Численное решение ОДУ

Контактные данные:


- Махмутов Галим Сагитович
- makhmutov.gs@gmail.com
- +7-926-402-57-54


# Задача Коши

$$\frac{d^5y}{dx^5} + 15\frac{d^4y}{dx^4} + 90\frac{d^3y}{dx^3} + 270\frac{d^2y}{dx^2} + 405\frac{dy}{dx} + 243y = 0,\ x \in [0,5],$$

$$y(0) = 0,\ \frac{dy}{dx}(0) = 3,\ \frac{d^2y}{dx^2}(0) = -9,\ \frac{d^3y}{dx^3}(0) = -8,\ \frac{d^4y}{dx^4}(0) = 0.$$

Для численного решения этой задачи сделаем обозначения:

$$y_0 = y,\ y_1 = \frac{dy}{dx},\ y_2 = \frac{d^2y}{dx^2},\ y_3 = \frac{d^3y}{dx^3},\ y_4 = \frac{d^4y}{dx^4}$$

Тогда уравнение перепишется в виде системы ОДУ первого порядка:

$$\begin{cases} y_0' = y_1, \\ y_1' = y_2, \\ y_2' = y_3, \\ y_3' = y_4, \\ y_4' = -(15y_4 + 90y_3 + 270y_2 + 405y_1 + 243y_0), \end{cases} \quad x \in [0,5],$$
$$y_0(0) = 0,\ y_1(0) = 3,\ y_2(0) = -9,\ y_3(0) = -8,\ y_4(0) = 0.$$

В качестве численного метода воспользуемся методом Рунге-Кутты четвертого порядка. Расчет значения вектора $\mathbf{y}_n = [y_0, y_1, y_2, y_3, y_4]^T$ на следующем узле $x_{n+1}$ сетки с шагом $h$ происходит следующим образом:

$$\mathbf{y}_{n+1} = \mathbf{y}_n + \frac{h}{6}(\mathbf{k}_1 + 2\mathbf{k}_2 + 2\mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_4),$$

где

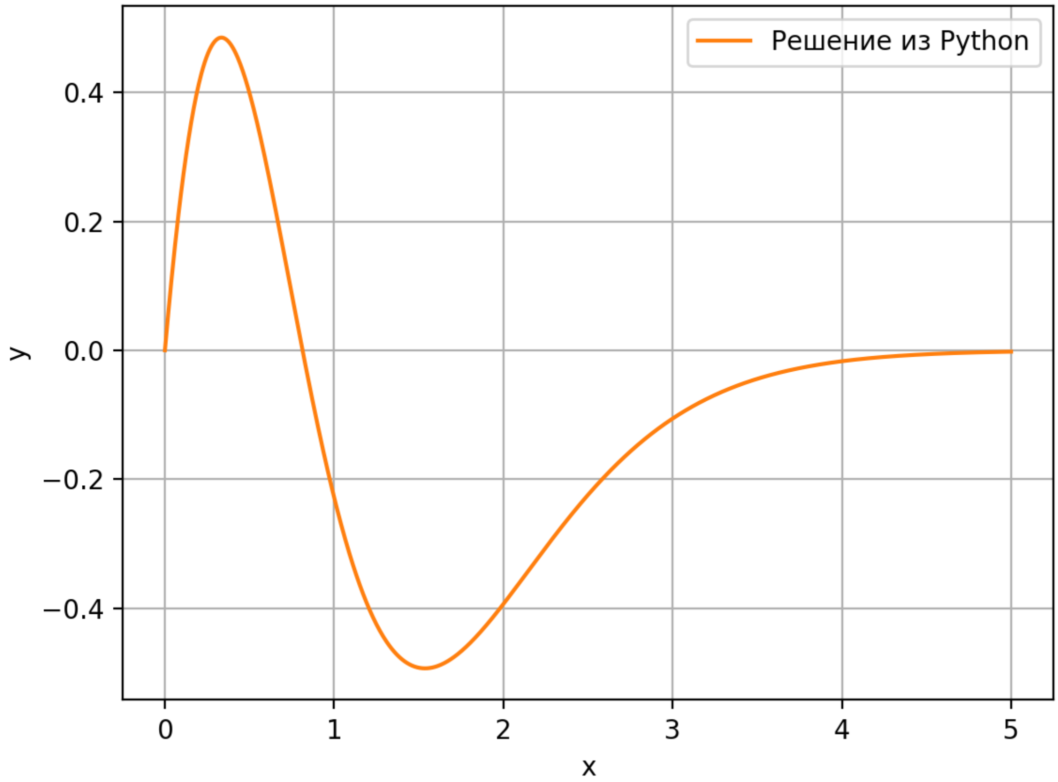
$$\begin{gathered} \mathbf{k}_1 = \mathbf{f}(x_n, \mathbf{y}_n), \\ \mathbf{k}_2 = \mathbf{f}\left(x_n + \frac{h}{2}, \mathbf{y}_n + \frac{h}{2}\mathbf{k}_1\right), \\ \mathbf{k}_3 = \mathbf{f}\left(x_n + \frac{h}{2}, \mathbf{y}_n + \frac{h}{2}\mathbf{k}_2\right), \\ \mathbf{k}_4 = \mathbf{f}(x_n + h, \mathbf{y}_n + h\,\mathbf{k}_3). \end{gathered}$$

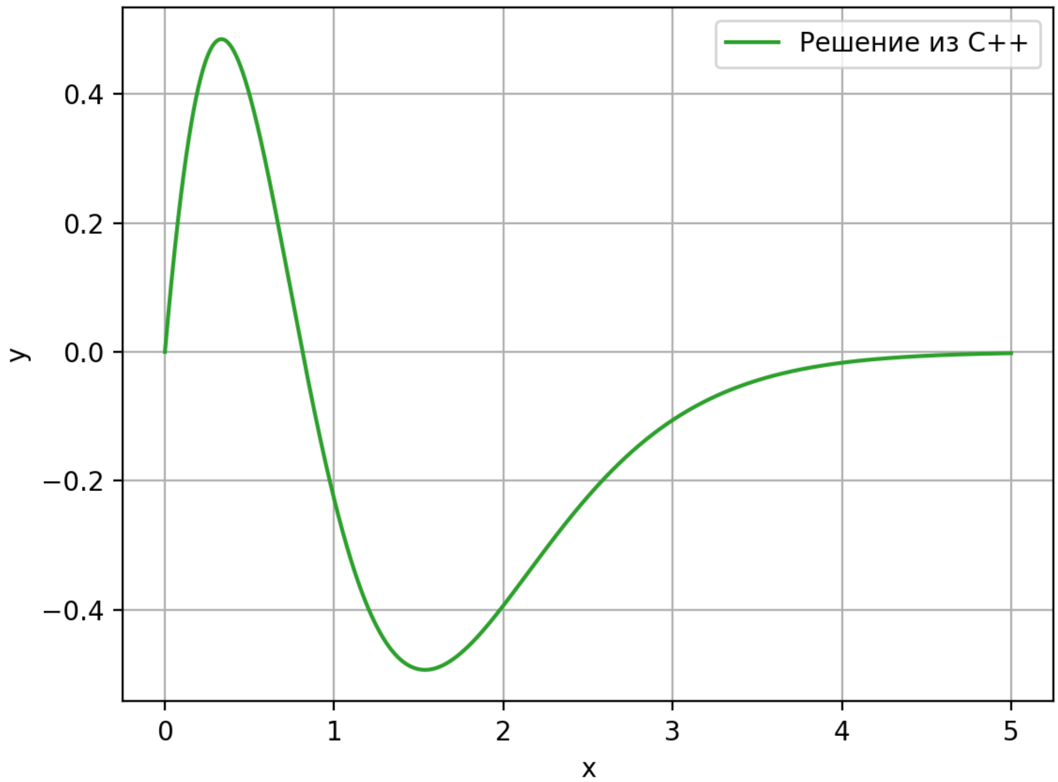
# Программное решение

Для решения данной задачи написаны программы на языках C++ и Python, реализующие метод Рунге-Кутты четвертого порядка. В языке C++ реализована функциональная заготовка класса *OdeSolver*, результаты расчета сохраняются в файл. На языке Python реализован решатель в простейшем процедурном виде. Скрипт на Python помимо численного решения задачи Коши отрисовывает графики (в том числе и для решения, полученного в C++).

В качестве шага интегрирования для реализации на C++ выбрано значение 0.001, на Python значение 0.005.

Графики решения представлены ниже:

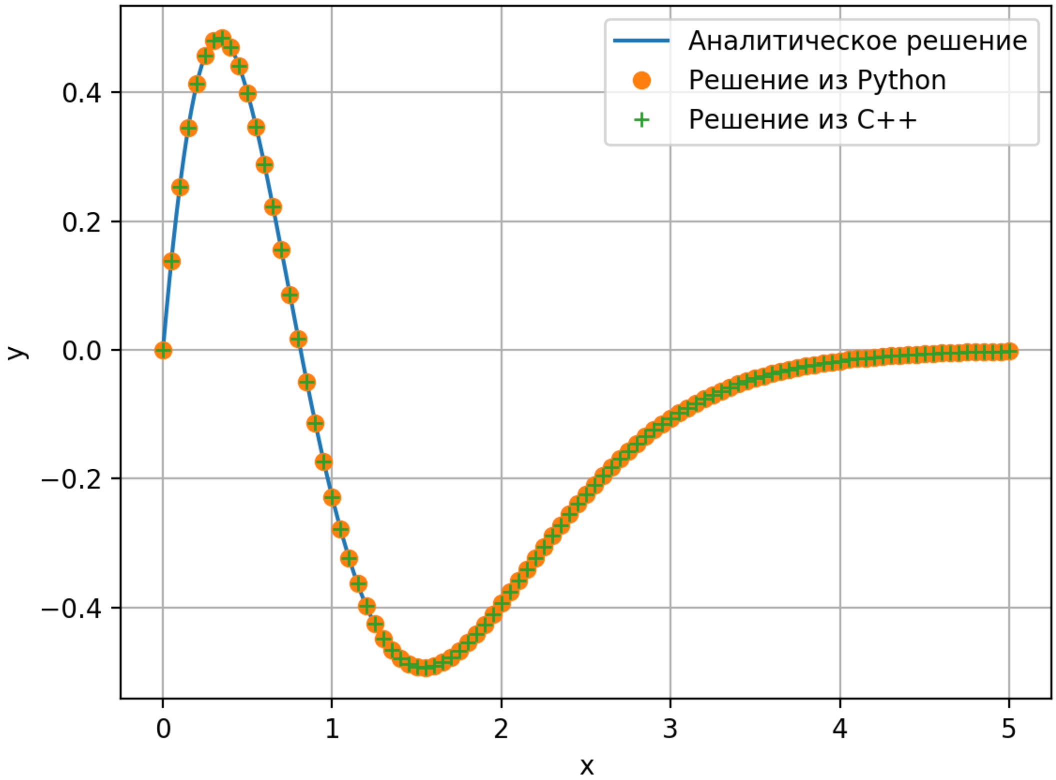


Для оценки адекватности численного решения данную задачу Коши можно решить аналитически и сравнить аналитическое решение с численным. Аналитическое решение выглядит следующим образом (подход к аналитическому решению представлен в конце документа):

$$y(x) = \frac{1}{12} x e^{(-3x)} (36 + 54x - 16x^2 - 129x^3).$$

Построим график этой функции и нанесем на него выборку точек из численных решений:




По данному графику можно сделать вывод об адекватности численного решения.

# Аналитическое решение

Для аналитического решения линейного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами

$$\frac{d^5y}{dx^5} + 15\frac{d^4y}{dx^4} + 90\frac{d^3y}{dx^3} + 270\frac{d^2y}{dx^2} + 405\frac{dy}{dx} + 243y = 0,\ x \in [0, 5].$$

составим соответствующее характеристическое уравнение:

$$\lambda^5 + 15\lambda^4 + 90\lambda^3 + 270\lambda^2 + 405\lambda + 243 = 0.$$

Можно заметить, что $243 = 3^5$ и остальные коэффициенты уравнения соответствуют биному Ньютона, т.е. характеристическое уравнение представляется в виде:

$$(\lambda + 3)^5 = 0.$$

Корень $\lambda = -3$ кратности 5 соответствует общему решению вида:

$$y = (C_1 + C_2x + C_3x^2 + C_4x^3 + C_5x^4)e^{-3x},$$

где $C_1, C_2, C_3, C_4, C_5$ — постоянные коэффициенты. Для их нахождения сначала необходимо сначала вычислить производные $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \frac{d^3y}{dx^3}, \frac{d^4y}{dx^4}$ для этого общения решения и затем вычислить значение коэффициентов из полученной системы с учетом начальных условий. Опуская выкладки с большим количеством операций, приведем значения этих коэффициентов:

$$\begin{cases} C_1 = 0, \\ C_2 = 3, \\ C_3 = \frac{27}{6}, \\ C_4 = \frac{4}{3}, \\ C_5 = \frac{129}{12}. \end{cases}$$

Соответственно, решение задачи Коши, представимо в аналитическом виде:

$$y(x) = \frac{1}{12}xe^{(-3x)}(36 + 54x - 16x^2 - 129x^3).$$