Q4-1

2 変数関数

$$L(u,v)=\frac{1}{2}\left((u-p)^2+(v-q)^2\right)+\lambda(u^2+v^2)$$

について考える（p,q,λ は定数）。

(a) u に関する偏微分を計算せよ

$$\frac{\partial L}{\partial u}=(u-p)+2\lambda u=(1+2\lambda)u-p$$

(b) v に関する偏微分を計算せよ

$$\frac{\partial L}{\partial v}=(v-q)+2\lambda v=(1+2\lambda)v-q$$

(c) $p=2,\ q=-1,\ \lambda=1,\quad (u,v)=(0,0)$のとき、偏微分の計算結果を求めよ

$$\frac{\partial L}{\partial u}=3u-p,\qquad \frac{\partial L}{\partial v}=3v-q$$

よって,

$$\left.\frac{\partial L}{\partial u}\right|_{(0,0)}=-2,\qquad \left.\frac{\partial L}{\partial v}\right|_{(0,0)}=1$$

したがって,

$$\nabla L(0,0)=(-2,\ 1)$$

Q4-2

合成関数 $L(x_1,x_2)=L(u(x_1,x_2),v(x_1,x_2))$ を
x_1 で偏微分せよ。

$$L(u,v)=\frac{1}{2}\left((u-p)^2+(v-q)^2\right)+\lambda(u^2+v^2),$$

$$u(x_1,x_2)=w_{11}x_1+w_{12}x_2,\qquad v(x_1,x_2)=w_{21}x_1+w_{22}x_2$$

（$p,q,\lambda,w_{11},w_{12},w_{21},w_{22}$ は定数）

1. まず $\partial L/\partial u,\ \partial L/\partial v$

$$\frac{\partial L}{\partial u}=(1+2\lambda)u-p,\qquad \frac{\partial L}{\partial v}=(1+2\lambda)v-q$$

2. 連鎖律（チェインルール）

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = \frac{\partial L}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x_1} + \frac{\partial L}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x_1}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} = w_{11}, \qquad \frac{\partial v}{\partial x_1} = w_{21}$$

したがって

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = ((1+2\lambda)u - p)w_{11} + ((1+2\lambda)v - q)w_{21}$$

3. u, v を x_1, x_2 で書き換える

$$u = w_{11}x_1 + w_{12}x_2, \qquad v = w_{21}x_1 + w_{22}x_2$$

代入して

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = \Big((1+2\lambda)(w_{11}x_1 + w_{12}x_2) - p\Big)w_{11} + \Big((1+2\lambda)(w_{21}x_1 + w_{22}x_2) - q\Big)w_{21}$$

これが求める結果である。