Уравнения гиперболического типа

Из уравнения (80) и условий (81) находим:

$$X_1(x) = C\sin\frac{\omega}{a}x, \quad X_2(x) = D\sin\frac{\omega}{a}(l-x).$$

Условия сопряжения (82) дают:

$$C\sin\frac{\omega}{a}x_0 - D\sin\frac{\omega}{a}(l-x_0) = 0,$$
$$C\frac{\omega}{a}\cos\frac{\omega}{a}x_0 + D\frac{\omega}{a}\cos\frac{\omega}{a}(l-x_0) = \frac{A}{k}.$$

Определяя отсюда коэффициенты C и D, получаем:

$$u(x,t) = \begin{cases} u_1 = \dfrac{Aa}{k\omega}\dfrac{\sin\frac{\omega}{a}(l-x_0)}{\sin\frac{\omega}{a}l}\sin\dfrac{\omega}{a}x\cos\omega t & \text{при } 0 \le x \le x_0, \\ u_2 = \dfrac{Aa}{k\omega}\dfrac{\sin\frac{\omega}{a}x_0}{\sin\frac{\omega}{a}l}\sin\dfrac{\omega}{a}(l-x)\cos\omega t & \text{при } x_0 \le x \le l. \end{cases}$$

Аналогично записывается решение при $f(t) = A\sin\omega t$.

Итак, получено решение для случая $f(t) = A\cos\omega t$ или $f(t) = A\sin\omega t$. Если $f(t)$ - периодическая функция, равная

$$f(t) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(\alpha_n\cos n\omega t + \beta_n\sin n\omega t)$$

(ω - наименьшая частота), то, очевидно,

$$u(x,t) = \begin{cases} \frac{1}{k}\left\{\frac{\alpha_0 x}{2}\left(1-\frac{x_0}{l}\right) + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{a\sin\frac{\omega n}{a}(l-x_0)}{\omega n\sin\frac{\omega n}{a}l}\sin\frac{\omega n x}{a}\times\right. & \\ \times(\alpha_n\cos\omega nt + \beta_n\sin\omega nt), & 0 \le x \le x_0; \\ \frac{1}{k}\left\{\frac{\alpha_0 x_0}{2}\left(1-\frac{x}{l}\right) + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{a\sin\frac{\omega n}{a}x_0}{\omega n\sin\frac{\omega n}{a}l}\sin\frac{\omega n(l-x)}{a}\right. & \\ \times(\alpha_n\cos\omega nt + \beta_n\sin\omega nt), & x_0 \le x \le l. \end{cases}$$

$$u = \begin{cases} u_1(x,t) = u_1(x) = \dfrac{1}{k}\dfrac{\alpha_0}{2}x\left(1-\dfrac{x_0}{l}\right) & \text{при } 0 \le x \le x_0, \\ u_2(x,t) = u_2(x) = \dfrac{1}{k}\dfrac{\alpha_0}{2}x_0\left(1-\dfrac{x}{l}\right) & \text{при } x_0 \le x \le l. \end{cases}$$

Если функция $f(t)$ непериодическая, то, представляя её в виде интеграла Фурье, аналогичным методом можно получить решение в интегральной форме. Если знаменатель этих функций (83) равен нулю:

$$\sin \frac{\omega t}{a} = 0,$$

т.е. если спектр частот возбуждающей силы содержит одну из частот собственных колебаний (резонанс), то установленного решения не существует.

Если точка приложения силы x_0 является одним из узлов стоячей волны, соответствующей свободному колебанию с частотой ω_m:

$$\sin \frac{\omega_m}{a} x_0 = 0,$$

$$\sin \frac{\omega_m}{a} (l - x_0) = 0.$$

При этом числители соответствующих слагаемых для u обращаются в нуль, и явление резонанса не имеет места. Если же точка приложения силы, действующей с частотой ω_m, является пунтностью соответствующей стоячей волны с частотой ω_m, то

$$\sin \frac{\omega_m}{a} = 1,$$

и явление резонанса будет выражено наиболее резко. Отсюда следует правило, что для возбуждения резонанса струны при действии на неё сосредоточенной силы надо, чтобы частота её была равна одной из собственных частот струны.

1 Общая схема метода разделения переменных

Метод разделения переменных применим не только для уравнений колебаний струн, но и для уравнений колебаний других физических систем. Рассмотрим следующий задачу:

$$L[u] = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad 0 < x < l,\ t > 0, \tag{84}$$

удовлетворяющее условиям:

$$u(0,t) = 0, \quad u(l,t) = 0, \quad t \geq 0, \tag{85}$$

$$u(x,0) = f(x), \quad 0 \leq x \leq l. \tag{86}$$