第 2 章 实数理论

内容提要

- 用“Dedekind 分割”构造实数集以及实数集上的运算, 并验证实数的加法和乘法运算满足域公理.
- 从 Dedekind 定理、确界定理、Heine-Borel 定理来刻画实数的完备性.
- 总结实数的性质并抽象出实数公理.
- 从“集合基数”的角度刻画实数集和有理数集的本质不同.

在上一章我们从 Peano 公理出发严格构建了自然数集. 然后用自然数定义了整数, 用整数定义了有理数, 两者本质上用了一样的方法 (用一个有序数对). 因此用这样的方法得到的新数集虽然“扩大”了, 但从“集合基数”的观点看, 没有真的变大 (这个事实将在本章看到).

“实数”的概念并不新鲜, 但想用有理数构造实数却完全不同于用自然数构造整数和用整数构造有理数. 不严格地讲, 用自然数集通过减法运算就可以得到所有整数, 整数环通过除法运算就可以得到所有有理数. 而有理数域却无法通过某种代数运算得到一切实数 (事实上任何“有限的过程”都是无能无力的)! 虽然开方运算可以得到一些无理数, 但用开方运算得到的无理数相对于全体无理数而言只是沧海一粟.

用有理数域构造实数域需要“天才”的构想. 学习这些构造方法也许对于初学分析的学生会有困难, 且短期看没有直接的实用性, 但它们可以给我们带来启示, 所以我们还是不想省略这个内容. 如果暂时感觉有困难, 可以先跳过这个内容, 等学完后面的知识后来补缺 (事实上这样做并不可耻, 因为这符合这些知识的历史顺序, 也符合人的认知规律). 构造实数的方法主要有: Dedekind 分割、无限十进制小数、闭区间套、Cauchy 列、无穷级数等. 本书选用了 Dedekind 分割的方法.

实数集与有理数域的关键差别在于实数具有“完备性”. 我们将从 Dedekind 定理、确界原理和 Heine-Borel 定理三个角度阐述实数的完备性. 在下一章我们将利用数列和极限的概念继续研究实数的完备性, 并介绍单调有界定理、闭区间套定理、Bolzano-Weierstrass 定理和 Cauchy 收敛准则, 它们分别从不同角度刻画了实数的完备性. 我们将看到以上七个命题是等价的, 它们都是实数的完备性定理.

最后我们将介绍“集合基数”的概念. 我们将看到自然数集、整数环和有理数域都是“可数集”, 而实数域是“不可数集”. 从角度看, 从有理数域到实数域发生了“跃迁”.

本章内容形成于 19 世纪末, 完善于 20 世纪初, 因此理解难度远远大于后面的内容 (导数微分和积分都是牛顿时代的知识), 因此如果感觉有困难, 可以先学习后面的内容. 但无论学习顺序如何, 都希望大家最终能认真学完这章.

2.1 实数域的构建及其结构

2.1.1 无理数的历史

在有理数域中, 我们已经可以讨论很多事情, 而且可以做得相当好. 事实上, 计算机的世界几乎只需要有理数. 由于有理数是由一对有序整数定义的, 因此可以说计算机世界是“属于整数的”. 在两千五百多年前, Pythagoras 也有类似的观点. 他认为整个宇宙只需要整数就可以描述 (如果是计算机模拟的宇宙, 那就没错了). 然而一个简单的几何事实就撼动了 Pythagoras 的信仰基础.

问题: 求边长为 1 的单位正方形的对角线. 设对角线长为 x, 由 Pythagoras 定理 (勾股定理) 可知

$$x^2 = 1^2 + 1^2 \iff x^2 = 2.$$

于是问题归结为求二次方程 $x^2 = 2$ 的根. 在初中时我们已经知道这个方程是没有有理根的. 这个事实完全违反了“Pythagoras 主义”. 这是数学史上的一段著名公案. 它直接引发了**第一次数学危机** (crises in mathematics). 下面我们来证明这个事实.

例 2.1 二次方程 $x^2 = 2$ 没有有理根.

证明 用反证法. 假设 $x^2 = 2$ 存在一个有理根 p/q, 其中 p, q 是互素的整数 ($q \neq 0$). 则

$$\left(\frac{p}{q}\right)^2 = 2 \iff p^2 = 2q^2.$$

因此 $2q^2$ 是一个偶数, 于是 p^2 是一个偶数. 因此 p 也是一个偶数 (否则 p^2 是一个奇数). 于是 $4 \mid p^2$, 因此 $2 \mid q^2$, 即 q^2 也是一个偶数, 因此 q 也是一个偶数. 这表明 p, q 不互素. 出现矛盾. 故假设不成立. 于是可知 $x^2 = 2$ 不存在一个有理根. ■

二次方程 $x^2 = 2$ 虽然没有有理根, 但单位正方形对角线的长度是客观存在的. 于是我们用 $\sqrt{2}$ 表示这个数. 它无法写成 p/q 的形式, 因此被称为**无理数** (irrational number)(原义是非比例数). 在这个平面几何例子中, 出现的无理数虽然无法写成 ‘‘两个整数比’’ 的形式, 但至少是一个多项式方程的根.

事实上 $\sqrt{3}, \sqrt{5}, \cdots$ 都不是有理数.

例 2.2 设 $n \in \mathbb{N}^*$. 若 n 不是完全平方数, 则 $\sqrt{n}$ 是一个无理数.

证明 用反证法, 设 $\sqrt{n} = p/q$ ($p, q \in \mathbb{Z}^*$). 由于 n 不是完全平方数, 故 $\sqrt{n}$ 不是自然数, 因此存在 m 使得

$$m < \frac{p}{q} < m + 1 \iff 0 < p - mq < q.$$

由 $\sqrt{n} = p/q$ 可得

$$p^2 = nq^2 \iff p^2 - mpq = nq^2 - mpq \iff \frac{p}{q} = \frac{nq - mp}{p - mq}.$$

令 $p_1 = nq - mp, q_1 = p - mq$. 由于 $q_1 \in \mathbb{N}^*$ 且 $q_1 < q$, 故 $p_1 \in \mathbb{N}^*$ 且 $p_1 < p$.

重复以上操作可以得到 $p_1/q_1 = p_2/q_2$, 其中 $q_2 \in \mathbb{N}^*, q_2 < q_1, p_2 \in \mathbb{N}^*$ 且 $p_2 < p_1$. 依次下去可以得到两列严格递减的正整数列

$$p > p_1 > p_2 > \cdots, \quad q > q_1 > q_2 > \cdots.$$

满足

$$\frac{p}{q} = \frac{p_1}{q_1} = \frac{p_2}{q_2} = \cdots.$$

这与自然数的良序性矛盾. 因此假设不成立. 于是可知 $\sqrt{n}$ 是一个无理数. ■

注 以上证明方法称为 ‘‘无穷递降法”, 是初等数论中的基本技巧.

下面我们再看一个熟悉的例子. 求单位圆的周长. 根据我们中学时已经学过的知识, 答案是 2π. 它也是一个无理数. 但这个无理数不仅无法表示成两个整数之比, 甚至不能成为一个 ‘‘代数方程’’ 的根. 这样的无理数称为**超越数** (transcendental number). 这个主题大大超越了本书范围. 暂时无法展开细讲.

讲到这里, 我们窥见了无理数的一角 (很小的一角). 以上的例子让我们隐隐感觉使用前面构建整数集和有理数集的方法无法构建出所有的无理数, 尤其无法构建出超越数 (因为超越数不是代数方程的根, 这意味着无法用有限次代数运算得到超越数). 因此, 想要构建无理数需要一个 ‘‘无限过程”. 初等的数学工具显得力不从心了. 一直到十九世纪后半叶, 数学家才逐渐找到几种定义无理数的方法, 这个过程经历了两千多年.

2.1.2 Dedekind 分割

回到例2.1, 我们可以对这个问题作进一步的研究.

例 2.3 如图2.1所示, 设方程 $x^2 = 2$ 的正根为 x_0, 令

$$\alpha = \{a \in \mathbb{Q} : a < x_0\}, \quad \beta = \{a \in \mathbb{Q} : a \geq x_0\}.$$

则

(1) α 中没有最大元素, 即对于任一 $p \in \alpha$, 都存在 $q \in \alpha$ 满足 $q > p$.
(2) β 中没有最小元素, 即对于任一 $p \in \beta$, 都存在 $q \in \beta$ 满足 $q < p$.

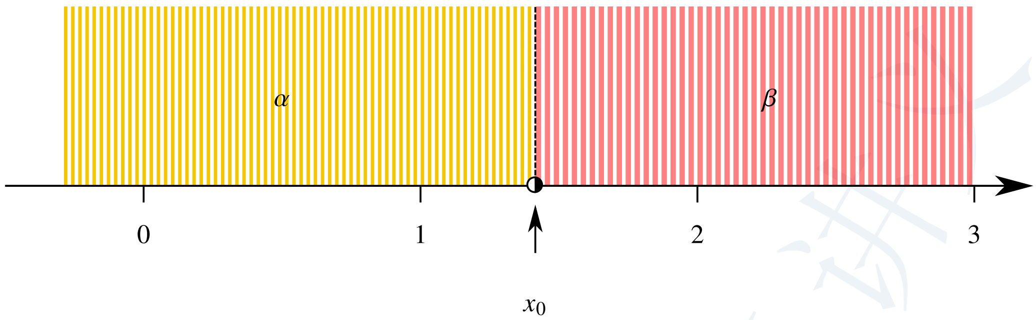

图 2.1: 有理数集的 Dedekind 分割.

证明 显然 $1 \in \alpha$. 因此我们只需看正数的情况. 任取 $p \in \mathbb{Q}^{+}$. 令 $q = (2p+2)/(p+2)$. 则

$$q - p = \frac{2p+2}{p+2} - p = \frac{2-p^2}{p+2} \tag{2.1}$$

$$q^2 - 2 = \left(\frac{2p+2}{p+2}\right)^2 - 2 = \frac{2\left(p^2-2\right)}{(p+2)^2}. \tag{2.2}$$

(1) 若 $p \in \alpha$, 则 $p^2 < 2$. 由等式2.1可知 $q > p$. 由等式2.2可知 $q^2 < 2$. 故 $q \in \alpha$. 这表明 α 中无最大元素.

(2) 若 $p \in \beta$, 则 $p^2 > 2$. 由等式2.1可知 $q < p$. 由等式2.2可知 $q^2 > 2$. 故 $q \in \beta$. 这表明 β 中无最小元素. ■

注 构造 q 的方法并不唯一. 当 $p^2 < 2$ 时, 设 $k > 0$, 则

$$p^2 + kp < 2 + kp \iff p < \frac{2+kp}{p+k}.$$

令 $q = (2+kp)/(p+k)$. 由于

$$\left(\frac{2+kp}{p+k}\right)^2 < 2 \iff 4 + 4kp + k^2p^2 < 2p^2 + 4kp + 2k^2 \iff k^2 > 2.$$

因此当 $k^2 > 2$ 时, 以上构造的 q 都满足要求. 当 $p^2 > 2$ 时用同样的方法可以构造一样的 q.

以上事实说明有理数域 $\mathbb{Q}$ 虽然稠密, 但依旧存在 "空隙". 我们需要定义更大的数集来填满这些空隙.

容易验证, 上例中的 α, β 非空, 且 $\alpha \cap \beta = \varnothing$, $A \cup \beta = \mathbb{Q}$. 于是我们得到了 $\mathbb{Q}$ 的一个划分 $\{\alpha, \beta\}$(详见定义0.18), 我们可以用这个方法来定义实数.

定义 2.1 (Dedekind 分割)

设数集 K 的一个划分 $\{\alpha, \beta\}$. 若满足

1° α "向下封闭", 即对于任意 $x, y \in K$, 其中 $x < y$. 若 $y \in \alpha$, 则 $x \in \alpha$.

2° α 中无最大元素, 即对于任一 $x \in \alpha$, 总是存在 $y \in \alpha$ 满足 $y > x$.

则称该划分为 K 上的一个 **Dedekind 分割** (Dedekind cut), 记作 $\alpha \mid \beta$. 其中 α 称为这个 Dedekind 分割的**下集** (lower set), β 称为这个 Dedekind 分割的**上集** (upper set). ♣

注 由于 $\{\alpha, \beta\}$ 是 $\mathbb{Q}$ 的一个划分, 因此 α 和 β 满足

1° $\alpha, \beta \neq \varnothing$.

2° $\alpha \cap \beta = \varnothing$.

3° $\alpha \cup \beta = \mathbb{Q}$.

注 我们也可以规定 $\{\alpha, \beta\}$ 中的 β 满足向上封闭且无最小元素. 如果改变定义, 后面的证明就需要全部修改. 只需要全书自洽, 选用哪一种都可以.

从直观上可以想到, 一个 $\mathbb{Q}$ 上的 Dedekind 分割可以确定一个实数. 因此我们想到用 $\mathbb{Q}$ 上的 Dedekind 分割来

定义实数. 由于下集 α 完全决定 $\alpha \mid \beta$. 因此我们用下集来定义实数, 这样做便于叙述后面的内容.

定义 2.2 (实数集)

有理数域 $\mathbb{Q}$ 上的所有 Dedekind 分割的下集所组成的集合称为**实数集** (set of real numbers), 记作 $\mathbb{R}$. 其中每一个 Dedekind 分割的下集表示一个**实数** (real number).

注 用 Dedekind 分割定义实数的方法是德国数学家 Richard Dedekind 创造的. 另一位德国数学家 Georg Cantor 创造了用 Cauhy 列构造实数的方法. 它们都在 1872 年发表了它们的天才构想.

注 为了便于阅读, 本章中我们将用拉丁字母 $a, b, \cdots$ 表示有理数, 用希腊字母 $\alpha, \beta, \cdots$ 表示实数.

2.1.3 实数集上的序结构和代数结构

很容易用包含关系来定义实数集上的序关系.

定义 2.3 (实数集上的序关系)

设 $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. 若 $\alpha \subseteq \beta$ 则称 α 小于等于 β, 记作: $\alpha \leq \beta$.

由于包含关系满足自反性、反对称性和传递性, 因此这样定义的序关系立刻满足自反性、反对称性和传递性. 由 Dedekind 分割的定义可知, 下集满足向下封闭性, 因此对于任意 $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, 要么 $\alpha \geq \beta$, 要么 $\alpha \leq \beta$. 因此 $\mathbb{R}$ 一个全序集 (详见0.12).

下面来定义实数集上的运算.

定义 2.4 (实数集上的加法)

在实数集 $\mathbb{R}$ 上规定一个二元运算:

$$\begin{aligned} \mathbb{R} \times \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ (\alpha, \beta) &\mapsto \alpha + \beta, \end{aligned}$$

其中 $\alpha + \beta = \{a + b : a \in \alpha,\ b \in \beta\}$.

需要证明以上定义是合理的.

命题 2.1 (实数加法是良定义的)

对于任意 $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ 都有 $\alpha + \beta \in \mathbb{R}$.

证明 只需证明 $\alpha + \beta$ 是一个 Dedekind 分割的下集.

(i) 显然 $\alpha + \beta \neq \varnothing$. 任取 $c \in (\alpha + \beta)$. 令 $c = a + b$, 其中 $a \in \alpha, b \in \beta$. 若 $c' < c$, 则存在 $d > 0$ 满足

$$c' = c - d = (a + b) - d = (a - d) + b.$$

由于 $a - d < a$, 故 $a - d \in \alpha$. 这表明 $c' \in (\alpha + \beta)$. 于是可知 $\alpha + \beta$ 向下封闭.

(ii) 由于 α 和 β 中都没有最大元素, 因此一定存在 $a' \in \alpha, b' \in \beta$ 满足 $a' > a, b' > b$, 于是 $(a' + b') \in (\alpha + \beta)$ 且 $a' + b' > a + b$, 于是可知 $\alpha + \beta$ 中也没有最大元素.

综上可知 $\alpha + \beta$ 是一个 Dedekind 分割的下集, 即 $\alpha + \beta \in \mathbb{R}$. ■

下面来验证实数的运算律.

命题 2.2 (实数加法的运算律)

实数集 $\mathbb{R}$ 的加法运算满足:

(1) 加法结合律: $(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$ $(\forall \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R})$.

(2) 加法交换律: $\alpha + \beta = \beta + \alpha$ $(\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R})$.

(3) 加法零元: 对于任一 $\alpha \in \mathbb{R}$ 都存在 $0^* \in \mathbb{R}$ 使得 $\alpha + 0^* = 0^* + \alpha = \alpha$.

(4) 加法负元: 对于任一 $\alpha \in \mathbb{R}$ 都存在 $\beta \in \mathbb{R}$ 使得 $\alpha + \beta = \beta + \alpha = 0^*$.

证明 只证明 (3) 和 (4).

(3) 令

$$0^* := \{a \in \mathbb{Q} : a < 0\} = \mathbb{Q}^-.$$

显然 0^* 满足向下封闭且没有最大元素, 因此 $0^* \in \mathbb{R}$. 任取 $\alpha \in \mathbb{R}$, 我们来验证 $\alpha + 0^* = \alpha$.

(i) 任取 $a \in \alpha, x \in 0^*$. 则 $x < 0$, 于是 $a + x < a$. 故 $a + x \in \alpha$. 因此 $\alpha + 0^* \subseteq \alpha$, 即 $\alpha + 0^* \leq \alpha$.

(ii) 任取 $a \in \alpha$, 由于 α 中没有最大元素, 故存在 $x > 0$ 使得 $a + x \in \alpha$. 令 $a' = a + x$, 则 $a = a' + (-x)$, 其中 $a' \in \alpha, -x \in 0^*$, 这表明 $a \in \alpha + 0^*$. 因此 $\alpha \subseteq \alpha + 0^*$, 即 $\alpha \leq \alpha + 0^*$.

综上可知 $0^* + \alpha = \alpha + 0^* = \alpha$. 于是可知 0^* 是 $\mathbb{R}$ 中的零元.

(4) 任取 $\alpha \in \mathbb{R}$, 令

$$\beta = \{-b + x : x \in \mathbb{Q}^-,\ b \in \mathbb{Q}\backslash\alpha\}.$$

容易验证 β 向下封闭且没有最大元素, 因此 $\beta \in \mathbb{R}$. 下面来证明 $\alpha + \beta = \beta + \alpha = 0^*$.

(i) 任取 $a \in \alpha, -b + x \in \beta$, 其中 $x < 0, b \in \mathbb{Q}\backslash\alpha$. 则 $a < b$ 故 $a - b < 0$. 由于 $x < 0$, 于是

$$a + (-b + x) = (a - b) + x < 0.$$

因此 $a + (-b + x) \in 0^*$. 这表明 $\alpha + \beta \leq 0^*$.

(ii) 任取 $c \in 0^*$, 即 $c < 0$. 则存在 $a \in \alpha, b \in \mathbb{Q}\backslash\alpha$ 使得 $b - a < 0 - c$, 即 $a - b > c$. 于是存在 $x < 0$ 使得 $a - b + x = c$, 即 $a + (-b + x) = c$. 因此 $c \in \alpha + \beta$. 这表明 $0^* \leq \alpha + \beta$.

综上可知 $\alpha + \beta = \beta + \alpha = 0^*$. 于是可知 β 是 α 的负元. ■

注 设 $\alpha \in \mathbb{R}$, 容易想到如下构造它的负元

$$\beta = \{-b : b \in \mathbb{Q}\backslash\alpha\}.$$

但这样定义的 β 可能会有最大元素. 例如当 $\alpha = \{a \in \mathbb{Q} : a < 5\}$ 时, $\min\{\mathbb{Q}\backslash\alpha\} = 5$, 于是 $\max\beta = -5$.

综上我们验证了 $\mathbb{R}$ 中的加法运算满足域公理.

由命题0.16可知零元是唯一的. 我们规定 $\mathbb{R}^* := \mathbb{R}\backslash\{0^*\}$. 有了零元, 我们可以规定大于 0^* 的是正实数, 小于 0^* 的是负实数. 全体正实数和全体负实数的集合分别记作 $\mathbb{R}^+$ 和 $\mathbb{R}^-$.

由于 $\mathbb{R}$ 上的加法满足结合律, 由命题0.17可知任意实数 α 都有唯一的负元, 记作 $-\alpha$. 有了负元, 我们可以定义实数的减法:

$$\alpha - \beta := \alpha + (-\beta).$$

不难证明加法满足保序性.

命题 2.3 (加法保序性)

在实数域 $\mathbb{R}$ 中, 若 $\alpha \leq \beta$, 则 $\alpha + \gamma \leq \beta + \gamma$.

证明 任取 $d \in \alpha + \gamma$, 令 $d = a + c$, 其中 $a \in \alpha, c \in \gamma$. 由于 $\alpha \leq \beta$, 故 $\alpha \subseteq \beta$, 故 $a \in \beta$. 因此 $d \in \beta + \gamma$. 于是可知 $\alpha + \gamma \subseteq \beta + \gamma$, 即 $\alpha + \gamma \leq \beta + \gamma$. ■

下面来定义 $\mathbb{R}$ 上的乘法运算. 乘法运算涉及到正负数的符号问题. 我们可以先规定正实数的情况, 然后再去规定其他情况的符号.

定义 2.5 (实数集上的乘法)

在实数集 $\mathbb{R}$ 上规定一个加法运算:

$$\begin{aligned}\mathbb{R}\times\mathbb{R}&\to\mathbb{R}\\(\alpha,\beta)&\mapsto\alpha\cdot\beta,\end{aligned}$$

其中 $\alpha\cdot\beta$ 的规定如下. 当 $\alpha>0^*$ 且 $\beta>0^*$ 时, 规定

$$\alpha\cdot\beta=\{c:c<a\cdot b,\ a\in\alpha,\ a>0,\ b\in\beta,\ b>0\}.$$

其余情况规定为

$$\alpha\cdot\beta=\begin{cases}(-\alpha)\cdot(-\beta), & \alpha<0^* \text{ 且 } \beta<0^*\\ -[(-\alpha)\cdot\beta], & \alpha<0^* \text{ 且 } \beta>0^*\\ -[\alpha\cdot(-\beta)], & \alpha>0^* \text{ 且 } \beta<0^*\\ 0^*, & \alpha=0^* \text{ 或 } \beta=0^*\end{cases}.$$

类似地, 可以验证实数的乘法也是良定义的.

命题 2.4 (实数乘法是良定义的)

对于任意 $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ 都有 $\alpha\cdot\beta\in\mathbb{R}$.

下面来看实数乘法的运算律.

命题 2.5 (实数乘法的运算律)

实数集 $\mathbb{R}$ 的乘法运算满足:

(1) 乘法结合律: $(\alpha\cdot\beta)\cdot\gamma=\alpha\cdot(\beta\cdot\gamma)$ $(\forall\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R})$.

(2) 乘法交换律: $\alpha\cdot\beta=\beta\cdot\alpha$ $(\forall\alpha,\beta\in\mathbb{R})$.

(3) 乘法单位元: 对于任一 $\alpha\in\mathbb{R}$ 都存在 $1^*\in\mathbb{R}$ 使得 $\alpha\cdot1^*=1^*\cdot\alpha=\alpha$.

(4) 乘法逆元: 对于任一 $\alpha\in\mathbb{R}^*$ 都存在 $\alpha^{-1}\in\mathbb{R}$ 使得 $\alpha\cdot\alpha^{-1}=\alpha^{-1}\cdot\alpha=1$.

(5) 乘法对加法的分配律: $(\alpha+\beta)\cdot\gamma=\alpha\cdot\gamma+\beta\cdot\gamma$ $(\forall\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R})$.

证明 只证明 (3), (4), (5).

(3) 令

$$1^*:=\{a\in\mathbb{Q}:a<1\}.$$

显然 1^* 满足向下封闭且没有最大元素, 因此 $1^*\in\mathbb{R}$. 类似零元的验证方法, 我们可以证明, 对于任一 $\alpha\in\mathbb{R}^+$ 都有 $\alpha\cdot1^*=\alpha$. 由于对于任一 $\alpha\in\mathbb{R}$ 都有 $\alpha=-(-\alpha)$. 因此当 $\alpha\in\mathbb{R}^-$ 时

$$\alpha\cdot1^*=-[(-\alpha)\cdot1^*]=-(-\alpha)=\alpha.$$

当 $\alpha=0^*$ 时

$$\alpha\cdot1^*=0^*=\alpha.$$

综上可知, 对于任一 $\alpha\in\mathbb{R}$ 都有 $\alpha\cdot1^*=\alpha$. 于是可知 1^* 是 $\mathbb{R}$ 上的乘法单位元.

(4) 对于任一 $\alpha\in\mathbb{R}^+$, 令

$$\alpha^{-1}:=\left\{a^{-1}x:a\in\mathbb{Q}\backslash\alpha,\ x\in1^*\right\}\cup\mathbb{Q}^-\cup\{0\}.$$

容易验证 α^{-1} 向下封闭且无最大元素. 对于任一 $\alpha\in\mathbb{R}^-$, 令

$$\alpha^{-1}:=-\left(-\alpha^{-1}\right).$$

类似加法逆元的证明方法, 我们可以证明 $\alpha\cdot\alpha^{-1}=1^*$.

(5) 先证明第一种情况: $\alpha\cdot(\beta+\gamma)=\alpha\cdot\beta+\alpha\cdot\gamma$ $(\forall\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}^{+})$.

(i) 任取 $a\in\alpha, b\in\beta, c\in\gamma$. 则

$$a(b+c)=ab+ac\in\alpha\cdot\beta+\alpha\cdot\gamma.$$

这表明 $\alpha\cdot(\beta+\gamma)\leq\alpha\cdot\beta+\alpha\cdot\gamma$.

(ii) 任取 $a\in\alpha, b\in\beta, c\in\gamma$.

$$ab+ac=a(b+c)\in\alpha\cdot(\beta+\gamma).$$

这表明 $\alpha\cdot(\beta+\gamma)\leq\alpha\cdot\beta+\alpha\cdot\gamma$.

于是可知 $\alpha\cdot(\beta+\gamma)=\alpha\cdot\beta+\alpha\cdot\gamma$.

其余情况我们只证明一种. 设 $\alpha>0^{*},\beta<0^{*},\gamma>0^{*}$ 且 $\beta+\gamma>0^{*}$. 则

$$\alpha\cdot\gamma=\alpha\cdot[(-\beta)+(\beta+\gamma)]=\alpha\cdot(-\beta)+\alpha\cdot(\beta+\gamma)=-(\alpha\cdot\beta)+\alpha\cdot(\beta+\gamma).$$

于是可知 $\alpha\cdot(\beta+\gamma)=\alpha\cdot\beta+\alpha\cdot\gamma$. ■

由命题0.16可知乘法单位元也是唯一的. 结合律可以确保 α 有唯一的乘法逆元 α^{-1}. 有了乘法逆元, 我们可以定义实数的除法:

$$\alpha/\beta:=\alpha\cdot\beta^{-1},\quad \forall\alpha\in\mathbb{R},\ \forall\beta\in\mathbb{R}^{*}.$$

综上我们验证了 $\mathbb{R}$ 中的乘法运算也满足域公理. 于是我们验证了 $(\mathbb{R},+,\cdot)$ 是一个域. 以后我们经常称它为**实数域** (real number field), 简称**实域** (real field).

由实数乘法的定义, 乘法保序性显然成立.

命题 2.6 (乘法保序性)

在实数域 $\mathbb{R}$ 中, 若 $0^{*}\leq\alpha$ 且 $0^{*}\leq\beta$, 则 $0^{*}\leq\alpha\cdot\beta$.

由于 $\mathbb{R}$ 是一个全序集, 因此 $\mathbb{R}$ 也是一个有序域. 由于实数的加法和乘法都满足保序性, 因此我们可以推出实数满足和有理数域完全一样的关于有序域的性质, 包括命题1.36和命题1.37.

到现在为止我们定义的 $\mathbb{R}$ 中的元素是 "有理数组成的集合". 我们希望 $\mathbb{R}$ 可以包含 $\mathbb{Q}$. 为此, 只需在 $\mathbb{R}$ 中找一个子集, 使得 $\mathbb{Q}$ 与这个子集同构.

命题 2.7

设 $\mathbb{R}$ 的一个真子集

$$\widetilde{\mathbb{Q}}=\{\beta\in\mathbb{R}:\mathbb{Q}\backslash\beta \text{ 中存在最小元素}\}.$$

令

$$\sigma:\mathbb{Q}\to\widetilde{\mathbb{Q}},$$
$$b\mapsto\beta,$$

其中 $\beta=\{x\in\mathbb{Q}:x<b\}$. 则 σ 是一个 $\mathbb{Q}$ 到 $\widetilde{\mathbb{Q}}$ 的一个环同构, 即它是一个双射, 且对于任一 $a,b\in\mathbb{Q}$ 都满足

$$\sigma(a+b)=\sigma(a)+\sigma(b).$$
$$\sigma(a\cdot b)\cdot\sigma(b)=\sigma(a)\cdot\sigma(b).$$

一旦证明 $\mathbb{Q}\cong\widetilde{\mathbb{Q}}$, 就可以把 $\mathbb{Q}$ 和 $\widetilde{\mathbb{Q}}$ 等同起来, 于是 $\mathbb{Q}\subsetneq\mathbb{R}$. 事实上 $0^{*},1^{*}\in\widetilde{\mathbb{Q}}$, 既然 $\mathbb{Q}$ 和 $\widetilde{\mathbb{Q}}$ 可以等同起来, 那么今后 $\mathbb{R}$ 中的 0^{*} 和 1^{*} 可以直接记作 0 和 1.

用同样的方法可以证明定理1.11在实数域继续成立. 因此实数域中也可以定义取整函数.

有理数域中的整数次幂的指数运算可以推广到实数域中. 且可以类似地证明相关性质继续成立. 包括命题1.32.

有理数域中定义的绝对值和距离函数的概念可以推广到实数域中. 且可以类似地证明相关性质继续成立. 包括命题1.10和命题**??**.

2.2 实数域的完备性

我们已经知道有理数域 $\mathbb{Q}$ 是稠密的. 不难证明实数域 $\mathbb{R}$ 也是稠密的.

定理 2.1 (实数域的稠密性)

对于任意 $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, 若 $\alpha < \beta$, 则一定存在 $\gamma \in \mathbb{R}$ 满足 $\alpha < \gamma < \beta$.

证明 令 $\gamma = (\alpha + \beta)/2$. 由于 $\alpha < \beta$, 故

$$2\alpha < \alpha + \beta < 2\beta \iff \alpha < \frac{\alpha+\beta}{2} < \beta \iff \alpha < \gamma < \beta. \quad \blacksquare$$

任意两个有理数中间一定还存在有理数, 虽然如此有理数依旧无法 "铺满" 数轴. 其中充满了 "空隙". 因此用这个方式不足以刻画实数的 "完备性". 下面我们将介绍几种刻画实数 "完备性" 的方法.

2.2.1 Dedekind 定理

我们知道, 有理数域 $\mathbb{Q}$ 上的 Dedekind 分割可能会出现上集中无最小元素的情况. 这说明有理数域存在 "空隙". 既然如此, 我们可以考察实数域 $\mathbb{R}$ 上的 Dedekind 分割, 看看它们的上集是不是一定有最小元素.

定理 2.2 (Dedekind 定理)

对于实数域 $\mathbb{R}$ 上的任一 Dedekind 分割 $A \mid B$, 上集 B 中都有最小元素.

证明 令 A 中所有有理数组成的集合为 α, B 中所有有理数组成的集合为 β. 由于 $A \mid B$ 是一个 Dedekind 分割, 因此 $A \cup B = \mathbb{R}$ 且 $A \cap B = \varnothing$. 因此 $\alpha \cup \beta = \mathbb{Q}$ 且 $\alpha \cap \beta = \varnothing$. 因此 $\{\alpha, \beta\}$ 是 $\mathbb{Q}$ 上的一个划分.

α 显然满足向下封闭. 任取 $a \in \alpha \subseteq A$, 由于 A 中无最大元素, 故存在 $\gamma \in A$ 满足 $a < \gamma$. 于是一定存在 $a' \in \mathbb{Q}$ 满足 $a < a' < \gamma$. 由于 $a' \in \alpha$, 因此 α 中也无最大元素. 于是可知, 我们得到了一个 $\mathbb{Q}$ 上的一个 Dedekind 分割 $\alpha \mid \beta$. 因此下集 α 可以看作一个实数. 它一定属于 A 或 B.

假设 $\alpha \in A$. 由于 A 中无最大元素, 故 A 中存在有理数 $p > \alpha$. p 可以看作一个 Dedekind 分割下集. 则 $p \supsetneq \alpha$. 因此有理数 $p \in \beta$, 于是 $p \in B$, 这与 $p \in A$ 矛盾. 因此 $\alpha \in B$.

假设 α 不是 B 中的最小元素, 则 B 中存在有理数 $q < \alpha$. q 可以看作一个 Dedekind 分割下集. 则 $q \subsetneq \alpha$. 因此有理数 $q \in \alpha$, 于是 $q \in A$, 这与 $q \in B$ 矛盾. 因此 α 就是 B 中的最小元素. $\blacksquare$

Dedekind 定理表明实数域确实没有 "空隙", 因此 Dedekind 定理刻画了实数域的**完备性** (Completeness). 后面我们还会从不同角度刻画实数域的完备性.

2.2.2 确界原理

Dedekind 分割 $A \mid B$ 中, 下集 A 的任一元素都小于 B 中任一元素. 从直观上看, A 是有 "上界的", 而 B 是有 "下界的". 下面我们从这个角度来讨论实数域的完备性.

定义 2.6 (上确界和下确界)

设非空集合 $E \subseteq \mathbb{R}$. 若存在 $M > 0$ 使得 $|x| < M$ $(\forall x \in E)$, 则称 E 是**有界的** (bounded).

(1) 若存在 $M \in \mathbb{R}$ 使得任一 $x \in E$ 都有 $x \leq M$, 则称 M 是 E 的一个**上界** (upper bound). 若对于任一 $\varepsilon > 0$ 都存在 x_ε, 使得 $x_\varepsilon > M - \varepsilon$, 则称 M 是 E 的**上确界** (supremum).

(2) 若存在 $m \in \mathbb{R}$ 使得任一 $x \in E$ 都有 $x \geq m$, 则称 m 是 E 的一个**下界** (lower bound). 若对于任一 $\varepsilon > 0$ 都存在 x_ε, 使得 $x_\varepsilon < m + \varepsilon$, 则称 m 是 E 的**下确界** (infimum).

注 显然, 集合有界当且仅当它同时有上界和下界.

注 以上定义表明, 上确界是最小的上界; 下确界是最大的下界.

很自然地, 我们会问有上界 (或下界) 时, 是否一定有上确界 (或下确界)? 不难想到, 如果 E 中有最大值 (或最小值) 那么上确界 (或下确界) 立刻可以看出.

命题 2.8

设集合 $E \subseteq \mathbb{R}$.

(1) 若存在 $M = \max E$, 则 $\sup E = M$.

(2) 若存在 $M = \min E$, 则 $\inf E = m$.

证明 只证明 (1) 的情况. 由于 $M = \max E$, 故对于任一 $x \in E$ 都有 $x \leq M$. 因此 M 是 E 的一个上界. 任取 ε, 则存在 $x_\varepsilon = M$ 满足 $x_\varepsilon > M - \varepsilon$, 因此 $M = \sup E$. ■

下面我们来看一个上确界和下确界的重要例子.

例 2.4 设集合 $E = \{1/n : n \in \mathbb{N}^*\}$. 求 $\sup E$ 和 $\inf E$.

证明 不难看出 1 和 0 分别是 E 的上界和下界. 由于 $1 = \max E$, 因此 $\sup E = 1$. 对于任一 $\varepsilon > 0$, 只需取 $n = [1/\varepsilon]+1$ 就有

$$n > \frac{1}{\varepsilon} \iff \frac{1}{n} < 0 + \varepsilon.$$

这表明 $\inf E = 0$. ■

注 以上例子告诉我们, 集合 E 的上确界或下确界可能属于 E, 也可能不属于 E.

注 在下一章我们将看到, 0 是数列 $1/n$ $(n = 1, 2, \cdots)$ 的 "极限". 我们将用类似的思想来定义 "极限".

下面来证明另一种情况.

定理 2.3 (确界原理)

设非空集合 $E \subseteq \mathbb{R}$.

(1) 若 E 有上界, 则 E 一定有上确界, 且 $\sup E \in \mathbb{R}$.

(2) 若 E 有下界, 则 E 一定有下确界, 且 $\inf E \in \mathbb{R}$.

证明 只证明 (1) 的情况. E 中有最大元素的情况已经证明. 下设 E 中无最大元素. 令 E 的所有上界组成的集合为 B, 令 $A = \mathbb{R} \backslash B$. 下面来证明 $A|B$ 是一个 Dedekind 分割.

(i) 对于任意 $x, y \in \mathbb{R}$, 其中 $x < y$. 若 $y \in A$, 则 $y \notin B$, 这表明 y 不是 E 的上界, 因此存在 $t \in E$ 满足 $x < y < t$. 因此 x 也不是 E 的上界, 因此 $x \in A$. 于是可知 A 向下封闭.

(ii) 任取 $\alpha \in A$, 则 α 不是 E 的上界. 于是存在 $x \in E$ 使得 $x > \alpha$. 由于 E 中无最大元素, 故存在 $y \in E$ 使得 $y > x$. 因此 x 也不是 E 的上界, 因此 $x \in A$. 于是可知 A 中无最大元素.

综上可知 $A \mid B$ 是一个 $\mathbb{R}$ 上的一个 Dedekind 分割. 由 Dedekind 定理可知 B 中存在最小元素. 这表明 E 存在上确界. ■

注 确界原理也称为**最小上界性** (Least-upper-bound property, LUB). 它是刻画实数域完备性的第 2 个定理.

命题 2.9

设非空集合 $E \in \mathbb{R}$. 令 $-E := \{-x : x \in E\}$, 则

(1) 若 E 有上确界, 则 $-E$ 有下确界, 且 $\inf(-E) = -\sup E$.

(2) 若 E 有下确界, 则 $-E$ 有上确界, 且 $\sup(-E) = -\inf E$.

证明 只证明 (1). 令 $M = \sup E$. 则对于任一 $x \in E$ 都有 $x \leq M$, 且对于任一 $\varepsilon > 0$ 都存在 $x_\varepsilon \in E$ 使得 $x_\varepsilon > M - \varepsilon$. 于是对于任一 $-x \in -E$ 都有 $-x \geq -M$, 且对于任一 $\varepsilon > 0$ 都存在 $-x_\varepsilon \in -E$ 使得 $-x_\varepsilon < -M + \varepsilon$. 这表明

$\inf(-E) = -M$. ■

确界原理从另一个角度刻画了实数域的完备性. 我们已经用 Dedekind 定理证明了确界原理. 反过来确界原理也可以证明 Dedekind 定理.

定理 2.4

Dedekind 定理和确界原理是等价的.

证明 假设确界原理成立, 要证明 Dedekind 定理成立.

设实数域 $\mathbb{R}$ 上的任一 Dedekind 分割 $A \mid B$. 容易知道 A 中的任一元素都是 B 的一个下界, 由确界原理可知 B 存在下确界. 令 $m = \inf B$. 假设 $m \notin B$, 则 $m \in A$. 由于 A 中无最大元素, 因此存在 $m' \in A$ 使得 $m < m'$. 由于 $m = \inf B$ 故 m' 不是 B 的下界. 因此 $m' \in B$. 这与 $m' \in A$ 矛盾, 因此假设不成立. 于是可知 B 中存在最小值. 于是可知 Dedekind 定理成立. ■

确界原理可以推出一个重要的结论.

定理 2.5 (Archimedes 性质)

对于任一 $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$, 一定存在 $n \in \mathbb{N}^*$ 满足 $n\alpha \geq \beta$.

证明 用反证法. 假设对于任一 $n \in \mathbb{N}^*$ 都有 $na < b$. 令 $S = \{x : x = na,\ n \in \mathbb{N}^*\}$, 则 b 是 S 的一个上界. 由确界原理可知存在上确界, 设这个上确界为 β, 则

$$(n+1)a < \beta \iff na < \beta - a.$$

这与 β 是 S 的上确界矛盾. 因此假设不成立. 于是可知一定存在 $n \in \mathbb{N}^*$ 满足 $na \geq b$. ■

令以上定理中的 $\alpha = 1$ 或 $\beta = 1$ 即得以下推论.

推论 2.1

对于任一 $\alpha \in \mathbb{R}^+$

(1) 存在 $n \in \mathbb{N}^*$ 满足 $n \geq a$.

(2) 存在 $m \in \mathbb{N}^*$ 满足 $1/n \leq a$.

反过来 Archimedes 性质推不出实数的完备性, 因为有理数域也有 Archimedes 性质.

2.2.3 Heine-Borel 定理

从实数轴上取一小段 $[0, 1]$, 这一小段上没有任何 "缝隙", 包括两个端点. 前面已经用 Dedekind 定理和确界原理刻画了这个性质. 下面尝试从几何的角度来刻画这个性质. 我们考虑用开区间去盖住它. 为了方便叙述, 我们先定义一些名词.

定义 2.7 (开覆盖)

设集合 $E \subseteq \mathbb{R}$ 和一族开区间 $\{I_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$, 其中 Λ 是一个指标集. 若

$$E \subseteq \bigcup_{\lambda \in \Lambda} I_\lambda.$$

则称 $\{I_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ 是 E 的一个**开覆盖** (open cover), 记作 C_E. 若 E 有一个开覆盖 $C'_E \subseteq C_E$, 则称 C'_E 是 C_E 的一个**子覆盖** (subcover). 若这个子覆盖只含有有限个开区间, 则称它是一个**有限子覆盖** (finite subcover).

显然 $[0, 1]$ 一定一个开覆盖, 而且不止一个. 现在任取一个它的开覆盖 C, 我们希望用其中尽量少的开区间盖住 $[0, 1]$. 我们先从 C 找一个开区间 I_0 把左端点 0 盖住. 此时 0 的右侧一定有一点 x_0 被 I_0 盖住. 因此闭区间 $[0, x_0]$ 就被 I_0 盖住了. 也就是说对于这个小区间 $[0, x_0]$ 而言存在一个有限覆盖. 接下来我们希望在 x_0 的右侧继续找到

这样的点 x_1 使得 $[0, x_1]$ 也存在一个有限覆盖. 从几何直观来看这个过程可以不断继续下去并得到不断向右的一列点 $x_0, x_1, x_2, \cdots$. 那么是否可以证明有限个开区间可以把整个 $[0,1]$ 盖住呢?

定理 2.6 (Heine-Borel 定理)

有限闭区间的任一开覆盖都存在一个有限子覆盖.

证明 设有限闭区间 $[a,b]$, 任取它的一个开覆盖 $C = \{I_\lambda\}$. 令

$$E = \{x : x \in (a,b],\ \text{且}\ [a,x]\ \text{存在一个}\ C\ \text{的有限覆盖}\}.$$

由于 C 是 $[a,b]$ 的一个开覆盖, 故一定存在开区间 $I_0 \in C$ 使得 $a \in I_0$. 于是一定存在 $x_0 \in I_0$ 满足 $x_0 > a$. 这表明 $E \neq \varnothing$. 显然 b 是 E 的一个上界. 由确界原理可知 E 有上确界. 令 $M = \sup E$. 下面来证明 $M = b$.

用反证法. 假设 $M < b$, 则 $M \in [a,b]$. 由于 C 是 $[a,b]$ 的一个开覆盖, 故存在开区间 $I_{\lambda_1} \in C$ 使得 $M \in I_1$. 于是存在 $\delta > 0$ 使得 $(M-\delta, M+\delta) \subseteq I_1$. 由于 M 是 E 的上确界, 因此 $M - \delta \in E$, 即 $[a, M-\delta]$ 存在 C 的一个有限子覆盖 C'. 于是 $[a, M+\delta]$ 有一个 C 的有限子覆盖 $C' \cup I_1$. 因此 $M + \delta \in E$. 这与 M 是 E 的上确界矛盾. 因此假设不成立. 于是可知 $M = b$. 这就证明了 $[a,b]$ 存在一个 C 的有限子覆盖. ■

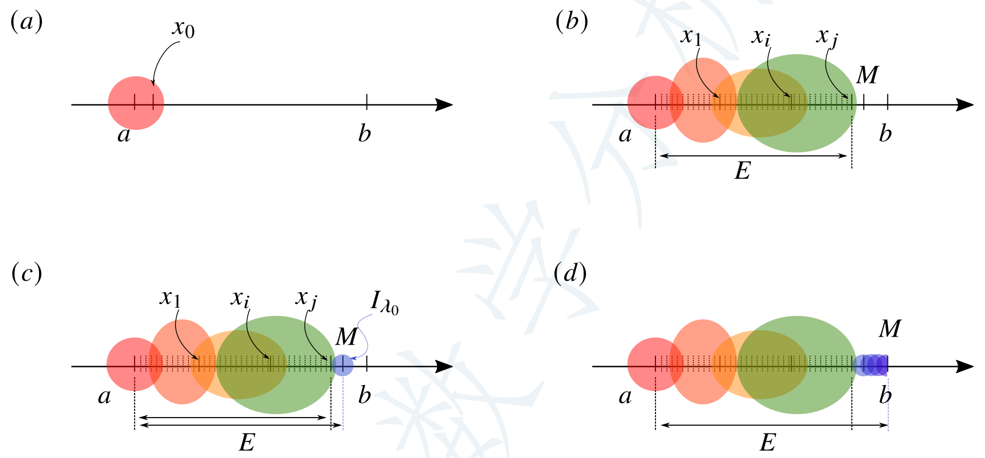

图 2.2: Heine-Borel 定理证明过程示意图.

注 以上定理也称为***有限覆盖定理*** (finite cover theorem). 它是刻画实数域完备性的第 3 个定理. 法国数学家 Émile Borel 于 1895 年第一次陈述并证明了现代形式的 Heine-Borel 定理.

以上定理证实了我们的猜测. 那么如果区间 $[0,1]$ 上有 "空隙", 是否还可以找到一个有限子覆盖呢? 为了简单起见, 我们从 $[0,1]$ 中挖去一个点 $\{0\}$. 这时这个区间就出现了 "空隙". 下面来讨论这个问题.

例 2.5 设区间 $(0,1]$, 和一族开区间

$$C = \left\{ I_n = \left(\frac{1}{n}, 2\right) : n = 1, 2, \cdots \right\}.$$

则 C 是 $(0,1]$ 的一个开覆盖, 但它不存在有限子覆盖.

证明 (i) 任取 $\varepsilon \in (0,1]$, 一定存在 $n_\varepsilon = [1/\varepsilon] + 1$, 则

$$n_\varepsilon > \frac{1}{\varepsilon} \iff \varepsilon > \frac{1}{n_\varepsilon}.$$

这表明存在一个开区间 $I_{n_\varepsilon} \in C$ 使得 $\varepsilon \in I_{n_\varepsilon}$. 于是可知 C 是 $(0,1]$ 的一个开覆盖.

(ii) 用反证法, 假设存在一个有限子覆盖 $C' \subseteq C$, 设 $C' = \{I_{k_1}, I_{k_2}, \cdots, I_{k_n}\}$. 令

$$M = \max\{k_1, k_2, \cdots, k_n\}.$$

则一定存在 $\delta \in (0, 1/M)$, 这说明 C' 没有盖住 δ, 因此 C' 不是 $(0,1]$ 的开覆盖. 出现矛盾. 因此假设不成立. 于是可知 $(0,1]$ 的开覆盖 C 中不存在有限子覆盖. ■

从以上讨论中我们发现, 如果在数轴上取下的一段 ''紧致无缝'' 的集合 (含端点), 那么就可以从它的任一开覆盖中取出一个有限子覆盖, 否则就不行. 这表明我们找到了一个刻画实数集完备性的新方法. 我们形象地把这个性质称为**紧致性** (compactness).

定义 2.8 (紧致集)

设集合 $E \subseteq \mathbb{R}$. 若 E 的任一开覆盖都存在一个有限子覆盖, 则称 E 是 $\mathbb{R}$ 上的一个**紧致集** (compact set). ♣

注 '' 紧致集'' 也称为 ''紧集''. 它是一个重要的 ''拓扑概念'', 我们将在后面详细介绍这类集合.
注 以后我们会直接称以上条件为 "Heine-Borel 条件"

根据以上定义我们可以把 Heine-Borel 定理表述为以下形式.

定理 2.7 (Heine-Borel 定理)

$\mathbb{R}$ 中的任一有限闭区间都是紧致集. ♡

注 因此 Heine-Borel 定理也称为**紧致性定理** .'紧致集'' 也可以称为 ''紧集'', 其余类推. 这些拓扑概念我们将在后面详细介绍.

最后来证明 Heine-Borel 定理、Dedekind 定理和确界原理三者全是等价的. 由于前面已经证明 Dedekind 定理和确界原理等价, 因此只需证明 Heine-Borel 定理和确界原理等价.

定理 2.8

Dedekind 定理、确界原理、Heine-Borel 定理全部等价. ♡

证明 只需证明: 当 Heine-Borel 定理成立时确界原理成立.

设非空集合 S 有上界, 设 b 是它的一个上界. 若 S 中存在最大值, 则 S 有上确界. 下设 S 中没有最大值. 用反证法, 假设 S 的上确界不存在. 取 $a \in S$. 下面来构造 $[a,b]$ 的一个开覆盖. 令

$$C = \{N_\delta(x) = (x-\delta, x+\delta) : x \in [a,b]\}.$$

其中 δ 由下述方法产生:

(i) 当 x 是 S 的一个上界时, 由于 S 没有上确界, 故存在 S 的一个上界 x' 满足 $x' < x$. 令 $\delta = x - x'$. 此时 $N_\delta(x)$ 中的点都是 S 的上界.

(ii) 当 x 不是 S 的上界时, 存在 $a' \in S$ 满足 $a' > x$. 令 $\delta = a' - x$. 此时 $N_\delta(x)$ 中的点都不是 S 的上界.

显然上述构造的 C 是 $[a,b]$ 的一个开覆盖. 由 Heine-Borel 定理可知 C 存在有限子覆盖 C'. 在 C' 取出所有满足第 (i) 类开区间, 由于只有有限个, 因此可以设它们的左端点的最小值为 m, 显然 m 是 S 的一个上界. 此时 $N_\delta(m)$ 也是第 (i) 类开区间, 但 $N_\delta(m)$ 的左端点会小于 m 出现矛盾. 因此假设不成立. 因此 S 必有上确界. 这就证明了确界原理成立. ■

勘误: 第 66 页 1. 紧致集的定义应该是任意开覆盖都存在一个 "有限" 子覆盖, 漏了 ''有限''. 2. 定理 2.8 的证明第二行, 若 S 中存在最大值, 则 S 有 "上界", 应该是 "上确界" .

2.2.4 实数公理

现在我们来总结我们定义的实数集 $\mathbb{R}$ 所满足的性质. 首先, $\mathbb{R}$ 中定义了序关系, 它是一个全序关系, 且对加法和乘法运算满足保序性. 其次, $\mathbb{R}$ 中定义了两种运算: 加法和乘法, 它们满足域公理, 因此 $\mathbb{R}$ 是一个域. 最后 $\mathbb{R}$ 还具有完备性. 至此, 我们完成了实数集 $\mathbb{R}$ 的构造工作.

我们也可以用公理化的方法直接定义实数, 只需把总结的上述性质直接作为公理.

公理 2.1 (实数公理)

设非空集合 $\mathbb{R}$. 在 $\mathbb{R}$ 中有两个不同的元素 1 和 0. 在 $\mathbb{R}$ 上定义一种二元关系小于等于 $\leq$, 再定义两种二元运算加法 $+$ 和乘法 $\cdot$. 若满足以下公理:

(1) 序公理: $(\mathbb{R}, +, \cdot, \leq)$ 成为一个全序集且与且对加法和乘法运算满足保序性, 即满足

I 自反性: $\alpha \leq \alpha$ $(\forall \alpha \in \mathbb{R})$.

II 反对称性: 若 $\alpha \leq \beta$ 且 $\beta \leq \alpha$, 则 $\alpha = \beta$ $(\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R})$.

III 传递性: 若 $\alpha \leq \beta$ 且 $\beta \leq \gamma$, 则 $\alpha \leq \gamma$ $(\forall \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R})$.

IV 完全性: $\alpha \leq \beta$ 或 $\alpha \geq \beta$ $(\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R})$.

V 加法保序性: 若 $\alpha \leq \beta$, 则 $\alpha + \gamma \leq \beta + \gamma$ $(\forall \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R})$.

VI 乘法保序性: 若 $0 \leq \alpha$ 且 $0 \leq \beta$, 则 $0 \leq \alpha \cdot \beta$ $(\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R})$.

(2) 域公理: $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ 成为一个域, 即满足

I 加法结合律: $(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$ $(\forall \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R})$.

II 加法交换律: $\alpha + \beta = \beta + \alpha$ $(\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R})$.

III 加法零元: 对于任一 $\alpha \in \mathbb{R}$ 都存在 $0 \in \mathbb{R}$ 使得 $\alpha + 0 = 0 + \alpha = \alpha$.

IV 加法负元: 对于任一 $\alpha \in \mathbb{R}$ 都存在 $-\alpha \in \mathbb{R}$ 使得 $\alpha + (-\alpha) = 0$.

V 乘法结合律: $(\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma = \alpha \cdot (\beta \cdot \gamma)$ $(\forall \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R})$.

VI 乘法交换律: $\alpha \cdot \beta = \beta \cdot \alpha$ $(\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R})$.

VII 乘法单位元: 对于任一 $\alpha \in \mathbb{R}$ 都存在 $1 \in \mathbb{R}$ 使得 $\alpha \cdot 1 = 1 \cdot \alpha = \alpha$.

VIII 乘法逆元: 对于任一 $\alpha \in \mathbb{R}^*$ 都存在 $\alpha^{-1} \in \mathbb{R}$ 使得 $\alpha \cdot \alpha^{-1} = 1$.

IX 乘法对加法的分配律: $(\alpha + \beta) \cdot \gamma = \alpha \cdot \gamma + \beta \cdot \gamma$ $(\forall \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R})$.

(3) 完备性公理: $(\mathbb{R}, \leq)$ 成为一个完备集, 即满足最小上界性.

则称 $\mathbb{R}$ 是一个**实数集** (set of real numbers).

注 实数公理分成了三大块: 它们分别描述了实数集的 ‘‘序结构’’、‘‘代数结构’’ 和 ‘‘拓扑结构’’. 这种分类方法是法国数学家团体 Nicolas Bourbaki 提出的. 他们试图用这个方法研究一切数学对象.

注 实数的完备性可以用 7 个等价的定理刻画. 本章已经介绍了其中 3 个. 下一章我们将引入数列极限的概念, 继续介绍另外 4 个.

注 用 ‘‘完备性’’ 来概括实数集的拓扑结构是十分 ‘‘粗糙的’’. 事实上, 实数集具有非常好的拓扑性质. 在后续内容中我们将看到, 实数集上可以研究 ‘‘完备性’’、‘‘稠密性’’、‘‘紧致性’’、‘‘列紧性’’、‘‘连通性’’、‘‘可分性’’ 等丰富的拓扑性质.

我们还可以用十进制无尽小数来定义实数, 它形如

$$a.a_1a_2\cdots a_n\cdots,$$

其中 $a \in \mathbb{Z}$, a_1, a_n, $\cdots$ 都是 0 到 9 中的数码. 我们可以一一定义无尽小数的加法和乘法, 序关系, 并证明它们可以满足所有实数公理. 在此不再一一演示.

无尽小数可以分为循环的和不循环的.

定义 2.9 (循环小数)

形如以下的无尽小数称为循环小数:

$$a.a_1\cdots a_n\dot{b}_1\cdots\dot{b}_m := a.a_1\cdots a_n\underbrace{b_1\cdots b_m}_{\text{循环节}}\underbrace{b_1\cdots b_m}_{\text{循环节}}\cdots$$

规定

$$a.a_1\cdots a_n = a.a_1\cdots a_n\dot{0} = a'.a_1'\cdots a_n'\dot{9},$$

其中
$$a.a_1\cdots a_n = a'.a_1'\cdots a_n' + 10^{-n}.$$

注 为了使小数的表示唯一, 我们规定遇到 $a'.a_1'\cdots a_n'\dot{9}$ 一律写成 $a.a_1\cdots a_n\dot{0}$.

我们知道任一有理数都可以化为循环小数. 不失一般性, 我们以著名的 "约率" 为例, 证明这个结论.

例 2.6 约率 我国南北朝时的著名数学家祖冲之算出的圆周率近似值用 22/7 表示, 称为 "约率". 把 22/7 化为循环小数.

解 用除法竖式计算得 $22/7 = 3.\dot{1}4285\dot{7}$.

我们把每一步的商和余数整理如下:

商	3	1	4	2	8	5	7	1	4	2	8	5	7	$\cdots$
余数	1	3	2	6	4	5	1	3	2	6	4	5	1	$\cdots$

可以看出当余数开始循环时商也随之开始循环. 由于带余除法的余数小于除数, 因此 7 的余数至多 7 种: $0, 1, \cdots, 6$. 于是可知 22/7 一定可以化为循环小数. ■

反之, 任一循环小数都可以化为分数.

例 2.7 把循环小数 $0.3\dot{1}4285\dot{7}$ 化为分数.

解 令 $a = 0.3\dot{1}4285\dot{7}$, 则
$$10^7(a-0.3) = 10(a-0.3) + 142857 \iff a = \frac{3142857-3}{9999990} = \frac{22}{70}.$$ ■

注 以上解法是不严格的, 严格的证明需要用数列的极限.

以上方法可以总结为以下命题.

命题 2.10 (循环小数化为分数)

设无尽循环小数
$$r = a.a_1\cdots a_n\dot{b}_1\cdots\dot{b}_m,$$
其中 $a\in\mathbb{Z}, a_1,\cdots,a_n, b_1,\cdots,b_m$ 都是数码. 则
$$r = a + \frac{a_1\cdots a_n b_1\cdots b_m - a_1\cdots a_n}{\underbrace{9\cdots9}_{m\text{ 个 }9}\underbrace{0\cdots0}_{n\text{ 个 }0}}$$

以上讨论证明了以下结论.

定理 2.9

循环小数和有理数一一对应. 从而不循环小数和无理数一一对应.

我们最熟悉的有理数形式是分数, 因此我们应该掌握循环小数化为分数的方法.

我们已经看到构造实数的方法不止一种: Dedekind 分割构造的实数是 "集合", 无尽小数构造的实数可以看作是一个 "无穷数码串", 我们也可以用一个有理数序列构造实数 (依据下一章的 Cauchy 收敛原理). 但可以证明它们都满足实数公理, 因此都可以看作是实数. 那么它们是同一种实数吗? 事实上任何完备的有序域都是同构的.

定理 2.10 (实数域的唯一性)

设 $(\mathbb{R}_1, +_1, \cdot_1, \leq_1)$ 和 $(\mathbb{R}_2, +_2, \cdot_2, \leq_2)$ 是完备的有序域, 即它们都满足实数公理. 则 $\mathbb{R}_1 \cong \mathbb{R}_2$, 即存在从 $\mathbb{R}_1$ 到 $\mathbb{R}_2$ 存在双射 σ, 对于任意 $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_1$ 都满足

$$\sigma(\alpha +_1 \beta) = \sigma(\alpha) +_2 \sigma(\beta).$$

$$\sigma(\alpha \cdot_1 \beta) = \sigma(\alpha) \cdot_2 \sigma(\beta).$$

$$\alpha \leq_1 \beta \Longrightarrow \alpha \leq_2 \beta.$$

以上定理表明, 不管通过什么手段构造出的实数域在同构意义下是唯一的. 以上定理的证明超过了本书的主题, 所以不需要大家掌握.

通过实数理论的探究, 我们第一次体会到了公理化思想的妙处. 在公理化定义之下, 满足公理的对象不止一种, 它们可以是不同的对象 (数、序列、函数、矩阵、方程、集合、图形等), 它们的 ''外观'' 可能非常不一样. 但它们在某种意义下可以看作是相同的 (同构). 这就是公理化思想的意义. 今后我们还会继续用这样的方法来研究其他的数学对象, 例如线性空间、度量空间、拓扑空间、群、环、域等.

2.3 集合的基数

从第一章中已经看到,用自然数的有序对可以构造整数. 自然数通过减法可以得到所有整数,严格来说就是以下映射是满的:

$$\mathbb{N}\times\mathbb{N}\to\mathbb{Z},$$
$$(m,n)\mapsto m-n.$$

类似地,整数通过除法可以得到所有有理数. 但有理数和实数之间无法写出类似的满射. 如果从集合中元素的个数角度考虑这几个数集的差异,容易想到自然数集、整数集和有理数集的 "差别不大",但实数集中的元素个数应该比它们多得多. 下面就来详细讨论这个问题.

2.3.1 集合的基数

"基数" 通常表示事物的数量. 对于一个有限集 A 而言,它的基数可以直接 "数出来",即可用一个自然数表示它的基数,记作 $\operatorname{card}A$ 或 $|A|$. 我们约定 $\varnothing$ 的基数为 0. 容易知道两个基数相等的有限集之间一定存在一个双射. 对于一个无限集,无法直接数出它的基数. 但我们仍可以用双射的角度刻画它的基数.

定义 2.10 (集合的对等)

设集合 A,B. 若存在一个 A 到 B 的双射,则称 A 与 B **对等** (equivalent),记作 $A\sim B$. ♣

注容易验证集合的对等关系满足自反性、对称性和传递性,因此它是一个等价关系.

定义 2.11 (集合的基数)

设集合 A,B.

(1) 若 $A\sim B$,则称 A 和 B 的**基数** (cardinal number) 或**势** (cardinality) 相等,记作 $|A|=|B|$,否则记作 $|A|\neq|B|$.

(2) 若存在 $A_1\subseteq A$ 满足 $A_1\sim B$,则称 A 的基数大于等于 B 记作 $|A|\geq|B|$.

(3) 若 $|A|\neq|B|$ 且 $|A|\geq|B|$,则称 A 的基数大于 B 记作 $|A|>|B|$. ♣

以上定义中的集合可以是有限集,也可以是无限集. 从集合基数的角度可以如下定义有限集.

定义 2.12 (有限集)

设集合 A. 若 $A=\varnothing$,或存在 $n\in\mathbb{N}^*$,使得集合 $\{1,2,\cdots,n\}\sim A$,则称集合 A 为**有限集** (finite set). ♣

有限集有以下两个很明显的结论.

命题 2.11

设有限集 A,则它的任一子集 A_1 仍是一个有限集,且 $|A_1|\leq|A|$. ♠

证明 设 $|A|=n$,令 $N=\{1,2,\cdots,n\}$. 则存在双射 $\sigma:A\to N$. 由于 $A_1\subseteq A$,故 $\sigma|_{A_1}:A_1\to\sigma(A_1)$ 也是一个双射. 显然 $\sigma(A_1)\subseteq N$. 把 $\sigma(A_1)$ 中的元素按大小顺序排成一列得

$$\sigma(A_1)=\{k_1,k_2,\cdots,k_m\}.$$

这表明存在一个 $\sigma(A_1)$ 到 $\{1,2,\cdots,m\}$ 的双射. 于是可知 A_1 仍是一个有限集. 且 $|A_1|=m\leq n=|A|$ ■

注 若 $A_1\subsetneq A$,则且 $|A_1|<|A|$.

命题 2.12

设有限集族 $\{A_i:i=1,2,\cdots,n\}$,则 $\bigcup_{i=1}^n A_i$ 仍是一个有限集. ♠

2.3.2 可数集

试问: 自然数集 $\mathbb{N}$ 和整数集 $\mathbb{Z}$ 的基数是否相等. 由于 $\mathbb{N} \subsetneq \mathbb{Z}$, 因此从直觉上看自然数的总数应该比整数少. 但这个直觉是错的. 下面来证明这个命题.

命题 2.13

整数集 $\mathbb{Z}$ 和自然数集 $\mathbb{N}$ 是对等的.

证明 把整数集中的所有元素排成一列

$$0,\ 1,\ -1,\ 2,\ -2,\ 3,\ -3,\ \cdots.$$

这样就可以建立一个 $\mathbb{N}$ 到 $\mathbb{Z}$ 的双射, 即

$$f(n)=\begin{cases} -\dfrac{n}{2}, & n \text{ 是一个偶数} \\ \dfrac{n+1}{2}, & n \text{ 是一个奇数} \end{cases}.$$

于是可知 $\mathbb{N} \sim \mathbb{Z}$. ■

于是引出了以下概念.

定义 2.13 (可数集)

设无限集 A. 若 $A \sim \mathbb{N}$, 即存在一个 A 到 $\mathbb{N}$ 的双射. 则称 A 是**可数的** (countable), 或**可列的** (enumerable, denumerable). 这样的集合称为**可数集** (countable set), 或**可列集** (enumerable set). 否则称 A 是**不可数的** (uncountable). 可数集的基数称为**可数基数**, 记作 $\aleph_0$.

注 若集合 A 是有限集或可数集, 则称为**至多可数集** (at most countable).

注 $\aleph$ 是 Hebrew 字母, 读作 “aleph”.

注 由以上定义可知集合是可数的当且仅当它的所有元素可以排成一列.

由于 $\mathbb{Z} \sim \mathbb{N}$, 因此整数集是可数的. 类似可证偶数集和奇数集也是可数的. 从这里可以看出无限集的基数和有限集很不一样. 有限集 A 的真子集 A_1 的基数一定小于 A 的基数. 但可数集可以和它的真子集对等.

定理 2.11

可数集的任一无限子集都是可数集.

证明 设可数集 A, 任取一个无限集 $E \subseteq A$. 把 A 中的所有元素排成一列得到序列 $\{x_n\}$. 下面来构造一个序列 $\{x_{n_k}\}$. 设 n_0 是满足 $x_{n_0} \in E$ 的最小自然数. 当选定 $n_0, n_1, n_2, \cdots, n_{k-1}$ 后, 令 n_k 是大于 n_{k-1} 且满足 $x_{n_k} \in E$ 的最小自然数. 这样我们就得到了序列 $\{x_{n_k}\}$. 由第二数学归纳原理可知 $\{x_{n_k}\}$ 的所有元素组成的集合就是 E. 令

$$\begin{aligned} \sigma : \mathbb{N} &\to E \\ k &\mapsto x_{n_k}. \end{aligned}$$

容易验证 σ 是一个双射. 因此 $\mathbb{N} \sim E$. 于是可知 A 的任一无限子集都是可数的. ■

注 以上命题的逆否命题为: 若集合 A 存在一个不可数的子集, 则 A 不可数.

以下结论是显然的.

推论 2.2

可数集的任一子集都是至多可数的.

推论 2.3

可数集的任一商集都是至多可数的.

用可数集的并可以造出“更大的”可数集.

命题 2.14 (可数集的可数并)

设一列可数集 C_n $(n=1,2,\cdots)$. 则集合 $C=\bigcup_{n=1}^{\infty}C_n$ 仍是可数的.

证明 由于 $C_1,C_2,\cdots$ 都是可数的, 故可令 C_n 中的元素排成一个序列 $\{x_{nk}\}$ $(k=1,2,\cdots)$. 作一个无限矩阵

$$\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} & \cdots \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & \cdots \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

按箭头方向依次取 $\boldsymbol{C}$ 中的元素, 则可得到一个包含 $\boldsymbol{C}$ 中的所有元素的序列

$$x_{11};\quad x_{21},\ x_{12};\quad x_{31},\ x_{22},\ x_{13};\quad x_{41},\ x_{32},\ x_{23},\ x_{14}\quad \cdots.$$

这个序列中可能会有重复的元素. 因此一定存在集合 $N\subseteq\mathbb{N}$ 满足 $N\sim C$. 由于 $C_1\subseteq C$ 且 C_1 是一个无限集, 故 C 也是一个无限集. 由定理2.11可知 C 是可数的. ∎

推论 2.4

设一个至多可数的指标集 I. 若对于任意 $\alpha\in I$, 集合 C_α 都是至多可数的, 则集合 $C=\bigcup_{\alpha\in I}C_\alpha$ 仍是至多可数的.

用可数集的笛卡儿积可以造出“更大的”可数集.

命题 2.15 (可数集的笛卡儿积)

设可数集 $C_1,C_2,\cdots,C_n$. 则集合 $C=C_1\times C_2\times\cdots\times C_n$ 仍是可数的.

证明 由于 $C_1,C_2,\cdots,C_n$ 都是可数的, 因此容易验证 $C=C_1\times C_2\times\cdots\times C_n\sim\mathbb{N}^n$. 下面来证明 $\mathbb{N}^n$ 是可数的. 取两两不同的素数 $p_1,p_2,\cdots,p_n$. 令

$$\begin{aligned}\sigma:\mathbb{N}^n&\to\mathbb{N},\\ (k_1,k_2,\cdots,k_n)&\mapsto p_1^{k_1}p_2^{k_2}\cdots p_n^{k_n}.\end{aligned}$$

由唯一因数分解定理 (证明见《初等数论》) 可知

$$p_1^{k_1}p_2^{k_2}\cdots p_n^{k_n}=p_1^{l_1}p_2^{l_2}\cdots p_n^{l_n}\iff(k_1,k_2,\cdots,k_n)=(l_1,l_2,\cdots,l_n).$$

因此 σ 是 $\mathbb{N}^n$ 到 $\mathbb{N}$ 的一个单射. 令 $N=\sigma(\mathbb{N}^n)$, 则 σ 是 $\mathbb{N}^n$ 到 N 的一个双射, 故 $\mathbb{N}^n\sim N$. 显然 $N\subseteq\mathbb{N}$. 由于 $\mathbb{N}^n$ 是一个无限集, 由定理2.11可知 $\mathbb{N}^n$ 是可数的. ∎

注 以上命题也可用数学归纳法证明.

事实上无限集的最小基数就是 $\aleph_0$.

定理 2.12

任一无限集都存在一个可数的子集.

证明 设无限集 E. 下面从 E 中取一列元素. 任取 $a_1\in E$. 假设已经从 E 中取出 $a_1,a_2,\cdots,a_n$. 由于 E 是一个无限集, 故 $E\backslash\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}\neq\varnothing$. 于是可以继续取出 $a_{n+1}\in E$. 由第二数学归纳原理可知可以取出一个序列

$$a_1,a_2,\cdots,a_n,a_{n+1},\cdots.$$

于是可知 E 存在一个可数的子集 $\{a_1, a_2, \cdots, a_n, a_{n+1}, \cdots\}$. ■

定理 2.13

无限集的最小基数是 $\aleph_0$.

证明 假设存在一个无限集 A 的基数 $\alpha < \aleph_0$. 由定理2.12可知 A 中存在一个可数的子集 A_1, 因此

$$\aleph_0 = |A_1| \leq |A| = \alpha.$$

出现矛盾. 因此无限集的最小基数是 $\aleph_0$. ■

由于可数集是"最小的"无限集, 因此无限集中并入可数集不会改变基数.

命题 2.16

设无限集 A. 若 $|A| = \alpha$, 且集合 B 是至多可数的, 则 $|A \cup B| = \alpha$.

证明 只证明 B 是可数集的情况. 设 $B = \{b_1, b_2, \cdots\}$. 不妨设 $A \cap B = \varnothing$. 由定理2.12可知 A 中可以取出一个可数集 $A_1 = \{a_1, a_2, \cdots\}$. 令 $A_2 = A \backslash A_1$. 下面构造一个映射 f 使得

$$f(a_i) = a_{2i}, \quad i = 1, 2, \cdots,$$
$$f(b_i) = a_{2i-1}, \quad i = 1, 2, \cdots,$$
$$f(x) = x, \quad \forall x \in A_2.$$

容易验证 f 是 $A \cup B$ 到 A 的一个双射. 于是可知 $\operatorname{card} A \cup B \sim \alpha$, 即 $\operatorname{card} A \cup B = \alpha$. ■

注 以上命题表明, 任意无限集加入至多可数个元素, 都不会改变基数.

我们可以用可数集的观点来描述无限集.

定理 2.14

设集合 A. 则 A 是一个无限集当且仅当存在 $B \subsetneq A$ 满足 $B \sim A$.

证明 (i) 证明充分性. 若 A 是一个有限集, 则 A 的任一真子集的基数都小于 A, 故不存在 $B \subsetneq A$ 满足 $B \sim A$. 因此充分性成立.

(ii) 证明必要性. 若 A 是一个无限集. 设 $x \in A$, 令 $B = A \backslash \{x\}$, 则 B 是一个无限集. 由命题2.16可知 $B \sim B \cup \{x\} = A$. ■

最后我们来看有理数集 $\mathbb{Q}$ 的基数. 有理数域 $\mathbb{Q}$ 具有稠密性, 而整数环没有稠密性, 这会让人产生有理数域的基数大于整数环的错觉. 根据前面的讨论现在可以很容易地证明有理数集也是可数的.

定理 2.15

有理数域 $\mathbb{Q}$ 是一个可数集.

证明 由于整数环 $\mathbb{Z}$ 是可数的, 故 $\mathbb{Z}^*$ 也是可数的. 由命题2.15可知 $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ 仍是可数的. 由于有理数域 $\mathbb{Q}$ 是 $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ 的一个商集, 由推论2.3可知 $\mathbb{Q}$ 是至多可数的. 由于 $\mathbb{Q}$ 是无限集, 于是可知 $\mathbb{Q}$ 是一是可数集. ■

以上结论表明有理数集虽然具有"稠密性", 但依旧是"离散的". 把有理数集排成一列的方法类似于命题2.14的

证明方法, 只需将有理数先排成一个无限矩阵, 然后按箭头方向排列即可 (事实上排列方法并不唯一):

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{1} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots \\ \frac{2}{1} & \frac{2}{2} & \frac{2}{3} & \cdots \\ \frac{3}{1} & \frac{3}{2} & \frac{3}{3} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \frac{1}{1} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots \\ \frac{2}{1} & \frac{2}{2} & \frac{2}{3} & \cdots \\ \frac{3}{1} & \frac{3}{2} & \frac{3}{3} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}.$$

例 2.8 设集合 A 是数轴上长度不为零且两两不相交的区间组成的集合. 则 A 是至多可数的, 其中 A 中的元素都是区间.

证明 由于 A 中区间的长度不为零, 且任意两个实数之间都存在有理数, 故对于任一区间 $I_0 \in A$, 都可以从中取出一个 $x_0 \in \mathbb{Q}$. 于是可令

$$\begin{aligned} \sigma : A &\to \mathbb{Q} \\ I_0 &\mapsto x_0 \end{aligned}$$

显然以上定义的 σ 是一个映射. 由于 A 中的区间两两不相交, 故 σ 是一个单射. 于是可知 σ 可以成为 A 到 $\sigma(A) \subseteq \mathbb{Q}$ 的一个双射. 因此 A 与 $\mathbb{Q}$ 的一个子集等价, 于是可知 E 是至多可数的. ■

我们熟悉的一类无理数, 如 $\sqrt{2}, \sqrt{3}$ 等, 都可以看作某个代数方程的解, 可以证明这样的数的全体也是可数的.

定义 2.14 (代数数)

若实数 x 满足多项式方程

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n = 0.$$

其中 $a_0 \in \mathbb{Z}^*, a_1, a_2, \cdots, a_n \in \mathbb{Z}$. 则称 x 是一个**代数数** (algebraic number). 否则称为**超越数** (transcendental number).

♣

注 1844 年法国数学家 Joseph Liouville 首先发现了超越数. 并构造了第一个超越数.1873 年法国数学家 Charles Hermite 证明了自然常数 e 是一个超越数.1882 年德国数学家 Carl Louis Ferdinand von Lindemann 证明了圆周率 π 的超越性,1885 年 Weierstrass 给出了更一般的结果, 合称 Lindemann–Weierstrass 定理.

注 显然有理数都是代数数.

定理 2.16

由代数数全体组成的集合是可数的.

♡

证明 (i) 设所有整系数多项式组成的集合为 P. 令

$$P_N = \{a_0x^n + \cdots + a_{n-1}x + a_n : a_0 \in \mathbb{Z}^*,\ a_1, a_2, \cdots, a_n \in \mathbb{Z},\ N = n + |a_0| + |a_1| + \cdots + |a_n|\}.$$

显然 P_N $(N = 2, 3, \cdots)$ 都是有限集. 由于

$$P \subseteq \bigcup_{N=2}^{\infty} P_N.$$

由命题2.14可知 P 是一个可数集.

(ii) 设全体代数数组成的集合为 A. 由代数基本定理可知任一 n 次多项式的实根不超过 n 个. 设 $P = \{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. 由于

$$A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} p_n.$$

由命题2.14可知 A 是一个可数集. ■

注 代数基本定理的证明见《高等代数》.
注 1874 年 Cantor 首先证明了以上定理.

以上定理告诉我们, 用有限次根式表示的无理数和有理数 ‘‘一样多”.

2.3.3 不可数集

经过以上讨论, 我们目前遇到的集合似乎都是可数的. 下面给出一个不可数集的例子.

例 2.9 区间 $[0,1)$ 是不可数的.

证明 把 $I=[0,1)$ 区间中的所有实数写成二进制小数, 规定

$$a.a_1\cdots a_n\dot{0}=a'.a'_1\cdots a'_n\dot{1},$$

其中

$$a.a_1\cdots a_n=a'.a'_1\cdots a'_n+\underbrace{0.0\cdots0}_{n\text{ 个 }0}1.$$

为了使小数的表示唯一, 我们规定遇到 $a'.a'_1\cdots a'_n\dot{1}$ 一律写成 $a.a_1\cdots a_n\dot{0}$. 任取 I 的一个可数子集 $\widetilde{I}=\alpha_1,\alpha_2,\cdots$. 构造一个无限矩阵,

$$\boldsymbol{A}=\begin{array}{r}\alpha_1\text{的小数部分}\\\alpha_2\text{的小数部分}\\\alpha_3\text{的小数部分}\\\alpha_4\text{的小数部分}\\\alpha_5\text{的小数部分}\\\vdots\end{array}\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}&a_{14}&a_{15}&\cdots\\a_{21}&a_{22}&a_{23}&a_{24}&a_{25}&\cdots\\a_{31}&a_{32}&a_{33}&a_{34}&a_{35}&\cdots\\a_{41}&a_{42}&a_{43}&a_{44}&a_{45}&\cdots\\a_{51}&a_{52}&a_{53}&a_{54}&a_{55}&\cdots\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\ddots\end{bmatrix},$$

其中 $\alpha_n=0.a_{n1}a_{n2}\cdots\ (a_{n1},a_{n2}\in\{0,1\})$. 依次取 $\boldsymbol{A}$ 的对角线元素 $a_{11},a_{22},\cdots$. 令

$$\widetilde{a}_{nn}=\begin{cases}0,&a_{nn}=1\\1,&a_{nn}=0\end{cases}.$$

容易看出 $\widetilde{\alpha}=0.\widetilde{a}_{11}\widetilde{a}_{22}\cdots\notin\widetilde{I}$, 但 $\widetilde{\alpha}\in I$. 因此 $\widetilde{I}$ 是 I 的一个真子集, 即 I 的任一可数子集都是它的真子集. 这表明 I 不是可数集. ■

注 设 $A=0,1$, 令 $J=A\times A\times\cdots=A^\infty$. 用类似的方法可证 J 是不可数的. 这表明可数次的笛卡尔积可以让可数集 ‘‘跃迁’’ 为不可数集.
注 以上证明方法是德国数学家 Cantor 首先使用的, 称为**对角线法** (diagonal process).

通过以上铺垫, 现在可以证明实数集 $\mathbb{R}$ 是不可数的.

定理 2.17
实数集 $\mathbb{R}$ 为不可数集.

证明 设函数

$$f(x)=\tan\left(\pi x-\frac{\pi}{2}\right)=-\cot(\pi x).$$

容易知道 f 是定义域为 $(0,1)$, 值域为 $\mathbb{R}$ 的单调递增函数, 即 f 是 $(0,1)$ 到 $\mathbb{R}$ 的一个双射. 因此 $(0,1)\sim\mathbb{R}$. 由命题2.16可知

$$|(0,1)|=|(0,1)\cup\{0\}|=|[0,1)|.$$

例2.9中已证 $[0,1)$ 是不可数的, 因此 $\mathbb{R}$ 也是不可数的. ■

推论 2.5

无理数集是不可数集. ♡

证明 设无理数集为 I, 则 $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup I$. 由于有理数集可数, 由命题2.16可知

$$|I| = |\mathbb{Q} \cup I| = |\mathbb{R}|.$$

因此无理数集也不可数. ■

通过以上讨论, 我们不仅证明了实数集是不可数的, 而且还证明了区间 $(0,1), (0,1], [0,1), [0,1]$、实数集和无理数集都有相等的基数.

定义 2.15 (连续统)

和实数集 $\mathbb{R}$ 等势的集合称为**连续统** (continuum). 连续统的基数称为**连续基数** 或**连续统的势** (cardinality of the continuum), 记作 $\aleph_1$ 或 $\mathfrak{c}$. ♣

从前面的讨论可知区间 $(0,1), (0,1], [0,1), [0,1]$ 和无理数集都是连续统. 下面再看一些连续统的常见例子.

例 2.10 任一区间都是连续统.

证明 任取开区间 (a,b), 令 $x_0 = (a+b)/2, \delta = (b-a)/2$, 则 $(a,b) = (x_0-\delta, x_0+\delta)$. 设函数

$$f(x) = \tan\left[\frac{\pi}{2\delta}(x-x_0)\right].$$

则 $f(x)$ 是 (a,b) 到 $\mathbb{R}$ 的双射. 于是可知 (a,b) 是连续统. 由命题2.16可知

$$\begin{aligned}|[a,b]| &= |(a,b) \cup \{a,b\}| = |(a,b)|,\\ |(a,b]| &= |(a,b) \cup \{b\}| = |(a,b)|,\\ |[a,b)| &= |(a,b) \cup \{a\}| = |(a,b)|.\end{aligned}$$

综上可知任一区间都是连续统. ■

前面已证明无理数是连续统, 同理可证超越数也是连续统.

定理 2.18

全体超越数组成的集合是连续统. ♡

证明 设全体超越数组成的集合为 A, 代数数组成的集合为 B, 则 $\mathbb{R} = A \cup B$. 由于 B 可数, 由命题2.16可知

$$|A| = |A \cup B| = |\mathbb{R}|.$$

全体超越数组成的集合是连续统. ■

例 2.11 平面上的点集是连续统.

证明 (i) 设 $I = (0,1)$. 先证明 $I \sim I \times I$. 令

$$\begin{aligned}\sigma: I &\to I \times I\\ 0.a_1a_2a_3a_4\cdots &\mapsto (0.a_1a_3\cdots, 0.a_2, a_4\cdots).\end{aligned}$$

I 显然 σ 是一个映射. 且对于任一 $\boldsymbol{r} = (0.b_1b_2\cdots, 0.c_1, c_2\cdots)$ 都有唯一的 $r = 0.b_1c_1b_2c_2\cdots$ 满足 $\sigma(r) = \boldsymbol{r}$. 因此 σ 既是满射也是单射. 因此 σ 是 I 到 $I \times I$ 的一个双射. 于是可知 $I \sim I \times I$.

(ii) 证明 $I \times I \sim \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. 令

$$f : I \times I \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$
$$(x, y) \mapsto (-\cot(\pi x), -\cot(\pi y)).$$

容易看出 f 是一个 $I \times I$ 到 $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ 的双射. 于是可知 $I \times I \sim \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

综上可知平面上的点集 $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ 是连续统. ■

下面很自然地会提出以下为题: 是否存在比 $\aleph_1$ 更大的基数? 是否存在最大的基数?

定理 2.19 (Cantor 定理)

设非空集合 A, 则 A 与它的幂集 $\mathcal{P}(A)$ 不对等, 且 $|A| < |\mathcal{P}(A)|$.

证明 A 是有限集时命题显然成立. 下设 $A = \{a_I\}$ 是一个无限集, 其中 I 是一个指标集. 假设 $A \sim \mathcal{P}(A)$. 则存在双射 $\sigma : A \to \mathcal{P}(A)$.

$$\begin{array}{lcl} A & \to & \mathcal{P}(A) \\ a_\alpha & \mapsto & \sigma(a_\alpha) = \{a_\alpha, a_\beta, a_\delta\} \\ a_\beta & \mapsto & \sigma(a_\beta) = \{a_\gamma, a_\lambda, a_\sigma, a_\varepsilon\} \\ a_\gamma & \mapsto & \sigma(a_\gamma) = \{a_\beta, a_\eta\} \\ \vdots & & \vdots \end{array}$$

令 $B = \{a_I \in A : a_I \notin \sigma(a_I)\}$. 容易看出 $B \in \mathcal{P}(A)$, 但不存在 a_λ 满足 $\sigma(\alpha_\lambda) = B$, 这表明 σ 不是满射, 出现矛盾. 因此假设不成立. 于是可知 A 和 $\mathcal{P}(A)$ 不对等, 因此 $|A| \neq |\mathcal{P}(A)|$. 显然 A 和 $\mathcal{P}(A)$ 的一个子集存在双射, 因此 $|A| \leq |\mathcal{P}(A)|$. 由于 $|A| < |\mathcal{P}(A)|$. ■

注 以上定理的证法和例2.9一样, 都使用了 “对角线法”.
注 A 的幂集的基数可以记作 $2^{|A|}$.
注 以上定理表明不存在最大的基数, 因为对于任一集合 A 都可以有基数更大的 $\mathcal{P}(A)$.

例 2.12 对于任一无限集 A, 都有 $|\mathcal{P}(A)| > \aleph_0$.

证明 无限集的最小基数是可数基数, 因此 $|A| \geq \aleph_0$. 由 Cantor 定理可知

$$|\mathcal{P}(A)| > |A| \geq \aleph_0.$$

于是可知 $|\mathcal{P}(A)| > \aleph_0$. ■

事实上可数集的幂集的基数一定等于连续统的势, 这个结论将在《实分析》中给出严格证明.

定理 2.20

可数集的幂集势等于连续基数, 即 $\aleph_1 = 2^{\aleph_0}$.

证明 设 $A = \{0, 1\}$, 令 $J = A \times A \times \cdots = A^\infty$. 令

$$\sigma : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to J$$
$$N \mapsto (a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots).$$

其中

$$a_n = \begin{cases} 1, & n \in N \\ 0, & n \notin N \end{cases}.$$

显然 σ 是一个映射. 任取 $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots) \in J$, 根据对应法则一定存在唯一的 N 满足 $\sigma(N) = \boldsymbol{a}$, 因此 σ 既

是满射也是单射. 因此 σ 是 $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ 到 J 的一个双射. 由例2.9可知

$$2^{\aleph_0} = |\mathcal{P}(\mathbb{N})| = |J| = \aleph_1. \qquad \blacksquare$$

到目前为止我们看到的集合的基数不是可数基数 $\aleph_0$ 就是连续基数 $\aleph_1$. 那么是否存在基数介于 $\aleph_0$ 和 $\aleph_1$ 之间的集合?

1874 年 Cantor 提出猜想: 不存在基数介于 $\aleph_0$ 和 $\aleph_1$ 的集合. 这就是著名的**连续统假设** (continuum hypothesis). 这个问题困扰了数学界半个多世纪之久.1900 年, 在第二届国际数学家大会上 Hilbert 把连续统假设列入 20 世纪有待解决的 23 个重要数学问题之首.1940 年德国数学家 Kurt Friedrich Gödel 证明了连续统假设和集合的 ZFC 公理系统不矛盾, 即 ZFC 公理系统无法证伪连续统假设.1963 年 Cohen 进一步证明连续统假设无法被 ZFC 公理系统证明.

2.4 常见不等式选讲

2.4.1 Bernoulli 不等式

Bernoulli 不等式

定理 2.21 (Bernoulli 不等式)

设实数 $x \geq -1$, 则

$$(1+x)^n \geq 1+nx.$$

证明

2.4.2 均值不等式

均值不等式

定理 2.22 (均值不等式)

设非负实数 x_1, x_2, 则

$$\frac{2}{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}} \leq \sqrt{x_1x_2} \leq \frac{x_1+x_2}{2} \leq \sqrt{\frac{x_1^2+x_2^2}{2}}.$$

以上各等号成立当且仅当 $x_1 = x_2$.

证明 (i) 证明中间的不等号.

$$4x_1x_2 \leq (x_1-x_2)^2+4x_1x_2 = (x_1+x_2)^2 \iff \sqrt{x_1x_2} \leq \frac{x_1+x_2}{2}.$$

(ii) 证明左边的不等号. 由 (i) 可知

$$\frac{x_1+x_2}{2} \geq \sqrt{x_1x_2} \iff \frac{2}{x_1+x_2} \leq \frac{1}{\sqrt{x_1x_2}} \iff \frac{2x_1x_2}{x_1+x_2} \leq \sqrt{x_1x_2} \iff \frac{2}{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}} \leq \sqrt{x_1x_2}.$$

(iii) 证明右边的不等号.

$$\frac{(x_1+x_2)^2}{4} = \frac{2x_1x_2+x_1^2+x_2^2}{4} \leq \frac{x_1^2+x_2^2+x_1^2+x_2^2}{4} = \frac{x_1^2+x_2^2}{2} \iff \frac{x_1+x_2}{2} \leq \sqrt{\frac{x_1^2+x_2^2}{2}}.$$

■

注 以上四个均值都有各自的实际意义. 其中 $(x_1+x_2)/2$ 是**算术平均** (arithmetic mean). 下面简要介绍其它三个均值的实际应用.

设股票投资第 1 年和第 2 年的的年化收益分别为 x_1, x_2, 则两年间的平均年化收益为 $\sqrt{x_1x_2}$. 这个均值称为**几何平均** (geometric mean).

设两个数据与它们的算术平均的差分别为 x_1 和 x_2, 则它们的标准差为 $\sqrt{\left(x_1^2+x_2^2\right)^2/n}$. 这个均值称为**平方平均数** (quadratic mean).

设 100×2 米折返跑去程和返程的均速分别为 x_1 和 x_2, 则全程均速为 $2/(1/x_1+1/x_2)$. 这个均值称为**调和平均数** (harmonic mean).

注 均值不等式成立要求 x_1 和 x_2 非负. 若 x_1 和 x_2 同为负数则可对 $-x_1, -x_2$ 使用均值不等式.

注均值不等式有对应的几何表示:

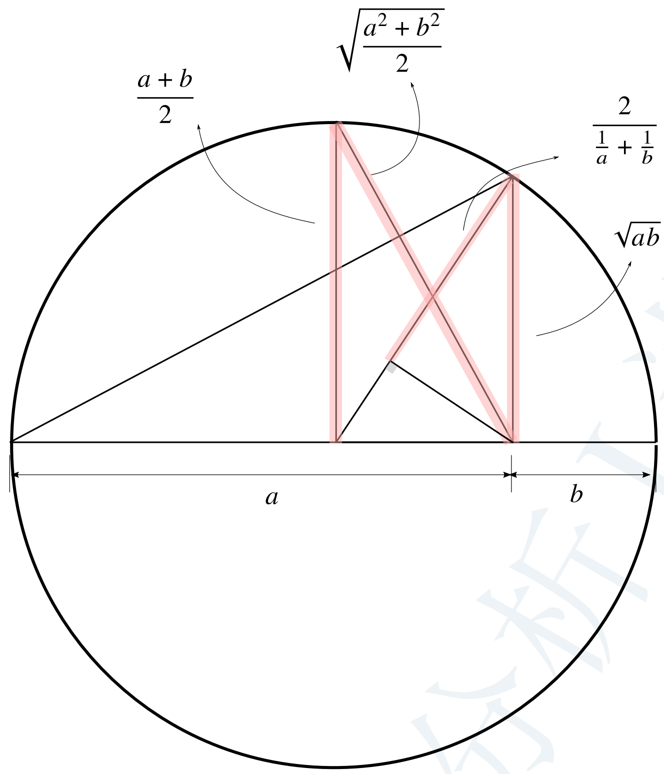

图 2.3: HGAQ 不等式.

用数学归纳法可以把以上定理推广到 n 个非负实数的情况.

定理 2.23

设非负实数 $x_1, x_2, \cdots, x_n$. 令

$$H_n = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i}},\ G_n = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} x_i},\ A_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i,\ Q_n = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n}},$$

(光看这些式子的高矮就记住了它们的大小顺序, 哈哈哈!)

则 $H_n \le G_n \le A_n \le Q_n$. 各等号成立当且仅当 $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$.

证明

2.4.3 三角不等式

命题 2.17 (三角不等式)

设 $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$. 则

$$|a_1 + a_2| \le |a_1| + |a_2|$$

等号成立当且仅当 a_1, a_2 的符号相同.

证明

用数学归纳原理容易把三角不等式推广到更一般的情况.

命题 2.18

设 $a_1, a_2, \cdots, a_n \in \mathbb{R}$. 则

$$\left|\sum_{i=1}^{n} a_i\right| \leq \sum_{i=1}^{n} |a_i|.$$

等号成立当且仅当 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 的符号相同.

证明 用数学归纳法对 n 进行归纳. 当 $n=2$ 时命题成立. 假设 $n=k$ 时命题也成立. 则当 $n=k+1$ 时

$$\left|\sum_{i=1}^{k+1} a_i\right| = \left|\sum_{i=1}^{k} a_i + a_{k+1}\right| \leq \left|\sum_{i=1}^{k} a_i\right| + |a_{k+1}| \leq \sum_{i=1}^{n} |a_i|.$$

有归纳假设可知, 最右边的等号成立当且仅当 $a_1, \cdots, a_k$ 符号相同. 中间的等号成立当且仅当 $\sum_{i=1}^{k} a_i$ 和 a_{k+1} 的符号相同. 于是可知 $\left|\sum_{i=1}^{k+1} a_i\right| = \sum_{i=1}^{n} |a_i|$ 当且仅当 $a_1, \cdots, a_k, a_{k+1}$ 符号相同. 这表明 $n=k+1$ 时命题也成立. 由数学归纳原理可知对于一切 $n=2,3,\cdots$ 命题都成立. ■

2.4.4 几个带人名的不等式

命题 2.19 (Cauchy-Schwarz 不等式)

$$\left(\sum_{i=1} a_i b_i\right)^2 \leq \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \sum_{i=1}^{n} b_i^2.$$

证明

定理 2.24 (Chebychëv 不等式)

设实数 $a_1, a_2, \cdots, a_n, b_1, b_2, \cdots, b_n$. 若 $a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n$ 且 $b_1 \leq b_2 \leq \cdots \leq b_n$. 则

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \sum_{i=1}^{n} b_i \leq n \sum_{i=1}^{n} a_i b_i.$$

证明

命题 2.20 (Höler 不等式)

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leq \left(\sum_{i=1} a_i^p\right)^{1/p} \left(\sum_{i=1} b_i^q\right)^{1/q}.$$

证明

例 2.13 设非负实数 x, y. 则

$$\frac{x^n + y^n}{2} \geq \left(\frac{x+y}{2}\right)^n, \quad n = 2, 3, \cdots.$$

等号成立当且仅当 $x = y$.

证明 由 Höler 不等式可知, 对任一 $n = 2, 3, \cdots$ 都有

$$x \cdot 1 + y \cdot 1 \leq (x^n + y^n)^{1/n} (1+1) \iff \frac{x^n + y^n}{2} \geq \left(\frac{x+y}{2}\right)^n.$$ ■

定理 2.25 (Minkowski 不等式)

设 $p \geq 1$, 则

$$\left(\sum_{k=0}^{n}(a_k+b_k)^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{k=0}^{n}a_k^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=0}^{n}b_k^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

当 $0 < p < 1$ 时不等号反向.

证明 令 $q = p/(p-1)$, 则 $1/p + 1/q = 1$, 由 Höler 不等式可知

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n}(a_k+b_k)^p &= \sum_{k=0}^{n}(a_k+b_k)^{p-1}\cdot(a_k+b_k) = \sum_{k=0}^{n}(a_k+b_k)^{p-1}\cdot a_k + \sum_{k=0}^{n}(a_k+b_k)^{p-1}\cdot b_k \\
&\leq \left[\sum_{k=0}^{n}(a_k+b_k)^{\frac{p}{p-1}}\right]^{1-\frac{1}{p}}\left(\sum_{k=0}^{n}a_k^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left[\sum_{k=0}^{n}(a_k+b_k)^{\frac{p}{p-1}}\right]^{1-\frac{1}{p}}\left(\sum_{k=0}^{n}b_k^p\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \left[\sum_{k=0}^{n}(a_k+b_k)^{\frac{p}{p-1}}\right]^{1-\frac{1}{p}}\left[\left(\sum_{k=0}^{n}a_k^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=0}^{n}b_k^p\right)^{\frac{1}{p}}\right].
\end{aligned}$$

两边同时除以

$$\left[\sum_{k=0}^{n}(a_k+b_k)^{\frac{p}{p-1}}\right]^{1-\frac{1}{p}}$$

就得到了要证的不等式.

命题 2.21 (Young 不等式)

设实数 $a, b > 0, p, q > 1$ 若 $1/p + 1/q = 1$, 则

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q},$$

其中等号成立当且仅当 $a^p = b^q$.

证明