NUM7

Mikołaj Kowalski

1 Wstep

Celem zadania jest przeanalizowanie metod interpolacji dla funkcji $y(x) = \frac{1}{1+10x^2}$ na przedziale $[-1, 1]$. Zastosowane metody to interpolacja wielomianowa metoda Lagrange'a oraz interpolacja funkcja sklejana stopnia trzeciego. Porównano uzyskane wyniki z rzeczywista wartościa funkcji oraz przeanalizowano błedy interpolacji dla różnej liczby punktów.

Interpolacja jest podstawowa technika numeryczna stosowana w aproksymacji funkcji na podstawie ograniczonej liczby danych. Wybrano dwie klasyczne metody: wielomian interpolacyjny oraz funkcje sklejane, które różnia sie zarówno podejściem, jak i właściwościami numerycznymi.

2 Analiza problemu

Rozważana funkcja jest gładka i symetryczna, ale szybko maleje w kierunku krańców przedziału $[-1, 1]$. Takie zachowanie może prowadzić do problemów z niestabilnościa numeryczna w przypadku interpolacji wielomianowej dla dużej liczby punktów.

Problem został podzielony na nastepujace etapy:

1. Wygenerowanie jednorodnej siatki punktów $\{x_i, y_i\}$ w przedziale $[-1, 1]$.
2. Implementacja interpolacji wielomianowej metoda Lagrange'a.
3. Implementacja interpolacji funkcja sklejana stopnia trzeciego z warunkami naturalnymi $s''(x_0) = s''(x_n) = 0$.
4. Porównanie wyników interpolacji z rzeczywista funkcja $y(x)$ oraz analiza błedów.

3 Metoda postepowania

3.1 Generacja punktów interpolacji

Punkty x_i zostały wygenerowane za pomoca równego podziału przedziału $[-1, 1]$:

$$x_i = -1 + \frac{2i}{n}, \quad i = 0, 1, \ldots, n.$$

Odpowiadajace wartości funkcji y_i obliczono jako:

$$y_i = \frac{1}{1 + 10x_i^2}.$$

3.2 Interpolacja wielomianowa metoda Lagrange'a

Wielomian interpolacyjny $W_n(x)$ został obliczony jako:

$$W_n(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i L_i(x), \quad gdzie L_i(x) = \prod_{j=0, j\neq i}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}.$$

Algorytm został zaimplementowany w Pythonie bez użycia bibliotek do interpolacji.

3.3 Interpolacja funkcja sklejana

Funkcje sklejana $s(x)$ stopnia trzeciego skonstruowano jako:

$$s(x) = a_i + b_i(x - x_i) + c_i(x - x_i)^2 + d_i(x - x_i)^3, \quad x \in [x_i, x_{i+1}].$$

Współczynniki a_i, b_i, c_i, d_i zostały wyznaczone poprzez rozwiazanie układu równań uwzgledniajacego:

- ciagłość funkcji,
- ciagłość pierwszej i drugiej pochodnej,
- warunki brzegowe $s''(x_0) = s''(x_n) = 0$.

4 Analiza wyników

Wyniki interpolacji przedstawiono na wykresach (Rysunek 1).

Obserwacje:

- Wielomian interpolacyjny dokładnie odwzorowuje funkcje w punktach interpolacji, ale wykazuje wieksze błedy w pobliżu krańców przedziału (zjawisko Rungego).
- Funkcja sklejana stopnia trzeciego lepiej odwzorowuje funkcje w całym przedziale, unikajac oscylacji charakterystycznych dla interpolacji wielomianowej.

5 Podsumowanie

Wyniki pokazuja, że:

- Interpolacja wielomianowa metoda Lagrange'a jest skuteczna dla niewielkiej liczby punktów, ale niestabilna przy wiekszych wartościach n.
- Funkcja sklejana zapewnia wieksza stabilność i dokładność w całym przedziale.
- Wybór metody interpolacji powinien uwzgledniać charakter funkcji oraz liczbe punktów interpolacji.

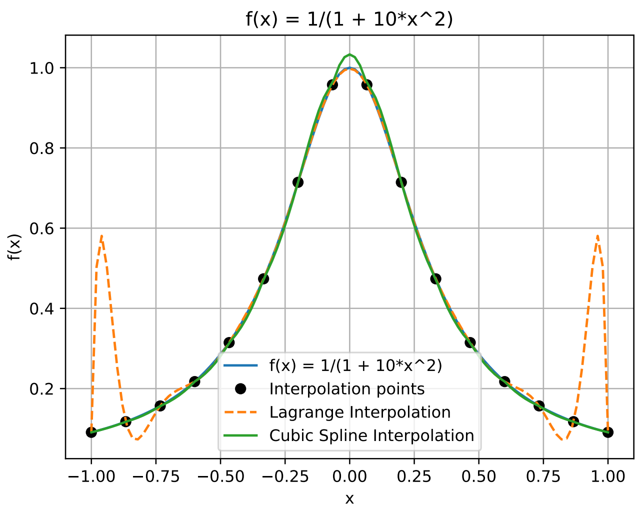

Figure 1: Porównanie rzeczywistej funkcji $y(x)$, interpolacji wielomianowej i funkcji sklejanej.