Les règles

Démontrer $\vdash \neg(A \vee B) \Rightarrow (\neg A \wedge \neg B)$

Les règles

Démontrer $\vdash \neg(A \vee B) \Rightarrow (\neg A \wedge \neg B)$

$$
\dfrac{
\dfrac{
\dfrac{
\dfrac{\dfrac{}{A \vdash A}\,{\color{red}Ax}}{A \vdash A \vee B}\,{\color{red}\vee^{g}_{intro}}
\qquad
\dfrac{}{\neg(A \vee B) \vdash \neg(A \vee B)}\,{\color{red}Ax}
}{\neg(A \vee B), A \vdash \bot}\,{\color{red}\neg_{elim}}
}{\neg(A \vee B) \vdash \neg A}\,{\color{red}\neg_{intro}}
\qquad
\dfrac{
\dfrac{
\dfrac{\dfrac{}{B \vdash B}\,{\color{red}Ax}}{B \vdash A \vee B}\,{\color{red}\vee^{d}_{intro}}
\qquad
\dfrac{}{\neg(A \vee B) \vdash \neg(A \vee B)}\,{\color{red}Ax}
}{\neg(A \vee B), B \vdash \bot}\,{\color{red}\neg_{elim}}
}{\neg(A \vee B) \vdash \neg B}\,{\color{red}\neg_{intro}}
}{
\dfrac{\neg(A \vee B) \vdash (\neg A \wedge \neg B)}{\neg(A \vee B) \Rightarrow (\neg A \wedge \neg B)}\,{\color{red}\Rightarrow_{intro}}
}\,{\color{red}\wedge_{intro}}
$$

Les règles

Démontrer $\vdash \neg(A \wedge B) \Rightarrow (\neg A \vee \neg B)$

Les règles

Démontrer $\vdash \neg(A \wedge B) \Rightarrow (\neg A \vee \neg B)$

$$
\dfrac{
\dfrac{
\dfrac{
\dfrac{
\dfrac{}{\neg A \vdash \neg A}\,{\color{red}Ax}
}{\neg A \vdash \neg A \vee \neg B}\,{\color{red}\vee^{g}_{intro}}
\quad
\dfrac{}{\neg(\neg A \vee \neg B) \vdash \neg(\neg A \vee \neg B)}\,{\color{red}Ax}
}{\neg(\neg A \vee \neg B), \neg A \vdash \bot}\,{\color{red}\neg_{elim}}
}{\neg(\neg A \vee \neg B) \vdash A}\,{\color{red}\bot_{Abs}}
\quad
\dfrac{
\dfrac{
\dfrac{
\dfrac{}{\neg B \vdash \neg B}\,{\color{red}Ax}
}{\neg B \vdash \neg A \vee \neg B}\,{\color{red}\vee^{d}_{intro}}
\quad
\dfrac{}{\neg(\neg A \vee \neg B) \vdash \neg(\neg A \vee \neg}
}{\neg(\neg A \vee \neg B), \neg B \vdash \bot}
}{\neg(\neg A \vee \neg B) \vdash B}\,{\color{red}\bot_{Abs}}
}{\dfrac{\neg(\neg A \vee \neg B) \vdash (A \wedge B)}{\vdots}}\,{\color{red}\wedge_{intro}}
$$

$$
\dfrac{
\dfrac{
\dfrac{
\dfrac{\vdots}{\neg(\neg A \vee \neg B) \vdash A \wedge B}
\quad
\dfrac{}{\neg(A \wedge B) \vdash \neg(A \wedge B)}\,{\color{red}Ax}
}{\neg(A \wedge B), \neg(\neg A \vee \neg B) \vdash \bot}\,{\color{red}\neg_{elim}}
}{\neg(A \wedge B) \vdash (\neg A \vee \neg B)}\,{\color{red}\bot Abs}
}{\neg(A \wedge B) \Rightarrow (\neg A \vee \neg B)}\,{\color{red}\Rightarrow_{intro}}
$$

Les règles dérivées

Règles de base

- Avantage :Avoir choisi un ensemble minimal de règles y sera un atout important.
- Inconvénient : Rendre les démonstrations plus longues.
- Il est donc nécessaire d'introduire des *utilitaires* qui permettront de raccourcir les démonstrations.

Dans cette section, on démontre, à l'aide des règles de bases, des *règles dérivées*.

Les règles dérivées

Règle de coupure

$$\frac{\Gamma, A \vdash B \qquad \Gamma' \vdash A}{\Gamma, \Gamma' \vdash B}\,\textit{coupure}$$

Les règles dérivées

Règle de coupure

$$\frac{\Gamma, A \vdash B \qquad \Gamma' \vdash A}{\Gamma, \Gamma' \vdash B}\,\textit{coupure}$$

Preuve :

$$\frac{\dfrac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash A \Rightarrow B}\Rightarrow_{intro} \qquad \Gamma' \vdash A}{\Gamma, \Gamma' \vdash B}\Rightarrow_{elim}$$

Les règles dérivées

Introduction gauche de la conjonction

$$\frac{\Gamma, A, B \vdash C}{\Gamma, A \wedge B \vdash C} \, {\color{red}\wedge_g}$$

Les règles dérivées

Introduction gauche de la conjonction

$$\frac{\Gamma, A, B \vdash C}{\Gamma, A \wedge B \vdash C} \wedge_g$$

Preuve :

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\Gamma, A, B \vdash C}\ \textit{Premisse} \qquad \dfrac{\dfrac{}{A \wedge B \vdash A \wedge B}\ Ax}{A \wedge B \vdash B}\ \wedge^d_{elim}}{\Gamma, A \wedge B, A \vdash C}\ \textit{Coupure} \qquad \dfrac{\dfrac{}{A \wedge B \vdash A \wedge B}\ Ax}{A \wedge B \vdash A}\ \wedge^g_{elim}}{\Gamma, A \wedge B \vdash C}\ \textit{coupure}$$

Les règles dérivées

Introduction gauche de la disjonction

$$\frac{\Gamma, A \vdash C \qquad \Gamma', B \vdash C}{\Gamma, \Gamma', A \vee B \vdash C} \vee_g$$

Les règles dérivées

Introduction gauche de la disjonction

$$\frac{\Gamma, A \vdash C \qquad \Gamma', B \vdash C}{\Gamma, \Gamma', A \vee B \vdash C} \vee_g$$

Preuve :

$$\dfrac{\dfrac{}{A \vee B \vdash A \vee B}\,Ax \qquad \dfrac{}{\Gamma, A \vdash C}\,Premisse \qquad \dfrac{}{\Gamma', B \vdash C}\,Premisse}{\Gamma, \Gamma', A \vee B \vdash C} \vee_{elim}$$

Les règles dérivées

Introduction gauche de l'implication

$$\frac{\Gamma, A, B \vdash C}{\Gamma, A, A \Rightarrow B \vdash C} \Rightarrow_g$$

Les règles dérivées

Introduction gauche de l'implication

$$\frac{\Gamma, A, B \vdash C}{\Gamma, A, A \Rightarrow B \vdash C} \Rightarrow_g$$

Preuve :

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{A \Rightarrow B \vdash A \Rightarrow B}\,Ax \qquad A \vdash A}{A, A \Rightarrow B \vdash B} \Rightarrow_{elim} \qquad \dfrac{}{\Gamma, A, B \vdash C}\,Premisse}{\Gamma, A, A \Rightarrow B \vdash C}\,coupure$$

Les règles dérivées

Introduction gauche de la négation

$$\frac{}{\Gamma, A, \neg A \vdash \bot}\ \neg_g$$

Les règles dérivées

Introduction gauche de la négation

$$\frac{}{\Gamma, A, \neg A \vdash \bot}\ \neg_g$$

Preuve :

$$\dfrac{\dfrac{}{\Gamma, A, \neg A \vdash A}\ Ax \qquad \dfrac{}{\Gamma, A, \neg A \vdash \neg A}\ Ax}{\Gamma, A, \neg A \vdash \bot}\ \neg_{elim}$$

Les règles dérivées

Loi de Peirce

$$\frac{\Gamma, \neg A \vdash A}{\Gamma \vdash A}\ l.p.$$

Les règles dérivées

Loi de Peirce

$$\frac{\Gamma, \neg A \vdash A}{\Gamma \vdash A}\ \textcolor{red}{l.p.}$$

Preuve :

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\Gamma, \neg A \vdash \neg A}\ Ax \qquad \dfrac{}{\Gamma, \neg A \vdash A}\ Premisse}{\Gamma, \neg A \vdash \bot}\ \neg_{elim}}{\Gamma \vdash A}\ \bot_{Abs}$$

Les règles dérivées

Tiers exclu

$$\frac{\Gamma, A \vdash B \qquad \Gamma', \neg A \vdash B}{\Gamma, \Gamma' \vdash B}\ t.e.$$

Les règles dérivées

Tiers exclu

$$\frac{\Gamma, A \vdash B \qquad \Gamma^{'}, \neg A \vdash B}{\Gamma, \Gamma^{'} \vdash B}\ t.e.$$

Preuve :

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{A \vdash A}\,Ax}{A \vdash A \vee \neg A}\,\vee^{g}_{intro} \qquad \dfrac{}{\neg(A \vee \neg A) \vdash \neg(A \vee \neg A)}\,Ax}{A, \neg(A \vee \neg A) \vdash \bot}\,\neg_{elim}}{\neg(A \vee \neg A) \vdash \neg A}\,\neg_{intro}}{\neg(A \vee \neg A) \vdash A \vee \neg A}\,\vee^{d}_{intro}}{\vdash A \vee \neg A}\,l.p. \qquad \Gamma, A \vdash B \qquad \Gamma^{'}, \neg A \vdash B}{\Gamma, \Gamma^{'} \vdash B}\,\vee_{elim}$$

Les règles dérivées

Contraposition

$$\frac{\Gamma \vdash \neg B \Rightarrow \neg A}{\Gamma \vdash A \Rightarrow B}\ \textcolor{red}{c.c.}$$

Les règles dérivées

Contraposition

$$\frac{\Gamma \vdash \neg B \Rightarrow \neg A}{\Gamma \vdash A \Rightarrow B}\ c.c.$$

Preuve :

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\Gamma \vdash \neg B \Rightarrow \neg A}\,\mathit{Premisse} \qquad \dfrac{}{\neg B \vdash \neg B}\,Ax}{\Gamma, \neg B \vdash \neg A}\Rightarrow_{elim} \qquad \dfrac{}{A \vdash A}\,Ax}{\Gamma, A, \neg B \vdash \bot}\neg_{elim}}{\Gamma, A \vdash B}\bot_{Abs}}{\Gamma \vdash A \Rightarrow B}\Rightarrow_{intro}$$

Les règles dérivées

Lois de Morgan

$$\frac{\Gamma, \neg A \vee \neg B \vdash C}{\Gamma, \neg(A \wedge B) \vdash C} \wedge_m \qquad \frac{\Gamma, \neg A, \neg B \vdash C}{\Gamma, \neg(A \vee B) \vdash C} \vee_m$$

$$\frac{\Gamma, A, \neg B \vdash C}{\Gamma, \neg(A \Rightarrow B) \vdash C} \Rightarrow_m$$

Les règles dérivées

Lois de Morgan

$$\frac{\Gamma, \neg A \vee \neg B \vdash C}{\Gamma, \neg(A \wedge B) \vdash C} \wedge_m \qquad \frac{\Gamma, \neg A, \neg B \vdash C}{\Gamma, \neg(A \vee B) \vdash C} \vee_m$$

$$\frac{\Gamma, A, \neg B \vdash C}{\Gamma, \neg(A \Rightarrow B) \vdash C} \Rightarrow_m$$

Preuve :

Laissées en TD