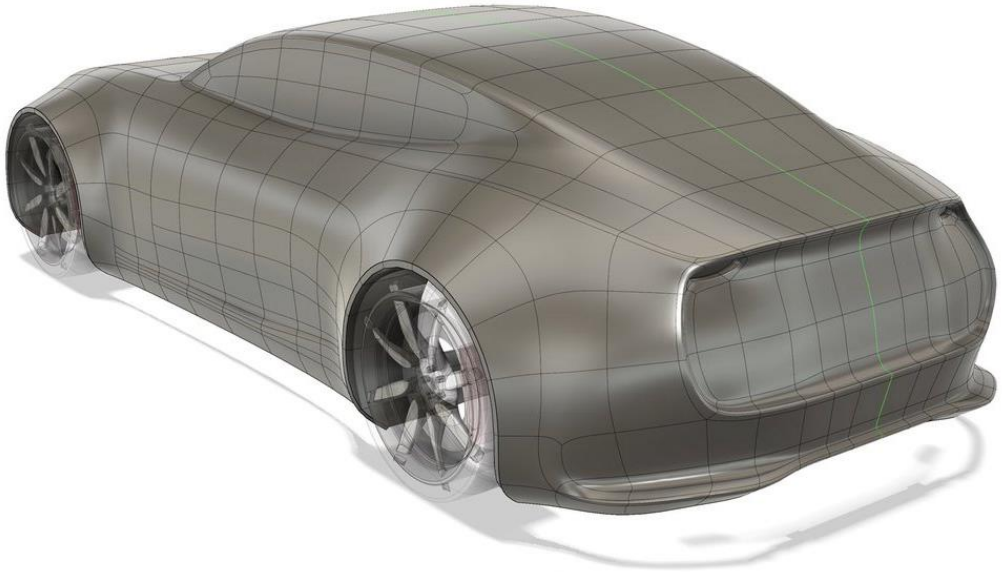
Parametrične predstavitve

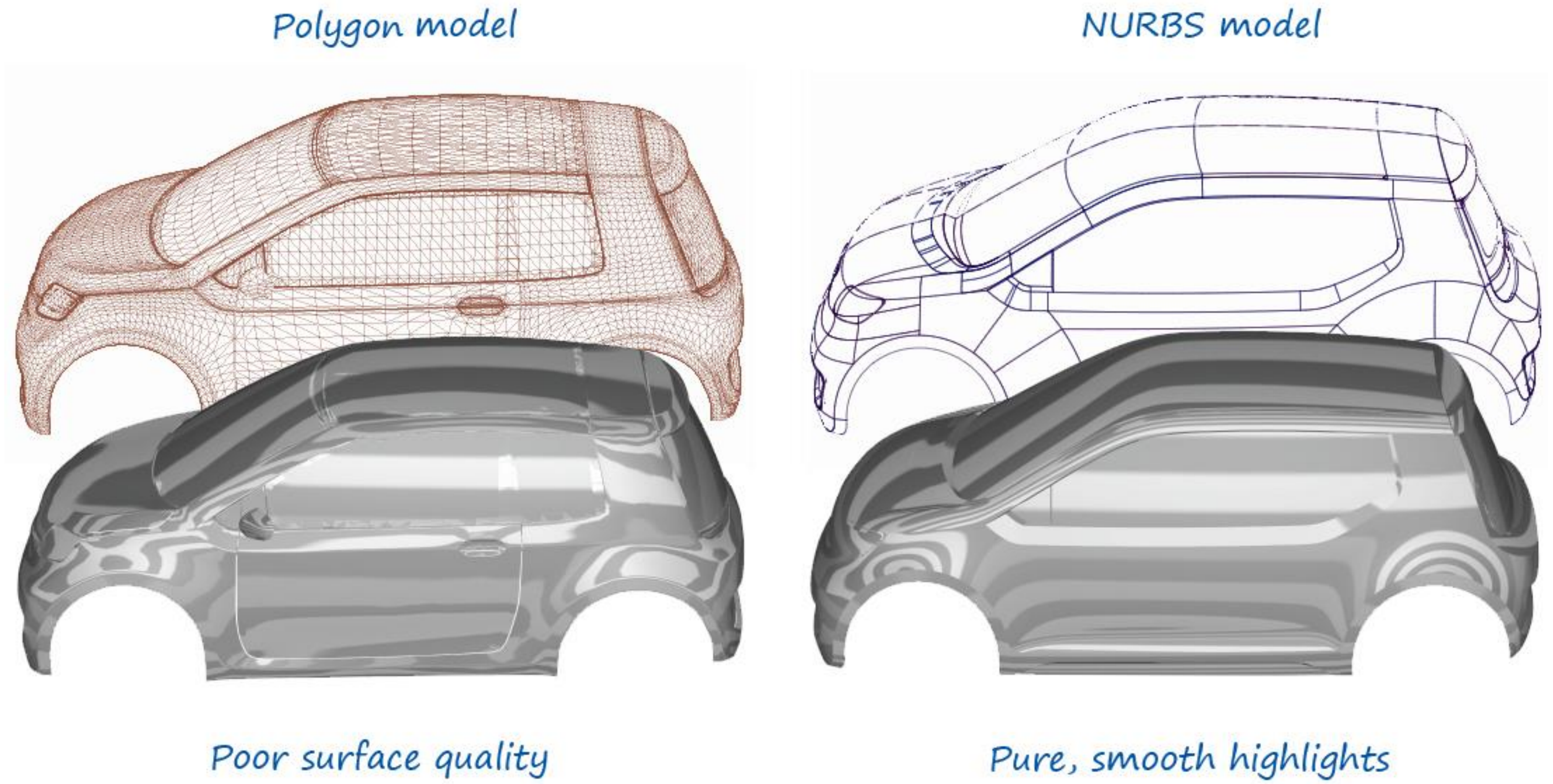
Parametrične krivulje in ploskve

- Neposredna predstavitev predmetov s **krivuljami** in **ploskvami**, ki jih krivulje definirajo
- Veliko se uporabljajo v CAD aplikacijah in animacijah
- Dosežemo gladkost



Vir

Poligoni vs. krivulje



Vir

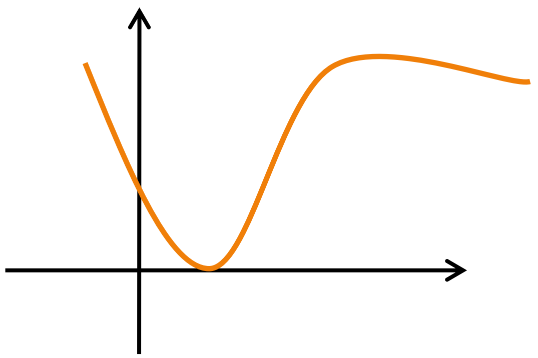
Predstavitve krivulj

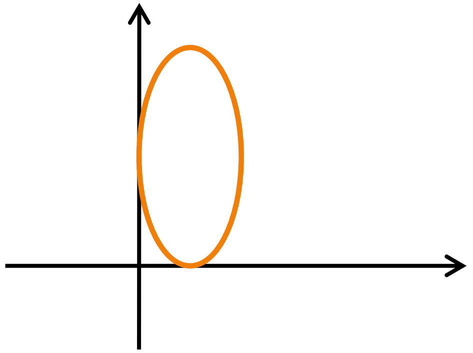
- Eksplicitne:
  - $y = f(x)$
    - $y = 2x^2 + 3x - 4$

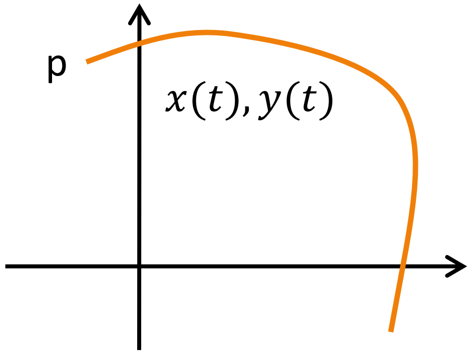
    \- funkcije z enkratnimi vrednostmi
    \+ enostavno vemo kdaj točka leži na krivulji
    \- odvisnost od koord. s.
- Implicitne:
  - $f(x, y) = 0$
    - $x^2 + y^2 - 1 = 0$

    \+ funkcije z večkratnimi vrednostmi
    \+ enostavno vemo kdaj točka leži na krivulji
    \- odvisnost od koord. s.
- **Parametrične**:
  - $x(t) = f_x(t), y(t) = f_y(t)$
    - $x = \cos t + p_x, y = \sin t + p_y$

    \+ funkcije z večkratnimi vrednostmi
    \- težko vemo kdaj točka leži na krivulji
    \+ neodvisnost od koord. s.



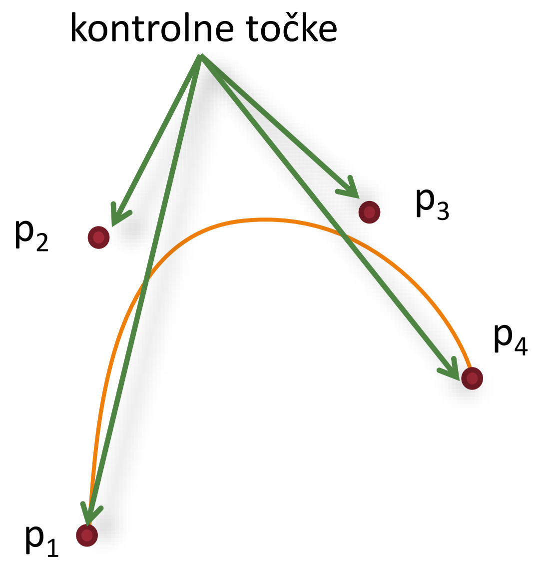




Splošen zapis parametrične krivulje

- $\boldsymbol{p}(t) = \sum_i \boldsymbol{p}_i B_i(t)$

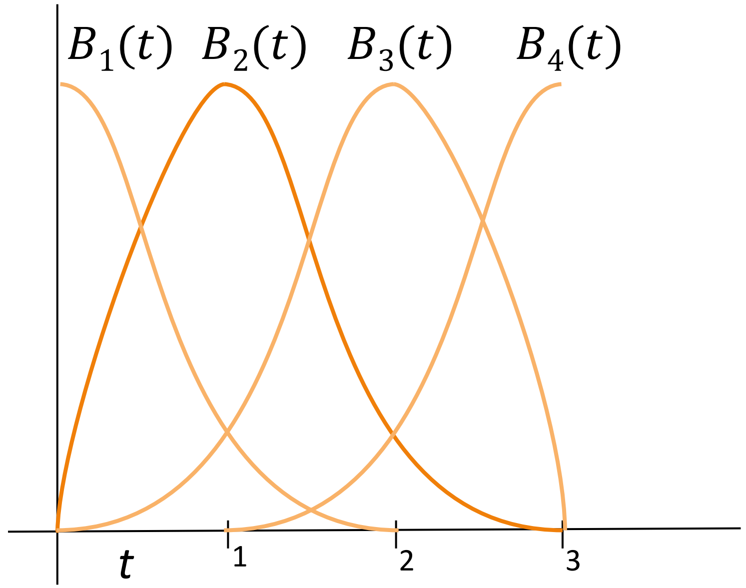
- $\boldsymbol{p}_i$: **kontrolne točke**
  - določajo obliko (in položaj) parametričnih krivulj
  - določajo točke ob/skozi katere naj bi krivulja potekala:
    - $\boldsymbol{p}_\mathrm{i} = [x_\mathrm{i}, y_\mathrm{i}, z_\mathrm{i}]$
- $B_i(t)$: **mešalne funkcije**
  - *blending functions*
  - določa kakšen je vpliv točke $\boldsymbol{p}_i$ na krivuljo za podan t
  - vsaka točka ima lahko drugačno funkcijo

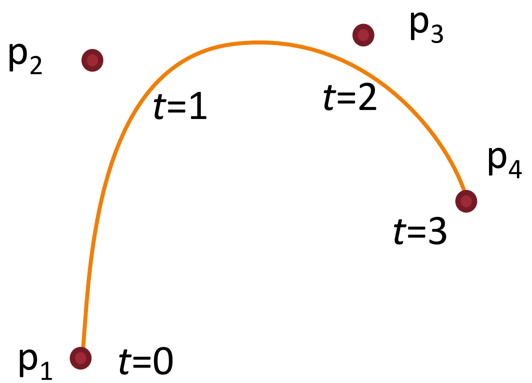


Mešalne funkcije

- Mešalne funkcije določajo tip krivulje
  - $\boldsymbol{p}(t) = \sum_i \boldsymbol{p}_i B_i(t)$

- Navadno jih izberemo tako, da omogočajo **lokalen** vpliv
  - kontrolna točka naj ima največji vpliv v svoji okolici
  - $B_i(t) \sim 0$, ko se t oddalji od kontrolne točke

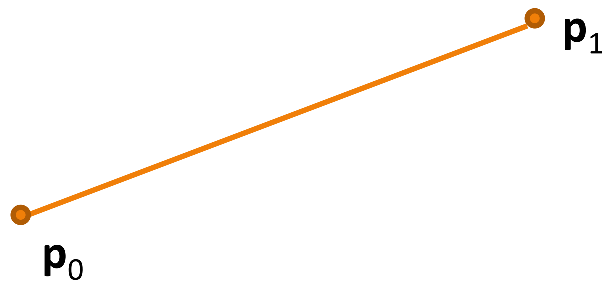


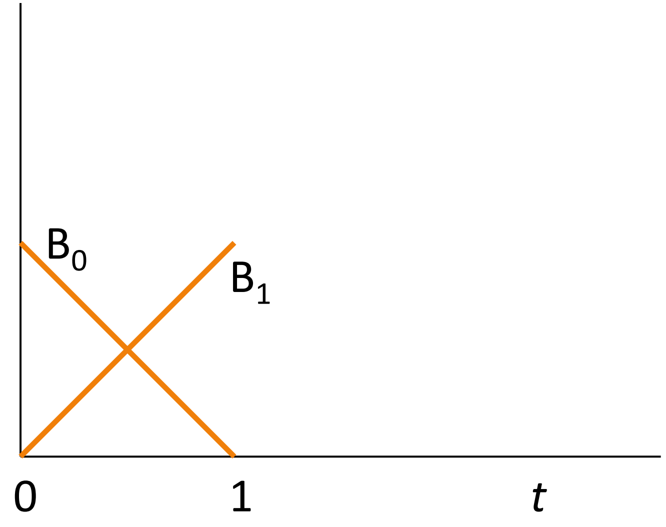


Enostaven primer

- Daljico lahko zapišemo kot:
  - $p(t) = p_0 + (p_1 - p_0)t$
    - $t \in [0,1]$

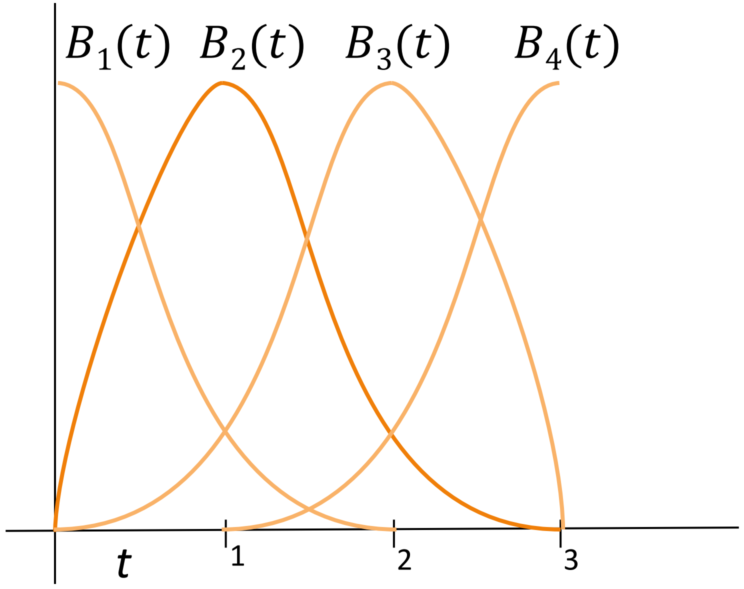
- Z mešalnimi funkcijami pa kot:
  - $B_0(t) = (1 - t)$
  - $B_1(t) = t$
  - $p(t) = p_0 B_0(t) + p_1 B_1(t)$

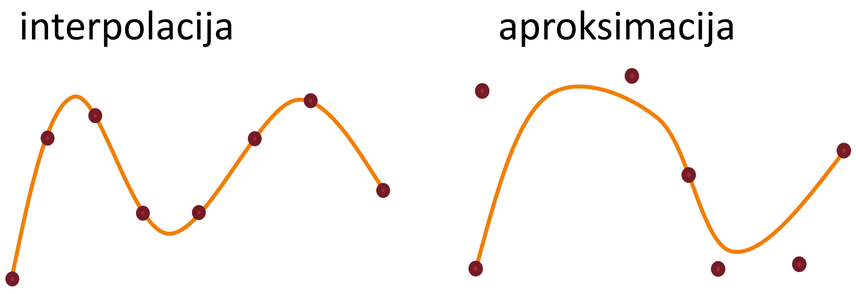




Mešalne funkcije

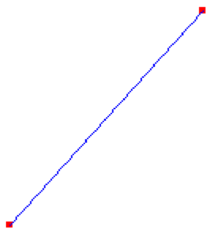
- Mešalne funkcije naj bodo
  - enostavne za izračun
  - **zvezne** in obstaja naj odvod (po možnosti drugi)
  - **lokalne** – interval na katerem so različne od nič naj bo majhen
  - omogočajo **interpolacijo** – kontrolne točke naj ležijo na krivulji
- Vse našteto **težko dosežemo**
  - opustimo lokalnost – *naravne krivulje*, kjer vsaka točka vpliva na celotno krivuljo
  - opustimo interpolacijo – dobimo **aproksimacijo**, kjer kontrolne točke ne ležijo na krivulji
    - Bézierove krivulje, B-zlepki



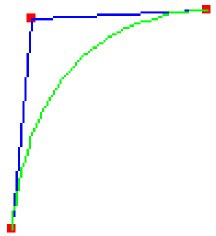


Polinomi kot mešalne funkcije

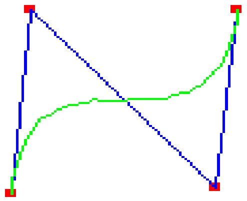
- Največkrat so mešalne funkcije **polinomi**
  - pomeni da je krivulja tudi definirana kot polinom
  - **stopnja** določa kakšna je lahko oblika krivulje
  - število kontrolnih točk je *stopnja+1*
- Pri tem največkrat uporabljamo **kubične polinome** (3. stopnja)
  - so najnižji red, ki ni planaren v 3D
  - so najnižji red, ki omogoča C^2 zvezne zlepke
  - Kompromis
    - polinomi nižjih redov so planarni - ne omogočajo fleksibilnosti pri oblikovanju krivulje
    - polinomi višjih redov lahko povzročijo nezaželena nihanja v krivulji in so računsko zahtevnejši



stopnja 1:
linearna - črta



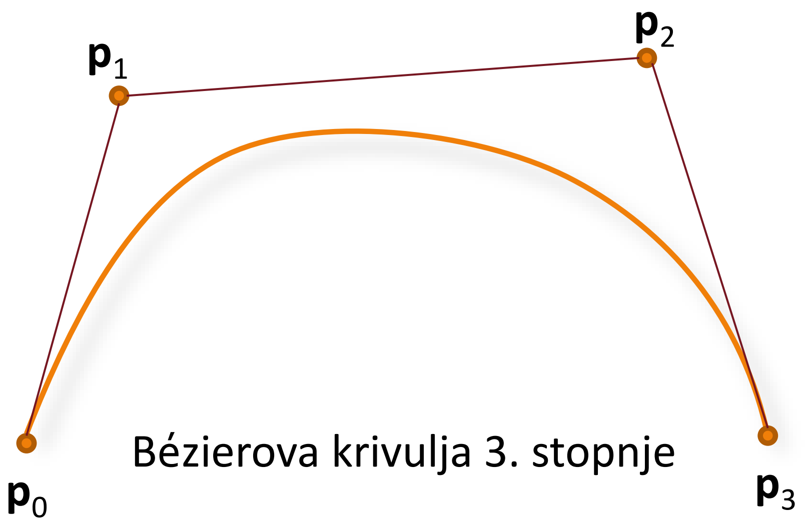
stopnja 2: kvadratna – lahko en zavoj



stopnja 3: kubična – lahko dva zavoja

Bézierove krivulje

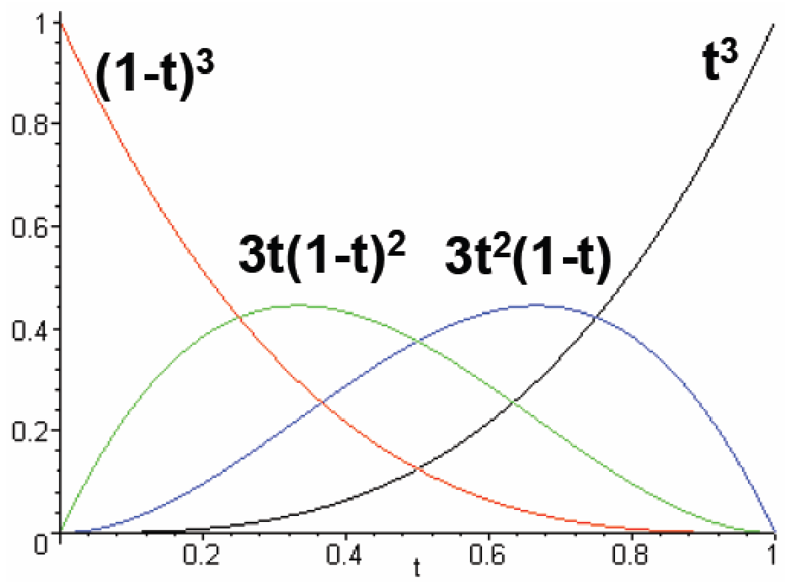
- Parametrične krivulje, ki se veliko uporabljajo v rač. grafiki:
  - 2D orodja kot so Adobe Illustrator, Powerpoint …
  - pisave - fonti
- Mešalne funkcije so t.i. **Bernsteinovi polinomi**
  - v splošnem je stopnja poljubna, največkrat pa uporabljamo **kubične krivulje** (torej stopnje 3)

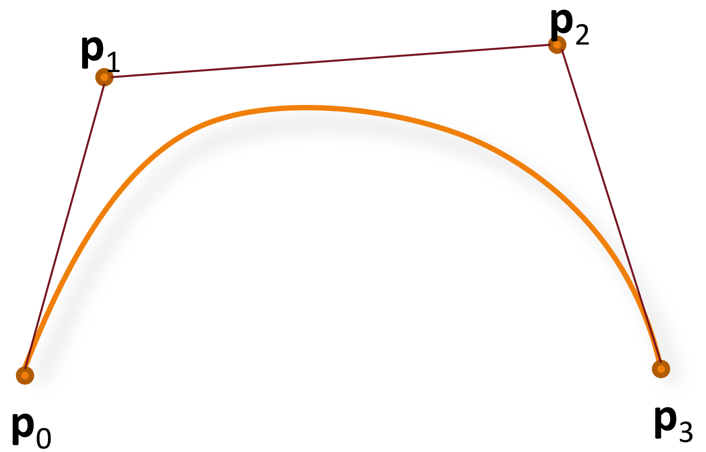


Bézierova krivulja 3. stopnje

Bézierove krivulje – mešalne funkcije

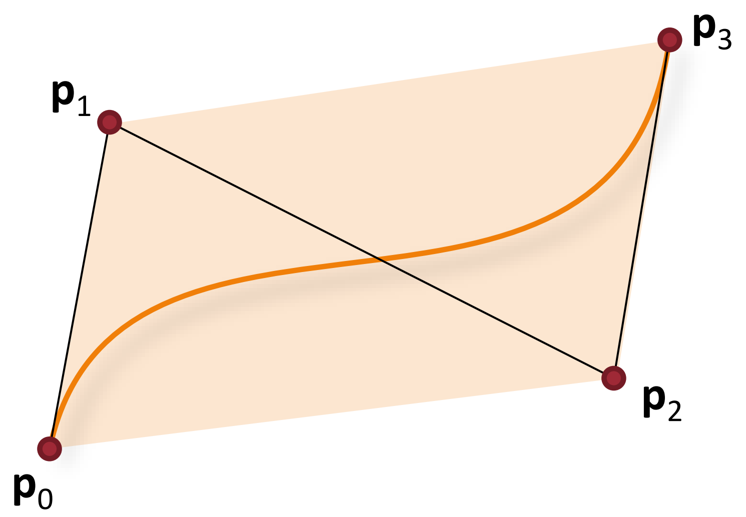
- Bernsteinovi polinomi stopnje n
  - $B_{i,n}(t) = \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i}$
- Stopnja 3:
  - $B_{0,3}(t) = (1-t)^3$
  - $B_{1,3}(t) = 3t(1-t)^2$
  - $B_{2,3}(t) = 3t^2(1-t)$
  - $B_{3,3}(t) = t^3$
- Bézierova krivulja stopnje 3 (t je med [0,1]):
  - $\boldsymbol{p}(t) = \sum_{i=0}^{3} \boldsymbol{p}_i B_{i,3}(t)$





Nekaj lastnosti Bézierovih krivulj

- Prva in zadnja kontrolna točka sta na krivulji (interpolacija), notranje ne (aproksimacija)
- Premik prve točke ne vpliva na tangento v zadnji (in obratno)
- Krivulja v celoti leži znotraj *konveksne ovojnice* kontrolnih točk
  - omogoča enostavno izločanje, računanje presekov
- Na ravnini nobena črta ne seka krivulje večkrat kot njenih kontrolnih črt
- Je afino invariantna:
  - enak rezultat dobimo s transformacijo kontrolnih točk ali transformacijo točk na krivulji



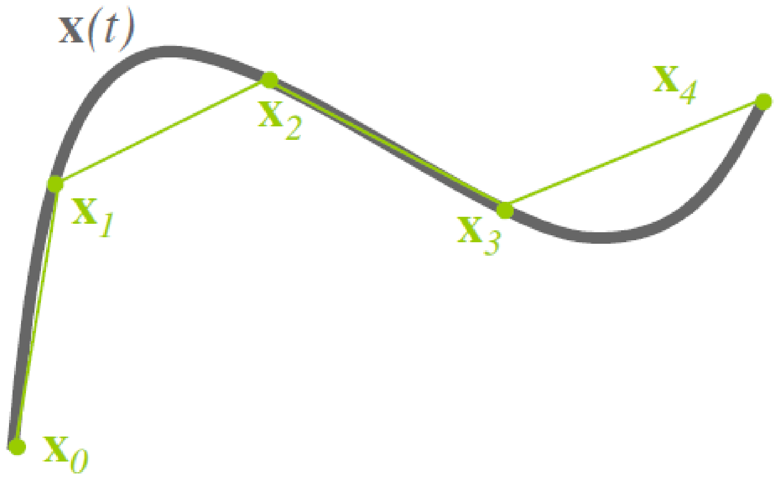
Izračun vrednosti krivulje

- Enačbo Bézierove krivulje lahko zapišemo v matrični obliki, ki omogoča učinkovit izračun krivulje glede na podani *t* na grafični strojni opremi:
  - matriko **C** lahko izračunamo vnaprej iz kontrolnih točk
  - $\boldsymbol{p}(t) = \sum_{i=0}^{3} \boldsymbol{p}_i B_{i,3}(t) = \boldsymbol{p}_0(1-t)^3 + \boldsymbol{p}_1 3t(1-t)^2 + \boldsymbol{p}_2 3t^2(1-t) + \boldsymbol{p}_3 t^3$

$$\mathbf{p}(t) = \begin{bmatrix} p_{0x} & p_{1x} & p_{2x} & p_{3x} \\ p_{0y} & p_{1y} & p_{2y} & p_{3y} \\ p_{0z} & p_{1z} & p_{2z} & p_{3z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 3 & -3 & 1 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -3 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t^3 \\ t^2 \\ t \\ 1 \end{bmatrix} = \mathbf{C} \begin{bmatrix} t^3 \\ t^2 \\ t \\ 1 \end{bmatrix}$$

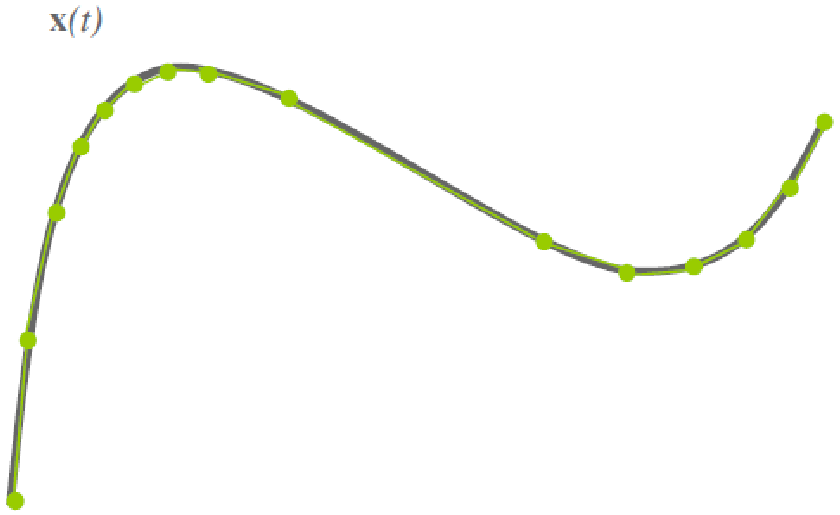
Risanje – enakomerno vzorčenje

- Kako narišemo krivuljo?
- Enostaven način: krivuljo izrišemo z ravnimi črtami med točkami na krivulji
- Narišemo približek z N ravnimi segmenti
  - N izberemo vnaprej, izračunamo N točk na krivulji
- Premalo točk
  - slab približek
- Preveč točk
  - počasi
  - segmenti se lahko prekrivajo



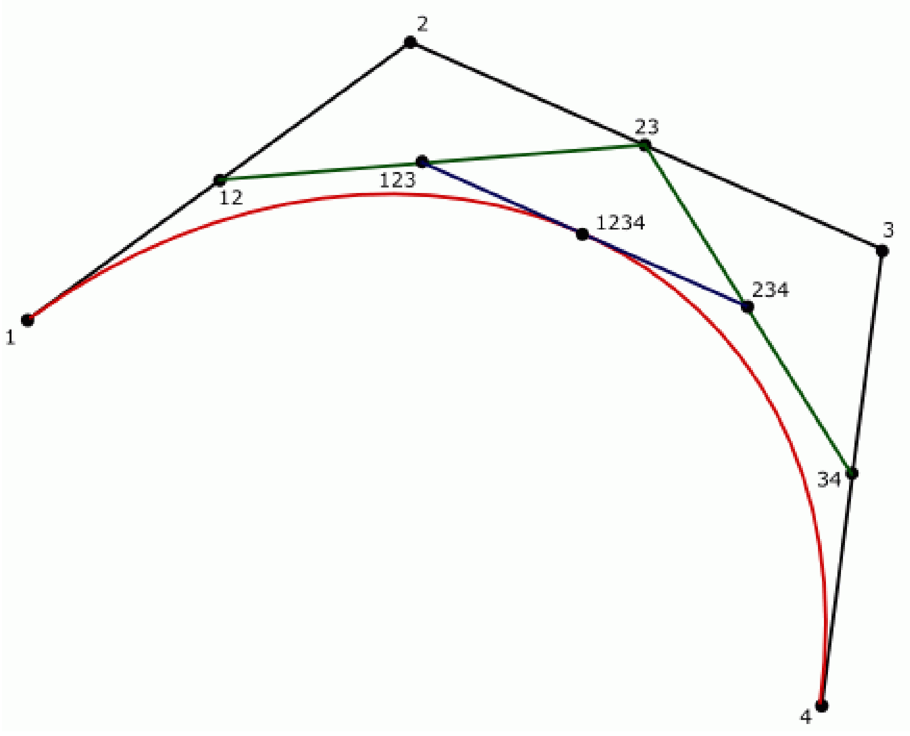
Risanje – adaptivno vzorčenje

- Število segmentov se prilagaja ukrivljenosti
  - malo segmentov, kjer je krivulja bolj ravna
  - veliko segmentov kjer je ukrivljena
- Obstajajo različne sheme za določanje števila in lokacije segmentov



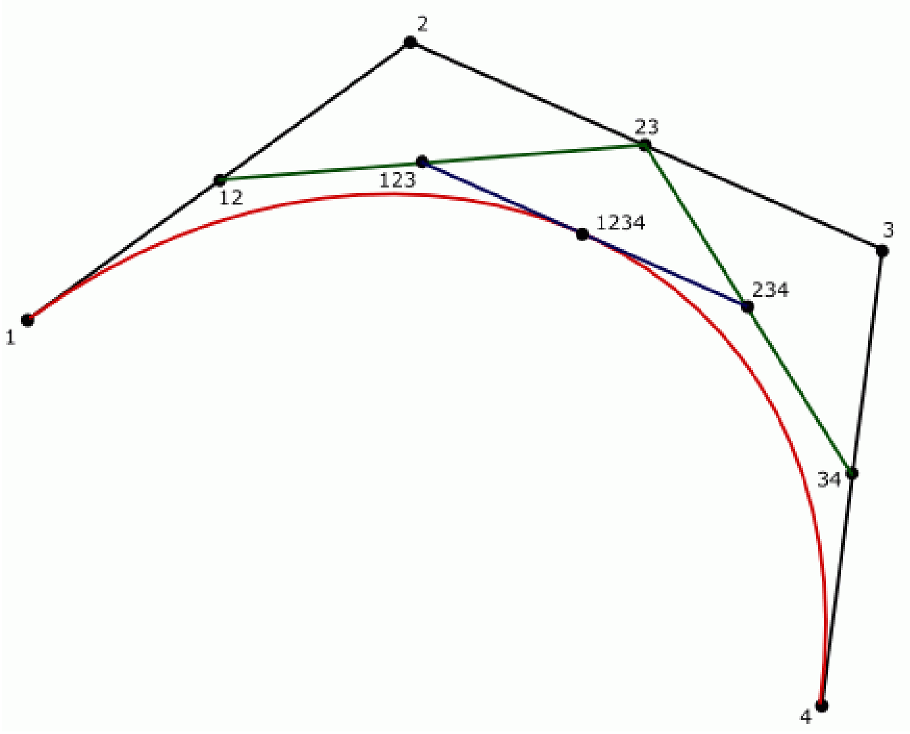
Risanje – De Casteljaujevo deljenje

- Učinkovit algoritem za adaptivno vzorčenje
- Vsak del kubične krivulje je tudi kubična krivulja
  - Bézierovo krivuljo lahko razdelimo v več manjših Bézierovih krivulj
  - te krivulje so bolj gladke kot celota
- Delimo dokler ne dobimo skoraj ravnih segmentov, ki jih izrišemo kot črte



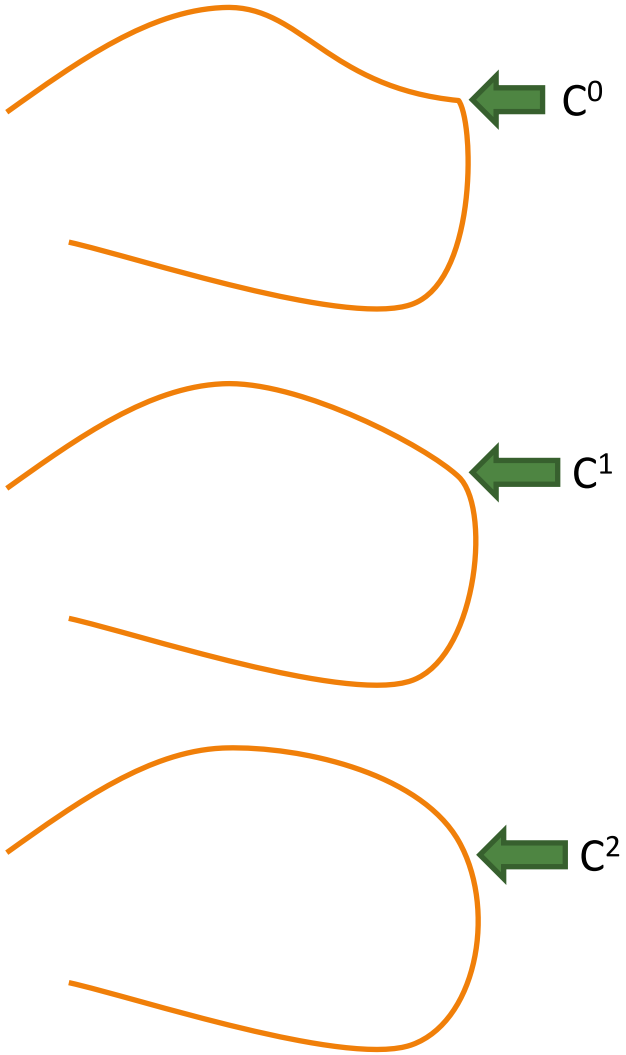
Risanje - De Casteljaujevo deljenje

- Kontrolne črte **rekurzivno razdelimo** na polovice (v splošnem s poljubnim faktorjem)
- Za kubično krivuljo na primeru:
  - dobimo točke 12, 23, 34
  - potem 123, 234
  - potem 1234
- Rezultat sta dve Bézierjevi krivulji, ki sta **bolj ravni** kot originalna:
  - 1, 12, 123, 1234
  - 1234, 234, 34, 4
- Postopek ponavljamo, ko je posamezna krivulja dovolj ravna, jo izrišemo kot črto
  - kdaj je dovolj ravna? npr. ko je kot med segmenti 1-2 in 2-3 ter 2-3 in 3-4 dovolj majhen



Zlepki

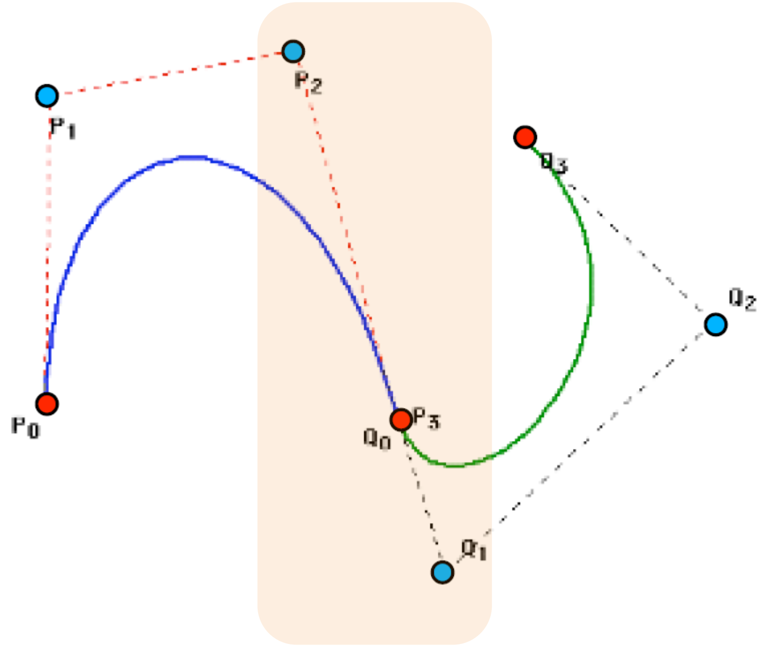
- Za daljše krivulje navadno kombiniramo krivulje 3. stopnje
- Zlepki naj bodo zvezni
  - C^0 se samo dotikajo
  - C^1 – enak prvi odvod v stiku – enaka usmerjenost
  - C^2 – enak drugi odvod v stiku – enaka ukrivljenost



Bézierovi zlepki

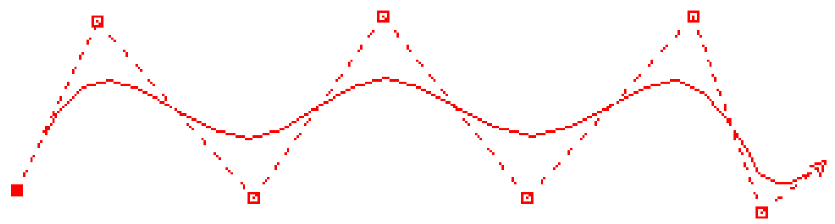
- Lepimo Bézierove krivulje 3. stopnje
- N segmentov, vsak je parametriziran s *t* med [0,1]
  - končna točka prejšnjega je začetna naslednjega
  - rabimo 3N+1 kontrolnih točk
- C^1 zveznost lahko zagotovimo z dodatno omejitvijo:
  - tangenta v stični točki obeh krivulj naj bo enaka:
    Q1-Q0 == P3-P2

- *Slabosti Bézierovih zlepkov:*
  - potrebujemo 3N+1 kontrolnih točk za N segmentov
  - težko dosežemo C^2 zveznost
  - del kontrolnih točk je na krivulji, del ne



B zlepki – B(asis) splines

- B zlepki:
  - posplošenje Bézierovih zlepkov
  - kontrolne točke niso več na krivulji
  - za ekvivalenten zlepek potrebujemo manj kontrolnih točk kot pri Bézieru
  - C^2 zveznost s kubičnimi mešalnimi funkcijami
  - omogočajo lokalno kontrolo
  - ohranimo lastnost, da krivulja v celoti leži znotraj *konveksne ovojnice* kontrolnih točk
  - ohranimo afino invariantnost

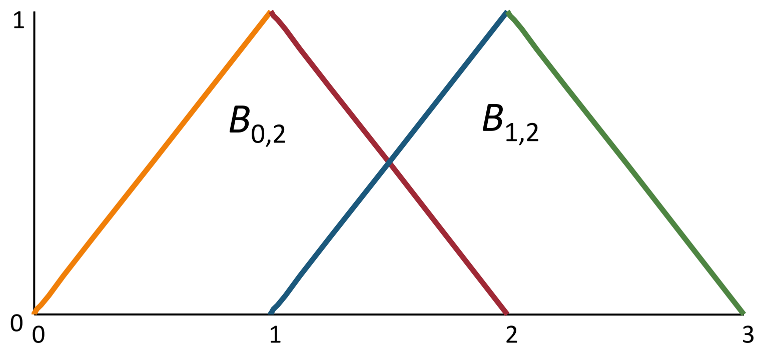


$$\boldsymbol{p}(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \boldsymbol{p}_{\mathrm{k}} B_{k,d}(t)$$

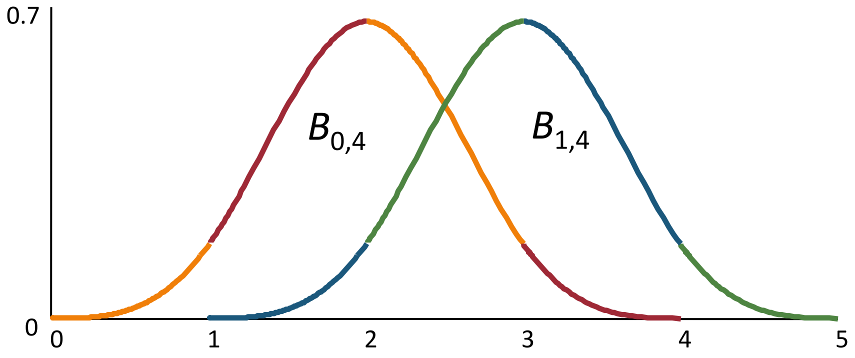
Mešalne funkcije B zlepkov

- Mešalne funkcije $B_{k,d}$ so **rekurzivno** definirane
  - $B_{k,1}(t) = \begin{cases} 1, u_k \leq t < u_{k+1} \\ 0, sicer \end{cases}$
  - $B_{k,d}(t) = \frac{t-u_k}{u_{k+d-1}-u_k} B_{k,d-1}(t) + \frac{u_{k+d}-t}{u_{k+d}-u_{k+1}} B_{k+1,d-1}(t)$
  - $B_{k,d}$ je sestavljena iz d podintervalov - polinomov stopnje $d-1$
  - u je vektor, ki določa intervale oz. meje med polinomi, ki jih imenujemo **vozli**

d=2, **u**=[0 1 2 3]



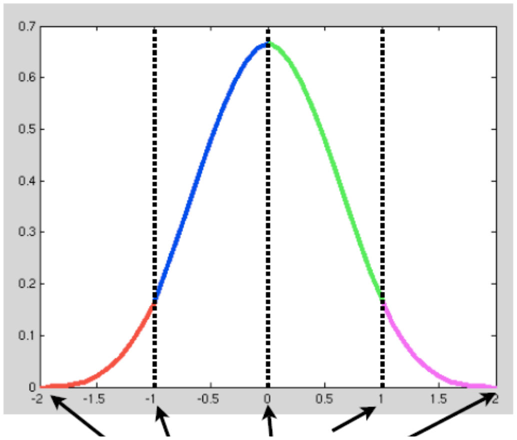
d=4, **u**=[0 1 2 3 4 5]



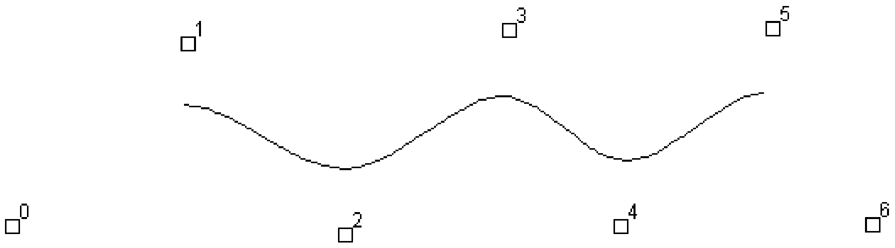
B zlepki

- **Vozel** določa območje vpliva mešalne funkcije $B_{k,d}$
  - vpliv bo za vrednosti t med u_k in u_{k+d}
- Celotno območje t je torej razdeljeno na $n + d - 1$ podintervalov, ki jih določa **vektor vozlov** (dolžine n+d)
  - kontrolna točka *k* je definirana na območju vozlov od *k do k+d*
- **Lokalnost**
  - na vsak odsek krivulje vpliva *d* kontrolnih točk
  - vsaka kontrolna točka vpliva na največ *d* odsekov krivulje

$$\boldsymbol{p}(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \boldsymbol{p}_{\mathrm{k}} B_{k,d}(t)$$

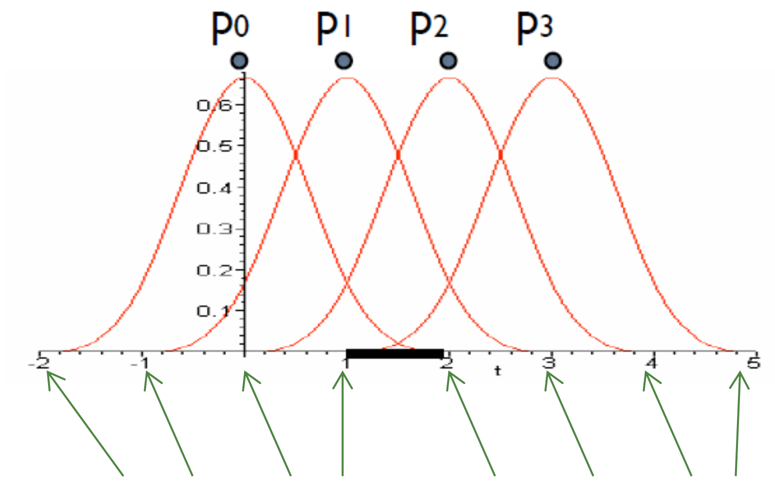


vozli



Enakomerni kubični B zlepki

- Mešalna funkcija je enaka pri vseh kontrolnih točkah – se le prestavi
  - $B_{k,d}(t) = B_d(t-k)$
- Krivulja pri enakomernih kubičnih B zlepkih ($d = 4$) je torej:
  - $\boldsymbol{p}(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \boldsymbol{p}_{\mathrm{k}} B_4(t-\mathrm{k})$
- Vozli so enakomerno razporejeni, npr. vektor vozlov je:
  - $\mathbf{u} = [1,2, \ldots .n+4]$
- Za posamezen odsek je možen hiter izračun krivulje



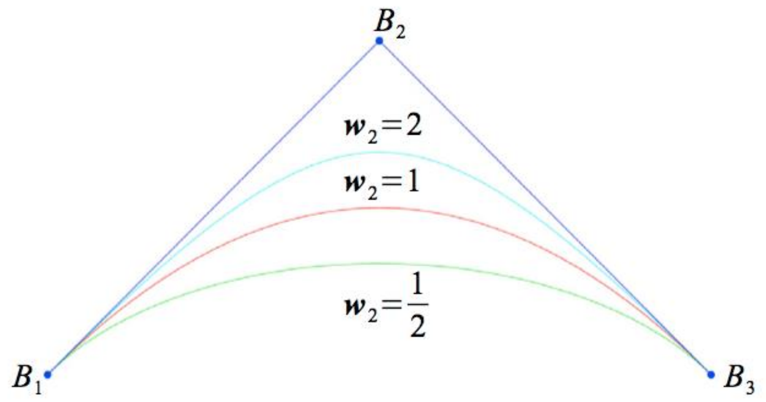
vozli – točke kjer se vpliv mešalne funkcije oz. kontrolne točke konča ali začne so enakomerno razporejeni

$$\mathbf{S}_i(t) = \begin{bmatrix} t^3 & t^2 & t & 1 \end{bmatrix} \frac{1}{6} \begin{bmatrix} -1 & 3 & -3 & 1 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -3 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{p}_{i-1} \\ \mathbf{p}_i \\ \mathbf{p}_{i+1} \\ \mathbf{p}_{i+2} \end{bmatrix}$$

Neenakomerni racionalni B zlepki - NURBS

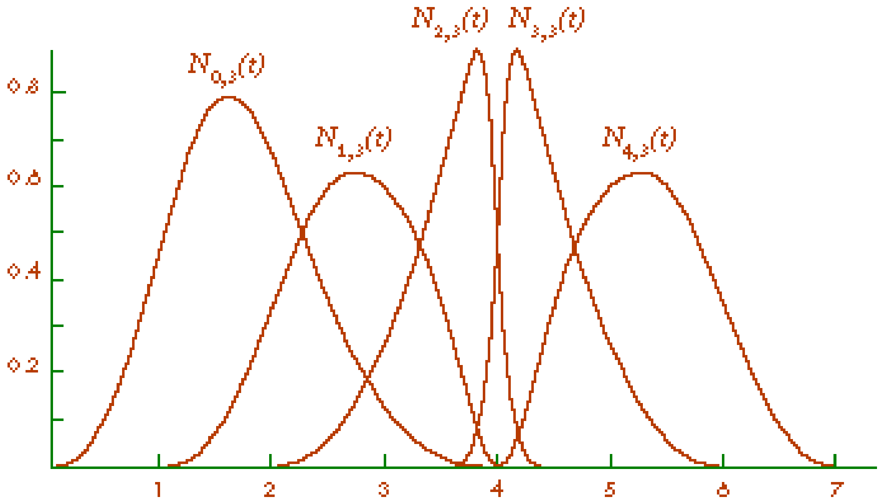
- Najbolj standardne krivulje v 3D oblikovanju
- Posplošitev Bézierovih krivulj in B-zlepkov
  - z enim B-zlepkom npr. ne moremo narisati pravega kroga (je polinom)!
- Neenakomerni, racionalni
  - imamo deljenje polinomov
  - vsaka kontrolna točka ima še utež, ki določa njen vpliv na krivuljo

$$\boldsymbol{p}(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \boldsymbol{p}_{\mathrm{k}} R_{k,d}(t) = \sum_{k=0}^{n-1} w_k \boldsymbol{p}_{\mathrm{k}} \frac{B_{k,d}(t)}{\sum_{l=0}^{n-1} w_l B_{l,d}(t)}$$



NURBS in vozli

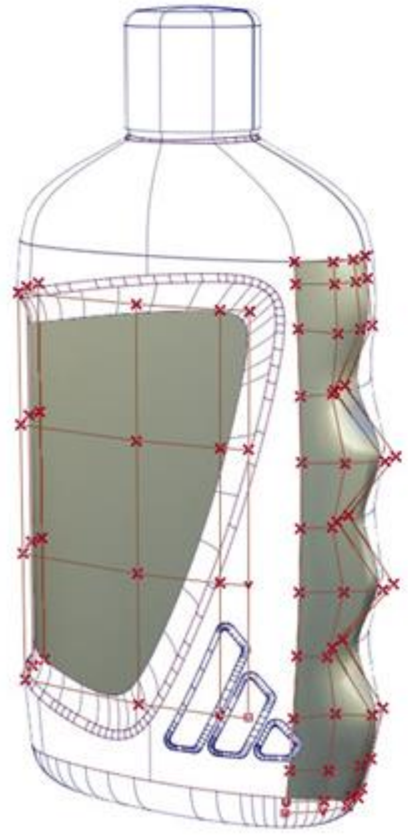
- Vozli navadno **niso enakomerno razdeljeni**!
  - **vektor vozlov** je tako v NURBS pomemben, saj določa bazne funkcije – glej definicijo $B_{k,d}$
- Lahko imamo **večkratne vozle**, npr:
  - [0, 0, 0, 1, 2, 3, 3,3]
  - še vedno je vektor vozlov dolžine n+d
- Večji skoki pomenijo večji (daljši) vpliv baznih funkcij
- Začetna in končna točka NURBS imata navadno večkratni vozel enak redu krivulje
  - tako se krivulja začne/konča v tej točki



Demo

Neenakomerni racionalni B zlepki - NURBS

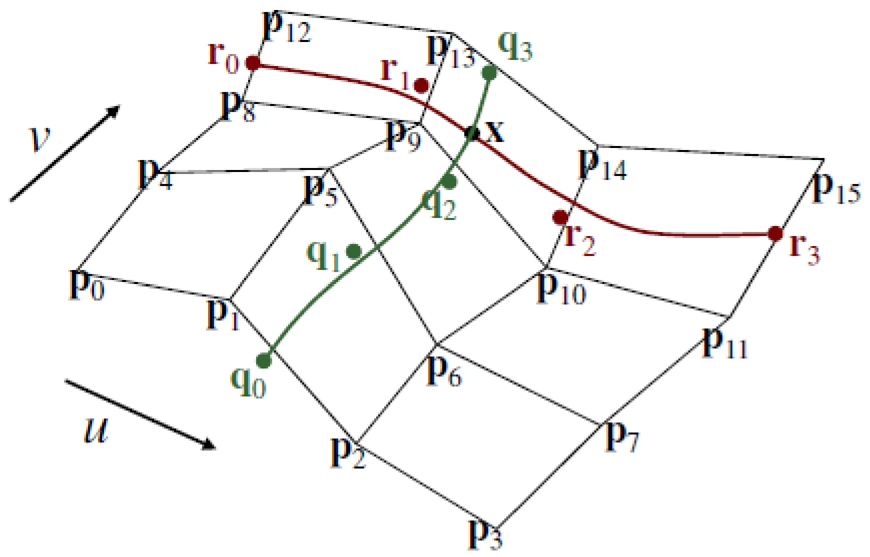
- C^2 zveznost je možna s kubičnimi zlepki
- So lokalni
- Krivulja v celoti leži znotraj konveksne ovojnice kontrolnih točk
- Poleg afine invariantnosti še projekcijsko invariantna



Vir

Parametrične ploskve

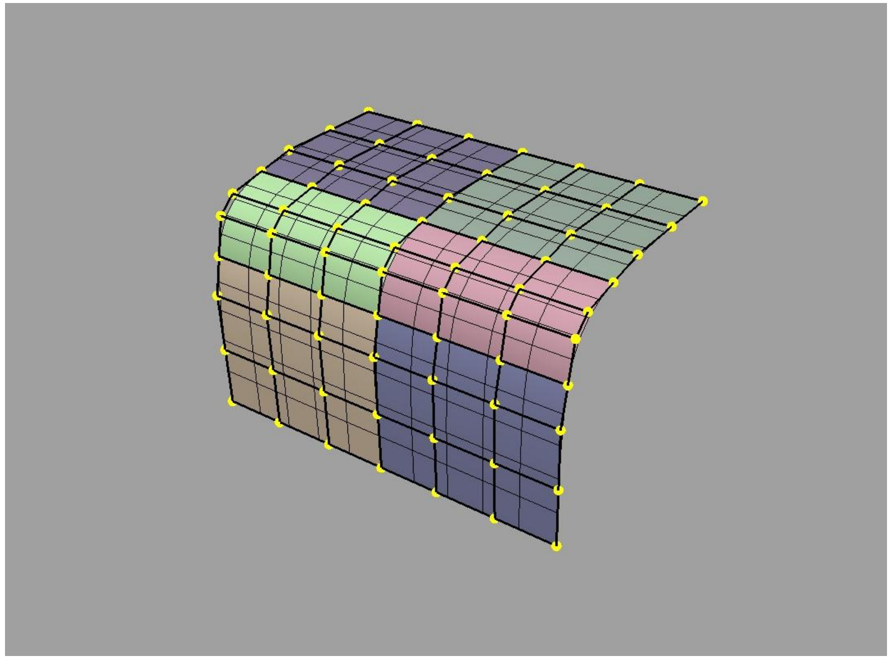
- Razširitev krivulj v 2D
- Namesto enega parametra $f(t)$ imamo dva – $f(u,v)$ in 2D množico kontrolnih točk
- Ploskev "lepimo" iz posameznih parametričnih **krp** (*patches*)
- Krpe so v obeh smereh sestavljene iz krivulj npr. Bézierovih, NURBS ipd.



$$s(u,v) = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{m-1} \boldsymbol{p}_{i,j} B_i(u) B_j(v)$$

Parametrične ploskve

- Večja ploskev je sestavljena iz več krp, ki si delijo robne točke
  - če iz krivulj delamo zlepke, to ohranja zveznost



Bézierova ploskev iz šestih krp. [Vir]

Parametrične ploskve

- Uporabljamo, kadar želimo natančen matematičen model površine
  - avtomobilska industrija ipd.
- Problematične so za splošno modeliranje, saj je težavno sestavljanje različnih ploskev (različna parametrizacija itn.)
  - vodi do špranj na stikih
- V animaciji, filmih se zato bolj uporabljajo deljene ploskve ali kombinacija NURBS in deljenih ploskev

REFERENCE

- X: NURBS Demo
- N. Guid: Računalniška grafika, FERI Maribor
- J.D. Foley, A. Van Dam et al.: Computer Graphics: Principles and Practice in C, Addison Wesley
- P. Shirley, S. Marschner: Fundamentals of Computer Graphics, A.K. Peters