Déducton naturelle

Déducton naturelle

Un sytème utilise des règles très proches de celles qui sont utilisées pour faire une démonstration en mathématique.

Déducton naturelle

Déducton naturelle

Un sytème utilise des règles très proches de celles qui sont utilisées pour faire une démonstration en mathématique.

Démonstrations en mathématiques

Assemblages de symboles mathématiques et de phrases contenant des « mots clés » tels que : *donc*, *parce que*, *si. si et seulement si*, il *est nécessaire que. il suffit de. supposons que*, *cherchons une coutrardiction*, etc.

Déducton naturelle

Démonstrations en mathématiques

Quand on fait des preuves en math , on utilise :

- des axiomes expriment les propriétés particulières des objets qu'on manipule.
- des règles qui permettent pas à pas, de déduire des conséquences à partir des hypothèses.

Déducton naturelle

Démonstrations en mathématiques

Quand on fait des preuves en math , on utilise :

- des axiomes expriment les propriétés particulières des objets qu'on manipule.
- des règles qui permettent pas à pas, de déduire des conséquences à partir des hypothèses.

Exemple

- S'il fait froid alors il neige et Ali est malade.
- Si Ali est malade alors il ne travaille pas.
- Il fait froid.

Déducton naturelle

Démonstrations en mathématiques

Quand on fait des preuves en math , on utilise :

- des axiomes expriment les propriétés particulières des objets qu'on manipule.
- des règles qui permettent pas à pas, de déduire des conséquences à partir des hypothèses.

Exemple

- S'il fait froid alors il neige et Ali est malade.
- Si Ali est malade alors il ne travaille pas.
- Il fait froid.

Démontrer que : *Ali ne travaille pas et il neige*

Déducton naturelle

Problème réel

- S'il fait froid alors il neige et Ali est malade.
- Si Ali est malade alors il ne travaille pas.
- Il fait froid.

Formulation

$F =$ " *il fait froid* "	$\varphi_1 = F \Rightarrow (N \wedge M)$
$N =$ " *il neige* "	$\varphi_2 = M \Rightarrow \neg T$
$M =$ " *Ali est malade* "	$\varphi_3 = F$
$T =$ " *Ali travaille* "	$\varphi = \neg T \wedge N$

Démontrer que : $\Sigma = \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\} \vdash \varphi$

Déducton naturelle

Problème réel

- S'il fait froid alors il neige et Ali est malade.
- Si Ali est malade alors il ne travaille pas.
- Il fait froid.

Démontrer que : *Ali ne travaille pas et il neige*

Déducton naturelle

Problème réel

- S'il fait froid alors il neige et Ali est malade.
- Si Ali est malade alors il ne travaille pas.
- Il fait froid.

Démontrer que : *Ali ne travaille pas* et *il neige*

Formulation

$F=$ " *il fait froid* "

Déducton naturelle

Problème réel

- S'il fait froid alors il neige et Ali est malade.
- Si Ali est malade alors il ne travaille pas.
- Il fait froid.

Démontrer que : *Ali ne travaille pas* et *il neige*

Formulation

$F=$ " *il fait froid* "
$N=$ " *il neige* "

Déducton naturelle

Problème réel

- S'il fait froid alors il neige et Ali est malade.
- Si Ali est malade alors il ne travaille pas.
- Il fait froid.

Démontrer que : *Ali ne travaille pas* et *il neige*

Formulation

$F =$ " *il fait froid* "
$N =$ " *il neige* "
$M =$ " *Ali est malade* "

Déducton naturelle

Problème réel

- S'il fait froid alors il neige et Ali est malade.
- Si Ali est malade alors il ne travaille pas.
- Il fait froid.

Démontrer que : *Ali ne travaille pas* et *il neige*

Formulation

$F=$ " *il fait froid* "
$N=$ " *il neige* "
$M=$ " *Ali est malade* "
$T=$ " *Ali travaille* "

Déducton naturelle

Problème réel

- S'il fait froid alors il neige et Ali est malade.
- Si Ali est malade alors il ne travaille pas.
- Il fait froid.

Démontrer que : *Ali ne travaille pas et il neige*

Formulation

$F =$ " *il fait froid* "
$N =$ " *il neige* "
$M =$ " *Ali est malade* "
$T =$ " *Ali travaille* "

$$\varphi_1 = F \Rightarrow (N \wedge M)$$
$$\varphi_2 = M \Rightarrow \neg T$$
$$\varphi_3 = F$$
$$\varphi = \neg T \wedge N$$

Déducton naturelle

Problème réel

- S'il fait froid alors il neige et Ali est malade.
- Si Ali est malade alors il ne travaille pas.
- Il fait froid.

Démontrer que : *Ali ne travaille pas et il neige*

Formulation

$F=$ " *il fait froid* " $\qquad \varphi_1 = F \Rightarrow (N \wedge M)$

$N=$ " *il neige* " $\qquad \varphi_2 = M \Rightarrow \neg T$

$M=$ " *Ali est malade* " $\qquad \varphi_3 = F$

$T=$ " *Ali travaille* " $\qquad \varphi = \neg T \wedge N$

Déducton naturelle

Démonstration :

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{F \Rightarrow (N \wedge M) \qquad F}{N \wedge M}}{N} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{F \Rightarrow (N \wedge M) \qquad F}{N \wedge M}}{M} \qquad M \Rightarrow \neg T}{\neg T}}{N \wedge \neg T}$$

Déducton naturelle

Démonstration :

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{F \Rightarrow (N \wedge M) \qquad F}{\color{red}{N \wedge M}}}{N} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{F \Rightarrow (N \wedge M) \qquad F}{N \wedge M}}{M} \qquad M \Rightarrow \neg T}{\neg T}}{N \wedge \neg T}$$

Déducton naturelle

Démonstration :

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{F \Rightarrow (N \wedge M) \qquad F}{N \wedge M}}{\color{red}{N}} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{F \Rightarrow (N \wedge M) \qquad F}{N \wedge M}}{M} \qquad M \Rightarrow \neg T}{\neg T}}{N \wedge \neg T}$$

Déducton naturelle

Démonstration :

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{F \Rightarrow (N \wedge M) \qquad F}{N \wedge M}}{N} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\color{red}{F \Rightarrow (N \wedge M) \qquad F}}{N \wedge M}}{M} \qquad M \Rightarrow \neg T}{\neg T}}{N \wedge \neg T}$$

Déducton naturelle

Démonstration :

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{F \Rightarrow (N \wedge M) \qquad F}{N \wedge M}}{N} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{F \Rightarrow (N \wedge M) \qquad F}{\color{red}{N \wedge M}}}{M} \qquad M \Rightarrow \neg T}{\neg T}}{N \wedge \neg T}$$

Déducton naturelle

Démonstration :

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{F \Rightarrow (N \wedge M) \qquad F}{N \wedge M}}{N} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{F \Rightarrow (N \wedge M) \qquad F}{N \wedge M}}{\color{red}{M}} \qquad M \Rightarrow \neg T}{\neg T}}{N \wedge \neg T}$$

Déducton naturelle

Démonstration :

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{F \Rightarrow (N \wedge M) \qquad F}{N \wedge M}}{N} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{F \Rightarrow (N \wedge M) \qquad F}{N \wedge M}}{M} \qquad M \Rightarrow \neg T}{\neg T}}{}}{N \wedge \neg T}$$

Déducton naturelle

Démonstration :

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{F \Rightarrow (N \wedge M) \qquad F}{N \wedge M}}{N} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{F \Rightarrow (N \wedge M) \qquad F}{N \wedge M}}{M} \qquad M \Rightarrow \neg T}{\color{red}{\neg T}}}{N \wedge \neg T}$$

Déducton naturelle

Démonstration :

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{F \Rightarrow (N \wedge M) \qquad F}{N \wedge M}}{{\color{red} N}} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{F \Rightarrow (N \wedge M) \qquad F}{N \wedge M}}{M} \qquad M \Rightarrow \neg T}{{\color{red} \neg T}}}{N \wedge \neg T}$$

Déducton naturelle

Démonstration :

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{F \Rightarrow (N \wedge M) \qquad F}{N \wedge M}}{N} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{F \Rightarrow (N \wedge M) \qquad F}{N \wedge M}}{M} \qquad M \Rightarrow \neg T}{\neg T}}{\color{red}{N \wedge \neg T}}$$

Déducton naturelle

Démonstration :

$$
\dfrac{
\dfrac{
\dfrac{
\color{red}{\Sigma \vdash F \Rightarrow (N \wedge M) \qquad \Sigma \vdash F}
}{\Sigma \vdash N \wedge M}
}{\Sigma \vdash N}
\qquad
\dfrac{
\dfrac{
\dfrac{\Sigma \vdash F \Rightarrow (N \wedge M) \qquad \Sigma \vdash F}{\Sigma \vdash N \wedge M}
}{\Sigma \vdash M}
\qquad \Sigma \vdash M \Rightarrow \neg T
}{\Sigma \vdash \neg T}
}{\Sigma \vdash N \wedge \neg T}
$$

Déducton naturelle

Démonstration :

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\Sigma \vdash F \Rightarrow (N \wedge M) \qquad \Sigma \vdash F}{\color{red}{\Sigma \vdash N \wedge M}}}{\Sigma \vdash N} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\Sigma \vdash F \Rightarrow (N \wedge M) \qquad \Sigma \vdash F}{\Sigma \vdash N \wedge M}}{\Sigma \vdash M} \qquad \Sigma \vdash M \Rightarrow \neg T}{\Sigma \vdash \neg T}}{\Sigma \vdash N \wedge \neg T}$$

Déducton naturelle

Démonstration :

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\Sigma \vdash F \Rightarrow (N \wedge M) \qquad \Sigma \vdash F}{\Sigma \vdash N \wedge M}}{\color{red}{\Sigma \vdash N}} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\Sigma \vdash F \Rightarrow (N \wedge M) \qquad \Sigma \vdash F}{\Sigma \vdash N \wedge M}}{\Sigma \vdash M} \qquad \Sigma \vdash M \Rightarrow \neg T}{\Sigma \vdash \neg T}}{\Sigma \vdash N \wedge \neg T}$$

Déducton naturelle

Démonstration :

$$
\dfrac{
\dfrac{
\dfrac{\Sigma \vdash F \Rightarrow (N \wedge M) \qquad \Sigma \vdash F}{\Sigma \vdash N \wedge M}
}{\Sigma \vdash N}
\qquad
\dfrac{
\dfrac{
\dfrac{\color{red}{\Sigma \vdash F \Rightarrow (N \wedge M) \qquad \Sigma \vdash F}}{\Sigma \vdash N \wedge M}
}{\Sigma \vdash M}
\qquad \Sigma \vdash M \Rightarrow \neg T
}{\Sigma \vdash \neg T}
}{\Sigma \vdash N \wedge \neg T}
$$

Déducton naturelle

Démonstration :

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\Sigma \vdash F \Rightarrow (N \wedge M) \qquad \Sigma \vdash F}{\Sigma \vdash N \wedge M}}{\Sigma \vdash N} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\Sigma \vdash F \Rightarrow (N \wedge M) \qquad \Sigma \vdash F}{\color{red}{\Sigma \vdash N \wedge M}}}{\Sigma \vdash M} \qquad \Sigma \vdash M \Rightarrow \neg T}{\Sigma \vdash \neg T}}{\Sigma \vdash N \wedge \neg T}$$

Déducton naturelle

Démonstration :

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\Sigma \vdash F \Rightarrow (N \wedge M) \qquad \Sigma \vdash F}{\Sigma \vdash N \wedge M}}{\Sigma \vdash N} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\Sigma \vdash F \Rightarrow (N \wedge M) \qquad \Sigma \vdash F}{\Sigma \vdash N \wedge M}}{\color{red}{\Sigma \vdash M}} \qquad \Sigma \vdash M \Rightarrow \neg T}{\Sigma \vdash \neg T}}{\Sigma \vdash N \wedge \neg T}$$

Déducton naturelle

Démonstration :

$$
\dfrac{
  \dfrac{
    \dfrac{\Sigma \vdash F \Rightarrow (N \wedge M) \qquad \Sigma \vdash F}{\Sigma \vdash N \wedge M}
  }{\Sigma \vdash N}
  \qquad
  \dfrac{
    \dfrac{
      \dfrac{\Sigma \vdash F \Rightarrow (N \wedge M) \qquad \Sigma \vdash F}{\Sigma \vdash N \wedge M}
    }{\color{red}{\Sigma \vdash M}}
    \qquad
    \color{red}{\Sigma \vdash M \Rightarrow \neg T}
  }{\Sigma \vdash \neg T}
}{\Sigma \vdash N \wedge \neg T}
$$

Déducton naturelle

Démonstration :

$$
\dfrac{
\dfrac{
\dfrac{\Sigma \vdash F \Rightarrow (N \wedge M) \qquad \Sigma \vdash F}{\Sigma \vdash N \wedge M}
}{\Sigma \vdash N}
\qquad
\dfrac{
\dfrac{
\dfrac{\Sigma \vdash F \Rightarrow (N \wedge M) \qquad \Sigma \vdash F}{\Sigma \vdash N \wedge M}
}{\Sigma \vdash M}
\qquad \Sigma \vdash M \Rightarrow \neg T
}{\color{red}{\Sigma \vdash \neg T}}
}{\Sigma \vdash N \wedge \neg T}
$$

Déducton naturelle

Démonstration :

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\Sigma \vdash F \Rightarrow (N \wedge M) \qquad \Sigma \vdash F}{\Sigma \vdash N \wedge M}}{\color{red}{\Sigma \vdash N}} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\Sigma \vdash F \Rightarrow (N \wedge M) \qquad \Sigma \vdash F}{\Sigma \vdash N \wedge M}}{\Sigma \vdash M} \qquad \Sigma \vdash M \Rightarrow \neg T}{\color{red}{\Sigma \vdash \neg T}}}{\Sigma \vdash N \wedge \neg T}$$

Déducton naturelle

Démonstration :

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\Sigma \vdash F \Rightarrow (N \wedge M) \qquad \Sigma \vdash F}{\Sigma \vdash N \wedge M}}{\Sigma \vdash N} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\Sigma \vdash F \Rightarrow (N \wedge M) \qquad \Sigma \vdash F}{\Sigma \vdash N \wedge M}}{\Sigma \vdash M} \qquad \Sigma \vdash M \Rightarrow \neg T}{\Sigma \vdash \neg T}}{\color{red}{\Sigma \vdash N \wedge \neg T}}$$

Déducton naturelle

Démonstration :

Remarque

On démontre, en général, des formules en utilisant un ensemble d'hypothèses, et cet ensemble peut varier au cours de la démonstration : quand on dit *"supposons F et montrons G "*, F est alors une nouvelle hypothèse que l'on pourra utiliser pour montrer G.

Les séquents

Définition

Un séquent est un couple (noté $\Gamma \vdash F$) où :

- Γ est un ensemble fini de formules. Γ représente les hypothèses que l'on peut utiliser. Cet ensemble s'appelle aussi le *contexte* du séquent.

Remarque :

Les séquents

Définition

Un séquent est un couple (noté $\Gamma \vdash F$) où :

- Γ est un ensemble fini de formules. Γ représente les hypothèses que l'on peut utiliser. Cet ensemble s'appelle aussi le *contexte* du séquent.
- F est une formule. C'est la formule que l'on veut montrer. On dira que cette formule est la *conclusion* du séquent.

Remarque :

Les séquents

Définition

Un séquent est un couple (noté $\Gamma \vdash F$) où :

- Γ est un ensemble fini de formules. Γ représente les hypothèses que l'on peut utiliser. Cet ensemble s'appelle aussi le *contexte* du séquent.
- F est une formule. C'est la formule que l'on veut montrer. On dira que cette formule est la *conclusion* du séquent.

Remarque :

1. Le signe $\vdash$ se lit *thèse* ou *démontre*.

Les séquents

Définition

Un séquent est un couple (noté $\Gamma \vdash F$) où :

- Γ est un ensemble fini de formules. Γ représente les hypothèses que l'on peut utiliser. Cet ensemble s'appelle aussi le *contexte* du séquent.
- F est une formule. C'est la formule que l'on veut montrer. On dira que cette formule est la *conclusion* du séquent.

Remarque :

1. Le signe $\vdash$ se lit *thèse* ou *démontre*.
2. On notera $\vdash F$ un séquent dont l'ensemble d'hypothèses est vide.

Les séquents

Définition

- Un séquent $\Gamma \vdash F$ est *prouvable* s'il peut être obtenu par une application finie de règles de démonstration.

Remarque :

Les séquents

Définition

- Un séquent $\Gamma \vdash F$ est *prouvable* s'il peut être obtenu par une application finie de règles de démonstration.
- Une formule F est *prouvable* si le séquent $\vdash F$ est *prouvable*.
- $\Gamma \vdash F$ est *prouvable* ssi $\Gamma \models F$

Remarque :

1. « $\Gamma \vdash F$ » représente à la fois le séquent et la phrase « le séquent $\Gamma \vdash F$ est prouvable ». Il n'y aura, en général, pas d'ambiguïté.

Les séquents

Définition

- Un séquent $\Gamma \vdash F$ est *prouvable* s'il peut être obtenu par une application finie de règles de démonstration.
- Une formule F est *prouvable* si le séquent $\vdash F$ est *prouvable*.
- $\Gamma \vdash F$ est *prouvable* ssi $\Gamma \models F$

Remarque :

1. « $\Gamma \vdash F$ » représente à la fois le séquent et la phrase « le séquent $\Gamma \vdash F$ est prouvable ». Il n'y aura, en général, pas d'ambiguïté.
2. On écrira $\Gamma \nvdash F$ pour dire « le séquent $\Gamma \vdash F$ n'est pas prouvable ».

Les règles de démonstration

Définition

- Les règles de démonstration sont les briques qui permettent de construire les dérivations.

Les règles de démonstration

Définition

- Les règles de démonstration sont les briques qui permettent de construire les dérivations.
- Une dérivation formelle est un assemblage fini et correct de règles.

Les règles de démonstration

Définition

- Les règles de démonstration sont les briques qui permettent de construire les dérivations.
- Une dérivation formelle est un assemblage fini et correct de règles.
- Cet assemblage n'est pas linéaire mais un arbre :

Les règles de démonstration

Définition

- Les règles de démonstration sont les briques qui permettent de construire les dérivations.
- Une dérivation formelle est un assemblage fini et correct de règles.
- Cet assemblage n'est pas linéaire mais un arbre :
  - On est en effet souvent amené à faire des branchements.

Les règles de démonstration

Définition

- Les règles de démonstration sont les briques qui permettent de construire les dérivations.
- Une dérivation formelle est un assemblage fini et correct de règles.
- Cet assemblage n'est pas linéaire mais un arbre :
  - On est en effet souvent amené à faire des branchements.
  - Par exemple, pour prouver $A \wedge B$. on doit faire deux choses : prouver A et prouver B.

Les règles de démonstration

Remarques :

- Dans la pratique courante on utilise, en plus des règles ci-aprés, d'autres règles mais celles-ci peuvent se déduire des précédentes. On les appellera ***règles dérivées***.

Les règles de démonstration

Remarques :

- Dans la pratique courante on utilise, en plus des règles ci-aprés, d'autres règles mais celles-ci peuvent se déduire des précédentes. On les appellera ***règles dérivées***.
- Il est de tradition d'écrire la racine de l'arbre (le séquent conclusion) *en bas*, les feuilles *en haut* :

Les règles de démonstration

Remarques :

- Dans la pratique courante on utilise, en plus des règles ci-aprés, d'autres règles mais celles-ci peuvent se déduire des précédentes. On les appellera ***règles dérivées***.
- Il est de tradition d'écrire la racine de l'arbre (le séquent conclusion) *en bas*, les feuilles *en haut* :
  - on a adopté ici le choix le plus répandu dans les livres de logique.

Comment lire les règles ?

Composants

Une règle se compose :

- d'un ensemble de *prémisses* : chacune d'elles est un séquent. Il peut y en avoir zéro, une ou plusieurs et leur ordre est sans importance ;

$$\frac{\Sigma \vdash A \Rightarrow B \qquad \Sigma \vdash A}{\Sigma \vdash B} \Rightarrow e$$

Comment lire les règles ?

Composants

Une règle se compose :

- d'un ensemble de *prémisses* : chacune d'elles est un séquent. Il peut y en avoir zéro, une ou plusieurs et leur ordre est sans importance ;
- du séquent *conclusion* de la règle ;

$$\frac{\Sigma \vdash A \Rightarrow B \qquad \Sigma \vdash A}{\Sigma \vdash B} \Rightarrow e$$

Comment lire les règles ?

Composants

Une règle se compose :

- d'un ensemble de *prémisses* : chacune d'elles est un séquent. Il peut y en avoir zéro, une ou plusieurs et leur ordre est sans importance ;
- du séquent *conclusion* de la règle ;
- d'une barre horizontale séparant les prémisses (en haut) de la conclusion (en bas). Sur la droite de la barre, on indiquera le *nom de la règle*.

$$\frac{\Sigma \vdash A \Rightarrow B \qquad \Sigma \vdash A}{\Sigma \vdash B} \Rightarrow e$$

Comment lire les règles ?

Manières

Chaque règle peut se lire de deux manières :

- *de bas en haut* : si on veut prouver la conclusion, il suffit, par utilisation de la règle, de prouver les prémisses.

Comment lire les règles ?

Manières

Chaque règle peut se lire de deux manières :

- *de bas en haut* : si on veut prouver la conclusion, il suffit, par utilisation de la règle, de prouver les prémisses.
    - C'est ce qu'on fait quand on **cherche** une démonstration.

Comment lire les règles ?

Manières

Chaque règle peut se lire de deux manières :

- *de bas en haut* : si on veut prouver la conclusion, il suffit, par utilisation de la règle, de prouver les prémisses.
    - C'est ce qu'on fait quand on **cherche** une démonstration.
    - Cela correspond à *l'analyse* ;

Comment lire les règles ?

Manières

Chaque règle peut se lire de deux manières :

- *de bas en haut* : si on veut prouver la conclusion, il suffit, par utilisation de la règle, de prouver les prémisses.
  - C'est ce qu'on fait quand on **cherche** une démonstration.
  - Cela correspond à *l'analyse* ;
- *de haut en bas* : si on a prouvé les prémisses, alors on a aussi prouvé la conclusion.

Comment lire les règles ?

Manières

Chaque règle peut se lire de deux manières :

- *de bas en haut* : si on veut prouver la conclusion, il suffit, par utilisation de la règle, de prouver les prémisses.
  - C'est ce qu'on fait quand on **cherche** une démonstration.
  - Cela correspond à *l'analyse* ;
- *de haut en bas* : si on a prouvé les prémisses, alors on a aussi prouvé la conclusion.
  - C'est ce qu'on fait quand on **rédige** une démonstration.

Comment lire les règles ?

Manières

Chaque règle peut se lire de deux manières :

- *de bas en haut* : si on veut prouver la conclusion, il suffit, par utilisation de la règle, de prouver les prémisses.
  - C'est ce qu'on fait quand on **cherche** une démonstration.
  - Cela correspond à *l'analyse* ;
- *de haut en bas* : si on a prouvé les prémisses, alors on a aussi prouvé la conclusion.
  - C'est ce qu'on fait quand on **rédige** une démonstration.
  - Cela correspond à la *synthèse*.

Comment lire les règles ?

Types de règles

Deux types de règles associées à chaque connecteur :

- les règles d'**introduction** qui permettent de *prouver* une formule ayant ce symbole comme connecteur principal ;

Comment lire les règles ?

Types de règles

Deux types de règles associées à chaque connecteur :

- les règles d'**introduction** qui permettent de *prouver* une formule ayant ce symbole comme connecteur principal ;
- les règles d'**élimination** qui permettent d'*utiliser* une formule ayant ce symbole comme connecteur principal.

Les règles

Axiome

$$\frac{}{\Gamma, A \vdash A}\ {\color{red}ax}$$

Si la conclusion du séquent est l'une des hypothèses, alors le séquent est prouvable.
Elles seront les points de départ des preuves (les feuilles des arbres de preuve).

Les règles

Axiome

$$\overline{\Gamma, A \vdash A}^{\;ax}$$

Si la conclusion du séquent est l'une des hypothèses, alors le séquent est prouvable.
Elles seront les points de départ des preuves (les feuilles des arbres de preuve).

Preuve :

$mod(\Gamma \cup \{A\}) = mod(\Gamma) \cap mod(A) \subseteq mod(A)$

Donc, $\Gamma, A \models A$

Les règles

Affaiblissement

$$\frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma, B \vdash A}\ aff$$

- *De haut en bas* : si on peut démontrer A sous les hypothèses Γ alors, en ajoutant des hypothèses supplémentaires, on peut encore démontrer A.
- *De bas en haut* : il y a des hypothèses qui peuvent ne pas servir.

Les règles

Affaiblissement

$$\frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma, B \vdash A}\ aff$$

- *De haut en bas* : si on peut démontrer A sous les hypothèses Γ alors, en ajoutant des hypothèses supplémentaires, on peut encore démontrer A.
- *De bas en haut* : il y a des hypothèses qui peuvent ne pas servir.

Preuve :

$$\begin{array}{rl} \text{Si } \Gamma \models A \text{ alors } mod(\Gamma) & \subseteq mod(A) \\ \text{d'où } mod(\Gamma) \cap mod(B) & \subseteq mod(A) \\ \text{Donc : } \Gamma, B \models A & . \end{array}$$

Les règles

Contraction

$$\frac{\Gamma, A, A \vdash B}{\Gamma, A \vdash B}\ \textcolor{red}{contr}$$

- Une même hypothèse peut servir plusieurs fois dans une preuve.

Les règles

Contraction

$$\frac{\Gamma, A, A \vdash B}{\Gamma, A \vdash B}\ \textit{contr}$$

- Une même hypothèse peut servir plusieurs fois dans une preuve.

Preuve :

Si $\Gamma, A, A \models B$ alors

$$\begin{aligned} mod(\Gamma \cup A \cup A) &\subseteq mod(B) \\ \text{d'où} & \\ mod(\Gamma) \cap (mod(A) \cap mod(A)) &\subseteq mod(B)\text{,d'où} \\ mod(\Gamma) \cap mod(A) &\subseteq mod(B) \end{aligned}$$

Donc : $\Gamma, A \models B$

Les règles

Introduction de l'implication

$$\frac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash A \Rightarrow B} \Rightarrow_{intro}$$

- Pour montrer $A \Rightarrow B$, on suppose A (c'est-à-dire qu'on l'ajoute aux hypothèses) et on démontre B.

Preuve :

$$\begin{array}{rl}
\text{On suppose que } \Gamma, A \models B & \text{On a donc} \\
mod(\Gamma) \cap mod(A) & \subseteq mod(B), \text{ d'où} \\
(mod(\Gamma) \cap mod(A)) \cup mod(\neg A) & \subseteq mod(B) \cup mod(\neg A), \text{ et donc} \\
(mod(\Gamma) \cup mod(\neg A)) & \subseteq mod(B) \cup mod(\neg A). \\
\text{Finalement, on a } mod(\Gamma) & \subseteq mod(A \Rightarrow B), \text{et donc} \\
\Gamma \models A \Rightarrow B & .
\end{array}$$

Les règles

Introduction de l'implication

$$\frac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash A \Rightarrow B} \Rightarrow_{intro}$$

- Pour montrer $A \Rightarrow B$, on suppose A (c'est-à-dire qu'on l'ajoute aux hypothèses) et on démontre B.

Exemple :

Démontrer le séquent $\vdash A \Rightarrow (B \Rightarrow A)$

Les règles

Introduction de l'implication

$$\frac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash A \Rightarrow B} \Rightarrow_{intro}$$

- Pour montrer $A \Rightarrow B$, on suppose A (c'est-à-dire qu'on l'ajoute aux hypothèses) et on démontre B.

Les règles

Elimination de l'implication

$$\frac{\Gamma \vdash A \Rightarrow B \qquad \Gamma' \vdash A}{\Gamma, \Gamma' \vdash B} \Rightarrow_{elim}$$

- Pour démontrer B, si on peut démontrer $A \Rightarrow B$, il suffit de démontrer A.

Les règles

Elimination de l'implication

$$\frac{\Gamma \vdash A \Rightarrow B \qquad \Gamma^{'} \vdash A}{\Gamma, \Gamma^{'} \vdash B} \Rightarrow_{elim}$$

- Pour démontrer B, si on peut démontrer $A \Rightarrow B$, il suffit de démontrer A.

Preuve :

On suppose que $\Gamma \models A \Rightarrow B$ et $\Gamma^{'} \models A$, On a donc
$mod(\Gamma) \subseteq (mod(\neg A) \cup mod(B)$ et $mod(\Gamma^{'}) \subseteq mod(A)$. Alors
$mod(\Gamma \cup \Gamma^{'}) = mod(\Gamma) \cap mod(\Gamma^{'}) \subseteq (mod(\neg A) \cup mod(B) \cap mod(A)$
$mod(\Gamma \cup \Gamma^{'}) \subseteq (mod(\neg A) \cap mod(A)) \cup (mod(B) \cap mod(A))$, d'où
$mod(\Gamma \cup \Gamma^{'}) \subseteq (mod(B) \cap mod(A)) \subseteq mod(B)$
Donc, $\Gamma, \Gamma^{'} \models B$.

Les règles

Démontrer $\vdash (A \Rightarrow (B \Rightarrow C)) \Rightarrow ((A \Rightarrow B) \Rightarrow (A \Rightarrow C))$

Les règles

Démontrer $\vdash (A \Rightarrow (B \Rightarrow C)) \Rightarrow ((A \Rightarrow B) \Rightarrow (A \Rightarrow C))$

$$
\dfrac{
\dfrac{
\dfrac{
\dfrac{
\dfrac{\dfrac{}{A \Rightarrow (B \Rightarrow C) \vdash A \Rightarrow (B \Rightarrow C)}\,Ax \qquad \dfrac{}{A \vdash A}\,Ax}{A \Rightarrow (B \Rightarrow C), A \vdash B \Rightarrow C}\,\Rightarrow_{elim}
\qquad
\dfrac{\dfrac{}{A \Rightarrow B \vdash A \Rightarrow B}\,Ax \qquad \dfrac{}{A \vdash A)}\,Ax}{A \Rightarrow B, A \vdash B}\,\Rightarrow_{elim}
}{A \Rightarrow (B \Rightarrow C),\ A \Rightarrow B, A \vdash C}\,\Rightarrow_{elim} + Contr
}{A \Rightarrow (B \Rightarrow C),\ A \Rightarrow B, \vdash A \Rightarrow C}\,\Rightarrow_{intro}
}{A \Rightarrow (B \Rightarrow C) \vdash (A \Rightarrow B) \Rightarrow (A \Rightarrow C)}\,\Rightarrow_{intro}
}{\vdash (A \Rightarrow (B \Rightarrow C)) \Rightarrow ((A \Rightarrow B) \Rightarrow (A \Rightarrow C))}\,\Rightarrow_{intro}
$$

Les règles

Introduction de la conjonction

$$\frac{\Gamma \vdash A \qquad \Gamma' \vdash B}{\Gamma, \Gamma' \vdash A \wedge B} \wedge_{intro}$$

- Pour démontrer $A \wedge B$, il suffit de démontrer A et de démontrer A.

Les règles

Introduction de la conjonction

$$\frac{\Gamma \vdash A \qquad \Gamma^{'} \vdash B}{\Gamma, \Gamma^{'} \vdash A \wedge B} \wedge_{intro}$$

- Pour démontrer $A \wedge B$, il suffit de démontrer A et de démontrer A.

Preuve :

On suppose que $\Gamma \models A$ et $\Gamma^{'} \models B$, On a donc
$mod(\Gamma) \subseteq mod(A)$ et $mod(\Gamma^{'}) \subseteq mod(B)$. Alors
$mod(\Gamma \cup \Gamma^{'}) = mod(\Gamma) \cap mod(\Gamma^{'}) \subseteq (mod(A) \cap mod(B))$, d'où
$mod(\Gamma \cup \Gamma^{'}) \subseteq mod(A \wedge B)$, d'où
Donc, $\Gamma, \Gamma^{'} \models A \wedge B$.

Les règles

Démontrer $\vdash ((A \wedge B) \Rightarrow C) \Rightarrow (A \Rightarrow (B \Rightarrow C))$

Les règles

Démontrer $\vdash ((A \wedge B) \Rightarrow C) \Rightarrow (A \Rightarrow (B \Rightarrow C))$

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{(A \wedge B) \Rightarrow C \vdash (A \wedge B) \Rightarrow C}\,{\color{red}Ax} \qquad \dfrac{\dfrac{}{A \vdash A}\,{\color{red}Ax} \qquad \dfrac{}{B \vdash B}\,{\color{red}Ax}}{A, B \vdash A \wedge B}\,{\color{red}\wedge intro}}{(A \wedge B) \Rightarrow C), A, B \vdash C}\,{\color{red}\Rightarrow elim}}{(A \wedge B) \Rightarrow C), A \vdash B \Rightarrow C}\,{\color{red}\Rightarrow_{intro}}}{(A \wedge B) \Rightarrow C) \vdash A \Rightarrow (B \Rightarrow C)}\,{\color{red}\Rightarrow_{intro}}
$$

Les règles

Elimination de la conjonction

$$\frac{\Gamma \vdash A \wedge B}{\Gamma \vdash A} \wedge^{g}_{elim} \qquad \frac{\Gamma \vdash A \wedge B}{\Gamma \vdash B} \wedge^{d}_{elim}$$

- De $A \wedge B$, on peut déduire A (élimination gauche) et B (élimination droite).

Preuve :

On suppose que $\Gamma \models A \wedge B$, On a donc

Elimination gauche :

$mod(\Gamma) \subseteq mod(A \wedge B) = mod(A) \cap mod(B)$. Donc

$mod(\Gamma) \subseteq mod(A)$, d'où $\Gamma \models A$.

Elimination droite :

$mod(\Gamma) \subseteq mod(A \wedge B) = mod(A) \cap mod(B)$. Donc

$mod(\Gamma) \subseteq mod(B)$, d'où $\Gamma \models B$.

Les règles

Elimination de la conjonction

$$\frac{\Gamma \vdash A \wedge B}{\Gamma \vdash A} \wedge^{g}_{elim} \qquad \frac{\Gamma \vdash A \wedge B}{\Gamma \vdash B} \wedge^{d}_{elim}$$

- De $A \wedge B$, on peut déduire A (élimination gauche) et B (élimination droite).

Preuve :

On suppose que $\Gamma \models A \wedge B$, On a donc

Elimination gauche :

$mod(\Gamma) \subseteq mod(A \wedge B) = mod(A) \cap mod(B)$. Donc

$mod(\Gamma) \subseteq mod(A)$, d'où $\Gamma \models A$.

Elimination droite :

$mod(\Gamma) \subseteq mod(A \wedge B) = mod(A) \cap mod(B)$. Donc

$mod(\Gamma) \subseteq mod(B)$, d'où $\Gamma \models B$.

Les règles

Démontrer $\vdash (A \Rightarrow (B \Rightarrow C)) \Rightarrow ((A \wedge B) \Rightarrow C)$

Les règles

Démontrer $\vdash (A \Rightarrow (B \Rightarrow C)) \Rightarrow ((A \wedge B) \Rightarrow C)$

$$
\dfrac{
  \dfrac{
    \dfrac{}{A \Rightarrow (B \Rightarrow C) \vdash A \Rightarrow (B \Rightarrow C)}\,{\color{red}Ax}
    \qquad
    \dfrac{\dfrac{}{A \wedge B \vdash A \wedge B}\,{\color{red}Ax}}{A \wedge B \vdash A}\,{\color{red}\wedge^{g}_{elim}}
  }{A \Rightarrow (B \Rightarrow C), A \wedge B \vdash B \Rightarrow C}\,{\color{red}\Rightarrow\ elim}
  \qquad
  \dfrac{\dfrac{}{A \wedge B \vdash A \wedge B}\,{\color{red}Ax}}{A \wedge B \vdash B}\,{\color{red}\wedge^{d}_{elim}}
}{
  \dfrac{
    \dfrac{A \Rightarrow (B \Rightarrow C), A \wedge B \vdash C}{A \Rightarrow (B \Rightarrow C) \vdash (A \wedge B) \Rightarrow C}\,{\color{red}\Rightarrow_{intro}}
  }{\vdash (A \Rightarrow (B \Rightarrow C)) \Rightarrow ((A \wedge B) \Rightarrow C)}\,{\color{red}\Rightarrow_{intro}}
}\,{\color{red}\Rightarrow_{elim} + Contr}
$$

Les règles

Introduction de la disjonction

$$\frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash A \vee B} \vee^{g}_{intro} \qquad \frac{\Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \vee B} \vee^{d}_{intro}$$

- Pour démontrer $A \vee B$, il suffit de démontrer A (introduction gauche) ou B (introduction droite).

Les règles

Introduction de la disjonction

$$\frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash A \vee B} \vee^g_{intro} \qquad \frac{\Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \vee B} \vee^d_{intro}$$

- Pour démontrer $A \vee B$, il suffit de démontrer A (introduction gauche) ou B (introduction droite).

Preuve :

Introduction gauche :On montre que si $\Gamma \models A$ alors $\Gamma \models A \vee B$
supposons que $\Gamma \models A$, donc $mod(\Gamma) \subseteq mod(A)$. or
$mod(A) \subseteq mod(A) \cup mod(B) = mod(A \vee B)$, doù $mod(\Gamma) \subseteq mod(A \vee B)$, d'où $\Gamma \models A \vee B$.
Introduction droite : On montre que si $\Gamma \models B$ alors $\Gamma \models A \vee B$
supposons que $\Gamma \models B$, donc $mod(\Gamma) \subseteq mod(B)$. or
$mod(B) \subseteq mod(A) \cup mod(B) = mod(A \vee B)$, doù $mod(\Gamma) \subseteq mod(A \vee B)$, d'où $\Gamma \models A \vee B$.

Les règles

Elimination de la disjonction

$$\frac{\Gamma \vdash A \vee B \qquad \Gamma', A \vdash C \qquad \Gamma'', B \vdash C}{\Gamma, \Gamma', \Gamma'' \vdash C}\ \vee elim$$

- Si on veut montrer C et qu'on sait qu'on a $A \vee B$, il suffit de montrer C, d'une part en supposant A, d'autre part en supposant B.

Les règles

Elimination de la disjonction

$$\frac{\Gamma \vdash A \vee B \qquad \Gamma', A \vdash C \qquad \Gamma'', B \vdash C}{\Gamma, \Gamma', \Gamma'' \vdash C} \, {\color{red}\vee elim}$$

- Si on veut montrer C et qu'on sait qu'on a $A \vee B$, il suffit de montrer C, d'une part en supposant A, d'autre part en supposant B.

Preuve :

$$\begin{aligned}
mod(\Gamma' \cup \Gamma' \cup \Gamma'') = &\quad mod(\Gamma) \cap mod(\Gamma') \cap mod(\Gamma'') \\
\subseteq &\quad (mod(A) \cup mod(B)) \cap mod(\Gamma') \cap mod(\Gamma'') \\
= &\quad (mod(A) \cap mod(\Gamma') \cap mod(\Gamma'')) \cup (mod(B) \cap mod(\Gamma') \cap mod(\Gamma'')) \\
\subseteq &\quad (mod(A) \cap mod(\Gamma')) \cup (mod(B) \cap mod(\Gamma'')) \\
\subseteq &\quad mod(C) \cup mod(C) = mod(C)
\end{aligned}$$

Les règles

Démontrer $\vdash (A \vee B) \Rightarrow (B \vee A)$

Les règles

Démontrer $\vdash (A \lor B) \Rightarrow (B \lor A)$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{A \lor B \vdash A \lor B}\,Ax \qquad \dfrac{\dfrac{}{A \vdash A}\,Ax}{A \vdash B \lor A}\,\lor^{d}_{intro} \qquad \dfrac{\dfrac{}{B \vdash B}\,Ax}{B \vdash B \lor A}\,\lor^{g}_{intro}}{A \lor B \vdash B \lor A}\,\lor elim}{\vdash (A \lor B) \Rightarrow (B \lor A)}\,\Rightarrow_{intro}$$

Les règles

Démontrer $\vdash (A \vee B) \vee C \Rightarrow A \vee (B \vee C)$

Les règles

Démontrer $\vdash (A \lor B) \lor C \Rightarrow A \lor (B \lor C)$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{A \lor B \vdash A \lor B}\,{\color{red}Ax} \qquad \dfrac{\dfrac{}{A \vdash A}\,{\color{red}Ax}}{A \vdash A \lor (B \lor C)}\,{\color{red}\lor^{d}_{intro}} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{}{B \vdash B}\,{\color{red}Ax}}{B \vdash B \lor C}\,{\color{red}\lor^{g}_{intro}}}{B \vdash A \lor (B \lor C)}\,{\color{red}\lor^{d}_{intro}}}{A \lor B \vdash A \lor (B \lor C)}\,{\color{red}\lor elim}}{\vdots}$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{(A \lor B) \lor C \vdash (A \lor B) \lor C}\,{\color{red}Ax} \qquad \dfrac{\vdots}{A \lor B \vdash A \lor (B \lor C)} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{}{C \vdash C}\,{\color{red}Ax}}{C \vdash B \lor C}\,{\color{red}\lor^{d}_{intro}}}{C \vdash A \lor (B \lor C)}\,{\color{red}\lor^{d}_{intro}}}{(A \lor B) \lor C \vdash A \lor (B \lor C)}\,{\color{red}\lor elim}}{((A \lor B) \lor C) \Rightarrow (A \lor (B \lor C))}\,{\color{red}\Rightarrow intro}$$

Les règles

Introduction de la négation

$$\frac{\Gamma, A \vdash \bot}{\Gamma \vdash \neg A}\ \neg intro$$

- Pour montrer $\neg A$, on suppose A et on démontre *l'absurde*.

Les règles

Introduction de la négation

$$\frac{\Gamma, A \vdash \bot}{\Gamma \vdash \neg A}\ {\color{red}\neg intro}$$

- Pour montrer $\neg A$, on suppose A et on démontre *l'absurde*.

Preuve :

On suppose $\Gamma, A \models \bot$, On a donc :$mod(\Gamma \cup \{A\}) = \emptyset$, alors :
$(mod(\Gamma) \cap mod(A)) \cup mod(\neg A) = mod(\neg A)$, d'où $mod(\Gamma) \cup mod(\neg A) = mod(\neg A)$

Finalement, $mod(\Gamma) \subseteq mod(\neg A)$,d'où $\Gamma \models \neg A$

Les règles

Elimination de la négation

$$\frac{\Gamma \vdash A \qquad \Gamma' \vdash \neg A}{\Gamma, \Gamma' \vdash \bot}\ \neg elim$$

- Si on a montré A et $\neg A$,alors on a montré *l'absurde*.

Les règles

Elimination de la négation

$$\frac{\Gamma \vdash A \qquad \Gamma' \vdash \neg A}{\Gamma, \Gamma' \vdash \bot} \, \neg elim$$

- Si on a montré A et $\neg A$,alors on a montré *l'absurde*.

Preuve :

On suppose $\Gamma \models A$ et $\Gamma' \models \neg A$, On a donc :
$mod(\Gamma) \subseteq mod(A)$ et $mod(\Gamma') \subseteq mod(\neg A)$, alors :
$mod(\Gamma \cup \Gamma') = mod(\Gamma) \cap mod(\Gamma') \subseteq mod(A) \cap mod(\neg A)$, d'où
$mod(\Gamma \cup \Gamma') = \emptyset$. Donc : $\Gamma, \Gamma' \models \bot$

Les règles

Raisonnement par l'absurde

$$\frac{\Gamma, \neg A \vdash \bot}{\Gamma \vdash A} \; \bot Abs$$

- Pour démontré A, il suffit de démontrer *l'absurde* en supposant $\neg A$.

Les règles

Raisonnement par l'absurde

$$\frac{\Gamma, \neg A \vdash \bot}{\Gamma \vdash A} \textcolor{red}{\bot Abs}$$

- Pour démontré A, il suffit de démontrer *l'absurde* en supposant $\neg A$.

Preuve :

On suppose $\Gamma, \neg A \models \bot$, On a donc :
$mod(\Gamma \cup \{\neg A\}) \subseteq \emptyset$, alors :
$(mod(\Gamma) \cap mod(\neg A)) \cup mod(A) \subseteq mod(A)$, d'où
$mod(\Gamma) \cup mod(A) \subseteq mod(A)$.

Finalement,$mod(\Gamma) \subseteq mod(A)$, Donc : $\Gamma \models A$

Les règles

Démontrer $\vdash \neg(A \vee B) \Rightarrow (\neg A \wedge \neg B)$