

# EXERCISES

## CHAPTER 7

SEAN LI <sup>1</sup>

1. Redacted

---

### Reference - Propositional Logic in $\lambda C$

$$\begin{array}{c} \frac{A \quad \neg A}{\perp} \text{ } \perp\text{I or } \neg\text{E} \qquad \frac{\perp}{A} \perp\text{E} \qquad \frac{A \quad B}{A \wedge B} \wedge\text{I} \qquad \frac{A \wedge B}{A} \wedge\text{EL} \qquad \frac{A \wedge B}{B} \wedge\text{ER} \\[10pt] \frac{a}{a \vee b} \vee\text{IL} \qquad \frac{b}{a \vee b} \vee\text{IR} \qquad \frac{A \Rightarrow B \quad A}{B} \Rightarrow\text{E} \\[10pt] \frac{A \vee B \quad A \rightarrow C \quad B \rightarrow C}{C} \vee\text{E} \qquad \frac{a \in S \quad P(a)}{\exists a \in S, P(a)} \exists\text{I} \qquad \frac{\begin{array}{l} 1. \quad A \\ 2. \quad \left| \begin{array}{l} \dots \\ \perp \end{array} \right. \\ 3. \end{array}}{\neg A} \neg\text{I} \\[10pt] \frac{\begin{array}{l} 1. \quad A \\ 2. \quad \left| \begin{array}{l} \dots \\ B \end{array} \right. \\ 3. \end{array}}{A \Rightarrow B} \Rightarrow\text{I} \qquad \frac{\begin{array}{l} 1. \quad a \in S \\ 2. \quad \left| \begin{array}{l} \dots \\ P(a) \end{array} \right. \\ 3. \end{array}}{\forall a \in S, P(a)} \forall\text{I} \\[10pt] \frac{\exists x \in S, P(x) \quad \forall x \in S, (P(x) \Rightarrow A)}{A} \exists\text{E} \qquad \frac{a \in S \quad \forall x \in S, P(x)}{P(a)} \forall\text{E} \\[10pt] \frac{}{\neg\neg A \Rightarrow A} \text{DN (Classical)} \qquad \frac{}{A \vee \neg A} \text{ET (Classical)} \end{array}$$

---

---

## Reference - 2nd Encoding for Propositional Logic

Proposition	Minimal Propositional Logic
$\perp$	$\forall A, A$
$A \Rightarrow B$	$A \Rightarrow B$
$\neg A$	$A \Rightarrow \perp$
$A \wedge B$	$\forall C, (A \Rightarrow B \Rightarrow C) \Rightarrow C$
$A \vee B$	$\forall C, (A \Rightarrow C) \Rightarrow (B \Rightarrow C) \Rightarrow C$
$\forall a \in S, P(a)$	$\forall a \in S. P(a)$
$\exists a \in S, P(a)$	$\forall \alpha, (\forall a \in S, (P(a) \Rightarrow \alpha)) \Rightarrow \alpha$

---

### Problem

(7.1 a) Prove in natural deduction and  $\lambda C$  the tautology

$$B \Rightarrow (A \Rightarrow B)$$

*Solution.*

*Natural Deduction.*

1.  $B$
2.  $\left| \begin{array}{l} A \\ \left| \begin{array}{l} B \\ \hline A \Rightarrow B \end{array} \right. \end{array} \right. \Rightarrow \text{I}$
3.  $\left| \begin{array}{l} A \\ \left| \begin{array}{l} B \\ \hline A \Rightarrow B \end{array} \right. \end{array} \right. \Rightarrow \text{I}$
4.  $\left| \begin{array}{l} A \\ \left| \begin{array}{l} B \\ \hline A \Rightarrow B \end{array} \right. \end{array} \right. \Rightarrow \text{I}$
5.  $B \Rightarrow (A \Rightarrow B) \Rightarrow \text{I}$

■

$\lambda C$ . Assuming context  $\Gamma \equiv A : *, B : *$ . By the PAT paradigm the proof is equivalent to an inhabitant of  $B \rightarrow A \rightarrow B$ .

1.  $A : *, B : *$
2.  $\left| \begin{array}{l} x : B \\ \left| \begin{array}{l} y : A \\ \left| \begin{array}{l} x : B \\ \hline \lambda y : A. x : A \rightarrow B \end{array} \right. \end{array} \right. \end{array} \right. \text{Weak}$
3.  $\left| \begin{array}{l} x : B \\ \left| \begin{array}{l} y : A \\ \left| \begin{array}{l} x : B \\ \hline \lambda y : A. x : A \rightarrow B \end{array} \right. \end{array} \right. \end{array} \right. \text{4 Abst}$
4.  $\left| \begin{array}{l} x : B \\ \left| \begin{array}{l} y : A \\ \left| \begin{array}{l} x : B \\ \hline \lambda y : A. x : A \rightarrow B \end{array} \right. \end{array} \right. \end{array} \right. \text{5 Abst}$
5.  $\left| \begin{array}{l} x : B \\ \left| \begin{array}{l} y : A \\ \left| \begin{array}{l} x : B \\ \hline \lambda y : A. x : A \rightarrow B \end{array} \right. \end{array} \right. \end{array} \right. \text{5 Abst}$
6.  $\left| \begin{array}{l} x : B \\ \left| \begin{array}{l} y : A \\ \left| \begin{array}{l} x : B \\ \hline \lambda y : A. x : A \rightarrow B \end{array} \right. \end{array} \right. \end{array} \right. \text{5 Abst}$

■

### Problem

(7.1 b) Prove in natural deduction and  $\lambda C$  the tautology

$$\neg A \Rightarrow (A \Rightarrow B)$$

*Solution.*

*Natural Deduction.*

1.  $\neg A$
2.  $\begin{array}{|l} A \end{array}$
3.  $\begin{array}{|l} \neg A \end{array}$
4.  $\begin{array}{|l} A \end{array}$
5.  $\begin{array}{|l} \perp \end{array} \quad \perp \text{I}$
6.  $\begin{array}{|l} B \end{array} \quad \perp \text{E}$
7.  $\begin{array}{|l} A \Rightarrow B \end{array} \quad \Rightarrow \text{I}$
8.  $\neg A \Rightarrow (A \Rightarrow B) \quad \Rightarrow \text{I}$

■

$\lambda C$ . Assuming context  $\Gamma \equiv A : *, B : *$ . By the PAT paradigm the proof is equivalent to an inhabitant of  $(A \rightarrow \perp) \rightarrow A \rightarrow B$ .

1.  $A : *, B : *$
2.  $\begin{array}{|l} x : \neg A \end{array}$
3.  $\begin{array}{|l} y : A \end{array}$
4.  $\begin{array}{|l} x y : \Pi \alpha : *. \alpha \end{array} \quad \mathbf{2,3 \text{ App (Neg Elim)}}$
5.  $\begin{array}{|l} x y B : B \end{array} \quad \mathbf{4,1 \text{ App (Ex Falso)}}$
6.  $\begin{array}{|l} \lambda y : A. x y B : A \rightarrow B \end{array} \quad \mathbf{5 \text{ Abst}}$
7.  $\begin{array}{|l} \lambda x : \neg A. \lambda y : A. x y B : \neg A \rightarrow A \rightarrow B \end{array} \quad \mathbf{6 \text{ Abst}}$

■

### Problem

(7.1 c) Prove in natural deduction and  $\lambda C$  the tautology

$$(A \Rightarrow \neg B) \Rightarrow ((A \Rightarrow B) \Rightarrow \neg A)$$

*Solution.*

*Natural Deduction.*

1.  $A \Rightarrow \neg B$
2.  $\begin{array}{|l} A \Rightarrow B \end{array}$
3.  $\begin{array}{|l} A \end{array}$
4.  $\begin{array}{|l} \neg B \end{array}$  **1,3  $\Rightarrow$ E**
5.  $\begin{array}{|l} B \end{array}$  **2,3  $\Rightarrow$ E**
6.  $\begin{array}{|l} \perp \end{array}$  **5,4  $\perp$ I**
7.  $\begin{array}{|l} \neg A \end{array}$  **3-6  $\neg$ I**
8.  $\begin{array}{|l} (A \Rightarrow B) \Rightarrow \neg A \end{array}$  **2-7  $\Rightarrow$ I**
9.  $(A \Rightarrow \neg B) \Rightarrow ((A \Rightarrow B) \Rightarrow \neg A)$  **1-8  $\Rightarrow$ I**

■

$\lambda C$ . Assuming context  $\Gamma \equiv A : *, B : *$ . The proof should be equivalent to an inhabitant of  $(A \rightarrow B \rightarrow \perp) \rightarrow (A \rightarrow B) \rightarrow A \rightarrow \perp$ .

1.  $A : *, B : *$
2.  $\begin{array}{|l} h : A \rightarrow \neg B \end{array}$
3.  $\begin{array}{|l} q : A \rightarrow B \end{array}$
4.  $\begin{array}{|l} a : A \end{array}$
5.  $\begin{array}{|l} q a : B \end{array}$  **3,4 App**
6.  $\begin{array}{|l} h a : B \rightarrow \perp \end{array}$  **2,4 App**
7.  $\begin{array}{|l} h a (q a) : \perp \end{array}$  **6,5 App (Neg Elim)**
8.  $\begin{array}{|l} \lambda a : A . h a (q a) : \neg A \end{array}$  **7 Abst (Neg Intro)**
9.  $\begin{array}{|l} \lambda q : A \rightarrow B . \lambda a : A . h a (q a) : A \rightarrow B \rightarrow \neg A \end{array}$  **8 Abst**
10.  $\begin{array}{|l} \lambda h : A \rightarrow \neg B . \lambda q : A \rightarrow B . \lambda a : A . h a (q a) : (A \rightarrow \neg B) \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow \neg A \end{array}$  **9 Abst**

■

### Problem

(7.1 d) Prove in natural deduction and  $\lambda C$  the tautology

$$\neg(A \Rightarrow B) \Rightarrow \neg B$$

*Solution.*

*Natural Deduction.*

$$\begin{array}{ll}
1. & \neg(A \Rightarrow B) \\
2. & \begin{array}{|l} B \\ \hline \end{array} \\
3. & \begin{array}{|l} \begin{array}{|l} A \\ \hline \end{array} \\ \hline \end{array} \\
4. & \begin{array}{|l} \begin{array}{|l} B \\ \hline \end{array} \\ \hline \end{array} \\
5. & \begin{array}{|l} \begin{array}{|l} A \Rightarrow B \\ \hline \end{array} \\ \hline \end{array} \quad \mathbf{3-4 \Rightarrow I} \\
6. & \begin{array}{|l} \begin{array}{|l} \perp \\ \hline \end{array} \\ \hline \end{array} \quad \mathbf{5,1 \perp I} \\
7. & \begin{array}{|l} \neg B \\ \hline \end{array} \quad \mathbf{2-6 \neg I} \\
8. & \neg(A \Rightarrow B) \Rightarrow \neg B \quad \mathbf{1-7 \Rightarrow I}
\end{array}$$

■

$\lambda C$ . Assuming context  $\Gamma \equiv A : *, B : *$ . The proof should be equivalent to an inhabitant of  $((A \rightarrow B) \rightarrow \perp) \rightarrow B \rightarrow \perp$ .

$$\begin{array}{ll}
1. & n : \neg(A \rightarrow B) \\
2. & \begin{array}{|l} b : B \\ \hline \end{array} \\
3. & \begin{array}{|l} \begin{array}{|l} a : A \\ \hline \end{array} \\ \hline \end{array} \\
4. & \begin{array}{|l} \begin{array}{|l} b : B \\ \hline \end{array} \\ \hline \end{array} \quad \mathbf{Weak} \\
5. & \begin{array}{|l} \lambda a : A . b : A \rightarrow B \\ \hline \end{array} \quad \mathbf{4 Abst} \\
6. & \begin{array}{|l} n (\lambda a : A . b) : \perp \\ \hline \end{array} \quad \mathbf{1,5 App (Neg Elim)} \\
7. & \begin{array}{|l} \lambda b : B . n (\lambda a : A . b) : \neg B \\ \hline \end{array} \quad \mathbf{6 Abst (Neg Intro)} \\
8. &
\end{array}$$

$$\begin{array}{l}
\lambda n : \neg(A \rightarrow B) . \lambda b : B . n (\lambda a : A . b) \\
: \neg(A \rightarrow B) \rightarrow \neg B \quad \mathbf{7 Abst}
\end{array}$$

■

### Problem

(7.2) Formulate the double negation law as an axiom in  $\lambda C$ , and prove the following tautology in  $\lambda C$  with DN.

$$(\neg A \Rightarrow A) \Rightarrow A$$

*Solution.* The rule

$$\frac{}{\neg\neg A \Rightarrow A} \text{DN-E}$$

Could be translated into lambda calculus as

$$\Pi A : * . ((A \rightarrow \perp) \rightarrow \perp) \rightarrow A$$

*Proof.* Assume context  $\Gamma \equiv A : *$ .

1.	$A : *$	
2.	$h : \neg A \rightarrow A$	
3.	$x : \neg A$	
4.	$h x : A$	<b>2,3 App</b>
5.	$x (h x) : \perp$	<b>3,4 App (Contradiction)</b>
6.	$\lambda x : \neg A . x (h x) : \neg \neg A$	<b>5 Abst (Neg Intro)</b>
7.	$\text{DN } A : \neg \neg A \rightarrow A$	<b>1,1 App</b>
8.	$\text{DN } A (\lambda x : \neg A . x (h x)) : A$	<b>App (Axiom DN)</b>
9.	$\lambda h : \neg A \rightarrow A . \text{DN } A (\lambda x : \neg A . x (h x)) : (\neg A \rightarrow A) \rightarrow A$	<b>8 Abst</b>

■

### Problem

(7.3 a) Prove the following tautology in classical logic using  $\lambda C$

$$(A \Rightarrow B) \Rightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$$

*Solution.* Assume context  $\Gamma \equiv A : *, B : *$ . It suffices the proof to find an inhabitant of type

$$(A \rightarrow B) \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg A)$$

*Proof.*

1.	$A : *, B : *$	
2.	$h : A \rightarrow B$	
3.	$b : \neg B$	
4.	$a : A$	
5.	$h a : B$	<b>5,2 App</b>
6.	$b (h a) : \perp$	<b>6,3 App (Contradiction)</b>
7.	$b (h a)(\neg A) : \neg A$	<b>7,5 App (Ex Falso)</b>
8.	$\lambda a : A . b (h a)(\neg A) : A \rightarrow \neg A$	<b>7 Abst</b>
9.	$a : \neg A$	
10.	$a : \neg A$	<b>Var</b>
11.	$\lambda a : \neg A . a : (\neg A \rightarrow \neg A)$	<b>10 Abst</b>

12.	ET $A : A \vee \neg A$	<b>App (Axiom ET)</b>
	ET $A (\neg A) : (A \rightarrow \neg A) \rightarrow$	
13.	$(\neg A \rightarrow \neg A) \rightarrow \neg A$	<b>12 App</b>
	ET $A (\neg A)(\lambda a : A . b (h a)(\neg A)) :$	
14.	$(\neg A \rightarrow \neg A) \rightarrow \neg A$	<b>13,8 App</b>
	ET $A (\neg A)$	
	$(\lambda a : A . b (h a)(\neg A))$	
15.	$(\lambda a : \neg A . a) : \neg A$	<b>14,11 App</b>
	$\lambda b : \neg B . \text{ET } A (\neg A)$	
	$(\lambda a : A . b (h a)(\neg A))$	
16.	$(\lambda a : \neg A . a) : \neg B \rightarrow \neg A$	<b>15 Abst</b>
	$\lambda h : A \rightarrow B . \lambda b : \neg B . \text{ET } A (\neg A)$	
	$(\lambda a : A . b (h a)(\neg A))$	
	$(\lambda a : \neg A . a) :$	
17.	$(A \rightarrow B) \rightarrow \neg B \rightarrow \neg A$	<b>16 Abst</b>

■

### Problem

(7.3 b) Prove the following tautology in classical logic using  $\lambda C$

$$(\neg B \Rightarrow \neg A) \Rightarrow (A \Rightarrow B)$$

*Solution.* Assume context  $\Gamma \equiv A : *, B : *$ . It suffices the proof to find an inhabitant of type

$$(\neg B \rightarrow \neg A) \rightarrow A \rightarrow B$$

*Proof.*

1.	$A : *, B : *$	
2.	$h : \neg B \rightarrow \neg A$	
3.	$a : A$	
4.	$b : B$	
5.	$b : B$	<b>Weak</b>
6.	$\lambda b : B . b : B \rightarrow B$	
7.	$b : \neg B$	

8.				$h\ b : \neg A$	2,7 App
9.				$h\ b\ a : \perp$	8,2 App (Neg Elim)
10.				$h\ b\ a\ B : B$	9 App (Ex Falso)
11.				$\lambda b : \neg B . h\ b\ a\ B : \neg B \rightarrow B$	10 Abst
12.				ET $B : B \vee \neg B$	1 App (Axiom ET)
13.				ET $B\ B : (B \rightarrow B) \rightarrow (\neg B \rightarrow B) \rightarrow B$	12,1 App
14.				ET $B\ B\ (\lambda b : B . b) : (\neg B \rightarrow B) \rightarrow B$	13,6 App
15.				ET $B\ B\ (\lambda b : B . b)(\lambda b : \neg B . h\ b\ a\ B) : B$	14,11 App
				$\lambda a : A . \text{ET } B\ B\ (\lambda b : B . b)$	
16.				$(\lambda b : \neg B . h\ b\ a\ B) : A \rightarrow B$	15 Abst
				$\lambda h : \neg B \rightarrow \neg A . \lambda a : A .$	
				ET $B\ B\ (\lambda b : B . b)(\lambda b : \neg B . h\ b\ a\ B)$	
17.				$: (\neg B \rightarrow \neg A) \rightarrow A \rightarrow B$	16 Abst

■

### Problem

(7.4) Derive  $\wedge$ -EL and  $\wedge$ -ER in  $\lambda C$ .

*Solution.* The derivation is the same as proving

$$M : \Pi C . (A \rightarrow B \rightarrow C) \rightarrow C \vdash N_1 : A$$

$$M : \Pi C . (A \rightarrow B \rightarrow C) \rightarrow C \vdash N_2 : B$$

*Left Projection.*

1.	$M : \Pi C . (A \rightarrow B \rightarrow C) \rightarrow C$	
2.		$M\ A : (A \rightarrow B \rightarrow A) \rightarrow A$
3.		$x : A$
4.		
5.		
6.		
7.		
8.		

**Weak**

**5 Abst**

**6 Abst**

**2,7 App**

■

*Right Projection.*



1.	$M : \Pi C . (A \rightarrow B \rightarrow C) \rightarrow C$	
2.	$M B : (A \rightarrow B \rightarrow B) \rightarrow B$	
3.	$x : A$	
4.	$b : B$	
5.	$b : B$	<b>Weak</b>
6.	$\lambda b : B . b : B \rightarrow B$	<b>5 Abst</b>
7.	$\lambda x : A . \lambda b : B . b : A \rightarrow B \rightarrow B$	<b>6 Abst</b>
8.	$N_2 \equiv M B (\lambda x : A . \lambda b : B . b) : B$	<b>2,7 App</b>

■

### Problem

(7.5 a) Prove tautology under classical logic

$$\neg(A \Rightarrow B) \Rightarrow A$$

*Solution.* Assume context  $\Gamma \equiv A : *, B : *$ . Therefore the proof suffices to find an inhabitant of

$$((A \rightarrow B) \rightarrow \perp) \rightarrow A$$

*Proof.*

1.	$A : *, B : *$	
2.	$h : \neg(A \rightarrow B)$	
3.	$a : A$	
4.	$a : A$	<b>Weak</b>
5.	$\lambda a : A . a : A \rightarrow A$	<b>4 Abst</b>
6.	$a : \neg A$	
7.	$n : A$	
8.	$a n : \perp$	<b>6,7 App (Contradiction)</b>
9.	$a n B : B$	<b>8 App (Ex Falso)</b>
10.	$\lambda n : A . a n B : A \rightarrow B$	<b>9 Abst</b>
11.	$h (\lambda n : A . a n B) : \perp$	<b>10,2 App (Contra.)</b>
12.	$h (\lambda n : A . a n B) A : A$	<b>11 App (Ex Falso)</b>
	$\lambda a : \neg A . h (\lambda n : A . a n B) A$	
13.	$: \neg A \rightarrow A$	<b>12 Abst</b>
14.	$ET : \Pi S : * . S \vee \neg S$	<b>Axiom ET</b>

15.	ET $A : A \vee \neg A$	<b>14,1 App</b>
16.	ET $A A : (A \rightarrow A) \rightarrow (\neg A \rightarrow A) \rightarrow A$	<b>15,1 App</b>
	ET $A A (\lambda a : A . a)$	
17.	$: (\neg A \rightarrow A) \rightarrow A$	<b>16,5 App</b>
	ET $A A (\lambda a : A . a)$	
18.	$(\lambda a : \neg A . h (\lambda n : A . a \ n B) A) : A$	<b>17,13 App</b>
	$\lambda h : \neg(A \rightarrow B) . \text{ET } A A (\lambda a : A . a)$	
	$(\lambda a : \neg A . h (\lambda n : A . a \ n B) A)$	
19.	$: \neg(A \rightarrow B) \rightarrow A$	<b>18 Abst</b>

■

### Problem

(7.5 b) Prove tautology under classical logic

$$\neg(A \Rightarrow B) \Rightarrow (A \wedge \neg B)$$

*Solution.* Assume context  $\Gamma \equiv A : *, B : *$ . Therefore the proof suffices to find an inhabitant of

$$((A \rightarrow B) \rightarrow \perp) \rightarrow \Pi C : * . ((A \rightarrow (B \rightarrow \perp) \rightarrow C) \rightarrow C)$$

*Proof.*

1.	$A : *, B : *$	
2.	$p : \neg(A \rightarrow B)$	
3.	$C : *$	
4.	$h : A \rightarrow \neg B \rightarrow C$	
5.	$hb : B$	
6.	$ha : A$	
7.	$hb : B$	<b>Weak</b>
8.	$\lambda ha : A . hb : A \rightarrow B$	<b>7 Abst</b>
9.	$p (\lambda ha : A . hb) : \perp$	<b>2,8 App (Contra.)</b>
10.	$\lambda hb : B . p (\lambda ha : A . hb) : \neg B$	<b>9 Abst (Neg Intro)</b>
11.	$hna : \neg A$	
12.	$ha' : A$	
13.	$hna ha' : \perp$	<b>11,12 App (Contra.)</b>

14.	$\boxed{hna\ ha' B : B}$	<b>13,1 App (Ex Falso)</b>
15.	$\lambda ha' : A . hna\ ha' B : A \rightarrow B$	<b>14 Abst</b>
16.	$p(\lambda ha' : A . hna\ ha' B) : \perp$	<b>2,15 App (Contra.)</b>
17.	$\boxed{p(\lambda ha' : A . hna\ ha' B) A : A}$	<b>2,15 App (Contra.)</b>
	$\lambda hna : \neg A . p$	
	$(\lambda ha' : A . hna\ ha' B) A$	
18.	$: \neg A \rightarrow A$	<b>17 Abst</b>
19.	$ha'' : A$	
20.	$\boxed{ha'' : A}$	<b>Var</b>
21.	$\lambda ha'' : A . ha'' : A \rightarrow A$	<b>20 Abst</b>
22.	$ET : \Pi S : * . S \vee \neg S$	<b>Axiom ET</b>
23.	$ET\ A : A \vee \neg A$	<b>22,1 App</b>
24.	$ET\ A\ A : (A \rightarrow A) \rightarrow (\neg A \rightarrow A) \rightarrow A$	<b>23,1 App</b>
	$ET\ A\ A$	
	$(\lambda ha'' : A . ha'')$	
25.	$: (\neg A \rightarrow A) \rightarrow A$	<b>24,21 App</b>
	$ET\ A\ A$	
	$(\lambda ha'' : A . ha'')$	
	$(\lambda hna : \neg A . p$	
26.	$(\lambda ha' : A . hna\ ha' B) A) : A$	<b>25,18 App</b>
	$h\ (ET\ A\ A$	
	$(\lambda ha'' : A . ha'')$	
	$(\lambda hna : \neg A . p$	
	$(\lambda ha' : A . hna\ ha' B) A))$	
27.	$: \neg B \rightarrow C$	<b>4,26 App</b>
	$h\ (ET\ A\ A$	
	$(\lambda ha'' : A . ha'')$	
	$(\lambda hna : \neg A . p$	
	$(\lambda ha' : A . hna\ ha' B) A))$	
28.	$(\lambda hb : B . p(\lambda ha : A . hb)) : C$	<b>27,10 App</b>

29.	$ \begin{array}{l} \lambda h : A \rightarrow \neg B \rightarrow C . h \text{ (ET } A \ A \\ (\lambda ha'' : A . ha'') \\ (\lambda hna : \neg A . p (\lambda ha' : A . hna \ ha' \ B) \ A)) \\ (\lambda hb : B . p (\lambda ha : A . hb)) \\ : (A \rightarrow \neg B \rightarrow C) \rightarrow C \end{array} $	<b>28 Abst</b>
30.	$ \begin{array}{l} \lambda C : * . \lambda h : A \rightarrow \neg B \rightarrow C . \\ h \text{ (ET } A \ A \\ (\lambda ha'' : A . ha'') \\ (\lambda hna : \neg A . p (\lambda ha' : A . hna \ ha' \ B) \ A)) \\ (\lambda hb : B . p (\lambda ha : A . hb)) : A \wedge \neg B \end{array} $	<b>29 Abst</b>
31.	$ \begin{array}{l} \lambda p : \neg(A \rightarrow B) . \\ \lambda C : * . \lambda h : A \rightarrow \neg B \rightarrow C . \\ h \text{ (ET } A \ A \\ (\lambda ha'' : A . ha'') \\ (\lambda hna : \neg A . p (\lambda ha' : A . hna \ ha' \ B) \ A)) \\ (\lambda hb : B . p (\lambda ha : A . hb)) \\ : \neg(A \rightarrow B) \rightarrow (A \wedge \neg B) \end{array} $	<b>30 Abst</b>

■

### Problem

(7.6 a) Verify that the following expressions is a tautology in constructive logic

$$\neg A \Rightarrow \neg(A \wedge B)$$

*Solution.* Suppose context  $A : *, B : *$ . The proof suffices to give a inhabitant of type

$$\neg A \rightarrow \neg(A \wedge B) \equiv (A \rightarrow \perp) \rightarrow (\Pi C : * . (A \rightarrow B \rightarrow C) \rightarrow C) \rightarrow \perp$$

*Proof.*

1.	$A : *, B : *$	
2.	$na : \neg A$	
3.	$h : \Pi C : * . (A \rightarrow B \rightarrow C) \rightarrow C$	
4.	$h \ A : (A \rightarrow B \rightarrow A) \rightarrow A$	<b>3,1 App</b>
5.	$ha : A$	
6.	$hb : B$	

7.				$ha : A$	
8.				$\lambda hb : B . ha : B \rightarrow A$	<b>7 Abst</b>
9.				$\lambda ha : A . \lambda hb : B . ha : A \rightarrow B \rightarrow A$	<b>8 Abst</b>
10.				$h A (\lambda ha : A . \lambda hb : B . ha) : A$	<b>4,9 App</b>
11.				$na (h A (\lambda ha : A . \lambda hb : B . ha)) : \perp$	<b>2,10 App (Contradiction)</b>
				$\lambda h : A \wedge B .$	
				$na (h A (\lambda ha : A . \lambda hb : B . ha))$	
12.				$: A \wedge B \rightarrow \perp$	<b>11 Abst</b>
				$\lambda na : \neg A . \lambda h : A \wedge B .$	
				$na (h A (\lambda ha : A . \lambda hb : B . ha))$	
13.				$: \neg A \rightarrow \neg(A \wedge B)$	<b>12 Abst</b>

■

### Problem

(7.6 b) Verify that the following expressions is a tautology in constructive logic

$$\neg(A \wedge \neg A)$$

*Solution.* Suppose context  $A : *, B : *$ . The proof suffices to give a inhabitant of type

$$(\Pi S : *. (A \rightarrow (A \rightarrow \perp) \rightarrow S) \rightarrow S) \rightarrow \perp$$

*Proof.*

1.	$A : *, B : *, \perp : \square$	
2.	$h : \Pi S : *. (A \rightarrow \neg A \rightarrow S) \rightarrow S$	
3.	$h \perp : (A \rightarrow \neg A \rightarrow \perp) \rightarrow \perp$	<b>2,1 App</b>
4.	$a : A$	
5.	$n : \neg A$	
6.	$na : \perp$	<b>5,4 App</b>
7.	$\lambda n : \neg A . na : \neg A \rightarrow \perp$	<b>6 Abst</b>
8.	$\lambda a : A . \lambda n : \neg A . na : A \rightarrow \neg A \rightarrow \perp$	<b>7 Abst</b>
9.	$h \perp (\lambda a : A . \lambda n : \neg A . na) : \perp$	<b>3,8 App</b>
10.	$\lambda h : A \wedge \neg A . h \perp (\lambda a : A . \lambda n : \neg A . na) : A \wedge \neg A \rightarrow \perp$	<b>9 Abst</b>

■

## Problem

(7.7) Derive  $\forall$ -**IL** and  $\forall$ -**IR**.

*Solution.* The derivation is the same as proving

$$m : A, B : * \vdash N : \Pi C . (A \rightarrow C) \rightarrow (B \rightarrow C) \rightarrow C$$

$$m : B, A : * \vdash N : \Pi C . (A \rightarrow C) \rightarrow (B \rightarrow C) \rightarrow C$$

*Left Introduction.*

1.	$m : A, B : *$	
2.	$C : *$	
3.	$hl : A \rightarrow C$	
4.	$hr : B \rightarrow C$	
5.	$hl\ m : C$	<b>3,1 App</b>
6.	$\lambda hr : B \rightarrow C . hl\ m : (B \rightarrow C) \rightarrow C$	<b>5 Abst</b>
7.	$\lambda hl : A \rightarrow C . \lambda hr : B \rightarrow C . hl\ m$ $: (A \rightarrow C) \rightarrow (B \rightarrow C) \rightarrow C$	<b>6 Abst</b>
8.	$\lambda C : * . \lambda hl : A \rightarrow C . \lambda hr : B \rightarrow C . hl\ m$ $: \Pi C : * . (A \rightarrow C) \rightarrow (B \rightarrow C) \rightarrow C$	<b>7 Abst</b>

■

*Right Introduction.*

1.	$m : B, A : *$	
2.	$C : *$	
3.	$hl : A \rightarrow C$	
4.	$hr : B \rightarrow C$	
5.	$hr\ m : C$	<b>4,1 App</b>
6.	$\lambda hr : B \rightarrow C . hr\ m : (B \rightarrow C) \rightarrow C$	<b>5 Abst</b>
7.	$\lambda hl : A \rightarrow C . \lambda hr : B \rightarrow C . hr\ m$ $: (A \rightarrow C) \rightarrow (B \rightarrow C) \rightarrow C$	<b>6 Abst</b>
8.	$\lambda C : * . \lambda hl : A \rightarrow C . \lambda hr : B \rightarrow C . hr\ m$ $: \Pi C : * . (A \rightarrow C) \rightarrow (B \rightarrow C) \rightarrow C$	<b>7 Abst</b>

■

### Problem

(7.8 a) Give  $\lambda C$  derivations verifying the intuitionistic tautology below

$$(A \vee B) \Rightarrow (B \vee A)$$

*Solution.*

*Proof.*

1.	$A : *, B : *$	
2.	$h : A \vee B$	
3.	$C : *$	
4.	$hb : B \rightarrow C$	
5.	$ha : A \rightarrow C$	
6.	$h C : (A \rightarrow C) \rightarrow (B \rightarrow C) \rightarrow C$	2,3 App
7.	$h C ha : (B \rightarrow C) \rightarrow C$	6,5 App
8.	$h C ha hb : C$	7,4 App
9.	$\lambda ha : A \rightarrow C . h C ha hb : (A \rightarrow C) \rightarrow C$	8 Abst
10.	$\lambda hb : B \rightarrow C . \lambda ha : A \rightarrow C . h C ha hb : (B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C) \rightarrow C$	9 Abst
11.	$\lambda C : * . \lambda hb : B \rightarrow C . \lambda ha : A \rightarrow C . h C ha hb : \Pi C : * . (B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C) \rightarrow C$	10 Abst
12.	$\lambda h : A \vee B . \lambda C : * . \lambda hb : B \rightarrow C . \lambda ha : A \rightarrow C . h C ha hb : A \vee B \rightarrow B \vee A$	11 Abst

■

### Problem

(7.8 b) Give  $\lambda C$  derivations verifying the intuitionistic tautology below

$$\neg(A \vee B) \Rightarrow (\neg A \wedge \neg B)$$

*Solution.*

*Proof.*

1.	$A : *, B : *, \perp : \square$
2.	$h : \neg(\Pi S : * . (A \rightarrow S) \rightarrow (B \rightarrow S) \rightarrow S)$

3.	$C : *$	
4.	$p : (\neg A \rightarrow \neg B \rightarrow C)$	
5.	$a : A$	
6.	$C : *$	
7.	$ha : A \rightarrow C$	
8.	$hb : B \rightarrow C$	
9.	$ha a : C$	7,5 App
10.	$\lambda hb : B \rightarrow C . ha a : (B \rightarrow C) \rightarrow C$	9 Abst
11.	$\lambda ha : A \rightarrow C . \lambda hb : B \rightarrow C . ha a$ $: (A \rightarrow C) \rightarrow (B \rightarrow C) \rightarrow C$	10 Abst
12.	$\lambda C : * . \lambda ha : A \rightarrow C . \lambda hb : B \rightarrow C . ha a$ $: \Pi C : * . (A \rightarrow C) \rightarrow (B \rightarrow C) \rightarrow C$	11 Abst
13.	$h (\lambda C : * . \lambda ha : A \rightarrow C . \lambda hb : B \rightarrow C . ha a) : \perp$	2,12 App (Contr.)
14.	$\lambda a : A . h$ $(\lambda C : * . \lambda ha : A \rightarrow C . \lambda hb : B \rightarrow C . ha a) : \neg A$	13 Abst (Neg I)
15.	$b : B$	
16.	$C : *$	
17.	$ha : A \rightarrow C$	
18.	$hb : B \rightarrow C$	
19.	$hb b : C$	18,15 App
20.	$\lambda hb : B \rightarrow C . hb b : (B \rightarrow C) \rightarrow C$	19 Abst
21.	$\lambda ha : A \rightarrow C . \lambda hb : B \rightarrow C . hb b$ $: (A \rightarrow C) \rightarrow (B \rightarrow C) \rightarrow C$	20 Abst
22.	$\lambda C : * . \lambda ha : A \rightarrow C . \lambda hb : B \rightarrow C . hb b$ $: \Pi C : * . (A \rightarrow C) \rightarrow (B \rightarrow C) \rightarrow C$	21 Abst
23.	$h (\lambda C : * . \lambda ha : A \rightarrow C . \lambda hb : B \rightarrow C . hb b) : \perp$	2,22 App (Contr.)
24.	$\lambda b : B . h$ $(\lambda C : * . \lambda ha : A \rightarrow C . \lambda hb : B \rightarrow C . hb b) : \neg B$	23 Abst (Neg I)
25.	$p (\lambda a : A . h$ $(\lambda C : * . \lambda ha : A \rightarrow C . \lambda hb : B \rightarrow C . ha a))$ $: \neg B \rightarrow C$	4,14 App
26.	$p (\lambda a : A . h$ $(\lambda C : * . \lambda ha : A \rightarrow C . \lambda hb : B \rightarrow C . ha a))$ $(\lambda b : B . h$ $(\lambda C : * . \lambda ha : A \rightarrow C . \lambda hb : B \rightarrow C . hb b))) : C$	25,24 App



27.	$ \begin{array}{l} \lambda p : \neg A \rightarrow \neg B \rightarrow C . p \\ (\lambda a : A . h \\ (\lambda C : * . \lambda ha : A \rightarrow C . \lambda hb : B \rightarrow C . ha a)) \\ (\lambda b : B . h \\ (\lambda C : * . \lambda ha : A \rightarrow C . \lambda hb : B \rightarrow C . hb b)) \\ : (\neg A \rightarrow \neg B \rightarrow C) \rightarrow C \end{array} $	26 Abst
28.	$ \begin{array}{l} \lambda C : * . \lambda p : \neg A \rightarrow \neg B \rightarrow C . p \\ (\lambda a : A . h \\ (\lambda C : * . \lambda ha : A \rightarrow C . \lambda hb : B \rightarrow C . ha a)) \\ (\lambda b : B . h \\ (\lambda C : * . \lambda ha : A \rightarrow C . \lambda hb : B \rightarrow C . hb b)) \\ : \Pi C : * . (\neg A \rightarrow \neg B \rightarrow C) \rightarrow C \end{array} $	27 Abst
29.	$ \begin{array}{l} \lambda h : \neg(A \vee B) . \lambda C : * . \lambda p : \neg A \rightarrow \neg B \rightarrow C . p \\ (\lambda a : A . h \\ (\lambda C : * . \lambda ha : A \rightarrow C . \lambda hb : B \rightarrow C . ha a)) \\ (\lambda b : B . h \\ (\lambda C : * . \lambda ha : A \rightarrow C . \lambda hb : B \rightarrow C . hb b)) \\ : \neg(A \vee B) \rightarrow (\neg A \wedge \neg B) \end{array} $	28 Abst

■

### Problem

(7.8 c) Give  $\lambda C$  derivations verifying the intuitionistic tautology below

$$(\neg A \wedge \neg B) \Rightarrow \neg(A \vee B)$$

*Solution.*

*Proof.*

1.  $A : *, B : *, \perp : \square$
2.  $h : \Pi C : * . (\neg A \rightarrow \neg B \rightarrow C) \rightarrow C$
3.  $p : \Pi S : * . (A \rightarrow S) \rightarrow (B \rightarrow S) \rightarrow S$
4.  $h \perp : \neg(\neg A \rightarrow \neg B \rightarrow \perp)$  **2,1 App**
5.  $p \perp : (A \rightarrow \perp) \rightarrow (B \rightarrow \perp) \rightarrow \perp$  **3,1 App**
6.  $h \perp(p \perp) : \perp$  **4,5 App (Cont.)**

7.	$\frac{\lambda p : A \vee B . h \perp (p \perp) : \neg(A \vee B)}{\lambda h : \neg A \wedge \neg B . \lambda p : A \vee B . h \perp (p \perp)}$	<b>6 Abst</b>
8.	$: \neg A \wedge \neg B \rightarrow \neg(A \vee B)$	<b>7 Abst</b>

■

### Problem

(7.9 a) Verify that the following expression is a tautology in constructive logic by giving a proof in first-order natural deduction and a flag styled derivation.

$$\forall x \in S, (\neg P(x) \Rightarrow (P(x) \Rightarrow Q(x) \wedge R(x)))$$

*Solution.*

*Natural Deduction.*

1.	$x \in S$	
2.	$\neg P(x)$	
3.	$P(x)$	
4.	$\perp$	<b>3,2 <math>\perp</math>I</b>
5.	$Q(x) \wedge R(x)$	<b>4 <math>\perp</math>E</b>
6.	$P(x) \Rightarrow Q(x) \wedge R(x)$	<b>3-5 <math>\Rightarrow</math>I</b>
7.	$\neg P(x) \Rightarrow (P(x) \Rightarrow Q(x) \wedge R(x))$	<b>2-6 <math>\Rightarrow</math>I</b>
8.	$\forall x \in S, (\neg P(x) \Rightarrow (P(x) \Rightarrow Q(x) \wedge R(x)))$	<b>1-7 <math>\forall</math>I</b>

■

$\lambda C$ .

1.	$S : *, P : S \rightarrow *, Q : S \rightarrow *, R : S \rightarrow *$	
2.	$x : S$	
3.	$nhp : \neg(P x)$	
4.	$hp : P x$	
5.	$nhp \ hp : \perp$	<b>3,4 App (Contradiction)</b>
6.	$Q x \wedge R x : *$	<b>Form</b>
7.	$nhp \ hp \ (Q x \wedge R x) : Q x \wedge R x$	<b>5,6 App (Ex Falso)</b>
8.	$\lambda hp : P x . nhp \ hp \ (Q x \wedge R x)$	
	$: P x \rightarrow Q x \wedge R x$	<b>7 Abst</b>

9.	$\frac{\lambda nhp : \neg P x . \lambda hp : P x . nhp hp (Q x \wedge R x) : \neg P x \rightarrow P x \rightarrow Q x \wedge R x}{\lambda x : S . \lambda nhp : \neg P x . \lambda hp : P x . nhp hp (Q x \wedge R x)}$	<b>8 Abst</b>
10.	$\frac{\lambda x : S . \lambda nhp : \neg P x . \lambda hp : P x . nhp hp (Q x \wedge R x) : \Pi x : S . \neg P x \rightarrow P x \rightarrow Q x \wedge R x}{\lambda x : S . \lambda nhp : \neg P x . \lambda hp : P x . nhp hp (Q x \wedge R x)}$	<b>9 Abst</b>

■

### Problem

(7.9 b) Verify that the following expression is a tautology in constructive logic by giving a proof in first-order natural deduction and a flag styled derivation.

$$\forall x \in S, P(x) \Rightarrow \forall y \in S, P(y) \vee Q(y)$$

*Solution.*

*Natural Deduction.*

1.  $\forall x \in S, P(x)$
2.  $y : S$
3.  $P(y)$  **2,1  $\forall E$**
4.  $P(y) \vee Q(y)$  **3  $\vee I$**
5.  $\forall y : S, (P(y) \vee Q(y))$  **2-4  $\forall I$**
6.  $\forall x \in S, P(x) \Rightarrow \forall y : S, (P(y) \vee Q(y))$  **1-5  $\Rightarrow I$**

■

$\lambda C$ .

1.  $S : *, P : S \rightarrow *, Q : S \rightarrow *$
2.  $h : \Pi x : S . P x$
3.  $y : S$
4.  $h y : P y$  **2,3 App**
5.  $C : *$
6.  $hp : P y \rightarrow C$
7.  $hq : Q y \rightarrow C$
8.  $hp (h y) : C$  **6,4 App**
9.  $\lambda hq : Q y \rightarrow C . hp (h y) : (Q y \rightarrow C) \rightarrow C$  **8 Abst**

10.				$\lambda hp : P y \rightarrow C . \lambda hq : Q y \rightarrow C . hp (h y)$ $: (P y \rightarrow C) \rightarrow (Q y \rightarrow C) \rightarrow C$	<b>9 Abst</b>
11.				$\lambda C : * . \lambda hp : P y \rightarrow C . \lambda hq : Q y \rightarrow C . hp (h y)$ $: \Pi C : * . (P y \rightarrow C) \rightarrow (Q y \rightarrow C) \rightarrow C$	<b>10 Abst</b>
12.				$\lambda y : S . \lambda C : * .$ $\lambda hp : P y \rightarrow C . \lambda hq : Q y \rightarrow C . hp (h y)$ $: \Pi y : S . P y \vee Q y$	<b>11 Abst</b>
13.				$\lambda h : \Pi x : S . P x .$ $\lambda y : S . \lambda C : * .$ $\lambda hp : P y \rightarrow C . \lambda hq : Q y \rightarrow C . hp (h y)$ $: (\Pi x : S . P x) \rightarrow \Pi y : S . P y \vee Q y$	<b>12 Abst</b>

■

### Problem

(7.10) Verify that the following expression is a tautology in constructive logic by giving a proof in first-order natural deduction and a flag styled derivation.

$$\begin{aligned} &\forall x \in S, (P(x) \Rightarrow Q(x)) \Rightarrow \\ &\quad \forall y \in S, (P(y) \Rightarrow R(y)) \Rightarrow \\ &\quad \quad \forall z \in S, (P(z) \Rightarrow (Q(z) \wedge R(z))) \end{aligned}$$

*Solution.*

*Natural Deduction.*

1.	$\forall x \in S (P(x) \Rightarrow Q(x))$	
2.	$\forall y \in S (P(y) \Rightarrow R(y))$	
3.	$z \in S$	
4.	$P(z)$	
5.	$P(z) \Rightarrow Q(z)$	<b>3,1 <math>\forall E</math></b>
6.	$Q(z)$	<b>5,4 <math>\Rightarrow E</math></b>
7.	$P(z) \Rightarrow R(z)$	<b>3,2 <math>\forall E</math></b>
8.	$R(z)$	<b>7,4 <math>\forall E</math></b>
9.	$Q(z) \wedge R(z)$	<b>6,8 <math>\wedge I</math></b>
10.	$P(z) \Rightarrow Q(z) \wedge R(z)$	<b>4-9 <math>\Rightarrow I</math></b>

11.	$\frac{\forall z \in S, (P(z) \Rightarrow Q(z) \wedge R(z))}{\forall y \in S, (P(y) \Rightarrow R(y)) \Rightarrow \forall z \in S, (P(z) \Rightarrow Q(z) \wedge R(z))}$	<b>3-10 <math>\forall I</math></b>
12.		<b>2-11 <math>\Rightarrow I</math></b>
13.		

$\forall x \in S, (P(x) \Rightarrow Q(x)) \Rightarrow$   
 $\forall y \in S, (P(y) \Rightarrow R(y)) \Rightarrow$   
 $\forall z \in S, (P(z) \Rightarrow Q(z) \wedge R(z))$       **1-12  $\Rightarrow I$**

■

$\lambda C.$

1.	$S : *, P : S \rightarrow *, Q : S \rightarrow *, R : S \rightarrow *$	
2.	$h : \Pi x : S . P x \rightarrow Q x$	
3.	$p : \Pi y : S . P y \rightarrow R y$	
4.	$z : S$	
5.	$r : P z$	
6.	$h z : P z \rightarrow Q z$	<b>2,4 App</b>
7.	$h z r : Q z$	<b>6,5 App</b>
8.	$p z : P z \rightarrow R z$	<b>3,4 App</b>
9.	$p z r : R z$	<b>8,5 App</b>
10.	$C : *$	
11.	$t : Q z \rightarrow R z \rightarrow C$	
12.	$t (h z r) : R z \rightarrow C$	<b>11,7 App</b>
13.	$t (h z r)(p z r) : C$	<b>12,9 App</b>
14.	$\lambda t : Q z \rightarrow R z \rightarrow C . t (h z r)(p z r)$ $: (Q z \rightarrow R z \rightarrow C) \rightarrow C$	<b>13 Abst</b>
15.	$\lambda C : * . \lambda t : Q z \rightarrow R z \rightarrow C . t (h z r)(p z r)$ $: \Pi C : * . (Q z \rightarrow R z \rightarrow C) \rightarrow C$	<b>14 Abst</b>
16.	$\lambda r : P z . \lambda C : * . \lambda t : Q z \rightarrow R z \rightarrow C .$ $t (h z r)(p z r)$ $: P z \rightarrow Q z \wedge R z$	<b>15 Abst</b>
17.	$\lambda z : S . \lambda r : P z . \lambda C : * . \lambda t : Q z \rightarrow R z \rightarrow C .$ $t (h z r)(p z r)$ $: \Pi z : S . P z \rightarrow Q z \wedge R z$	<b>16 Abst</b>

18.	$ \begin{array}{l} \lambda p : \Pi y : S . P y \rightarrow R y . \\ \lambda z : S . \lambda r : P z . \lambda C : * . \\ \lambda t : Q z \rightarrow R z \rightarrow C . \\ t (h z r) (p z r) \\ : \Pi y : S . P y \rightarrow R y \\ \rightarrow \Pi z : S . P z \rightarrow Q z \wedge R z \end{array} $	17 Abst
19.	$ \begin{array}{l} \lambda h : \Pi x : S . P x \rightarrow Q x . \lambda p : \Pi y : S . P y \rightarrow R y . \\ \lambda z : S . \lambda r : P z . \lambda C : * . \\ \lambda t : Q z \rightarrow R z \rightarrow C . \\ t (h z r) (p z r) \\ : (\Pi x : S . P x \rightarrow Q x) \rightarrow (\Pi y : S . P y \rightarrow R y) \\ \rightarrow \Pi z : S . P z \rightarrow Q z \wedge R z \end{array} $	18 Abst

■

### Problem

(7.11) Let  $S : *$  and  $P, Q : S \rightarrow *$ . Let

$$\begin{aligned}
y &: \Pi \alpha : * . ((\Pi x : S . (P x \rightarrow \alpha)) \rightarrow \alpha) \\
z &: \Pi x : S . (P x \rightarrow Q x)
\end{aligned}$$

and  $x : S$ . Find a correct type for  $y (Q x)$ , and prove the application  $y (Q x) z$  invalid. Also, check that it follows Remark 7.5.2

*Solution.*

1.	$S : *$	
2.	$P, Q : S \rightarrow *$	
3.	$y : \Pi \alpha : * . ((\Pi x : S . (P x \rightarrow \alpha)) \rightarrow \alpha)$	
4.	$x : S$	
5.	$Q x : *$	
6.	$y (Q x) : \Pi x : S . (P x \rightarrow Q x) \rightarrow Q x$	3,5 App

Here any application  $to y (Q x)$  requires that value to be of type  $S$ . It certainly is not true for  $z$ . Remark 7.5.2 basically forbids name clashing of free variables and bound variables in an application or beta reduction.

### Problem

(7.12 a) Derive  $\exists\mathbf{I}$  under  $\lambda C$ .

*Solution.* The rule translated into  $\lambda C$  is as follows: in context

$$\Gamma \vdash a : S, P : S \rightarrow *, h : P a$$

We can derive a term

$$\Gamma \vdash h : \Pi\alpha : *. (\Pi x : S . P x \rightarrow \alpha) \rightarrow \alpha$$

One derivation is as follows

- |    |  |                |  |
|----|--|----------------|--|
| 1. | $a : S, P : S \rightarrow *, h : P a$  |                |  |
| 2. | $\alpha : *$   |                |  |
| 3. | $p : \Pi x : S . P x \rightarrow \alpha$                                     |                |  |
| 4. | $p a : P a \rightarrow \alpha$   | <b>3,1 App</b> |  |
| 5. | $p a h : \alpha$   | <b>4,1 App</b> |  |
|    | $\lambda p : \Pi x : S . P x \rightarrow \alpha . p a h$                     |                |  |
| 6. | $: (\Pi x : S . P x \rightarrow \alpha) \rightarrow \alpha$                  | <b>5 Abst</b>  |  |
|    | $\lambda\alpha : * . \lambda p : \Pi x : S . P x \rightarrow \alpha . p a h$ |                |  |
| 7. | $: \Pi\alpha : * . (\Pi x : S . P x \rightarrow \alpha) \rightarrow \alpha$  | <b>6 Abst</b>  |  |

### Problem

(7.12 b) Give a flag styled derivation in  $\lambda C$  verifying the following tautology in classical logic:

$$\neg \exists x \in S, (\neg P(x)) \Rightarrow \forall y \in S, (P(y))$$

*Solution.* The proof term should have type

$$((\Pi\alpha : * . (\Pi x : S . (P x \rightarrow \perp) \rightarrow \alpha) \rightarrow \alpha) \rightarrow \perp) \rightarrow (\Pi y : S . P y)$$

*Proof.*

- |    |                                      |  |
|----|--------------------------------------|--|
| 1. | $S : *, P : S \rightarrow *$         |  |
| 2. | $h : \neg(\exists x : S . \neg P x)$ |  |
| 3. | $y : S$                              |  |
| 4. | $v : \neg P y$                       |  |

5.	$\alpha : *$	
6.	$p : \Pi x : S . (P x \rightarrow \perp) \rightarrow \alpha$	
7.	$p y : \neg P y \rightarrow \alpha$	6,3 App
8.	$p y v : \alpha$	7,4 App
9.	$\lambda h : \Pi x : S . (\neg P x) \rightarrow \alpha . p y v$ $: (\Pi x : S . \neg P x \rightarrow \alpha) \rightarrow \alpha$	8 Abst
10.	$\lambda \alpha : * . \lambda p : \Pi x : S . (\neg P x) \rightarrow \alpha . p y v$ $: \exists x : S . \neg P x$	9 Abst
11.	$h (\lambda \alpha : * . \lambda p : \Pi x : S . (\neg P x) \rightarrow \alpha .$ $p y v) : \perp$	2,10 App
12.	$\lambda v : \neg P y .$ $h (\lambda \alpha : * . \lambda p : \Pi x : S . (\neg P x) \rightarrow \alpha . p y v)$ $: \neg \neg P y$	11 Abst
13.	DN $(\lambda v : \neg P y .$ $h (\lambda \alpha : * . \lambda p : \Pi x : S . (\neg P x) \rightarrow \alpha . p y v))$ $: P y$	App (Ax. DN)
14.	$\lambda y : S .$ DN $(\lambda v : \neg P y .$ $h (\lambda \alpha : * . \lambda p : \Pi x : S . (\neg P x) \rightarrow \alpha . p y v))$ $: \Pi y : S . P y$	13 Abst
15.	$\lambda h : \neg (\exists x : S . \neg P x) . \lambda y : S .$ DN $(\lambda v : \neg P y . p (\lambda \alpha : * . \lambda h : \Pi x : S . (\neg P x) \rightarrow \alpha . p y v))$ $: \neg (\exists x : S . \neg P x) \rightarrow \Pi y : S . P y$	14 Abst

■

### Problem

(7.13) Prove this a tautology in constructive logic by a  $\lambda C$  derivation:

$$(\exists x \in S, P(x)) \Rightarrow (\forall y \in S, P(y) \Rightarrow Q(y)) \Rightarrow (\exists z \in S, Q(z))$$

*Solution.* The corresponding term is

$$\begin{aligned} & (\Pi \alpha : * . (\Pi x : S . P x \rightarrow \alpha) \rightarrow \alpha) \rightarrow \\ & (\Pi y : S . P y \rightarrow Q y) \rightarrow \\ & (\Pi \beta : * . (\Pi z : S . Q z \rightarrow \beta) \rightarrow \beta) \end{aligned}$$



*Proof.*

1.	$S : *, P : S \rightarrow *, Q : S \rightarrow *$	
2.	$h : \exists x : S . P x$	
3.	$p : \Pi y : S . P y \rightarrow Q y$	
4.	$\beta : *$	
5.	$r : \Pi z : S . Q z \rightarrow \beta$	
6.	$h \beta : (\Pi x : S . P x \rightarrow \beta) \rightarrow \beta$	2,4 App
7.	$a : S$	
8.	$n : P a$	
9.	$p a : P a \rightarrow Q a$	3,7 App
10.	$p a n : Q a$	9,8 App
11.	$r a : Q a \rightarrow \beta$	5,7 App
12.	$r a (p a n) : \beta$	11,10 App
13.	$\lambda n : P a . r a (p a n) : P a \rightarrow \beta$	12 Abst
14.	$\lambda a : S . \lambda n : P a . r a (p a n) : \Pi a . P a \rightarrow \beta$	13 Abst
15.	$h \beta (\lambda a : S . \lambda n : P a . r a (p a n)) : \beta$	6,14 App
16.	$\lambda r : \Pi z : S . Q z \rightarrow \beta .$ $h \beta (\lambda a : S . \lambda n : P a . r a (p a n))$ $: (\Pi z : S . Q z \rightarrow \beta) \rightarrow \beta$	15 Abst
17.	$\lambda \beta : * . \lambda r : \Pi z : S . Q z \rightarrow \beta .$ $h \beta (\lambda a : S . \lambda n : P a . r a (p a n))$ $: \exists z : S . P z$	16 Abst
18.	$\lambda p : \Pi y : S . P y \rightarrow Q y .$ $\lambda \beta : * . \lambda r : \Pi z : S . Q z \rightarrow \beta .$ $h \beta (\lambda a : S . \lambda n : P a . r a (p a n))$ $: (\Pi y : S . P y \rightarrow Q y) \rightarrow \exists z : S . P z$	17 Abst
19.	$\lambda h : \exists x : S . P x . \lambda p : \Pi y : S . P y \rightarrow Q y .$ $\lambda \beta : * . \lambda r : \Pi z : S . Q z \rightarrow \beta .$ $h \beta (\lambda a : S . \lambda n : P a . r a (p a n))$ $: (\exists x : S . P x) \rightarrow (\Pi y : S . P y \rightarrow Q y) \rightarrow \exists z : S . P z$	18 Abst

■

## Problem

(7.14) Let  $\Gamma \equiv S : *, P : S \rightarrow *, Q : S \rightarrow *$ . Consider the following term

$$M \equiv \lambda u : (\exists x : S . P x \wedge Q x) . \lambda \alpha : * . \lambda v : (\Pi x : S . P x \rightarrow \alpha) . \\ u \alpha (\lambda y : S . \lambda w : (P y \wedge Q y) . v y (w (P y) (\lambda s : P y . \lambda t : Q y . s)))$$

Type  $M$  by a derivation and give the corresponding proposition proved by  $M$ .

*Solution.*

1.	$S : *, P : S \rightarrow *, Q : S \rightarrow *$	
2.	$u : \exists x : S . P x \wedge Q x$	
3.	$\alpha : *$	
4.	$v : \Pi x : S . P x \rightarrow \alpha$	
5.	$u \alpha : (\Pi x : S . (P x \wedge Q x) \rightarrow \alpha) \rightarrow \alpha$	<b>2,3 App</b>
6.	$y : S$	
7.	$w : P y \wedge Q y$	
8.	$v y : P y \rightarrow \alpha$	<b>4,6 App</b>
9.	$P y : *$	<b>1,6 App</b>
10.	$w (P y) : (P y \rightarrow Q y \rightarrow P y) \rightarrow P y$	<b>7,9 App</b>
11.	$s : P y$	
12.	$t : Q y$	
13.	$s : P y$	
14.	$\lambda t : Q y . s : Q y \rightarrow P y$	<b>13 Abst</b>
15.	$\lambda s : P y . \lambda t : Q y . s : P y \rightarrow Q y \rightarrow P y$	<b>14 Abst</b>
16.	$w (P y) (\lambda s : P y . \lambda t : Q y . s) : P y$	<b>10,15 App</b>
17.	$\lambda w : P y \wedge Q y . w (P y) (\lambda s : P y . \lambda t : Q y . s) : P y \wedge Q y \rightarrow P y$	<b>16 Abst</b>
18.	$\lambda y : S . \lambda w : P y \wedge Q y . w (P y) (\lambda s : P y . \lambda t : Q y . s) : \Pi y : S . P y \wedge Q y \rightarrow P y$	<b>17 Abst</b>
19.	$u \alpha (\lambda y : S . \lambda w : P y \wedge Q y . w (P y) (\lambda s : P y . \lambda t : Q y . s)) : \alpha$	<b>5,18 App</b>
20.	$\lambda v : \Pi x : S . P x \rightarrow \alpha . u \alpha (\lambda y : S . \lambda w : P y \wedge Q y . w (P y) (\lambda s : P y . \lambda t : Q y . s)) : (\Pi x : S . P x \rightarrow \alpha) \rightarrow \alpha$	<b>19 Abst</b>

21.	$ \begin{array}{ l} \lambda\alpha : * . \lambda v : \Pi x : S . P\ x \rightarrow \alpha. \\ u\ \alpha(\lambda y : S . \lambda w : P\ y \wedge Q\ y . w\ (P\ y)(\lambda s : P\ y . \lambda t : Q\ y . s)) \\ : \exists x : S . P\ x \end{array} $	<b>20 Abst</b>
22.	$ \begin{array}{ l} \lambda u : \exists x : S . P\ x \wedge Q\ x . \lambda\alpha : * . \lambda v : \Pi x : S . P\ x \rightarrow \alpha. \\ u\ \alpha(\lambda y : S . \lambda w : P\ y \wedge Q\ y . w\ (P\ y)(\lambda s : P\ y . \lambda t : Q\ y . s)) \\ : \exists x : P\ x \wedge Q\ x \rightarrow \exists x : S . P\ x \end{array} $	<b>21 Abst</b>

This encodes the tautology that for any set  $S$  and predicates  $P$  and  $Q$  over them, the existence of a witness in  $S$  satisfying both  $P$  and  $Q$  implies the existence of a witness satisfying  $P$ . That is,

$$(\exists x \in S, P(x) \wedge Q(x)) \Rightarrow (\exists x \in S, P(x))$$

—

Completed Jan 10 2:34 am.