Université de Khecnchela Année 2012-2013
Master IFA $1^{\text{ère}}$ année **Logique & F.I**

TD n° 6

Calcul des Prédicats: Sémantique

Exercice 1 On considère la signature $\Sigma = (\{c\}, \{(f, 1)\}, \emptyset)$, où c est un symbole de constante et f un symboles de fonction unaire.

1. Donnez deux $\Sigma-$structures de domaines respectifs : $\{1, 2, 3\}$, $\mathbb{N}$.
2. On considère deux $\Sigma-$structures : $\mathcal{M}_1 = (D_1, \{c_1\}, \{f_1\}, \emptyset)$ et $\mathcal{M}_2 = (D_2, \{c_2\}, \{f_2\}, \emptyset)$, définies comme suit :

$$D_1 = \{a, b, c\}, c_1 = a, f_1 = \frac{a \mid b \mid c}{a \mid c \mid b} \quad ; \quad D_2 = \{1, 2, 3, 4\}, c_2 = 3, f_2 = \frac{1 \mid 2 \mid 3 \mid 4}{2 \mid 3 \mid 2 \mid 1}.$$

Trouver des formules :

(a) vraie dans une interprétation et pas dans l'autre ;
(b) vraie dans les deux interprétations ;
(c) fausse dans les deux interprétations.

Exercice 2 On donne la signature $\Sigma = (\{a\}, \{(f, 1)\}, \{(P, 2)\})$ et les formules :

$$\varphi_1 = P(a, f(f(a)))$$
$$\varphi_2 = \forall x(P(x, x) \Rightarrow \exists y P(x, y))$$
$$\varphi_3 = \forall x(\exists y(P(x, y) \land P(y, a)) \Rightarrow \neg P(x, a))$$

1. En supposant que le domaine d'interprétation D est l'ensemble des êtres humains, que a est interprétée par $Adel$, $f(x)$ est le père de x, que $P(x, y)$ signi ?e x aime y, interpréter les trois formules.
2. On considère maintenant la Σ-structure $\mathcal{M} = (D, \{a^{\mathcal{M}}\}, \{f^{\mathcal{M}}\}, \{P^{\mathcal{M}}\})$, où :
   – $D = \{Ali, Mohamed, Youcef\}$
   – $P^{\mathcal{M}} = \{(Ali, Ali), (Ali, Youcef), (Mohamed, Ali), (Mohamed, Youcef)\}$
   – $a^{\mathcal{M}} = Ali$
   – $f^{\mathcal{M}} : Ali \mapsto Mohamed, Mohamed \mapsto Youcef, Youcef \mapsto Youcef$
   Les formules φ_1, φ_2, φ_3 sont-elles vraies dans cette structure ?

Exercice 3 Montrez que toute formule est équivalente à une formule n'utilisant que les connecteurs $\neg$, $\lor$ et le quantificateur $\exists$.