

Q6-1

コインを n 回投げ、表が k 回出たとする。
各試行は独立で、表の出る確率は常に p とする。

(a) 尤度関数 $L(p)$

$$L(p) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

($\binom{n}{k}$ は定数なので $L(p) \propto p^k (1-p)^{n-k}$ と書いてもよい)

(b) 対数尤度 $l(p) = \log L(p)$

$$l(p) = \log \binom{n}{k} + k \log p + (n-k) \log(1-p)$$

(c) 最尤推定量 \hat{p}

$$\frac{dl}{dp} = \frac{k}{p} - \frac{n-k}{1-p} = 0$$

$$\implies k(1-p) = p(n-k) \implies \hat{p} = \frac{k}{n}$$

Q6-2

$X \sim N(\mu, 1)$ から得られた独立標本 x_1, \dots, x_n を考える。

一般形の正規分布密度

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$

を使う (本問では $\sigma^2 = 1$)

(a) 尤度関数 $L(\mu)$

$$L(\mu) = \prod_{i=1}^n f(x_i) = (2\pi\sigma^2)^{-n/2} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2\right)$$

(b) 対数尤度 $l(\mu) = \log L(\mu)$

$$l(\mu) = -\frac{n}{2} \log(2\pi\sigma^2) - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2$$

(c) 最尤推定量 $\hat{\mu}$

$$\frac{dl}{d\mu} = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu) = 0 \quad \implies \quad \sum_{i=1}^n x_i = n\mu$$

$$\hat{\mu} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$