Метод Якоби приведения квадратичной формы к каноническому виду.

Пусть $f(x_1, \ldots, x_n)$ – квадратичная форма с матрицей коэффициентов

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Обозначим A_k $(k = 1, \ldots, n)$ – субматрицы, расположенные на пересечении первых k строк и k столбцов:

$$A_1 = (a_{11}), \quad A_2 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad \ldots, \quad A_n = A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Их определители будем называть угловыми минорами и обозначать Δ_k. Справедлива следующая теорема

Теорема. Если все угловые миноры, кроме быть может Δ_n отличны от нуля, то существует унитреугольное линейное преобразование, приводящее форму f к каноническому виду

$$g(y_1, \ldots, y_n) = \Delta_1 y_1^2 + \frac{\Delta_2}{\Delta_1} y_2^2 + \ldots + \frac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}} y_n^2.$$

В доказательстве теоремы Якоби дается способ нахождения этого унитреугольного преобразования. Коротко изложим его без приведения самого доказательства.

Итак, пусть матрица искомого унитреугольного преобразования имеет вид

$$P = \begin{pmatrix} 1 & p_{12} & p_{13} & \ldots & p_{1,n-1} & p_{1,n} \\ 0 & 1 & p_{23} & \ldots & p_{2,n-1} & p_{2,n} \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & p_{3,n-1} & p_{3,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & p_{n-1,n} \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Рассмотрим усечённые неизвестные столбцы матрицы P

$$P_2 = (p_{12}), \quad P_3 = \begin{pmatrix} p_{13} \\ p_{23} \end{pmatrix}, \quad P_4 = \begin{pmatrix} p_{14} \\ p_{24} \\ p_{34} \end{pmatrix}, \quad \ldots, \quad P_n = \begin{pmatrix} p_{1n} \\ \ldots \\ p_{n-1n} \end{pmatrix}$$

и соответствующие усечённые столбцы матрицы A

$$\alpha_2 = (a_{12}), \quad \alpha_3 = \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \end{pmatrix}, \quad \alpha_4 = \begin{pmatrix} a_{14} \\ a_{24} \\ a_{34} \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad \alpha_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \dots \\ a_{n-1n} \end{pmatrix},$$

тогда столбцы P_k определяются как решения матричных уравнений

$$A_{k-1}P_k = -\alpha_k \quad (k = 2, \dots, n) \tag{3}$$

(без доказательства). A_{k-1} – обратима (определитель $\Delta_{k-1} \neq 0$), следовательно решение существует и единственно:

$$P_k = -A_{k-1}^{-1}\alpha_k.$$

Находить обратные матрицы A_{k-1}^{-1} – дело трудоемкое, поэтому на практике оказывается проще решать соответствующие системы линейных уравнений (методом Гаусса). При $k = 2$ из (3) получаем $A_1 P_2 = -\alpha_2$ или

$$a_{11}p_{12} = -a_{12},$$

при $k = 3$ получаем $A_2 P_3 = -\alpha_3$ или

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_{13} \\ p_{23} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \end{pmatrix} \tag{4}$$

и т.д.

Если для решения этих систем воспользоваться правилом Крамера, то можно показать, что

$$p_{ik} = \frac{\Delta_k^{(k,i)}}{\Delta_{k-1}}, \quad k = 2, 3, \dots, n, \quad i = 1, 2 \dots, k-1, \tag{5}$$

где $\Delta_k^{(k,i)}$ – алгебраическое дополнение элемента a_{ki} минора Δ_k.

Так, например, если систему (4) решать по формулам Крамера, то

$$p_{13} = \frac{\begin{vmatrix} -a_{13} & a_{12} \\ -a_{23} & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}},$$

а если работать по формулам (5), то

$$p_{13} = \frac{\Delta_3^{(3,1)}}{\Delta_2} = \frac{(-1)^{1+3} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}.$$

Очевидно, что получили одно и то же.

САМОСТОЯТЕЛЬНО проверить так же для p_{23}.

Ранг квадратичной формы.

В терминах матриц теорема о приведении квадратичной формы к каноническому виду означает, что для данной симметричной матрицы A существует такая невырожденная матрица B, что $B^T AB = D$, где D – диагональная матрица (в этом случае говорят, что A и D – ***конгруэнтны***). Обозначив $C = B^{-1}$, получим $A = C^T DC$. Из доказательства теоремы ясно, что приведение квадратичной формы к каноническому виду может осуществляться бесконечным множеством способов – например, можно сделать произвольную линейную подстановку, а затем приступить к “выделению квадратов”. Поэтому матрицы B и D определяются неоднозначно. Однако число ненулевых элементов матрицы D однозначно определено, именно, оно равно рангу матрицы A (этот ранг называют **рангом квадратичной формы**).

Для доказательства последнего факта установим сначала справедливость следующих предложений.

Предложение 1. Ранг произведения двух матриц (не обязательно квадратных) не превосходит ранга каждого из сомножителей.

Доказательство. Столбцы матрицы AB являются линейными комбинациями столбцов матрицы A

$$AB = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nm} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + \ldots + a_{1n}b_{n1}, & \dots, & a_{11}b_{1m} + a_{12}b_{2m} + \ldots + a_{1n}b_{nm} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + \ldots + a_{2n}b_{n1}, & \dots, & a_{21}b_{1m} + a_{22}b_{2m} + \ldots + a_{2n}b_{nm} \\ \dots & \dots, & \dots \\ a_{k1}b_{11} + a_{k2}b_{21} + \ldots + a_{kn}b_{n1}, & \dots, & a_{k1}b_{1m} + a_{k2}b_{2m} + \ldots + a_{kn}b_{nm} \end{pmatrix}$$

$$\left(b_{11}\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{k1} \end{pmatrix} + b_{21}\begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \dots \\ a_{k2} \end{pmatrix} + \ldots b_{n1}\begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \dots \\ a_{kn} \end{pmatrix}, \ldots, b_{1m}\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{k1} \end{pmatrix} + b_{2m}\begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \dots \\ a_{k2} \end{pmatrix} + \ldots b_{nm}\begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \dots \\ a_{kn} \end{pmatrix} \right)$$

Поэтому ранг AB, равный максимальному числу линейно, независимых столбцов, не превосходит ранга A. С другой стороны, аналогично, строки AB являются линейными комбинациями строк B, поэтому ранг AB не превосходит ранга B ■

Предложение 2. Если один из сомножителей в произведении AB есть квадратная невырожденная матрица, то ранг произведения равен рангу другого сомножителя.

Доказательство. Действительно, пусть $C = AB$ и B – невырожденная квадратная матрица. Тогда ранг C не превосходит ранга A (Предложение 1). Но $A = CB^{-1}$, так что ранг A не превосходит ранга C. Следовательно, эти ранги равны. Аналогичное рассуждение применимо к случаю, если левый сомножитель есть квадратная невырожденная матрица. ■

Из предложения 2 непосредственно следует: если $F = BAC$, где B и C – невырожденные квадратные матрицы, то ранги матриц F и A совпадают. (Действительно, дважды применяя Предложение 2: $\mathrm{rang}(F) = \mathrm{rang}(BAC) = \mathrm{rang}(BA) = \mathrm{rang}(A)$)

Применяя это к матричному равенству $A = C^T DC$ где C – невырожденная квадратная матрица, получим, что ранги D и A совпадают. Но ранг диагональной матрицы D, очевидно, равен числу ее ненулевых элементов. Итак, **число ненулевых коэффициентов после приведения квадратичной формы к каноническому виду не зависит от способа приведения и равно рангу матрицы квадратичной формы**.

Знак квадратичной формы.

Квадратичная форма называется **положительно определенной**, если все ее значения при вещественных значениях переменных, не равных одновременно нулю, положительны.

Например, $f(x_1, \ldots, x_n) = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2$

Квадратичная форма называется **отрицательно определенной**, если все ее значения отрицательны, за исключением нулевого значения при нулевых значениях переменных.

Например, $f(x_1, \ldots, x_n) = -x_1^2 - x_2^2 - \ldots - x_n^2$

Квадратичная форма называется **положительно полуопределенной**, если она не принимает отрицательных значений, причём нулевое значение принимается при некотором ненулевом наборе переменных.

Например, $f(x_1, \ldots, x_n) = x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 = (x_1 - x_2)^2$ положительно полуопределена.

Другой пример: $x_1^2 + x_2^2$ – как форма от двух переменных положительно определена, а как форма большего числа переменных положительно полуопределена.

Квадратичная форма называется **отрицательно полуопределенной**, если она не принимает положительных значений, причём нулевое значение принимается при некотором ненулевом наборе переменных.

Квадратичные формы, принимающие, как положительные, так и отрицательные значения, называются **неопределенными**.

Для $n = 1$ ненулевая квадратичная форма $a_{11}x_1^2$ либо положительно определена (при $a_{11} > 0$), либо отрицательно определена (при $a_{11} < 0$). Неопределенные формы появляются, начиная с $n = 2$.

Теорема 1. Для того чтобы квадратичная форма была положительно определенной, необходимо и достаточно, чтобы после приведения ее к каноническому виду все коэффициенты при квадратах новых переменных были положительны.

Доказательство. Пусть форма $f(x_1, \dots, x_n)$ преобразуется в каноническую $\alpha_1 y_1^2 + \ldots + \alpha_n y_n^2$ посредством линейной подстановки с невырожденной матрицей:

$$\begin{aligned} x_1 &= b_{11}y_1 + \ldots + b_{1n}y_n \\ &\ldots \\ x_n &= b_{n1}y_1 + \ldots + b_{nn}y_n. \end{aligned} \tag{$*$}$$

Эта подстановка обратима

$$\begin{aligned} y_1 &= c_{11}x_1 + \ldots + c_{1n}x_n \\ &\ldots \\ y_n &= c_{n1}x_1 + \ldots + c_{nn}x_n. \end{aligned} \tag{$**$}$$

Если $\alpha_1, \dots, \alpha_n > 0$,то $\alpha_1 y_1^2 + \ldots + \alpha_n y_n^2 \geqslant 0$, причем равенство нулю имеет место только при $y_1 = \ldots = y_n = 0$, а следовательно, глядя на подстановку, только при $x_1 = \ldots = x_n = 0$.

Покажем обратное, что если форма положительно определена, то все $\alpha_i > 0$. Предположим противное: хотя бы один из коэффициентов $\alpha_i \leqslant 0$. Положим $y_i = 1$, $y_j = 0$ $(j \neq i)$. Из подстановки (*) найдем соответствующий ненулевой набор $x_1^*, \dots, x_n^*$. Этот набор существует, так как (*) – Крамеровская система и он ненулевой (иначе из (**) следовало бы, что $y_1 = \ldots = y_n = 0$). Тогда

$$f(x_1^*, \dots, x_n^*) = \alpha_i \leqslant 0.$$

Противоречие доказывает неверность предположения. Теорема доказана ■

Отметим в качестве следствия, что если при некотором преобразовании формы к каноническому виду все коэффициенты при квадратах новых переменных положительны, то и при всяком другом преобразовании коэффициенты канонической формы будут все положительны.

Теорема. Критерий Сильвестра положительности квадратичной формы. Для того чтобы квадратичная форма

$$\begin{array}{ccccccccccccc} f(x_1,x_2,\ldots,x_n) & = & a_{11}x_1^2 & + & a_{12}x_1x_2 & + & a_{13}x_1x_3 & + & \ldots & + & a_{1n}x_1x_n & + \\ & + & a_{21}x_2x_1 & + & a_{22}x_2^2 & + & a_{23}x_2x_3 & + & \ldots & + & a_{2n}x_2x_n & + \\ & + & a_{31}x_3x_1 & + & a_{32}x_3x_2 & + & a_{33}x_3^2 & + & \ldots & + & a_{3n}x_3x_n & + \\ & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ & + & a_{n1}x_nx_1 & + & a_{n2}x_nx_2 & + & a_{n3}x_nx_3 & + & \ldots & + & a_{nn}x_n^2 & \end{array}$$

была положительно определена, необходимо и достаточно, чтобы все угловые миноры её матрицы были положительны:

$$\Delta_1 = a_{11} > 0, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0, \ldots, \Delta_k = \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1k} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{k1} & \ldots & a_{kk} \end{vmatrix} > 0, \ldots, \Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} > 0.$$

(Без доказательства)

Итак, для выяснения положительной определенности квадратичной формы имеются два критерия. Естественно поставить вопрос о том, который из них лучше. Это зависит от ситуации.

Если квадратичная форма задана численно, то для приведения ее к каноническому виду требуется приблизительно столько же арифметических операций, как при вычислении одного определителя. Так что в этом случае первый критерий проще. Для теоретических же исследований лучше критерий Сильвестра, так как он дается простыми формулами.

Пример. $f(x_1,x_2) = 5x_1^2 - 4x_1x_2 + x_2^2 = x_1^2 + (2x_1 - x_2)^2 \geqslant 0$. Положительно определена, так при нулевом значении переменных обращается в ноль, в остальных случаях она строго больше нуля. Докажем положительную определённость через критерий Сильвестра:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \quad \Delta_1 = 5 > 0,\ \Delta_2 = 1 > 0.$$

Следствие 1. Для того чтобы квадратичная форма n переменных была отрицательно определена, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись неравенства

$$-\Delta_1 > 0,\ \Delta_2 > 0,\ -\Delta_3 > 0,\ \ldots,\ (-1)^n\Delta_n > 0.$$

Доказательство Если квадратичная форма $f(X)$ отрицательно определена, то квадратичная форма $-f(X)$ положительно определена, и наоборот. Матрицей квадратичной формы $-f(X)$

является матрица $(-A)$, противоположная матрице A квадратичной формы $f(X)$. Согласно критерию Сильвестра, для положительной определенности квадратичной формы $-f(X)$ необходимо и достаточно, чтобы все угловые миноры Δ'_k $(k = 1, \dots, n)$ матрицы $(-A)$ были положительны. Но при умножении матрицы A на число (-1) все ее элементы умножаются на это число, и поэтому $\Delta'_k = (-1)^k \Delta_k$ (Δ_k – угловой минор порядка k матрицы A). Значит, $(-1)^k \Delta_k > 0$ $(k = 1, \dots, n)$. ■

Пример $f(x_1, x_2) = -2x_1^2 - x_2^2 + 2x_1x_2 = -x_1^2 - (x_1 - 2x_2)^2 \leqslant 0$. Отрицательно определена, так при нулевом значении переменных обращается в ноль, в остальных случаях она строго меньше нуля. Покажем это с помощью предыдущего критерия.

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \Delta_1 = -2 < 0,\ \Delta_2 = 1 > 0$$

Следствие 2. Невырожденная квадратичная форма знакопеременна тогда и только тогда, когда для матрицы квадратичной формы выполнено хотя бы одно из условий:

- один из угловых миноров равен нулю;

- один из угловых миноров четного порядка отрицателен;

- два угловых минора нечетного порядка имеют разные знаки.

Доказательство Невырожденная квадратичная форма может быть либо положительно определенной, либо отрицательно определенной, либо знакопеременной – в зависимости от знаков коэффициентов в ее каноническом виде. (Полуопределённость возможна только для вырожденной формы, так как в каноническом виде полуопределённая форма будет иметь нулевые коэффициенты при квадратах некоторых новых переменных.) Если имеется нулевой угловой минор или один из угловых миноров четного порядка отрицателен, то, согласно Критерию Сильвестра и следствию 1 эта квадратичная форма не является ни положительно, ни отрицательно определенной. То же можно утверждать и в случае, когда есть два угловых минора нечетного порядка с разными знаками. Значит, в этих случаях квадратичная форма знакопеременная. ■

Критерий Сильвестра и его следствия показывают, что тип квадратичной формы полностью определяется свойствами ее матрицы. Поэтому про симметрические матрицы так же можно говорить, что они **положительно или отрицательно определены** и в этом случае пишут $A > 0$ $(A < 0)$.

Следствие 3. Если симметрическая матрица положительно определена, то все ее диагональные элементы положительны.

Доказательство Если $A = (a_{ij})$ – симметрическая положительно определенная матрица порядка n, то ее первый угловой минор положителен, т.е. $a_{11} = \Delta_1 > 0$. Воспользовавшись тем, что утверждение следствия верно для диагонального элемента a_{11}, докажем что и $a_{ii} > 0$ при $i > 1$. В квадратичной форме $f(X) = X^T AX$ сделаем замену переменных

$$x_k = y_k \, (k \neq 1, k \neq i), \quad x_1 = y_i, \quad x_i = y_1.$$

В новых переменных матрица $A' = (a'_{ij})$ квадратичной формы такова, что $a'_{11} = a_{ii}$. Так как в новых переменных форма остается положительно определенной, то $a_{ii} > 0$ ■

Обратное не верно! **КонтрПример:**

$$f(x_1, x_2) = 3x_1^2 + x_2^2 + 4x_1x_2 = -x_1^2 + (2x_1 + x_2)^2$$

Из преобразований видно, что форма знакопеременна. Это же следует из Следствия 2 (2 пункт):

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \Delta_1 = 3,\ \Delta_2 = -1 < 0(!).$$

Но диагональные элементы матрицы A положительны.

Закон инерции квадратичных форм.

Говоря о ранге квадратичных форм, мы выяснили, что при приведении её к каноническому виду ранг её сохраняется неизменным, т.е. неизменно в каноническом виде число ненулевых элементов одинаково (независимо от способа приведения её к каноническому виду). Но оказывается, что в каноническом виде независимо от способа приведения всегда неизменно число отрицательных и положительных элементов. Этот закон получил название – закон инерции квадратичных форм.

Теорема. Если квадратичная форма преобразована двумя способами к каноническому виду, то число квадратов новых переменных с положительными коэффициентами будет одинаково, так же как число квадратов новых переменных с отрицательными коэффициентами.

Доказательство. Пусть дана форма, приведенная к каноническому виду двумя способами:

$$\begin{aligned} f(X) &= \alpha_1 y_1^2 + \ldots + \alpha_p y_p^2 - \alpha_{p+1} y_{p+1}^2 - \ldots - \alpha_{p+q} y_{p+q}^2 = \\ &= \beta_1 z_1^2 + \ldots + \beta_s z_s^2 - \beta_{s+1} z_{s+1}^2 - \ldots - \beta_{s+t} z_{s+t}^2 \end{aligned}$$

Считаем, что все $\alpha_i, \beta_i > 0$, $p+q, s+t \leqslant n$ (не ограничивая общности предполагаем, что первые слагаемые в форме положительны, а последние отрицательны; могут быть нулевые слагаемые). Пусть исходные переменные связаны с новыми посредством следующих невырожденных преобразований:

$$
\begin{array}{ll}
x_1 = b_{11}y_1 + \ldots + b_{1n}y_n & x_1 = c_{11}z_1 + \ldots + c_{1n}z_n \\
\ldots & \ldots \\
x_n = b_{n1}y_1 + \ldots + b_{nn}y_n. & x_n = c_{n1}z_1 + \ldots + c_{nn}z_n.
\end{array} \qquad (6)
$$

Эта подстановка обратима

$$
\begin{array}{ll}
y_1 = d_{11}x_1 + \ldots + d_{1n}x_n & z_1 = e_{11}x_1 + \ldots + e_{1n}x_n \\
\ldots & \ldots \\
y_n = d_{n1}x_1 + \ldots + d_{nn}x_n. & z_n = e_{n1}x_1 + \ldots + e_{nn}x_n.
\end{array} \qquad (7)
$$

Допустим, что число положительных коэффициентов не одинаково. Будем считать, для определенности, что $p < s$. Положим

$$y_1 = 0, \ldots, y_p = 0, z_{s+1} = 0, \ldots, z_n = 0.$$

Имеем тогда линейную однородную систему (используем (7))

$$
\begin{cases}
y_1 = 0 = d_{11}x_1 + \ldots + d_{1n}x_n \\
\ldots \\
y_p = 0 = d_{p1}x_1 + \ldots + d_{pn}x_n, \\
z_{s+1} = 0 = e_{s+11}x_1 + \ldots + e_{s+1n}x_n \\
\ldots \\
z_n = 0 = e_{n1}x_1 + \ldots + e_{nn}x_n.
\end{cases}
$$

В этой однородной системе n переменных, а число уравнений равно $p + (n - s) < n$. Поэтому система имеет нетривиальные решения. Пусть $X^* = (x_1^*, \ldots, x_n^*)$ – одно из них. Из систем (6) находим соответствующие значения y: $y_1^* = 0, \ldots, y_p^* = 0, y_{p+1}^*, \ldots, y_n^*$ и соответствующие значения z: $z_1^*, \ldots, z_s^*, z_{s+1}^* = 0, \ldots, z_n^* = 0$. Среди чисел z_i^* есть отличные от нуля, иначе все $x_i^* = 0$ (следует из (6)). Среди чисел y_i^* есть отличные от нуля, иначе все $x_i^* = 0$ (следует из (6)).

Вычислим $f(X^*)$

$$f(X^*) = -\alpha_{p+1}(y_{p+1}^*)^2 - \ldots - \alpha_{p+q}(y_{p+q}^*)^2 < 0,$$

$$f(X^*) = \beta_1(z_1^*)^2 + \ldots + \beta_s(z_s^*)^2 > 0.$$

Противоречие доказывает, что наше предположение неверно.

Для установления равенства числа отрицательных коэффициентов достаточно перейти к форме $-f(X)$. Для любых двух её канонических форм (по только что доказанному) число положительных коэффициентов одинаково, а они в свою очередь являются отрицательными коэффициентами формы $f(X)$ ■

Если в каноническом виде квадратичная форма имеет p положительных и q отрицательных коэффициентов, то числа p и q называются соответственно **положительными и отрицательными индексами инерции формы**. Разность $s = p - q$ называется **сигнатурой формы**. Сумма $r = p + q$ является рангом формы.

Таким образом, для того чтобы невырожденная квадратичная форма была положительно определённой необходимо и достаточно чтобы её ранг совпадал с положительным индексом инерции.

Собственные значения и собственные векторы матрицы.

Пусть $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$ – квадратная матрица с элементами, являющимися комплексными (в частности, вещественными) числами. Ненулевой столбец $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}$ называется собственным вектором матрицы A, если имеет место равенство $AX = \lambda X$ при некотором комплексном (возможно, вещественном) λ, называемом **собственным значением матрицы** A (**характеристическим числом матрицы** A).

Теорема. Для любой квадратной матрицы с комплексными элементами существует по крайней мере один собственный вектор с комплексными компонентами.

Доказательство. Пусть

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}$$

и $AX = \lambda X$. Распишем это матричное равенство

$$\begin{cases} (a_{11} - \lambda)x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + (a_{22} - \lambda)x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + (a_{nn} - \lambda)x_n = 0. \end{cases} \tag{1}$$

Это квадратная линейная однородная система линейных уравнений. Для существования ненулевого решения должно выполняться

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

или в матричной форме

$$\det(A - \lambda\mathbb{E}) = 0,$$

где $\mathbb{E}$ – единичная матрица. Относительно λ это – алгебраическое уравнение степени n. В алгебре есть теорема, которая называется ***основная теорема алгебры***: *всякий многочлен с* *коэффициентами из поля комплексных чисел имеет корень из этого поля.* Поэтому многочлен $\det(A-\lambda\mathbb{E})$ имеет по крайней мере один корень (возможно, комплексный). Взяв один из корней, можно найти соответствующий ненулевой вектор X ■

Многочлен $\det(A-\lambda\mathbb{E})$ называют **характеристическим многочленом (полиномом) матрицы** A. Уравнение $\det(A-\lambda\mathbb{E}) = 0$ называют **характеристическим уравнением матрицы** A. Корни λ характеристического уравнения – характеристические числа матрицы A.

Пример. Найдём какое-нибудь собственное число и соответствующий вектор матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$A - \lambda E = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & -\lambda \end{pmatrix}$$

$$\det(A-\lambda\mathbb{E}) = \lambda^3 + 2\lambda^2 - 1 = -(\lambda-1)(\lambda^2-\lambda-1) = 0.$$

Одним из корней последнего уравнения будет $\lambda = 1$. Значит, $\lambda = 1$ – одно из собственных чисел (два других корня, их легко можно посчитать, – иррациональные; мы их в этом примере рассматривать не будем; они тоже будут собственными числами этой матрицы). При $\lambda = 1$ имеем

$$A - \lambda\mathbb{E}|_{\lambda=1} = \begin{pmatrix} 1-1 & 0 & 1 \\ 0 & 1-1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Последняя матрица будет матрицей однородной системы, решение которой нам даёт соответствующие собственные векторы. Эта система имеет вид:

$$\begin{cases} x_3 = 0, \\ 0 = 0, \\ x_1 - x_3 = 0. \end{cases}$$

Её решением будет

$$x_1 = 0,\ x_2 = C,\ x_3 = 0 \quad (C \in \mathbb{R}, C \neq 0)$$

или в векторной форме

$$X = C\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$C \neq 0$, так как собственный вектор – это ненулевой вектор.

В качестве одного из собственных векторова можно взять $X = (0, 1, 0)^T$ и самостоятельно убедиться, что

$$AX = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda X \equiv 1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Собственные значения вещественной симметричной матрицы.

Матрицы квадратичных форм, которые мы рассматриваем, являются вещественными симметричными. Оказывается, такие матрицы обладают следующим свойством.

Теорема. Все собственные значения вещественной симметричной матрицы вещественны.

Доказательство. Пусть A — вещественная симметричная матрица и X – некоторый ее собственный вектор (столбец) с комплексными компонентами (потом мы покажем, что они на самом деле вещественные). Значит, при некотором λ выполнено $AX = \lambda X$. Рассмотрим число $a = \bar{X}^T AX$ (черточка на верху – знак комплексного сопряжения; это означает, что в векторе все элементы подвергнуты операции комплексного сопряжения). Заметим, что $\bar{X}^T AX$ – действительно число (найдём размерность матрицы результата: $X^T_{1,n} A_{n,n} X_{n,1}$ – в результате будет матрица размерности (1,1)). Тогда

$$\bar{a} = \overline{\bar{X}^T AX} = \bar{\bar{X}}^T \bar{A} \bar{X} = X^T A \bar{X}$$

(использовали свойства комплексного сопряжения и тот факт, что A – вещественная матрица). Вычислим число $\bar{a}$ иначе:

$$\bar{a} = (\bar{a})^T = (X^T A \bar{X})^T = \bar{X}^T A^T (X^T)^T = \bar{X}^T AX = a$$

(использовали свойства операции транспонирования и тот факт, что A – симметричная матрица). Значит, a – вещественное число. С другой стороны

$$a = \bar{X}^T AX = \bar{X}^T (\lambda X) = \lambda (\bar{X}^T X) = \lambda (\bar{x}_1 x_1 + \ldots + \bar{x}_n x_n) = \lambda (|x_1|^2 + \ldots + |x_n|^2).$$

Так как $X \neq 0$, то $|x_1|^2 + \ldots + |x_n|^2 \neq 0$. Выразим λ из последнего равенства (оно оказывается вещественным, как отношение двух вещественных чисел)

$$\lambda = \frac{a}{|x_1|^2 + \ldots + |x_n|^2} \in \mathbb{R} \quad \blacksquare$$

Из вещественности собственных значений вещественной симметричной матрицы следует, что **компоненты собственных векторов можно брать вещественными**. Действительно, они определяются из линейной однородной системы уравнений с вещественными коэффициентами (1).

Ясно, что если X – собственный вектор матрицы A, то cX при любом $c \neq 0$ будет собственным вектором, принадлежащим тому же собственному значению. Действительно, если $AX = \lambda X$, то (используем свойства операций над матрицами)

$$A(cX) = c(AX) = c(\lambda X) = \lambda(cX).$$

Последний факт позволяет нам выбирать собственные векторы для вещественной симметричной матрицы нормированными (т.е. так, чтобы $x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 = 1$). Действительно, если X – какой-либо собственный вектор и $x_1^2 + \ldots + x_n^2 = r^2$, то $\frac{1}{r}X$ останется собственным вектором и будет нормирован.

Теорема Кэли-Гамильтона.

Квадратную матрицу можно использовать в качестве значения переменного в произвольном многочлене. Тогда значением этого многочлена от матрицы того же порядка будет матрица того же порядка, что и исходная. Например, рассмотрим многочлен $f(x) = 2x^2 - 3x + 4$. Пусть $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. Тогда

$$f(A) = 2A^2 - 3A + 4\mathbb{E} = 2\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^2 - 3\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} + 4\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}.$$

Интерес представляют те многочлены, значения от которых есть нулевая матрица. Их называют **аннулирующими многочленами**. Оказывается, что одним из аннулирующих многочленов является характеристический многочлен.

Теорема. Для любой квадратной матрицы характеристический многочлен является её аннулирующим многочленом.

(т.е. если $p(\lambda) = \det(A - \lambda\mathbb{E})$, то $p(A) = \mathbb{O}$)

Доказательство. Пусть λ не является корнем характеристического многочлена, т.е. $\det(A - \lambda\mathbb{E}) \neq 0$. Тогда матрица $A - \lambda\mathbb{E}$ – невырожденная, а следовательно, имеет обратную. Обратная матрица вычисляется по формуле

$$(A - \lambda\mathbb{E})^{-1} = \frac{(A - \lambda\mathbb{E})^*}{\det(A - \lambda\mathbb{E})}. \tag{2}$$

Исследуем структуру союзной матрицы $(A-\lambda\mathbb{E})^* = [\text{обозначим}] = B(\lambda)$. Каждый элемент этой матрицы b_{ij} – алгебраическое дополнение элемента с номером i, j матрицы $(A-\lambda\mathbb{E})$, т.е. $b_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ji}(\lambda)$, где $M_{ji}(\lambda)$ – минор матрицы $A-\lambda\mathbb{E}$ порядка $n-1$. В миноре $M_{ji}(\lambda)$ число λ располагается в каждой строчке и в каждом столбце ровно один раз. Поэтому, вспоминая определение определителя (определитель – это сумма всевозможных произведений элементов определителя взятых по одному из каждой строчки и каждого столбца ....) делаем вывод, что $M_{ji}(\lambda)$ – многочлен степени не больше $n-1$. Значит,

$$b_{ij} = b_{ij}^0 + b_{ij}^1\lambda + b_{ij}^2\lambda^2 + \ldots + b_{ij}^{n-1}\lambda^{n-1},$$

где $b_{ij}^0,\ b_{ij}^1, \ldots,\ b_{ij}^{n-1}$ – некоторые числа. Представим матрицу $B(\lambda)$ в виде матричного многочлена от λ (используем свойства операций над матрицами):

$$B(\lambda) = \begin{pmatrix} b_{11}^0 + b_{11}^1\lambda + b_{11}^2\lambda^2 + \ldots + b_{11}^{n-1}\lambda^{n-1} & \ldots & b_{1n}^0 + b_{1n}^1\lambda + b_{1n}^2\lambda^2 + \ldots + b_{1n}^{n-1}\lambda^{n-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ b_{n1}^0 + b_{n1}^1\lambda + b_{n1}^2\lambda^2 + \ldots + b_{n1}^{n-1}\lambda^{n-1} & \ldots & b_{nn}^0 + b_{nn}^1\lambda + b_{nn}^2\lambda^2 + \ldots + b_{nn}^{n-1}\lambda^{n-1} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} b_{11}^0 & \ldots & b_{1n}^0 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ b_{n1}^0 & \ldots & b_{nn}^0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} b_{11}^1 & \ldots & b_{1n}^1 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ b_{n1}^1 & \ldots & b_{nn}^1 \end{pmatrix} + \lambda^2 \begin{pmatrix} b_{11}^2 & \ldots & b_{1n}^2 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ b_{n1}^2 & \ldots & b_{nn}^2 \end{pmatrix} + \ldots + \lambda^{n-1} \begin{pmatrix} b_{11}^{n-1} & \ldots & b_{1n}^{n-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ b_{n1}^{n-1} & \ldots & b_{nn}^{n-1} \end{pmatrix} =$$

$$= [\text{обозначим}] = B_0 + \lambda B_1 + \lambda^2 B_2 + \ldots + \lambda^{n-1}B_{n-1}.$$

Преобразуем теперь равенство (2), которое в наших обозначениях имеет вид

$$(A-\lambda\mathbb{E})^{-1} = \frac{B(\lambda)}{\det(A-\lambda\mathbb{E})}.$$

или

$$(A-\lambda\mathbb{E})^{-1} = \frac{B_0 + \lambda B_1 + \lambda^2 B_2 + \ldots + \lambda^{n-1}B_{n-1}}{\det(A-\lambda\mathbb{E})}. \tag{3}$$

Домножим соотношение (3) на $A-\lambda\mathbb{E}$ слева и на $\det(A-\lambda\mathbb{E})$. Получим

$$\det(A-\lambda\mathbb{E})\mathbb{E} = (A-\lambda\mathbb{E})(B_0 + \lambda B_1 + \lambda^2 B_2 + \ldots + \lambda^{n-1}B_{n-1}). \tag{4}$$

Многочлен $\det(A-\lambda\mathbb{E}) \equiv p(\lambda)$ – характеристический многочлен матрицы A. Обозначим его коэффициенты через $a_0,\ a_1,\ \ldots,\ a_n$, т.е.

$$p(\lambda) = a_0 + a_1\lambda + a_2\lambda^2 + \ldots + a_n\lambda^n.$$

Поэтому равенство (4) принимает вид

$$\left(a_0 + a_1\lambda + a_2\lambda^2 + \ldots + a_n\lambda^n\right)\mathbb{E} = (A-\lambda\mathbb{E})(B_0 + \lambda B_1 + \lambda^2 B_2 + \ldots + \lambda^{n-1}B_{n-1}).$$

Раскроем скобки (сгруппировав по степеням λ)

$$a_0\mathbb{E}+a_1\lambda\mathbb{E}+a_2\lambda^2\mathbb{E}+\ldots+a_n\lambda^n\mathbb{E} = AB_0+\lambda(AB_1-B_0)+\lambda^2(AB_2-B_1)+\ldots+\lambda^{n-1}(AB_{n-1}-B_{n-2})-\lambda^n B_{n-1}.$$

Чтобы равенство было верным, коэффициенты при одинаковых степенях λ должны быть равны:

$$\begin{array}{lccccl} AB_0 & & & = & a_0\mathbb{E} \\ AB_1 & - & B_0 & = & a_1\mathbb{E} \\ AB_2 & - & B_1 & = & a_2\mathbb{E} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ AB_{n-1} & - & B_{n-2} & = & a_{n-1}\mathbb{E} \\ & - & B_{n-1} & = & a_n\mathbb{E}. \end{array}$$

Домножим каждое равенство СЛЕВА на указанный множитель:

$$\begin{array}{r|lccccl} A^0 \equiv \mathbb{E} * & AB_0 & & & = & a_0\mathbb{E} \\ A^1 * & AB_1 & - & B_0 & = & a_1\mathbb{E} \\ A^2 * & AB_2 & - & B_1 & = & a_2\mathbb{E} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ A^{n-1} * & AB_{n-1} & - & B_{n-2} & = & a_{n-1}\mathbb{E} \\ A^n * & & - & B_{n-1} & = & a_n\mathbb{E} \end{array}$$

и сложим их все:

$$AB_0 + A(AB_1 - B_0) + A^2(AB_2 - B_1) + \ldots + A^{n-1}(AB_{n-1} - B_{n-2}) + A^n B_{n-1} = \\ = a_0A^0 + a_1A + a_2A^2 + \ldots a_{n-1}A^{n-1} + a_nA^n.$$

Раскроем скобки, получив слева нулевую матрицу

$$\mathbb{O} = a_0A^0 + a_1A + a_2A^2 + \ldots a_{n-1}A^{n-1} + a_nA^n.$$

Справа в этом выражение стоит $p(A)$. Значит,

$$p(A) = \mathbb{O} \quad \blacksquare$$

Эта теорема широко применяется, например, в теории управления. В более простых задачах эту теорему можно использовать при нахождении достаточно больших степеней матриц (n и выше) или отрицательных степеней матриц (в частности обратных). Например, пусть

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Найдём характеристический многочлен этой матрицы

$$\begin{vmatrix} -2-\lambda & 1 \\ 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \lambda - 7.$$

По теореме Кэли-Гамильтона

$$A^2 - A - 7\mathbb{E} = \mathbb{O}.$$

Домножим последнее равенсто на A^{-1}:

$$A - \mathbb{E} - 7A^{-1} = \mathbb{O}.$$

Выразим из последнего A^{-1}

$$A^{-1} = \frac{1}{7}(A - E).$$

Вычисляем

$$A^{-1} = \frac{1}{7}\left(\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -\frac{3}{7} & \frac{1}{7} \\ \frac{1}{7} & \frac{2}{7} \end{pmatrix}.$$

Ортогональные матрицы и их свойства.

Прежде чем рассмотреть ещё один способ приведения квадратичной формы к каноническому виду (ортогональное преобразование) мы должны ввести понятие ортогональной матрицы и изучить её свойства.

Квадратная матрица A называется **ортогональной**, если её обратная совпадает с транспонированной ($A^{-1} = A^T$), т.е. должно выполнятся равенство:

$$AA^T = A^T A = \mathbb{E}. \tag{1}$$

Примеры ортогональных матриц (самостоятельно убедиться в выполнении свойства (1)):

1) единичная матрица любого порядка $\mathbb{E}$;

2) матрица преобразования поворота на плоскости $A = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$.

Свойство 1. Если A – ортогональная матрица, то $\det A = \pm 1$.

Доказательство. $1 = \det E = \det(AA^T) = \det A \det(A^T) = \det A \det A = (\det A)^2$.

При доказательстве использовали свойства определителя матриц и определение ортогональной матрицы ■

В виду этого обстоятельства все ортогональные матрицы принято делить на 2 класса: собственно ортогональные ($\det A = 1$) и несобственно ортогональные ($\det A = -1$).

Свойство 2. Если A – ортогональная матрица, то A^T, A^{-1} – ортогональные.

Доказательство. Пусть A – ортогональная матрица. Проверим выполнение одного из равенств (1) для A^T:

$$A^T(A^T)^T = A^T A = E.$$

Значит, A^T – ортогональная матрица. Но, в виду ортогональности A имеем равенство $A^{-1} = A^T$. Значит, обратная матрица будет тоже ортогональной ■

Свойство 3. Если A, B – ортогональные матрицы одного порядка, то AB – ортогональная.

Доказательство. $(AB)(AB)^T = (AB)(B^T A^T) = A(BB^T)A^T = AEA^T = AA^T = E$ ■

Свойство 4. Строки (столбцы) ортогональной матрицы нормированы и попарно ортогональны.

Доказательство. С понятиями *нормированности* и *ортогональности* арифметических векторов мы познакомимся подробнее далее при изучении тем евклидовы и нормированные пространства. На самом деле эти понятия нам встречались в геометрии. (Геометрические векторы мы называли ортогональными, если их скалярное произведение было равно 0. Т.е. на языке координат векторов должна быть равна нулю сумма произведений их соответствующих координат. Вектор мы называли нормированным, если его длина была равна 1. Т.е. через скалярное произведение это означает, что его скалярный квадрат равен 1). Эти геометрические понятия являются лишь частным случаем соответствующих алгебраических терминов. Определим их здесь аналогичным образом.

Рассмотрим два арифметических вектора (они могут быть как столбцами, так и строками) $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$, $b = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$. Введём операцию скалярного произведения арифметических векторов следующим образом: $ab = a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n$.

Векторы a и b мы будем называть ортогональными, если $ab = 0$. Совокупность векторов мы будем называть ортогональной, если все векторы этой совокупности попарно ортогональны.

Вектор a мы будем назвать нормированным, если $aa = 1$ (естественно, aa мы будем обозначать a^2). Совокупность векторов мы будем называть нормированной, если все векторы этой совокупности нормированы.

Перейдём теперь к доказательству. Пусть A – ортогональная матрица. Тогда $AA^T = E$. Распишем это равенство в поэлементной форме

$$E = AA^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \ldots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \ldots & a_{n2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{1n} & a_{2n} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} a_{11}^2 + a_{12}^2 + \ldots + a_{1n}^2 & a_{11}a_{21} + a_{12}a_{22} + \ldots + a_{1n}a_{2n} & \ldots & a_{11}a_{n1} + a_{12}a_{n2} + \ldots + a_{1n}a_{nn} \\ a_{21}a_{11} + a_{22}a_{12} + \ldots + a_{2n}a_{1n} & a_{21}^2 + a_{22}^2 + \ldots + a_{2n}^2 & \ldots & a_{21}a_{n1} + a_{22}a_{n2} + \ldots + a_{2n}a_{nn} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1}a_{11} + a_{n2}a_{12} + \ldots + a_{nn}a_{1n} & a_{n1}a_{21} + a_{n2}a_{22} + \ldots + a_{nn}a_{2n} & \ldots & a_{n1}^2 + a_{n2}^2 + \ldots + a_{nn}^2 \end{pmatrix}$$

На главной диагонали стоят суммы квадратов строк матрицы A, а на остальных позициях находятся суммы произведений соответствующих элементов двух разных строк. Если обозначить a_i – строка с номером i матрицы A (это арифметический вектор), то

$$a_i^2 = 1, \quad a_ia_j = 0 \quad (i \neq j,\, i, j = 1, \ldots n).$$

Таким образом, система арифметических векторов $\{a_i\}$ – ортогональная и нормированная (или одним словом – ортонормированная).