Exercises

Chapter 7

Sean Li [1]

1. Redacted

Reference - Propositional Logic in λC

$$\frac{A \qquad \neg\, A}{\bot}\ \bot\text{I or }\neg\text{E} \qquad \frac{\bot}{A}\ \bot\text{E} \qquad \frac{A \qquad B}{A \wedge B}\ \wedge\text{I} \qquad \frac{A \wedge B}{A}\ \wedge\text{EL} \qquad \frac{A \wedge B}{B}\ \wedge\text{ER}$$

$$\frac{a}{a \vee b}\ \vee\text{IL} \qquad \frac{b}{a \vee b}\ \vee\text{IR} \qquad \frac{A \Rightarrow B \qquad A}{B}\ \Rightarrow\text{E}$$

$$\frac{A \vee B \qquad A \to C \qquad B \to C}{C}\ \vee\text{E} \qquad \frac{a \in S \qquad P\,(a)}{\exists a \in S, P\,(a)}\ \exists\text{I} \qquad \frac{\begin{array}{ll} 1. & A \\ 2. & \quad \ldots \\ 3. & \quad \bot \end{array}}{\neg\, A}\ \neg\text{I}$$

$$\frac{\begin{array}{ll} 1. & A \\ 2. & \quad \ldots \\ 3. & \quad B \end{array}}{A \Rightarrow B}\ \Rightarrow\text{I} \qquad \frac{\begin{array}{ll} 1. & a \in S \\ 2. & \quad \ldots \\ 3. & \quad P\,(a) \end{array}}{\forall a \in S, P\,(a)}\ \forall I$$

$$\frac{\exists x \in S, P\,(x) \qquad \forall x \in S, (P\,(x) \Rightarrow A)}{A}\ \exists\text{E} \qquad \frac{a \in S \qquad \forall x \in S, P\,(x)}{P\,(a)}\ \forall\text{E}$$

$$\frac{}{\neg\neg\, A \Rightarrow A}\ \text{DN (Classical)} \qquad \frac{}{A \vee \neg\, A}\ \text{ET (Classical)}$$

Reference - 2nd Encoding for Propositional Logic

Proposition	**Minimal Propositional Logic**
$\bot$	$\forall A, A$
$A \Rightarrow B$	$A \Rightarrow B$
$\neg A$	$A \Rightarrow \bot$
$A \wedge B$	$\forall C, (A \Rightarrow B \Rightarrow C) \Rightarrow C$
$A \vee B$	$\forall C, (A \Rightarrow C) \Rightarrow (B \Rightarrow C) \Rightarrow C$
$\forall a \in S, P\,(a)$	$\forall a \in S\,.\,P\,(a)$
$\exists a \in S, P\,(a)$	$\forall \alpha, (\forall a \in S, (P\,(a) \Rightarrow \alpha)) \Rightarrow \alpha$

Problem

(7.1 a) Prove in natural deduction and λC the tautology

$$B \Rightarrow (A \Rightarrow B)$$

Solution.

Natural Deduction.

1.	B	
2.	$\quad A$	
3.	$\quad\quad B$	
4.	$\quad A \Rightarrow B$	$\Rightarrow$**I**
5.	$B \Rightarrow (A \Rightarrow B)$	$\Rightarrow$**I**

■

λC. Assuming context $\Gamma \equiv A : *, B : *$. By the PAT paradigm the proof is equivalent to an inhabitant of $B \to A \to B$.

1.	$A : *, B : *$	
2.	$\quad x : B$	
3.	$\quad\quad y : A$	
4.	$\quad\quad\quad x : B$	**Weak**
5.	$\quad\quad \lambda y : A\,.\,x : A \to B$	**4 Abst**
6.	$\quad \lambda x : B\,.\lambda y : A\,.\,x : B \to A \to B$	**5 Abst**

■

Problem

(7.1 b) Prove in natural deduction and λC the tautology

$$\neg A \Rightarrow (A \Rightarrow B)$$

Solution.

Natural Deduction.

1. $\neg A$
2. $\quad A$
3. $\quad\quad \neg A$
4. $\quad\quad A$
5. $\quad\quad \bot$ — $\bot$**I**
6. $\quad\quad B$ — $\bot$**E**
7. $\quad A \Rightarrow B$ — $\Rightarrow$**I**
8. $\neg A \Rightarrow (A \Rightarrow B)$ — $\Rightarrow$**I**

$\blacksquare$

λC. Assuming context $\Gamma \equiv A : *, B : *$. By the PAT paradigm the proof is equivalent to an inhabitant of $(A \to \bot) \to A \to B$.

1. $A : *, B : *$
2. $\quad x : \neg A$
3. $\quad\quad y : A$
4. $\quad\quad\quad x\ y : \Pi\alpha : * \,.\, \alpha$ — **2,3 App (Neg Elim)**
5. $\quad\quad\quad x\ y\ B : B$ — **4,1 App (Ex Falso)**
6. $\quad\quad \lambda y : A \,.\, x\ y\ B : A \to B$ — **5 Abst**
7. $\quad \lambda x : \neg A \,.\lambda y : A \,.\, x\ y\ B : \neg A \to A \to B$ — **6 Abst**

$\blacksquare$

Problem

(7.1 c) Prove in natural deduction and λC the tautology

$$(A \Rightarrow \neg B) \Rightarrow ((A \Rightarrow B) \Rightarrow \neg A)$$

Solution.

Natural Deduction.

1.	$A \Rightarrow \neg B$	
2.	$A \Rightarrow B$	
3.	A	
4.	$\neg B$	**1,3 $\Rightarrow$E**
5.	B	**2,3 $\Rightarrow$E**
6.	$\bot$	**5,4 $\bot$I**
7.	$\neg A$	**3-6 $\neg$I**
8.	$(A \Rightarrow B) \Rightarrow \neg A$	**2-7 $\Rightarrow$I**
9.	$(A \Rightarrow \neg B) \Rightarrow ((A \Rightarrow B) \Rightarrow \neg A)$	**1-8 $\Rightarrow$I**

■

λC. Assuming context $\Gamma \equiv A : *, B : *$. The proof should be equivalent to an inhabitant of $(A \to B \to \bot) \to (A \to B) \to A \to \bot$.

1.	$A : *, B : *$	
2.	$h : A \to \neg B$	
3.	$q : A \to B$	
4.	$a : A$	
5.	$q\,a : B$	**3,4 App**
6.	$h\,a : B \to \bot$	**2,4 App**
7.	$h\,a\,(q\,a) : \bot$	**6,5 App (Neg Elim)**
8.	$\lambda a : A\,.\,h\,a\,(q\,a) : \neg A$	**7 Abst (Neg Intro)**
9.	$\lambda q : A \to B\,.\lambda a : A\,.\,h\,a\,(q\,a) : A \to B \to \neg A$	**8 Abst**
10.	$\lambda h : A \to \neg B\,.\lambda q : A \to B\,.\lambda a : A\,.\,h\,a\,(q\,a)$ $: (A \to \neg B) \to A \to B \to \neg A$	**9 Abst**

■

Problem

(7.1 d) Prove in natural deduction and λC the tautology

$$\neg(A \Rightarrow B) \Rightarrow \neg B$$

Solution.

Natural Deduction.

1.	$\neg(A \Rightarrow B)$	
2.	$\quad B$	
3.	$\quad\quad A$	
4.	$\quad\quad\quad B$	
5.	$\quad\quad A \Rightarrow B$	**3-4 ⇒I**
6.	$\quad\quad \bot$	**5,1 ⊥I**
7.	$\quad \neg B$	**2-6 ¬I**
8.	$\neg(A \Rightarrow B) \Rightarrow \neg B$	**1-7 ⇒I**

∎

λC. Assuming context $\Gamma \equiv A : *, B : *$. The proof should be equivalent to an inhabitant of $((A \to B) \to \bot) \to B \to \bot$.

1.	$n : \neg(A \to B)$	
2.	$\quad b : B$	
3.	$\quad\quad a : A$	
4.	$\quad\quad\quad b : B$	**Weak**
5.	$\quad\quad \lambda a : A \,.\, b : A \to B$	**4 Abst**
6.	$\quad\quad n\ (\lambda a : A \,.\, b) : \bot$	**1,5 App (Neg Elim)**
7.	$\quad \lambda b : B \,.\, n\ (\lambda a : A \,.\, b) : \neg B$	**6 Abst (Neg Intro)**
8.		

$\lambda n : \neg(A \to B).\lambda b : B \,.\, n\ (\lambda a : A \,.\, b)$
$\quad : \neg(A \to B) \to \neg B$ **7 Abst**

∎

Problem

(7.2) Formulate the double negation law as an axiom in λC, and prove the following tautology in λC with DN.

$$(\neg A \Rightarrow A) \Rightarrow A$$

Solution. The rule

$$\frac{}{\neg\neg A \Rightarrow A}\ \text{DN-E}$$

Could be translated into lambda calculus as

$$\Pi A : * \,.((A \to \bot) \to \bot) \to A$$

Proof. Assume context $\Gamma \equiv A : *$.

1. $A : *$
2. $h : \neg A \to A$
3. $x : \neg A$
4. $h\ x : A$ **2,3 App**
5. $x\ (h\ x) : \bot$ **3,4 App (Contradiction)**
6. $\lambda x : \neg A \,.\, x\ (h\ x) : \neg\neg A$ **5 Abst (Neg Intro)**
7. $\mathrm{DN}\ A : \neg\neg A \to A$ **1,1 App**
8. $\mathrm{DN}\ A\ (\lambda x : \neg A \,.\, x\ (h\ x)) : A$ **App (Axiom DN)**
9. $\lambda h : \neg A \to A \,.\, \mathrm{DN}\ A\ (\lambda x : \neg A \,.\, x\ (h\ x))$ $: (\neg A \to A) \to A$ **8 Abst**

■

Problem

(7.3 a) Prove the following tautology in classical logic using λC

$$(A \Rightarrow B) \Rightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$$

Solution. Assume context $\Gamma \equiv A : *, B : *$. It suffices the proof to find an inhabitant of type

$$(A \to B) \to (\neg B \to \neg A)$$

Proof.

1. $A : *, B : *$
2. $h : A \to B$
3. $b : \neg B$
4. $a : A$
5. $h\ a : B$ **5,2 App**
6. $b\ (h\ a) : \bot$ **6,3 App (Contradiction)**
7. $b\ (h\ a)(\neg A) : \neg A$ **7,5 App (Ex Falso)**
8. $\lambda a : A \,.\, b\ (h\ a)(\neg A) : A \to \neg A$ **7 Abst**
9. $a : \neg A$
10. $a : \neg A$ **Var**
11. $\lambda a : \neg A \,.\, a : (\neg A \to \neg A)$ **10 Abst**

12.	$\mathrm{ET}\, A : A \vee \neg A$	**App (Axiom ET)**
13.	$\mathrm{ET}\, A\, (\neg A) : (A \to \neg A) \to$ $(\neg A \to \neg A) \to \neg A$	**12 App**
14.	$\mathrm{ET}\, A\, (\neg A)(\lambda a : A\, .\, b\, (h\, a)(\neg A)) :$ $(\neg A \to \neg A) \to \neg A$	**13,8 App**
15.	$\mathrm{ET}\, A\, (\neg A)$ $(\lambda a : A\, .\, b\, (h\, a)(\neg A))$ $(\lambda a : \neg A\, .\, a) : \neg A$	**14,11 App**
16.	$\lambda b : \neg B\, .\, \mathrm{ET}\, A\, (\neg A)$ $(\lambda a : A\, .\, b\, (h\, a)(\neg A))$ $(\lambda a : \neg A\, .\, a) : \neg B \to \neg A$	**15 Abst**
17.	$\lambda h : A \to B\, .\lambda b : \neg B\, .\, \mathrm{ET}\, A\, (\neg A)$ $(\lambda a : A\, .\, b\, (h\, a)(\neg A))$ $(\lambda a : \neg A\, .\, a) :$ $(A \to B) \to \neg B \to \neg A$	**16 Abst**

■

Problem

(7.3 b) Prove the following tautology in classical logic using λC

$$(\neg B \Rightarrow \neg A) \Rightarrow (A \Rightarrow B)$$

Solution. Assume context $\Gamma \equiv A : *, B : *$. It suffices the proof to find an inhabitant of type

$$(\neg B \to \neg A) \to A \to B$$

Proof.

1.	$A : *, B : *$	
2.	$h : \neg B \to \neg A$	
3.	$a : A$	
4.	$b : B$	
5.	$b : B$	**Weak**
6.	$\lambda b : B\, .\, b : B \to B$	
7.	$b : \neg B$	

8. $h\,b : \neg\, A$ **2,7 App**
9. $h\,b\,a : \bot$ **8,2 App (Neg Elim)**
10. $h\,b\,a\,B : B$ **9 App (Ex Falso)**
11. $\lambda b : \neg\, B \,.\, h\,b\,a\,B : \neg\, B \to B$ **10 Abst**
12. $\mathrm{ET}\; B : B \vee \neg\, B$ **1 App (Axiom ET)**
13. $\mathrm{ET}\; B\; B : (B \to B) \to (\neg\, B \to B) \to B$ **12,1 App**
14. $\mathrm{ET}\; B\; B\; (\lambda b : B \,.\, b) : (\neg\, B \to B) \to B$ **13,6 App**
15. $\mathrm{ET}\; B\; B\; (\lambda b : B \,.\, b)(\lambda b : \neg\, B \,.\, h\,b\,a\,B) : B$ **14,11 App**
16. $\lambda a : A \,.\mathrm{ET}\; B\; B\; (\lambda b : B \,.\, b)\; (\lambda b : \neg\, B \,.\, h\,b\,a\,B) : A \to B$ **15 Abst**
17. $\lambda h : \neg\, B \to \neg\, A \,.\lambda a : A \,.\; \mathrm{ET}\; B\; B\; (\lambda b : B \,.\, b)(\lambda b : \neg\, B \,.\, h\,b\,a\,B) : (\neg\, B \to \neg\, A) \to A \to B$ **16 Abst**

■

Problem

(7.4) Derive $\wedge$-**EL** and $\wedge$-**ER** in λC.

Solution. The derivation is the same as proving

$$M : \Pi C \,.(A \to B \to C) \to C \vdash N_1 : A$$
$$M : \Pi C \,.(A \to B \to C) \to C \vdash N_2 : B$$

Left Projection.

1. $M : \Pi C \,.(A \to B \to C) \to C$
2. $M\; A : (A \to B \to A) \to A$
3. $x : A$
4. $b : B$
5. $x : A$ **Weak**
6. $\lambda b : B \,.\, x : B \to A$ **5 Abst**
7. $\lambda x : A \,.\lambda b : B \,.\, x : A \to B \to A$ **6 Abst**
8. $N_1 \equiv M\; A\; (\lambda x : A \,.\lambda b : B \,.\, x) : A$ **2,7 App**

■

Right Projection.

1.	$M : \Pi C\,.(A \to B \to C) \to C$	
2.	$M\ B : (A \to B \to B) \to B$	
3.	$x : A$	
4.	$b : B$	
5.	$b : B$	**Weak**
6.	$\lambda b : B\,.\,b : B \to B$	**5 Abst**
7.	$\lambda x : A\,.\lambda b : B\,.\,b : A \to B \to B$	**6 Abst**
8.	$N_2 \equiv M\ B\,(\lambda x : A\,.\lambda b : B\,.\,b) : B$	**2,7 App**

■

Problem

(7.5 a) Prove tautology under classical logic

$$\neg(A \Rightarrow B) \Rightarrow A$$

Solution. Assume context $\Gamma \equiv A : *, B : *$. Therefore the proof suffices to find an inhabitant of

$$((A \to B) \to \bot) \to A$$

Proof.

1.	$A : *, B : *$	
2.	$h : \neg(A \to B)$	
3.	$a : A$	
4.	$a : A$	**Weak**
5.	$\lambda a : A\,.\,a : A \to A$	**4 Abst**
6.	$a : \neg\, A$	
7.	$n : A$	
8.	$a\ n : \bot$	**6,7 App (Contradiction)**
9.	$a\ n\ B : B$	**8 App (Ex Falso)**
10.	$\lambda n : A\,.\,a\ n\ B : A \to B$	**9 Abst**
11.	$h\ (\lambda n : A\,.\,a\ n\ B) : \bot$	**10,2 App (Contra.)**
12.	$h\ (\lambda n : A\,.\,a\ n\ B)\ A : A$	**11 App (Ex Falso)**
	$\lambda a : \neg\, A\,.\,h\ (\lambda n : A\,.\,a\ n\ B)\ A$	
13.	$: \neg\, A \to A$	**12 Abst**
14.	$\mathrm{ET} : \Pi S : *\,.\,S \vee \neg\, S$	**Axiom ET**

15.	$\mathrm{ET}\ A : A \vee \neg A$	**14,1 App**
16.	$\mathrm{ET}\ A\ A : (A \to A) \to (\neg A \to A) \to A$	**15,1 App**
17.	$\mathrm{ET}\ A\ A\ (\lambda a : A\,.\,a)$ $: (\neg A \to A) \to A$	**16,5 App**
18.	$\mathrm{ET}\ A\ A\ (\lambda a : A\,.\,a)$ $(\lambda a : \neg A\,.\,h\ (\lambda n : A\,.\,a\ n\ B)\ A) : A$	**17,13 App**
19.	$\lambda h : \neg(A \to B).\ \mathrm{ET}\ A\ A\ (\lambda a : A\,.\,a)$ $(\lambda a : \neg A\,.\,h\ (\lambda n : A\,.\,a\ n\ B)\ A)$ $: \neg(A \to B) \to A$	**18 Abst**

■

Problem

(7.5 b) Prove tautology under classical logic

$$\neg(A \Rightarrow B) \Rightarrow (A \wedge \neg B)$$

Solution. Assume context $\Gamma \equiv A : *, B : *$. Therefore the proof suffices to find an inhabitant of

$$((A \to B) \to \bot) \to \Pi C : *\,.((A \to (B \to \bot) \to C) \to C)$$

Proof.

1.	$A : *, B : *$	
2.	$p : \neg(A \to B)$	
3.	$C : *$	
4.	$h : A \to \neg B \to C$	
5.	$hb : B$	
6.	$ha : A$	
7.	$hb : B$	**Weak**
8.	$\lambda ha : A\,.\,hb : A \to B$	**7 Abst**
9.	$p\ (\lambda ha : A\,.\,hb) : \bot$	**2,8 App (Contra.)**
10.	$\lambda hb : B\,.\,p\ (\lambda ha : A\,.\,hb) : \neg B$	**9 Abst (Neg Intro)**
11.	$hna : \neg A$	
12.	$ha' : A$	
13.	$hna\ ha' : \bot$	**11,12 App (Contra.)**

14.	$hna\ ha'\ B : B$	**13,1 App (Ex Falso)**
15.	$\lambda ha' : A\ .\ hna\ ha'\ B : A \to B$	**14 Abst**
16.	$p\ (\lambda ha' : A\ .\ hna\ ha'\ B) : \bot$	**2,15 App (Contra.)**
17.	$p\ (\lambda ha' : A\ .\ hna\ ha'\ B)\ A : A$	**2,15 App (Contra.)**
	$\lambda hna : \neg\, A\ .\ p$	
	$\quad (\lambda ha' : A\ .\ hna\ ha'\ B)\ A$	
18.	$\qquad : \neg\, A \to A$	**17 Abst**
19.	$ha'' : A$	
20.	$ha'' : A$	**Var**
21.	$\lambda ha'' : A\ .ha'' : A \to A$	**20 Abst**
22.	$\mathrm{ET} : \Pi S : *\ .\ S \vee \neg\, S$	**Axiom ET**
23.	$\mathrm{ET}\ A : A \vee \neg\, A$	**22,1 App**
24.	$\mathrm{ET}\ A\ A : (A \to A) \to (\neg\, A \to A) \to A$	**23,1 App**
	$\mathrm{ET}\ A\ A$	
	$\quad (\lambda ha'' : A\ .ha'')$	
25.	$\qquad : (\neg\, A \to A) \to A$	**24,21 App**
	$\mathrm{ET}\ A\ A$	
	$\quad (\lambda ha'' : A\ .ha'')$	
	$\quad (\lambda hna : \neg\, A\ .\ p$	
26.	$\qquad (\lambda ha' : A\ .\ hna\ ha'\ B)\ A) : A$	**25,18 App**
	$h\ (\mathrm{ET}\ A\ A$	
	$\quad (\lambda ha'' : A\ .ha'')$	
	$\quad (\lambda hna : \neg\, A\ .\ p$	
	$\qquad (\lambda ha' : A\ .\ hna\ ha'\ B)\ A))$	
27.	$\qquad\quad : \neg\, B \to C$	**4,26 App**
	$h\ (\mathrm{ET}\ A\ A$	
	$\quad (\lambda ha'' : A\ .ha'')$	
	$\quad (\lambda hna : \neg\, A\ .\ p$	
	$\qquad (\lambda ha' : A\ .\ hna\ ha'\ B)\ A))$	
28.	$\quad (\lambda hb : B\ .\ p\ (\lambda ha : A\ .\ hb)) : C$	**27,10 App**

$$\lambda h : A \to \neg B \to C \,.\, h\,(\text{ET}\ A\ A$$
$$(\lambda ha'' : A \,.ha'')$$
$$(\lambda hna : \neg A \,.\, p\,(\lambda ha' : A \,.\, hna\ ha'\ B)\ A))$$
$$(\lambda hb : B \,.\, p\,(\lambda ha : A \,.\, hb))$$
29. $$: (A \to \neg B \to C) \to C$$ **28 Abst**

$$\lambda C : * \,.\lambda h : A \to \neg B \to C \,.$$
$$h\,(\text{ET}\ A\ A$$
$$(\lambda ha'' : A \,.ha'')$$
$$(\lambda hna : \neg A \,.\, p\,(\lambda ha' : A \,.\, hna\ ha'\ B)\ A))$$
30. $$(\lambda hb : B \,.\, p\,(\lambda ha : A \,.\, hb)) : A \wedge \neg B$$ **29 Abst**

$$\lambda p : \neg(A \to B).$$
$$\lambda C : * \,.\lambda h : A \to \neg B \to C \,.$$
$$h\,(\text{ET}\ A\ A$$
$$(\lambda ha'' : A \,.ha'')$$
$$(\lambda hna : \neg A \,.\, p\,(\lambda ha' : A \,.\, hna\ ha'\ B)\ A))$$
$$(\lambda hb : B \,.\, p\,(\lambda ha : A \,.\, hb))$$
31. $$: \neg(A \to B) \to (A \wedge \neg B)$$ **30 Abst**

■

Problem

(7.6 a) Verify that the following expressions is a tautology in constructive logic

$$\neg A \Rightarrow \neg(A \wedge B)$$

Solution. Suppose context $A : *, B : *$. The proof suffices to give a inhabitant of type

$$\neg A \to \neg(A \wedge B) \equiv (A \to \bot) \to (\Pi C : * \,.(A \to B \to C) \to C) \to \bot$$

Proof.

1. $A : *, B : *$
2. $na : \neg A$
3. $h : \Pi C : * \,.(A \to B \to C) \to C$
4. $h\ A : (A \to B \to A) \to A$ **3,1 App**
5. $ha : A$
6. $hb : B$

7.	$ha : A$	
8.	$\lambda hb : B \,.\, ha : B \to A$	**7 Abst**
9.	$\lambda ha : A \,.\lambda hb : B \,.\, ha : A \to B \to A$	**8 Abst**
10.	$h\ A\ (\lambda ha : A \,.\lambda hb : B \,.\, ha) : A$	**4,9 App**
11.	$na\ (h\ A\ (\lambda ha : A \,.\lambda hb : B \,.\, ha)) : \perp$	**2,10 App (Contradiction)**
12.	$\lambda h : A \wedge B \,.$ $na\ (h\ A\ (\lambda ha : A \,.\lambda hb : B \,.\, ha))$ $: A \wedge B \to \perp$	**11 Abst**
13.	$\lambda na : \neg A \,.\lambda h : A \wedge B \,.$ $na\ (h\ A\ (\lambda ha : A \,.\lambda hb : B \,.\, ha))$ $: \neg A \to \neg(A \wedge B)$	**12 Abst**

■

Problem

(7.6 b) Verify that the following expressions is a tautology in constructive logic

$$\neg(A \wedge \neg A)$$

Solution. Suppose context $A : *, B : *$. The proof suffices to give a inhabitant of type

$$(\Pi S : * \,.(A \to (A \to \perp) \to S) \to S) \to \perp$$

Proof.

1.	$A : *, B : *, \perp : \square$	
2.	$h : \Pi S : * \,.(A \to \neg A \to S) \to S$	
3.	$h \perp : (A \to \neg A \to \perp) \to \perp$	**2,1 App**
4.	$a : A$	
5.	$n : \neg A$	
6.	$n\ a : \perp$	**5,4 App**
7.	$\lambda n : \neg A \,.\, n\ a : \neg A \to \perp$	**6 Abst**
8.	$\lambda a : A \,.\lambda n : \neg A \,.\, n\ a : A \to \neg A \to \perp$	**7 Abst**
9.	$h \perp (\lambda a : A \,.\lambda n : \neg A \,.\, n\ a) : \perp$	**3,8 App**
10.	$\lambda h : A \wedge \neg A \,.\, h \perp (\lambda a : A \,.\lambda n : \neg A \,.\, n\ a) : A \wedge \neg A \to \perp$	**9 Abst**

■

Problem

(7.7) Derive $\vee$-**IL** and $\vee$-**IR**.

Solution. The derivation is the same as proving

$$m : A, B : * \vdash N : \Pi C\,.(A \to C) \to (B \to C) \to C$$

$$m : B, A : * \vdash N : \Pi C\,.(A \to C) \to (B \to C) \to C$$

Left Introduction.

1. $m : A, B : *$
2. $C : *$
3. $hl : A \to C$
4. $hr : B \to C$
5. $hl\,m : C$ — **3,1 App**
6. $\lambda hr : B \to C\,.\,hl\,m : (B \to C) \to C$ — **5 Abst**
7. $\lambda hl : A \to C\,.\lambda hr : B \to C\,.\,hl\,m : (A \to C) \to (B \to C) \to C$ — **6 Abst**
8. $\lambda C : *\,.\lambda hl : A \to C\,.\lambda hr : B \to C\,.\,hl\,m : \Pi C : *\,.(A \to C) \to (B \to C) \to C$ — **7 Abst**

■

Right Introduction.

1. $m : B, A : *$
2. $C : *$
3. $hl : A \to C$
4. $hr : B \to C$
5. $hr\,m : C$ — **4,1 App**
6. $\lambda hr : B \to C\,.\,hr\,m : (B \to C) \to C$ — **5 Abst**
7. $\lambda hl : A \to C\,.\lambda hr : B \to C\,.\,hr\,m : (A \to C) \to (B \to C) \to C$ — **6 Abst**
8. $\lambda C : *\,.\lambda hl : A \to C\,.\lambda hr : B \to C\,.\,hr\,m : \Pi C : *\,.(A \to C) \to (B \to C) \to C$ — **7 Abst**

■

Problem

(7.8 a) Give λC derivations verifying the intuitionistic tautology below

$$(A \vee B) \Rightarrow (B \vee A)$$

Solution.

Proof.

1. $A : *, B : *$
2. $\quad h : A \vee B$
3. $\quad\quad C : *$
4. $\quad\quad\quad hb : B \to C$
5. $\quad\quad\quad\quad ha : A \to C$
6. $\quad\quad\quad\quad\quad h\, C : (A \to C) \to (B \to C) \to C$ — **2,3 App**
7. $\quad\quad\quad\quad\quad h\, C\, ha : (B \to C) \to C$ — **6,5 App**
8. $\quad\quad\quad\quad\quad h\, C\, ha\, hb : C$ — **7,4 App**
9. $\quad\quad\quad\quad \lambda ha : A \to C\, .\, h\, C\, ha\, hb : (A \to C) \to C$ — **8 Abst**
10. $\quad\quad\quad \lambda hb : B \to C\, .\lambda ha : A \to C\, .\ h\, C\, ha\, hb : (B \to C) \to (A \to C) \to C$ — **9 Abst**
11. $\quad\quad \lambda C : *\, .\lambda hb : B \to C\, .\lambda ha : A \to C\, .\ h\, C\, ha\, hb : \Pi C : *\, .(B \to C) \to (A \to C) \to C$ — **10 Abst**
12. $\quad \lambda h : A \vee B\, .\lambda C : *\, .\lambda hb : B \to C\, .\lambda ha : A \to C\ h\, C\, ha\, hb : A \vee B \to B \vee A$ — **11 Abst**

■

Problem

(7.8 b) Give λC derivations verifying the intuitionistic tautology below

$$\neg(A \vee B) \Rightarrow (\neg\, A \wedge \neg\, B)$$

Solution.

Proof.

1. $A : *, B : *, \bot : \square$
2. $\quad h : \neg(\Pi S : *\, .(A \to S) \to (B \to S) \to S)$

3.	$C : *$	
4.	$p : (\neg A \to \neg B \to C)$	
5.	$a : A$	
6.	$C : *$	
7.	$ha : A \to C$	
8.	$hb : B \to C$	
9.	$ha\, a : C$	**7,5 App**
10.	$\lambda hb : B \to C\, .\, ha\, a : (B \to C) \to C$	**9 Abst**
11.	$\lambda ha : A \to C\, .\lambda hb : B \to C\, .\, ha\, a$ $: (A \to C) \to (B \to C) \to C$	**10 Abst**
12.	$\lambda C : *\, .\lambda ha : A \to C\, .\lambda hb : B \to C\, .\, ha\, a$ $: \Pi C : *\, .(A \to C) \to (B \to C) \to C$	**11 Abst**
13.	$h\, (\lambda C : *\, .\lambda ha : A \to C\, .\lambda hb : B \to C\, .\, ha\, a) : \bot$	**2,12 App (Contr.)**
14.	$\lambda a : A\, .\, h$ $(\lambda C : *\, .\lambda ha : A \to C\, .\lambda hb : B \to C\, .\, ha\, a) : \neg A$	**13 Abst (Neg I)**
15.	$b : B$	
16.	$C : *$	
17.	$ha : A \to C$	
18.	$hb : B \to C$	
19.	$hb\, b : C$	**18,15 App**
20.	$\lambda hb : B \to C\, .\, hb\, b : (B \to C) \to C$	**19 Abst**
21.	$\lambda ha : A \to C\, .\lambda hb : B \to C\, .\, hb\, b$ $: (A \to C) \to (B \to C) \to C$	**20 Abst**
22.	$\lambda C : *\, .\lambda ha : A \to C\, .\lambda hb : B \to C\, .\, hb\, b$ $: \Pi C : *\, .(A \to C) \to (B \to C) \to C$	**21 Abst**
23.	$h\, (\lambda C : *\, .\lambda ha : A \to C\, .\lambda hb : B \to C\, .\, hb\, b) : \bot$	**2,22 App (Contr.)**
24.	$\lambda b : B\, .\, h$ $(\lambda C : *\, .\lambda ha : A \to C\, .\lambda hb : B \to C\, .\, hb\, b) : \neg B$	**23 Abst (Neg I)**
25.	$p\, (\lambda a : A\, .\, h$ $(\lambda C : *\, .\lambda ha : A \to C\, .\lambda hb : B \to C\, .\, ha\, a))$ $: \neg B \to C$	**4,14 App**
26.	$p\, (\lambda a : A\, .\, h$ $(\lambda C : *\, .\lambda ha : A \to C\, .\lambda hb : B \to C\, .\, ha\, a))$ $(\lambda b : B\, .\, h$ $(\lambda C : *\, .\lambda ha : A \to C\, .\lambda hb : B \to C\, .\, hb\, b)) : C$	**25,24 App**

$$\lambda p : \neg A \to \neg B \to C \,.\, p$$
$$(\lambda a : A \,.\, h$$
$$(\lambda C : * \,.\lambda ha : A \to C \,.\lambda hb : B \to C \,.\; ha\, a))$$
$$(\lambda b : B \,.\, h$$
$$(\lambda C : * \,.\lambda ha : A \to C \,.\lambda hb : B \to C \,.\; hb\, b))$$

27. $: (\neg A \to \neg B \to C) \to C$ **26 Abst**

$$\lambda C : * \,.\lambda p : \neg A \to \neg B \to C \,.\, p$$
$$(\lambda a : A \,.\, h$$
$$(\lambda C : * \,.\lambda ha : A \to C \,.\lambda hb : B \to C \,.\; ha\, a))$$
$$(\lambda b : B \,.\, h$$
$$(\lambda C : * \,.\lambda ha : A \to C \,.\lambda hb : B \to C \,.\; hb\, b))$$

28. $: \Pi C : * \,.(\neg A \to \neg B \to C) \to C$ **27 Abst**

$$\lambda h : \neg(A \vee B).\lambda C : * \,.\lambda p : \neg A \to \neg B \to C \,.\, p$$
$$(\lambda a : A \,.\, h$$
$$(\lambda C : * \,.\lambda ha : A \to C \,.\lambda hb : B \to C \,.\; ha\, a))$$
$$(\lambda b : B \,.\, h$$
$$(\lambda C : * \,.\lambda ha : A \to C \,.\lambda hb : B \to C \,.\; hb\, b))$$

29. $: \neg(A \vee B) \to (\neg A \wedge \neg B)$ **28 Abst**

∎

Problem

(7.8 c) Give λC derivations verifying the intuitionistic tautology below

$$(\neg A \wedge \neg B) \Rightarrow \neg(A \vee B)$$

Solution.

Proof.

1. $A : *, B : *, \perp : \square$
2. $h : \Pi C : * \,.(\neg A \to \neg B \to C) \to C$
3. $p : \Pi S : * \,.(A \to S) \to (B \to S) \to S$
4. $h \perp : \neg(\neg A \to \neg B \to \perp)$ **2,1 App**
5. $p \perp : (A \to \perp) \to (B \to \perp) \to \perp$ **3,1 App**
6. $h \perp (p \perp) : \perp$ **4,5 App (Cont.)**

7.	$\lambda p : A \lor B \,.\, h \perp (p \perp) : \neg(A \lor B)$	**6 Abst**
	$\lambda h : \neg A \land \neg B \,.\lambda p : A \lor B \,.\, h \perp (p \perp)$	
8.	$: \neg A \land \neg B \to \neg(A \lor B)$	**7 Abst**

■

Problem

(7.9 a) Verify that the following expression is a tautology in constructive logic by giving a proof in first-order natural deduction and a flag styled derivation.

$$\forall x \in S, (\neg P(x) \Rightarrow (P(x) \Rightarrow Q(x) \land R(x)))$$

Solution.

Natural Deduction.

1.	$x \in S$	
2.	$\neg P(x)$	
3.	$P(x)$	
4.	$\perp$	**3,2 $\perp$I**
5.	$Q(x) \land R(x)$	**4 $\perp$E**
6.	$P(x) \Rightarrow Q(x) \land R(x)$	**3-5 $\Rightarrow$I**
7.	$\neg P(x) \Rightarrow (P(x) \Rightarrow Q(x) \land R(x))$	**2-6 $\Rightarrow$I**
8.	$\forall x \in S, (\neg P(x) \Rightarrow (P(x) \Rightarrow Q(x) \land R(x)))$	**1-7 $\forall$I**

■

λC.

1.	$S : *, P : S \to *, Q : S \to *, R : S \to *$	
2.	$x : S$	
3.	$nhp : \neg(P\,x)$	
4.	$hp : P\,x$	
5.	$nhp\ hp : \perp$	**3,4 App (Contradiction)**
6.	$Q\,x \land R\,x : *$	**Form**
7.	$nhp\ hp\ (Q\,x \land R\,x) : Q\,x \land R\,x$	**5,6 App (Ex Falso)**
	$\lambda hp : P\,x \,.\, nhp\ hp\ (Q\,x \land R\,x)$	
8.	$: P\,x \to Q\,x \land R\,x$	**7 Abst**

9. $\lambda nhp : \neg\, P\, x\, .\lambda hp : P\, x\, .\; nhp\; hp\; (Q\, x \wedge R\, x)$ $: \neg\, P\, x \to P\, x \to Q\, x \wedge R\, x$ **8 Abst**

10. $\lambda x : S\, .\lambda nhp : \neg\, P\, x\, .\lambda hp : P\, x\, .$ $nhp\; hp\; (Q\, x \wedge R\, x)$ $: \Pi x : S\, .\neg\, P\, x \to P\, x \to Q\, x \wedge R\, x$ **9 Abst**

■

Problem

(7.9 b) Verify that the following expression is a tautology in constructive logic by giving a proof in first-order natural deduction and a flag styled derivation.

$$\forall x \in S, P\,(x) \Rightarrow \forall y \in S, P\,(y) \vee Q\,(y)$$

Solution.

Natural Deduction.

1. $\forall x \in S, P\,(x)$
2. $y : S$
3. $P\,(y)$ **2,1 ∀E**
4. $P\,(y) \vee Q\,(y)$ **3 ∨I**
5. $\forall y : S, (P\,(y) \vee Q\,(y))$ **2-4 ∀I**
6. $\forall x \in S, P\,(x) \Rightarrow \forall y : S, (P\,(y) \vee Q\,(y))$ **1-5 ⇒I**

■

λC.

1. $S : *, P : S \to *, Q : S \to *$
2. $h : \Pi x : S\, .\, P\, x$
3. $y : S$
4. $h\, y : P\, y$ **2,3 App**
5. $C : *$
6. $hp : P\, y \to C$
7. $hq : Q\, y \to C$
8. $hp\; (h\, y) : C$ **6,4 App**
9. $\lambda hq : Q\, y \to C\, .\; hp\; (h\, y) : (Q\, y \to C) \to C$ **8 Abst**

10.	$\lambda hp : P\,y \to C\,.\lambda hq : Q\,y \to C\,.\,hp\,(h\,y)$ $: (P\,y \to C) \to (Q\,y \to C) \to C$	**9 Abst**
11.	$\lambda C : *\,.\lambda hp : P\,y \to C\,.\lambda hq : Q\,y \to C\,.\,hp\,(h\,y)$ $: \Pi C : *\,.(P\,y \to C) \to (Q\,y \to C) \to C$	**10 Abst**
12.	$\lambda y : S\,.\lambda C : *\,.$ $\lambda hp : P\,y \to C\,.\lambda hq : Q\,y \to C\,.\,hp\,(h\,y)$ $: \Pi y : S\,.\,P\,y \vee Q\,y$	**11 Abst**
13.	$\lambda h : \Pi x : S\,.\,P\,x\,.$ $\lambda y : S\,.\lambda C : *\,.$ $\lambda hp : P\,y \to C\,.\lambda hq : Q\,y \to C\,.\,hp\,(h\,y)$ $: (\Pi x : S\,.\,P\,x) \to \Pi y : S\,.\,P\,y \vee Q\,y$	**12 Abst**

■

Problem

(7.10) Verify that the following expression is a tautology in constructive logic by giving a proof in first-order natural deduction and a flag styled derivation.

$$\forall x \in S, (P\,(x) \Rightarrow Q\,(x)) \Rightarrow \\ \forall y \in S, (P\,(y) \Rightarrow R\,(y)) \Rightarrow \\ \forall z \in S, (P\,(z) \Rightarrow (Q\,(z) \wedge R\,(z)))$$

Solution.

Natural Deduction.

1.	$\forall x \in S\,(P\,(x) \Rightarrow Q\,(x))$	
2.	$\forall y \in S\,(P\,(y) \Rightarrow R\,(y))$	
3.	$z \in S$	
4.	$P\,(z)$	
5.	$P\,(z) \Rightarrow Q\,(z)$	**3,1** $\forall E$
6.	$Q\,(z)$	**5,4 ⇒E**
7.	$P\,(z) \Rightarrow R\,(z)$	**3,2 ∀E**
8.	$R\,(z)$	**7,4 ∀E**
9.	$Q\,(z) \wedge R\,(z)$	**6,8 ∧I**
10.	$P\,(z) \Rightarrow Q\,(z) \wedge R\,(z)$	**4-9 ⇒I**

11. $\forall z \in S, (P\ (z) \Rightarrow Q\ (z) \wedge R\ (z))$ **3-10 $\forall$I**

$\forall y \in S, (P\ (y) \Rightarrow R\ (y)) \Rightarrow$

12. $\quad \forall z \in S, (P\ (z) \Rightarrow Q\ (z) \wedge R\ (z))$ **2-11 $\Rightarrow$I**

13.

$\forall x \in S, (P\ (x) \Rightarrow Q\ (x)) \Rightarrow$

$\quad \forall y \in S, (P\ (y) \Rightarrow R\ (y)) \Rightarrow$

$\quad\quad \forall z \in S, (P\ (z) \Rightarrow Q\ (z) \wedge R\ (z))$ **1-12 $\Rightarrow$I**

■

λC.

1. $S : *, P : S \to *, Q : S \to *, R : S \to *$
2. $h : \Pi x : S\ .\ P\ x \to Q\ x$
3. $p : \Pi y : S\ .\ P\ y \to R\ y$
4. $z : S$
5. $r : P\ z$
6. $h\ z : P\ z \to Q\ z$ **2,4 App**
7. $h\ z\ r : Q\ z$ **6,5 App**
8. $p\ z : P\ z \to R\ z$ **3,4 App**
9. $p\ z\ r : R\ z$ **8,5 App**
10. $C : *$
11. $t : Q\ z \to R\ z \to C$
12. $t\ (h\ z\ r) : R\ z \to C$ **11,7 App**
13. $t\ (h\ z\ r)(p\ z\ r) : C$ **12,9 App**
14. $\lambda t : Q\ z \to R\ z \to C\ .\ t\ (h\ z\ r)(p\ z\ r)$
    $: (Q\ z \to R\ z \to C) \to C$ **13 Abst**
15. $\lambda C : * . \lambda t : Q\ z \to R\ z \to C\ .\ t\ (h\ z\ r)(p\ z\ r)$
    $: \Pi C : * . (Q\ z \to R\ z \to C) \to C$ **14 Abst**
16. $\lambda r : P\ z . \lambda C : * . \lambda t : Q\ z \to R\ z \to C\ .$
    $t\ (h\ z\ r)(p\ z\ r)$
    $: P\ z \to Q\ z \wedge R\ z$ **15 Abst**
17. $\lambda z : S . \lambda r : P\ z . \lambda C : * . \lambda t : Q\ z \to R\ z \to C\ .$
    $t\ (h\ z\ r)(p\ z\ r)$
    $: \Pi z : S\ .\ P\ z \to Q\ z \wedge R\ z$ **16 Abst**

$$\begin{array}{ll}
 & \lambda p : \Pi y : S \,.\, P\,y \to R\,y \,. \\
 & \quad \lambda z : S \,.\lambda r : P\,z \,.\lambda C : * \,. \\
 & \quad\quad \lambda t : Q\,z \to R\,z \to C \,. \\
 & \quad\quad\quad t\,(h\,z\,r)(p\,z\,r) \\
 & \quad\quad\quad\quad : \Pi y : S \,.\, P\,y \to R\,y \\
18. & \quad\quad\quad\quad\quad \to \Pi z : S \,.\, P\,z \to Q\,z \wedge R\,z \qquad \textbf{17 Abst}
\end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
 & \lambda h : \Pi x : S \,.\, P\,x \to Q\,x \,.\lambda p : \Pi y : S \,.\, P\,y \to R\,y \,. \\
 & \quad \lambda z : S \,.\lambda r : P\,z \,.\lambda C : * \,. \\
 & \quad\quad \lambda t : Q\,z \to R\,z \to C \,. \\
 & \quad\quad\quad t\,(h\,z\,r)(p\,z\,r) \\
 & \quad\quad\quad\quad : (\Pi x : S \,.\, P\,x \to Q\,x) \to (\Pi y : S \,.\, P\,y \to R\,y) \\
19. & \quad\quad\quad\quad\quad \to \Pi z : S \,.\, P\,z \to Q\,z \wedge R\,z \qquad \textbf{18 Abst}
\end{array}$$

■

Problem

(7.11) Let $S : *$ and $P, Q : S \to *$. Let

$$y : \Pi \alpha : * \,.((\Pi x : S \,.(P\,x \to \alpha)) \to \alpha)$$
$$z : \Pi x : S \,.(P\,x \to Q\,x)$$

and $x : S$. Find a correct type for $y\,(Q\,x)$, and prove the application $y\,(Q\,x)\,z$ invalid. Also, check that it follows Remark 7.5.2

Solution.

1. $S : *$
2. $\quad P, Q : S \to *$
3. $\quad\quad y : \Pi \alpha : * \,.((\Pi x : S \,.(P\,x \to \alpha)) \to \alpha)$
4. $\quad\quad\quad x : S$
5. $\quad\quad\quad\quad Q\,x : *$
6. $\quad\quad\quad\quad y\,(Q\,x) : \Pi x : S \,.(P\,x \to Q\,x) \to Q\,x$ **3,5 App**

Here any application *to* $y\,(Q\,x)$ requries that value to be of type S. It certainly is not true for z. Remark 7.5.2 basically forbids name clashing of free variables and bound variables in an application or beta reduction.

Problem

(7.12 a) Derive $\exists$**I** under λC.

Solution. The rule translated into λC is as follows: in context

$$\Gamma \vdash a : S, P : S \to *, h : P\,a$$

We can derive a term

$$\Gamma \vdash h : \Pi\alpha : * \,.(\Pi x : S \,.\, P\,x \to \alpha) \to \alpha$$

One derivation is as follows

1. $a : S, P : S \to *, h : P\,a$
2. $\quad \alpha : *$
3. $\quad\quad p : \Pi x : S \,.\, P\,x \to \alpha$
4. $\quad\quad\quad p\,a : P\,a \to \alpha$ **3,1 App**
5. $\quad\quad\quad p\,a\,h : \alpha$ **4,1 App**
6. $\quad\quad \lambda p : \Pi x : S \,.\, P\,x \to \alpha.\, p\,a\,h$ $: (\Pi x : S \,.\, P\,x \to \alpha) \to \alpha$ **5 Abst**
7. $\quad \lambda\alpha : * \,.\lambda p : \Pi x : S \,.\, P\,x \to \alpha.\, p\,a\,h$ $: \Pi\alpha : * \,.(\Pi x : S \,.\, P\,x \to \alpha) \to \alpha$ **6 Abst**

Problem

(7.12 b) Give a flag styled derivation in λC verifying the following tautology in classical logic:

$$\neg\exists x \in S, (\neg\, P\,(x)) \Rightarrow \forall y \in S, (P\,(y))$$

Solution. The proof term should have type

$$((\Pi\alpha : * \,.(\Pi x : S \,.(P\,x \to \bot) \to \alpha) \to \alpha) \to \bot) \to (\Pi y : S \,.\, P\,y)$$

Proof.

1. $S : *, P : S \to *$
2. $\quad h : \neg(\exists x : S \,.\neg\, P\,x)$
3. $\quad\quad y : S$
4. $\quad\quad\quad v : \neg\, P\,y$

5.	$\alpha : *$	
6.	$p : \Pi x : S\,.(P\,x \to \bot) \to \alpha$	
7.	$p\,y : \neg\,P\,y \to \alpha$	**6,3 App**
8.	$p\,y\,v : \alpha$	**7,4 App**
	$\lambda h : \Pi x : S\,.(\neg\,P\,x) \to \alpha.\,p\,y\,v$	
9.	$: (\Pi x : S\,.\neg\,P\,x \to \alpha) \to \alpha$	**8 Abst**
	$\lambda \alpha : *\,.\lambda p : \Pi x : S\,.(\neg\,P\,x) \to \alpha.\,p\,y\,v$	
10.	$: \exists x : S\,.\neg\,P\,x$	**9 Abst**
	$h\,(\lambda \alpha : *\,.\lambda p : \Pi x : S\,.(\neg\,P\,x) \to \alpha.$	
11.	$p\,y\,v) : \bot$	**2,10 App**
	$\lambda v : \neg\,P\,y\,.$	
	$h\,(\lambda \alpha : *\,.\lambda p : \Pi x : S\,.(\neg\,P\,x) \to \alpha.\,p\,y\,v)$	
12.	$: \neg\neg\,P\,y$	**11 Abst**
	$\mathrm{DN}\ (\lambda v : \neg\,P\,y\,.$	
	$h\,(\lambda \alpha : *\,.\lambda p : \Pi x : S\,.(\neg\,P\,x) \to \alpha.\,p\,y\,v))$	
13.	$: P\,y$	**App (Ax. DN)**
	$\lambda y : S\,.\ \mathrm{DN}\ (\lambda v : \neg\,P\,y\,.$	
	$h\,(\lambda \alpha : *\,.\lambda p : \Pi x : S\,.(\neg\,P\,x) \to \alpha.\,p\,y\,v))$	
14.	$: \Pi y : S\,.\,P\,y$	**13 Abst**
	$\lambda h : \neg(\exists x : S\,.\neg\,P\,x).\lambda y : S\,.$	
	$\mathrm{DN}\ (\lambda v : \neg\,P\,y\,.\,p\,(\lambda \alpha : *\,.\lambda h : \Pi x : S\,.(\neg\,P\,x) \to \alpha.\,p\,y\,v))$	
15.	$: \neg(\exists x : S, \neg\,P\,x) \to \Pi y : S\,.\,P\,y$	**14 Abst**

$\blacksquare$