NUM6

Mikołaj Kowalski

1 Wstep

Celem zadania było wyznaczanie wartości własnych oraz wektorów własnych dla zadanej macierzy M przy wykorzystaniu dwóch różnych metod numerycznych: *metody potegowej* oraz *algorytmu QR*. Zadanie obejmuje również porównanie zbieżności obu algorytmów oraz ocene ich efektywności, a także rozważenie sposobów ich usprawnienia.

Zadana macierz M ma postać:

$$M = \begin{bmatrix} 9 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

2 Opis problemu

Macierz M reprezentuje układ, dla którego poszukiwane sa wartości własne i odpowiadajace im wektory własne.

Dla wyznaczenia najwiekszej wartości własnej (co do modułu) stosowana jest metoda potegowa oraz algorytm QR. Dla pełnego zestawu wartości własnych zastosowano te same metody w tym algorytm QR, który umożliwia iteracyjne przekształcanie macierzy do formy trójkatnej górnej, gdzie wartości własne znajduja sie na diagonali.

3 Metody postepowania

3.1 Metoda potegowa

Metoda potegowa polega na iteracyjnym mnożeniu wektora poczatkowego y_0 przez macierz M, a nastepnie normalizacji tego wektora. Proces ten powtarza sie aż do zbieżności wektora do wektora własnego odpowiadajacego najwiekszej wartości własnej co do modułu. Kryterium zbieżności stanowi norma różnicy wektorów w kolejnych iteracjach:

$$\|y_{k+1} - y_k\| < \epsilon, \tag{1}$$

gdzie ϵ to zadana dokładność (w naszym przypadku 10^{-8}).

3.2 Algorytm QR

Algorytm QR iteracyjnie dekomponuje macierz na iloczyn Q (macierzy ortogonalnej) i R (macierzy trójkatnej górnej):

$$A_{k+1} = R_k Q_k, \tag{2}$$

gdzie A_{k+1} jest kolejna iteracja macierzy. Proces ten powtarza sie aż do uzyskania macierzy A_i o zbliżonej do diagonalnej strukturze, w której wartości na przekatnej stanowia wartości własne macierzy M.

4 Analiza wyników

4.1 Wyniki metody potegowej

Najwieksza wartość własna macierzy M wynosi:
$\lambda_{\max} = 9.71854847205907$, a odpowiadajacy jej wektor własny to:

$$y = \begin{bmatrix} 1. & 0.35927418 & 0.05452648 & 0.00706436 \end{bmatrix}^T. \tag{3}$$

Wykres zbieżności różnicy norm wektorów w kolejnych iteracjach (w skali logarytmicznej)

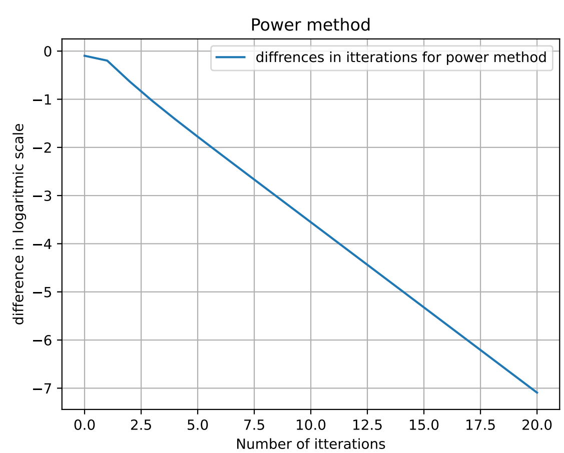

Figure 1: Zbieżność metody potegowej w funkcji liczby iteracji (skala logarytmiczna).

4.2 Wyniki algorytmu QR

Wartości własne macierzy M wyznaczone algorytmem QR to:

$$
\begin{aligned}
\lambda_1 &= 9.71854825, \\
\lambda_2 &= 4.30170491, \\
\lambda_3 &= 2.74019411, \\
\lambda_4 &= 1.23955273.
\end{aligned}
\tag{4}
$$

Ewolucja elementów diagonalnych w kolejnych iteracjach (w skali log- arytmicznej)

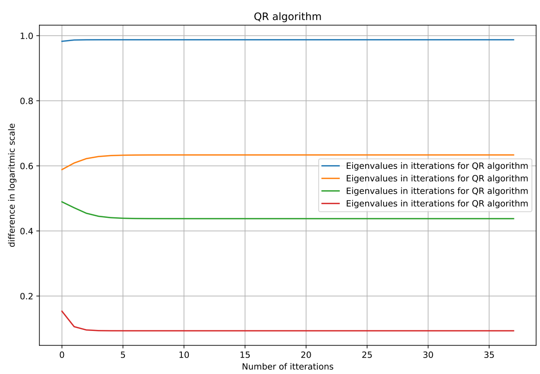

Figure 2: Zmiana elementów diagonalnych macierzy A_i w algorytmie QR.

Zbieżność macierzy do macierzy trójkatnej górnej (w skali log- arytmicznej)

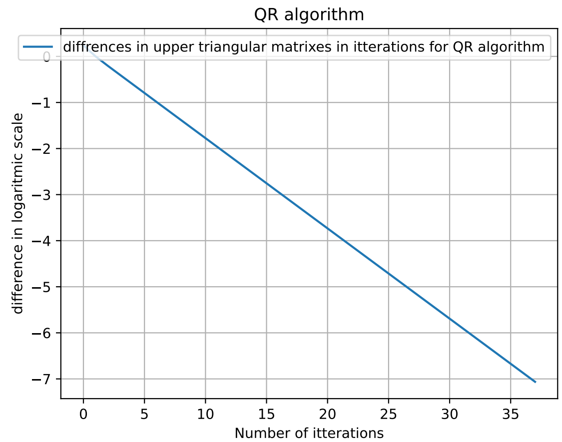

Figure 3: Zbieżność do macierzy trójkatnej górnej, w algorytmie QR.

5 Porównanie algorytmów

Metoda potegowa oraz algorytm QR różnia sie znaczaco zarówno pod wzgledem zastosowania, jak i efektywności obliczeniowej.

Metoda potegowa jest szybsza i bardziej efektywna w przypadku wyznaczania jedynie najwiekszej wartości własnej i odpowiadajacego jej wektora własnego. Iteracyjny proces mnożenia przez macierz i normalizacji wymaga znacznie mniejszej liczby operacji w porównaniu do dekompozycji QR. Zbieżność metody potegowej była szybka, co widać na wykresie przedstawiajacym różnice norm wektorów w kolejnych iteracjach. Jednak metoda potegowa nie pozwala na wyznaczenie pozostałych wartości własnych bez modyfikacji, takich jak wprowadzenie przesunieć.

Z kolei algorytm QR, mimo że jest bardziej kosztowny obliczeniowo z powodu konieczności wykonywania dekompozycji QR w każdej iteracji, umożliwia wyznaczenie pełnego spektrum wartości własnych macierzy. Stabilność algorytmu QR została potwierdzona przez analize ewolucji elementów diagonalnych macierzy w kolejnych iteracjach. Zbieżność do postaci trójkatnej górnej pozwala na wizualne potwierdzenie poprawności działania algorytmu.

Pod wzgledem praktycznym wybór metody zależy od wymagań obliczeniowych: metoda potegowa jest korzystniejsza w przypadku wyznaczania najwiekszej wartości własnej w dużych układach, natomiast algorytm QR sprawdza sie w sytuacjach wymagajacych wyznaczenia wszystkich wartości własnych.

Zbieżność algorytmu QR jest stabilna, co widać na rysunkach przedstawiajacych ewolucje elementów diagonalnych.

6 Ocena zbieżności i usprawnienia

Obie metody wykazały zadowalajaca zbieżność w analizowanym przypadku. Należy jednak pamietać, że w przypadku bardziej złożonych macierzy, np. o blisko leżacych wartościach własnych, szybkość zbieżności może ulec pogorszeniu. Aby usprawnić działanie tych metod, można zastosować nastepujace ulepszenia: Wprowadzenie przesunieć w algorytmie QR może znaczaco przyspieszyć zbieżność. Wprowadzenie przesunieć zmniejsza liczbe iteracji potrzebnych do uzyskania macierzy diagonalnej. Usprawnienie metody potegowej: Zastosowanie odwrotnej metody potegowej pozwala na wyznaczenie wartości własnych o najmniejszym module. Metoda potegowa z przesunieciem umożliwia obliczanie innych wartości własnych w okolicy wybranego przesuniecia. Optymalizacja obliczeń: Dla bardzo dużych macierzy, np. rzadkich, można zastosować algorytmy wykorzystujace właściwości strukturalne macierzy, co pozwala na redukcje liczby operacji arytmetycznych.

7 Podsumowanie

Oba algorytmy można usprawnić poprzez wprowadzenie przesunieć lub zastosowanie specjalistycznych metod dostosowanych do struktury macierzy. Wyniki potwierdzaja zbieżność obu metod i ich przydatność w analizie wartości własnych w różnych zastosowaniach numerycznych.