



Eidgenössische Technische Hochschule Zürich
Swiss Federal Institute of Technology Zurich

Institut für Fluidodynamik
Prof. Dr. P. Jenny, Prof. Dr. T. Rösgen

Fluidodynamik I/II

Skript zur Vorlesung

Inhaltsverzeichnis

1	Fragestellungen, Anwendungen, Methoden	7
2	Definition und Eigenschaften von Fluiden	9
3	Dimensionsanalyse und Ähnlichkeitstheorie	13
3.1	Dimensionen und Einheiten	13
3.2	Dimensionsmatrix	14
3.3	Buckingham II-Theorem	15
3.4	Formalismus zur Dimensionsanalyse	15
3.5	Ähnlichkeit und Modellierung	17
3.6	Dimensionslose Kennzahlen	18
4	Kinematische Beschreibung des Strömungsfeldes	19
4.1	Lagrangesche und Eulersche Beschreibung	19
4.2	Substantielle Ableitung	20
4.3	Reynolds-Transporttheorem	20
4.4	Kinematische Eigenschaften von Strömungen	21
4.5	Ausgezeichnete Linien	22
4.6	Stromfunktion	24
5	Erhaltungssätze	25
5.1	Massenerhaltung	25
5.1.1	Integrale Formulierung	25
5.1.2	Stromröhren	25
5.1.3	Differentielle Form - Kontinuitätsgleichung	25
5.2	Impulserhaltung	26
5.2.1	Integrale Formulierung	26
5.2.2	Stromröhren	26
5.2.3	Differentielle Form	28
5.2.4	Impulserhaltung für reibungsfreie Strömungen	28
5.3	Energieerhaltung	30
5.3.1	Integrale Formulierung	30
5.3.2	Differentielle Formulierung	31
5.3.3	Sonderfälle	31
6	Reibungsbehaftete Strömungen	33
6.1	Navier-Stokes-Gleichung	33
6.2	Exakte Lösungen	33
6.3	Näherungslösungen	36
6.3.1	Einfluß der Reynolds-Zahl	36
6.3.2	Stokes Flow: Schleichende Umströmung einer Kugel	37
7	Grenzschichten	39
7.1	Grenzschichtgleichungen	39
7.2	Exakte Lösungen der Grenzschichtgleichungen	40
7.3	Impulssatz der Grenzschichttheorie	43

8	Turbulenz	45
8.1	Phänomenologie	45
8.2	Statistische Modellierung der Turbulenz	46
8.3	Empirischer Ansatz für die turbulente Schubspannung	47
8.4	Geschwindigkeitsverteilung in der turbulenten Grenzschicht	48
8.5	Turbulente Rohrströmung	50
8.6	Verlustbehaftete Bernoulli-Gleichung	53
9	Potentialströmungen	55
9.1	Grundbegriffe und Grundgleichungen	56
9.2	Ebene, inkompressible Potentialströmungen	59
9.3	Elementarlösungen, Transformationen und Überlagerungen	63
9.4	Kräfte auf umströmte Körper	71
9.5	Ebene Profilmströmung	72
9.6	Instationäre Potentialströmungen	75
10	Drehungsbehaftete Strömungen	79
10.1	Wirbel und Drehung	79
10.2	Wirbeltransportgleichung	84
10.3	Wirbelsätze	87
10.4	Dreidimensionale Strömung am Tragflügel	89
11	Kompressible Strömungen	93
11.1	Grundbeziehungen aus Thermo- und Fluidodynamik	93
11.2	Strömungsgrößen im isentropen Stromfaden	96
11.3	Senkrechter Verdichtungsstoss	101
11.4	Strömung bei veränderlichem Querschnitt	105
11.5	Schiefer Verdichtungsstoss	109
11.6	Prandtl-Meyer-Expansion	112
11.7	Einfluss der Reibung	115
A	Grundlagen der Vektor- und Tensoralgebra	121
A.1	Einsteinsche Summenkonvention	121
A.2	Differentialoperatoren	121
A.3	Integralsätze	123
B	Grundgleichungen	125
B.1	Massenerhaltung	125
B.2	Impulserhaltung	126
B.3	Energieerhaltung	129
C	Fluidodynamik II: Komplexe Zahlen und Funktionen	131
C.1	Komplexe Zahlen	131
C.2	Differenzierbarkeit, reguläre komplexwertige Funktion	132
D	Übersicht Potentialströmungen	135
D.1	Darstellung ebener, inkompressibler Potentialströmungen	135
D.2	Beispiele ebener Potentialströmungen	137
E	Kompressibler Stromfaden - Formeln und Tabellen	139

Nomenklatur

Lateinische Buchstaben:

a	Schallgeschwindigkeit
b	Abmessung in z (senkrecht zur Zeichenebene)
c_A	Auftriebsbeiwert 3D-Körper (dimensionslose Kraft, deutsche Nomenklatur)
c_a	Auftriebsbeiwert 2D-Profil (dimensionslose Kraft, deutsche Nomenklatur)
c_D	Widerstandsbeiwert (dimensionslose Kraft, englische Nomenklatur)
c_f	lokaler Widerstandsbeiwert (dimensionslose Wandschubspannung)
c_L	Auftriebsbeiwert (dimensionslose Kraft, englische Nomenklatur)
c_p	spezifische isobare Wärmekapazität; Druckbeiwert (dimensionsloser Druck)
c_v	spezifische isochore Wärmekapazität
c_W	Widerstandsbeiwert (dimensionslose Kraft, deutsche Nomenklatur)
D	baroklines Drehmoment
d	Profildicke
E	Energie
e	innere Energie
F	Kraft
$F(t)$	Bernoulli-Konstante
$F(z)$	komplexes Potential
f	Profilwölbung
g	Erdbeschleunigung
h	Enthalpie
k	Boltzmann-Konstante
k	Wärmeleitfähigkeit
L	Länge
M	Molekülmasse
m	Masse, Dipolmoment
m^*	virtuelle Masse
\dot{m}	Massenstrom
n	Normale
P	Impuls
Pr	Prandtl-Zahl
p	Druck
Q	Wärme
Q_C	Quellstärke
\dot{Q}	Wärmestrom
R	Radius; Gaskonstante
S	Fläche
T	Temperatur, Umlaufzeit
t	Zeit
U	Potential
u	Geschwindigkeit, Geschwindigkeit in x -Richtung
V	Volumen
\dot{V}	Volumenstrom
v	Geschwindigkeit in y -Richtung
W	Wirbelstreckungsterm

Griechische Buchstaben:

α	Wärmeübergangskoeffizient, Anstellwinkel
δ	Grenzschichtdicke
Γ_C	Zirkulation
γ	Adiabatexponent
ζ	Widerstandsbeiwert
ζ_M	Momentenbeiwert
λ	Wärmeleitfähigkeit
μ	dynamische Zähigkeit
ν	kinematische Zähigkeit
ϱ	Dichte
σ	Oberflächenspannung
τ	Schubspannung
Φ	Potentialfunktion
Ψ	Stromfunktion
ω	Wirbelstärke
Ω	Mittlere Winkelgeschwindigkeit

Koordinaten:

x, x_1	Koordinate eines kartesischen Koordinatensystems oder Axialkoordinate eines Zylinderkoordinatensystems
y, x_2	Koordinate eines kartesischen Koordinatensystems
z, x_3	Koordinate eines kartesischen Koordinatensystems, komplexe Variable
θ	Koordinate eines Zylinderkoordinatensystems (Winkel), Längenkoordinate eines Kugelkoordinatensystems oder Argument der komplexen Variable z
r	Radialkoordinate eines Kugel- oder Zylinderkoordinatensystems
ψ	Breitenkoordinate eines Kugelkoordinatensystems
u, u_1	Geschwindigkeitskomponente in x -Richtung (kartesische oder Zylinderkoordinaten), in r -Richtung (Kugelkoordinaten)
v, u_2	Geschwindigkeitskomponente in y -Richtung oder ϕ -Richtung
w, u_3	Geschwindigkeitskomponente in z -Richtung (kartesische Koordinaten), in r -Richtung (Zylinderkoordinaten), in ψ -Richtung (Kugelkoordinaten)

Indizes:

W	Widerstand
W	Wand
∞	unendlich

Kapitel 1

Fragestellungen, Anwendungen, Methoden

In einer Vielzahl von Bereichen in Natur und Technik hat das Verhalten von Fluiden einen entscheidenden Einfluß, z.B.

- bei der Bestimmung von Kräften auf frei umströmte Körper (Autos, Flugzeuge, Schiffe, ...)
- bei der Bestimmung von Energieverlusten bzw. -gewinnen in "internen" Strömungen (Rohrleitungen, Strömungsmaschinen, ...)
- bei der Vorhersage des lokalen und globalen Strömungsverhaltens (Wetter, Verbrennung, aerodynamischer Entwurf, ...)
- bei der passiven und aktiven Beeinflussung von Strömungen (Reibungswiderstand, Lärm, Schwingungen, ...), oder
- bei der Erweiterung des physikalischen Grundlagenverständnisses von Strömungsphänomenen (Turbulenz, Mischungsverhalten, Verbrennung).

Man kann die ingenieurwissenschaftliche Behandlung solcher Probleme in 3 methodische Gruppen unterteilen.

Bei der *theoretischen Vorgehensweise* werden u.a. die folgenden Methoden angewandt:

- Formulierung von relevanten (Erhaltungs-)Gleichungen;
- Finden von exakten Lösungen;
- Finden von Ähnlichkeitslösungen (Umwandlung von partiellen in gewöhnliche Differentialgleichungen);
- Modellbildung und Parametrisierung;
- Vereinfachung von Gleichungen durch Approximationen und Näherungslösungen.

Bei *experimentellen Untersuchungen* werden primär folgende Ziele verfolgt:

- Direkte Sichtbarmachung und Visualisierung von Strömungsphänomenen;
- Quantitative Messungen von Kräften, Momenten (integral) oder Feldgrößen (Druck, Dichte, Geschwindigkeiten, ...);
- Modellversuche basierend auf Ähnlichkeitsbetrachtungen (Wind- u. Wasserkanäle, etc.).

Im Rahmen der *numerischen Modellierung* schließlich werden die relevanten Gleichungen mit dem Computer gelöst und gemäss der ursprünglichen Vorgaben (Anfangs- und Randbedingungen) ausgewertet. In allen Fällen werden die kontinuierlichen (Differential-)Gleichungen diskretisiert und gelöst. Je nach dem Diskretisierungsansatz unterscheidet man insbesondere

- DNS-Verfahren (Direct Numerical Simulation): die vollständige Auflösung aller zeitlichen und räumlichen Skalen, Erzeugung "exakter" Lösungen und Durchführung "numerischer Experimente". Es wird keine empirische Modellbildung für die Turbulenz benötigt. DNS Rechnungen sind sehr aufwendig, und aufgrund des Rechenbedarfs nur geeignet für "einfache" Probleme.
- LES-Verfahren (Large Eddy Simulation): eine Vereinfachung durch reduzierte räumliche Auflösung und Mittelung der Gleichungen. Eine empirische Modellierung der "irrelevanten" kleinen Skalen wird benutzt. Der Vorteil gegenüber den DNS Methoden ist ein deutlich reduzierter Rechenaufwand
- RANS (Reynolds-Averaged Navier-Stokes) Verfahren: hier findet eine zeitliche Mittelung der Gleichungen statt. Der Einsatz empirischer Turbulenzmodelle ist notwendig. RANS Rechnungen sind geeignet für grössere Anwendungsprobleme, soweit die Turbulenzmodellierung funktioniert.

Kapitel 2

Definition und Eigenschaften von Fluiden

Die Strömungsmechanik befasst sich im Allgemeinen mit der Beschreibung des dynamischen Verhaltens von Flüssigkeiten und Gasen, oder - verallgemeinert ausgedrückt - von sogenannten Fluiden.

Als **Fluid** wird dabei ein von der molekularen Struktur abstrahiertes *Kontinuum* bezeichnet. Im Ruhezustand kann ein Fluid nur Druckkräfte (Kompression) aufnehmen. Andere Kräfte, wie Zug- und Scherkräfte führen zu Fließbewegungen. Mit dieser Definition können Fluide von anderen Materialien wie z.B. Festkörpern unterschieden werden.

Das **Kontinuumsprinzip** vereinfacht dabei die physikalische Modellierung der betrachteten Fluide. Anstatt auf die detaillierte molekulare Struktur einzugehen, nimmt man an, daß ein Fluid aus einer dichten Packung von einzelnen Elementen, den *Fluidpartikeln* bzw. *Fluidelementen* besteht, die den Raum kontinuierlich ausfüllen.

Die **Fluidpartikel** sind klein gegenüber relevanten Strömungsskalen, aber groß gegenüber molekularen Skalen. Es gilt:

- Fluidpartikel und Raumpunkte sind einander eineindeutig zugeordnet, d.h. an jedem Raumpunkt existiert genau ein Fluidpartikel und jedes Fluidpartikel hat eine eindeutige Raumkoordinate,
- die physikalischen Eigenschaften des Fluids werden als Eigenschaften in jedem Punkt (und damit der Fluidpartikel) durch die *Feldgrößen* erfasst.

Feldgrößen sind i.a. stetige und differenzierbare Funktionen. Ausnahmen sind Diskontinuitäten, wie sie z.B. bei Trennflächen oder in Verdichtungsstößen auftreten. Sie lassen sich als Ergebnis einer lokalen Mittelung über die tatsächlichen physikalisch vorhandenen Moleküle auffassen.

Für Strömungen sind oftmals folgende Feldgrößen und Materialkonstanten von Bedeutung:

- ϱ Dichte, $[\varrho] = \text{kg}/\text{m}^3$
- p Druck, $[p] = \text{N}/\text{m}^2 = \text{Pa}$
- T Temperatur, $[T] = \text{K}$
- \underline{u} Geschwindigkeit, $[u_i] = \text{m}/\text{s}$
- μ dynamische Viskosität, $[\mu] = \text{kg}/(\text{m} \cdot \text{s}) = \text{N} \cdot \text{s}/\text{m}^2 = \text{Pa} \cdot \text{s}$

Die **Dichte** ϱ eines Fluidelementes der Masse Δm und mit dem Volumen ΔV ist definiert als

$$\varrho = \lim_{\Delta V \rightarrow \lambda^3} \frac{\Delta m}{\Delta V},$$

wobei λ^3 das limitierende Volumen ist, unterhalb dessen die Anzahl von Molekülen ungenügend für statistische Aussagen ist. Im Allgemeinen ist die Dichte eine Funktion von Druck und Temperatur

$$\varrho = \varrho(p, T).$$

Auf ein beliebig orientiertes Flächenelement ΔS wirkt eine **Druckkraft** in Richtung der Flächennormale. Der Druck p in einem ruhenden Fluid ist definiert als der Quotient aus dem Betrag ΔF der Druckkraft und der Grösse des Flächenelements ΔS , wobei der Grenzübergang $\Delta S \rightarrow \lambda^2$ vorgenommen wird

$$p = \lim_{\Delta S \rightarrow \lambda^2} \frac{\Delta F}{\Delta S} .$$

Der Druck hängt nicht von der Orientierung des Flächenelements im Fluid ab, er ist eine skalare Grösse.

Gemäß der kinetischen Theorie ist die **Temperatur** T über die Varianz der Molekülgeschwindigkeit \underline{v} definiert

$$\frac{3}{2}kT = \langle \frac{1}{2}M\underline{v} \cdot \underline{v} \rangle ,$$

wobei k die Boltzmann-Konstante und M die Molekülmasse ist. (Durch die Klammern $\langle \rangle$ wird gekennzeichnet, daß der Ausdruck statistisch gemittelt wird.)

Die Temperatur ist also direkt proportional zu der mittleren kinetischen Energie der molekularen Bewegung.

Die **Viskosität** ist auf den molekularen Queraustausch von Impuls zwischen benachbarten Fluidschichten mit einem Geschwindigkeitsgradienten zurückzuführen. Die Schubspannung τ in einem Fluid ist eine Funktion der Deformationsgeschwindigkeit $\dot{\gamma}$

$$\tau = f(\dot{\gamma}) .$$

In *Newtonschen Fluiden* ist die Schubspannung proportional zur Deformationsgeschwindigkeit:

$$\tau = \mu \dot{\gamma}$$

Komponentenweise gilt:

$$\tau_{ij} = \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$$

wobei u_i die Geschwindigkeitskomponenten und x_i die Ortskoordinaten bezeichnen. Die Proportionalitätskonstante μ ist die dynamische Viskosität. Die kinematische Viskosität ν leitet sich aus der dynamischen ab:

$$\nu = \frac{\mu}{\rho}$$

Für Wasser und Luft gelten bei Umgebungstemperatur näherungsweise die Werte gemäß Tabelle 2.1.

	Wasser	Luft
μ	$10^{-3} \text{ Pa} \cdot \text{s}$	$18 \cdot 10^{-6} \text{ Pa} \cdot \text{s}$
ν	$10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$	$15 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$

Tabelle 2.1: Kinematische und dynamische Viskosität von Luft und Wasser bei Umgebungstemperatur

Die kinematischen Viskositäten von Wasser und Luft stehen demnach im Verhältnis

$$\nu_L \approx 15 \nu_W .$$

Die Viskosität hängt i.a. von der Temperatur T ab. Bei Gasen steigt sie mit der Temperatur an, es gilt näherungsweise das Potenzgesetz

$$\frac{\mu}{\mu_0} = \left(\frac{T}{T_0} \right)^\omega.$$

Für Luft bei $p_0 = 10^5 \text{ Pa}$ werden die Bezugswerte $T_0 = 273.15 \text{ K}$ und $\omega \simeq 0.7$ verwendet.

Das Sutherland-Gesetz beschreibt die Temperaturabhängigkeit der Gase exakter,

$$\frac{\mu}{\mu_0} = \frac{T_0 + S}{T + S} \cdot \left(\frac{T}{T_0} \right)^{\frac{3}{2}}.$$

Die Bezugswerte für Luft bei $p_0 = 10^5 \text{ Pa}$ sind hier $T_0 = 273.15 \text{ K}$, $\mu_0 = 17.10 \cdot 10^{-6} \text{ Pa} \cdot \text{s}$ und $S = 110.4 \text{ K}$ (Sutherland-Konstante).

Bei Flüssigkeiten nimmt die Viskosität mit steigender Temperatur ab. Im Bereich $273.15 \text{ K} < T < 373.15 \text{ K}$ gilt die logarithmische Beziehung

$$\ln \frac{\mu}{\mu_0} = a + b \frac{T_0}{T} + c \left(\frac{T_0}{T} \right)^2.$$

Für Wasser gelten die Konstanten $a = -2.10$, $b = -4.45$, $c = 6.55$ und beim Druck $p_0 = 10^5 \text{ Pa}$ die Bezugswerte $T_0 = 273.15 \text{ K}$ und $\mu_0 = 0.00179 \text{ Pa} \cdot \text{s}$.

Die **Oberflächenspannung** ist durch unsymmetrische molekulare Kraftwirkungen an der Trennfläche zweier Medien bedingt. Im Inneren eines Fluids heben sich die intermolekularen Kräfte, die auf ein Teilchen wirken, im Mittel auf. An der Trennfläche hingegen tritt ein asymmetrisches Kraftfeld auf, das eine Resultierende bedingt.

Die Young-Laplace-Gleichung beschreibt das Verhältnis von Drucksprung Δp und Oberflächenspannung σ für eine durch zwei Krümmungsradien R_1 und R_2 beschriebene Oberfläche:

$$\Delta p = \sigma \cdot \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)$$

Die **Schallgeschwindigkeit** a ist die Geschwindigkeit, mit welcher sich kleine Druckstörungen im Raum ausbreiten. Sie ergibt sich für eine isentrope Strömung zu

$$a^2 = \left. \frac{\partial p}{\partial \rho} \right|_{s=\text{konst.}}. \quad (2.1)$$

Für ein ideales Gas lässt sich dieser Ausdruck schreiben als

$$a^2 = \gamma RT. \quad (2.2)$$

Kapitel 3

Dimensionsanalyse und Ähnlichkeitstheorie

3.1 Dimensionen und Einheiten

Die Gleichungen der Fluidodynamik (wie auch alle anderen naturwissenschaftlichen Gesetze) lassen sich in allgemeiner Form als Gleichungen verschiedener Kenngrößen bzw. Parameter darstellen, also

$$p_1 = f(p_2, p_3, \dots, p_n) ,$$

oder auch

$$\tilde{f}(p_1, p_2, p_3, \dots, p_n) = 0 .$$

Hierbei stellen f bzw. \tilde{f} die beschreibenden Gesetze dar und $\{p_1, p_2, p_3, \dots, p_n\}$ die dazugehörigen Parameter, d.h. die für den betrachteten Vorgang relevanten Größen.

Eine solche Gleichung ist immer homogen, und alle Terme müssen dieselbe Dimension oder Masseinheit haben. Die einzelnen Parameter eines Problems können aber durchaus unterschiedliche Dimensionen haben (Länge, Geschwindigkeit, Dichte, etc.). Als Konsequenz sind nur bestimmte Kombinationen der einzelnen Parameter erlaubt, damit die Homogenität gewährleistet ist.

Insbesondere kann eine dimensionslose Schreibweise der Form

$$\Phi(\Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_k) = 0$$

eingeführt werden. Die Kombinationen (genauer: Potenzprodukte) der ursprünglichen Parameter $\{p_1, p_2, p_3, \dots, p_n\}$ sind so zusammengefaßt, daß die neuen, dimensionslosen Parameter $\{\Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_k\}$ entstehen. Diese haben keine Masseinheit mehr.

Der Formalismus, mit dem eine dimensionsbehaftete Gleichung in die äquivalente, dimensionslose Form überführt werden kann, wird vom Buckingham II-Theorem beschrieben.

In der Mechanik werden als Basisgrößen die Masseinheiten *Masse*, *Länge*, *Zeit* (M , L , T) verwendet. Spielen zusätzlich z.B. thermische oder elektrische Effekte eine Rolle, so werden als zusätzliche Basisgrößen oft die Temperatur ϑ oder der elektrische Strom I verwendet. Prinzipiell sind auch andere Mass-Systeme möglich, solange nur die Dimensionen ihrer Masseinheiten ausreichen, um alle Parameter dimensionsmässig zu beschreiben. Die Tabelle 3.1 enthält einige Beispiele.

Größe, Bezeichnung	F, L, T, ϑ	M, L, T, ϑ	Einheiten
Länge	L	L	Meter, m
Kraft	F	MLT^{-2}	Newton, N
Masse	$FL^{-1}T^2$	M	Kilogramm, kg
Zeit	T	T	Sekunde, s
Temperatur	ϑ	ϑ	Kelvin, K
Geschwindigkeit	LT^{-1}	LT^{-1}	m/s
Beschleunigung	LT^{-2}	LT^{-2}	m/s^2
Druck, Spannung	FL^{-2}	$ML^{-1}T^{-2}$	Pascal, $Pa = N/m^2$
Moment, Arbeit, Energie	FL	ML^2T^{-2}	Joule, $J = Ws = Nm$
Leistung, Energiestrom	FLT^{-1}	ML^2T^{-3}	Watt, $W = Nm/s$
Dichte	$FL^{-4}T^2$	ML^{-3}	kg/m^3
Massenstrom	$FL^{-1}T^1$	MT^{-1}	kg/s
dynamische Viskosität	$FL^{-2}T$	$ML^{-1}T^{-1}$	$Pa\ s = Ns/m^2$
kinematische Viskosität	L^2T^{-1}	L^2T^{-1}	m^2/s
Oberflächenspannung	FL^{-1}	MT^{-2}	$N/m = kg/s^2$
spezifische Wärmekapazität	$L^2T^{-2}\vartheta^{-1}$	$L^2T^{-2}\vartheta^{-1}$	$J/(kg\ K)$
Wärmeleitfähigkeit	$FT^{-1}\vartheta^{-1}$	$MLT^{-3}\vartheta^{-1}$	$W/(m\ K)$
spezielle Gaskonstante R	$L^2T^{-2}\vartheta^{-1}$	$L^2T^{-2}\vartheta^{-1}$	$J/(kg\ K)$

Tabelle 3.1: Ausgewählte Größen, ihre Dimensionen und Einheiten

3.2 Dimensionsmatrix

Gegeben seien n dimensionsbehaftete, physikalische Größen $\{p_1, p_2, \dots, p_n\}$. Zwischen ihnen bestehe ein Zusammenhang der Form

$$\tilde{f}(p_1, p_2, \dots, p_n) = 0.$$

Es sei $\{A_1, A_2, \dots, A_m\}$ eine aus $m \leq n$ dimensionsbehafteten Masseinheiten bestehende Basis. Für die Basis wird vorausgesetzt, daß sich keine ihrer Größen als Potenzprodukt der anderen Basisgrößen darstellen läßt.

Die Dimension $[p_i]$ jeder der n physikalischen Größen läßt sich nun als Potenzprodukt der m Basisgrößen A_j darstellen,

$$\begin{aligned}
[p_1] &= A_1^{b_{11}} \cdot A_2^{b_{21}} \cdot \dots \cdot A_m^{b_{m1}} \\
[p_2] &= A_1^{b_{12}} \cdot A_2^{b_{22}} \cdot \dots \cdot A_m^{b_{m2}} \\
&\vdots \\
[p_n] &= A_1^{b_{1n}} \cdot A_2^{b_{2n}} \cdot \dots \cdot A_m^{b_{mn}}.
\end{aligned}$$

Es stellt sich nun die folgende Grundfrage: Gibt es dimensionslose Kombinationen der Form

$$\Pi_i = p_1^{k_{1i}} \cdot p_2^{k_{2i}} \cdot \dots \cdot p_n^{k_{ni}},$$

und wieviele unabhängige solcher Kombinationen, d.h. Exponentenvektoren $\underline{k}_i = (k_{1i}, k_{2i}, \dots, k_{ni})$ gibt

es? Man geht in der obigen Gleichung zu den Dimensionen über:

$$\begin{aligned} [\Pi_i] = 1 &= A_1^0 \cdot A_2^0 \cdot \dots \cdot A_r^0 \\ &= \left(A_1^{b_{11}} \cdot \dots \cdot A_m^{b_{m1}} \right)^{k_{1i}} \cdot \left(A_1^{b_{12}} \cdot \dots \cdot A_m^{b_{m2}} \right)^{k_{2i}} \cdot \dots \cdot \left(A_1^{b_{1n}} \cdot \dots \cdot A_m^{b_{mn}} \right)^{k_{ni}}. \end{aligned}$$

Ein Vergleich der Exponenten für jede der Basisgrößen A_j ergibt dann die Gleichungen

$$\begin{aligned} b_{11} \cdot k_{1i} + b_{12} \cdot k_{2i} + \dots + b_{1n} \cdot k_{ni} &= 0 \\ b_{21} \cdot k_{1i} + b_{22} \cdot k_{2i} + \dots + b_{2n} \cdot k_{ni} &= 0 \\ &\vdots \\ b_{m1} \cdot k_{1i} + b_{m2} \cdot k_{2i} + \dots + b_{mn} \cdot k_{ni} &= 0. \end{aligned}$$

Dies ist ein homogenes, lineares Gleichungssystem von m Gleichungen für n Unbekannte $k_{1i}, k_{2i}, \dots, k_{ni}$. Die Lösbarkeit dieses Gleichungssystems ist bestimmt durch den Rang r der *Dimensionsmatrix* $\underline{\underline{B}} = \{b_{ij}\}$, ($i = 1 \dots m, j = 1 \dots n$). Die Exponenten können besonders übersichtlich in einer Matrix aufgeführt werden,

	p_1	p_2	\dots	p_n
A_1	b_{11}	b_{12}	\dots	b_{1n}
A_2	b_{21}	b_{22}	\dots	b_{2n}
\vdots	\vdots			
A_m	b_{m1}	b_{m2}	\dots	b_{mn}

Aus der linearen Algebra ist bekannt, dass ein homogenes, lineares Gleichungssystem der Ordnung n , dessen Koeffizientenmatrix den Rang r besitzt, genau $n - r$ linear unabhängige Lösungen hat.

Es gibt also $n - r$ unabhängige Exponentenvektoren \underline{k}_i .

3.3 Buckingham Π -Theorem

Gegeben seien n dimensionsbehaftete meßbare physikalische Größen p_1, p_2, \dots, p_n und eine Relation $\tilde{f}(p_1, p_2, \dots, p_n) = 0$ zwischen ihnen. Dann gibt es genau $k = n - r$ unabhängige dimensionslose Π -Größen $\Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_k$, wobei r der Rang der zugehörigen Dimensionsmatrix $\underline{\underline{B}}$ ist. Die Beziehung $\tilde{f}(p_1, p_2, \dots, p_n) = 0$ läßt sich auf eine Beziehung von k dimensionslosen Größen reduzieren,

$$\Phi(\Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_k) = 0$$

.

3.4 Formalismus zur Dimensionsanalyse

Für die Dimensionsanalyse kann der Lösungsweg formalisiert und vereinfacht werden:

1. Aufstellen einer Liste aller dimensionsbehafteten Parameter $\{p_1, p_2, p_3, \dots, p_n\}$ des Problems. Hierzu kann die Dimensionsmatrix verwendet werden.
2. Notieren der Anzahl n dieser Parameter.
3. Bestimmung der Anzahl r der unabhängigen Basisgrößen (Masseinheiten) des Problems.
4. Errechnen der Anzahl der möglichen dimensionslosen Parameter $k = n - r$.

5. Auswahl von r Parametern aus der Liste $\{p_1, p_2, p_3, \dots, p_n\}$, mit denen die unabhängigen Masseneinheiten erfasst werden, d.h. Einführung einer Liste mit Referenzparametern

$$\{\tilde{p}_1, \tilde{p}_2, \dots, \tilde{p}_r\} \subset \{p_1, p_2, p_3, \dots, p_n\} .$$

6. Beschreibung der Dimensionen der k restlichen Originalparameter mittels eines Produktansatzes aus den Dimensionen dieser Referenzparameter

$$[p_i] = [\tilde{p}_1]^{\alpha_{i1}} [\tilde{p}_2]^{\alpha_{i2}} \dots [\tilde{p}_r]^{\alpha_{ir}} \quad (i = 1 \dots k) .$$

7. Durch Vergleich der Exponenten im zugrundegelegten Masssystem ergibt sich für jeden der k Parameter ein lineares $r \times r$ Gleichungssystem, welches gelöst werden kann und die Exponentengruppen $\{\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \dots, \alpha_{ir}\}$, $(i = 1 \dots k)$ festlegt.

8. Die k dimensionslosen Parameter können dann geschrieben werden als

$$\begin{aligned} \Pi_1 &= \frac{p_1}{\tilde{p}_1^{\alpha_{11}} \tilde{p}_2^{\alpha_{12}} \dots \tilde{p}_r^{\alpha_{1r}}} \\ \Pi_2 &= \frac{p_2}{\tilde{p}_1^{\alpha_{21}} \tilde{p}_2^{\alpha_{22}} \dots \tilde{p}_r^{\alpha_{2r}}} \\ &\vdots \\ \Pi_k &= \frac{p_k}{\tilde{p}_1^{\alpha_{k1}} \tilde{p}_2^{\alpha_{k2}} \dots \tilde{p}_r^{\alpha_{kr}}} \end{aligned}$$

Beispiel: Volumenstrom in einem Kreisrohr

Gegeben sei die Gesetzmässigkeit für den Volumenstrom in einem Kreisrohr, in Abhängigkeit von Parametern

$$\dot{V} = f\left(\mu, R, \frac{\partial p}{\partial x}\right) .$$

Eine andere Schreibweise für diesen Ausdruck ist

$$0 = \dot{V} - f\left(\mu, R, \frac{\partial p}{\partial x}\right) .$$

Die Parameter werden in einer Dimensionsmatrix aufgelistet:

	\dot{V}	μ	R	$\partial p / \partial x$
M	0	1	0	1
L	3	-1	1	-2
T	-1	-1	0	-2

Die Gesamtzahl der Parameter ist $n = 4$, die Anzahl der benötigten Referenzparameter ist $r = 3$. Als diese Referenzparameter werden gewählt

$$\mu, \quad R \quad \text{und} \quad \frac{\partial p}{\partial x} .$$

Es kann somit nur ein dimensionsloser Parameter berechnet werden wegen

$$k = n - r = 4 - 3 = 1 .$$

Das Gleichungssystem für die Exponenten der Masseneinheiten ergibt sich zu

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_{11} \\ \alpha_{12} \\ \alpha_{13} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

(Anmerkung: Die Matrix des Gleichungssystems ergibt sich aus der Dimensionsmatrix.)

Die Lösung führt zu den Exponenten

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} \\ \alpha_{12} \\ \alpha_{13} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Im letzten Schritt wird der dimensionslose Parameter formuliert

$$\Pi_1 = \frac{\dot{V}}{\frac{1}{\mu} R^4 \frac{\partial p}{\partial x}} = \frac{\mu \dot{V}}{R^4 \frac{\partial p}{\partial x}},$$

bzw. die Proportionalität der Parameter zueinander, die im Sonderfall ($k = 1$) folgt:

$$\frac{\mu \dot{V}}{R^4 \frac{\partial p}{\partial x}} = konst. \quad \Rightarrow \quad \dot{V} \propto \frac{R^4}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x}.$$

3.5 Ähnlichkeit und Modellierung

Die dimensionslose Beschreibung eines funktionalen Zusammenhangs kann dazu genutzt werden, Skalierungsgesetze für Ähnlichkeitsuntersuchungen herzuleiten. Dazu betrachte man zwei Messreihen, eine für ein Modell (Index m) und eine für das Originalproblem (Index o)

$$\begin{aligned} \Phi^m(\Pi_1^m, \Pi_2^m, \dots, \Pi_k^m) &= 0 \\ \Phi^o(\Pi_1^o, \Pi_2^o, \dots, \Pi_k^o) &= 0. \end{aligned}$$

Man fordert nun, daß die Versuchsergebnisse am Modell denselben Gesetzmässigkeiten unterliegen wie das Original. Dann gilt für die Meßreihen

$$\Phi^m(\dots) = \Phi^o(\dots) = \Phi(\dots).$$

Daraus folgt automatisch (unter der Annahme einer eindeutigen Funktion Φ), daß auch gelten muß

$$\Pi_1^m = \Pi_1^o, \quad \Pi_2^m = \Pi_2^o, \quad \dots, \quad \Pi_k^m = \Pi_k^o,$$

d.h. die dimensionslosen Parameter von Modellversuch und Originalproblem sind identisch. Diese Identität erlaubt es nun, Messungen am Original durch Modellmessungen zu ersetzen. Insbesondere kann man auf die dimensionsbehafteten (und gegebenenfalls unbekannten) Parameter des Originals zurückschliessen, da gilt

$$\Pi_j^m = \frac{p_j^m}{(\tilde{p}_1^m)^{\alpha_{j1}} (\tilde{p}_2^m)^{\alpha_{j2}} \dots (\tilde{p}_r^m)^{\alpha_{jr}}} = \Pi_j^o = \frac{p_j^o}{(\tilde{p}_1^o)^{\alpha_{j1}} (\tilde{p}_2^o)^{\alpha_{j2}} \dots (\tilde{p}_r^o)^{\alpha_{jr}}} \quad (j = 1 \dots k)$$

oder

$$p_j^o = p_j^m \cdot \left(\frac{\tilde{p}_1^o}{\tilde{p}_1^m} \right)^{\alpha_{j1}} \cdot \left(\frac{\tilde{p}_2^o}{\tilde{p}_2^m} \right)^{\alpha_{j2}} \cdot \dots \cdot \left(\frac{\tilde{p}_r^o}{\tilde{p}_r^m} \right)^{\alpha_{jr}}.$$

Strömungsmechanische Ähnlichkeit

Damit Modellversuch und korrespondierende Originalströmung sich ähnlich verhalten, müssen die dimensionslosen Π -Größen identisch sein. Man spricht in einem solchen Fall von strömungsmechanischer Ähnlichkeit.

Reynolds-Ähnlichkeit

Bei Strömungen, bei denen als Parameter nur die Reynolds-Zahl auftritt, spricht man auch statt von strömungsmechanischer Ähnlichkeit einfach von Reynolds-Ähnlichkeit.

Beispiel: Kräfte auf ein Modell im Windkanal

Es werde ein Modellversuch durchgeführt, bei dem sich eine (gemessene) Beziehung zwischen der Kraft F auf das Modell und zwei weiteren dimensionslosen Parametern, der Reynolds-Zahl Re und der Mach-Zahl Ma ergibt:

$$\Phi^m \left(\frac{F}{\varrho U^2 L^2}, Re, Ma \right) = \Phi^m \left(\frac{F}{\varrho U^2 L^2}, \frac{\varrho U L}{\mu}, \frac{U}{a} \right) = 0.$$

Unter der Annahme, daß die Reynolds- und die Mach-Zahl zwischen Modell und Original übereinstimmen, ergeben sich die folgenden Beziehungen aus der Identität der dimensionslosen Parameter

$$\begin{aligned} Re^m = Re^o &\implies \frac{\varrho^m U^m L^m}{\mu^m} = \frac{\varrho^o U^o L^o}{\mu^o} \\ Ma^m = Ma^o &\implies \frac{U^m}{a^m} = \frac{U^o}{a^o} \end{aligned}$$

und damit für die gesuchte Kraft am Original

$$\frac{F^m}{\varrho^m (U^m)^2 (L^m)^2} = \frac{F^o}{\varrho^o (U^o)^2 (L^o)^2} \implies F^o = F^m \frac{\varrho^o}{\varrho^m} \left(\frac{U^o}{U^m} \right)^2 \left(\frac{L^o}{L^m} \right)^2.$$

3.6 Dimensionslose Kennzahlen

Reynolds-Zahl	$Re = u L / \nu$
Froude-Zahl	$Fr = u / \sqrt{g L}$
Mach-Zahl	$Ma = u / a$
Euler-Zahl	$Eu = p / (\varrho u^2) = (\gamma Ma^2)^{-1}$
Knudsen-Zahl	$Kn = \lambda_m / L = Ma / Re$
Weber-Zahl	$We = \varrho u^2 L / \sigma$
Strouhal-Zahl	$Str = L / (u t)$
Eckert-Zahl	$Ec = u^2 / (c_p \Delta T)$
Fourier-Zahl	$ Fo = k t / L^2$
Grashof-Zahl	$Gr = g L^3 \alpha (T_{\text{Wand}} - T_\infty) / \nu^2$
Nusselt-Zahl	$Nu = \alpha L / k$
Péclet-Zahl	$Pe = u L / k$
Prandtl-Zahl	$Pr = \nu / k$
Rayleigh-Zahl	$Ra = Gr Pr$
Stokes-Zahl	$St = p L / (\mu u)$
Reibungskoeffizient	$c_f = \tau_W / ((\varrho/2) u^2)$
Druckkoeffizient	$c_p = \Delta p / ((\varrho/2) u^2)$
Auftriebsbeiwert	$c_L = F_L / ((\varrho/2) u^2 A)$
Widerstandsbeiwert	$c_D = F_D / ((\varrho/2) u^2 A)$
Momentenbeiwert	$\zeta_M = Ma / ((\varrho/2) R^5 \omega^2)$

Tabelle 3.2: Ausgewählte dimensionslose Kennzahlen

Kapitel 4

Kinematische Beschreibung des Strömungsfeldes

4.1 Lagrangesche und Eulersche Beschreibung

Lagrangesche Beschreibung

In dieser Betrachtungsweise wird das Fluidpartikel in seiner Bewegung im Raum verfolgt. Die einzelnen Partikel können durch ihre Referenzposition $\underline{\xi}_0$ zur Referenzzeit t_0 identifiziert werden, und die Teilchenbahnen ergeben sich als

$$\underline{\xi} = \underline{\xi}(t; \underline{\xi}_0, t_0) .$$

Für die Geschwindigkeit \underline{u} des Partikels gilt

$$\underline{u}|_{\underline{\xi}_0, t_0} = \frac{d}{dt}\underline{\xi}(t) = \left. \frac{\partial \underline{\xi}}{\partial t} \right|_{\underline{\xi}_0, t_0} ,$$

für seine Beschleunigung

$$\underline{a}|_{\underline{\xi}_0, t_0} = \frac{d^2}{dt^2}\underline{\xi}(t) = \left. \frac{\partial^2 \underline{\xi}}{\partial t^2} \right|_{\underline{\xi}_0, t_0} .$$

Der Index $\underline{\xi}_0, t_0$ manifestiert, daß die Ableitung bei fester Referenzlage, also für ein und dasselbe Teilchen, durchgeführt wird. Es handelt sich um eine **massen- bzw. teilchenfeste Beschreibung**.

Eulersche Beschreibung

Bei diesem Ansatz wird die Änderung der Strömungsgrößen an einer festen Stelle des Raumes betrachtet. An jedem Ort \underline{x} und zu jedem Zeitpunkt t ist der Wert einer Strömungsgrösse $\phi(\underline{x}, t)$ eindeutig definiert durch den Wert von ϕ für das zur Zeit t gerade im Punkt \underline{x} befindliche Fluidteilchen. Die Strömungsgrößen werden als **Feldgrößen** dargestellt, z.B.:

$$\underline{u}(\underline{x}, t) , \quad \varrho(\underline{x}, t) , \quad T(\underline{x}, t) \dots$$

	Lagrange (partikelbezogen)	Euler (raumfest)
Ort	Partikelposition $\underline{\xi}(t) = \underline{\xi}(t; \underline{\xi}_0, t_0)$	unabhängige Variable \underline{x}, t
Geschwindigkeit	Partikelgeschwindigkeit $\frac{d\underline{\xi}}{dt}$	Geschwindigkeitsfeld $\underline{u}(\underline{x}, t)$
Beschleunigung	Beschleunigung des Partikels $\frac{d^2\underline{\xi}}{dt^2}$	Beschleunigung, die ein strömendes Partikel in (\underline{x}, t) erfährt $\frac{D}{Dt}\underline{u} = \frac{\partial}{\partial t}\underline{u} + (\underline{u} \cdot \nabla)\underline{u}$

Tabelle 4.1: Kinetische Beschreibung der Fluidbewegung

4.2 Substantielle Ableitung

Die Änderung einer Strömungsgrösse ϕ für ein einzelnes Fluidpartikel, daß sich entlang seiner Bahnlinie bewegt, berechnet sich über die substantielle Ableitung:

$$\frac{D\phi}{Dt} = \underbrace{\frac{\partial\phi}{\partial t}}_{\text{lokale Ableitung}} + \underbrace{(\underline{u} \cdot \nabla)\phi}_{\text{konvektive Ableitung}}$$

Die im mitbewegten System wahrgenommene Änderung hat zwei Komponenten. Die *lokale Ableitung* beschreibt die Änderung, die ein (möglicherweise unbewegtes) Fluidpartikel dadurch wahrnimmt, daß sich das lokale Strömungsumfeld zeitlich ändert. Die *konvektive Ableitung* beschreibt die Änderung, die ein mit der Geschwindigkeit \underline{u} bewegtes Teilchen in einem räumlich variablen (aber möglicherweise zeitlich konstanten) Strömungsfeld erfährt.

In mathematischen Sinne stellt die konvektive Ableitung die Richtungsableitung von ϕ in Richtung der lokalen Bewegungsrichtung des Fluidpartikels dar, multipliziert mit dem Betrag der lokalen Geschwindigkeit.

4.3 Reynolds-Transporttheorem

$\tilde{V}(t)$ sei ein mit dem Strömungsfeld $\underline{u}(\underline{x}, t)$ mitbewegtes, “materielles” Volumen mit dem geschlossenen Rand $\partial\tilde{V}(t) = \tilde{S}$ und der äußeren Normalen \underline{n} . Die Grösse $\Psi(t)$ sei definiert durch

$$\Psi(t) = \int_{\tilde{V}(t)} \phi(\underline{x}, t) d\tilde{V} ,$$

wobei $\phi(\underline{x}, t)$ eine beliebige Funktion ist. Für die zeitliche Ableitung von Ψ gilt:

$$\frac{d\Psi}{dt} = \int_{\tilde{V}(t)} \frac{\partial\phi}{\partial t} d\tilde{V} + \int_{\partial\tilde{V}(t)=\tilde{S}} \phi \underline{u} \cdot \underline{n} d\tilde{S} .$$

Sei $V(t)$ ein beliebig bewegter, zeitabhängiger Integrationsbereich (“Kontrollvolumen”) mit dem Rand $S(t) = \partial V(t)$ und der Geschwindigkeit des Randes \underline{u}_S . Dann gilt:

$$\frac{D\Psi}{Dt} = \frac{d}{dt} \int_{V(t)} \phi \, dV + \int_{S(t)} \phi [(\underline{u} - \underline{u}_S) \cdot \underline{n}] \, dS .$$

Wenn V ein ortsfestes Kontrollvolumen ist, ergibt sich

$$\frac{D\Psi}{Dt} = \frac{d}{dt} \int_V \phi \, dV + \int_S \phi \underline{u} \cdot \underline{n} \, dS .$$

4.4 Kinematische Eigenschaften von Strömungen

Inkompressible Strömung und inkompressibles Fluid

Der thermodynamische Term “inkompressibles Fluid” und der fluidodynamische Begriff der “inkompressiblen Strömung” sind nicht notwendigerweise äquivalent. Es ist durchaus möglich, daß ein kompressibles Fluid inkompressibel strömt.

Von *inkompressibler Strömung* kann ausgegangen werden, wenn die Dichteänderungen eines Fluidpartikels vernachlässigbar sind. Mathematisch ist die Inkompressibilität über die Bedingung

$$\frac{D\rho}{Dt} = 0$$

definiert. Die Fluidpartikel müssen nicht alle die gleiche Dichte haben. Die einzige Bedingung ist, daß die Definition für jedes Fluidpartikel einzeln erfüllt ist. Ein Beispiel ist die Atmosphäre: Ihre Dichte ändert sich mit der Entfernung von der Erdoberfläche, die Dichte der einzelnen Fluidpartikel bleibt aber konstant in einer Strömungsebene (geschichtete Strömung).

In einem *inkompressiblen Fluid* hingegen wird die stärker einschränkende Annahme

$$\rho = \text{konst.}$$

gemacht.

Stationäre Strömung

Eine Strömung wird als stationär bezeichnet, wenn alle ihre Eigenschaften (Druck, Geschwindigkeit, Dichte etc.) an einem festen Ort zeitunabhängig sind, d.h. es gilt im Eulerschen Sinne

$$\frac{\partial}{\partial t} = 0 .$$

Dabei impliziert weder $\partial/\partial t = 0$, daß $D/Dt = 0$, noch folgt aus $D/Dt = 0$, daß $\partial/\partial t = 0$.

Beispiel: Stationäre Strömung eines inkompressiblen Fluids in einer Düse

Es gilt hier für das Geschwindigkeitsfeld

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial u}{\partial x} \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{Du}{Dt} \neq 0,$$

d.h. ein Fluidpartikel erfährt eine Beschleunigung entlang seiner Trajektorie in der Düse, obwohl das Strömungsfeld zeitlich konstant bleibt.

Gleichförmige Strömung

Eine Strömung wird als gleichförmig (uniform) bezeichnet, wenn die Strömungsgeschwindigkeit im gesamten Raum ortsunabhängig ist, d.h.

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_j} = 0 .$$

Die Stromlinien solcher Strömungen müssen gerade und parallel sein. Sind sie nicht gerade, wird der Geschwindigkeitsvektor eine Richtungsänderung erfahren. Sind sie nicht parallel, ändert sich die Geschwindigkeit entlang der Stromlinien.

Ausgebildete Strömung

Die ausgebildete Strömung ist eine schwächere Form der gleichförmigen Strömung. Es wird nur angenommen, daß sich die Strömungsgeschwindigkeit nicht entlang der Hauptströmungsrichtung ändert. Als Beispiel diene die Rohrströmung (Strömungsrichtung x). Hier sind $\partial p / \partial x = \text{konst.}$ bzw. $\partial T / \partial x = \text{konst.}$ zugelassen, $\underline{u}(x)$ aber nicht.

Wirbelstärke

Der Wirbelstärkevektor $\underline{\omega}$ ist über die Rotation des Geschwindigkeitsfeldes definiert: $\underline{\omega} = \underline{\nabla} \times \underline{u} = \text{rot } \underline{u}$. In kartesischen Koordinaten $\underline{x} = (x, y, z)^T$ gilt

$$\underline{\omega} = \underline{\nabla} \times \underline{u} = \underline{e}_x \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) + \underline{e}_y \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \underline{e}_z \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) ,$$

in Zylinderkoordinaten $\underline{x} = (r, \theta, x)^T$

$$\underline{\omega} = \underline{\nabla} \times \underline{u} = \underline{e}_r \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_x}{\partial \theta} - \frac{\partial u_\theta}{\partial x} \right) + \underline{e}_\theta \left(\frac{\partial u_r}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial r} \right) + \underline{e}_x \left(\frac{1}{r} \left[\frac{\partial(r u_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right] \right) .$$

4.5 Ausgezeichnete Linien

Eine **Stromlinie** ist eine Kurve, die in jedem Punkt tangential zum momentanen Geschwindigkeitsfeld verläuft, d.h. es gilt

$$d\underline{x} \times \underline{u} \equiv 0 ,$$

bzw. in parameterfreier Darstellung

$$\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v} = \frac{dz}{w} .$$

Stromlinien können als “Momentaufnahme” der Strömung aufgefasst werden. Sie sind auch als Integralkurven $\underline{x}(s)$ des momentanen Geschwindigkeitsfeldes definierbar

$$\frac{d\underline{x}}{ds} = \underline{u}(\underline{x}(s); t) ,$$

wobei s der Kurvenparameter ist. Für eine stationäre Strömung sind Stromlinien zeitlich unveränderliche Kurven im Raum.

Eine **Bahnlinie** ist der Pfad eines Fluidpartikels. Sie entspricht der Trajektorie $\underline{\xi}(t)$ eines Partikels, die bei “Langzeitbelichtung” der Strömung entsteht. Sie wird beschrieben durch

$$\frac{d\underline{\xi}}{dt} = \underline{u}(\underline{\xi}(t), t) , \quad \underline{\xi}(t_0) = \underline{\xi}_0 .$$

Eine **Streichlinie** ist der Pfad aller Fluidpartikel, die durch einen festen Referenzpunkt gelaufen sind. Der sich bei einer Rauchsonde ergebende Rauchfaden entspricht einer Streichlinie.

Eine **Zeitlinie** ist die Linie von Teilchen, die sich zu einem früheren Zeitpunkt t_0 auf einer Kurve befanden. Eine Zeitlinie kann z.B. durch Wasserstoffbläschen visualisiert werden, die entlang einer Linie momentan erzeugt wurden.

Für eine stationäre Strömung gilt der wichtige Sonderfall:

$$\boxed{\text{Stromlinie} = \text{Bahnlinie} = \text{Streichlinie}}$$

Beispiel: 2D Staupunktströmung

Gegeben seien die Teilchenbahnen in einer 2D Strömung,

$$\underline{\xi}(t; \underline{\xi}_0, t_0) = \begin{pmatrix} \xi(t) \\ \eta(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi_0 \exp[A(t - t_0)] \\ \eta_0 \exp[-A(t - t_0)] \end{pmatrix}$$

Die Geschwindigkeit der Teilchen ergibt sich damit zu

$$\dot{\underline{\xi}} = \frac{d\underline{\xi}}{dt} = \begin{pmatrix} A\xi_0 \exp[A(t - t_0)] \\ -A\eta_0 \exp[-A(t - t_0)] \end{pmatrix}$$

Das Eulersche Geschwindigkeitsfeld ist definiert durch die Geschwindigkeit des Teilchens, das zum Zeitpunkt t durch den Punkt (x, y) fließt,

$$\underline{\xi} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi_0 \exp[A(t - t_0)] \\ \eta_0 \exp[-A(t - t_0)] \end{pmatrix},$$

womit folgt

$$\underline{u}(\underline{\xi} = \underline{x}, t) = \begin{pmatrix} A\xi_0 \exp[A(t - t_0)] \\ -A\eta_0 \exp[-A(t - t_0)] \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix}.$$

Man beachte, daß keine explizite Zeitabhängigkeit mehr vorhanden ist - die Strömung ist stationär. Die Stromlinien ergeben sich aus dem Geschwindigkeitsfeld mit der Definition

$$\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v} \quad ; \quad \frac{dx}{x} = \frac{-dy}{y}$$

nach Bestimmung der Integrationskonstante zu

$$y = \frac{x_0 y_0}{x}.$$

Da die Strömung stationär ist, sind die Stromlinien und Bahnlinien identisch; es gilt

$$xy = \text{konst.} = x_0 y_0$$

bzw.

$$\xi\eta = \text{konst.} = \xi_0 \eta_0$$

entlang der Integralkurven.

4.6 Stromfunktion

Das Geschwindigkeitsfeld wird definiert über die Rotation der Stromfunktion $\underline{\Psi}$, die im allgemeinen Fall ein Vektorfeld ist. Im 2D-Fall hat $\underline{\Psi}$ nur eine Komponente und kann als Skalar Ψ aufgefasst werden.

$$\underline{u} = \underline{\nabla} \times \underline{\Psi} \text{ , } \quad 2\text{D-Fall : } \underline{u} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \Psi}{\partial y} \\ -\frac{\partial \Psi}{\partial x} \end{pmatrix}_{x,y}$$

Das so definierte Geschwindigkeitsfeld erfüllt die (inkompressible) Kontinuitätsgleichung (da $\text{div } \underline{u} = \text{div rot } \underline{\Psi} = 0$).

Auf Stromlinien gilt $\Psi = \textit{konst.}$ Der Volumenstrom zwischen zwei Stromlinien kann aus der Differenz der entsprechenden Werte der Stromfunktion berechnet werden

$$\dot{V}_{21} = \Psi_2 - \Psi_1 \text{ .}$$

Der Massenfluß berechnet sich über

$$\dot{m}_{21} = \rho b (\Psi_2 - \Psi_1)$$

mit b als Breite der Fluidschicht in z-Richtung.

Kapitel 5

Erhaltungssätze

5.1 Massenerhaltung

Die Masse eines materiellen Volumens Fluidelementes bleibt per Definition erhalten, d.h. es gilt im mitbewegten System:

$$\frac{Dm}{Dt} = 0$$

5.1.1 Integrale Formulierung

Begreift man die Masse als das Integral der Dichte über das Volumen V

$$m = \int_V \varrho \, dV$$

ergibt sich der Massenerhaltungssatz aus dem Transporttheorem für ein raumfestes Kontrollvolumen zu

$$\frac{Dm}{Dt} = \underbrace{\frac{d}{dt} \int_V \varrho \, dV}_{\text{Massenänderung im Gebiet}} + \underbrace{\int_S \varrho \underline{u} \cdot \underline{n} \, dS}_{\text{Massenfluss über den Gebietsrand}} = 0 .$$

5.1.2 Stromröhren

Aus dem Massenerhaltungssatz für stationäre Strömungen ($\partial/\partial t = 0$) durch Stromröhren mit Endflächen senkrecht zur Anströmung folgt:

$$\int_S \varrho \underline{u} \cdot \underline{n} \, dS = 0 \quad \Rightarrow \quad \varrho_1 \cdot u_1 \cdot S_1 = \varrho_2 \cdot u_2 \cdot S_2 \quad \Rightarrow \quad \dot{m}_1 = \dot{m}_2$$

(Die Fläche $|_1$ wird hierbei als die Einströmfläche verstanden, die Fläche $|_2$ als die Ausströmfläche.)

5.1.3 Differentielle Form - Kontinuitätsgleichung

Die differentielle Form des Massenerhaltungssatzes ergibt sich aus der integralen Form unter Anwendung des Gaußschen Satzes zu

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \nabla \cdot (\varrho \underline{u}) = 0 .$$

Diese Gleichung wird auch *Kontinuitätsgleichung* genannt.

Für *inkompressible Strömungen* vereinfacht sich der obige Ausdruck zu

$$\nabla \cdot \underline{u} = 0 .$$

5.2 Impulserhaltung

Die zeitliche Änderung des Impulses eines Fluidelementes ist gleich der Summe der daran angreifenden Kräfte:

$$\frac{DP}{Dt} = \sum \underline{F}$$

5.2.1 Integrale Formulierung

Wird der Impuls \underline{P} integral beschrieben als

$$\underline{P} = \int_V \varrho \underline{u} \, dV,$$

geht der Impulserhaltungssatz für ein raumfestes Kontrollvolumen unter Aufzählung aller auftretenden Kräfte über in:

$$\frac{DP}{Dt} = \underbrace{\frac{d}{dt} \int_V \varrho \underline{u} \, dV}_{\text{Impulsänderung im Gebiet}} + \underbrace{\int_S \varrho \underline{u} (\underline{u} \cdot \underline{n}) \, dS}_{\text{Impulsfluss über den Gebietsrand}} = \underbrace{- \int_S p \underline{n} \, dS}_{\text{Druckkräfte}} + \underbrace{\int_V \varrho \underline{f} \, dV}_{\text{Volumenkräfte}} + \underbrace{\int_S \underline{\tau} \cdot \underline{n} \, dS}_{\text{Oberflächenscherkräfte}} + \underbrace{\underline{F}_{ext}}_{\text{äussere Kräfte}}$$

Die äusseren Kräfte stellen dabei z.B. Haltekräfte dar.

5.2.2 Stromröhren

Es sei vorausgesetzt, daß die Strömung stationär ($\partial/\partial t = 0$) und reibungsfrei ($\underline{\tau} = 0$) ist, es sollen keine Volumenkräfte wirken ($\underline{f} = 0$), ebensowenig wie äussere Kräfte ($\underline{F}_{ext} = 0$). Die Endflächen der Stromröhre seien senkrecht zur Anströmung orientiert. Dann gilt:

$$\begin{aligned} \int_S \varrho \underline{u} (\underline{u} \cdot \underline{n}) \, dS &= - \int_S p \underline{n} \, dS \\ \Rightarrow (p_1 + \varrho_1 u_1^2) S_1 \underline{n}_1 + (p_2 + \varrho_2 u_2^2) S_2 \underline{n}_2 &= - \int_{Mantel} p \underline{n} \, dS = \underline{F}_M \end{aligned}$$

F_M entspricht hier der Druckkraft auf den Mantel der Stromröhre. Es wurde wiederum angenommen, daß die Fläche $|_1$ die Einstömfläche bezeichnet, die Fläche $|_2$ die Ausströmfläche.

Vorgehensweise bei der Anwendung des Impulssatzes:

1. Koordinatensystem festlegen
2. Wahl des Kontrollvolumens
 - einfach zusammenhängend
 - unter Ausnutzung von Randbedingungen (Kanalwand, p_∞)
 - unter Ausnutzung geometrischer Vereinfachungen (\underline{u} senkrecht zu den Grenzen des Kontrollvolumens, Grenzen parallel zu den Achsen des Koordinatensystems)
3. Impulsströme eintragen
4. Körperkräfte eintragen
5. Drücke eintragen
6. Impulssatz aufstellen

Hinweise:

- A. Für die Berechnung der Geschwindigkeitsänderungen wird die Kontinuitätsgleichung herangezogen.
- B. Beim Berechnen der Drücke kann die Bernoulli-Gleichung helfen (siehe Kapitel 5.2.4.2).

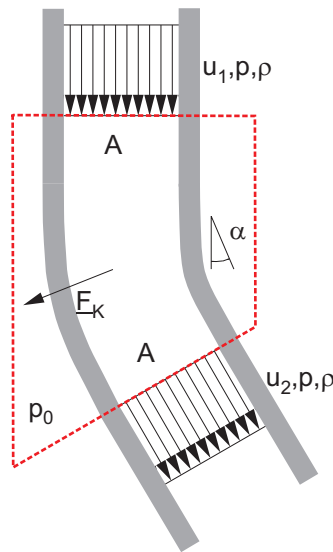
Beispiel: Kraft auf einen Rohrkrümmer

Abbildung 5.1: Strömung durch einen Rohrkrümmer

Die Strömung sei stationär und inkompressibel. Der Querschnitt A bleibe unverändert ebenso wie der Druck p im Rohr.

Die Kontinuitätsgleichung liefert für das Kontrollvolumen

$$u_1 = u_2 .$$

Der Impulssatz hat als Vektorgleichung zwei Komponenten, die beide ausgewertet werden müssen. Es ergibt sich für die x -Komponente

$$\rho (+u_2 \sin \alpha) (+u_2) A = - (p - p_0) A \sin \alpha + F_x ,$$

und für die y -Komponente

$$\rho (-u_1) (-u_1) A + \rho (-u_2 \cos \alpha) (+u_2) A = - (p - p_0) A - (p - p_0) A (-\cos \alpha) + F_y .$$

Die Kraftkomponenten im Impulssatz, F_x und F_y , beschreiben die Kraft *auf das Fluid*. Die Kraft auf den Krümmer hat dementsprechend genau die umgekehrte Richtung, d.h.

$$\underline{F}_K = - \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} - (\rho u_2^2 + p - p_0) A \sin \alpha \\ - (\rho u_1^2 + p - p_0) A (1 - \cos \alpha) \end{pmatrix} .$$

5.2.3 Differentielle Form

Die differentielle Form des Impulserhaltungssatzes ergibt sich aus der integralen Form zu:

$$\frac{\partial(\varrho \underline{u})}{\partial t} + \nabla \cdot (\varrho \underline{u} \underline{u}) = \underbrace{-\nabla p}_{\text{Druck-gradient}} + \underbrace{\varrho \underline{f}}_{\text{Kraft-felder}} + \underbrace{\nabla \cdot \underline{\tau}}_{\text{Schub-spannung}}$$

Die externen Kräfte haben keine Entsprechung in der differentiellen Formulierung. Unter Verwendung der Kontinuitätsgleichung kann man auch schreiben:

$$\varrho \frac{D\underline{u}}{Dt} = -\nabla p + \varrho \underline{f} + \nabla \cdot \underline{\tau}.$$

5.2.4 Impulserhaltung für reibungsfreie Strömungen

5.2.4.1 Euler-Gleichung

Die Impulsgleichung wird unter Annahme eines perfekten Fluides, d.h. durch Vernachlässigung der Reibung ($\underline{\tau} = 0$), vereinfacht:

$$\frac{D\underline{u}}{Dt} = \frac{\partial \underline{u}}{\partial t} + (\underline{u} \cdot \nabla) \underline{u} = -\frac{1}{\varrho} \nabla p + \underline{f}$$

Diese Beziehung wird *Euler-Gleichung* genannt. Als **Randbedingungen** gelten:

1. An einer festen Wand:
 $\underline{n} \cdot \underline{u} = 0$, d.h. $u_{\perp} \equiv 0$ und u_{\parallel} ist nicht bestimmt.
2. An der Trennfläche zweier Fluide (ohne Grenzflächenspannung):
 $\underline{n} \cdot \underline{u}_1 = \underline{n} \cdot \underline{u}_2$, d.h. $u_{\perp,1} = u_{\perp,2}$ wobei $u_{\parallel,1}$ und $u_{\parallel,2}$ unbestimmt bleiben.
Ausserdem gilt $p_1 = p_2$, d.h. die Gleichheit der Drücke.

5.2.4.2 Bernoulli-Gleichung

Aus der Euler-Gleichung kann durch Integration entlang einer Stromlinie unter Annahme der Inkompressibilität ($\varrho = \text{konst.}$) die *Bernoulli-Gleichung* hergeleitet werden. Das Kraftfeld sei konservativ und es existiere ein Potential U für die Kräfte

$$\underline{f} = -\nabla U.$$

Zwischen zwei Punkten einer Stromlinie gilt unter diesen Voraussetzungen zu einem festen Zeitpunkt:

$$\int_1^2 \frac{\partial \underline{u}}{\partial t} \cdot d\underline{s} + \left[\frac{u^2}{2} + \frac{p}{\varrho} + U \right]_1^2 = 0$$

Die Annahme einer stationären Strömung vereinfacht die Gleichung zusätzlich:

$$\left[\frac{u^2}{2} + \frac{p}{\varrho} + U \right]_1^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{u^2}{2} + \frac{p}{\varrho} + U = \text{konst.}$$

Die spezifische mechanische Energie oder *Bernoulli-Konstante* ist entlang einer Stromlinie konstant, aber von Stromlinie zu Stromlinie im allgemeinen verschieden.

(Die Bernoulli-Gleichung kann auch ausgehend von der Navier-Stokes-Impulsgleichung hergeleitet werden. Dabei wird die Strömung als rotations- ($\nabla \times \underline{u} = \underline{0}$) und reibungsfrei ($\underline{\tau} = 0$) angenommen. Unter diesen Voraussetzungen gilt die Gleichung im ganzen Strömungsfeld.)

Die Bernoulli-Gleichung kann dimensionell als eine Bilanzgleichung für die spezifische mechanische Energie interpretiert werden. Sie sollte jedoch *nicht* für die Energiegleichung substituiert werden.

Vorgehensweise bei der Anwendung der Bernoulli-Gleichung:

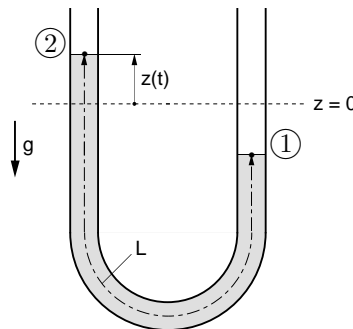
1. Anfangs- und Endpunkt der Stromlinie festlegen
2. Bernoulli-Gleichung aufstellen
3. Bekannte Größen einsetzen
4. Umformen

Hinweise:

- A. An freien Oberflächen herrscht meist Umgebungsdruck.
- B. Die Gleichung darf nicht über Stellen angewendet werden, an denen mechanische Energie zugeführt oder entzogen wird (Propeller, Turbulenz durch Strömungsabrisß etc.).
- C. In sehr grossen Querschnitten (relativ zur betrachteten Stromröhre) kann die Geschwindigkeit meist vernachlässigt werden.

Beispiel: Schwingung in einem U-Rohr

Ein inkompressibles, reibungsfreies Fluid befindet sich in einem offenen U-Rohr mit konstantem Querschnitt.



Gesucht ist die Schwingungsgleichung des Systems. Diese folgt aus der Bernoulli-Gleichung von 1 nach 2. An den Stellen 1 und 2 herrscht Umgebungsdruck: $p_2 = p_1 = p_0$. Aus der Kontinuität für eine Stromröhre folgt, dass die Geschwindigkeit im ganzen U-Rohr ausschliesslich eine Funktion der Zeit ist: $u_1(t) = u_2(t) = \dot{z}(t)$. Das Integral der Geschwindigkeitsänderung $\frac{\partial u}{\partial t}$ wird zu $L\ddot{z}$. Das Potential an der Stelle 1 ist $U_1 = -gz$, an der Stelle 2 $U_2 = gz$. Einsetzen in die instationäre Bernoulli-Gleichung ergibt die Schwingungsgleichung

$$\ddot{z} + \frac{2g}{L}z = 0 .$$

5.2.4.3 Barotrope und barokline Strömungen

Eine Strömung wird *barotrop* genannt, wenn die Dichte nur vom Druck abhängt:

$$\varrho = \varrho(p)$$

Dies ist trivialerweise erfüllt für inkompressible ($\varrho = \text{konst.}$) Strömungen eines Fluids, aber gilt auch für isotherme ($T = \text{konst.}$) bzw. isentrope ($s = \text{konst.}$) Strömungen eines idealen Gases.

Im allgemeinen ist die Dichte auch von der Temperatur abhängig. Man spricht dann von einer *baroklinen* Strömung:

$$\varrho = \varrho(p, T)$$

Für barotrope Strömungen ist $1/\varrho \nabla p$ rotationsfrei (für barokline Strömungen gilt das nicht). Unter Berücksichtigung dieser Annahme kann eine allgemeinere Form der Bernoulli-Gleichung hergeleitet werden:

$$\int_1^2 \frac{\partial \underline{u}}{\partial t} \cdot d\underline{s} + \left[\frac{\underline{u}^2}{2} + U \right]_1^2 + \int_1^2 \frac{dp}{\varrho(p)} = 0$$

In Sonderfall einer isentropen Strömung eines idealen Gases gilt wegen $dh = Tds + dp/\varrho = dp/\varrho$

$$\int_2^1 \frac{\partial \underline{u}}{\partial t} \cdot d\underline{s} + \left[\frac{\underline{u}^2}{2} + U + h \right]_1^2 = 0$$

5.3 Energieerhaltung

Die Energie eines Systems ändert sich durch Zuführen bzw. Abführen von Wärmeströmen oder durch Abgabe bzw. Aufnahme von mechanischer Leistung:

$$\frac{DE}{Dt} = \sum_i \underline{F}_i \cdot \underline{u} + \sum_i \dot{Q}_i$$

5.3.1 Integrale Formulierung

Die totale innere Energie e_T ist definiert durch:

$$e_T = \varrho \left(e + \frac{\underline{u}^2}{2} \right)$$

Für die Erhaltung der totalen inneren Energie in einem raumfesten Kontrollvolumen V , das durch den Rand S umschlossen ist, gilt:

$$\begin{aligned} \frac{DE}{Dt} &= \underbrace{\frac{d}{dt} \int_V \varrho \left(e + \frac{\underline{u}^2}{2} \right) dV}_{\text{Energieänderung im KV}} + \underbrace{\int_S \varrho \left(e + \frac{\underline{u}^2}{2} \right) (\underline{u} \cdot \underline{n}) dS}_{\text{Energiefluss über die Grenzen des KV}} \\ &= \underbrace{\int_V \varrho \underline{f} \cdot \underline{u} dV}_{\text{Volumenarbeit}} + \underbrace{\int_S (\underline{\sigma} \cdot \underline{u}) \cdot \underline{n} dS}_{\text{Oberflächenarbeit}} + \underbrace{\int_V \varrho q_V dV}_{\text{volumetrische Quellen}} - \underbrace{\int_S \underline{q} \cdot \underline{n} dS}_{\text{Wärmeströme}} \end{aligned}$$

Die Wärmestromdichte \underline{q} kann über das *Gesetz von Fourier* berechnet werden:

$$\underline{q} = -k \nabla T .$$

5.3.2 Differentielle Formulierung

Aus der obigen Form des Energiesatzes kann die differentielle Form für die *Gesamtenergie* hergeleitet werden:

$$\frac{d}{dt} \left[\rho \left(e + \frac{u^2}{2} \right) \right] + \operatorname{div} \left[\rho \underline{u} \left(e + \frac{u^2}{2} \right) \right] = \rho \underline{f} \cdot \underline{u} + \operatorname{div} (\underline{\sigma} \cdot \underline{u}) + \rho q_V - \operatorname{div} \underline{q}$$

Eine Erhaltungsgleichung für die *innere Energie* kann hergeleitet werden, indem man eine Gleichung für die kinetische Energie (aus dem Impulssatz, durch Multiplikation mit dem Geschwindigkeitsvektor) subtrahiert:

$$\underbrace{\rho \frac{\partial e}{\partial t} + \rho \underline{u} \cdot \nabla e}_{\text{substantielle Ableitung}} = - \underbrace{\nabla \cdot \underline{q}}_{\text{Wärmeleitung}} - \underbrace{p \nabla \cdot \underline{u}}_{\text{Druckarbeit}} + \underbrace{\underline{\tau} : \nabla \underline{u}}_{\text{Dissipation}} + \underbrace{\rho q_V}_{\text{Wärmequellen}}$$

Der Energiesatz kann auch unter Verwendung der *Enthalpie* formuliert werden:

$$\rho \frac{Dh}{Dt} = \frac{Dp}{Dt} - \nabla \cdot \underline{q} + \underline{\tau} : \nabla \underline{u} + \rho q_V$$

Die Enthalpie h ist definiert über

$$h = e + \frac{p}{\rho}.$$

Vorgehensweise bei der Anwendung:

1. Kontinuitätsgleichung und Impulssatz lösen für alle Koordinaten
2. Einsetzen in den Energiesatz
3. Differentialgleichung lösen

Bedeutung möglicher **Hinweise** in der Aufgabenstellung:

- A. Vernachlässigbare Wärmeleitung $-\nabla \cdot \underline{q} = 0$
- B. Vernachlässigbare Dissipation $\underline{\tau} : \nabla \underline{u} = 0$
- C. Newtonsches Fluid $\tau_{ij} = \mu (\partial u_j / \partial x_i + \partial u_i / \partial x_j)$
- D. Stationär $\partial / \partial t = 0$
- E. Adiabate Wand $\underline{q}_W = 0$
- F. Isotherme Wand $T_W = \text{konst.}$
- G. Mit konstantem Wärmestrom geheizte Wand $\underline{q}_W = \text{konst.}$

5.3.3 Sonderfälle

5.3.3.1 Energieerhaltung für inkompressible Strömungen

Es gilt die Kontinuitätsgleichung für inkompressible Strömungen

$$\nabla \cdot \underline{u} = 0.$$

Es wird nicht zwischen isobarer (c_p) und isochorer (c_v) Wärmekapazität unterschieden. Für ein kalorisch perfektes Fluid gilt für das Differential von e :

$$De = c \, DT$$

Unter diesen Bedingungen vereinfacht sich der Energiesatz zu:

$$\varrho c \frac{DT}{Dt} = -\underline{\nabla} \cdot \underline{q} + \underline{\tau} : \underline{\nabla} \underline{u} + \varrho q_V$$

Treten keine Wärmeleitung und keine Reibung auf, und sind keine Wärmequellen oder -senken vorhanden, gilt $DT/Dt = 0$, und damit ist $T = konst.$ für ein mitbewegtes Fluidpartikel.

5.3.3.2 Perfektes Gas ohne Reibung

Ein perfektes Gas ist ein ideales Gas mit konstanten Wärmekapazitäten. Es gilt

$$\frac{p}{\varrho} = RT, \quad dh = c_p dT, \quad a^2 = \gamma RT.$$

Aus dem Energiesatz folgt:

$$\varrho \frac{D}{Dt} \left(h + \frac{\underline{u}^2}{2} \right) = -\underline{\nabla} \cdot \underline{q} + \frac{\partial p}{\partial t} + \underline{\nabla} \cdot (\underline{\tau} \cdot \underline{u}) + \varrho \underline{f} \cdot \underline{u} + \varrho q_V$$

Tritt keine Wärmeleitung auf, sind keine Wärmequellen vorhanden und ist die Strömung reibungsfrei sowie stationär mit $\underline{f} = 0$, vereinfacht sich die Aussage zu

$$\underline{u} \cdot \underline{\nabla} \left(h + \frac{\underline{u}^2}{2} \right) = 0.$$

Entlang der Stromlinien gilt die Gleichung

$$c_p T + \frac{1}{2} \underline{u}^2 = konst.,$$

die auch *kompresible Bernoulli-Gleichung* genannt wird.

Kapitel 6

Reibungsbehaftete Strömungen

6.1 Navier-Stokes-Gleichung

Mit dem Newtonschen Schubspannungsansatz unter Annahme konstanter kinematischer Viskosität $\nu = \text{konst.}$ geht aus dem Impulssatz für reibungsbehaftete inkompressible Strömungen die Navier-Stokes-Gleichung

$$\frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \nu\Delta\mathbf{u} + \mathbf{f}$$

hervor. Analog zur vektoriellen kann auch die tensorielle Schreibweise benutzt werden. In kartesischen Koordinaten gilt:

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial}{\partial x_j} u_i = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} u_i + f_i .$$

Die Kontinuitätsgleichung für den inkompressiblen Fall lautet

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 ,$$

bzw. in Tensor-Notation

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 .$$

Randbedingungen:

1. An festen Wänden gilt die Haftbedingung ("no-slip condition"):

$$\mathbf{u}_{\text{Fluid}} = \mathbf{u}_{\text{Wand}} .$$

2. An Phasentrennflächen ohne Grenzflächenspannung gilt:

$\mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_2$, d.h. die Geschwindigkeiten sind kontinuierlich über die Trennfläche, sowie $\underline{\underline{\sigma}}_1 \cdot \underline{\underline{n}} = \underline{\underline{\sigma}}_2 \cdot \underline{\underline{n}}$.
Die zweite Bedingung lässt sich weiter aufspalten in die Gleichheit der Drücke, $p_1 = p_2$,
und die Gleichheit der Scherkraftkomponenten an der Trennfläche, $\underline{\underline{\tau}}_1 \cdot \underline{\underline{n}} = \underline{\underline{\tau}}_2 \cdot \underline{\underline{n}}$.

Bedeutung möglicher **Hinweise** in der Aufgabenstellung:

- A. Keine Feldkräfte $\mathbf{f} = 0$
- B. Reibung sei vernachlässigbar $\nu \Delta\mathbf{u} = 0$
- C. Stationär $\partial/\partial t = 0$

6.2 Exakte Lösungen

Ebene Couette-Strömung

Vorausgesetzt sei eine ausgebildete Schichtenströmung eines inkompressiblen Mediums im ebenen Spalt ($-h \leq y \leq h$), wobei die untere Wand ruht und die obere sich in einer Ebene mit U bewegt. Es gilt:

$$u = u(y) , \quad w = 0 .$$

Die Kontinuitätsgleichung führt zur Aussage $v = 0$. Unter Vernachlässigung der Volumenkräfte vereinfachen sich die Impulsgleichungen zu:

$$\frac{1}{\varrho} \frac{\partial p(x)}{\partial x} = \nu \frac{d^2 u(y)}{dy^2}$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial p}{\partial z} = 0$$

Aus der ersten Gleichung folgt:

$$\frac{dp(x)}{dx} = \text{konst.} = \mu \frac{d^2 u(y)}{dy^2} .$$

Der Druckgradient ist also konstant. Das Geschwindigkeitsprofil ergibt sich, unter Einbeziehung der Randbedingungen

$$u(-h) = 0 , \quad u(h) = U , \quad \frac{dp}{dx} = 0 ,$$

zu einer linearen Funktion

$$u(y) = \frac{U}{2} \left(1 + \frac{y}{h} \right) .$$

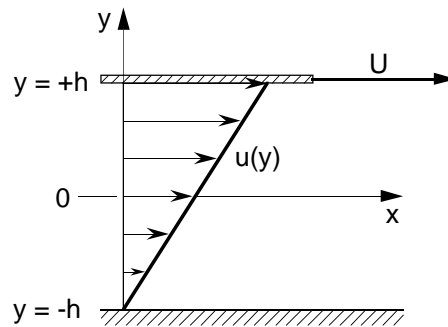


Abbildung 6.1: Ebene Couette-Strömung

Poiseuille-Strömung im Spalt

Wieder wird eine ausgebildete Schichtenströmung eines inkompressiblen Mediums im ebenen Spalt betrachtet, wobei jetzt ein Druckgradient dp/dx aufgeprägt sei und beide Wände in Ruhe sind (Wandhaftung wird bei $y = h$ und $y = -h$ angenommen).

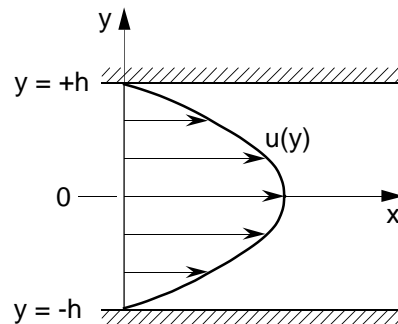


Abbildung 6.2: Poiseuille-Strömung im Spalt

Das Geschwindigkeitsprofil ergibt sich zu einer parabolischen Funktion

$$u(y) = -\frac{h^2}{2\mu} \frac{dp}{dx} \left(1 - \frac{y^2}{h^2}\right) = u_{max} \left(1 - \frac{y^2}{h^2}\right), \quad u_{max} = u(y=0).$$

Die Lösung entspricht völlig der Rohrströmung, die im folgenden diskutiert wird.

Hagen-Poiseuille-Strömung

Eine horizontale, kreisrunde Rohrstrecke wird betrachtet, die Strömung sei stationär, inkompressibel und ausgebildet. Die Volumenkräfte werden vernachlässigt. Das Problem ist axialsymmetrisch und unabhängig von der Winkelkoordinate θ . Somit gilt

$$u_\theta = 0, \quad \frac{\partial u_x}{\partial r} \Big|_{r=0} = 0.$$

Wandhaftung ist an den Rohrwänden anzunehmen

$$u_x(r=R) = 0, \quad u_r(r=R) = 0.$$

Aus der Kontinuitätsgleichung folgt

$$u_r = 0.$$

Aus den Navier-Stokes-Gleichungen ergibt sich das Geschwindigkeitsprofil

$$u_x(r) = -\frac{R^2}{4\mu} \frac{dp}{dx} \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) = u_{max} \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right), \quad u_{max} = u(r=0).$$

1. Stokessches Problem (Rayleigh-Stokessches Problem)

Es wird eine unendlich ausgedehnte horizontale Platte betrachtet, die in einer ruhenden Umgebung ruckartig auf die Geschwindigkeit U gebracht wird. Durch die Reibung wird das (inkompressible) Fluid über der Platte allmählich mitgenommen.

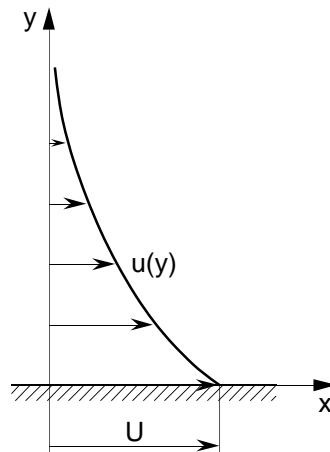


Abbildung 6.3: 1. Stokessches Problem, Strömungsprofil über einer plötzlich bewegten Platte

Die Strömung sei ausgebildet, so daß alle Ableitungen nach x gleich null sind. Da eine Parallelströmung vorliegt, ist $v \equiv 0$. Die Volumenkräfte seien auch in diesem Fall vernachlässigt. Die Navier-Stokes-Gleichungen ergeben

$$\frac{\partial u(y,t)}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 u(y,t)}{\partial y^2}$$

und für den Druck ergibt sich Konstanz quer zur Strömungsrichtung

$$\frac{\partial p}{\partial x} = 0 .$$

Die DGl für die Geschwindigkeit kann unter Einbeziehung der Anfangs- und Randbedingungen des Problems

$$\begin{aligned} u(y \geq 0, t \leq 0) &= 0 , \\ u(y = 0, t > 0) &= U , \\ u(y = \infty, t > 0) &= 0 \end{aligned}$$

gelöst werden. Die Lösung für $t > 0$ ist eine Fehlerfunktion

$$u(x, t) = U \left(1 - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{y/\sqrt{\nu t}} \exp\left(-\frac{\xi^2}{4}\right) d\xi \right) = U \left(1 - \operatorname{erf}\left(\frac{y}{2\sqrt{\nu t}}\right) \right) .$$

Benutzt man Ähnlichkeitsvariablen, fallen die Lösungskurven auf eine einzige Kurve zusammen (“Selbstähnlichkeit”).

6.3 Näherungslösungen

6.3.1 Einfluß der Reynolds-Zahl

Die Navier-Stokes-Gleichung wird mit Hilfe der dimensionslosen Kennzahlen

$$x_i' = \frac{x_i}{L} , \quad t' = \frac{U}{L} t , \quad u_i' = \frac{u_i}{U} , \quad p' = \frac{p}{\mu U} L , \quad Re = \frac{UL}{\nu}$$

skaliert. Unter Vernachlässigung der Schwere ergibt sich die Impulsbilanz zu

$$Re \left[\frac{\partial \underline{u}'}{\partial t'} + (\underline{u}' \nabla') \underline{u}' \right] = -\nabla' p' + \Delta' \underline{u}' .$$

Fall $Re \ll 1$, $Re \rightarrow 0$

In bestimmten Fällen kann die Reynolds-Zahl klein ($Re \rightarrow 0$) angenommen werden:

- wenn L klein ist (z.B. Tröpfchen),
- wenn u klein ist (z.B. Gletscher),
- wenn ν groß ist (zähe Fluide).

Strömungen dieses Typs werden *schleichende Strömungen* (creeping flow) genannt. Im Impulssatz können mit dieser Annahme die Beschleunigungsterme auf der linken Seite vernachlässigt werden und man erhält die vereinfachte Beziehung

$$\nabla' p' = \Delta' \underline{u}' ,$$

bzw. ausgedrückt in dimensionsbehafteten Größen

$$\nabla p = \mu \Delta \underline{u} .$$

Diese Gleichung wird auch *Stokes-Gleichung* genannt. Es lässt sich ableiten:

A. *Laplace-Gleichung für den Druck* aus der Divergenz der Stokes-Gleichung

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} p = \mu \operatorname{div} (\Delta \underline{u}) = \mu \underbrace{\Delta (\operatorname{div} \underline{u})}_{=0, \text{ inkompr.}} \Rightarrow \Delta p = 0$$

B. *Laplace-Gleichung für die Wirbelstärke* aus dem Rotor der Stokes-Gleichung

$$0 = \operatorname{rot} \operatorname{grad} p = \mu \operatorname{rot} (\Delta \underline{u}) = \mu \underbrace{\Delta (\operatorname{rot} \underline{u})}_{=\underline{\omega}} \Rightarrow \Delta \underline{\omega} = 0$$

Die Gleichungen unter A und B sind linear, es können also einzelne Lösungen überlagert werden.

Fall $Re \gg 1$, $Re \rightarrow \infty$

Der Fall, daß die Reynolds-Zahl groß ist ($Re \rightarrow \infty$), kommt recht häufig vor:

- wenn L groß ist (z.B. Schiffe),
- wenn u groß ist (z.B. Flugzeuge),
- wenn ν klein ist.

Die Elimination des Terms

$$\frac{1}{Re} \Delta \underline{u}$$

in der Navier-Stokes-Gleichung führt sie auf die *Euler-Gleichung* zurück:

$$\frac{\partial \underline{u}}{\partial t} + (\underline{u} \cdot \nabla) \underline{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla p.$$

Die Euler-Gleichung erfüllt allerdings nicht die Haftbedingungen, sie beschreibt daher die Strömung in der Nähe eines Körpers nicht korrekt. Dort müssen die *Grenzschichtgleichungen* (siehe Kapitel 7) verwendet werden.

6.3.2 Stokes Flow: Schleichende Umströmung einer Kugel

Es wird eine sehr langsame Strömung um eine Kugel betrachtet. Die Reynolds-Zahl sei dementsprechend klein ($Re \rightarrow 0$). Aufgrund der Geometrie des Problems sind Kugelkoordinaten für die Beschreibung vorteilhaft.

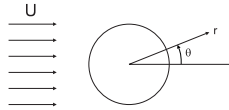


Abbildung 6.4: Umströmung einer Kugel

Es wird die Stromfunktion eingeführt:

$$\Psi(r, \theta) = f(r) \cdot g(\theta)$$

Die Geschwindigkeitskomponenten sind

$$u_r = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial \Psi}{\partial \theta}, \quad u_\theta = -\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \Psi}{\partial r}.$$

Die Lösung der Impulsgleichung liefert für eine Kugel mit Radius R und den Randbedingungen $u_r(r = R, \theta) = 0, u_\theta(r = R, \theta) = 0$ bei gleichförmiger Anströmung U

$$\begin{aligned}\Psi(r, \theta) &= U r^2 \sin^2 \theta \left[\frac{1}{2} - \frac{3}{4} \frac{R}{r} + \frac{1}{4} \left(\frac{R}{r} \right)^3 \right], \\ u_r &= U \cos \theta \left[1 - \frac{3}{2} \frac{R}{r} + \frac{1}{2} \left(\frac{R}{r} \right)^3 \right], \\ u_\theta &= -U \sin \theta \left[1 - \frac{3}{4} \frac{R}{r} - \frac{1}{4} \left(\frac{R}{r} \right)^3 \right], \\ p &= p_\infty - \frac{3}{2} \mu U R \frac{\cos \theta}{r^2}, \\ \omega &= -\frac{3}{2} U R \frac{\sin \theta}{r^2}.\end{aligned}$$

Der Widerstand F durch Druck- und Scherkräfte ergibt sich gemäß Stokes zu

$$F = 6\pi\mu UR.$$

Die dimensionslose Widerstandszahl c_D ist umgekehrt proportional zur Reynolds-Zahl

$$c_D = \frac{F}{\frac{\rho}{2} U^2 \cdot \pi R^2} = \frac{24}{Re},$$

wobei die Reynolds-Zahl mit dem Kugeldurchmesser gebildet wird.

Die Lösung wurde durch Oseen für kleine, aber endliche Reynolds-Zahlen verbessert. Er hat den Term $(\underline{u} \cdot \nabla) \underline{u}$ nicht vernachlässigt, sondern linearisiert zu

$$U \frac{\partial \underline{u}}{\partial x}.$$

Damit ergibt sich die dimensionslose Widerstandszahl zu:

$$c_D = \frac{24}{Re} \left(1 + \frac{3}{16} Re \right)$$

für Reynolds-Zahlen $Re \leq 5$. Das Widerstandsgesetz ist für kleine Reynolds-Zahlen experimentell sehr gut bestätigt. Für höhere Reynolds-Zahlen gelten andere Gesetzmäßigkeiten aufgrund zusätzlicher Phänomene wie Ablösung und Turbulenz. Im folgenden ist die Widerstandszahl c_D in Abhängigkeit von der Reynolds-Zahl Re aufgetragen.

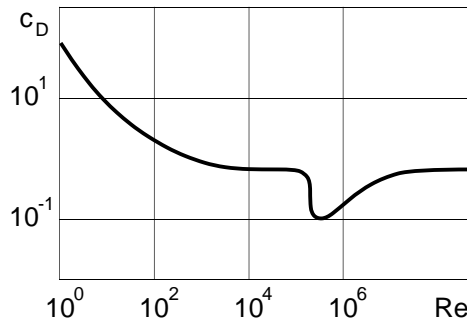


Abbildung 6.5: c_D -Wert in Abhängigkeit von der Re -Zahl bei schleichender Umströmung einer Kugel

Kapitel 7

Grenzschichten

Das Grenzschichtkonzept beruht auf der Aufteilung des Strömungsfeldes in eine reibungsfreie Aussenströmung und eine reibungsbehaftete, dünne Grenzschicht unmittelbar am Körper, welche die Wandhaftbedingung erfüllen kann.

7.1 Grenzschichtgleichungen

Die Grenzschicht soll dünn sein, d.h. ihre Dicke δ ist sehr viel kleiner als die Bezugslänge L . Damit nicht alle Reibungsterme in der Navier-Stokes-Gleichung wegfallen, muss für die Grenzschichtdicke gelten

$$\delta \sim \sqrt{\frac{\nu L}{u_\infty}} .$$

Dieser Ausdruck kann hergeleitet werden aus einer Betrachtung des Verhältnisses von Reibungs- und Beschleunigungstermen.

Für die Grenzschicht (hier: stationär, inkompressibel, 2D kartesisch) gilt die Kontinuitätsgleichung in der Form

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 ,$$

der Impulssatz in x -Richtung vereinfacht sich zu

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

und der Impulssatz in y -Richtung reduziert sich zu

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 0 ,$$

d.h. der Druck normal zur Wand ist in der Grenzschicht *konstant* und wird *von der Aussenströmung aufgeprägt*. Der Druckgradient in der Grenzschicht wird also von der Euler-Gleichung

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = -u_\infty \frac{du_\infty}{dx}$$

bestimmt, die in der Aussenströmung ($u_\infty(x)$) gilt.

Für die Grenzschichtgleichungen gelten die folgenden **Randbedingungen**:

1. Wandhaftung:
 $u(x, y = 0) = 0 , \quad v(x, y = 0) = 0 ,$
2. Aussenströmung:
 $u(x, y \rightarrow \infty) = u_\infty(x) .$

Grenzschichtkenngrößen

- Die Grenzschichtdicke δ ist üblicherweise festgelegt als der Abstand vom Körper, an dem die Strömungsgeschwindigkeit 99% der Geschwindigkeit der Aussenströmung erreicht hat:

$$u(y = \delta) = 0.99 u_\infty$$

- Die Verdrängungsdicke δ_1 ist der Betrag, um den die Grenzschicht die reibungsfreie Aussenströmung von der Wand verdrängt:

$$\delta_1 = \delta^* = \int_0^\infty \left(1 - \frac{u}{u_\infty}\right) dy$$

- Die Impulsverlustdicke δ_2 ist ein Mass für den Reibungswiderstand, den der überströmte Körper erfährt (vgl. Kapitel 7.3):

$$\delta_2 = \theta = \int_0^\infty \frac{u}{u_\infty} \left(1 - \frac{u}{u_\infty}\right) dy$$

(Anmerkung: Die Integranden der beiden Integrale verschwinden für $y > \delta$.)

7.2 Exakte Lösungen der Grenzschichtgleichungen

Blasius-Grenzschicht

Man betrachte eine ebene Platte, die mit der Geschwindigkeit u_∞ überströmt wird. Die Strömung sei inkompressibel und stationär und die Aussenströmung sei ausgebildet, d.h. der Druckgradient in x -Richtung ist Null.

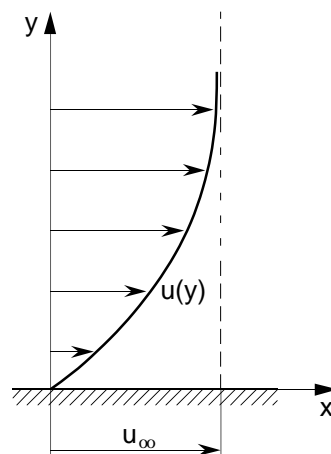


Abbildung 7.1: Blasius-Grenzschicht

Die Ähnlichkeitsvariable η und ein Ansatz für die Stromfunktion Ψ werden definiert als

$$\eta(x, y) = \frac{y}{x} \sqrt{Re_x} ,$$

$$\Psi(x, y) = f(\eta) \sqrt{u_\infty \nu x} ,$$

wobei die Reynolds-Zahl mit der Lauflänge x gebildet wird

$$Re_x = \frac{u_\infty x}{\nu} .$$

Aus den Grenzschichtgleichungen folgt mit diesem Ansatz die *Blasius-Gleichung*

$$2 f''' + f f'' = 0 ,$$

eine gewöhnliche Differentialgleichung dritter Ordnung. Die Randbedingungen für dieses Problem sind entsprechend

$$\begin{aligned} f(\eta = 0) &= 0 , \\ f'(\eta = 0) &= 0 , \\ f'(\eta \rightarrow \infty) &= 1 . \end{aligned}$$

Aus der DGL berechnet sich, mit angenäherten Zahlenwerten:

- Grenzschichtdicke

$$\delta = 5 \frac{x}{\sqrt{Re_x}} \propto \sqrt{x}$$

- Verdrängungsdicke

$$\delta_1 = 1.721 \frac{x}{\sqrt{Re_x}} \approx \frac{\delta}{3}$$

- Impulsverlustdicke

$$\delta_2 = 0.664 \frac{x}{\sqrt{Re_x}} \approx \frac{\delta}{8}$$

- lokaler Widerstandskoeffizient (dimensionslose Wandschubspannung)

$$c_f = \frac{\tau_W}{\varrho/2 u_\infty^2} = 0.664 \frac{1}{\sqrt{Re_x}}$$

- Widerstandskoeffizient (dimensionslose Reibungskraft)

$$c_D = \frac{F_D}{\varrho/2 u_\infty^2 L b} = \frac{1}{L} \int_0^L c_f(x) dx = 1.328 \frac{1}{\sqrt{Re_L}}$$

Bemerkung: Diese Beziehungen gelten für eine laminare Grenzschicht, d.h. bis zu einer kritischen Reynolds-Zahl von etwa $Re_{x,krit.} = 100\,000$.

Falkner-Skan-Grenzschicht

Man betrachte die Strömung um einen Keil mit dem Öffnungswinkel β , der mit U_0 angeströmt wird.

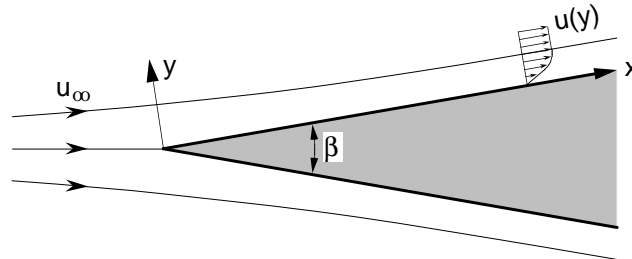


Abbildung 7.2: Strömung um einen Keil

Die Geschwindigkeit am Rand der Grenzschicht ist

$$u_\infty(x) = u_0 \left(\frac{x}{L} \right)^m = cx^m$$

mit m als Funktion des Öffnungswinkels:

$$m = \frac{\beta}{2\pi - \beta}$$

Im Gegensatz zu Blasius gilt

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = -mc^2 x^{2m-1} \neq 0.$$

Die Ähnlichkeitsvariable η und ein Ansatz für die Stromfunktion Ψ werden ähnlich wie bei Blasius definiert:

$$\begin{aligned} \eta(x, y) &= \frac{y}{x} \sqrt{Re_x} \\ \Psi(x, y) &= f(\eta) \cdot cx^m \sqrt{\frac{\nu}{cx^{m-1}}} \\ &= f(\eta) \cdot u_\infty x \sqrt{Re_x} \end{aligned}$$

Aus den Grenzschichtgleichungen folgt mit diesem Ansatz die Falkner-Skan-Gleichung:

$$f''' + \frac{m+1}{2} f f'' + m(1 - f'^2) = 0$$

Die Randbedingungen für dieses Problem sind:

$$\begin{aligned} f(\eta = 0) &= 0, \\ f'(\eta = 0) &= 0, \\ f'(\eta \rightarrow \infty) &\rightarrow 1. \end{aligned}$$

Mehrere Spezialfälle der Problemstellung können unterschieden werden:

- $-0.0905 < m < 0$ Diffusorströmung,
- $m = 0$ ebene Plattenströmung (Blasius),
- $0 < m < 1$ Keilströmung,
- $m = 1$ Staupunktströmung,
- $1 < m < 2$ Strömung in eine Ecke.

Darüber hinaus kann mit dem Exponenten m auch noch zwischen

- beschleunigten Strömungen $\partial p/\partial x < 0$ für $m > 0$ und
- verzögerten Strömungen $\partial p/\partial x > 0$ für $m < 0$

unterschieden werden. Für all diese Fälle existieren Lösungen.

Die Grenzschichtgleichungen können immer dann eingesetzt werden, wenn die Dicke der Grenzschicht klein ist im Vergleich zu den Längenskalen der Aussenströmung. Es gibt dementsprechend auch Bereiche, wo diese Annahme *nicht* zu halten ist. Für den Fall einer endlichen Rohrströmung gilt z.B. nahe am Einlauf $\delta \approx x$ und im ausgebildeten Bereich $\delta \approx D$. In beiden Bereichen wäre die "Grenzschichtdicke" vergleichbar mit den externen Skalen.

7.3 Impulssatz der Grenzschichttheorie

Der integrale Impulssatz der Grenzschichttheorie lautet:

$$\frac{d}{dx} \delta_2 + \left(2 + \frac{\delta_1}{\delta_2} \right) \frac{\delta_2}{u_\infty(x)} \frac{du_\infty}{dx} = \frac{c_f}{2}$$

Er dient als Grundlage zur Berechnung von Grenzschichten mit "Integralverfahren".

In der Blasius-Grenzschicht mit $du_\infty/dx = 0$ gilt z.B.

$$\frac{d}{dx} \delta_2 = \frac{c_f}{2} > 0 ,$$

d.h. das räumliche Wachstum der Grenzschicht ist direkt proportional zur Wandreibung.

Kapitel 8

Turbulenz

8.1 Phänomenologie

Notwendige Bedingungen für den turbulenten Strömungszustand sind:

- Instationarität, Unstetigkeit (Zufallsbewegung);
- Dreidimensionale Geschwindigkeitsfluktuationen (10% – 30% der mittleren Geschwindigkeit);
- Rotationsbehaftete Strömung ($\omega = \nabla \times \underline{u} \neq 0$).

Darüber hinaus sind folgende Eigenschaften charakteristisch:

- Es treten Wirbelstrukturen auf verschiedenen Längenskalen auf.
- Turbulenz ist selbsterzeugend, d.h. Turbulenz erzeugt neue Turbulenz.
- Es ist ein externer “Antrieb” bzw. Energiezufuhr vorhanden durch die mittlere Scherbewegung / Geschwindigkeitsgradienten.
- Es gibt einen Umschlag von laminarer zu turbulenter Strömung, die sog. Transition.
- Die Wirbeldiffusion, die ca. 100 mal grösser ist als die molekulare Diffusion, dominiert den Impulsaustausch und die anderen diffusiven Transportprozesse.
- Turbulente Energie wird durch Dissipation, d.h. durch Umwandlung in Reibungswärme “vernichtet”.

Transition

Der Übergang von laminarer zu turbulenter Strömung hängt nicht nur von der Reynolds-Zahl ab, sondern auch von der Geometrie und anderen Faktoren wie z.B. dem Strömungszustand der Zuströmung. Bei einer ebenen Platte erfolgt der Umschlag bei

$$Re_{x,krit} = 3 \cdot 10^5 \dots 3 \cdot 10^6 ,$$

mit einer Reynolds-Zahl gebildet mit der Lauflänge x und der Geschwindigkeit der Außenströmung u

$$Re_x = \frac{ux}{\nu} .$$

Für die Rohrströmung erfolgt der Umschlag bei

$$Re_{D,krit} = 2300 \dots 3000 ,$$

wobei die Reynolds-Zahl mit dem Rohrdurchmesser D und der mittleren Geschwindigkeit \bar{u} im Rohrquerschnitt gebildet wird

$$Re_D = \frac{\bar{u}D}{\nu} .$$

8.2 Statistische Modellierung der Turbulenz

Statistisches Modell der Turbulenz

Das Modell bedient sich der Annahme, daß die lokale Geschwindigkeit \underline{u} der Strömung in einen Mittelwert $\langle \underline{u} \rangle$ und in die Fluktuation \underline{u}' aufgespalten werden kann

$$\underline{u}(\underline{x}, t) = \langle \underline{u}(\underline{x}, t) \rangle + \underline{u}'(\underline{x}, t) .$$

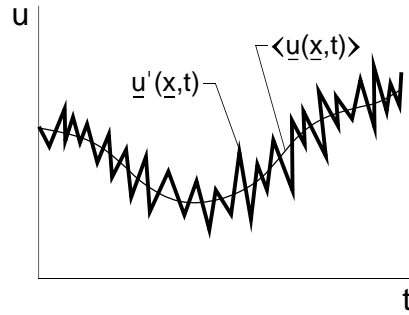


Abbildung 8.1: Signal einer turbulenten Geschwindigkeit

Es ist zu beachten, daß die Mittelung der Fluktuation Null ergibt:

$$\langle \underline{u}'(\underline{x}, t) \rangle \equiv 0 .$$

Die Mittelung kann verschieden realisiert werden:

- ensemble (über unabhängige Realisationen),
- zeitlich (Standard; Reynolds-gemittelte Navier-Stokes-Gleichungen),
- räumlich (Grobstruktur-Ansatz),
- über die Phasenzyklen einer periodischen Strömung.

Reynolds-gemittelte Navier-Stokes-Gleichungen

Für einen statistisch stationären Prozess folgt:

$$\langle \underline{u}(\underline{x}, t) \rangle \iff \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \underline{u}(\underline{x}, t) \, dt = \underline{u}(\underline{x}) = \overline{\underline{u}(\underline{x}, t)}$$

Für die Kontinuitätsgleichung folgt durch Mittelung

$$\underline{\nabla} \cdot \underline{\bar{u}} = 0 .$$

Und durch Subtraktion der obigen Gleichung von der Kontinuitätsgleichung ergibt sich

$$\underline{\nabla} \cdot \underline{u}' = 0 .$$

Unter der Annahme der Inkompressibilität ergeben sich die gemittelten Impulsgleichungen zu

$$\frac{\partial}{\partial x_j} (\varrho \overline{u_i u_j}) = -\frac{\partial \overline{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \overline{\tau_{ij}} - \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_j} (\varrho \overline{u_i' u_j'})}_{\text{Turbulenz-einfluss}}$$

$\overline{\tau_{ij}} = \tau^{mol}$ ist der *molekulare* Schubspannungstensor und $-\varrho \overline{u_i' u_j'} = \tau^{turb}$ ist der *turbulente* Schubspannungstensor, der vorerst nur formal und als Analogie zum molekularen Anteil definiert wird.

8.3 Empirischer Ansatz für die turbulente Schubspannung

Boussinesq-Annahme

Unter der Annahme, daß die Schwankungsterme auf die zeitlich gemittelten Größen der Grundströmung zurückzuführen sind, kann der turbulente Schubspannungstensor unter Einführung der turbulenten Viskosität ν_T analog zum Newtonschen Ansatz beschrieben werden:

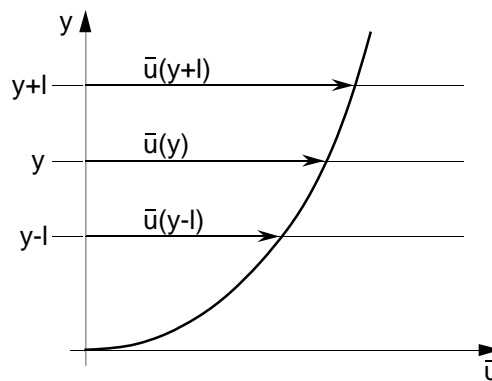
$$\tau_{ij}^{turb} = -\varrho \overline{u_i' u_j'} = \varrho \nu_T \frac{d\overline{u}}{dy}$$

ν_T ist im Gegensatz zur molekularen Viskosität μ keine Stoffkonstante, sondern eine Funktion des Strömungszustandes, die empirisch bestimmt werden muß.

Prandtlscher Mischungsweegansatz

Ein möglicher Ansatz zur Bestimmung der turbulenten Viskosität und des turbulenten Schubspannungstensor geht von einer turbulenten zweidimensionalen Grenzschicht in der x, y -Ebene aus, in der eine mittlere Bewegung in x -Richtung vorliegt:

$$u = \overline{u}(y) + u', \quad v = v'$$



Ein Turbulenzelement legt im Mittel den Weg l zurück bevor es sich mit der Umgebung vermischt und seine Individualität verliert. l wird als *Prandtlscher Mischungsweeg* bezeichnet. In Anlehnung an die Skizze kann die Untergeschwindigkeit im Niveau $y + l$ gegenüber der Umgebung berechnet werden, sie wird als Geschwindigkeitsschwankung im besagten Niveau aufgefasst:

$$u'(y + l) = \overline{u}(y) - \overline{u}(y + l) = -l \cdot \left. \frac{d\overline{u}}{dy} \right|_y$$

Aus der Kontinuität ergibt sich für v'

$$v' = l \cdot \left. \frac{d\bar{u}}{dy} \right|_y .$$

Für den turbulenten Schubspannungstensor ergibt sich damit

$$\tau_{xy}^{turb} = -\overline{\rho u'v'} = \rho l^2 \left| \frac{d\bar{u}}{dy} \right| \frac{d\bar{u}}{dy} .$$

Die Abhängigkeit vom Quadrat des Geschwindigkeitsgradienten weist auf signifikante Unterschiede zur laminaren Strömung hin.

Die turbulente Viskosität ergibt sich gemäß der Bestimmungsgleichung zu

$$\nu_T = l^2 \cdot \left| \frac{d\bar{u}}{dy} \right| ,$$

wobei der Mischungsweg l weiterhin empirisch bestimmt werden muss.

8.4 Geschwindigkeitsverteilung in der turbulenten Grenzschicht

Die Grenzschicht wird modellhaft in drei Bereiche unterteilt:

- Wandbereich (viskose Unterschicht)

$$\tau = \tau_W(x) , \quad \tau^{mol} \gg \tau^{turb}$$

- Wandnaher Bereich (logarithmische Schicht)

$$\tau = \tau_W(x) , \quad \tau^{turb} \gg \tau^{mol}$$

- Außenbereich

$$\tau = \tau(x, y) , \quad \tau^{turb} \gg \tau^{mol}$$

Zur Lösung des Problems in den ersten beiden Bereichen wird ein dimensionsanalytischer Ansatz herangezogen. Zur Normierung der Strömungsgeschwindigkeit wird die charakteristische "Schubspannungsgeschwindigkeit" u_τ benutzt

$$u_\tau = \sqrt{\frac{|\tau_W|}{\rho}} ,$$

zur Normierung des Wandabstands das viskose Längenmass

$$y_\tau = \frac{\nu}{u_\tau} .$$

Auch die Reynolds-Zahl wird mit u_τ gebildet. Für die *viskose Unterschicht* ergibt sich die Geschwindigkeitsverteilung

$$u^+ = \frac{u}{u_\tau} = \frac{u_\tau y}{\nu} ,$$

dies gilt für

$$y^+ = \frac{u_\tau y}{\nu} < 5 .$$

Die *logarithmische Schicht*, d.h. der Bereich

$$30 < \frac{u_\tau y}{\nu} < 0.2 \frac{u_\tau \delta}{\nu} ,$$

weist die folgende Geschwindigkeitsverteilung auf

$$\frac{u}{u_\tau} = \frac{1}{0.41} \ln \left(\frac{u_\tau y}{\nu} \right) + C .$$

Die additive Konstante C ist abhängig von der Wandrauhigkeit, in erster Näherung kann $C = 5.0$ angenommen werden.

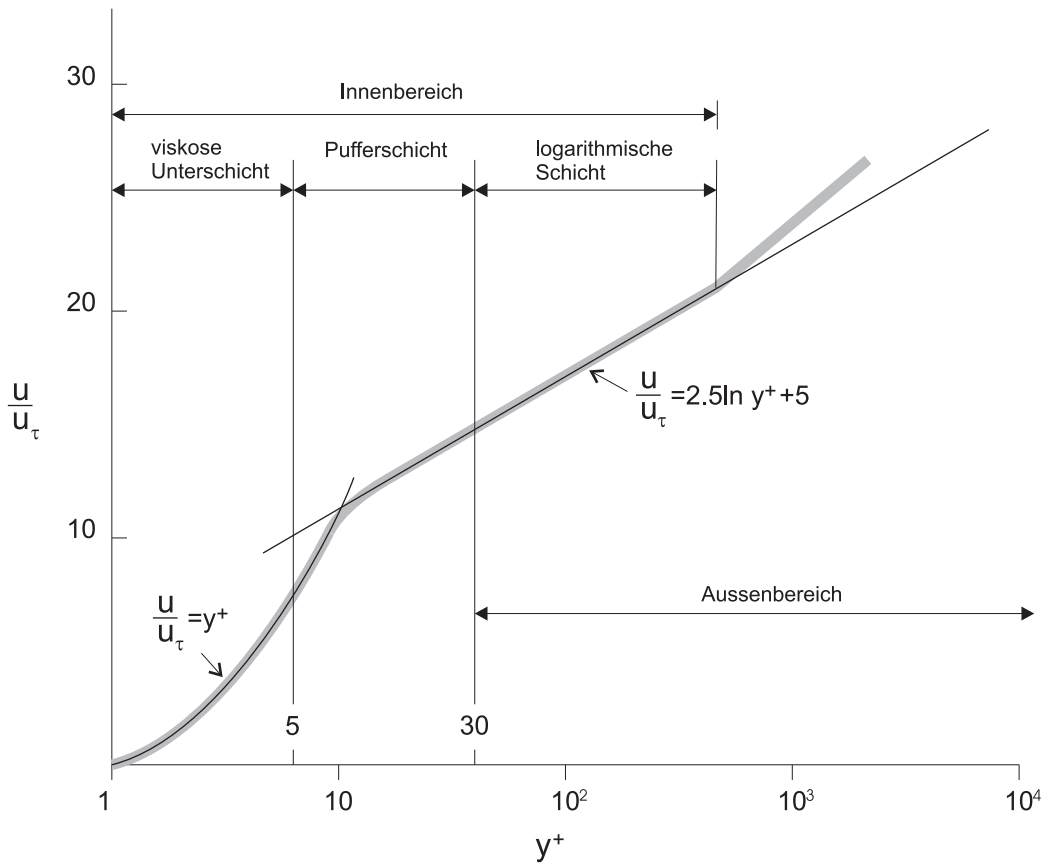


Abbildung 8.2: Geschwindigkeitsverteilung in der turbulenten Grenzschicht

Im *Außenbereich* kann die Geschwindigkeitsverteilung nur experimentell ermittelt werden, die Abhängigkeiten sind sehr komplex und nicht mehr allgemein herleitbar. Für das Gesamtprofil der beiden äusseren Bereiche (d.h. logarithmische Schicht + Außenbereich) gibt es Ansätze zur Beschreibung, z.B.

$$\frac{u}{u_\tau} = \frac{1}{k} \ln \left(\frac{u_\tau y}{\nu} \right) + C + \frac{2\Pi}{k} \sin^2 \left(\frac{\pi y}{2\delta} \right)$$

$$k \approx 0.41, \quad C \approx 5.0, \quad \Pi \approx 0.6, \quad \Pi = \Pi \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right) .$$

Ein anderer empirischer Ansatz ist das $\frac{1}{7}$ -Potenz-Gesetz

$$\frac{\bar{u}}{u_\infty} = \left(\frac{y}{\delta} \right)^{\frac{1}{n}}, \quad n \cong 7 .$$

Die Grenzschichtdicke einer ebenen, turbulenten Plattengrenzschicht errechnet sich damit zu

$$\delta(x) \approx 0.37 x Re_x^{-\frac{1}{5}} .$$

8.5 Turbulente Rohrströmung

Die Gleichungen für die turbulente Rohrströmung werden aus der entsprechenden RANS-Gleichung

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial x} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \bar{\tau})$$

hergeleitet. Der Schubspannungstensor $\bar{\tau}$ besteht wiederum aus einem molekularen und einem turbulenten Anteil

$$\bar{\tau} = \tau^{mol} + \tau^{turb} = \mu \frac{d\bar{u}}{dr} - \rho \overline{u'v'} .$$

Zur Beschreibung des turbulenten Anteils wird der Ansatz der Wirbelviskosität herangezogen:

$$-\overline{u'v'} = \nu_T \frac{d\bar{u}}{dr}$$

Zusätzlich wird die turbulente Viskosität ν_T durch den Ansatz

$$\nu_T = k \cdot u_\tau \cdot l , \quad l = \frac{R}{2} \left(1 - \frac{r^2}{R^2} \right)$$

modelliert. Für die turbulente Strömung in einem *hydraulisch glatten Rohr* ergibt sich die logarithmische Geschwindigkeitsverteilung

$$\frac{u}{u_\tau} = \frac{1}{k} \ln \left[1 + k \frac{u_\tau R}{\nu} \frac{1}{2} \left(1 - \frac{r^2}{R^2} \right) \right]$$

(Anmerkung: Für $(R-r)/R \ll 1$, $ku_\tau(R-r)/\nu \gg 1$ ergibt sich aus dieser Gleichung wieder das logarithmische Wandgesetz für Grenzschichten:

$$\frac{u}{u_\tau} \rightarrow \frac{1}{k} \ln \left(\frac{u_\tau \cdot (R-r)}{\nu} \right) + C$$

Druckverlust

Der Druckverlust Δp in einem Rohr ist der Rohrlänge L proportional und wird geschrieben als

$$\frac{\Delta p}{\rho} = \lambda \frac{L}{D} \frac{\bar{u}^2}{2} .$$

D ist der Rohrdurchmesser und \bar{u} ist die mittlere Strömungsgeschwindigkeit im Rohrquerschnitt, λ ist die Rohrreibungszahl. Bei *laminarer Strömung*, d.h. wenn $Re_D < Re_{D,krit}$, gilt

$$\lambda = \frac{64\nu}{\bar{u}D} = \frac{64}{Re_D} .$$

Im Falle *turbulenter Strömung* muß im Hinblick auf eine materialabhängige, äquivalente "Rauigkeitshöhe" k_S unterschieden werden:

- Ein Rohr ist hydraulisch glatt, wenn die Rauigkeit in der laminaren Unterschicht liegt

$$\frac{u_\tau k_S}{\nu} \leq 5 .$$

In diesem Fall hat die Rauigkeit keinen Einfluss auf die Rohrreibungszahl und es gilt:

$$\lambda = \lambda(Re_D) .$$

- Ein Rohr ist sehr rauh, wenn gilt

$$\frac{u_\tau k_S}{\nu} \geq 70 .$$

In diesem Bereich hat die Reynolds-Zahl keinen Einfluss auf die Rohrreibungszahl,

$$\lambda = \lambda \left(\frac{k_S}{R} \right) .$$

- Im Zwischenbereich , d.h. für

$$5 \leq \frac{u_\tau k_S}{\nu} \leq 70$$

hängt die Rohrreibungszahl sowohl von der Reynolds-Zahl als auch von der Rauigkeit ab:

$$\lambda = \lambda \left(Re_D, \frac{k_S}{R} \right) .$$

Im allgemeinen muß die Rohrreibungszahl im Bereich $Re_{D,krit} < Re_D$ aus einer impliziten Gleichung berechnet werden. Für *hydraulisch glatte Rohre* gilt:

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 2.0 \log_{10} \left(Re_D \cdot \sqrt{\lambda} \right) - 0.8 .$$

Im Bereich von $Re_{D,krit} \leq Re_D \leq 10^5$ kann alternativ eine explizite Beziehung verwendet werden:

$$\lambda = \frac{0.3164}{\sqrt[4]{Re_D}} .$$

Zur Ermittlung der Rohrreibungszahl im *Zwischenbereich glatt-rauh* wird im allgemeinen das *Moody-Diagramm* herangezogen. In diesem Bereich gilt die Näherungsformel von Colebrook-White:

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2.03 \log_{10} \left(\frac{2.51}{Re_D \sqrt{\lambda}} + 0.27 \frac{k_S}{D} \right)$$

Für *hydraulisch raue Rohre* gilt:

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 1.14 - 2 \log_{10} \left(\frac{k_S}{D} \right)$$

Die äquivalenten Rauigkeiten für ausgewählte Materialien sind in der Tabelle 8.1 zusammengefaßt.

Material	k_S
Beton	0.9 ... 9 mm
Holz	0.2 ... 0.9 mm
Gußeisen	0.25 mm
Verzinktes Eisen	0.15 mm
Baustahl	0.059 mm
Gezogene Rohre	0.0015 mm

Tabelle 8.1: Rauigkeiten für ausgewählte Materialien

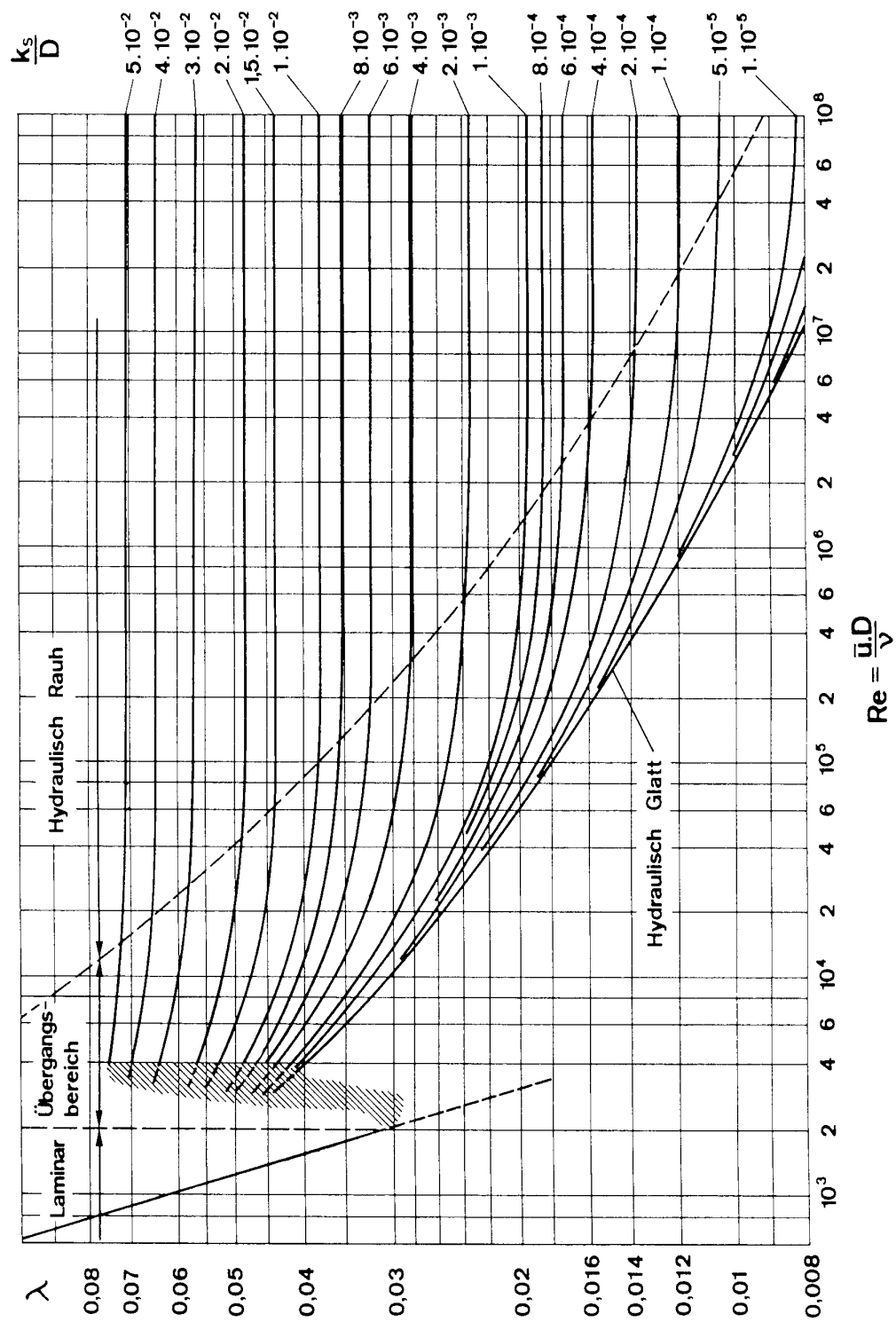


Abbildung 8.3: Moody-Diagramm

Bei nichttrunden Querschnitten wird der *hydraulische Durchmesser* D_H verwendet. Er berechnet sich aus der Querschnittsfläche des Fluidstroms S und dem benetzten Umfang (ohne freie Oberflächen) U :

$$D_H = 4 \cdot \frac{S}{U} .$$

Bei einem durchströmten kreisförmigen Rohr ergibt sich gerade der Rohrdurchmesser.

8.6 Verlustbehaftete Bernoulli-Gleichung

Im Falle turbulenter Strömung kann die Bernoulli-Gleichung nicht direkt angewendet werden, anwendbar ist jedoch ein ähnlicher Ausdruck

$$p_1 + \frac{\rho}{2} \bar{u}_1^2 + \rho g h_1 = p_2 + \frac{\rho}{2} \bar{u}_2^2 + \rho g h_2 + \Delta p_{12} - \Delta p_{ext} .$$

Hierbei wird die mittlere Geschwindigkeit aus dem Massenstrom \dot{m} und dem durchströmten Querschnitt S berechnet

$$\bar{u} = \frac{\dot{m}}{\rho S} .$$

Der Druckverlust Δp_{12} errechnet sich aus der Summe aller Verluste zwischen den Punkten 1 und 2.

Der letzte Term Δp_{ext} modelliert den möglichen Einfluß einer Energiezufuhr ($\Delta p_{ext} > 0$) bzw. -abfuhr ($\Delta p_{ext} < 0$) durch Strömungsmaschinen wie Pumpen oder Turbinen.

Verluste durch turbulente Rohrreibung

Um den Beitrag der Rohrreibung zu erfassen, werden die Druckverluste mit dem oben erläuterten Ansatz einbezogen:

$$\frac{\Delta p}{\rho} = \lambda \frac{L}{D} \frac{\bar{u}^2}{2} .$$

Verluste durch Einbauten und Maschinen

Durch einen allgemeinen Term

$$\frac{\Delta p}{\rho} = \zeta \frac{\bar{u}^2}{2} ,$$

werden Verluste durch Einbauten (Meßdüse, -blende), Querschnittsänderungen, Einlaufeffekte, Umlenkungen, Ablösungen etc. beschrieben. Der Verlustkoeffizient ζ hängt von der Geometrie ab.

Druckänderungen durch Strömungsmaschinen können ähnlich beschrieben werden. Bei einer Pumpe gilt

$$\Delta p_P = \frac{\eta N}{\dot{V}} ,$$

für eine Turbine hingegen

$$\Delta p_T = -\frac{N}{\eta \dot{V}} .$$

N ist die Leistung der Maschine in Watt, η ihr Wirkungsgrad und \dot{V} der Volumenstrom.

Kapitel 9

Potentialströmungen

Es erweist sich als sinnvoll, „drehungsbehaftete“ ($\text{rot } \underline{u} \neq \underline{0}$) und „drehungsfreie“ ($\text{rot } \underline{u} \equiv \underline{0}$) Strömungen zu unterscheiden und separat zu behandeln. Dabei bezeichnet \underline{u} das Geschwindigkeitsfeld, und die Rotation (Wirbelstärke, vorticity) $\underline{\omega} := \text{rot } \underline{u}$ charakterisiert die Drehung eines Fluidelements. Diese Unterscheidung wird schon dadurch nahegelegt, dass man allgemein jedes Vektorfeld \underline{a} additiv zerlegen kann in einen drehungsfreien „Quellenanteil“ $\nabla\Phi$ und einen quellenfreien „Wirbelanteil“ \underline{w} ,

$$\underline{a} = \nabla\Phi + \underline{w} \quad \text{mit} \quad \text{div } \underline{w} = 0 ,$$

also

$$\text{div } \underline{a} = \text{div } \nabla\Phi \equiv \Delta\Phi, \quad \text{rot } \underline{a} = \text{rot } \underline{w} .$$

(Helmholtz-Zerlegung von \underline{a}). $\nabla\Phi$ beschreibt den Quellenanteil des Vektorfelds \underline{a} und \underline{w} seinen Drehungsanteil. Die Zerlegung wird eindeutig durch die Spezifikation von Randbedingungen für Φ . Drehungsfreie Strömungsfelder \underline{u} sind also mit Hilfe eines skalaren **Potentials** Φ darstellbar, $\underline{u} = \nabla\Phi$, und werden deshalb auch als **Potentialströmungen** oder **ideale Strömungen** bezeichnet. Sie werden in diesem Kapitel behandelt, während Kapitel 10 auf drehungsbehaftete Strömungen eingeht.

In vielen Fällen sind weite Bereiche eines realen Strömungsfeldes tatsächlich drehungsfrei, etwa bei der Bewegung eines Körpers durch ein ruhendes Fluid, wo der drehungsbehaftete Strömungsbereich auf die dünne Grenzschicht, Ablösegebiete und den Nachlauf begrenzt ist. Statt der drei Geschwindigkeitskomponenten $u_i(\underline{x})$ wird dann nur noch das skalare Potential $\Phi(\underline{x})$ benötigt, was die Beschreibung enorm vereinfacht. Da die Potentiale inkompressibler Strömungen Lösungen der Laplace-Gleichung $\Delta\Phi \equiv \text{div}(\nabla\Phi) = 0$ sind und diese linear ist, kann man bekannte Lösungen additiv überlagern und so eine unbegrenzte Zahl weiterer Strömungen erzeugen (Superpositionsprinzip).

Die Lösungen der Laplace-Gleichung sind mathematisch seit langem gut erforscht. Potentialströmungen lassen sich recht weitgehend *analytisch* behandeln, ganz im Gegensatz zu realen, reibungs- und drehungsbehafteten Strömungen, wo dies nur in seltenen Sonderfällen möglich ist. Potentialströmungen waren deshalb, solange es noch keine leistungsfähigen Computer gab, von grösster Bedeutung für die praktische Strömungsberechnung. Auch heute noch sind sie wichtig sowohl für das grundsätzliche Verständnis als auch für manche praktischen Anwendungen.

In **realen** Strömungen bewirkt die Viskosität eine Drehung $\underline{\omega} = \text{rot } \underline{u} \neq \underline{0}$ von Fluidteilchen, etwa — wie schon bemerkt — in der Grenzschicht, in Ablösungsgebieten und im Nachlauf von umströmten Körpern. Die Grenzschicht kann stationär oder auch periodisch-instationär ablösen und so die Strömungseigenschaften grossräumig radikal verändern. Auch Turbulenz und Turbulenzentstehung sind ganz wesentlich drehungsbehaftete Phänomene. Das idealisierte Modell der Potentialströmung würde hier völlig versagen. Eine markante Aussage in diesem Zusammenhang ist das sogenannte *d'Alembertsche Paradoxon*: In einer stationären Potentialströmung erfährt ein umströmter Körper überhaupt *keinen Widerstand*! Dies steht natürlich in völligem Widerspruch zur Erfahrung mit einer realen Strömung. Wir werden sehen, dass für den *Auftrieb* eines Körpers (d.h. die Kraft normal zur Anströmungsrichtung) die sogenannte *Zirkulation* der Umströmung die entscheidende Rolle spielt. Wiederum kann die *Entstehung* der Zirkulation im Rahmen der Potentialtheorie *nicht erklärt*, ihre *Auswirkung* jedoch einfach und zutreffend *beschrieben* werden. Es kommt also darauf an, Eigenschaften von Potentialströmungen und die Einschränkungen ihrer Anwendungen zu kennen und sachgemäss zu berücksichtigen.

Potentialströmungen können im allgemeinen Fall kompressibel, dreidimensional (3D) und zeitabhängig sein. Im Rahmen dieser Vorlesung werden wir uns jedoch auf inkompressible und weitgehend auf stationäre ebene Potentialströmungen beschränken.

Literaturhinweis zu diesem Kapitel: Kundu et al. [8], Kap. 7 und 15.

9.1 Grundbegriffe und Grundgleichungen

Notation

Geschwindigkeitsfeld in kartesischen Koordinaten

$$\underline{u}(\underline{x}) = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}, \quad \underline{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix},$$

Geschwindigkeitsfeld in Polarkoordinaten (Zylinderkoordinaten), angedeutet durch den Index p am Vektorsymbol,

$$\underline{u}(\underline{x}) = \begin{pmatrix} u_r \\ u_\theta \\ u_z \end{pmatrix}_p, \quad \underline{x} = \begin{pmatrix} r \\ \theta \\ z \end{pmatrix}_p.$$

Wirbelstärke

Der Wirbelstärkevektor $\underline{\omega}$ (englisch *vorticity*) ist definiert als die Rotation des Geschwindigkeitsfeldes,

$$\underline{\omega} = \nabla \times \underline{u} = \text{rot } \underline{u}.$$

In kartesischen bzw. Polarkoordinaten gilt also

$$\underline{\omega} = \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \end{pmatrix}, \quad \underline{\omega} = \begin{pmatrix} \omega_r \\ \omega_\theta \\ \omega_z \end{pmatrix}_p = \begin{pmatrix} \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} - \frac{\partial u_\theta}{\partial z} \\ \frac{\partial u_r}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial r u_\theta}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \end{pmatrix}_p.$$

Das Geschwindigkeitsfeld \underline{u} einer (2D oder 3D) Potentialströmung ist definiert als der Gradient eines Potentials Φ ,

$$\underline{u} = \nabla \Phi.$$

Weil $\text{rot grad } \Phi \equiv 0$ gilt, ist das Geschwindigkeitsfeld einer Potentialströmung stets drehungsfrei.

Zirkulation

Die **Zirkulation** Γ des Geschwindigkeitsfeldes bezüglich einer geschlossenen Randkontur C um eine Fläche S mit Flächennormale \underline{n} ist definiert als das Linienintegral der Geschwindigkeit entlang von C ,

$$\Gamma_C = \Gamma(C, \underline{u}) := \oint_C \underline{u} \cdot d\underline{x},$$

wobei C im positiven Sinn durchlaufen wird (Rechtsschraube mit \underline{n}). Mit dem Satz von Stokes (gekennzeichnet durch $\stackrel{St}{=}$) ergibt sich (unter den nötigen Voraussetzungen) die Gleichheit mit dem Integral der Wirbelstärke $\underline{\omega}$ über die Fläche S ,

$$\Gamma_C \stackrel{St}{=} \int_S (\nabla \times \underline{u}) \cdot \underline{n} dS = \int_S \underline{\omega} \cdot \underline{n} dS.$$

Γ kann als „Wirbelfluss“ durch die Fläche S bezeichnet werden, analog zum Volumenstrom

$$\dot{V} = \int_S \underline{u} \cdot \underline{n} dS.$$

Potential für inkompressible Strömungen

Fügt man $\underline{u} = \nabla \Phi$ in die inkompressible Kontinuitätsgleichung $\operatorname{div} \underline{u} = 0$ ein, folgt wegen $\operatorname{div} \nabla \Phi \equiv \Delta \Phi$, dass Φ Lösung der Laplace-Gleichung ist:

$$\Delta \Phi = 0, \quad \text{d.h.} \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0.$$

Hieraus ergeben sich folgende Konsequenzen:

- Da die Laplace-Gleichung **linear** ist, gilt für Potentialströmungen das **Superpositionsprinzip**: Potential, Stromfunktion und Geschwindigkeitsfeld einzelner Potentialströmungen können additiv zu einer neuen Potentialströmung überlagert werden. (Für den Druck p gilt dies nicht, siehe nachfolgenden Abschnitt.)
- Die Laplace-Gleichung ist nicht zeitabhängig. Instationäre Strömungen können wie eine Abfolge von stationären Strömungen behandelt werden. Näheres dazu in Kapitel 9.6.
- Die mathematischen Eigenschaften der Lösungen der Laplace-Gleichung sind sehr gut bekannt (harmonische Funktionen). Im $2D$ Fall besteht ein enger Zusammenhang mit regulären Funktionen im Komplexen, der zur Beschreibung ebener Potentialströmungen vorteilhaft ausgenutzt wird. (s. 9.2).
- Eindeutigkeit der Lösung der Laplace-Gleichung: Falls das betrachtete Strömungsgebiet G *einfach zusammenhängend* ist (d.h. jede geschlossene Kurve in G stetig auf einen Punkt zusammengezogen werden kann), machen die folgenden Randbedingungen auf dem Rand ∂G die Lösung ϕ eindeutig:
 - $\Phi|_{\partial G}$ gegeben: **Dirichlet-Randbedingung**, oder

- Normalenableitung $\frac{\partial \Phi}{\partial n} \equiv \underline{n} \cdot \nabla \Phi|_{\partial G}$ gegeben, \underline{n} = äusserer Normalenvektor zum begrenzenden Rand ∂G : **Neumann-Randbedingung**. Diese entspricht der physikalisch sinnvollen Vorgabe der Normalkomponente der Geschwindigkeit $\underline{n} \cdot \underline{u}$. Die Lösung Φ ist in diesem Fall bis auf eine additive Konstante bestimmt, deren Wert belanglos ist und willkürlich festgelegt werden kann.
- Randbedingung an festen Wänden: Die Wand wird nicht durchströmt, sondern die Geschwindigkeit ist parallel zum Rand,

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n} = \underline{n} \cdot \underline{u}_W, \quad \underline{u}_W = \text{Geschwindigkeit der Wand}$$

Folgerung: Die *Wandkontur* ist bei ebenen Potentialströmungen (allgemeiner: bei reibungsfreien Strömungen) stets eine *Stromlinie*, bei räumlichen Strömungen eine *Stromfläche*. Ebenso gilt: *Jede Stromlinie bzw. Stromfläche in einer Potentialströmung kann als Berandung eines Körper aufgefasst werden!* Mittels Superposition bekannter Lösungen lassen sich so sehr vielfältige Strömungen um Körper oder durch Strömungskanäle darstellen. Im allgemeinen ist die Haftbedingung an der Wand nicht auch noch erfüllbar: Die Tangentialkomponente der Geschwindigkeit verschwindet nicht, das *Fluid gleitet entlang der Wand*.

- Randbedingung „im Unendlichen“, etwa weit weg von einem umströmten Körper in einer Parallelströmung $\underline{u}_\infty : \nabla \Phi \rightarrow \underline{u}_\infty, x \rightarrow \infty$

Bernoulli-Gleichung für Potentialströmungen

Aus der Impulserhaltung für inkompressible, instationäre Potentialströmungen ($\underline{u} = \nabla \Phi$, $\Phi = \Phi(\underline{x}, t)$, $\text{rot } \underline{u} \equiv 0$, $\text{div } \underline{u} = 0$, $\varrho = \text{const}$) mit konservativen äusseren Kräften $\underline{f} = -\nabla U$ ergibt sich die **Bernoulli-Gleichung** für Potentialströmungen:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2}(\nabla \Phi)^2 + \frac{p}{\varrho} + U = B(t), \quad (\text{Bernoulli, Potentialströmung})$$

wobei die Bernoulli-Konstante $B(t)$ eine beliebige Zeitfunktion ist. Die Gleichung koppelt den Druck mit dem Geschwindigkeitsfeld bzw. mit dem Potential. Der Zusammenhang ist dabei *nichtlinear*: während Geschwindigkeit und Potential superponierbar sind, gilt dies nicht für die Druckanteile!

Dieser „Satz von Bernoulli für rotationsfreie Strömungen“ gilt mit *derselben* Bernoulli-Konstanten im *gesamten* rotationsfreien Feld. Im allgemeinen Fall („allgemeiner Satz von Bernoulli“) hingegen variiert die Bernoulli-Konstante B von Stromlinie zu Stromlinie (s. Tabelle 9.1). Das bedeutet für Potentialströmungen: ist der Druck in einem beliebigen Punkt des Strömungsfeldes bekannt, lässt er sich für das gesamte Feld berechnen, falls Φ (und damit $\frac{\partial \Phi}{\partial t}$ und $\underline{u} = \nabla \Phi$) und das Kräftepotential U bekannt sind.

Für den **stationären** Fall $\phi = \phi(\underline{x})$ gilt dann (mit den Grössen p_0 , \underline{u}_0 , U_0 in einem Referenzpunkt):

$$p(\underline{x}) = p_0 + \frac{\varrho}{2}(\underline{u}_0^2 - \underline{u}^2(\underline{x})) + \varrho(U_0 - U(\underline{x})) \quad (\text{Bernoulli, stationäre Potentialströmung})$$

(vgl. Kap. 5.2.4.2, Bernoulli-Gleichung).

„allgemeiner Satz von Bernoulli“	„Bernoulli für drehungsfreie Strömung“
gilt entlang einer Stromlinie (Bernoulli-Konstante i.a. verschieden für unterschiedliche Stromlinien) gilt auch für wirbelbehaftete Strömungen nur reibungsfrei	gilt im gesamten Feld (Bernoulli-Konstante ist im gesamten Feld konstant) gilt nur wenn $\text{rot } \underline{u} = 0$ reibungsfreie oder reibungsbehaftete Newtonsche Fluide

Tabelle 9.1: Allgemeiner und spezieller Satz von Bernoulli

Druckbeiwert, Staupunkt

Zur dimensionslosen Darstellung der Druckverteilung bei einer Anströmung aus dem Unendlichen mit der Geschwindigkeit u_∞ wird oft der **Druckbeiwert** c_p verwendet. Dabei wird der Druck mit dem Staudruck der Anströmung dimensionslos gemacht:

$$c_p(\underline{x}) := \frac{p(\underline{x}) - p_\infty}{\frac{\rho}{2} u_\infty^2} = 1 - \frac{|\underline{u}(\underline{x})|^2}{u_\infty^2}.$$

Die Gleichheit folgt aus der Bernoulli-Gleichung. Der Druckbeiwert steigt vom Wert 0 im Unendlichen auf seinen Maximalwert 1 im Staupunkt \underline{x}_s eines umströmten Körpers an. Ein **Staupunkt** \underline{x}_s ist durch verschwindende Geschwindigkeit definiert, $\underline{u}(\underline{x}_s) = 0$. Somit wird die Geschwindigkeit von u_∞ im Unendlichen auf $\underline{u}(\underline{x}_s) = \underline{0}$ im Staupunkt verzögert und steigt stromab davon wieder rasch an, womit der Druckbeiwert abnimmt und – je nach Körperform – schnell negative Werte annimmt.

9.2 Ebene, inkompressible Potentialströmungen

Stromfunktion und Stromlinien

Es seien einige Eigenschaften allgemeiner ebener inkompressibler Strömungen rekapituliert, zunächst ohne Spezialisierung auf eine Potentialströmung. Das Geschwindigkeitsfeld \underline{u} einer inkompressiblen Strömung kann als Rotation einer vektoriellen **Stromfunktion** $\underline{\Psi}$ geschrieben werden,

$$\underline{u} = \text{rot } \underline{\Psi}.$$

Die Stromfunktion hat für den Fall einer ebenen Strömung nur eine z -Komponente, $\underline{\Psi} = (0, 0, \Psi_z)^T$ mit $\Psi_z = \Psi(x, y)$ (siehe dazu auch Abschnitt 4.6). Das Geschwindigkeitsfeld \underline{u} ergibt sich damit zu

$$\underline{u} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \Psi}{\partial y} \\ -\frac{\partial \Psi}{\partial x} \end{pmatrix}$$

bzw. in Polarkoordinaten zu

$$\underline{u} = \begin{pmatrix} u_r \\ u_\theta \end{pmatrix}_p = \begin{pmatrix} \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} \\ -\frac{\partial \Psi}{\partial r} \end{pmatrix}_p.$$

Das so definierte Geschwindigkeitsfeld \underline{u} erfüllt die (inkompressible) Kontinuitätsgleichung automatisch, da $\text{div rot } \underline{\Psi} \equiv 0$.

In einer ebenen Strömung werden die **Stromlinien** (Linien mit konstantem Wert der Stromfunktion, auf denen also gilt: $\Psi(x, y) = \text{const}$) durch folgende Gleichung beschrieben (siehe dazu auch Abschnitt 4.5):

$$\frac{dy}{dx} = \frac{v}{u} \quad \text{bzw.} \quad \frac{dx}{u} = \frac{dy}{v} .$$

Da Stromlinien zugleich auch Integralkurven des Geschwindigkeitsfeldes sind, verschwindet die zu ihnen normale Geschwindigkeitskomponente. Sie können deshalb stets auch als Berandung des Strömungsfeldes aufgefasst werden.

Für eine **Stauströmlinie**, d.h. eine Stromlinie durch einen Staupunkt \underline{x}_s , gilt $\Psi(x, y) = \Psi(\underline{x}_s)$ (und nicht etwa $\Psi \equiv 0$). An einem umströmten Körper teilt sich die Stauströmlinie im vorderen Staupunkt und beschreibt so die Körperkontur.

Der **Volumenstrom** \dot{V} durch einen von zwei Stromflächen (d.h. durch Stromlinien gebildeten Flächen) begrenzten Bereich der Breite b (in Richtung z normal zur Strömungsebene) entspricht gerade der Differenz der beiden Stromfunktionswerte (Abb. 9.1). Besitzt die Stromfunktion Singularitäten, ist der Volumenstrom jedoch nicht mehr unabhängig vom Integrationsweg. Je nach dem auf welcher Seite des Integrationsweges die Singularität liegt, ändert sich das Ergebnis. Die Richtung des Flusses ergibt sich dabei durch Betrachtung der Geschwindigkeitskomponenten $u = \frac{\partial \Psi}{\partial y}$ und $v = -\frac{\partial \Psi}{\partial x}$. Sieht man in Richtung des Geschwindigkeitsvektors \underline{u} , zeigt $\nabla \Psi$ jeweils nach links bzw. Stromlinien mit höheren Stromfunktionswerten liegen auf der linken Seite.

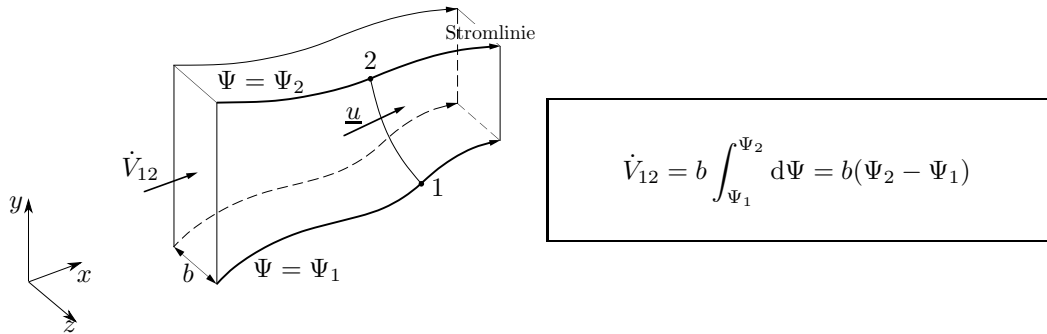


Abbildung 9.1: Volumenstrom durch einen von zwei Stromflächen begrenzten Bereich

Ebene Potentialströmung

Im folgenden betrachten wir nun eine **ebene (2D) Potentialströmung** in der (x, y) -Ebene. Sie ist gegeben durch

$$\underline{u} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \Phi}{\partial x} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial y} \end{pmatrix}, \quad \Delta \Phi \equiv \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = 0 ,$$

bzw. in Polarkoordinaten geschrieben durch

$$\underline{u} = \begin{pmatrix} u_r \\ u_\theta \end{pmatrix}_p = \begin{pmatrix} \frac{\partial \Phi}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \end{pmatrix}_p, \quad \Delta_p \Phi \equiv \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2} = 0 .$$

Die Wirbelstärke einer ebenen Strömung besitzt nur eine z -Komponente

$$\omega_z = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{\partial \Psi}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial y} \right) = -\Delta \Psi,$$

welche in einer Potentialströmung verschwindet. Daraus folgt, dass auch Ψ die Laplace-Gleichung erfüllt:

$$\Delta \Psi = 0.$$

Wegen der Linearität der Laplace-Gleichung sind einzelne Lösungen für Ψ , analog zum Potential Φ , *superponierbar*.

Potentiallinien und ihre Beziehung zu den Stromlinien

In einer ebenen Potentialströmung gilt auf **Potentiallinien** (d.h. Linien mit $\Phi(x, y) = \text{const}$)

$$d\Phi \equiv (\partial\Phi/\partial x)dx + (\partial\Phi/\partial y)dy = 0$$

und somit die Differentialgleichung

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{u}{v}.$$

Daher gilt

$$\nabla\Phi \cdot \nabla\Psi = \frac{\partial\Phi}{\partial x} \frac{\partial\Psi}{\partial x} + \frac{\partial\Phi}{\partial y} \frac{\partial\Psi}{\partial y} = -uv + vu \equiv 0,$$

was bedeutet, dass die Gradienten von Φ und Ψ aufeinander senkrecht stehen. Da aber Isolinie und Gradient einer Funktion stets zueinander senkrecht sind, bilden die *Stromlinien* $\Psi = \text{const}$ des Geschwindigkeitsfelds mit den *Potentiallinien* $\Phi = \text{const}$ ein *Netz von orthogonalen Kurvenscharen* (Abb. 9.2). Weiter gelten die Beziehungen $|\underline{u}| = |\nabla\Phi| = |\nabla\Psi|$ und $\nabla\Phi = -\underline{e}_z \times \nabla\Psi$. Der enge Zusammenhang zwischen Potential Φ und Stromfunktion Ψ wird durch die im folgenden Abschnitt eingeführte komplexe Darstellung noch besser verständlich.

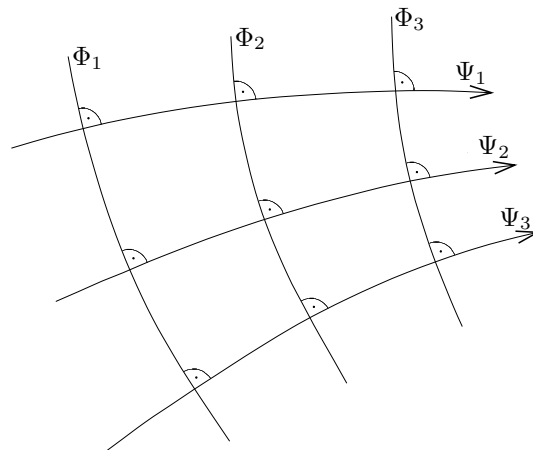


Abbildung 9.2: Stromlinien $\Psi = \text{const.}$ und Potentiallinien $\Phi = \text{const.}$ bilden ein orthogonales Kurvennetz

Komplexe Darstellung

Die Darstellung ebener Potentialströmungen mittels komplexer Zahlen und Funktionen ermöglicht eine kompakte und elegante Beschreibung und Herleitung ihrer Eigenschaften. Sie wird ferner für die Berechnung von Strömungen (z.B. um Profile) mit Hilfe der Methode der konformen Abbildung benötigt (siehe 9.5).

Nach der Funktionentheorie (= Analysis komplexwertiger Funktionen einer komplexen Variablen) erfüllen Realteil F_r und Imaginärteil F_i einer regulären (d.h. im Komplexen differenzierbaren), komplexwertigen Funktion $F = F_r + iF_i$ die Laplace-Gleichung (siehe Anhang C.2). Damit können $\Phi = F_r$ und $\Psi = F_i$ als Potential- und Stromfunktion einer *ebenen* inkompressiblen Potentialströmung mit dem **komplexen Potential** $F(z)$ aufgefasst werden:

$$F(z) = \Phi(x, y) + i\Psi(x, y), \quad z = x + iy \in \mathbb{C}; \quad x, y, \Psi, \Phi \in \mathbb{R}.$$

Jede reguläre komplexe Funktion $F(z)$ beschreibt also sowohl die Potential- als auch die Stromfunktion einer Potentialströmung. Ebenso wird mit dieser Beziehung das komplexe Potential $F(z)$ einer gegebenen Potentialströmung definiert.

(Bemerkung: Die übliche Bezeichnung $z = x + iy$ für die unabhängige Variable in der komplexen Ebene ist nicht zu verwechseln mit der dritten kartesischen Koordinate z normal zur (x, y) -Ebene.)

Die **komplexe Geschwindigkeit** $w(z)$ ist definiert als komplexe Ableitung (Anhang C.2) von $F(z)$ nach z :

$$w(z) := \frac{dF}{dz}.$$

Für den Zusammenhang mit den Geschwindigkeitskomponenten in kartesischen bzw. Polarkoordinaten erhält man durch Differentiation in x -Richtung bzw. in radialer Richtung r (s. C.2)

$$w(z) = u - iv = (u_r - iu_\theta)e^{-i\theta}.$$

Analog zum Reellen ist die **komplexe Zirkulation** Γ_C für eine geschlossene Kontur C in der komplexen Ebene definiert als Linienintegral (im positiven Umlaufsinn) über die komplexe Geschwindigkeit w . Es gilt

$$\Gamma_C := \oint_C w \, dz = \oint_C (u - iv)(dx + idy) = \oint_C \underline{u} \, d\underline{x} + i \oint_C d\Psi = \Gamma_C + iQ_C,$$

wobei

$$\Gamma_C := \oint_C \underline{u} \cdot d\underline{x} = \oint_C \nabla \Phi \cdot d\underline{x} = \oint_C d\Phi$$

die bereits definierte Zirkulation (im Reellen) und

$$Q_C := \oint_C \underline{u} \cdot \underline{n} \, ds = \oint_C (u \, dy - v \, dx) = \oint_C \nabla \Psi \cdot d\underline{x} = \int_C d\Psi$$

die **Quellstärke** des Strömungsfeldes $\underline{u}(\underline{x})$ bezüglich der Kontur C (d.h. der Volumenstrom durch die Randkontur) bedeuten. Die Zirkulation Γ_C verschwindet dann nicht, wenn innerhalb der Kontur C

Singularitäten liegen, bei denen das Potential Φ mehrdeutig ist, d.h. nach einem Umlauf nicht wieder denselben Wert erreicht. Dies ist für den nachfolgend behandelten Potentialwirbel der Fall. Analog verschwindet die Quellstärke Q_C nicht, wenn Ψ Singularitäten besitzt und mehrdeutig ist, was für die ebenfalls zu behandelnde Linienquelle zutrifft. Unter den Voraussetzungen des Gauss'schen Satzes (gekennzeichnet durch $\frac{G}{\equiv}$, keine Singularitäten im Integrationsgebiet) gilt für die Quellstärke

$$Q_C = \oint_C \underline{u} \cdot \underline{n} \, ds \stackrel{G}{=} \int_S \operatorname{div} \underline{u} \, dS ,$$

wobei C die Fläche S umschliesst. Damit wird bestätigt, dass in einer singularitätenfreien inkompressiblen Strömung wegen $\operatorname{div} \underline{u} = 0$ die Quellstärke stets verschwindet. Analog verschwindet in einer singularitätenfreien Potentialströmung nach dem Stokesschen Satz die Zirkulation Γ_C .

9.3 Elementarlösungen, Transformationen und Überlagerungen

Wegen der Linearität der Laplace-Gleichung lassen sich ihre Lösungen und damit die Potentiale, Stromfunktionen und Geschwindigkeitsfelder superponieren. Oft werden Strömungsfelder durch geschickte Kombination bekannter Elementarlösungen der Laplace-Gleichung aufgebaut. Es sei daran erinnert, dass in einer reibungsfreien Strömung jede Stromlinie auch als eine feste Berandung aufgefasst werden kann, an der die Strömung entlanggleitet. Besonders naheliegend ist das für die sich im Staupunkt verzweigende Staustromlinie, die so die Kontur eines umströmten Körpers beschreibt.

Die nachfolgend aufgeführten Beispiele beschreiben ebene Potentialströmungen in der (x, y) -Ebene, die aus einem analytisch gegebenen komplexen Potential $F(z)$ abgeleitet werden. Die verwendeten Variablen sind am einfachsten als dimensionslose Größen zu verstehen. Bekannte Elementarlösungen wie Quellen/Senken, Wirbel oder Dipole besitzen Singularitäten in einzelnen Punkten (weshalb diese Lösungen auch als „*Standard-Singularitäten*“ bezeichnet werden) und sind sonst überall regulär. Die Singularitäten liegen oft im Inneren eines umströmten Körpers und stören dann nicht weiter. Eine Zusammenstellung häufig benutzter Singularitäten und Überlagerungen befindet sich im Anhang D.

Parallelströmung:

$$F(z) = (u_\infty - iv_\infty)z, \quad w(z) = u_\infty - iv_\infty, \quad u = u_\infty, \quad v = v_\infty$$

Die Komponenten der Geschwindigkeit u_∞ und v_∞ sind in der ganzen Ebene konstant. Sie beschreiben die parallele Anströmung eines Körpers „aus dem Unendlichen“, entsprechend der geradlinigen Bewegung eines Körpers durch ein ruhendes Medium mit konstanter Geschwindigkeit. Die Parallelströmung ist übrigens die einzige Potentialströmung, die in der ganzen Ebene singularitätenfrei ist und somit überall endlich bleibt. In allen anderen Fällen wird die Geschwindigkeit irgendwo (und sei es im Unendlichen) unendlich.

Quelle/Senke (genauer: Linienquelle/-senke) im Punkt $z = 0$:

$$F(z) = \frac{Q}{2\pi} \ln z \quad (Q \in \mathbb{R}), \quad w(z) = \frac{Q}{2\pi z}, \quad u_r = \frac{Q}{2\pi r}, \quad u_\theta = 0$$

Diese im Ursprung $z = 0$ gelegene Singularität „produziert“ oder „vernichtet“ Fluid, je nach dem Vorzeichen von Q : Quelle $Q > 0$, Senke $Q < 0$. Die Normierung mit dem Vorfaktor ist gerade so gewählt, dass die Quellstärke $Q_C = Q$ ist. Dies gilt für jede die Singularität umschliessende Kontur C . $Q = \dot{V}/b$ ist der Volumenstrom pro Tiefeneinheit b (in Richtung normal zur (x, y) -Ebene) durch eine die Singularität umschliessende Kontur C . Ausserhalb der Singularität ist die Strömung quellenfrei, $\operatorname{div} \underline{u} = 0$. Die Strömung verläuft entsprechend radial von der Singularität weg oder in sie hinein. Die Stromlinien sind Halbgeraden aus dem Ursprung und die Potentiallinien sind konzentrische Kreise um $z = 0$. An der Stelle der Singularität wird die Geschwindigkeit unendlich. Bemerkung: Die Linienquelle ist nicht zu verwechseln mit einer Punktquelle im dreidimensionalen Raum, die eine kugelsymmetrische Strömung erzeugt.

Potentialwirbel (Linienwirbel) im Punkt $z = 0$:

$$F(z) = -\frac{i\Gamma}{2\pi} \ln z \quad (\Gamma \in \mathbb{R}), \quad w(z) = -\frac{i\Gamma}{2\pi z}, \quad u_r = 0, \quad u_\theta = \frac{\Gamma}{2\pi r}$$

Das Fluid rotiert um das gemeinsame Zentrum in $z = 0$ mit einer zum Abstand umgekehrt proportionalen Geschwindigkeit. Ausserhalb des Zentrums ist die Wirbelstärke $\underline{\omega} = \text{rot} \nabla \Phi \equiv 0$. Damit verschwindet dort auch die Drehung jedes einzelnen Fluidteilchens und die bei Potentialströmungen vorausgesetzte Drehungsfreiheit wird nicht verletzt. Im Zentrum wird die Wirbelstärke des Potentialwirbels unendlich. Mit der gewählten Normierung gilt für die Zirkulation des Geschwindigkeitsfeldes $\Gamma_C = \Gamma$ für jede geschlossene Kontur C , welche die Singularität umschliesst. Die positive Drehrichtung $\Gamma > 0$ ist im Gegenuhrzeigersinn vereinbart. In der komplexen Darstellung erkennt man die enge Verwandtschaft zwischen Quelle und Wirbel: Ihre komplexen Potentiale und Geschwindigkeiten unterscheiden sich nur durch eine Drehung um $\pi/2$ in der komplexen Ebene (Faktor $i = e^{i\pi/2}$ in $F(z)$). Stromfunktion und Potential, und damit Stromlinien und Potentiallinien, vertauschen dadurch ihre Rollen.

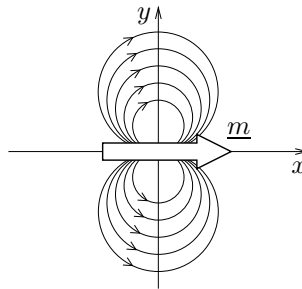
Dipol im Punkt $z = 0$:

$$F(z) = \frac{m}{z} \quad (m \in \mathbb{R}), \quad w(z) = -\frac{m}{z^2}, \quad \underline{m} = m \cdot \underline{e}_m$$

Ein Dipol entsteht, indem man z.B. auf der x -Achse in $x = -\varepsilon < 0$ eine Quelle und in $x = \varepsilon$ eine Senke identischer Stärke $|Q|$ platziert, den Abstand ε gegen Null streben lässt und dabei das Produkt von ε und $Q(\varepsilon)$ konstant hält (anderenfalls resultiert gegenseitige Auslöschung):

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{Q \cdot \varepsilon}{\pi} =: m.$$

m bzw. $\underline{m} = m \cdot \underline{e}_m$ wird als **Dipolmoment** bezeichnet. Wir vereinbaren die Richtung \underline{e}_m des Dipols willkürlich als Richtung der Stromlinien auf der Senkrechten (hier die y -Achse) zur Symmetrieachse (hier die x -Achse). Die Symmetrieachse wird bei dieser Anordnung als **Dipolachse** bezeichnet. Die Stromlinien sind Kreise mit gemeinsamer Tangente an die Symmetrieachse im Dipol. Der Dipol ist bedeutsam für die Behandlung eines umströmten Kreiszylinders (s. S. 69). Alternativ kann man diesen Dipol auch durch den Grenzübergang von zwei gegensinnigen, auf der y -Achse in $y = \pm\varepsilon$ platzierten Linienwirbeln erhalten. Analog wie der Dipol lässt sich ein **Quadrupol** konstruieren durch einen Grenzübergang von zwei sich annähernden Dipolen.



Keilströmung:

$$\begin{aligned} F(z) &= C \cdot z^n, \quad C, n \text{ reell}, \quad n \geq 1/2, \text{ o.B.d.A.} \quad C > 0 \\ \Phi &= Cr^n \cos n\theta, \quad \Psi = Cr^n \sin n\theta, \\ w(z) &= Cnz^{n-1} = Cnr^{n-1}e^{in\theta}e^{-i\theta}, \\ u_r &= Cnr^{n-1} \cos n\theta, \quad u_\theta = -Cnr^{n-1} \sin n\theta \\ |\underline{u}| &= |w| = Cnr^{n-1} \end{aligned}$$

Dieses Potential beschreibt die Strömung in einem keilförmigen Winkelraum bzw. um eine Ecke mit dem Öffnungswinkel $\alpha = \pi/n$, s. Abb. 9.3 und 9.4. Der einzige Staupunkt liegt für $n > 1$

bei $r = 0$, Staustromlinien sind die Linien $\theta = 0, l \cdot \pi/n, l \in \mathbf{Z}$. In dem anschliessenden Winkelraum $\alpha < \theta < 2\alpha$ wechselt u_θ das Vorzeichen. Das Strömungsbild wiederholt sich dann in Umfangsrichtung θ periodisch mit Periode $2\alpha = 2\pi/n$. Durch geeignete Wahl von n sind zahlreiche verschiedene Potentialströmungen darstellbar. Einige Beispiele:

- $n \geq 1$: Strömung im Winkelraum $0 \leq \theta \leq \alpha = \frac{\pi}{n}$,
 $n = 2$: $\alpha = \pi/2$, **ebene Staupunktströmung**, $|\underline{u}| = 2Cr$, $u = 2Cx$, $v = -2Cy$
 $n = 1$: $\alpha = \pi$, Parallelströmung $u = u_\infty := C$, $v = 0$
 $1 > n > \frac{1}{2}$: Umströmung einer **konvexen Ecke**, $\pi < \alpha < 2\pi$, Abb. 9.4
 Die Geschwindigkeit an der Ecke wird unendlich:
 $|\underline{u}| = C \cdot n/r^{1-n} \rightarrow \infty$ für $r \rightarrow 0$,
 und damit ebenso der Druck:
 $p = p_\infty - \frac{\rho}{2} |\underline{u}|^2 \rightarrow -\infty$ für $r \rightarrow 0$: unendliche "Saugspitze"
 $n = \frac{1}{2}$: $\alpha = 2\pi$, Umströmung der Kante einer dünnen Platte, $|\underline{u}| = C/(2\sqrt{r})$.

Die Singularität für $\alpha > \pi$ ist natürlich physikalisch unrealistisch, die unendlich scharfe Kante wird in einer realen Strömung durch Reibungseinfluss effektiv abgerundet (Haftbedingung, Grenzschichtbildung und Ablösung).

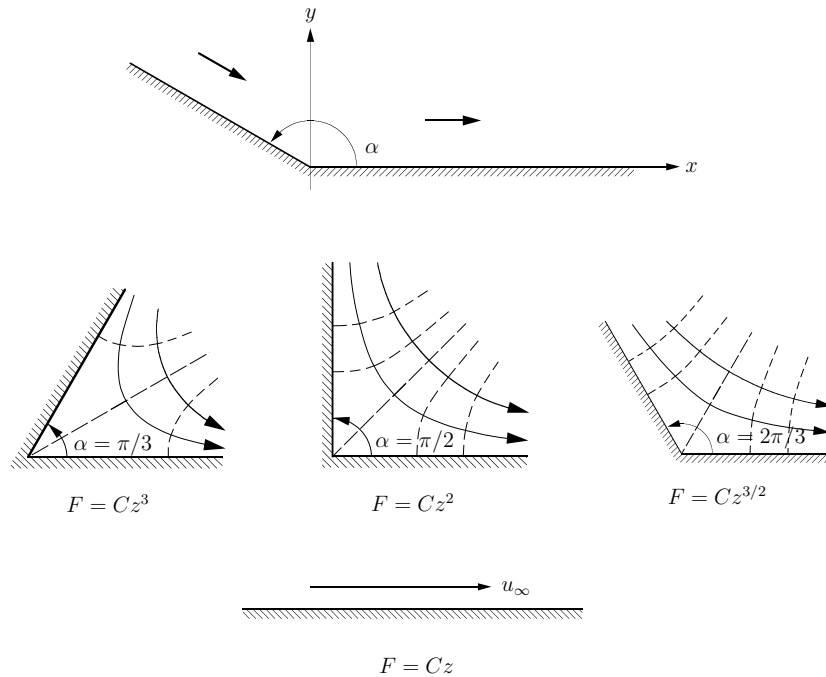


Abbildung 9.3: Keilströmung mit $F(z) = C \cdot z^n$ in einem konvexen Winkelraum mit $\alpha = \pi/n$, $n > 1$. — Stromlinien, - - - Potentiallinien. Grenzfall $n = 1$: Parallelströmung.

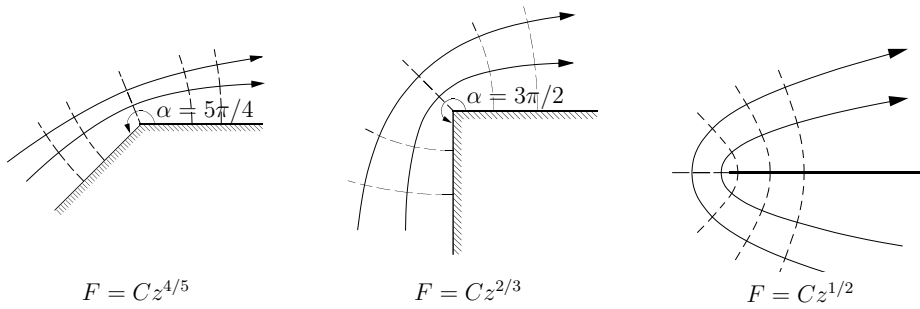


Abbildung 9.4: Umströmung einer konvexen Ecke, $\pi < \alpha < 2\pi$ bzw. $1 > n > 1/2$. — Stromlinien, - - - Potentiallinien. An der Ecke werden Druck und Geschwindigkeit unendlich.

Translation von Elementarlösungen, Drehung

Die Standardsingularitäten können in der komplexen Ebene beliebig verschoben werden. Liegt die Singularität von $F(z)$ in $z = 0$ und sie soll nach $\zeta = a + ib$ verschoben werden, so wird dies durch

$$\begin{aligned} F_s(z) &:= F(z - \zeta) \\ &= F(x - a + i(y - b)) \end{aligned}$$

erreicht, Abbildung 9.5.

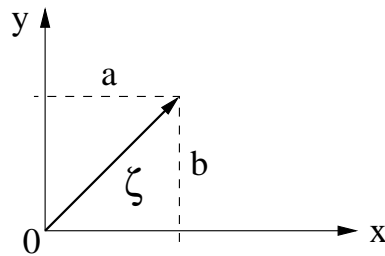


Abbildung 9.5: Zur Translation von Elementarlösungen

In ähnlicher Weise lässt sich die durch $F(z)$ gegebene Potentialströmung in der (x, y) -Ebene drehen:

$$F_d(z) := F(e^{-i\alpha} \cdot z)$$

beschreibt die im Ursprung um den Winkel α gedrehte Strömung.

Allgemeinere, auch nichtlineare Transformationen einer gegebenen Potentialströmung sind mittels konformer Abbildungen möglich (s. Kapitel 9.5).

Wandbedingung, Spiegelung

An einer (ruhenden) Wand muss gelten: $\underline{u} \cdot \underline{n} = 0$, d.h. die Normalkomponente der Geschwindigkeit verschwindet. Dies ist aber auch in einer Symmetrieebene des Geschwindigkeitsfeldes der Fall. Um den Einfluss einer ebenen Wand in einer Potentialströmung zu beschreiben, müssen die Singularitäten so „gespiegelt“ werden, dass die Wand zur Symmetrieebene wird. Die Tangentialkomponente der Geschwindigkeit an der Wand verschwindet jedoch nicht. Alle gespiegelten Singularitäten müssen für die Berechnung des Strömungsfeldes genauso berücksichtigt werden wie die ursprünglich vorhandenen. Die Wand existiert im potentialtheoretischen Modell nur als die Stromlinie in der Symmetrieebene.

Beispiel: Ein „Wirbel vor einer Wand“ wird potentialtheoretisch dargestellt durch den gegebenen Wirbel plus einen an der Wandebene gespiegelten „virtuellen“ Wirbel, Abb. 9.6. Beide Wirbel „induzieren“ Geschwindigkeitsbeiträge in jedem Punkt der Strömungsebene. In der Symmetrieebene heben sich die Normalkomponenten auf, die Tangentialkomponenten addieren sich. Liegen mehrere Wände vor, so sind entsprechend mehrere (ggf. unendlich viele) Spiegelungen vorzunehmen.

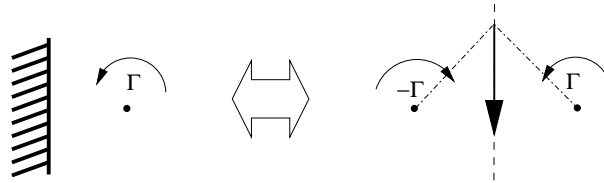


Abbildung 9.6: Spiegelungsprinzip: potentialtheoretisches Modell für einen Wirbel vor einer Wand

Fixierte und bewegliche Singularitäten

Wir betrachten Potentialströmungen, die durch einzelne - oder eine Überlagerung mehrerer - Elementarlösungen beschrieben werden. Meistens fasst man dabei die Positionen der Singularitäten als zeitlich unveränderlich auf (fixierte Singularitäten). Alternativ dazu kann man diese Positionen auch in verschiedener Weise zeitlich verändern. Damit erhält man eine zeitliche Abfolge von stationären Potentialströmungen entsprechend der jeweiligen Momentankonfiguration. Insbesondere kann man fordern, dass sich die Position jeder Singularität entsprechend dem von allen *anderen* Singularitäten erzeugten („induzierten“) Geschwindigkeitsfeld wie ein Fluidpartikel mitbewegt („mitschwimmende“ Singularitäten). Die zeitlich veränderliche Konfiguration der Singularitäten erzeugt so ein zeitlich veränderliches Strömungsfeld.

Beispiel: Wir betrachten einen beweglichen Wirbel vor einer Wand (vgl. Abb. 9.6). Jeder der beiden Wirbel induziert auch eine Geschwindigkeit an der Position des jeweils anderen (*nicht aber auf sich selbst*). Stellt man sich die Wirbel als im Strömungsfeld frei beweglich vor, so wandern sie also in diesem Beispiel parallel zur Wand (entgegen einer gedachten „Abrollrichtung“) mit der Geschwindigkeit $\Gamma/(4\pi d_W)$, wobei d_W der Wandabstand des Wirbels ist.

Einfache Überlagerungen

Parallelströmung + Quelle:

$$F(z) = u_\infty z + \frac{Q}{2\pi} \ln z, \quad w(z) = u_\infty + \frac{Q}{2\pi z}$$

Durch diese Überlagerung entsteht — wenn man die sich im Staupunkt verzweigende Staustromlinie als feste Wand auffasst — das Strömungsfeld um einen halbumendlichen Körper (Abbildung 9.7). Die Quelle verdrängt die Stromlinien der ankommenden Parallelströmung. Die Breite des Körpers (Abstand der im Staupunkt $(x_s, y_s) = (-Q/(2\pi u_\infty), 0)$ verzweigten Stromlinien) strebt gegen Q/u_∞ für $x \rightarrow \infty$, wie eine Bilanz des Volumenstroms ergibt.

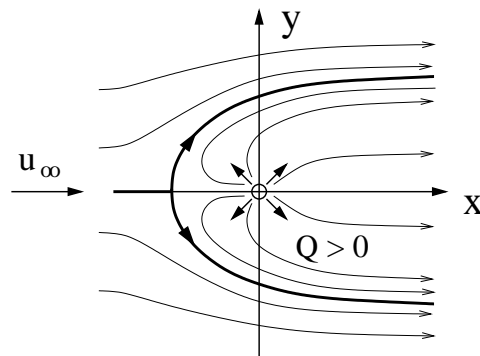


Abbildung 9.7: Potentialtheoretisches Modell der Umströmung eines Halbkörpers

Parallelströmung + Quelle + Senke:

Wird in der Parallelströmung eine Senke stromabwärts von der Quelle platziert und sind Quellen- und Senkenstärke betraglich gleich gross, fließt durch die Senke alles aus der Quelle kommende Fluid innerhalb des von der Staustromlinie umschlossenen Gebiets wieder ab. Dadurch bildet die Staustromlinie eine geschlossene, zur x - und y -Achse symmetrische Kontur. Diese Kombination beschreibt also die Umströmung eines endlichen geschlossenen, ovalen Körpers (sogenannte Ogive, siehe Abbildung 9.8).

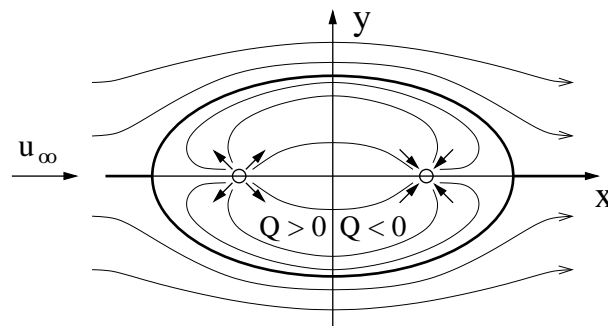


Abbildung 9.8: Umströmung eines geschlossenen Körpers (Ogive)

Kreiszyylinder–Umströmung:

$$F(z) = u_\infty \left(z + \frac{r_0^2}{z} \right), \quad w(z) = u_\infty \left(1 - \frac{r_0^2}{z^2} \right)$$

Ein sehr wichtiges Beispiel ist die Umströmung eines **Kreiszyinders**. Man erhält sie durch Überlagerung einer Parallelströmung $u_\infty > 0$ mit einem Dipol mit geeignet gewähltem Moment $m > 0$. Es ergibt sich die Strömung um einen Kreiszyylinder mit Radius $r_0 = \sqrt{m/u_\infty}$ (Abbildung 9.9):

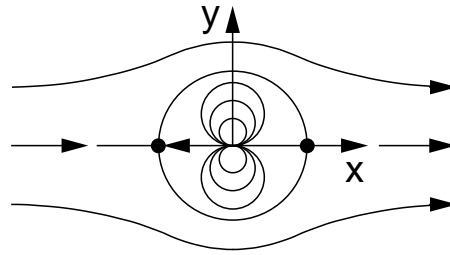


Abbildung 9.9: Zylinderumströmung

Potential und Stromfunktion lauten in Polarkoordinaten

$$\Phi = u_\infty \left(r + \frac{r_0^2}{r} \right) \cos \theta ,$$

$$\Psi = u_\infty \left(r - \frac{r_0^2}{r} \right) \sin \theta ;$$

die Geschwindigkeiten

$$u_r = \frac{\partial \Phi}{\partial r} = u_\infty \left(1 - \frac{r_0^2}{r^2} \right) \cos \theta ,$$

$$u_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} = -u_\infty \left(1 + \frac{r_0^2}{r^2} \right) \sin \theta .$$

Auf der Zylinderwand $r = r_0$ ist also $u_r = 0$ und

$$u_{\theta,w} = -2u_\infty \sin \theta ,$$

so dass die *maximale Geschwindigkeit*

$$|u_\theta|_{\max} = 2u_\infty$$

am „Dickenmaximum“ $\theta = \pi/2, 3\pi/2$ erreicht wird. Dort wird die Strömung also auf die doppelte Anströmgeschwindigkeit beschleunigt. Entfernt man sich vom Zylinder, so nimmt die durch ihn verursachte Störung der Parallelströmung mit $1/r^2$ ab. Die beiden *Staupunkte* liegen bei $r = r_0$, $\theta = 0$ und $r = r_0$, $\theta = \pi$. Für die *Druckverteilung* auf der Wand erhält man nach Bernoulli

$$p_w(\theta) = p_\infty + \frac{\rho}{2} (u_\infty^2 - |u_w|^2) = p_\infty + \frac{\rho}{2} u_\infty^2 (1 - 4 \sin^2 \theta) ,$$

also $c_{p,w} = 1 - 4 \sin^2 \theta$, eine zur y -Achse ($\theta = \pi/2$) (und natürlich auch zur x -Achse) symmetrische Verteilung.

Die Druckverteilung in einer realen, reibungsbehafteten Strömung weicht davon erheblich ab, da die Strömung in der Nähe des Dickenmaximums ablöst und der Druck nicht mehr auf den Wert am vorderen Staupunkt ansteigt.

Kreiszyylinder-Umströmung mit Zirkulation:

$$F(z) = u_\infty \left(z + \frac{r_0^2}{z} \right) - \frac{i\Gamma}{2\pi} \ln z, \quad w(z) = u_\infty \left(1 - \frac{r_0^2}{z^2} \right) - \frac{i\Gamma}{2\pi z}$$

Durch die zusätzliche Überlagerung eines Wirbels im Mittelpunkt des Zylinders wird eine Strömung mit Zirkulation Γ erzeugt. Die Strömung ist nicht mehr symmetrisch bezüglich der x -Achse (jedoch weiterhin symmetrisch zur y -Achse), s. Abb. 9.10. Für die Geschwindigkeitskomponenten ergibt sich

$$\begin{aligned} u_r &= u_\infty \left(1 - \frac{r_0^2}{r^2} \right) \cos \theta \\ u_\theta &= -u_\infty \left(1 + \frac{r_0^2}{r^2} \right) \sin \theta + \frac{\Gamma}{2\pi r}. \end{aligned}$$

Zur Berechnung der Lage der *Staupunkte* werden die Komponenten der Geschwindigkeit zu null gesetzt. Für die Wahl $\Gamma < 0$ (Wirbel im Uhrzeigersinn) ergeben sich zwei Situationen ($\Gamma > 0$ analog):

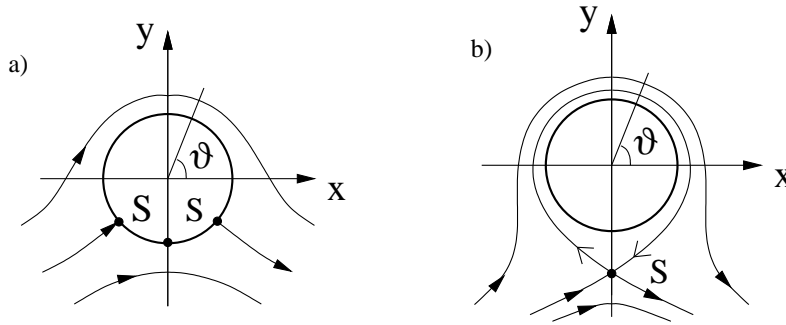


Abbildung 9.10: Zylinderströmung mit a) geringer und b) starker Zirkulation Γ , ($\Gamma < 0$).

- a) $|\Gamma| \leq 4\pi r_0 u_\infty$: Die beiden Staupunkte liegen auf der Zylinderoberfläche $r = r_0$ bei den beiden Winkeln $\theta = \theta_s$ mit $\sin \theta_s = \Gamma/(4\pi r_0 u_\infty)$, Abbildung 9.10 a). Im Grenzfall $\Gamma = -4\pi r_0 u_\infty$ ($\theta_s = 3\pi/2$) fallen sie zusammen.
- b) $|\Gamma| > 4\pi r_0 u_\infty$: Der Staupunkt ist von der Oberfläche in die freie Strömung weggewandert, Abbildung 9.10 b), und liegt nun bei

$$\begin{aligned} \theta_s &= 3\pi/2 \quad (\text{aus } u_r = 0 \text{ für } \cos \theta_s = 0), \\ r_{s1/2} &= \frac{1}{4\pi u_\infty} \left[-\Gamma \pm \sqrt{\Gamma^2 - (4\pi r_0 u_\infty)^2} \right] \in \mathbb{R} \quad (\text{aus } u_\theta = 0 \text{ für } \theta = 3\pi/2) \end{aligned}$$

(der zweite Staupunkt liegt innerhalb des Zylinders und ist für die Umströmung bedeutungslos).

Für die *Druckverteilung* auf der Zylinderoberfläche erhält man nach Bernoulli

$$p_w(\theta) = p_\infty + \frac{\rho}{2} \left[u_\infty^2 - \left(-2u_\infty \sin \theta + \frac{\Gamma}{2\pi r_0} \right)^2 \right].$$

Die unterschiedliche Druckverteilung auf der Ober- und Unterseite des Zylinders (für $\Gamma < 0$ ist p_w unten grösser als oben) bewirkt eine *Auftriebskraft* F_y auf den Zylinder, die man durch Integration der y -Komponente der Druckkraft erhält. Für einen Zylinderabschnitt der Länge b in z -Richtung ergibt sich

$$F_y = \int_0^{2\pi} (-p_w(\theta)) \cdot \sin \theta \cdot (b r_0 d\theta) = -b r_0 \int_0^{2\pi} p_w(\theta) \sin \theta d\theta,$$

nach Einsetzen von $p_w(\theta)$

$$F_y = -\Gamma \cdot \rho u_\infty \cdot b$$

(Auftriebsformel von Kutta-Joukowski) .

Der Auftrieb ist proportional zur Zirkulation Γ , zur Fluidichte ρ und zur Anströmgeschwindigkeit u_∞ . Dagegen verschwindet der Widerstand F_x offensichtlich allein schon wegen der Symmetrie der Druckverteilung zur y -Achse (d'Alembertsches Paradoxon).

Axialsymmetrische Potentialströmung:

Zum Abschluss unserer Übersicht über *ebene* Potentialströmungen sei darauf hingewiesen, dass sich *axialsymmetrische* Potentialströmungen in ähnlicher Weise analytisch behandeln lassen. Allerdings existiert hier keine komplexe Darstellung wie im ebenen Fall. Beispiele sind die Punktquelle im Raum und der axialsymmetrische Dipol. Wird der letztere mit einer Parallelströmung überlagert, so erhält man die analytische Darstellung der Potentialströmung um eine Kugel, siehe Kundu et al. [8] (Kap. 7.7) und Panton [14] (Kap. 19).

9.4 Kräfte auf umströmte Körper

Das für die Kreiszyylinder-Umströmung erhaltene Ergebnis für die Kräfte lässt sich verallgemeinern. Da in einer Potentialströmung keine Tangentialkräfte, sondern nur Normalkräfte wirken, wird die Kraft \underline{F} auf einen umströmten Körper durch das Integral der Druckverteilung über seine Oberfläche S (bzw. im Fall der ebenen Strömung über die Randkontur C) bestimmt:

$$\underline{F} = - \int_S p \underline{n} dS \stackrel{\text{ebene Strömung}}{=} -b \int_C p \underline{n} ds$$

(b ist dabei wieder die Ausdehnung des Körpers, hier also eines allgemeinen Zylinders mit beliebiger Querschnittsform, senkrecht zur Strömungsebene). Es gelten folgende zwei wichtige allgemeine Aussagen, die wir für den Spezialfall des Kreiszyinders bereits kennengelernt haben, und die hier ohne Beweis mitgeteilt werden (siehe dazu Kundu et al. [8], Kap. 7.5):

1. Die Kraft F_x in Anströmrichtung (Widerstand) auf einen parallel und stationär angeströmten Körper in einer ebenen Potentialströmung *verschwindet*,

$$F_x = 0.$$

Diese Aussage gilt im Übrigen auch für endliche Körper in dreidimensionaler Potentialströmung, z.B. die Kugelumströmung. Sie wird, da sie in völligem Gegensatz zur Erfahrung mit realen Strömungen steht, als **d'Alembertsches Paradoxon** bezeichnet. Einen endlichen Widerstand erhält man dagegen bei instationären Potentialströmungen (s. Kapitel 9.6).

2. Die Kraft F_y senkrecht zur Anströmrichtung (Auftrieb) einer ebenen Potentialströmung auf einen mit u_∞ parallel und stationär angeströmten Körper ist für einen Abschnitt der Länge b in z -Richtung *gegeben durch*

$$F_y = -\Gamma \cdot \rho u_\infty \cdot b.$$

(Auftriebsformel von Kutta-Joukowski)

Sie ist also proportional zur Zirkulation Γ um den Körper sowie zur Dichte und Geschwindigkeit der Anströmung (das negative Vorzeichen ergibt sich wegen der Vorzeichenvereinbarung für Γ).

Die Zirkulation kann dabei in einer realen Strömung durch viskose Effekte, z.B. durch Rotation eines Kreiszylinders, die wandnahe Fluidschichten in Drehung versetzt, oder durch Wölbung und/oder Anstellung eines Profils erzeugt werden. Die Auftriebsformel ist oft auch für eine reale Strömung brauchbar, wenn die Zirkulation aus dem Geschwindigkeitsfeld \underline{u} der realen Umströmung in einiger Entfernung vom Körper berechnet wird, wo $\text{rot } \underline{u}$ praktisch verschwindet.

Wird die Zirkulation der Umströmung durch Rotation des Körpers erzeugt, so nennt man die Querkraft F_y auch **Magnus-Kraft** (vgl. Flettner-Rotor als Schiffsantrieb). Sie kann recht grosse Werte annehmen. Auch in dreidimensionalen Umströmungen rotierender Körper tritt eine Magnus-Kraft auf, z.B. bei angeschnittenen Bällen im Sport (Fussball, Tennis, Baseball), wo sie kunstvoll gekrümmte Flugbahnen ermöglicht.

9.5 Ebene Profilmströmung

Profilumströmungen kommen in vielen verschiedenen technischen oder natürlichen Zusammenhängen vor: Flugzeug-Tragflügel, Leitwerke, Verkleidungen, Turbomaschinenschaufeln, Segel, Vogelflügel, Schwimmflossen usw. Als Modellfall betrachten wir die ebene Strömung um ein Profil (engl. airfoil) gemäss Abbildung 9.11 mit den dort eingeführten Bezeichnungen. Dreidimensionale Effekte (Änderungen normal zur Strömungsebene) bleiben ausser Betracht. Das Profil sei in z -Richtung unendlich weit ausgedehnt und die parallele Anströmung mit u_∞ erfolge in x -Richtung.

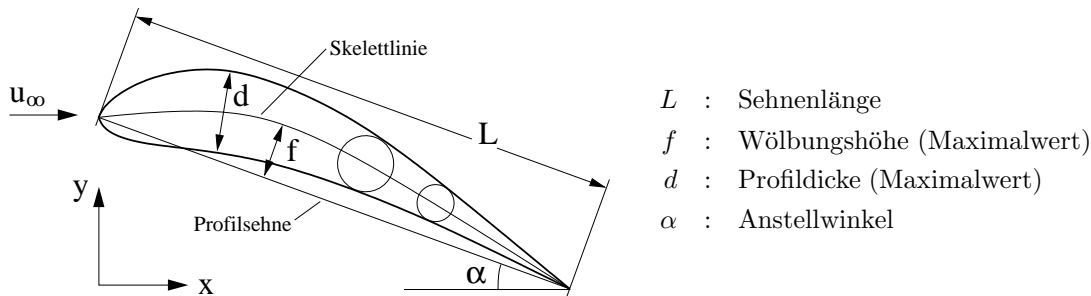


Abbildung 9.11: Bezeichnungen bei einer Profilmströmung

Liegt eine **Potential**strömung vor, so gelten für einen Abschnitt der Breite b in z -Richtung die in 9.4 gemachten Aussagen, insbesondere die Auftriebsformel nach Kutta-Joukowski und das Verschwinden des Widerstands.

Eine **reale** Strömung kann jedoch erheblich von der Potentialströmung abweichen. Bereits die viskose Wandreibung in der Grenzschicht sorgt für eine nicht verschwindende Widerstandskraft. Bei höheren Profil-Reynoldszahlen $Re_L = u_\infty L / \nu$ und grösseren **Anstellwinkeln** α löst die Strömung ab und die Druckverteilung unterscheidet sich stark von der potentialtheoretischen Verteilung. Damit verändern sich auch die daraus resultierenden Kräfte auf das Profil drastisch.

Analog zum Druckbeiwert werden für den Widerstand F_x und den Auftrieb F_y dimensionslose **Widerstands-** und **Auftriebsbeiwerte** c_W und c_A definiert:

$$c_W = \frac{F_x}{bL \frac{\rho}{2} u_\infty^2}, \quad c_A = \frac{F_y}{bL \frac{\rho}{2} u_\infty^2}.$$

Ihre Werte hängen in einer realen Strömung von der Reynoldszahl, der Profilform und insbesondere stark vom Anstellwinkel α ab. Das Verhältnis c_A/c_W der beiden Beiwerte, also von Auftriebs- zu Widerstandskraft, bezeichnet man als **Gleitzahl**. Ein Segelflugzeug mit Gleitzahl 50 verliert auf 50m horizontaler Flugdistanz 1m an Höhe. Während bei einem schlanken, "stromlinienförmigen" Körper der

Druckwiderstand (aufintegrierte Normalkraft auf die Oberfläche) um eine Grössenordnung unter dem Reibungswiderstand (aufintegrierte Tangentialkraft) liegt, ist es bei einem “stumpfen” Körper (bluff body) gerade umgekehrt: der Widerstandsbeiwert liegt viel höher und resultiert ganz überwiegend aus dem Druckwiderstand.

Die zur Auftriebserzeugung notwendige Zirkulation Γ der Profilmströmung kann sowohl durch die *Profilwölbung* (Wölbungshöhe f) als auch durch die *Anstellung* (Anstellwinkel α) bewirkt werden. Es stellt sich die Frage, wodurch der Wert der Zirkulation, und damit nach Kutta-Joukowski des Auftriebs, festgelegt wird. In einer realen Strömung wird beobachtet, dass die *Hinterkante* des Profils *nicht umströmt* wird, sondern die Zirkulation Γ sich gerade so einstellt, dass die Hinterkante eine Staulinie bildet und so ein *glatter Abfluss* stattfindet (**Kuttasche Abflussbedingung** oder kurz **Kutta-Bedingung**, $\Gamma = \Gamma_{Kutta}$).

Für kleine Anstellwinkel α und Wölbungshöhen f gilt folgende aus der Potentialtheorie hergeleitete lineare Näherung für den Auftriebsbeiwert:

$$c_A \approx 2\pi \left(\alpha + 2\frac{f}{L} \right), \quad \alpha \leq \alpha_a \ll 1, \quad f/L \ll 1.$$

Bei Erhöhung des Anstellwinkels über einen vom Profil abhängigen Grenzwert α_a hinaus löst die Strömung schliesslich ab („Strömungsabriss“, engl. stall) und der Auftrieb fällt sehr rasch signifikant unter diesen linearen Wert ab. Ein gewölbtes Profil ($f \neq 0$) hat bereits ohne Anstellung ($\alpha = 0$) einen Auftrieb. Um diesen zum Verschwinden zu bringen, muss der negative „Nullauftriebswinkel“ $\alpha = -2f/L$ eingestellt werden. Durch das Ausfahren von Klappen oder Vorflügeln an den Tragflügeln eines landenden Flugzeugs erhöht sich neben der wirksamen Fläche auch die effektive Wölbung, so dass eine viel geringere Fluggeschwindigkeit zur Erzeugung des nötigen Auftriebs ausreicht. Eine Darstellung des Auftriebsbeiwerts $c_A(c_W)$ als Funktion des Widerstandsbeiwerts c_W (statt des Anstellwinkels α) wird als **Profilpolare** bezeichnet.

Berechnung von Profilmströmungen: Potentialströmung

Zur Berechnung der ebenen **Potentialströmung** um Profile gibt es zwei im Prinzip analytisch durchführbare Methoden: A) konforme Abbildungen und B) Singularitätenverfahren, auf die hier nur kurz eingegangen werden soll. Während konforme Abbildungen auf ebene Strömungen beschränkt sind, lassen sich Singularitätenverfahren auch auf axialsymmetrische oder voll dreidimensionale Strömungen verallgemeinern. Mittels numerischer Methoden kann man, als dritte Möglichkeit C), die Potentialströmung mit guter Genauigkeit auch durch direktes numerisches Lösen der Laplace-Gleichung mit den entsprechenden Randbedingungen berechnen.

A) Methode der konformen Abbildungen

Eine **konforme Abbildung** bildet die komplexe z -Ebene ($z = x + iy$) in eine Bildebene, die komplexe ζ -Ebene ($\zeta = \xi + i\eta$), ab. Die Abbildung wird dabei durch eine (bis auf einzelne Punkte) *reguläre* Funktion $f(z)$ (siehe Anhang C.2) mit der Zusatzbedingung $df/dz \neq 0$ beschrieben. Eine solche Abbildung ist *winkeltreu* und *Drehsinn-erhaltend*. Die konforme Abbildung einer Potentialströmung mit dem komplexen Potential $F(z)$ in der z -Ebene ist in der ζ -Ebene wieder eine Potentialströmung, $G(\zeta) = F(z(\zeta))$, deren Zirkulation Γ und Quellstärke Q erhalten bleiben.

Kennt man nun beispielsweise eine konforme Abbildungsvorschrift $\zeta = f(z)$, welche einen Kreis in der z -Ebene in eine Profilkontur in der ζ -Ebene überführt, so lässt sich die Strömung um dieses Profil berechnen, indem man die Abbildungsvorschrift auch auf das Strömungsfeld der Zylinderumströmung anwendet.

Als wichtiges Beispiel sei hier die **Joukowski-Abbildung** genannt:

$$\zeta(z) = f_J(z) := z + \frac{a^2}{z}, \quad 0 < a \in \mathbb{R}.$$

Das Bild eines Kreises um den Nullpunkt in der z -Ebene ergibt nach dieser Abbildungsvorschrift eine Ellipse in der ζ -Ebene. (Der Punkt $z = 0$ wird auf den „unendlich entfernten Punkt“ $\zeta = \infty$ abgebildet). Das Bild des Kreis-Zylinders mit Radius $R = a$ ist die doppelt durchlaufene ebene Platte $-2R \leq \xi \leq 2R$, $\eta = 0$. Ausser in $z = 0$ ist die Joukowski-Abbildung in den Punkten $z = \pm a$ nicht konform, da dort $f'_J(z)$ verschwindet. Für grosse $|z|$ gilt $\zeta \approx z$, eine Parallelströmung im Unendlichen bleibt also nach Betrag und Richtung erhalten. Durch Abbildung eines aus dem Ursprung *verschobenen* Kreises erhält man ein gewölbtes Profil (Joukowski-Profil). Damit lässt sich die Potentialströmung um diese Klasse von Profilen vollständig analytisch berechnen, und man kann wichtige aerodynamische Grössen wie Druckverteilung, Auftrieb und Moment explizit angeben. Für eine ausführlichere Darstellung sei auf Kundu et al. [8] (Kap. 7.6, 14.4, 14.5, 14.6) verwiesen.

B) Singularitätenverfahren

Es wird eine Verteilung von differentiellen Singularitäten (Quellen, Senken, Dipole oder Wirbel) entlang von vorgegebenen Kurven (z.B. der Profilkontur oder vereinfacht der Profelsehne in 2D) mit zunächst unbekannter örtlicher Stärke vorgenommen. In jedem Punkt des (2D oder 3D) Strömungsfeldes werden alle differentiellen Geschwindigkeitsbeiträge aufintegriert. Dieser Strömung überlagert man eine parallele Anströmung und fordert, dass die Kontur des Profils, dessen Umströmung berechnet werden soll, eine Stromlinie ist. Dies führt auf lineare Integralgleichungen, welche dann diskretisiert und mit Hilfe eines Computers numerisch gelöst werden. (In einfachen Fällen gibt es auch analytische Lösungen.) Damit lassen sich auch Potentialströmungen in komplizierten Geometrien und, bei entsprechender Verallgemeinerung, auch dreidimensionale Strömungen berechnen (**Panel-Verfahren**, siehe Houghton & Carpenter [6] und Hinweise auf den Web-Seiten).

C) Numerische Lösung der Laplace-Gleichung

Die Laplace-Gleichung für das Potential Φ oder die Stromfunktion Ψ wird auf einem Punktegitter (x_i, y_i) numerisch diskretisiert, z.B. durch Approximation der 2. Ableitungen (Differentialquotienten) durch Differenzenverfahren (Differenzenquotienten). An den Rändern des Berechnungsgebiets werden die dem Strömungsproblem entsprechenden Randbedingungen vorgegeben. Das so entstandene lineare Gleichungssystem für die gesuchten Werte von Φ und Ψ auf dem Punktegitter wird direkt oder iterativ mit Hilfe eines Computerprogramms gelöst. Bei Verfeinerung des Punktegitters erhöht sich die Genauigkeit des Ergebnisses. Wie bereits erwähnt, bleibt die Zirkulation der Profilmströmung bei der Lösung der Laplace-Gleichung unbestimmt und wird erst durch die Auferlegung der Kutta-Bedingung des glatten Abflusses an der Hinterkante festgelegt.

Berechnung realer Profilmströmungen

Panel-Verfahren für die Potentialströmung können mit Verfahren zur Grenzschichtberechnung gekoppelt werden, um auch viskose Effekte näherungsweise zu berücksichtigen. Derartige Berechnungsverfahren sind sehr schnell und leisten gute Dienste für einen ersten Entwurf von neuen Strömungskonfigurationen. Für genauere Berechnungen **realer** Strömungen, insbesondere für eine realistische Vorhersage des Widerstands und von Strömungsablösungen, muss man jedoch auf viel aufwändigere numerische Berechnungsverfahren auf der Basis der Navier-Stokes-Gleichungen zurückgreifen (Stichwort: Numerische Fluidodynamik bzw. **Computational Fluid Dynamics, CFD**, ein wichtiges Teilgebiet der modernen Fluidodynamik, das sich immer noch stürmisch weiterentwickelt). Damit lassen sich auch dreidimensionale, kompressible, instationäre und turbulente Strömungen berechnen. Hierzu gibt es verschiedene kommerziell angebotene und neuerdings auch einige frei zugängliche Rechenprogramme, die ständig weiterentwickelt werden. Solche Rechenprogramme sind einerseits schon recht leistungsfähig für viele Standardaufgaben und gehören heute zum unverzichtbaren Werkzeug des Ingenieurs in der angewandten Forschung und der industriellen Praxis. Andererseits liefern sie aber bei anspruchsvolleren Problemen (z.B. Strömungen mit Ablösung, laminar-turbulentem Übergang, Turbulenz, Instationarität, starken

Kompressibilitätseffekten) oft noch sehr unbefriedigende Ergebnisse. Eine erste Einführung in CFD findet sich im Kap. 6 von Kundu et al. [8], eine umfassendere Darstellung gibt z.B. das Buch von Tannehill *et al.* [23].

9.6 Instationäre Potentialströmungen

Wir betrachten nun **instationäre** Strömungen, wie sie etwa bei der Beschleunigung eines Körpers in einem Fluid auftreten, z.B. beim Anfahren aus dem Ruhezustand oder in schwingenden oder rotierenden Systemen. Bei instationärer Bewegung muss offenbar ausser dem Körper auch ein Teil des umgebenden Fluids beschleunigt werden, dem somit kinetische Energie zugeführt wird. Die hierfür zu verrichtende Arbeit macht sich in einem Widerstand bemerkbar, welcher in stationärer Strömung nicht auftritt. Dieser zusätzliche Widerstand wird in der Technik z.B. zur Schwingungsdämpfung von Bauteilen ausgenutzt, die man dazu in eine Flüssigkeit eintaucht.

Eine aus der Ruhe beschleunigte **reale** Strömung lässt sich oft erstaunlich gut durch eine instationäre Potentialströmung annähern, denn reibungsbedingte Phänomene wie Grenzschichten, Wirbel und Ablösegebiete, die den Strömungsverlauf stark von der Potentialströmung abweichen lassen können, brauchen eine gewisse Zeit, um sich merklich auszubilden, insbesondere bei gut abgerundeten Körpern (scharfe Kanten führen dagegen zu starker Wirbelbildung). Bei starker Beschleunigung kann die Strömung oft näherungsweise als reibungsfrei behandelt werden, da die Trägheitskräfte weit über die Reibungskräfte dominieren. Instationäre (Potential-) Strömungen haben in jüngster Zeit erneutes Interesse gefunden, z.B. bei der Erklärung des Insektenflugs oder der Fortbewegung von Fischen, was man auch technisch nachzuahmen versucht (Mikro-Fluggeräte).

Wir betrachten also **instationäre Potentialströmungen** $\underline{u}(\underline{x}, t) = \nabla\Phi$, für die sich bemerkenswerte allgemeine Aussagen machen und in einigen besonderen Fällen sogar analytische Lösungen angeben lassen. Das Potential $\Phi(\underline{x}, t)$ hängt nun auch explizit von der Zeit ab, ist aber immer noch eine Lösung der - zeitunabhängigen - Laplace-Gleichung, die durch die momentane Randbedingung für die Geschwindigkeit \underline{u}_R auf dem Rand R des Strömungsgebiets bestimmt ist,

$$\Delta\Phi = 0 \quad , \quad (\underline{n} \cdot \nabla\Phi)|_R \stackrel{!}{=} \underline{n} \cdot \underline{u}_R(t) \quad .$$

Das Geschwindigkeitsfeld der instationären Potentialströmung ist also *quasistationär* in dem Sinne, dass es identisch ist mit demjenigen stationären Geschwindigkeitsfeld, welchem dieser Momentanwert als stationäre Randbedingung vorgegeben wurde. Die Vorgeschichte spielt keine Rolle, ganz anders als bei realen Strömungen. Mit anderen Worten: die *instationäre* Potentialströmung kann als eine *Abfolge von stationären Potentialströmungen* aufgefasst werden. Anders verhält es sich mit dem Druck $p(\underline{x}, t)$, der durch die in Abschnitt 9.1 angegebene instationäre Bernoulli-Gleichung

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t} + \frac{1}{2}(\nabla\Phi)^2 + \frac{p}{\varrho} = C(t)$$

Bernoulli, instationäre Potentialströmung

bestimmt ist und den explizit zeit- und ortsabhängigen Term $(\partial\Phi/\partial t)(\underline{x}, t)$ enthält (das Kräftepotential wurde hier weggelassen).

Wir betrachten im Folgenden die Potentialströmung um einen starren, endlichen Körper mit Dichte ϱ_K und Volumen V_K in einem unbegrenzten, weit entfernt vom Körper in Ruhe befindlichen Fluid der Dichte ϱ_F . Die Überlegungen gelten für den ebenen wie für den dreidimensionalen Fall. Wir beschränken uns auf eine **geradlinige Bewegung** mit der zeitlich veränderlichen Geschwindigkeit $U(t) > 0$, die ohne Einschränkung in die negative x -Richtung erfolgen soll (entsprechend einer positiven Anströmung im körperfesten Bezugssystem). Die momentane Position des Körpers sei durch die Position eines Referenzpunkts $\underline{x}_{ref}(t) = (x_{ref}(t), 0, 0)^T$ gekennzeichnet, wobei $\dot{x}_{ref} = -U(t)$.

Bei der instationären Bewegung des Körpers muss ausser der Körpermasse $m_K = V_K \cdot \varrho_K$ auch ein Teil der umgebenden Fluidmasse beschleunigt werden. Das macht sich in einem *Widerstand* bemerkbar, der bei stationärer Potentialströmung nicht auftrat. Aus Sicht des Fluids müssen sich, wenn der Körper beschleunigt wird, die Druckkräfte auf seiner Oberfläche momentan so einstellen, dass sie die Trägheit des umgebenden Fluids überwinden.

Das Besondere an der betrachteten Potentialströmung um einen geradlinig beschleunigten Körper ist, dass sich das Potential in der Form

$$\Phi(\underline{x}, t) = U(t) \cdot \varphi(\underline{x} - \underline{x}_{ref}(t))$$

darstellen lässt, wobei das stationäre Geschwindigkeitspotential φ nur von der Gestalt des Körpers und der Körperlage relativ zur Bewegungsrichtung (Anströmrichtung) abhängt. Es lässt sich zeigen, dass die zu beschleunigende Fluidmasse als die Masse m^* eines durch φ bestimmten Fluidvolumens charakterisiert werden kann [?, 14]. Diese zusätzliche Masse m^* wird als **virtuelle Masse** (added mass) bezeichnet und zur Körpermasse hinzuaddiert. Für die Körperbewegung ist demnach insgesamt die Summe aus Trägheits- und Widerstandskraft

$$F = -(m_K + m^*) \frac{dU}{dt}$$

zu überwinden. Die virtuelle Masse m^* wird oft mittels eines Zahlenfaktors f als ein Vielfaches der vom Körper verdrängten Fluidmasse angegeben,

$$m^* = f \cdot V_K \cdot \varrho_F \quad .$$

Sie lässt sich für einige einfache 2D und 3D Fälle analytisch berechnen (s. nachfolgende Beispiele) und muss ansonsten empirisch (experimentell oder numerisch) bestimmt werden. Die folgenden Angaben gelten nur für die jeweils angegebene Anströmrichtung.

2D Beispiele:

b ist die Länge des Körpers normal zur Strömungsebene.

- Für einen (normal zu seiner Achse bewegten) *Kreiszyylinder* mit Radius R ist $f = 1$, also die virtuelle Masse gerade gleich der vom Zylinder verdrängten Fluidmasse

$$m^* = V_K \cdot \varrho_F = \pi R^2 b \cdot \varrho_F \quad (\text{Kreiszyylinder}) \quad .$$

Man erhält dieses Ergebnis durch Betrachtung eines mit $U(t)$ bewegten Dipols (vgl. Übungen!).

- Für einen *elliptischen Zylinder* mit Halbachse a_n normal zur Anströmung und Länge b normal zur Strömungsebene gilt (unabhängig von der Länge der anderen Halbachse a_t !)

$$m^* = \pi a_n^2 b \cdot \varrho_F \quad (\text{Ellipse, Fig. 9.12 a}) \quad .$$

- Sonderfall davon (degenerierte Ellipse): für eine *ebene Platte* der Breite $2a$, die normal zu ihrer Ebene bewegt wird, ist

$$m^* = \pi a^2 b \cdot \varrho_F \quad (\text{Platte, Fig. 9.12 b}) \quad .$$

- *Quadratischer Zylinder* mit Seitenlänge a , seitenparallel angeströmt

$$m^* \approx 1.19a^2b \cdot \varrho_F \quad (\text{Quadrat, Fig. 9.12 c))} \quad .$$

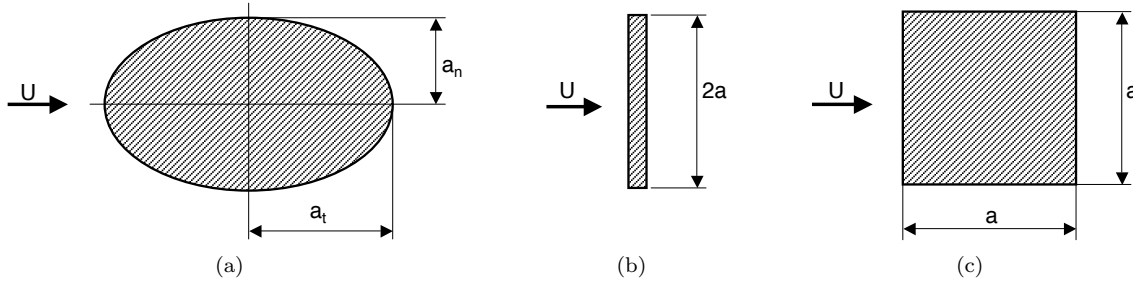


Abbildung 9.12: Instationäre ebene Potentialströmung um Zylinder verschiedener Querschnitte. (a) achsenparallel angeströmte Ellipse, (b) normal angeströmte Platte, (c) seitenparallel angeströmtes Quadrat.

3D Beispiele:

- Für eine Kugel mit Radius R erhält man $f = 1/2$, also

$$m^* = \frac{1}{2} V_K \cdot \varrho_F = \frac{2}{3} \pi R^3 \cdot \varrho_F \quad (\text{Kugel}) \quad .$$

- Für eine normal zu ihrer Ebene angeströmte Kreisscheibe mit Radius R ist

$$m^* = \frac{8}{3} R^3 \cdot \varrho_F \quad (\text{Kreisscheibe}) \quad .$$

Mit dem obigen Ergebnis lässt sich die Beschleunigung einer Kugel in einem ruhenden Fluid unter dem Einfluss von Gewicht und Auftrieb im Schwerfeld g herleiten als

$$\frac{dU}{dt} = \frac{\varrho_F - \varrho_K}{\varrho_F/2 + \varrho_K} g \quad (\text{Kugel im Schwerfeld})$$

[14]. Grenzfälle sind: a) eine Gasblase in einer Flüssigkeit, die wegen $\varrho_K \ll \varrho_F$ mit $dU/dt \approx 2g$ nach oben beschleunigt wird, und b) eine schwere Kugel in Luft, die nahezu mit $-g$ zu Boden fällt.

Bisher haben wir die instationäre Bewegung $U(t)$ eines Körpers im (in grosser Entfernung) ruhenden Fluid betrachtet. Alternativ kann man dieselbe Strömung auch im körperfesten Bezugssystem mit instationärer Anströmung $U_\infty(t) = U(t)$ beschreiben. Wir fragen etwa, welche Geschwindigkeit $U_K(t)$ ein frei bewegliches kugelförmiges Partikel bei instationärer Anströmung mit $U_\infty(t)$ erfährt, z.B. in einem Behälter mit hin- und herschwingendem Fluid. Man erhält [14]

$$U_K(t) = \frac{3\varrho_F}{\varrho_F + 2\varrho_K} U_\infty(t) \quad , \quad (\text{Kugel bei instationärer Anströmung})$$

das Partikel folgt also der reibungs- und drehungsfreien Fluidbewegung instantan mit einer der Anströmung proportionalen Geschwindigkeit. Ein schweres Partikel in einem leichten Fluid, $\varrho_K \gg \varrho_F$, bleibt damit praktisch in Ruhe, ein Partikel gleicher Dichte $\varrho_K = \varrho_F$ bewegt sich einleuchtenderweise mit U_∞ mit, während eine Gasblase in einer mit U_∞ schwingenden Flüssigkeit etwa mit $3U_\infty$ mit-schwingt.

Kapitel 10

Drehungsbehaftete Strömungen

In diesem Kapitel behandeln wir Eigenschaften drehungsbehafteter Strömungen, insbesondere die Dynamik des Wirbelstärkefeldes $\underline{\omega} = \text{rot } \underline{u}$, die für reale Strömungen von fundamentaler Bedeutung ist. Statt von drehungsbehafteten spricht man auch von wirbelbehafteten Strömungen oder kurz Wirbelströmungen.

Der Begriff des Wirbels ist ein umgangssprachlicher, intuitiver Begriff, der für den allgemeinen Fall einer dreidimensionalen, ggf. auch instationären Strömung schwierig zu präzisieren ist. Wir werden einige Beispiele von Wirbeln kennenlernen. Dagegen kann man über die Wirbelstärke $\underline{\omega}$ präzise und sehr weitreichende allgemeine Aussagen machen (Wirbeltransportgleichung, Wirbelsätze).

Literatur zu diesem Kapitel: Kundu et al. [8], Kap. 3 und 5; Lugt [10].

10.1 Wirbel und Drehung

Charakteristisch für einen **Wirbel** ist, dass ein räumlich ausgedehnter Bereich von Fluidteilchen eine drehende Bewegung um ein gemeinsames Zentrum ausführt (z.B. auf kreisförmigen, elliptischen oder spiralförmigen Bahnen). Wirbel in einer ebenen, stationären Strömung sind durch geschlossene Stromlinien gekennzeichnet. Abmessungen (Durchmesser) von Wirbeln reichen von Millimetern (Turbulenzwirbel in der Atmosphäre) über die Größenordnung 100 m (Tornados) bis zu 1000 km (Tiefdruckgebiete, Hurrikane) oder Lichtjahren (Galaxien).

Beispiele für analytisch beschreibbare Wirbel:

- **Starrkörperwirbel:** Man betrachtet das $2D$ Geschwindigkeitsfeld einer Starrkörperdrehung in der x - y -Ebene um den Nullpunkt mit Kreisfrequenz $\Omega = \frac{2\pi}{T}$, T = Umlaufzeit. In kartesischen bzw. Zylinderkoordinaten gilt

$$\underline{u}(\underline{x}) = \begin{pmatrix} -y\Omega \\ x\Omega \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \underline{u}_p(r, \theta, z) = \begin{pmatrix} 0 \\ \Omega r \\ 0 \end{pmatrix}_p.$$

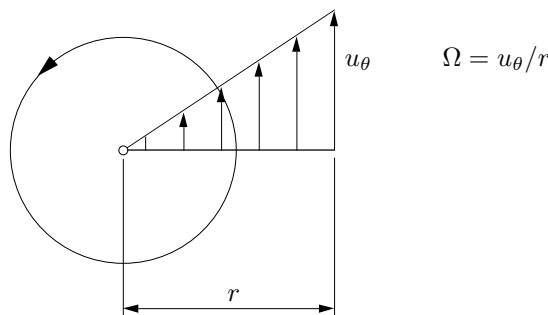


Abbildung 10.1: Starrkörperwirbel

Die Wirbelstärke beträgt dann

$$\underline{\omega} = \text{rot } \underline{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2\Omega \end{pmatrix}.$$

Die *lokale Rotation* $\underline{\omega}$ ist also im ganzen Feld konstant und gerade *doppelt so gross wie die Winkelgeschwindigkeit* Ω der Festkörperrotation. Umgekehrt gilt auch allgemein für jede Strömung: Die mittlere (d.h. azimuthal gemittelte) Winkelgeschwindigkeit eines Fluidteilchens beträgt $\underline{\Omega} = \frac{1}{2}\underline{\omega}$. Dies ergibt sich durch Betrachten der mittleren Umfangsgeschwindigkeit auf einem kleinen Kreis um den Drehpunkt und Anwenden des Stokesschen Satzes.

- **Potentialwirbel** (Linienwirbel): Der Potentialwirbel wurde bereits in 9.3 eingeführt. Das 2D Geschwindigkeitsfeld in kartesischen bzw. zylindrischen Koordinaten (siehe Abbildung 10.2) lautet

$$\underline{u}(\underline{x}) = c \begin{pmatrix} -y/r^2 \\ x/r^2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \underline{u}_p(r, \theta, z) = \begin{pmatrix} u_r \\ u_\theta \\ u_z \end{pmatrix}_p = \begin{pmatrix} 0 \\ c/r \\ 0 \end{pmatrix}_p, \quad r > 0$$

mit $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. Die Stromlinien sind wieder Kreise um den Nullpunkt. Die Zirkulation bezüglich jeder den Ursprung umschliessenden Kurve beträgt $\Gamma = 2\pi c$.

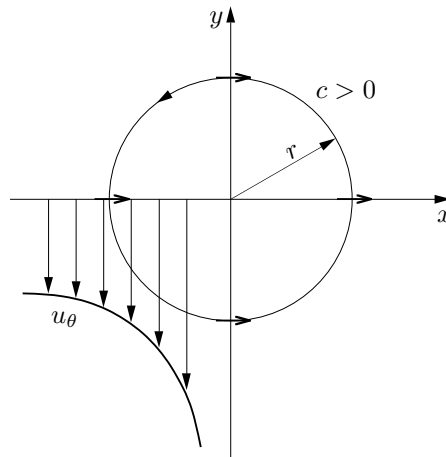


Abbildung 10.2: Potentialwirbel. Ein Fluidpartikel behält beim Umlauf seine Orientierung bei (\rightarrow).

Im Ursprung $r = 0$ liegt eine Singularität vor, wo die Umfangsgeschwindigkeit und die Wirbelstärke unendlich werden. Obwohl das Geschwindigkeitsfeld einen Wirbel darstellt, ist die Wirbelstärke $\underline{\omega} \equiv 0$ für $r > 0$, wie stets bei einer Potentialströmung. Ein Fluidpartikel im Potentialwirbel dreht sich also nicht, sondern wird nur translatorisch entlang seiner Kreisbahn bewegt und behält dabei seine Orientierung bei (Abb. 10.2).

- **Rankine-Wirbel:** Man kann einen realen ebenen, stationären, axialsymmetrischen Wirbel näherungsweise darstellen durch

- eine Festkörperrotation im Kern, $r \leq r_0$
- einen stetig anschliessenden Potentialwirbel im Aussenbereich, $r > r_0$.

mit einem geeignet gewählten Radius r_0 . Dieser Wirbel wird als Rankine-Wirbel bezeichnet (Abb. 10.3). Er ist eine exakte Lösung der Navier-Stokes-Gleichung, da dies bereits für den Starrkörperwirbel und den Potentialwirbel zutrifft: letztere sind Spezialfälle der allgemeinen Lösung $u_r = 0$,

$u_\theta = Ar + B/r$ für die reibungsbehaftete Strömung im Ringspalt zwischen zwei konzentrischen rotierenden Zylindern (Taylor-Couette-Strömung).

- In einem **realen Wirbel** ist zusätzlich die Geschwindigkeitsverteilung $u_\theta(r)$ geglättet und die Wirbelstärke verläuft bei r_0 im Gegensatz zum Rankine-Modell stetig (Abb. 10.3). Auch für den realen Wirbel gibt es eine exakte (instationäre) Navier-Stokes-Lösung, den **Hamel-Oseen-Wirbel** (siehe Lugt [10], Schade-Kunz [18]). Er beschreibt das zeitliche Zerfließen eines Wirbels durch Diffusion aufgrund der Zähigkeit, ausgehend von einem Potentialwirbel bei $t = 0$.

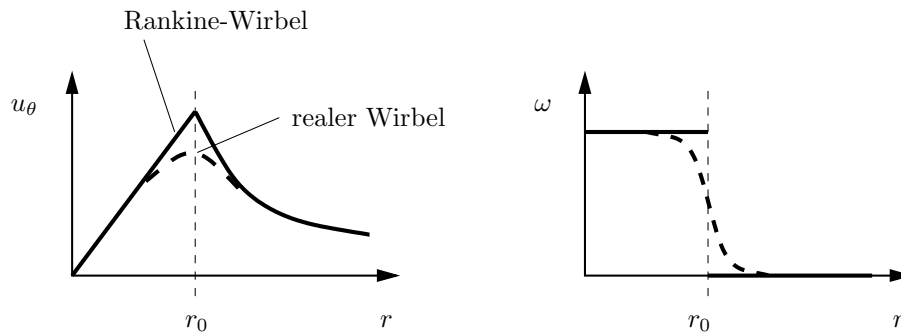


Abbildung 10.3: Geschwindigkeit u_θ und Wirbelstärke ω — im Rankine-Wirbel und - - im realen Wirbel

- Weitere exakte Lösungen sind der **Burgers-Wirbel** (Lugt [10]) und der **Hillsche Kugelwirbel** (Panton [14]), der die Strömung in einem kugelförmigen fallenden Tropfen in Luft oder in einer aufsteigenden Gasblase beschreibt.

Eigenschaften des Wirbelstärkefeldes

Eigenschaften des Wirbelstärkefeldes $\underline{\omega} = \text{rot } \underline{u}$ sind:

- $\underline{\omega}$ ist stets *quellenfrei*, also $\text{div } \underline{\omega} \equiv 0$ (auch in kompressibler Strömung).
- $\underline{\omega}$ ist *invariant* bezüglich einer Galilei-Transformation, d.h. es ändert sich nicht bei Übergang in ein gleichförmig geradlinig bewegtes Bezugssystem (anders als das Geschwindigkeitsfeld: Stromlinien in einem mitbewegten Bezugssystem sehen i.a. völlig anders aus als im ruhenden System).
- Es gibt *keinen Wirbel ohne Rotation* (mit dem Potentialwirbel als Grenzfall, bei dem die Rotation in der Singularität bei $r = 0$ konzentriert ist und sonst überall verschwindet, s. oben).
- Die Umkehrung davon gilt *nicht*: Es gibt viele Strömungen mit $\text{rot } \underline{u} \neq 0$, die keine Wirbel enthalten; z.B. alle 1D Scherströmungen (laminare Grenzschicht, Kanal- oder Rohrströmung, Freistrah, Mischungsschicht usw.), siehe Abbildung 10.4.

Analoge Begriffsbildungen wie für das Geschwindigkeitsfeld $\underline{u}(\underline{x})$ werden auch für das Wirbelstärkefeld $\underline{\omega}(\underline{x})$ eingeführt. Sie werden nachfolgend definiert und sind in Tabelle 10.1 zusammengefasst.

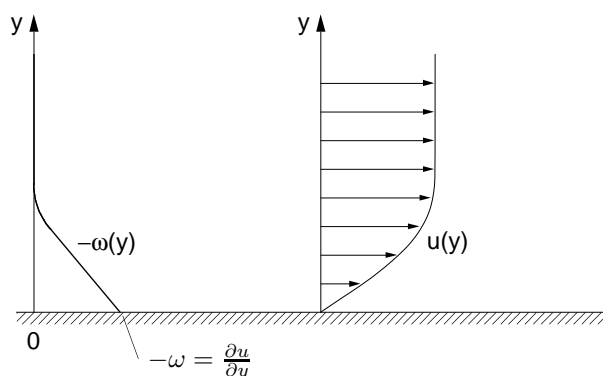


Abbildung 10.4: Parallele Grenzschicht: drehungsbehaftete Strömung ohne Wirbel

Wirbellinie, Wirbelröhre, Wirbelfaden

Integralkurven des momentanen Wirbelstärkefeldes $\underline{\omega}$ werden als **Wirbellinien** bezeichnet. Sie sind das Analogon zu den Stromlinien als Integralkurven des Geschwindigkeitsfeldes. Eine durch den Punkt \underline{x}_0 gehende Wirbellinie $\underline{x}(s)$ ist also definiert durch

$$\underline{x}(s=0) = \underline{x}_0$$

$$\frac{d\underline{x}}{ds} = \underline{\omega}(\underline{x}(s), t), \quad s = \text{Kurvenparameter, } t \text{ fest.}$$

Da die Wirbellinien in jedem Punkt parallel zum Wirbelstärkevektor $\underline{\omega}$ sind, ergibt sich folgende alternative, parameterfreie Definition als ein System von Differentialgleichungen:

$$\underline{\omega} \times d\underline{x} = 0 \quad \text{bzw. komponentenweise:} \quad \frac{dx}{\omega_x} = \frac{dy}{\omega_y} = \frac{dz}{\omega_z},$$

analog zu den Differentialgleichungen für Stromlinien

$$\underline{u} \times d\underline{x} = 0 \quad \text{bzw. komponentenweise:} \quad \frac{dx}{u} = \frac{dy}{v} = \frac{dz}{w}.$$

Wirbellinien, deren Startpunkte durch ein Kurvenstück gegeben sind, bilden eine **Wirbelfläche**. Wirbellinien durch eine geschlossene Kurve C bilden den Mantel einer **Wirbelröhre**. Ändert sich die Wirbelstärke über den Querschnitt der Wirbelröhre hinweg nicht, wie z.B. im Grenzfall eines sehr kleinen Durchmessers der Wirbelröhre, spricht man von einem **Wirbelfaden**.

Wirbelstärkefeld $\underline{\omega}(\underline{x})$	Geschwindigkeitsfeld $\underline{u}(\underline{x})$
$\text{div } \underline{\omega} \equiv 0$ (gilt immer!)	$\text{div } \underline{u} = 0$ (falls inkompressibel)
Galilei-invariant	nicht Galilei-invariant
Wirbellinien = Integralkurven von $\underline{\omega}$	Stromlinien = Integralkurven von \underline{u}
Wirbelröhre: Mantel besteht aus Wirbellinien	Stromröhre: Mantel besteht aus Stromlinien
Wirbelfaden (parallel zu Wirbellinien)	Stromfaden (parallel zu Stromlinien)
Zirkulation $\Gamma = \int_S \underline{\omega} \cdot \underline{n} \, dS = \text{Wirbelfluss durch } S$	Volumenstrom $\dot{V} = \int_S \underline{u} \cdot \underline{n} \, dS$ durch S

Tabelle 10.1: Analogien und Unterschiede zwischen Wirbelstärkefeld und Geschwindigkeitsfeld

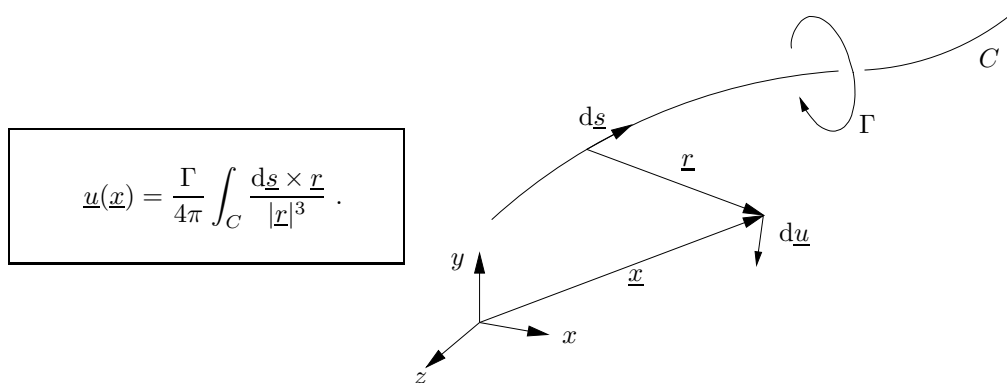
Gesetz von Biot-Savart

Bisher haben wir das Wirbelstärkefeld $\underline{\omega}$ eines gegebenen Geschwindigkeitsfeldes \underline{u} betrachtet, welches man einfach durch Rotationsbildung erhält, $\underline{\omega} = \text{rot } \underline{u}$. Jetzt fragen wir, welches Geschwindigkeitsfeld zu einem gegebenen Wirbelstärkefeld gehört. Zur Vereinfachung betrachten wir den freien Raum ohne Begrenzungen durch Wände.

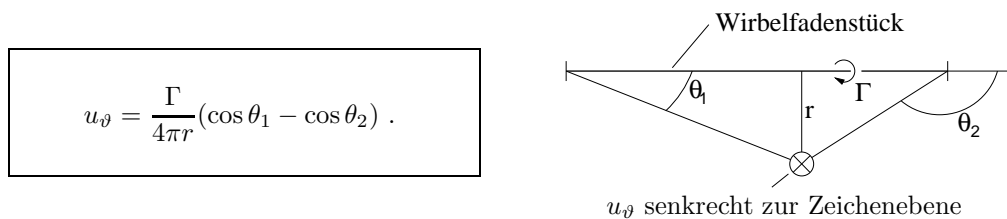
Analog zum Magnetfeld eines stromdurchflossenen Leiters in der Elektrodynamik ist die azimuthale Geschwindigkeit u_θ um einen *unendlich langen geraden Wirbelfaden* (Potentialwirbel) mit Zirkulation Γ im Abstand r gegeben durch

$$u_\theta = \frac{\Gamma}{2\pi r}.$$

Allgemeiner „induziert“ ein der Raumkurve C folgendes Wirbelfadenstück mit konstanter Zirkulation Γ das Geschwindigkeitsfeld



Für den Beitrag eines *endlich langen, geraden Wirbelfadenstücks* ergibt sich damit in einem durch den Abstand r und die Winkel θ_1 (Innenwinkel des Dreiecks) und θ_2 (Aussenwinkel) bestimmten Punkt die induzierte azimuthale Geschwindigkeit



Diese Beziehung wird bei Anwendungen in der Aerodynamik häufig benutzt. (Alternativ könnte man auch den Aussenwinkel "links vom Dreieck" und den Innenwinkel "rechts im Dreieck" wählen, was nur das Vorzeichen von u_θ ändert.) Beim Grenzübergang zu einem unendlich langen geraden Wirbelfaden ($\theta_1 \rightarrow 0$, $\theta_2 \rightarrow \pi$) ergibt sich daraus wieder die Geschwindigkeit um einen Potentialwirbel. Der Fall eines *halbunendlichen Wirbelfadens* ist ebenfalls erfasst.

Ist die Wirbelstärke $\underline{\omega}(\underline{x})$ im Raum verteilt, so erhält man das von $\underline{\omega}$ induzierte Geschwindigkeitsfeld durch ein Volumenintegral, das die Beiträge aller Wirbelelemente zur Geschwindigkeit $\underline{u}(\underline{x})$ im Punkt \underline{x} aufsummiert:

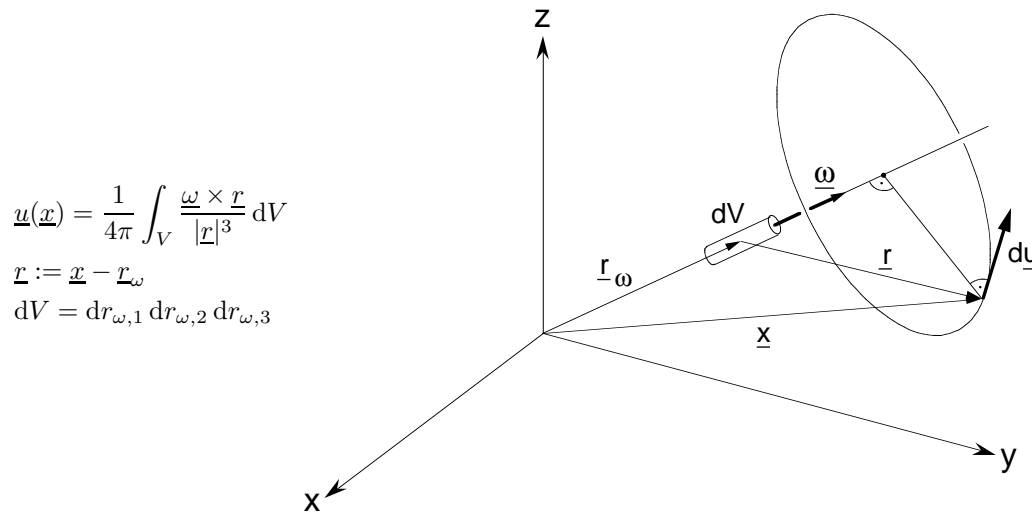


Abbildung 10.5: Biot-Savart-Gesetz im 3D-Raum für ein kontinuierlich verteiltes Wirbelstärkefeld

10.2 Wirbeltransportgleichung

Bildet man die Rotation der Impulsgleichung, so erhält man aus der Gleichung für \underline{u} die „Wirbeltransportgleichung“ für den Wirbelstärkevektor $\underline{\omega}$. Sie beschreibt die dynamische Entwicklung des Wirbelstärkefeldes und liefert Aussagen über dessen Wechselwirkung mit dem Geschwindigkeitsfeld.

Wirbeltransportgleichung für inkompressible Strömungen

Annahmen: - inkompressible Strömung, $\text{div } \underline{u} = 0$, $\rho = \text{const}$
 - drehungsfreies (konservatives) äusseres Kraftfeld, $\underline{f} = -\nabla U$

Damit erhält man durch die Anwendung des rot-Operators auf die entsprechende Impulsgleichung die **Wirbeltransportgleichung**

$$\underbrace{\frac{\partial \underline{\omega}}{\partial t} + (\underline{u} \cdot \nabla) \underline{\omega}}_{\frac{D\underline{\omega}}{Dt}} = \underbrace{(\underline{\omega} \cdot \nabla) \underline{u}}_{\text{Wirbelstreckung } \underline{W}} + \underbrace{\nu \Delta \underline{\omega}}_{\text{Diffusion}}$$

inkompressibel, $\rho = \text{const.}$

Sie enthält nicht mehr den Druck, jedoch zwei nichtlineare Terme: den Advektionsterm $(\underline{u} \cdot \nabla) \underline{\omega}$ und den **Wirbelstreckungsterm** $\underline{W} := (\underline{\omega} \cdot \nabla) \underline{u}$. Die Bedeutung des letzteren versteht man durch folgende Überlegungen. Wir zerlegen den Geschwindigkeitsvektor \underline{u} lokal am Punkt \underline{x} in eine zur Wirbelstärke $\underline{\omega}(\underline{x})$ parallele und eine dazu senkrechte Komponente, $\underline{u} = \underline{u}_{\parallel} + \underline{u}_{\perp}$, Abb. 10.6a. Damit kann \underline{W} dargestellt werden als

$$\underline{W} = |\underline{\omega}| (\underline{e}_{\underline{\omega}} \cdot \nabla) \underline{u} = |\underline{\omega}| \cdot \frac{\partial \underline{u}}{\partial s} = |\underline{\omega}| \frac{\partial \underline{u}_{\parallel}}{\partial s} + |\underline{\omega}| \frac{\partial \underline{u}_{\perp}}{\partial s},$$

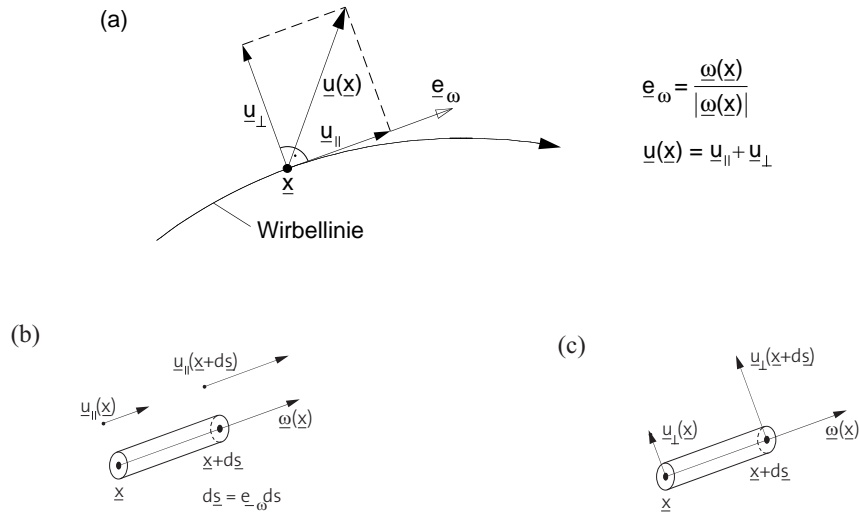


Abbildung 10.6: Interpretation des Wirbelstreckungsterms $\underline{W} = (\underline{\omega} \cdot \nabla) \underline{u}$. (a) Lokale Zerlegung $\underline{u} = \underline{u}_{\parallel} + \underline{u}_{\perp}$, (b) Streckung oder Stauchung einer Wirbellinie (vortex stretching), (c) Kippen einer Wirbellinie (vortex tilting)

wobei $s \cdot \underline{e}_{\omega}$ eine lokale Koordinate in Richtung von $\underline{\omega}$ bezeichnet. Es bewirkt (s. Abb. 10.6b, c)

$$\begin{aligned} \frac{\partial \underline{u}_{\parallel}}{\partial s} > 0 & : \quad \text{eine \textit{Streckung} (im wörtlichen Sinn) des lokalen Wirbelelements, Erhöhung von } \underline{\omega} \\ \frac{\partial \underline{u}_{\parallel}}{\partial s} < 0 & : \quad \text{eine \textit{Stauchung} des lokalen Wirbelelements, Verminderung von } \underline{\omega} \\ \frac{\partial \underline{u}_{\perp}}{\partial s} \neq 0 & : \quad \text{ein \textit{Kippen} des Wirbelelements, Veränderung der Richtung von } \underline{\omega} . \end{aligned}$$

Der Wirbelstreckungsterm \underline{W} (wie er summarisch bezeichnet wird) ist von zentraler Bedeutung für die Dynamik des Wirbelstärkefeldes $\underline{\omega}$, insbesondere in turbulenten Strömungen. Wie der konvektive Term $(\underline{u} \cdot \nabla) \underline{\omega}$ ist er nichtlinear. Gemäss der Wirbeltransportgleichung ändert sich die Drehung eines Fluidelements nur durch die beiden Prozesse Wirbelstreckung und Wirbeldiffusion.

Im Fall einer **ebenen** Strömung in der (x, y) -Ebene besitzt $\underline{\omega}$ nur noch eine Komponente $\omega = \omega_z(x, y)$ in z -Richtung. Damit verschwindet der Wirbelstreckungsterm \underline{W} identisch und die Transportgleichung vereinfacht sich zur **2D-Wirbeltransportgleichung**, einer skalaren Gleichung analog der Wärme-transportgleichung:

$$\boxed{\frac{D\omega}{Dt} = \nu \Delta \omega} \quad \text{2D, reibungsbehaftet}$$

oder ausgeschrieben

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + u \frac{\partial \omega}{\partial x} + v \frac{\partial \omega}{\partial y} = \nu \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right) .$$

Damit lässt sich die Wirbeltransportgleichung anschaulich interpretieren: Die linke Seite stellt die zeitliche Änderung der Wirbelstärke eines mitbewegten Fluidteilchens dar, die sich also in ebener Strömung nur durch viskose Diffusion verändern kann. Erzeugt wird sie an den Wänden umströmter Körper (Grenzschicht).

In einer reibungsfreien, 2D oder 3D Strömung gilt also unter den oben gemachten Annahmen: ist die Strömung zu irgendeinem Zeitpunkt drehungsfrei, so bleibt sie das für alle Zeiten! Eine (reibungsfreie) Potentialströmung bleibt also stets eine Potentialströmung, wenn man sie sich mit nur konservativen

Kräften zeitlich entwickeln lässt.

In einem mit der Winkelgeschwindigkeit $\underline{\Omega}$ **rotierenden Bezugssystem** gilt die Wirbeltransportgleichung mit dem verallgemeinerten Wirbelstreckungsterm

$$\underline{W} := (\underline{\omega} + 2\underline{\Omega}) \cdot \nabla \underline{u}.$$

Darin wird $2\underline{\Omega}$ als “planetare Wirbelstärke” und $\underline{\omega} + 2\underline{\Omega}$ als “absolute Wirbelstärke” bezeichnet.

Barotrope und barokline Strömung

Für die Diskussion der Wirbeltransportgleichung für Strömungen mit veränderlicher Dichte ist die Unterscheidung zwischen barotroper und barokliner Strömung von Bedeutung. In einer **barotropen** Strömung ist die Dichte ϱ lediglich vom Druck p (und nicht auch noch von der Temperatur oder anderen Größen) abhängig: $\varrho = \varrho(p)$. Die Flächen konstanter Dichte (Isochoren) verlaufen damit stets parallel zu den Isobaren. Folgende Aussagen sind gleichbedeutend:

Die Strömung ist barotrop

$$\begin{aligned} \longleftrightarrow \quad & \varrho = \varrho(p) \\ \longleftrightarrow \quad & \frac{1}{\varrho} \nabla p \text{ ist rotationsfrei, } \operatorname{rot} \left(\frac{1}{\varrho} \nabla p \right) \equiv 0 \quad (\text{stets ist } \operatorname{rot} \left(\frac{1}{\varrho} \nabla p \right) = -\frac{1}{\varrho^2} \nabla \varrho \times \nabla p) \\ \longleftrightarrow \quad & \nabla p \text{ ist parallel zu } \nabla \varrho, \quad \nabla \varrho \times \nabla p = 0 \\ \longleftrightarrow \quad & \frac{1}{\varrho} \nabla p \text{ ist Gradient einer „Druckfunktion“ } P \text{ mit } \nabla P = \frac{1}{\varrho} \nabla p. \end{aligned}$$

Ist die Strömung barotrop, so lässt sich die Druckfunktion als

$$P(\underline{x}) = \int_{p_0}^{p(\underline{x})} \frac{dp}{\varrho(p)}$$

wählen (vgl. kompressible Bernoulli-Gleichung), da nach den Differentiationsregeln für ein Integral

$$\nabla \left(\int_{p_0}^{p(\underline{x})} \frac{dp}{\varrho(p)} \right) = \frac{1}{\varrho} \nabla p$$

gilt (Kettenregel).

Beispiele barotroper Strömungen sind inkompressible (genauer: isochore) Strömungen ($\varrho = \text{const}$), sowie isotherme ($T = \text{const}$) oder isentrope ($p/\varrho^\gamma = \text{const}$) Strömungen eines idealen Gases. Es gilt sogar allgemein für isentrope Strömungen

$$dh = \frac{1}{\varrho} dp,$$

also ist die Druckfunktion gegeben durch die Enthalpie

$$h = h_0 + \int_{p_0}^p \frac{dp}{\varrho}.$$

Ist die Strömung nicht barotrop, so bezeichnet man sie als **baroklin**. Die Isochoren $\varrho = \text{const}$ verlaufen dann nicht mehr parallel zu den Isobaren $p = \text{const}$. Der Schwerpunkt eines Volumenelementes ist damit verschieden vom Druckangriffspunkt (bestimmt durch die Isobaren), so dass ein „**baroklines Drehmoment**“ entsteht, welches auf das Volumenelement wirkt und es in Drehung versetzen kann (vgl. nachfolgende Wirbeltransportgleichung für Strömungen mit veränderlicher Dichte).

Wirbeltransportgleichung für Strömungen mit veränderlicher Dichte

Annahmen:

- $\varrho = \varrho(\underline{x}, t)$ ist i.a. nicht konstant (z.B. kompressible Strömungen oder inkompressible Strömungen mit Temperaturgradienten)
- die Strömung ist reibungsfrei.

Dann erhält man durch Rotationsbildung der Euler-Gleichung die folgende Transportgleichung für die verallgemeinerte Wirbelstärke $\underline{\omega}/\varrho$ (s. Übungen):

$$\frac{D}{Dt} \left(\frac{\underline{\omega}}{\varrho} \right) = \underbrace{\left(\frac{\underline{\omega}}{\varrho} \cdot \nabla \right) \underline{u}}_{\text{Wirbelstreckungsterm } \underline{W}} + \underbrace{\frac{1}{\varrho^3} (\nabla \varrho \times \nabla p)}_{\text{baroklines Drehmoment } \underline{D}} .$$

variable Dichte $\varrho(\underline{x})$
reibungsfrei

Das gegenüber dem Fall mit konstanter Dichte hinzukommende barokline Drehmoment \underline{D} verschwindet für barotrope Strömungen, wie oben erklärt. In nicht barotropen, d.h. baroklinen Strömungen erzeugt es zusätzliche Drehung des Fluidelements um eine Achse normal zu $\nabla \varrho$ und ∇p .

10.3 Wirbelsätze

Helmholtzscher Wirbelsatz

Wir betrachten eine Wirbelröhre in einem beliebigen Geschwindigkeitsfeld $\underline{u} = \underline{u}(\underline{x}, t)$ zu einem festen Zeitpunkt t . Aus der Divergenzfreiheit des Wirbelstärkefeldes $\underline{\omega} = \text{rot } \underline{u}$ lässt sich leicht der **Helmholtzsche Wirbelsatz** (1858) ableiten. Er wird auch als „Kontinuitätsgleichung der Wirbeltheorie“ bezeichnet und ist eine *kinematische* Aussage über die Zirkulation um eine Wirbelröhre zu einem festen Zeitpunkt:

Die Zirkulation verschiedener Querschnitte einer Wirbelröhre ist gleich gross.

Mit anderen Worten: Die Zirkulation ändert sich nicht längs einer Wirbelröhre. Man kann demnach von der Zirkulation der Wirbelröhre sprechen.

Eigenschaften von Wirbelröhren und Folgerungen:

- Das Linienintegral von \underline{u} über eine geschlossene Kurve, die auf dem Mantel einer Wirbelröhre liegt, diese aber nicht umschliesst (d.h. sich auf dem Mantel stetig auf einen Punkt zusammenziehen liesse), ergibt Zirkulation $\Gamma = 0$, da auf dem Mantel $\underline{\omega} \cdot \underline{n} \equiv 0$ gilt (kein Wirbelfluss durch den Mantel).
- *Wirbelröhren oder Wirbelfäden können nicht mitten im Strömungsfeld enden.* Sie liegen also notwendigerweise als in sich geschlossene Ringe vor oder enden an Berandungen des Strömungsfeldes (an Wänden, freien Oberflächen, ggf. im Unendlichen).
- Analogie zum Kontinuitätssatz für eine inkompressible Strömung: wie der Volumenstrom längs einer Stromröhre, ist der *Wirbelfluss* Γ *längs einer Wirbelröhre konstant*. Verengt sich also der Querschnitt A entlang einer Wirbelröhre, so muss die (mittlere) Wirbelstärke $\overline{\omega}$ im Inneren ansteigen, erweitert er sich, muss sie abnehmen:

$$\overline{\omega}_1 A_1 = \overline{\omega}_2 A_2 .$$

Kelvinscher Wirbelsatz

Der Kelvinsche Wirbelsatz ist eine *dynamische* Aussage über die Entwicklung der Zirkulation in der Zeit. Wir gehen aus von einem Geschwindigkeitsfeld $\underline{u} = \underline{u}(\underline{x}, t)$ und betrachten die Zirkulation

$$\Gamma_m(t) := \oint_{C_m(t)} \underline{u} \cdot d\underline{x}$$

bezüglich einer mit dem Fluid mitbewegten, geschlossenen, **materiellen Kurve** $C_m(t)$ (im folgenden vereinfachend als „Zirkulation der Kurve“ bezeichnet). Eine materielle Kurve $C_m(t)$ (bzw. ein materielles Volumen $V_m(t)$) wird für alle Zeiten aus denselben Fluidteilchen gebildet. Sie wird also mit der Strömung mitgetragen, jeder Punkt der Kurve (bzw. des Volumens) folgt einer Bahnkurve. Die Kurve C_m umschliesse die Fläche S_m . Für die zeitliche Änderung der Zirkulation erhält man das Ergebnis

$$\frac{d\Gamma_m(t)}{dt} = \oint_{C_m} \frac{D\underline{u}}{Dt} \cdot d\underline{x} = \int_{S_m} \left(\nabla \times \frac{D\underline{u}}{Dt} \right) \cdot \underline{n} dS,$$

das ganz allgemein (für inkompressible oder kompressible Strömung) gültig ist: Die zeitliche Änderung der Zirkulation ist gleich dem Flächenintegral über die Rotation der materiellen Beschleunigung $\frac{D\underline{u}}{Dt}$. Setzt man dafür die rechte Seite der Euler-Gleichung

$$\frac{D\underline{u}}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \underline{f}$$

ein, so erkennt man unmittelbar: In einer reibungsfreien, barotropen Strömung ($\text{rot}(\frac{1}{\rho} \nabla p) = 0$) mit konservativen Kräften ($\underline{f} = -\nabla U$) gilt:

$$\frac{d\Gamma_m(t)}{dt} = 0.$$

Dies ist der **Kelvinsche Wirbelsatz** (1868):

In einer reibungsfreien, barotropen Strömung mit konservativen äusseren Kräften ist die Zirkulation $\Gamma_m(t)$ einer geschlossenen materiellen Kurve $C_m(t)$ zeitlich konstant.

Folgerungen (die ersten beiden werden manchmal ebenfalls nach Helmholtz benannt):

- Die Zirkulation einer Wirbelröhre oder eines Wirbelfadens bleibt *räumlich und zeitlich* konstant.
- Fluidelemente, die zu einem Zeitpunkt eine Wirbellinie gebildet haben, tun dies für alle Zeiten. Man sagt: „Wirbellinien verhalten sich wie materielle Linien“, sie werden mit der lokalen Strömungsgeschwindigkeit konvektiert. Schlagwortartig: „Wirbellinien haften an der Materie“.
- Wird ein reibungsfreies Fluid aus der Ruhe in Bewegung versetzt und wirken dabei nur konservative (äussere und innere) Kräfte, so bleibt die entstandene Strömung für alle Zeiten drehungsfrei!

Der Kelvinsche Wirbelsatz hat also sehr weitreichende Konsequenzen.

Sind Voraussetzungen des Satzes verletzt, kann die Wirbelstärke und damit die Zirkulation erhöht bzw. vermindert werden: durch nicht konservative äussere Kräfte (Beispiel: Coriolis-Kräfte), nicht-barotrope (d.h. barokline) Druck-Dichte-Beziehungen (z.B. durch lokale Erwärmung, die einen Temperaturgradienten und damit ein baroklines Drehmoment erzeugt), und schliesslich durch reibungsbedingte Schubspannungen (z.B. Wirbelstärkebildung an festen Wänden, viskose Wirbelstärkediffusion). Diese Effekte lassen sich natürlich auch aus einer entsprechend verallgemeinerten Form der Wirbeltransportgleichung ablesen.

10.4 Dreidimensionale Strömung am Tragflügel

Die inzwischen in der Vorlesung erarbeiteten Hilfsmittel haben wichtige Anwendungen in der Aerodynamik. Von besonderer Bedeutung ist die im frühen 20. Jahrhundert von Prandtl und Lancaster entwickelte Tragflügeltheorie. Wir wollen uns hier kurz befassen mit der dreidimensionalen Strömung am Tragflügel eines Flugzeugs. Die Theorie hat natürlich zahllose weitergehende Anwendungen wie Schaufeln von Pumpen oder Turbinen, Propeller, Schiffsruder etc. Literatur: Kundu et al. [8], Kap. 14 Aerodynamics; Houghton & Carpenter [6].

Die in 9.5 behandelte ebene Profilmströmung in der $x-y$ -Ebene beschreibt die Situation für einen in hypothetischen, in Spannweitenrichtung z beiderseits unendlich ausgedehnten Flügel. An einem realen Tragflügel endlicher Spannweite b ist nur in der Mitte (Symmetrieebene) $z = 0$ eine näherungsweise ebene Strömung zu erwarten, Fig. 10.7. Die Flügelenden werden aufgrund des Druckunterschieds zwischen Flügelunterseite („Druckseite“, relativer Überdruck) und Oberseite („Saugseite“, relativer Unterdruck) umströmt und es entsteht eine dreidimensionale Strömung. Die Stromlinien auf der Oberseite werden zur Flügelmitte $z = 0$ hin, diejenigen auf der Unterseite zu den Flügelspitzen $z = \pm b/2$ hin abgelenkt. Es entsteht hinter dem Flügel eine Wirbelschicht in Ebenen $x = \text{const.}$ Die hinter dem Flügel zusammentreffenden Stromfäden rollen sich stromab zu zwei kräftigen, gegensinnig rotierenden Wirbeln (Nachlaufwirbeln) auf.

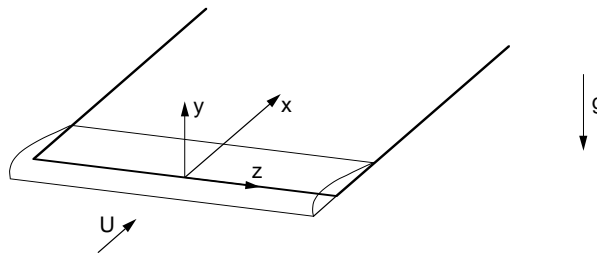


Abbildung 10.7: Umströmung eines Tragflügels

Modellierung

Das einfachste Modell für die dreidimensionale Strömung am Tragflügel liefert ein Hufeisenwirbel in paralleler Anströmung, Fig. 10.8 (vgl. Übungen). An der Position des Flügels befindet sich ein endliches Wirbelfadenstück der Länge b , der sogenannte „gebundene Wirbel“. Er kann nach dem Helmholtzschen Wirbelsatz nicht einfach enden, vielmehr gehen von seinen beiden Enden in $z = \pm b/2$ rechtwinklig halbumendliche gerade Wirbelfäden nach hinten ab, die „freien Wirbel“ oder „Randwirbel“, die die oben genannten Randwirbel der realen Strömung modellieren. Die Zirkulation Γ ist nach Helmholtz entlang des gesamten Wirbelsystems konstant. Sie liegt beim zweidimensionalen Problem der Berechnung des Auftriebs nach Kutta-Joukowski zugrunde.

Ein verfeinertes, realistischeres Modell der Flügelumströmung besteht aus einem System von differentiellen, bezüglich der Flügelmitte $z = 0$ symmetrisch angeordneten Hufeisenwirbeln der Stärke $d\Gamma$, deren Mittelstücke der variablen Länge l , $0 < l < b$, sich zu einem gebundenen Wirbel im Flügel überlagern. Die Zirkulation um den Flügel ist nun von z abhängig, $\Gamma = \Gamma(z)$, und fällt zu den Flügelspitzen hin auf null ab.

Abwind und induzierter Widerstand

Im Bereich zwischen den Randwirbeln und dem Flügel induziert das Wirbelsystem einen „Abwind“ $v < 0$, der die effektive Anströmung des Flügels verändert und bei der Berechnung der wirkenden Kräfte berücksichtigt werden muss: „der Flügel fliegt in seinem eigenen Abwind“. Die Situation in einem Profilschnitt $z = \text{const}$ ist in Fig. 10.9 dargestellt. Die ungestörte Anströmung in x -Richtung

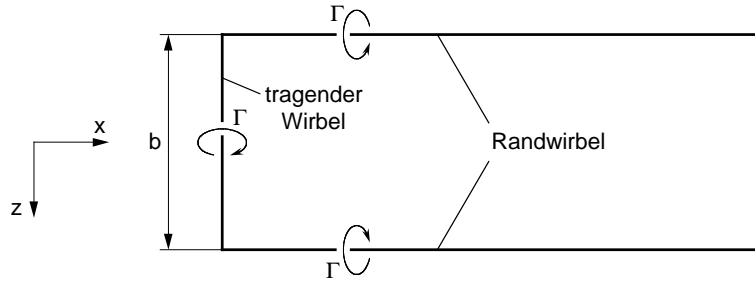


Abbildung 10.8: Hufeisenwirbelmodell für die Strömung am Tragflügel endlicher Spannweite.

(d.h. entgegen der Flugrichtung) und der Abwind überlagern sich zur effektiven Strömung \underline{u}_{eff} (eine mögliche z -Komponente bleibt hier ausser Betracht).

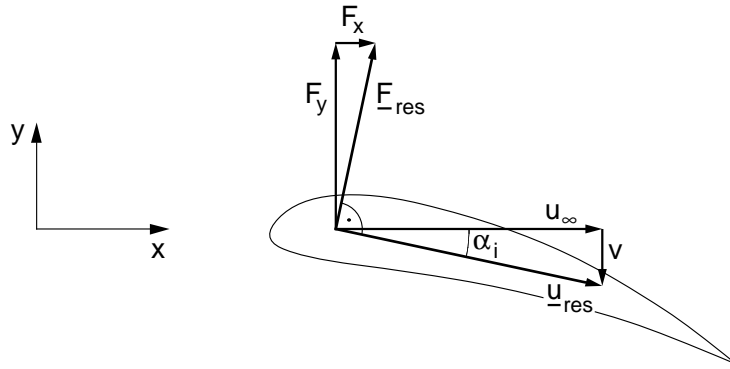


Abbildung 10.9: Effektive Strömung an einem Profilschnitt des Flügels und entsprechende Zerlegung der Kräfte. F_x ist der induzierte Widerstand aufgrund des Abwinds v .

Für die am Profilschnitt wirksamen Kräfte ist nach 9.5 die effektive Anströmung massgeblich: in ihrer Richtung ist die Kraft null (d'Alembert), senkrecht dazu wirkt die Querkraft \underline{F}_{res} nach Kutta-Joukowski. Zerlegt man diese in die beiden Komponenten in x - und y -Richtung, so erhält man die Komponente F_y , die (beim stationären Horizontalflug) das Flugzeuggewicht kompensiert, und eine nicht-verschwindende Komponente F_x , den sogenannten „**induzierten Widerstand**.“ Dieser tritt zu allen anderen Widerstandsanteilen (durch Reibung, Ablösung etc.) hinzu. Verursacht wird er vom Abwind, dieser wiederum vom Wirbelsystem, das man zur Erzeugung des Auftriebs (Zirkulation um den Flügel) benötigt. *Der induzierte Widerstand ist also eine unentrinnbare Folge des Auftriebs - kein Fliegen ohne induzierten Widerstand!*

Es lässt sich zeigen, dass bei einem Flügel mit elliptischem (statt rechteckigem) Grundriss eine elliptische Zirkulationsverteilung

$$\Gamma_{ell}(z) = \Gamma_0 \sqrt{1 - \left(\frac{2z}{b}\right)^2}$$

vorliegt, und dass für eine solche elliptische Verteilung bei gegebenen Werten für Flügelfläche und Gesamtauftrieb der induzierte Widerstand minimiert wird.

Zur dimensionslosen Darstellung des induzierten Widerstands eines Flügels mit Grundfläche A und Spannweite b führt man den Beiwert

$$c_{W,ind} := \frac{F_x}{\frac{\rho}{2} u_\infty^2 A}$$

ein, ferner die Flügelstreckung

$$\Lambda := \frac{b^2}{A}.$$

Für einen Flügel mit rechteckigem Grundriss (Profiltiefe L , Spannweite b) ist $A = b \cdot L$ und $\Lambda = b/L$. Für die elliptische Zirkulationsverteilung $\Gamma_{ell}(z)$ ergibt sich

$$c_{W,ind} := \frac{c_A^2}{\pi\Lambda}$$

mit dem Auftriebsbeiwert c_A . Der induzierte Widerstand ist also proportional zum *Quadrat* des Auftriebs und zum Kehrwert der Flügelstreckung $1/\Lambda$ ($= L/b$ für den Rechteckflügel). Er macht in der Regel den grössten Teil des Gesamtwiderstands eines Flügels aus. Für ein Verkehrsflugzeug beträgt sein Anteil am Gesamtwiderstand immerhin mehr als ein Drittel, wobei der Reibungswiderstand mehr als die Hälfte ausmacht. Der induzierte Widerstand lässt sich durch eine hohe Flügelstreckung $\Lambda \gg 1$ vermindern, was z.B. bei Segelflugzeugen realisiert ist. Sein Ursprung liegt in der Arbeit, die zur Erzeugung der kinetischen Energie des Abwinds im Nachlauf aufzubringen ist.

Kapitel 11

Kompressible Strömungen

Bisher haben wir uns überwiegend mit inkompressiblen Strömungen beschäftigt, genauer mit Strömungen bei konstanter Dichte. In diesem Kapitel befassen wir uns nun mit Strömungen, die erhebliche Dichteunterschiede aufweisen, insbesondere mit Gasströmungen bei hohen Geschwindigkeiten (Gasdynamik). Kompressible Strömungen verhalten sich zu inkompressiblen wie elastische zu starren Körpern: kleine lokal eingebrachte Störungen machen sich nicht mehr sofort überall bemerkbar, sondern breiten sich nur mit endlicher Signalgeschwindigkeit, der Schallgeschwindigkeit, aus. Diese ist eine wichtige Bezugsgeschwindigkeit und definiert eine entscheidende dimensionslose Kennzahl der kompressiblen Strömung: die Mach-Zahl Ma , definiert als Verhältnis von Strömungsgeschwindigkeit zu Schallgeschwindigkeit. Gegenüber dem inkompressiblen Grenzfall $Ma \rightarrow 0$ treten insbesondere in Überschallströmungen ($Ma > 1$) qualitativ neue Phänomene auf, z.B. sprungartige Änderungen der Strömungsgrößen (Stöße). Zur Beschreibung von inkompressiblen, isothermen Strömungen benötigt man vier abhängige Variablen: die drei Geschwindigkeitskomponenten u_i und den Druck p , deren Dynamik durch die Massen- und Impulserhaltung bestimmt ist. Bei kompressiblen Strömungen wird berücksichtigt, dass das Fluid eine innere Energie besitzt, die mit der Bewegungsenergie der Strömung ausgetauscht werden kann. Deshalb treten als weitere Variablen die Dichte ρ und die Temperatur T hinzu, so dass nun zusätzlich Begriffe und Gesetze der Thermodynamik berücksichtigt werden müssen: die Zustandsgleichung, die Energieerhaltung (1. Hauptsatz) und die Verträglichkeit mit dem 2. Hauptsatz.

Im Rahmen dieser einführenden Vorlesung beschränken wir uns weitgehend auf die quasi-eindimensionale Stromfadentheorie stationärer, reibungsfreier, adiabater Strömungen eines idealen Gases. Dieser Stoff wird in Kundu et al. [8] Kap. 15 behandelt. Für weitergehende Informationen sei auf die Master-Vorlesung „Kompressible Strömungen“ sowie die Lehrbücher der Gasdynamik (z.B. Anderson [1], Zierrep [32]) verwiesen.

11.1 Grundbeziehungen aus Thermo- und Fluidodynamik

Wir betrachten einen Stromfaden mit Querschnittsfläche $A(x)$, wobei x die Bogenlänge entlang der zentralen Stromlinie bezeichnet (Abbildung 11.1). „Quasi-eindimensional“ und „**Stromfadentheorie**“ soll ausdrücken, dass die Strömungseigenschaften über die Querschnittsfläche $A(x)$ als konstant betrachtet werden können und die Geschwindigkeit nur eine x -Komponente, $u(x)$, hat. Dies wird erreicht, wenn sich $A(x)$ nur allmählich ändert. Durch diese Abstraktion vereinfacht sich die Beschreibung sehr, und man erhält weitgehend geschlossene mathematische Beziehungen für die Strömungsgrößen. Die Querschnittsfläche $A(x)$ muss nicht infinitesimal klein, sondern darf durchaus endlich sein, etwa ein Strömungskanal in einer Maschine oder eine Rohrleitung. Wichtig ist jedoch, sich vor der Anwendung der Stromfadentheorie stets zu vergewissern, dass die genannten Voraussetzungen auch erfüllt sind.

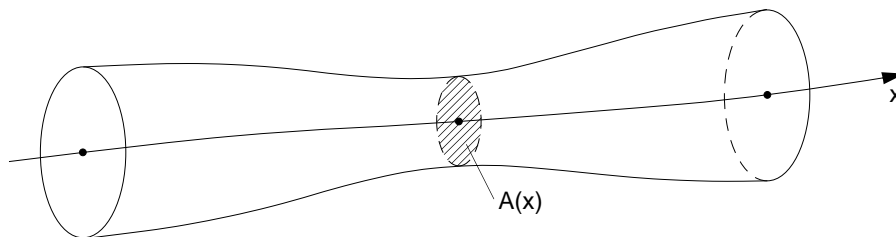


Abbildung 11.1: Stromfaden mit Querschnittsfläche $A(x)$

Voraussetzungen

Die Strömung erfülle folgende Annahmen:

- thermisch ideales Gas: $p = \varrho \cdot R \cdot T$
- kalorisch ideales Gas: $c_p, c_v = \text{const}$
- quasi-eindimensional (Stromfadentheorie)
- stationär
- reibungsfrei (wenn nicht anders bemerkt)
- keine Volumenkräfte, Schwerkraft wird vernachlässigt
- adiabat.

Ein thermisch und kalorisch ideales Gas wird auch als perfektes Gas bezeichnet. Unter den hier gemachten Voraussetzungen ist die Strömung auch isentrop (ausgenommen über ggf. auftretende Verdichtungsstöße), d.h. (da sie stationär ist) die Energie ist entlang des Stromfadens konstant. Damit ist die Strömung auch barotrop.

Thermodynamische Beziehungen (für ideales Gas)

spezifische Gaskonstante:

$$R = c_p - c_v \quad (=287 \text{ J/(kg K) für Luft})$$

Adiabatexponent:

$$\gamma = \frac{c_p}{c_v} \quad (=1.4 \text{ für Luft})$$

spezifische Wärmekapazität bei konstantem Druck:

$$c_p = \frac{\gamma}{\gamma - 1} \cdot R \quad (=1005 \text{ J/(kg K) für Luft})$$

spezifische Wärmekapazität bei konstantem spezifischen Volumen:

$$c_v = \frac{R}{\gamma - 1}$$

innere Energie:

$$e = c_v T$$

differentielle Form:

$$de = c_v dT$$

Enthalpie:

$$h = e + \frac{p}{\varrho} = c_p T = \frac{\gamma R}{\gamma - 1} \cdot T = \frac{\gamma}{\gamma - 1} \cdot \frac{p}{\varrho}$$

differentielle Form:

$$dh = c_p dT$$

Entropie (der Index „ref“ bezeichnet einen Bezugszustand):

$$\begin{aligned} s - s_{\text{ref}} &= c_p \cdot \ln \left(\frac{T}{T_{\text{ref}}} \right) - R \cdot \ln \left(\frac{p}{p_{\text{ref}}} \right) \\ &= c_v \cdot \ln \left[\left(\frac{p}{p_{\text{ref}}} \right) \left(\frac{\varrho_{\text{ref}}}{\varrho} \right)^\gamma \right] \end{aligned}$$

Isentropenbeziehungen:

$$\frac{p}{p_{\text{ref}}} = \left(\frac{\varrho}{\varrho_{\text{ref}}} \right)^{\gamma}, \quad \frac{p}{p_{\text{ref}}} = \left(\frac{T}{T_{\text{ref}}} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}, \quad \frac{\varrho}{\varrho_{\text{ref}}} = \left(\frac{T}{T_{\text{ref}}} \right)^{\frac{1}{\gamma-1}}$$

Erster Hauptsatz der Thermodynamik in differentieller Form:

$$de = dq - p dv, \quad v = \frac{1}{\varrho}$$

$$dh = dq + \frac{dp}{\varrho},$$

wobei dq die differentielle zugeführte Wärme bezeichnet.

Die (lokale) **Schallgeschwindigkeit** als Ausbreitungsgeschwindigkeit kleiner Störungen ist gegeben durch

$$a^2 = \left(\frac{\partial p}{\partial \varrho} \right)_{s=\text{const}}.$$

Für ein ideales Gas ist dann

$$a = \sqrt{\gamma RT} = \sqrt{\gamma \frac{p}{\varrho}}$$

und es gilt

$$h = \frac{a^2}{\gamma - 1}.$$

Die Schallgeschwindigkeit ist also keine Stoffkonstante, sondern hängt vom lokalen thermodynamischen Zustand des Fluides ab. Sie nimmt mit steigender Temperatur wie \sqrt{T} zu.

Grundgleichungen

Die Grundgleichungen für den Stromfaden unter den gemachten Voraussetzungen lauten:

Kontinuitätsgleichung:

$$\dot{m} = \varrho \cdot u \cdot A = \text{const.}$$

Impulserhaltung: Euler-Gleichung

$$u \frac{du}{dx} = -\frac{1}{\varrho} \frac{dp}{dx}$$

Für eine Stromröhre mit *konstantem* Querschnitt $A = \text{const.}$ ergibt eine integrale Impulsbilanz

$$\varrho u^2 + p = \text{const.}, \quad (A = \text{const.})$$

Energieerhaltung:

$$h + \frac{u^2}{2} = \text{const.} \quad \text{bzw.} \quad c_p T + \frac{u^2}{2} = \text{const.}$$

Zustandsgleichung (ideale Gasgleichung):

$$\frac{p}{\varrho} = R \cdot T$$

Integriert man die Euler-Gleichung entlang einer Stromlinie, so erhält man die **Bernoulli-Gleichung** in der Form

$$\frac{1}{2}u(x)^2 - \frac{1}{2}u_{\text{ref}}^2 = - \int_{p_{\text{ref}}}^{p(x)} \frac{dp}{\varrho(p)},$$

wobei der Index „ref“ einen Referenzzustand an der Stelle x_{ref} bezeichnet. (Muss die in z -Richtung weisende Schwerkraft berücksichtigt werden, so kommt wie üblich der Term gz additiv hinzu). Wegen der vorausgesetzten Isentropie der Zustandsänderung erhält man

$$\frac{1}{2}u(x)^2 - \frac{1}{2}u_{\text{ref}}^2 = \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{p_{\text{ref}}}{\varrho_{\text{ref}}} \left[1 - \left(\frac{p(x)}{p_{\text{ref}}} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \right]$$

Bernoulli, isentrop.

Wegen der Isentropenbeziehungen gilt auch

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}u(x)^2 - \frac{1}{2}u_{\text{ref}}^2 &= \frac{\gamma}{\gamma-1} R T_{\text{ref}} \left[1 - \left(\frac{T(x)}{T_{\text{ref}}} \right) \right] \\ &= \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{p_{\text{ref}}}{\varrho_{\text{ref}}} \left[1 - \left(\frac{\varrho(x)}{\varrho_{\text{ref}}} \right)^{\gamma-1} \right] \\ &= c_p T_{\text{ref}} - c_p T(x) \\ &= h_{\text{ref}} - h(x). \end{aligned}$$

Wie wir sehen, stimmen im hier betrachteten Fall Bernoulli-Gleichung und Energie-Gleichung (Erhaltung der Gesamtenergie) überein.

11.2 Strömungsgrößen im isentropen Stromfaden

Wir betrachten den Verlauf von Strömungsgrößen wie $u, p, \varrho, T, a, h, Ma$ entlang des angenommenen stationären, isentropen Stromfadens einschliesslich besonders ausgezeichneter Werte.

Ruhegrößen und kritische Größen, Mach-Zahl und Laval-Zahl

Entlang eines Stromfadens können bestimmte ausgezeichnete Zustände auftreten. Ein solcher Zustand ist der **Ruhezustand** (auch **Kesselzustand** oder **Stagnationszustand** genannt), definiert durch $u = 0$. Er tritt auf z.B. in einem sehr grossen Behälter, aus dem der Stromfaden aus- oder in den er eintritt, oder im Staupunkt eines umströmten Körpers. Größen im Ruhezustand werden als **Ruhegrößen** (oder **Stagnationsgrößen**) bezeichnet und mit dem Index „0“ gekennzeichnet (Ruhedruck p_0 , Ruhetemperatur T_0 , Ruheenthalpie h_0 usw.). Für Ruhedruck und Ruhetemperatur sind auch die Bezeichnungen Totaldruck p_t und Totaltemperatur T_t im Gebrauch, die aus der Bernoulli- bzw. Energiegleichung verständlich werden.

Ein weiterer ausgezeichnete Zustand ist der **kritische Zustand** (auch **Schallzustand** genannt). Er ist charakterisiert durch $u = a$, d.h. die *lokale* Strömungsgeschwindigkeit $u(x)$ ist dort gerade gleich der *lokalen* Schallgeschwindigkeit $a(x)$ und die Machzahl ist somit $Ma = 1$. (Dies kann z.B. im engsten Querschnitt einer Lavaldüse auftreten, wie weiter unten in 11.4 erläutert wird.) **Kritische Grössen**, d.h. die Werte der Strömungsvariablen im kritischen Zustand, werden mit einem Index “ $*$ ” gekennzeichnet (kritischer Druck p_* , kritische Temperatur T_* , kritische Geschwindigkeit $u_* = a = a_*$ usw.).

Folgendes ist **wichtig**: Die Ruhegrössen und kritischen Grössen sind einem Stromfaden eindeutig zugeordnet (analog wie die Bernoulli-Konstante) und werden unabhängig davon benutzt, ob diese Zustände im betrachteten Stromfaden wirklich auftreten oder nicht; sie lassen sich stets durch eine gedachte *isentropische* Beschleunigung oder Verzögerung vom gerade betrachteten Zustand aus erreichen. Ruhegrössen und kritische Grössen können sich ändern, wenn das Gas eine *nicht isentrope* Zustandsänderung erfährt (z.B. beim Durchgang durch einen Verdichtungsstoss, s. 11.3).

Im Gegensatz zur lokalen Schallgeschwindigkeit $a(x)$ sind a_0 und a_* Konstanten für einen gegebenen isentropen Stromfaden. Bei der Definition der **Mach-Zahl** Ma wird die *lokale* Geschwindigkeit $u(x)$ auf die *lokale* Schallgeschwindigkeit a bezogen:

$$Ma(x) = \frac{u(x)}{a(x)}.$$

Die **Laval-Zahl** La ist dagegen definiert durch die *lokale* Geschwindigkeit bezogen auf die *kritische* Schallgeschwindigkeit, d.h. als Bezugswert dient der Wert der Schallgeschwindigkeit an demjenigen Ort des Stromfadens, an dem genau Schallzustand (Geschwindigkeit = Schallgeschwindigkeit) herrscht (ggfs. kann dieser durch eine gedachte isentrope Beschleunigung/Verzögerung erreicht werden):

$$La(x) = \frac{u(x)}{a_*}.$$

Der wesentliche Unterschied zur Mach-Zahl besteht darin, dass sich die Bezugsgrösse a_* entlang des Stromfadens nicht ändert. Die Laval-Zahl ist also eine dimensionslose Geschwindigkeit entlang des Stromfadens. An einem Ort im kritischen Zustand (und nur dort!) gilt $Ma = La = 1$. (Bemerkung: Gelegentlich wird in der Literatur die Laval-Zahl auch als *kritische Mach-Zahl* bezeichnet und mit Ma_* abgekürzt, was mit unserer Notation jedoch nicht vereinbar ist, nach der stets $Ma_* = 1$ gilt).

Ausströmen aus einem Behälter, Ausflussformel

Wir betrachten das Ausströmen aus einem Druckbehälter. Wählt man in der Bernoulli-Gleichung als Referenzzustand den Ruhezustand p_0 im Behälter und löst nach $u(x)$ auf, so erhält man die **Ausflussformel** von **de Saint Venant und Wantzell**:

$$\begin{aligned} u(x) &= \sqrt{\frac{2\gamma}{\gamma-1} \frac{p_0}{\varrho_0} \left[1 - \left(\frac{p(x)}{p_0} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \right]} \\ &= \sqrt{\frac{2\gamma}{\gamma-1} RT_0 \left[1 - \left(\frac{T(x)}{T_0} \right) \right]} \\ &= \sqrt{\frac{2\gamma}{\gamma-1} \frac{p_0}{\varrho_0} \left[1 - \left(\frac{\varrho(x)}{\varrho_0} \right)^{\gamma-1} \right]}. \end{aligned}$$

Gültigkeitsvoraussetzung ist Isentropie, d.h. die Konstanz der Entropie entlang des Stromfadens. Für $p/p_0 \rightarrow 0$ (Ausströmen ins Vakuum bzw. Einstömen in einen evakuierten Behälter) erhält man hieraus als theoretischen Grenzwert die **maximal mögliche Geschwindigkeit**,

$$u_{\max} = \sqrt{\frac{2\gamma}{\gamma-1} \frac{p_0}{\varrho_0}} = \sqrt{\frac{2}{\gamma-1}} a_0 \left(\approx 750 \frac{m}{s} \text{ für Luft bei Atmosphärenbedingungen} \right).$$

Dabei ist allerdings zu beachten, dass der effektive Querschnittsverlauf des Stromfadens die erreichbare Geschwindigkeit u mitbestimmt; s. 11.4, Laval-Düse: im engsten Querschnitt ist maximal die kritische

Schallgeschwindigkeit $u = a_*$ erreichbar. Bezieht man also u_{\max} auf die Ruheschallgeschwindigkeit a_0 , so erhält man

$$\frac{u_{\max}}{a_0} = \sqrt{\frac{2}{\gamma-1}} (=_{L} \sqrt{5} \approx 2.236, =_L \text{ bedeutet: für Luft, } \gamma = 1.4).$$

Luft kann in einen evakuierten Behälter also nicht schneller als mit etwa der 2.2-fachen Ruheschallgeschwindigkeit a_0 einströmen. Die mit der maximalen Geschwindigkeit gebildete Laval-Zahl wird auch als Grenz-Laval-Zahl La_{grenz} bezeichnet,

$$La_{\text{grenz}} = \frac{u_{\max}}{a_*} = \sqrt{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} (=_{L} \sqrt{6} \approx 2.45).$$

Die theoretische Maximalgeschwindigkeit im Stromfaden beträgt also nahezu zweieinhalb mal die kritische Schallgeschwindigkeit.

Energie-Ellipse

Verfolgt man die Energieerhaltung vom Ruhezustand $u = 0$ aus bis zu einem beliebigen Zustand

$$c_p T + \frac{u^2}{2} = c_p T_0$$

und drückt die Enthalpie mittels der Schallgeschwindigkeit aus, $c_p T = a^2/(\gamma-1)$, so erhält man die Gleichung für die **Energie-Ellipse** (s. Abb. 11.2)

$$\left(\frac{u}{u_{\max}}\right)^2 + \left(\frac{a}{a_0}\right)^2 = 1.$$

Ersetzt man $c_p T$ durch $\frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{p}{\rho}$, so erhält man wiederum die kompressible Bernoulli-Gleichung für isentrope Strömung, mit dem Ruhezustand als Referenzzustand.

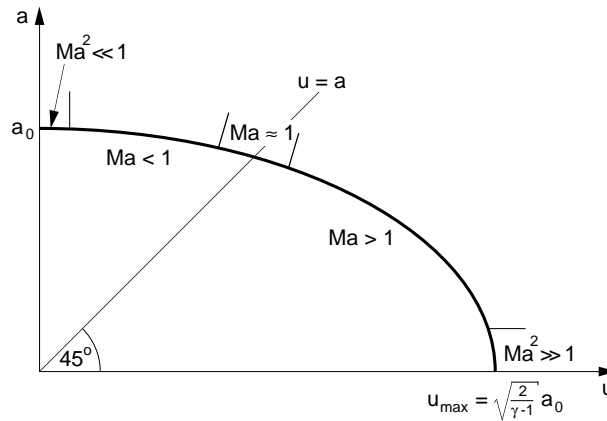


Abbildung 11.2: Energie-Ellipse

Die bei gegebenen Ruhewerten (oder kritischen Werten) möglichen Strömungszustände entlang des Stromfadens lassen sich an der Energie-Ellipse verfolgen. Die Winkelhalbierende trennt **Unterschall** ($Ma < 1$) von **Überschallströmungen** ($Ma > 1$). Für $Ma^2 \ll 1$ kann die Strömung in guter Näherung als inkompressibel behandelt werden (vgl. unten). $Ma = 1$ bezeichnet man als **Schallzustand**. Den benachbarten Bereich (etwa $0.8 < Ma < 1.2$) bilden die **transsonischen** Strömungen (transonic flows). Bei hohen Machzahlen $Ma > 5$ spricht man von **hypersonischen** Strömungen (Hyperschall). Allerdings ist dort das Modell des idealen Gases nicht mehr gültig (es kommt zur Dissoziation der Gasmoleküle, Realgas-Effekte werden wirksam).

Abhängigkeit von Ruhegrössen und Mach-Zahl

Aus dem Energiesatz

$$c_p T + \frac{u^2}{2} = c_p T_0$$

erhält man durch Umformung (Einführen der Schallgeschwindigkeit)

$$\frac{a^2}{\gamma - 1} + \frac{u^2}{2} = \frac{a_0^2}{\gamma - 1} ,$$

woraus sich

$$\frac{a_0^2}{a^2} = 1 + \frac{\gamma - 1}{2} Ma^2$$

ergibt. Mit der Definition der Schallgeschwindigkeit und den Isentropenrelationen ergeben sich die Zustände an einem beliebigen Ort in Abhängigkeit von den Ruhegrössen und der Mach-Zahl zu

$$\begin{aligned} \frac{T_0}{T} &= \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} Ma^2\right), & \frac{p_0}{p} &= \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} Ma^2\right)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}} \\ \frac{a_0}{a} &= \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} Ma^2\right)^{\frac{1}{2}}, & \frac{\varrho_0}{\varrho} &= \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} Ma^2\right)^{\frac{1}{\gamma - 1}}. \end{aligned}$$

Zahlenwerte für $0 \leq Ma \leq 5$ sind im Anhang E tabelliert.

Inkompressible Näherung

Für kleine Mach-Zahlen $Ma \rightarrow 0$ kann die kompressible Strömung näherungsweise als inkompressibel behandelt werden. Es gilt

$$\varrho = \varrho_0 \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} Ma^2\right)^{-\frac{1}{\gamma - 1}} = \varrho_0 \left[1 - \frac{1}{2} Ma^2 + \mathcal{O}(Ma^4)\right] \quad (Ma \rightarrow 0),$$

also für die relative Dichteänderung

$$\frac{\varrho_0 - \varrho}{\varrho_0} \approx \frac{1}{2} Ma^2, \quad Ma \rightarrow 0.$$

Für Luftströmungen mit Geschwindigkeit u gelten bei 20°C die Werte gemäss Tabelle 11.1. Für Mach-Zahlen bis $Ma \approx 0.3$ darf man also in guter Näherung ($< 5\%$ relativer Fehler in der Dichte) noch inkompressibel rechnen.

u	Ma	$(\varrho_0 - \varrho)/\varrho_0$
30 m/s = 108km/h	0.087	0.4%
50 m/s = 180km/h	0.145	1.0%
100 m/s = 360km/h	0.291	4.2%
150 m/s = 540km/h	0.436	9.5%

Tabelle 11.1: Relative Dichteänderungen bei niedrigen Mach-Zahlen (Luftströmung, $T = 20^\circ \text{C}$)

Zusammenhang zwischen kritischen und Ruhegrößen

Setzt man in den oben stehenden Beziehungen die Größen des kritischen Zustandes ein, so erhält man die Verhältnisse zwischen den kritischen Größen und den Ruhegrößen, die nur von γ abhängen und damit für ein gegebenes Fluid konstant sind:

$$\boxed{\frac{T_*}{T_0} = \left(\frac{2}{\gamma+1}\right)} \quad (=_{L} \ 0.833), \quad \boxed{\frac{\frac{p_*}{p_0}}{\left(\frac{2}{\gamma+1}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}}} = \quad (=_{L} \ 0.528) \quad (11.1)$$

$$\boxed{\frac{a_*}{a_0} = \left(\frac{2}{\gamma+1}\right)^{\frac{1}{2}}} \quad (=_{L} \ 0.913), \quad \boxed{\frac{\varrho_*}{\varrho_0} = \left(\frac{2}{\gamma+1}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}}} \quad (=_{L} \ 0.634). \quad (11.2)$$

Die Zahlenwerte gelten für Luft ($\gamma = 1.4$). Strömt also Luft durch eine konvergente Düse aus einem Druckbehälter, so erreicht sie Schallgeschwindigkeit, wenn der Aussendruck bei höchstens 52.8% des Innendrucks p_0 liegt.

Mit der Definition der Laval-Zahl La lässt sich leicht eine Beziehung zwischen Mach-Zahl Ma und Laval-Zahl La herleiten:

$$La^2 = \frac{u^2}{a_*^2} = \frac{u^2}{a^2} \frac{a^2}{a_0^2} \frac{a_0^2}{a_*^2}.$$

Hieraus ergibt sich mit obigen Beziehungen

$$La^2 = \frac{\gamma+1}{\frac{2}{Ma^2} + (\gamma-1)}$$

und daraus durch Auflösen nach der Mach-Zahl

$$Ma^2 = \frac{La^2}{\frac{\gamma+1}{2} - \frac{\gamma-1}{2} La^2} = \frac{2}{\frac{\gamma+1}{La^2} - (\gamma-1)}.$$

Für $Ma \rightarrow \infty$ geht La gegen den bereits genannten Wert La_{grenz} . Die Laval-Zahl La bleibt also, wie die Geschwindigkeit u , im Unterschied zur Mach-Zahl immer endlich. $Ma \rightarrow \infty$ ist gleichbedeutend mit $a \rightarrow 0$ (und damit $T \rightarrow 0$), wie man auch an der Energieellipse ablesen kann, und somit ein physikalisch nicht realistischer Grenzfall.

Abhängigkeit von der Laval-Zahl

Ersetzt man in den Beziehungen $T/T_0 = f(Ma)$ usw. die Mach-Zahl durch den Ausdruck $Ma = f(La)$, so ergibt sich

$$\begin{aligned} \frac{T}{T_0} &= \left(1 - \frac{\gamma-1}{\gamma+1} La^2\right), & \frac{p}{p_0} &= \left(1 - \frac{\gamma-1}{\gamma+1} La^2\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \\ \frac{a}{a_0} &= \left(1 - \frac{\gamma-1}{\gamma+1} La^2\right)^{\frac{1}{2}}, & \frac{\varrho}{\varrho_0} &= \left(1 - \frac{\gamma-1}{\gamma+1} La^2\right)^{\frac{1}{\gamma-1}}. \end{aligned}$$

Abhängigkeit von der Maximalgeschwindigkeit

Ersetzt man in den Gleichungen $T/T_0 = f(La)$ die Laval-Zahl La mittels

$$\frac{u^2}{u_{\text{max}}^2} = \frac{\gamma-1}{\gamma+1} La^2,$$

so erhält man

$$\begin{aligned}\frac{T}{T_0} &= \left(1 - \frac{u^2}{u_{\max}^2}\right), & \frac{p}{p_0} &= \left(1 - \frac{u^2}{u_{\max}^2}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}, \\ \frac{a}{a_0} &= \left(1 - \frac{u^2}{u_{\max}^2}\right)^{\frac{1}{2}}, & \frac{\varrho}{\varrho_0} &= \left(1 - \frac{u^2}{u_{\max}^2}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}}.\end{aligned}$$

11.3 Senkrechter Verdichtungsstoss

Wir betrachten einen Stromfaden mit konstantem Querschnitt A und fragen nach den Beziehungen zwischen den Werten der Strömungsgrößen u_1, p_1, ϱ_1, T_1 usw. an einer Station x_1 und den Werten u_2, p_2, ϱ_2, T_2 usw. an einer benachbarten, stromabwärts gelegenen Station x_2 (Abbildung 11.3).

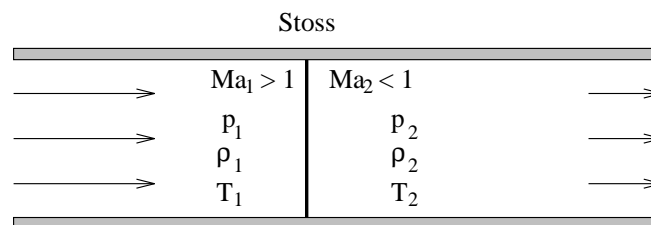


Abbildung 11.3: Senkrechter Verdichtungsstoss.

Die integralen Bilanzen für Masse, Impuls und Energie in einem mit dem Stoss mitbewegten Kontrollvolumen, das durch die beiden Querschnittsflächen $x = x_1$ und $x = x_2$ und den Mantel der Stromröhre begrenzt ist, lauten (mit $A_1 = A_2 = A$):

Kontinuität: $\varrho_1 u_1 = \varrho_2 u_2$

Impulserhaltung: $\varrho_1 u_1^2 + p_1 = \varrho_2 u_2^2 + p_2$

Energieerhaltung: $h_1 + \frac{1}{2}u_1^2 = h_2 + \frac{1}{2}u_2^2$.

Hinzu kommt die Zustandsgleichung in x_1 und x_2 . Seien nun die Werte in x_1 gegeben. Welche Lösungen sind in x_2 möglich? Zum einen sicher der stetige Verlauf: $u_2 = u_1, p_2 = p_1$, etc. Zum anderen lassen die nichtlinearen Erhaltungsgleichungen aber auch unstetige Lösungen zu: sprunghafte Änderungen der Strömungsgrößen, sog. **Verdichtungsstöße** (normal shocks). Solche Lösungen kommen tatsächlich vor, wobei die Stossdicke in einer realen Strömung nur einige mittlere freie Weglängen der Gasmoleküle beträgt. Die **Strömung über den Stoss** hinweg ist allerdings **nicht** mehr **isentrop**.

Beziehungen zwischen den Zuständen vor und nach dem Stoss

Zunächst folgt aus dem Energiesatz, dass sich die Ruhetemperatur T_0 über den Stoss hinweg nicht ändert: $c_p T_{01} + 0 = c_p T_1 + u_1^2/2 = c_p T_2 + u_2^2/2 = c_p T_{02} + 0$, also gilt

$$T_{02} = T_{01} = T_0.$$

Daraus ergibt sich auch sofort die Konstanz der kritischen bzw. der Ruhe-Schallgeschwindigkeit, $a_{*2} = a_{*1} = a_*$ bzw. $a_{02} = a_{01} = a_0$.

Die unstetige Lösung erhält man durch Umformen der Bilanzgleichungen. Insbesondere kann man die Verhältnisse u_2/u_1 , p_2/p_1 usw. als Funktion der Mach-Zahl Ma_1 vor dem Stoss darstellen. Dividiert man die linke bzw. rechte Seite der Impulsgleichung durch die linke bzw. rechte Seite der Kontinuitätsgleichung und eliminiert p und ϱ durch die Schallgeschwindigkeit, so erhält man

$$u_1 - u_2 = \frac{a_2^2}{\gamma u_2} - \frac{a_1^2}{\gamma u_1} = \frac{1}{\gamma u_1 u_2} (u_1 a_2^2 - u_2 a_1^2) .$$

Eliminiert man weiter mittels der Energiegleichung die Schallgeschwindigkeiten vor und hinter dem Stoss (a_1 und a_2), indem man als Referenzwert den kritischen Zustand *vor dem Stoss* verwendet, so erhält man die **Prandtl-Relation**:

$$\boxed{u_1 \cdot u_2 = a_*^2}, \quad \text{oder} \quad La_1 \cdot La_2 = 1 .$$

Aus

$$\boxed{\frac{\varrho_2}{\varrho_1} = \frac{u_1}{u_2} = \frac{u_1}{u_2} \cdot \frac{u_1}{u_1} = \frac{u_1^2}{u_1 u_2} = \frac{u_1^2}{a_*^2} = La_1^2} \quad (\text{vgl. Fig. 11.4})$$

folgt zum einen sofort, dass sowohl die Änderung der Dichte als auch der Geschwindigkeit über einen Stoss begrenzt sein müssen, da die Laval-Zahl auch für $Ma_1 \rightarrow \infty$ beschränkt ist. Der Grenzwert ist

$$\frac{\varrho_2}{\varrho_1} = \frac{u_1}{u_2} = La_1^2 \quad \longrightarrow \quad \frac{\gamma+1}{\gamma-1} \quad (= 6), \quad Ma_1 \rightarrow \infty .$$

Zum anderen ergibt sich sofort die Abhängigkeit der **Dichte-** und **Geschwindigkeitsänderung** von der Vor-Stoss-Mach-Zahl Ma_1

$$\boxed{\frac{u_2}{u_1} = \frac{\varrho_1}{\varrho_2} = \frac{2}{\gamma+1} \frac{1}{Ma_1^2} + \frac{\gamma-1}{\gamma+1} .}$$

Die relative **Druckänderung** über den Stoss ergibt sich zu

$$\frac{\Delta p}{p_1} = \frac{p_2 - p_1}{p_1} = \frac{2\gamma}{\gamma+1} (Ma_1^2 - 1)$$

und das **Druckverhältnis** zu

$$\boxed{\frac{p_2}{p_1} = \frac{2\gamma}{\gamma+1} Ma_1^2 - \frac{\gamma-1}{\gamma+1} = 1 + \frac{2\gamma}{\gamma+1} \cdot (Ma_1^2 - 1) .} \quad (\text{Fig. 11.4})$$

Der Druck p_2 hinter dem Stoss steigt also mit der Mach-Zahl Ma_1 steil an, vgl. Abbildung 11.4; bei $Ma_1 = 2$ schon um den Faktor 4.5. Im Gegensatz zur Dichte wächst die Druckänderung mit der Mach-Zahl über alle Grenzen. Aus der aus der idealen Gasgleichung folgenden Beziehung

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{p_2}{p_1} \cdot \frac{\varrho_1}{\varrho_2}$$

lässt sich sofort die **Temperaturänderung** über den Stoss bestimmen als

$$\boxed{\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{2\gamma}{\gamma+1} Ma_1^2 - \frac{\gamma-1}{\gamma+1} \right) \left(\frac{2}{\gamma+1} \frac{1}{Ma_1^2} + \frac{\gamma-1}{\gamma+1} \right) .} \quad (\text{Fig. 11.4})$$

Die **Entropieänderung** erhält man aus

$$s_2 - s_1 = c_v \ln \left[\left(\frac{2\gamma}{\gamma+1} Ma_1^2 - \frac{\gamma-1}{\gamma+1} \right) \left(\frac{2}{\gamma+1} \frac{1}{Ma_1^2} + \frac{\gamma-1}{\gamma+1} \right)^\gamma \right]. \quad (\text{Fig. 11.5})$$

Da nach dem zweiten Hauptsatz der Thermodynamik immer $s_2 \geq s_1$ sein muss, können **Stösse nur im Überschall** ($Ma_1 > 1$) auftreten. Aus der Beziehung für die Druckänderung folgt dann mit $Ma_1 > 1$ sofort $p_2 > p_1$, d.h. es gibt (unter den gemachten Voraussetzungen) nur **Verdichtungsstösse** und keine Verdünnungsstösse. Die Beziehungen zwischen den Strömungsgrössen vor und nach dem Stoss werden als **Rankine-Hugoniot-Beziehungen** bezeichnet.

Für die **Mach-Zahl** Ma_2 **nach dem Stoss** gilt $Ma_2^2 = \left(\frac{u_2}{u_1} \right)^2 \left(\frac{a_1}{a_2} \right)^2 \left(\frac{a_1}{a_2} \right)^2$. Setzt man die Schallgeschwindigkeit des idealen Gases und die Stossbeziehungen für u, p und ρ ein, so erhält man

$$Ma_2^2 = \frac{1 + (\gamma-1)/2 \cdot Ma_1^2}{\gamma Ma_1^2 - (\gamma-1)/2} = 1 - \frac{Ma_1^2 - 1}{1 + \frac{2\gamma}{\gamma+1} (Ma_1^2 - 1)}. \quad (\text{Fig. 11.4})$$

Da die Mach-Zahl vor dem Stoss Ma_1 immer grösser als 1 ist, ergibt sich aus dieser Beziehung für die Mach-Zahl Ma_2 nach einem senkrechten Verdichtungsstoss

$$Ma_2 < 1.$$

Ein senkrechter Verdichtungsstoss führt also stets vom Überschall ($Ma_1 > 1$) in den Unterschall.

Verhalten der Ruhegrössen über den Stoss

Es wurde bereits erwähnt, dass die Ruhetemperatur T_0 über den Stoss hinweg unverändert bleibt. Wegen der idealen Gasgleichung $p/\rho = RT$ folgt daraus auch, dass sich das Verhältnis $p_{02}/\rho_{02} = p_{01}/\rho_{01}$ nicht ändert. Die Ruhegrössen p_0 und ρ_0 selbst ändern sich jedoch über den Stoss hinweg. Um das Verhalten jeder einzelnen Grösse zu bestimmen, muss angegeben werden, auf welchem thermodynamischen Weg der Aufstau vom Zustand vor bzw. hinter dem Stoss in den jeweiligen Ruhezustand $u = 0$ erfolgen soll. Nimmt man hierfür wieder Isentropie an, so ergibt sich unter Verwendung von

$$\frac{s_{02} - s_{01}}{R} = \ln \left[\left(\frac{p_{02}}{p_{01}} \right)^{\frac{1}{\gamma-1}} \left(\frac{\rho_{02}}{\rho_{01}} \right)^{-\frac{\gamma}{\gamma-1}} \right]$$

sowie der Beziehung $p_{02}/p_{01} = \rho_{02}/\rho_{01}$ und dem obigen Ausdruck für den Entropiesprung $s_2 - s_1$ die Beziehung

$$\frac{\rho_{02}}{\rho_{01}} = \frac{p_{02}}{p_{01}} = \left(1 + \frac{2\gamma}{\gamma+1} (Ma_1^2 - 1) \right)^{-\frac{1}{\gamma-1}} \left(\frac{(\gamma+1) Ma_1^2}{2 + (\gamma-1) Ma_1^2} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}. \quad (\text{Fig. 11.4})$$

Die Zustandsänderungen über den Stoss sind in Abb. 11.4 dargestellt. Es ist deutlich sichtbar, wie der Ruhedruck p_0 über den Stoss bei höheren Machzahlen Ma_1 (starken Stössen) stark abnimmt, auf weniger als 50% bei $Ma_1 > 2.5$.

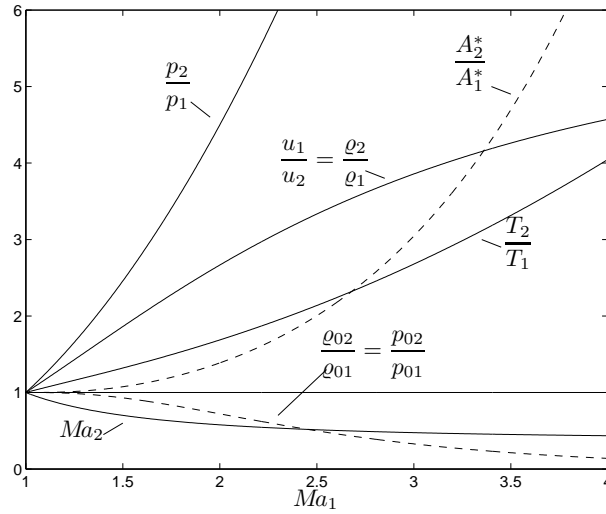


Abbildung 11.4: Zustandsänderungen über einen senkrechten Verdichtungsstoss ($\gamma = 1.4$). Tabellenwerte im Anhang E.

Transsonischer Bereich

Im transsonischen Bereich (Ma_1 nur wenig grösser als 1) kann das Quadrat der Mach-Zahl vor dem Stoss als $Ma_1^2 = 1 + m$ mit $0 < m \ll 1$ geschrieben werden. Für die Änderung der Entropie ergibt sich dann durch Einsetzen in die obige Beziehung und Reihenentwicklung

$$\frac{s_2 - s_1}{R} = \frac{2\gamma}{(\gamma + 1)^2} \cdot \frac{1}{3} (Ma_1^2 - 1)^3 + \dots = \mathcal{O}(m^3).$$

Die Entropie nimmt also für schwache Stöße nur mit der dritten Potenz von m zu! **Schwache Stöße** ($m \ll 1$) können daher in sehr guter Näherung als **isentrop** betrachtet werden, vgl. Abb. 11.5.

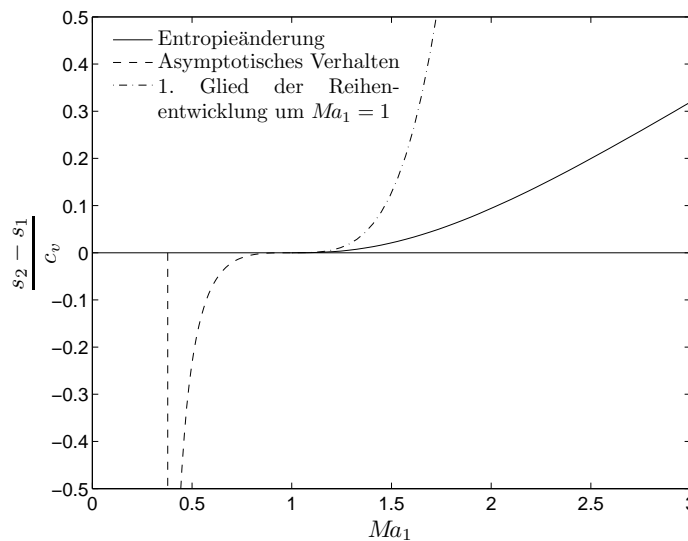


Abbildung 11.5: Entropieänderung über einen senkrechten Verdichtungsstoss ($\gamma = 1.4$)

Zusammengefasst gilt für den senkrechten Verdichtungsstoss:

Der senkrechte Stoss führt stets vom Überschall ($Ma_1 > 1$) in den Unterschall ($Ma_2 < 1$). Druck, Dichte, Temperatur und Entropie (Abb. 11.5) nehmen über den Stoss zu, Geschwindigkeit, Mach-Zahl und Ruhedruck nehmen ab. Die Ruhetemperatur T_0 und die kritische Temperatur T_* (und damit die Ruhschallgeschwindigkeit a_0 und die kritische Schallgeschwindigkeit a_*) bleiben unverändert. Für schwache Stösse ($1 < Ma_1$, nahe 1) sind Ruhedruckverlust und Entropiezunahme gering.

11.4 Strömung bei veränderlichem Querschnitt

Wir betrachten einen Stromfaden mit veränderlichem Querschnitt $A(x)$, wobei x wieder die Bogenlänge entlang des Stromfadens bezeichnet (Abbildung 11.1). Querschnittsänderungen müssen hinreichend klein bleiben, damit die Strömungsgrössen als konstant über den Querschnitt des Stromfadens angesehen werden können. Die Kontinuitätsgleichung lautet

$$\dot{m} = \rho \cdot u \cdot A = \text{const.}$$

Aus der Euler-Gleichung folgt durch Umformung des Druckgradiententerms

$$\frac{d\rho}{\rho} = -Ma^2 \cdot \frac{du}{u},$$

die relative Dichteänderung ist proportional der relativen Geschwindigkeitsänderung mit der Proportionalitätskonstanten $-Ma^2$. Bildet man den Logarithmus der Kontinuitätsgleichung, leitet nach x ab und setzt die Euler-Gleichung ein, so erhält man einen Ausdruck für die relative Geschwindigkeitsänderung in Abhängigkeit von der relativen Querschnittsänderung (**Flächen-Geschwindigkeits-Beziehung**),

$$\boxed{\frac{du}{u} = \frac{1}{Ma^2 - 1} \cdot \frac{dA}{A} .}$$

Will man eine Beschleunigung der Strömung (Düse) erreichen, so folgt hieraus für den Querschnittsverlauf:

$Ma < 1$	\implies	$dA < 0$	\implies	Querschnittsverengung
$Ma = 1$	\implies	$dA = 0$	\implies	konstanter Querschnitt
$Ma > 1$	\implies	$dA > 0$	\implies	Querschnittserweiterung.

Im Gegensatz zum Unterschall führt also im *Überschall* eine Querschnittserweiterung zur *Beschleunigung* und eine *Verengung* zur *Verzögerung* der Strömung! Für $Ma = 1$ muss die Querschnittsänderung $dA = 0$ sein (wie im engsten Querschnitt), da sonst eine Singularität auftritt.

Laval-Düse

Durch Kombinieren dieser Teilergebnisse erhält man die Strömung in der **Laval-Düse** (vgl. Abb. 11.6). In einem konvergenten Einlass wird die Unterschallströmung beschleunigt, bis am engsten Querschnitt Schallgeschwindigkeit erreicht ist (falls der Druckabfall ausreichend gross ist). Im nachfolgenden *divergenten* Teil der Düse erfolgt die *Beschleunigung* auf Überschallgeschwindigkeit. Der Druck p_e im Austrittsquerschnitt kann bei Überschallströmung vom Aussendruck p_a abweichen (s. unten).

Diese Form der Geometrie lässt sich gemäss der obigen Betrachtung auch direkt aus der Kontinuitätsgleichung ($\dot{m} = \rho \cdot u \cdot A = \text{const}$) ableiten, wenn man die relative Dichteänderung betrachtet. Im Unterschall überwiegt die Geschwindigkeitszunahme die Dichteabnahme, so dass sich der Querschnitt verengen muss, während im Überschall die Dichteabnahme die Geschwindigkeitszunahme überwiegt, so

dass sich dort der Querschnitt erweitern muss. Für $Ma = 1$ sind relative Dichte- und Geschwindigkeitsänderung betragsmäßig gleich.

Ersetzt man in der Differentialgleichung für die relative Geschwindigkeitsänderung die Geschwindigkeit u durch die Mach-Zahl Ma , so erhält man folgende gewöhnliche Differentialgleichung für die Mach-Zahl $Ma(x)$ bei gegebenem Querschnittsverlauf $A(x)$

$$\frac{dMa}{Ma} = \frac{1 + \frac{\gamma-1}{2}Ma^2}{Ma^2 - 1} \frac{dA}{A}.$$

Diese lässt sich mit der Randbedingung, dass im kritischen Querschnitt A_* (engster Querschnitt der Laval-Düse) Schallzustand vorliegt, integrieren zu der **Flächen-Mach-Zahl-Beziehung**

$$\boxed{\frac{A}{A_*} = \frac{1}{Ma} \left[1 + \frac{\gamma-1}{\gamma+1} (Ma^2 - 1) \right]^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}}$$

$$\text{bzw. } \frac{A}{A_*} = \frac{1}{La} \left[1 - \frac{\gamma-1}{2} (La^2 - 1) \right]^{\frac{-1}{\gamma-1}}$$

(Abbildung 11.7). Die Beziehung lässt sich auch ohne Rückgriff auf die obige Differentialgleichung direkt aus der Kontinuitätsgleichung und den Beziehungen in 11.2 für den isentropen Stromfaden herleiten. Aus $\varrho u A = \varrho_* u_* A_*$ und $u_* = a_*$ folgt

$$\frac{A}{A_*} = \frac{\varrho_* a_*}{\varrho u} = \frac{\varrho_*}{\varrho_0} \cdot \frac{\varrho_0}{\varrho} \cdot \frac{a_*}{u} = \left(\frac{2}{\gamma+1} \right)^{\frac{1}{\gamma-1}} \cdot \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} Ma^2 \right)^{\frac{1}{\gamma-1}} \cdot \frac{1}{La},$$

und mit der in 11.2 hergeleiteten Beziehung

$$\frac{1}{La^2} = \frac{\gamma-1}{\gamma+1} + \frac{1}{\frac{\gamma+1}{2} Ma^2} = \frac{1 + \frac{\gamma-1}{2} Ma^2}{\frac{\gamma+1}{2} Ma^2}$$

schliesslich die Flächen-Mach-Zahl-Beziehung (s. oben).

Denkt man sich die Flächen-Mach-Zahl-Beziehung invertiert, so erkennt man die bemerkenswerte Tatsache, dass die Mach-Zahl $Ma(x)$ allein vom lokalen Flächenverhältnis $A(x)/A_*$ bestimmt ist. Aus den lokalen Werten von Querschnittsfläche und Machzahl lässt sich der kritische Querschnitt A_* des Stromfadens angeben, unabhängig davon, ob dieser im konkreten Fall tatsächlich vorkommt.

Aus der Kontinuitätsgleichung ($\dot{m} = \varrho \cdot u \cdot A = \text{const}$) ist damit auch eine Gleichung für die **Stromdichte** $\dot{m}/A = \varrho \cdot u$ in Abhängigkeit von der Mach-Zahl Ma bzw. der Laval-Zahl La gewonnen:

$$\frac{\varrho u}{\varrho_* u_*} = \frac{A_*}{A} \leq 1.$$

Die Stromdichte erreicht ihren kritischen Wert - welcher zugleich der maximal mögliche ist - also nur am engsten Querschnitt, dem Düsenhals (vgl. Abbildung 11.7).

Schallgeschwindigkeit kann in der Laval-Düse *nur* im engsten Querschnitt auftreten. Sie *muss* jedoch nicht notwendigerweise erreicht werden: auch reine Unterschallströmungen sind bei entsprechenden Ein- und Ausströmbedingungen möglich (vgl. entsprechende Lösungskurven in Abb. 11.6).

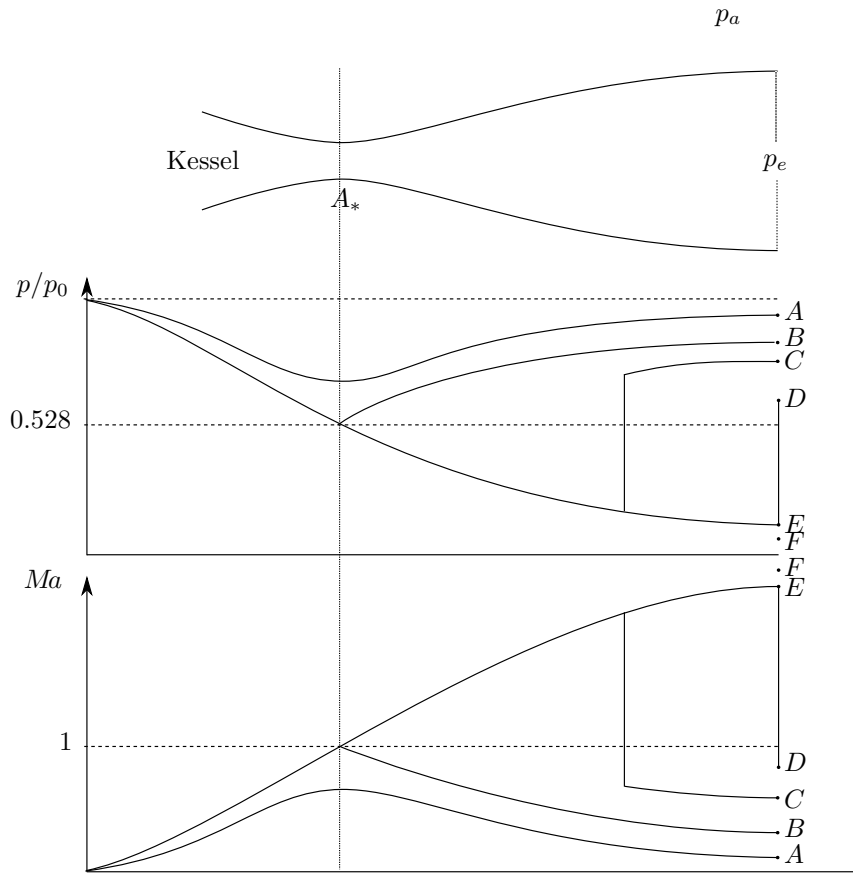


Abbildung 11.6: Strömung in der Laval-Düse. Von oben nach unten: Konturverlauf, Druckverlauf und Machzahlverlauf. A...F markieren den Verlauf des Drucks und der Mach-Zahl bei sukzessiv abgesenktem Aussendruck p_a .

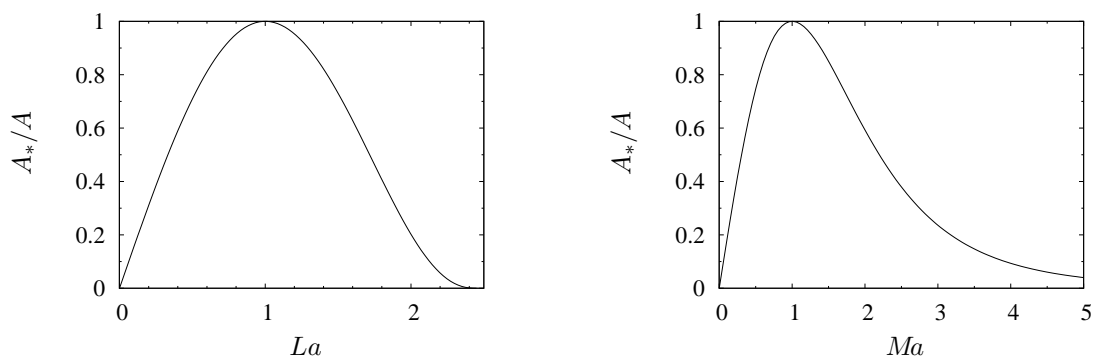


Abbildung 11.7: Flächenverhältnis A_*/A bzw. Stromdichte $\rho u/\rho_* u_*$ als Funktion der Laval-Zahl La bzw. der Mach-Zahl Ma ($\gamma = 1.4$). Tabellenwerte für A/A_* im Anhang E.

Wie bereits oben erläutert, ist für eine Beschleunigung bei Unterschallgeschwindigkeit ($Ma < 1$) eine Querschnittsverengung ($dA < 0$) und bei Überschallgeschwindigkeit ($Ma > 1$) eine Querschnittserweiterung ($dA > 0$) nötig. Im Schallzustand ($Ma = 1$) ist ein konstanter Querschnitt ($dA = 0$) erforderlich.

Das Verhältnis p_0/p_a von Kesseldruck zu Aussendruck beeinflusst die Strömung ganz wesentlich, wie wir noch im Einzelnen diskutieren werden. Einige allgemeine Aussagen über den Verlauf der Lösungskurven $Ma(x)$ (Abbildung 11.6) sind:

- Es sind reine Unterschall-, reine Überschallströmungen und solche mit Schalldurchgang ($Ma = 1$) im engsten Querschnitt möglich.
- Alle im Unterschall beginnenden Kurven gehen durch den Ursprung des Koordinatensystems, der dem Kesselzustand ($u = 0, p = p_0$) entspricht.
- Am engsten Querschnitt ist $du = 0$, solange $Ma \neq 1$ ist ($dA = 0$ in der differentiellen Flächen-Geschwindigkeits-Beziehung).
- Für $Ma = 1$ ist du unbestimmt, mit Ausnahme des engsten Querschnittes. Dort liegt ein Verzweigungspunkt vor: die Lösung kann, je nach Aussendruck p_a , auf zwei verschiedenen Kurven fortschreiten: zurück in den Unterschall, oder weiter beschleunigt auf Überschall.

Hieraus lassen sich dann qualitativ die verschiedenen **Strömungszustände** beschreiben, wie sie **in der Laval-Düse** bei sukzessiver Absenkung des Aussendruckes oder "Gegendruckes" p_a (d.h. des Umgebungsdruckes ausserhalb der Düse) unter den Kesseldruck p_0 auftreten können, (**Fälle A - F**, s. Abb. 11.6). Zu beachten ist, dass der Druck p_e am Ende der Düse in bestimmten Fällen vom vorgegebenen Umgebungsdruck p_a abweicht (siehe unten).

$p_a = p_0$: Gegendruck gleich Kesseldruck, keine Strömung.

$p_a = p_A$: In der ganzen Düse herrscht Unterschallströmung, die höchste Geschwindigkeit liegt im engsten Querschnitt vor, $p_e = p_a$.

$p_a = p_B$: Im engsten Querschnitt wird zum ersten Mal Schallgeschwindigkeit erreicht, aber nicht überschritten; $p_e = p_a$. Der Massenstrom hat sein Maximum erreicht, das bestimmt ist durch den Kesseldruck p_0 und die engste Querschnittsfläche A_* . Er lässt sich auch durch weitere Absenkung von p_a nicht erhöhen: die Düse ist „**gesperrt**“ (choked flow). Die Strömung stromauf vom Düsenhals „reagiert“ nicht mehr auf die Verhältnisse stromab davon.

$p_a = p_C$: Weiteres Absenken des Gegendruckes führt dazu, dass die Strömung zunächst der Lösungskurve durch $Ma = 1$ in den Überschall folgt. Diese würde jedoch auf den zu geringen Druck $p_e = p_E$ am Austritt führen. Eine stetige Lösung ist hier nicht mehr möglich: es kommt zu einem senkrechten Verdichtungsstoss im divergenten Teil der Düse, der die Strömung auf Unterschall verzögert derart, dass in der daran anschliessenden isentropen Strömung der vorgegebene Gegendruck am Ausströmquerschnitt gerade erreicht wird, $p_e = p_C$.

$p_a = p_D$: Bei weiterer Druckabsenkung wandert der Stoss in Richtung Düsenende, für $p_a = p_D$ liegt er am Düsenende, $p_e = p_a$.

$p_E < p_a < p_D$: Ab dem Düsenhals liegt eine isentrope Überschallströmung vor. Der Druck p_e am Düsenende ist gleich p_E und liegt damit unter dem Umgebungsdruck p_a , die Überschallströmung in der Düse reagiert nicht mehr auf die ausserhalb der Düse vorliegenden Bedingungen. Die Düsenströmung wird als „überexpandiert“ bezeichnet. Die Kompression auf p_a erfolgt im Strahl ausserhalb der Düse durch schiefe Verdichtungsstösse (siehe Kap. 11.5), die vom Düsenende ausgehen.

$p_a = p_e = p_E$: Dieser Zustand bezeichnet den Grenzfall der ideal angepassten Laval-Düse: ein paralleler Überschallstrahl tritt aus der Düse aus.

$p_a = p_F, p_e = p_E > p_a$: Ab dem Düsenhals liegt eine isentrope Überschallströmung vor, und bei noch weiterer Druckabsenkung von p_a unter p_E ist die Düsenströmung „unterexpandiert“ und es kommt ausserhalb der Düse zu einer fächerförmigen Expansion des austretenden Strahles (vgl. Kap. 11.6).

Abbildung 11.8 zeigt den qualitativen Verlauf der Strömungsgrößen in einer Laval-Düse für den Fall, dass ein senkrechter Verdichtungsstoss im divergenten Teil auftritt ($p_a = p_C$).

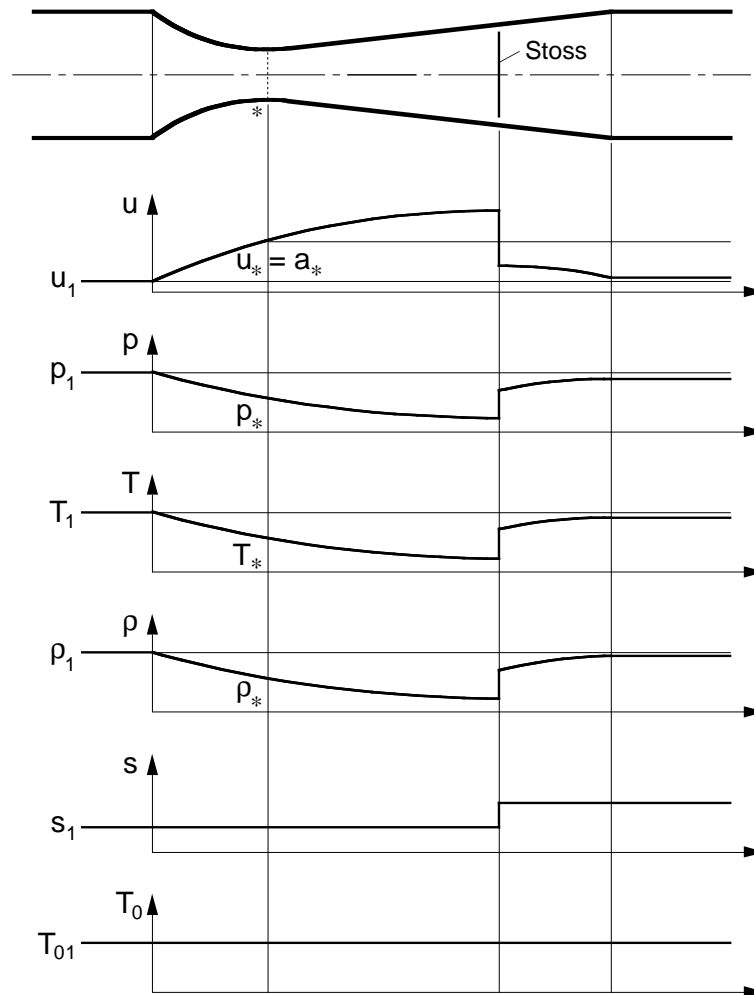


Abbildung 11.8: Verlauf der Strömungsgrößen in einer Laval-Düse im Fall $p_a = p_C$ (nach Schade-Kunz). Der Index „1“ kennzeichnet hier die Werte in der markierten Zuströmebene.

11.5 Schiefer Verdichtungsstoss

Parallele Überschallströmungen können durch Kompression oder Expansion in eine neue Richtung umgelenkt werden. Wir betrachten zunächst die Umlenkung einer parallelen Überschallströmung an einer *konkaven* Ecke, etwa durch eine in den Strömungsweg hineinragende Rampe mit Winkel θ (Abbildung 11.9), oder an einem beiderseits symmetrisch umströmten Keil mit Winkel 2θ . Sie erfolgt durch einen **schiefen Verdichtungsstoss** (oblique shock). Man bezeichnet β als den **Stossfrontwinkel** und θ als den **Umlenkwinkel** der Strömung. Stets ist $\beta > \theta$.

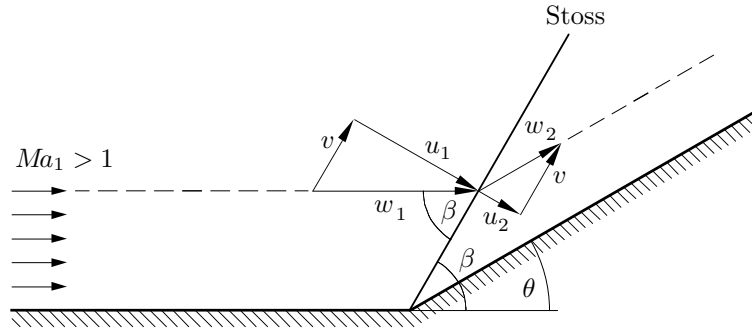


Abbildung 11.9: Schiefer Verdichtungsstoss an einer Rampe

Durch folgende Überlegungen können die Stosslösungen für den schiefen Verdichtungsstoss sofort aus den Lösungen für den senkrechten Stoss gewonnen werden. Stellt man sich einen senkrechten Stoss, der im Rahmen der hier gültigen Stromfadentheorie unendlich ausgedehnt ist, mit einer konstanten Tangentialgeschwindigkeitskomponente v überlagert vor, so sagt die Galilei-Invarianz der Grundgleichungen, dass die Lösung im parallel zum Stoss bewegten System dieselbe ist wie diejenige im ruhenden System, bis auf die konstante Translationsgeschwindigkeit parallel zum Stoss. Mit Hilfe einfacher geometrischer Beziehungen lassen sich die Stosslösungen für den senkrechten Verdichtungsstoss dann übertragen, wie nachfolgend angegeben. Eigenschaften des schiefen Verdichtungsstosses sind dem zufolge:

- Die einzelnen Stromlinien werden an der Stossfront sprunghaft um den Winkel θ umgelenkt und laufen dahinter in der neuen Richtung parallel (in Richtung der abgelenkten Wand in Abb. 11.9) weiter. Vor dem Stoss und nach dem Stoss sind die Strömungsgrößen jeweils konstant (Parallelströmung).
- Die zur Stossfront parallele *Tangentiale Komponente* v der Geschwindigkeit bleibt über den Stoss hinweg *unverändert* (w bezeichnet den Geschwindigkeitsbetrag in der jeweiligen Stromlinienrichtung).
- Die *Normalkomponente* u der Geschwindigkeit ändert sich über die Stossfront *gemäss* den Gesetzen für den *senkrechten Verdichtungsstoss*.
- Für die Zustandsänderung des Gases über den Stoss hinweg ist nur die Normalkomponente u der Geschwindigkeit massgeblich.

Zustände vor und nach dem Stoss werden wieder mit den Indizes „1“ und „2“ gekennzeichnet. Die Mach-Zahlen der Strömung vor und nach dem Stoss sind dementsprechend

$$Ma_1 = \frac{w_1}{a_1}, \quad Ma_2 = \frac{w_2}{a_2}.$$

Hinter einem schiefen Verdichtungsstoss ist, im Gegensatz zum senkrechten Verdichtungsstoss, auch Überschallgeschwindigkeit ($Ma_2 > 1$) möglich. Man definiert die **Normalen-Mach-Zahlen** vor und nach dem Stoss gemäss

$$\begin{aligned} Ma_{n1} &= \frac{u_1}{a_1} = Ma_1 \sin \beta \quad (> 1), \\ Ma_{n2} &= \frac{u_2}{a_2} = Ma_2 \sin(\beta - \theta) \quad (stets < 1). \end{aligned}$$

Die Stosslösungen in Abhängigkeit von der Normalen-Mach-Zahl Ma_{n1} erhält man, indem man in den Beziehungen für den senkrechten Stoss aus Kapitel 11.3 Ma_1 durch Ma_{n1} ersetzt. Sie lauten also:

$$\begin{aligned}\frac{u_2}{u_1} &= \frac{2}{\gamma+1} \frac{1}{Ma_{n1}^2} + \frac{\gamma-1}{\gamma+1} \\ \frac{\rho_2}{\rho_1} &= \frac{u_1}{u_2} = \left(\frac{2}{\gamma+1} \frac{1}{Ma_{n1}^2} + \frac{\gamma-1}{\gamma+1} \right)^{-1} \\ \frac{p_2}{p_1} &= \frac{2\gamma}{\gamma+1} Ma_{n1}^2 - \frac{\gamma-1}{\gamma+1} \\ \frac{T_2}{T_1} &= \left(\frac{2\gamma}{\gamma+1} Ma_{n1}^2 - \frac{\gamma-1}{\gamma+1} \right) \left(\frac{2}{\gamma+1} \frac{1}{Ma_{n1}^2} + \frac{\gamma-1}{\gamma+1} \right).\end{aligned}$$

Der senkrechte Verdichtungsstoss ordnet sich als der Sonderfall $\theta = 0^\circ$, $\beta = 90^\circ$ ein.

Aus der Beziehung zwischen den Normalkomponenten u_1 und u_2 vor und nach dem senkrechten Stoss und trigonometrischen Beziehungen erhält man die „ θ - β -Ma-Relation“ (s. Kundu et al.),

$$\tan \theta = 2 \frac{Ma_1^2 \sin^2 \beta - 1}{Ma_1^2 (\gamma + \cos 2\beta) + 2} \cot \beta.$$

Diese Beziehung wird im sogenannten **Stosstdiagramm** (in Abbildung 11.10 für die Mach-Zahlen $Ma_1 = 1.1, 1.5, 2, 3, 4$ und ∞) graphisch dargestellt. Daraus lassen sich eine Reihe von Eigenschaften ablesen:

- Für jede Mach-Zahl Ma_1 gibt es einen **maximalen Umlenkwinkel** θ_{\max} , der mit der Mach-Zahl Ma_1 ansteigt. Der grösstmögliche Umlenkwinkel für $Ma_1 \rightarrow \infty$ liegt bei $\theta_{\max} \approx 45^\circ$. Ist der geometrische Keilwinkel grösser als $\theta_{\max}(Ma_1)$, so existiert kein geradliniger schiefer Verdichtungsstoss, sondern der Stoss ist gekrümmt und vom Körper abgehoben (detached shock). Dies trifft generell für stumpfe Körper in Überschallanströmung zu, wo der effektive lokale „Keilwinkel“ im Staupunkt 90° beträgt.
- Für jeden Umlenkwinkel $\theta < \theta_{\max}$ gibt es **zwei** mögliche Stosswinkel β . Die zum grösseren β gehörige Lösung wird als **starke Lösung** (strong shock solution), die zum kleineren β als **schwache Lösung** (weak shock solution) bezeichnet. Welche Lösung sich einstellt, hängt vom Druck hinter dem Stoss ab (starke Lösung bei höherem Druck). In den meisten Fällen tritt die schwache Lösung auf, die geringere Änderungen über den Stoss hinweg als die starke Lösung aufweist. Im Grenzfall $\theta = 0$ mit verschwindender Umlenkung ist entweder $\beta = 90^\circ$ und die (starke) Lösung entspricht dem senkrechten Stoss, oder (schwache Lösung) β ist gleich dem Machschen Winkel, $\sin \beta = 1/Ma_1$. (Der **Machsche Winkel** definiert den Machschen Kegel, der die Einhüllende für die Wellenfronten bei der Ausbreitung kleiner Störungen ausgehend von einer punktförmigen Störquelle - Schallwellen - bildet).
- Für die starke Lösung ist $Ma_2 < 1$ wie beim senkrechten Stoss, für die schwache Lösung bleibt die Strömung im Überschall ($Ma_2 > 1$), ausser für einen kleinen Streifen nahe der Kurve $\theta = \theta_{\max}$.
- Wird die Anström-Mach-Zahl $Ma_1 > 1$ bei festgehaltenem Keilwinkel θ abgesenkt, so steigt der Stossfrontwinkel β (im gewöhnlich vorliegenden Fall der schwachen Lösung) an, bis der Wert Ma_1 mit $\theta_{\max}(Ma_1) = \theta$ erreicht ist. Bei noch weiterer Absenkung von Ma_1 existiert keine Lösung mehr, und der Stoss hebt vom Keil ab, wie bereits erwähnt.

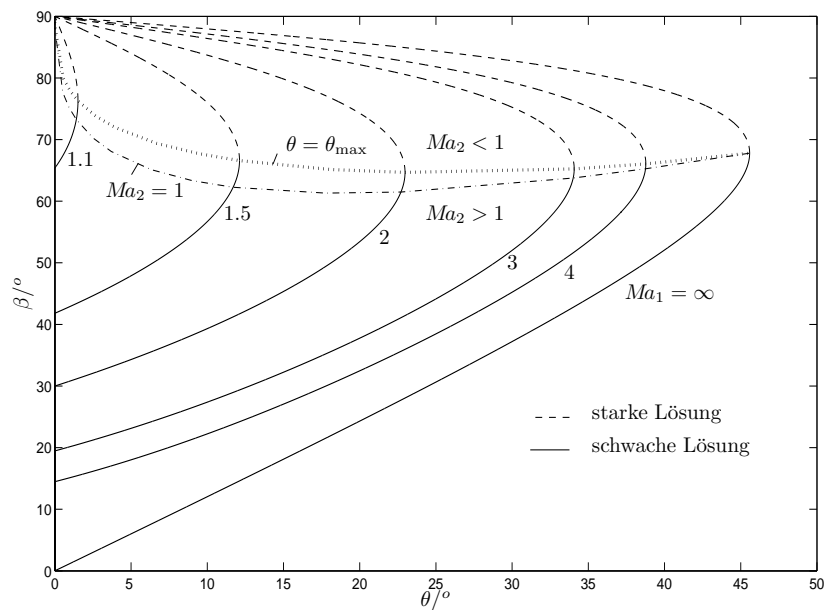


Abbildung 11.10: Stosssdiagramm für den schiefen Verdichtungsstoss mit Umlenkwinkel θ , Stossfrontwinkel β , Mach-Zahlen Ma_1 vor bzw. Ma_2 hinter dem Stoss und maximalem Umlenkwinkel θ_{\max} . Darstellung mit feinerer Auflösung in Anhang E.

11.6 Prandtl-Meyer-Expansion

Das „Gegenstück“ zur Umlenkung der Überschallströmung durch einen schiefen Verdichtungsstoss ist die Umlenkung an einer *konvexen* Ecke durch die sogenannte **Prandtl-Meyer-Expansion**, Abb. 11.11.

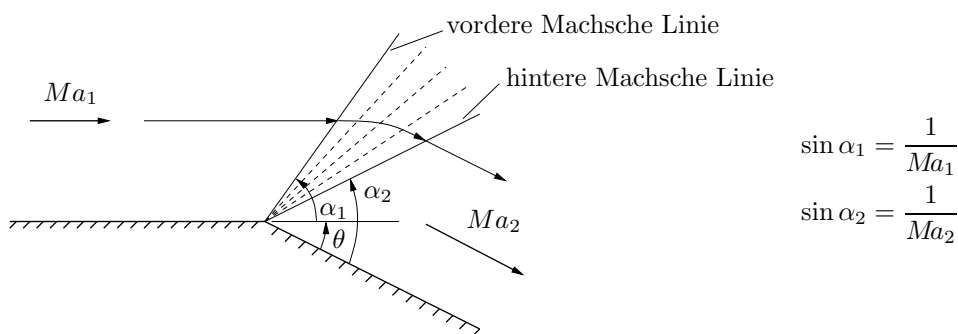


Abbildung 11.11: Prandtl-Meyer-Expansion an einer konvexen Ecke

Die Eigenschaften der Prandtl-Meyer-Expansion sind in Stichworten:

- Gegenstück zum schiefen Verdichtungsstoss; $Ma_2 > Ma_1$, $p_2 < p_1$, $\rho_2 < \rho_1$, $T_2 < T_1$. Die Überschallströmung wird durch die Expansion auf eine höhere Machzahl beschleunigt.
- Es liegt eine im Eckpunkt zentrierte Expansion vor („Expansionsfächer“), die aus einer kontinuierlichen Folge von Machschen Wellen zwischen den beiden durch Ma_1 und Ma_2 bestimmten

Machschen Winkeln α_1 und α_2 (s. Abb. 11.12) besteht. Die Zustände sind längs jeder Machschen Linie des Fächers konstant, ändern sich aber von Linie zu Linie: die Strömung expandiert kontinuierlich von Ma_1 auf Ma_2 . Im Eckpunkt liegt demzufolge eine Singularität vor.

- Jede Machsche Welle innerhalb des zentrierten Expansionsfächers lenkt die Strömung um einen differentiellen Winkel $d\theta$ um. Dieser Vorgang ist stetig und isentrop. Eine Stromlinie durch den Fächer ist stetig gekrümmt.
- Stromab der hinteren Machschen Linie liegt wieder eine zur Wand (Wandstromlinie) parallele Überschallströmung vor.

Durch geometrische Überlegungen (z.B. Kundu et al. [8] Kap. 15.9) lässt sich folgende Beziehung zwischen dem differentiellen Winkel $d\theta$ und der differentiellen Änderung dMa der Mach-Zahl herleiten:

$$d\theta = \frac{\sqrt{Ma^2 - 1}}{1 + \frac{\gamma-1}{2}Ma^2} \frac{1}{Ma} dMa = \frac{d}{dMa} \nu(Ma) \cdot dMa,$$

wobei $\nu(Ma)$ die **Prandtl-Meyer-Funktion**

$$\begin{aligned} \nu(Ma) &:= \int_1^{Ma} \frac{\sqrt{M^2 - 1}}{1 + \frac{\gamma-1}{2}M^2} \frac{dM}{M} \\ &= \sqrt{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} \cdot \arctan \sqrt{\frac{\gamma-1}{\gamma+1}(Ma^2 - 1)} - \arctan \sqrt{Ma^2 - 1} \end{aligned}$$

bezeichnet. Ihr Verlauf ist in Abb. 11.12 darstellt. Sie ist monoton steigend und somit umkehrbar eindeutig. Durch Integration zwischen den Zuständen „1“ und „2“ vor und nach der Expansion erhält man also mit $\theta = \theta_1 - \theta_2$

$$\theta = \nu(Ma_2) - \nu(Ma_1).$$

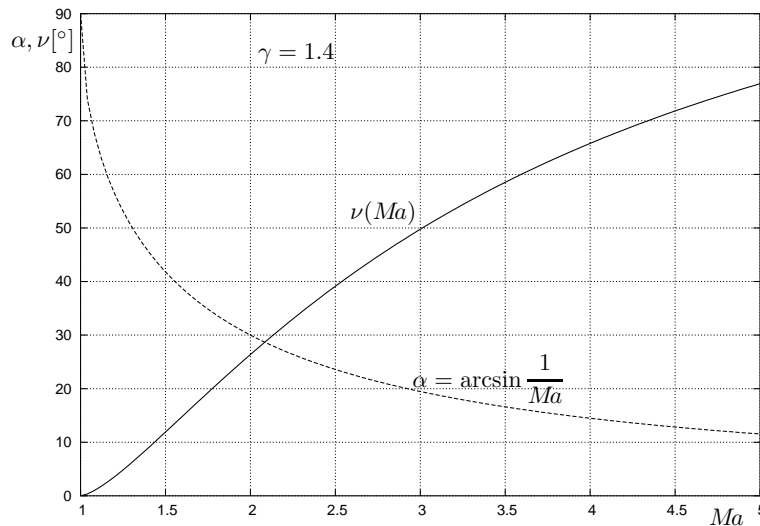


Abbildung 11.12: Machscher Winkel α und Prandtl-Meyer-Funktion $\nu(Ma)$, $\gamma = 1.4$. Tabellenwerte in Anhang E.

Der **Prandtl-Meyer-Winkel** $\theta = \nu(Ma_2) - \nu(Ma_1)$ ist derjenige Winkel, um den eine Überschallströmung mit Mach-Zahl Ma_1 umgelenkt werden muss, um sie auf die Mach-Zahl Ma_2 zu beschleunigen.

Für $Ma \geq 1$ existiert immer ein eindeutig definierter Wert für ν . Dieser strebt für $Ma \rightarrow \infty$ monoton gegen

$$\nu_{\max} = \frac{\pi}{2} \left(\sqrt{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} - 1 \right) =_L 130.5^\circ.$$

(Allerdings ist das Modell des idealen Gases i. a. nur für $Ma \leq 5$ anwendbar.)

Für das Druck- bzw. Temperaturverhältnis über die Expansion erhält man entsprechend den Beziehungen für den isentropen Stromfaden

$$\frac{p_2}{p_1} = \left(\frac{1 + \frac{\gamma-1}{2} Ma_1^2}{1 + \frac{\gamma-1}{2} Ma_2^2} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}, \quad \frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{1 + \frac{\gamma-1}{2} Ma_1^2}{1 + \frac{\gamma-1}{2} Ma_2^2} \right).$$

Die in Abb. 11.11 dargestellte Strömung, die ja isentrop ist, kann auch in *umgekehrter Richtung* durchlaufen werden. Sie beschreibt dann eine allmähliche, stossfreie **isentropen Kompression** an einer - durch die Auswahl einer Stromlinie definierten - stetig gekrümmten Wand (Anwendung bei isentropen Einlaufdiffusoren für Triebwerke von Überschallflugzeugen). Denkt man die umgekehrte Parallelströmung auch unterhalb der abgelenkten Wand fortgesetzt, so erhält man dort wieder den von der Ecke ausgehenden schiefen Verdichtungsstoss.

Aus den beiden Bausteinen „Schiefer Verdichtungsstoss“ und „Prandtl-Meyer-Expansion“ lassen sich ebene Überschallströmungen um einfache Konfigurationen zusammensetzen (sogenannte „shock-expansion-theory“). Für die Überschallströmung um dünne Profile bei kleinen Anstellwinkeln hat J. Ackeret 1925 eine linearisierte Theorie entwickelt, die auf einfache analytische Ausdrücke für Widerstand und Auftrieb führt (Ackeret-Formeln).

Beispiel: Angestellte Platte in Überschallströmung

Wir betrachten eine mit *kleinem* Winkel α angestellte Platte in Überschallströmung $Ma_\infty > 1$ (vgl. Kundu et al. [8] Kap. 15). Die von der Vorder- und Hinterkante ausgehende Umlenkung der Strömung erfolgt durch schiefe Verdichtungsstöße bzw. Prandtl-Meyer-Expansionsfächer (siehe Abbildung 11.13).

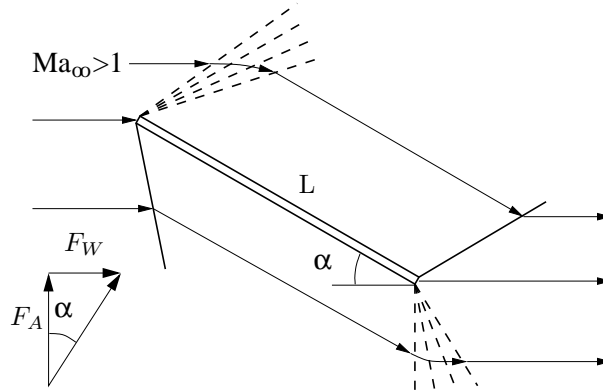


Abbildung 11.13: Angestellte Platte in Überschallströmung

Durch Analyse der Druckverläufe auf beiden Seiten der Platte ergeben sich die wirkenden Kräfte, Auftrieb F_A und Widerstand F_W , dimensionslos (mit $L \cdot b = \text{Fläche der Platte}$) zu

$$\begin{aligned} c_A &= \frac{F_A}{\frac{\rho}{2} u_\infty^2 L b} = \frac{4\alpha}{\sqrt{Ma_\infty^2 - 1}}, \\ c_W &= \frac{F_W}{\frac{\rho}{2} u_\infty^2 L b} = \frac{4\alpha^2}{\sqrt{Ma_\infty^2 - 1}}, \end{aligned} \quad , \quad Ma_\infty > 1, \quad \alpha \ll 1.$$

In einer reibungsfreien *Überschallströmung* ergibt sich für eine angestellte Platte also (wie auch für allgemeinere umströmte Körper) ein *endlicher Widerstand*, $c_W \neq 0$. Dieser Widerstand wird als **Wellenwiderstand** (engl. wave drag) bezeichnet. Die Arbeitsleistung durch diesen Widerstand entspricht der Entropieerhöhung in den mit der Umströmung verbundenen Verdichtungsstößen. Es besteht eine Analogie zum Wellenwiderstand eines Schiffs, das schneller als die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Oberflächenwellen fährt und so ein System von Bugwellen mit sich zieht. Der Wellenwiderstand tritt zu den übrigen Widerstandsanteilen wie Reibungswiderstand, Druckwiderstand durch Strömungsablösung und induziertem Widerstand hinzu, weshalb der Überschallflug eine wesentlich höhere Antriebsleistung erfordert.

11.7 Einfluss der Reibung

Zum Abschluss dieses Kapitels sei noch auf den bisher vernachlässigten Einfluss der Reibung in kompressiblen Strömungen eingegangen, und zwar exemplarisch für zwei einfache Fälle einer Aussenströmung (Grenzschicht) und einer Innenströmung (Rohr). Wegen der Reibungsverluste ist die Strömung zwar nicht mehr isentrop, sie lässt sich aber ähnlich behandeln wie zuvor im isentropen Fall.

Kompressible Grenzschichtströmung

An umströmten Körpern bilden sich in einer realen Strömung aufgrund der Haftbedingung an der Wand Grenzschichten aus. Analog zum inkompressiblen Fall werden die kompressiblen Grenzschichtgleichungen durch Vereinfachungen aus den Navier-Stokes-Gleichungen abgeleitet. Der Druck wird der Grenzschicht von aussen aufgeprägt und ist somit konstant über die Grenzschicht ($\frac{\partial p}{\partial y} = 0$, $p = p(x)$). Neu muss bei kompressibler Strömung die Temperaturabhängigkeit der Viskosität $\mu(T)$ berücksichtigt werden.

Die Aussenströmungsdaten $u_e(x)$, $p_e(x)$, $T_e(x)$ können, solange die Grenzschicht nicht ablöst, reibungsfrei berechnet werden durch Lösen der Euler-Gleichung oder ggf. als Potentialströmung. Die differentiellen **Erhaltungsgleichungen** für Masse, x -Impuls und Energie in der laminaren **Grenzschicht** lauten (stationär):

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x}(\varrho u) + \frac{\partial}{\partial y}(\varrho v) &= 0 \\ \varrho u \frac{\partial u}{\partial x} + \varrho v \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial y} \right) \\ \varrho u \frac{\partial h}{\partial x} + \varrho v \frac{\partial h}{\partial y} &= u \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\mu}{Pr} \frac{\partial h}{\partial y} \right) + \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2.\end{aligned}$$

Die Viskosität gehorcht dem Sutherlandschen Gesetz

$$\mu(T) = \frac{AT^{3/2}}{T+S}$$

mit den empirischen Konstanten A und S ,

$$A = 1.46 \cdot 10^{-6} \frac{\text{kg}}{\text{m} \cdot \text{s} \cdot \text{K}^{1/2}}, \quad S = 110.3\text{K}, \quad \text{für Luft}.$$

$Pr = c_p \mu / \lambda$ ist die Prandtl-Zahl. Die **Randbedingungen** werden an der Oberfläche des umströmten

Körpers ($y = 0$) sowie am Grenzschichtrand ($y = \delta$) gestellt:

$$u = u_e, \quad T = T_e \quad \text{für} \quad y = \delta$$

$$\left. \begin{array}{l} u = v = 0 \\ T = T_w \text{ oder } \frac{\partial T}{\partial y} = -\frac{q_w}{\lambda} \end{array} \right\} \quad \text{für} \quad y = 0,$$

wobei λ die Wärmeleitfähigkeit und q_w eine vorgegebene Wandwärmestromdichte bezeichnet.

Abbildung 11.14 skizziert die Situation bei wärmeisolierter Wand für die Prandtl-Zahl $Pr = 1$. Für diesen Fall kann man nach *Crocco und Busemann* zeigen, dass die Energie $c_p T + u^2/2$ auch über die Grenzschicht hinweg konstant ist (wie bereits entlang einer aus der reibungsfreien Anströmung kommenden Stromlinie am Grenzschichtrand), also

$$T(y) + \frac{u(y)^2}{2c_p} = \text{const} = T_e + \frac{u_e^2}{2c_p} = T_\infty + \frac{u_\infty^2}{2c_p} = T_0. \quad (11.3)$$

Die „**Recovery-Temperatur**“ (Temperatur der wärmeisolierten Wand) T_r ist also gleich der Ruhe- oder Staupunkttemperatur,

$$T_r = T_e + \frac{u_e^2}{2c_p} = T_0 \quad (Pr = 1). \quad (11.4)$$

Für Prandtl-Zahlen $Pr \neq 1$, aber in der Nähe von 1 (wie bei Gasen der Fall) gilt die Näherungsformel

$$T_r = T_e + r \cdot \frac{u_e^2}{2c_p} \quad (11.5)$$

mit $r \approx Pr^{1/2}$ für eine laminare und $r \approx Pr^{1/3}$ für eine turbulente Grenzschicht. Die Wandtemperatur der stationären Grenzschicht stellt sich gerade so ein, dass die in der Grenzschicht durch Dissipation erzeugte Wärme mittels Konvektion und Wärmeleitung nach aussen transportiert wird, Abb. 11.14.

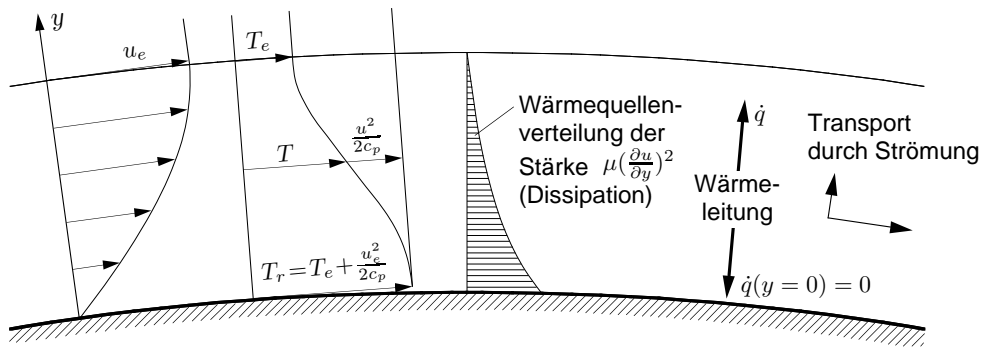


Abbildung 11.14: Geschwindigkeits - und Temperaturverlauf in einer kompressiblen Grenzschicht mit adiabater Wand, $Pr = 1$.

Abbildung 11.15 zeigt den Verlauf von Geschwindigkeit u und Temperatur T in einer kompressiblen *laminaren* Grenzschicht ohne Druckgradienten für den Spezialfall einer adiabaten Wand ($q_w = 0$ und damit $\frac{\partial T}{\partial y} = 0$ bei $y = 0$) bei drei verschiedenen Mach-Zahlen. Wegen der Energiedissipation steigt die Temperatur zur Wand hin mit zunehmender Mach-Zahl auf ein Mehrfaches der Aussentemperatur T_e am Grenzschichtrand an.

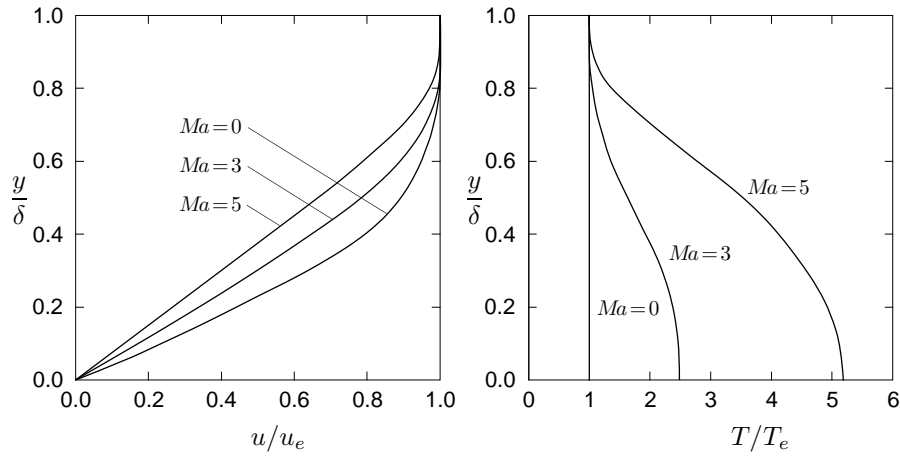


Abbildung 11.15: Verlauf von Geschwindigkeit u und Temperatur T in einer kompressiblen laminaren Grenzschicht an einer adiabaten Wand bei verschiedenen Mach-Zahlen und $Pr = 0.72$ (nach Wilcox [26]).

Für das mittlere *turbulente* Geschwindigkeitsprofil erhält man weiterhin das bekannte logarithmische Wandgesetz, wenn man bei der Mittelwertbildung mit der lokalen Dichte gewichtet (sog. Favre-Mittel) und zur Bildung der universellen Variablen die Dichte und Viskosität an der Wand verwendet. Für eine ausführlichere Behandlung kompressibler Grenzschichten sei hier auf Wilcox [26], Kap. 15.6, White [28], Kap. 7 oder Schlichting & Gersten [19] verwiesen.

Fanno-Strömung

In Strömungskanälen verändert die Haftreibung (Wandschubspannung) den Strömungsverlauf. Der Spezialfall einer *eindimensionalen, stationären, adiabaten, reibungsbehafteten* Strömung in einem Rohr bzw. einer Leitung (engl. duct) mit einem in Strömungsrichtung *konstanten* Querschnitt A von beliebiger Form, bei der die Wirkung der Wandschubspannung τ_w pauschal durch einen Kraftterm in der Impulsgleichung repräsentiert wird, wird als **Fanno-Strömung** bezeichnet (Abb. 11.16). Die Strömungsgrößen werden als über den Querschnitt gemittelt (und somit konstant) angesehen. Die Strömung ist adiabatisch, wegen der Reibungsverluste aber nicht mehr isentrop.

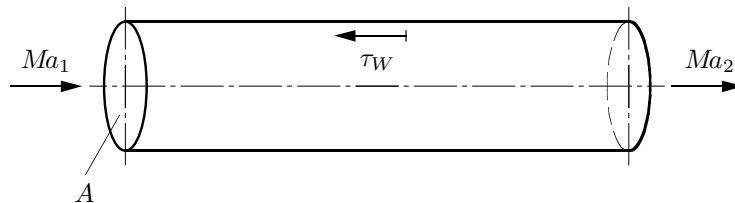


Abbildung 11.16: Reibungsbehaftete Strömung im Rohr

Für eine kurze Diskussion der Ergebnisse der Fanno-Strömung sei auf Kundu et al. [8] Kap. 15.8, für eine ausführlichere Herleitung auf Wilcox [26], Kap. 15.2 oder Anderson [1] verwiesen.

Aus der Konstanz der Totalenthalpie $h_0 = c_p T_0 = c_p T + u^2/2$ folgt für die Änderung in Strömungsrichtung x

$$\frac{dh}{dx} = \frac{\gamma Ma^2}{Ma^2 - 1} T \frac{ds}{dx}. \quad (11.6)$$

Da nach dem 2. Hauptsatz die Entropie nicht abnehmen kann, muss die Enthalpie $h = c_p T$ in Strömungsrichtung bei Überschallströmung zunehmen und bei Unterschall abnehmen. Dementsprechend wird die Überschallströmung verzögert und die Unterschallströmung beschleunigt, damit die Totalenthalpie jeweils konstant bleibt. Dieser Verlauf lässt sich gut am **Mollier-Diagramm** (h über s aufgetragen) verfolgen, Abb. 11.17. Die eingezeichnete **Fanno-Kurve**¹ beschreibt einen typischen Verlauf von $h(s)$ für eine Fanno-Strömung. Die Fanno-Kurve für einen gegebenen Querschnitt A , Massenstrom \dot{m} und eine Totalenthalpie h_0 erhält man durch Einsetzen der Kontinuitätsgleichung $u = \dot{m}/(\rho A)$ in die Energiegleichung,

$$h + \frac{u^2}{2} = h + \frac{1}{2\rho^2} \left(\frac{\dot{m}}{A} \right)^2 = h_0, \quad (11.7)$$

und Verwendung der Zustandsgleichung. Sie hat einen unteren (Überschall-) Ast mit $dh > 0$ und $du < 0$ und einen oberen (Unterschall-) Ast mit $dh < 0$ und $du > 0$, die durch den kritischen Punkt ($Ma = 1$) getrennt sind, wo die Entropie ihr Maximum annimmt. Auf beiden Ästen kann sich die Strömung nur in Richtung auf den kritischen Punkt hin bewegen ($ds > 0$).

Die thermodynamischen Grössen, bezogen auf kritische Grössen der reibungsbehafteten Rohrströmung (die definitionsgemäss im kritischen Punkt bei $Ma = 1$ auftreten), ergeben sich für die Fanno-Strömung als Funktion der lokalen Mach-Zahl Ma zu

$$\begin{aligned} \frac{p}{p_*} &= \frac{1}{Ma} \left[\frac{\gamma + 1}{2 + (\gamma - 1)Ma^2} \right]^{\frac{1}{2}} \\ \frac{\rho}{\rho_*} &= \frac{1}{Ma} \left[\frac{2 + (\gamma - 1)Ma^2}{\gamma + 1} \right]^{\frac{1}{2}} \\ \frac{T}{T_*} &= \frac{\gamma + 1}{2 + (\gamma - 1)Ma^2} \\ \frac{p_0}{p_{0*}} &= \frac{1}{Ma} \left[\frac{2 + (\gamma - 1)Ma^2}{\gamma + 1} \right]^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}}. \end{aligned}$$

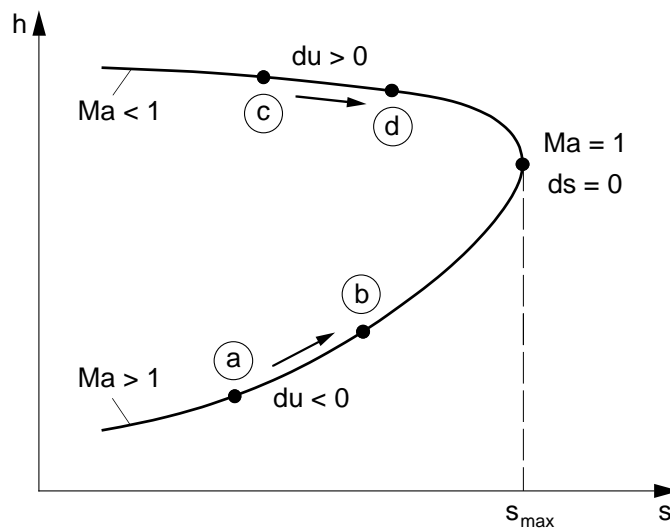


Abbildung 11.17: Fanno-Kurve im Mollier-Diagramm

¹Nach G. Fanno, Diplomarbeit an der ETH Zürich, 1904

Wir unterscheiden die beiden Fälle der Überschall- und Unterschalleinströmung.

- **Überschalleinströmung** ($Ma_1 > 1$):

Die Einströmung sei durch die Bedingungen (Ma_1 usw.) im Punkt a in Abb. 11.17 gegeben. Jeder Punkt auf dem Lösungsast, etwa der Punkt b , entspricht einer bestimmten Lauflänge x bzw. Rohrlänge L . Die Mach-Zahl Ma_2 der Strömung im Rohr nimmt ab mit zunehmender Lauflänge, bis sie - wenn das Rohr lang genug ist - $Ma_2 = 1$ erreicht (gesperrte Strömung bei der kritischen Länge L_*); Druck, Dichte und Temperatur nehmen in Strömungsrichtung zu. Es ist somit

$$Ma_2 < Ma_1, \quad u_2 < u_1, \quad p_2 > p_1, \quad T_2 > T_1, \quad \varrho_2 > \varrho_1.$$

Die Strömung kann nicht über die durch die Einströmbedingungen bestimmte kritische Länge L_* hinaus fortgeführt werden, ohne diese Einströmbedingungen zu verändern, d.h. sie entsprechend einem Punkt links vom Punkt a auf der Lösungskurve anzupassen. Würde das Rohr über L_* hinaus verlängert und die Einströmbedingungen würden nicht angepasst, so würde die Strömung über einen senkrechten Stoss (unter Entropiezunahme) in den Unterschall (oberer Lösungsast, etwa zum Punkt d) springen.

- **Unterschalleinströmung** ($Ma_1 < 1$):

Hier befinden wir uns auf dem oberen Lösungsast, etwa beginnend im Punkt c . Die Mach-Zahl Ma_2 der Strömung nimmt mit zunehmender Lauflänge zu, bis der Wert $Ma_2 = 1$ erreicht und die Strömung gesperrt ist, wenn das Rohr lang genug ist. Es gilt nun

$$Ma_2 > Ma_1, \quad u_2 > u_1, \quad p_2 < p_1, \quad T_2 < T_1, \quad \varrho_2 < \varrho_1.$$

Interessanterweise geht also die Hinzunahme der Reibung hier mit einer Beschleunigung der Strömung einher, entgegen unserer Erwartung, dass generell die Reibung eine Strömung abbremst. Die Erklärung liegt darin, dass zur Überwindung des Reibungswiderstands ein Druckabfall in Strömungsrichtung vorliegen muss, und dessen beschleunigende Wirkung über die verzögernde Wirkung der Reibung dominiert.

Zusammengefasst: Die *Reibung verzögert* eine *Überschall-* und *beschleunigt* eine *Unterschallströmung* im Rohr konstanten Querschnitts und treibt so die Strömung stets in Richtung $Ma = 1$. Die beiden Äste der Fanno-Kurve in Abb. 11.17 sind strikt getrennt. Es ist nicht möglich, über den kritischen Punkt ($s = s_{\max}$, $Ma = 1$) hinweg vom einen Ast auf den anderen zu gelangen - dies würde den 2. Hauptsatz verletzen.

Zum Abschluss sei erwähnt, dass eine kompressible Strömung durch ein Rohr konstanten Querschnitts ähnlich wie durch Reibung auch durch *Wärmezufuhr* verändert werden kann (sogenannte *Rayleigh-Strömung*, *Rayleigh-Kurve* im Mollier-Diagramm), wobei ganz analoge Phänomene auftreten wie gerade für die Fanno-Strömung besprochen (siehe die oben für die Fanno-Strömung angegebene Literatur).

Anhang A

Grundlagen der Vektor- und Tensoralgebra

A.1 Einsteinsche Summenkonvention

Komponenten der Vektoren werden mit Indizes geschrieben, wobei gilt, daß über einen Index, der in einem Term zweimal vorkommt, summiert werden muss.

Beispiele:

- $u_{ii} = u_{11} + u_{22} + u_{33}$

- Laplace-Operator eines Skalars:

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial a}{\partial x_i} = \frac{\partial^2 a}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 a}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 a}{\partial x_3^2} = \Delta a$$

- Vektorprodukt:

$$\underline{u} \times \underline{v} = \epsilon_{ijk} u_j v_k$$

wobei ϵ_{ijk} die folgenden Eigenschaften hat:

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{falls } ijk = 123, 231 \text{ oder } 312 \\ 0 & \text{falls zwei Indizes identisch sind} \\ -1 & \text{falls } ijk = 321, 213 \text{ oder } 132 \end{cases}$$

A.2 Differentialoperatoren

Nabla-Operator

In kartesischen Koordinaten $\underline{x} = (x, y, z)^T$

$$\underline{\nabla} = \underline{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \underline{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \underline{e}_z \frac{\partial}{\partial z}$$

In Zylinderkoordinaten $\underline{x} = (r, \theta, x)^T$

$$\underline{\nabla} = \underline{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \underline{e}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \underline{e}_x \frac{\partial}{\partial x}$$

Divergenz eines Vektors

$$\text{div } \underline{u} \equiv \underline{\nabla} \cdot \underline{u}$$

In kartesischen Koordinaten $\underline{x} = (x, y, z)^T$

$$\underline{\nabla} \cdot \underline{u} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}$$

In Zylinderkoordinaten $\underline{x} = (r, \theta, x)^T$

$$\underline{\nabla} \cdot \underline{u} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r u_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial u_x}{\partial x}$$

Gradient eines Skalars

$$\text{grad } a \equiv \underline{\nabla} a$$

In kartesischen Koordinaten $\underline{x} = (x, y, z)^T$

$$\underline{\nabla} a = \underline{e}_x \frac{\partial a}{\partial x} + \underline{e}_y \frac{\partial a}{\partial y} + \underline{e}_z \frac{\partial a}{\partial z}$$

In Zylinderkoordinaten $\underline{x} = (r, \theta, x)^T$

$$\underline{\nabla} a = \underline{e}_r \frac{\partial a}{\partial r} + \underline{e}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial a}{\partial \theta} + \underline{e}_x \frac{\partial a}{\partial x}$$

Rotation eines Vektorfeldes

$$\text{rot } \underline{u} \equiv \underline{\nabla} \times \underline{u}$$

In kartesischen Koordinaten $\underline{x} = (x, y, z)^T$

$$\underline{\nabla} \times \underline{u} = \underline{e}_x \left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) + \underline{e}_y \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \underline{e}_z \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right)$$

In Zylinderkoordinaten $\underline{x} = (r, \theta, x)^T$

$$\underline{\nabla} \times \underline{u} = \underline{e}_r \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_x}{\partial \theta} - \frac{\partial u_\theta}{\partial x} \right) + \underline{e}_\theta \left(\frac{\partial u_r}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial r} \right) + \underline{e}_x \left(\frac{1}{r} \left[\frac{\partial(r u_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right] \right)$$

Laplace-Operator angewendet auf einen Skalar

$$\Delta a \equiv \underline{\nabla}^2 a$$

In kartesischen Koordinaten $\underline{x} = (x, y, z)^T$

$$\underline{\nabla}^2 a = \frac{\partial^2 a}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 a}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 a}{\partial z^2}$$

In Zylinderkoordinaten $\underline{x} = (r, \theta, x)^T$

$$\underline{\nabla}^2 a = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial a}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 a}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 a}{\partial x^2}$$

Advektive / Konvektive Ableitung eines Skalars

$$\underline{u} \cdot \text{grad } a \equiv (\underline{u} \cdot \underline{\nabla}) a$$

In kartesischen Koordinaten $\underline{x} = (x, y, z)^T$

$$(\underline{u} \cdot \underline{\nabla}) a = u \frac{\partial a}{\partial x} + v \frac{\partial a}{\partial y} + w \frac{\partial a}{\partial z}$$

In Zylinderkoordinaten $\underline{x} = (r, \theta, x)^T$

$$(\underline{u} \cdot \underline{\nabla}) a = u_r \frac{\partial a}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial a}{\partial \theta} + u_x \frac{\partial a}{\partial x}$$

Advective / Konvektive Ableitung eines Vektors

$$\underline{u} \cdot \text{grad } \underline{a} \equiv (\underline{u} \cdot \underline{\nabla}) \underline{a}$$

In kartesischen Koordinaten $\underline{x} = (x, y, z)^T$

$$\begin{aligned} (\underline{u} \cdot \underline{\nabla}) \underline{a} &= \underline{e}_x \left(u \frac{\partial a_x}{\partial x} + v \frac{\partial a_x}{\partial y} + w \frac{\partial a_x}{\partial z} \right) \\ &+ \underline{e}_y \left(u \frac{\partial a_y}{\partial x} + v \frac{\partial a_y}{\partial y} + w \frac{\partial a_y}{\partial z} \right) \\ &+ \underline{e}_z \left(u \frac{\partial a_z}{\partial x} + v \frac{\partial a_z}{\partial y} + w \frac{\partial a_z}{\partial z} \right) \end{aligned}$$

In Zylinderkoordinaten $\underline{x} = (r, \theta, x)^T$

$$\begin{aligned} (\underline{u} \cdot \underline{\nabla}) \underline{a} &= \underline{e}_r \left(u_r \frac{\partial a_r}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial a_r}{\partial \theta} + u_x \frac{\partial a_r}{\partial x} - \frac{u_\theta a_\theta}{r} \right) \\ &+ \underline{e}_\theta \left(u_r \frac{\partial a_\theta}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial a_\theta}{\partial \theta} + u_x \frac{\partial a_\theta}{\partial x} + \frac{u_\theta a_r}{r} \right) \\ &+ \underline{e}_x \left(u_r \frac{\partial a_x}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial a_x}{\partial \theta} + u_x \frac{\partial a_x}{\partial x} \right) \end{aligned}$$

Materielle / Substantielle Ableitung eines Skalars

$$\frac{Da}{Dt} = \frac{\partial a}{\partial t} + (\underline{u} \cdot \underline{\nabla}) a$$

Materielle / Substantielle Ableitung eines Vektors

$$\frac{D\underline{a}}{Dt} = \frac{\partial \underline{a}}{\partial t} + (\underline{u} \cdot \underline{\nabla}) \underline{a}$$

A.3 Integralsätze

Satz von Gauß

$$\int_V \text{div } \underline{u} \, dV = \int_S \underline{u} \cdot \underline{n} \, dS$$

Satz von Stokes

$$\iint_S \text{rot } \underline{u} \cdot \underline{n} \, dS = \oint_K \underline{u} \cdot d\underline{l}$$

Anhang B

Grundgleichungen

B.1 Massenerhaltung

Lagrange-Darstellung (materielles Kontrollvolumen)

$$\frac{Dm}{Dt} = 0 \quad \text{mit} \quad m = \int_{\tilde{V}} \varrho \, d\tilde{V} \quad (\text{B.1})$$

Euler-Darstellung

Raumfestes Kontrollvolumen

$$\frac{d}{dt} \int_V \varrho \, dV + \int_S \varrho (\underline{u} \cdot \underline{n}) \, dS = 0 \quad (\text{B.2})$$

Ein geradlinig-gleichförmig bewegtes Kontrollvolumen entspricht einem raumfesten Kontrollvolumen, wobei die Geschwindigkeiten \underline{u} den Relativgeschwindigkeiten entsprechen.

Beliebig bewegtes Kontrollvolumen mit der Oberflächengeschwindigkeit \underline{u}_S

$$\frac{d}{dt} \int_V \varrho \, dV + \int_S \varrho [(\underline{u} - \underline{u}_S) \cdot \underline{n}] \, dS = 0 \quad (\text{B.3})$$

Differentielle Darstellung: Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \nabla \cdot (\varrho \underline{u}) = \frac{D\varrho}{Dt} + \varrho (\nabla \cdot \underline{u}) = 0 \quad (\text{B.4})$$

Komponentenschreibweise in kartesischen Koordinaten $\underline{x} = (x, y, z)^T$

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\varrho u) + \frac{\partial}{\partial y}(\varrho v) + \frac{\partial}{\partial z}(\varrho w) = 0 \quad (\text{B.5})$$

Komponentenschreibweise in Zylinderkoordinaten $\underline{x} = (r, \theta, x)^T$

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(\varrho r u_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}(\varrho u_\theta) + \frac{\partial}{\partial x}(\varrho u_x) = 0 \quad (\text{B.6})$$

Inkompressible Kontinuitätsgleichung – inkompressibles Fluid oder inkompressible Strömung

$$\varrho = \text{konst.} \quad \text{oder} \quad \frac{D\varrho}{Dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad \nabla \cdot \underline{u} = 0 \quad (\text{B.7})$$

Komponentenschreibweise in kartesischen Koordinaten $\underline{x} = (x, y, z)^T$

$$\nabla \cdot \underline{u} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \quad (\text{B.8})$$

Komponentenschreibweise in Zylinderkoordinaten $\underline{x} = (r, \theta, x)^T$

$$\nabla \cdot \underline{u} = \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial u_x}{\partial x} \quad (\text{B.9})$$

B.2 Impulserhaltung

Lagrange-Darstellung (materielles Kontrollvolumen)

$$\frac{D\underline{P}}{Dt} = \sum_i \underline{F}_i \quad \text{mit} \quad \underline{P} = \int_{\tilde{V}} \varrho \underline{u} \, d\tilde{V} \quad (\text{B.10})$$

Euler-Darstellung

Raumfestes Kontrollvolumen

$$\frac{d}{dt} \int_V (\varrho \underline{u}) \, dV + \int_S \varrho \underline{u} (\underline{u} \cdot \underline{n}) \, dS = \int_V \varrho \underline{f} \, dV - \int_S p \underline{n} \, dS + \int_S \underline{\tau} \cdot \underline{n} \, dS + \underline{F}_{ext} \quad (\text{B.11})$$

Ein geradlinig-gleichförmig bewegtes Kontrollvolumen entspricht einem raumfesten Kontrollvolumen, wobei die Geschwindigkeiten \underline{u} den Relativgeschwindigkeiten entsprechen.

Beliebig bewegtes Kontrollvolumen mit der Oberflächengeschwindigkeit \underline{u}_S

$$\frac{d}{dt} \int_V (\varrho \underline{u}) \, dV + \int_S \varrho \underline{u} [(\underline{u} - \underline{u}_S) \cdot \underline{n}] \, dS = \int_V \varrho \underline{f} \, dV - \int_S p \underline{n} \, dS + \int_S \underline{\tau} \cdot \underline{n} \, dS + \underline{F}_{ext} \quad (\text{B.12})$$

Differentielle Darstellung: Cauchy-Impulsgleichung

$$\varrho \frac{D\underline{u}}{Dt} = -\underline{\nabla} p + \underline{\nabla} \cdot \underline{\tau} + \varrho \underline{f} \quad (\text{B.13})$$

Komponentenschreibweise in kartesischen Koordinaten $\underline{x} = (x, y, z)^T$

$$(x) : \quad \varrho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + \varrho f_x \quad (\text{B.14})$$

$$(y) : \quad \varrho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + \varrho f_y \quad (\text{B.15})$$

$$(z) : \quad \varrho \left(\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} + \varrho f_z \quad (\text{B.16})$$

Komponentenschreibweise in Zylinderkoordinaten $\underline{x} = (r, \theta, x)^T$

$$(r) : \quad \varrho \left[\frac{\partial u_r}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{u_\theta^2}{r} + u_x \frac{\partial u_r}{\partial x} \right] = -\frac{\partial p}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \tau_{rr}) + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} - \frac{\tau_{\theta\theta}}{r} + \frac{\partial \tau_{rx}}{\partial x} + \varrho f_r \quad (\text{B.17})$$

$$(\theta) : \quad \varrho \left[\frac{\partial u_\theta}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_\theta u_r}{r} + u_x \frac{\partial u_\theta}{\partial x} \right] = -\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \tau_{r\theta}) + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{\theta x}}{\partial x} + \varrho f_\theta \quad (\text{B.18})$$

$$(x) : \quad \varrho \left[\frac{\partial u_x}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_x}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_x}{\partial \theta} + u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} \right] = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \tau_{rx}) + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{\theta x}}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \varrho f_x \quad (\text{B.19})$$

Euler-Gleichungen – reibungsfreie Strömungen

$$\varrho \frac{D\underline{u}}{Dt} = -\underline{\nabla} p + \varrho \underline{f} \quad (\text{B.20})$$

Bernoulli-Gleichung – konservatives Kraftfeld, konstante Dichte, reibungsfreie Strömung entlang einer Stromlinie oder für wirbelfreie Strömungen ($\nabla \times \underline{u} = 0$) im gesamten Feld

$$\int_1^2 \frac{\partial \underline{u}}{\partial t} \cdot d\underline{s} + \left[\frac{p}{\varrho} + \frac{1}{2} |\underline{u}|^2 + U \right]_1^2 = 0 \quad (\text{B.21})$$

für eine stationäre Strömung und die Gewichtskraft als einzige auf das System einwirkende Kraft

$$\frac{p_1}{\varrho} + \frac{1}{2} |\underline{u}_1|^2 + gz_1 = \frac{p_2}{\varrho} + \frac{1}{2} |\underline{u}_2|^2 + gz_2 \quad (\text{B.22})$$

Schubspannungen eines Newtonschen Fluids für eine inkompressible Strömung $\nabla \cdot \underline{u} = 0$
Komponentenschreibweise in kartesischen Koordinaten $\underline{x} = (x, y, z)^T$

$$\begin{aligned} \tau_{xx} &= 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} \\ \tau_{yy} &= 2\mu \frac{\partial v}{\partial y} \\ \tau_{zz} &= 2\mu \frac{\partial w}{\partial z} \\ \tau_{xy} &= \tau_{yx} = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \\ \tau_{xz} &= \tau_{zx} = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\ \tau_{yz} &= \tau_{zy} = \mu \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \end{aligned}$$

Komponentenschreibweise in Zylinderkoordinaten $\underline{x} = (r, \theta, x)^T$

$$\begin{aligned} \tau_{rr} &= 2\mu \left(\frac{\partial u_r}{\partial r} \right) \\ \tau_{\theta\theta} &= 2\mu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r} \right) \\ \tau_{xx} &= 2\mu \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} \right) \\ \tau_{r\theta} &= \tau_{\theta r} = \mu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + r \frac{\partial}{\partial r} \frac{u_\theta}{r} \right) \\ \tau_{\theta x} &= \tau_{x\theta} = \mu \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_x}{\partial \theta} \right) \\ \tau_{xr} &= \tau_{rx} = \mu \left(\frac{\partial u_x}{\partial r} + \frac{\partial u_r}{\partial x} \right) \end{aligned}$$

Navier-Stokes-Gleichungen – Newtonsches Fluid, inkompressibel, $\mu = \text{konst.}$

$$\varrho \frac{D\underline{u}}{Dt} = -\nabla p + \mu \nabla^2 \underline{u} + \varrho \underline{f} \quad (\text{B.23})$$

Komponentenschreibweise in kartesischen Koordinaten $\underline{x} = (x, y, z)^T$

$$(x) : \quad \varrho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right] + \varrho f_x \quad (\text{B.24})$$

$$(y) : \quad \varrho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \mu \left[\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right] + \varrho f_y \quad (\text{B.25})$$

$$(z) : \quad \varrho \left(\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial z} + \mu \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right] + \varrho f_z \quad (\text{B.26})$$

Komponentenschreibweise in Zylinderkoordinaten $\underline{x} = (r, \theta, x)^T$

$$(r) : \quad \varrho \left[\frac{\partial u_r}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{u_\theta^2}{r} + u_x \frac{\partial u_r}{\partial x} \right] = -\frac{\partial p}{\partial r} + \mu \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r u_r) \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_r}{\partial \theta^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 u_r}{\partial x^2} \right] + \varrho f_r \quad (\text{B.27})$$

$$(\theta) : \quad \varrho \left[\frac{\partial u_\theta}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_\theta u_r}{r} + u_x \frac{\partial u_\theta}{\partial x} \right] = -\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \mu \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r u_\theta) \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial x^2} \right] + \varrho f_\theta \quad (\text{B.28})$$

$$(x) : \quad \varrho \left[\frac{\partial u_x}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_x}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_x}{\partial \theta} + u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} \right] = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u_x}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_x}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} \right] + \varrho f_x \quad (\text{B.29})$$

Schleichströmungen $Re \rightarrow 0$, Newtonsches Fluid

$$\underline{\nabla} p = \mu \underline{\nabla}^2 \underline{u} \quad (\text{B.30})$$

Grenzschichtgleichungen $Re \rightarrow \infty$, $\delta \ll L$, 2D, Newtonsches Fluid

$$(x) : \quad \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\varrho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (\text{B.31})$$

$$(y) : \quad \frac{\partial p}{\partial y} = 0 \quad (\text{B.32})$$

Reynolds-gemittelte Navier-Stokes Gleichungen – turbulente Strömungen

$$\frac{\partial}{\partial x_j} (\varrho \bar{u}_i \bar{u}_j) = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial \bar{\tau}_{ij}}{\partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\overline{\varrho u'_i u'_j} \right) \quad (\text{B.33})$$

Wirbeltransportgleichung – keine Volumenkräfte, Newtonsches Fluid

$$\frac{D \underline{\omega}}{Dt} = (\underline{\omega} \cdot \underline{\nabla}) \underline{u} + \nu \underline{\nabla}^2 \underline{\omega} \quad (\text{B.34})$$

B.3 Energieerhaltung

Lagrange-Darstellung (materielles Kontrollvolumen)

$$\frac{DE}{Dt} = \sum_i \underline{F}_i \cdot \underline{u} + \sum_i \dot{Q}_i \quad \text{mit} \quad E = \int_{\tilde{V}} \varrho \left[e + \frac{1}{2} |\underline{u}|^2 \right] d\tilde{V} \quad (\text{B.35})$$

Euler-Darstellung

Raumfestes Kontrollvolumen

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_V \left(\varrho \left[e + \frac{1}{2} |\underline{u}|^2 \right] \right) dV + \int_S \left(\varrho \left[e + \frac{1}{2} |\underline{u}|^2 \right] \right) [\underline{u} \cdot \underline{n}] dS = \\ = \int_V \varrho \underline{f} \cdot \underline{u} dV - \int_S p \underline{u} \cdot \underline{n} dS + \int_S (\underline{\tau} \cdot \underline{u}) \cdot \underline{n} dS + \int_V \varrho q_V dV - \int_S \underline{q} \cdot \underline{n} dS \end{aligned} \quad (\text{B.36})$$

Ein geradlinig-gleichförmig bewegtes Kontrollvolumen entspricht einem raumfesten Kontrollvolumen, wobei die Geschwindigkeiten \underline{u} den Relativgeschwindigkeiten entsprechen.

Beliebig bewegtes Kontrollvolumen mit der Oberflächengeschwindigkeit \underline{u}_S

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_V \left(\varrho \left[e + \frac{1}{2} |\underline{u}|^2 \right] \right) dV + \int_S \left(\varrho \left[e + \frac{1}{2} |\underline{u}|^2 \right] \right) [(\underline{u} - \underline{u}_S) \cdot \underline{n}] dS = \\ = \int_V \varrho \underline{f} \cdot \underline{u} dV - \int_S p \underline{u} \cdot \underline{n} dS + \int_S (\underline{\tau} \cdot \underline{u}) \cdot \underline{n} dS + \int_V \varrho q_V dV - \int_S \underline{q} \cdot \underline{n} dS \end{aligned} \quad (\text{B.37})$$

Differentielle Energiegleichung

Gleichung für die Gesamtenergie $\varrho(e + |\underline{u}|^2/2)$

$$\varrho \frac{D}{Dt} \left(e + \frac{1}{2} |\underline{u}|^2 \right) = \varrho \underline{f} \cdot \underline{u} + \underline{\nabla} \cdot (\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{u}) + \varrho q_V - \underline{\nabla} \cdot \underline{q} \quad (\text{B.38})$$

Gleichung für die kinetische Energie $\varrho |\underline{u}|^2/2$

$$\varrho \frac{D}{Dt} \left(\frac{1}{2} |\underline{u}|^2 \right) = \varrho \underline{f} \cdot \underline{u} + \underline{u} \cdot \underline{\nabla} \cdot \underline{\underline{\sigma}} \quad (\text{B.39})$$

Gleichung für die innere Energie ϱe

$$\varrho \frac{De}{Dt} = \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\nabla u}} + \varrho q_V - \underline{\nabla} \cdot \underline{q} \quad (\text{B.40})$$

Gleichung für die Enthalpie $h = e + p/\varrho$

$$\varrho \frac{Dh}{Dt} = \frac{Dp}{Dt} + \underline{\underline{\tau}} : \underline{\underline{\nabla u}} + \varrho q_V - \underline{\nabla} \cdot \underline{q} \quad (\text{B.41})$$

Differentielle Energiegleichung in Temperaturform – kalorisch perfektes Fluid

$$\varrho c \frac{DT}{Dt} = \frac{p}{\varrho} \frac{D\varrho}{Dt} + \underline{\underline{\tau}} : \underline{\underline{\nabla u}} + \varrho q_V - \underline{\nabla} \cdot \underline{q} \quad (\text{B.42})$$

Dissipationsterm – doppeltes Skalarprodukt zweier Tensoren 2. Stufe
Komponentenschreibweise in kartesischen Koordinaten $\underline{x} = (x, y, z)^T$

$$\begin{aligned}\underline{\tau} : \underline{\nabla u} &= \tau_{xx} \frac{\partial u}{\partial x} + \tau_{xy} \frac{\partial v}{\partial x} + \tau_{xz} \frac{\partial w}{\partial x} \\ &+ \tau_{yx} \frac{\partial u}{\partial y} + \tau_{yy} \frac{\partial v}{\partial y} + \tau_{yz} \frac{\partial w}{\partial y} \\ &+ \tau_{zx} \frac{\partial u}{\partial z} + \tau_{zy} \frac{\partial v}{\partial z} + \tau_{zz} \frac{\partial w}{\partial z}\end{aligned}\quad (\text{B.43})$$

Komponentenschreibweise in Zylinderkoordinaten $\underline{x} = (r, \theta, x)^T$

$$\begin{aligned}\underline{\tau} : \underline{\nabla u} &= \tau_{rr} \frac{\partial u_r}{\partial r} + \tau_{r\theta} r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{u_\theta}{r} \right) + \tau_{rx} \frac{\partial u_x}{\partial r} \\ &+ \tau_{\theta r} \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \tau_{\theta\theta} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r} \right) + \tau_{\theta x} \frac{1}{r} \frac{\partial u_x}{\partial \theta} \\ &+ \tau_{xr} \frac{\partial u_r}{\partial x} + \tau_{x\theta} \frac{\partial u_\theta}{\partial x} + \tau_{xx} \frac{\partial u_x}{\partial x}\end{aligned}\quad (\text{B.44})$$

Dissipationsterm für ein Newtonsches Fluid

Komponentenschreibweise in kartesischen Koordinaten $\underline{x} = (x, y, z)^T$

$$\begin{aligned}\underline{\tau} : \underline{\nabla u} &= 2\mu \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + 2\mu \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + 2\mu \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 \\ &+ \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \mu \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \mu \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2\end{aligned}\quad (\text{B.45})$$

Komponentenschreibweise in Zylinderkoordinaten $\underline{x} = (r, \theta, x)^T$

$$\begin{aligned}\underline{\tau} : \underline{\nabla u} &= 2\mu \left(\frac{\partial u_r}{\partial r} \right)^2 + 2\mu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r} \right)^2 + 2\mu \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} \right)^2 \\ &+ \mu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{u_\theta}{r} \right) \right)^2 + \mu \left(\frac{\partial u_x}{\partial r} + \frac{\partial u_r}{\partial x} \right)^2 + \mu \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_x}{\partial \theta} \right)^2\end{aligned}\quad (\text{B.46})$$

Wärmeleitungsterm mit dem Fourier-Gesetz – konstante Wärmeleitfähigkeit k

$$-\underline{\nabla} \cdot \underline{q} = -\underline{\nabla} \cdot (-k \underline{\nabla} T) = k \underline{\nabla}^2 T \quad (\text{B.47})$$

In kartesischen Koordinaten $\underline{x} = (x, y, z)^T$

$$k \underline{\nabla}^2 T = k \left[\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right] \quad (\text{B.48})$$

In Zylinderkoordinaten $\underline{x} = (r, \theta, x)^T$

$$k \underline{\nabla}^2 T = k \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right] \quad (\text{B.49})$$

Entropiegleichung

$$T ds = dh - \frac{dp}{\varrho} \quad \Rightarrow \quad \varrho T \frac{Ds}{Dt} = \underline{\tau} : \underline{\nabla u} + \varrho q_V - \underline{\nabla} \cdot \underline{q} \quad (\text{B.50})$$

reibungsfrei, adiabat

$$\frac{Ds}{Dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad \varrho \frac{Dh}{Dt} = \frac{Dp}{Dt} \quad (\text{B.51})$$

Anhang C

Fluiddynamik II: Komplexe Zahlen und Funktionen

C.1 Komplexe Zahlen

Die Menge der **komplexen Zahlen** wird bezeichnet mit

$$\mathbb{C} = \{x + iy \mid x, y \in \mathbb{R}\}, \quad i^2 = -1.$$

x heisst **Realteil**, y **Imaginärteil** der komplexen Zahl z ,

$$z = z_r + iz_i = x + iy.$$

Häufig verwendet man auch die **Polardarstellung**

$$z = r \cdot e^{i\theta}$$

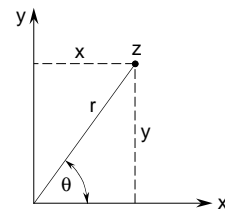
mit

$$r^2 := |z|^2 = x^2 + y^2,$$

$$\theta := \arg(z),$$

$$x = r \cdot \cos \theta,$$

$$y = r \cdot \sin \theta.$$



Es gilt

$$\begin{aligned} e^{i\theta} &\equiv \cos \theta + i \sin \theta \\ |e^{i\theta}|^2 &= \cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1 \quad \text{falls } \theta \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Die zu z **konjugiert komplexe Zahl** wird bezeichnet als

$$\begin{aligned} z^* &= x - iy \\ &= r e^{-i\theta} \end{aligned}$$

Als alternative Notation wird auch $\bar{z} = z^*$ benutzt.

Die **Multiplikation** von $z_1 = x_1 + iy_1$ mit $z_2 = x_2 + iy_2$ ergibt

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1 + iy_1) \cdot (x_2 + iy_2) = x_1 x_2 - y_1 y_2 + i(x_2 y_1 + x_1 y_2)$$

Damit gilt

$$z \cdot z^* = |z|^2 = r^2.$$

Für die **Division** zweier komplexer Zahlen erhält man

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 z_2^*}{z_2 z_2^*} = \frac{1}{|z_2|^2} \cdot z_1 z_2^*.$$

C.2 Differenzierbarkeit, reguläre komplexwertige Funktion

Eine **komplexwertige Funktion**

$$F(z) = F_r(x, y) + iF_i(x, y), \quad z = x + iy$$

heisst im Punkt z_0 **(komplex) differenzierbar**, wenn der Grenzwert

$$\lim_{\zeta \rightarrow 0, \zeta \in \mathbb{C}} \frac{F(z_0 + \zeta) - F(z_0)}{\zeta}$$

existiert und unabhängig ist von der Wahl von $\zeta \in \mathbb{C}$, $\zeta \rightarrow 0$. Dieser Grenzwert heisst die **Ableitung** von $F(z)$ in z_0 ,

$$\left. \frac{dF}{dz} \right|_{z_0}.$$

Ist $F(z)$ in jedem Punkt eines Gebietes $G \subset \mathbb{C}$ differenzierbar, so heisst $F(z)$ in G **regulär** oder **holomorph**. Regularität einer komplexen Funktion ist eine sehr einschneidende Eigenschaft. Ist eine Funktion einmal differenzierbar, so ist sie auch unendlich oft differenzierbar. Eine reguläre Funktion, deren Ableitung in einem Gebiet G nicht verschwindet, ist **konform**, d.h. sie ist winkeltreu und erhält den Drehsinn. Reguläre Funktionen spielen bei der Beschreibung ebener Potentialströmungen eine wichtige Rolle (s. Kap. 9.2 ff).

Wegen der freien Wählbarkeit von $\zeta = \xi + i\eta$ beim Grenzübergang zur Bildung der Ableitung $F'(z)$ kann ζ insbesondere rein reell ($\zeta = \xi \rightarrow 0$), rein imaginär ($\zeta = i\eta \rightarrow 0$) oder rein radial ($\zeta = r \cdot e^{i\theta}$, $r \rightarrow 0$, $\theta = \text{const}$) gewählt werden. Es gilt also

$$\begin{aligned} \frac{dF}{dz} &= \frac{\partial F_r}{\partial x} + i \frac{\partial F_i}{\partial x} & (\zeta = \xi \text{ reell}) \\ &= \frac{1}{i} \frac{\partial F_r}{\partial y} + i \frac{\partial F_i}{\partial y} = \frac{\partial F_i}{\partial y} - i \frac{\partial F_r}{\partial y} & (\zeta = i\eta \text{ imaginär}). \end{aligned}$$

Daraus folgen die **Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen**:

$$\frac{\partial F_r}{\partial x} = \frac{\partial F_i}{\partial y}, \quad \frac{\partial F_r}{\partial y} = -\frac{\partial F_i}{\partial x}.$$

In der Polardarstellung sei

$$F(z) = G_r(r, \theta) + iG_i(r, \theta).$$

Dann ist

$$\frac{dF}{dz} = \frac{1}{e^{i\theta}} \left(\frac{\partial G_r}{\partial r} + i \frac{\partial G_i}{\partial r} \right) \quad (\zeta = r \cdot e^{i\theta}, \quad \theta = \text{const}, \quad \text{radiale Ableitung}).$$

Durch wiederholte Anwendung der Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen folgt

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 F_r}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 F_i}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial^2 F_r}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 F_i}{\partial x \partial y} \\ \implies \frac{\partial^2 F_r}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F_r}{\partial y^2} &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 F_i}{\partial x^2} &= -\frac{\partial^2 F_r}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial^2 F_i}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 F_r}{\partial x \partial y} \\ \implies \frac{\partial^2 F_i}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F_i}{\partial y^2} &= 0.\end{aligned}$$

Es folgt also: Realteil F_r und Imaginärteil F_i einer regulären Funktion $F(z) = F_r + iF_i$ erfüllen die Laplace-Gleichung

$$\Delta F_r = 0, \quad \Delta F_i = 0.$$

Folgende **elementare Funktionen** im Komplexen werden häufig benötigt:

$$\begin{aligned}e^z &= e^{x+iy} = e^x \cdot e^{iy}, \quad |e^z| = e^x \\ \ln(z) &= \ln(re^{i\theta}) = \ln(r) + i\theta \\ a^z &= e^{z \cdot \ln a}, \quad z^a = e^{a \cdot \ln z}\end{aligned}$$

Weitere elementare Funktionen (z.B. sinh, cosh, tanh, sin, cos, tan, cot) werden wie im Reellen gebildet. Eventuelle Mehrdeutigkeit ist zu berücksichtigen. Die vom Reellen bekannten Potenzreihenentwicklungen übertragen sich in die komplexe Ebene.

Es gelten die vom Reellen her gewohnten **Differentiationsregeln**, z.B.

$$\frac{d}{dz} \ln z = \frac{1}{z},$$

$$\frac{d}{dz} e^z = e^z,$$

$$\frac{d}{dz} z^b = b \cdot z^{b-1}.$$

Anhang D

Übersicht Potentialströmungen

D.1 Darstellung ebener, inkompressibler Potentialströmungen

$$\begin{array}{ccc}
 \text{Ebene,} & \text{inkompressible} & \text{Potentialströmung} \\
 | & | & | \\
 \underline{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \underline{u} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} & \underbrace{\text{div } \underline{u} = 0, \quad \underline{u} = \nabla \Phi}_{\Delta \Phi = 0}, & \text{rot } \underline{u} = 0
 \end{array}$$

Potential Φ , Stromfunktion Ψ

Zirkulation: $\Gamma_C = \Gamma(C, \underline{u}) := \oint_C \underline{u} \cdot d\underline{x} = \oint_C \nabla \Phi \cdot d\underline{x} = \oint_C d\Phi,$

$\Gamma_C \neq 0$ wenn Φ mehrdeutig; Wirbel

$$\Gamma_C \stackrel{St}{=} \int_S (\text{rot } \underline{u}) \cdot \underline{n} \, dS$$

(geschlossene Kurve C , berandet Fläche S ,

$\stackrel{St}{=}$ gilt unter den Voraussetzungen des Satzes von Stokes)

Quellstärke: $Q_C = Q(C, \underline{u}) := \oint_C \underline{u} \cdot \underline{n} \, ds = \oint_C \nabla \Psi \cdot d\underline{x} = \oint_C d\Psi,$

$Q_C \neq 0$ wenn Ψ mehrdeutig, Quelle

$$Q_C \stackrel{G}{=} \int_S \text{div } \underline{u} \, dS$$

($\stackrel{G}{=}$ gilt unter den Voraussetzungen des Satzes von Gauss)

komplexes Potential:

$$F(z) = \Phi + i\Psi, \quad z = x + iy$$

komplexe Geschwindigkeit:

$$w(z) = \frac{dF}{dz}$$

komplexe Zirkulation:

$$\Gamma_C := \oint_C w \, dz = \Gamma_C + iQ_C, \text{ also auch } \Gamma_C = \oint_C \frac{dF}{dz} dz = \oint_C dF$$

$\Gamma_C \neq 0$ wenn F mehrdeutig; Singularität

	<u>kartesisch</u>	<u>polar</u>
Koordinaten:	$\underline{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, z = x + iy$	$\underline{x}_p = \begin{pmatrix} r \\ \vartheta \end{pmatrix}_p, z = re^{i\vartheta}$
Geschwindigkeit:	$\underline{u} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ $w(z) = u - iv$	$\underline{u}_p = \begin{pmatrix} u_r \\ u_\vartheta \end{pmatrix}_p$ $w(z) = (u_r - iu_\vartheta)e^{-i\vartheta}$
$\underline{u} = \nabla\Phi$:	$u = \partial\Phi/\partial x$ $v = \partial\Phi/\partial y$	$u_r = \partial\Phi/\partial r$ $u_\vartheta = \frac{1}{r} \frac{\partial\Phi}{\partial\vartheta}$
$\underline{u} = \text{rot} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \Psi \end{pmatrix}$:	$u = \partial\Psi/\partial y$ $v = -\partial\Psi/\partial x$	$u_r = \frac{1}{r} \frac{\partial\Psi}{\partial\vartheta}$ $u_\vartheta = -\partial\Psi/\partial r$
	$u = u_r \cos\theta - u_\theta \sin\theta$ $v = u_r \sin\theta + u_\theta \cos\theta$	$u_r = u \cos\theta + v \sin\theta$ $u_\theta = -u \sin\theta + v \cos\theta$

Druck $p(\underline{x})$: Bernoulli-Gleichung für Potentialströmung ($U = \text{Kräftepotential}$, $\underline{f} = -\nabla U$)

stationär:
$$p(\underline{x}) + \frac{\rho}{2} |\underline{u}(\underline{x})|^2 + \rho U(\underline{x}) = p_0 + \frac{\rho}{2} |\underline{u}_0|^2 + \rho U_0$$

(Werte in Referenzpunkt \underline{x}_0)

beachte:
$$|\underline{u}|^2 = |\nabla\Phi|^2 = u^2 + v^2 = u_r^2 + u_\vartheta^2 = |w|^2$$

Stromlinien: $\Psi = \text{const}$

Potentiallinien: $\Phi = \text{const}$, orthogonal zu Stromlinien

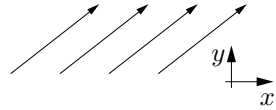
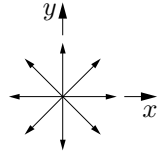
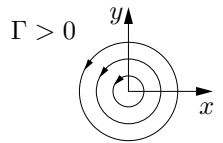
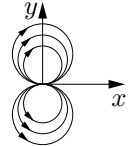
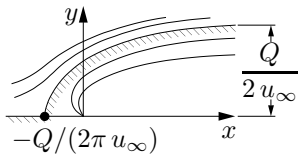
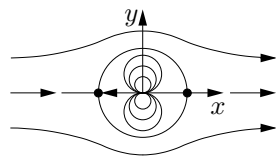
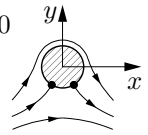
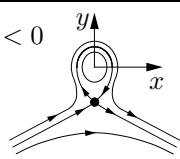
Staupunkt \underline{x}_s : $\underline{u}(\underline{x}_s) = 0$ bzw. $w(z_s) = 0, z_s = x_s + iy_s$

Staustromlinien: $\Psi(x, y) = \Psi(\underline{x}_s)$

D.2 Beispiele ebener Potentialströmungen*

komplexes Potential $F(z) = \Phi + i\Psi$	Potential $\Phi(x, y)$	Stromfunktion $\Psi(x, y)$
$(u_\infty - i v_\infty) z$ Parallelströmung	$u_\infty x + v_\infty y$	$u_\infty y - v_\infty x$
$\frac{Q}{2\pi} \ln z$ Quelle $Q > 0$, Senke $Q < 0$	$\frac{Q}{2\pi} \ln r = \frac{Q}{2\pi} \ln \sqrt{x^2 + y^2}$	$\frac{Q}{2\pi} \vartheta = \frac{Q}{2\pi} \arg(z)$
$-\frac{\Gamma}{2\pi} i \ln z$ Wirbel, $\Gamma > 0$ math. positiv, $\Gamma < 0$ math. negativ	$\frac{\Gamma}{2\pi} \vartheta = \frac{\Gamma}{2\pi} \arg(z)$	$-\frac{\Gamma}{2\pi} \ln \sqrt{x^2 + y^2}$
$\frac{m}{z}$ Dipol	$\frac{m x}{x^2 + y^2}$	$-\frac{m y}{x^2 + y^2}$
$u_\infty z + \frac{Q}{2\pi} \ln z$ Parallelströmung + Quelle/Senke	$u_\infty x + \frac{Q}{2\pi} \ln r$	$u_\infty y + \frac{Q}{2\pi} \vartheta$
$u_\infty \left(z + \frac{R^2}{z} \right)$ Parallelströmung + Dipol = Kreiszyylinderumström.	$u_\infty x \left(1 + \frac{R^2}{x^2 + y^2} \right)$	$u_\infty y \left(1 - \frac{R^2}{x^2 + y^2} \right)$
$u_\infty \left(z + \frac{R^2}{z} \right) - \frac{\Gamma}{2\pi} i \ln z$ Kreiszyylinderumströmung + Wirbel	$u_\infty x \left(1 + \frac{R^2}{x^2 + y^2} \right) + \frac{\Gamma}{2\pi} \vartheta$	$u_\infty y \left(1 - \frac{R^2}{x^2 + y^2} \right) - \frac{\Gamma}{2\pi} \ln r$
$u_\infty z - \frac{\Gamma}{2\pi} i \ln z$ Parallelströmung + Wirbel	$u_\infty x + \frac{\Gamma}{2\pi} \vartheta$	$u_\infty y - \frac{\Gamma}{2\pi} \ln r$

* (nach Zierep, Grundzüge der Strömungslehre, Springer 1997)

Geschwindigkeit $w = \frac{dF}{dz} = u - i v$			Stromlinien
u	v	$ \underline{u} $	$\Psi = \text{konst}$
u_∞	v_∞	$\sqrt{u_\infty^2 + v_\infty^2}$	
$\frac{Q}{2\pi} \frac{x}{x^2 + y^2}$	$\frac{Q}{2\pi} \frac{y}{x^2 + y^2}$	$\frac{ Q }{2\pi r}$	
$-\frac{\Gamma}{2\pi} \frac{y}{x^2 + y^2}$	$\frac{\Gamma}{2\pi} \frac{x}{x^2 + y^2}$	$\frac{ \Gamma }{2\pi r}$	$\Gamma > 0$ 
$m \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}$	$-m \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}$	$\frac{ m }{r^2}$	
$u_\infty + \frac{Q}{2\pi} \frac{x}{x^2 + y^2}$	$\frac{Q}{2\pi} \frac{y}{x^2 + y^2}$		
auf dem Zylinder:			
$2 u_\infty \sin^2 \vartheta$	$-2 u_\infty \sin \vartheta \cos \vartheta$	$2 u_\infty \sin \vartheta $	
auf dem Zylinder:			$\Gamma < 0$ 
$2 u_\infty \sin^2 \vartheta - \frac{\Gamma}{2\pi R} \sin \vartheta$	$-2 u_\infty \sin \vartheta \cos \vartheta + \frac{\Gamma}{2\pi R} \cos \vartheta$	$\left 2 u_\infty \sin \vartheta - \frac{\Gamma}{2\pi R} \right $	
$u_\infty - \frac{\Gamma}{2\pi} \frac{y}{x^2 + y^2}$	$\frac{\Gamma}{2\pi} \frac{x}{x^2 + y^2}$		$\Gamma < 0$ 

Anhang E

Kompressibler Stromfaden - Formeln und Tabellen

Isentrope Strömung

Abhängigkeit von Ruhegrößen und Mach-Zahl

$$\begin{aligned}\frac{T_0}{T} &= \left(1 + \frac{\gamma-1}{2}Ma^2\right) \\ \frac{a_0}{a} &= \left(1 + \frac{\gamma-1}{2}Ma^2\right)^{\frac{1}{2}} \\ \frac{p_0}{p} &= \left(1 + \frac{\gamma-1}{2}Ma^2\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \\ \frac{\rho_0}{\rho} &= \left(1 + \frac{\gamma-1}{2}Ma^2\right)^{\frac{1}{\gamma-1}}\end{aligned}$$

Zusammenhang zwischen kritischen und Ruhegrößen ($\gamma = 1.4$)

$$\begin{aligned}\frac{T_*}{T_0} &= \left(\frac{2}{\gamma+1}\right) \quad (= 0.833) \\ \frac{a_*}{a_0} &= \left(\frac{2}{\gamma+1}\right)^{\frac{1}{2}} \quad (= 0.913) \\ \frac{p_*}{p_0} &= \left(\frac{2}{\gamma+1}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \quad (= 0.528) \\ \frac{\rho_*}{\rho_0} &= \left(\frac{2}{\gamma+1}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}} \quad (= 0.634)\end{aligned}$$

Abhängigkeit von der Laval-Zahl

$$\begin{aligned}\frac{T}{T_0} &= \left(1 - \frac{\gamma-1}{\gamma+1}La^2\right) \\ \frac{a}{a_0} &= \left(1 - \frac{\gamma-1}{\gamma+1}La^2\right)^{\frac{1}{2}} \\ \frac{p}{p_0} &= \left(1 - \frac{\gamma-1}{\gamma+1}La^2\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \\ \frac{\rho}{\rho_0} &= \left(1 - \frac{\gamma-1}{\gamma+1}La^2\right)^{\frac{1}{\gamma-1}}\end{aligned}$$

Abhängigkeit von der Maximalgeschwindigkeit

$$\frac{T}{T_0} = \left(1 - \frac{u^2}{u_{\max}^2}\right)$$

$$\begin{aligned}\frac{a}{a_0} &= \left(1 - \frac{u^2}{u_{\max}^2}\right)^{\frac{1}{2}} \\ \frac{p}{p_0} &= \left(1 - \frac{u^2}{u_{\max}^2}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \\ \frac{\varrho}{\varrho_0} &= \left(1 - \frac{u^2}{u_{\max}^2}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}}\end{aligned}$$

Senkrechter Verdichtungsstoß

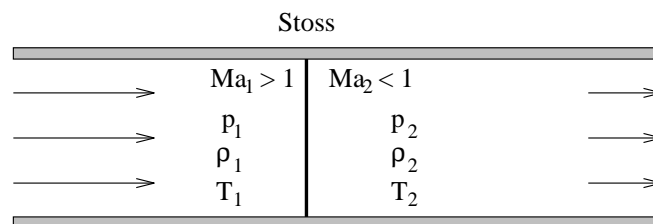


Abbildung E.1: Senkrechter Verdichtungsstoß.

Beziehungen zwischen den Zuständen vor und hinter dem Stoß

$$\frac{u_2}{u_1} = \frac{\varrho_1}{\varrho_2} = \frac{2}{\gamma+1} \frac{1}{Ma_1^2} + \frac{\gamma-1}{\gamma+1}$$

$$\frac{\Delta p}{p_1} = \frac{p_2 - p_1}{p_1} = \frac{2\gamma}{\gamma+1} (Ma_1^2 - 1)$$

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{2\gamma}{\gamma+1} Ma_1^2 - \frac{\gamma-1}{\gamma+1}$$

$$\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{2\gamma}{\gamma+1} Ma_1^2 - \frac{\gamma-1}{\gamma+1} \right) \left(\frac{2}{\gamma+1} \frac{1}{Ma_1^2} + \frac{\gamma-1}{\gamma+1} \right)$$

$$Ma_2^2 = \frac{1 + (\gamma-1)/2 \cdot Ma_1^2}{\gamma Ma_1^2 - (\gamma-1)/2} = 1 - \frac{Ma_1^2 - 1}{1 + \frac{2\gamma}{\gamma+1} (Ma_1^2 - 1)}$$

Verhalten der Ruhegrößen über den Stoß

$$T_{02} = T_{01}$$

$$\frac{\varrho_{02}}{\varrho_{01}} = \frac{p_{02}}{p_{01}} = \left(1 + \frac{2\gamma}{\gamma+1} (Ma_1^2 - 1) \right)^{-\frac{1}{\gamma-1}} \left(\frac{(\gamma+1) Ma_1^2}{2 + (\gamma-1) Ma_1^2} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$$

Isentrope Unterschallströmung eines idealen Gases:
 Zusammenhang zwischen Strömungsgrößen und Ruhegrößen
 für $\gamma = 1.4$

Ma	p/p_0	ϱ/ϱ_0	T/T_0	A/A_*
0.00	1.00000	1.00000	1.00000	∞
0.02	0.99972	0.99980	0.99992	28.94213
0.04	0.99888	0.99920	0.99968	14.48149
0.06	0.99748	0.99820	0.99928	9.66591
0.08	0.99553	0.99681	0.99872	7.26161
0.10	0.99303	0.99502	0.99800	5.82183
0.12	0.98998	0.99284	0.99713	4.86432
0.14	0.98640	0.99027	0.99610	4.18240
0.16	0.98228	0.98731	0.99491	3.67274
0.18	0.97765	0.98398	0.99356	3.27793
0.20	0.97250	0.98028	0.99206	2.96352
0.22	0.96685	0.97620	0.99041	2.70760
0.24	0.96070	0.97177	0.98861	2.49556
0.26	0.95408	0.96698	0.98666	2.31729
0.28	0.94700	0.96185	0.98456	2.16555
0.30	0.93947	0.95638	0.98232	2.03507
0.32	0.93150	0.95058	0.97993	1.92185
0.34	0.92312	0.94446	0.97740	1.82288
0.36	0.91433	0.93803	0.97473	1.73578
0.38	0.90516	0.93130	0.97193	1.65870
0.40	0.89561	0.92427	0.96899	1.59014
0.42	0.88572	0.91697	0.96592	1.52890
0.44	0.87550	0.90940	0.96272	1.47401
0.46	0.86496	0.90157	0.95940	1.42463
0.48	0.85413	0.89349	0.95595	1.38010
0.50	0.84302	0.88517	0.95238	1.33984
0.52	0.83165	0.87663	0.94869	1.30339
0.54	0.82005	0.86788	0.94489	1.27032
0.56	0.80823	0.85892	0.94098	1.24029
0.58	0.79621	0.84978	0.93696	1.21301
0.60	0.78400	0.84045	0.93284	1.18820
0.62	0.77164	0.83096	0.92861	1.16565
0.64	0.75913	0.82132	0.92428	1.14515
0.66	0.74650	0.81153	0.91986	1.12654
0.68	0.73376	0.80162	0.91535	1.10965
0.70	0.72093	0.79158	0.91075	1.09437
0.72	0.70803	0.78143	0.90606	1.08057
0.74	0.69507	0.77119	0.90129	1.06814
0.76	0.68207	0.76086	0.89644	1.05700
0.78	0.66905	0.75046	0.89152	1.04705
0.80	0.65602	0.73999	0.88652	1.03823
0.82	0.64300	0.72947	0.88146	1.03046
0.84	0.63000	0.71891	0.87633	1.02370
0.86	0.61703	0.70831	0.87114	1.01787
0.88	0.60412	0.69768	0.86589	1.01294
0.90	0.59126	0.68704	0.86059	1.00886
0.92	0.57848	0.67640	0.85523	1.00560
0.94	0.56578	0.66576	0.84982	1.00311
0.96	0.55317	0.65513	0.84437	1.00136
0.98	0.54067	0.64452	0.83887	1.00034
1.00	0.52828	0.63394	0.83333	1.00000

Überschallströmung eines idealen Gases für $\gamma = 1.4$

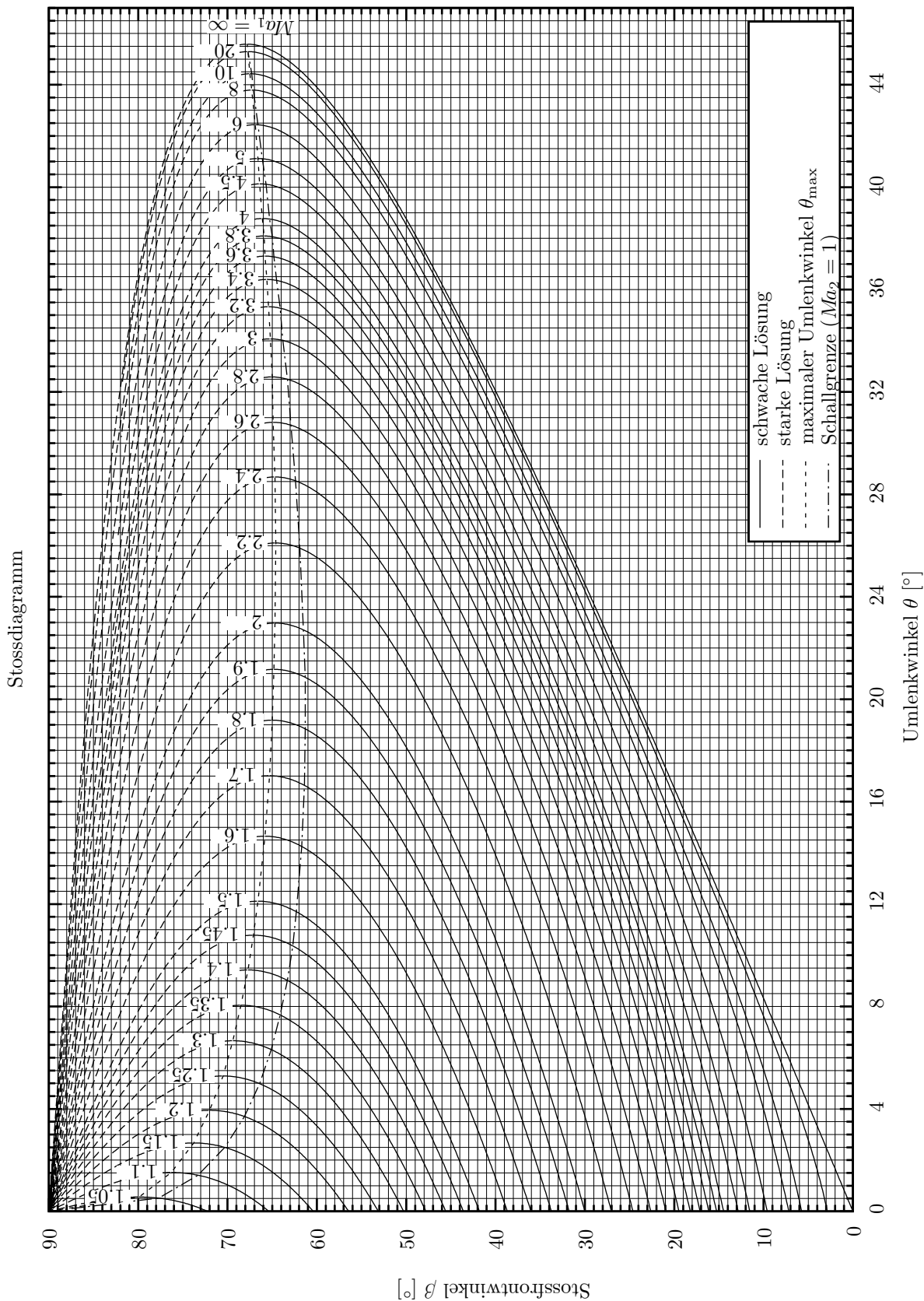
Isentrope Strömung					senkrechter Verdichtungsstoss					
Ma	p/p_0	ϱ/ϱ_0	T/T_0	A/A_*	Ma_1	Ma_2	p_2/p_1	ϱ_2/ϱ_1	T_2/T_1	p_{02}/p_{01}
1.00	0.52828	0.63394	0.83333	1.00000	1.00	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000
1.02	0.51602	0.62339	0.82776	1.00033	1.02	0.98052	1.04713	1.03344	1.01325	0.99999
1.04	0.50389	0.61289	0.82215	1.00131	1.04	0.96203	1.09520	1.06709	1.02634	0.99992
1.06	0.49189	0.60243	0.81651	1.00291	1.06	0.94445	1.14420	1.10092	1.03931	0.99975
1.08	0.48005	0.59203	0.81085	1.00512	1.08	0.92771	1.19413	1.13492	1.05217	0.99943
1.10	0.46835	0.58170	0.80515	1.00793	1.10	0.91177	1.24500	1.16908	1.06494	0.99893
1.12	0.45682	0.57143	0.79944	1.01131	1.12	0.89656	1.29680	1.20338	1.07763	0.99821
1.14	0.44545	0.56123	0.79370	1.01527	1.14	0.88204	1.34953	1.23779	1.09027	0.99726
1.16	0.43425	0.55112	0.78795	1.01978	1.16	0.86816	1.40320	1.27231	1.10287	0.99605
1.18	0.42322	0.54108	0.78218	1.02484	1.18	0.85488	1.45780	1.30693	1.11544	0.99457
1.20	0.41238	0.53114	0.77640	1.03044	1.20	0.84217	1.51333	1.34161	1.12799	0.99280
1.22	0.40171	0.52129	0.77061	1.03657	1.22	0.82999	1.56980	1.37636	1.14054	0.99073
1.24	0.39123	0.51154	0.76481	1.04323	1.24	0.81830	1.62720	1.41116	1.15309	0.98836
1.26	0.38093	0.50189	0.75900	1.05041	1.26	0.80709	1.68553	1.44599	1.16566	0.98568
1.28	0.37083	0.49234	0.75319	1.05810	1.28	0.79631	1.74480	1.48084	1.17825	0.98268
1.30	0.36091	0.48290	0.74738	1.06630	1.30	0.78596	1.80500	1.51570	1.19087	0.97937
1.32	0.35119	0.47357	0.74158	1.07502	1.32	0.77600	1.86613	1.55055	1.20353	0.97575
1.34	0.34166	0.46436	0.73577	1.08424	1.34	0.76641	1.92820	1.58538	1.21624	0.97182
1.36	0.33233	0.45526	0.72997	1.09396	1.36	0.75718	1.99120	1.62018	1.22900	0.96758
1.38	0.32319	0.44628	0.72418	1.10419	1.38	0.74829	2.05513	1.65494	1.24181	0.96304
1.40	0.31424	0.43742	0.71839	1.11493	1.40	0.73971	2.12000	1.68966	1.25469	0.95819
1.42	0.30549	0.42869	0.71262	1.12616	1.42	0.73144	2.18580	1.72430	1.26764	0.95306
1.44	0.29693	0.42007	0.70685	1.13790	1.44	0.72345	2.25253	1.75888	1.28066	0.94765
1.46	0.28856	0.41158	0.70110	1.15015	1.46	0.71574	2.32020	1.79337	1.29377	0.94196
1.48	0.28039	0.40322	0.69537	1.16290	1.48	0.70829	2.38880	1.82777	1.30695	0.93600
1.50	0.27240	0.39498	0.68966	1.17617	1.50	0.70109	2.45833	1.86207	1.32022	0.92979
1.52	0.26461	0.38688	0.68396	1.18994	1.52	0.69413	2.52880	1.89626	1.33357	0.92332
1.54	0.25700	0.37890	0.67828	1.20423	1.54	0.68739	2.60020	1.93033	1.34703	0.91662
1.56	0.24957	0.37105	0.67262	1.21904	1.56	0.68087	2.67253	1.96427	1.36057	0.90970
1.58	0.24233	0.36332	0.66699	1.23438	1.58	0.67455	2.74580	1.99808	1.37422	0.90255
1.60	0.23527	0.35573	0.66138	1.25024	1.60	0.66844	2.82000	2.03175	1.38797	0.89520
1.62	0.22839	0.34827	0.65579	1.26663	1.62	0.66251	2.89513	2.06526	1.40182	0.88765
1.64	0.22168	0.34093	0.65023	1.28355	1.64	0.65677	2.97120	2.09863	1.41578	0.87992
1.66	0.21515	0.33372	0.64470	1.30102	1.66	0.65119	3.04820	2.13183	1.42985	0.87201
1.68	0.20879	0.32664	0.63919	1.31904	1.68	0.64579	3.12613	2.16486	1.44403	0.86394
1.70	0.20259	0.31969	0.63371	1.33761	1.70	0.64054	3.20500	2.19772	1.45833	0.85572
1.72	0.19656	0.31287	0.62827	1.35674	1.72	0.63545	3.28480	2.23040	1.47274	0.84736
1.74	0.19070	0.30617	0.62285	1.37643	1.74	0.63051	3.36553	2.26289	1.48727	0.83886
1.76	0.18499	0.29959	0.61747	1.39670	1.76	0.62570	3.44720	2.29520	1.50192	0.83024
1.78	0.17944	0.29315	0.61211	1.41755	1.78	0.62104	3.52980	2.32731	1.51669	0.82151
1.80	0.17404	0.28682	0.60680	1.43898	1.80	0.61650	3.61333	2.35922	1.53158	0.81268
1.82	0.16879	0.28061	0.60151	1.46101	1.82	0.61209	3.69780	2.39093	1.54659	0.80376
1.84	0.16369	0.27453	0.59626	1.48365	1.84	0.60780	3.78320	2.42244	1.56173	0.79476
1.86	0.15873	0.26857	0.59104	1.50689	1.86	0.60363	3.86953	2.45373	1.57700	0.78569
1.88	0.15392	0.26272	0.58586	1.53076	1.88	0.59957	3.95680	2.48481	1.59239	0.77655
1.90	0.14924	0.25699	0.58072	1.55526	1.90	0.59562	4.04500	2.51568	1.60792	0.76736
1.92	0.14470	0.25138	0.57561	1.58039	1.92	0.59177	4.13413	2.54633	1.62357	0.75812
1.94	0.14028	0.24588	0.57054	1.60617	1.94	0.58802	4.22420	2.57675	1.63935	0.74884
1.96	0.13600	0.24049	0.56551	1.63261	1.96	0.58437	4.31520	2.60695	1.65527	0.73954
1.98	0.13184	0.23521	0.56051	1.65972	1.98	0.58082	4.40713	2.63692	1.67132	0.73021
2.00	0.12780	0.23005	0.55556	1.68750	2.00	0.57735	4.50000	2.66667	1.68750	0.72087
2.02	0.12389	0.22499	0.55064	1.71597	2.02	0.57397	4.59380	2.69618	1.70382	0.71153
2.04	0.12009	0.22004	0.54576	1.74514	2.04	0.57068	4.68853	2.72546	1.72027	0.70218
2.06	0.11640	0.21519	0.54091	1.77502	2.06	0.56747	4.78420	2.75451	1.73686	0.69284
2.08	0.11282	0.21045	0.53611	1.80561	2.08	0.56433	4.88080	2.78332	1.75359	0.68351
2.10	0.10935	0.20580	0.53135	1.83694	2.10	0.56128	4.97833	2.81190	1.77045	0.67420
2.12	0.10599	0.20126	0.52663	1.86902	2.12	0.55829	5.07680	2.84024	1.78745	0.66492
2.14	0.10273	0.19681	0.52194	1.90184	2.14	0.55538	5.17620	2.86835	1.80459	0.65567
2.16	0.09956	0.19247	0.51730	1.93544	2.16	0.55254	5.27653	2.89621	1.82188	0.64645
2.18	0.09649	0.18821	0.51269	1.96981	2.18	0.54977	5.37780	2.92383	1.83930	0.63727
2.20	0.09352	0.18405	0.50813	2.00497	2.20	0.54706	5.48000	2.95122	1.85686	0.62814
2.22	0.09064	0.17998	0.50361	2.04094	2.22	0.54441	5.58313	2.97837	1.87456	0.61905
2.24	0.08785	0.17600	0.49912	2.07773	2.24	0.54182	5.68720	3.00527	1.89241	0.61002
2.26	0.08514	0.17211	0.49468	2.11535	2.26	0.53930	5.79220	3.03194	1.91040	0.60105
2.28	0.08251	0.16830	0.49027	2.15381	2.28	0.53683	5.89813	3.05836	1.92853	0.59214
2.30	0.07997	0.16458	0.48591	2.19313	2.30	0.53441	6.00500	3.08455	1.94680	0.58329
2.32	0.07751	0.16095	0.48158	2.23332	2.32	0.53205	6.11280	3.11049	1.96522	0.57452
2.34	0.07512	0.15739	0.47730	2.27440	2.34	0.52974	6.22153	3.13620	1.98378	0.56581
2.36	0.07281	0.15391	0.47305	2.31638	2.36	0.52749	6.33120	3.16167	2.00249	0.55718
2.38	0.07057	0.15052	0.46885	2.35928	2.38	0.52528	6.44180	3.18690	2.02134	0.54862

Überschallströmung eines idealen Gases für $\gamma = 1.4$

Isentrope Strömung					senkrechter Verdichtungsstoss					
Ma	p/p_0	ϱ/ϱ_0	T/T_0	A/A_*	Ma_1	Ma_2	p_2/p_1	ϱ_2/ϱ_1	T_2/T_1	p_{02}/p_{01}
2.40	0.06840	0.14720	0.46468	2.40310	2.40	0.52312	6.55333	3.21190	2.04033	0.54014
2.42	0.06630	0.14395	0.46056	2.44787	2.42	0.52100	6.66580	3.23665	2.05947	0.53175
2.44	0.06426	0.14078	0.45647	2.49360	2.44	0.51894	6.77920	3.26117	2.07876	0.52344
2.46	0.06229	0.13768	0.45242	2.54031	2.46	0.51691	6.89353	3.28546	2.09819	0.51521
2.48	0.06038	0.13465	0.44841	2.58801	2.48	0.51493	7.00880	3.30951	2.11777	0.50707
2.50	0.05853	0.13169	0.44444	2.63672	2.50	0.51299	7.12500	3.33333	2.13750	0.49901
2.52	0.05674	0.12879	0.44051	2.68645	2.52	0.51109	7.24213	3.35692	2.15737	0.49105
2.54	0.05500	0.12597	0.43662	2.73723	2.54	0.50923	7.36020	3.38028	2.17739	0.48318
2.56	0.05332	0.12321	0.43277	2.78906	2.56	0.50741	7.47920	3.40341	2.19756	0.47540
2.58	0.05169	0.12051	0.42895	2.84197	2.58	0.50562	7.59913	3.42631	2.21788	0.46772
2.60	0.05012	0.11787	0.42517	2.89598	2.60	0.50387	7.72000	3.44898	2.23834	0.46012
2.62	0.04859	0.11530	0.42143	2.95109	2.62	0.50216	7.84180	3.47143	2.25896	0.45263
2.64	0.04711	0.11278	0.41772	3.00733	2.64	0.50048	7.96453	3.49365	2.27972	0.44522
2.66	0.04568	0.11032	0.41406	3.06472	2.66	0.49883	8.08820	3.51565	2.30063	0.43792
2.68	0.04429	0.10792	0.41043	3.12327	2.68	0.49722	8.21280	3.53743	2.32168	0.43070
2.70	0.04295	0.10557	0.40683	3.18301	2.70	0.49563	8.33833	3.55899	2.34289	0.42359
2.72	0.04165	0.10328	0.40328	3.24395	2.72	0.49408	8.46480	3.58033	2.36425	0.41657
2.74	0.04039	0.10104	0.39976	3.30611	2.74	0.49256	8.59220	3.60146	2.38576	0.40965
2.76	0.03917	0.09885	0.39627	3.36952	2.76	0.49107	8.72053	3.62237	2.40741	0.40283
2.78	0.03799	0.09671	0.39282	3.43418	2.78	0.48960	8.84980	3.64307	2.42922	0.39610
2.80	0.03685	0.09463	0.38941	3.50012	2.80	0.48817	8.98000	3.66355	2.45117	0.38946
2.82	0.03574	0.09259	0.38603	3.56737	2.82	0.48676	9.11113	3.68383	2.47328	0.38293
2.84	0.03467	0.09059	0.38268	3.63593	2.84	0.48538	9.24320	3.70389	2.49554	0.37649
2.86	0.03363	0.08865	0.37937	3.70584	2.86	0.48402	9.37620	3.72375	2.51794	0.37014
2.88	0.03263	0.08675	0.37610	3.77711	2.88	0.48269	9.51013	3.74341	2.54050	0.36389
2.90	0.03165	0.08489	0.37286	3.84977	2.90	0.48138	9.64500	3.76286	2.56321	0.35773
2.92	0.03071	0.08307	0.36965	3.92383	2.92	0.48010	9.78080	3.78211	2.58607	0.35167
2.94	0.02980	0.08130	0.36647	3.99932	2.94	0.47884	9.91753	3.80117	2.60908	0.34570
2.96	0.02891	0.07957	0.36333	4.07625	2.96	0.47760	10.05520	3.82002	2.63224	0.33982
2.98	0.02805	0.07788	0.36022	4.15466	2.98	0.47638	10.19380	3.83868	2.65555	0.33404
3.00	0.02722	0.07623	0.35714	4.23457	3.00	0.47519	10.33333	3.85714	2.67901	0.32834
3.02	0.02642	0.07461	0.35410	4.31599	3.02	0.47402	10.47380	3.87541	2.70263	0.32274
3.04	0.02564	0.07303	0.35108	4.39895	3.04	0.47287	10.61520	3.89350	2.72639	0.31723
3.06	0.02489	0.07149	0.34810	4.48347	3.06	0.47174	10.75753	3.91139	2.75031	0.31180
3.08	0.02416	0.06999	0.34515	4.56959	3.08	0.47063	10.90080	3.92909	2.77438	0.30646
3.10	0.02345	0.06852	0.34223	4.65731	3.10	0.46953	11.04500	3.94661	2.79860	0.30121
3.12	0.02276	0.06708	0.33934	4.74667	3.12	0.46846	11.19013	3.96395	2.82298	0.29605
3.14	0.02210	0.06568	0.33648	4.83769	3.14	0.46741	11.33620	3.98110	2.84750	0.29097
3.16	0.02146	0.06430	0.33365	4.93039	3.16	0.46637	11.48320	3.99808	2.87218	0.28597
3.18	0.02083	0.06296	0.33085	5.02481	3.18	0.46535	11.63113	4.01488	2.89701	0.28106
3.20	0.02023	0.06165	0.32808	5.12096	3.20	0.46435	11.78000	4.03150	2.92199	0.27623
3.22	0.01964	0.06037	0.32534	5.21887	3.22	0.46336	11.92980	4.04794	2.94713	0.27148
3.24	0.01908	0.05912	0.32263	5.31857	3.24	0.46240	12.08053	4.06422	2.97241	0.26681
3.26	0.01853	0.05790	0.31995	5.42008	3.26	0.46144	12.23220	4.08032	2.99785	0.26222
3.28	0.01799	0.05671	0.31729	5.52343	3.28	0.46051	12.38480	4.09625	3.02345	0.25771
3.30	0.01748	0.05554	0.31466	5.62865	3.30	0.45959	12.53833	4.11202	3.04919	0.25328
3.32	0.01698	0.05440	0.31206	5.73576	3.32	0.45868	12.69280	4.12762	3.07509	0.24892
3.34	0.01649	0.05329	0.30949	5.84479	3.34	0.45779	12.84820	4.14306	3.10114	0.24463
3.36	0.01602	0.05220	0.30694	5.95577	3.36	0.45691	13.00453	4.15833	3.12734	0.24043
3.38	0.01557	0.05113	0.30443	6.06873	3.38	0.45605	13.16180	4.17345	3.15370	0.23629
3.40	0.01512	0.05009	0.30193	6.18370	3.40	0.45520	13.32000	4.18841	3.18021	0.23223
3.42	0.01470	0.04908	0.29947	6.30070	3.42	0.45436	13.47913	4.20321	3.20687	0.22823
3.44	0.01428	0.04808	0.29702	6.41976	3.44	0.45354	13.63920	4.21785	3.23369	0.22431
3.46	0.01388	0.04711	0.29461	6.54092	3.46	0.45273	13.80020	4.23234	3.26065	0.22045
3.48	0.01349	0.04616	0.29222	6.66419	3.48	0.45194	13.96213	4.24668	3.28778	0.21667
3.50	0.01311	0.04523	0.28986	6.78962	3.50	0.45115	14.12500	4.26087	3.31505	0.21295
3.52	0.01274	0.04433	0.28751	6.91723	3.52	0.45038	14.28880	4.27491	3.34248	0.20929
3.54	0.01239	0.04344	0.28520	7.04705	3.54	0.44962	14.45353	4.28880	3.37006	0.20570
3.56	0.01204	0.04257	0.28291	7.17912	3.56	0.44887	14.61920	4.30255	3.39780	0.20218
3.58	0.01171	0.04172	0.28064	7.31346	3.58	0.44814	14.78580	4.31616	3.42569	0.19871
3.60	0.01138	0.04089	0.27840	7.45011	3.60	0.44741	14.95333	4.32962	3.45373	0.19531
3.62	0.01107	0.04008	0.27618	7.58910	3.62	0.44670	15.12180	4.34294	3.48192	0.19197
3.64	0.01076	0.03929	0.27398	7.73045	3.64	0.44600	15.29120	4.35613	3.51027	0.18869
3.66	0.01047	0.03852	0.27180	7.87421	3.66	0.44530	15.46153	4.36918	3.53878	0.18547
3.68	0.01018	0.03776	0.26965	8.02040	3.68	0.44462	15.63280	4.38209	3.56743	0.18230
3.70	0.00990	0.03702	0.26752	8.16907	3.70	0.44395	15.80500	4.39486	3.59624	0.17919
3.72	0.00963	0.03629	0.26542	8.32023	3.72	0.44329	15.97813	4.40751	3.62521	0.17614
3.74	0.00937	0.03558	0.26333	8.47393	3.74	0.44263	16.15220	4.42002	3.65433	0.17314
3.76	0.00912	0.03489	0.26127	8.63020	3.76	0.44199	16.32720	4.43241	3.68360	0.17020

Überschallströmung eines idealen Gases für $\gamma = 1.4$

Isentrope Strömung					senkrechter Verdichtungsstoss					
Ma	p/p_0	ϱ/ϱ_0	T/T_0	A/A_*	Ma_1	Ma_2	p_2/p_1	ϱ_2/ϱ_1	T_2/T_1	p_{02}/p_{01}
3.78	0.00887	0.03421	0.25922	8.78907	3.78	0.44136	16.50313	4.44466	3.71302	0.16731
3.80	0.00863	0.03355	0.25720	8.95059	3.80	0.44073	16.68000	4.45679	3.74260	0.16447
3.82	0.00840	0.03290	0.25520	9.11477	3.82	0.44012	16.85780	4.46879	3.77234	0.16168
3.84	0.00817	0.03227	0.25322	9.28167	3.84	0.43951	17.03653	4.48067	3.80223	0.15895
3.86	0.00795	0.03165	0.25126	9.45131	3.86	0.43891	17.21620	4.49243	3.83227	0.15626
3.88	0.00774	0.03104	0.24932	9.62373	3.88	0.43832	17.39680	4.50407	3.86246	0.15362
3.90	0.00753	0.03044	0.24740	9.79897	3.90	0.43774	17.57833	4.51559	3.89281	0.15103
3.92	0.00733	0.02986	0.24550	9.97707	3.92	0.43717	17.76080	4.52699	3.92332	0.14848
3.94	0.00714	0.02929	0.24362	10.15806	3.94	0.43661	17.94420	4.53827	3.95398	0.14598
3.96	0.00695	0.02874	0.24176	10.34197	3.96	0.43605	18.12853	4.54944	3.98479	0.14353
3.98	0.00676	0.02819	0.23992	10.52886	3.98	0.43550	18.31380	4.56049	4.01575	0.14112
4.00	0.00659	0.02766	0.23810	10.71875	4.00	0.43496	18.50000	4.57143	4.04688	0.13876
4.02	0.00641	0.02714	0.23629	10.91168	4.02	0.43443	18.68713	4.58226	4.07815	0.13643
4.04	0.00624	0.02663	0.23450	11.10770	4.04	0.43390	18.87520	4.59298	4.10958	0.13415
4.06	0.00608	0.02613	0.23274	11.30684	4.06	0.43338	19.06420	4.60359	4.14116	0.13191
4.08	0.00592	0.02564	0.23099	11.50915	4.08	0.43287	19.25413	4.61409	4.17290	0.12972
4.10	0.00577	0.02516	0.22925	11.71465	4.10	0.43236	19.44500	4.62448	4.20479	0.12756
4.12	0.00562	0.02470	0.22754	11.92340	4.12	0.43186	19.63680	4.63478	4.23684	0.12544
4.14	0.00547	0.02424	0.22584	12.13543	4.14	0.43137	19.82953	4.64496	4.26904	0.12335
4.16	0.00533	0.02379	0.22416	12.35079	4.16	0.43089	20.02320	4.65505	4.30140	0.12131
4.18	0.00520	0.02335	0.22250	12.56951	4.18	0.43041	20.21780	4.66503	4.33391	0.11930
4.20	0.00506	0.02292	0.22085	12.79164	4.20	0.42994	20.41333	4.67491	4.36657	0.11733
4.22	0.00493	0.02250	0.21922	13.01722	4.22	0.42947	20.60980	4.68470	4.39939	0.11540
4.24	0.00481	0.02209	0.21760	13.24629	4.24	0.42901	20.80720	4.69438	4.43236	0.11350
4.26	0.00468	0.02169	0.21601	13.47890	4.26	0.42856	21.00553	4.70397	4.46549	0.11163
4.28	0.00457	0.02129	0.21442	13.71509	4.28	0.42811	21.20480	4.71346	4.49877	0.10980
4.30	0.00445	0.02090	0.21286	13.95490	4.30	0.42767	21.40500	4.72286	4.53221	0.10800
4.32	0.00434	0.02052	0.21131	14.19838	4.32	0.42723	21.60613	4.73217	4.56580	0.10623
4.34	0.00423	0.02015	0.20977	14.44557	4.34	0.42680	21.80820	4.74138	4.59955	0.10450
4.36	0.00412	0.01979	0.20825	14.69652	4.36	0.42638	22.01120	4.75050	4.63345	0.10280
4.38	0.00402	0.01944	0.20674	14.95127	4.38	0.42596	22.21513	4.75953	4.66750	0.10112
4.40	0.00392	0.01909	0.20525	15.20987	4.40	0.42554	22.42000	4.76847	4.70171	0.09948
4.42	0.00382	0.01875	0.20378	15.47236	4.42	0.42514	22.62580	4.77733	4.73608	0.09787
4.44	0.00372	0.01841	0.20232	15.73879	4.44	0.42473	22.83253	4.78609	4.77060	0.09628
4.46	0.00363	0.01808	0.20087	16.00921	4.46	0.42433	23.04020	4.79477	4.80527	0.09473
4.48	0.00354	0.01776	0.19944	16.28366	4.48	0.42394	23.24880	4.80337	4.84010	0.09320
4.50	0.00346	0.01745	0.19802	16.56219	4.50	0.42355	23.45833	4.81188	4.87509	0.09170
4.52	0.00337	0.01714	0.19662	16.84486	4.52	0.42317	23.66880	4.82031	4.91022	0.09022
4.54	0.00329	0.01684	0.19522	17.13170	4.54	0.42279	23.88020	4.82866	4.94552	0.08878
4.56	0.00321	0.01654	0.19385	17.42277	4.56	0.42241	24.09253	4.83692	4.98097	0.08735
4.58	0.00313	0.01625	0.19248	17.71812	4.58	0.42205	24.30580	4.84511	5.01657	0.08596
4.60	0.00305	0.01597	0.19113	18.01779	4.60	0.42168	24.52000	4.85321	5.05233	0.08459
4.62	0.00298	0.01569	0.18979	18.32185	4.62	0.42132	24.73513	4.86124	5.08824	0.08324
4.64	0.00291	0.01542	0.18847	18.63032	4.64	0.42096	24.95120	4.86919	5.12430	0.08192
4.66	0.00284	0.01515	0.18716	18.94328	4.66	0.42061	25.16820	4.87706	5.16053	0.08062
4.68	0.00277	0.01489	0.18586	19.26076	4.68	0.42026	25.38613	4.88486	5.19690	0.07934
4.70	0.00270	0.01464	0.18457	19.58283	4.70	0.41992	25.60500	4.89258	5.23343	0.07809
4.72	0.00264	0.01438	0.18330	19.90953	4.72	0.41958	25.82480	4.90023	5.27012	0.07685
4.74	0.00257	0.01414	0.18203	20.24091	4.74	0.41925	26.04553	4.90780	5.30696	0.07564
4.76	0.00251	0.01390	0.18078	20.57703	4.76	0.41891	26.26720	4.91531	5.34396	0.07445
4.78	0.00245	0.01366	0.17954	20.91795	4.78	0.41859	26.48980	4.92274	5.38111	0.07329
4.80	0.00239	0.01343	0.17832	21.26371	4.80	0.41826	26.71333	4.93010	5.41842	0.07214
4.82	0.00234	0.01320	0.17710	21.61437	4.82	0.41794	26.93780	4.93739	5.45588	0.07101
4.84	0.00228	0.01298	0.17590	21.96999	4.84	0.41763	27.16320	4.94461	5.49349	0.06991
4.86	0.00223	0.01276	0.17471	22.33061	4.86	0.41731	27.38953	4.95177	5.53126	0.06882
4.88	0.00218	0.01254	0.17352	22.69631	4.88	0.41701	27.61680	4.95885	5.56919	0.06775
4.90	0.00213	0.01233	0.17235	23.06712	4.90	0.41670	27.84500	4.96587	5.60727	0.06670
4.92	0.00208	0.01213	0.17120	23.44311	4.92	0.41640	28.07413	4.97283	5.64551	0.06567
4.94	0.00203	0.01192	0.17005	23.82434	4.94	0.41610	28.30420	4.97972	5.68390	0.06465
4.96	0.00198	0.01173	0.16891	24.21086	4.96	0.41581	28.53520	4.98654	5.72244	0.06366
4.98	0.00193	0.01153	0.16778	24.60272	4.98	0.41552	28.76713	4.99330	5.76114	0.06268
5.00	0.00189	0.01134	0.16667	25.00000	5.00	0.41523	29.00000	5.00000	5.80000	0.06172



Prandtl-Meyer Funktion $\nu(Ma)$ und Machscher Winkel $\alpha(Ma)$:Ideales Gas mit $\gamma = 1.4$

Ma	$\nu(Ma)$	$\alpha(Ma)$	Ma	$\nu(Ma)$	$\alpha(Ma)$	Ma	$\nu(Ma)$	$\alpha(Ma)$
1.00	0.00000	90.00000	4.00	65.78482	14.47751	7.00	90.97273	8.21321
1.02	0.12569	78.63512	4.02	66.04803	14.40392	7.02	91.07748	8.18965
1.04	0.35098	74.05763	4.04	66.30934	14.33109	7.04	91.18169	8.16623
1.06	0.63669	70.62996	4.06	66.56876	14.25899	7.06	91.28537	8.14293
1.08	0.96804	67.80839	4.08	66.82630	14.18763	7.08	91.38853	8.11978
1.10	1.33620	65.38002	4.10	67.08200	14.11698	7.10	91.49116	8.09675
1.12	1.73504	63.23450	4.12	67.33585	14.04704	7.12	91.59327	8.07385
1.14	2.15996	61.30559	4.14	67.58789	13.97780	7.14	91.69487	8.05109
1.16	2.60735	59.54969	4.16	67.83812	13.90924	7.16	91.79596	8.02845
1.18	3.07426	57.93621	4.18	68.08656	13.84136	7.18	91.89654	8.00594
1.20	3.55823	56.44269	4.20	68.33324	13.77415	7.20	91.99662	7.98356
1.22	4.05720	55.05199	4.22	68.57816	13.70759	7.22	92.09619	7.96130
1.24	4.56936	53.75068	4.24	68.82134	13.64168	7.24	92.19527	7.93916
1.26	5.09315	52.52800	4.26	69.06280	13.57640	7.26	92.29386	7.91715
1.28	5.62720	51.37517	4.28	69.30256	13.51176	7.28	92.39195	7.89526
1.30	6.17029	50.28486	4.30	69.54063	13.44773	7.30	92.48956	7.87349
1.32	6.72133	49.25095	4.32	69.77702	13.38431	7.32	92.58669	7.85185
1.34	7.27937	48.26818	4.34	70.01176	13.32149	7.34	92.68334	7.83032
1.36	7.84351	47.33207	4.36	70.24485	13.25927	7.36	92.77951	7.80891
1.38	8.41297	46.43872	4.38	70.47631	13.19762	7.38	92.87521	7.78761
1.40	8.98702	45.58469	4.40	70.70617	13.13656	7.40	92.97044	7.76643
1.42	9.56502	44.76700	4.42	70.93442	13.07606	7.42	93.06520	7.74537
1.44	10.14636	43.98296	4.44	71.16109	13.01612	7.44	93.15950	7.72442
1.46	10.73050	43.23022	4.46	71.38619	12.95674	7.46	93.25335	7.70359
1.48	11.31694	42.50664	4.48	71.60973	12.89789	7.48	93.34673	7.68287
1.50	11.90521	41.81031	4.50	71.83174	12.83959	7.50	93.43967	7.66226
1.52	12.49489	41.13951	4.52	72.05222	12.78181	7.52	93.53215	7.64176
1.54	13.08559	40.49266	4.54	72.27119	12.72456	7.54	93.62419	7.62136
1.56	13.67696	39.86834	4.56	72.48866	12.66782	7.56	93.71579	7.60108
1.58	14.26865	39.26525	4.58	72.70464	12.61159	7.58	93.80694	7.58091
1.60	14.86035	38.68219	4.60	72.91915	12.55586	7.60	93.89766	7.56084
1.62	15.45180	38.11806	4.62	73.13221	12.50062	7.62	93.98794	7.54088
1.64	16.04271	37.57187	4.64	73.34382	12.44587	7.64	94.07779	7.52103
1.66	16.63285	37.04267	4.66	73.55400	12.39161	7.66	94.16722	7.50128
1.68	17.22198	36.52961	4.68	73.76276	12.33782	7.68	94.25622	7.48163
1.70	17.80991	36.03188	4.70	73.97012	12.28449	7.70	94.34479	7.46209
1.72	18.39643	35.54874	4.72	74.17609	12.23163	7.72	94.43295	7.44265
1.74	18.98137	35.07951	4.74	74.38067	12.17923	7.74	94.52069	7.42331
1.76	19.56456	34.62354	4.76	74.58389	12.12728	7.76	94.60802	7.40407
1.78	20.14584	34.18022	4.78	74.78575	12.07577	7.78	94.69493	7.38493
1.80	20.72506	33.74899	4.80	74.98627	12.02470	7.80	94.78144	7.36589
1.82	21.30211	33.32933	4.82	75.18546	11.97406	7.82	94.86754	7.34694
1.84	21.87685	32.92073	4.84	75.38333	11.92386	7.84	94.95324	7.32810
1.86	22.44917	32.52275	4.86	75.57989	11.87407	7.86	95.03854	7.30935
1.88	23.01896	32.13493	4.88	75.77516	11.82470	7.88	95.12344	7.29070
1.90	23.58613	31.75686	4.90	75.96915	11.77574	7.90	95.20795	7.27214
1.92	24.15059	31.38817	4.92	76.16186	11.72719	7.92	95.29207	7.25368
1.94	24.71226	31.02847	4.94	76.35331	11.67905	7.94	95.37580	7.23531
1.96	25.27106	30.67742	4.96	76.54351	11.63129	7.96	95.45914	7.21703
1.98	25.82691	30.33471	4.98	76.73248	11.58393	7.98	95.54210	7.19885
2.00	26.37976	30.00000	5.00	76.92022	11.53696	8.00	95.62467	7.18076
2.02	26.92955	29.67301	5.02	77.10674	11.49037	8.02	95.70687	7.16275
2.04	27.47622	29.35347	5.04	77.29205	11.44415	8.04	95.78869	7.14484
2.06	28.01973	29.04110	5.06	77.47617	11.39831	8.06	95.87014	7.12702
2.08	28.56003	28.73565	5.08	77.65911	11.35284	8.08	95.95121	7.10929
2.10	29.09708	28.43689	5.10	77.84087	11.30773	8.10	96.03192	7.09165
2.12	29.63085	28.14458	5.12	78.02147	11.26298	8.12	96.11226	7.07409
2.14	30.16130	27.85851	5.14	78.20092	11.21858	8.14	96.19224	7.05662
2.16	30.68841	27.57847	5.16	78.37922	11.17454	8.16	96.27185	7.03924
2.18	31.21215	27.30426	5.18	78.55639	11.13084	8.18	96.35111	7.02194
2.20	31.73250	27.03569	5.20	78.73243	11.08749	8.20	96.43001	7.00473
2.22	32.24943	26.77259	5.22	78.90737	11.04447	8.22	96.50855	6.98760
2.24	32.76294	26.51477	5.24	79.08120	11.00179	8.24	96.58674	6.97055
2.26	33.27301	26.26209	5.26	79.25393	10.95944	8.26	96.66458	6.95359
2.28	33.77963	26.01437	5.28	79.42558	10.91742	8.28	96.74208	6.93671

Prandtl-Meyer Funktion $\nu(Ma)$ und Machscher Winkel $\alpha(Ma)$

Ma	$\nu(Ma)$	$\alpha(Ma)$	Ma	$\nu(Ma)$	$\alpha(Ma)$	Ma	$\nu(Ma)$	$\alpha(Ma)$
2.30	34.28279	25.77146	5.30	79.59616	10.87572	8.30	96.81923	6.91992
2.32	34.78249	25.53323	5.32	79.76567	10.83433	8.32	96.89603	6.90320
2.34	35.27871	25.29953	5.34	79.93412	10.79327	8.34	96.97250	6.88657
2.36	35.77146	25.07023	5.36	80.10153	10.75252	8.36	97.04862	6.87001
2.38	36.26073	24.84520	5.38	80.26789	10.71207	8.38	97.12441	6.85354
2.40	36.74653	24.62432	5.40	80.43323	10.67193	8.40	97.19987	6.83714
2.42	37.22886	24.40747	5.42	80.59755	10.63209	8.42	97.27499	6.82082
2.44	37.70772	24.19454	5.44	80.76086	10.59255	8.44	97.34979	6.80458
2.46	38.18312	23.98541	5.46	80.92316	10.55330	8.46	97.42425	6.78842
2.48	38.65507	23.77999	5.48	81.08447	10.51435	8.48	97.49839	6.77234
2.50	39.12356	23.57818	5.50	81.24479	10.47568	8.50	97.57221	6.75633
2.52	39.58862	23.37987	5.52	81.40413	10.43730	8.52	97.64570	6.74039
2.54	40.05026	23.18497	5.54	81.56251	10.39920	8.54	97.71887	6.72454
2.56	40.50847	22.99339	5.56	81.71992	10.36138	8.56	97.79173	6.70875
2.58	40.96329	22.80505	5.58	81.87639	10.32383	8.58	97.86427	6.69304
2.60	41.41471	22.61986	5.60	82.03190	10.28656	8.60	97.93650	6.67741
2.62	41.86275	22.43775	5.62	82.18648	10.24956	8.62	98.00841	6.66184
2.64	42.30744	22.25862	5.64	82.34013	10.21282	8.64	98.08002	6.64635
2.66	42.74877	22.08241	5.66	82.49286	10.17635	8.66	98.15132	6.63093
2.68	43.18678	21.90905	5.68	82.64468	10.14014	8.68	98.22231	6.61559
2.70	43.62148	21.73846	5.70	82.79558	10.10418	8.70	98.29300	6.60031
2.72	44.05288	21.57058	5.72	82.94560	10.06848	8.72	98.36338	6.58510
2.74	44.48100	21.40534	5.74	83.09472	10.03304	8.74	98.43347	6.56997
2.76	44.90586	21.24267	5.76	83.24295	9.99784	8.76	98.50326	6.55490
2.78	45.32749	21.08252	5.78	83.39031	9.96290	8.78	98.57275	6.53991
2.80	45.74589	20.92483	5.80	83.53681	9.92819	8.80	98.64194	6.52498
2.82	46.16109	20.76954	5.82	83.68244	9.89373	8.82	98.71085	6.51012
2.84	46.57312	20.61659	5.84	83.82721	9.85951	8.84	98.77946	6.49533
2.86	46.98198	20.46593	5.86	83.97114	9.82552	8.86	98.84778	6.48060
2.88	47.38770	20.31751	5.88	84.11423	9.79177	8.88	98.91582	6.46594
2.90	47.79031	20.17127	5.90	84.25649	9.75826	8.90	98.98357	6.45135
2.92	48.18982	20.02717	5.92	84.39792	9.72497	8.92	99.05104	6.43683
2.94	48.58626	19.88516	5.94	84.53852	9.69191	8.94	99.11822	6.42236
2.96	48.97965	19.74520	5.96	84.67832	9.65907	8.96	99.18512	6.40797
2.98	49.37000	19.60723	5.98	84.81731	9.62646	8.98	99.25175	6.39364
3.00	49.75735	19.47122	6.00	84.95550	9.59407	9.00	99.31810	6.37937
3.02	50.14171	19.33712	6.02	85.09289	9.56189	9.02	99.38417	6.36517
3.04	50.52310	19.20490	6.04	85.22950	9.52994	9.04	99.44997	6.35103
3.06	50.90156	19.07450	6.06	85.36533	9.49819	9.06	99.51550	6.33695
3.08	51.27710	18.94591	6.08	85.50038	9.46666	9.08	99.58076	6.32293
3.10	51.64974	18.81906	6.10	85.63467	9.43534	9.10	99.64574	6.30898
3.12	52.01952	18.69394	6.12	85.76819	9.40422	9.12	99.71047	6.29509
3.14	52.38644	18.57050	6.14	85.90096	9.37331	9.14	99.77492	6.28126
3.16	52.75053	18.44872	6.16	86.03298	9.34261	9.16	99.83911	6.26749
3.18	53.11182	18.32854	6.18	86.16425	9.31210	9.18	99.90304	6.25378
3.20	53.47033	18.20996	6.20	86.29479	9.28180	9.20	99.96671	6.24013
3.22	53.82609	18.09292	6.22	86.42459	9.25169	9.22	100.03012	6.22654
3.24	54.17910	17.97741	6.24	86.55367	9.22178	9.24	100.09327	6.21301
3.26	54.52941	17.86339	6.26	86.68203	9.19206	9.26	100.15617	6.19954
3.28	54.87703	17.75083	6.28	86.80967	9.16253	9.28	100.21881	6.18613
3.30	55.22198	17.63970	6.30	86.93661	9.13320	9.30	100.28120	6.17277
3.32	55.56428	17.52998	6.32	87.06284	9.10405	9.32	100.34333	6.15947
3.34	55.90397	17.42164	6.34	87.18837	9.07509	9.34	100.40522	6.14623
3.36	56.24105	17.31465	6.36	87.31321	9.04631	9.36	100.46686	6.13305
3.38	56.57556	17.20899	6.38	87.43737	9.01771	9.38	100.52825	6.11992
3.40	56.90751	17.10464	6.40	87.56084	8.98930	9.40	100.58939	6.10685
3.42	57.23694	17.00156	6.42	87.68363	8.96106	9.42	100.65030	6.09384
3.44	57.56385	16.89973	6.44	87.80576	8.93301	9.44	100.71095	6.08088
3.46	57.88828	16.79913	6.46	87.92722	8.90513	9.46	100.77137	6.06797
3.48	58.21024	16.69975	6.48	88.04802	8.87742	9.48	100.83155	6.05512
3.50	58.52976	16.60155	6.50	88.16816	8.84988	9.50	100.89148	6.04233
3.52	58.84686	16.50452	6.52	88.28765	8.82252	9.52	100.95118	6.02959
3.54	59.16155	16.40863	6.54	88.40650	8.79532	9.54	101.01065	6.01690
3.56	59.47387	16.31386	6.56	88.52471	8.76830	9.56	101.06988	6.00427
3.58	59.78383	16.22020	6.58	88.64228	8.74144	9.58	101.12888	5.99169

Prandtl-Meyer Funktion $\nu(Ma)$ und Machscher Winkel $\alpha(Ma)$

Ma	$\nu(Ma)$	$\alpha(Ma)$	Ma	$\nu(Ma)$	$\alpha(Ma)$	Ma	$\nu(Ma)$	$\alpha(Ma)$
3.60	60.09146	16.12762	6.60	88.75922	8.71474	9.60	101.18764	5.97916
3.62	60.39677	16.03611	6.62	88.87554	8.68821	9.62	101.24618	5.96668
3.64	60.69978	15.94564	6.64	88.99123	8.66184	9.64	101.30448	5.95426
3.66	61.00052	15.85621	6.66	89.10631	8.63563	9.66	101.36256	5.94189
3.68	61.29902	15.76778	6.68	89.22078	8.60958	9.68	101.42041	5.92956
3.70	61.59527	15.68035	6.70	89.33464	8.58368	9.70	101.47804	5.91729
3.72	61.88932	15.59390	6.72	89.44789	8.55794	9.72	101.53544	5.90508
3.74	62.18118	15.50840	6.74	89.56055	8.53236	9.74	101.59262	5.89291
3.76	62.47086	15.42385	6.76	89.67262	8.50693	9.76	101.64958	5.88079
3.78	62.75840	15.34023	6.78	89.78410	8.48165	9.78	101.70631	5.86872
3.80	63.04380	15.25752	6.80	89.89499	8.45652	9.80	101.76283	5.85670
3.82	63.32709	15.17571	6.82	90.00530	8.43154	9.82	101.81913	5.84473
3.84	63.60829	15.09479	6.84	90.11504	8.40671	9.84	101.87522	5.83281
3.86	63.88741	15.01473	6.86	90.22421	8.38202	9.86	101.93109	5.82094
3.88	64.16448	14.93553	6.88	90.33281	8.35748	9.88	101.98674	5.80912
3.90	64.43952	14.85717	6.90	90.44085	8.33308	9.90	102.04219	5.79734
3.92	64.71254	14.77963	6.92	90.54832	8.30883	9.92	102.09742	5.78561
3.94	64.98356	14.70291	6.94	90.65525	8.28472	9.94	102.15244	5.77393
3.96	65.25260	14.62699	6.96	90.76162	8.26074	9.96	102.20725	5.76230
3.98	65.51968	14.55186	6.98	90.86745	8.23691	9.98	102.26186	5.75071
4.00	65.78482	14.47751	7.00	90.97273	8.21321	10.00	102.31625	5.73917

Werte für $\nu(Ma)$ und $\alpha(Ma)$ sind in Grad ($^{\circ}$) angegeben

Literaturverzeichnis

- [1] J.D. Anderson: Modern Compressible Flow. 2nd Edition, McGraw-Hill, 1990
- [2] E. Becker: Technische Strömungslehre. Teubner, 1985
- [3] E. Becker: Technische Thermodynamik; (Kap. 5: Stationäre Fadenströmung). Teubner, 1984
- [4] M. van Dyke: An Album of Fluid Motion. The Parabolic Press, 1982.
- [5] K. Gersten: Einführung in die Strömungsmechanik. 6. Auflage, Vieweg, 1991
- [6] E.L. Houghton, P.W. Carpenter: Aerodynamics for Engineering Students. Butterworth-Heinemann, 2003
- [7] H. Kuhlmann: Strömungsmechanik. Pearson, 2014
- [8] **P.K. Kundu, I.M. Cohen, D.R. Dowling: Fluid Mechanics. 6th Edition, Academic Press, 2016**
- [9] H.W. Liepmann, A. Roshko: Elements of Gasdynamics. Dover, 2001
- [10] H.J. Lugt: Introduction to Vortex Theory. Vortex Flow Press, 1996
- [11] L.M. Milne-Thomson: Theoretical Hydrodynamics. Macmillan, 1968
- [12] Y. Nakayama, Y. Tanida (Editors): Atlas of Visualization II. The Visualization Society of Japan, 1996
- [13] Y. Nakayama, Y. Tanida (Editors): Atlas of Visualization III. The Visualization Society of Japan, 1997
- [14] R.L. Panton: Incompressible Flow. Wiley, 1984
- [15] S.B. Pope: Turbulent Flows. Cambridge University Press, 2000
- [16] L. Prandtl, K. Oswatitsch, K. Wieghardt: Führer durch die Strömungslehre. Vieweg, 1990
- [17] M. Samimy, K.S. Breuer, L.G. Leal, P.H. Steen: A Gallery of Fluid Motion. Cambridge, 2003
- [18] H. Schade, E. Kunz: Strömungslehre. 4. Auflage, de Gruyter, 2013
- [19] H. Schlichting, K. Gersten: Grenzschicht-Theorie. 9. Auflage, Springer, 1997
- [20] H. Sigloch: Technische Fluidmechanik. 3. Auflage, VDI, 1996
- [21] J.H. Spurk: Fluid Mechanics. Springer, 1997
- [22] J.H. Spurk: Aufgaben zur Strömungslehre. 2. Auflage, Springer, 1996
- [23] J.C. Tannehill, D.A. Anderson, R.H. Pletcher: Computational Fluid Mechanics and Heat Transfer. 2nd Edition, Taylor and Francis, 1997
- [24] D.J. Tritton: Physical Fluid Dynamics. Clarendon Press, 1988
- [25] P.P. Wegener: What Makes Airplanes Fly? History, Science, and Applications of Aerodynamics. 2nd Edition, Springer, 1997

- [26] D.C. Wilcox: Basic Fluid Mechanics. DCW Industries, 1998
- [27] F.M. White: Fluid Mechanics. McGraw-Hill, 1986
- [28] F.M. White: Viscous Fluid Flow. 2nd Edition, McGraw-Hill, 1991
- [29] W.A. Woods (Editor): Visualized Flow. Japan Society of Mechanical Engineering
- [30] J. Zierep, K. Bühler: Grundzüge der Strömungslehre. Springer, 2018
- [31] J. Zierep: Ähnlichkeitstheorie und Modellregeln der Strömungslehre. G. Braun, 1991
- [32] J. Zierep: Theoretische Gasdynamik. G. Braun, 1976

Begleitend zur Vorlesung besonders empfohlen ist das Lehrbuch von Kundu und Cohen [8].

Einige Web-Adressen zur Fluidodynamik:

www.efluids.com

www.desktopaero.com/appliedaero/welcome.html

www.grc.nasa.gov/WWW/K-12/airplane/index.html