
TD n° 2
Formes normales, Conséquences logiques

Exercice 1 Donnez une formule F ayant la table de vérité suivante :

p	q	r	F
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

Exercice 2 Calculer les formes normales conjonctives et disjonctives de chacune des formules suivantes :

1. $\psi_1 = (p \wedge \neg((q \vee r) \Rightarrow p)) \vee s$
2. $\psi_2 = (p_1 \wedge q_1) \vee (p_2 \wedge q_2)$
3. $\psi_3 = \neg((p \Leftrightarrow q) \Rightarrow (r \Rightarrow s))$

Exercice 3 On considère l'ensemble de formules propositionnelles :

$$\Gamma = \{p \vee q \vee r, p \Rightarrow q, q \Rightarrow r\}$$

1. Trouver un modèle de Γ . Combien y a-t-il de modèles ?
2. Les formules $q \Rightarrow p$, p , r sont elles des conséquences logiques de Γ ?

Exercice 4 On se donne Γ un ensemble fini satisfaisable de formules, une formule φ conséquence de Γ , une formule ψ qui n'est pas une conséquence de Γ .

1. On ajoute une tautologie τ à Γ . Est-ce que φ et ψ sont des conséquences logiques de $\Gamma \cup \{\tau\}$? Donner une preuve formelle.
2. Même question si τ est une formule insatisfaisable.

Exercice 5 Démontrer :

1. $\Gamma \models \varphi$ ssi $\Gamma \cup \{\neg\varphi\} \models \perp$
2. $\Gamma \cup \{\varphi\} \models \psi$ ssi $\Gamma \models \varphi \Rightarrow \psi$
3. $\varphi \equiv \psi$ ssi $\text{cons}(\varphi) = \text{cons}(\psi)$

Exercice 6 Démontrer :

1. $\Gamma \subseteq \text{cons}(\Gamma)$
2. $\text{mod}(\Gamma \cup \Sigma) = \text{mod}(\Gamma) \cap \text{mod}(\Sigma)$
3. Si $\Gamma \subseteq \Sigma$, alors $\text{mod}(\Sigma) \subseteq \text{mod}(\Gamma)$
4. Si $\Gamma \models \varphi$, alors $\text{mod}(\Gamma) = \text{mod}(\Gamma \cup \{\varphi\})$
5. $\text{mod}(\text{cons}(\Gamma)) = \text{mod}(\Gamma)$