

---

**TD n° 5**  
*Calcul des Prédicats: Syntaxe*

---

**Exercice 1** Soit la signature

$$\Sigma = (\{a\}, \{(f, 1), (g, 3)\}, \{(r, 1), (p, 2), (q, 2)\})$$

Soit les formules du calcul des prédicats suivantes :

$$F = \exists x p(x, f(y)) \vee \forall y q(y, g(a, z, f(z)))$$
$$G = r(x) \vee ((\exists x \forall y p(f(x), z) \wedge r(a)) \wedge \exists x q(y, g(x, z, x)))$$

Pour chacune d'elles :

1. Donner une représentation de cette formule sous forme d'arbre.
2. Pour chaque occurrence de variable, dire si elle est libre ou liée et dans le cas où elle est liée, indiquer le quantificateur correspondant.
3. Donner tous les termes qui apparaissent dans la formule.
4. Donner les formules atomiques.

**Exercice 2** On considère l'ensemble de variables  $\mathcal{V} = \{x, y, z\}$  et les formules suivantes :

$$\varphi_1 = (\forall x \exists z f(x, z)) \Rightarrow (\exists x \forall y r(x, y, z))$$

$$\varphi_2 = (\forall x p(x) \wedge \forall x f(x)) \Rightarrow \forall x (p(x) \wedge f(x))$$

$$\varphi_3 = \forall x ((\exists x g(f(x), a) \vee h(x, x)) \wedge (\forall y \exists x q(x, y) \vee \exists z p(z, y)))$$

1. Donnez les signatures des langages sur lequel sont écrites ces formules.
2. Quels sont les termes et les formules atomiques apparaissant dans ces formules.

**Exercice 3** Traduire les énoncés ci-dessous dans le calcul des prédicats en utilisant les symboles de prédicat suivants :

$h(x)$	: $x$ est un homme
$m(x)$	: $x$ est méchant
$chat(x)$	: $x$ est un chat
$a(x, y)$	: $x$ aime $y$
$co(x, y)$	: $x$ connaît $y$
$p(x)$	: $x$ est une personne

1. Il existe un homme méchant.
2. Il n'existe pas d'homme méchant.
3. Tous les hommes sont méchants.
4. Seuls les hommes sont méchants.
5. Les personnes qui aiment les chats ne sont pas méchantes.
6. Chaque personne aime quelqu'un et personne n'aime tout le monde, ou bien quelqu'un aime tout le monde et quelqu'un n'aime personne.