

EXERCISES

CHAPTER 7

SEAN LI ¹

1. Redacted

Reference - Propositional Logic in λC

$$\begin{array}{c}
 \frac{A \quad \neg A}{\perp} \perp I \text{ or } \neg E \quad \frac{\perp}{A} \perp E \quad \frac{A \quad B}{A \wedge B} \wedge I \quad \frac{A \wedge B}{A} \wedge EL \quad \frac{A \wedge B}{B} \wedge ER \\
 \\
 \frac{a}{a \vee b} \vee IL \quad \frac{b}{a \vee b} \vee IR \quad \frac{A \Rightarrow B \quad A}{B} \Rightarrow E
 \end{array}$$

$$\frac{A \vee B \quad A \rightarrow C \quad B \rightarrow C}{C} \vee E \quad \frac{a \in S \quad P(a)}{\exists a \in S, P(a)} \exists I \quad \frac{1. \quad A \quad 2. \quad \vdots \quad 3. \quad \boxed{\perp}}{\neg A} \neg I$$

$$\frac{1. \quad A \quad 2. \quad \vdots \quad 3. \quad \boxed{B}}{A \Rightarrow B} \Rightarrow I \quad \frac{1. \quad a \in S \quad 2. \quad \vdots \quad 3. \quad \boxed{P(a)}}{\forall a \in S, P(a)} \forall I$$

$$\frac{\exists x \in S, P(x) \quad \forall x \in S, (P(x) \Rightarrow A)}{A} \exists E \quad \frac{a \in S \quad \forall x \in S, P(x)}{P(a)} \forall E$$

$$\frac{}{\neg\neg A \Rightarrow A} \text{DN (Classical)} \quad \frac{}{A \vee \neg A} \text{ET (Classical)}$$

Reference - 2nd Encoding for Propositional Logic

| Proposition | Minimal Propositional Logic |
|-------------------------|---|
| \perp | $\forall A, A$ |
| $A \Rightarrow B$ | $A \Rightarrow B$ |
| $\neg A$ | $A \Rightarrow \perp$ |
| $A \wedge B$ | $\forall C, (A \Rightarrow B \Rightarrow C) \Rightarrow C$ |
| $A \vee B$ | $\forall C, (A \Rightarrow C) \Rightarrow (B \Rightarrow C) \Rightarrow C$ |
| $\forall a \in S, P(a)$ | $\forall a \in S . P(a)$ |
| $\exists a \in S, P(a)$ | $\forall \alpha, (\forall a \in S, (P(a) \Rightarrow \alpha)) \Rightarrow \alpha$ |

Problem

(7.1 a) Prove in natural deduction and λC the tautology

$$B \Rightarrow (A \Rightarrow B)$$

Solution.

Natural Deduction.

1. B
2.
$$\begin{array}{c} A \\ \vdash B \end{array}$$
3.
$$\begin{array}{c} \vdash B \\ \hline A \Rightarrow B \end{array}$$
4.
$$\frac{}{A \Rightarrow B} \Rightarrow I$$
5.
$$\frac{}{B \Rightarrow (A \Rightarrow B)} \Rightarrow I$$

■

λC . Assuming context $\Gamma \equiv A : *, B : *$. By the PAT paradigm the proof is equivalent to an inhabitant of $B \rightarrow A \rightarrow B$.

1. $A : *, B : *$
2.
$$\begin{array}{c} x : B \\ \vdash \end{array}$$
3.
$$\begin{array}{c} y : A \\ \vdash \end{array}$$
4.
$$\begin{array}{c} x : B \\ \vdash \\ \hline \lambda y : A . x : A \rightarrow B \end{array} \quad \text{Weak}$$
5.
$$\frac{}{\lambda y : A . x : A \rightarrow B} 4 \text{ Abst}$$
6.
$$\frac{}{\lambda x : B . \lambda y : A . x : B \rightarrow A \rightarrow B} 5 \text{ Abst}$$

■

Problem

(7.1 b) Prove in natural deduction and λC the tautology

$$\neg A \Rightarrow (A \Rightarrow B)$$

Solution.

Natural Deduction.

| | | |
|----|--|-----------------|
| 1. | $\neg A$ | |
| 2. | A | |
| 3. | $\neg A$ | |
| 4. | A | |
| 5. | \perp | $\perp I$ |
| 6. | B | $\perp E$ |
| 7. | $\boxed{A \Rightarrow B}$ | $\Rightarrow I$ |
| 8. | $\neg A \Rightarrow (A \Rightarrow B)$ | $\Rightarrow I$ |

■

λC . Assuming context $\Gamma \equiv A : *, B : *$. By the PAT paradigm the proof is equivalent to an inhabitant of $(A \rightarrow \perp) \rightarrow A \rightarrow B$.

| | | |
|----|---|--------------------|
| 1. | $A : *, B : *$ | |
| 2. | $x : \neg A$ | |
| 3. | $y : A$ | |
| 4. | $x y : \Pi \alpha : * . \alpha$ | 2,3 App (Neg Elim) |
| 5. | $x y B : B$ | 4,1 App (Ex Falso) |
| 6. | $\lambda y : A . x y B : A \rightarrow B$ | 5 Abst |
| 7. | $\lambda x : \neg A . \lambda y : A . x y B : \neg A \rightarrow A \rightarrow B$ | 6 Abst |

■

Problem

(7.1 c) Prove in natural deduction and λC the tautology

$$(A \Rightarrow \neg B) \Rightarrow ((A \Rightarrow B) \Rightarrow \neg A)$$

Solution.

Natural Deduction.

| | | |
|----|---|---------------------|
| 1. | $A \Rightarrow \neg B$ | |
| 2. | $A \Rightarrow B$ | |
| 3. | A | |
| 4. | $\neg B$ | 1,3 $\Rightarrow E$ |
| 5. | B | 2,3 $\Rightarrow E$ |
| 6. | \perp | 5,4 $\perp I$ |
| 7. | $\neg A$ | 3-6 $\neg I$ |
| 8. | $(A \Rightarrow B) \Rightarrow \neg A$ | 2-7 $\Rightarrow I$ |
| 9. | $(A \Rightarrow \neg B) \Rightarrow ((A \Rightarrow B) \Rightarrow \neg A)$ | 1-8 $\Rightarrow I$ |

■

λC . Assuming context $\Gamma \equiv A : *, B : *$. The proof should be equivalent to an inhabitant of $(A \rightarrow B \rightarrow \perp) \rightarrow (A \rightarrow B) \rightarrow A \rightarrow \perp$.

| | | |
|-----|--|--------------------|
| 1. | $A : *, B : *$ | |
| 2. | $h : A \rightarrow \neg B$ | |
| 3. | $q : A \rightarrow B$ | |
| 4. | $a : A$ | |
| 5. | $q a : B$ | 3,4 App |
| 6. | $h a : B \rightarrow \perp$ | 2,4 App |
| 7. | $h a (q a) : \perp$ | 6,5 App (Neg Elim) |
| 8. | $\lambda a : A . h a (q a) : \neg A$ | 7 Abst (Neg Intro) |
| 9. | $\lambda q : A \rightarrow B . \lambda a : A . h a (q a) : A \rightarrow B \rightarrow \neg A$ | 8 Abst |
| 10. | $\lambda h : A \rightarrow \neg B . \lambda q : A \rightarrow B . \lambda a : A . h a (q a)$ | |
| | $: (A \rightarrow \neg B) \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow \neg A$ | 9 Abst |

■

Problem

(7.1 d) Prove in natural deduction and λC the tautology

$$\neg(A \Rightarrow B) \Rightarrow \neg B$$

Solution.

Natural Deduction.

1. $\neg(A \Rightarrow B)$
2. B
3. A
4. B
5. $A \Rightarrow B$ **3-4 \Rightarrow I**
6. \perp **5,1 \perp I**
7. $\neg B$ **2-6 \neg I**
8. $\neg(A \Rightarrow B) \Rightarrow \neg B$ **1-7 \Rightarrow I**

■

λC . Assuming context $\Gamma \equiv A : *, B : *$. The proof should be equivalent to an inhabitant of $((A \rightarrow B) \rightarrow \perp) \rightarrow B \rightarrow \perp$.

1. $n : \neg(A \rightarrow B)$
 2. $b : B$
 3. $a : A$
 4. $b : B$ **Weak**
 5. $\lambda a : A . b : A \rightarrow B$ **4 Abst**
 6. $n(\lambda a : A . b) : \perp$ **1,5 App (Neg Elim)**
 7. $\lambda b : B . n(\lambda a : A . b) : \neg B$ **6 Abst (Neg Intro)**
 - 8.
- $\lambda n : \neg(A \rightarrow B). \lambda b : B . n(\lambda a : A . b)$
- $: \neg(A \rightarrow B) \rightarrow \neg B$ **7 Abst**

■

Problem

(7.2) Formulate the double negation law as an axiom in λC , and prove the following tautology in λC with DN.

$$(\neg A \Rightarrow A) \Rightarrow A$$

Solution. The rule

$$\frac{}{\neg\neg A \Rightarrow A} \text{DN-E}$$

Could be translated into lambda calculus as

$$\Pi A : * . ((A \rightarrow \perp) \rightarrow \perp) \rightarrow A$$

Proof. Assume context $\Gamma \equiv A : *$.

| | | |
|----|--|-------------------------|
| 1. | $A : *$ | |
| 2. | $h : \neg A \rightarrow A$ | |
| 3. | $x : \neg A$ | |
| 4. | $h x : A$ | 2,3 App |
| 5. | $x(hx) : \perp$ | 3,4 App (Contradiction) |
| 6. | $\lambda x : \neg A . x(hx) : \neg\neg A$ | 5 Abst (Neg Intro) |
| 7. | $\text{DN } A : \neg\neg A \rightarrow A$ | 1,1 App |
| 8. | $\text{DN } A (\lambda x : \neg A . x(hx)) : A$ | App (Axiom DN) |
| | $\lambda h : \neg A \rightarrow A . \text{DN } A (\lambda x : \neg A . x(hx))$ | |
| 9. | $: (\neg A \rightarrow A) \rightarrow A$ | 8 Abst |

■

Problem

(7.3 a) Prove the following tautology in classical logic using λC

$$(A \Rightarrow B) \Rightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$$

Solution. Assume context $\Gamma \equiv A : *, B : *$. It suffices the proof to find an inhabitant of type

$$(A \rightarrow B) \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg A)$$

Proof.

| | | |
|-----|--|-------------------------|
| 1. | $A : *, B : *$ | |
| 2. | $h : A \rightarrow B$ | |
| 3. | $b : \neg B$ | |
| 4. | $a : A$ | |
| 5. | $h a : B$ | 5,2 App |
| 6. | $b(ha) : \perp$ | 6,3 App (Contradiction) |
| 7. | $b(ha)(\neg A) : \neg A$ | 7,5 App (Ex Falso) |
| 8. | $\lambda a : A . b(ha)(\neg A) : A \rightarrow \neg A$ | 7 Abst |
| 9. | $a : \neg A$ | |
| 10. | $a : \neg A$ | Var |
| 11. | $\lambda a : \neg A . a : (\neg A \rightarrow \neg A)$ | 10 Abst |

| | | |
|-----|--|-----------------------|
| 12. | $\text{ET } A : A \vee \neg A$ | App (Axiom ET) |
| | $\text{ET } A (\neg A) : (A \rightarrow \neg A) \rightarrow$ | |
| 13. | $(\neg A \rightarrow \neg A) \rightarrow \neg A$ | 12 App |
| | $\text{ET } A (\neg A)(\lambda a : A . b(h a)(\neg A)) :$ | |
| 14. | $(\neg A \rightarrow \neg A) \rightarrow \neg A$ | 13,8 App |
| | $\text{ET } A (\neg A)$ | |
| | $(\lambda a : A . b(h a)(\neg A))$ | |
| 15. | $(\lambda a : \neg A . a) : \neg A$ | 14,11 App |
| | $\lambda b : \neg B . \text{ET } A (\neg A)$ | |
| | $(\lambda a : A . b(h a)(\neg A))$ | |
| 16. | $(\lambda a : \neg A . a) : \neg B \rightarrow \neg A$ | 15 Abst |
| | $\lambda h : A \rightarrow B . \lambda b : \neg B . \text{ET } A (\neg A)$ | |
| | $(\lambda a : A . b(h a)(\neg A))$ | |
| | $(\lambda a : \neg A . a) :$ | |
| 17. | $(A \rightarrow B) \rightarrow \neg B \rightarrow \neg A$ | 16 Abst |

■

Problem

(7.3 b) Prove the following tautology in classical logic using λC

$$(\neg B \Rightarrow \neg A) \Rightarrow (A \Rightarrow B)$$

Solution. Assume context $\Gamma \equiv A : *, B : *$. It suffices the proof to find an inhabitant of type

$$(\neg B \rightarrow \neg A) \rightarrow A \rightarrow B$$

Proof.

| | | |
|----|---------------------------------------|-------------|
| 1. | $A : *, B : *$ | |
| 2. | $h : \neg B \rightarrow \neg A$ | |
| 3. | $a : A$ | |
| 4. | $b : B$ | |
| 5. | $b : B$ | Weak |
| 6. | $\lambda b : B . b : B \rightarrow B$ | |
| 7. | $b : \neg B$ | |

| | | |
|-----|---|--------------------|
| 8. | $h b : \neg A$ | 2,7 App |
| 9. | $h b a : \perp$ | 8,2 App (Neg Elim) |
| 10. | $h b a B : B$ | 9 App (Ex Falso) |
| 11. | $\lambda b : \neg B . h b a B : \neg B \rightarrow B$ | 10 Abst |
| 12. | $ET B : B \vee \neg B$ | 1 App (Axiom ET) |
| 13. | $ET B B : (B \rightarrow B) \rightarrow (\neg B \rightarrow B) \rightarrow B$ | 12,1 App |
| 14. | $ET B B (\lambda b : B . b) : (\neg B \rightarrow B) \rightarrow B$ | 13,6 App |
| 15. | $ET B B (\lambda b : B . b)(\lambda b : \neg B . h b a B) : B$ | 14,11 App |
| 16. | $\lambda a : A . ET B B (\lambda b : B . b)$ | 15 Abst |
| | $(\lambda b : \neg B . h b a B) : A \rightarrow B$ | |
| 17. | $\lambda h : \neg B \rightarrow \neg A . \lambda a : A .$ | |
| | $ET B B (\lambda b : B . b)(\lambda b : \neg B . h b a B)$ | |
| | $: (\neg B \rightarrow \neg A) \rightarrow A \rightarrow B$ | 16 Abst |

■

Problem

(7.4) Derive \wedge -EL and \wedge -ER in λC .

Solution. The derivation is the same as proving

$$\begin{aligned} M : \Pi C . (A \rightarrow B \rightarrow C) \rightarrow C &\vdash N_1 : A \\ M : \Pi C . (A \rightarrow B \rightarrow C) \rightarrow C &\vdash N_2 : B \end{aligned}$$

Left Projection.

| | | |
|----|---|---------|
| 1. | $M : \Pi C . (A \rightarrow B \rightarrow C) \rightarrow C$ | |
| 2. | $M A : (A \rightarrow B \rightarrow A) \rightarrow A$ | |
| 3. | $x : A$ | |
| 4. | $b : B$ | |
| 5. | $x : A$ | Weak |
| 6. | $\lambda b : B . x : B \rightarrow A$ | 5 Abst |
| 7. | $\lambda x : A . \lambda b : B . x : A \rightarrow B \rightarrow A$ | 6 Abst |
| 8. | $N_1 \equiv M A (\lambda x : A . \lambda b : B . x) : A$ | 2,7 App |

■

Right Projection.

| | | |
|----|---|----------------|
| 1. | $M : \Pi C . (A \rightarrow B \rightarrow C) \rightarrow C$ | |
| 2. | $M B : (A \rightarrow B \rightarrow B) \rightarrow B$ | |
| 3. | $x : A$ | |
| 4. | $b : B$ | |
| 5. | $b : B$ | Weak |
| 6. | $\lambda b : B . b : B \rightarrow B$ | 5 Abst |
| 7. | $\lambda x : A . \lambda b : B . b : A \rightarrow B \rightarrow B$ | 6 Abst |
| 8. | $N_2 \equiv M B (\lambda x : A . \lambda b : B . b) : B$ | 2,7 App |

■

Problem

(7.5 a) Prove tautology under classical logic

$$\neg(A \Rightarrow B) \Rightarrow A$$

Solution. Assume context $\Gamma \equiv A : *, B : *$. Therefore the proof suffices to find an inhabitant of

$$((A \rightarrow B) \rightarrow \perp) \rightarrow A$$

Proof.

| | | |
|-----|--|--------------------------------|
| 1. | $A : *, B : *$ | |
| 2. | $h : \neg(A \rightarrow B)$ | |
| 3. | $a : A$ | |
| 4. | $a : A$ | Weak |
| 5. | $\lambda a : A . a : A \rightarrow A$ | 4 Abst |
| 6. | $a : \neg A$ | |
| 7. | $n : A$ | |
| 8. | $a n : \perp$ | 6,7 App (Contradiction) |
| 9. | $a n B : B$ | 8 App (Ex Falso) |
| 10. | $\lambda n : A . a n B : A \rightarrow B$ | 9 Abst |
| 11. | $h (\lambda n : A . a n B) : \perp$ | 10,2 App (Contra.) |
| 12. | $h (\lambda n : A . a n B) A : A$ | 11 App (Ex Falso) |
| 13. | $\lambda a : \neg A . h (\lambda n : A . a n B) A$ | 12 Abst |
| 14. | $\text{ET} : \Pi S : * . S \vee \neg S$ | Axiom ET |

| | | |
|-----|--|------------------|
| 15. | $\text{ET } A : A \vee \neg A$ | 14,1 App |
| 16. | $\text{ET } A A : (A \rightarrow A) \rightarrow (\neg A \rightarrow A) \rightarrow A$ | 15,1 App |
| 17. | $\text{ET } A A (\lambda a : A . a)$ $: (\neg A \rightarrow A) \rightarrow A$ | 16,5 App |
| 18. | $\text{ET } A A (\lambda a : A . a)$ $(\lambda a : \neg A . h (\lambda n : A . a n B) A) : A$ | 17,13 App |
| | $\lambda h : \neg(A \rightarrow B) . \text{ET } A A (\lambda a : A . a)$ $(\lambda a : \neg A . h (\lambda n : A . a n B) A)$ | |
| 19. | $: \neg(A \rightarrow B) \rightarrow A$ | 18 Abst |

■

Problem

(7.5 b) Prove tautology under classical logic

$$\neg(A \Rightarrow B) \Rightarrow (A \wedge \neg B)$$

Solution. Assume context $\Gamma \equiv A : *, B : *$. Therefore the proof suffices to find an inhabitant of

$$((A \rightarrow B) \rightarrow \perp) \rightarrow \Pi C : * . ((A \rightarrow (B \rightarrow \perp)) \rightarrow C) \rightarrow C$$

Proof.

| | | |
|-----|---|----------------------------|
| 1. | $A : *, B : *$ | |
| 2. | $p : \neg(A \rightarrow B)$ | |
| 3. | $C : *$ | |
| 4. | $h : A \rightarrow \neg B \rightarrow C$ | |
| 5. | $hb : B$ | |
| 6. | $ha : A$ | |
| 7. | $hb : B$ | Weak |
| 8. | $\lambda ha : A . hb : A \rightarrow B$ | 7 Abst |
| 9. | $p (\lambda ha : A . hb) : \perp$ | 2,8 App (Contra.) |
| 10. | $\lambda hb : B . p (\lambda ha : A . hb) : \neg B$ | 9 Abst (Neg Intro) |
| 11. | $hna : \neg A$ | |
| 12. | $ha' : A$ | |
| 13. | $hna ha' : \perp$ | 11,12 App (Contra.) |

| | | | |
|-----|--|---|---------------------|
| 14. | | $\boxed{hna \ ha' \ B : B}$ | 13,1 App (Ex Falso) |
| 15. | | $\lambda ha' : A . hna \ ha' \ B : A \rightarrow B$ | 14 Abst |
| 16. | | $p (\lambda ha' : A . hna \ ha' \ B) : \perp$ | 2,15 App (Contra.) |
| 17. | | $\underline{p (\lambda ha' : A . hna \ ha' \ B) \ A : A}$ | 2,15 App (Contra.) |
| | | $\lambda hna : \neg A . p$ | |
| | | $(\lambda ha' : A . hna \ ha' \ B) \ A$ | |
| 18. | | $: \neg A \rightarrow A$ | 17 Abst |
| 19. | | $ha'' : A$ | |
| 20. | | $\boxed{ha'' : A}$ | Var |
| 21. | | $\lambda ha'' : A . ha'' : A \rightarrow A$ | 20 Abst |
| 22. | | $ET : \Pi S : * . S \vee \neg S$ | Axiom ET |
| 23. | | $ET \ A : A \vee \neg A$ | 22,1 App |
| 24. | | $ET \ A \ A : (A \rightarrow A) \rightarrow (\neg A \rightarrow A) \rightarrow A$ | 23,1 App |
| | | $ET \ A \ A$ | |
| | | $(\lambda ha'' : A . ha'')$ | |
| 25. | | $: (\neg A \rightarrow A) \rightarrow A$ | 24,21 App |
| | | $ET \ A \ A$ | |
| | | $(\lambda ha'' : A . ha'')$ | |
| | | $(\lambda hna : \neg A . p$ | |
| 26. | | $(\lambda ha' : A . hna \ ha' \ B) \ A : A$ | 25,18 App |
| | | $h (ET \ A \ A$ | |
| | | $(\lambda ha'' : A . ha'')$ | |
| | | $(\lambda hna : \neg A . p$ | |
| | | $(\lambda ha' : A . hna \ ha' \ B) \ A))$ | |
| 27. | | $: \neg B \rightarrow C$ | 4,26 App |
| | | $h (ET \ A \ A$ | |
| | | $(\lambda ha'' : A . ha'')$ | |
| | | $(\lambda hna : \neg A . p$ | |
| | | $(\lambda ha' : A . hna \ ha' \ B) \ A))$ | |
| 28. | | $(\lambda hb : B . p (\lambda ha : A . hb)) : C$ | 27,10 App |

| | | |
|-----|--|----------------|
| | $\lambda h : A \rightarrow \neg B \rightarrow C . h (\text{ET } A A$ $(\lambda ha'' : A . ha'')$ $(\lambda hna : \neg A . p (\lambda ha' : A . hna ha' B) A))$ $(\lambda hb : B . p (\lambda ha : A . hb))$ $: (A \rightarrow \neg B \rightarrow C) \rightarrow C$ | 28 Abst |
| 29. | $\lambda C : * . \lambda h : A \rightarrow \neg B \rightarrow C .$ $h (\text{ET } A A$ $(\lambda ha'' : A . ha'')$ $(\lambda hna : \neg A . p (\lambda ha' : A . hna ha' B) A))$ $(\lambda hb : B . p (\lambda ha : A . hb)) : A \wedge \neg B$ | 29 Abst |
| 30. | $\lambda p : \neg(A \rightarrow B).$ $\lambda C : * . \lambda h : A \rightarrow \neg B \rightarrow C .$ $h (\text{ET } A A$ $(\lambda ha'' : A . ha'')$ $(\lambda hna : \neg A . p (\lambda ha' : A . hna ha' B) A))$ $(\lambda hb : B . p (\lambda ha : A . hb))$ $: \neg(A \rightarrow B) \rightarrow (A \wedge \neg B)$ | 30 Abst |

■

Problem

(7.6 a) Verify that the following expression is a tautology in constructive logic

$$\neg A \Rightarrow \neg(A \wedge B)$$

Solution. Suppose context $A : *, B : *$. The proof suffices to give a inhabitant of type

$$\neg A \rightarrow \neg(A \wedge B) \equiv (A \rightarrow \perp) \rightarrow (\Pi C : * . (A \rightarrow B \rightarrow C) \rightarrow C) \rightarrow \perp$$

Proof.

| | | |
|----|---|----------------|
| 1. | $A : *, B : *$ | |
| 2. | $na : \neg A$ | |
| 3. | $h : \Pi C : * . (A \rightarrow B \rightarrow C) \rightarrow C$ | |
| 4. | $h A : (A \rightarrow B \rightarrow A) \rightarrow A$ | 3,1 App |
| 5. | $ha : A$ | |
| 6. | $hb : B$ | |

| | | |
|-----|--|---------------------------------|
| 7. | $\boxed{ha : A}$ | |
| 8. | $\lambda hb : B . ha : B \rightarrow A$ | 7 Abst |
| 9. | $\lambda ha : A . \lambda hb : B . ha : A \rightarrow B \rightarrow A$ | 8 Abst |
| 10. | $h A (\lambda ha : A . \lambda hb : B . ha) : A$ | 4,9 App |
| 11. | $na (h A (\lambda ha : A . \lambda hb : B . ha)) : \perp$ | 2,10 App (Contradiction) |
| 12. | $\begin{array}{c} \lambda h : A \wedge B . \\ na (h A (\lambda ha : A . \lambda hb : B . ha)) \\ \hline : A \wedge B \rightarrow \perp \end{array}$ | 11 Abst |
| 13. | $\begin{array}{c} \lambda na : \neg A . \lambda h : A \wedge B . \\ na (h A (\lambda ha : A . \lambda hb : B . ha)) \\ \hline : \neg A \rightarrow \neg(A \wedge B) \end{array}$ | 12 Abst |

■

Problem

(7.6 b) Verify that the following expression is a tautology in constructive logic

$$\neg(A \wedge \neg A)$$

Solution. Suppose context $A : *, B : *$. The proof suffices to give a inhabitant of type

$$(\Pi S : * . (A \rightarrow (A \rightarrow \perp) \rightarrow S) \rightarrow S) \rightarrow \perp$$

Proof.

| | | |
|-----|--|----------------|
| 1. | $A : *, B : *, \perp : \square$ | |
| 2. | $h : \Pi S : * . (A \rightarrow \neg A \rightarrow S) \rightarrow S$ | |
| 3. | $h \perp : (A \rightarrow \neg A \rightarrow \perp) \rightarrow \perp$ | 2,1 App |
| 4. | $a : A$ | |
| 5. | $n : \neg A$ | |
| 6. | $\boxed{n a : \perp}$ | 5,4 App |
| 7. | $\boxed{\lambda n : \neg A . n a : \neg A \rightarrow \perp}$ | 6 Abst |
| 8. | $\lambda a : A . \lambda n : \neg A . n a : A \rightarrow \neg A \rightarrow \perp$ | 7 Abst |
| 9. | $h \perp (\lambda a : A . \lambda n : \neg A . n a) : \perp$ | 3,8 App |
| 10. | $\lambda h : A \wedge \neg A . h \perp (\lambda a : A . \lambda n : \neg A . n a) : A \wedge \neg A \rightarrow \perp$ | 9 Abst |

■

Problem

(7.7) Derive $\vee\text{-IL}$ and $\vee\text{-IR}$.

Solution. The derivation is the same as proving

$$m : A, B : * \vdash N : \Pi C . (A \rightarrow C) \rightarrow (B \rightarrow C) \rightarrow C$$

$$m : B, A : * \vdash N : \Pi C . (A \rightarrow C) \rightarrow (B \rightarrow C) \rightarrow C$$

Left Introduction.

| | | |
|----|--|---------|
| 1. | $m : A, B : *$ | |
| 2. | $C : *$ | |
| 3. | $hl : A \rightarrow C$ | |
| 4. | $hr : B \rightarrow C$ | |
| 5. | $hl m : C$ | 3,1 App |
| 6. | $\lambda hr : B \rightarrow C . hl m : (B \rightarrow C) \rightarrow C$ | 5 Abst |
| 7. | $\lambda hl : A \rightarrow C . \lambda hr : B \rightarrow C . hl m : (A \rightarrow C) \rightarrow (B \rightarrow C) \rightarrow C$ | 6 Abst |
| 8. | $\lambda C : * . \lambda hl : A \rightarrow C . \lambda hr : B \rightarrow C . hl m : (A \rightarrow C) \rightarrow (B \rightarrow C) \rightarrow C$ | 7 Abst |

■

Right Introduction.

| | | |
|----|--|---------|
| 1. | $m : B, A : *$ | |
| 2. | $C : *$ | |
| 3. | $hl : A \rightarrow C$ | |
| 4. | $hr : B \rightarrow C$ | |
| 5. | $hr m : C$ | 4,1 App |
| 6. | $\lambda hr : B \rightarrow C . hr m : (B \rightarrow C) \rightarrow C$ | 5 Abst |
| 7. | $\lambda hl : A \rightarrow C . \lambda hr : B \rightarrow C . hr m : (A \rightarrow C) \rightarrow (B \rightarrow C) \rightarrow C$ | 6 Abst |
| 8. | $\lambda C : * . \lambda hl : A \rightarrow C . \lambda hr : B \rightarrow C . hr m : (A \rightarrow C) \rightarrow (B \rightarrow C) \rightarrow C$ | 7 Abst |

■

Problem

(7.8 a) Give λC derivations verifying the intuitionistic tautology below

$$(A \vee B) \Rightarrow (B \vee A)$$

Solution.

Proof.

| | | |
|-----|--|---------|
| 1. | $A : *, B : *$ | |
| 2. | $h : A \vee B$ | |
| 3. | $C : *$ | |
| 4. | $hb : B \rightarrow C$ | |
| 5. | $ha : A \rightarrow C$ | |
| 6. | $hC : (A \rightarrow C) \rightarrow (B \rightarrow C) \rightarrow C$ | 2,3 App |
| 7. | $hC ha : (B \rightarrow C) \rightarrow C$ | 6,5 App |
| 8. | $hC ha hb : C$ | 7,4 App |
| 9. | $\lambda ha : A \rightarrow C . hC ha hb : (A \rightarrow C) \rightarrow C$ | 8 Abst |
| | $\lambda hb : B \rightarrow C . \lambda ha : A \rightarrow C .$ | |
| 10. | $hC ha hb : (B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C) \rightarrow C$ | 9 Abst |
| | $\lambda C : * . \lambda hb : B \rightarrow C . \lambda ha : A \rightarrow C .$ | |
| 11. | $hC ha hb : \Pi C : * . (B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C) \rightarrow C$ | 10 Abst |
| | $\lambda h : A \vee B . \lambda C : * . \lambda hb : B \rightarrow C . \lambda ha : A \rightarrow C$ | |
| 12. | $hC ha hb : A \vee B \rightarrow B \vee A$ | 11 Abst |

■

Problem

(7.8 b) Give λC derivations verifying the intuitionistic tautology below

$$\neg(A \vee B) \Rightarrow (\neg A \wedge \neg B)$$

Solution.

Proof.

| | | |
|----|---|--|
| 1. | $A : *, B : *, \perp : \square$ | |
| 2. | $ h : \neg(\Pi S : * . (A \rightarrow S) \rightarrow (B \rightarrow S) \rightarrow S)$ | |

| | | |
|-----|---|--------------------------|
| 3. | $C : *$ | |
| 4. | $p : (\neg A \rightarrow \neg B \rightarrow C)$ | |
| 5. | $a : A$ | |
| 6. | $C : *$ | |
| 7. | $ha : A \rightarrow C$ | |
| 8. | $hb : B \rightarrow C$ | |
| 9. | $\boxed{ha\ a : C}$ | |
| 10. | $\boxed{\lambda hb : B \rightarrow C . ha\ a : (B \rightarrow C) \rightarrow C}$ | 7,5 App |
| 11. | $\boxed{\lambda ha : A \rightarrow C . \lambda hb : B \rightarrow C . ha\ a : (A \rightarrow C) \rightarrow (B \rightarrow C) \rightarrow C}$ | 9 Abst |
| 12. | $\lambda C : * . \lambda ha : A \rightarrow C . \lambda hb : B \rightarrow C . ha\ a : \Pi C : * . (A \rightarrow C) \rightarrow (B \rightarrow C) \rightarrow C$ | 10 Abst |
| 13. | $\boxed{h (\lambda C : * . \lambda ha : A \rightarrow C . \lambda hb : B \rightarrow C . ha\ a) : \perp}$ | 11 Abst |
| 14. | $\lambda a : A . h$ | 2,12 App (Contr.) |
| 15. | $(\lambda C : * . \lambda ha : A \rightarrow C . \lambda hb : B \rightarrow C . ha\ a) : \neg A$ | 13 Abst (Neg I) |
| 16. | $b : B$ | |
| 17. | $C : *$ | |
| 18. | $ha : A \rightarrow C$ | |
| 19. | $hb : B \rightarrow C$ | |
| 20. | $\boxed{hb\ b : C}$ | 18,15 App |
| 21. | $\boxed{\lambda hb : B \rightarrow C . hb\ b : (B \rightarrow C) \rightarrow C}$ | 19 Abst |
| 22. | $\lambda ha : A \rightarrow C . \lambda hb : B \rightarrow C . hb\ b : (A \rightarrow C) \rightarrow (B \rightarrow C) \rightarrow C$ | 20 Abst |
| 23. | $\boxed{h (\lambda C : * . \lambda ha : A \rightarrow C . \lambda hb : B \rightarrow C . hb\ b) : \perp}$ | 21 Abst |
| 24. | $\lambda b : B . h$ | 2,22 App (Contr.) |
| 25. | $(\lambda C : * . \lambda ha : A \rightarrow C . \lambda hb : B \rightarrow C . hb\ b) : \neg B$ | 23 Abst (Neg I) |
| 26. | $p (\lambda a : A . h$ | |
| | $(\lambda C : * . \lambda ha : A \rightarrow C . \lambda hb : B \rightarrow C . ha\ a))$ | 4,14 App |
| | $: \neg B \rightarrow C$ | |
| | $p (\lambda a : A . h$ | |
| | $(\lambda C : * . \lambda ha : A \rightarrow C . \lambda hb : B \rightarrow C . ha\ a))$ | |
| | $(\lambda b : B . h$ | |
| | $(\lambda C : * . \lambda ha : A \rightarrow C . \lambda hb : B \rightarrow C . hb\ b)) : C$ | 25,24 App |

| | | |
|-----|---|----------------|
| | $\lambda p : \neg A \rightarrow \neg B \rightarrow C . p$ $(\lambda a : A . h$ $(\lambda C : * . \lambda ha : A \rightarrow C . \lambda hb : B \rightarrow C . ha a))$ $(\lambda b : B . h$ $(\lambda C : * . \lambda ha : A \rightarrow C . \lambda hb : B \rightarrow C . hb b))$ $: (\neg A \rightarrow \neg B \rightarrow C) \rightarrow C$ | 26 Abst |
| 27. | $\lambda C : * . \lambda p : \neg A \rightarrow \neg B \rightarrow C . p$ $(\lambda a : A . h$ $(\lambda C : * . \lambda ha : A \rightarrow C . \lambda hb : B \rightarrow C . ha a))$ $(\lambda b : B . h$ $(\lambda C : * . \lambda ha : A \rightarrow C . \lambda hb : B \rightarrow C . hb b))$ $: \Pi C : * . (\neg A \rightarrow \neg B \rightarrow C) \rightarrow C$ | 27 Abst |
| 28. | $\lambda h : \neg(A \vee B) . \lambda C : * . \lambda p : \neg A \rightarrow \neg B \rightarrow C . p$ $(\lambda a : A . h$ $(\lambda C : * . \lambda ha : A \rightarrow C . \lambda hb : B \rightarrow C . ha a))$ $(\lambda b : B . h$ $(\lambda C : * . \lambda ha : A \rightarrow C . \lambda hb : B \rightarrow C . hb b))$ $: \neg(A \vee B) \rightarrow (\neg A \wedge \neg B)$ | 28 Abst |

■

Problem

(7.8 c) Give λC derivations verifying the intuitionistic tautology below

$$(\neg A \wedge \neg B) \Rightarrow \neg(A \vee B)$$

Solution.

Proof.

| | | |
|----|---|-----------------|
| 1. | $A : *, B : *, \perp : \square$ | |
| 2. | $h : \Pi C : * . (\neg A \rightarrow \neg B \rightarrow C) \rightarrow C$ | |
| 3. | $p : \Pi S : * . (A \rightarrow S) \rightarrow (B \rightarrow S) \rightarrow S$ | |
| 4. | $h \perp : \neg(\neg A \rightarrow \neg B \rightarrow \perp)$ | 2,1 App |
| 5. | $p \perp : (A \rightarrow \perp) \rightarrow (B \rightarrow \perp) \rightarrow \perp$ | 3,1 App |
| 6. | $h \perp(p \perp) : \perp$ | 4,5 App (Cont.) |

| | | |
|----|--|---------------|
| 7. | $\boxed{\lambda p : A \vee B . h \perp(p \perp) : \neg(A \vee B)}$ | 6 Abst |
| 8. | $\boxed{\lambda h : \neg A \wedge \neg B . \lambda p : A \vee B . h \perp(p \perp) : \neg A \wedge \neg B \rightarrow \neg(A \vee B)}$ | 7 Abst |

■

Problem

(7.9 a) Verify that the following expression is a tautology in constructive logic by giving a proof in first-order natural deduction and a flag styled derivation.

$$\forall x \in S, (\neg P(x) \Rightarrow (P(x) \Rightarrow Q(x) \wedge R(x)))$$

Solution.

Natural Deduction.

| | | |
|----|--|---------------------------------------|
| 1. | $x \in S$ | |
| 2. | $\neg P(x)$ | |
| 3. | $P(x)$ | |
| 4. | \perp | 3,2 $\perp I$ |
| 5. | $\boxed{Q(x) \wedge R(x)}$ | 4 $\perp E$ |
| 6. | $\boxed{P(x) \Rightarrow Q(x) \wedge R(x)}$ | 3-5 $\Rightarrow I$ |
| 7. | $\boxed{\neg P(x) \Rightarrow (P(x) \Rightarrow Q(x) \wedge R(x))}$ | 2-6 $\Rightarrow I$ |
| 8. | $\forall x \in S, (\neg P(x) \Rightarrow (P(x) \Rightarrow Q(x) \wedge R(x)))$ | 1-7 $\forall I$ |

■

$\lambda C.$

| | | |
|----|--|--------------------------------|
| 1. | $S : *, P : S \rightarrow *, Q : S \rightarrow *, R : S \rightarrow *$ | |
| 2. | $x : S$ | |
| 3. | $nhp : \neg(P x)$ | |
| 4. | $hp : P x$ | |
| 5. | $nhp\ hp : \perp$ | 3,4 App (Contradiction) |
| 6. | $Q x \wedge R x : *$ | Form |
| 7. | $nhp\ hp (Q x \wedge R x) : Q x \wedge R x$ | 5,6 App (Ex Falso) |
| 8. | $\boxed{\lambda hp : P x . nhp\ hp (Q x \wedge R x) : P x \rightarrow Q x \wedge R x}$ | 7 Abst |

| | | |
|-----|--|---------------|
| | $\lambda nhp : \neg P x . \lambda hp : P x . nhp hp (Q x \wedge R x)$ | |
| 9. | $\boxed{\begin{array}{c} : \neg P x \rightarrow P x \rightarrow Q x \wedge R x \\ \hline \end{array}}$ | 8 Abst |
| | $\lambda x : S . \lambda nhp : \neg P x . \lambda hp : P x .$ | |
| | $nhp hp (Q x \wedge R x)$ | |
| 10. | $\boxed{\begin{array}{c} : \Pi x : S . \neg P x \rightarrow P x \rightarrow Q x \wedge R x \\ \hline \end{array}}$ | 9 Abst |

■

Problem

(7.9 b) Verify that the following expression is a tautology in constructive logic by giving a proof in first-order natural deduction and a flag styled derivation.

$$\forall x \in S, P(x) \Rightarrow \forall y \in S, P(y) \vee Q(y)$$

Solution.

Natural Deduction.

| | | |
|----|---|---------------|
| 1. | $\forall x \in S, P(x)$ | |
| 2. | $y : S$ | |
| 3. | $P(y)$ | 2,1 VE |
| 4. | $\boxed{P(y) \vee Q(y)}$ | 3 VI |
| 5. | $\forall y : S, (P(y) \vee Q(y))$ | 2-4 VI |
| 6. | $\forall x \in S, P(x) \Rightarrow \forall y : S, (P(y) \vee Q(y))$ | 1-5 ⇒I |

■

$\lambda C.$

| | | |
|----|---|----------------|
| 1. | $S : *, P : S \rightarrow *, Q : S \rightarrow *$ | |
| 2. | $h : \Pi x : S . P x$ | |
| 3. | $y : S$ | |
| 4. | $h y : P y$ | 2,3 App |
| 5. | $C : *$ | |
| 6. | $hp : P y \rightarrow C$ | |
| 7. | $hq : Q y \rightarrow C$ | |
| 8. | $\boxed{hp(hy) : C}$ | 6,4 App |
| 9. | $\lambda hq : Q y \rightarrow C . hp(hy) : (Q y \rightarrow C) \rightarrow C$ | 8 Abst |

| | |
|---|----------------|
| $10. \quad \frac{\boxed{\begin{array}{c} \lambda hp : P y \rightarrow C . \lambda hq : Q y \rightarrow C . hp (h y) \\ : (P y \rightarrow C) \rightarrow (Q y \rightarrow C) \rightarrow C \end{array}}}{\begin{array}{c} \lambda C : * . \lambda hp : P y \rightarrow C . \lambda hq : Q y \rightarrow C . hp (h y) \\ : \Pi C : * . (P y \rightarrow C) \rightarrow (Q y \rightarrow C) \rightarrow C \end{array}}$ | 9 Abst |
| $11. \quad \frac{\boxed{\begin{array}{c} \lambda y : S . \lambda C : * . \\ \lambda hp : P y \rightarrow C . \lambda hq : Q y \rightarrow C . hp (h y) \\ : \Pi y : S . P y \vee Q y \end{array}}}{\begin{array}{c} \lambda h : \Pi x : S . P x . \\ \lambda y : S . \lambda C : * . \\ \lambda hp : P y \rightarrow C . \lambda hq : Q y \rightarrow C . hp (h y) \\ : (\Pi x : S . P x) \rightarrow \Pi y : S . P y \vee Q y \end{array}}$ | 10 Abst |
| $12. \quad \frac{\boxed{\begin{array}{c} \lambda h : \Pi x : S . P x . \\ \lambda y : S . \lambda C : * . \\ \lambda hp : P y \rightarrow C . \lambda hq : Q y \rightarrow C . hp (h y) \\ : (\Pi x : S . P x) \rightarrow \Pi y : S . P y \vee Q y \end{array}}}{\begin{array}{c} \lambda h : \Pi x : S . P x . \\ \lambda y : S . \lambda C : * . \\ \lambda hp : P y \rightarrow C . \lambda hq : Q y \rightarrow C . hp (h y) \\ : (\Pi x : S . P x) \rightarrow \Pi y : S . P y \vee Q y \end{array}}$ | 11 Abst |
| $13. \quad \frac{\boxed{\begin{array}{c} \lambda h : \Pi x : S . P x . \\ \lambda y : S . \lambda C : * . \\ \lambda hp : P y \rightarrow C . \lambda hq : Q y \rightarrow C . hp (h y) \\ : (\Pi x : S . P x) \rightarrow \Pi y : S . P y \vee Q y \end{array}}}{\begin{array}{c} \lambda h : \Pi x : S . P x . \\ \lambda y : S . \lambda C : * . \\ \lambda hp : P y \rightarrow C . \lambda hq : Q y \rightarrow C . hp (h y) \\ : (\Pi x : S . P x) \rightarrow \Pi y : S . P y \vee Q y \end{array}}$ | 12 Abst |

■

Problem

(7.10) Verify that the following expression is a tautology in constructive logic by giving a proof in first-order natural deduction and a flag styled derivation.

$$\begin{aligned} & \forall x \in S, (P(x) \Rightarrow Q(x)) \Rightarrow \\ & \forall y \in S, (P(y) \Rightarrow R(y)) \Rightarrow \\ & \forall z \in S, (P(z) \Rightarrow (Q(z) \wedge R(z))) \end{aligned}$$

Solution.

Natural Deduction.

| | |
|---|---------------------|
| $1. \quad \forall x \in S (P(x) \Rightarrow Q(x))$ | |
| $2. \quad \forall y \in S (P(y) \Rightarrow R(y))$ | |
| $3. \quad \boxed{z \in S}$ | |
| $4. \quad \boxed{\begin{array}{l} P(z) \\ P(z) \Rightarrow Q(z) \\ Q(z) \end{array}}$ | $3,1 \forall E$ |
| $5. \quad P(z) \Rightarrow R(z)$ | $5,4 \Rightarrow E$ |
| $6. \quad R(z)$ | $3,2 \forall E$ |
| $7. \quad \boxed{Q(z) \wedge R(z)}$ | $7,4 \forall E$ |
| $8. \quad P(z) \Rightarrow Q(z) \wedge R(z)$ | $6,8 \wedge I$ |
| $9. \quad \boxed{P(z) \Rightarrow Q(z) \wedge R(z)}$ | $4-9 \Rightarrow I$ |
| $10. \quad \boxed{P(z) \Rightarrow Q(z) \wedge R(z)}$ | |

| | | |
|-----|---|--|
| 11. | $\boxed{\begin{array}{l} \forall z \in S, (P(z) \Rightarrow Q(z) \wedge R(z)) \\ \forall y \in S, (P(y) \Rightarrow R(y)) \Rightarrow \end{array}}$ | 3-10 $\forall I$ |
| 12. | $\boxed{\begin{array}{l} \forall z \in S, (P(z) \Rightarrow Q(z) \wedge R(z)) \\ \forall y \in S, (P(y) \Rightarrow R(y)) \Rightarrow \end{array}}$ | 2-11 $\Rightarrow I$ |
| 13. | | |

$$\begin{aligned} & \forall x \in S, (P(x) \Rightarrow Q(x)) \Rightarrow \\ & \forall y \in S, (P(y) \Rightarrow R(y)) \Rightarrow \\ & \forall z \in S, (P(z) \Rightarrow Q(z) \wedge R(z)) \quad \text{1-12 } \Rightarrow I \end{aligned}$$

■

 $\lambda C.$

| | | |
|-----|---|-----------------|
| 1. | $S : *, P : S \rightarrow *, Q : S \rightarrow *, R : S \rightarrow *$ | |
| 2. | $h : \Pi x : S . P x \rightarrow Q x$ | |
| 3. | $p : \Pi y : S . P y \rightarrow R y$ | |
| 4. | $z : S$ | |
| 5. | $r : P z$ | |
| 6. | $h z : P z \rightarrow Q z$ | 2,4 App |
| 7. | $h z r : Q z$ | 6,5 App |
| 8. | $p z : P z \rightarrow R z$ | 3,4 App |
| 9. | $p z r : R z$ | 8,5 App |
| 10. | $C : *$ | |
| 11. | $t : Q z \rightarrow R z \rightarrow C$ | |
| 12. | $t(h z r) : R z \rightarrow C$ | 11,7 App |
| 13. | $t(h z r)(p z r) : C$ | 12,9 App |
| 14. | $\boxed{\begin{array}{l} \lambda t : Q z \rightarrow R z \rightarrow C . t(h z r)(p z r) \\ : (Q z \rightarrow R z \rightarrow C) \rightarrow C \end{array}}$ | 13 Abst |
| 15. | $\boxed{\begin{array}{l} \lambda C : * . \lambda t : Q z \rightarrow R z \rightarrow C . t(h z r)(p z r) \\ : \Pi C : * . (Q z \rightarrow R z \rightarrow C) \rightarrow C \end{array}}$ | 14 Abst |
| 16. | $\boxed{\begin{array}{l} \lambda r : P z . \lambda C : * . \lambda t : Q z \rightarrow R z \rightarrow C . \\ t(h z r)(p z r) \\ : P z \rightarrow Q z \wedge R z \end{array}}$ | 15 Abst |
| 17. | $\boxed{\begin{array}{l} \lambda z : S . \lambda r : P z . \lambda C : * . \lambda t : Q z \rightarrow R z \rightarrow C . \\ t(h z r)(p z r) \\ : \Pi z : S . P z \rightarrow Q z \wedge R z \end{array}}$ | 16 Abst |

| | |
|-----|---|
| | $\lambda p : \Pi y : S . P y \rightarrow R y .$ |
| | $\lambda z : S . \lambda r : P z . \lambda C : * .$ |
| | $\lambda t : Q z \rightarrow R z \rightarrow C .$ |
| | $t (h z r)(p z r)$ |
| | $: \Pi y : S . P y \rightarrow R y$ |
| 18. | $\rightarrow \Pi z : S . P z \rightarrow Q z \wedge R z$ |
| | 17 Abst |
| | $\lambda h : \Pi x : S . P x \rightarrow Q x . \lambda p : \Pi y : S . P y \rightarrow R y .$ |
| | $\lambda z : S . \lambda r : P z . \lambda C : * .$ |
| | $\lambda t : Q z \rightarrow R z \rightarrow C .$ |
| | $t (h z r)(p z r)$ |
| | $: (\Pi x : S . P x \rightarrow Q x) \rightarrow (\Pi y : S . P y \rightarrow R y)$ |
| 19. | $\rightarrow \Pi z : S . P z \rightarrow Q z \wedge R z$ |
| | 18 Abst |

■

Problem

(7.11) Let $S : *$ and $P, Q : S \rightarrow *$. Let

$$\begin{aligned} y &: \Pi \alpha : * . ((\Pi x : S . (P x \rightarrow \alpha)) \rightarrow \alpha) \\ z &: \Pi x : S . (P x \rightarrow Q x) \end{aligned}$$

and $x : S$. Find a correct type for $y (Q x)$, and prove the application $y (Q x) z$ invalid.
Also, check that it follows Remark 7.5.2

Solution.

| | |
|----|--|
| 1. | $S : *$ |
| 2. | $P, Q : S \rightarrow *$ |
| 3. | $y : \Pi \alpha : * . ((\Pi x : S . (P x \rightarrow \alpha)) \rightarrow \alpha)$ |
| 4. | $x : S$ |
| 5. | $Q x : *$ |
| 6. | $y (Q x) : \Pi x : S . (P x \rightarrow Q x) \rightarrow Q x$ |

Here any application to $y (Q x)$ requires that value to be of type S . It certainly is not true for z . Remark 7.5.2 basically forbids name clashing of free variables and bound variables in an application or beta reduction.

Problem

(7.12 a) Derive $\exists \mathbf{I}$ under λC .

Solution. The rule translated into λC is as follows: in context

$$\Gamma \vdash a : S, P : S \rightarrow *, h : P a$$

We can derive a term

$$\Gamma \vdash h : \Pi \alpha : *. (\Pi x : S . P x \rightarrow \alpha) \rightarrow \alpha$$

One derivation is as follows

| | | |
|----|---|---------|
| 1. | $a : S, P : S \rightarrow *, h : P a$ | |
| 2. | $\alpha : *$ | |
| 3. | $p : \Pi x : S . P x \rightarrow \alpha$ | |
| 4. | $p a : P a \rightarrow \alpha$ | 3,1 App |
| 5. | $\underline{p a h : \alpha}$ | 4,1 App |
| 6. | $\lambda p : \Pi x : S . P x \rightarrow \alpha . p a h$ | |
| | $: (\Pi x : S . P x \rightarrow \alpha) \rightarrow \alpha$ | 5 Abst |
| 7. | $\lambda \alpha : * . \lambda p : \Pi x : S . P x \rightarrow \alpha . p a h$ | |
| | $: \Pi \alpha : * . (\Pi x : S . P x \rightarrow \alpha) \rightarrow \alpha$ | 6 Abst |

Problem

(7.12 b) Give a flag styled derivation in λC verifying the following tautology in classical logic:

$$\neg \exists x \in S, (\neg P(x)) \Rightarrow \forall y \in S, (P(y))$$

Solution. The proof term should have type

$$((\Pi \alpha : *. (\Pi x : S . (P x \rightarrow \perp) \rightarrow \alpha) \rightarrow \alpha) \rightarrow \perp) \rightarrow (\Pi y : S . P y)$$

Proof.

| | | |
|----|--------------------------------------|--|
| 1. | $S : *, P : S \rightarrow *$ | |
| 2. | $h : \neg(\exists x : S . \neg P x)$ | |
| 3. | $y : S$ | |
| 4. | $v : \neg P y$ | |

| | | |
|-----|---|---------------------|
| 5. | $\alpha : *$ | |
| 6. | $p : \Pi x : S . (P x \rightarrow \perp) \rightarrow \alpha$ | |
| 7. | $p y : \neg P y \rightarrow \alpha$ | 6,3 App |
| 8. | $\boxed{p y v : \alpha}$ | 7,4 App |
| 9. | $\lambda h : \Pi x : S . (\neg P x) \rightarrow \alpha . p y v$ | 8 Abst |
| 10. | $: (\Pi x : S . \neg P x \rightarrow \alpha) \rightarrow \alpha$ | 9 Abst |
| 11. | $\lambda \alpha : * . \lambda p : \Pi x : S . (\neg P x) \rightarrow \alpha . p y v$ | 2,10 App |
| 12. | $: \exists x : S . \neg P x$ | |
| 13. | $h (\lambda \alpha : * . \lambda p : \Pi x : S . (\neg P x) \rightarrow \alpha . p y v)$ | 11 Abst |
| 14. | $: \neg \neg P y$ | |
| 15. | $\lambda y : S . \text{DN} (\lambda v : \neg P y .$ | App (Ax. DN) |
| | $h (\lambda \alpha : * . \lambda p : \Pi x : S . (\neg P x) \rightarrow \alpha . p y v))$ | |
| | $: P y$ | 13 Abst |
| | $\lambda y : S . \text{DN} (\lambda v : \neg P y .$ | |
| | $h (\lambda \alpha : * . \lambda p : \Pi x : S . (\neg P x) \rightarrow \alpha . p y v))$ | |
| | $: \Pi y : S . P y$ | 14 Abst |
| | $\lambda h : \neg (\exists x : S . \neg P x) . \lambda y : S .$ | |
| | $\text{DN} (\lambda v : \neg P y . p (\lambda \alpha : * . \lambda h : \Pi x : S . (\neg P x) \rightarrow \alpha . p y v))$ | |
| | $: \neg (\exists x : S , \neg P x) \rightarrow \Pi y : S . P y$ | 14 Abst |

■

Problem

(7.13) Prove this a tautology in constructive logic by a λC derivation:

$$(\exists x \in S, P(x)) \Rightarrow (\forall y \in S, P(y) \Rightarrow Q(y)) \Rightarrow (\exists z \in S, Q(z))$$

Solution. The corresponding term is

$$\begin{aligned} & (\Pi \alpha : * . (\Pi x : S . P x \rightarrow \alpha) \rightarrow \alpha) \rightarrow \\ & (\Pi y : S . P y \rightarrow Q y) \rightarrow \\ & (\Pi \beta : * . (\Pi z : S . Q z \rightarrow \beta) \rightarrow \beta) \end{aligned}$$

Proof.

| | | |
|-----|---|-----------|
| 1. | $S : *, P : S \rightarrow *, Q : S \rightarrow *$ | |
| 2. | $h : \exists x : S . P x$ | |
| 3. | $p : \Pi y : S . P y \rightarrow Q y$ | |
| 4. | $\beta : *$ | |
| 5. | $r : \Pi z : S . Q z \rightarrow \beta$ | |
| 6. | $h \beta : (\Pi x : S . P x \rightarrow \beta) \rightarrow \beta$ | 2,4 App |
| 7. | $a : S$ | |
| 8. | $n : P a$ | |
| 9. | $p a : P a \rightarrow Q a$ | 3,7 App |
| 10. | $p a n : Q a$ | 9,8 App |
| 11. | $r a : Q a \rightarrow \beta$ | 5,7 App |
| 12. | $r a (p a n) : \beta$ | 11,10 App |
| 13. | $\lambda n : P a . r a (p a n) : P a \rightarrow \beta$ | 12 Abst |
| 14. | $\lambda a : S . \lambda n : P a . r a (p a n) : \Pi a . P a \rightarrow \beta$ | 13 Abst |
| 15. | $h \beta(\lambda a : S . \lambda n : P a . r a (p a n)) : \beta$ | 6,14 App |
| | $\lambda r : \Pi z : S . Q z \rightarrow \beta.$ | |
| | $h \beta(\lambda a : S . \lambda n : P a . r a (p a n))$ | |
| 16. | $: (\Pi z : S . Q z \rightarrow \beta) \rightarrow \beta$ | 15 Abst |
| | $\lambda \beta : * . \lambda r : \Pi z : S . Q z \rightarrow \beta.$ | |
| | $h \beta(\lambda a : S . \lambda n : P a . r a (p a n))$ | |
| 17. | $: \exists z : S . P z$ | 16 Abst |
| | $\lambda p : \Pi y : S . P y \rightarrow Q y .$ | |
| | $\lambda \beta : * . \lambda r : \Pi z : S . Q z \rightarrow \beta.$ | |
| | $h \beta(\lambda a : S . \lambda n : P a . r a (p a n))$ | |
| 18. | $: (\Pi y : S . P y \rightarrow Q y) \rightarrow \exists z : S . P z$ | 17 Abst |
| | $\lambda h : \exists x : S . P x . \lambda p : \Pi y : S . P y \rightarrow Q y .$ | |
| | $\lambda \beta : * . \lambda r : \Pi z : S . Q z \rightarrow \beta.$ | |
| | $h \beta(\lambda a : S . \lambda n : P a . r a (p a n))$ | |
| 19. | $: (\exists x : S . P x) \rightarrow (\Pi y : S . P y \rightarrow Q y) \rightarrow \exists z : S . P z$ | 18 Abst |

■

Problem

(7.14) Let $\Gamma \equiv S : *, P : S \rightarrow *, Q : S \rightarrow *$. Consider the following term

$$M \equiv \lambda u : (\exists x : S . P x \wedge Q x) . \lambda \alpha : * . \lambda v : (\Pi x : S . P x \rightarrow \alpha) .$$

$$u \alpha (\lambda y : S . \lambda w : (P y \wedge Q y) . v y (w (P y) (\lambda s : P y . \lambda t : Q y . s)))$$

Type M by a derivation and give the corresponding proposition proved by M .

Solution.

| | | |
|-----|--|-----------|
| 1. | $S : *, P : S \rightarrow *, Q : S \rightarrow *$ | |
| 2. | $u : \exists x : S . P x \wedge Q x$ | |
| 3. | $\alpha : *$ | |
| 4. | $v : \Pi x : S . P x \rightarrow \alpha$ | |
| 5. | $u \alpha : (\Pi x : S . (P x \wedge Q x) \rightarrow \alpha) \rightarrow \alpha$ | 2,3 App |
| 6. | $y : S$ | |
| 7. | $w : P y \wedge Q y$ | |
| 8. | $v y : P y \rightarrow \alpha$ | 4,6 App |
| 9. | $P y : *$ | 1,6 App |
| 10. | $w (P y) : (P y \rightarrow Q y \rightarrow P y) \rightarrow P y$ | 7,9 App |
| 11. | $s : P y$ | |
| 12. | $t : Q y$ | |
| 13. | $s : P y$ | |
| 14. | $\underline{\lambda t : Q y . s : Q y \rightarrow P y}$ | 13 Abst |
| 15. | $\lambda s : P y . \lambda t : Q y . s : P y \rightarrow Q y \rightarrow P y$ | 14 Abst |
| 16. | $w (P y) (\lambda s : P y . \lambda t : Q y . s) : P y$ | 10,15 App |
| 17. | $\lambda w : P y \wedge Q y . w (P y) (\lambda s : P y . \lambda t : Q y . s)$ $: P y \wedge Q y \rightarrow P y$ | 16 Abst |
| 18. | $\lambda y : S . \lambda w : P y \wedge Q y . w (P y) (\lambda s : P y . \lambda t : Q y . s)$ $: \Pi y : S . P y \wedge Q y \rightarrow P y$ | 17 Abst |
| 19. | $u \alpha (\lambda y : S . \lambda w : P y \wedge Q y . w (P y) (\lambda s : P y . \lambda t : Q y . s))$ $: \alpha$ | 5,18 App |
| 20. | $\lambda v : \Pi x : S . P x \rightarrow \alpha$ $u \alpha (\lambda y : S . \lambda w : P y \wedge Q y . w (P y) (\lambda s : P y . \lambda t : Q y . s))$ $: (\Pi x : S . P x \rightarrow \alpha) \rightarrow \alpha$ | 19 Abst |

| | |
|-----|--|
| | $\lambda\alpha : * . \lambda v : \Pi x : S . P x \rightarrow \alpha.$ |
| | $u \alpha(\lambda y : S . \lambda w : P y \wedge Q y . w (P y)(\lambda s : P y . \lambda t : Q y . s))$ |
| 21. | $: \exists x : S . P x$ |
| | <hr/> |
| | $\lambda u : \exists x : S . P x \wedge Q x . \lambda\alpha : * . \lambda v : \Pi x : S . P x \rightarrow \alpha.$ |
| | $u \alpha(\lambda y : S . \lambda w : P y \wedge Q y . w (P y)(\lambda s : P y . \lambda t : Q y . s))$ |
| 22. | $: \exists x : P x \wedge Q x \rightarrow \exists x : S . P x$ |
| | <hr/> |
| | 20 Abst |
| | 21 Abst |

This encodes the tautology that for any set S and predicates P and Q over them, the existence of a witness in S satisfying both P and Q implies the existence of a witness satisfying P . That is,

$$(\exists x \in S, P(x) \wedge Q(x)) \Rightarrow (\exists x \in S, P(x))$$

—

Completed Jan 10 2:34 am.