Q5-1

次のように定義される関数の微分を求めよ。

$$\tanh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

分子を $f(x) = e^x - e^{-x}$，分母を $g(x) = e^x + e^{-x}$ とおく。

$$f'(x) = e^x + e^{-x}, \qquad g'(x) = e^x - e^{-x}$$

商の微分より，

$$(\tanh x)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}$$

$$(\tanh x)' = \frac{(e^x + e^{-x})^2 - (e^x - e^{-x})^2}{(e^x + e^{-x})^2} = \frac{4}{(e^x + e^{-x})^2}$$

さらに，

$$1 - \tanh^2 x = \frac{4}{(e^x + e^{-x})^2}$$

したがって，

$$(\tanh x)' = 1 - \tanh^2 x$$

Q5-2

次のように定義される関数の微分を求めよ（t は定数）

$$e(p) = t\log(p) + (1-t)\log(1-p)$$

$$\frac{d}{dp}\big(t\log p\big) = \frac{t}{p}, \qquad \frac{d}{dp}\big((1-t)\log(1-p)\big) = -\frac{1-t}{1-p}$$

したがって，

$$e'(p) = \frac{t}{p} - \frac{1-t}{1-p}$$

整理すると，

$$e'(p) = \frac{t-p}{p(1-p)}$$