

Q3-1

次のベクトルの絶対値を求めよ。

$$\mathbf{a} = (15, 36)$$

解答

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{15^2 + 36^2} = \sqrt{225 + 1296} = \sqrt{1521} = 39$$

Q3-2

次の 2 つのベクトルの距離を求めよ。

$$\mathbf{b} = (9, 2, 4), \quad \mathbf{c} = (6, -3, 8)$$

解答

距離は差ベクトルの絶対値である。

$$\mathbf{b} - \mathbf{c} = (9 - 6, 2 - (-3), 4 - 8) = (3, 5, -4)$$

$$\text{距離} = \sqrt{3^2 + 5^2 + (-4)^2} = \sqrt{9 + 25 + 16} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$$

Q3-3

次の 2 つのベクトルのなす角を求めよ。

$$\mathbf{u} = (4, 1, 1), \quad \mathbf{v} = (1, 1, 4)$$

解答

まず内積を計算する。

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 4 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 4 = 4 + 1 + 4 = 9$$

次に、それぞれの絶対値を求める。

$$|\mathbf{u}| = \sqrt{4^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{16 + 1 + 1} = \sqrt{18}$$

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 4^2} = \sqrt{1 + 1 + 16} = \sqrt{18}$$

なす角を θ とすると、

$$\cos \theta = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{u}||\mathbf{v}|} = \frac{9}{\sqrt{18}\sqrt{18}} = \frac{9}{18} = \frac{1}{2}$$

よって、

$$\theta = 60^\circ$$

Q3-4

次の 3 つのベクトル間の **コサイン類似度** を求め、

「最も近い 2 つのベクトル」の組を見つけよ。

$$\mathbf{a} = (-3, -3, -3, -3)$$

$$\mathbf{b} = (-3, -2, -2, 1)$$

$$\mathbf{c} = (-4, 1, 4, -2)$$

解答

コサイン類似度は

$$\cos(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}}{|\mathbf{x}||\mathbf{y}|}$$

である。

1) ノルム

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{(-3)^2 + (-3)^2 + (-3)^2 + (-3)^2} = \sqrt{36} = 6$$

$$|\mathbf{b}| = \sqrt{(-3)^2 + (-2)^2 + (-2)^2 + 1^2} = \sqrt{9 + 4 + 4 + 1} = \sqrt{18}$$

$$|\mathbf{c}| = \sqrt{(-4)^2 + 1^2 + 4^2 + (-2)^2} = \sqrt{16 + 1 + 16 + 4} = \sqrt{37}$$

2) 内積とコサイン類似度

(a, b)

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = (-3)(-3) + (-3)(-2) + (-3)(-2) + (-3)(1) = 9 + 6 + 6 - 3 = 18$$

$$\cos(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \frac{18}{6\sqrt{18}} = \frac{3}{\sqrt{18}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

(a, c)

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{c} = (-3)(-4) + (-3)(1) + (-3)(4) + (-3)(-2) = 12 - 3 - 12 + 6 = 3$$

$$\cos(\mathbf{a}, \mathbf{c}) = \frac{3}{6\sqrt{37}} = \frac{1}{2\sqrt{37}}$$

(b, c)

$$\mathbf{b} \cdot \mathbf{c} = (-3)(-4) + (-2)(1) + (-2)(4) + 1(-2) = 12 - 2 - 8 - 2 = 0$$

$$\cos(\mathbf{b}, \mathbf{c}) = 0$$

3) 最も近い組

$$\cos(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \cos(\mathbf{a}, \mathbf{c}) = \frac{1}{2\sqrt{37}}, \quad \cos(\mathbf{b}, \mathbf{c}) = 0$$

よってコサイン類似度が最大なのは \mathbf{a} と \mathbf{b} である。

最も近い 2 つのベクトルは \mathbf{a} と \mathbf{b}

Q3-5

次の行列とベクトルのかけ算を計算せよ。

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 3 \\ -5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

解答

行列とベクトルの積は、各行とベクトルの内積で計算する。

第1成分

$$2 \cdot 3 + (-1) \cdot 2 = 6 - 2 = 4$$

第2成分

$$4 \cdot 3 + 3 \cdot 2 = 12 + 6 = 18$$

第3成分

$$(-5) \cdot 3 + 6 \cdot 2 = -15 + 12 = -3$$

結果

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 3 \\ -5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 18 \\ -3 \end{pmatrix}$$