Introduction

Les phrases du calcul propositionnel sont construites á partir de *"propositions"* composées à l'aide des connecteurs :
$\wedge$, $\vee$, $\neg$,$\Rightarrow$ et $\Leftrightarrow$.

- Une proposition est un énoncé simple et non ambigû.

Introduction

Les phrases du calcul propositionnel sont construites á partir de *"propositions"* composées à l'aide des connecteurs :
$\wedge$, $\vee$, $\neg$,$\Rightarrow$ et $\Leftrightarrow$.

- Une proposition est un énoncé simple et non ambigû.
- Prend la valeur *"vrai"* ou *"faux"*.

Introduction

Les phrases du calcul propositionnel sont construites á partir de *"propositions"* composées à l'aide des connecteurs :
$\wedge$, $\vee$, $\neg$,$\Rightarrow$ et $\Leftrightarrow$.

- Une proposition est un énoncé simple et non ambigû.
- Prend la valeur *"vrai"* ou *"faux"*.
- Donne une information sur un état de chose.

Introduction

Les phrases du calcul propositionnel sont construites á partir de *"propositions"* composées à l'aide des connecteurs :
$\wedge$, $\vee$, $\neg$,$\Rightarrow$ et $\Leftrightarrow$.

- Une proposition est un énoncé simple et non ambigû.
- Prend la valeur *"vrai"* ou *"faux"*.
- Donne une information sur un état de chose.
- Les souhaits, les phrases impératives ou les interrogations ne sont pas des propositions.

Introduction

Les phrases du calcul propositionnel sont construites á partir de *"propositions"* composées à l'aide des connecteurs :
$\wedge$, $\vee$, $\neg$,$\Rightarrow$ et $\Leftrightarrow$.

- Une proposition est un énoncé simple et non ambigû.
- Prend la valeur *"vrai"* ou *"faux"*.
- Donne une information sur un état de chose.
- Les souhaits, les phrases impératives ou les interrogations ne sont pas des propositions.
- Une proposition doit être indécomposable.

Introduction

Les phrases du calcul propositionnel sont construites á partir de *"propositions"* composées à l'aide des connecteurs :
$\wedge$, $\vee$, $\neg$,$\Rightarrow$ et $\Leftrightarrow$.

- Une proposition est un énoncé simple et non ambigû.
- Prend la valeur *"vrai"* ou *"faux"*.
- Donne une information sur un état de chose.
- Les souhaits, les phrases impératives ou les interrogations ne sont pas des propositions.
- Une proposition doit être indécomposable.

Introduction

Les phrases du calcul propositionnel sont construites á partir de *"propositions"* composées à l'aide des connecteurs :
$\wedge$, $\vee$, $\neg$,$\Rightarrow$ et $\Leftrightarrow$.

- Une proposition est un énoncé simple et non ambigû.
- Prend la valeur *"vrai"* ou *"faux"*.
- Donne une information sur un état de chose.
- Les souhaits, les phrases impératives ou les interrogations ne sont pas des propositions.
- Une proposition doit être indécomposable.

Exemple

"2 + 2= 4" , *"la table est bleue"* sont deux propositions.
"2+2=4 et l'herbe est verte" n'est pas une proposition.

Vous êtes ici

Formule Propositionnelle

Le langage du calcul propositionnel est formé de :

- Variables propositionnelles (ou symbols propositionnels ou propositions ou atomes) $Prop = \{p_1, p_2, \ldots\}$;

Formule Propositionnelle

Le langage du calcul propositionnel est formé de :

- Variables propositionnelles (ou symbols propositionnels ou propositions ou atomes) $Prop = \{p_1, p_2, \dots\}$;
- Connecteurs logiques $\wedge$, $\vee$, $\neg$,$\Rightarrow$ et $\Leftrightarrow$;

Formule Propositionnelle

Le langage du calcul propositionnel est formé de :

- Variables propositionnelles (ou symbols propositionnels ou propositions ou atomes) $Prop = \{p_1, p_2, \ldots\}$;
- Connecteurs logiques $\wedge$, $\vee$, $\neg$,$\Rightarrow$ et $\Leftrightarrow$;
- Symboles auxiliaires : parenthèses et espace.

Formule Propositionnelle

Le langage du calcul propositionnel est formé de :

- Variables propositionnelles (ou symbols propositionnels ou propositions ou atomes) $Prop = \{p_1, p_2, \ldots\}$;
- Connecteurs logiques $\wedge$, $\vee$, $\neg$,$\Rightarrow$ et $\Leftrightarrow$;
- Symboles auxiliaires : parenthèses et espace.

Formule Propositionnelle

Le langage du calcul propositionnel est formé de :

- Variables propositionnelles (ou symbols propositionnels ou propositions ou atomes) $Prop = \{p_1, p_2, \ldots\}$;
- Connecteurs logiques $\wedge$, $\vee$, $\neg$,$\Rightarrow$ et $\Leftrightarrow$;
- Symboles auxiliaires : parenthèses et espace.

Définition

L'ensemble $\mathcal{F}_p$ des *formules du calcul propositionnel* est le plus petit ensemble tel que :

- Toute variable propositionnelle est une formule.

Formule Propositionnelle

Le langage du calcul propositionnel est formé de :

- Variables propositionnelles (ou symbols propositionnels ou propositions ou atomes) $Prop = \{p_1, p_2, \ldots\}$;
- Connecteurs logiques $\wedge$, $\vee$, $\neg$,$\Rightarrow$ et $\Leftrightarrow$;
- Symboles auxiliaires : parenthèses et espace.

Définition

L'ensemble $\mathcal{F}_p$ des *formules du calcul propositionnel* est le plus petit ensemble tel que :

- Toute variable propositionnelle est une formule.
- Si φ est une formule alors $\neg\varphi$ est une formule.

Formule Propositionnelle

Le langage du calcul propositionnel est formé de :

- Variables propositionnelles (ou symbols propositionnels ou propositions ou atomes) $Prop = \{p_1, p_2, \ldots\}$;
- Connecteurs logiques $\wedge$, $\vee$, $\neg$,$\Rightarrow$ et $\Leftrightarrow$;
- Symboles auxiliaires : parenthèses et espace.

Définition

L'ensemble $\mathcal{F}_p$ des *formules du calcul propositionnel* est le plus petit ensemble tel que :

- Toute variable propositionnelle est une formule.
- Si φ est une formule alors $\neg\varphi$ est une formule.
- Si φ, ψ sont des formules alors $(\varphi \wedge \psi)$, $(\varphi \vee \psi)$, $(\varphi \Rightarrow \psi)$ et $(\varphi \Leftrightarrow \psi)$ sont des formules.

Formule Propositionnelle

Exemple

- p, $p \Rightarrow (q \wedge r)$ et $p \vee q$

Formule Propositionnelle

Exemple

- p, $p \Rightarrow (q \wedge r)$ et $p \vee q$

Formule Propositionnelle

Exemple

- p, $p \Rightarrow (q \wedge r)$ et $p \vee q$ sont des formules propositionnelles ;

Formule Propositionnelle

Exemple

- p, $p \Rightarrow (q \wedge r)$ et $p \vee q$ sont des formules propositionnelles ;
- $(\neg \wedge q)$ et $f(x) \Rightarrow g(x)$

Formule Propositionnelle

Exemple

- p, $p \Rightarrow (q \wedge r)$ et $p \vee q$ sont des formules propositionnelles ;
- $(\neg \wedge q)$ et $f(x) \Rightarrow g(x)$

Formule Propositionnelle

Exemple

- p, $p \Rightarrow (q \wedge r)$ et $p \vee q$ sont des formules propositionnelles ;
- $(\neg \wedge q)$ et $f(x) \Rightarrow g(x)$ n'en sont pas.

Formule Propositionnelle

Exemple

- p, $p \Rightarrow (q \wedge r)$ et $p \vee q$ sont des formules propositionnelles ;
- $(\neg \wedge q)$ et $f(x) \Rightarrow g(x)$ n'en sont pas.

Remarques :

- Les symboles auxiliaires sont utilisés pour lever les ambiguïtés possibles : on écrira $(p \vee (q \wedge r))$ au lieu de $p \vee q \wedge r$.

Formule Propositionnelle

Exemple

- p, $p \Rightarrow (q \wedge r)$ et $p \vee q$ sont des formules propositionnelles ;
- $(\neg \wedge q)$ et $f(x) \Rightarrow g(x)$ n'en sont pas.

Remarques :

- Les symboles auxiliaires sont utilisés pour lever les ambiguïtés possibles : on écrira $(p \vee (q \wedge r))$ au lieu de $p \vee q \wedge r$.
- On ajoute le symbole $\top$ qui correspond à *vrai*, et le symbole $\perp$ qui correspond à *faux*.

Sous-formule propositionnelle

Définition

L'ensemble $SF(\varphi)$ des sous-formules d'une formule φ est défini par induction de la façon suivante :

- $SF(p) = \{p\}$;

Sous-formule propositionnelle

Définition

L'ensemble $SF(\varphi)$ des sous-formules d'une formule φ est défini par induction de la façon suivante :

- $SF(p) = \{p\}$;
- $SF(\neg\varphi) = \{\neg\varphi\} \cup SF(\varphi)$;

Sous-formule propositionnelle

Définition

L'ensemble $SF(\varphi)$ des sous-formules d'une formule φ est défini par induction de la façon suivante :

- $SF(p) = \{p\}$;
- $SF(\neg\varphi) = \{\neg\varphi\} \cup SF(\varphi)$;
- $SF(\varphi \circ \psi) = \{\varphi \circ \psi\} \cup SF(\varphi) \cup SF(\psi)$ (où $\circ$ désigne un des symboles $\wedge$, $\vee$,$\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$).

Sous-formule propositionnelle

Définition

L'ensemble $SF(\varphi)$ des sous-formules d'une formule φ est défini par induction de la façon suivante :

- $SF(p) = \{p\}$;
- $SF(\neg\varphi) = \{\neg\varphi\} \cup SF(\varphi)$;
- $SF(\varphi \circ \psi) = \{\varphi \circ \psi\} \cup SF(\varphi) \cup SF(\psi)$ (où $\circ$ désigne un des symboles $\wedge$, $\vee$,$\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$).

Exemple

$SF(p \Rightarrow (q \vee r)) =$

Sous-formule propositionnelle

Définition

L'ensemble $SF(\varphi)$ des sous-formules d'une formule φ est défini par induction de la façon suivante :

- $SF(p) = \{p\}$;
- $SF(\neg\varphi) = \{\neg\varphi\} \cup SF(\varphi)$;
- $SF(\varphi \circ \psi) = \{\varphi \circ \psi\} \cup SF(\varphi) \cup SF(\psi)$ (où $\circ$ désigne un des symboles $\wedge$, $\vee$,$\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$).

Remarques : ψ est une sous-formule stricte de φ si ψ est une sous- formule de φ qui n'est pas φ.

Vous êtes ici

Introduction

- Le rôle de la sémantique est de préciser le sens.

Introduction

- Le rôle de la sémantique est de préciser le sens.
- Le seul sens d'une formule est sa valeur de vérité (*i.e la propriété d'être vraie ou fausse*).

Introduction

- Le rôle de la sémantique est de préciser le sens.
- Le seul sens d'une formule est sa valeur de vérité (*i.e la propriété d'être vraie ou fausse*).
- L'ensemble des valeurs de vérité est $\{0, 1\}$
  où 1 représente le *Vrai* et 0 représente le *faux*.

Introduction

- Le rôle de la sémantique est de préciser le sens.
- Le seul sens d'une formule est sa valeur de vérité (*i.e la propriété d'être vraie ou fausse*).
- L'ensemble des valeurs de vérité est $\{0, 1\}$
  où 1 représente le *Vrai* et 0 représente le *faux*.
- La sémantique des formules obéit au deux principes suivants :

Introduction

- Le rôle de la sémantique est de préciser le sens.
- Le seul sens d'une formule est sa valeur de vérité (*i.e la propriété d'être vraie ou fausse*).
- L'ensemble des valeurs de vérité est $\{0, 1\}$
  où 1 représente le *Vrai* et 0 représente le *faux*.
- La sémantique des formules obéit au deux principes suivants :

  Bivalence : une formule est soit vraie, soit fausse

Introduction

- Le rôle de la sémantique est de préciser le sens.
- Le seul sens d'une formule est sa valeur de vérité (*i.e la propriété d'être vraie ou fausse*).
- L'ensemble des valeurs de vérité est $\{0, 1\}$ où 1 représente le *Vrai* et 0 représente le *faux*.
- La sémantique des formules obéit au deux principes suivants :

  Bivalence : une formule est soit vraie, soit fausse

  Vérifonctionnalité : la valeur de vérité d'une formule non-atomique est déterminée par les valeurs de ses constituants.

Valuation

Pour déterminer si une formule est vraie ou fausse :

- Donner une valeur de vérité aux propositions.

Valuation

Pour déterminer si une formule est vraie ou fausse :

- Donner une valeur de vérité aux propositions.
- L'évaluation d'une formule, dépend donc des valeurs choisies pour les symboles propositionnels.

Valuation

Pour déterminer si une formule est vraie ou fausse :

- Donner une valeur de vérité aux propositions.
- L'évaluation d'une formule, dépend donc des valeurs choisies pour les symboles propositionnels.
- Ces valeurs sont données par une **valuation**.

Valuation

Pour déterminer si une formule est vraie ou fausse :

- Donner une valeur de vérité aux propositions.
- L'évaluation d'une formule, dépend donc des valeurs choisies pour les symboles propositionnels.
- Ces valeurs sont données par une **valuation**.

Valuation

Pour déterminer si une formule est vraie ou fausse :

- Donner une valeur de vérité aux propositions.
- L'évaluation d'une formule, dépend donc des valeurs choisies pour les symboles propositionnels.
- Ces valeurs sont données par une **valuation**.

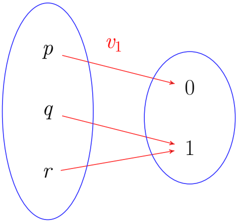
Définition

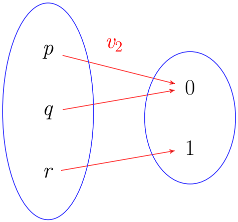
Une valuation est une fonction v de l'ensemble des variables propositionnelles $Prop$ vers $\{0, 1\}$

$$v : Prop \rightarrow \{0, 1\}$$

Valuation

Une valuation affecte à chaque variable propositionnelle de *Prop* une valeur de vérité.





$v_1(p) = 0 \;\; v_1(q) = 1 \;\; v_1(r) = 1$ $\qquad$ $v_2(p) = 0 \;\; v_2(q) = 0 \;\; v_2(r) = 1$

	p	q	r
v_1 :	0	1	1
v_2 :	0	0	1

Valuation

Si $Prop$ contient n variables on a 2^n valuations possibles.

$n = 3$

	p	q	r
v_1 :	0	0	0

Valuation

Si *Prop* contient n variables on a 2^n valuations possibles.

$n = 3$

	p	q	r
v_1 :	0	0	0
v_2 :	0	0	1

Valuation

Si $Prop$ contient n variables on a 2^n valuations possibles.

$n = 3$

	p	q	r
v_1 :	0	0	0
v_2 :	0	0	1
v_3 :	0	1	0

Valuation

Si $Prop$ contient n variables on a 2^n valuations possibles.

$n = 3$

	p	q	r
v_1 :	0	0	0
v_2 :	0	0	1
v_3 :	0	1	0
v_4 :	0	1	1

Valuation

Si $Prop$ contient n variables on a 2^n valuations possibles.

$n = 3$

	p	q	r
v_1 :	0	0	0
v_2 :	0	0	1
v_3 :	0	1	0
v_4 :	0	1	1
v_5 :	1	0	0

Valuation

Si $Prop$ contient n variables on a 2^n valuations possibles.

$n = 3$

	p	q	r
v_1 :	0	0	0
v_2 :	0	0	1
v_3 :	0	1	0
v_4 :	0	1	1
v_5 :	1	0	0
v_6 :	1	0	1

Valuation

Si $Prop$ contient n variables on a 2^n valuations possibles.

$n = 3$

	p	q	r
v_1 :	0	0	0
v_2 :	0	0	1
v_3 :	0	1	0
v_4 :	0	1	1
v_5 :	1	0	0
v_6 :	1	0	1
v_7 :	1	1	0

Valuation

Si *Prop* contient n variables on a 2^n valuations possibles.

$n = 3$

	p	q	r
v_1 :	0	0	0
v_2 :	0	0	1
v_3 :	0	1	0
v_4 :	0	1	1
v_5 :	1	0	0
v_6 :	1	0	1
v_7 :	1	1	0
v_8 :	1	1	1

Valuation

Si *Prop* contient n variables on a 2^n valuations possibles.

$n = 3$

	p	q	r
v_1 :	0	0	0
v_2 :	0	0	1
v_3 :	0	1	0
v_4 :	0	1	1
v_5 :	1	0	0
v_6 :	1	0	1
v_7 :	1	1	0
v_8 :	1	1	1

$n = 2$

	p	q
v_1 :	0	0

Valuation

Si *Prop* contient n variables on a 2^n valuations possibles.

$n = 3$

	p	q	r
v_1 :	0	0	0
v_2 :	0	0	1
v_3 :	0	1	0
v_4 :	0	1	1
v_5 :	1	0	0
v_6 :	1	0	1
v_7 :	1	1	0
v_8 :	1	1	1

$n = 2$

	p	q
v_1 :	0	0
v_2 :	0	1

Valuation

Si *Prop* contient n variables on a 2^n valuations possibles.

$n = 3$

	p	q	r
v_1 :	0	0	0
v_2 :	0	0	1
v_3 :	0	1	0
v_4 :	0	1	1
v_5 :	1	0	0
v_6 :	1	0	1
v_7 :	1	1	0
v_8 :	1	1	1

$n = 2$

	p	q
v_1 :	0	0
v_2 :	0	1
v_3 :	1	0

Valuation

Si *Prop* contient n variables on a 2^n valuations possibles.

$n = 3$

	p	q	r
v_1 :	0	0	0
v_2 :	0	0	1
v_3 :	0	1	0
v_4 :	0	1	1
v_5 :	1	0	0
v_6 :	1	0	1
v_7 :	1	1	0
v_8 :	1	1	1

$n = 2$

	p	q
v_1 :	0	0
v_2 :	0	1
v_3 :	1	0
v_4 :	1	1

Valuation

Si *Prop* contient n variables on a 2^n valuations possibles.

$n = 3$

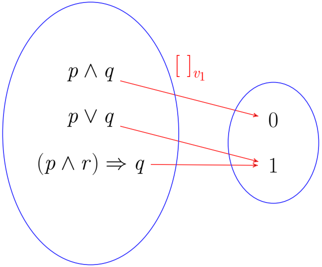
	p	q	r
v_1 :	0	0	0
v_2 :	0	0	1
v_3 :	0	1	0
v_4 :	0	1	1
v_5 :	1	0	0
v_6 :	1	0	1
v_7 :	1	1	0
v_8 :	1	1	1

$n = 2$

	p	q
v_1 :	0	0
v_2 :	0	1
v_3 :	1	0
v_4 :	1	1

Interprétation

- Pour Chaque valuation v, il existe une application unique définie de l'ensemble des formules propositionnelles dans $\{0, 1\}$ qui prolonge v.
- Cette application est appelée :interprétation des $\mathcal{F}_p$ dans v et elle est notée par $[\ ]_v$.



Analyse sémantique d'une formule

- L'analyse de vérité d'une formule propositionnelle consiste à étudier sa valeur pour toutes les valuations possibles des variables propositionnelles qu'elles contient.

Analyse sémantique d'une formule

- L'analyse de vérité d'une formule propositionnelle consiste à étudier sa valeur pour toutes les valuations possibles des variables propositionnelles qu'elles contient.
- Donner une valeur de vérité aux propositions.

Analyse sémantique d'une formule

- L'analyse de vérité d'une formule propositionnelle consiste à étudier sa valeur pour toutes les valuations possibles des variables propositionnelles qu'elles contient.
- Donner une valeur de vérité aux propositions.
- L'évaluation d'une formule, dépend donc des valeurs choisies pour les symboles propositionnels.

Analyse sémantique d'une formule

- L'analyse de vérité d'une formule propositionnelle consiste à étudier sa valeur pour toutes les valuations possibles des variables propositionnelles qu'elles contient.
- Donner une valeur de vérité aux propositions.
- L'évaluation d'une formule, dépend donc des valeurs choisies pour les symboles propositionnels.
- Ces valeurs sont données par une **valuation**.

Analyse sémantique d'une formule

- L'analyse de vérité d'une formule propositionnelle consiste à étudier sa valeur pour toutes les valuations possibles des variables propositionnelles qu'elles contient.
- Donner une valeur de vérité aux propositions.
- L'évaluation d'une formule, dépend donc des valeurs choisies pour les symboles propositionnels.
- Ces valeurs sont données par une **valuation**.

Analyse sémantique d'une formule

- L'analyse de vérité d'une formule propositionnelle consiste à étudier sa valeur pour toutes les valuations possibles des variables propositionnelles qu'elles contient.
- Donner une valeur de vérité aux propositions.
- L'évaluation d'une formule, dépend donc des valeurs choisies pour les symboles propositionnels.
- Ces valeurs sont données par une **valuation**.

La sémantique des connecteurs

- La sémantique des connecteurs logiques est donnée par les tables suivantes :

p	$\neg p$
0	1
1	0

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \Rightarrow q$	$p \Leftrightarrow q$
0	0	0	0	1	1
0	1	0	1	1	0
1	0	0	1	0	0
1	1	1	1	1	1

Interprétation d'une formule

Définition

L'interprétation (ou sémantique) d'une formule φ dans la valuation v notée $[\varphi]_v$ est définie par :

- Si φ est une variable propositionnelle alors $[\varphi]_v = v(\varphi)$

Interprétation d'une formule

Définition

L'interprétation (ou sémantique) d'une formule φ dans la valuation v notée $[\varphi]_v$ est définie par :

- Si φ est une variable propositionnelle alors $[\varphi]_v = v(\varphi)$
- Si $\varphi = \neg\varphi'$ alors $[\varphi]_v = 1 - \left[\varphi'\right]_v$

Interprétation d'une formule

Définition

L'interprétation (ou sémantique) d'une formule φ dans la valuation v notée $[\varphi]_v$ est définie par :

- Si φ est une variable propositionnelle alors $[\varphi]_v = v(\varphi)$
- Si $\varphi = \neg\varphi'$ alors $[\varphi]_v = 1 - \left[\varphi'\right]_v$
- Si $\varphi = \varphi' \circ \varphi''$ alors $[\varphi]_v = \left[\varphi'\right]_v \circ \left[\varphi''\right]_v$ (où $\circ$ désigne un des symboles $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$)

Interprétation d'une formule

Une définition équivalente est la suivante :

Définition

- $[\neg\varphi]_v = 1 - [\varphi]_v$

Interprétation d'une formule

Une définition équivalente est la suivante :

Définition

- $[\neg\varphi]_v = 1 - [\varphi]_v$
- $[\varphi \wedge \psi]_v = \min\left([\varphi]_v, [\psi]_v\right)$

Interprétation d'une formule

Une définition équivalente est la suivante :

Définition

- $[\neg\varphi]_v = 1 - [\varphi]_v$
- $[\varphi \wedge \psi]_v = \min\left([\varphi]_v, [\psi]_v\right)$
- $[\varphi \vee \psi]_v = \max\left([\varphi]_v, [\psi]_v\right)$

Interprétation d'une formule

Une définition équivalente est la suivante :

Définition

- $[\neg\varphi]_v = 1 - [\varphi]_v$
- $[\varphi \wedge \psi]_v = \min\left([\varphi]_v, [\psi]_v\right)$
- $[\varphi \vee \psi]_v = \max\left([\varphi]_v, [\psi]_v\right)$
- $[\varphi \Rightarrow \psi]_v = [\neg\varphi \vee \psi]_v = \max\left(1 - [\varphi]_v, [\psi]_v\right)$

Interprétation d'une formule

Une définition équivalente est la suivante :

Définition

- $[\neg\varphi]_v = 1 - [\varphi]_v$
- $[\varphi \wedge \psi]_v = \min\left([\varphi]_v, [\psi]_v\right)$
- $[\varphi \vee \psi]_v = \max\left([\varphi]_v, [\psi]_v\right)$
- $[\varphi \Rightarrow \psi]_v = [\neg\varphi \vee \psi]_v = \max\left(1 - [\varphi]_v, [\psi]_v\right)$
- $[\varphi \Leftrightarrow \psi]_v = 1$ ssi $[\varphi]_v = [\psi]_v$

Interprétation d'une formule

Exemple

Soit v la valuation définie par : $v(p) = 0$ $v(q) = 1$ $v(r) = 1$
Soit la formule $\varphi = (p \wedge q) \Rightarrow r$

$$[\varphi]_v = [(p \wedge q) \Rightarrow r]_v$$

Interprétation d'une formule

Exemple

Soit v la valuation définie par : $v(p) = 0$ $v(q) = 1$ $v(r) = 1$

Soit la formule $\varphi = (p \wedge q) \Rightarrow r$

$$\begin{aligned} [\varphi]_v &= [(p \wedge q) \Rightarrow r]_v \\ &= [p \wedge q]_v \Rightarrow [r]_v \end{aligned}$$

Interprétation d'une formule

Exemple

Soit v la valuation définie par : $v(p) = 0 \ v(q) = 1 \ v(r) = 1$
Soit la formule $\varphi = (p \wedge q) \Rightarrow r$

$$\begin{aligned} [\varphi]_v &= [(p \wedge q) \Rightarrow r]_v \\ &= [p \wedge q]_v \Rightarrow [r]_v \\ &= ([p]_v \wedge [q]_v) \Rightarrow [r]_v \end{aligned}$$

Interprétation d'une formule

Exemple

Soit v la valuation définie par : $v(p) = 0$ $v(q) = 1$ $v(r) = 1$
Soit la formule $\varphi = (p \wedge q) \Rightarrow r$

$$\begin{aligned}
[\varphi]_v &= [(p \wedge q) \Rightarrow r]_v \\
&= [p \wedge q]_v \Rightarrow [r]_v \\
&= ([p]_v \wedge [q]_v) \Rightarrow [r]_v \\
&= (v(p) \wedge v(q)) \Rightarrow v(r)
\end{aligned}$$

Interprétation d'une formule

Exemple

Soit v la valuation définie par : $v(p) = 0$ $v(q) = 1$ $v(r) = 1$

Soit la formule $\varphi = (p \wedge q) \Rightarrow r$

$$\begin{aligned}
[\varphi]_v &= [(p \wedge q) \Rightarrow r]_v \\
&= [p \wedge q]_v \Rightarrow [r]_v \\
&= ([p]_v \wedge [q]_v) \Rightarrow [r]_v \\
&= (v(p) \wedge v(q)) \Rightarrow v(r) \\
&= (0 \wedge 1) \Rightarrow 1
\end{aligned}$$

Interprétation d'une formule

Exemple

Soit v la valuation définie par : $v(p) = 0$ $v(q) = 1$ $v(r) = 1$
Soit la formule $\varphi = (p \wedge q) \Rightarrow r$

$$\begin{aligned}
[\varphi]_v &= [(p \wedge q) \Rightarrow r]_v \\
&= [p \wedge q]_v \Rightarrow [r]_v \\
&= ([p]_v \wedge [q]_v) \Rightarrow [r]_v \\
&= (v(p) \wedge v(q)) \Rightarrow v(r) \\
&= (0 \wedge 1) \Rightarrow 1 \\
&= 1
\end{aligned}$$

Analyse sémantique d'une formule

- L'analyse de vérité d'une formule propositionnelle φ consiste à étudier sa valeur pour toutes les valuations possibles des variables propositionnelles qu'elles contient.

Analyse sémantique d'une formule

- L'analyse de vérité d'une formule propositionnelle φ consiste à étudier sa valeur pour toutes les valuations possibles des variables propositionnelles qu'elles contient.
- Ceci revient à trouver une fonction F_φ qui associe à chaque valuation v des VP de φ l'interprétation de φ dans v.

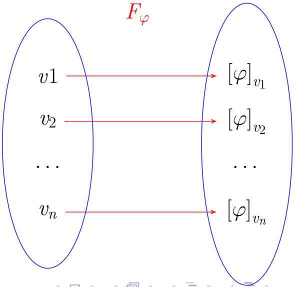
Analyse sémantique d'une formule

- L'analyse de vérité d'une formule propositionnelle φ consiste à étudier sa valeur pour toutes les valuations possibles des variables propositionnelles qu'elles contient.
- Ceci revient à trouver une fonction F_φ qui associe à chaque valuation v des VP de φ l'interprétation de φ dans v.

Analyse sémantique d'une formule

- L'analyse de vérité d'une formule propositionnelle φ consiste à étudier sa valeur pour toutes les valuations possibles des variables propositionnelles qu'elles contient.
- Ceci revient à trouver une fonction F_φ qui associe à chaque valuation v des VP de φ l'interprétation de φ dans v.

$$F_\varphi : \{v_1, v_2, \dots v_n\} \to \{0, 1\}$$
$$F_\varphi(v) = [\varphi]_v$$



Analyse sémantique d'une formule

L'analyse de vérité peut être faite de deux manières :

- Table de Vérité ;

Analyse sémantique d'une formule

L'analyse de vérité peut être faite de deux manières :

- Table de Vérité ;
- Diagramme de Quine.

Table de Vérité

- Description de la méthode :

Table de Vérité

- Description de la méthode :
  - Soient $p_1, p_2, \ldots, P_n$ les VP de la formule φ.

Table de Vérité

- Description de la méthode :
  - Soient $p_1, p_2, \ldots, P_n$ les VP de la formule φ.
  - On énumère toutes les valuations possibles sur l'ensemble $\{p_1, p_2, \ldots, P - n\}$ (soit 2^n valuations).

Table de Vérité

- Description de la méthode :
  - Soient $p_1, p_2, \ldots, P_n$ les VP de la formule φ.
  - On énumère toutes les valuations possibles sur l'ensemble $\{p_1, p_2, \ldots, P - n\}$ (soit 2^n valuations).
  - Pour chaque valuation v on calcule $[\varphi]_v$

Table de Vérité

- Description de la méthode :
  - Soient $p_1, p_2, \ldots, P_n$ les VP de la formule φ.
  - On énumère toutes les valuations possibles sur l'ensemble $\{p_1, p_2, \ldots, P - n\}$ (soit 2^n valuations).
  - Pour chaque valuation v on calcule $[\varphi]_v$

Table de Vérité

- Description de la méthode :
  - Soient $p_1, p_2, \ldots, P_n$ les VP de la formule φ.
  - On énumère toutes les valuations possibles sur l'ensemble $\{p_1, p_2, \ldots, P - n\}$ (soit 2^n valuations).
  - Pour chaque valuation v on calcule $[\varphi]_v$

Exemple

$\varphi = (p \wedge q) \Rightarrow r$

p	q	r	$p \wedge q$	φ
0	0	0	0	1

Table de Vérité

- Description de la méthode :
  - Soient $p_1, p_2, \ldots, P_n$ les VP de la formule φ.
  - On énumère toutes les valuations possibles sur l'ensemble $\{p_1, p_2, \ldots, P - n\}$ (soit 2^n valuations).
  - Pour chaque valuation v on calcule $[\varphi]_v$

Exemple

$\varphi = (p \wedge q) \Rightarrow r$

p	q	r	$p \wedge q$	φ
0	0	0	0	1
0	0	1	0	1

Table de Vérité

- Description de la méthode :
  - Soient $p_1, p_2, \ldots, P_n$ les VP de la formule φ.
  - On énumère toutes les valuations possibles sur l'ensemble $\{p_1, p_2, \ldots, P - n\}$ (soit 2^n valuations).
  - Pour chaque valuation v on calcule $[\varphi]_v$

Exemple

$\varphi = (p \wedge q) \Rightarrow r$

p	q	r	$p \wedge q$	φ
0	0	0	0	1
0	0	1	0	1
0	1	0	0	1

Table de Vérité

- Description de la méthode :
  - Soient $p_1, p_2, \ldots, P_n$ les VP de la formule φ.
  - On énumère toutes les valuations possibles sur l'ensemble $\{p_1, p_2, \ldots, P - n\}$ (soit 2^n valuations).
  - Pour chaque valuation v on calcule $[\varphi]_v$

Exemple

$\varphi = (p \wedge q) \Rightarrow r$

p	q	r	$p \wedge q$	φ
0	0	0	0	1
0	0	1	0	1
0	1	0	0	1
0	1	1	0	1

Table de Vérité

- Description de la méthode :
  - Soient $p_1, p_2, \ldots, P_n$ les VP de la formule φ.
  - On énumère toutes les valuations possibles sur l'ensemble $\{p_1, p_2, \ldots, P - n\}$ (soit 2^n valuations).
  - Pour chaque valuation v on calcule $[\varphi]_v$

Exemple

$\varphi = (p \wedge q) \Rightarrow r$

p	q	r	$p \wedge q$	φ
0	0	0	0	1
0	0	1	0	1
0	1	0	0	1
0	1	1	0	1
1	0	0	0	1

Table de Vérité

- Description de la méthode :
  - Soient $p_1, p_2, \ldots, P_n$ les VP de la formule φ.
  - On énumère toutes les valuations possibles sur l'ensemble $\{p_1, p_2, \ldots, P - n\}$ (soit 2^n valuations).
  - Pour chaque valuation v on calcule $[\varphi]_v$

Exemple

$\varphi = (p \wedge q) \Rightarrow r$

p	q	r	$p \wedge q$	φ
0	0	0	0	1
0	0	1	0	1
0	1	0	0	1
0	1	1	0	1
1	0	0	0	1
1	0	1	0	1

Table de Vérité

- Description de la méthode :
  - Soient $p_1, p_2, \ldots, P_n$ les VP de la formule φ.
  - On énumère toutes les valuations possibles sur l'ensemble $\{p_1, p_2, \ldots, P - n\}$ (soit 2^n valuations).
  - Pour chaque valuation v on calcule $[\varphi]_v$

Exemple

$\varphi = (p \wedge q) \Rightarrow r$

p	q	r	$p \wedge q$	φ
0	0	0	0	1
0	0	1	0	1
0	1	0	0	1
0	1	1	0	1
1	0	0	0	1
1	0	1	0	1
1	1	0	1	0

Table de Vérité

- Description de la méthode :
  - Soient $p_1, p_2, \ldots, P_n$ les VP de la formule φ.
  - On énumère toutes les valuations possibles sur l'ensemble $\{p_1, p_2, \ldots, P - n\}$ (soit 2^n valuations).
  - Pour chaque valuation v on calcule $[\varphi]_v$

Exemple

$\varphi = (p \wedge q) \Rightarrow r$

p	q	r	$p \wedge q$	φ
0	0	0	0	1
0	0	1	0	1
0	1	0	0	1
0	1	1	0	1
1	0	0	0	1
1	0	1	0	1
1	1	0	1	0
1	1	1	1	1

Table de Vérité

- Description de la méthode :
  - Soient $p_1, p_2, \ldots, P_n$ les VP de la formule φ.
  - On énumère toutes les valuations possibles sur l'ensemble $\{p_1, p_2, \ldots, P - n\}$ (soit 2^n valuations).
  - Pour chaque valuation v on calcule $[\varphi]_v$

Exemple

$\varphi = (p \wedge q) \Rightarrow r$

p	q	r	$p \wedge q$	φ
0	0	0	0	1
0	0	1	0	1
0	1	0	0	1
0	1	1	0	1
1	0	0	0	1
1	0	1	0	1
1	1	0	1	0
1	1	1	1	1

Table de Vérité

- Quand le nombre de variables augmente :

Table de Vérité

- Quand le nombre de variables augmente :
  - nombre total de valuations possibles augmente

Table de Vérité

- Quand le nombre de variables augmente :
  - nombre total de valuations possibles augmente
  - nombre de lignes de la table de vérité augmente

Table de Vérité

- Quand le nombre de variables augmente :
  - nombre total de valuations possibles augmente
  - nombre de lignes de la table de vérité augmente
- Quand la formule φ est longue :

Table de Vérité

- Quand le nombre de variables augmente :
  - nombre total de valuations possibles augmente
  - nombre de lignes de la table de vérité augmente
- Quand la formule φ est longue :
  - nécessité de calculs intermédiaires sur les sous formules de φ.

Table de Vérité

- Quand le nombre de variables augmente :
  - nombre total de valuations possibles augmente
  - nombre de lignes de la table de vérité augmente
- Quand la formule φ est longue :
  - nécessité de calculs intermédiaires sur les sous formules de φ.
  - nombre de colonnes de la table de vérité augmente.

Table de Vérité

- Quand le nombre de variables augmente :
  - nombre total de valuations possibles augmente
  - nombre de lignes de la table de vérité augmente
- Quand la formule φ est longue :
  - nécessité de calculs intermédiaires sur les sous formules de φ.
  - nombre de colonnes de la table de vérité augmente.
- En informatique la méthode des tables de Vérité n'est utilisée que pour les formules simples avec un nombre réduit de variables (problème d'espace mémoire et de temps d'exécution).

Table de Vérité

- Quand le nombre de variables augmente :
  - nombre total de valuations possibles augmente
  - nombre de lignes de la table de vérité augmente
- Quand la formule φ est longue :
  - nécessité de calculs intermédiaires sur les sous formules de φ.
  - nombre de colonnes de la table de vérité augmente.
- En informatique la méthode des tables de Vérité n'est utilisée que pour les formules simples avec un nombre réduit de variables (problème d'espace mémoire et de temps d'exécution).
- On préfère en général la méthode de Quine ci-aprés.

Diagramme de Quine

- Description de la méthode :

Diagramme de Quine

- Description de la méthode :
  - Soient $p_1, p_2, \ldots, P_n$ les VP de la formule φ.

Diagramme de Quine

- Description de la méthode :
  - Soient $p_1, p_2, \ldots, P_n$ les VP de la formule φ.
  - Choisir une variable p_i

Diagramme de Quine

- Description de la méthode :
  - Soient $p_1, p_2, \ldots, P_n$ les VP de la formule φ.
  - Choisir une variable p_i
  - On remplace à gauche p_i par 1 , et à droite par 0

Diagramme de Quine

- Description de la méthode :
  - Soient $p_1, p_2, \ldots, P_n$ les VP de la formule φ.
  - Choisir une variable p_i
  - On remplace à gauche p_i par 1 , et à droite par 0
  - On effectue les calculs possibles (pour simplifier sémantiquement φ).

Diagramme de Quine

- Description de la méthode :
  - Soient $p_1, p_2, \ldots, P_n$ les VP de la formule φ.
  - Choisir une variable p_i
  - On remplace à gauche p_i par 1 , et à droite par 0
  - On effectue les calculs possibles (pour simplifier sémantiquement φ).
  - On répète la procédure pour les formules obtenues jusqu'à ce qu'il n'ait plus de VP.

Diagramme de Quine

Exemple

$\varphi = (p \wedge q) \Rightarrow r$

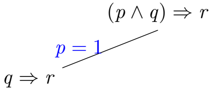
$(p \wedge q) \Rightarrow r$

p	q	r	φ
0	$\forall$	$\forall$	1
1	0	$\forall$	1
1	1	0	0
1	1	1	1

Diagramme de Quine

Exemple

$\varphi = (p \wedge q) \Rightarrow r$

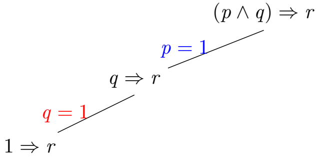


p	q	r	φ
0	$\forall$	$\forall$	1
1	0	$\forall$	1
1	1	0	0
1	1	1	1

Diagramme de Quine

Exemple

$\varphi = (p \wedge q) \Rightarrow r$

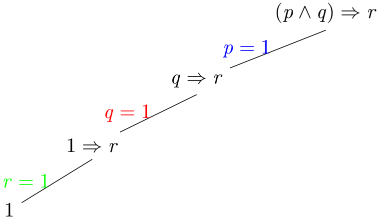


p	q	r	φ
0	$\forall$	$\forall$	1
1	0	$\forall$	1
1	1	0	0
1	1	1	1

Diagramme de Quine

Exemple

$\varphi = (p \wedge q) \Rightarrow r$

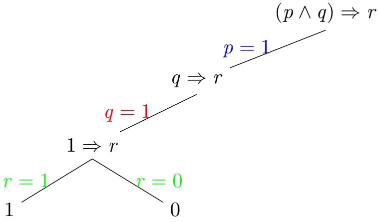


p	q	r	φ
0	$\forall$	$\forall$	1
1	0	$\forall$	1
1	1	0	0
1	1	1	1

Diagramme de Quine

Exemple

$\varphi = (p \wedge q) \Rightarrow r$

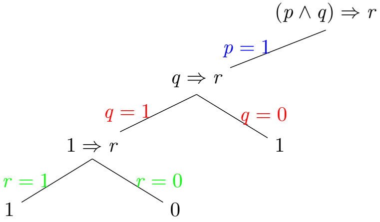


p	q	r	φ
0	$\forall$	$\forall$	1
1	0	$\forall$	1
1	1	0	0
1	1	1	1

Diagramme de Quine

Exemple

$\varphi = (p \wedge q) \Rightarrow r$

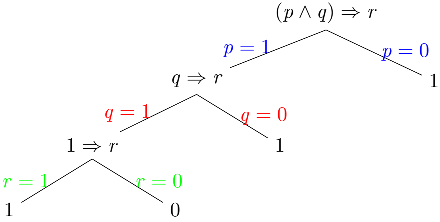


p	q	r	φ
0	$\forall$	$\forall$	1
1	0	$\forall$	1
1	1	0	0
1	1	1	1

Diagramme de Quine

Exemple

$\varphi = (p \wedge q) \Rightarrow r$



p	q	r	φ
0	$\forall$	$\forall$	1
1	0	$\forall$	1
1	1	0	0
1	1	1	1

Diagramme de Quine

Exemple

$\varphi = (p \wedge q) \Rightarrow r$

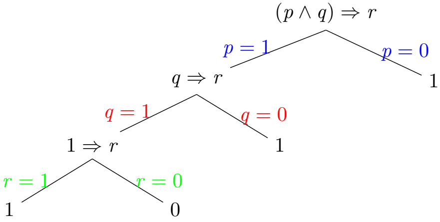
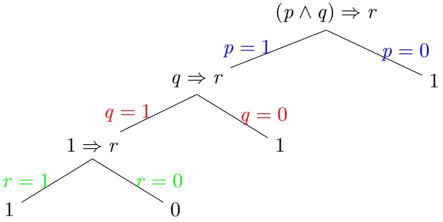


Diagramme de Quine

Exemple

$\varphi = (p \wedge q) \Rightarrow r$

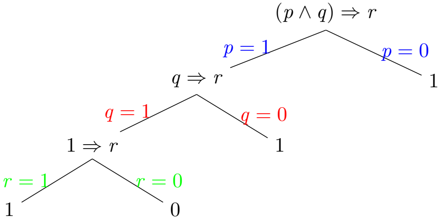


p	q	r	φ

Diagramme de Quine

Exemple

$\varphi = (p \wedge q) \Rightarrow r$

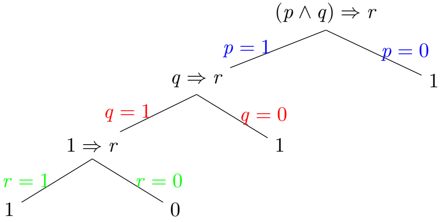


p	q	r	φ
0	$\forall$	$\forall$	1

Diagramme de Quine

Exemple

$\varphi = (p \land q) \Rightarrow r$

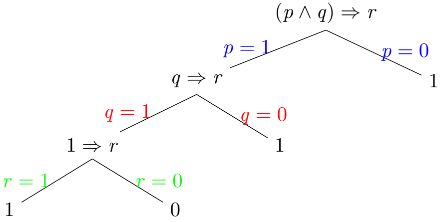


p	q	r	φ
0	$\forall$	$\forall$	1

Diagramme de Quine

Exemple

$\varphi = (p \wedge q) \Rightarrow r$

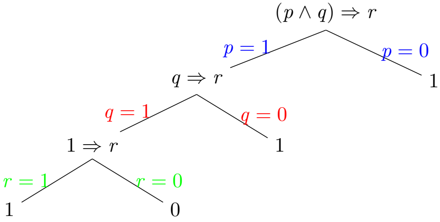


p	q	r	φ
0	$\forall$	$\forall$	1
1	0	$\forall$	1

Diagramme de Quine

Exemple

$\varphi = (p \wedge q) \Rightarrow r$

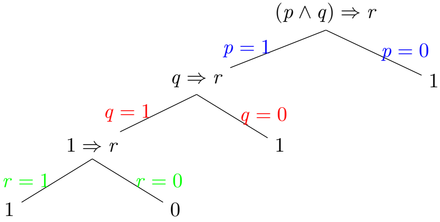


p	q	r	φ
0	$\forall$	$\forall$	1
1	0	$\forall$	1

Diagramme de Quine

Exemple

$\varphi = (p \wedge q) \Rightarrow r$

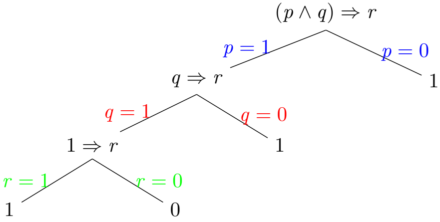


p	q	r	φ
0	$\forall$	$\forall$	1
1	0	$\forall$	1
1	1	0	0

Diagramme de Quine

Exemple

$\varphi = (p \wedge q) \Rightarrow r$

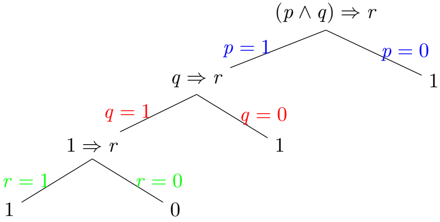


p	q	r	φ
0	$\forall$	$\forall$	1
1	0	$\forall$	1
1	1	0	0

Diagramme de Quine

Exemple

$\varphi = (p \wedge q) \Rightarrow r$

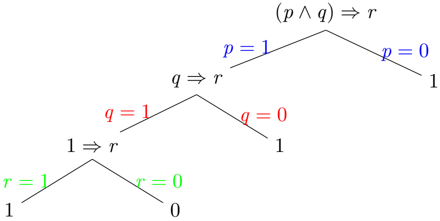


p	q	r	φ
0	$\forall$	$\forall$	1
1	0	$\forall$	1
1	1	0	0
1	1	1	1

Diagramme de Quine

Exemple

$\varphi = (p \wedge q) \Rightarrow r$



p	q	r	φ
0	$\forall$	$\forall$	1
1	0	$\forall$	1
1	1	0	0
1	1	1	1

Modèles d'une formule

Définition

L'ensemble des **valuations** d'un ensemble de variables propositionnelles $Prop$ est noté $Val(Prop)$ (ou juste Val).

Modèles d'une formule

Définition

L'ensemble des **valuations** d'un ensemble de variables propositionnelles $Prop$ est noté $Val(Prop)$ (ou juste Val).

Définition

Un **modèle** d'une formule φ est une valuation v telle que $[\varphi]_v = 1$.

Modèles d'une formule

Définition

L'ensemble des **valuations** d'un ensemble de variables propositionnelles *Prop* est noté $Val(Prop)$ (ou juste Val).

Définition

Un **modèle** d'une formule φ est une valuation v telle que $[\varphi]_v = 1$.

On note :

- $v \models \varphi$ ssi $[\varphi]_v = 1$

Modèles d'une formule

Définition

L'ensemble des **valuations** d'un ensemble de variables propositionnelles $Prop$ est noté $Val(Prop)$ (ou juste Val).

Définition

Un **modèle** d'une formule φ est une valuation v telle que $[\varphi]_v = 1$.

On note :

- $v \models \varphi$ ssi $[\varphi]_v = 1$
- $mod(\varphi)$ l'ensemble des modéles de φ.

Modèles d'une formule

Définition

L'ensemble des **valuations** d'un ensemble de variables propositionnelles *Prop* est noté $Val(Prop)$ (ou juste Val).

Définition

Un **modèle** d'une formule φ est une valuation v telle que $[\varphi]_v = 1$.

On note :

- $v \models \varphi$ ssi $[\varphi]_v = 1$
- $mod(\varphi)$ l'ensemble des modéles de φ.

Modèles d'une formule

Exemple

$$\varphi = (p \lor q) \land (p \lor \neg r)$$

p	q	r	φ
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1

Modèles d'une formule

Exemple

$$\varphi = (p \vee q) \wedge (p \vee \neg r)$$

p	q	r	φ
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	1

Modèles d'une formule

Exemple

$$\varphi = (p \vee q) \wedge (p \vee \neg r)$$

p	q	r	φ
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1

Modèles d'une formule

Exemple

$$\varphi = (p \vee q) \wedge (p \vee \neg r)$$

p	q	r	φ
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

Modèles d'une formule

Exemple

$$\varphi = (p \vee q) \wedge (p \vee \neg r)$$

p	q	r	φ
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

$$mod(\varphi) =$$

Modèles d'une formule

Exemple

$$\varphi = (p \vee q) \wedge (p \vee \neg r)$$

p	q	r	φ
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

$mod(\varphi) =$

p	q	r
0	1	0

Modèles d'une formule

Exemple

$$\varphi = (p \vee q) \wedge (p \vee \neg r)$$

p	q	r	φ
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

$mod(\varphi) =$

p	q	r
0	1	0
1	0	0

Modèles d'une formule

Exemple

$$\varphi = (p \vee q) \wedge (p \vee \neg r)$$

p	q	r	φ
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

$mod(\varphi) =$

p	q	r
0	1	0
1	0	0
1	0	1

Modèles d'une formule

Exemple

$$\varphi = (p \vee q) \wedge (p \vee \neg r)$$

p	q	r	φ
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

$mod(\varphi) =$

p	q	r
0	1	0
1	0	0
1	0	1
1	1	0

Modèles d'une formule

Exemple

$$\varphi = (p \lor q) \land (p \lor \neg r)$$

p	q	r	φ
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

$mod(\varphi) =$

p	q	r
0	1	0
1	0	0
1	0	1
1	1	0
1	1	1

Modèles d'une formule

Exemple

$$\varphi = (p \vee q) \wedge (p \vee \neg r)$$

p	q	r	φ
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

$mod(\varphi) =$

p	q	r
0	1	0
1	0	0
1	0	1
1	1	0
1	1	1

Satisfaisabilité

Définition

Une formule φ est **satisfaisable** si elle admet un modèle :

- Si il existe une valuation v telle que $v \models \varphi$

Satisfaisabilité

Définition

Une formule φ est **satisfaisable** si elle admet un modèle :

- Si il existe une valuation v telle que $v \models \varphi$
- Si $mod(\varphi) \neq \varnothing$

Satisfaisabilité

Définition

Une formule φ est **satisfaisable** si elle admet un modèle :

- Si il existe une valuation v telle que $v \models \varphi$
- Si $mod(\varphi) \neq \varnothing$

Satisfaisabilité

Définition

Une formule φ est **satisfaisable** si elle admet un modèle :

- Si il existe une valuation v telle que $v \models \varphi$
- Si $mod(\varphi) \neq \varnothing$

Définition

Une formule φ est **insatisfaisable** si elle n'admet aucun modèle

Satisfaisabilité

Définition

Une formule φ est **satisfaisable** si elle admet un modèle :

- Si il existe une valuation v telle que $v \models \varphi$
- Si $mod(\varphi) \neq \varnothing$

Définition

Une formule φ est **insatisfaisable** si elle n'admet aucun modèle (i.e., pour toute valuation v, $[\varphi]_v = 0$,

Satisfaisabilité

Définition

Une formule φ est **satisfaisable** si elle admet un modèle :

- Si il existe une valuation v telle que $v \models \varphi$
- Si $mod(\varphi) \neq \varnothing$

Définition

Une formule φ est **insatisfaisable** si elle n'admet aucun modèle (i.e., pour toute valuation v, $[\varphi]_v = 0$,i.e., si $mod(\varphi) = \varnothing$)

Satisfaisabilité

Définition

Une formule φ est **satisfaisable** si elle admet un modèle :

- Si il existe une valuation v telle que $v \models \varphi$
- Si $mod(\varphi) \neq \varnothing$

Définition

Une formule φ est **insatisfaisable** si elle n'admet aucun modèle (i.e., pour toute valuation v, $[\varphi]_v = 0$,i.e., si $mod(\varphi) = \varnothing$)

Exemple

- $p \wedge q$

Satisfaisabilité

Définition

Une formule φ est **satisfaisable** si elle admet un modèle :

- Si il existe une valuation v telle que $v \models \varphi$
- Si $mod(\varphi) \neq \varnothing$

Définition

Une formule φ est **insatisfaisable** si elle n'admet aucun modèle (i.e., pour toute valuation v, $[\varphi]_v = 0$,i.e., si $mod(\varphi) = \varnothing$)

Exemple

- $p \wedge q$ est une formule satisfaisable.

Satisfaisabilité

Définition

Une formule φ est **satisfaisable** si elle admet un modèle :

- Si il existe une valuation v telle que $v \models \varphi$
- Si $mod(\varphi) \neq \varnothing$

Définition

Une formule φ est **insatisfaisable** si elle n'admet aucun modèle (i.e., pour toute valuation v, $[\varphi]_v = 0$,i.e., si $mod(\varphi) = \varnothing$)

Exemple

- $p \wedge q$ est une formule satisfaisable.
- $p \wedge \neg p$

Satisfaisabilité

Définition

Une formule φ est **satisfaisable** si elle admet un modèle :

- Si il existe une valuation v telle que $v \models \varphi$
- Si $mod(\varphi) \neq \varnothing$

Définition

Une formule φ est **insatisfaisable** si elle n'admet aucun modèle (i.e., pour toute valuation v, $[\varphi]_v = 0$,i.e., si $mod(\varphi) = \varnothing$)

Exemple

- $p \wedge q$ est une formule satisfaisable.
- $p \wedge \neg p$ est une formule insatisfaisable.

Tautologie

Définition

Un **totaulogie** (ou formule valide) est une formule vraie pour toute valuation : :

- Pour toute valuation v, $v \models \varphi$

Tautologie

Définition

Un **totaulogie** (ou formule valide) est une formule vraie pour toute valuation : :

- Pour toute valuation v, $v \models \varphi$
- Si $mod(\varphi) = Val$

Tautologie

Définition

Un **totaulogie** (ou formule valide) est une formule vraie pour toute valuation : :

- Pour toute valuation v, $v \models \varphi$
- Si $mod(\varphi) = Val$

Tautologie

Définition

Un **totaulogie** (ou formule valide) est une formule vraie pour toute valuation : :

- Pour toute valuation v, $v \models \varphi$
- Si $mod(\varphi) = Val$

On note $\models \varphi$ pour dire que φ est une tautologie.

Exemple

Tautologie

Définition

Un **totaulogie** (ou formule valide) est une formule vraie pour toute valuation : :

- Pour toute valuation v, $v \models \varphi$
- Si $mod(\varphi) = Val$

On note $\models \varphi$ pour dire que φ est une tautologie.

Exemple

- $p \vee \neg p$

Tautologie

Définition

Un **totaulogie** (ou formule valide) est une formule vraie pour toute valuation : :

- Pour toute valuation v, $v \models \varphi$
- Si $mod(\varphi) = Val$

On note $\models \varphi$ pour dire que φ est une tautologie.

Exemple

- $p \vee \neg p$ est une totaulogie.

Tautologie

Définition

Un **totaulogie** (ou formule valide) est une formule vraie pour toute valuation : :

- Pour toute valuation v, $v \models \varphi$
- Si $mod(\varphi) = Val$

On note $\models \varphi$ pour dire que φ est une tautologie.

Exemple

- $p \vee \neg p$ est une totaulogie.
- $q \Rightarrow q$

Tautologie

Définition

Un **totaulogie** (ou formule valide) est une formule vraie pour toute valuation : :

- Pour toute valuation v, $v \models \varphi$
- Si $mod(\varphi) = Val$

On note $\models \varphi$ pour dire que φ est une tautologie.

Exemple

- $p \vee \neg p$ est une totaulogie.
- $q \Rightarrow q$ est une formule valide.

Equivalence

Définition

On dit que φ est **équivalente** à ψ si les deux formules ont les mêmes modèles (i.e. si $mod(\varphi) = mod(\psi)$)

On note $\varphi \equiv \psi$.

Equivalence

Définition

On dit que φ est **équivalente** à ψ si les deux formules ont les mêmes modèles (i.e. si $mod(\varphi) = mod(\psi)$)

On note $\varphi \equiv \psi$.

Exemple

Equivalence

Définition

On dit que φ est **équivalente** à ψ si les deux formules ont les mêmes modèles (i.e. si $mod(\varphi) = mod(\psi)$)

On note $\varphi \equiv \psi$.

Exemple

- p et $\neg\neg p$ sont équivalentes.

Equivalence

Définition

On dit que φ est **équivalente** à ψ si les deux formules ont les mêmes modèles (i.e. si $mod(\varphi) = mod(\psi)$)

On note $\varphi \equiv \psi$.

Exemple

- p et $\neg\neg p$ sont équivalentes.
- $q \vee q$ et q sont équivalentes.

Equivalence

Proposition

- $mod(\neg\varphi) = Val - mod(\varphi)$
- $mod(\varphi \vee \psi) = mod(\varphi) \cup mod(\psi)$
- $mod(\varphi \wedge \psi) = mod(\varphi) \cap mod(\psi)$
- $\models \varphi \Rightarrow \psi$ ssi $mod(\varphi) \subseteq mod(\psi)$

Preuve : Pour toute valuation $v \in Val$,

Equivalence

Proposition

- $mod(\neg\varphi) = Val - mod(\varphi)$
- $mod(\varphi \vee \psi) = mod(\varphi) \cup mod(\psi)$
- $mod(\varphi \wedge \psi) = mod(\varphi) \cap mod(\psi)$
- $\models \varphi \Rightarrow \psi$ ssi $mod(\varphi) \subseteq mod(\psi)$

Preuve : Pour toute valuation $v \in Val$,

$$v \in mod(\neg\varphi) \qquad ssi \qquad [\neg\varphi]_v = 1$$

Equivalence

Proposition

- $mod(\neg\varphi) = Val - mod(\varphi)$
- $mod(\varphi \vee \psi) = mod(\varphi) \cup mod(\psi)$
- $mod(\varphi \wedge \psi) = mod(\varphi) \cap mod(\psi)$
- $\models \varphi \Rightarrow \psi$ ssi $mod(\varphi) \subseteq mod(\psi)$

Preuve : Pour toute valuation $v \in Val$,

$$\begin{array}{lll} v \in mod(\neg\varphi) & ssi & [\neg\varphi]_v = 1 \\ & ssi & [\varphi]_v = 0 \end{array}$$

Equivalence

Proposition

- $mod(\neg\varphi) = Val - mod(\varphi)$
- $mod(\varphi \vee \psi) = mod(\varphi) \cup mod(\psi)$
- $mod(\varphi \wedge \psi) = mod(\varphi) \cap mod(\psi)$
- $\models \varphi \Rightarrow \psi$ ssi $mod(\varphi) \subseteq mod(\psi)$

Preuve : Pour toute valuation $v \in Val$,

$$
\begin{array}{lll}
v \in mod(\neg\varphi) & ssi & [\neg\varphi]_v = 1 \\
 & ssi & [\varphi]_v = 0 \\
 & ssi & v \notin mod(\varphi)
\end{array}
$$

Equivalence

Proposition

- $mod(\neg\varphi) = Val - mod(\varphi)$
- $mod(\varphi \vee \psi) = mod(\varphi) \cup mod(\psi)$
- $mod(\varphi \wedge \psi) = mod(\varphi) \cap mod(\psi)$
- $\models \varphi \Rightarrow \psi$ ssi $mod(\varphi) \subseteq mod(\psi)$

Preuve : Pour toute valuation $v \in Val$,

$$\begin{array}{lll} v \in mod(\neg\varphi) & ssi & [\neg\varphi]_v = 1 \\ & ssi & [\varphi]_v = 0 \\ & ssi & v \notin mod(\varphi) \\ & ssi & v \in Val - mod(\varphi) \end{array}$$

Equivalence

Proposition

- $mod(\neg\varphi) = Val - mod(\varphi)$
- $mod(\varphi \vee \psi) = mod(\varphi) \cup mod(\psi)$
- $mod(\varphi \wedge \psi) = mod(\varphi) \cap mod(\psi)$
- $\models \varphi \Rightarrow \psi$ ssi $mod(\varphi) \subseteq mod(\psi)$

Preuve : Pour toute valuation $v \in Val$,

Equivalence

Proposition

- $mod(\neg\varphi) = Val - mod(\varphi)$
- $mod(\varphi \vee \psi) = mod(\varphi) \cup mod(\psi)$
- $mod(\varphi \wedge \psi) = mod(\varphi) \cap mod(\psi)$
- $\models \varphi \Rightarrow \psi$ ssi $mod(\varphi) \subseteq mod(\psi)$

Preuve : Pour toute valuation $v \in Val$,

$$v \in mod(\varphi \vee \psi) \qquad ssi \qquad [\varphi \vee \psi]_v = 1$$

Equivalence

Proposition

- $mod(\neg\varphi) = Val - mod(\varphi)$
- $mod(\varphi \vee \psi) = mod(\varphi) \cup mod(\psi)$
- $mod(\varphi \wedge \psi) = mod(\varphi) \cap mod(\psi)$
- $\models \varphi \Rightarrow \psi$ ssi $mod(\varphi) \subseteq mod(\psi)$

Preuve : Pour toute valuation $v \in Val$,

$$
\begin{array}{lll}
v \in mod(\varphi \vee \psi) & ssi & [\varphi \vee \psi]_v = 1 \\
 & ssi & [\varphi]_v = 1 \quad ou \quad [\psi]_v = 1
\end{array}
$$

Equivalence

Proposition

- $mod(\neg\varphi) = Val - mod(\varphi)$
- $mod(\varphi \vee \psi) = mod(\varphi) \cup mod(\psi)$
- $mod(\varphi \wedge \psi) = mod(\varphi) \cap mod(\psi)$
- $\models \varphi \Rightarrow \psi$ ssi $mod(\varphi) \subseteq mod(\psi)$

Preuve : Pour toute valuation $v \in Val$,

$$
\begin{array}{lll}
v \in mod(\varphi \vee \psi) & ssi & [\varphi \vee \psi]_v = 1 \\
 & ssi & [\varphi]_v = 1 \quad ou \quad [\psi]_v = 1 \\
 & ssi & v \in mod(\varphi) \quad ou \quad v \in mod(\psi)
\end{array}
$$

Equivalence

Proposition

- $mod(\neg\varphi) = Val - mod(\varphi)$
- $mod(\varphi \vee \psi) = mod(\varphi) \cup mod(\psi)$
- $mod(\varphi \wedge \psi) = mod(\varphi) \cap mod(\psi)$
- $\models \varphi \Rightarrow \psi$ ssi $mod(\varphi) \subseteq mod(\psi)$

Preuve : Pour toute valuation $v \in Val$,

$$\begin{array}{lll} v \in mod(\varphi \vee \psi) & ssi & [\varphi \vee \psi]_v = 1 \\ & ssi & [\varphi]_v = 1 \quad ou \quad [\psi]_v = 1 \\ & ssi & v \in mod(\varphi) \quad ou \quad v \in mod(\psi) \\ & ssi & v \in mod(\varphi) \cup mod(\psi) \end{array}$$

Equivalence

Proposition

- $mod(\neg\varphi) = Val - mod(\varphi)$
- $mod(\varphi \vee \psi) = mod(\varphi) \cup mod(\psi)$
- $mod(\varphi \wedge \psi) = mod(\varphi) \cap mod(\psi)$
- $\models \varphi \Rightarrow \psi$ ssi $mod(\varphi) \subseteq mod(\psi)$

Preuve : Pour toute valuation $v \in Val$,

Equivalence

Proposition

- $mod(\neg\varphi) = Val - mod(\varphi)$
- $mod(\varphi \vee \psi) = mod(\varphi) \cup mod(\psi)$
- $mod(\varphi \wedge \psi) = mod(\varphi) \cap mod(\psi)$
- $\models \varphi \Rightarrow \psi$ ssi $mod(\varphi) \subseteq mod(\psi)$

Preuve : Pour toute valuation $v \in Val$,

$$v \in mod(\varphi \wedge \psi) \qquad ssi \qquad [\varphi \wedge \psi]_v = 1$$

Equivalence

Proposition

- $mod(\neg\varphi) = Val - mod(\varphi)$
- $mod(\varphi \vee \psi) = mod(\varphi) \cup mod(\psi)$
- $mod(\varphi \wedge \psi) = mod(\varphi) \cap mod(\psi)$
- $\models \varphi \Rightarrow \psi$ ssi $mod(\varphi) \subseteq mod(\psi)$

Preuve : Pour toute valuation $v \in Val$,

$$\begin{array}{lll} v \in mod(\varphi \wedge \psi) & ssi & [\varphi \wedge \psi]_v = 1 \\ & ssi & [\varphi]_v = 1 \quad et \quad [\psi]_v = 1 \end{array}$$

Equivalence

Proposition

- $mod(\neg\varphi) = Val - mod(\varphi)$
- $mod(\varphi \vee \psi) = mod(\varphi) \cup mod(\psi)$
- $mod(\varphi \wedge \psi) = mod(\varphi) \cap mod(\psi)$
- $\models \varphi \Rightarrow \psi$ ssi $mod(\varphi) \subseteq mod(\psi)$

Preuve : Pour toute valuation $v \in Val$,

$$\begin{array}{lll} v \in mod(\varphi \wedge \psi) & ssi & [\varphi \wedge \psi]_v = 1 \\ & ssi & [\varphi]_v = 1 \quad et \quad [\psi]_v = 1 \\ & ssi & v \in mod(\varphi) \quad et \quad v \in mod(\psi) \end{array}$$

Equivalence

Proposition

- $mod(\neg\varphi) = Val - mod(\varphi)$
- $mod(\varphi \vee \psi) = mod(\varphi) \cup mod(\psi)$
- $mod(\varphi \wedge \psi) = mod(\varphi) \cap mod(\psi)$
- $\models \varphi \Rightarrow \psi$ ssi $mod(\varphi) \subseteq mod(\psi)$

Preuve : Pour toute valuation $v \in Val$,

$$
\begin{array}{lll}
v \in mod(\varphi \wedge \psi) & ssi & [\varphi \wedge \psi]_v = 1 \\
 & ssi & [\varphi]_v = 1 \quad et \quad [\psi]_v = 1 \\
 & ssi & v \in mod(\varphi) \quad et \quad v \in mod(\psi) \\
 & ssi & v \in mod(\varphi) \cap mod(\psi)
\end{array}
$$

Equivalence

Proposition

- $mod(\neg\varphi) = Val - mod(\varphi)$
- $mod(\varphi \vee \psi) = mod(\varphi) \cup mod(\psi)$
- $mod(\varphi \wedge \psi) = mod(\varphi) \cap mod(\psi)$
- $\models \varphi \Rightarrow \psi$ ssi $mod(\varphi) \subseteq mod(\psi)$

Preuve :

$\models \varphi \Rightarrow \psi$ ssi Pour toute valuation $v \in Val$, $[\varphi \Rightarrow \psi]_v = 1$

Equivalence

Proposition

- $mod(\neg\varphi) = Val - mod(\varphi)$
- $mod(\varphi \vee \psi) = mod(\varphi) \cup mod(\psi)$
- $mod(\varphi \wedge \psi) = mod(\varphi) \cap mod(\psi)$
- $\models \varphi \Rightarrow \psi$ ssi $mod(\varphi) \subseteq mod(\psi)$

Preuve :

$\models \varphi \Rightarrow \psi$ ssi Pour toute valuation $v \in Val$, $[\varphi \Rightarrow \psi]_v = 1$

ssi Pour toute valuation $v \in Val$, $[\neg\varphi \vee \psi]_v = 1$

Equivalence

Proposition

- $mod(\neg\varphi) = Val - mod(\varphi)$
- $mod(\varphi \vee \psi) = mod(\varphi) \cup mod(\psi)$
- $mod(\varphi \wedge \psi) = mod(\varphi) \cap mod(\psi)$
- $\models \varphi \Rightarrow \psi$ ssi $mod(\varphi) \subseteq mod(\psi)$

Preuve :

$\models \varphi \Rightarrow \psi$ ssi Pour toute valuation $v \in Val$, $[\varphi \Rightarrow \psi]_v = 1$
ssi Pour toute valuation $v \in Val$,$[\neg\varphi \vee \psi]_v = 1$
ssi Pour toute valuation $v \in Val$,$[\varphi]_v = 0$ ou $[\psi]_v = 1$

Equivalence

Proposition

- $mod(\neg\varphi) = Val - mod(\varphi)$
- $mod(\varphi \vee \psi) = mod(\varphi) \cup mod(\psi)$
- $mod(\varphi \wedge \psi) = mod(\varphi) \cap mod(\psi)$
- $\models \varphi \Rightarrow \psi$ ssi $mod(\varphi) \subseteq mod(\psi)$

Preuve :

$\models \varphi \Rightarrow \psi$ ssi Pour toute valuation $v \in Val$, $[\varphi \Rightarrow \psi]_v = 1$
ssi Pour toute valuation $v \in Val$,$[\neg\varphi \vee \psi]_v = 1$
ssi Pour toute valuation $v \in Val$,$[\varphi]_v = 0$ ou $[\psi]_v = 1$
ssi Pour toute valuation $v \in Val$,$[\varphi]_v \leq [\psi]_v$

Equivalence

Proposition

- $mod(\neg\varphi) = Val - mod(\varphi)$
- $mod(\varphi \vee \psi) = mod(\varphi) \cup mod(\psi)$
- $mod(\varphi \wedge \psi) = mod(\varphi) \cap mod(\psi)$
- $\models \varphi \Rightarrow \psi$ ssi $mod(\varphi) \subseteq mod(\psi)$

Preuve :

$$
\begin{array}{ll}
\models \varphi \Rightarrow \psi & \text{ssi Pour toute valuation } v \in Val, [\varphi \Rightarrow \psi]_v = 1 \\
& \text{ssi Pour toute valuation } v \in Val, [\neg\varphi \vee \psi]_v = 1 \\
& \text{ssi Pour toute valuation } v \in Val, [\varphi]_v = 0 \text{ ou } [\psi]_v = 1 \\
& \text{ssi Pour toute valuation } v \in Val, [\varphi]_v \leq [\psi]_v \\
& \text{ssi Pour toute valuation } v \in Val, mod(\varphi) \subseteq mod(\psi)
\end{array}
$$

Equivalence

Proposition

- $mod(\neg\varphi) = Val - mod(\varphi)$
- $mod(\varphi \vee \psi) = mod(\varphi) \cup mod(\psi)$
- $mod(\varphi \wedge \psi) = mod(\varphi) \cap mod(\psi)$
- $\models \varphi \Rightarrow \psi$ ssi $mod(\varphi) \subseteq mod(\psi)$

Conséquence logique

Définition

Une formule ψ est conséquence logique d'une formule φ si tout modèle de φ est un modèle de ψ (i.e., si $mod(\varphi) \subseteq mod(\psi)$)

On note $\varphi \models \psi$

Conséquence logique

Définition

Une formule ψ est conséquence logique d'une formule φ si tout modèle de φ est un modèle de ψ (i.e., si $mod(\varphi) \subseteq mod(\psi)$)

On note $\varphi \models \psi$

Exemple

Conséquence logique

Définition

Une formule ψ est conséquence logique d'une formule φ si tout modèle de φ est un modèle de ψ (i.e., si $mod(\varphi) \subseteq mod(\psi)$)

On note $\varphi \models \psi$

Exemple

- $\psi = p \wedge q$ et $\varphi = p \vee q$: φ est une conséquence de ψ

Conséquence logique

Définition

Une formule ψ est conséquence logique d'une formule φ si tout modèle de φ est un modèle de ψ (i.e., si $mod(\varphi) \subseteq mod(\psi)$)

On note $\varphi \models \psi$

Exemple

- $\psi = p \wedge q$ et $\varphi = p \vee q$: φ est une conséquence de ψ
- $\psi = p \wedge (p \Rightarrow q)$ et $\varphi = p \wedge q$: φ est une conséquence de ψ

Conséquence logique

Définition

Une formule ψ est conséquence logique d'une formule φ si tout modèle de φ est un modèle de ψ (i.e., si $mod(\varphi) \subseteq mod(\psi)$)

On note $\varphi \models \psi$

Exemple

- $\psi = p \wedge q$ et $\varphi = p \vee q$: φ est une conséquence de ψ
- $\psi = p \wedge (p \Rightarrow q)$ et $\varphi = p \wedge q$: φ est une conséquence de ψ

Equivalence

Proposition

- $\varphi \models \psi$ si et seulement si $\models \varphi \Rightarrow \psi$
- $\varphi \equiv \psi$ si et seulement si $\models \varphi \Leftrightarrow \psi$

Preuve :

Equivalence

Proposition

- $\varphi \models \psi$ si et seulement si $\models \varphi \Rightarrow \psi$
- $\varphi \equiv \psi$ si et seulement si $\models \varphi \Leftrightarrow \psi$

Preuve :
Conséquence directe du point 4 de la Proposition précédente :
$\models \varphi \Rightarrow \psi$ ssi $mod(\varphi) \subseteq mod(\psi)$

Equivalence

Proposition

- $\varphi \models \psi$ si et seulement si $\models \varphi \Rightarrow \psi$
- $\varphi \equiv \psi$ si et seulement si $\models \varphi \Leftrightarrow \psi$

Preuve :

$\models \varphi \Leftrightarrow \psi$ ssi pour toute valuation $v \in Val, v(\varphi \Leftrightarrow \psi) = 1$

Equivalence

Proposition

- $\varphi \models \psi$ si et seulement si $\models \varphi \Rightarrow \psi$
- $\varphi \equiv \psi$ si et seulement si $\models \varphi \Leftrightarrow \psi$

Preuve :

$$\begin{aligned} \models \varphi \Leftrightarrow \psi \quad & \text{ssi pour toute valuation } v \in Val, v(\varphi \Leftrightarrow \psi) = 1 \\ & \text{ssi pour toute valuation } v \in Val, v(\varphi) = v(\psi) \end{aligned}$$

Equivalence

Proposition

- $\varphi \models \psi$ si et seulement si $\models \varphi \Rightarrow \psi$
- $\varphi \equiv \psi$ si et seulement si $\models \varphi \Leftrightarrow \psi$

Preuve :

$$\begin{array}{ll} \models \varphi \Leftrightarrow \psi & \text{ssi pour toute valuation } v \in Val, v(\varphi \Leftrightarrow \psi) = 1 \\ & \text{ssi pour toute valuation } v \in Val, v(\varphi) = v(\psi) \\ & \text{ssi } mod(\varphi) = mod(\psi) \end{array}$$

Equivalence

Proposition

- $\varphi \models \psi$ si et seulement si $\models \varphi \Rightarrow \psi$
- $\varphi \equiv \psi$ si et seulement si $\models \varphi \Leftrightarrow \psi$

Preuve :

$$\begin{aligned}
\models \varphi \Leftrightarrow \psi \quad & \text{ssi pour toute valuation } v \in Val, v(\varphi \Leftrightarrow \psi) = 1 \\
& \text{ssi pour toute valuation } v \in Val, v(\varphi) = v(\psi) \\
& \text{ssi } mod(\varphi) = mod(\psi) \\
& \text{ssi } \varphi \equiv \psi
\end{aligned}$$

Equivalence

Proposition

- $\varphi \models \psi$ si et seulement si $\models \varphi \Rightarrow \psi$
- $\varphi \equiv \psi$ si et seulement si $\models \varphi \Leftrightarrow \psi$

Equivalence

Proposition

- $\varphi \models \psi$ si et seulement si $\models \varphi \Rightarrow \psi$
- $\varphi \equiv \psi$ si et seulement si $\models \varphi \Leftrightarrow \psi$

Equivalence

Proposition

- $\varphi \models \psi$ si et seulement si $\models \varphi \Rightarrow \psi$
- $\varphi \equiv \psi$ si et seulement si $\models \varphi \Leftrightarrow \psi$

Equivalence

Proposition

- $\varphi \models \psi$ si et seulement si $\models \varphi \Rightarrow \psi$
- $\varphi \equiv \psi$ si et seulement si $\models \varphi \Leftrightarrow \psi$

Equivalence entre formules

- Il est courant de souhaiter modifier une formule,
  - de façon à rendre son expression plus simple, ou plus facile à manipuler,
- Ceci en gardant bien sûr la sémantique de la formule, c'est-à-dire, sans modifier l'ensemble de ses modèles.

Substitution

La substitution d'une formule ψ par une formule ψ' dans une troisième formule φ (notée $\varphi[\psi \leftarrow \psi']$) consiste à remplacer chaque occurrence de ψ dans φ par ψ'.

Substitution

La substitution d'une formule ψ par une formule $\psi^{'}$ dans une troisième formule φ (notée $\varphi[\psi \leftarrow \psi^{'}]$) consiste à remplacer chaque occurrence de ψ dans φ par $\psi^{'}$.

Exemple

$\varphi = (\neg p \vee q) \wedge (p \Rightarrow r) \qquad \psi = p \qquad \psi^{'} = p \Rightarrow q$

$\varphi[\psi \leftarrow \psi^{'}] = (\neg p \vee q) \wedge (p \Rightarrow r)$

Substitution

La substitution d'une formule ψ par une formule ψ' dans une troisième formule φ (notée $\varphi[\psi \leftarrow \psi']$) consiste à remplacer chaque occurrence de ψ dans φ par ψ'.

Exemple

$\varphi = (\neg p \vee q) \wedge (p \Rightarrow r) \qquad \psi = p \qquad \psi' = p \Rightarrow q$

$\varphi[\psi \leftarrow \psi'] = (\neg(p \Rightarrow q) \vee q) \wedge ((p \Rightarrow q) \Rightarrow r)$

Substitution

La substitution d'une formule ψ par une formule $\psi^{'}$ dans une troisième formule φ (notée $\varphi[\psi \leftarrow \psi^{'}]$) consiste à remplacer chaque occurrence de ψ dans φ par $\psi^{'}$.

Définition

Soient φ,ψ et $\psi^{'}$ trois formules propositionnelles

- Si ψ n'est pas une sous-formule de φ alors $\varphi[\psi \leftarrow \psi^{'}] =$

Substitution

La substitution d'une formule ψ par une formule $\psi^{'}$ dans une troisième formule φ (notée $\varphi[\psi \leftarrow \psi^{'}]$) consiste à remplacer chaque occurrence de ψ dans φ par $\psi^{'}$.

Définition

Soient φ,ψ et $\psi^{'}$ trois formules propositionnelles

- Si ψ n'est pas une sous-formule de φ alors $\varphi[\psi \leftarrow \psi^{'}] = \varphi$
- Sinon Si $\varphi = \psi$ alors $\varphi[\psi \leftarrow \psi^{'}] =$

Substitution

La substitution d'une formule ψ par une formule ψ' dans une troisième formule φ (notée $\varphi[\psi \leftarrow \psi']$) consiste à remplacer chaque occurrence de ψ dans φ par ψ'.

Définition

Soient φ,ψ et ψ' trois formules propositionnelles

- Si ψ n'est pas une sous-formule de φ alors $\varphi[\psi \leftarrow \psi'] = \varphi$
- Sinon Si $\varphi = \psi$ alors $\varphi[\psi \leftarrow \psi'] =$

Substitution

La substitution d'une formule ψ par une formule ψ' dans une troisième formule φ (notée $\varphi[\psi \leftarrow \psi']$) consiste à remplacer chaque occurrence de ψ dans φ par ψ'.

Définition

Soient φ,ψ et ψ' trois formules propositionnelles

- Si ψ n'est pas une sous-formule de φ alors $\varphi[\psi \leftarrow \psi'] = \varphi$
- Sinon Si $\varphi = \psi$ alors $\varphi[\psi \leftarrow \psi'] = \psi'$
- Sinon

Substitution

La substitution d'une formule ψ par une formule $\psi^{'}$ dans une troisième formule φ (notée $\varphi[\psi \leftarrow \psi^{'}]$) consiste à remplacer chaque occurrence de ψ dans φ par $\psi^{'}$.

Définition

Soient φ,ψ et $\psi^{'}$ trois formules propositionnelles

- Si ψ n'est pas une sous-formule de φ alors $\varphi[\psi \leftarrow \psi^{'}] = \varphi$
- Sinon Si $\varphi = \psi$ alors $\varphi[\psi \leftarrow \psi^{'}] = \psi^{'}$
- Sinon
  - Si $\varphi = \neg\varphi^{'}$ alors $\varphi[\psi \leftarrow \psi^{'}] =$

Substitution

La substitution d'une formule ψ par une formule ψ' dans une troisième formule φ (notée $\varphi[\psi \leftarrow \psi']$) consiste à remplacer chaque occurrence de ψ dans φ par ψ'.

Définition

Soient φ,ψ et ψ' trois formules propositionnelles

- Si ψ n'est pas une sous-formule de φ alors $\varphi[\psi \leftarrow \psi'] = \varphi$
- Sinon Si $\varphi = \psi$ alors $\varphi[\psi \leftarrow \psi'] = \psi'$
- Sinon
  - Si $\varphi = \neg\varphi'$ alors $\varphi[\psi \leftarrow \psi'] =$

Substitution

La substitution d'une formule ψ par une formule ψ' dans une troisième formule φ (notée $\varphi[\psi \leftarrow \psi']$) consiste à remplacer chaque occurrence de ψ dans φ par ψ'.

Définition

Soient φ,ψ et ψ' trois formules propositionnelles

- Si ψ n'est pas une sous-formule de φ alors $\varphi[\psi \leftarrow \psi'] = \varphi$
- Sinon Si $\varphi = \psi$ alors $\varphi[\psi \leftarrow \psi'] = \psi'$
- Sinon
  - Si $\varphi = \neg\varphi'$ alors $\varphi[\psi \leftarrow \psi'] = \neg\varphi'[\psi \leftarrow \psi']$

Substitution

La substitution d'une formule ψ par une formule $\psi^{'}$ dans une troisième formule φ (notée $\varphi[\psi \leftarrow \psi^{'}]$) consiste à remplacer chaque occurrence de ψ dans φ par $\psi^{'}$.

Définition

Soient φ,ψ et $\psi^{'}$ trois formules propositionnelles

- Si ψ n'est pas une sous-formule de φ alors $\varphi[\psi \leftarrow \psi^{'}] = \varphi$
- Sinon Si $\varphi = \psi$ alors $\varphi[\psi \leftarrow \psi^{'}] = \psi^{'}$
- Sinon
  - Si $\varphi = \neg\varphi^{'}$ alors $\varphi[\psi \leftarrow \psi^{'}] = \neg\varphi^{'}[\psi \leftarrow \psi^{'}]$
  - Si $\varphi = \varphi_1 \circ \varphi_2$ alors $\varphi[\psi \leftarrow \psi^{'}] =$

Substitution

La substitution d'une formule ψ par une formule ψ' dans une troisième formule φ (notée $\varphi[\psi \leftarrow \psi']$) consiste à remplacer chaque occurrence de ψ dans φ par ψ'.

Définition

Soient φ,ψ et ψ' trois formules propositionnelles

- Si ψ n'est pas une sous-formule de φ alors $\varphi[\psi \leftarrow \psi'] = \varphi$
- Sinon Si $\varphi = \psi$ alors $\varphi[\psi \leftarrow \psi'] = \psi'$
- Sinon
  - Si $\varphi = \neg\varphi'$ alors $\varphi[\psi \leftarrow \psi'] = \neg\varphi'[\psi \leftarrow \psi']$
  - Si $\varphi = \varphi_1 \circ \varphi_2$ alors $\varphi[\psi \leftarrow \psi'] =$

Substitution

La substitution d'une formule ψ par une formule ψ' dans une troisième formule φ (notée $\varphi[\psi \leftarrow \psi']$) consiste à remplacer chaque occurrence de ψ dans φ par ψ'.

Définition

Soient φ,ψ et ψ' trois formules propositionnelles

- Si ψ n'est pas une sous-formule de φ alors $\varphi[\psi \leftarrow \psi'] = \varphi$
- Sinon Si $\varphi = \psi$ alors $\varphi[\psi \leftarrow \psi'] = \psi'$
- Sinon
  - Si $\varphi = \neg\varphi'$ alors $\varphi[\psi \leftarrow \psi'] = \neg\varphi'[\psi \leftarrow \psi']$
  - Si $\varphi = \varphi_1 \circ \varphi_2$ alors $\varphi[\psi \leftarrow \psi'] = \varphi_1[\psi \leftarrow \psi'] \circ \varphi_2[\psi \leftarrow \psi']$

Quelques équivalences classiques

$\varphi \Rightarrow \psi \equiv \neg\varphi \vee \psi$	implication.
$\varphi \vee \psi \equiv \psi \vee \varphi$	commutativité.
$\varphi \wedge \psi \equiv \psi \wedge \varphi$	commutativité.
$\varphi_1 \vee (\varphi_2 \vee \varphi_3) \equiv (\varphi_1 \vee \varphi_2) \vee \varphi_3)$	associativité.
$\varphi_1 \wedge (\varphi_2 \wedge \varphi_3) \equiv (\varphi_1 \wedge \varphi_2) \wedge \varphi_3)$	associativité.
$\varphi_1 \vee (\varphi_2 \wedge \varphi_3) \equiv (\varphi_1 \vee \varphi_2) \wedge (\varphi_1 \vee \varphi_3)$	distibutivité.
$\varphi_1 \wedge (\varphi_2 \vee \varphi_3) \equiv (\varphi_1 \wedge \varphi_2) \vee (\varphi_1 \wedge \varphi_3)$	distibutivité.
$\top \wedge \varphi \equiv \varphi \wedge \top \equiv \varphi$	élément neutre.
$\bot \vee \varphi \equiv \varphi \vee \bot \equiv \varphi$	élément neutre.
$\bot \wedge \varphi \equiv \varphi \wedge \bot \equiv \bot$	élément absorbant.
$\top \vee \varphi \equiv \varphi \vee \top \equiv \top$	élément absorbant.
$\varphi \wedge \neg\varphi \equiv \neg\varphi \wedge \varphi \equiv \bot$	élément complément.
$\varphi \vee \neg\varphi \equiv \neg\varphi \vee \varphi \equiv \top$	élément complément.

Quelques équivalences classiques

$\varphi \Rightarrow \psi \equiv \neg\psi \Rightarrow \neg\varphi$	contraposition.
$\varphi \wedge (\varphi \vee \psi) \equiv \varphi$	Absorption.
$\varphi \vee (\varphi \wedge \psi) \equiv \varphi$	Absorption.
$\varphi_1 \Rightarrow (\varphi_2 \Rightarrow \varphi_3) \equiv (\varphi_1 \wedge \varphi_2) \Rightarrow \varphi_3)$	curryfication.
$\varphi_1 \wedge (\varphi_2 \wedge \varphi_3) \equiv (\varphi_1 \wedge \varphi_2) \wedge \varphi_3)$	associativité.
$\varphi_1 \vee (\varphi_2 \wedge \varphi_3) \equiv (\varphi_1 \vee \varphi_2) \wedge (\varphi_1 \vee \varphi_3)$	distibutivité.
$\varphi \wedge \varphi \equiv \varphi \qquad \varphi \vee \varphi \equiv \varphi$	Idempotence.
$\neg\neg\varphi \equiv \varphi$	Involution.
$\neg(\varphi \wedge \psi) \equiv \neg\varphi \vee \neg\psi \qquad \neg(\varphi \vee \psi) \equiv \neg\varphi \wedge \neg\psi$	Lois de De Morgan.
$[(\varphi_1 \Rightarrow \varphi_2) \wedge (\varphi_2 \Rightarrow \varphi_3)] \equiv [\varphi_1 \Rightarrow \varphi_3]$	transitivité.

Formes normales

- En Informatique, et en particulier dans certaines méthodes de preuve, on exige que la Formule à traiter soit sous une forme bien particulière.

Formes normales

- En Informatique, et en particulier dans certaines méthodes de preuve, on exige que la Formule à traiter soit sous une forme bien particulière.
- Par exemple :

Formes normales

- En Informatique, et en particulier dans certaines méthodes de preuve, on exige que la Formule à traiter soit sous une forme bien particulière.

- Par exemple :
  - φ ne doit contenir que les connecteurs $\neg$ et $\wedge$.

Formes normales

- En Informatique, et en particulier dans certaines méthodes de preuve, on exige que la Formule à traiter soit sous une forme bien particulière.

- Par exemple :
  - φ ne doit contenir que les connecteurs $\neg$ et $\wedge$.
  - φ ne doit contenir que les connecteurs $\neg$ et $\vee$ ... etc.

Formes normales

- En Informatique, et en particulier dans certaines méthodes de preuve, on exige que la Formule à traiter soit sous une forme bien particulière.
- Par exemple :
  - φ ne doit contenir que les connecteurs $\neg$ et $\wedge$.
  - φ ne doit contenir que les connecteurs $\neg$ et $\vee$ ... etc.
- Nous allons définir les formes les plus connues.

Formes normales

- En Informatique, et en particulier dans certaines méthodes de preuve, on exige que la Formule à traiter soit sous une forme bien particulière.
- Par exemple :
  - φ ne doit contenir que les connecteurs $\neg$ et $\wedge$.
  - φ ne doit contenir que les connecteurs $\neg$ et $\vee$ ... etc.
- Nous allons définir les formes les plus connues.
  - Comment on peut mettre une Formule sous une forme normale donnée.

Quelques définitions

Définition

Atome : On appelle atome toute variable propositionnelle, ex : p, q.

Quelques définitions

Définition

Atome : On appelle atome toute variable propositionnelle, ex : p, q.

Littéral : Un **littéral** est un atome ou la négation d'un atome. Autrement dit, c'est une formule de la forme p ou $\neg p$, où p est une variable propositionnelle.

Quelques définitions

Définition

Atome : On appelle atome toute variable propositionnelle, ex : p, q.

Littéral : Un **littéral** est un atome ou la négation d'un atome. Autrement dit, c'est une formule de la forme p ou $\neg p$, où p est une variable propositionnelle.

Clause : Une **clause disjonctive** est un littéral ou une disjonction de littéraux :$\bigvee_{n}^{i=1} l_i$.
Une **clause conjonctive** est un littéral ou une conjonction de littéraux :$\bigwedge_{n}^{i=1} l_i$.

Quelques définitions

Exemple

- p, $\neg q$, $(p \wedge q) \wedge r$, $p \wedge \neg q \wedge r \wedge s$

Quelques définitions

Exemple

- p, $\neg q$, $(p \wedge q) \wedge r$, $p \wedge \neg q \wedge r \wedge s$

Quelques définitions

Exemple

- p, $\neg q$, $(p \wedge q) \wedge r$, $p \wedge \neg q \wedge r \wedge s$ sont des clauses conjonctives.
- p, $\neg q$, $(p \vee q) \vee r$, $p \vee \neg q \vee r \vee s$

Quelques définitions

Exemple

- p, $\neg q$, $(p \wedge q) \wedge r$, $p \wedge \neg q \wedge r \wedge s$ sont des clauses conjonctives.
- p, $\neg q$, $(p \vee q) \vee r$, $p \vee \neg q \vee r \vee s$

Quelques définitions

Exemple

- p, $\neg q$, $(p \wedge q) \wedge r$, $p \wedge \neg q \wedge r \wedge s$ sont des clauses conjonctives.
- p, $\neg q$, $(p \vee q) \vee r$, $p \vee \neg q \vee r \vee s$ sont des clauses disjonctive.
- $p \vee \neg\neg q$, $\neg(p \wedge q)$, $(p \vee q) \rightarrow r$

Quelques définitions

Exemple

- p, $\neg q$, $(p \wedge q) \wedge r$, $p \wedge \neg q \wedge r \wedge s$ sont des clauses conjonctives.
- p, $\neg q$, $(p \vee q) \vee r$, $p \vee \neg q \vee r \vee s$ sont des clauses disjonctive.
- $p \vee \neg\neg q$, $\neg(p \wedge q)$, $(p \vee q) \rightarrow r$

Quelques définitions

Exemple

- p, $\neg q$, $(p \wedge q) \wedge r$, $p \wedge \neg q \wedge r \wedge s$ sont des clauses conjonctives.
- p, $\neg q$, $(p \vee q) \vee r$, $p \vee \neg q \vee r \vee s$ sont des clauses disjonctive.
- $p \vee \neg\neg q$, $\neg(p \wedge q)$, $(p \vee q) \rightarrow r$ ne sont pas des clauses conjonctives.

Forme Normale Négative (FNN)

Définition

Une formule φ est sous forme normale négative (sous FNN) ssi :

- φ est construite avec les connecteurs $\neg$,$\vee$ et $\wedge$ seulement, et

Exemple

Forme Normale Négative (FNN)

Définition

Une formule φ est sous forme normale négative (sous FNN) ssi :

- φ est construite avec les connecteurs $\neg$,$\vee$ et $\wedge$ seulement, et
- le connecteur $\neg$ n'apparaît que devant les VP ($\neg$ ne gouverne pas une $\vee$, une $\wedge$ ou une autre $\neg$).

Exemple

Forme Normale Négative (FNN)

Définition

Une formule φ est sous forme normale négative (sous FNN) ssi :

- φ est construite avec les connecteurs $\neg$,$\vee$ et $\wedge$ seulement, et
- le connecteur $\neg$ n'apparaît que devant les VP ($\neg$ ne gouverne pas une $\vee$, une $\wedge$ ou une autre $\neg$).

Exemple

- $p \wedge \neg q \vee r$, $(p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge r) \wedge q$, $p \wedge (q \vee r)$ sont sous FNN.

Forme Normale Négative (FNN)

Définition

Une formule φ est sous forme normale négative (sous FNN) ssi :

- φ est construite avec les connecteurs $\neg, \vee$ et $\wedge$ seulement, et
- le connecteur $\neg$ n'apparaît que devant les VP ($\neg$ ne gouverne pas une $\vee$, une $\wedge$ ou une autre $\neg$).

Exemple

- $p \wedge \neg q \vee r$, $(p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge r) \wedge q$, $p \wedge (q \vee r)$ sont sous FNN.
- $p \rightarrow q$, $p \wedge \neg\neg q \vee r$, $p \wedge \neg(q \vee r)$ ne sont pas sous FNN.

Forme Normale Négative (FNN)

- Méthode de mise sous FNN :
  1. Eliminer les $\Rightarrow$ et les $\Leftrightarrow$ en remplaçant

$$\varphi_1 \Rightarrow \varphi_2 \text{ par } \neg\varphi_1 \vee \varphi_2$$

Forme Normale Négative (FNN)

- Méthode de mise sous FNN :
  1. Eliminer les $\Rightarrow$ et les $\Leftrightarrow$ en remplaçant

$$\varphi_1 \Rightarrow \varphi_2 \text{ par } \neg\varphi_1 \vee \varphi_2 \text{ ,et}$$
$$\varphi_1 \Leftrightarrow \varphi_2 \text{ par } (\neg\varphi_1 \vee \varphi_2) \wedge (\varphi_1 \vee \neg\varphi_2)$$

  2. Utiliser les lois de *Morgan* pour pousser les négations vers l'intérieur

$\neg(\varphi_1 \wedge \varphi_2) = \neg\varphi_1 \vee \neg\varphi_2$ $\qquad$ $\neg(\varphi_1 \vee \varphi_2) = \neg\varphi_1 \wedge \neg\varphi_2$

  3. Remplacer les sous formules $\neg\neg\varphi$ par φ

Forme Normale Négative (FNN)

- Méthode de mise sous FNN :
  1. Eliminer les $\Rightarrow$ et les $\Leftrightarrow$ en remplaçant
  $$\varphi_1 \Rightarrow \varphi_2 \text{ par } \neg\varphi_1 \vee \varphi_2 \text{ ,et}$$
  $$\varphi_1 \Leftrightarrow \varphi_2 \text{ par } (\neg\varphi_1 \vee \varphi_2) \wedge (\varphi_1 \vee \neg\varphi_2)$$
  2. Utiliser les lois de *Morgan* pour pousser les négations vers l'intérieur
  $\neg(\varphi_1 \wedge \varphi_2) = \neg\varphi_1 \vee \neg\varphi_2$ $\qquad$ $\neg(\varphi_1 \vee \varphi_2) = \neg\varphi_1 \wedge \neg\varphi_2$
  3. Remplacer les sous formules $\neg\neg\varphi$ par φ

Exemple

$\varphi = ((p \wedge \neg q) \Rightarrow \neg r)$

Forme Normale Négative (FNN)

- **Méthode de mise sous FNN :**
  1. Eliminer les $\Rightarrow$ et les $\Leftrightarrow$ en remplaçant
  $$\varphi_1 \Rightarrow \varphi_2 \text{ par } \neg\varphi_1 \vee \varphi_2 \text{ ,et}$$
  $$\varphi_1 \Leftrightarrow \varphi_2 \text{ par } (\neg\varphi_1 \vee \varphi_2) \wedge (\varphi_1 \vee \neg\varphi_2)$$
  2. Utiliser les lois de *Morgan* pour pousser les négations vers l'intérieur
  $\neg(\varphi_1 \wedge \varphi_2) = \neg\varphi_1 \vee \neg\varphi_2$ $\qquad$ $\neg(\varphi_1 \vee \varphi_2) = \neg\varphi_1 \wedge \neg\varphi_2$
  3. Remplacer les sous formules $\neg\neg\varphi$ par φ

Exemple

$\varphi = ((p \wedge \neg q) \Rightarrow \neg r)$
$\varphi = \neg(p \wedge \neg q) \vee \neg r$

Forme Normale Négative (FNN)

- Méthode de mise sous FNN :
  1. Eliminer les $\Rightarrow$ et les $\Leftrightarrow$ en remplaçant
  $$\varphi_1 \Rightarrow \varphi_2 \text{ par } \neg\varphi_1 \vee \varphi_2 \text{ ,et}$$
  $$\varphi_1 \Leftrightarrow \varphi_2 \text{ par } (\neg\varphi_1 \vee \varphi_2) \wedge (\varphi_1 \vee \neg\varphi_2)$$
  2. Utiliser les lois de *Morgan* pour pousser les négations vers l'intérieur
  $\neg(\varphi_1 \wedge \varphi_2) = \neg\varphi_1 \vee \neg\varphi_2$ $\quad$ $\neg(\varphi_1 \vee \varphi_2) = \neg\varphi_1 \wedge \neg\varphi_2$
  3. Remplacer les sous formules $\neg\neg\varphi$ par φ

Exemple

$\varphi = ((p \wedge \neg q) \Rightarrow \neg r)$
$\varphi = \neg(p \wedge \neg q) \vee \neg r$
$\varphi = (\neg p \vee \neg\neg q) \vee \neg r$

Forme Normale Négative (FNN)

- **Méthode de mise sous FNN :**
  1. Eliminer les $\Rightarrow$ et les $\Leftrightarrow$ en remplaçant
  $$\varphi_1 \Rightarrow \varphi_2 \text{ par } \neg\varphi_1 \vee \varphi_2 \text{ ,et}$$
  $$\varphi_1 \Leftrightarrow \varphi_2 \text{ par } (\neg\varphi_1 \vee \varphi_2) \wedge (\varphi_1 \vee \neg\varphi_2)$$
  2. Utiliser les lois de *Morgan* pour pousser les négations vers l'intérieur
  $\neg(\varphi_1 \wedge \varphi_2) = \neg\varphi_1 \vee \neg\varphi_2$ $\quad\quad$ $\neg(\varphi_1 \vee \varphi_2) = \neg\varphi_1 \wedge \neg\varphi_2$
  3. Remplacer les sous formules $\neg\neg\varphi$ par φ

Exemple

$\varphi = ((p \wedge \neg q) \Rightarrow \neg r)$
$\varphi = \neg(p \wedge \neg q) \vee \neg r$
$\varphi = (\neg p \vee \neg\neg q) \vee \neg r$
$\varphi = (\neg p \vee q) \vee \neg r$

Forme Normale Conjonctive (FNC)

Définition

Une formule φ est sous forme normale conjonctive (sous FNC) ssi :

- φ est une clause disjonctive,

Forme Normale Conjonctive (FNC)

Définition

Une formule φ est sous forme normale conjonctive (sous FNC) ssi :

- φ est une clause disjonctive,

Forme Normale Conjonctive (FNC)

Définition

Une formule φ est sous forme normale conjonctive (sous FNC) ssi :

- φ est une clause disjonctive, ou
- φ est une conjonction des clauses disjonctives.

Exemple

Forme Normale Conjonctive (FNC)

Définition

Une formule φ est sous forme normale conjonctive (sous FNC) ssi :

- φ est une clause disjonctive, ou
- φ est une conjonction des clauses disjonctives.

Exemple

- $(p \vee q) \wedge (\neg q \vee r)$, $\neg p \vee q$ et q sont sous FNC.

Forme Normale Conjonctive (FNC)

- Méthode de mise sous FNC :
  1. Mettre φ sous FNN

Forme Normale Conjonctive (FNC)

- Méthode de mise sous FNC :
  1. Mettre φ sous FNN
  2. Remplacer les sous formules

$$\varphi_1 \vee (\varphi_2 \wedge \varphi_3) \text{ par } (\varphi_1 \vee \varphi_2) \wedge (\varphi_1 \vee \varphi_3)$$

(distributivité à gauche de $\vee$ par $\wedge$)

Forme Normale Conjonctive (FNC)

- Méthode de mise sous FNC :
  1. Mettre φ sous FNN
  2. Remplacer les sous formules

$$\varphi_1 \vee (\varphi_2 \wedge \varphi_3) \text{ par } (\varphi_1 \vee \varphi_2) \wedge (\varphi_1 \vee \varphi_3)$$

(distributivité à gauche de $\vee$ par $\wedge$)

  3. Remplacer les sous formules

$$(\varphi_1 \wedge \varphi_2) \vee \varphi_3 \text{ par } (\varphi_1 \vee \varphi_3) \wedge (\varphi_2 \vee \varphi_3)$$

(distributivité à droite de $\vee$ par $\wedge$)

Forme Normale Conjonctive (FNC)

- Méthode de mise sous FNC :
  1. Mettre φ sous FNN
  2. Remplacer les sous formules
     $$\varphi_1 \vee (\varphi_2 \wedge \varphi_3) \text{ par } (\varphi_1 \vee \varphi_2) \wedge (\varphi_1 \vee \varphi_3)$$
     (distributivité à gauche de $\vee$ par $\wedge$)
  3. Remplacer les sous formules
     $$(\varphi_1 \wedge \varphi_2) \vee \varphi_3 \text{ par } (\varphi_1 \vee \varphi_3) \wedge (\varphi_2 \vee \varphi_3)$$
     (distributivité à droite de $\vee$ par $\wedge$)

Forme Normale Conjonctive (FNC)

- Méthode de mise sous FNC :
  1. Mettre φ sous FNN
  2. Remplacer les sous formules
     $$\varphi_1 \vee (\varphi_2 \wedge \varphi_3) \text{ par } (\varphi_1 \vee \varphi_2) \wedge (\varphi_1 \vee \varphi_3)$$
     (distributivité à gauche de $\vee$ par $\wedge$)
  3. Remplacer les sous formules
     $$(\varphi_1 \wedge \varphi_2) \vee \varphi_3) \text{ par } (\varphi_1 \vee \varphi_3) \wedge (\varphi_2 \vee \varphi_3)$$
     (distributivité à droite de $\vee$ par $\wedge$)

Exemple

$\varphi = (p \Rightarrow (q \wedge r))$

Forme Normale Conjonctive (FNC)

- Méthode de mise sous FNC :
  1. Mettre φ sous FNN
  2. Remplacer les sous formules

$$\varphi_1 \vee (\varphi_2 \wedge \varphi_3) \text{ par } (\varphi_1 \vee \varphi_2) \wedge (\varphi_1 \vee \varphi_3)$$

(distributivité à gauche de $\vee$ par $\wedge$)

  3. Remplacer les sous formules

$$(\varphi_1 \wedge \varphi_2) \vee \varphi_3 \text{ par } (\varphi_1 \vee \varphi_3) \wedge (\varphi_2 \vee \varphi_3)$$

(distributivité à droite de $\vee$ par $\wedge$)

Exemple

$\varphi = (p \Rightarrow (q \wedge r))$
$\varphi = \neg p \vee (q \wedge r)$

Forme Normale Conjonctive (FNC)

- Méthode de mise sous FNC :
  1. Mettre φ sous FNN
  2. Remplacer les sous formules

     $$\varphi_1 \vee (\varphi_2 \wedge \varphi_3) \text{ par } (\varphi_1 \vee \varphi_2) \wedge (\varphi_1 \vee \varphi_3)$$

     (distributivité à gauche de $\vee$ par $\wedge$)
  3. Remplacer les sous formules

     $$(\varphi_1 \wedge \varphi_2) \vee \varphi_3 \text{ par } (\varphi_1 \vee \varphi_3) \wedge (\varphi_2 \vee \varphi_3)$$

     (distributivité à droite de $\vee$ par $\wedge$)

Exemple

$\varphi = (p \Rightarrow (q \wedge r))$
$\varphi = \neg p \vee (q \wedge r)$
$\varphi = (\neg p \vee q) \wedge (\neg p \vee r)$

Forme Normale Conjonctive (FNC)

- Méthode de mise sous FNC :
  1. Mettre φ sous FNN
  2. Remplacer les sous formules
     $$\varphi_1 \vee (\varphi_2 \wedge \varphi_3) \text{ par } (\varphi_1 \vee \varphi_2) \wedge (\varphi_1 \vee \varphi_3)$$
     (distributivité à gauche de $\vee$ par $\wedge$)
  3. Remplacer les sous formules
     $$(\varphi_1 \wedge \varphi_2) \vee \varphi_3 \text{ par } (\varphi_1 \vee \varphi_3) \wedge (\varphi_2 \vee \varphi_3)$$
     (distributivité à droite de $\vee$ par $\wedge$)

Exemple

$\varphi = (p \Rightarrow (q \wedge r))$
$\varphi = \neg p \vee (q \wedge r)$
$\varphi = (\neg p \vee q) \wedge (\neg p \vee r)$

Forme Normale Conjonctive (FNC)

Méthode de mise sous FNC avec la table de vérité

$$\varphi = ((\neg a \vee b) \wedge c) \Rightarrow (\neg\neg a \wedge \neg b)$$

1. Chercher les valuations v qui donnent à la formule la valeur 0.

a	b	c	φ
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	0

Forme Normale Conjonctive (FNC)

Méthode de mise sous FNC avec la table de vérité

$$\varphi = ((\neg a \vee b) \wedge c) \Rightarrow (\neg\neg a \wedge \neg b)$$

1. Chercher les valuations v qui donnent à la formule la valeur 0.

a	b	c	φ
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	0

Forme Normale Conjonctive (FNC)

Méthode de mise sous FNC avec la table de vérité

$$\varphi = ((\neg a \vee b) \wedge c) \Rightarrow (\neg\neg a \wedge \neg b)$$

1. Chercher les valuations v qui donnent à la formule la valeur 0.
2. Pour chaque valuation v , écrire la disjonction des négation de ces littéraux.

a	b	c	φ
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	0

Forme Normale Conjonctive (FNC)

Méthode de mise sous FNC avec la table de vérité

$$\varphi = ((\neg a \vee b) \wedge c) \Rightarrow (\neg\neg a \wedge \neg b)$$

1. Chercher les valuations v qui donnent à la formule la valeur 0.
2. Pour chaque valuation v , écrire la disjonction des négation de ces littéraux.

a	b	c	φ
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	0

$(a \vee b \vee \neg c)$

Forme Normale Conjonctive (FNC)

Méthode de mise sous FNC avec la table de vérité

$$\varphi = ((\neg a \vee b) \wedge c) \Rightarrow (\neg\neg a \wedge \neg b)$$

1. Chercher les valuations v qui donnent à la formule la valeur 0.
2. Pour chaque valuation v , écrire la disjonction des négation de ces littéraux.

a	b	c	φ
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	0

$(a \vee b \vee \neg c)$ $\quad$ $(a \vee \neg b \vee \neg c)$

Forme Normale Conjonctive (FNC)

Méthode de mise sous FNC avec la table de vérité

$$\varphi = ((\neg a \vee b) \wedge c) \Rightarrow (\neg\neg a \wedge \neg b)$$

1. Chercher les valuations v qui donnent à la formule la valeur 0.
2. Pour chaque valuation v , écrire la disjonction des négation de ces littéraux.

a	b	c	φ
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	0

$(a \vee b \vee \neg c) \quad (a \vee \neg b \vee \neg c) \quad (\neg a \vee \neg b \vee \neg c)$

Forme Normale Conjonctive (FNC)

Méthode de mise sous FNC avec la table de vérité

$$\varphi = ((\neg a \vee b) \wedge c) \Rightarrow (\neg\neg a \wedge \neg b)$$

1. Chercher les valuations v qui donnent à la formule la valeur 0.
2. Pour chaque valuation v , écrire la disjonction des négation de ces littéraux.
3. Ecrire ensuite la conjonction de ces disjonctions.

a	b	c	φ
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	0

$(a \vee b \vee \neg c)$ $\quad(a \vee \neg b \vee \neg c)$ $\quad(\neg a \vee \neg b \vee \neg c)$

Forme Normale Conjonctive (FNC)

Méthode de mise sous FNC avec la table de vérité

$$\varphi = ((\neg a \vee b) \wedge c) \Rightarrow (\neg\neg a \wedge \neg b)$$

1. Chercher les valuations v qui donnent à la formule la valeur 0.
2. Pour chaque valuation v , écrire la disjonction des négation de ces littéraux.
3. Ecrire ensuite la conjonction de ces disjonctions.

a	b	c	φ
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	0

$$(a \vee b \vee \neg c) \wedge (a \vee \neg b \vee \neg c) \wedge (\neg a \vee \neg b \vee \neg c)$$

Forme Normale Disjonctive (FND)

Définition

Une formule φ est sous forme normale disjonctive (sous FND) ssi :

- φ est une clause conjonctive,

Forme Normale Disjonctive (FND)

Définition

Une formule φ est sous forme normale disjonctive (sous FND) ssi :

- φ est une clause conjonctive,

Forme Normale Disjonctive (FND)

Définition

Une formule φ est sous forme normale disjonctive (sous FND) ssi :

- φ est une clause conjonctive, ou
- φ est une disjonction des clauses conjonctives.

Exemple

Forme Normale Disjonctive (FND)

Définition

Une formule φ est sous forme normale disjonctive (sous FND) ssi :

- φ est une clause conjonctive, ou
- φ est une disjonction des clauses conjonctives.

Exemple

- $(p \wedge q) \vee (\neg q \wedge r)$, $\neg p \wedge q$ et q sont sous FND.

Forme Normale Disjonctive (FND)

- Méthode de mise sous FND :
  1. Mettre φ sous FNN

Forme Normale Disjonctive (FND)

- Méthode de mise sous FND :
  1. Mettre φ sous FNN
  2. Remplacer les sous formules $\varphi_1 \wedge (\varphi_2 \vee \varphi_3)$ par $(\varphi_1 \wedge \varphi_2) \vee (\varphi_1 \wedge \varphi_3)$ (distributivité à gauche $\wedge$ par $\vee$).

Forme Normale Disjonctive (FND)

- **Méthode de mise sous FND :**
  1. Mettre φ sous FNN
  2. Remplacer les sous formules $\varphi_1 \wedge (\varphi_2 \vee \varphi_3)$ par $(\varphi_1 \wedge \varphi_2) \vee (\varphi_1 \wedge \varphi_3)$ (distributivité à gauche $\wedge$ par $\vee$).
  3. Remplacer les sous formules $(\varphi_1 \vee \varphi_2) \wedge \varphi_3)$ par $(\varphi_1 \wedge \varphi_3) \vee (\varphi_2 \wedge \varphi_3)$ (distributivité à droite de $\wedge$ par $\vee$).

Forme Normale Disjonctive (FND)

- Méthode de mise sous FND :
  1. Mettre φ sous FNN
  2. Remplacer les sous formules $\varphi_1 \wedge (\varphi_2 \vee \varphi_3)$ par $(\varphi_1 \wedge \varphi_2) \vee (\varphi_1 \wedge \varphi_3)$ (distributivité à gauche $\wedge$ par $\vee$).
  3. Remplacer les sous formules $(\varphi_1 \vee \varphi_2) \wedge \varphi_3)$ par $(\varphi_1 \wedge \varphi_3) \vee (\varphi_2 \wedge \varphi_3)$ (distributivité à droite de $\wedge$ par $\vee$).

Forme Normale Disjonctive (FND)

- Méthode de mise sous FND :
  1. Mettre φ sous FNN
  2. Remplacer les sous formules $\varphi_1 \wedge (\varphi_2 \vee \varphi_3)$ par $(\varphi_1 \wedge \varphi_2) \vee (\varphi_1 \wedge \varphi_3)$ (distributivité à gauche $\wedge$ par $\vee$).
  3. Remplacer les sous formules $(\varphi_1 \vee \varphi_2) \wedge \varphi_3)$ par $(\varphi_1 \wedge \varphi_3) \vee (\varphi_2 \wedge \varphi_3)$ (distributivité à droite de $\wedge$ par $\vee$).

Exemple

$\varphi = \neg(p \Rightarrow (q \wedge r))$

Forme Normale Disjonctive (FND)

- Méthode de mise sous FND :
  1. Mettre φ sous FNN
  2. Remplacer les sous formules $\varphi_1 \wedge (\varphi_2 \vee \varphi_3)$ par $(\varphi_1 \wedge \varphi_2) \vee (\varphi_1 \wedge \varphi_3)$ (distributivité à gauche $\wedge$ par $\vee$).
  3. Remplacer les sous formules $(\varphi_1 \vee \varphi_2) \wedge \varphi_3)$ par $(\varphi_1 \wedge \varphi_3) \vee (\varphi_2 \wedge \varphi_3)$ (distributivité à droite de $\wedge$ par $\vee$).

Exemple

$\varphi = \neg(p \Rightarrow (q \wedge r))$
$\varphi = \neg(\neg p \vee (q \wedge r)$

Forme Normale Disjonctive (FND)

- Méthode de mise sous FND :
  1. Mettre φ sous FNN
  2. Remplacer les sous formules $\varphi_1 \wedge (\varphi_2 \vee \varphi_3)$ par $(\varphi_1 \wedge \varphi_2) \vee (\varphi_1 \wedge \varphi_3)$ (distributivité à gauche $\wedge$ par $\vee$).
  3. Remplacer les sous formules $(\varphi_1 \vee \varphi_2) \wedge \varphi_3)$ par $(\varphi_1 \wedge \varphi_3) \vee (\varphi_2 \wedge \varphi_3)$ (distributivité à droite de $\wedge$ par $\vee$).

Exemple

$\varphi = \neg(p \Rightarrow (q \wedge r))$
$\varphi = \neg(\neg p \vee (q \wedge r)$
$\varphi = \neg\neg p \wedge \neg(q \wedge r)$

Forme Normale Disjonctive (FND)

- Méthode de mise sous FND :
  1. Mettre φ sous FNN
  2. Remplacer les sous formules $\varphi_1 \wedge (\varphi_2 \vee \varphi_3)$ par $(\varphi_1 \wedge \varphi_2) \vee (\varphi_1 \wedge \varphi_3)$ (distributivité à gauche $\wedge$ par $\vee$).
  3. Remplacer les sous formules $(\varphi_1 \vee \varphi_2) \wedge \varphi_3)$ par $(\varphi_1 \wedge \varphi_3) \vee (\varphi_2 \wedge \varphi_3)$ (distributivité à droite de $\wedge$ par $\vee$).

Exemple

$\varphi = \neg(p \Rightarrow (q \wedge r))$
$\varphi = \neg(\neg p \vee (q \wedge r)$
$\varphi = \neg\neg p \wedge \neg(q \wedge r)$
$\varphi = p \wedge (\neg q \vee \neg r)$

Forme Normale Disjonctive (FND)

- Méthode de mise sous FND :
  1. Mettre φ sous FNN
  2. Remplacer les sous formules $\varphi_1 \wedge (\varphi_2 \vee \varphi_3)$ par $(\varphi_1 \wedge \varphi_2) \vee (\varphi_1 \wedge \varphi_3)$ (distributivité à gauche $\wedge$ par $\vee$).
  3. Remplacer les sous formules $(\varphi_1 \vee \varphi_2) \wedge \varphi_3)$ par $(\varphi_1 \wedge \varphi_3) \vee (\varphi_2 \wedge \varphi_3)$ (distributivité à droite de $\wedge$ par $\vee$).

Exemple

$\varphi = \neg(p \Rightarrow (q \wedge r))$
$\varphi = \neg(\neg p \vee (q \wedge r)$
$\varphi = \neg\neg p \wedge \neg(q \wedge r)$
$\varphi = p \wedge (\neg q \vee \neg r)$
$\varphi = (p \wedge \neg q) \vee (p \wedge \neg r)$

Forme Normale Disjonctive (FND)

- Méthode de mise sous FND :
  1. Mettre φ sous FNN
  2. Remplacer les sous formules $\varphi_1 \wedge (\varphi_2 \vee \varphi_3)$ par $(\varphi_1 \wedge \varphi_2) \vee (\varphi_1 \wedge \varphi_3)$ (distributivité à gauche $\wedge$ par $\vee$).
  3. Remplacer les sous formules $(\varphi_1 \vee \varphi_2) \wedge \varphi_3)$ par $(\varphi_1 \wedge \varphi_3) \vee (\varphi_2 \wedge \varphi_3)$ (distributivité à droite de $\wedge$ par $\vee$).

Exemple

$\varphi = \neg(p \Rightarrow (q \wedge r))$
$\varphi = \neg(\neg p \vee (q \wedge r)$
$\varphi = \neg\neg p \wedge \neg(q \wedge r)$
$\varphi = p \wedge (\neg q \vee \neg r)$
$\varphi = (p \wedge \neg q) \vee (p \wedge \neg r)$

Forme Normale Disjonctive (FND)

Méthode de mise sous FND avec la table de vérité

$$\varphi = ((\neg a \vee b) \wedge c) \Rightarrow (\neg\neg a \wedge \neg b)$$

1. Chercher les valuations v qui donnent à la formule la valeur 1.

a	b	c	φ
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	0

Forme Normale Disjonctive (FND)

Méthode de mise sous FND avec la table de vérité

$$\varphi = ((\neg a \vee b) \wedge c) \Rightarrow (\neg\neg a \wedge \neg b)$$

1. Chercher les valuations v qui donnent à la formule la valeur 1.

a	b	c	φ
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	0

Forme Normale Disjonctive (FND)

Méthode de mise sous FND avec la table de vérité

$$\varphi = ((\neg a \vee b) \wedge c) \Rightarrow (\neg\neg a \wedge \neg b)$$

1. Chercher les valuations v qui donnent à la formule la valeur 1.
2. Pour chaque valuation v , écrire la conjonction de ces littéraux.

a	b	c	φ
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	0

Forme Normale Disjonctive (FND)

Méthode de mise sous FND avec la table de vérité

$$\varphi = ((\neg a \vee b) \wedge c) \Rightarrow (\neg\neg a \wedge \neg b)$$

1. Chercher les valuations v qui donnent à la formule la valeur 1.
2. Pour chaque valuation v , écrire la conjonction de ces littéraux.

a	b	c	φ
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	0

$(\neg a \wedge \neg b \wedge \neg c)$

Forme Normale Disjonctive (FND)

Méthode de mise sous FND avec la table de vérité

$$\varphi = ((\neg a \vee b) \wedge c) \Rightarrow (\neg\neg a \wedge \neg b)$$

1. Chercher les valuations v qui donnent à la formule la valeur 1.
2. Pour chaque valuation v , écrire la conjonction de ces littéraux.

a	b	c	φ
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	0

$(\neg a \wedge \neg b \wedge \neg c)$ $(\neg a \wedge b \wedge \neg c)$

Forme Normale Disjonctive (FND)

Méthode de mise sous FND avec la table de vérité

$$\varphi = ((\neg a \vee b) \wedge c) \Rightarrow (\neg\neg a \wedge \neg b)$$

1. Chercher les valuations v qui donnent à la formule la valeur 1.
2. Pour chaque valuation v , écrire la conjonction de ces littéraux.

a	b	c	φ
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	0

$(\neg a \wedge \neg b \wedge \neg c)$ $(\neg a \wedge b \wedge \neg c)$ $(a \wedge \neg b \wedge \neg c)$

Forme Normale Disjonctive (FND)

Méthode de mise sous FND avec la table de vérité

$$\varphi = ((\neg a \vee b) \wedge c) \Rightarrow (\neg\neg a \wedge \neg b)$$

1. Chercher les valuations v qui donnent à la formule la valeur 1.
2. Pour chaque valuation v , écrire la conjonction de ces littéraux.

a	b	c	φ
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	0

$(\neg a \wedge \neg b \wedge \neg c)$ $(\neg a \wedge b \wedge \neg c)$ $(a \wedge \neg b \wedge \neg c)$ $(a \wedge \neg b \wedge c)$

Forme Normale Disjonctive (FND)

Méthode de mise sous FND avec la table de vérité

$$\varphi = ((\neg a \vee b) \wedge c) \Rightarrow (\neg\neg a \wedge \neg b)$$

1. Chercher les valuations v qui donnent à la formule la valeur 1.
2. Pour chaque valuation v , écrire la conjonction de ces littéraux.

a	b	c	φ
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	0

$(\neg a \wedge \neg b \wedge \neg c)$ $(\neg a \wedge b \wedge \neg c)$ $(a \wedge \neg b \wedge \neg c)$ $(a \wedge \neg b \wedge c)$ $(a \wedge b \wedge \neg c)$

Forme Normale Disjonctive (FND)

Méthode de mise sous FND avec la table de vérité

$$\varphi = ((\neg a \vee b) \wedge c) \Rightarrow (\neg\neg a \wedge \neg b)$$

1. Chercher les valuations v qui donnent à la formule la valeur 1.
2. Pour chaque valuation v , écrire la conjonction de ces littéraux.
3. Ecrire ensuite la disjonction de ces conjonctions.

a	b	c	φ
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	0

$(\neg a \wedge \neg b \wedge \neg c)$ $(\neg a \wedge b \wedge \neg c)$ $(a \wedge \neg b \wedge \neg c)$ $(a \wedge \neg b \wedge c)$ $(a \wedge b \wedge \neg c)$

Forme Normale Disjonctive (FND)

Méthode de mise sous FND avec la table de vérité

$$\varphi = ((\neg a \vee b) \wedge c) \Rightarrow (\neg\neg a \wedge \neg b)$$

1. Chercher les valuations v qui donnent à la formule la valeur 1.
2. Pour chaque valuation v , écrire la conjonction de ces littéraux.
3. Ecrire ensuite la disjonction de ces conjonctions.

a	b	c	φ
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	0

$$(\neg a \wedge \neg b \wedge \neg c) \vee (\neg a \wedge b \wedge \neg c) \vee (a \wedge \neg b \wedge \neg c) \vee (a \wedge \neg b \wedge c) \vee (a \wedge b \wedge \neg c)$$

Traitement de la conséquence logique

- Les formules propositionnelles peuvent être vues comme un ensemble de contraintes sur les propositions.

Traitement de la conséquence logique

- Les formules propositionnelles peuvent être vues comme un ensemble de contraintes sur les propositions.
  - $p \wedge q$ contraint p et q à être vraies.

Traitement de la conséquence logique

- Les formules propositionnelles peuvent être vues comme un ensemble de contraintes sur les propositions.
  - $p \wedge q$ contraint p et q à être vraies.
- Il est donc très courant de considérer des ensembles de formules propositionnelles pour modéliser des problèmes de satisfaction de contraintes.

Traitement de la conséquence logique

- Les formules propositionnelles peuvent être vues comme un ensemble de contraintes sur les propositions.
  - $p \wedge q$ contraint p et q à être vraies.
- Il est donc très courant de considérer des ensembles de formules propositionnelles pour modéliser des problèmes de satisfaction de contraintes.
  - On étend les définitions vues précédemment aux ensembles de formules.

Modèles d'une formule

Définition

Un **modèle** d'un ensemble de formules Γ est une valuation v telle que $[\varphi]_v = 1$ pour toute $\varphi \in \Gamma$.

Modèles d'une formule

Définition

Un **modèle** d'un ensemble de formules Γ est une valuation v telle que $[\varphi]_v = 1$ pour toute $\varphi \in \Gamma$.

On note :

- $v \models \Gamma$ ssi $v \models \varphi$ pour toute $\varphi \in \Gamma$.

Modèles d'une formule

Définition

Un **modèle** d'un ensemble de formules Γ est une valuation v telle que $[\varphi]_v = 1$ pour toute $\varphi \in \Gamma$.

On note :

- $v \models \Gamma$ ssi $v \models \varphi$ pour toute $\varphi \in \Gamma$.
- $mod(\Gamma)$ l'ensemble des modèles de Γ.

Modèles d'une formule

Définition

Un **modèle** d'un ensemble de formules Γ est une valuation v telle que $[\varphi]_v = 1$ pour toute $\varphi \in \Gamma$.

On note :

- $v \models \Gamma$ ssi $v \models \varphi$ pour toute $\varphi \in \Gamma$.
- $mod(\Gamma)$ l'ensemble des modèles de Γ.

Modèles d'une formule

Définition

Un **modèle** d'un ensemble de formules Γ est une valuation v telle que $[\varphi]_v = 1$ pour toute $\varphi \in \Gamma$.

On note :

- $v \models \Gamma$ ssi $v \models \varphi$ pour toute $\varphi \in \Gamma$.
- $mod(\Gamma)$ l'ensemble des modèles de Γ.

Exemple

$$\Gamma = \{p \vee q, p \Rightarrow (q \vee r), r\}$$

Modèles d'une formule

Définition

Un **modèle** d'un ensemble de formules Γ est une valuation v telle que $[\varphi]_v = 1$ pour toute $\varphi \in \Gamma$.

On note :

- $v \models \Gamma$ ssi $v \models \varphi$ pour toute $\varphi \in \Gamma$.
- $mod(\Gamma)$ l'ensemble des modèles de Γ.

Exemple

$$\Gamma = \{p \vee q, p \Rightarrow (q \vee r), r\}$$

Γ a un modèle v_1 :

Modèles d'une formule

Définition

Un **modèle** d'un ensemble de formules Γ est une valuation v telle que $[\varphi]_v = 1$ pour toute $\varphi \in \Gamma$.

On note :

- $v \models \Gamma$ ssi $v \models \varphi$ pour toute $\varphi \in \Gamma$.
- $mod(\Gamma)$ l'ensemble des modèles de Γ.

Exemple

$$\Gamma = \{p \vee q, p \Rightarrow (q \vee r), r\}$$

Γ a un modèle v_1 :

$$v_1(p) = 1, v_1(q) = 0, v_1(r) = 1$$

Satisfaisabilité/Consistance Vs. Contradiction

Définition

Un ensemble de formule Γ est **satisfaisable** ou **consistant** ou **compatible** s'il admet au moins un modèle :

Satisfaisabilité/Consistance Vs. Contradiction

Définition

Un ensemble de formule Γ est **satisfaisable** ou **consistant** ou **compatible** s'il admet au moins un modèle :

- S'il existe une valuation v telle que $v \models \varphi$ pour toute $\varphi \in \Gamma$

Satisfaisabilité/Consistance Vs. Contradiction

Définition

Un ensemble de formule Γ est **satisfaisable** ou **consistant** ou **compatible** s'il admet au moins un modèle :

- S'il existe une valuation v telle que $v \models \varphi$ pour toute $\varphi \in \Gamma$
- Si $mod(\Gamma) \neq \varnothing$

Satisfaisabilité/Consistance Vs. Contradiction

Définition

Un ensemble de formule Γ est **satisfaisable** ou **consistant** ou **compatible** s'il admet au moins un modèle :

- S'il existe une valuation v telle que $v \models \varphi$ pour toute $\varphi \in \Gamma$
- Si $mod(\Gamma) \neq \varnothing$

Satisfaisabilité/Consistance Vs. Contradiction

Définition

Un ensemble de formule Γ est **satisfaisable** ou **consistant** ou **compatible** s'il admet au moins un modèle :

- S'il existe une valuation v telle que $v \models \varphi$ pour toute $\varphi \in \Gamma$
- Si $mod(\Gamma) \neq \varnothing$

Définition

Un ensemble de formule Γ est **insatisfaisable** ou **contradictoire** ou **incompatible** s'il n'admet aucun modèle :

Satisfaisabilité/Consistance Vs. Contradiction

Définition

Un ensemble de formule Γ est **satisfaisable** ou **consistant** ou **compatible** s'il admet au moins un modèle :

- S'il existe une valuation v telle que $v \models \varphi$ pour toute $\varphi \in \Gamma$
- Si $mod(\Gamma) \neq \varnothing$

Définition

Un ensemble de formule Γ est **insatisfaisable** ou **contradictoire** ou **incompatible** s'il n'admet aucun modèle :

- Si pour toute v, il existe une formule $\varphi \in \Gamma$ telle que $[\varphi]_v = 0$

Satisfaisabilité/Consistance Vs. Contradiction

Définition

Un ensemble de formule Γ est **satisfaisable** ou **consistant** ou **compatible** s'il admet au moins un modèle :

- S'il existe une valuation v telle que $v \models \varphi$ pour toute $\varphi \in \Gamma$
- Si $mod(\Gamma) \neq \varnothing$

Définition

Un ensemble de formule Γ est **insatisfaisable** ou **contradictoire** ou **incompatible** s'il n'admet aucun modèle :

- Si pour toute v, il existe une formule $\varphi \in \Gamma$ telle que $[\varphi]_v = 0$
- Si $mod(\Gamma) = \varnothing$

Satisfaisabilité/Consistance Vs. Contradiction

- **Exemple 1**

$\Gamma = \{p \Rightarrow q, p \wedge \neg r, r \vee q\}$

p	q	r	$p \Rightarrow q$	$p \wedge \neg r$	$r \vee q$
0	0	0	1	0	0
0	0	1	1	0	1
0	1	0	1	0	1
0	1	1	1	0	1
1	0	0	0	1	0
1	0	1	0	0	1
1	1	0	1	1	1
1	1	1	1	0	1

Satisfaisabilité/Consistance Vs. Contradiction

- **Exemple 1**

$\Gamma = \{p \Rightarrow q, p \wedge \neg r, r \vee q\}$

p	q	r	$p \Rightarrow q$	$p \wedge \neg r$	$r \vee q$
0	0	0	1	0	0
0	0	1	1	0	1
0	1	0	1	0	1
0	1	1	1	0	1
1	0	0	0	1	0
1	0	1	0	0	1
1	1	0	1	1	1
1	1	1	1	0	1

Satisfaisabilité/Consistance Vs. Contradiction

- **Exemple 1**

$$\Gamma = \{p \Rightarrow q, p \wedge \neg r, r \vee q\}$$

p	q	r	$p \Rightarrow q$	$p \wedge \neg r$	$r \vee q$
0	0	0	1	0	0
0	0	1	1	0	1
0	1	0	1	0	1
0	1	1	1	0	1
1	0	0	0	1	0
1	0	1	0	0	1
1	1	0	1	1	1
1	1	1	1	0	1

$$v(p) = 1 \quad v(q) = 1 \quad v(r) = 0$$

.

Satisfaisabilité/Consistance Vs. Contradiction

- **Exemple 1**

$\Gamma = \{p \Rightarrow q, p \wedge \neg r, r \vee q\}$

p	q	r	$p \Rightarrow q$	$p \wedge \neg r$	$r \vee q$
0	0	0	1	0	0
0	0	1	1	0	1
0	1	0	1	0	1
0	1	1	1	0	1
1	0	0	0	1	0
1	0	1	0	0	1
1	1	0	1	1	1
1	1	1	1	0	1

$v(p) = 1 \quad v(q) = 1 \quad v(r) = 0$

Donc, Γ est **consistant**.

Satisfaisabilité/Consistance Vs. Contradiction

- **Exemple 2**

$\Sigma = \{p \Rightarrow r, p \wedge \neg r, r \vee q\}$

p	q	r	$p \Rightarrow r$	$p \wedge \neg r$	$r \vee q$
0	0	0	1	0	0
0	0	1	1	0	1
0	1	0	1	0	1
0	1	1	1	0	1
1	0	0	0	1	0
1	0	1	1	0	1
1	1	0	0	1	1
1	1	1	1	0	1

.

Satisfaisabilité/Consistance Vs. Contradiction

- **Exemple 2**

$\Sigma = \{p \Rightarrow r, p \wedge \neg r, r \vee q\}$

p	q	r	$p \Rightarrow r$	$p \wedge \neg r$	$r \vee q$
0	0	0	1	0	0
0	0	1	1	0	1
0	1	0	1	0	1
0	1	1	1	0	1
1	0	0	0	1	0
1	0	1	1	0	1
1	1	0	0	1	1
1	1	1	1	0	1

.

Satisfaisabilité/Consistance Vs. Contradiction

- **Exemple 2**

$\Sigma = \{p \Rightarrow r, p \wedge \neg r, r \vee q\}$

p	q	r	$p \Rightarrow r$	$p \wedge \neg r$	$r \vee q$
0	0	0	1	0	0
0	0	1	1	0	1
0	1	0	1	0	1
0	1	1	1	0	1
1	0	0	0	1	0
1	0	1	1	0	1
1	1	0	0	1	1
1	1	1	1	0	1

Aucun modèle de Σ

.

Satisfaisabilité/Consistance Vs. Contradiction

- **Exemple 2**

$\Sigma = \{p \Rightarrow r, p \wedge \neg r, r \vee q\}$

p	q	r	$p \Rightarrow r$	$p \wedge \neg r$	$r \vee q$
0	0	0	1	0	0
0	0	1	1	0	1
0	1	0	1	0	1
0	1	1	1	0	1
1	0	0	0	1	0
1	0	1	1	0	1
1	1	0	0	1	1
1	1	1	1	0	1

Aucun modèle de Σ

Donc, Σ est **contradictoire**.

Conséquence logique d'un ensemble de formules

Définition

Une formule φ est **conséquence logique** d'un ensemble de formules Γ si et seulement si tout modèle de Γ est un modèle de φ (i.e., si $mod(\Gamma) \subseteq mod(\varphi)$).

Conséquence logique d'un ensemble de formules

Définition

Une formule φ est **conséquence logique** d'un ensemble de formules Γ si et seulement si tout modèle de Γ est un modèle de φ (i.e., si $mod(\Gamma) \subseteq mod(\varphi)$).

- On note alors $\Gamma \models \varphi$.

Conséquence logique d'un ensemble de formules

Définition

Une formule φ est **conséquence logique** d'un ensemble de formules Γ si et seulement si tout modèle de Γ est un modèle de φ (i.e., si $mod(\Gamma) \subseteq mod(\varphi)$).

- On note alors $\Gamma \models \varphi$.
- On note $cons(\Gamma)$ l'ensemble des conséquences logiques de Γ

Conséquence logique d'un ensemble de formules

Définition

Une formule φ est **conséquence logique** d'un ensemble de formules Γ si et seulement si tout modèle de Γ est un modèle de φ (i.e., si $mod(\Gamma) \subseteq mod(\varphi)$).

- On note alors $\Gamma \models \varphi$.
- On note $cons(\Gamma)$ l'ensemble des conséquences logiques de Γ

Conséquence logique d'un ensemble de formules

Définition

Une formule φ est **conséquence logique** d'un ensemble de formules Γ si et seulement si tout modèle de Γ est un modèle de φ (i.e., si $mod(\Gamma) \subseteq mod(\varphi)$).

- On note alors $\Gamma \models \varphi$.
- On note $cons(\Gamma)$ l'ensemble des conséquences logiques de Γ

Remarque 1

- $v \models \varphi$ où v est une valuation, i.e., l'assignation d'une valeur aux propositions de la formule φ.

Conséquence logique d'un ensemble de formules

Définition

Une formule φ est **conséquence logique** d'un ensemble de formules Γ si et seulement si tout modèle de Γ est un modèle de φ (i.e., si $mod(\Gamma) \subseteq mod(\varphi)$).

- On note alors $\Gamma \models \varphi$.
- On note $cons(\Gamma)$ l'ensemble des conséquences logiques de Γ

Remarque 1

- $v \models \varphi$ où v est une valuation, i.e., l'assignation d'une valeur aux propositions de la formule φ.
- $\psi \models \varphi$ où ψ est une formule,

Conséquence logique d'un ensemble de formules

Définition

Une formule φ est **conséquence logique** d'un ensemble de formules Γ si et seulement si tout modèle de Γ est un modèle de φ (i.e., si $mod(\Gamma) \subseteq mod(\varphi)$).

- On note alors $\Gamma \models \varphi$.
- On note $cons(\Gamma)$ l'ensemble des conséquences logiques de Γ

Remarque 1

- $v \models \varphi$ où v est une valuation, i.e., l'assignation d'une valeur aux propositions de la formule φ.
- $\psi \models \varphi$ où ψ est une formule,
- $\Gamma \models \varphi$ où Γ est un ensemble de formule.

Conséquence logique d'un ensemble de formules

Exemple 1

$$\Gamma = \{p \Rightarrow q, p \wedge \neg r, r \vee q\} \qquad \varphi = p \wedge q$$

p	q	r	$p \Rightarrow q$	$p \wedge \neg r$	$r \vee q$	φ
0	0	0	1	0	0	0
0	0	1	1	0	1	0
0	1	0	1	0	1	0
0	1	1	1	0	1	0
1	0	0	0	1	0	0
1	0	1	0	0	1	0
1	1	0	1	1	1	1
1	1	1	1	0	1	1

Conséquence logique d'un ensemble de formules

Exemple 1

$$\Gamma = \{p \Rightarrow q, p \wedge \neg r, r \vee q\} \qquad \varphi = p \wedge q$$

p	q	r	$p \Rightarrow q$	$p \wedge \neg r$	$r \vee q$	φ
0	0	0	1	0	0	0
0	0	1	1	0	1	0
0	1	0	1	0	1	0
0	1	1	1	0	1	0
1	0	0	0	1	0	0
1	0	1	0	0	1	0
1	1	0	1	1	1	1
1	1	1	1	0	1	1

Conséquence logique d'un ensemble de formules

Exemple 1

$$\Gamma = \{p \Rightarrow q, p \wedge \neg r, r \vee q\} \qquad \varphi = p \wedge q$$

p	q	r	$p \Rightarrow q$	$p \wedge \neg r$	$r \vee q$	φ
0	0	0	1	0	0	0
0	0	1	1	0	1	0
0	1	0	1	0	1	0
0	1	1	1	0	1	0
1	0	0	0	1	0	0
1	0	1	0	0	1	0
1	1	0	1	1	1	1
1	1	1	1	0	1	1

Conséquence logique d'un ensemble de formules

Exemple 1

$$\Gamma = \{p \Rightarrow q, p \wedge \neg r, r \vee q\} \qquad \varphi = p \wedge q$$

p	q	r	$p \Rightarrow q$	$p \wedge \neg r$	$r \vee q$	φ
0	0	0	1	0	0	0
0	0	1	1	0	1	0
0	1	0	1	0	1	0
0	1	1	1	0	1	0
1	0	0	0	1	0	0
1	0	1	0	0	1	0
1	1	0	1	1	1	1
1	1	1	1	0	1	1

Tout modèle de Γ est un modèle de φ

.

Conséquence logique d'un ensemble de formules

Exemple 1

$$\Gamma = \{p \Rightarrow q, p \wedge \neg r, r \vee q\} \qquad \varphi = p \wedge q$$

p	q	r	$p \Rightarrow q$	$p \wedge \neg r$	$r \vee q$	φ
0	0	0	1	0	0	0
0	0	1	1	0	1	0
0	1	0	1	0	1	0
0	1	1	1	0	1	0
1	0	0	0	1	0	0
1	0	1	0	0	1	0
1	1	0	1	1	1	1
1	1	1	1	0	1	1

Tout modèle de Γ est un modèle de φ

Donc, $\Gamma \models \varphi$.

Conséquence logique d'un ensemble de formules

Remarque 2

Par abus de notation on écrit souvent :

- $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n \models \varphi$ à la place de $\{\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n\} \models \varphi$.

Conséquence ?

Conséquence logique d'un ensemble de formules

Remarque 2

Par abus de notation on écrit souvent :

- $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n \models \varphi$ à la place de $\{\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n\} \models \varphi$.
- $\psi \models \varphi$ à la place de $\{\psi\} \models \varphi$.

Conséquence ?

Conséquence logique d'un ensemble de formules

Remarque 2

Par abus de notation on écrit souvent :

- $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n \models \varphi$ à la place de $\{\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n\} \models \varphi$.
- $\psi \models \varphi$ à la place de $\{\psi\} \models \varphi$.
- $\Gamma, \psi \models \varphi$ à la place de $\Gamma \cup \{\psi\} \models \varphi$.

Conséquence ? $\varphi \models \varphi$

Conséquence logique d'un ensemble de formules

Remarque 2

Par abus de notation on écrit souvent :

- $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n \models \varphi$ à la place de $\{\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n\} \models \varphi$.
- $\psi \models \varphi$ à la place de $\{\psi\} \models \varphi$.
- $\Gamma, \psi \models \varphi$ à la place de $\Gamma \cup \{\psi\} \models \varphi$.

Conséquence ?

✓ $\varphi \models \varphi$

Conséquence logique d'un ensemble de formules

Remarque 2

Par abus de notation on écrit souvent :

- $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n \models \varphi$ à la place de $\{\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n\} \models \varphi$.
- $\psi \models \varphi$ à la place de $\{\psi\} \models \varphi$.
- $\Gamma, \psi \models \varphi$ à la place de $\Gamma \cup \{\psi\} \models \varphi$.

Conséquence ? $\varphi, \psi \models \varphi$

✓ $\varphi \models \varphi$

Conséquence logique d'un ensemble de formules

Remarque 2

Par abus de notation on écrit souvent :

- $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n \models \varphi$ à la place de $\{\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n\} \models \varphi$.
- $\psi \models \varphi$ à la place de $\{\psi\} \models \varphi$.
- $\Gamma, \psi \models \varphi$ à la place de $\Gamma \cup \{\psi\} \models \varphi$.

Conséquence ?

✓ $\varphi \models \varphi$

✓ $\varphi, \psi \models \varphi$

Conséquence logique d'un ensemble de formules

Remarque 2

Par abus de notation on écrit souvent :

- $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n \models \varphi$ à la place de $\{\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n\} \models \varphi$.
- $\psi \models \varphi$ à la place de $\{\psi\} \models \varphi$.
- $\Gamma, \psi \models \varphi$ à la place de $\Gamma \cup \{\psi\} \models \varphi$.

Conséquence ? $\varphi_1 \vee \varphi_2 \models \varphi_1$

✓ $\varphi \models \varphi$

✓ $\varphi, \psi \models \varphi$

Conséquence logique d'un ensemble de formules

Remarque 2

Par abus de notation on écrit souvent :

- $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n \models \varphi$ à la place de $\{\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n\} \models \varphi$.
- $\psi \models \varphi$ à la place de $\{\psi\} \models \varphi$.
- $\Gamma, \psi \models \varphi$ à la place de $\Gamma \cup \{\psi\} \models \varphi$.

Conséquence ?

✓ $\varphi \models \varphi$

✓ $\varphi, \psi \models \varphi$

✗ $\varphi_1 \vee \varphi_2 \models \varphi_1$

Conséquence logique d'un ensemble de formules

Remarque 2

Par abus de notation on écrit souvent :

- $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n \models \varphi$ à la place de $\{\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n\} \models \varphi$.
- $\psi \models \varphi$ à la place de $\{\psi\} \models \varphi$.
- $\Gamma, \psi \models \varphi$ à la place de $\Gamma \cup \{\psi\} \models \varphi$.

Conséquence ? $\varphi_1, \varphi_2 \models \varphi_1 \wedge \varphi_2$

✓ $\varphi \models \varphi$

✓ $\varphi, \psi \models \varphi$

✗ $\varphi_1 \vee \varphi_2 \models \varphi_1$

Conséquence logique d'un ensemble de formules

Remarque 2

Par abus de notation on écrit souvent :

- $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n \models \varphi$ à la place de $\{\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n\} \models \varphi$.
- $\psi \models \varphi$ à la place de $\{\psi\} \models \varphi$.
- $\Gamma, \psi \models \varphi$ à la place de $\Gamma \cup \{\psi\} \models \varphi$.

Conséquence ?

✓ $\varphi \models \varphi$

✓ $\varphi, \psi \models \varphi$

✗ $\varphi_1 \vee \varphi_2 \models \varphi_1$

✓ $\varphi_1, \varphi_2 \models \varphi_1 \wedge \varphi_2$

Conséquence logique d'un ensemble de formules

Remarque 2

Par abus de notation on écrit souvent :

- $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n \models \varphi$ à la place de $\{\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n\} \models \varphi$.
- $\psi \models \varphi$ à la place de $\{\psi\} \models \varphi$.
- $\Gamma, \psi \models \varphi$ à la place de $\Gamma \cup \{\psi\} \models \varphi$.

Conséquence ? $\varphi_1 \vee \varphi_2 \models \varphi_1 \wedge \varphi_2$

✓ $\varphi \models \varphi$

✓ $\varphi, \psi \models \varphi$

✗ $\varphi_1 \vee \varphi_2 \models \varphi_1$

✓ $\varphi_1, \varphi_2 \models \varphi_1 \wedge \varphi_2$

Conséquence logique d'un ensemble de formules

Remarque 2

Par abus de notation on écrit souvent :

- $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n \models \varphi$ à la place de $\{\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n\} \models \varphi$.
- $\psi \models \varphi$ à la place de $\{\psi\} \models \varphi$.
- $\Gamma, \psi \models \varphi$ à la place de $\Gamma \cup \{\psi\} \models \varphi$.

Conséquence ?

✓ $\varphi \models \varphi$

✓ $\varphi, \psi \models \varphi$

✗ $\varphi_1 \vee \varphi_2 \models \varphi_1$

✓ $\varphi_1, \varphi_2 \models \varphi_1 \wedge \varphi_2$

✗ $\varphi_1 \vee \varphi_2 \models \varphi_1 \wedge \varphi_2$

Conséquence logique d'un ensemble de formules

Remarque 2

Par abus de notation on écrit souvent :

- $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n \models \varphi$ à la place de $\{\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n\} \models \varphi$.
- $\psi \models \varphi$ à la place de $\{\psi\} \models \varphi$.
- $\Gamma, \psi \models \varphi$ à la place de $\Gamma \cup \{\psi\} \models \varphi$.

Conséquence ? $\varphi_1, \varphi_2 \models \varphi_1 \vee \varphi_2$

✓ $\varphi \models \varphi$

✓ $\varphi, \psi \models \varphi$

✗ $\varphi_1 \vee \varphi_2 \models \varphi_1$

✓ $\varphi_1, \varphi_2 \models \varphi_1 \wedge \varphi_2$

✗ $\varphi_1 \vee \varphi_2 \models \varphi_1 \wedge \varphi_2$

Conséquence logique d'un ensemble de formules

Remarque 2

Par abus de notation on écrit souvent :

- $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n \models \varphi$ à la place de $\{\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n\} \models \varphi$.
- $\psi \models \varphi$ à la place de $\{\psi\} \models \varphi$.
- $\Gamma, \psi \models \varphi$ à la place de $\Gamma \cup \{\psi\} \models \varphi$.

Conséquence ?

✓ $\varphi \models \varphi$

✓ $\varphi, \psi \models \varphi$

✗ $\varphi_1 \vee \varphi_2 \models \varphi_1$

✓ $\varphi_1, \varphi_2 \models \varphi_1 \wedge \varphi_2$

✗ $\varphi_1 \vee \varphi_2 \models \varphi_1 \wedge \varphi_2$

✓ $\varphi_1, \varphi_2 \models \varphi_1 \vee \varphi_2$

Conséquence logique d'un ensemble de formules

Remarque 2

Par abus de notation on écrit souvent :

- $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n \models \varphi$ à la place de $\{\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n\} \models \varphi$.
- $\psi \models \varphi$ à la place de $\{\psi\} \models \varphi$.
- $\Gamma, \psi \models \varphi$ à la place de $\Gamma \cup \{\psi\} \models \varphi$.

Conséquence ? $\{\varphi, \varphi \Rightarrow \psi\} \models \psi$

✓ $\varphi \models \varphi$

✓ $\varphi, \psi \models \varphi$

✗ $\varphi_1 \vee \varphi_2 \models \varphi_1$

✓ $\varphi_1, \varphi_2 \models \varphi_1 \wedge \varphi_2$

✗ $\varphi_1 \vee \varphi_2 \models \varphi_1 \wedge \varphi_2$

✓ $\varphi_1, \varphi_2 \models \varphi_1 \vee \varphi_2$

Conséquence logique d'un ensemble de formules

Remarque 2

Par abus de notation on écrit souvent :

- $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n \models \varphi$ à la place de $\{\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n\} \models \varphi$.
- $\psi \models \varphi$ à la place de $\{\psi\} \models \varphi$.
- $\Gamma, \psi \models \varphi$ à la place de $\Gamma \cup \{\psi\} \models \varphi$.

Conséquence ?

✓ $\varphi \models \varphi$

✓ $\varphi, \psi \models \varphi$

✗ $\varphi_1 \vee \varphi_2 \models \varphi_1$

✓ $\varphi_1, \varphi_2 \models \varphi_1 \wedge \varphi_2$

✗ $\varphi_1 \vee \varphi_2 \models \varphi_1 \wedge \varphi_2$

✓ $\varphi_1, \varphi_2 \models \varphi_1 \vee \varphi_2$

✓ $\{\varphi, \varphi \Rightarrow \psi\} \models \psi$

Conséquence logique d'un ensemble de formules

Proposition

- $\Gamma \models \varphi$ si et seulement si $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ est *contradictoire*

Preuve : $\Gamma \models \varphi$

Conséquence logique d'un ensemble de formules

Proposition

- $\Gamma \models \varphi$ si et seulement si $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ est *contradictoire*

Preuve : $\Gamma \models \varphi$
ssi pour toute valuation v,

- soit v un modèle de Γ et v un modèle de φ
- soit v n'est pas un modèle de Γ.

Conséquence logique d'un ensemble de formules

Proposition

- $\Gamma \models \varphi$ si et seulement si $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ est *contradictoire*

Preuve : $\Gamma \models \varphi$
ssi pour toute valuation v,

- soit v un modèle de Γ et v n'est pas un modèle de $(\neg\varphi)$
- soit v n'est pas un modèle de Γ.

Conséquence logique d'un ensemble de formules

Proposition

- $\Gamma \models \varphi$ si et seulement si $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ est *contradictoire*

Preuve : $\Gamma \models \varphi$
ssi pour toute valuation v,

- v n'est pas un modèle de Γ ou v n'est pas un modèle de $(\neg\varphi)$

Conséquence logique d'un ensemble de formules

Proposition

- $\Gamma \models \varphi$ si et seulement si $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ est *contradictoire*

Preuve : $\Gamma \models \varphi$
ssi pour toute valuation v,

- v n'est pas un modèle de $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$

Conséquence logique d'un ensemble de formules

Proposition

- $\Gamma \models \varphi$ si et seulement si $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ est *contradictoire*

Preuve : $\Gamma \models \varphi$
ssi pour toute valuation v,

- v n'est pas un modèle de $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$

ssi $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ est contradictoire

Conséquence logique d'un ensemble de formules

Proposition

- $\Gamma \models \varphi$ si et seulement si $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ est *contradictoire*
- Pour tous ensembles de formules Σ,Γ :
  $mod(\Sigma \cup \Gamma) = mod(\Sigma) \cap mod(\Gamma)$

Les preuves sont laissées en exercice (Voir TDs).

Conséquence logique d'un ensemble de formules

Proposition

- $\Gamma \models \varphi$ si et seulement si $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ est *contradictoire*
- Pour tous ensembles de formules Σ,Γ : $mod(\Sigma \cup \Gamma) = mod(\Sigma) \cap mod(\Gamma)$
- Pour tous ensembles de formules Σ,Γ : si $\Sigma \subseteq \Gamma$ alors $mod(\Gamma) \subseteq mod(\Sigma)$

Les preuves sont laissées en exercice (Voir TDs).

Conséquence logique d'un ensemble de formules

Proposition

- $\Gamma \models \varphi$ si et seulement si $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ est *contradictoire*
- Pour tous ensembles de formules Σ,Γ : $mod(\Sigma \cup \Gamma) = mod(\Sigma) \cap mod(\Gamma)$
- Pour tous ensembles de formules Σ,Γ : si $\Sigma \subseteq \Gamma$ alors $mod(\Gamma) \subseteq mod(\Sigma)$
- Si $\Gamma \models \varphi$, alors $mod(\Gamma) = mod(\Gamma \cup \{\varphi\})$

Les preuves sont laissées en exercice (Voir TDs).

Conséquence logique d'un ensemble de formules

Proposition

- $\Gamma \models \varphi$ si et seulement si $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ est *contradictoire*
- Pour tous ensembles de formules Σ,Γ : $mod(\Sigma \cup \Gamma) = mod(\Sigma) \cap mod(\Gamma)$
- Pour tous ensembles de formules Σ,Γ : si $\Sigma \subseteq \Gamma$ alors $mod(\Gamma) \subseteq mod(\Sigma)$
- Si $\Gamma \models \varphi$, alors $mod(\Gamma) = mod(\Gamma \cup \{\varphi\})$
- Si $\Gamma' \subseteq \Gamma$ et $\Gamma' \models \varphi$, alors $\Gamma \models \varphi$

Les preuves sont laissées en exercice (Voir TDs).