vec{n} = \frac{Q}{A\epsilon_0}\vec{n} \quad (2.53)$$

\vec{n} ist wiederum die Flächennormale. Man stellt fest, dass das elektrische Feld eines Plattenkondensators im Innern *homogen* (positionsunabhängig) ist. Dies ist enorm wichtig für praktische Messungen in elektrischen Feldern.

Die Spannung über den Platten ist:

$$U = |\vec{E}|d = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}d = \frac{Qd}{A\varepsilon_0} \quad (2.54)$$

Kapazität

Das Verhältnis von gespeicherter Ladung Q zur angelegten Spannung U heisst Kapazität:

$$\boxed{C = \frac{Q}{U}} \quad \text{Kapazität} \quad (2.55)$$

Die Einheit der Kapazität ist $[C] = 1 \text{ C/V} = 1 \text{ Farad} = 1 \text{ F}$. Die Kapazität des Plattenkondensators ist:

$$\boxed{C = \frac{Q}{U} = \frac{A\varepsilon_0}{d}} \quad \text{Kapazität eines Plattenkondensators} \quad (2.56)$$

Experiment: Ausziehen eines Kondensators (1)

Experiment: Ausziehen eines Kondensators (2)

Energie im Kondensator

Kondensatoren können dazu verwendet werden, elektrische Energie zu speichern. Wir berechnen die gespeicherte Energie, in dem wir solange Ladungen auf die beiden Platten aufbringen, bis eine gewünschte Spannung U erreicht ist:

$$E_{el} = \int_0^Q U(Q')dQ' = \int_0^Q \frac{Q'}{C}dQ' = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2} QU = \frac{1}{2} U^2 C \quad (2.57)$$

In einem Plattenkondensator ist:

$$E_{el} = \frac{Q^2 d}{2 A \varepsilon_0} = \frac{U^2 A \varepsilon_0}{2 d} \quad (2.58)$$

Experiment: Kurzschluss mit Kondensatorbank

Experiment: Thomson-Waage

Energiedichte des elektrischen Feldes

Die Energie eines Kondensators skaliert mit der Grösse. Um die Speicherfähigkeit des Kondensators zu bestimmen, kann man deshalb auch die Energiedichte $w = E_{el}/V$ (gespeicherte Energie pro Volumen) betrachten. Für den Plattenkondensator ist dies:

$$w = \frac{E_{el}}{V} = \frac{U^2 A \varepsilon_0}{2d(Ad)} = \frac{U^2 \varepsilon_0}{2d^2} \quad (2.59)$$

Da das elektrische Feld im Innern des Plattenkondensators konstant ist, kann man die Energiedichte in Abhängigkeit des elektrischen Feldes angeben:

$w = \frac{1}{2} \varepsilon_0 |\vec{E}|^2$

Energiedichte des elektrischen Feldes
(2.60)

Man kann zeigen, dass dies eine fundamentale Beziehung ist, die für alle elektrischen Felder (nicht nur für den Plattenkondensator) gilt. Wir werden sie später zur Berechnung der Energie und Leistung einer elektromagnetischen Welle benutzen.

2.3.2 Der Kondensator mit Dielektrikum

Wir betrachten nun, was geschieht, wenn ein Material zwischen die beiden Platten eines Kondensators eingeführt wird. Das „Material“ wird dabei als *Dielektrikum* bezeichnet.

Kondensator mit konstanter Ladung

Zuerst nehmen wir an, dass die Ladung Q auf den Kondensatorplatten konstant ist. Wird nun ein Dielektrikum zwischen die Platten eingeführt, so beobachtet man, dass sich die Spannung über den Platten verringert:

$$U = \frac{U_0}{\varepsilon_r} \quad (2.61)$$

U_0 ist dabei die Spannung vor dem Einbringen des Dielektrikums und U die Spannung nach dem Einbringen des Dielektrikums. Der Verringerungsfaktor ε_r ist die Dielektrizitätszahl. Da das elektrische Feld im Kondensator proportional zur Spannung ist, gilt:

$\varepsilon_r = \frac{|\vec{E}_0|}{|\vec{E}|}$

Dielektrizitätszahl
(2.62)

wobei \vec{E} und \vec{E}_0 das elektrische Feld mit und ohne Dielektrikum ist. Das heisst, dass ein Dielektrikum das elektrische Feld um den Faktor ε_r abschwächt. Wie wir in Kapitel 2.3.3 sehen werden, wird im Material eine elektrische Polarisation induziert, die zu einem

kompensierenden elektrischen Feld führt. Wir werden dabei sehen, dass immer $\varepsilon_r \geq 1$ ist. Die Kapazität mit Dielektrikum ist:

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{Q\varepsilon_r}{U_0} = C_0\varepsilon_r \quad (2.63)$$

Das heisst, die ursprüngliche Kapazität C_0 nimmt um den Faktor ε_r zu. Dies erklärt eine wichtige praktische Bedeutung von Dielektrika: Die Kapazität kann ohne Änderung der Geometrie drastisch erhöht werden.

Experiment: Dielektrikum im Kondensator (1)

Kondensator mit konstanter Spannung

Alternativ kann man die Spannung über den Kondensatorplatten konstant halten (in dem man die Platten mit z.B. einer Batterie verbindet). In diesem Fall erhöht sich die Ladung auf den Platten um ε_r , wenn ein Dielektrikum eingeführt wird.

Experiment: Dielektrikum im Kondensator (2)

Beispiel: Plattenkondensator

Die Spannung über einem Plattenkondensator mit Dielektrikum ist reduziert:

$$U = \frac{U_0}{\varepsilon_r} = \frac{Qd}{\varepsilon_r\varepsilon_0 A} \quad (2.64)$$

Die Kapazität eines Plattenkondensators mit Dielektrikum ist vergrössert:

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{Q}{U_0} \varepsilon_r = \frac{\varepsilon_r \varepsilon_0 A}{d} \quad (2.65)$$

Dielektrizitätskonstante im Dielektrikum

Wie wir am Beispiel des Plattenkondensators gesehen haben, tritt die Dielektrizitätszahl ε_r meist zusammen mit der Dielektrizitätskonstante ε_0 auf. Das Produkt wird deshalb allgemein in der die Dielektrizitätskonstante der Materie (elektrische Permittivität) zusammengefasst:

$$\boxed{\varepsilon = \varepsilon_r \varepsilon_0} \quad \text{Dielektrizitätskonstante in der Materie} \quad (2.66)$$

Wir werden später sehen, dass wir in vielen Fällen Resultate vom Vakuum in ein Dielektrikum übertragen können, indem wir ε_0 mit ε ersetzen.

Eigenschaft	Verschiebungspolarisation	Orientierungspolarisation
Kommt bei allen Atomen/Molekülen vor?	Ja	Nein, nur bei solchen mit permanentem Dipol (z.B. Wassermolekül)
Relative Stärke	Schwach	Stark (meistens)
Temperaturabhängig?	Nein	Ja, nimmt mit steigender Temperatur ab
Polarisierbarkeit α	Nimmt in der Regel mit Molekülgrösse zu	Bestimmt durch Dipolmoment und Temperatur

Tabelle 2.1: Eigenschaften zu Verschiebungs- und Orientierungspolarisation

2.3.3 Elektrische Polarisation

Woher stammt der abschwächende Effekt des Dielektrikums? Wie wir im folgenden diskutieren werden, kann er auf eine elektrische Polarisierung der Atome und Moleküle zurückgeführt werden. Dabei findet man zwei unterschiedliche Mechanismen, die sich im Grad der Polarisierung unterscheiden.

Verschiebungspolarisation

Werden Atome und Moleküle in ein elektrisches Feld gebracht, so werden Kräfte auf die positiven und negativen Ladungen ausgeübt: Das elektrische Feld zieht Atomkerne an und stößt Elektronen ab. Dadurch verschieben sich die Ladungen geringfügig, und es wird ein elektrischer Dipol aufgebaut (induziert). Da alle Dipole gleich gerichtet sind, entsteht eine makroskopische *elektrische Polarisation*.

Orientierungspolarisation

Ladungsverschiebung ist nicht der einzige Mechanismus, mit dem eine elektrische Polarisierung aufgebaut werden kann. Ist ein Molekül ein permanenter elektrischer Dipol, so übt das elektrische Feld ein Drehmoment aus (siehe Kapitel 2.1.5) und das Molekül richtet sich nach dem elektrischen Feld aus. Da sich alle Moleküle gleich ausrichten, entsteht wiederum eine makroskopische Polarisation. Die Polarisation ist nicht vollständig, da die Moleküle durch thermische Bewegungen laufend in ihrer Ausrichtung gestört werden. Einige Eigenschaften zu Verschiebungs- und Orientierungspolarisation sind in der folgenden Tabelle 2.1 zusammengefasst:

Polarisation

Das mittlere Dipolmoment ist sowohl bei Verschiebungspolarisation wie auch Orientierungspolarisation proportional zum elektrischen Feld \vec{E} :

$$\langle \vec{p} \rangle = \alpha \vec{E} \quad (2.67)$$

wobei α die Polarisierbarkeit des Moleküls (oder Atoms) ist. (Hinweis: Wir nehmen im folgenden an, dass die Polarisation immer parallel zum angelegten Feld ist. Weiter nehmen wir an, dass das lokale elektrische Feld gleich dem makroskopischen Feld \vec{E} ist. Beides ist nicht immer der Fall, aber genügt für unsere Betrachtungen.)

Im Falle der Verschiebungspolarisation ist α eine Moleküleigenschaft, und grosse Moleküle lassen sich in der Regel einfacher polarisieren als kleine. Bei Orientierungspolarisation kann α aus dem Dipolmoment (resp. der Dipolenergie) und der Boltzmannverteilung abgeschätzt werden.

Die makroskopische Polarisation ist definiert als das mittlere Dipolmoment $\langle \vec{p} \rangle$ pro Volumen V , multipliziert mit der Anzahl Moleküle (oder Atome), die sich im Volumen befinden:

$$\vec{P} = \frac{N}{V} \langle \vec{p} \rangle = \frac{N}{V} \alpha \vec{E} \quad (2.68)$$

Die Polarisation ist, via der Polarisierbarkeit α , proportional zum elektrischen Feld \vec{E} .

Prinzip der Oberflächenladung

Experiment: Polarisation eines Dielektrikums

Die Polarisation erzeugt ihrerseits ein elektrisches Feld, das wir mit \vec{E}_P bezeichnen. Um \vec{E}_P zu bestimmen, nehmen wir an, dass das mittlere Dipolmoment durch eine Ladung Q zustande kommt, die um $\langle \vec{d} \rangle$ aus der Gleichgewichtslage ausgelenkt ist:

$$\vec{P} = \frac{N}{V} Q \langle \vec{d} \rangle = \frac{QN}{V/\langle \vec{d} \rangle} = \sigma \vec{n} \quad (2.69)$$

Dies bedeutet, dass die Polarisation äquivalent zu zwei Oberflächenladungen σ mit entgegengesetzten Vorzeichen an den Stirnflächen des Volumens ist. \vec{n} ist der Normalenvektor der Stirnflächen. Die Oberflächenladung wird auch als *gebundene Ladung* bezeichnet (siehe Abb. 2.14).

Das elektrische Feld zwischen den beiden Oberflächenladungen ist (siehe Kondensator, Gleichung 2.53)

$$\vec{E}_P = -\frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{n} = -\frac{\vec{P}}{\epsilon_0} = -\frac{N\alpha}{V\epsilon_0} \vec{E} = -\chi_E \vec{E} \quad (2.70)$$

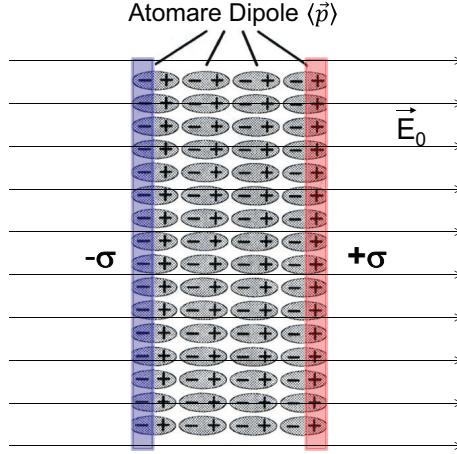


Abbildung 2.14: Gebundene Oberflächenladung bei Polarisation

Das negative Vorzeichen bedeutet, dass das von der Polarisation erzeugte elektrische Feld \vec{E}_P dem erzeugenden Feld \vec{E} entgegengerichtet ist. χ_E ist die elektrische Suszeptibilität:

$$\boxed{\chi_E = \frac{|\vec{E}_P|}{|\vec{E}|}} \quad \text{elektrische Suszeptibilität} \quad (2.71)$$

Die elektrische Suszeptibilität gibt an, wie stark das Polarisationsfeld im Vergleich zum erzeugenden Feld ist.

Achtung: Das erzeugende elektrische Feld \vec{E} ist nicht gleich dem angelegten elektrischen Feld \vec{E}_0 , sondern gleich $\vec{E}_0 + \vec{E}_P$, da das Polarisationsfeld das angelegte Feld ja teilweise kompensiert! Das elektrische Feld \vec{E} ist:

$$\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}_P = \vec{E}_0 - \chi_E \vec{E} \implies \vec{E} = \vec{E}_0 \frac{1}{1 + \chi_E} = \vec{E}_0 \frac{1}{\varepsilon_r} \quad (2.72)$$

Wir sehen also, dass die Dielektrizitätszahl ε_r mikroskopisch durch die Suszeptibilität bestimmt ist:

$$\boxed{\varepsilon_r = 1 + \chi_E} \quad \text{Dielektrizitätszahl} \quad (2.73)$$

Abbildung 2.15 zeigt die Feldlinien und Oberflächenladung für einen Plattenkondensator mit Vakuum, Dielektrikum und elektrischem Leiter und Tabelle 2.2 gibt einen Überblick über typische Größenordnung von Dielektrizitätszahlen.

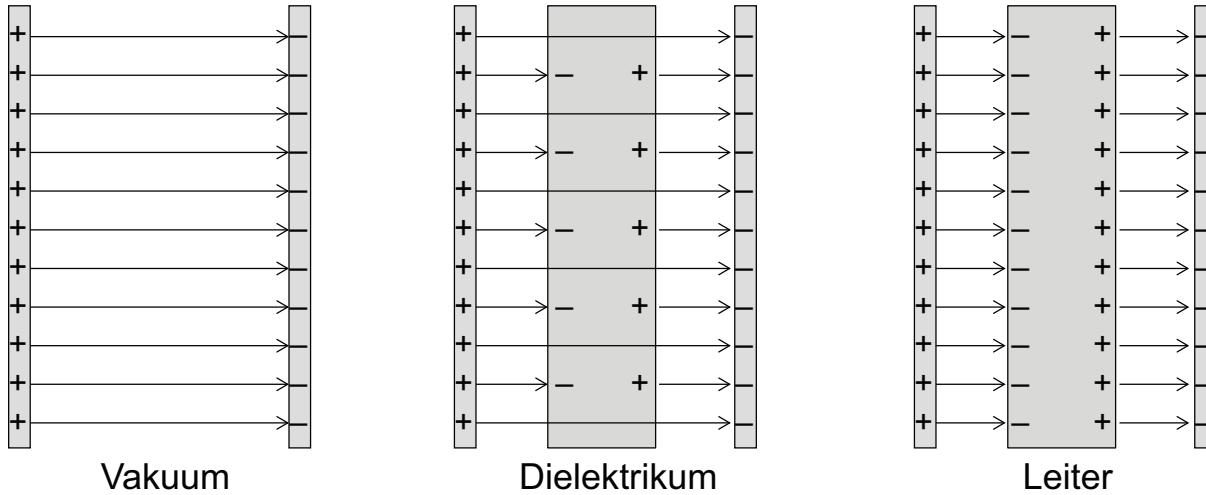


Abbildung 2.15: Kondensator mit Vakuum, Dielektrikum und Leiter

	Vakuum	Dielektrikum (mit Verschiebungspolarisation)	Dielektrikum (mit Orientierungspolarisation)	Idealer Leiter
Dielektrizitätszahl (für statische Felder)	$\epsilon_r = 1$	$\epsilon_r > 1$ (typ. $\epsilon_r = 1 \dots 10$)	$\epsilon_r > 1$ (typ. $\epsilon_r = 10 \dots 100$)	$\epsilon_r = \infty$

Tabelle 2.2: Typische Größenordnung von Dielektrizitätszahlen

2.4 Elektrischer Strom

Literatur: Kuypers Kap. 20, Tipler Kap. 25

Bisher haben wir immer statische Ladungen betrachtet. In diesem Kapitel betrachten wir elektrische Ströme, also bewegte Ladungen, welche durch elektrische Felder hervorgerufen werden.

2.4.1 Elektrischer Strom

Der elektrische Strom ist die Änderung der Ladung pro Zeitintervall:

$$I = \frac{Q}{t} = \frac{dQ}{dt} \quad \text{Elektrischer Strom} \quad (2.74)$$

Das Symbol ist I (in der Elektrotechnik häufig auch J), und die Einheit ist:
 $[I] = 1 \text{ Ampere} = 1 \text{ A} = 1 \text{ C/s}$.

Elektrische Ladungen brauchen ein Materieteilchen, um transportiert zu werden:

- Elektronen in Metallen
- Ionen in (salzhaltigen) Lösungen
- Teilchenstrahlen im Vakuum (z.B. Teilchenbeschleuniger)

Da Strom durch sich bewegende Ladungsteilchen getragen wird, hat er eine Richtung, die der Bewegungsrichtung der Teilchen entspricht. Die Stromrichtung wird als Bewegungsrichtung der positiven Ladung definiert (technische Stromrichtung). Dazu wird der Strom häufig als Vektor \vec{I} angegeben.

Experiment: Bewegte Ladung = Strom

2.4.2 Ursache des elektrischen Stroms

Ein elektrischer Strom entsteht, wenn geladene Teilchen in ein elektrisches Feld \vec{E} gebracht werden. Das Teilchen erfährt eine Coulombkraft \vec{F} und damit eine Beschleunigung \vec{a} :

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m} = \frac{Q}{m} \vec{E} \quad (2.75)$$

Hier ist Q die Ladung des Teilchens und m die Masse.

Driftgeschwindigkeit

In Metallen wird der Strom durch Elektronen generiert. Da die Elektronen fortlaufend mit den Gitteratomen zusammenstoßen, stellt sich eine stationäre „Endgeschwindigkeit“ (Gleichgewicht) ein. Diese Geschwindigkeit heisst *Driftgeschwindigkeit* v_D :

$$I = \frac{Q}{t} = \frac{(-e) \cdot N}{t} = -\frac{N}{V} \cdot e \cdot \frac{V}{t} = -n \cdot e \cdot A \cdot \frac{L}{t} = -n \cdot e \cdot A \cdot v_D \quad (2.76)$$

Hier ist e die Elementarladung (Ladung des Elektrons), N die Anzahl Elektronen die den Strom generieren, A der Leiterquerschnitt, und L die Distanz, die das Elektron in der Zeit t zurücklegt. $n = N/V = N/(A \cdot L)$ ist die Ladungsträgerdichte (Anzahl Elektronen pro Volumen). Die Driftgeschwindigkeit ist (nun mit Vektorzeichen):

$$\vec{v}_D = -\frac{\vec{I}}{n \cdot e \cdot A} = -\frac{\vec{j}}{e \cdot n} \quad \text{Driftgeschwindigkeit von Elektronen} \quad (2.77)$$

Darin ist \vec{j} die Stromdichte (Strom pro Querschnittsfläche):

$$\vec{j} = \frac{\vec{I}}{A} \quad \text{Stromdichte} \quad (2.78)$$

Beispiel: Driftgeschwindigkeit in einem typischen Stromkabel im Haushalt

$$\begin{aligned} I &= 1 \text{ A}, e = 1.6 \cdot 10^{-19} \text{ C}, n = 8.4 \cdot 10^{28} \text{ m}^{-3} \quad (\text{Ladungsträgerdichte für Kupfer, entspricht } 1.3 \text{ Elektronen pro Cu Atom}), A = 1 \text{ mm}^2 \\ \Rightarrow v_D &= 7.4 \cdot 10^{-5} \text{ m/s} = 0.074 \text{ mm/s} \end{aligned}$$

Driftgeschwindigkeiten sind normalerweise sehr klein. Das elektrische Feld breitet sich im Leiter aber mit Lichtgeschwindigkeit aus (siehe Kapitel 3.4)!

2.4.3 Elektrischer Widerstand

Je mehr Ladung bei einem gegebenen elektrischen Feld transportiert wird, desto besser ist ein elektrischer Leiter. Die (spezifische) Leitfähigkeit ist das Verhältnis von transportierter Ladung zu elektrischem Feld:

$$\sigma = \frac{|\vec{v}_D| en}{|\vec{E}|} = \frac{|\vec{j}|}{|\vec{E}|} \quad \text{Spezifische Leitfähigkeit} \quad (2.79)$$

Die Einheit der spezifischen Leitfähigkeit ist $[\sigma] = 1 \Omega^{-1} \text{ m}^{-1}$. Das Inverse der Leitfähigkeit ist der spezifische Widerstand:

$$\rho = \frac{1}{\sigma} = \frac{|\vec{E}|}{|\vec{j}|} \quad (2.80)$$

mit der Einheit $[\rho] = 1 \Omega \text{ m}$. σ (und ρ) sind Materialkonstanten. Aus dem spezifischen Widerstand lässt sich der makroskopische elektrische Widerstand eines Leiters mit Länge L und Querschnittsfläche A definieren:

$$R = \rho \frac{L}{A} = \frac{|\vec{E}|}{|\vec{j}|} \frac{L}{A} = \frac{U}{I} \quad \text{Elektrischer Widerstand} \quad (2.81)$$

Der elektrische Widerstand R ist gleich der Spannung, die benötigt wird, um einen bestimmten Strom hervorzurufen. Im Gegensatz zum spezifischen Widerstand ρ ist der elektrische Widerstand R von der Geometrie abhängig. Der elektrische Leitwert G (Einheit: $[G] = 1/\Omega = 1\text{S}=1$ Siemens) ist definiert als der inverse Widerstand:

$$G = \frac{1}{R} = \frac{I}{U} \quad \text{Elektrischer Widerstand} \quad (2.82)$$

Ohm'sches Gesetz

Die Definition des elektrischen Widerstandes legt nahe, dass der Widerstand unabhängig von der Grösse der angelegten Spannung ist. Dies ist das Ohm'sche Gesetz:

- *Der Strom ist proportional zur angelegten Spannung.*
- *Die Driftgeschwindigkeit ist proportional zum angelegten elektrischen Feld.*
- *Der elektrische Widerstand ändert sich nicht mit der angelegten Spannung.*

Das Ohm'sche Gesetz gilt für die meisten Metalle. Es gilt jedoch nicht (oder nur beschränkt) für Halbleiter, Isolatoren, und Supraleiter. Elektrische Leiter, für welche das Ohm'sche Gesetz nicht gilt, heissen *Nicht-Ohm'sche Leiter*.

Experiment: Ohm'sches Gesetz

2.4.4 Elektrische Leistung

Durch Zusammenstöße geben Elektronen fortlaufend Bewegungsenergie an die Atome ab. Der Energieverlust ΔE pro Zeiteinheit Δt (die abgegebene Leistung) ist gegeben durch:

$$P = \frac{\Delta E}{\Delta t} = \frac{U \Delta Q}{\Delta t} = UI \quad (2.83)$$

Die abgegebene Leistung bei gegebenem Widerstand ist:

$$P = UI = RI^2 = \frac{U^2}{R} \quad \text{Elektrische Leistung eines Widerstandes} \quad (2.84)$$

Experiment: Kurzschluss mit verzinktem Eisendraht

Experiment: Stahldraht verdampfen

Kapitel 3

Magnetismus

3.1 Magnetfelder

Literatur: Kuypers Kap. 21, Tipler Kap. 26, 27.1-4

In den folgenden drei Unterkapiteln werden wir Magnetfelder betrachten. Die Kapitel 3.1 und 3.2 behandeln die Magnetostatik. Kapitel 3.1 zeigt, wie Magnetfelder durch elektrische Ströme erzeugt werden, wie einfache Magnetfeldverteilungen berechnet werden können, und was die Kraftwirkung von Magnetfeldern ist. Kapitel 3.2 diskutiert den Magnetismus in Materie und wie sich der Magnetismus auf (Kreis)ströme zurückführen lässt. In Kapitel 3.3 wird gezeigt, dass zeitabhängige Magnetfelder Ströme in Leitern induzieren können. Kapitel 3.4 gibt eine Zusammenfassung und zeigt, wie die verschiedenen Gesetze des Elektromagnetismus zusammenhängen. Dazu werden wir die Maxwell'schen Gleichungen verwenden.

3.1.1 Allgemeine Beobachtungen zu Magnetfeldern

Allgemeine Beobachtungen:

- Magnetfelder haben eine Stärke und eine Richtung. Das Magnetfeld ist ein *Vektorfeld*.
- Magnetfelder werden durch elektrische Ströme (bewegte Ladungen) erzeugt.
- Ein Elementarmagnet ist ein magnetischer Dipol. Die zwei Pole werden mit N und S bezeichnet (Nord und Süd). Gleiche Pole stoßen sich ab, ungleiche ziehen sich an. Ein magnetischer Dipol wird durch einen Kreisstrom erzeugt.
- Es wurden noch nie magnetische Monopole gefunden (im Kontrast zur elektrischen Ladung oder zur Masse). Teilt man einen Magneten in der Mitte, haben die zwei neuen Magnete ebenfalls einen N und S Pol.

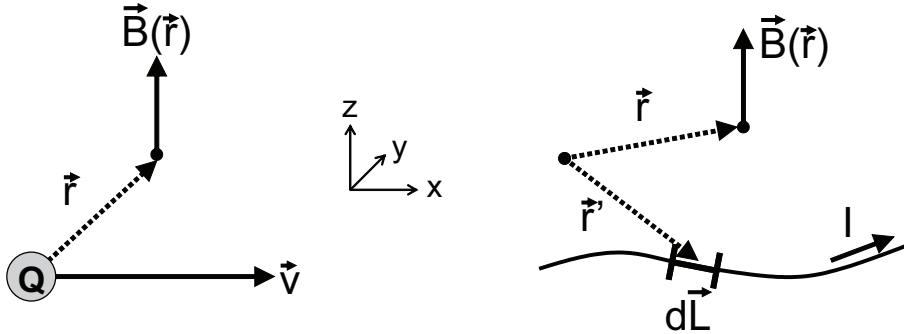


Abbildung 3.1: Magnetfeld einer bewegten Ladung und eines Stroms.

- Magnetfelder können wie alle Vektorfelder durch Feldlinien beschrieben werden. Da es keine magnetischen Ladungen gibt, haben magnetische Feldlinien keinen Anfang und Ende. Magnetfeldlinien sind geschlossen.

Experiment: Kraft auf Dipol

Experiment: Magnete brechen

3.1.2 Biot-Savart Gesetz

Eine bewegte Ladung Q erzeugt ein Magnetfeld \vec{B} im Ort \vec{r} (siehe Abb. 3.1). Die Stärke und Richtung des Magnetfeldes sind gegeben durch:

$$\boxed{\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Q \cdot \vec{v} \times \vec{r}}{|\vec{r}|^3}} \quad \text{Biot-Savart Gesetz für eine bewegte Ladung} \quad (3.1)$$

Hier ist \vec{v} die Geschwindigkeit der Ladung und \vec{r} der Abstand zur Ladung (der Vektor zeigt von der Ladung weg). Die Proportionalitätskonstante μ_0 ist die sogenannte *magnetische Feldkonstante* (Permeabilität des Vakuums):

$$\boxed{\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{N}}{\text{A}^2}} \quad \text{Magnetische Feldkonstante} \quad (3.2)$$

μ_0 ist das magnetische Analogon zur Dielektrizitätskonstante ϵ_0 .

Aus dem Biot-Savart-Gesetz können wir das Magnetfeld eines konstanten Stroms berechnen. Dazu benutzen wir, dass $dQ\vec{v} = I \cdot d\vec{L}$, und integrieren über den Pfad L des Stroms:

$$\boxed{\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_L \frac{I \cdot d\vec{L}' \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}} \quad \text{Biot-Savart Gesetz für einen Strom} \quad (3.3)$$

Hier ist $d\vec{L}$ ein Längenelement und das Integral verläuft über den Pfad des Stroms. \vec{r} ist dabei die Position des Beobachters (Ort, wo das Feld gemessen wird) und \vec{r}' ist die Position auf dem Pfad des Stroms.

Durch Verwendung der ortsabhängigen Stromdichte \vec{j} kann das Linienintegral in Gleichung 3.3 in ein Volumenintegral umschrieben werden:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \vec{j}(\vec{r}') \times \frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dV' \quad (3.4)$$

Vergleiche die Ähnlichkeit zum elektrischen Feld [vgl. Kap. 2.1.3, Gl. (2.7)]:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \rho(\vec{r}') \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dV' \quad (3.5)$$

Magnetfelder werden in Einheiten von Tesla gemessen:

$$[B] = \frac{N}{A^2} \cdot \frac{A \cdot s \cdot \frac{m}{s} \cdot m}{m^3} = \frac{N}{A^2} \cdot \frac{A}{m} = \frac{N}{A \cdot m} =: T(\text{esla}) =: 10^4 G(\text{auss}).$$

Das Erdmagnetfeld in Mitteleuropa beträgt ca. 50 μT .

Beispiel: Magnetfeld eines unendlich langen, geraden Leiters

Ein Strom $\vec{I} = I\vec{e}_z$ fliesst in z-Richtung entlang einem unendlich langen, geraden Leiter, wie in der Abbildung 3.2 dargestellt.

Das Magnetfeld im Abstand $\vec{r} = (x, 0, 0)$ zum Leiter ist:

$$\vec{B} \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{I \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0-z' \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x-0 \\ 0-0 \\ 0-z' \end{pmatrix}}{\left| \begin{pmatrix} x-0 \\ 0-0 \\ 0-z' \end{pmatrix} \right|^3} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dz' \cdot x \cdot \vec{e}_y}{(x^2 + z'^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0 I}{2\pi x} \vec{e}_y \quad (3.6)$$

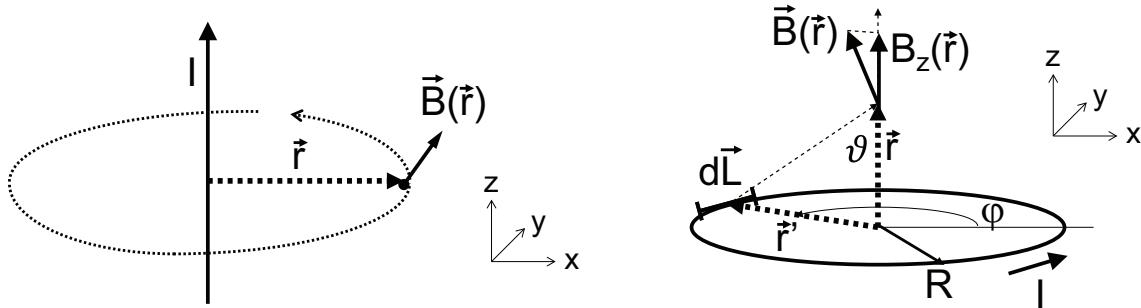


Abbildung 3.2: Magnetfeld eines langen Drahtes und einer Leiterschleife

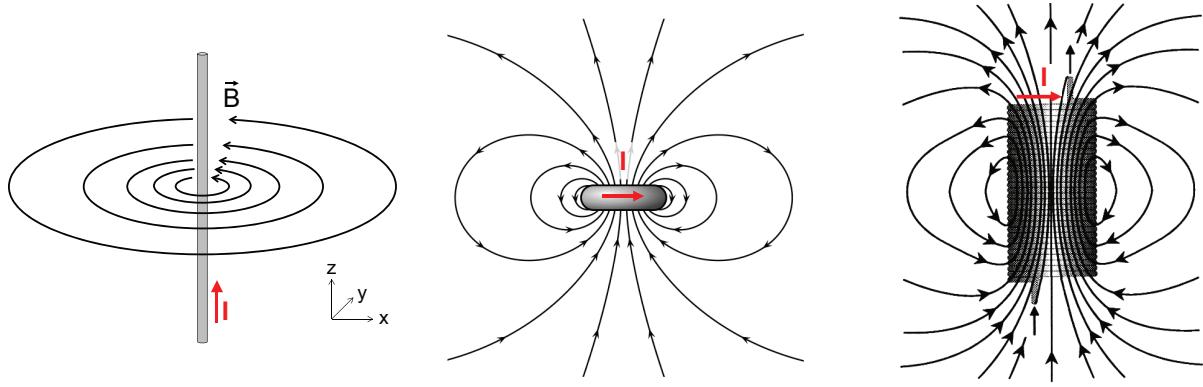


Abbildung 3.3: Magnetische Feldlinien eines langen Drahtes, einer Leiterschleife und einer Spule

Für eine beliebige Stromrichtung und Position im Raum erhält man:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{(\vec{I} \times \vec{e}_r)}{|\vec{r}|} \quad \text{Magnetfeld eines langen, geraden Leiters} \quad (3.7)$$

Hier ist $\vec{e}_r = \vec{r}/|\vec{r}|$ der Einheitsvektor in radialer Richtung. Das Magnetfeld steht senkrecht auf \vec{I} und \vec{r} , und ist umgekehrt proportional zum Abstand. Die Richtung des Magnetfeldes lässt sich mit der rechte-Hand-Regel bestimmen (siehe Abb. 3.3, links).

3.1.3 Magnetischer Dipol

Die fundamentale Einheit des Magnetismus, analog zur elektrischen Ladung, ist der magnetische Dipol. Wir berechnen im Folgenden das Magnetfeld eines Kreisstroms und finden, dass der Kreisstrom exakt ein Dipolfeld generiert (vgl. Abb. 3.3, Mitte).

Magnetfeld auf der Achse einer kreisförmigen Leiterschleife

Ein Strom I fliesst auf einer kreisförmigen Leiterschleife mit Radius R und Achse \vec{e}_z , wie in der Abbildung 3.2 dargestellt. Der Mittelpunkt der Schleife sei im Ursprung. Das Magnetfeld ist gegeben durch:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{\text{Schleife } L} \frac{d\vec{L}' \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \quad (3.8)$$

Wir betrachten nun die z-Komponente des Magnetfeldes auf der z-Achse (eine analoge Rechnung ergibt, dass die x und y Komponenten gleich Null sind):

$$B_z(z) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{\text{Schleife } L} \frac{|d\vec{L}'| |\vec{r} - \vec{r}'|}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \sin \vartheta \quad (3.9)$$

Aus der Geometrie der Leiterschleife (siehe Abbildung 3.2 rechts) findet man, dass $|d\vec{L}'| = R \cdot d\varphi$, $(\vec{r} - \vec{r}')^2 = R^2 + z^2$ und $\sin \vartheta = R/(R^2 + z^2)^{1/2}$. Aus der Integration über die Schleife wird eine Integration über den Winkel $d\varphi$. Daraus folgt:

$$B_z(z) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \frac{d\varphi R}{R^2 + z^2} \frac{R}{(R^2 + z^2)^{1/2}} = \frac{\mu_0 I R^2}{2(R^2 + z^2)^{3/2}} \quad (3.10)$$

Als Spezialfall können wir das Magnetfeld im Zentrum der Schleife sowie in grosser Entfernung $|z| \gg R$ angeben:

$$B_z(z=0) = \frac{\mu_0 I}{2R} \quad \text{im Zentrum der Schleife} \quad (3.11)$$

$$B_z(z) = \frac{\mu_0 I R^2}{2|z|^3} \quad \text{in grosser Entfernung (Fernfeld)} \quad (3.12)$$

Magnetischer Dipol

Das Fernfeld des Kreisstroms fällt mit $|z^3|$ ab, genau wie das Fernfeld eines Dipols (siehe Kapitel 2.1.5). Man kann zeigen, dass dies nicht nur für Punkte auf der Achse, sondern für alle Punkte im Raum gilt:

Das Magnetfeld eines Kreisstroms ist identisch mit dem Magnetfeld eines Dipols, wobei die Dipolstärke gleich dem Produkt von Strom und Kreisfläche ist.

Das magnetische (Dipol-)Moment eines Kreisstroms I mit Radius R ist also:

$$\boxed{\vec{m} = IA = I\pi R^2 \vec{n}} \quad \text{Magnetisches Dipolmoment} \quad (3.13)$$

wobei $A = \pi R^2$ die umschlossene Fläche ist (mit Normalenvektor \vec{n}). Das Fernfeld auf der Achse eines Dipols in z-Richtung ist wie erwartet:

$$B_z(z) = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{2|\vec{m}|}{|z|^3} = \frac{\mu_0 I R^2}{2|z|^3} \quad (3.14)$$

Das Fernfeld an einem beliebigen Punkt im Raum \vec{r} und für eine beliebige Orientierung des Dipolmoments \vec{m} ist analog zum Feld des elektrischen Dipols (Kapitel 2.1.5) gegeben durch (wir verzichten wiederum auf die Herleitung):

$$\vec{B}(\vec{r}) \approx \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{3\vec{e}_r(\vec{m} \cdot \vec{e}_r) - \vec{m}}{|\vec{r}|^3} \quad (3.15)$$

wobei $\vec{e}_r = \vec{r}/|\vec{r}|$ der Richtungsvektor ist.

Wird ein magnetischer Dipol in ein äusseres Magnetfeld \vec{B}_0 gebracht, so wird ebenfalls analog zum elektrischen Dipol ein Drehmoment \vec{M} auf den Dipol ausgeübt:

$$\boxed{\vec{M} = \vec{m} \times \vec{B}_0} \quad \begin{array}{l} \text{Drehmoment auf einen magnetischen} \\ \text{Dipol im äusseren Magnetfeld} \end{array} \quad (3.16)$$

Die potentielle Energie E_{pot} des Dipols ist gegeben durch:

$$\boxed{E_{pot} = -\vec{m} \cdot \vec{B}_0} \quad \text{Energie eines magnetischen Dipols im äusseren Magnetfeld} \quad (3.17)$$

3.1.4 Zylinderspule

Als dritte wichtige Geometrie neben dem geraden Leiter und der Leiterschleife berechnen wir das Magnetfeld auf der Achse einer Zylinderspule (siehe Abb. 3.3, rechts). Wir nehmen an, dass die Spule entlang der z-Achse ausgerichtet ist und dass sich das Zentrum der Spule am Ursprung befindet. Die Spule sei aus N Leiterschleifen aufgebaut, die gleichmässig über die Länge L verteilt sind, und der Strom sei I :

$$\begin{aligned} B_z(z) &= \frac{N}{L} \int_{-L/2}^{L/2} dz' \frac{\mu_0 I R^2}{2[R^2 + (z' - z)^2]^{3/2}} = \frac{N \mu_0 I}{2L} \int_{-L/2}^{L/2} dz' \frac{R^2}{[R^2 + (z' - z)^2]^{3/2}} \\ &= \frac{\mu_0 I N}{2L} \left[\frac{z + \frac{L}{2}}{\sqrt{R^2 + (z + \frac{L}{2})^2}} - \frac{z - \frac{L}{2}}{\sqrt{R^2 + (z - \frac{L}{2})^2}} \right] \end{aligned} \quad (3.18)$$

Hier ist N/L die *Windungsdichte* und $j_A = IN/L$ die *Längenstromdichte* (mit Einheit A/m). Im Zentrum der Spule ($z = 0$) gilt:

$$B_z(0) = \frac{\mu_0 I N}{2L} \frac{L}{\sqrt{R^2 + (\frac{L}{2})^2}} = \frac{\mu_0 I N}{2\sqrt{R^2 + (\frac{L}{2})^2}} \quad (3.19)$$

Falls die Spule sehr lang ist ($L \gg R$), so ist das Feld im Innern nahezu konstant (unabhängig vom Spulenradius und der z-Position in der Spule):

$$\boxed{B_z(0) \stackrel{L \gg R}{\approx} \frac{N}{L} \mu_0 I = \mu_0 j_A} \quad \text{Magnetfeld im Zentrum einer langen Spule} \quad (3.20)$$

Ein wichtige Anwendung von Zylinderspulen ist deshalb das Erzeugen von homogenen Magnetfeldern über ein grosses Volumen, wie es zum Beispiel in der Magnetresonanztomographie (MRI) eingesetzt wird.

Experiment: Magnetfeldlinien

Experiment: Magnetfeld prop. Strom und Windungszahl

3.1.5 Gesetz von Gauss für Magnetfelder

Indem man das Gesetz von Gauss von elektrischen Feldern auf Magnetfelder überträgt, erhält man zwei wichtige Gesetze zu Magnetfeldern. Diese Gesetze sind von ähnlich fundamentaler Bedeutung wie das Gesetz von Gauss in der Elektrostatik.

Magnetischer Fluss

Im ersten Schritt definieren wir den magnetischen Fluss als Analogon zum elektrischen Fluss (siehe Kapitel 2.1.6):

$$\boxed{\Phi_M = \int_A \vec{B}(\vec{r}') \cdot d\vec{A}'} \quad \text{Magnetischer Fluss durch die Fläche } A \quad (3.21)$$

Die Einheit des magnetischen Fluxes ist $[\Phi_M] = 1 \text{ Weber} = 1 \text{ Wb} = 1 \text{ T m}^2$. Im Bild der Feldlinien bedeutet dies wiederum:

Der magnetische Fluss ist proportional zur Anzahl Feldlinien, die durch die Fläche A hindurchgehen.

Im homogenen Magnetfeld vereinfacht sich das Integral zu:

$$\Phi_M = \vec{B} \cdot \vec{A} \quad (3.22)$$

Gesetz von Gauss für Magnetfelder

Das Gesetz von Gauss besagt, dass der Fluss durch die Oberfläche \vec{A} eines (geschlossenen) Volumens V proportional zur eingeschlossenen Ladung ist. Da es keine magnetische Ladung gibt, muss der (Gesamt)Fluss deshalb gleich Null sein:

$$\boxed{\oint_A \vec{B}(\vec{r}') \cdot d\vec{A}' = 0} \quad \text{Gesetz von Gauss für Magnetfelder} \quad (3.23)$$

Die Differentialform des Gesetzes von Gauss für Magnetfelder ist:

$$\boxed{\vec{\nabla} \cdot \vec{B}(\vec{r}) = 0} \quad \text{Differentialform des Gesetzes von Gauss für Magnetfelder (2. Maxwellgleichung)} \quad (3.24)$$

Im Bild der Feldlinien bedeutet der Satz von Gauss:

Da magnetische Feldlinien geschlossen sind, ist die Anzahl in ein Volumen hineinlaufender Feldlinien immer gleich der Anzahl aus dem Volumen herausführenden Feldlinien.

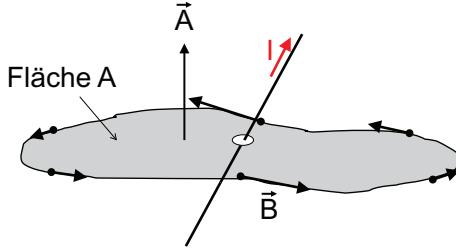


Abbildung 3.4: Durchflutungsgesetz

3.1.6 Durchflutungsgesetz

Als wir das Magnetfeld eines langen geraden Leiters berechnet haben, haben wir gefunden, dass die magnetischen Feldlinien im Kreis um den Leiter herumlaufen, und dass die Feldstärke mit ihrem Abstand abnimmt (wir lassen die Vektorpfeile weg):

$$B(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \quad (3.25)$$

Das Magnetfeld ist also gleich dem Strom $\mu_0 I$ geteilt durch den Kreisumfang. Umgekehrt ist der Kreisumfang multipliziert mit dem Magnetfeld gleich dem eingeschlossenen Strom:

$$2\pi r B(r) = \mu_0 I \quad (3.26)$$

Diese Beziehung lässt sich auf beliebige geschlossene Wege verallgemeinern (siehe Abb. 3.4):

Der Strom durch eine Fläche \vec{A} ist proportional zum Magnetfeld, welches tangential dem Rand der Fläche entlangläuft. Die Proportionalitätskonstante hat den Wert μ_0 .

Dieses Gesetz wird Durchflutungsgesetz genannt:

$$\oint_L \vec{B}(\vec{r}') \cdot d\vec{L}' = \mu_0 I$$

Integralform des Durchflutungsgesetzes
(3.27)

Hier ist L der Weg, welcher entlang des Randes der Fläche A entlangläuft (siehe Abb. 3.4). Im Bild der Feldlinien bedeutet das Durchflutungsgesetz:

Die Anzahl Feldlinien, welche parallel zum Rand einer Fläche entlangläuft, ist proportional zum Strom, der durch die Fläche fliesst.

Das Durchflutungsgesetz lässt sich durch das Stokes-Theorem in eine Differentialform umwandeln:

$$\oint_L \vec{B}(\vec{r}') \cdot d\vec{L}' = \int_A [\vec{\nabla} \times \vec{B}(\vec{r}')] \cdot d\vec{A}' = \mu_0 I = \mu_0 \int_A \vec{j}(\vec{r}') \cdot d\vec{A}' \quad (3.28)$$

$$\boxed{\vec{\nabla} \times \vec{B}(\vec{r}) = \mu_0 \vec{j}(\vec{r})} \quad \text{Differentialform des Durchflutungsgesetzes (4. Maxwellgleichung)} \quad (3.29)$$

Hier ist \vec{j} ist die *Stromdichte* (Strom pro Fläche).

Das Durchflutungsgesetz lässt sich aus dem Biot-Savart Gesetz herleiten (und ist äquivalent zu diesem). Dazu wählt man eine Schleife L , die senkrecht zur Stromrichtung steht und deren Radius r so klein ist, dass der Strom keine Krümmung aufweist. Nach dem Biot-Savart Gesetz folgt:

$$\oint_L \vec{B}(\vec{r}') \cdot d\vec{L}' \stackrel{\text{Biot-Savart}}{=} \oint_L \frac{\mu_0 (\vec{I} \times \vec{e}_r')}{2\pi r'} \cdot d\vec{L}' = \int_0^{2\pi} \frac{\mu_0 I}{2\pi r'} r' d\varphi' = \mu_0 I \quad (3.30)$$

Experiment: Gesetz von Ampere

3.1.7 Lorentzkraft und Ampere'sches Gesetz

Bisher haben wir behandelt, wie Magnetfelder durch Bewegung von Ladungen erzeugt werden können. Im folgenden betrachten wir, wie Magnetfelder Kräfte ausüben.

Lorentzkraft

Ein Magnetfeld \vec{B} erzeugt eine Kraft auf eine bewegte Ladung Q , wie in Abbildung 3.5 links dargestellt. Diese Kraft wird Lorentzkraft genannt:

$$\boxed{\vec{F}(\vec{r}) = Q\vec{v} \times \vec{B}(\vec{r})} \quad \text{Lorentzkraft} \quad (3.31)$$

Hier ist \vec{v} der Geschwindigkeitsvektor der Ladung. Die Lorentzkraft steht *senkrecht* auf der Bewegungsrichtung und der Magnetfeldrichtung. Die entsprechende Kraft auf einen stromdurchflossenen Leiter ist (da $dQ\vec{v} = Id\vec{L}$):

$$\boxed{\vec{F} = \int_L Id\vec{L}' \times \vec{B}(\vec{r}')} \quad \text{Lorentzkraft auf einen stromdurchflossenen Leiter} \quad (3.32)$$

Die Lorentzkraft ist das magnetische Analogon zur Coulombkraft.

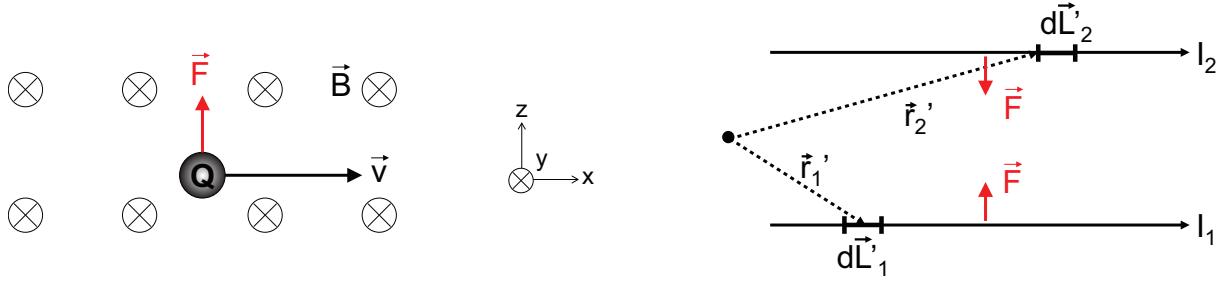


Abbildung 3.5: Kraft auf bewegte Ladung (Lorentzkraft) zwischen zwei Strömen (Ampere'sches Gesetz)

Ampere'sches Gesetz

Befinden sich zwei stromdurchflossene Leiter in Nähe zueinander, so üben sie folglich eine Kraft aufeinander aus: Der eine Leiter generiert ein Magnetfeld, das eine Kraft auf den anderen Leiter ausübt (und umgekehrt).

Betrachten wir zwei Ladungen Q_1 und Q_2 mit Geschwindigkeiten \vec{v}_1 und \vec{v}_2 (siehe dafür beispielhaft Abbildung 3.5 rechts), so wirkt zwischen ihnen die Kraft:

$$\boxed{\vec{F} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Q_1 \vec{v}_1 \times (Q_2 \vec{v}_2 \times (\vec{r}_1 - \vec{r}_2))}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3}} \quad \text{Ampere'sches Gesetz für zwei bewegte Ladungen} \quad (3.33)$$

(Hinweis: Dies ist die Kraft, die auf Ladung Q_1 ausgeübt wird). Betrachten wir zwei Leiter L_1 und L_2 mit Strömen I_1 und I_2 (siehe Abbildung 3.5 rechts), so ist die Kraft:

$$\boxed{\vec{F} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{L_1} \int_{L_2} \frac{I_1 d\vec{L}'_1 \times (I_2 d\vec{L}'_2 \times (\vec{r}'_1 - \vec{r}'_2))}{|\vec{r}'_1 - \vec{r}'_2|^3}} \quad \text{Ampere'sches Gesetz für zwei Ströme} \quad (3.34)$$

Dies ist das Gesetz von Ampere. Das Ampere'sche Gesetz wird zur Definition der Einheit des Stroms (Ampere) verwendet:

Wenn in zwei geradlinigen, parallelen, sehr langen elektrischen Leitern mit dem Abstand 1 m Ströme gleicher Stärke fliessen, und wenn zwischen den Leitern pro Einheitslänge (1 m) eine Kraft von $2 \cdot 10^{-7}$ N wirkt, dann ist der Strom in jedem Leiter gleich 1 Ampere.

Das Ampere ist eine SI Basiseinheit neben m, s und kg. Implizit definiert das Ampere auch das Magnetfeld und die elektrische Ladung.

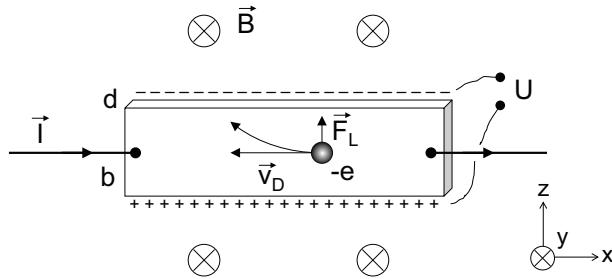


Abbildung 3.6: Halleffekt

Experiment: Zwei parallele Ströme ziehen sich an.

Experiment: Grosser Elektronenstrahl (qualitativ)

3.1.8 Anwendung: Halleffekt

Infolge der Lorentzkraft ändert ein Strom im Magnetfeld seine Richtung. Dadurch baut sich zwischen den gegenüberliegenden Seiten des Leiters eine Spannung auf, wie in Abb. 3.6 dargestellt. Diese Spannung heisst Hallspannung und der zu Grunde liegende physikalische Effekt Halleffekt.

Wir berechnen als Beispiel die Hallspannung für die in Abbildung 3.6 gezeigte Anordnung. Der Strom $\vec{I} = I\vec{e}_x$ fließe in x -Richtung durch einen Leiter mit Breite b und Dicke d . Zusätzlich ist ein Magnetfeld $\vec{B} = B\vec{e}_y$ in y -Richtung (senkrecht zur Leiteroberfläche) angelegt. Wir nehmen weiter an, dass der Strom durch Elektronen zustandekommt, so dass die Ladung $Q = -e$ ist.

Die Lorenzkraft auf ein Elektron im Leiter ist dann gegeben durch:

$$\vec{F}_L = (-e)\vec{v}_D \times \vec{B} = -ev_{Dx}B\vec{e}_z = \frac{IB}{nA}\vec{e}_z = \frac{IB}{nbd}\vec{e}_z \quad (3.35)$$

Wobei $v_{Dx} = -I/(enA)$ die Driftgeschwindigkeit in x -Richtung, n die Ladungsträgerdichte und $A = b \cdot d$ die Querschnittsfläche des Leiters ist (siehe Kapitel 2.4.2). Auf der Oberseite des Leiters sammeln sich also Elektronen an. Dadurch baut sich ein elektrisches Feld \vec{E} und damit eine elektrische Spannung U auf. Auf die Elektronen wirkt die elektrostatische Kraft:

$$\vec{F}_C = (-e)\vec{E} = -\frac{eU}{b}\vec{e}_z \quad (3.36)$$

U ist die sogenannte Hallspannung. Im Kräftegleichgewicht gilt $\vec{F}_L + \vec{F}_C = \vec{0}$:

$$\frac{IB}{nbd} = \frac{eU}{b} \quad (3.37)$$

Die Hallspannung ist also:

$$U = \frac{IBb}{enbd} = \frac{IB}{end} \quad (3.38)$$

Der Halleffekt kann also benutzt werden, um die Ladungsträgerdichte und das Vorzeichen der Ladungsträger in einem Material zu bestimmen. Umgekehrt kann bei bekannter Ladungsträgerdichte das Magnetfeld gemessen werden. Der Halleffekt findet daher Anwendung in Magnetfeldsensoren.

Experiment: Driftgeschwindigkeit der Leitungselektronen

Experiment: Barlow-Rad

3.2 Eigenschaften des Magnetismus

Literatur: Kuypers Kap. 23, Tipler Kap. 27.5

Wird Materie einem Magnetfeld ausgesetzt, so verändert das Material die Stärke des Magnetfeldes. Das heisst, das Material wird magnetisiert. In diesem Kapitel werden die wichtigsten Typen von Magnetisierung besprochen. Wir werden sehen, dass eine Magnetisierung äquivalent zu einem Oberflächenstrom ist. Als Anwendung werden wir betrachten, wie magnetische Materialien zur Abschirmung von Magnetfeldern benutzt werden können. Zum Schluss werden die wichtigsten Eigenschaften von Ferromagneten behandelt.

3.2.1 Magnetisierung

Setzt man ein Material einem Magnetfeld \vec{B}_0 aus, so wird das Magnetfeld im Material abgeschwächt oder verstärkt. Bezeichnet man mit \vec{B} das Magnetfeld im Material, so ist der Verstärkungsfaktor gegeben durch:

$$\boxed{\mu_r = \frac{|\vec{B}|}{|\vec{B}_0|}} \quad \text{relative magnetische Feldkonstante} \quad (3.39)$$

μ_r ist die relative magnetische Feldkonstante. Nach dem Superpositionsprinzip setzt sich \vec{B} zusammen aus dem äusseren Magnetfeld \vec{B}_0 und dem Magnetfeld \vec{B}_M , das durch das Material selbst generiert wird:

$$\vec{B} = \vec{B}_0 + \vec{B}_M = \mu_r \vec{B}_0 \quad (3.40)$$

Diese beiden Beziehungen legen nahe, dass das induzierte Magnetfeld \vec{B}_M proportional zu \vec{B}_0 ist (resp. dass μ_r unabhängig von \vec{B}_0 ist). Dies ist für die meisten Materialien der

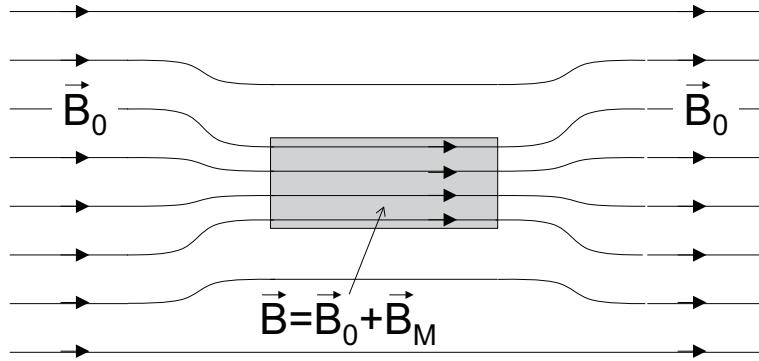


Abbildung 3.7: Magnetfeld mit Materie

Fall (nicht bei Ferromagneten). Die Grösse von \vec{B}_M relativ zu \vec{B}_0 ist die magnetische Suszeptibilität:

$$\chi_m = \frac{|\vec{B}_M|}{|\vec{B}_0|} = \mu_r - 1 \quad \text{magnetische Suszeptibilität} \quad (3.41)$$

In der Literatur wird häufig mit der *magnetischen Erregung* und der *Magnetisierung* gerechnet, die bis auf den Proportionalitätsfaktor μ_0 mit den Magnetfeldern \vec{B} und \vec{B}_M identisch sind:

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}_0}{\mu_0} \quad \text{magnetische Erregung} \quad (3.42)$$

$$\vec{M} = \frac{\vec{B}_M}{\mu_0} \quad \text{Magnetisierung} \quad (3.43)$$

Die Einheit der magnetischen Erregung und der Magnetisierung ist $[H] = [M] = 1 \text{ A/m}$. Materialien klassifiziert man danach, ob ein äusseres Magnetfeld in ihrem Innern verstärkt oder abgeschwächt wird (siehe Abb. 3.7). Wird das Magnetfeld abgeschwächt, ist das Material *diamagnetisch*. Wird das Magnetfeld verstärkt, so ist es *paramagnetisch*. (Ferromagnetismus ist ein Spezialfall von Paramagnetismus).

Experiment: Dia- und Paramagnetismus

Experiment: Eisen vergrössert das Magnetfeld

3.2.2 Magnetische Kräfte

Auf einen magnetischen Dipol \vec{m} können sowohl Drehkräfte wie auch translatorische Kräfte wirken:

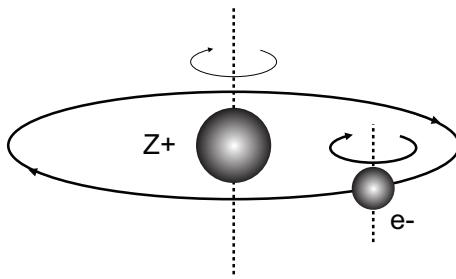


Abbildung 3.8: Atomarer Ursprung des Magnetismus

- Ein Drehmoment wirkt sowohl im homogenen wie auch im inhomogenen Magnetfeld: $\vec{M} = \vec{m} \times \vec{B}$
- Eine translatorische Kraft wirkt nur in einem inhomogenen Magnetfeld: $\vec{F} = -\vec{\nabla}E_{\text{pot}} = \vec{\nabla}(\vec{m} \cdot \vec{B})$. Wenn $\vec{m} \parallel \vec{B}$ parallel ausgerichtet sind (und \vec{m} unabhängig von \vec{B} ist), was aufgrund des Drehmoments häufig der Fall ist, ist die translatorische Kraft gegeben durch $\vec{\nabla}(\vec{m} \cdot \vec{B}) = \pm |\vec{m}| \vec{\nabla}|\vec{B}|$. Die Ableitung $\vec{\nabla}|\vec{B}|$ ist der magnetische Feldgradient.

Aufgrund der translatorischen Kraft wird ein Paramagnet deshalb ins Feld hineingezogen, während ein Diamagnet aus dem Feld hinausgestossen wird.

3.2.3 Atomarer Ursprung des Magnetismus

Die Ursache der Magnetisierung liegt in atomaren Kreisströmen (siehe Abb. 3.8). Die negativ geladenen Elektronen umkreisen den positiv geladenen Atomkern, wodurch ein magnetischer Dipol entsteht. Zusätzlich drehen sich die Elektronen (und auch der Atomkern) um ihre eigene Achse, wodurch ebenfalls ein magnetischer Dipol entsteht. (Hinweis: Beide Phänomene folgen aus der Quantenmechanik, aber das einfache Bild der kreisenden Elektronen ergibt das richtige Verhalten).

Obwohl also jedes Elektron eines Atoms (oder Moleküls) einen magnetischen Dipol besitzt, hat das Atom als Ganzes nicht automatisch auch einen magnetischen Dipol. Da die Elektronen jeweils paarweise in entgegengesetzter Richtung um den Atomkern kreisen, heben sich die Dipole auf. Nur falls ein oder mehrere Elektronen ungepaart sind (z.B. wenn die Gesamtelektronenzahl ungerade ist) besitzt das Atom einen magnetischen Dipol.

Paramagnetismus

Materialien, welche ungepaarte Elektronen (und damit atomare Dipole) besitzen, sind *paramagnetisch*. Wird ein paramagnetisches Material in ein Magnetfeld gebracht, so richten sich die Dipole entlang dem äusseren Feld aus. Dadurch wird das äusseren Feld verstärkt.

	Diamagnetismus	Paramagnetismus	Ferromagnetismus
Ursache	Magnetfeld verst�rktschw�cht atomare Kreisströme	Unkompensierte atomare Kreisströme generieren Dipol	Kollektive Ausrichtung von atomaren Dipolen
Wirkung	Magnetfeld wird abgeschwächt	Magnetfeld wird verst�rkts	Magnetfeld wird enorm verst�rkts
Stärke	Sehr schwach	schwach	Sehr stark
Relative magnetische Permeabilität	$\mu_r < 1$	$\mu_r > 1$	$\mu_r \gg 1$
Suszeptibilität	$\chi_m < 0$	$\chi_m > 0$	$\chi_m \gg 0$
Temperatur-abhängig?	Nein	Nimmt mit steigender Temperatur ab	Verschwindet, wenn Curietemperatur 超berschritten wird

Tabelle 3.1: Eigenschaften von Dia-, Para- und Ferromagnetismus

Da die Energie des Dipols ausserst gering ist (viel kleiner als die thermische Energie), ist nur ein kleiner Bruchteil aller Dipole ausgerichtet und das induzierte Magnetfeld ist sehr klein. Der Paramagnetismus ist das Analogon zur Orientierungspolarisation.

Diamagnetismus

Materialien, welche keine ungepaarten Elektronen (und damit keine atomaren Dipole) besitzen, sind *diamagnetisch*. Man findet, dass diamagnetische Materialien ein ausseres Feld abschwächen. Die Ursache des Diamagnetismus ist die Lorentzkraft: Betrachtet man zwei Elektronen, die in entgegengesetzter Richtung um den Atomkern kreisen, erfahrt das eine Elektron eine zusatzliche Zentripetalkraft und das andere eine abgeschwächte Zentripetal-kraft. Dadurch sind die Kreisbahnen der beiden Elektronen nicht mehr dieselben, und die magnetischen Dipole heben sich nicht mehr auf. Dieser Effekt tritt bei allen Materialien auf (auch bei paramagnetischen), aber da er sehr klein ist, wird er vom Paramagnetismus 超berdeckt. Der Diamagnetismus ist in diesem Sinne das Analogon zur Veschiebungspolarisation.

Ferromagnetismus

Der Ferromagnetismus ist ein Extremfall des Paramagnetismus. Beim Ferromagnetismus richten sich die atomaren Dipole gegenseitig aus, und es entsteht eine langreichweite magnetische Ordnung. Dadurch addiert sich das Magnetfeld der einzelnen Dipole konstruktiv und das Magnetfeld wird enorm verst rkts. Einige Eigenschaften von Dia-, Para- und Ferromagnetismus sind in Tabelle 3.1 zusammengefasst.

Experiment: Schwebendes Graphitpl ttchen

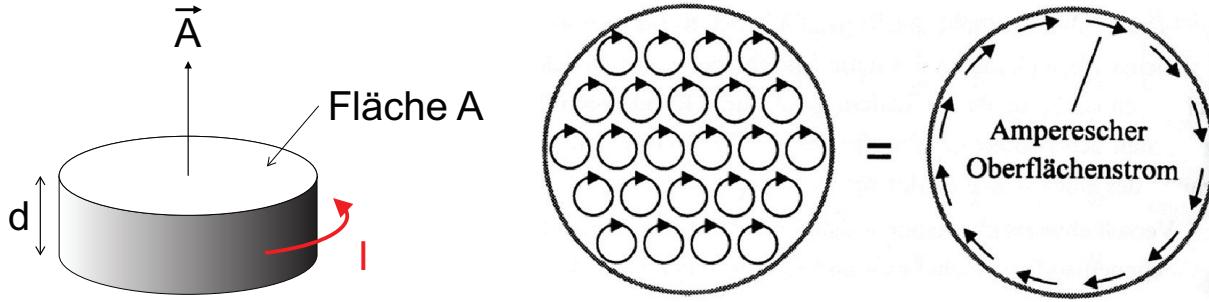


Abbildung 3.9: Ampere'scher Oberflächenstrom

3.2.4 Oberflächenströme

In einem magnetisierten Material heben sich die atomaren Kreisströme im Innern gegenseitig auf (siehe Abbildung 3.9). Nur am Rand verbleibt ein resultierender Strom, der auch *Oberflächenstrom* oder *gebundener Oberflächenstrom* genannt wird. (Dies ist analog zur Oberflächenladung von Dielektrika.) Dies bedeutet, dass Magnetisierung und Oberflächenströme äquivalent sind:

Das Magnetfeld eines Körpers mit Magnetisierung \vec{M} ist identisch mit dem Magnetfeld der zugehörigen Längenstromdichte \vec{j}_A eines Ringstroms I , welcher an der Oberfläche des Körpers um diesen herumläuft.

Um dies genauer zu zeigen, betrachten wir ein zylindrisches Volumenelement mit Dicke d wesentlich kleiner als der Radius (siehe Abbildung 3.9). Fließt ein Kreisstrom I um den Zylinder, so entsteht der magnetische Dipol:

$$\vec{m} = I \vec{A} \quad (3.44)$$

Hier ist $A = |\vec{A}|$ die Querschnittsfläche des Zylinders und der Vektor gibt die Flächennormale wieder. Die Magnetisierung ist gegeben als das Dipolmoment pro Volumen. Für das Zylindervolumen $V = Ad$ ist:

$$\vec{M} = \frac{\vec{m}}{V} = \frac{I \vec{A}}{Ad} = \vec{n} \times \vec{j}_A \quad (3.45)$$

\vec{n} ist ein Normalenvektor der auf der Seitenfläche des Zylinders steht, und $j_A = |\vec{j}_A| = I/d$ ist die Längenstromdichte (mit Einheit A/m). Die Magnetisierung ist also bis auf die Richtung identisch mit der Längenstromdichte.

Falls die Magnetisierung über einen Körper homogen ist (d.h. \vec{M} hat überall den gleichen Betrag und Richtung), so bietet der Oberflächenstrom eine elegante Methode, um das Magnetfeld des Körpers nach Biot-Savart zu berechnen.

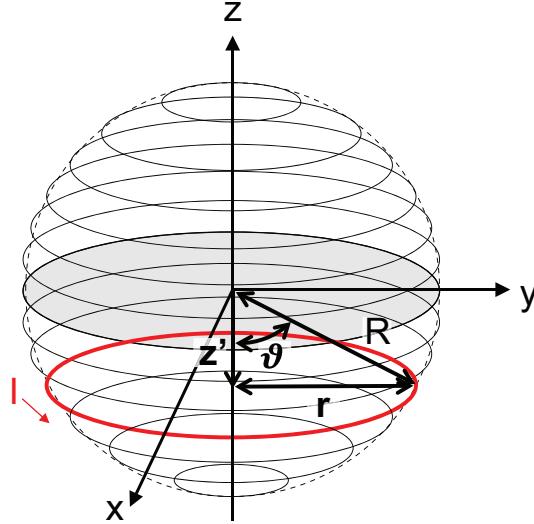


Abbildung 3.10: Oberflächenstrom einer homogen entlang z magnetisierten Kugel

Beispiel: Magnetfeld einer homogen magnetisierten Kugel

Wir betrachten als Beispiel eine Kugel mit Radius R und Magnetisierung \vec{M} entlang der z-Achse. Der Einfachheit halber beschränken wir uns darauf, das Feld auf der Achse zu berechnen. Infolge der Symmetrie ist dann wiederum nur die z-Komponente des Magnetfeldes von Null verschieden.

Das Magnetfeld des Oberflächenstroms ist gegeben als die Summe von Kreisströmen, die entlang der Achse verteilt sind:

$$B_z(z) = \int_{\text{alle Oberflächenströme}} dI \frac{\mu_0 r^2}{2(r^2 + [z' - z]^2)^{3/2}} \quad (3.46)$$

Hier ist dI ein Oberflächenstromelement, und z' ist dessen vertikale Position relativ zum Zentrum der Kugel (siehe Abb. 3.10). r ist der Radius eines Schleifenelements. Das Oberflächenstromelement ist gegeben durch $dI = j_A R d\vartheta$:

$$B_z(z) = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\vartheta \frac{\mu_0 r^2 j_A R}{2(r^2 + [z' - z]^2)^{3/2}} \quad (3.47)$$

Nun bestimmen wir die Längenstromdichte j_A an der Oberfläche. Aus $\vec{M} = \vec{n} \times \vec{j}_A$ folgt $\vec{j}_A = \vec{M} \times \vec{n}$ und damit:

$$j_A = |\vec{j}_A| = |\vec{M}| \sin \vartheta = |\vec{M}| \frac{r}{R} \quad (3.48)$$

Der Winkel ist durch die vertikale Position z' bestimmt, $z' = -R \cos \vartheta$. Daraus folgt $dz' = R \sin \vartheta \cdot d\vartheta = r \cdot d\vartheta$ und $d\vartheta = dz'/r$. Nun können wir das Integral als Funktion der

vertikalen Schleifenposition und der Magnetisierung ausdrücken:

$$B_z(z) = \int_{z'=-R}^R dz' \frac{\mu_0 |\vec{M}| r^2}{2 (r^2 + [z' - z]^2)^{3/2}} \quad (3.49)$$

Anschaulich gesehen bedeutet dieses Zwischenresultat, dass die „Schleifendichte“ in der Magnetisierungsrichtung konstant ist.

Wir setzen nun den Schleifenradius am Ort z' als $r = (R^2 - z'^2)^{1/2}$ ein, und lösen das Integral auf:

$$B_z(z) = \int_{z'=-R}^R dz' \frac{\mu_0 |\vec{M}| (R^2 - z'^2)}{2 ([R^2 - z'^2] + [z' - z]^2)^{3/2}} = \frac{2\mu_0 |\vec{M}| R^3}{3|z|^3} \quad (3.50)$$

Man stellt fest, dass die magnetisierte Kugel auf der Achse das gleiche Feld generiert wie ein magnetischer Dipol mit $\vec{m} = V\vec{M}$:

$$B_z(z) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2|\vec{m}|}{|z|^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2(4\pi R^3)|\vec{M}|}{3|z|^3} = \frac{2\mu_0 |\vec{M}| R^3}{3|z|^3} \quad (3.51)$$

($V = 4\pi R^3/3$ ist das Kugelvolumen). Dieses Resultat ist allgemein gültig:

$\vec{m} = 4\pi R^3 \vec{M}/3$

Dipolmoment einer homogen magnetisierten Kugel (3.52)

In anderen Worten bedeutet dies:

Eine homogen magnetisierte Kugel generiert exakt ein Dipolfeld. Das Dipolmoment ist gegeben durch die Magnetisierung multipliziert mit dem Kugelvolumen.

Grenzflächen

Wir betrachten nun einen magnetisierten Zylinder innerhalb eines äusseren Magnetfeldes (siehe Abbildung 3.11 links). Wir wollen schauen, wie sich das Magnetfeld beim Eintritt in den Zylinder ändert. An der Stirnfläche (Punkt A) steht das Feld senkrecht auf der Oberfläche, und ist innerhalb und ausserhalb des Zylinders gleich gross:

$$\vec{B} = \vec{B}_0 + \mu_0 \vec{M} = \vec{B}_0 + \mu_0 (\vec{n} \times \vec{j}_A) \quad (3.53)$$

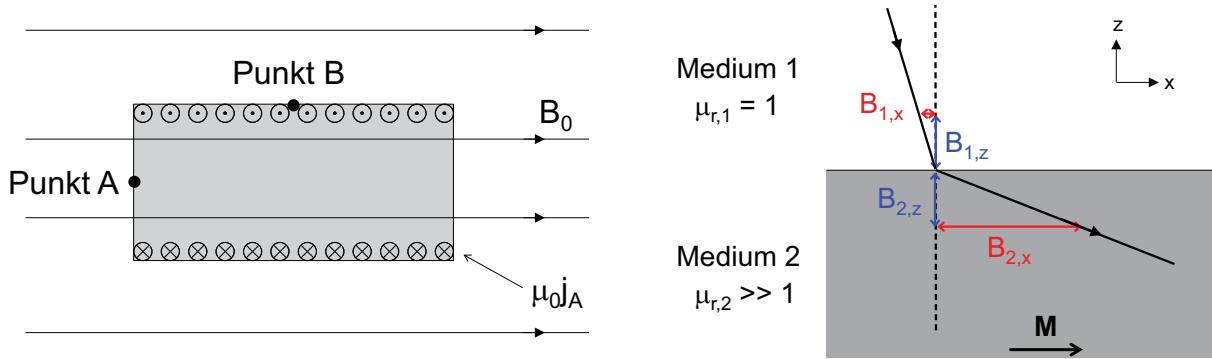


Abbildung 3.11: Links: Oberflächenstrom eines magnetisierten Zylinders. Rechts: Magnetische Grenzfläche

An der Seitenfläche (Punkt B) ist das Feld parallel zur Oberfläche, und ist innerhalb und ausserhalb des Zylinders unterschiedlich:

$$\vec{B} = \vec{B}_0 \quad \text{ausserhalb} \quad (3.54)$$

$$\vec{B} = \vec{B}_0 + \mu_0 \vec{M} = \vec{B}_0 + \mu_0 (\vec{n} \times \vec{j}_A) \quad \text{innerhalb} \quad (3.55)$$

Man stellt also fest:

Die senkrechte Komponente des Magnetfeldes ist beim Oberflächendurchtritt stetig, während sich die parallele Komponente um den Betrag der Längenstromdichte ändert.

Dies sind die *Grenzflächenbedingungen* des Magnetfeldes:

$$\vec{n} \cdot (\vec{B}_2 - \vec{B}_1) = 0 \quad \text{senkrechte Komponente} \quad (3.56)$$

$$\vec{n} \times (\vec{B}_2 - \vec{B}_1) = -\mu_0 \vec{j}_A \quad \text{parallele Komponente} \quad (3.57)$$

Hier sind \vec{B}_1 und \vec{B}_2 die Magnetfelder auf den beiden Seiten der Grenzfläche, und \vec{n} der Normalenvektor, der von Medium 2 zu Medium 1 zeigt. Diese Grenzbedingungen sind analog zu den Randbedingungen für elektrische Felder, welche wir in Kapitel 2.2.3 betrachtet haben.

Beispiel: Magnetische Abschirmung

Falls das Magnetfeld von einem unmagnetischen Material ($\mu_r \approx 1$) in ein ferromagnetisches Material ($\mu_r \gg 1$) übertritt, so ändert sich an der Grenzfläche die Richtung der

Feldlinien. Wir betrachten eine Grenzfläche entlang der x-y-Ebene, wie in der Abbildung 3.11 rechts dargestellt. Für die senkrechte Komponente gilt:

$$B_{2,z} = B_{1,z} \quad (3.58)$$

Für die parallele Komponente gilt:

$$B_{2,x} = B_{1,x} + \mu_0 j_A = B_{1,x} + \mu_0 M_2 \approx \mu_{r,2} B_{1,x} \quad (3.59)$$

Die parallele Komponente wird also um den Faktor $\mu_{r,2}$ verstärkt, während die senkrechte Komponente unverändert bleibt. Im Bild der Feldlinien bedeutet das:

Trifft eine magnetische Feldlinie auf eine Grenzfläche zwischen einem unmagnetischen und einem ferromagnetischen Material, so verläuft sie auf der unmagnetischen Seite fast senkrecht zur Oberfläche, und auf der magnetischen Seite fast parallel zur Oberfläche.

Dies bedeutet, dass magnetische Feldlinien möglichst immer im magnetischen Material verlaufen. Damit können Räume magnetisch abgeschirmt werden, indem man die Feldlinien durch ein Material mit hoher Feldkonstanten um den Raum herumführt.

3.2.5 Grundbegriffe des Ferromagnetismus

Im folgenden besprechen wir einige Grundbegriffe zum Ferromagnetismus.

Experiment: Magnetnadel-Modelle

Hysterese

Ferromagnetische Materialien können magnetisiert und entmagnetisiert werden (siehe Abb. 3.12):

Wichtige Begriffe:

- M_{sat} ist die Sättigungsmagnetsierung
- M_r ist die Remanenzmagnetsierung
- H_c ist das Koerzitivfeld
- Die Steigung der Neukurve ist proportional zur Anfangssuszeptibilität χ_A

Materialien, die sich leicht magnetisieren lassen, werden auch als „weich“ bezeichnet, und solche, die sich schwer magnetisieren lassen, als „hart“.

Experiment: Magnetische Domänen

Experiment: Barkhausen-Effekt

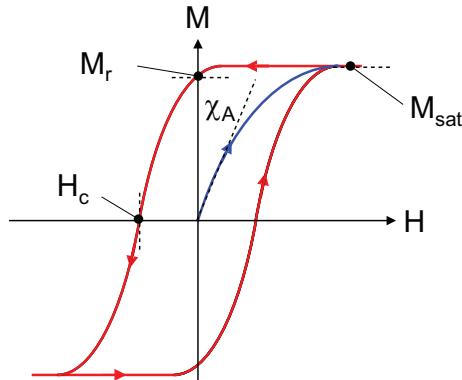


Abbildung 3.12: Nach der erstmaligen Magnetisierung (blaue Kurve) tritt die typische Hysteresekurve (rote Kurve) beim wiederholtem Entmagnetisieren und Magnetisieren eines ferromagnetischen Materials auf.

Magnetische Anisotropie

Ein magnetisches Material lässt sich nicht in alle Richtungen gleich einfach magnetisieren, und es wird zwischen „leichten Achsen“ und „schweren Achsen“ unterschieden (Englisch „easy axis“ und „hard axis“). Dieses Phänomen wird als *magnetische Anisotropie* bezeichnet. Die Anisotropie hängt von zwei Faktoren ab:

- Kristallstruktur (abhängig von der atomaren Struktur des Materials)
- Geometrie (nur von der Form abhängig)

Beispiel: Die geometrische Anisotropie einer Kugel ist Null, diejenige eines langen Zylinders maximal.

Die Anisotropie wird makroskopisch durch einen Anisotropieparameter K beschrieben (hier für uniaxiale Anisotropie):

$$E = KV \sin^2 \vartheta \quad (3.60)$$

Hier ist E die Anisotropieenergie, V das Volumen, und ϑ der Winkel zwischen Magnetachse und Magnetisierung. Das heisst, der Anisotropieparameter und das Volumen bestimmen, wie stabil ein Magnet gegen Umpolung ist.

Curie-Temperatur

Wird ein Ferromagnet genügend erwärmt, so verliert er ab einer bestimmten Temperatur die ferromagnetische Eigenschaft und wird zu einem gewöhnlichen Paramagneten. Die kritische Temperatur heisst Curietemperatur (siehe Abb. 3.13).

Wichtige Begriffe:

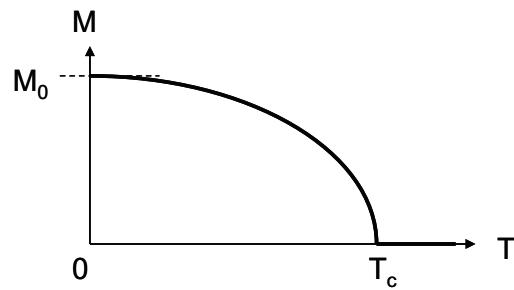


Abbildung 3.13: Curietemperatur

- M_0 ist die Magnetisierung am absoluten Nullpunkt

- T_C ist die *Curietemperatur*

Experiment: Curie-Punkt von Fe und Ni

Experiment: Harddisk

Experiment: Kernspeicher 1 KByte

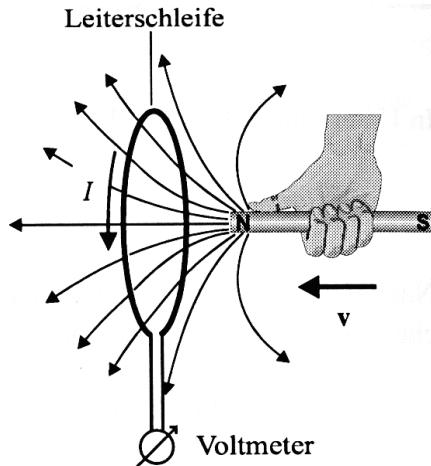


Abbildung 3.14: Grundversuch zur Induktion

3.3 Magnetische Induktion

Literatur: Kuypers Kap. 22, Tipler Kap. 28

In diesem Kapitel wird besprochen, wie zeitabhängige Magnetfelder durch Induktion ein elektrisches Feld (und dadurch eine Spannung und einen Strom) generieren. Dies ist neben dem Coulombgesetz die zweite und eine fundamental andere Art, elektrische Felder zu erzeugen. Die wichtigste Anwendung ist die drahtlose Übertragung von elektrischen Signalen.

Experiment: Dosen-Explosion

3.3.1 Faraday'sches Induktionsgesetz

Wir messen mit einem Voltmeter die Spannung an den Enden einer Leiterschleife, und beobachten was geschieht, wenn ein Magnet (Magnetfeld) in die Nähe gebracht wird. Man stellt fest, dass in gewissen Fällen eine Spannung generiert wird (siehe Abb. 3.14).

Die wichtigsten Beobachtungen sind:

- Die Spannung ist proportional zur Fläche der Schleife.
- Die Spannung ist proportional zur Magnetfeldstärke.
- Das Vorzeichen der Spannung wechselt mit dem Vorzeichen des Magnetfeldes.
- Die Spannung ist proportional zur Geschwindigkeit, mit der das Magnetfeld oder die Fläche geändert wird.

Experiment: Grundversuch der Induktion (Leiterschleife)

Experiment: Induktion im Erdfeld

Experiment: Induktion mit Helmholtz-Spulen

Faraday'sches Induktionsgesetz

Die Beobachtungen sind im Faraday'schen Induktionsgesetz zusammenfasst:

$$\boxed{U = -\frac{d}{dt} \int_A \vec{B}(\vec{r}') \cdot d\vec{A}' = -\frac{d\Phi_M}{dt}} \quad \text{Faraday'sches Induktionsgesetz} \quad (3.61)$$

Hier ist \vec{B} das Magnetfeld, \vec{A} die Fläche der Schleife (mit Normalenvektor), und Φ_M der magnetische Fluss (Kapitel 3.1.5).

Die Spannung U wird als *Induktionsspannung* oder „*electromotive force*“ (*EMF*) bezeichnet. (Die EMF ist definiert als geleistete Arbeit pro Einheitsladung). Die Induktionsspannung ist eine dynamische (nicht-konservative) Spannung, im Gegensatz zur Spannung und dem Potential in der Elektrostatik.

Die Spannung U wird durch ein elektrisches Feld aufgebaut, das die Ladungsträger in der Schleife entlangtreibt:

$$U = \int_L \vec{E}(\vec{r}') \cdot d\vec{L}' \quad (3.62)$$

(Hinweis: Das Vorzeichen ist hier positiv, da das elektrische Feld nicht durch die Spannung U verursacht wird, sondern die Ladungen in der Schleife gegen diese Potentialdifferenz antreibt). Wählt man Anfang und Endpunkt sehr nahe beisammen (ohne dass sie sich berühren), so lässt sich das Integral via dem Stokes-Theorem in eine Differentialform umwandeln:

$$\oint_L \vec{E}(\vec{r}') \cdot d\vec{L}' = \int_A [\vec{\nabla} \times \vec{E}(\vec{r}')] \cdot d\vec{A}' = -\frac{d}{dt} \int_A \vec{B}(\vec{r}') \cdot d\vec{A}' \quad (3.63)$$

$$\boxed{\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{d\vec{B}}{dt}} \quad \text{Differentialform des Faraday'schen Induktionsgesetzes (3. Maxwellgleichung)} \quad (3.64)$$

(Hinweis: Diese Umformung ist genau analog zum Durchflutungsgesetz, Kapitel 3.1.6). Im Bild der Feldlinien bedeutet das Faraday'sche Induktionsgesetz:

Nimmt man vertikale magnetische Feldlinien, deren Richtung sich periodisch ändert, so bilden sich um die magnetischen Feldlinien Wirbel von elektrischen Feldlinien (deren Richtung sich ebenfalls periodisch ändert).

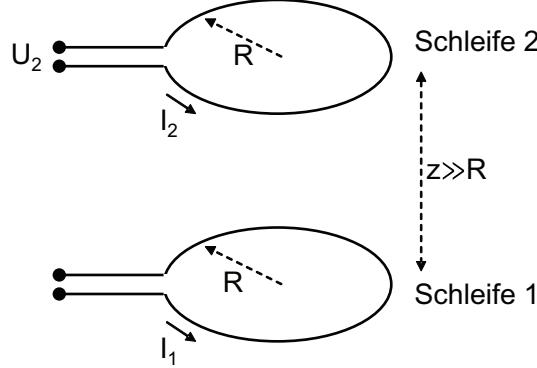


Abbildung 3.15: Zwei Leiterschleifen

3.3.2 Lenz'sche Regel

Beispiel: Induktion zwischen zwei Leiterschleifen

Wir betrachten als Beispiel zwei Leiterschleifen mit Radius R (siehe Abbildung 3.15). Die beiden Leiterschleifen seien axial ausgerichtet und weit voneinander entfernt ($z \gg R$). Durch die untere Schleife 1 fliesst ein Strom I_1 .

Das Magnetfeld am Ort der oberen Schleife 2 ist (siehe Kapitel 3.1.3):

$$B = \frac{\mu_0 I_1 R^2}{2z^3} \quad (3.65)$$

Der magnetische Fluss durch Schleife 2 ist:

$$\Phi_M = \pi R^2 B = \frac{\mu_0 I_1 \pi R^4}{2z^3} \quad (3.66)$$

Wir beobachten nun, wie sich die Induktionsspannung U_2 der zweiten Schleife ändert, wenn wir den Strom oder den Abstand der beiden Schleifen ändern:

- (a) Der Strom durch Schleife 1 sei konstant. Da sich der magnetische Fluss nicht ändert, findet in Schleife 2 keine Induktion statt, und nichts geschieht:

$$U_2 = -\frac{d\Phi_M}{dt} = 0 \quad (3.67)$$

- (b) Der Strom durch Schleife 1 werde langsam erhöht. Die Induktionsspannung ist *negativ*:

$$U_2 = -\frac{d}{dt} \left(\frac{\mu_0 I_1 \pi R^4}{2z^3} \right) = -\frac{\mu_0 \pi R^4}{2z^3} \frac{dI_1}{dt} < 0 \quad (3.68)$$

Das heisst, in Schleife 2 wird ein Strom I_2 induziert, der dem Ursprungsstrom I_1 *entgegengesetzt* ist.

- (c) Der Strom durch Schleife 1 sei konstant, aber die Distanz z zwischen den beiden Schleifen werde vergrössert (Schleife 2 wird mit Geschwindigkeit $v = dz/dt$ wegbe-wegt). Die Induktionsspannung ist *positiv*:

$$U_2 = -\frac{d}{dt} \left(\frac{\mu_0 I_1 \pi R^4}{2z^3} \right) = -\frac{\mu_0 I_1 \pi R^4}{2} \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{z^3} \right) = \frac{3\mu_0 I_1 \pi R^4 v}{2z^4} > 0 \quad (3.69)$$

Da in den Fällen (b) und (c) durch beide Schleifen ein Strom fliesst, besitzen beide einen magnetischen Dipol und es wirkt eine *Kraft* zwischen den Schleifen. Im Fall von (b) sind die Dipole entgegengesetzt gerichtet und die Kraft ist abstossend, im Fall von (c) ist sie anziehend.

Lenz'sche Regel

Die induzierte Spannung und der induzierte Strom sind so gerichtet, dass sie eine der Ursache entgegengerichtete Wirkung erzielen.

Die Lenz'sche Regel kann man auf das Beispiel der zwei Leiterschleifen anwenden:

- Im Fall (b) führt der induzierte Strom in der zweiten Schleife zu einem Magnetfeld, welcher das Magnetfeld in der ersten Schleife abschwächt.
- Im Fall (c) führt der induzierte Strom zu einer anziehenden Kraft zwischen den Leiterschleifen, welche das Auseinanderbewegen der Schleifen behindert.

In den meisten Fällen ist es deshalb am einfachsten, das Vorzeichen von Induktionspannung (oder -strom) durch die Lenz'sche Regel zu bestimmen.

Experiment: Induktion erzeugt Gegenkraft

Experiment: Elihu-Thompson (Magnetische Schleuder) **Experiment: Wirbelstrombrem-sung in Cu-Rohr**

Wirbelströme

Wird ein elektrischer Leiter in einem inhomogenen Magnetfeld bewegt, so ändert sich der magnetische Fluss und es werden lokal Ströme induziert. Da sich die Ströme in einem Magnetfeld befinden, werden sie durch die Lorentzkraft auf Kreisbahnen abgelenkt. Die Ströme heissen deshalb auch *Wirbelströme*.

Wirbelströme generieren wiederum ein Magnetfeld. Das Magnetfeld ist gemäss Lenz'scher Regel so gerichtet, dass es der Ursache entgegenwirkt. Die Abbildung unten zeigt das Auftreten des Wirbelstroms und die damit verbundene Kraftwirkung anhand einer Leiterschleife.

Wirbelströme führen zu Leistungsverlust infolge des elektrischen Widerstandes des Leiters. Dieser Leistungsverlust ist häufig unerwünscht, wird aber auch gezielt eingesetzt

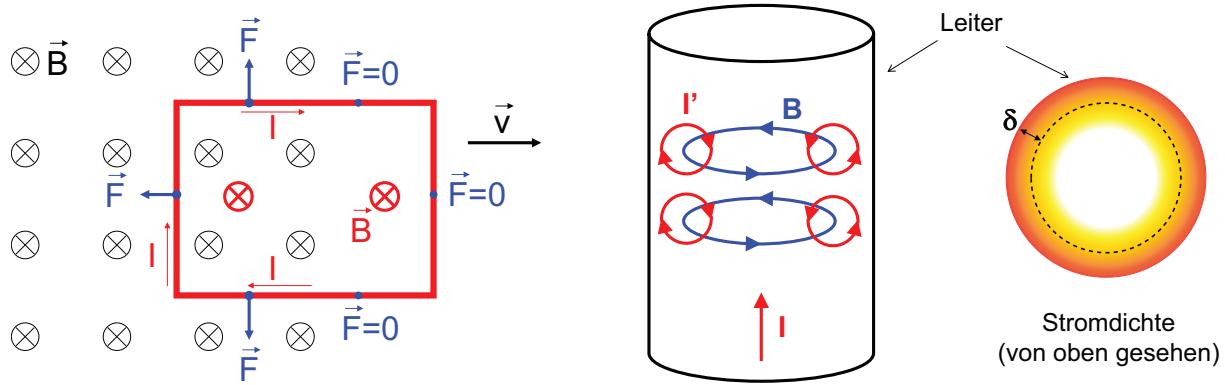


Abbildung 3.16: Links: Wirbelstrom in Leiterschleife. Rechts: Skineffekt

(zum Beispiel in Wirbelstrombremsen). Während der genaue Leistungsverlust von der detaillierten Geometrie von Magnetfeld und Leiter abhängt, kann er anhand folgender Größen abgeschätzt werden.

Wirbelstromverluste nehmen zu:

- Mit der Geschwindigkeit, mit der der Leiter bewegt wird
- Mit der Stärke des Magnetfeldes
- Mit der Dicke des Leiters
- Mit der Leitfähigkeit des Leiters

Der letzte Punkt ist nicht intuitiv, und erklärt sich daher, dass bei guten Leitern ein grösserer Strom induziert wird.

Experiment: Fallende Scheibe im Magnetfeld

Experiment: Induktionsparadoxon

Skineffekt

Der Skineffekt bezeichnet das Phänomen, dass hochfrequente Ströme nur in einer dünnen Oberflächenschicht eines Leiters fliessen. Die Ursache des Skineffekts ist die Tatsache, dass hochfrequente Magnetfelder infolge der Induktion nicht tief in einen Leiter eindringen können (siehe Abbildung 3.16).

Die Tiefe δ , bis zu welcher nennenswerte Ströme auftreten, heisst Eindringtiefe (Skin depth). Wir werden die Eindringtiefe später anhand der elektromagnetischen Welle als Beispiel herleiten. Die Eindringtiefe $\delta \propto 1/\sqrt{f}$ nimmt mit der Wurzel der Frequenz ab und ist für gute Leiter (z.B. Kupfer) bei $f = 1 \text{ MHz}$ etwa $70 \mu\text{m}$.

Experiment: Skin-Effekt

3.3.3 Induktivität

Im Beispiel der zwei Leiterschleifen (Kap. 3.3.2) haben wir gesehen, dass die induzierte Spannung U_2 direkt proportional zur zeitlichen Änderung des Stroms I_1 ist:

$$U_2 = -\frac{d\Phi_M}{dt} = -\frac{d(LI_1)}{dt} = -L \frac{dI_1}{dt} \quad (3.70)$$

Die Proportionalitätskonstante L wird *Induktivität* genannt:

$$L := \frac{\Phi_M}{I} = \frac{1}{I} \int_A \vec{B}(\vec{r}') \cdot d\vec{A}'$$

Induktivität
(3.71)

Die Einheit der Induktivität ist $[L] = 1 \text{ Henry} = 1 \text{ H} = 1 \text{ T m}^2/\text{A}$.

Die Induktivität ist von grosser praktischer Bedeutung, da sie angibt, wie stark in einer gegebenen Leitergeometrie Spannungen und Ströme induziert werden.

Induktion tritt sowohl zwischen zwei verschiedenen Leitern (Gegeninduktion) als auch in ein und demselben Leiter (Selbstinduktion) auf.

Beispiel: Gegeninduktion von zwei Leiterschleifen

Im Beispiel der beiden Leiterschleifen (Kapitel 3.3.2) ist die Gegeninduktivität:

$$L = \frac{\Phi_M}{I_1} = \frac{BA}{I_1} = \frac{\mu_0 \pi R^4}{2z^3} \quad (3.72)$$

(Hinweis: Bei Gegeninduktion wird häufig das Symbol M_{12} anstelle von L verwendet.)

Beispiel: Selbstinduktion einer langen Spule

Im Zentrum einer langen Spule (Länge $l \gg$ Radius R) bestehend aus N Windungen ist:

$$L = \frac{1}{I} \sum_{i=1}^N \int_{A_i} \vec{B}(\vec{r}') \cdot d\vec{A}'_i = \frac{N}{I} \int_A \frac{\mu_0 I N}{l} dA' = \frac{N^2 \mu_0 \pi R^2}{l} \quad (3.73)$$

Experiment: Induktion mit ausziehbarer Spule

3.3.4 Energie des Magnetfeldes

Analog zur elektrischen Energie im Kondensator kann in einer Spule (oder allgemein, einer Induktivität) magnetische Energie gespeichert werden. Wir benützen nun das Induktionsgesetz, um diese Energie zu bestimmen.

Energie in einer Induktivität

Wir nehmen an, dass der Strom über einer Induktivität L in der Zeitspanne T kontinuierlich von Null auf I_0 erhöht wird. Dabei muss Arbeit gegen die Induktionsspannung U verrichtet werden:

$$I(t) = I_0 \frac{t}{T} \quad (3.74)$$

$$U(t) = L \frac{dI}{dt} = \frac{LI_0}{T} \quad (3.75)$$

(Das Vorzeichen von U ist positiv, da wir Arbeit verrichten). Die gespeicherte magnetische Energie E_{magn} ist gegeben durch die Leistung $P = UI$ während der Zeitspanne T :

$$E_{magn} = \int_0^T P(t) dt = \int_0^T U(t)I(t) dt = \int_0^T \frac{LI_0^2 t}{T^2} dt = \frac{1}{2} LI_0^2 T \quad (3.76)$$

Die Energie einer langen Spule mit N Windungen ist:

$$E_{magn} = \frac{1}{2} LI_0^2 = \frac{N^2 \mu_0 \pi R^2 I_0^2}{2l} \quad (3.77)$$

Energiedichte des Magnetfeldes

Nimmt man für die Induktivität L eine Spule, bei welcher das Magnetfeld im Innern konstant ist, so kann man wie beim Kondensator eine Energiedichte berechnen:

$$w = \frac{E_{magn}}{V} = \frac{N^2 \mu_0}{2l^2} I_0^2 = \frac{N^2 \mu_0}{2l^2} \left(\frac{Bl}{N\mu_0} \right)^2 = \frac{B^2}{2\mu_0} \quad (3.78)$$

$w = \frac{1}{2\mu_0} \left| \vec{B} \right|^2$

Energiedichte des Magnetfeldes
(3.79)

Hier ist I_0 bestimmt durch das zugehörige Feld $B = \mu_0 I_0 (N/L)$ in der Spule (Kapitel 3.1.4). Man kann zeigen, dass dies ebenfalls eine fundamentale Beziehung ist, die für alle Magnetfelder (nicht nur für die Spule) gilt.

Experiment: Selbstinduzierte Spannung bei Stromänderung

3.4 Maxwell'sche Gleichungen

Literatur: Kuypers —, Tipler Kap. 30

In diesem Kapitel wird gezeigt, dass sich die Gesetze des Elekromagnetismus in vier fundamentalen Gleichungen zusammenfassen lassen. Diese werden die „Maxwell’schen Gleichungen“ genannt.

Die Maxwell’schen Gleichungen haben für den Elektromagnetismus die gleiche grundlegende Bedeutung wie die Newton’schen Axiome für die Mechanik. Die Maxwell’schen Gleichungen sind Naturgesetze, die sich durch Umformen aus anderen Gesetzen ergeben (z.B. Coulombgesetz), aber die sich nicht fundamental herleiten lassen.

3.4.1 Die Maxwell’schen Gleichungen

Genau genommen bestehen die Gesetze des Elektromagnetismus aus den vier Maxwell’schen Gleichungen plus einem Kraftgesetz:

Kraftgesetz

Die Kraft auf eine Probeladung Q_0 in elektrischen und magnetischen Feldern ist gegeben durch die Coulombkraft und die Lorentzkraft:

$$\boxed{\vec{F}(\vec{r}) = Q_0 \left[\vec{E}(\vec{r}) + \vec{v} \times \vec{B}(\vec{r}) \right]} \quad (\text{Erweiterte) Lorentzkraft} \quad (3.80)$$

Hier ist \vec{r} die Position und \vec{v} die Geschwindigkeit der Probeladung.

Elektrische Felder

Elektrische Felder können auf zwei Arten erzeugt werden:

- (a) Durch eine elektrische Ladung (Coulombgesetz, Gesetz von Gauss, Kap. 2.1.6).
- (b) Durch ein sich zeitlich änderndes Magnetfeld (Induktionsgesetz von Faraday, Kap. 3.3.1).

Diese beiden Gesetze sind als die 1. und 3. Maxwellgleichung bekannt.

Magnetfelder

Magnetfelder können ebenfalls auf zwei Arten erzeugt werden:

- (c) Durch einen elektrischen Strom (Biot-Savart Gesetz, Durchflutungsgesetz, Kap. 3.1.6).
- (d) Durch ein sich zeitlich änderndes elektrisches Feld (Verschiebungsstrom, Erweiterung des Durchflutungsgesetzes, Kap. 3.4.2).

	Integralform	Differentialform
1. Maxwell'sche Gleichung (Gesetz von Gauss)	$\oint_A \vec{E}(\vec{r}') \cdot d\vec{A}' = \frac{Q}{\varepsilon_0}$	$\vec{\nabla} \cdot \vec{E}(\vec{r}) = \frac{\rho(\vec{r})}{\varepsilon_0}$
2. Maxwell'sche Gleichung (Gesetz von Gauss für Magnetfelder)	$\oint_A \vec{B}(\vec{r}') \cdot d\vec{A}' = 0$	$\vec{\nabla} \cdot \vec{B}(\vec{r}) = 0$
3. Maxwell'sche Gleichung (Faraday'sches Induktionsgesetz)	$\oint_L \vec{E}(\vec{r}') \cdot d\vec{L}' = -\frac{d}{dt} \int_A \vec{B}(\vec{r}') \cdot d\vec{A}'$	$\vec{\nabla} \times \vec{E}(\vec{r}) = -\frac{d\vec{B}(\vec{r})}{dt}$
4. Maxwell'sche Gleichung (Erweitertes Durchflutungsgesetz)	$\oint_L \vec{B}(\vec{r}') \cdot d\vec{L}' = \mu_0 I + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{d}{dt} \int_A \vec{E}(\vec{r}') \cdot d\vec{A}'$	$\vec{\nabla} \times \vec{B}(\vec{r}) = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{d\vec{E}(\vec{r})}{dt}$

Tabelle 3.2: Maxwell'sche Gleichungen

Diese beiden Gesetze sind zusammen als die 4. Maxwellgleichung bekannt. Des weiteren können Magnetfelder nicht durch eine magnetische Ladung erzeugt werden:

- (e) Es gibt keine magnetische Ladung (Gesetz von Gauss für Magnetfelder, Kap. 3.1.5).

Dieses Gesetz ist die 2. Maxwellgleichung.

Die Maxwell'schen Gleichungen sind in Tabelle 3.2 zusammengefasst. Sie werden jeweils in einer Integralform oder einer Differentialform angegeben. Die Umrechnung zwischen den beiden Formen erfolgt mit den Integralsätzen von Gauss resp. Stokes. Welche Form „nützlicher“ ist, hängt von der aktuellen Problemstellung ab.

Obwohl die Maxwell'schen Gleichungen die meisten Phänomene des Elektromagnetismus beschreiben, versagen sie in extremen physikalischen Bereichen. Dies sind insbesondere Quanteneffekte, bei denen einzelne Lichtteilchen (Photonen) auftreten.

3.4.2 Maxwell'scher Verschiebungsstrom

Das Durchflutungsgesetz, wie es in Kapitel 3.1.6 eingeführt wurde, ist unvollständig, denn es gilt nur für statische Felder. Für dynamische Felder muss eine Erweiterung eingeführt werden. Die Erweiterung ist der sogenannte *Maxwell'sche Verschiebungsstrom*.

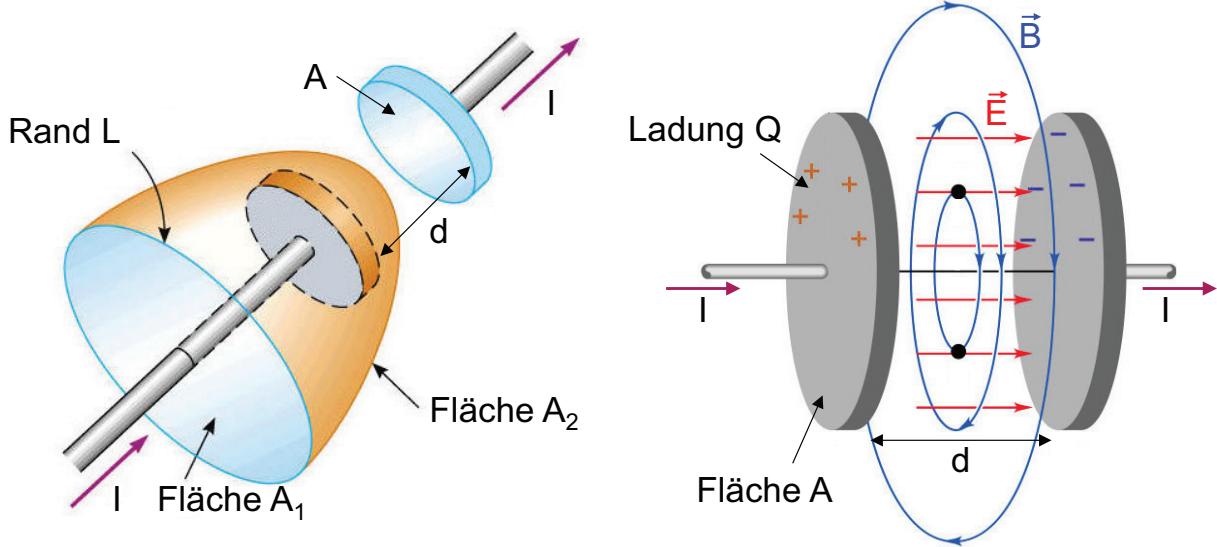


Abbildung 3.17: Maxwell'scher Verschiebungsstrom

Dazu betrachten wir einen Plattenkondensator, welcher mit einem Strom I geladen oder entladen wird (siehe Abb. 3.17).

Anhand des Durchflutungsgesetzes können wir den Strom berechnen, der durch die Fläche A_1 fliesst. Die Fläche hat den Rand L :

$$\oint_L \vec{B}(\vec{r}') \cdot d\vec{L}' = \mu_0 I \text{ Strom, der durch Fläche } A_1 \text{ fliesst} \quad (3.81)$$

Nun betrachten wir eine zweite Fläche A_2 , welche denselben Rand L besitzt, aber genau zwischen den Kondensatorplatten hindurchläuft. Da zwischen den Kondensatorplatten kein Strom fliesst, ist nun:

$$\oint_L \vec{B}(\vec{r}') \cdot d\vec{L}' = 0 \text{ Strom, der durch Fläche } A_2 \text{ fliesst} \quad (3.82)$$

Dies steht im Widerspruch zum Durchflutungsgesetz, welches besagt, dass die Wahl der Fläche keine Rolle spielt!

Um den Widerspruch zu lösen nimmt man an, dass zwischen den Kondensatorflächen ein *Verschiebungsstrom* $I_V = I$ fliesst. Obwohl im Verschiebungsstrom keine Ladungen transportiert werden, ist er „real“: Der Strom, welcher von links auf die Kondensatorplatte fliesst, findet seine Fortsetzung weg von der rechten Kondensatorplatte. Der Verschiebungsstrom „vermittelt“ also den Strom zwischen den beiden Kondensatorplatten.

Der Verschiebungsstrom ist direkt mit dem elektrischen Feld verknüpft, welches sich zwischen den Kondensator auf- und abbaut. Dazu nehmen wir an, dass der Kondensator mit einem konstanten Strom I aufgeladen wird. Das elektrische Feld zwischen den Platten ist:

$$|\vec{E}| = \frac{Q}{\epsilon_0 A} \quad (3.83)$$

Der Strom ist also:

$$I = \frac{dQ}{dt} = \varepsilon_0 \frac{d}{dt} \left(|\vec{E}| A \right) = \varepsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt} \quad (3.84)$$

Man kann zeigen, dass dieses Resultat allgemein gültig ist (nicht nur für den Plattenkondensator). Der Verschiebungsstrom ist:

$$I_V = \varepsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt} = \varepsilon_0 \frac{d}{dt} \int_A \vec{E}(\vec{r}') \cdot d\vec{A}' \quad \text{Verschiebungsstrom} \quad (3.85)$$

Das Durchflutungsgesetz mit Verschiebungsstrom („erweitertes Durchflutungsgesetz“) ist:

$$\oint_L \vec{B}(\vec{r}') \cdot d\vec{L}' = \mu_0(I + I_V) = \mu_0 I + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{d}{dt} \int_A \vec{E}(\vec{r}') \cdot d\vec{A}' \quad (3.86)$$

Experiment: Verschiebungsstrom

3.4.3 Elektromagnetisches Nah- und Fernfeld

Wir wollen nun die Maxwellgleichungen für zwei Grenzfälle interpretieren.

Nahfeld

Der erste Grenzfall gilt für (nahezu) statische Felder und kurze Distanzen. In diesem Fall dominieren die Beiträge der Ladung und des Stromes, das heisst, die elektrischen Felder, die durch statische und bewegte Ladungen verursacht werden. Die Maxwellgleichungen sind:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E}(\vec{r}) = \frac{\rho(\vec{r})}{\varepsilon_0} \quad (3.87)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B}(\vec{r}) \approx \mu_0 \vec{j} \quad (3.88)$$

Dieser Grenzfall wird auch als *Nahfeld* bezeichnet. Er entspricht der klassischen Elektro- und Magnetostatik, wie wir sie in Kapitel 2.1 bis 3.2 behandelt haben.

Fernfeld

Der zweite Grenzfall gilt für sich schnell ändernde (hochfrequente) Felder und grosse Distanzen. In diesem Fall dominieren genau die anderen Beiträge, da die zeitlichen Ableitungen von elektrischem Feld und Magnetfeld nun grosse Werte annehmen. (Zusätzlich

fallen die Dipolfelder von Ladungen und Strömen mit der Distanz sehr rasch ab). Die Maxwellgleichungen sind:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E}(\vec{r}) = -\frac{d\vec{B}(\vec{r})}{dt} \quad (3.89)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B}(\vec{r}) \approx \mu_0 \varepsilon_0 \frac{d\vec{E}(\vec{r})}{dt} \quad (3.90)$$

Dieser Grenzfall wird als *Fernfeld* bezeichnet, und wir haben ihn bisher kaum behandelt. Das Fernfeld entspricht einer *elektromagnetischen Welle*, wie wir im nächsten Kapitel zeigen werden.

Experiment: Sende-Dipol

3.4.4 Elektromagnetische Wellen

Die Maxwell'schen Gleichungen im Fernfeld lassen sich zu einer Wellengleichung umformen. Wir zeigen dies, indem wir die beiden Gleichungen des Fernfeldes kombinieren:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \vec{B}(\vec{r})}{dt^2} &= \frac{d}{dt} \left[-\vec{\nabla} \times \vec{E}(\vec{r}) \right] = -\vec{\nabla} \times \frac{d\vec{E}(\vec{r})}{dt} = -\vec{\nabla} \times \left[\frac{1}{\mu_0 \varepsilon_0} \vec{\nabla} \times \vec{B}(\vec{r}) \right] \\ &= -\frac{1}{\mu_0 \varepsilon_0} \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{B}(\vec{r})) \end{aligned} \quad (3.91)$$

Wir benutzen nun die Identität $\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{B}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{B}) - \vec{\nabla}^2 \vec{B}$ sowie die Tatsache, dass $\vec{\nabla} \cdot \vec{B}(\vec{r}) = 0$ (zweite Maxwell'sche Gleichung):

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{B}(\vec{r})) = -\vec{\nabla}^2 \vec{B}(\vec{r}) \quad (3.92)$$

Damit ist das Resultat:

$$\frac{d^2 \vec{B}(\vec{r})}{dt^2} = \frac{1}{\mu_0 \varepsilon_0} \vec{\nabla}^2 \vec{B}(\vec{r}) \quad (3.93)$$

Für das elektrische Feld lässt sich dieselbe Herleitung durchführen, und man findet:

$$\frac{d^2 \vec{E}(\vec{r})}{dt^2} = \frac{1}{\mu_0 \varepsilon_0} \vec{\nabla}^2 \vec{E}(\vec{r}) \quad (3.94)$$

Dies ist eine *Wellengleichung* mit der Wellengeschwindigkeit

$c = 1/\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}$

Ausbreitungsgeschwindigkeit der elektromagnetischen Welle (3.95)

Setzt man die Werte für μ_0 und ε_0 ein, so findet man:

$$c = 2.998 \cdot 10^8 \text{ m/s} \quad (3.96)$$

Das ist genau derselbe Wert wie die Lichtgeschwindigkeit. Dies ist kein Zufall, denn c ist die Lichtgeschwindigkeit! Das heisst, die Maxwell'schen Gleichungen sagen die Existenz einer elektromagnetischen Welle voraus, die genau dem Licht entspricht. Historisch war dies der erste klare Hinweis, dass es sich bei Licht um ein elektromagnetisches Phänomen handelt.

Wie werden nun elektromagnetische Wellen erzeugt? Gemäss den Maxwell'schen Gleichungen haben sie ihren Ursprung immer in einer beschleunigten Ladung, welche elektrische und magnetische Felder generiert:

Elektromagnetische Wellen (Licht) sind die Fernwirkung beschleunigter Ladungen.

Die Existenz der elektromagnetischen Welle zeigt, dass sich zeitlich ändernde elektrische und magnetische Felder eigenständig aufrecht erhalten und fortpflanzen können, ohne dass Ladungsträger (Materieteilchen) benötigt werden.

Experiment: Lichtgeschwindigkeit

Beispiel: Elektrisches Feld ist entlang x und Magnetfeld ist entlang y

Die Differentialgleichung für das Magnetfeld ist (mit Kurzschreibweise $\partial_x = \partial/\partial x$ etc.):

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2} \begin{pmatrix} 0 \\ B_y \\ 0 \end{pmatrix} &= \frac{-1}{\mu_0 \varepsilon_0} \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{pmatrix} \times \left[\begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ B_y \\ 0 \end{pmatrix} \right] = \frac{-1}{\mu_0 \varepsilon_0} \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -\partial_z B_y \\ 0 \\ \partial_x B_y \end{pmatrix} \\ &\stackrel{\vec{E} \parallel x}{=} \frac{-1}{\mu_0 \varepsilon_0} \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -\partial_z B_y \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{-1}{\mu_0 \varepsilon_0} \begin{pmatrix} 0 \\ -\partial_z^2 B_y \\ \partial_y \partial_z B_y \end{pmatrix} \stackrel{\vec{B} \parallel y}{=} \frac{1}{\mu_0 \varepsilon_0} \begin{pmatrix} 0 \\ \partial_z^2 B_y \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3.97)$$

Die Welle breitet sich in z-Richtung aus, senkrecht zur Richtung des elektrischen und magnetischen Feldes. Diese Feststellung gilt allgemein:

Das elektrische Feld und das Magnetfeld einer elektromagnetischen Welle stehen senkrecht aufeinander, und sind senkrecht zur Ausbreitungsrichtung.

Poynting Vektor

Die Ausbreitungsrichtung im allgemeinen Fall ist gegeben durch den sogenannten Poynting-Vektor (siehe Abb. 3.18):

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} (\vec{E} \times \vec{B}) = \vec{E} \times \vec{H}$$

Poynting-Vektor (3.98)

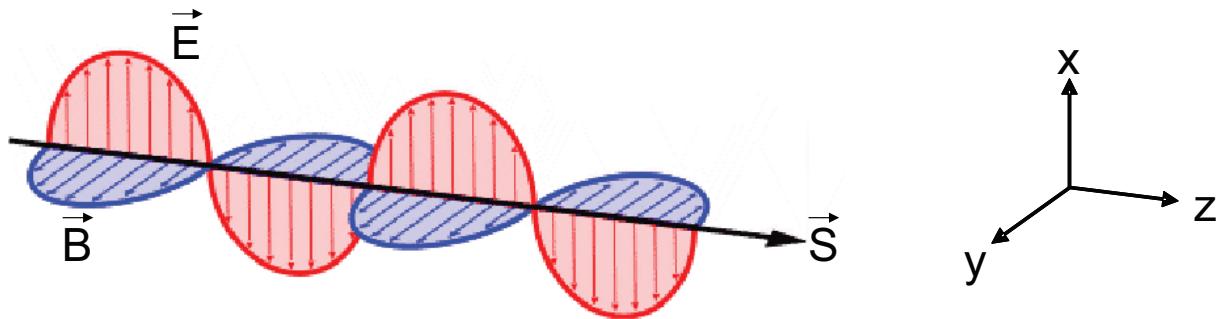


Abbildung 3.18: E und B-Feld einer elektromagnetischen Welle

Der Poynting-Vektor ist eine nützliche Grösse mit einigen weitere Bedeutungen; insbesondere entspricht sein Betrag der Leistungsdichte (Leistung pro Fläche), die durch die elektromagnetische Welle transportiert wird.

Experiment: Sende-Dipol

Experiment: Impedanz

Experiment: Physiologische Wirkung von HF

Kapitel 4

Licht und Wellen

Dieser zweite Teil der Vorlesung gibt eine Einführung in die Wellenlehre, mit einem speziellen Fokus auf elektromagnetischen Wellen. In den ersten drei Kapiteln (Kap. 4.1–4.3) werden die grundlegenden Eigenschaften von Wellen, die Reflexion von Wellen an Mediengrenzen, und das Auftreten von stehenden Wellen besprochen. Kapitel 4.4 behandelt akustische Wellen und akustische Phänomene. Kapitel 4.5 beschreibt die Grundlagen der elektromagnetischen Welle. In Kapitel 4.6–4.9 werden schliesslich die Wellenphänomene der Brechung, Totalreflexion, Evaneszenz, Polarisation, Interferenz und Beugung anhand der elektromagnetischen Welle besprochen. Diese sind zwar allgemein gültig, aber für elektromagnetische Wellen besonders wichtig.

4.1 Grundlagen der Wellenlehre

Literatur: Kuypers, Kap. 28; Tipler Kap. 15.1-2, 16.1

4.1.1 Die eindimensionale Wellengleichung

Eine Wellenfunktion $\psi(x, t)$ beschreibt die Auslenkung einer physikalischen Grösse ψ an der Stelle x zur Zeit t . Eine Wellenfunktion erfüllt die Wellengleichung:

$$\frac{d^2\psi(x, t)}{dt^2} = c^2 \frac{d^2\psi(x, t)}{dx^2} \quad \text{Eindimensionale Wellengleichung} \quad (4.1)$$

Hier ist c die *Wellengeschwindigkeit*. Eine Welle, die keine Dämpfung erfährt und deren Wellengeschwindigkeit konstant ist, breitet sich ohne Änderung ihrer Form aus:

$$\psi(x, t) = \psi(x - ct, 0) \quad (4.2)$$

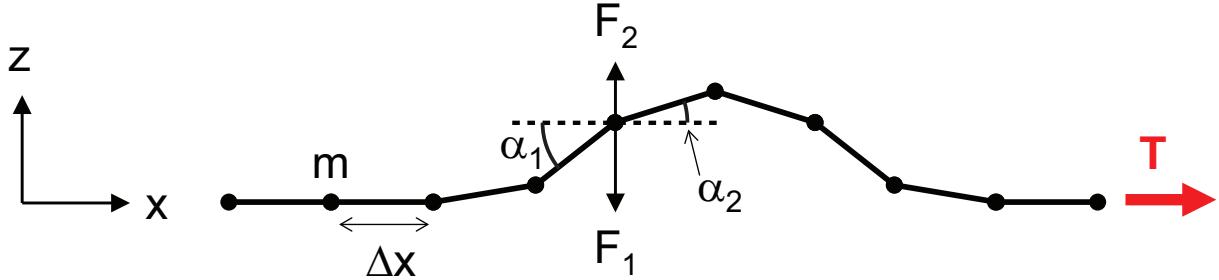


Abbildung 4.1: Seilwelle

Beispiel: Die eindimensionale Seilwelle

Als Beispiel betrachten wir eine Seilwelle. Das Seil sei mit einer Kraft T in x-Richtung gespannt (siehe Abbildung 4.1). Wir betrachten die Bewegung einer transversalen Auslenkung $\psi(x, t) = z$ in z-Richtung. Die vertikale Kraft auf ein Massenelement m ist (für kleine Winkel α und Seilabschnitte Δx):

$$F_z \approx F_2 + F_1 \approx T \tan \alpha_2 - T \tan \alpha_1 = T \left(\frac{\Delta z_2}{\Delta x} - \frac{\Delta z_1}{\Delta x} \right) \approx T \Delta x \frac{d^2 z}{dx^2} \quad (4.3)$$

Die Beschleunigungskraft ist:

$$F_z = \mu \Delta x \frac{d^2 z}{dt^2} \quad (4.4)$$

Hier ist $\mu = m/\Delta x$ die Massenbelegung (Masse pro Länge). Gleichgewicht der Kräfte ergibt:

$$\mu \Delta x \frac{d^2 z}{dt^2} = T \Delta x \frac{d^2 z}{dx^2} \implies \boxed{\frac{d^2 z}{dt^2} = \frac{T}{\mu} \frac{d^2 z}{dx^2} = c^2 \frac{d^2 z}{dx^2}} \quad \text{Wellengleichung der Seilwelle (4.5)}$$

Dies ist eine Wellengleichung, mit $c = \sqrt{T/\mu}$ als Wellengeschwindigkeit.

Experiment: Stehende Wellen mit Schlauch

Experiment: Seilwelle

4.1.2 Harmonische Wellen

Wir suchen nun Funktionen $\psi(x, t)$, welche die Wellengleichung erfüllen. Davon gibt es unendlich viele. Eine besonders nützliche Basis von Wellenfunktionen sind die *harmonischen Wellen*:

$$\psi(x, t) = \psi_0 e^{i(\omega t - kx + \varphi)} \quad (4.6)$$

„Zeitgrößen“	„Ortsgrößen“
Kreisfrequenz ω	Wellenvektor k
Frequenz $f = \omega/(2\pi)$	Wellenzahl $\tilde{\nu} = k/(2\pi)$
Periodendauer $T = 1/f = 2\pi/\omega$	Wellenlänge $\lambda = 1/\tilde{\nu} = 2\pi/k$

Tabelle 4.1: Charakteristische Größen von harmonischen Wellen

ψ_0 ist die *Amplitude*, ω die *Kreisfrequenz*, k der *Wellenvektor* und φ die *Phase* der Welle, wie in der Tabelle 4.1 zusammengefasst. (Hinweis: Die Bezeichnung *Wellenvektor* kommt daher, dass k bei zwei- und dreidimensionalen Wellen die Ausbreitungsrichtung angibt). Setzt man eine harmonische Welle in die Wellengleichung ein, so findet man:

$$-\omega^2 \psi(x, t) = -c^2 k^2 \psi(x, t) \quad (4.7)$$

Das heisst, die Parameter ω und k sind nicht unabhängig. Die harmonische Welle erfüllt die Wellengleichung nur, falls $k = k(\omega) = \omega/c$. Umgekehrt ist die Wellengeschwindigkeit gegeben durch:

$$\boxed{c = \frac{\omega}{k}} \quad \text{Wellengeschwindigkeit} \quad (4.8)$$

Harmonische Wellen sind deshalb durch Frequenz (resp. Wellenvektor), Amplitude und Phase eindeutig bestimmt.

(Hinweis: Bei elektromagnetischen Wellen wird meistens das Symbol ν für die Frequenz verwendet.)

Komplexe und reelle Schreibweise

Harmonische Wellen werden oft als komplexe Exponentialfunktionen geschrieben. Die komplexe Schreibweise bietet eine handliche Art, um Wellen mathematisch kompakt fassen zu können. Eine physikalisch beobachtbare Welle ist jedoch immer reell. Das heisst, die beobachtete Auslenkung ψ ist durch den Realteil gegeben:

$$\psi(x, t) = \Re [\psi_0 e^{i(\omega t - kx + \varphi)}] = \psi_0 \cos(\omega t - kx + \varphi) \quad (4.9)$$

Wir werden im Folgenden beide Schreibweisen benützen. Bei der komplexen Schreibweise werden wir immer annehmen, dass die physikalisch gemessene Amplitude dem Realteil entspricht.

Links und rechtslaufende Wellen

Die Ausbreitungsrichtung einer (eindimensionalen) harmonischen Welle ist durch das Vorzeichen der Wellengeschwindigkeit gegeben. Wellen, die sich in positive x-Richtung bewe-

gen heissen „rechtslaufende“ Wellen, andernfalls heissen sie „linkslaufende“ Wellen:

$$\psi(x, t) = \Re[\psi_0 e^{i(\omega t - kx + \varphi)}] = \psi_0 \cos(\omega t - kx + \varphi) \quad \text{rechtslaufende Welle} \quad (4.10)$$

$$\psi(x, t) = \Re[\psi_0 e^{i(\omega t + kx + \varphi)}] = \psi_0 \cos(\omega t + kx + \varphi) \quad \text{linkslaufende Welle} \quad (4.11)$$

Man sieht, dass das absolute Vorzeichen im Exponenten keine Rolle spielt. Was zählt, ist einzig das *relative* Vorzeichen zwischen ω und k .

Phase

Die Phase einer harmonischen Welle bestimmt, welche Amplitude die Welle zur Zeit $t = 0$ am Ort $x = 0$ annimmt. Da man den Anfangszeitpunkt einer Welle häufig nicht kennt (oder er keine Rolle spielt), kann man die Phase einer Welle in vielen Fällen frei wählen. Wir werden deshalb häufig $\varphi = 0$ setzen.

Die Phase wird immer dann wichtig, wenn zwei Wellen gleicher Frequenz miteinander verglichen werden. In diesem Fall ist die *Phasendifferenz* zwischen den beiden Wellen entscheidend. Wir werden dies anhand der stehenden Wellen (Kapitel 4.3) und der Interferenz von Wellen (Kapitel 4.8) genauer betrachten.

4.1.3 Superpositionsprinzip

Harmonische Wellen sind spezielle Lösungen der Wellengleichung, welche durch eine einzige Frequenz bestimmt sind. Da die Wellengleichung das Superpositionsprinzip erfüllt (Summen von Wellenfunktionen sind ebenfalls Wellenfunktionen), kann man harmonische Wellen addieren, um allgemeine Lösungen zu konstruieren. Die neue Welle ist eine Überlagerung von harmonischen Wellen. Basiswellen wie die harmonischen Wellen werden auch *Elementarwellen* genannt.

Falls N harmonische Wellen addiert werden, ist die Überlagerung:

$$\psi(x, t) = \sum_{n=1}^N \psi_{0,n} e^{i[\omega_n t - k_n x + \varphi_n]} \quad (4.12)$$

Hier sind $\psi_{0,n}$ die Amplituden, ω_n die Frequenzen, $k_n = \omega_n/c$ die Wellenvektoren und φ_n die Phasen der harmonischen Wellen mit Index n . Falls unendlich viele harmonische Wellen addiert werden, ist die Überlagerung durch ein Integral gegeben:

$$\psi(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\omega=-\infty}^{\infty} d\omega \psi_0(\omega) e^{i[\omega t - k(\omega)x + \varphi(\omega)]} = \frac{1}{2\pi} \int_{\omega=-\infty}^{\infty} d\omega \psi_0(\omega) e^{i\varphi(\omega)} e^{i\omega[t-x/c]} \quad (4.13)$$

Hier ist $\psi_0(\omega)$ die Amplitude, $k(\omega) = \omega/c$ der Wellenvektor, und $\varphi(\omega)$ die Phase der harmonischen Welle mit Frequenz ω .

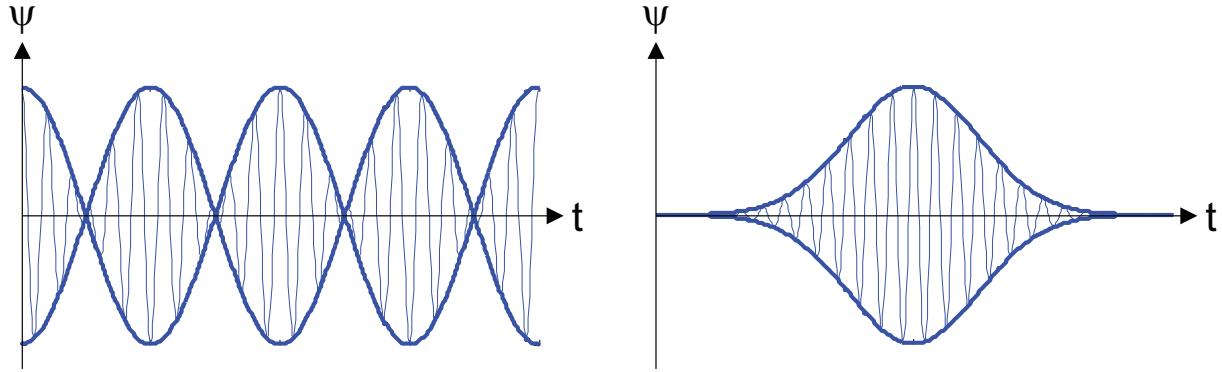


Abbildung 4.2: Links: Schwebung. Rechts: Gaussförmiges Wellenpaket

Man sieht, dass $\psi(x, t)$ durch ein Fourierintegral über harmonische Wellen mit verschiedenen Frequenzen aufgebaut ist. Die Amplituden $\psi_{0,n}$ resp. $\psi_0(\omega)$ sind das Frequenzspektrum der Welle $\psi(x, t)$. (Hinweis: Wir benützen hier die Fourierkonvention, dass bei Vorwärtstransformation mit 1 und bei Rückwärtstransformation mit $1/(2\pi)$ multipliziert wird.)

Beispiel: Schwebung

Wir betrachten zwei Wellen mit Frequenzen ω_1 und ω_2 , welche nahe beieinander liegen. Wir nehmen an, dass die Wellen dieselbe Amplitude ψ_0 haben und dass die Phase $\varphi = 0$ ist. Die Superposition der beiden Wellen am Ort $x = 0$ ist:

$$\psi(t) = \psi_0 e^{i\omega_1 t} + \psi_0 e^{i\omega_2 t} = \psi_0 e^{i\bar{\omega}t} (e^{-i\Delta\omega t} + e^{i\Delta\omega t}) = \psi_0 e^{i\bar{\omega}t} 2 \cos(\Delta\omega t) \quad (4.14)$$

Hier ist $\bar{\omega} = \frac{1}{2}(\omega_2 + \omega_1)$ die mittlere Frequenz und $\Delta\omega = \frac{1}{2}|\omega_2 - \omega_1|$ die Hälfte der Frequenzdifferenz. Man sieht, dass die Amplitude mit der Periode der Frequenzdifferenz moduliert ist (siehe Abb. 4.2 links). Dieser Effekt heisst *Schwebung*, und die Modulation mit $\cos(\Delta\omega t)$ ist die *Einhüllende*.

Beispiel: Gaussförmiges Wellenpaket

Ein gaussförmiges Wellenpaket hat eine Einhüllende, welche einer Gausskurve entspricht (wir nehmen wiederum $\varphi = 0$ und $x = 0$):

$$\psi(t) = \psi_0 e^{i\bar{\omega}t} e^{-\frac{t^2}{2(\Delta t)^2}} \quad (4.15)$$

Hier ist $\bar{\omega}$ die (mittlere) Frequenz der Welle und Δt die Breite des Wellenpakets (siehe Abb. 4.2 rechts). Die räumliche Ausdehnung des Wellenpakets ist dann $\Delta x = c \cdot \Delta t$. Wir

wollen das Wellenpaket nun durch das Frequenzspektrum $\psi_0(\omega)$ ausdrücken:

$$\psi(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\omega=-\infty}^{\infty} d\omega \psi_0(\omega) e^{i\omega t} \quad (4.16)$$

Das Frequenzspektrum ist gegeben durch:

$$\psi_0(\omega) = \int_{t=-\infty}^{\infty} dt \psi_0 e^{i\bar{\omega}t} e^{-\frac{t^2}{2(\Delta t)^2}} e^{-i\omega t} = \psi_0 \cdot \Delta t \cdot e^{-\frac{(\omega-\bar{\omega})^2(\Delta t)^2}{2}} = \frac{\psi_0}{\Delta\omega} e^{-\frac{(\omega-\bar{\omega})^2}{2(\Delta\omega)^2}} \quad (4.17)$$

Das heisst, die im Wellenpaket enthaltenen Frequenzen sind im Bereich $\bar{\omega} \pm \Delta\omega$, wobei $\Delta\omega = 1/\Delta t$ durch die zeitliche Länge des Wellenpakets bestimmt ist.

Experiment: Spektrum-Analyser

Experiment: Fourier-Synthese

Experiment: Schuss vor Stimmgabeln

4.1.4 Energie, Leistung und Intensität

Wellen tragen Energie und können dazu benutzt werden, Energie zu transportieren. Wir betrachten im Folgenden den Energietransport einer eindimensionalen Seilwelle; weitere Wellen kommen in späteren Kapiteln hinzu.

Energie

Um die Energie zu berechnen, nehmen wir wiederum an, dass das Seil aus Massenelementen im Abstand Δx und mit Masse m aufgebaut ist. Jedes Massenelement schwingt mit einer Amplitude ψ_0 auf und ab. Die Energie der Welle ist dann durch die Summe der Schwingungsenergien jedes Massenelements gegeben. Die Schwingungsenergie setzt sich aus potentieller und kinetischer Energie zusammen; beim Nulldurchgang besitzt die Schwingung nur kinetische Energie und die Schwingungsenergie ist gegeben durch (wir schreiben ψ statt z für die Auslenkung, da einige Resultate allgemeingültig sein werden):

$$E = E_{kin} = \frac{1}{2}m \left(\frac{d\psi}{dt} \right)^2 = \frac{1}{2}\mu\Delta x \left(\frac{d\psi}{dt} \right)^2 \quad (4.18)$$

(Hinweis: Harmonische Schwingungen werden in *Kuypers Band 1, Kap. 7* oder *Tipler, Kap. 14* behandelt). Hier ist $\mu = m/\Delta x$ wiederum die Massenbelegung, und $d\psi/dt$ ist die *Maximalgeschwindigkeit*, welche beim Nulldurchgang erreicht wird.

Aus dieser Energie leitet man einige wichtige Größen der Welle ab. Die Energiedichte ist gegeben als Energie pro Längeneinheit:

$w = \frac{E}{\Delta x} = \frac{1}{2}\mu \left(\frac{d\psi}{dt} \right)^2$

Energiedichte einer Seilwelle (4.19)

Leistung

Die Leistung einer Welle ist gegeben als Energie, die pro Zeiteinheit am Zielort eintrifft:

$$P = \frac{dE}{dt} = \frac{dE}{dx} \frac{dx}{dt} = \frac{E}{\Delta x} c = \frac{1}{2} \mu c \left(\frac{d\psi}{dt} \right)_{max}^2 \quad \text{Leistung einer Seilwelle} \quad (4.20)$$

Intensität

Die Intensität I hat je nach Zusammenhang eine unterschiedliche Definition. Für eine eindimensionale Welle (Seilwelle) ist die Intensität gleich der Leistung. Für dreidimensionale Wellen (Schall, Licht) ist die Intensität die Leistung, welche auf eine Fläche A auftrifft:

$$I = P \quad \text{Intensität einer eindimensionalen Welle} \quad (4.21)$$

$$I = \frac{P}{A} \quad \text{Intensität einer dreidimensionalen Welle} \quad (4.22)$$

Andererseits wird mit der Intensität oft auch nur das Quadrat der Amplitude, gemittelt über eine Periodendauer T , bezeichnet:

$$I \equiv |\psi|^2 = \frac{1}{T} \int_{t=0}^T |\psi(x, t')|^2 dt' = \frac{1}{2} \psi_0^2 \quad \text{Intensität als Quadrat der Amplitude} \quad (4.23)$$

Die mittlere Amplitude:

$$\psi_{rms} = \frac{1}{\sqrt{2}} |\psi_0| \quad (4.24)$$

wird auch als *rms* Amplitude (für root mean square) bezeichnet.

4.1.5 Wellenimpedanz

Das Verhältnis der auslenkenden Kraft zur Geschwindigkeit der Auslenkung ist eine wichtige charakteristische Eigenschaft eines Ausbreitungsmediums. Dieses Verhältnis heisst *Wellenimpedanz*.

Die Wellenimpedanz ist das Verhältnis von auslenkender Kraft zur Geschwindigkeit der Auslenkung.

Die Wellenimpedanz eines Seils ist:

$$Z = \frac{F_z}{\left(\frac{dz}{dt}\right)} = \frac{T\Delta x \left(\frac{d^2z}{dx^2}\right)}{\left(\frac{dz}{dt}\right)} \approx \frac{T \left(\frac{dz}{dx}\right)}{\left(\frac{dz}{dt}\right)} = \frac{T}{c} = \sqrt{\mu T} \quad (4.25)$$

Die Wellenimpedanz Z hängt nur von der Massenbelegung μ und der Spannung T des Seils ab. Die Impedanz ist deshalb eine Eigenschaft des *Trägermediums*, und nicht der Welle selber:

Ein Medium ist durch die Wellenimpedanz Z und die Wellengeschwindigkeit c charakterisiert.

Die Wellenimpedanz ist sehr nützlich, um allgemeine Phänomene der Wellenausbreitung zu beschreiben. Ein wichtiges Beispiel ist die Reflexion an einer Grenzfläche von zwei unterschiedlichen Medien (siehe Kapitel 4.2).

Im Fall von anderen Wellen, wie zum Beispiel Schallwellen oder elektromagnetische Wellen, muss die Definition der Impedanz weiter gefasst werden. Hier ist die Impedanz das Verhältnis einer „statischen“ Grösse (welche die potentielle Energie bestimmt), und einer „dynamischen“ Grösse (welche die kinetische Energie bestimmt). Wir werden die Impedanz jeweils für jeden Wellentyp spezifisch definieren.

4.1.6 Dispersion

Die Wellengleichung besagt, dass das Verhältnis zwischen Wellenvektor und Frequenz konstant ist, und dass die Wellengeschwindigkeit für alle Wellen denselben Wert annimmt. Dies ist in der Realität häufig nicht der Fall. Tritt Frequenzabhängigkeit der Wellengeschwindigkeit auf, wird dies *Dispersion* genannt:

$$c = c(\omega) = \frac{\omega}{k(\omega)} \quad (4.26)$$

Dispersive Wellen erfüllen die allgemeine Wellengleichung nicht mehr:

Eine „Welle“, die sich in einem dispersiven Medium ausbreitet, erfüllt im Allgemeinen die Wellengleichung nicht mehr und verändert ihre Form während der Ausbreitung.

Im Spezialfall einer harmonischen Welle ist die Wellengleichung immer noch erfüllt, jedoch ist die Wellengeschwindigkeit für jede Frequenz verschieden.

Für disperse Wellen werden zwei Wellengeschwindigkeiten unterschieden. Die Phasengeschwindigkeit beschreibt die Geschwindigkeit eines *Wellenmaximums*:

$$\boxed{v_p = \frac{\omega}{k}} \quad \text{Phasengeschwindigkeit} \quad (4.27)$$

Die Gruppengeschwindigkeit ist die Geschwindigkeit der *Einhüllenden* eines Wellenpakets:

$$\boxed{v_g = \frac{d\omega}{dk} = v_p + k \frac{dv_p}{dk}} \quad \text{Gruppengeschwindigkeit} \quad (4.28)$$

Ohne Dispersion sind Phasen- und Gruppengeschwindigkeit identisch, $v_g = v_p = c$.

Experiment: Prismen mit diversen Gläsern

Experiment: Achromatisches Prisma

4.1.7 Absorption

Neben einer Verlangsamung der Welle in einem Medium, kann auch Absorption auftreten. Das heisst, die Intensität der Welle nimmt ab mit der Distanz, welche sie im Medium zurücklegt. Dabei gibt die Welle Energie ans Medium ab.

Die Absorption hängt direkt mit dem Abfall der Amplitude einer gedämpften Schwingung zusammen. (Die gedämpfte Schwingung wird in *Kuypers Kap. 7.1* oder *Tipler Kap. 14.4* genauer behandelt). In einer gedämpften Schwingung ist die Amplitude als Funktion der Zeit:

$$\psi(t) = \psi_0 e^{-t/\tau} \quad (4.29)$$

Hier ist ψ_0 die Amplitude zur Zeit $t = 0$ und τ ist die exponentielle Abklingzeit, d.h. die Zeit, nach welcher die Amplitude auf $1/e \approx 0.368$ der Ausgangsamplitude abgefallen ist.

Bei einer Welle beträgt die Amplitude ψ_0 am Ort $x = 0$, und sie fällt ab, je weiter die Welle ins Medium eindringt. Da die Welle in der Zeit t die Distanz $x = ct$ zurücklegt, ist:

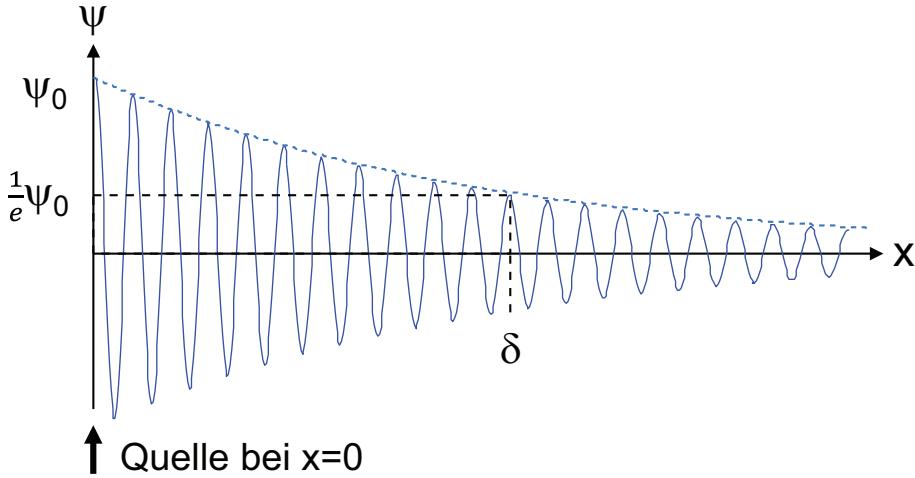
$$\psi(x, t) = \psi_0 e^{-x/(c\tau)} e^{i(\omega t - kx + \varphi)} = \psi_0 e^{-x/\delta_e} e^{i(\omega t - kx + \varphi)} = \psi_0 e^{-\alpha x/2} e^{i(\omega t - kx + \varphi)}, \quad (4.30)$$

wobei δ_e die *charakteristische Abfalldistanz* oder *Eindringtiefe* ist:

$$\boxed{\delta_e = c\tau = \frac{2}{\alpha}} \quad \text{Eindringtiefe} \quad (4.31)$$

α ist der *Absorptionskoeffizient*:

$$\boxed{\alpha = \frac{2}{\delta_e}} \quad \text{Absorptionskoeffizient} \quad (4.32)$$

Abbildung 4.3: Absorption und Eindringtiefe δ

Die Intensität der Welle ist (siehe Abb. 4.3):

$$I(x) = I_0 e^{-\alpha x} \quad (4.33)$$

(Hinweis: Der Faktor 2 kommt daher, dass die Eindringtiefe den Abfall der Amplitude betrachtet, wohingegen der Absorptionskoeffizient den Abfall der Intensität beschreibt.)

Man kann zeigen, dass Absorption und Dispersion immer *zusammen* auftreten. (Dies folgt aus den sogenannten Kramers-Kronig-Beziehungen).

Eine Welle mit Absorption zeigt gleichzeitig auch Dispersion, und umgekehrt.

Dies bedeutet, dass man in der Praxis die Dispersion aus der Absorption bestimmen kann, oder umgekehrt die Absorption aus der Dispersion.

4.1.8 Dreidimensionale Wellen

Bisher haben wir eindimensionale Wellen betrachtet, die sich entlang einer Raumrichtung ausbreiten. Wir werden dies im Folgenden auf den dreidimensionalen Raum erweitern. Beispiele dreidimensionaler Wellen sind Schallwellen oder elektromagnetische Wellen.

Ebene Wellen

Für eindimensionale Wellen haben wir festgestellt, dass harmonische Wellen eine sehr nützliche Basis darstellen. Die harmonischen Wellen können einfach auf den dreidimensionalen Raum erweitert werden. Sie werden dann *ebene Wellen* genannt (siehe Abb. 4.4 links):

$$\psi(\vec{x}, t) = \psi_0 e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{x} + \varphi)}$$

Ebene Welle (4.34)

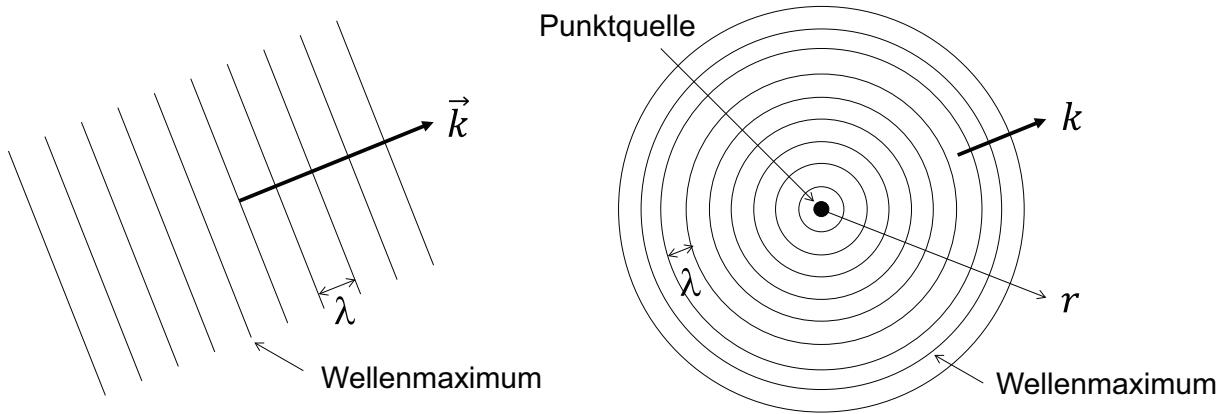


Abbildung 4.4: Links: Ebene Welle. Rechts: Kugelwelle

Eine dreidimensionale Welle erfüllt die Wellengleichung:

$$\boxed{\frac{d^2\psi(\vec{x}, t)}{dt^2} = c^2 \vec{\nabla}^2 \psi(\vec{x}, t) = c^2 \left(\frac{d^2}{dx^2} + \frac{d^2}{dy^2} + \frac{d^2}{dz^2} \right) \psi(\vec{x}, t)} \quad \text{Dreidimensionale Wellengleichung} \quad (4.35)$$

Im Unterschied zur (eindimensionalen) harmonischen Welle ist die Ausbreitungsrichtung nun durch den Wellenvektor \vec{k} gegeben. Die ebene Welle heisst auch *Planarwelle*, da sich die Wellenfront auf einer planaren Ebene befindet. Die Wellengeschwindigkeit findet man durch einsetzen als $c = \omega/|\vec{k}|$.

Kugelwellen

Falls eine Welle von einer Punktquelle ausgeht, ist die Ausbreitung kugelförmig (siehe Abb. 4.4 rechts). Anstelle von ebenen Wellen ist es dann nützlicher, *Kugelwellen* als Elementarwellen zu benutzen:

$$\boxed{\psi(\vec{x}, t) = \psi(r, t) = \frac{\psi_0}{\sqrt{4\pi r}} e^{i(\omega t - kr + \varphi)}} \quad \text{Kugelwelle} \quad (4.36)$$

Hier ist $r = |\vec{x}|$ der Abstand zur Quelle und $k = \omega/c$. Im Gegensatz zur ebenen Welle nimmt die Amplitude einer Kugelwelle linear mit der Entfernung ab. Der Normierungsfaktor $1/\sqrt{4\pi r}$ kommt daher, dass die Intensität der Welle, integriert über die Kugeloberfläche, konstant sein muss (Energieerhaltung).

Neben der ebenen Welle und der Kugelwelle können je nach Problemstellung weitere Elementarwellen sinnvoll sein, wie zum Beispiel Zylinderwellen.

Transversal- und Longitudinalwellen

Ist die Amplitude einer Welle eine vektorielle Grösse (d.h. sie hat eine Richtung, wie zum Beispiel die Auslenkung eines Seils), so kann die Schwingungsrichtung parallel oder senkrecht zur Ausbreitungsrichtung sein:

- Transversalwellen: Die Schwingung ist senkrecht zur Ausbreitungsrichtung. Es gibt zwei Freiheitsgrade für die Schwingung, welche (willkürlich) horizontale und vertikale Polarisation genannt werden. Beispiele sind Seilwellen und elektromagnetische Wellen.
- Longitudinalwellen: Die Schwingung ist entlang der Ausbreitungsrichtung. Ein Beispiel ist die akustische Welle (Schall).

Transversal- und Longitudinalwellen können überlagert werden. Ein Beispiel sind Oberflächenwellen, wie sie auf dem Wasser oder bei Erdbeben vorkommen.

Experiment: Lichtintensität proportional zu $1/r^2$

4.2 Reflexion und Transmission

Literatur: (Kuypers Kap. 28); Tipler Kap. 15.4

Wenn eine Welle auf eine Grenzfläche von zwei Medien auftrifft, wird im Allgemeinen ein Teil der Welle reflektiert und ein Teil der Welle durchgelassen. Wir betrachten im Folgenden anhand einer Seilwelle im Detail, wie gross die Amplituden und Leistungen der reflektierten und transmittierten Wellen sind, und wie diese Anteile verändert werden können.

4.2.1 Wellenausbreitung durch eine Grenzfläche

Gegeben sei ein Seil, das aus zwei unterschiedlichen Abschnitten („Medien“) mit unterschiedlicher Masse μ_1, μ_2 und Seilspannung T_1, T_2 besteht. Das Seil sei in der Mitte (bei $x = 0$) verbunden und so an einer Stange befestigt, dass es ungehindert auf- und ab schwingen kann, aber sich horizontal nicht bewegen kann (siehe Abb. 4.5).

Wir betrachten nun eine Welle, die von links auf die Mediengrenze trifft, wie oben dargestellt. Der Einfachheit halber sei die Zeit $t = 0$ und die Phase $\varphi = 0$. (Dies ist erlaubt, da wir beide frei wählen können.) Es gibt drei unterschiedliche Wellen:

$$\psi_A(x) = \psi_{0,A} e^{-ik_1 x} \quad \text{von links einlaufende Welle} \quad (4.37)$$

$$\psi_B(x) = \psi_{0,B} e^{+ik_1 x} \quad \text{nach links reflektierte Welle} \quad (4.38)$$

$$\psi_C(x) = \psi_{0,C} e^{-ik_2 x} \quad \text{nach rechts transmittierte Welle} \quad (4.39)$$

Die Vorzeichen der Wellenvektoren geben dabei die jeweilige Ausbreitungsrichtung an. Die überlagerte Wellenfunktion lautet:

$$\psi(x) = \psi_A(x) + \psi_B(x) + \psi_C(x) \quad (4.40)$$

Wir suchen nun Lösungen für die Amplituden $\psi_{0,A}, \psi_{0,B}$ und $\psi_{0,C}$, welche die folgenden zwei Stetigkeitsbedingungen erfüllen:

- 1) Stetigkeit der vorzeichenbehafteten Amplitude bei $x = 0$:

$$\psi_{0,A} + \psi_{0,B} = \psi_{0,C} \quad (4.41)$$

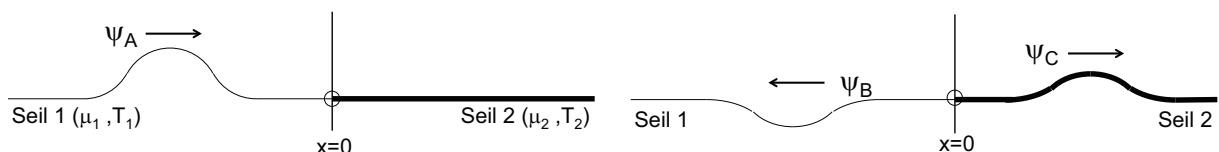


Abbildung 4.5: Links: Seilwelle vor Reflexion. Rechts: Seilwelle nach Reflexion

2) Stetigkeit der vertikalen Kraft (Kräftegleichgewicht) bei $x = 0$:

$$\begin{aligned} -T_1 \frac{d\psi_A(x)}{dx} - T_1 \frac{d\psi_B(x)}{dx} &= -T_2 \frac{d\psi_C(x)}{dx} \implies k_1 T_1 \psi_{0,A} - k_1 T_1 \psi_{0,B} = k_2 T_2 \psi_{0,C} \\ \implies \frac{T_1}{c_1} \psi_{0,A} - \frac{T_1}{c_1} \psi_{0,B} &= \frac{T_2}{c_2} \psi_{0,C} \implies Z_1 \psi_{0,A} - Z_1 \psi_{0,B} = Z_2 \psi_{0,C} \end{aligned} \quad (4.42)$$

Hier benutzen wir die Impedanzen Z_1 und Z_2 und die Ausbreitungsgeschwindigkeiten c_1 und c_2 der beiden Medien. Nun kann man nach den (relativen) Amplituden der transmittierten und reflektierten Wellen auflösen:

$$r = \frac{\psi_{0,B}}{\psi_{0,A}} = \frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2} \quad \text{Reflexionskoeffizient} \quad (4.43)$$

$$t = \frac{\psi_{0,C}}{\psi_{0,A}} = \frac{2Z_1}{Z_1 + Z_2} = 1 + r \quad \text{Transmissionskoeffizient} \quad (4.44)$$

Da in den obigen Beziehungen nur die Impedanz vorkommt, ist das Resultat allgemein und für alle Wellen gültig, nicht nur für Seilwellen.

4.2.2 Reflektierte und transmittierte Leistung

Aus den Wellenamplituden lässt sich die reflektierte und transmittierte *Leistung* berechnen, welche in der Praxis häufig wichtiger ist. Die Leistung der einkommenden Welle sei P_A . Die Leistung der reflektierten Welle ist dann:

$$P_B = \left(\frac{\psi_{0,B}}{\psi_{0,A}} \right)^2 P_A = r^2 P_A = \left(\frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2} \right)^2 P_A \quad (4.45)$$

Die Leistung der transmittierten Welle folgt aus der Energieerhaltung:

$$P_C = P_A - P_B = \left[1 - \left(\frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2} \right)^2 \right] P_A = \frac{4Z_1 Z_2}{(Z_1 + Z_2)^2} P_A \quad (4.46)$$

Der Reflexionsgrad und Transmissionsgrad sind der Anteil der reflektierten resp. transmittierten Leistung:

$$R = \frac{P_B}{P_A} = \left(\frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2} \right)^2 = r^2 \quad \text{Reflexionsgrad} \quad (4.47)$$

$$T = \frac{P_C}{P_A} = \frac{4Z_1 Z_2}{(Z_1 + Z_2)^2} = \frac{Z_2}{Z_1} t^2 = 1 - R \quad \text{Transmissionsgrad} \quad (4.48)$$

Reflexions- und Transmissionskoeffizient sowie Reflexions- und Transmissionsgrad sind in Abbildung 4.6 als Funktion der Impedanz Z_2 des zweiten Mediums aufgezeichnet.

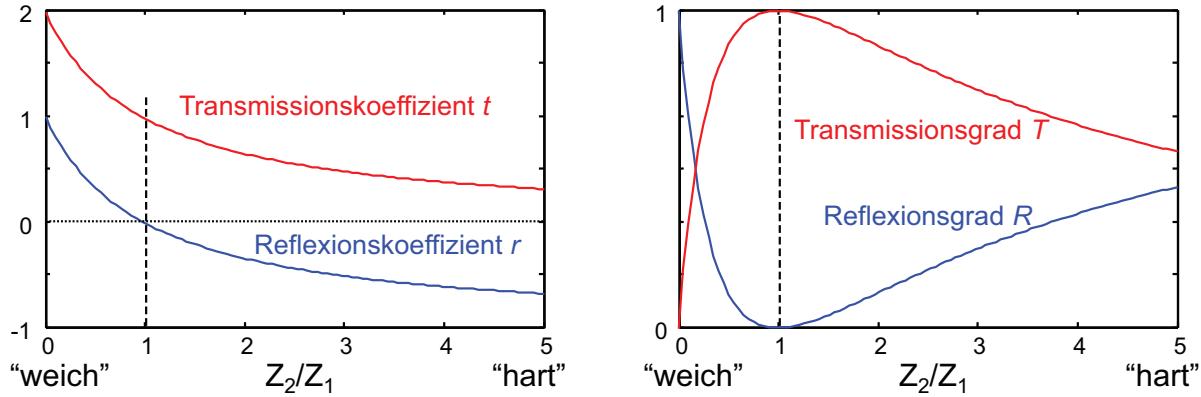


Abbildung 4.6: Links: Reflexions- und Transmissionskoeffizient. Rechts: Reflexions- und Transmissionsgrad.

Fall	Z_2	Amplitude der reflektierten Welle $\psi_{0,B}$	Amplitude der transmittierten Welle $\psi_{0,C}$	Transmittierte Leistung
Reflexion an hartem Medium („Wand“)	$Z_2 \rightarrow \infty$	$-\psi_{0,A}$	0	0%
Reflexion an weichem Medium („loses Ende“)	$Z_2 \rightarrow 0$	$\psi_{0,A}$	$2\psi_{0,A}$	0%
Impedanzanpassung	$Z_2 = Z_1$	0	$\psi_{0,A}$	100%

Tabelle 4.2: Spezialfälle für Reflexion und Impedanzanpassung

4.2.3 Spezialfälle

Tabelle 4.2 betrachtet drei Spezialfälle: Die Reflexion an einem harten Medium, einem weichen Medium, und den Fall der Impedanzanpassung. Man findet, dass man durch Verändern der Impedanz Z_2 den Reflexionsgrad steuern kann.

Man beobachtet, dass bei der Reflexion an einem weichen Medium die scheinbar paradoxe Situation auftritt, dass die Amplitude $2\psi_{0,A}$ vorliegt, aber trotzdem keine Leistung transmittiert wird. Dies erklärt sich damit, dass es in diesem Grenzfall null Kraft benötigt, um die Welle auszulenken. Daher kann auch keine Energie transportiert werden.

Experiment: Stehende Wellen mit Schlauch

Experiment: Wellenkette

4.3 Stehende Wellen

Literatur: Kuypers Kap. 29; Tipler Kap. 16.2

Stehende Wellen sind ein Spezialfall von überlagerten harmonischen Wellen, bei der die Amplitude nur eine Funktion des Ortes ist.

Stehende Wellen kommen in sehr vielen Zusammenhängen vor. Einige Beispiele sind:

- Musikinstrumente: Schwingungen in Saiten- oder Blasinstrumenten sind stehende Wellen.
- Mikrowellenofen: Die inneren Dimensionen eines Mikrowellenofens sind normalerweise auf die Wellenlänge (typ. $\lambda = 12.2$ cm) abgestimmt.
- Laser: Das Laserlicht ist eine stehende Welle im Innern des Lasermoduls. Nur ein kleiner Bruchteil des Lichts tritt aus dem Laser aus.
- Atome: Die kreisenden Elektronen werden quantenmechanisch durch stehende Wellen beschrieben

4.3.1 Selbstüberlagerung

Um zu sehen, wie stehende Wellen zustandekommen, betrachten wir die Überlagerung einer einfallenden mit einer reflektierten Welle. Wir nehmen an, dass die Welle vollständig reflektiert wird. Die Mediengrenze befindet sich bei $x = 0$:

$$\psi_A(x, t) = \psi_0 e^{i(\omega t - kx + \varphi)} \quad \text{einfallende Welle} \quad (4.49)$$

$$\psi_B(x, t) = -\psi_0 e^{i(\omega t + kx + \varphi)} \quad \text{reflektierte Welle (hier an hartem Medium)} \quad (4.50)$$

Die Superposition ist:

$$\psi(x, t) = \psi_A(x, t) + \psi_B(x, t) = \psi_0 e^{i(\omega t + \varphi)} (e^{-ikx} - e^{ikx}) = -\psi_0 e^{i(\omega t + \varphi)} 2i \sin(kx) \quad (4.51)$$

Der Realteil der Superposition ist:

$$\Re[\psi(x, t)] = \Re[-\psi_0 e^{i(\omega t + \varphi)} 2i \sin(kx)] = 2\psi_0 \sin(kx) \sin(\omega t + \varphi) \quad (4.52)$$

Bei der überlagerten Welle sind die zeitliche und die örtliche Schwingung unabhängig voneinander. Dies ist das definierende Merkmal einer stehenden Welle:

Bei einer stehenden Welle sind die zeitliche und die örtliche Schwingung voneinander separiert.

Man sieht als Folge, dass die überlagerte Welle nicht mehr wandert. Die Welle schwingt an jedem Ort x synchron auf und ab mit der (ortsabhängigen) Amplitude $\sin(kx)$. Die Welle wird deshalb als stehende Welle bezeichnet.

Experiment: Superposition von zwei Wellen

4.3.2 Stehende Wellen

Wird ein Seil an beiden Seiten eingespannt (zwei Wände), so wird eine Welle fortlaufend hin- und her reflektiert. Für bestimmte Verhältnisse von Wellenlänge λ zum Wandabstand L ergibt sich eine konstruktive Überlagerung. Da an den Wänden die Amplitude null sein muss, gelten die Randbedingungen:

$$\begin{aligned}\sin(k \cdot 0) &= 0, \\ \sin(k \cdot L) &= 0.\end{aligned}\tag{4.53}$$

Daraus folgt, dass $k \equiv k_n = n\pi/L$ und für die Wellenlänge:

$$\lambda_n = \frac{2\pi}{k_n} = \frac{2L}{n} \text{ „gerader Fall“}\tag{4.54}$$

mit $n = 1, 2, 3, \dots$ gilt (Der Fall $n = 0$ ist weggelassen). Anstelle an einer Wand kann die Welle auch an einem losen Ende vollständig reflektiert werden. Für den Fall einer Wand bei $x = 0$ und einem losen Ende bei $x = L$ gilt:

$$\begin{aligned}\sin(k \cdot 0) &= 0, \\ \sin(k \cdot L) &= 1.\end{aligned}\tag{4.55}$$

Daraus folgt, dass $k_n = (n - \frac{1}{2})\pi/L$ und für die Wellenlänge:

$$\lambda_n = \frac{4L}{2n - 1} \text{ „ungerader Fall“}\tag{4.56}$$

gilt. Den „geraden“ Fall erhält man für zwei feste oder zwei lose Enden, während man den „ungeraden“ Fall für je ein festes und ein loses Ende erhält (siehe Abb. 4.7).

Experiment: Stehende Welle mit Gummischnur

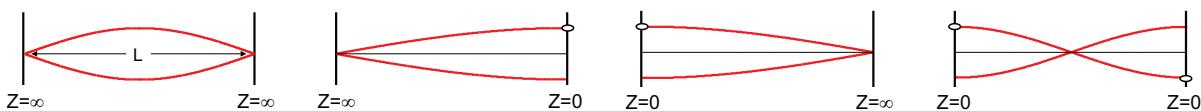


Abbildung 4.7: Stehende Seilwellen mit festen und losen Enden (für $n = 1$). Z bezeichnet die Impedanz der Enden.

4.3.3 Eigenfrequenzen

Bei einer gegebenen Wellengeschwindigkeit sind deshalb nur spezielle Frequenzen erlaubt:

$$f_n = \frac{c}{\lambda_n} = n \frac{c}{2L} \quad \text{„gerader Fall“} \quad (4.57)$$

$$f_n = \frac{c}{\lambda_n} = \left(n - \frac{1}{2}\right) \frac{c}{2L} \quad \text{„ungerader Fall“} \quad (4.58)$$

Diese Frequenzen werden „Eigenfrequenzen“ genannt. Die Schwingung für $n = 1$ wird auch Grundschwingung und die Schwingungen für $n > 1$ Oberschwingungen genannt. Bei akustischen Wellen heißen die stehenden Wellen auch „Obertöne“. In der Physik werden die stehenden Wellen auch „Eigenschwingungen“ oder „Moden“ genannt.

Experiment: Chladni-Figuren mit Vibrator (2)

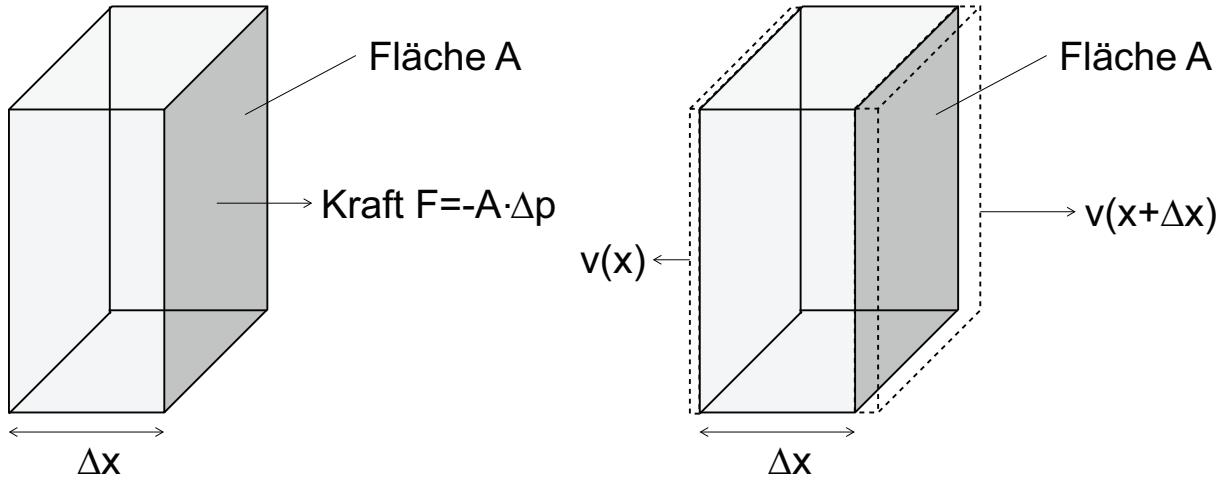


Abbildung 4.8: Links: Durch Druck erzeugte Kraft. Rechts: Durch Teilchenbewegung induzierter Druck

4.4 Akustische Wellen

Literatur: Kuypers Kap. 33; Tipler Kap. 15.3, 15.5

Akustische Wellen sind, anschaulich gesagt, die Verallgemeinerung der (mechanischen) Seilwelle auf drei Dimensionen. Akustische Wellen breiten sich in einem Medium aus, in dem Materiateilchen aus ihrer Gleichgewichtsposition ausgelenkt werden und eine rücktreibende Kraft erfahren. Schallwellen in Gasen und Flüssigkeiten sind Longitudinalwellen, während in Festkörpern auch Transversalwellen auftreten können.

4.4.1 Akustische Wellengleichung

Schallschnelle und Schalldruck

Bei einer Schallwelle ändert sich die lokale Position und die Geschwindigkeit eines Gas- teilchens, sowie der lokale Druck (siehe Abb. 4.8). Der Einfachheit halber nehmen wir an, dass sich die Schallwelle als ebene Welle entlang x ausbreitet, sodass wir Vektorsymbole weglassen können. In reeller Schreibweise lauten die Wellengleichungen:

$$s(x, t) = s_0 \cos(\omega t - kx + \varphi) \text{ Auslenkung aus der Gleichgewichtslage} \quad (4.59)$$

$$v(x, t) = \frac{ds(x, t)}{dt} = v_0 \sin(\omega t - kx + \varphi) \text{ Teilchengeschwindigkeit (Schallschnelle)} \quad (4.60)$$

$$p(x, t) = p_0 + \delta p_0 \sin(\omega t - kx + \varphi) \text{ Veränderung des lokalen Drucks (Schalldruck)} \quad (4.61)$$

$v_0 = -\omega s_0$ ist dabei die Amplitude der Schallschnelle, δp_0 ist die Amplitude des Schalldrucks, und p_0 ist der Gleichgewichtsdruck.

Akustische Wellengleichung

Wir leiten nun die akustische Wellengleichung her. Als Erstes berechnen wir die Kraft, die ein Volumenelement $V = A \cdot \Delta x$ in x-Richtung erfährt:

$$F = -A \cdot \Delta p \quad (4.62)$$

Hier ist Δp der Druckunterschied und A die Querschnittsfläche senkrecht zur Ausbreitungsrichtung. Die Beschleunigungskraft ist:

$$F = A \cdot \Delta x \cdot \rho \cdot \frac{dv}{dt} \quad (4.63)$$

Hier ist $A \cdot \Delta x \cdot \rho$ ein Massenelement und ρ die Dichte. Aus dem Kräftegleichgewicht folgt:

$$-A \cdot \Delta p = A \cdot \Delta x \cdot \rho \cdot \frac{dv}{dt} \implies \frac{\Delta p}{\Delta x} \approx \frac{dp}{dx} = -\rho \cdot \frac{dv}{dt} \quad (4.64)$$

Als Zweites berechnen wir den aufgebauten Druck infolge der Teilchenbewegung. Die Änderung des Volumens V (bei fixer Teilchenzahl) ist:

$$\Delta V = A \cdot \Delta v \cdot \Delta t = -\frac{V}{K} \cdot \Delta p \quad (4.65)$$

Hier ist $K = -V(dp/dV)$ das Kompressionsmodul. Es folgt:

$$\frac{\Delta p}{\Delta t} = -\Delta v \cdot \frac{KA}{V} = -K \frac{\Delta v}{\Delta x} \implies \frac{dp}{dt} = -K \frac{dv}{dx} \quad (4.66)$$

Kombination der beiden Gleichungen (4.64) und (4.66) ergibt:

$$\frac{d^2 p}{dt^2} = -K \frac{d}{dt} \frac{dv}{dx} = -K \frac{d}{dx} \frac{dv}{dt} = \frac{K}{\rho} \frac{d^2 p}{dx^2}$$

akustische Wellengleichung
(4.67)

Dies ist die Wellengleichung für die Schallwelle mit Wellengeschwindigkeit:

$$c = \sqrt{\frac{K}{\rho}}$$

Schallgeschwindigkeit
(4.68)

Schallgeschwindigkeit in Gasen

In Gasen gilt nach dem idealen Gasgesetz $K = \gamma p_0$ (siehe *Kuypers, Kap. 13.6*), und die Schallgeschwindigkeit ist:

$$c = \sqrt{\frac{K}{\rho}} = \sqrt{\frac{\gamma p_0}{\rho}} = \sqrt{\frac{\gamma R T}{M}}$$

Schallgeschwindigkeit in Gasen
(4.69)

Hier ist $\gamma = c_p/c_V$ ist der Isentropenkoeffizient, d.h. das Verhältnis der Wärmekapazitäten bei konstantem Druck bzw. bei konstantem Volumen. Der Isentropenkoeffizient variiert zwischen $\gamma \approx 1.67$ (monoatomare Gase) und $\gamma \approx 1$ (grosse Gasmoleküle). Für Luft ist $\gamma \approx 1.40$. $R \approx 8.3145 \text{ J mol}^{-1} \text{ K}^{-1}$ ist die ideale Gaskonstante, T die Temperatur in Kelvin und M die molare Masse.

Experiment: Longitudinalwelle

Experiment: Orgelpfeifen mit verschiedenen Gasen

4.4.2 Akustische Impedanz, Schallleistung und Schallpegel

Wir berechnen nun, nach Kapitel 4.1.4 und 4.1.5, die Wellenimpedanz und Leistung einer Schallwelle. Die akustische Impedanz (auch spezifische akustische Impedanz, akustische Feldimpedanz oder Schallkennimpedanz) ist definiert als:

$$Z = \rho c = \sqrt{K\rho} = \frac{\delta p_0}{v_0} \quad (4.70)$$

Die Schallintensität I , gegeben als Leistung pro Fläche, ist:

$$I = \frac{1}{2} \rho c \left(\frac{ds}{dt} \right)_{max}^2 = \frac{1}{2} \rho c v_0^2 = \frac{1}{2} \frac{(\delta p_0)^2}{Z} \quad (4.71)$$

(Hinweis: Dies ist die Intensität — und nicht die Leistung — wie man vom Beispiel des Seils vermuten könnte. Die Dichte enthält bereits die Normierung auf die Fläche.) Die Schallleistung, die auf eine Fläche A auftrifft, ist:

$$P = IA = \frac{1}{2} \rho A c v_0^2 \quad (4.72)$$

In der Akustik wird alternativ zur Schallintensität meist der logarithmische *Schallpegel* verwendet:

$$L = 10 \log_{10} \left(\frac{I}{I_0} \right) \quad (4.73)$$

Hier ist $I_0 = 1 \cdot 10^{-12} \text{ W/m}^2$ die Hörschwelle eines Tons mit 1000 Hz.

4.4.3 Schallausbreitung in Rohren

Ein interessanter Spezialfall ist die Ausbreitung von akustischen Wellen in einer eindimensionalen Geometrie. Ein Beispiel ist ein langes, enges Rohr, dessen Querschnittsfläche A viel kleiner als die Wellenlänge λ der Schallwelle ist ($\sqrt{A} \ll \lambda$). In diesem Fall verhält sich die Schallwelle ähnlich wie eine eindimensionale Seilwelle, ist aber immer noch eine Longitudinalwelle.

Ende	Impedanz	Schalldruck δp	Schallschnelle v
Geschlossenes Ende	$Z_a = \infty$	$ \delta p = \delta p_0$	$v = 0$
Offenes Ende	$Z_a \approx Z/\lambda^2$	$\delta p = 0$	$ v = v_0$

Tabelle 4.3: Impedanz, Schalldruck und Schallschnelle für offene und geschlossene Rohre

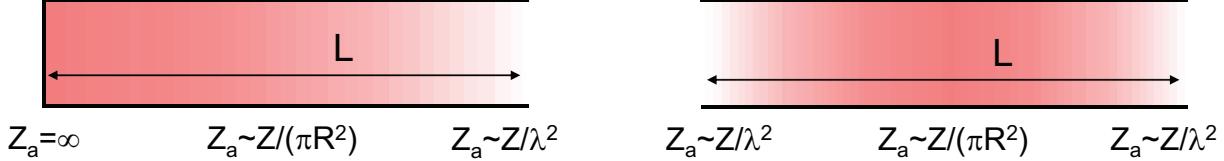


Abbildung 4.9: Links: Schalldruck einer stehenden Welle in einem einseitig offenem Rohr und rechts im beidseitig offenem Rohr

Akustische Impedanz in Rohren

Da die Wellenausbreitung in Rohren eindimensional ist, benutzt man eine alternative Definition der Impedanz, die sogenannte akustische Flussimpedanz Z_a :

$$Z_a = \frac{\delta p_0}{q_0} = \frac{\delta p_0}{(v_0 A)} = \frac{Z}{A} = \frac{\sqrt{K\rho}}{A} \quad (4.74)$$

Die akustische Flussimpedanz ist der Schalldruck geteilt durch den Schallfluss (Schallschnelle mal Fläche) $q_0 = v_0 A$. Die Beziehung $Z_a = Z/A$ gilt, solange die Schallschnelle aller Teilchen dieselbe ist; das heisst, solange keine Wandreibung vorhanden und die Teilchenbewegung ausschliesslich in x-Richtung ist.

Für ein Rohr ist die akustische Flussimpedanz deshalb umgekehrt proportional zum Rohrradius R im Quadrat. Dünne Rohre haben also eine grosse Impedanz:

$$Z_a = \frac{\sqrt{K\rho}}{\pi R^2} \quad (4.75)$$

Stehende Wellen in Rohren

Ändert ein Rohr abrupt seinen Radius, ändert sich damit seine akustische Flussimpedanz. Deshalb kommt es an den Übergangsstellen zu Reflexionen. Das bekannteste Beispiel sind Rohre mit offenen ($R \rightarrow \infty$) und geschlossenen ($R \rightarrow 0$) Enden, wie sie in z.B. Orgelpfeifen vorkommen (siehe Übersicht Tabelle 4.3).

Ist ein Rohr beidseitig offen oder geschlossen, können sich im Rohr stehende Wellen ausbilden, wie in der Abbildung 4.9 dargestellt.

Falls sich der Rohrdurchmesser der Wellenlänge des Schalls nähert, können sich Moden senkrecht zur Ausbreitungsrichtung ausbilden, und der Schall kann nahezu ungehindert in den freien Raum übertreten.

Aus den Impedanzen des offenen und geschlossenen Endes lassen sich die erlaubten Wellenlängen und Frequenzen für die stehenden Wellen ableiten. Für zwei offene oder zwei geschlossene Enden sind die Resonanzfrequenzen:

$$f_n = \frac{c}{\lambda_n} = \frac{nc}{2L}, \quad (4.76)$$

wobei L die Länge des Rohrs und $n = 1, 2, 3, \dots$ ist. Für je ein offenes und ein geschlossenes Ende sind die Resonanzfrequenzen:

$$f_n = \left(n - \frac{1}{2}\right) \frac{c}{2L}. \quad (4.77)$$

Experiment: Grosse Orgelpfeife

Experiment: Rubens Flammenrohr (1)

Experiment: Akustische Anpassung

Experiment: Brechung von Schallwellen

Experiment: Welle im Messingstab

4.4.4 Dopplereffekt und Überschall

Der Dopplereffekt beschreibt den Unterschied zwischen einer ruhenden und einer sich gegenüber dem Medium bewegenden Schallquelle. Der Dopplereffekt ist ein allgemeines Phänomen und spielt immer dann eine Rolle, wenn Relativbewegungen von der Größenordnung der Wellengeschwindigkeit im Spiel sind.

Wir betrachten eine Welle, die sich mit Wellengeschwindigkeit c nach rechts bewegt. Der Abstand zwischen Sender und Empfänger zur Zeit $t = 0$ sei x , vergleiche Abb. 4.10. Der Sender sendet mit einer konstanten Frequenz f_S (die Periodendauer ist also $T_S = 1/f_S$). Welche Frequenz f_E registriert ein Empfänger, der sich relativ zum Sender bewegt? Dazu berechnen wir, in welchem Zeitabstand zwei Wellenmaxima beim Empfänger eintreffen.

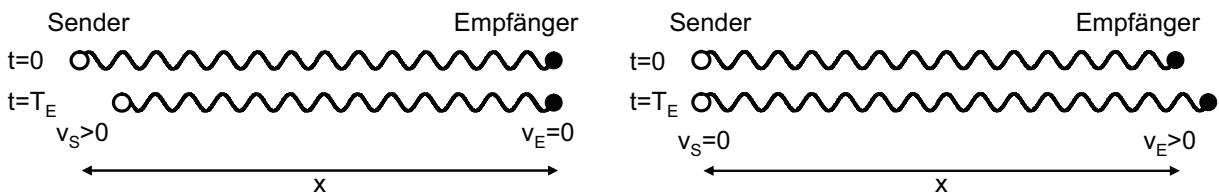


Abbildung 4.10: Dopplereffekt: (a) Der Sender bewegt sich nach rechts und (b) Der Empfänger bewegt sich nach rechts

Wir betrachten drei Fälle:

- (a) Der Sender bewegt sich mit Geschwindigkeit v_s nach rechts, und der Empfänger ist in Ruhe. Das erste und das zweite Wellenmaximum treffen zu folgenden Zeiten ein:

$$t_1 = \frac{x}{c} \quad (4.78)$$

$$t_2 = \frac{x - T_S v_S}{c} + T_S \quad (4.79)$$

Die vom Empfänger beobachtete Frequenz f_E ist:

$$f_E = \frac{1}{t_2 - t_1} = f_S \left(1 - \frac{v_S}{c}\right)^{-1} = f_S \left(\frac{c}{c - v_S}\right) \quad (4.80)$$

- (b) Der Empfänger bewegt sich mit Geschwindigkeit v_E nach rechts, und der Sender ist in Ruhe. Das erste und das zweite Wellenmaximum treffen zu folgenden Zeiten ein:

$$t_1 = \frac{x + t_1 v_E}{c} \implies t_1 = \frac{x}{c - v_E} \quad (4.81)$$

$$t_2 = \frac{x + t_2 v_E}{c} + T_S \implies t_2 = \frac{x + T_S c}{c - v_E} \quad (4.82)$$

Die vom Empfänger beobachtete Frequenz f_E ist:

$$f_E = \frac{1}{t_2 - t_1} = \left(\frac{T_S c}{c - v_E}\right)^{-1} = f_S \left(1 - \frac{v_E}{c}\right) = f_S \left(\frac{c - v_E}{c}\right) \quad (4.83)$$

- (c) Sowohl Sender als auch Empfänger bewegen sich:

$$f_E = f_S \left(\frac{c - v_E}{c - v_S}\right)$$

Dopplereffekt (4.84)

Experiment: Dopplereffekt (schwingender Lautsprecher)

Experiment: Dopplereffekt in fliessendem Wasser

Experiment: Dopplereffekt mit 3-cm Wellen

Überschall

Überschallphänomene treten auf, falls sich Sender oder Empfänger mit einer Geschwindigkeit in einem Medium fortbewegen, die schneller als die Schallgeschwindigkeit im Medium ist. Bewegen sie sich relativ zueinander weg, trifft der Schall entweder gar nie beim

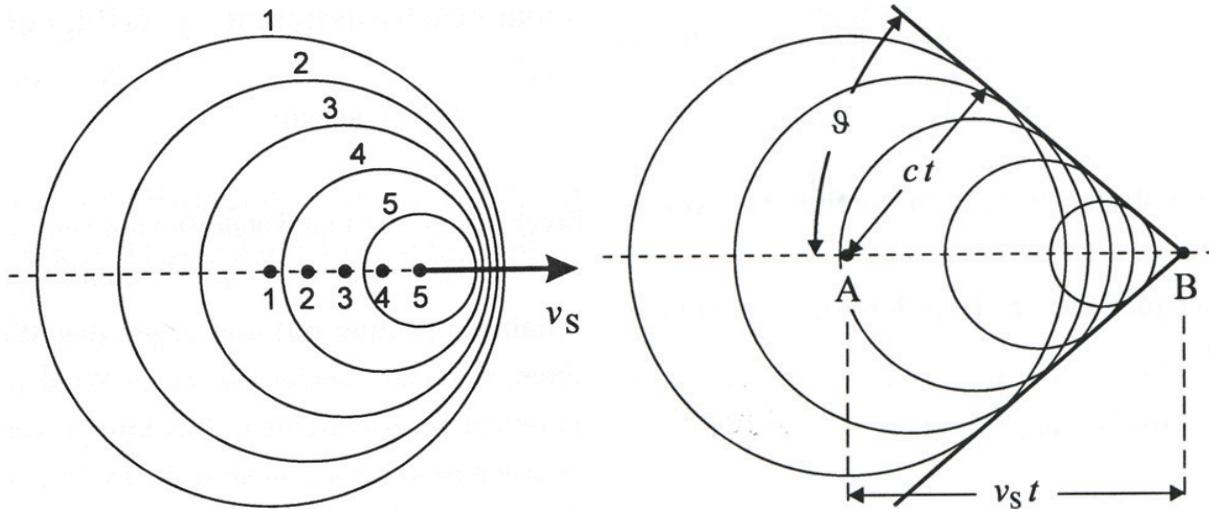


Abbildung 4.11: Links: Dopplereffekt. Rechts: Mach'scher Kegel

Empfänger ein, oder sie bewegen sich aufeinander zu und dabei tritt ein sogenannter *Mach'scher Kegel* auf:

$$\sin \vartheta = \frac{ct}{v_s t} = \frac{c}{v_s} \quad (4.85)$$

Hier ist ϑ der halbe Öffnungswinkel. Der Mach'sche Kegel ist in Abbildung 4.11 dargestellt.

Experiment: Überschallwellen auf Wasser im Wellentrog

Experiment: Geissel

4.5 Elektromagnetische Wellen

Literatur: Kuypers —; Tipler Kap. 30.4, 31.1-2

Dieses und die restlichen Kapitel befassen sich mit elektromagnetischen Wellen, und insbesondere dem Phänomen des „Lichts“. In Kapitel 4.5 werden die grundlegenden Eigenschaften von elektromagnetischen Wellen besprochen; die folgenden Kapitel behandeln die Wellenphänomene Brechung, Polarisation, Interferenz und Streuung, welche zwar bei allen Wellen auftreten können, für elektromagnetische Wellen aber speziell wichtig sind.

In der Vorlesung Physik 2 wird gezeigt, dass elektromagnetische Wellen nicht beliebige Amplituden annehmen können, sondern nur diskrete (quantisierte) Werte. Diese werden auch Lichtteilchen oder „Photonen“ genannt. Da die Energie eines Photons extrem klein ist, kann man die Quantisierung unter normalen Umständen aber nicht beobachten.

4.5.1 Wellengleichung für elektromagnetische Wellen

Wir haben in Kapitel 3.4 festgestellt, dass die Maxwell'schen Gleichungen die Existenz einer elektromagnetischen Welle voraussagen. Die zugehörigen Wellengleichungen sind (siehe Kapitel 3.4.4):

$$\frac{d^2 \vec{E}}{dt^2} = \frac{1}{\mu_0 \epsilon_0} \frac{d^2 \vec{E}}{dx^2} \quad (4.86)$$

$$\frac{d^2 \vec{B}}{dt^2} = \frac{1}{\mu_0 \epsilon_0} \frac{d^2 \vec{B}}{dx^2} \quad (4.87)$$

Hier ist \vec{E} das elektrische Feld, \vec{B} das Magnetfeld, $c_0 = 1/\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}$ ist die Wellengeschwindigkeit (Lichtgeschwindigkeit), und wir haben angenommen, dass sich die Welle in x-Richtung ausbreitet. Wir haben ausserdem gesehen, dass die beiden Felder gekoppelt sind und senkrecht aufeinander stehen, sowie senkrecht auf der Ausbreitungsrichtung \vec{S} stehen:

$$|\vec{B}| = |\vec{E}|/c_0 \quad (4.88)$$

$$\vec{E} \perp \vec{B} \perp \vec{S} \quad (4.89)$$

Die Ausbreitungsrichtung ist durch den Poynting-Vektor gegeben (siehe Abb. 4.12):

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} (\vec{E} \times \vec{B}) \text{ Poynting-Vektor} \quad (4.90)$$

Elektromagnetische Wellen sind demnach Transversalwellen, und es gibt zwei Schwingungsrichtungen oder *Polarisationen* (siehe Kapitel 4.7).

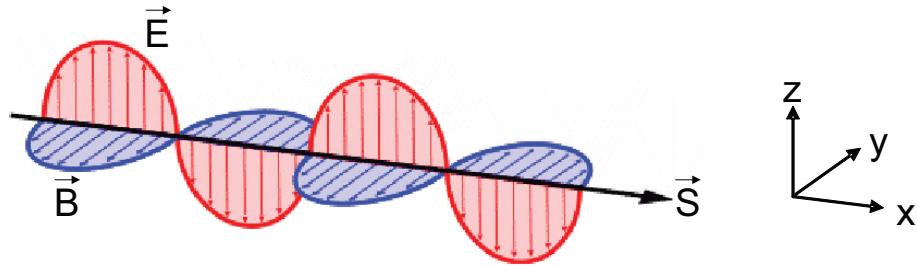


Abbildung 4.12: In x-Richtung propagierende elektromagnetische Welle

4.5.2 Elektromagnetische Wellen im Vakuum

Ebene elektromagnetische Wellen im Vakuum sind gegeben durch:

$$\vec{E}(x, t) = \vec{E}_0 e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{x} + \varphi)} \quad (4.91)$$

$$\vec{B}(x, t) = \vec{B}_0 e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{x} + \varphi)} \quad (4.92)$$

\vec{E}_0 ist die Amplitude des elektrischen Feldes und \vec{B}_0 ist die Amplitude des Magnetfeldes. Die Amplituden sind direkt proportional, $|\vec{B}_0| = |\vec{E}_0|/c_0$.

Da wir im Folgenden meist am Betrag des Feldes interessiert sind, werden häufig die Vektorzeichen weglassen, und $E_0 = |\vec{E}_0|$ und $B_0 = |\vec{B}_0|$ verwenden. Dasselbe gilt für den Wellenvektor $k = |\vec{k}|$.

Die Lichtgeschwindigkeit

Die Wellengeschwindigkeit ist gegeben durch die Lichtgeschwindigkeit:

$c_0 = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} = 299'792'458 \text{ m/s}$

Lichtgeschwindigkeit im Vakuum (4.93)

(Hinweis: Im Folgenden benutzen wir c_0 für die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum, um sie von der Lichtgeschwindigkeit in der Materie zu unterscheiden.)

Im Gegensatz zur Wellengeschwindigkeit bei Seil- oder Schallwellen, hat die Lichtgeschwindigkeit eine besondere Bedeutung. Erstens ist das Medium das „Vakuum“. Die Lichtgeschwindigkeit ist also eine fundamentale Eigenschaft unseres Universums. Zweitens ist die Lichtgeschwindigkeit, durch die Relativitätstheorie, mit Masse und Gravitation verknüpft. Ihre Bedeutung geht also über den Elektromagnetismus hinaus.

Die Lichtgeschwindigkeit kann dank Atomuhren extrem genau gemessen werden. Insbesondere wird der Meter heute via der Lichtgeschwindigkeit definiert.

Experiment: [Lichtgeschwindigkeit](#)

Wellenimpedanz des Vakuums

Die Impedanz der elektromagnetischen Welle ist definiert durch:

$$Z = \frac{E_0}{H_0} = \frac{E_0}{B_0/\mu_0} \quad (4.94)$$

Hier sind E_0 und H_0 die Amplituden des elektrischen Feldes und der magnetischen Erregung. Im Vakuum gilt:

$$Z_0 = \mu_0 c_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = 376.73 \Omega \quad \text{Wellenimpedanz des Vakuums} \quad (4.95)$$

Energiedichte und Intensität

Die Energiedichte der elektromagnetischen Welle ist gegeben durch die Summe der Energiedichten des elektrischen Feldes und des Magnetfeldes (siehe Kapitel 2.3 und 3.3):

$$w = \frac{1}{2}\epsilon_0 \frac{E_0^2}{2} + \frac{1}{2\mu_0} \frac{B_0^2}{2} = \frac{1}{2}\epsilon_0 E_0^2 \quad \text{Energiedichte einer elektromagnetischen Welle} \quad (4.96)$$

(Hinweis: Der Faktor 1/2 kommt daher, dass die zeitlich gemittelte Amplitude $1/\sqrt{2}$ der Maximalamplitude beträgt, siehe Kapitel 4.1.4) Die Intensität, gegeben als Energie E , welche pro Zeiteinheit auf einer Fläche A auftrifft, ist:

$$I = \frac{1}{A} \frac{dE}{dt} = \frac{A c_0 \epsilon_0}{A} \frac{1}{2} E_0^2 = \frac{1}{2} c_0 \epsilon_0 E_0^2 \quad \text{Intensität einer elektromagnetischen Welle} \quad (4.97)$$

4.5.3 Das elektromagnetische Spektrum

Elektromagnetische Wellen werden nach ihrer Frequenz (oder Wellenlänge) unterschieden, siehe Abb. 4.13. Der bekannteste Wellenlängenbereich ist der des sichtbaren Lichts, welcher sich zwischen 400 nm und 700 nm befindet. Der gesamte Frequenzbereich von 0 Hz bis $> 10^{20}$ Hz ist jedoch von grosser praktischer und technologischer Bedeutung.

4.5.4 Der Brechungsindex

Breitet sich eine elektromagnetische Welle nicht im Vakuum, sondern in der Materie aus, können verschiedene Phänomene auftreten. Die beiden wichtigsten sind, dass die Welle verzögert wird, oder dass die Welle absorbiert wird. Wir beginnen mit dem ersten Fall, der uns zum Brechungsindex führt.

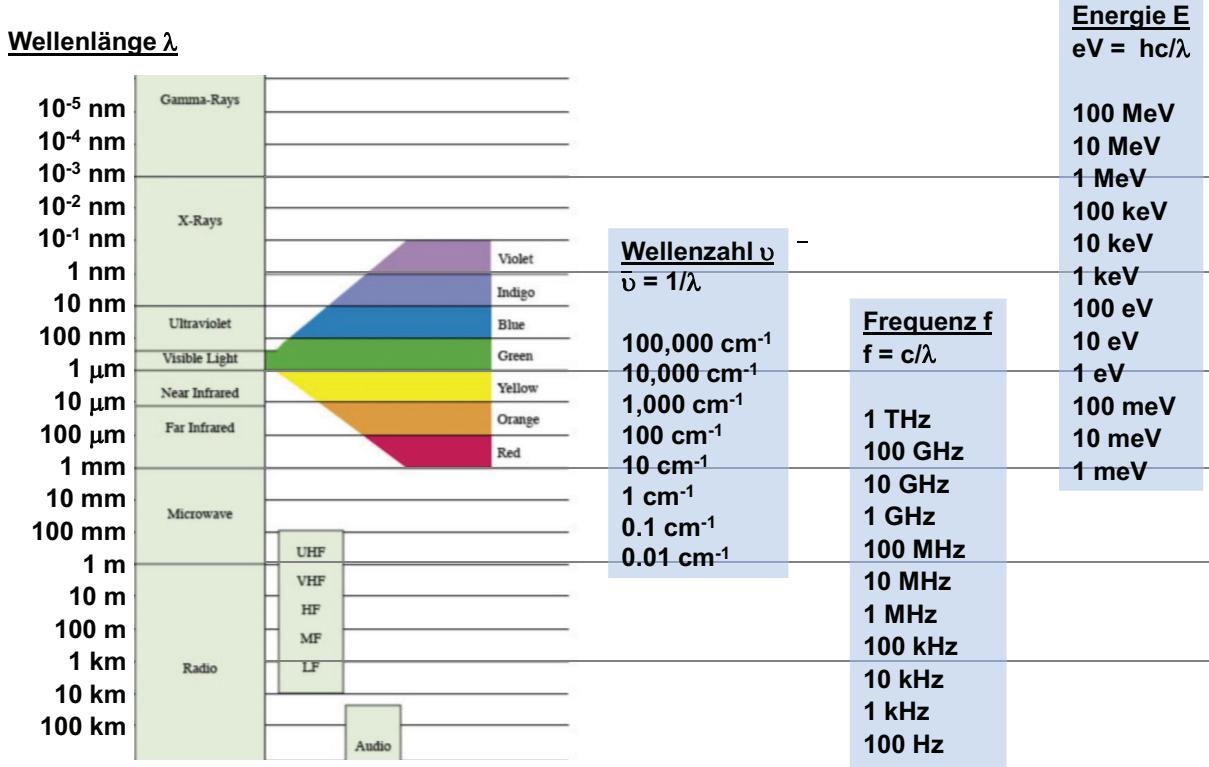


Abbildung 4.13: Elektromagnetisches Spektrum

Lichtgeschwindigkeit in der Materie

Bewegt sich eine elektromagnetische Welle durch Materie, so führt das elektrische Feld zu einer Polarisierung des Materials und es baut sich ein Gegenfeld auf. Da dies mit einer leichten Verzögerung geschieht, wird die Fortpflanzung der elektromagnetischen Welle verlangsamt. Gemäss den Maxwell'schen Gleichungen ist die Wellengeschwindigkeit durch die Dielektrizitätskonstante und die magnetische Feldkonstante gegeben:

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}} = \frac{1}{\sqrt{\mu_r\mu_0\epsilon_r\epsilon_0}} = \frac{c_0}{\sqrt{\mu_r\epsilon_r}} = \frac{c_0}{n} \quad (4.98)$$

Hier sind μ_r und ϵ_r die Dielektrizitätszahl und die relative magnetische Feldkonstante des Materials. (Hinweis: μ_r und ϵ_r sind frequenzabhängig. Sie haben bei hohen Frequenzen nicht denselben Wert, wie wir ihn in der Elektrostatik Kap. 2 und Magnetostatik Kap. 3 kennengelernt haben).

Man stellt fest, dass die Wellengeschwindigkeit in Materie immer reduziert ist. Das Verhältnis zwischen Vakuumgeschwindigkeit c_0 und reduzierter Wellengeschwindigkeit c ist der Brechungsindex:

$$n = \frac{c_0}{c} = \sqrt{\mu_r\epsilon_r} \geq 1 \quad \text{Brechungsindex} \quad (4.99)$$

Analog ist die Wellenimpedanz in Materie:

$$Z = \mu c = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} = \sqrt{\frac{\mu_r}{\epsilon_r}} Z_0 \quad (4.100)$$

Für nichtmagnetische Materialien ist $\mu_r \approx 1$, und wir werden zusätzlich im Folgenden immer von diesen Näherungen ausgehen:

$$n \approx \sqrt{\epsilon_r} \quad (4.101)$$

$$Z \approx \frac{Z_0}{n} \quad (4.102)$$

Aus der Impedanz lässt sich direkt der Reflexionsgrad und Transmissionsgrad einer senkrecht einfallenden elektromagnetischen Welle an einer Mediengrenze angeben:

$$R = \left(\frac{Z_2 - Z_1}{Z_2 + Z_1} \right)^2 \stackrel{\mu_1 \approx \mu_2}{\approx} \left(\frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} \right)^2 \quad (4.103)$$

$$T = 1 - R = \frac{4n_1 n_2}{(n_1 + n_2)^2} \quad (4.104)$$

Hier sind n_1 , n_2 und Z_1 , Z_2 die Brechungsindizes und Impedanzen der beiden Medien. (Hinweis: Z_1 und Z_2 erscheinen im Reflexionsgrad im Vergleich zu Kapitel 4.2.2 vertauscht. Beide Ausdrücke sind jedoch gleichwertig, da der Reflexionsgrad nur vom Verhältnis Z_1/Z_2 abhängt. Wir haben hier die übliche Notation für optische Wellen übernommen.)

4.5.5 Lambert-Beer-Gesetz

Elektromagnetische Wellen können durch ein Medium nicht nur verlangsamt, sondern auch absorbiert werden. Dabei verringert sich die Intensität der Welle mit der Distanz, welche sie im Medium zurücklegt, und die Welle gibt Energie ans Medium ab.

Wir betrachten im Folgenden zwei Situationen, bei denen die Absorption von elektromagnetischen Wellen wichtig ist. Die Erste ist das sogenannte Lambert-Beer Gesetz, welches zur Konzentrationsbestimmung von Lösungen in der chemischen Analytik benutzt wird, und die Zweite ist die Reflexion an Metalloberflächen.

Konzentrationsbestimmung von Lösungen (Lambert-Beer-Gesetz)

Absorption wird zur Messung von Konzentrationen von Lösungen verwendet. Dazu wird die Lösung mit Licht einer bestimmten Wellenlänge bestrahlt, und die transmittierte Intensität gemessen:

$$I(d) = e^{-\alpha d} I_0 \quad (4.105)$$

Hier ist d die Distanz, welche das Licht im Lösungsmedium zurücklegt. Da α proportional zur Konzentration c ist, lässt sich daraus direkt die Konzentration bestimmen. Als Messgröße verwendet man den Extinktionskoeffizienten E :

$$E = -\log_{10}(e^{-\alpha d}) = \log_{10}(e) \cdot \alpha d \approx 0.434 \cdot \alpha d = \varepsilon cd \quad \text{Lambert-Beer-Gesetz} \quad (4.106)$$

Hier ist ε der molare Extinktionskoeffizient, welcher charakteristisch für den gelösten Stoff ist.

Experiment: Absorption von 3 cm Wellen in Wasser

Beispiel: Absorptionskoeffizient und Eindringtiefe von Wasser bei 10 GHz:

Wasser bei 3 cm (10 GHz) und 20°C hat $\varepsilon_{r,1} = 65$ und $\varepsilon_{r,2} = 33$. Der Absorptionskoeffizient ist also und die Eindringtiefe

4.5.6 Reflexion an einer Metalloberfläche

In den meisten Medien tritt sowohl Verlangsamung wie auch Absorption der Welle auf. Die Welle kann daher durch einen komplexen Wellenvektor, oder alternativ durch einen komplexen Brechungsindex beschrieben werden. Die komplexe Schreibweise ist nützlich, da damit z.B. unsere Erkenntnisse zur Reflexion auf absorbierende Materialien ausgedehnt werden können.

Komplexer Brechungsindex

Der komplexe Wellenvektor ist:

$$\tilde{k} = k - i\alpha/2 \quad (4.107)$$

und die gedämpfte Welle damit:

$$E(x, t) = E_0 e^{i(\omega t - \tilde{k}x + \varphi)} \quad (4.108)$$

Der komplexe Brechungsindex ist:

$$\tilde{n} = \frac{\tilde{k}}{k_0} = n - i \frac{\alpha}{2k_0} = n - i\kappa \quad \text{Komplexer Brechungsindex} \quad (4.109)$$

wobei $k_0 = \omega/c_0$ der Wellenvektor im Vakuum ist. n und κ sind dabei der reelle und imaginäre Anteil des Brechungsindexes. Der komplexe Brechungsindex kann experimentell

durch die komplexe Dielektrizitätskonstante $\tilde{\varepsilon}_r = \varepsilon_{r,1} + i\varepsilon_{r,2}$ bestimmt werden:

$$\tilde{n} = \sqrt{\tilde{\varepsilon}_r} \quad (4.110)$$

$$n = \left(\frac{1}{2} \sqrt{\varepsilon_{r,1}^2 + \varepsilon_{r,2}^2} + \frac{1}{2} \varepsilon_{r,1} \right)^{1/2} \quad (4.111)$$

$$\kappa = \left(\frac{1}{2} \sqrt{\varepsilon_{r,1}^2 + \varepsilon_{r,2}^2} - \frac{1}{2} \varepsilon_{r,1} \right)^{1/2} \quad (4.112)$$

Reflexionsgrad bei Absorption

Aus dem komplexen Brechungsindex kann man den Reflexionsgrad für Medien mit Absorption berechnen. Wir werden uns hier auf den Fall beschränken, bei dem eine Welle aus einem Medium 1 ohne Absorption ($\kappa_1 = 0$) auf ein Medium 2 mit Absorption ($\kappa_2 > 0$) trifft. Da die Herleitung des Reflexionsgrades auch für komplexe Wellenvektoren gilt, ist (mit $\mu_1 = \mu_2 = 1$):

$$R = \left| \frac{\tilde{n}_1 - \tilde{n}_2}{\tilde{n}_1 + \tilde{n}_2} \right|^2 = \left| \frac{n_1 - n_2 + i\kappa_2}{n_1 + n_2 - i\kappa_2} \right|^2 = \frac{(n_1 - n_2)^2 + \kappa_2^2}{(n_1 + n_2)^2 + \kappa_2^2} \quad \begin{array}{l} \text{Reflexionsgrad} \\ \text{mit Absorption} \end{array} \quad (4.113)$$

Man stellt fest, dass für grosse κ_2 der Reflexionsgrad gegen Eins geht. Dies bedeutet, dass stark absorbierende Materialien gute Reflektoren sind. Ein Beispiel für stark absorbierende Materialien sind Metalle.

Experiment: Stehende 3 cm-Wellen

Beispiel: Reflexion an Metalloberfläche:

Um das Reflexionsverhalten von Metallen zu verstehen, müssen wir zuerst die Dielektrizitätskonstante als Funktion der Frequenz ω betrachten.

Für eine sehr tiefe Frequenz verschieben sich die Elektronen im Metall instantan, sodass das elektrische Feld vollständig kompensiert wird:

$$\varepsilon_r(\omega) \rightarrow \infty \quad \text{für } \omega \rightarrow 0 \quad (4.114)$$

Für sehr hohe Frequenzen ändert das elektrische Feld so schnell, dass die Elektronen nicht folgen können:

$$\varepsilon_r(\omega) \rightarrow 0 \quad \text{für } \omega \rightarrow \infty \quad (4.115)$$

Die Grenzfrequenz ist die sogenannte Plasmafrequenz ω_p . Für typische Metalle liegt die Plasmafrequenz im Bereich von 10^{15} Hz, was einer Lichtwellenlänge von ca. 200 – 500 nm entspricht.

Beispiel: Silber:

Für Silber ist $\omega_p \approx 1.32 \cdot 10^{16}$ s⁻¹ und $\gamma = \tau^{-1} \approx (1.45 \cdot 10^{-14}$ s)⁻¹.

Experiment: Goldfolie im Durchlicht

Eindringtiefe (Skin depth)

Als Beispiel berechnen wir die Eindringtiefe von elektromagnetischen Wellen in eine Metalloberfläche. Wie wir in Kapitel 2.2 gesehen haben, schirmen leitende Materialien statische elektrische Felder ideal ab (Faradayabschirmung). Bei hochfrequenten Feldern kommt die Abschirmung nicht durch Ladungsausgleich, sondern durch Induktion (Wirbelströme) zustande. Die Eindringtiefe hängt hier direkt mit der Leitfähigkeit zusammen.

In einem Leiter mit Leitfähigkeit σ ist die Wellengleichung nach Maxwell modifiziert:

$$\frac{d^2 \vec{E}}{dt^2} + \frac{\sigma}{\epsilon_0} \frac{d\vec{E}}{dt} = c^2 \frac{d^2 \vec{E}}{dx^2} \quad (4.116)$$

Setzt man die harmonische Welle mit komplexem Wellenvektor \tilde{k} ein, so findet man:

$$-\omega^2 + i\omega \frac{\sigma}{\epsilon_0} = -c^2 \tilde{k}^2 \quad (4.117)$$

Mit $c^2 = \omega^2/k^2 = \omega^2/(\epsilon_r k_0^2)$ und $\tilde{k}^2 = \tilde{\epsilon}_r k_0^2$ folgt:

$$-\omega^2 + i\omega \frac{\sigma}{\epsilon_0} = -\frac{\tilde{\epsilon}_r \omega^2}{\epsilon_r} \quad (4.118)$$

Daraus folgt die komplexe Dielektrizitätszahl:

$$\tilde{\epsilon}_r = \epsilon_r - i \frac{\sigma}{\omega \epsilon_0} \quad (4.119)$$

Aus der komplexen Dielektrizitätszahl können wir direkt den Imaginärteil des Brechungsindexes κ , und damit den Absorptionskoeffizienten bestimmen. Wir sehen, dass je nach Frequenzbereich der reelle oder imaginäre Teil der Dielektrizitätszahl dominiert. Im Fall von guter Leitfähigkeit und tiefer Frequenz ist:

$$\tilde{\epsilon}_r \approx -i \frac{\sigma}{\omega \epsilon_0} \quad (4.120)$$

$$\kappa \approx \sqrt{\frac{\sigma}{2\omega \epsilon_0}} \quad (4.121)$$

Damit findet man für die Eindringtiefe:

$$\delta_e = \frac{2}{\alpha} = \frac{1}{\kappa k_0} = \frac{c_0}{\kappa \omega} \quad (4.122)$$

$$\Rightarrow \boxed{\delta_e \approx \left(\frac{c_0^2}{\omega^2} \frac{2\omega\epsilon_0}{\sigma} \right)^{1/2} = \left(\frac{2}{\omega\sigma\mu_0} \right)^{1/2}} \quad \begin{array}{l} \text{Eindringtiefe (skin depth)} \\ \text{für einen Leiter} \end{array} \quad (4.123)$$

Diese Eindringtiefe ist identisch mit der „skin depth“, welche wir bei den Wirbelströmen kennengelernt haben (Kapitel 3.3.2).

Experiment: Skin-Effekt

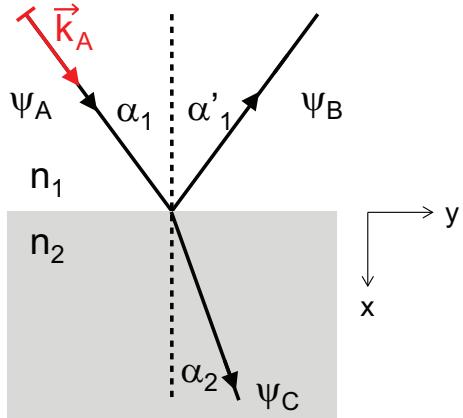


Abbildung 4.14: Reflexions- und Brechungsgesetz

4.6 Brechung

Literatur: Kuypers Kap. 25, 26; Tipler Kap. 31.1, 31.5

Ebene Wellen können unter einem Winkel auf eine Grenzfläche auftreffen. Dabei wird wiederum ein Teil der Welle reflektiert und ein Teil transmittiert. Zusätzlich ändert sich die Ausbreitungsrichtung der Wellen. In diesem Kapitel betrachten wir, wie sich die Ausbreitung der Welle als Funktion des Winkels ändert, wobei die Phänomene der Brechung, Totalreflexion und Evaneszenz auftreten. Im nächsten Kapitel 4.7.2 wird die Winkelabhängigkeit des Reflexions- und Transmissionsgrad besprochen.

4.6.1 Ebene Wellen an Grenzflächen unter einem Winkel

Wir betrachten eine ebene Welle wie in der Figur 4.14 dargestellt. Die Welle trifft auf eine Grenzfläche zwischen zwei Medien 1 und 2, die sich bei $x = 0$ befindet. Die Ausbreitungsrichtung der einfallenden Welle sei durch den Wellenvektor $\vec{k}_A = (k_{A,x}, k_{A,y}, 0)$ gegeben. Der Winkel α_1 zwischen \vec{k}_A und der Flächennormalen (hier der x-Richtung) heisst *Einfallswinkel*. Die Wellenfunktionen von einfallender, reflektierter und transmittierter Welle sind (siehe Kapitel 4.2.1):

$$\psi_A(x, y) = \psi_{0,A} e^{-i(k_{A,x}x + k_{A,y}y)} \quad \text{einfallende Welle} \quad (4.124)$$

$$\psi_B(x, y) = \psi_{0,B} e^{-i(k_{B,x}x + k_{B,y}y)} \quad \text{reflektierte Welle} \quad (4.125)$$

$$\psi_C(x, y) = \psi_{0,C} e^{-i(k_{C,x}x + k_{C,y}y)} \quad \text{transmittierte Welle} \quad (4.126)$$

Hier haben wir wie in Kapitel 4.2.1 angenommen, dass $t = 0$ und $\varphi = 0$ sind. Im Exponenten von Gleichung 4.38 änderte sich das Vorzeichen, weil k sich nur in eine Richtung ändern konnte. Hier beschreibt Gleichung 4.125 einen allgemeinen Fall im Mehrdimensionalen und \vec{k} tritt vektoriell auf. Die Analogie zu Gleichung 4.38 würden wir erst beim Vergleich der x -Komponenten von \vec{k}_B mit \vec{k}_A oder \vec{k}_C sehen (bezogen auf Abb. 4.14).

An der Mediengrenze ($x = 0$) muss wiederum die vorzeichenbehaftete Amplitude der Wellenfunktion (Auslenkung) stetig sein. Es ist also:

$$\psi_{0,A} e^{-ik_{A,y}y} + \psi_{0,B} e^{-ik_{B,y}y} = \psi_{0,C} e^{-ik_{C,y}y} \quad (4.127)$$

Da dies für alle y gelten muss, folgt:

$$\begin{aligned} e^{-ik_{A,y}y} &= e^{-ik_{B,y}y} = e^{-ik_{C,y}y} \\ \Rightarrow -ik_{A,y}y &= -ik_{B,y}y = -ik_{C,y}y \\ \Rightarrow k_{A,y} &= k_{B,y} = k_{C,y} \end{aligned} \quad (4.128)$$

Wir werden nun diese Beziehung benutzen, um das Reflexions- und Brechungsgesetz herzuleiten.

4.6.2 Reflexions- und Brechungsgesetz

Aus $k_{A,y} = k_{B,y}$ folgt unmittelbar das Reflexionsgesetz:

$$k_{A,y} = k_1 \sin \alpha_1 = k_{B,y} = k_1 \sin \alpha'_1 \quad (4.129)$$

$\sin \alpha_1 = \sin \alpha'_1$

Reflexionsgesetz (4.130)

Hier sind α_1 der Einfallswinkel und α'_1 der Winkel des reflektierten Strahls (Ausfallswinkel). k_1 und k_2 sind die Wellenvektoren (absoluter Betrag) in den beiden Medien.

Aus $k_{A,y} = k_{C,y}$ lässt sich der Brechungswinkel bestimmen:

$$k_{A,y} = k_1 \sin \alpha_1 = k_{C,y} = k_2 \sin \alpha_2 \quad (4.131)$$

Da $k_1/k_2 = c_2/c_1 = n_1/n_2$ ist, folgt:

$n_1 \sin \alpha_1 = n_2 \sin \alpha_2$

Brechungsgesetz von Snellius (4.132)

Hier sind α_2 der Winkel des transmittierten Strahls und n_1 und n_2 die Brechungsindizes der beiden Medien. In Worten bedeutet das Brechungsgesetz von Snellius:

Beim Übergang von einem optisch dünneren zu einem optisch dichteren Medium wird der Strahl zum Lot hin gebrochen.

Experiment: Brechung von Wasserwellen

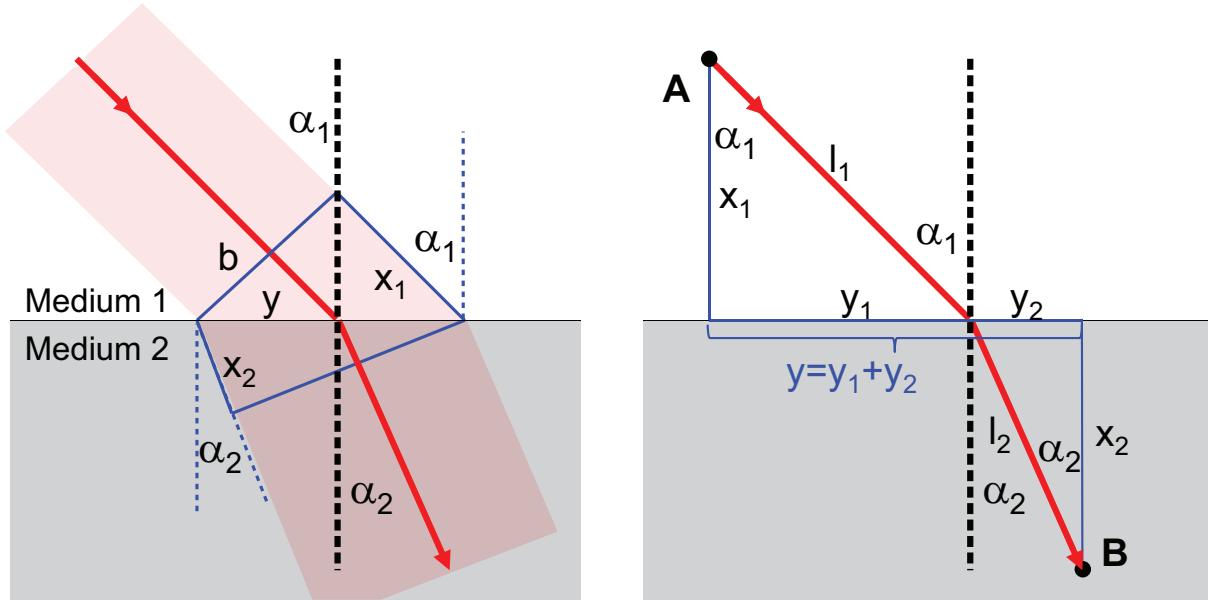


Abbildung 4.15: Brechungsgesetz nach Huygens (links) und nach Fermat (rechts)

Prinzip von Huygens

Das Reflexions- und Brechungsgesetz kann auch aus geometrischen Überlegungen abgeleitet werden. Wir betrachten dies hier am Prinzip von Huygens und am Prinzip von Fermat. Beide Prinzipien wurden aufgestellt, bevor die Wellennatur des Lichts bekannt war.

Prinzip von Huygens: Jeder Punkt einer bestehenden Lichtwelle produziert eine neue Kugelwelle. Alle Kugelwellen summieren sich zu einer neuen Lichtwelle zum späteren Zeitpunkt.

Wir werden als Beispiel das Brechungsgesetz aus dem Huygens'schen Prinzip herleiten. Wir betrachten einen Strahl der Breite b , welcher auf eine Mediengrenze trifft (siehe Abbildung 4.15). Für die während der Zeit Δt zurückgelegte Distanz an den Seiten des Strahls gilt:

$$x_1 = c_1 \Delta t = \frac{c_0 \Delta t}{n_1} \quad \text{und} \quad x_2 = c_2 \Delta t = \frac{c_0 \Delta t}{n_2} \implies \frac{x_1}{x_2} = \frac{n_2}{n_1} \quad (4.133)$$

Für die beiden Winkel gilt:

$$\sin \alpha_1 = \frac{x_1}{y} \quad \text{und} \quad \sin \alpha_2 = \frac{x_2}{y} \implies \frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} = \frac{x_1}{x_2} \quad (4.134)$$

Daraus folgt:

$$n_1 \sin \alpha_1 = n_2 \sin \alpha_2 \quad (4.135)$$

Prinzip von Fermat

Ein alternatives Prinzip wurde von Fermat aufgestellt:

Prinzip von Fermat: Das Licht nimmt immer den schnellsten Weg, um von Punkt A zu Punkt B zu gelangen.

Als Beispiel leiten wir das Brechungsgesetz nach dem Prinzip von Fermat her. Dabei sei Δt die Zeit, welche ein Lichtstrahl benötigt, um von Punkt A zu Punkt B zu gelangen:

$$\Delta t = \frac{l_1}{c_1} + \frac{l_2}{c_2} = \frac{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}}{c_1} + \frac{\sqrt{x_2^2 + (y - y_1)^2}}{c_2} \quad (4.136)$$

Für den schnellsten Weg ist die Ableitung gleich Null:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d\Delta t}{dy_1} = \frac{y_1}{c_1 \sqrt{x_1^2 + y_1^2}} + \frac{-(y - y_1)}{c_2 \sqrt{x_2^2 + (y - y_1)^2}} = \frac{y_1}{c_1 l_1} - \frac{y_2}{c_2 l_2} \\ &= \frac{\sin \alpha_1}{c_1} - \frac{\sin \alpha_2}{c_2} = \frac{n_1 \sin \alpha_1}{c_0} - \frac{n_2 \sin \alpha_2}{c_0} \end{aligned} \quad (4.137)$$

Daraus folgt:

$$\boxed{n_1 \sin \alpha_1 = n_2 \sin \alpha_2} \quad (4.138)$$

4.6.3 Totalreflexion

Experiment: Totalreflexion

Tritt ein Lichtstrahl von einem optisch dichteren in ein optisch dünneres Medium über, so kann gemäss dem Brechungsgesetz ein Austrittswinkel von grösser als 90° auftreten. In diesem Fall wird der Strahl vollständig reflektiert und es tritt keine Transmission auf. Dieses Phänomen heisst *Totalreflexion* und der grösste Einfallswinkel α_1 , bei dem gerade noch Licht transmittiert wird, heisst *kritischer Winkel* $\alpha_{1,c}$:

$$n_1 \sin \alpha_{1,c} = n_2 \sin 90^\circ \implies \sin \alpha_{1,c} = \frac{n_2}{n_1} \quad (4.139)$$

$$\implies \boxed{\alpha_{1,c} = \sin^{-1} \left(\frac{n_2}{n_1} \right)} \text{ kritischer Winkel bei Totalreflektion} \quad (4.140)$$

Beispiele:

$$\text{Wasser und Luft: } \alpha_{1,c} = \sin^{-1} \left(\frac{1.0}{1.33} \right) = \sin^{-1}(0.75) = 48^\circ$$

$$\text{Paraffin und Luft: } \alpha_{1,c} = \sin^{-1} \left(\frac{1.0}{1.4} \right) = 45.6^\circ$$

Experiment: Lichtleiter

Experiment: Wasserstrahl als Lichtleiter

4.6.4 Evaneszenz

Wir betrachten nun genauer, was bei der Totalreflexion an der Grenzfläche geschieht. Dazu berechnen wir die Wellenfunktion der transmittierten Welle als Funktion des Einfallswinkels α_1 und schauen, was beim Übergang durch den kritischen Winkel geschieht.

Die Wellenfunktion der transmittierten Welle ist (siehe Kapitel 4.6.1, Gleichung 4.126):

$$\psi_C(x, y) = \psi_{0,C} e^{-i(k_{C,x}x + k_{C,y}y)} \quad (4.141)$$

Ausserdem haben wir gesehen, dass für den Wellenvektor gilt:

$$k_{C,y} = k_{A,y} \quad (4.142)$$

$$k_2 = \sqrt{k_{C,x}^2 + k_{C,y}^2} \quad (4.143)$$

Daraus folgt für den x-Anteil des Wellenvektors:

$$k_{C,x}^2 = k_2^2 - k_{C,y}^2 = k_2^2 - k_{A,y}^2 = k_2^2 - k_1^2 \sin^2 \alpha_1 \quad (4.144)$$

Falls der Einfallswinkel den krischen Winkel übersteigt, so wird dieser Ausdruck negativ, und $k_{C,x}$ ist imaginär. Damit wird die Wellenfunktion:

$$\psi_C(x, y) = \psi_{0,C} e^{-\beta x - ik_{C,y}y} \quad (4.145)$$

mit $k_{C,x} = -i\beta$, wobei nun β eine reelle Zahl ist.

Die transmittierte Welle fällt also in x-Richtung exponentiell ab (siehe Abb. 4.16). Das heisst, das elektrische Feld reduziert sich an der Mediengrenze nicht schlagartig auf Null, sondern erstreckt sich eine gewisse Distanz ins „verbotene“ Medium hinein. Die Distanz ist bestimmt durch die Eindringtiefe $\delta = 1/\beta$, bei welcher die Amplitude des Feldes auf $1/e$ abgefallen ist:

$$\beta = \sqrt{k_1^2 \sin^2 \alpha_1 - k_2^2} = k_1 \sqrt{\sin^2 \alpha_1 - \left(\frac{k_2}{k_1} \right)^2} = k_1 \sqrt{\sin^2 \alpha_1 - \left(\frac{n_2}{n_1} \right)^2} \quad (4.146)$$

$$\implies \delta = \frac{\lambda_1}{2\pi \sqrt{\sin^2 \alpha_1 - \left(\frac{n_2}{n_1} \right)^2}} \quad (4.147)$$

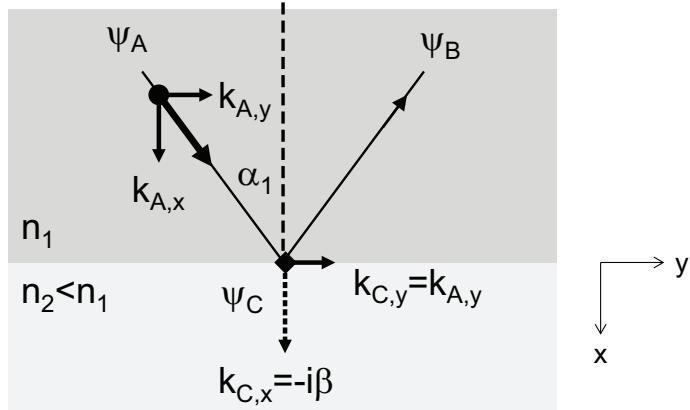


Abbildung 4.16: Evanescenz

Hier ist $\lambda_1 = 2\pi/k_1$ die Wellenlänge der einfallenden Welle.

Aus dem exponentiellen Abfall könnte man vermuten, dass Evanescenz zu Absorption führt. Dies ist jedoch nicht der Fall. Indem man den Reflexionsgrad berechnet, kann man zeigen, dass 100% der Welle reflektiert wird. Der Unterschied ist, dass bei Absorption die Ausbreitungsrichtung und Dämpfungsrichtung identisch sind, während sie bei der Totalreflexion verschieden sind.

[Experiment: Totalreflexion mit Laser](#)

[Experiment: Totalreflexion mit 3 cm Wellen](#)

[Experiment: Kaustik von Regentropfen](#)

4.7 Polarisation

Literatur: Kuypers Kap. 32, Tipler Kap. 31.4

Da elektromagnetische Wellen Transversalwellen sind, gibt es zwei mögliche Schwingungsrichtungen (Polarisationen). In gewöhnlichem Licht sind beide Polarisationen zu gleichen Teilen vertreten und Polarisationseffekte sind oft unbemerkt. Die Polarisation spielt jedoch eine wichtige Rolle in vielen technischen und wissenschaftlichen Anwendungen. In diesem Kapitel wird betrachtet, wie elektromagnetische Wellen polarisiert werden können, wie die Polarisation bestimmt werden kann, und wie sich die Polarisation auf Reflexion und Transmission auswirkt.

4.7.1 Polarisation

Für eine elektromagnetische Welle, die sich in x-Richtung ausbreitet, liegt die Schwingungsrichtung des elektrischen und magnetischen Feldes in der yz-Ebene. Der Einfachheit halber werden wir meist nur die Richtung des elektrischen Feldes betrachten:

$$\vec{E}(x, t) = \vec{E}_y(x, t) + \vec{E}_z(x, t) = \vec{E}_{0,y} e^{i(\omega t - kx + \varphi_y)} + \vec{E}_{0,z} e^{i(\omega t - kx + \varphi_z)} \quad (4.148)$$

Das Aussehen der Welle ist durch die beiden Amplituden $\vec{E}_{0,y}$ und $\vec{E}_{0,z}$, sowie durch die Phasendifferenz $\Delta\varphi = \varphi_y - \varphi_z$ gegeben. Da es genau zwei Freiheitsgrade für die Schwingungsrichtung gibt, können alle Wellen als Superposition von zwei Basiswellen gebildet werden. Die beiden wichtigsten Basiswellen sind linear und zirkular polarisierte Wellen.

Linearpolarisation

Falls die Phasendifferenz $\Delta\varphi = m\pi$ ist (wobei $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$), so befindet sich der \vec{E} -Vektor über die ganze Länge der Welle in derselben Ebene:

$$\vec{E}(x, t) = (\vec{E}_{0,y} \pm \vec{E}_{0,z}) e^{i(\omega t - kx + \varphi_y)} \quad (4.149)$$

wobei das Vorzeichen für ungerade m negativ ist. Die Welle ist deshalb *linear* polarisiert. Falls $\vec{E}_{0,y}$ oder $\vec{E}_{0,z}$ gleich Null sind, so schwingt die Welle in z- oder y-Richtung, und die Welle heisst *vertikal* oder *horizontal* polarisiert, siehe Abb. 4.17 links. (Hinweis: Es muss jeweils aus dem Zusammenhang definiert werden, was „horizontal“ und was „vertikal“ ist. Wir nehmen hier y als horizontale und z als vertikale Richtung).

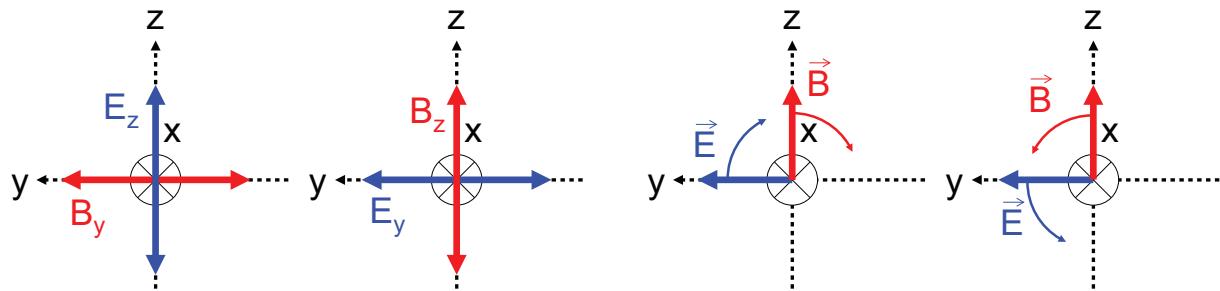


Abbildung 4.17: Links: Vertikale und horizontale Polarisation. Rechts (ab Bildmitte): Zirkular rechtsdrehende und linksdrehende Polarisation

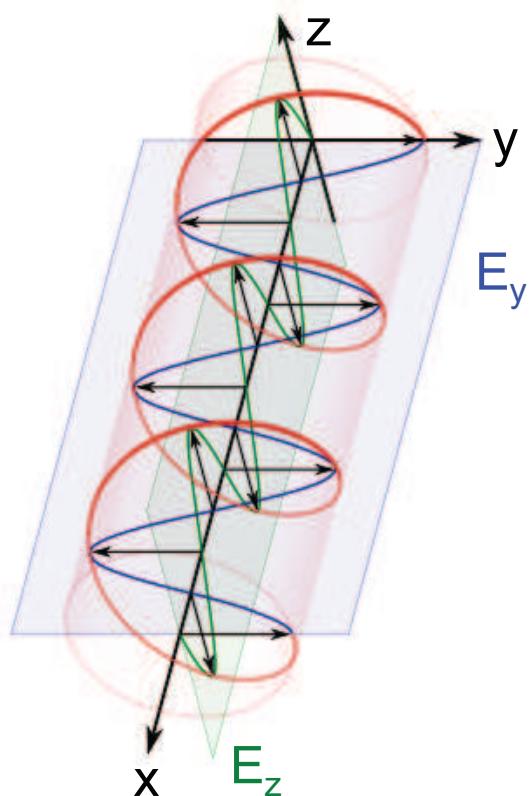


Abbildung 4.18: Zirkular rechtsdrehende Welle

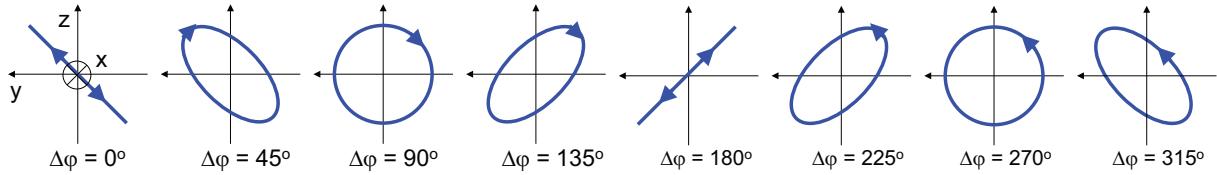


Abbildung 4.19: Überlagerung von vertikaler und horizontaler Polarisation

Zirkularpolarisation

Falls die Phasendifferenz $\Delta\varphi = (m + \frac{1}{2})\pi$ sowie die beiden Amplituden gleich gross sind, $|\vec{E}_{0,y}| = |\vec{E}_{0,z}|$, so rotiert der \vec{E} Vektor in der yz -Ebene und beschreibt einen Kreis (Abbildungen 4.17 rechts, resp. eine „Schraubenlinie“, siehe Abbildung 4.18):

$$\vec{E}(x, t) = |\vec{E}_{0,y}|(\vec{e}_y \mp i\vec{e}_z)e^{i(\omega t - kx + \varphi_y)} \quad (4.150)$$

Die Periode der Rotation ist eine Periodendauer resp. eine Wellenlänge. Das Vorzeichen ist für gerade m negativ. Zirkular polarisierte Wellen werden als rechtsdrehend ($\Delta\varphi = 90^\circ$) oder linksdrehend ($\Delta\varphi = -90^\circ$) unterschieden. Die Händigkeit kann man feststellen, indem man in Ausbreitungsrichtung blickt und die rechte-Hand-Regel anwendet. Bei der rechtsdrehenden Welle läuft die Auslenkung in die horizontale Richtung (y-Richtung) der vertikalen (z-Richtung) um 90° voraus. Die beiden zirkularen Polarisationen sind ebenfalls linear unabhängig und können äquivalent zur horizontalen und vertikalen Polarisation als Basis benutzt werden.

Elliptische Polarisation

Falls $\Delta\varphi \neq m\pi$ ist und falls nicht gerade der Spezialfall der Zirkularpolarisation eintritt, ist die Welle elliptisch polarisiert (siehe Abbildung 4.19). Der \vec{E} Vektor rotiert in der yz -Ebene und beschreibt eine Ellipse. Elliptische Wellen lassen sich als Superposition von linear oder zirkular polarisierten Wellen darstellen.

4.7.2 Reflexion und Transmission unter einem Winkel

Bisher haben wir Reflexion und Transmission immer für eine senkrecht einfallende Welle betrachtet. Hier untersuchen wir nun, wie sich der Reflexionsgrad mit dem Einfallswinkel ändert. Als Resultat findet man, dass der Reflexionsgrad vom Winkel abhängt, und dass das reflektierte/transmittierte Licht teilweise polarisiert ist (siehe Abb. 4.20).

Im Zusammenhang mit Reflexion bedeutet horizontal polarisiert, dass der elektrische Feldvektor senkrecht zur Einfallsebene ist. Horizontal polarisierte Wellen werden auch als s-polarisierte oder TE-Wellen (transverse electric) bezeichnet. Vertikal polarisiert bedeutet, dass der elektrische Feldvektor parallel zur Einfallsebene ist. Vertikal polarisierte Wellen werden auch als p-polarisierte oder TM-Wellen (transverse magnetic) bezeichnet.

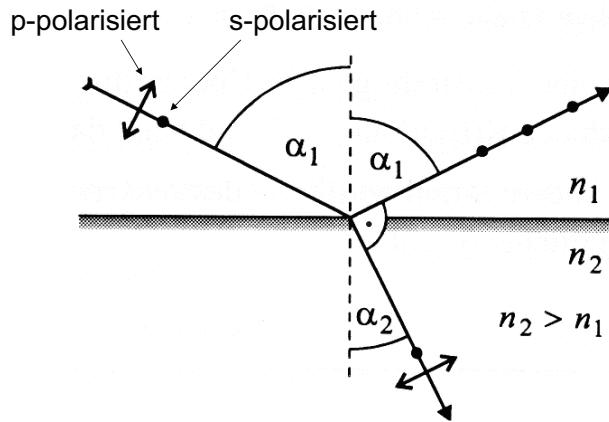


Abbildung 4.20: Elektrischer Feldvektor bei der Reflexion und Brechung einer s- und einer p-polarisierten Welle (hier gezeigt beim Brewsterwinkel)

Der Reflexionsgrad für eine senkrecht einfallende Welle ist (siehe Kapitel 4.2.2, Gleichung 4.47):

$$R = \left(\frac{Z_2 - Z_1}{Z_2 + Z_1} \right)^2 \quad (4.151)$$

Fällt die Welle unter einem Winkel $\alpha_1 > 0$ ein, so gelten an der Grenzfläche die Randbedingungen für den parallelen Anteil des elektrischen Feldes (siehe Kapitel 2.2.3 und Kapitel 4.2.1):

$$E_{1,\parallel} = E_{2,\parallel} \quad (4.152)$$

Entscheidend für die Reflexion ist daher die Impedanz in der Ebene parallel zur Grenzfläche:

$$R = \left(\frac{Z_{2,\parallel} - Z_{1,\parallel}}{Z_{2,\parallel} + Z_{1,\parallel}} \right)^2 \quad (4.153)$$

Horizontal polarisierte Welle (s-polarisierte Welle, TE-Welle)

Die Impedanzen sind:

$$Z_{1s} = \frac{E_{1s}}{H_{1s}} = \frac{E_1}{H_1 \cos \alpha_1} = \frac{Z_1}{\cos \alpha_1} = \frac{Z_0}{n_1 \cos \alpha_1} \quad \text{einfallende Welle} \quad (4.154)$$

$$Z_{2s} = \frac{E_{2s}}{H_{2s}} = \frac{E_2}{H_2 \cos \alpha_2} = \frac{Z_2}{\cos \alpha_2} = \frac{Z_0}{n_2 \cos \alpha_2} \quad \text{transmittierte Welle} \quad (4.155)$$

Der Reflexionsgrad ist:

$$\begin{aligned} R_s &= \left(\frac{Z_{2s} - Z_{1s}}{Z_{2s} + Z_{1s}} \right)^2 = \left(\frac{n_1 \cos \alpha_1 - n_2 \cos \alpha_2}{n_1 \cos \alpha_1 + n_2 \cos \alpha_2} \right)^2 \\ &= \left(\frac{\cos \alpha_1 - \sqrt{(n_2/n_1)^2 - \sin^2 \alpha_1}}{\cos \alpha_1 + \sqrt{(n_2/n_1)^2 - \sin^2 \alpha_1}} \right)^2 \end{aligned} \quad (4.156)$$

Beim letzten Gleichheitszeichen wurde das Brechungsgesetz, $\sin \alpha_2 = (n_1/n_2) \sin \alpha_1$, benutzt.

Vertikal polarisierte Welle (p-polarisierte Welle, TM-Welle)

Die Impedanzen sind:

$$Z_{1p} = \frac{E_{1p}}{H_{1p}} = \frac{E_1 \cos \alpha_1}{H_1} = Z_1 \cos \alpha_1 = \frac{Z_0 \cos \alpha_1}{n_1} \quad \text{einfallende Welle} \quad (4.157)$$

$$Z_{2p} = \frac{E_{2p}}{H_{2p}} = \frac{E_2 \cos \alpha_2}{H_2} = Z_2 \cos \alpha_2 = \frac{Z_0 \cos \alpha_2}{n_2} \quad \text{transmittierte Welle} \quad (4.158)$$

Der Reflexionsgrad ist:

$$\begin{aligned} R_p &= \left(\frac{Z_{2p} - Z_{1p}}{Z_{2p} + Z_{1p}} \right)^2 = \left(\frac{n_1 \cos \alpha_2 - n_2 \cos \alpha_1}{n_1 \cos \alpha_2 + n_2 \cos \alpha_1} \right)^2 \\ &= \left(\frac{\sqrt{(n_2/n_1)^2 - \sin^2 \alpha_1} - (n_2/n_1)^2 \cos \alpha_1}{\sqrt{(n_2/n_1)^2 - \sin^2 \alpha_1} + (n_2/n_1)^2 \cos \alpha_1} \right)^2 \end{aligned} \quad (4.159)$$

Brewster-Gesetz

Es gibt einen Winkel α_1 , bei dem der Reflexionsgrad für p-Wellen gleich null ist und die reflektierte Welle somit komplett s-polarisiert ist (siehe Abb. 4.20). Der entsprechende Winkel $\alpha_{1,B}$ heisst *Brewsterwinkel*. Löst man die Gleichung $R_p = 0$, so findet man die Brewster-Bedingung:

$$\alpha_{1,B} + \alpha_2 = 90^\circ \quad (4.160)$$

Aus der Brewsterbedingung folgt $n_1 \sin \alpha_{1,B} = n_2 \sin \alpha_2 = n_2 \sin(90^\circ - \alpha_{1,B}) = n_2 \cos \alpha_{1,B}$ und damit:

$$\frac{n_2}{n_1} = \frac{\sin \alpha_{1,B}}{\cos \alpha_{1,B}} = \tan \alpha_{1,B} \implies \boxed{\alpha_{1,B} = \tan^{-1} \left(\frac{n_2}{n_1} \right)} \quad \text{Brewsterwinkel} \quad (4.161)$$

Experiment: Brewster'scher Winkel

Experiment: Brewster'scher Winkel - Winkelabhängigkeit

Beispiel Wasser:

$$\frac{n_2}{n_1} = \frac{1.33}{1.00} \implies \alpha_{1,B} \approx 53^\circ \quad (4.162)$$

4.7.3 Polarisationsfilter

Wie lässt sich sonst noch eine polarisierte elektromagnetische Welle erzeugen? Die anwendungstechnisch einfachste Methode ist die Verwendung von anisotropen Materialien, die eine Polarisationsrichtung reflektieren (oder absorbieren) und die andere Polarisationsrichtung transmittieren lassen. Lässt ein Polarisationsfilter horizontales Licht passieren, so wird der Filter auch als „horizontal polarisierend“ bezeichnet.

Trifft eine unpolarisierte Welle auf einen Polarisationsfilter, so wird die eine Polarisierung idealerweise zu 100% und die andere Polarisierung zu 0% transmittiert. Die mittlere transmittierte Intensität eines Polarisationsfilters (gegenüber unpolarisiertem Licht) beträgt deshalb 50%.

Experiment: Polarisierung mit 3 cm Wellen

4.7.4 Doppelbrechung

Anisotrope Materialien können verschiedene Brechungsindizes (resp. Dielektrizitätszahlen) in den drei verschiedenen Raumrichtungen haben. Beispiele sind Kristalle, die ein nicht-symmetrisches Kristallgitter haben, und Polymere mit ausgerichteten Kettenmolekülen.

In solchen Materialien hängt der Brechungsindex, und damit das Reflexions- und Transmissionsverhalten, von der Polarisation ab.

Experiment: Doppelbrechung mit Kalkspat

Anmerkung: Auf Seite 104 hatten wir mit $\varepsilon_{r,1}$ und $\varepsilon_{r,2}$ den Real-, respektive den Imaginärteil einer komplexe Dielektrizitätskonstante beschrieben. In diesem Abschnitt betrachten wir den Fall eines uniaxialen Systems, d.h. mit zwei verschiedenen Dielektrizitätszahlen $\varepsilon_{r,1}$ und $\varepsilon_{r,2}$, wobei die Indices 1 und 2 die beiden unterschiedlichen Richtungen ausweisen, welche voneinander verschiedene Brechungsindizes $n_1 = \sqrt{\varepsilon_{r,1}}$ und $n_2 = \sqrt{\varepsilon_{r,2}}$ besitzen.

Für diese Systeme ist die optische Achse entlang der $\varepsilon_{r,2}$ -Richtung. Je nach Einfallsrichtung der Welle können nun drei verschiedene Effekte auftreten:

- (a) Der Strahl fällt entlang der optischen Achse ein. Das elektrische Feld ist senkrecht zur optischen Achse polarisiert und erfährt die gleiche Dielektrizitätskonstante. Der Kristall verhält sich wie ein normales Medium mit Brechungsindex n_1 . Siehe Abbildung 4.21 links.
- (b) Der Strahl fällt senkrecht zur optischen Achse ein. Das elektrische Feld entlang der Achse erfährt eine andere Dielektrizitätskonstante als das elektrische Feld senkrecht zur Achse. Es tritt keine Doppelbrechung auf, aber eine Welle ist verlangsamt und die Polarisation wechselt von linear zu zirkular. Siehe Abbildung 4.21 Mitte.
- (c) Der Strahl fällt unter beliebigem Winkel ein. Der eine Strahl (ordentlicher Strahl) wird unverändert transmittiert und dabei polarisiert, der andere Strahl (ausserordentlicher Strahl) wird gebrochen und ist senkrecht dazu polarisiert. Doppelbrechung tritt auf. Siehe Abbildung 4.21 rechts.

Der wichtigste Fall ist (b), welcher in vielen optischen Elementen verwendet wird. Falls der Gangunterschied zwischen den beiden Wellen nach passieren des Materials $\lambda/4$ beträgt, so hat sich die Phase der Wellen um $\Delta\varphi = 90^\circ$ verschoben und die Polarisation hat zwischen linear und zirkular gewechselt.

Falls der Gangunterschied $\lambda/2$ beträgt, so hat sich die Phase der Wellen um $\Delta\varphi = 180^\circ$ verschoben und die Polarisation wechselt zwischen horizontal auf vertikal (oder zwischen zirkular rechts- und linksdrehend).

Experiment: Zirkularpolarisation

Experiment: Spannungsoptik

Experiment: Grosse Polaroide mit Lampe

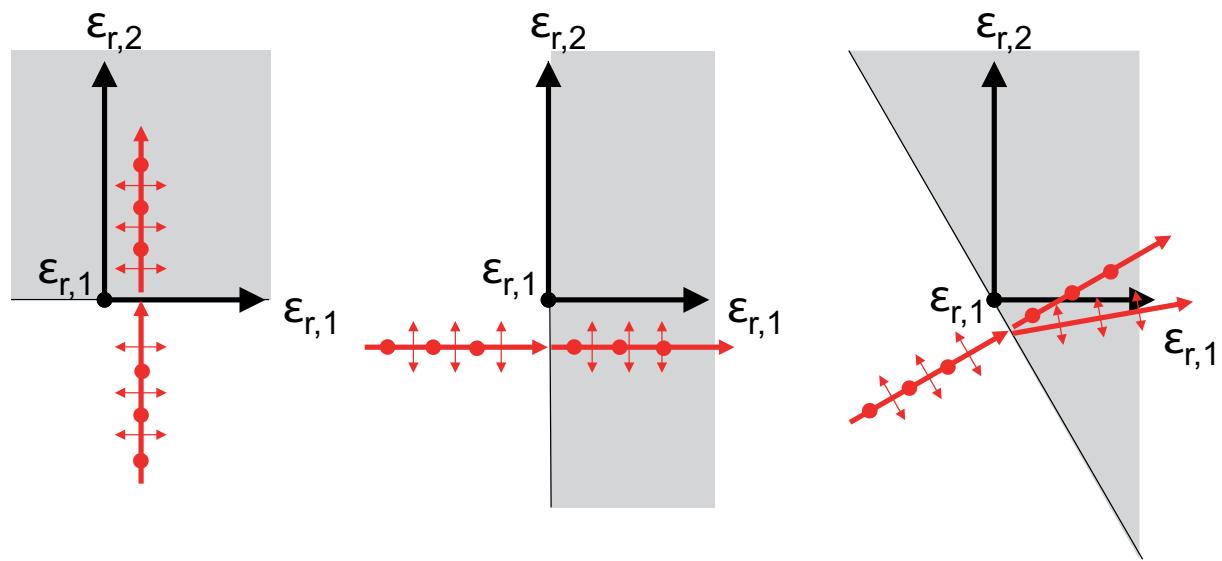


Abbildung 4.21: Doppelbrechung: Links: Fall (a). Mitte: Fall (b). Rechts: Fall (c)

4.7.5 Systeme mehrerer Polarisatoren

Experiment: Polarisation mit 3 cm Wellen

Eine weitere Möglichkeit die Polarisation zu drehen, ist eine Serie von hintereinander gestellten Polarisatoren. Als Beispiel betrachten wir eine in y-Richtung polarisierte Welle, die auf einen Polarisator trifft, welcher um den Winkel β gegenüber der y-Richtung gedreht ist. Die Ausgangsintensität sei I_1 :

$$I_1 = c\varepsilon_0 |\vec{E}_y|^2 \quad (4.163)$$

Die Intensität der Welle nach dem Polarisator ist (\vec{e}_y und \vec{e}_z sind Einheitsvektoren):

$$I_2 = c\varepsilon_0 \left| \vec{E}_y \cdot (\vec{e}_y \cos \beta + \vec{e}_z \sin \beta) \right|^2 = c\varepsilon_0 \left| \vec{E}_y \cos \beta \right|^2 = I_1 \cos^2 \beta \quad (4.164)$$

Dies ist das Gesetz von Malus:

Die Energie einer linear polarisierten Welle nimmt um $\cos^2 \beta$ ab, wenn sie einen Polarisator passiert, der um den Winkel β relativ zur Welle polarisiert ist.

Optische Aktivität

Werden n Polarisatoren hintereinandergestellt, die jeweils nur um einen kleinen Winkel β/n zueinander gedreht sind, so lässt sich im Grenzfall $n \rightarrow \infty$ eine linear polarisierte einfallende Welle ohne Intensitätsverlust in eine um β gedrehte Welle überführen:

$$I_{n+1} = I_1 \cos^{2n}(\beta/n) \xrightarrow{n \gg 1} I_1 \left[1 - \frac{1}{2} \left(\frac{\beta}{n} \right)^2 \right]^{2n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} I_1 \quad (4.165)$$

Systeme von vielen hintereinandergestellten Polarisatoren kommen in der Natur in Form von chiralen Molekülen vor (Moleküle ohne Spiegelsymmetrie). Dies wird in der analytischen Chemie dazu benutzt, um Moleküle zu identifizieren und deren Chiralität zu bestimmen.

Experiment: Optische Aktivität von Mikrowellen

Experiment: Drehung der Polarisation in Zuckerlösung

4.8 Interferenz

Literatur: Kuypers Kap. 30; Tipler Kap. 33.1-33.3

Interferenz ist die Überlagerung von zwei oder mehreren Wellen nach dem Superpositionsprinzip. In den meisten Fällen haben die Wellen dieselbe (oder eine ähnliche) Frequenz. Dabei treten lokal Wellenmaxima und -minima auf. Interferenz ist ein charakteristisches Merkmal von Wellen.

4.8.1 Kohärenz

Wir betrachten zwei harmonische Wellen von gleicher Frequenz, aber unterschiedlicher Phase und Amplitude:

$$\psi_A(x, t) = \psi_{0,A} e^{i(\omega t - kx + \varphi_A)} \quad (4.166)$$

$$\psi_B(x, t) = \psi_{0,B} e^{i(\omega t - kx + \varphi_B)} \quad (4.167)$$

Die Phasendifferenz dieser beiden Wellen beim Punkt $x = 0$ und zur Zeit $t = 0$ ist dann gegeben durch $\varphi_A - \varphi_B$.

Da beide Wellen die gleiche Frequenz (und den gleichen Wellenvektor) haben, ist die Phasendifferenz an jedem Ort und zu jeder Zeit dieselbe:

Zwei Wellen, deren Phasendifferenz an jedem Ort und zu jeder Zeit gleich ist, heißen kohärent.

Dies ist im Allgemeinen gleichbedeutend damit, dass die beiden Wellen dieselbe Frequenz haben. Je nach dem, ob man verschiedene Orte oder Zeitpunkte anschaut, spricht man von *räumlicher* und *zeitlicher* Kohärenz.

In der Realität haben zwei Wellen nie exakt die gleiche Frequenz, sodass sie nur über eine gewisse Distanz oder ein gewisses Zeitintervall kohärent sind. Diese Distanz und Zeitintervall heißen *Kohärenzlänge* und *Kohärenzzeit*.

Die Kohärenzlänge kann z.B. anhand eines Michelson-Interferometers bestimmt werden (siehe Kapitel 4.8.3). Hier ist sie definiert als die Distanz Δd , bei welcher die Differenz zwischen Interferenzmaximum und -minimum auf $1/e \approx 37\%$ der Anfangsdifferenz abgefallen ist. Gute Laser können Kohärenzlängen von mehr als 100 km aufweisen.

4.8.2 Superposition von zwei kohärenten Wellen

Experiment: Superposition von zwei Wellen

Wir betrachten nun die Superposition der beiden Wellen genauer:

$$\begin{aligned}\psi(x, t) &= \psi_A(x, t) + \psi_B(x, t) \\ &= \bar{\psi} \{ e^{i(\omega t - kx + \varphi_A)} + e^{i(\omega t - kx + \varphi_B)} \} + \Delta\psi \{ e^{i(\omega t - kx + \varphi_A)} - e^{i(\omega t - kx + \varphi_B)} \} \quad (4.168) \\ &= 2 \cos(\Delta\varphi) \bar{\psi} e^{i(\omega t - kx + \bar{\varphi})} + i2 \sin(\Delta\varphi) \Delta\psi e^{i(\omega t - kx + \bar{\varphi})}\end{aligned}$$

Der Realteil ist:

$$\Re[\psi(x, t)] = 2 \cos(\Delta\varphi) \bar{\psi} \cos(\omega t - kx + \bar{\varphi}) - 2 \sin(\Delta\varphi) \Delta\psi \sin(\omega t - kx + \bar{\varphi}) \quad (4.169)$$

Hier ist $\bar{\psi} = \frac{1}{2}(\psi_{0,A} + \psi_{0,B})$ die mittlere Amplitude und $\Delta\psi = \frac{1}{2}(\psi_{0,A} - \psi_{0,B})$ die halbe Amplitudendifferenz. Analog ist $\bar{\varphi} = \frac{1}{2}(\varphi_A + \varphi_B)$ die mittlere Phase und $\Delta\varphi = \frac{1}{2}(\varphi_A - \varphi_B)$ die halbe Phasendifferenz.

Für den Spezialfall gleicher Amplituden ($\psi_{0,A} = \psi_{0,B} \equiv \psi_0$) findet man:

$$\Re[\psi(x, t)] = 2 \cos(\Delta\varphi) \psi_0 \cos(\omega t - kx + \bar{\varphi}) \quad (4.170)$$

Das heisst, die Amplitude der Superposition ist moduliert durch die Phasendifferenz $2 \cos(\Delta\varphi)$. Diese Modulation heisst *Interferenz*. Die Intensität der Superposition ist ebenfalls moduliert:

$$I = |\psi|^2 = \frac{1}{T} \int_{t=0}^T |\psi(x, t')|^2 dt' = \frac{1}{2} \psi_0^2 4 \cos^2(\Delta\varphi) \quad (4.171)$$

(Hinweis: Die Intensität ist hier und im Folgenden definiert als das Quadrat der Amplitude, siehe Kapitel 4.1.4).

Interferenz kann konstruktiv und destruktiv sein.

- (a) Falls der Gangunterschied $\Delta\varphi = m\pi$ (mit $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) beträgt, so treffen zwei Wellenmaxima aufeinander und die resultierende Amplitude ist erhöht. Die Interferenz ist *konstruktiv*.
- (b) Falls der Gangunterschied $\Delta\varphi = (m + \frac{1}{2})\pi$ beträgt, so treffen Minimum und Maximum aufeinander und die resultierende Amplitude ist verringert. Die Interferenz ist *destruktiv*.

Da die Intensität einer Welle sehr genau gemessen werden kann, kann der Phasenunterschied sehr genau bestimmt werden. Interferenz hat deshalb viele Anwendungen, vor allem in der Messtechnik.

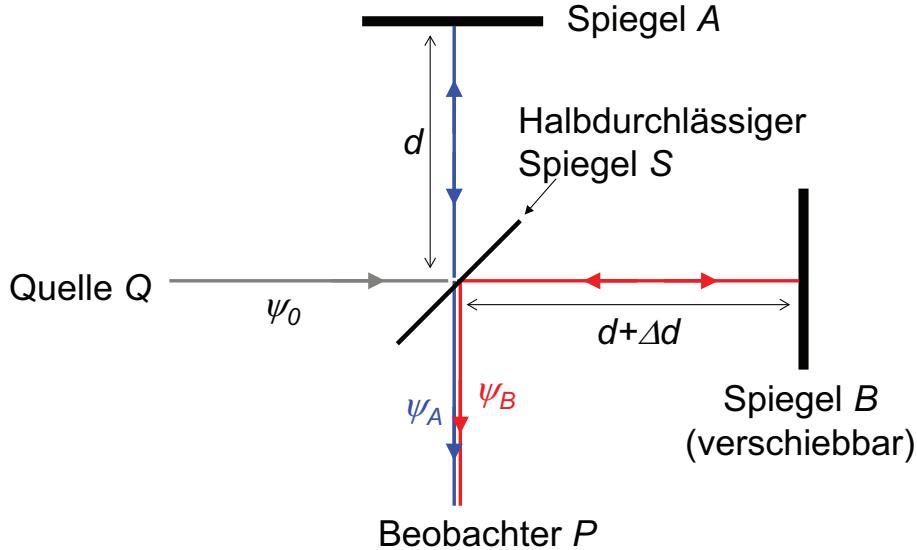


Abbildung 4.22: Michelson-Interferometer

4.8.3 Michelson-Interferometer

Experiment: Quincke-Posaune

Interferenz kann man generieren, indem man eine Welle in zwei gleiche Teile aufteilt, sie einen unterschiedlichen Weg zurücklegen lässt, und sie danach wieder überlagert. Ein wichtiges Beispiel ist das Michelson-Interferometer (siehe Abb. 4.22), in welchem ein Lichtstrahl durch einen halbdurchlässigen Spiegel aufgeteilt wird.

Wir betrachten den Verlauf der zwei Wellen beim Beobachter P . Die Amplitude der von der Quelle Q einkommenden Welle sei ψ_0 und die Intensität sei $I_0 = \frac{1}{2}\psi_0^2$. Wir nehmen an, dass der mittlere Spiegel S genau 50% der Welle passieren lässt; das heisst, die Amplitude reduziert sich bei jedem Durchgang um den Faktor $1/\sqrt{2}$. Weiter sei die Zeit $t = 0$ und die Phase $\varphi = 0$. Dann sind die beiden Teilwellen:

$$\psi_A(x) = \frac{1}{2}\psi_0 e^{-ik(2d+x)} \quad \text{Welle, die via Spiegel } A \text{ läuft} \quad (4.172)$$

$$\psi_B(x) = \frac{1}{2}\psi_0 e^{-ik(2d+2\Delta d+x)} \quad \text{Welle, die via Spiegel } B \text{ läuft} \quad (4.173)$$

x ist hier die Gesamtdistanz des gemeinsamen Weges $Q-S-P$. Die überlagerte Welle ist:

$$\begin{aligned} \psi(x) &= \psi_A(x) + \psi_B(x) = \frac{1}{2}\psi_0 [e^{-ik(2d+x)} + e^{-ik(2d+2\Delta d+x)}] \\ &= \frac{1}{2}\psi_0 e^{-ik(2d+x)} (1 + e^{-ik2\Delta d}) \end{aligned} \quad (4.174)$$

Die Intensität ist:

$$\begin{aligned} I &= |\psi_A + \psi_B|^2 = \frac{1}{8}\psi_0^2 (2 + e^{-ik2\Delta d} + e^{ik2\Delta d}) = \frac{1}{2}I_0[1 + \cos(k2\Delta d)] \\ &= I_0 \cos^2(k\Delta d) \end{aligned} \quad (4.175)$$

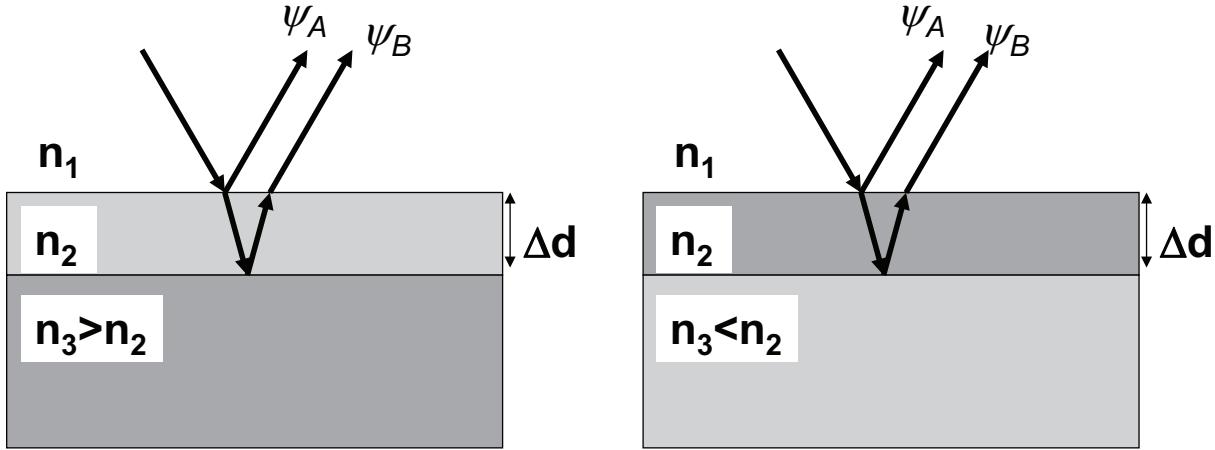


Abbildung 4.23: Links: Interferenz an dünnem Film mit $n_3 > n_2$. Rechts: $n_3 < n_2$

Wird Spiegel B verschoben, so oszilliert die Intensität beim Beobachter mit räumlicher Periode $\Delta d = \pi/k = \lambda/2$. Das heisst, der Abstand zwischen zwei Intensitätsmaxima (oder Minima) ist $\lambda/2$.

Da optische Wellenlängen sehr klein sind lassen sich damit kleinste Verschiebungen in der Position des Spiegels B messen. Das Interferometer ist eine der genauesten Methoden, um Distanzen zu messen (Rekord ist $\Delta d < 10^{-18}$ m).

Experiment: Michelson Interferometer mit 3 cm Wellen

Experiment: Michelson Interferometer

4.8.4 Interferenz an dünnen Filmen

Interferenz kann auch auftreten, wenn Licht auf eine dünne, lichtdurchlässige Schicht der Dicke Δd trifft und reflektiert wird. Im einfachsten Fall treten zwei reflektierte Wellen auf, eine von der Oberseite der Schicht und eine von der Unterseite der Schicht. Die Überlagerung führt zu Interferenz (siehe Abb. 4.23).

Der Einfachheit halber nehmen wir an, dass die beiden reflektierten Wellen dieselbe Amplitude ψ_0 haben und senkrecht eintreffen. Dabei müssen wir beachten, dass die Amplitude bei Reflexion an einem dichteren Medium (höherer Brechungsindex) invertiert wird. Wir nehmen wiederum $t = 0$ und $\varphi = 0$ an.

Die an der Oberseite reflektierte Welle ist:

$$\psi_A(x) = -\psi_0 e^{-ik_1 x} \quad (4.176)$$

Die an der Unterseite reflektierte Welle ist abhängig vom Brechungsindex:

$$\psi_B(x) = -\psi_0 e^{-i(k_1 x + k_2 2\Delta d)} \quad \text{für } n_3 > n_2 \quad (4.177)$$

$$\psi_{B'}(x) = \psi_0 e^{-i(k_1 x + k_2 2\Delta d)} \quad \text{für } n_3 < n_2 \quad (4.178)$$

Die überlagerten Wellen sind:

$$\psi(x) = \psi_A(x) + \psi_B(x) = -\psi_0 e^{-ik_1 x} (1 + e^{-ik_2 2\Delta d}) \quad \text{für } n_3 > n_2 \quad (4.179)$$

$$\psi'(x) = \psi_A(x) + \psi_{B'}(x) = -\psi_0 e^{-ik_1 x} (1 - e^{-ik_2 2\Delta d}) \quad \text{für } n_3 < n_2 \quad (4.180)$$

Die Intensitäten sind:

$$I = |\psi(x)|^2 = \frac{1}{2}\psi_0^2[2 + 2\cos(k_2 2\Delta d)] \propto \cos^2(k_2 \Delta d) \quad \text{für } n_3 > n_2 \quad (4.181)$$

$$I' = |\psi'(x)|^2 = \frac{1}{2}\psi_0^2[2 - 2\cos(k_2 2\Delta d)] \propto \sin^2(k_2 \Delta d) \quad \text{für } n_3 < n_2 \quad (4.182)$$

Die Bedingungen für konstruktive Interferenz für die beiden Fälle sind also:

$$\Delta d = m \frac{\lambda_2}{2} \quad \text{für } n_3 > n_2 \quad (4.183)$$

$$\Delta d = (m - \frac{1}{2}) \frac{\lambda_2}{2} \quad \text{für } n_3 < n_2 \quad (4.184)$$

wobei $m = 1, 2, 3, \dots$ eine ganze Zahl ist. Dünnfilminterferometrie kann zur Messung der Dicke von sehr dünnen Filmen benutzt werden.

Experiment: Interferenz in Reflexion

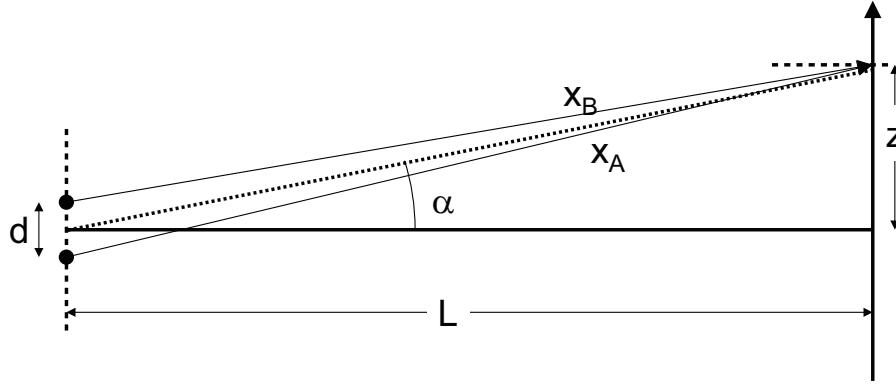


Abbildung 4.24: Interferenz am Doppelspalt

4.8.5 Interferenz am Doppelspalt

Experiment: Interferenz zweier Lautsprecher

Wir betrachten nun zwei punktförmige Quellen im Abstand d , wie in der Abbildung 4.24 dargestellt. Die „Quellen“ können entweder zwei Sender sein, oder zwei Spalte, die gemeinsam von links bestrahlt werden. Wir nehmen an, dass von beiden Quellen identische Wellen ausgehen, die in grosser Entfernung $L \gg d$ rechts auf einen Schirm treffen und deshalb nahezu parallel sind. Die Wellenfunktionen der beiden Wellen sind (wir setzen wiederum $t = 0$ und $\varphi = 0$):

$$\psi_A(x) = \psi_0 e^{-ikx_A} \quad (4.185)$$

$$\psi_B(x) = \psi_0 e^{-ikx_B} \quad (4.186)$$

wobei x_A und x_B die Distanzen zum Schirm sind. Die überlagerte Wellenfunktion ist:

$$\psi(x) = \psi_0 (e^{-ikx_A} + e^{-ikx_B}) = \psi_0 e^{-ik\frac{1}{2}(x_A+x_B)} 2 \cos\left(\frac{k}{2}[x_A - x_B]\right) \quad (4.187)$$

Die Intensität der überlagerten Wellenfunktion ist:

$$I = |\psi(x)|^2 = 4I_0 \cos^2\left(\frac{k}{2}[x_A - x_B]\right) \quad (4.188)$$

Hier ist $I_0 = \frac{1}{2}\psi_0^2$ die Intensität pro Quelle resp. pro Spalt. Wir berechnen nun die relative Distanz $x_A - x_B$ der beiden Quellen zum Schirm:

$$x_A = \sqrt{L^2 + \left(z + \frac{1}{2}d\right)^2} \quad (4.189)$$

$$x_B = \sqrt{L^2 + \left(z - \frac{1}{2}d\right)^2} \quad (4.190)$$

$$\begin{aligned} x_A - x_B &= \frac{x_A^2 - x_B^2}{x_A + x_B} = \frac{2dz}{\sqrt{L^2 + (z + \frac{1}{2}d)^2} + \sqrt{L^2 + (z - \frac{1}{2}d)^2}} \\ &\approx \frac{2dz}{2\sqrt{L^2 + z^2}} = d \sin \alpha \end{aligned} \quad (4.191)$$

Für die Näherung haben wir wiederum angenommen, dass $L \gg d$ ist, und ausserdem $\sin \alpha = z/\sqrt{L^2 + z^2} \approx z/L$. Die Intensität als Funktion des Winkels α ist:

$$I(\alpha) = 4I_0 \cos^2 \left(\frac{k}{2} d \sin \alpha \right) = 4I_0 \cos^2 \left(\frac{\pi d}{\lambda} \sin \alpha \right) = 4I_0 \cos^2 (\Delta\varphi) \quad (4.192)$$

mit $\Delta\varphi = (\pi d/\lambda) \cdot \sin \alpha$. Die Positionen der Interferenzmaxima und -minima sind gegeben durch:

$$\sin \alpha_{max} = m \frac{\lambda}{d} \quad \text{mit } m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (4.193)$$

$$\sin \alpha_{min} = m \frac{\lambda}{d} \quad \text{mit } m = \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{3}{2}, \pm \frac{5}{2}, \dots \quad (4.194)$$

Der Abstand zweier Intensitätsmaxima (oder -minima) ist:

$$\boxed{\sin \Delta\alpha = \frac{\lambda}{d} \approx \frac{\Delta z}{L}} \quad \text{Abstand zwischen zwei Intensitätsmaxima} \quad (4.195)$$

Mit der Näherung in Gleichung (4.195) lassen sich Grössen gut abschätzen (für $L \gg d$), wie wir in einem Experiment am Ende des folgenden Kapitels 4.8.6 sehen werden.

Experiment: Interferenz von Wasserwellen

4.8.6 Interferenz am Mehrfachspalt

Anstelle von zwei Spalten betrachten wir nun das Interferenzbild, das durch N Spalten im Abstand d gebildet wird, siehe Abbildung 4.25. Die überlagerte Wellenfunktion ist:

$$\psi(x) = \sum_{n=-(N-1)/2}^{(N-1)/2} \psi_0 e^{-ikx_n} = \psi_0 e^{-ik\bar{x}} \sum_{n=-(N-1)/2}^{(N-1)/2} e^{-in2\Delta\varphi} = \psi_0 e^{-ik\bar{x}} \frac{\sin(N\Delta\varphi)}{\sin(\Delta\varphi)} \quad (4.196)$$

wobei die trigonometrische Identität der Exponentialsumme (Dirichletkern) verwendet wird, und wir $\Delta\varphi = (\pi d/\lambda) \cdot \sin \alpha$ abgekürzt haben.

Für die Intensität gilt:

$$\boxed{I(\alpha) = I_0 \frac{\sin^2(N\Delta\varphi)}{\sin^2(\Delta\varphi)} = I_0 \frac{\sin^2([N\pi d/\lambda] \cdot \sin \alpha)}{\sin^2([\pi d/\lambda] \cdot \sin \alpha)}} \quad \text{Intensität bei Interferenz an } N \text{ Spalten} \quad (4.197)$$

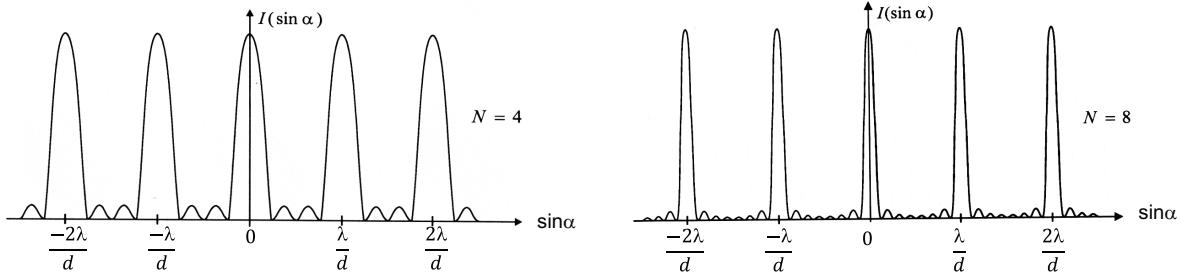


Abbildung 4.25: Interferenz am Mehrfachspalt für $N = 4$ und $N = 8$

Hier ist I_0 wiederum die Intensität *pro Spalt*. Für das zentrale Maximum bei $\sin \alpha \rightarrow 0$ findet man $I(\alpha) \approx I_0 N^2$. Da das Interferenzmuster periodisch ist, gilt dies für alle Maxima. Das heisst, die Intensität der Maxima nimmt mit dem Quadrat der Anzahl an Spalten zu.

Beispiel: Trackabstand bei CD gemessen mit Laserpointer

Abstand zur Wand sei $L = 2$ m, Wellenlänge $\lambda = 0.532 \mu\text{m}$, Abstand zwischen Beugungs-peaks $z = 0.6$ m:

$$d = \lambda \cdot L/z = 1.7 \mu\text{m}$$

4.9 Beugung

Literatur: Kuypers Kap. 31, Tipler Kap. 33.4-33.8

Bisher haben wir Interferenz als Überlagerung einer kleinen Zahl von Elementarwellen betrachtet. Das Konzept der Überlagerung lässt sich auf eine unendliche (kontinuierliche) Zahl von Wellen erweitern. Das entsprechende Phänomen heisst Beugung.

Experiment: Beugung von Wasserwellen

4.9.1 Beugung am Spalt

Als einfachstes Beispiel betrachten wir eine ebene Welle, welche an einem Spalt mit Breite b gestreut wird. (Bisher waren die Spalte unendlich schmal). Praktisch gehen wir so vor, dass wir den Spalt in N Punktquellen aufteilen und den Fall $N \rightarrow \infty$ beobachten. Die Intensität der einfallenden Welle sei I_{tot} . (Hinweis: Bei Beugung wird meist mit der gesamten einfallenden Intensität gerechnet, während bei Interferenz die Intensität pro Spalt I_0 verwendet wird).

Wir ersetzen nun in der Formel für die Interferenz am Mehrfachspalt $I_0 \rightarrow I_{tot}/N^2$ und $d \rightarrow b/N$:

$$I(\alpha) = \frac{I_{tot}}{N^2} \frac{\sin^2([N\pi/\lambda] \cdot [b/N] \cdot \sin \alpha)}{\sin^2([\pi/\lambda] \cdot [b/N] \cdot \sin \alpha)} \approx \frac{I_{tot}}{N^2} \frac{\sin^2([b\pi/\lambda] \cdot \sin \alpha)}{([b\pi/(N\lambda)] \cdot \sin \alpha)^2} \quad (4.198)$$

$$\Rightarrow \boxed{I(\alpha) = I_{tot} \frac{\sin^2([b\pi/\lambda] \cdot \sin \alpha)}{([b\pi/\lambda] \cdot \sin \alpha)^2}} \quad \text{Beugung am Spalt} \quad (4.199)$$

Dies ist das Intensitätsmuster der Beugung an einem Spalt der Breite b , welches in Abbildung 4.26 dargestellt ist. Die Positionen der Beugungsmaxima und -minima sind:

$$\sin \alpha_{max} = m \frac{\lambda}{b} \quad \text{mit } m = \pm \frac{3}{2}, \pm \frac{5}{2}, \pm \frac{7}{2}, \dots \quad (4.200)$$

$$\sin \alpha_{min} = m \frac{\lambda}{b} \quad \text{mit } m = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots \quad (4.201)$$

4.9.2 Beugung am Mehrfachspalt

Als weiteres Beispiel betrachten wir den Fall, dass N Spalte der Breite b im Abstand $d \gg b$ voneinander angeordnet sind. In diesem Fall generiert jeder Spalt ein Beugungsmuster, und die Spalten zusammen zusätzlich ein Interferenzmuster:

$$I(\alpha) = I_{tot} \cdot \underbrace{\frac{\sin^2([b\pi/\lambda] \cdot \sin \alpha)}{([b\pi/\lambda] \cdot \sin \alpha)^2}}_{\text{Beugung}} \cdot \underbrace{\frac{\sin^2([N\pi d/\lambda] \cdot \sin \alpha)}{\sin^2([\pi d/\lambda] \cdot \sin \alpha)}}_{\text{Interferenz}} \quad (4.202)$$

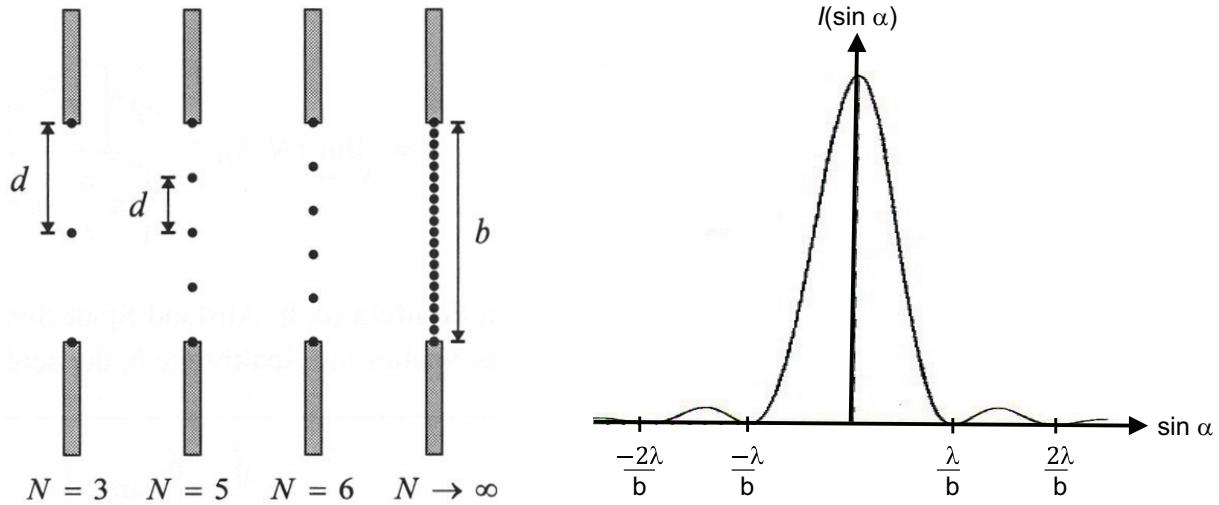


Abbildung 4.26: Links: Aufteilung des Spalts in N Punktquellen. Rechts: Intensitätsmuster am Schirm von Einzelspalt der Breite b .

4.9.3 Beugung an einer allgemeinen Blende

Im allgemeinen Fall trifft die ebene Welle auf eine beliebige zweidimensionale Öffnung. Diese Öffnung wird häufig als *Blende* bezeichnet. Das Beugungsmuster ist nun gegeben als Überlagerung einer unendlichen Anzahl von Elementarwellen, die von allen Punkten innerhalb der Blende ausgehen.

Wir betrachten die Blende in der Abbildung 4.27. Die Blende befindet sich bei $x = 0$, und die Punkte auf der Blende sind gegeben durch den Vektor $\vec{r}' = (0, y', z')$. Der Schirm befindet sich in grossem Abstand $x = L$, und die Punkte auf dem Schirm haben die Koordinaten $\vec{r} = (L, y, z)$. Die überlagerte Welle ist:

$$\psi(\vec{r}) = \int_A dx' dy' \frac{\psi_0}{\sqrt{4\pi|\vec{r} - \vec{r}'|}} e^{-ik|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad (4.203)$$

(Hinweis: Dies ist eine Summe von Kugelwellen. Da wir den Ort auf dem Schirm als Position \vec{r} , und nicht als Funktion des Winkels α angeben, muss die Amplitude mit $\sqrt{4\pi|\vec{r} - \vec{r}'|}$ normalisiert werden). Das Integral läuft über die Fläche A der Blende. Im Fernfeld ($L, y, z \gg y', z'$) kann man das Integral vereinfachen:

$$\begin{aligned} |\vec{r} - \vec{r}'| &= \sqrt{L^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2} \approx \sqrt{L^2 + y^2 + z^2 - 2yy' - 2zz'} \\ &\approx R - \left(\frac{y}{R}\right)y' - \left(\frac{z}{R}\right)z' = R - (\sin \beta)y' - (\sin \alpha)z' = R - k_y y' - k_z z' \end{aligned} \quad (4.204)$$

Dabei ist $R = \sqrt{L^2 + y^2 + z^2}$ die räumliche Distanz vom Mittelpunkt der Blende zum Ort (y, z) auf dem Schirm. Schreibt man nun $k_y = ky/R = k \sin \beta$ und $k_z = kz/R = k \sin \alpha$,

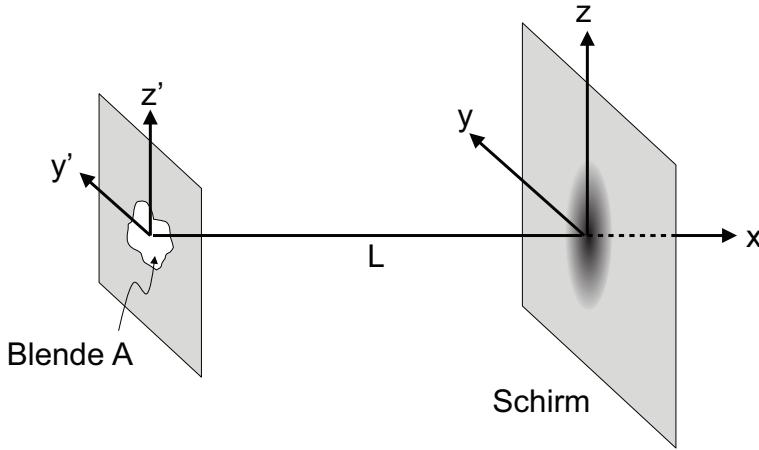


Abbildung 4.27: Beugung an zweidimensionaler Blende

so wird die Wellenfunktion zu:

$$\psi(y, z) = \frac{\psi_0}{\sqrt{4\pi R}} e^{-ikR} \int_A dy' dz' e^{i(k_y y' + k_z z')} \quad \text{Allgemeines Beugungsbild} \quad (4.205)$$

Die zugehörige Intensität ist:

$$I(y, z) = \frac{I_{tot}}{4\pi R^2} \left| \int_A dy' dz' e^{i(k_y y' + k_z z')} \right|^2 \quad (4.206)$$

Dieses Resultat zeigt, dass das Beugungsbild durch die räumliche Fouriertransformation der Blende gegeben ist. Das heisst, aus dem Beugungsbild kann man Rückschlüsse auf die Geometrie der Blende ziehen. Dies wird z.B. in der Röntgenkristallographie ausgenutzt, um die räumliche Anordnung der Atome in grossen Molekülen und Kristallen zu bestimmen.

Experiment: Beugung diverser Objekte

4.9.4 Beugung an Lochblende und Auflösungsvermögen

Ein wichtiges zweidimensionales Beispiel ist die Beugung an einer kreisförmigen Öffnung (Lochblende), d.h. das Beugungsmuster von Licht, das ein kleines Loch passiert. In diesem Fall ist die Intensität gegeben durch:

$$I(\alpha) = I_{tot} \left(\frac{2J_1(kR \sin \alpha)}{kR \sin \alpha} \right)^2 = I_{tot} \left(\frac{2J_1([2\pi R/\lambda] \cdot \sin \alpha)}{[2\pi R/\lambda] \cdot \sin \alpha} \right)^2 \quad (4.207)$$

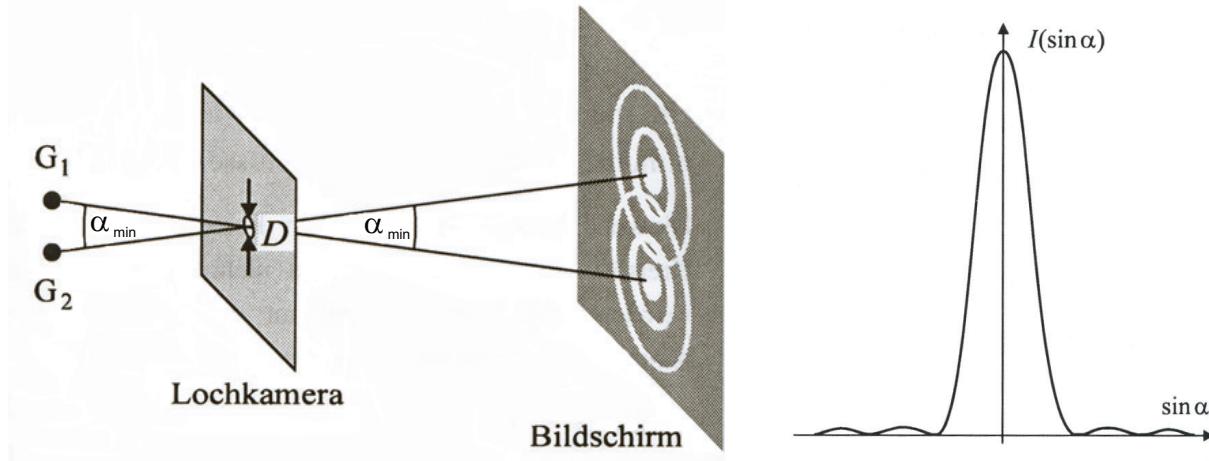


Abbildung 4.28: Links: Beugung an einer Lochblende. Rechts: Intensitätsmuster am Schirm.

Hier ist $R = D/2$ der Radius des Lochs und $J_1(x)$ die Besselfunktion erster Ordnung:

$$J_1(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} d\varphi \cdot \cos(n\varphi - x \sin \varphi) \quad (4.208)$$

Die Beugungsminima treten bei folgenden Winkeln auf:

$$\sin \alpha_{\min} = m \frac{\lambda}{2R} \quad \text{mit } m = 1.22, 2.23, 3.24, \dots \quad (4.209)$$

Auflösungsvermögen

Das Beugungsmuster einer Lochblende hat praktische Bedeutung, da es darüber entscheidet, wie gut zwei getrennte Lichtquellen (Punktquellen G_1 und G_2 in der Abbildung 4.28) voneinander getrennt aufgenommen werden können. Dies definiert das optische Auflösungsvermögen (z.B. einer Kamera), auch Rayleigh-Kriterium genannt:

$\sin \alpha_{\min} = 1.22 \frac{\lambda}{D} \stackrel{\lambda \ll D}{\approx} \alpha_{\min} \approx \frac{z}{L}$

Rayleigh-Kriterium (4.210)

Hier ist α_{\min} der minimale Winkel, unter dem zwei Punktquellen gerade noch unterschieden werden können.

Experiment: Auflösungsvermögen des Fernrohres (2)

Experiment: Beugung am Gitter mit Laser

Experiment: Beugung am Gitter mit Bogenlampe

Anhang A

Symbole

Symbol	Einheit	Beschreibung
\vec{A}	m^2	Fläche (mit Normalenvektor)
\vec{B}	$\text{T} = \text{V s m}^{-2}$	Magnetfeld (Magnetische Induktion)
c	m s^{-1}	Lichtgeschwindigkeit
C	C V^{-1}	Kapazität
e	C	Elementarladung
f	$\text{Hz} = \text{s}^{-1}$	Frequenz (auch ν)
\vec{F}	N	Kraft
E	J	Energie
\vec{E}	V m^{-1}	Elektrisches Feld
\vec{H}	A m^{-1}	Magnetische Erregung (Magnetfeld)
I	$\text{W}, \text{W m}^{-1}, \text{W m}^{-2}$	Intensität (einer ein-, zwei-, dreidimensionalen Welle)
\vec{I}	A	Elektrischer Strom (mit Richtungsvektor)
\vec{j}	A m^{-2}	Stromdichte
\vec{j}_A	A m^{-1}	Längenstromdichte
\vec{k}	m^{-1}	Wellenvektor
L	$\text{H} = \text{T m}^2 \text{A}^{-1} = \text{V s A}^{-1}$	Induktivität
m	kg	Masse
\vec{m}	A m^{-2}	Magnetischer Dipol
\vec{M}	A m^{-1}	Magnetisierung
n	C m^{-3}	Ladungsträgerdichte
n	—	Brechungsindex (Optik)
\vec{n}	—	Flächennormale
\vec{p}	C m	Elektrischer Dipol
P	W	Leistung

Fortsetzung auf der nächsten Seite

Symbol	Einheit	Beschreibung
Q	C	Elektrische Ladung
r	—	Reflexionskoeffizient (Optik)
R	Ω	Elektrischer Widerstand
R	—	Reflexionsgrad (Optik)
t	—	Transmissionskoeffizient (Optik)
T	—	Transmissionsgrad (Optik)
T	s	Periodendauer
U	V	Elektrische Spannung
v	$m\ s^{-1}$	Geschwindigkeit; Schallschnelle
v_D	$m\ s^{-1}$	Driftgeschwindigkeit
\vec{v}	$m\ s^{-1}$	Geschwindigkeit (mit Richtungsvektor)
V	m^3	Volumen
w	$J\ m^{-1},\ J\ m^{-2},\ J\ m^{-3}$	Energiedichte (Energie pro Länge, Fläche, Volumen)
Z	verschiedene	Wellenimpedanz
Z_A	verschiedene	(akustische) Flussimpedanz
ϵ	$C^2\ N^{-1}\ m^{-2} = C\ V^{-1}\ m^{-1}$	Dielektrizitätskonstante (in der Materie)
ϵ_0	$C^2\ N^{-1}\ m^{-2} = C\ V^{-1}\ m^{-1}$	Dielektrizitätskonstante (im Vakuum)
ϵ_r	—	Dielektrizitätszahl
λ	$C\ m^{-1}$	Längenladungsdichte
λ	m	Wellenlänge (Optik)
μ	$N\ A^{-2} = V\ s\ A^{-1}\ m^{-1}$	Magnetische Feldkonstante (in der Materie)
μ_0	$N\ A^{-2} = V\ s\ A^{-1}\ m^{-1}$	Magnetische Feldkonstante (Permeabilität des Vakuums)
μ_r	—	Relative magnetische Feldkonstante
ν	s^{-1}	Frequenz (auch f)
$\tilde{\nu}$	m^{-1}	Wellenzahl
ρ	$C\ m^{-3}$	(Volumen)Ladungsdichte
ρ	$\Omega\ m$	Spezifischer Widerstand
σ	$C\ m^{-2}$	Flächenladungsdichte
σ	$C\ \Omega^{-1}\ m^{-1}$	Spezifische Leitfähigkeit
Φ	V	Elektrisches Potential
Φ_E	$N\ m^2\ C^{-1} = V\ m$	Elektrischer Fluss
Φ_M	$Wb = T\ m^2 = V\ s$	Magnetischer Fluss
χ_E	—	Elektrische Suszeptibilität
χ_M	—	Magnetische Suszeptibilität
ω	s^{-1}	Kreisfrequenz

Tabelle A.1: Verwendete Symbole in der Vorlesung

Anhang B

Mathematische Formeln

Skalarprodukt

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos(\vartheta) \quad \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z \quad (\text{B.1})$$

Vektorprodukt

$$\vec{a} \times \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin(\vartheta) \cdot \vec{n} \quad \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ a_z b_x - a_x b_z \\ a_x b_y - a_y b_x \end{pmatrix} \quad (\text{B.2})$$

\vec{n} ist ein Einheitsvektor, der senkrecht auf \vec{a} und \vec{b} steht. ϑ ist der Winkel zwischen \vec{a} und \vec{b} . Die Richtung ist durch die „Rechte-Hand-Regel“ bestimmt.

$$\text{Zyklische Permutation: } \vec{a} \times \vec{b} = \vec{c} \iff \vec{b} \times \vec{c} = \vec{a} \iff \vec{c} \times \vec{a} = \vec{b} \quad (\text{B.3})$$

$$\text{Paarweise Permutation: } \vec{a} \times \vec{b} = \vec{c} \iff \vec{b} \times \vec{a} = -\vec{c} \quad (\text{B.4})$$

Dreidimensionale Ableitungen

Φ sei ein Skalarfeld und $\vec{X} = (X_x, X_y, X_z)$ sei ein Vektorfeld.

$$\text{Gradient: } \vec{\nabla} \Phi = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}, \frac{\partial \Phi}{\partial y}, \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right) \quad (\text{B.5})$$

$$\text{Divergenz: } \vec{\nabla} \cdot \vec{X} = \text{div}(\vec{X}) = \frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z} \quad (\text{B.6})$$

$$\text{Rotation: } \vec{\nabla} \times \vec{X} = \text{rot}(\vec{X}) = \left(\frac{\partial X_z}{\partial y} - \frac{\partial X_y}{\partial z}, \frac{\partial X_x}{\partial z} - \frac{\partial X_z}{\partial x}, \frac{\partial X_y}{\partial x} - \frac{\partial X_x}{\partial y} \right) \quad (\text{B.7})$$

$$\text{Laplace: } \Delta \Phi \equiv \vec{\nabla}^2 \Phi = (\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}) \Phi = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} \quad (\text{B.8})$$

$$\text{in Kugelkoordinaten*: } \Delta \Phi = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) \quad (\text{B.9})$$

$$\text{in Zylinderkoordinaten*: } \Delta \Phi = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) \quad (\text{B.10})$$

*) Für den Laplace-Operator in Kugel- resp. Zylinderkoordinaten ist nur der radiale Anteil angegeben. r ist Radius.

Identitäten:

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \Phi) = \vec{0} \quad (\text{B.11})$$

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{X}) = 0 \quad (\text{B.12})$$

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{X}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{X}) - \vec{\nabla}^2 \vec{X} \quad (\text{B.13})$$

Satz von Gauss

$$\oint_{A=\partial V} \vec{X} \cdot d\vec{A} = \int_V (\vec{\nabla} \cdot \vec{X}) dV \quad (\text{B.14})$$

V ist das Volumen

$A = \partial V$ ist die Fläche, welche das Volumen begrenzt

Satz von Stokes

$$\oint_{L=\partial A} \vec{X} \cdot d\vec{L} = \int_A (\vec{\nabla} \times \vec{X}) \cdot d\vec{A} \quad (\text{B.15})$$

A ist die Fläche

$L = \partial A$ ist der Rand, welcher die Fläche begrenzt

Vektorfelder

Ein Vektorfeld ist *quellenfrei*, falls:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{X} = 0 \text{ oder } \oint_{A=\partial V} \vec{X} \cdot d\vec{A} = 0 \text{ (Beispiel: Magnetfeld)} \quad (\text{B.16})$$

Ein Vektorfeld ist *wirbelfrei*, falls:

$$\vec{\nabla} \times \vec{X} = \vec{0} \text{ oder } \oint_{L=\partial A} \vec{X} \cdot d\vec{L} = \vec{0} \text{ (Beispiel: Elektrisches Feld einer Ladung)} \quad (\text{B.17})$$

Abbildungsverzeichnis

1.1	Wissenschaftsverständnis	2
2.1	Coulombkraft	7
2.2	Feldlinien Punktladung	9
2.3	Feldlinien eines elektrischen Dipols	10
2.4	Kraft auf Dipol im elektrischen Feld	12
2.5	Elektrischer Fluss	13
2.6	Satz von Gauss am elektrischen Dipol	14
2.7	Elektrische Felder	15
2.8	Elektrische Felder von Kugeln	20
2.9	Verbundene leitende Kugeln	21
2.10	Influenz	22
2.11	Faraday-Abschirmung	22
2.12	Punkt- und Spiegelladung dünne Leiterplatte	23
2.13	Plattenkondensator	25
2.14	Gebundene Oberflächenladung bei Polarisation	31
2.15	Kondensator mit Vakuum, Dielektrikum und Leiter	32
3.1	Magnetfelder bewegter Ladung und Strom	38
3.2	Magnetfeld (Draht und Schleife)	39
3.3	Magnetische Feldlinien (Draht, Schleife und Spule)	40
3.4	Durchflutungsgesetz	44
3.5	Lorentzkraft und Ampere'sches Gesetz	46
3.6	Halleffekt	47
3.7	Magnetfeld mit Materie	49
3.8	Atomarer Ursprung des Magnetismus	50

3.9 Ampere'scher Oberflächenstrom	52
3.10 Oberflächenstrom einer homogen entlang z magnetisierten Kugel	53
3.11 Oberflächenstrom magnetisierter Zylinders und magnetische Grenzfläche . .	55
3.12 Hysteresekurve	57
3.13 Curietemperatur	58
3.14 Grundversuch Induktion	59
3.15 Zwei Leiterschleifen	61
3.16 Wirbelstrom und Skineffekt	63
3.17 Maxwell'scher Verschiebungsstrom	68
3.18 E und B-Feld einer elektromagnetischen Welle	72
4.1 Seilwelle	74
4.2 Schwebung und Gaussförmiges Wellenpaket	77
4.3 Absorption und Eindringtiefe δ	82
4.4 Ebene Welle und Kugelwelle	83
4.5 Seilwelle vor und nach Reflexion	85
4.6 Reflexions- und Transmissionskoeffizient/-grad	87
4.7 Stehende Seilwellen mit festen und losen Enden	89
4.8 Durch Druck erzeugte Kraft, durch Teilchenbewegung induzierter Druck . .	91
4.9 Schalldruck stehende Welle: einseitig und beidseitig offenes Rohr	94
4.10 Dopplereffekt	95
4.11 Dopplereffekt und Mach'scher Kegel	97
4.12 Elektromagnetische Welle	99
4.13 Elektromagnetisches Spektrum	101
4.14 Reflexions- und Brechungsgesetz	107
4.15 Brechungsgesetz nach Huygens und nach Fermat	109
4.16 Evaneszenz	112
4.17 Lineare und zirkulare Polarisation	114
4.18 Zirkular rechtsdrehende Welle	114
4.19 Elliptische Polarisation	115
4.20 Elektrischer Feldvektor bei Reflexion und Brechung	116
4.21 Doppelbrechung, 3 Fälle	120
4.22 Michelson-Interferometer	124

4.23 Interferenz an dünnem Film	125
4.24 Interferenz am Doppelspalt	127
4.25 Interferenz am Mehrfachspalt	129
4.26 Beugung am Spalt	131
4.27 Beugung an zweidimensionaler Blende	132
4.28 Beugung an einer Lochblende	133

Tabellenverzeichnis

2.1	Eigenschaften zu Verschiebungs- und Orientierungspolarisation	29
2.2	Typische Größenordnung von Dielektrizitätszahlen	32
3.1	Eigenschaften von Dia-, Para- und Ferromagnetismus	51
3.2	Maxwell'sche Gleichungen	67
4.1	Charakteristische Größen von harmonischen Wellen	75
4.2	Spezialfälle für Reflexion und Impedanzanpassung	87
4.3	Impedanz, Schalldruck und Schallschnelle für offene und geschlossene Rohre	94
A.1	Verwendete Symbole in der Vorlesung	136