Ранг матрицы.

Рассмотрим матрицу

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1\,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2\,n-1} & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m-1\,1} & a_{m-1\,2} & a_{m-1\,3} & \dots & a_{m-1n-1} & a_{m-1\,n} \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{m\,n-1} & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Минором порядка k матрицы A размерности $m \times n$ называют определитель, который составлен из элементов этой матрицы, стоящих на пересечении произвольно выбранных k строк и k столбцов с сохранением порядка этих строк и столбцов.

Если строки имеют номера $i_1, \dots, i_k$, а столбцы $j_1, \dots, j_k$, то обозначаем $M_{i_1 \dots i_k}^{j_1 \dots j_k}$ (индексы упорядочены).

Например, для матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 & 17 & 18 \\ 19 & 20 & 21 & 22 & 23 & 24 \\ 25 & 26 & 27 & 28 & 29 & 30 \end{pmatrix}$$

минор

$$M_{124}^{246} = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 8 & 10 & 12 \\ 20 & 22 & 24 \end{vmatrix}.$$

Рангом матрицы называют число, которое равно максимальному порядку среди ее ненулевых миноров. Обозначения $\operatorname{rang} A = \mathrm{Rg} A = \mathrm{r} A$.

Например, для

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

максимальный порядок ненулевого минора равен 2:

$$M_{13}^{24} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1 - 2 = -3 \neq 0,$$

поэтому

$$\operatorname{rang} A = 2.$$

Если квадратная матрица порядка n невырождена, то ее ранг равен ее порядку n: ненулевым является единственный минор максимального порядка n, совпадающий с определителем матрицы. В частности, ранг единичной матрицы E порядка n равен n.

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \det E = 1 \quad \Rightarrow \quad \operatorname{rang} E = 3.$$

Если квадратная матрица вырождена, то ее ранг меньше ее порядка: единственный минор максимального порядка, равного порядку матрицы, является нулевым, и в этом случае ненулевые миноры имеют меньший порядок.

Ранг нулевой матрицы полагают равным нулю.

Свойства ранга матрицы.

Свойство 1. Если ранг матрицы равен r, то матрица имеет хотя бы один минор порядка r, не равный нулю, а все ее миноры больших порядков равны нулю.

Доказательство следует непосредственно из определения ранга матрицы ■

Свойство 2. При транспонировании матрицы ее ранг не меняется, т.е. $\operatorname{rang} A = \operatorname{rang} A^T$.

Доказательство. Пусть $\operatorname{rang} A = r$ и $M^{j_1 \ldots j_r}_{i_1 \ldots i_r}$ – ненулевой минор порядка r матрицы A, $(M^{j_1 \ldots j_r}_{i_1 \ldots i_r})^T = N^{i_1 \ldots i_r}_{j_1 \ldots j_r}$ – минор порядка r матрицы A^T. Он ненулевой, так как при транспонировании определитель не меняется. Таким образом, $\operatorname{rang} A^T \geqslant r$. Следовательно, при транспонировании ранг не становится меньше. Тогда

$$r = \operatorname{rang} A \leqslant \operatorname{rang} A^T \leqslant \operatorname{rang} (A^T)^T = \operatorname{rang} A = r.$$

Значит, $\operatorname{rang} A^T = r = \operatorname{rang} A$ ■

Свойство 3. Ранг матрицы не меняется при элементарных преобразованиях ее строк и столбцов.

Доказательство. Согласно предыдущему свойству, ранг матрицы не будет меняться при элементарных преобразованиях ее столбцов, если он не изменяется при элементарных преобразованиях ее строк. Поэтому случай столбцов можно не рассматривать.

Пусть при выполнении элементарных преобразований со строками матрицы A получается матрица A'. Покажем, что элементарные преобразования строк не уменьшают ранга матрицы. Пусть M – ненулевой минор матрицы A порядка, равного рангу r матрицы A. M' – минор матрицы A' образованный теми же строками и столбцами, что и минор M.

1. При умножении i-ой строки матрицы A на число $\lambda \neq 0$ возможны два случая.

   1) Элементы i-ой строки не входят в минор M. Тогда $M = M'$ является минором матрицы A' и не равен нулю. Значит, $\operatorname{rang} A' \geqslant r$.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & M & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} * \lambda \quad \Longrightarrow \quad A' = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \lambda a_{i1} & \lambda a_{i2} & \cdots & \cdots & \cdots & \lambda a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & M' & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

   2) Элементы i-ой строки входят в минор M. Тогда M' получается из M домножением i-ой строки на λ и $M' = \lambda M \neq 0$. Значит, $M' \neq 0$ и $\operatorname{rang} A' \geqslant r$.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & M & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} * \lambda \quad \Longrightarrow \quad A' = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \lambda a_{i1} & \lambda a_{i2} & \cdots & M' & \cdots & \lambda a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

2. При перестановке двух строк в матрице A с номерами i и k возможны три случая.

   1) Элементы строк с номерами i и k входят в минор M. Тогда, согласно свойству определителей, M' получается из M, перестановкой соответствующих строк. Следовательно, $M' = -M \neq 0$ и $\operatorname{rang} A' \geqslant r$.

$$
A = \begin{pmatrix}
a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1j} & \ldots & a_{1n} \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
a_{i1} & a_{i2} & \ldots & a_{ij} & \ldots & a_{in} \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
a_{k1} & a_{k2} & \ldots & a_{kj} & \ldots & a_{kn} \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mj} & \ldots & a_{mn}
\end{pmatrix}
\Longrightarrow
A' = \begin{pmatrix}
a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1j} & \ldots & a_{1n} \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
a_{k1} & a_{k2} & \ldots & a_{kj} & \ldots & a_{kn} \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
a_{i1} & a_{i2} & \ldots & a_{ij} & \ldots & a_{in} \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mj} & \ldots & a_{mn}
\end{pmatrix}
$$

2) Элементы обеих строк не входят в минор M. Тогда $M' = M$ и $\operatorname{rang} A' \geqslant r$.

$$
A = \begin{pmatrix}
a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1j} & \ldots & a_{1n} \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
a_{i1} & a_{i2} & \ldots & a_{ij} & \ldots & a_{in} \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
a_{k1} & a_{k2} & \ldots & a_{kj} & \ldots & a_{kn} \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mj} & \ldots & a_{mn}
\end{pmatrix}
\Longrightarrow
A' = \begin{pmatrix}
a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1j} & \ldots & a_{1n} \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
a_{k1} & a_{k2} & \ldots & a_{kj} & \ldots & a_{kn} \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
a_{i1} & a_{i2} & \ldots & a_{ij} & \ldots & a_{in} \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mj} & \ldots & a_{mn}
\end{pmatrix}
$$

3) Одна из строк, например, i-ая входит в рассматриваемый минор M, а k-ая не входит. Рассмотрим в A' минор M'' образованный теми же по номерами столбцами, что и M, теми же по номерам строками, что и M (кроме i) и строкой k (её элементы совпадают с элементами строки i матрицы A). В результате M'' и M отличаются лишь порядком строк, поэтому определители могут отличатся лишь знаками ($M'' = \pm M$), значит, $M' \neq 0$ и $\operatorname{rang} A' \geqslant r$.

$$
A = \begin{pmatrix}
a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1j} & \ldots & a_{1n} \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
a_{i1} & a_{i2} & \ldots & a_{ij} & \ldots & a_{in} \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
a_{k1} & a_{k2} & \ldots & a_{kj} & \ldots & a_{kn} \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mj} & \ldots & a_{mn}
\end{pmatrix}
\Longrightarrow \quad
A' = \begin{pmatrix}
a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1j} & \ldots & a_{1n} \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
a_{k1} & a_{k2} & \ldots & a_{kj} & \ldots & a_{kn} \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
a_{i1} & a_{i2} & \ldots & a_{ij} & \ldots & a_{in} \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mj} & \ldots & a_{mn}
\end{pmatrix}
$$

3. При прибавлении к строки i строки k, умноженной на λ, возможны случаи.

   1) Элементы строки i не входят в минор M. Тогда, $M = M'$ и $\operatorname{rang} A' \geqslant r$.

$$
A = \begin{pmatrix}
a_{11} & \ldots & a_{1j} & \ldots & a_{1n} \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
a_{i1} & \ldots & a_{ij} & \ldots & a_{in} \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
a_{k1} & \ldots & a_{kj} & \ldots & a_{kn} \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
a_{m1} & \ldots & a_{mj} & \ldots & a_{mn}
\end{pmatrix}
\overset{\lambda}{\Longrightarrow} \quad
A' = \begin{pmatrix}
a_{11} & \ldots & a_{1j} & \ldots & a_{1n} \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
a_{i1} + \lambda a_{k1} & \ldots & a_{ij} + \lambda a_{kj} & \ldots & a_{in} + \lambda a_{kn} \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
a_{k1} & \ldots & a_{kj} & \ldots & a_{kn} \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
a_{m1} & \ldots & a_{mj} & \ldots & a_{mn}
\end{pmatrix}
$$

   2) Элементы строк i и k входят в минор M. Тогда минор M' получается из M прибавлением к одной строки другой с коэффициентом λ, значит $M = M'$ и $\operatorname{rang} A' \geqslant r$.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & \dots & a_{kj} & \dots & a_{kn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \Longrightarrow \quad A' = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} + \lambda a_{k1} & \dots & a_{ij} + \lambda a_{kj} & \dots & a_{in} + \lambda a_{kn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & \dots & a_{kj} & \dots & a_{kn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

3) Элементы строки i входят в минор M, а элементы строки k не входят. Пусть M_k – определитель матрицы полученной из M заменой элементов строки i матрицы A на элементы строки k матрицы A соответствующих столбцов, тогда

$$M' = M + \lambda M_k$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & \dots & a_{kj} & \dots & a_{kn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \Longrightarrow \quad A' = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} + \lambda a_{k1} & \dots & a_{ij} + \lambda a_{kj} & \dots & a_{in} + \lambda a_{kn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & \dots & a_{kj} & \dots & a_{kn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Если $M_k = 0$, то $M' = M \neq 0$ и $\operatorname{rang} A' \geqslant r$.

Если $M_k \neq 0$, тогда заметим, что M_k является минором A', возможно, с переставленными местами строками. Значит, в A' есть минор порядка r и он отличен от нуля. Следовательно, $\operatorname{rang} A' \geqslant r$.

Итак, элементарные преобразования не уменьшают ранга матрицы. Но у каждого элементарного преобразования есть обратное, поэтому из матрицы A' мы можем получить A элементарными преобразованиями:

$$A \to A' \to A,$$

при этом ранг матрицы не изменяется. Значит,

$$r = \operatorname{rang} A \leqslant \operatorname{rang} A' \leqslant \operatorname{rang} A = r \quad \blacksquare$$

Возникает естественный вопрос: как считать ранг? Перебирать все миноры не удобно. Но используя элементарные преобразования строк, мы можем любую матрицу привести к ступенчатому виду. При этом ранг матрицы не изменится. Мы покажем далее, что ранг ступенчатой матрицы равен числу её ненулевых строк. Но для этого нам нужно ввести понятие линейно зависимых и линейно независимых строк.

Строки и столбцы матрицы можно рассматривать как матрицы-строки

$$a_i = (a_{i1}\, a_{i2}\, \ldots a_{iN})$$

и матрицы-столбцы

$$\alpha_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \ldots \\ a_{Mj} \end{pmatrix}.$$

Поэтому над ними можно выполнять линейные операции как над любыми другими матрицами (складывать и умножать на число).

Линейной комбинацией строк (столбцов) $a_1, \ldots a_m$ мы будем называть сумму

$$\lambda_1 a_1 + \ldots + \lambda_m a_m,$$

$\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in \mathbb{R}$. Строки $a_1, \ldots a_m$ мы будем называть ***линейно независимыми***, если равенство

$$\lambda_1 a_1 + \ldots + \lambda_m a_m = 0$$

верно только при $\lambda_1 = \ldots = \lambda_m = 0$. В противном случае, т.е. если существуют числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ не все равные нулю, такие, что

$$\lambda_1 a_1 + \ldots + \lambda_m a_m = 0,$$

строки называют ***линейно зависимыми***. Эта терминология аналогично распространяется и на столбцы.

Свойства линейно зависимых строк (столбцов).

1. Если хотя бы одна из строк (столбцов) $a_1, \dots a_m$ нулевая, то эти строки (столбцы) линейно зависимы.

2. Если какие-то k $(1 < k < m)$ из строк (столбцов) $a_1, \dots a_m$ линейно зависимы, то и все строки (столбцы) $a_1, \dots a_m$ линейно зависимы.

3. **Необходимое и достаточное условие линейной зависимости строк (столбцов)**: Строки (столбцы) $a_1, \dots a_m$ линейно зависимы тогда и только тогда, когда хотя бы одна из них является линейной комбинацией остальных.

Эти свойства доказываются аналогично подобным свойствам линейно зависимых геометрических векторов. Поэтому доказательства здесь не приводятся, но **нужно уметь доказывать эти свойства**.

Попытаемся теперь связать вместе понятия линейной зависимости (независимости) и ранга матрицы.

Понятие ранга вводится через понятие минора. Среди миноров матрицы могут быть как равные нулю, так и отличные от нуля.

Минор M матрицы A называют ***базисным***, если выполнены два условия:

а) он не равен нулю;

б) его порядок равен рангу матрицы A.

Матрица A может иметь несколько базисных миноров. Строки и столбцы матрицы A, в которых расположен выбранный базисный минор, называют ***базисными***.

Следующую теорему, занимающую одно из центральных мест в теории матриц и ее приложениях, называют **теоремой о базисном миноре**.

Теорема. Базисные строки (столбцы) матрицы A, соответствующие любому ее базисному минору M, линейно независимы. Любые строки (столбцы) матрицы A, не входящие в M, являются линейными комбинациями базисных строк (столбцов).

Доказательство проведем для строк.

1) Пусть ранг матрицы A размерности $m \times n$ равен r. Фиксируем какой-либо ее базисный минор M и соответствующие ему базисные строки матрицы A.

Докажем, что базисные строки линейно независимы. Предположим, что они линейно зависимы. Тогда по необходимому и достаточному условию линейной зависимости одна из них является линейной комбинацией остальных базисных строк. Согласно свойству определителей, минор M равен нулю. Это противоречит тому, что минор M базисный.

2) Теперь докажем, что любая строка матрицы A, не входящая в базисный минор, является линейной комбинацией базисных строк. Предположим, не ограничивая общности доказательства, что базисный минор M расположен в верхнем левом углу (берём первые r строк и первые r столбцов матрицы A). Пусть i – строка не являющаяся базисной ($i > r$). Покажем, что определитель порядка $r+1$

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1r} & a_{1j} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2r} & a_{2j} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{r1} & a_{r2} & \ldots & a_{rr} & a_{rj} \\ a_{i1} & a_{i2} & \ldots & a_{ir} & a_{ij} \end{vmatrix},$$

полученный добавлением к минору M элементов i-й строки и произвольного j-го столбца матрицы A ($j = 1, \ldots, n$), равен нулю. При $j \leqslant r$ определитель равен нулю, так как он содержит два одинаковых столбца. Если же $j > r$, то определитель равен нулю, так как в этом случае Δ является минором матрицы A, порядок которого равен $r+1$ и больше ранга матрицы. Таким образом, в любом случае $\Delta = 0$.

Раскладывая определитель Δ по последнему столбцу, получаем равенство

$$A_{1,r+1}a_{1j} + A_{2,r+1}a_{2j} + \ldots + A_{r,r+1}a_{rj} + A_{r+1,r+1}a_{ij} = 0$$

Заметим, что все эти алгебраические дополнения не зависят от j. Более того $A_{r+1,r+1} = M \neq 0$, поэтому

$$a_{ij} = -\frac{A_{1,r+1}}{A_{r+1,r+1}}a_{1j} - \frac{A_{2,r+1}}{A_{r+1,r+1}}a_{2j} - \ldots - \frac{A_{r,r+1}}{A_{r+1,r+1}}a_{rj}$$

Коэффициенты в разложении не зависят от j. Поэтому для любого j

$$a_{ij} = b_1a_{1j} + b_2a_{2j} + \ldots + b_ra_{rj} \quad (j = 1, \ldots, n).$$

Здесь мы обозначили $b_1 = -\frac{A_{1,r+1}}{A_{r+1,r+1}}$, $b_2 = -\frac{A_{2,r+1}}{A_{r+1,r+1}}$, …, $b_r = -\frac{A_{r,r+1}}{A_{r+1,r+1}}$. Это означает, что i-я строка матрицы A является линейной комбинацией первых r ее строк, т.е. линейной комбинацией ее базисных строк

$$\begin{aligned}(a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in}) &= \\ &= (b_1a_{11} + b_2a_{21} + \ldots + b_ra_{r1},\ b_1a_{12} + b_2a_{22} + \ldots + b_ra_{r2},\ \ldots,\ b_1a_{1n} + b_2a_{2n} + \ldots + b_ra_{rn}) = \\ &= b_1(a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1n}) + b_2(a_{21}, a_{22}, \ldots, a_{2n}) + \ldots + b_r(a_{r1}, a_{r2}, \ldots, a_{rn}).\end{aligned}$$

Таким образом, теорема доказана ■

Следствие. Для того чтобы квадратная матрица была невырожденной, необходимо и достаточно, чтобы ее строки (столбцы) были линейно независимы.

Доказательство Необходимость. Пусть квадратная матрица A невырождена, тогда ее ранг равен ее порядку, а ее определитель является базисным минором. Поэтому все строки (столбцы) являются базисными и по предыдущей теореме о базисном миноре они линейно независимы.

Достаточность. Пусть все строки (столбцы) квадратной матрицы A являются линейно независимыми. Тогда они являются базисными. Действительно, если бы только некоторые из них были базисными, то, согласно предыдущей теореме о базисном миноре, оставшиеся были бы линейными комбинациями базисных и, следовательно, строки (столбцы) матрицы A, были бы линейно зависимыми (так как часть из них выражается через остальные). Так как все строки и столбцы квадратной матрицы A являются базисными, а им соответствует определитель матрицы, то он является базисным минором и, следовательно, согласно определению базисного минора, отличен от нуля, т.е. квадратная матрица A невырождена ■

Теорема. Линейно независимые строки (столбцы) матрицы, количество которых равно рангу матрицы, являются базисными строками (столбцами).

Докажем теорему для строк. Зафиксируем произвольный набор из r линейно независимых строк матрицы, где r – это ранг матрицы. Нам достаточно показать, что хотя бы один из базисных миноров расположен в фиксированных строках. Отбросим остальные строки матрицы и докажем, что ранг новой матрицы, содержащей r строк, равен r. Так как новая матрица не имеет миноров порядка больше чем r, то ее ранг не может превосходить r. Если бы он был меньше r, то только часть этих r фиксированных строк были бы базисными в новой матрице, а остальные, согласно теореме о базисном миноре, являлись бы их линейными комбинациями. Последнее означало бы линейную зависимость фиксированных r строк (часть из них выражается через остальные), что противоречит условию теоремы.

Итак, ранг новой матрицы равен r. Ее базисный минор имеет порядок r и является ненулевым минором порядка r исходной матрицы ■

Теорема. Для любой матрицы ее ранг равен максимальному количеству ее линейно независимых строк (столбцов).

Доказательство теоремы проведем для строк. Согласно теореме о базисном миноре, базисные строки линейно независимы. Следовательно, максимальное количество k линейно независимых строк матрицы не может быть меньше ранга r матрицы. Итак, $k \geqslant r$.

Остается доказать, что $k \leqslant r$. Отбросим те строки матрицы, которые не входят в число рассматриваемых k. Тогда ранг полученной матрицы из k строк равен k. Действительно, если бы он был меньше k, то только часть из этих к строк были бы базисными в новой матрице, а остальные, согласно теореме о базисном миноре, являлись бы их линейными комбинациями. Это означало бы линейную зависимость рассматриваемых к строк (часть из них выражается), что не так. Итак, ранг новой матрицы равен k. Ее базисный минор имеет порядок k и является не равным нулю минором порядка k исходной матрицы. Следовательно, $k \leqslant r$.

Таким образом, $k = r$ ■

Следствие. Для любой матрицы максимальное число линейно независимых строк равно максимальному числу линейно независимых столбцов.

Нахождение ранга матрицы.

Один из способов поиска ранга матрицы – приведение к ступенчатому виду с помощью элементарных преобразований. При элементарных преобразованиях строк (столбцов) матрицы ее ранг, согласно одной из доказанных ранее теорем, не меняется. С помощью этих преобразований можно так упростить матрицу, чтобы ранг новой матрицы легко вычислялся. Например, с помощью элементарных преобразований строк любую матрицу можно привести к ступенчатому виду. Ранг же ступенчатой матрицы равен количеству ненулевых строк.

Действительно, пусть ступенчатая матрица A' имеет k ненулевых строк.

$$A' = \begin{pmatrix} 0 & \ldots & 0 & a_{1j_1} & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 & a_{2j_2} & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 & a_{kj_k} & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}$$

Очевидно что $\operatorname{rang} A' \leqslant k$, так как любые $k+1$ строк (если они есть) линейно зависимы (есть нулевые). Рассмотрим минор k-го порядка M_k, расположенный на пересечении первых k строк со столбцами, соответствующими первым слева ненулевым элементам в каждой из строк.

$$M_k = \begin{vmatrix} a_{1j_1} & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & a_{1j_2} & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & a_{1j_k} \end{vmatrix} = a_{1j_1} a_{1j_2} \ldots a_{1j_k} \neq 0$$

Этот минор ненулевой, так как соответствующая матрица является верхней треугольной. Её определитель отличен от нуля, так как на диагонали ненулевые элементы. Значит, $\operatorname{rang} A' \geqslant k$. Следовательно, $\operatorname{rang} A' = k$.

Пример.

$$\operatorname{rang}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} = \operatorname{rang}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \operatorname{rang}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2$$

Существует и альтернативный способ нахождения ранга матрицы: метод окаймляющих миноров. Его можно либо разобрать на практических занятиях, либо самостоятельно найти в литературе.

Системы линейных алгебраических уравнений.

В общем случае система m линейных уравнений с n неизвестными имеет вид

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \tag{1}$$

При этом $x_1,\ x_2, \ldots, x_n$ – неизвестные, a_{ij} $(i = \overline{1,m},\ j = \overline{1,n})$ – коэффициенты, $b_1,\ b_2, \ldots, b_m$ – свободные члены.

Система (1) называется ***однородной***, если $b_1 = b_2 = \ldots = b_m = 0$:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = 0. \end{cases}$$

В противном случае система называется ***неоднородной***.

Система (1) называется ***квадратной***, если $m = n$.

Решением системы (1) называется такая совокупность чисел $c_1,\ c_2, \ldots, c_n$, которая при подстановке в систему (1) вместо неизвестных обращает все уравнения этой системы в тождества. Стоит заметить, что не всякая система имеет решения.

Система (1) называется ***совместной***, если она имеет хотя бы одно решение, и ***несовместной***, если у неё не существует ни одного решения. Совместная система может иметь или одно решение или бесконечное количество решений.

Систему (1) можно записать в ***матричной форме*** $AX = B$, где

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Систему (1) можно записать в ***векторной форме***

$$x_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \ldots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \ldots \\ a_{m2} \end{pmatrix} + \ldots + x_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \ldots \\ a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_m \end{pmatrix}$$

.

Критерий совместности системы линейных алгебраических уравнений дает следующая теорема Кронекера-Капелли (Л.Кронекер (1823-1891) – немецкий математик, А.Капелли (1855-1910) – итальянский математик).

Теорема. Для совместности системы линейных алгебраических уравнений $AX = B$ необходимо и достаточно, чтобы ранг ее матрицы A был равен рангу ее расширенной матрицы $(A|B)$.

Доказательство. Пусть система совместна. Пусть $\operatorname{rang} A = r$, тогда

$$\operatorname{rang}(A|B) = A = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right) = \left[\begin{array}{l} r, \\ r+1. \end{array}\right.$$

Покажем, что $\operatorname{rang}(A|B) \neq r+1$. Предположим, что $\operatorname{rang}(A|B) = r+1$. Очевидно, это может получиться, если будет линейно независима совокупность из r линейно независимых (базисных) столбцов матрицы A и одного столбца B. Следовательно, B не может линейно выражаться ни через один набор базисных столбцов A. Записав систему в векторной форме

$$x_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \dots \\ a_{m2} \end{pmatrix} + \dots + x_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \dots \\ a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix},$$

делаем вывод о том, что столбец свободных членов является линейной комбинацией столбцов матрицы A. Небазисные столбцы матрицы A выражаются через базисные. Значит, B можно выразить через базисные столбцы матрицы A. Противоречие доказывает, что $\operatorname{rang}(A|B) \neq r+1$. Следовательно, $\operatorname{rang}(A|B) = r = \operatorname{rang} A$.

Докажем теорему в обратную сторону. Пусть $\operatorname{rang} A = \operatorname{rang}(A|B) = r$. Тогда, базисные столбцы A будут базисными столбцами $(A|B)$. Следовательно, B выражается через базисные столбцы A, а значит и через <u>все</u> столбцы A (перед небазисными столбцами в разложении B можно поставить нулевые коэффициенты). Значит, при некоторых $x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*$ имеет место равенство

$$x_1^* \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + x_2^* \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \dots \\ a_{m2} \end{pmatrix} + \dots + x_n^* \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \dots \\ a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Следовательно, наша система $AX = B$ имеет по крайней мере одно решение $x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*$, т.е. совместна ■.

Особого внимания заслуживают ***квадратные системы***. Матрица A этой системы – квадратная матрица

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Определитель этой матрицы $\Delta = \det A$ – ***главный определитель системы***. Наряду с этим определителем введём ещё и вспомогательные определители Δ_i $(i = 1, \ldots, n)$, которые получаются из главного путём замены i-го столбца столбцом свободных членов

$$\Delta_i = \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1,i-1} & b_1 & a_{1,i+1} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & \ldots & a_{2,i-1} & b_2 & a_{2,i+1} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & \ldots & a_{n,i-1} & b_n & a_{n,i+1} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Теорема (Крамера). Если главный определитель Δ квадратной системы отличен нуля, то система имеет единственное решение, определяемое равенствами

$$x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Эти формулы называются ***формулами Крамера***, а сама система при $\Delta \neq 0$ – ***крамеровской***.

Доказательство. Запишем квадратную систему линейных алгебраических уравнений в матричной форме $AX = B$. Выполним равносильные преобразования

$$AX = B \;\Leftrightarrow\; A^{-1}(AX) = A^{-1}B \;\Leftrightarrow\; (A^{-1}A)X = A^{-1}B \;\Leftrightarrow\; EX = A^{-1}B \;\Leftrightarrow\; X = A^{-1}B.$$

Таким образом, решение существует, оно единственно, так как обратная матрица единственна и решение может быть вычислено по формуле $X = A^{-1}B$.

Выведем формулы Крамера. Домножим каждое уравнение системы соответственно на алгебраические дополнения элементов столбца с номером j матрицы A: A_{1j}, A_{2j}, …, A_{nj}

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, & | * A_{1j} \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, & | * A_{2j} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n & | * A_{nj} \end{cases} \qquad (\forall j = 1, \ldots, n)$$

и сложим их, перегруппировав слагаемые по x_1, x_2, …, x_n:

$$x_1(a_{11}A_{1j} + a_{21}A_{2j} + \ldots + a_{n1}A_{nj}) + x_2(a_{12}A_{1j} + a_{22}A_{2j} + \ldots + a_{n2}A_{nj}) +$$
$$+ \ldots + x_n(a_{1n}A_{1j} + a_{2n}A_{2j} + \ldots + a_{nn}A_{nj}) = b_1A_{1j} + b_2A_{2j} + \ldots + b_nA_{nj}$$

или в более компактном виде

$$\sum_{i=1}^{n} x_i(a_{1i}A_{1j} + a_{2i}A_{2j} + \ldots + a_{ni}A_{nj}) = b_1A_{1j} + b_2A_{2j} + \ldots + b_nA_{nj}.$$

Так как сумма произведений элементов i-го столбца на соответствующие алгебраические дополнения j-го столбца равна нулю при $i \neq j$ из последнего равенства, а при $i = j$ равна $\det A$:

$$a_{1i}A_{1j} + a_{2i}A_{2j} + \ldots + a_{ni}A_{nj} = \begin{cases} 0, & i \neq j, \\ \det A, & i = j, \end{cases}$$

мы получаем

$$x_i\Delta = \Delta_i \quad \Rightarrow \quad x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}, \quad i = 1, \ldots, n. \qquad \blacksquare$$

Пример. Решим по формулам Крамера

$$\begin{cases} x + 2z = -1, \\ y - 3z = 1, \\ 2x + y = 2. \end{cases}$$

Вычислим

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -1,$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -5, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \\ 2 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 8, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 3.$$

Тогда

$$x = \frac{\Delta_1}{\Delta} = 5, \quad y = \frac{\Delta_2}{\Delta} = -8, \quad z = \frac{\Delta_3}{\Delta} = -3.$$

Если матрица система линейных алгебраических уравнений не является квадратной невырожденной, то формулы Крамера не работают и приходится использовать другие методы нахождения решений, о которых, будет сказано чуть позже, но сначала изучим структуру решений однородной системы.

Однородные системы.

Рассмотрим однородную систему

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = 0. \end{cases}$$

Согласно теореме Кронекера-Капелли однородная система всегда имеет решение:

$$\operatorname{rang}\begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} = \operatorname{rang}\left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \ldots & a_{1n} & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} & 0 \end{array}\right).$$

Очевидно, что это решение (которое есть всегда) – ***тривиальное*** – нулевое решение

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 0, \quad \ldots, \quad x_n = 0.$$

Сформулируем и докажем критерий наличия нетривиального решения.

Теорема. Для того чтобы система линейных однородных уравнений имела нетривиальные решение необходимо и достаточно, чтобы ранг матрицы её коэффициентов был меньше числа неизвестных.

Доказательство. Однородная система может быть записана в векторной форме

$$x_1 a_1 + \ldots + x_n a_n = \mathbb{O},$$

где a_i – столбцы матрицы коэффициентов. Нетривиальное решение порождает ненулевой набор коэффициентов $x_1, \ldots x_n$. А такой набор существует тогда и только тогда, когда столбцы линейно зависимы. Это равносильно тому, что ранг, равный максимальному количеству линейно независимых столбцов матрицы A, меньше числа неизвестных n:

$$\operatorname{rang} A < n \qquad \blacksquare$$

Следствие. Линейная квадратная однородная система $AX = \mathbb{O}$ имеет нетривиальное решение тогда и только тогда когда $\det A = 0$.

Доказательство. Действительно, нетривиальное решение, согласно теореме, будет тогда и только тогда, когда $\operatorname{rang} A < n$, а последнее равносильно тому, что $\det A = 0$ $\blacksquare$

Если однородная система имеет нетривиальное решение, то возникает вопрос, сколько тогда она имеет решений и какие? Выясним структуру решений однородной системы.

Теорема. Если $X_1, \ldots, X_k$ – решения системы $AX = \mathbb{O}$, то их линейная комбинация

$$X = c_1 X_1 + \ldots + c_k X_k, \qquad c_1, \ldots, c_k \in \mathbb{R}$$

также является решением этой системы.

Доказательство. Запишем однородную систему в матричном виде $AX = \mathbb{O}$ и подставим линейную комбинацию решений в систему

$$A(c_1 X_1 + \ldots + c_k X_k) = c_1 A X_1 + \ldots + c_k A X_k = c_1 \mathbb{O} + \ldots + c_k \mathbb{O} = \mathbb{O} \qquad \blacksquare$$

Следствие. Если однородная система линейных алгебраических уравнений $AX = \mathbb{O}$ имеет нетривиальное решение, то она имеет бесконечно множество решений.

Доказательство. Если $X^* = \begin{pmatrix} x_1^* \\ \ldots \\ x_n^* \end{pmatrix}$ – нетривиальное решение системы $AX = \mathbb{O}$, то $cX^* = \begin{pmatrix} cx_1^* \\ \ldots \\ cx_n^* \end{pmatrix}$ $(\forall c \in \mathbb{R})$, по предыдущей теореме, образуют бесконечное множеством решений этой системы $\blacksquare$

Если между решениями системы существует такая линейная зависимость, то возникает вопрос, можно ли выразить все решения системы через некоторый набор решений? Утвердительный вопрос на этот ответ содержится в следующей теореме.

Теорема. Все решения линейной однородной системы алгебраических уравнений $AX = \mathbb{O}$ являются линейными комбинациями линейно независимых $n - r$ решений, где n – количество неизвестных в системе, а r – ранг ее матрицы A.

Доказательство. Запишем систему в векторной форме

$$x_1 a_1 + x_2 a_2 + \ldots + x_n a_n = \mathbb{O},$$

Среди столбцов $a_1, \ldots, a_n$ есть r базисных. Не ограничивая общности, будем считать, что базисными являются первые r столбцов $a_1, \ldots, a_r$, иначе изменим нумерацию столбцов. Выразим небазисные столбцы $a_{r+1}, \ldots, a_n$ через базисные:

$$\begin{aligned}
&a_{r+1} = b_{r+1,1} a_1 + b_{r+1,2} a_2 + \ldots + b_{r+1,r} a_r, \\
&a_{r+2} = b_{r+2,1} a_1 + b_{r+2,2} a_2 + \ldots + b_{r+2,r} a_r, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&a_n = b_{n,1} a_1 + b_{n,2} a_2 + \ldots + b_{n,r} a_r,
\end{aligned}$$

(всего $n-r$ соотношений). Перенесём все слагаемые в этих соотношениях в одну сторону, добавив столбцы отсутствующие в равенствах, с нулевыми коэффициентами

$$\begin{array}{cccccccccccc}
b_{r+1,1}a_1 & +b_{r+1,2}a_2 & +\ldots & +b_{r+1,r}a_r & -a_{r+1} & +0a_{r+2} & +0a_{r+3} & +\ldots & + & 0a_n & = & \mathbb{O}, \\
b_{r+2,1}a_1 & +b_{r+2,2}a_2 & +\ldots & +b_{r+2,r}a_r & +0a_{r+1} & -a_{r+2} & +0a_{r+3} & +\ldots & + & 0a_n & = & \mathbb{O}, \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & & & \ldots \\
b_{n,1}a_1 & +b_{n,2}a_2 & +\ldots & +b_{n,r}a_r & +0a_{r+1} & +0a_{r+2} & +0a_{r+3} & +\ldots & - & a_n & = & \mathbb{O}.
\end{array}$$

Каждая строка этих соотношение – векторная форма записи нашей системы, с подставленными вместо x_1, …, x_n – конкретными числовыми значениями, поэтому следующие $(n-r)$ столбцов будут решениями системы $AX = 0$

$$X_{r+1} = \begin{pmatrix} b_{r+1,1} \\ b_{r+1,2} \\ \ldots \\ b_{r+1,r} \\ -1 \\ 0 \\ \ldots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad X_{r+2} = \begin{pmatrix} b_{r+2,1} \\ b_{r+2,2} \\ \ldots \\ b_{r+2,r} \\ 0 \\ -1 \\ \ldots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \ldots, X_n = \begin{pmatrix} b_{n,1} \\ b_{n,2} \\ \ldots \\ b_{n,r} \\ 0 \\ 0 \\ \ldots \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Они линейно независимы, так как в матрице, составленной из этих столбцов

$$\begin{pmatrix} b_{r+1,1} & b_{r+2,1} & \ldots & b_{n,1} \\ b_{r+1,2} & b_{r+2,2} & \ldots & b_{n,2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ b_{r+1,n} & b_{r+2,n} & \ldots & b_{n,n} \\ -1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & -1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & -1 \end{pmatrix}$$

минор, соответствующий последним $(n-r)$ строкам и всем $(n-r)$ столбцам отличен от нуля.

Осталось показать, что любое другое решение выражается через X_{r+1}, X_{r+2}, … X_n. Пусть