Exercises

Chapter 7

Sean Li [1]

1. Redacted

Reference - Propositional Logic in λC

$$\frac{A \qquad \neg A}{\bot}\,\bot\text{I or }\neg\text{E} \qquad \frac{\bot}{A}\,\bot\text{E} \qquad \frac{A \qquad B}{A \wedge B}\,\wedge\text{I} \qquad \frac{A \wedge B}{A}\,\wedge\text{EL}$$

$$\frac{A \wedge B}{B}\,\wedge\text{ER} \qquad \frac{a}{a \vee b}\,\vee\text{IL} \qquad \frac{b}{a \vee b}\,\vee\text{IR} \qquad \frac{A \Rightarrow B \qquad A}{B}\,\Rightarrow\text{E}$$

$$\frac{A \vee B \qquad A \to C \qquad B \to C}{C}\,\vee\text{E} \qquad \frac{a \in S \qquad P\,(a)}{\exists a \in S, P\,(a)}\,\exists\text{I}$$

$$\frac{\begin{array}{ll} 1. & A \\ 2. & \quad \vdots \\ 3. & \quad \bot \end{array}}{\neg A}\,\neg\text{I} \qquad \frac{\begin{array}{ll} 1. & A \\ 2. & \quad \vdots \\ 3. & \quad B \end{array}}{A \Rightarrow B}\,\Rightarrow\text{I} \qquad \frac{\begin{array}{ll} 1. & a \in S \\ 2. & \quad \vdots \\ 3. & \quad P\,(a) \end{array}}{\forall a \in S, P\,(a)}\,\forall I$$

$$\frac{\exists x \in S, P\,(x) \qquad \forall x \in S, (P\,(x) \Rightarrow A)}{A}\,\exists\text{E} \qquad \frac{a \in S \qquad \forall x \in S, P\,(x)}{P\,(a)}\,\forall\text{E}$$

$$\frac{}{\neg\neg A \Rightarrow A}\,\text{DN (Classical)} \qquad \frac{}{A \vee \neg A}\,\text{ET (Classical)}$$

Reference - 2nd Encoding for Propositional Logic

Proposition	**Minimal Propositional Logic**
$\bot$	$\forall A, A$
$A \Rightarrow B$	$A \Rightarrow B$
$\neg A$	$A \Rightarrow \bot$
$A \wedge B$	$\forall C, (A \Rightarrow B \Rightarrow C) \Rightarrow C$
$A \vee B$	$\forall C, (A \Rightarrow C) \Rightarrow (B \Rightarrow C) \Rightarrow C$
$\forall a \in S, P\,(a)$	$\forall a \in S\,.\,P\,(a)$
$\exists a \in S, P\,(a)$	$\forall \alpha, (\forall a \in S, (P\,(a) \Rightarrow \alpha)) \Rightarrow \alpha$

Problem

(7.1 a) Prove in natural deduction and λC the tautology

$$B \Rightarrow (A \Rightarrow B)$$

Solution.

Natural Deduction.

1.	B	
2.	$\quad A$	
3.	$\quad\quad B$	
4.	$\quad A \Rightarrow B$	$\Rightarrow$**I**
5.	$B \Rightarrow (A \Rightarrow B)$	$\Rightarrow$**I**

■

λC. Assuming context $\Gamma \equiv A : *, B : *$. By the PAT paradigm the proof is equivalent to an inhabitant of $B \to A \to B$.

1.	$A : *, B : *$	
2.	$\quad x : B$	
3.	$\quad\quad y : A$	
4.	$\quad\quad\quad x : B$	**Weak**
5.	$\quad\quad \lambda y : A\,.\,x : A \to B$	**4 Abst**
6.	$\quad \lambda x : B\,.\lambda y : A\,.\,x : B \to A \to B$	**5 Abst**

■

Problem

(7.1 b) Prove in natural deduction and λC the tautology

$$\neg A \Rightarrow (A \Rightarrow B)$$

Solution.

Natural Deduction.

1.	$\neg A$	
2.	A	
3.	$\neg A$	
4.	A	
5.	$\bot$	$\bot$**I**
6.	B	$\bot$**E**
7.	$A \Rightarrow B$	$\Rightarrow$**I**
8.	$\neg A \Rightarrow (A \Rightarrow B)$	$\Rightarrow$**I**

■

λC. Assuming context $\Gamma \equiv A : *, B : *$. By the PAT paradigm the proof is equivalent to an inhabitant of $(A \to \bot) \to A \to B$.

1.	$A : *, B : *$	
2.	$x : \neg A$	
3.	$y : A$	
4.	$x\, y : \Pi \alpha : * . \alpha$	**2,3 App (Neg Elim)**
5.	$x\, y\, B : B$	**4,1 App (Ex Falso)**
6.	$\lambda y : A . x\, y\, B : A \to B$	**5 Abst**
7.	$\lambda x : \neg A . \lambda y : A . x\, y\, B : \neg A \to A \to B$	**6 Abst**

■

Problem

(7.1 c) Prove in natural deduction and λC the tautology

$$(A \Rightarrow \neg B) \Rightarrow ((A \Rightarrow B) \Rightarrow \neg A)$$

Solution.

Natural Deduction.

1.	$A \Rightarrow \neg B$	
2.	$\quad A \Rightarrow B$	
3.	$\quad\quad A$	
4.	$\quad\quad\quad \neg B$	**1,3 ⇒E**
5.	$\quad\quad\quad B$	**2,3 ⇒E**
6.	$\quad\quad\quad \bot$	**5,4 ⊥I**
7.	$\quad\quad \neg A$	**3,6 ¬I**
8.	$\quad (A \Rightarrow B) \Rightarrow \neg A$	**2,7 ⇒I**
9.	$(A \Rightarrow \neg B) \Rightarrow ((A \Rightarrow B) \Rightarrow \neg A)$	**1,8 ⇒I**

■

λC. Assuming context $\Gamma \equiv A : *, B : *$. The proof should be equivalent to an inhabitant of $(A \to B \to \bot) \to (A \to B) \to A \to \bot$.

1.	$A : *, B : *$	
2.	$\quad h : A \to \neg B$	
3.	$\quad\quad q : A \to B$	
4.	$\quad\quad\quad a : A$	
5.	$\quad\quad\quad\quad q\ a : B$	**3,4 App**
6.	$\quad\quad\quad\quad h\ a : B \to \bot$	**2,4 App**
7.	$\quad\quad\quad\quad h\ a\ (q\ a) : \bot$	**6,5 App (Neg Elim)**
8.	$\quad\quad\quad \lambda a : A\ .\ h\ a\ (q\ a) : \neg A$	**7 Abst (Neg Intro)**
9.	$\quad\quad \lambda q : A \to B\ .\lambda a : A\ .\ h\ a\ (q\ a) : A \to B \to \neg A$	**8 Abst**
10.	$\quad \lambda h : A \to \neg B\ .\lambda q : A \to B\ .\lambda a : A\ .\ h\ a\ (q\ a)$ $: (A \to \neg B) \to A \to B \to \neg A$	**9 Abst**

■

Problem

(7.1 d) Prove in natural deduction and λC the tautology

$$\neg(A \Rightarrow B) \Rightarrow \neg B$$

Solution.

Natural Deduction.

1.	$\neg(A \Rightarrow B)$	
2.	$\quad B$	
3.	$\quad\quad A$	
4.	$\quad\quad\quad B$	
5.	$\quad\quad A \Rightarrow B$	**3,4 $\Rightarrow$I**
6.	$\quad\quad \bot$	**5,1 $\bot$I**
7.	$\quad \neg\, B$	**6 $\neg$I**
8.	$\neg(A \Rightarrow B) \Rightarrow \neg\, B$	**1,7 $\Rightarrow$I**

■

λC. Assuming context $\Gamma \equiv A : *, B : *$. The proof should be equivalent to an inhabitant of $((A \to B) \to \bot) \to B \to \bot$.

1.	$n : \neg(A \to B)$	
2.	$\quad b : B$	
3.	$\quad\quad a : A$	
4.	$\quad\quad\quad b : B$	**Weak**
5.	$\quad\quad \lambda a : A \,.\, b : A \to B$	**4 Abst**
6.	$\quad\quad n\;(\lambda a : A \,.\, b) : \bot$	**1,5 App (Neg Elim)**
7.	$\quad \lambda b : B \,.\, n\;(\lambda a : A \,.\, b) : \neg\, B$	**6 Abst (Neg Intro)**
8.		

$\lambda n : \neg(A \to B).\lambda b : B \,.\, n\;(\lambda a : A \,.\, b)$

$\quad : \neg(A \to B) \to \neg\, B$ **7 Abst**

■

Problem

(7.2) Formulate the double negation law as an axiom in λC, and prove the following tautology in λC with DN.

$$(\neg\, A \Rightarrow A) \Rightarrow A$$

Solution. The rule

$$\frac{}{\neg\neg\, A \Rightarrow A}\,\text{DN-E}$$

Could be translated into lambda calculus as

$$\Pi A : * \,.((A \to \bot) \to \bot) \to A$$

Proof. Assume context $\Gamma \equiv A : *$.

1.	$A : *$	
2.	$h : \neg A \to A$	
3.	$x : \neg A$	
4.	$h\,x : A$	**2,3 App**
5.	$x\,(h\,x) : \bot$	**3,4 App (Contradiction)**
6.	$\lambda x : \neg A \,.\, x\,(h\,x) : \neg\neg A$	**5 Abst (Neg Intro)**
7.	$\mathrm{DN}\ A : \neg\neg A \to A$	**1,1 App**
8.	$\mathrm{DN}\ A\,(\lambda x : \neg A \,.\, x\,(h\,x)) : A$	**App (Axiom DN)**
9.	$\lambda h : \neg A \to A \,.\, \mathrm{DN}\ A\,(\lambda x : \neg A \,.\, x\,(h\,x))$ $: (\neg A \to A) \to A$	**8 Abst**

■

Problem

(7.3 a) Prove the following tautology in classical logic using λC

$$(A \Rightarrow B) \Rightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$$

Solution. Assume context $\Gamma \equiv A : *, B : *$. It suffices the proof to find an inhabitant of type

$$(A \to B) \to (\neg B \to \neg A)$$

Proof.

1.	$A : *, B : *$	
2.	$h : A \to B$	
3.	$b : \neg B$	
4.	$a : A$	
5.	$h\,a : B$	**5,2 App**
6.	$b\,(h\,a) : \bot$	**6,3 App (Contradiction)**
7.	$b\,(h\,a)(\neg A) : \neg A$	**7,5 App (Ex Falso)**
8.	$\lambda a : A \,.\, b\,(h\,a)(\neg A) : A \to \neg A$	**7 Abst**
9.	$a : \neg A$	
10.	$a : \neg A$	**Var**

11. $\lambda a : \neg A \,.\, a : (\neg A \to \neg A)$ **10 Abst**

12. $\text{ET}\, A : A \vee \neg A$ **App (Axiom ET)**

13. $\text{ET}\, A\, (\neg A) : (A \to \neg A) \to (\neg A \to \neg A) \to \neg A$ **12 App**

14. $\text{ET}\, A\, (\neg A)(\lambda a : A \,.\, b\, (h\, a)(\neg A)) : (\neg A \to \neg A) \to \neg A$ **13,8 App**

15. $\text{ET}\, A\, (\neg A)\, (\lambda a : A \,.\, b\, (h\, a)(\neg A))\, (\lambda a : \neg A \,.\, a) : \neg A$ **14,11 App**

16. $\lambda b : \neg B \,.\, \text{ET}\, A\, (\neg A)\, (\lambda a : A \,.\, b\, (h\, a)(\neg A))\, (\lambda a : \neg A \,.\, a) : \neg B \to \neg A$ **15 Abst**

17. $\lambda h : A \to B \,.\lambda b : \neg B \,.\, \text{ET}\, A\, (\neg A)\, (\lambda a : A \,.\, b\, (h\, a)(\neg A))\, (\lambda a : \neg A \,.\, a) : (A \to B) \to \neg B \to \neg A$ **16 Abst**

■

Problem

(7.3 b) Prove the following tautology in classical logic using λC

$$(\neg B \Rightarrow \neg A) \Rightarrow (A \Rightarrow B)$$

Solution. Assume context $\Gamma \equiv A : *, B : *$. It suffices the proof to find an inhabitant of type

$$(\neg B \to \neg A) \to A \to B$$

Proof.

1. $A : *, B : *$
2. | $h : \neg B \to \neg A$
3. | | $a : A$
4. | | | $b : B$
5. | | | | $b : B$ **Weak**

6.	$\lambda b : B \,.\, b : B \to B$	
7.	$b : \neg\, B$	
8.	$h\; b : \neg\, A$	**2,7 App**
9.	$h\; b\; a : \bot$	**8,2 App (Neg Elim)**
10.	$h\; b\; a\; B : B$	**9 App (Ex Falso)**
11.	$\lambda b : \neg\, B \,.\, h\; b\; a\; B : \neg\, B \to B$	**10 Abst**
12.	$\mathrm{ET}\; B : B \lor \neg\, B$	**1 App (Axiom ET)**
13.	$\mathrm{ET}\; B\; B : (B \to B) \to (\neg\, B \to B) \to B$	**12,1 App**
14.	$\mathrm{ET}\; B\; B\; (\lambda b : B \,.\, b) : (\neg\, B \to B) \to B$	**13,6 App**
15.	$\mathrm{ET}\; B\; B\; (\lambda b : B \,.\, b)(\lambda b : \neg\, B \,.\, h\; b\; a\; B) : B$	**14,11 App**
16.	$\lambda a : A \,.\mathrm{ET}\; B\; B\; (\lambda b : B \,.\, b)$ $(\lambda b : \neg\, B \,.\, h\; b\; a\; B) : A \to B$	**15 Abst**
17.	$\lambda h : \neg\, B \to \neg\, A \,.\lambda a : A \,.$ $\mathrm{ET}\; B\; B\; (\lambda b : B \,.\, b)(\lambda b : \neg\, B \,.\, h\; b\; a\; B)$ $: (\neg\, B \to \neg\, A) \to A \to B$	**16 Abst**

∎