Exercises

Chapter 7

Sean Li [1]

1. Redacted

Reference - Propositional Logic in λC

$$\frac{A \quad \neg A}{\perp}\perp\text{I or }\neg\text{E} \qquad \frac{\perp}{A}\perp\text{E} \qquad \frac{A \quad B}{A \wedge B}\wedge\text{I} \qquad \frac{A \wedge B}{A}\wedge\text{EL}$$

$$\frac{A \wedge B}{B}\wedge\text{ER} \qquad \frac{a}{a \vee b}\vee\text{IL} \qquad \frac{b}{a \vee b}\vee\text{IR} \qquad \frac{A \Rightarrow B \quad A}{B}\Rightarrow\text{E}$$

$$\frac{A \vee B \quad A \to C \quad B \to C}{C}\vee\text{E} \qquad \frac{a \in S \quad P(a)}{\exists a \in S, P(a)}\exists\text{I}$$

$$\frac{\begin{array}{ll} 1. & A \\ 2. & \quad \dots \\ 3. & \quad \perp \end{array}}{\neg A}\neg\text{I} \qquad \frac{\begin{array}{ll} 1. & A \\ 2. & \quad \dots \\ 3. & \quad B \end{array}}{A \Rightarrow B}\Rightarrow\text{I} \qquad \frac{\begin{array}{ll} 1. & a \in S \\ 2. & \quad \dots \\ 3. & \quad P(a) \end{array}}{\forall a \in S, P(a)}\forall I$$

$$\frac{\exists x \in S, P(x) \quad \forall x \in S, (P(x) \Rightarrow A)}{A}\exists\text{E} \qquad \frac{a \in S \quad \forall x \in S, P(x)}{P(a)}\forall\text{E}$$

$$\frac{}{\neg\neg A \Rightarrow A}\text{DN (Classical)} \qquad \frac{}{A \vee \neg A}\text{ET (Classical)}$$

Reference - 2nd Encoding for Propositional Logic

Proposition	**Minimal Propositional Logic**
$\bot$	$\forall A, A$
$A \Rightarrow B$	$A \Rightarrow B$
$\neg A$	$A \Rightarrow \bot$
$A \wedge B$	$\forall C, (A \Rightarrow B \Rightarrow C) \Rightarrow C$
$A \vee B$	$\forall C, (A \Rightarrow C) \Rightarrow (B \Rightarrow C) \Rightarrow C$
$\forall a \in S, P(a)$	$\forall a \in S . P(a)$
$\exists a \in S, P(a)$	$\forall \alpha, (\forall a \in S, (P(a) \Rightarrow \alpha)) \Rightarrow \alpha$

Problem

(7.1 a) Prove in natural deduction and λC the tautology

$$B \Rightarrow (A \Rightarrow B)$$

Solution.

Natural Deduction.

1. B
2. $\quad | \; A$
3. $\quad | \; | \; B$
4. $\quad | \; A \Rightarrow B$ $\qquad \Rightarrow$**I**
5. $B \Rightarrow (A \Rightarrow B)$ $\qquad \Rightarrow$**I**

■

λC. Assuming context $\Gamma \equiv A : *, B : *$. By the PAT paradigm the proof is equivalent to an inhabitant of $B \to A \to B$.

1. $A : *, B : *$
2. $\quad | \; x : B$
3. $\quad | \; | \; y : A$
4. $\quad | \; | \; | \; x : B$ $\qquad$ **Weak**
5. $\quad | \; | \; \lambda y : A . x : A \to B$ $\qquad$ **4 Abst**
6. $\quad | \; \lambda x : B . \lambda y : A . x : B \to A \to B$ $\qquad$ **5 Abst**

■

Problem

(7.1 b) Prove in natural deduction and λC the tautology

$$\neg A \Rightarrow (A \Rightarrow B)$$

Solution.

Natural Deduction.

1.	$\neg A$	
2.	$\quad A$	
3.	$\quad\quad \neg A$	
4.	$\quad\quad A$	
5.	$\quad\quad \bot$	$\bot$**I**
6.	$\quad\quad B$	$\bot$**E**
7.	$\quad A \Rightarrow B$	$\Rightarrow$**I**
8.	$\neg A \Rightarrow (A \Rightarrow B)$	$\Rightarrow$**I**

■

λC. Assuming context $\Gamma \equiv A : *, B : *$. By the PAT paradigm the proof is equivalent to an inhabitant of $(A \to \bot) \to A \to B$.

1.	$A : *, B : *$	
2.	$\quad x : \neg A$	
3.	$\quad\quad y : A$	
4.	$\quad\quad\quad x\, y : \Pi\alpha : * \,.\, \alpha$	**2,3 App (Neg Elim)**
5.	$\quad\quad\quad x\, y\, B : B$	**4,1 App (Ex Falso)**
6.	$\quad\quad \lambda y : A \,.\, x\, y\, B : A \to B$	**5 Abst**
7.	$\quad \lambda x : \neg A \,.\lambda y : A \,.\, x\, y\, B : \neg A \to A \to B$	**6 Abst**

■

Problem

(7.1 c) Prove in natural deduction and λC the tautology

$$(A \Rightarrow \neg B) \Rightarrow ((A \Rightarrow B) \Rightarrow \neg A)$$

Solution.

Natural Deduction.

1.	$A \Rightarrow \neg B$	
2.	$\quad A \Rightarrow B$	
3.	$\quad\quad A$	
4.	$\quad\quad\quad \neg B$	**1,3 ⇒E**
5.	$\quad\quad\quad B$	**2,3 ⇒E**
6.	$\quad\quad\quad \perp$	**5,4 ⊥I**
7.	$\quad\quad \neg A$	**3,6 ¬I**
8.	$\quad (A \Rightarrow B) \Rightarrow \neg A$	**2,7 ⇒I**
9.	$(A \Rightarrow \neg B) \Rightarrow ((A \Rightarrow B) \Rightarrow \neg A)$	**1,8 ⇒I**

■

λC. Assuming context $\Gamma \equiv A : *, B : *$. The proof should be equivalent to an inhabitant of $(A \to B \to \perp) \to (A \to B) \to A \to \perp$.

1.	$A : *, B : *$	
2.	$\quad h : A \to \neg B$	
3.	$\quad\quad q : A \to B$	
4.	$\quad\quad\quad a : A$	
5.	$\quad\quad\quad\quad q\, a : B$	**3,4 App**
6.	$\quad\quad\quad\quad h\, a : B \to \perp$	**2,4 App**
7.	$\quad\quad\quad\quad h\, a\, (q\, a) : \perp$	**6,5 App (Neg Elim)**
8.	$\quad\quad\quad \lambda a : A\, .\, h\, a\, (q\, a) : \neg A$	**7 Abst (Neg Intro)**
9.	$\quad\quad \lambda q : A \to B\, .\lambda a : A\, .\, h\, a\, (q\, a) : A \to B \to \neg A$	**8 Abst**
10.	$\quad \lambda h : A \to \neg B\, .\lambda q : A \to B\, .\lambda a : A\, .\, h\, a\, (q\, a)$ $: (A \to \neg B) \to A \to B \to \neg A$	**9 Abst**

■

Problem

(7.1 d) Prove in natural deduction and λC the tautology

$$\neg(A \Rightarrow B) \Rightarrow \neg B$$

Solution.

Natural Deduction.

1.	$\neg(A \Rightarrow B)$	
2.	$\quad B$	
3.	$\quad\quad A$	
4.	$\quad\quad\quad B$	
5.	$\quad\quad A \Rightarrow B$	**3,4 $\Rightarrow$I**
6.	$\quad\quad \bot$	**5,1 $\bot$I**
7.	$\quad \neg\, B$	**6 $\neg$I**
8.	$\neg(A \Rightarrow B) \Rightarrow \neg\, B$	**1,7 $\Rightarrow$I**

■

λC. Assuming context $\Gamma \equiv A : *, B : *$. The proof should be equivalent to an inhabitant of $((A \to B) \to \bot) \to B \to \bot$.

1.	$n : \neg(A \to B)$	
2.	$\quad b : B$	
3.	$\quad\quad a : A$	
4.	$\quad\quad\quad b : B$	**Weak**
5.	$\quad\quad \lambda a : A \,.\, b : A \to B$	**4 Abst**
6.	$\quad\quad n\,(\lambda a : A \,.\, b) : \bot$	**1,5 App (Neg Elim)**
7.	$\quad \lambda b : B \,.\, n\,(\lambda a : A \,.\, b) : \neg\, B$	**6 Abst (Neg Intro)**
8.		

$\lambda n : \neg(A \to B).\lambda b : B \,.\, n\,(\lambda a : A \,.\, b)$

$: \neg(A \to B) \to \neg\, B$ **7 Abst**

■

Problem

(7.2) Formulate the double negation law as an axiom in λC, and prove the following tautology in λC with DN.

$$(\neg\, A \Rightarrow A) \Rightarrow A$$

Solution. The rule

$$\frac{}{\neg\neg\, A \Rightarrow A}\ \text{DN-E}$$

Could be translated into lambda calculus as

$$\Pi A : * \,.((A \to \bot) \to \bot) \to A$$

Proof. Assume context $\Gamma \equiv A : *$.

1.	$A : *$	
2.	$h : \neg A \to A$	
3.	$x : \neg A$	
4.	$h\,x : A$	**2,3 App**
5.	$x\,(h\,x) : \bot$	**3,4 App (Contradiction)**
6.	$\lambda x : \neg A \,.\, x\,(h\,x) : \neg\neg A$	**5 Abst (Neg Intro)**
7.	$\mathrm{DN}\ A : \neg\neg A \to A$	**1,1 App**
8.	$\mathrm{DN}\ A\,(\lambda x : \neg A \,.\, x\,(h\,x)) : A$	**App (Axiom DN)**
9.	$\lambda h : \neg A \to A \,.\, \mathrm{DN}\ A\,(\lambda x : \neg A \,.\, x\,(h\,x))$ $: (\neg A \to A) \to A$	**8 Abst**

∎

Problem

(7.3 a) Prove the following tautology in classical logic using λC

$$(A \Rightarrow B) \Rightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$$

Solution. Assume context $\Gamma \equiv A : *, B : *$. It suffices the proof to find an inhabitant of type

$$(A \to B) \to (\neg B \to \neg A)$$

Proof.

1.	$A : *, B : *$	
2.	$h : A \to B$	
3.	$b : \neg B$	
4.	$a : A$	
5.	$h\,a : B$	**5,2 App**
6.	$b\,(h\,a) : \bot$	**6,3 App (Contradiction)**
7.	$b\,(h\,a)(\neg A) : \neg A$	**7,5 App (Ex Falso)**
8.	$\lambda a : A \,.\, b\,(h\,a)(\neg A) : A \to \neg A$	**7 Abst**
9.	$a : \neg A$	
10.	$a : \neg A$	**Var**

11. $\lambda a : \neg A \,.\, a : (\neg A \to \neg A)$ **10 Abst**

12. $\mathrm{ET}\ A : A \vee \neg A$ **App (Axiom ET)**

13. $\mathrm{ET}\ A\,(\neg A) : (A \to \neg A) \to (\neg A \to \neg A) \to \neg A$ **12 App**

14. $\mathrm{ET}\ A\,(\neg A)(\lambda a : A \,.\, b\,(h\,a)(\neg A)) : (\neg A \to \neg A) \to \neg A$ **13,8 App**

15. $\mathrm{ET}\ A\,(\neg A)\,(\lambda a : A \,.\, b\,(h\,a)(\neg A))\,(\lambda a : \neg A \,.\, a) : \neg A$ **14,11 App**

16. $\lambda b : \neg B \,.\, \mathrm{ET}\ A\,(\neg A)\,(\lambda a : A \,.\, b\,(h\,a)(\neg A))\,(\lambda a : \neg A \,.\, a) : \neg B \to \neg A$ **15 Abst**

17. $\lambda h : A \to B \,.\lambda b : \neg B \,.\, \mathrm{ET}\ A\,(\neg A)\,(\lambda a : A \,.\, b\,(h\,a)(\neg A))\,(\lambda a : \neg A \,.\, a) : (A \to B) \to \neg B \to \neg A$ **16 Abst**

■

Problem

(7.3 b) Prove the following tautology in classical logic using λC

$$(\neg B \Rightarrow \neg A) \Rightarrow (A \Rightarrow B)$$

Solution. Assume context $\Gamma \equiv A : *, B : *$. It suffices the proof to find an inhabitant of type

$$(\neg B \to \neg A) \to A \to B$$

Proof.

1. $A : *, B : *$
2. $h : \neg B \to \neg A$
3. $a : A$
4. $b : B$
5. $b : B$ **Weak**

6. $\lambda b : B \,.\, b : B \to B$
7. $b : \neg B$
8. $h\, b : \neg A$ **2,7 App**
9. $h\, b\, a : \bot$ **8,2 App (Neg Elim)**
10. $h\, b\, a\, B : B$ **9 App (Ex Falso)**
11. $\lambda b : \neg B \,.\, h\, b\, a\, B : \neg B \to B$ **10 Abst**
12. $\mathrm{ET}\; B : B \vee \neg B$ **1 App (Axiom ET)**
13. $\mathrm{ET}\; B\; B : (B \to B) \to (\neg B \to B) \to B$ **12,1 App**
14. $\mathrm{ET}\; B\; B\, (\lambda b : B \,.\, b) : (\neg B \to B) \to B$ **13,6 App**
15. $\mathrm{ET}\; B\; B\, (\lambda b : B \,.\, b)(\lambda b : \neg B \,.\, h\, b\, a\, B) : B$ **14,11 App**
16. $\lambda a : A \,.\mathrm{ET}\; B\; B\, (\lambda b : B \,.\, b)$ $(\lambda b : \neg B \,.\, h\, b\, a\, B) : A \to B$ **15 Abst**
17. $\lambda h : \neg B \to \neg A \,.\lambda a : A \,.$ $\mathrm{ET}\; B\; B\, (\lambda b : B \,.\, b)(\lambda b : \neg B \,.\, h\, b\, a\, B)$ $: (\neg B \to \neg A) \to A \to B$ **16 Abst**

■

Problem

(7.4) Derive $\wedge$-**EL** and $\wedge$-**ER** in λC.

Solution. The derivation is the same as proving

$$M : \Pi C \,.(A \to B \to C) \to C \vdash N_1 : A$$
$$M : \Pi C \,.(A \to B \to C) \to C \vdash N_2 : B$$

Left Projection.

1. $M : \Pi C \,.(A \to B \to C) \to C$
2. $M\; A : (A \to B \to A) \to A$
3. $x : A$
4. $b : B$
5. $x : A$ **Weak**
6. $\lambda b : B \,.\, x : B \to A$ **5 Abst**
7. $\lambda x : A \,.\lambda b : B \,.\, x : A \to B \to A$ **6 Abst**
8. $N_1 \equiv M\; A\, (\lambda x : A \,.\lambda b : B \,.\, x) : A$ **2,7 App**

∎

Right Projection.

1. $M : \Pi C\,.(A \to B \to C) \to C$
2. $\quad M\ B : (A \to B \to B) \to B$
3. $\quad x : A$
4. $\quad\quad b : B$
5. $\quad\quad\quad b : B$ **Weak**
6. $\quad\quad \lambda b : B\,.\,b : B \to B$ **5 Abst**
7. $\quad \lambda x : A\,.\lambda b : B\,.\,b : A \to B \to B$ **6 Abst**
8. $\quad N_2 \equiv M\ B\ (\lambda x : A\,.\lambda b : B\,.\,b) : B$ **2,7 App**

∎