Санкт-Петербургский государственный университет
www.spbu.ru

СВОБОДНАЯ ГРАММАТИКА ПО МАШИНЕ ТЬЮРИНГА

Автор: М. А. Пелогейко, 371 группа

Преподаватель: М.В. Баклановский

Санкт-Петербургский государственный университет

Кафедра системного программирования

9 сентября 2021г.

Машина Тьюринга

Определение

Машина Тьюринга $T = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, B, F)$, где

- Q — конечное множество состояний
- $\Sigma \subseteq \Gamma \setminus \{B\}$ — множество входных символов
- Γ — конечное множество ленточных символов
- $\delta : Q \times \Gamma \to Q \times \Gamma \times \{\leftarrow, \rightarrow\}$ — функция переходов
- $q_0 \in Q$ — стартовое состояние
- $B \in \Gamma$ — пробельный символ
- $F \subseteq Q$ — множество допускающих состояний

Определение

Свободная грамматика $G = (N, \Sigma, P, S)$, где:

- N — конечное множество нетерминалов (переменных)
- Σ — конечное множество терминалов
- P — конечное множество продукций вида $\alpha \to \beta$, где:
  - $\alpha = (\Sigma \cup N)^* X (\Sigma \cup N)^*$
  - $\beta \in (\Sigma \cup N)^*$
  - $X \in N$
- S — стратовый нетерминал

Теорема

Если язык L распознается машиной Тьюринга, то язык L порождается грамматикой типа 0.

Доказательство

Идея

Мы построим грамматику G, которая недетерминированно порождает две копии представления некоторого слова из множества Σ^* , а затем моделирует действие МТ T на одной из этих копий. Если МТ T принимает слово, то грамматика G превращает вторую копию в терминальную строку. Если МТ T не принимает слово, вывод никогда не даёт в результате терминальную строку.

Мы предполагаем без потери общности рассуждений, что для каждого $q \in F$ и $a \in \Sigma$ значение $\delta(q, a)$ не определено.

Доказательство

Построение Грамматики

Пусть $G = (N, \Sigma, P, A_1)$, где

- $N = \{[X, Y] \mid X \in \Sigma \cup \{\varepsilon\}, Y \in \Gamma\} \cup Q \cup \{ A_1, A_2, A_3\}$,
- $P = \{$

1. $A_1 \to q_0 A_2$,
2. $A_2 \to [a, a]A_2$ для каждого $a \in \Sigma$,
3. $A_2 \to A_3$,
4. $A_3 \to [\varepsilon, B]A_3$,
5. $A_3 \to \varepsilon$,
6. $q[a, C] \to [a, D]\, p$ для каждых $a \in \Sigma \cup \{\varepsilon\}$, $q \in Q$, $C \in \Gamma$, таких, что $\delta(q, C) = (p, D, R)$,
7. $[b, E]q[a,C] \to p[b, E][a, D]$ для всех $C,D,E \in \Gamma$, $a, b \in \Sigma \cup \{\varepsilon\}$, $q \in Q$, таких, что $\delta(q, C) = (p, D, L)$,
8. $[a, C]q \to qaq$, $q[a, C] \to qaq$, $q \to \varepsilon$ для каждого $a \in \Sigma \cup \{\varepsilon\}$, $C \in \Gamma$ и $q \in F$

$\}$

Доказательство

Создание слова

Используя правила (1) и (2), получаем вывод вида:

$A_1 \Rightarrow q_0[a_1, a_1]\ [a_2, a_2]\ \ldots\ [a_k , a_k]A_2$,

где $a_i \in \Sigma$, $i = 1, 2, \ldots, k$.

Добавление “ячеек”

Предположим, что МТ T принимает цепочку $a_1a_2... a_k$, используя не более, чем m ячеек справа от своего ввода. Тогда, используя правило (3), затем m раз правило (4) и, наконец, правило (5), продолжим предыдущий вывод. Получаем:

$A_1\ q_0[a_1, a_1]\ [a_2, a_2]\ ...\ [a_k\ , a_k]\ [\varepsilon, B]^m$.

Эмуляция МТ

С этого момента и впредь только правила (6) и (7) могут использоваться до тех пор, пока не порождается принимающее состояние. При этом первые компоненты в обозначениях нетерминалов (переменных) никогда не изменяются, а вторые моделируют записи, производимые МТ T на её ленте.

Получение строки терминалов

Далее, если $q \in F$, то по правилам грамматики вида (8) можно получить вывод

$$[a_1, X_1][a_2, X_2] \ldots q\, [a_j, X_j] \ldots [a_{k+m}, X_{k+m}] \Rightarrow a_1 a_2 \ldots a_k$$

Итак, доказано, что если $a_1 a_2 \ldots a_k$ принимается МТ T, то $a_1 a_2 \ldots a_k \in L(G)$.

Б.К. Мартыненко «ЯЗЫКИ И ТРАНСЛЯЦИИ»

Санкт-Петербургский
государственный университет
spbu.ru