

# O ALGEBRISTA

Autor: Laércio Vasconcelos – [www.laercio.com.br](http://www.laercio.com.br)

Livro de álgebra para ensino fundamental 2 ( 6º ao 9º ano)

Preparatório para Colégio Naval, EPCAr, Colégio Militar (ensino médio)  
Pré-IME, Pré-ITA, EsPCEx, EEAer, ENEM.

VOLUME 1: TEORIA e EXERCÍCIOS – 600 páginas

Capítulos 1 e 2 disponíveis gratuitamente para os estudantes em PDF.

## Capítulos:

- 1) Números inteiros
- 2) Números racionais
- 3) Expressões algébricas
- 4) Produtos notáveis
- 5) Fatoração
- 6) MMC e MDC de expressões algébricas
- 7) Frações algébricas
- 8) Equações do primeiro grau
- 9) Sistemas de equações do primeiro grau
- 10) Problemas do primeiro grau
- 11) Tópicos sobre ANÁLISE
- 12) Inequações do primeiro grau
- 13) Equações do segundo grau
- 14) Cálculo de radicais
- 15) Equações redutíveis ao segundo grau
- 16) Sistemas do segundo grau
- 17) Inequações do segundo grau
- 18) Problemas do segundo grau
- 19) Funções
- 20) Trinômio do segundo grau
- 21) Polinômios

Laércio Vasconcelos obteve o primeiro lugar no Colégio Naval em 1976, onde cursou 2 anos, como 1001 e 2001. Foi segundo colocado no IME, onde se formou em engenharia eletrônica. É autor de 58 livros e atualmente cursa o PROFMAT no IMPA e o doutorado em Engenharia de Defesa no IME.

Livro completo em versão impressa disponível em [www.laercio.com.br](http://www.laercio.com.br) e em livrarias.

Copyright © 2015, Laércio Vasconcelos

Este livro está registrado na Biblioteca Nacional e está protegido pela lei de direitos autorais brasileira, 9.610/98. Nenhuma parte poderá ser reproduzida sem consentimento do autor. Versão em PDF para uso individual por estudantes, não é permitido seu uso para criação de novos materiais didáticos, nem para utilização para confecção de livros e apostilas por cursos ou editoras, seja na versão em papel ou eletrônica.

# Capítulo 1

## Números inteiros

---

### O início da álgebra

Em um curso de matemática em nível intermediário, não é possível começar com “ $1 + 1 = 2$ ”. Por isso a maioria dos cursos e livros deste nível partem do princípio que os alunos já possuem conhecimentos básicos, como frações, operações com números naturais, etc. É comum nesses livros que partam também do princípio de que os alunos já sabem operar com números inteiros negativos. Também devido a isso, não são cobradas questões sobre essa parte inicial da álgebra em concursos como Colégio Naval, Colégio Militar, EPCAr e similares. Entretanto muitos alunos trazem do ensino fundamental, deficiências antigas no aprendizado de números negativos e expressões numéricas envolvendo esses números.

Por isso, este livro apresenta seus dois capítulos iniciais com esses assuntos, que servem como uma revisão sobre essa parte inicial da álgebra. O leitor notará que ao contrário dos demais capítulos, este praticamente não apresenta questões de concursos, justamente porque são raríssimas tais questões sobre os primórdios da álgebra. Ainda assim, traz uma grande quantidade de exercícios, que visa sanar as deficiências, permitindo um embasamento para um bom aprendizado da álgebra nos capítulos restantes.

### Conjuntos numéricos

A álgebra é uma parte da matemática estudada a partir do 6º ou 7º ano do ensino fundamental. Antes disso, predomina o estudo da aritmética, que trata principalmente das operações com números naturais e os números racionais positivos. No início da álgebra, aprendemos os números inteiros negativos e suas operações, depois os números racionais, tanto positivos quanto negativos. Finalmente são estudados os números irracionais e os números reais. Esta álgebra básica estudada nas últimas séries do ensino fundamental é necessária à continuação da matemática no ensino médio e superior. A álgebra é bastante cobrada em provas de concursos realizados no final do ensino fundamental e do ensino médio.

Neste capítulo apresentaremos os conjuntos numéricos, desde o conjunto dos números naturais, explorado nas primeiras séries do ensino fundamental, até os números reais e números complexos. Estudaremos mais detalhadamente neste capítulo as operações com números inteiros. O estudo detalhado dos demais conjuntos numéricos será feito nos próximos capítulos.

Existem vários tipos de álgebra. Por exemplo, a chamada *álgebra booleana* é a base do funcionamento dos computadores. Os números usados na álgebra booleana assumem dois valores: 0 e 1, ou Verdadeiro e Falso. As operações básicas da álgebra booleana não são as mesmas usadas na aritmética e na álgebra do ensino fundamental (adição, subtração,

multiplicação, divisão, etc.), mas sim, operações lógicas como AND (e), OR (ou) e NOT (não). O desenvolvimento da álgebra booleana, partindo dessas três operações, permitiu o desenvolvimento dos computadores, desde os mais antigos, até os mais modernos.

A álgebra que nos interessa aqui é a que envolve os números reais, usados extensivamente na matemática, física, engenharia e ciências correlatas. Nossa primeira providência será então apresentar os conjuntos numéricos que você já conhece, e novos conjuntos, até chegarmos no conjunto dos números reais.

## Números naturais

O desenvolvimento da matemática surgiu da necessidade de contar objetos. Daí surgiram os primeiros números:

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, ....

### O número 0

Inicialmente não havia o número 0, e sim, o *algarismo* 0. Era usado apenas para representar números que não tinham quantidades inteiras de determinadas ordens. Por exemplo, o número 408 possui 4 centenas e 8 unidades (ordens), mas não possui uma dezena completa. O zero era usado apenas como algarismo para dar esta indicação. Somente muito depois do surgimento dos números naturais, foi criado o número zero como indicação de ausência de quantidade.

No ensino fundamental e no ensino médio, praticamente todos os autores consideram o 0 como um número natural, mas nos estudos mais avançados de matemática pura, o 0 não é considerado como um número natural. Como este livro é voltado para o final do ensino fundamental, será usada a convenção dos autores da área, de que 0 é um número natural. Portanto no nosso contexto, que é o mesmo adotado pelos concursos correlatos (Colégio Naval, Epcar, Colégio Militar, etc.), de que o conjunto dos números naturais inclui o 0.

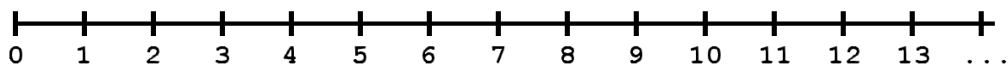
$N = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, \dots\}$

Este é o conjunto dos números naturais, indicado com a letra N maiúscula. Note que é errado dizer que N é o conjunto dos números inteiros positivos, pois o número 0 pertence a N entretanto não é positivo (0 não é positivo nem negativo). Quando nos referimos apenas aos números inteiros positivos, ou seja, os números naturais excluindo o zero, temos o chamado conjunto  $N^*$ :

$N^* = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, \dots\}$

Tanto N quanto  $N^*$  são conjuntos infinitos. A única diferença entre eles é o número 0.

Conjuntos de números podem ser representados graficamente através das chamadas “retas numéricas”. A figura abaixo mostra como uma reta numérica poderia ser usada para representar os números naturais. A reta numérica é uma espécie de “régua infinita”, na qual são marcados os números. No caso dos naturais, uma extremidade da régua tem o número 0. A partir daí são marcados os demais números, de um em um. O conjunto dos números naturais ocupa apenas os pontos da reta numérica que correspondem às marcações inteiras, e não os pontos localizados entre essas marcações. Por exemplo, não existem números naturais compreendidos no espaço entre 0 e 1, nem no espaço entre 1 e 2, nem no espaço entre 2 e 3, etc. Veremos a seguir que outros conjuntos numéricos como os racionais, irracionais e reais possuem elementos compreendidos entre as marcações inteiras.



## Números inteiros

O conjunto dos números inteiros é uma ampliação do conjunto dos naturais. A diferença é que números inteiros também podem ser negativos. Por exemplo, assim como existe o número 5, existe também o número  $-5$ . Usamos a letra  $Z$  maiúscula para indicar o conjunto dos números inteiros:

$$Z = \{\dots, -8, -7, -6, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, \dots\}$$

Para cada número inteiro positivo, existe um inteiro negativo correspondente. Por exemplo, assim como existe o número 1000, existe também o número  $-1000$ . Quando um número é positivo, não precisamos, e não é de costume, indicar o sinal. Portanto  $+20$  é o mesmo que 20, por exemplo.

Observe que todos os números naturais são também inteiros. Isso é o mesmo que dizer que o conjunto dos números naturais *está contido* no conjunto dos números inteiros. Matematicamente escrevemos isso da seguinte forma:

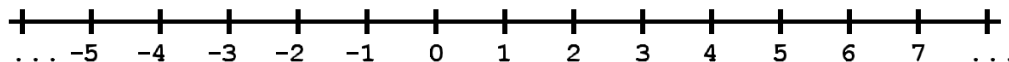
$$N \subset Z \quad (\text{lê-se: } N \text{ está contido em } Z)$$

Em várias situações da vida real, é necessário usar números negativos. Alguns exemplos:

- a) Se uma pessoa não tem dinheiro algum e ainda deve R\$ 10,00 a um amigo, isso é o mesmo que dizer que ela tem  $-R\$ 10,00$ , ou 10 reais negativos.
- b) À temperatura na qual a água se tranforma em gelo, convencionou-se na física chamar de 0 grau centígrado ( $0^{\circ}\text{C}$ ). Temperaturas mais frias são chamadas de negativas. Por exemplo, em um congelador é comum encontrar temperaturas na faixa de  $-5^{\circ}\text{C}$ , em um freezer é comum chegar a  $-20^{\circ}\text{C}$ .
- c) Se um carro está andando de marcha-à-ré com velocidade de 10 km/h, podemos dizer que sua velocidade na verdade é  $-10$  km/h.
- d) Se em um jogo perdemos 20 pontos, é o mesmo que dizer que ganhamos  $-20$  pontos.
- e) Se subimos em um monte com altura de 30 metros, dizemos que estamos a 30 metros acima do solo. Se por outro lado descemos em um buraco com 20 metros, é o mesmo que dizer que estamos a uma altura de  $-20$  metros.
- f) Dizer que uma empresa lucrou  $-10$  milhões é o mesmo que dizer que teve um prejuízo de 10 milhões.
- g) Se um automóvel andava a 60 km/h e passou para 80 km/h, dizemos que sua velocidade variou 20 km/h. Por outro lado, se o automóvel estava a 60 km/h e passou para 50 km/h, podemos dizer que variou  $-10$  km/h. A variação negativa indica uma diminuição, enquanto a variação positiva indica um aumento.

Vemos então que, mesmo sendo muito mais comum e natural encontrar números positivos, várias situações nos levam à necessidade de usar números negativos.

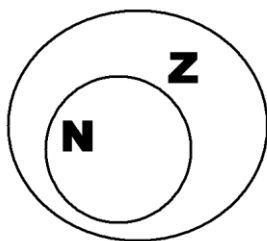
Números inteiros também podem ser representados em uma reta numérica. A diferença é que essa reta se estende ao infinito, nos dois sentidos. O número zero deve ser representado na reta, à sua esquerda ficam os números negativos, e à sua direita os números positivos.



Já vimos que todo número natural é também um número inteiro, ou seja, o conjunto  $\mathbb{Z}$  contém o conjunto  $\mathbb{N}$ , o que é o mesmo que dizer que conjunto  $\mathbb{N}$  está contido no conjunto  $\mathbb{Z}$ . Escrevemos então:

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$$

Podemos representar isso através de um *diagrama de Venn*, muito usado na teoria dos conjuntos:



Já citamos também que o conjunto  $\mathbb{N}^*$  é o conjunto  $\mathbb{N}$  excluindo o número zero, ou seja, o conjunto dos números inteiros positivos. O conjunto  $\mathbb{Z}$  também tem alguns subconjuntos que devem ser notados:

$\mathbb{Z}^* = \{ \dots -4, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 4, \dots \}$  = conjunto dos números inteiros não nulos

$\mathbb{Z}_+ = \{ 0, 1, 2, 3, 4, \dots \}$  = conjunto dos números inteiros não negativos =  $\mathbb{N}$

$\mathbb{Z}_+^* = \{ 1, 2, 3, 4, \dots \}$  = conjunto dos números inteiros positivos =  $\mathbb{N}^*$

$\mathbb{Z}_- = \{ \dots, -4, -3, -2, -1, 0 \}$  = conjunto dos números inteiros não positivos

$\mathbb{Z}_-^* = \{ \dots, -4, -3, -2, -1 \}$  = conjunto dos números inteiros negativos

## Números racionais

O próximo conjunto é o chamado “conjunto dos números racionais”, representado por  $\mathbb{Q}$ . Este conjunto reúne todos os números inteiros, e mais as frações, positivas e negativas. Portanto o conjunto  $\mathbb{Q}$  contém números como  $\frac{2}{5}$ ,  $-\frac{1}{7}$ ,  $-\frac{4}{9}$ ,  $\frac{1}{6}$ , enfim, qualquer fração na forma  $\frac{p}{q}$ , onde  $p$  e  $q$  sejam primos entre si (caso contrário estaríamos contando frações repetidas, de mesmo valor), e desde que  $q$  não seja 0 (já que não existe divisão por 0). Esta definição inclui também todos os números inteiros, basta fazer  $q=1$ .

Nas primeiras séries do ensino fundamental, estudamos as frações, mas somente as positivas. Podemos então dizer que foi estudado o conjunto dos números racionais não negativos. Ao iniciarmos o estudo da álgebra, finalmente podemos abordar o conjunto completo dos

números racionais, abrangendo os positivos e os negativos (e o zero, é claro, que também é número racional).

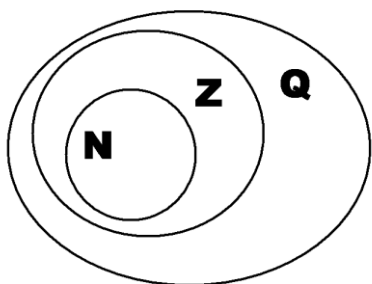
Observe que o conjunto  $Q$  engloba o conjunto  $Z$ , ou seja, todo número inteiro é também um número racional. Isso é o mesmo que dizer que  $Z$  está contido em  $Q$ . Escrevemos então:

$$Z \subset Q$$

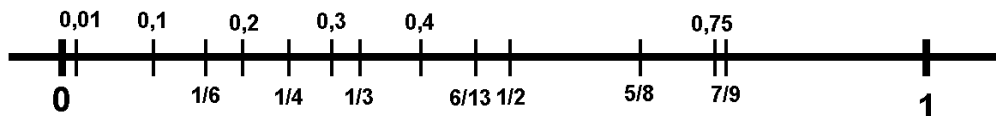
Como por sua vez,  $N$  está contido em  $Z$ , podemos escrever:

$$N \subset Z \subset Q$$

O diagrama de Venn abaixo mostra a relação entre os três conjuntos.



Os números racionais também fazem parte da reta numérica. Entretanto é difícil fazer esta representação, já que entre cada dois números inteiros consecutivos, existem infinitos números racionais. A figura abaixo mostra um pequeno trecho da reta numérica, compreendido entre 0 e 1, e alguns dos infinitos números racionais localizados neste intervalo.



É claro que seria impossível indicar todos os números racionais neste intervalo. Indicamos alguns números na forma decimal (0,1; 0,2; 0,3; 0,4; 0,75), que como sabemos, são iguais a frações ( $1/10$ ,  $1/5$ ,  $3/10$ ,  $2/5$ ,  $3/4$ ). Indicamos ainda algumas frações. Todas as frações próprias positivas estão neste intervalo, pois são menores que 1 (numerador é menor que o denominador). Escolhemos apenas algumas delas para serem indicadas.

O conjunto dos números racionais é tão denso que mesmo em um pequeno intervalo da reta numérica (por exemplo, o intervalo entre 0 e 1 do exemplo acima) existem infinitos números racionais. Se cada um desses números for marcado com um pequeno ponto, os números racionais desse intervalo formariam uma linha “cheia”, ou seja, sem nenhuma lacuna. Dados dois números racionais quaisquer, por mais próximos que sejam, sempre existirão entre eles, infinitos outros números racionais.

Na verdade, mesmo estando a linha “cheia”, ainda existem pontos “vazios”, que são os números irracionais, apresentados no próximo item.

## Números irracionais

Nem todos os números podem ser expressos na forma de uma fração, ou seja, a razão entre dois números inteiros. Todos os números que não podem ser expressos como fração (ou seja, que não são números racionais), são ditos *números irracionais*. Usamos a letra  $I$  para representar esse conjunto, que também é infinito. Por exemplo, o número  $\sqrt{2}$  é irracional. Nunca poderemos encontrar dois números inteiros  $p$  e  $q$ , de tal forma que  $p/q$  seja igual à raiz quadrada de 2, ou seja que elevando  $(p/q)$  ao quadrado, encontremos como resultado o número 2. Números irracionais apresentam infinitas casas decimais que não se repetem. Por exemplo, o número  $\sqrt{2}$  pode ser expresso, aproximadamente, por:

1,4142135623730950488016887242097...

Se continuarmos realizando o cálculo da raiz quadrada, indefinidamente, nunca encontraremos uma seqüência que passa a repetir, como ocorre nas dízimas periódicas. Lembramos que dízimas periódicas são equivalentes a frações (chamadas de *fração geratriz*). Por exemplo:

$1/7 = 0,14285714285714285714285714285714...$

Vemos que a seqüência 142857 é repetida indefinidamente, já que trata-se de um número racional. Já com números irracionais, podemos até encontrar trechos repetidos, mas nunca um trecho que se repita indefinidamente.

Todas as raízes inexatas, como  $\sqrt{2}$ ,  $\sqrt[3]{5}$ ,  $\sqrt{7}$ ,  $\sqrt{20}$ , etc, são números irracionais. Também são aqueles mais complexos, que envolvem raízes cúbicas e superiores, e raízes dentro de raízes. Existem também números irracionais que não podem ser expressos na forma de raízes. Por exemplo, o número  $\pi$ , sem dúvida um dos mais famosos números irracionais, muito usado na geometria, que dá a razão entre o perímetro e o diâmetro da circunferência.

$\pi = 3,1415926535897932384626433832795...$

## Números reais

Se unirmos todos os números racionais ( $Q$ ) e todos os números irracionais ( $I$ ), o resultado será o conjunto dos números reais ( $R$ ). Usando a terminologia de conjuntos, isso é o mesmo que dizer:

$$R = Q \cup I$$

O diagrama abaixo mostra a relação entre os conjuntos  $I$ ,  $R$  e  $Q$ . Note que  $I$  é apenas a faixa escura que está dentro de  $R$  mas fora de  $Q$ , indicada na figura.

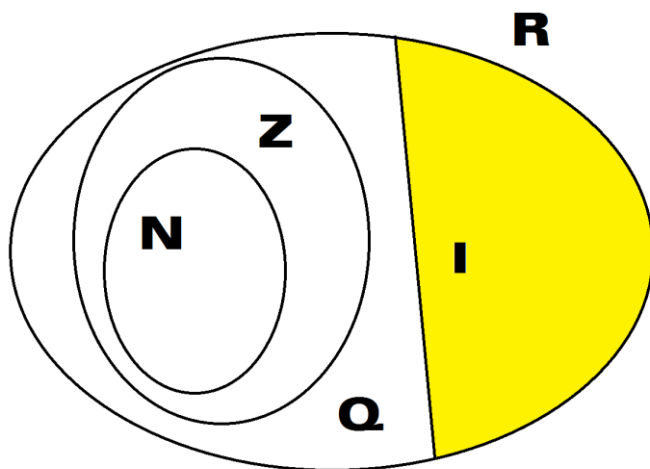
A relação entre  $Q$ ,  $Z$  e  $N$  já era nossa conhecida:

$$N \subset Z \subset Q$$

Já o conjunto dos números irracionais ( $I$ ) não tem elementos em comum com  $Q$  (dizemos que  $Q$  e  $I$  são *disjuntos*). Se partirmos de  $Q$  e adicionarmos o conjunto  $I$ , o conjunto total será  $R$ .

O conjunto  $I$  também tem infinitos elementos, e é extremamente denso. Se marcarmos na reta numérica, todos os pontos que são números irracionais, a indicação de todos esses pontos formará uma linha cheia. Entre dois números racionais quaisquer, sempre existirão infinitos números irracionais.

**OBS.:** É comum encontrar o termo “números relativos”. Essa expressão diz respeito aos conjuntos  $\mathbb{Z}$ ,  $\mathbb{Q}$ ,  $\mathbb{I}$  e  $\mathbb{R}$ , cujos elementos podem ser positivos ou negativos, além do zero, é claro.



### Números complexos ou imaginários

Os números complexos não serão estudados neste livro, pois não fazem parte do programa do ensino fundamental. São estudados no ensino médio e em cursos de matemática, física e diversos ramos da engenharia. Este conjunto é representado por  $\mathbb{C}$  e contém o conjunto dos números reais. Números complexos são formados a partir da raiz quadrada de  $-1$ , que como sabemos, não existe no conjunto dos reais. É criado então o conjunto  $\mathbb{C}$ , cujos números possuem uma parte real e uma parte imaginária. Convencionou-se chamar de  $i$  o número complexo que elevado ao quadrado resulta em  $-1$ , ou seja:

$$i = \sqrt{-1}$$

Valem para os números complexos, propriedades algébricas muito parecidas com as dos números reais. Por exemplo:

$$\sqrt{-16} = \sqrt{16} \cdot \sqrt{-1} = 4i$$

Todos os múltiplos de  $i$  são números complexos, entretanto, os números complexos também podem ser formados pela soma de uma parte imaginária e uma parte real, por exemplo:

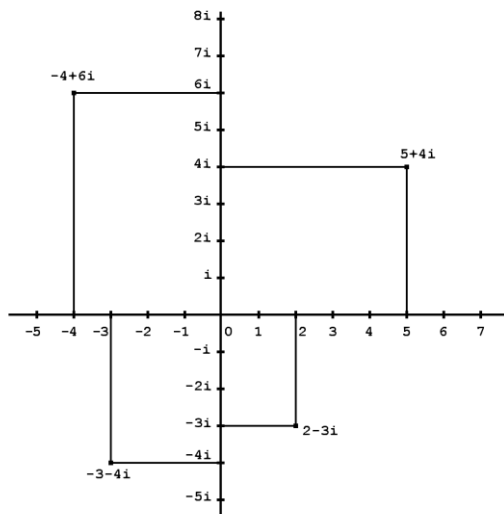
$$5 + 4i$$

A forma geral de um número complexo é  $a+bi$ , onde  $a$  e  $b$  são reais. Quando  $b=0$ , temos apenas a parte real, portanto todos os números reais atendem à definição de números complexos, por isso  $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ . Quando  $a=0$ , o número tem apenas a parte imaginária, dizemos então que trata-se de um número *imaginário puro*.

O algebrismo dos números complexos não chega a ser difícil. Basta tratar o número  $i$  como se fosse uma letra qualquer, e chegando ao resultado, substituir  $i^2$  por  $-1$ .



Números complexos não são representados em uma reta numérica, e sim, através de duas retas numéricas perpendiculares, com um eixo para a parte real e um eixo para a parte imaginária. Os números complexos são representados pelo plano assim formado.



A figura acima apresenta o plano complexo. O eixo horizontal é chamado de *eixo real*. O eixo vertical é chamado de *eixo imaginário*. Todos os pontos do plano assim formado representam números complexos. Os pontos do eixo real são os números reais. Os pontos do eixo imaginário são números imaginários puros. Todos os demais pontos possuem parte real e parte imaginária. A figura mostra ainda a localização de alguns números complexos:  $5+4i$ ,  $2-3i$ ,  $-4+6i$  e  $-3-4i$ . A parte real de um número complexo é a sua projeção no eixo real, e a parte imaginária é a sua projeção no eixo imaginário.

Porque estamos ensinando isso se a matéria não faz parte do ensino fundamental? Porque existe uma matéria do ensino fundamental, ensinada neste livro, que usa também sistemas de eixos perpendiculares: o sistema de coordenadas cartesianas, as relações e funções, importantíssimas na álgebra. Mas primeiro precisamos dominar os números reais, que felizmente são bem mais fáceis que os números complexos.

## Operações com números inteiros

As operações matemáticas com números inteiros são muito parecidas com as operações feitas com números naturais, assunto predominante nos primeiros anos do ensino fundamental. A única diferença é que agora temos que lidar com números negativos. Existem algumas regras básicas para lidar com sinais, que uma vez aprendidas, não trarão mais dificuldades. É preciso entretanto entender primeiro o porquê dessas regras.

Uma notícia boa é que as regras de sinais aprendidas para os números inteiros servem para os racionais e reais. Portanto nos capítulos seguintes não precisaremos mais estudar as regras de sinais, pois você aprenderá todas aqui.

### Adição de inteiros

“Sinais iguais, soma e repete o sinal; sinais diferentes, subtrai e dá o sinal do maior”. É claro que muitos alunos decoram essas regras, mas quem apenas decora em matemática, não vai muito longe. É preciso entender a razão, uma vez entendidas, a memorização é natural e automática. Vamos ilustrar com um pequeno exercício.

Dois jogadores A e B possuem cada um, R\$ 10,00. Eles estão jogando e apostando dinheiro, sendo que no início de cada partida, combinam o valor a ser apostado. Na primeira partida, apostam R\$ 5,00 e A vence. Na segunda partida, apostam R\$ 10,00 e A vence. Na terceira partida, apostam R\$ 10,00 e A vence, pela terceira vez. Na quarta partida, apostam R\$ 10,00 e B vence. Na quinta partida, apostam R\$ 20,00 e B vence. Com quanto dinheiro cada jogador ficou no final?

Vamos construir uma tabela indicando cada uma das partidas e o valor que cada um ficou no final de cada jogada. Complete a tabela de acordo com o enunciado do problema.

**OBS.:** Considere esse exemplo apenas na sua imaginação, pois na vida real existiriam dois absurdos aqui: primeiro, o jogo a dinheiro é proibido no Brasil, então você pode raciocinar com “fichas” ao invés de reais. A segunda questão é que nos jogos de verdade, para apostar um valor, o jogador precisa ter aquele valor disponível na hora, não pode ficar devendo para pagar depois. Então, neste exemplo, considere que é permitido ficar devendo para pagar depois.

Jogada		A possui	B possui
Inicial		10	10
1ª partida	A ganha 5		
2ª partida	A ganha 10		
3ª partida	A ganha 10		
4ª partida	B ganha 10		
5ª partida	B ganha 20		

Se você conseguiu preencher corretamente a tabela, então entendeu as adições de números inteiros (positivos e negativos):

**1ª partida:** Cada um tinha 10, e A ganha 5. Então B deve entregar 5 para A. A ficará com 15 e B ficará com apenas 5.

**2ª partida:** A estava com 15 e B estava com 5. Agora A ganha 10 novamente, então B deverá entregar 10 para A. Mas como B só possui 5, deverá entregar esses 5 para A, e ficará devendo os outros 5 para pagar depois. Sendo assim, B ficará com 5 negativos, ou seja, -5. A, que tinha 15, fica agora com 25, já que ganhou 10. Apesar de que, A não terá os 25 imediatamente, mas é como se tivesse, pois B pagará depois. Portanto A ficou com 25 e B ficou com -5.

**3ª partida:** A tem agora 25 e B tem -5, ou seja, ainda precisa arranjar 5 para pagar o que deve. Agora apostam novamente 10, e A vence. Como A tinha 25 e agora ganhou 10, ficará então com 35 (não significa que receberá agora). B estava em situação ruim e ficou ainda pior. Já estava com dívida de 5, e agora deve mais 10 por ter perdido esta partida. Ficou então devendo  $5+10=15$ . Isso é o mesmo que dizer o seguinte: B tinha -5, agora perdeu 10 (isso é o mesmo que dizer que “ganhou -10”). Ficou então com -15, enquanto A ficou com 35.

**4ª partida:** A tinha 35 e B tinha -15. Nessa partida, finalmente B ganhou 10. Como B estava devendo 15, esse ganho de 10 será usado para abater na sua dívida, mas não será suficiente para pagar a dívida toda. Dos 15 que já devia, abatendo os 10 que ganhou, ainda ficará devendo 5. Isso é o mesmo que dizer que tinha -15, ganhou 10 e ficou com -5. Em outras palavras,  $-15+10=-5$ . Enquanto isso, A tinha 35 e perdeu 10, ficando então com  $35-10=25$ .

**5ª partida:** Agora A inicia com 25 e B inicia com -5. B está agora com sorte, ganhou 20. Vejamos primeiro o que ocorre com A. A tinha 25 e perdeu 20. A ficou então com apenas  $25-20=5$ . B, desta vez, saiu com “saldo positivo”. Ganhou 20 nesta partida, mas não ficará com todos os 20, pois antes será preciso abater os 5 que estava devendo. É fácil então calcular

quanto restou para B:  $20 - 5 = 15$ . Podemos ver isso de outra forma: B tinha  $-5$  e ganhou 20, ficando então com 15. Matematicamente, podemos também escrever  $-5+20=15$ . Ao final desta última partida, A ficou com 5 e B ficou com 15.

**OBS.:** Não importa quem vença, jogo a dinheiro é coisa de perdedor. Quem ganha em um dia, poderá perder tudo e muito mais no dia seguinte. Jogo a dinheiro pode ser um vício, assim como drogas, fumo e álcool. Muitas pessoas perdem tudo o que possuem em jogos a dinheiro: alguns perdem a casa, e tudo o que possuem. Jogos em livros de matemática são abordados apenas como exemplos para entendimento dos números.

A tabela do exemplo fica então preenchida da forma abaixo:

Jogada		A possui	B possui
Inicial		10	10
1ª partida	A ganha 5	15	5
2ª partida	A ganha 10	25	-5
3ª partida	A ganha 10	35	-15
4ª partida	B ganha 10	25	-5
5ª partida	B ganha 20	5	15

Devemos considerar que tudo o que um jogador ganha ou perde deve ser somado ao que tinha antes. Quando ganha, o valor a ser somado é positivo, e quando perde, o valor a ser somado é negativo. Levando isso em conta, vamos fazer quatro adições envolvendo números inteiros:

**a)  $8+6 = 14$**

Esta adição envolve dois números inteiros positivos, crianças de 6 ou 7 anos já sabem que o resultado é 14. Devemos levar em conta que estamos agora somando números inteiros, que podem ser positivos ou negativos. No caso, ambos são positivos, então basta somar normalmente. O resultado será positivo, ficamos então com 14.

**b)  $(-7) + (-5) = -12$**

Dessa vez as crianças de 6 ou 7 anos não vão saber calcular. Devemos aqui fazer uma analogia com os jogos. Alguém tinha  $-7$ , por exemplo, devia 7 reais. Perdeu 5 reais, então sua dívida aumentou. A dívida total será a soma da dívida anterior (7) com a nova dívida (5). Então quem devia 7 e passou a dever mais 5, ficou devendo ao todo, 12. Portanto, o resultado da adição de  $-7$  e  $-5$  é  $-12$ .

Nos dois exemplos acima, notamos três coisas em comum:

- Os valores a serem somados têm o mesmo sinal
- O resultado final foi obtido pela soma dos dois valores dados
- O sinal do resultado é o mesmo sinal das duas parcelas originais

Daí vem a primeira regra para somar números inteiros:

***Para somar dois números inteiros de mesmo sinal, basta somar os valores e dar ao resultado, o mesmo sinal que têm os números somados.***

Em outras palavras, para somar números inteiros de mesmo sinal (os dois positivos ou os dois negativos), somamos os números normalmente, esquecendo o sinal, e no fim, colocamos no resultado o mesmo sinal que têm os números. A soma de dois positivos tem resultado positivo. A soma de dois negativos tem resultado negativo.

**Exemplos:**

$$(-15) + (-20) = -35$$

$$(-10) + (-50) = -60$$

$$(-3) + (-2) = -5$$

$$30 + 40 = 70$$

$$9 + 8 = 17$$

**OBS.:** “30+40” também pode ser escrito como (+30)+(40). Note que os sinais “+” junto dos números 30 e 40 tem a função de informar que são números positivos. Já o outro sinal “+” serve para indicar que esses valores estão sendo somados. Entretanto, não é obrigatório colocar o sinal positivo em números que são positivos, quando o sinal não é escrito, sabemos que o número é positivo, portanto basta escrever 30+40.

**OBS.:** Em alguns casos podemos eliminar os parênteses. Por exemplo, escrever  $(-15) + (-20)$  é o mesmo que escrever  $-15 + (-20)$ . A eliminação dos parênteses em torno do número -15 não deixará dúvidas sobre a operação que queremos realizar: somar o número -15 com o número -20. Entretanto, não podemos eliminar os parênteses em torno do -20, pois ficaríamos com  $-15+-20$ . Não é correto colocar sinais lado a lado, nesse caso o uso dos parênteses é obrigatório.

Vejamos se você entendeu isso, fazendo alguns exercícios:

**Exercícios**

- |     |                      |                      |                      |                      |
|-----|----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|
| E1) | a) $(-3) + (-6) =$   | f) $(-21) + (-4) =$  | k) $(-3) + (-24) =$  | p) $(-21) + (-11) =$ |
|     | b) $(-3) + (-5) =$   | g) $(-13) + (-33) =$ | l) $(+7) + (+3) =$   | q) $(+34) + (+42) =$ |
|     | c) $(+5) + (+3) =$   | h) $(-32) + (-14) =$ | m) $(-26) + (-19) =$ | r) $(-55) + (-20) =$ |
|     | d) $(-5) + (-4) =$   | i) $(+7) + (+9) =$   | n) $(-29) + (-33) =$ | s) $(+60) + (+30) =$ |
|     | e) $(+16) + (+12) =$ | j) $(-16) + (-22) =$ | o) $(+3) + (+4) =$   | t) $(-7) + (-18) =$  |

Confira os resultados no final do capítulo. Vamos fazer mais alguns exercícios, mas dessa vez, lembre-se que em alguns casos os parênteses podem ser eliminados, acostume-se com isso.

- |     |                    |                      |                      |                     |
|-----|--------------------|----------------------|----------------------|---------------------|
| E2) | a) $(-2) + (-5) =$ | f) $(-26) + (-3) =$  | k) $(-2) + (-26) =$  | p) $-12 + (-13) =$  |
|     | b) $(-4) + (-2) =$ | g) $(-14) + (-31) =$ | l) $6 + 9 =$         | q) $+32 + 22 =$     |
|     | c) $(+5) + (+4) =$ | h) $(-35) + (-21) =$ | m) $-28 + (-17) =$   | r) $-45 + (-10) =$  |
|     | d) $(-3) + (-4) =$ | i) $+5 + 8 =$        | n) $(-19) + (-36) =$ | s) $40 + 30 =$      |
|     | e) $+6 + (+12) =$  | j) $(-15) + (-18) =$ | o) $(+6) + 3 =$      | t) $(-9) + (-29) =$ |

Então você já aprendeu a somar números inteiros, positivos ou negativos, mas apenas quando os números têm o mesmo sinal (dois positivos ou dois negativos):

*“Para somar números inteiros de mesmo sinal, some os números e repita o sinal”.*

**Módulo ou valor absoluto**

O que chamamos de módulo (ou valor absoluto) de um número, é o esse mesmo número com sinal eliminado. Por exemplo:

O módulo de -20 é 20.

O módulo de 35 é 35.

O módulo de -37 é 37.

O módulo de 0 é 0.

Existe um símbolo matemático para indicar o módulo. Basta colocar o número entre duas barras verticais ( $| |$ ). Por exemplo:

$$|21| = 21$$

$$|-13| = 13$$

Usando a noção de módulo, podemos escrever de outra forma a regra para somar números inteiros de mesmo sinal:

*“Para somar dois números inteiros de mesmo sinal, basta somar os seus módulos. O sinal do resultado será o mesmo sinal dos números que estão sendo somados”.*

### Adição de inteiros de sinais diferentes

Somar números inteiros é fácil, desde que ambos tenham o mesmo sinal. Quando um é positivo e outro é negativo, é um pouco mais difícil, mas a regra pode ser entendida facilmente se fizermos a analogia do jogo já usada como exemplo:

**a)  $(+10) + (-3) = +7$**

Na analogia do jogo, estamos considerando que a cada jogada, a quantia de um jogador sempre é somada ao resultado. O resultado pode ser positivo (quando o jogador ganha) ou negativo (quando o jogador perde). Então o cálculo  $(+10) + (-3)$  pode ser exemplificado pela situação em que o jogador tinha 10 pontos, e na jogada perdeu 3 pontos, ou seja, sua pontuação deve ser somada com  $-3$ . É claro que se o jogador tinha 10 pontos e perdeu 3 pontos, ficou com 7 pontos.

**b)  $(-3) + (+10) = +7$**

O jogador tinha 3 pontos negativos, ou seja, tinha uma dívida de 3 pontos. Em uma jogada, ganhou 10 pontos, que foram suficientes para “zerar” a dívida e ainda sobraram 7 pontos. Observe que o resultado foi o mesmo do exemplo anterior, ou seja,  $(+10) + (-3)$  é o mesmo que  $(-3) + (+10)$ . O sinal do resultado é  $+$ , o mesmo do 10, que é o número de maior módulo.

**c)  $(+10) + (-16) = -6$**

Agora o jogador estava com 10 pontos e em uma única jogada perdeu 16. Seus 10 pontos foram perdidos, e ainda ficou devendo 6. Então  $(+10) + (-16)$  é igual a  $-6$ . Observe que o sinal do resultado é  $-$ , o mesmo do 16, que é o número de maior módulo.

**d)  $(-16) + (+10) = -6$**

Dessa vez o jogador já estava com uma dívida de 16 pontos. Em uma jogada, ganhou 10, mas esses 10 pontos não foram suficientes para acabar com a sua dívida. Os 10 pontos foram abatidos da dívida, mas ainda ficaram faltando 6 pontos para “zerar” a dívida. Então  $(-16) + (+10) = -6$ . Observe que  $(-16) + (+10)$  é o mesmo que  $(+10) + (-16)$ .

**e) Considere o seguinte problema:**

*Uma pessoa tinha uma quantidade positiva de pontos  $a$  e perdeu  $b$ . O resultado é positivo ou negativo?*

Depende dos valores de  $a$  e  $b$ . Se o valor  $a$  for maior que  $b$ , o resultado será positivo. Se o gasto  $b$  for maior que  $a$ , o resultado será negativo.

Observe agora o seguinte, nos quatro exemplos acima:

- Estamos somando dois números inteiros, sendo um positivo e um negativo
- Em todos os casos, o resultado, em módulo, é obtido pela subtração dos dois valores
- O sinal do resultado é o mesmo do número de maior módulo que está sendo somado

Daí vem a regra para somar dois números inteiros de sinais diferentes:

*Para somar dois números inteiros, sendo um positivo e um negativo, basta subtrair os módulos. O sinal do resultado será o mesmo do número de maior módulo.*

Juntando esta regra, com a anterior para sinais iguais, podemos dizer, informalmente:

*“Sinais iguais, soma e repete o sinal; sinais diferentes, subtrai e dá o sinal do maior”.*

Alguns exemplos:

$$\begin{aligned} (-15) + (+20) &= +5 \\ (-30) + (+20) &= -10 \\ (-50) + (+20) &= -30 \\ (+40) + (-30) &= +10 \\ (-30) + (+40) &= +10 \end{aligned}$$

Já vimos que na adição de números inteiros, podemos trocar as posições das parcelas e o resultado não se altera. Por exemplo,  $20+30$  é o mesmo que  $30+20$ ;  $(-20)+(-40)$  é o mesmo que  $(-40)+(-20)$ ;  $(+40)+(-30)$  é o mesmo que  $(-30)+(+40)$ . Isso significa que a adição de números inteiros é uma *operação comutativa*, assim como também é, a adição de números naturais.

Vamos fazer mais alguns exercícios para fixar esta nova regra.

### Exercícios

E3)	a) $(-3) + (+6) =$	f) $(+25) + (-7) =$	k) $(+5) + (-23) =$	p) $(+22) + (-19) =$
	b) $(+2) + (-5) =$	g) $(-17) + (+36) =$	l) $(+7) + (-4) =$	q) $(+43) + (-46) =$
	c) $(+5) + (-4) =$	h) $(-21) + (+16) =$	m) $(-21) + (+13) =$	r) $(-51) + (+30) =$
	d) $(-5) + (+9) =$	i) $(-4) + (+8) =$	n) $(+28) + (-34) =$	s) $(+50) + (-32) =$
	e) $(+17) + (-12) =$	j) $(+12) + (-27) =$	o) $(-7) + (+4) =$	t) $(+5) + (-28) =$

E4)	a) $(-7) + (+3) =$	f) $(+15) + (-9) =$	k) $(+8) + (-21) =$	p) $(+45) + (-18) =$
	b) $(+3) + (-9) =$	g) $(-18) + (+26) =$	l) $(+4) + (-5) =$	q) $(+38) + (-40) =$
	c) $(+4) + (-4) =$	h) $(-23) + (+15) =$	m) $(-34) + (+18) =$	r) $(-63) + (+32) =$
	d) $(+8) + (-11) =$	i) $(+13) + (-7) =$	n) $(-32) + (-42) =$	s) $(+72) + (-33) =$
	e) $(+15) + (-19) =$	j) $(+16) + (-14) =$	o) $(-22) + (+5) =$	t) $(-16) + (-24) =$

Lembre-se que em alguns casos é desnecessário usar os parênteses, e que também é desnecessário usar o sinal positivo, desde que não fiquem dois sinais lado a lado.

E5)	a) $-4 + 7 =$	f) $36 + (-9) =$	k) $6 + (-21) =$	p) $42 + (-13) =$
	b) $3 + (-6) =$	g) $-15 + 32 =$	l) $8 + (-3) =$	q) $73 + (-31) =$
	c) $6 + (-5) =$	h) $-23 + 29 =$	m) $-33 + 19 =$	r) $-66 + 20 =$
	d) $-6 + 4 =$	i) $-5 + 9 =$	n) $21 + (-32) =$	s) $70 + (-53) =$
	e) $16 + (-21) =$	j) $13 + (-32) =$	o) $-8 + 5 =$	t) $9 + (-34) =$

É claro que na prática podem aparecer somas de números de mesmo sinal e de números de sinais diferentes, como nos exercícios abaixo:

- |     |                    |                    |                    |                    |
|-----|--------------------|--------------------|--------------------|--------------------|
| E6) | a) $-23 + 46 =$    | f) $35 + (-17) =$  | k) $15 + (-35) =$  | p) $52 + (-67) =$  |
|     | b) $-12 + (-15) =$ | g) $-47 + 36 =$    | l) $-17 + (-11) =$ | q) $13 + (-36) =$  |
|     | c) $51 + (-42) =$  | h) $-21 + (-26) =$ | m) $-25 + (-13) =$ | r) $-82 + (-10) =$ |
|     | d) $-15 + 15 =$    | i) $-4 + 8 =$      | n) $98 + (-64) =$  | s) $-70 + (-22) =$ |
|     | e) $-27 + (-12) =$ | j) $-12 + (-27) =$ | o) $17 + 41 =$     | t) $16 + (-37) =$  |
| E7) | a) $-22 + 62 =$    | f) $25 + (-13) =$  | k) $25 + (-52) =$  | p) $65 + (-12) =$  |
|     | b) $-19 + (-25) =$ | g) $-32 + 51 =$    | l) $-31 + (-23) =$ | q) $37 + (-75) =$  |
|     | c) $44 + (-33) =$  | h) $-16 + (-27) =$ | m) $-42 + (-20) =$ | r) $-76 + (-48) =$ |
|     | d) $-18 + 21 =$    | i) $-9 + 13 =$     | n) $73 + (-54) =$  | s) $-20 + (-17) =$ |
|     | e) $-33 + (-18) =$ | j) $-24 + (-50) =$ | o) $28 + 15 =$     | t) $39 + (-28) =$  |

## Soma algébrica

É muito comum encontrar o termo “soma algébrica”. É preciso conhecê-lo e usá-lo com cuidado. O nome da operação matemática é *adição*. O que chamamos de *soma* é o resultado da adição. Vimos que para adicionar dois inteiros, que podem ser positivos ou negativos, devemos adicionar os módulos quando os dois inteiros têm o mesmo sinal, e subtrair os módulos, quando os dois inteiros têm sinais diferentes. Portanto a soma algébrica pode ser feita pela adição ou pela subtração dos módulos dos números, dependendo dos sinais. Na aritmética ensinada nas primeiras séries do ensino fundamental, quando os sinais são sempre positivos, é sempre feita a adição, mas na álgebra, e na aritmética mais avançada, quando os números podem ser negativos, podemos ter que calcular a diferença, e não a soma. Genericamente chamamos esse resultado de *soma algébrica*.

### Exemplos:

A soma algébrica de  $-50$  e  $20$  é  $-30$ .

A soma algébrica de  $-40$  e  $-20$  é  $-60$ .

A soma algébrica de  $10$  e  $60$  é  $70$ .

Lembre-se, a soma algébrica não é o nome da operação (apesar de muitos chamarem erradamente a adição de soma), é o resultado da operação. O nome correto da operação é *adição de inteiros*.

## Comparação de inteiros

Comparar dois números inteiros é dizer qual deles é o maior, e qual é o menor. Por exemplo, comparando  $5$  e  $12$ , temos que  $12$  é maior que  $5$ . Isso é muito fácil, mas pode ficar um pouco mais difícil quando temos números negativos.

Por exemplo, qual é o maior número:  $-15$  ou  $-25$ ?

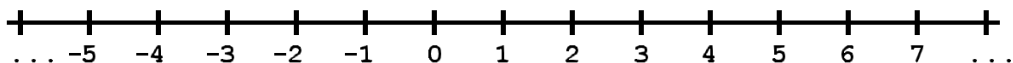
Para responder à pergunta, temos que estender as noções de “maior” e “menor” para o caso de números negativos. Intuitivamente, considere que duas pessoas estão devendo dinheiro. A pessoa A deve  $15$  reais, e a pessoa B deve  $25$  reais. É fácil entender que quem deve mais é B. Mas se perguntássemos “quem tem mais dinheiro”, a idéia seria diferente. Na verdade nem A nem B possuem dinheiro, ambos estão devendo. Mas se avaliássemos quem está em situação melhor, diríamos que é A, pois deve apenas  $15$ . Se a pergunta fosse “quem tem uma dívida maior”, a resposta seria B.

Outro exemplo: Qual das duas temperaturas é mais fria:  $-10^{\circ}\text{C}$  ou  $-30^{\circ}\text{C}$ ? E se a pergunta fosse: Qual é a temperatura mais quente:  $-10^{\circ}\text{C}$  ou  $-30^{\circ}\text{C}$ ?

É claro que isso tudo é uma grande confusão. Se você ficou confuso, então está com a razão. Quando estamos tratando de números negativos, é preciso explicar claramente o que significa “maior” e o que significa “menor”. Isso também ocorre com números positivos:

Exemplo: Um local está com temperatura de  $+2^{\circ}\text{C}$ , outro está com  $10^{\circ}\text{C}$ . Qual é o mais quente? Qual é o mais frio?

Quando estamos simplesmente tratando de números inteiros, o chamado “maior número” é aquele localizado mais à direita na reta numérica:



Exemplos:

$+5$  é maior que  $-1$

$-1$  maior que  $-3$

$0$  é maior que  $-5$

$+7$  é maior que  $+5$

$+4$  é maior que  $-2$

$-1$  é maior que  $-1000$

Quando não estamos preocupados com frio, calor, dívida, riqueza, mas simplesmente com números, convencionamos que o maior é aquele localizado mais à direita na reta numérica. Quanto mais à direita, maior é o número. Daí vêm as seguintes consequências:

- 1) Dados dois números positivos, o maior será aquele de maior módulo
- 2) Dados dois números negativos, o maior será aquele de menor módulo
- 3) Zero é menor que qualquer número positivo
- 4) Zero é maior que qualquer número negativo
- 5) Qualquer número positivo é maior que qualquer número negativo

Exemplo:

Coloque em ordem crescente a seguinte sequência de números:

$-5, 7, 90, 0, -30, 18, -12, 13, -10, 500, -1000$

A sequência ordenada deverá começar pelos negativos, depois virá o zero, depois os positivos. Entre os negativos, o menor é aquele de maior módulo, e o maior é aquele de menor módulo. Entre os positivos, basta seguir a ordem crescente natural. Ficamos então com:

$-1000, -30, -12, -10, -5, 0, 7, 13, 18, 90, 500$

Existem símbolos matemáticos para indicar qual de dois números é maior e qual é o menor. Esses símbolos são  $>$  (maior) e  $<$  (menor). Escrevemos por exemplo:

$$5 > 3$$

$$10 < 20$$

$$0 > -2$$

$$-10 < -5$$

Muitos alunos confundem os dois sinais. Para evitar a confusão, basta lembrar que a “abertura” do símbolo fica sempre voltada para o número maior.



**Exercícios**

E8) Complete as sentenças com os símbolos < ou >

a)  $-23 \underline{\hspace{1cm}} 46$

f)  $25 \underline{\hspace{1cm}} -17$

k)  $45 \underline{\hspace{1cm}} -35$

p)  $22 \underline{\hspace{1cm}} -66$

b)  $-32 \underline{\hspace{1cm}} -15$

g)  $-37 \underline{\hspace{1cm}} 36$

i)  $-77 \underline{\hspace{1cm}} -11$

q)  $53 \underline{\hspace{1cm}} -32$

c)  $31 \underline{\hspace{1cm}} -42$

h)  $-31 \underline{\hspace{1cm}} -26$

m)  $-22 \underline{\hspace{1cm}} -13$

r)  $-82 \underline{\hspace{1cm}} -15$

d)  $-25 \underline{\hspace{1cm}} 15$

j)  $-4 \underline{\hspace{1cm}} 8$

n)  $90 \underline{\hspace{1cm}} -64$

s)  $-70 \underline{\hspace{1cm}} -52$

e)  $-29 \underline{\hspace{1cm}} -12$

j)  $-21 \underline{\hspace{1cm}} -27$

o)  $19 \underline{\hspace{1cm}} 43$

t)  $16 \underline{\hspace{1cm}} -27$

**Subtração de inteiros**

Antes de estudar a subtração de números inteiros precisamos apresentar dois conceitos:

**1) Módulo ou valor absoluto**

Já apresentado neste capítulo, o módulo de um número inteiro nada mais é que o próprio número sem sinal. Sabemos que quando um número não tem sinal indicado, significa que é positivo. Portanto o módulo de um número positivo é o próprio número, o módulo de um número negativo é o próprio número, porém com sinal tornado positivo. O módulo de zero é zero.

**OBS.:** O módulo de um número é interpretado geometricamente como sendo a distância do número até a origem (0).

**2) Simétrico ou oposto**

O simétrico ou oposto de um número inteiro é o próprio número, com sinal trocado. Por exemplo, o simétrico de 5 é -5. O simétrico de -8 é 8. O simétrico de 0 é 0.

Usando o conceito de simetria, podemos definir a operação de subtração com base na adição:

*Subtrair um número é a mesma coisa que somar com o simétrico deste número.*

**Exemplos:**

$$8 - 5 = 8 + (-5) = 3$$

$$4 - 6 = 4 + (-6) = -2$$

Sendo assim, quem já sabe somar números positivos e negativos, também sabe subtraí-los.

E o que fazer para subtrair um número negativo? Por exemplo,  $8 - (-3)$ ? Usamos o mesmo conceito: subtrair é o mesmo que somar com o simétrico. O simétrico de -3 é 3. Então subtrair -3 é o mesmo que somar com +3.

$$8 - (-3) = 8 + (+3) = 11$$

**Exemplo:**

$$(-5) - (-11) = (-5) + (+11) = 6$$

(subtrair -11 é o mesmo que somar com o simétrico de -11, ou seja, 11)

**Exemplo:**

$$-2 - 7 = (-2) + (-7) = -9$$

Observe que os dois sinais “-” têm significados diferentes. O primeiro “-” é o sinal negativo de 2, formando assim o número -2. O segundo “-” é um sinal de subtração, indicando que o número à esquerda (-2) deve ser subtraído de 7. Os sinais, tanto “+” como o “-”, podem

indicar uma operação (adição ou subtração), ou indicar o sinal de um número inteiro (positivo ou negativo).

### Exemplos:

Lembre-se: subtrair é o mesmo que somar com o simétrico. Então basta transformar a operação de subtração em adição, e inverter o sinal do segundo número.

$$\begin{aligned} (-4) - (+5) &= (-4) + (-5) = -9 \\ (+9) - (+3) &= (+9) + (-3) = +6 \\ (+5) - (-4) &= (+5) + (+4) = +9 \\ (+3) - (+9) &= (+3) + (-9) = -6 \\ (-6) - (-8) &= (-6) + (+8) = +2 \\ (-9) - (-5) &= (-9) + (+5) = -4 \\ (+8) - (+8) &= (+8) + (-8) = 0 \\ (-7) - (-7) &= (-7) + (+7) = 0 \end{aligned}$$

### Exercícios

E9)	a) $(-3) - (-6) =$	f) $(-21) - (-4) =$	k) $(-3) - (-24) =$	p) $(-21) - (-11) =$
	b) $(-3) - (-5) =$	g) $(-13) - (-13) =$	i) $(+7) - (+3) =$	q) $(+34) - (+42) =$
	c) $(+5) - (+3) =$	h) $(-32) - (-14) =$	m) $(-26) - (-19) =$	r) $(-55) - (-20) =$
	d) $(-5) - (-4) =$	i) $(+7) - (+9) =$	n) $(-29) - (-33) =$	s) $(+60) - (+30) =$
	e) $(+16) - (+12) =$	j) $(-16) - (-22) =$	o) $(+3) - (+4) =$	t) $(-7) - (-18) =$
E10)	a) $(-7) - (+3) =$	f) $(+15) - (-9) =$	k) $(+8) - (-21) =$	p) $(+45) - (-18) =$
	b) $(+3) - (-9) =$	g) $(-18) - (+26) =$	i) $(+4) - (-5) =$	q) $(+38) - (-40) =$
	c) $(+4) - (-4) =$	h) $(-23) - (+15) =$	m) $(-34) - (+18) =$	r) $(-63) - (+32) =$
	d) $(+8) - (-11) =$	i) $(+13) - (-7) =$	n) $(-32) - (-42) =$	s) $(+72) - (-33) =$
	e) $(+15) - (-19) =$	j) $(+16) - (-14) =$	o) $(-22) - (+5) =$	t) $(-16) - (-24) =$

Lembre-se que o sinal dos números positivos pode ser eliminado. Também podem ser eliminados os parênteses do primeiro número de uma operação.

E11)	a) $(-2) - (-5) =$	f) $(-26) - (-3) =$	k) $(-2) - (-26) =$	p) $-12 - (-13) =$
	b) $(-4) - (-2) =$	g) $(-14) - (-31) =$	i) $6 - 9 =$	q) $+32 - 22 =$
	c) $(+5) - (+4) =$	h) $(-35) - (-21) =$	m) $-28 - (-17) =$	r) $-45 - (-10) =$
	d) $(-3) - (-4) =$	i) $+5 - 8 =$	n) $(-19) - (-36) =$	s) $40 - 30 =$
	e) $+6 - (+12) =$	j) $(-15) - (-18) =$	o) $(+6) - 3 =$	t) $(-9) - (-29) =$
E12)	a) $-22 - 62 =$	f) $25 - (-13) =$	k) $25 - (-52) =$	p) $65 - (-12) =$
	b) $-19 - (-25) =$	g) $-32 - 51 =$	i) $-31 - (-23) =$	q) $37 - (-75) =$
	c) $44 - (-33) =$	h) $-16 - (-27) =$	m) $-42 - (-20) =$	r) $-76 - (-48) =$
	d) $-18 - 21 =$	i) $-9 - 13 =$	n) $73 - (-54) =$	s) $-20 - (-17) =$
	e) $-33 - (-18) =$	j) $-24 - (-50) =$	o) $28 - 15 =$	t) $39 - (-28) =$

Preste atenção nos sinais, não vá somar quando for subtrair, e não vá subtrair quando for para somar.

E13)	a) $-23 - 46 =$	f) $35 + (-27) =$	k) $15 + (-55) =$	p) $52 - (-67) =$
	b) $-12 - (-15) =$	g) $-47 - 26 =$	i) $-17 - (-21) =$	q) $13 + (-26) =$
	c) $51 - (-42) =$	h) $-21 + (-46) =$	m) $-25 + (-33) =$	r) $-82 - (-10) =$
	d) $-15 - 15 =$	i) $-4 - 8 =$	n) $98 - (-64) =$	s) $-70 + (-52) =$
	e) $-27 - (-12) =$	j) $-12 + (-32) =$	o) $17 + 38 =$	t) $16 - (-37) =$

No próximo exercício você deve indicar o significado de cada um dos sinais + ou – que aparecem. Os sinais podem indicar “positivo”, “negativo”, “adição” ou “subtração”. Vejamos três exemplos:

$(-4) - (+5) \rightarrow$  negativo, subtração, positivo

$(+3) - (+9) \rightarrow$  positivo, subtração, positivo

$-3 + (-9) \rightarrow$  negativo, adição, negativo

E14) Não precisa calcular, apenas indique o significado de cada sinal, como fizemos nos exemplos acima.

a)  $-23 - 46 =$

b)  $-12 - (-15) =$

c)  $51 - (-42) =$

d)  $-15 - 15 =$

e)  $-27 - (-12) =$

f)  $15 + (-55) =$

g)  $-17 - (-21) =$

h)  $-25 + (-33) =$

i)  $98 - (-64) =$

j)  $17 + 38 =$

## Expressões com adição e subtração de inteiros

Na aritmética ensinada nas primeiras séries do ensino fundamental, lidamos apenas com números positivos, sejam naturais, sejam racionais (frações, números decimais, dízimas periódicas). Os números são agrupados com sinais das operações aritméticas (adição, subtração, multiplicação, divisão, potenciação, e até raízes), com a ajuda de parênteses, chaves e colchetes. Aquelas expressões, que chegam a assustar muitos alunos, também estão presentes nas séries superiores do ensino fundamental, mas dessa vez podem apresentar também números negativos e números irracionais. Vamos começar a estudar o assunto aqui, com expressões simples.

Na aritmética básica, lidamos apenas com números inteiros. Para formar expressões, precisamos ter pelo menos dois números e um sinal que represente uma operação. Por exemplo, partindo dos números 5 e 3, não podemos formar uma expressão como 5 3. Se juntarmos os dois números, sem espaço, teremos o número 53, mas se usarmos um espaço, teremos alguma coisa sem significado matemático: o número 5 ao lado do número 3. Não podemos operar os números, pois não está sendo informada, qual é a operação que deve ser feita. Para juntar esses números em uma operação matemática, devemos ter pelo menos um sinal, como  $5+3$ ,  $5-3$ ,  $5/3$ , etc.

Quando estamos lidando com números relativos, faz sentido colocar números lado a lado, desde que convencionemos o seguinte: quando não existe indicada a operação a ser feita, considera-se que o sinal do segundo número indica a operação a ser realizada. Por exemplo, no caso do 5 e do 3, colocados lado a lado, passamos a considerar que o sinal + do 3 é a operação a ser realizada. Escrevemos opcionalmente o 5 como +5 e obrigatoriamente o 3 como +3. Ficamos então com  $+5+3$ , que é o mesmo que  $5 + 3$ . É uma expressão que dá resultado 8. Note que esta convenção não é obrigatória, por isso não é conveniente usá-la de forma indiscriminada. Sendo assim, devemos evitar expressões como “5 3”, e usarmos ao invés disso, “ $5 + 3$ ”, que não deixa margem a dúvidas.

Um outro exemplo, vamos colocar lado a lado os números 3, -7, 5 e -9. Ficaríamos então com:  $3-7+5-9$ . (convencionamos que os sinais dos números indicam implicitamente as operações a serem realizadas). É uma expressão válida, que pode ser facilmente calculada. Podemos usar agora dois métodos para fazer os cálculos:

1) Fazer as operações uma a uma, na ordem em que aparecem.

$3-7 = -4$

$-4+5 = 1$

$$1-9 = -8$$

2) Agrupar todos os positivos, agrupar todos os negativos, e somar (algebricamente) os resultados. Este processo é em geral, menos trabalhoso.

$$+3+5 = +8$$

$$-7-9 = -16$$

$$+8-16 = -8$$

Outro exemplo:

$$-5+6+12-11-7+9$$

$$\text{Juntando os positivos: } +6+12+9 = +27$$

$$\text{Juntando os negativos: } -5-11-7 = -23$$

$$\text{Resultado: } +27-23 = +4$$

Quando um aluno estuda números negativos pela primeira vez, é neste ponto onde começa a errar sinais, começa a não entender, dando início a uma deficiência que se prolonga pelo resto do estudo da matemática, inclusive nas séries posteriores. Observe novamente a expressão:

$$-5+6+12-11-7+9$$

O aluno fica tentado a substituir o “5+6” por 11 na expressão. Afinal, 5+6 é o mesmo que 11. Entretanto, isso está errado, porque não é 5+6, é -5+6. O sinal - é apenas do 5, e não diz respeito ao 6. É errado então trocar o 5+6 por 11 na expressão, e ficar com -11. O certo é somar -5 com +6, o que resulta em +1.

Da mesma forma, seria errado trocar o 7+9 da expressão por 16, ficando com -16. O sinal - é apenas do 7, e não se aplica ao 9. O correto é fazer -7 +9, o que resulta em +2.

Para não cair nos erros, basta você entender a que números se aplicam os sinais negativos. Na expressão do exemplo, o primeiro sinal - se aplica apenas ao 5, o segundo sinal - se aplica apenas ao 11, e o terceiro sinal - se aplica apenas ao 7.

O método ensinado (juntar os positivos, juntar os negativos e somar algebricamente os resultados) é bem fácil de ser usado. Façamos mais um exemplo e a seguir exercícios sobre o assunto.

### Exemplo:

$$\text{Calcular } -5-7+6-9+4-3$$

$$\text{Juntando os positivos: } +6+4 = +10$$

$$\text{Juntando os negativos: } -5-7-9-3 = -24$$

$$\text{Resultado: } +10-24 = -14$$

Façamos então os seguintes exercícios:

E15) a)  $-7-4+5 =$

b)  $-2-3+2 =$

c)  $5-2-3 =$

d)  $-5-6-2 =$

e)  $-2-8+3 =$

f)  $5-3-2+7 =$

g)  $-9+6+2-1 =$

h)  $-6+4-3+5 =$

i)  $-5-8+2+1 =$

j)  $-3+3-5+7 =$

k)  $7-3+5-2+7 =$

l)  $-7-2+3-7+4 =$

m)  $-5+3-2+8-3+9 =$

n)  $9-6+8-3+6-2 =$

o)  $7+3-1-2-3-1 =$

- E16) a)  $-23 - 46 + 15 =$  f)  $35 - 27 - 38 + 42 =$  k)  $15 - 55 + 32 - 24 + 12 =$   
b)  $-12 - 15 + 12 =$  g)  $-47 + 26 + 21 - 11 =$  l)  $-17 - 21 + 13 - 17 + 14 =$   
c)  $51 - 42 - 13 =$  h)  $-21 + 46 - 13 + 15 =$  m)  $-25 + 33 - 22 + 18 - 13 + 19 =$   
d)  $-15 - 25 - 21 =$  i)  $-4 - 8 + 22 + 11 =$  n)  $98 - 64 + 28 - 32 + 26 - 12 =$   
e)  $-27 - 12 + 33 =$  j)  $-12 + 32 - 15 + 18 =$  o)  $17 + 38 - 11 - 23 - 13 - 31 =$

### Corta-corta

Quando temos uma longa sequência de adições e subtrações, muitas vezes encontramos números que, uma vez somados, dão resultado zero. Por exemplo, uma expressão pode ter  $+9$  e  $-9$ , na mesma adição, então podem ser “cortados”, pois seu resultado será zero:

$$-2 + 9 - 5 - 9 = -2 + \cancel{9} - 5 - \cancel{9} = -2 - 5 = -7$$

No exemplo abaixo, cortamos o  $-9$  com o  $+6$  e o  $+3$ , pois quando somarmos  $+3$  e  $+6$ , o resultado será  $+9$ , que poderá ser cortado com  $-9$ .

$$+5 - 9 + 12 + 6 + 3 - 10 = +5 - \cancel{9} + 12 + \cancel{6} + \cancel{3} - 10 = +5 + 12 - 10 = +7$$

Note que isto só pode ser feito quando os termos a serem cortados fazem parte de uma mesma adição. Por exemplo, estaria errado cortar 8 com  $-8$  na expressão:

$$5 + 8 + 3(7 - 8)$$

pois o segundo 8 não faz parte da mesma adição que o primeiro 8. O segundo 8 está multiplicado por 3, e não simplesmente somado com o primeiro 8, então não pode ser cortado.

No exercício a seguir, simplifique o que for possível, e então calcule o resultado final.

### Exercícios

- E17) a)  $-23 - 40 + 23 =$  f)  $35 - 27 - 35 + 42 =$  k)  $15 - 5 + 3 - 10 + 12 =$   
b)  $-12 - 15 + 12 =$  g)  $-47 + 26 + 11 - 11 =$  l)  $-7 - 21 + 13 - 17 + 28 =$   
c)  $13 - 42 - 13 =$  h)  $-21 + 46 - 13 + 21 =$  m)  $5 + 4 - 2 + 8 - 9 =$   
d)  $-15 - 15 + 30 =$  i)  $-33 - 8 + 22 + 11 =$  n)  $8 - 6 + 8 - 3 + 6 - 16 =$   
e)  $-27 - 12 + 12 =$  j)  $-12 + 27 - 15 + 10 =$  o)  $7 + 8 - 11 - 3 + 3 - 15 =$

### Eliminação de parênteses

Expressões matemáticas podem apresentar parênteses, chaves e colchetes. Esses símbolos, quando usados, servem para indicar a ordem na qual as operações devem ser realizadas.

Para resolver expressões que usam esses símbolos, é preciso conhecer duas coisas:

- 1) Precedência entre as operações
- 2) Precedência entre parênteses, colchetes e chaves

O cálculo de potências deve ser a primeira operação a ser calculada, depois as multiplicações e divisões, na ordem em que aparecem, e por último, adições e subtrações. Por exemplo, para calcular a expressão

$$3.5 + 4.3^2$$

A potência deve ser feita antes, ficaremos então com  $3^2 = 9$ . A expressão se reduzirá a  $3.5+4.9$ . Como as multiplicações têm precedência, devemos resolvê-las primeiro.  $3.5$  resulta em 15 e  $4.9$  resulta em 36. A expressão se reduz então a  $15+36$ . Finalmente realizamos a adição, que dá resultado 51. Esta é a ordem padrão para o cálculo.

Quando a intenção de quem cria a expressão, é que as operações sejam feitas em ordem diferente da padrão, devem ser indicadas entre parênteses, colchetes ou chaves. Devemos resolver primeiro as expressões que estão entre parênteses, depois as expressões que estão entre colchetes, finalmente as expressões que estão entre chaves. Recordemos por exemplo como calcular a expressão:

$$200 \div \{ 2 \cdot [(49 - 1496 \div 34)^2 - 5] - 30 \}^2$$

O cálculo ficará assim:

$200 \div \{ 2 \cdot [(49 - 1496 \div 34)^2 - 5] - 30 \}^2$	Calculamos primeiro os parênteses mais internos, a divisão deve ser feita antes da subtração. Ficamos com $1496 : 34 = 44$ .
$= 200 \div \{ 2 \cdot [(49 - 44)^2 - 5] - 30 \}^2$	Calculamos agora $49 - 44 = 5$
$= 200 \div \{ 2 \cdot [(5)^2 - 5] - 30 \}^2$	Elevando 5 ao quadrado temos 25
$= 200 \div \{ 2 \cdot [25 - 5] - 30 \}^2$	25 menos 5 resulta em 20
$= 200 \div \{ 2 \cdot [20] - 30 \}^2$	A multiplicação $2 \times 20$ deve ser feita antes
$= 200 \div \{ 40 - 30 \}^2$	Agora fazemos $40 - 30$
$= 200 \div \{ 10 \}^2$	A potenciação deve ser feita antes da divisão
$= 200 \div 100$	Finalmente fazemos a divisão
$= 2$	

A ordem das operações continuará sendo a mesma que você usava nas séries anteriores do ensino fundamental, a diferença é que a partir de agora aparecerão números negativos, frações negativas e números irracionais. Você aprenderá a resolver essas expressões complexas ao longo do livro. No momento, começaremos ensinando a técnica da *eliminação de parênteses*.

Considere a expressão:

$$+5 -7 +8 -3 +9 + (+4 -8 +10 +7)$$

A regra nos diz que devemos resolver primeiro a expressão entre parênteses, que no caso resultaria em +13 (confira!). A expressão seria reduzida a:

$$+5 -7 +8 -3 +9 + 13$$

Entretanto, ao invés de fazer dessa forma muitas vezes é mais simples eliminar os parênteses. Observe que dentro dos parênteses temos um -8 que poderia cortar com o +8 que está fora dos parênteses, e temos também um +7 que poderia cortar com o -7 que está fora dos parênteses. Entretanto, não podemos cortar um valor que está entre parênteses, com um valor que está fora dos parênteses. Os valores só podem ser cortados se fizerem parte da mesma sequência. A solução para o problema é eliminar os parênteses. Para isso, basta saber duas regras simples:

1) Quando um par de parênteses tem um sinal + antes, basta eliminar os parênteses e repetir o seu conteúdo.

2) Quando um par de parênteses tem um sinal – antes, basta eliminar os parênteses e inverter os sinais dos seus termos internos, ou seja, os positivos viram negativos, e os negativos viram positivos. Mas cuidado, esta segunda regra não pode ser usada quando dentro dos parênteses existem outros parênteses, seu uso é apenas quando temos uma sequência de valores com sinais + e –.

Usando essas regras, a eliminação dos parênteses ficaria assim:

$$\begin{aligned} +5 -7 +8 -3 +9 + (+4 -8 +10 +7) &= \\ +5 -7 +8 -3 +9 +4 -8 +10 +7 &= \\ +5 -\cancel{7} +\cancel{8} -3 +9 +4 -\cancel{8} +10 +\cancel{7} &= \\ +5 -3 +9 +4 +10 &= 25 \end{aligned}$$

Muitas vezes na álgebra, a eliminação de parênteses não é uma simples facilidade, mas sim, uma necessidade, ou seja, se não a fizermos, não conseguimos resolver o problema.

Vejamos agora um exemplo com a eliminação de parênteses precedidos por um sinal negativo.

$$+3-7+8+5-(6-3+9-7)$$

O par de parênteses está precedido por um sinal negativo, então para eliminá-lo, devemos inverter os sinais dos números no seu interior. Ficamos com:

$$+3-7+8+5-6+3-9+7 = 4 \text{ (confira!)}$$

Outro exemplo:

$$+5 -7 +8 -3 +9 -[+4 -(-8 +10 +7) -3] =$$

Observe que existem aqui dois níveis (parênteses dentro de colchetes). Não podemos eliminar todos de uma só vez. Devemos eliminar primeiro, os mais internos, que no caso, são os parênteses. Ficamos então com:

$$\begin{aligned} +5 -7 +8 -3 +9 -[+4 -(-8 +10 +7) -3] &= \\ +5 -7 +8 -3 +9 -[+4 +8 -10 -7 -3] &= \\ +5 -7 +8 -3 +9 -4 -8 +10 +7 +3 &= \end{aligned}$$

Na segunda linha do cálculo acima, eliminamos os parênteses internos, que estavam precedidos por um sinal negativo, invertendo os sinais dos números. Na terceira linha, fizemos a eliminação dos colchetes, que como estavam precedidos por um sinal negativo, os números do seu interior tiveram seus sinais invertidos. Agora como todos os números ficaram em uma só sequência, podemos fazer os cancelamentos permitidos e calcular a expressão:

$$\begin{aligned} +5 -7 +8 -3 +9 -4 -8 +10 +7 +3 &= \\ +5 -\cancel{7} +\cancel{8} -\cancel{3} +9 -4 -\cancel{8} +10 +\cancel{7} +\cancel{3} &= \\ +5 +9 -4 +10 +3 &= \\ = 23 \end{aligned}$$

Note que temos dois caminhos que levam ao mesmo resultado:

- 1) Fazer as operações de cada parênteses, antes de serem eliminados
- 2) ou então ir simplesmente eliminando os parênteses na ordem correta (a partir dos mais interiores), para só no final realizar as operações.

## Exercícios

E18) Faça a eliminação dos parênteses, a seguir use cancelamentos quando for possível e termine os cálculos só quando todo os parênteses estiverem eliminados. A seguir, repita os exercícios, realizando as operações à medida em que for possível, ou seja, eliminando e calculando.

- |                            |   |                                       |
|----------------------------|---|---------------------------------------|
| a) $+3 - 6 - (-2 - 6 + 8)$ | f) $5 - (-6 - 8) - (+9 - 4) - (-7 + 3)$ | k) $-6 + 3 + (-2 - 3) + 2 - (-1 + 5)$ |
| b) $-5 + (-7 - 3)$         | g) $-5 + (-5 + 3) - (-6 - 8)$           | l) $+4 - 7 - (7 - 5) + (-4 - 3)$      |
| c) $+9 - 8 - 5 + (-2 + 9)$ | h) $-1 - 8 + (-2 + 3) - 7 + (-4 + 5)$   | m) $+4 + (+2 - 7) + 5 - (+2 - 3)$     |
| d) $+4 + 3 - 7 - (5 - 2)$  | i) $+12 + (+8 - 6) - (+8 - 5)$          | n) $+5 - 5 - (-6 - 2) + (-2 - 4)$     |
| e) $-2 - 8 - (-7 - 3)$     | j) $-9 + (-2 - 4) + (-6 + 9)$           | o) $+2 - 5 + (-4 - 7) - (-2 + 5)$     |

E19) Faça a eliminação dos parênteses, a seguir use cancelamentos quando for possível e termine os cálculos.

- |   |   |   |
|---|---|---|
| a) $+5 - 6 + 7 - (-5 - 6 + 2 + 4)$      | f) $4 - (-5 + 6 - 7) - (-3 + 8 - 5) - (-6 + 2)$   | k) $+3 - 6 + 3 + (-2 + 4 - 3) + 2 - (-1 - 3 + 5)$ |
| b) $-3 + 6 + (-2 + 3 - 4)$              | g) $3 - 2 - 7 + (-3 + 2 + 5) - (-4 - 9)$          | l) $-6 + 4 - 7 - (7 - 5 - 5) + 6 + (-4 + 5 - 3)$  |
| c) $+8 - 7 + 4 - 5 + (-3 - 4 + 7 + 5)$  | h) $+4 - 1 - 8 + (-2 + 4 + 3) - 7 + (-4 + 5 - 6)$ | m) $+4 - 2 - 8 + (-3 + 2 - 7) + 5 - (+5 + 2 - 3)$ |
| d) $+5 + 2 - 8 - 6 - (12 + 4 - 6 - 20)$ | i) $-3 + 12 + (+8 + 4 - 6) - (+6 + 8 - 5)$        | n) $+5 + 3 - 5 - (-5 + 6 - 2) + 3 + (-3 - 2 - 4)$ |
| e) $-9 + 3 - 5 + 4 - (-5 + 3 - 9 + 7)$  | j) $-8 - 9 + (+3 - 2 - 4) + (+5 - 6 + 9)$         | o) $+2 - 5 + 4 + (-4 - 7 - 1) + 4 - (-2 + 5 + 2)$ |

## Parênteses, chaves e colchetes

Matematicamente, os símbolos  $()$ ,  $[]$  e  $\{\}$  têm o mesmo valor. Na verdade, bastariam os parênteses, e o uso da regra: “Resolver primeiro os parênteses mais internos”. Entretanto, para facilitar os cálculos por alunos mais novos, foram adotados também os colchetes “ $[]$ ” e as chaves “ $\{\}$ ”. Isto ajuda um pouco as crianças a identificarem quais partes da expressão devem ser feitas antes. Por outro lado, o elaborador da questão fica na obrigação de respeitar a ordem do uso de  $()$ ,  $[]$  e  $\{\}$  no enunciado. Por exemplo, não seria correto formular neste nível, uma questão como:

$$(5 - 4 \times \{30 - 18\} - [27 - 20])$$

Para manter coerência, os parênteses deveriam ser internos, e as chaves deveriam ser externas. Usar esses símbolos na ordem diferente do padrão seria uma confusão desnecessária. Matematicamente correto neste caso seria usar todos os símbolos como parênteses, e resolver primeiro aqueles mais internos.

## Multiplicação e divisão de inteiros

As operações de multiplicação e divisão de números inteiros são muito parecidas com as operações correspondentes nos números naturais. A única diferença é a questão dos sinais. Os números que estão agora sendo multiplicados ou divididos podem ser positivos ou negativos, e o resultado também pode ser positivo ou negativo (é claro que o resultado também pode ser zero).

A regra é muito simples:

Para multiplicar ou dividir dois números inteiros:

- Sinais iguais, o resultado será positivo
- Sinais diferentes, o resultado será negativo

Exemplos:

$$(+3) \cdot (+4) = +12$$



$$(-3).(+5) = -15$$

$$(+6).(-4) = -24$$

$$(-4).(-5) = +20$$

Tradicionalmente, esta regra de sinais é apresentada no ensino fundamental como uma propriedade a ser decorada, mas na verdade isto pode ser demonstrado. Tais demonstrações são feitas em cursos de matemática do ensino superior. Vamos justificar de forma simplificada, o porquê dessas regras de sinais.

A multiplicação de inteiros positivos é consequência da multiplicação de números naturais, que são sempre positivos e o resultado é sempre positivo (exceto no caso do 0). Para multiplicar um número inteiro positivo por um negativo, entende-se claramente porque o produto é negativo, já que tal multiplicação pode ser desmembrada em parcelas a serem somadas. Por exemplo:

$$3 \cdot (-5) = (-5) + (-5) + (-5) = -15$$

Obviamente, a adição de parcelas negativas terá resultado negativo. Isto justifica o resultado de que a multiplicação de dois inteiros, um positivo e um negativo, terá um resultado negativo.

Um pouco mais difícil é a demonstração de que o produto de dois inteiros negativos tem como resultado um valor positivo. Para justificar (não demonstrar, pois a demonstração correta seria mais elaborada) esta regra de sinal, considere dois inteiros positivos,  $a$  e  $b$ , de tal forma que os números  $-a$  e  $-b$  sejam negativos. Partimos então da seguinte igualdade:

$$-a \cdot 0 = 0$$

Isto nada mais é que uma propriedade da multiplicação: qualquer número inteiro multiplicado por 0, dá como resultado 0. Por outro lado, o número 0 pode ser obtido pela soma de qualquer número  $b$  com o seu simétrico,  $-b$ . Ficamos então com:

$$-a \cdot (b + (-b)) = 0$$

A multiplicação de inteiros tem a chamada propriedade distributiva, ou seja, o número  $-a$  está multiplicando  $b$  e  $-b$ , ficamos então com:

$$-a \cdot b + (-a) \cdot (-b) = 0$$

Somando  $a \cdot b$  aos dois lados da igualdade, ficamos com:

$$-a \cdot b + a \cdot b + (-a) \cdot (-b) = a \cdot b$$

Os números  $a \cdot b$  e  $-a \cdot b$  são simétricos, sua soma é zero. Ficamos finalmente com:

$$(-a) \cdot (-b) = a \cdot b$$

Este resultado mostra que o produto de dois números negativos ( $-a$  e  $-b$ , lembre-se que consideramos  $a$  e  $b$  positivos) é igual ao produto dos seus módulos, com o sinal positivo. Isto mostra por exemplo que  $(-6) \cdot (-8) = 6 \cdot 8 = +48$ . Fica assim justificada a propriedade de que o produto de dois números negativos tem como resultado, um valor positivo.

Como vemos, para multiplicar dois números relativos, multiplicamos normalmente seus módulos. O sinal do resultado dependerá dos sinais dos números que estão sendo

multiplicados. Se os sinais forem iguais ( $++$  ou  $--$ ), o resultado será positivo. Se os sinais dos dois números que estão sendo multiplicados forem diferentes ( $+ -$  ou  $- +$ ), o resultado será negativo. Obviamente, se um dos dois números for zero (ou ambos), o resultado será zero.

A mesma regra é aplicada para a divisão. Inicialmente fazemos a divisão dos números, sem levar em conta o sinal (ou seja, dividimos os módulos dos números). Lembre-se que não existe divisão por zero. Para saber o sinal do resultado, basta verificar os sinais dos dois números da operação. Se os sinais forem iguais ( $++$  ou  $--$ ), o resultado será positivo. Se os sinais forem diferentes ( $+ -$  ou  $- +$ ), o resultado será negativo.

**Exemplos:**

$$(+48) \div (+6) = +8$$

$$(-32) \div (-8) = +4$$

$$(-28) \div (+4) = -7$$

$$(+21) \div (-7) = -3$$

**Exemplo:**

Escreva as expressões abaixo, usando o menor número possível de parênteses e de sinais, porém sem efetuar as operações:

a)  $(+3) \cdot (+4)$

d)  $(-4) \cdot (-5)$

g)  $(28) \div (+4)$

b)  $(-3) \cdot (+5)$

e)  $(+48) \div (+6)$

h)  $(+21) \div (-7)$

c)  $(+6) \cdot (-4)$

f)  $(-32) \div (-8)$

i)  $(-12) \cdot (-3)$

Sabemos que não é obrigatório o uso do sinal nos números positivos. Por exemplo,  $+5+8$  pode ser escrito como  $5+8$ . O único sinal  $+$  que permanece nesse caso é o que indica a operação de adição. Parênteses também podem ser omitidos, desde que isso não resulte em dois sinais juntos, como  $++$ ,  $--$ , por exemplo. Sendo assim, podemos escrever as oito expressões acima da seguinte forma:

a)  $3 \cdot 4 = 12$

b)  $-3 \cdot 5 = -15$

c)  $6 \cdot (-4) = -6 \cdot 4$

d)  $-4 \cdot (-5) = 4 \cdot 5$

e)  $48 \div 6$

f)  $-32 \div (-8) = 32 \div 8$

g)  $-28 \div 4$

h)  $21 \div (-7) = -21 \div 7$

i)  $(-12) \cdot (-3) = 12 \cdot 3$

**Produto com mais de dois fatores**

A regra para sinais de multiplicação e divisão deve ser alterada para o caso de quando temos mais de duas parcelas. Por exemplo:

$$(-3) \cdot (+4) \cdot (-5) \cdot (-10) =$$

No exemplo acima temos uma multiplicação de quatro fatores. O módulo do resultado é o produto dos módulos, no caso,  $3 \times 4 \times 5 \times 10 = 600$ . Para saber o sinal, contamos quantos números negativos existem entre os fatores que estão sendo multiplicados. Se o número de fatores negativos for ímpar, o resultado será negativo. Se o número de fatores negativos for par, o resultado será positivo. No nosso caso são 3 fatores negativos, então o resultado será negativo.

$$(-3) \cdot (+4) \cdot (-5) \cdot (-10) = -600$$

É fácil entender o motivo desta regra. Um sinal positivo em uma multiplicação não altera o sinal do produto. Já um sinal negativo, se agrupado com um segundo sinal negativo, dá resultado positivo. Se os sinais negativos forem agrupados “de dois em dois”, ficarão positivos. Quando sobra um sinal negativo sem agrupar (ou seja, quando o número de sinais negativos é ímpar), o produto será negativo.

## Exercícios

- E20) a)  $(-3) \cdot (-6) =$  f)  $(-28) \div (-4) =$  k)  $(-3) \cdot (-24) =$  p)  $(-2) \cdot (-11) =$   
 b)  $(-3) \cdot (-5) =$  g)  $(-13) \cdot (-3) =$  i)  $(+7) \cdot (+3) =$  q)  $(+3) \cdot (+32) =$   
 c)  $(+5) \cdot (+3) =$  h)  $(-32) \div (-4) =$  m)  $(-6) \cdot (-9) =$  r)  $(-58) \div (-2) =$   
 d)  $(-5) \cdot (-4) =$  i)  $(+7) \cdot (+9) =$  n)  $(-27) \div (-3) =$  s)  $(+60) \div (+3) =$   
 e)  $(+6) \cdot (+12) =$  j)  $(-6) \cdot (-22) =$  o)  $(+3) \cdot (+4) =$  t)  $(-7) \cdot (-8) =$
- E21) a)  $(-2) \cdot (-5) =$  f)  $(-27) \div (-3) =$  k)  $(-2) \cdot (-26) =$  p)  $-72 \div (-24) =$   
 b)  $(-4) \cdot (-2) =$  g)  $(-54) \div (-3) =$  i)  $6 \cdot (-9) =$  q)  $+32 \div (-2) =$   
 c)  $(+5) \cdot (+4) =$  h)  $(-95) \div (-5) =$  m)  $-84 \div (-7) =$  r)  $-45 \cdot (-2) =$   
 d)  $(-3) \cdot (-4) =$  i)  $+5 \cdot (-8) =$  n)  $(-49) \div (-7) =$  s)  $90 \div (-30) =$   
 e)  $+96 \div (+12) =$  j)  $(-45) \div (-9) =$  o)  $(+6) \cdot (-3) =$  t)  $(-91) \div (-7) =$
- E22) a)  $(-24) \cdot (-5) =$  f)  $(-270) \div (-3) =$  k)  $(-20) \cdot (-26) =$  p)  $-720 \div (-24) =$   
 b)  $(-42) \cdot (-2) =$  g)  $(-108) \div (-3) =$  i)  $60 \cdot (-9) =$  q)  $+680 \div (-20) =$   
 c)  $(+25) \cdot (+4) =$  h)  $(-850) \div (-5) =$  m)  $-840 \div (-7) =$  r)  $-45 \cdot (-20) =$   
 d)  $(-30) \cdot (-4) =$  i)  $+500 \cdot (-8) =$  n)  $(-490) \div (-7) =$  s)  $900 \div (-30) =$   
 e)  $+960 \div (+12) =$  j)  $(-450) \div (-9) =$  o)  $(+65) \cdot (-3) =$  t)  $(-630) \div (-7) =$
- E23) a)  $-2 \cdot (-4) \cdot (3) =$  f)  $5 \cdot (-7) \cdot 2 =$  k)  $5 \cdot (-5) \cdot 2 \cdot (-4) \cdot 2 =$   
 b)  $-2 \cdot (-5) \cdot 12 =$  g)  $-4 \cdot 2 \cdot 11 =$  i)  $-7 \cdot (-2) \cdot 3 \cdot (-4) =$   
 c)  $5 \cdot (-4) \cdot (-3) =$  h)  $-2 \cdot 4 \cdot (-3) \cdot 5 =$  m)  $-5 \cdot 3 \cdot (-2) \cdot 3 =$   
 d)  $-5 \cdot (-5) \cdot (-2) =$  i)  $-4 \cdot (-8) \cdot 2 =$  n)  $9 \cdot (-6) \cdot 2 \cdot (-3) =$   
 e)  $-7 \cdot (-2) \cdot 3 =$  j)  $-2 \cdot 3 \cdot (-5) \cdot 8 =$  o)  $7 \cdot 3 \cdot (-2) \cdot (-3) =$

## Expressões combinando multiplicações e divisões

Podemos encontrar inúmeros tipos de expressões, combinando todas as operações matemáticas possíveis. Até agora vimos somente alguns tipos, a mais complexa foi a sequência de multiplicações. Vejamos agora como resolver uma expressão que tem somente multiplicações e divisões em sequência, como por exemplo:

$$(-6) \cdot (+14) \div (-7) \div (-2) \cdot (+4)$$

Note que esta expressão não tem adições e subtrações, só uma série de multiplicações e divisões. Quando isto ocorre, devemos realizar as multiplicações e divisões, na ordem em que aparecem. A regra de sinal é a mesma da sequência de multiplicações: quando o número de sinais negativos for ímpar, o resultado será negativo, caso contrário, será positivo. Ficamos então neste exemplo com:

$$6 \cdot 14 = 84$$

$$84 \div 7 = 12$$

$$12 \div 2 = 6$$

$$6 \cdot 4 = 24$$

O sinal é negativo, pois existem 3 fatores negativos. Portanto o resultado é  $-24$ .

## Exercícios

- E24) a)  $-2 \cdot (-14) \div 4 =$  f)  $15 \cdot (-7) \cdot 3 \div (-9) =$  k)  $5 \cdot (-5) \cdot (-4) \div 10 =$   
 b)  $-3 \cdot (-5) \cdot 12 \div (-9) =$  g)  $-14 \div 2 \cdot 11 =$  i)  $-7 \cdot (-4) \div 2 \cdot (-4) =$   
 c)  $5 \cdot (-4) \cdot (-3) \div (-15) =$  h)  $-2 \cdot 4 \cdot (-3) \div 6 =$  m)  $-5 \cdot 3 \cdot (-2) \div 3 =$   
 d)  $-15 \cdot (-5) \div (-25) =$  j)  $-14 \cdot (-4) \div 2 =$  n)  $9 \cdot (-6) \div 2 \cdot (-3) =$   
 e)  $-27 \cdot (-2) \div 18 =$  o)  $-2 \cdot 3 \cdot (-5) \div 10 =$  o)  $7 \cdot 6 \div (-2) \div (-3) =$

Uma outra forma de resolver as seqüências de multiplicações e divisões é formar uma fração, colocando no numerador o primeiro fator e todos os números que estão sendo multiplicados, e colocando no denominador todos os números que estão sendo divididos. A regra de sinal é a mesma. Por exemplo:

$$(-6) \cdot (+14) \div (-7) \div (-2) \cdot (+4) = -\frac{6 \times 14 \times 4}{7 \times 2}$$

A seguir usamos as regras de simplificação de frações. O 7 do denominador simplifica com o 14 do numerador. O 14, depois de simplificar com o 7, fica 2. Este 2 simplifica com o 2 que está no denominador. O resultado será então  $6 \cdot 4 = 24$ , e o sinal é negativo:  $-24$ .

## Exercícios

E25) Repita o exercício 24 usando a técnica de simplificação que acabamos de apresentar.

## Potenciação de números inteiros

Sabemos que uma potência nada mais é que um produto de fatores iguais. A mesma coisa valerá quando a base (o fator que se repete) é um número negativo. Apenas temos que conhecer a regra de sinal para o caso das bases negativas. Estamos portanto interessados em calcular:

$$A^B$$

onde B é um número natural (0, 1, 2, ...), chamado *expoente*, e A pode ser qualquer número inteiro (positivo, negativo ou zero), chamado *base*. Elevar o número A à potência B nada mais é que multiplicar A por si mesmo, com um total de B fatores:

$$A^B = \underbrace{A \times A \times A \times A \times \dots \times A}_{(B \text{ vezes})}$$

As primeiras regras da potenciação são as mesmas já estudadas na aritmética:

1) Qualquer base elevada à potência 1 é igual à própria base.

$$A^1 = A$$

2) Qualquer base, que não seja 0, elevada ao expoente 0, é igual a 1.

$$A^0 = 1 \quad (A \neq 0)$$

3) O número 1, elevado a qualquer expoente (no nosso caso estamos lidando com expoentes que sejam números naturais), é igual a 1.

$$1^B = 1, B \in \mathbb{N}$$

4) O número 0, elevado a qualquer expoente inteiro positivo, é igual a 0.

$$0^B = 0, B \in \mathbb{N}^*$$

**OBS.:** 0 não pode ser elevado a 0, nem a expoentes negativos.

Essas quatro regras tratam individualmente os casos de base ou expoente valendo 0 ou 1. Para outros números, vale a regra de multiplicar a base, tantas vezes quanto for o valor do expoente.

**Exemplos:**

a)  $(-4)^3 = (-4) \cdot (-4) \cdot (-4) = -64$

b)  $(-3)^2 = (-3) \cdot (-3) = 9$

c)  $(-5)^0 = 1$

d)  $(-7)^1 = -7$

Para calcular potências onde a base é um número inteiro (positiva, negativa ou 0) e o expoente é um número natural (exceto  $0^0$ , que não existe), fazemos o seguinte:

1) Calculamos a potência normalmente, sem levar em conta o sinal.

2) Se a base for positiva, o resultado será positivo

3) Se a base for negativa:

3.1) Quando o expoente da base negativa for par, o resultado será positivo

3.2) Quando o expoente da base negativa for ímpar, o resultado será negativo

Note que esta regra de sinal é similar à da multiplicação com vários fatores, já que uma potência nada mais é que uma multiplicação de fatores iguais.

**Exemplos:**

a)  $(-2)^6 = +64$

b)  $(-3)^3 = -27$

c)  $(-2)^5 = -32$

d)  $(-2)^8 = 128$

e)  $(-1)^{1000} = 1$

f)  $(-200)^0 = 1$

**Exercícios**

E26) Calcule as seguintes potências

a)  $(-5)^2 =$

f)  $6^2 =$

k)  $(-7)^2 =$

b)  $(-3)^3 =$

g)  $(-4)^2 =$

l)  $4^2 =$

c)  $2^7 =$

h)  $3^5 =$

m)  $(-3)^4 =$

d)  $(-6)^3 =$

i)  $(-2)^5 =$

n)  $(-2)^7 =$

e)  $8^2 =$

j)  $5^2 =$

o)  $(-8)^2 =$

E27) Calcule as seguintes potências

a)  $(-3)^3 =$

f)  $9^2 =$

k)  $(-9)^3 =$

b)  $(-4)^4 =$

g)  $(-3)^4 =$

l)  $18^2 =$

c)  $3^5 =$

h)  $2^6 =$

m)  $(-5)^4 =$

d)  $(-5)^3 =$

i)  $(-3)^4 =$

n)  $(-2)^8 =$

e)  $10^2 =$

j)  $12^2 =$

o)  $(-4)^3 =$

E28) Calcule as seguintes potências

- |                       |                    |                 |
|-----------------------|--------------------|-----------------|
| a) $12^1 =$           | f) $1912^1 =$      | k) $0^9 =$      |
| b) $(-5.000.000)^0 =$ | g) $(-534)^1 =$    | l) $7125^1 =$   |
| c) $(-173)^1 =$       | h) $230^0 =$       | m) $(-78)^0 =$  |
| d) $(-1)^{3001} =$    | i) $1^{20} =$      | n) $1^2 =$      |
| e) $0^{27} =$         | j) $1.234.567^0 =$ | o) $(-512)^1 =$ |

E29) Represente como um produto de potências de fatores primos:

- |                                      |                              |                                     |
|--------------------------------------|------------------------------|-------------------------------------|
| a) $3.3.3.3.3.3.(-2).(-2).(-2).(-2)$ | f) $3.3.3.(-7).(-7).3$       | k) $(-2).(-2).(-2).(-2).(-2)$       |
| b) $2.2.2.5.5.5.7.7$                 | g) $2.2.(-3).3.3.4.4$        | l) $(-2).(-2).(-2).(-2).(-2).2.2.2$ |
| c) $2.2.2.2.2.(-3).(-3).7.7.7$       | h) $3.3.4.4.4.5.5.(-5).(-5)$ | m) $(-2).2.(-3).3.(-5).5.5$         |
| d) $2.2.2.2.(-5).(-5).(-5).2.3.3$    | i) $2.3.5.3.2.5.2.3.5.2$     | n) $2.3.4.5.6$                      |
| e) $10.10.20.20.20$                  | j) $3.2.7.3.5.7.3.2.5.7$     | o) $10.11.(-12).14.(-16)$           |

E30) Calcule:

- |                 |                     |                        |
|-----------------|---------------------|------------------------|
| a) $1^{30}$     | f) $0^{1000000000}$ | k) $(-8)^0$            |
| b) $(-1)^{100}$ | g) $3^1$            | l) $-153^0$            |
| c) $1^{10000}$  | h) $27^1$           | m) $1000^0$            |
| d) $0^5$        | i) $1000^1$         | n) $-1000^0$           |
| e) $0^{47}$     | j) $98908093^1$     | o) $443343993032793^0$ |

## Propriedades das potências

A potenciação de números inteiros tem as mesmas propriedades das potências de números naturais:

- a)  $(a.b)^x = a^x.b^x$   
 b)  $(a/b)^x = a^x/b^x$   
 c)  $(a^b)^x = a^{b \times x}$

Nessas propriedades, a e b são números inteiros, e x é um número natural, respeitando apenas as restrições de que não existe divisão por 0, nem  $0^0$ .

É muito fácil justificar essas quatro propriedades, partindo da própria definição de potência. Por exemplo:

$$(a.b)^x = \underbrace{(a.b) \times (a.b) \times (a.b) \times \dots \times (a.b)}_{(x \text{ vezes})} = \underbrace{a \times a \times a \times \dots \times a}_{(x \text{ vezes})} \times \underbrace{b \times b \times b \times \dots \times b}_{(x \text{ vezes})}$$

$$= a^x \times b^x$$

As outras três propriedades citadas podem ser demonstradas pelo mesmo princípio.

Vejamos alguns exemplos com números naturais:

**Exemplos:**

- a)  $(3.5)^2 = 3^2.5^2 = 9 \times 25 = 225$   
 b)  $(2.3)^4 = 2^4.3^4 = 16 \times 81 = 1296$   
 c)  $(4/2)^3 = 4^3 / 2^3 = 64/8 = 8$   
 d)  $(2^3)^2 = 2^{3 \times 2} = 2^6 = 64$

Até aqui não há nada de novo, essas propriedades já foram estudadas em séries anteriores do ensino fundamental. Vejamos agora quando as bases são números inteiros, sejam positivos ou negativos.

**Exemplos:**

a)  $[2 \cdot (-5)]^2 = 2^2 \cdot (-5)^2 = 4 \times 25 = 100$

é o mesmo que:

$$[2 \cdot (-5)]^2 = [-10]^2 = 100$$

b)  $[(-6) \div 3]^2 = (-6)^2 \div 3^2 = 36 \div 9 = 4$

é o mesmo que:

$$[(-6) \div 3]^2 = [-2]^2 = 4$$

c)  $[(-2)^3]^2 = (-2)^{3 \cdot 2} = (-2)^6 = 64$

é o mesmo que:

$$[(-2)^3]^2 = [-8]^2 = 64$$

Essas propriedades podem servir para facilitar cálculos. Digamos que você precisa calcular:

$$10^6 \div 5^6$$

$10^6$  vale 1.000.000, e  $5^6$  vale  $5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 15.625$ . Agora temos que dividir 1.000.000 por 15.625, uma conta bastante trabalhosa, que resulta em 64. Fica muito mais fácil usar a propriedade:

$$(a \div b)^x = a^x \div b^x$$

isso é o mesmo que dizer que  $a^x \div b^x = (a \div b)^x$ . Então:

$$10^6 \div 5^6 = (10 \div 5)^6 = 2^6 = 64$$

**Exercícios**

E31) Multiplique as seguintes potências, e agrupe as que tiverem a mesma base, reduza a bases positivas, colocando o sinal à parte, quando for o caso.

a)  $2^5 \cdot 2^7 \cdot 2^3$

b)  $3^2 \cdot 3^3$

c)  $2^6 \cdot 2^7 \cdot 2^8$

d)  $10^2 \cdot 10^4$

e)  $5^3 \cdot 5^5 \cdot 5^2 \cdot 5^4$

f)  $2^{51} \cdot 2^{10} \cdot 2^9$

g)  $3^5 \cdot 3^2$

h)  $10^3 \cdot 10 \cdot 10^9$

i)  $5^7 \cdot 5^8$

j)  $2^2 \cdot 2^3 \cdot 2^5 \cdot 2^7$

k)  $3^2 \cdot 3 \cdot (-3)^3 \cdot 10^2 \cdot 10^4$

l)  $-2^{51} \cdot 2^{10} \cdot 2^9 \cdot (-2)^5$

m)  $-5^7 \cdot 5^8$

n)  $-2^5 \cdot (-2)^7 \cdot (-2)^3$

o)  $5^3 \cdot 5^5 \cdot (-5)^2 \cdot (-5^4)$

E32) Multiplique as seguintes potências, dando a resposta na forma de uma potência única

a)  $3^5 \cdot 5^5$

b)  $2^7 \cdot 5^7$

c)  $2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2$

d)  $4^5 \cdot 6^5$

e)  $5^5 \cdot 5^5$

f)  $10^3 \cdot 8^3$

g)  $a^5 \cdot b^5$

h)  $2^6 \cdot 10^6$

i)  $2^{5000} \cdot 5^{5000}$

j)  $5^7 \cdot 5^7$

k)  $(-2)^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2$

l)  $4^5 \cdot (-6)^5$

m)  $-10^3 \cdot (-8)^3$

n)  $(-2)^6 \cdot (-10)^6$

o)  $-5^7 \cdot (-5)^7$

E33) Efetue as seguintes divisões

a)  $3^5 \div 3^2$

b)  $2^6 \div 2^3$

c)  $5^7 \div 5^5$

d)  $10^8 \div 10^3$

e)  $7^5 \div 7^4$

f)  $12^6 \div 12^3$

g)  $6^9 \div 6^3$

h)  $a^{50} \div a^{20}$

i)  $100^8 \div 100^3$

j)  $1000^3 \div 1000^2$

k)  $-3^{15} \div (-3)^2$

l)  $-(-10)^8 \div 10^3$

m)  $6^9 \div (-6)^3$

n)  $(-7)^5 \div 7^4$

o)  $(-2)^6 \div (-2^3)$

E34) Efetue as seguintes divisões

- |                    |                            |                          |
|--------------------|----------------------------|--------------------------|
| a) $10^6 \div 5^6$ | f) $9^5 \div 3^5$          | k) $(-12)^3 \div 2^3$    |
| b) $12^3 \div 2^3$ | g) $30^4 \div 6^4$         | i) $24^2 \div (-3)^2$    |
| c) $16^5 \div 4^5$ | h) $14^2 \div 7^2$         | m) $-9^5 \div (-3)^5$    |
| d) $24^2 \div 3^2$ | i) $120^{10} \div 24^{10}$ | n) $(-30)^4 \div (-6)^4$ |
| e) $15^4 \div 5^4$ | j) $80^6 \div 5^6$         | o) $-80^6 \div (-5)^6$   |

E35) Calcule as seguintes potências:

- |               |                                    |                                    |
|---------------|------------------------------------|------------------------------------|
| a) $(3.5)^2$  | f) $(1/7)^{10}$                    | k) $[(-3)/5]^2$                    |
| b) $(2.10)^3$ | g) $(2/5)^3$                       | i) $[(-2) \cdot (-5)]^3$           |
| c) $(5.7)^5$  | h) $(2/9)^2$                       | m) $[2 \cdot (-3) \cdot 5]^2$      |
| d) $(3.4)^4$  | i) $(-2/3)^3$                      | n) $[(-1)^{99}/2]^3$               |
| e) $(2/3)^7$  | j) $\left(\frac{2}{7.10}\right)^3$ | o) $\left(\frac{2.3}{-5}\right)^2$ |

E36) Expressar as expressões como um produto de potências de fatores primos, sem repetição de bases. Ex:  $4^2 \cdot 6^3 \cdot 9^4 = 2^2 \cdot 2^2 \cdot 2^3 \cdot 3^3 \cdot 3^4 \cdot 3^4 = 2^7 \cdot 3^{11}$ . Use apenas bases positivas, e indique o sinal em separado, quando for o caso.

- |                              |                                |                                      |
|------------------------------|--------------------------------|--------------------------------------|
| a) $6^2 \cdot 10^3$          | f) $4^3 \cdot 6^2 \cdot 10^3$  | k) $-2^3 \cdot (-6)^3 \cdot 9^2$     |
| b) $2^2 \cdot 6^5 \cdot 9^3$ | g) $2^4 \cdot 4^4 \cdot 8^2$   | i) $(-15)^3 \cdot (-9)^4$            |
| c) $6^2 \cdot 8^5$           | h) $9^3 \cdot 18^2$            | m) $-4^3 \cdot (-6)^2 \cdot 10^5$    |
| d) $10^3 \cdot 20^4$         | i) $6^3 \cdot 12^4 \cdot 18^2$ | n) $(-5)^4 \cdot (-10)^3 \cdot 25^2$ |
| e) $15^3 \cdot 9^4$          | j) $5^4 \cdot 10^2 \cdot 25^3$ | o) $(-6)^5 \cdot 12^6 \cdot (-18)^2$ |

E37) Expressar as expressões como um produto de potências, agrupando as que forem de mesma base.

Ex:  $2 \cdot x^2 \cdot y^3 \cdot 5x^4 = 10 \cdot x^6 \cdot y^3$

- |  |   |  |
|--|---|--|
| a) $2x^2 \cdot z^3 \cdot x^5$                              | f) $2x^3 \cdot y^2 \cdot z^3 \cdot 3x^2 \cdot y^4 \cdot z^5$  | k) $-x^3 \cdot (-y)^3 \cdot z^2 \cdot x \cdot y \cdot z$ |
| b) $3a^2 \cdot b^5 \cdot c^3 \cdot 2a \cdot b^2 \cdot c^2$ | g) $x^4 \cdot y^4 \cdot z^2 \cdot 2x^2 \cdot y^2 \cdot z$     | i) $(-a)^3 \cdot (-b)^4$                                 |
| c) $5x^2 \cdot y^5 \cdot 3y^4$                             | h) $a^3 \cdot b^2 \cdot a^3 \cdot b^2$                        | m) $-a^3 \cdot (-b)^2 \cdot b^5$                         |
| d) $2a^3 \cdot b^4 \cdot 3a \cdot 4b \cdot 5ab$            | i) $m^3 \cdot p^4 \cdot q^2 \cdot 3m \cdot 2n \cdot 5q$       | n) $(-a)^4 \cdot (-a)^3 \cdot a^2$                       |
| e) $x^3 \cdot y^3 \cdot 2xy \cdot 3x^2 \cdot y^4$          | j) $5a^4 \cdot b^2 \cdot c^3 \cdot 2 \cdot a \cdot b \cdot c$ | o) $(-a)^5 \cdot b^6 \cdot (-a \cdot b)^2$               |

## Expressões com números inteiros

Praticamente todo o estudo da álgebra exige a resolução de expressões numéricas ou literais. Literais, porque apresentam letras que representam números. Por exemplo,  $x^2 - 3x + 5$  é uma expressão algébrica do segundo grau, na qual  $x$  representa um número real qualquer. Para operar com essas expressões, é preciso ter habilidade algébrica, ou seja, saber operar e simplificar diversos tipos de expressões, das mais simples às mais complexas. Essas expressões podem envolver operações como:

- Adição, subtração, multiplicação e divisão
- Potências e raízes
- Frações algébricas
- Parênteses, colchetes e chaves
- Números e letras com sinais positivos ou negativos

A partir de agora você vai trabalhar com expressões numéricas, inicialmente com valores inteiros, positivos ou negativos. Dominando a técnica para números inteiros, ficará muito mais fácil manipular as expressões algébricas mais complexas.

As expressões algébricas apresentadas nesse capítulo terão apenas:



- Números inteiros
- Operações de adição, subtração, multiplicação e potências de números inteiros
- Parênteses, colchetes e chaves

Para efetuar essas expressões, vamos usar os conceitos já apresentado nesse capítulo.

### Sequência de adições e subtrações

Realizamos as operações na ordem em que aparecem. Para facilitar, podemos agrupar todos os positivos e agrupar todos os negativos, para calcular a soma algébrica final. Podemos ainda, antes iniciar a operação, fazer simplificações como já ensinamos neste capítulo.

#### Exemplo:

Calcular  $-5 + 3 - 8 + 7 - 6 + 2 - 9$

$-5 - 8 - 6 - 9 = -28$  (agrupando os negativos)

$+3 + 7 + 2 = +12$  (agrupando os positivos)

$-28 + 12 = -16$  (operando a soma dos negativos com a soma dos positivos)

### Exercícios

E38) Faça a eliminação dos parênteses, a seguir use cancelamentos quando for possível e termine os cálculos.

a)  $6 - (-3 + 8 - 5) - (-5 + 6 - 7) - (-4 + 5)$

b)  $6 - 1 - 10 + (-6 + 5 + 8) - (-3 - 6)$

c)  $+8 - 5 - 4 + (-7 + 10 + 7) - 8 + (-6 + 7 - 4)$

d)  $-7 + 8 + (+12 + 8 - 2) - (+9 + 5 - 8)$

e)  $-6 - 7 + (+5 - 6 - 8) + (+8 - 3 + 7)$

f)  $+5 - 8 + 5 + (-4 + 6 - 5) + 4 - (-3 - 5 + 7)$

g)  $-9 + 7 - 10 - (10 - 8 - 8) + 9 + (-7 + 8 - 6)$

h)  $+8 - 6 - 4 + (-7 + 6 - 3) + 9 - (+9 + 6 - 7)$

i)  $+7 + 8 - 2 - (-3 + 9 - 7) + 8 + (-8 - 7 - 9)$

j)  $+6 - 9 + 8 + (-8 - 3 - 5) + 8 - (-6 + 9 + 6)$

### Sequência de multiplicações e divisões

Nesse tipo de cálculo, realizamos as operações na ordem em que aparecem. Um método que torna o cálculo mais simples é formar uma fração, colocando no numerador o primeiro fator e todos os fatores que estão sendo multiplicados, e colocar no denominador, o produto de todos os fatores que estão depois de algum sinal de divisão. Quanto ao sinal, será negativo se o número de valores negativos da sequência for ímpar, e positivo se o número de fatores negativos da sequência for par.

#### Exemplo:

$$(-6) \cdot (+14) \div (-7) \div (-2) \cdot (+4) = -\frac{6 \times 14 \times 4}{7 \times 2} = -24$$

Ou seja, o primeiro fator vai para o numerador. Entre os termos seguintes, todos os que têm antes um sinal de multiplicação, ficam no numerador. Todos aqueles que têm antes um sinal de divisão, ficam no denominador.

### Exercícios

E39) a)  $25 \cdot (-4) \cdot 3 \div (-15) =$

b)  $-24 \div 3 \cdot 11 =$

c)  $-12 \cdot 4 \cdot (-3) \div 6 =$

d)  $-24 \cdot (-4) \div 6 =$

e)  $-2 \cdot 3 \cdot (-6) \div 18 =$

f)  $15 \cdot (-5) \cdot (-2) \div 10 =$

g)  $-9 \cdot (-4) \div 2 \cdot (-4) =$

h)  $-15 \cdot 3 \cdot (-2) \div 3 =$

i)  $9 \cdot (-4) \div 2 \cdot (-6) =$

j)  $9 \cdot 6 \div (-3) \div (-2) =$

## Expressões com adição, subtração, multiplicação e divisão

Quando a multiplicação e a divisão se misturam com a adição e subtração, devemos primeiro resolver todas as multiplicações e divisões. Vejamos um exemplo simples:

### Exemplo:

$$7+5.(-3)$$

Seria errado somar  $7+5$ , para depois multiplicar o resultado por  $-3$ . As multiplicações devem ser feitas antes das adições. Portanto o correto é fazer primeiro  $5.(-3) = -15$ . Só então podemos operar  $7-15 = -8$ .

$$7+5.(-3) =$$

$$7+(-15) = -8$$

### Exemplo:

$$2.3+4.7-2.4.5+3.6 =$$

Muitos alunos erram devido à confusão de números agrupados no papel. Para não errar, dê um espaço maior entre os sinais de adição e subtração, e deixe mais juntos os números ligados pela multiplicação e divisão. Ficaria assim:

$$2.3 + 4.7 - 2.4.5 + 3.6 =$$

$$6 + 28 - 40 + 18 = 12$$

Quando existem divisões, a regra é a mesma: realize todas as multiplicações e divisões, para no final, realizar as adições e subtrações.

### Exemplo:

$$2.3+40\div5.7-2.4.5+3.6\div9 =$$

$$2.3 + 40\div5.7 - 2.4.5 + 3.6\div9 =$$

$$6 + 56 - 40 + 2 = 24$$

Se existirem números negativos, realize normalmente as operações, levando em conta os sinais.

### Exemplo:

$$2.3+(-40)\div5.7-2.4.(-5)+3.(-6)\div9 =$$

$$2.3 + (-40)\div5.7 - 2.4.(-5) + 3.(-6)\div9 =$$

$$6 + (-56) - (-40) + (-2) =$$

$$6 - 56 + 40 - 2 = -12$$

Considere os sinais de multiplicação e divisão como “sinais fortes”, que deixam os números “grudados”, e os sinais de adição e subtração como “sinais fracos”, cujas operações devem ser feitas depois.

## Exercícios

**OBS.:** O símbolo “.” Significa multiplicação

- |      |                                |                                    |                                    |
|------|--------------------------------|------------------------------------|------------------------------------|
| E40) | a) $(-3).(-4) + (-2).(-24)$    | f) $(-32)\div(-4) - (-3).(-11)$    | k) $(-27)\div(-3) + (+5).(+4)$     |
|      | b) $(-3).(-12) - (+6).(+3)$    | g) $(-13).(-3) + (+2).(+22)$       | l) $(-54)\div(-3) - 96\div(+12)$   |
|      | c) $(+5).(+3) + (-7).(-4)$     | h) $(-28)\div(-4) - (-28)\div(-2)$ | m) $(-95)\div(-5) + (-49)\div(-7)$ |
|      | d) $(-5).(-6) - (-27)\div(-3)$ | i) $(+6).(+9) + (+30)\div(+3)$     | n) $+5.(-8) + 90\div(-30)$         |
|      | e) $(+6).(+5) + (+3).(+9)$     | j) $(-7).(-22) - (-6).(-8)$        | o) $(-45)\div(-9) - 84\div(-7)$    |

- E41) a)  $(-2).(-5) + (-2).(-26) - (-2).(-4).(3) =$  f)  $(-27) \div (-3) - 72 \div (-24) + 5.(-7).2 =$   
 b)  $(-4).(-2) - 6.(-9) - 2.(-5).12 =$  g)  $(-54) \div (-3) + 32 \div (-2) + 2.3.(-5).8 =$   
 c)  $(+5).(4) + 84 \div (-7) - 5.(-4).(-3) =$  h)  $(-95) \div (-5) - 45.(-2) + (-2).4.(-3).5 =$   
 d)  $(-3).(-4) - (-49) \div (-7) - 5.(-5).(-2) =$  i)  $+5.(-8) + 90 \div (-30) + 4.2.11 =$   
 e)  $+96 \div (+12) + (+6).(-3) - 7.(-2).3 =$  j)  $(-45) \div (-9) - (-91) \div (-7) + (-4).(-8).2 =$
- E42) a)  $-2.(-14) \div 4 + 5.(-5).2.(-4).2 + 15.(-7).3 \div (-9) - 5.(-5).(-4) \div 10$   
 b)  $-3.(-5).12 \div (-9) - 9.(-6).2.(-3) + (-14) \div 2.11$   
 c)  $5.(-4).(-3) \div (-15) + 7.3.(-2).(-3) + (-7).(-4) \div 2.(-4)$   
 d)  $-15.(-5) \div (-25) - 5.3.(-2).3 - (-5).3.(-2) \div 3 + (-14).(-4) \div 2 + 9.(-6) \div 2.(-3)$   
 e)  $-27.(-2) \div 18 + 7.(-2).3.(-4) - 7.6 \div (-2) \div (-3) - 2.4.(-3) \div 6 + (-2).3.(-5) \div 10$

## Parênteses, colchetes e chaves

Servem para mudar a ordem normal das operações. A regra é que devemos resolver primeiro os trechos das expressões que estão entre parênteses. É possível usar parênteses dentro de parênteses, mas para evitar confusão, convencionou-se usar também chaves e colchetes. O correto é usar mais internamente os parênteses, externamente os colchetes, e mais externamente ainda, as chaves. Matematicamente, todos esses símbolos têm o valor de parênteses, mas por clareza visual, convencionou-se esta ordem.

### Exemplo:

$$\begin{aligned} -5+6-(-7+4) &= \\ -5+6-(-3) &= \\ -5+6+3 &= \\ -5+9 &= 4 \end{aligned}$$

### Exemplo:

$$\begin{aligned} -6.14 \div (24 \div 6) &= \\ -6.14 \div 4 &= \\ -84 \div 4 &= 21 \end{aligned}$$

### Exemplo:

$$25 - \left\{ 3.17 - \left[ -10 + 6.(8 - 4.(-2)) + 2 + 3 \right] - 4.(-4) \right\} \div (-4) =$$

A expressão tem uma parte entre chaves, na qual encontramos uma parte entre colchetes, na qual encontramos uma parte entre parênteses, que é  $(8 - 4.(-2))$ . Esta deve ser resolvida primeiro. A seguir continuamos resolvendo, sempre partindo das expressões mais internas.

$$\begin{aligned} (8 - 4.(-2)) &= \\ 8 - (-8) &= \\ 8 + 8 &= 16 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [-10 + 6.(16) + 2 + 3] &= \\ [-10 + 6.(16) + 2 + 3] &= \\ [-10 + 96 + 2 + 3] &= 91 \end{aligned}$$

Portanto o conteúdo dos colchetes resulta em 91. Passamos agora a calcular o conteúdo entre chaves:

$$\{3.17-91-4.(-4)\} =$$

$$\{3.17 - 91 - 4.(-4)\} =$$

$$\{51 - 91 - (-16)\} =$$

$$\{51 - 91 + 16\} = -24$$

O conteúdo entre chaves resulta em -24. Agora que os parênteses, colchetes e chaves foram eliminados, podemos resolver o restante da expressão:

$$25 - (-24) \div (-4) =$$

$$25 - (-24) \div (-4) =$$

$$25 - 6 = 19$$

## Exercícios

**OBS.:** O símbolo “.” Significa multiplicação

- E43) a)  $[2.3 - 3.5] + [5.3 - 2.7]$  k)  $[-28 - 4.(-5)] \cdot [-36 - 4.(-8)]$   
 b)  $[18 - 2.7] \cdot [25 - 2.11]$  l)  $[2.3 - 2.3.4 + 3.4.5 + 8] \div [13.13 - 12.12]$   
 c)  $[2.3 - 4] \div [2.(3 - 4)]$  m)  $1 - 2.[-4 - 2.(2.(-3) - 5.(-8))]$   
 d)  $[30 + 4.(-7)] \cdot [40 - (-4).(-9)]$  n)  $10 - 3.[-4 - 2.(4.(-2) - 15 \div (-3).2)]$   
 e)  $[26 - 3.(-2) - 4.(-2)] \div [20 - 60:4]$  o)  $(-2).(-3) - \{4.(-2) + [2.(-1) + 2.(1.3 - 4.(-5))]\}$   
 f)  $4.(-5).[5.(-5) - 3.(-3)]$  p)  $4.2 - \{18.(-2) - 4 \div 2.[-24 \div (-8) - 12 \div 2.(-5) + 5.(-2)]\}$   
 g)  $(3.(-5) + 4.3).[4.(-2) + (-2).(-3)]$  q)  $[(-2).(-15) \div 10 + 2.(-8)] \cdot [-2.(-3)]$   
 h)  $[30 \div 2 + 9] \div [10 - (-2).(-3)]$  r)  $2.\{14 \div 7.3 + 15 \div 5 \div 3.2.[36 \div (-4) - 2.(2.(-3) - 6.2)]\}$   
 i)  $[2.3 - 3.4 + 4.5] \cdot [2.3 - 3.5]$  s)  $[3.(-2) + (-4).3] \div [19.(-2) - 4.(-5)]$   
 j)  $[(-1).(-3) + (-8) \div 2] \cdot [4 - (-2).(-3)]$  t)  $\{(8.8 - 4) \div (-6) + (-21) \div (-7).[-2.(2.(-5) - 3.(-6))]\} \div (-2)$

- E44) a)  $(-3).(-4) + (-2).(-12).[(-27) \div (-3) - (+5).(4)]$   
 b)  $(-3).(-12) - (+6).(3).[(-95) \div (-5) - (-49) \div (-7)]$   
 c)  $(+5).(3).[(-54) \div (-3) - 96 \div (+12)] + (-7).(-4)$   
 d)  $[(-5).(-6) - (-27) \div (-3)].[5.(-8) + 90 \div (-30)]$   
 e)  $[(+6).(5) + (+3).(9)].[(-45) \div (-9) - 84 \div (-7)]$   
 f)  $(-32) \div (-4) - (-3).(-11).\{(-23).(-4) - (-2).(-4).[(-27) \div (-3) - (+5).(4) - 60]\}$   
 g)  $(-13).(-3) + (+2).(22) \div \{(-5).(-14) - (-2).(3).[(-95) \div (-5) - (-49) \div (-7)]\}$   
 h)  $(-28) \div (-4) - (-18) \div (-2).\{(+5).(3).[(-54) \div (-3) - 96 \div (+12)] - (-25).(-4)\}$   
 i)  $[10 + (+6).(9) + (+30) \div (+3).2] \div \{[(-5).(-6) - (-27) \div (-3)].[-5.(-8) + 78 \div (-2)]\}$   
 j)  $(-7).(-12) - (-6).(2).\{[(-6).(5) - (+3).(-9)].[(135) \div (-9) - 98 \div (-7)]\}$

## Expressões com potências

Uma expressão envolvendo potências não é mais difícil que as expressões que possuem apenas adições, subtrações, multiplicações e divisões. A única coisa que você precisa saber é que as potências são realizadas antes das outras operações.

**Exemplo:**

$$5 + 3.2^4 =$$

$$5 + 3.2^4 =$$

Já sabemos que a adição deve ser feita depois da multiplicação. Devemos então resolver antes o termo  $3 \cdot 2^4$ . Não é para calcular primeiro  $3 \cdot 2 = 6$ , para depois calcular  $6^4$ . O correto é calcular primeiro a potência, ou seja,  $2^4 = 16$ . Só então calculamos  $3 \cdot 16 = 48$ , e finalmente calculamos  $5 + 48 = 53$ .

$$5 + 3 \cdot 2^4 =$$

$$5 + 3 \cdot 16 =$$

$$5 + 48 = 53$$

**Exemplo:**

$$5 + (3 \cdot 2)^2 =$$

Nesse caso, a expressão entre parênteses deve ser calculada antes da potência. Ficamos então com  $3 \cdot 2 = 6$ , para então calcular  $6^2 = 36$ . Finalmente fazemos a soma com 5, ficando com  $5 + 36 = 41$ .

**Exemplo:**

$$(5 + 3 \cdot 2)^2 =$$

Mais uma vez temos que resolver primeiro a expressão entre parênteses, para só então calcular a potência. A expressão entre parênteses resulta em 11, então o resultado final é  $11^2 = 121$ .

**Exemplo:**

$$-5^2 - (-4)^2 =$$

No primeiro termo temos um 5 com um sinal negativo e com uma potência. A potência tem precedência, ou seja, devemos primeiro calcular  $5^2 = 25$ , para então atribuir o sinal negativo, ficando então com  $-25$ . A seguir, temos que subtrair  $(-4)^2$ . Se não fossem usados os parênteses, calcularíamos a potência primeiro ( $4^2 = 16$ ), para então tratar o sinal. Como temos parênteses em torno de  $-4$ , este valor deve ser elevado à potência 2. Ficamos então com  $(-4)^2 = 16$ . Finalmente podemos operar os dois resultados obtidos:

$$-5^2 - (-4)^2 =$$

$$-25 - 16 = -41$$

O importante aqui é lembrar que para elevar um número negativo a uma potência, devemos sempre escrever o número negativo entre parênteses:

$$(-4)^2 = 16 \text{ (o número } -4 \text{ está elevado ao quadrado)}$$

$$-4^2 = -16 \text{ (o negativo de } 4^2 = \text{ o negativo de } 16 = -16)$$

**Exemplo:**

$$2^{3^2} =$$

Nessa expressão temos duas potências envolvidas. Como calculá-la? Qual número está elevado ao quadrado, o 3 ou o  $2^3$ ?

Nesse tipo de expressão, convencionou-se que as potências devem ser calculadas “de cima para baixo”. Sendo assim, calculamos primeiro  $3^2 = 9$ . A seguir calculamos a próxima potência, que ficará  $2^9 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 512$ .

**Exemplo:**

$$(2^3)^2 =$$

Parênteses, colchetes e chaves são usados nas expressões matemáticas para alterar a ordem normal das operações. Se não existissem parênteses nesta expressão, seu cálculo seria como já mostrado no exemplo anterior:  $2^{3^2} = 512$ . Entretanto dessa vez foram usados parênteses para alterar a ordem de cálculo. A regra é sempre a mesma: devemos primeiro resolver as expressões entre parênteses. No caso, calculamos  $2^3 = 8$ . Só então calculamos a outra potência, ficando com  $8^2 = 64$ .

$$2^{3^2} = 512, \text{ mas } (2^3)^2 = 64.$$

## Exercícios

**OBS.:** O símbolo “.” Significa multiplicação

- E45) a)  $(-3)^2 + 2 \cdot 3^2 =$  f)  $3 \cdot 2^2 =$  k)  $(-5)^2 - 5^2 =$   
 b)  $(-2)^3 - 4^2 \div 2^3 =$  g)  $2 \cdot (-3)^2 =$  i)  $(-5)^3 - 5^3 =$   
 c)  $2^7 + 3 \cdot (-2)^5 =$  h)  $(-3 \cdot 2)^3 =$  m)  $(-2)^4 + (-2)^3 + (-2)^2 + (-2)^1 + (-2)^0 =$   
 d)  $(-4)^3 - (20 \div 5)^2 =$  i)  $(-35 \div (5 \cdot 7))^{56} =$  n)  $(-2)^8 \div (-2)^5 =$   
 e)  $5^3 - 5^2 + 5^1 - 5^0 =$  j)  $-2 \cdot 13^2 =$  o)  $7^2 - 37^1 + (-1289)^0 =$
- E46) a)  $(-2)^4 + (-2)^3 + (-2)^2 + (-2)^1 + (-2)^0$  k)  $[-7 \cdot 2^2 - 2^2 \cdot (-5)] \cdot [-6^2 - 4 \cdot (-2)^3]$   
 b)  $[2 \cdot (-3)^2 - 2 \cdot 7] \cdot [(-5)^2 - 2 \cdot 3 - (-2)^4]$  l)  $[2 \cdot 3 - 3 \cdot 2^3 + 3 \cdot 2^2 \cdot 5 + 2^3] \div [13^2 - 12^2]$   
 c)  $[2 \cdot 3 - 2^2] \div [2 \cdot (3 - 4)]$  m)  $1 - 2 \cdot [(-2)^2 - 2 \cdot (2 \cdot (-3) - 5 \cdot (-2)^3)]$   
 d)  $[3^3 + 3^1 + 2^2 \cdot (-7)] \cdot [5 \cdot 2^3 - (-2^2) \cdot (-3^2)]$  n)  $10 - 3 \cdot [-2^2 - 2 \cdot ((-2)^3 - 15 \div (-3) \cdot 2)]$   
 e)  $[26 - 3 \cdot (-2) - 2^2 \cdot (-2)] \div [2^2 \cdot 5 - 60 : 4]$  o)  $(-2) \cdot (-3) - \{(-2)^3 + [2 \cdot (-1)^9 + 2 \cdot (1 \cdot 3 - 2^2 \cdot (-5))]\}$   
 f)  $2^2 \cdot (-5) \cdot [5 \cdot (-5) - 3 \cdot (-3)]$  p)  $2^3 - \{2 \cdot 3^2 \cdot (-2) - 2^2 \div 2 \cdot [-24 \div (-2)^3 - 12 \div 2 \cdot (-5) + 5 \cdot (-2)]\}$   
 g)  $(3 \cdot (-5) + (-2)^2 \cdot 3) \cdot [2^2 \cdot (-2) + (-2) \cdot (-3)]$  q)  $[(-2) \cdot (-15) \div 10 + 2 \cdot (-2)^3] \cdot [-2 \cdot (-3)]$   
 h)  $[30 \div 2 + 3^2] \div [10^1 - (-2) \cdot (-3)]$  r)  $2 \cdot \{14 \div 7 \cdot 3 + 15 \div 5 \div 3 \cdot 2 \cdot [6^2 \div (-2^2) - 2 \cdot (2 \cdot (-3) - 6 \cdot 2)]\}$   
 i)  $[2 \cdot 3 - 3 \cdot (-2)^2 + 2^2 \cdot 5] \cdot [2 \cdot 3 - 3 \cdot 5]$  s)  $[3 \cdot (-2) + (-2^2) \cdot 3] \div [(2^4 + 3^1) \cdot (-2) - (-2)^2 \cdot (-5)]$   
 j)  $[(-1) \cdot (-3) + (-2)^3 \div 2] \cdot [((-2)^2 - (-2) \cdot (-3))]$  t)  $\{(2^6 - 2^2) \div (-6) + (-21) \div (-7) \cdot [-2 \cdot (2 \cdot (-5) - 3 \cdot (-6))]\} \div (-2)$
- E47) a)  $(-3) \cdot (-2^2) + (-2) \cdot (-12) \cdot [(-3^3) \div (-3) - (+5) \cdot (+4)]$   
 b)  $(-3) \cdot (2^2 - 2^4) - (+6) \cdot (+3) \cdot [(-95) \div (-5) - (-7)^2 \div (-7)]$   
 c)  $[(+6) \cdot (+5) - (+3) \cdot (+9)] \cdot [(-5 \cdot 3^2) \div (-3^2) - 84 \div (-7)]$   
 d)  $[(-5) \cdot (-6) - (-3)^3 \div (-3)] \cdot [5 \cdot (-8) + 10 \cdot 3^2 \div (-30)]$   
 e)  $(+5) \cdot (+3) \cdot [(-2 \cdot 3^3) \div (-3) + 3 \cdot (-2)^5 \div (+12)] + (-7) \cdot (-4)$   
 f)  $(-13) \cdot (-3) + (+2) \cdot (+36) \div \{(-5) \cdot (-14) + (-2) \cdot [(1 - 3 \cdot 2^5) \div (-5) + (1 - 6^2) \div (-5)]\}$   
 g)  $(-2^5) \div (-4) - (-3) \cdot (-11) \cdot \{(-23) \cdot (-4) - (-2) \cdot (-4) \cdot [(-3^3) \div (-3) - (+5) \cdot (+4) - 60]\}$   
 h)  $(-7) \cdot (-13) - (-4) \cdot (2) \cdot \{[(-6) \cdot (+5) - (+3) \cdot (-12)] \cdot [(3^3 \cdot 5) \div (-3^2) - 2 \cdot 7^2 \div (-7)]\}$

## Propriedades da adição

Ao estudar os números naturais, você já aprendeu algumas propriedades das operações. Por exemplo, a *propriedade comutativa* da adição diz que  $a+b$  tem o mesmo valor e  $b+a$ . Eventualmente podem surgir em provas e concursos, questões teóricas que simplesmente

perguntam os nomes dessas propriedades. Entretanto, sua aplicação aparece em todo momento, em questões de cálculo. Suponha por exemplo que você vai fazer o cálculo:

$$49 + 297 + 3$$

Nem todos conseguem somar tão rapidamente os números 49 e 297. Entretanto, todos podem calcular rapidamente, “de cabeça”,  $297+3$ , que vale 300. Como a soma das duas últimas parcelas é 300, fica fácil agora somar este resultado com 49. O resultado final é 349. O que fizemos aqui foi usar a *propriedade associativa* da adição, que diz que:

$$(a+b)+c = a+(b+c)$$

Portanto é necessário conhecer as propriedades para usá-las, muitas vezes facilitando os cálculos, e também saber seus nomes para poder responder eventuais questões teóricas. As propriedades das operações, que você já aprendeu nas séries anteriores, para números naturais, também são válidas, e têm os mesmos nomes, no caso de números inteiros. Vamos então relembrar essas propriedades.

### Propriedade de fechamento da adição

Essa propriedade diz que quando adicionamos dois números inteiros, o resultado será sempre um número inteiro. Escrevendo isso em linguagem matemática:

$$x \in \mathbb{Z} \text{ e } y \in \mathbb{Z} \rightarrow (x+y) \in \mathbb{Z}$$

Lê-se: se  $x$  pertence ao conjunto dos números inteiros e  $y$  também pertence ao conjunto dos números inteiros, então o resultado da adição de  $x$  e  $y$  também pertence ao conjunto dos números inteiros.

Observe que nem todas as operações matemáticas possuem esta propriedade. Por exemplo, a divisão não a possui. Quando dividimos dois números inteiros, o resultado não necessariamente será um número inteiro.

A subtração de números naturais não possui propriedade de fechamento, mas a subtração de números inteiros possui. Dados dois números  $x$  e  $y$ , inteiros quaisquer (positivos ou negativos), o resultado  $x - y$  também será um número inteiro (que pode ser positivo ou negativo, ou mesmo 0). Podemos escrever essa propriedade na forma:

$$x \in \mathbb{Z} \text{ e } y \in \mathbb{Z} \rightarrow (x-y) \in \mathbb{Z}$$

Já a operação de subtração de números naturais não possui propriedade de fechamento, pois pode resultar em um número negativo, que não pertence aos naturais.

### Elemento neutro

O elemento neutro de uma operação é aquele que, quando operado com qualquer outro número, não altera o valor deste número.

A adição de números inteiros, assim como a dos números naturais, possui um elemento neutro, que é o zero, pois:

$$\text{para todo } x \in \mathbb{Z}, x+0 = 0+x = x$$

Já a subtração de números inteiros não possui elemento neutro. Apesar de  $x-0$  ser igual a  $x$ , o resultado de  $0-x$  não é igual a  $x$ . O elemento neutro, para que exista, precisa ser neutro nas duas ordens (operando à esquerda e à direita).

### Comutatividade

Uma operação é comutativa quando podemos inverter a ordem dos operandos sem alterar o resultado. A adição de números inteiros é comutativa, pois:

$$x \in \mathbb{Z} \text{ e } y \in \mathbb{Z} \rightarrow x+y = y+x$$

### Associatividade

Já vimos como exemplo, a associatividade da operação de adição, que vale tanto nos números naturais quanto nos números inteiros, ou seja:

$$a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z} \text{ e } c \in \mathbb{Z} \rightarrow a+(b+c) = (a+b)+c$$

Por isso, quando temos uma expressão como:

$$-5-7+6-9+4-3$$

não precisamos necessariamente fazer os cálculos na ordem em que aparecem. Podemos inicialmente considerar a expressão como uma soma de números inteiros:

$$(-5)+(-7)+(+6)+(-9)+(+4)+(-3)$$

Note que os sinais que estão na frente dos números da expressão original não são os sinais das operações consideradas. A operação envolvida é uma adição de vários números, e os sinais de adição estão implícitos. Os sinais que aparecem são os sinais (positivos e negativos) que acompanham cada número. Por isso explicitamos os sinais “+” das adições envolvidas.

Graças à *comutatividade*, podemos alterar a ordem das parcelas, juntando todos os valores negativos e juntando todos os valores positivos.

$$(-5)+(-7)+(-9)+(-3)+(+4)+(+6)$$

Agora, graças à *associatividade*, podemos “juntar os positivos” e “juntar os negativos” da forma que acharmos mais conveniente. Por exemplo, como  $5+7=12$  e  $9+3=23$  e  $4+6=10$ , podemos escrever:

$$(-12)+(-12)+(+10)$$

Agora podemos fazer  $12+12=24$ , e fazer  $-24+10 = -14$ , ou fazer  $-12+10 = -2$ , e depois  $-12 -2 = -14$ . A associatividade nos permite operar em qualquer ordem, desde que os números façam parte de uma sequência de adições “vizinhas”.

### Propriedades da multiplicação

A multiplicação de números inteiros, assim como ocorre com a multiplicação de números naturais, têm propriedades muito parecidas com as da adição.



**Fechamento**

Quando multiplicamos dois números inteiros, o resultado será sempre um número inteiro.

$$x \in \mathbb{Z} \text{ e } y \in \mathbb{Z} \rightarrow x.y \in \mathbb{Z}$$

**Elemento neutro**

A multiplicação de números inteiros possui um elemento neutro, que é o número 1, já que:

$$\text{para todo } x \in \mathbb{Z}, x.1 = 1.x = x$$

**Comutatividade**

A ordem dos fatores não altera o produto. Isso é o que diz a propriedade comutativa da multiplicação de inteiros:

$$x \in \mathbb{Z} \text{ e } y \in \mathbb{Z} \rightarrow x.y = y.x$$

**Associatividade**

Sabemos que em uma sequência de multiplicações, devemos realizá-las na ordem em que aparecem. Por exemplo, para calcular  $x.y.z$ , calculamos primeiro  $x.y$  e a seguir multiplicamos o resultado por  $z$ . A propriedade associativa da multiplicação diz que podemos opcionalmente combinar o segundo com o terceiro fatores, para então combinar o resultado com o primeiro, ou seja:

$$(x.y).z = x.(y.z)$$

Graças a esta propriedade, junto com a *comutatividade* já ensinada ( $x.y = y.x$ ), os cálculos de multiplicações ficam bastante facilitados.

**Distributividade**

A distributividade é uma propriedade que envolve duas operações. Por exemplo, dizemos que entre os números inteiros, a multiplicação é distributiva em relação à adição. Vejamos o que isto significa através de uma expressão. Considere o cálculo:

$$10.(5+3)$$

Este cálculo pode ser feito de duas formas:

- a) Calcular  $5+3=8$ , e a seguir  $10.8 = 80$
- b) Distribuir o fator 10 entre as duas parcelas da adição:  $10.5 + 10.3 = 50 + 30 = 80$

Quando um fator está multiplicando o resultado de uma adição, podemos “distribuir” este fator pelas parcelas da adição, ficando com uma soma de multiplicações menores. Em linguagem matemática:

$$x.(a + b) = x.a + x.b$$

Trata-se de uma operação muito utilizada na álgebra. Quando a expressão tem somente números, é mais fácil realizar primeiro a expressão que está entre parênteses, para fazer a multiplicação no final. Entretanto na álgebra, é comum operar com letras ao invés de números (as letras nada mais são que representações de números). Nesses casos é mais recomendado

usar a distributividade. Este conceito ficará claro nos capítulos seguintes, quando começarmos a usar expressões com letras e números.

## Raiz quadrada e raiz cúbica de números naturais

Dois casos de potências muito comuns são a segunda e a terceira potência, ou seja, os quadrados e cubos.

Exemplos:

$$7^2 = 49$$

$$2^3 = 8$$

Elevar à segunda potência é também chamado de “elevar ao quadrado”, e elevar à terceira potência também é chamado de “elevar ao cubo”. É até mesmo conveniente, para efeito de resolução de problemas, memorizar alguns quadrados e cubos.

n	n <sup>2</sup>	n <sup>3</sup>
1	1	1
2	4	8
3	9	27
4	16	64
5	25	125
6	36	216
7	49	343
8	64	512
9	81	729
10	100	1000

n	n <sup>2</sup>	n <sup>3</sup>
11	121	1331
12	144	1728
13	169	2197
14	196	2744
15	225	3375
16	256	4096
17	289	4913
18	324	5832
19	361	6859
20	400	8000

n	n <sup>2</sup>	n <sup>3</sup>
21	441	9261
22	484	10.648
23	529	12.167
24	576	13.824
25	625	15.625
26	676	17.576
27	729	19.683
28	784	21.952
29	841	24.389
30	900	27.000

Os números dessa tabela são chamados de *quadrados perfeitos* e *cubos perfeitos*, já que são os quadrados ou os cubos de números naturais.

A tabela mostra algumas coisas interessantes. A primeira delas que chama atenção é que os números ficam logo muito grandes quando são elevados ao cubo. Ainda assim aparecem alguns valores fáceis de lembrar, como  $10^3 = 1000$ ,  $20^3 = 8000$  e  $30^3 = 27000$ .

Recomendamos que você memorize os quadrados de números até 20, e os cubos de números até 10. Podemos considerar que esses são “números famosos” que podem aparecer com frequência em questões de provas.

A partir dos quadrados e cubos, vêm as noções de raiz quadrada e raiz cúbica. Por exemplo, a raiz quadrada de 144 é 12, já que  $12^2 = 144$ . O símbolo da raiz quadrada é chamado radical ( $\sqrt{\quad}$ ). Você encontrará este símbolo em todas as calculadoras eletrônicas, até nas mais simples. Vejamos as raízes quadradas de alguns números de alguns quadrados perfeitos, indicados na nossa tabela.

$$\sqrt{400} = 20$$

$$\sqrt{289} = 17$$

$$\sqrt{225} = 15$$

$$\sqrt{64} = 8$$

Da mesma forma como existem os  *cubos perfeitos*, existe a  *raiz cúbica*. É fácil calcular a raiz cúbica de números que sejam cubos perfeitos. O símbolo da raiz cúbica é um radical com índice 3.

$$\sqrt[3]{27} = 3$$

$$\sqrt[3]{64} = 4$$

$$\sqrt[3]{512} = 8$$

$$\sqrt[3]{1000} = 10$$

Nos concursos para ingresso no ensino médio (Colégio Naval, EPCAr, Colégio Militar, etc.) podem surgir problemas envolvendo raízes de quadrados e cubos perfeitos, quanto aqueles que exigem o cálculo de radicais.

### Exercícios

E48) Calcule os quadrados e cubos abaixo:

a)  $20^2$

f)  $30^2$

k)  $(-5)^3$

p)  $(-16)^2$

b)  $13^2$

g)  $14^3$

l)  $(-14)^2$

q)  $(-15)^2$

c)  $8^2$

h)  $12^3$

m)  $(-13)^2$

r)  $(-9)^3$

d)  $100^2$

i)  $8^3$

n)  $(-8)^3$

s)  $(18)^2$

e)  $80^2$

j)  $25^3$

o)  $(-5)^3$

t)  $(-30)^3$

## Raiz quadrada e raiz cúbica de números inteiros

Alguns itens importantes devem ser aprendidos sobre a raiz quadrada, no que diz respeito aos sinais:

### a) Não existe raiz quadrada de números negativo

Todo número positivo, ao ser elevado ao quadrado, dá resultado positivo. Todo número negativo, ao ser elevado ao quadrado, também dá resultado positivo. Exemplos:

$$(-7)^2 = 49$$

$$(-9)^2 = 81$$

Sendo assim, nunca um número poderá ser elevado ao quadrado e dar resultado negativo. Esta regra é válida para números naturais, inteiros, racionais, irracionais e reais. Por isso, números negativos não têm raiz quadrada.

$$\sqrt{-49} \text{ não existe}$$

$$\sqrt{-81} \text{ não existe}$$

$$\sqrt{-144} \text{ não existe}$$

Raízes quadradas de números negativos só existem no conjunto dos *números imaginários*, ou *números complexos*, estudados no ensino médio.

### b) A expressão “raiz quadrada” e o símbolo “ $\sqrt{\phantom{x}}$ ” têm significados ligeiramente diferentes.

Para números positivos, ambos têm o mesmo significado. Quando lidamos com números negativos, os significados são ligeiramente diferentes.

A “raiz quadrada de N” é um número, positivo ou negativo, que elevado ao quadrado, dá como resultado, N. Por exemplo,  $(-3)$  é uma raiz quadrada de 9, pois se for elevado ao

quadrado, dará como resultado, 9. O número 3 também é uma raiz quadrada da 9, pois se for elevado ao quadrado, também dará como resultado, 9. Dizemos então que 9 tem duas raízes quadradas, uma positiva e uma negativa. É correto então usar expressões como “uma raiz quadrada de 9”, “a raiz quadrada positiva de 9”, “a raiz quadrada negativa de 9”. É diferente quando usamos o símbolo  $\sqrt{9}$ , que indica “a raiz quadrada positiva de 9”. Esta definição para a “raiz quadrada” é uma convenção, adotada por muitos autores. Existem muitos autores que seguem outra definição, de que a expressão “raiz quadrada” indica apenas a positiva. Tanto uma definição como a outra estão corretas, desde que seja especificada qual convenção está sendo usada. Da mesma forma, ambos os grupos de autores e matemáticos convencionam que o símbolo “ $\sqrt{\phantom{x}}$ ” é usado para indicar a raiz quadrada positiva.

Neste livro convencionamos que o símbolo “ $\sqrt{\phantom{x}}$ ” indica a raiz quadrada positiva, e que a expressão “raiz quadrada” refere-se tanto à positiva quanto a negativa, sendo portanto especificado no texto, à qual raiz estamos nos referindo.

#### c) A raiz cúbica de um número positivo é também positivo.

Um número negativo fica negativo quando é elevado ao cubo, assim como um positivo fica positivo quando elevado ao cubo. Sendo assim, o sinal do cubo de um número acompanha o sinal do número original.

#### d) A raiz cúbica de um número negativo é também negativa

Números negativos também têm raiz cúbica. Veja o exemplo:

$$5^3 = 125, \text{ então a raiz cúbica de } 125 \text{ é } 5.$$

$$(-5)^3 = -125, \text{ então a raiz cúbica de } -125 \text{ é } -5.$$

Quando um número é cubo perfeito, porém negativo, sua raiz cúbica é também negativa, e tem o mesmo valor da raiz cúbica do seu simétrico.

Exemplo:

$$\sqrt[3]{-64} = -4, \text{ já que } (-4) \cdot (-4) \cdot (-4) = -64$$

E49) Calcule as raízes abaixo:

a)  $\sqrt{16} =$

f)  $\sqrt{121} =$

k)  $\sqrt[3]{8000} =$

p)  $\sqrt[3]{27000} =$

b)  $\sqrt{25} =$

g)  $\sqrt{144} =$

l)  $\sqrt[3]{27} =$

q)  $\sqrt[3]{216} =$

c)  $\sqrt{36} =$

h)  $\sqrt{196} =$

m)  $\sqrt[3]{64} =$

r)  $\sqrt[3]{8} =$

d)  $\sqrt{49} =$

i)  $\sqrt{225} =$

n)  $\sqrt[3]{1000} =$

s)  $\sqrt[3]{1} =$

e)  $\sqrt{81} =$

j)  $\sqrt{1024} =$

o)  $\sqrt[3]{125} =$

t)  $\sqrt[3]{0} =$

E50) Calcule as raízes abaixo:

a)  $\sqrt[3]{-8000} =$

f)  $\sqrt[3]{-27000} =$

b)  $\sqrt[3]{-27} =$

g)  $\sqrt[3]{-216} =$

c)  $\sqrt[3]{-64} =$

h)  $\sqrt[3]{-8} =$

d)  $\sqrt[3]{-1000} =$

i)  $\sqrt[3]{-1} =$

e)  $\sqrt[3]{-125} =$

j)  $\sqrt[3]{0} =$

### Raízes de ordem superior

A raiz quadrada e a raiz cúbica não são as únicas existentes. Da mesma forma como podemos elevar um número a qualquer potência inteira, podemos também fazer a operação inversa, que é extrair sua raiz. Por exemplo:

$$2^5 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 32$$

Sendo assim:

$$\sqrt[5]{32} = 2$$

Da mesma forma, como  $(-2)^5 = (-2) \times (-2) \times (-2) \times (-2) \times (-2) = -32$ , segue-se que:

$$\sqrt[5]{-32} = -2$$

Para raízes indicadas algebricamente, com o símbolo “ $\sqrt{\phantom{x}}$ ”, valem as seguintes regras:

1) Raízes de números positivos são sempre positivos. Isto vale para raiz quadrada, raiz cúbica, raiz quarta, raiz quinta, etc, ou seja, para qualquer índice da raiz.

2) Raízes de números negativos, com índice ímpar, são sempre negativas. Por exemplo,  $\sqrt[5]{-32} = -2$ .

3) Raízes de índice par só existem quando o número dentro do radical é positivo. Por exemplo,  $\sqrt[4]{16} = 2$ , mas  $\sqrt[4]{-16}$  não existe.

Quando é usada a forma por extenso, como “raiz quadrada”, “raiz quarta”, “raiz sexta”, valem as mesmas regras, com a diferença de que na regra 1 são válidos o resultado positivo e o negativo.

## Exercícios

E51) Calcule as expressões abaixo, quando for possível:

- |                      |                       |
|----------------------|-----------------------|
| a) $\sqrt[4]{81} =$  | f) $\sqrt[6]{64} =$   |
| b) $\sqrt[4]{-16} =$ | g) $\sqrt[4]{256} =$  |
| c) $\sqrt[5]{-32} =$ | h) $\sqrt[4]{-256} =$ |
| d) $\sqrt[5]{32} =$  | i) $\sqrt[9]{-1} =$   |
| e) $\sqrt[6]{-64} =$ | j) $\sqrt[30]{0} =$   |

## Valor numérico

Este assunto será muito usado no restante deste livro, a partir do capítulo 3, mas já iremos abordá-lo agora de forma simples. Uma das principais ferramentas da álgebra é operar com as chamadas *expressões algébricas*, que envolvem letras e números. As letras nada mais são que símbolos que representam números. Essas expressões possuem adições, subtrações, multiplicações, divisões, ou qualquer outra operação matemática, envolvendo os números e as letras. Considere por exemplo uma expressão simples como:

$$P(x) = x^3 + 2x^2 + 4x + 5$$

Esse tipo de expressão algébrica é chamada de *polinômio*. A letra  $x$  é chamada de *variável*, e representa um número qualquer. Uma expressão algébrica pode ter várias variáveis. Vejamos outros exemplos de expressões algébricas:

$$a^3b^2 + 4a^2b^3 + 3ab^4$$

$$(x+1)(y+2)(z+3)$$

$$x^2+3x+2$$

Entre as inúmeras operações envolvendo expressões algébricas, uma delas que é simples porém importante, é o cálculo do *valor numérico*. As letras representam números quaisquer, porém no cálculo do valor numérico, queremos calcular o valor da expressão para valores particulares das suas variáveis.

### Exemplo:

A velocidade de um veículo, medida em m/s (metros por segundo) é dada por  $v = 2t^2 + 3t + 5$ , onde  $t$  representa o tempo, medido em segundos. Calcule o valor da velocidade deste veículo no instante  $t=10$  segundos.

### Solução:

A expressão algébrica de  $v$  nada mais é que uma fórmula que dá a velocidade do veículo para qualquer instante  $t$  (ou seja, a velocidade varia de acordo com o tempo). O problema quer saber a velocidade no instante  $t=10$ . Basta então calcular o valor numérico da expressão para  $t=10$ . Ficamos então com:

$$v = 2.10^2 + 3.10 + 5 = 200 + 30 + 5 = 235 \text{ m/s}$$

O cálculo do valor numérico de qualquer expressão consiste em substituir as letras dadas pelos respectivos valores numéricos.

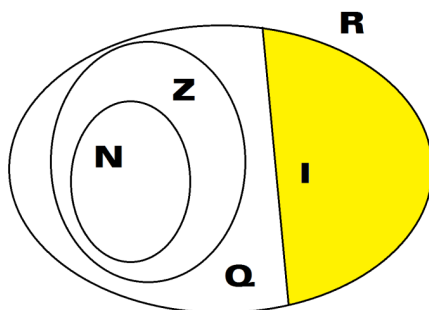
## Exercícios

E52) Calcule o valor numérico das seguintes expressões:

- |  |  |   |
|--|--|---|
| a) $x^2-3x+8$ , para $x=2$             | f) $x^2+y^2+z^2-2xyz$ para $x=1$ , $y=z=2$   | k) $2^x + 2^y$ , para $x=1$ e $y=0$       |
| b) $x^3+3x^2+5x+7$ , para $x=-2$       | g) $5a+3b+4ab$ , para $a=1$ e $b=-1$         | l) $(-3)^x + (-4)^y$ , para $x=3$ e $y=2$ |
| c) $a^2+2ab+b^2$ , para $a=1$ e $b=-2$ | h) $(x+2)[(y+3).(x^2-y)]$ para $x=1$ , $y=2$ | m) $(x+y)^{x-y}$ , para $x=4$ e $y=2$     |
| d) $(a+1)(b-2)(c+3)$ para $a=b=c=5$    | i) $x^y + y^x$ , para $x=2$ e $y=3$          | n) $3a^2-b^3$ , para $a=2$ e $b=-3$       |
| e) $(2x+1)/(x^2-8)$ para $x=3$         | j) $\sqrt{x^2 + y^2}$ , para $x=3$ e $y=4$   | o) $ a^2 - b^2 $ para $a=3$ e $b=4$       |

## Racional ou irracional?

Existem problemas que recaem em identificar se determinada expressão numérica é um valor inteiro, racional ou irracional.



A relação entre os diversos conjuntos numéricos envolvidos já foi apresentada no início deste capítulo. O conjunto mais estudado neste livro é o dos REAIS. Já o conjunto apresentado

nesse capítulo é o dos INTEIROS. A figura mostra mais uma vez a relação entre esses conjuntos.

Exemplos de números naturais (N): 3, 5, 10, 18, 234, 2001, 16.777.216, ...

Exemplos de números inteiros (Z): -12.000, -1024, -511, -121, -5, 28, 34, 77, 1.000.000

Números racionais são formados por frações irredutíveis, positivas ou negativas.

Exemplos de números racionais:  $-\frac{1}{5}$ ,  $\frac{47}{11}$ ,  $\frac{13}{100}$ ,  $-\frac{2}{5}$ ,  $\frac{22}{17}$ ,  $-\frac{99}{64}$ , ...

Todos os números inteiros também são racionais.

Os números irracionais são aqueles que não podem ser expressos na forma de fração.

Exemplos de números irracionais:  $\pi$ ,  $\sqrt{2}$ ,  $\sqrt{5}$ ,  $\sqrt[3]{7}$ ,  $\sqrt{2+\pi}$ ,  $\sqrt{5-\sqrt{2}}$ , ...

Neste capítulo mostramos que as operações de adição e multiplicação tanto com números naturais (N) quanto os inteiros (Z) possuem propriedades de fechamento:

Se a e b são naturais, então  $a + b$  é natural, e  $a.b$  é natural

Se a e b são inteiros, então  $a + b$  é inteiro, e  $a.b$  é inteiro

Veremos no capítulo seguinte que os números racionais e os números reais também possuem essas propriedades:

Se a e b são racionais, então  $a + b$  é racional, e  $a.b$  é racional

Se a e b são reais, então  $a + b$  é real, e  $a.b$  é real

Já os números irracionais não possuem essas propriedades. A própria figura que representa a relação entre esses conjuntos mostra que os irracionais têm uma estrutura diferente.

A figura mostra que  $N \subset Z \subset Q \subset R$ . Entretanto, o conjunto dos irracionais (I) não se encaixa nessa estrutura. Apenas podemos dizer que  $I \subset R$ , entretanto I não está contido, e não contém os conjuntos N, Z e Q. Nenhum elemento de I está contido em N, Z e Q.

Se a e b são irracionais, o valor  $a + b$  pode ou não ser um irracional.

Por exemplo:

a) Considere  $a = \pi$  e  $b = \sqrt{2}$ , que são ambos irracionais. A soma  $\pi + \sqrt{2}$  é também irracional

b) Considere  $a = 3 + \pi$  e  $b = 5 - \pi$ , ambos irracionais. Sua soma é 8, que é racional.

Analogamente, a diferença entre dos irracionais pode resultar em um número racional, ou em um irracional. Por exemplo,  $3 + \sqrt{5}$  e  $10 + \sqrt{5}$ , ao serem subtraídos, resultam em um racional, mas  $\pi$  e  $\sqrt[3]{7}$ , se subtraídos, resultam em um irracional.

O mesmo ocorre com a multiplicação e a divisão de números irracionais. O resultado pode ser racional ou irracional.

**Exemplos:**

$$(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)=2, \text{ que é racional}$$

$$\pi \times \sqrt{5} = \pi\sqrt{5}, \text{ que é irracional}$$

$$(2\sqrt{2}-2) \div (\sqrt{2}-1)=2, \text{ que é racional}$$

$$\sqrt{5} \div \sqrt{2} = \sqrt{10}/2, \text{ que é irracional}$$

Os cálculos dessas expressões serão apresentados ao longo do livro. Por hora, é importante lembrar que:

*Ao somar, subtrair, multiplicar ou dividir dois números irracionais, o resultado poderá ser um número racional ou um número irracional, não existe uma regra fixa. É preciso realizar o cálculo para identificar se o resultado será racional ou irracional.*

Por outro lado, quando fazemos as mesmas operações com um racional e um irracional, o resultado será sempre um irracional, com uma exceção:

$$0.\text{irracional} = 0, \text{ que é racional}$$

$$\text{Para qualquer outro valor de número racional, temos } \text{racional}.\text{irracional} = \text{irracional}$$

**Exemplos:**

$$\pi + \frac{1}{2}: \text{ Irracional}$$

$$2 - \sqrt{3}: \text{ Irracional}$$

$$9\pi: \text{ Irracional}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{7}: \text{ Irracional}$$

**Exemplo: CMM 2009**

Quaisquer que sejam o racional  $x$  e o irracional  $y$ , pode-se dizer que:

(A)  $xy$  é irracional

(B)  $yy$  é irracional

(C)  $x + y$  é racional

(D)  $x - y + \sqrt{2}$  é irracional

(E)  $x + 2y$  é irracional

Solução:

(A) racional . irracional = irracional, exceto para  $0.\text{irracional} = 0$  (F)

(B) irracional . irracional : o resultado pode ser racional ou irracional (F)

(C) racional + irracional = irracional (F)

(D) racional + irracional + irracional: pode ser racional ou irracional (F)

(E) racional + irracional.2 = racional + irracional = irracional (V)

Resposta: (E)



**Exercícios**

E53) Indique se as seguintes operações resultam em valor racional ou irracional

OBS: Lembre que  $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a \cdot b}$ 

a)  $\sqrt{2} + \sqrt[3]{5}$

f)  $\pi^2$

k)  $\frac{\sqrt{17}}{\sqrt{17}}$

p)  $\frac{4 - 2\sqrt{2}}{2 - \sqrt{2}}$

b)  $4 + \sqrt{3}$

g)  $\sqrt{\pi} \cdot \sqrt[3]{11}$

l)  $\frac{\sqrt{3} + \pi}{\sqrt{2} + \pi}$

q)  $(435^0 - 1) \cdot \sqrt{7}$

c)  $(5 + \sqrt{2}) + (3 - \sqrt{2})$

h)  $\sqrt{5} \cdot \sqrt{5}$

m)  $\frac{\pi}{\sqrt{2}}$

r)  $4, \overline{13} \div 1, \overline{4}$

d)  $(5 + \pi) - (2 + \pi)$

i)  $\sqrt{5} \cdot \sqrt{3}$

n)  $\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{2}}$

s)  $\pi^3 + \sqrt[3]{\pi}$

e)  $6 \cdot \sqrt{3}$

j)  $\frac{\pi}{10}$

o)  $\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{6}$

t)  $\sqrt{3} \cdot \sqrt{27}$

**Exercícios de revisão**

E54) Efetue

a)  $8 - (3 + 2)$

f)  $7 - (7 - 3)$

k)  $(4 - 3) - (5 - 12)$

b)  $9 - (6 + 1)$

g)  $7 - (5 - 2)$

i)  $(17 - 9) + (6 - 11)$

c)  $10 - (9 - 5)$

h)  $9 - (4 - 3)$

m)  $(10 - 15) + (9 - 12)$

d)  $9 - (8 - 6)$

j)  $8 - (3 - 2)$

n)  $(14 - 9) - (19 - 13)$

e)  $3 + (8 - 2)$

j)  $9 - (4 - 5)$

o)  $(17 - 26) - (9 - 18)$

E55) Simplifique

a)  $-(-3)$

f)  $-|-13|$

k)  $-(-7)$

b)  $-(-5)$

g)  $|12|$

i)  $-|10|$

c)  $|8|$

h)  $||-5| - |-8||$

m)  $-(5 - |-5|)$

d)  $|-8|$

i)  $|a| - |-a|$

n)  $| -(-3) |$

e)  $|-5|$

j)  $-|-4|$

o)  $-(-15)$

E56) Calcule

a)  $8 - 15$

f)  $-9 + 3$

k)  $-7 - 18$

b)  $-13 + 7$

g)  $-15 + 20$

i)  $(-3) - (-8)$

c)  $-15 + 9$

h)  $-13 + 1$

m)  $45 - 61$

d)  $-12 - 8$

i)  $20 - 17$

n)  $-23 + 17$

e)  $9 + 3$

j)  $20 + (-17)$

o)  $-20 - 30$

E57) Calcule

a)  $-2 - (-6 - (-5))$

f)  $-4 - (9 - (-8))$

k)  $(8 - 5) - (-7 - 2)$

b)  $1 - (-1 - 6)$

g)  $-5 - (3 - (-11))$

i)  $(6 - (-9)) - (4 - (-3))$

c)  $4 - (-8 - 15)$

h)  $-1 - (11 - (-7))$

m)  $-8 - (-2 - (-7))$

d)  $8 - (14 - (-6))$

j)  $(-2 - (-4)) - (5 - (-8))$

n)  $(5 - 7) - (-9 - 3)$

e)  $-2 - (9 - (-5))$

j)  $14 - (16 - (-3))$

o)  $(-3 - (-5)) - (-8 - (-4))$

E58) Calcule

a)  $(-9) + (-29) =$

f)  $-45 - (-10) =$

k)  $98 - 64 + 28 - 32 + 26 - 12 =$

b)  $(+50) + (-32) =$

g)  $98 - (-64) =$

i)  $-25 + 33 - 22 + 18 - 13 + 19 =$

c)  $(-63) + (+32) =$

h)  $-82 - (-10) =$

m)  $8 - 6 + 8 - 3 + 6 - 16 =$

d)  $70 + (-53) =$

i)  $-5 + 3 - 2 + 8 - 3 + 9 =$

n)  $-21 + 46 - 13 + 21 =$

e)  $(-34) - (+18) =$

j)  $-47 + 26 + 21 - 11 =$

o)  $15 - 5 + 3 - 10 + 12 =$

## E59) Calcule

- |   |                         |                                  |
|---|-------------------------|----------------------------------|
| a) $-5 + (-5 + 3) - (-6 - 8)$                     | f) $(+6) \cdot (+12) =$ | k) $(-30) \cdot (-4) =$          |
| b) $+4 + (+2 - 7) + 5 - (+2 - 3)$                 | g) $(-6) \cdot (-22) =$ | i) $(-490) \div (-7) =$          |
| c) $-3 + 12 + (+8 + 4 - 6) - (+6 + 8 - 5)$        | h) $(-95) \div (-5) =$  | m) $-2.4 \cdot (-3) \cdot 5 =$   |
| d) $+4 - 1 - 8 + (-2 + 4 + 3) - 7 + (-4 + 5 - 6)$ | i) $(+60) \div (+3) =$  | n) $7.3 \cdot (-2) \cdot (-3) =$ |
| e) $+2 - 5 + 4 + (-4 - 7 - 1) + 4 - (-2 + 5 + 2)$ | j) $(-91) \div (-7) =$  | o) $-5 \cdot (-5) \cdot (-2) =$  |

## E60) Calcule

- |   |               |                    |
|---|---------------|--------------------|
| a) $5 \cdot (-4) \cdot (-3) \div (-15) =$ | f) $(-6)^3 =$ | k) $1234567^0 =$   |
| b) $15 \cdot (-7) \cdot 3 \div (-9) =$    | g) $(-2)^5 =$ | i) $(-512)^1 =$    |
| c) $-7 \cdot (-4) \div 2 \cdot (-4) =$    | h) $18^2 =$   | m) $(-1)^{3001} =$ |
| d) $7.6 \div (-2) \div (-3) =$            | i) $(-3)^3 =$ | n) $0^{27} =$      |
| e) $-14 \div 2.11 =$                      | j) $(-4)^3 =$ | o) $230^0 =$       |

## E61) Calcule e simplifique, deixe as potências indicadas

- |                                 |                               |  |
|---------------------------------|-------------------------------|--|
| a) $4^5 \cdot 6^5$              | f) $120^{10} \div 24^{10}$    | k) $10^8 \div 10^3$                              |
| b) $(-2)^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2$ | g) $(-30)^4 \div (-6)^4$      | i) $2^7 \cdot 5^7$                               |
| c) $a^{50} \div a^{20}$         | h) $24^2 \div (-3)^2$         | m) $-2^{51} \cdot 2^{10} \cdot 2^9 \cdot (-2)^5$ |
| d) $6^9 \div (-6)^3$            | i) $[2 \cdot (-3) \cdot 5]^2$ | n) $10^3 \cdot 10 \cdot 10^9$                    |
| e) $1000^3 \div 1000^2$         | j) $100^8 \div 100^3$         | o) $5^3 \cdot 5^5 \cdot 5^2 \cdot 5^4$           |

## E62) Calcule

- |  |  |  |
|--|--|--|
| a) $+8 - 4 + (-7 + 10 + 7) - 8 + (-6 - 4)$ | f) $(-28) \div (-4) - (-28) \div (-2)$ | k) $[2.3 - 3.5] + [5.3 - 2.7]$                                   |
| b) $+6 - 9 + (-8 - 3 - 5) + 8 - (-6 + 9)$  | g) $(-45) \div (-9) - 84 \div (-7)$    | i) $[2.3 - 4] \div [2 \cdot (3 - 4)]$                            |
| c) $9.6 \div (-3) \div (-2) =$             | h) $(-54) \div (-3) - 96 \div (+12)$   | m) $4 \cdot (-5) \cdot [5 \cdot (-5) - 3 \cdot (-3)]$            |
| d) $15 \cdot (-5) \cdot (-2) \div 10 =$    | i) $(+6) \cdot (+9) + (+30) \div (+3)$ | n) $[(-1) \cdot (-3) + (-8) \div 2] \cdot [4 - (-2) \cdot (-3)]$ |
| e) $(+6) \cdot (+5) + (+3) \cdot (+9)$     | j) $(-5) \cdot (-6) - (-27) \div (-3)$ | o) $[-28 - 4 \cdot (-5)] \cdot [-36 - 4 \cdot (-8)]$             |

## E63)

- |              |                 |              |
|--------------|-----------------|--------------|
| a) $23^0$    | f) $-12^1$      | k) $0^{720}$ |
| b) $-15^0$   | g) $1^{21}$     | i) $1^{720}$ |
| c) $(-12)^0$ | h) $1^{-15}$    | m) $720^1$   |
| d) $13^1$    | i) $(-1)^{13}$  | n) $720^0$   |
| e) $(-12)^1$ | j) $(-1)^{-13}$ | o) $1^0$     |

## E64) Calcule

- |                       |                         |  |
|-----------------------|-------------------------|--|
| a) $13^2$             | f) $\sqrt[3]{1} =$      | k) $x^2 - 3x + 8$ , para $x=2$                   |
| b) $(-13)^2$          | g) $\sqrt[3]{-27000} =$ | i) $5a + 3b + 4ab$ , para $a=1$ e $b=-1$         |
| c) $(-30)^3$          | h) $\sqrt[3]{-64} =$    | m) $x^y + y^x$ , para $x=2$ e $y=3$              |
| d) $\sqrt[3]{8000} =$ | i) $\sqrt[3]{256} =$    | n) $ a^2 - b^2 $ para $a=3$ e $b=4$              |
| e) $\sqrt{1024} =$    | j) $\sqrt[3]{-32} =$    | o) $x^2 + y^2 + z^2 - 2xyz$ para $x=1$ , $y=z=2$ |

## E65) Resolva as expressões:

- |   |  |  |
|---|--|--|
| a) $ -23 - 46  + 15 =$                  | f) $ (2^2 + 2^3 + 2^4) - (3^2 + 3^3 + 3^4)  =$   | k) $(1 + 2 + 3 + 4 + \dots + 100)^2 -  1 + 2 + 3 + 4 + \dots + 100 ^2$     |
| b) $-12 -  15 + 12  =$                  | g) $ 1 - 2^5  - [(-5)^0 - (-5)^3] =$             | i) $ 2^0 - 2^1 - 2^2 - 2^3  +  (-2)^0 + (-2)^1 + (-2)^2 + (-2)^3 $         |
| c) $51 -  6^2 - (-8)^2  =$              | h) $ 1 - 2^2  \cdot  1 - 3^2  \cdot  1 - 4^2  =$ | m) $ (-1) \cdot (-2) \cdot (-3) \cdot (-4) \cdot (-5)  \div  11^0 - 11^2 $ |
| d) $2^0 - 2^4 - 5^2 -  2^2 - 5^2  =$    | i) $ 6^0 - 6^2  \cdot  2.5^2 - 7^2  =$           | n) $ (-5)^3  +  (-5)^3  +  (-3)^3  +  (-3)^3  =$                           |
| e) $(-3)^3 -  2^2 - 2^4  + 6^2 - 2^5 =$ | j) $ a - b  -  b - a  =$                         | o) $\sqrt{x^2} -  x  =$  |

E66) Quanto vale a soma dos cubos de dois números inteiros simétricos?

E67) Qual é a temperatura mais fria,  $-25^{\circ}\text{C}$  ou  $-35^{\circ}\text{C}$ ?

E68) Quando elevamos um número inteiro ao quadrado, e extraímos a raiz quadrada do resultado, qual é o valor obtido, em comparação com o número original?

E69) O cubo de um número inteiro pode ser menor que este número?

E70) Um número inteiro não se altera quando é elevado ao cubo. Qual é este número?

E71) O que é o módulo ou valor absoluto de um número inteiro? Qual é o seu símbolo?

E72) Um número inteiro não se altera quando é elevado ao quadrado. Qual é este número?

E73) Para quaisquer números  $a$  e  $b$ ,  $|a+b|$  é o mesmo que  $|a| + |b|$ ?

E74) O que é o simétrico ou oposto de um número inteiro?

E75) O simétrico de um número pode ser positivo?

E76) Qual é o número inteiro cujo simétrico é ele próprio?

E77) Quais são os 5 maiores números inteiros negativos?

E78) O produto de dois números inteiros é um número negativo, e a soma desses dois números também é um valor negativo. Então podemos dizer certamente que:

- (A) Os dois números são negativos
- (B) Um número é positivo e outro é negativo, porém o negativo é o maior
- (C) Os dois números são simétricos
- (D) Os números têm sinais contrários, porém o negativo é o de maior módulo
- (E) Impossível

E79) Marque V ou F nas afirmativas abaixo

- ( ) A subtração é a operação inversa da soma
- ( ) A adição e a multiplicação são operações associativas
- ( ) A adição e a subtração são operações comutativas
- ( ) O elemento neutro da divisão é o número 1
- ( ) Nos números inteiros, a multiplicação é distributiva em relação à adição
- ( ) A diferença entre dois números negativos será sempre um número negativo
- ( ) A soma de um número inteiro com o seu módulo nunca será zero
- ( ) O triplo de um número inteiro sempre será menor que o seu dobro
- ( ) Para quaisquer números  $a$  e  $b$ ,  $|a| + |b|$  nunca será menor que  $|a+b|$
- ( ) O conjunto dos números inteiros é infinito

E80) Marque V ou F nas afirmativas abaixo

- ( )  $\mathbb{Z}_+ = \mathbb{N}$  (o conjunto dos inteiros não negativos é igual ao conjunto dos naturais)
- ( ) Na reta numérica, quanto mais à direita, maiores são os números
- ( )  $\mathbb{Z}_-$  é o conjunto dos inteiros negativos
- ( ) Entre 0 e 1 existem infinitos números racionais
- ( ) Os números  $\pi$  e  $\sqrt{5}$  são irracionais

- ( ) O número  $\sqrt{25}$  é irracional  
 ( ) Números irracionais possuem infinitas casas decimais que não se repetem  
 ( ) Dívidas e temperaturas abaixo de zero são dois exemplos de números negativos na vida cotidiana  
 ( ) Quanto maior é um número, menor será o seu simétrico, isso vale para positivos e negativos  
 ( ) Em uma expressão algébrica, quando um par parênteses tem um sinal + antes, basta eliminar os parênteses e repetir o seu conteúdo.

E81) Marque V ou F nas afirmativas abaixo

- ( ) Para multiplicar potências de mesma base, basta repetir a base e somar os expoentes  
 ( ) A raiz quadrada de um número  $n$ , indicada como  $\sqrt{n}$ , nunca poderá ser negativa  
 ( ) Um número inteiro não se altera quando é elevado à potência 0  
 ( ) Potências de expoente par serão sempre positivas, mesmo quando a base é negativa  
 ( ) O cubo de um número inteiro pode ser negativo, mas seu quadrado será sempre positivo  
 ( ) Em uma potência, dada uma base, quanto maior é o expoente, maior será o resultado  
 ( )  $2^{3^2} = 64$   
 ( ) Associativa e comutativa são duas propriedades da adição de inteiros  
 ( ) A raiz cúbica de um número positivo pode ser um número negativo  
 ( )  $\sqrt{3^2 + 4^2}$  é a mesma coisa que  $3+4$

E82) Sejam os conjuntos:

$N$  = conjunto dos números naturais

$Z$  = conjunto dos núemros inteiros

$Q$  = conjunto dos números racionais

$I$  = conjunto dos números irracionais

$R$  = conjunto dos números reais

Indique quais afirmações são verdadeiras e quais são falsas

- ( )  $I \cup Q = R$   
 ( )  $I \cap Q = \emptyset$   
 ( )  $Z \cap Q = Z$   
 ( ) Para todos os valores de  $x \in Z$  e  $y \in Z$ , temos que  $x/y \in Z$   
 ( )  $Z \cap R = Z$   
 ( )  $N \subset Z \subset Q \subset R$   
 ( )  $R - I = Q$   
 ( )  $Z - N = Z^*$   
 ( ) Os conjuntos  $N$  e  $Z$  são infinitos  
 ( ) O número 0 pertence a todos os conjuntos:  $N$ ,  $Z$ ,  $Q$ ,  $I$  e  $R$

E83) Em uma cidade no norte da Rússia, a temperaduta interna de uma casa é  $18^\circ\text{C}$ . Em um dado instante, a temperatura ambiente externa era de  $12^\circ\text{C}$  negativos. Ao sair do interior para o exterior dessa casa, qual é a variação de temperatura que uma pessoa experimentaria?

E84) Quantos anos foram transcorridos entre 520 AC e 450 AC?

E85) O planeta Vênus é um dos mais quentes do nosso sistema solar. Sua temperatura média é de  $450^{\circ}\text{C}$ . Enquanto isso, o planeta Plutão é um dos mais frios, com temperaturas médias de  $250^{\circ}\text{C}$  negativos. Quantos graus Plutão é mais frio que Vênus?

E86) Uma determinada loja teve os lucros (valores positivos) e prejuízos (valores negativos) mensais de acordo com a tabela abaixo, medidos em reais.

Janeiro	1300
Fevereiro	-1500
Março	3000

Abril	2200
Maio	-3200
Junho	4500

Julho	2400
Agosto	-2000
Setembro	3600

Outubro	4200
Novembro	5300
Dezembro	8500

Qual foi o trimestre de menor lucro, e qual foi o lucro total anual?

E87) Um avião lavantou vôo de uma cidade A que está a 50 metros acima do nível do mar. Subiu 300 metros, depois desceu 40 metros, subiu mais 80 metros, desceu até a metade da altura que estava, em relação ao nível do mar, então subiu mais 100 metros. Quanto precisará agora descer para chegar ao chão na cidade B, localizada a 30 metros acima do nível do mar?

E88) No deserto de Gobi, localizado na Ásia, podem ser verificadas diferenças de temperatura de até  $60^{\circ}\text{C}$  entre o dia e a noite. Durante o dia, a temperatura chega a  $50^{\circ}\text{C}$ . A quanto chega a temperatura à noite?

E89) O isolamento térmico de um avião permite suportar diferenças de temperatura de até  $60^{\circ}\text{C}$  entre seu interior e seu exterior. Mantendo a temperatura interna do avião em  $18^{\circ}\text{C}$ , qual é mínima temperatura externa suportada?

E90) Se  $x + y = 0$  e  $x \neq 0$ , qual é o valor de  $\frac{x^{1237}}{y^{1237}}$ ?

E91) Qual é a ordem correta entre  $3^{28}$ ,  $4^{14}$  e  $5^{21}$ ?

(A)  $3^{28} < 4^{14} < 5^{21}$

(B)  $4^{14} < 5^{21} < 3^{28}$

(C)  $4^{14} < 3^{28} < 5^{21}$

(D)  $3^{28} < 5^{21} < 4^{14}$

(E)  $5^{21} < 3^{28} < 4^{14}$

## Respostas dos exercícios

E1)

a) -9      c) 8      e) 28      g) -46      i) 16      k) -27      m) -45      o) 7      q) 76      s) 90  
b) -8      d) -9      f) -25      h) -46      j) -38      l) 10      n) -62      p) -32      r) -75      t) -25

E2)

a) -7      c) 9      e) 18      g) -45      i) 13      k) -28      m) -45      o) 9      q) 54      s) 70  
b) -6      d) -7      f) -29      h) -56      j) -33      l) 15      n) -55      p) -25      r) -55      t) -38

E3)

a) 3      c) 1      e) 5      g) 19      i) 4      k) -18      m) -8      o) -3      q) -3      s) 18  
b) -3      d) 4      f) 18      h) -5      j) -15      l) 3      n) -6      p) 3      r) -11      t) -23

E4)

a) -4      c) 0      e) -4      g) 8      i) 6      k) -13      m) -16      o) -17      q) -2      s) 39  
b) -6      d) -3      f) 6      h) -8      j) 2      l) -1      n) -74      p) 27      r) -31      t) -40

E5)

- |       |       |       |       |        |        |        |       |        |        |
|-------|-------|-------|-------|--------|--------|--------|-------|--------|--------|
| a) 3  | c) 1  | e) -5 | g) 17 | i) 4   | k) -15 | m) -14 | o) -3 | q) 42  | s) 17  |
| b) -2 | d) -2 | f) 27 | h) 6  | j) -19 | l) 5   | n) -11 | p) 29 | r) -46 | t) -25 |

E6)

- |        |      |        |        |        |        |        |        |        |        |
|--------|------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| a) 23  | c) 9 | e) -39 | g) -11 | i) 4   | k) -20 | m) -38 | o) 58  | q) -23 | s) -92 |
| b) -27 | d) 0 | f) 18  | h) -47 | j) -39 | l) -28 | n) 64  | p) -15 | r) -92 | t) -21 |

E7)

- |        |       |        |        |        |        |        |       |         |        |
|--------|-------|--------|--------|--------|--------|--------|-------|---------|--------|
| a) 40  | c) 11 | e) -51 | g) 19  | i) 4   | k) -27 | m) -62 | o) 43 | q) -38  | s) -37 |
| b) -44 | d) 3  | f) 12  | h) -43 | j) -74 | l) -54 | n) 19  | p) 53 | r) -124 | t) 11  |

E8) Complete as sentenças com os símbolos &lt; ou &gt;

- |                |                |                |                |
|----------------|----------------|----------------|----------------|
| a) $-23 < 46$  | f) $25 > -17$  | k) $45 > -35$  | p) $22 > -66$  |
| b) $-32 < -15$ | g) $-37 < 36$  | i) $-77 < -11$ | q) $53 > -32$  |
| c) $31 > -42$  | h) $-31 < -26$ | m) $-22 < -13$ | r) $-82 < -15$ |
| d) $-25 < 15$  | i) $-4 < 8$    | n) $90 > -64$  | s) $-70 < -52$ |
| e) $-29 < -12$ | j) $-21 > -27$ | o) $19 < 43$   | t) $16 > -27$  |

E9)

- |      |       |        |        |       |       |       |        |        |       |
|------|-------|--------|--------|-------|-------|-------|--------|--------|-------|
| a) 3 | c) 2  | e) 4   | g) 0   | i) -2 | k) 21 | m) -7 | o) -1  | q) -8  | s) 30 |
| b) 2 | d) -1 | f) -17 | h) -18 | j) 6  | l) 4  | n) 4  | p) -10 | r) -35 | t) 11 |

E10)

- |        |       |       |        |       |       |        |        |        |        |
|--------|-------|-------|--------|-------|-------|--------|--------|--------|--------|
| a) -10 | c) 8  | e) 34 | g) -44 | i) 20 | k) 29 | m) -52 | o) -27 | q) 78  | s) 105 |
| b) 12  | d) 19 | f) 24 | h) -38 | j) 30 | l) 9  | n) 10  | p) 63  | r) -95 | t) 8   |

E11)

- |       |      |        |        |       |       |        |      |        |       |
|-------|------|--------|--------|-------|-------|--------|------|--------|-------|
| a) -3 | c) 1 | e) -6  | g) 17  | i) -3 | k) 24 | m) -11 | o) 3 | q) 10  | s) 10 |
| b) -2 | d) 1 | f) -23 | h) -14 | j) 3  | l) -3 | n) 17  | p) 1 | r) -35 | t) 20 |

E12)

- |        |        |        |        |        |       |        |       |        |       |
|--------|--------|--------|--------|--------|-------|--------|-------|--------|-------|
| a) -84 | c) 77  | e) -15 | g) -83 | i) -22 | k) 77 | m) -22 | o) 13 | q) 112 | s) -3 |
| b) 6   | d) -39 | f) 38  | h) 11  | j) 26  | l) -8 | n) 127 | p) 77 | r) -28 | t) 67 |

E13)

- |        |        |        |        |        |        |        |        |        |         |
|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|---------|
| a) -69 | c) 93  | e) -15 | g) -73 | i) -12 | k) -40 | m) -58 | o) 55  | q) -13 | s) -122 |
| b) 3   | d) -30 | f) 8   | h) -67 | j) -44 | l) 4   | n) 162 | p) 119 | r) -72 | t) 53   |

E14)

- |  |  |
|--|--|
| a) $-23 - 46 =$ Negativo, subtração              | f) $15 + (-55) =$ Adição, negativo               |
| b) $-12 - (-15) =$ Negativo, subtração, negativo | g) $-17 - (-21) =$ Negativo, subtração, negativo |
| c) $51 - (-42) =$ Subtração, negativo            | h) $-25 + (-33) =$ Negativo, adição, negativo    |
| d) $-15 - 15 =$ Negativo, subtração              | i) $98 - (-64) =$ Subtração, negativo            |
| e) $-27 - (-12) =$ Negativo, subtração, negativo | j) $17 + 38 =$ Adição                            |

E15)

- |       |        |       |       |        |       |       |      |
|-------|--------|-------|-------|--------|-------|-------|------|
| a) -6 | c) 0   | e) -7 | g) -2 | i) -10 | k) 14 | m) 10 | o) 3 |
| b) -3 | d) -13 | f) 7  | h) 0  | j) 2   | l) -9 | n) 6  |      |

E16)

- |        |        |       |        |       |        |       |        |
|--------|--------|-------|--------|-------|--------|-------|--------|
| a) -54 | c) -4  | e) -6 | g) -11 | i) 21 | k) -20 | m) 10 | o) -23 |
| b) -15 | d) -61 | f) 12 | h) 27  | j) 23 | l) -28 | n) 44 |        |

E17)

a) -40	c) -42	e) -27	g) -11	i) -8	k) 15	m) -2	o) -11
b) -15	d) 0	f) 15	h) 33	j) 10	l) -4	n) -3	

E18)

a) -3	c) 3	e) 0	g) 7	i) 11	k) -10	m) 5	o) -17
b) -15	d) -3	f) 18	h) -14	j) -12	l) -12	n) -10	

E19)

a) 11	c) 5	e) 7	g) 11	i) 6	k) 0	m) -13	o) -12
b) 0	d) 3	f) 14	h) -12	j) -12	l) -2	n) -2	

E20)

a) 18	c) 15	e) 72	g) 39	i) 63	k) 73	m) 54	o) 12	q) 96	s) 20
b) 15	d) 20	f) 7	h) 8	j) 132	l) 21	n) 9	p) 22	r) 29	t) 56

E21)

a) 10	c) 20	e) 8	g) 18	i) -40	k) 52	m) 12	o) -18	q) -16	s) -3
b) 8	d) 12	f) 9	h) 19	j) 5	l) -54	n) 7	p) 3	r) 90	t) 13

E22)

a) 120	c) 100	e) 80	g) 36	i) -4000	k) 520	m) 120	o) -195	q) -34	s) -30
b) 84	d) 120	f) 90	h) 170	j) 50	l) -540	n) 70	p) 30	r) 900	t) 90

E23)

a) 24	c) 60	e) 42	g) -88	i) 64	k) 400	m) 90	o) 126
b) 120	d) -50	f) -70	h) 120	j) 240	l) -168	n) 324	

E24) e E25)

a) 7	c) -4	e) 3	g) -77	i) 28	k) 10	m) 10	o) 7
b) -20	d) -3	f) 35	h) 4	j) 3	l) -56	n) 81	

E26)

a) 25	c) 128	e) 64	g) 16	i) -32	k) -128	m) 81	o) 64
b) -27	d) -216	f) 36	h) 243	j) 25	l) 16	n) -128	

E27)

a) 9	c) 243	e) 100	g) 81	i) 81	k) -729	m) 625	o) -64
b) 256	d) -125	f) 81	h) 64	j) 144	l) 324	n) 256	

E28)

a) 12	c) -173	e) 0	g) -534	i) 1	k) 0	m) 1	o) -512
b) 1	d) -1	f) 1912	h) 1	j) 1	l) 7125	n) 1	

E29)

a) $3^6 \cdot (-2)^4$	c) $2^5 \cdot (-3)^2 \cdot 7^3$	e) $10^3 \cdot 20^3$	g) $-2^6 \cdot 3^3$	i) $2^4 \cdot 3^3 \cdot 5^3$	k) $(-2)^5$	m) $-2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^3$	o) $2^8 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11$
b) $2^3 \cdot 5^3 \cdot 7^2$	d) $2^4 \cdot (-5)^3 \cdot 3^3$	f) $3^4 \cdot (-7)^2$	h) $3^2 \cdot 2^6 \cdot 5^4$	j) $2^2 \cdot 3^3 \cdot 5^2 \cdot 7^3$	l) $-2^8$	n) $2^4 \cdot 3^2 \cdot 5$	

E30)

a) 1	c) 1	e) 0	g) 3	i) 1000	k) 1	m) 1	o) 1
b) 1	d) 0	f) 0	h) 27	j) 98908093	l) -1	n) -1	

E31)

a) $2^{15}$	c) $2^{21}$	e) $5^{14}$	g) $3^7$	i) $5^{15}$	k) $-3^6 \cdot 10^6$	m) $-5^{15}$	o) $-5^{14}$
b) $3^6$	d) $10^6$	f) $2^{70}$	h) $10^{13}$	j) $2^{17}$	l) $2^{75}$	n) $-2^{15}$	

E32)

- |           |           |             |             |                |            |           |             |
|-----------|-----------|-------------|-------------|----------------|------------|-----------|-------------|
| a) $15^5$ | c) $30^2$ | e) $5^{10}$ | g) $(ab)^5$ | i) $10^{5000}$ | k) $30^2$  | m) $80^3$ | o) $5^{14}$ |
| b) $10^7$ | d) $24^5$ | f) $80^3$   | h) $20^6$   | j) $5^{14}$    | l) $-24^5$ | n) $20^6$ |             |

E33)

- |          |           |           |             |            |              |           |           |
|----------|-----------|-----------|-------------|------------|--------------|-----------|-----------|
| a) $3^3$ | c) $5^2$  | e) 7      | g) $6^6$    | i) $100^5$ | k) $-3^{13}$ | m) $-6^6$ | o) $-2^3$ |
| b) $2^3$ | d) $10^5$ | f) $12^3$ | h) $a^{30}$ | j) 1000    | l) $-10^5$   | n) $-7$   |           |

E34)

- |          |          |          |          |             |           |          |            |
|----------|----------|----------|----------|-------------|-----------|----------|------------|
| a) $2^6$ | c) $4^5$ | e) $3^4$ | g) $5^4$ | i) $5^{10}$ | k) $-6^3$ | m) $3^5$ | o) $-16^6$ |
| b) $6^3$ | d) $8^2$ | f) $3^5$ | h) $2^2$ | j) $16^6$   | l) $8^2$  | n) $5^4$ |            |

E35)

- |           |           |                 |              |               |              |             |              |
|-----------|-----------|-----------------|--------------|---------------|--------------|-------------|--------------|
| a) $15^2$ | c) $35^5$ | e) $27/3^7$     | g) $2^3/5^3$ | i) $-2^3/3^3$ | k) $3^2/5^2$ | m) $30^2$   | o) $6^2/5^2$ |
| b) $20^3$ | d) $12^4$ | f) $1/(7^{10})$ | h) $2^2/9^2$ | j) $1/(35^3)$ | l) $10^3$    | n) $-1/2^3$ |              |

E36)

- |                              |                       |                                 |                       |                          |                        |                                  |                           |
|------------------------------|-----------------------|---------------------------------|-----------------------|--------------------------|------------------------|----------------------------------|---------------------------|
| a) $2^5 \cdot 3^2 \cdot 5^3$ | c) $2^{17} \cdot 3^2$ | e) $3^{11} \cdot 5^3$           | g) $2^{18}$           | i) $2^{13} \cdot 3^{11}$ | k) $2^6 \cdot 3^7$     | m) $-2^{13} \cdot 3^2 \cdot 5^5$ | o) $-2^{21} \cdot 3^{15}$ |
| b) $2^7 \cdot 3^{11}$        | d) $2^{11} \cdot 5^7$ | f) $2^{13} \cdot 3^2 \cdot 5^3$ | h) $2^2 \cdot 3^{10}$ | j) $2^2 \cdot 5^{12}$    | l) $-3^{11} \cdot 5^3$ | n) $2^3 \cdot 5^{11}$            |                           |

E37)

- |                 |                |                 |                 |                   |                |              |              |
|-----------------|----------------|-----------------|-----------------|-------------------|----------------|--------------|--------------|
| a) $2x^7z^3$    | c) $15x^2y^9$  | e) $6x^6y^8$    | g) $2x^6y^6z^3$ | i) $30m^4np^4q^3$ | k) $x^4y^4z^3$ | m) $-a^3b^7$ | o) $-a^7b^8$ |
| b) $6a^3b^7c^5$ | d) $120a^5b^6$ | f) $6x^5y^6z^8$ | h) $a^6b^4$     | j) $10a^5b^3c^4$  | l) $-a^3b^4$   | n) $a^9$     |              |

E38)

- |       |        |        |       |        |
|-------|--------|--------|-------|--------|
| a) 11 | c) -2  | e) -10 | g) -8 | i) -2  |
| b) 6  | d) -10 | f) 4   | h) -2 | j) -12 |

E39)

- |        |       |       |        |        |
|--------|-------|-------|--------|--------|
| a) 20  | c) 24 | e) 2  | g) -72 | i) 108 |
| b) -88 | d) 16 | f) 15 | h) 30  | j) 9   |

E40)

- |       |       |        |       |        |       |        |       |
|-------|-------|--------|-------|--------|-------|--------|-------|
| a) 60 | c) 43 | e) 57  | g) 83 | i) 64  | k) 29 | m) 26  | o) 17 |
| b) 18 | d) 21 | f) -25 | h) -7 | j) 106 | l) 10 | n) -43 |       |

E41)

- |        |        |        |         |       |         |        |        |
|--------|--------|--------|---------|-------|---------|--------|--------|
| a) 38  | c) -52 | e) 32  | g) -238 | i) 45 | E42)    |        |        |
| b) 182 | d) -45 | f) -58 | h) 229  | j) 56 | a) 432  | c) 66  | e) 171 |
|        |        |        |         |       | b) -421 | d) 186 |        |

E43)

- |       |       |        |      |         |       |        |        |        |       |
|-------|-------|--------|------|---------|-------|--------|--------|--------|-------|
| a) -8 | c) -1 | e) 8   | g) 6 | i) -126 | k) 32 | m) 145 | o) -30 | q) -78 | s) 1  |
| b) 12 | d) 8  | f) 320 | h) 6 | j) 2    | l) 2  | n) 34  | p) 90  | r) 120 | t) 29 |

E44)

- |         |         |           |         |        |
|---------|---------|-----------|---------|--------|
| a) 276  | c) 178  | e) 969    | g) 225  | i) 4   |
| b) -180 | d) -903 | f) -21772 | h) -443 | j) 120 |

E45)

- |        |       |        |         |         |         |       |       |
|--------|-------|--------|---------|---------|---------|-------|-------|
| a) 27  | c) 32 | e) 104 | g) 18   | i) 1    | k) 0    | m) 11 | o) 13 |
| b) -10 | d) 80 | f) 12  | h) -216 | j) -338 | l) -250 | n) -8 |       |

E46)

- |       |       |        |       |         |       |        |        |        |       |
|-------|-------|--------|-------|---------|-------|--------|--------|--------|-------|
| a) 11 | c) -1 | e) 8   | g) 54 | i) -126 | k) 32 | m) 145 | o) -30 | q) 78  | s) 1  |
| b) 12 | d) 8  | f) 320 | h) 6  | j) 2    | l) 2  | n) 34  | p) 90  | r) 120 | t) 29 |



E47)

- |         |         |        |           |
|---------|---------|--------|-----------|
| a) -252 | c) 51   | e) 178 | g) -21772 |
| b) -432 | d) -903 | f) 43  | h) 43     |

E48)

- |        |          |         |         |          |         |         |         |         |           |
|--------|----------|---------|---------|----------|---------|---------|---------|---------|-----------|
| a) 400 | c) 64    | e) 6400 | g) 2744 | i) 512   | k) -125 | m) 169  | o) -125 | q) 225  | s) 324    |
| b) 169 | d) 10000 | f) 900  | h) 1728 | j) 15625 | l) 196  | n) -512 | p) 256  | r) -729 | t) -27000 |

E49)

- |      |      |       |       |       |       |       |       |      |      |
|------|------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|------|------|
| a) 4 | c) 6 | e) 9  | g) 12 | i) 15 | k) 20 | m) 4  | o) 5  | q) 6 | s) 1 |
| b) 5 | d) 7 | f) 11 | h) 14 | j) 32 | l) 3  | n) 10 | p) 30 | r) 2 | t) 0 |

E50)

- |        |        |        |       |       |
|--------|--------|--------|-------|-------|
| a) -20 | c) -4  | e) -5  | g) -6 | i) -1 |
| b) -3  | d) -10 | f) -30 | h) -2 | j) 0  |

E51)

- |      |       |      |      |       |
|------|-------|------|------|-------|
| a) 3 | c) -2 | e) - | g) 4 | i) -1 |
| b) - | d) 2  | f) 2 | h) - | j) 0  |

E52)

- |      |        |      |        |       |        |       |      |
|------|--------|------|--------|-------|--------|-------|------|
| a) 6 | c) 1   | e) 7 | g) -2  | i) 17 | k) 3   | m) 36 | o) 7 |
| b) 1 | d) 144 | f) 1 | h) -15 | j) 5  | l) -11 | n) 39 |      |

E53)

- |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |
|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| a) I | c) I | e) I | g) I | i) I | k) R | m) I | o) R | q) R | s) I |
| b) I | d) I | f) I | h) R | j) I | l) I | n) R | p) R | r) R | t) R |

E54)

- |      |      |      |       |       |      |       |      |
|------|------|------|-------|-------|------|-------|------|
| a) 3 | c) 6 | e) 3 | g) 7  | i) 7  | k) 8 | m) -8 | o) 0 |
| b) 2 | d) 7 | f) 4 | h) 10 | j) 10 | l) 3 | n) -1 |      |

E55)

- |      |      |        |       |       |        |      |       |
|------|------|--------|-------|-------|--------|------|-------|
| a) 3 | c) 8 | e) 5   | g) 12 | i) 0  | k) -7  | m) 0 | o) 15 |
| b) 5 | d) 8 | f) -13 | h) -3 | j) -4 | l) -10 | n) 3 |       |

E56)

- |       |        |       |        |       |        |        |        |
|-------|--------|-------|--------|-------|--------|--------|--------|
| a) -7 | c) -6  | e) 12 | g) -5  | i) -3 | k) -25 | m) -16 | o) -50 |
| b) -6 | d) -20 | f) -6 | h) -12 | j) 3  | l) 5   | n) -6  |        |

E57)

- |       |        |        |        |        |       |        |      |
|-------|--------|--------|--------|--------|-------|--------|------|
| a) -1 | c) 27  | e) -16 | g) -19 | i) -11 | k) 12 | m) -13 | o) 6 |
| b) 6  | d) -12 | f) -21 | h) -18 | j) -5  | l) 8  | n) 10  |      |

E58)

- |        |        |        |        |        |       |       |       |
|--------|--------|--------|--------|--------|-------|-------|-------|
| a) -38 | c) -31 | e) -52 | g) 162 | i) 10  | k) 44 | m) -3 | o) 15 |
| b) 18  | d) 18  | f) -35 | h) -72 | j) -11 | l) 10 | n) 33 |       |

E59)

- |      |        |        |        |       |        |        |        |
|------|--------|--------|--------|-------|--------|--------|--------|
| a) 7 | c) 6   | e) -12 | g) 132 | i) 20 | k) 120 | m) 120 | o) -50 |
| b) 5 | d) -12 | f) 72  | h) 19  | j) 13 | l) 70  | n) 126 |        |

E60)

- |       |        |         |        |        |         |       |      |
|-------|--------|---------|--------|--------|---------|-------|------|
| a) -4 | c) -56 | e) -77  | g) -32 | i) -27 | k) 1    | m) -1 | o) 1 |
| b) 35 | d) 7   | f) -216 | h) 324 | j) -64 | l) -512 | n) 0  |      |

E61)

- |           |             |             |          |            |           |              |             |
|-----------|-------------|-------------|----------|------------|-----------|--------------|-------------|
| a) $24^5$ | c) $a^{30}$ | e) 1000     | g) $5^4$ | i) $30^2$  | k) $10^5$ | m) $2^{75}$  | o) $5^{14}$ |
| b) $30^2$ | d) $-6^6$   | f) $5^{10}$ | h) $8^2$ | j) $100^5$ | l) $10^7$ | n) $10^{13}$ |             |

E62)

- |        |       |       |       |       |       |        |       |
|--------|-------|-------|-------|-------|-------|--------|-------|
| a) -4  | c) 9  | e) 57 | g) 17 | i) 64 | k) -8 | m) 320 | o) 32 |
| b) -14 | d) 15 | f) -7 | h) 10 | j) 21 | l) -1 | n) 2   |       |

E63)

- |       |       |        |      |       |      |        |      |
|-------|-------|--------|------|-------|------|--------|------|
| a) 1  | c) 1  | e) -12 | g) 1 | i) -1 | k) 0 | m) 720 | o) 1 |
| b) -1 | d) 13 | f) -12 | h) 1 | j) -1 | l) 1 | n) 1   |      |

E64)

- |        |           |       |        |       |       |       |       |
|--------|-----------|-------|--------|-------|-------|-------|-------|
| a) 169 | c) -27000 | e) 32 | g) -30 | i) 4  | k) 6  | m) 17 | o) -3 |
| b) 169 | d) 20     | f) 1  | h) -4  | j) -2 | l) -2 | n) 7  |       |

E65)

- |        |        |       |        |       |       |        |      |
|--------|--------|-------|--------|-------|-------|--------|------|
| a) 84  | c) 23  | e) -7 | g) -95 | i) 35 | k) 0  | m) 1   | o) 0 |
| b) -39 | d) -61 | f) 89 | h) 360 | j) 0  | l) 18 | n) 304 |      |

E66) zero

E67)  $-35^\circ\text{C}$ 

E68) O número original, com sinal positivo.

E69) Sim, se o número for -2, -3, -4 ou outro inteiro menor.

E70) Pode ser 0, 1 ou -1.

E71) É o número com sinal positivo. O símbolo do módulo de x é  $|x|$ .

E72) 0 ou 1.

E73) Somente quando a e b têm o mesmo sinal, ou quando  $a=b=0$ .

E74) É o número com sinal trocado.

E75) Sim, quando o número é negativo.

E76) Zero.

E77) -1, -2, -3, -4 e -5.

E78) (D)

E79)

(V) A subtração é a operação inversa da adição, e não da "soma".

(F) A multiplicação é associativa em relação à adição

(F) Somente a adição é comutativa, a subtração não é.

(F) O elemento neutro tem que ser à direita e à esquerda

(V) Nos números inteiros, a multiplicação é distributiva em relação à adição

(F) A diferença entre dois números negativos será sempre um número negativo

(F) A soma de um número inteiro com o seu módulo nunca será zero

(F) Somente para os positivos

(V) Chama-se *Desigualdade triangular*

(V) O conjunto dos números inteiros é infinito

E80)

( V )  $\mathbb{Z}_+ = \mathbb{N}$  (o conjunto dos inteiros não negativos é igual ao conjunto dos naturais)

( V ) Na reta numérica, quanto mais à direita, maiores são os números

( F )  $\mathbb{Z}_-$  é o conjunto dos inteiros negativos e mais o zero.

( V ) Entre 0 e 1 existem infinitos números racionais

( V ) Os números  $\pi$  e  $\sqrt{5}$  são irracionais( F ) O número  $\sqrt{25}$  é irracional ( = 5)

( V ) Números irracionais possuem infinitas casas decimais que não se repetem. Os algarismos se repetem, mas as sequências não se repetem de forma infinita.

( V ) Dívidas e temperaturas abaixo de zero são dois exemplos de números negativos na vida cotidiana

( F ) Quanto maior é um número, menor será o seu simétrico, isso vale para positivos e negativos

( V ) Em uma expressão algébrica, quando um par parênteses tem um sinal + antes, basta eliminar os parênteses e repetir o seu conteúdo.

E81)

( V ) Para multiplicar potências de mesma base, basta repetir a base e somar os expoentes

( V ) A raiz quadrada de um número  $n$ , indicada como  $\sqrt{n}$ , nunca poderá ser negativa

( F ) Um número inteiro não se altera quando é elevado à potência 0

( V ) Potências de expoente par serão sempre positivas, mesmo quando a base é negativa

( F ) exceção:  $0^2$  não é positivo

( F ) exceção: não vale para base igual a 1.

( F )  $2^9$  vale 512

( V ) Associativa e comutativa são duas propriedades da adição de inteiros

( F ) A raiz cúbica de um número positivo pode ser um número negativo

( F )  $\sqrt{3^2 + 4^2}$  é a mesma coisa que  $3+4$ 

E82)

( V )  $I \cup Q = \mathbb{R}$ ( V )  $I \cap Q = \emptyset$ ( V )  $\mathbb{Z} \cap \mathbb{Q} = \mathbb{Z}$ ( F ) Se  $x \in \mathbb{Z}$  e  $y \in \mathbb{Z}$ , então  $x/y \in \mathbb{Z}$ ( V )  $\mathbb{Z} \cap \mathbb{R} = \mathbb{Z}$ ( V )  $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ ( V )  $\mathbb{R} - \mathbb{I} = \mathbb{Q}$ ( V )  $\mathbb{Z} - \mathbb{N} = \mathbb{Z}^*$ ( V ) Os conjuntos  $\mathbb{N}$  e  $\mathbb{Z}$  são infinitos( F ) não pertence a  $\mathbb{I}$ E83)  $30^\circ\text{C}$  negativos.

E84) 70 anos

E85)  $700^\circ\text{C}$ .

E86) 1º trimestre e R\$ 28.300,00

E87) 265 m

E88)  $-10^\circ\text{C}$ .E89)  $-42^\circ\text{C}$ .  
como  $a^7$ ,  $b^7$  e  $c^7$ .

E90) -1.

E91) (C) Sugestão: exprimir

