

EXERCISES

CHAPTER 7

SEAN LI ¹

1. Redacted

Reference - Propositional Logic in λC

$$\begin{array}{c}
 \frac{A \quad \neg A}{\perp} \perp I \text{ or } \neg E \quad \frac{\perp}{A} \perp E \quad \frac{A \quad B}{A \wedge B} \wedge I \quad \frac{A \wedge B}{A} \wedge EL \quad \frac{A \wedge B}{B} \wedge ER \\
 \\
 \frac{a}{a \vee b} \vee IL \quad \frac{b}{a \vee b} \vee IR \quad \frac{A \Rightarrow B \quad A}{B} \Rightarrow E
 \end{array}$$

$$\frac{A \vee B \quad A \rightarrow C \quad B \rightarrow C}{C} \vee E \quad \frac{a \in S \quad P(a)}{\exists a \in S, P(a)} \exists I \quad \frac{1. \quad A \quad 2. \quad \vdots \quad 3. \quad \boxed{\perp}}{\neg A} \neg I$$

$$\frac{1. \quad A \quad 2. \quad \vdots \quad 3. \quad \boxed{B}}{A \Rightarrow B} \Rightarrow I \quad \frac{1. \quad a \in S \quad 2. \quad \vdots \quad 3. \quad \boxed{P(a)}}{\forall a \in S, P(a)} \forall I$$

$$\frac{\exists x \in S, P(x) \quad \forall x \in S, (P(x) \Rightarrow A)}{A} \exists E \quad \frac{a \in S \quad \forall x \in S, P(x)}{P(a)} \forall E$$

$$\frac{}{\neg\neg A \Rightarrow A} \text{DN (Classical)} \quad \frac{}{A \vee \neg A} \text{ET (Classical)}$$

Reference - 2nd Encoding for Propositional Logic

Proposition	Minimal Propositional Logic
\perp	$\forall A, A$
$A \Rightarrow B$	$A \Rightarrow B$
$\neg A$	$A \Rightarrow \perp$
$A \wedge B$	$\forall C, (A \Rightarrow B \Rightarrow C) \Rightarrow C$
$A \vee B$	$\forall C, (A \Rightarrow C) \Rightarrow (B \Rightarrow C) \Rightarrow C$
$\forall a \in S, P(a)$	$\forall a \in S . P(a)$
$\exists a \in S, P(a)$	$\forall \alpha, (\forall a \in S, (P(a) \Rightarrow \alpha)) \Rightarrow \alpha$

Problem

(7.1 a) Prove in natural deduction and λC the tautology

$$B \Rightarrow (A \Rightarrow B)$$

Solution.

Natural Deduction.

1. B
2.
$$\begin{array}{c} A \\ \vdash B \end{array}$$
3.
$$\begin{array}{c} \vdash B \\ \hline A \Rightarrow B \end{array}$$
4.
$$\frac{}{A \Rightarrow B} \Rightarrow I$$
5.
$$\frac{}{B \Rightarrow (A \Rightarrow B)} \Rightarrow I$$

■

λC . Assuming context $\Gamma \equiv A : *, B : *$. By the PAT paradigm the proof is equivalent to an inhabitant of $B \rightarrow A \rightarrow B$.

1. $A : *, B : *$
2.
$$\begin{array}{c} x : B \\ \vdash \end{array}$$
3.
$$\begin{array}{c} y : A \\ \vdash \end{array}$$
4.
$$\begin{array}{c} x : B \\ \vdash \\ \hline \lambda y : A . x : A \rightarrow B \end{array} \quad \text{Weak}$$
5.
$$\frac{}{\lambda y : A . x : A \rightarrow B} 4 \text{ Abst}$$
6.
$$\frac{}{\lambda x : B . \lambda y : A . x : B \rightarrow A \rightarrow B} 5 \text{ Abst}$$

■

Problem

(7.1 b) Prove in natural deduction and λC the tautology

$$\neg A \Rightarrow (A \Rightarrow B)$$

Solution.

Natural Deduction.

1.	$\neg A$	
2.	A	
3.	$\neg A$	
4.	A	
5.	\perp	$\perp I$
6.	B	$\perp E$
7.	$\boxed{A \Rightarrow B}$	$\Rightarrow I$
8.	$\neg A \Rightarrow (A \Rightarrow B)$	$\Rightarrow I$

■

λC . Assuming context $\Gamma \equiv A : *, B : *$. By the PAT paradigm the proof is equivalent to an inhabitant of $(A \rightarrow \perp) \rightarrow A \rightarrow B$.

1.	$A : *, B : *$	
2.	$x : \neg A$	
3.	$y : A$	
4.	$x y : \Pi \alpha : * . \alpha$	2,3 App (Neg Elim)
5.	$x y B : B$	4,1 App (Ex Falso)
6.	$\lambda y : A . x y B : A \rightarrow B$	5 Abst
7.	$\lambda x : \neg A . \lambda y : A . x y B : \neg A \rightarrow A \rightarrow B$	6 Abst

■

Problem

(7.1 c) Prove in natural deduction and λC the tautology

$$(A \Rightarrow \neg B) \Rightarrow ((A \Rightarrow B) \Rightarrow \neg A)$$

Solution.

Natural Deduction.

1.	$A \Rightarrow \neg B$	
2.	$A \Rightarrow B$	
3.	A	
4.	$\neg B$	1,3 $\Rightarrow E$
5.	B	2,3 $\Rightarrow E$
6.	\perp	5,4 $\perp I$
7.	$\neg A$	3,6 $\neg I$
8.	$(A \Rightarrow B) \Rightarrow \neg A$	2,7 $\Rightarrow I$
9.	$(A \Rightarrow \neg B) \Rightarrow ((A \Rightarrow B) \Rightarrow \neg A)$	1,8 $\Rightarrow I$

■

λC . Assuming context $\Gamma \equiv A : *, B : *$. The proof should be equivalent to an inhabitant of $(A \rightarrow B \rightarrow \perp) \rightarrow (A \rightarrow B) \rightarrow A \rightarrow \perp$.

1.	$A : *, B : *$	
2.	$h : A \rightarrow \neg B$	
3.	$q : A \rightarrow B$	
4.	$a : A$	
5.	$q a : B$	3,4 App
6.	$h a : B \rightarrow \perp$	2,4 App
7.	$h a (q a) : \perp$	6,5 App (Neg Elim)
8.	$\lambda a : A . h a (q a) : \neg A$	7 Abst (Neg Intro)
9.	$\lambda q : A \rightarrow B . \lambda a : A . h a (q a) : A \rightarrow B \rightarrow \neg A$	8 Abst
10.	$\lambda h : A \rightarrow \neg B . \lambda q : A \rightarrow B . \lambda a : A . h a (q a)$	
	$: (A \rightarrow \neg B) \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow \neg A$	9 Abst

■

Problem

(7.1 d) Prove in natural deduction and λC the tautology

$$\neg(A \Rightarrow B) \Rightarrow \neg B$$

Solution.

Natural Deduction.

1. $\neg(A \Rightarrow B)$
2. B
3. A
4. B
5. $A \Rightarrow B$ **3,4 \Rightarrow I**
6. \perp **5,1 \perp I**
7. $\neg B$ **6 \neg I**
8. $\neg(A \Rightarrow B) \Rightarrow \neg B$ **1,7 \Rightarrow I**

■

λC . Assuming context $\Gamma \equiv A : *, B : *$. The proof should be equivalent to an inhabitant of $((A \rightarrow B) \rightarrow \perp) \rightarrow B \rightarrow \perp$.

1. $n : \neg(A \rightarrow B)$
 2. $b : B$
 3. $a : A$
 4. $b : B$ **Weak**
 5. $\lambda a : A . b : A \rightarrow B$ **4 Abst**
 6. $n(\lambda a : A . b) : \perp$ **1,5 App (Neg Elim)**
 7. $\lambda b : B . n(\lambda a : A . b) : \neg B$ **6 Abst (Neg Intro)**
 - 8.
- $\lambda n : \neg(A \rightarrow B). \lambda b : B . n(\lambda a : A . b)$
- $: \neg(A \rightarrow B) \rightarrow \neg B$ **7 Abst**

■

Problem

(7.2) Formulate the double negation law as an axiom in λC , and prove the following tautology in λC with DN.

$$(\neg A \Rightarrow A) \Rightarrow A$$

Solution. The rule

$$\frac{}{\neg\neg A \Rightarrow A} \text{DN-E}$$

Could be translated into lambda calculus as

$$\Pi A : * . ((A \rightarrow \perp) \rightarrow \perp) \rightarrow A$$

Proof. Assume context $\Gamma \equiv A : *$.

1.	$A : *$	
2.	$h : \neg A \rightarrow A$	
3.	$x : \neg A$	
4.	$h x : A$	2,3 App
5.	$x(hx) : \perp$	3,4 App (Contradiction)
6.	$\lambda x : \neg A . x(hx) : \neg\neg A$	5 Abst (Neg Intro)
7.	$\text{DN } A : \neg\neg A \rightarrow A$	1,1 App
8.	$\text{DN } A (\lambda x : \neg A . x(hx)) : A$	App (Axiom DN)
	$\lambda h : \neg A \rightarrow A . \text{DN } A (\lambda x : \neg A . x(hx))$	
9.	$: (\neg A \rightarrow A) \rightarrow A$	8 Abst

■

Problem

(7.3 a) Prove the following tautology in classical logic using λC

$$(A \Rightarrow B) \Rightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$$

Solution. Assume context $\Gamma \equiv A : *, B : *$. It suffices the proof to find an inhabitant of type

$$(A \rightarrow B) \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg A)$$

Proof.

1.	$A : *, B : *$	
2.	$h : A \rightarrow B$	
3.	$b : \neg B$	
4.	$a : A$	
5.	$h a : B$	5,2 App
6.	$b(ha) : \perp$	6,3 App (Contradiction)
7.	$b(ha)(\neg A) : \neg A$	7,5 App (Ex Falso)
8.	$\lambda a : A . b(ha)(\neg A) : A \rightarrow \neg A$	7 Abst
9.	$a : \neg A$	
10.	$a : \neg A$	Var
11.	$\lambda a : \neg A . a : (\neg A \rightarrow \neg A)$	10 Abst

12.	$\text{ET } A : A \vee \neg A$	App (Axiom ET)
	$\text{ET } A (\neg A) : (A \rightarrow \neg A) \rightarrow$	
13.	$(\neg A \rightarrow \neg A) \rightarrow \neg A$	12 App
	$\text{ET } A (\neg A)(\lambda a : A . b(h a)(\neg A)) :$	
14.	$(\neg A \rightarrow \neg A) \rightarrow \neg A$	13,8 App
	$\text{ET } A (\neg A)$	
	$(\lambda a : A . b(h a)(\neg A))$	
15.	$(\lambda a : \neg A . a) : \neg A$	14,11 App
	$\lambda b : \neg B . \text{ET } A (\neg A)$	
	$(\lambda a : A . b(h a)(\neg A))$	
16.	$(\lambda a : \neg A . a) : \neg B \rightarrow \neg A$	15 Abst
	$\lambda h : A \rightarrow B . \lambda b : \neg B . \text{ET } A (\neg A)$	
	$(\lambda a : A . b(h a)(\neg A))$	
	$(\lambda a : \neg A . a) :$	
17.	$(A \rightarrow B) \rightarrow \neg B \rightarrow \neg A$	16 Abst

■

Problem

(7.3 b) Prove the following tautology in classical logic using λC

$$(\neg B \Rightarrow \neg A) \Rightarrow (A \Rightarrow B)$$

Solution. Assume context $\Gamma \equiv A : *, B : *$. It suffices the proof to find an inhabitant of type

$$(\neg B \rightarrow \neg A) \rightarrow A \rightarrow B$$

Proof.

1.	$A : *, B : *$	
2.	$h : \neg B \rightarrow \neg A$	
3.	$a : A$	
4.	$b : B$	
5.	$b : B$	Weak
6.	$\lambda b : B . b : B \rightarrow B$	
7.	$b : \neg B$	

8.	$h b : \neg A$	2,7 App
9.	$h b a : \perp$	8,2 App (Neg Elim)
10.	$h b a B : B$	9 App (Ex Falso)
11.	$\lambda b : \neg B . h b a B : \neg B \rightarrow B$	10 Abst
12.	$ET B : B \vee \neg B$	1 App (Axiom ET)
13.	$ET B B : (B \rightarrow B) \rightarrow (\neg B \rightarrow B) \rightarrow B$	12,1 App
14.	$ET B B (\lambda b : B . b) : (\neg B \rightarrow B) \rightarrow B$	13,6 App
15.	$ET B B (\lambda b : B . b)(\lambda b : \neg B . h b a B) : B$	14,11 App
16.	$\lambda a : A . ET B B (\lambda b : B . b)$	15 Abst
	$(\lambda b : \neg B . h b a B) : A \rightarrow B$	
17.	$\lambda h : \neg B \rightarrow \neg A . \lambda a : A .$	
	$ET B B (\lambda b : B . b)(\lambda b : \neg B . h b a B)$	
	$: (\neg B \rightarrow \neg A) \rightarrow A \rightarrow B$	16 Abst

■

Problem

(7.4) Derive \wedge -EL and \wedge -ER in λC .

Solution. The derivation is the same as proving

$$\begin{aligned} M : \Pi C . (A \rightarrow B \rightarrow C) \rightarrow C &\vdash N_1 : A \\ M : \Pi C . (A \rightarrow B \rightarrow C) \rightarrow C &\vdash N_2 : B \end{aligned}$$

Left Projection.

1.	$M : \Pi C . (A \rightarrow B \rightarrow C) \rightarrow C$	
2.	$M A : (A \rightarrow B \rightarrow A) \rightarrow A$	
3.	$x : A$	
4.	$b : B$	
5.	$x : A$	Weak
6.	$\lambda b : B . x : B \rightarrow A$	5 Abst
7.	$\lambda x : A . \lambda b : B . x : A \rightarrow B \rightarrow A$	6 Abst
8.	$N_1 \equiv M A (\lambda x : A . \lambda b : B . x) : A$	2,7 App

■

Right Projection.

1.	$M : \Pi C . (A \rightarrow B \rightarrow C) \rightarrow C$	
2.	$M B : (A \rightarrow B \rightarrow B) \rightarrow B$	
3.	$x : A$	
4.	$b : B$	
5.	$b : B$	Weak
6.	$\lambda b : B . b : B \rightarrow B$	5 Abst
7.	$\lambda x : A . \lambda b : B . b : A \rightarrow B \rightarrow B$	6 Abst
8.	$N_2 \equiv M B (\lambda x : A . \lambda b : B . b) : B$	2,7 App

■

Problem

(7.5 a) Prove tautology under classical logic

$$\neg(A \Rightarrow B) \Rightarrow A$$

Solution. Assume context $\Gamma \equiv A : *, B : *$. Therefore the proof suffices to find an inhabitant of

$$((A \rightarrow B) \rightarrow \perp) \rightarrow A$$

Proof.

1.	$A : *, B : *$	
2.	$h : \neg(A \rightarrow B)$	
3.	$a : A$	
4.	$a : A$	Weak
5.	$\lambda a : A . a : A \rightarrow A$	4 Abst
6.	$a : \neg A$	
7.	$n : A$	
8.	$a n : \perp$	6,7 App (Contradiction)
9.	$a n B : B$	8 App (Ex Falso)
10.	$\lambda n : A . a n B : A \rightarrow B$	9 Abst
11.	$h (\lambda n : A . a n B) : \perp$	10,2 App (Contra.)
12.	$h (\lambda n : A . a n B) A : A$	11 App (Ex Falso)
13.	$\lambda a : \neg A . h (\lambda n : A . a n B) A$	12 Abst
14.	$\text{ET} : \Pi S : * . S \vee \neg S$	Axiom ET

15.	$\text{ET } A : A \vee \neg A$	14,1 App
16.	$\text{ET } A A : (A \rightarrow A) \rightarrow (\neg A \rightarrow A) \rightarrow A$	15,1 App
17.	$\text{ET } A A (\lambda a : A . a)$ $: (\neg A \rightarrow A) \rightarrow A$	16,5 App
18.	$\text{ET } A A (\lambda a : A . a)$ $(\lambda a : \neg A . h (\lambda n : A . a n B) A) : A$	17,13 App
	$\lambda h : \neg(A \rightarrow B) . \text{ET } A A (\lambda a : A . a)$ $(\lambda a : \neg A . h (\lambda n : A . a n B) A)$	
19.	$: \neg(A \rightarrow B) \rightarrow A$	18 Abst

■

Problem

(7.5 b) Prove tautology under classical logic

$$\neg(A \Rightarrow B) \Rightarrow (A \wedge \neg B)$$

Solution. Assume context $\Gamma \equiv A : *, B : *$. Therefore the proof suffices to find an inhabitant of

$$((A \rightarrow B) \rightarrow \perp) \rightarrow \Pi C : * . ((A \rightarrow (B \rightarrow \perp)) \rightarrow C) \rightarrow C$$

Proof.

1.	$A : *, B : *$	
2.	$p : \neg(A \rightarrow B)$	
3.	$C : *$	
4.	$h : A \rightarrow \neg B \rightarrow C$	
5.	$hb : B$	
6.	$ha : A$	
7.	$hb : B$	Weak
8.	$\lambda ha : A . hb : A \rightarrow B$	7 Abst
9.	$p (\lambda ha : A . hb) : \perp$	2,8 App (Contra.)
10.	$\lambda hb : B . p (\lambda ha : A . hb) : \neg B$	9 Abst (Neg Intro)
11.	$hna : \neg A$	
12.	$ha' : A$	
13.	$hna ha' : \perp$	11,12 App (Contra.)

14.		$\boxed{hna \ ha' \ B : B}$	13,1 App (Ex Falso)
15.		$\lambda ha' : A . hna \ ha' \ B : A \rightarrow B$	14 Abst
16.		$p (\lambda ha' : A . hna \ ha' \ B) : \perp$	2,15 App (Contra.)
17.		$\underline{p (\lambda ha' : A . hna \ ha' \ B) \ A : A}$	2,15 App (Contra.)
		$\lambda hna : \neg A . p$	
		$(\lambda ha' : A . hna \ ha' \ B) \ A$	
18.		$: \neg A \rightarrow A$	17 Abst
19.		$ha'' : A$	
20.		$\boxed{ha'' : A}$	Var
21.		$\lambda ha'' : A . ha'' : A \rightarrow A$	20 Abst
22.		$ET : \Pi S : * . S \vee \neg S$	Axiom ET
23.		$ET \ A : A \vee \neg A$	22,1 App
24.		$ET \ A \ A : (A \rightarrow A) \rightarrow (\neg A \rightarrow A) \rightarrow A$	23,1 App
		$ET \ A \ A$	
		$(\lambda ha'' : A . ha'')$	
25.		$: (\neg A \rightarrow A) \rightarrow A$	24,21 App
		$ET \ A \ A$	
		$(\lambda ha'' : A . ha'')$	
		$(\lambda hna : \neg A . p$	
26.		$(\lambda ha' : A . hna \ ha' \ B) \ A : A$	25,18 App
		$h (ET \ A \ A$	
		$(\lambda ha'' : A . ha'')$	
		$(\lambda hna : \neg A . p$	
		$(\lambda ha' : A . hna \ ha' \ B) \ A))$	
27.		$: \neg B \rightarrow C$	4,26 App
		$h (ET \ A \ A$	
		$(\lambda ha'' : A . ha'')$	
		$(\lambda hna : \neg A . p$	
		$(\lambda ha' : A . hna \ ha' \ B) \ A))$	
28.		$(\lambda hb : B . p (\lambda ha : A . hb)) : C$	27,10 App

	$\lambda h : A \rightarrow \neg B \rightarrow C . h (\text{ET } A A$ $(\lambda ha'' : A . ha'')$ $(\lambda hna : \neg A . p (\lambda ha' : A . hna ha' B) A))$ $(\lambda hb : B . p (\lambda ha : A . hb))$ $: (A \rightarrow \neg B \rightarrow C) \rightarrow C$	28 Abst
29.	$\lambda C : * . \lambda h : A \rightarrow \neg B \rightarrow C .$ $h (\text{ET } A A$ $(\lambda ha'' : A . ha'')$ $(\lambda hna : \neg A . p (\lambda ha' : A . hna ha' B) A))$ $(\lambda hb : B . p (\lambda ha : A . hb)) : A \wedge \neg B$	29 Abst
30.	$\lambda p : \neg(A \rightarrow B).$ $\lambda C : * . \lambda h : A \rightarrow \neg B \rightarrow C .$ $h (\text{ET } A A$ $(\lambda ha'' : A . ha'')$ $(\lambda hna : \neg A . p (\lambda ha' : A . hna ha' B) A))$ $(\lambda hb : B . p (\lambda ha : A . hb))$ $: \neg(A \rightarrow B) \rightarrow (A \wedge \neg B)$	30 Abst
31.		■