Exercises

Chapter 7

Sean Li [1]

1. Redacted

Reference - Propositional Logic in λC

$$\frac{A \qquad \neg A}{\bot}\,\bot\text{I or }\neg\text{E} \qquad \frac{\bot}{A}\,\bot\text{E} \qquad \frac{A \qquad B}{A \wedge B}\,\wedge\text{I} \qquad \frac{A \wedge B}{A}\,\wedge\text{EL} \qquad \frac{A \wedge B}{B}\,\wedge\text{ER}$$

$$\frac{a}{a \vee b}\,\vee\text{IL} \qquad \frac{b}{a \vee b}\,\vee\text{IR} \qquad \frac{A \Rightarrow B \qquad A}{B}\,\Rightarrow\text{E}$$

$$\frac{A \vee B \qquad A \to C \qquad B \to C}{C}\,\vee\text{E} \qquad \frac{a \in S \qquad P\left(a\right)}{\exists a \in S, P\left(a\right)}\,\exists\text{I} \qquad \frac{\begin{array}{ll} 1. & A \\ 2. & \quad \vert\ \ldots \\ 3. & \quad \vert\ \bot \end{array}}{\neg\, A}\,\neg\text{I}$$

$$\frac{\begin{array}{ll} 1. & A \\ 2. & \quad \vert\ \ldots \\ 3. & \quad \vert\ B \end{array}}{A \Rightarrow B}\,\Rightarrow\text{I} \qquad \frac{\begin{array}{ll} 1. & a \in S \\ 2. & \quad \vert\ \ldots \\ 3. & \quad \vert\ P\left(a\right) \end{array}}{\forall a \in S, P\left(a\right)}\,\forall I$$

$$\frac{\exists x \in S, P\left(x\right) \qquad \forall x \in S, \left(P\left(x\right) \Rightarrow A\right)}{A}\,\exists\text{E} \qquad \frac{a \in S \qquad \forall x \in S, P\left(x\right)}{P\left(a\right)}\,\forall\text{E}$$

$$\frac{}{\neg\neg\, A \Rightarrow A}\,\text{DN (Classical)} \qquad \frac{}{A \vee \neg\, A}\,\text{ET (Classical)}$$

Reference - 2nd Encoding for Propositional Logic

Proposition	**Minimal Propositional Logic**
$\perp$	$\forall A, A$
$A \Rightarrow B$	$A \Rightarrow B$
$\neg A$	$A \Rightarrow \perp$
$A \wedge B$	$\forall C, (A \Rightarrow B \Rightarrow C) \Rightarrow C$
$A \vee B$	$\forall C, (A \Rightarrow C) \Rightarrow (B \Rightarrow C) \Rightarrow C$
$\forall a \in S, P(a)$	$\forall a \in S \,.\, P(a)$
$\exists a \in S, P(a)$	$\forall \alpha, (\forall a \in S, (P(a) \Rightarrow \alpha)) \Rightarrow \alpha$

Problem

(7.1 a) Prove in natural deduction and λC the tautology

$$B \Rightarrow (A \Rightarrow B)$$

Solution.

Natural Deduction.

1. B
2. $\quad | \; A$
3. $\quad | \quad | \; B$
4. $\quad | \; A \Rightarrow B$ $\quad \Rightarrow$**I**
5. $B \Rightarrow (A \Rightarrow B)$ $\quad \Rightarrow$**I**

■

λC. Assuming context $\Gamma \equiv A : *, B : *$. By the PAT paradigm the proof is equivalent to an inhabitant of $B \to A \to B$.

1. $A : *, B : *$
2. $\quad | \; x : B$
3. $\quad | \quad | \; y : A$
4. $\quad | \quad | \quad | \; x : B$ $\quad$ **Weak**
5. $\quad | \quad | \; \lambda y : A \,.\, x : A \to B$ $\quad$ **4 Abst**
6. $\quad | \; \lambda x : B \,.\lambda y : A \,.\, x : B \to A \to B$ $\quad$ **5 Abst**

■

Problem

(7.1 b) Prove in natural deduction and λC the tautology

$$\neg A \Rightarrow (A \Rightarrow B)$$

Solution.

Natural Deduction.

1.	$\neg A$	
2.	$\quad A$	
3.	$\quad\quad \neg A$	
4.	$\quad\quad A$	
5.	$\quad\quad \bot$	$\bot$**I**
6.	$\quad\quad B$	$\bot$**E**
7.	$\quad A \Rightarrow B$	$\Rightarrow$**I**
8.	$\neg A \Rightarrow (A \Rightarrow B)$	$\Rightarrow$**I**

■

λC. Assuming context $\Gamma \equiv A : *, B : *$. By the PAT paradigm the proof is equivalent to an inhabitant of $(A \to \bot) \to A \to B$.

1.	$A : *, B : *$	
2.	$\quad x : \neg A$	
3.	$\quad\quad y : A$	
4.	$\quad\quad\quad x\ y : \Pi\alpha : * \,.\alpha$	**2,3 App (Neg Elim)**
5.	$\quad\quad\quad x\ y\ B : B$	**4,1 App (Ex Falso)**
6.	$\quad\quad \lambda y : A \,.\, x\ y\ B : A \to B$	**5 Abst**
7.	$\quad \lambda x : \neg A \,.\lambda y : A \,.\, x\ y\ B : \neg A \to A \to B$	**6 Abst**

■

Problem

(7.1 c) Prove in natural deduction and λC the tautology

$$(A \Rightarrow \neg B) \Rightarrow ((A \Rightarrow B) \Rightarrow \neg A)$$

Solution.

Natural Deduction.

1.	$A \Rightarrow \neg B$	
2.	$\quad A \Rightarrow B$	
3.	$\quad\quad A$	
4.	$\quad\quad\quad \neg B$	**1,3 ⇒E**
5.	$\quad\quad\quad B$	**2,3 ⇒E**
6.	$\quad\quad\quad \perp$	**5,4 ⊥I**
7.	$\quad\quad \neg A$	**3,6 ¬I**
8.	$\quad (A \Rightarrow B) \Rightarrow \neg A$	**2,7 ⇒I**
9.	$(A \Rightarrow \neg B) \Rightarrow ((A \Rightarrow B) \Rightarrow \neg A)$	**1,8 ⇒I**

■

λC. Assuming context $\Gamma \equiv A : *, B : *$. The proof should be equivalent to an inhabitant of $(A \to B \to \perp) \to (A \to B) \to A \to \perp$.

1.	$A : *, B : *$	
2.	$\quad h : A \to \neg B$	
3.	$\quad\quad q : A \to B$	
4.	$\quad\quad\quad a : A$	
5.	$\quad\quad\quad\quad q\, a : B$	**3,4 App**
6.	$\quad\quad\quad\quad h\, a : B \to \perp$	**2,4 App**
7.	$\quad\quad\quad\quad h\, a\, (q\, a) : \perp$	**6,5 App (Neg Elim)**
8.	$\quad\quad\quad \lambda a : A \,.\, h\, a\, (q\, a) : \neg A$	**7 Abst (Neg Intro)**
9.	$\quad\quad \lambda q : A \to B \,.\lambda a : A \,.\, h\, a\, (q\, a) : A \to B \to \neg A$	**8 Abst**
10.	$\quad \lambda h : A \to \neg B \,.\lambda q : A \to B \,.\lambda a : A \,.\, h\, a\, (q\, a) : (A \to \neg B) \to A \to B \to \neg A$	**9 Abst**

■

Problem

(7.1 d) Prove in natural deduction and λC the tautology

$$\neg(A \Rightarrow B) \Rightarrow \neg B$$

Solution.

Natural Deduction.

1.	$\neg(A \Rightarrow B)$	
2.	B	
3.	A	
4.	B	
5.	$A \Rightarrow B$	**3,4 $\Rightarrow$I**
6.	$\bot$	**5,1 $\bot$I**
7.	$\neg B$	**6 $\neg$I**
8.	$\neg(A \Rightarrow B) \Rightarrow \neg B$	**1,7 $\Rightarrow$I**

■

λC. Assuming context $\Gamma \equiv A : *, B : *$. The proof should be equivalent to an inhabitant of $((A \to B) \to \bot) \to B \to \bot$.

1.	$n : \neg(A \to B)$	
2.	$b : B$	
3.	$a : A$	
4.	$b : B$	**Weak**
5.	$\lambda a : A \,.\, b : A \to B$	**4 Abst**
6.	$n\ (\lambda a : A \,.\, b) : \bot$	**1,5 App (Neg Elim)**
7.	$\lambda b : B \,.\, n\ (\lambda a : A \,.\, b) : \neg B$	**6 Abst (Neg Intro)**
8.		

$\lambda n : \neg(A \to B).\lambda b : B \,.\, n\ (\lambda a : A \,.\, b)$

$: \neg(A \to B) \to \neg B$ **7 Abst**

■

Problem

(7.2) Formulate the double negation law as an axiom in λC, and prove the following tautology in λC with DN.

$$(\neg A \Rightarrow A) \Rightarrow A$$

Solution. The rule

$$\frac{}{\neg\neg A \Rightarrow A}\ \text{DN-E}$$

Could be translated into lambda calculus as

$$\Pi A : * \,.((A \to \bot) \to \bot) \to A$$

Proof. Assume context $\Gamma \equiv A : *$.

1.	$A : *$	
2.	$h : \neg A \to A$	
3.	$x : \neg A$	
4.	$h\,x : A$	**2,3 App**
5.	$x\,(h\,x) : \bot$	**3,4 App (Contradiction)**
6.	$\lambda x : \neg A \,.\, x\,(h\,x) : \neg\neg A$	**5 Abst (Neg Intro)**
7.	$\mathrm{DN}\ A : \neg\neg A \to A$	**1,1 App**
8.	$\mathrm{DN}\ A\,(\lambda x : \neg A \,.\, x\,(h\,x)) : A$	**App (Axiom DN)**
9.	$\lambda h : \neg A \to A \,.\, \mathrm{DN}\ A\,(\lambda x : \neg A \,.\, x\,(h\,x))$ $: (\neg A \to A) \to A$	**8 Abst**

■

Problem

(7.3 a) Prove the following tautology in classical logic using λC

$$(A \Rightarrow B) \Rightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$$

Solution. Assume context $\Gamma \equiv A : *, B : *$. It suffices the proof to find an inhabitant of type

$$(A \to B) \to (\neg B \to \neg A)$$

Proof.

1.	$A : *, B : *$	
2.	$h : A \to B$	
3.	$b : \neg B$	
4.	$a : A$	
5.	$h\,a : B$	**5,2 App**
6.	$b\,(h\,a) : \bot$	**6,3 App (Contradiction)**
7.	$b\,(h\,a)(\neg A) : \neg A$	**7,5 App (Ex Falso)**
8.	$\lambda a : A \,.\, b\,(h\,a)(\neg A) : A \to \neg A$	**7 Abst**
9.	$a : \neg A$	
10.	$a : \neg A$	**Var**
11.	$\lambda a : \neg A \,.\, a : (\neg A \to \neg A)$	**10 Abst**

12.	$\mathrm{ET}\ A : A \vee \neg A$	**App (Axiom ET)**
13.	$\mathrm{ET}\ A\ (\neg A) : (A \to \neg A) \to (\neg A \to \neg A) \to \neg A$	**12 App**
14.	$\mathrm{ET}\ A\ (\neg A)(\lambda a : A\,.\, b\ (h\ a)(\neg A)) : (\neg A \to \neg A) \to \neg A$	**13,8 App**
15.	$\mathrm{ET}\ A\ (\neg A)\ (\lambda a : A\,.\, b\ (h\ a)(\neg A))\ (\lambda a : \neg A\,.\, a) : \neg A$	**14,11 App**
16.	$\lambda b : \neg B\,.\, \mathrm{ET}\ A\ (\neg A)\ (\lambda a : A\,.\, b\ (h\ a)(\neg A))\ (\lambda a : \neg A\,.\, a) : \neg B \to \neg A$	**15 Abst**
17.	$\lambda h : A \to B\,.\lambda b : \neg B\,.\, \mathrm{ET}\ A\ (\neg A)\ (\lambda a : A\,.\, b\ (h\ a)(\neg A))\ (\lambda a : \neg A\,.\, a) : (A \to B) \to \neg B \to \neg A$	**16 Abst**

■

Problem

(7.3 b) Prove the following tautology in classical logic using λC

$$(\neg B \Rightarrow \neg A) \Rightarrow (A \Rightarrow B)$$

Solution. Assume context $\Gamma \equiv A : *, B : *$. It suffices the proof to find an inhabitant of type

$$(\neg B \to \neg A) \to A \to B$$

Proof.

1.	$A : *, B : *$	
2.	$h : \neg B \to \neg A$	
3.	$a : A$	
4.	$b : B$	
5.	$b : B$	**Weak**
6.	$\lambda b : B\,.\, b : B \to B$	
7.	$b : \neg B$	

8.	$h\ b : \neg A$	**2,7 App**
9.	$h\ b\ a : \bot$	**8,2 App (Neg Elim)**
10.	$h\ b\ a\ B : B$	**9 App (Ex Falso)**
11.	$\lambda b : \neg B \,.\, h\ b\ a\ B : \neg B \to B$	**10 Abst**
12.	$\mathrm{ET}\ B : B \vee \neg B$	**1 App (Axiom ET)**
13.	$\mathrm{ET}\ B\ B : (B \to B) \to (\neg B \to B) \to B$	**12,1 App**
14.	$\mathrm{ET}\ B\ B\ (\lambda b : B \,.\, b) : (\neg B \to B) \to B$	**13,6 App**
15.	$\mathrm{ET}\ B\ B\ (\lambda b : B \,.\, b)(\lambda b : \neg B \,.\, h\ b\ a\ B) : B$	**14,11 App**
16.	$\lambda a : A \,.\mathrm{ET}\ B\ B\ (\lambda b : B \,.\, b)$ $(\lambda b : \neg B \,.\, h\ b\ a\ B) : A \to B$	**15 Abst**
17.	$\lambda h : \neg B \to \neg A \,.\lambda a : A \,.$ $\mathrm{ET}\ B\ B\ (\lambda b : B \,.\, b)(\lambda b : \neg B \,.\, h\ b\ a\ B)$ $: (\neg B \to \neg A) \to A \to B$	**16 Abst**

■

Problem

(7.4) Derive ∧-**EL** and ∧-**ER** in λC.

Solution. The derivation is the same as proving

$$M : \Pi C \,.(A \to B \to C) \to C \vdash N_1 : A$$
$$M : \Pi C \,.(A \to B \to C) \to C \vdash N_2 : B$$

Left Projection.

1.	$M : \Pi C \,.(A \to B \to C) \to C$	
2.	$M\ A : (A \to B \to A) \to A$	
3.	$x : A$	
4.	$b : B$	
5.	$x : A$	**Weak**
6.	$\lambda b : B \,.\, x : B \to A$	**5 Abst**
7.	$\lambda x : A \,.\lambda b : B \,.\, x : A \to B \to A$	**6 Abst**
8.	$N_1 \equiv M\ A\ (\lambda x : A \,.\lambda b : B \,.\, x) : A$	**2,7 App**

■

Right Projection.

1. $M : \Pi C\,.(A \to B \to C) \to C$
2. $M\ B : (A \to B \to B) \to B$
3. $x : A$
4. $b : B$
5. $b : B$ **Weak**
6. $\lambda b : B\,.\,b : B \to B$ **5 Abst**
7. $\lambda x : A\,.\lambda b : B\,.\,b : A \to B \to B$ **6 Abst**
8. $N_2 \equiv M\ B\,(\lambda x : A\,.\lambda b : B\,.\,b) : B$ **2,7 App**

■

Problem

(7.5 a) Prove tautology under classical logic

$$\neg(A \Rightarrow B) \Rightarrow A$$

Solution. Assume context $\Gamma \equiv A : *, B : *$. Therefore the proof suffices to find an inhabitant of

$$((A \to B) \to \bot) \to A$$

Proof.

1. $A : *, B : *$
2. $h : \neg(A \to B)$
3. $a : A$
4. $a : A$ **Weak**
5. $\lambda a : A\,.\,a : A \to A$ **4 Abst**
6. $a : \neg\,A$
7. $n : A$
8. $a\ n : \bot$ **6,7 App (Contradiction)**
9. $a\ n\ B : B$ **8 App (Ex Falso)**
10. $\lambda n : A\,.\,a\ n\ B : A \to B$ **9 Abst**
11. $h\ (\lambda n : A\,.\,a\ n\ B) : \bot$ **10,2 App (Contra.)**
12. $h\ (\lambda n : A\,.\,a\ n\ B)\ A : A$ **11 App (Ex Falso)**

    $\lambda a : \neg\,A\,.\,h\ (\lambda n : A\,.\,a\ n\ B)\ A$
13. $: \neg\,A \to A$ **12 Abst**
14. $\mathrm{ET} : \Pi S : *\,.\,S \vee \neg\,S$ **Axiom ET**

15.	$\mathrm{ET}\ A : A \vee \neg A$	**14,1 App**
16.	$\mathrm{ET}\ A\ A : (A \to A) \to (\neg A \to A) \to A$	**15,1 App**
17.	$\mathrm{ET}\ A\ A\ (\lambda a : A\,.\,a) : (\neg A \to A) \to A$	**16,5 App**
18.	$\mathrm{ET}\ A\ A\ (\lambda a : A\,.\,a)\ (\lambda a : \neg A\,.\,h\ (\lambda n : A\,.\,a\ n\ B)\ A) : A$	**17,13 App**
19.	$\lambda h : \neg(A \to B).\ \mathrm{ET}\ A\ A\ (\lambda a : A\,.\,a)\ (\lambda a : \neg A\,.\,h\ (\lambda n : A\,.\,a\ n\ B)\ A) : \neg(A \to B) \to A$	**18 Abst**

■

Problem

(7.5 b) Prove tautology under classical logic

$$\neg(A \Rightarrow B) \Rightarrow (A \wedge \neg B)$$

Solution. Assume context $\Gamma \equiv A : *, B : *$. Therefore the proof suffices to find an inhabitant of

$$((A \to B) \to \bot) \to \Pi C : *\,.((A \to (B \to \bot) \to C) \to C)$$

Proof.

1.	$A : *, B : *$	
2.	$p : \neg(A \to B)$	
3.	$C : *$	
4.	$h : A \to \neg B \to C$	
5.	$hb : B$	
6.	$ha : A$	
7.	$hb : B$	**Weak**
8.	$\lambda ha : A\,.\,hb : A \to B$	**7 Abst**
9.	$p\ (\lambda ha : A\,.\,hb) : \bot$	**2,8 App (Contra.)**
10.	$\lambda hb : B\,.\,p\ (\lambda ha : A\,.\,hb) : \neg B$	**9 Abst (Neg Intro)**
11.	$hna : \neg A$	
12.	$ha' : A$	
13.	$hna\ ha' : \bot$	**11,12 App (Contra.)**

14.	$hna\ ha'\ B : B$	**13,1 App (Ex Falso)**
15.	$\lambda ha' : A\ .\ hna\ ha'\ B : A \to B$	**14 Abst**
16.	$p\ (\lambda ha' : A\ .\ hna\ ha'\ B) : \bot$	**2,15 App (Contra.)**
17.	$p\ (\lambda ha' : A\ .\ hna\ ha'\ B)\ A : A$	**2,15 App (Contra.)**
18.	$\lambda hna : \neg\, A\ .\ p\ (\lambda ha' : A\ .\ hna\ ha'\ B)\ A : \neg\, A \to A$	**17 Abst**
19.	$ha'' : A$	
20.	$ha'' : A$	**Var**
21.	$\lambda ha'' : A\ .ha'' : A \to A$	**20 Abst**
22.	$\mathrm{ET} : \Pi S : *\ .\ S \vee \neg\, S$	**Axiom ET**
23.	$\mathrm{ET}\ A : A \vee \neg\, A$	**22,1 App**
24.	$\mathrm{ET}\ A\ A : (A \to A) \to (\neg\, A \to A) \to A$	**23,1 App**
25.	$\mathrm{ET}\ A\ A\ (\lambda ha'' : A\ .ha'') : (\neg\, A \to A) \to A$	**24,21 App**
26.	$\mathrm{ET}\ A\ A\ (\lambda ha'' : A\ .ha'')\ (\lambda hna : \neg\, A\ .\ p\ (\lambda ha' : A\ .\ hna\ ha'\ B)\ A) : A$	**25,18 App**
27.	$h\ (\mathrm{ET}\ A\ A\ (\lambda ha'' : A\ .ha'')\ (\lambda hna : \neg\, A\ .\ p\ (\lambda ha' : A\ .\ hna\ ha'\ B)\ A)) : \neg\, B \to C$	**4,26 App**
28.	$h\ (\mathrm{ET}\ A\ A\ (\lambda ha'' : A\ .ha'')\ (\lambda hna : \neg\, A\ .\ p\ (\lambda ha' : A\ .\ hna\ ha'\ B)\ A))\ (\lambda hb : B\ .\ p\ (\lambda ha : A\ .\ hb)) : C$	**27,10 App**

29. $\lambda h : A \to \neg B \to C \,.\, h\,(\mathrm{ET}\ A\ A$
$(\lambda ha'' : A \,.\, ha'')$
$(\lambda hna : \neg A \,.\, p\,(\lambda ha' : A \,.\, hna\ ha'\ B)\ A))$
$(\lambda hb : B \,.\, p\,(\lambda ha : A \,.\, hb))$
$: (A \to \neg B \to C) \to C$ **28 Abst**

30. $\lambda C : * \,.\, \lambda h : A \to \neg B \to C \,.$
$h\,(\mathrm{ET}\ A\ A$
$(\lambda ha'' : A \,.\, ha'')$
$(\lambda hna : \neg A \,.\, p\,(\lambda ha' : A \,.\, hna\ ha'\ B)\ A))$
$(\lambda hb : B \,.\, p\,(\lambda ha : A \,.\, hb)) : A \wedge \neg B$ **29 Abst**

31. $\lambda p : \neg(A \to B).$
$\lambda C : * \,.\, \lambda h : A \to \neg B \to C \,.$
$h\,(\mathrm{ET}\ A\ A$
$(\lambda ha'' : A \,.\, ha'')$
$(\lambda hna : \neg A \,.\, p\,(\lambda ha' : A \,.\, hna\ ha'\ B)\ A))$
$(\lambda hb : B \,.\, p\,(\lambda ha : A \,.\, hb))$
$: \neg(A \to B) \to (A \wedge \neg B)$ **30 Abst**

■

Problem

(7.6 a) Verify that the following expressions is a tautology in constructive logic

$$\neg A \Rightarrow \neg(A \wedge B)$$

Solution. Suppose context $A : *, B : *$. The proof suffices to give a inhabitant of type

$$\neg A \to \neg(A \wedge B) \equiv (A \to \bot) \to (\Pi C : * \,.(A \to B \to C) \to C) \to \bot$$

Proof.

1. $A : *, B : *$
2. $na : \neg A$
3. $h : \Pi C : * \,.(A \to B \to C) \to C$
4. $h\ A : (A \to B \to A) \to A$ **3,1 App**
5. $ha : A$
6. $hb : B$

7.	$ha : A$	
8.	$\lambda hb : B \,.\, ha : B \to A$	**7 Abst**
9.	$\lambda ha : A \,.\lambda hb : B \,.\, ha : A \to B \to A$	**8 Abst**
10.	$h\ A\ (\lambda ha : A \,.\lambda hb : B \,.\, ha) : A$	**4,9 App**
11.	$na\ (h\ A\ (\lambda ha : A \,.\lambda hb : B \,.\, ha)) : \bot$	**2,10 App (Contradiction)**
12.	$\lambda h : A \wedge B \,.$ $na\ (h\ A\ (\lambda ha : A \,.\lambda hb : B \,.\, ha))$ $: A \wedge B \to \bot$	**11 Abst**
13.	$\lambda na : \neg A \,.\lambda h : A \wedge B \,.$ $na\ (h\ A\ (\lambda ha : A \,.\lambda hb : B \,.\, ha))$ $: \neg A \to \neg(A \wedge B)$	**12 Abst**

■

Problem

(7.6 b) Verify that the following expressions is a tautology in constructive logic

$$\neg(A \wedge \neg A)$$

Solution. Suppose context $A : *, B : *$. The proof suffices to give a inhabitant of type

$$(\Pi S : * \,.(A \to (A \to \bot) \to S) \to S) \to \bot$$

Proof.

1.	$A : *, B : *, \bot : \square$	
2.	$h : \Pi S : * \,.(A \to \neg A \to S) \to S$	
3.	$h\,\bot : (A \to \neg A \to \bot) \to \bot$	**2,1 App**
4.	$a : A$	
5.	$n : \neg A$	
6.	$n\ a : \bot$	**5,4 App**
7.	$\lambda n : \neg A \,.\, n\ a : \neg A \to \bot$	**6 Abst**
8.	$\lambda a : A \,.\lambda n : \neg A \,.\, n\ a : A \to \neg A \to \bot$	**7 Abst**
9.	$h\,\bot(\lambda a : A \,.\lambda n : \neg A \,.\, n\ a) : \bot$	**3,8 App**
10.	$\lambda h : A \wedge \neg A \,.\, h\,\bot(\lambda a : A \,.\lambda n : \neg A \,.\, n\ a) : A \wedge \neg A \to \bot$	**9 Abst**

■