NUM8

Mikołaj Kowalski

1 Wstep

Celem niniejszego sprawozdania jest analiza i implementacja metody aproksymacji funkcji wielomianowej w postaci:

$$F(x) = \sum_{j=1}^{m} a_j \phi_j(x), \tag{1}$$

gdzie $m \geq 3$, a $\phi_j(x)$ to zadane funkcje bazowe. Funkcja aproksymowana jest na podstawie danych zaburzonych generowanych dla ustalonego zestawu parametrów a_j oraz losowego zaburzenia δy_i. W pracy wykorzystano metode najmniejszych kwadratów do wyznaczenia współczynników a_j, które najlepiej opisuja dane zaburzone.

Niniejsze sprawozdanie zawiera wyniki przeprowadzonych eksperymentów oraz analize ich wpływu na jakość otrzymanych wyników.

2 Analiza problemu

Rozważono trzy różne funkcje $F(x)$, które sa modelowane jako kombinacje liniowe funkcji bazowych:

$$F(x) = 3\sin(2x) + 2x^3 - e^x,$$
$$F(x) = 2\cos(3x) + 4x^3 + 5x,$$
$$F(x) = 7\sqrt{x^3} + 3\tan(x^5) + 9x^2.$$

Dla ustalonego zestawu współczynników a_j, generowane sa punkty $\{x_i, y_i\}$, gdzie $y_i = F(x_i) + \delta y_i$, a zaburzenia δy_i pochodza z rozkładu normalnego. Celem aproksymacji jest wyznaczenie współczynników a_j minimalizujacych bład w sensie metody najmniejszych kwadratów.

3 Sposób rozwiazania

3.1 Generowanie danych

Dane eksperymentalne zostały wygenerowane poprzez dyskretyzacje przedziału $[0, 2]$ na n punktów x_i, dla których obliczono wartości y_i na podstawie wybranej funkcji $F(x)$ z uwzglednieniem zaburzenia δy_i. Zaburzenia δy_i zostały wylosowane z rozkładu normalnego, gdzie σ jest parametrem kontrolujacym poziom szumu.

Eksperymenty przeprowadzono dla różnych wartości n oraz σ, co umożliwiło analize wpływu liczby punktów pomiarowych oraz poziomu szumu na jakość aproksymacji.

3.2 Metoda najmniejszych kwadratów

Metoda najmniejszych kwadratów minimalizuje sume kwadratów różnic miedzy wartościami obserwowanymi a modelowymi. Problem ten można zapisać w postaci:

$$\mathbf{a} = (\mathbf{A}^T\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^T\mathbf{y}, \tag{2}$$

gdzie $\mathbf{A}$ to macierz funkcji bazowych, a $\mathbf{y}$ to wektor obserwacji.

Rozwiazanie zostało zaimplementowane przy użyciu dekompozycji SVD (ang. Singular Value Decomposition), co zapewnia stabilność numeryczna w przypadku źle uwarunkowanych macierzy. Wyznaczone współczynniki a_j posłużyły do rekonstrukcji funkcji aproksymowanej oraz jej porównania z rzeczywistymi wartościami $F(x)$.

4 Analiza wyników

Eksperymenty przeprowadzono dla różnych wartości parametrów n oraz σ. Poniżej przedstawiono kluczowe obserwacje:

- **Wpływ szumu (σ):** Dla małych wartości σ, aproksymowana funkcja $F(x)$ bardzo dobrze odwzorowuje dane rzeczywiste. W miare wzrostu σ, bład aproksymacji rośnie, a wyznaczone współczynniki a_j zaczynaja odbiegać od wartości rzeczywistych.

- **Wpływ liczby punktów (n):** Mała liczba punktów skutkuje mniejsza dokładnościa rekonstrukcji funkcji. Wieksza liczba punktów poprawia dokładność, ale jednocześnie zwieksza koszt obliczeniowy.

4.1 Porównanie wyników

Poniżej zaprezentowano przykłady rzeczywistych i wyznaczonych współczynników a_j dla wybranych funkcji:

- $F(x) = 3\sin(2x) + 2x^3 - e^x$:
  Rzeczywiste: $[3, 2, -1]$, **Wyznaczone:** $[2.89266229, 1.95386607, -0.99953842]$.

- $F(x) = 2\cos(3x) + 4x^3 + 5x$:
  Rzeczywiste: $[2, 4, 5]$, **Wyznaczone:** $[1.9417414, 4.00711931, 4.88646084]$.

- $F(x) = 7\sqrt{x^3} + 3\tan(x^5) + 9x^2$:
  Rzeczywiste: $[7, 3, 9]$, **Wyznaczone:** $[7.237232, 2.97936677, 8.84020371]$.

4.2 Wizualizacja wyników

Poniżej przedstawiono wykresy porównujace funkcje rzeczywiste, dane zaburzone oraz aproksymowane dla każdej z rozważanych funkcji:

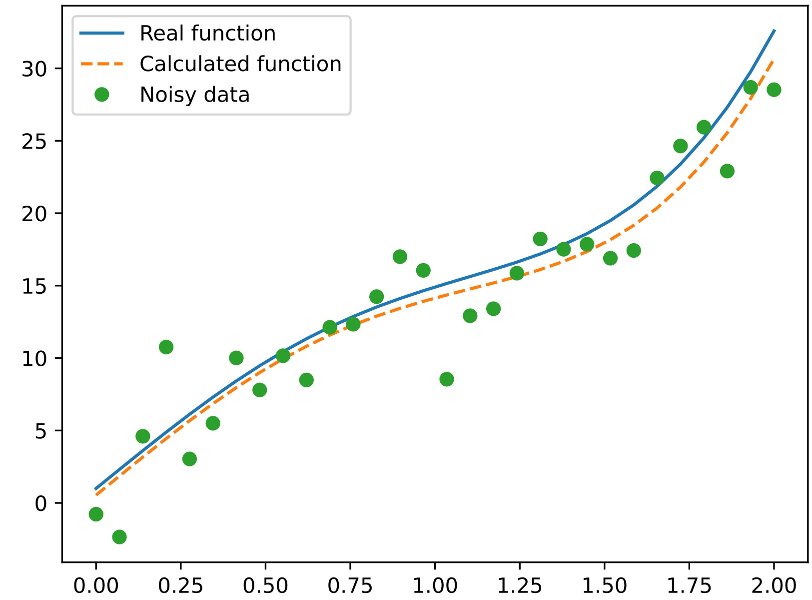

Figure 1: Aproksymacja dla $F(x) = 3\sin(2x) + 2x^3 - e^x$.

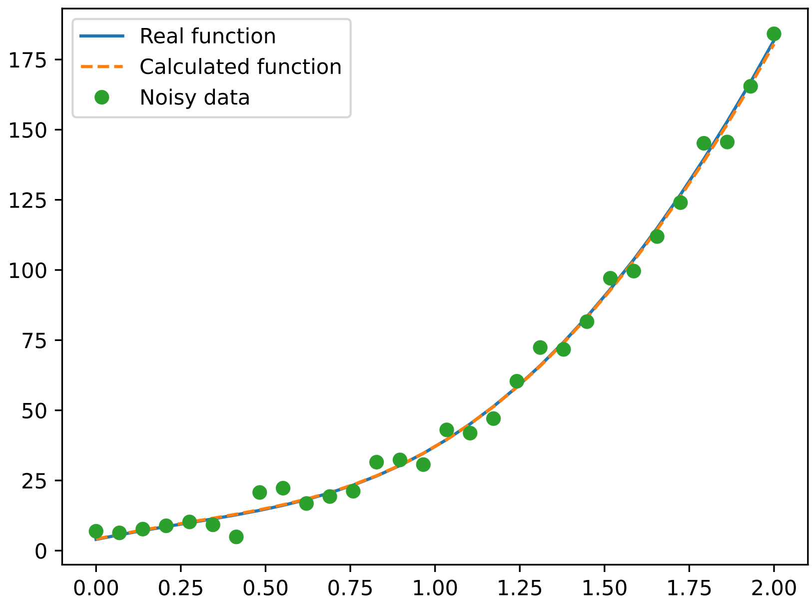

Figure 2: Aproksymacja dla $F(x) = 2\cos(3x) + 4x^3 + 5x$.

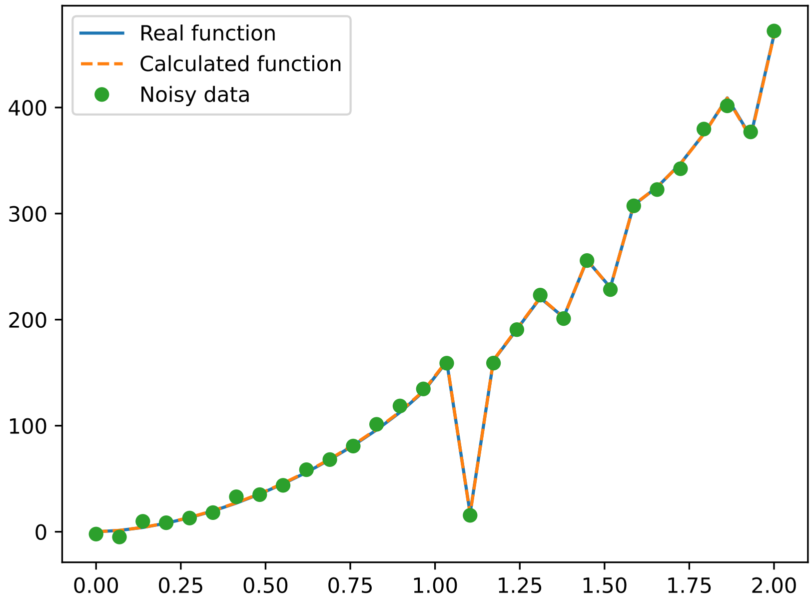

Figure 3: Aproksymacja dla $F(x) = 7\sqrt{x^3} + 3\tan(x^5) + 9x^2$.

5 Podsumowanie

Przeprowadzone eksperymenty potwierdziły skuteczność metody najmniejszych kwadratów w aproksymacji funkcji wielomianowych. Wyniki wskazuja, że:

- Dokładność aproksymacji zależy od poziomu szumu (σ) w danych oraz liczby punktów (n).
- Dekompozycja SVD zapewnia stabilność numeryczna nawet dla źle uwarunkowanych macierzy.
- Przy optymalnym doborze n i σ, wyznaczone współczynniki a_j sa bardzo bliskie wartościom rzeczywistym.