Вычислим скалярное произведение (используем свойства скалярного произведения)

$$(x, y) = (x_1e_1 + \ldots + x_ne_n, y_1e_1 + \ldots + y_ne_n) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(e_i, e_j)x_iy_j.$$

Составим из скалярных произведений базисных векторов квадратную матрицу Γ порядка n:

$$\Gamma = \begin{pmatrix} (e_1, e_1) & (e_1, e_2) & \ldots & (e_1, e_n) \\ (e_2, e_1) & (e_2, e_2) & \ldots & (e_2, e_n) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ (e_n, e_1) & (e_n, e_2) & \ldots & (e_n, e_n) \end{pmatrix}.$$

С помощью матрицы Γ мы можем записать скалярное произведение заданных векторов в матричной форме:

$$(x, y) = X^T\Gamma Y$$

(убедиться в справедливости этой матричной формы записи можно перемножив указанные матрицы). Матрица Γ является симметрической в силу коммутативности операции скалярного умножения. Ее называют **матрицей Грама** системы векторов $e_1, \ldots, e_n$.

Пусть базис e является ***ортонормированным***. Тогда

$$(e_i, e_j) = 0, \quad (e_i, e_i) = 1 \qquad (i \neq j,\ i, j = 1, \ldots, n).$$

Следовательно, для ортонормированного базиса матрица Γ является единичной, поэтому

$$(x, y) = X^T\Gamma Y = X^TY = x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_ny_n.$$

В частности, евклидова норма вектора в этом базисе вычисляется по формуле

$$\|x\| = \sqrt{(x, x)} = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}.$$

В ортонормированном базисе e также упрощается вычисление координат вектора: они ***выражаются через скалярные произведения***. Если $x = x_1e_1 + \ldots + x_ne_n$, то, умножив это равенство скалярно на вектор e_i, находим, что

$$(x, e_i) = (x_1e_1 + \ldots + x_ne_n, e_i) = x_i(e_i, e_i) = x_i \quad (i = 1, \ldots, n).$$

В ввиду явных преимуществ в евклидовом пространстве ортонормированного базиса, хочется иметь дело именно с таким базисом. В каждом ли евклидовом пространстве существует ортонормированный базис? Непосредственно из определения ответ на этот вопрос получить нельзя. Кроме того, формального ответа на вопрос не достаточно, нужно уметь находить и строить такие базисы. Ответ на поставленный вопрос утвердительный, а построить ортонормированный базис можно, отталкиваясь от некоторого исходного базиса, при помощи алгоритма, который называют **процессом ортогонализации Грама-Шмидта**. Изложим этот алгоритм.