

EXERCISES

CHAPTER 7

SEAN LI ¹

1. Redacted

Reference - Propositional Logic in λC

$$\begin{array}{c} \frac{A \quad \neg A}{\perp} \perp\text{I or } \neg\text{E} \quad \frac{\perp}{A} \perp\text{E} \quad \frac{A \quad B}{A \wedge B} \wedge\text{I} \quad \frac{A \wedge B}{A} \wedge\text{EL} \quad \frac{A \wedge B}{B} \wedge\text{ER} \\ \\ \frac{a}{a \vee b} \vee\text{IL} \quad \frac{b}{a \vee b} \vee\text{IR} \quad \frac{A \Rightarrow B \quad A}{B} \Rightarrow\text{E} \\ \\ \frac{A \vee B \quad A \rightarrow C \quad B \rightarrow C}{C} \vee\text{E} \quad \frac{a \in S \quad P(a)}{\exists a \in S, P(a)} \exists\text{I} \quad \frac{\begin{array}{l} 1. \quad A \\ 2. \quad \left| \begin{array}{l} \dots \\ \perp \end{array} \right. \\ 3. \end{array}}{\neg A} \neg\text{I} \\ \\ \frac{\begin{array}{l} 1. \quad A \\ 2. \quad \left| \begin{array}{l} \dots \\ B \end{array} \right. \\ 3. \end{array}}{A \Rightarrow B} \Rightarrow\text{I} \quad \frac{\begin{array}{l} 1. \quad a \in S \\ 2. \quad \left| \begin{array}{l} \dots \\ P(a) \end{array} \right. \\ 3. \end{array}}{\forall a \in S, P(a)} \forall\text{I} \\ \\ \frac{\exists x \in S, P(x) \quad \forall x \in S, (P(x) \Rightarrow A)}{A} \exists\text{E} \quad \frac{a \in S \quad \forall x \in S, P(x)}{P(a)} \forall\text{E} \\ \\ \frac{}{\neg\neg A \Rightarrow A} \text{DN (Classical)} \quad \frac{}{A \vee \neg A} \text{ET (Classical)} \end{array}$$

Reference - 2nd Encoding for Propositional Logic

Proposition	Minimal Propositional Logic
\perp	$\forall A, A$
$A \Rightarrow B$	$A \Rightarrow B$
$\neg A$	$A \Rightarrow \perp$
$A \wedge B$	$\forall C, (A \Rightarrow B \Rightarrow C) \Rightarrow C$
$A \vee B$	$\forall C, (A \Rightarrow C) \Rightarrow (B \Rightarrow C) \Rightarrow C$
$\forall a \in S, P(a)$	$\forall a \in S. P(a)$
$\exists a \in S, P(a)$	$\forall \alpha, (\forall a \in S, (P(a) \Rightarrow \alpha)) \Rightarrow \alpha$

Problem

(7.1 a) Prove in natural deduction and λC the tautology

$$B \Rightarrow (A \Rightarrow B)$$

Solution.

Natural Deduction.

1. B
2. $\left| \begin{array}{l} A \\ \left| \begin{array}{l} B \\ \hline A \Rightarrow B \end{array} \right. \end{array} \right. \Rightarrow \mathbf{I}$
3. $\left| \begin{array}{l} A \\ \left| \begin{array}{l} B \\ \hline A \Rightarrow B \end{array} \right. \end{array} \right. \Rightarrow \mathbf{I}$
4. $\left| \begin{array}{l} A \\ \left| \begin{array}{l} B \\ \hline A \Rightarrow B \end{array} \right. \end{array} \right. \Rightarrow \mathbf{I}$
5. $B \Rightarrow (A \Rightarrow B) \Rightarrow \mathbf{I}$

■

λC . Assuming context $\Gamma \equiv A : *, B : *$. By the PAT paradigm the proof is equivalent to an inhabitant of $B \rightarrow A \rightarrow B$.

1. $A : *, B : *$
2. $\left| \begin{array}{l} x : B \\ \left| \begin{array}{l} y : A \\ \left| \begin{array}{l} x : B \\ \hline \lambda y : A. x : A \rightarrow B \end{array} \right. \end{array} \right. \end{array} \right. \mathbf{Weak}$
3. $\left| \begin{array}{l} x : B \\ \left| \begin{array}{l} y : A \\ \left| \begin{array}{l} x : B \\ \hline \lambda y : A. x : A \rightarrow B \end{array} \right. \end{array} \right. \mathbf{4 Abst}$
4. $\left| \begin{array}{l} x : B \\ \left| \begin{array}{l} y : A \\ \left| \begin{array}{l} x : B \\ \hline \lambda y : A. x : A \rightarrow B \end{array} \right. \end{array} \right. \mathbf{5 Abst}$
5. $\left| \begin{array}{l} x : B \\ \left| \begin{array}{l} y : A \\ \left| \begin{array}{l} x : B \\ \hline \lambda y : A. x : A \rightarrow B \end{array} \right. \end{array} \right. \mathbf{5 Abst}$
6. $\left| \begin{array}{l} x : B \\ \left| \begin{array}{l} y : A \\ \left| \begin{array}{l} x : B \\ \hline \lambda y : A. x : A \rightarrow B \end{array} \right. \end{array} \right. \mathbf{5 Abst}$

■

Problem

(7.1 b) Prove in natural deduction and λC the tautology

$$\neg A \Rightarrow (A \Rightarrow B)$$

Solution.

Natural Deduction.

1. $\neg A$
2. $\begin{array}{|l} A \end{array}$
3. $\begin{array}{|l} \neg A \end{array}$
4. $\begin{array}{|l} A \end{array}$
5. $\begin{array}{|l} \perp \end{array} \quad \perp \text{I}$
6. $\begin{array}{|l} B \end{array} \quad \perp \text{E}$
7. $\begin{array}{|l} A \Rightarrow B \end{array} \quad \Rightarrow \text{I}$
8. $\neg A \Rightarrow (A \Rightarrow B) \quad \Rightarrow \text{I}$

■

λC . Assuming context $\Gamma \equiv A : *, B : *$. By the PAT paradigm the proof is equivalent to an inhabitant of $(A \rightarrow \perp) \rightarrow A \rightarrow B$.

1. $A : *, B : *$
2. $\begin{array}{|l} x : \neg A \end{array}$
3. $\begin{array}{|l} y : A \end{array}$
4. $\begin{array}{|l} x y : \Pi \alpha : *. \alpha \end{array} \quad \mathbf{2,3 \text{ App (Neg Elim)}}$
5. $\begin{array}{|l} x y B : B \end{array} \quad \mathbf{4,1 \text{ App (Ex Falso)}}$
6. $\begin{array}{|l} \lambda y : A. x y B : A \rightarrow B \end{array} \quad \mathbf{5 \text{ Abst}}$
7. $\begin{array}{|l} \lambda x : \neg A. \lambda y : A. x y B : \neg A \rightarrow A \rightarrow B \end{array} \quad \mathbf{6 \text{ Abst}}$

■

Problem

(7.1 c) Prove in natural deduction and λC the tautology

$$(A \Rightarrow \neg B) \Rightarrow ((A \Rightarrow B) \Rightarrow \neg A)$$

Solution.

Natural Deduction.

1. $A \Rightarrow \neg B$
2. $\begin{array}{|l} A \Rightarrow B \end{array}$
3. $\begin{array}{|l} A \end{array}$
4. $\begin{array}{|l} \neg B \end{array}$ **1,3 \Rightarrow E**
5. $\begin{array}{|l} B \end{array}$ **2,3 \Rightarrow E**
6. $\begin{array}{|l} \perp \end{array}$ **5,4 \perp I**
7. $\begin{array}{|l} \neg A \end{array}$ **3-6 \neg I**
8. $\begin{array}{|l} (A \Rightarrow B) \Rightarrow \neg A \end{array}$ **2-7 \Rightarrow I**
9. $(A \Rightarrow \neg B) \Rightarrow ((A \Rightarrow B) \Rightarrow \neg A)$ **1-8 \Rightarrow I**

■

λC . Assuming context $\Gamma \equiv A : *, B : *$. The proof should be equivalent to an inhabitant of $(A \rightarrow B \rightarrow \perp) \rightarrow (A \rightarrow B) \rightarrow A \rightarrow \perp$.

1. $A : *, B : *$
2. $\begin{array}{|l} h : A \rightarrow \neg B \end{array}$
3. $\begin{array}{|l} q : A \rightarrow B \end{array}$
4. $\begin{array}{|l} a : A \end{array}$
5. $\begin{array}{|l} q a : B \end{array}$ **3,4 App**
6. $\begin{array}{|l} h a : B \rightarrow \perp \end{array}$ **2,4 App**
7. $\begin{array}{|l} h a (q a) : \perp \end{array}$ **6,5 App (Neg Elim)**
8. $\begin{array}{|l} \lambda a : A . h a (q a) : \neg A \end{array}$ **7 Abst (Neg Intro)**
9. $\begin{array}{|l} \lambda q : A \rightarrow B . \lambda a : A . h a (q a) : A \rightarrow B \rightarrow \neg A \end{array}$ **8 Abst**
10. $\begin{array}{|l} \lambda h : A \rightarrow \neg B . \lambda q : A \rightarrow B . \lambda a : A . h a (q a) : (A \rightarrow \neg B) \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow \neg A \end{array}$ **9 Abst**

■

Problem

(7.1 d) Prove in natural deduction and λC the tautology

$$\neg(A \Rightarrow B) \Rightarrow \neg B$$

Solution.

Natural Deduction.

$$\begin{array}{ll}
1. & \neg(A \Rightarrow B) \\
2. & \begin{array}{|l} B \\ \hline \end{array} \\
3. & \begin{array}{|l} \begin{array}{|l} A \\ \hline \end{array} \\ \hline \end{array} \\
4. & \begin{array}{|l} \begin{array}{|l} B \\ \hline \end{array} \\ \hline \end{array} \\
5. & \begin{array}{|l} A \Rightarrow B \\ \hline \end{array} \quad \mathbf{3-4 \Rightarrow I} \\
6. & \begin{array}{|l} \perp \\ \hline \end{array} \quad \mathbf{5,1 \perp I} \\
7. & \neg B \quad \mathbf{2-6 \neg I} \\
8. & \neg(A \Rightarrow B) \Rightarrow \neg B \quad \mathbf{1-7 \Rightarrow I}
\end{array}$$

■

λC . Assuming context $\Gamma \equiv A : *, B : *$. The proof should be equivalent to an inhabitant of $((A \rightarrow B) \rightarrow \perp) \rightarrow B \rightarrow \perp$.

$$\begin{array}{ll}
1. & n : \neg(A \rightarrow B) \\
2. & \begin{array}{|l} b : B \\ \hline \end{array} \\
3. & \begin{array}{|l} \begin{array}{|l} a : A \\ \hline \end{array} \\ \hline \end{array} \\
4. & \begin{array}{|l} \begin{array}{|l} b : B \\ \hline \end{array} \\ \hline \end{array} \quad \mathbf{Weak} \\
5. & \lambda a : A . b : A \rightarrow B \quad \mathbf{4 Abst} \\
6. & n (\lambda a : A . b) : \perp \quad \mathbf{1,5 App (Neg Elim)} \\
7. & \lambda b : B . n (\lambda a : A . b) : \neg B \quad \mathbf{6 Abst (Neg Intro)} \\
8. &
\end{array}$$

$$\begin{array}{l}
\lambda n : \neg(A \rightarrow B) . \lambda b : B . n (\lambda a : A . b) \\
: \neg(A \rightarrow B) \rightarrow \neg B \quad \mathbf{7 Abst}
\end{array}$$

■

Problem

(7.2) Formulate the double negation law as an axiom in λC , and prove the following tautology in λC with DN.

$$(\neg A \Rightarrow A) \Rightarrow A$$

Solution. The rule

$$\frac{}{\neg\neg A \Rightarrow A} \text{DN-E}$$

Could be translated into lambda calculus as

$$\Pi A : * . ((A \rightarrow \perp) \rightarrow \perp) \rightarrow A$$

Proof. Assume context $\Gamma \equiv A : *$.

1.	$A : *$	
2.	$h : \neg A \rightarrow A$	
3.	$x : \neg A$	
4.	$h x : A$	2,3 App
5.	$x (h x) : \perp$	3,4 App (Contradiction)
6.	$\lambda x : \neg A . x (h x) : \neg \neg A$	5 Abst (Neg Intro)
7.	$\text{DN } A : \neg \neg A \rightarrow A$	1,1 App
8.	$\text{DN } A (\lambda x : \neg A . x (h x)) : A$	App (Axiom DN)
9.	$\lambda h : \neg A \rightarrow A . \text{DN } A (\lambda x : \neg A . x (h x)) : (\neg A \rightarrow A) \rightarrow A$	8 Abst

■

Problem

(7.3 a) Prove the following tautology in classical logic using λC

$$(A \Rightarrow B) \Rightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$$

Solution. Assume context $\Gamma \equiv A : *, B : *$. It suffices the proof to find an inhabitant of type

$$(A \rightarrow B) \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg A)$$

Proof.

1.	$A : *, B : *$	
2.	$h : A \rightarrow B$	
3.	$b : \neg B$	
4.	$a : A$	
5.	$h a : B$	5,2 App
6.	$b (h a) : \perp$	6,3 App (Contradiction)
7.	$b (h a)(\neg A) : \neg A$	7,5 App (Ex Falso)
8.	$\lambda a : A . b (h a)(\neg A) : A \rightarrow \neg A$	7 Abst
9.	$a : \neg A$	
10.	$a : \neg A$	Var
11.	$\lambda a : \neg A . a : (\neg A \rightarrow \neg A)$	10 Abst

12.	ET $A : A \vee \neg A$	App (Axiom ET)
	ET $A (\neg A) : (A \rightarrow \neg A) \rightarrow$	
13.	$(\neg A \rightarrow \neg A) \rightarrow \neg A$	12 App
	ET $A (\neg A)(\lambda a : A . b (h a)(\neg A)) :$	
14.	$(\neg A \rightarrow \neg A) \rightarrow \neg A$	13,8 App
	ET $A (\neg A)$	
	$(\lambda a : A . b (h a)(\neg A))$	
15.	$(\lambda a : \neg A . a) : \neg A$	14,11 App
	$\lambda b : \neg B . \text{ET } A (\neg A)$	
	$(\lambda a : A . b (h a)(\neg A))$	
16.	$(\lambda a : \neg A . a) : \neg B \rightarrow \neg A$	15 Abst
	$\lambda h : A \rightarrow B . \lambda b : \neg B . \text{ET } A (\neg A)$	
	$(\lambda a : A . b (h a)(\neg A))$	
	$(\lambda a : \neg A . a) :$	
17.	$(A \rightarrow B) \rightarrow \neg B \rightarrow \neg A$	16 Abst

■

Problem

(7.3 b) Prove the following tautology in classical logic using λC

$$(\neg B \Rightarrow \neg A) \Rightarrow (A \Rightarrow B)$$

Solution. Assume context $\Gamma \equiv A : *, B : *$. It suffices the proof to find an inhabitant of type

$$(\neg B \rightarrow \neg A) \rightarrow A \rightarrow B$$

Proof.

1.	$A : *, B : *$	
2.	$h : \neg B \rightarrow \neg A$	
3.	$a : A$	
4.	$b : B$	
5.	$b : B$	Weak
6.	$\lambda b : B . b : B \rightarrow B$	
7.	$b : \neg B$	

8.				$h\ b : \neg A$	2,7 App
9.				$h\ b\ a : \perp$	8,2 App (Neg Elim)
10.				$h\ b\ a\ B : B$	9 App (Ex Falso)
11.				$\lambda b : \neg B . h\ b\ a\ B : \neg B \rightarrow B$	10 Abst
12.				$ET\ B : B \vee \neg B$	1 App (Axiom ET)
13.				$ET\ B\ B : (B \rightarrow B) \rightarrow (\neg B \rightarrow B) \rightarrow B$	12,1 App
14.				$ET\ B\ B\ (\lambda b : B . b) : (\neg B \rightarrow B) \rightarrow B$	13,6 App
15.				$ET\ B\ B\ (\lambda b : B . b)(\lambda b : \neg B . h\ b\ a\ B) : B$	14,11 App
				$\lambda a : A . ET\ B\ B\ (\lambda b : B . b)$	
16.				$(\lambda b : \neg B . h\ b\ a\ B) : A \rightarrow B$	15 Abst
				$\lambda h : \neg B \rightarrow \neg A . \lambda a : A .$	
				$ET\ B\ B\ (\lambda b : B . b)(\lambda b : \neg B . h\ b\ a\ B)$	
17.				$: (\neg B \rightarrow \neg A) \rightarrow A \rightarrow B$	16 Abst

■

Problem

(7.4) Derive \wedge -EL and \wedge -ER in λC .

Solution. The derivation is the same as proving

$$M : \Pi C . (A \rightarrow B \rightarrow C) \rightarrow C \vdash N_1 : A$$

$$M : \Pi C . (A \rightarrow B \rightarrow C) \rightarrow C \vdash N_2 : B$$

Left Projection.

1.	$M : \Pi C . (A \rightarrow B \rightarrow C) \rightarrow C$	
2.		$M\ A : (A \rightarrow B \rightarrow A) \rightarrow A$
3.		$x : A$
4.		
5.		
6.		
7.		
8.		

Weak

5 Abst

6 Abst

2,7 App

■

Right Projection.

1.	$M : \Pi C . (A \rightarrow B \rightarrow C) \rightarrow C$	
2.	$M B : (A \rightarrow B \rightarrow B) \rightarrow B$	
3.	$x : A$	
4.	$b : B$	
5.	$b : B$	Weak
6.	$\lambda b : B . b : B \rightarrow B$	5 Abst
7.	$\lambda x : A . \lambda b : B . b : A \rightarrow B \rightarrow B$	6 Abst
8.	$N_2 \equiv M B (\lambda x : A . \lambda b : B . b) : B$	2,7 App

■

Problem

(7.5 a) Prove tautology under classical logic

$$\neg(A \Rightarrow B) \Rightarrow A$$

Solution. Assume context $\Gamma \equiv A : *, B : *$. Therefore the proof suffices to find an inhabitant of

$$((A \rightarrow B) \rightarrow \perp) \rightarrow A$$

Proof.

1.	$A : *, B : *$	
2.	$h : \neg(A \rightarrow B)$	
3.	$a : A$	
4.	$a : A$	Weak
5.	$\lambda a : A . a : A \rightarrow A$	4 Abst
6.	$a : \neg A$	
7.	$n : A$	
8.	$a n : \perp$	6,7 App (Contradiction)
9.	$a n B : B$	8 App (Ex Falso)
10.	$\lambda n : A . a n B : A \rightarrow B$	9 Abst
11.	$h (\lambda n : A . a n B) : \perp$	10,2 App (Contra.)
12.	$h (\lambda n : A . a n B) A : A$	11 App (Ex Falso)
	$\lambda a : \neg A . h (\lambda n : A . a n B) A$	
13.	$: \neg A \rightarrow A$	12 Abst
14.	$ET : \Pi S : * . S \vee \neg S$	Axiom ET

15.	ET $A : A \vee \neg A$	14,1 App
16.	ET $A A : (A \rightarrow A) \rightarrow (\neg A \rightarrow A) \rightarrow A$	15,1 App
	ET $A A (\lambda a : A . a)$	
17.	$: (\neg A \rightarrow A) \rightarrow A$	16,5 App
	ET $A A (\lambda a : A . a)$	
18.	$(\lambda a : \neg A . h (\lambda n : A . a \ n \ B) \ A) : A$	17,13 App
	$\lambda h : \neg(A \rightarrow B) . \text{ET } A A (\lambda a : A . a)$	
	$(\lambda a : \neg A . h (\lambda n : A . a \ n \ B) \ A)$	
19.	$: \neg(A \rightarrow B) \rightarrow A$	18 Abst

■

Problem

(7.5 b) Prove tautology under classical logic

$$\neg(A \Rightarrow B) \Rightarrow (A \wedge \neg B)$$

Solution. Assume context $\Gamma \equiv A : *, B : *$. Therefore the proof suffices to find an inhabitant of

$$((A \rightarrow B) \rightarrow \perp) \rightarrow \Pi C : * . ((A \rightarrow (B \rightarrow \perp) \rightarrow C) \rightarrow C)$$

Proof.

1.	$A : *, B : *$	
2.	$p : \neg(A \rightarrow B)$	
3.	$C : *$	
4.	$h : A \rightarrow \neg B \rightarrow C$	
5.	$hb : B$	
6.	$ha : A$	
7.	$hb : B$	Weak
8.	$\lambda ha : A . hb : A \rightarrow B$	7 Abst
9.	$p (\lambda ha : A . hb) : \perp$	2,8 App (Contra.)
10.	$\lambda hb : B . p (\lambda ha : A . hb) : \neg B$	9 Abst (Neg Intro)
11.	$hna : \neg A$	
12.	$ha' : A$	
13.	$hna \ ha' : \perp$	11,12 App (Contra.)

14.	$\boxed{hna\ ha' B : B}$	13,1 App (Ex Falso)
15.	$\lambda ha' : A . hna\ ha' B : A \rightarrow B$	14 Abst
16.	$p(\lambda ha' : A . hna\ ha' B) : \perp$	2,15 App (Contra.)
17.	$\boxed{p(\lambda ha' : A . hna\ ha' B) A : A}$	2,15 App (Contra.)
	$\lambda hna : \neg A . p$	
	$(\lambda ha' : A . hna\ ha' B) A$	
18.	$: \neg A \rightarrow A$	17 Abst
19.	$ha'' : A$	
20.	$\boxed{ha'' : A}$	Var
21.	$\lambda ha'' : A . ha'' : A \rightarrow A$	20 Abst
22.	$ET : \Pi S : * . S \vee \neg S$	Axiom ET
23.	$ET\ A : A \vee \neg A$	22,1 App
24.	$ET\ A\ A : (A \rightarrow A) \rightarrow (\neg A \rightarrow A) \rightarrow A$	23,1 App
	$ET\ A\ A$	
	$(\lambda ha'' : A . ha'')$	
25.	$: (\neg A \rightarrow A) \rightarrow A$	24,21 App
	$ET\ A\ A$	
	$(\lambda ha'' : A . ha'')$	
	$(\lambda hna : \neg A . p$	
26.	$(\lambda ha' : A . hna\ ha' B) A) : A$	25,18 App
	$h\ (ET\ A\ A$	
	$(\lambda ha'' : A . ha'')$	
	$(\lambda hna : \neg A . p$	
	$(\lambda ha' : A . hna\ ha' B) A))$	
27.	$: \neg B \rightarrow C$	4,26 App
	$h\ (ET\ A\ A$	
	$(\lambda ha'' : A . ha'')$	
	$(\lambda hna : \neg A . p$	
	$(\lambda ha' : A . hna\ ha' B) A))$	
28.	$(\lambda hb : B . p(\lambda ha : A . hb)) : C$	27,10 App

29.	$ \begin{array}{l} \lambda h : A \rightarrow \neg B \rightarrow C . h \text{ (ET } A \ A \\ (\lambda ha'' : A . ha'') \\ (\lambda hna : \neg A . p (\lambda ha' : A . hna \ ha' \ B) \ A)) \\ (\lambda hb : B . p (\lambda ha : A . hb)) \\ : (A \rightarrow \neg B \rightarrow C) \rightarrow C \end{array} $	28 Abst
30.	$ \begin{array}{l} \lambda C : * . \lambda h : A \rightarrow \neg B \rightarrow C . \\ h \text{ (ET } A \ A \\ (\lambda ha'' : A . ha'') \\ (\lambda hna : \neg A . p (\lambda ha' : A . hna \ ha' \ B) \ A)) \\ (\lambda hb : B . p (\lambda ha : A . hb)) : A \wedge \neg B \end{array} $	29 Abst
31.	$ \begin{array}{l} \lambda p : \neg(A \rightarrow B) . \\ \lambda C : * . \lambda h : A \rightarrow \neg B \rightarrow C . \\ h \text{ (ET } A \ A \\ (\lambda ha'' : A . ha'') \\ (\lambda hna : \neg A . p (\lambda ha' : A . hna \ ha' \ B) \ A)) \\ (\lambda hb : B . p (\lambda ha : A . hb)) \\ : \neg(A \rightarrow B) \rightarrow (A \wedge \neg B) \end{array} $	30 Abst

■

Problem

(7.6 a) Verify that the following expressions is a tautology in constructive logic

$$\neg A \Rightarrow \neg(A \wedge B)$$

Solution. Suppose context $A : *, B : *$. The proof suffices to give a inhabitant of type

$$\neg A \rightarrow \neg(A \wedge B) \equiv (A \rightarrow \perp) \rightarrow (\Pi C : * . (A \rightarrow B \rightarrow C) \rightarrow C) \rightarrow \perp$$

Proof.

1.	$A : *, B : *$	
2.	$na : \neg A$	
3.	$h : \Pi C : * . (A \rightarrow B \rightarrow C) \rightarrow C$	
4.	$h \ A : (A \rightarrow B \rightarrow A) \rightarrow A$	3,1 App
5.	$ha : A$	
6.	$hb : B$	

7.				$ha : A$	
8.				$\lambda hb : B . ha : B \rightarrow A$	7 Abst
9.				$\lambda ha : A . \lambda hb : B . ha : A \rightarrow B \rightarrow A$	8 Abst
10.				$h A (\lambda ha : A . \lambda hb : B . ha) : A$	4,9 App
11.				$na (h A (\lambda ha : A . \lambda hb : B . ha)) : \perp$	2,10 App (Contradiction)
				$\lambda h : A \wedge B .$	
				$na (h A (\lambda ha : A . \lambda hb : B . ha))$	
12.				$: A \wedge B \rightarrow \perp$	11 Abst
				$\lambda na : \neg A . \lambda h : A \wedge B .$	
				$na (h A (\lambda ha : A . \lambda hb : B . ha))$	
13.				$: \neg A \rightarrow \neg(A \wedge B)$	12 Abst

■

Problem

(7.6 b) Verify that the following expressions is a tautology in constructive logic

$$\neg(A \wedge \neg A)$$

Solution. Suppose context $A : *, B : *$. The proof suffices to give a inhabitant of type

$$(\Pi S : *. (A \rightarrow (A \rightarrow \perp) \rightarrow S) \rightarrow S) \rightarrow \perp$$

Proof.

1.	$A : *, B : *, \perp : \square$	
2.	$h : \Pi S : *. (A \rightarrow \neg A \rightarrow S) \rightarrow S$	
3.	$h \perp : (A \rightarrow \neg A \rightarrow \perp) \rightarrow \perp$	2,1 App
4.	$a : A$	
5.	$n : \neg A$	
6.	$na : \perp$	5,4 App
7.	$\lambda n : \neg A . na : \neg A \rightarrow \perp$	6 Abst
8.	$\lambda a : A . \lambda n : \neg A . na : A \rightarrow \neg A \rightarrow \perp$	7 Abst
9.	$h \perp (\lambda a : A . \lambda n : \neg A . na) : \perp$	3,8 App
10.	$\lambda h : A \wedge \neg A . h \perp (\lambda a : A . \lambda n : \neg A . na) : A \wedge \neg A \rightarrow \perp$	9 Abst

■

Problem

(7.7) Derive \forall -**IL** and \forall -**IR**.

Solution. The derivation is the same as proving

$$m : A, B : * \vdash N : \Pi C . (A \rightarrow C) \rightarrow (B \rightarrow C) \rightarrow C$$

$$m : B, A : * \vdash N : \Pi C . (A \rightarrow C) \rightarrow (B \rightarrow C) \rightarrow C$$

Left Introduction.

1.	$m : A, B : *$	
2.	$C : *$	
3.	$hl : A \rightarrow C$	
4.	$hr : B \rightarrow C$	
5.	$hl\ m : C$	3,1 App
6.	$\lambda hr : B \rightarrow C . hl\ m : (B \rightarrow C) \rightarrow C$	5 Abst
7.	$\lambda hl : A \rightarrow C . \lambda hr : B \rightarrow C . hl\ m$ $: (A \rightarrow C) \rightarrow (B \rightarrow C) \rightarrow C$	6 Abst
8.	$\lambda C : * . \lambda hl : A \rightarrow C . \lambda hr : B \rightarrow C . hl\ m$ $: \Pi C : * . (A \rightarrow C) \rightarrow (B \rightarrow C) \rightarrow C$	7 Abst

■

Right Introduction.

1.	$m : B, A : *$	
2.	$C : *$	
3.	$hl : A \rightarrow C$	
4.	$hr : B \rightarrow C$	
5.	$hr\ m : C$	4,1 App
6.	$\lambda hr : B \rightarrow C . hr\ m : (B \rightarrow C) \rightarrow C$	5 Abst
7.	$\lambda hl : A \rightarrow C . \lambda hr : B \rightarrow C . hr\ m$ $: (A \rightarrow C) \rightarrow (B \rightarrow C) \rightarrow C$	6 Abst
8.	$\lambda C : * . \lambda hl : A \rightarrow C . \lambda hr : B \rightarrow C . hr\ m$ $: \Pi C : * . (A \rightarrow C) \rightarrow (B \rightarrow C) \rightarrow C$	7 Abst

■

Problem

(7.8 a) Give λC derivations verifying the intuitionistic tautology below

$$(A \vee B) \Rightarrow (B \vee A)$$

Solution.

Proof.

1.	$A : *, B : *$	
2.	$h : A \vee B$	
3.	$C : *$	
4.	$hb : B \rightarrow C$	
5.	$ha : A \rightarrow C$	
6.	$h C : (A \rightarrow C) \rightarrow (B \rightarrow C) \rightarrow C$	2,3 App
7.	$h C ha : (B \rightarrow C) \rightarrow C$	6,5 App
8.	$h C ha hb : C$	7,4 App
9.	$\lambda ha : A \rightarrow C . h C ha hb : (A \rightarrow C) \rightarrow C$	8 Abst
10.	$\lambda hb : B \rightarrow C . \lambda ha : A \rightarrow C . h C ha hb : (B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C) \rightarrow C$	9 Abst
11.	$\lambda C : * . \lambda hb : B \rightarrow C . \lambda ha : A \rightarrow C . h C ha hb : \Pi C : * . (B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C) \rightarrow C$	10 Abst
12.	$\lambda h : A \vee B . \lambda C : * . \lambda hb : B \rightarrow C . \lambda ha : A \rightarrow C . h C ha hb : A \vee B \rightarrow B \vee A$	11 Abst

■

Problem

(7.8 b) Give λC derivations verifying the intuitionistic tautology below

$$\neg(A \vee B) \Rightarrow (\neg A \wedge \neg B)$$

Solution.

Proof.

1.	$A : *, B : *, \perp : \square$
2.	$h : \neg(\Pi S : * . (A \rightarrow S) \rightarrow (B \rightarrow S) \rightarrow S)$

3.	$C : *$	
4.	$p : (\neg A \rightarrow \neg B \rightarrow C)$	
5.	$a : A$	
6.	$C : *$	
7.	$ha : A \rightarrow C$	
8.	$hb : B \rightarrow C$	
9.	$ha a : C$	7,5 App
10.	$\lambda hb : B \rightarrow C . ha a : (B \rightarrow C) \rightarrow C$	9 Abst
11.	$\lambda ha : A \rightarrow C . \lambda hb : B \rightarrow C . ha a$ $: (A \rightarrow C) \rightarrow (B \rightarrow C) \rightarrow C$	10 Abst
12.	$\lambda C : * . \lambda ha : A \rightarrow C . \lambda hb : B \rightarrow C . ha a$ $: \Pi C : * . (A \rightarrow C) \rightarrow (B \rightarrow C) \rightarrow C$	11 Abst
13.	$h (\lambda C : * . \lambda ha : A \rightarrow C . \lambda hb : B \rightarrow C . ha a) : \perp$	2,12 App (Contr.)
14.	$\lambda a : A . h$ $(\lambda C : * . \lambda ha : A \rightarrow C . \lambda hb : B \rightarrow C . ha a) : \neg A$	13 Abst (Neg I)
15.	$b : B$	
16.	$C : *$	
17.	$ha : A \rightarrow C$	
18.	$hb : B \rightarrow C$	
19.	$hb b : C$	18,15 App
20.	$\lambda hb : B \rightarrow C . hb b : (B \rightarrow C) \rightarrow C$	19 Abst
21.	$\lambda ha : A \rightarrow C . \lambda hb : B \rightarrow C . hb b$ $: (A \rightarrow C) \rightarrow (B \rightarrow C) \rightarrow C$	20 Abst
22.	$\lambda C : * . \lambda ha : A \rightarrow C . \lambda hb : B \rightarrow C . hb b$ $: \Pi C : * . (A \rightarrow C) \rightarrow (B \rightarrow C) \rightarrow C$	21 Abst
23.	$h (\lambda C : * . \lambda ha : A \rightarrow C . \lambda hb : B \rightarrow C . hb b) : \perp$	2,22 App (Contr.)
24.	$\lambda b : B . h$ $(\lambda C : * . \lambda ha : A \rightarrow C . \lambda hb : B \rightarrow C . hb b) : \neg B$	23 Abst (Neg I)
25.	$p (\lambda a : A . h$ $(\lambda C : * . \lambda ha : A \rightarrow C . \lambda hb : B \rightarrow C . ha a))$ $: \neg B \rightarrow C$	4,14 App
26.	$p (\lambda a : A . h$ $(\lambda C : * . \lambda ha : A \rightarrow C . \lambda hb : B \rightarrow C . ha a))$ $(\lambda b : B . h$ $(\lambda C : * . \lambda ha : A \rightarrow C . \lambda hb : B \rightarrow C . hb b))) : C$	25,24 App

27.	$ \begin{array}{l} \lambda p : \neg A \rightarrow \neg B \rightarrow C . p \\ (\lambda a : A . h \\ (\lambda C : * . \lambda ha : A \rightarrow C . \lambda hb : B \rightarrow C . ha a)) \\ (\lambda b : B . h \\ (\lambda C : * . \lambda ha : A \rightarrow C . \lambda hb : B \rightarrow C . hb b)) \\ : (\neg A \rightarrow \neg B \rightarrow C) \rightarrow C \end{array} $	26 Abst
28.	$ \begin{array}{l} \lambda C : * . \lambda p : \neg A \rightarrow \neg B \rightarrow C . p \\ (\lambda a : A . h \\ (\lambda C : * . \lambda ha : A \rightarrow C . \lambda hb : B \rightarrow C . ha a)) \\ (\lambda b : B . h \\ (\lambda C : * . \lambda ha : A \rightarrow C . \lambda hb : B \rightarrow C . hb b)) \\ : \Pi C : * . (\neg A \rightarrow \neg B \rightarrow C) \rightarrow C \end{array} $	27 Abst
29.	$ \begin{array}{l} \lambda h : \neg(A \vee B) . \lambda C : * . \lambda p : \neg A \rightarrow \neg B \rightarrow C . p \\ (\lambda a : A . h \\ (\lambda C : * . \lambda ha : A \rightarrow C . \lambda hb : B \rightarrow C . ha a)) \\ (\lambda b : B . h \\ (\lambda C : * . \lambda ha : A \rightarrow C . \lambda hb : B \rightarrow C . hb b)) \\ : \neg(A \vee B) \rightarrow (\neg A \wedge \neg B) \end{array} $	28 Abst

■

Problem

(7.8 c) Give λC derivations verifying the intuitionistic tautology below

$$(\neg A \wedge \neg B) \Rightarrow \neg(A \vee B)$$

Solution.

Proof.

1. $A : *, B : *, \perp : \square$
2. $h : \Pi C : * . (\neg A \rightarrow \neg B \rightarrow C) \rightarrow C$
3. $p : \Pi S : * . (A \rightarrow S) \rightarrow (B \rightarrow S) \rightarrow S$
4. $h \perp : \neg(\neg A \rightarrow \neg B \rightarrow \perp)$ **2,1 App**
5. $p \perp : (A \rightarrow \perp) \rightarrow (B \rightarrow \perp) \rightarrow \perp$ **3,1 App**
6. $h \perp(p \perp) : \perp$ **4,5 App (Cont.)**

7.	$\frac{\lambda p : A \vee B . h \perp (p \perp) : \neg(A \vee B)}{\lambda h : \neg A \wedge \neg B . \lambda p : A \vee B . h \perp (p \perp)}$	6 Abst
8.	$: \neg A \wedge \neg B \rightarrow \neg(A \vee B)$	7 Abst

■

Problem

(7.9 a) Verify that the following expression is a tautology in constructive logic by giving a proof in first-order natural deduction and a flag styled derivation.

$$\forall x \in S, (\neg P(x) \Rightarrow (P(x) \Rightarrow Q(x) \wedge R(x)))$$

Solution.

Natural Deduction.

1.	$x \in S$	
2.	$\neg P(x)$	
3.	$P(x)$	
4.	\perp	3,2 \perpI
5.	$Q(x) \wedge R(x)$	4 \perpE
6.	$P(x) \Rightarrow Q(x) \wedge R(x)$	3-5 \RightarrowI
7.	$\neg P(x) \Rightarrow (P(x) \Rightarrow Q(x) \wedge R(x))$	2-6 \RightarrowI
8.	$\forall x \in S, (\neg P(x) \Rightarrow (P(x) \Rightarrow Q(x) \wedge R(x)))$	1-7 \forallI

■

λC .

1.	$S : *, P : S \rightarrow *, Q : S \rightarrow *, R : S \rightarrow *$	
2.	$x : S$	
3.	$nhp : \neg(P x)$	
4.	$hp : P x$	
5.	$nhp \ hp : \perp$	3,4 App (Contradiction)
6.	$Q x \wedge R x : *$	Form
7.	$nhp \ hp \ (Q x \wedge R x) : Q x \wedge R x$	5,6 App (Ex Falso)
8.	$\lambda hp : P x . nhp \ hp \ (Q x \wedge R x)$	
	$: P x \rightarrow Q x \wedge R x$	7 Abst

9.	$\frac{\lambda nhp : \neg P x . \lambda hp : P x . nhp hp (Q x \wedge R x) : \neg P x \rightarrow P x \rightarrow Q x \wedge R x}{\lambda x : S . \lambda nhp : \neg P x . \lambda hp : P x . nhp hp (Q x \wedge R x)}$	8 Abst
10.	$\frac{\lambda x : S . \lambda nhp : \neg P x . \lambda hp : P x . nhp hp (Q x \wedge R x) : \Pi x : S . \neg P x \rightarrow P x \rightarrow Q x \wedge R x}{\lambda x : S . \lambda nhp : \neg P x . \lambda hp : P x . nhp hp (Q x \wedge R x)}$	9 Abst

■

Problem

(7.9 b) Verify that the following expression is a tautology in constructive logic by giving a proof in first-order natural deduction and a flag styled derivation.

$$\forall x \in S, P(x) \Rightarrow \forall y \in S, P(y) \vee Q(y)$$

Solution.

Natural Deduction.

1. $\forall x \in S, P(x)$
2. $y : S$
3. $P(y)$ **2,1 $\forall E$**
4. $P(y) \vee Q(y)$ **3 $\vee I$**
5. $\forall y : S, (P(y) \vee Q(y))$ **2-4 $\forall I$**
6. $\forall x \in S, P(x) \Rightarrow \forall y : S, (P(y) \vee Q(y))$ **1-5 $\Rightarrow I$**

■

λC .

1. $S : *, P : S \rightarrow *, Q : S \rightarrow *$
2. $h : \Pi x : S . P x$
3. $y : S$
4. $h y : P y$ **2,3 App**
5. $C : *$
6. $hp : P y \rightarrow C$
7. $hq : Q y \rightarrow C$
8. $hp (h y) : C$ **6,4 App**
9. $\lambda hq : Q y \rightarrow C . hp (h y) : (Q y \rightarrow C) \rightarrow C$ **8 Abst**

10.				$\lambda hp : P y \rightarrow C . \lambda hq : Q y \rightarrow C . hp (h y)$ $: (P y \rightarrow C) \rightarrow (Q y \rightarrow C) \rightarrow C$	9 Abst
11.				$\lambda C : * . \lambda hp : P y \rightarrow C . \lambda hq : Q y \rightarrow C . hp (h y)$ $: \Pi C : * . (P y \rightarrow C) \rightarrow (Q y \rightarrow C) \rightarrow C$	10 Abst
12.				$\lambda y : S . \lambda C : * .$ $\lambda hp : P y \rightarrow C . \lambda hq : Q y \rightarrow C . hp (h y)$ $: \Pi y : S . P y \vee Q y$	11 Abst
13.				$\lambda h : \Pi x : S . P x .$ $\lambda y : S . \lambda C : * .$ $\lambda hp : P y \rightarrow C . \lambda hq : Q y \rightarrow C . hp (h y)$ $: (\Pi x : S . P x) \rightarrow \Pi y : S . P y \vee Q y$	12 Abst

■

Problem

(7.10) Verify that the following expression is a tautology in constructive logic by giving a proof in first-order natural deduction and a flag styled derivation.

$$\begin{aligned} &\forall x \in S, (P(x) \Rightarrow Q(x)) \Rightarrow \\ &\quad \forall y \in S, (P(y) \Rightarrow R(y)) \Rightarrow \\ &\quad \quad \forall z \in S, (P(z) \Rightarrow (Q(z) \wedge R(z))) \end{aligned}$$

Solution.

Natural Deduction.

1.	$\forall x \in S (P(x) \Rightarrow Q(x))$	
2.	$\forall y \in S (P(y) \Rightarrow R(y))$	
3.	$z \in S$	
4.	$P(z)$	
5.	$P(z) \Rightarrow Q(z)$	3,1 $\forall E$
6.	$Q(z)$	5,4 $\Rightarrow E$
7.	$P(z) \Rightarrow R(z)$	3,2 $\forall E$
8.	$R(z)$	7,4 $\forall E$
9.	$Q(z) \wedge R(z)$	6,8 $\wedge I$
10.	$P(z) \Rightarrow Q(z) \wedge R(z)$	4-9 $\Rightarrow I$

11.	$\frac{\forall z \in S, (P(z) \Rightarrow Q(z) \wedge R(z))}{\forall y \in S, (P(y) \Rightarrow R(y)) \Rightarrow \forall z \in S, (P(z) \Rightarrow Q(z) \wedge R(z))}$	3-10 $\forall I$
12.		2-11 $\Rightarrow I$
13.		

$\forall x \in S, (P(x) \Rightarrow Q(x)) \Rightarrow$
 $\forall y \in S, (P(y) \Rightarrow R(y)) \Rightarrow$
 $\forall z \in S, (P(z) \Rightarrow Q(z) \wedge R(z))$ **1-12 $\Rightarrow I$**

■

$\lambda C.$

1.	$S : *, P : S \rightarrow *, Q : S \rightarrow *, R : S \rightarrow *$	
2.	$h : \Pi x : S . P x \rightarrow Q x$	
3.	$p : \Pi y : S . P y \rightarrow R y$	
4.	$z : S$	
5.	$r : P z$	
6.	$h z : P z \rightarrow Q z$	2,4 App
7.	$h z r : Q z$	6,5 App
8.	$p z : P z \rightarrow R z$	3,4 App
9.	$p z r : R z$	8,5 App
10.	$C : *$	
11.	$t : Q z \rightarrow R z \rightarrow C$	
12.	$t (h z r) : R z \rightarrow C$	11,7 App
13.	$t (h z r)(p z r) : C$	12,9 App
14.	$\lambda t : Q z \rightarrow R z \rightarrow C . t (h z r)(p z r)$ $: (Q z \rightarrow R z \rightarrow C) \rightarrow C$	13 Abst
15.	$\lambda C : * . \lambda t : Q z \rightarrow R z \rightarrow C . t (h z r)(p z r)$ $: \Pi C : * . (Q z \rightarrow R z \rightarrow C) \rightarrow C$	14 Abst
16.	$\lambda r : P z . \lambda C : * . \lambda t : Q z \rightarrow R z \rightarrow C .$ $t (h z r)(p z r)$ $: P z \rightarrow Q z \wedge R z$	15 Abst
17.	$\lambda z : S . \lambda r : P z . \lambda C : * . \lambda t : Q z \rightarrow R z \rightarrow C .$ $t (h z r)(p z r)$ $: \Pi z : S . P z \rightarrow Q z \wedge R z$	16 Abst

18.	$ \begin{array}{c} \lambda p : \Pi y : S . P y \rightarrow R y . \\ \lambda z : S . \lambda r : P z . \lambda C : * . \\ \lambda t : Q z \rightarrow R z \rightarrow C . \\ t (h z r) (p z r) \\ : \Pi y : S . P y \rightarrow R y \\ \rightarrow \Pi z : S . P z \rightarrow Q z \wedge R z \end{array} $	17 Abst
19.	$ \begin{array}{c} \lambda h : \Pi x : S . P x \rightarrow Q x . \lambda p : \Pi y : S . P y \rightarrow R y . \\ \lambda z : S . \lambda r : P z . \lambda C : * . \\ \lambda t : Q z \rightarrow R z \rightarrow C . \\ t (h z r) (p z r) \\ : (\Pi x : S . P x \rightarrow Q x) \rightarrow (\Pi y : S . P y \rightarrow R y) \\ \rightarrow \Pi z : S . P z \rightarrow Q z \wedge R z \end{array} $	18 Abst

■

Problem

(7.11) Let $S : *$ and $P, Q : S \rightarrow *$. Let

$$\begin{aligned}
y &: \Pi \alpha : * . ((\Pi x : S . (P x \rightarrow \alpha)) \rightarrow \alpha) \\
z &: \Pi x : S . (P x \rightarrow Q x)
\end{aligned}$$

and $x : S$. Find a correct type for $y (Q x)$, and prove the application $y (Q x) z$ invalid. Also, check that it follows Remark 7.5.2

Solution.

1.	$S : *$	
2.	$P, Q : S \rightarrow *$	
3.	$y : \Pi \alpha : * . ((\Pi x : S . (P x \rightarrow \alpha)) \rightarrow \alpha)$	
4.	$x : S$	
5.	$Q x : *$	
6.	$y (Q x) : \Pi x : S . (P x \rightarrow Q x) \rightarrow Q x$	3,5 App

Here any application *to* $y (Q x)$ requires that value to be of type S . It certainly is not true for z . Remark 7.5.2 basically forbids name clashing of free variables and bound variables in an application or beta reduction.