Процесс ортогонализации Грама-Шмидта

Сразу же заменим, что здесь предлагаются готовые формулы, но проще запоминать сам принцип и математические обоснования этого процесса.

Пусть $b = (b_1, \ldots, b_n)$ – некоторый базис в n-мерном евклидовом пространстве E. Модифицируя этот базис, мы будем строить новый базис $e = (e_1, \ldots, e_n)$, который будет ***ортогональным***. Далее можно его нормировать (поделив каждый вектор на его норму) и получить ортонормированный базис. Будем последовательно строить векторы $e_1, \ldots, e_n$.

Пусть

$$e_1 = b_1.$$

Второй вектор e_2 построим, "улучшив" вектор b_2:

$$e_2 = b_2 + \alpha_1 e_1 \tag{1}$$

(к b_2 прибавляем линейную комбинацию уже построенных векторов – здесь пока это только e_1). Очевидно, что e_1, e_2 линейно независимы в виду линейной независимости b_1 и b_2. Подберем число α_1, так, чтобы e_1, e_2 были ортогональны:

$$(e_1, e_2) = (b_1, b_2) + \alpha_1 (e_1, e_1) = 0$$

$$\alpha_1 = -\frac{(b_1, b_2)}{(e_1, e_1)}$$

Найденный коэффициент α подставляем в (1) и находим вектор e_2. На этом шаге у нас уже есть два вектора ортогонального базиса e_1 и e_2.

Далее действуем по следующей общей схеме. Пусть уже построена ортогональная система векторов $e_1, \ldots, e_k$ $(k < n)$, причем для всякого $m \leqslant k$ вектор e_m является линейной комбинацией $b_1, \ldots, b_m$. Покажем, как выбирается вектор e_{k+1}. Положим

$$e_{k+1} = b_{k+1} + \lambda_1 e_1 + \ldots + \lambda_k e_k.$$

Вектор e_{k+1} отличен от нуля, так как система линейно независимая (иначе бы b_{k+1} выражался бы через $b_1, \ldots, b_k$). Подберем коэффициенты λ_i из условия ортогональности

$$(e_i, e_{k+1}) = (e_i, b_{k+1} + \lambda_1 e_1 + \ldots + \lambda_k e_k) = (e_i, b_{k+1}) + \lambda_i (e_i, e_i) = 0, \quad (i = 1, \ldots, k),$$

$$\lambda_i = -\frac{(e_i, b_{k+1})}{(e_i, e_i)}, \quad (i = 1, \ldots, k)$$

Таким образом, вектор e_{k+1} построен. Продолжая этот процесс, построим всю систему ортогональных векторов e.

Мы знаем, что

1) любое евклидово пространство (как линейное) обладает базисом

2) в качестве первого вектора нового ортогонального базиса можно выбрать любой вектор из старого базиса

3) любой ненулевой вектор можно включить в какой-либо базис.

Объединяя эти три факта можно сформулировать следующее утверждение:

Теорема. Всякое конечномерное евклидово пространство обладает ортогональным базисом, причем любой ненулевой вектор этого пространства входит в состав некоторого ортогонального базиса.

Напомним ещё раз, что ортогональный базис можно нормировать (поделив каждый вектор на его длину) и, таким образом, мы получаем ортонормированный базис.

Пример. Рассмотрим в пространстве базис $b_1(1,1,1)$, $b_2 = (2,0,1)$, $b_3 = (-7,1,0)$. Он не является ортогональным. Построим ортогональный базис e_1, e_2, e_3, используя процесс ортогонализации Грама-Шмидта

Строим первый вектор

$$e_1 = b_1 = (1,1,1).$$

Найдём второй вектор нового базиса:

$$e_2 = b_2 + \alpha e_1.$$

Потребуем, чтобы e_1 и e_2 были ортогональны:

$$(e_1, e_2) = (e_1, b_2 + \alpha e_1) = (b_1, b_2) + \alpha(b_1, b_1) = 0$$

$$(1,1,1)(2,0,1) + \alpha_1(1,1,1)(1,1,1) = 3 + 3\alpha_1 = 0 \Rightarrow \alpha_1 = -1$$

Значит,

$$e_2 = (2,0,1) - (1,1,1) = (1,-1,0).$$

Находим теперь e_3.

$$e_3 = b_3 + \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2.$$

Требуем ортогональность

$$(e_1, e_3) = (e_1, b_3 + \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2) = (e_1, b_3) + \alpha_1(e_1, e_1) = 0,$$

$$(e_2, e_3) = (e_2, b_3 + \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2) = (e_2, b_3) + \alpha_2(e_2, e_2) = 0.$$

Вычисляя скалярные произведения в последних равенствах, получаем

$$(e_1, e_3) = -6 + 3\alpha_1 \Rightarrow \alpha_1 = 2,$$

$$(e_2, e_3) = -8 + 2\alpha_2 \Rightarrow \alpha_2 = 4.$$

Значит,

$$e_3 = b_3 + 2e_1 + 4e_2 = (-7, 1, 0) + 2(1, 1, 1) + 4(1, -1, 0) = (-1, -1, 2).$$

Ортогональный базис построен (всегда можно проверить новый базис на ортогональность и убедиться в правильности вычислений).

Ортонормированным базисом будет

$$\frac{1}{\sqrt{3}}e_1, \quad \frac{1}{\sqrt{2}}e_2, \quad \frac{1}{\sqrt{6}}e_3.$$

Замечание. Если в ходе ортогонализации появляется вектор с рациональными коэффициентами, его всегда можно превратить в вектор с целыми коэффициентами домножив на наименьший общий знаменатель его координат. На ортогональность векторов нового базиса это не повлияет. Естественно, с ортонормированными векторами это делать нельзя, так как изменится их норма.

Ортогональное дополнение.

Ранее мы познакомились с понятием прямого дополнения и выяснили, что в произвольном линейном пространстве любое линейное подпространство имеет прямое дополнение. Такое прямое дополнение не является единственным. Однако в случае евклидова пространства среди всех возможных прямых дополнений к данному линейному подпространству выделяется ортогональное дополнение.

Ортогональным дополнением линейного подпространства H в евклидовом пространстве E называют множество, всех векторов, ортогональных каждому вектору линейного подпространства H. Обозначение – $H^\perp$. Таким образом,

$$H^\perp = \{x \,|\, x \in E,\, x \perp h \,(\forall h \in H)\}$$

Пример. В евклидовом пространстве V_2 свободных векторов рассмотрим линейное подпространство H векторов, параллельных данной прямой. Тогда ортогональным дополнением $H^\perp$ – будет множество векторов, перпендикулярных к этой прямой, в то время как в качестве прямого дополнения H_1 можно взять подпространство векторов, коллинеарных произвольной прямой, не параллельной исходной.

Из определение не следует, что $H^{\perp}$ – линейное подпространство.

Теорема. Ортогональное дополнение $H^{\perp}$ линейного подпространства H в евклидовом подпространстве E является линейным подпространством в E, причем

$$E = H \oplus H^{\perp},$$

$$\dim H + \dim H^{\perp} = \dim E.$$

Доказательство. Покажем, что $H^{\perp}$ – линейное подпространство. По определению линейного подпространств покажем замкнутость $H^{\perp}$ относительно введённых в E операций. Пусть $x, y \in H^{\perp}$, $h \in H$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Проверяем:

$$(x + y, h) = (x, h) + (y, h) = 0 \Rightarrow x + y \in H^{\perp},$$

$$(\lambda x, h) = \lambda(x, h) = 0 \Rightarrow \lambda x \in H^{\perp}$$

Докажем, что $H + H^{\perp}$ – прямая сумма. Для этого достаточно показать, что $H \cap H^{\perp} = \{\mathbb{O}\}$. Пусть $x \in H \cap H^{\perp}$. Значит, $(x, x) = 0$. Но по аксиомам евклидова пространства это означает, что $x = \mathbb{O}$. Значит, сумма $H + H^{\perp}$ – прямая $(H \oplus H^{\perp})$.

Покажем, что $H \oplus H^{\perp} = E$. Выберем некоторый ортогональный базис $f = (f_1, \dots, f_m)$ в H. Это всегда можно сделать, взяв сначала произвольный базис, а потом подвергнув его ортогонализации. Дополним f до базиса $f' = (f_1, \dots, f_m, f_{m+1}, \dots, f_n)$ пространства E ($\dim E = n$). Используя процесс ортогонализации Грама-Шмидта, превратим базис f в ортогональный базис

$$e = (e_1, \dots, e_m, e_{m+1}, \dots, e_n).$$

Очевидно, что $e_1 = f_1, \dots, e_m = f_m$. Векторы $e_{m+1}, \dots, e_n \perp e_1, \dots, e_m$, а, следовательно, ортогональны всем векторам из H, значит $e_{m+1}, \dots, e_n \in H^{\perp}$. Рассмотрим произвольный $x \in E$ и разложим его по базису e

$$x = (x_1 e_1 + \ldots + x_m e_m) + (x_{m+1} e_{m+1} + \ldots + x_n e_n).$$

Обозначим

$$h = x_1 e_1 + \ldots + x_m e_m \in H, \quad h^{\perp} = x_{m+1} e_{m+1} + \ldots + x_n e_n \in H^{\perp}.$$

Тогда

$$x = h + h^{\perp} \in H + H^{\perp}.$$

Значит, $E \subset H \oplus H^{\perp}$. Обратное включение очевидно имеется всегда: $H \oplus H^{\perp} \subset E$. Следовательно, $E = H \oplus H^{\perp}$.

Согласно теореме о размерности суммы (учитывая, что она у нас прямая), получаем, что $\dim H + \dim H^{\perp} = \dim E$ ■

Следствие. Каково бы ни было линейное подпространство H в евклидовом пространстве E, любой вектор $x \in E$ можно однозначно представить в виде

$$x = h + h^{\perp}, \qquad (*)$$

где $h \in H$, $h^{\perp} \in H^{\perp}$

Доказательство. В предыдущей теореме, по сути, показывается, что ортогональное дополнение $H^{\perp}$ есть всегда и предлагается алгоритм построения этого ортогонального дополнения. Также утверждается, что $E = H \oplus H^{\perp}$. По определению суммы подпространств произвольный $x \in E$ можно представить в виде (*). Так как $H \oplus H^{\perp}$ – прямая сумма, то разложение (*) единственно ■

Вектор h в разложении (*) называют **ортогональной проекцией** вектора x на линейное подпространство H, а вектор $h^{\perp}$ – **ортогональной составляющей** вектора x относительно линейного подпространства H.

Строить ортогональные дополнения можно, например, способом, указанным в теореме. Получается, что

$$H^{\perp} = \mathrm{span}\{e_{m+1}, \ldots, e_n\}.$$

Можно воспользоваться другим способом. Для векторов из $H^{\perp}$ достаточно потребовать, чтобы они были ортогональны базису H. Поэтому можно решить систему линейных однородных уравнений, следующую из условий ортогональности

$$(b_1, x) = 0, \ldots, (b_m, x) = 0, \qquad (**)$$

где $b_1, \ldots, b_m$ – произвольный базис H, $x \in H^{\perp}$. Покажем это на примере.

Пример. В арифметическом линейном пространстве векторов (x_1, x_2, x_3) рассмотрим подпространство $H = \mathrm{span}\{(1,1,0),(1,2,3)\}$. Найдем $H^{\perp}$, векторы из которого удовлетворяют системе (**). Она имеет вид

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 3C, \\ x_2 = -3C, \\ x_3 = C. \end{cases}$$

Таким образом $H^{\perp} = \mathrm{span}\{(3, -3, 1)\}$.

Приведём другие свойства ортогональных дополнений

1. $(H^{\perp})^{\perp} = H$.

Доказательство: Берём произвольный $x \in H$. По определению ортогонального дополнения x ортогонален всем $y \in H^{\perp}$. В виду произвольности x, каждый $y \in H^{\perp}$ ортогонален всем $x \in H$. Это по определению и означает, что $(H^{\perp})^{\perp} = H$ ■

2. $\dim H^{\perp} = \dim E - \dim H$.

Доказательство: Это непосредственное следствие из предыдущей теоремы ■

3. Если $H_1 \subset H_2$, то $H_2^{\perp} \subset H_1^{\perp}$.

Доказательство: Возьмём произвольный $h \in H_2^{\perp}$ и покажем, что $h \in H_1^{\perp}$.

$$h \in H_2^{\perp} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} h \perp \forall h_2 \in H_2, \\ H_1 \subset H_2 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad h \perp \forall h_1 \in H_1 \quad \Rightarrow \quad h \in H_1^{\perp} \quad \blacksquare$$

4. $(H_1 + H_2)^{\perp} = H_1^{\perp} \cap H_2^{\perp}$.

Доказательство: Докажем два включения. Сначала покажем, что $(H_1 + H_2)^{\perp} \subset H_1^{\perp} \cap H_2^{\perp}$. Берём произвольный $h \in (H_1 + H_2)^{\perp}$

$$h \in (H_1 + H_2)^{\perp} \Rightarrow \begin{cases} h \perp h_1 + h_2 \in H_1 + H_2, \\ \forall h_1 \in H_1, \\ \forall h_2 \in H_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} h \perp h_1 + \mathbb{O}\,(\forall h_1 \in H_1, \mathbb{O} \in H_2), \\ h \perp \mathbb{O} + h_2\,(\mathbb{O} \in H_1, \forall h_2 \in H_2) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} h \perp \forall h_1 \in H_1, \\ h \perp \forall h_2 \in H_2 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} h \in H_1^{\perp}, \\ h \in H_2^{\perp} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad h \in H_1^{\perp} \cap H_2^{\perp}.$$

Докажем теперь, что $H_1^{\perp} \cap H_2^{\perp} \subset (H_1 + H_2)^{\perp}$. Берём произвольный $h \in H_1^{\perp} \cap H_2^{\perp}$

$$h \in H_1^{\perp} \cap H_2^{\perp} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} h \in H_1^{\perp}, \\ h \in H_2^{\perp} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} h \perp \forall h_1 \in H_1, \\ h \perp \forall h_2 \in H_2 \end{cases} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad h \perp \forall (h_1 + h_2) \in H_1 + H_2 \quad \Rightarrow \quad h \in (H_1 + H_2)^{\perp} \quad \blacksquare$$

5. $H_1^{\perp} + H_2^{\perp} = (H_1 \cap H_2)^{\perp}$.

Доказательство:

$$H_1^{\perp} + H_2^{\perp} = [1] = ((H_1^{\perp} + H_2^{\perp})^{\perp})^{\perp} = [4] = ((H_1^{\perp})^{\perp} \cap (H_2^{\perp})^{\perp})^{\perp} = [1] = (H_1 \cap H_2)^{\perp} \quad \blacksquare$$

Линейные операторы

1. Определение. Свойства.

Линейная алгебра большое внимание уделяет отображениям, которые векторам одного линейного пространства ставят в соответствие векторы другого (возможно того же) линейного пространства. Среди таких отображений выделяются те, которые сохраняют алгебраические соотношения (т.е. сумма переходит в сумму, произведение в произведение и т.д.). В некотором смысле такие отображения являются и наиболее простыми, так как они естественным образом связаны со структурой линейного пространства.

Напомним некоторую терминологию из теории отображений. Отображение $f : X \to Y$ называют **сюръективным**, если

$$\forall y \in Y \exists x \in X : \, f(x) = y.$$

Отображение $f : X \to Y$ называют **инъективным**, если разные $x_1, x_2 \in X$ имеют разные образы:

$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2).$$

Отображение одновременно и сюръективное, и инъективное называют **биективным**. Биективное отображение устанавливает между множествами X и Y **взаимно однозначное соответствие**.

Отображение φ из линейного пространства L над полем K в линейное пространство L' <u>над тем же</u> полем K ($\varphi : L \to L'$) называют **линейным отображением** или **линейным оператором**, если выполнены следующие условия:

1) $\varphi(x + y) = \varphi(x) + \varphi(y)$ для любых $x, y \in L$;

2) $\varphi(\lambda x) = \lambda\varphi(x)$ для любых $x \in L$, $\lambda \in K$.

Линейный оператор $\varphi : L \to L$, который осуществляет отображение линейного пространства L в себя, называют также **линейным преобразованием линейного пространства** L и говорят, что линейный оператор φ **действует в линейном пространстве** L.

Условия 1), 2) определения можно скомбинировать в виде одного условия, например, так: для любых $x, y \in L$, $\lambda, \mu \in K$

$$\varphi(\lambda x + \mu y) = \lambda\varphi(x) + \mu\varphi(y).$$

Далее под полем K мы будем понимать $\mathbb{R}$, хотя некоторые рассуждения остаются верными для произвольного поля K.

Рассмотрим несколько примеров линейных операторов.

Пример 1. Пусть $K_n[x]$ – линейное пространство многочленов одной переменной x степени не выше n. На множестве этих многочленов определен линейный оператор $\frac{d}{dx}$, который каждому многочлену ставит в соответствие его производную. Операция дифференцирования обладает свойством линейности, причем $\frac{d}{dx} : K_n[x] \to K_{n-1}[x]$.

Пример 2. Рассмотрим n-мерное линейное арифметическое пространство $\mathbb{R}^n$, элементы которого будем представлять как матрицы-столбцы высоты n: $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$, и квадратную матрицу P порядка n. Отображение φ: $x \Rightarrow P \cdot x$ является линейным оператором в силу свойств умножения матриц. Действительно, свойство линейности из определения линейного оператора выполняется:

$$\varphi(\lambda x + \mu y) = P(\lambda x + \mu y) = \lambda P x + \mu P y = \lambda \varphi(x) + \mu \varphi(y).$$

Рассмотрим некоторые характеристики линейных операторов. Каждому линейному оператору $\varphi : L \to L'$ соответствуют:

– его **ядро** – множество тех векторов $x \in L$, для которых $\varphi(x) = \mathbb{O}'$, где $\mathbb{O}'$ – нулевой вектор в L' (обозначение $\ker\varphi$):

$$\ker\varphi = \{x \in L \,|\, \varphi(x) = \mathbb{O}'\};$$

– его **образ** – множество векторов $y \in L'$, являющихся значениями этого оператора (обозначение $\mathrm{im}\varphi$)

$$\mathrm{im}\varphi = \{y \in L' \,|\, \exists x \in L : \varphi(x) = y\}.$$

Заметим, что $\varphi(\mathbb{O}) = \mathbb{O}'$, так как

$$\varphi(\mathbb{O}) = \varphi(0\mathbb{O}) = 0\varphi(\mathbb{O}) = \mathbb{O}'$$

(использовали свойства линейных пространств и определение линейного оператора). Поэтому $\mathbb{O} \in \ker\varphi$, $\mathbb{O}' \in \mathrm{im}\varphi$. Но в $\mathbb{O}'$ может отобразиться не только нулевой элемент (в Примере 2 дифференцирование в ноль отображает многочлены нулевой степени).

Теорема. Для любого линейного оператора $\varphi : L \to L'$ его ядро $\ker\varphi$ является линейным подпространством в L, а его образ $\mathrm{im}\varphi$ – линейным подпространством в L'.

Докажем по определению линейного подпространства. Пусть $x_1, x_2 \in \ker\varphi \subset L$. Это означает, что $\varphi(x_1) = \varphi(x_2) = \mathbb{O}'$. Тогда вычисляем

$$\varphi(x_1 + x_2) = \varphi(x_1) + \varphi(x_2) = \mathbb{O}',$$

$$\varphi(\lambda x_1) = \lambda \varphi(x_1) = \lambda \mathbb{O}' = \mathbb{O}' \quad (\lambda \in \mathbb{R}).$$

Следовательно, $x_1 + x_2$, $\lambda x_1 \in \ker\varphi$. Поэтому $\ker\varphi$ замкнуто относительно введённых операций и является линейным подпространством в L.

Пусть $y_1, y_2 \in \mathrm{im}\varphi \subset L'$. Значит, существуют $x_1, x_2 \in L$: $y_1 = \varphi(x_1)$, $y_2 = \varphi(x_2)$. Тогда

$$y_1 + y_2 = \varphi(x_1) + \varphi(x_2) = \varphi(x_1 + x_2) \quad \Rightarrow \quad y_1 + y_2 \in L',$$

$$\lambda y_1 = \lambda\varphi(x_1) = \varphi(\lambda x_1) \quad \Rightarrow \quad \lambda y_1 \in L'$$

Поэтому $\mathrm{im}\varphi$ замкнуто относительно введённых операций и является линейным подпространством в L'. ■

Размерности ядра и образа – важнейшие характеристики линейного оператора. И как подпространства они имеют свои размерности. Число $\dim\ker\varphi$ называют **дефектом** линейного оператора φ (обозначение $d\varphi$), а число $\dim\mathrm{im}\,\varphi$ – его **рангом** (обозначение $\mathrm{rang}\,\varphi$):

$$d\varphi = \dim\ker\varphi, \quad \mathrm{rang}\,\varphi = \dim\mathrm{im}\,\varphi.$$

Среди линейных операторов, отображающих линейное пространство L в себя есть два важных частных случая: тождественный оператор I, который каждый вектор из L переводит в себя ($Ix = x$) и нулевой оператор Θ, который каждый вектор отображает в нулевой ($\Theta x = \mathbb{O}$). Эти два оператора являются предельными с точки зрения дефекта и ранга. Нулевой оператор имеет <u>максимальный дефект</u> (равный $\dim L$) и <u>минимальный ранг</u> (нулевой). Тождественный оператор, наоборот, имеет минимальный дефект (нулевой) и <u>максимальный ранг</u> (равный $\dim L$).

Оператор максимального дефекта определен однозначно (это, естественно, нулевой оператор Θ), а операторов минимального дефекта и максимального ранга бесконечно много.

Оказывается, дефект оператора связан со свойством инъективности.

Теорема 1. Линейный оператор инъективен тогда и только тогда, когда его дефект равен нулю.

Доказательство: Покажем сначала, что линейный оператор $\varphi : L \to L'$ с нулевым дефектом является инъективным. В самом деле, если дефект оператора равен нулю, то ядро этого оператора содержит единственный вектор – нулевой. Если $\varphi(x) = \varphi(y)$, то

$$\varphi(x - y) = \varphi(x) - \varphi(y) = \mathbb{O}'.$$

Значит, вектор $x - y$ принадлежит ядру и потому является нулевым: $x - y = \mathbb{O}$. Следовательно, $x = y$. Поэтому φ является инъективным.

Докажем в обратную сторону. Как мы показали выше, $\varphi(\mathbb{O}) = \mathbb{O}'$. Если оператор является инъективным, то ненулевой вектор $\mathbb{O}$ из L не может отобразиться в $\mathbb{O}'$. Значит, ядро линейного оператора содержит только нулевой вектор $\mathbb{O}$ и дефект линейного оператора $d\varphi = 0$ ■

Теорема 2. Дефект и ранг оператора $\varphi : L \to L'$ связаны с размерностью пространства L соотношением $\mathrm{d}\varphi + \operatorname{rang}\varphi = \dim L$.

Доказательство: Рассмотрим прямое дополнение H к линейному подпространству $\ker\varphi$ в линейном пространстве L. Такое дополнение существует всегда. Значит, $\ker\varphi \oplus H = L$. Тогда $\mathrm{d}\varphi + \dim H = \dim L$. Покажем, что $\dim H = \operatorname{rang}\varphi$ (напомним, что $\operatorname{rang}\varphi = \dim \operatorname{im}\varphi$) и формула из теоремы будет доказана.

Подействуем оператором φ только на элементы из H. Тогда $\{\varphi(x) | x \in H\} = \{\varphi(x) | x \in L\}$ (так как элементы, не вошедшие в H, входят в $\ker\varphi$, а значит, отображаются в $\mathbb{O}'$, но в $\mathbb{O}'$ отображается $\mathbb{O} \in H$).

Очевидно, что $\varphi(x) = \mathbb{O}'$ при $x \in H$, только если если $x = \mathbb{O}$ (в противном случае у подпространств H и $\ker\varphi$ будут общие ненулевые элементы и их сумма не будет прямой).

Поэтому линейный оператор $\varphi : H \to \operatorname{im}\varphi$ на H имеет нулевой дефект, а значит по предыдущей теореме будет инъективным. Этот оператор на H является сюръективным. Значит, он осуществляет биективное отображение линейного подпространства H в линейное подпространство $\operatorname{im}\varphi$. В следующем разделе будет показано, что в этом случае размерности подпространств H и $\operatorname{im}\varphi$ совпадают ($\dim H = \operatorname{rang}\varphi$) ■

2. Изоморфизм линейных пространств.

Два линейных пространства L и L' называют **изоморфными**, если существует линейное биективное отображение $\varphi : L \to L'$. При этом само отображение φ называют **изоморфизмом** линейных пространств L и L'.

Как следует из данного определения, изоморфизм представляет собой линейный оператор нулевого дефекта и максимального ранга. Примером изоморфизма линейного пространства в себя является тождественный оператор.

Докажем теорему, на которую мы ссылались при доказательстве теоремы 2.

Теорема 3. Два конечномерных линейных пространства изоморфны тогда и только тогда, когда они имеют одинаковую размерность.

Доказательство.

1) Выполним доказательство сначала в одну сторону. Пусть линейные пространства L и L' имеют одинаковую размерность n. Мы докажем изоморфность этих линейных пространств, по-

строив отображение $\varphi : L \to L'$, являющееся изоморфизмом. Для этого выберем произвольные базисы $B = (b_1, \ldots, b_n)$ в линейном пространстве L и $B' = (b'_1, \ldots, b'_n)$ в линейном пространстве L'. Любой вектор $x \in L$ может быть разложен в базисе B, т.е. представлен в виде $x = BX$, где X – столбец координат этого вектора в базисе B. Вектору $x \in L$ поставим в соответствие вектор $x' = B'X$, который в базисе B' линейного пространства L' имеет те же координаты, что и вектор x в базисе B. Заданное таким образом отображение φ:

$$x = BX \in L \to x' = B'X \in L'$$

является линейным оператором. Действительно, если взять произвольные векторы $x, y \in L$ со столбцами координат X, Y, то

$$\varphi(x + y) = B'(X + Y) = B'X + B'Y = \varphi(x) + \varphi(y).$$

Точно так же при умножении вектора x со столбцом координат X на произвольное $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\varphi(\lambda x) = B'(\lambda X) = \lambda(B'X) = \lambda\varphi(x).$$

Линейный оператор φ является инъективным, так как равенство $\varphi(x) = \varphi(y)$ означает, что $B'X = B'Y$ или $X = Y$ силу единственности разложения вектора по базису. Поэтому $x = y$.

Линейный оператор φ является сюръективным, так как любой вектор $x' \in L'$ с координатами X' в базисе B' является образом вектора $x = BX'$ с теми же координатами X', что и x', но относительно "своего" базиса B. Линейное, инъективное и сюръективное отображение, по определению и есть изоморфизм. Следовательно, линейные пространства L и L' изоморфны, при этом изоморфизмом является построенный нами линейный оператор φ.

2) Докажем утверждение в обратную сторону. Предположим теперь, что линейные пространства L и L' изоморфны и пусть отображение $\varphi : L \to L'$ является соответствующим изоморфизмом. В n-мерном линейном пространстве L выберем некоторый базис $B = (b_1, \ldots, b_n)$ и докажем, что система векторов $B' = (\varphi(b_1), \ldots, \varphi(b_n))$, является базисом в L'.

Во-первых, система векторов B' линейно независима:

$$\lambda_1\varphi(b_1) + \ldots + \lambda_n\varphi(b_n) = \mathbb{O}' \Rightarrow \varphi(\lambda_1 b_1 + \ldots + \lambda_n b_n) = \mathbb{O}'.$$

В силу инъективности φ:

$$\lambda_1 b_1 + \ldots + \lambda_n b_n = \mathbb{O}.$$

Но B – базис, поэтому все коэффициенты $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ равны нулю.

Покажем, что любой вектор $y \in L'$ представим через B'.

$$y = [\exists x \in L] = \varphi(x) = \varphi(x_1 b_1 + \ldots + x_n b_n) = x_1\varphi(b_1) + \ldots + x_n\varphi(b_n).$$

Так как количество векторов в базисах B и B' совпадают, то совпадают и размерности ■

Следствие 1. Все n-мерные линейные пространства изоморфны линейному арифметическому пространству $\mathbb{R}^n$.

Построенный в доказательстве теоремы изоморфизм связан с выбором базисов в линейных пространствах L и L'. Если в той или иной ситуации мы можем считать, что базис в линейном пространстве фиксирован, то вместо абстрактного n-мерного линейного пространства можно использовать "стандартное" линейное арифметическое пространство $\mathbb{R}^n$. Все рассуждения и выкладки в линейном арифметическом пространстве носят более конкретный и интуитивно понятный характер. Но считать базис в линейном пространстве фиксированным не всегда приемлемо, поэтому нельзя считать идентичными произвольные n-мерные линейные пространства. Обычно отождествляют линейные пространства, между которыми существует "естественный" изоморфизм, не связанный с выбором того или иного базиса. Например, как линейные пространства тождественны линейное пространство матриц типа $m \times n$ и линейное арифметическое пространство $\mathbb{R}^{mn}$, так как между ними возникает изоморфизм, если установить соответствие между элементами матрицы типа $m \times n$ и компонентами mn-мерного арифметического вектора. Точно так же можно не различать линейное пространство строк длины n и линейное пространство столбцов высоты n.

Указанное отождествление линейных пространств позволяет записывать векторы линейного арифметического пространства в зависимости от ситуации и как матрицы-строки, и как матрицы-столбцы.

Пример 3. В линейном пространстве $K_3[x]$ многочленов переменного x степени не выше трех элементы $1, x, x^2, x^3$ образуют базис. Этому базису соответствует изоморфизм между $K_3[x]$ и $\mathbb{R}^4$:

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 \leftrightarrow (a_0, a_1, a_2, a_3).$$

3. Матрица линейного оператора

Пусть задан линейный оператор $\varphi : L \to L$, т.е. линейное преобразование n-мерного линейного пространства L **в себя**. Выберем базис $B = (b_1, \ldots, b_n)$ в L. Действие линейного оператора полностью определено, если известны образы векторов базиса. Действительно, если вектор $x = x_1b_1 + \ldots + x_nb_n = BX$, то

$$\varphi(x) = x_1\varphi(b_1) + \ldots + x_n\varphi(x_n) = \varphi(B)X$$

$\varphi(B) = (\varphi(b_1), \ldots, \varphi(b_n))$. Рассмотрим действие линейного оператора φ на векторы базиса B.

Обозначим столбцы координат векторов $\varphi(b_i)$ в базисе B через A_i

$$A_i = \begin{pmatrix} a_{1i} \\ \dots \\ a_{ni} \end{pmatrix}, \quad (i = 1, \dots, n).$$

Тогда

$$\varphi(b_i) = BA_i.$$

Матрицу $A_\varphi = (A_1, \dots, A_n)$, называют **матрицей линейного оператора** φ в базисе B. Таким образом, столбцы матрицы оператора – это координаты образов соответствующих векторов базиса.

Матрица линейного оператора $\varphi : L \to L$ является квадратной, ее порядок совпадает с размерностью линейного пространства L.

Рассмотрим наиболее простые примеры линейных операторов и их матриц.

Пример 4. Матрицей нулевого оператора $\Theta : L \to L$ независимо от выбора базиса является нулевая матрица. Матрица тождественного оператора $I : L \to L$ также не зависит от выбора базиса и в любом базисе является единичной.

Рассмотрим действие оператора φ на произвольный вектор $x = BX$. Тогда

$$\begin{aligned}\varphi(x) = x_1\varphi(b_1) + \ldots + x_n\varphi(b_n) = x_1(a_{11}b_1 + \ldots + a_{n1}b_n) + \ldots + x_n(a_{1n}b_1 + \ldots + a_{nn}b_n) = \\ = (x_1a_{11} + \ldots + x_na_{1n})b_1 + \ldots + (x_1a_{n1} + \ldots + x_na_{n1})b_n = \\ = (b_1, \dots, b_n)\begin{pmatrix} x_1a_{11} + \ldots + x_na_{1n} \\ \dots \\ x_1a_{n1} + \ldots + x_na_{n1} \end{pmatrix} = \\ = (b_1, \dots, b_n)\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = BA_\varphi X.\end{aligned}$$

Таким образом, мы получили

$$\varphi(x) = BA_\varphi X.$$

Значит, вектор $\varphi(x)$ имеет координаты $A_\varphi X$.

Матрица линейного оператора полностью характеризует линейный оператор. В то же время, какую бы квадратную матрицу порядка n мы ни взяли, она будет матрицей некоторого линейного оператора в заданном базисе n-мерного линейного пространства.

Теорема 4. Любая квадратная матрица A порядка n является матрицей некоторого линейного оператора, действующего в линейном пространстве L.

Доказательство. Пусть A – произвольная квадратная матрица. Определим отображение φ по формуле

$$\varphi(x) = BAX,$$

где B – некоторый базис. Легко проверить, что оно является линейным оператором

$$\varphi(\lambda x + \mu y) = BA(\lambda X + \mu Y) = \lambda BAX + \mu BAY = \lambda\varphi(x) + \mu\varphi(y) \quad \blacksquare$$

Теорема 5. Различным линейным операторам φ и ψ, действующим в L, соответствуют и различные матрицы в базисе B.

Доказательство. Докажем от противного. Если предположить, что матрицы $A_\varphi = A_\psi$, то для любого x:

$$\varphi(x) = BA_\varphi X = BA_\psi X = \psi(x).$$

Значит, операторы совпадают, что противоречит условию $\blacksquare$

Таким образом, между линейными операторами, действующими в данном n-мерном линейном пространстве L и квадратными матрицами порядка n существует соответствие, которое является взаимно однозначным.

Теорема 6. Ранг матрицы линейного оператора $\varphi : L \to L$ совпадает с рангом этого оператора ($\operatorname{rang} A_\varphi = \operatorname{rang}\varphi$).

Доказательство. Пусть $(b_1, \ldots, b_n)$ – некоторый базис линейного пространства L. Так как образ любого $x \in L$ при отображении φ является линейной комбинацией образов векторов базиса B:

$$\varphi(x) = \varphi(x_1 b_1 + \ldots + x_n b_n) = x_1\varphi(b_1) + \ldots + x_n\varphi(b_n),$$

то $\operatorname{im}\varphi$ представляет собой линейную оболочку системы векторов $\varphi(b_1)$, …, $\varphi(b_n)$:

$$\operatorname{im}\varphi = \operatorname{span}\{\varphi(b_1), \ldots \varphi(b_n)\}.$$

Ранг оператора по определению равен размерности линейного подпространства $\operatorname{im}\varphi$:

$$\operatorname{rang}\varphi = \dim\operatorname{im}\varphi,$$

а $\dim\operatorname{im}\varphi$ равна максимальному количеству линейно независимых векторов в системе $\varphi(b_1)$, …, $\varphi(b_n)$, координаты которых являются столбцами матрицы A_φ. Значит, максимальное количество линейно независимых векторов в системе $\varphi(b_1), \ldots \varphi(b_n)$ равно максимальному количеству линейно независимых столбцов матрицы A_φ, а это равно рангу матрицы A_φ. Значит, ранг матрицы A_φ совпадает с рангом оператора $\blacksquare$

4. Изменение матрицы линейного оператора при замене базиса.

В разных базисах один и тот же оператор имеет разные матрицы. Рассмотрим вопрос об изменении матрицы оператора при изменении базиса линейного пространства.

Теорема 7. Пусть A_φ^b и A_φ^c – матрицы линейного оператора $\varphi : L \to L$, записанные соответственно в базисах $B = (b_1, \ldots, b_n)$ и $C = (c_1, \ldots, c_n)$ линейного пространства L. Тогда они связаны друг с другом соотношением

$$A_\varphi^c = U^{-1} A_\varphi^b U,$$

где U – матрица перехода от базиса B к базису C (т.е. $C = BU$).

Доказательство. Пусть $y = \varphi(x)$. Пусть Y^b, Y^c X^b, X^c – столбцы координат векторов x и y в базисах B и C, т.е.

$$y = BY^b = CY^c, \quad x = BX^b = CX^c.$$

Тогда, используя формулы пересчета координат вектора при замене базиса, получаем

$$Y^c = U^{-1}Y^b = [Y^b = A_\varphi^b X^b] = U^{-1}A_\varphi^b X^b = [X^b = UX^c] = U^{-1}A_\varphi^b U X^c.$$

Таким образом, $Y_c = (U^{-1}A_\varphi^b U)X_c$. Это равенство является матричной формой записи линейного оператора φ в базисе C, значит

$$A_\varphi^c = U^{-1} A_\varphi^b U \quad \blacksquare$$

Следствие. Определитель матрицы линейного оператора не зависит от выбора базиса.

Доказательство. Пусть Пусть A_φ^b и A_φ^c – матрицы линейного оператора $\varphi : L \to L$, записанные соответственно в базисах $B = (b_1, \ldots, b_n)$ и $C = (c_1, \ldots, c_n)$, U – матрица перехода от базиса B к базису C. Тогда

$$\det A_\varphi^c = \det(U^{-1}A_\varphi^b U) = \det U^{-1} \det A_\varphi^b \det U = \det A_\varphi^b \quad \blacksquare$$

Следствие говорит о том, что, хотя матрица линейного оператора и изменяется при замене базиса, определитель ее при этом остается неизменным. Значит, этот определитель характеризует не конкретную матрицу оператора в конкретном базисе, а сам оператор. Это позволяет ввести следующее понятие.

Определителем линейного оператора называют определитель его матрицы в каком-либо базисе.