

Un sytème utilise des règles très proches de celles qui sont utilisées pour faire une démonstration en mathématique.







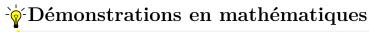
Un sytème utilise des règles très proches de celles qui sont utilisées pour faire une démonstration en mathématique.

- Démonstrations en mathématiques

Assemblages de symboles mathématiques et de phrases contenant des « mots clés » tels que : donc, parce que, si. si et seulement si, il est nécessaire que. il suffit de. supposons que, cherchons une coutrardiction, etc.







Quand on fait des preuves en math , on utilise :

- des axiomes expriment les propriétés particulières des objets qu'on manipule.
- des règles qui permettent pas à pas, de déduire des conséquences à partir des hypothèses.







EDémonstrations en mathématiques

Quand on fait des preuves en math, on utilise:

- des axiomes expriment les propriétés particulières des objets qu'on manipule.
- des règles qui permettent pas à pas, de déduire des conséquences à partir des hypothèses.

Exemple

- S'il fait froid alors il neige et Ali est malade.
- Si Ali est malade alors il ne travaille pas.
- Il fait froid.





EDémonstrations en mathématiques

Quand on fait des preuves en math, on utilise:

- des axiomes expriment les propriétés particulières des objets qu'on manipule.
- des règles qui permettent pas à pas, de déduire des conséquences à partir des hypothèses.

Exemple

- S'il fait froid alors il neige et Ali est malade.
- Si Ali est malade alors il ne travaille pas.
- Il fait froid.





Problème réel

- S'il fait froid alors il neige et Ali est malade.
 - Si Ali est malade alors il ne travaille pas.
 - Il fait froid.

- Formulation

$$M =$$
 " $Ali\ est\ malade$ "

$$T=$$
 " $Ali\ travaille$ "

$$\varphi_1 = F \Rightarrow (N \land M)$$

$$\varphi_2 = M \Rightarrow \neg T$$

$$\varphi_3 = F$$

$$\varphi = \neg T \wedge N$$





Problème réel

- S'il fait froid alors il neige et Ali est malade.
- Si Ali est malade alors il ne travaille pas.
- Il fait froid.

Démontrer que : Ali ne travaille pas et il neige







- S'il fait froid alors il neige et Ali est malade.
- Si Ali est malade alors il ne travaille pas.
- Il fait froid.

Démontrer que : Ali ne travaille pas et il neige

- Formulation

F = " il fait froid"





Problème réel

- S'il fait froid alors il neige et Ali est malade.
 - Si Ali est malade alors il ne travaille pas.
- Il fait froid.

Démontrer que : Ali ne travaille pas et il neige

Formulation

$$F =$$
 " il fait froid"

N= " il neige"





Problème réel

- S'il fait froid alors il neige et Ali est malade.
- Si Ali est malade alors il ne travaille pas.
- Il fait froid.

Démontrer que : Ali ne travaille pas et il neige

- Formulation

$$F =$$
 " il fait froid"

$$N=$$
 " $il\ neige$ "

M= " $Ali\ est\ malade$ "



Problème réel

- S'il fait froid alors il neige et Ali est malade.
- Si Ali est malade alors il ne travaille pas.
- Il fait froid.

Démontrer que : Ali ne travaille pas et il neige

Formulation

```
F = " il fait froid"
```

N= " il neige"

M= " Ali est malade"

T= " Ali travaille"



Problème réel

- S'il fait froid alors il neige et Ali est malade.
- Si Ali est malade alors il ne travaille pas.
- Il fait froid.

Démontrer que : Ali ne travaille pas et il neige

Formulation

$$\varphi_1 = F \Rightarrow (N \land M)$$

$$\varphi_2 = M \Rightarrow \neg T$$

$$\varphi_3 = F$$

$$\varphi = \neg T \land N$$



Problème réel

- S'il fait froid alors il neige et Ali est malade.
- Si Ali est malade alors il ne travaille pas.
- Il fait froid.

Démontrer que : Ali ne travaille pas et il neige

-\(\overline{\pi}\)-Formulation

$$\varphi_1 = F \Rightarrow (N \land M)$$

$$\varphi_2 = M \Rightarrow \neg T$$

$$\varphi_3 = F$$

$$\varphi = \neg T \land N$$

































$$\begin{array}{c|ccccc}
F \Rightarrow (N \land M) & F \\
\hline
N \land M & M & M \Rightarrow \neg T \\
\hline
N \land \neg T & & & \\
\hline
N \land \neg T & & & \\
\hline
N \land \neg T & & & \\
\hline
N \land \neg T & & & \\
\hline
N \land \neg T & & & \\
\hline
N \land \neg T & & & \\
\hline
N \land \neg T & & & \\
\hline
N \land \neg T & & & \\
\hline
N \land \neg T & & & \\
\hline
N \land \neg T & & & \\
\hline
N \land \neg T & & & \\
\hline
N \land \neg T & & & \\
\hline
N \land \neg T & & & \\
\hline
N \land \neg T & & & \\
\hline
N \land \neg T & & & \\
\hline
N \land \neg T & & & \\
\hline
N \land \neg T & & & \\
\hline
N \land \neg T & & & \\
\hline
N \land \neg T & & & \\
\hline
N \land \neg T & & & \\
\hline
N \land \neg T & & & \\
\hline
N \land \neg T & & & \\
\hline
N \land \neg T & & & \\
\hline
N \land \neg T & & & \\
\hline
N \land \neg T & & & \\
\hline
N \land \neg T & & & \\
\hline
N \land \neg T & & & \\
\hline
N \land \neg T & & & \\
\hline
N \land \neg T & & & \\
\hline
N \land \neg T & & & \\
\hline
N \land \neg T & & & \\
\hline
N \land \neg T & & & \\
\hline
N \land \neg T & & & \\
\hline
N \land \neg T & & & \\
\hline
N \land \neg T & & & \\
\hline
N \land \neg T & & & \\
\hline
N \land \neg T & & & \\
\hline
N \land \neg T & & & \\
\hline
N \land \neg T & & & \\
\hline
N \land \neg T & & & \\
\hline
N \land \neg T & & & \\
\hline
N \land \neg T & & & \\
\hline
N \land \neg T & & & \\
\hline
N \land \neg T & & & \\
\hline
N \land \neg T & & & \\
\hline
N \land \neg T & & & \\
\hline
N \land \neg T & & & \\
\hline
N \land \neg T & & & \\
\hline
N \land \neg T & & & \\
\hline
N \land \neg T & & & \\
\hline
N \land \neg T & & & \\
\hline
N \land \neg T & & & \\
\hline
N \land \neg T & & & \\
\hline
N \land \neg T & & & \\
\hline
N \land \neg T & & & \\
\hline
N \land \neg T & & & \\
\hline
N \land \neg T & & & \\
\hline
N \land \neg T & & & \\
\hline
N \land \neg T & & & \\
\hline
N \land \neg T & & & \\
\hline
N \land \neg T & & & \\
\hline
N \land \neg T & & & \\
\hline
N \land \neg T & & & \\
\hline
N \land \neg T & & & \\
\hline
N \land \neg T & & & \\
\hline
N \land \neg T & & & \\
\hline
N \land \neg T & & & \\
\hline
N \land \neg T & & & \\
\hline
N \land \neg T & & & \\
\hline
N \land \neg T & & & \\
\hline
N \land \neg T & & & \\
\hline
N \land \neg T & & & \\
\hline
N \land \neg T & & & \\
\hline
N \land \neg T & & & \\
\hline
N \land \neg T & & & \\
\hline
N \land \neg T & & & \\
\hline
N \land \neg T & & & \\
\hline
N \land \neg T & & & \\
\hline
N \land \neg T & & \\
\hline
N \land \neg T$$

























$$\frac{\Sigma \vdash F \Rightarrow (N \land M) \quad \Sigma \vdash F}{\underbrace{\begin{array}{c} \Sigma \vdash N \land M \\ \underline{\Sigma \vdash N \land M} \\ \underline{\Sigma \vdash N} \end{array}} } \underbrace{\begin{array}{c} \Sigma \vdash N \land M \\ \underline{\Sigma \vdash M} \end{array}}_{\Sigma \vdash N \land \neg T}$$

















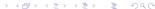




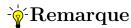








Démonstration:



On démontre, en général, des formules en utilisant un ensemble d'hypothèses, et cet ensemble peut varier au cours de la démonstration : quand on dit "supposons F et montrons G", F est alors une nouvelle hypothèse que l'on pourra utiliser pour montrer G.





Les séquents



Définition

Un séquent est un couple (noté $\Gamma \vdash F$) où :

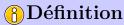
 \bullet Γ est un ensemble fini de formules. Γ représente les hypothèses que l'on peut utiliser. Cet ensemble s'appelle aussi le *contexte* du séquent.

Remarque:





Les séquents



Un séquent est un couple (noté $\Gamma \vdash F$) où :

- \bullet Γ est un ensemble fini de formules. Γ représente les hypothèses que l'on peut utiliser. Cet ensemble s'appelle aussi le *contexte* du séquent.
- F est une formule. C'est la formule que l'on veut montrer. On dira que cette formule est la conclusion du séquent.

Remarque:







Un séquent est un couple (noté $\Gamma \vdash F$) où :

- \bullet Γ est un ensemble fini de formules. Γ représente les hypothèses que l'on peut utiliser. Cet ensemble s'appelle aussi le *contexte* du séquent.
- F est une formule. C'est la formule que l'on veut montrer. On dira que cette formule est la conclusion du séquent.

Remarque:

1 Le signe \vdash se lit *thèse* ou *démontre*.





®Définition

Un séquent est un couple (noté $\Gamma \vdash F$) où :

- \bullet Γ est un ensemble fini de formules. Γ représente les hypothèses que l'on peut utiliser. Cet ensemble s'appelle aussi le *contexte* du séquent.
- F est une formule. C'est la formule que l'on veut montrer. On dira que cette formule est la conclusion du séquent.

Remarque:

- Le signe \vdash se lit *thèse* ou *démontre*.
- ullet On notera $\vdash F$ un séquent dont l'ensemble d'hypothèses est vide.







Définition Un séquent $\Gamma \vdash F$ est *prouvable* s'il peut être obtenu par une application finie de règles de démonstration.

Remarque:







- **Définition** Un séquent $\Gamma \vdash F$ est *prouvable* s'il peut être obtenu par une application finie de règles de démonstration.
 - Une formule F est prouvable si le séquent $\vdash F$ est prouvable.
 - $\Gamma \vdash F$ est prouvable ssi $\Gamma \models F$

Remarque:

 \bullet « $\Gamma \vdash F$ » représente à la fois le séquent et la phrase « le séquent $\Gamma \vdash F$ est prouvable ». Il n'y aura, en général, pas d'ambiguïté.







- **Définition** Un séquent $\Gamma \vdash F$ est *prouvable* s'il peut être obtenu par une application finie de règles de démonstration.
 - Une formule F est prouvable si le séquent $\vdash F$ est prouvable.
 - $\Gamma \vdash F$ est prouvable ssi $\Gamma \models F$

Remarque:

- \bullet « $\Gamma \vdash F$ » représente à la fois le séquent et la phrase « le séquent $\Gamma \vdash F$ est prouvable ». Il n'y aura, en général, pas d'ambiguïté.
- ② On écrira $\Gamma \nvdash F$ pour dire « le séquent $\Gamma \vdash F$ n'est pas prouvable ».





Définition Les règles de démonstration sont les briques qui permettent de construire les dérivations.







- Définition Les règles de démonstration sont les briques qui permettent de construire les dérivations.
 - Une dérivation formelle est un assemblage fini et correct de règles.







- Définition Les règles de démonstration sont les briques qui permettent de construire les dérivations.
 - Une dérivation formelle est un assemblage fini et correct de règles.
 - Cet assemblage n'est pas linéaire mais un arbre :



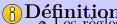




- Définition Les règles de démonstration sont les briques qui permettent de construire les dérivations.
 - Une dérivation formelle est un assemblage fini et correct de règles.
 - Cet assemblage n'est pas linéaire mais un arbre :
 - On est en effet souvent amené à faire des branchements.







- Définition
 Les règles de démonstration sont les briques qui permettent de construire les dérivations.
 - Une dérivation formelle est un assemblage fini et correct de règles.
 - Cet assemblage n'est pas linéaire mais un arbre :
 - On est en effet souvent amené à faire des branchements.
 - Par exemple, pour prouver $A \wedge B$ on doit faire deux choses : prouver A et prouver B.





Remarques:
• Dans la pratique courante on utilise, en plus des règles ci-aprés, d'autres règles mais celles-ci peuvent se déduire des précédentes. On les appellera règles dérivées.





- Remarques:

 Dans la pratique courante on utilise, en plus des règles ci-aprés, d'autres règles mais celles-ci peuvent se déduire des précédentes. On les appellera *règles dérivées*.
 - Il est de tradition d'écrire la racine de l'arbre (le séquent conclusion) en bas, les feuilles en haut :





- Remarques:
 Dans la pratique courante on utilise, en plus des règles ci-aprés, d'autres règles mais celles-ci peuvent se déduire des précédentes. On les appellera *règles dérivées*.
 - Il est de tradition d'écrire la racine de l'arbre (le séquent conclusion) en bas, les feuilles en haut :
 - on a adopté ici le choix le plus répandu dans les livres de logique.





Une règle se compose:

• d'un ensemble de *prémisses* : chacune d'elles est un séquent. Il peut y en avoir zéro, une ou plusieurs et leur ordre est sans importance ;

$$\frac{\Sigma \vdash A \Rightarrow B}{\Sigma \vdash B} \Rightarrow e$$



Une règle se compose:

- d'un ensemble de *prémisses* : chacune d'elles est un séquent. Il peut y en avoir zéro, une ou plusieurs et leur ordre est sans importance;
- du séquent conclusion de la règle;

$$\frac{\Sigma \vdash A \Rightarrow B \qquad \Sigma \vdash A}{\Sigma \vdash B} \Rightarrow e$$



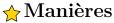


Une règle se compose :

- d'un ensemble de *prémisses* : chacune d'elles est un séquent. Il peut y en avoir zéro, une ou plusieurs et leur ordre est sans importance;
- du séquent conclusion de la règle;
- d'une barre horizontale séparant les prémisses (en haut) de la conclusion (en bas). Sur la droite de la barre, on indiquera le nom de la règle.

$$\frac{\Sigma \vdash A \Rightarrow B \qquad \Sigma \vdash A}{\Sigma \vdash B} \Rightarrow e$$





Chaque règle peut se lire de deux manières : • de bas en haut : si on veut prouver la conclusion, il suffit, par utilisation de la règle, de prouver les prémisses.







- Chaque règle peut se lire de deux manières : • de bas en haut : si on veut prouver la conclusion, il suffit, par utilisation de la règle, de prouver les prémisses.
 - C'est ce qu'on fait quand on **cherche** une démonstration.







- Chaque règle peut se lire de deux manières : • de bas en haut : si on veut prouver la conclusion, il suffit, par utilisation de la règle, de prouver les prémisses.
 - C'est ce qu'on fait quand on **cherche** une démonstration.
 - Cela correspond à *l'analyse*;







- Chaque règle peut se lire de deux manières : • de bas en haut : si on veut prouver la conclusion, il suffit, par utilisation de la règle, de prouver les prémisses.
 - C'est ce qu'on fait quand on **cherche** une démonstration.
 - Cela correspond à *l'analyse*;
 - de haut en bas : si on a prouvé les prémisses, alors on a aussi prouvé la conclusion.







- Chaque règle peut se lire de deux manières : • de bas en haut : si on veut prouver la conclusion, il suffit, par utilisation de la règle, de prouver les prémisses.
 - C'est ce qu'on fait quand on **cherche** une démonstration.
 - Cela correspond à *l'analyse*;
 - de haut en bas : si on a prouvé les prémisses, alors on a aussi prouvé la conclusion.
 - C'est ce qu'on fait quand on **rédige** une démonstration.







- Chaque règle peut se lire de deux manières : • de bas en haut : si on veut prouver la conclusion, il suffit, par utilisation de la règle, de prouver les prémisses.
 - C'est ce qu'on fait quand on **cherche** une démonstration.
 - Cela correspond à *l'analyse*;
 - de haut en bas : si on a prouvé les prémisses, alors on a aussi prouvé la conclusion.
 - C'est ce qu'on fait quand on **rédige** une démonstration.
 - Cela correspond à la synthèse.







Deux types de règles associées à chaque connecteur :

• les règles d'introduction qui permettent de prouver une formule ayant ce symbole comme connecteur principal;







Deux types de règles associées à chaque connecteur :

- les règles d'introduction qui permettent de prouver une formule ayant ce symbole comme connecteur principal;
- les règles d'élimination qui permettent d'utiliser une formule ayant ce symbole comme connecteur principal.







Axiome

$$\Gamma, A \vdash A$$

Si la conclusion du séquent est l'une des hypothèses, alors le séquent est prouvable.

Elles seront les points de départ des preuves (les feuilles des arbres de preuve).







Axiome

$$\overline{\Gamma, A \vdash A}$$
 ax

Si la conclusion du séquent est l'une des hypothèses, alors le séquent est prouvable.

Elles seront les points de départ des preuves (les feuilles des arbres de preuve).

∢Preuve :

$$mod(\Gamma \cup \{A\}) = mod(\Gamma) \cap mod(A) \subseteq mod(A)$$

Donc, Γ , $A \models A$







Affaiblissement

$$\frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma, B \vdash A} \overset{aff}{\longrightarrow}$$

- De haut en bas : si on peut démontrer A sous les hypothèses Γ alors, en ajoutant des hypothèses supplémentaires, on peut encore démontrer A.
- De bas en haut : il y a des hypothèses qui peuvent ne pas servir.







Affaiblissement

$$\frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma, B \vdash A} \text{ aff}$$

- De haut en bas : si on peut démontrer A sous les hypothèses Γ alors, en ajoutant des hypothèses supplémentaires, on peut encore démontrer A.
- De bas en haut : il y a des hypothèses qui peuvent ne pas servir.

```
Si \Gamma \models A alors mod(\Gamma) \subseteq mod(A)
d'où mod(\Gamma) \cap mod(B) \subseteq mod(A)
Donc : \Gamma, B \models A.
```





Contraction

$$\frac{\Gamma, A, A \vdash B}{\Gamma, A \vdash B} \xrightarrow{contr}$$

• Une même hypothèse peut servir plusieurs fois dans une preuve.







Contraction

$$\frac{\Gamma, A, A \vdash B}{\Gamma, A \vdash B} \stackrel{contr}{\longrightarrow}$$

• Une même hypothèse peut servir plusieurs fois dans une preuve.

Preuve:

```
Si \Gamma, A, A \models B alors mod(\Gamma \cup A \cup A) \subseteq mod(B) d'où
```

$$mod(\Gamma)\cap (mod(A)\cap mod(A)) \quad \subseteq mod(B), \text{d'où}$$

$$mod(\Gamma)\cap mod(A) \quad \subseteq mod(B)$$









Introduction de l'implication

$$\frac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash A \Rightarrow B} \Rightarrow_{intro}$$

• Pour montrer $A \Rightarrow B$, on suppose A (c'est-à-dire qu'on l'ajoute aux hypothèses) et on démontre B.


```
On suppose que \Gamma, A \models B On a donc mod(\Gamma) \cap mod(A) \subseteq mod(B), d'où (mod(\Gamma) \cap mod(A)) \cup mod(\neg A) \subseteq mod(B) \cup mod(\neg A), et donc (mod(\Gamma) \cup mod(\neg A)) \subseteq mod(B) \cup mod(\neg A). Finalement, on a mod(\Gamma) \subseteq mod(A \Rightarrow B), et donc \Gamma \models A \Rightarrow B.
```







Introduction de l'implication

$$\frac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash A \Rightarrow B} \Rightarrow_{intro}$$

• Pour montrer $A \Rightarrow B$, on suppose A (c'est-à-dire qu'on l'ajoute aux hypothèses) et on démontre B.



Exemple:

Démontrer le séquent $\vdash A \Rightarrow (B \Rightarrow A)$





Introduction de l'implication

$$\frac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash A \Rightarrow B} \Rightarrow_{intro}$$

• Pour montrer $A \Rightarrow B$, on suppose A (c'est-à-dire qu'on l'ajoute aux hypothèses) et on démontre B.







Elimination de l'implication

$$\frac{\Gamma \vdash A \Rightarrow B \qquad \Gamma' \vdash A}{\Gamma, \Gamma' \vdash B} \Rightarrow_{elim}$$

• Pour démontrer B, si on peut démontrer $A \Rightarrow B$, il suffit de démontrer A.







Elimination de l'implication

$$\frac{\Gamma \vdash A \Rightarrow B \qquad \Gamma' \vdash A}{\Gamma, \Gamma' \vdash B} \Rightarrow_{elim}$$

• Pour démontrer B, si on peut démontrer $A \Rightarrow B$, il suffit de démontrer A.

Preuve:

```
On suppose que \Gamma \models A \Rightarrow B et \Gamma^{'} \models A, On a donc mod(\Gamma) \subseteq (mod(\neg A) \cup mod(B)) et mod(\Gamma^{'}) \subseteq mod(A). Alors mod(\Gamma \cup \Gamma^{'}) = mod(\Gamma) \cap mod(\Gamma^{'}) \subseteq (mod(\neg A) \cup mod(B) \cap mod(A)) mod(\Gamma \cup \Gamma^{'}) \subseteq (mod(\neg A) \cap mod(A)) \cup (mod(B) \cap mod(A)), d'où mod(\Gamma \cup \Gamma^{'}) \subseteq (mod(B) \cap mod(A)) \subseteq mod(B) Donc, \Gamma, \Gamma^{'} \models B.
```



Démontrer
$$\vdash (A \Rightarrow (B \Rightarrow C)) \Rightarrow ((A \Rightarrow B) \Rightarrow (A \Rightarrow C))$$





Démontrer
$$\vdash (A \Rightarrow (B \Rightarrow C)) \Rightarrow ((A \Rightarrow B) \Rightarrow (A \Rightarrow C))$$







Introduction de la conjonction

$$\frac{\Gamma \vdash A \qquad \Gamma' \vdash B}{\Gamma, \Gamma' \vdash A \land B} \stackrel{\land_{intro}}{\land}$$

• Pour démontrer $A \wedge B$, il suffit de démontrer A et de démontrer A.







Introduction de la conjonction

$$\frac{\Gamma \vdash A \qquad \Gamma' \vdash B}{\Gamma, \Gamma' \vdash A \land B} \stackrel{\land intro}{\land}$$

• Pour démontrer $A \wedge B$, il suffit de démontrer A et de démontrer A.

Preuve:

```
On suppose que \Gamma \models A et \Gamma^{'} \models B, On a donc mod(\Gamma) \subseteq mod(A) et mod(\Gamma^{'}) \subseteq mod(B). Alors mod(\Gamma \cup \Gamma^{'}) = mod(\Gamma) \cap mod(\Gamma^{'}) \subseteq (mod(A) \cap mod(B)), d'où mod(\Gamma \cup \Gamma^{'}) \subseteq mod(A \wedge B), d'où Donc, \Gamma, \Gamma^{'} \models A \wedge B.
```





Déducton naturelle

Les règles

Démontrer
$$\vdash ((A \land B) \Rightarrow C) \Rightarrow (A \Rightarrow (B \Rightarrow C))$$





Démontrer
$$\vdash ((A \land B) \Rightarrow C) \Rightarrow (A \Rightarrow (B \Rightarrow C))$$

$$\frac{(A \land B) \Rightarrow C \vdash (A \land B) \Rightarrow C}{Ax} \xrightarrow{A \vdash A} \frac{Ax}{B \vdash B} \xrightarrow{Ax}_{\land intro}$$

$$\frac{(A \land B) \Rightarrow C), A, B \vdash C}{(A \land B) \Rightarrow C), A \vdash B \Rightarrow C} \xrightarrow{\Rightarrow_{intro}}_{\land intro}$$

$$\frac{(A \land B) \Rightarrow C), A \vdash B \Rightarrow C}{(A \land B) \Rightarrow C) \vdash A \Rightarrow (B \Rightarrow C)} \xrightarrow{\Rightarrow_{intro}}_{\land intro}$$







Elimination de la conjonction

$$\frac{\Gamma \vdash A \land B}{\Gamma \vdash A} \land_{elim}^{g}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A \land B}{\Gamma \vdash B} \land_{elir}^{d}$$

• De $A \wedge B$, on peut déduire A (élimination gauche) et B (élimination droite).

Preuve:

On suppose que $\Gamma \models A \wedge B$, On a donc

Elimination gauche:

 $mod(\Gamma) \subseteq mod(A \wedge B) = mod(A) \cap mod(B)$. Donc

 $mod(\Gamma) \subseteq mod(A)$, d'où $\Gamma \models A$. Elimination droite:

 $mod(\Gamma) \subseteq mod(A \wedge B) = mod(A) \cap mod(B)$. Donc

 $mod(\Gamma) \subseteq mod(B)$, d'où $\Gamma \models B$.







Elimination de la conjonction

$$\frac{\Gamma \vdash A \land B}{\Gamma \vdash A} \land_{elim}^{g}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A \land B}{\Gamma \vdash B} \land_{elin}^{d}$$

• De $A \wedge B$, on peut déduire A (élimination gauche) et B (élimination droite).

Preuve :

On suppose que $\Gamma \models A \wedge B$, On a donc

Elimination gauche:

 $\operatorname{mod}(\Gamma)\subseteq\operatorname{mod}(A\wedge B)=\operatorname{mod}(A)\cap\operatorname{mod}(B)$. Donc

 $mod(\Gamma) \subseteq mod(A)$, d'où $\Gamma \models A$.

 $Elimination\ droite:$

 $mod(\Gamma) \subseteq mod(A \land B) = mod(A) \cap mod(B)$. Donc

 $mod(\Gamma) \subseteq mod(B)$, d'où $\Gamma \models B$.



Démontrer
$$\vdash (A \Rightarrow (B \Rightarrow C)) \Rightarrow ((A \land B) \Rightarrow C)$$





Démontrer $\vdash (A \Rightarrow (B \Rightarrow C)) \Rightarrow ((A \land B) \Rightarrow C)$

$$\begin{array}{c|c} A \Rightarrow (B \Rightarrow C) \vdash A \Rightarrow (B \Rightarrow C) \end{array} \xrightarrow{Ax} \begin{array}{c|c} \hline A \land B \vdash A \land B \\ \hline A \Rightarrow (B \Rightarrow C) \vdash A \Rightarrow (B \Rightarrow C) \end{array} \xrightarrow{Ax} \begin{array}{c|c} \hline A \land B \vdash A \land B \\ \hline A \Rightarrow (B \Rightarrow C), A \land B \vdash B \Rightarrow C \end{array} \xrightarrow{A} \begin{array}{c|c} \hline A \land B \vdash A \land B \\ \hline A \Rightarrow (B \Rightarrow C), A \land B \vdash C \\ \hline \hline A \Rightarrow (B \Rightarrow C), A \land B \vdash C \\ \hline \hline A \Rightarrow (B \Rightarrow C) \vdash (A \land B) \Rightarrow C \end{array} \xrightarrow{\Rightarrow intro} \begin{array}{c|c} \hline Ax \\ \Rightarrow intro \\ \hline \\ \vdash (A \Rightarrow (B \Rightarrow C)) \Rightarrow ((A \land B) \Rightarrow C) \end{array} \xrightarrow{\Rightarrow intro}$$







Introduction de la disjonction

$$\frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash A \lor B} \overset{\vee_{intro}^g}{}$$

$$\frac{\Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \lor B} \lor_{intro}^{d}$$

• Pour démontrer $A \vee B$, il suffit de démontrer A (introduction gauche) ou B (introduction droite).







Introduction de la disjonction

$$\frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash A \lor B} \lor_{intro}^{g}$$

$$\frac{\Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \lor B} \lor_{intro}^{d}$$

• Pour démontrer $A \vee B$, il suffit de démontrer A (introduction gauche) ou B (introduction droite).

$\mathbf{Preuve}:$

Introduction gauche :On montre que si $\Gamma \models A$ alors $\Gamma \models A \lor B$ supposons que $\Gamma \models A$, donc $mod(\Gamma) \subseteq mod(A)$. or $mod(A) \subseteq mod(A) \cup mod(B) = mod(A \vee B), \text{ doù } mod(\Gamma) \subseteq mod(A \vee B), \text{ d'où } \Gamma \models A \vee B.$ Introduction droite: On montre que si $\Gamma \models B$ alors $\Gamma \models A \vee B$ supposons que $\Gamma \models B$, donc $mod(\Gamma) \subseteq mod(B)$. or $mod(B) \subseteq mod(A) \cup mod(B) = mod(A \vee B)$, doù $mod(\Gamma) \subseteq mod(A \vee B)$, d'où $\Gamma \models A \vee B$.





Elimination de la disjonction

$$\frac{\Gamma \vdash A \lor B \qquad \Gamma^{'}, A \vdash C \qquad \Gamma^{''}, B \vdash C}{\Gamma, \Gamma^{'}, \Gamma^{''} \vdash C} \lor elim$$

• Si on veut montrer C et qu'on sait qu'on a $A \vee B$, il suffit de montrer C, d'une part en supposant A, d'autre part en supposant B.







Elimination de la disjonction

$$\frac{\Gamma \vdash A \lor B \qquad \Gamma^{'}, A \vdash C \qquad \Gamma^{''}, B \vdash C}{\Gamma, \Gamma^{'}, \Gamma^{''} \vdash C}$$
 $\lor elim$

• Si on veut montrer C et qu'on sait qu'on a $A \vee B$, il suffit de montrer C, d'une part en supposant A, d'autre part en supposant B.

```
Preuve: mod(\Gamma' \cup \Gamma'' \cup \Gamma'') = mod(\Gamma) \cap mod(\Gamma') \cap mod(\Gamma'')
                              \subseteq (mod(A) \cup mod(B)) \cap mod(\Gamma') \cap mod(\Gamma'')
                              = (mod(A) \cap mod(\Gamma^{'}) \cap mod(\Gamma^{''})) \cup (mod(B) \cap mod(\Gamma^{'}) \cap mod(\Gamma^{''}))
                              \subseteq \pmod(A) \cap mod(\Gamma^{'})) \cup (mod(B) \cap mod(\Gamma^{''}))
                                      mod(C) \cup mod(C) = mod(C)
```



Démontrer $\vdash (A \lor B) \Rightarrow (B \lor A)$





Démontrer $\vdash (A \lor B) \Rightarrow (B \lor A)$

$$\frac{A \lor B \vdash A \lor B}{A \lor B \vdash A \lor B} \xrightarrow{Ax} \frac{\overline{A} \vdash A}{A \vdash B \lor A} \xrightarrow{\bigvee_{intro}^{d}} \frac{\overline{B} \vdash B}{B \vdash B \lor A} \xrightarrow{\bigvee_{intro}^{g}} \frac{Ax}{|B \vdash B \lor A|} \xrightarrow{\bigvee_{intro}^{g}}$$





Démontrer $\vdash (A \lor B) \lor C \Rightarrow A \lor (B \lor C)$





Démontrer $\vdash (A \lor B) \lor C \Rightarrow A \lor (B \lor C)$

$$\begin{array}{c|c} A \lor B \vdash A \lor B \end{array} Ax \qquad \begin{array}{c} A \vdash A \\ \hline A \vdash A \lor B \vdash A \lor B \end{array} V_{intro}^{d} \qquad \begin{array}{c} B \vdash B \\ \hline B \vdash B \lor C \end{array} V_{intro}^{d} \\ \hline B \vdash A \lor (B \lor C) \end{array} V_{intro}^{d} \\ \hline A \lor B \vdash A \lor (B \lor C) \\ \hline \vdots \\ \end{array}$$

$$\frac{(A \lor B) \lor C \vdash (A \lor B) \lor C}{(A \lor B) \lor C \vdash (A \lor B) \lor C} \xrightarrow{Ax} \frac{\vdots}{A \lor B \vdash A \lor (B \lor C)} \xrightarrow{C \vdash B \lor C} \xrightarrow{V_{intro}^{d}} \xrightarrow{V_{intro}^{d}}$$

$$\frac{(A \lor B) \lor C \vdash A \lor (B \lor C)}{((A \lor B) \lor C) \Rightarrow (A \lor (B \lor C))} \Rightarrow_{intro}$$







Introduction de la négation

$$\frac{\Gamma, A \vdash \bot}{\Gamma \vdash \neg A} \neg intro$$

• Pour montrer $\neg A$, on suppose A et on démontre l'absurde.







Introduction de la négation

$$\frac{\Gamma, A \vdash \bot}{\Gamma \vdash \neg A} \neg intro$$

• Pour montrer $\neg A$, on suppose A et on démontre l'absurde.

Preuve:

On suppose $\Gamma, A \models \bot$, On a donc $: mod(\Gamma \cup \{A\}) = \emptyset$, alors : $(mod(\Gamma) \cap mod(A)) \cup mod(\neg A) = mod(\neg A)$, d'où $mod(\Gamma) \cup mod(\neg A) = mod(\neg A)$

Finalement, $mod(\Gamma) \subseteq mod(\neg A)$, d'où $\Gamma \models \neg A$







Elimination de la négation

$$\frac{\Gamma \vdash A \qquad \Gamma' \vdash \neg A}{\Gamma, \Gamma' \vdash \bot} \neg elim$$

• Si on a montré A et $\neg A$, alors on a montré l'absurde.







Elimination de la négation

$$\frac{\Gamma \vdash A \qquad \Gamma' \vdash \neg A}{\Gamma, \Gamma' \vdash \bot} \neg \underline{elim}$$

• Si on a montré A et $\neg A$, alors on a montré l'absurde.

Preuve:

```
On suppose \Gamma \models A et \Gamma^{'} \models \neg A, On a donc : mod(\Gamma) \subseteq mod(A) et mod(\Gamma^{'}) \subseteq mod(\neg A), alors : mod(\Gamma \cup \Gamma^{'}) = mod(\Gamma) \cap mod(\Gamma^{'}) \subseteq mod(A) \cap mod(\neg A), d'où mod(\Gamma \cup \Gamma^{'}) = \emptyset. Donc : \Gamma, \Gamma^{'} \models \bot
```







Raisonnement par l'absurde

$$\frac{\Gamma, \neg A \vdash \bot}{\Gamma \vdash A} \bot_{Abs}$$

• Pour démontré A, il suffit de démontrer l'absurde en supposant $\neg A$.







Raisonnement par l'absurde

$$\frac{\Gamma, \neg A \vdash \bot}{\Gamma \vdash A} \bot_{Abs}$$

• Pour démontré A, il suffit de démontrer l'absurde en supposant $\neg A$.

Preuve:

```
On suppose \Gamma, \neg A \models \bot, On a donc :
mod(\Gamma \cup \{\neg A\}) \subseteq \emptyset, alors:
(mod(\Gamma) \cap mod(\neg A)) \cup mod(A) \subseteq mod(A), d'où
mod(\Gamma) \cup mod(A) \subseteq mod(A).
```

Finalement, $mod(\Gamma) \subseteq mod(A)$, Donc: $\Gamma \models A$



Démontrer $\vdash \neg(A \lor B) \Rightarrow (\neg A \land \neg B)$



