
TD n° 1
Sémantique du Calcul Propositionnel

Exercice 1 Donnez les sous-formules de la formule :

$$[(q \vee \neg p) \Rightarrow (\neg \neg q \vee \neg p)] \wedge [(\neg \neg q \vee \neg p) \Rightarrow (\neg p \vee q)]$$

Exercice 2 Appliquez le diagramme de Quine à la formule suivante :

$$\varphi = ((c \Rightarrow ((b \vee a) \wedge d)) \wedge (b \Leftrightarrow (a \wedge (c \vee d))) \wedge (c \Rightarrow a)) \vee ((b \wedge a) \Rightarrow d)$$

Exercice 3 On considère les formules $\varphi = p \wedge (\neg q \Rightarrow (q \Rightarrow p))$ et $\psi = (p \vee q) \Leftrightarrow (\neg p \vee \neg q)$

1. Soit v une valuation. Déterminer, si c'est possible, $[\varphi]_v$ et $[\psi]_v$ dans chacun des cas suivants :
 - (a) on sait que $v(p) = 0$ et $v(q) = 1$;
 - (b) on sait que $v(p) = 0$;
 - (c) on sait que $v(q) = 1$;
2. Ces deux formules sont-elles satisfaisables ? Valides ?

Exercice 4 Quelles sont les valuations qui donnent même valeur à $p \wedge q$ et $p \Rightarrow q$?

Exercice 5 Montrez qu'une formule φ est valide si et seulement si $\neg\varphi$ n'est pas satisfaisable.

Exercice 6 Une formule φ est dite *contingente* lorsqu'elle est satisfaisable et non valide. Dire si les formules suivantes sont valides, insatisfaisables ou contingentes :

1. $(p \Rightarrow q) \Rightarrow p$
2. $p \Rightarrow (q \Rightarrow p)$
3. $(p \wedge q) \Leftrightarrow (p \Rightarrow \neg q)$
4. $(p \vee q) \wedge (\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee p) \wedge (\neg p \wedge \neg q \wedge r) \wedge (\neg r \vee s)$

Exercice 7 Soit φ une formule du calcul propositionnel.

1. Que peut-on dire de $mod(\varphi)$ lorsque φ est contingente ?
2. Soient φ et ψ deux formules propositionnelles. Que pensez-vous des affirmations suivantes :
 - (a) si φ est contingente, alors $\neg\varphi$ l'est également ;
 - (b) si φ et ψ sont contingentes, alors $\varphi \vee \psi$ et $\varphi \wedge \psi$ sont contingentes ;
 - (c) si $\varphi \vee \psi$ est insatisfaisable alors φ et ψ sont insatisfaisables ;
 - (d) si $\varphi \wedge \psi$ est valide alors φ et ψ sont valides ;