

# EXERCISES

## CHAPTER 7

SEAN LI <sup>1</sup>

1. Redacted

---

### Reference - Propositional Logic in $\lambda C$

$$\begin{array}{c}
 \frac{A \quad \neg A}{\perp} \perp I \text{ or } \neg E \quad \frac{\perp}{A} \perp E \quad \frac{A \quad B}{A \wedge B} \wedge I \quad \frac{A \wedge B}{A} \wedge EL \quad \frac{A \wedge B}{B} \wedge ER \\
 \\ 
 \frac{a}{a \vee b} \vee IL \quad \frac{b}{a \vee b} \vee IR \quad \frac{A \Rightarrow B \quad A}{B} \Rightarrow E
 \end{array}$$

$$\frac{A \vee B \quad A \rightarrow C \quad B \rightarrow C}{C} \vee E \quad \frac{a \in S \quad P(a)}{\exists a \in S, P(a)} \exists I \quad \frac{1. \quad A \quad 2. \quad \vdots \quad 3. \quad \boxed{\perp}}{\neg A} \neg I$$

$$\frac{1. \quad A \quad 2. \quad \vdots \quad 3. \quad \boxed{B}}{A \Rightarrow B} \Rightarrow I \quad \frac{1. \quad a \in S \quad 2. \quad \vdots \quad 3. \quad \boxed{P(a)}}{\forall a \in S, P(a)} \forall I$$

$$\frac{\exists x \in S, P(x) \quad \forall x \in S, (P(x) \Rightarrow A)}{A} \exists E \quad \frac{a \in S \quad \forall x \in S, P(x)}{P(a)} \forall E$$

$$\frac{}{\neg\neg A \Rightarrow A} \text{DN (Classical)} \quad \frac{}{A \vee \neg A} \text{ET (Classical)}$$


---

---

## Reference - 2nd Encoding for Propositional Logic

Proposition	Minimal Propositional Logic
$\perp$	$\forall A, A$
$A \Rightarrow B$	$A \Rightarrow B$
$\neg A$	$A \Rightarrow \perp$
$A \wedge B$	$\forall C, (A \Rightarrow B \Rightarrow C) \Rightarrow C$
$A \vee B$	$\forall C, (A \Rightarrow C) \Rightarrow (B \Rightarrow C) \Rightarrow C$
$\forall a \in S, P(a)$	$\forall a \in S . P(a)$
$\exists a \in S, P(a)$	$\forall \alpha, (\forall a \in S, (P(a) \Rightarrow \alpha)) \Rightarrow \alpha$

---

### Problem

(7.1 a) Prove in natural deduction and  $\lambda C$  the tautology

$$B \Rightarrow (A \Rightarrow B)$$

*Solution.*

*Natural Deduction.*

1.  $B$
2. 
$$\begin{array}{c} A \\ \vdash B \end{array}$$
3. 
$$\begin{array}{c} \vdash B \\ \hline A \Rightarrow B \end{array}$$
4. 
$$\frac{}{A \Rightarrow B} \Rightarrow I$$
5. 
$$\frac{}{B \Rightarrow (A \Rightarrow B)} \Rightarrow I$$

■

$\lambda C$ . Assuming context  $\Gamma \equiv A : *, B : *$ . By the PAT paradigm the proof is equivalent to an inhabitant of  $B \rightarrow A \rightarrow B$ .

1.  $A : *, B : *$
2. 
$$\begin{array}{c} x : B \\ \vdash \end{array}$$
3. 
$$\begin{array}{c} y : A \\ \vdash \end{array}$$
4. 
$$\begin{array}{c} x : B \\ \vdash \\ \hline \lambda y : A . x : A \rightarrow B \end{array} \quad \text{Weak}$$
5. 
$$\frac{}{\lambda y : A . x : A \rightarrow B} 4 \text{ Abst}$$
6. 
$$\frac{}{\lambda x : B . \lambda y : A . x : B \rightarrow A \rightarrow B} 5 \text{ Abst}$$

■

### Problem

(7.1 b) Prove in natural deduction and  $\lambda C$  the tautology

$$\neg A \Rightarrow (A \Rightarrow B)$$

*Solution.*

*Natural Deduction.*

1.	$\neg A$	
2.	$A$	
3.	$\neg A$	
4.	$A$	
5.	$\perp$	$\perp I$
6.	$B$	$\perp E$
7.	$\boxed{A \Rightarrow B}$	$\Rightarrow I$
8.	$\neg A \Rightarrow (A \Rightarrow B)$	$\Rightarrow I$

■

$\lambda C$ . Assuming context  $\Gamma \equiv A : *, B : *$ . By the PAT paradigm the proof is equivalent to an inhabitant of  $(A \rightarrow \perp) \rightarrow A \rightarrow B$ .

1.	$A : *, B : *$	
2.	$x : \neg A$	
3.	$y : A$	
4.	$x y : \Pi \alpha : * . \alpha$	2,3 App (Neg Elim)
5.	$x y B : B$	4,1 App (Ex Falso)
6.	$\lambda y : A . x y B : A \rightarrow B$	5 Abst
7.	$\lambda x : \neg A . \lambda y : A . x y B : \neg A \rightarrow A \rightarrow B$	6 Abst

■

### Problem

(7.1 c) Prove in natural deduction and  $\lambda C$  the tautology

$$(A \Rightarrow \neg B) \Rightarrow ((A \Rightarrow B) \Rightarrow \neg A)$$

*Solution.*

*Natural Deduction.*

1.	$A \Rightarrow \neg B$	
2.	$A \Rightarrow B$	
3.	$A$	
4.	$\neg B$	1,3 $\Rightarrow E$
5.	$B$	2,3 $\Rightarrow E$
6.	$\perp$	5,4 $\perp I$
7.	$\neg A$	3-6 $\neg I$
8.	$(A \Rightarrow B) \Rightarrow \neg A$	2-7 $\Rightarrow I$
9.	$(A \Rightarrow \neg B) \Rightarrow ((A \Rightarrow B) \Rightarrow \neg A)$	1-8 $\Rightarrow I$

■

$\lambda C$ . Assuming context  $\Gamma \equiv A : *, B : *$ . The proof should be equivalent to an inhabitant of  $(A \rightarrow B \rightarrow \perp) \rightarrow (A \rightarrow B) \rightarrow A \rightarrow \perp$ .

1.	$A : *, B : *$	
2.	$h : A \rightarrow \neg B$	
3.	$q : A \rightarrow B$	
4.	$a : A$	
5.	$q a : B$	3,4 App
6.	$h a : B \rightarrow \perp$	2,4 App
7.	$h a (q a) : \perp$	6,5 App (Neg Elim)
8.	$\lambda a : A . h a (q a) : \neg A$	7 Abst (Neg Intro)
9.	$\lambda q : A \rightarrow B . \lambda a : A . h a (q a) : A \rightarrow B \rightarrow \neg A$	8 Abst
10.	$\lambda h : A \rightarrow \neg B . \lambda q : A \rightarrow B . \lambda a : A . h a (q a)$	
	$: (A \rightarrow \neg B) \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow \neg A$	9 Abst

■

### Problem

(7.1 d) Prove in natural deduction and  $\lambda C$  the tautology

$$\neg(A \Rightarrow B) \Rightarrow \neg B$$

*Solution.*

*Natural Deduction.*

1.  $\neg(A \Rightarrow B)$
2.  $B$
3.  $A$
4.  $B$
5.  $A \Rightarrow B$       **3-4  $\Rightarrow$ I**
6.  $\perp$       **5,1  $\perp$ I**
7.  $\neg B$       **2-6  $\neg$ I**
8.  $\neg(A \Rightarrow B) \Rightarrow \neg B$       **1-7  $\Rightarrow$ I**

■

$\lambda C$ . Assuming context  $\Gamma \equiv A : *, B : *$ . The proof should be equivalent to an inhabitant of  $((A \rightarrow B) \rightarrow \perp) \rightarrow B \rightarrow \perp$ .

1.  $n : \neg(A \rightarrow B)$
  2.  $b : B$
  3.  $a : A$
  4.  $b : B$       **Weak**
  5.  $\lambda a : A . b : A \rightarrow B$       **4 Abst**
  6.  $n(\lambda a : A . b) : \perp$       **1,5 App (Neg Elim)**
  7.  $\lambda b : B . n(\lambda a : A . b) : \neg B$       **6 Abst (Neg Intro)**
  - 8.
- $\lambda n : \neg(A \rightarrow B). \lambda b : B . n(\lambda a : A . b)$
- $: \neg(A \rightarrow B) \rightarrow \neg B$       **7 Abst**

■

### Problem

(7.2) Formulate the double negation law as an axiom in  $\lambda C$ , and prove the following tautology in  $\lambda C$  with DN.

$$(\neg A \Rightarrow A) \Rightarrow A$$

*Solution.* The rule

$$\frac{}{\neg\neg A \Rightarrow A} \text{DN-E}$$

Could be translated into lambda calculus as

$$\Pi A : * . ((A \rightarrow \perp) \rightarrow \perp) \rightarrow A$$

*Proof.* Assume context  $\Gamma \equiv A : *$ .

1.	$A : *$	
2.	$h : \neg A \rightarrow A$	
3.	$x : \neg A$	
4.	$h x : A$	<b>2,3 App</b>
5.	$x(hx) : \perp$	<b>3,4 App (Contradiction)</b>
6.	$\lambda x : \neg A . x(hx) : \neg\neg A$	<b>5 Abst (Neg Intro)</b>
7.	$\text{DN } A : \neg\neg A \rightarrow A$	<b>1,1 App</b>
8.	$\text{DN } A (\lambda x : \neg A . x(hx)) : A$	<b>App (Axiom DN)</b>
	$\lambda h : \neg A \rightarrow A . \text{DN } A (\lambda x : \neg A . x(hx))$	
9.	$: (\neg A \rightarrow A) \rightarrow A$	<b>8 Abst</b>

■

### Problem

(7.3 a) Prove the following tautology in classical logic using  $\lambda C$

$$(A \Rightarrow B) \Rightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$$

*Solution.* Assume context  $\Gamma \equiv A : *, B : *$ . It suffices the proof to find an inhabitant of type

$$(A \rightarrow B) \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg A)$$

*Proof.*

1.	$A : *, B : *$	
2.	$h : A \rightarrow B$	
3.	$b : \neg B$	
4.	$a : A$	
5.	$h a : B$	<b>5,2 App</b>
6.	$b(ha) : \perp$	<b>6,3 App (Contradiction)</b>
7.	$b(ha)(\neg A) : \neg A$	<b>7,5 App (Ex Falso)</b>
8.	$\lambda a : A . b(ha)(\neg A) : A \rightarrow \neg A$	<b>7 Abst</b>
9.	$a : \neg A$	
10.	$a : \neg A$	<b>Var</b>
11.	$\lambda a : \neg A . a : (\neg A \rightarrow \neg A)$	<b>10 Abst</b>

12.	$\text{ET } A : A \vee \neg A$	<b>App (Axiom ET)</b>
	$\text{ET } A (\neg A) : (A \rightarrow \neg A) \rightarrow$	
13.	$(\neg A \rightarrow \neg A) \rightarrow \neg A$	<b>12 App</b>
	$\text{ET } A (\neg A)(\lambda a : A . b (h a)(\neg A)) :$	
14.	$(\neg A \rightarrow \neg A) \rightarrow \neg A$	<b>13,8 App</b>
	$\text{ET } A (\neg A)$	
	$(\lambda a : A . b (h a)(\neg A))$	
15.	$(\lambda a : \neg A . a) : \neg A$	<b>14,11 App</b>
	$\lambda b : \neg B . \text{ET } A (\neg A)$	
	$(\lambda a : A . b (h a)(\neg A))$	
16.	$(\lambda a : \neg A . a) : \neg B \rightarrow \neg A$	<b>15 Abst</b>
	$\lambda h : A \rightarrow B . \lambda b : \neg B . \text{ET } A (\neg A)$	
	$(\lambda a : A . b (h a)(\neg A))$	
	$(\lambda a : \neg A . a) :$	
17.	$(A \rightarrow B) \rightarrow \neg B \rightarrow \neg A$	<b>16 Abst</b>

■

### Problem

(7.3 b) Prove the following tautology in classical logic using  $\lambda C$

$$(\neg B \Rightarrow \neg A) \Rightarrow (A \Rightarrow B)$$

*Solution.* Assume context  $\Gamma \equiv A : *, B : *$ . It suffices the proof to find an inhabitant of type

$$(\neg B \rightarrow \neg A) \rightarrow A \rightarrow B$$

*Proof.*

1.	$A : *, B : *$	
2.	$h : \neg B \rightarrow \neg A$	
3.	$a : A$	
4.	$b : B$	
5.	$b : B$	<b>Weak</b>
6.	$\lambda b : B . b : B \rightarrow B$	
7.	$b : \neg B$	

8.	$h b : \neg A$	2,7 App
9.	$h b a : \perp$	8,2 App (Neg Elim)
10.	$h b a B : B$	9 App (Ex Falso)
11.	$\lambda b : \neg B . h b a B : \neg B \rightarrow B$	10 Abst
12.	$ET B : B \vee \neg B$	1 App (Axiom ET)
13.	$ET B B : (B \rightarrow B) \rightarrow (\neg B \rightarrow B) \rightarrow B$	12,1 App
14.	$ET B B (\lambda b : B . b) : (\neg B \rightarrow B) \rightarrow B$	13,6 App
15.	$ET B B (\lambda b : B . b)(\lambda b : \neg B . h b a B) : B$	14,11 App
16.	$\lambda a : A . ET B B (\lambda b : B . b)$	15 Abst
	$(\lambda b : \neg B . h b a B) : A \rightarrow B$	
17.	$\lambda h : \neg B \rightarrow \neg A . \lambda a : A .$	
	$ET B B (\lambda b : B . b)(\lambda b : \neg B . h b a B)$	
	$: (\neg B \rightarrow \neg A) \rightarrow A \rightarrow B$	16 Abst

■

### Problem

(7.4) Derive  $\wedge$ -EL and  $\wedge$ -ER in  $\lambda C$ .

*Solution.* The derivation is the same as proving

$$\begin{aligned} M : \Pi C . (A \rightarrow B \rightarrow C) \rightarrow C &\vdash N_1 : A \\ M : \Pi C . (A \rightarrow B \rightarrow C) \rightarrow C &\vdash N_2 : B \end{aligned}$$

*Left Projection.*

1.	$M : \Pi C . (A \rightarrow B \rightarrow C) \rightarrow C$	
2.	$M A : (A \rightarrow B \rightarrow A) \rightarrow A$	
3.	$x : A$	
4.	$b : B$	
5.	$x : A$	Weak
6.	$\lambda b : B . x : B \rightarrow A$	5 Abst
7.	$\lambda x : A . \lambda b : B . x : A \rightarrow B \rightarrow A$	6 Abst
8.	$N_1 \equiv M A (\lambda x : A . \lambda b : B . x) : A$	2,7 App

■

*Right Projection.*

1.	$M : \Pi C . (A \rightarrow B \rightarrow C) \rightarrow C$	
2.	$M B : (A \rightarrow B \rightarrow B) \rightarrow B$	
3.	$x : A$	
4.	$b : B$	
5.	$b : B$	<b>Weak</b>
6.	$\lambda b : B . b : B \rightarrow B$	<b>5 Abst</b>
7.	$\lambda x : A . \lambda b : B . b : A \rightarrow B \rightarrow B$	<b>6 Abst</b>
8.	$N_2 \equiv M B (\lambda x : A . \lambda b : B . b) : B$	<b>2,7 App</b>

■

### Problem

(7.5 a) Prove tautology under classical logic

$$\neg(A \Rightarrow B) \Rightarrow A$$

*Solution.* Assume context  $\Gamma \equiv A : *, B : *$ . Therefore the proof suffices to find an inhabitant of

$$((A \rightarrow B) \rightarrow \perp) \rightarrow A$$

*Proof.*

1.	$A : *, B : *$	
2.	$h : \neg(A \rightarrow B)$	
3.	$a : A$	
4.	$a : A$	<b>Weak</b>
5.	$\lambda a : A . a : A \rightarrow A$	<b>4 Abst</b>
6.	$a : \neg A$	
7.	$n : A$	
8.	$a n : \perp$	<b>6,7 App (Contradiction)</b>
9.	$a n B : B$	<b>8 App (Ex Falso)</b>
10.	$\lambda n : A . a n B : A \rightarrow B$	<b>9 Abst</b>
11.	$h (\lambda n : A . a n B) : \perp$	<b>10,2 App (Contra.)</b>
12.	$h (\lambda n : A . a n B) A : A$	<b>11 App (Ex Falso)</b>
13.	$\lambda a : \neg A . h (\lambda n : A . a n B) A$	<b>12 Abst</b>
14.	$\text{ET} : \Pi S : * . S \vee \neg S$	<b>Axiom ET</b>

15.	$\text{ET } A : A \vee \neg A$	<b>14,1 App</b>
16.	$\text{ET } A A : (A \rightarrow A) \rightarrow (\neg A \rightarrow A) \rightarrow A$	<b>15,1 App</b>
17.	$\text{ET } A A (\lambda a : A . a)$ $: (\neg A \rightarrow A) \rightarrow A$	<b>16,5 App</b>
18.	$\text{ET } A A (\lambda a : A . a)$ $(\lambda a : \neg A . h (\lambda n : A . a n B) A) : A$	<b>17,13 App</b>
	$\lambda h : \neg(A \rightarrow B) . \text{ET } A A (\lambda a : A . a)$ $(\lambda a : \neg A . h (\lambda n : A . a n B) A)$	
19.	$: \neg(A \rightarrow B) \rightarrow A$	<b>18 Abst</b>

■

### Problem

(7.5 b) Prove tautology under classical logic

$$\neg(A \Rightarrow B) \Rightarrow (A \wedge \neg B)$$

*Solution.* Assume context  $\Gamma \equiv A : *, B : *$ . Therefore the proof suffices to find an inhabitant of

$$((A \rightarrow B) \rightarrow \perp) \rightarrow \Pi C : * . ((A \rightarrow (B \rightarrow \perp)) \rightarrow C) \rightarrow C$$

*Proof.*

1.	$A : *, B : *$	
2.	$p : \neg(A \rightarrow B)$	
3.	$C : *$	
4.	$h : A \rightarrow \neg B \rightarrow C$	
5.	$hb : B$	
6.	$ha : A$	
7.	$hb : B$	<b>Weak</b>
8.	$\lambda ha : A . hb : A \rightarrow B$	<b>7 Abst</b>
9.	$p (\lambda ha : A . hb) : \perp$	<b>2,8 App (Contra.)</b>
10.	$\lambda hb : B . p (\lambda ha : A . hb) : \neg B$	<b>9 Abst (Neg Intro)</b>
11.	$hna : \neg A$	
12.	$ha' : A$	
13.	$hna ha' : \perp$	<b>11,12 App (Contra.)</b>

14.		$\boxed{hna \ ha' \ B : B}$	13,1 App (Ex Falso)
15.		$\lambda ha' : A . hna \ ha' \ B : A \rightarrow B$	14 Abst
16.		$p (\lambda ha' : A . hna \ ha' \ B) : \perp$	2,15 App (Contra.)
17.		$\underline{p (\lambda ha' : A . hna \ ha' \ B) \ A : A}$	2,15 App (Contra.)
		$\lambda hna : \neg A . p$	
		$(\lambda ha' : A . hna \ ha' \ B) \ A$	
18.		$: \neg A \rightarrow A$	17 Abst
19.		$ha'' : A$	
20.		$\boxed{ha'' : A}$	Var
21.		$\lambda ha'' : A . ha'' : A \rightarrow A$	20 Abst
22.		$ET : \Pi S : * . S \vee \neg S$	Axiom ET
23.		$ET \ A : A \vee \neg A$	22,1 App
24.		$ET \ A \ A : (A \rightarrow A) \rightarrow (\neg A \rightarrow A) \rightarrow A$	23,1 App
		$ET \ A \ A$	
		$(\lambda ha'' : A . ha'')$	
25.		$: (\neg A \rightarrow A) \rightarrow A$	24,21 App
		$ET \ A \ A$	
		$(\lambda ha'' : A . ha'')$	
		$(\lambda hna : \neg A . p$	
26.		$(\lambda ha' : A . hna \ ha' \ B) \ A : A$	25,18 App
		$h (ET \ A \ A$	
		$(\lambda ha'' : A . ha'')$	
		$(\lambda hna : \neg A . p$	
		$(\lambda ha' : A . hna \ ha' \ B) \ A))$	
27.		$: \neg B \rightarrow C$	4,26 App
		$h (ET \ A \ A$	
		$(\lambda ha'' : A . ha'')$	
		$(\lambda hna : \neg A . p$	
		$(\lambda ha' : A . hna \ ha' \ B) \ A))$	
28.		$(\lambda hb : B . p (\lambda ha : A . hb)) : C$	27,10 App

	$\lambda h : A \rightarrow \neg B \rightarrow C . h \text{ (ET } A A$ $(\lambda ha'' : A . ha'')$ $(\lambda hna : \neg A . p (\lambda ha' : A . hna ha' B) A))$ $(\lambda hb : B . p (\lambda ha : A . hb))$ $: (A \rightarrow \neg B \rightarrow C) \rightarrow C$	<b>28 Abst</b>
29.	$\lambda C : * . \lambda h : A \rightarrow \neg B \rightarrow C .$ $h \text{ (ET } A A$ $(\lambda ha'' : A . ha'')$ $(\lambda hna : \neg A . p (\lambda ha' : A . hna ha' B) A))$ $(\lambda hb : B . p (\lambda ha : A . hb)) : A \wedge \neg B$	<b>29 Abst</b>
30.	$\lambda p : \neg(A \rightarrow B).$ $\lambda C : * . \lambda h : A \rightarrow \neg B \rightarrow C .$ $h \text{ (ET } A A$ $(\lambda ha'' : A . ha'')$ $(\lambda hna : \neg A . p (\lambda ha' : A . hna ha' B) A))$ $(\lambda hb : B . p (\lambda ha : A . hb))$ $: \neg(A \rightarrow B) \rightarrow (A \wedge \neg B)$	<b>30 Abst</b>

■

### Problem

(7.6 a) Verify that the following expressions is a tautology in constructive logic

$$\neg A \Rightarrow \neg(A \wedge B)$$

*Solution.* Suppose context  $A : *, B : *$ . The proof suffices to give a inhabitant of type

$$\neg A \rightarrow \neg(A \wedge B) \equiv (A \rightarrow \perp) \rightarrow (\Pi C : * . (A \rightarrow B \rightarrow C) \rightarrow C) \rightarrow \perp$$

*Proof.*

1.	$A : *, B : *$	
2.	$na : \neg A$	
3.	$h : \Pi C : * . (A \rightarrow B \rightarrow C) \rightarrow C$	
4.	$h A : (A \rightarrow B \rightarrow A) \rightarrow A$	<b>3,1 App</b>
5.	$ha : A$	
6.	$hb : B$	

7.	$\boxed{ha : A}$	
8.	$\lambda hb : B . ha : B \rightarrow A$	<b>7 Abst</b>
9.	$\lambda ha : A . \lambda hb : B . ha : A \rightarrow B \rightarrow A$	<b>8 Abst</b>
10.	$h A (\lambda ha : A . \lambda hb : B . ha) : A$	<b>4,9 App</b>
11.	$na (h A (\lambda ha : A . \lambda hb : B . ha)) : \perp$	<b>2,10 App (Contradiction)</b>
12.	$\begin{array}{c} \lambda h : A \wedge B . \\ na (h A (\lambda ha : A . \lambda hb : B . ha)) \\ \hline : A \wedge B \rightarrow \perp \end{array}$	<b>11 Abst</b>
13.	$\begin{array}{c} \lambda na : \neg A . \lambda h : A \wedge B . \\ na (h A (\lambda ha : A . \lambda hb : B . ha)) \\ \hline : \neg A \rightarrow \neg(A \wedge B) \end{array}$	<b>12 Abst</b>

■

### Problem

(7.6 b) Verify that the following expression is a tautology in constructive logic

$$\neg(A \wedge \neg A)$$

*Solution.* Suppose context  $A : *, B : *$ . The proof suffices to give a inhabitant of type

$$(\Pi S : * . (A \rightarrow (A \rightarrow \perp) \rightarrow S) \rightarrow S) \rightarrow \perp$$

*Proof.*

1.	$A : *, B : *, \perp : \square$	
2.	$h : \Pi S : * . (A \rightarrow \neg A \rightarrow S) \rightarrow S$	
3.	$h \perp : (A \rightarrow \neg A \rightarrow \perp) \rightarrow \perp$	<b>2,1 App</b>
4.	$a : A$	
5.	$n : \neg A$	
6.	$\boxed{n a : \perp}$	<b>5,4 App</b>
7.	$\boxed{\lambda n : \neg A . n a : \neg A \rightarrow \perp}$	<b>6 Abst</b>
8.	$\lambda a : A . \lambda n : \neg A . n a : A \rightarrow \neg A \rightarrow \perp$	<b>7 Abst</b>
9.	$h \perp (\lambda a : A . \lambda n : \neg A . n a) : \perp$	<b>3,8 App</b>
10.	$\lambda h : A \wedge \neg A . h \perp (\lambda a : A . \lambda n : \neg A . n a) : A \wedge \neg A \rightarrow \perp$	<b>9 Abst</b>

■

## Problem

(7.7) Derive  **$\vee$ -IL** and  **$\vee$ -IR**.

*Solution.* The derivation is the same as proving

$$m : A, B : * \vdash N : \Pi C . (A \rightarrow C) \rightarrow (B \rightarrow C) \rightarrow C$$

$$m : B, A : * \vdash N : \Pi C . (A \rightarrow C) \rightarrow (B \rightarrow C) \rightarrow C$$

*Left Introduction.*

1.	$m : A, B : *$	
2.	$C : *$	
3.	$hl : A \rightarrow C$	
4.	$hr : B \rightarrow C$	
5.	$hl m : C$	3,1 App
6.	$\lambda hr : B \rightarrow C . hl m : (B \rightarrow C) \rightarrow C$	5 Abst
7.	$\lambda hl : A \rightarrow C . \lambda hr : B \rightarrow C . hl m : (A \rightarrow C) \rightarrow (B \rightarrow C) \rightarrow C$	6 Abst
8.	$\lambda C : * . \lambda hl : A \rightarrow C . \lambda hr : B \rightarrow C . hl m : (A \rightarrow C) \rightarrow (B \rightarrow C) \rightarrow C$	7 Abst

■

*Right Introduction.*

1.	$m : B, A : *$	
2.	$C : *$	
3.	$hl : A \rightarrow C$	
4.	$hr : B \rightarrow C$	
5.	$hr m : C$	4,1 App
6.	$\lambda hr : B \rightarrow C . hr m : (B \rightarrow C) \rightarrow C$	5 Abst
7.	$\lambda hl : A \rightarrow C . \lambda hr : B \rightarrow C . hr m : (A \rightarrow C) \rightarrow (B \rightarrow C) \rightarrow C$	6 Abst
8.	$\lambda C : * . \lambda hl : A \rightarrow C . \lambda hr : B \rightarrow C . hr m : (A \rightarrow C) \rightarrow (B \rightarrow C) \rightarrow C$	7 Abst

■

### Problem

(7.8 a) Give  $\lambda C$  derivations verifying the intuitionistic tautology below

$$(A \vee B) \Rightarrow (B \vee A)$$

*Solution.*

*Proof.*

1.	$A : *, B : *$	
2.	$h : A \vee B$	
3.	$C : *$	
4.	$hb : B \rightarrow C$	
5.	$ha : A \rightarrow C$	
6.	$hC : (A \rightarrow C) \rightarrow (B \rightarrow C) \rightarrow C$	2,3 App
7.	$hC ha : (B \rightarrow C) \rightarrow C$	6,5 App
8.	$hC ha hb : C$	7,4 App
9.	$\lambda ha : A \rightarrow C . hC ha hb : (A \rightarrow C) \rightarrow C$	8 Abst
	$\lambda hb : B \rightarrow C . \lambda ha : A \rightarrow C .$	
10.	$hC ha hb : (B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C) \rightarrow C$	9 Abst
	$\lambda C : * . \lambda hb : B \rightarrow C . \lambda ha : A \rightarrow C .$	
11.	$hC ha hb : \Pi C : * . (B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C) \rightarrow C$	10 Abst
	$\lambda h : A \vee B . \lambda C : * . \lambda hb : B \rightarrow C . \lambda ha : A \rightarrow C$	
12.	$hC ha hb : A \vee B \rightarrow B \vee A$	11 Abst

■

### Problem

(7.8 b) Give  $\lambda C$  derivations verifying the intuitionistic tautology below

$$\neg(A \vee B) \Rightarrow (\neg A \wedge \neg B)$$

*Solution.*

*Proof.*

1.	$A : *, B : *, \perp : \square$	
2.	$  h : \neg(\Pi S : * . (A \rightarrow S) \rightarrow (B \rightarrow S) \rightarrow S)$	

3.	$C : *$	
4.	$p : (\neg A \rightarrow \neg B \rightarrow C)$	
5.	$a : A$	
6.	$C : *$	
7.	$ha : A \rightarrow C$	
8.	$hb : B \rightarrow C$	
9.	$\boxed{ha\ a : C}$	
10.	$\boxed{\lambda hb : B \rightarrow C . ha\ a : (B \rightarrow C) \rightarrow C}$	<b>7,5 App</b>
11.	$\boxed{\lambda ha : A \rightarrow C . \lambda hb : B \rightarrow C . ha\ a : (A \rightarrow C) \rightarrow (B \rightarrow C) \rightarrow C}$	<b>9 Abst</b>
12.	$\lambda C : * . \lambda ha : A \rightarrow C . \lambda hb : B \rightarrow C . ha\ a : \Pi C : * . (A \rightarrow C) \rightarrow (B \rightarrow C) \rightarrow C$	<b>10 Abst</b>
13.	$\boxed{h (\lambda C : * . \lambda ha : A \rightarrow C . \lambda hb : B \rightarrow C . ha\ a) : \perp}$	<b>11 Abst</b>
14.	$\lambda a : A . h$	<b>2,12 App (Contr.)</b>
15.	$(\lambda C : * . \lambda ha : A \rightarrow C . \lambda hb : B \rightarrow C . ha\ a) : \neg A$	<b>13 Abst (Neg I)</b>
16.	$b : B$	
17.	$C : *$	
18.	$ha : A \rightarrow C$	
19.	$hb : B \rightarrow C$	
20.	$\boxed{hb\ b : C}$	<b>18,15 App</b>
21.	$\boxed{\lambda hb : B \rightarrow C . hb\ b : (B \rightarrow C) \rightarrow C}$	<b>19 Abst</b>
22.	$\lambda ha : A \rightarrow C . \lambda hb : B \rightarrow C . hb\ b : (A \rightarrow C) \rightarrow (B \rightarrow C) \rightarrow C$	<b>20 Abst</b>
23.	$\boxed{h (\lambda C : * . \lambda ha : A \rightarrow C . \lambda hb : B \rightarrow C . hb\ b) : \perp}$	<b>21 Abst</b>
24.	$\lambda b : B . h$	<b>2,22 App (Contr.)</b>
25.	$(\lambda C : * . \lambda ha : A \rightarrow C . \lambda hb : B \rightarrow C . hb\ b) : \neg B$	<b>23 Abst (Neg I)</b>
26.	$p (\lambda a : A . h$	
	$(\lambda C : * . \lambda ha : A \rightarrow C . \lambda hb : B \rightarrow C . ha\ a))$	<b>4,14 App</b>
	$: \neg B \rightarrow C$	
	$p (\lambda a : A . h$	
	$(\lambda C : * . \lambda ha : A \rightarrow C . \lambda hb : B \rightarrow C . ha\ a))$	
	$(\lambda b : B . h$	
	$(\lambda C : * . \lambda ha : A \rightarrow C . \lambda hb : B \rightarrow C . hb\ b)) : C$	<b>25,24 App</b>

	$\lambda p : \neg A \rightarrow \neg B \rightarrow C . p$ $(\lambda a : A . h$ $(\lambda C : * . \lambda ha : A \rightarrow C . \lambda hb : B \rightarrow C . ha a))$ $(\lambda b : B . h$ $(\lambda C : * . \lambda ha : A \rightarrow C . \lambda hb : B \rightarrow C . hb b))$ $: (\neg A \rightarrow \neg B \rightarrow C) \rightarrow C$	<b>26 Abst</b>
27.	$\lambda C : * . \lambda p : \neg A \rightarrow \neg B \rightarrow C . p$ $(\lambda a : A . h$ $(\lambda C : * . \lambda ha : A \rightarrow C . \lambda hb : B \rightarrow C . ha a))$ $(\lambda b : B . h$ $(\lambda C : * . \lambda ha : A \rightarrow C . \lambda hb : B \rightarrow C . hb b))$ $: \Pi C : * . (\neg A \rightarrow \neg B \rightarrow C) \rightarrow C$	<b>27 Abst</b>
28.	$\lambda h : \neg(A \vee B) . \lambda C : * . \lambda p : \neg A \rightarrow \neg B \rightarrow C . p$ $(\lambda a : A . h$ $(\lambda C : * . \lambda ha : A \rightarrow C . \lambda hb : B \rightarrow C . ha a))$ $(\lambda b : B . h$ $(\lambda C : * . \lambda ha : A \rightarrow C . \lambda hb : B \rightarrow C . hb b))$ $: \neg(A \vee B) \rightarrow (\neg A \wedge \neg B)$	<b>28 Abst</b>

■

### Problem

(7.8 c) Give  $\lambda C$  derivations verifying the intuitionistic tautology below

$$(\neg A \wedge \neg B) \Rightarrow \neg(A \vee B)$$

*Solution.*

*Proof.*

1.	$A : *, B : *, \perp : \square$	
2.	$h : \Pi C : * . (\neg A \rightarrow \neg B \rightarrow C) \rightarrow C$	
3.	$p : \Pi S : * . (A \rightarrow S) \rightarrow (B \rightarrow S) \rightarrow S$	
4.	$h \perp : \neg(\neg A \rightarrow \neg B \rightarrow \perp)$	2,1 App
5.	$p \perp : (A \rightarrow \perp) \rightarrow (B \rightarrow \perp) \rightarrow \perp$	3,1 App
6.	$h \perp(p \perp) : \perp$	4,5 App (Cont.)

7.	$\boxed{\lambda p : A \vee B . h \perp(p \perp) : \neg(A \vee B)}$	<b>6 Abst</b>
8.	$\boxed{\lambda h : \neg A \wedge \neg B . \lambda p : A \vee B . h \perp(p \perp)}$ $: \neg A \wedge \neg B \rightarrow \neg(A \vee B)$	<b>7 Abst</b>

■

### Problem

(7.9 a) Verify that the following expression is a tautology in constructive logic by giving a proof in first-order natural deduction and a flag styled derivation.

$$\forall x \in S, (\neg P(x) \Rightarrow (P(x) \Rightarrow Q(x) \wedge R(x)))$$

*Solution.*

*Natural Deduction.*

1.	$x \in S$	
2.	$\neg P(x)$	
3.	$P(x)$	
4.	$\perp$	<b>3,2 <math>\perp I</math></b>
5.	$\boxed{Q(x) \wedge R(x)}$	<b>4 <math>\perp E</math></b>
6.	$\boxed{P(x) \Rightarrow Q(x) \wedge R(x)}$	<b>3-5 <math>\Rightarrow I</math></b>
7.	$\boxed{\neg P(x) \Rightarrow (P(x) \Rightarrow Q(x) \wedge R(x))}$	<b>2-6 <math>\Rightarrow I</math></b>
8.	$\forall x \in S, (\neg P(x) \Rightarrow (P(x) \Rightarrow Q(x) \wedge R(x)))$	<b>1-7 <math>\forall I</math></b>

■

$\lambda C.$

1.	$S : *, P : S \rightarrow *, Q : S \rightarrow *, R : S \rightarrow *$	
2.	$x : S$	
3.	$nhp : \neg(P x)$	
4.	$hp : P x$	
5.	$nhp\ hp : \perp$	<b>3,4 App (Contradiction)</b>
6.	$Q x \wedge R x : *$	<b>Form</b>
7.	$nhp\ hp (Q x \wedge R x) : Q x \wedge R x$	<b>5,6 App (Ex Falso)</b>
8.	$\lambda hp : P x . nhp\ hp (Q x \wedge R x)$	
	$: P x \rightarrow Q x \wedge R x$	<b>7 Abst</b>

9.	$\begin{array}{c} \lambda nhp : \neg P x . \lambda hp : P x . nhp hp (Q x \wedge R x) \\ \quad : \neg P x \rightarrow P x \rightarrow Q x \wedge R x \end{array}$	<b>8 Abst</b>
	$\begin{array}{c} \lambda x : S . \lambda nhp : \neg P x . \lambda hp : P x . \\ \quad nhp hp (Q x \wedge R x) \end{array}$	
10.	$: \Pi x : S . \neg P x \rightarrow P x \rightarrow Q x \wedge R x$	<b>9 Abst</b>

■

### Problem

(7.9 b) Verify that the following expression is a tautology in constructive logic by giving a proof in first-order natural deduction and a flag styled derivation.

$$\forall x \in S, P(x) \Rightarrow \forall y \in S, P(y) \vee Q(y)$$

*Solution.*

*Natural Deduction.*

1.	$\forall x \in S, P(x)$	
2.	$y : S$	
3.	$P(y)$	<b>2,1 ∃E</b>
4.	$\underline{P(y) \vee Q(y)}$	<b>3 ∨I</b>
5.	$\forall y : S, (P(y) \vee Q(y))$	<b>2-4 ∀I</b>
6.	$\forall x \in S, P(x) \Rightarrow \forall y : S, (P(y) \vee Q(y))$	<b>1-5 ⇒I</b>

■

$\lambda C.$

1.	$S : *, P : S \rightarrow *, Q : S \rightarrow *$	
2.	$h : \Pi x : S . P x$	
3.	$y : S$	
4.	$h y : P y$	<b>2,3 App</b>
5.	$C : *$	
6.	$hp : P y \rightarrow C$	
7.	$hq : Q y \rightarrow C$	
8.	$\underline{hp(hy) : C}$	<b>6,4 App</b>
9.	$\lambda hq : Q y \rightarrow C . hp(hy) : (Q y \rightarrow C) \rightarrow C$	<b>8 Abst</b>

$10. \quad \frac{\boxed{\begin{array}{c} \lambda hp : P y \rightarrow C . \lambda hq : Q y \rightarrow C . hp (h y) \\ : (P y \rightarrow C) \rightarrow (Q y \rightarrow C) \rightarrow C \end{array}}}{\begin{array}{c} \lambda C : * . \lambda hp : P y \rightarrow C . \lambda hq : Q y \rightarrow C . hp (h y) \\ : \Pi C : * . (P y \rightarrow C) \rightarrow (Q y \rightarrow C) \rightarrow C \end{array}}$	<b>9 Abst</b>
$11. \quad \frac{\boxed{\begin{array}{c} \lambda y : S . \lambda C : * . \\ \lambda hp : P y \rightarrow C . \lambda hq : Q y \rightarrow C . hp (h y) \\ : \Pi y : S . P y \vee Q y \end{array}}}{\begin{array}{c} \lambda h : \Pi x : S . P x . \\ \lambda y : S . \lambda C : * . \\ \lambda hp : P y \rightarrow C . \lambda hq : Q y \rightarrow C . hp (h y) \\ : (\Pi x : S . P x) \rightarrow \Pi y : S . P y \vee Q y \end{array}}$	<b>10 Abst</b>
$12. \quad \frac{\boxed{\begin{array}{c} \lambda h : \Pi x : S . P x . \\ \lambda y : S . \lambda C : * . \\ \lambda hp : P y \rightarrow C . \lambda hq : Q y \rightarrow C . hp (h y) \\ : (\Pi x : S . P x) \rightarrow \Pi y : S . P y \vee Q y \end{array}}}{\begin{array}{c} \lambda h : \Pi x : S . P x . \\ \lambda y : S . \lambda C : * . \\ \lambda hp : P y \rightarrow C . \lambda hq : Q y \rightarrow C . hp (h y) \\ : (\Pi x : S . P x) \rightarrow \Pi y : S . P y \vee Q y \end{array}}$	<b>11 Abst</b>
$13. \quad \frac{\boxed{\begin{array}{c} \lambda h : \Pi x : S . P x . \\ \lambda y : S . \lambda C : * . \\ \lambda hp : P y \rightarrow C . \lambda hq : Q y \rightarrow C . hp (h y) \\ : (\Pi x : S . P x) \rightarrow \Pi y : S . P y \vee Q y \end{array}}}{\begin{array}{c} \lambda h : \Pi x : S . P x . \\ \lambda y : S . \lambda C : * . \\ \lambda hp : P y \rightarrow C . \lambda hq : Q y \rightarrow C . hp (h y) \\ : (\Pi x : S . P x) \rightarrow \Pi y : S . P y \vee Q y \end{array}}$	<b>12 Abst</b>

■

### Problem

(7.10) Verify that the following expression is a tautology in constructive logic by giving a proof in first-order natural deduction and a flag styled derivation.

$$\begin{aligned} & \forall x \in S, (P(x) \Rightarrow Q(x)) \Rightarrow \\ & \forall y \in S, (P(y) \Rightarrow R(y)) \Rightarrow \\ & \forall z \in S, (P(z) \Rightarrow (Q(z) \wedge R(z))) \end{aligned}$$

*Solution.*

*Natural Deduction.*

$1. \quad \forall x \in S (P(x) \Rightarrow Q(x))$	
$2. \quad \forall y \in S (P(y) \Rightarrow R(y))$	
$3. \quad \boxed{z \in S}$	
$4. \quad \boxed{\begin{array}{c} P(z) \\ P(z) \Rightarrow Q(z) \\ Q(z) \end{array}}$	<b>3,1 <math>\forall E</math></b>
$5. \quad \boxed{P(z) \Rightarrow R(z)}$	<b>5,4 <math>\Rightarrow E</math></b>
$6. \quad \boxed{R(z)}$	<b>3,2 <math>\forall E</math></b>
$7. \quad \boxed{Q(z) \wedge R(z)}$	<b>7,4 <math>\forall E</math></b>
$8. \quad \boxed{P(z) \Rightarrow Q(z) \wedge R(z)}$	<b>6,8 <math>\wedge I</math></b>
$10. \quad \boxed{P(z) \Rightarrow Q(z) \wedge R(z)}$	<b>4-9 <math>\Rightarrow I</math></b>

11.	$\boxed{\begin{array}{l} \forall z \in S, (P(z) \Rightarrow Q(z) \wedge R(z)) \\ \forall y \in S, (P(y) \Rightarrow R(y)) \Rightarrow \end{array}}$	<b>3-10 <math>\forall I</math></b>
12.	$\boxed{\begin{array}{l} \forall z \in S, (P(z) \Rightarrow Q(z) \wedge R(z)) \\ \forall y \in S, (P(y) \Rightarrow R(y)) \Rightarrow \end{array}}$	<b>2-11 <math>\Rightarrow I</math></b>
13.		

$$\begin{aligned} & \forall x \in S, (P(x) \Rightarrow Q(x)) \Rightarrow \\ & \forall y \in S, (P(y) \Rightarrow R(y)) \Rightarrow \\ & \forall z \in S, (P(z) \Rightarrow Q(z) \wedge R(z)) \quad \text{1-12 } \Rightarrow I \end{aligned}$$

■

 $\lambda C.$ 

1.	$S : *, P : S \rightarrow *, Q : S \rightarrow *, R : S \rightarrow *$	
2.	$h : \Pi x : S . P x \rightarrow Q x$	
3.	$p : \Pi y : S . P y \rightarrow R y$	
4.	$z : S$	
5.	$r : P z$	
6.	$h z : P z \rightarrow Q z$	<b>2,4 App</b>
7.	$h z r : Q z$	<b>6,5 App</b>
8.	$p z : P z \rightarrow R z$	<b>3,4 App</b>
9.	$p z r : R z$	<b>8,5 App</b>
10.	$C : *$	
11.	$t : Q z \rightarrow R z \rightarrow C$	
12.	$t(h z r) : R z \rightarrow C$	<b>11,7 App</b>
13.	$t(h z r)(p z r) : C$	<b>12,9 App</b>
14.	$\boxed{\begin{array}{l} \lambda t : Q z \rightarrow R z \rightarrow C . t(h z r)(p z r) \\ : (Q z \rightarrow R z \rightarrow C) \rightarrow C \end{array}}$	<b>13 Abst</b>
15.	$\boxed{\begin{array}{l} \lambda C : * . \lambda t : Q z \rightarrow R z \rightarrow C . t(h z r)(p z r) \\ : \Pi C : * . (Q z \rightarrow R z \rightarrow C) \rightarrow C \end{array}}$	<b>14 Abst</b>
16.	$\boxed{\begin{array}{l} \lambda r : P z . \lambda C : * . \lambda t : Q z \rightarrow R z \rightarrow C . \\ t(h z r)(p z r) \\ : P z \rightarrow Q z \wedge R z \end{array}}$	<b>15 Abst</b>
17.	$\boxed{\begin{array}{l} \lambda z : S . \lambda r : P z . \lambda C : * . \lambda t : Q z \rightarrow R z \rightarrow C . \\ t(h z r)(p z r) \\ : \Pi z : S . P z \rightarrow Q z \wedge R z \end{array}}$	<b>16 Abst</b>

	$\lambda p : \Pi y : S . P y \rightarrow R y .$
	$\lambda z : S . \lambda r : P z . \lambda C : * .$
	$\lambda t : Q z \rightarrow R z \rightarrow C .$
	$t (h z r)(p z r)$
	$: \Pi y : S . P y \rightarrow R y$
18.	$\rightarrow \Pi z : S . P z \rightarrow Q z \wedge R z$
	<b>17 Abst</b>
	$\lambda h : \Pi x : S . P x \rightarrow Q x . \lambda p : \Pi y : S . P y \rightarrow R y .$
	$\lambda z : S . \lambda r : P z . \lambda C : * .$
	$\lambda t : Q z \rightarrow R z \rightarrow C .$
	$t (h z r)(p z r)$
	$: (\Pi x : S . P x \rightarrow Q x) \rightarrow (\Pi y : S . P y \rightarrow R y)$
19.	$\rightarrow \Pi z : S . P z \rightarrow Q z \wedge R z$
	<b>18 Abst</b>

■

### Problem

(7.11) Let  $S : *$  and  $P, Q : S \rightarrow *$ . Let

$$\begin{aligned} y &: \Pi \alpha : * . ((\Pi x : S . (P x \rightarrow \alpha)) \rightarrow \alpha) \\ z &: \Pi x : S . (P x \rightarrow Q x) \end{aligned}$$

and  $x : S$ . Find a correct type for  $y (Q x)$ , and prove the application  $y (Q x) z$  invalid.  
Also, check that it follows Remark 7.5.2

*Solution.*

1.	$S : *$
2.	$P, Q : S \rightarrow *$
3.	$y : \Pi \alpha : * . ((\Pi x : S . (P x \rightarrow \alpha)) \rightarrow \alpha)$
4.	$x : S$
5.	$Q x : *$
6.	$y (Q x) : \Pi x : S . (P x \rightarrow Q x) \rightarrow Q x$

Here any application to  $y (Q x)$  requires that value to be of type  $S$ . It certainly is not true for  $z$ . Remark 7.5.2 basically forbids name clashing of free variables and bound variables in an application or beta reduction.