1. Некоторые основные понятия линейной алгебры.

Одно из основных понятий математики – математики множество. Оно определено не строго, но для пояснения его можно сказать, что это набор однотипных объектов. В линейной алгебре мы будем рассматривать множества различной природы: числовые множества, множества многочленов, матриц, квадратичных форм и т.д. Со всем этим мы познакомимся позднее, а пока введем некие общие термины, которые мы будем употреблять при изучении этих множеств.

На практике обычно используют множества, над элементами которых могут быть выполнены определенные операции.

Говорят, что на непустом множестве E задана **бинарная операция** $\circ$, если каждым двум элементам $a, b \in E$ поставлен в соответствие элемент $c \in E$. Записваем это так: $a \circ b = c$.

Пример. На множестве $\mathbb{R}$ сложение и умножение являются бинарными операциями.

Пример. На множестве $P(Y)$ всех подмножеств некоторого множества Y бинарными операциями будут операции объединения и пересечения.

Замечание. В математике также рассматривают **унарные операции**: каждому элементу $a \in E \neq \varnothing$ поставлен в соответствие элемент $b \in E$. Примером унарной операции может быть операция транспонирования матрицы: $A^T = B$.

Полезными для использования являются те операции, которые обладают определенными свойствами. Рассмотрим эти свойства.

Пусть на E задана бинарная операция $\circ$ (часто пишут $(E, \circ)$). Говорят, что она обладает свойством

1) **коммутативности**, если $\forall a, b \in E$ $a \circ b = b \circ a$;

2) **ассоциативности**, если $\forall a, b, c \in E$ $(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$.

Пример. На множестве $\mathbb{Z}$ сложение и умножение ассоциативны и коммутативны:

$$\forall a, b \in \mathbb{Z} : a + b = b + a,$$

$$\forall a, b, c \in \mathbb{Z} : (a + b) + c = a + (b + c),$$

$$\forall a, b \in \mathbb{Z} : a \cdot b = b \cdot a,$$

$$\forall a, b, c \in \mathbb{Z} : (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c).$$

Но операция возведения в целую степень этими свойствами не обладает:

$$2^3 \neq 3^2, \quad 2^{(3^2)} \neq (2^3)^2.$$

Элемент a называют **регулярным** относительно операции $\circ$ на E, если

$$\forall x, y \in E : \quad x \circ a = y \circ a, a \circ x = a \circ y \quad \Rightarrow \quad x = y.$$

Пример. На множестве $\mathbb{N}$ всякий элемент $a \in \mathbb{N}$ регулярен относительно сложения и умножения:

$$\forall x, y \in \mathbb{N} : \quad x + a = y + a, a + x = a + y \quad \Rightarrow \quad x = y,$$

$$\forall x, y \in \mathbb{N} : \quad x \cdot a = y \cdot a, a \cdot x = a \cdot y \quad \Rightarrow \quad x = y.$$

На множестве $\mathbb{Z}$ элемент 0 не регулярен относительно умножения:

$$0 \cdot 8 = 0 \cdot 5, \quad \text{но} \quad 8 \neq 5.$$

Регулярность элемента дает возможность сокращать на него.

Можно ввести понятие регулярности слева и справа.

Элемент e называют **нейтральным** относительно операции $\circ$ на E, если

$$\forall x \in E : x \circ e = e \circ x = x.$$

Обычно, если операция обозначается $+$, то нейтральный обозначают 0; если операция обозначается $\cdot$, то нейтральный обозначают 1.

Пример. На множестве $\mathbb{N}$ число 1 – нейтральный элемент относительно умножения.

Нейтральный элемент единственный. Докажем это от противного. Предположим, что есть два нейтральных элемента e, e'. Тогда

$$e = e' \circ e = e'.$$

Пусть на E относительно и $\circ$ имеется нейтральный элемент. Говорят, что $x' \in E$ – элемент **обратный** (или **противоположный**) $x \in E$, если

$$x \circ x' = x' \circ x = e.$$

Обычно, если операция обозначается $+$, то обратный к x называют противоположным и обозначают $-x$; если операция обозначается $\cdot$, то обратный к x обозначают x^{-1}.

Пример. На множестве $\mathbb{Q}$ число $\frac{1}{3}$ – обратный элемент к 3 относительно умножения.

Можно ввести определение нейтрального элемента слева (справа).

Рассмотрим теперь $(E, \circ, *)$. Если на множестве E заданы две бинарные операции $\circ$ и $*$, то говорят, что $\circ$ дистрибутивна относительно $*$, если

$$\forall a, b, c \in E : \quad (a * b) \circ c = (a \circ c) * (b \circ c), \quad c \circ (a * b) = (c \circ a) * (c \circ b).$$

Пример. На множестве $\mathbb{Z}$ умножение дистрибутивно относительно сложения:

$$\forall a, b, c \in \mathbb{Z}: \quad (a+b)c = ac + bc,\; c(a+b) = ca + cb,$$

но сложение не дистрибутивно относительно умножения:

$$(ab) + c \neq (a+c)(b+c).$$

Можно ввести понятие односторонней дистрибутивности. Так на $\mathbb{N}$ возведение в степень относительно умножения дистрибутивно только справа:

$$(ab)^c = a^c b^c \quad c^{(ab)} \neq c^a c^b.$$

В зависимости от того, определен ли на множестве только один закон композиции или оба, а также от того, какими свойствами эти законы обладают, множества относят к одной из *алгебраических структур*. Познакомимся с этими структурами.

Полугруппа – множество с введенной бинарной операцией, обладающей свойством ассоциативности. (Примеры полугрупп $(\mathbb{R}^+, +), (\mathbb{R}^+, *)$).

Группа – полугруппа, в которой есть нейтральный элемент относительно введенной бинарной операции и для каждого элемента есть обратный. Пример группы: $(\mathbb{R}^+, *)$, но $(\mathbb{R}^+, +)$ – не группа.

В группе для каждого элемента обратный элемент единственен. Докажем это: предположим $a \in (E, +)$ имеет два обратных $a' \neq a''$. Тогда

$$a' + (a + a'') = a' + 0 = a', \quad a' + (a + a'') = (a' + a) + a'' = 0 + a'' = a'' \quad \Rightarrow \quad a' = a'', \text{ но } a' \neq a''.$$

Абелева группа (коммутативная группа) – группа, в которой введенная бинарная операция коммутативна (пример абелевой группы – $(\mathbb{R}^+, *)$). Множество всех невырожденных квадратных матриц одного порядка относительно умножения – некоммутативная группа.

Множество $(E, +, *)$ – **кольцо**, если

1) $(E, +)$ – абелева группа

2) операция * дистрибутивна относительно $+$.

Если в кольце $(E, +, *)$ операция * коммутативна, то это – **коммутативное кольцо**.

Если в кольце $(E, +, *)$ операция * ассоциативна, то это – **ассоциативное кольцо**.

Если в кольце $(E, +, *)$ относительно операции * есть нейтральный элемент, то это – **кольцо с единицей**.

Кольцо $(E, +, *)$ называется полем, если это коммутитивное, ассоциативное кольцо с единицей, в котором каждый элемент, отличный от 0 (нейтральный относительно $+$), имеет обратный (относительно *).

Пример. $(\mathbb{R}, +, *)$ – поле.

2. Поле комплексных чисел.

Обозначим z – упорядоченную пара $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ (термин “упорядоченная пара” означает, что числа, образующие пару, перенумерованы: x есть первое, а y – второе число этой пары), и будем при этом записывать: $z = (x, y)$. Две упорядоченные пары $z_1 = (x_1, y_1)$ и $z_2 = (x_2, y_2)$ будем считать равными (записываем как $z_1 = z_2$), если $x_1 = x_2$, $y_1 = y_2$.

Введём на этом множестве всех таких пар две бинарные операции:

1) сложение $z_1 + z_2 = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$,

2) умножение $z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1)$.

Для удобства, произведение можно обозначать: $z_1 z_2 = z_1 \cdot z_2 = z_1 * z_2$

Множество всевозможных упорядоченных пар (x, y) вещественных чисел, на котором введены действия сложения и умножения пар указанным способом, называют ***множеством комплексных чисел*** и обозначают буквой $\mathbb{C}$. Каждый элемент множества $\mathbb{C}$ называют ***комплексным числом***.

Выясним, какой алгебраической структурой является множество комплексных чисел. Проверим свойства введенных операций.

1) Сложение

a) коммутативность выполнена:

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2, y_1 + y_2) = (x_2 + x_1, y_2 + y_1) = z_2 + z_1;$$

b) ассоциативность выполнена

$$\begin{aligned}(z_1 + z_2) + z_3 &= (x_1 + x_2, y_1 + y_2) + (x_3, y_3) = ((x_1 + x_2) + x_3, (y_1 + y_2) + y_3) = \\ &= (x_1 + (x_2 + x_3), y_1 + (y_2 + y_3)) = (x_1, y_1) + (x_2 + x_3, y_2 + y_3) = z_1 + (z_2 + z_3);\end{aligned}$$

c) нейтральный элемент (0,0)

$$z + 0 = (x, y) + (0, 0) = (x + 0, y + 0) = (x, y) = z, \quad 0 + z = z + 0 = z;$$

d) противоположным элементом для $z = (x, y)$ будет $z' = (-x, -y)$

$$z + z' = (x, y) + (-x, -y) = (x - x, y - y) = (0, 0) = 0, \quad z' + z = z + z' = 0.$$

Таким образом, мы показали, что $(\mathbb{C}, +)$ – абелева группа.

2) Дистрибутивность умножения относительно сложения.

$$\big((x_1, y_1) + (x_2, y_2)\big)(x_3, y_3) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)(x_3, y_3) =$$
$$= ((x_1 + x_2)x_3 - (y_1 + y_2)y_3, (y_1 + y_2)x_3 + (x_1 + x_2)y_3) =$$
$$= (x_1x_3 + x_2x_3 - y_1y_3 - y_2y_3, y_1x_3 + y_2x_3 + x_1y_3 + x_2y_3) =$$
$$= (x_1x_3 - y_1y_3, y_1x_3 + x_1y_3) + (x_2x_3 - y_2y_3, y_2x_3 + x_2y_3) =$$
$$= (x_1, y_1)(x_3, y_3) + (x_2, y_2)(x_3, y_3).$$

Аналогично доказывается $(x_3, y_3)\big((x_1, y_1) + (x_2, y_2)\big)$.

Таким образом, мы показали, что $(\mathbb{C}, +, *)$ – кольцо.

3) Умножение

a) коммутативность выполнена

$$z_1 * z_2 = (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + x_2y_1) = (x_2x_1 - y_2y_1, x_2y_1 + x_1y_2) = z_2 * z_1;$$

b) ассоциативность выполнена (проверить самостоятельно);

c) нейтральный элемент (1,0)

$$(x, y) * (1, 0) = (x \cdot 1 - y \cdot 0, x \cdot 0 + 1 \cdot y) = (x, y).$$

Таким образом, $(\mathbb{C}, +, *)$ – коммутативное ассоциативное кольцо с единицей.

Чтобы показать, что $(\mathbb{C}, +, *)$, проведём несколько вспомогательных рассуждений.

Заметим, что можно установить взаимно однозначное соответствие между

$$x \in \mathbb{R} \quad \Leftrightarrow \quad (x, 0) \in \mathbb{C},$$

причем

$$(x_1, 0) + (x_2, 0) = (x_1 + x_2, 0) \quad \Leftrightarrow \quad x_1 + x_2,$$
$$(x_1, 0)(x_2, 0) = (x_1x_2, 0) \quad \Leftrightarrow \quad x_1x_2.$$

Поэтому договоримся писать вместо $(x, 0)$ просто x. В частности, вместо (1,0) просто 1.

Особо остановимся на паре (0,1), которая обладает свойством

$$(0, 1)(0, 1) = (0 \cdot 0 - 1 \cdot 1, 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0) = (-1, 0) = -1.$$

Эта пара получила специальное обозначение i. Она обладает свойством: $i \cdot i = i^2 = -1$.

Заметим, что

$$(0,1)(y,0) = (0 \cdot y - 1 \cdot 0, 0 \cdot 0 + 1 \cdot y) = (0, y).$$

Рассмотрим теперь произвольную пару

$$(x,y) = (x+0, 0+y) = (x,0) + (0,y) = (x,0) + (0,1)(y,0) = x + iy.$$

$x + iy$ называют **алгебраической формой записи комплексного числа**.

В алгебраической форме легче производить сложение и умножение комплексных чисел. Правила умножения и сложения легко запомнить, если сложить и перемножить два комплексных числа как обычные алгебраические выражения. Пусть $z_1 = (x_1, y_1)$ и $z_2 = (x_2, y_2) \in \mathbb{C}$, тогда

$$(x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2) = z_1 + z_2,$$

$$(x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = x_1x_2 + ix_1y_2 + iy_1x_2 + i^2y_1y_2 = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1) =$$

$$= (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + x_2y_1) = z_1z_2.$$

Например: пусть $z_1 = 2 + 3i$, $z_2 = i - 4$, тогда

$$z_1 + z_2 = 2 + 3i + i - 4 = -2 + 4i,$$

$$z_1z_2 = (2+3i)(i-4) = 2i - 8 + 3i^2 - 12i = -11 - 10i.$$

Пусть $z = x + iy$. Обозначим $\bar{z} = x - iy$ – число, ***комплексно сопряженное числу*** z. Тогда

$$z\bar{z} = (x+iy)(x-iy) = x^2 - ixy + iyx - i^2y^2 = x^2 + y^2.$$

Заметим, что

$$z\bar{z} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad z = 0.$$

Воспользуемся этим свойством, чтобы найти обратный элемент относительно умножения для $z \neq 0$, т.е. такой z^{-1}, что $zz^{-1} = 1$:

$$\bar{z}(zz^{-1}) = \bar{z} \quad \Leftrightarrow \quad (\bar{z}z)z^{-1} = \bar{z} \quad \Leftrightarrow \quad (x^2+y^2)z^{-1} = \bar{z} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{x^2+y^2}\left((x^2+y^2)z^{-1}\right) = \frac{1}{x^2+y^2}\bar{z},$$

значит

$$z^{-1} = \frac{1}{x^2+y^2}\bar{z} = \frac{x}{x^2+y^2} - i\frac{y}{x^2+y^2}.$$

Следовательно, в $\mathbb{C}$ для каждого элемента, отличного от 0, сущестует обратный относительно операции умножения $\cdot$. Таким образом, $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ – поле и оно является расширением поля вещественных чисел, так как $(x,0) \to x$.

Свойства сопряжённых комплексных чисел.

1. $\bar{\bar{z}} = z$.

   Доказательство:

$$\bar{\bar{z}} = \overline{\overline{x+iy}} = \overline{x-iy} = x+iy.$$

2. $\overline{z_1+z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$.

   Доказательство:

$$\overline{z_1+z_2} = \overline{x_1+iy_1+x_2+iy_2} = \overline{x_1+x_2+i(y_1+y_2)} =$$
$$= x_1+x_2-i(y_1+y_2) = x_1-iy_1+x_2-iy_2 = \bar{z}_1+\bar{z}_2.$$

3. $\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2$.

   Доказательство:

$$\overline{z_1 z_2} = \overline{(x_1+iy_1)(x_2+iy_2)} = \overline{x_1x_2+ix_1y_2+iy_1x_2+i^2y_1y_2} =$$
$$= \overline{x_1x_2-y_1y_2+i(x_1y_2+y_1x_2)} = x_1x_2-y_1y_2-i(x_1y_2+y_1x_2) =$$
$$= x_1(x_2-iy_2)-iy_1(x_2-iy_2) = (x_1-iy_1)(x_2-iy_2) = \bar{z}_1\bar{z}_2.$$

Поле комплексных чисел (продолжение).

Займемся более подробным изучением комплексных чисел $z = (x, y) = x + iy$. Число x называют ***вещественной частью*** комплексного числа z и обозначают через $\mathrm{Re}z$. Число y называют ***мнимой частью*** числа z и обозначают через $\mathrm{Im}z$. Таким образом,

$$z = (\mathrm{Re}z, \mathrm{Im}z) = \mathrm{Re}z + i\mathrm{Im}z.$$

Например,

$$z_1 = 2 - 3i \quad \Rightarrow \quad \mathrm{Re}z_1 = 2, \quad \mathrm{Im}z_1 = -3.$$

$$z_2 = i - 4 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{Re}z_2 = -4, \quad \mathrm{Im}z_2 = 1.$$

Если мнимая часть комплексного числа отлична от нуля, его называют ***мнимым числом***. Например,

$$2 - i, \quad 3i, \quad 3i - 4.$$

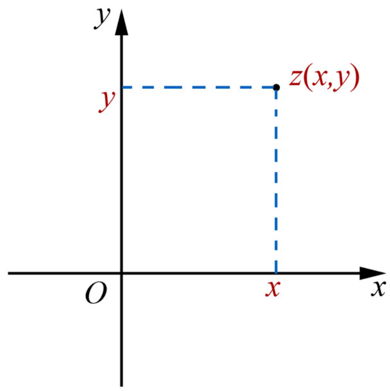
Таким образом, всякое комплексное число является либо вещественным, либо мнимым. Те из мнимых чисел, вещественная часть которых равна нулю, т. е. числа вида $(0, y)$, где $y \neq 0$, называют ***чисто мнимыми числами***. Например,

$$i, \quad 5i, \quad -4i.$$

Число i – ***мнимая единица***.

Термин “комплексное число” ввел в 1803 г. французский математик Л. Карно (1753-1823), но систематически этот термин стал употреблять с 1828 г. К. Гаусс, чтобы заменить им менее удачное “мнимое число”. В русской математической литературе XIX в. использовали термин “составное число”. Уже у Р. Декарта противопоставлены действительная и мнимая части комплексного числа. В дальнейшем первые буквы французских слов reele (действительный) и imagimaire (мнимый) стали обозначениями этих частей, хотя многие математики считали сущность мнимых величин неясной и даже загадочной и мистической. Так, И. Ньютон не включал их в понятие числа, а Г. Лейбницу принадлежит фраза: “Мнимые числа – это прекрасное и чудесное убежище божественного духа, почти что амфибия бытия с небытием”.

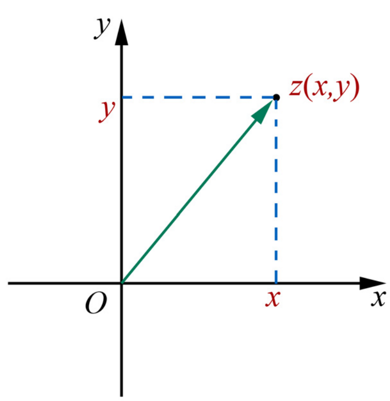
Удобной **геометрической интерпретацией** множества $\mathbb{C}$ является комплексная плоскость. Так называют плоскость, на которой введена декартова прямоугольная система координат. Точку z этой плоскости с абсциссой x и ординатой y считают изображением комплексного числа $z = (x, y)$.



Таким образом, каждая точка этой плоскости изображает одно из комплексных чисел, и, обратно, каждое комплексное число можно представить точкой, лежащей на такой плоскости, причем два различных между собой комплексных числа изображаются двумя несовпадающими точками.

Вещественные числа $z = (x, 0)$ представлены точками оси абсцисс (в частности, числу $0{=}(0{,}0)$ соответствует начало координат), поэтому ось абсцисс называют ***вещественной осью*** комплексной плоскости. Ось ординат называют ***мнимой осью***. Точки этой оси (кроме начала координат) изображают чисто мнимые числа $z = (0, y)$.

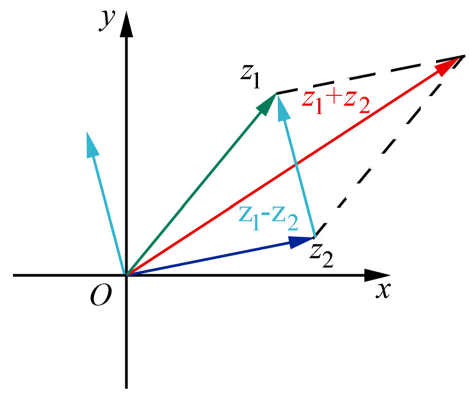
Другая возможная интерпретация комплексного числа $z = (x, y)$ состоит в том, что его изображают вектором, проекции которого на вещественную и мнимую оси есть x и y. Таким вектором, в частности, является радиус-вектор точки, изображающей число z.



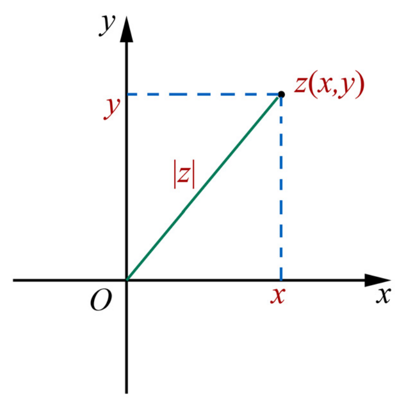
В векторной форме хорошо интерпретируется сумма и разность комплексных чисел. Введём понятие разности. ***Разностью*** между комплексными числами z_1 и z_2 называют число $z_1 + (-z_2)$ и его обозначают через $z_1 - z_2$. Если z_1 и z_2 записаны в алгебраической форме, то

$$z_1 - z_2 = x_1 + iy_1 + (-x_2) + i(-y_2) = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2).$$

Пусть эти числа представлены радиусами-векторами точек z_1 и z_2. Координаты радиус векторов равны соответственно вещественным и мнимым частям этих чисел. Сумма и разность этих векторов – это вектор, координаты которого соответственно совпадают с вещественной и мнимой частями $z_1 + z_2$ и $z_1 - z_2$. Как известно сумма и разность этих радиус векторов совпадает с диагоналями параллелограмма, построенного на данных радиус векторах.



Модулем комплексного числа $z = x+iy$ (обозначение $|z|$) называется расстояние от точки комплексной плоскости, изображающей комплексное число $z = x + iy$, до начала координат.



Таким образом,

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Если z является вещественным числом, то его модуль совпадает с абсолютной величиной числа x:

$$|z| = \sqrt{x^2 + 0^2} = |x|.$$

Свойства модуля комплексного числа

1) $\forall z \in \mathbb{C} : |z| \geqslant 0$, причем $|z|=0$ тогда и только тогда, когда $z = 0$, так как

$$x^2 + y^2 = 0 \quad \Leftrightarrow x = 0, y = 0.$$

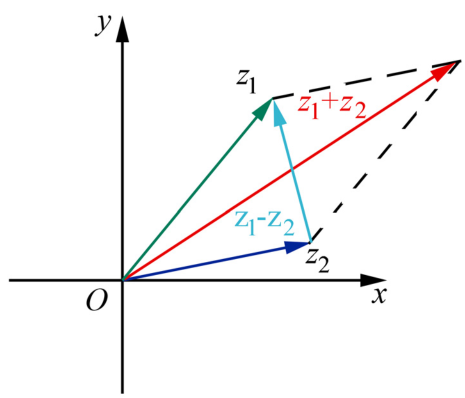
2) $\forall z \in \mathbb{C} : |\mathrm{Re} z|, |\mathrm{Im} z| \leqslant |z|$, так как

$$|x|, |y| \leqslant \sqrt{x^2 + y^2}.$$

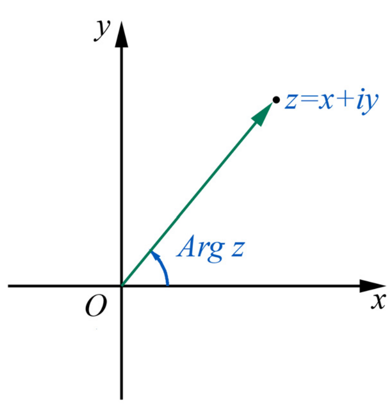
3) $\forall z \in \mathbb{C} : |z| = |\bar{z}|$, так как

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + (-y)^2} = |\bar{z}|.$$

4) $|z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|, \quad |z_1 - z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|$. Этот факт легко доказать, используя векторную интерпретацию суммы и разности комплексных чисел, а также неравенство треугольника.



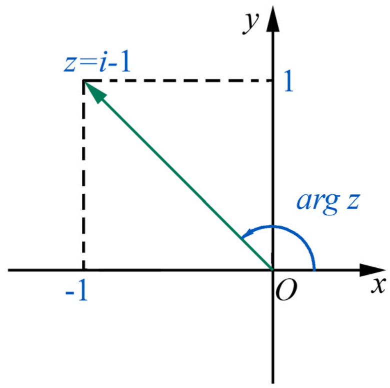
Пусть $z = x + iy \neq 0$, обозначим $r = |z| > 0$. ***Аргументом*** комплексного числа $z \neq 0$ (обозначение $\mathrm{Arg} z$), называют угол, который образует радиус-вектор точки, изображающей на комплексной плоскости z, с положительным направлением оси Ox. Положительным направлением угла считается направление против часовой стрелки.



Среди всех значений аргумента мы будем выделять главное значение аргумента $\arg z$, которое содержится в $(-\pi, \pi]$ (иногда в качестве "главного" промежутка выбирают $[0, 2\pi)$). Таким образом,

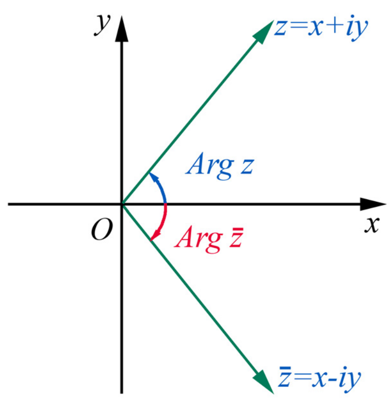
$$\mathrm{Arg} z = \arg z + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Например, $\mathrm{Arg}(i-1) = \frac{3\pi}{4} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$.



Для $z = 0$ значение аргумента не определено.

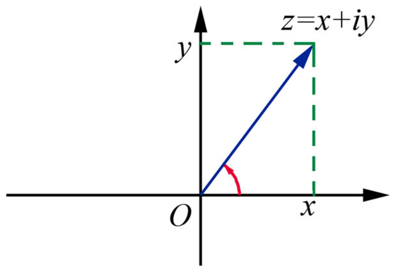
Заметим, что $\mathrm{Arg}\bar{z} = -\mathrm{Arg} z$.



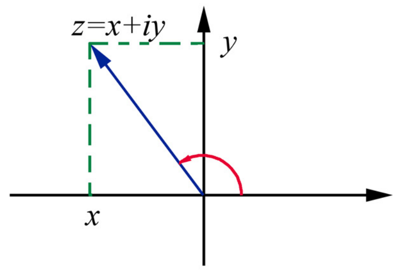
Если $z \neq 0$ – вещественное, то главное значение аргумента равно 0 или π.

Если z – чисто мнимое, то главное значение аргумента равно $\frac{\pi}{2}$ или $-\frac{\pi}{2}$.

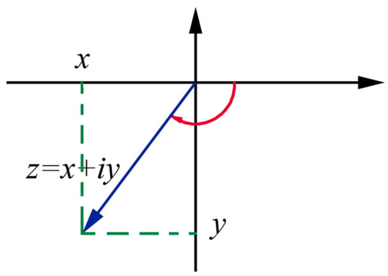
Вычисление аргументов в случае различных четвертей.



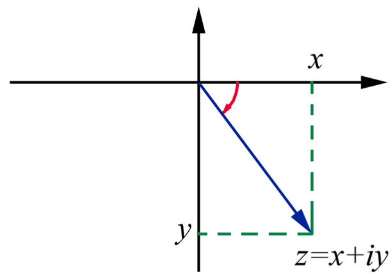
Если $z \in I$, то $\arg z = \operatorname{arctg} \dfrac{y}{x}$



Если $z \in II$, то
$\arg z = \pi + \operatorname{arctg} \dfrac{y}{x}$



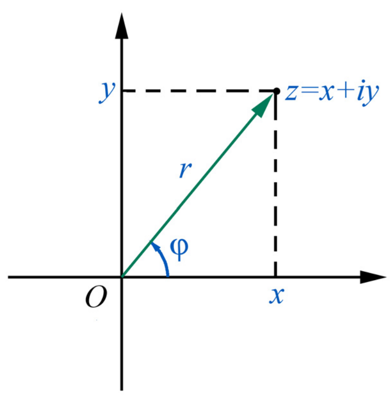
Если $z \in III$, то
$\arg z = -\pi + \operatorname{arctg} \dfrac{y}{x}$



Если $z \in IV$, то $\arg z = \operatorname{arctg} \dfrac{y}{x}$

Можно показать, что , если $z \neq 0$, то

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi, \qquad (r = |z|, \varphi = \operatorname{Arg} z).$$



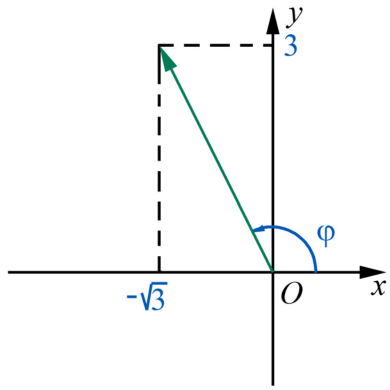
Тогда

$$z = x + iy = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) \quad (z \neq 0).$$

Это – ***тригонометрическая форма записи комплексного числа***.

Пример. Запмишем в тригонометрической форме $z = -\sqrt{3} + 3i$.

$$r = \sqrt{3+9} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}, \quad \varphi = \frac{2\pi}{3} \quad \Rightarrow \quad z = 2\sqrt{3}(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}).$$



Если два комплексных числа записаны в тригонометрической форме, то для них достаточно легко выполняется умножение и деление.

Пусть z_1 и z_2 – комплексные числа, причем $z_2 \neq 0$. ***Частным чисел*** z_1 ***и*** z_2 называют комплексное число z такое, что $z_1 = zz_2$. Его обозначают $z_1 : z_2$ или $\dfrac{z_1}{z_2}$.

$$z_1\bar{z}_2 = zz_2\bar{z}_2 \quad \Rightarrow \quad z(z_2\bar{z}_2) = z_1\bar{z}_2 \quad \Rightarrow \quad z = \frac{1}{z_2\bar{z}_2}z_1\bar{z}_2 = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}.$$

Пусть $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$, $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$, то

$$z_1z_2 = r_1r_2(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) =$$
$$= r_1r_2\left[(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2) + i(\cos\varphi_1\sin\varphi_2 + \sin\varphi_1\cos\varphi_2)\right] =$$
$$= r_1r_2\left[\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)\right].$$

Таким образом,

$$|z_1z_2| = |z_1||z_2|, \quad \mathrm{Arg}(z_1z_2) = \mathrm{Arg}z_1 + \mathrm{Arg}z_2.$$

Например,

$$z_1 = i - 1 \quad \Rightarrow \quad z_1 = \sqrt{2}\left(\cos\tfrac{3\pi}{4} + i\sin\tfrac{3\pi}{4}\right)$$

$$z_2 = 3i \quad \Rightarrow \quad z_2 = 3\left(\cos\tfrac{\pi}{2} + i\sin\tfrac{\pi}{2}\right)$$

$$z_1z_2 = 3\sqrt{2}\left(\cos\left(\tfrac{3\pi}{4} + \tfrac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\tfrac{3\pi}{4} + \tfrac{\pi}{2}\right)\right) =$$

$$= 3\sqrt{2}\left(\cos\tfrac{5\pi}{4} + i\sin\tfrac{5\pi}{4}\right) = 3\sqrt{2}\left(-\tfrac{1}{\sqrt{2}} - i\tfrac{1}{\sqrt{2}}\right) = -3 - i$$

Результатом возведения z в степень $n \in \mathbb{N}$ будет комплексное число

$$|z^n| = |z|^n, \quad \mathrm{Arg}(z^n) = n\mathrm{Arg}z, \quad \Rightarrow \quad z^n = r^n(\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi)).$$

Последнюю формулу называют ***формулой Муавра***.

Рассмотрим теперь деление чисел в тригонометрической форме.

$$\frac{z_2}{z_1} = \frac{r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)}{r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)} = \frac{r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)(\cos\varphi_1 - i\sin\varphi_1)}{r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)(\cos\varphi_1 - i\sin\varphi_1)} =$$

$$= \frac{r_2}{r_1}\frac{(\cos\varphi_2\cos\varphi_1 + \sin\varphi_2\sin\varphi_1) + i(\sin\varphi_2\cos\varphi_1 - \cos\varphi_2\sin\varphi_1)}{\cos^2\varphi_1 + \sin^2\varphi_1} =$$

$$= \frac{r_2}{r_1}\left(\cos(\varphi_2 - \varphi_1) + i\sin(\varphi_2 - \varphi_1)\right).$$

Таким образом, при делении комплексных чисел их модули делятся, а аргументы вычитаются (точнее: вычитая из аргумента числителя аргумент знаменателя, мы получим одно из значений аргумента частного).

Возведение в рациональную степень связано с извлечением корня n степени $\sqrt[n]{z}$, $n \in \mathbb{N}$.

Корнем n-ой степени ($n \in \mathbb{N}$, $n \neq 1$) из комплексного числа z называется такое число w, n-ая степень которого равна z, т.е

$$w = \sqrt[n]{z} \quad \Longleftrightarrow \quad w^n = z.$$

Если $z = 0$, то равенству $w^n = 0$ удовлетворяет только одно число $w = 0$:

$$w^n = \rho^n(\cos n\psi + i\sin n\psi) \quad \Rightarrow \quad \rho = 0 \quad \Rightarrow \quad w = 0.$$

Пусть $z \neq 0$. Если $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, а $w = \rho(\cos\psi + i\sin\psi)$, то

$$w^n = z \quad \Longleftrightarrow \quad \rho^n(\cos(n\psi) + i\sin(n\psi)) = r(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

Значит, $\rho = \sqrt[n]{r}$ (здесь корень арифметический! – неотрицательное вещественное), $n\psi = \varphi + 2\pi k$ ($k \in \mathbb{Z}$). Поэтому $\psi = \frac{\varphi+2\pi k}{n}$ ($k \in \mathbb{Z}$). В промежуток длины 2π укладываются n значений ψ, соответствующих $k = 0, 1, \ldots, (n-1)$:

$$\psi_0 = \frac{\varphi}{n},\ \psi_1 = \frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi}{n},\ \psi_2 = \frac{\varphi}{n} + 2\frac{2\pi}{n},\ \psi_3 = \frac{\varphi}{n} + 3\frac{2\pi}{n},\ \ldots,\ \psi_{n-1} = \frac{\varphi}{n} + (n-1)\frac{2\pi}{n}.$$

Таким образом, мы получили n различных чисел ($z \neq 0$)

$$w_k = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right), \quad k = 0, \ldots, (n-1).$$

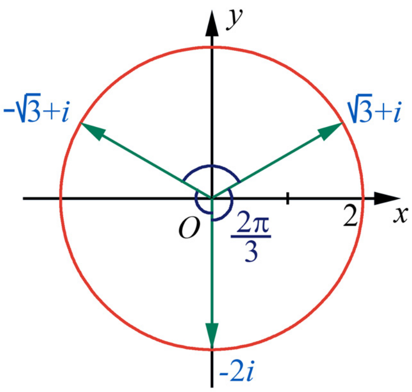
Геометрически вершины всех векторов, изображающих корни, находятся на окружности радиуса $\sqrt[n]{r}$, причём углы между соседними векторами равны (они равны $\frac{2\pi}{n}$).

Покажем это на примере. $\sqrt[3]{8i} = \sqrt[3]{8}(\cos\frac{\pi/2+2\pi k}{3} + i\sin\frac{\pi/2+2\pi k}{3})$, $k = 0, 1, 2$

$$k = 0 \quad \Rightarrow \quad w_0 = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right) = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right) = \sqrt{3} + i,$$

$$k = 1 \quad \Rightarrow \quad w_1 = 2\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right) = 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right) = -\sqrt{3} + i,$$

$$k = 2 \quad \Rightarrow \quad w_2 = 2\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}\right) = 2\,(0 - i) = -2i.$$



Формула возведения комплексного числа в рациональную степень выглядит следующим образом

$$z^{m/n} = \sqrt[n]{z^m} = r^{m/n}\left(\cos\frac{m\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{m\varphi + 2\pi k}{n}\right), \quad k = 0, \ldots, (n-1).$$

Рассмотрим комплексное число $z = x + iy$. Число $\mathrm{e}^x(\cos y + i\sin y)$ называют ***экспонентой*** числа z и обозначают

$$\mathrm{e}^z = \exp z = \mathrm{e}^x(\cos y + i\sin y).$$

Это определение введено Эйлером для обобщения некоторых вещественных формул на случай комплексных чисел.

Если z – вещественное число ($z = x + 0i$), то $\mathrm{e}^z = \mathrm{e}^x(\cos 0 + i\sin 0) = \mathrm{e}^x$.

Свойства e^z:

1) $\mathrm{e}^z \neq 0$.

Доказательство. Предположим, что $\mathrm{e}^z = 0$. Пусть $z = x + iy$. Тогда

$$\mathrm{e}^z = \mathrm{e}^x(\cos y + i\sin y) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \mathrm{e}^x\cos y = 0, \\ \mathrm{e}^x\sin y = 0, \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \cos y = \sin y = 0.$$

Противоречие доказывает неверность предположения ■

2) $e^{z_1+z_2} = e^{z_1}e^{z_2}$.

Доказательство. Пусть $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$.

$$e^{z_1}e^{z_2} = e^{x_1}(\cos y_1 + i\sin y_1)e^{x_2}(\cos y_2 + i\sin y_2) =$$

$$= e^{x_1}e^{x_2}\left(\cos y_1\cos y_2 - \sin y_1 \sin y_2 + i(\cos y_1 \sin y_2 + \sin y_1 \cos y_2)\right) =$$

$$= e^{x_1+x_2}\left(\cos(y_1+y_2) + \sin(y_1+y_2)\right) = e^{z_1+z_2} \quad \blacksquare$$

3) Если $z = i\varphi$, то $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$. Это – формула Эйлера.

4) $e^{z_1} = e^{z_2} \quad \Leftrightarrow \quad z_2 = z_1 + i2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$.

Доказательство. Пусть $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$.

$$e^{z_1} = e^{z_2} \quad \Leftrightarrow \quad e^x_1(\cos y_1 + i\sin y_1) = e^x_2(\cos y_2 + i\sin y_2) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} e^{x_1}\cos y_1 = e^{x_2}\cos y_2, \\ e^{x_1}\sin y_1 = e^{x_2}\sin y_2. \end{cases}$$

Возведём в квадрат и сложим оба уравнения системы

$$e^{2x_1}\cos^2 y_1 + e^{2x_1}\sin^2 y_1 = e^{2x_2}\cos^2 y_2 + e^{2x_2}\sin^2 y_2 \quad \Leftrightarrow \quad e^{2x_1} = e^{2x_2} \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = x_2.$$

Тогда

$$\begin{cases} \cos y_1 = \cos y_2, \\ \sin y_1 = \sin y_2. \end{cases}$$

Значит, $y_2 = y_1 + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. Тогда

$$z_2 = x_2 + iy_2 = x_1 + i(y_1 + 2\pi k) = z_1 + i2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z} \quad \blacksquare$$

Пусть z записано в тригонометрической форме $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$. Тогда по свойству 3 экспоненты комплексного числа:

$$z = re^{i\varphi}$$

– это ***показательная форма комплексного числа***.

Из правил умножения и деления комплексных чисел в тригонометрической форме следует

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1+\varphi_2)},$$

$$z_1/z_2 = r_1/r_2 e^{i(\varphi_1-\varphi_2)},$$

$$z^n = r^n \mathrm{e}^{in\varphi},$$

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\mathrm{e}^{i\frac{\varphi+2\pi k}{n}}, \quad k = 0, 1, \ldots, (n-1).$$

Преобразуем показательную форму

$$z = r\mathrm{e}^{i(\varphi+2\pi k)} = \mathrm{e}^{\ln r + i(\varphi+2\pi k)}, \quad \varphi \in (-\pi, \pi].$$

Поэтому естественно считать, что

$$\mathrm{Ln}\, z = \ln r + i(\varphi + 2\pi k), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Это **логарифмическая функция комплексного числа** и она является многозначной функцией. При $k = 0$ получаем **главное значение логарифма**:

$$\ln z = \ln r + i\varphi$$

и

$$\mathrm{Ln}\, z = \ln z + 2\pi k i.$$

Если забыть про многозначность некоторых комплексных функций, можно получить много противоречий.

$$\pi i = \ln(-1) = \ln((-i)^2) = 2\ln(-i) = 2\left(-i\frac{\pi}{2}\right) = -i\pi.$$

Пусть $a, b \in \mathbb{C}$. Тогда

$$a = \mathrm{e}^{\mathrm{Ln}\, a}.$$

Следовательно,

$$a^b = \mathrm{e}^{b\mathrm{Ln}\, a}.$$

Это – **показательная функция** с произвольным основанием и она тоже является многозначной функцией. Например,

$$i^i = \mathrm{e}^{i\left(0+i\left(\frac{\pi}{2}+2\pi k\right)\right)} = \mathrm{e}^{-\frac{\pi}{2}-2\pi k}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$