$X^* = \begin{pmatrix} x_1^* \\ \dots \\ x_r^* \\ x_{r+1}^* \\ \dots \\ x_n^* \end{pmatrix}$ – какое-нибудь решение системы. Тогда рассмотрим линейную комбинацию решений

$$Y = X^* + x_{r+1}^* X_{r+1} + x_{r+2}^* X_{r+2} + \ldots + x_n^* X_n$$

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_r \\ y_{r+1} \\ y_{r+2} \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1^* \\ x_2^* \\ \dots \\ x_r^* \\ x_{r+1}^* \\ x_{r+2}^* \\ \dots \\ x_n^* \end{pmatrix} + x_{r+1}^* \begin{pmatrix} b_{r+1,1} \\ b_{r+1,2} \\ \dots \\ b_{r+1,r} \\ -1 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix} + x_{r+2}^* \begin{pmatrix} b_{r+2,1} \\ b_{r+2,2} \\ \dots \\ b_{r+2,r} \\ 0 \\ -1 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix} + \ldots + x_n^* \begin{pmatrix} b_{n,1} \\ b_{n,2} \\ \dots \\ b_{n,r} \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Заметим, что Y – тоже решение системы (как линейная комбинация решений). В этом решении все компоненты, начиная с $r+1$ равны нулю, т.е. Y имеет вид

$$Y = (y_1, y_2, \ldots, y_r, 0, \ldots, 0)^T.$$

Подставим решение Y в векторную форму записи нашей системы $AX = \mathbb{O}$

$$y_1 a_1 + \ldots + y_r a_r + 0 a_{r+1} + \ldots + 0 a_n = \mathbb{O}.$$

Но, первые столбцы a_1, …, a_r – линейно независимы, поэтому $y_1 = \ldots = y_r = 0$ и $Y = \mathbb{O}$. Поэтому

$$X^* = -x_{r+1}^* X_{r+1} - x_{r+2}^* X_{r+2} - \ldots - x_n^* X_n.$$

т.е. X^* выражается через линейно независимые решения X_{r+1}, X_{r+2}, … X_n ■

Любой набор из $k = n - r$ линейно независимых столбцов $X_1, \ldots, X_{n-r}$, являющихся решениями однородной системы линейных алгебраических уравнений $AX = \mathbb{O}$, где n – количество неизвестных в системе, а r – ранг ее матрицы A, называют ***фундаментальной системой решений*** (***фундаментальной совокупностью решений***) этой однородной системы линейных алгебраических уравнений.

Решение

$$X = C_1X_1 + \ldots + X_{n-r}C_{n-r} \quad (C_1, \ldots, C_{n-r} \in \mathbb{R})$$

называется ***общим решением*** системы $AX = \mathbb{O}$.

Любое одно конкретное решение системы линейных алгебраических уравнений называется ***частным решением***. Оно получается из формулы общего решения $X = C_1X_1 + \ldots + X_{n-r}C_{n-r}$ при конкретных значениях констант C_1, ..., C_{n-r}.

Системы линейных алгебраических уравнений (продолжение).

Неоднородные системы.

Решения неоднородной системы мы тоже будем делить на частные (одно конкретное решение) и общее (все решения системы). Выясним структуру общего решения неоднородной системы.

Теорема. Общее решение неоднородной системы линейных алгебраических уравнений равно сумме его частного решения и общего решения однородной системы с той же матрицей коэффициентов.

Доказательство. Запишем систему в матричном виде $AX = B$. Пусть X_0 – частное решение этой неоднородной системы. Тогда $AX_0 = B$ и

$$AX - AX_0 = B - B = \mathbb{O} \quad \Rightarrow \quad A(X - X_0) = \mathbb{O}$$

Пусть Y – общее решение соответствующей однородной системы, т.е. $AY = \mathbb{O}$. Тогда

$$X - X_0 = Y \quad \Rightarrow \quad X = X_0 + Y \qquad \blacksquare$$

Теорема. Разность двух частных решений неоднородной системы линейных алгебраических уравнений является частным решением соответствующей однородной системы.

Доказательство. Пусть X_1, X_2 – два частных решения системы $AX = B$, тогда

$$\begin{cases} AX_1 = B, \\ AX_2 = B \end{cases} \quad \Rightarrow \quad A(X_1 - X_2) = \mathbb{O}.$$

Значит, $X_1 - X_2$ – решение соответствующей однородной системы, а так как в нём нет констант, оно является частным решением $\blacksquare$

Таким образом, общее решение неоднородной системы имеет вид

$$X = X_0 + C_1X_1 + C_2X_2 + \ldots + C_{n-r}X_n - r,$$

где X_0 – частное решение неоднородной системы, $X_1, \ldots, X_{n-r}$ – фундаментальная совокупность решений соответствующей однородной системы. Таким образом, одним из способов решения неоднородной системы может быть алгоритм, согласно которому можно найти общее решение соответствующей однородной системы, а потом добавить к нему одно частное решение неоднородной системы. Поэтому возникает вопрос: как найти частное решение неоднородной системы $AX = B$ (если она совместна)? Попытаемся ответить на этот вопрос.

Рассмотрим систему $AX = B$. Пусть $\operatorname{rang} A = r \leqslant n$. Значит, в матрице A есть базисный минор порядка r, который соответствуют базисным столбцам a_{i_1}, a_{i_2}, …, a_{i_r}. Переменные, соответствующие базисным столбцам x_{i_1}, x_{i_2}, …, x_{i_r} мы будем называть ***базисными***, а остальные переменные – ***свободными***. Не нарушая общности, будем считать, что базисный минор находится в первых r строках и первых r столбцах матрицы r (иначе переменные можно перенумеровать, а уравнения системы переставить местами). Тогда x_1, …, x_r – базисные переменные, x_{r+1}, …, x_n – свободные. Базисный минор матрицы A является базисным и для расширенной матрицы $(A|B)$. Поэтому строки базисного минора определяют те уравнения системы $AX = B$, из которых следуют остальные. Уравнения системы с номерами $r+1$, …, n по сути являются линейными комбинациями первых r уравнений (выражаются через них). Поэтому последние $n-r$ уравнений можно отбросить. Тогда система $AX = B$ ***эквивалентна*** (***равносильна***) (т.е. имеет то же множество решений) системе

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1r}x_r + a_{1r+1}x_{r+1} + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2r}x_r + a_{2r+1}x_{r+1} + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \ldots + a_{rr}x_r + a_{rr+1}x_{r+1} + \ldots + a_{rn}x_n = b_r \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1r}x_r = b_1 - a_{1r+1}x_{r+1} - \ldots - a_{1n}x_n, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2r}x_r = b_2 - a_{2r+1}x_{r+1} - \ldots - a_{2n}x_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \ldots + a_{rr}x_r = b_r - a_{rr+1}x_{r+1} - \ldots - a_{rn}x_n. \end{cases} \tag{2}$$

Положим $x_{r+1} = \ldots = x_n = 0$. Получим квадратную систему с невырожденной матрицей, имеющую единственное решение, которое можно найти по формулам Крамера: $(x_1^0, \ldots, x_r^0)^T$. Тогда частное решение исходной системы $AX = B$ имеет вид $(x_1^0, \ldots, x_r^0, 0, \ldots, 0)^T$.

С помощью этих рассуждений можно искать не только частное, но и сразу же общее решение неоднородной системы $AX = B$. Для этого достаточно положить в системе (2)

$$x_{r+1} = C_1,\ \ldots,\ x_n = C_{n-r}, \quad C_1, \ldots C_{n-r} \in \mathbb{R}$$

и решить её по правилу Крамера.

Заметим, что этим способом можно строить и общее решение однородной системы. Достаточно в рассуждениях положить $B = \mathbb{O}$.

Пример. Найдём общее решение системы

$$
\begin{cases}
x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4 + 2x_5 = -1, \\
2x_1 + 4x_2 - x_4 + 5x_5 = 0, \\
x_1 + x_2 - x_3 + 3x_5 = 1, \\
-2x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 = 6.
\end{cases}
\tag{3}
$$

Запишем расширенную матрицу системы

$$
(A|B) = \left(\begin{array}{rrrrr|r}
1 & 3 & 1 & -1 & 2 & -1 \\
2 & 4 & 0 & -1 & 5 & 0 \\
1 & 1 & -1 & 0 & 3 & 1 \\
0 & -2 & 2 & 1 & 1 & 6
\end{array}\right).
$$

Так как $\operatorname{rang}(A|B) < 5$ (числа переменных), то система имеет либо бесконечное множество решений, либо несовместна. Вычисляем

$$
(A|B) = \left(\begin{array}{rrrrr|r}
1 & 3 & 1 & -1 & 2 & -1 \\
2 & 4 & 0 & -1 & 5 & 0 \\
1 & 1 & -1 & 0 & 3 & 1 \\
0 & -2 & 2 & 1 & 1 & 6
\end{array}\right)
\begin{matrix} \\ (-2) \\ (-1) \\ \\ \end{matrix}
\longrightarrow
\left(\begin{array}{rrrrr|r}
1 & 3 & 1 & -1 & 2 & -1 \\
0 & -2 & -2 & 1 & 1 & 2 \\
0 & -2 & -2 & 1 & 1 & 1 \\
0 & -2 & 2 & 1 & 1 & 6
\end{array}\right)
\begin{matrix} \\ \\ (-2) \\ (-2) \end{matrix}
\longrightarrow
$$

$$
\longrightarrow
\left(\begin{array}{rrrrr|r}
1 & 3 & 1 & -1 & 2 & -1 \\
0 & -2 & -2 & 1 & 1 & 2 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 4
\end{array}\right)
\longrightarrow
\begin{array}{cc}
 & \begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & \end{matrix} \\
\begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 3 \end{matrix} &
\left(\begin{array}{rrrrr|r}
1 & 3 & 1 & -1 & 2 & -1 \\
0 & -2 & -2 & 1 & 1 & 2 \\
0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 4 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right)
\end{array}
$$

Значит, $\operatorname{rang} A = \operatorname{rang}(A|B) = 3$ и система имеет бесконечное множество решений. Базисный минор ступенчатой матрицы располагается в первых трёх строках и первых трёх столбцах, а соответствующий базисный минор исходной матрицы A составлен из элементов строк 1, 2, 4 и столбцов 1, 2, 3:

$$
\Delta = \begin{vmatrix}
1 & 3 & 1 \\
2 & 4 & 0 \\
0 & -2 & 2
\end{vmatrix} = -8.
$$

Базисными переменными будут x_1, x_2 и x_3, а наша исходная система будет эквивалентна системе

$$
\begin{cases}
x_1 + 3x_2 + x_3 = -1 + x_4 - 2x_5, \\
2x_1 + 4x_2 = x_4 - 5x_5, \\
-2x_2 + 2x_3 = 6 - x_4 - x_5.
\end{cases}
$$

Положим $x_4 = C_1$, $x_5 = C_2$ $(C_1, C_2 \in \mathbb{R})$ и решим её по формулам Крамера

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} -1+C_1-2C_2 & 3 & 1 \\ C_1-5C_2 & 4 & 0 \\ 6-C_1-C_2 & -2 & 2 \end{vmatrix}}{\Delta} = 4 - \frac{1}{2}C_1 - \frac{7}{2}C_2, \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1+C_1-2C_2 & 1 \\ 2 & C_1-5C_2 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \end{vmatrix}}{\Delta} = -2 + \frac{1}{2}C_1 + \frac{1}{2}C_2,$$

$$x_3 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1+C_1-2C_2 \\ 2 & 4 & C_1-5C_2 \\ 0 & -2 & 6-C_1-C_2 \end{vmatrix}}{\Delta} = 1.$$

Чтобы в ответе не было дробей, можно переобозначить константы:

$$C_2 = 2c_2, \quad C_1 = 2c_1, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Тогда общее решение системы примет вид

$$\begin{cases} x_1 = 4 - c_1 - 7c_2, \\ x_2 = -2 + c_1 + c_2, \\ x_3 = 1, \\ x_4 = 2c_1, \\ x_5 = 2c_2. \end{cases} \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}. \tag{4}$$

При необходимости выполнить проверку, нужно подставить полученное решение во (все) уравнения системы (3). Они должны обратиться в верные равенства. Общее решение (4) можно записать в векторной форме

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4-c_1-7c_2 \\ -2+c_1+c_2 \\ 1 \\ 2c_1 \\ 2c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -7 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

В таком виде структура решения неоднородной системы более очевидна:

$$X^* = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{– частное решение исходной системы,}$$

$$X_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \; X_2 = \begin{pmatrix} -7 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$ – фундаментальная совокупность решений соответствующей однородной системы ■

Другой способ решения линейных систем (однородных и неоднородных) – **метод Гаусса**.

Пусть задана система линейных алгебраических уравнений $AX = B$. Запишем ее расширенную матрицу $(A|B)$. Каждому элементарному преобразованию строк расширенной матрицы соответствует аналогичное преобразование уравнений в исходной системе уравнений. Эти преобразования не меняют множество её решений. Поэтому, например, приведение расширенной матрицы системы с помощью элементарных преобразований ее строк к ступенчатому виду означает сведение системы линейных алгебраических уравнений к эквивалентной системе, имеющей ступенчатую матрицу.

Алгоритм решения системы $AX = B$ методом Гаусса:

1. Приводим расширенную матрицу $(A|B)$ заданной системы с помощью элементарных преобразований ***только строк*** к ступенчатому виду $(A'|B')$. При этих преобразованиях ранги матриц не меняются, поэтому $\operatorname{rang}(A|B) = \operatorname{rang}(A'|B')$, $\operatorname{rang}(A) = \operatorname{rang}(A')$. Ранги матриц A' и $(A'|B')$ равны количеству их ненулевых строк. Если эти ранги равны, то по теореме Кронекера-Капелли система уравнений совместна, а в противоположном случае – несовместна. Предположим, что система совместна и $\operatorname{rang}(A') = \operatorname{rang}(A'|B') = r$. Тогда расширенная матрица $(A'|B')$ будет иметь вид (не ограничивая общности будем считать, что базисный минор, соответствующий ступеням матрицы, находится в первых столбцах; столбцы матрицы A' всегда можно поменять местами, перенумеровав переменные)

$$(A'|B') = \left(\begin{array}{ccccccccc|c} a'_{11} & a'_{12} & a'_{13} & \dots & a'_{1\,r-1} & a'_{1r} & a'_{1r+1} & \dots & a'_{1n} & b'_1 \\ 0 & a'_{22} & a'_{23} & \dots & a'_{2\,r-1} & a'_{2r} & a'_{2r+1} & \dots & a'_{2n} & b'_2 \\ 0 & 0 & a'_{33} & \dots & a'_{3\,r-1} & a'_{3r} & a'_{3r+1} & \dots & a'_{3n} & b'_3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a'_{rr} & a'_{rr+1} & \dots & a'_{rn} & b'_r \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Этот шаг алгоритма иногда называют “прямым ходом метода Гаусса”.

2. Используя элементарные преобразования строк, нужно преобразовать матрицу, соответствующую базисному минору, располагающемуся на пересечении первых r строк и r столбцов, в единичную:

$$(A''|B'') = \left(\begin{array}{ccccccccc|c} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & a''_{1r+1} & \ldots & a''_{1n} & b''_1 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & a''_{2r+1} & \ldots & a''_{2n} & b''_2 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 & a''_{3r+1} & \ldots & a''_{3n} & b''_3 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 & a''_{rr+1} & \ldots & a''_{rn} & b''_r \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \end{array}\right)$$

   Для получения матрицы $(A''|B'')$ мы будем последовательно перемещаться от строки с номером r вверх к строке с номером 1. Поэтому этот шаг алгоритма иногда называют "обратным ходом метода Гаусса".

3. Записываем систему уравнений, соответствующую матрице $(A''|B'')$, отбрасывая нулевые строки и перенося небазисные неизвестные $x_{r+1}, \ldots, x_n$ в правую часть уравнений:

$$\begin{cases} x_1 = b''_1 - a''_{1r+1}x_{r+1} - \ldots - a''_{1n}x_n, \\ x_2 = b''_2 - a''_{2r+1}x_{r+1} - \ldots - a''_{2n}x_n, \\ x_3 = b''_3 - a''_{3r+1}x_{r+1} - \ldots - a''_{3n}x_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_r = b''_r - a''_{rr+1}x_{r+1} - \ldots - a''_{rn}x_n, \end{cases}$$

   Эта система равносильна исходной системе $AX = B$. В ней базисные неизвестные выражаются через свободные.

4. Обозначаем свободные переменные как произвольные постоянные и записываем общее

решение системы

$$\left\{\begin{array}{l} x_1 = b''_1 - a''_{1r+1}C_1 - \ldots - a''_{1n}C_{n-r}, \\ x_2 = b''_2 - a''_{2r+1}C_1 - \ldots - a''_{2n}C_{n-r}, \\ x_3 = b''_3 - a''_{3r+1}C_1 - \ldots - a''_{3n}C_{n-r}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_r = b''_r - a''_{rr+1}C_1 - \ldots - a''_{rn}C_{n-r}, \\ x_{r+1} = C_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n = C_{n-r}, \end{array}\right. \qquad C_1, \ldots C_{n-r} \in \mathbb{R}.$$

Общее решение можно записать векторной форме – в виде линейной комбинации столбцов, выделяя в правых частях полученных выражений в отдельные столбцы: а) свободные члены; б) коэффициенты при каждой произвольной постоянной. В этой записи столбец свободных членов – есть частное решение системы линейных алгебраических уравнений $AX = B$, а столбцы при произвольных постоянных образуют фундаментальную систему решений соответствующей однородной системы $AX = \mathbb{O}$.

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \ldots \\ x_r \\ x_{r+1} \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b''_1 \\ b''_2 \\ b''_3 \\ \ldots \\ b''_r \\ 0 \\ \ldots \\ 0 \end{pmatrix} + C_1 \begin{pmatrix} -a''_{1r+1} \\ -a''_{2r+1} \\ -a''_{3r+1} \\ \ldots \\ -a''_{rr+1} \\ 1 \\ \ldots \\ 0 \end{pmatrix} + \ldots + C_{n-r} \begin{pmatrix} -a''_{1n} \\ -a''_{2n} \\ -a''_{3n} \\ \ldots \\ -a''_{rn} \\ 0 \\ \ldots \\ 1 \end{pmatrix}, \quad C_1, \ldots C_{n-r} \in \mathbb{R}.$$

Пример. Решить методом Гаусса систему

$$\left\{\begin{array}{l} 3x_1 - x_2 + x_3 = 9, \\ 4x_1 + x_3 = 11, \\ 2x_2 - 2x_2 + x_3 = 7. \end{array}\right.$$

Выполним преобразования над расширенной матрицей

$$
\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & 1 & 9 \\ 4 & 0 & 1 & 11 \\ 2 & -2 & 1 & 7 \end{array}\right) \to
\begin{array}{c} \begin{matrix} x_2 & x_3 & x_1 & \end{matrix} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & 4 & 11 \\ -2 & 1 & 2 & 7 \end{array}\right) \end{array}
\xrightarrow{(-2)}
\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & 4 & 11 \\ 0 & -1 & -4 & -11 \end{array}\right) \xrightarrow{(-1)}
$$

$$
\to \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 4 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) :(-1) \to
\begin{array}{c} \begin{matrix} x_2 & x_3 & x_1 & \end{matrix} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \end{array}
$$

Тогда

$$
\begin{cases} x_2 = 2 - x_1, \\ x_3 = 11 - 4x_1. \end{cases}
$$

Следовательно общим решением системы будет

$$
\begin{cases} x_1 = C, \\ x_2 = 2 - C, \qquad C \in \mathbb{R} \\ x_3 = 11 - 4C, \end{cases}
$$

или в векторной форме

$$
\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 11 \end{pmatrix} + C \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix}, \quad C \in \mathbb{R}.
$$

Замечание 1. Если исходная система линейных алгебраических уравнений является однородной, то изложенный метод решения чуть упрощается, поскольку в расширенной матрице последний столбец является всегда нулевым и не меняется при элементарных преобразованиях строк. Имея это в виду, его опускают, т.е. все преобразования проводят с матрицей системы A.

Например, решим систему

$$
\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 = 0, \\ x_1 - x_2 - x_4 = 0, \\ 4x_1 - x_3 - 3x_4 = 0. \end{cases}
$$

Выполним преобразования над матрицей коэффициентов системы A

$$
\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ 4 & 0 & -1 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow[(-3)]{(-1)}
\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[(-1)]{(-1)}
\begin{pmatrix} -1 & -3 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to
\begin{array}{c} \begin{matrix} x_3 & x_4 & x_1 & x_2 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}
$$

Тогда

$$\begin{cases} x_3 = x_1 + 3x_2, \\ x_4 = x_1 - x_2. \end{cases}$$

Общее решение имеет вид

$$\begin{cases} x_1 = C_1, \\ x_2 = C_2, \\ x_3 = C_1 + 3C_2, \\ x_4 = C_1 - C_2, \end{cases} \qquad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

или в векторной форме

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Замечание 2. Если система линейных алгебраических уравнений имеет единственное решение, то применив метод Гаусса, в последнем столбце (столбце свободных членов) будет располагаться искомые значения неизвестных.

Например, решим систему

$$\begin{cases} 2x - 3y = 3, \\ 4x - 13y = -1. \end{cases}$$

Используя метод Гаусса, получаем

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & -3 & 3 \\ 4 & -13 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow{(-2)} \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -3 & 3 \\ 0 & -7 & -7 \end{array}\right) \xrightarrow{:(-7)} \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -3 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{3} \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{:2} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Таким образом,

$$x = 3, \quad y = 1 \quad \blacksquare$$

В заключение ещё раз стоит остановиться на вопросе о количестве решений системы линейных алгебраических уравнений $AX = B$. Объединив все наши доказанные выше утверждения, можно сказать, что такая система может либо не иметь решений, либо иметь ровно одно решение, либо иметь бесконечное множество решений. Система будет совместной, если $\operatorname{rang} A = \operatorname{rang}(A|B)$. При этом, если $\operatorname{rang} A = \operatorname{rang}(A|B) = n$ (количество неизвестных), то система имеет единственное решение. Если $\operatorname{rang} A = \operatorname{rang}(A|B) < n$ система имеет бесконечное множество решений.

Однородная система $AX = \mathbb{O}$ совместна всегда. Если $\operatorname{rang} A = n$, то однородная система имеет единственное тривиальное решение. Если $\operatorname{rang} A < n$, то она имеет бесконечное множество решений, которое задаётся через линейную комбинацию фундаментальной совокупности решений.

Квадратичные формы.

Однородный многочлен второй степени от n переменных с действительными коэффициентами называют **квадратичной формой**:

$$\begin{array}{rcccccccccccc}
f(x_1, x_2, \ldots, x_n) & = & c_{11}x_1^2 & + & c_{12}x_1x_2 & + & c_{13}x_1x_3 & + & \ldots & + & c_{1n}x_1x_n & + \\
 & & & + & c_{22}x_2^2 & + & c_{23}x_2x_3 & + & \ldots & + & c_{2n}x_2x_n & + \\
 & & & & & + & c_{33}x_3^2 & + & \ldots & + & c_{3n}x_3x_n & + \\
 & & & & & & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
 & & & & & & & & & + & c_{nn}x_n^2 &
\end{array}$$

Например,

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - 2x_2x_3, \qquad g(x_1, x_2, x_3, x_4) = 3x_1x_4.$$

Коэффициенты в этой записи образуют треугольную матрицу. Однако эта форма записи неудобна. Удобнее каждый недиагональный коэффициент разделить на 2 и записать два раза при произведениях букв в обоих порядках. Запись примет вид

$$\begin{array}{rcccccccccccc}
f(x_1, x_2, \ldots, x_n) & = & a_{11}x_1^2 & + & a_{12}x_1x_2 & + & a_{13}x_1x_3 & + & \ldots & + & a_{1n}x_1x_n & + \\
 & + & a_{21}x_2x_1 & + & a_{22}x_2^2 & + & a_{23}x_2x_3 & + & \ldots & + & a_{2n}x_2x_n & + \\
 & + & a_{31}x_3x_1 & + & a_{32}x_3x_2 & + & a_{33}x_3^2 & + & \ldots & + & a_{3n}x_3x_n & + \\
 & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
 & + & a_{n1}x_nx_1 & + & a_{n2}x_nx_2 & + & a_{n3}x_3x_n & + & \ldots & + & a_{nn}x_n^2 & ,
\end{array}$$

причем $a_{ij} = a_{ji}$. Такую запись квадратичной формы назовем **правильной**.

Матрица коэффициентов

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

называется матрицей квадратичной формы. Она симметрична, поэтому $A = A^T$.

Пример 1.

$$\begin{array}{rcrcrcrc} f(x_1,x_2,x_3) & = & 3x_1^2 & + & 4x_1x_2 & - & 2x_1x_3 & + \\ & & & + & x_2^2 & - & 6x_2x_3 & + \\ & & & & & + & 5x_3^2 & \end{array}$$

$$\begin{array}{rcrcrcrc} f(x_1,x_2,x_3) & = & 3x_1^2 & + & 2x_1x_2 & - & x_1x_3 & + \\ & + & 2x_2x_1 & + & x_2^2 & - & 3x_3x_2 & - \\ & - & x_3x_1 & - & 3x_3x_2 & + & 5x_3^2 & \end{array} \implies A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -3 \\ -1 & -3 & 5 \end{pmatrix}.$$

Пример 2.

$$f(x_1,x_2,x_3) = 3x_1^2 + 4x_2x_3 \quad \implies \quad A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ранг матрицы A называют ***рангом квадратичной формы***. Если матрица A имеет максимальный ранг, равный числу переменных n, то квадратичную форму называют ***невырожденной***, а если $\operatorname{rang} A < n$, то ее называют ***вырожденной***.

Пример 3.

$$f(x_1,x_2) = 2x_1x_2 \quad \implies \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \implies \quad \operatorname{rang} A = 2 \quad \implies \quad \text{невырожденная}$$

$$f(x_1,x_2,x_3) = 2x_1x_2 \quad \implies \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \implies \quad \operatorname{rang} A = 2 \quad \implies \quad \text{вырожденная}$$

Квадратичная форма может быть записана более компактно, если использовать матричные обозначения. Пусть

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Тогда

$$f(x_1,x_2,\dots,x_n) = X^T A X.$$

Действительно

$$X^TAX = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix} =$$

$$= (a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + \ldots + a_{n1}x_n,\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{n2}x_n,\ \ldots, a_{1n}x_1 + a_{2n}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix} =$$

$$(a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + \ldots + a_{n1}x_n)x_1 + (a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{n2}x_n)x_2 + \ldots +$$
$$+ (a_{1n}x_1 + a_{2n}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n)x_n = f(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Линейное преобразование переменных в квадратичной форме.

Пусть в квадратичной форме $f(X) = X^TAX$ делается невырожденное линейное преобразование переменных:

$$\begin{aligned} x_1 &= b_{11}y_1 + b_{12}y_2 + \ldots + b_{1n}y_n, \\ x_2 &= b_{21}y_1 + b_{22}y_2 + \ldots + b_{2n}y_n, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_2 &= b_{n1}y_1 + b_{n2}y_2 + \ldots + b_{nn}y_n \end{aligned}$$

или в матричном виде

$$X = BY, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \ldots \\ y_n \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \ldots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \ldots & b_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ b_{n1} & b_{n2} & \ldots & b_{nn} \end{pmatrix}.$$

Невырожденность преобразования означает, что $\det B \neq 0$, т.е преобразование будет обратимым. Обратное преобразование имеет вид $Y = B^{-1}X$.

Тогда квадратичная форма преобразуется в квадратичную форму от букв $y_1, \ldots, y_n$, а именно

$$f(X) = f(BY) = (BY)^TA(BY) = [(BY)^T = Y^TB^T] = Y^TB^TABY = Y^T(B^TAB)Y \equiv F(Y).$$

Покажем, что форма $F(Y)$ автоматически получилась правильно записанной. Для этого достаточно убедиться в том, что матрица B^TAB симметрична, что легко проверяется:

$$(B^TAB)^T = (AB)^T(B^T)^T = B^TA^TB = [A^T = A] = B^TAB.$$

Преобразование квадратичной формы к каноническому виду.

Пусть дана квадратичная форма в правильном виде

$$\begin{aligned} f(X) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \;&= a_{11}x_1^2 + a_{12}x_1x_2 + a_{13}x_1x_3 + \ldots + a_{1n}x_1x_n + \\ &+a_{21}x_2x_1 + a_{22}x_2^2 + a_{23}x_2x_3 + \ldots + a_{2n}x_2x_n + \\ &+a_{31}x_3x_1 + a_{32}x_3x_2 + a_{33}x_3^2 + \ldots + a_{3n}x_3x_n + \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &+a_{n1}x_nx_1 + a_{n2}x_nx_2 + a_{n3}x_nx_3 + \ldots + a_{nn}x_n^2, \end{aligned} \tag{1}$$

причем $a_{ij} = a_{ji}$. Её матрица коэффициентов

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Говорят, что квадратичная форма имеет **канонический вид**, если матрица квадратичной формы диагональна.

Если матрица квадратичной формы диагональна и на диагонали располагаются только числа 0, +1 и −1, то квадратичная форма имеет **нормальный вид**.

Теорема. Для любой квадратичной формы можно сделать линейное преобразование переменных с невырожденной матрицей так, чтобы матрица преобразованной формы имела диагональный вид, т.е. чтобы квадратичная форма имела канонический вид.

Перед доказательством теоремы сформулируем две леммы о вспомогательных преобразованиях.

Лемма 1. Если коэффициент a_{11} при квадрате x_1^2 первой переменной равен нулю, но хотя бы один квадрат входит с ненулевым коэффициентом, то можно сделать линейное преобразование с невырожденной матрицей, после которого коэффициент при квадрате первой переменной станет отличным от нуля.

Доказательство. Пусть $a_{kk} \neq 0$. Необходимой заменой будет

$$x_1 = y_k,\ x_2 = y_2\ \ldots, x_k = y_1, \ldots,\ x_n = y_n$$

Это преобразование не вырождено, т.к. очевидно обратимо. ■

Лемма 2. Если все коэффициенты при квадратах равны нулю, но хотя бы один коэффициент формы отличен от нуля, то можно сделать невырожденное линейное преобразование переменных так, что после него коэффициент при квадрате одной из новых переменных окажется отличным от нуля.

Доказательство. Действительно, пусть $a_{11} = a_{22} = \ldots = a_{nn} = 0$, $a_{ik} \neq 0$. Сделаем преобразование

$$x_1 = y_1, \ldots, x_i = y_i + y_k, \ldots,\ x_k = y_k, \ldots,\ x_n = y_n.$$

Это невырожденное преобразование, так как оно, очевидно, обратимо. Подсчитаем коэффициент при y_k^2. Переменная y_k входит только в x_i и x_k, поэтому y_k^2 может появиться только из членов $a_{ii}x_i^2$, $a_{kk}x_k^2$, $2a_{ik}x_ix_k$. Первые два равны нулю. Третий преобразуется в

$$2a_{ik}x_ix_k = 2a_{ik}(y_i + y_k)y_k = 2a_{ik}y_iy_k + 2a_{ik}y_k^2.$$

Коэффициент при y_k^2 равен $2a_{ik} \neq 0$. Сделав еще преобразование по Лемме 1, добьемся того, чтобы коэффициент в позиции (1,1) стал отличен от нуля. ■

Доказательство теоремы. Будем доказывать методом математической индукции по количеству переменных в квадратичной форме.

При $n = 1$ квадратичная форма имеет вид $f(x_1) = a_{11}x^2$, т.е. утверждение верно.

Предположим, что теорема верна для любой квадратичной формы, число переменных в которой меньше n. Покажем, что в этом случае теорема верна для любой формы от n переменных. Рассмотрим форму (1). Если все коэффициенты равны нулю, то утверждение верно. Если хотя бы один отличен от нуля, то согласно леммам 1 и 2 можно сделать так, что $a_{11} \neq 0$. Поэтому, не ограничивая общности, будем считать $a_{11} \neq 0$. Сгруппируем в форме все слагаемые содержащие x_1, вынеся a_{11} за скобку

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = a_{11}\left(x_1^2 + \frac{2a_{12}}{a_{11}}x_1x_2 + \ldots + \frac{2a_{1n}}{a_{11}}x_1x_n\right) +$$
$$+ (a_{22}x_2^2 + \ldots + a_{2n}x_2x_n) + \ldots + (a_{n2}x_nx_2 + \ldots + a_{nn}x_n^2) =$$
$$= [\text{Дополним первую скобку до квадрата}] =$$
$$= a_{11}\left(x_1^2 + 2x_1\left(\frac{a_{12}}{a_{11}}x_2 + \ldots + \frac{a_{1n}}{a_{11}}x_n\right) + \left(\frac{a_{12}}{a_{11}}x_2 + \ldots + \frac{a_{1n}}{a_{11}}x_n\right)^2\right) -$$
$$- a_{11}\left(\frac{a_{12}}{a_{11}}x_2 + \ldots + \frac{a_{1n}}{a_{11}}x_n\right)^2 + (a_{22}x_2^2 + \ldots + a_{2n}x_2x_n) + \ldots + (a_{n2}x_nx_2 + \ldots + a_{nn}x_n^2) =$$
$$= a_{11}\left(x_1 + \frac{a_{12}}{a_{11}}x_2 + \ldots + \frac{a_{1n}}{a_{11}}x_n\right)^2 - a_{11}\left(\frac{a_{12}}{a_{11}}x_2 + \ldots + \frac{a_{1n}}{a_{11}}x_n\right)^2 +$$
$$+ (a_{22}x_2^2 + \ldots + a_{2n}x_2x_n) + \ldots + (a_{n2}x_nx_2 + \ldots + a_{nn}x_n^2) =$$
$$= a_{11}\left(x_1 + \frac{a_{12}}{a_{11}}x_2 + \ldots + \frac{a_{1n}}{a_{11}}x_n\right)^2 + g(x_2, \ldots, x_n).$$

$g(x_2, \ldots, x_n)$ – квадратичная форма от своих переменных. Выполним преобразование

$$\begin{aligned} &x_1 + \frac{a_{12}}{a_{11}}x_2 + \ldots + \frac{a_{1n}}{a_{11}}x_n = y_1, \\ &x_2 = y_2, \\ &\ldots \\ &x_n = y_n \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} &x_1 = y_1 - \frac{a_{12}}{a_{11}}y_2 - \ldots - \frac{a_{1n}}{a_{11}}y_n, \\ &x_2 = y_2, \\ &\ldots \\ &x_n = y_n. \end{aligned}$$

Это – невырожденное преобразование (т.к. определитель матрицы преобразования равен 1 или можно сослаться на очевидную обратимость этого преобразования), приводящее исходную форму к виду

$$f(X) = a_{11}y_1^2 + \bar{g}(y_2, \ldots, y_n). \tag{2}$$

Согласно индуктивному предположению g можно привести некоторой невырожденной линейной заменой

$$\begin{aligned} &y_2 = b_{22}z_2 + \ldots + b_{2n}z_n, \\ &\ldots \\ &y_n = b_{n2}z_2 + \ldots + b_{nn}z_n \end{aligned}$$

к виду

$$\bar{g}(y_2, \ldots, y_n) = \alpha_2 z_2^2 + \ldots + \alpha_n z_n^2$$

Тогда форма (2) невырожденной заменой

$$\begin{aligned} &y_1 = z_1, \\ &y_2 = b_{22} z_2 + \ldots + b_{2n} z_n, \\ &\ldots \\ &y_n = b_{n2} z_2 + \ldots + b_{nn} z_n \end{aligned}$$

приводится к виду

$$f(X) = a_{11} z_1^2 + \alpha_2 z_2^2 + \ldots + \alpha_n z_n^2 \blacksquare$$

В теореме по сути дела указан способ приведения квадратичной формы к каноническому виду путем **последовательного выделения полных квадратов**. Этот метод называется **методом Лагранжа**.

Пример 4.

$$2x_1^2 - 4x_1x_2 + 8x_2x_3 = 2(x_1^2 - 2x_1x_2) + 8x_2x_3 = 2(x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2) - 2x_2^2 + 8x_2x_3 =$$

$$= 2(x_1 - x_2)^2 - 2x_2^2 + 8x_2x_3 = [x_1 - x_2 = z_1,\ x_2 = z_2,\ x_3 = z_3] = 2z_1^2 - 2z_2^2 + 8z_2z_3 =$$

$$= 2z_1^2 - 2(z_2^2 - 4z_2z_3) = 2z_1^2 - 2(z_2^2 - 4z_2z_3 + 4z_3^2) + 8z_3^2 = 2z_1^2 - 2(z_2 - 2z_3)^2 + 8z_3^2 =$$

$$= [z_1 = y_2,\ z_2 - 2z_3 = y_2,\ z_3 = y_3] = 2y_1^2 - 2y_2^2 + 8y_3^2.$$

В этом случае формулы преобразования имеют вид

$$\begin{aligned} &x_1 = y_1 + y_2 + 2y_3, \\ &x_2 = y_2 + 2y_3, \\ &x_3 = y_3 \end{aligned}$$

или в матричной форме $X = PY$:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}.$$

Если приводить квадратичную форму к каноническому виду способом, указанным в теореме, то результирующая матрица преобразования P является верхней треугольной. Если на её главной диагонали стоят единицы, то она называется **верхней унитреугольной**. Линейное преобразование с унитреугольной матрицей называется ***унитреугольным***. Достаточно легко убедиться, что матрица, обратная к унитреугольной также будет унитреугольной. Поэтому обратное преобразование также будет унитреугольным $Y = P^{-1}X$.