Домашнее задание 7.

NP полные задачи и приближенные алгоритмы.

Предисловие:

В данном домашнем задании есть двадцать две задачи. У каждого из вас есть вариант из шести букв, например: «ADHMQT», каждая из которых задает номер задания, который вам нужно решить.

Каждое задание оценивается из одного балла, можно получить частичные баллы при помарках или если такая возможность указана в условии.

Домашнее задание состоит из трех частей:

1. *По четыре задания на сведение задач, чтобы доказать их принадлежность классу NP-complete.*
2. *По одному заданию на оценку данного приближенного алгоритма.*
3. *По одному заданию на предложение приближенного алгоритма для некоторой задачи.*

Часть 1.

Для каждой задачи из этой части докажите ее принадлежность классу NP-complete. Можно набрать по пол балла за каждое из доказательств принадлежности классам NP и NP-hard.

A. Найти значения переменных в формуле 3SAT, при которых наибольшее число скобок принимают истинное значение.

B. Найти есть ли у формулы 3SAT решение, в котором хоть одна переменная истина и хоть одна ложная.

C. Найти есть ли у формулы 3SAT решение, в котором в каждой скобке ровно одна переменная истинна.

D. Задача о рюкзаке. Есть n предметов, вес i-го предмета равен w_i. Нужно положить некоторые предметы из них в рюкзак так, чтобы суммарный вес взятых предметов был максимален, но не более S.

E. Задача о рюкзаке. Есть n предметов, вес i-го предмета равен w_i. Нужно положить эти предметы в минимальное число коробок так, чтобы вес каждой коробки был не более S.

F. Задача о покрытие множества. Дано множество U, а также n его подмножеств $U_i \subset U$, при этом $\cup_{i=1}^{n} U_i = U$. Требуется выбрать наименьшее число из этих подмножеств так, чтобы их объединение было равно множеству U.

G. Дана матрица A размера $M \times N$ из целых чисел, вектор B размера M из целых чисел. Найти бинарный вектор x, такой что $Ax \leq B$.

H. Дан взвешенный неориентированный граф $G = (V, E)$, найти минимальный такой путь, который проходит по каждому ребру хотя бы раз.

I. Дан неориентированный граф $G = (V, E)$, и число K. Проверить, что в графе есть остовное дерево, у которого степень каждой вершины хотя бы K.

J. Дан взвешенный неориентированный граф $G = (V, E)$, найти в нем гамильтонов цикл минимального суммарного веса.

K. Дан взвешенный ориентированный граф $G = (V, E)$, найти в нем гамильтонов путь.

L. Дан взвешенный неориентированный граф $G = (V, E)$, найти в нем гамильтонов цикл.

M. Дан набор прямоугольников r_i и прямоугольник R. Можно ли расположить прямоугольники r_i внутри R так, чтобы они попарно не пересекались и при этом их стороны были параллельны сторонам R.

N. Дано множество подмножеств C_i множества S и положительное число K. Можно ли выбрать такое множество $S' \subset S$, что $|S'| < K$ и при этом, для любого $C_i : S' \cap C_i \neq \emptyset$.

O. Дан набор задач A, для каждой есть время, за которое ее решает один процессор t_i, M процессоров и общий дедлайн D. Можно ли разбить все задачи на непересекающиеся множества задач A_j, такие что $\cup_{j=1}^{n} A_j = A$ и сумма t_i по каждому $A_j \leq D$. Формально: $\forall j \ \sum_{i \in A_j} t_i \leq D$.

P. Дан набор точек P и k окружностей радиуса R. Можно ли расположить окружности на плоскости так, чтобы каждая точка из P лежала внутри хотя бы в одной окружности.

Часть 2.

Для задач этого раздела X является некоторой константой, требуется найти любой подходящий X и доказать, что алгоритм X-приближенный или что такой константы X не существует.

Q. Рассмотрим такой алгоритм построения минимального вершинного покрытия: будем каждый раз выбирать вершину, покрывающую максимальное количество еще не покрытых ребер. Докажите или опровергните, что такой алгоритм дает решение, не более чем в *X* раз отличающееся от оптимального.

R. Рассмотрим такой алгоритм построения максимальной клики: будем каждый раз удалять из графа вершину минимальной степени, пока не получим полный граф. Докажите или опровергните, что такой алгоритм дает решение, не более чем в *X* раз отличающееся от оптимального.

S. Рассмотрим такой алгоритм решения задачи о рюкзаке: отсортируем предметы по отношению стоимости к весу и будем добавлять в таком порядке, если можно добавить. Докажите или опровергните, что такой алгоритм дает решение, не более чем в X раз отличающееся от оптимального.

Часть 3.

Для задач этого раздела нужно предложить подходящий алгоритм, а потом доказать его оценку.

T. Предложить ½-приближенный алгоритм для решения следующей задачи. В ориентированном графе $G = (V, E)$ выбрать максимальное по мощности множество ребер, такое, что полученный подграф не содержит циклов.

U. Предложить ½-приближенный алгоритм для решения следующей задачи. Требуется разбить множество вершин неориентированного графа $G = (V, E)$ на два непересекающихся множества S и T ($S \cup T = V$) таким образом, чтобы число ребер (u, v): $u \in S$ и $v \in T$ было максимально.

V. Предложите 2-приближенный алгоритм для решения следующей задачи. Есть n предметов, вес i-го предмета равен w_i. Нужно положить эти предметы в минимальное число коробок так, чтобы вес каждой коробки был не более S.