Magistrsko dela

Jaša Štefan

12. april 2020

1 CLI

Izrek 1. *centralni limitni izrek - osnovna (klasična) verzija*

Naj bo $\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ *zaporedje* n *neodvisnih in enako porazdeljenih slučajnih spremenljivk z matematičnim upanjem* μ *in varianco* σ. *Naj bo slučajna spremenljivka* Z *definirana kot* $Z = \frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}$. *Potem je v limiti, ko* $n \to \infty$, *slučajna spremenljivka* Z *porazdeljena standardno normalno.*

Izrek je zelo močan, saj pomeni, da tudi če delamo z drugače porazdeljenimi slučajnimi spremenljivkami, njihova standardizirana vsota vseeno konvergira k standardno normalni porazdelitvi. Zaradi tega lahko za statistično obdelavo (obravnavo) vsote teh spremenljivk uporabimo orodja in metode, katere uporabljamo že pri standardno normalnih porazdelitvah.

2 Kolmogorov- Smirnova razdalja

3 Berry - Esseenov izrek

Berry - Esseenov izrek oziroma neenakost nam pove, kako hitro porazdelitev standardiziranega povprečja konvergira proti normalni porazdelitvi, s tem ko omeji največjo napako aproksimacije med obema porazdelitvama. Točnost aproksimacije se meri z Kolmogorov-Smirnovo razdaljo. V primeru, da gre za neodvisne vzorce (slučajne spremenljivke), je hitrost konvergence $n^{-\frac{1}{2}}$. Konstanto ocenimo s pomočjo koeficienta simetrije. Trenutno je zgornja meja za konstanto 0,4748, spodnja meja pa 0,40973.

Izrek 2. *Berry - Esseenov izrek - 1. verzija (poenostavljena) Naj bodo* $X_1, X_2, \ldots, X_n$ *neodvisne in enako porazdeljene slučajne spremenljivke z* $E[X_1] = 0, E[X_1^2] = \sigma^2$ *in* $E[X_1^3] = \rho$, *pri čemer* $\sigma > 0$ *in* $\rho < \infty$. *Definirajmo slučajno spremenljivko* Y_n, *ki je vzorčno povprečje,* $Y_n = \frac{X_1+X_2+\cdots+X_n}{n}$. *Nadalje definirajmo komulativno porazdelitveno funkcijo* F_n *slučajne spremenljivke* $\frac{Y_n}{\sigma\sqrt{n}}$, *s* Φ *pa označimo komulativno porazdelitveno funkcijo standardno normalne porazdelitve.*

Potem obstaja konstanta $C, C > 0$, *da velja*

$$|F_n(x) - \Phi(x)| \leq \frac{C\rho}{\sigma^3\sqrt{n}}.$$

Primer 1. *Denimo, da igramo igro, kjer so možne vrednosti* $0, 1, \ldots, 36$ *in je verjetnost vsake izmed njih enaka. Denimo še, da igro ponovimo tisočkrat in so igre med sabo neodvisne.*

Izračunamo $E[X_1] = 18, var(X_1) = 114, skew(X_1) = 0$. *Definiramo* $X_i' = X_i - 18$. *Velja* $E[X_1'] = 18, var(X_1') = 114, skew(X_1') = 0$.

Definiramo še $Y_n = \frac{X_1'+X_2'+\cdots+X_{1000}'}{1000}$, F_n *pa naj bo definirana kot zgoraj.*

Sledi

$$|F_n(x) - \Phi(x)| \leq \frac{C\sqrt{114}}{\sigma^3\sqrt{n}}.$$