Речь идет о решении СЛАУ вида $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

В точных методах мы бы должны получать точное решение. Но:

- в процессе вычисления числа окргляются;
- может произойти исчезновение значащих цифр в результате вычитания близких друг другу величин;

а ещё

- может быть неточность исходных данных ($A \to \tilde{A}$, $\mathbf{b} \to \tilde{\mathbf{b}}$).

Т.е. в итоге получается приближенное решение.

- Можно ли оценить, насколько приближенное?
- Может ли результат быть совсем плох?

Пример "плохой" задачи

Пример 1. Пусть $A = \begin{pmatrix} 1 & 0{,}99 \\ 0{,}99 & 0{,}98 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1{,}99 \\ 1{,}97 \end{pmatrix}$. Тогда решение $\mathbf{x} = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$.

А если взять $\tilde{\mathbf{b}} = \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 2 \end{smallmatrix}\right)$, то решением будет $\tilde{\mathbf{x}} = \left(\begin{smallmatrix} 200 \\ -200 \end{smallmatrix}\right)$.

Пример 2: матрица Гальберта $H = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \cdots \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}$

Качественные критерии = числа обусловленности

Спектральный критерий обусловленности. За число обусловленности матрицы принимается величина $\mathrm{cond}_s = \|A\| \cdot \|A^{-1}\|$ и $\mathrm{cond}_s > 10^4$ — признак плохой обусловленности.

Пример неадекватной работы критерия: диагональная матрица.

Качественные критерии = числа обусловленности

Объемный критерий (критерий Ортеги) ($\approx$ отношение объема параллелепипеда, построенного на строках матрицы как на ребрах, к объему прямоугольного параллелепипеда с теми же ребрами):

$$\mathrm{cond}_v = \det A / \prod_{n=1}^{N} \sqrt{\sum_{m=1}^{N} a_{nm}^2}$$

Пример неадекватной работы: трехдиагональная матрица с $a_{nn} = 2$, $a_{n,n\pm1} = -1$. ($\mathrm{cond}_v = 5 \times 6^{N/2-1}/(N+1)$ при $N \geq 2$)

Качественные критерии = числа обусловленности

Угловой критерий ($\approx$ величина, обратная синусу наименьшего из углов, образованных $(N-1)$-мерными гранями на ребрах $\mathbf{a}_m$, $m \neq n$, и оставшимся ребром $\mathbf{a}_n$)

$$\mathrm{cond}_a = \max_n(|\mathbf{a}_n| \cdot |\mathbf{c}_n|),$$

$\mathbf{a}_n$ — n-я строка матрицы A,
$\mathbf{c}_m$ — m-й вектор-столбец матрицы $C = A^{-1}$.

Формулировка задания 1

Для СЛАУ с некоторой матрицей A:

- вычислить числа обусловленности;
- поварьировав матрицу и правую часть (например, на 10^{-2}, 10^{-5}, 10^{-8}), вычислить $|\mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}}|$;
- посмотреть, есть ли корреляция между величиной чисел обусловленности и погрешностью решения.

Для тестов можно брать:

- системы из методички А.Н.Пакулиной, часть 1;
- матрицы Гильберта разного порядка;
- какие-нибудь хорошие матрицы (например, трехдиагональные с диагональным преобладанием).

Находить решение СЛАУ можно встроенными функциями. Либо, например, использовать известный метод Гаусса.

Литература к заданию 1

1. Д.К.Фаддеев, В.Н.Фаддеева, Вычислительные методы линейной алгебры.
2. А.Н.Пакулина, Практикум по методам вычислений, часть 1.
3. Н.Н.Калиткин, Л.Ф.Юхно, Л.В.Кузьмина, Количественный критерий обусловденности систем линейных алгебраических уравнений // Матем. моделирование, 2011, том 23, номер 2, 3–26.