Exercises

Chapter 7

Sean Li [1]

1. Redacted

Reference - Propositional Logic in λC

$$\frac{A \qquad \neg\, A}{\bot}\,\bot\text{I or }\neg\text{E} \qquad \frac{\bot}{A}\,\bot\text{E} \qquad \frac{A \qquad B}{A \wedge B}\,\wedge\text{I} \qquad \frac{A \wedge B}{A}\,\wedge\text{EL} \qquad \frac{A \wedge B}{B}\,\wedge\text{ER}$$

$$\frac{a}{a \vee b}\,\vee\text{IL} \qquad \frac{b}{a \vee b}\,\vee\text{IR} \qquad \frac{A \Rightarrow B \qquad A}{B}\,\Rightarrow\text{E}$$

$$\frac{A \vee B \qquad A \to C \qquad B \to C}{C}\,\vee\text{E} \qquad \frac{a \in S \qquad P\,(a)}{\exists a \in S, P\,(a)}\,\exists\text{I} \qquad \frac{\begin{array}{ll} 1. & A \\ 2. & \quad \ldots \\ 3. & \quad \bot \end{array}}{\neg\, A}\,\neg\text{I}$$

$$\frac{\begin{array}{ll} 1. & A \\ 2. & \quad \ldots \\ 3. & \quad B \end{array}}{A \Rightarrow B}\,\Rightarrow\text{I} \qquad \frac{\begin{array}{ll} 1. & a \in S \\ 2. & \quad \ldots \\ 3. & \quad P\,(a) \end{array}}{\forall a \in S, P\,(a)}\,\forall I$$

$$\frac{\exists x \in S, P\,(x) \qquad \forall x \in S, (P\,(x) \Rightarrow A)}{A}\,\exists\text{E} \qquad \frac{a \in S \qquad \forall x \in S, P\,(x)}{P\,(a)}\,\forall\text{E}$$

$$\frac{}{\neg\neg\, A \Rightarrow A}\,\text{DN (Classical)} \qquad \frac{}{A \vee \neg\, A}\,\text{ET (Classical)}$$

Reference - 2nd Encoding for Propositional Logic

Proposition	Minimal Propositional Logic
$\bot$	$\forall A, A$
$A \Rightarrow B$	$A \Rightarrow B$
$\neg A$	$A \Rightarrow \bot$
$A \wedge B$	$\forall C, (A \Rightarrow B \Rightarrow C) \Rightarrow C$
$A \vee B$	$\forall C, (A \Rightarrow C) \Rightarrow (B \Rightarrow C) \Rightarrow C$
$\forall a \in S, P(a)$	$\forall a \in S \,.\, P(a)$
$\exists a \in S, P(a)$	$\forall \alpha, (\forall a \in S, (P(a) \Rightarrow \alpha)) \Rightarrow \alpha$

Problem

(7.1 a) Prove in natural deduction and λC the tautology

$$B \Rightarrow (A \Rightarrow B)$$

Solution.

Natural Deduction.

1.	B	
2.	$\quad\vert\ A$	
3.	$\quad\vert\quad\vert\ B$	
4.	$\quad\vert\ A \Rightarrow B$	$\Rightarrow$**I**
5.	$B \Rightarrow (A \Rightarrow B)$	$\Rightarrow$**I**

■

λC. Assuming context $\Gamma \equiv A : *, B : *$. By the PAT paradigm the proof is equivalent to an inhabitant of $B \to A \to B$.

1.	$A : *, B : *$	
2.	$\quad\vert\ x : B$	
3.	$\quad\vert\quad\vert\ y : A$	
4.	$\quad\vert\quad\vert\quad\vert\ x : B$	**Weak**
5.	$\quad\vert\quad\vert\ \lambda y : A \,.\, x : A \to B$	**4 Abst**
6.	$\quad\vert\ \lambda x : B \,.\lambda y : A \,.\, x : B \to A \to B$	**5 Abst**

■

Problem

(7.1 b) Prove in natural deduction and λC the tautology

$$\neg A \Rightarrow (A \Rightarrow B)$$

Solution.

Natural Deduction.

1.	$\neg A$	
2.	$\quad A$	
3.	$\quad\quad \neg A$	
4.	$\quad\quad A$	
5.	$\quad\quad \bot$	$\bot$**I**
6.	$\quad\quad B$	$\bot$**E**
7.	$\quad A \Rightarrow B$	$\Rightarrow$**I**
8.	$\neg A \Rightarrow (A \Rightarrow B)$	$\Rightarrow$**I**

■

λC. Assuming context $\Gamma \equiv A : *, B : *$. By the PAT paradigm the proof is equivalent to an inhabitant of $(A \to \bot) \to A \to B$.

1.	$A : *, B : *$	
2.	$\quad x : \neg A$	
3.	$\quad\quad y : A$	
4.	$\quad\quad\quad x\ y : \Pi\alpha : * . \alpha$	**2,3 App (Neg Elim)**
5.	$\quad\quad\quad x\ y\ B : B$	**4,1 App (Ex Falso)**
6.	$\quad\quad \lambda y : A . x\ y\ B : A \to B$	**5 Abst**
7.	$\quad \lambda x : \neg A . \lambda y : A . x\ y\ B : \neg A \to A \to B$	**6 Abst**

■

Problem

(7.1 c) Prove in natural deduction and λC the tautology

$$(A \Rightarrow \neg B) \Rightarrow ((A \Rightarrow B) \Rightarrow \neg A)$$

Solution.

Natural Deduction.

$$
\begin{array}{lll}
1. & A \Rightarrow \neg B & \\
2. & \quad A \Rightarrow B & \\
3. & \quad\quad A & \\
4. & \quad\quad\quad \neg B & \textbf{1,3} \Rightarrow\textbf{E} \\
5. & \quad\quad\quad B & \textbf{2,3} \Rightarrow\textbf{E} \\
6. & \quad\quad\quad \bot & \textbf{5,4} \perp\textbf{I} \\
7. & \quad\quad \neg A & \textbf{3,6} \neg\textbf{I} \\
8. & \quad (A \Rightarrow B) \Rightarrow \neg A & \textbf{2,7} \Rightarrow\textbf{I} \\
9. & (A \Rightarrow \neg B) \Rightarrow ((A \Rightarrow B) \Rightarrow \neg A) & \textbf{1,8} \Rightarrow\textbf{I}
\end{array}
$$

■

λC. Assuming context $\Gamma \equiv A : *, B : *$. The proof should be equivalent to an inhabitant of $(A \to B \to \bot) \to (A \to B) \to A \to \bot$.

$$
\begin{array}{lll}
1. & A : *, B : * & \\
2. & \quad h : A \to \neg B & \\
3. & \quad\quad q : A \to B & \\
4. & \quad\quad\quad a : A & \\
5. & \quad\quad\quad\quad q\,a : B & \textbf{3,4 App} \\
6. & \quad\quad\quad\quad h\,a : B \to \bot & \textbf{2,4 App} \\
7. & \quad\quad\quad\quad h\,a\,(q\,a) : \bot & \textbf{6,5 App (Neg Elim)} \\
8. & \quad\quad\quad \lambda a : A \,.\, h\,a\,(q\,a) : \neg A & \textbf{7 Abst (Neg Intro)} \\
9. & \quad\quad \lambda q : A \to B \,.\lambda a : A \,.\, h\,a\,(q\,a) : A \to B \to \neg A & \textbf{8 Abst} \\
 & \quad \lambda h : A \to \neg B \,.\lambda q : A \to B \,.\lambda a : A \,.\, h\,a\,(q\,a) & \\
10. & \quad\quad : (A \to \neg B) \to A \to B \to \neg A & \textbf{9 Abst}
\end{array}
$$

■

Problem

(7.1 d) Prove in natural deduction and λC the tautology

$$\neg(A \Rightarrow B) \Rightarrow \neg B$$

Solution.

Natural Deduction.

1.	$\neg(A \Rightarrow B)$	
2.	$\quad B$	
3.	$\quad\quad A$	
4.	$\quad\quad\quad B$	
5.	$\quad\quad A \Rightarrow B$	**3,4 ⇒I**
6.	$\quad\quad \bot$	**5,1 ⊥I**
7.	$\quad \neg\, B$	**6 ¬I**
8.	$\neg(A \Rightarrow B) \Rightarrow \neg\, B$	**1,7 ⇒I**

■

λC. Assuming context $\Gamma \equiv A : *, B : *$. The proof should be equivalent to an inhabitant of $((A \to B) \to \bot) \to B \to \bot$.

1.	$n : \neg(A \to B)$	
2.	$\quad b : B$	
3.	$\quad\quad a : A$	
4.	$\quad\quad\quad b : B$	**Weak**
5.	$\quad\quad \lambda a : A \,.\, b : A \to B$	**4 Abst**
6.	$\quad\quad n\ (\lambda a : A \,.\, b) : \bot$	**1,5 App (Neg Elim)**
7.	$\quad \lambda b : B \,.\, n\ (\lambda a : A \,.\, b) : \neg\, B$	**6 Abst (Neg Intro)**
8.		

$\lambda n : \neg(A \to B).\lambda b : B \,.\, n\ (\lambda a : A \,.\, b)$

$\quad : \neg(A \to B) \to \neg\, B$ **7 Abst**

■

Problem

(7.2) Formulate the double negation law as an axiom in λC, and prove the following tautology in λC with DN.

$$(\neg\, A \Rightarrow A) \Rightarrow A$$

Solution. The rule

$$\frac{}{\neg\neg\, A \Rightarrow A}\ \text{DN-E}$$

Could be translated into lambda calculus as

$$\Pi A : * . ((A \to \bot) \to \bot) \to A$$

Proof. Assume context $\Gamma \equiv A : *$.

1. $A : *$
2. $h : \neg A \to A$
3. $x : \neg A$
4. $h\, x : A$ **2,3 App**
5. $x\,(h\, x) : \bot$ **3,4 App (Contradiction)**
6. $\lambda x : \neg A \,.\, x\,(h\, x) : \neg\neg A$ **5 Abst (Neg Intro)**
7. $\mathrm{DN}\ A : \neg\neg A \to A$ **1,1 App**
8. $\mathrm{DN}\ A\,(\lambda x : \neg A \,.\, x\,(h\, x)) : A$ **App (Axiom DN)**
9. $\lambda h : \neg A \to A \,.\, \mathrm{DN}\ A\,(\lambda x : \neg A \,.\, x\,(h\, x))$ $: (\neg A \to A) \to A$ **8 Abst**

■

Problem

(7.3 a) Prove the following tautology in classical logic using λC

$$(A \Rightarrow B) \Rightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$$

Solution. Assume context $\Gamma \equiv A : *, B : *$. It suffices the proof to find an inhabitant of type

$$(A \to B) \to (\neg B \to \neg A)$$

Proof.

1. $A : *, B : *$
2. $h : A \to B$
3. $b : \neg B$
4. $a : A$
5. $h\, a : B$ **5,2 App**
6. $b\,(h\, a) : \bot$ **6,3 App (Contradiction)**
7. $b\,(h\, a)(\neg A) : \neg A$ **7,5 App (Ex Falso)**
8. $\lambda a : A \,.\, b\,(h\, a)(\neg A) : A \to \neg A$ **7 Abst**
9. $a : \neg A$
10. $a : \neg A$ **Var**
11. $\lambda a : \neg A \,.\, a : (\neg A \to \neg A)$ **10 Abst**

12.	$\mathrm{ET}\,A : A \vee \neg A$	**App (Axiom ET)**
13.	$\mathrm{ET}\,A\,(\neg A) : (A \to \neg A) \to (\neg A \to \neg A) \to \neg A$	**12 App**
14.	$\mathrm{ET}\,A\,(\neg A)(\lambda a : A\,.\,b\,(h\,a)(\neg A)) : (\neg A \to \neg A) \to \neg A$	**13,8 App**
15.	$\mathrm{ET}\,A\,(\neg A)\,(\lambda a : A\,.\,b\,(h\,a)(\neg A))\,(\lambda a : \neg A\,.\,a) : \neg A$	**14,11 App**
16.	$\lambda b : \neg B\,.\,\mathrm{ET}\,A\,(\neg A)\,(\lambda a : A\,.\,b\,(h\,a)(\neg A))\,(\lambda a : \neg A\,.\,a) : \neg B \to \neg A$	**15 Abst**
17.	$\lambda h : A \to B\,.\lambda b : \neg B\,.\,\mathrm{ET}\,A\,(\neg A)\,(\lambda a : A\,.\,b\,(h\,a)(\neg A))\,(\lambda a : \neg A\,.\,a) : (A \to B) \to \neg B \to \neg A$	**16 Abst**

■

Problem

(7.3 b) Prove the following tautology in classical logic using λC

$$(\neg B \Rightarrow \neg A) \Rightarrow (A \Rightarrow B)$$

Solution. Assume context $\Gamma \equiv A : *, B : *$. It suffices the proof to find an inhabitant of type

$$(\neg B \to \neg A) \to A \to B$$

Proof.

1.	$A : *, B : *$	
2.	$h : \neg B \to \neg A$	
3.	$a : A$	
4.	$b : B$	
5.	$b : B$	**Weak**
6.	$\lambda b : B\,.\,b : B \to B$	
7.	$b : \neg B$	

8.	$h\, b : \neg A$	**2,7 App**
9.	$h\, b\, a : \bot$	**8,2 App (Neg Elim)**
10.	$h\, b\, a\, B : B$	**9 App (Ex Falso)**
11.	$\lambda b : \neg B\, .\, h\, b\, a\, B : \neg B \to B$	**10 Abst**
12.	$\mathrm{ET}\, B : B \vee \neg B$	**1 App (Axiom ET)**
13.	$\mathrm{ET}\, B\, B : (B \to B) \to (\neg B \to B) \to B$	**12,1 App**
14.	$\mathrm{ET}\, B\, B\, (\lambda b : B\, .\, b) : (\neg B \to B) \to B$	**13,6 App**
15.	$\mathrm{ET}\, B\, B\, (\lambda b : B\, .\, b)(\lambda b : \neg B\, .\, h\, b\, a\, B) : B$	**14,11 App**
16.	$\lambda a : A\, .\mathrm{ET}\, B\, B\, (\lambda b : B\, .\, b)\, (\lambda b : \neg B\, .\, h\, b\, a\, B) : A \to B$	**15 Abst**
17.	$\lambda h : \neg B \to \neg A\, .\lambda a : A\, .\, \mathrm{ET}\, B\, B\, (\lambda b : B\, .\, b)(\lambda b : \neg B\, .\, h\, b\, a\, B) : (\neg B \to \neg A) \to A \to B$	**16 Abst**

■

Problem

(7.4) Derive $\wedge$-**EL** and $\wedge$-**ER** in λC.

Solution. The derivation is the same as proving

$$M : \Pi C\, .(A \to B \to C) \to C \vdash N_1 : A$$
$$M : \Pi C\, .(A \to B \to C) \to C \vdash N_2 : B$$

Left Projection.

1.	$M : \Pi C\, .(A \to B \to C) \to C$	
2.	$M\ A : (A \to B \to A) \to A$	
3.	$x : A$	
4.	$b : B$	
5.	$x : A$	**Weak**
6.	$\lambda b : B\, .\, x : B \to A$	**5 Abst**
7.	$\lambda x : A\, .\lambda b : B\, .\, x : A \to B \to A$	**6 Abst**
8.	$N_1 \equiv M\ A\, (\lambda x : A\, .\lambda b : B\, .\, x) : A$	**2,7 App**

■

Right Projection.

1. $M : \Pi C \,.(A \to B \to C) \to C$
2. $M\ B : (A \to B \to B) \to B$
3. $x : A$
4. $b : B$
5. $b : B$ **Weak**
6. $\lambda b : B \,.\, b : B \to B$ **5 Abst**
7. $\lambda x : A \,.\lambda b : B \,.\, b : A \to B \to B$ **6 Abst**
8. $N_2 \equiv M\ B\ (\lambda x : A \,.\lambda b : B \,.\, b) : B$ **2,7 App**

■

Problem

(7.5 a) Prove tautology under classical logic

$$\neg(A \Rightarrow B) \Rightarrow A$$

Solution. Assume context $\Gamma \equiv A : *, B : *$. Therefore the proof suffices to find an inhabitant of

$$((A \to B) \to \bot) \to A$$

Proof.

1. $A : *, B : *$
2. $h : \neg(A \to B)$
3. $a : A$
4. $a : A$ **Weak**
5. $\lambda a : A \,.\, a : A \to A$ **4 Abst**
6. $a : \neg\, A$
7. $n : A$
8. $a\ n : \bot$ **6,7 App (Contradiction)**
9. $a\ n\ B : B$ **8 App (Ex Falso)**
10. $\lambda n : A \,.\, a\ n\ B : A \to B$ **9 Abst**
11. $h\ (\lambda n : A \,.\, a\ n\ B) : \bot$ **10,2 App (Contra.)**
12. $h\ (\lambda n : A \,.\, a\ n\ B)\ A : A$ **11 App (Ex Falso)**

$\lambda a : \neg\, A \,.\, h\ (\lambda n : A \,.\, a\ n\ B)\ A$

13. $: \neg\, A \to A$ **12 Abst**
14. $\mathrm{ET} : \Pi S : * \,.\, S \vee \neg\, S$ **Axiom ET**

15.	$\mathrm{ET}\ A : A \vee \neg A$	**14,1 App**
16.	$\mathrm{ET}\ A\ A : (A \to A) \to (\neg A \to A) \to A$	**15,1 App**
17.	$\mathrm{ET}\ A\ A\ (\lambda a : A \,.\, a)$ $: (\neg A \to A) \to A$	**16,5 App**
18.	$\mathrm{ET}\ A\ A\ (\lambda a : A \,.\, a)$ $(\lambda a : \neg A \,.\, h\ (\lambda n : A \,.\, a\ n\ B)\ A) : A$	**17,13 App**
19.	$\lambda h : \neg(A \to B).\ \mathrm{ET}\ A\ A\ (\lambda a : A \,.\, a)$ $(\lambda a : \neg A \,.\, h\ (\lambda n : A \,.\, a\ n\ B)\ A)$ $: \neg(A \to B) \to A$	**18 Abst**

■

Problem

(7.5 b) Prove tautology under classical logic

$$\neg(A \Rightarrow B) \Rightarrow (A \wedge \neg B)$$

Solution. Assume context $\Gamma \equiv A : *, B : *$. Therefore the proof suffices to find an inhabitant of

$$((A \to B) \to \bot) \to \Pi C : * \,.((A \to (B \to \bot) \to C) \to C)$$

Proof.

1.	$A : *, B : *$	
2.	$p : \neg(A \to B)$	
3.	$C : *$	
4.	$h : A \to \neg B \to C$	
5.	$hb : B$	
6.	$ha : A$	
7.	$hb : B$	**Weak**
8.	$\lambda ha : A \,.\, hb : A \to B$	**7 Abst**
9.	$p\ (\lambda ha : A \,.\, hb) : \bot$	**2,8 App (Contra.)**
10.	$\lambda hb : B \,.\, p\ (\lambda ha : A \,.\, hb) : \neg B$	**9 Abst (Neg Intro)**
11.	$hna : \neg A$	
12.	$ha' : A$	
13.	$hna\ ha' : \bot$	**11,12 App (Contra.)**

14.	$hna\ ha'\ B : B$	**13,1 App (Ex Falso)**
15.	$\lambda ha' : A\ .\ hna\ ha'\ B : A \to B$	**14 Abst**
16.	$p\ (\lambda ha' : A\ .\ hna\ ha'\ B) : \bot$	**2,15 App (Contra.)**
17.	$p\ (\lambda ha' : A\ .\ hna\ ha'\ B)\ A : A$	**2,15 App (Contra.)**
18.	$\lambda hna : \neg A\ .\ p$ $(\lambda ha' : A\ .\ hna\ ha'\ B)\ A$ $: \neg A \to A$	**17 Abst**
19.	$ha'' : A$	
20.	$ha'' : A$	**Var**
21.	$\lambda ha'' : A\ .ha'' : A \to A$	**20 Abst**
22.	$\mathrm{ET} : \Pi S : *\ .\ S \vee \neg S$	**Axiom ET**
23.	$\mathrm{ET}\ A : A \vee \neg A$	**22,1 App**
24.	$\mathrm{ET}\ A\ A : (A \to A) \to (\neg A \to A) \to A$	**23,1 App**
25.	$\mathrm{ET}\ A\ A$ $(\lambda ha'' : A\ .ha'')$ $: (\neg A \to A) \to A$	**24,21 App**
26.	$\mathrm{ET}\ A\ A$ $(\lambda ha'' : A\ .ha'')$ $(\lambda hna : \neg A\ .\ p$ $(\lambda ha' : A\ .\ hna\ ha'\ B)\ A) : A$	**25,18 App**
27.	$h\ (\mathrm{ET}\ A\ A$ $(\lambda ha'' : A\ .ha'')$ $(\lambda hna : \neg A\ .\ p$ $(\lambda ha' : A\ .\ hna\ ha'\ B)\ A))$ $: \neg B \to C$	**4,26 App**
28.	$h\ (\mathrm{ET}\ A\ A$ $(\lambda ha'' : A\ .ha'')$ $(\lambda hna : \neg A\ .\ p$ $(\lambda ha' : A\ .\ hna\ ha'\ B)\ A))$ $(\lambda hb : B\ .\ p\ (\lambda ha : A\ .\ hb)) : C$	**27,10 App**

$\lambda h : A \to \neg B \to C \,.\, h\,(\mathrm{ET}\ A\ A$
$(\lambda ha'' : A \,.ha'')$
$(\lambda hna : \neg A \,.\, p\,(\lambda ha' : A \,.\, hna\ ha'\ B)\ A))$
$(\lambda hb : B \,.\, p\,(\lambda ha : A \,.\, hb))$
29. $: (A \to \neg B \to C) \to C$ **28 Abst**

$\lambda C : * \,.\lambda h : A \to \neg B \to C\,.$
$h\,(\mathrm{ET}\ A\ A$
$(\lambda ha'' : A \,.ha'')$
$(\lambda hna : \neg A \,.\, p\,(\lambda ha' : A \,.\, hna\ ha'\ B)\ A))$
30. $(\lambda hb : B \,.\, p\,(\lambda ha : A \,.\, hb)) : A \wedge \neg B$ **29 Abst**

$\lambda p : \neg(A \to B).$
$\lambda C : * \,.\lambda h : A \to \neg B \to C\,.$
$h\,(\mathrm{ET}\ A\ A$
$(\lambda ha'' : A \,.ha'')$
$(\lambda hna : \neg A \,.\, p\,(\lambda ha' : A \,.\, hna\ ha'\ B)\ A))$
$(\lambda hb : B \,.\, p\,(\lambda ha : A \,.\, hb))$
31. $: \neg(A \to B) \to (A \wedge \neg B)$ **30 Abst**

■

Problem

(7.6 a) Verify that the following expressions is a tautology in constructive logic

$$\neg A \Rightarrow \neg(A \wedge B)$$

Solution. Suppose context $A : *, B : *$. The proof suffices to give a inhabitant of type

$$\neg A \to \neg(A \wedge B) \equiv (A \to \bot) \to (\Pi C : * \,.(A \to B \to C) \to C) \to \bot$$

Proof.

1. $A : *, B : *$
2. $na : \neg A$
3. $h : \Pi C : * \,.(A \to B \to C) \to C$
4. $h\ A : (A \to B \to A) \to A$ **3,1 App**
5. $ha : A$
6. $hb : B$

7. $ha : A$
8. $\lambda hb : B \,.\, ha : B \to A$ — **7 Abst**
9. $\lambda ha : A \,.\lambda hb : B \,.\, ha : A \to B \to A$ — **8 Abst**
10. $h\ A\ (\lambda ha : A \,.\lambda hb : B \,.\, ha) : A$ — **4,9 App**
11. $na\ (h\ A\ (\lambda ha : A \,.\lambda hb : B \,.\, ha)) : \bot$ — **2,10 App (Contradiction)**
12. $\lambda h : A \wedge B \,.\, na\ (h\ A\ (\lambda ha : A \,.\lambda hb : B \,.\, ha)) : A \wedge B \to \bot$ — **11 Abst**
13. $\lambda na : \neg A \,.\lambda h : A \wedge B \,.\, na\ (h\ A\ (\lambda ha : A \,.\lambda hb : B \,.\, ha)) : \neg A \to \neg(A \wedge B)$ — **12 Abst**

■

Problem

(7.6 b) Verify that the following expressions is a tautology in constructive logic

$$\neg(A \wedge \neg A)$$

Solution. Suppose context $A : *, B : *$. The proof suffices to give a inhabitant of type

$$(\Pi S : * \,.(A \to (A \to \bot) \to S) \to S) \to \bot$$

Proof.

1. $A : *, B : *, \bot : \Box$
2. $h : \Pi S : * \,.(A \to \neg A \to S) \to S$
3. $h\,\bot : (A \to \neg A \to \bot) \to \bot$ — **2,1 App**
4. $a : A$
5. $n : \neg A$
6. $n\ a : \bot$ — **5,4 App**
7. $\lambda n : \neg A \,.\, n\ a : \neg A \to \bot$ — **6 Abst**
8. $\lambda a : A \,.\lambda n : \neg A \,.\, n\ a : A \to \neg A \to \bot$ — **7 Abst**
9. $h\,\bot(\lambda a : A \,.\lambda n : \neg A \,.\, n\ a) : \bot$ — **3,8 App**
10. $\lambda h : A \wedge \neg A \,.\, h\,\bot(\lambda a : A \,.\lambda n : \neg A \,.\, n\ a) : A \wedge \neg A \to \bot$ — **9 Abst**

■

Problem

(7.7) Derive $\vee$-**IL** and $\vee$-**IR**.

Solution. The derivation is the same as proving

$$m : A, B : * \vdash N : \Pi C\,.(A \to C) \to (B \to C) \to C$$

$$m : B, A : * \vdash N : \Pi C\,.(A \to C) \to (B \to C) \to C$$

Left Introduction.

$$\begin{array}{lll}
1. & m : A, B : * & \\
2. & \quad C : * & \\
3. & \quad\quad hl : A \to C & \\
4. & \quad\quad\quad hr : B \to C & \\
5. & \quad\quad\quad\quad hl\, m : C & \textbf{3,1 App} \\
6. & \quad\quad\quad \lambda hr : B \to C\,.\, hl\, m : (B \to C) \to C & \textbf{5 Abst} \\
7. & \quad\quad \lambda hl : A \to C\,.\lambda hr : B \to C\,.\, hl\, m : (A \to C) \to (B \to C) \to C & \textbf{6 Abst} \\
8. & \quad \lambda C : *\,.\lambda hl : A \to C\,.\lambda hr : B \to C\,.\, hl\, m : \Pi C : *\,.(A \to C) \to (B \to C) \to C & \textbf{7 Abst}
\end{array}$$

■

Right Introduction.

$$\begin{array}{lll}
1. & m : B, A : * & \\
2. & \quad C : * & \\
3. & \quad\quad hl : A \to C & \\
4. & \quad\quad\quad hr : B \to C & \\
5. & \quad\quad\quad\quad hr\, m : C & \textbf{4,1 App} \\
6. & \quad\quad\quad \lambda hr : B \to C\,.\, hr\, m : (B \to C) \to C & \textbf{5 Abst} \\
7. & \quad\quad \lambda hl : A \to C\,.\lambda hr : B \to C\,.\, hr\, m : (A \to C) \to (B \to C) \to C & \textbf{6 Abst} \\
8. & \quad \lambda C : *\,.\lambda hl : A \to C\,.\lambda hr : B \to C\,.\, hr\, m : \Pi C : *\,.(A \to C) \to (B \to C) \to C & \textbf{7 Abst}
\end{array}$$

■

Problem

(7.8 a) Give λC derivations verifying the intuitionistic tautology below

$$(A \vee B) \Rightarrow (B \vee A)$$

Solution.

Proof.

1. $A : *, B : *$
2. $\quad h : A \vee B$
3. $\quad\quad C : *$
4. $\quad\quad\quad hb : B \to C$
5. $\quad\quad\quad\quad ha : A \to C$
6. $\quad\quad\quad\quad\quad h\, C : (A \to C) \to (B \to C) \to C$ **2,3 App**
7. $\quad\quad\quad\quad\quad h\, C\, ha : (B \to C) \to C$ **6,5 App**
8. $\quad\quad\quad\quad\quad h\, C\, ha\, hb : C$ **7,4 App**
9. $\quad\quad\quad\quad \lambda ha : A \to C\, .\, h\, C\, ha\, hb : (A \to C) \to C$ **8 Abst**
10. $\quad\quad\quad \lambda hb : B \to C\, .\lambda ha : A \to C\, .\; h\, C\, ha\, hb : (B \to C) \to (A \to C) \to C$ **9 Abst**
11. $\quad\quad \lambda C : *\, .\lambda hb : B \to C\, .\lambda ha : A \to C\, .\; h\, C\, ha\, hb : \Pi C : *\, .(B \to C) \to (A \to C) \to C$ **10 Abst**
12. $\quad \lambda h : A \vee B\, .\lambda C : *\, .\lambda hb : B \to C\, .\lambda ha : A \to C\; h\, C\, ha\, hb : A \vee B \to B \vee A$ **11 Abst**

∎

Problem

(7.8 b) Give λC derivations verifying the intuitionistic tautology below

$$\neg(A \vee B) \Rightarrow (\neg A \wedge \neg B)$$

Solution.

Proof.

1. $A : *, B : *, \perp : \square$
2. $\quad h : \neg(\Pi S : *\, .(A \to S) \to (B \to S) \to S)$

3.	$C : *$	
4.	$p : (\neg A \to \neg B \to C)$	
5.	$a : A$	
6.	$C : *$	
7.	$ha : A \to C$	
8.	$hb : B \to C$	
9.	$ha\, a : C$	**7,5 App**
10.	$\lambda hb : B \to C\ .\ ha\, a : (B \to C) \to C$	**9 Abst**
11.	$\lambda ha : A \to C\ .\lambda hb : B \to C\ .\ ha\, a$ $: (A \to C) \to (B \to C) \to C$	**10 Abst**
12.	$\lambda C : *\ .\lambda ha : A \to C\ .\lambda hb : B \to C\ .\ ha\, a$ $: \Pi C : *\ .(A \to C) \to (B \to C) \to C$	**11 Abst**
13.	$h\, (\lambda C : *\ .\lambda ha : A \to C\ .\lambda hb : B \to C\ .\ ha\, a) : \bot$	**2,12 App (Contr.)**
14.	$\lambda a : A\ .\ h$ $(\lambda C : *\ .\lambda ha : A \to C\ .\lambda hb : B \to C\ .\ ha\, a) : \neg A$	**13 Abst (Neg I)**
15.	$b : B$	
16.	$C : *$	
17.	$ha : A \to C$	
18.	$hb : B \to C$	
19.	$hb\, b : C$	**18,15 App**
20.	$\lambda hb : B \to C\ .\ hb\, b : (B \to C) \to C$	**19 Abst**
21.	$\lambda ha : A \to C\ .\lambda hb : B \to C\ .\ hb\, b$ $: (A \to C) \to (B \to C) \to C$	**20 Abst**
22.	$\lambda C : *\ .\lambda ha : A \to C\ .\lambda hb : B \to C\ .\ hb\, b$ $: \Pi C : *\ .(A \to C) \to (B \to C) \to C$	**21 Abst**
23.	$h\, (\lambda C : *\ .\lambda ha : A \to C\ .\lambda hb : B \to C\ .\ hb\, b) : \bot$	**2,22 App (Contr.)**
24.	$\lambda b : B\ .\ h$ $(\lambda C : *\ .\lambda ha : A \to C\ .\lambda hb : B \to C\ .\ hb\, b) : \neg B$	**23 Abst (Neg I)**
25.	$p\, (\lambda a : A\ .\ h$ $(\lambda C : *\ .\lambda ha : A \to C\ .\lambda hb : B \to C\ .\ ha\, a))$ $: \neg B \to C$	**4,14 App**
26.	$p\, (\lambda a : A\ .\ h$ $(\lambda C : *\ .\lambda ha : A \to C\ .\lambda hb : B \to C\ .\ ha\, a))$ $(\lambda b : B\ .\ h$ $(\lambda C : *\ .\lambda ha : A \to C\ .\lambda hb : B \to C\ .\ hb\, b)) : C$	**25,24 App**

27. $\lambda p : \neg A \to \neg B \to C \, . \, p$

$(\lambda a : A \, . \, h$

$(\lambda C : * \, . \lambda ha : A \to C \, . \lambda hb : B \to C \, . \; ha \, a))$

$(\lambda b : B \, . \, h$

$(\lambda C : * \, . \lambda ha : A \to C \, . \lambda hb : B \to C \, . \; hb \, b))$

$: (\neg A \to \neg B \to C) \to C$ **26 Abst**

28. $\lambda C : * \, . \lambda p : \neg A \to \neg B \to C \, . \, p$

$(\lambda a : A \, . \, h$

$(\lambda C : * \, . \lambda ha : A \to C \, . \lambda hb : B \to C \, . \; ha \, a))$

$(\lambda b : B \, . \, h$

$(\lambda C : * \, . \lambda ha : A \to C \, . \lambda hb : B \to C \, . \; hb \, b))$

$: \Pi C : * \, . (\neg A \to \neg B \to C) \to C$ **27 Abst**

29. $\lambda h : \neg(A \vee B) . \lambda C : * \, . \lambda p : \neg A \to \neg B \to C \, . \, p$

$(\lambda a : A \, . \, h$

$(\lambda C : * \, . \lambda ha : A \to C \, . \lambda hb : B \to C \, . \; ha \, a))$

$(\lambda b : B \, . \, h$

$(\lambda C : * \, . \lambda ha : A \to C \, . \lambda hb : B \to C \, . \; hb \, b))$

$: \neg(A \vee B) \to (\neg A \wedge \neg B)$ **28 Abst**

∎

Problem

(7.8 c) Give λC derivations verifying the intuitionistic tautology below

$$(\neg A \wedge \neg B) \Rightarrow \neg(A \vee B)$$

Solution.

Proof.

1. $A : *, B : *, \bot : \square$
2. $h : \Pi C : * \, . (\neg A \to \neg B \to C) \to C$
3. $p : \Pi S : * \, . (A \to S) \to (B \to S) \to S$
4. $h \, \bot : \neg(\neg A \to \neg B \to \bot)$ **2,1 App**
5. $p \, \bot : (A \to \bot) \to (B \to \bot) \to \bot$ **3,1 App**
6. $h \, \bot (p \, \bot) : \bot$ **4,5 App (Cont.)**

7. $\lambda p : A \vee B \,.\, h \perp (p \perp) : \neg(A \vee B)$ **6 Abst**

8. $\lambda h : \neg A \wedge \neg B \,.\lambda p : A \vee B \,.\, h \perp (p \perp)$
$: \neg A \wedge \neg B \to \neg(A \vee B)$ **7 Abst**

■

Problem

(7.9 a) Verify that the following expression is a tautology in constructive logic by giving a proof in first-order natural deduction and a flag styled derivation.

$$\forall x \in S, (\neg P(x) \Rightarrow (P(x) \Rightarrow Q(x) \wedge R(x)))$$

Solution.

Natural Deduction.

1. $x \in S$
2. $\neg P(x)$
3. $P(x)$
4. $\perp$ **3,2 ⊥I**
5. $Q(x) \wedge R(x)$ **4 ⊥E**
6. $P(x) \Rightarrow Q(x) \wedge R(x)$ **5 ⇒I**
7. $\neg P(x) \Rightarrow (P(x) \Rightarrow Q(x) \wedge R(x))$ **6 ⇒I**
8. $\forall x \in S, (\neg P(x) \Rightarrow (P(x) \Rightarrow Q(x) \wedge R(x)))$ **7 ∀I**

■

λC.

1. $S : *, P : S \to *, Q : S \to *, R : S \to *$
2. $x : S$
3. $nhp : \neg(P\,x)$
4. $hp : P\,x$
5. $nhp\ hp : \perp$ **3,4 App (Contradiction)**
6. $Q\,x \wedge R\,x : *$ **Form**
7. $nhp\ hp\ (Q\,x \wedge R\,x) : Q\,x \wedge R\,x$ **5,6 App (Ex Falso)**
8. $\lambda hp : P\,x \,.\, nhp\ hp\ (Q\,x \wedge R\,x)$
$: P\,x \to Q\,x \wedge R\,x$ **7 Abst**

9. $\lambda nhp : \neg\, P\, x\, .\lambda hp : P\, x\, .\ nhp\ hp\ (Q\, x \wedge R\, x)$
$: \neg\, P\, x \to P\, x \to Q\, x \wedge R\, x$ **8 Abst**

$\lambda x : S\, .\lambda nhp : \neg\, P\, x\, .\lambda hp : P\, x\, .$
$nhp\ hp\ (Q\, x \wedge R\, x)$

10. $: \Pi x : S\, .\neg\, P\, x \to P\, x \to Q\, x \wedge R\, x$ **9 Abst**

■

Problem

(7.9 b) Verify that the following expression is a tautology in constructive logic by giving a proof in first-order natural deduction and a flag styled derivation.

$$\forall x \in S, P\ (x) \Rightarrow \forall y \in S, P\ (y) \vee Q\ (y)$$

Solution.

Natural Deduction.

1.	$\forall x \in S, P\ (x)$	
2.	$y : S$	
3.	$P\ (y)$	**2,1 $\forall$E**
4.	$P\ (y) \vee Q\ (y)$	**3 $\vee$I**
5.	$\forall y : S, (P\ (y) \vee Q\ (y))$	**4 $\forall$I**
6.	$\forall x \in S, P\ (x) \Rightarrow \forall y : S, (P\ (y) \vee Q\ (y))$	**5 $\Rightarrow$I**

■

λC.

1.	$S : *, P : S \to *, Q : S \to *$	
2.	$h : \Pi x : S\, .\, P\, x$	
3.	$y : S$	
4.	$h\, y : P\, y$	**2,3 App**
5.	$C : *$	
6.	$hp : P\, y \to C$	
7.	$hq : Q\, y \to C$	
8.	$hp\ (h\, y) : C$	**6,4 App**
9.	$\lambda hq : Q\, y \to C\, .\ hp\ (h\, y) : (Q\, y \to C) \to C$	**8 Abst**

$$\lambda hp : P\,y \to C\,.\lambda hq : Q\,y \to C\,.\;hp\;(h\,y)$$

10. $$: (P\,y \to C) \to (Q\,y \to C) \to C$$ **9 Abst**

$$\lambda C : *\,.\lambda hp : P\,y \to C\,.\lambda hq : Q\,y \to C\,.\;hp\;(h\,y)$$

11. $$: \Pi C : *\,.(P\,y \to C) \to (Q\,y \to C) \to C$$ **10 Abst**

$$\lambda y : S\,.\lambda C : *\,.$$

$$\lambda hp : P\,y \to C\,.\lambda hq : Q\,y \to C\,.\;hp\;(h\,y)$$

12. $$: \Pi y : S\,.\,P\,y \vee Q\,y$$ **11 Abst**

$$\lambda h : \Pi x : S\,.\,P\,x\,.$$

$$\lambda y : S\,.\lambda C : *\,.$$

$$\lambda hp : P\,y \to C\,.\lambda hq : Q\,y \to C\,.\;hp\;(h\,y)$$

13. $$: (\Pi x : S\,.\,P\,x) \to \Pi y : S\,.\,P\,y \vee Q\,y$$ **12 Abst**

■