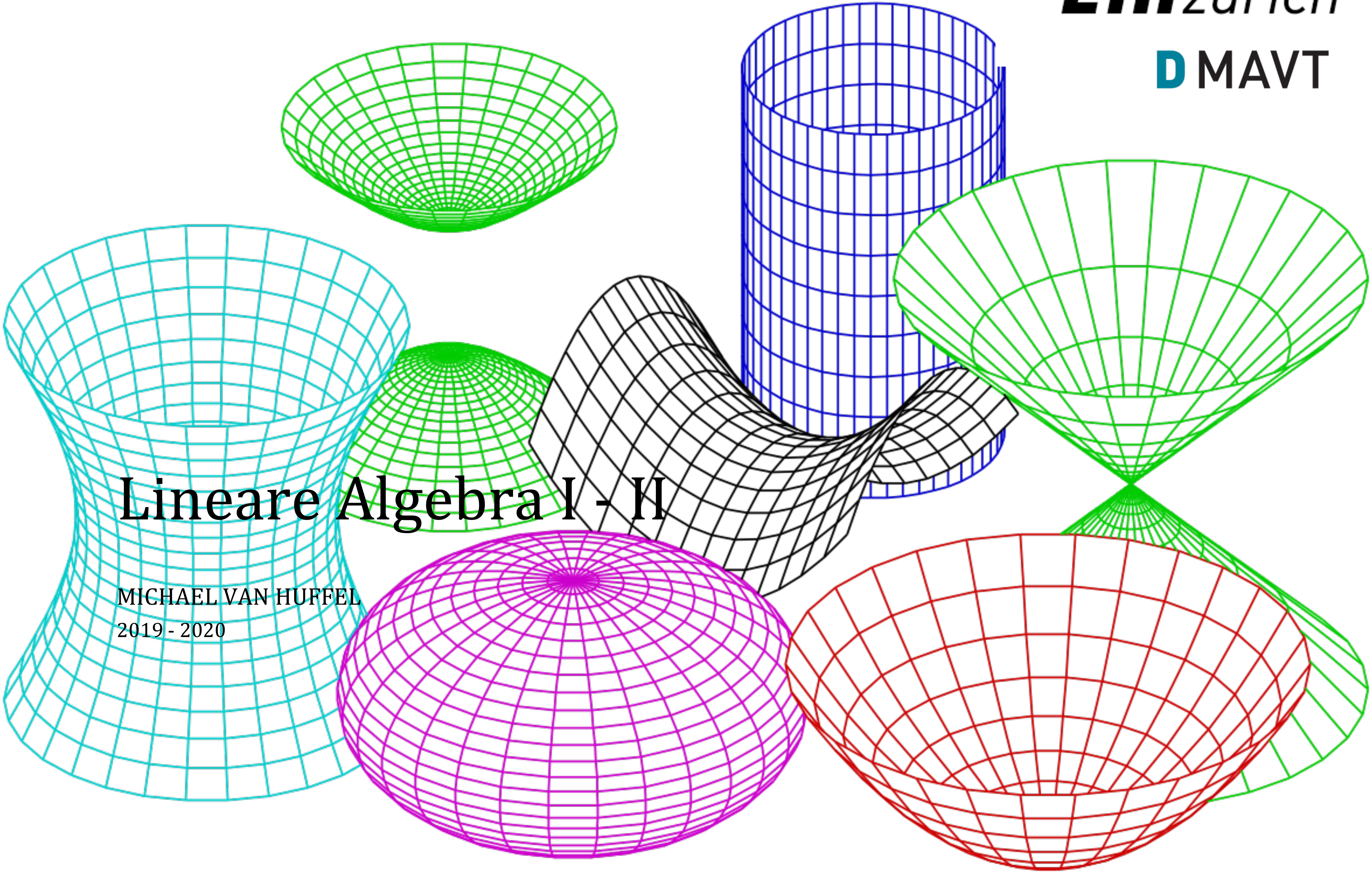
ETH zürich

D MAVT



Lineare Algebra I - II

MICHAEL VAN HUFFEL

2019 - 2020

Index

1. Lineare Gleichungssysteme: (LGS)

- Jede LGS mit der gleichen Anzahl von Gleichung wie Unbekannten hat eine eindeutige Lösung (Falsch, *potrebbe poi avere una riga di zeri*)

- Jede LGS mit weniger Gleichung als Unbekannten hat mindestens eine Lösung (Falsch, z.B: $0 \cdot x + 0 \cdot y = 1$ hat keine Lösung)

- Jede LGS mit mehr Gleichungen als Unbekannten hat keine Lösung (Falsch, basta avere delle Gleichung che non cambiano il risultato, z.B: 1=1)

1.1 Endschema:

$$\begin{array}{c|cccccccc|c}
x_1 & x_2 & \dots & & & & \dots & x_n & 1 \\
\hline
\circledast & * & \dots & & & & \dots & * & c_1 \\
0 & 0 & \dots & \circledast & * & & \dots & * & c_2 \\
\vdots & & & & \ddots & & & \vdots & \vdots \\
0 & & \dots & & 0 & \circledast & * \ \dots & * & c_r \\
0 & & \dots & & & 0 & \dots & 0 & c_{r+1} \\
\vdots & & & & & \vdots & & \vdots & \vdots \\
0 & & \dots & & & 0 & \dots & 0 & c_m
\end{array}$$

$Ax = b$
- m = # Zeilen von A bzw. Gleichungen im LGS
- n = # Spalten von A bzw. Variablen im LGS
- r = Rang = # Nicht-Nullzeilen im Endschema = # $\circledast$
  = Dimension des aufgespannten Raums
- $\circledast$ = Pivot
- _ = Zeilenstufenform (ZSF) (*n x n*: immer erreichbar ≠ Dreiecksform)

1.2 Herleitung des Gauss-Verfahren:

Das Gauss-Verfahren ist eine effizient Standardalgorithmus zum lösen vom LGS. Bringe das LGS in eine einfach zu lösende Form: Dreiecksform. Löse das erhaltene einfachere System durch Rückwärtseinsetzen.

- Elementare Operationen:

- Vertauschen zweier Zeilen
- Addieren eines Vielfachen einer Zeile zu einer anderen
- Multiplikation einer Gleichung mit Faktor $\lambda \neq 0$

1.3 Lösbarkeit:

Die Menge allen Lösungen eines LGS heißt Lösungsmenge. Zwei LGS heißen **äquivalent**, falls sie die selbe Lösungsmenge haben.

Keine Lösung: $(0 \ \ 0 \ \ 0 \ \ | \ \ 7)$

$r < m$ Letze Zeile: $0 = c_m$, wobei $c_m \neq 0$ → Verträglichkeit nicht ok

$L = \{ \ \}$

Genau eine Lösung:

$r = n = m$ Eindeutige Lösung für beliebige b *(non può avere 2 soluzioni)*

$L = \{(x_1 \ \ x_2 \ \ x_3)^T\}$

Unendlich viele Lösung:

$m = r < n$ Nullzeile ergibt freie Parameter → $n - r$ = freie Parameter

$$L = \left\{ \begin{pmatrix} 4-2t \\ t-1 \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \middle| t \in \mathbb{R} \right\} \qquad L = \left\{ \alpha \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} d \\ e \\ f \end{pmatrix} \middle| \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\}$$

1.4 Homogenes lineares Gleichungssystem: (HLGS)

Ein HLGS ist immer konsistent und besitzt immer die triviale Lösung.

$Ax = 0$
- hat immer die triviale Lösung 0
- auch nicht-triviale Lösung ($x_j \neq 0$), wenn r < n

- Satz: Sei $m = n$. Ein LGS $Ax = b$ ist genau dann für beliebiges b lösbar, wenn da zugehörige HLGS **nur** die triviale Lösung besitzt.

2. Matrizen:

Eine m x n Matrix ist eine Schema Form: Zuerst Zeilen, später Spalten

$$A = \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{mn} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}}_{n \text{ Spalten } (\ )} \Big\} \text{ m Zeilen } [\ ]$$

$a_{ij} \in \mathbb{R}$ ist der Eintrag in Zeile i und Spalte j.

- $m = n$ → Quadratische Matrix
- $A = B$ se $a_{ij} = b_{ij}$ → gleich Matrix
- $\boldsymbol{Rank(AB) \leq \min(Rank(A), Rank(B))}$
- Alle Einträge = 0 → Nullmatrix
- $(R)_{ij} = 0$ für i > j → **obere / Rechts Dreiecksmatrix** *(numeri sopra)*
- $(L)_{ij} = 0$ für i < j → **untere / Links Dreiecksmatrix** *(numeri sotto)*
- gleichzeitig Rechts- Linksdreiecksmatrix → Diagonalmatrix
- $diag(1,1,\dots,1) = \mathbb{I}_n$ → **Identitätmatrix**
- *1 x n* → Zeilenvektor, *n x 1* → Spaltenvektor
- *n x m* $(A^T)_{ij} = (A)_{ji}$ → Transponierte Matrix
- $A^T = A$ → **symmetrisch** (Spieglung an Diag.) →Vedi 2.5
- $A = -A^T$ → **antisymmetrisch, schiefsymmetrisch** (Diagonalelement gleich 0)
- **Ähnliche** Matrizen → vedi capitolo Eigenwerte Probleme 6.1 e 5.6
- **Orthogonale** Matrizen → vedi capitolo 2.4
- **Positiv/Negativ definit** Matrizen → vedi capitolo 6.13

2.1 Rechnen mit Matrizen:

- $(A+B)_{ij} = A_{ij} + B_{ij}$ $\qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 5 & 3 \\ 7 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 5 \\ 7 & 4 & 6 \end{pmatrix}$
- $(\alpha A)_{ij} = \alpha (A)_{ij}$ $\qquad 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 6 \\ 0 & 9 & 12 \end{pmatrix}$
- A eine m x n Matrix und B eine n x p Matrix so ist die $A \cdot B$ m x p Matrix.

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} d & \cdot & \cdot \\ e & \cdot & \cdot \\ f & \cdot & \cdot \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ad+be+cf & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$$

- Gesetze: A + B = B + A $\qquad$ (A + B) + C = A + (B + C)
(AB)C = A(BC) $\qquad$ (A + B)C = AC + AB
λ(A + B)= λA + λB

Die Multiplikation von Matrizen ist nicht Kommutativ, d.h. AB ≠ BA (auch für quadratische). Aber $A\mathbb{I} = \mathbb{I}A = A$ für hede n x n – Matix

2.2 Transponierte Matrix A^T:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} a & c & e \\ b & d & f \end{pmatrix}$$

$(A^T)^T = A \qquad (A+B)^T = A^T + B^T \qquad (AB)^T = B^T A^T$

$Rang(A^T) = Rang(A) \qquad A = \frac{1}{2}(A + A^T) + \frac{1}{2}(A - A^T)$

2.3 Die inverse einer Matrix A^{-1}:

Die n x n Matrix X heißt inverse *(è unica)* der n x n Matrix A, falls $AX = \mathbb{I}_n$. Falls eine Inverse besitzt heißt A invertierbar oder regulär (sonst heißt **A singulär**). Die inverse ist eindeutig bestimmt, und wird mit A^{-1} bezeichnen.

$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = \mathbb{I}_n \qquad (AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1} \qquad (A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$

$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)} \qquad \mathbb{I}_n^{-1} = \mathbb{I}_n \qquad (A^{-1})^{-1} = A$

$A adj(A) = adj(A) A = \det(A) \cdot \mathbb{I}_n \quad \rightarrow \quad A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot adj(A)$

Sei A eine n x n – Matrix. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

- *A* Invertierbar / regulär falls:
  - → $\det(A) \neq 0$ $\quad$ EW ≠ 0
  - → Rang(A) = n $\quad$ Voller Rang
  - → $Ax = b$ ist für alle b lösbar
  - → $Ax = b$ ist eindeutig lösbar
  - → $Ax = 0$ hat nur die triviale Lösung
  - → A è equivalente per righe a $\mathbb{I}_n$
  - → Spalte und Zeile linear unabhängig

A singulär? Vedi Tipps dopo

- Tipps: È regulär se non ha gli Eigenwerte nulli. Singulär se ho un EW=0, ovvero quando $\det(A) = 0$.

- Beachte: Falls A invertierbar ist, so ist auch A^{-1} und A^T.

A volte se A è invertibile, si può risolvere il sistema $Ax = b$ senza usare Gauss. Basta risolvere: $x = A^{-1}b$ mentre se è orthogonal: $x = A^T b$

- Berechnen einer Inverse:

- Bei 2 x 2 – Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \rightarrow A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{d}{ad-bc} & \frac{-b}{ad-bc} \\ \frac{-c}{ad-bc} & \frac{a}{ad-bc} \end{pmatrix}$$

- Für allgemein Fall: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} \quad A^{-1} = ?$

$$\left(\underbrace{\begin{matrix}1&2&0\\2&3&0\\3&4&1\end{matrix}}_{A}\left|\underbrace{\begin{matrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{matrix}}_{\mathbb{I}}\right.\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&0&1&0&0\\0&-1&0&-2&1&0\\0&2&1&-3&0&1\end{array}\right)\sim\left(\underbrace{\begin{matrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{matrix}}_{\mathbb{I}}\left|\underbrace{\begin{matrix}-3&2&0\\2&-1&0\\1&2&1\end{matrix}}_{A^{-1}}\right.\right)$$

2.4 Orthogonale Matrix:

Eine n x n–Matrix (quadratisch) heißt orthogonal, wenn gilt:

- $A^T \cdot A = \mathbb{I}_n$
- $A^{-1} = A^T$
- A^{-1} ist orthogonal, wenn A orthogonal ist
- AB ist orthogonal, wenn A und B auch orthogonal sind
- $\mathbb{I}_n$ ist orthogonal

- Bemerkung: - Skalarprodukt zweier Zeilen / Spalten ist 0, stehen somit senkrecht aufeinander
- Betrag jeder Spalte sowie jeder Zeile ist 1
- $\det(A) = \pm 1$

- Beispiel: Givens-Rotationen: Ist für beliebiges φ orthogonal.

$$\mu(\varphi) = \begin{pmatrix} cos\varphi & 0 & -sin\varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ sin\varphi & 0 & cos\varphi \end{pmatrix}$$ Drehung um die x_2-Achse

- Tipps: - Ist Q orthogonal? Basta verificare che $Q^T \cdot Q = \mathbb{I}$.
- A orthogonal → A^{-1} orthogonal (se A non è ort allora non lo sarà nemmeno la sua inversa)
- A und B orthogonal → AB orthogonal

- Tipps: Se chiede di non usare Gauss, o la risolvo così: $x = A^T b$ oppure con il metodo di Cramer: Sostituiscouna colonna con b → trovo il suo determinante → lo divido per il det. della matrice iniziale.

2.5 Symmetrische Matrix:

Falls A Symmetrisch so ist auch $A^T A,\ AA^T, C + C^T,\ A^{-1}$

Satz von HCN sia $B \in \mathbb{R}^{nxn}$: $BB^T = A$, A symmetrisch

Eigenschaften

- Alle EW von A sind Reel
- EV zu verschieden EW sind orthogonal
- A ist halbeinfach
- A besitzt eine orthonormale EB (ONB)
- A ist diagonalisierbar
- Ist x ein EV von A zum EW λ, so sind auch:
  - $\bar{x}, Re(x), Im(x)$sind EW zum selben EW
  - Kein Gram-Schmidt verfahren, wenn alle EV gehören zum gleiche ER
  - Um eine Orthonormale Basis zu erzeugen, EW normieren → Orthonogonolarisieren nur Vektoren in gleichem Eigenraum
- Seien A, B zwei symmetrische Matrizen. Dann ist das Produkt AB nicht symmetrisch ($A^T \cdot B^T = (BA)^T \neq AB$).

2.6 Involvierende Matrix:

- Una matrice è detta involutoria se essa stessa coincide con la sua inversa, ovvero $A^{-1} = A$. Questo tipo di Matrici soddisfa quindi l'equazione: $A^2 = \mathbb{I}_n$ ed ha sempre autovalori -1 e +1.
- The *row-interchange elementary matrix*. A special case of another class of elementary matrix, that which represents multiplication of a row or column by −1, is also involutory; it is in fact a trivial example of a signature matrix, all of which are involutory.
- Any block-diagonal matrices constructed from involutory matrices will also be involutory, as a consequence of the linear independence of the blocks.

2.7 LR-Zerlegung:

Löse $Ax = b$ durch Aufteilen von A in das Produkt einer Linksdreiecksmatrix L mit einer Rechtsdreiecksmatrix.

- Ohne Zeilenvertauschung:

1) L-R-Zerlegung von A mit Hilfe von Gauss
2) Löse $Lc = b$ nach c auf (Vorwärtseinsetzen)
3) Löse $Rx = c$ nach x auf (Rückwärtseinsetzen)

- Mit Zeilenvertauschung:

1) L-R-Zerlegung von A mit Hilfe von Gauss und bestimme P: P ist eine Einheitsmatrix, bei der die Zeilenvertauschungen mitmacht werden. Finde die Zerlegung $PA = LR$
2) Löse $Lc = Pb$ nach c auf (Vorwärtseinsetzen)
3) Löse $Rx = c$ nach x auf (Rückwärtseinsetzen)

- Beispiel: $A = A_0$ $\qquad Z_2 + (-2)Z_1$ Cambio il segno e metto 2!

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&0&3&-2\\0&1&0&4&-2&1\\0&0&1&2&-1&1\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}0&0&1&2&-1&1\\0&1&0&4&-2&1\\1&0&0&0&3&-2\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}0&0&1&2&-1&1\\0&1&0&2&0&-1\\1&0&0&0&3&-2\end{array}\right)$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}0&0&1&2&-1&1\\1&0&0&0&3&-2\\0&1&0&2&0&-1\end{array}\right)\quad L = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\2&0&1\end{pmatrix}\quad R = \begin{pmatrix}2&-1&1\\0&3&-2\\0&0&-1\end{pmatrix}\quad P = \begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}$$

L = Linksdreiecksm., R = Rechtsdreiecksm. P = Permutationsm.

- Beispiel 2:

$$A = \begin{pmatrix}2&-2&1\\4&-3&3\\-2&5&1\end{pmatrix}\quad b = \begin{pmatrix}4\\7\\-7\end{pmatrix}\quad L = \begin{pmatrix}1&0&0\\2&1&0\\-1&3&1\end{pmatrix}\quad R = \begin{pmatrix}2&-2&1\\0&1&1\\0&0&-1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix} = A \to R \text{ mit Gauss } \begin{pmatrix}r_{11}&r_{12}&r_{13}\\0&r_{22}&r_{23}\\0&0&r_{33}\end{pmatrix} \to L \text{ eliminationskoeff } \begin{pmatrix}1&0&0\\l_{21}&1&0\\l_{31}&l_{32}&1\end{pmatrix}$$

i) Zuerst lösen wir $Lc = b$ durch Vorwärtseinsetzen:

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\2&1&0\\-1&3&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\7\\-7\end{pmatrix} \quad\to\quad c = \begin{pmatrix}4\\-1\\0\end{pmatrix}$$

ii) Dann lösen wir $Rx = c$ durch Rückwärtseinsetzen:

$$\begin{pmatrix}2&-2&1\\0&1&1\\0&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\-1\\0\end{pmatrix} \quad\to\quad x = \begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$$

3. Determinanten:

$$\det(A) = |A|$$

Die Determinante gibt Auskunft über Lösbarkeit eines LGS.

- Graphische Bedeutung:

→ *2 x 2*: Area del parallelogramma gespannt dai vettori di A
→ *3 x 3*: Volume del parallelepipedo gespannt dai vettori colonna di A
→ Pyramidenvolumen= $\frac{1}{6} \cdot \det(A)$

3.1 Berechnung der Determinante:

1 x 1: $|a| = a$

2 x 2: $\begin{vmatrix}a&b\\c&d\end{vmatrix} = ad - cb$

3 x 3: $\begin{vmatrix}a_1&b_1&c_1\\a_2&b_2&c_2\\a_3&b_3&c_3\end{vmatrix} = a_1\begin{vmatrix}b_2&c_2\\b_3&c_3\end{vmatrix} - a_2\begin{vmatrix}b_1&c_1\\b_3&c_3\end{vmatrix} + a_3\begin{vmatrix}b_1&c_1\\b_2&c_2\end{vmatrix}$

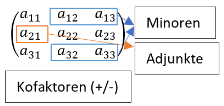
$= a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_1b_3c_2 - a_2b_1c_3 - a_3b_2c_1$ (Laplace)

n x n: Nach Spalte / Zeile entwickeln:

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+j}\, a_{ij}\det(A_{ij}) \quad \text{(Ent. nach Spalte j)}$$
$$= \sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j}\, a_{ij}\det(A_{ij}) \quad \text{(Ent. nach Zeile i)}$$

$$\begin{vmatrix}+&-&+\\-&+&-\\+&-&+\end{vmatrix}$$

Sei A eine n x n – Matrix, so ist A_{ij} *(n-1)* x *(n-1)* la matrice ottenuta cancellando la riga i e la colonna j.



$M_{ij} = \det(A_{ij})$ heißen **Minoren** von A

$\tilde{a}_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$ heißen **Kofaktoren** von A

$adj(A) = (\tilde{a}_{ij})^T$ heißt **Adjunkte** von A $\qquad adj(A)A = adj(A) = \det(A) \cdot \mathbb{I}_n$

- Beispiel: Sei $A = \begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}$ *mit* $\tilde{a}_{11} = 4 \quad \tilde{a}_{12} = -3 \quad \tilde{a}_{21} = -2 \quad \tilde{a}_{22} = 1$

$$adj(A) = \begin{pmatrix}\tilde{a}_{11}&\tilde{a}_{12}\\\tilde{a}_{21}&\tilde{a}_{22}\end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix}4&-3\\-2&1\end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix}4&-2\\-3&1\end{pmatrix}$$

- Beispiel: $\begin{vmatrix}1&2&1&2\\2&0&2&1\\0&1&3&1\\0&5&1&0\end{vmatrix} = +1\cdot\begin{vmatrix}0&2&1\\1&3&1\\5&1&0\end{vmatrix} - 2\cdot\begin{vmatrix}2&1&2\\1&3&1\\5&1&0\end{vmatrix} + 0 - 0 = 46$

Entwicklung nach 1° Spalte, da meiste Nullen

3.2 Wichtige Regeln:

$\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)$	$\det(AB) = \det(BA)$
$\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det(A)}$	$\det(A+B) \neq \det(A) + \det(B)$
$\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$, $A \in \mathbb{R}^{nxn}$	$\det(A^n) = [\det(A)]^n$

$\det(A^T) = \det(A)$ $\qquad$ $\det(\det(A)B) = [\det(A)]^n \det(B)$

$\det(A) - \det(A^T) = \det(A - A^T)$

$\det(A^{-1}A^T A^2 A^T A^{-1}) = [\det(A)]^2$, *per ogni Matrice regolare vale ciò* ($\leftrightarrow$)

A ähnlich B (6.1,5.6) $\det(A) = \det(B)$

- Spalten-/Zeilen-vertauschung: Die Determinante ändert das Vorzeichen!
- Addieren man ein Vielfaches einer Spalte/Zeile zu einer anderen, so ändert sich Determinante nicht!
- $det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} \end{pmatrix} = \alpha \cdot det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$
- 2 oder mehr gleiche Spalte/Zeile: $\det(A) = 0$ → das gleiche für eine Nullspalte/-zeile
- 2 oder mehr lineare abhängige Spalten/Zeilen: $\det(A) = 0$
- Die Determinante einer Dreiecksmatrix ist das Produkt der Diagonale
- $\det\begin{pmatrix} a & b \\ c+e & d+f \end{pmatrix} = det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + det\begin{pmatrix} a & b \\ e & f \end{pmatrix}$
- $b = \sum_i^n x_i a^{(i)}$ $\qquad$ $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & \cdot \\ 2x_1 & \cdot \end{pmatrix}$ $\qquad$ $x_k = \frac{\det(A_k)}{\det(A)}$

x_1 moltiplicato per la prima colonna, x_2 per la seconda, e così via. A_k è la matrice che si ottiene sostituendo la k-esima colonna con b:

$$\det(A_k) = \det\left(a^{(1)} \dots a^{(k-1)} b a^{(k+1)} \dots a^{(n)}\right)$$

- Lemma: Sei A eine m x m – Matrix, B eine m x n – Matrix und C eine n x n – Matrix (Also A und C **quadratisch**):

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad \det(M) = \det(A) \cdot \det(C)$$

- Satz: Sei $LR = PA$ gegeben und A eine n x n – Matrix, dann gilt:

$$\det(A) = \det(P)\det(R) = (-1)^{\#\,Zeilenvertauschungen} \det(R)$$

3.3 Determinante – LGS:

Sei A eine n x n – Matrix:

Rang A	$\det(A)$	LGS	Effekt
$= n$	$\neq 0$	$Ax = 0$	Das LGS hat nur die triviale Lösung
$< n$	$= 0$		Das LGS hat unendlich viele Lösung
$= n$	$\neq 0$	$Ax = b$	Für jedes b existiert eine Lösung
$< n$	$= 0$		Je nach b hat das LGS keine oder unendlich viele Lösung

4. Vektorräume:

V heißt Vektorraum, falls eine **Addition** und eine **Skalar Multiplikation** definiert sind und folgendes gilt (zu prüfen!):

4.1 Rechenregeln:

(A1)	$\forall\, a, b \in V$:	$a + b = b + a$
(A2)	$\forall\, a, b, c \in V$:	$(a + b) + c = a + (b + c)$
(A3)	$\exists\, 0 \in V$:	$a + 0 = a$
(A4)	$\forall\, a \in V\ \exists -a \in V$ sodass:	$a + (-a) = 0$
(M1)	$\forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{R}\quad \forall a \in V$:	$\alpha(\beta \cdot a) = (\alpha \cdot \beta)a$
(M2)	$\forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{R}\quad \forall a, b \in V$:	$(\alpha + \beta)a = \alpha \cdot a + \beta \cdot a$ $\alpha(a + b) = \alpha \cdot a + \alpha \cdot b$
(M3)	$\forall\, a \in V$:	$1 \cdot a = a$

0 heißt Nullvektor, aber es muss nicht unbedingt 0 sein.

- Beispiel: Ist $U = Ax = 0$ UR von V?
Wähle $\vec{a}, \vec{b} \in U$ $\quad A \cdot \vec{a} = 0$ und $A \cdot \vec{b} = 0$

- $A(a + b) = Aa + Ab = 0$ ✓
- $A \cdot (\alpha \cdot a) = \alpha \cdot (A \cdot a) = 0$ ✓

Ist $U = A \in V$, $A^T = -A$ UR von V?

- $(B + A)^T = B^T + A^T = -B - A$ ✓
- $(\alpha B)^T = \alpha B^T = -\alpha B = -(\alpha B)$ ✓

4.2 Unterräume:

Jeder Unterraum muss den Nullvektor enthalten!
Eine nichtleere Teilmenge U von V heißt Unterraum von V, falls es gilt:

i)	$a, b \in U$:	$a + b \in U$
ii)	$a \in U, \alpha \in \mathbb{R}$:	$\alpha \cdot a \in U$

und gilt auch:

- $U_1 \cap U_2$ ist ein Unterraum von V (Schnittmenge)
- $U_1 + U_2$ ist ein Unterraum von V (Summe)
- $U_1 \cup U_2$ ist KEIN Unterraum von V (Vereinigung)
- Nicht alle Teilmenge von Vektorräumen sind wieder Vektorräume → (A1)-(M3) überprüfen!
- V selbst und der Nullvektor sind immer Unterräumen von V
- Ein Unterraum U von V ist selber ein Vektorraum

- Beispiel: Trovare una funzione in V rispetto a un UR U:
Proiettare la funzione ortogonalmente su con lo Skalarprodukt del UR → SP della funzione con le basi di U:

$V = 1, x, x^2, e^x \qquad U = 1, x, x^2$

$$e^x = \langle e^x, 1\rangle 1 + \langle e^x, x\rangle x + \langle e^x, x^2\rangle x^2$$

Proiezione ortogonale di x su e_3: $z = \langle x, e_3\rangle e_3$

- Beispiel: UR delle matrici: $\quad$ i) simmetriche: $\dim(U) = \frac{n(n+1)}{2}$
ii) antisimmetriche: $\dim(U) = \frac{n(n-1)}{2}$

4.3 Linearkombination:

Seien $v_1, \dots, v_n \in V$ und $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$. Dann heißt

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot v_i = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n$$

eine Linearkombination der Vektor v_i.

- Beispiel: Sei $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$. Dann ist $v_3 = \begin{pmatrix} 8 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix}$ eine LK von v_1 und v_2

$\alpha_1\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \alpha_2\begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix}$ hat die Lösung $(\alpha_1, \alpha_2) = (2,1)$

4.4 Erzeugenden System: (Esprimere qualsiasi vettore nello spazio)

$U = \sum_{i=1}^n \alpha_i \cdot v_i \in \mathbb{R}$ ist ein Unterraum von V, dann heisst der von $v_1, v_2, \dots, v_n$ **aufgespannte** oder **erzeugte** Unterraum. Notation $span v_1, v_2, \dots, v_n$.

Kann man jeder Vektor v eines Vektorraumes V als lineare Kombination der Vektoren $v_1, v_2, \dots, v_n$ von V darstellen, also
$V = span v_1, v_2, \dots, v_n$
dann nennt man diese Vektoren ein **erzeugenden System** von V.
V heisst dann **endlich dimensional**.

Die Vektoren eines Erzeugendensystems müssen nicht linear unabhängig sein, aber mindestens eine Basis enthalten.

- Beispiel: $A = \left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}\right\}$ un sottoinsieme di $\mathbb{R}^3$. Allora:

$$span\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}\right\} = \left\{\alpha\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} \middle|\, \alpha, \beta \in \mathbb{R}\right\}$$

- Beispiel: Geg. sei der Unterraum $P_2 := \{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \mid a_i \in \mathbb{R}\}$

- $span x + 1, x - 1, x^2 + 1, x^2 - 1$ ist gleich P_2. *VERO.*
- $x + 1, x - 1, x^2 + 1, x^2 - 1$ sind linear unabhängig. *FALSO! Trasformo i polinomi in vettori, devono essere 3.* $dim(P_{\mathbb{R}}^n) = n + 1$
- $x + 1, x - 1, x^2 + 1, x^2 - 1$ bilden ein Erzeugendensystem von $F(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. *FALSO, non posso creare un polinomio di grado sopra il 2!*
- $x + 1, x - 1, x^2 + 1, x^2 - 1$ bilden ein Erzeug. von P_2. *VERO, uguale alla prima domanda.*

- Beispiel:

i) $P_4 = \{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 \mid a_i \in \mathbb{R}\} = span(1, x, x^2, x^3, x^4)$

$$= span\left(\binom{x}{0}, \binom{x}{1}, \binom{x}{2}, \binom{x}{3}, \binom{x}{4}\right) \text{ wobei } \binom{x}{k} = \frac{x(x-1)(x-2)\dots(x-k+1)}{k!}$$

ii) $U = \{A \in \mathbb{R}^{2x2} \mid A = A^T\}$ ist ein UR von $\mathbb{R}^{2x2}$

$$U = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \middle|\, a, b, c \in \mathbb{R}\right\} = \left\{a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \middle|\, a, b, c \in \mathbb{R}\right\}$$

$$= span\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$$

4.5 Linear ab/un-abhängig:

Die Vektoren $v_1, v_2, \dots, v_n \in V$ heissen **linear unabhängig**, wenn

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot v_i = 0$$

nur für $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$ erfüllt ist. $\det(A) \neq 0$

Falls $v_1, v_2, \dots, v_n \in V$ nicht linear unabängig sind, so heissen sie **linear abhängig**, d.h. wenn eine Nicht-Triviale Darstellung (mindestens ein $\alpha_i \neq 0$):

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot v_i = 0$$

des Nullvektors gibt. (k vettori sono linearmente dipendenti se uno di essi è esprimibile come combinazione lineare non nulla degli altri).

- Beispiel:

- Eine Menge$0, v_2, \dots, v_n$ die den Nullvektor enthält ist sicher linear abhängig: $1 \cdot 0 + 0 \cdot v_2 + \dots + 0 \cdot v_n = 0$.
- Die Menge $\{v_1, v_2\}$ ist linear unabhängig genau dann, wenn keinen der Vektor v_i ein Vielfaches des anderen ist.

- Beispiel (Lineare Kombination): Für welche Parameterwerte t lässt sich der

Vektor $\begin{pmatrix} t \\ 0 \\ -27 \\ 1 \end{pmatrix}$ als Lin.komb. von $\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$ darstellen?

$\begin{pmatrix} t \\ 0 \\ -27 \\ 1 \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$ Risolvo il sistema EINDEUTIG!

$\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & -1 & 0 \\ 5 & 3 & 0 & -27 \\ -3 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right) \to$ trovo i coefficienti $\to$ li metto nella prima riga $\to t$

- Beispiel (Lineare Abhängigkeit): Zeigen Sie das

$$p_1(x) = x^3, \quad p_2(x) = x^2 + x^3, \quad p_3(x) = x^3 - x^2 + 2$$

Lin. Unabhängig sind.

$$\lambda_1 p_1 + \lambda_2 p_2 + \lambda_3 p_3 = 0 \to (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)x^3 + (\lambda_2 - \lambda_3)x^2 + 2\lambda_3 = 0$$

Mit Koeffizientenvergleich also:

$$\begin{aligned} 2\lambda_3 &= 0 & &\to \lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 - \lambda_3 &= 0 & &\to \lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 &= 0 & &\to \lambda_1 = 0 \end{aligned}$$

4.6 Basis:

Sei $v_1, v_2, \dots, v_n$ eine Erzeugendensysteme in V. Falls $v_1, v_2, \dots, v_n$ linear unabhängig sind, so heisst $v_1, v_2, \dots, v_n$ eine **Basis** von V.
Eine Basis aus paarweise orthogonalen Einheitsvektoren heisst **orthonormale Basis**.

Sei $V \neq \{0\}$ ein VR und $b_1, b_2, \dots, b_n$ ein Basis von V. Dann heisst n die **Dimension** von V. Notation: $\dim(V) = n$

- Beispiel: $\dim(\mathbb{M}_{mxn}(\mathbb{R})) = m \cdot;\ \dim\mathbb{R}^n = n;\ \dim\{0\} = 0;\ \dim(P_{\mathbb{R}}^n) = n + 1$

Es sei V ein VR mit Dimension n. Dann gilt:

- Mehr als n Vektoren sind linear abhängig
- Weniger als n Vektoren sind nicht erzeugend
- n Vektoren sind linear unabhängig genau dann, wenn sie erzeugend sind, und genau dann sind sie eine Basis.

Sei $V = \mathbb{R}^n$. Seien $a_1 \dots a_k \in \mathbb{R}^n$. Sei $A = (a_1 \dots a_k) \in \mathbb{R}^{nxk}$ (n = righe, k = colonne), und $r = Rang(A)$. Sei $b \in \mathbb{R}^n$. Dann $a_1 \dots a_k$ sind:

- erzeugend $\leftrightarrow Ax = b$ ist für alle b lösbar $\leftrightarrow r = n$
- linear unabhängig $\leftrightarrow Ax = 0$ hat nur die triviale Lösung $\leftrightarrow r = k$
- linear abhängig $\leftrightarrow Ax = 0$ hat nicht triviale Lösung $\leftrightarrow r < k$
- ein Basis $\leftrightarrow \det(A) \neq 0$ $\leftrightarrow r = n = k$

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 & -2 & 5 & 4 \\ 2 & -6 & 9 & -1 & 8 & 2 \\ 2 & -6 & 9 & -1 & 9 & 7 \\ 1 & 3 & -4 & 2 & 5 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 & -2 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -2 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Die 3 entsprechenden Spalten in A sind dann linear unabhängig — Pivotspalten

→ Der Rang einer Matrix ist die maximale Anzahl lin. Unabhängigen Spalten in der Matrix. (= dim)

4.7 Koordinaten:

Basis $B = \{b^{(1)}, b^{(2)}\}$

$\vec{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = x_1 \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + x_2 \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ → LGS für x_1 und x_2 lösen!

$\to \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ heißt **Koordinatenvektor** von $\vec{c}$ bezüglich B.

Per il contrario (Koordinatenvektor dato) → inserire $\vec{x}$ nell'LGS

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

4.8 Normierte VR: (Norm)

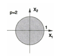
Sei V ein VR. Eine Norm auf V ist eine Abb.: $\|\cdot\|: V \to \mathbb{R}, \quad V \mapsto \|V\|$; sodass:

(N1)	$\forall\, v \in V$:	$\|v\| \geq 0$ und $\|v\| = 0 \leftrightarrow v = 0$
(N2)	$\forall\, v \in V, \forall\, \alpha \in \mathbb{R}$:	$\|\alpha v\| = \|\alpha\|\|v\|$
(N3)	$\forall\, v, u \in V$:	$\|u + v\| \leq \|v\| + \|u\|$ (Dreiecksungl.)

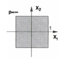
In endlichdim. Räumen spielt es also für die Konvergenz keine Rolle, welche Norm man verwendet. Dies ist nicht mehr so in unendlichdim. Räumen.

Verschiedene Norm:

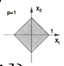
i) **Euklidische Norm** auf $\mathbb{R}^n$ (länge): $\|v\|_2 = \sqrt{v_1^2 + \dots + v_n^2}$



ii) **Maximums Norm** auf $\mathbb{R}^n$: $\|v\|_\infty = max\{|v_1|, \dots, |v_n|\}$



iii) die **p-Norm** für $1 \leq p \leq \infty$: : $\|v\|_p = (|v_1|^p + \dots + |v_n|^p)^{1/p}$



iv) Normen von Funktionen:

„maximalen Ausschlag": $\|f\|_{L^\infty} = max\{|f(x)|: x \in [a, b]\}$

„durchschnittlichen Ausschlag": $\|f\|_{L^p} = \left(\int_a^b |f(x)|^p\, dx\right)^{1/p}$

Relazione tra Norm: Sei V ein VR mit dim(V) < ∞ und 〖||·||〗_a 〖||·||〗_b Normen auf V. Dann existieren A,B so, dass ∀v ∈ V:
||v||a ≤ A||v||b ,||v||b ≤ B||v||a

Kovergenzbegriff: Mit jeder Norm ist auf V ein Konvergenzbegriff definiert. Sei 〖{v_n}〗_(n∈N) eine Folge in V und v ∈ V . Dann ist lim┬(n→∞)⁡〖v_n=v〗 ↔lim┬(n→∞)⁡〖‖v_n-v‖=0〗 .
Die Norm ||vn -v|| ist ein Mass für den Abstand der Vektoren v_n und v.

4.9 Schmidtsches Orthogonalisierungsverfahren (ONB):

Seinen $e^{(1)}, e^{(2)}, \dots, e^{(n)}$ paarweise orthogonal. Dann sind linear unabhängig und sie bilden eine Basis: **Orthonormalbasis**.
Wird verwendet, um aus einer gegebenen Basis eine orthonormale Basis zu konstruieren.

Gegebene Basis: $B = \{b^{(1)}, b^{(2)}, b^{(3)}\}$

Zugehörige orthonormale Basis: (Se è chiesta orthogonale, non normo!)

- Schritt 1: $e^{(1)} = \frac{b^{(1)}}{\|b^{(1)}\|}, \ wo\ \|b^{(1)}\| = \sqrt{< b^{(1)}, b^{(1)} >}$
- Schritt 2: $e^{(2)\prime} = b^{(2)} - \langle b^{(2)}, e^{(1)} \rangle \cdot e^{(1)}$ → $e^{(2)} = \frac{e^{(2)\prime}}{\|e^{(2)\prime}\|}$
- Schritt 3: $e^{3\prime} = b^{(3)} - \langle b^{(3)}, e^{(1)} \rangle \cdot e^{(1)} - \langle b^{(3)}, e^{(2)} \rangle \cdot e^{(2)}$
  → $e^{(3)} = \frac{e^{(3)\prime}}{\|e^{(3)\prime}\|}$
- ...usw...

Vektor in neuer Basis finden:

$$v = x_1 \cdot e^{(1)} + x_2 \cdot e^{(2)} + x_3 \cdot e^{(3)}$$

→ Nur othonormale Basis (**orthogonale projektion von v auf span** $< e^{(1)}, e^{(2)}, e^{(3)} >$)

$$v = \underbrace{\langle v, e^{(1)} \rangle}_{x_1} \cdot e^{(1)} + \underbrace{\langle v, e^{(2)} \rangle}_{x_2} \cdot e^{(2)} + \underbrace{\langle v, e^{(3)} \rangle}_{x_3} \cdot e^{(3)}$$

5. Lineare Abbildungen:

Seien V und W Vektorräume. Eine Abbildung $F: V \mapsto W, x \mapsto F(x)$ heißt **linear**, wenn:

i) $\forall x, y \in V$: $F(x + y) = F(x) + F(y)$
ii) $\forall x \in V, \forall \alpha \in \mathbb{R}$: $F(\alpha \cdot x) = \alpha \cdot F(x)$

Jede lineare Abbildung $F: V \mapsto W$ lässt sich durch eine m x n – Matrix A beschreiben(se $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$),
wie in diese Beispiel:

$$F: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x + y \\ x - 2y \\ 3x \end{pmatrix} = \overbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}}^{A} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

- Beispiel:

1) Die Nullabbildung $F: V \longmapsto W, x \longmapsto F(x)=0$ ist linear.
2) Die Abbildung $x \longmapsto A \cdot x + a$ heißt affine lineare Abbildung
3) Streckungen:

$$\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \quad x \longmapsto \lambda x = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

4) Spiegelungen (rispetto all'asse y):

$$\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} -x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

5) Rotationen: Drehung um den Winkel φ um den Ursprung

$$\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} cos\varphi & -sin\varphi \\ sin\varphi & cos\varphi \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

6) Orthogonal Projektionen: Projektion auf die x-Achse

$$\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Es. Projektion auf $x_2 = 0$ Ebene: $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$

7) Sampling:

$F: C([a,b];\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}^n \quad f \longmapsto \begin{pmatrix} f(t_1) \\ \vdots \\ f(t_n) \end{pmatrix}$ wobei $a \leq t_1 \leq t_2 \leq \cdots \leq t_n \leq b$

8) Interpolation Polynome:

$F: \mathbb{R}^n \to P_{n-1}$ = Polynome von Grad $\leq n-1 \quad \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \longmapsto p \quad p(t_i) = y_i$

- Beispiel: Sei $f: C^2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}, h \longmapsto h''(0)$ ist linear? *VERO, siccome vale:* $(x_1 + x_2)'' = x_1'' + x_2''$ *e pure* $(\alpha \cdot x_1)'' = \alpha \cdot x_1''$

-Tipps: Ist $F: V \longrightarrow W$ linear, so gilt $F(\vec{0}) = \vec{0}$. Insbesondere sind Translationen $T: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n x \mapsto x + a (a \in \mathbb{R}^n, a \neq 0)$ nicht linear!

-Tipps: Geom etrisch Interpretation: disegna il grafico. Calcolo il modulo del secondo e lo metto in funzione del primo vettore. Poi posso calcolare l'angolo tra i due vettori con la seguente formula:

$$cos\alpha = \frac{\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle}{\|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\|}$$

- Beispiel: $p(x) \to x \cdot p'(x) + p(1)$

- $F(p(x) + q(x)) = x \cdot (p(x) + q(x))' + (p(1) + q(1)) =$
$= x \cdot p'(x) + p(1) + x \cdot q'(x) + q(x) = F(p(x)) + F(q(x))$ ✓
- $F(\alpha \cdot p(x)) = x(\alpha \cdot p(x))' + \alpha p(1) = \alpha \cdot F(p(x))$ ✓

- Beispiel (Lösungsraum): Gegeben sei Basis $B = 1, x, x^2$ und die lineare Abbildung:

$$L: P_2 \to P_2 p(x) \to p(x) - xp'(x) + p''(x)$$

Matrix A? $\quad L(1) = 1, L(x) = \cdots \to A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

Man bestimme den Lösungsraum U von $L(p(x)) = x^2$ in P_2:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \quad \to \quad a = 2, \ b = beliebig, \ c = -1$$

$$U = \{-x^2 + bx + 2 \mid b \in \mathbb{R}\}$$

5.1 Kern und Bild:

Sei $V = \mathbb{R}^n, \ \mathbb{R}^m \quad F: \ V \to W, \quad x \longmapsto y = A \cdot x$ eine Lineare Abbildung.

i) Die Menge aller Vektoren, welche auf null abgebildet werden, heißt **Kern** der Matrix A (tutti i vettori che hanno come immagine il vettore nullo).

$$\ker(A) := \{x \in V^n | Ax = 0\}$$

$x \in ker(A) \leftrightarrow x$ ist Lösung von LGS $Ax = 0$.
$ker(A)$ ist ein Unterraum von $\mathbb{R}^n$ (n = # colonne)

- Wichtig: $ker(A) \subseteq ker(A^n)$. Beispiel: $v \in \ker(A), A^{10}v = A^9(Av) = 0$

- Beispiel:

$$\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad ker(A) = \left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{pmatrix} \middle| z \in \mathbb{R}\right\}$$

- Tipps: Risolvere l' LGS $Ax = 0 \rightarrow$
$\dim(Ker(A)) = numero\ freieParameter$.
Se il sistema $Ax = 0$ ha solo la soluzione triviale $\rightarrow \dim(\ker(A)) = 0$ e di conseguenza: dim (im(A) = n

- Tipps: Se data una matrice A e devo dire quale delle basi date è una base del Kern, basta fare $A \cdot u^{(1)}$ dove $u^{(1)}$ è un vettore della base e vedere se il risultato è il vettore nullo.

- Beispiel (*dim(Kern)*): $\quad L: P_4 \to \mathbb{R} \quad p \to \int_0^1 p(x)dx$

Dimostra che è una applicazione lineare. 1) $F(p+q) = F(p) + F(q)$
2) F(λp) = λF(p)

Quale dimensione ha il Kern?

$$\dim(Bild(L)) + \dim(Kern(L)) = \dim(P_4) = n + 1 = 5$$

Da das Bild muss ganz $\mathbb{R}$, also 1-dimensional, sein; damit folgt $\dim(Kern(L)) = 4$

La Darstellungsmatrix sarà 1x5. $D = \left(1 \ \frac{1}{2} \ \frac{1}{3} \ \frac{1}{4} \ \frac{1}{5}\right)$

- Beispiel: $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 2x - 3y \\ y - 4z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

Risolvo il sistema $Ax = 0$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -6 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \end{array}\right)$$

Poichè z è una variabile libera poniamo $z = t$ e otteniamio:

$$x = 6t \ e \ y = 4t \quad \to \quad Kern(A) = \left\{t \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| t \in \mathbb{R}\right\}$$

ii) Die Menge aller Bildvektoren $y \in V^m$ heißt **Bild** der Matrix A.

$$im(A) := \{y \in V^m | \exists x \in V^n, so\ dass\ y = Ax\}$$

$b \in im(A) \leftrightarrow Ax = b$ ist einlösbares LGS. Es gilt dann $b = span\{a^{(1)}, \ldots, a^{(n)}\}$
$Im(A)$ ist ein Unterraum von $\mathbb{R}^m$ (m = # righe)

$$im(A) = span\{a^{(1)}, a^{(2)}, \ldots, a^{(n)}\}$$

- Wichtig: $im(A^n) \subseteq Im(A)$. Beispiel: $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

- Beispiel:

$$\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad im(A) = \left\{\begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} \middle| x, y \in \mathbb{R}\right\}$$

- Tipps: Dalla ZSF trovare i vettori linearmente indipendenti e prendere i loro vettori originali (prima della Gaussverfahren, perché quest'ultima ci dice quali sono indipendenti ma "perde informazioni") (→ Vettori linearmente indipendenti: quelli con i pivot). $im(A) = span\{(\vdots), (\vdots)\}$

- Beispiel (Projek.): Gegeben Unterraum $\quad U = span\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$

H l'insieme di tutti i vettori che sono perpendicolari $\perp$ a U. Trova H.

$$Im(A) \ \perp Ker(A^T)$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \to x_3, x_4 \text{ parametri liberi}$$

$$x_1 = -x_3 \quad x_2 = -\frac{1}{2}x_4 \quad \to \quad H = span\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}\right\}$$

Trova la proiezione ortogonale di $\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$ su U:

$x_U = \langle x, u_1 \rangle u_1 + \langle x, u_2 \rangle u_2 \quad u_1, u_2$ normati!!!

5.2 Regeln:

Für $F: V^n \longmapsto W^m$ mit $A \in \mathbb{M}^{mxn}$ gilt:

$$\dim(ker(A)) + \dim(im(A)) = n = \dim(V^n)$$
$$\dim(im(A)) = \dim(im(A^T)) = Rang(A)$$
$$\dim(\ker(A)) = \text{\# di freie Parametern} = n - r$$
$$im(A) + \ker(A^T) = W$$
$$im(A) \perp \ker(A^T) \Rightarrow \ y \in im(A), v \in \ker(A^T)$$

- $n = m$; Applicazione iniettiva ←→ biiettiva ←→ suriettiva
- $n \neq m$; Iniettiva se → $\ker(A) = \vec{0}$
  Suriettiva se → $\text{im}(A) = W$ → $\dim(im(A)) = m$
  - $n < m$; F non può essere suriettiva perché $\max(\text{Rank}(A)) = \text{n}$, quindi $\dim(\text{im}(A)) < \text{m}$.
  - $n > m$; F non può essere iniettiva perché ci sarebbe una dimensione intera a finire nel ker

5.3 Zusammensetzen von Abbildungen:

Die Zusammensetzung von 2 linearen Abbildungen ist wieder linear.
Seien $F\colon\ \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m,\ x \mapsto Ax;$
$G\colon\ \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p,\ y \mapsto Bx;$
dann ist $G \circ F =:\ \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p,\ x \mapsto BAx$

-**Tipps:** $G \circ F$ devo fare la Darstellungsmatrix di G per la Darstellumgsmatix di F.

5.4 Lineare Abbildungen und Skalarprodukt:

Zusammenhang zwischen $F\colon\ \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m,\ x \mapsto Ax$
$G\colon\ \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n,\ y \mapsto A^T y$

$Im(A)$ und $ker(A^T)$ spannen $\mathbb{R}^m$ auf
$\forall z \in \mathbb{R}^n$ und $y \in \mathbb{R}^m$ gilt: $\langle Az, \rangle = \langle z, A^T y\rangle$
$Im(A)\ \perp Ker(A^T)$
$\dim\big(Im(A)\big) + \dim\big(ker(A^T)\big) = m$

(Fredholm Alternative)
$Ax = b$ lösbar, wenn: Lösungen$(A^T y = 0) \perp b$

- **Tipps:** Trovo la soluzione y dell'equazione $A^T y = 0$ (se ha due freie Parameter troverò qualcosa della forma: $\alpha \cdot \overrightarrow{c^{(1)}} + \beta \cdot \overrightarrow{c^{(2)}}$ con $\alpha, \beta\ \epsilon\ \mathbb{R}$.
A questo punto calcolo: $\langle \overrightarrow{c^{(1)}}, \vec{b}\rangle$ e $\langle \overrightarrow{c^{(2)}}, \vec{b}\rangle$. Se entrambi =0 → hat eine Lösung. Se $\neq 0$ hat keine Lösung.

5.5 Lineare Selbstabbildungen:

i) $F\colon V^n \to V^n, x \mapsto F(x)$ linear, heißt **invertierbar** falls $\forall\ y \in V \exists! \in V$, so dass $F(x) = y$.
ii) Ist F invertierbar, so heisst $F^{-1}\colon V^n \to V^n, y \mapsto x$, wobei $F(x) = y$, die **Umkehrabbildung** von F.

i)) $F\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n,\ x \mapsto Ax$ ist invertierbar genau dann, wenn A regulär ist, d.h wenn de t$(A) \neq 0$
ii) $F\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n,\ x \mapsto Ax$ ist invertierbar. Dann ist F^{-1} ebenfalls linear und $F^{-1}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n,\ x \mapsto A^{-1}x$
iii) $F\colon V^n \to V^n$ sei linear und invertierbar. Dann gilt: $F^{-1} \cdot F = F \cdot F^{-1}\colon V^n \to V^n,\ x \mapsto x$
Orthogonale Abbildungen: $F\colon x \in \mathbb{R}^n \to x' = Ax \in \mathbb{R}^n$ heisst Orthogonal, falls $(x', y') = (Ax, Ay) = (x, y); x, y \in \mathbb{R}^n$
Längentreu $F\colon x \epsilon \mathbb{R}^n \to x' = Ax \in \mathbb{R}^n$ heisst Längentreu falls $\|x'\| = \|Ax\| = \|x\|; x \in \mathbb{R}^n$

Eigenschaften Orthogonale + Längentreu Sei die lineare Abbildung $F\colon x \in \mathbb{R}^n \to x' = Ax \in \mathbb{R}^n$ gegeben, diese Aussagen sind äq:
- F ist orthogonal
- F ist Längentreu
- Die Spalten von A sind eine Orthonormale Basis in R^m
- Die Matrix A ist Orthogonal
- Jede Längentreu und orthogonal Abbildung erhält das Skalarprodukt und daher ist auch Winkeltreu
- Für eine Orthogonalmatrix A gilt $\|A\|_2 = 1$

5.6 Darstellungsmatrix:

$$[x]_B \mapsto [y]_C = A \cdot [x]_B$$

$[x]_B = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$: Koordinatenvektor von x bezüglich B

- **Tipps:** Per trovare A: se vado dalla base B a C con l'Abbildung F, inserisco i vettori della base B nell'Abbildung. Ricordarsi di esprimere i risultati nella Base C! (Quelli che si trovano sono infatti rispetto alla base B).

- **Beispiel:** Sei $V = P_2$ und $W = P_1$. $B = (1, x, x^2)$, $C = (1, x)$
$F\colon V \to W, p(x) \mapsto p'(x) + p''(x)$ Man findet die Darstellungsmat. A.

$F(b_1) = (1)' + (1)'' = 0 \to\ = 0 \cdot (1) + 0 \cdot (x) \ \to\ [F(b_1)]_C = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$F(b_2) = (x)' + (x)'' = 1 \qquad \to\ [F(b_2)]_C = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$F(b_3) = (x^2)' + (x^2)'' = 2x + 2 \qquad \to\ [F(b_3)]_C = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

$$\to\ A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

- **Beispiel:** Se C non è la Standardbasis e viene richiesta la Darstellungsmatrix di F rispetto a $C = (1 + x^3, x - x^2, x^2 + x^3, x^3)$:
Per $F\colon p(x) \mapsto p''(x) + xp'(x)$

$F(b_1) = 6x + 3x^3 \to$ Koeffizientenvergleich!
→ $6x + 3x^3 = \alpha(1 + x^3) + \beta(x - x^2) + \gamma(x^2 + x^3) + \delta(x^3)$
Per 1: $0 = \alpha$
Per x: $6 = \beta$
Per x^2: $0 = -\beta + \gamma \to\ \gamma = \beta = 6$
Per x^3: $3 = \alpha + \gamma + \delta \to\ \delta = -3$

Primo vettore colonna di $A \to \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix}$ idem per gli altri.

- **Tipps:** Se ti danno la Darstellungsmatrix di una lineare Abbildung in una determinata base. Per trovarla nella seconda base basta utilizzare le seguenti formule (è uguale da dove inizio a fare la moltiplicazione delle tre matrici):

$$[F]_B = (T^{-1} \cdot [F]_{B'} \cdot T =)P \ \cdot [F]_{B'} \cdot P^{-1}$$

$$[F]_{B'} = (T \cdot [F]_B \cdot T^{-1} =)\ P^{-1} \cdot [F]_B \cdot P$$

Le due Darstellungsmatrizen di F nelle due basi sono: **ähnliche Matrizen** → quindi stesso determinate (vedi definizione EW Probleme 6.1)

5.7 Koordinatentransformation und Basiswechseln:

Seien B und B' zwei verschieden Basen eine VR V. Seien dann

$$[v]_B = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}, \quad [v]_{B'} = \begin{pmatrix} v'_1 \\ \vdots \\ v'_n \end{pmatrix}$$

$$\to\ [v]_{B'} = ([b_1]_{B'}\ \ldots\ [b_n]_{B'}) \cdot [v]_B = T \cdot [v]_B$$

Wobei T die **Übergangsmatrix** von B zu B' ist (auch $T_{B'B}$). Umgekehrt gilt

$$\to\ [v]_B = ([b'_1]_B\ \ldots\ [b'_n]_B) \cdot [v]_{B'} = P \cdot [v]_{B'}$$

Wobei P die **Übergangsmatrix** von B' zu B ist. Es gilt

$$T = P^{-1}$$

→ NUR P ORTHOGONAL: $T = P^{-1} = P^T$

Orthogonal quando tutti i EV sono ⊥ tra di loro

T sono i vettori della base B espressi in B', mentre P sono i vettori della base B' espressi in B.

- **Tipps:** Se ho una Standardbasis e una base a "caso", mi conviene prima esprimere i vettori della base a caso nella Standardbasis (non cambiano 😊 → P o T) poi con le formule sopra trovare la sua inversa!

- **Beispiel:** Sei $B = (e_1, e_2)$ die Standardbasis und $B' = (e_1 + e_2,\ e_2 - e_1)$. Dann ist P die Übergangsmatrix von B' nach B:

$$[v]_B = ([e'_1]_B\ , [e'_2]_B) \cdot [v]_{B'} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot [v]_{B'}$$

dove $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \cdot e_1 + 1 \cdot e_2 = e'_1$

- **Beispiel:** P_2 VR, $B = \{b^{(1)} = 1,\ b^{(2)} = x,\ b^{(3)} = 3x^2 - 1\}$
Schreiben sie $p(x) = 11x^2 - 2x + 1$ in der Basis B.

$$11x^2 - 2x + 1 = \alpha(3x^2 - 1) + \beta(x) + \gamma(1)$$

→ Koeff. Vergleich

$$\alpha = \frac{14}{3}, \quad \beta = -2, \quad \gamma = \frac{11}{3}$$

$$[p(x)]_B = \begin{pmatrix} 11/3 \\ -2 \\ 14/3 \end{pmatrix} = \frac{14}{3}x^2 - 2x + \frac{11}{3}$$

- **Beispiel (Koordinaten System):** P_2 VR, $B = \{b^{(1)} = 1,\ b^{(2)} = x,\ b^{(3)} = 3x^2 - 1\}$ Schreiben sie $p(x) = 11x^2 - 2x + 1$ in der Basis B.

$$11x^2 - 2x + 1 = \alpha(3x^2 - 1) + \beta(x) + \gamma(1)$$

→ Koeff. Vergleich

$$\alpha = \frac{14}{3}, \quad \beta = -2, \quad \gamma = \frac{11}{3}$$

$$[p(x)]_B = \begin{pmatrix} 11/3 \\ -2 \\ 14/3 \end{pmatrix} = \frac{14}{3}x^2 - 2x + \frac{11}{3}$$

- **Beispiel (Darstellungsmatrix):** Finden Sie die DM bezüglich $B = \{1, x, x^2\}$ von

$$F\colon P_2 \to P_2 p(x) \to (x^2 - 3)p''(x) + p'(x) - 3p(0)$$

- $F(1) = -3$
- $F(x) = 1$ $\quad p(0)$ metto lo 0 nel mio polinomio!
- $F(x^2) = 2x^2 + 2x - 6$

$$\to A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Eigenbasis? EW Problem lösen. Trovo gli Eigenvektoren e li esprimo con la base B. In questo esempio sarebbe:

- $\lambda_3 = 2: (A - 2\mathbb{I})=0 \;\rightarrow\; EV_2 = \begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix} \;\rightarrow\; p_3(x) = -1 + x + x^2$

Eigenbasis $S = p_1, p_2, p_3$

Berechnen Sie $F^n(p(x))$ für $p(x) = 2 + 7x + x^2$ und $n \geq 1$:

Esprimo $p(x)$ con la Eigenbasis S:

$$2 + 7x + x^2 = ap_1 + bp_2 + cp_3 = a + b - c + (3b + c)x + cx^2$$

Durch Koeff.vergleichen: $c = 1, b = 2, a = 1$

somit gilt: $[p]_s = \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$ und $D \coloneqq [F]_s = \begin{pmatrix}-3 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\\0 & 0 & 2\end{pmatrix}$

und $\left[F^n(p(x))\right]_s = D^n[p]_s = \begin{pmatrix}(-3)^n\\0\\2^n\end{pmatrix}$

$$\rightarrow F^n(p(x)) = (-3)^n - 2^n + 2^n x + 2^n x^2$$

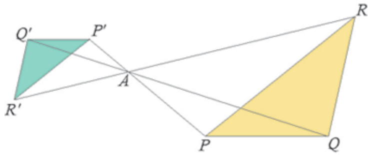
5.8 Darstellungsmatrizen von einige Lineare Abbildungen

Matrici associate ad alcune **trasformazioni lineari del piano:**

- Omotetia di centro A (origine) e di rapporto k: $\begin{pmatrix}k & 0\\0 & k\end{pmatrix}$
- Rotazione di centro O e di angolo α: $\begin{pmatrix}\cos(\alpha) & -\sin(\alpha)\\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha)\end{pmatrix}$
- Deformazione orizzontale di parametro k: $\begin{pmatrix}1 & k\\0 & 1\end{pmatrix}$
- Affinità di asse Ox, di direzione Oy e di parametro k: $\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & k\end{pmatrix}$
- Proiezione ortogonale su retta direzionata $\vec{d_r}$: $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \dfrac{\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\cdot\vec{d_r}}{\|\vec{d_r}\|^2}\cdot\vec{d_r}$

Matrici associate ad alcune **trasformazioni lineari dello spazio:**

- Omotetia di centro A (origine) e di rapporto k: $\begin{pmatrix}k & 0 & 0\\0 & k & 0\\0 & 0 & k\end{pmatrix}$



- Rotazine di angolo α attorno a Oz: $\begin{pmatrix}\cos(\alpha) & -\sin(\alpha) & 0\\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$
- Rotazine di angolo α attorno a Oy: $\begin{pmatrix}\cos(\alpha) & 0 & -\sin(\alpha)\\ 0 & 1 & 0\\ \sin(\alpha) & 0 & \cos(\alpha)\end{pmatrix}$
- Rotazine di angolo α attorno a Ox: $\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos(\alpha) & -\sin(\alpha)\\ 0 & \sin(\alpha) & \cos(\alpha)\end{pmatrix}$

- Proiezione ortogonale (parallela) all'asse Oz sul piano Oxy. **Wichtig:** primi 2 vettori metto $\vec{d}_{r,\pi}$, terzo è normale che va nel nucleo (oppure vettore orientato) TUTTI V devono essere normati $\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 0\end{pmatrix}$
- Proiezione ortogonale di $\vec{b}$ su $b\{\vec{d_1}, \vec{d_2}\}$:
  $\rightarrow P_b = <\vec{d_1}, \vec{b}> \vec{d_1} + <\vec{d_2}, \vec{b}> \vec{d_2}$
- Proiezione ort. Al piano Oyz su Ox: $\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\end{pmatrix}$
- Simmetria rispetto al piano Oxy: $\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & -1\end{pmatrix}$

- Beispiel:

1) Projektion entlang von $(0, -1)^T$ auf den Unterraum mit $x_2 = 0$:
α in questo caso = 1 siccome x_2 esce già uguale a 0

$$\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + \alpha\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$$

2) Projektion entlang von $(1,1,1,-2)^T$ auf den Unterraum mit $x_4 = 0$.
Finden Sie die Darstellungsmatrix P_1:
Da e_1, e_2, e_3 im Unterraum mit $x_4 = 0$ liegen, gilt $P_1(e_{1,2,3}) = e_{1,2,3}$.

Aber $P_1(e_4) = e_4 + \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1/2\\1/2\\1/2\\0\end{pmatrix} \rightarrow P_1 = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 1/2\\0 & 1 & 0 & 1/2\\0 & 0 & 1 & 1/2\\0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$

6. Eigenwertprobleme:

Sei $F: x \in \mathbb{C}^n \rightarrow Ax \in \mathbb{C}^n, \quad A \in \mathbb{C}^{nxn}$ (nur quadratische Marix)
Gibt es Vektoren, die unter der Abbildung F nur gestreckt (allungato) werden, d.h. mit einer Zahl multipliziert werden?

6.1 Eigenwert EW:

$$Ax = \lambda x \rightarrow \det(A - \lambda\mathbb{I}) = 0$$

Eigenwerte λ_i berechnen.
$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda\mathbb{I})$ heisst **charakteristisches Polynom** $p_A(\lambda)$ von A mit Grad n.

Spektrum: Menge aller EW von A

- Tipps: Se chiede $p_A(A)$: sarà sempre uguale a 0 (anche se non diagonalizzabile) siccome $p_A(A) = T \cdot diag(p_A(\lambda_1), p_A(\lambda_2), p_A(\lambda_3)) \cdot T^{-1}$. Aber $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ sind Nullstellen von p_A, folgt daraus $p_A(A) = 0$.

- Jede quadratische Matrix A hat minimal 1 Eigenwert
- A hat höchstens n verschiedene Eigenwerten
- Eigenwerte einer Dreiecksmatrix sind gleich den Diagonalelementen
- $\sum Alg.VFH = n$
- Falls A invertierbar, $p_{AB}(x) = p_{BA}(x)$

- Ähnliche Matrizen haben ($B = T^{-1}AT$ oppure $TB = AT$):
- das selbe charakteristische Polynom
- die selben EW mit den selben algebraische Vielfachheit
- das Selbe Spektrum (Menge aller EW)
- die selbe Determinante
- die selbe Spur («traccia» somma di tutti gli elementi della diagonale)
- falls A, B ähnliche Matrix sind, so sind auch A^n, B^n.
- Falls A diagonalisierbar ist, so ist auch B.

- Bemerkung:
- Die EV von A und A^k sind identisch. Die EW von A^k sind λ^k.
  $Mx = \lambda x \quad \rightarrow \quad M^k x = M^{k-1}Mx = M^{k-1}\lambda x = \lambda M^{k-2}Mx = \cdots = \lambda^k x$
- Ist A invertier., so ist $1/\lambda$ ein EW von A^{-1}, und EV sind identisch.
  $x = M^{-1}Mx = M^{-1}\lambda x = \lambda M^{-1}x$
- Ist A orthogonal mit det(A) = 1→ A hat minimal ein EW mit $\lambda = 1$.
- **Hat A EW: 1, -2, 0, so hat B = - 2A EW 1, 4, 0!**

- Tipps: Se una matrice ha un triangolo di zeri sopra o sotto, sviluppo secondo la prima colonna o riga e trovo che il determinate sarà il prodotto degli elementi della diagonale.

- Tipps: Die Menge der Eigenwerte von A und A^T ist gleich.
$\det(A^T - \lambda\mathbb{I}) = \det((A - \lambda\mathbb{I})^T) = \det(A - \lambda\mathbb{I})$

- Tipps: MC Die Matrix A hat die Eigenwerte… (lista di possibili EW). Calcolo il polinomio caratteristico e inserisco i valori.

- Tipps: Gli Eigenwerte sono giusti? $\sum_i \lambda_i = spur(A)$, $\prod_i \lambda_i = \det(A)$

6.2 Algebraische Vielfachheit (alg.VFH):

Die Vielfachheit eines Eigenwertes $1 \leq alg.VFH < n$
Bsp. Charakteristisches Polynom:
$(x - \lambda_1)\cdot(x - \lambda_2)^3 = 0 \quad \rightarrow \lambda_1: AVFH = 1 \quad \rightarrow \lambda_2: AVFH = 3$

- Bemerkung: Die Summe der $alg.VFH$ ist immer gleich n.

6.3 Eigenvektor EV:

Ein Vektor $x \neq 0$ ist genau dann Eigenvektor von A zum Eigenwert , wenn

$$(A - \lambda\mathbb{I}_n)x = 0$$

ist. Mit Gaussverfahren nach x auflösen. Die Lösungsmenge ist der $Kern(A - \lambda\mathbb{I}_n)$.
Der UR der EV von A zu einem EW λ heißt **Eigenraum** von A zum EW λ. Notation: $E_\lambda \coloneqq Kern(A - \lambda\mathbb{I})$

Seinen $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ verschiedenen EW von A → EV $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_k$ sind linear unabhängig.

- Tipps: MC Welche der folgenden Vektoren ist ein Eigenvektor der Matrix A? Basta controllare per quale vettore vale: $A \cdot EV = \lambda \cdot EV$

- Tipps: La soluzione si scrive: $E_{\lambda_1} = \{(\vdots) \mid s, \ldots \in \mathbb{R}\}$

6.4 Geometrische Vielfachheit (geom.VFH):

Die Dimension des Unterraumes E_λ heißt geometrische Vielfachheit des Eigenwertes λ.

$$\equiv dim(E_\lambda)$$

EW einsetzen $\longrightarrow$ $geom.VFH$ = # freie Parameter nach Gauss. Es gilt zudem:

$$\boxed{1 \leq geom.VFH\ von\ \lambda \leq alg.VFH\ von\ \lambda}$$

D.h. für einfache Eigenwerte ist die GVFH immer gleich der AVFH =1.

- **Tipps:** Se tutti gli EW diversi, avremo $geom.VFH = alg.VFH = 1$

6.5 Eigenbasis EB:

Eine Basis aus Eigenvektoren EV von einer Matrix $A \in \mathbb{C}^{nxn}$ heißt Eigenbasis zur Matrix A

- **Bedingungen:**
  - die Summe der $geom.VFH$ der EW von A ist gleich n;
  - $geom.VFH = alg.VFH$.

6.6 Einfach/halbeinfach:

Eine quadratische Matrix $A \in \mathbb{C}^{nxn}$ heißt:

Einfach: jeder EW hat VFH 1 $\rightarrow$ $alg.VFH = geom.VFH = 1$

Halbeinfach: $alg.VFH = geom.VFH$

- **Tipps:**
  - A einfach $\rightarrow$ auch halbeinfach
  - A halbeinfach $\rightarrow$ A^n und A^T auch
  - A einfach $\rightarrow$ A^n nicht unbedingt!
  - Zu einfachen und halbeinfachen Matrizen gibt es eine Eigenbasis

6.7 Diagonalisierbarkeit: A invertierbar -xxx-> A diagonalisierbar

Eine Matrix $A \in \mathbb{C}^{nxn}$ heisst diagonalisierbar, falls $\exists\, T \in \mathbb{C}^{nxn}$ so dass $T^{-1}AT = D = diag(d_1, \dots, d_n)$

$d_1, \dots, d_n$ sono gli Eigenwerte.

A diagonalisierbar: die Spalten $t^{(i)}$ von T sind die EV von A zu EW d_i

$\rightarrow$ Man muss immer dieselbe Reihenfolge in T und D halten.

- **Äquivalente Aussagen:** Sei $A \in \mathbb{C}^{nxn}$ so gilt:
  - A ist halbeinfach also
  - A ist diagonalisierbar $\rightarrow$ $alg.VFH = geom.VFH$
  - A besitzt eine Eigenbasis

-**Tipps:**
  - Ist A diagonalisierbar und invertierbar, so auch A^{-1}.
  - Ist A diagonalisierbar, so auch A^T.
  - Sind A und B diagonalisier bar so ist NICHT $A + B$ oder AB diagonalisierbar.

- **Tipps:** Diagonalisieren Sie die Matrix: Trovo gli EV ed EW e verifico che alg.VFH = geom.VFH, dopo trovo T (composto dagli EV) e D. D^{-1} NO

- **Beispiel (Diagonalisieren):** Date due matrici A e B (simetriche con le stessa matrice T ortogonale) con le rispettive matrici diagonali D e C. Quindi:

$$A = TDT^T \qquad B = TCT^T$$

Calcola $ABAABBAAABBB$:

$$ABAABBAAABBB = TDCDDCCDDDCCCT^T (T^TT = \mathbb{I})$$

Diagonale Matrizen lassen sich einfach multiplizieren:

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} d & 0 & 0 \\ 0 & e & 0 \\ 0 & 0 & f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ad & 0 & 0 \\ 0 & be & 0 \\ 0 & 0 & cf \end{pmatrix}$$

Quindi: $ABAABBAAABBB = T \begin{pmatrix} a^6d^6 & 0 & 0 \\ 0 & b^6e^6 & 0 \\ 0 & 0 & c^6f^6 \end{pmatrix} T^T$

- **Beispiel (Diagonalisierbarkeit):** Per essere diagonalizzabile deve avere la *geom.VFH* uguale alla *geom.VFH*. Se ho una matrice di questa forma:

• $A = \begin{pmatrix} X & 0 & 0 \\ 0 & X & 0 \\ 0 & 0 & X \end{pmatrix}$ $\rightarrow$ EW X mit *alg.VFH = 3*, ma anche la *geom.VFH = 3*, siccome se metto dentro l'EW trovo una matrice vuota.

• $B = \begin{pmatrix} X & 0 & 0 \\ 0 & X & Y \\ 0 & 0 & X \end{pmatrix}$ $\rightarrow$ EW X mit *alg.VFH = 3*, ma la *geom.VFH ≠ 3*, siccome se metto dentro l'EW non trovo una matrice vuota.

6.8 EW Problem Symmetrischer Matrizen: $A^T = A$

Für eine symmetrische reelle Matrix A gilt:

i) Alle EW von A sind reell ($\in \mathbb{R}$).

ii) EV zu verschiedenen EW von A sind orthogonal. Wenn $geom.VFH(\lambda_k) > 1$, dann darf Gram-Schmiedt (4.9 ONB) auf E_{λ_k} angewendet werden und EB bleibt erhalten.

iii) A ist halbeinfach $\rightarrow$ diagonalisierbar

iv) $\exists$ orthonormale EB zu A (vettori riga e colonna $\perp$ tra di loro e di modulo 1)

v) $\exists$ orthogonale Martix T so, dass

$$T^TAT = T^{-1}AT = diag(d_1, \dots, d_n)$$

- **Beispiel:** Ist A invertierbar? $\rightarrow$ EW$\neq 0$($\det(A) \neq 0$). Kann man T orthogonal wählen? $\rightarrow$ Nein, A muss symmetrisch sein

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 4 & -4 \\ 0 & 5 & -8 \\ 0 & 4 & -7 \end{pmatrix}$$

- **Beispiel:** Von der 3x3-Matrix A sind die Eigenwerte und die Eigenvektoren bekannt. Ist A diagonalisierbar? Falls ja, bestimmen Sie A.

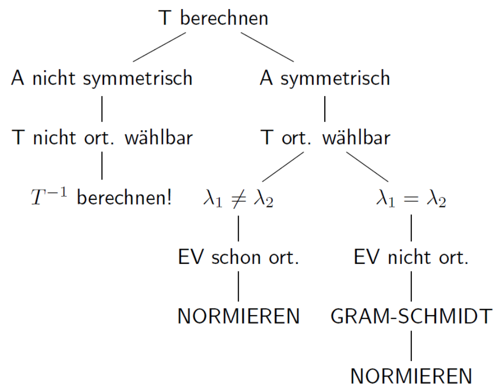
$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \text{für } \lambda_1 = 0 \qquad \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} \text{für } \lambda_2 = -3 \qquad \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \text{für } \lambda_3 = 3$$

$\rightarrow$ A diag.bar falls $alg.VFH = geom.VFH$

A bestimmen $\rightarrow$ A ist diag.bar, also gilt: $A = TDT^{-1}$

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad und \quad T = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 2 & 5 & 2 \\ 3 & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

Aber A ist nicht symmetrisch, also man muss T^{-1} berechnen (Gauss-Jordan)



6.9 Potenzen von Matrizen und Exponentialfunktionen:

- **Potenzen von Matrizen:**

$$A = TDT^{-1} \rightarrow A^k = TD^kT^{-1} = Tdiag(\lambda_1^k, \dots, \lambda_n^k)T^{-1}$$

Berechnung von $y = A^kx = TD^k\underbrace{T^{-1}x}_{:=z}$:

1) Eigenwerteproblem von A lösen; T & D bestimmen,
2) $Tz = x$ nach z auflösen,
3) $A^kx = TD^kz$ berechnen.

- **Exponentialfunktionen einer Matrix:**

Berechnung von e^A: $A \in \mathbb{C}^{nxn}$; D und T wie üblich,

$$e^A = Tdiag\left(e^{\lambda_1}, \dots, e^{\lambda_n}\right)T^{-1} = Te^DT^{-1}$$

A symmetrisch ($\rightarrow$ T orthogonal wällbar):

$$e^A = Te^DT^T$$

Und gilt:
- $e^{A^T} = (e^A)^T$
- e^{tA} stetig differenzierbar: $\frac{d}{dx}(e^{tA}) = A \cdot e^{tA}$
- $(e^A)^{-1} = e^{-A}$
- $e^{P^{-1}AP} = P^{-1}e^AP$
- $\det(e^A) = e^{spur(A)}$

- **Beispiel:** $A = \begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$ $\quad D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ $\quad T = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$$e^A = Te^DT^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e^2 & 0 \\ 0 & e^{-1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2e^2 - e^{-1} & -2e^2 + 2e^{-1} \\ e^2 - e^{-1} & 2e^{-1} - e^2 \end{pmatrix}$$

$$det(e^A) = \dots = e^{spur(A)} = e^{5-4} = e$$

- **Tipps:** $e^A \cdot e^B = e^{A+B} \leftrightarrow$ (solo se) $\leftrightarrow AB = BA$

- **Beispiel:** $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ non diagonalizzabile: Taylor!!

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \; A^3 = A^4 = \dots = 0$$

$$e^A = \mathbb{I}_3 + A + \frac{1}{2}A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

6.10 Matrixnorm:

Kriterien:
(N1, N2, N3) Gleich wie bei den Vektoren (a ⍰ A)
(N4)||Ax||_*≤||A||_* ||x||_*
(N5) ||AB||_*≤||A||_* ||B||_*

i) Für jede $A \in \mathbb{R}^{nxn}$ gilt: $\|A\|_2 = \sqrt{\mu_{max}} = \sqrt{maximale\ EW\ von\ A^T \cdot A}$

& *regulär* $\quad \|A^{-1}\|_2 = \frac{1}{\sqrt{\mu_{min}}} = \frac{1}{\sqrt{minimale\ EW\ von\ A^T \cdot A}}$

$\|A\|_1 = maximale\ Spaltensummennorm$

$\|A\|_\infty = Zeilensummennorm$

- **Tipps:** $\|A\|_1$ → Sommo gli elementi delle colonne in **valore assoluto** e prendo il più grande. $\|A\|_\infty$ → Sommo gli elementi delle righe in **valore assoluto** e prendo il più grande.

ii) Für jede symmetrische A gilt: $\|A\|_2 = \max(|\lambda_i|)$, λ_i *EW von A*

& regular $\quad \|A^{-1}\|_2 = \frac{1}{\min(|\lambda_i|)}$

iii) Falls A orthogonal gilt: $\|A\|_2 = 1$ in quanto $A^T A = \mathbb{I}$.

6.11 Quadratische Form und HAT:

Sei $A \in \mathbb{R}^{nxn}$ symmetrisch. Dann heisst $q_A(x) = \langle x, Ax\rangle = x^T A x$ **quadratische Form** von A.

- Normalform:
1) A symmetrisch, $\varepsilon = \{e^{(1)}, \dots, e^{(n)}\}$ die Standardbasis in $\mathbb{R}^n$,
   $B = \{t^{(1)}, \dots, t^{(2)}\}$ eine orthonormale Eigenbasis von A,
2) Löse EW Problem von A,
3) Normare e ortogonalizzare T! (Se necessario: Gram-Schmidt) so dasss:
   $$T^T A T = diag(d_1, \dots d_n) =: D$$
   → T ist die Transformationsmatrix von B zu ε
4) Sei $y = T^T x \rightarrow x = Ty$,
5) $q_A(x) = x^T A x = y^T D y$, a volte per esempio $q_A(x) = 9$
6) Jetzt die quadratische Form enthält keine gemischte Terme.

- **Tipps:** Gegeben sei q(x) = 9. Wir finden die EW 1, 3 e -3. Welche HA schneitet nicht die Quadrik? Die Hauptachse zum negativen Eigenwert schneidet {x | q(x) = 9} nicht. Weil: $Av = -3v$ und folgt dass $q(v) = v^T A v = -v^T(-3v) = -3\|v\|^2 \leq 0$.

- Beispiel: Geg. sei die quadratische Form:
$q: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ q(x) = -\frac{1}{2}x_1^2 + \sqrt{3}x_1x_2 + \frac{1}{2}x_2^2 \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, finden Sie A, so dass $q(x) = x^T A x$ gilt:

$x^T A x = (x_1 \;\; x_2) \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = ax_1^2 + 2bx_1x_2 + cx_2^2 \quad A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}$ Attenzione a dividere per 2 il coefficiente b.

Führen sie HAT $y = Tx$ und gegeben die Normalform an.

1. EW Problem von A lösen und T normieren:
$E_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix} \quad E_{-1} = \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ -1 \end{pmatrix} \rightarrow B = T = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}$

2. $x = Ty$: $\rightarrow q(x) = x^T A x = (Ty)^T A (Ty) = y^T D y = (y_1 \;\; y_2) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = y_1^2 - y_2^2$

6.12 Kegelschnitte:

$Q = \{x \in \mathbb{R}^n | x^T A x + a^T x + b = 0,\ a \in \mathbb{R}^n,\ b \in \mathbb{R}\}$ heisst **Kegelschnitt/Quadrik**.

- Beispiel: Gegeben sei die quadratische Form
$$q_A(x) = 6x_1^2 - 4x_1x_2 + 3x_2^2 \qquad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Finde eine Symmetrische A für $q(x) = x^T A x$: $A = \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$

Für Quadriken: $x^T A x = (x_1 \;\; x_2 \;\; x_3) \cdot \begin{pmatrix} a & b & e \\ b & c & d \\ e & d & f \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} =$

$ax_1^2 + 2bx_1x_2 + cx_2^2 + 2dx_2x_3 + fx_3^2 + 2ex_1x_3$ non dimenticare /2

- Beispiel: Ein Kegelschnitt Q ist gegeben durch:
$q(x) + a^T x = 0 \quad \rightarrow \quad q(x) + (a_1 \;\; a_2)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0 \quad , \quad a = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \end{pmatrix}$
Führen Sie HAT $x = Ty$ und eine Transl. und bringe Q in Normalform.

1. Eigenwerte Problem von A lösen:
$E_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad E_7 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ → Normieren $T = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

2. $x = Ty$: $\rightarrow q(Ty) + a^T Ty = y^T D y + a^T T y = (y_1 \;\; y_2) \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + (4 \;\; 8)\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = 2y_1^2 + 7y_2^2 + \frac{20}{\sqrt{5}}y_1 = 0$

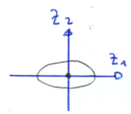
→ Quadratische Ergänzung: $= 2\left(y_1^2 + \frac{10}{\sqrt{5}}y_1\right) + 7y_2^2 =$
$= 2\left(y_1 + \sqrt{5}\right)^2 + 7y_2^2 = 10$

3. Translation: $z = y + c \quad \rightarrow \quad \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sqrt{5} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 + \sqrt{5} \\ y_2 \end{pmatrix}$

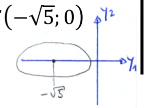
4. Normalform: $\frac{z_1^2}{5} + \frac{7z_2^2}{10} = 1$ → Ellipse mit Halbachsen $a = \sqrt{5} \quad b = \sqrt{\frac{10}{7}}$

5. Skizzieren Sie Q in x-Koord.system:

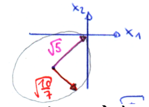
Z
- Centro: (0,0)
- Halbachsen *a, b*
- Direzioni: $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$



Y
- Centro $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 + \sqrt{5} \\ y_2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sqrt{5} \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow C(-\sqrt{5}; 0)$
- Halbachsen *a, b*
- Direzioni: $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$



X
- Centro: $T \cdot \begin{pmatrix} -\sqrt{5} \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\sqrt{5} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}$
- Halbachsen *a, b* (unverändert)
- Direzioni $x_1 = T \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad x_2 = T \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$



Richtung Halbachsen: sempre relativo alla coordinata
$\sqrt{5}$ era Halbachse di z_1 e y_1 → trasformo in x_1 → è anche il suo

Die Normalformen der Quadriken im $\mathbb{R}_3$ (Konstante a, b, c, p alle $\neq 0$)

Rang $A = 3$ (Alle Eigenwerte $\neq 0$)

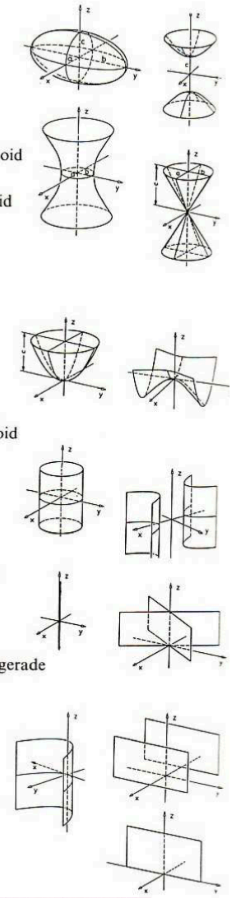
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$	Ellipsoid (evtl. Kugel)
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} + 1 = 0$	leere Menge
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} + 1 = 0$	zweischaliges Hyperboloid
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$	einschaliges Hyperboloid
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0$	Punkt
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$	Kegel

Rang $A = 2$ (Ein Eigenwert $= 0$)

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 2pz = 0$	elliptisches Paraboloid
$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 2pz = 0$	hyperbolisches Paraboloid
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + 1 = 0$	leere Menge
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$	elliptischer Zylinder
$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + 1 = 0$	hyperbolischer Zylinder
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$	Gerade
$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$	Ebenenpaar mit Schnittgerade

Rang $A = 1$ (Zwei Eigenwerte $= 0$)

$x^2 - 2py = 0$	parabolischer Zylinder
$x^2 - a^2 = 0$	paralleles Ebenenpaar
$x^2 + a^2 = 0$	leere Menge
$x^2 = 0$	Ebene



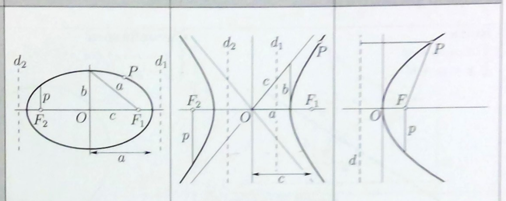
Equazione generale

$\boxed{Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0}$ con $(A; B; C) \neq (0; 0; 0)$

Siano $\Delta = \begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix}$ e $\delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix}$

Se $\Delta \neq 0$ e $\delta > 0$ la conica è un'ellisse se $(A + C)\Delta < 0$
$\delta = 0$ la conica è una parabola
$\delta < 0$ la conica è un'iperbole
Se $\Delta = 0$ la conica è degenere.

	Ellisse	Iperbole	Parabola
Definizione	$PF_1 + PF_2 = 2a$	$\|PF_1 - PF_2\| = 2a$	$PF = \delta(P;d)$
Semidistanza focale c	$c^2 = a^2 - b^2$	$c^2 = a^2 + b^2$	
Eccentricità	$e = \frac{c}{a} < 1$ ($e = 0$: circonferenza)	$e = \frac{c}{a} > 1$	$e = 1$
Parametro focale	$p = \frac{b^2}{a}$	$p = \frac{b^2}{a}$	p
Fuochi	$F_1(c;0)$, $F_2(-c;0)$	$F_1(c;0)$, $F_2(-c;0)$	$F(\frac{p}{2};0)$
Equazione cartesiana	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$	$y^2 = 2px$
Tangente in $P_1(x_1;y_1)$	$\frac{x_1 x}{a^2} + \frac{y_1 y}{b^2} = 1$	$\frac{x_1 x}{a^2} - \frac{y_1 y}{b^2} = 1$	$y_1 y = px + px_1$
Tangenti di pendenza m	$y = mx \pm \sqrt{a^2m^2 + b^2}$	$y = mx \pm \sqrt{a^2m^2 - b^2}$	$y = mx + \frac{p}{2m}$
Direttrici	$x = \pm \frac{a^2}{c} = \pm \frac{a}{e}$	$x = \pm \frac{a^2}{c} = \pm \frac{a}{e}$	$x = -\frac{p}{2}$
Asintoti		$y = \pm \frac{b}{a} x$	
Equazioni parametriche	$\begin{cases} x = a\cos(t) \\ y = b\sin(t) \end{cases}$	$\begin{cases} x = \pm a\cosh(t) \\ y = b\sinh(t) \end{cases}$	$\begin{cases} x = pt^2 \\ y = \sqrt{2}pt \end{cases}$



6.13 Lokale Extrema:

Sei $A \in \mathbb{R}^{mxm}$ symmetrisch. Seien:

$p =$ Anzahl positive Eigenwerte von A
$n =$ Anzahl negative Eigenwerte von A
$z = m - p - n =$ algVFH von $\lambda = 0$

Dann heisst (p, n, z) **Signatur** von A.

Die quadratische Form $q_A(x) = x^T Ax$ heisst:
1. **positiv definit**, falls für $x \neq 0$ gilt $q_A(x) > 0$,
2. **negativ definit**, falls für $x \neq 0$ gilt $q_A(x) < 0$,
3. **positiv semidefinit**, falls $\forall x$ gilt $q_A(x) \geq 0$,
4. **negativ semidefinit**, falls $\forall x$ gilt $q_A(x) \leq 0$,
5. **indefinit**, falls $q_A(x)$ sowohl positive und negative Werte annimmt.

Mit bekannte EW:
1. $D = diag(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ ist positiv definit $\leftrightarrow$ $\alpha_i > 0 \ \forall i$
2. $A \in \mathbb{R}^{nxn}$ ist symmetrisch und A ist positiv definit $\leftrightarrow \lambda_i > 0 \ \forall i$
3. $A \in \mathbb{R}^{nxn}$ ist symmetrisch und A ist positiv definit $\leftrightarrow$ $W^T AW$ ist positiv definit für jedes reguläre W
4. $D = diag(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ ist negativ definit $\leftrightarrow$ $\alpha_i < 0 \ \forall i$
5. $A \in \mathbb{R}^{nxn}$ ist symmetrisch und A ist negativ definit $\leftrightarrow \lambda_i < 0 \ \forall i$
6. $A \in \mathbb{R}^{nxn}$ ist symmetrisch und A ist negativ definit $\leftrightarrow$ $W^T AW$ ist negativ definit für jedes reguläre W
7. $A \in \mathbb{R}^{nxn}$ ist symmetrisch und A ist indefinit $\leftrightarrow$ positive und negative Eigenwerte.

Satz: Hurwitz-Kriterium (ohne EW):
→ A ist positiv definit wenn **alle** Unterdeterminanten > 0 sind,
→ A ist negativ definit wenn die Unterdeterminanten **alternierend Vorzeichen** haben (i pari • • > 0; i dispari • • < 0),
→ A indefinit wenn die Unterdeterminanten folgen **keine Regel**.

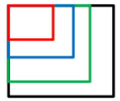
- Beispiel (Positiv definit A^n): Gegeben sei $A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$. Für welche Werte $n = 0,1,2,3, \dots$ ist die Matrix A^n positiv definit?

Positiv definit wenn alle EW positiv sind (A^n hat die EW λ^n). Calcolo gli EW e vedo se ne ho di negativi → n deve essere pari!

Extrema finden: $(a \in \mathbb{R}^n)$
1) Kritische Punkte mit $grad(f(a)) = 0$ finden
2) Hessche Matrix* bilden
3) Unterdeterminanten berechnen
4) $H_f(a)$ positiv definit $\leftrightarrow$ lokales Minimum
$H_f(a)$ negativ definit $\leftrightarrow$ lokales Maximum
$H_f(a)$ indefinit $\leftrightarrow$ Sattelpunkt

*Hessche Matrix:

$$H_f(a) = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix} \qquad H_f(a) = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} & f_{xz} \\ f_{yx} & f_{yy} & f_{yz} \\ f_{zx} & f_{zy} & f_{zz} \end{pmatrix}$$



H_1 H_2 H_3 H_4

Für 2x2 Hessche Matrizen:
→ $\Delta = 0$: inutile
→ $\Delta < 0$: Sattelpunkt
→ $\Delta > 0$: **minimo** se $f_{xx} > 0$, **massimo** se $f_{xx} < 0$

7. Skalarprodukt:

Das Skalarprodukt ist eine Vorschrift, die jedem Vektorpaar x, eine reelle Zahl $\langle x, \rangle$ zuordnet.

Sei V ein (reellen) VR. Eine Abb. $\langle \cdot,\cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto \langle x, y \rangle$ heisst Skalarprodukt, falls gilt:

(S1) Linear im ersten Faktor:
i) $\langle x, y + z \rangle = \langle x, y \rangle + \langle x, z \rangle$
ii) $\langle \alpha x, y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle$ $\quad \forall x, y \in V, \forall \alpha \in \mathbb{R}$
Oder: i) + ii) $\langle x, \lambda y + z \rangle = \lambda \langle x, y \rangle + \langle x, z \rangle$
(S2) Symmetrisch: $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$ $\quad \forall x, y \in V$
(S2') Falls komplex: $. < x, y \geq \overline{< y, x >}$ ∀x, y ∈ V
(S3) Positiv definit: $\langle x, x \rangle \geq 0 \ \ \forall x \in V$ und $\langle x, x \rangle = 0 \leftrightarrow x = 0$

- Tipps: Für welche Matrix A ist $\langle x, y \rangle := \frac{1}{3} x^T Ay$ ein Skalarprodukt?
A deve essere simmetrica, avere gli EW positivi, diversi da 0.
$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ → Singulär → EW negativi, $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$ → EW negativi, $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$ → no simmetrica

- Nützliches: Vektorprodukt, Skalar Produkt und Spat Produkt

$$a \times b := \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ ab_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix} \qquad |a \times b| = |\vec{a}||\vec{b}| sin\theta$$

$$\langle a, b \rangle = |\vec{a}||\vec{b}| cos\theta = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

$$S(a, b, c) := (a \times b) \cdot c \qquad S(a, b, c) = \det(a, b, c)$$

Se sono perpendicolari, prodotto scalare = 0. $|x \times y|$ è l'area del parallelogramma formato dai due vettori.
$|S(a, b, c)|$ ist das Volumen des von a, b, c aufgespannten Parallelepipeds (Spat) ist.

- Beispiel: Ist $\langle f, g \rangle = \int_{-1}^{1} f(x) \cdot g(x) \cdot x^2 dx$ ein SP?
- $\langle f, \lambda g \rangle = \int_{-1}^{1} \lambda f g x^2 dx = \lambda \langle f, g \rangle$ ✓
- $\langle f, g \rangle = \langle g, f \rangle$ triviale ✓
- $\langle f, g + h \rangle = \int_{-1}^{1} (fg + fh) \cdot x^2 dx = \langle f, g \rangle + \langle f, h \rangle$ ✓
- $\langle f, f \rangle = \int_{-1}^{1} f^2 \cdot x^2 dx > 0$ und se $f = 0 \to \langle f, f \rangle = 0$ ✓

- Beispiel: Dimostra che $\langle x, y \rangle_A := x^T Ay$ è uno SKP. Geg. A
- $\langle x_1 + x_2, y \rangle_A = (x_1 + x_2)^T Ay = \langle x_2, y \rangle_A + \langle x_1, y \rangle_A$ ✓
- $\langle \lambda x, y \rangle_A = (\lambda x)^T Ay = \lambda \langle x, y \rangle_A$ ✓
- $\langle x, y \rangle_A = x^T Ay = (x_1 \ x_2) \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \dots = y^T Ax = \langle y, x \rangle_A$ ✓
- $\langle x, x \rangle_A$ positiv? A positiv definit! Tutti EW > 0 oppure Hurzwiz. ✓

- Beispiel (Gram-Schmidt): Sei $\langle p, q \rangle = \int_0^1 p(x) \cdot q(x) dx$ Finden Sie eine ONB für $span 1, 3x^4$

$$e^{(1)} = \frac{w_1(x)}{\|w_1(x)\|} = \frac{w_1(x)}{\|\langle w_1, w_1 \rangle\|} = 1$$

$$e^{(2)'} = w_2 - \langle w_2, e^{(1)} \rangle \cdot e^{(1)} = 3x^4 - \int_0^1 3x^4 dx = 3x^4 - \frac{3}{5}$$

$$e^{(2)} = \frac{3x^4 - 3/5}{\sqrt{\langle (3x^4 - 3/5), 3x^4 - 3/5) \rangle}} = \dots = 15x^4 - \frac{3}{4}$$

7.1 Begriffe:

- Zwei Vektoren $x, y \in V$ heissen **orthogonal**, falls $\langle x, y \rangle = 0$

$$cos\varphi = \frac{\langle a, b \rangle}{\|a\| \cdot \|b\|}$$

- Die auf $(V, \langle \dots \rangle)$ durch $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ definierte Norm heisst **induzierte Norm** («lunghezza»). Eine Norm wird genau dann von einem Skalarprodukt induziert, wenn die **Parallelogrammregel** gilt:

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$$

- Skalarprodukt von zwei Funktionen: $V = C([a,]; \mathbb{R})$, seien $f, g \in V$. Dann ist

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x) g(x) dx$$

ein Skalarprodukt.

- Sei V ein VR mit Skalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle$, dann gilt:
  - i) Projektion $\vec{a}$ auf $\vec{b}$: $\langle\vec{a},\vec{b}\rangle\cdot\vec{b}$
  - ii) Orthogonalprojection $\vec{a}$ auf $\vec{b}$: $\frac{\langle\vec{a},\vec{b}\rangle}{\langle\vec{b},\vec{b}\rangle}\cdot\vec{b}$
  - iii) Cauchy-Schwarz: $\langle\vec{a},\vec{b}\rangle^2\le\langle\vec{a},\vec{a}\rangle\cdot\langle\vec{b},\vec{b}\rangle$
  - iv) Pytagora: $\vec{a}\perp\vec{b}$ $\quad\|\vec{a}+\vec{b}\|^2=\|\vec{a}-\vec{b}\|^2=\|\vec{a}\|^2+\|\vec{b}\|^2$

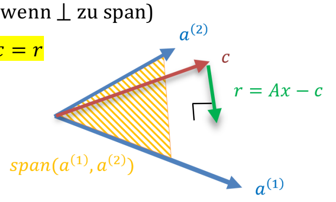
8. Ausgleichrechnung – Methode der kleinsten Quadrate:

- Gegeben: überbestimmte LGS: #Gleichungen >> #Unbekannte
$Ax=c$, m Gleichungen, n Unbekannten, $m>n$.

- Idee: Man löst Gleichungen und man wählt die Lösung bei den die Fehlerquadrate minimal sind (genau wenn $\perp$ zu span)

- Fehlergleichungen: $Ax-c=r$

A: Koeffizientenmatrix von x
c: Messresultate
r: Residuenvektor; Messfehler



8.1 Normalgleichungen:

Sei $A\in\mathbb{R}^{mxn}, c\in\mathbb{R}^m$. Die Lösung des Minimierungsproblems $\|Ax-c\|_2=\|r\|_2=$ min ist gegeben durch: **(Laenge Residuenvektor)**

$A^TAx=A^Tc$ → **Normalgleichung**

Es gilt: $\quad rang(A)=n\leftrightarrow$ hat immer eine Lösung

- Beispiel:

x_i	-1	0	1	2
y_i	0	1	3	4

Bestimmen Sie ein Polynom $y=f(x)=ax^2+bx+c$ so dass die Summe der Fehlerquadrate in y-Richtung $\sum_{i=4}^{4}[f(x_i)-y_i]^2$ minimal wird.

→ LGS bilden: $\quad y_i=f(x)=ax_i^2+bx_i+c$

$$1\cdot a+1\cdot b+c=f(-1)=0$$
$$0\cdot a+0\cdot b+c=f(0)=1$$
$$1\cdot a+1\cdot b+c=f(1)=3$$
$$4\cdot a+2\cdot b+c=f(2)=4$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix}1&1&1\\0&0&1\\1&1&1\\4&2&1\end{pmatrix}}_{A}\cdot\underbrace{\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}}_{x}=\underbrace{\begin{pmatrix}0\\1\\3\\4\end{pmatrix}}_{f}$$

$$\to A^TAx=A^Tf$$

$$\begin{pmatrix}1&0&1&4\\-1&0&1&2\\1&1&1&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&1&1\\0&0&1\\1&1&1\\4&2&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&1&4\\-1&0&1&2\\1&1&1&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\3\\4\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}18&8&6\\8&6&2\\6&2&4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}19\\11\\8\end{pmatrix}\quad\to\quad a=0,\ b=\frac{7}{5}, c=\frac{13}{10}$$

→ Das entspricht ein Polynom $f(x)=\frac{7}{5}x+\frac{13}{10}$

- Interpolazione di Lagrange: (non fai (x_i-x_i) perchè ti esce 0!)

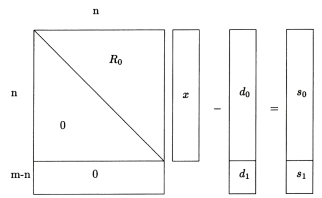
$$L_i(x)=\frac{(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\dots(x-x_n)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\dots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\dots(x_i-x_n)}$$
$$p(x)=y_0L_0(x)+y_1L_1(x)+\dots+y_nL_n(x)$$

8.2 QR-Zerlegung:

- Satz: $A\in\mathbb{R}^{mxn}, m\ge n$, dann existiert $Q\in\mathbb{R}^{mxm}$ orthogonal so dass $A=QR$ mit $R=\begin{pmatrix}R_0\\0\end{pmatrix}$, wobei $R_0\in\mathbb{R}^{nxn}$ eine obere Dreiecksmat. ist.

- Bemerkungen: $rang(A)=n\leftrightarrow R_0$ regulär
Q: Oft Givens-Rotationsmatrizen

- QR-Zerlegung-Kochrezept:
1) $R=Q^TA$
2) $d=Q^Tc$ (c transformieren)
3) $R_0x=d_0$ (Ruckwärtseinsetzen) → x
4) $\|r\|_2=\|d_1\|_2$ $\quad d_1$ die unteren m-n-Zeilen von d



- Tipps: Se uso più Givens-Rotationsmatrix, la $Q^T=U_{32}^T\cdot U_{31}^T$

- Beispiel:
$$x_1+x_2-1=r_1$$
$$x_2-3=r_2$$
$$x_2-4=r_3$$

Bestimmen Sie die Lösung des Ausgleichsproblems mit der QR-Zerlegung ($Q=R_\varphi(x)$)

→ $A=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\\0&1\end{pmatrix}, c=\begin{pmatrix}1\\3\\4\end{pmatrix}$ Attenzione al segno di c!

$$Q^TA=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&cos\varphi&sin\varphi\\0&-sin\varphi&cos\varphi\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&1\\0&1\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1\\0&cos\varphi+sin\varphi\\0&cos\varphi-sin\varphi\end{pmatrix}$$
$$\to R_0=\begin{pmatrix}1&1\\0&cos\varphi+sin\varphi\end{pmatrix}$$

Das heisst, dass die letzte Zeile von R verschwinden muss. Das ist nur der Fall, wenn $cos\varphi=sin\varphi\to\ \varphi=\frac{\pi}{4}$

Also $Q^TA=\begin{pmatrix}1&1\\0&\sqrt{2}\\0&0\end{pmatrix}$

$$d=Q^Tc=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\frac{\sqrt{2}}{2}&\frac{\sqrt{2}}{2}\\0&-\frac{\sqrt{2}}{2}&\frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\3\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\\frac{7\sqrt{2}}{2}\\\frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}$$
$$R_0x=d_0=\begin{pmatrix}1&1\\0&\sqrt{2}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}$$

$x=\begin{pmatrix}-\frac{5}{2}\\\frac{7}{2}\end{pmatrix}$ → minimale Fehler: $\|d_1\|_2=\frac{\sqrt{2}}{2}$

- Beispiel: $A=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\\1&1\end{pmatrix}$ → obbiettivo: $\begin{pmatrix}*&*\\0&*\\0&0\end{pmatrix}$

1) Schritt: a_{31} zu Null $\begin{pmatrix}cos\varphi&0&sin\varphi\\0&1&0\\-sin\varphi&0&cos\varphi\end{pmatrix}\cdot A=A_1$

2) Schritt: a_{32} zu Null $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&cos\varphi&sin\varphi\\0&-sin\varphi&cos\varphi\end{pmatrix}\cdot A_1=R$

→ $U_{32}^T\cdot U_{31}^T\cdot A=R\to Q^T\cdot A=R$

9. Differentialgleichungen (DGL):

9.1 Lineare DGL Systeme 1° Ordnung:

- Gegeben ist das folgende System von DGL erste Ordnung:
$$y'_1=a_{11}y_1+a_{12}y_2$$
$$y'_2=a_{21}y_1+a_{22}y_2$$

→ der kann so beschreiben sein $y'=Ay$
Wenn 2x2: $P_a(\lambda)=\lambda^2-spur(A)\cdot\lambda+\det(A)$

wobei $y'=\begin{pmatrix}y'_1\\y'_2\end{pmatrix}$, $\ y=\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}$, $\ A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{pmatrix}$

Die Lösung lautet
$$y(x)=e^{Ax}\cdot y_0=Tdiag\left(e^{\lambda_1x},e^{\lambda_2x},\dots,e^{\lambda_nx}\right)T^{-1}y_0$$
Die Lösungsmenge der DGL ist ein *n-dimensionaler* Unterraum von $C^1(\mathbb{R}^n)$

- Vorgehen: (A muss diagonalisierbar sein!)
1) EW Problem von A lösen → T und D finden,
2) Man macht die Substitution $y=T\cdot z(x)$ aus einer kurzen Berechnung folgt, dass $z'=D\cdot z$ Unseres System hat also jetzt die Form $z'_i=\lambda_i\cdot z_i$
Man sagt, dass hetzt das System *entkoppelt* ist.
3) Ansatz: $z(x)=e^{\lambda x}\cdot\vec{c}$
$$\Rightarrow z(x)=diag\left(e^{\lambda_1x},e^{\lambda_2x},\dots,e^{\lambda_nx}\right)\cdot\begin{pmatrix}c_1\\\vdots\\c_n\end{pmatrix}$$
4) Substitution:
$$y(x)=T\cdot z(x)=c_1\cdot e^{\lambda_1x}\cdot t^{(1)}+\dots+c_n\cdot e^{\lambda_nx}\cdot t^{(n)}$$
wo $t^{(1)},\dots,t^{(n)}$ die Eigenvektoren von $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ sind.

- Anfangswertproblem: Mit einer Anfangsbedingung $y(0) = y_0$ gegeben:

- Vorgehen:

1) Allgemeine Lsg des Systems bestimmen
2) Anfangsbedingungen einsetzen: $y(0) = T \cdot z(0) = y_0$ (inserisco lo 0 al posto della x → rimane solo il vettore c moltiplicato per gli Spalte di T)
3) Löse $T \cdot c = y_0$
   Falls T orthogonal: $c = T^T \cdot y_0$

- Besipiel: Sei $A = \begin{pmatrix} -6 & 0 & 2 \\ -9 & 3 & 1 \\ -9 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. Finden Sie die Lsg von $y' = Ay$

Lösung: → EW und EV von A bestimmen:

$$y(x) = c_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + c_2 \cdot e^{3x} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_3 \cdot e^{-3x} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Frage: Für welche Anfangswerte $y_1(0),\ y_2(0),\ y_3(0)$ gilt

$$lim_{x \to \infty} y(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

- e^{3x} va a infinito → $c_2 = 0$,
- e^{-3x} va a 0 → c_3 può assumere qualsiasi valore,
- Per ottenere la soluzione desiderata c_1 deve valere 1.

Neue Lsg: $1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + c_3 \cdot e^{-3x} \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad c_3 \in \mathbb{R}$

Für $y(0) = \begin{pmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \\ y_3(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + c_3 \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad c_3 \in \mathbb{R}$

- Beispiel: Sei $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}$.

Frage: Lösen Sie das Anfangsproblem für $y(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \end{pmatrix}$

Lösung: → EW Problem von A lösen:

$$\Rightarrow y(x) = c_1 \cdot e^{4x} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + c_2 \cdot e^{-x} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Anfangsbedingung einsetzen:

$$\Rightarrow y(0) = c_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + c_2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \end{pmatrix}$$

LGS lösen für c_1 und c_2 → $c_1 = 2,\ c_2 = -2$

Also ist die allgemeine Lösung: $y(x) = 2 \cdot e^{4x} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} - 2 \cdot e^{-x} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

- Beispiel: Die Lsg eine DGL System lautet:

$$y(x) = c_1 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 \cdot e^{-3x} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + c_3 \cdot e^{6x} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Frage: Für welche Anfangswerte $y_1(0),\ y_2(0),\ y_3(0)$ gilt

1. $lim_{x \to \infty} y_3(x) = 2$,
2. $y_2(0) = 0$

Lösung: Da **1.** $\Rightarrow y_3(x \to \infty) = 1 \cdot c_1 + 2 \cdot c_2 \cdot 0 + 1 \cdot c_3 \cdot \infty) = 2$

- $c_3 = 0!$
- c_2 beliebig unbestimmt
- Segue che per forza $c_1 = 2$

Da **2.** $\Rightarrow y_2(0) = 2 \cdot c_1 + 1 \cdot c_2 + 0 \cdot c_3 = 0 \to 4 + c_2 = 0$
Segue che $c_2 = -4$

$$y(x) = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} + e^{-3x} \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ -4 \\ -8 \end{pmatrix}$$

Also für $y(0)$ gilt: $\begin{pmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \\ y_3(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ -6 \end{pmatrix}$

9.2 Lineare DGL Systeme 2° Ordnung:

- Analog zu 1° Ordnungrad, aber hier $y'' = Ay$,
- Die Anfangsbedingungen lauten $y(0) = y_0,\ y'(0) = y'_0 \ \in \mathbb{R}^n$,
- Die Lösungsmenge ist ein *n-dimensionaler* Unterraum von $C^1(\mathbb{R}^n)$.

- Vorgehen: Gegeben sei $y'' = Ay$, wobei A muss diag.bar sein:

1) EW und EV von A bestimmen, T und D finden,
2) Substitution $y = T \cdot z$
   Berechnung $z'' = D \cdot z$
   Unseres System hat also jetzt die Form $z''_i = \lambda_i \cdot z_i$ → System *entkoppelt*,
3) Man setzt $\omega_i = \sqrt{-\lambda_i}$ Die neue Form des Systems ist der ein harmonischer Oszillator
   $$z'' + \omega_i^2 \cdot z = 0$$
   → ω_i: Frequenzen der Schwingung
4) Allgemeine Lösung ein solches Problem:
   $$z_i(x) = a_i \cdot \cos(\omega_i x) + b_i \cdot \sin(\omega_i x)$$
   wobei a_i und b_i Konstanten sind,
5) Substitution
   $$y(x) = T \cdot z(x) = [a_1 \cdot \cos(\omega_1 x) + b_1 \cdot \sin(\omega_1 x)] \cdot t^{(1)} + \cdots + [a_n \cdot \cos(\omega_n x) + b_n \cdot \sin(\omega_n x)] \cdot t^{(n)}$$
   wo $t^{(1)}, \ldots, t^{(n)}$ die Eigenvektoren von $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sind.

- Anfangswertproblem: Mit einer Anfangsbedingungen $y(0) = y_0$ und $y'^{(0)} = y'_0$ gegeben:

- Vorgehen:

1) Allgemeine Lösung des Systems bestimmen,
2) Anfangsbedingungen einsetzen:
   $$y(0) = T \cdot z(0) = y_0$$
   $$y'(0) = T \cdot z'(0) = y'_0$$
3) $z(0)$: Vektor c
   $z'(0)$: Vektor d (→ Unbekannten)
   Es ist sehr wichtig zu beachten, dass $d_i = \omega_i \cdot e_i$ Man löst die LGS
   $$T \cdot c = y_0 \ \to \ \text{(Anf.bed. di } y(x))$$
   $$T \cdot d = y'_0 \ \to \ \text{(Anf.bed. di } y'(x))$$
   Falls T orthogonal ist: $c = T^T \cdot y_0$
   $$d = T^T \cdot y'_0$$
4) man muss jetzt $d_i = \omega_i \cdot e_i$ nach e_i auflösen

- Beispiel: Gegeben sei $A = \begin{pmatrix} 5 & -18 \\ 3 & -10 \end{pmatrix}$

Frage: Lösen Sie das DGL System 2° Ordnung $y'' = Ay$

Lösung: → EW Problem von A lösen, T und D finden:

$$D = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}, \qquad T = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Substitution: $y = T \cdot z \to z'' = D \cdot z$

System entkoppeln: $z''_1 = -z_1 \ \Rightarrow \omega_1 = 1$
$z''_2 = -4z_2 \ \Rightarrow \omega_2 = 2$

Ansatz:

$$z_i(x) = a_i \cdot \cos(\omega_i x) + b_i \cdot \sin(\omega_i x)$$
$$\Rightarrow z(x) = \begin{pmatrix} a_1 \cdot \cos(x) + b_1 \cdot \sin(x) \\ a_2 \cdot \cos(2x) + b_2 \cdot \sin(2x) \end{pmatrix}$$

Rücksubstitution: Ricordarsi gli ω_i!

$$y(x) = T \cdot z(x) = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 \cdot \cos(x) + b_1 \cdot \sin(x) \\ a_2 \cdot \cos(2x) + b_2 \cdot \sin(2x) \end{pmatrix}$$

$$\to [a_1 \cdot \cos(x) + b_1 \cdot \sin(x)] \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + [a_2 \cdot \cos(2x) + b_2 \cdot \sin(2x)] \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Frage: Bestimmen Sie die spezielle Lösungen zu den Anfangsbedingungen

$$y(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad y'(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Lösung: Inserire la prima Anfangsbedingung
→ (per $x = 0 \to \sin(x) = 0, \cos(x) = 1$)

$$a_1 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + a_2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{matrix} 3a_1 + 2a_2 = 0 \\ a_1 + a_2 = 2 \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{matrix} a_1 = -4 \\ a_2 = 6 \end{matrix}$$

Derivare l'allg. Lsg!

$$y'(x) = [-a_1 \cdot \sin(x) + b_1 \cdot \cos(x)] \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + [-2a_2 \cdot \sin(2x) + 2b_2 \cdot \cos(2x)] \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Inserire la seconda Anfangsbedingung:
→ (per $x = 0 \to \sin(x) = 0, \cos(x) = 1$)

$$\begin{matrix} 3b_1 + 4b_2 = 1 \\ b_1 + 2b_2 = 0 \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{matrix} b_1 = 1 \\ b_2 = -\frac{1}{2} \end{matrix}$$

Spezielle Lösung:

$$y(x) = [-4 \cdot \cos(x) + \sin(x)] \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \left[6 \cdot \cos(2x) - \tfrac{1}{2} \cdot \sin(2x)\right] \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

9.3 Rückführung zur Systeme 1° Ordnung:

1) Gegeben sei die lineare DGL n-ter Ordnung
   $$y^{(n)} = a_0 \cdot y + a_1 \cdot y' + a_2 \cdot y'' + \cdots + a_{n-1} \cdot y^{(n-1)}$$
2) Substitution: $\begin{matrix} y_0 = y \\ y_1 = y' \\ y_2 = y'' \\ \ldots = \cdots \\ y_{n-1} = y^{(n-1)} \end{matrix}$
3) Nuovo LGS 1° Ordnung:
   $$\begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_{n-2} \\ y_{n-1} \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & \cdots & a_{n-1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_{n-2} \\ y_{n-1} \end{pmatrix} \quad \to \quad y' = Ay$$
4) Löse diese System genau wie 1° Ordnung
   → Die gesuchte Lösung ist $y_0 = y$
5) Diese Methode funktioniert auch bei nicht konstanten Koeffizienten und bei inhomogenen Gleichungen!

- **Beispiel:** Frage: Verwandeln sie diese Gleichung in ein Differentialgleichungssystem 1° Ordnung und finden sie die allgemeine Lösung des Systems $y''(x) = -5y(x) + 4y'(x)$

Lösung:

1) Substitution $y' = y_1$
2) Neues LGS schreiben: $y' = y_1 \qquad y_1' = -5y + 4y_1$
3) $\rightarrow \begin{pmatrix} y \\ y_1 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -5 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y \\ y_1 \end{pmatrix} \rightarrow$ System 1° Ordnung → allg. Lsg
4) EW Problem von A lösen: $\lambda_1 = 2 + i \qquad \lambda_2 = 2 - i$

→ soluzione complessa: presente sempre il suo coniugato!

Eigenvektoren:

$$E_{2+i} = \begin{pmatrix} 2-i \\ 5 \end{pmatrix} \qquad E_{2-i} = \begin{pmatrix} 2+i \\ 5 \end{pmatrix}$$

5) Allg. Lösung:

$$\begin{pmatrix} y \\ y_1 \end{pmatrix} = c_1 \cdot e^{(2+i)x} \cdot \begin{pmatrix} 2-i \\ 5 \end{pmatrix} + c_2 \cdot e^{(2-i)x} \cdot \begin{pmatrix} 2+i \\ 5 \end{pmatrix}$$

→ Komplexe Exponenten: $re^{\pm i\varphi} = r(\cos(\varphi) \pm i\sin(\varphi))$

$$\begin{pmatrix} y \\ y_1 \end{pmatrix} = c_1 \cdot e^{2x} \cdot (\cos(x) + i\sin(x)) \cdot \begin{pmatrix} 2-i \\ 5 \end{pmatrix} + c_2 \cdot e^{2x} \cdot (\cos(x) - i\sin(x)) \cdot \begin{pmatrix} 2+i \\ 5 \end{pmatrix}$$

→ La soluzione che ci interessa è la prima riga!

- **Beispiel:** Frage: Verwandeln Sie dieses DGL-System in ein System 1° Ordnung: $y''(t) = -2y(t) + z(t)$
$z'(t) = -6y(t) + 3z(t)$

Lösung:

- Substitution: $y'(t) = x(t) \qquad y''(t) = x'(t) = -2y(t) + z(t)$
  - → System 1° Ordnung:

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$$

Frage: Berechnen Sie die allgemeine Lösung des neues Systems.

- EW Problem von A lösen: $\lambda_1 = 0, \ \lambda_2 = 1, \ \lambda_3 = 2$
- EV berechnen, T und D finden:

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 6 \end{pmatrix}, \qquad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

- Allg. Lsg:

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = c_1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + c_2 \cdot e^t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + c_3 \cdot e^{2t} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}$$

- **Beispiel:** Welche Dimension hat der Losungsraums des DGLSystem?

$$y_1'' = y_1 + y_2' \qquad y_2''' = y_1'$$

$$z' = A \cdot z \rightarrow \begin{pmatrix} y_1 \\ y_1' \\ y_2 \\ y_2' \\ y_2'' \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_1' \\ y_2 \\ y_2' \\ y_2'' \end{pmatrix}$$

→ Homogene DGL von 5 Differentialgleichungen → Dimension 5

9.4 Inhomogene lineare Systeme:

$S_I \cap S_H = \emptyset$

Es ist ein solcher System gegeben: $y' = A \cdot y + b$

- **Kochrezept:**
  1) Prima risolvere il sist. omog. $(b = 0)$: $y' = A \cdot y \rightarrow$ trovo $y_h(x)$
  2) Trovare la soluzione particolare: $y' = A \cdot y + b \rightarrow$ trovo $y_p(x)$
  3) Soluzione: $y(x) = y_h(x) + y_p(x)$

- **Äquivalente Aussagen:** Seien $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n \in S_H$,
  - $(\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n)$ ist eine Basis von S_H
  - $\forall x \in]a, b[$ gilt $(\phi_1(x), \phi_2(x), \dots, \phi_n(x))$ ist eine Basis von $\mathbb{R}^n$
  - $\exists x \in]a, b[$ gilt $(\phi_1(x), \phi_2(x), \dots, \phi_n(x))$ ist eine Basis von $\mathbb{R}^n$

- Tipps: (Spesso per usare la Wronski-Matrix) Sei $A(x)$ eine *reelle* Matrixfunktion, dann gilt: Ist y eine komplexe Lsg von (H), so sind $Re(y)$ und $Im(y)$ reelle Lsg'en von (H).

$$\left.\begin{matrix} \varphi_1(t) = e^{\lambda_1 t} v_1 \\ \varphi_2(t) = e^{\lambda_2 t} v_2 \end{matrix}\right\} \rightarrow \varphi_H = c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2 = c_1 Re(\varphi_1) + c_2 Im(\varphi_2)$$

- **Beispiel**: Frage: Bestimmen Sie die allg. Lsg des folgendes System:

$$y_1' = -y_1 + ay_2$$
$$y_2' = ay_1 - y_2 + ay_3$$
$$y_3' = ay_2 - y_3$$

Lösung: $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} -1 & a & 0 \\ a & -1 & a \\ 0 & a & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$

→ Wie immer, EW und EV von A berechnen; die Lsg. lautet:

$$y(x) = c_1 \cdot e^{-x} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + c_2 \cdot e^{(-1+\sqrt{2}a)x} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} + c_3 \cdot e^{(-1-\sqrt{2}a)x} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Frage: Lösen Sie das Anfangswertproblem mit $y(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

Lösung: → Einsetzen:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} \qquad \rightarrow \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Die Lsg. lautet: $y(x) = e^{(-1+\sqrt{2}a)x} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} + e^{(-1-\sqrt{2}a)x} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$

Frage: Sei $a = 1$. Finden Sie die allg. Lösung des inhomo. Systems.

$$y' = Ay - b \quad \text{mit} \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Lösung: Wir wählen eine konstante Lsg. $\begin{pmatrix} y_{1p} = a \\ y_{2p} = b \\ y_{3p} = c \end{pmatrix}$, also ihre

Ableitung ist der Vektor $y_p' = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Eventualmente si possono scegliere anche altre soluzioni, fare però attenzione alla derivata! (E di inserirla giusta)

$$\rightarrow y' = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_{1p} \\ y_{2p} \\ y_{3p} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Spostare l'inomogeneità e risolvere l'LGS → $y_p(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Die allg. Lsg: $y(x) = y_h(x) + y_p(x)$

$$c_1 \cdot e^{-x} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + c_2 \cdot e^{(-1+\sqrt{2}a)x} \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} + c_3 \cdot e^{(-1-\sqrt{2}a)x} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- **Beispiel:** Mit Ansatz (gegeben):

$$Y' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{pmatrix} \cdot Y + \begin{pmatrix} 0 \\ \sin(t) \end{pmatrix}$$

Fragen:
1) Bestimmen Sie die homogene Lösung,
2) Bestimmen sie eine partikuläre Lsg mit dem Ansatz $Y(t) = c \cdot \begin{pmatrix} \sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix}$,
3) Bestimmen sie die Allgemeine Lsg. des Systems.

Lösung:

1) • $Y' = AY$ lösen
- EW und EV von A bestimmen $\lambda_{1,2} = \pm i\omega$

$$\rightarrow \quad E_{i\omega} = \begin{pmatrix} 1 \\ i\omega \end{pmatrix}, \qquad E_{-i\omega} = \begin{pmatrix} 1 \\ -i\omega \end{pmatrix}$$

- Die homogene Lsg. Lautet also

$$Y_h = C_1 \cdot e^{i\omega} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ i\omega \end{pmatrix} + C_2 \cdot e^{-i\omega} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -i\omega \end{pmatrix}$$

- Mit komplexe Exponenten: $e^{\pm i\varphi} = \cos(\varphi) \pm i \cdot \sin(\varphi)$

$$Y_h = C_1 \cdot [\cos(\omega t) + i \cdot \sin(\omega t)] \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ i\omega \end{pmatrix} + C_2 \cdot [\cos(\omega t) - i \cdot \sin(\omega t)] \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -i\omega \end{pmatrix}$$

2) Ansatz: $Y(t) = \boldsymbol{c} \cdot \begin{pmatrix} \sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix} \rightarrow \quad Y_p' = \boldsymbol{c} \cdot \begin{pmatrix} \cos(t) \\ -\sin(t) \end{pmatrix}$

→ INSERISCO NEL SISTEMA $Y_p' = A \cdot Y_p + \begin{pmatrix} 0 \\ \sin(t) \end{pmatrix}$

$$\boldsymbol{c} \cdot \begin{pmatrix} \cos(t) \\ -\sin(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \boldsymbol{c} \cdot \begin{pmatrix} \cos(t) \\ -\sin(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \sin(t) \end{pmatrix}$$

→ Spostare gli elementi, moltiplicare le matrici e risolvere il sitema rispetto a $\boldsymbol{c}$: $c = \frac{1}{\omega^2 - 1} \quad \rightarrow Y_p = \frac{1}{w^2-1} \cdot \begin{pmatrix} \sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix}$

3) Allg. Lsg: $Y_{allg} = Y_h + Y_p$

$$\rightarrow Y_h = C_1 \cdot [\cos(\omega t) + i \cdot \sin(wt)] \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \omega t \end{pmatrix} + C_2 \cdot [\cos(\omega t) - i \cdot \sin(wt)] \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -\omega t \end{pmatrix} + \frac{1}{w^2 - 1} \cdot \begin{pmatrix} \sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix}$$

10. Marsan-Methode, DGL

- **2 EW diversi**: trovo EV (t)→$y(x) = c_1 \cdot e^{\lambda_1 x} \cdot t^{(1)} + c_2 \cdot e^{\lambda_2 x} \cdot t^{(2)}$
- **EW coincidono**: trovo EV (t)

$$(A - \lambda I) \cdot \vec{v} = \vec{t}$$
$$y(x) = c_1 \cdot e^{\lambda x} \cdot \vec{t} + c_2 \cdot e^{\lambda x} \cdot (x \cdot \vec{t} + \vec{v})$$

- **EW complessi:** del tipo $a \pm i \cdot b$, **EV tipo** $\vec{u} = \vec{v} \pm i \cdot \vec{\omega}$

$$y(x) = c_1 \cdot e^{ax} \cdot (\cos(bx) \cdot \vec{v} - \sin(bx) \cdot \vec{\omega}) + c_2 \cdot e^{ax} \cdot (\sin(bx) \cdot \vec{v} + \cos(bx) \cdot \vec{\omega})$$

X Appendice formule

X.I Trigonometria

Angolo in gradi α_{gradi}	Angolo in radianti $\alpha_{radianti}$	Seno	Coseno	Tangente	Cotangente
0° = 360°	2π	0	1	0	$+\infty$
30°	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$
45°	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1
60°	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
90°	$\frac{\pi}{2}$	1	0	$+\infty$	0
180°	π	0	-1	0	$-\infty$
270°	$\frac{3\pi}{2}$	-1	0	$-\infty$	0

Formule di addizione e sottrazione

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\ \cos\beta + \cos\alpha\ \sin\beta$$
$$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\ \cos\beta - \cos\alpha\ \sin\beta$$
$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\ \cos\beta - \sin\alpha\ \sin\beta$$
$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\ \cos\beta + \sin\alpha\ \sin\beta$$

Relazione fondamentale

$$\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$$

Seno/coseno in funzione della tangente

$$\text{sen}\ \alpha = \pm\frac{\text{tg}\,\alpha}{\sqrt{1+\text{tg}^2\alpha}}$$
$$\cos\ \alpha = \pm\frac{1}{\sqrt{1+\text{tg}^2\alpha}}$$

Formule di duplicazione

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$$
$$\sin 2\alpha = 2\ \sin\alpha\cdot\cos\alpha$$
$$\text{tg}\,2\alpha = \frac{2\,\text{tg}\alpha}{1-\text{tg}^2\alpha}$$

Formule di bisezione

$$\text{sen}\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$$
$$\cos\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$$
$$\tan\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}$$

Formule parametriche

$$\sin x = \frac{2\,\text{tg}\frac{x}{2}}{1+\text{tg}^2\frac{x}{2}},\quad \cos x = \frac{1-\text{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\text{tg}^2\frac{x}{2}}$$

Formule di prostaferesi

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$
$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$
$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$
$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

Formule di Werner (inverse delle prostaferesi)

$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)]$$
$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)]$$
$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)]$$

$$cos(x) = \tfrac{1}{2}(e^{ix}+e^{-ix}) \qquad cosh(x) = \tfrac{1}{2}(e^{x}+e^{-x})$$
$$sin(x) = \tfrac{1}{2i}(e^{ix}-e^{-ix}) \qquad sinh(x) = \tfrac{1}{2}(e^{x}-e^{-x})$$
$$e^{2ix} = cos(2x)+isin(2x) \qquad e^{-2ix} = cos(2x)-isin(2x)$$
$$sec(x) = \frac{2cos(x)}{cos(2x)+1}$$

Allgemeines

$$cos(-x) = cos(x); \qquad cos(x \pm \tfrac{\pi}{2}) = \mp sin(x)$$
$$cos(a) = sin(\tfrac{\pi}{2} \pm a); \qquad tan(a) \pm tan(b) = \frac{sin(a\pm b)}{cos(a)cos(b)}$$
$$cos(a) - sin(a) = \sqrt{2}\cdot sin(\tfrac{\pi}{4}-a) = \sqrt{2}\cdot cos(\tfrac{\pi}{4}+a)$$

Cot

$$1 + cot^2(x) = \frac{1}{sin(x)}; \qquad cot(a\pm b) = \frac{cot(a)cot(b)\mp 1}{cot(a)\pm cot(b)}$$
$$cot(2a) = \frac{cot^2(a)-1}{2cot(a)}$$

$\mathbf{\frac{a}{2}}$

$$sin(\tfrac{a}{2}) = \pm\sqrt{\tfrac{1}{2}\cdot(1-cos(a))}; \quad cos(\tfrac{a}{2}) = \pm\sqrt{\tfrac{1}{2}\cdot(1+cos(a))}$$

Potenzen

$$sin^2(a) = \tfrac{1}{2}\cdot(1-cos(2a)); \quad sin^3(a) = \tfrac{1}{4}\cdot(3sin(a)-sin(3a))$$
$$sin^4(a) = \tfrac{1}{8}\cdot(cos(4a)-4cos(2a)+3)$$
$$cos^2(a) = \tfrac{1}{2}\cdot(1+cos(2a)); \quad cos^3(a) = \tfrac{1}{4}\cdot(3cos(a)-cos(3a))$$
$$cos^4(a) = \tfrac{1}{8}\cdot(cos(4a)-4cos(2a)+3)$$

X.II Reihe

$$e^{cx} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(cx)^n}{n!} = 1 + (cx) + \frac{(cx)^2}{2!} + \frac{(cx)^3}{3!} + \dots$$
$$sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \mp \dots$$
$$cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} \mp \dots$$

X.III Integrale und Ableitungen

	$\int_0^{\frac{\pi}{4}}$	$\int_0^{\frac{\pi}{2}}$	$\int_0^{\pi}$	$\int_0^{2\pi}$	$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}$	$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}$	$\int_{-\pi}^{\pi}$
sin	$\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}$	1	2	0	0	0	0
sin^2	$\frac{\pi-2}{8}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{\pi-2}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	π
sin^3	$\frac{8-5\sqrt{2}}{12}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{4}{3}$	0	0	0	0
sin^4	$\frac{3\pi-8}{32}$	$\frac{3\pi}{16}$	$\frac{3\pi}{8}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{3\pi-8}{16}$	$\frac{3\pi}{8}$	$\frac{3\pi}{4}$
cos	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	1	0	0	$\sqrt{2}$	2	0
cos^2	$\frac{2+\pi}{8}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{2+\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	π
cos^3	$\frac{5}{6\sqrt{2}}$	$\frac{2}{3}$	0	0	$\frac{5}{3\sqrt{2}}$	$\frac{4}{3}$	0
cos^4	$\frac{8+3\pi}{32}$	$\frac{3\pi}{16}$	$\frac{3\pi}{8}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{8+3\pi}{16}$	$\frac{3\pi}{8}$	$\frac{3\pi}{4}$
$sin\cdot cos$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	0	0	0	0	0
$sin^2\cdot cos$	$\frac{1}{6\sqrt{2}}$	$\frac{1}{3}$	0	0	$\frac{1}{3\sqrt{2}}$	$\frac{2}{3}$	0
$sin\cdot cos^2$	$\frac{4-\sqrt{2}}{12}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	0	0	0	0

$\int f(x)$ *integrale*	$F(x)$ *primitiva*	$\int f(x)$ *integrale*	$F(x)$ *primitiva*
$\int x\,dx$	$\frac{x^2}{2} + c$	$\int\frac{\pm1}{\sqrt{1-x^2}}dx$	$\begin{cases}\pm\arcsin x + c\\ \mp\arccos x + c\end{cases}$
$\int a\,dx$	$ax + c$	$\int\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}dx$	$\log\lvert x+\sqrt{x^2-1}\rvert + c$
$\int a^x dx$	$\frac{a^x}{\log a} + c$	$\int\frac{1}{a^x}dx$	$-\frac{a^{-x}}{\log a} + c$
$\int\frac{x}{x^2+1}dx$	$\frac{1}{2}\log\lvert x^2+1\rvert + c$	$\int\frac{1}{x^n}dx$	$-\frac{n-1}{x^{n-1}} + c$
$\int a\cdot x^n dx$	$\frac{a\cdot x^{n+1}}{n+1} + c$	$\int\frac{1}{a+x^2}dx \quad a>0$	$\frac{1}{\sqrt{a}}\arctan\frac{x}{\sqrt{a}} + c$
$\int\frac{1}{x}dx$	$\log\lvert x\rvert + c$	$\int\frac{1}{1-x^2}dx$	$\frac{1}{2}\log\left\lvert\frac{1+x}{1-x}\right\rvert + c$
$\int\frac{1}{\sqrt{x}}dx$	$2\sqrt{x} + c$	$\int\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}dx$	$\begin{cases}arcSh\,x + c\\ \log\left(x+\sqrt{1+x^2}\right) + c\end{cases}$
$\int\sin x\,dx$	$-\cos x + c$	$\int\sin^2 x\,dx$	$\frac{1}{2}(x-\sin x\cos x) + c$
$\int\cos x\,dx$	$\sin x + c$	$\int\cos^2 x\,dx$	$\frac{1}{2}(x+\sin x\cos x) + c$
$\int\tan x\,dx$	$-\log(\cos x) + c$	$\int\frac{1}{\tan x}dx$	$\log(\sin x) + c$
$\int\arcsin x\,dx$	$\sqrt{1-x^2}+x\arcsin x + c$	$\int\frac{1}{\sqrt{x^2\pm a^2}}dx$	$\log\lvert x+\sqrt{x\pm a^2}\rvert + c$
$\int\arccos x\,dx$	$x\arccos x-\sqrt{1-x^2} + c$	$\int\sqrt{x^2\pm a^2}\,dx$	$\frac{x}{2}\sqrt{x^2\pm a^2}\pm\frac{a^2}{2}\log\left(x+\sqrt{x^2\pm a^2}\right) + c$
$\int e^{\pm kx}dx$	$\pm\frac{e^{\pm kx}}{k} + c$	$\int\frac{1}{e^{kx}}dx$	$-\frac{e^{-kx}}{k} + c$
$\int(1+\tan^2 x)dx = \int\frac{1}{\cos^2 x}dx$	$\tan x + c$	$\int\frac{1}{\cos x}dx$	$\log\left\lvert\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right\rvert + c$
$\int(1+ctg^2 x)dx = \int\frac{1}{\sin^2 x}dx$	$-ctg\,x + c$	$\int\frac{1}{\sin x}dx$	$\log\left\lvert\tan\frac{x}{2}\right\rvert + c$
$\int Sh\,x\,dx$	$Ch\,x + c$	$\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx$	$\frac{1}{2}\left(a^2\arcsin\frac{x}{a}+x\sqrt{a^2-x^2}\right) + c$
$\int Ch\,x\,dx$	$Sh\,x+c$	$\int\frac{1}{Ch^2 x}dx = \int(1-Th^2 x)dx + c$	$Th\,x + c$
$\int\frac{2x}{x^2+1}dx$	$\log(x^2+1) + c$	$\int\frac{1}{x^2+a^2}dx$	$\frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + c$

Y. Old Exams

Y.1 Lineare Gleichungssysteme

i)	Bei einem linearen Gleichungssystem $Ax = b$ habe die Koeffizientenmatrix A einen kleineren Rang als die erweiterte Matrix des Systems. Dann hat das Gleichungssystem keine Lösung.	×	
a)	Ein Gleichungssystem $Ax = Ab$ für x (A und b gegeben) hat immer genau eine Lösung ($x = b$).		×
g)	Das inhomogene (also $b \neq 0$) Gleichungssystem $Ax = b$ habe mindestens zwei linear unabhängige Lösungen. Dann ist der Kern der Matrix A mindestens 2-dimensional.		×
d)	Sei A eine $n \times n$-Matrix und b ein Eigenvektor von A. Dann hat das Gleichungssystem $Ax = b$ mindestens eine Lösung.		×
g)	Seien $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und $c, d \in \mathbb{R}^n$. Ist $x \in \mathbb{R}^n$ eine Lösung von $Ax = c$ und y eine Lösung von $By = d$, so ist $x+y$ eine Lösung von $(A+B)z = c+d$.		×
d)	Sei A eine $n \times m$ Matrix, derart dass $Ax = c$ für alle $c \in \mathbb{R}^n$ mindestens eine Lösung hat. Dann ist $\text{Rang}(A) = m$.		×

Beispiel 120. Die unterstehende Fragen sind unabhängig voneinander.

- ☐ Es gibt Matrizen $B \in \mathbb{R}^{4\times 2}$ und $B \in \mathbb{R}^{2\times 4}$, so dass das Produkt $B \cdot C$ vollen Rang hat.
- ☐ Seien $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und $c, d \in \mathbb{R}^n$. Ist $x \in \mathbb{R}^n$ eine Lösung von $Ax = c$ und y eine Lösung von $By = d$, so ist $x + y$ eine Lösung von $(A + B)z = c + d$.
- ☐ Ein Gleichungssystem $Ax = Ab$ für x (A und b gegeben) hat immer genau eine Lösung $x = b$.
- ☒ Sei A eine $n \times n$ Matrix mit Einträgen a_{ij}, so dass $a_{ij} = 1$ wenn $i + j = n + 1$ und $a_{ij} = 0$ sonst. Dann gilt $A = A^{-1}$.

Y.2 Matrizen

c)	Seien x, y zwei (Spalten)vektoren im $\mathbb{R}^n$, dann hat die $n \times n$-Matrix $xy^\top$ höchstens den Rang 1.	×	
f)	Für die folgende Matrix A gilt $A = A^{-1}$: $\begin{pmatrix} 0&1&0&0&0&0\\ 1&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&1\\ 0&0&0&0&1&0\\ 0&0&0&1&0&0\\ 0&0&1&0&0&0 \end{pmatrix}$.	×	
i)	Sind A, B ähnliche Matrizen, so auch A^2, B^2.	×	
e)	Es gibt eine Matrix A mit charakteristischem Polynom $P_A(\lambda) = \lambda^2 - 5\lambda$, welche invertierbar ist.		×
g)	Eine Matrix A mit $A^5 = 0$ ist singulär.	×	
b)	Sei A eine $n \times n$-Matrix, in welcher jeder Eintrag entweder 0 oder 1 ist. Dann ist A orthogonal genau dann wenn sie eine Permutationsmatrix ist.	×	
c)	Sei $e_1 = (1, 0, 0)^\top \in \mathbb{R}^3$. Gilt für eine 3×3-Matrix A, dass e_1, Ae_1, A^2e_1 eine Basis des $\mathbb{R}^3$ bilden, dann ist A invertierbar.		×
h)	Für eine quadratische Matrix A gilt $\operatorname{Rang}(A^n) \geq \operatorname{Rang}(A^{n+1})$ für jedes $n = 1, 2, 3, \ldots$.	×	
j)	$AB = \mathbb{I}$ impliziert auch $BA = \mathbb{I}$ für quadratische Matrizen A und B.	×	
	$AB = 0$ impliziert auch $BA = 0$ für quadratische Matrizen A und B.		×
g)	Der Rang der Matrix $\left(\begin{smallmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{smallmatrix}\right)$ ist 3, denn jede Dimension/Komponente im Zielraum wird "getroffen".		×
j)	Hat eine 3×3-Matrix nur einen Eigenwert λ mit geometrischer Vielfachheit 3, so kann das nur die Matrix $\left(\begin{smallmatrix}\lambda&0&0\\0&\lambda&0\\0&0&\lambda\end{smallmatrix}\right)$ sein.	×	
a)	Die Nullmatrix $\mathbf{O} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ ist die einzige Matrix in $\mathbb{R}^{m\times n}$ mit Rang null.	×	
d)	Sei A eine $n \times n$-Matrix. Dann existieren eine $n \times n$-Linksdreiecksmatrix L mit Einsen auf der Diagonale und eine $n \times n$-Rechtsdreiecksmatrix R, so dass $A = LR$ gilt.		×
e)	Sei $B = (b_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine Matrix mit $\ker B = \{0\}$, so dass $b_{ij} = -b_{ji}$ für alle i, j ist. Dann muss n eine gerade Zahl sein. *Hinweis*: Betrachten Sie die Determinante von B.	×	
f)	Es existiert keine Matrix $W \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, so dass $W^\top \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} W = I$, wobei I die 2×2-Einheitsmatrix bezeichnet.		×
h)	Sei A eine 4×3-Matrix mit $\operatorname{Rang}(A) = 3$. Dann folgt aus $Av = Aw$, dass $v = w$ ist.	×	
j)	Es existiert eine reguläre 11×11-Matrix, so dass 112 ihrer Einträge gleich 1 sind.		×
c)	Die Matrix $\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$ beschreibt eine 45°-Drehung der Ebene.		×
b)	Sei A eine diagonalisierbare Matrix. Dann ist auch A^2 diagonalisierbar.	×	

e)	Wenn eine Matrix A invertierbar ist, so ist auch $A^\top$ invertierbar.	×	
	Wenn eine Matrix A diagonalisierbar ist, so ist auch $A^\top$ diagonalisierbar.	×	
j)	Die Matrix $\begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ ist für alle $\alpha \in \mathbb{R}$ regulär.	×	
b)	Einer Matrix die Summe ihrer Einträge zuzuordnen, ist eine lineare Abbildung.	×	
i)	Ordnet man zwei 2×2-Matrizen A, B auf folgende Weise in einer 4×4-Matrix C an: $C = \begin{pmatrix} A & 0 \\ B & 0 \end{pmatrix}$, dann gilt $\operatorname{Rang}(C) = \operatorname{Rang}(A) + \operatorname{Rang}(B)$.		×
j)	Multipliziert man eine $m \times n$-Matrix mit einer $n \times p$-Matrix mit der üblichen Formel, so benötigt man – wenn man keine Vereinfachungen vornimmt – genau mnp viele Multiplikationen und $m(n-1)p$ viele Additionen.	×	
a)	Sei A eine $n \times n$-Matrix mit Einträgen a_{ij}, so dass $a_{ij} = 1$ wenn $i + j = n + 1$ und $a_{ij} = 0$ sonst. Dann gilt $A = A^{-1}$.	×	
c)	Es gibt Matrizen $B \in \mathbb{R}^{4\times 2}$ und $C \in \mathbb{R}^{2\times 4}$, so dass das Produkt $BC \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ vollen Rang (also Rang 4) hat.		×
d)	Seien x, y zwei Zeilenvektoren in $\mathbb{R}^n$. $\operatorname{Rang}(xy^\top)$ ist genau dann gleich 0, wenn mindestens einer der Vektoren der Nullvektor ist.		×
j)	Für jede quadratische Matrix $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ gilt $E_1 \subset \operatorname{im}(P)$, wobei $E_1 = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Px = x\}$ ist und $\operatorname{im}(P)$ das Bild von P bezeichnet.	×	
i)	Seien $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Wenn $A^2 = B^2$, dann gilt entweder $A = B$ oder $A = -B$.		×
j)	Jede schiefsymmetrische 3×3-Matrix ist singulär.	×	

10. Gegeben seien zwei orthonormale Vektoren $u_1, u_2 \in \mathbb{R}^3$. Welche der folgenden Aussagen trifft zu?

✓ (a) Die Vektoren $u_1 - u_2$ und $u_1 + u_2$ sind orthogonal.

(b) Die Vektoren u_1 und $u_1 + u_2$ sind orthogonal.

(c) Die Vektoren $u_1 - u_2$ und u_2 sind orthogonal.

(d) Die Vektoren $u_1 - 2u_2$ und $u_1 + 2u_2$ sind orthogonal.

Y.3 Determinanten

a)	Für die Matrizen $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 10 & 0 \end{pmatrix}$ gilt $\det(A+B) = \det(A) + \det(B)$.	×	
i)	Es gilt $\det(\lambda A) = \lambda \det A$, denn die Determinante ist eine lineare Abbildung.		×
b)	Es gilt $\det(\lambda A) = \lambda^n(\det A)$ für alle $n \times n$-Matrizen.	×	
d)	Die Projektion auf die x-y-Ebene im $\mathbb{R}^3$, also $(x, y, z) \mapsto (x, y, 0)$, hat Determinante 0, denn diese Abbildung ist sicher nicht invertierbar.	×	

Y.4 Vektorräume

a)	Im Vektorraum der reellen Polynome enthält der Unterraum $\operatorname{span}\{1 - x, 2 - x^2\}$ den 1-dimensionalen Unterraum $\operatorname{span}\{x^2\}$.		×
b)	Hat die lineare Abbildung $A \colon V \to W$ zweidimensionales Bild, so muss V ein zweidimensionaler Vektorraum sein.		×
d)	Die Vektoren $(a, a^2, a^3)^\top$ und $(b, b^2, b^3)^\top$ sind genau dann linear abhängig, wenn $a = 0$ oder $b = 0$ oder $a = b$.	×	
b)	Für jede positive ganze Zahl n besitzt jeder n-dimensionale Vektorraum Unterräume der Dimensionen $1, 2, \ldots, n$.	×	

c)	Es gibt ein Polynom zweiten Grades, dessen Graph durch die Punkte $(0, 0), (1, 1), (2, -2)$ und $(3, 0)$ geht.		×
d)	Im Vektorraum $\mathcal{P}_2$ der Polynome vom Grad ≤ 2 mit dem Skalarprodukt $\langle p, q \rangle = \int_{-1}^{1} p(x)q(x)dx$ sind die Vektoren $\left\{\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}x^2, \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}x\right\}$ orthogonale Einheitsvektoren.	×	
i)	Gegeben seien zwei linear unabhängige Vektoren $\{v_1, v_2\}$ im $\mathbb{R}^3$. Dann sind auch die Vektoren $\{v_1, v_2, v_1 \times v_2\}$ linear unabhängig.	×	
	Gegeben seien zwei linear unabhängige Vektoren $\{v_1, v_2\}$ im $\mathbb{R}^3$. Dann sind auch die Vektoren $\{v_1, v_2, v_1 + v_2\}$ linear unabhängig.		×
j)	Die Menge der 5×5-Matrizen A, welche $\dim(\operatorname{im}(A)) = \dim(\ker(A))$ erfüllen, bilden einen Vektorraum.		×
	Die Menge der 6×6-Matrizen A, welche $\dim(\operatorname{im}(A)) = \dim(\ker(A))$ erfüllen, bilden einen Vektorraum.		×
a)	Der Vektorraum $C(\mathbb{R})$ der stetigen Funktionen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ ist unendlich dimensional (da er alle Polynome enthält).	×	
c)	Sei $e_1 = (1, 0, 0)^\top \in \mathbb{R}^3$. Gilt für eine 3×3-Matrix A, dass e_1, Ae_1, A^2e_1 eine Basis des $\mathbb{R}^3$ bilden, dann ist A invertierbar.		×
d)	Alle stetigen Funktionen $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $\int_{-8}^{1} f(t)\,dt = 0$ bilden einen Untervektorraum von $C(\mathbb{R})$.	×	
	Alle stetigen Funktionen $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $\int_{-8}^{1} f(t)\,dt = 1$ bilden einen Untervektorraum von $C(\mathbb{R})$.		×
e)	Seien A_1, A_2, A_3 drei linear unabhängige Matrizen im Vektorraum der $n \times n$-Matrizen. Dann gibt es einen Vektor $v \in \mathbb{R}^n$, so dass $A_1v + A_2v + A_3v \neq 0$.	×	
f)	Die Menge der $n \times n$-Matrizen, so dass die Summe der Einträge der ersten Spalte gleich der Summe der Einträge der ersten Zeile ist, bildet keinen Untervektorraum des Vektorraums der $n \times n$-Matrizen.		×
g)	Die Polynome $p(x) = ax + b, q(x) = cx + d$ sind genau dann linear abhängig, wenn sie dieselben Nullstellen haben oder wenn mindestens eines das Nullpolynom ist.	×	
i)	Für jeden 2-dimensionalen Unterraum U von $\mathbb{R}^3$ gibt es eine Matrix A mit $\operatorname{im}(A) = U = \ker(A)$.		×
a)	Die Polynome $\{(x+1)^2, x^2+1, (x-1)^2\}$ im Vektorraum P_2 der Polynome vom Grad ≤ 2 sind linear unabhängig.		×
	Die Polynome $\{(x+1)^2, x^2+1, (x-1)^2\}$ erzeugen P_2.		×
b)	Die Polynome $\{(x+1)^2, (x-1)^2, (x+2)^2\}$ in P_2 sind linear unabhängig.	×	
	Die Polynome $\{(x+1)^2, (x-1)^2, (x+2)^2\}$ erzeugen P_2.	×	
c)	Die Polynome $\{x^2 - 1, x^2 + x, x + 1, x - 1\}$ in P_2 sind linear unabhängig.		×
	Die Polynome $\{x^2 - 1, x^2 + x, x + 1, x - 1\}$ erzeugen P_2.	×	
e)	Drei Vektoren $\{v_1, v_2, v_3\}$ sind linear unabhängig genau dann wenn sie paarweise linear unabhängig sind (also wenn die drei Pärchen $\{v_1, v_2\}, \{v_2, v_3\}, \{v_3, v_1\}$, linear unabhängig sind).		×
f)	Jeder Vektor des Vektorraums $\mathbb{R}$ bildet eine Basis für diesen eindimensionalen Raum.		×
h)	Gilt für eine 3×3-Matrix A und eine Basis $\{v_1, v_2, v_3\}$ von $\mathbb{R}^3$, dass $Av_i \neq 0$ für $i = 1, 2, 3$, so liegt nur der Nullvektor im Kern von A.		×
b)	Die Menge $B = \{1 + 3x, 1 - 3x, x + x^2\}$ ist eine Basis des Vektorraums der Polynome mit Grad ≤ 2.	×	
f)	$(0, 1, 2, 3, \ldots, 100), (0, 1, 4, 9, \ldots, 100^2)$ und $(0, 1, 8, 27, \ldots, 100^3)$ sind drei linear unabhängige Vektoren im $\mathbb{R}^{101}$	×	
g)	Das inhomogene (also $b \neq 0$) Gleichungssystem $Ax = b$ habe mindestens zwei linear unabhängige Lösungen. Dann ist der Kern der Matrix A mindestens 2-dimensional.		×
h)	Die Polynome $\{(x+1)^2, 7x + 7, (x-1)^2, 3x - 3\}$ in P_2 sind linear unabhängig.		×
	Die Polynome $\{(x+1)^2, 7x + 7, (x-1)^2, 3x - 3\}$ erzeugen P_2.	×	
i)	Die Polynome $\{(2x+2)^2, 2x^2 + 2, (x-1)(x+1)\}$ im Vektorraum P_2 der Polynome vom Grad ≤ 2 sind linear unabhängig.	×	
	Die Polynome $\{(2x+2)^2, 2x^2 + 2, (x-1)(x+1)\}$ erzeugen P_2.	×	

j) Sei $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}$; es gilt $\dim(\ker(A)) = \dim(\operatorname{im}(A))$.	×	
c) Für zwei $n \times n$-Matrizen A, B gilt $\dim(\ker(A)) = \dim(\ker(B))$ genau dann, wenn A und B den Eigenwert 0 mit der selben algebraischen Vielfachheit besitzen.		×
g) Der Vektorraum $\mathcal{P}_2$ der Polynome vom Grad ≤ 2 hat genau 3 verschiedene Unterräume der Dimension 2.		×
d) Im $\mathbb{R}^3$ gibt es 4 Vektoren, so dass beliebige 3 davon (es gibt 4 solche Grüppchen) linear unabhängig sind.	×	
e) Sei $e_1 = (1,0,0)^\top \in \mathbb{R}^3$. Gilt für eine 3×3-Matrix, dass Ae_1, A^2e_1, A^3e_1 eine Basis des $\mathbb{R}^3$ bilden, dann ist A invertierbar.	×	
f) Die Polynome $p_1(x) = 1 + (1+7x) + (1-49x)^2$, $p_2(x) = (1+7x) + (1-49x)^2, p_3(x) = (1-49x)^2$ sind linear abhängig.		×
g) Es gibt eine Basis $\{u, v\}$ des Vektorraums $\mathbb{R}^2$ mit $\|u\| = \|v\| = 1$ und $\langle u, v\rangle = 1$.		×
h) Für jeden 2-dimensionalen Unterraum U von $\mathbb{R}^4$ gibt es eine Matrix A mit $\operatorname{im}(A) = U = \ker(A)$.	×	
b) Seien $p, q\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Polynome mit $p(0) = 0 < q(0)$, $p(1) > 0 = q(1)$. Dann sind p, q linear unabhängig.	×	
f) Zwei Einheitsvektoren $v, w \in \mathbb{R}^n$ sind genau dann linear abhängig, wenn entweder $v + w = 0$ oder $v - w = 0$.	×	
a) Die Teilmenge $U = \left\{\binom{x}{y} \in \mathbb{R}^2 \mid x = y + 1\right\}$ ist ein Unterraum von $\mathbb{R}^2$.		×
c) Sei V ein Vektorraum und seien $u, v \in V$. Der Durchschnitt aller Unterräume von V, die u und v enthalten, ist gleich $\operatorname{span}\{u, v\}$.	×	
e) Seien v_1, v_2, v_3 Vektoren so dass die drei Paare $\{v_1, v_2\}, \{v_2, v_3\}$ und $\{v_1, v_3\}$ linear unabhängig sind. Dann sind $\{v_1, v_2, v_3\}$ linear unabhängig.		×
h) Sei $\mathcal{P}_n$ der Vektorraum der Polynome vom Grad $\leq n$. Ist $\{p_1(x), p_2(x), p_3(x)\}$ eine Basis von $\mathcal{P}_2$, dann ist $\{p_1'(x), p_2'(x), p_3'(x)\}$ eine Basis von $\mathcal{P}_1$.		×
Ist $\{p_1(x), p_2(x), p_3(x)\}$ eine Basis von $\mathcal{P}_2$, dann ist $\{p_1'(x), p_2'(x), p_3'(x)\}$ ein Erzeugendensystem von $\mathcal{P}_1$.	×	

10. Sei $V = \mathbb{R}^{2\times 2}$ der Vektorraum der reellen 2×2-Matrizen. Welche der folgenden Teilmengen von V ist ein Untervektorraum?

(a) $U = \{A \in V \mid A \text{ ist halbeinfach}\}$

(b) $U = \{A \in V \mid A^\top = A^{-1}\}$

(c) $U = \{A \in V \mid \det(A) = 0\}$

√ (d) $U = \{A \in V \mid \operatorname{Spur}(A) = 0\}$

11. Welche der folgenden Aussagen stimmt?

√ (a) Für jede $m\times n$-Matrix A mit $n \geq m$ gibt es eine $m\times m$-Matrix B derart, dass Bild A = Bild B ist.

(b) Die Menge der $n \times n$-Matrizen A, welche $\dim(\text{Bild}\, A) = \dim(\text{Kern}\, A)$ erfüllen, bilden einen Vektorraum.

(c) Sei A eine Matrix mit charakterischem Polynom $p_A(\lambda)$. Dann stimmt $\dim(\text{Bild}\, A)$ überein mit dem Grad von p_A.

(d) Für jeden 2-dimensionalen Unterraum U von $\mathbb{R}^3$ gibt es eine Matrix A mit $\text{Bild}(A) = U = \text{Kern}(A)$.

5. [10 Punkte] Gegeben seien die folgenden Unterräume von $\mathbb{R}^4$:

$$\begin{aligned} U &:= \{x \in \mathbb{R}^4 \mid 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 0\} \\ V &:= \{x \in \mathbb{R}^4 \mid 3x_1 + 5x_3 + 2x_4 = -2x_2 \text{ und} \\ &\qquad 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 3x_4 = 0\} \end{aligned}$$

a) Berechnen Sie $\dim(U \cap V)$.
b) Geben Sie eine Basis des Unterraums $U + V$ an.
c) Finden Sie eine Matrix A, so dass $U + V$ der Kern von A ist.
d) Finden Sie eine Matrix B, so dass U das Bild von B ist.
e) Finden Sie eine singuläre Matrix C, so dass U ein Eigenraum von C zum Eigenwert 1 ist, wobei 1 geometrische und algebraische Vielfachheit 3 hat.

a) Der Unterraum $U \cap V$ ist gleich V, wegen obiger Bemerkung, und die kurze Rechnung

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 & 2 \\ 2 & 3 & 5 & 3 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 & 2 \\ 0 & 5/3 & 5/3 & 5/3 \end{pmatrix}$$

zeigt sofort, dass der Kern dieses Matrix zweidimensional ist und somit $\dim(U \cap V) = 2$.

b) $U + V$ ist gleich U, und da dieser Raum durch eine nichttriviale Gleichung definiert wird, ist er 3-dimensional. Wir benötigen somit 3 linear unabhängige Vektoren die $x_2 + x_3 + x_4 = 0$ erfüllen. z.B. also

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

c) Da $U + V = U$ ist, suche wir eine Matrix mit Kern$A = U$. Die Gleichung die U definiert, lässt sich mit der 1×4-Matrix $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ als $Ax = x_2 + x_3 + x_4 = 0$ schreiben; also ist der Kern von A genau U.

d) Wir haben bereits bei b) eine Basis für U (=$U + V$) bestimmt und daher ist z.B.

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

eine Lösung, denn die Spaltenvektoren spannen das Bild auf.

e) Die orthogonale Projektion auf U erfüllt die geforderten Bedingungen. Den dann ist U ein invarianter Unterraum, also Eigenraum zum Eigenwert 1 und diese Projektion ist sicher nicht invertierbar, also singulär. Wir projizieren entlang der Normale $n = 1/\sqrt{3}(0,1,1,1)^\top$ auf die Hyperebene U, formal ist dies

$$x \mapsto x - nn^\top x$$

Die Matrix dazu lautet

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2/3 & -1/3 & -1/3 \\ 0 & -1/3 & 2/3 & -1/3 \\ 0 & -1/3 & -1/3 & 2/3 \end{pmatrix}.$$

Alternativ kan man auch mit der Matrix

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

starten. Dieses hat einen 3-dimensionalen 1-Eigenraum und ist singulär. Hat man weiter eine invertierbare Matrix T, die diesen Eigenraum auf U abbildet, z.B.

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

so ist TDT^{-1} eine Lösung.

13. Wir betrachten den Unterraum $C_0^2([0,\pi]) := \{f \in C^2([0,\pi]) : f(0) = f(\pi) = 0\}$ von $C^2([0,\pi])$ und die lineare Abbildung

$$A : C_0^2([0,\pi]) \to C([0,\pi]), f \mapsto f''.$$

(a) Man bestimme die Eigenwerte λ und Eigenvektoren $\phi \in C_0^2([0,\pi])$ (Eigenfunktionen) von A, d.h. $A\phi = \lambda\phi$.

(b) Man zeige, dass A bezüglich des Skalarproduktes

$$\langle f, g\rangle = \int_0^\pi f(x)g(x)dx$$

für $f, g \in C_0^2([0,\pi])$ symmetrisch ist, d.h. $\langle Af, g\rangle = \langle f, Ag\rangle$, und schliesse daraus, dass die Eigenfunktionen von A ein orthogonales System bilden.

(c) Man normiere die in a) gefundenen Eigenfunktionen und stelle die Funktion $f(x) = x$ in der so gefundenen Eigenbasis von A dar.

Lösung:

(a) Ein Eigenvektor (Eigenfunktion) $\phi \in C_0^2([0,\pi])$ von A erfüllt $\phi \neq 0$ und

$$\phi'' = A\phi = \lambda\phi$$

für ein $\lambda \in \mathbb{C}$. Wir müssen herausfinden, für welche $\lambda \in \mathbb{C}$ dies möglich ist. Zunächst schliessen wir den Fall $\lambda = 0$ aus. In diesem Fall gilt $\phi'' = 0$, was nur für lineare Funktionen $\phi(x) = ax+b$ möglich ist. Wegen $\phi(0) = \phi(\pi) = 0$ folgt daraus $b = 0$ und $0 = a\pi + b = a\pi$, also auch $a = 0$. Das ist wegen $\phi \neq 0$ nicht möglich.

Wir können also $\lambda \neq 0$ annehmen. Dann ist ϕ eine Lösung der homogenen Differentialgleichung $y'' = \lambda y$, die mit $Y = \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}$ auf das System 1. Ordnung $Y' = AY$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \lambda & 0 \end{pmatrix}$$

zurückgeführt werden kann. Diese Matrix hat die Eigenwerte $\pm\mu$ mit zugehörigen Eigenvektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ \pm\mu \end{pmatrix}$, wobei $\mu \in \mathbb{C}$ eine zweite Wurzel von λ ist (d.h. $\mu^2 = \lambda$). Für $\lambda \neq 0$ ist A diagonalisierbar und die allgemeine Lösung von $Y' = AY$ durch $Y(x) = c_1e^{\mu x}\begin{pmatrix} 1 \\ \mu \end{pmatrix} + c_2e^{-\mu x}\begin{pmatrix} 1 \\ -\mu \end{pmatrix}$ gegeben. Daraus folgt

$$\phi(x) = c_1e^{\mu x} + c_2e^{-\mu x}$$

für gewisse c_1, $c_2 \in \mathbb{C}$, die nicht beide Null sind. Da ϕ in $C_0^2([0,\pi])$ liegt, gilt

$$\begin{aligned} \phi(0) &= c_1 + c_2 = 0 \\ \phi(\pi) &= c_1e^{\mu\pi} + c_2e^{-\mu\pi} = 0. \end{aligned}$$

Daraus folgt $c_1 = -c_2$ und somit $e^{\mu\pi} = e^{-\mu\pi}$, weil $c_1 = -c_2 \neq 0$ gilt. Wir erhalten

$$e^{2\mu\pi} = 1.$$

Das ist nur möglich, falls $2\mu\pi = 2\pi ik \Leftrightarrow \mu = ki$ für ein $k \in \mathbb{Z}$ ist, wobei k nicht Null sein kann, weil wir $\lambda = 0$ schon ausgeschlossen haben. Für die Eigenfunktion ϕ folgt also

$$\phi(x) = c_1e^{kix} - c_1e^{-kix} = 2c_1i\sin(kx).$$

Somit sind die Eigenwerte von A genau durch $\lambda = \mu^2 = -k^2$ mit $k \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$ gegeben und die dazugehörigen Eigenfunktionen durch

$$\phi_k(x) = \sin(kx).$$

(b) Für $f, g \in C_0^2([0,\pi])$ folgt mit partieller Integration

$$\begin{aligned} \langle Af, g\rangle &= \int_0^\pi f''(x)g(x)\,dx = f'(x)g(x)|_0^\pi - \int_0^\pi f'(x)g'(x)\,dx \\ &\overset{g(0)=g(\pi)=0}{=} -\int_0^\pi f'(x)g'(x)\,dx \end{aligned}$$

und analog

$$\begin{aligned} \langle f, Ag\rangle &= \int_0^\pi f(x)g''(x)\,dx = f(x)g'(x)|_0^\pi - \int_0^\pi f'(x)g'(x)\,dx \\ &\overset{f(0)=f(\pi)=0}{=} -\int_0^\pi f'(x)g'(x)\,dx. \end{aligned}$$

Somit gilt tatsächlich $\langle Af, g\rangle = \langle f, Ag\rangle$.

Für $k \neq l \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$ bekommen wir daher

$$\begin{aligned} -k^2\langle\phi_k, \phi_l\rangle &= \langle -k^2\phi_k, \phi_l\rangle = \langle A\phi_k, \phi_l\rangle \\ &= \langle\phi_k, A\phi_l\rangle = \langle\phi_k, -l^2\phi_l\rangle = -l^2\langle\phi_k, \phi_l\rangle, \end{aligned}$$

also $(l^2 - k^2)\langle\phi_k, \phi_l\rangle = 0$, woraus $\langle\phi_k, \phi_l\rangle = 0$ folgt. Somit bilden die ϕ_k, $k \in \mathbb{N}$, ein orthogonales System.

(c) Für die Berechnung von $\langle \phi_k, \phi_k \rangle$ benutzen wir die Identität $\sin^2(\alpha) = \frac{1-\cos(2\alpha)}{2}$:

$$\langle \phi_k, \phi_k \rangle = \int_0^\pi \sin^2(kx)\,dx = \int_0^\pi \frac{1-\cos(2kx)}{2}\,dx$$
$$= \frac{x}{2} - \frac{\sin(2kx)}{4k}\Big|_0^\pi = \frac{\pi}{2}.$$

Wir erhalten also die normierten Funktionen

$$\psi_k(x) = \frac{\phi_k(x)}{\|\phi_k\|} = \frac{\phi_k(x)}{\sqrt{\langle \phi_k, \phi_k \rangle}} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin(kx).$$

Wir verwenden ohne Beweis, dass sich jede Funktion $\phi \in C^2([0,\pi])$ als unendliche Linearkombination dieser normierten Eigenfunktionen darstellen lässt. Daher machen wir den Ansatz

$$f(x) = x = \sum_{k=1}^\infty a_k \psi_k.$$

Weil die ψ_k ein orthonormales System bilden, folgt

$$\langle x, \psi_n \rangle = \left\langle \sum_{k=1}^\infty a_k\psi_k,\, \psi_n \right\rangle = \sum_{k=1}^\infty a_k \langle \psi_k, \psi_n \rangle = \sum_{k=1}^\infty a_k \delta_{kn} = a_n,$$

was wir mit partieller Integration ausrechnen können:

$$\int_0^\pi x\sin(nx)\,dx = -\frac{1}{n}x\cos(nx)\Big|_0^\pi + \int_0^\pi \frac{1}{n}\cos(nx)\,dx$$
$$= -\frac{1}{n}\pi(-1)^n + \frac{1}{n^2}\sin(nx)\Big|_0^\pi = \frac{(-1)^{n+1}\pi}{n},$$
$$\Rightarrow a_n = \langle x, \psi_n \rangle = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\pi x\sin(nx)\,dx = \frac{(-1)^{n+1}\sqrt{2\pi}}{n}.$$

Damit erhalten wir die Fourierreihendarstellung

$$x = \sum_{k=1}^\infty a_k\psi_k = \sum_{k=1}^\infty (-1)^{k+1}\frac{2}{k}\sin(kx).$$

Y.5 Lineare Abbildungen

b)	Hat die lineare Abbildung $A\colon V \to W$ zweidimensionales Bild, so muss V ein zweidimensionaler Vektorraum sein.		×
j)	Die Menge der 5×5-Matrizen A, welche $\dim(\mathrm{im}(A)) = \dim(\ker(A))$ erfüllen, bilden einen Vektorraum.		×
	Die Menge der 6×6-Matrizen A, welche $\dim(\mathrm{im}(A)) = \dim(\ker(A))$ erfüllen, bilden einen Vektorraum.		×
h)	Gilt für eine 3×3-Matrix A und eine Basis $\{v_1, v_2, v_3\}$ von $\mathbb{R}^3$, dass $Av_i \neq 0$ für $i = 1,2,3$, so liegt nur der Nullvektor im Kern von A.		×
i)	Es gilt $\det(\lambda A) = \lambda \det A$, denn die Determinante ist eine lineare Abbildung.		×
c)	Die Abbildung $F: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, definiert durch $F(x,y,z) = (\lvert x\rvert, 0)$, ist linear.		×
a)	Die lineare Abbildung $(x,y) \mapsto (x+y, y-x)$ von $\mathbb{R}^2$ nach $\mathbb{R}^2$ wird, bzgl. der Standardbasis, durch die Matrix $\left(\begin{smallmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{smallmatrix}\right)$ dargestellt.		×
d)	Die Projektion auf die x-y-Ebene im $\mathbb{R}^3$, also $(x,y,z) \mapsto (x,y,0)$, hat Determinante 0, denn diese Abbildung ist sicher nicht invertierbar.	×	
e)	Sei A eine lineare Abbildung und v ein Vektor. Ist v ein Eigenvektor zum Eigenwert λ, so ist $-v$ ein Eigenvektor zum Eigenwert $-\lambda$.		×
g)	Das inhomogene (also $b \neq 0$) Gleichungssystem $Ax = b$ habe mindestens zwei linear unabhängige Lösungen. Dann ist der Kern der Matrix A mindestens 2-dimensional.		×

j)	Sei $A = \begin{pmatrix}0&1&2&3\\1&2&3&4\\2&3&4&5\\3&4&5&6\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}$; es gilt $\dim(\ker(A)) = \dim(\mathrm{im}(A))$.	×	
c)	Für zwei $n\times n$-Matrizen A, B gilt $\dim(\ker(A)) = \dim(\ker(B))$ genau dann, wenn A und B den Eigenwert 0 mit der selben algebraischen Vielfachheit besitzen.		×
f)	Es gibt eine lineare Abbildung $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ mit $\ker(f) = \{0\}$.		×
	Es gibt eine lineare Abbildung $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ mit $\ker(f) = \{0\}$.	×	
c)	$A \mapsto A^\top$ ist eine lineare Abbildung und die symmetrischen Matrizen bilden einen Eigenraum davon.	×	
b)	Sei $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ eine lineare Abbildung mit $F\binom{1}{3} = \binom{4}{1}$ und $F\binom{2}{1} = \binom{0}{3}$. Dann ist $F\binom{10}{10} = \binom{8}{14}$.	×	
g)	Die Funktion $\det\colon \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}$ ist linear genau dann wenn $n = 1$ gilt.	×	

a) [3 Punkte] Sei S der Unterraum von $\mathbb{R}^{2\times 2}$ bestehend aus allen symmetrischen Matrizen. Zeigen Sie, dass

$$\mathcal{B} = \left\{ B_1 := \begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix},\, B_2 := \begin{pmatrix}1&-1\\-1&0\end{pmatrix},\, B_3 := \begin{pmatrix}0&1\\1&1\end{pmatrix} \right\}$$

eine Basis von S von ist.

b) [3 Punkte] Wenden Sie das Gram–Schmidt'sche Orthogonalisierungsverfahren auf $\mathcal{B}$ in der gegebenen Reihenfolge an, um eine Orthonormalbasis $\mathcal{B}'$ von S zu erhalten.

c) [2 Punkte] Vervollständigen Sie $\mathcal{B}'$ zu einer Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^{2\times 2}$.

d) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass der Ausdruck $(*)$ tatsächlich ein Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^{2\times 2}$ definiert.

c) In der Teilaufgabe (a) hat es sich gezeigt, dass die Dimension von S gleich 3 ist; es ist ausserdem klar, dass $\dim \mathbb{R}^{2\times 2} = 4$ ist. Das heisst, um $\mathcal{B}'$ zu einer Basis von $\mathbb{R}^{2\times 2}$ zu ergänzen, braucht man nur eine nichtsymmetrische Matrix mit Norm eins auszuwählen, die orthogonal zu S ist. Dies kann man z.B. erreichen, indem man eine normierte *schiefsymmetrische* Matrix auswählt (d.h. eine Matrix B, so dass $B^\top = -B$ ist). Tatsächlich: Wenn $A \in S$ und B schiefsymmetrisch ist, dann ist $\langle A, B\rangle = 0$, denn

$$\langle A, B\rangle = \mathrm{Spur}(AB^\top) = -\mathrm{Spur}(A^\top B) \overset{(1)}{=} -\mathrm{Spur}(BA^\top) = -\langle B, A\rangle \overset{(2)}{=} -\langle A, B\rangle,$$

wobei (1) aus der Identität $\mathrm{Spur}(AB) = \mathrm{Spur}(BA)$ folgt und (2) aus der Tatsache, dass $\langle\cdot,\cdot\rangle$ ein Skalarprodukt ist. (Alternativ kann man dies auch sofort sehen, indem man bemerkt, dass jede schiefsymmetrische Matrix orthogonal auf den Matrizen B_1', B_2', B_3' steht.)

Eine konkrete schiefsymmetrische Matrix ist

$$B_4 = \begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}.$$

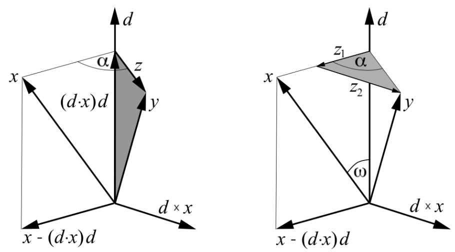
Man normiert sie nun, um die vierte Matrix B_4' unserer ONB von $\mathbb{R}^{2\times 2}$ zu erhalten:

$$B_4' = \frac{B_4}{\|B_4\|} = \frac{1}{\left(\mathrm{Spur}\left(\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}\right)\right)^{1/2}} \cdot \begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}.$$

Alternative Lösung: Man kann irgendeine nichtsymmetrische Matrix $B_4 \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ wählen (nicht notwendigerweise schiefsymmetrisch) und das Gram–Schmidt'sche Verfahren fortsetzen, um eine ONB von $\mathbb{R}^{2\times 2}$ zu finden.

Lösung

a) Man betrachte die folgende Skizze:



auf. Daraus folgt offenbar

$$z_1 = \cos(\alpha)\|z\|\frac{x-(d\cdot x)d}{\|x-(d\cdot x)d\|},\ z_2 = \sin(\alpha)\|z\|\frac{d\times x}{\|d\times x\|},$$

da diese Vektoren genau die richtige Richtung und Länge haben. Weiter entnehmen wir der Skizze, dass bei der Überführung von x in y ebenso $x - (d\cdot x)d$ auf z abgebildet wird, womit diese beiden Vektoren dieselbe Länge haben. Wir erhalten also $\|x-(d\cdot x)d\| = \|z\|$, woraus sofort $z_1 = \cos(\alpha)(x - (d\cdot x)d)$ folgt. Verwenden wir nun noch den Hinweis, so ergibt sich ebenso $z_2 = \sin(\alpha)(d\times x)$. Zusammen gilt also

$$y = \cos(\alpha)x + (1-\cos(\alpha))(d\cdot x)d + \sin(\alpha)(d\times x).$$

Damit müssen wir uns nur noch überlegen, weshalb $\|d\times x\| = \|x-(d\cdot x)d\|$ gilt. Dazu rechnen wir einfach beide Ausdrücke aus und erhalten einerseits $\|x-(d\cdot x)d\| = \|x\|\sin(\omega)$ und andererseits $\|d\times x\| = \|x\|\|d\|\sin(\omega) = \|x\|\sin(\omega)$, womit alles gezeigt ist.

b) Seien

$$D_1 = \begin{pmatrix} d_1^2 & d_1d_2 & d_1d_3\\ d_1d_2 & d_2^2 & d_2d_3\\ d_1d_3 & d_2d_3 & d_3^2\end{pmatrix},\quad D_2 = \begin{pmatrix}0 & -d_3 & d_2\\ d_3 & 0 & -d_1\\ -d_2 & d_1 & 0\end{pmatrix}.$$

Wie bei Serie 5, Aufgabe 4a) findet man unter Verwendung von a), dass

$$D = \cos(\alpha)\mathbb{I}_3 + (1-\cos(\alpha))D_1 + \sin(\alpha)D_2$$

die Bedingungen der Aufgabe erfüllt.

c) Es gilt $D_1^T = D_1$ und $D_2^T = -D_2$. Unter Verwendung von $d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 = 1$ findet man $D_1^2 = D_1$ und $D_2^2 = D_1 - \mathbb{I}_3$. Weiter gilt auch, dass $D_1D_2 = D_2D_1$ ist. Die beiden Matrizen also kommutieren. Daraus folgt

$$\begin{aligned}
D^TD &= (\cos(\alpha)\mathbb{I}_3 + (1-\cos(\alpha))D_1 - \sin(\alpha)D_2)(\cos(\alpha)\mathbb{I}_3 + (1-\cos(\alpha))D_1 + \sin(\alpha)D_2)\\
&= (\cos(\alpha)\mathbb{I}_3 + (1-\cos(\alpha))D_1)^2 - \sin(\alpha)^2D_2^2\\
&= \cos(\alpha)^2\mathbb{I}_3 + 2(1-\cos(\alpha))\cos(\alpha)D_1 + (1-\cos(\alpha))^2D_1 - \sin(\alpha)^2(D_1 - \mathbb{I}_3)\\
&= (\cos(\alpha)^2 + \sin(\alpha)^2)\mathbb{I}_3 + (2(1-\cos(\alpha))\cos(\alpha) + (1-\cos(\alpha))^2 - \sin(\alpha)^2)D_1\\
&= \mathbb{I}_3 + 0\cdot D_1\\
&= \mathbb{I}_3.
\end{aligned}$$

Y.6 Eigenwertprobleme

e)	Ist v Eigenvektor zum Eigenwert -1 und w Eigenvektor zum Eigenwert 1 der Matrix A, so ist $v+w$ ein Eigenvektor zum Eigenwert 0 ($v+w$ liegt also im Kern von A).		×
h)	Jeder Eigenvektor v einer Matrix P liegt im Bild, also $v \in \mathrm{Im}(P)$.		×
i)	Sind A, B ähnliche Matrizen, so auch A^2, B^2.	×	
j)	Gilt $PP = P$, so kann die Matrix P nur die Eigenwerte 0 und 1 besitzen.	×	
e)	Es gibt eine Matrix A mit charakteristischem Polynom $P_A(\lambda) = \lambda^2 - 5\lambda$, welche invertierbar ist.		×
f)	Sei v ein Eigenvektor zum Eigenwert 2 für die Matrizen A und B. Dann ist v auch ein Eigenvektor zum Eigenwert 2 für die Matrix $A+B$.		×
	Sei v ein Eigenvektor zum Eigenwert 2 für die Matrizen A und B. Dann ist v auch ein Eigenvektor zum Eigenwert 2 für die Matrix AB.		×
h)	Jede invertierbare Matrix ist diagonalisierbar.		×
d)	Ist die Matrix A halbeinfach, so auch A^3.	×	
j)	Hat eine 3×3-Matrix nur einen Eigenwert λ mit geometrischer Vielfachheit 3, so kann das nur die Matrix $\left(\begin{smallmatrix}\lambda&0&0\\0&\lambda&0\\0&0&\lambda\end{smallmatrix}\right)$ sein.	×	
g)	Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine Matrix mit $A^3 + 2A^2 + 3A + 4I = 0$, wobei I die $n\times n$ Einheitsmatrix und 0 die $n\times n$ Nullmatrix ist. Dann ist 0 kein Eigenwert von A.	×	
e)	Sei A eine lineare Abbildung und v ein Vektor. Ist v ein Eigenvektor zum Eigenwert λ, so ist $-v$ ein Eigenvektor zum Eigenwert $-\lambda$.		×

a) Es seien v_1, v_2 zwei Eigenvektoren der Matrix A. Dann ist auch $v_1 + v_2$ ein Eigenvektor von A.		×
b) Sei A eine diagonalisierbare Matrix. Dann ist auch A^2 diagonalisierbar.	×	
d) Sei A eine $n \times n$-Matrix und b ein Eigenvektor von A. Dann hat das Gleichungssystem $Ax = b$ mindestens eine Lösung.		×
e) Wenn eine Matrix A invertierbar ist, so ist auch $A^\top$ invertierbar.	×	
Wenn eine Matrix A diagonalisierbar ist, so ist auch $A^\top$ diagonalisierbar.	×	
e) Die Summe zweier Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten ist nie ein Eigenvektor.	×	
h) Hat die symmetrische 2×2-Matrix A zwei verschiedene Eigenwerte strikt grösser als Null, so ist die Lösungsmenge von $(x,y)A\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = 1$ eine Ellipse in $\mathbb{R}^2$.	×	
i) Sei $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine quadratische Matrix. Gilt $PP = P$, so folgt $\mathrm{im}(P) = E_1$, wobei $E_1 = \{x \in \mathbb{R}^n \| Px = x\}$ ist und $\mathrm{im}(P)$ das Bild von P bezeichnet.	×	
f) Sei A eine Matrix mit charakterischem Polynom $p_A(\lambda) = (1-\lambda)^3$. Dann ist $A = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$.		×

Erklärung: Das charakteristische Polynom von A ist gegeben durch

$$p_A(\lambda) = (-1-\lambda)^3 - (-1-\lambda) = -(\lambda+1)[(\lambda+1)^2 - 1] = -(\lambda+1)(\lambda+2)\lambda.$$

Folglich sind die Eigenwerte von A gerade $0, -1$ und -2. Somit ist die Signatur $(0, 2, 1)$, also ist (d) richtig.

Y.7 Skalarprodukt

i) Durch $\left\langle \begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix} \right\rangle := x_1y_2$ ist ein Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^2$ definiert.		×
Durch $\left\langle \begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix} \right\rangle := x_1y_2 + x_2y_1$ ist ein Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^2$ definiert.		×
g) Es gibt eine Basis $\{u, v\}$ des Vektorraums $\mathbb{R}^2$ mit $\|u\| = \|v\| = 1$ und $\langle u, v\rangle = 1$.		×

16. Sei $V := \mathbb{R}^n$ und sei $\|\cdot\|$ eine Norm auf V. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

(a) Es gibt ein Skalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle$ auf V derart, dass $\|v\| = \sqrt{\langle v, v\rangle}$ gilt für alle $v \in V$.

(b) Falls $\|\cdot\|$ durch $\left\|\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}\right\| := |x_1| + \ldots + |x_n|$ definiert wird, dann wird $\|\cdot\|$ von einem Skalarprodukt induziert.

(c) Die Menge $U := \{v \in V \mid \|v\| = 0\}$ bildet einen Unterraum von V mit Dimension > 0.

✓ (d) Sei $\|\cdot\|'$ eine andere Norm auf V. Dann konvergiert eine Folge in V gegen $v \in V$ bezüglich $\|\cdot\|$ genau dann, wenn die Folge gegen v bezüglich $\|\cdot\|'$ konvergiert.

17. Welche der folgenden Aussagen gilt?

(a) Bezüglich des euklidischen Skalarprodukts in $\mathbb{R}^2$ ist die Orthogonalprojektion von $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ auf $\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}$ der Vektor $\begin{pmatrix}0\\ \frac{1}{5}\end{pmatrix}$.

(b) In einem Vektorraum mit Skalarprodukt können zwei Einheitsvektoren ein beliebig grosses Skalarprodukt haben.

✓ (c) $A \in \mathbb{M}^{n\times n}$ ist eine orthogonale Matrix genau dann, wenn ihre Spalten eine Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^n$ bezüglich des euklidischen Skalarprodukts bilden.

(d) Man kann beliebig viele paarweise orthogonale Vektoren in einem endlich-dimensionalen Vektorraum V finden.

5. [10 Punkte] Wir betrachten

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}, \quad a^{(1)} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \quad a^{(2)} = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}.$$

a) **[3 Punkte]** Überprüfen Sie, dass durch $\langle x, y\rangle_A := x^\top Ay$ ein Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^2$ definiert ist.

b) **[3 Punkte]** Konstruieren Sie mit Hilfe des Schmidt'schen Orthogonalisierungsverfahrens aus $\{a^{(1)}, a^{(2)}\}$ eine orthonormale Basis $\{b^{(1)}, b^{(2)}\}$ bezüglich des Skalarproduktes aus a).

c) **[2 Punkte]** Bestimmen Sie alle Vektoren w, welche orthogonal zu v sind bezüglich des Skalarproduktes $\langle\cdot\,,\,\cdot\rangle_A$.

d) **[2 Punkte]** Sei $\{c^{(1)}, c^{(2)}\}$ eine bezüglich des Standardskalarproduktes von $\mathbb{R}^2$ orthonormale Eigenbasis von A. Überprüfen Sie, dass dann auch $\langle c^{(1)}, c^{(2)}\rangle_A = 0$ gilt.

d) Sei $c^{(1)}$ ein Eigenvektor zum Eigenwert λ_1 und $c^{(2)}$ ein Eigenvektor zum Eigenwert λ_2. Eine kurze Rechnung liefert dann

$$\left\langle c^{(1)}, c^{(2)}\right\rangle_A = (c^{(1)})^\top Ac^{(2)} = (c^{(1)})^\top \lambda_2 c^{(2)} = \lambda_2 (c^{(1)})^\top c^{(2)} = \lambda_2 \left\langle c^{(1)}, c^{(2)}\right\rangle = 0.$$

5. Auf $\mathbb{R}^{2\times 2}$ sei das folgende Skalarprodukt gegeben[1]:

$$\langle A, B\rangle := \mathrm{Spur}(AB^\top).$$

a) [**3 Punkte**] Zeigen Sie, dass dieser Ausdruck tatsächlich ein Skalarprodukt definiert.

b) [**2 Punkte**] Sei V die Teilmenge von $\mathbb{R}^{2\times 2}$ bestehend aus allen Matrizen mit Spur gleich Null:

$$V = \{A \in \mathbb{R}^{2\times 2} \mid \mathrm{Spur}(A) = 0\}.$$

Zeigen Sie, dass V ein Unterraum von $\mathbb{R}^{2\times 2}$ ist, und dass die Matrizen

$$B_1 := \begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix},\; B_2 := \begin{pmatrix}1&1\\0&-1\end{pmatrix},\; B_3 := \begin{pmatrix}-1&0\\1&1\end{pmatrix}$$

eine Basis $\mathcal{B}$ von V bilden.

c) [**3 Punkte**] Wenden Sie das Gram-Schmidtsche Orthogonalisierungsverfahren auf $\mathcal{B}$ in der gegebenen Reihenfolge an, um eine Orthonormalbasis $\mathcal{B}'$ von V zu erhalten.

d) [**2 Punkte**] Betrachten Sie die lineare Abbildung $F\colon V \to V$ definiert durch $A \mapsto AB_1 - B_1A$. Berechnen Sie die Darstellungsmatrix von F bezüglich $\mathcal{B}$.

Lösung: **a)** Ein Skalarprodukt muss bilinear, symmetrisch und positiv definit sein; wir überprüfen diese drei Eigenschaften. Seien A, B und C (2×2)-Matrizen und $\lambda \in \mathbb{R}$.

- *Bilinearität*: Dank der Symmetrie (siehe unten) müssen wir nur die Linearität in der ersten Komponente überprüfen:

$$\langle \lambda A + B, C\rangle = \mathrm{Spur}\left((\lambda A + B)C^\top\right) = \lambda\,\mathrm{Spur}(AC^\top) + \mathrm{Spur}(BC^\top) = \lambda\,\langle A, C\rangle + \langle B, C\rangle$$

aufgrund der Linearität der Spur.

- *Symmetrie*: Wegen der Identität $\mathrm{Spur}(A^\top) = \mathrm{Spur}(A)$ ist

$$\langle A, B\rangle = \mathrm{Spur}\left(AB^\top\right) = \mathrm{Spur}\left(BA^\top\right) = \langle B, A\rangle.$$

- *Positivdefinitheit*: Sei

$$A := \begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}.$$

Dann ist

$$\langle A, A\rangle = \mathrm{Spur}(AA^\top) = \mathrm{Spur}\begin{pmatrix}a^2+b^2 & ac+bd\\ ac+bd & c^2+d^2\end{pmatrix} = a^2+b^2+c^2+d^2 \geq 0,$$

und $\langle A, A\rangle = 0$ genau dann, wenn $a = b = c = d = 0$.

23. [10 Punkte] Auf dem $\mathbb{R}$-Vektorraum $V = \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ der Polynome mit reellen Koeffizienten vom Grad ≤ 2 ist ein Skalarprodukt gegeben durch

$$\langle P, Q\rangle := 2\int_0^\infty P(x)Q(x)e^{-2x}\,dx$$

für $P, Q \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$.

Hinweis: Sie dürfen in allen Teilaufgaben ohne Beweis verwenden, dass für alle $n \in \mathbb{N}_0$

$$2\int_0^\infty x^n e^{-2x}\,dx = 2^{-n}n!$$

gilt, wobei wie üblich $0! = 1$ ist.

a) **[2 Punkte]** Bestimmen Sie alle Elemente von $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$, die auf $P(x) := x - 1$ orthogonal stehen.

b) **[3 Punkte]** Eine Basis von $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ ist gegeben durch $\mathcal{B} := \{1, x, x^2\}$. Bestimmen Sie mithilfe des Gram-Schmidt-Orthogonalisierungsverfahrens eine Orthonormalbasis $\mathcal{C}$ aus $\mathcal{B}$.

c) 1. **[2 Punkte]** Bestimmen Sie die Darstellungsmatrix A der Abbildung

$$\begin{aligned} d : V &\to V \\ P &\mapsto P' \end{aligned}$$

bezüglich der Basis $\mathcal{C}$, wobei P' die Ableitung von P bezeichnet.

2. **[1 Punkt]** Bestimmen Sie eine Matrix S, für die gilt

$$\langle P, Q\rangle = [P]_\mathcal{C}^T S[Q]_\mathcal{C}.$$

Hierbei bezeichnet $[P]_\mathcal{C}$ den Koordinatenvektor von P in der Basis $\mathcal{C}$.

3. **[2 Punkte]** Verifizieren Sie unter Verwendung von 1. und 2., dass

$$\langle\!\langle P, Q\rangle\!\rangle := \langle P', Q\rangle + \langle P, Q'\rangle + 6\langle P, Q\rangle$$

ein Skalarprodukt auf V definiert.

c2) Da $\mathcal{C}$ orthonormal ist, muss $S = \mathbb{1}_3$ die Einheitsmatrix sein.

c3) Es gilt

$$\begin{aligned}\langle\!\langle P, Q\rangle\!\rangle = [P']_\mathcal{C}^T[Q]_\mathcal{C} + [P]_\mathcal{C}^T[Q']_\mathcal{C} + 6[P]_\mathcal{C}^T S[Q]_\mathcal{C} &= [P]_\mathcal{C}^T A^T[Q]_\mathcal{C} + [P]_\mathcal{C}^T A[Q]_\mathcal{C} + 6[P]_\mathcal{C}^T S[Q]_\mathcal{C} \\ &= [P]_\mathcal{C}^T(A + A^T + 6S)[Q]_\mathcal{C}.\end{aligned}$$

Sei also

$$T := A + A^T + 6S = \begin{pmatrix}6&2&-2\\2&6&2\\-2&2&6\end{pmatrix}.$$

Man rechnet schnell nach, dass die Eigenwerte von T gegeben sind durch einen einfachen Eigenwert $\lambda_1 = 2$ und einen doppelten Eigenwert $\lambda_{2,3} = 8$. Folglich ist T symmetrisch und positiv definit, und somit $\langle\!\langle\cdot,\cdot\rangle\!\rangle$ ein Skalarprodukt. Alternativ kann man auch das Hurwitzkriterium verwenden.

c) Bestimmen Sie die beste Approximation der Funktion e^x in U, d.h. bestimmen Sie die Funktion $f \in U$, so dass deren Abstand (in der Norm) zu e^x minimal ist.

c) Bekanntlich reicht es dafür e^x orthogonal auf den Unterraum U zu projizieren. Die orthogonale Projektion ist gegeben durch

$$f \mapsto \langle f, 1\rangle \cdot 1 + \langle f, x\rangle \cdot x + \langle f, x^2/2\rangle \cdot x^2/2 = f(0) + f'(0)\cdot x + f''(0)\cdot x^2/2$$

und für $f(x) = e^x$ ergibt dies $1 + x + x^2/2$. Dies ist unabhängig davon, welche Orthonormalbasis man in a) bestimmt hat.

b) Betrachte die lineare Abbildung

$$\mathrm{Spur}\colon \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R},\; A \mapsto \mathrm{Spur}(A).$$

Da V genau der Kern von dieser Abbildung ist, folgt daraus, dass V ein Unterraum von $\mathbb{R}^{2\times 2}$ ist. Natürlich kann man auch direkt überprüfen, dass $A + \lambda B \in V$ für alle $A, B \in V$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ ist.

Die Matrizen B_i sind sichtbar linear unabhängig. Es gelten

$$4 = \dim \mathbb{R}^{2\times 2} = \dim \mathrm{Kern}(\mathrm{Spur}) + \dim \mathrm{Bild}(\mathrm{Spur})$$

und $\dim \mathrm{Bild}(\mathrm{Spur}) = 1$. Da $V = \mathrm{Kern}(\mathrm{Spur})$ ist, folgt es, dass $\dim(V) = 3$ ist. Die B_i sind deshalb eine Basis von V.

c) Zuerst normieren wir B_1, um den ersten Vektor B_1' unserer Orthonormalbasis (ONB) zu erhalten:

$$B_1' = \frac{B_1}{\|B_1\|} = \frac{1}{\mathrm{Spur}\left(\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}\right)^{1/2}} \cdot \begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}.$$

Nach Gram–Schmidt ergibt $\hat{B}_2 = B_2 - \langle B_2, B_1'\rangle\, B_1'$ einen Vektor, dessen Normalisierung B_2' der zweite Vektor der ONB ist:

$$\hat{B}_2 = \begin{pmatrix}1&1\\0&-1\end{pmatrix} - \tfrac{1}{2}\,\mathrm{Spur}\left(\begin{pmatrix}1&1\\0&-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}\right)\cdot\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix} = B_2'.$$

weil die Matrix schon normiert ist.

Mit analoger Notation führen wir Gram–Schmidt weiter durch, um den dritten Vektor B_3' zu bestimmen:

$$\begin{aligned}\hat{B}_3 &= B_3 - \langle B_3, B_1'\rangle\, B_1' - \langle B_3, B_2'\rangle\, B_2' = \begin{pmatrix}-1&0\\1&1\end{pmatrix} - \tfrac{1}{2}\,\mathrm{Spur}\left(\begin{pmatrix}-1&0\\1&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}\right)\cdot\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix} \\ &\quad -\mathrm{Spur}\left(\begin{pmatrix}-1&0\\1&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\right)\cdot\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix},\end{aligned}$$

$$B_3' = \frac{\hat{B}_3}{\left\|\hat{B}_3\right\|} = \frac{1}{\mathrm{Spur}\left(\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}\right)^{1/2}} \cdot \begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}.$$

Die Menge $\mathcal{B}' = \{B_1', B_2', B_3'\}$ ist eine Orthonormalbasis von V.

d) Zuerst berechnen wir $F(B_i)$ für jeden Basisvektor $B_i \in \mathcal{B}$. Man findet

$$\begin{aligned} F(B_1) &= 0 \\ F(B_2) &= \begin{pmatrix}0&-2\\0&0\end{pmatrix} = -2(B_2 - B_1) \\ F(B_3) &= \begin{pmatrix}0&0\\2&0\end{pmatrix} = 2(B_3 - B_1). \end{aligned}$$

Deshalb ist die Darstellungsmatrix von F bezüglich $\mathcal{B}$

$$\begin{pmatrix}0&2&-2\\0&-2&0\\0&0&2\end{pmatrix}.$$

Y.9 Differentialgleichungen

g) Hat das Differentialgleichungssystem $A\begin{pmatrix}x(t)\\y(t)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x'(t)\\y'(t)\end{pmatrix}$ mindestens zwei verschiedene konstante Lösungen, dann ist 0 ein Eigenwert der 2×2-Matrix A.	×	

Figura 1, PIVOT!