

NUM3

Mikołaj Kowalski

Wstęp

Celem zadania było wyznaczenie iloczynu $y = A^{-1}x$, gdzie macierz A ma specyficzną strukturę pasmową, a wektor x jest wektorem kolejnych liczb całkowitych od 1 do N . W zadaniu określono $N = 300$, a następnie zbadano wpływ wartości N na czas działania algorytmu. Kluczowym elementem była implementacja algorytmu faktoryzacji LU, umożliwiającego rozwiązanie układu równań w sposób efektywny i bez użycia bibliotek algebry liniowej.

Dodatkowo, obliczono wyznacznik macierzy A oraz przedstawiono zależność czasu działania programu od rozmiaru N na wykresie.

Analiza problemu

Macierz A ma strukturę wstęgową, co pozwala na efektywne wykorzystanie jej właściwości do rozwiązania układu równań. Zastosowano faktoryzację LU, która jest podzielona na dwa etapy:

1. **Rozkład macierzy A na iloczyn macierzy dolnotrójkątnej L oraz górnortrójkątnej U :**

W trakcie tego kroku, macierz A została przekształcona w dwie macierze, które łatwo wykorzystać do rozwiązywania układów równań.

2. **Rozwiązywanie układu równań $Ay = x$:**

Składa się z dwóch etapów:

- *Forward substitution*: Rozwiązanie układu $Lz = x$.
- *Back substitution*: Rozwiązanie układu $Uy = z$.

Metoda faktoryzacji LU została wybrana ze względu na efektywność przy macierzach o specjalnej strukturze (takiej jak macierz wstęgowa) oraz stabilność numeryczną.

Opis rozwiązania

1. **Implementacja algorytmu:**

W zadaniu stworzono macierz A o określonych współczynnikach oraz wektor x . Następnie wykonano rozkład LU z wykorzystaniem macierzy pomocniczych L i U , zapisując wyłącznie niezerowe elementy (ze względu na oszczędność pamięci).

2. Obliczanie wyznacznika:

Wyznacznik macierzy A obliczono jako iloczyn elementów diagonalnych macierzy U , co wynika bezpośrednio z własności rozkładu LU.

3. Analiza czasu działania:

Algorytm przetestowano dla różnych wartości N w przedziale od 300 do 1000 (z krokiem 10). Zmierzono czas wykonania algorytmu i przedstawiono go na wykresie.

Wyniki

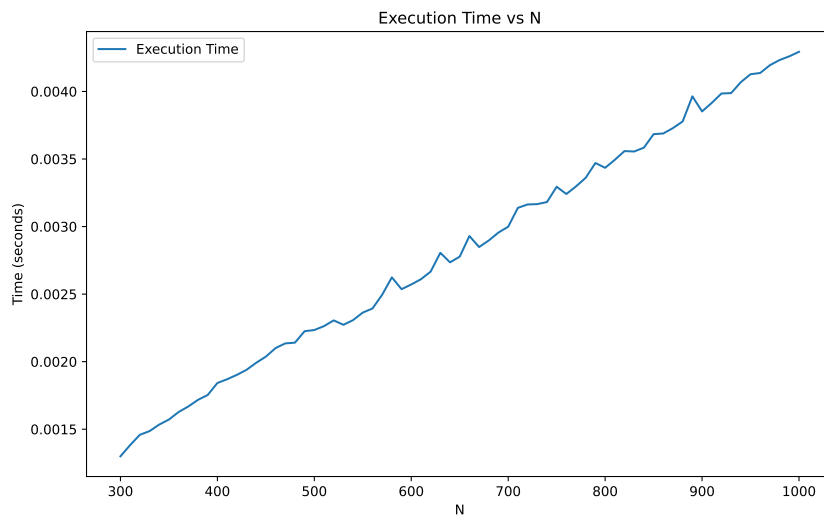
1. Dla $N = 300$:

$\det A = 13.826355108346936$

$y = [$ 0.33637669 1.59818245 2.27082032 3.08483655 3.84497411 4.61665535 5.38247868
6.14867297 6.913882 7.67879848 8.44338869 9.20777383 9.97199223 10.73608429
11.50007515 12.2639847 13.02782762 13.79161536 14.55535685 15.3190592 16.08272813
16.84636829 17.60998351 18.37357698 19.13715135 19.90070886 20.66425141 21.42778065
22.19129795 22.95480455 23.71830148 24.48178966 25.24526991 26.00874293 26.77220934
27.53566971 28.29912452 29.06257423 29.82601923 30.58945988 31.35289649 32.11632936
32.87975876 33.64318492 34.40660806 35.17002837 35.93344605 36.69686125 37.46027413
38.22368484 38.98709349 39.75050021 40.5139051 41.27730828 42.04070983 42.80410984
43.5675084 44.33090558 45.09430144 45.85769607 46.62108951 47.38448183 48.14787307
48.9112633 49.67465255 50.43804087 51.20142831 51.9648149 52.72820068 53.49158568
54.25496994 55.01835349 55.78173636 56.54511857 57.30850016 58.07188114 58.83526154
59.59864139 60.3620207 61.1253995 61.88877779 62.65215561 63.41553297 64.17890989
64.94228638 65.70566245 66.46903812 67.23241341 67.99578833 68.75916288 69.52253709
70.28591096 71.04928451 71.81265774 72.57603066 73.33940329 74.10277563 74.8661477
75.62951949 76.39289103 77.15626231 77.91963334 78.68300414 79.4463747 80.20974504
80.97311516 81.73648507 82.49985477 83.26322427 84.02659357 84.78996269 85.55333162
86.31670036 87.08006894 87.84343734 88.60680557 89.37017365 90.13354156 90.89690933
91.66027694 92.4236444 93.18701172 93.95037891 94.71374595 95.47711287 96.24047965
97.00384631 97.76721285 98.53057926 99.29394556 100.05731174 100.82067781 101.58404377
102.34740962 103.11077537 103.87414101 104.63750655 105.400872 106.16423735
106.9276026 107.69096776 108.45433284 109.21769782 109.98106272 110.74442753
111.50779226 112.27115691 113.03452148 113.79788598 114.56125039 115.32461473
116.087979 116.85134319 117.61470732 118.37807138 119.14143536 119.90479929
120.66816314 121.43152693 122.19489066 122.95825433 123.72161794 124.48498149
125.24834498 126.01170841 126.77507179 127.53843511 128.30179837 129.06516159
129.82852475 130.59188786 131.35525092 132.11861393 132.88197689 133.64533981
134.40870267 135.17206549 135.93542827 136.698791 137.46215368 138.22551633
138.98887893 139.75224148 140.515604 141.27896648 142.04232891 142.80569131
143.56905367 144.33241599 145.09577828 145.85914052 146.62250273 147.38586491
148.14922705 148.91258915 149.67595123 150.43931326 151.20267527 151.96603724
152.72939918 153.49276109 154.25612297 155.01948482 155.78284663 156.54620842
157.30957018 158.07293191 158.83629361 159.59965528 160.36301693 161.12637855
161.88974014 162.6531017 163.41646324 164.17982476 164.94318624 165.70654771
166.46990915 167.23327056 167.99663195 168.75999332 169.52335466 170.28671598

171.05007727 171.81343855 172.5767998 173.34016103 174.10352224 174.86688343
 175.6302446 176.39360574 177.15696687 177.92032797 178.68368906 179.44705013
 180.21041117 180.9737722 181.73713321 182.5004942 183.26385517 184.02721612
 184.79057706 185.55393798 186.31729888 187.08065976 187.84402062 188.60738147
 189.3707423 190.13410312 190.89746392 191.6608247 192.42418547 193.18754622
 193.95090695 194.71426767 195.47762838 196.24098907 197.00434974 197.76771041
 198.53107105 199.29443168 200.0577923 200.8211529 201.58451349 202.34787407
 203.11123463 203.87459518 204.63795572 205.40131624 206.16467675 206.92803725
 207.69139773 208.4547582 209.21811866 209.98147911 210.74483955 211.50819997
 212.27156038 213.03492078 213.79828117 214.56164154 215.32500191 216.08836226
 216.85172261 217.61508294 218.37844326 219.14180357 219.90516387 220.66852416
 221.43188444 222.19524471 222.95860496 223.72196521 224.48532545 225.24868568
 226.0120459 226.7754061 227.53876637 228.30202726 229.21721963]

2. Zależność czasu działania od N :



Wykres przedstawia niemal liniową zależność czasu działania od N . Wynik ten jest zgodny z teoretyczną złożonością obliczeniową faktoryzacji LU dla tego typu macierzy, która wynosi $O(N)$.

3. Analiza efektywności:

Algorytm został zaprogramowany z uwzględnieniem struktury macierzy A , co pozwoliło na zmniejszenie liczby operacji oraz efektywne zarządzanie pamięcią.

Podsumowanie

W ramach zadania wyznaczono $y = A^{-1}x$ oraz wyznacznik macierzy A z wykorzystaniem algorytmu faktoryzacji LU i metod forward oraz back substitution. Wyniki obliczeń oraz czas działania algorytmu potwierdziły poprawność implementacji.

Z analizy wynika, że czas działania algorytmu rośnie liniowo wraz ze wzrostem N , co jest zgodne z oczekiwaniami teoretycznymi dla macierzy o strukturze pasmowej. Faktoryzacja LU okazała się skuteczną metodą, pozwalającą na rozwiązanie problemu w sposób zarówno dokładny, jak i efektywny.