5. Произведение линейных операторов.

Пусть в линейном пространстве L действуют два линейных оператора φ, ψ. Рассмотрим отображение задаваемое формулой $y = \psi(\varphi(x))$. Оно является композицией двух отображений и для краткости мы будем обозначать его: $\psi\varphi$. Таким образом, мы рассмотрим отображение

$$\psi\varphi : L \to L,$$

которое задается как $(\psi\varphi)(x) = \psi(\varphi(x))$.

Это отображение является линейным:

$$(\psi\varphi)(\lambda x + \mu y) = \psi(\lambda\varphi(x)) + \psi(\mu\varphi(y)) = \lambda(\psi\varphi)(x) + \mu(\psi\varphi)(y)$$

x, $y \in L$, λ, $\mu \in \mathbb{R}$. Введенный нами линейный оператор $\psi\varphi$ называют **произведением линейных операторов** ψ и φ.

Пусть A_ψ и A_φ – матрицы этих операторов в одном и том же базисе $B = (b_1, \ldots, b_n)$. Найдем матрицу оператора $\psi\varphi$. Пусть $x = BX$ $(X = (x_1, \ldots, x_n)^T)$

$$\psi(\varphi(x)) = \psi(\varphi(BX)) = \psi(BA_\varphi X) = \psi(B(A_\varphi X)) = B(A_\psi(A_\varphi X)) = B(A_\psi A_\varphi)X.$$

Таким образом, искомая матрица

$$A_{\psi\varphi} = A_\psi A_\varphi.$$

Ранее была доказана теорема, что ранг произведения двух матриц не превосходит ранга сомножителей. Так как ранг оператора равен рангу его матрицы, то получаем, что **ранг оператора, являющегося произведением двух операторов не превосходит ранга исходных операторов**.

6. Обратный оператор.

Если линейный оператор $\varphi : L \to L$ представляет собой биективное отображение, то существует обратное отображение $\varphi^{-1} : L \to L$.

Покажем, что это отображение – линейный оператор и найдем его матрицу.

Возьмем произволные $y_1, y_2 \in L$. Тогда найдутся $x_1, x_2 \in L$: $y_1 = \varphi(x_1)$, $y_2 = \varphi(x_2)$. Так как

$$\varphi(\lambda x_1 + \mu x_2) = \lambda\varphi(x_1) + \mu\varphi(x_2) = \lambda y_1 + \mu y_2$$

λ, $\mu \in \mathbb{R}$, то

$$\varphi^{-1}(\lambda y_1 + \mu y_2) = \lambda x_1 + \mu x_2 = \lambda\varphi^{-1}(y_1) + \mu\varphi^{-1}(y_2).$$

Таким образом, φ^{-1} – линейный оператор. Найдем теперь матрицу $A_{\varphi^{-1}}$. Произведение этих операторов – тождественное преобразование, поэтому

$$A_\varphi A_{\varphi^{-1}} = \mathbb{E} \quad \Rightarrow A_{\varphi^{-1}} = A_\varphi^{-1}.$$

7. Линейные пространства линейных операторов.

Обозначим через $\mathbb{L}(L, L')$ множество всех линейных операторов, действующих из линейного пространства L в линейное пространство L'. В этом множестве введем операции сложения линейных операторов и умножения линейного оператора на действительное число.

Суммой линейных операторов $\varphi, \psi \in \mathbb{L}(L, L')$ назовем оператор $\varphi + \psi \in \mathbb{L}(L, L')$, определяемый формулой

$$(\varphi + \psi)(x) = \varphi(x) + \psi(x).$$

Произведением линейного оператора φ на действительное число $\lambda \in \mathbb{R}$ назовем оператор $\lambda\varphi$, действующий согласно формуле

$$(\lambda\varphi)(x) = \lambda(\varphi(x)).$$

Линейность операторов $\varphi + \psi$, $\lambda\varphi$ можно доказать непосредственно.

Множество $\mathbb{L}(L, L')$ с введенными операциями сложения и умножения является линейным пространством над $\mathbb{R}$. Для этого нужно проверить аксиомы (**самостоятельно**)

1) сложение коммутативно;

2) сложение ассоциативно;

3) существует такой элемент $\mathbb{O}$ (нулевой оператор), что $\varphi + \mathbb{O} = \varphi$ для любого $\varphi \in \mathbb{L}$;

4) существует противоположный относительно сложения $-\varphi = (-1)\varphi$;

5) для любого $\varphi \in \mathbb{L}$: $1 \cdot \varphi = \varphi$;

6) умножение на число – ассоциативно: $\lambda(\mu\varphi) = (\lambda\mu)\varphi$;

7) выполнены свойства дистрибутивности: $(\lambda+\mu)\varphi = \lambda\varphi+\mu\varphi$; $\lambda(\varphi+\psi) = \lambda\varphi+\lambda\psi$ $(\lambda, \mu \in \mathbb{R})$.

Рассмотрим операторы действующие на L. Каждому линейному оператору $\varphi \in \mathbb{L}(L, L)$, действующему в n-мерном линейном пространстве L, в заданном базисе B соответствует квадратная матрица A_φ порядка n (матрица этого линейного оператора). Тем самым определено отображение

$$\Phi : \mathbb{L}(L, L) \to M_n(\mathbb{R})$$

из линейного пространства $\mathbb{L}(L, L)$ в линейное пространство $M_n(\mathbb{R})$ квадратных матриц порядка n с действительными коэффициентами, при этом $\Phi(\varphi) = A_\varphi$.

Теорема 8. Пусть в n-мерном линейном пространстве L задан некоторый базис B. Тогда отображение $\Phi : \mathbb{L}(L, L) \to M_n(\mathbb{R})$, сопоставляющее каждому линейному оператору его матрицу в базисе B, является изоморфизмом линейных пространств $\mathbb{L}(L, L)$ и $M_n(\mathbb{R})$.

Доказательство. Согласно доказанным ранее теоремам, отображение Φ является биективным (каждой матрице можно поставить в соответствие оператор и наоборот (Теорема 4); различным операторам в одном и том же базисе соответствуют различные матрицы (Теорема 5)).

Осталось показать его линейность. Рассмотрим два оператора φ и ψ и произвольный элемент $x \in L$.

$$(\varphi + \psi)(x) = \varphi(x) + \psi(x) = BA_\varphi X + BA_\psi X = B(A_\varphi + A_\varphi)X.$$

Значит, суммарный оператор имеет матрицу равную сумме матриц $A_\varphi + A_\varphi$.

$$(\lambda\varphi)(x) = \lambda(\varphi(x)) = \lambda(BA_\varphi X) = B(\lambda A_\varphi)X$$

При умножении на число матрица оператора умножается на это же число. Таким образом, линейность выполнена ■

Линейные операторы (продолжение).

8. Собственные числа и собственные векторы оператора.

Рассмотрим оператор $\varphi \in \mathbb{L}(L, L)$. Если существует ненулевой $x \in L$ и $\lambda \in \mathbb{R}$ такие, что

$$\varphi(x) = \lambda x, \qquad (*)$$

то λ – **собственное число** оператора, x – **собственный вектор**. Совокупность всех собственных чисел оператора φ называется **спектром** оператора.

Для поиска спектра и собственных векторов оператора поступают следующим образом. Выбирают произвольный базис B пространства L и строят матрицу A_φ оператора в этом базисе. Пусть X – столбец координат вектора x в этом базисе, тогда (*) преобразуется к матричному виду

$$A_\varphi X = \lambda X \quad \Rightarrow \quad A_\varphi X = \lambda E X \quad \Rightarrow \quad (A_\varphi - \lambda E)X = 0. \qquad (**)$$

(E – единичная матрица). Можно расписать это равенство как квадратную систему линейных однородных уравнений. Известно, что ненулевое решение у такой системы будет, если

$$\det(A_\varphi - \lambda E) = 0.$$

Это уравнение называется **характеристическим уравнением**, а левая часть его – **характеристическим многочленом**. Его ***вещественные*** корни называют **собственными числами оператора**. Решая систему (**) (методом Гаусса) при конкретном найденном собственном числе λ находим собственные векторы.

Может показаться, что если мы вместо базиса B выберем другой базис C, то решение задачи изменится. Но на самом деле нет. Если старый и новый базис связаны соотношением $C = BU$ (U – матрица перехода), то $A^c_\varphi = U^{-1} A^b_\varphi U$. Составим характеристическое уравнение с матрицей A^c_φ:

$$\det(A^c_\varphi - \lambda E) = \det(U^{-1} A^b_\varphi U - \lambda E) = \det(U^{-1} A^b_\varphi U - \lambda U^{-1} E U) =$$
$$= \det(U^{-1}(A^b_\varphi - \lambda E)U) = \det(U^{-1}) \det(A^b_\varphi - \lambda E) \det(U) = \det(A^b_\varphi - \lambda E).$$

Значит, независимо от базиса, характеристический многочлен одинаков.

Пример 5. Пусть

$$A_\varphi = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 4 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Составим характеристическое уравнение

$$\det\left(A_\varphi - \lambda E\right) = \begin{vmatrix} -1-\lambda & 1 & -1 \\ 4 & -1-\lambda & 2 \\ 0 & -2 & 2-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda-1)^2(\lambda+2) = 0.$$

Собственные числа: $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -2$.

Найдем собственные векторы. Если $\lambda = 1$, тогда система на собственные векторы имеет вид

$$(A_\varphi - E)X = 0.$$

Её решением будет

$$X = (C, -2C, -4C)^T, \quad C \neq 0.$$

Если $\lambda = -2$, тогда система на собственные векторы имеет вид

$$(A_\varphi + 2E)X = 0.$$

Её решением будет

$$X = (C, -2C, C)^T, \quad C \neq 0 \quad \blacksquare$$

Собственных чисел не может быть больше n (n – порядок матрицы оператора A_φ), так как характеристическое уравнение – алгебраическое уравнение порядка n. Нужно обратить внимание на то, что матрица оператора не обязана быть симметричной, поэтому не все корни характеристического уравнения обязаны быть вещественными. Поэтому собственных чисел может быть меньше n (сравните с соответствующей ситуацией для матрицы квадратичной формы).

Каждому собственному значению отвечают свои собственные векторы, причем таких бесконечно много. Действительно, если x – собственный вектор линейного оператора φ с собственным значением λ, т.е. $\varphi(x) = \lambda x$ или $A_\varphi X = \lambda X$, то для любого ненулевого действительного числа α имеем $\alpha X \neq 0$ и

$$A_\varphi(\alpha X) = \alpha A_\varphi X = \alpha(\lambda X) = \lambda(\alpha X).$$

Значит, и вектор αX является для линейного оператора собственным.

Множество всех собственных векторов, отвечающих данному собственному значению линейного оператора, не является линейным подпространством, так как это множество не содержит нулевого вектора, который, по определению, не может быть собственным. Но это формальное и легко устранимое препятствие является единственным. Обозначим через $L(\varphi, \lambda)$ множество всех собственных векторов линейного оператора φ в линейном пространстве L, отвечающих собственному значению λ, с добавленным к этому множеству нулевым вектором.

Теорема 9. Множество $L(\varphi, \lambda)$ является линейным подпространством в L.

Доказательство. Выберем произвольные два вектора $x, y \in L(\varphi, \lambda)$ и докажем, что для любых действительных α и β вектор $\alpha x + \beta y$ также принадлежит $L(\varphi, \lambda)$. Для этого вычислим образ этого вектора под действием линейного оператора φ:

$$\varphi(\alpha x + \beta y) = \alpha\varphi(x) + \beta\varphi(y) = \alpha(\lambda x) + \beta(\lambda y) = \lambda(\alpha x + \beta y).$$

Таким образом, вектор $\alpha x + \beta y$, если он ненулевой, тоже является собственным и принадлежит $L(\varphi, \lambda)$. Если он нулевой, то по определению принадлежит $L(\varphi, \lambda)$ ■

Линейное подпространство $L(\varphi, \lambda)$ иногда называют собственным подпространством линейного оператора. Оно является частным случаем **инвариантного подпространства** линейного оператора φ – **такого линейного подпространства H, что для любого вектора $x \in H$ вектор $\varphi(x)$ также принадлежит H.**

Инвариантным подпространством линейного оператора является также линейная оболочка любой системы его собственных векторов. Инвариантным подпространством линейного оператора, не связанным с его собственными векторами, является образ оператора.

Линейный оператор $\varphi : L \to L$ можно рассматривать как линейное отображение любого своего инвариантного пространства H в себя. Такое отображение, по сути, есть результат сужения отображения φ на линейное подпространство H, и его называют **ограничением линейного оператора на инвариантное подпространство H.**

Свойства собственных векторов.

Свойство 1. Если $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ $(k \leqslant n)$– различные собственные числа оператора φ, тогда соответствующие собственные векторы $x_1, \ldots, x_k$ линейно независимы.

Доказательство:

Доказательство опирается на метод математической индукции, проводимый по количеству k векторов в системе.

При $k = 1$ утверждение теоремы верно, так как линейная независимость системы из одного вектора означает, что этот вектор ненулевой, а собственный вектор, согласно определению, является ненулевым.

Пусть утверждение верно для k собственных векторов. Добавим к системе векторов еще один собственный вектор x_{k+1}, отвечающий собственному значению λ_{k+1}, и докажем, что расширенная таким способом система векторов останется линейно независимой. Рассмотрим произвольную линейную комбинацию полученной системы собственных векторов и предположим, что она равна нулевому вектору:

$$\alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_k x_k + \alpha_{k+1} x_{k+1} = \mathbb{O}. \qquad (*)$$

К этому равенству применим линейный оператор φ результате получим еще одно векторное равенство

$$\alpha_1 \varphi(x_1) + \ldots + \alpha_k \varphi(x_k) + \alpha_{k+1} \varphi(x_{k+1}) = \mathbb{O}.$$

Так как эти векторы собственные, то

$$\alpha_1 \lambda_1 x_1 + \ldots + \alpha_k \lambda_k x_k + \alpha_{k+1} \lambda_{k+1} x_{k+1} = \mathbb{O}. \qquad (**)$$

Умножим равенство (*) на λ_{k+1} и вычтем из (**). Получим:

$$\alpha_1(\lambda_1 - \lambda_{k+1}) x_1 + \ldots + \alpha_k(\lambda_k - \lambda_{k+1}) x_k = \mathbb{O}.$$

В виду линейной независимости $x_1, \ldots, x_k$ и так как все собственные числа различны, получаем, что

$$\alpha_1 = \ldots = \alpha_k = 0.$$

Поэтому (*) принимает вид

$$\alpha_{k+1} x_{k+1} = \mathbb{O}.$$

Так как x_{k+1} – ненулевой, то $\alpha_{k+1} = 0$. Это означает, что система векторов $x_1, \ldots, x_k, x_{k+1}$ – линейно независима ■

Свойство 2. Матрица A_φ линейного оператора φ, действующего в линейном пространстве, в данном базисе является диагональной тогда и только тогда, когда все векторы этого базиса являются собственными для оператора φ.

Доказательство:

Пусть A_φ – матрица линейного оператора φ в базисе $B = (b_1, \ldots, b_n)$. Согласно определению матрицы оператора j-ым столбцом матрицы A_φ является столбец координат вектора $\varphi(b_j)$.

Если матрица A_φ является диагональной, то произвольно взятый её j-ый столбец имеет вид $(0 \ldots 0 \mu_j 0 \ldots 0)^T$ (единственный ненулевой элемент μ_j может стоять только на j-ом месте). Для вектора $\varphi(b_j)$ получаем представление

$$\varphi(b_j) = (b_1, \ldots, b_j, \ldots, b_n) \begin{pmatrix} 0 \\ \ldots \\ \mu_j \\ \ldots \\ 0 \end{pmatrix} = \mu_j b_j,$$

которое как раз и означает, что вектор b_j является собственным с собственным значением μ_j. Значит, все базисные векторы являются собственными, а все диагональные элементы матрицы A_φ являются собственными значениями.

Верно и обратное. Если каждый вектор b_j является собственным для линейного оператора φ и ему отвечает собственное значение λ_j, то

$$\varphi(b_j) = \lambda_j b_j = (b_1, \ldots, b_j, \ldots, b_n) \begin{pmatrix} 0 \\ \ldots \\ \lambda_j \\ \ldots \\ 0 \end{pmatrix},$$

т.е. в матрице оператора A_φ в этом базисе равны нулю все элементы, кроме диагональных, а диагональный элемент в j-м столбце равен λ_j ■

Свойство 3. Пусть оператор φ имеет n различных собственных чисел $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Тогда в некотором базисе его матрица будет диагональной, причём диагональными элементами будут собственные числа.

Доказательство:

По свойству 2, если в качестве базиса взять соответствующие собственные векторы $b_1, \ldots, b_n$ (они линейно независимы по свойству 1), то в этом базисе $A_\varphi = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ ■

Замечание к свойству 3: Если характеристическое уравнение линейного оператора имеет кратные действительные корни, то такой линейный оператор может в принципе иметь диагональную матрицу в некотором базисе, но так бывает не всегда.

Пример 6. Рассмотрим две матрицы, определяющие некоторые операторы

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Характеристическое уравнение для операторов с этими матрицами одинаково $(\lambda - 2)^2 = 0$. Значит, есть только одно собственное значение $\lambda = 2$. В первом случае матрица диагональная, значит, уже записана через собственные векторы (свойство 2). В втором случае собственный вектор (линейно независимый) один. Действительно, в этом случае система на собственные векторы имеет вид

$$(A_2 - 2E)X = 0 \quad \Rightarrow \begin{cases} (2-2)x_1 + x_2 = 0, \\ 2x_2 = 0. \end{cases} \quad \Rightarrow X = (C, 0)^T,$$

следовательно, базис из собственных векторов составить невозможно (в базисе должно быть два линейно независимых вектора) ■

При исследовании линейного оператора, действующего в линейном пространстве, желательно выбирать базис так, чтобы матрица линейного оператора имела наиболее простой вид – диагональный. Согласно свойству 2, такой вид имеет матрица оператора имеющего n различных собственных векторов (они будут играть роль базиса линейного пространства). Это возможно, если линейный оператор имеет n различных собственных чисел. Такая же ситуация будет и в случае кратных корней, если каждому корню соответствуют собственные векторы в количестве, равном кратности корней. Если оператор имеет n линейно независимых собственных векторов (n – размерность L), то такой оператор называется **оператором простой структуры**. Матрица оператора простой структуры в этом базисе является диагональной.

Возникает вопрос, к какому виду наиболее простому виду можно привести матрицу оператора, если линейно независимых собственных векторов недостаточно (в случае вещественных корней) или характеристическое уравнение имеет комплексные корни.

Дадим небольшой обзор того к какой более простой структуре можно привести матрицу линейного оператора в этих случаях.

1. Если характеристическое уравнение линейного оператора $\varphi : L \to L$ имеет p пар комплексно сопряженных корней $\alpha_k \pm \beta_k i$ $(k = 1, \ldots, p)$ и q различных действительных корней μ_j $(j = 1, \ldots, q)$ $(2p + q = \dim L)$, то в некотором базисе матрица этого оператора имеет вид

$$\begin{pmatrix} C(\alpha_1, \beta_1) & & & & & 0 \\ & \ldots & & & & \\ & & C(\alpha_p, \beta_p) & & & \\ & & & \mu_1 & & \\ & & & & \ldots & \\ 0 & & & & & \mu_q \end{pmatrix},$$

где $C(\alpha, \beta) = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}$.

Например, если характеристическое уравнение для некоторого оператора имеет вид

$$\lambda^3 + \lambda^2 - \lambda + 15 = 0 \quad \Rightarrow (\lambda + 3)(\lambda^2 - 2\lambda + 5) = 0,$$

то собственными числами будут $\lambda_{1,2} = 1 \pm 2i$, $\lambda_3 = -3$. Значит, в некотором базисе матрица этого оператора имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

2. Если характеристическое уравнение оператора имеет кратные корни, действительные или комплексные, то матрица оператора приводится к более сложной структуре. Рассмотрим два типа специальных матриц. Для произвольного действительного числа μ введем обозначение матрицы порядка s:

$$J_s(\mu) = \begin{pmatrix} \mu & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \mu & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \mu \end{pmatrix},$$

у этой матрицы все диагональные элементы равны μ, над главной диагональю расположены элементы 1, а все остальные равны нулю. В случае $s = 1$ рассматриваемая матрица сводится к единственному числу μ. Для любой пары комплексных чисел $\lambda = \alpha \pm i\beta$ введем обозначение блочной матрицы порядка $2r$

$$C_r(\alpha,\beta) = \begin{pmatrix} C(\alpha,\beta) & E & \mathbb{O} & \dots & \mathbb{O} & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & C(\alpha,\beta) & E & \dots & \mathbb{O} & \mathbb{O} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbb{O} & \mathbb{O} & \mathbb{O} & \dots & C(\alpha,\beta) & E \\ \mathbb{O} & \mathbb{O} & \mathbb{O} & \dots & \mathbb{O} & C(\alpha,\beta) \end{pmatrix},$$

где E, $\mathbb{O}$ – квадратные матрицы порядка 2 (единичная и нулевая). Блочно-диагональную матрицу вида

$$A = \begin{pmatrix} C_{r_1}(\alpha_1,\beta_1) & & & & & \mathbb{O} \\ & \dots & & & & \\ & & C_{r_m}(\alpha_m,\beta_m) & & & \\ & & & J_{s_1}(\mu_1) & & \\ & & & & \dots & \\ \mathbb{O} & & & & & J_{s_p}(\mu_p) \end{pmatrix},$$

где α_i, β_i, μ_i – действительные числа, называют **жордановой**, ее диагональные блоки – **жордановыми клетками**.

Для любого оператора существует базис, в котором матрица оператора имеет жорданову нормальную форму.

Все рассматриваемые выше нормальные формы – частные случаи жордановой нормальной формы.

Заметим, что в жордановой нормальной форме $\alpha_k \pm \beta_k i$ $(k = 1, \ldots, m)$ – комплексные корни характеристического уравнения, μ_j $(j = 1, \ldots, p)$ – действительные корни характеристического уравнения оператора. Среди этих корней могут быть одинаковые.

Жорданова нормальная форма определяется неоднозначно, так как подходящими преобразованиями подобия можно переставлять диагональные блоки (перестановка блоков в матрице линейного оператора вызывается перестановкой соответствующих векторов базиса). Среди жордановых клеток жордановой матрицы могут встречаться одинаковые. Однако можно утверждать, что если две жордановы матрицы подобны, то одна получается из другой перестановкой диагональных блоков. Это объясняется тем, что каждая жорданова клетка вида $J_s(\mu)$ определяется собственным значением μ матрицы, а жорданова клетка $C_r(\alpha, \beta)$ - комплексной парой корней $\alpha \pm \beta i$ характеристического уравнения матрицы.

Алгоритм построения жордановой нормальной формы матрицы оператора в случае кратных корней подробно описан в литературе, но не является предметом рассмотрения нашего курса алгебры. При необходимости его можно изучить самостоятельно, либо прибегнуть к услугам компьютерных математических пакетов, в которых эти алгоритмы уже заложены.

9. Сопряженный оператор

Пусть E – евклидово пространство.

Линейный оператор $\varphi^*\colon E \to E$ называют сопряженным к линейному оператору $\varphi\colon E \to E$, если для любых векторов $x, y \in E$ верно равенство

$$(\varphi(x), y) = (x, \varphi^*(y))$$

(внешние скобки обозначают скалярное произведение). Знак $*$ в верхнем индексе оператора – знак сопряжённого оператора.

Свойства сопряженного оператора

1. Любому линейному оператору φ соответствует единственный сопряженный оператор φ^*, причем его матрицей в любом ***ортонормированном*** базисе e является матрица, которая равна транспонированной матрице A_φ линейного оператора φ в том же базисе e, (т.е. $A_{\varphi^*} = A_\varphi^T$). (без доказательства).

2. $I^* = I$ (I – тождественный оператор)

Доказательство: по определению сопряженного оператора $\forall x, y \in E$ должно выполнятся $(I(x), y) = (x, I^*(y))$ или $(x, y) = (x, I^*(y))$. Тогда по свойствам скалярного произведения

$y = I^*(y)$. Это означает, что $I^* = I$ ■

3. $(\lambda\varphi + \mu\psi)^* = \lambda\varphi^* + \mu\psi^*$

Доказательство: По определению сопряженного оператора мы должны показать, что

$$((\lambda\varphi + \mu\psi)(x), y) = (x, (\lambda\varphi^* + \mu\psi^*)(y))$$

Преобразуем обе части равенства по свойствам скалярного произведения с использованием свойства линейности операторов:

$$\lambda(\varphi(x), y) + \mu(\psi(x), y) = \lambda(x, \varphi^*(y)) + \mu(x, \psi^*(y)).$$

Так как

$$(\varphi(x), y) = (x, \varphi^*(y)) \quad \text{и} \quad (\psi(x), y) = (x, \psi^*(y)),$$

то последнее и, следовательно, исходное доказываемое равенство верны ■

4. $(\varphi^*)^* = \varphi$ (доказать самостоятельно)

5. $(\varphi\psi)^* = \psi^*\varphi^*$

Доказательство: По определению сопряженного оператора имеем следующую цепочку выражений

$$(\varphi(\psi(x)), y) = (\psi(x), \varphi^*(y)) = (x, \psi^*(\varphi^*(y))) \quad ■$$

Пример 7. Рассмотрим трехмерное пространство векторов V^3. Фиксируем некоторый вектор $a \in V^3$. Определим оператор $\varphi : V^3 \to V^3$ следующим образом $\varphi(x) = a \times x$. Можно доказать, что этот оператор линейный (доказать самостоятельно). Найдем сопряженный к нему.

$$(\varphi(x), y) = (a \times x, y) = [\text{свойства смешанного произведения}] =$$

$$= axy = yax = xya = (x, y \times a) = (x, -a \times y) = (x, -\varphi(y)).$$

Значит,

$$\varphi^* = -\varphi.$$

10. Самосопряженный оператор

Линейный оператор φ: $E \to E$ называют **самосопряженным**, если $\varphi = \varphi^*$, т.е. для любых векторов $x, y \in E$ верно равенство

$$(\varphi(x), y) = (x, \varphi(y))$$

Пример 8. Самосопряженными являются нулевой и тождественный оператор:

$$(\mathbb{O}x, y) = (\mathbb{O}, y) = 0 = (x, \mathbb{O}y).$$

$$(Ix, y) = (x, y) = (x, Iy).$$

Свойства самосопряженного оператора

Свойство 1. Матрица самосопряженного оператора в любом ортонормированном базисе является симметрической. Наоборот, если матрица линейного оператора в некотором ортонормированном базисе является симметрической, то этот оператор – самосопряженный.

Доказательство. В ортонормированном базисе тот факт, что оператор сопряжён сам себе равносилен тому, что $A_\varphi = A_\varphi^T$. Это означает, что матрица оператора – симметрическая.

Свойство 2. Собственные числа самосопряженного оператора вещественны.

Доказательство. Так как характеристическое уравнение не зависит от выбора базиса, то выберем ортонормированный базис. В этом базисе матрица оператора симметрическая. Было доказано ранее, что все собственные числа вещественной симметрической матрицы – вещественны.

Свойство 3. Собственные векторы самосопряженного оператора, отвечающие различным собственным числам ортогональны.

Доказательство. Пусть $\varphi(x_1) = \lambda_1 x_1$, $\varphi(x_2) = \lambda_2 x_2$, $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Вычислим скалярные произведения

$$(\varphi(x_1), x_2) = (\lambda_1 x_1, x_2) = \lambda_1(x_1, x_2).$$

С другой стороны, так как $\varphi(x)$ – самосопряжённый

$$(\varphi(x_1), x_2) = (x_1, \varphi(x_2)) = (x_1, \lambda_2 x_2) = \lambda_2(x_1, x_2).$$

Приравняем полученные выражения. Тогда

$$(\lambda_1 - \lambda_2)(x_1, x_2) = 0.$$

Но $\lambda_1 \neq \lambda_2$, значит $(x_1, x_2) = 0$.

Свойство 4. Если самосопряженный оператор действует в n-мерном пространстве, то он имеет ровно n характеристических корней, если каждый корень считать столько раз, какова его кратность.

Доказательство. Так как характеристическое уравнение не зависит от выбора базиса, то выберем ортонормированный базис. В этом базисе матрица оператора симметрическая. Было доказано ранее, что все собственные числа вещественной симметрической матрицы – вещественны. Поэтому характеристическое уравнение имеет n вещественных корней с учётом кратности.

Свойство 5. Если n собственных значений самосопряженного оператора, действующего в n-мерном евклидовом пространстве, попарно различны, то существует ортонормированный базис, в котором матрица этого линейного оператора имеет диагональный вид, причем диагональными элементами такой матрицы являются собственные значения оператора.

Доказательство. Если n собственных значений самосопряженного оператора, действующего в n-мерном евклидовом пространстве, попарно различны, то по свойству 3 собственных векторов оператора, существует базис, в котором матрица этого оператора диагональна. Этот базис состоит из собственных векторов. По свойству 3 самосопряжённых операторов собственные векторы, соответствующие различным собственным числам ортогональны, значит, этот базис ортогональный. Этот базис можно нормировать, поделив их на их длину. При этом они останутся ортогональными. Поэтому базис будет ортонормированным. При этом на диагонали в матрице оператора находятся собственные числа.