In [1]:

```
import pandas as pd
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
import scipy.stats as sts
%matplotlib inline
```

Выкладки

$X_i = a + \epsilon$, где $\epsilon \sim N(0, \sigma^2)$

$\theta = a$

$$Z_{n \times 1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

$Z^T Z = n$

$A = (Z^T Z)^{-1}$

$\hat{\theta} = (Z^T Z)^{-1} Z^T X = \overline{X}$

Точный ДИ уровня доверия γ для σ^2 при неизвестном a

$\frac{1}{\sigma^2} \|X - Z\hat{\theta}\|^2 \sim \chi^2_{n-k}$

$(0; \frac{1}{u_{1-\gamma}} \|X - Z\hat{\theta}\|^2)$, где $u_{1-\gamma}$ - $(1-\gamma)$ - квантиль χ^2_{n-1}

$(0; \frac{1}{u_{1-\gamma}} \|X - Z\overline{X}\|^2)$, где $u_{1-\gamma}$ - $(1-\gamma)$ - квантиль χ^2_{n-1}

Точный ДИ уровня доверия γ для a при неизвестном σ^2

$\frac{(\hat{\theta}_i - \theta_i)\sqrt{n-k}}{\sqrt{a_{ii}}||X - Z\hat{\theta}||^2} \sim T_{n-k}$

$(\hat{\theta}_i - u_{\frac{1+\gamma}{2}}\sqrt{\frac{a_{ii}}{n-k}}||X - Z\hat{\theta}||^2; \hat{\theta}_i - u_{\frac{1-\gamma}{2}}\sqrt{\frac{a_{ii}}{n-k}}||X - Z\hat{\theta}||^2)$, где u_γ - γ - квантиль T_{n-1}

$(\overline{X} - u_{\frac{1+\gamma}{2}}\frac{||X - Z\overline{X}||^2}{\sqrt{n(n-1)}}; \overline{X} - u_{\frac{1-\gamma}{2}}\frac{||X - Z\overline{X}||^2}{\sqrt{n(n-1)}})$, где u_γ - γ - квантиль T_{n-1}

Точный ДИ уровня доверия γ для a при известном σ^2

$\frac{\hat{\theta}_i - \theta_i}{\sigma\sqrt{a_{ii}}} \sim N(0, 1)$

$(\hat{\theta}_i - u_{\frac{1+\gamma}{2}}\sigma\sqrt{a_{ii}}; \hat{\theta}_i - u_{\frac{1-\gamma}{2}}\sigma\sqrt{a_{ii}})$, где u_γ - γ-квантиль $N(0, 1)$

$(\overline{X} - u_{\frac{1+\gamma}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq a \leq \overline{X} + u_{\frac{1+\gamma}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}})$, где u_γ - γ-квантиль $N(0, 1)$

Точный ДИ уровня доверия γ для σ^2 при известном a

$\frac{1}{\sigma^2}||X - Za||^2 \sim \chi^2_{n-k}$

$(0; \frac{1}{u_{1-\gamma}}||X - Za||^2)$, где $u_{1-\gamma}$ - $(1-\gamma)$ - квантиль χ^2_{n-1}

$(0; \frac{1}{u_{1-\gamma}}||X - Za||^2)$, где $u_{1-\gamma}$ - $(1-\gamma)$ - квантиль χ^2_{n-1}

Вычисления

In [2]:

```
def print_graphic(sample, theta, Z, gamma, a, sigma, name, title, func, y_min,

    first, second = func(sample, theta, Z, gamma, a, sigma)
    n = np.arange(0, sample.size, 1)

    plt.figure(figsize=(15, 8))
    plt.scatter(n, sample, alpha=0.2, s=20, label='sample')  # s - размер точе

    plt.plot(n, np.ones_like(n)*theta, color='red', linewidth=2, label=str(nam

    # заполняет пространство между двумя функциями
    plt.fill_between(np.array(n), np.array(second), np.array(first), alpha=0.1
    plt.legend()
    # plt.xlim((1, 200))  # размеры графика по горизонтальной оси (ставим None
    plt.ylim((y_min, y_max))  # размеры графика по вертикальной оси
    plt.xlabel('n')  # название горизонтальной оси (аналогично plt.ylabel)
    plt.title(str(title))  # имя графика
    plt.grid()  # добавляем сетку
    plt.show()
```

In [3]:

```
N = 100
gamma = 0.95
```

In [4]:

```
Z = np.ones(N).reshape(N, 1)
```

Точный ДИ уровня доверия γ для σ^2 при неизвестном a

$(0; \frac{1}{u_{1-\gamma}}\|X - Z\overline{X}\|^2)$, где $u_{1-\gamma}$ - $(1-\gamma)$ - квантиль χ^2_{n-1}

In [5]:

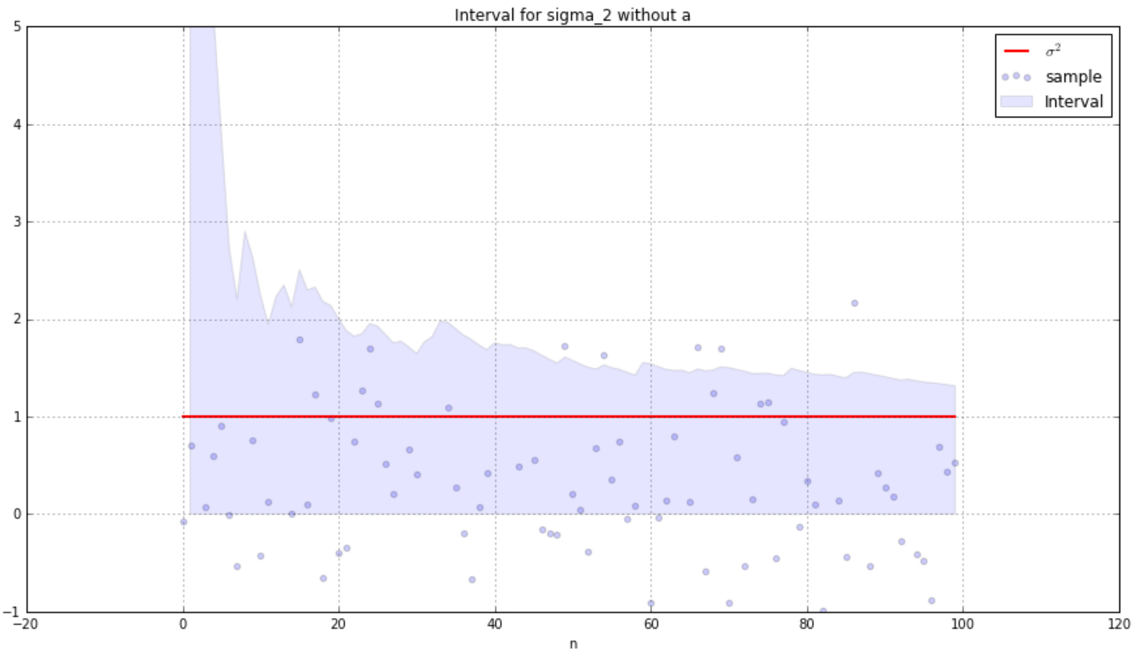
```
def get_interval_for_sigma_without_a(sample, theta, Z, gamma, a, sigma):
    sample = sample.reshape(sample.size, 1)
    first = np.zeros(sample.size)
    second = np.zeros(sample.size)

    for i in xrange(sample.size):
        second[i] = np.transpose(sample[:(i + 1)] - Z[:(i + 1)]*np.mean(sample
                              dot(sample[:(i + 1)] - Z[:(i + 1)]*np.mean(sample
                    sts.chi2(i).ppf(1 - gamma)

    return first, second
```

In [6]:

```
a = 0
sigma = 1
X = sts.norm(a, sigma).rvs(N)
theta = sigma
```

In [7]:

```
print_graphic(X, theta, Z, gamma, a, sigma, '$\\sigma^{2}$', 'Interval for sig
              get_interval_for_sigma_without_a, -1 , 5)
```



Точный ДИ уровня доверия γ для a при неизвестном σ^2

$(\overline{X} - u_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{\|X-Z\overline{X}\|^2}{\sqrt{n(n-1)}}; \overline{X} - u_{\frac{1-\gamma}{2}} \frac{\|X-Z\overline{X}\|^2}{\sqrt{n(n-1)}})$, где u_γ - γ - квантиль T_{n-1}

In [8]:

```

```

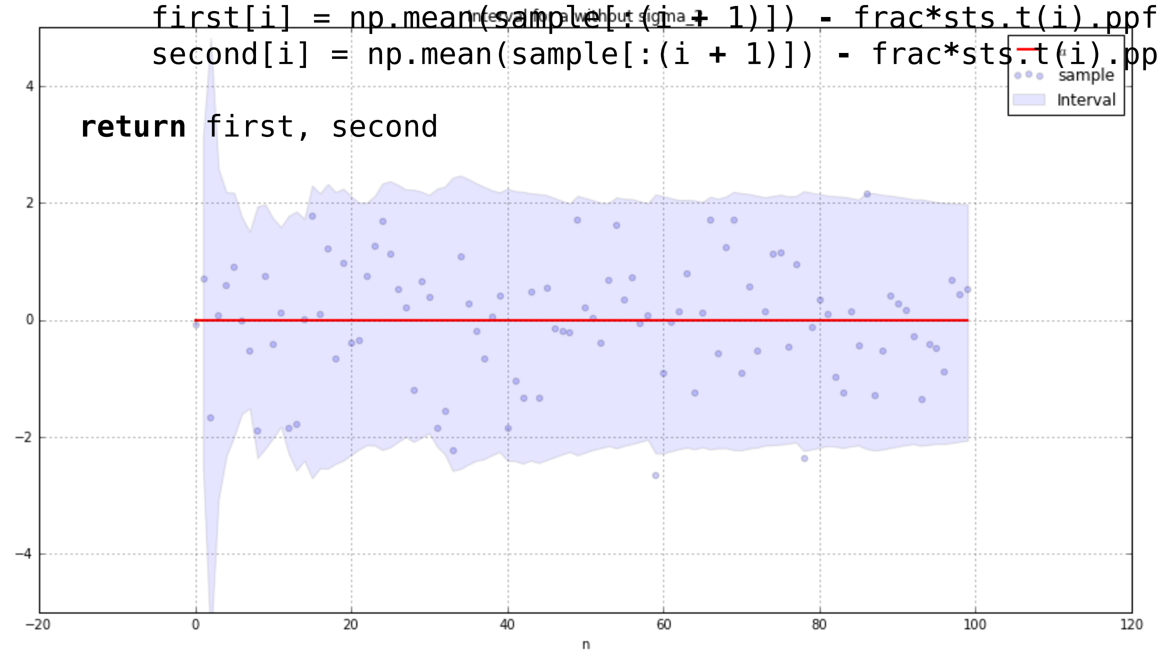
```
def get_interval_for_a_without_sigma(sample, theta, Z, gamma, a, sigma):
    sample = sample.reshape(sample.size, 1)
    first = np.zeros(sample.size)
    second = np.zeros(sample.size)

    for i in xrange(sample.size):
        frac = np.transpose(sample[:(i + 1)] - Z[:(i + 1)]*np.mean(sample[:(i
                     dot(sample[:(i + 1)] - Z[:(i + 1)]*np.mean(sample
               np.sqrt((i + 1)*i)
        first[i] = np.mean(sample[:(i + 1)]) - frac*sts.t(i).ppf((1. + gamma)/
        second[i] = np.mean(sample[:(i + 1)]) - frac*sts.t(i).ppf((1. - gamma)

    return first, second
```

In [9]:

```
theta = a
```

In [10]:

```
print_graphic(X, theta, Z, gamma, a, sigma, '$a$', 'Interval for a without sig
              get_interval_for_a_without_sigma, -5 , 5)
```



Точный ДИ уровня доверия γ для a при известном σ^2

$(\overline{X} - u_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq a \leq \overline{X} + u_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$, где u_γ - γ-квантиль $N(0, 1)$

In [11]:

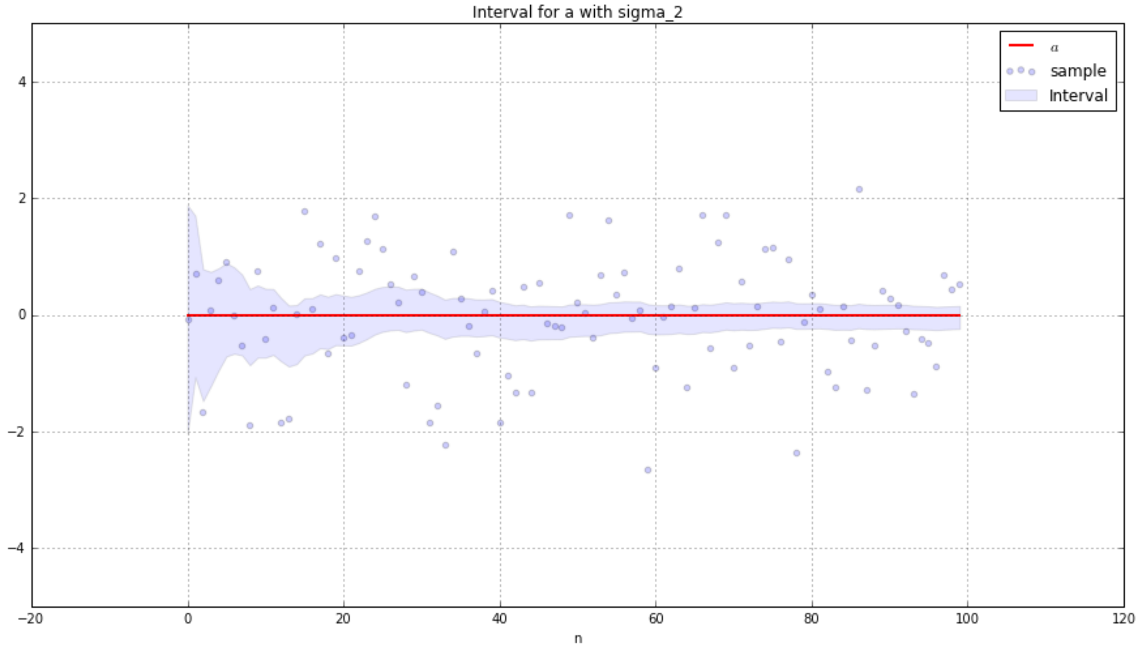
```
def get_interval_for_a_with_sigma(sample, theta, Z, gamma, a, sigma):
    sample = sample.reshape(sample.size, 1)
    first = np.zeros(sample.size)
    second = np.zeros(sample.size)

    for i in xrange(sample.size):
        first[i] = np.mean(sample[:(i + 1)]) - sts.norm(a, sigma).ppf((1. + ga
        second[i] = np.mean(sample[:(i + 1)]) - sts.norm(a, sigma).ppf((1. - g

    return first, second
```

In [12]:

```
theta = a
```

In [13]:

```
print_graphic(X, theta, Z, gamma, a, sigma, '$a$', 'Interval for a with sigma_
              get_interval_for_a_with_sigma, -5 , 5)
```



Точный ДИ уровня доверия γ для σ^2 при известном a

$(0; \frac{1}{u_{1-\gamma}}\|X - Za\|^2)$, где $u_{1-\gamma}$ - $(1-\gamma)$ - квантиль χ^2_{n-1}

In [14]:

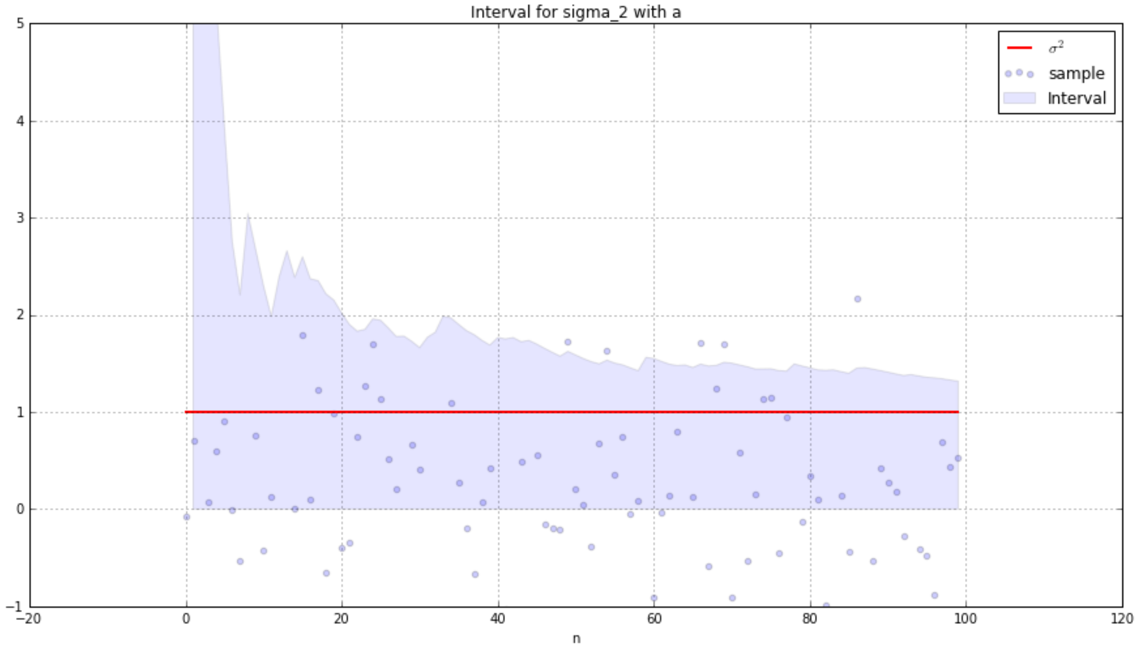
```
def get_interval_for_sigma_with_a(sample, theta, Z, gamma, a, sigma):
    sample = sample.reshape(sample.size, 1)
    first = np.zeros(sample.size)
    second = np.zeros(sample.size)

    for i in xrange(sample.size):
        second[i] = np.transpose(sample[:(i + 1)] - Z[:(i + 1)]*a).\
                         dot(sample[:(i + 1)] - Z[:(i + 1)]*a)/\
                    sts.chi2(i).ppf(1 - gamma)

    return first, second
```

In [15]:

```
theta = sigma
```

In [16]:

```
print_graphic(X, theta, Z, gamma, a, sigma, '$\\sigma^{2}$', 'Interval for sig
              get_interval_for_sigma_with_a, -1 , 5)
```



Вывод

В случае известного σ ДИ для a получаются точнее чем в случае неизвестного. ДИ для σ отличаются не значительно, поскольку $\overline{X}$ достаточно точно оценивает a.