# Exercises

## Chapter 7

Sean Li [1]

1. Redacted

---

**Reference - Propositional Logic in $\lambda C$**

$$\frac{A \qquad \neg\, A}{\bot}\,\bot\text{I or }\neg\text{E} \qquad \frac{\bot}{A}\,\bot\text{E} \qquad \frac{A \qquad B}{A \wedge B}\,\wedge\text{I} \qquad \frac{A \wedge B}{A}\,\wedge\text{EL} \qquad \frac{A \wedge B}{B}\,\wedge\text{ER}$$

$$\frac{a}{a \vee b}\,\vee\text{IL} \qquad \frac{b}{a \vee b}\,\vee\text{IR} \qquad \frac{A \Rightarrow B \qquad A}{B}\,\Rightarrow\text{E}$$

$$\frac{A \vee B \qquad A \to C \qquad B \to C}{C}\,\vee\text{E} \qquad \frac{a \in S \qquad P\,(a)}{\exists a \in S, P\,(a)}\,\exists\text{I} \qquad \frac{\begin{array}{ll} 1. & A \\ 2. & \quad \dots \\ 3. & \quad \bot \end{array}}{\neg\, A}\,\neg\text{I}$$

$$\frac{\begin{array}{ll} 1. & A \\ 2. & \quad \dots \\ 3. & \quad B \end{array}}{A \Rightarrow B}\,\Rightarrow\text{I} \qquad \frac{\begin{array}{ll} 1. & a \in S \\ 2. & \quad \dots \\ 3. & \quad P\,(a) \end{array}}{\forall a \in S, P\,(a)}\,\forall I$$

$$\frac{\exists x \in S, P\,(x) \qquad \forall x \in S, (P\,(x) \Rightarrow A)}{A}\,\exists\text{E} \qquad \frac{a \in S \qquad \forall x \in S, P\,(x)}{P\,(a)}\,\forall\text{E}$$

$$\frac{}{\neg\neg\, A \Rightarrow A}\,\text{DN (Classical)} \qquad \frac{}{A \vee \neg\, A}\,\text{ET (Classical)}$$

---

**Reference - 2nd Encoding for Propositional Logic**

| **Proposition** | **Minimal Propositional Logic** |
| --- | --- |
| $\bot$ | $\forall A, A$ |
| $A \Rightarrow B$ | $A \Rightarrow B$ |
| $\neg A$ | $A \Rightarrow \bot$ |
| $A \wedge B$ | $\forall C, (A \Rightarrow B \Rightarrow C) \Rightarrow C$ |
| $A \vee B$ | $\forall C, (A \Rightarrow C) \Rightarrow (B \Rightarrow C) \Rightarrow C$ |
| $\forall a \in S, P(a)$ | $\forall a \in S \,.\, P(a)$ |
| $\exists a \in S, P(a)$ | $\forall \alpha, (\forall a \in S, (P(a) \Rightarrow \alpha)) \Rightarrow \alpha$ |

**Problem**

*(7.1 a)* Prove in natural deduction and $\lambda C$ the tautology

$$B \Rightarrow (A \Rightarrow B)$$

*Solution.*

*Natural Deduction.*

1. $B$
2. $\quad | \; A$
3. $\quad | \quad | \; B$
4. $\quad | \; A \Rightarrow B$   $\Rightarrow$**I**
5. $B \Rightarrow (A \Rightarrow B)$   $\Rightarrow$**I**

■

$\lambda C$. Assuming context $\Gamma \equiv A : *, B : *$. By the PAT paradigm the proof is equivalent to an inhabitant of $B \to A \to B$.

1. $A : *, B : *$
2. $\quad | \; x : B$
3. $\quad | \quad | \; y : A$
4. $\quad | \quad | \quad | \; x : B$   **Weak**
5. $\quad | \quad | \; \lambda y : A \,.\, x : A \to B$   **4 Abst**
6. $\quad | \; \lambda x : B \,.\lambda y : A \,.\, x : B \to A \to B$   **5 Abst**

■

**Problem**

*(7.1 b)* Prove in natural deduction and $\lambda C$ the tautology

$$\neg A \Rightarrow (A \Rightarrow B)$$

*Solution.*

*Natural Deduction.*

| | | |
|---|---|---|
| 1. | $\neg A$ | |
| 2. | $\quad A$ | |
| 3. | $\quad\quad \neg A$ | |
| 4. | $\quad\quad A$ | |
| 5. | $\quad\quad \perp$ | $\perp$**I** |
| 6. | $\quad\quad B$ | $\perp$**E** |
| 7. | $\quad A \Rightarrow B$ | $\Rightarrow$**I** |
| 8. | $\neg A \Rightarrow (A \Rightarrow B)$ | $\Rightarrow$**I** |

∎

$\lambda C$. Assuming context $\Gamma \equiv A : *, B : *$. By the PAT paradigm the proof is equivalent to an inhabitant of $(A \to \perp) \to A \to B$.

| | | |
|---|---|---|
| 1. | $A : *, B : *$ | |
| 2. | $\quad x : \neg A$ | |
| 3. | $\quad\quad y : A$ | |
| 4. | $\quad\quad\quad x\, y : \Pi\alpha : * \,.\, \alpha$ | **2,3 App (Neg Elim)** |
| 5. | $\quad\quad\quad x\, y\, B : B$ | **4,1 App (Ex Falso)** |
| 6. | $\quad\quad \lambda y : A \,.\, x\, y\, B : A \to B$ | **5 Abst** |
| 7. | $\quad \lambda x : \neg A \,.\lambda y : A \,.\, x\, y\, B : \neg A \to A \to B$ | **6 Abst** |

∎

**Problem**

*(7.1 c)* Prove in natural deduction and $\lambda C$ the tautology

$$(A \Rightarrow \neg B) \Rightarrow ((A \Rightarrow B) \Rightarrow \neg A)$$

*Solution.*

*Natural Deduction.*

| | | |
|---|---|---|
| 1. | $A \Rightarrow \neg B$ | |
| 2. | $\quad A \Rightarrow B$ | |
| 3. | $\quad\quad A$ | |
| 4. | $\quad\quad\quad \neg B$ | **1,3 $\Rightarrow$E** |
| 5. | $\quad\quad\quad B$ | **2,3 $\Rightarrow$E** |
| 6. | $\quad\quad\quad \bot$ | **5,4 $\bot$I** |
| 7. | $\quad\quad \neg A$ | **3,6 $\neg$I** |
| 8. | $\quad (A \Rightarrow B) \Rightarrow \neg A$ | **2,7 $\Rightarrow$I** |
| 9. | $(A \Rightarrow \neg B) \Rightarrow ((A \Rightarrow B) \Rightarrow \neg A)$ | **1,8 $\Rightarrow$I** |

■

$\lambda C$. Assuming context $\Gamma \equiv A : *, B : *$. The proof should be equivalent to an inhabitant of $(A \to B \to \bot) \to (A \to B) \to A \to \bot$.

| | | |
|---|---|---|
| 1. | $A : *, B : *$ | |
| 2. | $\quad h : A \to \neg B$ | |
| 3. | $\quad\quad q : A \to B$ | |
| 4. | $\quad\quad\quad a : A$ | |
| 5. | $\quad\quad\quad\quad q\, a : B$ | **3,4 App** |
| 6. | $\quad\quad\quad\quad h\, a : B \to \bot$ | **2,4 App** |
| 7. | $\quad\quad\quad\quad h\, a\, (q\, a) : \bot$ | **6,5 App (Neg Elim)** |
| 8. | $\quad\quad\quad \lambda a : A \,.\, h\, a\, (q\, a) : \neg A$ | **7 Abst (Neg Intro)** |
| 9. | $\quad\quad \lambda q : A \to B \,.\lambda a : A \,.\, h\, a\, (q\, a) : A \to B \to \neg A$ | **8 Abst** |
| 10. | $\quad \lambda h : A \to \neg B \,.\lambda q : A \to B \,.\lambda a : A \,.\, h\, a\, (q\, a)$ $: (A \to \neg B) \to A \to B \to \neg A$ | **9 Abst** |

■

## Problem

*(7.1 d)* Prove in natural deduction and $\lambda C$ the tautology

$$\neg(A \Rightarrow B) \Rightarrow \neg B$$

*Solution.*

*Natural Deduction.*

| | | |
|---|---|---|
| 1. | $\neg(A \Rightarrow B)$ | |
| 2. | $B$ | |
| 3. | $A$ | |
| 4. | $B$ | |
| 5. | $A \Rightarrow B$ | **3,4 ⇒I** |
| 6. | $\bot$ | **5,1 ⊥I** |
| 7. | $\neg\, B$ | **6 ¬I** |
| 8. | $\neg(A \Rightarrow B) \Rightarrow \neg\, B$ | **1,7 ⇒I** |

■

$\lambda C$. Assuming context $\Gamma \equiv A : *, B : *$. The proof should be equivalent to an inhabitant of $((A \to B) \to \bot) \to B \to \bot$.

| | | |
|---|---|---|
| 1. | $n : \neg(A \to B)$ | |
| 2. | $b : B$ | |
| 3. | $a : A$ | |
| 4. | $b : B$ | **Weak** |
| 5. | $\lambda a : A \,.\, b : A \to B$ | **4 Abst** |
| 6. | $n\ (\lambda a : A \,.\, b) : \bot$ | **1,5 App (Neg Elim)** |
| 7. | $\lambda b : B \,.\, n\ (\lambda a : A \,.\, b) : \neg\, B$ | **6 Abst (Neg Intro)** |
| 8. | | |

$\lambda n : \neg(A \to B) . \lambda b : B \,.\, n\ (\lambda a : A \,.\, b)$
$\quad : \neg(A \to B) \to \neg\, B$ **7 Abst**

■

**Problem**

*(7.2)* Formulate the double negation law as an axiom in $\lambda C$, and prove the following tautology in $\lambda C$ with DN.

$$(\neg\, A \Rightarrow A) \Rightarrow A$$

*Solution.* The rule

$$\frac{}{\neg\neg\, A \Rightarrow A}\ \text{DN-E}$$

Could be translated into lambda calculus as

$$\Pi A : * . ((A \to \bot) \to \bot) \to A$$

*Proof.* Assume context $\Gamma \equiv A : *$ .

| | | |
|---|---|---|
| 1. | $A : *$ | |
| 2. | $h : \neg A \to A$ | |
| 3. | $x : \neg A$ | |
| 4. | $h\, x : A$ | **2,3 App** |
| 5. | $x\, (h\, x) : \bot$ | **3,4 App (Contradiction)** |
| 6. | $\lambda x : \neg A . x\, (h\, x) : \neg\neg A$ | **5 Abst (Neg Intro)** |
| 7. | $\mathrm{DN}\, A : \neg\neg A \to A$ | **1,1 App** |
| 8. | $\mathrm{DN}\, A\, (\lambda x : \neg A . x\, (h\, x)) : A$ | **App (Axiom DN)** |
| 9. | $\lambda h : \neg A \to A . \mathrm{DN}\, A\, (\lambda x : \neg A . x\, (h\, x)) : (\neg A \to A) \to A$ | **8 Abst** |

■

**Problem**

*(7.3 a)* Prove the following tautology in classical logic using $\lambda C$

$$(A \Rightarrow B) \Rightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$$

*Solution.* Assume context $\Gamma \equiv A : *, B : *$. It suffices the proof to find an inhabitant of type

$$(A \to B) \to (\neg B \to \neg A)$$

*Proof.*

| | | |
|---|---|---|
| 1. | $A : *, B : *$ | |
| 2. | $h : A \to B$ | |
| 3. | $b : \neg B$ | |
| 4. | $a : A$ | |
| 5. | $h\, a : B$ | **5,2 App** |
| 6. | $b\, (h\, a) : \bot$ | **6,3 App (Contradiction)** |
| 7. | $b\, (h\, a)(\neg A) : \neg A$ | **7,5 App (Ex Falso)** |
| 8. | $\lambda a : A . b\, (h\, a)(\neg A) : A \to \neg A$ | **7 Abst** |
| 9. | $a : \neg A$ | |
| 10. | $a : \neg A$ | **Var** |
| 11. | $\lambda a : \neg A . a : (\neg A \to \neg A)$ | **10 Abst** |

| | | |
|---|---|---|
| 12. | $\mathrm{ET}\, A : A \vee \neg A$ | **App (Axiom ET)** |
| 13. | $\mathrm{ET}\, A\, (\neg A) : (A \to \neg A) \to$ $(\neg A \to \neg A) \to \neg A$ | **12 App** |
| 14. | $\mathrm{ET}\, A\, (\neg A)(\lambda a : A \,.\, b\, (h\, a)(\neg A)) :$ $(\neg A \to \neg A) \to \neg A$ | **13,8 App** |
| 15. | $\mathrm{ET}\, A\, (\neg A)$ $(\lambda a : A \,.\, b\, (h\, a)(\neg A))$ $(\lambda a : \neg A \,.\, a) : \neg A$ | **14,11 App** |
| 16. | $\lambda b : \neg B \,.\, \mathrm{ET}\, A\, (\neg A)$ $(\lambda a : A \,.\, b\, (h\, a)(\neg A))$ $(\lambda a : \neg A \,.\, a) : \neg B \to \neg A$ | **15 Abst** |
| 17. | $\lambda h : A \to B \,.\lambda b : \neg B \,.\, \mathrm{ET}\, A\, (\neg A)$ $(\lambda a : A \,.\, b\, (h\, a)(\neg A))$ $(\lambda a : \neg A \,.\, a) :$ $(A \to B) \to \neg B \to \neg A$ | **16 Abst** |

∎

**Problem**

*(7.3 b)* Prove the following tautology in classical logic using $\lambda C$

$$(\neg B \Rightarrow \neg A) \Rightarrow (A \Rightarrow B)$$

*Solution.* Assume context $\Gamma \equiv A : *, B : *$. It suffices the proof to find an inhabitant of type

$$(\neg B \to \neg A) \to A \to B$$

*Proof.*

| | | |
|---|---|---|
| 1. | $A : *, B : *$ | |
| 2. | $h : \neg B \to \neg A$ | |
| 3. | $a : A$ | |
| 4. | $b : B$ | |
| 5. | $b : B$ | **Weak** |
| 6. | $\lambda b : B \,.\, b : B \to B$ | |
| 7. | $b : \neg B$ | |

| | | |
|---|---|---|
| 8. | $h\,b : \neg A$ | **2,7 App** |
| 9. | $h\,b\,a : \bot$ | **8,2 App (Neg Elim)** |
| 10. | $h\,b\,a\,B : B$ | **9 App (Ex Falso)** |
| 11. | $\lambda b : \neg B \,.\, h\,b\,a\,B : \neg B \to B$ | **10 Abst** |
| 12. | $\mathrm{ET}\,B : B \vee \neg B$ | **1 App (Axiom ET)** |
| 13. | $\mathrm{ET}\,B\,B : (B \to B) \to (\neg B \to B) \to B$ | **12,1 App** |
| 14. | $\mathrm{ET}\,B\,B\,(\lambda b : B \,.\, b) : (\neg B \to B) \to B$ | **13,6 App** |
| 15. | $\mathrm{ET}\,B\,B\,(\lambda b : B \,.\, b)(\lambda b : \neg B \,.\, h\,b\,a\,B) : B$ | **14,11 App** |
| 16. | $\lambda a : A \,.\mathrm{ET}\,B\,B\,(\lambda b : B \,.\, b)$ $(\lambda b : \neg B \,.\, h\,b\,a\,B) : A \to B$ | **15 Abst** |
| 17. | $\lambda h : \neg B \to \neg A \,.\lambda a : A \,.$ $\mathrm{ET}\,B\,B\,(\lambda b : B \,.\, b)(\lambda b : \neg B \,.\, h\,b\,a\,B)$ $: (\neg B \to \neg A) \to A \to B$ | **16 Abst** |

■

## Problem

*(7.4)* Derive $\wedge$-**EL** and $\wedge$-**ER** in $\lambda C$.

*Solution.* The derivation is the same as proving

$$M : \Pi C \,.(A \to B \to C) \to C \vdash N_1 : A$$
$$M : \Pi C \,.(A \to B \to C) \to C \vdash N_2 : B$$

*Left Projection.*

| | | |
|---|---|---|
| 1. | $M : \Pi C \,.(A \to B \to C) \to C$ | |
| 2. | $M\ A : (A \to B \to A) \to A$ | |
| 3. | $x : A$ | |
| 4. | $b : B$ | |
| 5. | $x : A$ | **Weak** |
| 6. | $\lambda b : B \,.\, x : B \to A$ | **5 Abst** |
| 7. | $\lambda x : A \,.\lambda b : B \,.\, x : A \to B \to A$ | **6 Abst** |
| 8. | $N_1 \equiv M\ A\,(\lambda x : A \,.\lambda b : B \,.\, x) : A$ | **2,7 App** |

■

*Right Projection.*

1. $M : \Pi C\,.(A \to B \to C) \to C$
2. $\quad M\ B : (A \to B \to B) \to B$
3. $\quad x : A$
4. $\quad\quad b : B$
5. $\quad\quad\quad b : B$ — **Weak**
6. $\quad\quad \lambda b : B\,.\,b : B \to B$ — **5 Abst**
7. $\quad \lambda x : A\,.\lambda b : B\,.\,b : A \to B \to B$ — **6 Abst**
8. $\quad N_2 \equiv M\ B\,(\lambda x : A\,.\lambda b : B\,.\,b) : B$ — **2,7 App**

■

**Problem**

*(7.5 a)* Prove tautology under classical logic

$$\neg(A \Rightarrow B) \Rightarrow A$$

*Solution.* Assume context $\Gamma \equiv A : *, B : *$. Therefore the proof suffices to find an inhabitant of

$$((A \to B) \to \bot) \to A$$

*Proof.*

1. $A : *, B : *$
2. $\quad h : \neg(A \to B)$
3. $\quad\quad a : A$
4. $\quad\quad\quad a : A$ — **Weak**
5. $\quad\quad \lambda a : A\,.\,a : A \to A$ — **4 Abst**
6. $\quad\quad a : \neg\,A$
7. $\quad\quad\quad n : A$
8. $\quad\quad\quad\quad a\,n : \bot$ — **6,7 App (Contradiction)**
9. $\quad\quad\quad\quad a\,n\,B : B$ — **8 App (Ex Falso)**
10. $\quad\quad\quad \lambda n : A\,.\,a\,n\,B : A \to B$ — **9 Abst**
11. $\quad\quad\quad h\,(\lambda n : A\,.\,a\,n\,B) : \bot$ — **10,2 App (Contra.)**
12. $\quad\quad\quad h\,(\lambda n : A\,.\,a\,n\,B)\ A : A$ — **11 App (Ex Falso)**

$\quad\quad \lambda a : \neg\,A\,.\,h\,(\lambda n : A\,.\,a\,n\,B)\ A$

13. $\quad\quad\quad : \neg\,A \to A$ — **12 Abst**
14. $\quad\quad \mathrm{ET} : \Pi S : *\,.\,S \vee \neg\,S$ — **Axiom ET**

15. $\mathrm{ET}\ A : A \vee \neg A$ **14,1 App**

16. $\mathrm{ET}\ A\ A : (A \to A) \to (\neg A \to A) \to A$ **15,1 App**

17. $\mathrm{ET}\ A\ A\ (\lambda a : A\,.\,a)$
$: (\neg A \to A) \to A$ **16,5 App**

18. $\mathrm{ET}\ A\ A\ (\lambda a : A\,.\,a)$
$(\lambda a : \neg A\,.\,h\ (\lambda n : A\,.\,a\ n\ B)\ A) : A$ **17,13 App**

19. $\lambda h : \neg(A \to B).\ \mathrm{ET}\ A\ A\ (\lambda a : A\,.\,a)$
$(\lambda a : \neg A\,.\,h\ (\lambda n : A\,.\,a\ n\ B)\ A)$
$: \neg(A \to B) \to A$ **18 Abst**

■

**Problem**

*(7.5 b)* Prove tautology under classical logic

$$\neg(A \Rightarrow B) \Rightarrow (A \wedge \neg B)$$

*Solution.* Assume context $\Gamma \equiv A : *, B : *$. Therefore the proof suffices to find an inhabitant of

$$((A \to B) \to \bot) \to \Pi C : *\,.((A \to (B \to \bot) \to C) \to C)$$

*Proof.*

1. $A : *, B : *$
2. $p : \neg(A \to B)$
3. $C : *$
4. $h : A \to \neg B \to C$
5. $hb : B$
6. $ha : A$
7. $hb : B$ **Weak**
8. $\lambda ha : A\,.\,hb : A \to B$ **7 Abst**
9. $p\ (\lambda ha : A\,.\,hb) : \bot$ **2,8 App (Contra.)**
10. $\lambda hb : B\,.\,p\ (\lambda ha : A\,.\,hb) : \neg B$ **9 Abst (Neg Intro)**
11. $hna : \neg A$
12. $ha' : A$
13. $hna\ ha' : \bot$ **11,12 App (Contra.)**

| | | |
|---|---|---|
| 14. | $hna\ ha'\ B : B$ | **13,1 App (Ex Falso)** |
| 15. | $\lambda ha' : A\ .\ hna\ ha'\ B : A \to B$ | **14 Abst** |
| 16. | $p\ (\lambda ha' : A\ .\ hna\ ha'\ B) : \bot$ | **2,15 App (Contra.)** |
| 17. | $p\ (\lambda ha' : A\ .\ hna\ ha'\ B)\ A : A$ | **2,15 App (Contra.)** |
| 18. | $\lambda hna : \neg\, A\ .\ p$ <br> $(\lambda ha' : A\ .\ hna\ ha'\ B)\ A$ <br> $: \neg\, A \to A$ | **17 Abst** |
| 19. | $ha'' : A$ | |
| 20. | $ha'' : A$ | **Var** |
| 21. | $\lambda ha'' : A\ .ha'' : A \to A$ | **20 Abst** |
| 22. | $\mathrm{ET} : \Pi S : *\ .\ S \vee \neg\, S$ | **Axiom ET** |
| 23. | $\mathrm{ET}\ A : A \vee \neg\, A$ | **22,1 App** |
| 24. | $\mathrm{ET}\ A\ A : (A \to A) \to (\neg\, A \to A) \to A$ | **23,1 App** |
| 25. | $\mathrm{ET}\ A\ A$ <br> $(\lambda ha'' : A\ .ha'')$ <br> $: (\neg\, A \to A) \to A$ | **24,21 App** |
| 26. | $\mathrm{ET}\ A\ A$ <br> $(\lambda ha'' : A\ .ha'')$ <br> $(\lambda hna : \neg\, A\ .\ p$ <br> $(\lambda ha' : A\ .\ hna\ ha'\ B)\ A) : A$ | **25,18 App** |
| 27. | $h\ (\mathrm{ET}\ A\ A$ <br> $(\lambda ha'' : A\ .ha'')$ <br> $(\lambda hna : \neg\, A\ .\ p$ <br> $(\lambda ha' : A\ .\ hna\ ha'\ B)\ A))$ <br> $: \neg\, B \to C$ | **4,26 App** |
| 28. | $h\ (\mathrm{ET}\ A\ A$ <br> $(\lambda ha'' : A\ .ha'')$ <br> $(\lambda hna : \neg\, A\ .\ p$ <br> $(\lambda ha' : A\ .\ hna\ ha'\ B)\ A))$ <br> $(\lambda hb : B\ .\ p\ (\lambda ha : A\ .\ hb)) : C$ | **27,10 App** |

29. $\lambda h : A \to \neg B \to C \,.\, h\,(\mathrm{ET}\ A\ A$
$(\lambda ha'' : A\,.ha'')$
$(\lambda hna : \neg A \,.\, p\,(\lambda ha' : A \,.\, hna\ ha'\ B)\ A))$
$(\lambda hb : B \,.\, p\,(\lambda ha : A \,.\, hb))$
$: (A \to \neg B \to C) \to C$ **28 Abst**

30. $\lambda C : * \,.\lambda h : A \to \neg B \to C\,.$
$h\,(\mathrm{ET}\ A\ A$
$(\lambda ha'' : A\,.ha'')$
$(\lambda hna : \neg A \,.\, p\,(\lambda ha' : A \,.\, hna\ ha'\ B)\ A))$
$(\lambda hb : B \,.\, p\,(\lambda ha : A \,.\, hb)) : A \wedge \neg B$ **29 Abst**

31. $\lambda p : \neg(A \to B).$
$\lambda C : * \,.\lambda h : A \to \neg B \to C\,.$
$h\,(\mathrm{ET}\ A\ A$
$(\lambda ha'' : A\,.ha'')$
$(\lambda hna : \neg A \,.\, p\,(\lambda ha' : A \,.\, hna\ ha'\ B)\ A))$
$(\lambda hb : B \,.\, p\,(\lambda ha : A \,.\, hb))$
$: \neg(A \to B) \to (A \wedge \neg B)$ **30 Abst**

■

**Problem**

*(7.6 a)* Verify that the following expressions is a tautology in constructive logic

$$\neg A \Rightarrow \neg(A \wedge B)$$

*Solution.* Suppose context $A : *, B : *$. The proof suffices to give a inhabitant of type

$$\neg A \to \neg(A \wedge B) \equiv (A \to \bot) \to (\Pi C : * \,.(A \to B \to C) \to C) \to \bot$$

*Proof.*

1. $A : *, B : *$
2. $na : \neg A$
3. $h : \Pi C : * \,.(A \to B \to C) \to C$
4. $h\ A : (A \to B \to A) \to A$ **3,1 App**
5. $ha : A$
6. $hb : B$

7. $ha : A$
8. $\lambda hb : B \,.\, ha : B \to A$ **7 Abst**
9. $\lambda ha : A \,.\lambda hb : B \,.\, ha : A \to B \to A$ **8 Abst**
10. $h\ A\ (\lambda ha : A \,.\lambda hb : B \,.\, ha) : A$ **4,9 App**
11. $na\ (h\ A\ (\lambda ha : A \,.\lambda hb : B \,.\, ha)) : \bot$ **2,10 App (Contradiction)**
12. $\lambda h : A \wedge B \,.\ na\ (h\ A\ (\lambda ha : A \,.\lambda hb : B \,.\, ha)) : A \wedge B \to \bot$ **11 Abst**
13. $\lambda na : \neg A \,.\lambda h : A \wedge B \,.\ na\ (h\ A\ (\lambda ha : A \,.\lambda hb : B \,.\, ha)) : \neg A \to \neg(A \wedge B)$ **12 Abst**

■

**Problem**

*(7.6 b)* Verify that the following expressions is a tautology in constructive logic

$$\neg(A \wedge \neg A)$$

*Solution.* Suppose context $A : *, B : *$. The proof suffices to give a inhabitant of type

$$(\Pi S : * \,.(A \to (A \to \bot) \to S) \to S) \to \bot$$

*Proof.*

1. $A : *, B : *, \bot : \square$
2. $h : \Pi S : * \,.(A \to \neg A \to S) \to S$
3. $h\, \bot : (A \to \neg A \to \bot) \to \bot$ **2,1 App**
4. $a : A$
5. $n : \neg A$
6. $n\ a : \bot$ **5,4 App**
7. $\lambda n : \neg A \,.\, n\ a : \neg A \to \bot$ **6 Abst**
8. $\lambda a : A \,.\lambda n : \neg A \,.\, n\ a : A \to \neg A \to \bot$ **7 Abst**
9. $h\, \bot(\lambda a : A \,.\lambda n : \neg A \,.\, n\ a) : \bot$ **3,8 App**
10. $\lambda h : A \wedge \neg A \,.\, h\, \bot(\lambda a : A \,.\lambda n : \neg A \,.\, n\ a) : A \wedge \neg A \to \bot$ **9 Abst**

■

## Problem

*(7.7)* Derive $\vee$-**IL** and $\vee$-**IR**.

*Solution.* The derivation is the same as proving

$$m : A, B : * \vdash N : \Pi C \,.(A \to C) \to (B \to C) \to C$$

$$m : B, A : * \vdash N : \Pi C \,.(A \to C) \to (B \to C) \to C$$

*Left Introduction.*

1. $m : A, B : *$
2. $C : *$
3. $hl : A \to C$
4. $hr : B \to C$
5. $hl\, m : C$ **3,1 App**
6. $\lambda hr : B \to C \,.\, hl\, m : (B \to C) \to C$ **5 Abst**
7. $\lambda hl : A \to C \,.\lambda hr : B \to C \,.\, hl\, m$
   $: (A \to C) \to (B \to C) \to C$ **6 Abst**
8. $\lambda C : * \,.\lambda hl : A \to C \,.\lambda hr : B \to C \,.\, hl\, m$
   $: \Pi C : * \,.(A \to C) \to (B \to C) \to C$ **7 Abst**

■

*Right Introduction.*

1. $m : B, A : *$
2. $C : *$
3. $hl : A \to C$
4. $hr : B \to C$
5. $hr\, m : C$ **4,1 App**
6. $\lambda hr : B \to C \,.\, hr\, m : (B \to C) \to C$ **5 Abst**
7. $\lambda hl : A \to C \,.\lambda hr : B \to C \,.\, hr\, m$
   $: (A \to C) \to (B \to C) \to C$ **6 Abst**
8. $\lambda C : * \,.\lambda hl : A \to C \,.\lambda hr : B \to C \,.\, hr\, m$
   $: \Pi C : * \,.(A \to C) \to (B \to C) \to C$ **7 Abst**

■