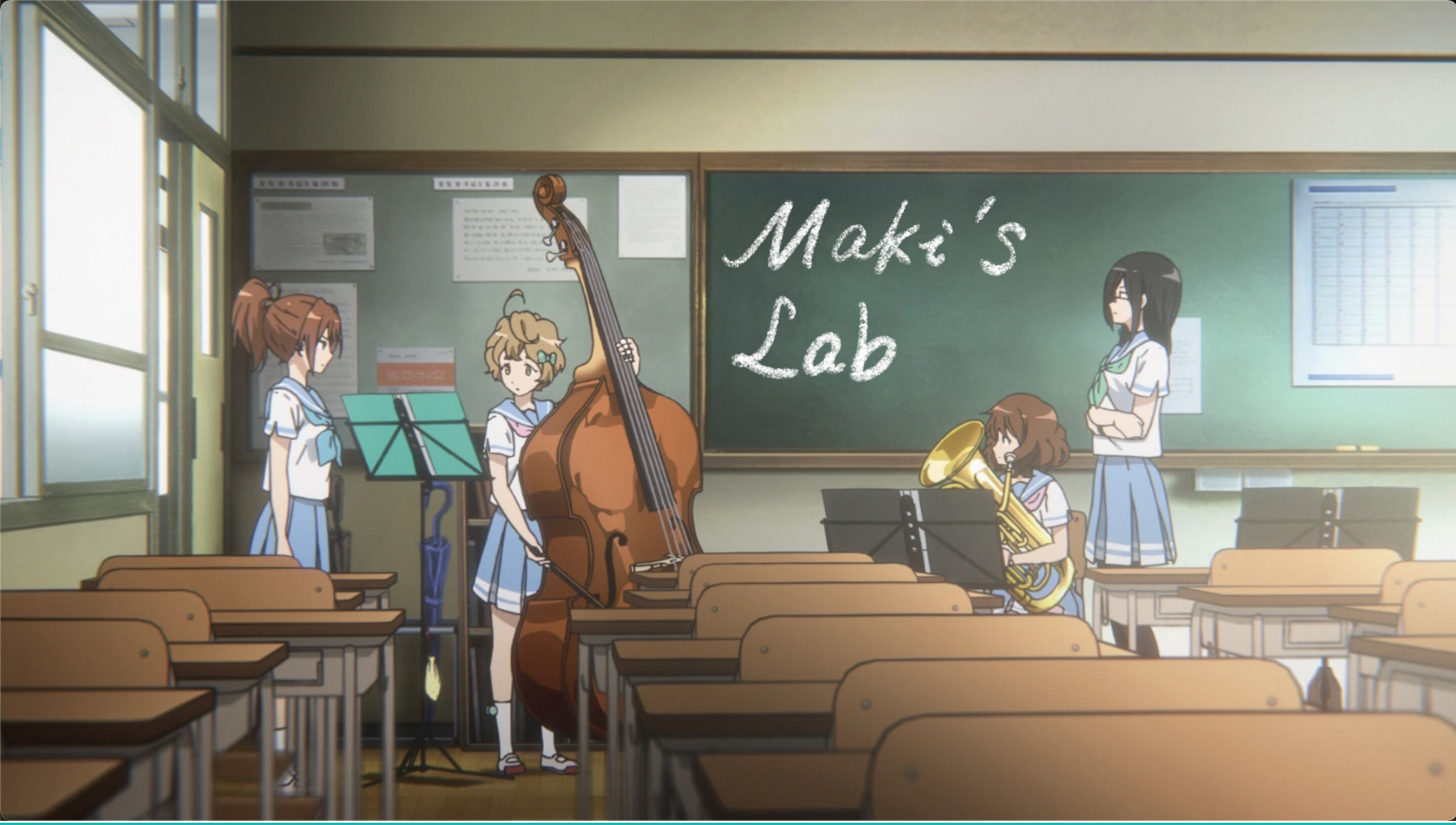



# 数学分析 I-MAT1A10

作者：数学分析委员会
组织：Maki's Lab
时间：Jan 2022
版本：1.0

"九万里风鹏正举。风休住，蓬舟吹取三山去。"——【宋】李清照

# 写在前面

Maki 你有什么想对观众说的就写在这儿吧...

特别感谢由 Ethan Deng 和 Liam Huang 组织，ElegantLaTeX[1]社区提供的模板。“多分享，多奉献”一直是该开源社区的目标。如果您喜欢本书的模板的话，请前往elegantlatex.org进行下载和使用。

# 目录

# 第 0 章 预备知识

内容提要

❑ XXX

本章介绍一下数理逻辑和集合论中需要用到的简单知识.

## 0.1 数理逻辑

先讨论命题之间的关系

**定义 0.1 (充分要件和必要条件)**

设命题 $A$ 和 $B$. 若 $A$ 可以推得 $B$, 则称命题 $A$ 是 $B$ 的**充分条件** (sufficient condition),$B$ 是 $A$ 的**必要条件** (necessary condition), 记作

$$A \Rightarrow B, \text{ 或 } B \Leftarrow A.$$

若 $A$ 可以推得 $B$ 且 $B$ 可以推得 $A$, 则称命题 $A$ 和 $B$ 互为充分必要条件 (necessary and sufficient condition), 简称**充要条件**, 此时也称命题 $A$ 和 $B$ 等价, 记作

$$A \Leftrightarrow B.$$

♣

注 以上事实在定理或命题的叙述中常有多种不同的自然语言表述, 但其逻辑含义是一致的. 例如

(1) $A \Rightarrow B$: 若 $A$ 则 $B$,$A$ 蕴含 $B$;

(2) $A \Leftrightarrow B$:$A$ 和 $B$ 等价, 当且仅当 $A$ 成立时,$B$ 成立;

注 凡是 "定义", 总是充要条件.

**定义 0.2 (原命题, 逆命题, 否命题, 逆否命题)**

**原命题** (primitive proposition), **逆命题** (converse proposition), **否命题** (negative proposition), **逆否命题** (converse-negative proposition),

♣

以下定义命题之间的逻辑运算.

**定义 0.3 (命题的逻辑运算)**

设命题 $A$ 与 $B$,

(1) 若 $A$ 和 $B$ 中至少有一个命题成立, 则称 $A$ **或** (or) $B$ ($A$ or $B$), 记作

$$A \vee B.$$

(2) 若 $A$ 和 $B$ 同时成立, 则称 $A$ **且** (and) $B$ ($A$ and $B$), 记作

$$A \wedge B.$$

(3) 若 $A$ 的相反形式成立, 则称**非** (not) $A$ (not $A$), 记作

$$\neg A.$$

♣

以下介绍两个常用的形式逻辑词

**定义 0.4 (存在)**

**存在** $x$ (exist $x$) 使得命题 $A$ 成立, 可以记作

$$\exists x\,(A)\,.$$

♣

**定义 0.5 (任意)**

对于**任意** $x$ (for all $x$) 命题 $A$ 都成立, 可以记作

$$\forall x\,(A)\,.$$

♣

为了证明命题我们常需要用到以下**真值表** (truth table).

## 0.2 ZFC 公理系统

在中学里, 我们学过的集合概念通常是这样的: 一群无序的对象所构成的一个总体称为**集合** (set). 其中的每一个对象称为该集合的**元素** (element). 若 $x$ 是集合 $X$ 中的一个元素, 则称 $x$ **属于** $X$ ($x$ belongs to $X$), 记作 $x \in X$. 反之, $x$ **不属于** $X$ 记作 $x \notin X$.

对于一个集合我们可以有两种方式记录集合中的元素:

(1) 列举法: 将集合中的元素一一列举, 例如

$$\{I, II, III, IV, \cdots\}.$$

其中 "$\cdots$" 表示类似的元素.

(2) 描述法:

$$\{x \mid x \in E,\ P(x)\},$$

其中 $x$ 为代表元素, $E$ 是 $x$ 的范围, $P(x)$ 表示 $x$ 满足的性质.

以上给出的集合概念称为 "朴素的集合定义". 它比较直观已, 但许多细节问题并没有讲清楚. 例如, 怎么样的一群对象才能被看作集合? $\{x, x, y\}$ 和 $\{x, y\}$ 是不是同一个集合? 下面我们用公理化的方法来给出集合的定义.

### 0.2.1 集合的构建

我们先来定义什么样的集合是相等的.

**公理 0.1 (外延公理)**

设集合 $A$ 与 $B$, 若对于任一 $x$ 都有

$$x \in A \iff x \in B.$$

则称 $A$ 与 $B$ 相等, 记作 $A = B$. 否则, 称 $A$ 与 $B$ 不相等, 记作 $A \neq B$.

♡

外延公理告诉我们集合中的元素是无序的. 即, 集合是由元素唯一决定的.

**命题 0.1**

集合的相等关系满足

(1) 自反性: 对于任一集合 $A$ 都有 $A = A$.

(2) 对称性: 若 $A = B$ 则 $B = A$.

(3) 传递性: 若 $A = B, B = C$ 则 $A = C$.

♠

**证明** 证明略.

**注** 后面会介绍, 同时满足自反性, 对称性和传递性的关系称为 "等价关系".

下面定义只有一个元素和只有两个元素的集合.

**公理 0.2 (配对公理)**

对于任意 $x, y$, 都存在 $A$ 满足 $a \in A$ 当且仅当 $a \in X$ 或 $a \in Y$ $(\forall a)$. 此时 $A$ 可以记作 $\{x, y\}$, 并称它为**双元素集** (pair set). 特别地, 若 $x = y$, 则 $A$ 只有一个元素, 此时称 $A$ 为**单元素集** (singleton).

♡

根据配对公理我们知道存在集合合 $\{x, y\}$ 和 $\{y, x\}$, 然后根据外延公理, 我们知道 $\{x, y\} = \{y, x\}$. 这样我们就得到了集合的 "无序性". 根据外延公理我们还知道 $\{x, x, y\} = \{y, x\}$. 这样我们就得到了集合元素的 "不重复性".

### 0.2.2 集合的运算

配对公理为我们定义了单元素集和双元素集. 下面我们希望定义 “更大的” 集合.

**公理 0.3 (并集公理)**

设集合 $A = \{A_\alpha \mid \alpha \in I\}$, 其中 $I$ 是一个指标集 (index set). 则存在集合 $B$ 满足 $a \in B$ 当且仅当存在 $A_\alpha \in A$ 使得 $a \in A_\alpha$ $(\forall a)$.

注 以上定义中的集合 $A$ 通常被称为**集合族** (family of sets).

并集公理实质上为我们定义了一种集合的运算.

**定义 0.6 (集合的并)**

设集合族 $\{A_\alpha \mid \alpha \in I\}$. 令

$$\bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha := \{x \mid \exists\alpha \in I \text{ 使得 } x \in A_\alpha\}.$$

$\bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha$ 称为集合族 $A$ 的**并** (union). 有时可以简记作 $\bigcup A$. 特别地, 若 $A = \{A_1, A_2\}$, 则 $\bigcup A$ 记作 $A_1 \cup A_2$.

注 $A := B$ 表示 “用 $B$ 定义 $A$”.

由外延公理容易证明, 集合 $A$ 的并是唯一的.

由并集的定义我们可以得到关于并集的运算律.

**命题 0.2 (并的运算律)**

对任意集合 $A, B, C$ 都有

(1) 交换律: $A \cup B = B \cup A$.

(2) 结合律: $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$.

证明 XXX

反过来我们可以从 “较大的” 集合中取出一部分元素得到 “较小的” 集合.

**公理 0.4 (分离公理 (模式))**

设集合 $X$, 和性质 $P$, 则存在集合 $A$ 满足

$$B = \{x : (x \in A) \wedge P(x)\}.$$

注 我们发现分离公理中的性质 $P$ 没有明确给出, 因此对于每个确定的性质 $P$, 都可以产生一个特定的分离公理. 所以以上公理可以产生无限个公理, 这样的公理称为**公理模式** (axiom schema).

注 由分离公理可以知道, 一定存在一个集合不含有任何元素, 我们称这样的集合为**空集** (empty set), 记作 $\varnothing$. 根据外延公理, 我们可以推得空集只能有一个.

并集公理和分离公理使集合产生了一种关系. 例如分离公理模式中的集合 $B$ 中的每个元素一定都属于集合 $A$. 反过来, 并集公理中的集合 $D$ 中的每个元素一定都属于集合 $B$. 这种关系就是包含关系.

**定义 0.7 (子集和母集)**

设集合 $A$ 和 $B$, 若

$$x \in A \Rightarrow x \in B$$

则称 $A$ **包含于** $B$ ($A$ is included in $B$), 或 $B$ **包含** $A$ ($B$ includes $A$), $A$ 是 $B$ 的一个**子集** (subset),$B$ 是 $A$ 的一个**母集** (superset), 记作

$$A \subseteq B, \text{ 或 } B \supseteq A.$$

特别地, 若

$$(A \subseteq B) \wedge (A \neq B),$$

则称 $A$ 是 $B$ 的一个**真子集** (proper subset), $B$ 是 $A$ 的一个**真母集** (proper superset), 记作

$$A \subset B, \text{ 或 } B \supset A.$$

集合的包含关系有以下三种性质.

**命题 0.3 (包含关系的自反性, 反对称性和传递性)**

设集合 $A$,$B$ 和 $C$, 则

(1) 自反性: $A \subseteq A$;

(2) 传递性: $A \subseteq B, B \subseteq C \Rightarrow A \subseteq C$;

(3) 反对称性: $A \subseteq B, B \subseteq A \Rightarrow A = B$.

**证明** XX

**注** 后面会介绍, 同时满足自反性, 反对称性和传递性的关系称为 "偏序关系".

**注** 利用包含关系的反对称性, 可以证明集合的相等.

由分离公理可以定义集合的交和集合的差.

**定义 0.8 (集合的交)**

设集合族 $\{E_\alpha : \alpha \in I\}$.

则集合族 $E_\alpha$ 的**交**

$$\bigcap_{\alpha \in I} E_\alpha := \{x : \forall \alpha \in I\, (x \in E_\alpha)\}.$$

集合 $A$ 和 $B$ 的**交** (the intersection of $A$ and $B$)

$$A \cap B := (x \in A) \wedge (x \in B).$$

不交并

**定义 0.9 (差)**

集合 $A$ 和 $B$ 的**差** (difference of $A$ and $B$)

$$A \backslash B := (x \in A) \wedge (x \notin B).$$

**定义 0.10 (余)**

设集合 $A \subseteq X$. 则 $A$ 的**余** (complement of $A$)

$$A^c := X \backslash A$$

**命题 0.4 (余的抵消)**

设集合 $A$. 则

$$(A^c)^c = A.$$

**证明** 待证明.

**命题 0.5 (集合交的运算律)**

设集合 $A$ 和 $B$. 它们的交和并运算满足**交换律** (commutative property)

$$A \cup B = B \cup A,$$
$$A \cap B = B \cap A.$$

设集合 $A$ 和 $B$. 它们的交和并运算满足**结合律** (associative property)

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C),$$
$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C).$$

**证明** 待证明.

有了结合律, 可以定义有限个集合的交.

**定义 0.11 (有限个集合的交)**

设集合族 $\{E_\alpha : \alpha \in I\}$.
则集合族 $E_\alpha$ 的**交**

$$\bigcap_{\alpha \in I} E_\alpha := \{x : \forall \alpha \in I\,(x \in E_\alpha)\}.$$

对于并和交两种运算存在分配律.

**命题 0.6 (分配律)**

设集合 $A$ 和集合族 $\{B_\alpha : \alpha \in I\}$. 交对并运算, 并对交运算满足**分配律** (distributive property)

$$A \cap \left(\bigcup_{\alpha \in I} B_\alpha\right) = \bigcup_{\alpha \in I} (A \cap B_\alpha);$$
$$A \cup \left(\bigcap_{\alpha \in I} B_\alpha\right) = \bigcap_{\alpha \in I} (A \cup B_\alpha).$$

**证明** 待证明.

得到 “更大的” 集合还有一种方式.

**公理 0.5 (幂集公理)**

设集合 $A$. 则存在集合 $B$ 满足 $a \in B$ 当且仅当 $a \subseteq A$.

### 0.2.3 无限集

**公理 0.6 (无穷公理)**

设集合 $A$ 和 $B$. 当且仅当

### 0.2.4 替换公理

**公理 0.7 (替换公理)**

设集合 $A$ 和 $B$. 当且仅当

### 0.2.5 Russell 悖论

**公理 0.8 (正则公理)**

设集合 $A$ 和 $B$. 当且仅当

**定义 0.12 (XX)**

内容

罗素悖论 (Russell's paradox)

### 0.2.6 选择公理

**定理 0.1 (de Morgan 定律)**

设集合族 $\{E_\alpha \mid \alpha \in I\}$, 其中 $I$ 是一个指标集. 则

$$\left(\bigcup_{\alpha\in I} E_\alpha\right)^c = \bigcap_{\alpha\in I} E_\alpha^c; \quad \left(\bigcap_{\alpha\in I} E_\alpha\right)^c = \bigcup_{\alpha\in I} E_\alpha^c.$$

**证明** (i) 任取 $x \in \left(\bigcup_{\alpha\in I} E_\alpha\right)^c$. 则 $x \notin \bigcup_{\alpha\in I} E_\alpha$. 因此对于任一 $\alpha \in I$ 都有 $x \notin E_\alpha$. 故对于任一 $\alpha \in I$ 都有 $x \in E_\alpha^c$. 故 $x \in \bigcap_{\alpha\in I} E_\alpha^c$. 于是 $\left(\bigcup_{\alpha\in I} E_\alpha\right)^c \subseteq \bigcap_{\alpha\in I} E_\alpha^c$.

任取 $\bigcap_{\alpha\in I} E_\alpha^c$. 则对于任一 $\alpha \in I$ 都有 $x \in E_\alpha^c$. 故对于任一 $\alpha \in I$ 都有 $x \notin E_\alpha$. 因此 $x \notin \bigcup_{\alpha\in I} E_\alpha$. 因此 $x \in \left(\bigcup_{\alpha\in I} E_\alpha\right)^c$. 于是 $\left(\bigcup_{\alpha\in I} E_\alpha\right)^c \subseteq \bigcap_{\alpha\in I} E_\alpha^c$.

综上可知可知 $\left(\bigcup_{\alpha\in I} E_\alpha\right)^c = \bigcap_{\alpha\in I} E_\alpha^c$.

(ii) 对等式 $\left(\bigcup_{\alpha\in I} E_\alpha\right)^c = \bigcap_{\alpha\in I} E_\alpha^c$ 两边取补集即得 $\left(\bigcap_{\alpha\in I} E_\alpha\right)^c = \bigcup_{\alpha\in I} E_\alpha^c$..

**注** 以上定理也称为**对偶定理** (duality theorem).

以上定律是对偶定理在逻辑学和集合论中的应用.

特别地, 当只有两个集合时, 可以得出以上定理的一个特例, 我们会常用到这个推论.

**推论 0.1 (de Morgan 定律的特例)**

设集合 $A$ 和 $B$. 则

$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c;$$

$$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c;$$

**推论 0.2 (逻辑运算中的 de Morgan 定律)**

设集合 $A$ 和 $B$. 则

$$\neg(A \vee B) = (\neg A) \wedge (\neg B);$$

$$\neg(A \wedge B) = (\neg A) \vee (\neg B).$$

**证明** 待证明.

以下为证明命题的两种方法, 其中第二种方法称为反证法 (proof by contradiction).

$$(A_1 \Rightarrow A_2 \Rightarrow A_3 \Rightarrow \dots \Rightarrow A_n) \Rightarrow (A_1 \Rightarrow A_n)$$

$$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$$

自从 100 多年前 Cantor 等数学家创立集合论以来, 集合论已经成为了一个重要的数学分支. 同时集合论也成为了整个现代数学的基础. 本书采用**公理化方法** (axiomatic method), 用一系列公理构建集合的概念. 集合论可以采用的公理体系不止一种, 我们采用使用最广泛的 **Zermelo–Fraenkel 公理系统** (Zermelo–Fraenkel axiom system), 简称 ZF 公理系统, 其中包括

(1) **外延公理** (axiom of extensionality);
(2) **配对公理** (axiom of pairing);
(3) **并集公理** (axiom of union);
(4) **幂集公理** (axiom of power set);
(5) **分离公理模式** (axiom schema of separation)
(6) **替换公理** (axiom of replacement);
(7) **无穷公理** (axiom of infinity);
(8) **正则公理** (axiom of regularity);

最后加上**选择公理** (Axiom of Choice), 就是 ZFC 公理体系.XX

**定义 0.13 (ZF 公理系统)**

以下八条公理组成的公理体系称为 **ZF 公理系统** (ZF axiom system)

**外延公理** (axiom of extensionality)
**空集公理** (axiom of empty set)
**配对公理** (axiom of pairing)
**并集公理** (axiom of union)
**幂集公理** (axiom of power set)
**无穷公理** (axiom of infinity)
**分离公理** (axiom of separation)
**替换公理** (axiom of replacement)
**正则公理** (axiom of regularity)

## 0.3 二元关系

### 0.3.1 Cartesian 积

本节我们来介绍集合论中的二元关系理论. 为了讨论二元关系, 我们先给出 Cartesian 积的概念.

**定义 0.14 (有序对)**

设元素 $a, b \in A$. 将 $a, b$ 按顺序排成的有序元素对称为**有序对** (ordered pair), 也称为**序偶**, 记作 $(a, b)$. 有序对 $(a, b)$ 和 $(x, y)$ 相等, 当且仅当 $a = x$ 且 $b = y$, 记作 $(a, b) = (x, y)$.

**定义 0.15 (Cartesian 积)**

设集合 $A$ 和 $B$. 可以定义一个有序对组成的集合

$$A \times B := \{(a, b) \mid a \in A,\ b \in B\}.$$

我们称该集合为 $A$ 和 $B$ 的 **Cartesian 积** (Cartesian product).

注 Cartesian 积不满足交换律和结合律.

注 特别地, $A \times A$ 可以记作 $A^2$. 我们还可以进一步定义一个集合的有限次 Cartesian 积

$$A^n := \underbrace{A \times A \times \cdots \times A}_{n \text{ 个 } A}.$$

Cartesian 积满足以下简单性质.

**命题 0.7 (Cartesian 积的简单性质)**

设集合 $X$ 和 $Y$. 则

$$X \times Y = \varnothing \iff X = \varnothing \text{ 或 } Y = \varnothing.$$

当 $X \times Y \neq \varnothing$ 时, 有

(1) $X \times Y \subset W \times Z \iff X \subset W$ 且 $Y \subset Z$.

(2) $(X \times Y) \cup (Z \times Y) = (X \cup Z) \times Y$.

(3) $(X \times Y) \cap (X' \times Y') = (X \cap X') \times (Y \cap Y')$.

(4) $(X \times Y) \backslash (X' \times Y') = [(X \backslash X') \times Y] \cup [X \times (Y \backslash Y')]$.

证明 XXX

### 0.3.2 等价关系

有了 Cartesian 积, 就可以开始讨论集合中元素的二元关系.

**定义 0.16 (二元关系)**

设非空集合 $S$, 我们把 $S \times S$ 的一个子集 $\mathcal{R}$ 称为 $S$ 上的一个**二元关系** (binary relation). 设 $a, b \in S$, 若 $(a, b) \in \mathcal{R}$ 则 $a$ 与 $b$ 有 $\mathcal{R}$ 关系, 此时记作 $a\mathcal{R}b$.

所有二元关系中, 最重要最基础的莫过于 “相等” 关系! 从中可以抽象出三个特征, 由此定义等价关系.

**公理 0.9 (等价关系)**

设集合 $S$, 且 $\mathcal{R} \subseteq S \times S$. 若对于任意 $a, b, c \in S$ 都满足

1° **自反性** (reflexivity): $(a, a) \in \mathcal{R}$;

2° **对称性** (symmetry): $(a, b) \in \mathcal{R} \Longrightarrow (b, a) \in \mathcal{R}$;

3° **传递性** (transitivity): $(a, b) \in \mathcal{R}$ 且 $(b, c) \in \mathcal{R} \Longrightarrow (a, c) \in \mathcal{R}$.

则称 $\mathcal{R}$ 是 $S$ 上的一个**等价关系** (equivalence relation). 若 $(a, b) \in \mathcal{R}$, 则称 $a$ 等价于 $b$.

**注** 在同一个集合上可以定义不止一种等价关系. 在同一个集合上对于特定的等价关系, 我们可以约定特定的记号表示, 常用的记号有: $a \sim b, c \simeq d, e \cong f$.

对于集合 $S$ 上的某个等价关系 $\mathcal{R}$, 我们可以将两两等价的元素放在一起成为一个集合. 这就形成了等价类.

**定义 0.17 (等价类)**

设 $\mathcal{R}$ 是集合 $S$ 上的一个等价关系. 设 $a \in S$, 则 $S$ 中所有与 $a$ 等价的元素组成集合

$$[a]_{\mathcal{R}} := \{x \in S \mid x\mathcal{R}a\}.$$

称为由 $a$ 确定的关于 $\mathcal{R}$ 的**等价类** (equivalence class), 其中

**注**由以上定义可知, $a \in [a]_{\mathcal{R}}$, 即 $[a]_{\mathcal{R}}$ 一定非空且至少有元素 $a$. 因此我们 $a$ 称为等价类 $[a]_{\mathcal{R}}$ 的一个代表元素, 称 $[a]_{\mathcal{R}}$ 为 $a$ 的等价类.

对于一个等价类 $[a]_{\mathcal{R}}$, 代表元素不一定必须是 $a$. 以下命题可以验证这个想法.

**命题 0.8 (等价类相等的充要条件)**

设 $\mathcal{R}$ 是集合 $S$ 上的一个等价关系, 且 $a, b \in S$, 则

$$[a]_{\mathcal{R}} = [b]_{\mathcal{R}} \iff a\mathcal{R}b.$$

**证明** 必要性显然成立. 证明充分性.

(i) 任取 $c \in [a]_{\mathcal{R}}$, 由于 $a\mathcal{R}b$, 由传递性可知 $c\mathcal{R}a$, 从而 $c\mathcal{R}b$, 因此 $c \in [b]_{\mathcal{R}}$, 于是可知 $[a]_{\mathcal{R}} \subseteq [b]_{\mathcal{R}}$.

(ii) 由于 $a\mathcal{R}b$, 由对称性可知 $b\mathcal{R}a$. 由 (i) 可知 $[b]_{\mathcal{R}} \subseteq [a]_{\mathcal{R}}$.

于是可知 $[a]_{\mathcal{R}} = [b]_{\mathcal{R}}$.

**注** 以上命题表明, 等价类 $[a]_{\mathcal{R}}$ 的代表元素可以是与 $a$ 等价的任一元素, 即等价类中的任何元素都可以成为该等价类的代表元素.

除了数的相等关系, 数学中还有很多等价关系的例子.

**例 0.1 三角形的全等类和相似类** 设平面上所有三角形组成的集合为 $S$. 其中的全等关系和相似关系都是等价关系.

**解** 根据平面几何的知识, 三角形的全等关系和相似关系都满足自反性、对称性和传递性, 所以它都是 $S$ 上的一个等价关系.

常见的等价关系还有:

(1) 两个数、向量、集合等对象的相等关系.
(2) 两个命题的互相推得关系.
(3) 空间中两条直线的平行关系.
(4) 两个整数的同余关系.
(5) 向量组的相互线性表出关系.
(6) 矩阵的相抵关系、相似关系与合同关系.

(7) 线性空间、群、环、域等代数结构的同构关系.
(8) 无穷小、无穷大的等价关系.
(9) 集合的对等关系.
(10) 方程组的同解关系.

设 $\mathcal{R}$ 是集合 $S$ 上的一个等价关系. 若一种量或一种表达式对于同一个等价类里的元素相等, 则称这种量或这种表达式是这个等价关系的一个**不变量** (invariant). 特别地, 恰好能完全决定等价类的一组变量称为**完全不变量** (complete system of invariants).

举例说明在三角形的全等关系下, 边长和内角的大小都是不变量. 而三边同时对应相等是一组完全不变量. 事实上我们学过的全等三角形的 4 个判定定理: $SSS$、$SAS$、$AAS$、$ASA$、$SAS$ 就是四组三角形全等关系的完全不变量.

我们发现, 若集合 $S$ 中给定一个等价关系, 就会得到集合中元素的一种分类. 每一类是 $S$ 的一个子集. 这些子集两两无交集, 且它们的并集就是 $S$, 即它们的无交并就是 $S$. 于是就引出了一下概念.

**定义 0.18 (集合的划分)**

设集合 $S$ 的一个非空子集族 $\{S_\alpha \mid \alpha \in I,$
$varnothing \notin S_i\}$, 其中 $I$ 是指标集. 若满足

1° $S = \bigcup\limits_{\alpha\in I} S_\alpha$.

2° 对于任意 $\alpha \neq \beta$ 都有 $S_\alpha \cap S_\beta = \varnothing$.

则称这个子集族是集合 $S$ 的一个划分 (partition).

集合上的一个等价关系决定一个划分, 反过来集合上的一个分划决定一个等价关系. 下面我们来验证这个结论.

**引理 0.1**

设 $\mathcal{R}$ 是集合 $S$ 上的一个等价关系, 若 $[a]_\mathcal{R} \neq [b]_\mathcal{R}$, 则 $[a]_\mathcal{R} \cap [b]_\mathcal{R} = \varnothing$

**证明** 用反证法. 假设存在 $c \in [a]_\mathcal{R} \cap [b]_\mathcal{R}$, 则 $c \in [a]_\mathcal{R}$ 且 $c \in [b]_\mathcal{R}$, 因此 $c\mathcal{R}a$ 且 $c\mathcal{R}b$, 因此 $a\mathcal{R}b$, 由命题 (0.8) 可知 $[a]_\mathcal{R} = [b]_\mathcal{R}$, 与条件矛盾, 于是可知命题成立.

**注** 以上引理表明, 对于任意 $a, b \in S$ 都有

$$[a]_\mathcal{R} = [b]_\mathcal{R} \text{ 或 } [a]_\mathcal{R} \cap [b]_\mathcal{R} = \varnothing.$$

**定理 0.2**

设 $\mathcal{R}$ 是集合 $S$ 上的一个等价关系. 则所有关于 $\mathcal{R}$ 的等价类组成的集合族

$$\{[a]_\mathcal{R} | a \in S\}$$

是集合 $S$ 的一个分划.

**证明** 对于任意 $a \in S$ 都有 $a \in [a]_R$, 因此

$$S \subseteq \bigcup_{a\in S} [a]_R \subseteq S \Rightarrow S = \bigcup_{a\in S} [a]_R.$$

由以上引理 (0.1) 可知, 对于任意不相等的 $a, b \in S$ 都有

$$[a]_\mathcal{R} \cap [b]_\mathcal{R} = \varnothing.$$

综上可知关于 $\mathcal{R}$ 的等价类组成的集合族是集合 $S$ 的一个分划.

**注** 以上定理表明, 集合上的一个等价关系确定集合的一个划分.

**定理 0.3**

设集合 $S$ 的一个划分 $\{S_i|i \in I\}$, 其中 $I$ 是指标集. 若

$$\mathcal{R} = \{(a,b) \in S \times S | \exists i \in I((a \in S_i) \wedge (b \in S_i))\},$$

则 $\mathcal{R}$ 是集合 $S$ 上的一个等价关系.

**证明** XXX

于是我们可以说, 一个集合的所有划分与所有等价关系一一对应, 也就是说一个集合可以形成多少中划分, 就有多少种等价关系.

由以上讨论可知, 集合中一旦建立了一个等价关系, 就可以得到一个关于这个等价关系的一个划分, 于是我们可以继续建立以下概念.

**定义 0.19 (商集)**

设 $\mathcal{R}$ 是集合 $S$ 上的一个等价关系. 我们称 $S$ 的一个划分

$$\{[a]_{\mathcal{R}} | a \in S\},$$

为 $S$ 关于等价关系 $\mathcal{R}$ 的**商集** (quotient set). 记作 $S/\mathcal{R}$.

**注** 注意商集 $S/\mathcal{R}$ 里面的元素不是 $S$ 中的元素, 而是 $S$ 的子集.

为了理解集合的等价关系、等价类、分划、商集, 我们举一个简单的例子.

**例 0.2** 设五个人组成的集合 $A = \{a,b,c,d,e,f\}$. 令 $\mathcal{R}$ 是 $A$ 上的同乡关系. 已知 $a$ 和 $b$ 是北京人; $c$ 是广东人; $d, e$ 和 $f$ 是上海人.

(1) 求证: $\mathcal{R}$ 是 $A$ 中的一个等价关系.
(2) 求 $\mathcal{R}$ 中的全部元素.
(3) 求 $\mathcal{R}$ 的全部等价类.
(4) 求 $\mathcal{R}$ 确定的 $A$ 的一个划分.
(5) 求 $A$ 关于 $\mathcal{R}$ 的商集.

**证明** (1) 同乡关系 $\mathcal{R}$ 显然满足自反性、对称性和传递性, 因此它是 $A$ 上的一个等价关系.

**解** (2) 先写出 $\mathcal{R}$ 中的全部元素

$$\mathcal{R} = \{(a,a),(a,b),(b,a),(b,b),(c,c),(d,d),(d,e),(d,f),(e,d),(e,e),(e,f),(f,d),(f,e),(f,f)\}.$$

(3) 集合 $A$ 中元素关于 $\mathcal{R}$ 的等价类分别是

$$\text{``北京人'' 类: } [a]_{\mathcal{R}} = [b]_{\mathcal{R}} = \{a,b\},$$
$$\text{``广东人'' 类: } [c]_{\mathcal{R}} = \{c\},$$
$$\text{``上海人'' 类: } [d]_{\mathcal{R}} = [e]_{\mathcal{R}} = [f]_{\mathcal{R}} = \{d,e,f\}.$$

(4)(5) 于是就得到了集合 $A$ 的一个分划

$$\{\{a,b\},\{c\},\{d,e,f\}\}.$$

这个分划就是集合 $A$ 关于等价关系 $\mathcal{R}$ 的商集 $A/\mathcal{R}$.

### 0.3.3 序关系

我们已经把相等关系推广为更为抽象的等价关系. 下面我们来抽象 ``小于''(大于), ``小于等于 (大于等于) 关系. 这样的关系我们称为 ``序关系''.

我们知道集合中的元素是没有次序的. 为集合建立序关系, 就是希望集合中的元素能按一个规则排序. 设集合 $S$, 若元素 $x$ 排在 $y$ 前面, 则记作 $x \prec y$. 现在我们取出其中的三个元素, 已知它们可以按以下顺序排列:

$$a,\ b,\ c.$$

则 $a \prec b$ 且 $b \prec c$. 显然 $a$ 也排在 $c$ 前面, 因此有 $a \prec c$. 这表明序关系应满足传递性. 我们知道等价关系也满足传递性, 但由于等价关系还满足对称性, 因此顺序可以调换. 于是我们应该规定序关系不满足对称性. 这样我们就得到一个序公理.

**公理 0.10 (严格偏序公理)**

设集合 $S$ 上的一个二元关系 $O \subseteq S \times S$. 若对于任意 $a, b, c \in S$ 满足

(1) **反对称性** (antisymmetry): 若 $(a, b) \in O$, 则 $(b, a) \notin O$.

(2) 传递性: 若 $(a, b) \in O$ 且 $(b, c) \in O$, 则 $(a, c) \in O$.

则称 $O$ 是 $S$ 上的一个**严格偏序关系** (strictly partially ordered relation). 若 $(a, b) \in O$, 记作 $x \prec y$.

为了使用便利, 我们希望元素和自己本身也满足序关系. 为此我们只需补充一条 "自反性" 公理即可.

**公理 0.11 (偏序公理)**

集合 $S$ 上的一个二元关系 $O \subseteq S \times S$, 若对于任意 $a, b, c \in C$ 满足

(1) 自反性: $(a, a) \in O$.

(2) 反对称性: 若 $(a, b) \in O$ 且 $(b, a) \in O$, 则 $a = b$.

(3) 传递性: 若 $(a, b) \in O$ 且 $(b, c) \in O$, 则 $(a, c) \in O$.

则称 $O$ 是 $X$ 上的一个**偏序关系** (partially ordered relation). 若 $(a, b) \in O$, 记作 $a \preceq b$. 此时 $S$ 称为**偏序集** (partially ordered set).

**注** 由偏序公理和严格偏序公理可知

$$a \preceq b \iff a \prec b \text{ 或 } a = b.$$

集合的包含关系就是一种序关系. 由包含关系的定义立刻可以验证它满足自反性、反对称性、传递性. 下面我们来看一个简单的例子.

**例 0.3** 设集合 $S = \{a, b, c\}$. 列出它的幂集 $P(S)$ 中所有元素之间的全部包含关系.

**解** 容易知道

$$P(S) = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{b, c\}, \{a, c\}, \{a, b, c\}\}.$$

如图1是 $P(S)$ 中 8 个元素的全部包含关系.

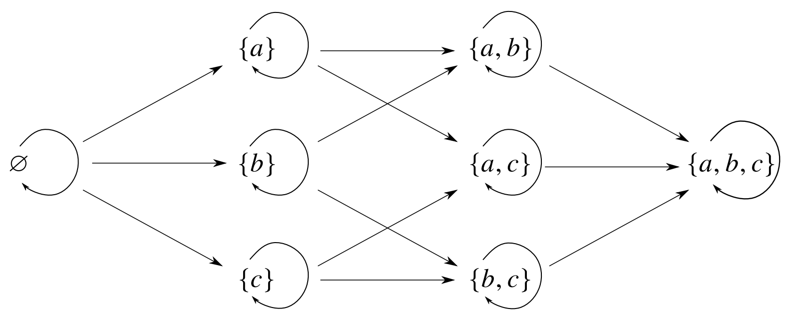



**图 1:** 包含的偏序关系

从以上例子我们看出 $P(A)$ 中的某些元素之间不存在包含关系, 例如 $\{a\}$ 和 $\{b\}$. 因此这样的序关系只是 "部分地 (partially)" 成立. 这就是我们把这样的序关系称为 "偏序关系" 的原因.

另一方面我们知道实数集中的任意两个实数都存在 "小于等于"(大于等于) 关系. 如果要描述这样的序关系. 我们需要再补充一条公理.

**公理 0.12 (全序公理)**

集合 $S$ 上的一个二元关系 $O \subseteq S \times S$, 若对于任意 $a, b, c \in C$ 满足

(1) 自反性: $(a, a) \in O$.

(2) 反对称性: 若 $(a, b) \in O$ 且 $(b, a) \in O$, 则 $a = b$.

(3) 传递性: 若 $(a, b) \in O$ 且 $(b, c) \in O$, 则 $(a, c) \in O$.

(4) **完全性** (totality): $(a, b) \in O$ 或 $(b, a) \in O$,

则称 $O$ 是 $S$ 上的一个**全序关系** (totally ordered relation). 此时 $S$ 称为**全序集** (totally ordered set). 带全序关系 $\preceq$ 的全序集 $S$ 记作 $(S, \preceq)$.

♡

**注** 全序关系一定是偏序关系.

**注** 完全性公理包含了自反性公理.

**引理 0.2 (Zorn 引理)**

设偏序集 $S$ 中的元素存在一个偏序关系 $\preceq$. 若任意 $b \in S$ 都满足 $b \preceq a$, 则称 $a$ 是 $S$ 中的一个**极大元素** (maximal element). 若 $S$ 的一个子集 $T$ 满足完全性, 则称 $T$ 是 $S$ 的一条**链** (chain), 或称 $T$ 为 $S$ 的一个**全序子集** (totally ordered subset). 设 $S$ 的一个子集 $U$, 若存在一个元素 $c \in S$, 使得 $U$ 中的任意元素 $x$ 都满足 $x \preceq c$, 则称 $c$ 是 $U$ 的一个**上界** (upper bound).

若偏序集 $S$ 的每条链都有上界, 则 $S$ 有一个极大元素.

♡

**证明** XXX

## 例题

**例 0.4** 在实数集 $\mathbb{R}$ 上定义一个二元关系:

$$a\mathcal{R}b :\iff a - b \in \mathbb{Z},$$

则

(1) $\mathcal{R}$ 是 $\mathbb{R}$ 上的一个等价关系.

(2) 对于任一等价类 $[a]_{\mathcal{R}}$ 都可以在区间 $[0, 1)$ 内找到唯一的代表, 从而 $\mathbb{R}$ 对于这个关系的商集 $\mathbb{R}/\mathcal{R}$ 与区间 $[0, 1)$ 之间有一个一一对应关系.

**证明**

(1) 任取 $a, b, c \in \mathbb{R}$.

  (1) 证明自反性. 由于 $a - a = 0 \in \mathbb{Z}$, 因此 $a\mathcal{R}a$.

  (2) 证明对称性. 若 $a\mathcal{R}b$, 则 $a - b = m \in \mathbb{Z}$, 于是 $-m = b - a \in \mathbb{Z}$, 因此 $b\mathcal{R}a$.

  (3) 证明传递性. 若 $a\mathcal{R}b$ 且 $b\mathcal{R}c$, 则 $a - b = m \in \mathbb{Z}$ 且 $b - c = n \in \mathbb{Z}$, 于是

$$a - c = (a - b) + (b - c) = m + n \in \mathbb{Z},$$

  因此 $a\mathcal{R}c$.

综上所述 $\mathcal{R}$ 是 $\mathbb{R}$ 上的一个等价关系.

(2) 设 $a \in [m, m+1)$ $(m \in \mathbb{Z})$, 则 $a - m \in [0, 1)$, 由于 $a - (a - m) = m \in \mathbb{Z}$, 故 $a\mathcal{R}(a - m)$, 因此 $a - m$ 是等价类 $[a]_{\mathcal{R}}$ 在区间 $[0, 1)$ 内的代表. 设 $x \in [0, 1)$ 是 $[a]_{\mathcal{R}}$ 的另一个代表, 即 $a - x \in \mathbb{Z}$, 由于 $m \leq a < m + 1$ 且

$0 \leq x < 0$, 故

$$m-1 < a-x < m+1 \Longrightarrow a-x=m \Longrightarrow x=a-m$$

由此可见, 在区间 $[0,1)$ 内 $[a]_{\mathcal{R}}$ 有唯一代表. 我们把 $[a]_{\mathcal{R}}$ 在区间 $[0,1)$ 内代表元素记作 $a$, 则有以下映射

$$\sigma : \mathbb{R}/\mathcal{R} \to [0,1),$$
$$[a]_{\mathcal{R}} \mapsto a,$$

显然对于不同的等价类, 它们在区间 $[0,1)$ 内的代表元素不相等, 因此 $\sigma$ 是单射; 另一方面 $[0,1)$ 内的任意元素 $c$, 必有 $\{x \in \mathbb{R} \mid x = c+m, m \in \mathbb{Z}\} \in \mathbb{R}/\mathcal{R}$, 因此 $\sigma$ 是满射. 于是可知 $\sigma$ 是双射, 即商集 $\mathbb{R}/\mathcal{R}$ 与区间 $[0,1)$ 之间有一个一一对应关系.

**例 0.5** 在实数集 $\mathbb{R}$ 上定义一个二元关系:

$$a\mathcal{R}b : \Longleftrightarrow \lfloor a \rfloor = \lfloor b \rfloor,$$

其中 $\lfloor x \rfloor$ 表示小于等于 $x$ 的最大整数. 则

(1) $\mathcal{R}$ 是 $\mathbb{R}$ 上的一个等价关系.

(2) $\mathbb{R}$ 对于这个关系的商集 $\mathbb{R}/\mathcal{R}$ 与整数集 $\mathbb{Z}$ 之间有一个一一对应关系.

**证明**

(1) 任取 $a,b,c \in \mathbb{R}$.

(1) 证明自反性. 由于 $\lfloor a \rfloor = \lfloor a \rfloor$, 因此 $a\mathcal{R}a$.

(2) 证明对称性. 若 $a\mathcal{R}b$, 则 $\lfloor a \rfloor = \lfloor b \rfloor$, 于是 $\lfloor b \rfloor = \lfloor a \rfloor$, 因此 $b\mathcal{R}a$.

(3) 证明传递性. 若 $a\mathcal{R}b$ 且 $b\mathcal{R}c$, 则 $\lfloor a \rfloor = \lfloor b \rfloor$ 且 $\lfloor b \rfloor = \lfloor c \rfloor$, 于是 $\lfloor a \rfloor = \lfloor c \rfloor$, 因此 $a\mathcal{R}c$.

综上所述 $\mathcal{R}$ 是 $\mathbb{R}$ 上的一个等价关系.

(2) 设 $\lfloor a \rfloor = m$ $(m \in \mathbb{Z})$, 则

$$[a]_{\mathcal{R}} = \{x \in \mathbb{R} | x\mathcal{R}a\} = \{x \in \mathbb{R} | \lfloor x \rfloor = \lfloor a \rfloor\} = \{x \in \mathbb{R} | x = m\} = [m, m+1)$$

我们把 $[a]_{\mathcal{R}}$ 的代表元素记作 $\lfloor a \rfloor$, 则有以下映射

$$\sigma : \mathbb{R}/\mathcal{R} \to \mathbb{Z},$$
$$[a]_{\mathcal{R}} \mapsto \lfloor a \rfloor,$$

显然 $\sigma$ 是单射也是满射, 于是可知 $\sigma$ 是双射, 即商集 $\mathbb{R}/\mathcal{R}$ 与整数集 $\mathbb{Z}$ 之间有一个一一对应关系.

**例 0.6** 在平面 $\pi$ 上定义一个二元关系:

$$P_1[x_1, y_1]\mathcal{R}P_2[x_2, y_2] : \Longleftrightarrow x_1 - x_2 \in \mathbb{Z} \text{ 且 } y_1 - y_2 \in \mathbb{Z},$$

则

(1) $\mathcal{R}$ 是 $\pi$ 上的一个等价关系.

(2) 点 $P\left[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right]$ 的等价类 $[P]_{\mathcal{R}}$ 是 $\pi$ 的什么样的子集?

(3) $\pi$ 对于这个关系的商集 $\pi/\mathcal{R}$ 与 $\pi$ 的哪个子集有一个一一对应关系?

**解**

(1) 任取 $a,b,c \in \mathbb{R}$.

(1) 证明自反性. 由于 $\lfloor a \rfloor = \lfloor a \rfloor$, 因此 $a\mathcal{R}a$.

(2) 证明对称性. 若 $a\mathcal{R}b$, 则 $\lfloor a \rfloor = \lfloor b \rfloor$, 于是 $\lfloor b \rfloor = \lfloor a \rfloor$, 因此 $b\mathcal{R}a$.

(3) 证明传递性. 若 $a\mathcal{R}b$ 且 $b\mathcal{R}c$, 则 $\lfloor a \rfloor = \lfloor b \rfloor$ 且 $\lfloor b \rfloor = \lfloor c \rfloor$, 于是 $\lfloor a \rfloor = \lfloor c \rfloor$, 因此 $a\mathcal{R}c$.

综上所述 $\mathcal{R}$ 是 $\mathbb{R}$ 上的一个等价关系.

(2) 设 $\lfloor a \rfloor = m\ (m \in \mathbb{Z})$, 则

$$[a]_{\mathcal{R}} = \{x \in \mathbb{R} | x\mathcal{R}a\} = \{x \in \mathbb{R} | \lfloor x \rfloor = \lfloor a \rfloor\} = \{x \in \mathbb{R} | x = m\} = [m, m+1)$$

我们把 $[a]_{\mathcal{R}}$ 的代表元素记作 $\lfloor a \rfloor$, 则有以下映射

$$\sigma : \mathbb{R}/\mathcal{R} \to \mathbb{Z},$$
$$[a]_{\mathcal{R}} \mapsto \lfloor a \rfloor,$$

显然 $\sigma$ 是单射也是满射, 于是可知 $\sigma$ 是双射, 即商集 $\mathbb{R}/\mathcal{R}$ 与整数集 $\mathbb{Z}$ 之间有一个一一对应关系.

**例 0.7 几何空间的商集模型 I** 在几何空间 $V$ 中设过原点 $O$ 的一个平面 $\pi_0$, 在 $V$ 上定义一个二元关系:

$$\boldsymbol{\alpha}\mathcal{R}\boldsymbol{\beta} :\Longleftrightarrow \boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{\beta} \in \pi_0,$$

则

(1) $\mathcal{R}$ 是 $V$ 上的一个等价关系.

(2) $V$ 对于这个关系的商集 $V/\mathcal{R}$ 与 $V$ 中过原点 $O$ 的直线 $l_0$ 之间有一个一一对应关系.

**证明**

(1) 任取 $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma} \in V$.

  (1) 自反性和对称性显然成立.

  (2) 证明传递性. 若 $\boldsymbol{\alpha}\mathcal{R}\boldsymbol{\beta}$ 且 $\boldsymbol{\beta}\mathcal{R}\boldsymbol{\gamma}$, 则 $\boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{\beta} \in \pi_0$ 且 $\boldsymbol{\beta} - \boldsymbol{\gamma} \in \pi_0$, 于是可知 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 同在平面 $\pi_0$ 上且 $\boldsymbol{\beta}$ 与 $\boldsymbol{\gamma}$ 同在平面 $\pi_0$ 上, 则 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\gamma}$ 同在平面 $\pi_0$ 上, 故 $\boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{\gamma} \in \pi_0$, 因此 $\boldsymbol{\alpha}\mathcal{R}\boldsymbol{\gamma}$.

  综上所述 $\mathcal{R}$ 是 $V$ 上的一个等价关系.

(2) 由于

$$[\boldsymbol{\alpha}]_{\mathcal{R}} = \{\boldsymbol{\beta} \in V | \boldsymbol{\beta}\mathcal{R}\boldsymbol{\alpha}\} = \{\boldsymbol{\beta} \in V | \boldsymbol{\beta} - \boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\eta} \in \pi_0\} = \{\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\eta} | \boldsymbol{\eta} \in \pi_0\},$$

于是可知当 $\boldsymbol{\alpha} \notin \pi_0$ 时, $[\boldsymbol{\alpha}]_{\mathcal{R}}$ 是经过向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 的终点且与平面 $\pi_0$ 平行的平面; 当 $\boldsymbol{\alpha} \in \pi_0$ 时, $[\boldsymbol{\alpha}]_{\mathcal{R}}$ 就是平面 $\pi_0$. 于是可知, 商集 $V/\mathcal{R}$ 是由 $\pi_0$ 以及所有与 $\pi_0$ 平行的平面组成的集合.

设 $[\boldsymbol{\alpha}]_{\mathcal{R}}$ 的代表元素为 $\boldsymbol{\alpha} \in l_0$, 则有以下映射

$$\sigma : V/\mathcal{R} \to l_0,$$
$$[\boldsymbol{\alpha}]_{\mathcal{R}} \mapsto \boldsymbol{\alpha},$$

由于过一点有且仅有一个平面与 $\pi_0$ 平行 (或重合), 故 $\sigma$ 是单射也是满射, 于是可知 $\sigma$ 是双射, 即商集 $V/\mathcal{R}$ 与过原点 $O$ 的直线 $l_0$ 之间有一个一一对应关系.

**注** 以上例题中的集合 $\{\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\eta} | \boldsymbol{\eta} \in \pi_0\}$ 通常记作 $\boldsymbol{\alpha} + \pi_0$.

## 习题

✍ **练习 0.1** 在平面 $\pi$ 上定义一个二元关系:

$$P\mathcal{R}Q :\Longleftrightarrow P \text{ 与 } Q \text{ 位于同一水平线},$$

则

(1) $\mathcal{R}$ 是 $\pi$ 上的一个等价关系.

(2) $\pi$ 对于这个关系的商集 $\pi/\mathcal{R}$ 由哪些图形组成?

**解**

(1) 任取 $A, B, C \in \pi$.

  (1) 自反性和对称性显然成立.

  (2) 证明传递性. 若 $A\mathcal{R}B$ 且 $B\mathcal{R}C$, 则 $A$ 与 $B$ 位于同一水平线且 $B$ 与 $C$ 位于同一水平线, 则 $A$ 与 $C$ 位于同一水平线, 因此 $A\mathcal{R}C$.

综上所述 $\mathcal{R}$ 是 $V$ 上的一个等价关系.

(2) 点 $P$ 的等价类 $[P]_{\mathcal{R}}$ 是过 $P$ 与 $x$ 轴平行或重合的一条直线, 故商集 $\pi/\mathcal{R}$ 是由 $x$ 轴以及所有与 $x$ 轴平行的直线组成的集合.

**练习 0.2 几何空间的商集模型 II** 在几何空间 $V$ 中设过原点 $O$ 的一条直线 $l_0$, 在 $V$ 上定义一个二元关系:

$$\boldsymbol{\alpha}\mathcal{R}\boldsymbol{\beta} :\Longleftrightarrow \boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}\in l_0,$$

则

(1) $\mathcal{R}$ 是 $V$ 上的一个等价关系.

(2) $V$ 对于这个关系的商集 $V/\mathcal{R}$ 与 $V$ 中过原点 $O$ 的平面 $\pi_0$ 之间有一个一一对应关系.

**证明**

(1) 任取 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}\in V$.

 (1) 自反性和对称性显然成立.

 (2) 证明传递性. 若 $\boldsymbol{\alpha}\mathcal{R}\boldsymbol{\beta}$ 且 $\boldsymbol{\beta}\mathcal{R}\boldsymbol{\gamma}$, 则 $\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}\in l_0$ 且 $\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{\gamma}\in l_0$, 于是可知 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 同在直线 $l_0$ 上且 $\boldsymbol{\beta}$ 与 $\boldsymbol{\gamma}$ 同在直线 $l_0$ 上, 则 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\gamma}$ 同在直线 $l_0$ 上, 故 $\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\gamma}\in l_0$, 因此 $\boldsymbol{\alpha}\mathcal{R}\boldsymbol{\gamma}$.

综上所述 $\mathcal{R}$ 是 $V$ 上的一个等价关系.

(2) 由于

$$[\boldsymbol{\alpha}]_{\mathcal{R}}=\{\boldsymbol{\beta}\in V|\boldsymbol{\beta}\mathcal{R}\boldsymbol{\alpha}\}=\{\boldsymbol{\beta}\in V|\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\eta},\boldsymbol{\eta}\in l_0\}=\{\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\eta}|\boldsymbol{\eta}\in l_0\},$$

于是可知当 $\boldsymbol{\alpha}\notin l_0$ 时, $[\boldsymbol{\alpha}]_{\mathcal{R}}$ 是经过向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 的终点且与直线 $l_0$ 平行的直线; 当 $\boldsymbol{\alpha}\in l_0$ 时, $[\boldsymbol{\alpha}]_{\mathcal{R}}$ 就是直线 $l_0$. 于是可知, 商集 $V/\mathcal{R}$ 是由 $l_0$ 以及所有与 $l_0$ 平行的直线组成的集合.

设 $[\boldsymbol{\alpha}]_{\mathcal{R}}$ 的代表元素为 $\boldsymbol{\alpha}\in\pi_0$, 则有以下映射

$$\sigma: V/\mathcal{R}\to\pi_0,$$
$$[\boldsymbol{\alpha}]_{\mathcal{R}}\mapsto\boldsymbol{\alpha},$$

由于过一点有且仅有一条直线与直线 $l_0$ 平行 (或重合), 故 $\sigma$ 是单射也是满射, 于是可知 $\sigma$ 是双射, 即商集 $[\boldsymbol{\alpha}]_{\mathcal{R}}$ 与过原点 $O$ 的平面 $\pi_0$ 之间有一个一一对应关系.

**注** 以上习题中的集合 $\{\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\eta}|\boldsymbol{\eta}\in l_0\}$ 通常记作 $\boldsymbol{\alpha}+l_0$.

**练习 0.3** 写出整数集 $\mathbb{Z}$ 对于模 2 同余关系的商集 $\mathbb{Z}_2$, 它的元素是 $\mathbb{Z}$ 的什么样的子集?

**解** $\mathbb{Z}_2=\{\overline{0},\overline{1}\}$, 其中 $\overline{0}=\{2m|m\in\mathbb{Z}\}$ 是偶数集, $\overline{1}=\{2m+1|m\in\mathbb{Z}\}$ 是奇数集.

**练习 0.4** 写出整数集 $\mathbb{Z}$ 对于模 3 同余关系的商集 $\mathbb{Z}_2$, 它的元素是 $\mathbb{Z}$ 的什么样的子集?

**解** $\mathbb{Z}_3=\{\overline{0},\overline{1},\overline{2}\}$, 其中

$$\overline{0}=\{3m|m\in\mathbb{Z}\},\ \overline{1}=\{3m+1|m\in\mathbb{Z}\},\ \overline{2}=\{3m+2|m\in\mathbb{Z}\}.$$ ■

**练习 0.5** 设集合 $S=\{a,b,c\}$, 则 $S$ 有多少种划分? 有多少个不同的商集?

**解** 集合 $S$ 的非空子集有:

$$\{a,b,c\},\ \{a,b\},\ \{a,c\},\ \{b,c\},\ \{a\},\ \{b\},\ \{c\}.$$

故 $S$ 的分划有 5 种:

$$\{\{a,b,c\}\},\ \{\{a,b\}\{c\}\},\ \{\{a,c\}\{b\}\},\ \{\{b,c\}\{a\}\},\ \{\{a\}\{b\}\{c\}\}.$$

以上 5 个划分即为 $S$ 的 5 个不同商集.

## 0.4 映射与函数

研究两个集合之间的关系,我们需要定义映射. 并研究它的相关性质.

**定义 0.20 (映射)**

设集合 $A$ 和 $B$. 若存在一个对应法则 $f$, 使得每一个元素 $a \in A$ 都有唯一确定的元素 $b \in B$ 与之对应, 则称 $f$ 为 $A$ 到 $B$ 的一个**映射** (mapping), 记作

$$\begin{aligned} f: A &\to B, \\ a &\mapsto b, \end{aligned}$$

其中 $b$ 称为 $a$ 在 $f$ 下的**象** (image),$a$ 称为 $b$ 在 $f$ 下的一个**原象** (preimage), 记作

$$f(a) = b,\ a \in A,$$

其中集合 $A$ 称为映射 $f$ 的**定义域** (domain), 集合 $B$ 称为映射 $f$ 的**陪域** (codomain),$A$ 中所有元素在 $f$ 下的象组成的集合称为 $f$ 的象或 $f$ 的**值域** (range), 记作 $\operatorname{Im} f$ 或 $f(A)$.
两个映射相等当且仅当定义域, 陪域和对应法则都相等.

♣

注 $f(a)$ 也可以记作 $fa$.
注 注意定义域中的每一个元素只有唯一的象, 但陪域中的某些元素可能没有原象, 如果有原象也可能不止一个, 把我们把元素 $b \in B$ 的在映射 $f$ 下的所有原象组成的集合称为 $b$ 在 $f$ 下的**原象集** (preimage), 记作 $f^{-1}(b)$.
注 注意陪域和值域是两个不同的概念, 容易看出对于一个映射, 它的值域一定是陪域的子集.
注 映射是现代数学的核心基础概念, 定义中的集合 $A$ 与 $B$ 可以是任意非空集合.
注 对于定义中的映射, 当其陪域 $B$ 是数集时, 通常称之为**函数** (function), 此时 $a$ 称为函数 $f$ 的**自变量** (independent variable, argument),$y$ 称为映射 $f$ 的**因变量** (dependent variable, value).

根据定义域和陪域的不同, 函数可以分为几类. 其中定义域是 $\mathbb{N}$ 的函数称为**数列** (sequence of number); 定义域是 $\mathbb{R}$ 的函数称为**实变函数** (function of one real variable); 定义域是 $\mathbb{C}$ 的函数称为**复变函数** (function of one complex variable); 陪域是 $\mathbb{R}$ 的函数称为**实值函数** (real-valued function); 陪域是 $\mathbb{C}$ 的函数称为**复值函数** (complex-valued function).
注 集合 $A$ 到自身的映射称为 $A$ 上的一个**变换** (transformation).
注 有些书上规定两个映射相等当且仅当定义域与对应法则相等. 这两种定义在实际应用时差别不大.

映射为两个集合建立了对应关系, 但最为重要的对应关系是 ‘‘一一对应’’ 关系, 很多数学问题的研究目的就为了建立一一对应关系.

**定义 0.21 (双射)**

设映射 $f: A \to B$.

(1) 若对于任意 $a_1, a_2 \in A$, 都有 $a_1 = a_2 \iff f(a_1) = f(a_2)$, 则称映射 $f$ 为**单射** (injection).

(2) 若 $\operatorname{Im} f = B$, 则称映射 $f$ 为**满射** (surjection).

若映射 $f$ 既是单射又是满射, 则称 $f$ 为**双射** (bijection), 或称 $f$ 是集合 $A$ 到 $B$ 的一个**一一对应** (one-to-one correspondence).

♣

注 以上定义表明, 如果一个映射是单射, 则定义域中不同的元素一定有不同的象, 反之陪域中同一个象一定有相同的原象.
注 以上定义表明, 如果一个映射是满射, 则它的陪域和值域相同, 即陪域中的每一个元素都存在原象.
注 以上定义表明, 如果一个映射是双射, 则陪域中的每一个元素都有唯一的一个原象.

**命题 0.9**

设集合 $A$ 上的一个变换 $f$. 若 $A$ 是有限集, 则 $f$ 是一个单射当且仅当它是一个满射.

♠

**证明** XXX

下面我们来定义映射的运算. 加法和数乘运算都是平凡的. 主要研究乘法运算.

**定义 0.22 (映射的乘法)**

设两个映射

$$g : A \to B,\ f : C \to D$$

若 $B \subseteq C$, 则可以相继进行两次映射得到一个 $A$ 到 $D$ 的映射

$$fg : A \to D,$$
$$a \mapsto (fg)(a) := f(g(a)),$$

这个映射称为 $f$ 与 $g$ 的**积** (product), 或称 $f$ 与 $g$ 的**复合映射** (composite mapping).

需要注意复合映射不满足交换律, 但它满足结合律.

**命题 0.10 (映射乘法的结合律)**

设映射

$$h : A \to B,\ g : C \to D,\ f : E \to F.$$

若 $B \subseteq C$ 且 $D \subseteq E$ 则

$$f(gh) = (fg)h.$$

**证明** XX

**注** 由于映射乘法满足结合律, 所以可以定义有限个映射的乘法. 设 $f : X \to X$

$$f^n := \underbrace{ff \cdots f}_{n \text{ 个 } f}.$$

有了映射的乘法运算, 我们自然要研究它的逆运算. 为了研究乘法运算的逆运算, 我们需要先定义乘法运算的单位元.

**定义 0.23 (恒等映射)**

设映射 $f : A \to A$. 若对于任意 $a \in A$ 都满足 $f(a) = a$, 则称 $f$ 是 $A$ 上的**恒等映射** (identity mapping), 记作 $\mathcal{I}_A$.

**命题 0.11 (恒等映射的性质)**

任意映射 $f : A \to B$ 都满足

$$f\mathcal{I}_A = f,\ \mathcal{I}_B f = f.$$

**证明** 证明略.

**定义 0.24 (逆映射)**

设映射 $f : A \to B$. 若存在映射 $g : B \to A$ 满足

$$fg = \mathcal{I}_B,\ gf = \mathcal{I}_A,$$

则称映射 $f$ **可逆** (inverible), $g$ 是它的一个**逆映射** (inverse mapping).

以上定义并没有确保逆映射的唯一性, 需要验证.

**命题 0.12 (逆映射的唯一性)**

设映射 $f : A \to B$. 若 $f$ 可逆, 则它存在唯一的逆映射.

**证明** XXX

**注** 由于逆映射唯一存在, 因此可以把 $f$ 的逆映射记作 $f^{-1}$, 于是有

$$ff^{-1} = \mathcal{I}_B,\ f^{-1}f = \mathcal{I}_A.$$

**注** 显然可逆映射 $f$ 与它的逆映射 $f^{-1}$ 也可逆, 且它们互为逆映射, 即

$$(f^{-1})^{-1} = f.$$

**注** 需要注意若 $f$ 不可逆, 则记号 $f^{-1}$ 也是存在的, 此时 $f^{-1}$ 表示原像.

**注** 若映射是一个函数, 则它逆映射通常被称为**反函数** (inverse function).

**定理 0.4 (映射可逆的充要条件)**

设映射 $f : A \to B$. 则 $f$ 可逆的充要条件是 $f$ 是双射.

**证明** XXX

**命题 0.13 (可逆映射的乘积)**

设映射 $f : A \to B$ 与 $g : B \to A$. 若 $f$ 与 $g$ 都可逆, 则 $gf$ 也可逆, 且

$$(gf)^{-1} = f^{-1}g^{-1}.$$

**证明** XXX

有时候有些映射不是双射, 但我们可以取它的 "一部分", 使其成为双射, 然后就可以得到它的逆映射. 例如三角函数在定义域 $\mathbb{R}$ 上都不是双射, 但用以上方法都可以定义它们的 "逆映射".

**定义 0.25 (限制映射)**

设映射 $f : A \to B$, 设 $C \subseteq A$, 则可以定义映射

$$f|_C := C \to B,$$

若该映射对于任意 $c \in C$ 都满足 $f|_C(c) = f(c)$, 则称 $f|_C$ 为 $f$ 在集合 $C$ 上的**限制映射** (restriction mapping) 或**部分映射** (partial mapping).

**注** 定义中定义域 $A$ 的子集 $C$ 在映射 $f$ 下的像 $f(C)$ 即为映射 $f|_C$ 的值域.

**命题 0.14 (像 (原像) 的包含关系)**

设映射 $\phi : A \to B$. 则

1. $C \subseteq D \subseteq A \Rightarrow \phi(C) \subseteq \phi(D)$;
2. $C \subseteq D \subseteq B \Rightarrow \phi^{-1}(C) \subseteq \phi^{-1}(D)$.

**证明** 待证明.

**命题 0.15 (映射和集合运算的关系)**

设映射 $\phi : A \to B$, 集合族 $\{E_\alpha : \alpha \in I\}$ 满足 $\forall \alpha \in I\ (E_\alpha \subseteq A)$. 则

$$1. \phi\left(\bigcup_{\alpha \in I} E_\alpha\right) = \bigcup_{\alpha \in I} \phi(E_\alpha);$$

$$2.\phi\left(\bigcap_{\alpha\in I}E_\alpha\right)\subseteq\bigcap_{\alpha\in I}\phi\left(E_\alpha\right);$$

$$3.\phi^{-1}\left(\bigcup_{\alpha\in I}E_\alpha\right)=\bigcup_{\alpha\in I}\phi^{-1}\left(E_\alpha\right);$$

$$4.\phi^{-1}\left(\bigcap_{\alpha\in I}E_\alpha\right)=\bigcap_{\alpha\in I}\phi^{-1}\left(E_\alpha\right).$$

**证明** 待证明.

注意以上命题中的第二个关系式中不是等号关系, 而是包含关系. 我们举一个非常简单的例子来说明第二个关系式为何不能取到等号.
设映射 $\phi:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$, $\phi(x)=|x|$. 若集合 $A=\{1,0\}$ 和 $B=\{-1,0\}$. 则

$$\phi(A\cap B)=\{0\},$$
$$\phi(A)\cap\phi(B)=\{1,0\}.$$

即

$$\phi(A\cap B)\subsetneq\phi(A)\cap\phi(B).$$

**定义 0.26 (映射的图像)**

设映射

$$f:X\to Y,$$
$$x\mapsto y$$

则映射的图像 (graph)

$$G_f:=\{(x,y)\in X\times Y:y=f(x)\}.$$

下面我们来讨论两个在物理学中非常重要的双射.

**定义 0.27 (Galileo 变换)**

设映射

$$G_v:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2,$$
$$(x,t)\mapsto(\xi,\tau),$$

它的对应法则规定如下

$$\xi=x-vt,\tau=t,$$

其中 $v\in\mathbb{R}$, 则该映射称为 **Galileo** 变换.

容易看到 Galileo 变换是一个双射, 它的逆变换是 $(\xi,\tau)=G_v^{-1}(x,t)$, 其中

$$\xi=x+vt,\tau=t,$$

故

$$G_v^{-1}=G_{-v}.$$

不难检验

$$G_{u+v}=G_u\circ G_v.$$

于是我们可以对运算 $\circ$ 定义群的概念.

**定义 0.28 (Galileo 群)**

集合 $\{G_u : u \in \mathbb{R}\}$ 关于运算 $\circ$ 构成的群称为 **Galileo** 群 (Galileo group). ♣

**定义 0.29 (Lorentz 变换)**

设映射

$$\begin{aligned} L_v : \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R}^2, \\ (x, t) &\mapsto (\xi, \tau), \end{aligned}$$

它的对应法则规定如下

$$\xi = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}, \quad \tau = \frac{t - \left(\frac{v}{c^2}\right)x}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}},$$

其中 $v \in \mathbb{R}$ 且 $0 \leq v < c$, $c$ 是光速, 则该映射称为 **Lorentz** 变换. ♣

注 容易看出, 在低速阶段,$v/c \approx 0$,Lorentz 变换就退化成了 Galileo 变换.

容易看到 Lorentz 变换是一个双射, 它的逆变换是 $(\xi, \tau) = G_v^{-1}(x, t)$, 其中

$$\xi = \frac{x + vt}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}, \tau = \frac{t + \left(\frac{v}{c^2}\right)x}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$

故

$$L_v^{-1} = L_{-v}.$$

不难检验

$$L_w = L_u \circ L_v,$$

其中

$$w = \frac{u + v}{1 + \frac{uv}{c^2}}.$$

于是我们可以对运算 $\circ$ 定义群的概念.

**定义 0.30 (Lorentz 群)**

集合 $\{L_u : u \in \mathbb{R}\}$ 关于运算 $\circ$ 构成的群称为 **Lorentz** 群 (Lorentz group). ♣

容易看出 Galileo 变换是 Lorentz 变换在特定条件下的一种简化.

## 例题

**例 0.8** 设映射 $f : A \to B$ 与 $g : B \to C$. 则有以下结论

(1) 若 $f$ 与 $g$ 都是单射, 则 $gf$ 也是单射;

(2) 若 $f$ 与 $g$ 都是满射, 则 $gf$ 也是满射;

(3) 若 $f$ 与 $g$ 都是双射, 则 $gf$ 也是双射;

(4) 若 $f$ 与 $g$ 都可逆, 则 $gf$ 也可逆.

证明 XX

**例 0.9** 设映射 $f: A \to A$, 其中 $A$ 是有限集, 则 $f$ 是单射当且仅当 $f$ 是满射.

**证明** XX

**例 0.10** 设有限集 $A$ 与 $B$, 若存在一个 $A$ 到 $B$ 的双射, 则 $\operatorname{card} A = \operatorname{card} B$.

**证明** XX

**例 0.11** 设整数集 $\mathbb{Z}$ 与偶数集 $2\mathbb{Z}$, 则

$$\operatorname{card} \mathbb{Z} = \operatorname{card}(2\mathbb{Z}).$$

**解** XX

## 习题

**练习 0.6** 以下对应法则是否构成实数集 $\mathbb{R}$ 到自身的映射? 若是, 则是否为单射? 是否为满射? 是否为双射?

$$x \mapsto x^3;\ x \mapsto x^2 - x;\ x \mapsto 2^x;\ x \mapsto \ln x.$$

**解**

(1) 是 $\mathbb{R}$ 到自身的映射, 既是单射, 也是满射, 所以是双射.

(2) 是 $\mathbb{R}$ 到自身的映射, 不是单射, 也不是满射, 所以不是双射.

(3) 是 $\mathbb{R}$ 到自身的映射, 是单射, 但不是满射, 所以不是双射.

(4) 不是 $\mathbb{R}$ 到自身的映射, 因为对应法则 $x \mapsto \ln x$ 的定义域是 $\mathbb{R}^+$.

**练习 0.7** 在以下两个集合间是否存在双射? 举例说明.

(1) 闭区间 $[-1, 1]$ 与 $[-\pi/2, \pi/2]$ 之间.

(2) 闭区间 $[-1, 1]$ 与 $[0, \pi]$ 之间.

(3) 实数集 $\mathbb{R}$ 与开区间 $(0, 1)$ 之间.

**解** 都存在双射. 举例如下.

(1) $f(x) = \pi x/2$, $f(x) = \arcsin x$.

(2) $f(x) = \pi(x+1)/2$, $f(x) = \arccos(-x)$

(3) $f(x) = (\operatorname{arccot} x)/\pi$, $f(x) = 1/2 + (\arctan x)/\pi$

**练习 0.8** 设有限集 $A$ 与 $B$, 若 $\operatorname{card} A = \operatorname{card} B$, 则存在一个 $A$ 到 $B$ 的双射.

**证明** 由于 $\operatorname{card} A = \operatorname{card} B$, 设

$$A = \{a_1, a_2, \cdots, a_n\},\ B = \{b_1, b_2, \cdots, b_n\},$$

令 $f(a_i) = b_i$, $i = 1, 2, \cdots, n$, 则容易验证 $f$ 是 $A$ 到 $B$ 的双射.

**练习 0.9** 设映射 $f: A \to B$ 与 $g: B \to A$. 若 $gf = I_A$, 则 $f$ 是单射,$g$ 是满射.

**证明** XX

## 0.5 运算与运算律

### 0.5.1 二元运算

我们熟悉的 ‘‘二元运算’’ 实质上也是一种映射. 我们可以用 Cartesian 积和映射来定义 ‘‘二元运算”.

**定义 0.31 (二元运算)**

设映射

$$f : A \times B \to C,$$

我们称这个映射为集合 $A$ 与 $B$ 到 $C$ 的一个**二元运算** (binary operation). 特别地, 设映射

$$* : A \times A \to A.$$

我们称 $*$ 为集合 $A$ 上的一个二元运算. 带 $*$ 运算的集合 $A$ 记作 $(A, *)$.

注 $* : A \times A \to A$ 的意思是: 集合 $A$ 中的任意两个元素做一次运算 $*$ 后, 得到的结果还在 $A$ 中, 我们通常称这个条件为 “$A$ 对运算 $*$ 封闭”.

下面集合 $A$ 上的一种二元运算对于定义了一种运算的集合, 有以下两种常见的运算律.

**定义 0.32 (交换律和结合律)**

设集合 $A$ 上有一个二元运算 $*$.

(1) 若对于任意 $a, b, c \in A$ 都满足 $(a * b) * c = a * (b * c)$, 则称该二元运算满足**结合律** (associative law).

(2) 若对于任意 $a, b \in A$ 都满足 $a * b = b * a$, 则称该二元运算满足**交换律** (commutative law).

注 如果一个集合中只定义了一种运算, 通常都满足结合律 (原因在后面将看到). 因此结合律比交换律更 ‘‘基础”. 若该运算还满足交换律, 则通常称这种运算为**加法** (addition). 如果该运算不要求满足交换律, 则通常称这种运算为**乘法** (multiplication).

### 0.5.2 单位元和逆元

定义了一种运算的集合中还可以定义该运算的单位元.

**定义 0.33 (单位元)**

设集合 $(A, *)$. 若存在 $e \in A$ 使得对于任一 $a \in A$ 都有 $a * e = e * a = a$, 则称 $e$ 为该运算的**单位元** (unit element).

注 若存在 $e \in A$ 使得对于任一 $a \in A$ 都有 $a * e = a$, 则称 $e$ 是该运算的**右单位元** (right unit element); 若存在 $e \in A$ 使得对于任一 $a \in A$ 都有 $a * e = a$, 则称 $e$ 是该运算的**左单位元** (left unit element);

注 不是所有运算都有单位元.

以上定义没有保证单位元的唯一性, 需要证明.

**命题 0.16 (单位元的唯一性)**

设集合 $(A, *)$. 若运算 $*$ 有单位元, 则单位元唯一存在.

证明 设单位元 $e_1$ 和 $e_2$. 由单位元的定义可知

$$e_1 * e_2 = e_1, \quad e_1 * e_2 = e_2.$$

因此 $e_1 = e_2$. 于是可知单位元唯一存在.

注 “加法” 运算的单位元通常记作 **0**, 称为**零元** (zero element);“乘法” 运算的单位元通常记作 **1**, 称为**幺元** (identity element). 在加法的单位元称为零元的情况下, 乘法的单位元可以直接称为单位元.

用单位元可以定义元素的逆元.

**定义 0.34 (运算的逆元)**

设集合 $(A, *)$, 其中运算 $*$ 存在单位元 $e$. 对于 $a \in A$, 若存在 $x \in A$ 满足 $a * x = x * a = e$, 则称 $x$ 是运算 $*$ 下 $a$ 的**逆元** (inverse element), 此时称 $a$ **可逆** (invertible).

注 对于 $a \in A$ 若存在元素 $x \in A$ 使得 $x * a = e$, 则称 $x$ 是运算 $*$ 下 $a$ 的**左逆元** (left inverse element). 若存在元素 $x \in A$ 使得 $a * x = e$, 则称 $x$ 是运算 $*$ 下 $a$ 的**右逆元** (left inverse element).

注 对于有单位元的集合 $(A, *)$, 未必每个元素都有逆元.

结合律保证了逆元的唯一性.

**命题 0.17 (逆元的唯一性)**

设集合 $(A, *)$, 运算 $*$ 满足结合律且存在单位元 $e$. 若元素 $a \in A$ 可逆, 则 $a$ 存在唯一逆元.

**证明** 设 $x_1$ 和 $x_2$ 都是 $a$ 的逆元, 则

$$x_1 * a = a * x_1 = e, \quad x_2 * a = a * x_2 = e.$$

由于 $*$ 满足结合律, 故

$$x_2 = e * x_2 = (x_1 * a) * x_2 = x_1 * (a * x_2) = x_1 * e = x_1.$$

于是可知 $a$ 存在唯一逆元.

注 $A$ 中元素 $a$ 的加法逆元通常记作 $-a$, 称为**负元** (negative element); 乘法逆元通常记作 $a^{-1}$, 通常称为**单位** (unit). 在加法的逆元称为负元的情况下, 乘法的逆元可以直接称为逆元.

注乘法通常不满足交换律. 若乘法不满足交换律, 则 $ab^{-1} \neq b^{-1}a$. 此时不能用 $a/b$, 因为它无法区分 $ab^{-1}$ 和 $b^{-1}a$.

注 定义了逆元且证明了唯一性后, 可以定义该运算的逆运算.“加法” 运算的逆运算通常称为 “减法”;“加法” 运算的逆运算通常称为 “除法”.

**命题 0.18**

设集合 $(A, *)$, 运算 $*$ 存在单位元 $e$. 若 $a$ 有左逆元 $l$, 又有右逆元 $r$, 则 $a$ 可逆, 且 $a^{-1} = l = r$.

**证明** 由于 $a$ 有左逆元 $l$, 又有右逆元 $r$, 故

$$la = e \iff lar = r. \quad ar = e \iff lar = l.$$

因此 $r = l$. 因此 $a$ 可逆, 且 $a^{-1} = l = r$.

**命题 0.19**

设集合 $(A, *)$, 运算 $*$ 存在单位元 $e$. 若 $a, b \in A$ 可逆, 则 $a * b$ 也可逆, 且

$$(a * b)^{-1} = b^{-1} * a^{-1}.$$

**证明** 由于 $a$ 与 $b$ 可逆, 所以存在 $a^{-1}$ 与 $b^{-1}$ 满足 $a * a^{-1} = e, b * b^{-1} = e$. 于是

$$(a * b) * \left(b^{-1} * a^{-1}\right) = a * \left(b * b^{-1}\right) * a^{-1} = a * e * a^{-1} = a * a^{-1} = e.$$

$$\left(b^{-1} * a^{-1}\right) * (a * b) = b^{-1} * \left(a^{-1} * a\right) * b = b * e * b^{-1} = b * b^{-1} = e.$$

于是可知 $a * b$ 可逆, 且 $(a * b)^{-1} = b^{-1} * a^{-1}$.

注 以上命题表明, 集合 $A$ 中运算 $*$ 下的所有可逆元组成的集合对运算 $*$ 封闭.

### 0.5.3 分配律

若一个集合中定义了两种运算, 通常一种运算对另一种运算具有 ‘‘分配性”, 以此作为沟通两种运算的桥梁.

**定义 0.35 (分配律)**

设集合 $A$ 上的两种二元运算

$$\begin{aligned}\#: A\times A &\to A,\\ (a,b) &\mapsto a*b,\\ *: A\times A &\to A,\\ (a,b) &\mapsto a\#b,\end{aligned}$$

则可以定义以下运算律,

(1) 若对于任意 $a,b,c\in A$ 都满足 $a*(b\#c)=a*b\#a*c$, 则称运算 $*$ 对 $\#$ 满足**左分配律** (left distributive law);

(2) 若对于任意 $a,b,c\in A$ 都满足 $(b\#c)*a=b*a\#c*a$, 则称运算 $*$ 对 $\#$ 满足**右分配律** (left distributive law).

若同时满足左右分配律, 则称运算 $*$ 对 $\#$ 满足左右分配律, 简称分配律. ♣

注 若运算 $*$ 对 $\#$ 满足左右分配律, 意味着运算 $*$ 满足交换律.

注 若一个集合上定义了两种运算, 且运算 2 对运算 1 满足分配律, 且运算 1 满足交换律, 则我们通常把运算 1 称为该集合的加法, 运算 2 称为该运算的乘法. 由于乘法通常不要求交换律, 所以分配律通常有左右之分.

若运算满足结合律, 则可以定义它的正整数次幂 (正整数倍); 若它有单位元则可以定义它的零次幂 (零倍), 还可以证明它们满足一些简单性质.

**命题 0.20 (运算的幂 (倍))**

设集合 $A$ 上的二元运算, 若该运算满足结合律, 则可定义正整数次幂 (倍)

$$a^m:=\underbrace{aa\cdots a}_{m\text{ 个 }a}.\quad ma:=\underbrace{a+a+\cdots+a}_{m\text{ 个 }a}.\quad m\in\mathbb{N}^*.$$

若该运算有单位元, 则可以定义它的零次幂 (倍)

$$a^0:=\mathbf{1}.\quad 0a:=\mathbf{0}.$$

此时对于任意 $a,b\in A$ 都满足

$$\begin{aligned}a^m a^n=a^{m+n}.&\quad ma+na=(m+n)a.\\ (a^m)^n=a^{mn}.&\quad n(ma)=(mn)a.\end{aligned}$$

♠

**证明** 证明略.

注 若定义的运算看作乘法, 通常用 ‘‘幂”, 若看作加法, 通常用 ‘‘倍”.

注 当运算满足交换律时, 还有

$$(ab)^m=a^m b^m.\quad m(a+b)=ma+nb.$$

注 若有逆元, 还可以定义负整数次幂或负整数倍 XX

### 例题

## 习题

**练习 0.10** 设集合 $S$. 定义 $S$ 上的乘法运算

$$ab := a, \quad \forall a, b \in S.$$

(1) $S$ 中定义的乘法运算是否满足结合律?

(2) 满足什么条件时 $S$ 有单位元 $\mathbf{1}$?

**解** (1) 任取 $a, b, c \in S$ 则

$$(ab)c = ac = a, \quad a(bc) = ab = a.$$

于是可知 $S$ 中定义的乘法运算满足结合律.

(2) 若 $\mathbf{1} \in S$, 则对于任一 $a \in S$ 都有

$$a = a\mathbf{1} = \mathbf{1}a = \mathbf{1}.$$

这说明此时 $S$ 只有一个元素. 反之当 $S = \{\mathbf{1}\}$ 时 $S$ 满足条件. 于是可知当且仅当 $S = \{\mathbf{1}\}$ 时 $S$ 有单位元.

**练习 0.11** 设自然数集 $\mathbb{N}$ 上的所有变换组成的集合 $A$. 令后继变换 $\mathcal{S} \in A$

$$\mathcal{S} : n \mapsto n + 1.$$

则 $A$ 中 $\mathcal{S}$ 不存在右逆元, 但存在无穷多个左逆元.

**证明** (i) 任取 $\mathcal{X} \in A$. 由后继变换的定义可知 $1 \notin \mathrm{Im}$. 故 $1 \notin \mathrm{Im}\,\mathcal{S}\mathcal{X}$. 因此 $\mathcal{S}\mathcal{X} \neq \mathcal{I}$. 于是可知 $\mathcal{S}$ 不存在右逆元.

(ii) 构造变换 $\mathcal{F}_i$ $(i = 1, 2, \cdots)$

$$\mathcal{F}_i(n) = \begin{cases} i & n = 1 \\ n - 1 & n \geq 2 \end{cases}.$$

容易看出 $\mathcal{F}_i\mathcal{S} = \mathcal{I}$ $(i = 1, 2, \cdots)$. 于是可知 $\mathcal{S}$ 存在无穷多个左逆元.

# 第 1 章 从头讲起

**内容提要**

- 在本章, 我们将用集合和映射的观点重新构建自然数集、整数集、有理数集. 并严格给出这些数集中的运算和运算律. 实数集的构造我们将在后面专门讨论.
- 这章和数学分析的主旨关系不是非常密切, 初学者可以先跳过. 等学完数学分析的主干内容后, 可以回过头来阅读本章.

## 1.1 自然数集的公理化

### 1.1.1 Peano 公理

自然数是我们接触数学时最先遇到的. 我们知道自然数就是 $0, 1, 2, \cdots$, 即

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \cdots\}.$$

严格来说, 以上算不上是自然数集的定义, 因为它没有告诉我们关于自然数集 ‘‘内部结构’’ 的任何信息. 例如, 元素 3 以后的下一个元素是什么? 如何得到下一个元素?,3 和前几个元素是什么关系? 这些元素可以进行怎样的运算?

十九世纪中叶以后, 有不少数学家尝试用公理化的方法给出自然数的定义.1889 年意大利数学家 Giuseppe Peano 在德国数学家 Richard Dedekind 工作的基础上给出了一个简洁的自然数公理.

**公理 1.1 (Peano 公理)**

设集合 $X$, 规定 $X$ 上的一个映射 $\mathcal{S}$. 若 $X$ 和 $\mathcal{S}$ 满足

1° $x \in X$.

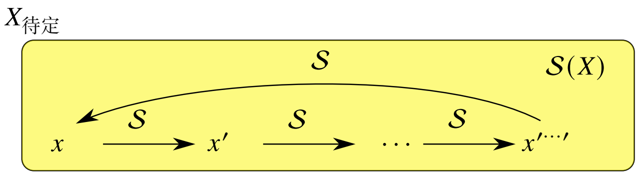
2° $x \notin \mathcal{S}(X)$.

3° $\mathcal{S}$ 是一个单射.

4° 设 $A \subseteq X$. 若 $x \in A$ 且对于任一 $a \in A$ 都有 $\mathcal{S}(a) \in A$. 则 $A = X$.

则称集合 $X$ 是**自然数集** (set of natural numbers), 记作 $\mathbb{N}$. 自然数集中的元素称为**自然数** (natural number). $x$ 称为**初始元素** (initial element). $\mathcal{S}(x)$ 称为 $x$ 的**后继元** (successor), 其中 $\mathcal{S}$ 称为**后继映射** (successor map).

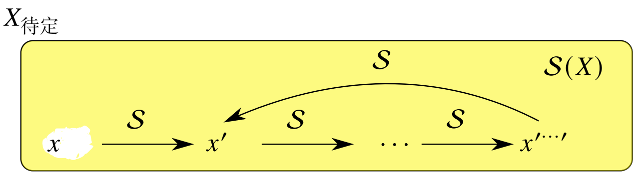
我们来解释一下 Peano 公理背后的直观意义: 1° 说明在自然数集 $\mathbb{N}$ 中存在一个起始元素 $x$, 通过后继映射 $\mathcal{S}$, 可以迭代地产生**后继元素** (successor). 2° 和 3° 确保了后继映射生成后继元素时不会出现 ‘‘循环’’. 若不满足 2° 可能会出现图1.1所示的情况.




$X_{待定}$ 不是我们要找的 $X$

图 1.1: $x$ 是初始元素, 不能属于 $\mathcal{S}(X)$.

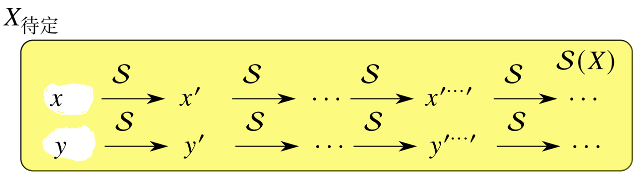
若不满足 3° 可能会出现图1.2所示情况.




$X_{\text{待定}}$ 不是我们要找的 $X$

图 1.2: $\mathcal{S}$ 只能是单射, 而图中 $x'$ 有两个原像.

如果 $X$ 只满足 $1^\circ$, $2^\circ$ 和 $3^\circ$, 则 $X$ 可以是像图1.3这样的:




$X_{\text{待定}}$ 不是我们要找的 $X$

图 1.3: $X$ 中不能有两个初始元素.

这显然不是我们想要的自然数集. 我们希望去掉 "混入" $X$ 的元素 $y, \mathcal{S}(y), \mathcal{S}^2(y), \cdots$. 于是就需要附加 $4^\circ$, 它被称为**数学归纳公理** (axiom of mathematical induction). 有了这条公理, 就可以确保元素 $y, \mathcal{S}(y), \mathcal{S}^2(y), \cdots$ 不在自然数集内.

事实上 Peano 公理中的 $4^\circ$ 是一个公理模式 (它可以产生无限个公理). 它不仅是一条用来定义自然数集的公理, 还是一条证明和自然数集有关的命题的公理, 即

**公理 1.2 (数学归纳原理)**

设自然数集 $\mathbb{N}$. $\mathcal{S}$ 是 $\mathbb{N}$ 上的后继映射. $x \in \mathbb{N}$ 且 $x \notin \mathcal{S}(\mathbb{N})$. 若满足

$1^\circ$ 当 $n = x$ 时, 命题 $P$ 成立.

$2^\circ$ 若 $n = k$ 时命题 $P$ 成立, 则当 $n = \mathcal{S}(k)$ 时命题 $P$ 也成立.

则对于一切 $n \in \mathbb{N}$ 命题都成立. ♡

Peano 公理为我们揭示了自然数集的内部结构. 我们可以把自然数集看作一组 "多米诺骨牌": 它有一块 "初始骨牌", 一旦推倒这块初始骨牌, 第二块骨牌会跟着倒下, 第二块会推倒第三块... 依次下去以至于无穷. 且这个多米诺骨牌不是 "环状的", 并且它只有 "一条链", 只需推倒初始骨牌, 就可以确保所有骨牌都倒下.

**命题 1.1**

设自然数集 $\mathbb{N}$, $\mathcal{S}$ 是 $\mathbb{N}$ 上的后继映射. $x$ 是 $\mathbb{N}$ 的初始元素. 则

$$\mathbb{N} = \{x, \mathcal{S}(x), \mathcal{S}^2(x), \cdots, \mathcal{S}^n(x), \cdots\}.$$

♠

**证明** 由数学归纳原理立刻知道命题成立. ■

用阿拉伯数字表示自然数是我们最熟悉的方式. 下面我们先给出前十个自然数的阿拉伯数字.

$$0 := x, \quad 1 := \mathcal{S}(0), \quad 2 := \mathcal{S}(1), \quad 3 := \mathcal{S}(2), \quad 4 := \mathcal{S}(3),$$
$$5 := \mathcal{S}(4), \quad 6 := \mathcal{S}(5), \quad 7 := \mathcal{S}(6), \quad 8 := \mathcal{S}(7), \quad 9 := \mathcal{S}(8).$$

自然数已经被人类熟练使用了几千年 (甚至更久), 然而它们的公理化定理却出现在 100 多年前. 这说明认识某个事物, 使用某个事物和抽象出该事物的本质, 在认知层次上的差距是极大的.

### 1.1.2 自然数集中的加法运算

下面我们来定义自然数集中元素的加法运算. 这种定义需要合乎我们已经数学的自然数运算. 定义有限集的加法运算, 只需要给出所有元素之间的 "加法表", 但无限集没法这样做.

根据自然数集的特点, 我们可以 ‘‘归纳地’’ 定义自然数的加法. 分两步进行: 首先定义任一自然数和初始元的加法规则. 然后假定已经知道了任一自然数与 $n$ 的加法规则, 在此假定下规定任一自然数与 $n$ 的后继元的加法规则. 由数学归纳原理可知, 这样就定义了任意两个自然数的加法规则. 这样的定义方法也称为递归法 (recursion) 或迭代法 (iteration).

**定义 1.1 (自然数的加法)**

设自然数集 $\mathbb{N}$. $\mathcal{S}$ 是 $\mathbb{N}$ 上的后继映射. 定义 $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ 到 $\mathbb{N}$ 的一个映射 $(n,m)\mapsto n+m$, 它满足

1° $n+0:=n$.

2° $n+\mathcal{S}(m):=\mathcal{S}(n+m)$.

我们称以上映射为自然数集上的**加法** (addition). 其中 $n$ 与 $m$ 称为**加数** (addend), $n+m$ 称为 $n$ 与 $m$ 的**和** (sum).

注 $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ 表示 Cartesian 积, 详见定义 (0.15). 关于加法是一种二元代数运算, 详见定义 (**??**).

注 根据以上定义, 我们可以得到

$$
\begin{aligned}
\mathcal{S}(a)&=\mathcal{S}(a+0)=a+\mathcal{S}(0)=a+1.\\
\mathcal{S}^2(a)&=\mathcal{S}(a+1)=a+\mathcal{S}(1)=a+2.\\
\mathcal{S}^3(a)&=\mathcal{S}(a+2)=a+\mathcal{S}(2)=a+3.\\
&\cdots.
\end{aligned}
$$

用数学归纳法容易验证 $\mathcal{S}^n(a)=a+n\ (n=1,2,\cdots)$. 这表明加上自然数 $a$ 加上 $n$ 等于对 $a$ 作 $n$ 次后继映射. 所以说自然数的加法运算实质上是后继映射的乘积. 作后继映射, 其实就是小时候学习的 ‘‘数数’’. 事实上人类真正会做只有这种操作. 我们做的其余运算最后都可以归结为 ‘‘数数’’.

用数学归纳法可以证明以上定义的加法运算满足我们数学的运算律: 结合律、交换律和消去律.

**命题 1.2 (自然数的加法结合律)**

对于任意 $a,b,c\in\mathbb{N}$ 都有

$$(a+b)+c=a+(b+c).$$

**证明** 用数学归纳法对 $c$ 进行归纳.

(i) 当 $c=0$ 时

$$(a+b)+0=a+b=a+(b+0).$$

(ii) 假设 $c=k$ 时命题成立, 即 $(a+b)+k=a+(b+k)$. 下面来看 $c=\mathcal{S}(k)$ 时的情况.

$$(a+b)+\mathcal{S}(k)=\mathcal{S}[(a+b)+k]=\mathcal{S}[a+(b+k)]=a+\mathcal{S}(b+k)=a+[b+\mathcal{S}(k)].$$

由数学归纳原理可知对于一切 $c\in\mathbb{N}$ 命题都成立. ■

由于自然数的加法满足结合律, 因此对于任意有限个自然数 $a_1, a_2,, \cdots, a_n$, 加法算式 $a_1+a_2+\cdots+a_n$ 都只有唯一确定的值. 我们可以把 $a_1+a_2+\cdots+a_n$ 可以记作 $\sum\limits_{i=1}^{n}a_i$.

**命题 1.3 (自然数的加法交换律)**

对于任意 $a,b\in\mathbb{N}$ 都有

$$a+b=b+a.$$

**证明** (i) 用数学归纳法证明 $0+a=a$. 当 $a=0$ 时显然成立. 假设 $a=k$ 时命题成立, 即 $0+k=k$. 下面来看 $a=\mathcal{S}(k)$

时的情况.

$$0+\mathcal{S}(k)=\mathcal{S}(0+k)=\mathcal{S}(k).$$

于是可知对于一切 $a\in\mathbb{N}$ 都有 $0+a=a$. 由于 $a+0=a$. 因此 $a+0=0+a$.

(ii) 用数学归纳法证明 $\mathcal{S}(a)+b=\mathcal{S}(a+b)$. 当 $b=0$ 时命题显然成立. 假设 $b=k$ 时命题成立, 即 $\mathcal{S}(a)+k=\mathcal{S}(a+k)$. 下面来看 $b=\mathcal{S}(k)$ 时的情况.

$$\mathcal{S}(a)+\mathcal{S}(k)=\mathcal{S}(\mathcal{S}(a)+k)=\mathcal{S}(\mathcal{S}(a+k))=\mathcal{S}(a+\mathcal{S}(k)).$$

于是可知对于一切 $b\in\mathbb{N}$ 都有 $\mathcal{S}(a)+b=\mathcal{S}(a+b)$.

(iii) 用数学归纳法证明 $a+b=b+a$. 当 $b=0$ 时, 由 (i) 可知命题成立. 假设 $b=k$ 时命题成立, 即 $a+k=k+a$. 下面来看 $b=\mathcal{S}(k)$ 时的情况. 由 (ii) 可知

$$a+\mathcal{S}(k)=\mathcal{S}(a+k)=\mathcal{S}(k+a)=\mathcal{S}(k)+a.$$

于是可知对于一切 $b\in\mathbb{N}$ 都有 $a+b=b+a$. ■

**命题 1.4 (自然数的加法消去律)**

对于任意 $a,b,c\in\mathbb{N}$ 都有

$$a+c=b+c \iff a=b.$$

**证明** 充分性显然成立. 下面证明必要性. 用数学归纳法对 $c$ 进行归纳. 当 $c=0$ 时

$$a=a+0=b+0=b.$$

假设 $c=k$ 时命题成立, 即 $a+k=b+k\Longrightarrow a=b$. 下面来看 $c=\mathcal{S}(k)$ 时的情况. 若 $a+\mathcal{S}(k)=b+\mathcal{S}(k)$, 则

$$\mathcal{S}(a+k)=a+\mathcal{S}(k)=b+\mathcal{S}(k)=\mathcal{S}(b+k).$$

由于 $\mathcal{S}$ 是一个单射, 故 $a+k=b+k$. 由归纳假设可知 $a=b$. 于是可知对于一切 $c\in\mathbb{N}$ 必要性都成立. ■

我们发现 0 是自然数集中一个特殊的元素——$\mathbb{N}$ 中的任何元素 $a$ 和 0 的和仍是 $a$. 因此 0 称为加法运算的**单位元**. 也称**零元**. 在实际应用中, 我们经常需要用到不含零的自然数集.

**定义 1.2 (正自然数)**

令 $\mathbb{N}^*:=\mathbb{N}\backslash\{0\}$. 我们称 $\mathbb{N}^*$ 中的自然数为**正的** (positive).

**命题 1.5**

设 $a\in\mathbb{N}^*$. 则对于任意 $b\in\mathbb{N}$, 都有 $a+b\in\mathbb{N}^*$.

**证明** 用数学归纳法对 $b$ 进行归纳. 当 $b=0$ 时 $a+b=a+0=a\in\mathbb{N}^*$. 假设 $b=k$ 时命题成立. 下面来看 $b=\mathcal{S}(k)$ 时的情况. 由 Peano 公理中的 2° 可知 $0\notin\mathcal{S}(\mathbb{N})$, 故

$$a+\mathcal{S}(k)=\mathcal{S}(a+k)\neq 0.$$

因此 $a+\mathcal{S}(k)\in\mathbb{N}^*$. 由数学归纳原理可知, 对于一切 $b\in\mathbb{N}^*$ 命题都成立. ■

**推论 1.1**

设 $a,b\in\mathbb{N}$. 则 $a+b=0$ 当且仅当 $a=b=0$.

**证明** 充分性显然成立. 下面来看必要性. 用反证法. 假设 $b\neq 0$. 则存在 $b_0$ 使得 $\mathcal{S}(b_0)=b$. 故

$$a+b=a+\mathcal{S}(b_0)=\mathcal{S}(a+b_0).$$

由 Peano 公理中的 2° 可知 $0\notin\mathcal{S}(\mathbb{N})$, 故 $\mathcal{S}(a+b_0)\neq 0$. 出现矛盾. 于是可知 $b=0$. 类似地可知 $a=0$. 于是可知必

要性也成立. ■

### 1.1.3 自然数集中的序关系

有了加法运算, 我们就可以为自然数集定义序关系.

**定义 1.3 (自然数集中的序关系)**

设 $a, b \in \mathbb{N}$. 若存在 $k \in \mathbb{N}$ 使得 $a + k = b$, 则称 $a$ 小于等于 (less than or equal to) $b$, 记作 $a \leq b$. 或称 $b$ 大于等于 (greater than or equal to) $a$, 记作 $b \geq a$.

特别地, 若 $a \leq b$ 且 $a \neq b$, 则称 $a$ 小于 (less than) $b$, 记作 $a < b$. 或称 $b$ 大于 (greater than) $a$, 记作 $b > a$. ♣

**命题 1.6**

设 $a, b \in \mathbb{N}$. 则 $a < b$ 当且仅当存在 $k \in \mathbb{N}^*$ 使得 $a + k = b$. ♠

**证明** (i) 证明必要性. 若 $a < b$ 则 $a \leq b$ 且 $a \neq b$. 故存在 $k \in \mathbb{N}$ 使得 $a + k = b$. 若 $k = 0$, 则 $a = b$ 出现矛盾, 故 $k \neq 0$. 于是可知 $k \in \mathbb{N}^*$.

(ii) 证明充分性. 若存在 $k \in \mathbb{N}^*$ 使得 $a + k = b$. 则 $a \leq b$. 假设 $a = b$, 则 $k = 0$, 出现矛盾, 故 $a \neq b$. 于是可知 $a < b$. ■

下面来证明自然数集中序关系的一些基本性质.

**命题 1.7 (自然数集的全序性)**

在自然数集 $\mathbb{N}$ 中

(1) 自反性: $a \leq a$.

(2) 反对称性: 若 $a \geq b$ 且 $b \geq a$, 则 $a = b$.

(3) 传递性: 若 $a \geq b$ 且 $b \geq c$, 则 $a \geq c$.

(4) 完全性: 对于任意 $a, b$ 都有 $a \geq b$ 或 $b \geq a$. ♠

**证明** (1) 由于 $a = a$, 故 $a \leq a$.

(2) 由于 $a \geq b$, 故存在 $m \in \mathbb{N}$ 使得 $a = b + m$. 由于 $b \geq a$, 故存在 $n \in \mathbb{N}$ 使得 $b = a + n$. 于是

$$a + 0 = a = b + m = (a + n) + m = a + (n + m).$$

由消去律可知 $0 = n + m$. 由推论 (1.1) 可知 $n = m = 0$. 于是可知 $a = b$.

(3) 由于 $a \geq b$, 故 $m \in \mathbb{N}$ 使得 $a = b + m$. 由于 $b \geq c$, 故存在 $n \in \mathbb{N}$ 使得 $b = c + n$. 于是

$$a = b + m = (c + n) + m = c + (n + m),$$

于是可知 $a \leq c$.

(4) 由于 $\mathbb{N} = \left\{x, \mathcal{S}(x), \mathcal{S}^2(x), \cdots, \mathcal{S}^n(x), \cdots\right\}$. 由于 $x + 1 = \mathcal{S}(x)$, $\mathcal{S}(x) + 1 = \mathcal{S}^2(x)$, $\cdots$, 故自然数集中的所有元素有如下关系

$$0 < \mathcal{S}(x) < \mathcal{S}^2(x) < \cdots < \mathcal{S}^n(x) < \cdots.$$

由传递性可知任意两个不同的自然数均可比较大小. 于是可知完全性成立. ■

由以上命题可知自然数集 $\mathbb{N}$ 是一个全序集, 详见定义 (**??**).

**命题 1.8 (自然数集的三歧性)**

对于任意 $a, b \in \mathbb{N}$, 下列三个命题中, 有且仅有一个成立

$$1^\circ\ a < b. \quad 2^\circ\ a = b. \quad 3^\circ\ a > b.$$

**证明** (i) 若 $a < b$, 则 $a \neq b$. 因此不可能三个命题同时成立.

(ii) 假设有两个命题同时成立. 显然 $1^\circ$ 和 $2^\circ$ 不能同时成立. $3^\circ$ 和 $2^\circ$ 也不能同时成立. 故 $1^\circ$ 和 $3^\circ$ 同时成立, 即 $a < b$ 且 $a > b$. 由反对称性可知 $a = b$. 出现矛盾. 于是可知, 不可能有两个命题同时成立.

(ii) 由命题 (**??**) 的 (4) 可知至少有一个命题成立.

综上可知 $1^\circ$、$2^\circ$ 和 $3^\circ$ 中至少有一个命题成立. ■

**命题 1.9 (自然数的加法保序性)**

对于任意 $a, b, c \in \mathbb{N}$ 都有

$$a + c \geq b + c \iff a \geq b.$$

**证明** (i) 证明必要性. 由于 $a + c \geq b + c$, 故存在 $n \in \mathbb{N}$ 使得

$$a + c = (b + c) + n = b + (c + n) = b + (n + c) = (b + n) + c,$$

由消去律可知 $a = b + n$. 于是可知 $a \geq b$.

(ii) 证明充分性. 由于 $a \geq b$, 故存在 $m \in \mathbb{N}$ 使得

$$a = b + m \Longrightarrow a + c = (b + m) + c = b + (m + c) = b + (c + m) = (b + c) + m$$

于是可知 $a + c \geq b + c$. ■

**引理 1.1**

设 $b \in \mathbb{N}^*$, 则存在 $a \in \mathbb{N}$ 使得 $\mathcal{S}(a) = b$.

**证明** 用数学归纳法对 $b$ 进行归纳. 当 $b = 1$ 时, $\mathcal{S}(0) = 1$. 假设 $b = k$ 时命题成立, 即存在 $a \in \mathbb{N}$ 使得 $\mathcal{S}(a) = k$. 于是 $\mathcal{S}(k) = \mathcal{S}[\mathcal{S}(a)]$. 由数学归纳原理可知对于一切 $b \in \mathbb{N}^*$ 命题都成立. ■

**注** 对于正自然数集 $\mathbb{N}^*$, 容易验证, 数学归纳原理依旧成立. 不过此时的 ‘‘初始元’’ 是 1.

**命题 1.10**

对于任意 $a, b \in \mathbb{N}$ 都有

$$a > b \iff a \geq \mathcal{S}(b).$$

**证明** (i) 证明必要性. 由于 $a > b$, 故存在 $m \in \mathbb{N}$ 使得 $a = b + m$. 由于 $a \neq b$, 故 $m \neq 0$. 由引理 (1.1) 可知存在 $n \in \mathbb{N}$ 使得 $\mathcal{S}(n) = m$.

$$a = b + m = b + \mathcal{S}(n) = b + (n + 1) = b + (1 + n) = (b + 1) + n = \mathcal{S}(b) + n.$$

于是可知 $a \geq \mathcal{S}(b)$

(ii) 证明充分性. 由于 $a \geq \mathcal{S}(b)$, 故存在 $n \in \mathbb{N}$ 使得 $a = \mathcal{S}(b) + n$. 于是

$$a = \mathcal{S}(b) + n = (b + 1) + n = b + (1 + n) = b + (n + 1) = b + \mathcal{S}(n).$$

因此 $a \geq b$. 由 Peano 公理中的 $2^\circ$ 可知 $0 \notin \mathcal{S}(\mathbb{N})$, 故 $\mathcal{S}(n) \neq 0$. 故 $a \neq b$. 于是可知 $a > b$. ■

### 1.1.4 数学归纳原理的再讨论

前面已经介绍了数学归纳原理. 如果要证明 $\mathbb{N}$ 的子集 $M = \mathbb{N}$. 只需先证明 $0 \in M$, 然后在证明当 $k \in M$ 时 $k+1 \in M$. 然而, 有时候如果只假设 $k \in M$ 难以证明 $k+1 \in M$, 我们需要假设 $k$ 前面的更多项都属于 $M$ 才能推出 $M$. 这促使我们希望给数学归纳原理 "添加条件".

**定理 1.1 (第二数学归纳原理)**

设 $M \subseteq \mathbb{N}$. 若满足

$1^\circ$ $0 \in M$.

$2^\circ$ 假设任一小于 $k$ 的自然数都属于 $M$, 则 $k \in M$.

则 $M = \mathbb{N}$.

**证明** 只需证明 $\mathbb{N} \subseteq M$. 令

$$E = \{k \mid \text{任一小于 } k \text{ 的自然数都属于 } M\}.$$

则 $E \subseteq M$. 下面用数学归纳原理证明 $E = \mathbb{N}$.

(i) 由于不存在自然数小于 0, 因此 $0 \in E$.

(ii) 假设 $k \in E$, 则任一小于 $k$ 的自然数都属于 $M$. 由于 $E \subseteq M$, 故 $k \in M$. 于是任一小于等于 $k$ 的自然数都属于 $M$. 因此任一小于 $k+1$ 的自然数都属于 $M$.

由数学归纳原理可知 $E = \mathbb{N}$. 于是可知 $\mathbb{N} = E \subseteq M$. ■

**注** 以上定理通常按如下形式使用. 设自然数集 $\mathbb{N}$. $P$ 是一个有关自然数集的命题. 若满足

$1^\circ$ 当 $n = 0$ 时, 命题 $P$ 成立.

$2^\circ$ 假设 $n < k$ 时命题 $P$ 成立, 则当 $n = k$ 时命题 $P$ 也成立.

则对于一切 $n \in \mathbb{N}$ 命题 $P$ 都成立.

定义序关系以后, 我们就可以说 0 是 $\mathbb{N}$ 中的最小元素.

**定义 1.4 (良序性)**

设全序集 $(S, \leq)$. 若存在 $a \in S$, 对于任一 $x \in S$ 都有 $a \leq x$, 则称 $a$ 是 $S$ 的最小元素. 我们称存在最小元素的全序集是**良序的** (well-ordered).

自然数集 $\mathbb{N}$ 是良序的, 这是使用数学归纳原理的一个重要前提. 容易想到 $\mathbb{N}$ 的任一非空子集都存在最小元素. 如果能证明这个结论, 那么数学归纳原理就可以推广到自然数的任一子集.

**定理 1.2 (良序定理)**

设非空集合 $M \subseteq \mathbb{N}$. 则 $M$ 中存在最小元素, 即存在 $m$, 对于任意 $a \in M$ 都有 $a \geq m$.

**证明** 用反证法, 假设 $M$ 没有最小元素. 把 $\mathbb{N}$ 看作全集, 下面用第二数学归纳法证明 $M^c = \mathbb{N}$.

(i) 由于 $M$ 没有最小元素, 故 $0 \notin M$, 因此 $0 \in M^c$.

(ii) 假设任一小于 $k$ 的自然数都属于 $M^c$. 由于 $M$ 没有最小元素, 故 $k \notin M$, 否则 $k$ 将成为 $M$ 中的最小元素. 因此 $k \in M^c$.

由第二数学归纳法可知 $M^c = \mathbb{N}$, 故 $M = \varnothing$, 出现矛盾, 因此假设不成立. 于是可知 $M$ 中存在最小元素.

**定理 1.3**

设自然数集 $\mathbb{N}$ 的一个非空子集

$$M = \{x_i \in \mathbb{N} \mid \forall i, j \in \mathbb{N} \text{ 若 } i < j \text{ 则 } x_i < x_j\}$$

若 $M$ 的一个非空子集 $M'$ 满足

1° $x_0 \in M'$.

2° 假设 $x_i \in M'$, 则有 $x_{i+1} \in M'$.

则 $M' = M$.

**证明** 证明略.

前面我们用数学归纳原理证明了第二数学归纳原理. 然后用第二数学归纳原理证明了良序定理. 如果我们能用良序定理反过来证明数学归纳原理, 那么就说明它们三者是等价的!

**定理 1.4**

数学归纳原理、第二数学归纳原理和良序定理是等价的.

**证明** 假设良序定理成立, 我们来证明数学归纳原理. 设集合 $E \subseteq \mathbb{N}$. 已知它满足

1° $0 \in E$.

2° 当 $k \in E$ 时 $k+1 \in E$.

下面要证明 $E = \mathbb{N}$. 用反证法. 假设 $E \neq \mathbb{N}$. 把 $\mathbb{N}$ 看作全集, 则 $E^c \neq \varnothing$. 由良序定理可知 $E^c$ 中存在最小元素 $n_0$. 由于 $0 \in E$ 故 $n_0 \neq 0$. 于是 $n_0 - 1 \in E$. 由 2° 可知 $n_0 \in E$, 出现矛盾, 因此假设不成立. 于是可知 $E = \mathbb{N}$. 这就证明了数学归纳原理成立. ■

虽然第二数学归纳原理的条件相比数学归纳原理更强了, 但它们还是等价的. 这表明我们增加的条件本质上并没有改变数学归纳原理.

我们曾经说过, 把自然数集看作一个 “有始无终的不循环的单链的多米诺骨牌”, 那么它的非空子集依旧保持这种性质. 因此数学归纳原理也就可以对自然数的任一非空子集继续保持.

事实上我们还可以把超限归纳原理进一步一般化. 设集合 $S$, 若 $S$ 与 $\mathbb{N}$ 可以建立一个双射. 则可令 $S$ 中的元素排成一列

$$a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots.$$

于是可以在 $S$ 上定义一个全序关系:

$$a_i \preceq a_j :\Longleftrightarrow i \leq j.$$

于是我们可以对 $S$ 使用归纳法.

### 1.1.5 自然数集中的乘法运算

仿照加法的定义, 我们可以定义自然数的乘法运算.

**定义 1.5 (自然数的乘法)**

设自然数集 $\mathbb{N}$. $\mathcal{S}$ 是 $\mathbb{N}$ 上的后继映射. 定义 $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ 到 $\mathbb{N}$ 的一个映射 $(n, m) \mapsto n \times m$, 它满足

1° $n \times 0 := 0$.

2° $n \times \mathcal{S}(m) := n \times m + n$.

我们称以上映射为自然数集上的**乘法** (multiplication). 其中 $n$ 与 $m$ 称为**因数** (factor), $n \times m$ 称为 $n$ 与 $m$ 的**积** (product).

**注** 乘法运算符有时候可以省略, 也可以用 $\cdot$ 表示. 乘法和加法同时出现时, 优先计算乘法.

**注** 由定义立刻可知

$$n \times 0 = 0,$$

$$n \times 1 = n \times \mathcal{S}(0) = n \times 0 + n = n,$$

$$n \times 2 = n \times \mathcal{S}(1) = n \times 1 + n = n + n,$$

$$\cdots.$$

用数学归纳法容易验证 $n \times k = \underbrace{n + \cdots + n}_{k\text{ 个 }n}$.

由于自然数乘法的定义中同时乘法和加法运算. 因此我们先来证明乘法对加法的分配律.

**命题 1.11 (自然数的分配律)**

对于任意 $a, b, c \in \mathbb{N}$ 都有

$$(a + b)c = ac + bc.$$

**证明** 用数学归纳法对 $c$ 进行归纳.

(i) 当 $c = 0$ 时

$$(a + b) \times 0 = 0 = 0 + 0 = a \times 0 + b \times 0.$$

(ii) 假设 $c = k$ 时命题成立, 即 $(a + b) \times k = a \times k + b \times c$. 下面来看 $c = \mathcal{S}(k)$ 时的情况.

$$\begin{aligned}(a + b)\mathcal{S}(k) &= (a + b)k + (a + b) = ak + bk + a + b = ak + a + bk + b \\ &= (ak + a) + (bk + b) = a\mathcal{S}(k) + b\mathcal{S}(k).\end{aligned}$$

由数学归纳原理可知对于一切 $c \in \mathbb{N}$ 命题都成立.

0 和 1 在自然数的乘法运算中具有特殊的地位.

**引理 1.2**

对于任一 $n \in \mathbb{N}$ 都有

$$n \times 0 = 0 \times n = 0, \quad n \times 1 = 1 \times n = n.$$

**证明** 用数学归纳法对 $n$ 进行归纳.

(i) 当 $n = 0$ 时

$$0 \times 0 = 0, \quad 0 \times 1 = 0 = 1 \times 0.$$

(ii) 假设 $n = k$ 时命题成立, 即 $k \times 0 = 0 \times k = 0$, $k \times 1 = 1 \times k = k$. 下面来看 $n = \mathcal{S}(k)$ 时的情况.

$$\mathcal{S}(k) \times 0 = 0 = 0 + 0 = 0 \times k + 0 = 0 \times \mathcal{S}(k),$$

$$\mathcal{S}(k) \times 1 = \mathcal{S}(k) = k + 1 = 1 \times k + 1 = 1 \times \mathcal{S}(k).$$

由数学归纳原理可知对于一切 $n \in \mathbb{N}$ 命题都成立.

**命题 1.12 (自然数的乘法交换律)**

对于任意 $a, b \in \mathbb{N}$ 都有

$$ab = ba.$$

**证明** 用数学归纳法对 $b$ 进行归纳.

(i) 当 $b = 0$ 时, 由引理 (1.2) 可知命题成立.

(ii) 假设 $c = k$ 时命题成立, 即 $a \times k = k \times a$. 下面来看 $c = \mathcal{S}(k)$ 时的情况.

$$a\mathcal{S}(k) = ak + a = ka + a = ka + 1 \times a = (k + 1)a = \mathcal{S}(k)a$$

由数学归纳原理可知对于一切 $c \in \mathbb{N}$ 命题都成立.

**命题 1.13 (自然数的乘法结合律)**

对于任意 $a, b, c \in \mathbb{N}$ 都有

$$(ab)c = a(bc).$$

**证明** 用数学归纳法对 $c$ 进行归纳.

(i) 当 $c = 0$ 时

$$(ab) \times 0 = 0 = a \times 0 = a(b \times 0).$$

(ii) 假设 $c = k$ 时命题成立, 即 $(a \times b) \times k = a \times (b \times k)$. 下面来看 $c = \mathcal{S}(k)$ 时的情况.

$$\begin{aligned}(ab)\mathcal{S}(k) &= (ab)k + ab = a(bk) + ab = (bk)a + ba \\ &= (bk + b)a = [b\mathcal{S}(k)]a = a[b\mathcal{S}(k)].\end{aligned}$$

由数学归纳原理可知对于一切 $c \in \mathbb{N}$ 命题都成立.

由于自然数的乘法满足结合律, 因此对于任意有限个自然数 $a_1, a_2,, \cdots, a_n$, 乘法算式 $a_1 a_2 \cdots a_n$ 都只有唯一确定的值. 我们可以把它可以记作 $\prod_{i=1}^{n} a_i$.

**命题 1.14 (自然数的无零因子律)**

设 $a, b \in \mathbb{N}$. 则 $ab = 0$ 当且仅当 $a = 0$ 或 $b = 0$.

**证明** 充分性显然成立. 下面证明必要性. 只需证明当 $a \neq 0$ 且 $b \neq 0$ 时 $a \times b \neq 0$. 用数学归纳法对 $b$ 进行归纳. 当 $b = 1$ 时

$$ab = a \times 1 = a \neq 0.$$

假设 $b = k$ 时命题成立, 即 $ak \neq 0$. 则

$$a\mathcal{S}(k) = ak + a \neq 0.$$

由数学归纳原理可知, 当 $a \neq 0$ 且 $b \neq 0$ 时 $ab \neq 0$.

**注** 以上命题的逆否命题为: 设 $a, b \in \mathbb{N}$. 则 $ab \neq 0$ 当且仅当 $a \neq 0$ 或 $b \neq 0$.

**命题 1.15 (自然数的乘法保序性)**

设 $a, b, c \in \mathbb{N}$, 其中 $c \neq 0$, 则

$$a > b \iff ac > bc.$$

**证明** (i) 证明必要性. 由于 $a > b$, 故存在 $m \in \mathbb{N}^*$ 使得 $a = b + m$. 于是

$$ac = (b + m)c = bc + mc.$$

由于 $m \neq 0, c \neq 0$, 故 $mc \neq 0$. 于是可知 $ac > bc$.

(ii) 由 (i) 可知若 $b > a$, 则 $bc > ac$, 其中 $c \neq 0$. 另一方面, 若 $b = a$, 则 $bc = ac$. 于是有

$$b \geq a \Longrightarrow b \times c \geq a \times c.$$

以上命题的逆否命题即为 $bc < ac \Longrightarrow b < a$. 于是可知充分性成立.

以上命题的逆否命题就是乘法消去律.

**命题 1.16 (自然数的乘法消去律)**

设 $a, b, c \in \mathbb{N}$, 其中 $c \neq 0$, 则

$$ac = bc \iff a = b.$$

**证明** 证明略.

我们可以继续用数学归纳法定义自然数次幂的指数运算.

**定义 1.6 (自然数次幂)**

设自然数集 $\mathbb{N}$. $\mathcal{S}$ 是 $\mathbb{N}$ 上的后继映射. 定义 $\mathbb{N}\times\mathbb{N}\backslash\{(0,0)\}$ 到 $\mathbb{N}$ 的一个映射 $(n,m)\mapsto n^m$, 它满足

1° $n^0 := 1$.

2° $n^{\mathcal{S}(m)} := n^{\mathcal{S}(m)} \times n$.

我们称以上映射为**指数运算** (exponentiation). 其中 $n$ 称为**底数** (base), $m$ 称为**指数** (exponent), $n^m$ 称为 $n$ 的$m$ **次幂** (the $m$-th power of $n$).

**注** 需要注意 $n^m$ 中 $n$ 和 $m$ 不能同时取零.

**注** 由定义立刻可知

$$\begin{aligned}
&n^0 = 1,\\
&n^1 = n^{\mathcal{S}(0)} = n^0 \times n = n,\\
&n^2 = n^{\mathcal{S}(1)} = n^1 \times n = n \times n,\\
&\cdots.
\end{aligned}$$

用数学归纳法容易验证 $n^k = \underbrace{n \times \cdots \times n}_{k\text{ 个 }n}$.

关于指数运算的性质, 我们将在后面详细讨论.

**定义 1.7 (自然数的阶乘)**

设自然数集 $\mathbb{N}$. $\mathcal{S}$ 是 $\mathbb{N}$ 上的后继映射. 定义 $\mathbb{N}$ 上的一个映射 $n \mapsto n!$, 它满足

1° $0! := 1$.

2° $\mathcal{S}(n)! := n! \times \mathcal{S}(n)$.

我们称以上映射为**阶乘** (factorial).

**注** 由定义立刻可知

$$\begin{aligned}
&0! = 1,\\
&1! = \mathcal{S}(0)! = 0! \times 1 = 1,\\
&2! = \mathcal{S}(1)! = 1! \times 2 = 1 \times 2,\\
&3! = \mathcal{S}(2)! = 2! \times 3 = 1 \times 2 \times 3,\\
&\cdots.
\end{aligned}$$

用数学归纳法容易验证当 $k \neq 0$ 时有 $k! = 1 \times 2 \times \cdots \times k$.

# 1.2 整数环和环公理

## 1.2.1 整数集的构建

上一节我们用公理化的方法定义了自然数集 $\mathbb{N}$, 并用数学归纳法定义了自然数集上的加法和乘法运算. 很自然地, 我们会想这样一个问题: 如果已知两个自然数的和, 以及其中的一个加数, 如何求另一个加数. 这就是加法运算的逆运算. 于是我们可以考虑引入了减法运算. 若 $a+b=c$, 则可规定

$$c-a:=b.$$

这样规定的减法显然不是自然数集上的运算. 因为并不是任意两个自然数都可以在自然数集中做减法. 当 $c<a$ 时 $c-a$ 在自然数集中就没有意义. 这是我们希望扩充自然数集的一个基本动力. 我们尝试把自然数集扩充成一个更大的数集, 使得减法运算在新的数集上可以运行. 我们把这个数集称为整数集. 我们尝试这样定义整数: 令

$$-1:=1-2,\quad -2:=1-3,\quad -3:=1-4,\quad \cdots.$$

这是一个很好的思路——-用两个自然数定义一个整数. 因此我们可以把整数看作 $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ 中的元素. 但这个做法尚有瑕疵: 若 $a:=1-2$, $b:=4-5$, 则 $a$ 和 $b$ 实质上是同一个整数, 这是因为 $1+5=2+4$. 于是我们可以尝试在 $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ 建立一个等价关系, 然后把在这个等价关系下的一个等价类看作一个整数.

在 $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ 中定义一个二元关系

$$(a_1,b_1)\sim(a_2,b_2):\iff a_1+b_2=b_1+a_2.$$

我们先来验证这样定义的二元关系 "$\sim$" 是一个等价关系.

**证明** (i) 由于 $(a,b)\sim(a,b)\iff a+b=b+a$, 故二元关系 "$\sim$" 满足反身性.

(ii) 由于

$$(a_1,b_1)\sim(a_2,b_2)\iff a_1+b_2=b_1+a_2\iff a_2+b_1=b_2+a_1\iff(a_2,b_2)\sim(a_1,b_1).$$

故二元关系 "$\sim$" 满足对称性.

(iii) 由于

$$\left.\begin{array}{l}(a_1,b_1)\sim(a_2,b_2)\iff a_1+b_2=b_1+a_2\iff a_1+b_2+b_3=b_1+a_2+b_3\\(a_2,b_2)\sim(a_3,b_3)\iff a_2+b_3=b_2+a_3\iff b_1+a_2+b_3=b_1+b_2+a_3\end{array}\right\}$$

$$\Longrightarrow a_1+b_2+b_3=b_1+b_2+a_3\iff a_1+b_3=b_1+a_3\iff(a_1,b_1)\sim(a_3,b_3),$$

故二元关系 "$\sim$" 满足传递性.

综上可见 $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ 中规定的二元关系 "$\sim$" 是一个等价关系.

于是我们就可以试着给出整数集的定义.

**定义 1.8 (整数集)**

在集合 $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ 上规定一个等价关系

$$(a_1,b_1)\sim(a_2,b_2):\iff a_1+b_2=b_1+a_2.$$

$\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ 对于等价关系 "$\sim$" 的商集 $(\mathbb{N}\times\mathbb{N})/\sim$ 称为**整数集** (set of integers), 记作 $\mathbb{Z}$. 其中每一个等价类表示一个**整数** (integer). $(a,b)$ 确定的等价类记作 $\overline{a-b}$. 若 $a=b$, 则把 $\overline{a-b}$ 记作 0. ♣

**注** 整数集 $\mathbb{Z}$ 的记号来自德语 "Zahlen", 原义是 "数字".

**注** 类似地, 为了便于叙述问题, 我们把 $\mathbb{Z}\setminus\{0\}$ 记作 $\mathbb{Z}^*$.

下面我们在整数集 $\mathbb{Z}$ 中规定加法和乘法运算.

**定义 1.9 (整数的加法和乘法)**

在整数集 $\mathbb{Z}$ 中规定:

$$\overline{a_1 - b_1} + \overline{a_2 - b_2} := \overline{(a_1 + a_2) - (b_1 + b_2)},$$
$$\overline{a_1 - b_1} \times \overline{a_2 - b_2} := \overline{(a_1 a_2 + b_1 b_2) - (a_1 b_2 + b_1 a_2)}.$$

我们需要验证以上规定的加法和乘法是否合理, 也就是需要验证运算结果是否依赖于等价类中代表元素的选择.

**命题 1.17**

在 $\mathbb{Z}$ 中设 $\overline{a_1 - b_1} = \overline{a_2 - b_2}$, $\overline{c_1 - d_1} = \overline{c_2 - d_2}$, 其中 $a_1, b_1, a_2, b_2, c_1, d_1, c_2, d_2 \in \mathbb{N}$. 则

$$\overline{a_1 - b_1} + \overline{c_1 - d_1} = \overline{a_2 - b_2} + \overline{c_2 - d_2},$$
$$\overline{a_1 - b_1} \times \overline{c_1 - d_1} = \overline{a_2 - b_2} \times \overline{c_2 - d_2}.$$

**证明** 由条件得

$$\overline{a_1 - b_1} = \overline{a_2 - b_2} \iff a_1 + b_2 = b_1 + a_2 \tag{1.1}$$
$$\overline{c_1 - d_1} = \overline{c_2 - d_2} \iff c_1 + d_2 = d_1 + c_2 \tag{1.2}$$

等式 (1.1) 加 (1.2) 得

$$\begin{aligned}
&(a_1 + c_1) + (b_2 + d_2) = (b_1 + d_1) + (a_2 + c_2) \iff \overline{(a_1 + c_1) - (b_1 + d_1)} = \overline{(a_2 + c_2) - (b_2 + d_2)} \\
&\iff \overline{a_1 - b_1} + \overline{c_1 - d_1} = \overline{a_2 - b_2} + \overline{c_2 - d_2}.
\end{aligned}$$

等式 (1.1) 分别乘以 $c_1$ 和 $d_1$, 等式 (1.1) 分别乘以 $a_2$ 和 $b_2$ 得

$$\begin{aligned}
&\left.\begin{aligned}
a_1c_1 + b_2c_1 &= b_1c_1 + a_2c_1 \\
b_1d_1 + a_2d_1 &= a_1d_1 + b_2d_1 \\
a_2d_2 + a_2c_1 &= a_2c_2 + a_2d_1 \\
b_2c_2 + b_2d_1 &= b_2d_2 + b_2c_1
\end{aligned}\right\} \Longrightarrow (a_1c_1 + b_1d_1) + (a_2d_2 + b_2c_2) = (a_1d_1 + b_1c_1) + (a_2c_2 + b_2d_2) \\
&\iff \overline{(a_1c_1 + b_1d_1) - (a_1d_1 + b_1c_1)} = \overline{(a_2c_2 + b_2d_2) - (a_2d_2 + b_2c_2)} \\
&\iff \overline{a_1 - b_1} \times \overline{c_1 - d_1} = \overline{a_2 - b_2} \times \overline{c_2 - d_2}. \blacksquare
\end{aligned}$$

我们看到, 以上定义的整数集 $\mathbb{Z}$ 中的元素是 $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ 中的元素组成的等价类. 但我们希望自然数集 $\mathbb{N}$ 是整数集 $\mathbb{Z}$ 的一个真子集. 为此我们只需证明自然数集 $\mathbb{N}$ 和整数集 $\mathbb{Z}$ 的某个真子集 "同构". 所谓的 "同构" 是指两个集合之间存在一个一一对应, 且这个对应保持其中的运算. 如果能做到这些条件, 那么这两个集合可以等同起来, 即它们是 "同构的".

**命题 1.18**

设集合 $\widetilde{\mathbb{Z}} = \left\{ \overline{a - b} \in \mathbb{Z} \,\middle|\, a \geq b,\ a, b \in \mathbb{N} \right\}$. 令

$$\begin{aligned}
\sigma : \widetilde{\mathbb{Z}} &\to \mathbb{N}, \\
\overline{a - b} &\mapsto c,
\end{aligned}$$

其中 $c$ 满足 $b + c = a$. 则这样定义的 $\sigma$ 是一个双射, 且对于任一 $x, y \in \widetilde{\mathbb{Z}}$ 都有

$$\sigma(x + y) = \sigma(x) + \sigma(y),$$
$$\sigma(xy) = \sigma(x)\sigma(y).$$

**证明** 任取 $x = \overline{x_1 - x_2}$, $y = \overline{y_1 - y_2} \in \widetilde{\mathbb{Z}}$. 设 $\sigma(x) = x_3$, $\sigma(y) = y_3$. 则 $x_1 = x_2 + x_3$, $y_1 = y_2 + y_3$.

(i) 由于

$$x=y \iff \overline{x_1-x_2}=\overline{y_1-y_2} \iff x_1+y_2=x_2+y_1 \iff (x_2+x_3)+y_2=x_2+(y_2+y_3)$$
$$\iff x_3=y_3 \iff \sigma(x)=\sigma(y).$$

故 $\sigma$ 是一个映射, 且是一个单射. 任取 $c\in\mathbb{N}$. 由于 $\mathcal{S}(c)=c+1$, 故存在 $\overline{\mathcal{S}(c)-1}\in\widetilde{\mathbb{Z}}$ 满足 $\sigma\left[\overline{\mathcal{S}(c)-1}\right]=c$. 于是可知 $\sigma$ 是一个满射. 综上可知 $\sigma$ 是一个双射.

(ii) 由于 $x_1=x_2+x_3$, $y_1=y_2+y_3$, 故

$$x_1+y_1=(x_2+x_3)+(y_2+y_3)=(x_2+y_2)+(x_3+y_3),$$
$$\begin{aligned}x_1y_1+x_2y_2&=(x_2+x_3)(y_2+y_3)+x_2y_2=x_3y_3+x_2y_2+x_3y_2+x_2y_2+x_2y_3\\&=x_3y_3+(x_2+x_3)y_2+x_2(y_2+y_3)=x_3y_3+(x_1y_2+x_2y_1).\end{aligned}$$

于是

$$\sigma(x+y)=\sigma\left(\overline{x_1-x_2}+\overline{y_1-y_2}\right)=\sigma\left[\overline{(x_1+y_1)-(x_2+y_2)}\right]=x_3+y_3=\sigma(x)+\sigma(y),$$
$$\sigma(xy)=\sigma\left(\overline{x_1-x_2}\times\overline{y_1-y_2}\right)=\sigma\left[\overline{(x_1y_1+x_2y_2)-(x_1y_2+x_2y_1)}\right]=x_3y_3=\sigma(x)\sigma(y).\blacksquare$$

经过验证自然数集 $\mathbb{N}$ 和 $\widetilde{\mathbb{Z}}$ 同构. 因此可以把它们等同起来. 于是有 $\mathbb{N}\subsetneq\mathbb{Z}$. 于是我们可以用更简洁的记号表示整数.

**定义 1.10 (正整数和负整数)**

设 $\overline{a-b}\in\mathbb{Z}$, 其中 $a,b\in\mathbb{N}$.

1° 若 $a>b$, 则把 $\overline{a-b}$ 记作 $n$, 其中 $n$ 是满足 $a=b+n$ 的自然数. $n$ 称为**正整数** (positive integer). 全体正整数组成的集合记作 $\mathbb{Z}^+$.

2° 若 $a<b$, 则把 $\overline{a-b}$ 记作 $-n$, 其中 $n$ 是满足 $b=a+n$ 的自然数. $-n$ 称为**负整数** (negative integer). 全体负整数组成的集合记作 $\mathbb{Z}^-$.

♣

注 容易知道 $\mathbb{Z}^+=\mathbb{N}^*$.

注 由命题 (1.8) 可知对于任一整数 $x$, 下列三个命题中, 有且仅有一个成立

1° $x$ 是一个正整数.

2° $x=0$.

3° $x$ 是一个负整数.

### 1.2.2 整数集中的运算律

现在我们已经完成了整数集的构建. 回到最初的问题. 现在我们可以来定义整数集中的减法运算了. 为此我们可以定义整数集中的“负元”. 容易看出, 对于任一整数 $x=\overline{a-b}$, 都存在一个 $y=\overline{b-a}$ 使得

$$y+x=x+y=\overline{a-b}+\overline{b-a}=\overline{(a+b)-(b+a)}=\overline{(a+b)-(a+b)}=0.$$

**定义 1.11 (整数集中的相反数)**

在整数集 $\mathbb{Z}$ 中设 $x$ 的负元称为 $x$ 的**相反数** (opposite number). 记作 $-x$.

♣

注 容易看出零的负元仍是零, 正整数的负元是负整数.

由于整数的加法运算满足结合律, 由命题 (0.17) 可知, 任一整数都有唯一的负元. 于是我们可以用负元来定义整数集中减法.

**定义 1.12 (整数集中的减法)**

设 $a, b \in \mathbb{Z}$, 规定

$$a - b := a + (-b).$$

以上运算称为整数集上的**减法** (subtraction).

**命题 1.19 (整数集中的运算律)**

对于任意整数 $a, b, c \in \mathbb{Z}$ 都有

(1) 加法结合律: $(a+b)+c = a+(b+c)$.

(2) 加法交换律: $a+b = b+a$.

(3) 加法零元: $a+0 = 0+a = a$.

(4) 加法负元: $a+(-a) = (-a)+a = 0$.

(5) 乘法结合律: $(ab)c = a(bc)$.

(6) 分配律: $(a+b)c = ac+bc$, $c(a+b) = ca+cb$.

(7) 乘法交换律: $ab = ba$.

(8) 乘法单位元: $a \times 1 = 1 \times a = a$.

**证明** 设 $a = \overline{x_1 - y_1}$, $b = \overline{x_2 - y_2}$, $c = \overline{x_3 - y_3}$, 其中 $x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3 \in \mathbb{N}$. 则

$$\begin{aligned}
(1)\ (a+b)+c &= (\overline{x_1-y_1}+\overline{x_2-y_2})+\overline{x_3-y_3} = \overline{(x_1+x_2)-(y_1+y_2)}+\overline{x_3-y_3}\\
&= \overline{(x_1+x_2+x_3)-(y_1+y_2+y_3)} = \overline{x_1-y_1}+\overline{(x_2+x_3)-(y_2+y_3)}\\
&= \overline{x_1-y_1}+(\overline{x_2-y_2}+\overline{x_3-y_3}) = a+(b+c).\\
(2)\ a+b &= \overline{x_1-y_1}+\overline{x_2-y_2} = \overline{(x_1+x_2)-(y_1+y_2)} = \overline{(x_2+x_1)-(y_2+y_1)}\\
&= \overline{x_2-y_2}+\overline{x_1-y_1} = b+a.\\
(3)\ a+0 &= \overline{x_1-y_1}+\overline{0-0} = \overline{(x_1+0)-(y_1+0)} = \overline{x_1-y_1} = a,\\
0+a &= \overline{0-0}+\overline{x_1-y_1} = \overline{(0+x_1)-(0+y_1)} = \overline{x_1-y_1} = a.\\
(4)\ a+(-a) &= \overline{x_1-y_1}+\overline{y_1-x_1} = \overline{(x_1+y_1)-(y_1+x_1)} = \overline{(x_1+y_1)-(x_1+y_1)} = 0,\\
(-a)+a &= \overline{y_1-x_1}+\overline{x_1-y_1} = \overline{(y_1+x_1)-(x_1+y_1)} = \overline{(y_1+x_1)-(y_1+x_1)} = 0.\\
(5)\ (ab)c &= (\overline{x_1-y_1}\times\overline{x_2-y_2})\overline{x_3-y_3} = \overline{(x_1x_2+y_1y_2)-(x_1y_2+y_1x_2)}\times\overline{x_3-y_3}\\
&= \overline{(x_1x_2x_3+y_1y_2x_3+x_1y_2y_3+y_1x_2y_3)-(x_1x_2y_3+y_1y_2y_3+x_1y_2x_3+y_1x_2x_3)}\\
&= \overline{(x_1x_2x_3+x_1y_2y_3+y_1x_2y_3+y_1y_2x_3)-(x_1x_2y_3+x_1y_2x_3+y_1x_2x_3+y_1y_2y_3)}\\
&= \overline{x_1-y_1}\times\overline{(x_2x_3+y_2y_3)-(x_2y_3+y_2x_3)} = \overline{x_1-y_1}(\overline{x_2-y_2}\times\overline{x_3-y_3}) = a(bc).\\
(6)\ (a+b)c &= (\overline{x_1-y_1}+\overline{x_2-y_2})\overline{x_3-y_3} = \overline{(x_1+x_2)-(y_1+y_2)}\times\overline{x_3-y_3}\\
&= \overline{[(x_1+x_2)x_3+(y_1+y_2)y_3]-[(x_1+x_2)y_3+(y_1+y_2)x_3]}\\
&= \overline{(x_1x_3+x_2x_3+y_1y_3+y_2y_3)-(x_1y_3+x_2y_3+y_1x_3+y_2x_3)}\\
&= \overline{(x_1x_3+y_1y_3)-(x_1y_3+y_1x_3)}+\overline{(x_2x_3+y_2y_3)-(x_2y_3+y_2x_3)}\\
&= \overline{x_1-y_1}\times\overline{x_3-y_3}+\overline{x_2-y_2}\times\overline{x_3-y_3} = ac+bc.\\
(7)\ ab &= \overline{x_1-y_1}\times\overline{x_2-y_2} = \overline{(x_1x_2+y_1y_2)-(x_1y_2+y_1x_2)} = \overline{(x_2x_1+y_2y_1)-(x_2y_1+y_2x_1)}\\
&= \overline{x_2-y_2}\times\overline{x_1-y_1} = ba.\\
(8)\ a\times 1 &= \overline{x_1-y_1}\times\overline{1-0} = \overline{(x_1\times 1+y_1\times 0)-(x_1\times 0+y_1\times 1)} = \overline{x_1-y_1} = a,\\
1\times a &= \overline{1-0}\times\overline{x_1-y_1} = \overline{(1\times x_1+0\times y_1)-(1\times y_1+0\times x_1)} = \overline{x_1-y_1} = a.
\end{aligned}$$

(6) 中的 $c(a+b) = ca+cb$ 证法类似.

**注** 我们很快会看到以上整数集中的运算律将被抽象为“环公理”.

以上运算律蕴含了以下规则.

**命题 1.20**

在整数集 $\mathbb{Z}$ 中

(1) $0a = a0 = 0$.

(2) $a(-b) = (-a)b = -ab$.

(3) $(-a)(-b) = ab$.

**证明** (1) 由于

$$0 = a0 - a0 = a(0+0) - a0 = a0 + a0 - a0 = a0$$

$$0 = 0a - 0a = (0+0)a - 0a = 0a + 0a - 0a = 0a$$

于是可知 $0a = a0 = 0$.

(2) 由于

$$ab + a(-b) = a[b + (-b)] = a0 = 0 \iff a(-b) = -ab.$$

$$ab + (-a)b = [a + (-a)]b = 0b = 0 \iff (-a)b = -ab.$$

于是可知 $a(-b) = (-a)b = -ab$.

(3) 令 $a(-b) = (-a)b$ 中的 $a$ 为 $-a$ 得 $(-a)(-b) = [-(-a)]b = ab$.

**注** 由 (2) 可知 $(-1) \times a = -a$.

由以上证明可知整数集中规定的加法和乘法运算一旦满足命题 (1.19) 中的前六条自然就能得到“零乘以任何数都等于零”和“负负得正”这些我们熟知的运算法则.

下面来验证整数的无零因子律.

**命题 1.21 (整数的无零因子律)**

设 $a, b \in \mathbb{Z}$, 则 $ab = 0$ 当且仅当 $a = 0$ 或 $b = 0$.

**证明** 充分性显然成立. 下面证明必要性. 若 $ab = 0$, 假设 $a \neq 0$ 且 $b \neq 0$. 若 $a$ 和 $b$ 均为正整数, 由命题 (1.14) 可知 $ab \neq 0$. 若 $a$ 和 $b$ 均为负整数时, $-a$ 和 $-b$ 为正整数. 由命题 (1.20) 可知 $ab = (-a)(-b) \neq 0$. 若 $a$ 为正整数, $b$ 为负整数, 则 $-b$ 为正整数. 于是 $-ab = a(-b) \neq 0$. 因此 $ab \neq 0$. 同理可知 $b$ 为正整数, $a$ 为负整数时, $ab \neq 0$.

综上可知假设不成立. 于是可知必要性成立.

由无零因子律可以推得消去律.

**命题 1.22 (整数的消去律)**

在整数集 $\mathbb{Z}$ 中, 若 $c \neq 0$, 则 $ac = bc$ 当且仅当 $a = b$.

**证明** 充分性显然成立. 下面证明必要性. 由于 $ac = bc$ 且 $c \neq 0$, 则

$$(a-b)c = ac - bc = 0.$$

由无零因子律可知 $a - b = 0$ 或 $c = 0$. 由于 $c \neq 0$, 故 $a - b = 0$, 即 $a = b$. 于是可知命题成立.

**注** 事实上由消去律也可以推得无零因子律. 推导过程如下.

在 $\mathbb{Z}$ 中, 若 $ab = 0$, 假设 $a \neq 0$ 且 $b \neq 0$. 由命题 (1.23) 中的 (1) 可知

$$ab = 0 = 0a.$$

由消去律可知 $b = 0$, 出现矛盾. 因此假设不成立. 于是可知 $a = 0$ 或 $b = 0$.

以上讨论表明, 无零因子律和消去律是等价的.

### 1.2.3 环公理

至此我们完成了整数集的构建. 如果我们把命题 (1.19) 中的前 6 条作为公理. 就可以得到一类代数结构.

**公理 1.3 (环)**

设非空集 $R$, 定义 $R$ 上的加法和乘法运算. 若这两种运算对于任意 $a, b, c \in R$ 都满足以下六条公理:

(1) 加法结合律: $(a+b)+c = a+(b+c)$.

(2) 加法交换律: $a+b = b+a$.

(3) 加法零元: 存在 $x \in R$ 使得 $a+x = a$, 其中 $x$ 记作 $\mathbf{0}$.

(4) 加法负元: 存在 $x \in R$ 使得 $a+x = \mathbf{0}$, 其中 $x$ 记作 $-a$.

(5) 乘法结合律: $(ab)c = a(bc)$.

(6) 分配律: $(a+b)c = ac+bc$, $c(a+b) = ca+cb$.

则称 $R$ 是一个环 (ring).

注 由于 $R$ 不一定是数集, 因此零元不一定是一个数, 故用加粗的 $\mathbf{0}$ 表示.
注 环的乘法运算不要求交换律, 因此分配律有左右之分.
注由命题 (0.16) 可知环中的零元是唯一的.
注由于环的加法满足结合律, 由 (0.17) 可知, 对于任一元素 $a$ 都有唯一的负元 $-a$. 于是可以在 $R$ 中定义减法.

$$a-b := a+(-b).$$

环公理是从整数集 $\mathbb{Z}$ 的特征中抽象而来的, 因此 $\mathbb{Z}$ 显然符合环公理. 因此 $\mathbb{Z}$ 是一个环. 我们称它为**整数环** (ring of integers). 容易验证, 所有偶数组成的集合也是一个环, 我们称它为**偶数环** (ring of even numbers), 记作 $2\mathbb{Z}$.

整数环 $\mathbb{Z}$ 的乘法运算还满足交换律和消去律, 且存在单位元 1. 若一个环 $R$ 满足乘法交换律, 我们就称它为**交换环** (commutative ring). 若一个环 $R$ 中有乘法单位元, 我们就称它为**有单位元的环** (ring with unity), 简称**幺环**. 若一个环 $R$ 满足无零因子律, 我们就称它为**无零因子环** (rings without zero divisor). 无零因子交换幺环称为**整环** (integral domain). 在《高等代数》的矩阵理论中我们将看到不满足消去律 (或无零因子律) 的环的例子.

整数环有许多值得研究的有趣主题, 比如整除性和带余除法、同余、素数、素因数分解、最大公因数和最小公倍数、不定方程等等, 这些主题属于《初等数论》.

在代数学中我们将看到所有一元多项式组成的集合 $K[x]$ 也是一个整环. 因此它和 $\mathbb{Z}$ 有许多共同的性质. 后面还将看到 $\mathbb{Z}$ 和 $K[x]$ 都是 "唯一分解环".、《高等代数》以及《抽象代数》.

由 6 条环公理可以得到运算性质. 证明方法与命题 (1.20) 完全相同.

**命题 1.23 (环中乘法的运算法则)**

设环 $R$. 则对于任意 $a, b, c \in R$ 都满足

(1) $\mathbf{0}a = a\mathbf{0} = \mathbf{0}$.

(2) $a(-b) = (-a)b = -ab$.

(3) $(-a)(-b) = ab$.

证明 证明略.

### 1.2.4 整数集中的序关系

**定义 1.13 (整数的序关系)**

设整数 $\overline{a-b}$ 和 $\overline{c-d}$, 其中 $a, b, c, d \in \mathbb{N}$. 我们如下定义它们的序关系

$$\overline{a-b} < \overline{c-d} :\Longleftrightarrow a+d < b+c.$$

不难证明整数集也是一个全序集, 且满足三歧性. 加法保序性依旧成立.

**命题 1.24 (整数集的全序性)**

在整数集 $\mathbb{Z}$ 中

(1) 自反性: $a \leq a$.

(2) 反对称性: 若 $a \geq b$ 且 $b \geq a$, 则 $a = b$.

(3) 传递性: 若 $a \geq b$ 且 $b \geq c$, 则 $a \geq c$.

(4) 完全性: 对于任意 $a, b$ 都有 $a \geq b$ 或 $b \geq a$.

**证明** 证明略.

**命题 1.25 (整数集的三歧性)**

对于任意 $a, b \in \mathbb{Z}$, 下列三个命题中, 有且仅有一个成立

$$1^\circ\ a < b. \quad 2^\circ\ a = b. \quad 3^\circ\ a > b.$$

**证明** 证明略.

整数集中出现了 "减法" 和 "负数" 的概念. 因此整数集的序关系有一些不同于自然数集的性质.

**引理 1.3**

在整数集 $\mathbb{Z}$ 中,

(1) $a$ 是一个正整数当且仅当 $a > 0$.

(2) $a$ 是一个负整数当且仅当 $a < 0$.

**证明** 设 $a = \overline{x-y}$. 则

$$a \text{ 是一个正整数} \Longleftrightarrow x > y \Longleftrightarrow x+z > y+z,\ z \in \mathbb{Z} \Longleftrightarrow \overline{x-y} > \overline{z-z} \Longleftrightarrow a > 0.$$

$$a \text{ 是一个负整数} \Longleftrightarrow x < y \Longleftrightarrow x+z < y+z,\ z \in \mathbb{Z} \Longleftrightarrow \overline{x-y} < \overline{z-z} \Longleftrightarrow a < 0. \blacksquare$$

**注** 由以上命题和序关系的传递性可知任一正整数恒大于任一负整数.

**命题 1.26 (整数集中序关系的性质)**

在整数集 $\mathbb{Z}$ 中,

(1) $a > b$ 当且仅当 $a - b > 0$.

(2) $a > b$ 当且仅当 $a + c > b + c$.

(3) $a > b$ 当且仅当 $-a < -b$.

(4) 若 $a > 0, b > 0$ 则 $ab > 0$.

(5) 若 $a > 0, b < 0$ 则 $ab < 0$.

(6) 若 $a < 0, b < 0$ 则 $ab > 0$.

(7) 若 $a > b$ 且 $c > 0$, 则 $ac > bc$.

(8) 若 $a > b$ 且 $c < 0$, 则 $ac < bc$.

**证明** (1) 设 $a = \overline{x_1 - y_1}, b = \overline{x_2 - y_2}$, 其中 $x_1, y_1, x_2, y_2 \in \mathbb{N}$. 则

$$a > b \iff \overline{x_1 - y_1} > \overline{x_2 - y_2} \iff x_1 + y_2 > y_1 + x_2 \iff \overline{(x_1 + y_2) - (y_1 + x_2)} \text{ 是一个正整数}$$
$$\iff \overline{(x_1 + y_2) - (y_1 + x_2)} > 0 \iff a - b > 0.$$

(2) 由 (1) 可知

$$a > b \iff a - b > 0 \iff (a + c) - (b + c) > 0 \iff a + c > b + c.$$

(3) 由 (1) 可知

$$a > b \iff a - b > 0 \iff -b - (-a) > 0 \iff -b > -a \iff -a < -b.$$

(4) 若 $a > 0, b > 0$, 则 $a$ 和 $b$ 都是正整数, 即正自然数. 由命题 (1.15) 立刻可知 $ab > 0$.

(5) 若 $b < 0$ 由 (3) 可知 $-b > 0$. 由 (4) 可知 $a(-b) > 0$, 故 $-ab > 0$. 由 (3) 可知 $ab < 0$.

(6) 若 $a < 0, b < 0$ 由 (3) 可知 $-a > 0, -b > 0$. 由 (4) 可知 $(-a)(-b) > 0$, 故 $ab > 0$.

(7) 若 $a > b$, 由 (1) 可知 $a - b > 0$, 由于 $c > 0$, 由 (4) 可知

$$ac - bc = (a - b)c > 0.$$

于是由 (1) 可知 $ac > bc$. 类似地可证明 (8) 成立.

## 1.3 有理数域和域公理

前面我们用自然数集构建整数集的方法用了现代集合论的观点, 因此比较抽象, 但这样做的好处是非常严格, 且容易推广到更一般的情况. 现在我们可以依样画葫芦用整数集构建有理数域.(今后我们会看到我们可以用同样的方法用一元多项式环构建分式域, 这就是数学中的 ''磨刀不误砍柴工'').

### 1.3.1 有理数集的构建

在自然数集 $\mathbb{N}$ 中, 不是每个元素都有负元 (加法逆元), 即 $\mathbb{N}$ 对减法运算不封闭. 于是我们把自然数扩充成了整数环 $\mathbb{Z}$. 但是 $\mathbb{Z}$ 中不是元素都有乘法逆元 (事实上 $\mathbb{Z}$ 只有 1 和 $-1$ 有乘法逆元), 即 $\mathbb{Z}$ 对除法运算不封闭. 于是我们可以用类似的方法扩充 $\mathbb{Z}$, 使得扩大的数集对除法运算封闭.

在 $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^*$ 中定义一个二元关系

$$(a_1,b_1)\sim(a_2,b_2):\iff a_1b_2=b_1a_2.$$

容易验证这样定义的二元关系 "$\sim$'' 满足反身性、对称性和传递性, 因此它是一个等价关系. 我们把 $(a,b)$ 确定的等价类记作 $\frac{a}{b}$. 于是有

$$\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}\iff(a_1,b_1)\sim(a_2,b_2)\iff a_1b_2=b_1a_2.$$

这样我们就得到了 $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^*$ 对于等价关系 "$\sim$'' 的商集 $(\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^*)/\sim$, 我们把它记作 $\mathbb{Q}$. 类似地, 可以在 $\mathbb{Q}$ 中规定加法和乘法运算

$$\frac{a_1}{b_1}+\frac{a_2}{b_2}:=\frac{a_1b_2+b_1a_2}{b_1b_2},$$
$$\frac{a_1}{b_1}\cdot\frac{a_2}{b_2}:=\frac{a_1a_2}{b_1b_2}.$$

容易验证以上规定的加法和乘法运算不依赖于等价类中代表元素的选择, 因此这种规定是合理的. 不难证明以上规定的加法和乘法运算都满足 6 条环公理. 其中 $\frac{0}{1}$ 是 $\mathbb{Q}$ 中的零元. $\mathbb{Q}$ 中的任一元素 $\frac{a}{b}$ 都有负元 $\frac{-a}{b}$, 记作 $-\frac{a}{b}$. 乘法还满足交换律. $\mathbb{Q}$ 中还有单位元 $\frac{1}{1}$. 因此 $\mathbb{Q}$ 也是一个整环. 于是所有关于整环的运算法则对于有理数全都成立. 这就是抽象出代数结构的好处, 对于同样的代数结构不需要重复验证形同的命题.

**定义 1.14 (有理数集)**

在集合 $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^*$ 上规定一个等价关系

$$(a_1,b_1)\sim(a_2,b_2):\iff a_1b_2=b_1a_2.$$

$\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^*$ 对于等价关系 "$\sim$'' 的商集 $(\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^*)/\sim$ 称为**有理数集** (set of rational numbers), 记作 $\mathbb{Q}$. 其中每一个等价类表示一个**有理数** (rational number). $(a,b)$ 确定的等价类记作 $\frac{a}{b}$. 若 $ab>0$, 则称有理数 $\frac{a}{b}$ 是**正的** (positive). 若 $ab<0$, 则称有理数 $\frac{a}{b}$ 是**负的** (negative). 若 $a=0$, 则把 $\frac{a}{b}$ 记作 0. ♣

注 ''有理数'' 是一个误译, rational number 的意思是 ''比例数''. 由于实数 (real number) 的首字母也是 r, 因此有理数用 *quotient* 的首字母表示.

注 类似地, 为了便于叙述问题, 我们把 $\mathbb{Q}\backslash\{0\}$ 记作 $\mathbb{Q}^*$.

注 由命题 (1.25) 可知对于任一有理数 $x$, 下列三个命题中, 有且仅有一个成立

1° $x$ 是一个正有理数.

2° $x=0$.

3° $x$ 是一个负有理数.

类似地, 我们也可以在 $\mathbb{Q}$ 中找到一个与 $\mathbb{Z}$ 同构的真子集. 设

$$\widetilde{\mathbb{Q}} = \left\{ \frac{p}{q} \in \mathbb{Q} \,\middle|\, p \in \mathbb{Z},\ q \in \mathbb{Z}^*,\ q \mid p \right\}$$

令

$$\begin{aligned} \sigma : \widetilde{\mathbb{Q}} &\to \mathbb{Z}, \\ \frac{p}{q} &\mapsto a, \end{aligned}$$

其中 $a$ 满足 $p = aq$. 则这样定义的 $\sigma$ 是一个双射, 且对于任一 $x, y \in \widetilde{\mathbb{Q}}$ 都有

$$\begin{aligned} \sigma(x+y) &= \sigma(x) + \sigma(y), \\ \sigma(xy) &= \sigma(x)\sigma(y). \end{aligned}$$

因此可以把它们等同起来. 于是有 $\mathbb{Z} \subsetneq \mathbb{Q}$.

**定义 1.15 (分数)**

设有理数 $\dfrac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, 其中 $p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{Z}^*$.

1° 若 $q \mid p$, 则把 $\dfrac{p}{q}$ 记作 $n$, 其中 $n$ 是满足 $p = qn$ 的整数.

2° 若 $q \nmid p$, 则把有理数 $\dfrac{p}{q}$ 称为**分数** (fraction), 其中 $p$ 称为**分子** (numerator), $q$ 称为**分母** (denominator). 若 $p$ 和 $q$ 互素, 则称该分数为**既约分数** (irreducible fraction).

分数有以下基本性质.

**命题 1.27 (分数基本性质)**

设 $\dfrac{a}{b} \in \mathbb{Q}$, 其中 $a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}^*$. 则对于任一 $k \in \mathbb{Q}^*$, 都有 $\dfrac{a}{b} = \dfrac{ak}{bk}$.

**证明** 由于 $k \neq 0$, 故

$$abk = bak \iff \frac{a}{b} = \frac{ak}{bk}. \qquad \blacksquare$$

用分数基本性质可以把一个分数的分子和分母的公因数约去. 直至它们互素. 由于任一两个整数都有唯一的最大公因数 (证明详见《初等数论》), 因此每个分数都可以化为唯一的既约分数.

现在我们可以来定义有理数集 $\mathbb{Q}$ 中的除法运算了. 容易看出, 对于任一非零有理数 $x = \dfrac{a}{b}$ $(a, b \in \mathbb{Z}^*)$, 都存在一个有理数 $y = \dfrac{b}{a}$ 使得

$$yx = xy = \frac{a}{b} \times \frac{b}{a} = 1.$$

这表明 $\mathbb{Q}$ 中的任一非零元都有乘法逆元.

**定义 1.16 (有理数集中的倒数)**

在有理数集 $\mathbb{Q}$ 中有理数 $x$ 的乘法逆元通常称为 $x$ 的**倒数** (reciprocal). 记作 $\dfrac{1}{x}$ 或 $x^{-1}$.

由于有理数的乘法运算满足结合律, 由命题 (0.17) 可知, 任一非零有理数都有唯一的逆元. 于是我们可以用逆元来定义有理数集 $\mathbb{Q}$ 中除法.

**定义 1.17 (有理数集中的除法运算)**

设 $a, b \in \mathbb{Q}$, 其中 $b \neq 0$. 规定

$$a \div b := ab^{-1}.$$

以上运算称为 $\mathbb{Q}$ 上的**除法** (division).

有了有理数的逆元, 我们可以定义整数次幂.

**定义 1.18 (整数次幂的指数运算)**

设有理数 $x \in \mathbb{Q}$ 和正整数 $n \in \mathbb{N}^*$, 规定

(1) $x^n = \underbrace{x \cdot \cdots \cdot x}_{n \text{ 个 } x}$.

(2) $x^0 = 1$.

(3) $x^{-n} = \dfrac{1}{x^n}$.

注 需要注意, 底数和指数不能同时取零.

**命题 1.28 (指数运算的性质)**

设非零 $x, y \in \mathbb{Q}$ 和 $n, m \in \mathbb{Z}$, 则

(1) $x^n x^m = x^{n+m}$, $(x^n)^m = x^{nm}$, $(xy)^n = x^n y^n$.

(2) 若 $x > y > 0$. 则当 $n > 0$ 时, $x^n > y^n > 0$; 当 $n < 0$ 时, $0 < x^n < y^n$.

**证明** 证明略.

有理数域 $\mathbb{Q}$ 中可以定义 ‘‘绝对值’’ 的概念.

**定义 1.19 (绝对值)**

在实数域 $\mathbb{R}$ 中规定

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}.$$

这样规定的 $|x|$ 称为实数 $x$ 的**绝对值** (absolute value).

下面给出绝对值的性质.

**命题 1.29 (绝对值的性质)**

在实数域 $\mathbb{R}$ 中,

(1) 正定性: $|x| \geq 0$, 等号成立当且仅当 $x = 0$.

(2) 积性: $|ab| = |a||b|$.

(3) 三角形不等式: $|x + y| \leq |x| + |y|$, $\big||a| - |b|\big| \leq |x - y|$, 等号成立当且仅当 $xy \geq 0$.

(4) $-y \leq x \leq y$ 当且仅当 $y \geq |x|$. 特别地, $-|x| \leq x \leq |x|$.

**证明** 只证明 (3) 中的 $|x + y| \leq |x| + |y|$.

(i) 当 $xy \geq 0$ 时, $x \geq 0, y \geq 0$ 或 $x \leq 0, y \leq 0$. 若 $x \geq 0, y \geq 0$, 则 $x + y \geq 0$. 于是

$$|x + y| = x + y = |x| + |y|.$$

若 $x \leq 0, y \leq 0$, 则 $x + y \leq 0$. 于是

$$|x + y| = -(x + y) = (-x) + (-y) = |x| + |y|.$$

于是可知 $|x + y| = |x| + |y|$ 当且仅当 $xy \geq 0$.

(ii) 当 $xy \geq 0$ 时, $x \geq 0, y \leq 0$ 或 $x \leq 0, y \geq 0$. 若 $x \geq 0, y \leq 0$, 则 XXX

$$|x + y| < |x| + |y|$$

注 以上命题中的 (2) 可以推广为 $|x^n| = |x|^n$.

注 用数学归纳法可以把以上命题中 (3) 的 $|x+y| \le |x|+|y|$ 推广为

$$|a_1 + a_2 + \cdots + a_n| \le |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n|.$$

绝对值有几何意义.

**定义 1.20 (距离函数)**

定义 $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ 到 $\mathbb{R}$ 的一个函数

$$d(x,y) := |x-y|.$$

以上函数称为**距离函数** (distance function).

**命题 1.30 (距离函数的性质)**

在实数域 $\mathbb{R}$ 中,

(1) 正定性: $d(x,y) \ge 0$, 等号成立当且仅当 $x=y$.

(2) 对称性: $d(x,y) = d(y,x)$.

(3) 三角形不等式: $d(x,z) \le d(x,y) + d(y,z)$.

证明 只证明 (3).XXX

### 1.3.2 域公理

现在我们构造的有理数集终于凑齐了加、减、乘、除 (除数不为零) 四则运算. 我们把这样的数集称为数域.

**定义 1.21 (数域)**

设数集 $K$. 若 $K$ 满足

1° 有乘法单位元: $1 \in K$.

2° 对加法、减法和乘法运算封闭: 若 $a, b \in K$, 则 $a \pm b, ab \in K$.

3° 对除法运算封闭: 若 $a, b \in K$, 且 $b \ne 0$, 则 $ab^{-1} \in K$,

则称 $K$ 为一个**数域** (number field).

进一步我们可以抽象出一般的域的概念.

**定义 1.22 (域)**

设交换幺环 $F$ ($\mathbf{1} \ne \mathbf{0}$), 若它的每个非零元都可逆, 则称 $F$ 是一个域. 特别地, 如果域 $F \in \mathbb{C}$, 则称 $F$ 为**数域** (number field).

注 条件 $\mathbf{1} \ne \mathbf{0}$ 是为了确保 $F$ 不是平凡的交换幺环.

**公理 1.4 (域)**

设非空集合 $F$, 定义 $F$ 上的加法和乘法运算. 若这两种运算对于任意 $a, b, c \in R$ 都满足以下六条公理:

(1) 加法结合律: $(a+b)+c = a+(b+c)$.

(2) 加法交换律: $a+b = b+a$.

(3) 加法单位元 (零元): 存在 $x \in F$ 使得 $a+x = a$, 其中 $x$ 记作 $\mathbf{0}$.

(4) 加法逆元 (负元): 存在 $x \in F$ 使得 $a+x = \mathbf{0}$, 其中 $x$ 记作 $-a$.

(5) 乘法结合律: $(ab)c = a(bc)$.

(6) 分配律: $(a+b)c = ac+bc$, $c(a+b) = ca+cb$.

(7) 乘法交换律: $ab = ba$.

(8) 乘法单位元: 存在 $x \in F$ 使得 $ax = a$, 其中 $x$ 记作 $\mathbf{1}$.

(9) 乘法逆元: 对于任一非零元 $x \in F$ 都存在 $y$ 使得 $xy = \mathbf{1}$, 其中 $y$ 记作 $x^{-1}$.

则称 $F$ 是一个域 (field).

**注** 由以上公理可知, 若 $F$ 是一个域则 $F$ 一定是一个交换幺环.

**注** 为了便利, 我们令 $F^* := F \backslash \{\mathbf{0}\}$.

显然数域都满足域公理. 以后我们把有理数集 $\mathbb{Q}$ 称为**有理数域** (rational number field).

域公理中没有列出消去律, 但实际上蕴含了消去律. 这是因为域中的每个非零元都有逆元.

**命题 1.31 (域的消去律)**

在域 $F$ 中, 若 $c \neq 0$, 则 $ac = bc$ 当且仅当 $a = b$.

**证明** 充分性显然成立. 下面证明必要性. 由于 $ac = bc$ 且 $c \neq 0$, 则

$$a = a\left(cc^{-1}\right) = (ac)c^{-1} = (bc)c^{-1} = b\left(cc^{-1}\right) = b.$$

于是可知命题成立.

类似地可证明域中的消去律和无零因子律也是等价的.

**命题 1.32 (域的无零因子律)**

在域 $F$ 中, 则 $ab = 0$ 当且仅当 $a = 0$ 或 $b = 0$.

**证明** 证明略.

由以上命题可知, 若 $F$ 是一个域则 $F$ 一定是一个整环.

### 1.3.3 有理数域的序关系

**定义 1.23 (有理数的序关系)**

设有理数 $a, b \in \mathbb{Q}$. 我们如下定义它们的序关系

$$a > b :\Longleftrightarrow a - b \text{ 是一个正有理数.}$$

$$a < b :\Longleftrightarrow a - b \text{ 是一个负有理数.}$$

$a \geq b$ 当且仅当 $a > b$ 或 $a = b$. $a \leq b$ 当且仅当 $a < b$ 或 $a = b$.

**注** 由以上定义立刻可知, $a$ 是一个正有理数当且仅当 $a > 0$. $a$ 是一个负有理数当且仅当 $a < 0$. 序关系的传递性可知任一正整数恒大于任一负整数.

不难证明有理数域也是一个全序集, 且有理数域中的序关系满足和整数类似的性质.

**命题 1.33 (有理数域的全序性)**

在有理数域 $\mathbb{Q}$ 中

(1) 自反性: $a \leq a$.

(2) 反对称性: 若 $a \geq b$ 且 $b \geq a$, 则 $a = b$.

(3) 传递性: 若 $a \geq b$ 且 $b \geq c$, 则 $a \geq c$.

(4) 完全性: 对于任意 $a, b$ 都有 $a \geq b$ 或 $b \geq a$.

**证明** 证明略.

**定义 1.24 (有序域)**

设域 $F$. 若 $F$ 中定义的序关系满足全序性, 则称它是一个有序域 (ordered field).

由此可见有理数域是一个有序域.

**命题 1.34 (理数域的三歧性)**

对于任意 $a, b \in \mathbb{Q}$, 下列三个命题中, 有且仅有一个成立

$$1^\circ\ a < b. \quad 2^\circ\ a = b. \quad 3^\circ\ a > b.$$

**证明** 证明略.

**命题 1.35 (有理数域中序关系的性质)**

在有理数域 $\mathbb{Q}$ 中,

(1) $a > b$ 当且仅当 $a + c > b + c$.

(2) $a > b$ 当且仅当 $-a < -b$.

(3) 若 $a > 0, b > 0$ 则 $ab > 0$.

(4) 若 $a > 0, b < 0$ 则 $ab < 0$.

(5) 若 $a < 0, b < 0$ 则 $ab > 0$.

(6) 若 $a > b$ 且 $c > 0$, 则 $ac > bc$.

(7) 若 $a > b$ 且 $c < 0$, 则 $ac < bc$.

**证明** 证明略.

下面来看整数集和有理数集的一个重要区别. 整数被有理数 "隔开", 两个整数之间可能不存在整数, 但任意两个有理数之间一定存在有理数. 这样的性质称为**稠密性** (density).

**定理 1.5**

对于任一有理数 $a \in \mathbb{Q}$, 都存在唯一整数 $n$ 满足 $n \leq a < n + 1$.

**证明** 只证明正有理数的情况. 设 $a = \dfrac{p}{q}$, 其中 $p \in \mathbb{N}^*, q \in \mathbb{N}^*$. 用 $q$ 对 $p$ 作带余除法得 (详见《初等数论》):

$$p = hq + r, \quad h, r \in \mathbb{N},\ 0 \leq r < q.$$

由于

$$h - \frac{p}{q} = \frac{hq - p}{q} = \frac{-r}{q} \leq 0.$$
$$\frac{p}{q} - (h+1) = \frac{p - (h+1)q}{q} = \frac{p - hq - q}{q} = \frac{r - q}{q} < 0.$$

于是可知存在自然数 $h$ 满足 $h \leq a < h + 1$. 设存在一个自然数 $g$ 满足 $g \leq a < g + 1$. 假设 $g > h$, 由命题 (1.10) 可知 $g \geq h + 1 > a$, 矛盾. 假设 $g < h$, 由命题 (1.10) 可知 $g \leq h - 1$, 则 $g + 1 \leq h \leq a$, 矛盾. 于是可知 $g = h$. 这表明这样的整数唯一存在.

**注** 以上定理表明对于任一有理数 $x$ 一定存在 $n \in \mathbb{N}$ 满足 $n > x$.

以上命题使得我们可以在有理数域中定义一种运算.

**定义 1.25 (取整函数)**

在有理数域 $\mathbb{Q}$ 中规定 $[x]$ 为不超过 $x$ 的最大整数, 即满足

$$[x] \leq a < [x] + 1.$$

以上规定的函数称为**取整函数** (least integer function), 或称为**天花板函数** (ceiling function). ♣

**定理 1.6 (有理数域的稠密性)**

对于任意 $a, b \in \mathbb{Q}$, 若 $a < b$, 则一定存在 $c \in \mathbb{Q}$ 满足 $a < c < b$. ♡

**证明** 令 $c = \dfrac{a+b}{2}$. 容易知道 $a < c < b$.

# 第 2 章 实数理论

**内容提要**

- 在上一章我们从 Peano 公理出发严格构建了自然数集. 然后用自然数定义了整数, 用整数定义了有理数, 两者本质上用了一样的方法 (用一个有序数对). 因此用这样的方法得到的新数集虽然 "扩大" 了, 但从 "集合基数" 的观点看, 没有真的变大 (这个事实将在本章看到).
- "实数" 的概念并不新鲜, 但想用 2333 有理数构造实数却完全不同于用自然数构造整数和用整数构造有理数. 不严格地讲, 用自然数集通过减法运算就可以得到所有整数, 整数环通过除法运算就可以得到所有有理数. 而有理数域却无法通过某种代数运算得到一切实数 (事实上任何 "有限的手段" 都是无能无力的)! 虽然开方运算可以得到一些无理数, 但用开方运算得到的无理数相对于全体无理数而言真是 "杯水车薪".
- 用有理数域构造实数域需要 "天才" 的构想. 学习这些构造方法也许对于初学分析的学生会有困难, 且短期看没有直接的实用性, 但它们可以给我们带来启示, 所以我们还是不想省略这个内容. 如果暂时感觉有困难, 可以先跳过这个内容, 等学完后面的知识后来补缺 (事实上这样做并不可耻, 因为这符合这些知识的历史顺序, 也符合人的认知规律).
- 构造实数的方法主要有:Dedekind 分割、无限十进制小数、闭区间套、Cauchy 列、无穷级数等. 本书选用了 Dedekind 分割的方法.
- 实数集与有理数域的关键差别在于实数具有 "完备性". 我们将从 Dedekind 定理、确界原理和 Heine-Borel 定理三个角度阐述实数的完备性. 在下一章我们将利用数列和极限的概念继续研究实数的完备性, 并介绍单调有界定理、闭区间套定理、Bolzano-Weierstrass 定理和 Cauchy 收敛准则, 它们分别从不同角度刻画了实数的完备性. 我们将看到以上七个命题是等价的, 它们都是实数的完备性定理.
- 最后我们将介绍 "集合基数" 的概念. 我们将看到自然数集、整数环和有理数域都是 "可数集", 而实数域是 "不可数集". 从角度看, 从有理数域到实数域发生了 "跃迁".

## 2.1 实数域的构建及其结构

### 2.1.1 无理数的历史

在有理数域中, 我们已经可以讨论很多事情, 而且可以做得相当好. 事实上, 计算机的世界几乎只需要有理数. 由于有理数是由一对有序整数定义的, 因此可以说计算机世界是 "属于整数的". 在两千五百多年前, Pythagoras 也有类似的观点. 他认为整个宇宙只需要整数就可以描述 (如果是计算机模拟的宇宙, 那就没错了). 然而一个简单的几何事实就撼动了 Pythagoras 的信仰基础.

问题: 求边长为 1 的单位正方形的对角线. 设对角线长为 $x$, 由 Pythagoras 定理 (勾股定理) 可知

$$x^2 = 1^2 + 1^2 \iff x^2 = 2.$$

于是问题归结为求二次方程 $x^2 = 2$ 的根. 在初中时我们已经知道这个方程是没有有理根的. 这个事实完全违反了 "Pythagoras 主义". 这是数学史上的一段著名公案. 它直接引发了**第一次数学危机** (crises in mathematics). 下面我们来证明这个事实.

**例 2.1** 二次方程 $x^2 = 2$ 没有有理根.

**证明** 用反证法. 假设 $x^2 = 2$ 存在一个有理根 $p/q$, 其中 $p, q$ 是互素的整数. 则

$$\left(\frac{p}{q}\right)^2 = 2 \iff p^2 = 2q^2.$$

因此 $2q^2$ 是一个偶数, 于是 $p^2$ 是一个偶数. 因此 $p$ 也是一个偶数 (否则 $p^2$ 是一个奇数). 于是 $4 \mid p^2$, 因此 $2 \mid q^2$, 即 $q^2$ 也是一个偶数, 因此 $q$ 也是一个偶数. 这表明 $p, q$ 不互素. 出现矛盾. 故假设不成立. 于是可知 $x^2 = 2$ 不存在一个有理根.

二次方程 $x^2 = 2$ 虽然没有有理根, 但单位正方形对角线的长度是客观存在的. 于是我们用 $\sqrt{2}$ 表示这个数. 它无法写成 $p/q$ 的形式, 因此被称为**无理数** (irrational number)(原义是非比例数). 在这个平面几何例子中, 出现的无理数虽然无法写成 ‘‘两个整数比’’ 的形式, 但至少是一个多项式方程的根.

下面我们再看一个熟悉的例子. 求单位圆的周长. 根据我们中学时已经学过的知识, 答案是 $2\pi$. 它也是一个无理数. 但这个无理数不仅无法表示成两个整数之比, 甚至不能成为一个 ‘‘代数方程’’ 的根. 这样的无理数称为**超越数** (transcendental number). 这个主题大大超越了本书范围. 暂时无法展开细讲.

讲到这里, 我们窥见了无理数的一角 (很小的一角). 以上的例子让我们隐隐感觉使用前面构建整数集和有理数集的方法无法构建出所有的无理数, 尤其无法构建出超越数 (因为超越数不是代数方程的根, 这意味着无法用有限次代数运算得到超越数). 因此, 想要构建无理数需要一个 ‘‘无限过程’’. 初等的数学工具显得力不从心了. 一直到十九世纪后半叶, 数学家才逐渐找到几种定义无理数的方法, 这个过程经历了两千多年.

### 2.1.2 Dedekind 分割

还是回到刚刚那个例子. 如图2.1所示, 我们把所有小于方程 $x^2 = 2$ 的正根 $x_0$ 的有理数组成的集合记作 $\alpha$, 所有大于等于 $x_0$ 的有理数组成的集合记作 $\beta$, 即

$$\alpha = \{a \in \mathbb{Q} \mid a < x_0\}, \quad \beta = \{a \in \mathbb{Q} \mid a \geq x_0\}.$$

容易验证 $\alpha, \beta$ 非空, 且 $\alpha \cap \beta = \varnothing$, $A \cup \beta = \mathbb{Q}$. 于是我们得到了 $\mathbb{Q}$ 的一个划分 $\{\alpha, \beta\}$(详见定义 (0.18)), 我们把它记作 $\alpha \mid \beta$. 我们来验证 $\alpha$ 中没有最大元素, $\beta$ 中没有最小元素.

显然 $1 \in \alpha$. 因此我们只需看正数的情况. 任取 $p \in \mathbb{Q}^+$. 令

$$q = p - \frac{p^2 - 2}{p + 2} = \frac{2p + 2}{p + 2}. \tag{2.1}$$

则

$$q^2 - 2 = \left(\frac{2p + 2}{p + 2}\right)^2 - 2 = \frac{2\left(p^2 - 2\right)}{(p + 2)^2}. \tag{2.2}$$

若 $p \in \alpha$, 由于 $p > 0$, 故 $p^2 < 2$. 由等式 (2.1) 可知 $q > p$. 由等式 (2.2) 可知 $q^2 < 2$. 故 $q \in \alpha$. 这表明 $\alpha$ 中无最大元素.

若 $p \in B$, 由于 $p > 0$, 故 $p^2 > 2$. 由等式 (2.1) 可知 $q < p$. 由等式 (2.2) 可知 $q^2 > 2$. 故 $q \in \beta$. 这表明 $\beta$ 中无最小元素.

以上事实说明有理数域 $\mathbb{Q}$ 虽然稠密, 但依旧存在 ‘‘空隙’’. 我们需要定义实数来填满这些空隙. 以上的讨论给我们提供了一种思路.

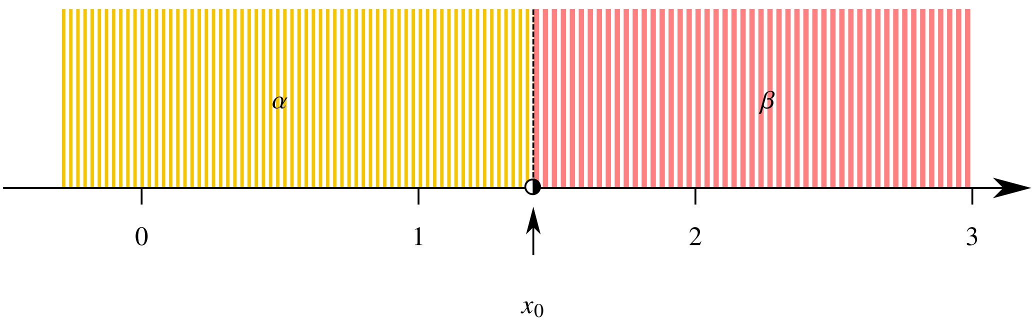



**图 2.1:** 有理数集的 Dedekind 分割.

**定义 2.1 (Dedekind 分割)**

设数集 $K$ 的一个划分 $\{\alpha, \beta\}$. 若满足

1° $\alpha$ "向下封闭", 即对于任意 $x, y \in K$, 其中 $x < y$. 若 $y \in \alpha$, 则 $x \in \alpha$.

2° $\alpha$ 中无最大元素, 即对于任一 $x \in K$, 总是存在 $y > x$ 满足 $y \in \alpha$.

则称该划分 $\{\alpha, \beta\}$ 为 $K$ 上的一个 **Dedekind** 分割 (Dedekind cut), 记作 $\alpha \mid \beta$. 其中 $\alpha$ 称为这个 Dedekind 分割的下集 (lower set), $\beta$ 称为这个 Dedekind 分割的上集 (upper set). ♣

注 由于 $\{\alpha, \beta\}$ 是 $\mathbb{Q}$ 的一个划分, 因此 $\alpha$ 和 $\beta$ 满足

1° $\alpha, \beta \neq \varnothing$.

2° $\alpha \cap \beta = \varnothing$.

3° $\alpha \cup \beta = \mathbb{Q}$.

从直观上可以想到, 一个 $\mathbb{Q}$ 上的 Dedekind 分割可以确定一个实数. 因此我们想到用 $\mathbb{Q}$ 上的 Dedekind 分割来定义实数. 由于下集 $\alpha$ 完全决定 $\alpha \mid \beta$. 因此我们用下集来定义实数, 这样做便于叙述后面的内容.

**定义 2.2 (实数集)**

有理数域 $\mathbb{Q}$ 上的所有 Dedekind 分割的下集所组成的集合称为**实数集** (set of real numbers), 记作 $\mathbb{R}$. 其中每一个 Dedekind 分割的下集表示一个**实数** (real number). ♣

注 用 Dedekind 分割定义实数的方法是德国数学家 Richard Dedekind 创造的. 另一位德国数学家 Georg Cantor 创造了用 Cauhy 列构造实数的方法. 它们都在 1872 年发表了它们的天才构想.

注 为了便于阅读, 后面我们将用拉丁字母 $a, b, \cdots$ 表示有理数, 用希腊字母 $\alpha, \beta, \cdots$ 表示实数.

### 2.1.3 实数集上的序结构和代数结构

很容易用包含关系来定义实数集上的序关系.

**定义 2.3 (实数集上的序关系)**

设 $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. 若 $\alpha \subseteq \beta$ 则称 $\alpha$ 小于等于 $\beta$, 记作: $\alpha \leq \beta$. ♣

由于包含关系满足自反性、反对称性和传递性, 因此这样定义的序关系立刻满足自反性、反对称性和传递性. 由 Dedekind 分割的定义可知, 下集满足向下封闭性, 因此对于任意 $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, 要么 $\alpha \geq \beta$, 要么 $\alpha \leq \beta$. 因此 $\mathbb{R}$ 满足完全性 (详见 (**??**)). 于是可知 $\mathbb{R}$ 是一个全序集.

下面来定义实数集上的运算.

**定义 2.4 (实数集上的加法)**

设 $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. 规定它们的加法运算

$$\alpha + \beta := \{a + b \mid a \in \alpha,\ b \in \beta\}.$$

♣

先要证明以上定义是合理的, 即我们需要证明 $\alpha + \beta \in \mathbb{R}$. 显然 $\alpha + \beta \neq \varnothing$. 任取 $c \in (\alpha + \beta)$. 令 $c = a + b$, 其中 $a \in \alpha, b \in \beta$. 若 $c' < c$, 则存在 $d > 0$ 满足

$$c' = c - d = (a + b) - d = (a - d) + b.$$

由于 $a - d < a$, 故 $a - d \in \alpha$. 这表明 $c' \in (\alpha + \beta)$. 于是可知 $\alpha + \beta$ 向下封闭. 由于 $\alpha$ 和 $\beta$ 中都没有最大元素, 因此一定存在 $a' > a, b' > b$, 于是 $(a' + b') \in (\alpha + \beta)$. 由于 $a' + b' > a + b$, 故 $\alpha + \beta$ 中也没有最大元素. 综上可知 $\alpha + \beta$ 是一个 Dedekind 分割的下集, 即 $\alpha + \beta \in \mathbb{R}$.

容易验证, 以上定义的加法满足结合律和交换律.

下面我们来找 $\mathbb{R}$ 中的零元 (加法单位元). 令

$$0^* := \{a \in \mathbb{Q} \mid a < 0\} = \mathbb{Q}^-.$$

显然 $0^*$ 满足向下封闭且没有最大元素, 因此 $0^* \in \mathbb{R}$. 对于任一 $\alpha \in \mathbb{R}$, 我们来验证 $\alpha + 0^* = \alpha$.

任取 $a \in \alpha, x \in 0^*$, 其中 $x < 0$. 于是 $a + x < a$. 故 $a + x \in \alpha$. 因此 $\alpha + 0^* \leq \alpha$.

任取 $a \in \alpha$, 由于 $\alpha$ 没有最大元素, 故存在 $x > 0$ 使得 $a + x \in \alpha$. 令 $a' = a + x$, 则 $a = a' + (-x)$, 其中 $a' \in \alpha$, $-x \in 0^*$, 这表明 $a \in \alpha + 0^*$. 因此 $\alpha \leq \alpha + 0^*$.

于是可知 $0^*$ 是 $\mathbb{R}$ 上的零元. 由命题 (0.16) 可知零元是唯一的. 我们规定 $\mathbb{R}^* := \mathbb{R} \backslash \{0^*\}$.

有了零元, 我们可以规定大于 $0^*$ 的是正实数, 小于 $0^*$ 的是负实数. 全体正实数和全体负实数的集合分别记作 $\mathbb{R}^+$ 和 $\mathbb{R}^-$.

下面来看 $\mathbb{R}$ 中的负元 (加法逆元). 对于任一 $\alpha \in \mathbb{R}$, 容易想到如下构造它的负元

$$\beta = \{-b \mid \ b \in \mathbb{Q} \backslash \alpha\}.$$

但这样定义的 $\beta$ 可能会有最大元素. 例如当 $\alpha = \{a \in \mathbb{Q} \mid a < 5\}$ 时, $\min \mathbb{Q} \backslash \alpha = 5$, 于是 $\max \beta = 5$. 于是我们可以对 $\beta$ 稍作改造, 令

$$\beta = \{-b + x \mid x \in \mathbb{Q}^-, \ b \in \mathbb{Q} \backslash \alpha\}.$$

容易验证, 这样定义的 $\beta$ 向下封闭且没有最大元素. 因此 $\beta \in \mathbb{R}$. 下面来计算 $\alpha + \beta$. 任取 $a \in \alpha$, $-b + x \in \beta$, 其中 $x < 0$, $b \in \mathbb{Q} \backslash \alpha$. 于是存在 $k \in \mathbb{Q} \backslash \alpha$ 满足 $k \leq b$ 且 $k > a$, 即 $a < k$ 且 $-b \leq -k$, 故 $a - b < 0$. 由于 $x < 0$, 于是

$$a + (-b + x) = (-b + x) + a < 0.$$

这表明 $\alpha + \beta = \beta + \alpha = 0^*$. 于是可知 $\beta$ 是 $\alpha$ 的负元. 由于 $\mathbb{R}$ 上的加法满足结合律, 由命题 (0.17) 可知任意实数 $\alpha$ 都有唯一的负元, 我们把它记作 $-\alpha$.

有了负元, 我们可以定义实数的减法:

$$\alpha - \beta := \alpha + (-\beta).$$

综上我们验证了 $\mathbb{R}$ 中的加法运算满足域公理.

下面来定义 $\mathbb{R}$ 上的乘法运算. 乘法运算涉及到正负数的符号问题. 我们可以先讨论正实数的情况.

**定义 2.5 (实数集上的乘法)**

设 $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. 当 $\alpha > 0^*$ 且 $\beta > 0^*$ 时, 令

$$\alpha \cdot \beta := \{c \mid c < a \cdot b, \ a \in \alpha, \ a > 0, \ b \in \beta, \ b > 0\}.$$

然后规定

$$\alpha \cdot \beta = \begin{cases} (-\alpha) \cdot (-\beta), & \alpha < 0^* \text{ 且 } \beta < 0^* \\ -[(-\alpha) \cdot \beta], & \alpha < 0^* \text{ 且 } \beta > 0^* \\ -[\alpha \cdot (-\beta)], & \alpha > 0^* \text{ 且 } \beta < 0^* \\ 0^*, & \alpha = 0^* \text{ 或 } \beta = 0^* \end{cases}.$$

♣

容易验证 $\alpha \cdot \beta$ 向下封闭且没有最大元素. 因此 $\alpha \cdot \beta \in \mathbb{R}$. 容易验证以上定义的乘法运算满足结合律和交换律.

下面我们来找实数集 $\mathbb{R}$ 中的单位元. 令

$$1^* := \{a \in \mathbb{Q} \mid a < 1\}.$$

显然 $1^*$ 满足向下封闭且没有最大元素, 因此 $1^* \in \mathbb{R}$. 类似零元的验证方法, 我们可以证明, 对于任一 $\alpha \in \mathbb{R}^+$ 都有 $\alpha \cdot 1^* = \alpha$. 由于对于任一 $\alpha \in \mathbb{R}$ 都有 $\alpha = -(-\alpha)$. 因此当 $\alpha \in \mathbb{R}^-$ 时

$$\alpha \cdot 1^* = -[(-\alpha) \cdot 1^*] = -(-\alpha) = \alpha.$$

当 $\alpha = 0^*$ 时

$$\alpha \cdot 1^* = 0^* = \alpha.$$

综上可知, 对于任一 $\alpha \in \mathbb{R}$ 都有 $\alpha \cdot 1^* = \alpha$. 于是可知 $1^*$ 是 $\mathbb{R}$ 上的乘法单位元. 由命题 (0.16) 可知乘法单位元也是唯一的.

下面我们来定义 $\mathbb{R}$ 中的乘法逆元. 对于任一 $\alpha \in \mathbb{R}^+$, 令

$$\alpha^{-1} := \{a^{-1} \mid a \in \mathbb{Q} \backslash \alpha\} \cup \mathbb{Q}^- \cup \{0\}.$$

容易验证 $\alpha^{-1}$ 向下封闭且无最大元素. 对于任一 $\alpha \in \mathbb{R}^-$ 规定

$$\alpha^{-1} := -\left(-\alpha^{-1}\right).$$

类似加法逆元的证明方法, 我们可以证明 $\alpha \cdot \alpha^{-1} = 1^*$.

有了乘法逆元, 我们可以定义实数的除法:

$$\alpha / \beta := \alpha \cdot \beta^{-1}, \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall \beta \in \mathbb{R}^*.$$

最后我们来验证 $\mathbb{R}$ 中定义的乘法对加法的分配律. 我们先证明第一种情况. 对于任意 $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}^+$. 都有

$$\alpha \cdot (\beta + \gamma) = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma.$$

任取 $a \in \alpha, d \in \beta + \gamma$, 令 $d = b + c$, 其中 $a > 0^*, b > 0^*, c > 0^*$. 由于

$$k \in \alpha \cdot (\beta + \gamma) \iff k < a \cdot (b + c) \iff k < a \cdot b + a \cdot c \iff k \in \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma.$$

于是可知 $\alpha \cdot (\beta + \gamma) \leq \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma$.

其余情况我们只证明一种. 对于任意 $\alpha > 0^*, \beta < 0^*, \gamma > 0^*$ 且 $\beta + \gamma > 0^*$. 则

$$\alpha \cdot \gamma = \alpha \cdot [(-\beta) + (\beta + \gamma)] = \alpha \cdot (-\beta) + \alpha \cdot (\beta + \gamma) = -(\alpha \cdot \beta) + \alpha \cdot (\beta + \gamma) \Longrightarrow \alpha \cdot (\beta + \gamma) = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma.$$

综上我们验证了 $\mathbb{R}$ 中的乘法运算也满足域公理. 于是 $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ 是一个域. 以后我们经常称它为**实数域** (real number field), 简称**实域** (real field). 由于 $\mathbb{R}$ 是一个全序集, 因此 $\mathbb{R}$ 也是一个有序域. 它满足和有理数域完全一样的关于有序域的性质, 包括三歧性 (命题 (1.34)) 和包括加法和乘法保序性在内一些关于序关系的简单性质 (命题 (1.35)).

到现在为止我们定义的 $\mathbb{R}$ 中的元素都是有理数组成的集合. 我们希望我们定义的 $\mathbb{R}$ 可以包含 $\mathbb{Q}$. 为此, 我们还是按照构造有理数域时的做法, 可以在 $\mathbb{R}$ 中找一个子集, 使得 $\mathbb{Q}$ 与这个子集同构.

设 $\mathbb{R}$ 的一个真子集

$$\widetilde{\mathbb{Q}} = \{\alpha \in \mathbb{R} \mid \mathbb{Q} \backslash \alpha \text{ 中存在最小元素}\}.$$

令

$$\begin{aligned} \sigma : \mathbb{Q} &\to \widetilde{\mathbb{Q}}, \\ a &\mapsto \alpha, \end{aligned}$$

其中 $\alpha = \{x \in \mathbb{Q} \mid x < a\}$. 显然 $\sigma$ 是一个映射, 且是一个双射, 且保持加法运算和乘法运算, 即对于任意 $a, b \in \mathbb{Q}$ 都满足

$$\sigma(a + b) = \sigma(a) + \sigma(b).$$

$$\sigma(a \cdot b) \cdot \sigma(b) = \sigma(a) \cdot \sigma(b).$$

于是可知 $\sigma$ 是 $\mathbb{Q}$ 到 $\widetilde{\mathbb{Q}}$ 的一个同构映射. 因此 $\mathbb{Q} \cong \widetilde{\mathbb{Q}}$. 这样就可以把它们等同起来, 于是就可得到 $\mathbb{Q} \subsetneq \mathbb{R}$. 事实上 $0^*, 1^* \in \widetilde{\mathbb{Q}}$, 既然 $\mathbb{Q}$ 和 $\widetilde{\mathbb{Q}}$ 可以等同起来, 那么今后 $\mathbb{R}$ 中的 $0^*$ 和 $1^*$ 可以直接记作 0 和 1.

用同样的方法可以证明定理 (1.5) 在实数域继续成立. 因此实数域中也可以定义取整函数. 定理 (1.5) 也暗示了对于任一有理数 $x$ 一定存在 $n \in \mathbb{N}$ 满足 $n > x$. 这个结论通常称为 **Archimedes 公理** (Archimedean axiom).

有理数域中的整数次幂的指数运算可以推广到实数域中. 且可以类似地证明相关性质继续成立. 包括命题 (1.28).

有理数域中定义的绝对值和距离函数的概念可以推广到实数域中. 且可以类似地证明相关性质继续成立. 包括命题 (**??**) 和命题 (1.30).

## 2.2 实数域的完备性

我们已经知道有理数域 $\mathbb{Q}$ 是 ‘‘稠密的” (虽然我们至今严格尚未定义这个概念). 不难证明实数域 $\mathbb{R}$ 也是 ‘‘稠密的”.

**定理 2.1 (实数域的稠密性)**

对于任意 $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, 若 $\alpha < \beta$, 则一定存在 $\gamma \in \mathbb{R}$ 满足 $\alpha < \gamma < \beta$.

**证明** 令 $\gamma = (\alpha + \beta)/2$. 由于 $\alpha < \beta$, 故

$$2\alpha < \alpha + \beta < 2\beta \iff \alpha < \frac{\alpha + \beta}{2} < \beta \iff \alpha < \gamma < \beta.$$

■

任意两个有理数中间一定还存在有理数, 虽然如此有理数依旧无法 ‘‘铺满’’ 数轴. 其中充满了 ‘‘空隙”. 因此用这个方式不足以刻画实数的 ‘‘完备性”. 下面我们将介绍几种刻画实数 ‘‘完备性’’ 的方法.

### 2.2.1 Dedekind 定理

我们知道, 有理数域 $\mathbb{Q}$ 上的 Dedekind 分可能会出现上集中无最小元素的情况. 这说明有理数域存在 ‘‘空隙”. 既然如此, 我们可以考察实数域 $\mathbb{R}$ 上的 Dedekind 分割, 看看它们的上集是不是一定有最小元素.

**定理 2.2 (Dedekind 定理)**

对于实数域 $\mathbb{R}$ 上的任一 Dedekind 分割 $A \mid B$, 上集 $B$ 中都有最小元素.

**证明** 令 $A$ 中所有有理数组成的集合为 $\alpha$, $B$ 中所有有理数组成的集合为 $\beta$. 由于 $A \mid B$ 是一个 Dedekind 分割, 因此 $A \cup B = \mathbb{R}$ 且 $A \cap B = \varnothing$. 因此 $\alpha \cup \beta = \mathbb{Q}$ 且 $\alpha \cap \beta = \varnothing$. 因此 $\{\alpha, \beta\}$ 是 $\mathbb{Q}$ 上的一个划分.

$\alpha$ 显然满足向下封闭. 任取 $a \in \alpha \subseteq A$, 由于 $A$ 中无最大元素, 故存在 $\gamma \in A$ 满足 $a < \gamma$. 于是一定存在 $a' \in \mathbb{Q}$ 满足 $a < a' < \gamma$. 由于 $a' \in \alpha$, 因此 $\alpha$ 中也无最大元素. 于是可知, 我们得到了一个 $\mathbb{Q}$ 上的一个 Dedekind 分割 $\alpha \mid \beta$. 因此下集 $\alpha$ 可以看作一个实数. 它一定属于 $A$ 或 $B$.

假设 $\alpha \in A$. 由于 $A$ 中无最大元素, 故 $A$ 中存在有理数 $p > \alpha$. $p$ 可以看作一个 Dedekind 分割下集. 则 $p \supsetneq \alpha$. 因此有理数 $p \in \beta$, 于是 $p \in B$, 这与 $p \in A$ 矛盾. 因此 $\alpha \in B$.

假设 $\alpha$ 不是 $B$ 中的最小元素, 则 $B$ 中存在有理数 $q < \alpha$. $q$ 可以看作一个 Dedekind 分割下集. 则 $q \subsetneq \alpha$. 因此有理数 $q \in \alpha$, 于是 $q \in A$, 这与 $p \in B$ 矛盾. 因此 $\alpha$ 就是 $B$ 中的最小元素. ■

Dedekind 定理表明实数域确实没有 ‘‘空隙”, 因此 Dedekind 定理刻画了实数域的**完备性** (Completeness). 后面我们还会从不同角度刻画实数域的完备性.

### 2.2.2 确界原理

Dedekind 分割 $A \mid B$ 中, 下集 $A$ 的任一元素都小于 $B$ 中任一元素. 从直观上看, $A$ 是有 ‘‘上界的”, 而 $B$ 是有 ‘‘下界的”. 下面我们从这个角度来讨论实数域的完备性.

**定义 2.6 (上确界和下确界)**

设非空集合 $E \subseteq \mathbb{R}$.

(1) 若存在 $M \in \mathbb{R}$ 使得任一 $x \in E$ 都有 $x \leq M$, 则称 $M$ 是 $E$ 的一个上界 (upper bound). 若对于任一 $\varepsilon > 0$ 都存在 $x_\varepsilon$, 使得 $x_\varepsilon > M - \varepsilon$, 则称 $M$ 是 $E$ 的**上确界** (supremum).

(2) 若存在 $m \in \mathbb{R}$ 使得任一 $x \in E$ 都有 $x \geq m$, 则称 $m$ 是 $E$ 的一个下界 (lower bound). 若对于任一 $\varepsilon > 0$ 都存在 $x_\varepsilon$, 使得 $x_\varepsilon < m + \varepsilon$, 则称 $m$ 是 $E$ 的**下确界** (infimum).

注 若 $E$ 同时有上界 $A$ 和下界 $B$, 只需令 $M = \max\{|A|, |B|\}$, 就有 $|x| < M$ $(\forall x \in E)$. 此时我们称 $E$ 是**有界的** (bounded).

注 以上定义表明, 上确界是最小的上界; 下确界是最大的下界.

很自然地, 我们会问由上界 (或下界) 时, 是否一定有上确界 (或下确界). 不难想到, 如果 $E$ 中有最大值 (或最小值) 那么上确界 (或下确界) 立刻可以看出.

**命题 2.1**

设集合 $E \subseteq \mathbb{R}$.

(1) 若存在 $M = \max E$, 则 $\sup E = M$.

(2) 若存在 $M = \min E$, 则 $\inf E = m$.

证明 只证明 (1) 的情况. 由于 $M = \max E$, 故对于任一 $x \in E$ 都有 $x \leq M$. 因此 $M$ 是 $E$ 的一个上界. 任取 $\varepsilon$, 则 $M - \varepsilon < M \in E$, 因此 $M = \sup E$. ■

下面我们来看一个上确界和下确界的重要例子.

**例 2.2** 设集合 $E = \{1/n \mid n \in \mathbb{N}^*\}$. 求 $\sup E$ 和 $\inf E$.

证明 不难看出 1 和 0 分别是 $E$ 的上界和下界. 由于 $1 = \max E$, 因此 $\sup E = 1$. 对于任一 $\varepsilon > 0$, 只需取 $n = [1/\varepsilon]+1$ 就有

$$n > \frac{1}{\varepsilon} \iff \frac{1}{n} < 0 + \varepsilon.$$

这表明 $\inf E = 0$. ■

注 以上例子告诉我们, 集合 $E$ 的上确界或下确界可能属于 $E$, 也可能不属于 $E$.

注 在下一章我们将看到, 0 是数列 $1/n$ $(n = 1, 2, \cdots)$ 的 "极限". 我们将用类似的思想来定义 "极限".

下面来证明另一种情况.

**定理 2.3 (确界原理)**

设非空集合 $E \subseteq \mathbb{R}$.

(1) 若 $E$ 有上界, 则 $E$ 一定有上确界, 且 $\sup E \in \mathbb{R}$.

(2) 若 $E$ 有下界, 则 $E$ 一定有下确界, 且 $\inf E \in \mathbb{R}$.

证明 只证明 (1) 的情况. 不妨设 $E$ 中无最大元素. 令 $E$ 的所有上界组成的集合为 $B$, 令 $A = \mathbb{R} \backslash B$. 下面来证明 $A|B$ 是一个 Dedekind 分割.

(i) 对于任意 $x, y \in \mathbb{R}$, 其中 $x < y$. 若 $y \in A$, 则 $y \notin B$, 这表明 $y$ 不是 $E$ 的上界, 因此存在 $t \in E$ 满足 $x < y < t$. 因此 $x$ 也是 $E$ 的上界, 因此 $x \in A$. 于是可知 $A$ 向下封闭.

(ii) 任取 $\alpha \in A$, 则 $\alpha$ 不是 $E$ 的上界. 于是存在 $x \in E$ 使得 $x > \alpha$. 由于 $E$ 中无最大元素, 故存在 $y \in E$ 使得 $y > x$. 因此 $x$ 也不是 $E$ 的上界, 因此 $x \in A$. 于是可知 $A$ 中无最大元素.

综上可知 $A \mid B$ 是一个 $\mathbb{R}$ 上的一个 Dedekind 分割. 由 Dedekind 定理可知 $B$ 中存在最小元素. 这表明 $E$ 存在上确界. ■

注 确界原理也称为**最小上界性** (Least-upper-bound property, LUB). 它是刻画实数域完备性的第 2 个定理.

**命题 2.2**

设非空集合 $E \in \mathbb{R}$. 令

$$-E := \{-x \mid x \in E\}.$$

(1) 若 $E$ 有上确界, 则 $-E$ 有下确界, 且 $\inf(-E) = -\sup E$.

(2) 若 $E$ 有下确界, 则 $-E$ 有上确界, 且 $\sup(-E) = -\inf E$.

**证明** 只证明 (1). 令 $M = \sup E$. 则对于任一 $x \in E$ 都有 $x \le M$, 且对于任一 $\varepsilon > 0$ 都存在 $x_\varepsilon \in E$ 使得 $x_\varepsilon > M - \varepsilon$. 于是对于任一 $-x \in -E$ 都有 $-x \ge -M$, 且对于任一 $\varepsilon > 0$ 都存在 $-x_\varepsilon \in -E$ 使得 $-x_\varepsilon < -M + \varepsilon$. 这表明 $\inf(-E) = -M$. ■

确界原理从另一个角度刻画了实数域的完备性. 我们已经用 Dedekind 定理证明了确界原理. 反过来确界原理也可以证明 Dedekind 定理.

**命题 2.3**

Dedekind 定理和确界原理是等价的.

**证明** 若确界原理成立. 设实数域 $\mathbb{R}$ 上的任一 Dedekind 分割 $A \mid B$. 容易知道 $A$ 中的任一元素都是 $B$ 的一个下界, 由确界原理可知 $B$ 存在下确界. 令 $m = \inf B$. 假设 $m \notin B$, 则 $m \in A$. 由于 $A$ 中无最大元素, 因此存在 $m' \in A$ 使得 $m < m'$. 由于 $m = \inf B$ 故 $m'$ 不是 $B$ 的下界. 因此 $m' \in B$. 这与 $m' \in A$ 矛盾, 因此假设不成立. 于是可知 $B$ 中存在最小值. 于是可知 Dedekind 定理成立. ■

### 2.2.3 Heine-Borel 定理

下面我们从几何的角度来看实数的完备性. 先来介绍几个概念.

**定义 2.7 (开覆盖)**

设集合 $E \subseteq \mathbb{R}$. 和一族开区间 $\{I_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$, 其中 $\Lambda$ 是一个指标集. 若

$$E \subseteq \bigcup_{\lambda \in \Lambda} I_\lambda.$$

则称 $\{I_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ 是 $E$ 的一个**开覆盖** (open cover), 记作 $C_E$. 若 $E$ 有一个开覆盖 $C'_E \subseteq C_E$, 则称 $C'_E$ 是 $C_E$ 的一个**子覆盖** (subcover). 若这个子覆盖只含有有限个开区间, 则称它是一个**有限子覆盖** (finite subcover).

**定理 2.4 (Heine-Borel 定理)**

有限闭区间的任一开覆盖都存在一个有限子覆盖.

**证明** 设有限闭区间 $[a, b]$, 任取它的一个开覆盖 $C$. 令

$$E = \{x \mid x \in (a, b], \text{ 且 } [a, x] \text{ 存在一个 } C \text{ 的有限子覆盖}\}.$$

由于 $C$ 是 $[a, b]$ 的一个开覆盖, 故一定存在开区间 $I_{\lambda_0} \in C$ 使得 $a \in I_{\lambda_0})$. 于是一定存在 $x_0 \in I_{\lambda_0}$ 满足 $x_0 > a$. 这表明 $E \neq \varnothing$. 显然 $b$ 是 $E$ 的一个上界. 由确界原理可知 $E$ 有上确界. 令 $M = \sup E$. 下面来证明 $M = b$.

用反证法. 假设 $M < b$, 则 $M \in [a, b]$. 由于 $C$ 是 $[a, b]$ 的一个开覆盖, 故存在开区间 $I_{\lambda_1} \in C$ 使得 $M \in I_{\lambda_1}$. 于是存在 $\delta > 0$ 使得 $(M - \delta, M + \delta) \subseteq I_{\lambda_1}$. 由于 $M$ 是 $E$ 的上确界, 因此 $M - \delta \in E$, 即 $[a, M - \delta]$ 存在 $C$ 的一个有限子覆盖 $C'$. 于是 $[a, M + \delta]$ 有一个 $C$ 的有限子覆盖 $C' \cup I_{\lambda_1}$. 因此 $M + \delta \in E$. 这与 $M$ 是 $E$ 的上确界矛盾. 因此假设不成立. 于是可知 $M = b$. 这就证明了 $[a, b]$ 存在一个 $C$ 的有限子覆盖. ■

**注** 如图 (2.2) 中的 $(a)$ 所示, 我们可以取出一个开区间盖住 $a$ 点, 于是一定会有 $x_0$ 点被盖住. 因此 $E$ 不会是空集.

如图 $(b)$ 所示, 我们从开覆盖 $C$ 中不断取出开区间间 $I_{\lambda_0}$ 盖在 $[a,b]$ 上. 这个过程会不断产生 $x_1,x_2,\cdots,x_n$. 它们总是不断向 $b$ 靠近的. 它们一定有上界, 由确界原理可以断言存在上确界 $M$.

如图 $(c)$ 所示假设定 $M<b$. 由于 $M$ 是 $[a,b]$ 中的点, 因此可以找到一个开区间 $I_{\lambda_1}$ 盖住 $M$. 于是一定会有一个 $M$ 附近的开区间 $(M-\delta,M+\delta)$ 也被 $I_{\lambda_1}$ 盖住. 于是 $E$ 中出现了超过 $M$ 的点.

如图 $(d)$ 所示, 以上讨论表明假设不成立. 最终 $E$ 会取到 $b$ 点, 这表明有限闭区间 $[a.b]$ 可以存在一个有限开覆盖.

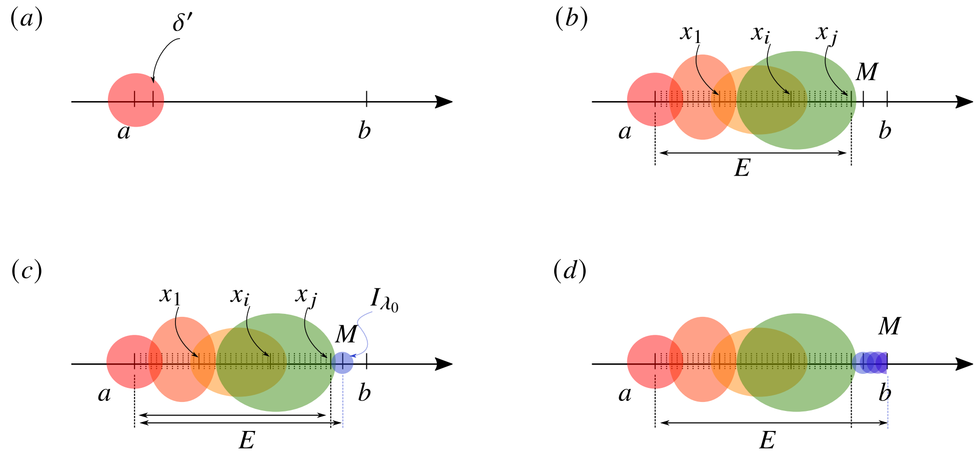



图 2.2: Heine-Borel 定理证明过程示意图.

注 以上定理也称为**有限覆盖定理** (finite cover theorem). 它是刻画实数域完备性的第 3 个定理. 法国数学家 Émile Borel 于 1895 年第一次陈述并证明了现代形式的 Heine-Borel 定理.

注 后面我们将用 Heine-Borel 条件定义集合的**紧致性** (compactness). Heine-Borel 定理告诉我们闭区间是**紧致的** (compact), 我们称它们为**紧致集** (compact set). 因此 Heine-Borel 定理也称为**紧致性定理**.“紧致集” 也可以称为 “紧集”, 其余类推. 这些拓扑概念我们将在后面详细介绍.

Heine-Borel 定理和确界原理也是等价的.

**命题 2.4**

Heine-Borel 定理和确界原理是等价的.

**证明** 若 Heine-Borel 定理成立.

于是可知确界原理成立. ■

于是我们就证明了 Dedekind 定理、确界原理、Heine-Borel 定理全部等价.

### 2.2.4 实数公理

现在我们来总结我们定义的实数集 $\mathbb{R}$ 所满足的性质. 首先, $\mathbb{R}$ 中定义了序关系, 它是一个全序关系, 且对加法和乘法运算满足保序性. 其次, $\mathbb{R}$ 中定义了两种运算: 加法和乘法, 它们满足域公理, 因此 $\mathbb{R}$ 是一个域. 最后 $\mathbb{R}$ 还具有完备性. 至此, 我们完成了实数集 $\mathbb{R}$ 的构造工作.

我们也可以用公理化的方法直接定义实数, 只需把我们总结的上述性质直接作为公理.

**公理 2.1 (实数公理)**

设非空集合 $\mathbb{R}$. 在 $\mathbb{R}$ 中有两个不同的元素 1 和 0. 在 $\mathbb{R}$ 上定义一种二元关系小于等于 $\leq$, 再定义两种二元运算加法 $+$ 和乘法 $\cdot$. 若满足以下公理:

(1) 序公理: $(\mathbb{R},+,\cdot,\leq)$ 成为一个全序集且与且对加法和乘法运算满足保序性, 即满足

I 自反性: $\alpha \le \alpha$ $(\forall \alpha \in \mathbb{R})$.

II 反对称性: 若 $\alpha \le \beta$ 且 $\beta \le \alpha$, 则 $\alpha = \beta$ $(\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R})$.

III 传递性: 若 $\alpha \le \beta$ 且 $\beta \le \gamma$, 则 $\alpha \le \gamma$ $(\forall \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R})$.

IV 完全性: $\alpha \le \beta$ 或 $\alpha \ge \beta$ $(\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R})$.

V 加法保序性: 若 $\alpha \le \beta$, 则 $\alpha + \gamma \le \beta + \gamma$ $(\forall \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R})$.

VI 乘法保序性: 若 $0 \le \alpha$ 且 $0 \le \beta$, 则 $0 \le \alpha \cdot \beta$ $(\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R})$.

(2) 域公理: $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ 成为一个域, 即满足

I 加法结合律: $(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$ $(\forall \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R})$.

II 加法交换律: $\alpha + \beta = \beta + \alpha$ $(\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R})$.

III 加法单位元: $\alpha + 0 = \alpha$ $(\forall \alpha \in \mathbb{R})$.

IV 加法逆元: 对于任一 $\alpha \in \mathbb{R}$ 都存在 $-\alpha \in \mathbb{R}$ 使得 $\alpha + (-\alpha) = 0$.

V 乘法结合律: $(\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma = \alpha \cdot (\beta \cdot \gamma)$ $(\forall \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R})$.

VI 乘法交换律: $\alpha \cdot \beta = \beta \cdot \alpha$ $(\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R})$.

VII 乘法单位元: $\alpha \cdot 1 = \alpha$ $(\forall \alpha \in \mathbb{R})$.

VIII 乘法逆元: 对于任一 $\alpha \in \mathbb{R}$ 都存在 $\alpha^{-1} \in \mathbb{R}$ 使得 $\alpha \cdot \alpha^{-1} = 1$.

IX 乘法对加法的分配律: $(\alpha + \beta) \cdot \gamma = \alpha \cdot \gamma + \beta \cdot \gamma$ $(\forall \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R})$.

(3) 完备性公理: $(\mathbb{R}, \le)$ 成为一个完备集, 即满足最小上界性.

则称 $\mathbb{R}$ 是一个实数集 (set of real numbers).

**注** 实数公理分成了三大块: 它们分别描述了实数集的 ‘‘序结构’’、‘‘代数结构’’ 和 ‘‘拓扑结构”. 这种公理化的方法是法国数学家团体 Nicolas Bourbaki 提出的. 他们试图用这个方法研究一切数学对象.

**注** 实数的完备性可以用 7 个等价的定理刻画. 本章已经介绍了其中 3 个. 下一章我们将引入数列极限的概念, 继续介绍另外 4 个.

**注** 用 ‘‘完备性’’ 来概括实数集的拓扑结构是十分 ‘‘粗糙的”. 事实上, 实数集具有非常好的拓扑性质. 今后我们将看到, 实数集上可以研究 ‘‘完备性’’、‘‘稠密性’’、‘‘紧致性’’、‘‘列紧性’’、‘‘连通性’’、‘‘可分性’’ 等丰富的拓扑性质.

# 2.3 集合的基数

## 2.3.1 集合的基数

现在我们来讨论一下自然数集 $\mathbb{N}$、整数集 $\mathbb{Z}$ 和有理数集 $\mathbb{Q}$ 的 "基数".

基数与序数相对. 对于一个有限集 $A$ 而言, 它所含元素的个数 $n$ 就是该集合的基数, 记作 $\operatorname{card} A = n$ 或 $|A| = n$. 我们约定 $\varnothing$ 的基数为 0. 容易知道两个基数相等的有限集之间一定可以建立一个双射.

对于一个无限集, 如果继续用 "所含元素个数" 来描述它的基数, 就不太合适了. 但我们仍可以用双射的角度描述集合的基数.

**定义 2.8 (集合的基数)**

设集合 $A, B$, 若存在一个 $A$ 到 $B$ 的双射, 则称 $A$ 和 $B$ 有相等的**基数** (cardinal number) 或**势** (cardinality). 此时称 $A$ 与 $B$ 等价, 记作 $A \sim B$.

♣

**注** 容易验证集合的 "$\sim$" 关系满足自反性、对称性和传递性, 因此它是一个等价关系.

需要注意, 这个定义中的集合可以是有限集, 也可以是无限集. 那么两个无限集的基数是可以比较的吗? 我们该如何比较两个无限集的基数呢? 这时候我们可以用建立双射的办法去比较.

**定义 2.9 (基数的比较)**

设集合 $A$ 和 $B$,$B_1 \subset B$.

1. 若 $A$ 和 $B$ 之间可以建立双射, 则称 $A$ 和 $B$ 的基数相等;
2. 若 $A$ 和 $B_1$ 之间可以建立双射, 则称 $A$ 的基数小于 $B$ 的基数, 或称 $B$ 的基数大于 $A$ 的基数.

♣

**定义 2.10 (有限集)**

设集合 $A$. 若 $A = \varnothing$, 或 $\exists n \in \mathbb{N}$, 使得集合 $\{1, 2, \dots, n\}$ 与 $A$ 的基数相同, 则称集合 $A$ 为**有限集** (finite set).

♣

**定理 2.5 (有限集的性质)**

设集合有限集 $A$ 及其真子集族 $\{A_\alpha : \alpha \in I\} : \forall \alpha \in I\, (A_\alpha \subset A)$, 且 $A = \bigcup\limits_{\alpha \in I} A_\alpha$. 则

1. $\forall \alpha \in I$, $A_\alpha$ 仍是有限集;
2. $\forall \alpha \in I$, $A_\alpha$ 的基数小于 $A$.

♡

**证明** 待证明.

**定理 2.6 (有限集的性质)**

设有限集族 $\{A_\alpha : \alpha \in I\} : \forall \alpha \in I$, $A_\alpha$ 都是有限集. 则 $\bigcup\limits_{\alpha \in I} A_\alpha$ 仍是有限集.

♡

**证明** 待证明.

试问: 自然数集 $\mathbb{N}$ 和整数集 $\mathbb{Z}$ 的基数是否相等. 由于 $\mathbb{N} \subsetneq \mathbb{Z}$, 因此从直觉上看自然数的总数应该比整数少. 但这个直觉是错的. 下面我们来证明这个命题.

**命题 2.5**

整数集 $\mathbb{Z}$ 和自然数集 $\mathbb{N}$ 是等价的.

♠

**证明** 把整数集中的所有元素排成一列

$$0,\ 1,\ -1,\ 2,\ -2,\ 3,\ -3,\ \cdots.$$

这样就可以建立一个 $\mathbb{N}$ 到 $\mathbb{Z}$ 的双射, 即

$$f(n)=\begin{cases}-\dfrac{n}{2}, & n\text{ 是一个偶数}\\[2mm] \dfrac{n+1}{2}, & n\text{ 是一个奇数}\end{cases}.$$

于是可知 $\mathbb{N}\sim\mathbb{Z}$.

### 2.3.2 可数集

于是引出了以下概念.

**定义 2.11 (可数集)**

设集合 $A$. 若 $\mathbb{N}\sim A$, 即存在一个 $\mathbb{N}$ 到 $A$ 的双射. 则称 $A$ 是**可数的** (countable), 或**可列的** (enumerable, denumerable). 这样的集合称为**可数集** (countable set), 或**可列集** (enumerable set). 否则称 $A$ 是**不可数的** (uncountable), 不可数的集合称为**不可数集** .(uncountable set). 可数集的基数记作 $\aleph_0$.

注 若集合 $A$ 是**有限的** (finite) 或可数的, 则称为**至多可数集** (at most countable).
注 $\aleph$ 是 Hebrew 字母, 读作 “aleph”.
注 由于集合是可数的当且仅当等价于 $\mathbb{N}$, 因此集合是可数的当且仅当它的所有元素可以排成一个序列.

$\mathbb{N}$ 是可数集 $\mathbb{Z}$ 的一个无限子集, 这启发我们想到以下结论.

**定理 2.7 (可数集的无限子集)**

可数集的任一无限子集都是可数集.

**证明** 设可数集 $A$, 任取一个无限集 $E\subseteq A$. 把 $A$ 中的所有元素排成一列得到序列 $\{x_n\}$. 下面来构造一个序列 $\{x_{n_k}\}$. 设 $n_0$ 是满足 $x_{n_0}\in E$ 的最小自然数. 当选定 $n_1,n_2,\cdots,n_{k-1}$ 后, 令 $n_k$ 是大于 $n_{k-1}$ 且满足 $x_{n_k}\in E$ 的最小自然数. 这样我们就得到了序列 $\{x_{n_k}\}$. 由第二数学归纳原理可知 $\{x_{n_k}\}$ 的所有元素组成的集合就是 $E$. 令

$$\begin{aligned}\sigma:\mathbb{N}&\to E\\ k&\mapsto x_{n_k}.\end{aligned}$$

容易验证 $\sigma$ 是一个双射. 因此 $\mathbb{N}\sim E$. 于是可知 $A$ 的任一无限子集都是可数的.

注 以上命题的逆否命题为: 若集合 $A$ 存在一个不可数集的子集, 则 $A$ 不可数.

**推论 2.1 (可数集的子集)**

可数集的任一子集都是至多可数的.

**证明** 证明略.

**推论 2.2 (可数集的商集)**

可数集的任一商集都是至多可数的.

**证明** 证明略.

**命题 2.6 (可数集的可数并)**

设可数集 $C_1,C_2,\cdots,C_n$. 则集合 $C=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}C_n$ 仍是可数的.

**证明** 由于 $C_1, C_2, \cdots, C_n$ 是可数的, 故可令 $C_n$ 中的元素排成一个序列 $\{x_{nk}\}$ $(k = 1, 2, \cdots)$. 作一个无限矩阵

$$\boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} & \cdots \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & \cdots \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}.$$

按箭头方向依次取 $\boldsymbol{C}$ 中的元素, 则可得到一个包含 $C$ 中的所有元素的序列

$$x_{11};\quad x_{21}, x_{12};\quad x_{31}, x_{22}, x_{13};\quad x_{41}, x_{32}, x_{23}, x_{14}\quad \cdots.$$

这个序列中可能会有重复的元素. 因此一定存在集合 $Z \subseteq \mathbb{Z}$ 满足 $Z \sim C$. 由于 $C_1 \subseteq C$ 且 $C_1$ 是一个无限集, 故 $C$ 也是一个无限集. 由定理 (2.7) 可知 $C$ 是可数的.

**推论 2.3**

设一个至多可数的指标集 $I$. 若对于任意 $\alpha \in I$, 集合 $C_\alpha$ 都是至多可数的, 则集合 $C = \bigcup\limits_{\alpha \in I} C_\alpha$ 仍是至多可数的.

**证明** 证明略.

**命题 2.7 (可数集的 Cartesian 积)**

设可数集 $C_1, C_2, \cdots, C_n$. 则集合 $C = C_1 \times C_2 \times \cdots \times C_n$ 仍是可数的.

**证明** 由于 $C_1, C_2, \cdots, C_n$ 都是可数的, 因此容易验证 $C = C_1 \times C_2 \times \cdots \times C_n \sim \mathbb{N}^n$. 下面来证明 $\mathbb{N}^n$ 是可数的. 取两两不同的素数 $p_1, p_2, \cdots, p_n$. 令

$$\sigma : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N},$$
$$(k_1, k_2, \cdots, k_n) \mapsto p_1^{k_1} p_2^{k_2} \cdots p_n^{k_n}.$$

由唯一因数分解定理 (证明见《初等数论》) 可知

$$p_1^{k_1} p_2^{k_2} \cdots p_n^{k_n} = p_1^{l_1} p_2^{l_2} \cdots p_n^{l_n} \iff (k_1, k_2, \cdots, k_n) = (l_1, l_2, \cdots, l_n).$$

因此 $\sigma$ 是 $\mathbb{N}^n$ 到 $\mathbb{N}$ 的一个单射. 令 $N = \sigma(\mathbb{N}^n)$, 则 $\sigma$ 是 $\mathbb{N}^n$ 到 $N$ 的一个双射, 故 $\mathbb{N}^n \sim N$. 显然 $N \subseteq \mathbb{N}$. 由于 $\mathbb{N}^n$ 是一个无限集, 由定理 (2.7) 可知 $\mathbb{N}^n$ 是可数的.

**注** 以上命题也可用数学归纳法证明.

事实上无限集的最小基数就是 $\aleph_0$.

**定理 2.8 (无限集的最小基数)**

任一无限集都存在一个可数的子集.

**证明** 设无限集 $E$. 下面从 $E$ 中取一列元素. 任取 $a_1 \in E$. 假设已经从 $E$ 中取出 $a_2, \cdots, a_n$. 由于 $E$ 是一个无限集, 故 $E \backslash \{a_1, a_2, \cdots, a_n\} \neq \varnothing$. 于是可以继续取出 $a_{n+1} \in E$. 由第二数学归纳原理可知可以取出一个序列

$$a_1, a_2, \cdots, a_n, a_{n+1}, \cdots.$$

于是可知 $E$ 存在一个可数的子集 $\{a_1, a_2, \cdots, a_n, a_{n+1}, \cdots\}$.

**注** 以上定理表明无限集的最小基数是 $\aleph_0$.

**命题 2.8**

设无限集 $A$. 若 $\operatorname{card} A = \alpha$, 且集合 $B$ 是至多可数的, 则 $\operatorname{card} A \cup B = \alpha$.

**证明** 只证明 $B$ 是可数集的情况. 设 $B = \{b_1, b_2, \cdots\}$. 不妨设 $A \cap B = \varnothing$. 由定理 (2.8) 可知 $A$ 中可以取出一个可数

集 $A_1 = \{a_1, a_2, \cdots\}$. 令 $A_2 = A \backslash A_1$. 下面构造一个映射 $f$ 使得

$$f(a_i) = a_{2i}, \quad i = 1, 2, \cdots,$$
$$f(b_i) = a_{2i-1}, \quad i = 1, 2, \cdots,$$
$$f(x) = x, \quad \forall x \in A_2.$$

容易验证 $f$ 是 $A \cup B$ 到 $A$ 的一个双射. 于是可知 $\operatorname{card} A \cup B \sim \alpha$, 即 $\operatorname{card} A \cup B = \alpha$.

注 以上命题表明, 任意无限集加入至多可数个元素, 都不会改变基数.

我们可以用可数集的观点来描述无限集.

我们可以用可数集的观点来描述无限集.

**定理 2.9**

设集合 $A$. 则 $A$ 是一个无限集当且仅当存在 $B \subsetneq A$ 满足 $B \sim A$.

证明 (i) 证明充分性. 若 $A$ 是一个有限集, 则 $A$ 的任一真子集的基数都小于 $A$, 故不存在 $B \subsetneq A$ 满足 $B \sim A$. 因此充分性成立.

(ii) 证明必要性. 若 $A$ 是一个无限集. 设 $x \in A$, 令 $B = A \backslash \{x\}$, 则 $B \neq \varnothing$. 由命题 (2.8) 可知 $B \sim B \cup \{x\} = A$.

有了以上准备工作, 我们可以来看有理数集的基数了. 有理数域 $\mathbb{Q}$ 具有稠密性, 而整数环没有稠密性, 这会让人产生有理数域的基数大于整数环的错觉.

**定理 2.10**

有理数域 $\mathbb{Q}$ 是一个可数集.

证明 由于整数环 $\mathbb{Z}$ 是可数的, 故 $\mathbb{Z}^*$ 也是可数的. 由命题 (**??**) 可知 $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ 仍是可数的. 由于有理数域 $\mathbb{Q}$ 是 $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ 的一个商集, 由推论 (2.2) 可知 $\mathbb{Q}$ 是至多可数的. 由于 $\mathbb{Q}$ 是无限集, 于是可知 $\mathbb{Q}$ 是一是可数集.

### 2.3.3 不可数集

以上结论表明有理数集虽然具有 "稠密性", 但依旧是 "离散的". 经过以上讨论, 我们目前遇到的集合似乎都是可数的. 下面给出一个不可数集的例子.

**例 2.3** 设集合

$$A = \{(x_1, x_2, \cdots) \mid x_i \in \{0, 1\},\ i = 1, 2, \cdots\}.$$

则 $A$ 是不可数的.

证明 任取 $A$ 的一个可数集 $\widetilde{A} = \{\{x_{1n}\}, \{x_{2n}\}, \cdots\}$, 其中 $\{x_{1n}\}, \{x_{2n}\}, \cdots$ 都是只由 0 和 1 组成的序列. 作一个无限矩阵

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} & \cdots \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & \cdots \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

取 $\boldsymbol{A}$ 的主对角线组成序列 $\{x_{nn}\}$. 令序列 $\{x_{nn}\}$ 中的 1 全部变为 0, 而 0 全部变成 1, 得到序列 $\{\widetilde{s_{nn}}\}$. 容易知道 $\{\widetilde{s_{nn}}\}$ 与 $\boldsymbol{A}$ 中的任一序列都不相同, 因此 $\{\widetilde{s_{nn}}\} \notin \widetilde{A}$, 但 $\{\widetilde{s_{nn}}\} \in A$. 因此 $\widetilde{A} \subsetneq A$. 这表明 $A$ 的任一可数集都是它的真子集. 这表明 $A$ 是不可数的.

注 以上证明方法是德国数学家 Cantor 首先使用的, 称为**对角线法** (diagonal process).

**注** 上例暗示一个重要事实: 实数集是不可数的! 这是因为我们可以把实数看成所有二进制无限小数组成的集合, 而上例中的集合 $A$ 可以看作全体小于 1 的二进制无限小数, 因此它包含于实数集. 这样实数集中就存在不可数的子集. 故可断定实数集不可数.

实数的连续性命题揭示了从有理数到实数发生了质变 (从自然数, 整数, 有理数, 实数到复数的过程中, 质变只发生了这一次), 这就导致了实数曾经长期成为了分析学严格化过程中的巨大障碍, 同时也成为了分析学的重要基石. 为了揭示这个 "质变", 我们引入可数集和不可数集的概念.

**定理 2.11**

实数集 $\mathbb{R}$ 为不可数集.

**证明** XXX

**推论 2.4**

无理数集是不可数集.

**证明** XXX

**命题 2.9 (无限集的等基数真子集)**

任意无限集都存在与自身基数相等的真子集.

**证明** 待证明.

容易发现以上性质是有限集和无限集的分水岭. 即, 有限集不可能存在与自身基数相同的真子集. 有限集的这个性质在介绍了自然数公理后, 我们将给出严格的证明.

### 2.3.4 不可数集与连续统

**连续统** (continuum)

用概率论的语言说就是在数轴上随机选一点恰好选到有理数的概率为零

**连续统的势** (the continuum) 称为**连续基数** () 是实数集合 $\aleph_1$ 康托尔说明连续统的势大于自然数集

实数域是**连续的** (continuous).

**定理 2.12 (无最大基数定理)**

设非空集合 $A$, 则 $A$ 与它的幂集 $\mathcal{P}(A)$ 一定不等价.

**证明**

**注** 以上定理表明不存在最大的基数.

自然数集是基数最小的无限集记作阿列夫 0 实数集的基数记作阿列夫 1 然后就很自然地提出了一个问题 1874 年康托尔猜测不存在基数介于自然数和实数之间的集合. 这就是著名的**连续统假设** (continuum hypothesis).

它又被称为希尔伯特第一问题，在 1900 年第二届国际数学家大会上，大卫 · 希尔伯特把康托尔的连续统假设列入 20 世纪有待解决的 23 个重要数学问题之首。1938 年哥德尔证明了连续统假设和世界公认的 ZFC 公理系统不矛盾。1963 年美国数学家保罗 · 寇恩证明连续假设和 ZFC 公理系统是彼此独立的。因此，连续统假设不能在 ZFC 公理系统内证明其正确性与否。

自然数集的幂集的基数恰好等于实数集的基数

实数域上有一些特殊的子集, 称为 "区间".

**定义 2.12 (区间)**

设 $a, b \in \mathbb{R}$. 令

$$[a,b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}.$$

$$(a,b) := \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}.$$

$$[a,b) := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\};$$

$$(a,b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}.$$

我们把以上几种类型的集合称为**区间** (interval). 其中形如 $[a,b]$ 的集合称为**闭区间** (closed interval), 形如 $(a,b)$ 的集合称为**开区间** (open interval), 形如 $[a,b)$ 或 $(a,b]$ 的集合称为**半开半闭区间** . ♣

## 2.4 实数的十进制表示

通过以上努力，我们得到了抽象的自然数的公理化定义，以及加法乘法乘方阶乘运算以及它们的一系列性质. 我们发现在定义它们的过程中并没有用到我们熟悉的十进制数. 这是因为十进制系统并不是自然数 (以及整数，有理数等) 的本质，也不是加法乘法运算的本质，但由于历史的原因和十进制系统方便计算的特定，在大多数情况下我们用它来表示数. 下面我们来定义用十进制系统表示的自然数.

**定义 2.13 (十进制自然数)**

设集合 $A = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$, $\{a_n : \forall n \in \mathbb{N}\,(a_n \in A)\}$. 则数字串

$$a_n a_{n-1} \cdots a_0 := \sum_{i=0}^{n} \left(a_i \cdot S(9)^i\right) \, (a_n \neq 0)$$

用十个数字组成的数字串表示的数称为**十进制数** (decimal number). ♣

根据以上定义，任意一个十进制数都可以表示一个自然数. 那么任意一个自然数是否都可以表示为一个十进制数呢？换句话说，我们最关心的是，自然数集和十进制数集能否建立双射. 如果能，那我们才能安心地用十进制数来表示自然数.

**定理 2.13 (十进制数的存在性与唯一性)**

十进制数集自然数集一一对应. ♡

**证明**

# 第 3 章 用数列研究实数的完备性

内容提要

- 在上一章我们从自然数公理出发逐步构建了实数域. 并且研究了一些实数的性质. 我们已经知道实数域是连续的. 这是数学分析的重点研究课题之一. 由于实数域是不可数的, 因此我们可以从中选取一列实数, 把不可数的问题转变为可数的问题来研究. 这就是用 “实数序列” 研究实数连续性的基本想法.
- 本章我们将探索实数序列的性质: 包括单调数列收敛定理, Cauchy 收敛原理等, 这些性质实际上从不同角度阐明实数的完备性. 最后我们会回顾上一章讲到的 Dedekind 分割, 确界原理和本章的定理总结实数的完备性.

## 3.1 数列极限的概念和性质

### 3.1.1 数列的极限

设非空集合 $A$, 选取 $A$ 中元素的排成一列, 就得到了一个序列 (允许出现重复元素). 我们可以用映射的观点来定义序列.

**定义 3.1 (序列)**

从自然数集 $\mathbb{N}$ 到任意非空集合 $A$ 的一个映射称为 $A$ 中元素的一个**序列** (sequence). 若 $A$ 是一个数集, 则称该序列为**数项序列**, 简称**数列**. 特别地, 从自然数集 $\mathbb{N}$ 到实数集 $\mathbb{R}$ 的一个映射称为**实数序列**, 记作 $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ 或 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. 也可以列举出它的若干项:

$$a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots.$$

$a_n = f(n)$ $(n = 1, 2, \cdots)$ 称为数列的**通项公式** (general term formula). ♣

注 $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ 经常简记作 $\{a_n\}$. 把数列记成 $\{a_n\}$ 时, 是把数列看作一个集合, 显然它们都是无限集. 把数列记成 $a_n$ $(n = 1, 2, \cdots)$, 是把数列看作一个函数.

注 $A$ 中的元素是没有限定的. 如果 $A$ 中的元素是函数, 那么构成的序列就是**函数项序列** (sequence of functions).

生活中不乏数列的例子. 假设在某氪金手游抽到 SSR 的概率为 1%, 则抽一发抽不到的概率为 99/100, 两发抽不到的概率为 $(99/100)^2$... 依此类推, 我们可以得到一个 “抽不到 SSR 概率” $P(n)$ 关于 “抽卡次数” $n$ 的数列 $\{P_n\}$.

$$P_n = P(n) = \left(\frac{99}{100}\right)^n, \quad n = 1, 2, \cdots.$$

直观来看, 只要氪金足够多 ($n$ 趋向无穷大时), $(99/100)^n$ 会趋向于零. 这个时候, 我们称这个数列 “极限” 为零. 那么玩家的这个 “直观感受” 是否符合数学真相呢? 是否有可能它只是 “接近” 一个很小但不为 0 的数? 另外, 我们该如何定义 “接近”?

我们来看一个更简单的例子. 设数列

$$a_n = \frac{1}{n}, \quad n = 1, 2, \cdots.$$

虽然我们也能很轻易地看出这个数列也趋向于 0. 现在我们需要一种精确的数学语言来描述数列趋向于某个实数的事实.

**定义 3.2 (数列的极限)**

设数列 $\{a_n\}$. 若对于任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $N \in \mathbb{N}^*$, 使得当 $n > N$ 时总有

$$|a_n - a| < \varepsilon,$$

其中 $a \in \mathbb{R}$. 则称数列 $\{a_n\}$ **收敛** (convergent) 于 $a$, 或称 $\{a_n\}$ 的**极限** (limit) 为 $a$, 记作

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \quad 或 \quad a_n \to a\ (n \to \infty).$$

否则, 称该数列**发散** (divergent). ♣

**注** 以上定义中, $n \to \infty$ 称为极限过程. 数列的极限过程只有这一种, 因此有时候在数列极限的记号中可以把这部分省略, 记作 $\lim a_n$.

**注** 以上定义称为 "$\varepsilon - N$" 定义. 虽然极限的思想在古希腊就已经产生, 这个想法是 1817 由 Bolzano 第一个引入的. 法国数学家 Cauchy 进一步完善了这个方法. 我们现在使用的极限定义是德国数学家 Weierstrass 在 1861 年给出的.

**注** 定义中的正数 $\varepsilon$ 是任意给定的. 但这个 "任意" 指的是 "任意小", 因此也可以改为 "任一小于某个正数的正数 $\varepsilon$" .

**注** 定义中的 $N$ 是依赖于 $\varepsilon$ 而确定的——-也就是说, 给定一个 $\varepsilon$, 能找到一个 $N$ 就可以了, 并不要求找到一个固定的 $N$ 满足任意 $\varepsilon$. 所以 $N$ 经常写成 $N(\varepsilon)$, 或 $N_\varepsilon$, 但这并不表示 $N$ 是 $\varepsilon$ 的函数. 一般来说给定的 $\varepsilon$ 越小, $N$ 就需要取的越大.

**注** "存在 $N \in \mathbb{N}^*$ 使得当 $n > N$ 时" 经常说成 "当 $n$ 充分大" .

**注** 我们注意到数列的极限和前面的有限项无关, 即去掉、增加或改变前面的有限项都不会改变数列的敛散性和极限值. 因此很多时候我们只需考虑 $n$ 充分大时的情况.

**注** 为了证明某些数列不收敛. 我们经常需要把数列收敛的定义的否定形式 (根据 de Morgan 对偶原理). 对于任一 $a \in \mathbb{R}$ 都有 $\lim_{n\to\infty} a_n \neq a$ 当且仅当

$$\forall a \in \mathbb{R},\ \exists \varepsilon > 0,\ \forall N \in \mathbb{N}^*,\ \exists n \geq N,\ |a_n - a| \geq \varepsilon.$$

现在我们可以回过头来用极限的定义来检验开头提出的数列是否收敛于 0.

**例 3.1** 证明: $\lim_{n\to\infty}(1/n) = 0$.

**解** 对于任意的给定的 $\varepsilon > 0$, 要使

$$\left|\frac{1}{n} - 0\right| = \left|\frac{1}{n}\right| < \varepsilon. \tag{3.1}$$

只需满足 $n > \varepsilon^{-1}$. 因此我们取 $N = \left[\varepsilon^{-1}\right] + 1$, 其中 $[\quad]$ 是下取整函数. 那么当 $n > N$ 时就可以满足不等式 (3.1). 由极限的定义可知 $\lim_{n\to\infty}(1/n) = 0$.

**注** 在利用数列极限的定义证明 $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ 时, 我们可以从 $|a_n - a| < \varepsilon$ 中反解出 $n$ 的取值范围.

**例 3.2** 设数列

$$a_1 = 0.9, \quad a_2 = 0.99, \quad a_3 = 0.999, \quad \cdots \quad a_n = 0.\underbrace{99\cdots9}_{n\text{ 个}}, \quad \cdots.$$

求证: $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$.

**证明** 由于

$$|0.\underbrace{99\cdots9}_{n\text{ 个}} - 1| = 10^{-n}.$$

因此对于任一 $\varepsilon > 0$. 若要 $10^{-n} < \varepsilon$, 只需 $n > -\lg \varepsilon$. 因此可取 $N = [-\lg \varepsilon]$, 则当 $n > N$ 时

$$|0.\underbrace{99\cdots9}_{n\text{ 个}} - 1| < \varepsilon.$$

于是就证明了 $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$. ■

**注** 以上例题表明循环小数 $0.\dot{9}$ 就等于 1, 为了让十进制小数与实数一一对应, 所以一般规定不使用末尾出现 9 循环的情况.

常值数列的极限是显然的. 我们也来用定义证明一下.

**例 3.3** 设序列 $\{a_n\}$. 若对于任意 $n \in \mathbb{N}^*$ 都有 $a_n = C$, 则 $\lim_{n\to\infty} a_n = C$.

**证明** 对于任一 $\varepsilon > 0$. 由于 $a_n = C\ (n = 1, 2, \cdots)$, 故

$$|a_n - C| = |C - C| = 0 < \varepsilon, \quad n = 1, 2, \cdots.$$

于是可知 $\lim_{n\to\infty} a_n = C$. ■

## 3.1.2 邻域

为了进一步理解数列极限的概念, 我们可以利用数轴考察数列收敛的几何意义. 设数列 $\{a_n\}$. 若 $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, 则对于任一 $\varepsilon > 0$ (无论它多么小), $\{a_n\}$ 从第 $N$ 项以后的各项都会落在以 $a$ 为中心的一个开区间 $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ 中. 于是我们可以引入以下概念.

**定义 3.3 (邻域)**

给定 $a \in \mathbb{R}$. 令

$$N_r(a) := \{x \in \mathbb{R} \mid |x - a| < r\} = (a - r, a + r).$$

其中 $r$ 是任一正实数. 我们把 $N_r(a)$ 称为以 $a$ 为中心, $r$ 为半径的**邻域** (neighborhood). 在不强调半径的情况下 $N_r(a)$ 可以简记作 $N(a)$.

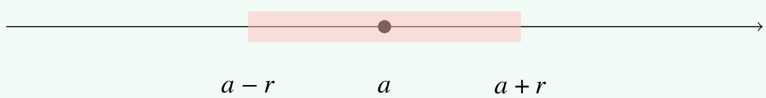



图 3.1: 以 $a$ 为中心 $r$ 为半径的邻域

♣

**注** 容易看出在实数域 $\mathbb{R}$ 中

$$x \in N_r(a) \iff |x - a| < r \iff -r < x - a < r \iff a - r < x < a + r \iff x \in (a - r, a + r).$$

因此 $N_r(a) = (a - r, a + r)$. 但我们没有直接用开区间去定义邻域. 而是使用距离来定义邻域. 我们后面将看到, 这样做的原因.

**注** 容易验证, 若 $\varepsilon_1 \le \varepsilon_2$, 则 $N_{\varepsilon_1}(a) \subseteq N_{\varepsilon_2}(a)$.

邻域是分析学中一个常用的概念. 今后我们将看到, 使用邻域来描述 "局部性质" 是十分便利的. 于是我们可以用邻域的观点来叙述数列极限的定义. 设数列 $\{a_n\}$. 若对于任一 $\varepsilon > 0$, 当 $n$ 充分大时, 存在一个 $a$ 的邻域 $N_\varepsilon(a)$ 使得 $\{a_n\}$ 的各项都落在 $N_\varepsilon(a)$ 内.

**命题 3.1**

设数列 $\{a_n\}$. 则 $\{a_n\}$ 收敛于 $a \in \mathbb{R}$ 当且仅当 $a$ 的任一邻域 $N(a)$ 之外都只有 $\{a_n\}$ 的有限项.

♠

**证明** 必要性显然成立. 任取 $\varepsilon > 0$, 则邻域 $N_\varepsilon(a)$ 外只有 $\{a_n\}$ 的有限项. 设这有限项中下标最大的一项为 $a_N$. 则当 $n > N$ 时 $a_n \in N_\varepsilon(a)$. 于是可知 $\lim_{n\to\infty} a_n = a$. ■

**注** 需要注意, 若 $a$ 的任一邻域 $N(a)$ 内都有 $\{a_n\}$ 的无穷多项, 不能推出 $\{a_n\}$ 收敛. 举例说明. 设数列 $a_n = (-1)^n$ $(n = 1, 2, \cdots)$. 所以 1 的任一邻域和 $-1$ 的任一邻域中都有 $\{a_n\}$ 的无穷多项. 但 $\{a_n\}$ 不收敛. 后面我们将看到 1 和 $-1$ 都是 $\{a_n\}$ 的 "极限点".

邻域是一个几何概念 (后面会看到它更是一个拓扑概念), 因此从邻域的角度思考, 可以使得问题更直观. 极限是一个 "无限" 的概念. 以上命题使得我们可以把 "无限" 的问题转化为 "有限" 的问题来解决. 这就是引入邻域概念的好处. 下面我看一个例子.

**命题 3.2 (极限的唯一性)**

收敛数列的极限值是唯一的.

**证明** 设收敛数列 $\{a_n\}$. 假设 $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim_{n\to\infty} a_n = b$, 且 $a \neq b$. 令 $r$ 满足

$$0 < 2r < |a-b|.$$

考虑邻域 $N_r(a)$ 和 $N_r(b)$. 任取 $x \in N_r(a)$, 则

$$|x-a| < r < \frac{1}{2}|a-b| = \frac{1}{2}|(a-x)+(x-b)| \leq \frac{1}{2}|x-a| + \frac{1}{2}|x-b| \Longrightarrow |x-b| > 2r - |x-a| > r.$$

因此 $x \notin N_r(b)$. 故 $N_r(a) \cap N_r(b) = \varnothing$. 由于 $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim_{n\to\infty} a_n = b$. 因此 $N_r(a)$ 之外只有 $\{a_n\}$ 的有限项, 而 $N_r(b)$ 内有 $\{a_n\}$ 的无穷多项, 产生矛盾, 故假设不成立, 于是可知 $a = b$. ■

**注** 由于极限的唯一性, 当等式两边都收敛时可以对等式两边取极限. 可以结合下方图3.2进行理解.

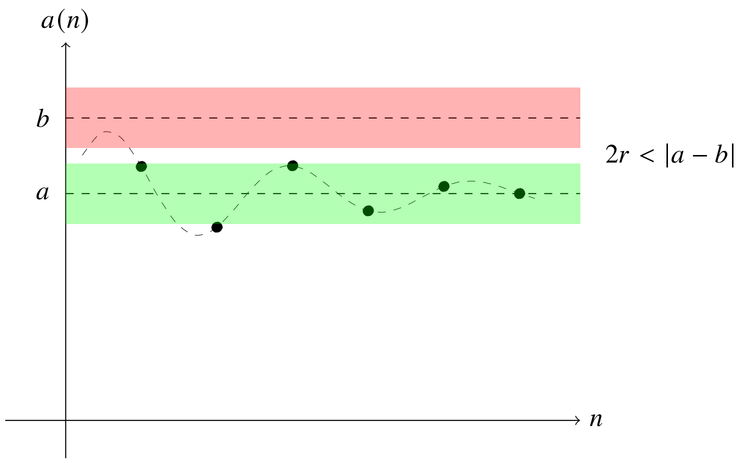



**图 3.2:** $a_n$ 只能" 有限脱离"$N_r(a)$, 而不可能同时" 有限脱离" 两个中心点不同的邻域.

由以上命题容易想到收敛数列总是 "有界的".

**定义 3.4 (有界数列)**

设数列 $\{a_n\}$. 若存在 $M > 0$ 对于任一 $n \in \mathbb{N}^*$ 都有 $|a_n| < M$. 则称 $\{a_n\}$ 是**有界的** (bounded).

(1) 若存在 $M \in \mathbb{R}$, 使得对于任一 $n \in \mathbb{N}^*$, 都有 $a_n < M$, 则称数列 $\{a_n\}$ 有上界, $M$ 是它的一个**上界** (upper bound). 其最小的上界称为**上确界** (supremum), 记作: $\sup_{n\geq 1} a_n$ 或 $\sup\{a_n\}$.

(2) 若存在 $m \in \mathbb{R}$, 使得对于任一 $n \in \mathbb{N}^*$, 都有 $a_n > m$, 则称数列 $\{a_n\}$ 有下界, $m$ 是它的一个**下界** (lower bound), 其最大的下界称为**下确界** (infimum), 记作: $\inf_{n\geq 1} a_n$ 或 $\inf\{a_n\}$.

**注** 确界原理确保了有上界的数列一定有上确界, 有下界的数列一定有下确界.

有界数列也可以用几何语言描述.

**命题 3.3**

设数列 $\{a_n\}$.

(1) $\{a_n\}$ 有上界当且仅当存在 $E>0$ 使得开区间 $(E,+\infty)$ 内只有 $\{a_n\}$ 中的有限项.

(2) $\{a_n\}$ 有下界当且仅当存在 $E>0$ 使得开区间 $(-\infty,-E)$ 内只有 $\{a_n\}$ 中的有限项.

**证明** 只证明 (1). 必要性显然成立. 若存在 $E>0$ 使得开区间 $(E,+\infty)$ 内至多有 $\{a_n\}$ 中的有限项. 找出这些项中最大的一项, 令 $M$ 大于这一项, 则对于任一 $n\in\mathbb{N}^*$, 都有 $a_n\le M$. 因此 $\{a_n\}$ 无上界.

**命题 3.4**

收敛数列必有界.

**证明** 不妨取 $\varepsilon=1$, 因为 $(a_n)$ 极限存在, 根据定义3.2, 我们必定能找到这么一个正整数 $N$, 使得

$$\forall n>N\colon\ a-1<a_n<a+1.$$

换言之, 对于数列 $(a_n)$ 在 $N$ 后面的所有项都可以囊括在区间 $(x-1,x+1)$ 内

$$\forall n>N\colon\ a_n\in(a-1,a+1).$$

将这个区间和前面有限个点并起来形成一个大集合, 能够囊括整个数列 $(a_n)$ 的所有项:

$$\forall n>N\colon\ a_n\in(a-1,a+1)\cup\left(\bigcup_{i=1}^{N}\{a_i\}\right).$$

因此, 我们只需要令

$$M_+=\max\left((a-1,a+1)\cup\left(\bigcup_{i=1}^{N}\{a_i\}\right)\right)$$

$$M_-=\min\left((a-1,a+1)\cup\left(\bigcup_{i=1}^{N}\{a_i\}\right)\right),$$

再令 $M=\max(|M_+|,|M_-|)$, 就可以满足上述命题了. ■

**注** 以上命题的逆命题不正确. 例如数列 $a_n=(-1)^n$ 有界, 但不收敛.

根据以上命题, 若能证明数列无界, 就可以断言它不收敛. 我们看一个重要的例子.

**例 3.4** 数列 $a_n=1+1/2+1/3+\cdots+1/n\ (n=1,2,\cdots)$ 发散.

**证明** 对于任一意 $N\in\mathbb{N}^*$, 只要取 $n=2^{2N}$ 就有

$$\begin{aligned}
a_{2^{2N}}&=1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2^{2N-1}+1}+\cdots+\frac{1}{2^{2N}}\right)\\
&>1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\right)+\cdots+\left(\underbrace{\frac{1}{2^{2N}}+\cdots+\frac{1}{2^{2N}}}_{2^{2N}\text{ 个}}\right)\\
&=1+\frac{1}{2}+2\cdot\frac{1}{4}+4\cdot\frac{1}{8}+\cdots+2^{2N-1}\cdot\frac{1}{2^{2N}}>\underbrace{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2}}_{2N\text{ 项}}=N.
\end{aligned}$$

由于 $a_{n+1}-a_n=1/(n+1)>0$, 故 $a_{n+1}>a_n\ (n=1,2,\cdots)$. 因此当 $n\le 2^{2N}$ 时 $a_n>N$. 于是可知 $\{a_n\}$ 无界, 因此它是发散的. ■

**注** 以上数列称为**调和级数** (harmonic series), 后面我们会进一步讨论它.

有界数列有以下简单性质.

**命题 3.5 (有界数列的简单性质)**

设有界数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$. 则 $\{a_n+b_n\}$ 和 $\{a_nb_n\}$ 都是有界数列.

**证明** 由于 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 是有界数列. 故存在正实数 $M$ 和 $N$ 满足

$$|a_n| < M, \quad |b_n| < N, \quad n = 1, 2, \cdots.$$

因此

$$|a_n + b_n| \le |a_n| + |b_n| < M + N, \quad n = 1, 2, \cdots.$$

$$|a_n b_n| = |a_n||b_n| < MN, \quad n = 1, 2, \cdots.$$

于是可知 $\{a_n+b_n\}$ 和 $\{a_nb_n\}$ 都是有界的. ■

**注** 用数学归纳法可以将以上结论推广到有限个数列的情况.

**注** 设 $c \in \mathbb{R}$, 则 $ca_n$ 也是有界的.

### 3.1.3 极限的运算和不等式

如果仅仅是利用性质去求数列的极限的话, 能做的事情非常有限, 效率也不尽如人意, 因此我们需要探索和利用数列极限的更多性质, 反过来也能利用这些性质加速其他数列极限的探索.

**定理 3.1 (数列极限的运算)**

设数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$. 若 $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim_{n\to\infty} b_n = b$ $(a, b \in \mathbb{R})$, 则

(1) $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n \pm b_n) = a \pm b$.

(2) $\lim\limits_{n\to\infty} ca_n = ca, \quad c \in \mathbb{R}$.

(3) $\lim\limits_{n\to\infty} a_nb_n = ab$.

(4) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{a}{b}, \quad b_n \ne 0,\ n = 1, 2, \cdots.\ b \ne 0$.

(5) $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = |a|$.

**证明**

(1) 由于 $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim_{n\to\infty} b_n = b$, 故对于任一 $\varepsilon > 0$ 存在 $N_1, N_2 \in \mathbb{N}^*$ 使得当 $n > N_1$ 时 $|a_n - a| < \varepsilon/2$, 当 $n > N_2$ 时 $|b_n - b| < \varepsilon/2$. 令 $N = \max\{N_1, N_2\}$. 则当 $n > N$ 时有

$$|(a_n \pm b_n) - (a \pm b)| = |(a_n - a) \pm (b_n - b)| \le |a_n - a| + |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

于是可知 $\lim_{n\to\infty} (a_n \pm b_n) = a \pm b$. ■

(2) 本命题需要分情况讨论:

- 当 $c = 0$ 时, 命题显然成立, 因为 $\lim_{n\to\infty} 0 = 0$.
- 当 $c \ne 0$ 时, 对任意的 $\varepsilon/|c| > 0$, 都存在 $N \in \mathbb{N}$, 使得

$$\forall n > N\colon |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{|c|}.$$

上述不等式两边同时乘以 $|c|$ 可得:

$$|c||a_n - a| = |ca_n - ca| < \varepsilon.$$

所以命题成立. ■

(3) 由于 $\{b_n\}$ 收敛, 故 $\{b_n\}$ 有界. 故存在 $M > 0$ 使得 $|b_n| < M$ $(n = 1, 2, \cdots)$. 于是

$$|a_nb_n - ab| = |(a_n - a)b_n + a(b_n - b)| \le |a_n - a||b_n| + |a||b_n - b| \le M|a_n - a| + |a||b_n - b|.$$

类似 (1) 可知任一 $\varepsilon > 0$ 存在 $N \in \mathbb{N}^*$, 使得当 $n < N$ 时

$$|a_n - a| < \varepsilon/2M, \quad |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2(|a|+1)}.$$

于是

$$|a_n b_n - ab| < \frac{M\varepsilon}{2M} + \frac{|a|\varepsilon}{2(|a|+1)} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

于是可知 $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = ab$. ■

(4) 只需证明 $\lim_{n\to\infty} 1/b_n = 1/b$.

由于 $\lim_{n\to\infty} b_n = b$, 故对于 $|b|/2 > 0$ 存在 $N_1 \in \mathbb{N}^*$ 使得当 $n > N_1$ 时 $|b_n - b| < |b|/2$. 于是

$$|b_n| = |b + (b_n - b)| \geq |b| - |b_n - b| > |b| - \frac{|b|}{2} = \frac{|b|}{2} > 0.$$

于是当 $n > N_1$ 时有

$$\left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b}\right| = \frac{|b_n - b|}{|b_n b|} \leq \frac{2}{b^2}|b_n - b|.$$

由于 $\lim_{n\to\infty} b_n = b$, 故对于 $\varepsilon > 0$ 存在 $N_2 \in \mathbb{N}^*$ 使得当 $n > N_2$ 时 $|b_n - b| < b^2\varepsilon/2$. 令 $N = \max\{N_1, N_2\}$. 则当 $n > N$ 时有

$$\left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b}\right| \leq \frac{2}{b^2}|b_n - b| < \frac{2}{b^2}\frac{b^2\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

于是可知 $\lim_{n\to\infty} 1/b_n = 1/b$. 结合 (2) 就可知 $\lim_{n\to\infty} a_n/b_n = a/b$ 成立. ■

(5) 由于 $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, 故对于任一 $\varepsilon > 0$ 存在 $N \in \mathbb{N}^*$ 使得当 $n > N$ 时 $|b_n - a| < \varepsilon$. 于是

$$\big||a_n| - |a|\big| \leq |a_n - a| < \varepsilon.$$

于是可知 $\lim_{n\to\infty} |a_n| = |a|$. ■

注 在证明 (3) 的过程中, 由于 $|a|$ 可能为零, 为了避免繁琐的分类讨论, 此处用了 “$|a|+1$”.

注 设 $c \in \mathbb{R}$. 则 $\lim_{n\to\infty}(ca_n) = ca$. 这是 (3) 的特例.

注 命题 (5) 的逆命题不成立. 设 $a_n = (-1)^n$ $(n = 1, 2, \cdots)$. 显然 $|a_n| \to 1$ 但 $\{a_n\}$ 不收敛.

利用极限的运算法则可以让我们利用已经知道极限的数列去计算大量复杂的数列. 我们来看一个重要的例子.

**例 3.5 几何级数** 求以下数列的极限:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} q^{i-1}, \quad |q| < 1.$$

**证明** 由例题 (**??**) 可知当 $|q| < 1$ 时 $q^n \to 0$. 由等比数列的求和公式和数列极限的运算法则可知

$$\text{原式} = \lim_{n\to\infty} \frac{1-q^n}{1-q} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1-q} - \frac{q^n}{1-q}\right) = \frac{1}{1-q} - \frac{1}{1-q}\lim_{n\to\infty} q^n = \frac{1}{1-q}.$$

注 以上数列的每一项都是一个和式, 这样的数列称为**级数** (series), 今后我们将专门讨论这个主题. 以上级数是一个特别重要的级数, 称为**几何级数** (geometric series).

下面来研究关于极限的不等式.

**命题 3.6 (数列极限的保序性)**

设 $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim_{n\to\infty} b_n = b$.

(1) 若 $a < b$, 则存在 $N \in \mathbb{N}^*$, 使得当 $n > N$ 时 $a_n < b_n$.

(2) 若存在 $N \in \mathbb{N}^*$, 使得当 $n > N$ 时 $a_n \geq b_n$, 则 $a \geq b$.

**证明** (1) 和 (2) 互为逆否. 只证明 (1). 若 $a<b$. 取 $\varepsilon=(b-a)/2>0$. 则存在 $N_1,N_2\in\mathbb{N}^*$ 使得当 $n>N_1$ 时

$$a-\frac{b-a}{2}<a_n<a+\frac{b-a}{2}\iff\frac{3a-b}{2}<a_n<\frac{a+b}{2}.$$

当 $n>N_2$ 时

$$b-\frac{b-a}{2}<b_n<b+\frac{b-a}{2}\iff\frac{a+b}{2}<b_n<\frac{3b-a}{2}.$$

$|b_n-b|<\varepsilon$. 令 $N=\max\{N_1,N_2\}$. 则当 $n>N$ 时

$$\frac{3a-b}{2}<a_n<\frac{a+b}{2}<b_n<\frac{3b-a}{2}.$$

■

**注** (1) 是不能取到等号的. 这是因为: 一个收敛于 $a$ 的序列, 各项可以都为不为 $a$. (2) 的条件可以去掉 "$n$ 充分大" 的条件.

以上命题中, 令 $b_n=0\ (n=1,2,\cdots)$ 则立即得到以下推论.

**推论 3.1 (数列极限的保号性)**

设 $\lim_{n\to\infty}a_n=a$.

(1) 若 $a<0$ (或 $a>0$), 则存在 $N\in\mathbb{N}^*$, 使得当 $n>N$ 时 $a_n<0$ (或 $a_n>0$).

(2) 若存在 $N\in\mathbb{N}^*$, 使得当 $n>N$ 时 $a_n\geq0$ (或 $a_n\leq0$), 则 $a\geq0$ (或 $a\leq0$).

♡

**证明** 留作习题. ■

### 3.1.4 无穷小

下面我们来研究一类特殊的收敛数列——--它们收敛于零.

**定义 3.5 (无穷小数列)**

设数列 $\{a_n\}$. 若 $\lim_{n\to\infty}a_n=0$, 即对于任一 $\varepsilon>0$ 都存在 $N\in\mathbb{N}^*$ 使得当 $n>N$ 时 $|a_n|<\varepsilon$, 则称 $\{a_n\}$ 是一个**无穷小数列** (infinitesimal sequence). 简称**无穷小** (infinitesimal).

♣

下面是几个无穷小数列的简单性质.

**命题 3.7 (无穷小数列的简单性质)**

设数列 $\{a_n\}$, $\{\alpha_n\}$ 和 $\{\beta_n\}$.

(1) 若 $\{\alpha_n\}$ 和 $\{\beta_n\}$ 是无穷小, 则 $\{\alpha_n+\beta_n\}$ 和 $\{\alpha_n\beta_n\}$ 是无穷小.

(2) $\alpha_n$ 是无穷小当且仅当 $\{|\alpha_n|\}$ 是无穷小.

(3) $\lim_{n\to\infty}a_n=a\iff\lim_{n\to\infty}(a_n-a)=0\iff$ 存在一个无穷小 $\alpha_n$ 满足 $a_n=a+\alpha_n$.

(4) 若 $\{a_n\}$ 是有界的且 $\{\alpha_n\}$ 是无穷小, 则 $\{a_n\alpha_n\}$ 是无穷小.

(5) 若 $|a_n|\leq\alpha_n\ (n=1,2,\cdots)$, 其中 $\alpha_n$ 是无穷小, 则 $a_n$ 也是无穷小.

♠

**证明** (1)(2)(3) 由定理 (3.1) 立刻可知结论成立.

(4) 由于 $\{a_n\}$ 是有界的, 故存在 $M>0$ 使得 $|a_n|<M\ (n=1,2,\cdots)$. 由于 $\{\alpha_n\}$ 是无穷小, 故对于任一 $\varepsilon/M>0$ 都存在 $N\in\mathbb{N}^*$ 使得当 $n>N$ 时 $|\alpha_n|<\varepsilon$. 于是当 $n>N$ 时

$$|a_n\alpha_n|=|a_n||\alpha_n|<M\cdot\frac{\varepsilon}{M}=\varepsilon.$$

于是可知 $\{a_n\alpha_n\}$ 是无穷小.

(5). 由于 $\{\alpha_n\}$ 是无穷小, 故对于任一 $\varepsilon>0$, 存在 $N\in\mathbb{N}^*$, 使得当 $n>N$ 时都有 $|\alpha_n|<\varepsilon$. 于是当 $n>N$ 时, 有

$$|a_n|\leq\alpha_n<\varepsilon.$$

于是可知 $\{a_n\}$ 也是无穷小. ■

**注** 用数学归纳法可以将以上命题中的 (1) 推广到有限个无穷小的情况.

命题 (3.7) 中的 (5) 可以推广为**夹逼定理** (squeeze theorem).

**定理 3.2 (夹逼定理)**
设数列 $\{a_n\}, \{b_n\}, \{c_n\}$ 满足

$$a_n \le b_n \le c_n, \quad n = 1, 2, \cdots.$$

若 $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = a$, 则 $\lim_{n\to\infty} b_n = a$.

**证明** $\boxed{\text{证法一}}$ 由于 $a_n \le b_n \le c_n$ $(n = 1, 2, \cdots)$, 故

$$0 \le b_n - a_n \le c_n - a_n, \quad n = 1, 2, \cdots.$$

由于 $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = a$, 故 $\lim_{n\to\infty}(c_n - a_n) = 0$. 命题 (3.7) 中的 (5) 可知 $\lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$. 于是

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty}(b_n - a_n + a_n) = \lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) + \lim_{n\to\infty} a_n = 0 + a = a.$$

$\boxed{\text{证法二}}$ 由于 $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = a$, 故对于任一 $\varepsilon > 0$ 总存在 $N_1, N_2 \in \mathbb{N}^*$ 使得当 $n > N_1$ 时 $a_n \in N_\varepsilon(a)$; 当 $n > N_2$ 时 $a_n \in N_\varepsilon(a)$. 令 $N = \max\{N_1, N_2\}$. 由于 $a_n \le b_n \le c_n$ $(n = 1, 2, \cdots)$, 因此当 $n > N$ 时

$$a - \varepsilon < a_n \le b_n \le c_n < a + \varepsilon.$$

于是可知 $\lim_{n\to\infty} b_n = a$. ■

**注** 以上定理被形象地称为**三明治定理** (sandwich theorem).

对比以上命题的两种证法可以看出利用无穷小数列的性质可以让证明过程更明快.
使用夹逼定理求数列的极限, 关键技巧是缩放. 下面看两个重要的例子.

**例 3.6** 求极限: $\lim_{n\to\infty} n^{1/n}$.

**解** 由均值不等式可知

$$1 \le \sqrt[n]{n} = (\underbrace{1 \cdots 1}_{n-2\text{ 个}}\sqrt{n}\sqrt{n})^{1/n} \le \frac{n - 2 + 2\sqrt{n}}{n} \le \frac{n + 2\sqrt{n}}{n} = 1 + \frac{2}{\sqrt{n}}.$$

由夹逼定理可知 $n^{1/n} \to 1$. ■

**例 3.7** 求极限: $\lim_{n\to\infty} a^{1/n}$ $(a > 0)$.

**解** (i) 若 $a \ge 1$. 当 $n > a$ 时

$$1 \le a^{1/n} \le n^{1/n}.$$

由例题 (3.6) 可知 $n^{1/n} \to 1$. 于是由夹逼定理可知 $a^{1/n} \to 1$.

(ii) 若 $0 < a < 1$. 则 $a^{-1} > 1$. 由 (i) 的结论可知

$$\lim_{n\to\infty} a^{1/n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(a^{-1})^{1/n}} = 1.$$ ■

### 3.1.5 无穷大和广义实数集

有些数列虽然发散, 但也有一个变化趋势. 例如自然数数列 $0, 1, 2, 3, \cdots$. 我们说它趋向于 “无穷大” . 我们可以类比无穷小来研究 “无穷大” .

**定义 3.6 (无穷大)**

设数列 $\{a_n\}$. 若对于任一 $E > 0$, 都存在 $N \in \mathbb{N}^*$, 使得当 $n > N$ 时 $|a_n| > E$, 则称数列 $\{a_n\}$ 发散于**无穷大** (infinity), 或称该数列的极限是无穷大. 此时称 $\{a_n\}$ 为**无穷大** (infinity). 记作

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty \quad 或 \quad a_n \to \infty\ (n \to \infty).$$

特别地,

(1) 当 $n > N$ 时 $a_n > E$, 称数列 $\{a_n\}$ 发散于**正无穷大** (positive infinity), 记作 $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$.

(2) 当 $n > N$ 时 $a_n < -E$, 称数列 $\{a_n\}$ 发散于**负无穷大** (negative infinity), 记作 $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$.

♣

**注** 以上定义中的 “任一 $E > 0$” 表示任意大的 $E$.

下面看一个例子.

**例 3.8** 求证: $\lim_{n\to\infty} (n^2 - 3n - 5) = +\infty$.

**证明** 由于

$$(n^2 - 3n - 5) - n = n^2 - 4n - 5 = (n - 5)(n + 1).$$

因此当 $n > 5$ 时 $n^2 - 3n - 5 > n$. 于是对于任一 $E > 0$ 只需取 $N = \max\{5, [E] + 1\}$, 则当 $n > N$ 时

$$n^2 - 3n - 5 > n > N \geq [E] + 1 > E.$$

于是可知 $\lim_{n\to\infty}(n^2 - 3n - 5) = +\infty$. ■

由无穷大的定义立刻可知以下结论.

**命题 3.8**

无穷大数列必无界.

♠

**证明** 留作习题.

**注** 无界的数列未必是无穷大数列. 举例说明. 设数列

$$a_n = \{1, 0, 2, 0, 3, 0, \cdots\}.$$

它是无界的, 但它不是无穷大数列.

无穷大也可以从几何意义去理解. 我们可以推广邻域的概念.

**定义 3.7 (无穷大的邻域)**

设 $E > 0$. 令

$$N_E(+\infty) := (E, +\infty), \quad N_E(-\infty) := (-\infty, -E), \quad N_E(\infty) := (-\infty, -E) \cup (E, +\infty).$$

我们称 $N_E(+\infty)$ 为以 $E$ 为半径 $+\infty$ 的邻域; 称 $N_E(-\infty)$ 为以 $E$ 为半径 $-\infty$ 的邻域; 称 $N_E(\infty)$ 为以 $E$ 为半径 $\infty$ 的邻域.

♣

于是我们可以这样描述无穷大的几何意义. 设数列 $\{a_n\}$. 若对于任一 $E > 0$, 当 $n$ 充分大时, $\{a_n\}$ 的各项都落在邻域 $N_E(+\infty)$ 内, 则 $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$. 若对于任一 $E > 0$, 当 $n$ 充分大时, $\{a_n\}$ 的各项都落在开区间 $(-\infty, -E)$ 内, 则 $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$.

类似地有以下命题.

**命题 3.9**

设数列 $\{a_n\}$.

(1) $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$ 当且仅当 $+\infty$ 的任一邻域 $(E, +\infty)$ 之外都只有 $\{a_n\}$ 中的有限项.

(2) $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$ 当且仅当 $-\infty$ 的任一邻域 $(-\infty, -E)$ 之外都只有 $\{a_n\}$ 中的有限项.

**证明** 留作习题. ■

无穷大与无穷小有如下关系.

**命题 3.10 (无穷大和无穷小的关系)**

设数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_n \neq 0\ (n = 1, 2, \cdots)$. 则

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = 0 \iff \lim_{n\to\infty} a_n = \infty.$$

**证明** 留作习题.

当数列 $\{a_n\}$ 发散于无穷大时, 我们把它极限值看作 $+\infty$ 或 $-\infty$. 因此很自然地想到把 $+\infty$ 和 $-\infty$ 作为元素添入实数集 $\mathbb{R}$.

**定义 3.8 (广义实数集)**

在实数集 $\mathbb{R}$ 中加入元素 $-\infty, \infty$, 令

$$\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}.$$

我们称集合 $\overline{\mathbb{R}}$ 为**广义实数集** (extended real number system). 规定任一 $x \in \mathbb{R}$ 都满足

$$-\infty < x < +\infty.$$

设 $a, b \in \mathbb{R}$. 则可以定义以下广义区间

$$(-\infty, +\infty) := \mathbb{R}. \quad [-\infty, +\infty] := \overline{\mathbb{R}}.$$
$$(a, +\infty) := \{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}. \quad (-\infty, b) := \{x \in \mathbb{R} \mid x < b\}.$$
$$[a, +\infty) := \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq a\}. \quad (-\infty, b] := \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq b\}.$$

命题 (3.10) 实际上告诉我们 $1/\infty = 0$. 我们可以用无穷大的定义得到更多的关于无穷大的运算法则.

**命题 3.11 (广义实数集的运算法则)**

设 $a \in \mathbb{R}$, $b \in (0, +\infty)$, $c \in (-\infty, 0)$, 则

(1) $a + (\pm\infty) = (\pm\infty) + a = \pm\infty$.

(2) $a - (\pm\infty) = -(\pm\infty) + a = \mp\infty$.

(3) $(+\infty) + (+\infty) = (+\infty) - (-\infty) = +\infty$.

(4) $(-\infty) + (-\infty) = (-\infty) - (+\infty) = -\infty$.

(5) $b \cdot (\pm\infty) = (\pm\infty) \cdot b = \pm\infty$.

(6) $c \cdot (\pm\infty) = (\pm\infty) \cdot c = \mp\infty$.

(7) $(+\infty) \cdot (+\infty) = (-\infty) \cdot (-\infty) = +\infty$.

(8) $(-\infty) \cdot (+\infty) = (+\infty) \cdot (-\infty) = -\infty$.

(9) $a/(\pm\infty) = 0$.

(10) $b/0 = +\infty$.

(11) $c/0 = -\infty$.

**证明** 留作习题.

广义实数集的运算法则实际上是推广了定理 (3.1). 例如, 若 $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$, $\lim_{n\to\infty} b_n = +\infty$, 则

$$\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n = (+\infty) + (+\infty) = +\infty.$$

在广义实数集中还可以规定:

$$\mathrm{e}^{-\infty} = 0. \quad \ln 0 = -\infty. \quad \arctan(\pm\infty) = \pm\frac{\pi}{2}.$$

我们知道在实数集中有些运算是没有定义的, 例如 $a/0$ $(a \neq 0)$. 但这个式子在广义实数集中有定义. 然而在广义实数集中, 有些算式的值依旧无法确定. 这样的式子称为**未定式** (indeterminate form), 或**不定式**. 常见的未定式有

(1) $\infty - \infty$ 型: $(+\infty) - (+\infty)$, $(+\infty) + (-\infty)$, $(-\infty) + (+\infty)$.

(2) $0 \cdot \infty$ 型: $0 \cdot (\pm\infty)$.

(3) $\infty/\infty$ 型: $+\infty/+\infty$, $+\infty/-\infty$, $-\infty/+\infty$, $-\infty/-\infty$.

(4) $0/0$ 型: $0/0$.

为了处理问题的便利, 我们可以把 $+\infty$ 作为无上界的集合的上确界. 把 $-\infty$ 作为无下界的集合的上确界. 这样一来, 实数集 $\mathbb{R}$ 的任一子集 $E$ 在 $\overline{\mathbb{R}}$ 中都有上确界和下确界. 类似地, 数列在 $\overline{\mathbb{R}}$ 中也都有上确界和下确界.

在 $\overline{\mathbb{R}}$ 中, 我们可以把收敛于实数 $a$ 和发散于 $\infty$ 的数列统称为有极限的数列, 其中前者称为有穷极限, 后者称为无穷极限.

| 是否有极限 | 是否是有穷极限 | 是否收敛 | 是否有界 |
|---|---|---|---|
| 极限存在 | 有穷极限 | 收敛 | 有界 |
| 极限存在 | 无穷极限 | 发散 | 无界 |
| 极限不存在 | | 发散 | 不确定 |

前面相关定理的结论可以推广到广义实数集. 例如, 设数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{c_n\}$ 满足

$$a_n \le b_n \le c_n, \quad n = 1, 2, \cdots.$$

若 $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = +\infty$, 则 $\lim_{n\to\infty} b_n = +\infty$; 若 $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = -\infty$, 则 $\lim_{n\to\infty} b_n = -\infty$.

## 3.2 数列的收敛判别法

上一节我们讨论了数列极限的概念及其简单性质. 到目前为止, 如果我们要判断一个数列是否有极限, 只能从定义出发. 这样做的前提是我们必须先知道或者猜出数列的极限值. 但大部分时候我们是无法猜出数列的极限值的. 本节我们就来讨论数列极限的一些判别法.

### 3.2.1 单调数列

我们已经知道数列收敛的一个必要条件是数列有界. 但它不是充分条件. 是否可以加条件让有界数列收敛?

**定义 3.9 (单调数列)**

设数列 $\{a_n\}$.

(1) 若 $a_n \le a_{n+1}$ $(n = 1, 2, \cdots)$, 则称 $\{a_n\}$ 是**单调递增的** (monotonically increasing), 记作 $\{a_n\}\uparrow$.

(2) 若 $a_n \ge a_{n+1}$ $(n = 1, 2, \cdots)$, 则称 $\{a_n\}$ 是**单调递减的** (monotonically decreasing), 记作 $\{a_n\}\downarrow$.

特别地, 以上定义中的 $\le$ 改为 $<$, 则称 $\{a_n\}$ 是是**严格递增的** (strictly increasing); $\ge$ 改为 $>$, 则称 $\{a_n\}$ 是**严格递减的** (strictly decreasing). 单调递增和单调递减序列统称为**单调序列** (monotonic sequence).

♣

从直观上就容易想到, 单调且有界的数列是收敛的.

**定理 3.3 (单调有界定理)**

设数列 $\{a_n\}$.

(1) 若 $\{a_n\}$ 有上界且 $\{a_n\}\uparrow$, 则 $\{a_n\}$ 收敛且 $\lim_{n\to\infty} a_n = \sup\{a_n\}$.

(2) 若 $\{a_n\}$ 有下界且 $\{a_n\}\downarrow$, 则 $\{a_n\}$ 收敛且 $\lim_{n\to\infty} a_n = \inf\{a_n\}$.

♡

**证明** 只证明 (1). 若 $\{a_n\}$ 有上界, 由确界原理可知 $\{a_n\}$ 有上确界. 则对于任一 $\varepsilon > 0$ 都存在 $N \in \mathbb{N}^*$ 使得

$$\sup\{a_n\} - \varepsilon < a_N \le \sup\{a_n\}.$$

由于 $\{a_n\}\uparrow$, 故对于任一 $n > N$ 都有 $a_n \ge a_N$. 这表明对于任一 $\varepsilon > 0$ 都存在 $N \in \mathbb{N}^*$ 使得当 $n > N$ 时都有

$$\sup\{a_n\} - \varepsilon < a_N \le a_n \le \sup\{a_n\}.$$

于是可知 $\{a_n\}$ 收敛, 且 $\lim_{n\to\infty} a_n = \sup\{a_n\}$. ■

**注** 单调有界定理是第 4 个刻画实数域完备性的定理.

**注** 由于数列的前有限项不影响其敛散性及其极限值, 因此单调有界定理的条件可以减弱为 "当 $n$ 充分大时数列单调递增 (递减)".

如果一个数列无上界, 那么我们可以把 $+\infty$ 看作它的上确界; 若无上界, 则可以把 $-\infty$ 看作它的上确界. 在这个意义下, 单调数列一定有极限.

**定理 3.4**

设数列 $\{a_n\}$.

(1) 若 $\{a_n\}$ 无上界且 $\{a_n\}\uparrow$, 则 $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$.

(2) 若 $\{a_n\}$ 无下界且 $\{a_n\}\downarrow$, 则 $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$.

♡

**证明** 只证明 (1). 对于任一 $E > 0$ 总存在 $N \in \mathbb{N}^*$ 使得 $a_n > E$. 由于 $\{a_n\}\uparrow$, 故对于任意 $n > N$ 都有 $a_n \ge a_n$. 这表明对于任一 $E > 0$ 都存在 $N \in \mathbb{N}$ 使得当 $n > N$ 时都有

$$a_n \ge a_n > E.$$

于是可知 $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$. ■

用单调有界定理可以得到另一个实数的连续性命题.

**定理 3.5 (闭区间套定理)**

设闭区间序列 $I_n = [a_n, b_n]$ $(n = 1, 2, \cdots)$. 若 $I_n \supseteq I_{n+1}$ $(n = 1, 2, \cdots)$. 且 $\lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$, 则对于任意 $n \in \mathbb{N}^*$, 存在唯一 $c \in [a_n, b_n]$ 满足

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = c.$$

**证明** 由条件可知, $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 都是单调有界的, 由单调有界定理可知它们都收敛. 于是

$$\lim_{n\to\infty} b_n - \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0,$$

令 $\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} a_n = c$. 故 $\inf\{b_n\} = \sup\{a_n\} = c$. 于是

$$a_n \le c \le b_n, \quad n = 1, 2, \cdots.$$

假设存在 $c'$ 满足 $a_n \le c' \le b_n$ $(n = 1, 2, \cdots)$. 令 $n \to \infty$ 得 $c \le c' \le c$. 于是可知 $c = c'$, 即这样的 $c$ 唯一存在. ■

**注** **闭区间套定理** (nested intervals theorem) 是第 5 个刻画实数域完备性的定理.

**注** 需要注意闭区间套定理的条件:

1° 要确保一个区间套在一个区间之中;

2° 要确保所有区间都是闭区间;

3° 要确保闭区间序列的长度的极限是 0.

### 3.2.2 自然常数

下面我们用单调有界定理来解决一个实际问题. 假设一家银行的每年的定期存款利率为 $r$. 为了简化问题, 我们不妨设 $r = 100\%$. 那么一元本金一年后的本利和为 $(1 + 100\%)^1 = 2$ 元. 现在我们和银行家商量, 能否半年结息一次 (按复利计算), 银行家同意了. 于是一元本金一年后的本利和为

$$\left(1 + \frac{100\%}{2}\right)^2 = \left(1 + \frac{1}{2}\right)^2 = 2.25(\text{元}).$$

我们发现得到的本利和增加了. 于是我们希望能进一步提高结息的频率. 我们发现

$$\left(1 + \frac{1}{3}\right)^3 \approx 2.37(\text{元}), \quad \left(1 + \frac{1}{4}\right)^4 \approx 2.44(\text{元}), \quad \left(1 + \frac{1}{5}\right)^5 \approx 2.49(\text{元}), \quad \left(1 + \frac{1}{6}\right)^6 \approx 2.52(\text{元}), \quad \cdots.$$

果然, 结息频率越高, 得到的本利和越高. 但是我们观察到每次增加的利息越来越少. 设数列

$$e_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \quad n = 1, 2, \cdots.$$

于是以上问题就归结为 $\{e_n\}$ 是否收敛. 容易看出它是单调递增的, 因此问题进一步归结为 $\{e_n\}$ 是否有上界.

**命题 3.12**

设数列

$$e_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \quad n = 1, 2, \cdots$$

则 $\{e_n\}$ 收敛.

**证明** (i) 先证明 $\{e_n\}$ 是单调递增的. 由均值不等式可知

$$e_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1 \cdot \underbrace{\left(1 + \frac{1}{n}\right) \cdots \left(1 + \frac{1}{n}\right)}_{n\text{ 个}} < \left[\frac{1 + n(1 + 1/n)}{n + 1}\right]^{n+1} = \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} = e_{n+1}, \quad n = 1, 2, \cdots.$$

于是可知 $\{e_n\}$ 严格单调递增.

(ii) 再证明 $\{e_n\}$ 有上界. 由二项式定理得

$$a_n = \sum_{i=0}^{n} \mathrm{C}_n^i \frac{1}{n^i} = \sum_{i=0}^{n} \frac{n(n-1)\cdots(n-i+1)}{i!n^i} = \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{i-1}{n}\right)$$
$$\leq \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i!} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} \leq 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} = 3 - \frac{1}{2^{n-1}} < 3.$$

故 $\{e_n\}$ 有上界.

综合 (i) 和 (ii) 由单调有界定理可知数列 $\{e_n\}$ 收敛.

**注** 单调性的证明也可以从展开式中直接观察得到.

**定义 3.10 (自然常数)**

令

$$\mathrm{e} := \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

我们称 e 为自然常数 (natural constant).

**注** e 被称为“自然常数”，是因为很多自然规律都有这个常数的身影, 包括细胞分裂等, 著名的“黄金分割”，“Fibonacci 数列”以及金融学中的“复利”都与它有关. 后面我们还会指数函数, 对数函数, 三角函数, 双曲函数以及复数都和自然常数有密切联系. 在后面的一元微分学中我们将看到以 e 为底的指数函数和对数函数具有“非常好”的性质.

从前面的证明过程看出

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leq 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} < 3, \quad n = 1, 2, \cdots.$$

令

$$\widetilde{e}_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}, \quad n = 1, 2, \cdots.$$

以上不等式表明数列 $\widetilde{e}_n$ 也有上界, 而且 $\{\widetilde{e}_n\}$ 显然是严格单调递增的. 因此由单调有界定理立刻可知 $\{\widetilde{e}_n\}$ 也收敛. 容易想到 $\{\widetilde{e}_n\}$ 的极限值可能等于 $\{e_n\}$ 的极限值.

**命题 3.13**

设数列

$$\widetilde{e}_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}, \quad n = 1, 2, \cdots.$$

则 $\lim_{n\to\infty} \widetilde{e}_n = \mathrm{e}$.

**证明** 已经证明 $\{\widetilde{e}_n\}$ 是收敛的. 只需证明 $\lim_{n\to\infty} \widetilde{e}_n = \lim_{n\to\infty} e_n$.

(i) 由于

$$e_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leq 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} = \widetilde{e}_n.$$

由极限的保序性可知 $\lim_{n\to\infty} e_n \leq \lim_{n\to\infty} \widetilde{e}_n$.

(ii) 给定 $m \leq n$, 则

$$e_n = \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{i-1}{n}\right) \geq \sum_{i=0}^{m} \frac{1}{i!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{i-1}{n}\right)$$

令 $n \to \infty$, 由保序性可知

$$\lim_{n\to\infty} e_n \geq \sum_{i=0}^{m} \frac{1}{i!}.$$

令 $m \to \infty$, 则有 $\lim_{n\to\infty} e_n \geq \lim_{n\to\infty} \widetilde{e}_n$.

综合 (i) 和 (ii) 可知 $\lim_{n\to\infty} \widetilde{e}_n = \lim_{n\to\infty} e_n = \mathrm{e}$. ■

在实际应用中我们更多地使用数列 $\{\widetilde{e}\}$ 来计算 e 的近似值. 这是因为 $\{\widetilde{e}\}$ 收敛得“更快”.

| $n$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $e_n$ | 2.00000 | 2.25000 | 2.37037 | 2.44140 | 2.48832 | 2.52163 | 2.54650 | 2.56578 |
| $\widetilde{e}_n$ | 2.00000 | 2.50000 | 2.66667 | 2.70833 | 2.71667 | 2.71806 | 2.71825 | 2.71828 |

下面我们来估计用 $\{\widetilde{e}\}$ 计算 e 的近似值的误差.

$$\widetilde{e}_{n+m} - \widetilde{e}_n = \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \cdots + \frac{1}{(n+m)!} = \frac{1}{(n+1)!}\left[1 + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{(n+2)\cdots(n+m)}\right]$$

$$\leq \frac{1}{(n+1)!}\left[1 + \frac{1}{n+2} + \cdots + \left(\frac{1}{n+2}\right)^{m-1}\right] = \frac{1}{(n+1)!} \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{n+2}\right)^m}{1 - \frac{1}{n+2}} < \frac{1}{(n+1)!} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{n+2}}, \quad n = 1, 2, \cdots.$$

令 $m \to \infty$, 由极限的保序性可知

$$\mathrm{e} - \widetilde{e}_n \leq \frac{1}{(n+1)!} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{n+2}} < \frac{1}{(n+1)!} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{n+1}} = \frac{1}{n!n}, \quad n = 1, 2, \cdots. \tag{3.2}$$

于是我们得到了误差估计公式. 利用这个公式我们可以尝试估计 $\widetilde{e}_8$ 的误差:

$$\mathrm{e} - \widetilde{e}_8 < \frac{1}{8!8} < 3.2 \times 10^{-6} < 10^{-5}.$$

这表明用 $\widetilde{e}_8$ 计算得到的近似值误差小于 $10^{-5}$.

我们已经看到 $2 < \mathrm{e} < 3$, 因此 e 一定不是整数, 下面我们来看它是不是一个有理数.

**定理 3.6**

自然常数 e 是一个无理数.

**证明** 用反证法. 假设 $\mathrm{e} = p/q$ $(p, q \in \mathbb{N}^*)$. 由于 $2 < \mathrm{e} < 3$, 故知 e 不是整数. 故 $q \geq 2$. 由不等式 (3.2) 可知

$$0 < \mathrm{e} - \widetilde{e}_q < \frac{1}{q!q} \Longrightarrow 0 < q!(\mathrm{e} - \widetilde{e}_q) < \frac{1}{q} \leq \frac{1}{2}.$$

这表明 $q!(\mathrm{e} - \widetilde{e}_q)$ 不是整数. 由于 $\mathrm{e} = p/q$, 故

$$q!(\mathrm{e} - \widetilde{e}_q) = q!\left[\frac{p}{q} - \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{q!}\right)\right] = (q-1)!p - (q! + q! + 3 \cdot 4 \cdots q + \cdots + 1) \in \mathbb{Z}.$$

出现矛盾. 于是可知 e 是一个无理数. ■

**注** 综合以上讨论我们发现 $\{e_n\}$ 和 $\{\widetilde{e}_n\}$ 都是有理数数列, 但它们却收敛于一个无理数 e. 由此可见, 通过一个“无限的过程”有理数可以“跃迁为”实数.

### 3.2.3 子列和极限点

如果一个数列没有极限, 我们可以考虑从中选出一个收敛“子列”.

**定义 3.11 (子列)**

设数列 $\{a_n\}$. 若 $k_i \in \mathbb{N}^*$ $(i = 1, 2, \cdots)$ 满足 $k_1 < k_2 < \cdots$. 则称数列 $\{a_{k_n}\}$ 为 $\{a_n\}$ 的一个**子列** (subsequence).

**注** 有时候可以“换元”, 令 $b_n = a_{k_n}$ $(i = 1, 2, \cdots)$.

**注** 子列可以看作一个复合映射

$$\mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^* \to \mathbb{R}$$

$$n \mapsto k_n \mapsto a_{k_n}.$$

后面我们讨论复合函数极限时可以进行对比.

注 按以上定义 $\{a_n\}$ 本身也是 $\{a_n\}$ 的一个子列.

先来研究收敛数列的子列. 下面的结论是容易想到的.

**定理 3.7**

设数列 $\{a_n\}$. 则 $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ 当且仅当 $\{a_n\}$ 任一子列都收敛于 $a$.

**证明** (i) 证明必要性. 若 $\lim_{n\to\infty} a_n = a$. 则对于任一 $\varepsilon > 0$ 都存在 $N \in \mathbb{N}^*$ 使得当 $n > N$ 时 $|a_n - a| < \varepsilon$. 任取一个 $\{a_n\}$ 的子列 $\{a_{k_n}\}$. 容易知道 $k_n \geq n$ $(n = 1, 2, \cdots)$. 因此当 $n > N$ 时 $k_n \geq n > N$, 因此 $|a_{k_n} - a| < \varepsilon$. 于是可知 $\lim_{n\to\infty} a_{k_n} = a$.

(ii) 证明充分性. 当 $\{a_n\}$ 任一子列都收敛于 $a$ 时, 由于 $\{a_n\}$ 本身就是 $\{a_n\}$ 的一个子列, 因此 $\lim_{n\to\infty} a_n = a$.

如果要证明数列收敛于 $a$, 我们并不需要证明任一子列收敛于 $a$. 下面的结论在实际应用中很便利.

**命题 3.14**

设数列 $\{a_n\}$. 则 $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ 当且仅当 $\{a_n\}$ 的偶数项子列 $\{a_{2n}\}$ 和奇数项子列 $\{a_{2n-1}\}$ 都收敛于 $a$.

**证明** 由定理 (3.7) 可知必要性成立. 下面证明充分性. 若

$$\lim_{n\to\infty} a_{2n} = \lim_{n\to\infty} a_{2n-1} = a.$$

则对于任一 $\varepsilon > 0$ 都存在 $N_1, N_2 \in \mathbb{N}^*$ 使得

$$|a_{2n} - a| < \varepsilon, \quad \forall n > N_1,$$
$$|a_{2n-1} - a| < \varepsilon, \quad \forall n > N_2.$$

令 $N = \max\{2N_1, 2N_2 - 1\}$, 则当 $n > N$ 时 $|a_n - a| < \varepsilon$. 于是可知 $\lim_{n\to\infty} a_n = a$. ■

现在来研究一般的数列 (它未必收敛). 如果它有界, 是否一定存在收敛的子列?

**定理 3.8 (Bolzano-Weierstrass 定理)**

有界数列一定存在收敛子列.

**证明** 设有界数列 $\{a_n\}$. 若 $\{a_n\}$ 是单调的, 则命题显然成立. 下设 $\{a_n\}$ 不是单调数列. 由单调有界定理可知, 若 $\{a_n\}$ 中存在一个单调子列, 则这个子列收敛. 下面我们来找出这样的子列. 为此我们先定一个概念: 若存在 $a_N$, 使得当 $n > N$ 时都有 $a_n < a_N$, 则称 $a_N$ 是 $\{a_n\}$ 中的一个 "龙头项".

(i) 当 $\{a_n\}$ 有无穷多个 "龙头项" 时, 我们只需把它们依次取出就可以得到一个严格递减的子列.

(ii) 当 $\{a_n\}$ 只有有限个 "龙头项" 时, 我们取出最后一个龙头项的下一项 $a_{k_1}$. 由于它不是龙头项, 因此它后面一定存在一项 $a_{k_2} \geq a_{k_1}$. 如此依次进行下去就可以得到一个子列 $\{a_{k_n}\}$, 显然它是单调递增的. ■

注 Bolzano-Weierstrass 定理是第 6 个刻画实数域完备性的定理.

注 后面我们将用 Bolzano-Weierstrass 条件定义集合的**列紧性** (sequentially compactness). Bolzano-Weierstrass 定理告诉我们 $\mathbb{R}$ 中的有界无限集是**列紧的** (sequentially compact), 我们称它们为**列紧集** (sequentially compact set). 因此 Bolzano-Weierstrass 定理也称为**列紧性定理**这些拓扑概念我们将在后面详细介绍.

注 对于一个无界的数列 $\{a_n\}$. 容易证明它一定有一个子列的极限是 $+\infty$ 或 $-\infty$.

Bolzano-Weierstrass 定理的结论可以推广到无界数列.

**命题 3.15**

任一数列都能找到一个有极限的子列.

**注** 设数列 $\{a_n\}$. 只需证明无界数列的情况. 若 $\{a_n\}$ 无上界, 则任一邻域 $N_E(+\infty)$ 中都有 $\{a_n\}$ 中的无穷多项. 我们先在 $(M+1,+\infty)$ 中取一项 $a_{k_1}$. 然后在 $(M+2,+\infty)$ 中取出位于 $a_{k_1}$ 之后的一项 $a_{k_2}$. 归纳可知对于任一 $n\in\mathbb{N}^*$ 存在 $k_n>\cdots>k_2>k_1$ 使得

$$M+n<a_{k_n}.$$

令 $n\to\infty$, 由夹逼定理可知 $\lim_{n\to\infty}a_{k_n}=+\infty$. 这表明无上界的数列一定存在极限是 $+\infty$ 的子列.

于是我们引出了以下概念.

**定义 3.12 (极限点)**

我们称数列 $\{a_n\}$ 的子列的极限称为 $\{a_n\}$ 的**极限点** (limit point) 或**聚点** (cluster point, accumulation point). ♣

**注** 容易知道任一数列都有极限点.
**注** 数列的极限点可以是 $+\infty$ 或 $-\infty$.
**注** 显然, 数列有极限当且仅当它只有一个极限点.

我们也可以从几何的角度来描述极限点. 为此我们需要先定义 "去心邻域".

**定义 3.13 (去心邻域)**

给定 $a\in\overline{\mathbb{R}}$. 令

$$\check{N}_r(a):=N_r(a)\backslash\{a\}.$$

其中 $r$ 是任一正实数. 我们把 $\check{N}_r(a)$ 称为以 $a$ 为中心, $r$ 为半径的**去心邻域** (deleted neighborhood). 在不强调半径的情况下 $\check{N}_r(a)$ 可以简记作 $\check{N}(a)$. ♣

**命题 3.16**

设数列 $\{a_n\}$. 则 $a$ 是 $\{a_n\}$ 的一个极限点当且仅当 $a$ 的任一去心邻域 $\check{N}(a)$ 都包含 $\{a_n\}$ 中的无穷多项. ♠

**证明** 必要性显然成立. 下面证明充分性. 由于 $a$ 的任一去心邻域都包含 $\{a_n\}$ 中的无穷多项. 故可以从 $(a-1,a+1)$ 中选取一项 $a_{k_1}$ 满足

$$a-1<a_{k_1}<a+1.$$

由于 $(a-1/2,a+1/2)$ 中包含 $\{a_n\}$ 中的无穷多项. 于是可以从中选取位于 $a_{k_1}$ 之后的一项 $a_{k_2}$ 满足

$$a-\frac{1}{2}<a_{k_2}<a+\frac{1}{2}.$$

由数学归纳法可知, 对于任一 $n\in\mathbb{N}^*$ 都存在一项 $a_{k_n}$ $(k_n>\cdots>k_2>k_1)$ 使得

$$a-\frac{1}{n}<a_{k_n}<a+\frac{1}{n}.$$

于是我们得到了一个数列 $\{a_{k_n}\}$. 由夹逼定理可知 $\lim_{n\to\infty}a_{k_n}=a$. 于是可知 $a$ 是 $\{a\}$ 的一个极限点.

**注** 有时候我们也可以用以上命题定义极限点.
**注** 容易证明 $a$ 的任一去心邻域 $\check{N}(a)$ 都包含 $\{a_n\}$ 中的项, 当且仅当 $a$ 的任一去心邻域 $\check{N}(a)$ 都包含 $\{a_n\}$ 中的无穷多项. 因此 $a$ 是 $\{a_n\}$ 的一个极限点当且仅当 $a$ 的任一去心邻域 $\check{N}(a)$ 都包含 $\{a_n\}$ 中的项.

### 3.2.4 上极限和下极限

我们已经知道任一数列 $\{a_n\}$ 都有极限点, 我们可以把 $\{a_n\}$ 的所有极限点组成的集合记作 $E$. 其中的元素可以是 $\pm\infty$. 当 $E$ 中只有一个元素时, $\{a_n\}$ 有极限. 当 $\operatorname{card}E>1$ 时, $\{a_n\}$ 没有极限. 此时又可以出现几种情况.

(1) $E$ 是一个有限集. 设数列 $\{(-1)^n\}$, 则 $E=\{1,-1\}$.

(2) $E$ 是一个可数集. 设数列

$$1, 1, 2, 1, 2, 3, 1, 2, 3, 4, 1, 2, 3, 4, 5, \cdots .$$

则 $E = \mathbb{N}^*$.

(3) $E$ 是一个不可数集. 设全体有理数组成的数列

$$\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{2}{1}, \frac{1}{3}, \frac{2}{2}, \frac{3}{1}, \frac{1}{4}, \frac{2}{3}, \frac{3}{2}, \frac{4}{1}, \cdots .$$

则 $E = \mathbb{R}$. 设数列 $\{\sin n\}$. 则 $E = [-1, 1]$(证明留作习题).

于是我们考虑研究 $E$ 的上确界和下确界.

**定义 3.14**

设数列 $\{a_n\}$, 把 $\{a_n\}$ 的所有极限点组成的集合记作 $E$. 令

$$\limsup_{n\to\infty} a_n := \sup E, \quad \liminf_{n\to\infty} a_n := \inf E.$$

我们称 $\limsup_{n\to\infty} a_n$ 为 $\{a_n\}$ 的**上极限** (limit superior), 称 $\liminf_{n\to\infty} a_n$ 为 $\{a_n\}$ 的**下极限** (limit inferior). ♣

**注** $E$ 中可以包含 $+\infty$ 或 $-\infty$.

**命题 3.17**

设数列 $\{a_n\}$, 把 $\{a_n\}$ 的所有极限点组成的集合记作 $E$. 则 $\limsup_{n\to\infty} a_n, \liminf_{n\to\infty} a_n \in E$. ♠

**证明** 只证明上极限的情况.

(i) 若 $\limsup_{n\to\infty} a_n = +\infty$. 则 $E$ 无上界, 因此 $\{a_n\}$ 也没有上界, 故 $\{a_n\}$ 一定存在极限为 $+\infty$ 的子列. 因此 $+\infty$ 也是一个极限点, 即 $+\infty \in E$.

(ii) 若 $\limsup_{n\to\infty} a_n = -\infty$. 则 $E = \{-\infty\}$, 因此 $-\infty \in E$.

(iii) 若 $\limsup_{n\to\infty} a_n = a \in \mathbb{R}$. 我们只需证明有一个收敛于 $a$ 的子列. 由于 $a = \sup E$, 故存在极限点 $l_1 \in (a-1, a+1)$. 因此存在邻域 $N(l_1) \subseteq (a-1, a+1)$ 包含 $\{a_n\}$ 中的无穷多项. 于是可以从中选取一项 $a_{k_1}$ 满足

$$a - 1 < a_{k_1} < a + 1.$$

同理存在极限点 $l_2 \in (a - 1/2, a + 1/2)$. 因此存在邻域 $N(l_2) \subseteq (a - 1/2, a + 1/2)$ 包含 $\{a_n\}$ 中的无穷多项. 于是可以从中选取位于 $a_{k_1}$ 之后的一项 $a_{k_2}$ 满足

$$a - \frac{1}{2} < a_{k_2} < a + \frac{1}{2}.$$

由数学归纳法可知对于任一 $n \in \mathbb{N}^*$ 都存在一项 $a_{k_n}$ $(k_n > \cdots > k_2 > k_1)$ 使得

$$a - \frac{1}{n} < a_{k_n} < a + \frac{1}{n}.$$

于是我们得到了一个数列 $\{a_{k_n}\}$. 由夹逼定理可知 $\lim_{n\to\infty} a_{k_n} = a$. 于是可知 $a \in E$.

**注** 以上命题告诉我们 $\{a_n\}$ 的上极限和下极限都是数列的极限点, 因此 $\{a_n\}$ 的上极限就是最大的极限点中最大的一个, 下极限就是最小的极限点.

由上极限和下极限的定义可以得到一个判别数列极限存在性的方法.

**命题 3.18**

设数列 $\{a_n\}$. 则 $\limsup_{n\to\infty} a_n \le \liminf_{n\to\infty} a_n$. 等号成立当且仅当 $\{a_n\}$ 有极限. ♠

**证明** 留作习题.

**注** 若要证明 $\{a_n\}$ 的极限存在, 我们只需证明 $\limsup_{n\to\infty} a_n \ge \liminf_{n\to\infty} a_n$.

下面我们给出上极限和下极限的另一种刻画方式.

**命题 3.19**

设数列 $\{a_n\}$. 令

$$E = \{a \in \overline{\mathbb{R}} \mid 对于任一\ \varepsilon > 0\ 存在\ N \in \mathbb{N}^*\ 使得当\ n > N\ 时\ a_n < a + \varepsilon\}.$$

$$F = \{a \in \overline{\mathbb{R}} \mid 对于任一\ \varepsilon > 0\ 存在\ N \in \mathbb{N}^*\ 使得当\ n > N\ 时\ a_n > a - \varepsilon\}.$$

则 $\limsup_{n\to\infty} a_n = \inf E$, $\liminf_{n\to\infty} a_n = \sup F$.

**证明** 只证明上极限的情况. 令 $\limsup_{n\to\infty} a_n = L$.

(i) 当 $\{a_n\}$ 无上界时, $L = +\infty$. 容易看出 $E = \{+\infty\}$. 因此 $\inf E = +\infty = L$.

(ii) 当 $\{a_n\}$ 有界时.

证明 "$\geq$". 只需证明 $L \in E$. 假设 $L \notin E$, 即存在 $\varepsilon > 0$ 使得对于任一 $N \in \mathbb{N}^*$ 都存在 $n > N$ 使得 $a_n \geq L + \varepsilon$. 这表明 $(L + \varepsilon, +\infty)$ 中有 $\{a_n\}$ 的无穷多项. 由 Bolzano-Weierstrass 定理可知 $(L + \varepsilon, +\infty)$ 中一定有极限点 $l > L$, 出现矛盾. 于是可知 $L \in E$.

证明 "$\leq$". 任取 $a \in E$. 假设 $a < L$. 则存在 $\varepsilon > 0$ 使得 $a + \varepsilon < L$. 此时存在 $N \in \mathbb{N}^*$ 使得当 $n > N$ 时 $a_n < a + \varepsilon$. 这表明 $(a + \varepsilon, +\infty)$ 中有 $\{a_n\}$ 的有限项, 因此 $L$ 不是极限点, 出现矛盾. 于是可知 $a \geq L$.

综合 (i)(ii) 可知 $\limsup_{n\to\infty} a_n = \inf E$.

**注** 以上命题表明: 若 $x > \limsup_{n\to\infty} a_n$, 则 $(x, +\infty)$ 中至多包含 $\{a_n\}$ 的有限项. 若 $x < \liminf_{n\to\infty} a_n$, 则 $(-\infty, x)$ 中至多包含 $\{a_n\}$ 的有限项. 有时候可以用以上命题定义数列上极限和下极限.

利用上极限和下极限的上述定义可以证明它们的保序性.

**命题 3.20 (上极限和下极限的保序性)**

设数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$. 若存在 $N \in \mathbb{N}^*$ 使得当 $n > N$ 时 $a_n \leq b_n$, 则

$$\limsup_{n\to\infty} a_n \leq \limsup_{n\to\infty} b_n. \quad \liminf_{n\to\infty} a_n \leq \liminf_{n\to\infty} b_n.$$

**证明** 只证明第一个不等式. 令 $\limsup_{n\to\infty} a_n = A$, $\limsup_{n\to\infty} b_n = B$.

(i) 当 $B = +\infty$ 或 $A = -\infty$ 时, 命题显然成立. 当 $A = +\infty$ 时, 则 $\{a_n\}$ 中存在极限为 $+\infty$ 的子列. 由于存在 $N \in \mathbb{N}^*$ 使得当 $n > N$ 时 $a_n \leq b_n$, 故 $\{a_n\}$ 中也存在极限为 $+\infty$ 的子列. 于是 $A = B$. 类似地可知当 $B = -\infty$ 时 $A = B$.

(ii) 当 $A, B \in \mathbb{R}$ 时. 假设 $A > B$. 则存在 $\varepsilon > 0$ 使得 $B + \varepsilon < A$. 由命题 (3.19) 可知 $(B + \varepsilon, +\infty)$ 中存在 $\{a_n\}$ 中的有限项. 于是 $A$ 不是 $\{a_n\}$ 的极限点, 出现矛盾. 于是可知 $A \leq B$.

前面我们从极限点的角度给出了上极限和下极限的两种等价定义. 这两种定义都是从几何角度刻画的, 因此比较直观. 但这两种定义都没有与数列 "直接挂钩" 在处理复杂问题时, 并不便利. 下面我们尝试再找一个方式描述上极限和下极限.

之前我们讲到, 研究数列极限时并不关心数列的前面有限项——-如果一个数列有极限, 去掉前面有限项不改变数列的极限值. 同样地, 对于一个没有极限的数列, 我们也可以用同样的方法去观察它的 "最终趋势". 我们尝试建立这样一个数列:

$$s_n := \sup_{k\geq n} a_k = \sup\{a_n, a_{n+1}, \cdots\}, \quad n = 1, 2, \cdots.$$

由于

$$\{a_k \mid k \geq n+1\} \subseteq \{a_k \mid k \geq n\}, \quad n = 1, 2, \cdots.$$

因此数列 $s_n$ 单调递减. 于是它的极限存在. 类似地令

$$t_n := \inf_{k\geq n} a_k = \inf\{a_n, a_{n+1}, \cdots\}, \quad n = 1, 2, \cdots.$$

则数列 $\{t_n\}$ 单调递增, 故它也有极限. 于是我们有以下结论.

**定理 3.9**

设数列 $\{a_n\}$. 则

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left(\sup_{k\geq n} a_k\right)$$

$$\liminf_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left(\sup_{k\geq n} a_k\right)$$

**证明** 只证明上极限的情况. 令 $\sup_{k\geq n} a_k = s_n$, $\limsup_{n\to\infty} a_n = L$.

(i) 当 $L=+\infty$ 时. 存在一个极限为 $+\infty$ 的子列. 因此

$$s_n = \sup\{a_n, a_{n+1}, \cdots\} = +\infty, \quad n=1,2,\cdots.$$

于是可知 $\lim_{n\to\infty} s_n = +\infty$.

(ii) 当 $L=-\infty$ 时. $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$, 故对于任一 $E>0$ 都存在 $N\in\mathbb{N}^*$ 使得当 $n>N$ 时 $a_n<-E$. 因此

$$s_N = \sup\{a_N, a_{N+1}, \cdots\} < -E, \quad n=1,2,\cdots.$$

由于 $s_n$ 单调递减, 因此当 $n>N$ 时 $s_n\leq s_N<-E$. 这表明 $\lim_{n\to\infty} s_n = -\infty$.

(iii) 当 $L\in\mathbb{R}$ 时. 任取 $\{a_n\}$ 的一个极限点 $l$ 则存在一个子列 $\{a_{k_i}\}$ 收敛于 $l$. 对于给定的 $n$ 选取 $i\geq n$, 则 $k_i\geq i\geq n$. 于是

$$a_{k_i} \leq \sup\{a_n, a_{n+1}, \cdots, a_{k_i}, \cdots\} = s_n, \quad n=1,2,\cdots.$$

令 $i\to\infty$ 得 $l\leq s_n$ $(n=1,2,\cdots)$. 再令 $n\to\infty$ 得 $l\leq \lim_{n\to\infty} s_n$. 于是 $L\leq \lim_{n\to\infty} s_n$.

由命题 (3.19) 可知, 对于任一 $\varepsilon>0$ 都存在 $N\in\mathbb{N}^*$ 使得当 $n>N$ 时 $a_n\leq L+\varepsilon$. 因此 $s_N\leq L+\varepsilon$. 由于 $s_n$ 单调递减, 因此当 $n>N$ 时 $s_n\leq s_N\leq L+\varepsilon$. 令 $n\to\infty$ 得 $\lim_{n\to\infty} s_n\leq L+\varepsilon$. 由于 $\varepsilon$ 是任一正数, 故 $L\geq \lim_{n\to\infty} s_n$. 于是可知 $L=\lim_{n\to\infty} s_n$.

**注** 上述定理可以看作上极限和下极限的第三种定义.

**注** 从上述定义可见, 上极限和下极限的符号实际上来自上述定理. 数列的上极限和下极限也可以记作 $\overline{\lim}\, a_n$ 和 $\underline{\lim}\, a_n$.

用以上定义处理关于上极限和下极限的不等式较为便利.

**命题 3.21**

设数列 $\{a_n\}$. 则

(1) $\limsup_{n\to\infty}(-a_n) = -\liminf_{n\to\infty} a_n$.

(2) $\liminf_{n\to\infty}(-a_n) = -\limsup_{n\to\infty} a_n$.

**证明** 只证明 (1). 对于集合 $E$ 我们有

$$\sup\{-x \mid x\in E\} = -\inf E.$$

故 $\sup_{n\geq k}(-a_k) = -\inf_{n\geq k} a_k$. 令 $n\to\infty$ 得 $\limsup_{n\to\infty}(-a_n) = -\liminf_{n\to\infty} a_n$.

**命题 3.22**

设数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$. 则

(1) $\liminf_{n\to\infty} a_n + \liminf_{n\to\infty} b_n \leq \liminf_{n\to\infty}(a_n+b_n) \leq \liminf_{n\to\infty} a_n + \limsup_{n\to\infty} b_n$.

(2) $\liminf_{n\to\infty} a_n + \limsup_{n\to\infty} b_n \leq \limsup_{n\to\infty}(a_n+b_n) \leq \limsup_{n\to\infty} a_n + \limsup_{n\to\infty} b_n$.

**证明** 只证明 (1). 由极限的保序性可知只需证明

$$\inf_{k\geq n} a_k + \inf_{k\geq n} b_k \leq \inf_{k\geq n}(a_k+b_k) \leq \inf_{k\geq n} a_k + \sup_{k\geq n} b_k.$$

(i) 先证明左半边. 容易知道, 当 $l \geq n$ 时 $\inf_{k\geq n} a_k \leq a_l$, $\inf_{k\geq n} b_k \leq b_l$. 因此

$$\inf_{k\geq n} a_k + \inf_{k\geq n} b_k \leq a_l + b_l \Longrightarrow \inf_{k\geq n} a_k + \inf_{k\geq n} b_k \leq \inf_{k\geq n}(a_k+b_k).$$

(ii) 再证明右半边. 由 (i) 可知

$$\inf_{k\geq n} a_k = \inf_{k\geq n}[a_k+b_k+(-b_k)] \geq \inf_{k\geq n}(a_k+b_k) + \inf_{k\geq n}(-b_k) = \inf_{k\geq n}(a_k+b_k) - \sup_{k\geq n}(b_k)$$
$$\Longrightarrow \inf_{k\geq n}(a_k+b_k) \leq \inf_{k\geq n} a_k + \sup_{k\geq n} b_k.$$

■

**推论 3.2**

设数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$, 若 $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, 则

(1) $\liminf_{n\to\infty}(a_n+b_n) = a + \liminf_{n\to\infty} b_n$.

(2) $\limsup_{n\to\infty}(a_n+b_n) = a + \limsup_{n\to\infty} b_n$.

♡

**证明** 只证明 (1). 由于 $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, 故 $\limsup_{n\to\infty} a_n = \liminf_{n\to\infty} a_n = a$. 由命题 (3.22) 可知

$$\liminf_{n\to\infty}(a_n+b_n) \geq \liminf_{n\to\infty} a_n + \liminf_{n\to\infty} b_n = a + \liminf_{n\to\infty} b_n.$$

另一方面

$$\liminf_{n\to\infty} b_n \geq \liminf_{n\to\infty}(-a_n) + \liminf_{n\to\infty}(a_n+b_n) = -a + \liminf_{n\to\infty}(a_n+b_n)$$
$$\Longrightarrow \liminf_{n\to\infty}(a_n+b_n) \leq a + \liminf_{n\to\infty} b_n.$$

于是可知 $\liminf_{n\to\infty}(a_n+b_n) = a + \liminf_{n\to\infty} b_n$. ■

**命题 3.23**

设非负数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$. 则

(1) $(\liminf_{n\to\infty} a_n)(\liminf_{n\to\infty} b_n) \leq \liminf_{n\to\infty}(a_nb_n)$.

(2) $\limsup_{n\to\infty}(a_nb_n) \leq (\limsup_{n\to\infty} a_n)(\limsup_{n\to\infty} b_n)$.

♠

**证明** 只证明 (1). 容易知道, 当 $l \geq n$ 时 $\inf_{k\geq n} a_k \leq a_l$, $\inf_{k\geq n} b_k \leq b_l$. 由于 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 非负, 因此

$$\left(\inf_{k\geq n} a_k\right)\left(\inf_{k\geq n} b_k\right) \leq a_l b_l \Longrightarrow \left(\inf_{k\geq n} a_k\right)\left(\inf_{k\geq n} b_k\right) \leq \inf_{k\geq n}(a_kb_k).$$

令 $n\to\infty$ 得 $(\liminf_{n\to\infty} a_n)(\liminf_{n\to\infty} b_n) \leq \liminf_{n\to\infty}(a_nb_n)$. ■

**命题 3.24**

设数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$, 若 $\{a_n\}$ 是一个非负数列且 $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, 则

(1) $\liminf_{n\to\infty}(a_nb_n) = a\liminf_{n\to\infty} b_n$

(2) $\limsup_{n\to\infty}(a_nb_n) = a\limsup_{n\to\infty} b_n$

♠

**证明** 留作习题.

我们已经看到任一数列总是有上极限和下极限的. 所以利用上极限和下极限可以简化处理问题的过程. 下面我们将看到上极限和下极限在证明 “Cauchy 收敛准则” 和 “Stolz 定理” 时的应用.

### 3.2.5 Cauchy 收敛准则

以上我们介绍了两种极限判别法. 单调有界定理的条件太强了, 它只是数列收敛的充分条件, 而非必要条件. 下面给出一个极限收敛的充要条件.

**定义 3.15 (Cauchy 列)**

设数列 $\{a_n\}$. 若对于任意 $\varepsilon > 0$, 都存在 $N \in \mathbb{N}$, 使得当 $n > N$ 时

$$|a_m - a_n| < \varepsilon.$$

则称该数列是一个 **Cauchy** 列 (Cauchy sequence) 或**基本列** (fundamental sequence). ♣

**定理 3.10 (数列的 Cauchy 收敛准则)**

一个数列收敛当且仅当它是一个 Cauchy 列. ♡

**证明** (i) 证明必要性. 若数列 $\{a_n\}$ 收敛于 $a \in \mathbb{R}$, 则对于任一 $\varepsilon > 0$ 都存在 $N \in \mathbb{N}^*$, 使得当 $n, m > N$ 时

$$|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad |a_m - a| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

于是可知

$$|a_m - a_n| < |a_n - a| + |a_m - a| < \varepsilon.$$

于是可知 $\{a_n\}$ 是一个 Cauchy 列.

(ii) 证明充分性. 若数列 $\{a_n\}$ 是一个 Cauchy 列, 则对于任一 $\varepsilon > 0$ 都存在 $N \in \mathbb{N}^*$, 使得当 $n \geq N$ 时

$$|a_n| - |a_N| < |a_n - a_N| < \varepsilon \Longrightarrow |a_n| < |a_N| + \varepsilon.$$

令 $M = \max(|a_1|, |a_2|, \cdots, |a_{N-1}|, |a_N| + \varepsilon)$. 则对于任意 $n \in \mathbb{N}^*$ 都有 $|a_n| \leq M$. 因此 $\{a_n\}$ 有界.

另一方面, 由于 $\{a_n\}$ 是一个 Cauchy 列, 则对于任一 $\varepsilon > 0$ 都存在 $N \in \mathbb{N}^*$, 使得当 $n \geq N$ 时

$$|a_n - a_N| < \varepsilon \iff a_N - \varepsilon < a_n < a_N + \varepsilon.$$

对以上不等式的左半部分取下极限, 对右半部分取上极限可得

$$a_N - \varepsilon \leq \liminf_{n\to\infty} a_n \leq \limsup_{n\to\infty} a_n \leq a_N + \varepsilon.$$

由于 $\varepsilon$ 是任一小的正数, 故

$$a_N \leq \liminf_{n\to\infty} a_n \leq \limsup_{n\to\infty} a_n \leq a_N \Longrightarrow \liminf_{n\to\infty} a_n = \limsup_{n\to\infty} a_n.$$

因此 $\{a_n\}$ 极限存在. 由于 $\{a_n\}$ 有界, 于是可知 $\{a_n\}$ 收敛. ■

**注** 以上命题称为 **Cauchy 收敛准则** (Cauchy Convergence Criterion). 这种判别收敛的思想今后还会出现.Cauchy 收敛准则是第 7 个刻画实数域完备性的定理.

若要用 Cauchy 收敛准则证明数列发散, 只需证明.

$$\exists \varepsilon > 0,\ \forall N \in \mathbb{N}^*,\ \exists m, n > N,\ |a_m - a_n| \geq \varepsilon.$$

我们用这个方法再来证明调和级数发散.

**例 3.9 调和级数** 数列 $a_n = 1 + 1/2 + 1/3 + \cdots + 1/n\ (n = 1, 2, \cdots)$ 发散.

**证明** $\boxed{\text{证法二}}$ 注意到

$$|a_{2n} - a_n| = a_{2n} - a_n = \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n} \geq \underbrace{\frac{1}{2n} + \cdots + \frac{1}{2n}}_{n\ 个} = \frac{1}{2}, \quad n = 1, 2, \cdots.$$

因此只需取 $\varepsilon = 1/2 > 0$. 则对于任一 $N \in \mathbb{N}^*$ 都存在 $N+1, 2(N+1) > N$ 满足

$$|a_{2(N+1)} - a_{N+1}| = |a_{2n} - a_n| \geq \frac{1}{2} = \varepsilon.$$

由 Cauchy 收敛准则可知 $\{a_n\}$ 是发散的. ■

## 3.3 数列未定式的定值法

### 3.3.1 Stolz 定理

当我们有了数列极限的运算法则后,大部分的数列极限都可以容易地计算出来.但未定式是无法使用这种方法计算极限.下面我们来讨论这个问题.

设数列 $a_n = n/2^n$ $(n = 1, 2, \cdots)$, 它是一个 $\infty/\infty$ 型的未定式. 目前我们只能用极限的定义来求它的极限.

**例 3.10** 求极限: $\lim_{n\to\infty} n/2^n = 0$.

**证明** 由于

$$\left|\frac{n}{2^n}\right| = \frac{n}{2^n} = \frac{n}{(1+1)^n} = \frac{n}{1+n+\dfrac{n(n-1)}{2}+\cdots+n+1} < \frac{n}{1+n+\dfrac{n(n-1)}{2}} = \frac{2}{n+1+\dfrac{2}{n}} \to 0.$$

这表明 $\lim_{n\to\infty} n/2^n = 0$.

现在我们希望探索另一种计算以上类型极限的方法. 从直观上看, 虽然 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 都趋向 $+\infty$, 但 "趋向 $+\infty$ 的速度" 不一样. 于是我们需要一个定量刻画数列变化率的方法.

考察数列 $\{a_n\}$ 的第 $n$ 项到第 $m$ 项的变化情况. 其中 $m-n$ 称为**步长** (step). $a_m - a_n$ 称为**差分** (difference). 容易想到要比较 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$"增长速度", 只需比较单位步长内的差分, 即

$$\frac{a_m - a_n}{m-n}.$$

我们把它称为 $m-n$ 阶**差商** (difference quotient). 数列的差商描述了数列的 "平均变化率". 当步长逐渐减小时, 差商所描述的 "变化率" 越 "精细". 因此我们考虑用一阶差商 (等于一阶差分, 也就是相邻两项的差) 来刻画数列 "趋向 $+\infty$ 的速度". 我们看到

$$a_n - a_{n-1} = n - (n-1) = 1, \quad n = 1, 2, \cdots.$$
$$b_n - b_{n-1} = 2^n - 2^{n-1} = 2^{n-1}, \quad n = 1, 2, \cdots.$$

这表明 $\{a_n\}$ 是 "匀速地趋向 $+\infty$", 而 $\{b_n\}$ 是 "越来越快地趋向 $+\infty$". 考虑它们 "趋向 $+\infty$ 的速度" 之比 (它也是一个数列). 我们发现

$$\frac{a_n - a_{n-1}}{b_n - b_{n-1}} = \frac{1}{2^{n-1}} \to 0.$$

以上例子表明, 当两个无穷大的一阶差分之比收敛于零时, 这两个数列之比也收敛于零. 这样我们就找到了一个计算 $\infty/\infty$ 型的未定式的统一方法. 下面我们来验证这个想法.

**定理 3.11 (Stolz-Cesáro 定理)**

设数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$, 其中 $\{b_n\}$ 严格递增, 且 $\lim_{n\to\infty} b_n = +\infty$. 若

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n - a_{n-1}}{b_n - b_{n-1}} = a \in \overline{\mathbb{R}}. \tag{3.3}$$

则 $\lim_{n\to\infty} a_n/b_n = a$.

**证明** (i) 当 $a = \mathbb{R}$ 时. 由于等式 (3.4) 可知, 对于任一 $\varepsilon$, 存在 $N \in \mathbb{N}^*$ 使得当 $n \geq N$ 时

$$a - \varepsilon < \frac{a_n - a_{n-1}}{b_n - b_{n-1}} < a + \varepsilon.$$

因此

$$a - \varepsilon < \frac{a_N - a_{N-1}}{b_N - b_{N-1}} < a + \varepsilon.$$
$$a - \varepsilon < \frac{a_{N+1} - a_N}{b_{N+1} - b_N} < a + \varepsilon.$$
$$\cdots$$

$$a-\varepsilon<\frac{a_n-a_{n-1}}{b_n-b_{n-1}}<a+\varepsilon.$$

由于 $\{b_n\}$ 严格递增, 故 $b_n-b_{n-1}>0$ $(n=2,3,\cdots)$. 于是

$$a-\varepsilon<\frac{a_n-a_{N-1}}{b_n-b_{N-1}}<a+\varepsilon. \tag{3.4}$$

由于 $b_n\to+\infty$, 故 $n$ 充分大之后 $b_n\neq0$. 于是

$$a-\varepsilon<\frac{\frac{a_n}{b_n}-\frac{a_{N-1}}{b_n}}{1-\frac{b_{N-1}}{b_n}}<a+\varepsilon \iff (a-\varepsilon)\left(1-\frac{b_{N-1}}{b_n}\right)+\frac{a_{N-1}}{b_n}<\frac{a_n}{b_n}<(a+\varepsilon)\left(1-\frac{b_{N-1}}{b_n}\right)+\frac{a_{N-1}}{b_n}.$$

由于 $b_n\to+\infty$, 对以上不等式的左半部分取下极限, 右半部分取上极限可得

$$a-\varepsilon\le\liminf_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}\le\limsup_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}\le a+\varepsilon.$$

由于 $\varepsilon$ 是任一正数, 故

$$a\le\liminf_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}\le\limsup_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}\le a.$$

于是可知 $\lim_{n\to\infty}a_n/b_n=a$.

(ii) 当 $a=+\infty$ 时. 由于等式 (3.4) 可知故当 $n$ 充分大时

$$a_n-a_{n-1}>b_n-b_{n-1}>0.$$

故当 $n$ 充分大时 $\{a_n\}$ 严格递增. 由于

$$\lim_{n\to\infty}\frac{b_n-b_{n-1}}{a_n-a_{n-1}}=0$$

由 (i) 的结论可知 $\lim_{n\to\infty}b_n/a_n=0$. 于是可知 $\lim_{n\to\infty}a_n/b_n=+\infty$.

(iii) 当 $a=-\infty$ 时. 令 $c_n=-a_n$. 则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{c_n-c_{n-1}}{b_n-b_{n-1}}=-\lim_{n\to\infty}\frac{a_n-a_{n-1}}{b_n-b_{n-1}}=+\infty.$$

由 (ii) 的结论可知 $\lim_{n\to\infty}c_n/a_n=+\infty$. 于是可知 $\lim_{n\to\infty}a_n/b_n=-\infty$.

注 以上证明过程中, 推得不等式 (3.4) 是根据以下结论. 设分数 $a_1/b_1, a_2/b_2,\cdots,a_n/b_n$ 满足

$$\frac{a_1}{b_1}\le\frac{a_2}{b_2}\le\cdots\le\frac{a_n}{b_n},$$

其中 $a_1,a_2,\cdots,a_n\in\mathbb{Z}$, $b_1,b_2,\cdots,b_n\in\mathbb{Z}$ 则

$$\frac{a_1}{b_1}\le\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{b_1+b_2+\cdots+b_n}\le\frac{a_n}{b_n}.$$

注 以上定理的证明分别于 1885 年和 1888 年被 Stolz 和 Cesáro 独立发表. 因此通常称为 Stolz 定理.

注 我们看到上极限和下极限在定理的证明过程中起了关键作用.

注 在函数极限中我们还会遇到未定式, 那里我们将使用 **L'Hospital 法则** (L'Hospital's rule), 届时我们会发现 L'Hospital 法则和 Stolz 定理在形式上的奇妙联系.

需要注意 Stolz 定理的逆命题是不成立的. 举例说明. 设数列

$$a_n=n+(-1)^n,\quad b_n=n.$$

则 $a_n/b_n\to1$. 但数列 $\{(a_n-a_{n-1})/(b_n-b_{n-1})\}$ 不收敛.

下面我们分别用极限的定义和 Stolz-Cesáro 定理两种方法计算一个 $\infty/\infty$ 型未定式的极限.

**命题 3.25 (Cauchy 命题)**

设数列 $\{a_n\}$ 收敛于 $a$. 令

$$b_n=\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n},\quad n=1,2,\cdots.$$

则 $\lim_{n\to\infty}b_n=a$.

**证明** $\boxed{\text{证法一}}$ (i) 当 $a=0$ 时. 对于任一 $\varepsilon>0$ 存在 $N\in\mathbb{N}$, 当 $n>N$ 时 $|a_n|<\varepsilon/2$. 对于给定的 $N$, 存在正整数 $N_1>N$ 使得当 $n>N_1$ 时

$$\frac{|a_1|+|a_2|+\cdots+|a_N|}{n}<\frac{\varepsilon}{2}.$$

于是当 $n>N_1>N$ 时

$$\begin{aligned}|b_n|&=\left|\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\right|=\frac{|a_1+a_2+\cdots+a_N+a_{N+1}+\cdots+a_n|}{n}\\&\leq\frac{|a_1+a_2+\cdots+a_N|}{n}+\frac{|a_{N+1}|+\cdots+|a_n|}{n}<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{n-N}{n}\cdot\frac{\varepsilon}{2}<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.\end{aligned}$$

于是可知 $\lim_{n\to\infty}b_n=0$.

(ii) 当 $a\neq 0$ 时. 令 $\alpha_n=a_n-a\ (n=1,2,\cdots)$. 则 $\lim_{n\to\infty}\alpha_n=0$. 由 (i) 可知

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n}{n}=0.$$

由于

$$b_n-a=\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}-a=\frac{(a_1-a)+(a_2-a)+\cdots+(a_n-a)}{n}=\frac{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n}{n},\quad n=1,2,\cdots.$$

因此 $\lim_{n\to\infty}(b_n-a)=0$. 于是可知 $\lim_{n\to\infty}b_n=a$.

$\boxed{\text{证法二}}$ 令 $\alpha_n=a_1+a_2+\cdots+a_n$, $b_n=n\ (n=1,2,\cdots)$. 则

$$\frac{\alpha_n-\alpha_{n-1}}{b_n-b_{n-1}}=\frac{a_n}{1}\to a.$$

由 Stolz 定理可知 $\lim_{n\to\infty}\alpha_n/b_n=a$. ■

### 3.3.2 Toeplitz 定理

下面我们从 Cauchy 命题出发来探索 Stolz 定理的另一种证法. 观察 Cauchy 命题我们发现, 数列 $\{a_n\}$ 经历了一种独特的“变换”. 这种“变换”可以保持 $\{a_n\}$ 的极限值不变. 我们尝试把这种“变换”的特点抽象出来.

设无限下三角矩阵 $\boldsymbol{T}=(t_{nk})\ (n,k=1,2,\cdots)$. 若它满足

(1) 对任意 $n,k\in\mathbb{N}^*$ 都有 $t_{nk}\geq 0$.

(2) 对于任一 $n\in\mathbb{N}^*$ 都有 $\sum_{k=1}^{n}t_{nk}=1$.

(3) 对于任一 $k\in\mathbb{N}^*$ 都有 $\lim_{n\to\infty}t_{nk}=0$.

则称 $\boldsymbol{T}$ 为一个 **Toeplitz 矩阵** (Toeplitz matrix). 设数列 $\{a_n\}$, 令

$$b_n=\sum_{k=1}^{n}t_{nk}a_n.$$

我们称以上变换为关于 $\boldsymbol{T}$ 的 **Toeplitz 变换** (Toeplitz transformation).

设 Toeplitz 矩阵 $\boldsymbol{T}_1=(t_{nk})$, 令它形如

$$\boldsymbol{T}_1=\begin{bmatrix}1&&&&\\\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&&&\\\vdots&\vdots&\ddots&&\\\frac{1}{n}&\frac{1}{n}&\cdots&\frac{1}{n}&\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\ddots\end{bmatrix}.\tag{3.5}$$

容易看出 Cauchy 命题中的 $\{b_n\}$ 是由 $\{a_n\}$ 经过关于 $\boldsymbol{T}_1$ 的 Toeplitz 变换而来的. 于是我们希望把 Cauchy 命题推广到一般情况. 证明方法完全类似于 Cauchy 命题的证法一.

**定理 3.12 (Silverman-Toeplitz 定理)**

设 Toeplitz 矩阵 $\boldsymbol{T} = (t_{nk})$ 和数列 $\{a_n\}$. 令

$$b_n = \sum_{k=1}^{n} t_{nk} a_n.$$

若 $\lim_{n\to\infty} a_n = a \in \mathbb{R}$, 则 $\lim_{n\to\infty} b_n = a$.

**证明** (i) 当 $a = 0$ 时. 由于 $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, 故对于任一 $\varepsilon > 0$ 都存在 $N \in \mathbb{N}^*$ 使得当 $n > N$ 时 $|a_n| < \varepsilon/2$. 对于给定的 $N$, 由于 $\lim_{n\to\infty} t_{nk} = 0\ (k = 1, 2, \cdots)$. 故

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{N} t_{nk}|a_k| = 0.$$

因此对于上取定的 $\varepsilon$, 存在正整数 $N_1 > N$ 使得当 $n > N_1$ 时

$$\sum_{k=1}^{N} t_{nk}|a_k| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

于是当 $n > N_1 > N$ 时

$$|b_n| = \left|\sum_{k=1}^{n} t_{nk} a_n\right| \leq \sum_{k=1}^{n} t_{nk}|a_n| = \sum_{k=1}^{N} t_{nk}|a_k| + \sum_{k=N+1}^{n} t_{nk}|a_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}\sum_{k=N+1}^{n} t_{nk} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}\sum_{k=1}^{n} t_{nk} = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

于是可知 $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$.

(ii) 当 $a \neq 0$ 时. 令 $\alpha_n = a_n - a\ (n = 1, 2, \cdots)$. 则 $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0$. 由 (i) 可知

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} t_{nk}\alpha_n = 0.$$

由于 $\sum_{k=1}^{n} t_{nk} = 1\ (n = 1, 2, \cdots)$. 故

$$b_n - a = \sum_{k=1}^{n} t_{nk} a_n - a = \sum_{k=1}^{n} t_{nk} a_n - \sum_{k=1}^{n} t_{nk} a = \sum_{k=1}^{n} t_{nk}(a_n - a) = \sum_{k=1}^{n} t_{nk}\alpha_n, \quad n = 1, 2, \cdots.$$

因此 $\lim_{n\to\infty}(b_n - a) = 0$. 于是可知 $\lim_{n\to\infty} b_n = a$. ■

由 Silverman-Toeplitz 定理可以证明 Stolz 定理.

**证明** 证法二 令 $a_0 = b_0 = 0$. 下面来构造一个 Toeplitz 矩阵. 设矩阵 $\boldsymbol{T} = (t_{nk})$. 令

$$t_{nk} = \frac{b_k - b_{k-1}}{b_n}.$$

显然满足

$$\sum_{k=1}^{n} t_{nk} = 1, \quad n = 1, 2, \cdots. \quad \lim_{n\to\infty} t_{nk} = 0, \quad k = 1, 2, \cdots.$$

因此 $\boldsymbol{T}$ 是一个 Toeplitz 矩阵. 令

$$x_n = \frac{a_n - a_{n-1}}{b_n - b_{n-1}}, \quad n = 1, 2, \cdots.$$

则

$$\sum_{k=1}^{n} t_{nk} x_k = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{b_k - b_{k-1}}{b_n} \cdot \frac{a_k - a_{k-1}}{b_k - b_{k-1}}\right) = \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k - a_{k-1}}{b_n} = \frac{a_n}{b_n}, \quad n = 1, 2, \cdots.$$

由于 $\lim_{n\to\infty} x_n = a$, 由 Silverman-Toeplitz 定理可知

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} x_n = a.$$ ■

用类似的方法可以证明 0/0 型的 Stolz 定理.

**定理 3.13**

设数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$, 其中 $\{b_n\}$ 严格递增, 且 $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = 0$. 若

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n - a_{n-1}}{b_n - b_{n-1}} = a \in \overline{\mathbb{R}},$$

则 $\lim_{n\to\infty} a_n/b_n = a$.

**证明** 留作习题.

不难证明 Stolz 定理更一般化的一种表述.

**定理 3.14 (Stolz-Cesáro 定理)**

设序列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$, 若 $\{b_n\}$ 严格递增, 则

$$\liminf \frac{a_n - a_{n-1}}{b_n - b_{n-1}} \le \liminf \frac{a_n}{b_n} \le \limsup \frac{a_n}{b_n} \le \limsup \frac{a_n - a_{n-1}}{b_n - b_{n-1}}.$$

**证明** 留作习题.

对于未定义 $a_n/b_n$, 若 $(a_n - a_{n-1})/(b_n - b_{n-1})$ 依旧是未定式, 我们可以令 $a_n = a_n - a_{n-1}$, $b_n = b_n - b_{n-1}$, 然后考虑 $(a_n - a_{n-1})/(b_n - b_{n-1})$ 是否有极限. 然后连续用两次 Stolz 定理. 下面举个例子.

**例 3.11** 设数列

$$a_n = \frac{\ln \mathrm{C}_n^1 + \ln \mathrm{C}_n^2 + \cdots + \ln \mathrm{C}_n^n}{n^2}, \quad n = 1, 2, \cdots.$$

求 $\lim_{n\to\infty} a_n$.

**解** 令 $a_n = \ln \mathrm{C}_n^1 + \ln \mathrm{C}_n^2 + \cdots + \ln \mathrm{C}_n^n$, $b_n = n^2$ $(n = 1, 2, \cdots)$. 则

$$\frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} = \frac{\left(\ln \mathrm{C}_{n+1}^1 + \ln \mathrm{C}_{n+1}^2 + \cdots + \ln \mathrm{C}_{n+1}^{n+1}\right) - \left(\ln \mathrm{C}_n^1 + \ln \mathrm{C}_n^2 + \cdots + \ln \mathrm{C}_n^n\right)}{(n+1)^2 - n^2}$$

$$= \frac{\ln \dfrac{\mathrm{C}_{n+1}^1 \mathrm{C}_{n+1}^2 \cdots \mathrm{C}_n^{n+1} \mathrm{C}_{n+1}^{n+1}}{\mathrm{C}_n^1 \mathrm{C}_n^2 \cdots \mathrm{C}_n^n}}{2n+1} = \frac{\ln \dfrac{(n+1)^n}{n!}}{2n+1}. \quad n = 1, 2, \cdots$$

令 $c_n = \ln\left[(n+1)^n/n!\right]$, $d_n = 2n+1$ $(n = 1, 2, \cdots)$. 则

$$\frac{c_n - c_{n-1}}{d_n - d_{n-1}} = \frac{\ln \dfrac{(n+1)^n}{n!} - \ln \dfrac{n^{n-1}}{(n-1)!}}{(2n+1) - (2n-1)} = \frac{\ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n}{2} \to \frac{1}{2}.$$

连续用两次 Stolz 定理可知

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} = \frac{c_n - c_{n-1}}{d_n - d_{n-1}} = \frac{1}{2}. \qquad \blacksquare$$

**注** 以上解法中的

$$\frac{\ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n}{2} \to \frac{1}{2}$$

需要用到函数极限的知识. 暂时无法给出严格证明.

## 3.4 实数的连续性命题

自然数集通过减法运算可以得到整个整数集; 整数集通过除法运算可以得到整个有理数集; 有理数集通过开方运算可以得到一些无理数, 但得到的仅仅是代数数, 它们在实数集中的数量几乎忽略不计, 像 $\pi$, e, sin 1 等超越数是无法通过开方运算得到的, 也就是说单纯地通过代数运算无法得到任意一个实数.

研究实数集的有效方法是用极限"逼近". 有理数通过极限过程可以得到整个实数集. 这就是为什么我们需要通过序列的极限来研究实数的性质. 而复数集不过是实数集的一个 Cartesian 积. 所以所有数集中, 最难以琢磨是实数集, 整个分析学的大厦可以说是从研究实数集开始的, 而且一直贯穿始终,20 世纪初才构建起的实变函数理论, 本质上是在对实数集性质的进一步探索. 而至今为止, 我们对实数集中占绝大多数的超越数依旧知之甚少, 号称专门研究自然数 (特别是素数) 的数论, 其中遗留的大量猜想, 事实上也无法绕开实数来解开. 直到现在, 我们对实数集的认识依旧是肤浅的, 在未来很长一段时间, 对实数集的进一步研究依旧是数学的重要课题.

实数集和有理数集相比, 最大的不同是实数集是连续的 (完备的). 事实上, 我们在前一章已经得到了揭示实数连续性的定理, 在本章我们利用序列又得到一些定理, 它们从不同角度说明了实数的连续性. 在此我们将介绍最后一条说明实数连续性的重要定理.

开覆盖 (open covering) 有限覆盖 (finite covering) 子覆盖 (subcovering) 有限覆盖定理 (finite covering theorem) (Borel-Lebesgue 定理) (Heine–Borel 定理)

**定理 3.15 (有限覆盖定理 (Heine–Borel 定理))**

sdfa

**证明** XXX

下面我们来说明前述七个定理的关系.

**定理 3.16 (实数的连续性命题)**

以下七个定理称为**实数的连续性命题** (proposition of real numbers continuity), 它们彼此等价.

1. Dedekind 定理: Dedekind 分割 A/B 中, 要么 A 中有最大数, 要么 B 中有最小数, 两者必居其一.
2. 确界原理: 非空数集有上 (下) 界, 则必有上 (下) 确界.
3. 单调收敛定理: 单调有界序列必收敛.
4. 闭区间套定理: 有闭区间套列, 且后一个总包含前一个, 若闭区间长度趋于零, 则闭区间两端点趋向于同一极限, 它即是所有闭区间的唯一公共点.
5. Heine–Borel 定理 (有限覆盖定理): 闭区间上的任意一个开覆盖中, 必存在有限个开区间来覆盖这个闭区间.
6. Bolzano–Weierstrass 定理 (列紧性定理): 有界序列必有收敛子列.
7. Cauchy 收敛准则: 序列收敛的充要条件是其为柯西序列.

**证明** 由前面内容我们可以将以上七个定理的证明逻辑串联如下

$$1 \iff 2 \Rightarrow 3 \Rightarrow 4 \Rightarrow 5 \Rightarrow 6 \Rightarrow 7 \Rightarrow 8 \Rightarrow 2$$

由此可见, 它们彼此等价.

**注** 以上七个命题从不同角度, 用不同模型等价地刻画了实数域的完备性. 反过来也可以通过其中的任意一个命题出发构建实数集, 我们可以用一个戴德金分割来定义一个实数, 也可以用一个基本列来定义一个实数, 也可以通过一个闭区间套定一个实数等等.

**注** Archimedean 公理 (Archimedean axiom)

**注** 一个序列存在至少一个极限点. 这个性质称为序列的**列紧性** (sequential compactness), 所以上述定理也称为**列紧性定理** (sequential compactness theorem).

**紧性** (compactness)

# 第 4 章 函数的连续性

**内容提要**

- 本章将介绍将开始研究数学分析的主要对象——--连续函数. 而函数的连续性是通过极限定义的.
- 通过 Heine 定理我们可以将函数极限的问题转化为数列极限的问题. 于是可以容易地得到一大批与数列极限类似的结论.
- 最后我们将介绍 ‘‘一致连续’’ 的概念.

## 4.1 函数的极限

### 4.1.1 函数极限的概念

微积分中的两个核心概念——--微分和积分都是用函数的极限定义的. 下面我们就来讨论函数极限的概念.

我们已经学会了用 $\varepsilon - N$ 语言来定义数列的极限. 我们可以类比数列极限的定义来定义函数极限. 设极限为 $a$ 的数列 $\{a_n\}$. 我们把它列看作定义域为正整数集 $\mathbb{N}^*$ 的函数. 我们考虑用如下方式描述它的极限: 对于 $a$ 的任一邻域 $N_\varepsilon(a)$ 总存在一个 $+\infty$ 的邻域 $N_N(+\infty)$ 使得 $N_\delta(+\infty)$ 在这个函数下的值域包含于 $N_\varepsilon(a)$.

于是我们可以用这个方式来定义函数的极限.

**定义 4.1 (函数的极限)**

如图4.1所示, 设函数 $f(x)$ 在 $x_0$ 的一个去心邻域 $\check{N}_r(x_0)$ 有定义. 若对于 $a$ 的任一邻域 $N_\varepsilon(a)$, 都存在 $x_0$ 的一个去心邻域 $\check{N}_\delta(x_0)$ 使得 $f\left(\check{N}_\delta(x_0)\right) \subseteq N_\varepsilon(a)$. 则称当 $x \to x_0$ 时函数 $f(x)$ 在 $x_0$ 处的极限是 $a$, 记作

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = a \quad \text{或} \quad f(x) \to a \ (x \to x_0).$$

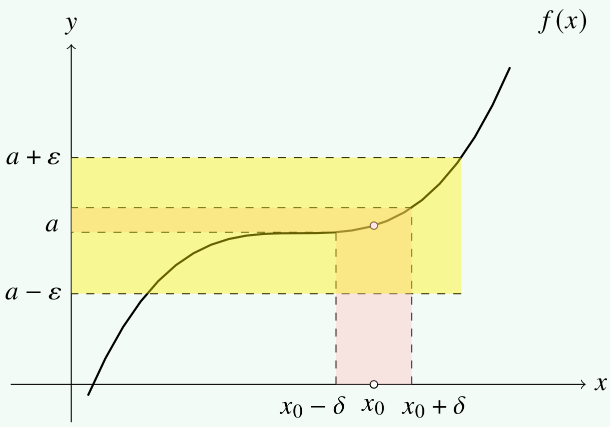



图 4.1: 用邻域的观点刻画函数的极限.

注 以上定义中, 不要求函数在 $x_0$ 处有定义.

注 函数 $f(x)$ 的极限是一个 ‘‘局部概念’’, 因此讨论 $x \to x_0$ 时的极限只需 $f(x)$ 在 $x_0$ 的 ‘‘附近’’ 有定义.

注 我们也可以用 $\varepsilon - \delta$ 语言刻画函数的极限. 函数 $f(x)$ 在 $x_0$ 处的极限是 $a$ 当且仅当对于任一 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$ 使得当 $x$ 满足 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时都有 $|f(x) - a| < \varepsilon$, 即

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ 0 < |x - x_0| < \delta,\ |f(x) - a| < \varepsilon.$$

以上 $\delta$ 是依赖于 $\varepsilon$ 而确定的, 因此我们可以把 $\delta$ 写成 $\delta(\varepsilon)$ 或 $\delta_\varepsilon$, 但这并不表示 $\delta$ 是 $\varepsilon$ 的函数.

下面我们用函数极限的定义看一种重要的极限.

**例 4.1** 求证: $\lim_{x\to 0} x\sin(1/x) = 0$.

**证明** 显然函数 $x\sin(1/x)$ 在 0 的邻域有定义. 对于任一 $\varepsilon > 0$ 取 $\delta = \varepsilon$. 当 $|x| < \delta$ 时

$$\left|x\sin\frac{1}{x} - 0\right| = \left|x\sin\frac{1}{x}\right| \le |x| < \delta = \varepsilon.$$

于是可 $\lim_{x\to 0} x\sin(1/x) = 0$. ■

函数极限定义中的极限过程 $x \to x_0$ 是指自变量从左右两侧趋近 $x_0$. 事实上从单侧趋近 $x_0$ 时, 也可以定义函数的极限.

**定义 4.2 (左邻域和右邻域)**

给定 $a \in \mathbb{R}$. 令

$$N_r^-(a) := (a-r, a), \quad N_r^+(a) := (a, a+r).$$

我们称 $N_r^-(a)$ 为以 $a$ 点为中心, $r$ 为半径的**左邻域** (left neighbourhood); 称 $N_r^+(a) := (a, a+r)$ 为以 $a$ 点为中心, $r$ 为半径的**右邻域** (right neighbourhood).

♣

**定义 4.3 (单侧极限)**

设函数 $f(x)$ 在 $x_0$ 的左邻域 $N^-(x_0)$ 有定义. 若对于任一 $\varepsilon > 0$ 存在 $\delta > 0$ 使得当 $x \in N_\delta^-(x_0)$ 时 $f(x) \in N_\varepsilon(a)$. 则称 $f(x)$ 在 $x_0$ 出的**左极限** (left limit) 是 $a$, 记作

$$\lim_{x\to x_0-} f(x) = a \quad 或 \quad f(x_0-) = a.$$

设实函数 $f(x)$ 在 $x_0$ 的右邻域 $N^+(x_0)$ 有定义. 若对于任一 $\varepsilon > 0$ 存在 $\delta > 0$ 使得当 $x \in N_\delta^+(x_0)$ 时 $f(x) \in N_\varepsilon(a)$. 则称 $f(x)$ 在 $x_0$ 出的**右极限** (right limit) 是 $a$, 记作

$$\lim_{x\to x_0+} f(x) = a \quad 或 \quad f(x_0+) = a.$$

函数的左极限和右极限统称为函数的**单侧极限** (one-sided limit).

♣

**注** 需要注意符号 $f(x_0-)$ 和 $f(x_0+)$ 不表示 $f(x)$ 在 $x_0$ 处的函数值. $f(x)$ 在 $x_0$ 处未必有定义, 即使有定义 $f(x_0)$, $f(x_0-)$ 和 $f(x_0+)$ 三者之间也可以两两不等. 举例说明: 设函数

$$f(x) = \begin{cases} -1 & x < 0 \\ 0 & x = 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases}.$$

此时 $f(0) = 0$, $f(0-) = -1$ 和 $f(0+) = 1$.

**命题 4.1**

设函数 $f(x)$ 在 $\check{N}(x_0)$ 有定义. 则 $f(x)$ 在 $x_0$ 处有极限当且仅当

$$\lim_{x\to x_0-} f(x) = \lim_{x\to x_0+} f(x).$$

♠

**证明** 证明略.

下面看一个单侧极限的例子.

**例 4.2** 求极限: $\lim_{x\to 0}(\sin x)/x = 1$.

**解** 令 $f(x) = (\sin x)/x$. 显然 $f(x)$ 在 0 的邻域有定义. 先证明 $f(0+) = 1$. 当 $x \in (0, \pi/2)$ 时有

$$\sin x < x < \tan x \iff \frac{1}{\sin x} > \frac{1}{x} > \frac{1}{\tan x} \iff 1 > \frac{\sin x}{x} > \cos x \iff 0 < 1 - \frac{\sin x}{x} < 1 - \cos x.$$

由于

$$0<1-\cos x<2\sin^2\frac{x}{2}<\frac{x^2}{2}<\frac{\pi}{4}x.$$

因此对于任一 $\varepsilon>0$ 可取 $\delta=\min\{\pi/2,4\varepsilon/\pi\}$. 当 $x\in(0,\delta)$ 时

$$0<1-\frac{\sin x}{x}<\frac{\pi}{4}x<\frac{\pi}{4}\delta\le\varepsilon.$$

这表明 $f(0+)=1$. 容易验证 $f(x)$ 是一个偶函数, 因此 $f(0-)=1$. 于是可知 $\lim_{x\to0}(\sin x/x)=1$. ■

**注**以上证明中用到了重要不等式 $\sin\alpha<\alpha<\tan\alpha$, 其中 $\alpha\in(0,\pi/2)$. 我们可以用面积法证明这个不等式. 如图4.2所示, 作单位圆 $O$ 交 $x$ 轴于 $A$. 以 $OA$ 为始边, 作大小为 $\alpha$ 的第一象限角交单位圆于 $B$. 过 $A$ 作 $x$ 轴的垂线交 $OB$ 延长线于 $C$. 容易看出

$$S_{\triangle AOB}<S_{\text{扇形 }OAB}<S_{\triangle AOC}\iff\frac{1}{2}\sin\alpha<\pi\cdot\frac{\alpha}{2\pi}<\frac{1}{2}\cdot\tan\alpha\iff\sin\alpha<\alpha<\tan\alpha.$$

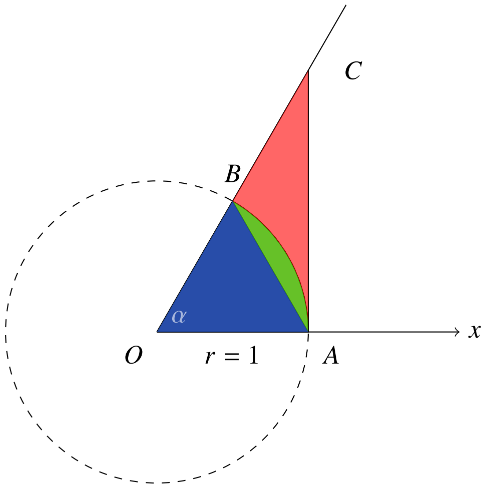



**图 4.2:** $\sin\alpha$, $\alpha$ 和 $\tan\alpha$ 的大小比较.

数列的极限只有一种极限过程 $n\to\infty$. 而函数的情况更加复杂一些——-算上单侧极限, 函数的极限过程有 6 种, 极限值有 4 种. 我们没有必要对每一种情况一一给出详尽的定义, 只需掌握每一种情况下的不同之处就可以了.

| 极限过程 | $\delta-\varepsilon$ 定义 |
|---|---|
| $x\to x_0$ | $\cdots,\ \exists\delta>0,\ \forall x\in\check{N}_\delta(x_0),\ \cdots$ |
| $x\to x_0+$ | $\cdots,\ \exists\delta>0,\ \forall x\in\check{N}_\delta^+(x_0),\ \cdots$ |
| $x\to x_0-$ | $\cdots,\ \exists\delta>0,\ \forall x\in\check{N}_\delta^-(x_0),\ \cdots$ |
| $x\to+\infty$ | $\cdots,\ \exists N>0,\ \forall x\in N_\Delta(+\infty),\ \cdots$ |
| $x\to-\infty$ | $\cdots,\ \exists N>0,\ \forall x\in N_\Delta(-\infty),\ \cdots$ |
| $x\to\infty$ | $\cdots,\ \exists N>0,\ \forall x\in N_\Delta(\infty),\ \cdots$ |

| 极限值 | $\delta-\varepsilon$ 定义 |
|---|---|
| $a$ | $\forall\varepsilon>0,\cdots,\ f(x)\in N_\varepsilon(a)$ |
| $+\infty$ | $\forall E>0,\cdots,\ f(x)\in N_E(+\infty)$ |
| $-\infty$ | $\forall E>0,\cdots,\ f(x)\in N_E(-\infty)$ |
| $\infty$ | $\forall E>0,\cdots,\ f(x)\in N_E(\infty)$ |

我们约定记号

$$f(+\infty):=\lim_{x\to+\infty}f(x),\quad f(-\infty):=\lim_{x\to-\infty}f(x).$$

于是容易知道 $\lim_{x\to\infty}f(x)=a$ 当且仅当 $f(+\infty)=f(-\infty)=a$.

下面我们来看一个函数极限的例子.

**例 4.3** 求证: $\lim_{x\to+\infty}(1+1/[x])^{[x]}=\mathrm{e}$, $x\ge0$. 其中 [ ] 是取整函数.

**证明** (i) 由于数列 $(1+1/n)^n \to \mathrm{e}$ 因此对于任意 $\varepsilon > 0$ 都存在 $N \in \mathbb{N}^*$ 使得当 $n \geq N$ 时

$$0 < \mathrm{e} - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < \varepsilon.$$

当 $x \geq N$ 时, 由于 $[x] \geq N$, 故

$$0 < \mathrm{e} - \left(1 + \frac{1}{[x]}\right)^{[x]} \leq \mathrm{e} - \left(1 + \frac{1}{N}\right)^N < \varepsilon.$$

于是可知

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1 + \frac{1}{[x]}\right)^{[x]} = \mathrm{e}. \qquad \blacksquare$$

### 4.1.2 函数极限的性质

我们可以用以下定理把数列的极限和函数的极限联系起来. 这样就可以把函数极限的问题转化为数列极限的问题.

**定理 4.1 (Heine 定理)**

设函数 $f(x)$ 在去心邻域 $\check{N}(x_0)$ 有定义. 则 $\lim_{x\to x_0} f(x) = a$ 的充要条件是任一数列 $\{x_n\} \subseteq \check{N}(x_0)$ 只要数列 $x_n \to x_0$ 就有数列 $f(x_n) \to a$.

♡

**证明** (i) 证明必要性. 若 $\lim_{x\to x_0} f(x) = a$, 则对于任一 $\varepsilon > 0$ 都存在 $\delta > 0$ 使得当 $x \in \check{N}_\delta(x_0)$ 时 $f(x) \in N_\varepsilon(a)$. 对于取定的 $\delta$, 若数列 $x_n \to x_0$, 则存在 $N \in \mathbb{N}^*$ 使得当 $n > N$ 时 $x_n \in \check{N}_\delta(x_0)$. 于是当 $n > N$ 时 $f(x_n) \in N_\varepsilon(a)$. 于是可知数列 $f(x_n) \to a$.

(ii) 证明充分性. 假设 $\lim_{x\to x_0} f(x) = a$ 不成立. 则存在 $\varepsilon_0 > 0$ 对于任一 $n \in \mathbb{N}^*$ 存在一点 $x_n \in \check{N}_{1/n}(x_0)$ 使得 $f(x_n) \notin N_{\varepsilon_0}(a)$. 由于 $\check{N}_{1/(n+1)}(x_0) \subseteq \check{N}_{1/n}(x_0)$ $(n = 1, 2, \cdots)$. 因此 $k \geq n$ 时 $x_k \in \check{N}_{1/n}(x_0)$. 这样我们就已经找到了一个数列 $\{x_n\} \subseteq \check{N}(x_0)$, 它收敛于 $x_0$, 但 $f(x_n)$ 不收敛于 $a$. 于是可知充分性成立. $\blacksquare$

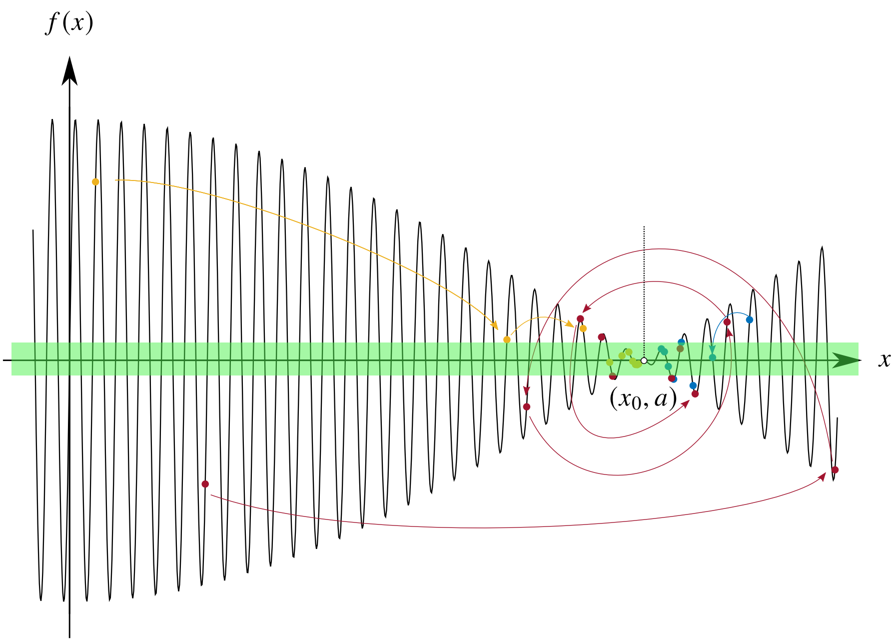



图 4.3: 任意数列 (图示三种数列趋近方式) 趋近于 $x_0$ 时, $f(x_n)$ 都趋近于 $a$.

**注** 以上结论称为 **Heine 定理** (Heine theorem) 或归结原理. 有时也可以用 Heine 定理作为函数极限定义, 这种定义

称为极限的数列式定义. 之后如果用函数极限定义概念 (比如函数的连续等), 都可以用数列式定义.

用 Heine 定理证明极限不存在比较方便. 我们看一个例子.

**例 4.4** 设函数 $f(x) = \sin(1/x)$. 则 $f(x)$ 在 0 处的极限不存在.

**证明** 设数列

$$x_n = \frac{1}{2n\pi + \pi/2}, \quad y_n = \frac{1}{2n\pi}.$$

显然 $\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n = 0$ 且 $x_n \neq 0, y_n \neq 0$ $(n = 1, 2, \cdots)$. 然而

$$f(x_n) = \sin\left(2n\pi + \frac{\pi}{2}\right) = 1, \quad f(y_n) = \sin 2n\pi = 0$$

因此 $\lim_{n\to\infty} f(x_n) \neq \lim_{n\to\infty} f(y_n)$. 由 Heine 定理可知 $f(x)$ 在 0 处的极限不存在. ■

有了 Heine 定理, 我们可以容易地将函数极限的问题转化为序列极限的问题. 这样就可以在函数中建立一系列与数列极限类似的命题.

**命题 4.2 (函数极限的唯一性)**

设函数 $f(x)$. 若 $\lim_{x\to x_0} f(x)$ 存在, 则它是唯一的.

**证明** 任取极限为 $x_0$ 的数列 $\{x_n \neq x_0 \mid n = 1, 2, \cdots\}$. 由于 $\lim_{x\to x_0} f(x)$ 存在, 由 Heine 定理可知

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{x\to x_0} f(x).$$

由于数列极限的唯一性可知 $\lim_{x\to x_0} f(x)$ 也是唯一的. ■

**命题 4.3**

设函数 $f(x)$ 在 $x_0$ 处有极限, 则存在 $M > 0, \delta > 0$ 使得当 $x \in \check{N}_\delta(x_0)$ 时 $|f(x)| < M$.

**证明** 设 $\lim_{x\to x_0} f(x) = a$. 则存在 $\delta > 0$ 使得当 $x \in \check{N}_\delta(x_0)$ 时 $|f(x) - a| < 1$. 于是

$$|f(x)| \leq |f(x) - a| + |a| < 1 + |a|.$$

令 $M = 1 + |a|$. 则当 $x \in \check{N}_\delta(x_0)$ 时 $|f(x)| < M$. ■

**注** 以上定理表明 $f(x)$ 在 $x_0$ 处有极限则它在 $x_0$ 的一个去心邻域内有界.

用以上命题可以证明某些函数的极限不存在.

**例 4.5** 设函数

$$T(x) = \begin{cases} 1, & x = 0 \\ q, & x = \dfrac{p}{q} \\ 0, & x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q} \end{cases},$$

其中 $q > 0$, $p, q \in \mathbb{Z}^*$ 且 $p, q$ 互素. 则 $T(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上的每一点的任一邻域内都无界, 从而它在 $\mathbb{R}$ 上的每一点都没有极限.

**证明**

**定理 4.2 (函数极限的运算)**

设函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 $x_0$ 处有极限, 且 $\lim_{x\to x_0} f(x) = a$, $\lim_{x\to x_0} g(x) = b$. 则

(1) $\lim_{x\to x_0}(f \pm g)(x) = a \pm b$.

(2) $\lim_{x\to x_0} fg(x) = ab$.

(3) $\lim_{x\to x_0}(f/g)(x) = a/b$. 其中 $b \neq 0$.

(4) $\lim_{x\to x_0} |f(x)| = |a|$.

**证明** 只证明 (3). 任取极限为 $x_0$ 的数列 $\{x_n \neq x_0 \mid n = 1, 2, \cdots\}$. 由于 $\lim_{x\to x_0} f(x) = a$, $\lim_{x\to x_0} g(x) = b$. 由 Heine 定理可知

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = a, \quad \lim_{n\to\infty} g(x_n) = b \neq 0.$$

由数列极限的运算法则可知 $\lim_{n\to\infty} f(x_n)/g(x_n) = a/b$. 再用 Heine 定理即知命题成立. ■

**命题 4.4 (函数极限的夹逼定理)**

设函数 $f(x), g(x), h(x)$ 在 $\check{N}_r(x_0)$ 有定义且满足

$$f(x) \leq h(x) \leq g(x), \quad \forall x \in \check{N}_r(x_0).$$

若 $\lim_{n\to x_0} f(x) = \lim_{n\to x_0} g(x) = a$, 则 $\lim_{n\to x_0} h(x) = a$.

**证明** 任取极限为 $x_0$ 的数列 $\{x_n\} \subseteq \check{N}_r(x_0)$. 由于 $\lim_{n\to x_0} f(x) = \lim_{n\to x_0} g(x) = a$. 由 Heine 定理可知

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} g(x_n) = a.$$

由于对于任一 $x \in \check{N}_r(x_0)$ 都有 $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$. 因此 $f(x_n) \leq h(x_n) \leq g(x_n)$ $(n = 1, 2, \cdots)$. 由数列极限的夹逼定理可知 $\lim_{n\to\infty} h(x_n) = a$. 由 Heine 定理可知 $\lim_{n\to x_0} h(x) = a$. ■

有了以上几个命题,我们就可以计算出大部分函数的极限. 下面看一个例子.

**例 4.6** 求证: $\lim_{x\to+\infty}(1 + 1/x)^x = \mathrm{e}$.

**证明** (i) 由例题 (4.3) 可知 $(1 + 1/[x])^{[x]} \to \mathrm{e}$. 于是

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{[x]}\right)^{[x]+1} = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{[x]}\right)^{[x]} \lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{[x]}\right) = \mathrm{e}\,.$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{[x]+1}\right)^{[x]} = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{[x]+1}\right)^{[x]+1} \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{[x]+1}\right)^{-1} = \mathrm{e}\,.$$

设 $x \geq 1$. 由于 $[x] \leq x < [x] + 1$, 故

$$\left(1+\frac{1}{[x]+1}\right)^{[x]} < \left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} < \left(1+\frac{1}{[x]}\right)^{[x]+1}.$$

由夹逼定理可知

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = \mathrm{e}\,.$$

(ii) 令 $y = -(x + 1)$, 则当 $x \to -\infty$ 时 $y \to +\infty$. 于是

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = \left(1+\frac{1}{-y-1}\right)^{-y-1} = \left(\frac{-y}{-y-1}\right)^{-y-1} = \left(\frac{y+1}{y}\right)^{y+1} = \left(\frac{y+1}{y}\right)^{y}\left(\frac{y+1}{y}\right) = \left(1+\frac{1}{y}\right)^{y}\left(1+\frac{1}{y}\right).$$

于是可知

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = \lim_{y\to+\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^{y}\left(1+\frac{1}{y}\right) = \mathrm{e}\,.$$

综合 (i)(ii) 可知 $\lim_{x\to\infty}(1 + 1/x)^x = \mathrm{e}$. ■

**命题 4.5 (函数极限的保序性)**

设函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 $x_0$ 处都有极限.

(1) 若存在 $r>0$ 使得当 $x\in \check{N}_r(x_0)$ 时 $f(x)\leq g(x)$, 则 $\lim_{x\to x_0} f(x)\leq \lim_{x\to x_0} g(x)$.

(2) 若 $\lim_{x\to x_0} f(x)<\lim_{x\to x_0} g(x)$, 则存在 $r>0$ 使得当 $x\in \check{N}_r(x_0)$ 时 $f(x)<g(x)$

**证明** 只证明 (1). 任取极限为 $x_0$ 的数列 $\{x_n\}\subseteq \check{N}_r(x_0)$. 则 $f(x_n)\leq g(x_n)$. 由数列极限的保序性可知 $\lim_{n\to\infty} f(x_n)\leq \lim_{n\to\infty} g(x_n)$. 由 Heine 定理可知 $\lim_{x\to x_0} f(x)\leq \lim_{x\to x_0} g(x)$. ■

**定理 4.3 (函数极限的 Cauchy 收敛准则)**

设函数 $f(x)$ 在 $\check{N}_r(x_0)$ 有定义. 则 $f(x)$ 在 $x_0$ 处有极限的充要条件是对于任一 $\varepsilon>0$ 都存在 $\delta>0$ 使得当 $x_1,x_2\in \check{N}_\delta(x_0)$ 时有 $|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$.

**证明** (i) 证明必要性. 若 $\lim_{x\to x_0} f(x)=a$. 则对于任一 $\varepsilon>0$ 都存在 $\delta>0$ 使得当 $x_1,x_2\in \check{N}(x_0)$ 时

$$|f(x_1)-a|<\frac{\varepsilon}{2}. \quad |f(x_1)-a|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

于是

$$|f(x_1)-f(x_2)|=|(f(x_1)-l)-(f(x_2)-l)|\leq |f(x_1)-l|+|f(x_2)-l)|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

(ii) 证明充分性. 若对于任一 $\varepsilon>0$ 都存在 $\delta>0$ 使得当 $x_1,x_2\in \check{N}_\delta(x_0)$ 时有 $|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$. 任取极限为 $x_0$ 的数列 $\{x_n\}\subseteq \check{N}_r(x_0)$. 则存在 $N\in\mathbb{N}^*$ 使得当 $m,n>N$ 时 $x_m,x_n\in \check{N}_\delta(x_0)$. 因此

$$|f(x_m)-f(x_n)|<\varepsilon.$$

因此 $f(x_n)$ 是一个 Cauchy 列. 由数列的 Cauchy 收敛准则可知 $f(x_n)$ 收敛. 设 $\lim_{n\to\infty} f(x_n)=a$. 设另一个收敛于 $x_0$ 的数列 $\{y_n\}\subseteq \check{N}_r(x_0)$. 同上述原因它也收敛的. 设 $\lim_{n\to\infty} f(y_n)=b$. 构造新数列 $\{z_n\}\subseteq \check{N}_r(x_0)$.

$$x_1,y_1,x_2,y_2,\cdots,x_n,y_n,\cdots.$$

则 $\{x_n\}$ 和 $\{y_n\}$ 分别是 $\{z_n\}$ 的奇数项子列和偶数项子列. 且它们的极限都是 $x_0$. 因此 $\{z_n\}$ 的极限也是 $x_0$. 于是 $f(z_n)$ 也收敛. 设 $\lim_{n\to\infty} f(z_n)=c$. 由于 $f(x_n)$ 和 $f(y_n)$ 分别是 $f(z_n)$ 的子列, 因此 $a=c, b=c$. 由 Heine 定理可知 $f(x)$ 在 $x_0$ 处的极限存在. ■

**定理 4.4 (复合函数的极限)**

设函数 $f(x)$ 和 $g(t)$. 若

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=a, \quad \lim_{t\to t_0} g(t)=x_0.$$

且在 $t_0$ 的一个去心邻域 $\check{N}_r(t_0)$ 内 $g(t)\neq x_0$. 则 $\lim_{t\to t_0} f(g(t))=a$.

**证明** 由于 $\lim_{x\to x_0} f(x)=a$, 故对于任一 $\varepsilon$, 存在 $\check{N}_\delta(x_0)$ 使得

$$f\left(\check{N}_\delta(x_0)\right)\subseteq N_\varepsilon(a).$$

由于 $\lim_{t\to t_0} g(t)=x_0$, 故对于以上取定的 $\delta$, 存在 $\check{N}_\sigma(t_0)$ 使得

$$g\left(\check{N}_\sigma(t_0)\right)\subseteq N_\delta(x_0).$$

由于在 $t_0$ 的一个去心邻域 $\check{N}_r(t_0)$ 内 $g(t)\neq x_0$. 令 $s=\min\{r,\sigma\}$. 则

$$g\left(\check{N}_s(t_0)\right)\subseteq \check{N}_\delta(x_0).$$

于是可知对于任一 $\varepsilon>0$, 存在 $\check{N}_s(t_0)$ 使得

$$f\left(g\left(\check{N}_s(t_0)\right)\right)\subseteq N_\varepsilon(a).$$

这表明 $\lim_{t\to t_0} f(g(t))=a$. ■

我们要注意以上定理的成立条件."在 $t_0$ 的一个去心邻域 $\check{N}_r(t_0)$ 内 $g(t) \neq x_0$" 也可以写成

$$g\left(\check{N}_r(t_0)\right) \subseteq \check{N}(x_0).$$

如果不能确保这个条件, 定理就不一定成立. 举例说明. 设

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x = 0 \\ 0, & x \neq 0 \end{cases}, \quad g(t) = 0.$$

容易知道 $\lim_{t\to 0} g(t) = 0$, $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$. 若套用以上定理, 则有 $\lim_{t\to 0} f(g(t)) = 0$. 但事实上, 由于 $f(g(t)) = 1$, 故

$$\lim_{t\to 0} f(g(t)) = 1.$$

下面来看一个复合函数的极限计算法则的例子.

**例 4.7** 求极限: $\lim_{x\to 0}(1-\cos x)/x^2 = 1/2$.

**解** 容易知道

$$\frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2.$$

令 $t = x/2$. 由于 $t \to 0$ $(x \to 0)$, 于是可知

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}\lim_{t\to 0}\left(\frac{\sin t}{t}\right)^2 = \frac{1}{2}\left(\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}\right)^2 = \frac{1}{2}.$$ ■

**注** 以上使用的方法是数学分析中的经典技巧——**换元法**.

最后我们来看两个 "变态函数" 的例子.

**例 4.8** 设函数 $D(x)$ 满足

$$D(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q} \end{cases}.$$

则 $D(x)$ 在定义域上的任一点都没有极限.

**证明** 对于任一 $x_0 \in \mathbb{R}$, 它的任一邻域 $N(x_0)$ 都包含无穷多个有理数和无理数, 因此一定存在一个收敛到 $x_0$ 的有理数序列 $\{s_n\}$ 和一个收敛到 $x_0$ 的无理数序列 $\{t_n\}$. 由 $D(x)$ 的定义可知

$$\lim_{n\to\infty} D(s_n) = 1, \quad \lim_{n\to\infty} D(t_n) = 0.$$

由 Heine 定理4.1可知 $D(x)$ 在 $x_0$ 处没有极限. ■

**注** 以上定义的函数 $D(x)$ 称为 **Dirichlet 函数** (Dirichlet function).

**例 4.9** 设函数 $T(x)$ 满足

$$T(x) = \begin{cases} 1, & x = 0 \\ \frac{1}{q}, & x = \frac{p}{q} \\ 0, & x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q} \end{cases},$$

其中 $q > 0$, $p, q \in \mathbb{Z}^*$, 且 $p, q$ 互素. 则对于任一 $x_0 \in \mathbb{R}$ 都有 $\lim_{x\to x_0} = 0$.

**证明** 若要证明 $\lim_{x\to x_0} = 0$. 只需证明对于 0 的任一邻域 $N_\varepsilon(0)$ 都存在 $x_0$ 的一个去心邻域 $N_\delta(x_0)$ 使得 $f(N_\delta(x_0)) \subseteq N_\varepsilon(0)$. 由于 $T(x) \geq 0$ $(\forall x \in \mathbb{R})$, 故只需使得 $f(N_\delta(x_0)) \subseteq [0, \varepsilon)$. 由于任一无理数的函数值都是零, 因此只需考虑有理点的情况, 即只需找到一个 $N_\delta(x_0)$ 使得其中的有理点的函数值都落在区间 $[0, \varepsilon)$ 内.

取 $q_0 = [1/\varepsilon] + 1$. 则 $1/q_0 < \varepsilon$. 先考虑 $x_0$ 的去心邻域 $N_1(x_0)$. 注意到 $N_1(x_0)$ 中分母 $q$ 满足 $0 < q \le q_0$ 的既约分数 $p/q$ 只有有限个. 因此总能找到充分小的 $\delta > 0$ 使得 $\check{N}_\delta(x_0)$ 中的既约分数的分母 $q > q_0$. 于是当 $x = p/q \in \check{N}_\delta(x_0)$

$$T\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{1}{q} < \frac{1}{q_0} < \varepsilon.$$

这表明有 $\lim_{x\to x_0} T(x) = 0$. ■

**注** 以上定义的函数 $T(x)$ 通常称为 **Thomae 函数** (Thomae's function). 它还有很多别称, 不同书上可能名称不一致.

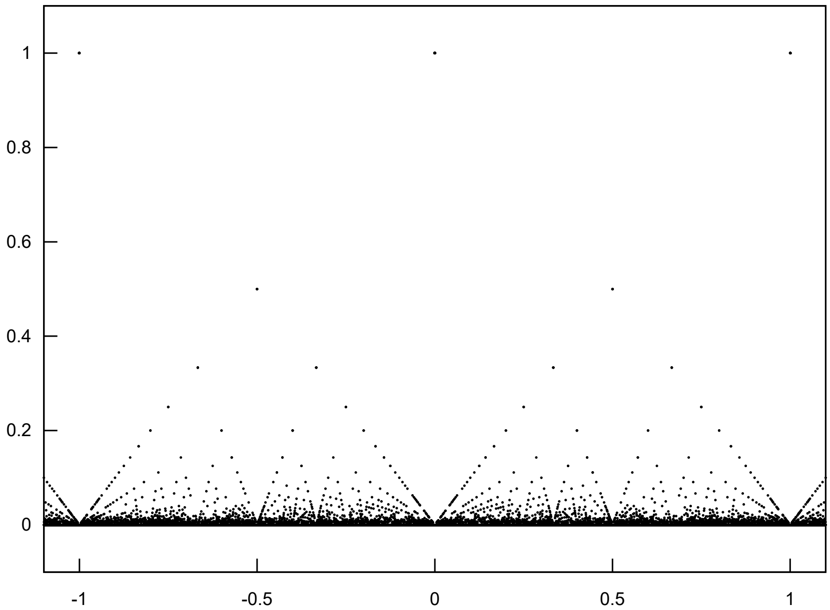



图 4.4: Thomae 函数示意图

### 4.1.3 无穷大和无穷小

**定义 4.4 (无穷小和无穷大)**

在某一极限过程下, 极限为 0 的变量 (包括数列、函数、级数等) 称为**无穷小** (infinitesimal). 在某一极限过程下, 极限为 $+\infty, -\infty, \infty$ 的变量 (包括数列、函数、级数等) 称为**无穷大** (infinity). ♣

**注** 由于数列的极限过程只有一种, 因此在讨论无穷大数列或无穷小数列时不需要指出极限过程. 但讨论无穷大和无穷小的函数时必须指出极限过程.

无穷小量和无穷大量之间显然有以下关系.

**定理 4.5 (无穷小量和无穷大量的关系)**

设函数 $f(x)$ 在 $\check{N}_r(x_0)$ 上有定义. 且 $f(x) \neq 0$ $(\forall x \in \check{N}_r(x_0))$. 其中 $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$. 则

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \infty \iff \lim_{x\to x_0} \frac{1}{f(x)} = 0.$$

♡

**证明** 留作习题. ■

我们知道数列 $\ln n, n, n^2, 2^n, n!, n^n$ 的极限都是 $+\infty$. 但从直观上看它们趋于正无穷的 "速度" 不一样 (从 "慢"

到 ‘‘快’’ 依次是对数、幂、指数、阶乘、幂指). 因此当 $n$ 充分大时

$$\ln n < n < n^2 < 2^n < n! < n^n.$$

我们还知道

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{2^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2^n}{n!}=\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{n^n}=0.$$

因此我们很自然地想到用商的极限来比较两个无穷大 (或无穷小).

**定义 4.5 (无穷小的阶)**

设无穷小 $f(x)$ 和 $g(x)$ $\left(x\to x_0\in\overline{\mathbb{R}}\right)$ 且 $g(x)\neq 0$ $\left(\forall x\in\check{N}_r(x_0)\right)$.

(1) 若 $\lim_{x\to x_0} f(x)/g(x)=0$, 则称 $f(x)$ 是 $g(x)$ 的**高阶无穷小** (infinitesimal of higher order).

(2) 若 $\lim_{x\to x_0} f(x)/g(x)=a\neq 0$, 则称 $f(x)$ 和 $g(x)$ 是**同阶无穷小** (infinitesimal of same order). 特别地, 若

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=1,$$

则称 $f(x)$ 和 $g(x)$ 是**等价无穷小** (equivalent infinitesimal), 记作 $f(x)\sim g(x)$ $(x\to x_0)$. ♣

**注** 容易验证 “$\sim$’’ 是一个等价关系.

**定义 4.6 (无穷大的阶)**

设无穷大 $f(x)$ 和 $g(x)$ $\left(x\to x_0\in\overline{\mathbb{R}}\right)$ 且 $g(x)\neq 0$ $\left(\forall x\in\check{N}_r(x_0)\right)$.

(1) 若 $\lim_{x\to x_0} f(x)/g(x)=0$, 则称 $g$ 是 $f$ 的**高阶无穷大** (infinity of higher order).

(2) 若 $\lim_{x\to x_0} f(x)/g(x)=a\neq 0$, 则称 $f(x)$ 和 $g(x)$ 是**同阶无穷大** (infinity of same order). 特别地, 若

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=1,$$

则称 $f(x)$ 和 $g(x)$ 是**等价无穷大** (equivalent infinity), 记作 $f(x)\sim g(x)$ $(x\to x_0)$. ♣

**注** 从直观上理解, 所谓的 ‘‘高阶无穷小’’ 就是 ‘‘更快地’’ 趋向 0; 而 ‘‘高阶无穷大’’ 就是 ‘‘更快地’’ 趋向 $\infty$.

当 $x\to x_0$ 时, 我们经常把 $x-x_0$ 定为 “1 阶无穷小”. 若 $f(x)$ 也是一个无穷小且与 $(x-x_0)^\alpha$ 同阶, 则称 $f(x)$ 是 $\alpha$ 阶无穷小. 类似地, 把 $1/(x-x_0)$ 定为 “1 阶无穷大”. 若 $f(x)$ 也是一个无穷大且与 $(x-x_0)^\alpha$ 同阶, 则称 $f(x)$ 是 $\alpha$ 阶无穷小. 需要注意无穷小和无穷大的阶未必是正整数. 下面看两个例子.

**例 4.10** 设 $x$ 定为 1 阶无穷小. 求以下无穷小的阶

$$\sin\sqrt{x}\to 0,\quad x\to 0.$$

**解** 由于

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}=1.$$

于是可知它是一个 1/2 阶无穷大.

需要注意, 并不是每个无穷小或无穷大都可以定出阶. 举例说明. 当 $x\to 0$ 时, 设 $x$ 定为 1 阶无穷小. 此时无穷小 $x\sin(1/x)$ 是无法定出阶的.

在无穷小和无穷大的阶的定义中, 最重要的是等价无穷小和等价无穷大, 它们在计算极限时有非常便利的应用.

**定理 4.6**

设函数 $f(x), g(x)$ 在 $x\to x_0$ 的过程下是等价无穷小或等价无穷大, 且 $h(x)\neq 0$ $(\forall x\in\check{N}(x_0))$, 其中 $x_0\in\overline{\mathbb{R}}$. 则

(1) $\lim_{x\to x_0} f(x)h(x)=\lim_{x\to x_0} g(x)h(x)$.

(2) $\lim_{x\to x_0} f(x)/h(x) = \lim_{x\to x_0} g(x)/h(x)$.

**证明** 只证明 (1). 由于 $f(x) \sim g(x)$. 故

$$\lim_{x\to x_0} f(x)h(x) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} g(x)h(x) = \lim_{x\to x_0} g(x)h(x).$$

■

**注** 无穷大和无穷小的等价替换的等价替换不能发生在加减项中.

用以上定理可以大大简化极限的计算过程. 为此我们需要积累一些常用的等价无穷小.

**例 4.11** 求证: $\sqrt{1+x} - 1 \sim x/2$ $(x \to 0)$.

**注** 由于

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{x\left(\sqrt{1+x}+1\right)} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{\sqrt{1+x}+1} = \frac{1}{2}.$$

于是可知 $\sqrt{1+x} - 1 \sim x/2$ $(x \to 0)$.

在前面的在例题 (4.2) 和例题 (4.7) 中我们已经证明

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \quad \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}, \quad \lim_{x\to +\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \mathrm{e}.$$

因此立刻得到以下几个重要的等价无穷小

$$\sin x \sim x, \qquad 1-\cos x \sim \frac{1}{2}x^2,$$

更多等价无穷小的例子将在学习了 Taylor 公式后得到.

下面来看一个利用等价无穷小替换法求极限的例子.

**例 4.12** 求极限

$$\lim_{x\to 0} \frac{x\tan^4 x}{\sin^3 x(1-\cos x)}.$$

**证明** 由于

$$\sin x \sim \tan x \sim x, \quad 1-\cos x \sim \frac{1}{2}x^2 \quad (x \to 0).$$

于是

$$\lim_{x\to 0} \frac{x\tan^4 x}{\sin^3 x(1-\cos x)} = \lim_{x\to 0} \frac{x \cdot x^4}{x^3 \cdot \frac{1}{2}x^2} = 2.$$

■

### 4.1.4 Landau 记号

有时候我们不需要具体写出某个变量的表达式, 而只需要知道这个变量是一个 ‘‘动态’’ 就可以了. 于是我们可以引入以下记号.

**定义 4.7 (Landau 记号)**

设函数 $f(x), g(x)$ 在 $x_0$ 的某个去心邻域 $\check{N}_r(x_0)$ 上有定义, 且 $g(x)$ 在 $\check{N}_r(x_0)$ 上取不到 0.

(1) 若存在 $M > 0$ 使得 $|f(x)| \le M|g(x)|$, 则记作 $f(x) = O(g(x))$ $(x \to x_0)$.

(2) 当 $x \to x_0$ 时, 若 $f(x)/g(x) \to 0$, 则记作 $f(x) = o(g(x))$ $(x \to x_0)$.

特别地,

(1) 若存在 $M > 0$ 使得 $|f(x)| \le M$, 则记作 $f(x) = O(1)$ $(x \to x_0)$.

(2) 当 $x \to x_0$ 时, 若 $f(x) \to 0$, 则记作 $f(x) = o(1)\ (x \to x_0)$.

**注** 事实上 $f(x) = O(g(x))\ (x \to x_0)$ 就表示当 $x \to x_0$ 时 $f(x)/g(x)$ 保持有界.

**注** 以上记号称为 **Landau 记号** (Landau symbols).

需要注意 $O(g(x))$ 和 $o(g(x))$ 表示的不是具体的量, 而是变量的一种状态或一种类型. 因此 $f(x) = O(g(x))$ 和 $f(x) = o(g(x))$ 中的 "=" 不是一般意义下的 "等于", 它表示左边的变量在某一个极限过程下, 属于右边符号所代表的类型. 举例说明.

$$\sin x - x = o(x), \quad (x \to 0).$$

$$\tan x - x = o(x), \quad (x \to 0).$$

以上两个式子告诉我们, 当 $x \to 0$ 时, 函数 $\sin x - x$ 和 $\tan x - x$ 都是 $x$ 的高阶无穷小. 显然不可能从这两个式子推得 $\sin x - x = \tan x - x$.

$o(1) = O(1)$ 表示如果函数 $f(x) = o(1)$, 则 $f(x) = O(1)$, 即无穷小量必是有界量. 反之不成立, 因此这里的 "=" 两边不能交换.

我们引入 Landau 记号是为了简化表达式. 举例说明. 对于 $(1+x)^n$ 的展开式, 我们经常不需要展开式的所有项. 于是我们可以根据不同需求用 Landau 符合简化展开式, 例如

$$(1+x)^n = 1 + nx + o(x).$$

$$(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2}x^2 + o\left(x^2\right).$$

$$(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{6}x^3 + o\left(x^3\right).$$

在算法分析中经常用到大 $O$ 记号用来表示算法复杂度.

我们在讨论数列的极限时已经证明过无穷小量和有界量的关系, 现在可以把这些关系式用 Landau 记号给出.

**命题 4.6**

当 $x \to x_0$ 有以下结论:

(1) $o(1) = O(1)$.

(2) $O(1) + O(1) = O(1)$.

(3) $o(1) + o(1) = o(1)$.

(4) $O(1) + o(1) = O(1)$.

(5) $O(1)O(1) = O(1)$.

(6) $o(1)o(1) = o(1)$.

(7) $O(1)o(1) = o(1)$.

**证明** 留作习题.

### 4.1.5 函数的上极限和下极限

根据 Bolzano-Weierstrass 定理, 任一有界数列都有极限点, 因此即使数列没有极限, 我们也可以用所有极限点组成的集合的上确界和下确界来定义数列的上极限和下极限, 这样做的好处是可以更便利地处理没有极限的数列. 类似地我们可以建立函数的上极限和下极限的概念.

设函数 $f(x)$ 在 $N_\delta(x_0)$ 有定义且有界. 若 $\lim_{x \to x_0} f(x) = a$, 则对于任一数列 $\{x_n\} \subseteq N_\delta(x_0)$, 当 $x_n \to x_0$ 时, $f(x_n) \to a$. 若 $\lim_{x \to x_0} f(x)$ 不存在, 我们可以任取一个数列 $\{x_n\} \subseteq N_\delta(x_0)$, 它满足 $x_n \to x_0$. 对应地可以得到数列 $f(x_n)$. 由于 $f(x)$ 在 $N_\delta(x_0)$ 中有界, 故 $f(x_n)$ 有界. 由 Bolzano-Weierstrass 定理可知, $f(x_n)$ 存在一个收敛子列 $f(x_{k_n})$. 而 $\{x_{k_n}\}$ 是 $\{x_n\}$ 的一个子列, 由于 $x_n \to x_0$, 故 $x_{k_n} \to x_0$.

对于在 $N_\delta(x_0)$ 上无界的数列, 则可以找到一个数列 $\{x_n\} \subseteq N_\delta(x_0)$ 使得 $x_n \to x_0$ 且 $f(x_n) \to \infty$.

以上讨论表明, 对于 $N_\delta(x_0)$ 上的函数, 总存在一个数列 $\{x_n\} \subseteq N_\delta(x_0)$ 使得 $x_n \to x_0$ 且 $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = l$, 其中 $l \in \overline{\mathbb{R}}$. 于是我们可以用这样的 $l$ 组成的集合的上确界和下确界来定义函数的上极限和下极限.

**定义 4.8 (函数的上极限和下极限)**

设函数 $f(x)$ 在 $x_0$ 的一个去心邻域 $\check{N}_\delta(x_0)$ 内有定义. 令

$$E = \{a \in \overline{\mathbb{R}} \mid 存在\ x_n \in \check{N}_\delta(x_0)\ 使得当 x_n \to x_0\ 时\ f(x_n) \to a\}.$$

令

$$\limsup_{x\to x_0} f(x) := \sup E, \quad \liminf_{x\to x_0} f(x) := \inf E.$$

我们称 $\limsup_{n\to\infty} a_n$ 为 $f(x)$ 当 $x \to x_0$ 时的**上极限** (limit superior), 称 $\liminf_{n\to\infty} a_n$ 为 $f(x)$ 当 $x \to x_0$ 时的**下极限** (limit inferior).

注 对其它的极限过程 (包括 $x \to x_0+, x \to x_0-, x \to +\infty, x \to -\infty, x \to \infty$), 上极限和下极限也可以类似定义.

下面看一个例子.

**例 4.13** 设函数

$$f(x) = \begin{cases} \sin\dfrac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}.$$

求 $\limsup_{x\to 0} f(x), \liminf_{x\to 0} f(x)$.

**解** 设数列

$$x_n = \left(2n\pi + \frac{\pi}{2}\right)^{-1}, \quad y_n = \left(2n\pi - \frac{\pi}{2}\right)^{-1}, \quad n = 1, 2, \cdots.$$

则 $\lim_{n\to\infty} x_n = 0, \lim_{n\to\infty} y_n = 0$ 且 $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = 1, \lim_{n\to\infty} f(y_n) = -1$. 由于 $f(\mathbb{R}) = [-1, 1]$. 因此

$$\limsup_{x\to 0} f(x) = 1, \quad \liminf_{x\to 0} f(x) = -1.$$ ■

数列上极限和下极限的相关结论可以对应 “平移” 到函数的上极限和下极限中.

对应命题 (3.17) 有如下结论.

**命题 4.7**

设函数 $f(x)$ 在 $x_0$ 的一个去心邻域 $\check{N}_\delta(x_0)$ 内有定义. 令

$$E = \{a \in \overline{\mathbb{R}} \mid 存在\ x_n \in \check{N}_\delta(x_0)\ 使得当 x_n \to x_0\ 时\ f(x_n) \to a\}.$$

则 $\limsup_{x\to x_0} f(x), \liminf_{x\to x_0} f(x) \in E$.

**证明** 只证明上极限的情况.

(i) 若 $\limsup_{x\to x_0} f(x) = +\infty$. 则 $E$ 无上界, 因此对于任一 $n \in \mathbb{N}^*$ 都存在 $l_n \in E$ 使得 $l_n > n$. 即存在一个数列 $\{x_n\}$ 满足 $0 < |x_n - x_0| < 1/n$ 且 $f(x_n) > n$ $(n = 1, 2, \cdots)$. 令 $n \to \infty$, 则 $x_n \to x_0$ 且 $f(x_n) \to +\infty$. 于是可知 $+\infty \in E$.

(ii) 若 $\limsup_{x\to x_0} f(x) = -\infty$. 则 $E = \{-\infty\}$, 因此 $-\infty \in E$.

(iii) 若 $\limsup_{x\to x_0} f(x) = a \in \mathbb{R}$. 由于 $a = \sup E$, 故对于任一 $n \in \mathbb{N}^*$ 都存在 $l_n \in E$ 使得

$$a - \frac{1}{n} < l_n < a + \frac{1}{n}.$$

即存在一个数列 $\{x_n\}$ 满足

$$0 < |x_n - x_0| < 1/n, \quad a - \frac{1}{n} < f(x_n) < a + \frac{1}{n}, \quad n = 1, 2, \cdots.$$

令 $n \to \infty$, 则 $x_n \to x_0$ 且 $f(x_n) \to a$. 于是可知 $a \in E$. ■

对应命题 (3.18) 有如下结论.

**命题 4.8**

设函数 $f(x)$ 在 $x_0$ 的一个去心邻域 $\check{N}_\delta(x_0)$ 内有定义. 则 $\limsup_{x\to x_0} f(x) \le \liminf_{x\to x_0} f(x)$. 等号成立当且仅当

$$\limsup_{x\to x_0} f(x) = \liminf_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} f(x).$$

**证明** 留作习题.

对应命题 (3.19), 我们也可以给出函数上极限和下极限的另一种刻画方式.

**命题 4.9**

设函数 $f(x)$ 在 $x_0$ 的一个去心邻域内有定义. 令

$$E = \{a \in \overline{\mathbb{R}} \mid \text{对于任一 } \varepsilon > 0 \text{ 存在 } \delta > 0 \text{ 使得当 } x \in \check{N}_\delta(x_0) \text{ 时 } f(x) < a + \varepsilon\}.$$

$$F = \{a \in \overline{\mathbb{R}} \mid \text{对于任一 } \varepsilon > 0 \text{ 存在 } \delta > 0 \text{ 使得当 } x \in \check{N}_\delta(x_0) \text{ 时 } f(x) > a - \varepsilon\}.$$

则 $\limsup_{x\to x_0} f(x) = \inf E$, $\liminf_{x\to x_0} f(x) = \sup F$.

**证明** 只证明上极限的情况. 令 $\limsup_{x\to x_0} f(x) = L$.

(i) 当 $f(x)$ 在 $x_0$ 的任一去心邻域中都无上界时, $L = +\infty$. 此时 $E = \{+\infty\}$. 因此 $\inf E = L$.

(ii) 当 $f(x)$ 在 $x_0$ 的一个去心邻域中有界时.

证明 "$L \ge \inf E$". 只需证明 $L \in E$. 假设 $L \notin E$, 即存在 $\varepsilon > 0$ 使得对于 $x_0$ 的任一去心邻域内的 $x$ 都有 $f(x) \ge L + \varepsilon$. 这表明 $\check{N}$ 存在数列 $x_n \to x_0$ 使得 $f(x_n) \to l > L$, 这与 $L = \limsup_{x\to x_0} f(x)$ 矛盾. 于是可知 $L \in E$.

证明 "$L \le \inf E$". 任取 $a \in E$. 假设 $a < L$. 则存在 $\varepsilon > 0$ 使得 $a + \varepsilon < L$. 此时存在 $\delta$ 使得当 $x \in \check{N}_\delta(x_0)$ 时 $f(x) < a + \varepsilon$. 这表明不存在数列 $\{x_n\} \in \check{N}_\delta(x_0)$ 使得 $f(x_n) \to L$, 出现矛盾. 于是可知 $a \ge L$, 即 $L \le \inf E$.

综合 (i)(ii) 可知 $\limsup_{x\to x_0} f(x) = \inf E$. ■

**注** 有时候可以用以上命题定义数列上极限和下极限.

对应命题 (3.20), 函数的上极限和下极限也有保序性.

**命题 4.10**

设函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 $\check{N}_\delta(x_0)$ 中满足 $f(x) \le g(x)$, 则

$$\limsup_{x\to x_0} f(x) \le \limsup_{x\to x_0} g(x). \quad \liminf_{x\to x_0} f(x) \le \liminf_{x\to x_0} g(x).$$

**证明** 只证明第一个不等式. 令 $\limsup_{x\to x_0} f(x) = A$, $\limsup_{x\to x_0} g(x) = B$.

(i) 当 $B = +\infty$ 或 $A = -\infty$ 时, 命题显然成立. 当 $A = +\infty$ 时, 在 $\check{N}_\delta(x_0)$ 中存在数列 $x_n \to x_0$ 使得 $f(x_n) \to +\infty$. 由于在 $\check{N}_\delta(x_0)$ 中满足 $f(x) \le g(x)$, 故 $\{x_n\}$ 中存在一个子列 $\{x_{k_n}\}$ 使得 $\lim_{n\to\infty} g(x_{k_n}) = +\infty$.

$$\lim_{n\to\infty} f(x_{k_n}) = A \le \lim_{n\to\infty} g(x_{k_n}) \le B.$$

于是可知 $A = B$. 类似地可知当 $B = -\infty$ 时 $A = B$.

(ii) 当 $A, B \in \mathbb{R}$ 时. 在 $\check{N}_\delta(x_0)$ 中存在数列 $x_n \to x_0$ 使得 $f(x_n) \to A$. 由于在 $\check{N}_\delta(x_0)$ 中满足 $f(x) \le g(x)$, 故 $\{x_n\}$ 中存在一个子列 $\{x_{k_n}\}$ 使得

$$\lim_{n\to\infty} g(x_{k_n}) \ge A = \lim_{n\to\infty} f(x_{k_n}).$$

于是可知 $A \le B$. ■

对应定理 (3.9), 可以给出第三种方式刻画函数的上极限和下极限.

**命题 4.11**

设函数 $f(x)$ 在 $x_0$ 的一个去心邻域内有定义. 则

$$\limsup_{x\to x_0} f(x) = \lim_{\delta\to 0+}\left[\sup_{x\in\check{N}_\delta(x_0)} f(x)\right].$$

$$\liminf_{x\to x_0} f(x) = \lim_{\delta\to 0+}\left[\inf_{x\in\check{N}_\delta(x_0)} f(x)\right].$$

**证明** 只证明上极限的情况. 令 $\varphi(\delta)=\sup_{x\in\check{N}_\delta(x_0)} f(x)$, $\limsup_{x\to x_0} f(x) = L$. 容易验证 $\varphi(\delta)$ 单调递减.

(i) 当 $L=+\infty$ 时. 在 $x_0$ 的一个去心邻域中存在一个数列 $x_n \to x_0$ 使得 $f(x_0)\to+\infty$. 因此 $\varphi(\delta) = \sup_{x\in\check{N}_\delta(x_0)} f(x)=+\infty$. 于是可知 $\lim_{\delta\to 0+}\varphi(\delta)=+\infty$.

(ii) 当 $L=-\infty$ 时. 对于 $x_0$ 的去心邻域中任一极限为 $x_0$ 的数列 $x_n$, 都有 $f(x_n)\to-\infty$, 即 $\lim_{x\to x_0} f(x)=-\infty$. 故对于任一 $E>0$ 都存在 $\delta_1>0$ 使得当 $x\in\check{N}_{\delta_1}(x_0)$ 时 $f(x)<-E$. 因此

$$\varphi(\delta_1)=\sup_{x\in\check{N}_{\delta_1}(x_0)} f(x) < -E.$$

由于 $\varphi(\delta)$ 单调递减, 因此当 $\delta\in(0,\delta_1)$ 时 $\varphi(\delta)\le\varphi(\delta_1)<-E$. 这表明 $\lim_{\delta\to 0+}\varphi(\delta)=-\infty$.

(iii) 当 $L\in\mathbb{R}$ 时. 在 $x_0$ 的一个去心邻域中存在一个数列 $x_n\to x_0$ 使得 $f(x_n)\to l$. 取 $f(x_n)$ 的一个子列 $f(x_{k_n})$ 使得 $\{x_{k_n}\}\in\check{N}_\delta(x_0)$. 于是

$$a_{k_i}\le \sup_{x\in\check{N}_\delta(x_0)} f(x)=\varphi(\delta),\quad n=1,2,\cdots.$$

令 $i\to\infty$ 得 $l\le\varphi(\delta)$. 再令 $\delta\to 0+$ 得 $l\le\lim_{\delta\to 0+}\varphi(\delta)$. 于是 $L\le\lim_{\delta\to 0+}\varphi(\delta)$.

由命题 (4.9) 可知, 对于任一 $\varepsilon>0$ 都存在 $\delta_2>0$ 使得当 $x\in\check{N}_{\delta_2}(x_0)$ 时 $f(x)<L+\varepsilon$. 因此 $\varphi(\delta_2)<L+\varepsilon$. 由于 $\varphi(\delta)$ 单调递减, 因此当 $\delta\in(0,\delta_2)$ 时 $\varphi(\delta)\le\varphi(\delta_2)<L+\varepsilon$. 令 $\delta\to 0+$ 得 $\lim_{\delta\to 0+}\varepsilon(\delta)\le L+\varepsilon$. 由于 $\varepsilon$ 是任一正数, 故 $L\ge\lim_{\delta\to 0+}\varepsilon(\delta)$. 于是可知 $L=\lim_{\delta\to 0+}\varepsilon(\delta)$.

## 4.2 函数的连续与间断

### 4.2.1 函数的连续

‘‘连续’’ 是一个十分自然而朴素的概念. 它直接来自于古典几何与物理. 从直观上看, 所谓 ‘‘连续’’ 是指当自变量的变化量变小时, 函数值的变化量也会随之变小. 现在已经定义了函数的极限. 用极限的观点来看, 所谓函数在某一点 ‘‘连续’’ 就是函数在这一点的极限等于它在这一点的函数值. 于是我们可以用 $\varepsilon-\delta$ 语言给出严格定义.

**定义 4.9 (函数在一点的连续)**

设函数 $f(x)$ 在 $x_0$ 的一个邻域 $N_r(x_0)$ 有定义. 若对于 $f(x_0)$ 的任一邻域 $N_\varepsilon(f(x_0))$, 都存在 $x_0$ 的一个邻域 $N_\delta(x_0)$ 使得 $f(N_\delta(x_0)) \subseteq N_\varepsilon(f(x_0))$. 则称 $f(x)$ 在 $x_0$ 处**连续** (continuous), $x_0$ 称为 $f$ 的一个**连续点** (continuous point).

♣

注 以上定义表明 $f(x)$ 在 $x_0$ 处连续当且仅当

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0).$$

因此 $f(x)$ 在 $x_0$ 处连续意味着它在这一点有定义.

注 函数在一点的连续也是一个局部概念. 因此只需要函数在这一点附近有定义.

注 我们也可以用 $\varepsilon-\delta$ 语言来刻画函数的连续性. 函数 $f(x)$ 在 $x_0$ 处连续当且仅当对于任一 $\varepsilon>0$ 存在 $\delta>0$ 使得当 $|x-x_0|<\delta$ 时 $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$. 即

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists\delta>0,\ |x-x_0|<\delta,\ |f(x)-f(x_0)|<\varepsilon.$$

1817 年 Bolzano 首次用 $\varepsilon-\delta$ 语言定义了函数的连续性.

注 根据 Heine 定理, 我们也可以用数列来刻画函数的连续性. 函数 $f(x)$ 在 $x_0$ 处连续当且仅当任一数列 $\{x_n\}\subseteq N(x_0)$ 只要数列 $x_n\to x_0$ 就有数列 $f(x_n)\to f(x_0)$.

由定义可知函数 $f(x)$ 在 $x_0$ 处连续当且仅当

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0) = f\left(\lim_{x\to x_0} x\right).$$

这表明函数 $f(x)$ 在 $x_0$ 处连续意味着极限符号和函数符号 ‘‘可交换’’. 这个结论不难验证.

**命题 4.12**

设函数 $f(x)$ 和 $g(t)$. 若 $f(x)$ 在 $x_0$ 处连续, 且 $\lim_{t\to t_0} g(t)=x_0$, 则

$$\lim_{t\to t_0} f(g(t)) = f\left(\lim_{t\to t_0} g(t)\right).$$

♠

**证明** 由于 $f(x)$ 在 $x_0$ 处连续, 故 $\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$, 故对于任一 $\varepsilon$, 存在 $N_\delta(x_0)$ 使得

$$f(N_\delta(x_0)) \subseteq N_\varepsilon(f(x_0)).$$

由于 $\lim_{t\to t_0} g(t)=x_0$, 故对于以上取定的 $\delta$, 存在 $\check{N}_\sigma(t_0)$ 使得

$$g\left(\check{N}_\sigma(t_0)\right) \subseteq N_\delta(x_0).$$

于是可知对于任一 $\varepsilon>0$, 存在 $\check{N}_\sigma(t_0)$ 使得

$$f\left(g\left(\check{N}_\sigma(t_0)\right)\right) \subseteq N_\varepsilon(f(x_0)).$$

这表明

$$\lim_{t\to t_0} f(g(t)) = f(x_0) = f\left(\lim_{t\to t_0} g(t)\right).$$

■

注 对比定理 (4.4) 的证明过程. 函数 $f(x)$ 在 $x_0$ 处有定义在证明过程中起了重要作用.

既然有单侧极限,当然可以同样定义函数在一点的单侧连续.

**定义 4.10 (单侧连续)**

设函数 $f(x)$.

(1) 若 $f(x_0+) = f(x_0)$, 则称函数 $f(x)$ 在 $x_0$ 处**左连续** (left continuous).

(2) 若 $f(x_0-) = f(x_0)$, 则称函数 $f(x)$ 在 $x_0$ 处**右连续** (right continuous).

左连续和右连续统称**单侧连续** (one-sided continuous).

♣

显然有以下结论.

**命题 4.13**

设函数 $f(x)$ 在 $x_0$ 的邻域 $N(x_0)$ 有定义. 则 $f(x)$ 在 $x_0$ 处连续当且仅当

$$f(x_0-) = f(x_0+) = f(x_0).$$

♠

**证明** 留作习题.

**例 4.14** 设函数 $T(x)$ 满足

$$T(x) = \begin{cases} 1, & x = 0 \\ \dfrac{1}{q}, & x = \dfrac{p}{q} \\ 0, & x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q} \end{cases},$$

其中 $q > 0$, $p, q \in \mathbb{Z}^*$, 且 $p, q$ 互素. 则 $T(x)$ 在任一无理点都连续, 在任一有理点都不连续.

**证明** 由例题 (4.9) 可知 $T(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上任意一点的极限都是零. 由于 $T(x)$ 在无理点的函数值都是零, 在有理点的函数值都不为零, 由函数连续的定义可知则 $T(x)$ 在任一无理点都连续, 在任一有理点都不连续.

### 4.2.2 初等函数的连续性

从直观上看, 中学里学过的函数大多满足在各自定义域的每一点都连续 (在中学阶段我们已经默认了这个事实). 这样的函数称为连续函数.

**定义 4.11 (连续函数)**

设开区间 $I$. 若函数 $f(x)$ 在 $I$ 上的每一点都连续, 则称 $f(x)$ 在 $I$ 上连续. 设闭区间 $J = [a, b]$. 若函数 $f(x)$ 在 $(a, b)$ 上连续, 且在 $a$ 处右连续, 在 $b$ 处左连续, 则称 $f(x)$ 在 $J$ 上连续. 在一个区间 $I$(不论是开或闭) 上连续的函数称为**连续函数** (continuous function). 区间 $I$ 上所有连续函数组成的集合记作 $C(I)$.

♣

**注** 对于半开半闭区间 $[a, b)$, 若函数 $f(x)$ 在 $(a, b)$ 上连续, 且在 $a$ 处右连续, 则称 $f(x)$ 在 $[a, b)$ 上连续. 其余类型的半开半闭区间也可类似定义.

**注** 区间 $(a, b)$ 上所有连续函数组成的集合记作 $C(a, b)$. 其他类型的区间也可类似记录.

下面我们尝试先验证几个简单的函数.

**例 4.15** 常值函数在定义域上每一点都连续.

**证明** 设 $f(x) = C$, 其中 $C \in \mathbb{R}$. 任取定义域上的一点 $x_0$. 对于任一 $\varepsilon > 0$, 都有

$$|f(x) - f(x_0)| = |C - C| = 0 < \varepsilon.$$

因此 $f(x)$ 在 $x_0$ 处连续. ■

**例 4.16** 函数 $f(x) = x$ 在定义域上每一点都连续.

**证明** 任取定义域上的一点 $x_0$. 对于任一 $\varepsilon > 0$, 取 $\delta = \varepsilon$, 则当 $x$ 满足 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时

$$|f(x) - f(x_0)| = |x - x_0| < \varepsilon.$$

因此 $f(x)$ 在 $x_0$ 处连续. ■

**例 4.17 三角函数的连续性** 函数 $f(x) = \sin x$ 和 $g(x) = \cos x$ 在定义域上每一点都连续.

**证明** (i) 任取定义域上的一点 $x_0$. 对于任一 $\varepsilon > 0$, 取 $\delta = \varepsilon$, 则当 $x$ 满足 $|x - x_0| < \delta$ 时

$$|f(x) - f(x_0)| = |\sin x - \sin x_0| = \left|2\sin\frac{x - x_0}{2}\cos\frac{x + x_0}{2}\right| \leq \left|2\sin\frac{x - x_0}{2}\right| \leq \left|2\frac{x - x_0}{2}\right| = |x - x_0| < \varepsilon.$$

因此 $f(x)$ 在 $x_0$ 处连续.

(ii) 任取定义域上的一点 $x_0$. 对于任一 $\varepsilon > 0$, 取 $\delta = \varepsilon$, 则当 $x$ 满足 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时

$$|g(x) - g(x_0)| = |\cos x - \cos x_0| = \left|\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - \sin\left(\frac{\pi}{2} - x_0\right)\right| \leq |\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - \left(\frac{\pi}{2} - x_0\right)| = |x - x_0| < \varepsilon.$$

因此 $g(x)$ 在 $x_0$ 处连续. ■

**例 4.18 指数函数的连续性** 函数 $f(x) = a^x$ 在定义域上每一点都连续.

**证明** (i) 先证明 $f(x)$ 在 0 处连续, 只需证明 $\lim_{x\to 0} a^x = f(0)$.

证明 $f(0+) = 1$. 当 $a > 1$ 时 $f(x)$ 严格递增. 由例题 (3.7) 可知数列 $a^{1/n} \to 1$. 因此对于任一 $\varepsilon > 0$ 都存在 $N \in \mathbb{N}^*$ 使得

$$0 < a^{1/N} - 1 < \varepsilon.$$

于是取 $\delta < 1/N$, 则当 $x \in (0, \delta)$ 时

$$0 < a^x - 1 < a^\delta - 1 < a^{1/N} - 1 < \varepsilon.$$

因此当 $a > 0$ 时有 $f(0+) = 1$. 当 $0 < a < 1$ 时 $a^{-1} > 1$, 于是

$$f(0+) = \lim_{x\to 0+} a^x = \lim_{x\to 0+} \frac{1}{(a^{-1})^x} = 1.$$

于是当 $0 < a < 1$ 时也有 $f(0+) = 1$.

证明 $f(0-) = 1$. 令 $y = -x$, 则

$$f(0-) = \lim_{x\to 0-} a^x = \lim_{y\to 0+} a^{-y} = \lim_{y\to 0+} \frac{1}{a^y} = 1.$$

综上可知 $f(0+) = f(0-) = f(0)$. 于是可知 $\lim_{x\to 0} a^x = f(0)$.

(ii) 再证明一般情况. 任取 $x_0 \in \mathbb{R}$. 由 (i) 的结论可知

$$\lim_{x\to x_0} a^x = \lim_{x\to x_0} a^{x_0} a^{x - x_0} = a^{x_0} \lim_{x\to x_0} a^{x - x_0} = a^{x_0} \lim_{t\to 0} a^t = a^{x_0}.$$

于是可知 $f(x) = a^x$ 在定义域上每一点都连续. ■

现在我们已经证明了常值函数、正比例函数、正弦函数、余弦函数和指数函数在定义域上每一点都连续. 我们已经看到用定义证明是比较繁琐的. 事实上并不需要对所有初等函数都这样去做.

**命题 4.14**

设函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 $x_0$ 处连续, 则函数 $(f \pm g)(x)$ 和 $(fg)(x)$ 在 $x_0$ 处也连续. 若 $g(x_0) \neq 0$, 则函数 $(f/g)(x)$ 在 $x_0$ 处也连续.

**证明** 由于函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 $x_0$ 处连续, 故

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0),\quad \lim_{x\to x_0} g(x)=g(x_0).$$

于是

$$\lim_{x\to x_0}(f\pm g)(x)=\lim_{x\to x_0} f(x)\pm\lim_{x\to x_0} g(x)=f(x_0)\pm g(x_0)=(f\pm g)(x_0).$$

$$\lim_{x\to x_0}(fg)(x)=\lim_{x\to x_0} f(x)\cdot\lim_{x\to x_0} g(x)=f(x_0)\cdot g(x_0)=(fg)(x_0).$$

于是可知函数 $(f\pm g)(x)$ 和 $(fg)(x)$ 在 $x_0$ 处也连续. 若 $g(x_0)\neq 0$, 则

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f}{g}(x)=\frac{\lim_{x\to x_0} f(x)}{\lim_{x\to x_0} g(x)}=\frac{f(x_0)}{g(x_0)}=\frac{f}{g}(x_0).$$

于是可知函数 $(f/g)(x)$ 在 $x_0$ 处也连续. ■

我们已经证明了常值函数、正比例函数、正弦函数、余弦函数和指数函数都是连续函数. 由以上定理就可以知道任一幂函数、多项式函数、任一三角函数和任一双曲函数也都是连续函数.

**命题 4.15 (复合函数的连续性)**

设函数 $f(x)$ 在 $x_0$ 处连续, 函数 $g(t)$ 在 $t_0$ 处连续, 且 $g(t_0)=x_0$, 则函数 $f(g(t))$ 在 $t_0$ 处连续.

**证明** 由条件可知 $\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$, $\lim_{t\to t_0} g(t)=g(t_0)=x_0$. 由命题 (4.12) 可知

$$\lim_{t\to t_0} f(g(t))=f\left(\lim_{t\to t_0} g(t)\right)=f(x_0).$$

于是可知 $f(g(t))$ 在 $t_0$ 处连续.

我们已经证明了指数函数是一个连续函数. 我们知道对数函数是指数函数的反函数. 因此我们希望得到关于反函数连续性的结论.

**命题 4.16**

设函数 $f(x)$ 在定义域 $X$ 上严格递增 (或递减), 则一定存在反函数 $f^{-1}(x)$, 它的定义域为 $f(X)$, 且它在定义域上也严格递增 (或递减).

**证明** 只证明递增的情况. 令 $Y=f(X)$.

(i) 由于 $f(x)$ 在 $X$ 上严格递增, 故从 $f(x_1)=f(x_2)$ 可以推出 $x_1=x_2$. 因此 $f(x)$ 是一个单射. 这表明 $f(x)$ 是 $X$ 到 $Y$ 的一个双射, 因此 $f(x)$ 存在反函数 $f^{-1}(x)$, 它的定义域就是 $Y$.

(ii) 假设 $f^{-1}(x)$ 在 $Y$ 上不是严格递增的. 则存在 $y_1,y_2\in Y$, 它们满足 $y_1<y_2$ 但 $f^{-1}(y_1)\geq f^{-1}(y_2)$. 由于 $f(x)$ 是严格递增的. 故

$$f\left(f^{-1}(y_1)\right)\geq f\left(f^{-1}(y_2)\right)\iff y_1\geq y_2.$$

出现矛盾, 因此假设不成立. 于是可知 $f^{-1}(x)$ 在 $Y$ 上也是严格递增的. ■

**命题 4.17 (反函数的连续性)**

设函数 $f(x)$. 若 $f(x)$ 是区间 $I$ 上的一个严格递增 (或递减) 的连续函数, 则它的反函数 $f^{-1}(x)$ 是区间 $f(I)$ 上的一个严格递增 (或递减) 的连续函数.

**证明** 只证明严格递增的情况. 令 $J=f(I)$. 任取 $y_0\in J$ 只需证明 $f^{-1}(x)$ 在 $y_0$ 处连续. 即证明对于任一 $\varepsilon>0$ 存在 $\delta>0$ 使得当 $|y-y_0|<\delta$ 时 $\left|f^{-1}(y)-f^{-1}(y_0)\right|<\varepsilon$.

令 $x_0=f^{-1}(y_0)$. 则 $y_0=f(x_0)$. 任取 $\varepsilon>0$ 使得 $(x_0-\varepsilon,x_0+\varepsilon)\subseteq I$. 由于 $f(x)$ 严格递增. 故

$$f(x_0-\varepsilon)<f(x_0)<f(x_0+\varepsilon).$$

令

$$\delta_1 = y_0 - f(x_0 - \varepsilon) = f(x_0) - f(x_0 - \varepsilon) > 0.$$
$$\delta_2 = f(x_0 + \varepsilon) - y_0 = f(x_0 + \varepsilon) - f(x_0) > 0.$$

再令 $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. 于是可知当 $|y - y_0| < \delta$ 时

$$y_0 - \delta_1 \le y_0 - \delta < y < y_0 + \delta \le y_0 + \delta_2.$$

由命题 (4.16) 可知 $f^{-1}$ 严格递增, 故

$$\begin{aligned} f^{-1}(y_0 - \delta_1) < f^{-1}(y) < f^{-1}(y_0 + \delta_2) &\iff f^{-1}(f(x_0 - \varepsilon)) < f^{-1}(y) < f^{-1}(f(x_0 + \varepsilon)) \\ \iff x_0 - \varepsilon < f^{-1}(y) < x_0 + \varepsilon &\iff \left|f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)\right| < \varepsilon. \end{aligned}$$

注 证明 $f(I)$ 也是一个区间需要用到推论 (4.1).

有了以上命题我们就可以知道对数函数、反三角函数、反双曲函数都是连续函数. 对于定义在 $\mathbb{R}^+$ 幂函数 $f(x) = x^\mu$ $(\mu \in \mathbb{R})$. 我们可以把它看作

$$f(x) = \mathrm{e}^{\mu \ln x}.$$

由于指数函数和对数函数都是连续函数, 根据复合函数的连续性定理可知幂函数也是连续函数.

综合以上讨论, 事实上我们已经证明了以下定理.

**定义 4.12 (初等函数)**

常值函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数和反三角函数统称为**基本初等函数** (fundamental elementary function). 基本初等函数以及由它们通过有限次代数运算 (包括加、减、乘、除、乘方和开方) 或有限次复合得到的只需用一个解析式表示的函数统称为**初等函数** (elementary function).

注 一般来说, 分段函数不是初等函数

**定理 4.7**

初等函数在它们各自的定义域上都是连续的.

### 4.2.3 连续函数的极限

我们已经知道函数 $f(x)$ 在 $x_0$ 处连续当且仅当 $f(x)$ 在 $x_0$ 的极限等于 $f(x_0)$. 这表明, 求连续函数的在某一点极限只需求它在这一点的函数值. 因此函数的连续性为我们求函数极限提供了很大的便利.

在例题 (4.6) 中我们已经证明

$$\lim_{x\to\infty}\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \mathrm{e}.$$

在此基础上我们来再介绍几个重要的连续函数的极限.

**例 4.19** 求极限

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}.$$

**解** 令 $y = 1/x$. 则当 $x \to 0$ 时, $y \to\in \infty$. 由于 $\lim_{y\to\infty}(1 + 1/y)^y = \mathrm{e}$, 由复合函数的连续性和对数函数的连续性可知

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x\to 0}\ln(1+x)^{1/x} = \lim_{y\to\infty}\ln\left(1 + \frac{1}{y}\right)^y = \ln\mathrm{e} = 1.$$ ■

注 以上例题表明 $\ln(1+x) \sim x$ $(x \to 0)$.

注 例题 (3.11) 用到了以上结论.

**例 4.20** 求极限

$$\lim_{x\to0}\frac{\mathrm{e}^x-1}{x}.$$

**解** 令 $t=\mathrm{e}^x-1$, 则 $x=\ln(1+t)$. 当 $x\to0$ 时, $t\to0$. 由复合函数的连续性和例题 (4.19) 可知

$$\lim_{x\to0}\frac{\mathrm{e}^x-1}{x}=\lim_{t\to0}\frac{t}{\ln(1+t)}=1.$$ ■

**注** 以上例题表明 $\mathrm{e}^x-1\sim x\ (x\to0)$.

**例 4.21** 求极限

$$\lim_{x\to0}\frac{(1+x)^\alpha-1}{x},\quad \alpha\in\mathbb{R}.$$

**解** 当 $\alpha=0$ 时

$$\lim_{x\to0}\frac{(1+x)^\alpha-1}{x}=0.$$

当 $\alpha\neq0$ 时, 由例题 (4.19) 和例题 (4.20) 可知

$$\lim_{x\to0}\frac{(1+x)^\alpha-1}{x}=\lim_{x\to0}\frac{\mathrm{e}^{\alpha\ln(1+x)}-1}{\alpha\ln(1+x)}\cdot\frac{\alpha\ln(1+x)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{\mathrm{e}^{\alpha\ln(1+x)}-1}{\alpha\ln(1+x)}\lim_{x\to0}\frac{\alpha\ln(1+x)}{x}=1\cdot\alpha=\alpha.$$ ■

**注** 以上例题表明 $(1+x)^\alpha-1\sim\alpha x\ (x\to0)$.

下面来看 0/0 型有理函数的极限. 设有理函数 $f(x)=p(x)/q(x)$, 其中 $p(x)$ 和 $q(x)$ 都是多项式函数. 若 $q(x_0)\neq0$, 则 $f(x)$ 在 $x_0$ 处有定义, 由于 $f(x)$ 是一个连续函数, 故 $\lim_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$. 下设 $q(x_0)=0$. 此时若 $\lim_{x\to x_0}f(x)=a\in\mathbb{R}$. 则

$$p(x_0)=\lim_{x\to x_0}p(x)=\lim_{x\to x_0}\frac{p(x)}{q(x)}\cdot q(x)=\lim_{x\to x_0}\frac{p(x)}{q(x)}\cdot\lim_{x\to x_0}q(x)=a\lim_{x\to x_0}q(x_0)=0.$$

故此时 $f(x)$ 一定是一个 0/0 型未定式. 由于 $p(x_0)=0, q(x_0)=0$, 故可设

$$p(x)=(x-x_0)^r p_1(x),\quad q(x)=(x-x_0)^s q_1(x),\quad r,s\in\mathbb{N}^*.$$

其中 $p_1(x_0)\neq0, q_1(x_0)\neq0$. 于是

$$f(x)=(x-x_0)^{r-s}\frac{p_1(x)}{q_1(x)}.$$

容易看出 $\lim_{x\to x_0}f(x)=a\in\mathbb{R}$ 当且仅当 $r\geq s$. 具体来说当 $r>s$ 时 $\lim_{x\to x_0}f(x)=0$. 当 $r=s$ 时,$\lim_{x\to x_0}f(x)=p_1(x)/q_1(x)$. 以上讨论表明我们找到了求有理函数极限的通用方法.

下面我们来看 $1^\infty$ 未定式的极限. 事实上 $\lim_{x\to0}(1+x)^{1/x}$ 就是一个 $1^\infty$ 的未定式. 因此很自然地想到求 $1^\infty$ 未定式的极限需要用到 $\lim_{x\to0}(1+x)^{1/x}=\mathrm{e}$. 下面我们来尝试求这类极限. 为了书写便利, 我们规定

$$\exp x:=\mathrm{e}^x.$$

设**幂指函数** (power-exponential function) $u(x)^{v(x)}$, 其中 $u(x)\to1, v(x)\to\infty\ (x\to x_0)$. 因此这是一个 $1^\infty$ 型未定式. 为了能使用 $\lim_{x\to0}(1+x)^{1/x}=\mathrm{e}$, 我们对它作如下变换

$$u(x)^{v(x)}=\exp\ln u(x)^{v(x)}=\exp[v(x)\ln u(x)]=\exp\left\{[u(x)-1]v(x)\ln\left[(1+u(x)-1)^{1/(u(x)-1)}\right]\right\}.$$

令 $t=u(x)-1$. 则当 $x\to x_0$ 时 $t\to0$. 由复合函数的连续性可知

$$\lim_{x\to x_0}\ln\left[(1+u(x)-1)^{1/(u(x)-1)}\right]=\lim_{t\to0}\ln(1+t)^{1/t}=\ln\mathrm{e}=1.$$

假设 $\lim_{x\to x_0}[u(x)-1]v(x)=a$, 则有

$$\lim_{x\to x_0}u(x)^{v(x)}=\lim_{x\to x_0}\exp\left\{[u(x)-1]v(x)\ln\left[(1+u(x)-1)^{1/(u(x)-1)}\right]\right\}=\exp(a\cdot1)=\mathrm{e}^a.$$

我们尝试用上面的方法求一个 $1^\infty$ 未定式的极限.

**例 4.22** 求极限

$$\lim_{x\to\infty}\left(\cos\frac{1}{x}\right)^{x^2}.$$

**解** 令 $t=1/x$, 则当 $x\to\infty$ 时, $t\to 0$. 于是

$$\lim_{x\to\infty}\left(\cos\frac{1}{x}\right)^{x^2}=\lim_{t\to 0}(\cos t)^{1/t^2}.$$

令 $u(x)=\cos t$, $v(x)=1/t^2$. 由于

$$\lim_{t\to 0}[u(x)-1]v(x)=\lim_{t\to 0}\frac{\cos t-1}{t^2}=\frac{-t^2/2}{t^2}=-\frac{1}{2}.$$

由前面的分析可知

$$\lim_{x\to\infty}\left(\cos\frac{1}{x}\right)^{x^2}=\mathrm{e}^{-1/2}=\frac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}}.$$

■

### 4.2.4 函数的间断点

很自然地, 与连续点相对的是 "间断点". 下面我们来讨论间断点.

**定义 4.13 (间断点)**

设函数 $f$ 在 $x_0$ 有定义. 若 $f$ 在 $x_0$ 处不连续, 则称 $x_0$ 是 $f$ 的一个**间断点** (discontinuous point).

♣

用极限的观点看, 函数的间断点可以分为以下两大类.

**定义 4.14 (第一类间断点)**

设 $x_0$ 是函数 $f(x)$ 的一个间断点. 若 $f(x_0-)=a$, $f(x_0+)=b$ 且 $a,b\in\mathbb{R}$, 则称 $x_0$ 是 $f(x)$ 的一个**第一类间断点** (discontinuous point of the first kind).

(1) 若 $a\neq b$, 则称 $x_0$ 是 $f$ 的一个**跳跃间断点** (jump discontinuous point). 并称 $|a-b|$ 为 $f(x)$ 在 $x_0$ 的**跃度** (jump).

(2) 若 $a=b$ 但 $f(x_0)\neq a$, 则称 $x_0$ 是 $f$ 的一个**可去间断点** (removable discontinuous point).

♣

**注** 所谓 "可去" 是指只需修改这一个点, 就可以让函数在这一点连续.

**定义 4.15 (第二类间断点)**

设 $x_0$ 是函数 $f(x)$ 的间断点. 若 $f(x_0-)$ 和 $f(x_0+)$ 中至少有一个不存在或不是实数, 则称 $x_0$ 是 $f(x)$ 的一个**第二类间断点** (discontinuous point of the second kind)

♣

下面分别举出三种间断点的例子. 设函数

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2}{3}+1 & x\geq 0\\ -x & x<0\end{cases}.\quad g(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x} & x\neq 0\\ 2 & x=0\end{cases}.\quad h(x)=\begin{cases}\sin\dfrac{1}{x}+1 & x\neq 0\\ 1 & x=0\end{cases}.$$

其中 0 是 $f(x)$ 的跳跃间断点, 是 $g(x)$ 的可去间断点, 是 $h(x)$ 的第二类间断点，如图4.5所示.

下面我们来研究单调函数的间断点. 为此我们可以先研究单调函数的左右极限.

**引理 4.1**

设函数 $f(x)$ 是区间 $(a,b)$ 上单调递增, 则对于任一 $x_0\in(a,b)$, $f(x_0-)$ 和 $f(x_0+)$ 都存在且

$$f(x_0-)\leq f(x_0)\leq f(x_0+).$$

♡

**证明** 不妨设 $f(x)$ 在 $(a,b)$ 上单调递增. 任取 $x_0\in(a,b)$. 令 $E$ 是开区间 $(a,x_0)$ 在 $f$ 下的象. 由于 $f(x)$ 单调递增,

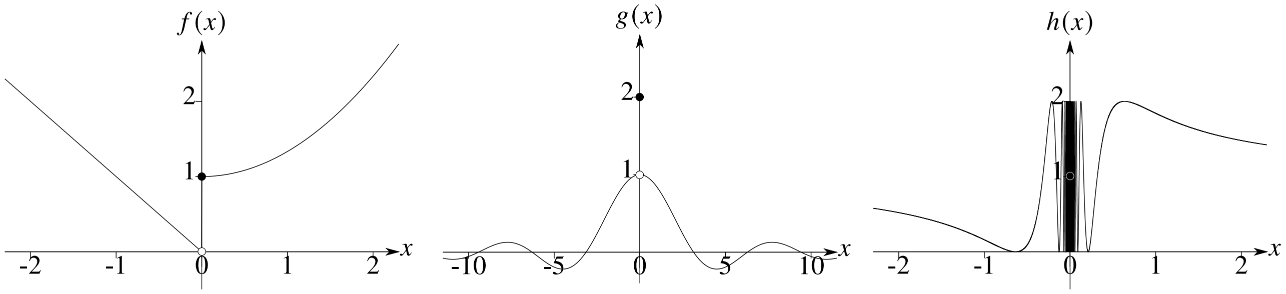



图 4.5: 不同种类的间断点示意图.

因此 $E$ 有上界. 令 $A = \sup E$. 则对于任一 $\varepsilon > 0$ 都存在 $\delta > 0$ 使得

$$f(x_0 - \delta) > A - \varepsilon. \iff A - f(x_0 - \delta) < \varepsilon.$$

由于 $f(x)$ 单调递增, 因此当 $x_0 - \delta < x < x_0$ 时

$$f(x_0 - \delta) \leq f(x) \leq f(x_0).$$

此时有

$$|f(x) - A| = A - f(x) \leq A - f(x_0 - \delta) < \epsilon.$$

这表明 $f(x_0-) = A$. 类似地可证明 $f(x_0+)$ 也存在. 由于 $f(x)$ 单调递增, 故

$$f(x_0-) \leq f(x_0) \leq f(x_0+).$$ ■

注 单调递减时也有相应结论.

注 由以上结论立刻可知 $f(x)$ 在 $x_0$ 处左连续当且仅当 $\sup f((a, x_0)) = f(x_0)$; 在 $x_0$ 处右连续当且仅当 $\inf f((x_0, b)) = f(x_0)$.

**定理 4.8**

设函数 $f(x)$ 是区间 $(a, b)$ 上的一个单调函数, 则 $f(x)$ 的间断点一定是跳跃间断点. 令 $f(x)$ 的所有间断点组成的集合为 $E$, 则 $E$ 是至多可数的. ♡

**证明** 不妨设 $f(x)$ 在 $(a, b)$ 上单调递增. 任取 $x_0 \in (a, b)$. 由引理可知

$$f(x_0-) \leq f(x_0) \leq f(x_0+).$$

因此 $x_0$ 要么是 $f(x)$ 的一个连续点要么是 $f(x)$ 的一个跳跃间断点.

任取 $x_0 \in E$, 则 $f(x_0-) < f(x_0+)$. 在开区间 $(f(x_0-), f(x_0+))$ 内任取一个有理数, 记作 $r(x_0)$. 令

$$r : E \mapsto \mathbb{Q}$$
$$x_0 \to r(x_0).$$

显然以上规定的 $r$ 是一个映射. 设 $x_1, x_2 \in E$, 若 $x_1 < x_2$, 则 $f(x_1+) \leq f(x_2-)$. 因此 $r(x_1) < r(x_2)$. 因此 $r$ 是一个单射. 于是可知 $r$ 可以成为 $E$ 到 $r(E) \subseteq \mathbb{Q}$ 的一个双射. 因此 $E$ 与 $\mathbb{Q}$ 的一个子集等价, 于是可知 $E$ 是至多可数的.

## 4.3 闭区间上连续函数的性质

我们已经说过函数在一点的连续是一个局部概念. 若函数在一个区间上每一点都连续时, 我们称它为该区间上的一个连续函数. 此时我们可以研究它的整体性质.

### 4.3.1 一致连续性

回顾一下函数 $f(x)$ 在区间 $I$ 上连续的概念. 任取一点 $x_1 \in I$, 若对于任一 $\varepsilon > 0$ 都存在 $\delta > 0$ 使得当 $|x_1 - x_2| < \delta$ 时都有 $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$. 则称 $f(x)$ 在区间 $I$ 上连续. 这个定义表明 $\delta$ 的选取不仅依赖于 $\varepsilon$, 还依赖于 $x_1$. 举例说明.

设反比例函数 $f(x) = 1/x$. 我们已经知道它在区间 $(0, +\infty)$ 上连续. 任意给定 $\varepsilon = 1/20$. 当区 $x_1 = 10$ 时. 由于

$$\left|\frac{1}{x_2} - \frac{1}{10}\right| < \frac{1}{20} \iff \frac{20}{3} < x_2 < 20.$$

因此 $\delta$ 可取的范围是

$$0 < \delta < \min\left\{20 - 10, 10 - \frac{20}{3}\right\} = \frac{10}{3}.$$

当 $x_1 = 1$ 时. 由于

$$\left|\frac{1}{x_2} - 1\right| < \frac{1}{20} \iff \frac{20}{21} < x_2 < \frac{20}{19}.$$

因此 $\delta$ 可取的范围是

$$0 < \delta < \min\left\{\frac{20}{19} - 1, 1 - \frac{20}{21}\right\} = \frac{1}{21}.$$

以上讨论说明 $\delta$ 的选取确实依赖于 $x_1$.

再看一个例子. 回顾例题 (4.15). 我们在证明正比例函数 $f(x) = x$ 在 $\mathbb{R}$ 上连续时, 任取 $x_1 \in \mathbb{R}$, 对于任一 $\varepsilon > 0$, 只需取 $\delta = \varepsilon$, 就可以使 $x_2$ 满足 $0 < |x_1 - x_2| < \delta$ 时都有

$$|f(x_1) - f(x_2)| = |x_1 - x_2| < \delta = \varepsilon.$$

这个例子表明, 有些连续函数具有更强的性质! 在证明它们的连续性时可以选取一个 "统一的"(uniform) $\delta$ 而不依赖 $x_1$. 于是我们可以引入以下概念.

**定义 4.16 (一致连续)**

设函数 $f(x)$ 在区间 $I$ 上有定义. 若对于任一 $\varepsilon > 0$ 都存在 $\delta > 0$ 使得对于任意 $x_1, x_2 \in I$ 都有

$$|x_1 - x_2| < \delta \Longrightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon.$$

则称 $f(x)$ 在 $I$ 上**一致连续** (uniformly continuous). ♣

**注** 一致连续的概念是 Bolzano 在 1830 年代首次提出的. 但直到 1870 年 Heine 才第一次公开介绍了这个概念. 并于 1872 年证明了开区间上的连续函数未必一致连续.

**注** 一致连续是一个整体概念, 需要在一个区间上讨论.

**注** 显然函数在 $I$ 上连续是它在 $I$ 上一致连续的必要条件.

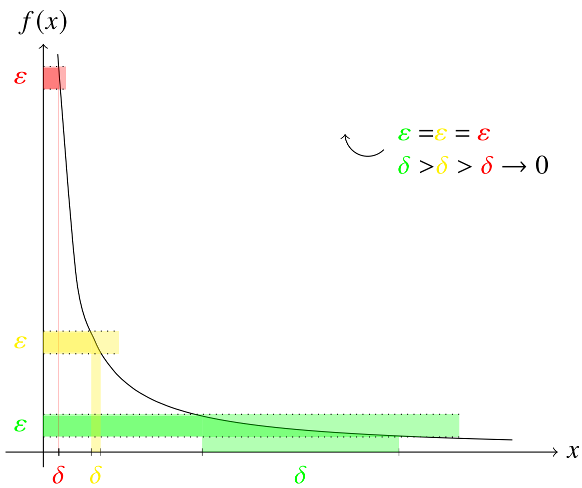


**图 4.6:** 一个连续但不一致连续的例子.

从前面的讨论可知正比例函数 $f(x) = x$ 在 $\mathbb{R}$ 上是一致连续的. 从直观上看反比例函数 $f(x) = 1/x$ 在 $(0, +\infty)$ 不是一致连续的. 如图4.6所示, 对于给定的 $\varepsilon > 0$, 随着选取的 $x_1$ 逐渐靠近 0, 满足要求的 $\delta$ 的取值范围越来越小. 后面我们会证明随着 $x_1 \to 0$, $\delta$ 的取值范围也趋于零. 为了严格证明这个事实, 我们考虑用数列极限来刻画一致连续性.

**命题 4.18**

设函数 $f(x)$ 在区间 $I$ 上有定义. 则 $f(x)$ 在 $I$ 上一致连续, 当且仅当对于任意数列 $\{x_n\}, \{y_n\} \in I$ 都有

$$\lim_{n\to\infty}(x_n - y_n) = 0 \Longrightarrow \lim_{n\to\infty}[f(x_n) - f(y_n)] = 0.$$

**证明** (i) 证明必要性. 若 $f(x)$ 在 $I$ 上一致连续, 则对于任一 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$ 使得对于任意 $x_1, x_2 \in I$ 都有

$$|x_1 - x_2| < \delta \Longrightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon.$$

任取数列 $\{x_n\}, \{y_n\} \in I$. 若 $x_n - y_n \to 0$, 则对于给定的 $\delta > 0$, 存在 $N \in \mathbb{N}^*$ 使得当 $n > N$ 时, 有 $|x_n - y_n| < \delta$. 因此当 $n > N$ 时, 有 $|f(x_n) - f(y_n)| < \varepsilon$. 于是 $f(x_n) - f(y_n) \to 0$.

(ii) 证明充分性. 假设 $f(x)$ 在 $I$ 上不一致连续, 则存在 $\varepsilon > 0$ 对于任一 $\delta \in \{1/n\}$ 都存在 $x_n, y_n \in I$ 使得

$$|x_n - y_n| < \frac{1}{n} \Longrightarrow |f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon.$$

此时数列 $\{a_n\}, \{b_n\} \in I$ 满足 $x_n - y_n \to 0$ 但不满足 $f(x_n) - f(y_n) \to 0$. 出现矛盾. 这表明充分性也成立. ■

利用以上命题, 我们只需找到一对数列 $\{x_n\}$ 和 $\{y_n\}$ 满足 $\lim_{n\to\infty}(x_n - y_n) = 0$ 但不满足 $\lim_{n\to\infty}(f(x_n) - f(y_n)) = 0$ 就可以证明 $f(x)$‘‘不一致连续”. 下面用这个方法来证明反比例函数不是一致连续的.

**例 4.23** 反比例函数 $f(x) = 1/x$ 在开区间 $(0, +\infty)$ 上不是一致连续的.

**证明** 在 $(0, +\infty)$ 中取两个数列

$$a_n = \frac{1}{n+1}, \quad b_n = \frac{1}{n}, \quad n = 1, 2, \cdots.$$

由于

$$a_n - b_n = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} \to 0,$$
$$f(a_n) - f(b_n) = (n+1) - n = 1 \to 1.$$

由命题 (4.18) 可知 $f(x)$ 不一致连续. ■

再看一个不是一致连续的例子.

**例 4.24** 二次函数 $f(x) = x^2$ 在区间 $[0, +\infty)$ 上不是一致连续的.

**证明** 在 $[0, +\infty)$ 中取两个数列

$$a_n = n + \frac{1}{n}, \quad b_n = n, \quad n = 1, 2, \cdots.$$

由于

$$a_n - b_n = \left(n + \frac{1}{n}\right) - n = \frac{1}{2n} \to 0,$$
$$f(a_n) - f(b_n) = \left(n + \frac{1}{n}\right)^2 - n^2 = 2 + \frac{1}{n^2} \to 2.$$

由命题 (4.18) 可知 $f(x)$ 不是一致连续的. ■

**注** 用类似的方法可以证明, 当 $n = 2, 3, \cdots$ 时函数 $x^n$ 都不是一致连续的.

通过以上两个不一致连续的例子,我们猜测产生了两个想法,如果要使一个连续函数一致连续,可以尝试两种方式:一是,让他们有界,二是让在闭区间内.下面分别来看这两个想法的正确性.

**例 4.25** 设函数 $f(x)=\sin(1/x)$. 它在区间 $(0,1)$ 内连续且有界,但不一致连续.

**证明** 显然 $|f(x)|\le 1$. 因此 $f(x)$ 有界. 下面来看 $f(x)$ 是否一致连续. 设 $(0,1)$ 上的数列

$$x_n=\frac{1}{2n\pi+\pi/2},\quad y_n=\frac{1}{2n\pi},\quad n=1,2,\cdots.$$

则 $x_n-y_n\to 0$, 然而

$$f(x_n)-f(y_n)=\sin(2n\pi+\pi/2)-\sin 2n\pi=1\to 1.$$

由命题 (4.18) 可知 $f(x)$ 不一致连续. ■

以上例题表明在开区间内有界的连续函数依旧可能不一致连续. 下面来看闭区间内的连续函数是否一定一致连续. 我们先看一个例子.

**例 4.26** 任一给定 $a>0$, 则反比例函数 $f(x)=1/x$ 在 $[a,+\infty)$ 是一致连续的.

**证明** 任取 $x_1,x_2\in[a,+\infty)$. 由于

$$\left|\frac{1}{x_1}-\frac{1}{x_2}\right|=\frac{|x_1-x_2|}{x_1x_2}\le\frac{|x_1-x_2|}{a^2}.$$

因此对于任一 $\varepsilon>0$ 只需取 $\delta=a^2\varepsilon$. 则当 $|x_1-x_2|<\delta$ 时

$$\left|\frac{1}{x_1}-\frac{1}{x_2}\right|\le\frac{|x_1-x_2|}{a^2}<\frac{\delta}{a^2}=\varepsilon.$$

于是可知 $f(x)=1/x$ 在 $[a,+\infty)$ 是一致连续的. ■

下面我们来证明这个想法.

**定理 4.9 (一致连续性定理)**

设函数 $f(x)$ 在闭区间 $I$ 上连续. 则 $f(x)$ 在 $I$ 上一致连续.

**证明** 用反证法. 假设函数 $f(x)$ 在 $I$ 上不一致连续. 则存在 $\varepsilon>0$ 对于任一 $\delta\in\{1/n\}$ 都存在 $x_n,y_n\in I$ 使得

$$|x_n-y_n|<\frac{1}{n}\Longrightarrow|f(x_n)-f(y_n)|\ge\varepsilon.$$

由于 $\{x_n\}\subseteq I$, 故 $\{x_n\}$ 有界, 由 Bolzano-Weierstrass 定理可知 $\{x_n\}$ 有一个子列 $x_{k_n}\to\xi\in I$. 由于

$$|y_{k_n}-\xi|\le|y_{k_n}-x_{k_n}|+|x_{k_n}-\xi|<\frac{1}{k_n}+|x_{k_n}-\xi|.$$

因此 $y_{k_n}\to\xi$. 由于 $f(x)$ 在 $\xi$ 处连续, 故

$$\lim_{n\to\infty}f(x_{k_n})=\lim_{n\to\infty}f(y_{k_n})=f(\xi).$$

这与 $|f(x_n)-f(y_n)|\ge\varepsilon$ 矛盾. 于是可知 $f(x)$ 在 $I$ 上一致连续. ■

**注** 以上证明中 $I$ 是一个闭区间确保了 $x_0\in I$. 原因如下: 设 $I=[a,b]$. 由于 $\{x_{k_n}\}\subseteq\{x_n\}\subseteq[a,b]$, 故 $a\le x_{k_n}\le b$ $(n=1,2,\cdots)$. 令 $n\to\infty$ 得 $a\le x_0\le b$. 由此可见如果 $I$ 是一个开区间, 则 $\{x_{k_n}\}$ 收敛到开区间的端点处, 导致以上定理不成立.

**注** 以上定理也称为 Heine-Cantor 定理.

这样我们就得到了有限闭区间上连续函数的第一个重要性质.

最后我们来看两个比一致连续性 ‘‘更强’’ 的 ‘‘连续性”.

**例 4.27Lipschitz 连续** 设函数 $f(x)$ 在区间 $I$ 上有定义. 若存在 $K>0$ 使得对于任意 $x_1, x_2 \in I$ 都有

$$|f(x_1)-f(x_2)|<K|x_1-x_2|.$$

则 $f(x)$ 在 $I$ 上一致连续.

**证明** 对于任一 $\varepsilon>0$, 取 $\delta=\varepsilon/K>0$. 则对于任意 $x_1, x_2 \in I$, 当 $|x_1-x_2|<\delta$ 时

$$|f(x_1)-f(x_2)|<K|x_1-x_2|<K\delta=\varepsilon.$$

于是可知 $f(x)$ 在 $I$ 上一致连续. ■

我们称以上例子中的函数 $f(x)$ 是 **Lipschitz 连续的** (Lipschitz continuous). 我们已经看到一致连续是 Lipschitz 连续的必要条件, 但不是充分条件. 例如函数 $f(x)=\sqrt{x}$ 在闭区间 $[0,1]$ 上是一致连续的, 但并不是 Lipschitz 连续的. 证明留作习题.

容易看出, "Lipschitz 条件'' 本质上是把区间上函数值的变化率 (我们可以简单地看成斜率) 控制在一个范围内.

我们可以推广 "Lipschitz 条件".

**例 4.28** 设函数 $f(x)$ 在区间 $I$ 上有定义. 若存在 $K>0$ 使得对于任意 $x_1, x_2 \in I$ 都有

$$|f(x_1)-f(x_2)|<K|x_1-x_2|^{\alpha}, \quad 0<\alpha \leq 1.$$

则 $f(x)$ 在 $I$ 上一致连续.

**证明** 对于任一 $\varepsilon>0$, 取 $\delta=(\varepsilon/K)^{1/\alpha}>0$. 则对于任意 $x_1, x_2 \in I$, 当 $|x_1-x_2|<\delta$ 时

$$|f(x_1)-f(x_2)|<K|x_1-x_2|^{\alpha}<K\left[\left(\frac{\varepsilon}{k}\right)^{1/\alpha}\right]^{\alpha}=\varepsilon.$$

于是可知 $f(x)$ 在 $I$ 上一致连续.

我们称以上例子中的函数 $f(x)$ 是 **Hölder 连续的** (Hölder continuous). 显然 Lipschitz 连续是 Hölder 连续的特例 $(\alpha=1)$. 因此 Hölder 连续是 Lipschitz 连续的必要条件. 于是我们可以按条件由弱到强排列以下四种连续: 连续、一致连续、Hölder 连续、Lipschitz 连续.

## 4.3.2 有界性

直观上就容易看出, 闭区间上的连续函数是有界的.

**定理 4.10**

设函数 $f(x)$ 在闭区间 $I$ 上连续. 则 $f(x)$ 在 $I$ 上有界.

**证明** 只证明有上界的情况. 用反证法, 假设 $f(x)$ 在 $I$ 上无上界. 则任一自然数 $n$ 都不是它的上界. 故存在 $x_n \in I$ 使得 $f(x_n)>n$ $(n=1,2,\cdots)$. 由于 $\{x_n\} \subseteq I$, 故 $\{x_n\}$ 有界, 由 Bolzano-Weierstrass 定理可知 $\{x_n\}$ 有一个子列 $x_{k_n} \rightarrow \xi \in I$. 由于 $f(x)$ 在 $\xi$ 处连续, 故

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_{k_n})=f(\xi).$$

另一方面, 由于

$$f(x_{k_n})>k_n \geq n, \quad n=1,2,\cdots.$$

令 $n \rightarrow \infty$ 得 $f(x_{k_n}) \rightarrow +\infty$. 出现矛盾. 于是可知 $f(x)$ 在 $I$ 上有上界. ■

如果把以上定理的条件改为开区间, 结论就不成立. 例如反比例函数 $1/x$ 在开区间 $(0,1)$ 上连续但无界. 如果改为无限区间, 结论也不成立. 例如正比例函数 $x$ 在区间 $[0,+\infty)$ 上连续但无界.

在有限闭区间上连续函数一定有界, 那么很自然地就会考虑能否取到最大值和最小值.

**定理 4.11 (极值定理)**

设函数 $f(x)$ 在闭区间 $I$ 上连续. 令

$$M = \sup f(I), \quad m = \inf f(I).$$

则存在 $x_M, x_m \in I$ 使得 $f(x_M) = M, f(x_m) = m$. ■

**证明** 由定理 (4.10) 可知 $M, m \in \mathbb{R}$. 由于 $M = \sup_{x\in I}\{f(x)\}$. 故对于任一 $n \in \mathbb{N}^*$ 都存在 $x_n \in I$ 使得

$$M - \frac{1}{n} < f(x_n) \leq M.$$

由于 $\{x_n\} \subseteq I$, 故 $\{x_n\}$ 有界, 由 Bolzano-Weierstrass 定理可知 $\{x_n\}$ 有一个子列 $x_{k_n} \to \xi \in I$. 由于

$$M - \frac{1}{k_n} < f(x_{k_n}) \leq M.$$

令 $n \to \infty$ 得 $\lim_{n\to\infty} f(x_{k_n}) = M$. 由于 $f(x)$ 在 $\xi$ 处连续, 故

$$\lim_{n\to\infty} f(x_{k_n}) = f(\xi).$$

令 $\xi = x_M$, 则 $f(x_M) = M$. 同理可证存在 $x_m \in I$ 使得 $f(x_m) = m$. ■

**注** 以上定理表面, 闭区间上的连续函数一定可以取到该区间上的**最大值** (global maximum) 和**最小值** (global minimum). 我们在后面遇到**极大值** (local maximum) 和**极小值** (local minimum) 的概念, 它们和最大值最小值合在一起统称为**极值** (extreme value).

### 4.3.3 介值性

下面来看有限闭区间上连续函数的 “中间过程”.

**引理 4.2 (零点定理)**

设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续. 若 $f(a)f(b) < 0$, 则存在 $\xi \in (a,b)$ 使得 $f(\xi) = 0$.

**证明** 不妨设 $f(a) < 0 < f(b)$. 取区间 $[a,b]$ 的中点 $c = (a+b)/2$. 若 $f(c) = 0$ 就找到了满足要求的 $\xi$. 否则 $f(c)$ 一定与 $f(a)$ 和 $f(b)$ 中的某一个异号. 取其中与 $f(c)$ 异号的那个, 设它与 $f(c)$ 组成的闭区间为 $[a_1, b_1]$. 则 $[a_1, b_1]$ 满足

$$[a,b] \supsetneqq [a_1,b_1], \quad 0 < b_1 - a_1 = \frac{b-a}{2}, \quad f(a_1) < 0 < f(b_1).$$

继续重复上面的操作可以得到一个闭区间序列 $[a_k, b_k]$ $(k = 1, 2, \cdots)$ 满足

$$[a,b] \supsetneqq [a_1,b_1] \supsetneqq [a_2,b_2] \supsetneqq \cdots, \quad 0 < b_k - a_k = \frac{b-a}{2^k}, \quad f(a_k) < 0 < f(b_k).$$

在此过程中如果遇到某个 $k$ 使得 $f((a_k+b_k)/2) = 0$, 就找到了满足要求的 $\xi$. 否则就把这个过程无限进行下去. 由闭区间套定理可知存在 $\xi \in [a_k, b_k]$ $(k = 1, 2, \cdots)$ 使得

$$\lim_{k\to\infty} a_k = \lim_{k\to\infty} b_k = \xi.$$

由于 $f(x)$ 在 $\xi$ 处连续, 故

$$\lim_{k\to\infty} f(a_k) = f(\xi), \quad \lim_{k\to\infty} f(b_k) = f(\xi).$$

令 $f(a_k) < 0 < f(b_k)$ 的 $k \to \infty$ 得 $f(\xi) \leq 0 \leq f(\xi)$. 于是 $f(\xi) = 0$. ■

以上引理也称为 Bolzano 定理. 证法二称为 “二分法”, 也称为 Bolzano 方法. 我们可以利用这个方法寻找一些超越方程的近似根. 零点定理有很多应用. 其中最重要的应用是判断方程的根, 因此零点定理也被称为**勘根定理**.

**例 4.29** 求 $\sqrt{2}$ 的近似值. 要求精确到小数点后面第一位.

**解** 令 $f(x)=x^2-2$. 只需求方程 $f(x)=0$ 正根 $x_0$ 的近似值. 用二分法和零点定理反复缩小 $x_0$ 所在的范围.

| | | |
|---|---|---|
| $f(1)<0$ | $f(1.5)>0$ | $x_0\in[1,1.5]$ |
| $f(1.25)<0$ | $f(1.5)>0$ | $x_0\in[1.25,1.5]$ |
| $f(1.375)<0$ | $f(1.5)>0$ | $x_0\in[1.375,1.5]$ |
| $f(1.375)<0$ | $f(1.4375)>0$ | $x_0\in[1.375,1.4375]$ |
| $f(1.40625)<0$ | $f(1.4375)>0$ | $x_0\in[1.40625,1.4375]$ |

于是可知 $\sqrt{2}$ 精确到小数点后面第一位的近似值为 1.4.

**注** 二分法是一个操作简明的方法, 但它逼近的速度比较慢, 实际应用中我们需要逼近速度更快的方法.

**例 4.30** 实系数一元三次方程一定有实根.

**证明** 不是一般性设 $x^3+a_2x^2+a_1x+a_0=0$. 令方程左边的多项式记作 $p(x)$, 则

$$p(x)=x^3\left(1+\frac{a_2}{x}+\frac{a_1}{x^2}+\frac{a_0}{x^3}\right).$$

于是

$$\lim_{x\to+\infty}p(x)=+\infty,\qquad \lim_{x\to-\infty}p(x)=-\infty.$$

因此存在闭区间 $[a,b]$ 满足 $p(a)<0, p(b)>0$. 由零点定理可知存在实数 $\xi\in(a,b)$ 使得 $f(\xi)=0$. 这表明原方程有一个实根. ■

**定理 4.12 (介值定理)**

设非常值函数函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续. 若 $f(a)=\alpha$, $f(b)=\beta$. 对于 $\alpha$ 和 $\beta$ 之间任一实数 $\gamma$ 都存在 $c\in(a,b)$ 使得 $f(c)=\gamma$.

**证明** 不妨设 $f(a)<\gamma<f(b)$. 令

$$g(x)=f(x)-\gamma.$$

则 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 且

$$g(a)=f(a)-\gamma<0<f(b)-\gamma=g(b).$$

由零点定理可知存在 $c\in[a,b]$ 使得 $g(c)=0$, 即 $f(c)=\gamma$. ■

由介值定理可以立刻得到以下结论.

**推论 4.1**

设非常值函数 $f(x)$. 若 $f(x)$ 在闭区间 $I$ 上连续. 则 $J=f(I)$ 也是一个闭区间.

**证明** 由最值定理可知 $J$ 中存在最大值 $M$ 和最小值 $m$. 由介值定理可知 $f(I)$ 取遍 $M$ 和 $m$ 之间的数, 即 $J=[m,M]$. ■

**注** 由介值定理容易知道, 若非常值函数 $f(x)$ 在区间 $I$ 上连续. 则 $J=f(I)$ 也是一个区间. 在证明命题 (4.17) 时我们用到了以上结论.

**定理 4.13 (压缩映射原理)**

**证明**

# 第 5 章 一元函数微分学

内容提要

- XXX

## 5.1 一元函数的导数与微分

### 5.1.1 导数的概念

在连续的背景下,我们经常遇到有关函数“变化率”的问题. 无论是物理上的瞬时速度,经济学上的边际效益,还是曲线切线的斜率本质上全是关于函数“变化率”的问题.

设函数 $f$ 在 $x_0$ 的邻域 $N_r(x_0)$ 上有定义. 自变量从 $x_0$ 变化到 $x_0+\Delta x$, 其中 $\Delta x$ 称为自变量在 $x_0$ 处的**增量** (increment). 令 $\Delta f(x)=f(x)-f(x_0)$, 我们称 $\Delta f(x)$ 为函数 $f(x)$ 在 $x_0$ 处的增量或**差分** (difference). 函数 $f(x)$ 在 $x_0$ 处的差分和自变量在 $x_0$ 处的增量的商称为 $f(x)$ 在 $x_0$ 处的**差商** (difference quotient):

$$\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}.$$

那么函数的“平均变化率”的问题就归结为计算差商. 如果我们想知道函数在 $x_0$ 处的“瞬时变化率”, 那么就归结为计算增量 $\Delta x\to 0$ 时差商的极限:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}.$$

于是我们可以引入以下概念.

**定义 5.1 (导数)**

设函数 $f(x)$ 在 $x_0$ 的邻域 $N_r(x_0)$ 上有定义. 若存在 $a\in\mathbb{R}$ 使得

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}=a.$$

则称 $f(x)$ 在 $x_0$ 处可导 (derivable), $a$ 称为 $f$ 在 $x_0$ 处的导数 (derivative), 记作 $f'(x_0)=a$.

♣

注 注意到导数也是一个局部概念.

注 在物理中, 经常需要对时间的函数求导. 设关于时间 $t$ 的函数 $\phi(t)$, 它的导数可以记作 $\dot{\phi}$, 这个记号称为 **Newton 记号**.

注 令 $x=x_0+\Delta x$, 则导数的定义式变为

$$f'(x_0):=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

事实上, 我们曾经并未精确地定义过曲线的切线. 现在我们用导数来定义曲线切线的概念. 若曲线 $y=f(x)$ 在 $x_0$ 处可导, 则过点 $P(x_0,f(x_0))$ 斜率为 $f'(x_0)$ 的直线

$$y=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$$

称为曲线 $y=f(x)$ 在 $P$ 处的**切线** (tangent line). 过点 $P$ 且垂直于切线的直线称为曲线 $y=f(x)$ 在 $P$ 处的**法线** (normal line). 事实上, 曲线在某一点的切线的斜率就是导数的几何意义. 从几何直观上看, 在某点可导意味着在这一点“光滑”,“有棱角”的地方都是不可导的, 也没有切线.

物理学中 (尤其是力学中) 的很多概念都是用导数定义的. 例如“速度”和“加速度”.

既然有单侧极限, 我们可以定义单侧导数.

**定义 5.2 (单侧导数)**

设函数 $f(x)$.

(1) 若 $f$ 在 $x_0$ 的左邻域 $N_r^-(x_0)$ 有定义, 且存在 $a \in \mathbb{R}$, 使得

$$\lim_{\Delta x \to 0-} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} = a.$$

则称函数 $f$ 在 $x_0$ 的左侧可导, $a$ 称为 $f(x)$ 在 $x_0$ 处的左导数 (left derivative), 记作 $f'_-(x_0)$.

(2) 若 $f$ 在 $x_0$ 的右邻域 $B^+(x_0)$ 有定义, 且存在 $a \in \mathbb{R}$, 使得

$$\lim_{\Delta x \to 0+} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} = a.$$

则称函数 $f$ 在 $x_0$ 的右侧可导, $a$ 称为 $f(x)$ 在 $x_0$ 处的右导数 (right derivative), 记作 $f'_+(x_0)$.

左导数和右导数统称单侧导数 (one-sided derivative).

♣

显然有以下结论.

**命题 5.1**

设函数 $f(x)$ 在邻域 $N_r(x_0)$ 有定义. 则 $f(x)$ 在 $x_0$ 处可导且 $f'(x_0)=a$ 当且仅当

$$f'_-(x_0)=f'_+(x_0)=a.$$

♠

**证明** 证明略.

我们常常在连续的背景下讨论 “变化率” 问题. 因此容易想到连续是可导的必要条件.

**定理 5.1 (可导和连续的关系)**

设函数 $f(x)$ 在 $x_0$ 处可导, 则 $f(x)$ 在 $x_0$ 处连续.

♡

**证明** 由于 $f$ 在 $x_0$ 处可导, 于是有

$$\begin{aligned}\lim_{x\to x_0}(f(x)-f(x_0)) &= \lim_{x\to x_0}\left[\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\cdot(x-x_0)\right] \\ &= \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\cdot\lim_{x\to x_0}(x-x_0)=0.\end{aligned}$$

这表明 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$. 于是可知 $f(x)$ 在 $x_0$ 处连续.

函数在某处连续是在该处可导的必要条件, 但不是充分条件, 因此 “可导” 比 “连续” 更强. 下面举例说明.

**例 5.1** 函数 $f(x)=|x|$ 在 $x=0$ 处不可导.

**证明** 由于

$$\begin{aligned} f'_+(0) &= \lim_{\Delta x\to 0+}\frac{f(\Delta x)-f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0+}\frac{\Delta x}{\Delta x}=1. \\ f'_-(0) &= \lim_{\Delta x\to 0-}\frac{f(\Delta x)-f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0-}\frac{-\Delta x}{\Delta x}=-1. \end{aligned}$$

故 $f'_+(0)\neq f'_-(0)$. 于是可知 $f(x)=|x|$ 在 $x=0$ 处不可导. ■

后面我们会遇到更加极端的函数, 它处处连续但处处不可导的函数. 下面在看一下 Riemann 函数的情况.

**例 5.2** 设函数 $T(x)$ 满足

$$T(x)=\begin{cases} 1, & x=0 \\ \dfrac{1}{q}, & x=\dfrac{p}{q} \\ 0, & x\in\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q} \end{cases},$$

其中 $q>0, p,q\in\mathbb{Z}^*$, 且 $p,q$ 互素. 则 $T(x)$ 在定义域上任意一点都不可导. 处处不可导.

**证明** 由例题 (4.14) 可知 $T(x)$ 在任一有理点不连续, 因此在任一有理点都不可导. $T(x)$ 在任一无理点都连续, 且它在任一无理点的极限值都是零. 假设 $T(x)$ 在无理点 $x_0$ 可导, 则

$$T'(a)=\lim_{x\to x_0}\frac{T(x)-T(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{T(x)}{x-x_0}=0.$$

XXX

### 5.1.2 微分的概念

设函数 $f(x)$ 在 $x_0$ 处可导. 由导数的定义可知

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}=f'(x_0)\iff\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}-f'(x_0)=o(1),\quad \Delta x\to 0.$$

于是可以得到

$$\Delta f(x_0)=f'(x_0)\Delta x+o(\Delta x),\quad \Delta x\to 0.$$

以上等式称为函数的**无穷小增量公式**.

无穷小增量公式告诉了我们一个非常重要的事实: 对于给定的 $x_0$, 差分 $\Delta f(x_0)$ 是增量 $\Delta x$ 的一个函数. 这个函数可能非常复杂, 但它可以化为一个关于 $\Delta x$ 的线性函数 $f'(x_0)\Delta x$ 加上一个 $\Delta x$ 的高阶无穷小. 当 $\Delta x$ 非常微小时, $f'(x_0)\Delta x$ 可以作为差分 $\Delta f(x_0)$ 的近似值. 于是我们很形象地称 $f'(x_0)\Delta x$ 为 $\Delta f(x)$ 的**线性主部** (linear principal part), 它的系数恰是 $f(x)$ 在 $x_0$ 处的导数.

反过来, 若函数 $f(x)$ 对于给定的 $x_0$ 存在 $\lambda\in\mathbb{R}$ 满足

$$\Delta f(x_0)=\lambda\Delta x+o(\Delta x),\quad \Delta x\to 0.$$

则

$$\lambda=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}=f'(x_0).$$

这表明线性函数的系数 $\lambda$ 一定是 $f(x)$ 在 $x_0$ 处的导数.

综上讨论, 我们引出了分析学中的一个重要概念.

**定义 5.3 (微分)**

设函数 $f$ 在 $x_0$ 的一个邻域 $N(x_0)$ 上有定义, 若存在 $\lambda\in\mathbb{R}$ 使得

$$\Delta f(x_0)=\lambda\Delta x+o(\Delta x),\quad \Delta x\to 0.$$

则称函数在 $x_0$ 处可微 (differentiable). 关于 $\Delta x$ 的线性函数 $\lambda\Delta x$ 称为函数 $f(x)$ 在 $x_0$ 处的微分 (differential), 记作

$$\mathrm{d}f(x_0)=\lambda\Delta x,$$

其中 $\lambda=f'(x_0)$. 特别地, 对于正比例函数 $g(x)=x$, 由于 $g'(x)=1$, 故

$$\mathrm{d}g(x)=\mathrm{d}x=\Delta x.$$

于是微分可以记作 $\mathrm{d}f(x_0)=f'(x_0)\,\mathrm{d}x$.

♣

**注** 微分的字面意思就是: 在增量非常微小时, 函数差分的近似.

**注** 由以上定义可知, 对于一元函数来说, 可导和可微是 "等价的", 即函数在 $x_0$ 可导当且仅当函数在 $x_0$ 可微, 且函数的在 $x_0$ 处的微分的系数等于函数的在 $x_0$ 处的导数. 这个等价只对一元函数中成立.

由于微分是一个经过漫长时间逐渐形成的概念. 且有数不清的天才研究过这个概念, 因此微分的记号非常多, 下面介绍最重要的三种.

由于 $\mathrm{d}\,f(x) = f'(x)\,\mathrm{d}\,x$, 故导数可以记作

$$f'(x) = \frac{\mathrm{d}\,f(x)}{\mathrm{d}\,x} \tag{5.1}$$

以上等式中, 左边的导数记号称为 **Lagrange 记号**, 它清楚地表达了导数对 $x$ 的依赖性, 也表达了与 $f$ 的关系; 右边的导数记号称为 **Leibniz 记号**, 它把导数理解成了两个微分的商, 因此导数也被称为**微商** (differential quotient), 对导数进行形式化操作时, 这个记号较为方便.

我们也可以将 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}$ 看作一个**算子** (operator), 于是导数还可以记作

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x} f(x) = D_x f(x).$$

这个记号称为 **Euler 记号**, 在线性微分方程中该记号较便利.

函数的微分具有明确的几何意义. 如图 (5.1) 所示, 函数 $f(x)$ 在 $x_0$ 处的微分就是曲线 $y = f(x)$ 在 $x_0$ 处的 ‘‘切线函数’’ 的增量. 由此可见, 函数的微分体现了 ‘‘化曲为直’’ 思想.

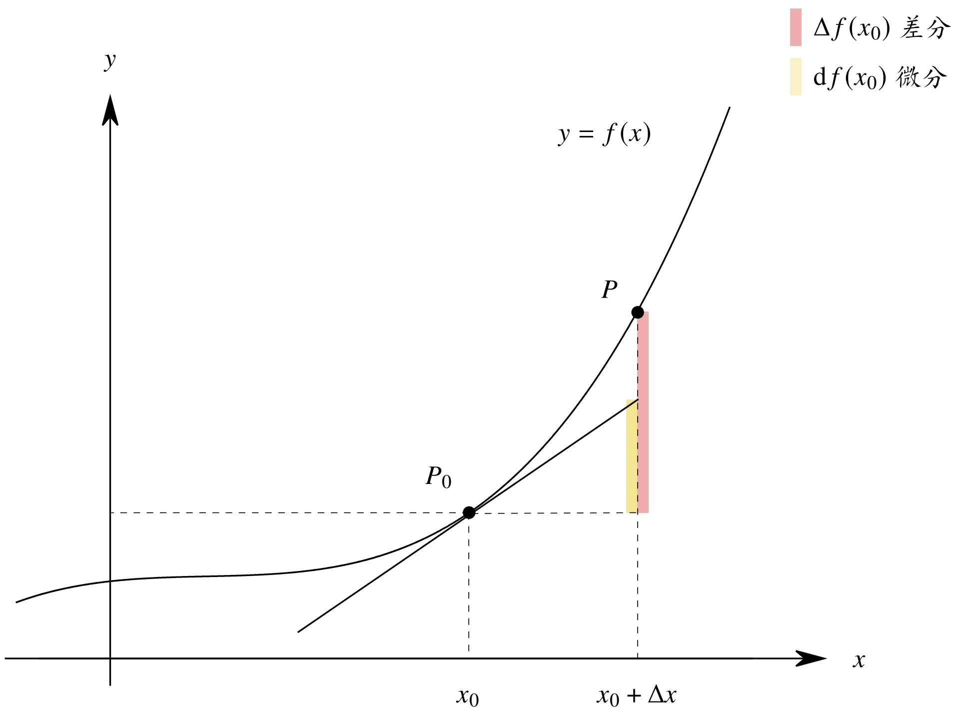



图 5.1: 微分和差分的几何意义

下面举两个平面几何的例子, 从直观上说明微分的意义.

**例 5.3 正方形和圆的面积增量** 设边长为 $a$ 的正方形和半径为 $r$ 的圆, 它们的面积函数分别为

$$f(x) = x^2, \quad g(x) = \pi x^2.$$

当边长增加 $\Delta a$, 半径增加 $\Delta r$ 时, 讨论正方形和圆的面积增量.

**解** 如图5.2所示, 容易知道

$$\Delta f(a) = (a + \Delta a)^2 - a^2 = 2a\Delta a + \Delta a^2.$$

$$\Delta g(r) = \pi(r + \Delta r)^2 - \pi r^2 = 2\pi r\Delta r + \pi\Delta r^2.$$

当 $\Delta a$ 很小时, $\Delta f(a)$ 可以近似地看作两个以原来的正方形的边长为长, 边长增量为宽的矩形的面积之和, 即 $2a\Delta a$; 当 $\Delta r$ 很小时, $\Delta g(r)$ 可以近似地看作一个以原来的圆周长为长, 以半径增量为宽的矩形的面积, 即 $2\pi r\Delta r$. 它们分

别是 $\Delta a$ 和 $\Delta r$ 的线性函数, 它们分别是函数 $f(x)$ 在 $a$ 处的微分和 $g(x)$ 在 $r$ 处的微分:

$$\mathrm{d}f(a) = f'(a)\Delta a = 2a\Delta a. \quad \mathrm{d}g(r) = g'(r)\Delta r = 2\pi r\Delta r.$$

■

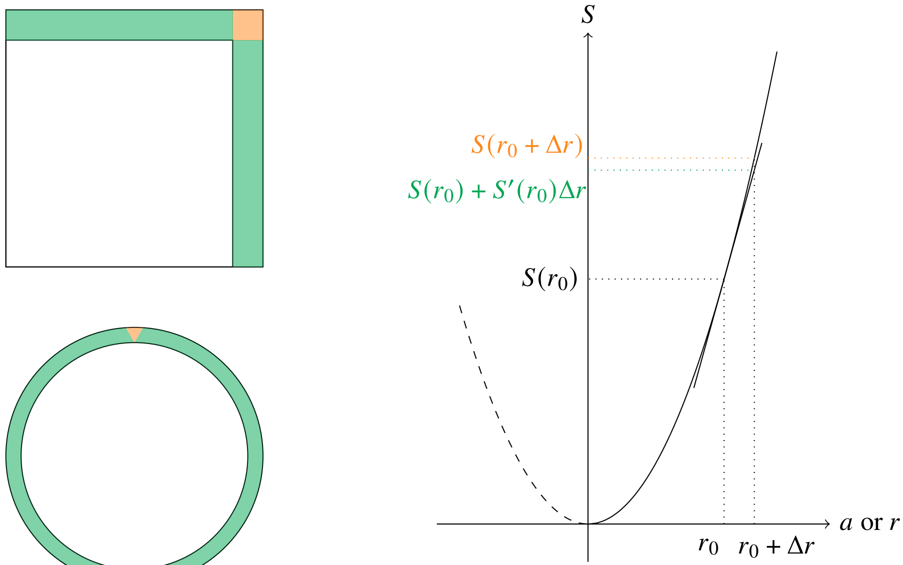



**图 5.2:** 正方形和圆的面积增量

### 5.1.3 初等函数的导数和微分

下面我们开始讨论导数和微分的计算方法. 我们已经明确了一元函数的导数和微分的关系, 所以一旦知道导数的计算方法, 就立刻知道了对应的微分计算方法. 因为我们只需研究导数的计算方法.

我们先导数的定义来计算一些常用的初等函数的导数.

**例 5.4 常值函数的导数** 求常值函数 $f(x) = C$ 的导数.

**解** 设 $f(x) = C$, 对于任意 $x, \Delta x$ 都有

$$f(x+\Delta x) - f(x) = 0,$$

故 f'=0. ■

**例 5.5 正整数次幂函数的导数** 求正整数次幂函数 $f(x) = x^m$ $(m \in \mathbb{N}^*)$ 的导数.

**解** 任取 $x_0 \in \mathbb{R}$. 由导数的定义可知

$$f'(x_0) = \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0}\frac{x^m - x_0^m}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0}\left(x^{m-1} + x^{m-2}x_0 + \cdots + x x_0^{m-2} + x_0^{m-1}\right) = m x_0^{m-1}.$$

于是可知对于任一 $x \in \mathbb{R}$ 都有 $(x^m)' = m x_0^{m-1}$. ■

**例 5.6 幂函数的导数** 求幂函数 $f(x) = x^\mu$ $(\mu \in \mathbb{R},\ x > 0)$.

**解** 由导数的定义可知对于任一 $x > 0$ 都有

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{(x+\Delta x)^\mu - x^\mu}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{x^\mu(1+\Delta x/x)^\mu - x^\mu}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x\to 0} x^{\mu-1}\cdot\frac{(1+\Delta x/x)^\mu - 1}{\Delta x/x} = \mu x^{\mu-1}. \end{aligned}$$

■

**注** 以上用到了例题 (4.21) 的结论.

**例 5.7 正弦函数的导数** 求正弦函数 $f(x) = \sin x$ 的导数.

**解** 由导数的定义可知对于任一 $x \in \mathbb{R}$ 都有

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin(x+\Delta x) - \sin x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2\cos(x+\Delta x/2)\sin(\Delta x/2)}{\Delta x}$$
$$= \lim_{\Delta x \to 0} \cos(x+\Delta x/2)\frac{\sin(\Delta x/2)}{\Delta x/2} = \cos x.$$

■

**例 5.8 余弦函数的导数** 求正弦函数 $f(x) = \cos x$ 的导数.

**解** 由导数的定义可知对于任一 $x \in \mathbb{R}$ 都有

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cos(x+\Delta x) - \cos x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-2\sin(x+\Delta x/2)\sin(\Delta x/2)}{\Delta x}$$
$$= \lim_{\Delta x \to 0} \left[-\sin(x+\Delta x/2)\frac{\sin(\Delta x/2)}{\Delta x/2}\right] = -\sin x.$$

■

**例 5.9 指数函数的导数** 求正弦函数 $f(x) = a^x$ 的导数.

**解** 由导数的定义可知对于任一 $x \in \mathbb{R}$ 都有

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a^{x+\Delta x} - a^x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} a^x \cdot \frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = a^x \ln a.$$

■

**注** 特别地, $(\mathrm{e}^x)' = \mathrm{e}^x$. 若把求导运算看作一个算子或变换, 那么指数函数 $\mathrm{e}^x$ 就是这个变换下的一个 “不动点”. 这表明, 自然常数 e 虽然是一个无理数, 但在微积分视角下是一个 “很简单的” 数字.

**注** 以上用到了例题 (4.20) 的结论.

我们发现如果对每个函数都用导数的定义求导是比较麻烦的. 我们可以推导一些求导法则.

**定理 5.2 (导数的运算法则)**

设函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 $x$ 处可导, 则 $(f \pm g)(x)$, $(fg)(x)$ 在 $x$ 处也可导. 若 $g(x) \neq 0$, 则函数 $(f/g)(x)$ 在 $x$ 处也可导, 且有以下公式

(1) $(f \pm g)'(x) = f'(x) \pm g'(x)$.

(2) $(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$.

(3) $(f/g)'(x) = [f'(x)g(x) - f(x)g'(x)]/g^2(x)$.

♡

**证明** (1) 由于

$$\frac{(f \pm g)(x+\Delta x) - (f \pm g)(x)}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \pm \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x}$$

令 $\Delta x \to 0$ 由导数的定义得 $(f \pm g)'(x) = f'(x) \pm g'(x)$.

(2) 由于

$$\frac{(fg)(x+\Delta x) - (fg)(x)}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} g(x+\Delta x) + f(x)\frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x}$$

由于 $g(x)$ 在 $x$ 处可导, 因此 $g$ 在 $x$ 处连续. 故 $g(x+\Delta x) \to g(x)$ $(\Delta x \to 0)$. 令 $\Delta x \to 0$ 由导数的定义得 $(fg)'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$.

(3) 先证明 $(1/g)'(x) = -g'(x)/g^2(x)$.

$$\frac{(1/g)(x+\Delta x) - (1/g)(x)}{\Delta x} = -\frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x} \cdot \frac{1}{g(x+\Delta x)g(x)}$$

由于 $g(x+\Delta x) \to g(x)$ $(\Delta x \to 0)$. 令 $\Delta x \to 0$ 由导数的定义得 $(1/g)'(x) = -g'(x)/g^2(x)$. 由 (2) 可知

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \left(f \cdot \frac{1}{g}\right)'(x) = f'(x)\left(\frac{1}{g}\right)(x) + f(x)\left(\frac{1}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)}{g(x)} - f(x)\frac{g'(x)}{g^2(x)} = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}.$$

■

**注** 特别地, 设 $c \in \mathbb{R}$, 则

$$(cf)'(x) = c' \cdot f(x) + cf'(x) = 0 \cdot f(x) + cf'(x) = cf'(x).$$

**注** 由以上定理可知求导变换保持函数的加法运算和关于实数域的数乘运算. 因此求导运算是 "线性的". 如果把求导看作一个**算子** (operator), 经常记作 $\mathcal{D}$. 从代数角度看它是一个**线性算子** (linear operator).

利用导数的运算法则我们可以计算更多初等函数的导数.

**例 5.10 负整数次幂函数的导数** 求负正整数次幂函数 $f(x)=x^{-m}$ $(m\in\mathbb{N}^*)$ 的导数.

**解** 由导数的除法公式可知

$$f'(x)=-mx^{-m-1}.$$

于是可知对于任一 $x\in\mathbb{R}$ 都有 $(x^m)'=mx_0^{m-1}$.

**例 5.11 正切函数和余切函数的导数** 求正切函数 $\tan x$ 和余切函数 $\cot x$ 的导数.

**解** 由导数的除法法则可知对于定义域上的一切 $x$ 都有

$$(\tan x)'=\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)'=\frac{(\sin x)'\cos x-\sin x(\cos x)'}{\cos^2 x}=\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x}=\frac{1}{\cos^2 x}.$$
$$(\cot x)'=\left(\frac{1}{\tan x}\right)'=-\frac{(\tan x)'}{\tan^2 x}=-\frac{1/\cos^2 x}{\tan^2 x}=-\frac{1}{\sin^2 x}.$$
■

**定理 5.3 (复合函数的求导法则)**

设函数 $f(x)$ 在 $x_0$ 处可导, 函数 $g(x)$ 在 $t_0=f(x_0)$ 处可导, 则函数 $(g\circ f)(x)$ 在 $x_0$ 处可导, 且

$$(g\circ f)'(x_0)=g'(f(x_0))\cdot f'(x_0).$$

♡

**证明** 令

$$h(t)=\begin{cases}\dfrac{g(t)-g(t_0)}{t-t_0}, & t\neq t_0\\ g'(t_0), & t=t_0\end{cases}.$$

由于

$$\lim_{t\to t_0}h(t)=\lim_{t\to t_0}\frac{g(t)-g(t_0)}{t-t_0}=g'(t_0)=h(t_0).$$

因此 $h(t)$ 在 $t_0$ 处连续, 于是

$$\lim_{x\to x_0}h(f(x))=h(f(x_0))=g'(f(x_0)).$$

于是可知

$$(g\circ f)'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{g(f(x))-g(f(x_0))}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}h(f(x))\cdot\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=g'(f(x_0))\cdot f'(x_0).$$
■

**注** 以上定理的证明很容易想到直接由导数定义出发, 写成

$$(g\circ f)'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{g(f(x))-g(f(x_0))}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{g(f(x))-g(f(x_0))}{f(x)-f(x_0)}\cdot\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=g'(f(x_0))\cdot f'(x_0).$$

这样证明的缺陷在于及时 $x\neq x_0$ 也未必确保 $f(x)\neq f(x_0)$. 因此我们才想到构造函数 $h(f(x))$ 取代上式中的

$$\frac{g(f(x))-g(f(x_0))}{f(x)-f(x_0)}.$$

**注** 设 $z=(g\circ f)(x)$, $y=f(x)$, 用 Leibniz 记号可以将以上定理改写为

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y}\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}.$$

因此以上定理常被形象地称为**链式法则** (chain rule).

**注** 我们将以上定理改写成微分形式得

$$\mathrm{d}\,g(f(x))=g'(f(x))\,\mathrm{d}\,f(x).$$

令 $t=f(x)$, 则有

$$\mathrm{d}\,g(t)=g'(t)\,\mathrm{d}\,t.$$

也就是说上式中的 $t$ 无论是变量还是函数, 它们的微分表示式都相同. 这个结论称为 ‘‘一元函数微分表示的不变性”, 它在积分的运算中非常有用. 需要注意, 这个结论在多元函数下不成立.

下面举例说明如何运算连式法则.

**例 5.12** 求函数 $y=\cos\left(x^2+5x+2\right)$ 的导数.

**解** 令 $u=x^2+5x+2$. 则由链式法则可知

$$\frac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,x}=\frac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,u}\cdot\frac{\mathrm{d}\,u}{\mathrm{d}\,x}=\frac{\mathrm{d}\cos u}{\mathrm{d}\,u}\cdot\frac{\mathrm{d}\,x^2+5x+2}{\mathrm{d}\,x}=(-\sin u)\cdot(2x+5)=-(2x+5)\sin(x^2+5x+2).$$ ■

**注** 熟练后, 可省略换元的过程.

**例 5.13 双曲函数的导数** 求双曲函数 $\sinh x$, $\cosh x$, $\tanh x$ 的导数.

**解** 由双曲函数的定义可知

$$(\sinh x)'=\left(\frac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}{2}\right)'=\frac{(\mathrm{e}^x)'-(\mathrm{e}^{-x})'}{2}=\frac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}(-x)'}{2}=\frac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}{2}=\cosh x.$$

$$(\cosh x)'=\left(\frac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}{2}\right)'=\frac{(\mathrm{e}^x)'+(\mathrm{e}^{-x})'}{2}=\frac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}(-x)'}{2}=\frac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}{2}=\sinh x.$$

$$(\tanh x)'=\left(\frac{\sinh x}{\cosh x}\right)'=\frac{(\sinh x)'\cosh x-\sinh x(\cosh x)'}{\cosh^2 x}=\frac{\cosh^2 x-\sinh^2 x}{\cosh^2 x}=\frac{1}{\cosh^2 x}.$$ ■

**定理 5.4 (反函数的求导法则)**

设函数 $y=f(x)$ 在区间 $I$ 上连续且严格单调. 若 $f(x)$ 在 $x_0\in I$ 处可导, 且 $f'(x_0)\neq 0$, 则 $f(x)$ 的反函数 $x=f^{-1}(y)$ 在 $y_0=f(x_0)$ 处可导, 且

$$\left(f^{-1}\right)'(y_0)=\frac{1}{f'(x_0)}.$$

**证明** 由命题 (4.17) 可知 $f^{-1}(y)$ 在 $y_0$ 上连续. 因此当 $y\to y_0$ 时 $x\to x_0$. 由导数的定义可知

$$\left(f^{-1}\right)'(y_0)=\lim_{y\to y_0}\frac{f^{-1}(y)-f^{-1}(y_0)}{y-y_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{x-x_0}{f(x)-f(x_0)}=\lim_{x\to x_0}\left[\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right]^{-1}=\frac{1}{f'(x_0)}.$$ ■

**注** 设 $y=f(x)$, 用 Leibniz 记号可以将以上定理改写为

$$\frac{\mathrm{d}\,x}{\mathrm{d}\,y}=\frac{1}{\frac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,x}}.$$

我们可以从几何角度来理解反函数的求导法则. 如图5.3, 设函数 $y=f(x)$ 在区间 $I$ 上连续且严格单调递增. 若 $f(x)$ 在 $x_0\in I$ 处可导, 且 $f'(x_0)\neq 0$. 令 $y_0=f(x_0)$, 则 $y=f(x)$ 在 $(x_0,y_0)$ 处有切线 $l$, 且 $l$ 的斜率不为零, 即它与 $x$ 轴不平行. 设 $l$ 与 $x$ 轴和 $y$ 轴的夹角分别为 $\alpha$ 和 $\beta$. 则 $\alpha+\beta=\pi/2$. 因此

$$\tan\alpha=\tan\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)=\cot\alpha=\frac{1}{\tan\beta}.$$

容易知道

$$\tan\alpha=f'(x_0),\quad \tan\beta=\left(f^{-1}\right)'(y_0).$$

于是就得到了反函数的求导法则.

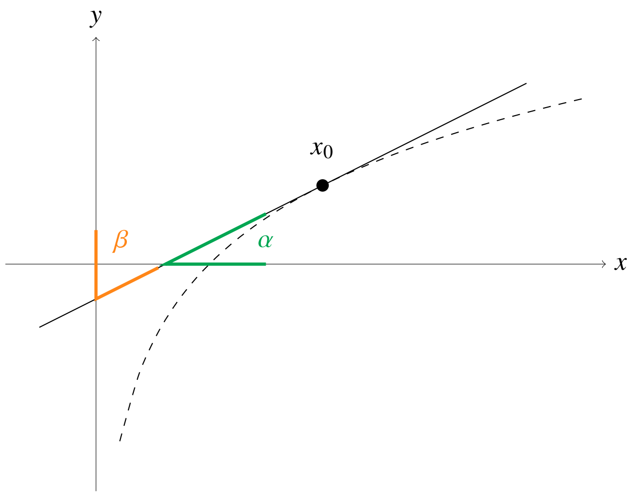



图 5.3: 反函数的导数示意图.

用反函数求导法则可以求对数函数和反三角函数的导数.

**例 5.14 对数函数的导数** 求对数函数 $y = \log_a x$ $(a > 0,\ a \neq 1)$ 的导数.

**解** 由于 $x = a^y$. 由反函数的求导法则可知对于任一 $x > 0$ 都有

$$(\log_a x)' = \frac{1}{(a^y)'} = \frac{1}{a^y \ln a} = \frac{1}{a^{\log_a x} \ln a} = \frac{1}{x \ln a}.$$ ■

**注** 特别地, 对于任一 $x > 0$ 都有 $(\ln x)' = 1/x$.

**例 5.15 反三角函数的导数** 求以下反三角函数的导数.

$$y = \arcsin x,\ |x| < 1. \quad y = \arccos x,\ |x| < 1. \quad y = \arctan x. \quad y = \operatorname{arccot} x.$$

**解** 由反函数的求导法则可知对于定义域上的任一 $x$ 都有

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{(\sin y)'} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

$$(\arccos x)' = \frac{1}{(\cos y)'} = \frac{1}{-\sin y} = \frac{1}{-\sqrt{1-\cos^2 y}} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

$$(\arctan x)' = \frac{1}{(\tan y)'} = \cos^2 y = \frac{\cos^2 y}{\cos^2 y + \sin^2 y} = \frac{1}{1+\tan^2 y} = \frac{1}{1+x^2}.$$

$$(\operatorname{arccot} x)' = \frac{1}{(\cot y)'} = -\sin^2 y = -\frac{\sin^2 y}{\sin^2 y + \cos^2 y} = -\frac{1}{1+\cot^2 y} = -\frac{1}{1+x^2}.$$ ■

**例 5.16 幂指函数的导数** 求幂指函数 $f(x) = u(x)^{v(x)}$ $(u(x) > 0)$ 的导数.

**解** 由于 $f(x) = \mathrm{e}^{\ln f(x)}$. 对两边的 $x$ 求导得

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left[\mathrm{e}^{\ln f(x)}\right]' = \mathrm{e}^{\ln f(x)}(\ln f(x))' = f(x)[\ln f(x)]' = f(x)[v(x)\ln u(x)]' \\ &= f(x)\left[v'(x)\ln u(x) + v(x)(\ln u(x))'\right] = f(x)\left[v'(x)\ln u(x) + \frac{v(x)}{u(x)}u'(x)\right]. \end{aligned}$$ ■

**注**由以上例题可知若函数 $f(x) > 0$, 则有

$$f'(x) = f(x)[\ln f(x)]'.$$

利用这个公式计算许多函数的乘积组成的函数的导数时十分有用.

以上几个例子中的初等函数都具有很好的性质---它们在各自定义域中的每一点都可导. 于是我们可以提出

以下概念.

**定义 5.4 (导函数和原函数)**

若函数 $f(x)$ 在开区间 $I$ 上每一点都可导, 则称 $f$ 在 $I$ 上可导; 设闭区间 $I=[a,b]$, 若函数 $f$ 在 $(a,b)$ 上每一点都可导, 且 $a$ 点右侧可导, 在 $b$ 点左侧可导, 则称 $f$ 在闭区间 $I$ 上可导. 以上两种情况下, 我们称函数 $f$ 在区间 $I$ 上可导. 区间 $I$ 上所有可导的函数组成的集合记作 $C^{(1)}(I)$. 此时可以定义 $I$ 上的函数

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x},\quad x\in I.$$

我们称函数 $f'(x)$ 是 $f(x)$ 在区间 $I$ 上的**导函数** (derivative function). 函数 $f(x)$ 是 $f'(x)$ 的一个**原函数** (primitive function).

注 在不产生误解的情况下, 我们会把导函数简称为导数.

注 区间 $I$ 上所有可导的函数组成的集合为 $C(I)$. 区间 $I$ 上所有可导的函数组成的集合为 $C^{(1)}(I)$, 这个记号暗示了可导一定连续.

注 容易看出原函数是不唯一的 (如果存在的话), 这个主题我们将在下一节展开.

我们把已经求得的初等函数都导函数总结如下.

| 类型 | 原函数 | 导函数 | 备注 |
|---|---|---|---|
| 常值函数 | $C$ | $0$ | $C\in\mathbb{R}$ |
| 幂函数 | $x^m$ | $mx^{m-1}$ | $m\in\mathbb{N}$ |
| | $x^{-m}$ | $-mx^{-m-1}$ | $m\in\mathbb{N},\ x\neq 0$ |
| | $x^\mu$ | $\mu x^{\mu-1}$ | $\mu\in\mathbb{R},\ x>0$ |
| 指数函数 | $\mathrm{e}^x$ | $\mathrm{e}^x$ | |
| | $a^x$ | $a^x\ln a$ | $a>0,\ a\neq 1$ |
| 对数函数 | $\ln\lvert x\rvert$ | $\dfrac{1}{x}$ | $x\neq 0$ |
| | $\log_a\lvert x\rvert$ | $\dfrac{1}{x\ln a}$ | $a>0,\ a\neq 1,\ x\neq 0$ |
| 三角函数 | $\sin x$ | $\cos x$ | |
| | $\cos x$ | $-\sin x$ | |
| | $\tan x$ | $\dfrac{1}{\cos^2 x}$ | $x\neq k\pi+\dfrac{\pi}{2},\ k\in\mathbb{Z}$ |
| | $\cot x$ | $-\dfrac{1}{\sin^2 x}$ | $x\neq k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$ |
| 反三角函数 | $\arcsin x$ | $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ | $\lvert x\rvert<1$ |
| | $\arccos x$ | $-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ | $\lvert x\rvert<1$ |
| | $\arctan x$ | $\dfrac{1}{1+x^2}$ | |
| | $\operatorname{arccot} x$ | $-\dfrac{1}{1+x^2}$ | |
| | $\sinh x$ | $\cosh x$ | |
| | $\cosh x$ | $\sinh x$ | |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 双曲函数 | $\tanh x$ | $\dfrac{1}{\cosh^2 x}$ | |
| 反双曲函数 | $\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$ | $\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$ | |
| | $\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)$ | $\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$ | $x>1$ |
| | $\dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$ | $\dfrac{1}{1-x^2}$ | \|x\|<1 |

### 5.1.4 隐函数的求导法则

有时候函数的对应法则是通过方程形式给出的. 设二元方程

$$x^2+y^2=1, \quad y>0.$$

对于任一 $x\in[-1,1]$, 都有唯一的 $y$ 与之对应. 这表明这个方程确定了一个定义域为 $[-1,1]$ 的函数. 我们把这样的函数称为**隐函数** (implicit function). 我们通常见到的直接用含有自变量的表达式表示的函数称为**显函数**.

上面这个隐函数可以写成显函数:

$$f(x)=\sqrt{1-x^2}, \quad x\in[-1,1].$$

但很多隐函数无法 (或不便于于) 写成显函数. 设二元方程

$$x=y^5+y^4+y^3+y^2+y.$$

它确定了一个定义域为 $\mathbb{R}$ 的函数. 但由 Abel–Ruffini 定理可知, 它无法用有限次的代数表达式写成显函数.

事实上很多隐函数直接来自于反函数. 例如函数 $y=x+\ln x$ 的反函数就是 $x=y+\ln y$. 对数函数和反三角函数实际上都无法写成显函数. 但为了便于使用才借助符号 ln, arcsin, arccos ‘‘假装’’ 写成了显函数形式.

因此我们有必要讨论隐函数的求导方法. 下面来看几个例子.

**例 5.17** 设隐函数 $x=\sin y\ (|x|<1)$. 求 $y'$.

**解** 对方程两边求导得

$$x'=(\sin y)' \iff 1=y'\cos y.$$

于是可知

$$y'=\frac{1}{\cos x}=\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 x}}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

■

**例 5.18** 设隐函数 $x=\mathrm{e}^y$. 求 $y'$.

**解** 对方程两边求导得

$$x'=(\mathrm{e}^y)' \iff 1=y'\,\mathrm{e}^y.$$

于是可知

$$y'=\frac{1}{\mathrm{e}^y}=\frac{1}{x}.$$

■

以上两个例子看出用隐函数直接求导, 和用反函数的求导法则本质上是一样的.

**例 5.19** 设隐函数 $x^2+y^2=1, y>0$. 求 $y'$.

**解** 对方程两边求导得

$$\left(x^2+y^2\right)'=1' \iff 2x+2yy'=0.$$

于是可知

$$y'=-\frac{x}{y}.$$ ■

利用隐函数的求导方法可以解决一些解析几何的问题. 下面我们来看几个例子.

**例 5.20 抛物线的光学性质** 从抛物线焦点射出的光线, 经抛物线反射后平行于它的对称轴.

**证明** 如5.4所示, 只讨论 $x$ 轴上半部分. 设抛物线方程

$$y^2=2px,\quad x\in[0,+\infty],\ y\in[0,+\infty).$$

则焦点为 $F(p/2,0)$, 准线为 $x=-p/2$. 设光线从 $F$ 点射出, 在 $P$ 反射, 作反射光线, 并反向延长交 $y$ 轴于 $R$ 点. 对方程两边求导得

$$2yy'=2p \iff y'=\frac{p}{y}.$$

在抛物线上任取一点 $P(x_0,y_0)$. 作过 $P$ 的切线交 $x$ 轴于 $Q$ 点. 容易知道直线 $PQ$ 的方程为

$$y-y_0=\frac{p}{y_0}(x-x_0).$$

令 $y=0$ 得

$$-y_0=\frac{p}{y_0}(x-x_0) \iff x=\frac{px_0-y_0^2}{p}=\frac{px_0-2px_0}{p}=-x_0.$$

因此 $Q(-x_0,0)$. 于是 $|QF|=p/2+x_0$. 另一方面, 由于抛物线上任意一点到 $F$ 的距离与到准线的距离相等, 故 $|PF|=x_0+p/2$. 因此 $|QF|=|PF|$. 于是

$$\angle PQF=\angle QPF=\angle QPR.$$

于是可知 $RP\,/\!/\,QF$. 这表明从 $F$ 射出的光线在 $P$ 反射后平行于 $x$ 轴.

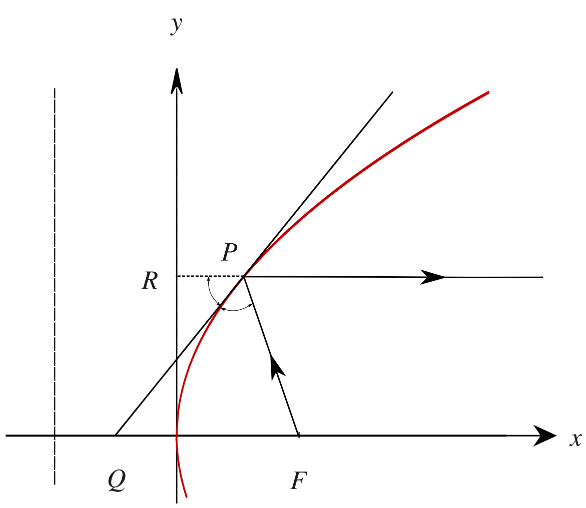



**图 5.4:** 抛物线的光学性质.

**例 5.21 椭圆的光学性质** 从椭圆的一个焦点射出的光线, 经椭圆反射后的光过另一个焦点.

**证明** 如图5.5只讨论 $x$ 轴上半部分. 设椭圆方程

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,\quad x\in[-a,a],\ y\in[0,b].$$

设焦点为 $F_1(-c,0)$, $F_2(c,0)$, 其中 $c$ 满足 $c^2=a^2-b^2$. 对方程两边求导得

$$\frac{2x}{a^2}+\frac{2yy'}{b^2}=0 \iff y'=-\frac{b^2x}{a^2y}.$$

在椭圆上任取一点 $P(x_0,y_0)$. 作过 $P$ 的法线交 $x$ 轴于 $Q$ 点. 容易知道直线 $PQ$ 的方程为

$$y-y_0=\frac{a^2y_0}{b^2x_0}(x-x_0).$$

令 $y=0$ 得

$$-y_0=\frac{a^2y_0}{b^2x_0}(x-x_0) \iff x=\frac{a^2x_0-b^2x_0}{a^2}=\frac{c^2x_0}{a^2}.$$

因此 $Q\left(c^2x_0/a^2,0\right)$. 于是

$$\frac{|QF_1|}{|QF_2|}=\frac{c^2x_0/a^2-(-c)}{c-c^2x_0/a^2}=\frac{a^2+cx_0}{a^2-cx_0}.$$

另一方面, 由于椭圆上任意一点到 $F_2$ 的距离与到准线 $x=a^2/c$ 的距离之比为定值, 故

$$\frac{|PF_1|}{a^2/c+x_0}=\frac{|PF_2|}{a^2/c-x_0} \iff \frac{|PF_1|}{|PF_2|}=\frac{a^2+cx_0}{a^2-cx_0}=\frac{|QF_1|}{|QF_2|}.$$

由角平分线定理可知 $\angle F_1PQ=\angle F_2PQ$. 这表明从 $F_1$ 射出的光线在 $P$ 反射后过 $F_2$.

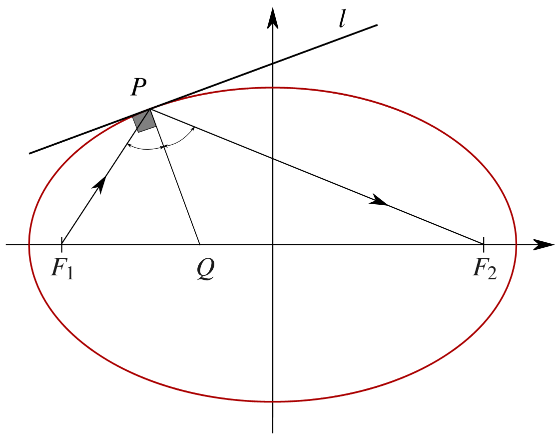



图 5.5: 椭圆的光学性质.

注 圆可以看作椭圆的特例. 因此从圆心射出的光线经圆反射后会重新过圆心. 这表明圆上的任意一点的法线都过圆心.

用类似地方法这证明双曲线的光学性质.

**例 5.22 双曲线的光学性质** 从双曲线的一个焦点射出的光线, 经双曲线反射后的光线的反向延长线过另一个焦点.

**证明** 留作习题.

有时候我们会用参数方程表示函数. 例如我们可以把方程 $x^2+y^2=1$ 写成

$$\begin{cases} x=\cos t \\ y=\sin t \end{cases}, \quad t\in[0,\pi].$$

下面来讨论这种函数的求导方法.

**例 5.23** XXX

**解**

### 5.1.5 高阶导数

在物理学中, 位移关于时间的函数 $s(t)$ 的导数是速度函数. 而速度函数的导数是加速度函数. 即

$$v(t)=s'(t),\quad a(t)=v'(t)=(s')'(t).$$

这就引出了以下概念.

**定义 5.5 (高阶导数)**

设函数 $f(x)$ 在区间 $I$ 上可导, 则 $f'(x)$ $(\forall x\in I)$ 称为 $f(x)$ 的导函数. 若 $f'(x)$ 在 $I$ 上仍可导, 则 $f'(x)$ 的导函数称为 $f(x)$ 的**二阶导函数** (second order derivative), 记作 $f''(x)$. 于是我们可以归纳地定义 $f(x)$ 的$n$ **阶导函数** (second order derivative), 记作 $f^{(n)}(x)$.

♣

我们知道一阶导数可以用表示为微分的商. 高阶导数也可以写成微分形式. 设函数 $y=f(x)$, 我们把对函数的二阶微分记作 $\mathrm{d}^2$. 则

$$\mathrm{d}^2 f(x)=\mathrm{d}[\mathrm{d} f(x)]=\mathrm{d}[f'(x)\,\mathrm{d}x]=[f'(x)\,\mathrm{d}x]'\,\mathrm{d}x=[f''(x)\,\mathrm{d}x+f'(x)(\mathrm{d}x)']\,\mathrm{d}x=f''(x)(\mathrm{d}x)^2.$$

我们约定: $(\mathrm{d}x)^2$ 记作 $\mathrm{d}x^2$. 则

$$f''(x)=\frac{\mathrm{d}^2 f(x)}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}.$$

类似地我们可以得到 $n$ 阶导数的微分形式

$$f^{(n)}=\frac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}x^n}.$$

以后我们将看到, (高阶) 导数的微分记号在 (偏) 微分方程和多元微分学中会有明显的好处.

根据一个函数在区间 $I$ 上可导的次数可以对函数进行分类.

**定义 5.6 (光滑函数)**

设区间 $I$. 所有在 $I$ 上连续的函数组成的集合记作 $C(I)$ 或 $C^{(0)}(I)$. 所有在 $I$ 上 $n$ 次可导的函数组成的集合记作 $C^{(n)}(I)$. 所有在 $I$ 上任意次可导的函数组成的集合记作 $C^{(\infty)}(I)$, 这样的函数称为 $I$ 上的**光滑函数** (smooth function).

♣

**注** 在不强调区间 $I$ 时可以省略记作 $C^{(n)}$.

指数函数 $\mathrm{e}^x$ 是一个很特殊的光滑函数, 它在 $\mathbb{R}$ 上的任意阶导函数都是它本身. 从这个角度讲, 指数函数 $\mathrm{e}^x$ 具有 "非常好的性质".

**例 5.24** 给定实数 $\lambda$, 求函数 $\mathrm{e}^{\lambda x}$ 的 $n$ 阶导函数.

**解** 先求几个特殊情况.

$$\left(\mathrm{e}^{\lambda x}\right)'=\lambda\,\mathrm{e}^{\lambda x},\quad \left(\mathrm{e}^{\lambda x}\right)''=\left(\lambda\,\mathrm{e}^{\lambda x}\right)'=\lambda^2\,\mathrm{e}^{\lambda x}.$$

于是猜测 $\left(\mathrm{e}^{\lambda x}\right)^{(n)}=\lambda^n\,\mathrm{e}^{\lambda x}$ $(n=1,2,\cdots)$. 假设 $n$ 时成立. 则

$$\left(\mathrm{e}^{\lambda x}\right)^{(n+1)}=\left[\left(\mathrm{e}^{\lambda x}\right)^{(n)}\right]'=\left(\lambda^n\,\mathrm{e}^{\lambda x}\right)'=\lambda^{n+1}\,\mathrm{e}^{\lambda x}.$$

由数学归纳原理可知猜测成立. ■

事实上 $\sin x$ 和 $\cos x$ 也是光滑函数. 我们来计算一下它们的高阶导.

**例 5.25** 求函数 $\sin x$ 和 $\cos x$ 的 $n$ 阶导函数.

**解** 先求几个特殊情况.

$$(\sin x)' = \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right), \quad (\sin x)'' = \left[\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)\right]' = \left(x + \frac{\pi}{2}\right)' \sin\left(x + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(x + \frac{2\pi}{2}\right).$$

于是猜测 $\sin^{(n)} x = \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$ $(n = 1, 2, \cdots)$. 假设 $n$ 时成立. 则

$$\sin^{(n+1)} x = \left(\sin^{(n)} x\right)' = \left[\sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)\right]' = \left(x + \frac{n\pi}{2}\right)' \sin\left(x + \frac{n\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left[x + \frac{(n+1)\pi}{2}\right].$$

由数学归纳原理可知猜测成立. 类似地可知 $\cos^{(n)} x = \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$ $(n = 1, 2, \cdots)$. ∎

**例 5.26** 求函数 $f(x) = \ln(1 + x)$ 的 $n$ 阶导函数.

**解** 先求几个特殊情况.

$$f'(x) = (1 + x)^{-1}, \quad f'(x) = -(1 + x)^{-2}, \quad f'''(x) = 2(1 + x)^{-3}.$$

于是猜测

$$f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}(n - 1)!(1 + x)^{-n}, \quad n = 1, 2, \cdots.$$

假设 $n$ 时成立. 则

$$f^{(n+1)} = \left[(-1)^{n-1}(n - 1)!(1 + x)^{-n}\right]' = (-1)^n n!(1 + x)^{-(n+1)}.$$

由数学归纳原理可知猜测成立. ∎

**例 5.27** 求函数 $f(x) = (1 + x)^{\alpha}$ 的 $n$ 阶导函数.

**解** 先求几个特殊情况.

$$f'(x) = \alpha(1 + x)^{\alpha-1}, \quad f'(x) = \alpha(\alpha - 1)(1 + x)^{\alpha-2}, \quad f'''(x) = \alpha(\alpha - 1)(\alpha - 2)(1 + x)^{\alpha-3}.$$

于是猜测

$$f^{(n)}(x) = \alpha(\alpha - 1)\cdots(\alpha - n + 1)(1 + x)^{\alpha-n}, \quad n = 1, 2, \cdots.$$

假设 $n$ 时成立. 则

$$f^{(n+1)} = \alpha(\alpha - 1)\cdots(\alpha - n + 1)(\alpha - n)(1 + x)^{\alpha-n-1}.$$

由数学归纳原理可知猜测成立. ∎

容易验证, 对任意函数 $f(x), g(x) \in C^{(n)}(I)$ 和任一 $c \in \mathbb{R}$ 都有

$$(f + g)^{(n)} = f^{(n)} + g^{(n)}, \quad (cf)^{(n)} = cf^{(n)}.$$

这表明求 $n$ 阶导依旧是一个线性算子.

下面来看函数 $f(x), g(x) \in C^{(n)}$ 的乘积的高阶导. 我们先尝试计算几个特例.

$$\begin{aligned}
&(fg)' = f'g + fg',\\
&(fg)'' = (f'g + fg')' = (f'g)' + (fg')' = f''g + f'g' + f'g' + fg'' = f''g + 2f'g' + fg'',\\
&(fg)''' = (f''g + 2f'g' + fg'')' = (f''g)' + (2f'g')' + (fg'')' = f'''g + 3f''g' + 3f'g'' + fg'''.
\end{aligned}$$

我们猜测 $(fg)^{(n)}$ 的规律可能类似二项式定理.

**定理 5.5 (Leibniz 公式)**

设函数 $f(x), g(x) \in C^{(n)}(I)$, 则 $fg(x) \in C^{(n)}(I)$, 且

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k f^{(n-k)} g^{(k)}.$$

其中规定 $f^{(0)}=f, g^{(0)}=g$.

**证明** 只需证明

$$(fg)^{(n)}=\sum_{i+j=n}\frac{n!}{i!j!}f^{(i)}g^{(j)}$$

当 $n=1$ 时命题显然成立. 假设 $n=m$ 时命题成立. 下面来看 $n=m+1$ 时的情况.

$$\begin{aligned}(fg)^{(m+1)}&=\left[(fg)^{(m)}\right]'=\left(\sum_{i+j=m}\frac{m!}{i!j!}f^{(i)}g^{(j)}\right)'=\sum_{i+j=m}\frac{m!}{i!j!}\left(f^{(i)}g^{(j)}\right)'\\&=\sum_{i+j=m}\frac{m!}{i!j!}\left(f^{(i+1)}g^{(j)}+f^{(i)}g^{(j+1)}\right)=\sum_{i+j=m}\frac{m!}{i!j!}f^{(i+1)}g^{(j)}+\sum_{i+j=m}\frac{m!}{i!j!}f^{(i)}g^{(j+1)}.\end{aligned}$$

第一个和式中的 $i$ 用 $i-1$ 代入, 第二个和式中的 $j$ 用 $j-1$ 代入得

$$\begin{aligned}(fg)^{(m+1)}&=\sum_{i-1+j=m}\frac{m!}{(i-1)!j!}f^{(i)}g^{(j)}+\sum_{i+j-1=m}\frac{m!}{i!(j-1)!}f^{(i)}g^{(j)}=\sum_{i+j=m+1}\frac{m!i}{i!j!}f^{(i)}g^{(j)}+\sum_{i+j=m+1}\frac{m!j}{i!j!}f^{(i)}g^{(j)}\\&=\sum_{i+j=m+1}\left(\frac{m!i}{i!j!}+\frac{m!j}{i!j!}\right)f^{(i)}g^{(j)}=\sum_{i+j=m+1}\frac{m!(i+j)}{i!j!}f^{(i)}g^{(j)}=\sum_{i+j=m+1}\frac{m!(m+1)}{i!j!}f^{(i)}g^{(j)}\\&=\sum_{i+j=m+1}\frac{(m+1)!}{i!j!}f^{(i)}g^{(j)}.\end{aligned}$$

由数学归纳原理可知对于一切 $n\in\mathbb{N}^*$ 命题都成立. ■

**注** 适当改变求和号的下标可以简化证明或计算的书写.

下面看一个用 Leibniz 公式求高阶导的例子

**例 5.28** 求函数 $x^2\cos x$ 的 50 阶导函数.

**解** 由 Leibniz 公式可知

$$\left(x^2\cos x\right)^{(50)}=(\cos x)^{(50)}x^2+\mathrm{C}_{50}^1(\cos x)^{(49)}\left(x^2\right)'+\mathrm{C}_{50}^2(\cos x)^{(48)}\left(x^2\right)''.$$

由例题 (5.25) 可知

$$(\cos x)^{(48)}=\cos\left(x+\frac{48\pi}{2}\right)=\cos x.$$

故 $(\cos x)^{(49)}=-\sin x$, $(\cos x)^{(50)}=-\cos x$. 于是

$$\left(x^2\cos x\right)^{(50)}=-x^2\cos x-100x\sin x+2450\cos x.$$ ■

# 5.2 求导的逆运算

## 5.2.1 原函数和不定积分

上一节我们得到了一些初等函数的求导公式, 以及一些求导法则. 用这些方法我们可以求出所有初等函数的导数. 很自然地, 我们希望讨论求导运算的逆运算. 这就是本节讨论的问题.

**定义 5.7 (原函数)**

设函数 $F(x)$ 在区间 $I$ 上可导. 若 $F'(x_0) = f(x_0)$ $(\forall x_0 \in I)$. 则称函数 $F(x)$ 为 $f(x)$ 在区间 $I$ 上的一个**原函数** (primitive function) 或**反向导数** (antiderivative).

♣

假设我们已经求出了 $f(x)$ 在区间 $I$ 上的一个原函数 $F(x)$, 那么容易看出 $F(x)+C$ $(C \in \mathbb{R})$ 也是 $f(x)$ 在 $I$ 上的一个原函数, 因为.

$$[F(x)+C]' = F'(x)+C' = f(x).$$

反过来我们要问是否 $f(x)$ 在 $I$ 上的所有原函数都是形如 $F(x)+C$ 的函数? 假设 $G(x)$ 也是 $f(x)$ 在 $I$ 上的一个原函数, 则

$$[F(x)-G(x)]' = F'(x)-G'(x) = f(x)-f(x) = 0.$$

由下一节的推论 (5.1) 可知 $F(x)-G(x)$ 是一个常数. 这表明 $f(x)$ 在 $I$ 上的所有原函数组成的集合为 $\{F+C \mid C \in \mathbb{R}\}$. 于是可以定义以下概念.

**定义 5.8 (不定积分)**

设函数 $f(x)$. 若 $f(x)$ 存在区间 $I$ 上的一个原函数 $F(x)$, 则称 $f(x)$ 在区间 $I$ 上所有原函数组成的集合 $\{F(x)+C \mid C \in \mathbb{R}\}$ 为 $f(x)$ 的**不定积分** (indefinite integration), 记作

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x := \{F(x)+C \mid C \in \mathbb{R}\}.$$

其中 $\int$ 称为**积分号** (sign of integration), $f(x)$ 称为**被积函数** (integrand), $f(x)\,\mathrm{d}x$ 称为**被积表达式** (integrand expression).

♣

**注** 以后我们经常把定义中的式子简写成

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x)+C.$$

**注** “不定积分” 这个名称来源以及积分号的来源将在下一章作出说明.

由一元函数的导数表可以直接得到一批不定积分公式.

$$\int 0\,\mathrm{d}x = C, \qquad \int x^{\mu}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\mu+1}x^{\mu+1}+C, \quad \mu \neq -1,$$

$$\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln|x|+C,$$

$$\int \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^x+C, \qquad \int a^x\,\mathrm{d}x = \frac{a^x}{\ln a}+C,$$

$$\int \sin x\,\mathrm{d}x = -\cos x+C, \qquad \int \cos x\,\mathrm{d}x = \sin x+C,$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x}\,\mathrm{d}x = -\cot x+C, \qquad \int \frac{1}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x = \tan x+C,$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = \arcsin x+C, \qquad \int \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \arctan x+C$$

$$\int \sinh x\,\mathrm{d}x = \cosh x+C, \qquad \int \cosh x\,\mathrm{d}x = \sinh x+C,$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\,\mathrm{d}x = \ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right), \qquad \int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\,\mathrm{d}x = \ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right).$$

其中 $C$ 是常数.

容易得到以下不定积分的简单性质.

**命题 5.2 (不定积分的简单性质)**

设函数 $f(x)$, 它在区间 $I$ 上的一个原函数为 $F(x)$. 则

(1) $\left(\int f(x)\,\mathrm{d}x\right)' = f(x)$.

(2) $\int F'(x)\,\mathrm{d}x = F(x)+C$.

(3) $\int [f(x)+g(x)]\,\mathrm{d}x = \int f(x)\,\mathrm{d}x + \int g(x)\,\mathrm{d}x$.

(4) $\int \lambda f(x)\,\mathrm{d}x = \lambda \int f(x)\,\mathrm{d}x \ (\lambda \neq 0)$.

**证明** 留作习题.

**注** (3) 和 (4) 表明不定积分是 “线性的”.

**注** (1) 和 (2) 中, 若用微分记号表示, 则

$$\mathrm{d}\left(\int f(x)\,\mathrm{d}x\right) = f(x)\,\mathrm{d}x, \qquad \int \mathrm{d}F(x) = F(x)+C.$$

由此可见微分和不定积分呈现出 “互为可逆的关系”, 只不过当积分号在外面时, 结果总是要有 $C$.

**注** (4) 中若 $\lambda = 0$ 则 $\int \lambda f(x)\,\mathrm{d}x = C, \lambda \int f(x)\,\mathrm{d}x = 0$, 因此 $\lambda \neq 0$.

利用基本的不定积分公式和不定积分的简单性质可以求一些函数的不定积分. 我们看两个例子.

**例 5.29** 求不定积分 $\int (3x^2+4/x)\,\mathrm{d}x$.

**解**

$$\int \left(3x^2+\frac{4}{x}\right)\mathrm{d}x = 3\int x^2 + 4\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = x^3 + 4\ln|x| + C. \qquad \blacksquare$$

**例 5.30** 求不定积分 $\int \tan^2 x\,\mathrm{d}x$.

**解** 由不定积分的线性性质可知

$$\int \tan^2 x\,\mathrm{d}x = \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right)\mathrm{d}x = \int \frac{1}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x - \int 1\,\mathrm{d}x = \tan x - x + C. \qquad \blacksquare$$

### 5.2.2 分部积分法

我们已经知道求函数的不定积分是求导的逆运算. 因此我们应想办法逆用函数的求导法则, 得到相应的求不定积分的方法.

如果逆用函数乘积的求导法则, 就可以得到 “分部积分法”. 我们已经知道

$$[u(x)v(x)]' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x).$$

对上式两边求不定积分得

$$u(x)v(x) = \int u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x + \int u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x \iff \int u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x.$$

以上公式就是**分部积分法** (integration by parts). 也可以写成

$$\int u(x)\,\mathrm{d}v(x) = u(x)v(x) - \int v(x)\,\mathrm{d}u(x).$$

下面我们看一些例子.

**例 5.31** 计算: $\int x\,\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$.

**解** 由分部积分法可得

$$\int x\,\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \int x\,\mathrm{d}\,\mathrm{e}^x = x\,\mathrm{e}^x - \int \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = x\,\mathrm{e}^x - e^x + C. \qquad \blacksquare$$

**注** 使用分部积分法的关键是把被积函数合理地分成 $u(x)$ 和 $v(x)$, 使得 $u'(x)v(x)$ 的不定积分比较容易求得.

有时候需要多次使用分部积分法.

**例 5.32** 计算: $\int x^2\,\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$.

**解** 由例 (5.31) 可知

$$\int x^2\,\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \int x^2\,\mathrm{d}\,\mathrm{e}^x = x^2\,\mathrm{e}^x - \int \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x^2 = x^2\,\mathrm{e}^x - 2\int x\,\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = x^2\,\mathrm{e}^x - 2(x\,\mathrm{e}^x - e^x) + C = (x^2 - 2x + 2)\,\mathrm{e}^x + C. \qquad \blacksquare$$

**例 5.33** 计算: $\int \ln x\,\mathrm{d}x$.

**解** 由分部积分法可得

$$\int \ln x\,\mathrm{d}x = x\ln x - \int x\,\mathrm{d}\ln x = x\ln x - \int x\cdot\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = x\ln x - \int 1\,\mathrm{d}x = x\ln x - x + C. \qquad \blacksquare$$

**例 5.34** 计算: $\int \mathrm{e}^x\cos x\,\mathrm{d}x$ 和 $\int \mathrm{e}^x\sin x\,\mathrm{d}x$.

**解** 由分部积分法可得

$$\begin{cases} \displaystyle\int \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}\sin x = \mathrm{e}^x\sin x - \int \sin x\,\mathrm{d}\,\mathrm{e}^x \\ \displaystyle\int \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}\cos x = \mathrm{e}^x\cos x - \int \cos x\,\mathrm{d}\,\mathrm{e}^x \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \displaystyle\int \mathrm{e}^x\cos x\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^x\sin x - \int \mathrm{e}^x\sin x\,\mathrm{d}x \\ \displaystyle -\int \mathrm{e}^x\sin x\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^x\cos x - \int \mathrm{e}^x\cos x\,\mathrm{d}x \end{cases}$$

以上是一个关于 $\int \mathrm{e}^x\cos x\,\mathrm{d}x$ 和 $\int \mathrm{e}^x\sin x\,\mathrm{d}x$ 的线性方程组. 解得

$$\begin{cases} \displaystyle\int \mathrm{e}^x\cos x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}(\cos x + \sin x)\,\mathrm{e}^x + C \\ \displaystyle\int \mathrm{e}^x\sin x\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}(\cos x - \sin x)\,\mathrm{e}^x + C \end{cases} \qquad \blacksquare$$

有时候通过分部积分法可以得到一个 "递推公式".

**例 5.35** 计算: $\int \cos^n x\,\mathrm{d}x$ 和 $\int \sin^n x\,\mathrm{d}x$.

**解** 由于

$$\begin{aligned} \int \cos^n x\,\mathrm{d}x &= \int \cos^{n-1} x\,\mathrm{d}\sin x = \cos^{n-1} x\sin x - \int \sin x\,\mathrm{d}\cos^{n-1} x = \cos^{n-1} x\sin x + (n-1)\int \sin^2 x\cos^{n-2} x\,\mathrm{d}x \\ &= \cos^{n-1} x\sin x + (n-1)\int \left(1 - \cos^2 x\right)\cos^{n-2} x\,\mathrm{d}x = \cos^{n-1} x\sin x + (n-1)\int \left(\cos^{n-2} x - \cos^n x\right)\mathrm{d}x \\ &= \cos^{n-1} x\sin x + (n-1)\int \cos^{n-2} x\,\mathrm{d}x - (n-1)\int \cos^n x\,\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

于是得到递推公式

$$\int \cos^n x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n}\sin x\cos^{n-1} x + \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2} x\,\mathrm{d}x, \quad n = 2, 3, \cdots.$$

反复使用以上公式最后归结为

$$\int \cos x\,\mathrm{d}x = \sin x + C, \quad 或 \quad \int \mathrm{d}x = x + C.$$

类似地可以得到

$$\int \sin^n x\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{n}\cos x\sin^{n-1} x + \frac{n-1}{n}\int \sin^{n-2} x\,\mathrm{d}x, \quad n = 2, 3, \cdots. \qquad \blacksquare$$

### 5.2.3 换元积分法

我们已经知道链式法则

$$\mathrm{d}\, v(u(x)) = v'(u(x))\,\mathrm{d}\, u(x).$$

对上式两边求不定积分得

$$\int \mathrm{d}\, v(u(x)) = \int v'(u(x))\,\mathrm{d}\, u(x) \iff \int v'(u(x))\,\mathrm{d}\, u(x) = v(u(x)).$$

这样就得到一个求不定积分的重要方法——“换元法” 也叫 “凑微分法”. 这个方法其实就是复合函数求导法则的逆用. 我们还是通过例子来说明这种方法.

**例 5.36** 计算: $\int \sin^3 x \cos x\,\mathrm{d}\, x$.

**解** 由于

$$\int \sin^3 x \cos x\,\mathrm{d}\, x = \int \sin^3 x\,\mathrm{d} \sin x.$$

令 $u = \sin x$. 则

$$\int \sin^3 x \cos x\,\mathrm{d}\, x = \int u^3\,\mathrm{d}\, u = \frac{1}{4}u^4 + C = \frac{1}{4}\sin^4 x + C.$$ ■

**注** 熟练以后可以省略换元的过程.

**例 5.37** 计算: $\int x\,\mathrm{e}^{x^2}\,\mathrm{d}\, x$.

**解** 由于

$$\int x\,\mathrm{e}^{x^2}\,\mathrm{d}\, x = \frac{1}{2}\int \mathrm{e}^{x^2}\,\mathrm{d}\, x^2 = \frac{1}{2}\int \mathrm{e}^{x^2}\,\mathrm{d}\, x^2 = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{x^2}.$$

令 $u = x^2$. 则

$$\int x\,\mathrm{e}^{x^2}\,\mathrm{d}\, x = \frac{1}{2}\int \mathrm{e}^{u}\,\mathrm{d}\, u = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{u} = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{x^2}.$$ ■

**例 5.38** 计算: $\int \frac{\mathrm{d}\, x}{ax+b}\,\mathrm{d}\, x\ (a \neq 0)$.

**解** 由于

$$\int \frac{\mathrm{d}\, x}{ax+b} = \frac{1}{a}\int \frac{\mathrm{d}(ax+b)}{ax+b}.$$

令 $u = ax + b$, 则

$$\int \frac{\mathrm{d}\, x}{ax+b} = \frac{1}{a}\int \frac{\mathrm{d}\, u}{u} = \frac{1}{a}\ln|u| + C = \frac{1}{a}\ln|ax+b| + C.$$ ■

**例 5.39** 计算: $\int \frac{\ln x}{x}\,\mathrm{d}\, x$.

**解** 由于

$$\int \frac{\ln x}{x}\,\mathrm{d}\, x = \int \ln x\,\mathrm{d}\ln x.$$

令 $u = \ln x$. 则

$$\int \frac{\ln x}{x}\,\mathrm{d}\, x = \int u\,\mathrm{d}\, u = \frac{1}{2}u^2 + C = \frac{1}{2}\ln^2 x + C.$$ ■

**例 5.40** 计算: $\int \frac{\mathrm{d}\, x}{a^2+x^2}\ (a \neq 0)$.

**解** 如果 $a = 1$, 则所求不定积分就是 $\arctan x$. 于是想到令 $x = au$, 则

$$\int \frac{\mathrm{d}\, x}{a^2+x^2} = \int \frac{\mathrm{d}\, au}{a^2+a^2u^2} = \int \frac{a\,\mathrm{d}\, u}{a^2+a^2u^2} = \frac{1}{a}\int \frac{\mathrm{d}\, u}{1+u^2} = \frac{1}{a}\arctan u + C = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C.$$ ■

**例 5.41** 计算:

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{a^2\sin^2 x + b^2\cos^2 x}, \quad ab \neq 0.$$

**解** 由于 $ab \neq 0$, 故

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{a^2\sin^2 x + b^2\cos^2 x} = \int \frac{\frac{\mathrm{d}x}{b^2\cos^2 x}}{\frac{a^2}{b^2}\tan^2 x + 1} = \frac{1}{b^2}\cdot\frac{b}{a}\int \frac{\mathrm{d}\left(\frac{a}{b}\tan x\right)}{\left(\frac{a}{b}\tan x\right)^2 + 1}.$$

令 $u = (a/b)\tan x$, 则

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{a^2\sin^2 x + b^2\cos^2 x} = \frac{1}{ab}\int \frac{\mathrm{d}u}{u^2+1} = \frac{1}{ab}\arctan u + C = \frac{1}{ab}\arctan\left(\frac{a}{b}\tan x\right) + C.$$ ■

**例 5.42** 计算:

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}\,\mathrm{d}x, \quad |x| \leq a.$$

**解** 为了去掉被积函数中的根号, 想到令 $x = a\sin u$ ($|u| \leq \pi/2$), 则

$$u = \arcsin\frac{x}{a}, \quad \sin u = \frac{x}{a}, \quad \cos u = \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{a}.$$

$u = \arcsin(x/a)$. 于是

$$\int \sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x = \int \sqrt{a^2 - a^2\sin^2 u}\,\mathrm{d}(a\sin u) = \int a^2\cos^2 u\,\mathrm{d}u.$$

由例 (5.35) 可知

$$\cos^2 u = \frac{1}{2}\sin u\cos u + \frac{1}{2}u.$$

于是可知

$$\int \sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x = a^2\left(\frac{1}{2}\sin u\cos u + \frac{1}{2}u\right) + C = a^2\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{x}{a}\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{a} + \frac{1}{2}\arcsin\frac{x}{a}\right) + C = \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + C.$$

■

**例 5.43** 计算:

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2+x^2}}, \quad a > 0.$$

**解** 令 $x = a\sinh u$. 则 $\mathrm{d}x = a\,\mathrm{d}\sinh u = a\cosh u\,\mathrm{d}u$. 于是

$$\begin{aligned}\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2+x^2}} &= \int \frac{a\cosh u\,\mathrm{d}u}{\sqrt{a^2+a^2\sinh^2 u}} = \int \frac{a\cosh u\,\mathrm{d}u}{a\cosh u} = \int \mathrm{d}u = u + C \\ &= \ln\left(\frac{x}{a} + \sqrt{1+\frac{x^2}{a^2}}\right) + C = \ln\left(x + \sqrt{a^2+x^2}\right) - \ln a + C.\end{aligned}$$ ■

**注** 对比以上例题和例题 (5.42) 的方法.

**例 5.44** 计算:

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\sqrt{1+x}}.$$

**解** 令 $x = a\sinh u$. 则... 于是

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\sqrt{1+x}} =$$

**例 5.45** 计算:

$$\int \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x.$$

**解** $\boxed{\text{解法一}}$ 由于

$$\int \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = 2\int \sin\sqrt{x}\,\mathrm{d}\sqrt{x}.$$

于是令 $u=\sqrt{x}$. 则

$$\int \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = 2\int \sin u\,\mathrm{d}u = -2\cos u + C = -2\cos\sqrt{x} + C.$$

$\boxed{\text{解法二}}$ 为了去掉根号考虑令 $x=u^2$. 则

$$\int \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\sin u}{u}\,\mathrm{d}u^2 = 2\int \sin u\,\mathrm{d}u = -2\cos u + C = -2\cos\sqrt{x} + C.$$

■

### 5.2.4 有理函数的不定积分

下面我们来讨论求“有理函数”不定积分的方法. 所谓“有理函数”是指函数解析式为分式的函数, 即形如

$$r(x) = \frac{p(x)}{q(x)},$$

其中 $p(x), q(x)$ 都是关于 $x$ 的一元多项式, 且它们没有公共的零点.

**定义 5.9 (真分式)**

设分式 $p(x)/q(x)$, 其中 $p(x)$, $q(x)$ 都是关于 $x$ 的一元多项式. 若 $p(x)$ 的次数小于 $q(x)$ 的次数, 则称 $p(x)/q(x)$ 是一个**真分式** (proper fraction).

♣

在代数中我们将证明以下几个命题. 由于以下几个命题都和本课程主题无关, 我们将证明略去, 详细证明可以查阅我们的《高等代数讲义》.

**命题 5.3**

任何分式都可以唯一地分解为一个多项式和一个真分式的和.

♠

多项式函数的不定积分可以直接利用公式和不定积分的线性性质求得. 因此我们只需要研究真分式的不定积分.

**定理 5.6 (部分分式分解定理)**

设真分式 $p(x)/q(x)$, 其中 $p(x), q(x)$ 都是关于 $x$ 的一元多项式. 若 $q(x)$ 在实数域上的标准分解式为

$$q(x) = (x-x_1)^{r_1}\cdots(x-x_m)^{r_m}\left(x^2+b_1x+c_1\right)^{t_1}\cdots\left(x^2+b_nx+c_n\right)^{t_n}.$$

则 $p(x)/q(x)$ 可以唯一地分解为部分分式 (partial fraction) 的和

$$\begin{aligned}&\frac{A_{r_1}}{(x-x_1)^{r_1}}+\cdots+\frac{A_1}{(x-x_1)}+\cdots+\frac{B_{r_1}}{(x-x_m)^{r_m}}+\cdots+\frac{B_1}{(x-x_m)}+\cdots\\&+\frac{K_{t_1}x+L_{t_1}}{(x^2+b_1x+c_1)^{t_1}}+\cdots+\frac{K_1x+L_1}{(x^2+b_1x+c_1)}+\cdots+\frac{M_{t_n}x+N_{t_n}}{(x^2+b_nx+c_n)^{t_n}}+\cdots+\frac{M_1x+N_1}{(x^2+b_nx+c_n)}.\end{aligned}$$

♡

**注** 以上用到了一元多项式在实数域中的分解定理, 详见《高等代数讲义》. 所谓“实数域上的标准分解式”是指 $x_1, \cdots, x_m$ 都是互不相同的实数; $(b_1,c_1), \cdots, (b_n,c_n)$ 都是互不相同的有序实数对, 且 $b_j^2-4c_j<0>0$ $(j=1,2,\cdots,n)$.

下面我们来举例说明如何把一个真分式化为部分分式.

**例 5.46** 设分式

$$\frac{x+1}{x^2-4x+3}.$$

把它化为部分分式.

**解** 把分母分解因式得 $x^2-4x+3=(x-1)(x-3)$. 设

$$\frac{x+1}{x^2-4x+3}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x-3}.$$

于是

$$x+1=A(x-3)+B(x-1) \iff x+1=(A+B)x+(-3A-B).$$

比较系数得

$$\begin{cases} A+B=1 \\ -3A-B=1 \end{cases} \iff \begin{cases} A=-1 \\ B=2 \end{cases}.$$

于是可知

$$\frac{x+1}{x^2-4x+3}=-\frac{1}{x-1}+\frac{2}{x-3}.$$ ■

**例 5.47** 设分式

$$\frac{x^3+1}{x^4-3x^3+3x^2-x}.$$

把它化为部分分式.

**解** 把分母分解因式得 $x^4-3x^3+3x^2-x=x(x-1)^3$. 设

$$\frac{x^3+1}{x^4-3x^3+3x^2-x}.=\frac{A}{x}+\frac{B}{(x-1)^3}+\frac{C}{(x-1)^2}+\frac{D}{x-1}.$$

于是

$$x^3+1=A(x-1)^3+Bx+Cx(x-1)+Dx(x-1)^2.$$

令 $x=0$ 得

$$1=A(-1)^3 \iff A=-1.$$

于是

$$x^3+1=-(x-1)^3+Bx+Cx(x-1)+Dx(x-1)^2.$$

令 $x=1$ 得 $B=2$. 于是

$$x^3+1=-(x-1)^3+2x+Cx(x-1)+Dx(x-1)^2 \iff 2x^2-3x+1=C(x-1)+D(x-1)^2$$

两边分别对 $x$ 求导得

$$4x-3=C+2D(x-1).$$

令 $x=1$ 得 $C=1$. 于是

$$4x-3=1+2D(x-1).$$

比较系数可知 $D=2$. 于是可知

$$\frac{x^3+1}{x^4-3x^3+3x^2-x}=\frac{-1}{x}+\frac{2}{(x-1)^3}+\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{2}{x-1}.$$ ■

现在我们回到正题. 分母是一次多项式的幂的部分分式, 容易求得它们的不定积分:

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{x-a}=\int\frac{\mathrm{d}(x-a)}{x-a}=\ln|x-a|+C.$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(x-a)^k} = \int (x-a)^{-k}\,\mathrm{d}(x-a) = \frac{(x-a)^{1-k}}{(1-k)} + C, \quad k = 2, 3, \cdots.$$

下面来看分母是二次多项式的幂的部分分式. 设

$$f(x) = \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k}, \quad p^2 - 4q < 0,\ k = 1, 2, \cdots.$$

经过配方可以把 $x^2+px+q$ 化为

$$x^2+px+q = \left(x+\frac{p}{2}\right)^2 + \frac{-(p^2-4q)}{4}.$$

令 $t^2 = (x+p/2)^2$, $a^2 = -\left(p^2-4q\right)/4$. 则

$$\int \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k}\,\mathrm{d}x = \int \frac{At+B-Ap/2}{(t^2+a^2)^k}\,\mathrm{d}t = A\int \frac{t}{(t^2+a^2)^k}\,\mathrm{d}t + \left(B - \frac{Ap}{2}\right)\int \frac{\mathrm{d}t}{(t^2+a^2)^k}.$$

于是我们只需分别求以下两种形式的不定积分:

$$\int \frac{t}{(t^2+a^2)^k}\,\mathrm{d}t. \tag{5.2}$$

$$\int \frac{\mathrm{d}t}{(t^2+a^2)^k}. \tag{5.3}$$

不定积分 (5.2) 是不难求的. 当 $k=1$ 时

$$\int \frac{t}{t^2+a^2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}t^2}{t^2+a^2} = \frac{1}{2}\ln\left(t^2+a^2\right) + C.$$

当 $k \neq 1$ 时

$$\int \frac{t}{(t^2+a^2)^k}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int \left(t^2+a^2\right)^{-k}\mathrm{d}t^2 = \frac{1}{2(1-k)}\left(t^2+a^2\right)^{1-k} + C.$$

最后只需讨论不定积分 (5.3). 我们只需要求出它的递推公式. 令

$$I_k = \int \frac{\mathrm{d}t}{(t^2+a^2)^k}, \quad k = 1, 2, \cdots.$$

用分部积分法可得

$$\begin{aligned}
I_k &= \frac{t}{(t^2+a^2)^k} - \int t\,\mathrm{d}\left(t^2+a^2\right)^{-k} = \frac{t}{(t^2+a^2)^k} + 2k\int t^2\left(t^2+a^2\right)^{-k-1}\mathrm{d}t \\
&= \frac{t}{(t^2+a^2)^k} + 2k\int \frac{t^2+a^2-a^2}{(t^2+a^2)^{k+1}}\,\mathrm{d}t = \frac{t}{(t^2+a^2)^k} + 2k\int \left[\frac{1}{(t^2+a^2)^k} - \frac{a^2}{(t^2+a^2)^{k+1}}\right]\mathrm{d}t \\
&= \frac{t}{(t^2+a^2)^k} + 2kI_k - 2ka^2 I_{k+1}.
\end{aligned}$$

于是可知

$$I_{k+1} = \frac{1}{2ka^2}\cdot\frac{t}{(t^2+a^2)^k} + \frac{2k-1}{2ka^2}I_k, \quad k = 1, 2, \cdots.$$

容易求出

$$I_1 = \int \frac{\mathrm{d}t}{t^2+a^2} = \frac{1}{a}\int \frac{\mathrm{d}(t/a)}{(t/a)^2+1} = \frac{1}{a}\arctan\frac{t}{a} + C.$$

于是对于一切 $k \in \mathbb{N}^*$, 都可以求出不定积分 (5.3).

综合以上讨论,我们实际上已经彻底解决了有理函数的不定积分问题. 现在我们尝试用以上方法求例题(5.47)中的有理函数的不定积分.

**例 5.48** 计算

$$\int \frac{x^3+1}{x^4-3x^3+3x^2-x}\,\mathrm{d}x.$$

**证明** 由例题 (5.47) 可知

$$\int \frac{x^3+1}{x^4-3x^3+3x^2-x}\,\mathrm{d}x = -\int \frac{\mathrm{d}x}{x} + 2\int \frac{\mathrm{d}x}{(x-1)^3} + \int \frac{\mathrm{d}x}{(x-1)^2} + 2\int \frac{\mathrm{d}x}{x-1}$$
$$= -\ln|x| + 2\cdot\frac{(x-1)^{-2}}{-2} + \frac{(x-1)^{-1}}{-1} + 2\ln(x-1) + C.$$ ■

**例 5.49** 计算以下不定积分:

$$\int \frac{5x+3}{\left(x^2-2x+5\right)^2}\,\mathrm{d}x.$$

**证明** 由递推公式计算可得

$$\int \frac{5x+3}{\left(x^2-2x+5\right)^2}\,\mathrm{d}x = \frac{5}{2}\int \frac{\mathrm{d}\left(x^2-2x+5\right)}{\left(x^2-2x+5\right)^2} + 8\int \frac{\mathrm{d}(x-1)}{(x-1)^2+4} = -\frac{5}{2\left(x^2-2x+5\right)} + \frac{x}{x^2+4} + I_1$$
$$= -\frac{5}{2\left(x^2-2x+5\right)} + \frac{x-1}{(x-1)^2+4} + \frac{1}{2}\arctan\frac{x-1}{2} + C$$
$$= \frac{2x-7}{2\left(x^2-2x+5\right)} + \frac{1}{2}\arctan\frac{x-1}{2} + C.$$ ■

以上我们给出了一套求有理函数不定积分的算法, 理论上可以求出任一有理函数的不定积分, 但实际应用时计算量都十分巨大, 一般需要用 Python 或 MATLAB 编程解决.

### 5.2.5 可有理化函数的不定积分

在中学我们已经学过如下公式

$$\sin x = \frac{2\tan\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}},\qquad \cos x = \frac{1-\tan^2\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}},\qquad \tan x = \frac{2\tan\frac{x}{2}}{1-\tan^2\frac{x}{2}}. \tag{5.4}$$

令 $t=\tan(x/2)$, 则

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2},\qquad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2},\qquad \tan x = \frac{2t}{1-t^2}.$$

我们用记号 $R(x,y)$ 表示二元有理函数. 于是我们可以说 $R(\sin x,\cos x)$ 都可以通过以上公式转化为一元有理函数

$$R(\sin x,\cos x) = R\left(\frac{2t}{1+t^2},\frac{1-t^2}{1+t^2}\right).$$

由于 $x=2\arctan t$ 于是

$$\int R(\sin x,\cos x)\,\mathrm{d}x = \int R\left(\frac{2t}{1+t^2},\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\mathrm{d}\,2\arctan t = \int R\left(\frac{2t}{1+t^2},\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t.$$

这表明函数 $R(\sin x,\cos x)$ 可以有理化. 因此我们经常称公式 (5.4) 为**万能公式**. 于是我们可以用上一节给出的方法求 $R(\sin x,\cos x)$ 型函数的不定积分. 下面看一个例子.

**例 5.50** 求以下不定积分:

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin x(1+\cos x)}.$$

**解** 令 $t=\tan(x/2)$, 则

$$\text{原式} = \int \frac{\frac{2}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}\left(1+\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int\left(t+\frac{1}{t}\right)\mathrm{d}t = \frac{1}{4}t^2 + \frac{1}{2}\ln|t| + C = \frac{1}{4}\tan^2\frac{x}{2} + \frac{1}{2}\ln\left|\tan\frac{x}{2}\right| + C.$$ ■

虽然以上方法是 “万能的”, 但不总是最方便的.

**例 5.51** 求以下不定积分:

$$\int \frac{\sin^4 x}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x.$$

**解**

$$\begin{aligned}
\text{原式} &= \int \frac{\sin^2 x(1-\cos^2 x)}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x = \int \tan^2 x\,\mathrm{d}x - \int \sin^2 x\,\mathrm{d}x = \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right)\mathrm{d}x - \int \frac{1-\cos 2x}{2}\,\mathrm{d}x \\
&= \int \frac{1}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x - \int 1\,\mathrm{d}x - \frac{1}{2}\int 1\,\mathrm{d}x - \frac{1}{2}\int \cos 2x\,\mathrm{d}x = \tan x - \frac{3}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x + C.
\end{aligned}$$

**注** 如果用万能公式则原不定积分可以化为

$$\text{原式} = \int \frac{\left(\dfrac{2t}{1+t^2}\right)^4}{\left(\dfrac{1-t^2}{1+t^2}\right)^2} \cdot \frac{2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \int \frac{32t^4}{(1+t^2)^3(1-t^2)^2}\,\mathrm{d}t.$$

我们得到的有理函数的分母次数很高, 所以按部就班地求这个有理函数的不定积分将是一个十分浩大的工程.

下面看第二类可有理化的函数. 设函数

$$R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right).$$

为了去根号, 我们令

$$t = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}} \iff t^n = \frac{ax+b}{cx+d}.$$

则

$$x = \frac{dt^n - b}{-ct^n + a}$$

由于 $\mathrm{d}x/\mathrm{d}t$ 也是一个关于 $t$ 的有理函数, 于是可知新的被积函数是一个有理函数. 下面看一个例子.

**例 5.52** 求以下不定积分:

$$\int \sqrt{\frac{x-a}{b-x}}\,\mathrm{d}x, \quad a < x < b.$$

**解** $\boxed{\text{解法一}}$ 令

$$t = \sqrt{\frac{x-a}{b-x}} \iff t^2 = \frac{x-a}{b-x}.$$

则

$$\mathrm{d}x = \mathrm{d}\,\frac{bt^2+a}{t^2+1} = \mathrm{d}\,\frac{b(t^2+1)+a-b}{t^2+1} = \mathrm{d}\left(b + \frac{a-b}{t^2+1}\right) = 2(b-a)\frac{t}{(t^2+1)^2}\,\mathrm{d}t.$$

于是可知

$$\begin{aligned}
\text{原式} &= \int t\,\mathrm{d}\,\frac{bt^2+a}{t^2+1} = 2(b-a)\int \frac{t^2}{(t^2+1)^2}\,\mathrm{d}t = 2(b-a)\int \left[\frac{1}{t^2+1} - \frac{1}{(t^2+1)^2}\right]\mathrm{d}t \\
&= 2(b-a)\arctan t - 2(b-a)\frac{1}{2}\left(\frac{t}{t^2+1} + \arctan t\right) + C = (b-a)\arctan t - \frac{(b-a)t}{t^2+1} + C \\
&= (b-a)\arctan\sqrt{\frac{x-a}{b-x}} - \frac{(b-a)\sqrt{\dfrac{x-a}{b-x}}}{\dfrac{x-a}{b-x}+1} + C = (b-a)\arctan\sqrt{\frac{x-a}{b-x}} - \sqrt{(x-a)(b-x)} + C.
\end{aligned}$$

$\boxed{\text{解法二}}$ 我们有恒等式

$$\frac{x-a}{b-a} + \frac{b-x}{b-a} = 1.$$

因此想到令
$$\frac{x-a}{b-a}=\sin^2 t,\quad \frac{b-x}{b-a}=\cos^2 t,\quad 0<t<\frac{\pi}{2}.$$
则 $x=b-(b-a)\cos^2 t$
$$\begin{aligned}
\text{原式} &= \int\sqrt{\frac{\sin^2 t}{\cos^2 t}}\,\mathrm{d}(b-a)\cos^2 t = 2(b-a)\int\sin^2 t\,\mathrm{d}t = (b-a)(t-\cos t\sin t)+C\\
&= (b-a)\left(\arcsin\sqrt{\frac{x-a}{b-a}}-\sqrt{\frac{b-x}{b-a}}\sqrt{\frac{x-a}{b-a}}\right)+C\\
&= (b-a)\arcsin\sqrt{\frac{x-a}{b-a}}-\sqrt{(x-a)(b-x)}+C.
\end{aligned}$$
■

最后, 看第三类可有理化的函数.

**定理 5.7**

设函数
$$f(x)=x^a\left(\alpha+\beta x^b\right)^c,\quad a,b,c\in\mathbb{Q},\ \alpha,\beta\in\mathbb{R}. \tag{5.5}$$
若 $c$, $(a+1)/b$, $(a+1)/b+c$ 三个数中有一个是整数, 则 $f(x)$ 可化为有理函数求原函数.

**证明** (i) 当 $c\in\mathbb{Z}$ 时. 令 $t=x^b$, 则 $x=t^{1/b}$. 于是
$$\int f(x)\,\mathrm{d}x=\int t^{a/b}(\alpha+\beta t)^c\,\mathrm{d}t^{1/b}=\frac{1}{b}\int t^{(a+1)/b-1}(\alpha+\beta t)^c\,\mathrm{d}t.$$
由于 $(a+1)/b-1\in\mathbb{Q}$, 设 $(a+1)/b-1=p/q$ $(p,q\in\mathbb{Z})$. 令 $u=t^{1/q}$, 则
$$\int f(x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{b}\int t^{p/q}(\alpha+\beta t)^c\,\mathrm{d}t=\frac{1}{b}\int u^p(\alpha+\beta t)^c\,\mathrm{d}u^q=\frac{q}{b}\int u^{p+q-1}(\alpha+\beta t)^c\,\mathrm{d}u. \tag{5.6}$$
(ii) 当 $(a+1)/b\in\mathbb{Z}$ 时. 设 $(a+1)/b=d$, $c=p/q$ $(d,p,q\in\mathbb{Z})$. 令 $t=x^b$, 则 $x=t^{1/b}$. 于是
$$\int f(x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{b}\int t^{(a+1)/b-1}(\alpha+\beta t)^c\,\mathrm{d}t=\frac{1}{b}\int t^{d-1}(\alpha+\beta t)^{p/q}\,\mathrm{d}t.$$
由等式 (5.6) 可知上式可以化为有理函数求原函数.

(iii) 当 $(a+1)/b+c\in\mathbb{Z}$ 时. 设 $(a+1)/b+c=d$, $c=p/q$ $(d,p,q\in\mathbb{Z})$. 令 $t=x^b$, 则 $x=t^{1/b}$. 于是
$$\int f(x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{b}\int t^{(a+1)/b+c-1}\left(\frac{\alpha+\beta t}{t}\right)^c\mathrm{d}t=\frac{1}{b}\int t^{d-1}\left(\frac{\alpha+\beta t}{t}\right)^{p/q}\mathrm{d}t.$$
由等式 (5.6) 可知上式可以化为有理函数求原函数.

**注** 以上定理是 Chebychëv 证明的. 事实上它还证明: 若 $c$, $(a+1)/b$, $(a+1)/b+c$ 都不是整数, 则 $f(x)$ 的原函数不能用初等函数表示. 但这个结论的证明超出了本书的讨论主题.

以上定理实际上给出了处理形如 (5.5) 的不定积分的三种换元方法. 下面我们分别举例说明.

**例 5.53** 求以下不定积分:
$$\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}\,(1+\sqrt[3]{x})}.$$

**解** 由于
$$\frac{1}{\sqrt{x}\,(1+\sqrt[3]{x})}=x^{-1/2}\left(1+x^{1/3}\right)^{-1}.$$
由定理 (5.7) 可知被积函数可有理化. 令 $t=x^{1/3}$, 则 $x=t^3$. 于是
$$\text{原式}=\int t^{-3/2}(1+t)^{-1}\,\mathrm{d}t^3=3\int t^{1/2}(1+t)^{-1}\,\mathrm{d}t.$$

再令 $u = t^{1/2}$, 则 $t = u^2$. 于是

$$\begin{aligned}\text{原式} &= 3\int u\left(1+u^2\right)^{-1}\mathrm{d}\,u^2 = 6\int \frac{u^2}{1+u^2}\,\mathrm{d}\,u = 6\int\left(1-\frac{1}{1+u^2}\right)\mathrm{d}\,u = 6u - 6\arctan u + C\\ &= 6t^{1/2} - 6\arctan t^{1/2} + C = 6x^{1/6} - 6\arctan x^{1/6} + C.\end{aligned}$$

■

**例 5.54** 求以下不定积分:

$$\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}\,x.$$

**解** 由于

$$\frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}} = x^{-1/2}\left(1+x^{1/4}\right)^{1/3}.$$

由定理 (5.7) 可知被积函数可有理化. 令 $t = x^{1/4}$, 则 $x = t^4$. 于是

$$\text{原式} = \int t^{-2}(1+t)^{1/3}\,\mathrm{d}\,t^4 = 4\int t(1+t)^{1/3}\,\mathrm{d}\,t.$$

令 $u = (1+t)^{1/3}$, 则 $t = u^3 - 1$. 于是

$$\begin{aligned}\text{原式} &= 4\int (u^3-1)u\,\mathrm{d}\,u^3 = 12\int u^6 - u^3\,\mathrm{d}\,u = \frac{12}{7}u^7 - 3u^4 + C\\ &= \frac{12}{7}\left(1+x^{1/4}\right)^{7/3} - 3\left(1+x^{1/4}\right)^{4/3} + C.\end{aligned}$$

■

**例 5.55** 求以下不定积分:

$$\int \frac{\mathrm{d}\,x}{\sqrt[4]{1+x^4}}.$$

**解** 由于

$$\frac{1}{\sqrt[4]{1+x^4}} = \left(1+x^4\right)^{-1/4}.$$

由定理 (5.7) 可知被积函数可有理化. 令 $t = x^4$, 则 $x = t^{1/4}$. 于是

$$\text{原式} = \int (1+t)^{-1/4}\,\mathrm{d}\,t^{1/4} = \frac{1}{4}\int t^{-3/4}(1+t)^{-1/4}\,\mathrm{d}\,t = \frac{1}{4}\int t^{-1}\left(\frac{t}{t+1}\right)^{1/4}\mathrm{d}\,t.$$

令

$$u = \left(\frac{t}{t+1}\right)^{1/4} \iff t = \frac{u^4}{1-u^4}.$$

于是可知

$$\begin{aligned}\text{原式} &= \frac{1}{4}\int \frac{1-u^4}{u^4}\cdot u\,\mathrm{d}\,\frac{u^4}{1-u^4} = \frac{1}{4}\int \frac{1-u^4}{u^3}\cdot\frac{4u^3}{\left(1-u^4\right)^2}\,\mathrm{d}\,u = \int \frac{\mathrm{d}\,u}{1-u^4}\\ &= \int\left[\frac{1}{4(u+1)} - \frac{1}{4(u-1)} + \frac{1}{2\left(u^2+1\right)}\right]\mathrm{d}\,u = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{u+1}{u-1}\right| + \frac{1}{2}\arctan u + C\\ &= \frac{1}{4}\ln\left|\frac{x+\sqrt[4]{1+x^4}}{x-\sqrt[4]{1+x^4}}\right| + \frac{1}{2}\arctan\frac{x}{\sqrt[4]{1+x^4}} + C.\end{aligned}$$

■

不定积分表

$$\int \tan x\,\mathrm{d}\,x = -\ln|\cos x| + C,$$

$$\int \cot x\,\mathrm{d}\,x = \ln|\sin x| + C,$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\,\mathrm{d}\,x = \arcsin\frac{x}{a} + C,$$

$$\int \frac{1}{a^2+x^2}\,\mathrm{d}\,x = \frac{1}{a}\arctan xa + C,$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}\,\mathrm{d}\,x = \ln\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right)+C,$$
$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}\,\mathrm{d}\,x = \ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right|+C.$$

## 5.3 微分学的中值定理

我们已经知道函数的导数 (或微分都是 "局部性质". 本节我们将从导数研究在闭区间 $[a, b]$ 上连续, 在开区间 $(a, b)$ 上可导的函数的整体性质.

### 5.3.1 Fermat 引理

下面我们开始研究闭区间上可导 (可微) 函数的整体性质.

**定义 5.10 (极值和极值点)**

设函数 $f(x)$ 在开区间 $(a, b)$ 上有定义且 $x_0 \in (a, b)$.

(1) 若存在邻域 $N_r(x_0) \subseteq (a, b)$, 使得任一 $x \in N_r(x_0)$ 都有 $f(x) \leq f(x_0)$, 则称 $f$ 在 $x_0$ 处取得**极大值** (local maximum), $x_0$ 称为极大值点.

(2) 若存在邻域 $N_r(x_0) \subseteq (a, b)$, 使得任一 $x \in N_r(x_0)$ 都有 $f(x) \geq f(x_0)$, 则称 $f$ 在 $x_0$ 处取得**极小值** (local minimum), $x_0$ 称为极小值点.

极大值点和极小值点统称**极值点** .

♣

注 函数的极值是一个局部概念, 它仅仅在极值点的邻域内讨论; 而最大值、最小值是整体概念.

下面给出极值点的必要条件.

**引理 5.1 (Fermat 引理)**

如图5.6所示, 设函数 $f$ 在区间 $I$ 上有定义. 若 $f$ 在 $x_0 \in I$ 处可导且 $x_0$ 是 $f$ 的一个极值点, 则 $f'(x_0) = 0$.

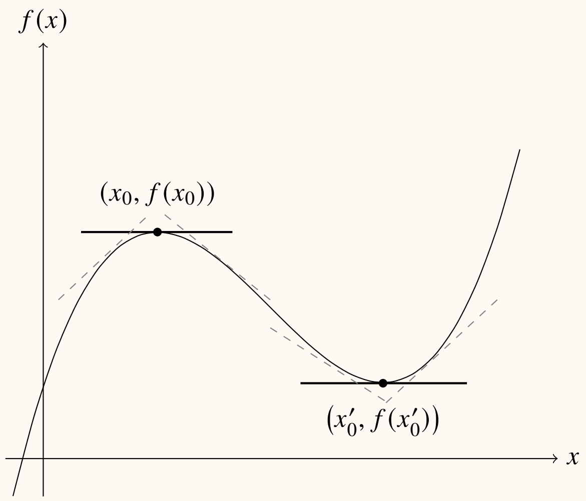



图 5.6: Fermat 引理: 极值点的导数为 0.

♡

**证明** 不妨设 $f$ 在 $x_0$ 处取到极大值. 此时存在一个 $x_0$ 的邻域 $N_r(x_0) \subseteq I$ 对于任一 $x \in N_r(x_0)$ 都有 $f(x) - f(x_0) \leq 0$. 当 $x \in N_r^-(x_0)$ 时 $x - x_0 < 0$, 于是

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0 \Longrightarrow f_-'(x_0) = \lim_{x \to x_0-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0.$$

当 $x \in N_r^+(x_0)$ 时 $x - x_0 > 0$, 于是

$$f_+'(x_0) = \lim_{x \to x_0+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0.$$

由于 $f(x)$ 在 $x_0$ 处可导, 故

$$0 \leq f_-'(x_0) = f'(x_0) = f_+'(x_0) \leq 0.$$

因此 $f'(x_0) = 0$. 同理可知 $f$ 在 $x_0$ 处取到极小值时, 也有 $f'(x_0) = 0$. ■

为了方便叙述，定义以下概念.

**定义 5.11 (驻点)**

设函数 $f(x)$ 在区间 $I$ 上有定义. 若存在 $x_0 \in I$ 使得 $f'(x_0) = 0$, 则称 $x_0$ 是 $f(x)$ 在 $I$ 上的一个**驻点** (stationary point) 或**临界点** (critical point).

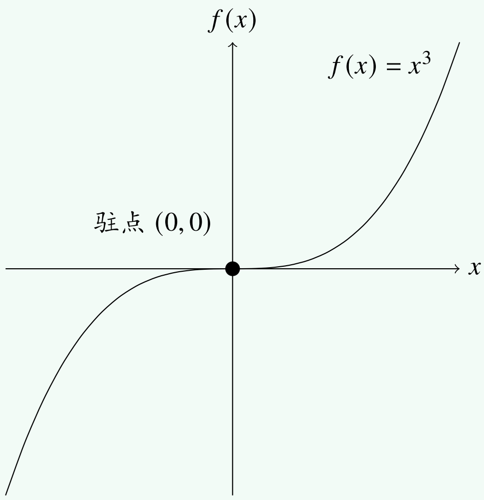



图 5.7: 驻点不一定都是极值点.

Fermat 引理的几何意义是很明确的. 如5.6所示, 若 $x_0$ 是函数 $f(x)$ 的一个极值点, 且曲线 $y = f(x)$ 在 $(x_0, f(x_0))$ 处的切线存在, 则该切线平行于 $x$ 轴.

Fermat 引理只是可导函数在区间内取得极值的必要条件, 而非充分条件. 也就是说 $f(x)$ 的驻点未必是极值点. 举例说明, 如图5.7所示, 函数表达式为 $f(x) = x^3$, 易得 $f'(0) = 0$, 但 $x = 0$ 处取不到极值.

### 5.3.2 Rolle 中值定理

**定理 5.8 (Rolle 中值定理)**

如图5.8所示, 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续, 在开区间 $(a, b)$ 上可导. 若 $f(a) = f(b)$, 则存在 $\xi \in (a, b)$ 使得 $f'(\xi) = 0$.

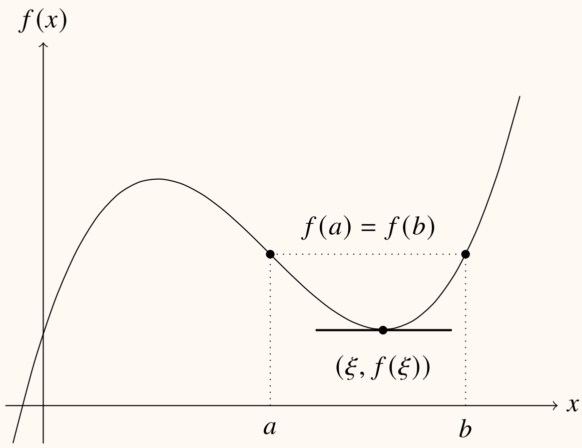



图 5.8: Rolle 中值定理示意图.

**证明** 由于 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 由最值定理可知 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上有最大值 $M$ 和最小值 $m$. 若 $M = m$, 则 $f(x)$ 为常值函数. 这时 $f'(x) = 0$.

若 $M > m$. 由于 $f(a) = f(b)$, 故 $M$ 和 $m$ 中至少有一个在 $(a, b)$ 中的点 $\xi$ 上取到. 此时 $\xi$ 就是一个极值点. 由

Fermat 引理可知 $f'(\xi) = 0$. ■

**注** 法国数学家 Michel Rolle 于 1691 年提出了 Rolle 定理. 但 Rolle 定理的现代形式和严格证明是 Cauchy 于 1823 年给出的.

**注** 如果把上图看作运动学中的 ‘‘路程-时间’’ 图像, 则 Rolle 中值定理的物理意义是: 某质点从某点出发经过一段时间的运动后返回原点, 则中途一定存在一点的瞬时速度为零.

下面看一个 Rolle 定理的应用.

**例 5.56** 设 $2n$ $(n \geq 1)$ 次多项式

$$Q(x) = x^n(1-x)^n.$$

则 $n$ 次多项式 $Q^{(n)}(x)$ 在开区间 $(0,1)$ 中有 $n$ 个两两不同的实根.

**证明** 用 Leibniz 公式求 $Q(x)$ 的 $m$ $(m < n)$ 阶导函数

$$Q^{(m)}(x) = [x^n(1-x)^n]^{(n)} = \sum_{i=0}^{m} \mathrm{C}_m^i (x^n)^{(m-i)} [(1-x)^n]^{(i)} = \sum_{i=0}^{m} \mathrm{C}_m^i \frac{n!}{(n-m+i)!} x^{n-m+i} \frac{n!}{(n-i)!} (1-x)^{n-i}.$$

于是看出

$$Q^{(m)}(0) = Q^{(m)}(1) = 0, \quad m = 0, 1, \cdots, n-1.$$

由 $Q(0) = Q(1) = 0$ 和 Rolle 定理可知, 存在 $\xi \in (0,1)$ 使得 $Q'(\xi) = 0$. 由于 $Q'(0) = Q'(1) = 0$, 因此闭区间 $[0,\xi]$ 和 $[\xi,1]$ 继续满足 Rolle 定理的条件. 因此存在 $\eta_1 \in (0,\xi), \eta_2 \in (\xi,1)$ 使得 $Q''(\eta_1) = Q''(\eta_2) = 0$. 依次下去, 可知存在 $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_{n-1} < 1$ 满足

$$Q^{(n-1)}(\lambda_1) = Q^{(n-1)}(\lambda_2) = \cdots = Q^{(n-1)}(\lambda_{n-1}) = 0.$$

由于 $Q^{(n-1)}(0) = Q^{(n-1)}(1) = 0$. 由 Rolle 定理可知存在 $0 < \mu_1 < \mu_2 < \cdots < \mu_n < 1$ 满足

$$Q^{(n)}(\mu_1) = Q^{(n)}(\mu_2) = \cdots = Q^{(n)}(\mu_n) = 0.$$

由这就证明了命题. ■

### 5.3.3 Lagrange 中值定理

**定理 5.9 (Lagrange 中值定理)**

如图5.9所示, 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续, 在开区间 $(a,b)$ 上可导. 则存在 $\xi \in (a,b)$ 使得

$$f'(\xi) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

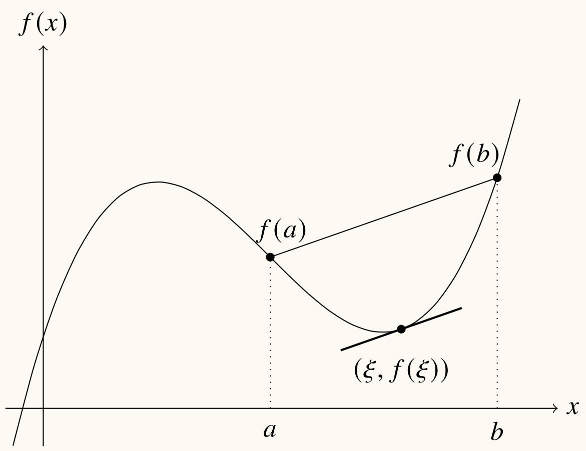


图 5.9: Lagrange 中值定理示意图.

证明 为了能使用 Rolle 中值定理, 我们希望构造一个函数 $g(x)$ 使得 $g(a)=g(b)=0$. 如图, 设过点 $(a,f(a))$ 和 $(b,f(b)$ 的直线为 $l(x)$. 由于它与 $f(x)$ 的交点横坐标就是 $a$ 和 $b$, 因此只需令

$$g(x)=l(x)-f(x)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)+f(a)-f(x).$$

则 $g(a)=g(b)=0$. 由于 $g(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续, 在开区间 $(a,b)$ 上可导, 由 Rolle 中值定理可知存在 $\xi\in(a,b)$ 使得

$$0=g'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}-f'(\xi)\Longrightarrow f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

■

注 显然 Rolle 中值定理是 Lagrange 中值定理的特例.

注 类似 Rolle 中值定理,Lagrange 中值定理也有明确的物理意义. 如果把上图看作运动学中的 ‘‘路程-时间’’ 图像, 则 Lagrange 中值定理的物理意义是: 某质点从某点出发经过一段时间的运动后到达另一点, 则中途一定存在一点的瞬时速度等于全程的平均速度.

设闭区间 $[x,x+\Delta x]$, 则存在 $\xi\in(x,x+\Delta x)$ 使得

$$f'(\xi)=\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}\iff f(x+\Delta x)-f(x)=f'(\xi)\Delta x.$$

令 $\theta=\dfrac{\xi-x}{\Delta x}$, 此时 $\theta\in(0,1)$. 于是就有等式

$$\Delta f(x)=f'(x+\theta\Delta x)\Delta x.$$

这个等式称为**有限增量公式** (finite increment formula). 我们可以把它和无穷小增量公式对比

$$\Delta f(x)=f'(x)\Delta x+o(\Delta x),\quad \Delta x\to 0.$$

Lagrange 中值定理和有限增量公式是等价的, 因此 Lagrange 中值定理也被称为有限增量定理.

由 Lagrange 中值定理的形式容易联想到例题 (4.27) 中介绍的 Lipschitz 连续. 用 Lagrange 中值定理用来证明 Lipschitz 连续十分方便.

例 5.57 反三角函数 $f(x)=\arctan x$ 在 $\mathbb{R}$ 上 Lipschitz 连续, 从而一致连续.

证明 任取 $x_1,x_2\in\mathbb{R}$. 显然 $f(x)$ 在 $[x_1,x_2]$ 上连续, 在 $(x_1,x_2)$ 上可导, 由 Lagrange 中值定理可知, 存在 $\xi\in(x_1,x_2)$ 使得

$$f(x_2)-f(x_1)=f'(\xi)(x_2-x_1)\Longrightarrow|\arctan x_1-\arctan x_2|=\frac{1}{1+\xi^2}|x_2-x_1|.$$

由于 $0<1/(1+\xi^2)\leq 1$, 故存在 $K=1$ 使得对于任意 $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ 都有

$$|\arctan x_1-\arctan x_2|\leq K|x_2-x_1|.$$

于是可知 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上 Lipschitz 连续, 从而一致连续.

注以上例题告诉我们一个重要事实: 若函数 $f(x)$ 在区间 $I$ 上的导函数有界, 则 $f(x)$ 在 $I$ 上 Lipschitz 连续, 从而一致连续. 这为证明一致连续提供了一种便利的方法.

但这个方法不是充要条件, 只是充分条件. 也就是说导函数 $f'(x)$ 在 $I$ 上无界时不能断言函数 $f(x)$ 不一致连续. 例如函数 $f(x)=\sqrt{x}$ 的导函数 $f'(x)=1/(2\sqrt{x})$ 在 $(0,1)$ 上无界, 但 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上是一致连续的.

用 Lagrange 中值定理还可以证明很多不等式.

例 5.58 若 $0<\alpha<\beta<\pi/2$, 则

$$\frac{\beta-\alpha}{\cos^2\alpha}<\tan\beta-\tan\alpha<\frac{\beta-\alpha}{\cos^2\beta}.$$

**证明** 设函数 $f(x) = \tan x$. 由于 $f(x)$ 在区间 $[\alpha,\beta]$ 上连续, 在 $(\alpha,\beta)$ 上可导, 由 Lagrange 中值定理可知, 存在 $\xi \in (\alpha,\beta)$ 使得

$$\tan\beta - \tan\alpha = f'(\xi)(\beta-\alpha) = \frac{\beta-\alpha}{\cos^2\xi}.$$

由于 $\cos x$ 在 $(0,\pi/2)$ 严格递减, 因此

$$1 > \cos\alpha > \cos\xi > \cos\beta > 0 \Longrightarrow 1 > \cos^2\alpha > \cos^2\xi > \cos^2\beta > 0$$

于是可知

$$\frac{\beta-\alpha}{\cos^2\alpha} < \tan\beta - \tan\alpha < \frac{\beta-\alpha}{\cos^2\beta}.$$ ■

**推论 5.1**

设函数 $f(x), g(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续, 在开区间 $(a,b)$ 上可导. 则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上为常值当且仅当在 $(a,b)$ 上 $f'(x) = 0$.

**证明** 必要性显然成立. 证明充分性. 任取 $x_1, x_2 \in [a,b]$ 且 $x_1 < x_2$. 由 Lagrange 中值定理可知存在 $\xi \in (a,b)$ 使得

$$f'(\xi) = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}.$$

由于在 $(a,b)$ 上 $f'(x) = 0$, 故 $f'(\xi) = 0$, 于是 $f(x_2) - f(x_1)$. 这表明 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上为常值.

**注** 上一节定义不定积分时用到了这个以上结论.

### 5.3.4 Cauchy 中值定理

Lagrange 中值定理可以进一步推广为 Cauchy 中值定理. 证明方法也完全类似.

**定理 5.10 (Cauchy 中值定理)**

设函数 $f(x), g(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续, 在开区间 $(a,b)$ 上可导. 若对于任一 $x \in (a,b)$ 都有 $g'(x) \neq 0$, 则存在 $\xi \in (a,b)$ 使得

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}.$$

**证明** 由 Lagrange 中值定理可知, 存在 $\xi \in (a,b)$ 使得

$$g(b) - g(a) = g'(\xi)(b-a)$$

由于对于任一 $x \in (a,b)$ 都有 $g'(x) \neq 0$. 故 $g(b) - g(a) \neq 0$. 令

$$h(x) = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}[g(x)-g(a)] + f(a) - f(x).$$

则 $h(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续, 在开区间 $(a,b)$ 上可导. 且 $h(a) = h(b) = 0$. 由 Rolle 中值定理可知存在 $\xi \in (a,b)$ 使得

$$0 = h'(\xi) = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} \cdot g'(x) - f'(\xi) \Longrightarrow \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$ ■

**注** 以上定理的证明方法和 Lagrange 定理完全相同. 事实上, 令 $g(x) = x$ 则 Cauchy 中值定理就是 Lagrange 中值定理. 因此 Lagrange 中值定理是 Cauchy 中值定理的特例.

以上介绍的 Rolle 中值定理, Lagrange 中值定理和 Cauchy 中值定理统称为微分学的**中值定理** (mean value theorem, MVT). 前一个都是后一个的特例. 它们成立的条件都是要求函数在闭区间 $[a,b]$ 上连续, 在开区间 $(a,b)$ 上可导.

### 5.3.5 函数未定式的定值法

在研究数列极限时, 我们已经遇到过求未定式极限的问题. 利用 Stolz 定理可以容易地求出绝大多数未定式的极限. 我们来回顾一下 Stolz 定理的方法.

设数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 都是无穷大. 为了确定它们商的极限, 我们只需求它们的一阶差商之比的极限 (如果存在的话). 在介绍函数导数的概念时, 我们已经知道导数实际上是函数差商的极限 (当自变量的增量趋于零时). 类比数列的情况容易想到, 若函数 $f(x), g(x)$ 都是无穷大 (或无穷小), 为了求它们商的极限, 可以考虑求它们导数之比的极限!

用 Cauchy 中值定理可以轻而易举地证明这个结论. 我们先来看 $f(x), g(x)$ 都是无穷小的情况. 为此, 可以先证明单侧极限的情况. 其余情况可作类似讨论.

**定理 5.11 (0/0 型 L'Hôpital 法则)**

设函数 $f(x), g(x)$ 在开区间 $(a,b)$ 可导, 且 $g(x) \neq 0$ $(\forall x \in (a,b))$. 若

$$\lim_{x\to a+} f(x) = \lim_{x\to a+} g(x) = 0.$$

且极限 $\lim\limits_{x\to a+} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ 存在, 则

$$\lim_{x\to a+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a+} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

**证明** 令 $f(a) = g(a) = 0$. 于是 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 $[a,b)$ 上连续. 对于任一 $x \in (a,b)$, 由 Cauchy 中值定理可知存在 $\xi \in (a,x)$ 使得

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)} = \frac{f(x)}{g(x)}.$$

当 $x \to a+$ 时, $\xi \to a+$. 于是可知

$$\lim_{x\to a+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{\xi\to a+} \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \lim_{x\to a+} \frac{f'(x)}{g'(x)}. \qquad \blacksquare$$

**注** L'Hôpital 法则并不是 L'Hôpital 给出的, 而是瑞士数学家 Johann Bernoulli 发现的, 但这个结论于 1696 年发表在 L'Hôpital 的著作中.

我们看到 L'Hôpital 法则求 0/0 型未定式的极限是十分有效的.

**例 5.59** 计算

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln\cos x}{x(x+2)}.$$

**解** 这是一个 0/0 型未定式, 由 L'Hôpital's 法则计算可知

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln\cos x}{x(x+2)} \xlongequal{\text{L'Hôpital 法则}} \lim_{x\to 0} \frac{-\sin x/\cos x}{2x+2} = \lim_{x\to 0} \frac{-\tan x}{2x+2} = 0. \qquad \blacksquare$$

虽然机械地使用 L'Hôpital 就可以计算出 0/0 型极限. 但我们还是应该在计算过程中应是当地使用一些技巧 (比如等价无穷小替换) 使计算简化. 和 Stolz 定理一样, 我们也可以连续多次使用 L'Hôspital 法则. 下面在看一个例子.

**例 5.60** 计算

$$\lim_{x\to 0} \frac{x-\sin x}{\sin^3 x}.$$

**解** 这是一个 0/0 型未定式, 由 L'Hôpital's 法则计算可知

$$\lim_{x\to 0} \frac{x-\sin x}{\sin^3 x} = \lim_{x\to 0} \frac{x-\sin x}{x^3} \xlongequal{\text{L'Hôspital 法则}} \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{3x^2} \xlongequal{\text{L'Hôspital 法则}} \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{6x} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{6x} = \frac{1}{6}. \qquad \blacksquare$$

**定理 5.12 (L'Hôpital 法则 II)**

设函数 $f(x), g(x)$ 在开区间 $(a,b)$ 可导, 且 $g(x) \neq 0$ $(\forall x \in (a,b))$. 若

$$\lim_{x\to a+} f(x) = \lim_{x\to a+} g(x) = 0.$$

且极限 $\lim\limits_{x\to a+} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ 存在, 则

$$\lim_{x\to a+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a+} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

**证明**

**定理 5.13 (L'Hôpital 法则 III)**

设函数 $f(x), g(x)$ 在开区间 $(a,b)$ 可导, 且 $g(x) \neq 0$ $(\forall x \in (a,b))$. 若

$$\lim_{x\to a+} f(x) = \lim_{x\to a+} g(x) = 0.$$

且极限 $\lim\limits_{x\to a+} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ 存在, 则

$$\lim_{x\to a+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a+} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

**证明**

以上定理只要求分母是无穷大. 因此它的适用范围比 0/0 型的 L'Hôpital 法则更广.

**例 5.61** 设函数 $f(x)$ 在 $(a,+\infty)$ 上可导, 且 $\lim_{x\to+\infty} f'(x) = 0$. 则

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 0.$$

**证明** 由于 $\lim_{x\to+\infty} f'(x) = 0$, 由 L'Hôpital 法则可知

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} f'(x) = 0. \qquad \blacksquare$$

除了 $0/0$ 和 $\infty/\infty$ 两种未定式以外, 还有 $0\cdot\infty$, $\infty-\infty$, $0^0$, $\infty^0$, $1^\infty$ 几种未定式. 经过适当变换都可以转化为 $0/0$ 和 $\infty/\infty$ 两种未定式.

先看一个 $0\cdot\infty$ 型未定式的例子.

**例 5.62** 计算: $\lim_{x\to0+} x^\mu \ln x$ $(\mu > 0)$.

**解** 这是一个 $0\cdot\infty$ 型未定式. 我们先把他化为 $\infty/\infty$ 型未定式, 再用 L'Hôpital 法则计算可知

$$原式 = \lim_{x\to0+} \frac{\ln x}{x^{-\mu}} \xlongequal{\text{L'Hôpital 法则}} -\frac{1}{\mu}\lim_{x\to0+} \frac{x^{-1}}{x^{-\mu-1}} = -\frac{1}{\mu}\lim_{x\to0+} x^\mu = 0. \qquad \blacksquare$$

下面是 $\infty-\infty$ 型未定式的例子.

**例 5.63** 计算: $\lim_{x\to\pi/2}(\sec x - \tan x)$.

**解** 这是一个 $\infty-\infty$ 型未定式. 我们先把他化为 $0/0$ 型未定式, 再用 L'Hôpital 法则计算可知

$$原式 = \lim_{x\to\pi/2}\left(\frac{1}{\cos x} - \frac{\sin x}{\cos x}\right) = \lim_{x\to\pi/2} \frac{1-\sin x}{\cos x} \xlongequal{\text{L'Hôpital 法则}} \lim_{x\to\pi/2} \frac{-\cos x}{-\sin x} = 0. \qquad \blacksquare$$

下面是 $0^0$ 型未定式的例子.

**例 5.64** 计算: $\lim_{x\to0+}(\sin x)^x$.

**解** 这是一个 $0^0$ 型未定式. 先求 $\lim_{x\to0} x\ln\sin x$. 这是一个 $0\cdot\infty$ 型未定式. 我们先把他化为 $\infty/\infty$ 未定式, 再用 L'Hôspital 法则计算可知

$$\lim_{x\to0+} x\ln\sin x = \lim_{x\to0+}\frac{\ln\sin x}{x^{-1}} \xlongequal{\text{L'Hôspital 法则}} \lim_{x\to0+}\frac{\cos x/\sin x}{-x^{-2}} \lim_{x\to0+}\frac{\cos x/x}{-x^{-2}} = -\lim_{x\to0+} x\cos x = 0.$$

于是可知

$$\text{原式} = \lim_{x\to0+} \mathrm{e}^{x\ln\sin x} = \mathrm{e}^0 = 1. \qquad \blacksquare$$

下面是 $\infty^0$ 型未定式的例子.

**例 5.65** 计算: $\lim_{x\to(\pi/2)-}(\tan x)^{\pi/2-x}$.

**解** 这是一个 $\infty^0$ 型未定式. 令 $t=\pi/2-x$, 则 $x=\pi/2-t$. 当 $x\to(\pi/2)-$ 时 $t\to0+$. 于是

$$\text{原式} = \lim_{t\to0+}\left[\tan\left(\frac{\pi}{2}-t\right)\right]^t = \lim_{t\to0+}(\cot t)^t = \lim_{t\to0+}\frac{(\sin t)^t}{(\sin t)^t} \xlongequal{\text{例题 (??)}} 1. \qquad \blacksquare$$

$1^\infty$ 型的未定式我们已经在前面讨论过. 下面用 L'Hôspital 法则来求 $1^\infty$ 型的未定式.

**例 5.66** 求极限

$$\lim_{x\to\infty}\left(\cos\frac{1}{x}\right)^{x^2}.$$

**解** 解法二 由于

$$\left(\cos\frac{1}{x}\right)^{x^2} = \exp\left(x^2\ln\cos\frac{1}{x}\right).$$

因此先考虑计算 $\lim_{x\to\infty} x^2\ln\cos\frac{1}{x}$. 令 $t=1/x$. 当 $x\to\infty$ 时 $t\to0$. 于是由 L'Hôspital 法则可知

$$\lim_{x\to\infty} x^2\ln\cos\frac{1}{x} = \lim_{t\to0}\frac{\ln\cos t}{t^2} = \lim_{t\to0}\frac{-\sin t}{2t\cos x} = \lim_{t\to0}\frac{-1}{2\cos x} = -\frac{1}{2}.$$

于是可知

$$\lim_{x\to\infty}\left(\cos\frac{1}{x}\right)^{x^2} = \lim_{x\to\infty}\exp\left(x^2\ln\cos\frac{1}{x}\right) = \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}. \qquad \blacksquare$$

**注** 对比例题 (4.22) 的解法.

### 5.3.6 导函数的性质

并不是所有函数都可以成为导函数. 换句话说, 不是所有函数都有原函数. 利用微分中值定理以及相关方法可以得到两个原函数存在的必要条件.

我们知道一个函数在区间 $I$ 上的原函数 (如果存在的话) 一定在 $I$ 上连续. 但一个函数的在 $I$ 上的导函数 (如果存在的话) 未必在 $I$ 上连续. 举例说明.

**例 5.67** 设 $\mathbb{R}$ 上的函数

$$f(x) = \begin{cases} x^2\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$$

则导函数 $f'(x)$ 不是 $\mathbb{R}$ 不连续.

**证明** (i) 先求出 $f'(x)$. 当 $x\neq0$ 时,

$$f'(x) = \left(x^2\sin\frac{1}{x}\right)' = \left(x^2\right)'\sin\frac{1}{x} + x^2\left(\sin\frac{1}{x}\right)' = 2x\sin x - \cos\frac{1}{x}.$$

当 $x=0$ 时, 由例题 (4.1) 可知

$$f'(x)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}x\sin\frac{1}{x}=0.$$

综上可知 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 的导函数为

$$f'(x)=\begin{cases}2x\sin\dfrac{1}{x}-\cos\dfrac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$$

(ii) 证明 $f'(x)$ 在 0 处不连续. 只需证明 $f(x)$ 在 0 处的极限不存在. 设数列

$$x_n=\frac{1}{2n\pi+\pi/2},\quad y_n=\frac{1}{2n\pi}.$$

显然 $\lim_{n\to\infty}x_n=\lim_{n\to\infty}y_n=0$ 且 $x_n\neq 0, y_n\neq 0\ (n=1,2,\cdots)$. 然而

$$f(x_n)=\frac{2}{2n\pi+\pi/2}\sin\left(2n\pi+\frac{\pi}{2}\right)-\cos\left(2n\pi+\frac{\pi}{2}\right)=\frac{2}{2n\pi+\pi/2}\to 0,$$

$$f(y_n)=\frac{2}{2n\pi}\sin(2n\pi)-\cos(2n\pi)=-1\to -1.$$

由 Heine 定理可知 $f(x)$ 在 0 处的极限不存在. 因此 $f'(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上不连续. ■

以上例子说明导函数可以存在间断点. 容易验证, 以上例子中的导函数 $f'(x)$ 在 0 处的左极限和右极限都不存在. 因此 0 是它的第二类间断点. 那么导函数是否存在第一类间断点?

**定理 5.14**

设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上可导, 则导函数 $f'(x)$ 不可能有第一类间断点. ♡

**证明** 用反证法. 假设 $f'(x)$ 存在第一类间断点 $x_0$. 则 $f'(x_0+)$ 和 $f'(x_0-)$ 都存在. 由 Lagrange 中值定理可知存在 $\xi_x\in(x_0,x)$ 使得

$$f'(x_0)=f'_+(x_0)=\lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0^+}f'(\xi_x).$$

容易知道, 当 $x\to x_0+$ 时 $\xi_x\to x_0+$. 由于 $f'(x_0+)$ 存在, 因此

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0^+}f'(\xi_x)=f'(x_0+).$$

同理可知 $f'(x_0)=f'(x_0-)$. 因此 $f'(x)$ 在 $x_0$ 处连续, 出现矛盾, 故假设不成立. 于是可知导函数 $f'(x)$ 不可能有第一类间断点.

以上定理实际上给出了原函数存在的一个必要条件: 若函数在区间 $I$ 上不连续, 则它在 $I$ 上存在原函数的必要条件是所有间断点都是第二类间断点. 后面我们将证明连续函数一定有原函数.

数学分析中通常研究性质很好的函数, 我们不仅要求它可导, 还要求它的导函数连续, 这样的函数称为 "连续可导".

导函数未必连续, 但导函数一定有介值性. 为了证明这个结论, 我们可以模仿介值定理的证明方法, 先证明一个引理.

**引理 5.2**

设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上可导. 若 $f'(a)f'(b)<0$, 则存在 $\xi\in(a,b)$ 使得 $f'(\xi)=0$. ♡

**证明** 不妨设 $f'(a)>0, f'(b)<0$. 由于

$$f'(a)=\lim_{x\to a+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}>0.$$

故存在 $\delta_1>0$ 使得当 $x\in(a,a+\delta)$ 时

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a}>0.$$

由于 $x>a$, 故 $f(x)>f(a)$. 同理可知 $f(x)>f(b)$.

由于 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导, 故它在 $[a,b]$ 上连续. 由极值定理可知 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可以取到最大值和最小值. 由于 $f(x)>f(a)$, $f(x)>f(b)$, 因此 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的最大值不可能在 $a$ 和 $b$ 上取到, 即存在 $xi \in (a,b)$ 使得 $f(\xi)=\max f([a,b])$. 由 Fermat 引理可知 $f'(\xi)=0$. ■

**定理 5.15 (Darboux 定理)**

设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上可导, 则对于 $f'(a)$ 和 $f'(b)$ 之间任一实数 $\gamma$ 都存在 $\xi \in (a,b)$ 使得 $f'(\xi)=\gamma$. ♡

**证明** 不妨设 $f'(a)<\gamma<f'(b)$. 令 $g(x)=f(x)-\gamma x$, 则

$$g'(x)=f'(x)-\gamma.$$

于是

$$g'(a)=f'(a)-\gamma<0<f'(b)-\gamma=g'(b).$$

由引理 (5.2) 可知存在 $xi \in (a,b)$ 使得 $g'(\xi)=0$, 即 $f(\xi)=\gamma$. ■

这样我们就得到原函数存在的第二个必要条件. 利用这个必要条件我们可以断言某些函数没有原函数. 我们来看两个例子.

**例 5.68** Dirichlet 函数 $D(x)$(定义见例题 (4.8)) 在 $\mathbb{R}$ 上没有原函数.

**证明** 由于 $D(\mathbb{R})=\{0,1\}$, 因此 $D(x)$ 不满足介值性. 由 Darboux 定理可知 $D(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上没有原函数.

**例 5.69** Thomae 函数 $T(x)$(定义见例题 (4.9)) 在 $\mathbb{R}$ 上函数没有原函数.

**证明** 由于

$$T(\mathbb{R})=\{0\}\cup\{1/q \mid q\in\mathbb{N}^*\}.$$

因此 $T(x)$ 不满足介值性. 由 Darboux 定理可知 $T(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上没有原函数.

## 5.4 用导数研究函数

### 5.4.1 函数的单调性

用导数可以研究函数的单调性.

**命题 5.4**

设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续, 在开区间 $(a,b)$ 上可导. 则

(1) $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调递增当且仅当对于任一 $x\in(a,b)$ 都有 $f'(x)\geq 0$.

(2) $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调递减当且仅当对于任一 $x\in(a,b)$ 都有 $f'(x)\leq 0$. ♠

**证明** 只证明递增的情况.

(i) 任取 $x\in(a,b)$. 对于任一 $x_0\in(a,b)$, 由于 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调递增, 故

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\geq 0.$$

由于 $f(x)$ 在 $x$ 处可导, 由函数极限的保序性可知

$$f'(x)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\geq 0.$$

(ii) 任取 $x_1, x_2 \in [a,b]$, 其中 $x_1 < x_2$. 由 Lagrange 中值定理可知存在 $\xi \in (x_1, x_2)$ 使得

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1).$$

由于对于任一 $x \in (a,b)$ 都有 $f'(x) \geq 0$, 故 $f'(\xi) \geq 0$. 因此 $f(x_2) \geq f(x_1)$. 这表明 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调递增. ■

以上命题的充分性改为 "严格递增 (或递减)" 后仍然成立, 证法也完全类似.

**推论 5.2**

设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续, 在开区间 $(a,b)$ 上可导.

(1) 若对于任一 $x \in (a,b)$ 都有 $f'(x) > 0$. 则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 严格递增.

(2) 若对于任一 $x \in (a,b)$ 都有 $f'(x) < 0$. 则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 严格递减.

**证明** 证明略.

需要注意命题 (5.4) 改为 "严格递增 (或递减)" 后, 必要性不成立. 举例说明. 设函数 $f(x) = x^3$. 它在 $\mathbb{R}$ 上严格递增. 但 $f'(0) = 0$.

$f(x)$ 在区间上严格递增 (或递减) 的充分条件可以减弱为以下命题.

**命题 5.5**

设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续.

(1) 若对于任一 $x \in (a,b) \backslash \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ 都有 $f'(x) > 0$. 则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上严格单调递增.

(2) 若对于任一 $x \in (a,b) \backslash \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ 都有 $f'(x) < 0$. 则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上严格单调递减.

**证明** 只证明递增的情况. 不妨设 $x_1 < x_2 < \cdots < x_n$. 则 $f(x)$ 在闭区间 $[a, x_1], [x_1, x_2], \cdots, [x_n, b]$ 上连续, 在开区间 $(a, x_1), (x_1, x_2), \cdots, (x_n, b)$ 上 $f'(x) > 0$. 因此 $f(x)$ 在 $[a, x_1], [x_1, x_2], \cdots, [x_n, b]$ 上严格递增. 于是可知 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上也时严格递增的. ■

下面给出严格单调的一个充要条件.

**命题 5.6**

设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续, 在开区间 $(a,b)$ 上可导. 则

(1) $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上严格单调递增当且仅当对于任一 $x \in (a,b)$ 都有 $f'(x) \geq 0$ 且在 $(a,b)$ 的任一开子区间上 $f'(x) \neq 0$.

(2) $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上严格单调递减当且仅当对于任一 $x \in (a,b)$ 都有 $f'(x) \leq 0$ 且在 $(a,b)$ 的任一开子区间上 $f'(x) \neq 0$..

**证明** 只证明递增的情况.

(i) 证明必要性. 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上严格单调递增, 由命题 (5.4) 可知对于任一 $x \in (a,b)$ 都有 $f'(x) \geq 0$. 假设存在开区间 $(a_1, b_1) \subseteq (a,b)$ 使得 $f'(x)$ 在 $(a_1, b_1)$ 上 $f'(x) = 0$, 则在 $(a_1, b_1)$ 上 $f(x)$ 是常值函数, 因此假设不成立. 于是可知必要性成立.

(ii) 证明充分性. 若对于任一 $x \in (a,b)$ 都有 $f'(x) \geq 0$, 由命题 (5.4) 可知 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调递增. 假设存在 $x_1, x_2 \in [a,b]$, 其中 $x_1 > x_2$ 使得 $f(x_1) = f(x_2)$. 由于 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调递增. 故对于任一 $x \in [x_1, x_2]$ 都有

$$f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2) \Longrightarrow f(x_1) = f(x) = f(x_2).$$

这表明 $f(x)$ 在 $[x_1, x_2]$ 上是常值函数. 此时在 $[x_1, x_2]$ 上 $f'(x) = 0$, 出现矛盾, 因此假设不成立. 于是可知充分性成立. ■

利用以上几个结论, 可以有效地证明不等式.

**例 5.70** 当 $0 < x < \pi/2$ 时

$$\frac{2}{\pi} < \frac{\sin x}{x} < 1.$$

**证明** 只需证明左半边的不等式. 设

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x = 0 \\ \dfrac{\sin x}{x}, & 0 < x \le \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

当 $0 < x < \pi/2$ 时

$$f'(x) = \left(\frac{\sin x}{x}\right)' = \frac{x\cos x - \sin x}{x^2}.$$

由于 $x < \tan x$ $(0 < x < \pi/2)$, 因此 $x\cos x - \sin x < 0$. 于是 $f'(x) < 0$ $(0 < x < \pi/2)$. 由推论 (5.2) 可知 $f(x)$ 在 $[0, \pi/2]$ 上严格递减. 于是可知当 $x \in (0, \pi/2)$ 时

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) < f(x) \iff \frac{2}{\pi} < \frac{\sin x}{x}.$$ ■

### 5.4.2 函数的极值

我们已经知道 Fermat 引理是一个找函数极值的有效方法. 但它有两个问题. 第一, 它要求函数在区间上可导, 对于函数 $f(x) = |x|$, 显然 0 是 $f(x)$ 的极小值. 由于 $f(x)$ 在 0 处不可导, 因此无法用 Fermat 引理找到这个极小值. 第二,Fermat 引理只是极值的一个必要条件. 现在我们可以用函数的单调性来研究函数的极值.

**命题 5.7**

设函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, $x_0 \in (a, b)$.

(1) 若存在 $\delta > 0$ 使得在 $(x_0 - \delta, x_0)$ 上 $f'(x) > 0$, 在 $(x_0, x_0 + \delta)$ 上 $f'(x) < 0$. 则 $f(x_0)$ 是函数 $f(x)$ 的一个严格极大值.

(2) 若存在 $\delta > 0$ 使得在 $(x_0 - \delta, x_0)$ 上 $f'(x) < 0$, 在 $(x_0, x_0 + \delta)$ 上 $f'(x) > 0$. 则 $f(x_0)$ 是函数 $f(x)$ 的一个严格极小值.

**证明**

若函数 $f(x)$ 在 $x_0$ 处有二阶导, 则可以用以下命题判断极值点.

**命题 5.8**

设函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, $x_0 \in (a, b)$ 是 $f(x)$ 的一个驻点. 若 $f''(x_0)$ 存在, 则

(1) 当 $f''(x_0) < 0$ 时, $f(x_0)$ 是函数 $f(x)$ 的一个严格极大值.

(2) 当 $f''(x_0) > 0$ 时, $f(x_0)$ 是函数 $f(x)$ 的一个严格极小值.

**证明**

当我们求出了区间上所有的极值后, 可以从中找最值. 下面我们来看几个求极值和最值的例子.

**例 5.71** 设函数 $f(x) = (x-1)(x-2)^2$. 求 $f(x)$ 在区间 $[0, 5/2]$ 上的极小值、极大值、最小值、最大值.

**解** 对 $f(x)$ 求导得

$$f'(x) = (x-2)^2 + 2(x-1)(x-2) = (x-2)(3x-4).$$
$$f''(x) = (3x-4) + 3(x-2) = 6x - 10.$$

因此 $x = 4/3$ 和 $x = 2$ 是 $f(x)$ 的驻点. 由于

$$f''\left(\frac{4}{3}\right) = 6\left(\frac{4}{3}\right) - 10 = -2 < 0.$$
$$f''(2) = 6 \cdot 2 - 10 = 2 > 0.$$

由命题 (5.8) 可知 $x = 4/3$ 和 $x = 2$ 分别是 $f(x)$ 的严格极大值和严格极小值. 由于

$$f(0) = (0-1)(0-2)^2 = -4,$$
$$f\left(\frac{5}{2}\right) = \left(\frac{5}{2}-1\right)\left(\frac{5}{2}-2\right)^2 = \frac{3}{8},$$
$$f\left(\frac{4}{3}\right) = \left(\frac{4}{3}-1\right)\left(\frac{4}{3}-2\right)^2 = \frac{4}{27},$$
$$f(2) = (2-1)(2-2)^2 = 0.$$

于是可知 $f(x)$ 在区间 $[0, 5/2]$ 上的最大值为 $3/8$. 最小值为 $-4$. ■

闭区间上的连续函数一定有最大值和最小值, 且一定在驻点或闭区间端点处取到最值. 因此对于闭区间上的连续函数, 我们可以机械地求出所有驻点和两个端点处的函数值, 然后比较它们的大小后就可找到最大值和最小值. 而不需要去细致地判断该函数的单调区间.

利用导数可以研究几何中的一些极值问题.

**例 5.72** 设椭圆

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

如图5.10(a) 所示, 求边平行于坐标轴的内接矩阵的面积最大值.

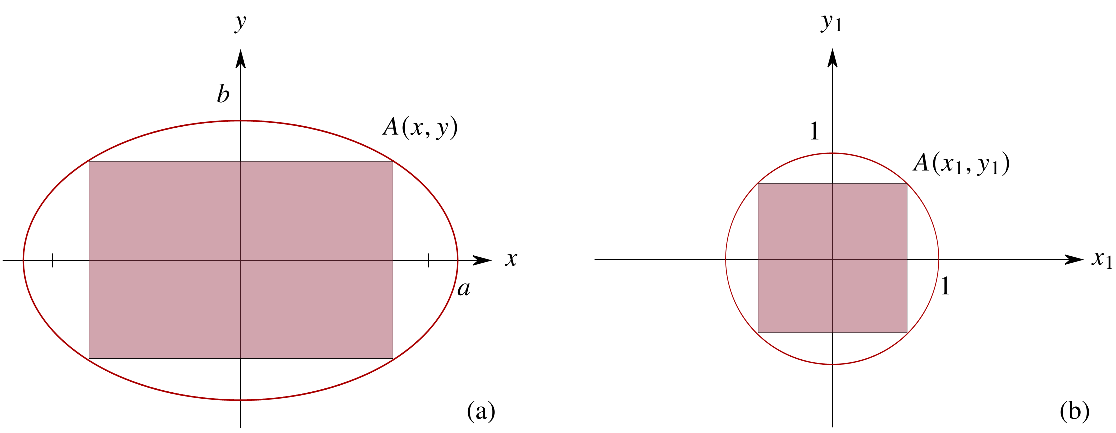



**图 5.10:** 椭圆内接矩形示意图。

**解** 不妨设 $a, b > 0$. 设内接矩形位于第一象限的顶点为 $A(x, y)$ $(0 \le x \le a)$.

解法一 由于

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \iff y = b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}.$$

因此内接矩形的面积为

$$S(x) = 4xy = 4xb\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} = \frac{4b}{a}x\sqrt{a^2 - x^2}.$$

求导得

$$S'(x) = \frac{4b}{a}\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{4b}{a}\frac{-x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \frac{4b}{a} \cdot \frac{-2x^2 + a^2}{\sqrt{a^2 - x^2}}.$$

令 $S'(x)=0$ 得

$$-2x^2+a^2=0 \iff x=\frac{\sqrt{2}a}{2}.$$

分别求出驻点和闭区间端点出的函数值

$$S\left(\frac{\sqrt{2}a}{2}\right)=\frac{4b}{a}\cdot\frac{\sqrt{2}a}{2}\cdot\sqrt{a^2-\left(\frac{\sqrt{2}a}{2}\right)^2}=2ab,$$
$$S(0)=S(a)=0.$$

于是可知当 $x=a\sqrt{2}/2$ 时, 即 $A$ 的坐标为 $(a\sqrt{2}/2, b\sqrt{2}/2)$ 时面积取到最大值 $2ab$.

解法二 由于

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \iff y=b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}.$$

因此内接矩形的面积为

$$S(x)=4xy=4xb\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}=\frac{4b}{a}x\sqrt{a^2-x^2}.$$

由均值不等式可知

$$S(x)=\frac{4b}{a}\sqrt{x^2\left(a^2-x^2\right)}\leq\frac{2b}{a}\left(x^2+a^2-x^2\right)=2ab.$$

当满足

$$x^2=a^2-x^2 \iff x=\frac{a\sqrt{2}}{2},$$

则不等式中的等号成立. 于是可知当 $A$ 的坐标为 $(a\sqrt{2}/2, b\sqrt{2}/2)$ 时面积取到最大值 $2ab$.

解法三 如图5.10(b) 所示, 作仿射变换

$$\begin{cases} x=ax_1 \\ y=by_1 \end{cases}. \tag{5.7}$$

则变换后的方程为 $x_1^2+y_1^2=1$, 这是一个单位圆. 设 $A$ 经过变换后变为 $A_1$, 令 $A$ 的坐标为 $(\cos\theta,\sin\theta)$, 其中 $\theta=\angle AOx$ $(0<\theta<\pi/2)$. 则矩形面积为

$$S(\theta)=\cos\theta\sin\theta=\frac{1}{2}\sin 2\theta.$$

求导得 $S'(\theta)=\cos 2\theta$. 由于 $S'(\theta)$ 在 $(0,\pi/2)$ 上单调递减, 且 $S'(\pi/4)=0$, 因此当 $x\in(0,\pi/4)$ 时 $S'(\theta)>0$, 当 $x\in(\pi/4,\pi/2)$ 时 $S'(\theta)<0$. 故 $S(\theta)$ 在 $(0,\pi/4)$ 上单调递增, 在 $(\pi/4,\pi/2)$ 上单调递减. 于是可知当 $\theta=\pi/4$ 时圆的内接矩形面积最大. 此时 $A_1(\sqrt{2}/2,\sqrt{2}/2)$.

由仿射变换公式 (5.7) 可知 $A$ 的坐标为 $(a\sqrt{2}/2, b\sqrt{2}/2)$. 由于仿射变换保持面积之比, 因此当内接矩形位于第一象限的顶点为 $(a\sqrt{2}/2, b\sqrt{2}/2)$ 时面积最大, 此时面积为

$$S=4\cdot\frac{\sqrt{2}a}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}b}{2}=2ab.$$

利用导数还可以研究一些物中的一些极值理问题.

**例 5.73 光的折射定律** 已知光在传播时, 总是选择最节省时间的路线 (Fermat 最速原理). 如图5.11所示, 设光从甲介质中的 $A$ 点出发射向乙介质中的 $B$ 点, 折射点为 $P$. 已知光在甲介质和乙介质中的速度分别为 $a$, $b$. 设入射角和折射角分别为 $\alpha$ 和 $\beta$, 其中入射角是入射光线与法线的夹角, 折射角是折射光线与法线的夹角. 则

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}=\frac{a}{b}.$$

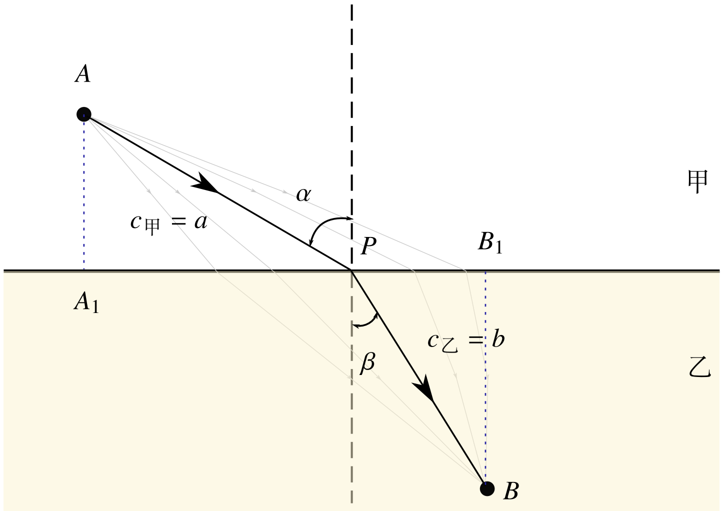



**图 5.11:** 折射定律示意图. 灰线代表非用时最短路径

**证明** 如图 (5.11), 过 $A$ 作分界线的垂线, 垂足为 $A_1$, 过 $B$ 作分界线的垂线, 垂足为 $B_1$. 设 $|AA_1| = h_1$, $|BB_1| = h_2$, $|A_1B_1| = d$. 设 $|A_1P| = x$. 于是光线从 $A$ 到 $B$ 所需的时间关于 $x$ 的函数为

$$t(x) = \frac{\sqrt{x^2 + h_1^2}}{a} + \frac{\sqrt{(d-x)^2 + h_2^2}}{b}.$$

下面来求 $t(x)$ 的最小值. 先求 $t(x)$ 的导数和二阶导数得

$$t'(x) = \frac{x}{a\sqrt{x^2 + h_1^2}} - \frac{d-x}{b\sqrt{(d-x)^2 + h_2^2}},$$

$$t''(x) = \frac{h_1^2}{a\left(h^2 + x^2\right)^{3/2}} + \frac{h_2^2}{b\left(h_2 + (d-x)^2\right)^{3/2}}.$$

由于

$$t'(0) = -\frac{d}{b\sqrt{d^2 + h_2^2}} < 0, \quad t'(d) = \frac{d}{a\sqrt{d^2 + h_1^2}} > 0.$$

由 Darboux 定理可知存在 $x_0 \in (0, d)$ 使得 $t'(x) = 0$. 由于 $t''(x) > 0$, 故 $t'(x)$ 严格递增. 因此 $x_0$ 是 $t(x)$ 的唯一驻点. 因此 $t(x)$ 在 $x_0$ 处取得最小值. 于是

$$\sin\alpha = \frac{x_0}{\sqrt{x_0^2 + h_1^2}}, \quad \sin\beta = \frac{d - x_0}{\sqrt{(d-x_0)^2 + h_2^2}}.$$

由于 $t'(x_0) = 0$, 于是可知

$$\frac{x_0}{a\sqrt{x_0^2 + h_1^2}} - \frac{d - x_0}{b\sqrt{(d-x_0)^2 + h_2^2}} = 0 \iff \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{a}{b}.$$ ■

### 5.4.3 函数的凸性

从几何直观上我们可以这样描述平面上曲线的 ‘‘凸性”. 设曲线 $y = f(x)$ $(x \in I)$. 连接曲线上任意不同的两点, 得到的线段称为该曲线的一条**弦** (chord). 若该曲线的任意一条弦都不落在此弦两个端点之间那部分曲线的下方 (可以部分与弦重叠), 则称该曲线是**凸的** (convex).

现在我们希望 “解析地” 描述 “凸性”. 任意取定 $x_1, x_2 \in I$. 任取 $x \in (x_1, x_2)$. 令

$$\lambda = \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1}.$$

由定比分点公式可知

$$x = \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2.$$

如果曲线是凸的, 则对于任一 $\lambda \in (0,1)$ 都有

$$f[(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2] \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2).$$

于是我们可以如下定义 “凸函数”.

**定义 5.12 (凸函数)**

设函数 $f(x)$ 在区间 $I$ 上有定义. 若对于任意 $x_1, x_2 \in I$ $(x_1 \neq x_2)$ 以及任意 $\lambda \in (0,1)$ 都有

$$f[(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2] \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2).$$

则称 $f(x)$ 在 $I$ 上是**凸的** (convex). 特别地, 若以上不等式中的 $\leq$ 改为 $<$, 则称 $f(x)$ 在 $I$ 上是严格凸的, 如图5.12所示.

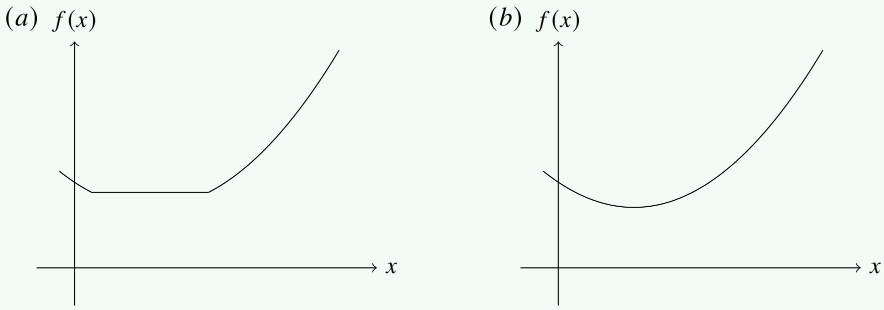



图 5.12: $(a)$ 凸函数与 $(b)$ 严格凸函数.

以上定义中的不等式称为 **Jensen 不等式** (Jensen's inequality). 用数学归纳法可以把 “二元” 的 Jensen 不等式推广到 “多元” 的情况.

**定理 5.16 (Jensen 不等式)**

设函数 $f(x)$ 是区间 $I$ 上的凸的. 则对于任意 $x_1, x_2, \cdots, x_n \in I$ $(x_1 \neq x_2)$ 以及任意 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n \in (0,1)$ $(\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n = 1)$ 都有

$$f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_n x_n) \leq \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) + \cdots + \lambda_n f(x_n).$$

若 $f(x)$ 在 $I$ 上是严格凸的, 则当 $x_1, x_2, \cdots, x_n \in I$ 不全相等时, 有

$$f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_n x_n) < \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) + \cdots + \lambda_n f(x_n).$$

**证明** 留作习题.

由以上定理可以立刻得到以下推论.

**推论 5.3**

设函数 $f(x)$ 是区间 $I$ 上的凸的. 则对于任意 $x_1, x_2, \cdots, x_n \in I$ $(x_1 \neq x_2)$ 以及任意 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n \in (0,1)$ $(\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n = 1)$ 都有

$$f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_n x_n) \leq \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) + \cdots + \lambda_n f(x_n).$$

**证明**

**命题 5.9**

**证明**

**命题 5.10**

**证明**

**命题 5.11**

**证明**

看一个例子.

**例 5.74** 设 $n$ 个两两不等的正数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$. 令

$$f(x) = \begin{cases} \left(\dfrac{a_1^x + a_2^x + \cdots + a_n^x}{n}\right)^{1/x}, & x \neq 0 \\ \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}, & x = 0 \end{cases}.$$

则 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上严格递增.

**证明**

### 5.4.4 函数的图像

**定义 5.13 (渐近线)**

设函数 $f(x)$.

(1) 若

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = a \quad 或 \lim_{x\to-\infty} f(x) = b.$$

则称 $y = a$ 或 $y = b$ 是 $y = f(x)$ 的一条水平**渐近线** (asymptote).

(2) 若

$$\lim_{x\to x_0+} f(x) = \pm\infty \quad 或 \lim_{x\to x_0-} f(x) = \pm\infty.$$

则称 $x = x_0$ 是 $y = f(x)$ 的一条竖直渐近线.

(3) 若

$$\lim_{x\to+\infty} [f(x) - (ax+b)] = 0 \quad 或 \lim_{x\to-\infty} [f(x) - (ax+b)] = 0.$$

则称 $y = ax + b$ 是 $y = f(x)$ 的一条斜渐近线.

下面我们来讨论如何求出渐近线. XXX 下面我们来看一个例子.

**例 5.75** 求以下函数的渐近线

$$y = \frac{(1+x)^2}{4(1-x)}.$$

**解** 令 $f(x)=\frac{(1+x)^2}{4(1-x)}$. 容易知道

$$\lim_{x\to1+}f(x)=-\infty,\quad \lim_{x\to1-}f(x)=+\infty.$$

因此 $x=1$ 是 $y=f(x)$ 的一条竖直渐近线.

假设 $y=f(x)$ 存在一条斜渐近线 $y=ax+b$. 由于

$$a=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{(1+x)^2}{4x(1-x)}=-\frac{1}{4}.$$

$$b=\lim_{xto\pm\infty}[f(x)-ax]=\lim_{x\to\pm\infty}\left[\frac{(1+x)^2}{4(1-x)}+\frac{x}{4}\right]=-\frac{3}{4}.$$

因此设 $y=f(x)$ 存在一条斜渐近线 $y=-\frac{1}{4}x-\frac{3}{4}$.

作出函数图像的基本方法.

(1) 确定函数的定义域.

(2) 判断函数的对称性 (包括奇偶性) 和周期性.

(3) 确定函数的单调区间.

(4) 确定函数的极值点.

(5) 确定函数的凹凸区间和拐点.

(6) 确定函数的渐近线 (如果有的话).

(7) 求出一些特殊点的值.

**例 5.76** 作出以下函数的图像

$$y=\frac{(1+x)^2}{4(1-x)}.$$

**解** 如图5.13所示

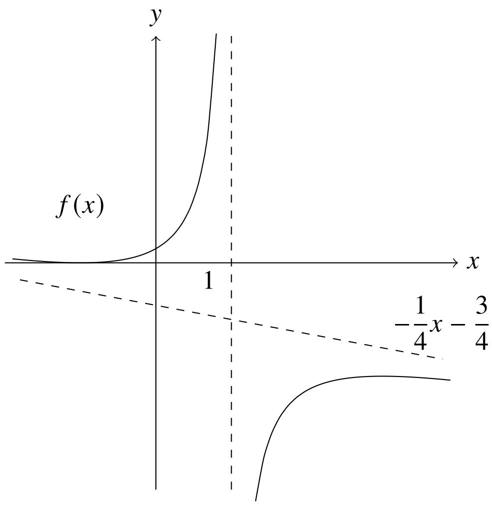



**图 5.13:** 函数与其渐近线.

# 5.5 Taylor 公式

## 5.5.1 带 Peano 余项的 Taylor 公式

我们已经知道, 若函数 $f(x)$ 在 $x_0$ 处可导, 则有无穷小增量公式

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0), \quad x \to x_0. \tag{5.8}$$

这个公式的重要意义是: 用一个一次多项式来近似 $f(x)$, 且误差是一个比 $x - x_0$ 高阶的无穷小, 这正是微分思想的本质. 然而在很多情况下, 用一次多项式逼近 $f(x)$, 还是显得 ‘‘粗糙’’ 了一些. 很自然的想法是, 当 $f(x)$ 二阶可导时, 能否用一个二次多项式来逼近 $f(x)$, 并使得它的误差是一个比 $(x - x_0)^2$ 高阶的无穷小. 我们可以用待定系数法. 设

$$f(x) = A + B(x - x_0) + C(x - x_0)^2 + o\left[(x - x_0)^2\right], \quad x \to x_0. \tag{5.9}$$

下面我们来逐一确定 $A, B, C$. 首先, 令 $x \to x_0$ 得

$$A = \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

于是等式5.9可以写成

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = B + C(x - x_0) + o(x - x_0), \quad x \to x_0.$$

由于 $f(x)$ 在 $x_0$ 处可导, 令 $x \to x_0$ 得

$$B = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0).$$

于是等式5.9可以写成

$$C = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)}{(x - x_0)^2} \xlongequal{\text{L'Ĥospital 法则}} \frac{1}{2} \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} = \frac{1}{2} f''(x_0).$$

至此我们求出了所有待定系数. 这表明满足必要性的二次多项式只有一个:

$$f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + f''(x_0)(x - x_0)^2.$$

下面我们来验证充分性, 即验证这个多项式满足等式5.9. 由 L'Ĥospital 法则可知

$$\begin{aligned}
&\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - \left[f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + f''(x_0)(x - x_0)^2\right]}{(x - x_0)^2} = \frac{1}{2} \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0) - f''(x_0)(x - x_0)}{x - x_0} \\
&= \frac{1}{2} \left[\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} - f''(x_0)\right] = \frac{1}{2}[f''(x_0) - f''(x_0)] = 0.
\end{aligned}$$

于是可知以下等式成立

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + f''(x_0)(x - x_0)^2 + o\left[(x - x_0)^2\right], \quad x \to x_0.$$

不难验证, 如果 $f(x)$ 三阶可导, 按照这个方法可以把 $f(x)$ 表示为一个三次多项式加上 $o\left[(x - x_0)^3\right]$. 用数学归纳法可以把结论推广到 $n$ 阶可导的函数.

**定理 5.17 (带 Peano 余项的 Taylor 公式)**

设函数 $f(x)$ 在 $x_0$ 处有 $n$ 阶导数. 则当 $x \to x_0$ 时

$$f(x) = f(x_0) + \frac{1}{1!} f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2!} f''(x_0)(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n + o[(x - x_0)^n]. \tag{5.10}$$

♡

**证明** 用数学归纳原理对 $n$ 进行归纳. 令

$$T_n(f, x_0; x) := f(x_0) + \frac{1}{1!} f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2!} f''(x_0)(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n.$$

当 $n = 1$ 时就是等式 (5.8). 假设 $n = k$ 时命题成立. 由于

$$T'_{k+1}(f, x_0; x) = f'(x_0) + \frac{1}{1!} f''(x_0)(x - x_0) + \cdots + \frac{1}{k!} f^{(k+1)}(x_0)(x - x_0)^k = T_k(f', x_0; x).$$

由 L'Hôspital 法则和归纳假设可知

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-T_{k+1}(f,x_0;x)}{(x-x_0)^{k+1}}=\frac{1}{k+1}\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)-T_k(f',x_0;x)}{(x-x_0)^k}=0.$$

由数学归纳原理可知命题成立. ■

**注** 以上定理是以英国数学家 Brook Taylor 命名的, 他在 1715 年首次陈述了这个公式.
**注** 以上定理中 $T_n(f,x_0;x)$ 称为 $n$ 次 **Taylor 多项式** (Taylor polynomial).
**注** 以上定理中, 令

$$R_n(x)=f(x)-T_n(f,x_0;x),\quad n=1,2,\cdots.$$

我们称 $R_n(x)$ 为**余项** (remainder term). 由以上定理可知 $R_n(x)$ 是一个比 $(x-x_0)^n$ 高阶的无穷小, 即

$$\lim_{x\to x_0}\frac{R_n(x)}{(x-x_0)^n}=0.$$

目前, 我们对于余项 $R_n(x)$ 只有一个 ‘‘定性的’’ 描述, 我们把这样的余项称为 **Peano 余项** (Peano's remainder).

Taylor 定理提供了一个重要的思想: 任一 ‘‘足够光滑’’ 的函数, 都可以用多项式逼近.

等式 (5.10) 通常称为 $f(x)$ 在 $x_0$ 处的 **Taylor 展开式** (Taylor expansion). 显然我们应该让 $x_0$ 取得尽量简单. 令 $x_0=0$, 则等式5.10为

$$f(x)=f(0)+\frac{1}{1!}f'(0)x+\frac{1}{2!}f''(0)x^2+\cdots+\frac{1}{n!}f^{(n)}(0)x^n+o(x^n),\quad x\to 0.$$

$f(x)$ 在 0 处的 Taylor 展开式通常称为 **Maclaurin 展开式** (Maclaurin expansion). 下面我们来求几个常见初等函数的 Maclaurin 展开式.

**例 5.77** 求指数函数 $f(x)=\mathrm{e}^x$ 的 Maclaurin 展开式.

**解** 由于 $(\mathrm{e}^x)^{(k)}=\mathrm{e}^x$ $(k=1,2,\cdots)$. 因此 $\mathrm{e}^x$ 在 0 处的各阶导数都是 1. 于是可知

$$\mathrm{e}^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+o(x^n),\quad x\to 0.$$ ■

如果要求 $a^x$ 的展开式, 只需先把底数 $a$ 换成 e, 然后套用上例的结论即可:

$$a^x=\mathrm{e}^{x\ln a}=1+x\ln a+\frac{x^2\ln^2 a}{2!}+\cdots+\frac{x^n\ln^n a}{n!}+o(x^n),\quad x\to 0.$$

**例 5.78** 求正弦函数 $f(x)=\sin x$ 的 Maclaurin 展开式.

**解** 由例5.25可知

$$f^{(k)}(x)=\sin\left(x+\frac{k\pi}{2}\right),\quad k=0,1,2,\cdots.$$

因此

$$f^k(0)=\begin{cases}0 & k=0,2,4,\cdots\\ (-1)^{(k-1)/2} & k=1,3,5,\cdots\end{cases}$$

于是可知, 当 $x\to 0$ 时

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots+\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}+o\left(x^{2n+2}\right).$$ ■

**例 5.79** 求余弦函数 $f(x)=\cos x$ 的 Maclaurin 展开式.

**解** 由例5.25可知

$$f^{(k)}(x)=\cos\left(x+\frac{k\pi}{2}\right),\quad k=0,1,2,\cdots.$$

因此

$$f^k(0)=\begin{cases}(-1)^{k/2} & k=0,2,4,\cdots\\ 0 & k=1,3,5,\cdots\end{cases}$$

于是可知, 当 $x\to 0$ 时

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\cdots+\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n}+o\left(x^{2n+1}\right). \quad \blacksquare$$

**例 5.80** 求函数 $f(x)=\ln(1+x)\ (x>-1)$ 的 Maclaurin 展开式.

**解** 由例5.26可知

$$f^{(k)}(x)=(-1)^{k-1}(k-1)!(1+x)^{-k},\quad k=1,2,\cdots.$$

因此 $f^{(k)}(0)=(-1)^{k-1}(k-1)!\ (k=1,2,\cdots)$. 于是可知, 当 $x\to 0$ 时

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots+\frac{(-1)^{n+1}}{n}x^n+o\left(x^n\right). \quad \blacksquare$$

**例 5.81** 求函数 $f(x)=(1+x)^\alpha\ (x>-1)$ 的 Maclaurin 展开式.

**解** 由例5.27可知

$$f^{(k)}(x)=\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)(1+x)^{\alpha-k},\quad k=1,2,\cdots.$$

因此 $f^{(k)}(0)=\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)\ (k=1,2,\cdots)$. 于是可知, 当 $x\to 0$ 时

$$(1+x)^\alpha=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{n!}x^n+o\left(x^n\right). \quad \blacksquare$$

**注** 由以上结论可知, 函数 $1/(1+x)$ 和 $1/(1-x)$ 的 Maclaurin 展开式分别为

$$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-\cdots+(-1)^n x^n+o\left(x^n\right).\quad x>-1.$$
$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\cdots+x^n+o\left(x^n\right),\quad x<1.$$

**注** 令

$$\binom{\alpha}{n}=\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!},\quad n=1,2,\cdots.$$

则 $f(x)=(1+x)^\alpha$ 的 Maclaurin 展开式可以写成

$$(1+x)^\alpha=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\cdots+\binom{\alpha}{n}x^n+o\left(x^n\right).$$

当 $\alpha\in\mathbb{N}$ 时, $f(x)$ 只有 $\alpha$ 阶导数, 因此只能展开到 $x^\alpha$, 此时正好是我们熟悉的二项式定理. 特别地, 我们规定

$$\binom{\alpha}{0}=1.$$

下面看一个难一些的例子.

**例 5.82** 求反正切函数 $f(x)=\arctan x$ 的 Maclaurin 展开式.

**解** 我们有恒等式 $\left(1+x^2\right)f'(x)=1$, 对它两边求 $k$ 阶导, 由 Leibniz 公式可知

$$(1+x)\,f^{(k+1)}(x)+2kxf^{(k)}(x)+k(k-1)f^{(k-1)}(x)=0.$$

令 $x=0$ 得

$$f^{(k+1)}(0)+k(k-1)f^{(k-1)}(0)=0,\quad k=1,2,\cdots.$$

容易计算 $f(0)=0$, $f'(0)=1$. 因此

$$f^{(k)}=\begin{cases}0, & k=2,4,\cdots.\\ (-1)^{(k-1)/2}(k-1)!, & k=1,3,\cdots.\end{cases}$$

于是可知，当 $x \to 0$ 时

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots + \frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1} + o\left(x^{2n+2}\right).$$ ■

注 我们可以直接用 L'Hôspital 法则验证 $\arctan x$ 的 Maclaurin 展开式. 由于

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to 0}\frac{\arctan x - \left[x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots + \frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}\right]}{x^{2n+2}} \\
&= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+x^2} - \left[1 - x^2 + x^4 - \cdots + (-1)^n x^{2n}\right]}{(2n+2)x^{2n+1}} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+x^2} - \left(1-x^2\right)^n}{(2n+2)x^{2n+1}} = 0.
\end{aligned}$$

于是可知

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots + \frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1} + o\left(x^{2n+2}\right).$$

基本初等函数的 Maclaurin 展开式十分重要，需要牢记. 基本初等函数的 Maclaurin 展开式总结如下.

**命题 5.12 (重要的 Maclaurin 展开式)**

当 $x \to 0$ 时.

反比例函数:

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{n} x^k + o\left(x^n\right) = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + o\left(x^n\right), \quad \forall x \in (-infty, 1).$$

幂函数:

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{n}\binom{\alpha}{k}x^k + o\left(x^n\right) = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots + \binom{\alpha}{n}x^n + o\left(x^n\right), \quad \forall x \in (-1, +\infty),\ \alpha \in \mathbb{R}.$$

指数函数:

$$\mathrm{e}^x = \sum_{n=0}^{k}\frac{x^k}{k!} + o\left(x^n\right) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o\left(x^n\right).$$

对数函数:

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k+1}x^k}{k} + o\left(x^n\right) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + \frac{(-1)^{n+1}}{n}x^n + o\left(x^n\right), \quad \forall x \in (-1, +\infty).$$

三角函数:

$$\sin x = \sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}x^{2k+1} + o\left(x^{2n+2}\right) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1} + o\left(x^{2n+2}\right).$$

$$\cos x = \sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{(2k)!}x^{2k} + o\left(x^{2n+1}\right) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n} + o\left(x^{2n+1}\right).$$

反三角函数:

$$\arcsin x = x + \frac{1!!}{3\cdot 2!!}x^3 + \frac{3!!}{5\cdot 4!!}x^5 + \cdots + \frac{(2n-1)!!}{(2n+1)\cdot(2n)!!}x^{2n+1} + o\left(x^{2n+2}\right).$$

$$\arctan x = \sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{2k+1}x^{2k+1} + o\left(x^{2n+2}\right) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots + \frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1} + o\left(x^{2n+2}\right).$$

双曲函数:

$$\sinh x = \sum_{k=0}^{n}\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o\left(x^{2n+2}\right) = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o\left(x^{2n+2}\right).$$

$$\cosh x = \sum_{k=0}^{n}\frac{x^{2k}}{(2k)!} + o\left(x^{2n+1}\right) = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o\left(x^{2n+1}\right).$$

反双曲函数:

$$\operatorname{arctanh} x=\sum_{k=0}^{n}\frac{x^{2k+1}}{2k+1}+o\left(x^{2n+2}\right)=x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\cdots+\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+o\left(x^{2n+2}\right),\quad \forall x\in(-1,1).$$

## 5.5.2 Taylor 公式的简单应用

从以上的讨论可以看出,可以用导数或微分解决的问题一定可以用 Taylor 公式解决,而且一定可以更解决地“更好”.

我们已经知道用 L'Hôspital 法则可以求出绝大多数函数的极限. 但有时计算过程会十分复杂. 用 Taylor 公式可以可以避开使用 L'Hôspital 法则产生的巨大运算. 下面看几个例子.

**例 5.83** 求以下极限:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^x\sin x-x(1+x)}{\sin^3 x}.$$

**解** 用等价无穷小替换后得

$$原式=\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^x\sin x-x(1+x)}{x^3}.$$

解法一 这是一个 0/0 型未定式. 由 L'Hôspital 法则可知

$$原式=\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^x\sin x+\mathrm{e}^x\cos x-1-2x}{3x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^x\cos x-1}{3x}=\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^x\cos x-\mathrm{e}^x\sin x}{3}=\frac{1}{3}.$$

解法二 观察到函数的分母为 $x^3$, 所以考虑用 Taylor 公式把分子中的函数展开到 $x^3$. 由于

$$\mathrm{e}^x\sin x=\left[1+x+\frac{x^2}{2}+o\left(x^2\right)\right]\left[x-\frac{x^3}{3!}+o\left(x^3\right)\right]=x+x^2+\frac{x^3}{3}+o\left(x^3\right),\quad x\to 0.$$

于是

$$\frac{\mathrm{e}^x\sin x-x(1+x)}{x^3}=\frac{x+x^2+\dfrac{x^3}{3}+o\left(x^3\right)-x(1+x)}{x^3}=\frac{1}{3}+o(1),\quad x\to 0.$$

于是可知所求极限为 1/3. ■

**例 5.84** 求以下极限:

$$\lim_{x\to\infty}\left[x-x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right].$$

**解** 当 $x\to\infty$ 时, $1/x\to 0$. 由 Taylor 公式可知

$$\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{x}-\frac{1}{2x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right),\quad x\to\infty.$$

因此

$$x-x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{2}+o\left(1\right),\quad x\to\infty.$$

于是可知所求极限为 1/2. ■

**例 5.85** 求以下极限:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-\arctan x}{\tan x-\sin x}.$$

**解** 先把分母化为多项式:

$$原式\ \lim_{x\to 0}\frac{\sin x-\arctan x}{\sin x(1-\cos x)}\cos x=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-\arctan x}{x(x^2/2)}\lim_{x\to 0}\cos x=2\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-\arctan x}{x^3}.$$

于是只需把分子用 Taylor 公式展开至 $x^3$.

$$\sin x - \arctan x = \left[x - \frac{x^3}{3!} + o\left(o^3\right)\right] - \left[x - \frac{x^3}{3} + o\left(o^3\right)\right] = \frac{x^3}{6} + o\left(o^3\right), \quad x \to 0.$$

于是可知所求极限为 1/3. ■

**注** 事实上, 我们可以等价无穷小替换的方法计算得

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x(1-\cos x)}{x^3 \cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{x^3/2}{x^3 \cos x} = \frac{1}{2}.$$

这表明

$$\tan x - \sin x \sim \frac{x^3}{2}.$$

这也是一个常用的等价无穷小.

**例 5.86** 计算以下极限:

$$\lim_{x\to\infty} \left[\left(x^3 - x^2 + \frac{x}{2}\right) \mathrm{e}^{1/x} - \sqrt{x^6+1}\right].$$

**解** 当 $x \to \infty$ 时, $1/x \to 0$, 由 Taylor 公式可知

$$\begin{aligned}
&\left(x^3 - x^2 + \frac{x}{2}\right) \mathrm{e}^{1/x} - \sqrt{x^6+1} = \left(x^3 - x^2 + \frac{x}{2}\right) \mathrm{e}^{1/x} - x^3\sqrt{1+\frac{1}{x^6}} \\
&= \left(x^3 - x^2 + \frac{x}{2}\right)\left[1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{6x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right)\right] - x^3\left[1 + \frac{1}{2x^6} - \frac{1}{8x^{12}} + o\left(\frac{1}{x^{12}}\right)\right] \\
&= x^3 + x^2 + \frac{x}{2} + \frac{1}{6} - x^2 - x - \frac{1}{2} + \frac{x}{2} + \frac{1}{2} - x^3 + o(1) = \frac{1}{6} + o(1).
\end{aligned}$$

于是可知所求的极限为 1/6. ■

我们前面已经介绍了一些重要的等价无穷小. 从 Taylor 公式的角度, 很容易得到一大批等价无穷小. 例如根据正弦函数 $\sin x$ 的 Maclaurin 展开式可知

$$\sin x = x + o(x)\ (x \to 0) \iff \lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x}{x} = 0 \iff \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \iff \sin x \sim x\ (x \to 0).$$

如果把 $\sin x$ 展开式到 $x^3$, 则可以得到

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o\left(x^4\right)\ (x \to 0) \iff \lim_{x\to 0} \frac{x - \sin x - x^3/6}{x^3/6} = 0 \iff x - \sin x \sim \frac{x^3}{6}\ (x \to 0).$$

按此方法我们还可以得到

$$\sin x - x + \frac{x^3}{6} \sim \frac{x^5}{120}, \quad x \to 0.$$

只要愿意, 你可以一直这样做下去. 在此, 我们不再一一演算, 而是直接把重要的等价无穷小总结如下.

**命题 5.13 (重要的等价无穷小)**

当 $x \to 0$ 时

$$(1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x, \quad (1+\beta x)^\alpha - 1 \sim \alpha\beta x.$$

$$\mathrm{e}^x - 1 \sim x, \quad a^x - 1 \sim x \ln a.$$

$$\ln(1+x) \sim x, \quad \log_a(1+x) \sim \frac{x}{\ln a}.$$

$$\sin x \sim x, \quad x - \sin x \sim \frac{x^3}{6}, \quad 1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}, \quad \tan x \sim x, \quad \tan x - x \sim \frac{x^3}{3}, \quad \tan x - \sin x \sim \frac{x^3}{2}.$$

$$\arcsin x \sim x, \quad \arctan x \sim x, \quad \arcsin x - x \sim \frac{x^3}{6}, \quad x - \arctan x \sim \frac{x^3}{3}.$$

$$\sinh x \sim x, \quad \sinh x - x \sim \frac{x^3}{6}, \quad \cosh x - 1 \sim \frac{x^2}{2}.$$

$$\operatorname{arctanh} x \sim x, \quad \operatorname{arctanh} x - x \sim \frac{x^3}{3}.$$

我们已经讨论过用导数研究函数的极值. 用 Taylor 公式可以得到更加令人满意的结果.

**定理 5.18**

设函数 $f(x)$ 在 $x_0$ 处 $k$ 阶可导. 且

$$f'(x_0) = f''(x_0) = \cdots = f^{(k-1)}(x_0) = 0, \quad f^{(k)(x_0)} \neq 0.$$

(1) 当 $k$ 为奇数时, $x_0$ 不是 $f$ 的极值点.

(2) 当 $k$ 为偶数时, 若 $f^{(k)}(x_0) > 0$, 则 $x_0$ 是 $f$ 的严格极小值点; 若 $f^{(k)}(x_0) < 0$, 则 $x_0$ 是 $f$ 的严格极大值点;

**证明**

### 5.5.3 对 Taylor 公式余项的定量研究

上一节我们介绍了带 Peano 余项的 Taylor 公式. 它研究的是函数在给定的一点 $x_0$ 附近的局部性质. 由于求极限和求极值都只需要知道 $x_0$ 附近的局部信息, 因此带 Peano 余项的 Taylor 公式已经够用.

带 Peano 余项的 Taylor 公式实际上是无穷小增量公式的一般化. 我们在研究完无穷小增量公式后, 进一步研究了有限增量公式, 即 Lagrange 中值定理. 它揭示了函数在一个区间上的整体性质. 很自然地, 我们希望按这种思路在一个有限区间上研究 Taylor 公式. 为此, 我们先来回顾一下有限增量公式. 设函数 $f(x)$ 在开区间 $(a,b)$ 上可导, 对于任意两点 $x, x_0$ 都有

$$f(x) = f(x_0) + f'(\xi)(x - x_0).$$

如果把以上等式看作 $f(x)$ 的 0 次 Taylor 展开式, 则 $f'(\xi)(x-x_0)$ 是这个展开式的余项. 相比于 Peano 余项, $f'(\xi)(x-x_0)$ 是一个 "定量的" 余项, 虽然我们并不知道 $\xi$ 的具体取值. 以上事实可以总结为: 如果 $f(x)$ 在 $(a,b)$ 上 1 阶可导, 则可以得到 $f(x)$ 的一个带 "定量余项" 的 0 次 Taylor 展开式. 于是我们猜测: 如果 $f(x)$ 在 $(a,b)$ 上 $n+1$ 阶可导, 则可以得到 $f(x)$ 的一个带 "定量余项" 的 $n$ 次 Taylor 展开式.

**定理 5.19 (带 Schlömilch 余项的 Taylor 公式)**

设函数 $f(x)$ 在区间 $(a,b)$ 上 $n+1$ 阶可导, 则对于任意 $x_0, x \in (a,b)$ $(x_0 < x)$ 都存在 $\xi \in (x_0, x)$, 使得

$$f(x) = T_n(f, x_0; x) + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!p}(x-\xi)^{n-p+1}(x-x_0)^p, \quad p = 1, 2, \cdots, n+1.$$

**证明** 令 $F(t) = T_n(f, t; x)$. 对 $F(t)$ 求导

$$F'(t) = f'(t) + \sum_{k=1}^{n}\left[\frac{f^{(k+1)}(t)}{k!}(x-t)^k - \frac{f^{(k)}(t)}{(k-1)!}(x-t)^{k-1}\right] = f'(t) + \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n - f'(t) = \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n.$$

令函数

$$g(t) = \frac{F(x) - F(x_0)}{(x-x_0)^p}(x-t)^p + F(t) - F(x).$$

其中 $p \in \mathbb{N}^*$. 则 $g(t)$ 在闭区间 $[x_0, x]$ 上连续, 在开区间 $(x_0, x)$ 上可导. 且 $g(x_0) = g(x) = 0$. 由 Rolle 中值定理可知存在 $\xi \in (x_0, x)$ 使得

$$0 = g'(\xi) = -\frac{F(x) - F(x_0)}{(x-x_0)^p}p(x-\xi)^{p-1} + F'(\xi) = -\frac{f(x) - T_n(f, x_0; x)}{(x-x_0)^p}p(x-\xi)^{p-1} + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(x-\xi)^n.$$

于是可知

$$f(x) = T_n(f, x_0; x) + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!p}(x-\xi)^{n-p+1}(x-x_0)^p.$$

**注** 德国数学家 Schlömilch 于 1923 年提出了这种余项.

**注** 以上定理的证明方法和 Lagrange 定理完全相同. 事实上, 当 $n=0$ 时, $p=1$, 则

$$f(x)=T_n(f,x_0;x)+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{0!}(x-\xi)^0(x-x_0)=f(x_0)+f'(\xi)(x-x_0).$$

因此 Lagrange 中值定理是带 Schlömilch 余项的 Taylor 公式在 $n=0$ 时的特例.

以上定理中的 $p$ 可以取 1 到 $n+1$ 之间的一切自然数, Schlömilch 余项实质上是一个 “模板”, 可以产生 $n+1$ 种余项. 容易看出当 $p$ 取 1 或 $n+1$ 时最方便.

**定理 5.20 (带 Cauchy 余项的 Taylor 公式)**

设函数 $f(x)$ 在区间 $(a,b)$ 上 $n+1$ 阶可导, 则对于任意 $x_0,x\in(a,b)$ $(x_0<x)$ 都存在 $\xi\in(x_0,x)$, 使得

$$f(x)=T_n(f,x_0;x)+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(x-\xi)^n(x-x_0).$$

**证明** 令 Schlömilch 余项的 $p=1$ 即得.

**定理 5.21 (带 Langrane 余项的 Taylor 公式)**

设函数 $f(x)$ 在区间 $(a,b)$ 上 $n+1$ 阶可导, 则对于任意 $x_0,x\in(a,b)$ $(x_0<x)$ 都存在 $\xi\in(x_0,x)$, 使得

$$f(x)=T_n(f,x_0;x)+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}.$$

**证明** 令 Schlömilch 余项的 $p=n+1$ 即得.

**注** 一个函数在 $x_0$ 的 $n$ 阶 Taylor 展开式的 Cauchy 余项和 Lagrange 余项中的 $\xi$ 通常是不一样的.

从形式上看 Lagrange 余项比较容易记忆. 但有时候使用 Cauchy 余项更方便.

下面我们看一下五种基本初等函数的 Cauchy 余项和 Lagrange 余项.

**例 5.87** 求指数函数 $\mathrm{e}^x$ 的带 Cauchy 余项和 Lagrange 余项的 Maclaurin 展开式.

**解** 带 Cauchy 余项的 $n$ 阶 Maclaurin 展开式为

$$\mathrm{e}^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\frac{\mathrm{e}^\xi}{n!}(x-\xi)^n x.$$

带 Lagrange 余项的 $n$ 阶 Maclaurin 展开式为

$$\mathrm{e}^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\frac{\mathrm{e}^\eta}{(n+1)!}x^{n+1}.$$

由于 $\eta\in(0,x)$, 令 $\theta=\eta/x$, 则

$$\mathrm{e}^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\frac{\mathrm{e}^{\theta x}}{(n+1)!}x^{n+1}.$$

其中 $\theta\in(0,1)$. ■

**例 5.88** 求正弦函数 $f(x)=\sin x$ 的带 Cauchy 余项和 Lagrange 余项的 Maclaurin 展开式.

**解** 由于

$$f^{(2n+1)}(x)=\sin\left(x+\frac{2n+1}{2}\pi\right)=(-1)^n\cos x.$$

于是可知, 带 Cauchy 余项和带 Lagrange 余项的 Maclaurin 展开式分别为

$$\sin x=x-\frac{x^3}{2!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+\frac{(-1)^n\cos\xi}{(2n)!}(x-\xi)^{2n}x.$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \frac{(-1)^n \cos\eta}{(2n+1)!}x^{2n+1}. \qquad \blacksquare$$

**例 5.89** 求余弦函数 $f(x) = \cos x$ 的带 Cauchy 余项和 Lagrange 余项的 Maclaurin 展开式.

**解** 由于

$$f^{(2n+2)}(x) = \cos\left(x + \frac{2n+2}{2}\pi\right) = (-1)^{n+1}\cos x.$$

于是可知, 带 Cauchy 余项和带 Lagrange 余项的 Maclaurin 展开式分别为

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} + \frac{(-1)^{n+1}\cos\xi}{(2n+1)!}(x-\xi)^{2n+1}x.$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} + \frac{(-1)^{n+1}\cos\eta}{(2n+2)!}x^{2n+2}. \qquad \blacksquare$$

**例 5.90** 求函数 $f(x) = \ln(1+x)$ $(x > -1)$ 的带 Cauchy 余项和 Lagrange 余项的 Maclaurin 展开式.

**解** 由于

$$f^{(n+1)}(x) = \frac{(-1)^n n!}{(1+x)^{n+1}}.$$

于是可知, 带 Cauchy 余项和带 Lagrange 余项的 Maclaurin 展开式分别为

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \frac{(-1)^n}{(1+\xi)^{n+1}}(x-\xi)x.$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \frac{(-1)^n}{(1+\eta)^{n+1}(n+1)}x^{n+1}. \qquad \blacksquare$$

**例 5.91** 求函数 $(1+x)^\alpha$ $(x > -1)$ 的带 Cauchy 余项和 Lagrange 余项的 Maclaurin 展开式.

**解** 由于

$$f^{(n+1)}(x) = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)(1+x)^{\alpha-n-1}.$$

于是可知, 带 Cauchy 余项和带 Lagrange 余项的 Maclaurin 展开式分别为

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)(1+\xi)^{\alpha-n-1}}{n!}(x-\xi)^n x.$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)(1+\eta)^{\alpha-n-1}}{(n+1)!}x^{n+1}. \qquad \blacksquare$$

利用 Lagrange 余项或 Cauchy 余项的 Taylor 公式可以证明带有导数的不等式.

**例 5.92** 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上二阶可导. 若

$$|f(0)| \le 1, \quad |f(1)| \le 1, \quad |f''(x)| \le 2, \quad 0 \le x \le 1.$$

则对于任一 $x \in [0,1]$ 都有 $|f'(x)| \le 3$.

**证明** 由带 Lagrange 余项的 Taylor 公式可知, 存在 $\xi \in (x,1), \eta \in (0,x)$ 使得

$$f(x) = f(1) + f'(x)(x-1) + \frac{1}{2}f''(\xi)(x-1)^2.$$

$$f(x) = f(0) + f'(x)x + \frac{1}{2}f''(\eta)x^2.$$

两式相减得

$$0 = f(1) - f(0) - f'(x) + \frac{1}{2}f''(\xi)(x-1)^2 - \frac{1}{2}f''(\eta)x^2.$$

于是对于任一 $x\in[0,1]$ 都有

$$
\begin{aligned}
|f'(x)| &= \left|f(1)-f(0)+\frac{1}{2}f''(\xi)(x-1)^2-\frac{1}{2}f''(\eta)x^2\right| \\
&\le |f(1)|-|f(0)|+\frac{1}{2}|f''(\xi)|(x-1)^2-\frac{1}{2}|f''(\eta)|x^2 \le 1+1+(1-x)^2+x^2 \le 3.
\end{aligned}
$$

■

**例 5.93** 设函数

$$
f(x)=\begin{cases} e^{-1/x^2}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}.
$$

求出它的 Maclaurin 展开式.

**解**

综上可知 $f^{(n)}(0)=0\ (n=1,2,\cdots)$. 因此它的 Maclaurin 展开式恒为零.

**注** 上例中 $f(x)$ 的余项恒为 $f(x)$ 本身. 因此提高 Taylor 多项式的次数未必可以提高逼近程度.

### 5.5.4 误差估计

用带定量余项的 Taylor 公式可以研究用多项式逼近函数时的误差.

**定理 5.22 (线性插值定理)**

设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 在 $(a,b)$ 上有二阶导数. $l(x)$ 是由 $(a,f(a)),(b,f(b))$ 确定的一次函数. 若 $|f''(x)|$ 在 $(a,b)$ 上的上界为 $M$, 则对于任一 $x\in[a,b]$ 都有

$$
|f(x)-l(x)|\le \frac{M}{8}(b-a)^2.
$$

♡

**证明**

**例 5.94** 求 $2^{1/5}$ 的近似值, 并估计误差.

**解**

**例 5.95** 在 $[0,\pi]$ 上用以下 9 次多项式来逼近 $\sin x$

$$
x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\frac{x^9}{9!}.
$$

求这种逼近的一个误差界.

**解** 由带 Lagrange 余项的 Taylor 公式可知

$$
|R_{10}(x)|=\left|\frac{\cos\xi}{11!}x^{11}\right|\le\left|\frac{\pi^{11}}{11!}\right|=0.0073704\cdots.
$$

于是可知用以上 9 次多项式逼近 $\sin x$ 的误差不超过 $8/1000$. ■

我们发现一元微分学中的问题使用 Taylor 公式几乎都可以解决, 因此 Taylor 公式可谓 “一元微分学的顶峰”.

### 5.5.5 Lagrange 插值公式

### 5.5.6 多项式的 Bernstein 表示

# 第 6 章 Riemann 积分

**内容提要**

- 为了定义平面图形的面积, 我们从矩形的面积和面积的三条公理出发引出了 Riemann 积分的概念.
- 按定义直接计算 Riemann 积分是极其不方便的. Newton-Leibniz 公式给我们提供了一个计算 Riemann 积分的途径. 并深刻揭示了微分和积分之间的内在联系.
- 最后我们需要研究函数 Riemann 可积的条件.

## 6.1 Riemann 积分的概念

### 6.1.1 平面图形的面积

长度、面积和体积的概念是我们熟悉的. 我们早已 ''掌握'' 了多边形、圆的面积计算方法以及棱柱、棱锥、圆柱、圆锥和球的体积计算方法. 但事实, 上我们从未严格定义过长度、面积和体积. 下面我们就要尝试定义这几个概念 (但我们重点要讨论的是面积).

我们可以把 ''长度'' 看作是 1 维实空间 $\mathbb{R}$(即实数轴) 的一个子集族 $X$(我们不敢保证每个 $\mathbb{R}$ 的子集都有 ''长度'') 到实数域 $\mathbb{R}$ 的一个映射 $M$. 我们首先规定

$$M([a,b]) := b-a.$$

其中 $a \le b$. 这表明任何闭区间 $[a,b]$ 的长度为 $b-a$. 并蕴含了数轴上任意一点的长度为零. 然后我们可以列出几条公理 (姑且称它们为公理): 对于任意 $A, B \in X$ 都满足

1° 非负性: $M(A) \ge 0$.

2° 单调性: 若 $A$ 和 $B$ 平移后得到 $A'$ 和 $B'$ 满足 $A' \subseteq B'$, 则 $M(A) \le M(B)$. 特别地, 若 $A \cong B$, 则 $M(A) = M(B)$.

3° 可加性: 若 $A \cap B = \varnothing$, 则 $M(A \cup B) = M(A) + M(B)$.

由于任意一点的长度都是零, 由可加性公理可知开区间 $(a,b)$ 的长度也是 $b-a$. 半开半闭区间的情况也一样. 为了让整个实数轴也有长度, 我们规定 $M$ 可以取到 $+\infty$.

类似地, 我们可以把 ''面积'' 看作是 2 维实空间 $\mathbb{R}^2$(即实平面) 的一个子集族 $X$ 到实数域 $\mathbb{R}$ 的一个映射 $M$. 我们首先规定一个邻边长分别为 $a$ 和 $b$ 的矩形 $A$ 的面积为 $a \cdot b$ $a, b \ge 0$. 这蕴含了线段的面积为零. 以上的三条公理可以 ''原封不动'' 地拿来刻画面积. 类似地, 我们可以 ''体积'' 看作是 3 维实空间 $\mathbb{R}^3$ 的一个子集族到实数域 $\mathbb{R}$ 的一个映射.

依次下去, 我们还可以把长度、面积和体积的概念推广到 $n$ 维 Euclid 空间 $\mathbb{R}^n$ 中. 事实上物理中的**功** (work)、**位移** (displacement)、**冲量** (impulse) 都满足以上三条公理, 我们可以考虑用一个统一的概念来描述它们. 今后我们会专门研究这个主题.

借助上面的公理和规定我们可以定义三角形的面积. 如图6.1, 设三角形 $ABC$ 的底 $|BC| = a$. 过 $A$ 作 $BC$ 的垂线, 垂足为 $A'$. 设高 $|AA'| = h$. 过点 $A$ 作 $BC$ 的平行线, 然后分别过 $B, C$ 作该平行线的垂线, 垂足分别为 $B', C'$. 这样我们就得到了一个长和宽分别为 $a$ 和 $h$ 的矩形 $BCC'B'$, 它的面积为 $ah$. 现在 $BCC'B'$ 已经被分为了两两不相交的四个三角形: $\triangle BB'A, \triangle AA'B, \triangle AA'C, \triangle CC'A$. 令它们的面积分别为 $S_1, S_2, S_3, S_4$.(由于线段的面积为零, 因此可以把两个相邻三角形的公共边不会影响这两个三角形的面积, 可以不必理会.) 由可加性公理可知

$$S_1 + S_2 + S_3 + S_4 = ah.$$

容易知道 $\triangle BB'A \cong \triangle AA'B, \triangle AA'C \cong \triangle CC'A$, 由单调性公理可知 $S_1 = S_3, S_2 = S_4$.

$$2S_1 + 2S_2 = ah \iff S_1 + S_2 = \frac{1}{2}ah.$$

于是可加性公理可知

$$S_{\triangle ABC} = S_1 + S_2 = \frac{1}{2}ah.$$

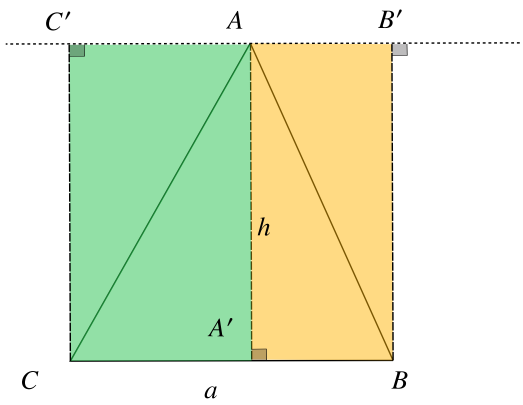



**图 6.1:** 三角形的面积.

### 6.1.2 Riemann 积分的定义

基于以上讨论, 定义多边形的面积不会遇到困难, 因为任意多边形总是可以划分成有限个三角形. 真正的难点在于如何定义 ‘‘曲边图形’’ 的面积. 下面我们来尝试解决这个问题.

如图6.2所示, 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上非负, 它的图像与 $x$ 轴以及直线 $x=a, x=b$ 围成了一个位于第一象限的 ‘‘曲边梯形’’. 我们来尝试定义这个曲边梯形的面积.

首先, 我们想到用一系列很小的矩形来近似它的面积. 为此我们可以把 $[a,b]$ 区间分割成 $n$ 个小区间 $[x_{i-1}, x_i]$, 它们的长度是 $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$, 其中 $x_0 = a, x_n = b$. 这样我就得到了区间 $[a,b]$ 的一个分割, 我们把这个分割记作 $\pi$.

然后作直线 $x = x_i$ $(i = 0, 1, 2, \cdots, n)$. 在 $[x_i - 1, x_i]$ 中任取一点 $\xi_i$. 于是我们得到了 $n$ 个小矩形, 它们的长和宽分别为 $f(\xi_i)$ 和 $\Delta x_i$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$. 这些小矩形两两不相交 (不考虑邻接边界). 由可加性公理可知, 它们组成的图形的面积为

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i.$$

我们可以用 $S_n$ 作为曲边梯形面积的近似值. 我们把 $S_n$ 称为 **Riemann 和** (Riemann sum).

容易想到, 区间 $[0,1]$ 的分割越 ‘‘细’’, 小矩形组成的图形就越接近曲边梯形. 要让分割更 ‘‘细’’, 只需让 $\Delta x_i$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$ 中最大的那个变小. 于是我们令

$$|\pi| := \max_{1\le i\le n} \{\Delta x_i\}.$$

我们把 $|\pi|$ 称为分割 $\pi$ 的宽度. 于是我们只需让 $|\pi|$ 变小就可以让小矩形组成的图形更接近曲边梯形. 很自然地想到, 当 $|\pi| \to 0$ 时 Riemann 和的极限可以用来定义该曲边梯形的面积. 为了做成这件事, 我们需要把可加性公理放宽为 ‘‘可数可加性’’: 若 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 两两不相交, 则

$$M\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} M(A_i).$$

但我们不能把可加性放宽到 ‘‘任意可加性’’, 不然就会出现不符合直觉的情况.(因为点的长度为零, 而线段是由任意多的点组成的, 但线段的长度不为零.)

有了以上的准备工作, 我们可以定义曲边梯形的面积

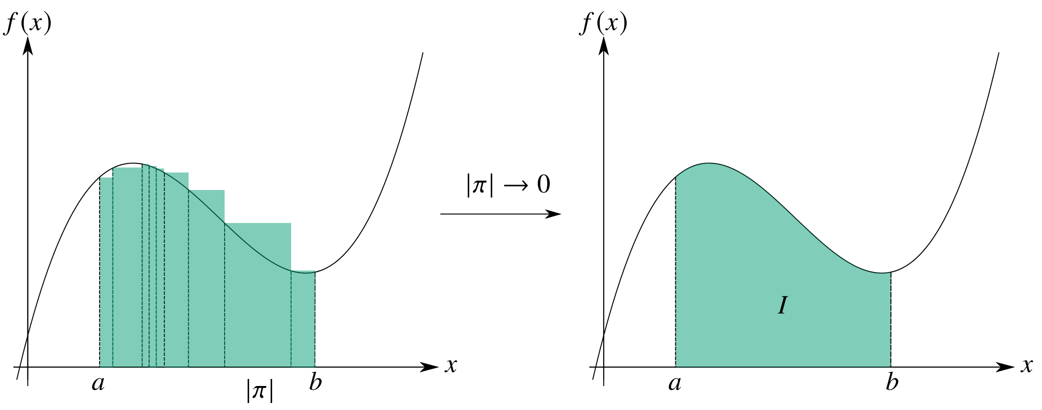



图 6.2: 从 "Riemann 和'' 到 "Riemann 积分".

**定义 6.1 (Riemann 积分)**

设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上有定义. 对闭区间 $[a,b]$ 作分割

$$\pi : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b.$$

若存在 $I \in \mathbb{R}$ 使得对任一 $\varepsilon > 0$ 都存在 $\delta > 0$ 只要当 $|\pi| < \delta$ 时都有

$$\left| \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i - I \right| < \varepsilon.$$

即

$$\lim_{|\pi| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = I.$$

则称 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上 **Riemann** 可积 (Riemann integrable), $I$ 称为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的 **Riemann** 积分 (Riemann integral). 记作

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

其中 $\int$ 称为积分号, $f(x)$ 称为**被积函数** (integrand), $f(x)\,\mathrm{d}x$ 称为**被积表达式** (integrand expression). $a$ 和 $b$ 分别称为**积分下限** (lower limit of integration) 和**积分上限** (upper limit of integration). ♣

注 相对于不定积分, Riemann 积分也称为**定积分** (definite integral). 朴素的定积分概念在 Newton 时代已经存在, 但第一个严格的定义是德国数学家 Bernhard Riemann 在 1868 年发表的 (实际上 1854 年就已经提出). 为 Riemann 积分的定义借鉴了极限的 $\varepsilon - \delta$ 语言.

注 Riemann 积分的定义中, 与 $\xi_i$ 可以在 $[x_{i-1}, x_i]$ 中任意选取.

注 积分的意义是 ''求和"(summation), 因此用拉长的 $s$ 表示积分符号.

下面我们来看一下 Riemann 积分定义的面积是否和我们已有的矩形、三角形面积定义一致.

**例 6.1** 计算 Riemann 积分: $\int_a^b c\,\mathrm{d}x$.

**解** 先计算 $\int_a^b 1\,\mathrm{d}x$. 令 $f(x) = 1\ (a \le x \le b)$. 对区间 $[a,b]$ 作分割:

$$\pi : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b.$$

由于 $f(\xi_i) = 1\ (i = 1, 2, \cdots)$, 于是

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1}) = x_n - x_0 = b - a.$$

由 Riemann 积分的定义可知

$$\int_a^b 1\,\mathrm{d}x = \lim_{|\pi|\to 0}\sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i = b-a.$$

于是可知

$$\int_a^b c\,\mathrm{d}x = c\int_a^b 1\,\mathrm{d}x = c(b-a).$$

**例 6.2** 计算 Riemann 积分: $\int_a^b cx\,\mathrm{d}x$.

**解** 先计算 $\int_a^b x\,\mathrm{d}x$. 对区间 $[a,b]$ 作分割:

$$\pi : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b.$$

对 $\pi$ 作 Riemann 和 $\sum_{i=1}^n \xi_i\Delta x_i$. 由于 $\xi_i$ $(i=1,2,\cdots)$ 是随意选取的, 因此我们考虑先选取小区间的中点 $\eta_i = (x_{i-1}+x_i)/2$. 计算得

$$\sum_{i=1}^n \eta_i\Delta x_i = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^n (x_{i-1}+x_i)(x_i-x_{i-1}) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^n (x_i^2-x_{i-1}^2) = \frac{1}{2}\left(b^2-a^2\right).$$

于是

$$\sum_{i=1}^n \xi_i\Delta x_i = \sum_{i=1}^n \eta_i\Delta x_i + \sum_{i=1}^n (\xi_i-\eta_i)\Delta x_i = \frac{1}{2}\left(b^2-a^2\right) + \sum_{i=1}^n (\xi_i-\eta_i)\Delta x_i.$$

由于 $|\xi_i-\eta_i| < \Delta x_i \le |\pi|$ $(i=1,2,\cdots)$, 故

$$\left|\sum_{i=1}^n \xi_i\Delta x_i - \frac{1}{2}\left(b^2-a^2\right)\right| = \left|\sum_{i=1}^n (\xi_i-\eta_i)\Delta x_i\right| \le \sum_{i=1}^n |\xi_i-\eta_i|\Delta x_i < |\pi|\sum_{i=1}^n \Delta x_i = |\pi|(b-a).$$

于是可知, 对于任一 $\varepsilon > 0$, 取 $\delta = \varepsilon/(b-a)$, 当 $|\pi| < \delta$ 时无论 $\xi_i$ 如何选择, 都有

$$\left|\sum_{i=1}^n \xi_i\Delta x_i - \frac{1}{2}\left(b^2-a^2\right)\right| < |\pi|(b-a) < \delta(b-a) = \varepsilon.$$

由 Riemann 积分的定义可知

$$\int_a^b x\,\mathrm{d}x = \frac{b^2-a^2}{2}.$$

由 Riemann 积分的线性可知

$$\int_a^b x\,\mathrm{d}x = c\int_a^b x\,\mathrm{d}x = \frac{c\left(b^2-a^2\right)}{2}.$$ ■

以上两个例子的计算结果表明 Riemann 积分定义的面积和我们已有的矩形、三角形 (梯形) 面积定义一致.

### 6.1.3 Riemann 可积函数的性质

由 Riemann 积分定义立刻可知以下简单性质.

**命题 6.1 (Riemann 积分的简单性质)**

设函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上 Riemann 可积.

(1) 非负性 (保号性): 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上非负, 则

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \ge 0.$$

(2) 单调性 (保序性): 若 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上满足 $f(x)\ge g(x)$, 则

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \ge \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

(3) 可加性: 若 $c \in (a,b)$, 且 $f(x)$ 在 $[a,c]$ 和 $[c,b]$ 上都可积, 则

$$\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\,\mathrm{d}x.$$

(4) 线性:

$$\int_a^b [f(x)+g(x)]\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x,$$
$$\int_a^b \lambda f(x)\,\mathrm{d}x = \lambda \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

**证明** 证明略.

**注** 由下一节的推论 (6.7) 可知, 若函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上 Riemann 可积, 则它在 $[a,c]$ 和 $[c,b]$ 上都可积. 因此性质 (3) 中的条件是可以去掉的.

**注** 由性质 (3) 可见, Riemann 积分也是一个线性算子.

为了方便问题的讨论, 我们规定

$$\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0.$$

下面我们可以定义积分上限小于积分下限的 Riemann 积分. 我们希望定义的积分继续满足可加性, 即

$$0 = \int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x.$$

于是我们可以规定当 $a < b$ 时

$$\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x := -\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

由上面的性质可知, Riemann 积分满足非负性、单调性和可加性, 这说明我们定义的 Riemann 积分是合理的. 于是古典几何中的平面图形面积几乎都可以得到定义. 从这个角度讲 Riemann 积分已经足够好. 但 Riemann 积分在更一般的情况下它会出现一些明显的缺陷. 届时我们将给出 "更好" 的积分定义. 因此我们在说 "可积" 时一般要说明是 Riemann 可积.

在非负性的基础上, 我们可以进一步给出 Riemann 不为零的条件.

**命题 6.2 (Riemann 积分的正定性)**

设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续且非负, 且 $f(x)$ 不恒等于零. 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上 Riemann 可积, 则

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x > 0.$$

**证明** 由于 $f(x)$ 非负且不恒等于零, 故存在 $x_0 \in [a,b]$ 满足 $f(x_0) > 0$. 由于函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 故存在 $[a_1,b_1]$ 满足 $x_0 \in [a_1,b_1] \subseteq [a,b]$ 且对于一切 $x \in [a_1,b_1]$ 都有

$$f(x) \geq \frac{1}{2} f(x_0).$$

由于 $f(x)$ Riemann 可积, 由 Riemann 积分的单调性可知

$$\int_{a_1}^{b_1} f(x)\,\mathrm{d}x \geq \int_{a_1}^{b_1} \frac{1}{2} f(x_0)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2} f(x_0)(b_1 - a_1) > 0.$$

由 Riemann 积分的可加性和单调性可知

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^{a_1} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{a_1}^{b_1} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{b_1}^b f(x)\,\mathrm{d}x \geq \int_{a_1}^{b_1} f(x)\,\mathrm{d}x > 0. \qquad \blacksquare$$

**注** 由下一节的定理 (6.5) 可知 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 则一定在 $[a,b]$ 上 Riemann 可积.

以上命题的逆否命题可以写成一条推论.

**推论 6.1**

设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续且非负. 若

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = 0.$$

则 $f(x)=0$ $(\forall x\in[a,b])$.

**证明** 证明略.

**注** 由以上推论立刻可知: 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续

$$\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x = 0.$$

则 $f(x)=0$ $(\forall x\in[a,b])$.

**命题 6.3**

设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上 Riemann 可积, 且 $|f(x)|$ 也在 $[a,b]$ 上 Riemann 可积. 则

$$\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| = \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x.$$

**证明** 由于 $-|f(x)|\le f(x)\le |f(x)|$, 由 Riemann 积分的单调性可知

$$-\int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x \le \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \le \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x \iff \left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| = \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x. \qquad\blacksquare$$

**注** 由下一节的推论 (6.4) 可知, 若函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上 Riemann 可积, 则 $|f(x)|$ 也在 $[a,b]$ 上 Riemann 可积.

函数的 Riemann 积分是线性的, 因此对于函数加法的积分是很容易处理的. 但函数乘积的 Riemann 积分就比较麻烦 (这和导数的情况类似). 下面的定理可以帮助我们把函数乘积的积分转化为单个函数的积分.

**定理 6.1 (Riemann 积分的中值定理)**

设函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 且 $g(x)$ 不改变符号. 若 $f(x)g(x)$ 和 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上都 Riemann 可积, 则存在 $\xi\in[a,b]$ 使得

$$\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = f(\xi)\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

**证明** 当 $g=\mathbf{0}$ 时定理显然成立, 下设 $g\ne\mathbf{0}$. 由于 $g(x)$ 不改变符号, 不妨设 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上非负. 由 Riemann 积分的正定性可知 $\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x>0$. 由于 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 因此可设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的最大值和最小值分别为 $M$ 和 $m$. 于是当 $x\in[a,b]$ 时

$$m\le f(x)\le M \iff mg(x)\le f(x)g(x)\le Mg(x).$$

由 Riemann 积分的单调性可知

$$m\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x \le \int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x \le M\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x \iff m\le \frac{\displaystyle\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x}{\displaystyle\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x}\le M.$$

由介值定理可知存在 $\xi\in[a,b]$ 使得

$$\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = f(\xi)\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x. \qquad\blacksquare$$

**注** 由下一节的定理 (6.5) 可知 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 则一定在 $[a,b]$ 上 Riemann 可积. 再由下一节的推论 (6.5) 可知 $f(x)g(x)$ 也在 $[a,b]$ 上 Riemann 可积.

令以上定理中的 $g(x)=1$ 就可以得到以下推论.

**推论 6.2**

设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续. 则存在 $\xi \in [a,b]$ 使得

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = f(\xi)(b-a).$$

**证明** 证明略.

**注** 以上推论有很明确的几何意义. 不妨设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上非负. 如图6.3所示, 一定存在存在 $\xi \in [a,b]$ 使得 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ 定义的曲边梯形面积可以转化为一个边长为 $f(\xi)$ 和 $b-a$ 的矩形面积. 且这个矩形与曲线 $y=f(x)$ 至少有一个交点.

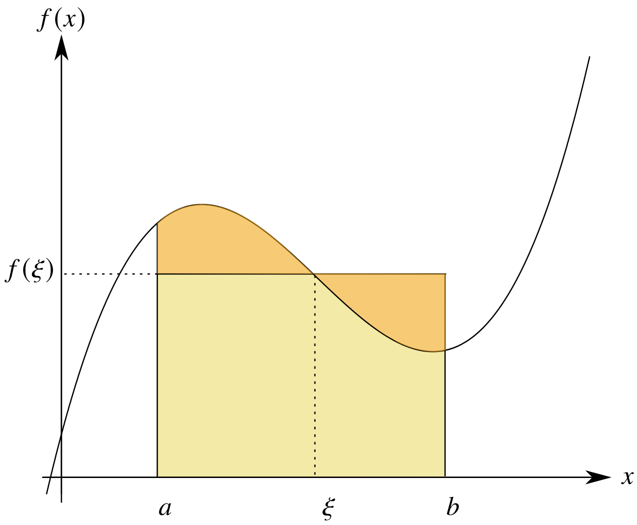



图 6.3: 积分中值定理示意图.

# 6.2 Riemann 可积的条件

## 6.2.1 Riemann 可积的必要条件

定义了 Riemann 积分后, 首先面临的问题就是哪些函数是 Riemann 可积的?

**命题 6.4 (Riemann 可积的必要条件)**

设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上 Riemann 可积, 则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界.

**证明** 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上的 Riemann 积分为 $I$, 由 Riemann 积分的定义可知, 对于 $\varepsilon = 1$, 存在一个分割 $\pi : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$, 使得

$$\left|\sum_{i=1}^{n} f(\xi)\Delta x_i - I\right| < 1,$$

其中 $\xi_i$ 是 $[x_{i-1}, x_i]$ 上的任意一点 $(i = 1, 2, \cdots, n)$. 由三角不等式可知

$$\left|\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i\right| - |I| \le \left|\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i - I\right| < 1 \Longrightarrow \left|\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i\right| < |I| + 1.$$

把 Riemann 和的第一项单独写出来, 则有

$$\begin{aligned} &|f(\xi_1)\Delta x_1| - \left|\sum_{i=2}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i\right| \le \left|f(\xi_1)\Delta x_1 + \sum_{i=2}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i\right| < |I| + 1 \\ \Longrightarrow\ &|f(\xi_1)|\Delta x_1 < \left|\sum_{i=2}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i\right| + |I| + 1 \iff |f(\xi_1)| < \frac{1}{\Delta x_1}\left(\left|\sum_{i=2}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i\right| + |I| + 1\right). \end{aligned}$$

取定 $\xi_2, \xi_2, \cdots, \xi_n$, 则上式右侧是一个固定的实数. 由于 $\xi_1$ 是 $[x_0, x_1]$ 上的任意一点, 这表明 $f(x)$ 在 $[x_0, x_1]$ 上是有界的.

同理可证 $f(x)$ 在其余的子区间 $[x_{i-1}, x_i]$ $(i = 2, 3, \cdots, n)$ 上都有界. 于是可知 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界. ■

利用以上必要条件, 可以立刻判断某些函数不可积.

**例 6.3** 设函数 $f(x) = 1/\sqrt{x}$. 则 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上不可积.

**证明** 对于任一 $M > 0$, 取 $\delta = 1/M^2$, 则当 $x \in (0, \delta)$ 时 $f(x) > M$. 因此 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上无界. 由 Riemann 可积的必要条件可知 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上不可积.

以上这个例子很重要, 我们很快会看到, 函数 $f(x) = 1/\sqrt{x}$ 虽然不可积, 但放宽条件后, 它就可以积分. 这个主题我们会在 "广义积分" 中讨论.

## 6.2.2 上积分与下积分

下面我们来探索 Riemann 可积的充要条件.

我们只需讨论在 $[a,b]$ 上有界的函数 $f(x)$. 由 Riemann 积分的定义可知, 对于给定的分割 $\pi$, Riemann 和 $\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$ 中的 $\xi_i$ 是在 $[x_{i-1}, x_i]$ $(i = 1, 2, \cdots)$ 中任意选取的. 这给讨论 Riemann 积分带来了困难. 因此我们考虑分别找出 $\pi$ 决定的所有 Riemann 和的上确界和下确界, 然后转而讨论这个上确界和下确界, 这样就可以绕开 $\xi_i$ 来讨论问题. 令

$$M = \sup f([a,b]), \quad m = \inf f([a,b]).$$

令 $\omega = M - m$. 我们称 $\omega$ 为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的**振幅** (amplitude). 对于 $[a,b]$ 的任一分割

$$\pi : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b.$$

令

$$M_i = \sup f([x_{i-1}, x_i]), \quad m_i = \inf f([x_{i-1}, x_i]), \quad i = 1, 2, \cdots, n.$$

令 $\omega_i = M_i - m_i$. 我们称 $\omega_i$ 为 $f(x)$ 在 $[x_{i-1}, x_i]$ 上的振幅. 容易知道, 无论 $x_i$ 在 $[x_{i-1}, x_i]$ $(i = 1, 2, \cdots)$ 中如何选取, 都有

$$\sum_{i=1}^n m_i \Delta x_i \leq \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i \leq \sum_{i=1}^n M_i \Delta x_i.$$

这样我们就找到了 Riemann 和的上确界和下确界. 且这里的上确界和下确界由函数 $f(x)$ 和分割 $\pi$ 完全决定, 于是引出了以下概念.

**定义 6.2 (Darboux 和)**

设函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上有界. 给定 $[a, b]$ 的一个分割

$$\pi : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b.$$

把 $f([x_{i-1} - x_i])$ 的上确界和下确界分别记作 $M_i$ 和 $m_i$ $(i = 1, 2, \cdots)$. 令

$$\overline{S}(f, \pi) := \sum_{i=1}^n M_i \Delta x_i, \quad \underline{S}(f, \pi) := \sum_{i=1}^n m_i \Delta x_i.$$

我们把 $\overline{S}(f, \pi)$ 与 $\underline{S}(f, \pi)$ 分别称为函数 $f(x)$ 关于分割 $\pi$ 的 **Darboux 上和** (upper Darboux sum) 与 **Darboux 下和** (lower Darboux sum), 简称上和与下和. ♣

接下来, 我们来研究上和与下和. 类比数列 (或函数) 的上极限与下极限, 我们可以猜测上和与下和可能有以下结论:

(1) 所有上和组成的集合有下界, 从而有下确界; 所有下和组成的集合有上界, 从而有上确界. 我们暂且把这个下确界和上确界分别称为 ''上积分'' 与 ''下积分''.

(2) 在某个过程中, 下和单调递增且有上界, 上和单调递减且有下界, 因此它们都有极限, 它们的极限恰好是 ''上积分'' 与 ''下积分''.

(3) 任何有界函数都存在 ''上积分'' 与 ''下积分''. 函数 Riemann 可积当且仅当它的 ''上积分'' 等于 ''下积分''.

下面考虑在 $\pi$ 的基础上增加分割点, 我们想知道在这过程中是否会发生我们预期的事情. 先从最简单的情况开始: 在分割 $\pi$ 上多加一个分割点 $x'$, 它位于 $[x_{i-1}, x_i]$, 这样就得到一个新的分割 $\pi'$, 它有 $n+2$ 个分割点. 这是下和 $\underline{S}(f, \pi)$ 与 $\underline{S}(f, \pi')$ 的差别在于 $\underline{S}(f, \pi)$ 中的 $m_i \Delta x_i$ 变成了

$$(x' - x_{i-1}) \inf f([x_{i-1}, x']) + (x_i - x') \inf f([x', x_i]).$$

因此

$$\underline{S}(f, \pi') - \underline{S}(f, \pi) = (x' - x_{i-1}) \inf f([x_{i-1}, x']) + (x_i - x') \inf f([x', x_i]) - m_i \Delta x_i$$

容易知道

$$\inf f([x_{i-1}, x']) \geq m_i, \quad \inf f([x', x_i]) \geq m_i.$$

因此

$$\underline{S}(f, \pi') - \underline{S}(f, \pi) \geq m_i (x' - x_{i-1}) + m_i (x_i - x') - m_i \Delta x_i = m_i (x_i - x_{i-1}) - m_i \Delta x_i = 0.$$

于是可知 $\underline{S}(f, \pi') \geq \underline{S}(f, \pi)$. 另一方面, 显然有

$$\inf f([x_{i-1}, x']) \leq M_i, \quad \inf f([x', x_i]) \leq M_i.$$

因此

$$\underline{S}(f, \pi') - \underline{S}(f, \pi) \leq M_i (x' - x_{i-1}) + M_i (x_i - x') - m_i \Delta x_i = M_i (x_i - x_{i-1}) - m_i \Delta x_i = \omega_i \Delta x_i \leq \omega \Delta x_i \leq \omega |\pi|.$$

综上讨论就得到了

$$\underline{S}(f, \pi) \leq \underline{S}(f, \pi') \leq \underline{S}(f, \pi) + \omega |\pi|.$$

类似地可以得到

$$\overline{S}(f,\pi) \geq \overline{S}(f,\pi') \geq \overline{S}(f,\pi) - \omega|\pi|.$$

用数学归纳原理可以证明增加 $k$ 个分割点的情况.

**命题 6.5**

设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上有界. 给定 $[a,b]$ 的一个分割 $\pi$. 在它基础上增加 $k$ 个分割点, 得到新的分割 $\pi'$. 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的振幅为 $\omega$, 则

$$\underline{S}(f,\pi) \leq \underline{S}(f,\pi') \leq \underline{S}(f,\pi) + k\omega|\pi|.$$
$$\overline{S}(f,\pi) \geq \overline{S}(f,\pi') \geq \overline{S}(f,\pi) - k\omega|\pi|.$$

**证明** 证明略.

以上讨论表明, 在 $\pi$ 上不断增加分割点的过程中, 下和单调递增, 上和单调递减.

对于任意两个 $[a,b]$ 的分割 $\pi_1$ 和 $\pi_2$, 把它们的分割点全部利用起来得到的新分割记作 $\pi_1+\pi_2$. 我们无法比较 $\pi_1$ 和 $\pi_2$ 的上和或下和的大小, 但我们可以比较它们与 $\pi_1+\pi_2$ 的上和或下和. 因为 $\pi_1+\pi_2$ 可以看作由 $\pi_1$ 或 $\pi_2$ 增加分割点得到的新分割. 由上面的命题可知

$$\underline{S}(f,\pi_1) \leq \underline{S}(f,\pi_1+\pi_2) \leq \overline{S}(f,\pi_1+\pi_2) \leq \overline{S}(f,\pi_2).$$

于是可知, 对于任意两个分割, 其中一个分割的下和总是不超过另一个分割的上和. 这表明有界函数在 $[a,b]$ 上的所有上和组成的集合有下界, 从而有下确界; 所有下和组成的集合有上界, 从而有上确界. 这就证实了我们的第一个想法. 于是可以正式定义 “上积分” 与 “下积分”.

**定义 6.3 (Darboux 积分)**

设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上有界. $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的所有 Darboux 上和组成的集合的下确界称为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的 **Darboux 上积分** (upper Darboux integral); 在 $[a,b]$ 上的所有 Darboux 下和组成的集合的上确界称为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的 **Darboux 下积分** (lower Darboux integral), 简称上积分与下积分, 分别记作:

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x := \inf\left\{\overline{S}(f,\pi) \,\middle|\, \pi \text{ 是 } [a,b] \text{ 的一个分割}\right\} = \inf_{\pi} \overline{S}(f,\pi).$$
$$\underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x := \sup\left\{\underline{S}(f,\pi) \,\middle|\, \pi \text{ 是 } [a,b] \text{ 的一个分割}\right\} = \sup_{\pi} \underline{S}(f,\pi).$$

当 $f(x)$ 的上积分和下积分都等于 $I \in \mathbb{R}$ 时, 我们称 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上 **Darboux 可积** (Darboux integrable), 称 $I$ 是 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的 **Darboux 积分** (Darboux integral).

**注** Darboux 积分是法国数学家 Jean Gaston Darboux 于 1875 年提出的.

**例 6.4** 求 Dirichlet 函数 $D(x)$ 在 $[0,1]$ 上的上积分和下积分.

**解** 对于 $[0,1]$ 的任一分割, 由于分割内的任一小区间内都同时含有无理点和有理点, 因此 $D(x)$ 的任一上和都等于 1, 任一下和都等于 0. 于是可知

$$\overline{\int_a^b} D(x)\,\mathrm{d}x = 1, \quad \underline{\int_a^b} D(x)\,\mathrm{d}x = 0. \qquad \blacksquare$$

我们已经看到在 $\pi$ 上不断增加分割点的过程中, 下和单调递增且有上界; 上和单调递减且有下界. 因此当 $|\pi| \to 0$ 时上和与下和一定有极限. 下面来证明它们的极限恰好是 “上积分” 与 “下积分”.

**定理 6.2 (Darboux 定理)**

设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上有界. 作 $[a,b]$ 的一个分割 $\pi$. 则

$$\lim_{|\pi|\to 0}\overline{S}(f,\pi)=\overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

$$\lim_{|\pi|\to 0}\underline{S}(f,\pi)=\underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

**证明** 只证明下积分的情况. 把 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的下积分记作 $\underline{I}$. 由下积分的定义可知对于任一 $\varepsilon>0$, 存在 $[a,b]$ 的一个分割 $\pi_0$ 使得

$$\underline{S}(f,\pi_0)>\underline{I}-\frac{\varepsilon}{2}.$$

设 $\pi_0$ 一共有 $l$ 个分割点 (不含 $a,b$), 则对于 $[a,b]$ 的任一分割 $\pi$, 当 $|\pi|<\varepsilon/(2l\omega+1)$ 时, 由命题 (6.5) 可知

$$\underline{I}\geq\underline{S}(f,\pi)\geq\underline{S}(f,\pi_0+\pi)-l\omega|\pi|\geq\underline{S}(f,\pi_0)-l\omega|\pi|>\underline{I}-\frac{\varepsilon}{2}-l\omega\cdot\frac{\varepsilon}{2l\omega+1}>\underline{I}-\frac{\varepsilon}{2}-\frac{\varepsilon}{2}=\underline{I}-\varepsilon.$$

因此

$$\left|\underline{S}(f,\pi)-\underline{I}\right|=\underline{I}-\underline{S}(f,\pi)<\varepsilon.$$

于是可知

$$\lim_{|\pi|\to 0}\underline{S}(f,\pi)=\underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x.$$ ■

**注** 由于 $\omega$ 可能为零, 为了避免繁琐的分类讨论, 此处用了 "$\omega+1$". 在证明命题 (3.1) 的 (3) 时使用过这个技巧.

**注** 以上定理也可以作为上积分与下积分的定义.

类似数列的上极限与下极限, 可以得到一系列关于上积分与下积分的简单性质.

**命题 6.6**

设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上有界. 则

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x\leq\overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

**证明** 证明略.

**命题 6.7 (上积分与下积分的保序性)**

设函数 $f(x), g(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上有界. 若 $f(x)\geq g(x)$ $(\forall x\in[a.b])$, 则

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x\geq\overline{\int_a^b} g(x)\,\mathrm{d}x.$$

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x\geq\underline{\int_a^b} g(x)\,\mathrm{d}x.$$

**证明** 证明略.

**命题 6.8 (上积分与下积分的可加性)**

设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上有界. 若 $c\in(a,b)$, 则

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x=\overline{\int_a^c} f(x)\,\mathrm{d}x+\overline{\int_c^b} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x = \underline{\int_a^c} f(x)\,\mathrm{d}x + \underline{\int_c^b} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

**证明** 留作习题.

**命题 6.9**

设函数 $f(x), g(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上有界. 则

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x + \overline{\int_a^b} g(x)\,\mathrm{d}x \geq \overline{\int_a^b} [f(x)+g(x)]\,\mathrm{d}x.$$
$$\underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x + \underline{\int_a^b} g(x)\,\mathrm{d}x \leq \underline{\int_a^b} [f(x)+g(x)]\,\mathrm{d}x.$$

**证明** 留作习题.

**命题 6.10**

设函数 $f(x), g(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上有界. 对于任一实数 $c \geq 0$ 都有

$$\overline{\int_a^b} cf(x)\,\mathrm{d}x = c\overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x.$$
$$\underline{\int_a^b} cf(x)\,\mathrm{d}x = c\underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

对于任一实数 $c \leq 0$ 都有

$$\overline{\int_a^b} cf(x)\,\mathrm{d}x = c\underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x.$$
$$\underline{\int_a^b} cf(x)\,\mathrm{d}x = c\overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

**证明** 留作习题.

现在终于可以来验证我们的第三个想法.

**定理 6.3 (Riemann 可积的充要条件)**

设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界. 则以下三个命题等价:

1° $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上 Riemann 可积.

2° 作分割 $\pi: a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$. 设 $f(x)$ 在 $[x_{i-1}, x_i]$ 上的振幅为 $\omega_i$ $(i = 1, 2, \cdots)$. 则

$$\lim_{|\pi| \to 0} \sum_{i=1}^{n} \omega_i \Delta x_i = 0.$$

3° $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上 Darboux 可积.

**证明** (i) 证明 1° $\Rightarrow$ 2°. 令 $I = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$. 则对于任一 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$ 使得当 $|\pi| < \delta$ 时, 无论 $\xi_i$ 在 $[x_{i-1}, x_i]$ 中如何选取都有

$$I - \frac{\varepsilon}{3} \leq \underline{S}(f,\pi) \leq \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \leq \overline{S}(f,\pi) \leq I + \frac{\varepsilon}{3}.$$

因此

$$0 \leq \overline{S}(f,\pi) - \underline{S}(f,\pi) \leq \frac{2}{3}\varepsilon < \varepsilon \iff 0 \leq \sum_{i=1}^{n} \omega_i \Delta x_i \leq \frac{2}{3}\varepsilon < \varepsilon.$$

于是可知

$$\lim_{|\pi|\to 0}\sum_{i=1}^{n}\omega_i\Delta x_i = 0.$$

(ii) 证明 2° ⇒ 3°. 若 $\lim_{|\pi|\to 0}\sum_{i=1}^{n}\omega_i\Delta x_i = 0$. 则由 Darboux 定理可知

$$0 = \lim_{|\pi|\to 0}\sum_{i=1}^{n}\omega_i\Delta x_i = \lim_{|\pi|\to 0}\left[\overline{S}(f,\pi) - \underline{S}(f,\pi)\right] = \lim_{|\pi|\to 0}\overline{S}(f,\pi) - \lim_{|\pi|\to 0}\underline{S}(f,\pi) = \overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x - \underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x$$

故

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x = \underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

于是可知 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上 Darboux 可积.

(iii) 证明 3° ⇒ 1°. 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上 Darboux 可积, 则 $\overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x = \underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x$. 故对于任一分割 $\pi$ 都有

$$\underline{S}(f,\pi) \le \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \le \overline{S}(f,\pi).$$

令上式中的 $|\pi|\to 0$, 由 Darboux 定理可知

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{|\pi|\to 0}\underline{S}(f,\pi) \le \lim_{|\pi|\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \le \lim_{|\pi|\to 0}\overline{S}(f,\pi) = \overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

由夹逼定理可知, 极限 $\lim_{|\pi|\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$ 存在. 于是可知 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上 Riemann 可积.

综上可知 1° ⇔ 2° ⇔ 3°. ■

以上定理表明, Riemann 积分和 Darboux 积分是等价的, 它们分别从两个角度定义了同一种积分. Riemann 积分用了极限的 $\varepsilon-\delta$ 语言, 而 Darboux 积分用了上极限和下极限的思想. Riemann 积分的定义比较直观, 但 Darboux 积分的定义 "更容易操作", 因此要判断一个函数是否 Riemann 可积, 我们一般都是去判断它是否 Darboux 可积.

至此我们找到了 Riemann 可积的两个充要条件.

**例 6.5** 判断 Dirichlet 函数 $D(x)$ 在 $[0,1]$ 上是否 Riemann 可积.

**解** 由例 (6.4) 可知

$$1 = \overline{\int_a^b} D(x)\,\mathrm{d}x \ne \underline{\int_a^b} D(x)\,\mathrm{d}x = 0.$$

由定理 (6.3) 可知 Dirichlet 函数 Riemann 不可积.

**注** 以上例题表明 Riemann 积分无法定义 Dirichlet 函数围成的 "曲边梯形". 从直观上看, 它的面积应该为零. Dirichlet 函数的可积性问题暴露了 Riemann 积分的局限性. 我们将在实分析中定义更好的积分来解决这个问题.

### 6.2.3 Riemann 可积的充分条件

下面我们来看一下哪些类型的函数一定是 Riemann 可积的.

**定理 6.4**

设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界. 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调, 则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上 Riemann 可积.

**证明** 只证明单调递增的情况. 若 $f(a) = f(b)$, 由于 $f(x)$ 单调递增, 故 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 是一个常值函数, 因此它在 $[a,b]$ 上 Riemann 可积. 下设 $f(a) < f(b)$.

对于任一 $\varepsilon > 0$, 取 $\delta = \varepsilon/(f(b) - f(a))$. 当 $|\pi| < \delta$ 时都有

$$0 \le \sum_{i=1}^{n} \omega_i \Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} [f(x_i) - f(x_{i-1})]\Delta x_i \le |\pi| \sum_{i=1}^{n} [f(x_i) - f(x_{i-1})]$$
$$= |\pi|[f(b) - f(a)] < \delta[f(b) - f(a)] = \varepsilon.$$

因此

$$\lim_{|\pi|\to 0} \sum_{i=1}^{n} \omega_i \Delta x_i = 0.$$

由定理 (6.3) 可知 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上 Riemann 可积.

数学分析中处理的函数通常是连续函数, 或者 ‘‘近乎’’ 连续的函数. 从直观上, 很容易想到连续函数应该是 Riemann 可积的. 现在我们可以来证明这个想法.

**定理 6.5**

设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上 Riemann 可积.

**证明** 由于 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致连续. 故对于任一 $\varepsilon > 0$, 都存在 $\delta > 0$, 使得当 $s, t \in [a,b]$ 且 $|s - t| < \delta$ 时都有

$$|f(s) - f(t)| < \frac{\varepsilon}{b - a}.$$

给定一个 $[a,b]$ 上的分割

$$\pi : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b.$$

令 $M_i = f(s_i), m_i = f(t_i)$, 其中 $s_i, t_i \in [x_{i-1}, x_i]$ $(i = 1, 2, \cdots)$. 当 $|\pi| < \delta$ 时

$$|s_i - t_i| \le \Delta x_i \le |\pi| < \delta, \quad i = 1, 2, \cdots, n.$$

于是

$$\sum_{i=1}^{n} \omega_i \Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} [f(s_i) - f(t_i)]\Delta x_i \le \frac{\varepsilon}{b - a} \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i = \varepsilon.$$

因此

$$\lim_{|\pi|\to 0} \sum_{i=1}^{n} \omega_i \Delta x_i = 0.$$

由定理 (6.3) 可知 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上 Riemann 可积. ■

由于经典欧式几何和经典物理问题中的函数几乎都是连续的, 因此 Riemann 积分在这些地方可以运行得很好. 因此, 尽管在 20 世纪初出现了 Lebesgue 积分 (从数学逻辑上看它可以完全取代 Riemann 积分), Riemann 积分依旧有存在的价值.

### 6.2.4 Lebesgue 定理

我们已经知道 $[a,b]$ 上有界且连续的函数 $f(x)$ 一定 Riemann 可积. 不难证明, 如果 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上只有有限多个间断点, $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上仍然 Riemann 可积. 于是我们就会想这样一个问题: 间断点增加到什么时候函数就会不可积, 这个临界状态在哪里. 换句话说 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上不连续点的多寡和 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的可积性有着深刻的联系. 这就是本节要讨论的问题.

为了刻画集合中点的多寡, 我们先引入以下概念.

**定义 6.4 (零测度集)**

设 $E \subseteq \mathbb{R}$. 若对任意 $\varepsilon > 0$, 存在至多可数个开区间 $\{I_n : n \in \mathbb{N}\}$, 使得

$$E \subseteq \bigcup_{n=0}^{\infty} I_n;$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} |I_n| \leq \varepsilon,$$

则称 $E$ 为零测度集 (set of measure zero), 或称零集 (null set).

**注** 空集显然零测.

**例 6.6** 设集合 $A$ 是至多可数的, 则 $A$ 是一个零测集.

**证明**

**例 6.7** 设长度不为零的区间 $I$. 则 $I$ 不是零测集.

**证明**

零测集的简单性质.

**命题 6.11**

至多可数个零测集的并集仍是零测集.

**证明**

**命题 6.12**

设零测集 $A$. 若 $B \subseteq A$, 则 $B$ 也是一个零测集.

**证明**

为了证明 Lebesgue 定理. 我们需要一些引理作为准备.

**引理 6.1**

**证明**

**引理 6.2**

**证明**

**引理 6.3**

**证明**

**引理 6.4**

**证明**

**定义 6.5 (几乎处处)**

设 $E \subseteq \mathbb{R}$, 零测度集 $E_0 \subseteq E$,$P$ 是一个与 $E$ 中元素有关的命题. 若

$$\forall x \in E \backslash E_0 \left(P\left(x\right)\right).$$

则称 $P$ 在 $E$ 上几乎处处 (almost everywhere) 成立. 记作

$$P\left(x\right) \text{a.e.}$$

**定理 6.6 (Lebesgue 定理)**

设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上有界. 则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上 Riemann 可积当且仅当 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上几乎处处连续.

**证明**

**推论 6.3**

设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界. 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上只有至多可数个间断点, 则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上 Riemann 可积.

**证明**

**推论 6.4**

设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上 Riemann 可积. 则 $|f(x)|$ 也在 $[a,b]$ 上 Riemann 可积.

**证明**

**推论 6.5**

设函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上 Riemann 可积. 则 $f(x)g(x)$ 也在 $[a,b]$ 上 Riemann 可积.

**证明**

**推论 6.6**

设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上 Riemann 可积. 若 $1/f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有定义且有界, 则 $1/f(x)$ 也在 $[a,b]$ 上 Riemann 可积.

**证明**

**推论 6.7**

设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上 Riemann 可积. 若 $[a_1,b_1] \subseteq [a,b]$, 则 $f(x)$ 在 $[a_1,b_1]$ 上 Riemann 可积.

**证明**

**推论 6.8**

设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 和 $[b,c]$ 上都 Riemann 可积, 则 $f(x)$ 在 $[a,c]$ 上 Riemann 可积.

**证明**

**推论 6.9**

设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上 Riemann 可积. 若函数 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上除去有限个点 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 之外与 $f(x)$ 相等, 则 $g(x)$ 也在 $[a,b]$ 上 Riemann 可积. 且

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

♡

**证明**

**例 6.8**

**解**

# 6.3 Riemann 积分的计算

## 6.3.1 Newton-Leibniz 公式

我们已经看到, 直接用定义计算 Riemann 积分是十分麻烦的. 我们需要另寻出路. 我们来看两个物理的例子.

前面已经提到物理学中的功、位移、冲量等物理量. 它们的定义方法完全和面积类似. 在物理学中,"功"、"位移"、"冲量" 等物理量也可以用积分来定义. 这是因为它们也满足面积的三条公理. 我们以位移为例. 如图6.4(a), 当质点作速度为 $\boldsymbol{v}_0$ 的匀速直线运动时, 质点从 $t_1$ 时刻到 $t_2$ 时刻的位移被定义为

$$\boldsymbol{s}(t) = \boldsymbol{v}_0(t_2 - t_1).$$

如图6.4(b), 若质点作变速直线运动, 则质点从 $t_1$ 时刻到 $t_2$ 时刻的位移可以定义为

$$\boldsymbol{s}(t) = \int_{t_1}^{t_2} \boldsymbol{v}(t)\,\mathrm{d}t. \tag{6.1}$$

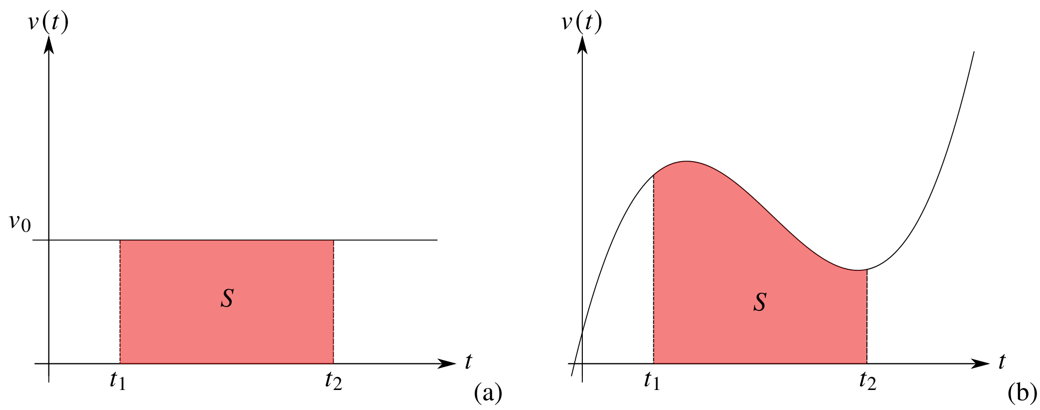



图 6.4: 匀速直线运动和变速直线运动的对比. 在直线运动的条件下 $|\boldsymbol{v}(t)| = v(t)$.

某个质点作变速直线运动的速度函数为 $\boldsymbol{v}(t)$, 位移函数为 $s(t)$. 我们知道质点从 $t_1$ 时刻到 $t_2$ 时刻的位移为

$$\boldsymbol{s}(t) = \boldsymbol{s}(t_2) - \boldsymbol{s}(t_1).$$

由等式 (6.1) 可知

$$\int_{t_1}^{t_2} \boldsymbol{v}(t)\,\mathrm{d}t = \boldsymbol{s}(t_2) - \boldsymbol{s}(t_1).$$

我们还知道 $\boldsymbol{v}(t) = \boldsymbol{s}'(t)$, 即 $\boldsymbol{s}(t)$ 是 $\boldsymbol{v}(t)$ 的原函数.

再看一个例子. 物理中有这样一个重要定理: 力对时间的累积效果 (冲量) 等于动量的改变量:

$$\int_{t_1}^{t_2} \boldsymbol{F}(t)\,\mathrm{d}t = \boldsymbol{p}(t_2) - \boldsymbol{p}(t_1).$$

这就是**动量定理** (momentum theorem). 另一方面, 由 Newton 第二运动定律的微分形式可知:

$$\boldsymbol{F}(t) = \frac{\mathrm{d}\,\boldsymbol{p}(t)}{\mathrm{d}\,t}.$$

这表明 $\boldsymbol{p}(t)$ 恰好是 $\boldsymbol{F}(t)$ 的原函数.

以上两个物理的例子为我们计算 Riemann 积分提供了思路: 计算 Riemann 积分可以转化为计算函数的原函数! 这就是不定积分名字的由来.

**定理 6.7 (Newton-Leibniz 公式)**

设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上 Riemann 可积, 且在 $(a,b)$ 上存在原函数 $F(x)$. 若 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 则

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a).$$

**证明** 把 $[a,b]$ 作 $n$ 等分

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b.$$

由 Lagrange 中值定理可知, 存在 $\xi_i \in (x_{i-1}, x_i)$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$ 满足

$$F(b) - F(a) = \sum_{i=1}^{n}[F(x_i) - F(x_{i-1})] = \sum_{i=1}^{n} F'(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i.$$

由于 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上 Riemann 可积, 因此令上式的 $n \to \infty$ 得

$$F(b) - F(a) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$ ■

**注** 为了书写便利, 我们可以令

$$F(x)\Big|_a^b := F(b) - F(a).$$

于是我们以下几种等价的记号

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b \mathrm{d}F(x) = \int f(x)\,\mathrm{d}x\Big|_a^b = F(x)\Big|_a^b.$$

现在我们可以来定义圆的面积.

**例 6.9** 求半径为 $r$ 的圆的面积公式.

**解** 设函数 $y = \sqrt{r^2 - x^2}$ $(r > 0,\ 0 < x < r)$. 不难知道该函数的图像与 $x$ 轴围成的面积就是半径为 $r$ 的圆的面积的 1/4. 于是半径为 $r$ 的圆的面积可以定义为

$$S = 4\int_0^r \sqrt{r^2 - x^2}\,\mathrm{d}x.$$

令 $x = r\sin t$. 则

$$4\int \sqrt{r^2 - x^2}\,\mathrm{d}x = 4\int \sqrt{r^2 - r^2\sin^2 t}\,\mathrm{d}\,r\sin t = 4r^2\int \cos^2 t\,\mathrm{d}t = 4r^2\int \frac{1+\cos 2t}{4}\,\mathrm{d}\,2t$$
$$= 2r^2 t + r^2\sin 2t = 2r^2\arcsin\frac{x}{r} + 2x\sqrt{r^2 - x^2} + C.$$

用 Newton-Leibniz 公式可知

$$S = 4\int_0^r \sqrt{r^2 - x^2}\,\mathrm{d}x = 2r^2\arcsin\frac{x}{r} + 2x\sqrt{r^2 - x^2}\Big|_0^r = 2r^2\arcsin 1 = \pi r^2.$$ ■

以上计算结果和我们中学里学到的圆面积公式一致. 于是我们可以反过来利用圆的面积公式来求 Riemann 积分.

**例 6.10** 求以下 Riemann 积分:

$$\int_a^b \sqrt{(x-a)(b-x)}\,\mathrm{d}x.$$

**解** 以上积分表示直径为 $b - a$ 的半圆的面积. 于是可知

$$\text{原式} = \frac{1}{2}\pi\left(\frac{b-a}{2}\right)^2 = \frac{1}{8}(b-a)^2\pi.$$ ■

有了 Newton-Leibniz 公式, 我们就可以轻而易举地求出大部分初等函数的 Riemann 积分. 而 Riemann 积分本身是一个极限, 因此我们可以把某些极限看作是 Riemann 积分, 这也是一种求极限的方法. 下面看一个例子.

**例 6.11** 计算:

$$\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1+\frac{n}{n}\right)\right]^{1/n}.$$

**解** 令

$$a_n = \frac{1}{n}\left[\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)+\ln\left(1+\frac{2}{n}\right)+\cdots+\ln\left(1+\frac{n}{n}\right)\right],\quad n=1,2,\cdots.$$

设 $f(x)=\ln(1+x)$. 把闭区间 $[0,1]$ 作 $n$ 等分, 则每个小区间的长度为 $1/n$, 令 $\xi_i$ 是每个小区间的右端点, 则 $\xi_i = 1/n$. 于是 $a_n$ 可以看作一个特殊的 Riemann 和. 由于 $f(x)$ 在 $[0,1]$ Riemann 可积, 因此这个特殊 Riemann 和也会收敛到积分值. 由于区间是等分的, 因此这个分割的宽度趋于零当且仅当 $n\to\infty$. 于是

$$\int_0^1 \ln(1+x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} a_n.$$

由于

$$\begin{aligned}\int \ln(1+x)\,\mathrm{d}x &= x\ln(1+x)-\int\frac{x}{1+x}\,\mathrm{d}x = x\ln(1+x)-\int\left(1-\frac{1}{1+x}\right)\mathrm{d}x\\ &= x\ln(1+x)-x+\ln(1+x)=(1+x)\ln(1+x)-x.\end{aligned}$$

由 Newton-Leibniz 公式可知

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \int_0^1 \ln(1+x)\,\mathrm{d}x = (1+x)\ln(1+x)-x\Big|_0^1 = 2\ln 2-1.$$

于是可知

$$\text{原式} = \lim_{n\to\infty}\mathrm{e}^{a_n} = \mathrm{e}^{2\ln 2-1} = \frac{4}{\mathrm{e}}.$$

■

**注** 如果已知函数在区间上 Riemann 可积, 则我们可以取一个有利于计算的 Riemann 和来求极限.

### 6.3.2 微积分基本定理

设函数 $f(t)$ 在 $[a,b]$ 上 Riemann 可积, 则对于任一 $x\in[a,b]$, 函数 $f(x)$ 在 $[a,x]$ 上都 Riemann 可积. 如果我们把积分上限 $x$ 看作变量, 则可以用 Riemann 积分定义一个函数.

**定义 6.6 (变限积分)**

函数 $f(t)$ 在 $[a,b]$Riemann 可积. 令

$$F(x)=\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$

则 $F(x)$ 是定义在 $[a,b]$ 上的一个函数. 我们称这个由 Riemann 积分定义的函数为变限积分. 类似地可以定义函数

$$G(x)=\int_x^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$

♣

**注** 变限积分的自变量不仅可以出现在积分上限或下限中, 也可以同时出现在积分上限和下限中. 例如

$$G(x)=\int_{x^2}^{x^3}\sqrt{1+t^2}\,\mathrm{d}t.$$

回到之前举的物理的例子. 如图6.4(b), 令

$$\boldsymbol{s}(x)=\int_{t_1}^x \boldsymbol{v}(t)\,\mathrm{d}t.$$

函数 $\boldsymbol{s}(x)$ 实际上就关于时刻 $x$ $(x\ge t_1)$ 的位移函数. 从物理意义上, 我们知道 $\boldsymbol{s}(x)$ 是一个连续函数, 且 $\boldsymbol{s}(x)$ 是 $\boldsymbol{v}(t)$ 的一个原函数.

**定理 6.8 (变限积分的连续性)**

设函数 $f(t)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上 Riemann 可积. 令

$$F(x)=\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$

则函数 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上 Lipschitz 连续.

**证明** 任取 $x_1, x_2 \in [a,b]$. 则

$$F(x_2) - F(x_1) = \int_a^{x_2} f(t)\,\mathrm{d}t - \int_a^{x_1} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{x_1}^{x_2} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

由于 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上 Riemann 可积, 故存在 $M>0$ 使得 $|f(x)| \le M$ $(a \le x \le b)$. 当 $x_1 < x_2$ 时

$$|F(x_2) - F(x_1)| = \left|\int_{x_1}^{x_2} f(t)\,\mathrm{d}t\right| \le \int_{x_1}^{x_2} |f(t)|\,\mathrm{d}t \le M(x_2 - x_1).$$

当 $x_1 > x_2$ 时

$$|F(x_2) - F(x_1)| = \left|\int_{x_1}^{x_2} f(t)\,\mathrm{d}t\right| \le \int_{x_2}^{x_1} |f(t)|\,\mathrm{d}t \le M(x_1 - x_2).$$

综上可知

$$|F(x_2) - F(x_1)| \le M|x_1 - x_2|.$$

这表明 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上 Lipschitz 连续. ■

类似地, 可以定义变限上积分 (或下积分). 用完全一样的方法可以证明它们也是 Lipschitz 连续的.

**定理 6.9 (变限上积分的连续性)**

设函数 $f(t)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上有界. 令

$$F(x) = \overline{\int_a^x} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

则函数 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上 Lipschitz 连续.

**证明** 证明略.

**注** 下积分也有类似结论.

函数 Riemann 可积未必连续. 但它的变上限积分定义的函数是连续的. 不严格地讲 ‘‘积分过程’’ 使函数的性质变好了. 那么如果函数本来就连续, 变上限积分定义的函数应该有 ‘‘更好的性质’’.

**定理 6.10 (变限积分的可导性)**

设函数 $f(t)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上 Riemann 可积. 令

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$

若 $f(t)$ 在 $x_0 \in [a,b]$ 处连续, 则 $F(x)$ 在 $x_0$ 处可导, 且 $F'(x_0) = f(x_0)$.

**证明** 当 $h>0$ 时. 由于 $f(t)$ 在 $x_0 \in [a,b]$ 处连续, 故对于任一 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使得当 $|t - x_0| < \delta$ 时 $|f(t) - f(x_0)| < \varepsilon$. 于是当 $h < \delta$ 时

$$\begin{aligned}\left|\frac{F(x_0+h) - F(x_0)}{h} - f(x_0)\right| &= \left|\frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h} f(t)\,\mathrm{d}t - \frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h} f(x_0)\,\mathrm{d}t\right| = \left|\frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h} [f(t) - f(x_0)]\,\mathrm{d}t\right| \\ &\le \frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h} |f(t) - f(x_0)|\,\mathrm{d}t < \frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h} \varepsilon\,\mathrm{d}t = \varepsilon.\end{aligned}$$

这表明 $F(x)$ 在 $x_0$ 处右侧可导, 且 $F'(x_0+) = f(x_0)$. 类似可证 $F(x)$ 在 $x_0$ 处左侧可导, 且 $F'(x_0-) = f(x_0)$. 于是可知 $F(x)$ 在 $x_0$ 处可导, 且 $F'(x_0) = f(x_0)$.

由以上定理可知, 如果变上限积分 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 那么它在 $[a,b]$ 上可导. 这就得到了以下重要定理.

**定理 6.11 (微积分基本定理)**

设函数 $f(t)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续. 令

$$F(x)=\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$

则 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导, 且 $F'(x)=f(x)$.

以上定理称为**微积分基本定理** (fundamental theorem of calculus). 它告诉我们一个重要事实: 在 $[a,b]$ 上的连续函数 $f(x)$ 的变上限积分 $\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ 恰好是它的一个原函数. 微积分基本定理把微分和积分这两个风马牛不相及的极限联系在了一起, 而且它们可以看作是 "互逆的算子". 这就解释了把求原函数的运算称为不定积分的原因.

由微积分基本定理可以立刻得到以下推论.

**推论 6.10**

连续函数必有原函数.

用微积分基本定理可以再次证明 Newton-Leibniz 公式.

**定理 6.12 (Newton-Leibniz 公式)**

设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续. $F(x)$ 是 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的一个原函数. 则

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t=F(b)-F(a).$$

**证明** 由于 $F(x)$ 是 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的一个原函数, 由微积分基本定理可知

$$F(x)=\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t+C.$$

分别令 $x=a, x=b$ 得

$$F(a)=\int_a^a f(t)\,\mathrm{d}t+C=C,\quad F(b)=\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t+C.$$

于是可知

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t=F(b)-F(a).$$ ■

**注**以上定理也可以改写为: 设函数 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续可导, 则对于任一 $x\in[a,b]$ 都有

$$\int_a^x F'(t)\,\mathrm{d}t=F(x)-F(a).$$

**注** 以上的 Newton-Leibniz 公式比之前得到的 Newton-Leibniz 公式条件更强.

用微积分基本定理可以证明以下重要不等式.

**例 6.12Cauchy-Schwarz 不等式** 设函数 $f(x), g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续. 则

$$\left[\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x\right]^2\le\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x\int_a^b g^2(x)\,\mathrm{d}x,$$

其中等号成立当且仅当存在 $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$ 使得 $\lambda f(x)+\mu g(x)=0\ (\forall x\in[a,b])$, 其中 $\lambda$ 和 $\mu$ 不全为零.

**证明** $\boxed{\text{证法一}}$ 令

$$F(x)=\int_a^x f^2(t)\,\mathrm{d}t\int_a^x g^2(t)\,\mathrm{d}t-\left[\int_a^x f(t)g(t)\,\mathrm{d}t\right]^2.$$

由微积分基本定理可知

$$F'(x)=\int_a^x f^2(t)\,\mathrm{d}t\int_a^x g^2(t)\,\mathrm{d}t-\left[\int_a^x f(t)g(t)\,\mathrm{d}t\right]^2$$

$$= f^2(x)\int_a^x g^2(t)\,\mathrm{d}t + g^2(x)\int_a^x f^2(t)\,\mathrm{d}t + 2f(x)g(x)\int_a^x f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$$
$$= \int_a^x [f(x)g(t) - g(x)f(t)]^2\,\mathrm{d}t \geq 0.$$

因此 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调递增. 故 $F(b) \geq F(a) = 0$. 这就是要证明的不等式.

下面证明等号成立的条件. 充分性显然成立. 只需证明必要性. 若等号成立, 则 $F(b) = 0$. 由于 $F(a) = 0$, 由 Rolle 中值定理可知存在 $\xi \in (a,b)$ 满足

$$0 = F'(\xi) = \int_a^{\xi} [f(\xi)g(t) - g(\xi)f(t)]^2\,\mathrm{d}t.$$

因此 $f(\xi)g(t) - g(\xi)f(t) = 0$. 这表明必要性也成立.

$\boxed{\text{证法二}}$ 对于任一实数都有 $[\lambda f(x) + g(x)]^2 \geq 0$. 因此

$$\int_a^b [\lambda f(x) + g(x)]^2 \geq 0 \iff \lambda^2 \int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x + 2\lambda \int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b g^2(x)\,\mathrm{d}x \geq 0$$

以上关于 $\lambda$ 的一元二次不等式恒为非负, 故

$$\Delta = \left[2\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x\right]^2 - 4\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x \int_a^b g^2(x)\,\mathrm{d}x \leq 0$$
$$\iff \left[\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x\right]^2 \leq \int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x \int_a^b g^2(x)\,\mathrm{d}x.$$

下面看一个应用 Cauchy-Schwarz 不等式的例子.

**例 6.13** 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续可导, 且 $f(a) = 0$. 求证:

$$\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x \leq \frac{1}{2}(b-a)^2 \int_a^b [f'(x)]^2\,\mathrm{d}x.$$

**证明** $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续可导, 且 $f(a) = 0$, 由 Newton-Leibniz 公式可知

$$f(x) = f(x) - f(a) = \int_a^x f'(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^x 1 \cdot f'(t)\,\mathrm{d}t.$$

由 Cauchy-Schwarz 不等式可知

$$f^2(x) = \left[\int_a^x 1 \cdot f'(t)\,\mathrm{d}t\right]^2 \leq \int_a^x 1^2\,\mathrm{d}t \int_a^x [f'(t)]^2\,\mathrm{d}t = (x-a)\int_a^x [f'(t)]^2\,\mathrm{d}t \leq (x-a)\int_a^b [f'(t)]^2\,\mathrm{d}t.$$

对两边求 $a$ 到 $b$ 的 Riemann 积分, 由 Newton-Leibniz 公式可知

$$\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x \leq \frac{1}{2}(b-a)^2 \int_a^b [f'(x)]^2\,\mathrm{d}x. \qquad \blacksquare$$

遇到积分上限和下限同时是变量的情况, 通常先利用可加性把他们拆开成为变上限积分后再用微积分基本定理解决.

**例 6.14** 求以下函数的导数:

$$G(x) = \int_{x^2}^{x^3} \sqrt{1+t^2}\,\mathrm{d}t.$$

**解** 令 $F(x) = \int_0^x \sqrt{1+t^2}\,\mathrm{d}t$, 则 $F'(x) = \sqrt{1+x^2}$. 因此

$$G(x) = \int_{x^2}^0 \sqrt{1+t^2}\,\mathrm{d}t + \int_0^{x^3} \sqrt{1+t^2}\,\mathrm{d}t = -\int_0^{x^2} \sqrt{1+t^2}\,\mathrm{d}t + \int_0^{x^3} \sqrt{1+t^2}\,\mathrm{d}t = F\left(x^3\right) - F\left(x^2\right).$$

于是可知

$$G'(x) = 3x^2 F'\left(x^3\right) - 2xF'\left(x^2\right) = 3x^2\sqrt{1+x^6} - 2x\sqrt{1+x^4}.$$

### 6.3.3 分部积分法

有了 Newton-Leibniz 公式以后, 计算 Riemann 积分就只需先求出被积函数的不定积分. 但实际计算时, 经常不直接求出被积函数的不定积分. 我们有公式

$$u(x)\,\mathrm{d}\,v(x)=\mathrm{d}[u(x)v(x)]-v(x)\,\mathrm{d}\,u(x).$$

对上式两边作 Riemann 积分得

$$\int_a^b u(x)\,\mathrm{d}\,v(x)=\int_a^b \mathrm{d}[u(x)v(x)]-\int_a^b v(x)\,\mathrm{d}\,u(x).$$

由 Newton-Leibniz 公式可知

$$\int_a^b u(x)\,\mathrm{d}\,v(x)=u(x)v(x)\Big|_a^b-\int_a^b v(x)\,\mathrm{d}\,u(x).$$

以上就是 Riemann 积分的分部积分法. 用这个公式的好处是, 在计算过程中可以把 $u(x)v(x)\Big|_a^b$ 尽快计算出来, 从而简化计算过程. 我们来看一个例子.

**例 6.15** 计算以下 Riemann 积分

$$\int_0^\pi x\cos x\,\mathrm{d}\,x.$$

**解** 用分部积分法可得

$$\text{原式}=\int_0^\pi x\,\mathrm{d}\sin x=x\sin x\Big|_0^\pi-\int_0^\pi \sin x\,\mathrm{d}\,x=-\int_0^\pi \sin x\,\mathrm{d}\,x=\cos x\Big|_0^\pi=\cos\pi-\cos 0=-2.$$

**例 6.16** 计算以下 Riemann 积分

$$\int_0^{\pi/2}\cos^m x\,\mathrm{d}\,x,\quad \int_0^{\pi/2}\sin^m x\,\mathrm{d}\,x,\quad m\in\mathbb{N}.$$

**解** 由于 $y=\cos^m x$ 和 $y=\sin^m x$ 关于 $x=\pi/4$ 对称. 因此它们在 $[0,\pi/2]$ 上的 Riemann 积分相等. 令

$$I_m=\int_0^{\pi/2}\cos^m x\,\mathrm{d}\,x=\int_0^{\pi/2}\sin^m x\,\mathrm{d}\,x,\quad m=1,2,\cdots.$$

容易计算 $I_0=\pi/2, I_1=1$. 当 $m\geq 2$ 时

$$\begin{aligned}I_m&=\int_0^{\pi/2}\cos^{m-1}x\,\mathrm{d}\sin x=\cos^{m-1}x\sin x\Big|_0^{\pi/2}+(m-1)\int_0^{\pi/2}\sin^2 x\cos^{m-2}x\,\mathrm{d}\,x\\&=(m-1)\int_0^{\pi/2}\left(1-\cos^2 x\right)\cos^{m-2}x\,\mathrm{d}\,x=(m-1)I_{m-2}-(m-1)I_m.\end{aligned}$$

于是得到递推公式

$$I_m=\frac{m-1}{m}I_{m-2},\quad m=2,3,\cdots.$$

当 $m$ 为奇数时,

$$I_m=\frac{m-1}{m}\cdot\frac{m-3}{m-2}\cdots\frac{2}{3}I_1=\frac{(m-1)!!}{m!!}.$$

当 $m$ 为偶数时

$$I_m=\frac{m-1}{m}\cdot\frac{m-3}{m-2}\cdots\frac{1}{2}I_0=\frac{(m-1)!!}{m!!}\cdot\frac{\pi}{2}.$$

**注** 以上结果使用了 “双阶乘” 记号, 它们的定义是

$$(2n-1)!!=1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1).$$

$$(2n)!!=1\cdot 3\cdot 5\cdots 2n.$$

**注** 对比例 (5.35), 可以看到计算 Riemann 积分比计算不定积分简便.

用以上结论可以证明一个很有用的公式.

**定理 6.13 (Wallis 公式)**

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n+1}\cdot\left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right]^2=\frac{\pi}{2}.$$

**证明** 当 $x\in(0,\pi/2)$ 时, $0<\sin x<1$. 因此对于任一 $n\in\mathbb{N}^*$ 都有

$$\sin^{2n+1}x<\sin^{2n}x<\sin^{2n-1}x.$$

由 Riemann 积分的保序性和正定性可知

$$\int_0^{\pi/2}\sin^{2n+1}x<\int_0^{\pi/2}\sin^{2n}x<\int_0^{\pi/2}\sin^{2n-1}x.$$

由例6.16可知

$$\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}<\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot\frac{\pi}{2}<\frac{(2n-2)!!}{(2n-1)!!}$$

$$\Longrightarrow\frac{2n}{2n+1}\cdot\frac{\pi}{2}<\frac{1}{2n+1}\cdot\left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right]^2<\frac{\pi}{2}.$$

令 $n\to\infty$, 由夹逼定理可知

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n+1}\cdot\left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right]^2=\frac{\pi}{2}.$$ ∎

**注** 以上公式开方后可得

$$\sqrt{\frac{\pi}{2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{2n+1}}\cdot\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{2n+1}}\cdot\frac{[(2n)!!]^2}{(2n-1)!!(2n)!!}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{2n+1}}\cdot\frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n)!}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2n+1}}\cdot\frac{2^{2n}(n!)^2}{\sqrt{n}(2n)!}=\frac{1}{\sqrt{2}}\lim_{n\to\infty}\frac{2^{2n}(n!)^2}{\sqrt{n}(2n)!}$$

于是得到 Wallis 公式的另一种形式

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2^{2n}(n!)^2}{\sqrt{n}(2n)!}=\sqrt{\pi}.$$

**注** 以上公式是英国数学家 John Wallis 于 1656 年发表的.

用分部积分法可以证明带积分余项的 Taylor 公式

**定理 6.14 (带积分余项的 Taylor 公式)**

设函数 $f(x)$ 在 $(a,b)$ 上有直到 $n+1$ 阶的连续导函数, 则对于任意固定的 $x_0\in(a,b)$ 都有

$$f(x)=f(x_0)+\frac{1}{1!}f'(x_0)(x-x_0)+\cdots+\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n+R_n(x),$$

其中

$$R_n(x)=\frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x}(x-t)^n f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t,\quad a<x<b.$$

**证明**

**定理 6.15 (带积分余项的 Taylor 公式)**

设函数 $f$ 在开区间 $(a,b)$ 上有 $n+1$ 阶连续导函数, 则对于任意 $x_0\in(a,b)$ 有

$$f(x)=f(x_0)+\frac{1}{1!}f^{(1)}(x_0)(x-x_0)+\cdots+\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n+R_n(x),$$

其中

$$R_n(x) = \frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x} (x-t)^n f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t\ (a < x < b).$$

## 6.3.4 换元积分法

计算 Riemann 积分时, 也可以直接使用换元法, 但这时需要连带着改变积分上限和下限.

**定理 6.16 (Riemann 积分的换元法)**

设函数 $f(x)$ 在区间 $I$ 上连续, $a, b \in I$, 函数 $g(t)$ 在区间 $[a_1, b_1]$ 上有连续的导函数. 若 $g([a_1, b_1]) \subseteq I$, 且 $g(a_1) = a$, $g(b_1) = b$, 则

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{a_1}^{b_1} f[g(t)]\,\mathrm{d}g(t).$$

**证明** 设 $F(x)$ 是 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的一个原函数. 由链式法则可知

$$F[g(t)]' = F'[g(t)]g'(t) = f[g(t)]g'(t).$$

因此 $F[g(t)]$ 是 $f[g(t)]g'(t)$ 的一个原函数. 由 Newton-Leibniz 公式可知

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a) = F[g(b_1)] - F[g(a_1)] = F[g(t)]\Big|_{a_1}^{b_1} = \int_{a_1}^{b_1} f[g(t)]\,\mathrm{d}g(t).$$ ■

我们已经在例 (6.9) 中用 Newton-Leibniz 公式计算了圆的面积公式. 下面我们用换元法重新计算一下这个 Riemann 积分.

**例 6.17** 计算以下 Riemann 积分

$$\int_0^r \sqrt{r^2 - x^2}\,\mathrm{d}x, \quad r > 0.$$

**解** $\boxed{\text{解法二}}$ 令 $x = r\sin t$. 当 $t$ 从 0 变动到 $\pi/2$ 时, $x$ 从 0 变动到 $r$. 由例 (6.16) 可知

$$\text{原式} = \int_0^{\pi/2} \sqrt{r^2 - r^2\sin^2 t}\,\mathrm{d}r\sin t = r^2\int_0^{\pi/2}\cos^2 t\,\mathrm{d}t = \frac{\pi r^2}{4}.$$ ■

从以上例子可以看出, 用换元法计算 Riemann 积分时不需要换回原来的变量 (但需要改变积分限). 因此直接用换元法计算 Riemann 也比先求不定积分便利. 下面再看一个例子.

**例 6.18** 计算以下 Riemann 积分

$$\int_0^{\pi/4} \frac{\mathrm{d}x}{\cos x}.$$

**解** 令 $t = \sin x$. 于是

$$\begin{aligned}\text{原式} &= \int_0^{\pi/4} \frac{\mathrm{d}\sin x}{1-\sin^2 x} = \int_0^{\pi/4}\frac{\mathrm{d}t}{1-t^2} = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/4}\left(\frac{1}{1+t} + \frac{1}{1-t}\right)\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right|\Bigg|_0^{\pi/4}\\ &= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right|\Bigg|_0^{\pi/4} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+1/\sqrt{2}}{1-1/\sqrt{2}}\right| = \ln\left(\sqrt{2}+1\right).\end{aligned}$$

利用换元法我们可以得到一些简单但有用的命题.

**命题 6.13**

设 $f(x)$ 是周期为 $T$ 的连续周期函数. 则
$$\int_a^{a+T} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^T f(x)\,\mathrm{d}x, \quad a \in \mathbb{R}.$$

**证明** 令 $t = x - T$. 当 $x$ 从 $T$ 变动到 $a + T$ 时, $t$ 从 0 变动到 $a$. 于是
$$\int_T^{a+T} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^T f(t+T)\,\mathrm{d}(t+T) = \int_0^T f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^T f(x)\,\mathrm{d}x.$$
由 Riemann 积分的可加性可知
$$\begin{aligned}\int_a^{a+T} f(x)\,\mathrm{d}x &= \int_a^0 f(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^T f(x)\,\mathrm{d}x + \int_T^{a+T} f(x)\,\mathrm{d}x\\ &= \int_a^0 f(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^T f(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^T f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^T f(x)\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$
■

**注** 以上命题表明, 周期函数在任一长度为最小正周期的区间上的积分值相等.

**命题 6.14**

设函数 $f(x)$ 在 $[-a, a]$ 上连续. 则
$$\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = \begin{cases} 0, & f(x) \text{ 是一个奇函数} \\ 2\displaystyle\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x, & f(x) \text{ 是一个偶函数} \end{cases}.$$

**证明** (i) 当 $f(x)$ 是一个奇函数时. 令 $t = -x$. 当 $x$ 从 $-a$ 变动到 $a$ 时, $t$ 从 $a$ 变动到 $-a$.
$$\int_{-a}^a f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^{-a} f(-t)\,\mathrm{d}(-t) = \int_a^{-a} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^{-a} f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_{-a}^a f(x)\,\mathrm{d}x.$$
于是可知
$$\int_{-a}^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0.$$
(ii) 当 $f(x)$ 是一个偶函数时. 令 $t = -x$. 当 $x$ 从 $-a$ 变动到 0 时, $t$ 从 $a$ 变动到 0.
$$\int_{-a}^0 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^0 f(-t)\,\mathrm{d}(-t) = -\int_a^0 f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^a f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x.$$
于是可知
$$\int_{-a}^a f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-a}^0 f(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x = 2\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x.$$
■

以上两个命题在几何直观上都是十分显然的. 但需要注意命题成立的前提是函数在区间上连续. 我们还可以用换元法可以证明例 (6.16) 中由几何直观得到的结论.

**例 6.19** 对于任一 $m \in \mathbb{N}^*$ 都有
$$\int_0^{\pi/2} \cos^m x\,\mathrm{d}x = \int_0^{\pi/2} \sin^m x\,\mathrm{d}x.$$

**证明** 令 $x = \pi/2 - t$. 当 $x$ 从 0 变动到 $\pi/2$ 时, $t$ 从 $\pi/2$ 变动到 0. 于是
$$\int_0^{\pi/2} \cos^m x\,\mathrm{d}x = \int_{\pi/2}^0 \cos^m\left(\frac{\pi}{2} - t\right)\mathrm{d}\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = -\int_{\pi/2}^0 \sin^m t\,\mathrm{d}t = \int_0^{\pi/2} \sin^m x\,\mathrm{d}x.$$
■

**例 6.20** 设函数 $f(x)$ 在开区间 $I$ 上连续. 若 $a, b \in I$, 且 $a < b$. 则
$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\int_a^b [f(x+h) - f(x)]\,\mathrm{d}x = f(b) - f(a).$$

**证明**

以上例题为我们提出了一个重要问题: 极限号和积分号的交换问题.

### 6.3.5 数值积分简介

到目前为止, 我们计算 Riemann 积分的方法都归结为使用 Newton-Leibniz 公式.
在此我们只介绍几种数值积分的方法, 目的是让大家初步了解数值积分的思想.
矩形法则、梯形法则和抛物线法则.
先来看矩形法则.
先来看梯形法则.
我们把以上讨论总结为以下定理.

**定理 6.17**

设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有二阶连续导数. 令

$$M = \max_{a\le x\le b}|f''(x)|,\quad x_i = a+\frac{i}{n}(b-a),\quad i=0,1,2,\cdots,n.$$

则

$$\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x-\left(\frac{y_0+y_n}{2}+\sum_{i=1}^{n-1}y_i\right)\frac{b-a}{n}\right|\le\frac{(b-a)^3}{12n^2}M.$$

最后介绍抛物线法则.

**定理 6.18 (Simpson 法则)**

**证明**

# 6.4 简单的几何计算

## 6.4.1 几种计算平面图形面积的方法

下面我们来介绍一下平面图形面积的一般计算方法. 我们已经知道, 若函数 $f(x) \geq 0$, 则直线 $x = a, x = b, x$ 轴和曲线 $y = f(x)$ 围成的曲边梯形面积并定义为

$$S = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

令 $g(x) = -f(x)$, 则 $y = g(x)$ 与直线 $x = a, x = b, x$ 轴围成的曲边梯形与上面那个曲边梯形是全等的, 因此面积相等. 因此 $y = g(x)$ 的曲边梯形面积为

$$S = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_a^b -f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

若函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 且满足 $f(x) \geq g(x)$ $(\forall x \in [a,b])$ 则直线 $x = a, x = b$ 和曲线 $y = f(x)$, $y = g(x)$ 围成的图形面积为

$$S = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b [f(x) - g(x)]\,\mathrm{d}x.$$

容易验证这个结论成立对 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的非负性没有要求.

有时候, 我们可以以 $y$ 轴为 ‘‘基准计算面积. 若 $f(y)$ 在 $[a,b]$ 非负, 则直线 $y = a, y = b, y$ 轴和曲线 $x = f(y)$ 围成的曲边梯形面积为

$$S = \int_a^b f(y)\,\mathrm{d}y.$$

其余结论也类似. 在实际计算时需要灵活运用以上结论, 有时候还需要用一些初等平面几何的知识. 下面看一个例子.

**例 6.21** 求抛物线 $y^2 = 2x$ 与直线 $x - y = 4$ 所围成的区域的面积, 如图6.5所示.

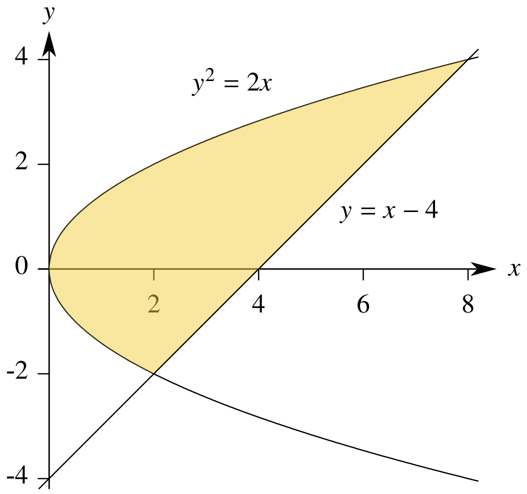



**图 6.5:** 抛物线和直线围成的面积

**解** 联立 $y^2 = 2x$ 和 $x - y = 4$ 得

$$\begin{cases} y^2 = 2x \\ x - y = 4 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 8 \\ y = 4 \end{cases} \text{或} \begin{cases} x = 2 \\ y = -2 \end{cases}$$

因此它们抛物线 $y^2 = 2x$ 与直线 $x - y = 4$ 交于点 $A(8,4)$ 和 $B(2,-2)$.

$\boxed{\text{解法一}}$ 如图, 过 $B$ 作 $x$ 轴的垂线, 把所求的区域面积分割成了两部分. 用 Riemann 积分分别求它们的面积:

$$S = S_1 + S_2 = 2\int_0^2 \sqrt{2x}\,\mathrm{d}x + \int_2^8 \left[\sqrt{2x} - (x-4)\right]\mathrm{d}x = 2\sqrt{2}\cdot\frac{2}{3}x^{3/2}\Big|_0^2 + \sqrt{2}\cdot\frac{2}{3}x^{3/2} - \frac{1}{2}x^2 + 4x\Big|_2^8$$

$$= 2\sqrt{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot 2^{3/2} + \sqrt{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot 8^{3/2} - \frac{1}{2}\cdot 8^2 + 4\cdot 8 - \sqrt{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot 2^{3/2} + \frac{1}{2}\cdot 2^2 - 4\cdot 2 = 18.$$

解法二 如图, 所求区域的面积等于它们对应的反函数围成的区域面积. 于是

$$S = \int_{-2}^{4}\left(y + 4 - \frac{1}{2}y^2\right)\mathrm{d}\,y = \frac{1}{2}y^2 + 4y - \frac{1}{6}y^3\Big|_{-2}^{4}$$
$$= \left(\frac{1}{2}\cdot 4^2 + 4\cdot 4 - \frac{1}{6}\cdot 4^3\right) - \left(\frac{1}{2}\cdot 2^2 - 4\cdot 2 + \frac{1}{6}\cdot 2^3\right) = 18.$$ ■

有时候用参数方程计算面积更方便. 设函数 $y = f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积. 若它可以写成参数方程

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}, \quad \alpha \le t \le \beta,$$

其中 $x(\alpha) = a, x(\beta) = b$. 则

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\,x = \int_\alpha^\beta y(t)\,\mathrm{d}\,x(t) = \int_\alpha^\beta y(t)x'(t)\,\mathrm{d}\,t.$$

下面我们分别用显式方程和参数方程来计算椭圆的面积.

**例 6.22** 求以下椭圆内部的面积

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

**解** 解法一 把椭圆方程化成显式函数

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}, \quad -a \le x \le a.$$

于是椭圆内部的面积为

$$S = \frac{4b}{a}\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\,\mathrm{d}\,x = \frac{4b}{a}\int_0^{\pi/2}\sqrt{a^2 - a^2\sin^2 t}\,\mathrm{d}\,a\sin t = 4ab\int_0^{\pi/2}\cos^2 t\,\mathrm{d}\,t = 4ab\cdot\frac{\pi}{4} = ab\pi.$$ ■

解法二 把椭圆的第一象限部分化成参数方程

$$\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases}, \quad -\frac{\pi}{2} \le t \le 0.$$

于是椭圆的面积为

$$S = 4\int_{-\pi/2}^{0} y(t)x'(t)\,\mathrm{d}\,t = -4ab\int_{-\pi/2}^{0}\sin^2 t\,\mathrm{d}\,t = 4ab\int_0^{\pi/2}\sin^2 t\,\mathrm{d}\,t = 4ab\cdot\frac{\pi}{4} = ab\pi.$$ ■

如果参数方程表示的曲线是封闭的, 我们还有以下命题.

**命题 6.15**

设一条没有自交点的封闭曲线的参数方程为

$$\Gamma : \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}, \quad \alpha \le t \le \beta.$$

其中 $x(t)$ 和 $y(t)$ 分段连续可导. 如图6.6, 当 $t$ 从 $\alpha$ 变动到 $\beta$ 时, 点 $(x(t), y(t))$ 从 $A$ 点出发按逆时针方向遍历曲线一周回到 $A$, 其中 $A$ 的横坐标 $a$ 是 $x(t)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上的最小值. 则 $\Gamma$ 围成的图形面积为

$$S = -\int_\alpha^\beta y(t)x'(t)\,\mathrm{d}\,t = \int_\alpha^\beta x(t)y'(t)\,\mathrm{d}\,t = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta [x(t)y'(t) - y(t)x'(t)]\,\mathrm{d}\,t.$$

**证明** 由题意可知 $x(\alpha) = x(\beta) = a$. 设 $x(t)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上的最大值为 $b$. 取一点 $B$ 使得 $B$ 的横坐标为 $b$ 设 $\gamma \in [\alpha,\beta]$ 满足 $x(\gamma) = b$. 设 $A$ 到 $B$ 的曲线方程为 $y = f_1(x)$, $B$ 到 $A$ 的曲线方程为 $y = f_2(x)$ $(a \le x \le b)$, 则在 $[a,b]$ 上有

$f_2(x) \ge f_1(x)$. 于是封闭曲线围成的图形面积为

$$S = \int_a^b f_2(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^b f_1(x)\,\mathrm{d}x = \int_\beta^\gamma y(t)\,\mathrm{d}x(t) - \int_\alpha^\gamma y(t)\,\mathrm{d}x(t) = -\int_\alpha^\beta y(t)\,\mathrm{d}x(t) = -\int_\alpha^\beta y(t)x'(t)\,\mathrm{d}t.$$

用分部积分法可得

$$S = -x(t)y(t)\Big|_\alpha^\beta + \int_\alpha^\beta x(t)\,\mathrm{d}y(t) = \int_\alpha^\beta x(t)\,\mathrm{d}y(t) = \int_\alpha^\beta x(t)y'(t)\,\mathrm{d}t.$$

于是可知

$$S = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta [x(t)y'(t) - y(t)x'(t)]\,\mathrm{d}t.$$

**注** 类似可证, $A$ 的横坐标如果是 $[\alpha,\beta]$ 上的最大值, 命题也成立.

**注** 以上命题是 Green 公式的一个特例.

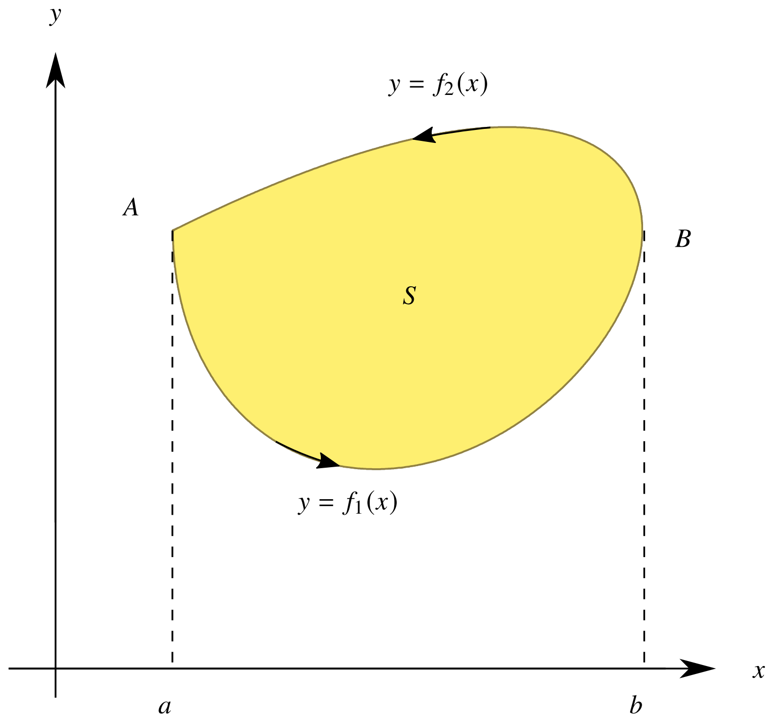



图 6.6: Green 定理特例.

我们用上面的命题再来算一下椭圆的面积.

**例 6.23** 求以下椭圆内部的面积

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

**解** 解法三 这个椭圆的参数方程为

$$\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases}, \quad 0 \le t \le 2\pi.$$

当 $t$ 从 0 变动到 $2\pi$ 时椭圆上的点从 $(a,0)$ 出发按逆时针方向遍历了椭圆一周. 由命题6.15可知椭圆围成的面积为

$$S = \int_0^{2\pi} x(t)y'(t)\,\mathrm{d}t = ab\int_0^{2\pi}\cos^2 t\,\mathrm{d}t = \frac{ab}{2}(\cos t\sin t + t)\Big|_0^{2\pi} = ab\pi. \qquad \blacksquare$$

下面介绍用极坐标表示的曲线围成的图形面积的计算方法. 我们知道圆 $r = a$ 和射线 $\theta = \alpha, \theta = \beta$ 围成的图形是一个扇形, 它的面积为

$$S = \frac{\beta - \alpha}{2\pi}\cdot \pi a^2 = \frac{1}{2}a^2(\beta - \alpha).$$

下面来看一般情况. 设极坐标中的曲线 $r = r(\theta)$, 为了计算它与射线 $\theta = \alpha, \theta = \beta$ 围成的面积, 我们可以仿照直角坐标中定义曲边梯形面积的做法. 对 $[\alpha, \beta]$ 作分割

$$\pi : \alpha = \theta_0 < \theta_1 < \cdots < \theta_n = \beta.$$

在小区间 $[\theta_{i-1}, \theta_i]$ 中任取一点 $\xi_i$. 令 $\Delta\theta_i = \theta_i - \theta_{i-1}$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$. 于是夹在 $\theta = \theta_{i-1}, \theta = \theta_i$ 上半径为 $r(\xi_i)$ 的小扇形面积为

$$\frac{1}{2} r^2(\xi_i)\Delta\theta_i, \quad i = 1, 2, \cdots, n.$$

作 Riemann 和得

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} r^2(\xi_i)\Delta\theta_i.$$

类似地, 令分割的宽度 $|\pi| = \max_{1\le i\le n} \Delta\theta_i \to 0$, 我们把这个极限 (如果存在) 定义为曲线 $r = r(\theta)$ 与射线 $\theta = \alpha$, $\theta = \beta$ 围成的面积:

$$S := \frac{1}{2}\lim_{|\pi|\to 0}\sum_{i=1}^{n} r^2(\xi_i)\Delta\theta_i = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} r^2(\theta)\,\mathrm{d}\,\theta.$$

下面我们来看一个例子.

**例 6.24** 如图6.7, 求以下曲线所围成的区域面积:

$$r = a(1 + \cos\theta), \quad a > 0.$$

**解** 曲线关于 $x$ 轴对称, 因此所求的面积为

$$\begin{aligned} S &= 2\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\pi} a^2(1+\cos\theta)^2\,\mathrm{d}\,\theta = a^2\int_0^{\pi}\left(1 + 2\cos\theta + \cos^2\theta\right)\mathrm{d}\,\theta \\ &= a^2\theta + 2a^2\sin\theta + \frac{a^2}{2}\cos\theta\sin\theta + \frac{a^2}{2}\theta\Big|_0^{\pi} = \frac{3\pi}{2}a^2. \end{aligned}$$

■

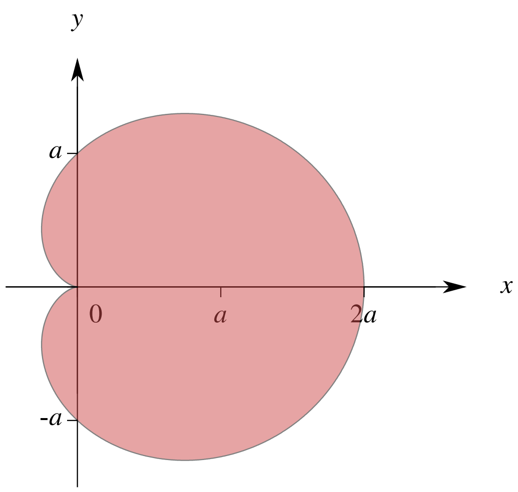



**图 6.7:** $a = 1$ 时的心脏线示意图.

### 6.4.2 曲线的弧长

下面来讨论曲线弧长的计算方法. 设直角坐标平面上的曲线的参数方程为

$$\Gamma : \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}, \quad \alpha \le t \le \beta,$$

其中 $x(t), y(t)$ 连续可导. 为了书写便利, 我们可以把以上参数方程写成向量形式 $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t)$ $(\alpha \le t \le \beta)$. 设 $A = \boldsymbol{r}(\alpha)$ 和 $B = \boldsymbol{r}(\beta)$ 分别是 $\Gamma$ 的起点和终点. 我们沿着 $A$ 到 $B$ 的方向依次取 $n+1$ 个点, 于是我们得到了一个分割:

$$\Pi : A = A_0, A_1, A_2, \cdots, A_n = B.$$

于是得到了 $n$ 条线段 $A_{i-1}A_i$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$. 设 $A_i$ 对应着参数值 $t_i$ $(i = 0, 1, 2, \cdots, n)$, 则我们得到了 $[\alpha, \beta]$ 的一个分割:

$$\pi : \alpha = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = \beta.$$

这表明分割 $\Pi$ 确定了 $\pi$, 反之亦然. 因此

$$|A_{i-1}A_i| = |\boldsymbol{r}(t_i) - \boldsymbol{r}(t_{i-1})| = \sqrt{[x(t_i) - x(t_{i-1})]^2 + [y(t_i) - y(t_{i-1})]^2}, \quad i = 1, 2, \cdots, n.$$

由 Lagrange 中值定理可知, 存在 $\xi_i, \eta_i \in (t_{i-1}, t_i)$ 使得

$$x(t_i) - x(t_{i-1}) = x'(\xi_i)\Delta t_i, \quad y(t_i) - y(t_{i-1}) = y'(\eta_i)\Delta t_i, \quad i = 1, 2, \cdots, n.$$

其中 $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$. 于是

$$|A_{i-1}A_i| = \sqrt{[x'(\xi_i)]^2] + [y'(\eta_i)]^2]}, \quad i = 1, 2, \cdots, n.$$

由于 $x'(t), y'(t)$ 都连续, 因此存在 $K > 0$ 使得

$$|A_{i-1}A_i| \le \Delta t_i \le K|\pi|, \quad i = 1, 2, \cdots, n.$$

因此 $|\Pi| \le K|\pi|$. 这表明当 $|\pi| \to 0$ 时, $|\Pi| \to 0$. 于是我们考虑先把 $|A_{i-1}A_i|$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$ 都加起来

$$\sum_{i=1}^{n} |A_{i-1}A_i| = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{[x'(\xi_i)]^2] + [y'(\eta_i)]^2]}.$$

然后令 $|\pi| \to 0$. 若极限存在, 则把极限定义为弧长. 下面我们需要把这个极限转化为 Riemann 积分.

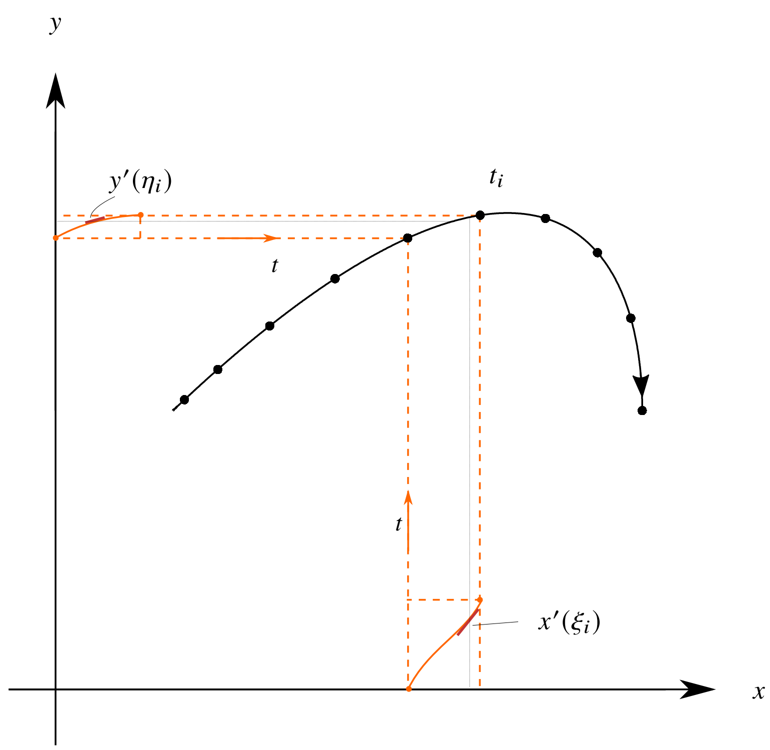



**图 6.8:** 弧长的黎曼和.

**命题 6.16**

设函数 $x(t), y(t)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上连续可导, 则

$$\lim_{|\pi|\to 0}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{[x'(\xi_i)]^2+[y'(\eta_i)]^2}\Delta t_i=\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2}\,\mathrm{d}t.$$

其中 $\xi_i$ 和 $\eta_i$ 的含义如前所述.

**证明** 令上式右侧的积分值为 $I$. 由 Riemann 积分的定义可知, 对于任一 $\varepsilon>0$, 都存在 $\delta_1>0$ 使得当 $|\pi|<\delta_1$ 时

$$\left|I-\sum_{i=1}^{n}\sqrt{[x'(\xi_i)]^2+[y'(\xi_i)]^2}\Delta t_i\right|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

另一方面, 由于 $y(t)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上连续可导, 故 $y'(t)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上连续, 因此 $y'(t)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上一致连续. 因此对于上述给定的 $\varepsilon$ 都存在 $\delta_2$ 使得当 $|\pi|<\delta_2$ 时

$$|y'(\xi_i)-y'(\eta_i)|<\frac{\varepsilon}{2(\beta-\alpha)},\quad i=1,2,\cdots,n.$$

由向量的三角不等式可知

$$\begin{aligned}&\sqrt{[x'(\xi_i)]^2+[y'(\xi_i)]^2}-\sqrt{[x'(\xi_i)]^2+[y'(\eta_i)]^2}\le\sqrt{[x'(\xi_i)-x'(\xi_i)]^2+[y'(\xi_i)-y'(\eta_i)]^2}\\&=|y'(\xi_i)-y'(\eta_i)|,\quad i=1,2,\cdots,n.\end{aligned}$$

由以上讨论可知, 当 $|\pi|<\min\{\delta_1,\delta_2\}$ 时

$$\begin{aligned}&\left|I-\sum_{i=1}^{n}\sqrt{[x'(\xi_i)]^2+[y'(\eta_i)]^2}\Delta t_i\right|\\
=&\left|I-\sum_{i=1}^{n}\sqrt{[x'(\xi_i)]^2+[y'(\xi_i)]^2}\Delta t_i+\sum_{i=1}^{n}\sqrt{[x'(\xi_i)]^2+[y'(\xi_i)]^2}\Delta t_i-\sum_{i=1}^{n}\sqrt{[x'(\xi_i)]^2+[y'(\eta_i)]^2}\Delta t_i\right|\\
\le&\left|I-\sum_{i=1}^{n}\sqrt{[x'(\xi_i)]^2+[y'(\xi_i)]^2}\Delta t_i\right|+\sum_{i=1}^{n}\left|\sqrt{[x'(\xi_i)]^2+[y'(\xi_i)]^2}-\sqrt{[x'(\xi_i)]^2+[y'(\eta_i)]^2}\right|\Delta t_i\\
\le&\left|I-\sum_{i=1}^{n}\sqrt{[x'(\xi_i)]^2+[y'(\xi_i)]^2}\Delta t_i\right|+\sum_{i=1}^{n}|y'(\xi_i)-y'(\eta_i)|\Delta t_i<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2(\beta-\alpha)}\sum_{i=1}^{n}\Delta t_i=\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.\end{aligned}$$

于是可知

$$\lim_{|\pi|\to 0}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{[x'(\xi_i)]^2+[y'(\eta_i)]^2}\Delta t_i=I.$$

■

于是我们得到了平面内曲线的弧长公式:

$$S(\Gamma)=\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2}\,\mathrm{d}t.$$

对于显式曲线 $y=f(x)$ $(a\le x\le b)$. 可以把它看作参数方程

$$\begin{cases}x=t\\ y=f(t)\end{cases},\quad a\le t\le b.$$

于是它的弧长公式为

$$S(\Gamma)=\int_{a}^{b}\sqrt{1+[f'(t)]^2}\,\mathrm{d}t.$$

下面来看几个例子.

**例 6.25** 设星形线:

$$\Gamma: x=a\cos^3 t,\quad y=a\sin^3 t,\quad 0\le t\le 2\pi,\ a>0.$$

求它的弧长.

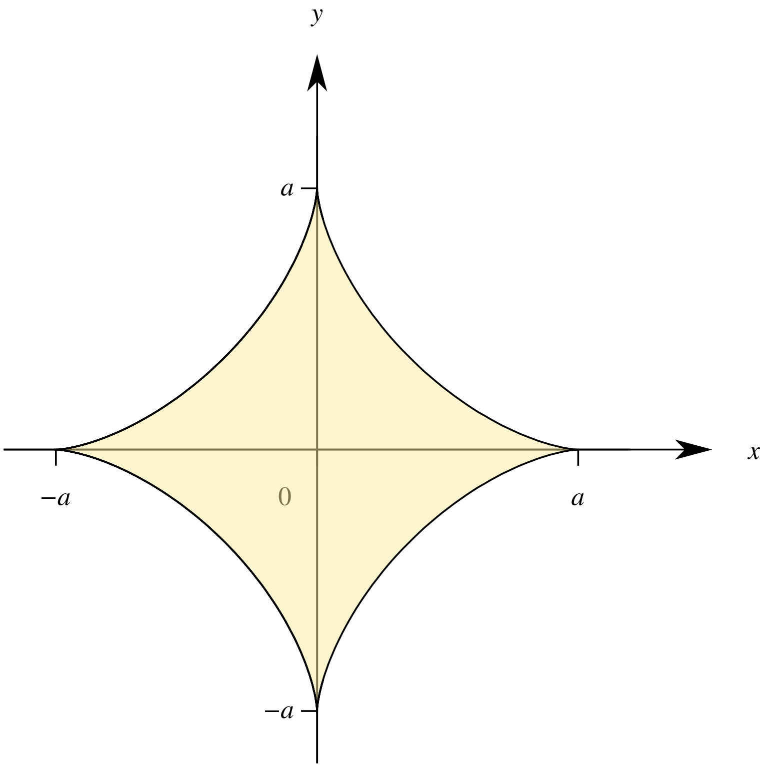



图 6.9: 星形线示意图.

**解** 由于

$$x'(t) = -3a\cos^2 t\sin t, \quad y'(t) = 3a\sin^2 t\cos t.$$

如图6.9, 我们只需计算第一象限的弧长, 然后在乘以 4. 于是 $\Gamma$ 的弧长为

$$S(\Gamma) = 4\int_0^{\pi/2}\sqrt{9a^2\cos^4 t\sin^2 t + 9a^2\sin^4 t\cos^2 t}\,\mathrm{d}\,t = 12a\int_0^{\pi/2}\cos t\sin t\,\mathrm{d}\,t = 6a\sin^2 t\Big|_0^{\pi/2} = 6a.$$ ■

**例 6.26** 求半径为 $r$ 的圆的周长.

**解** 设这个圆的参数方程为

$$\begin{cases} x = r\cos t \\ y = r\sin t \end{cases}, \quad 0 \le t \le 2\pi.$$

由于

$$x'(t) = -r\sin t, \quad y'(t) = r\cos t.$$

于是它的周长为

$$S(\Gamma) = 4\int_0^{\pi/2}\sqrt{r^2\sin^2 t + r^2\cos^2 t}\,\mathrm{d}\,t = 4r\int_0^{\pi/2} 1\,\mathrm{d}\,t = 4rt\Big|_0^{\pi/2} = 2\pi r.$$ ■

**例 6.27** 设椭圆

$$\Gamma : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad a > b > 0.$$

求它的周长.

**解** 这个椭圆的参数方程为

$$\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases}, \quad 0 \le t \le 2\pi.$$

由于

$$x'(t) = -a\sin t, \quad y'(t) = b\cos t.$$

于是它的周长为

$$S(\Gamma) = 4\int_0^{\pi/2} \sqrt{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}\,\mathrm{d}\,t = 4\int_0^{\pi/2} \sqrt{a^2 - \left(a^2 - b^2\right)\cos^2 t}\,\mathrm{d}\,t.$$

令 $\varepsilon = \sqrt{a^2 - b^2}/a$, 则

$$S(\Gamma) = 4a\int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - \varepsilon\cos^2 t}\,\mathrm{d}\,.$$

■

**注** 函数 $\sqrt{1 - \varepsilon\cos^2 t}$ 的原函数不是初等函数, 因此椭圆没有像圆一样简洁的周长公式. 令 $x = \pi/2 - t$, 则

$$\int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - \varepsilon\cos^2 t}\,\mathrm{d} = \int_{\pi/2}^0 \sqrt{1 - \varepsilon\cos^2\left(\frac{\pi}{2} - t\right)}\,\mathrm{d}\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - \varepsilon\sin^2 t}\,\mathrm{d}\,t.$$

我们称积分 $\int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - \varepsilon\sin^2 t}\,\mathrm{d}\,t$ 为**椭圆积分** (elliptic integral), 其中 $\varepsilon$ 是离心率.

对于空间中的曲线

$$\Gamma : \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}, \quad \alpha \le t \le \beta.$$

用类似的方法可以得到弧长计算公式

$$S(\Gamma) = \int_\alpha^\beta \sqrt{[x'(t)]^2 + ['(t)]^2 + [z'(t)]^2}\,\mathrm{d}\,t.$$

如果曲线是用极坐标方程 $r = r(\theta)$ $(\alpha \le \theta \le \beta)$ 给出的, 则它的直角坐标参数方程为

$$\begin{cases} x = r(\theta)\cos\theta \\ y = r(\theta)\sin\theta \end{cases}, \quad \alpha \le \theta \le \beta.$$

由于

$$x'(\theta) = r'(\theta)\cos\theta - r(\theta)\sin\theta, \quad y'(\theta) = r'(\theta)\sin\theta + r(\theta)\cos\theta.$$

于是就可以得到弧长为

$$S = \int_\alpha^\beta \sqrt{r^2(\theta) + [r'(\theta)]^2}\,\mathrm{d}\,\theta.$$

下面看一个例子.

**例 6.28** 设心脏线

$$\Gamma : r = a(1 + \cos\theta), \quad a > 0.$$

求它的弧长.

**解** 由于 $r'(\theta) = -a\sin\theta$. 于是可知它的弧长为

$$\begin{aligned} S(\Gamma) &= 2\int_0^\pi \sqrt{a^2(1+\cos\theta)^2 + a^2\sin^2\theta}\,\mathrm{d}\,\theta = 2a\int_0^\pi \sqrt{2(1+\cos\theta)}\,\mathrm{d}\,\theta = 2a\int_0^\pi \sqrt{4\cos^2\frac{\theta}{2}}\,\mathrm{d}\,\theta \\ &= 8a\int_0^\pi \cos\frac{\theta}{2}\,\mathrm{d}\,\frac{\theta}{2} = 8a\sin\frac{\theta}{2}\Big|_0^\pi = 8a. \end{aligned}$$

■

### 6.4.3 空间区域的体积

下面来讨论体积的计算. 定义空间中区域体积的方法和定义平面中的曲边梯形面积完全类似. 设 $\Omega$ 是介于平面 $x=a$ 和 $y=b$ 之间的空间区域. 作分割

$$\pi : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b.$$

则 $\Omega$ 被平面 $x = x_i$ $(i = 1, 2, \cdots, n-1)$ 分割成了 $n$ 个 "薄片". 设平面 $x = t$ 截 $\Omega$ 的截面面积为 $g(t)$ $(a < t < b)$. 任取 $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$ 则可以得到 Riemann 和

$$\sum_{i=1}^{n} g(\xi_i)\Delta x_i.$$

它可以看作这些薄片的体积和的近似值. 若 $g(x)$ 在 $[a, b]$ 上 Riemann 可积, 则我们用这个 Riemann 和对应的 Riemann 积分定义 $\Omega$ 的体积.

$$V(\Omega) = \lim_{|\pi|\to 0} \sum_{i=1}^{n} g(\xi_i)\Delta x_i = \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

下面来看一个例子.

**例 6.29** 求以下两个圆柱体相交部分 $\Omega$ 的体积:

$$x^2 + y^2 \le a^2, \quad x^2 + z^2 \le a^2, \quad a > 0.$$

**解** 只需计算 $\Omega$ 在第一卦限部分 $\Omega_1$ 的体积, $\Omega$ 的体积是 $\Omega$ 的 8 倍. 容易知道, 平面 $x = t$ $(0 \le t \le a)$ 截 $\Omega_1$ 的截面一个边长为 $\sqrt{a^2 - t^2}$ 的正方形. 因此它的面积为

$$g(t) = a^2 - t^2.$$

于是可知 $\Omega$ 的体积为

$$V(\Omega) = 8V(\Omega_1) = 8\int_0^a \left(a^2 - t^2\right)\mathrm{d}t = 8a^2 t - \frac{8}{3}t^3\Big|_0^a = \frac{16}{3}a^3. \qquad \blacksquare$$

**注** 上例中的 $\Omega$ 在中国古代被称为**牟合方盖**, 在西方称为 Steinmetz solid. 刘徽在研究球的体积计算问题时得出了球和牟合方盖体积比是 $\pi : 4$ 的结论. 古希腊数学家 Archimedes 和我国数学家祖冲之分别用不同的方法得出了牟合方盖的体积公式.

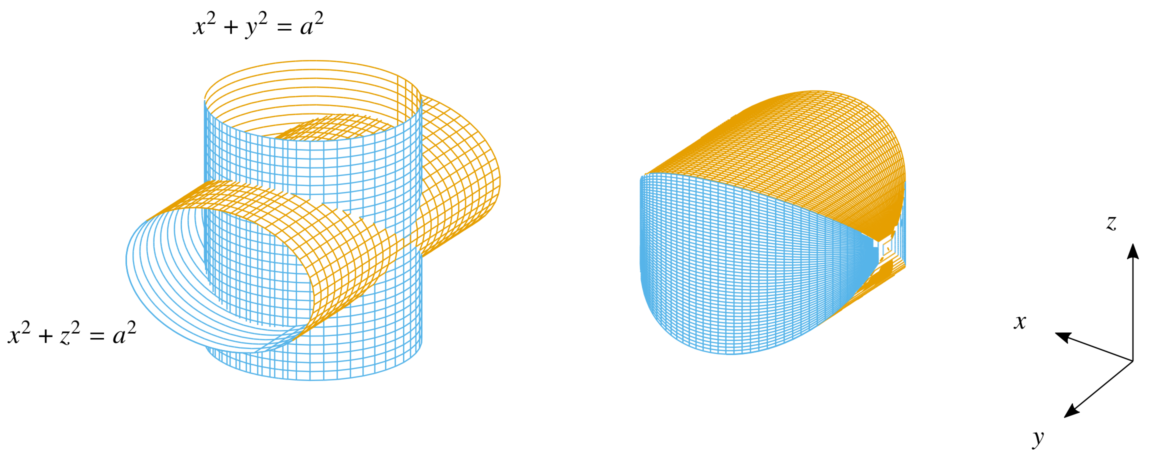



**图 6.10:** 牟合方合示意图.

对于旋转体, 可以有更简便的计算方法. 设直角坐标平面上的曲线 $\Gamma : y = f(x)$. 它在 $[a, b]$ 上非负且连续. 令 $\Gamma$ 绕

$x$ 轴旋转一周得到旋转体 $\Omega$. 我们来计算 $\Omega$ 的体积. 容易知道, 平面 $x=t$ $(a \le t \le b)$ 在 $\Omega$ 上的截面面积为

$$g(t)=\pi f^2(t).$$

于是可知 $\Omega$ 的体积为

$$V(\Omega)=\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t=\pi\int_a^b f^2(t)\,\mathrm{d}t.$$

下面看一个例子.

**例 6.30** 求半径为 $r$ 的球的体积.

**解** 半径为 $r$ 的球是由以下半圆绕 $x$ 轴旋转得到的:

$$y=\sqrt{r^2-x^2},\quad -r\le x\le r.$$

于是可知球的体积为

$$V=\pi\int_{-r}^{r}\left(r^2-x^2\right)\mathrm{d}x=\pi r^2x-\frac{\pi}{3}x^3\bigg|_{-r}^{r}=\frac{4}{3}\pi r^3.$$ ■

**注** 以上结果和我们熟悉的球的体积公式一致.

## 6.4.4 空间曲面的面积

最后我们来讨论以下空间中曲面面积. 这是个一个很复杂的主题, 我们暂时只讨论最简单的情况: 旋转曲面. 我们可以采用研究曲线弧长类似的方法.

设直角坐标平面上的曲线

$$\Gamma:\begin{cases}x=x(t)\\ y=y(t)\end{cases},\quad \alpha\le t\le\beta.$$

现在 $\Gamma$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上非负且连续可导. 把 $\Gamma$ 绕 $x$ 轴旋转一周得到旋转曲面 $P$.

于是我们就得到了 $P$ 的面积公式

$$S(P)=2\pi\int_\alpha^\beta y(t)\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2}\,\mathrm{d}t.$$

如果 $\Gamma$ 的方程是显式方程 $y=f(x)$ $(a\le x\le b)$, 则旋转曲面的面积为

$$S(P)=2\pi\int_\alpha^\beta f(x)\sqrt{1+[f'(t)]^2}\,\mathrm{d}x.$$

**例 6.31** 求半径为 $r$ 的球面的面积:

**解** 这个球面是由以下半圆绕 $x$ 轴旋转所得:

$$\begin{cases}x=r\cos t\\ y=r\sin t\end{cases},\quad 0\le t\le\pi.$$

由于

$$x'(t)=-r\sin t,\quad y'(t)=r\cos t$$

于是该球面的面积是

$$S=2\pi\int_0^\pi y(t)\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2}\,\mathrm{d}t=2\pi r^2\int_0^\pi\sin t\,\mathrm{d}t=-2\pi r^2\cos t\bigg|_0^\pi=4\pi r^2.$$ ■

**例 6.32** 求以下椭球面的面积:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{b^2}=1.$$

**解** 这个椭球面是由以下椭圆绕 $x$ 轴旋转所得:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

把它写成参数方程得:

$$\begin{cases} x=a\cos t \\ y=b\sin t \end{cases},\quad 0\le t\le\pi.$$

由于

$$x'(t)=-a\sin t,\quad y'(t)=b\cos t$$

于是该球面的面积是

$$\begin{aligned} S&=2\pi\int_0^\pi y(t)\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2}\,\mathrm{d}\,t=2\pi b\int_0^\pi \sin t\sqrt{a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t}\,\mathrm{d}\,t\\ &=-2\pi b\int_0^\pi\sqrt{a^2-\left(a^2-b^2\right)\cos^2 t}\,\mathrm{d}\cos t=2\pi b\int_\pi^0\sqrt{a^2-\left(a^2-b^2\right)\cos^2 t}\,\mathrm{d}\cos t.\end{aligned}$$

令 $\varepsilon=\sqrt{a^2-b^2}/a$, $u=\cos t$. 由例5.42可知

$$\begin{aligned} S&=2\pi ab\int_{-1}^1\sqrt{1-\varepsilon^2u^2}\,\mathrm{d}\,u=4\pi ab\int_0^1\sqrt{1-\varepsilon^2u^2}\,\mathrm{d}\,u=4\pi ab\left[\frac{1}{2\varepsilon}\arcsin\varepsilon u+\frac{u}{2}\sqrt{1-\varepsilon^2u^2}\Big|_0^1\right]\\ &=\frac{2\pi ab}{\varepsilon}\arcsin\varepsilon+2\pi ab\sqrt{1-\varepsilon^2}=\frac{2\pi ab}{\varepsilon}\arcsin\varepsilon+2\pi b^2.\end{aligned}$$

其中 $\varepsilon$ 是椭圆的离心率. ■

我们已经看到, 求空间 (或平面) 中的曲线弧长和空间中的曲面面积要比求平面上的图形面积和空间中的区域体积麻烦得多.

## 6.5 广义积分初步

由 Riemann 积分的定义和 Riemann 可积的必要条件可知, 一个函数只能在一个有限区间内讨论可积性, 且它在这个有限区间内必须有界. 如果分别放宽这两个条件就可以得到两类广义的 Riemann 积分. 这就是本节要讨论的内容.

### 6.5.1 无穷积分

我们知道指数函数 $f(t)=\mathrm{e}^t$ 在 $[x,0]$ $(x<0)$ 上 Riemann 可积. 如果把 $x$ 看作变量, 则可以得到一个函数

$$F(x)=\int_x^0 \mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t.$$

我们知道 Riemann 积分实际上是定义了一个曲边梯形的面积. 如图**??**, 随着 $x$ 朝 $-\infty$ 变动, 曲边梯形的面积逐渐增大, 但面积的增量越来越小. 我们猜测当 $x\to-\infty$ 时, 面积会 ‘‘收敛’’. 这个想法不难验证.

由 Newton-Leibniz 可知

$$\lim_{x\to-\infty}F(x)=\lim_{x\to-\infty}\int_x^0 \mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t=\lim_{x\to-\infty}\left(\mathrm{e}^0-\mathrm{e}^x\right)=1.$$

因此我们的猜测是正确的, 当 $x\to-\infty$ 时, 变限积分 $F(x)$ 收敛. 于是我们可以把 Riemann 积分的定义 ‘‘放宽’’, 即允许积分限取到 $\pm\infty$.

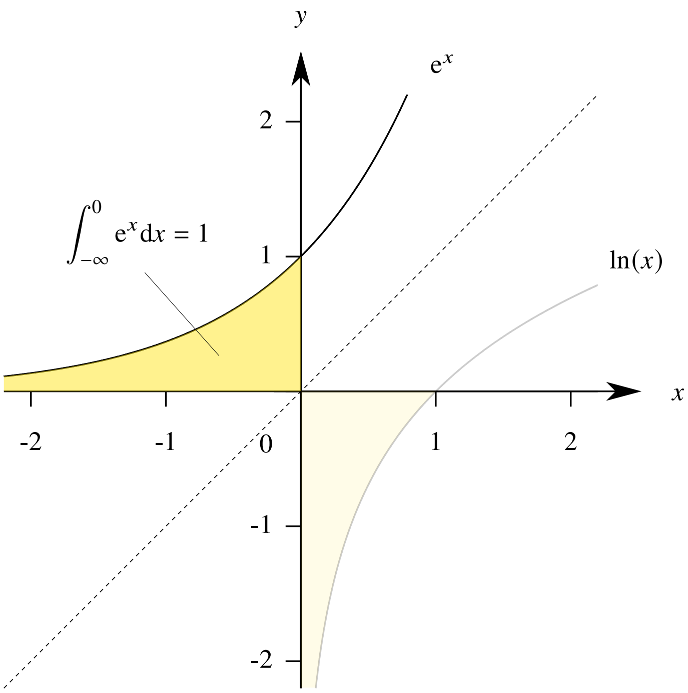



图 6.11: 下限为 $-\infty$ 的无穷积分.

**定义 6.7 (无穷积分)**

设函数 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上有定义. 对于任一 $b>a$ 都有 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积. 若

$$\lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

存在且有限, 则可以引入记号

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x:=\lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

并称以上积分收敛, 此时我们称 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上 Riemann 可积. 否则称以上积分发散. 这样的积分称为**无**

穷积分 (infinite integral). 类似地可以定义积分下限为 $-\infty$ 的情况.

注 即使积分发散 $\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 的记号也可以使用, 只是此时它不是一个数值.

利用可加性, 可以定义积分上限和下限同时取到无穷的无穷积分. 设无穷积分

$$\int_{-\infty}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x, \quad \int_{a}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

若它们都收敛, 则可令

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x := \int_{-\infty}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{a}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

此时我们称 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上 Riemann 可积.

下面来看几个例子.

**例 6.33** 讨论以下无穷积分的敛散性:

$$\int_a^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^p}, \quad a > 0.$$

**解** (i) 当 $p = 1$ 时. 由于

$$\lim_{b\to+\infty} \int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{x} = \lim_{b\to+\infty} (\ln b - \ln a) = +\infty.$$

因此无穷积分发散.

(ii) 当 $p \neq 1$ 时. 由于

$$\lim_{b\to+\infty} \int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{x^p} = \lim_{b\to+\infty} \frac{1}{1-p}\left(b^{1-p} - a^{1-p}\right) = \begin{cases} \dfrac{-a^{1-p}}{1-p}, & p > 1 \\ +\infty, & p < 1 \end{cases}.$$

于是可知, 若 $p > 1$ 则无穷积分收敛, 否则发散. ■

**定理 6.19 (广义积分的 Newton-Leibniz 公式)**

设函数 $f(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 上 Riemann 可积, 且有原函数 $F(x)$, 则

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = F(+\infty) - F(a).$$

其中 $F(+\infty) = \lim_{x\to+\infty} F(x)$. 其它类型的无穷积分也可有类似结论.

**证明**

除了 Newton-Leibniz 公式以外, 分部积分法和换元法等积分的运算性质和技巧对于无穷积分都适用. 我们不再一一讨论.

**例 6.34** 计算以下无穷积分:

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-ax} \cos bx\,\mathrm{d}x, \quad \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-ax} \sin bx\,\mathrm{d}x.$$

**解** 用分部积分法计算得

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-ax} \cos bx\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{b}\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-ax}\,\mathrm{d}\sin bx = \frac{1}{b}\mathrm{e}^{-ax}\sin bx\Big|_0^{+\infty} + \frac{a}{b}\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-ax}\sin bx\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{a}{b}\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-ax}\sin bx\,\mathrm{d}x = -\frac{a}{b^2}\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-ax}\,\mathrm{d}\cos bx \\ &= -\frac{a}{b^2}\mathrm{e}^{-ax}\cos bx\Big|_0^{+\infty} - \frac{a^2}{b^2}\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-ax}\cos bx\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

$$= \frac{a}{b^2} - \frac{a^2}{b^2} \int_0^{+\infty} e^{-ax} \cos bx \, dx.$$

于是

$$\int_0^{+\infty} e^{-ax} \cos bx \, dx = \frac{a}{a^2+b^2}.$$

于是

$$\int_0^{+\infty} e^{-ax} \sin bx \, dx = \frac{b}{a} \int_0^{+\infty} e^{-ax} \cos bx \, dx = \frac{b}{a^2+b^2}.$$ ■

一个普通的 Riemann 积分通过换元可以变为无穷积分, 反之无穷积分在换元后也可能会变为普通的 Riemann 积分. 我们来看一个例子.

**例 6.35** 计算以下无穷积分:

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(a^2+x^2)^{3/2}}, \quad a > 0.$$

**解** 令 $x = a\tan t$. 则 $t = \arctan(x/a)$. 当 $x$ 从 0 变动到 $+\infty$ 时, $t$ 从 0 变动到 $\pi/2$. 于是

$$\text{原式} = \int_0^{\pi/2} \frac{d\,a\tan t}{(a^2+a^2\tan^2 t)^{3/2}} = \frac{1}{a^2}\int_0^{\pi/2} \cos t \, dt = \frac{1}{a^2} \sin t \Big|_0^{\pi/2} = \frac{1}{a^2}.$$ ■

无穷积分在物理中有很多应用.

**例 6.36** 设地球质量为 $M$ kg, 半径 $r$ m. 地面上的一个质量为 $m$ kg 的物体. 求把该物体推离地球至无穷远处所做的功.

**解** 设物体距离地心的距离为 $x$ m. 由万有引力定理可知, 该物体受到的地球引力的大小为

$$|\boldsymbol{F}(x)| = G\frac{mM}{x^2}.$$

其中 $G$ 为万有引力常数. 于是所求的功为

$$W = \int_r^{+\infty} |\boldsymbol{F}(x)| \, dx = \int_r^{+\infty} G\frac{mM}{x^2} \, dx = -\frac{GmM}{x}\Big|_r^{+\infty} = \frac{GmM}{r}.$$ ■

**注** 由以上结论可以计算出 “第二宇宙速度”. 设物体离开地球时的初速度为 $v_0$ m/s. 由于对物体做的功全部来自于初速度 $v_0$ 提供的动能, 故

$$\frac{1}{2}m|\boldsymbol{v_0}|^2 = \frac{GmM}{r}.$$

另一方面由万有引力定律可知

$$m|\boldsymbol{g}| = G\frac{mM}{r^2},$$

其中 $\boldsymbol{g}$ 为重力加速度. 于是可知

$$|\boldsymbol{v}_0| = \sqrt{2gr} = \sqrt{2 \cdot 9.8 \cdot 6.371 \times 10^6} \approx 11174.$$

第二宇宙速度约为 11174 m/s.

### 6.5.2 瑕积分

我们已经知道 $\int_{-\infty}^0 e^x \, dx = 1$, 如图6.12, 它表示透明黄色区域的面积收敛于 1. 由于 $e^x$ 和 $\ln x$ 互为反函数, 因此图中右下角区域的面积也应该收敛于 1, 由于它位于 $x$ 下方, 因此我们希望有

$$\int_0^1 \ln x \, dx = -1.$$

我们知道 $\ln x$ 在 $[0,1]$ 上是无界的, 因此 Riemann 不可积. 于是我们也需要 “放宽” 条件, 来定义这类积分.

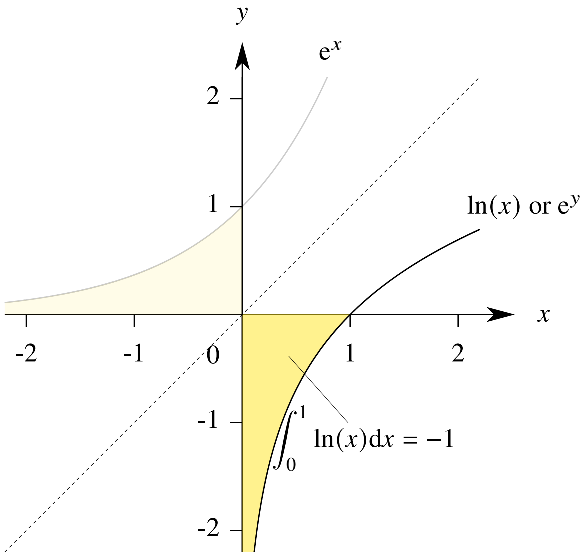



图 6.12: 瑕积分示意图.ln($x$) 与 $e^x$ 互为反函数

**定义 6.8 (瑕积分)**

设函数 $f(x)$ 在 $(a, b]$ 上有定义. 且 $f(a+) = \infty$. 对于任一 $c \in (a, b)$ 都有 $f(x)$ 在 $[c, b]$ 上可积. 若

$$\lim_{c \to a+} \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

存在且有限, 则可以令

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x := \lim_{c \to a+} \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

并称以上积分收敛, 此时我们称 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上 Riemann 可积. 否则称以上积分发散. 这样的积分称为**瑕积分**, 其中 $a$ 称为**瑕点**. 类似地可以定义瑕点为 $b$ 的情况.

注 无穷积分和瑕积分统称**反常积分** (improper integral), 或**反常积分**.

注 即使积分发散 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ 的记号也可以使用, 只是此时它不是一个数值.

利用可加性, 可以定义积分上限和下限都是瑕点的瑕积分. 设瑕积分

$$\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x, \quad \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x,$$

其中 $a, b$ 分别是它们的瑕点. 若它们都收敛, 则可令

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x := \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

此时我们称 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上 Riemann 可积.

**例 6.37** 讨论以下瑕积分的敛散性:

$$\int_0^a \frac{\mathrm{d}x}{x^p}, \quad a > 0.$$

**解** (i) 当 $p = 1$ 时. 由于

$$\lim_{b \to 0+} \int_b^a \frac{\mathrm{d}x}{x} = \lim_{b \to 0+} (\ln a - \ln b) = +\infty.$$

因此瑕积分发散.

(ii) 当 $p \neq 1$ 时. 由于

$$\lim_{b\to 0+}\int_b^a \frac{\mathrm{d}x}{x^p} = \lim_{b\to 0+}\frac{1}{1-p}\left(b^{1-p}-a^{1-p}\right) = \begin{cases} \dfrac{-a^{1-p}}{1-p}, & p<1 \\ +\infty, & p>1 \end{cases}.$$

于是可知, 若 $p<1$ 则无穷积分收敛, 否则发散. ■

**注** 试比较以上例题和例 (6.33).

与无穷积分一样, Newton-Leibniz 公式和 Riemann 积分的一系列运算法则和计算技巧也都适用于瑕积分. 下面我们看几个例子.

**例 6.38** 计算以下 Riemann 积分:

$$\int_0^1 \ln x\,\mathrm{d}x.$$

**解** 当 $x\to 0+$ 时, $\ln x\to -\infty$, 因此 $x=0$ 是一个瑕点. 用分部积分法可得

$$原式 = x\ln x\Big|_0^1 - \int_0^1 1\,\mathrm{d}x = -\lim_{x\to 0+} x\ln x - 1 = -\lim_{x\to 0+}\frac{\ln x}{1/x} - 1 = -\lim_{x\to 0+}\frac{1/x}{-1/x^2} - 1 = -\lim_{x\to 0+}(-x) - 1 = -1.$$ ■

**注** 从几何直观上可以看出

$$\left|\int_{-\infty}^0 \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x\right| = \left|\int_0^1 \ln x\,\mathrm{d}x\right|.$$

**例 6.39** 计算以下瑕积分:

$$\int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}$$

**解** 当 $x\in(a,b)$ 时

$$\frac{x-a}{b-a}+\frac{b-x}{b-a}=1,\quad \frac{x-a}{b-a}>0,\quad \frac{b-x}{b-a}>0.$$

因此可令

$$\sin^2 t = \frac{x-a}{b-a},\quad \cos^2 t = \frac{b-x}{b-a},\quad 0<t<\frac{\pi}{2}.$$

此时

$$x=(b-a)\sin^2 t + a = a\left(1-\sin^2 t\right) + b\sin^2 t = a\cos^2 t + b\sin^2 t.$$

因此当 $t$ 从 $0$ 变动到 $\pi/2$ 时, $x$ 从 $a$ 变动到 $b$. 于是

$$原式 = \int_0^{\pi/2}\frac{\mathrm{d}\,a\cos^2 t + b\sin^2 t}{\sqrt{(b-a)^2\sin^2 t\cos^2 t}} = \int_0^{\pi/2}\frac{2(b-a)\sin t\cos t}{(b-a)\sin t\cos t}\,\mathrm{d}t = 2\int_0^{\pi/2}\mathrm{d}t = \pi.$$ ■

**例 6.40** 计算以下瑕积分:

$$\int_0^1 \ln^n x\,\mathrm{d}x,\quad n\in\mathbb{N}^*.$$

**解** 设 $I_n = \int_0^1 \ln^n x\,\mathrm{d}x$. 则

$$I_n = x\ln^n x\Big|_0^1 - \int_0^1 x\,\mathrm{d}\ln^n x = -n\int_0^1 \ln^{n-1} x = -nI_{n-1}.$$

由例**??**) 可知 $I_1=-1$. 于是可知

$$I_n = (-1)^{n-1} n! I_1 = (-1)^n n!.$$ ■

下面看一个比较难的例子. 需要多次使用换元法.

**例 6.41** 计算以下瑕积分:

$$\int_0^{\pi/2} \ln\sin x \,\mathrm{d}x.$$

**解** 设原式等于 $I$. 令 $x=\pi/2-t$. 当 $t$ 从 $\pi/2$ 变动到 0 时, $x$ 从 0 变动到 $\pi/2$. 于是

$$I=\int_{\pi/2}^{0}\ln\sin\left(\frac{\pi}{2}-t\right)\mathrm{d}\sin\left(\frac{\pi}{2}-t\right)=-\int_{\pi/2}^{0}\ln\cos t\,\mathrm{d}t=\int_0^{\pi/2}\ln\cos t\,\mathrm{d}t=\int_0^{\pi/2}\ln\cos x\,\mathrm{d}x.$$

于是

$$\begin{aligned}2I&=\int_0^{\pi/2}\ln\sin x\,\mathrm{d}x+\int_0^{\pi/2}\ln\cos x\,\mathrm{d}x=\int_0^{\pi/2}(\ln\sin x+\ln\cos x)\,\mathrm{d}x=\int_0^{\pi/2}\ln\sin x\cos x\,\mathrm{d}x\\&=\int_0^{\pi/2}\ln\left(\frac{1}{2}\sin 2x\right)\mathrm{d}x=\int_0^{\pi/2}\left(\ln\frac{1}{2}+\ln\sin 2x\right)\mathrm{d}x=-\frac{\pi}{2}\ln 2+\int_0^{\pi/2}\ln\sin 2x\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

下面来看 $\int_0^{\pi/2}\ln\sin 2x\,\mathrm{d}x$. 令 $t=2x$, 则

$$\int_0^{\pi/2}\ln\sin 2x\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\ln\sin t\,\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\left(\int_0^{\pi/2}\ln\sin t\,\mathrm{d}t+\int_{\pi/2}^{\pi}\ln\sin t\,\mathrm{d}t\right)=\frac{I}{2}+\frac{1}{2}\int_{\pi/2}^{\pi}\ln\sin t\,\mathrm{d}t.$$

令 $t=\pi/2+u$, 则

$$\int_0^{\pi/2}\ln\sin 2x\,\mathrm{d}x=\frac{I}{2}+\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}\ln\sin\left(\frac{\pi}{2}+u\right)\mathrm{d}u=\frac{I}{2}+\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}\ln\cos u\,\mathrm{d}u=\frac{I}{2}+\frac{I}{2}=I.$$

于是可知

$$2I=-\frac{\pi}{2}\ln 2+\int_0^{\pi/2}\ln\sin 2x\,\mathrm{d}x=-\frac{\pi}{2}\ln 2+I\iff I=-\frac{\pi}{2}\ln 2.$$

■

**注** $\ln\sin x$ 的原函数不是一个初等函数. 因此直接使用 Newton-Leibniz 公式是很困难的.

以上我们对两类广义积分作了粗略的介绍. 研究广义积分的重点实际上是研究它们收敛的条件. 我们将在后面深入展开这个主题.

函数反比例函数 $1/x$ 虽然是奇函数, 但它在 $(-\infty,+\infty)$ 上不连续 XXX

## 6.6 Riemann 积分的应用

### 6.6.1 微元法

Riemann 积分在物理学中有大量的应用场景. 我们先看一个简单的例子.

**例 6.42** 设某个弹簧在 10 N 的力下可以伸长 1 cm. 求使得该弹簧伸长 10 cm 所做的功.

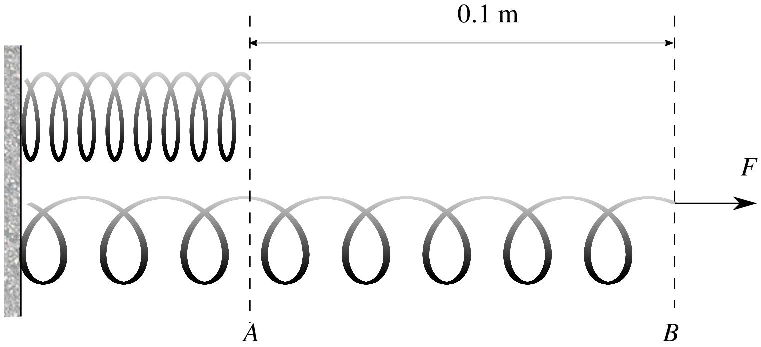



图 6.13: 伸长的弹簧.

**解** 由 Hooke 定律可知 $|\boldsymbol{F}| = k|\Delta\boldsymbol{x}|$. 由条件可知 $k = 1000$ N/m. 如图6.13, 弹簧受外力作用从 $A$ 点伸长到了 $B$ 点. $|AB| = 0.1$ m. 现把 $AB$ 作 $n$ 等分:

$$A = A_0, A_1, \cdots, A_n = B.$$

每个小区间 $[A_{i-1}, A_i]$ 上的弹力都看作是 $A_i$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$ 处的弹力, 于是每个小区间上拉力做的功为

$$W_i = k|AA_i||A_{i-1}A_i| = 1000 \cdot \frac{0.1i}{n} \cdot \frac{0.1}{n} = \frac{10i}{n^2}.$$

把所有小区间上做的功相加得 $\sum_{i=1}^{n} \left(10i/n^2\right)$. 令 $n \to \infty$ 得

$$W = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{10i}{n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} 10 \cdot \frac{i}{n} = \int_0^1 10x \,\mathrm{d}x = 5x^2 \Big|_0^1 = 5 \text{ (J)}.$$

于是可知使得该弹簧伸长 10 cm 需要做功 5 J. ■

以上求解过程是严格遵循 Riemann 积分定义的. 但 Riemann 积分的严格定义是 19 世纪才确立的. 但涉及定积分的经典物理问题却在 18 世纪就已经有了成熟的解决方法, 这个方法称为 "微元法". 下面我们用微元法再解一遍以上例题.

**解** $\boxed{\text{解法二}}$ 使用微元法. 令 $A$ 为数轴原点 $O$. 则 $B$ 的坐标为 0.1. 在 $OB$ 上取一小段 $[x, x + \mathrm{d}x]$. 当内弹簧被拉到点 $x$ 时的弹力为 $1000x$. 我们把 $[x, x + \mathrm{d}x]$ 看作一个 "微元", 认为它在这一段上的弹力恒定, 因此这个小区间内做的功为 $1000x\,\mathrm{d}x$. 于是整个区间上的做的功总共为

$$W = \int_0^{0.1} 1000x \,\mathrm{d}x = 500x^2 \Big|_0^{0.1} = 5 \text{ (J)}.$$

从以上的解答过程可以看到, 微元法比 "正规" 的解法简洁得多, 但从数学逻辑上看显得 "不太严格". 但我们可以把微元法看作处理经典物理问题的一个技巧. 在经典物理问题中, 微元法总是奏效的, 因为里面涉及的物理方程性质足够好 (都是连续可导的). 下面我们再看一个用微元法解决经典物理问题的例子.

**例 6.43** 设长为 $l$ m, 质量为 $M$ kg 的均匀细棒 $AB$(横截面看作质点). 延长 $BA$ 到 $C$ 使得 $|CA| = a$ m. 求位于 $C$ 的质量为 $m$ kg 的质点和细棒之间引力的大小.

**解** 用微元法. 令 $C$ 为数轴原点 $O$, $A$ 的坐标为 $a$, $B$ 的坐标为 $a + l$. 在细棒上取一小段 $[x, x + \mathrm{d}x]$. 由于细棒 $AB$ 的

质量是均匀的, 因此这一小段的质量为 $M\,\mathrm{d}x/l$. 把这一小段看作一个微元, 它的坐标为 $x$, 则这一小段与 $C$ 之间引力的大小为

$$G\frac{m\cdot\dfrac{M\,\mathrm{d}x}{l}}{x^2}=\frac{GmM}{lx^2}\,\mathrm{d}x,$$

其中 $G$ 为万有引力常数. 于是细棒 $AB$ 和质点 $C$ 的之间引力的大小为

$$|\boldsymbol{F}|=\int_a^{a+l}\frac{GmM}{lx^2}\,\mathrm{d}x=-\frac{GmM}{lx}\bigg|_a^{a+l}=\frac{GmM}{l}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{a+l}\right)=\frac{GmM}{a(a+l)}.$$ ■

**例 6.44** 如图6.14所示, 有一根无限长的均匀细棒, 它的线密度为 $\rho$ kg/m, 在距细棒 $a$ m 处放置一个质量为 1 kg 的质点, 计算细棒对质点的引力.

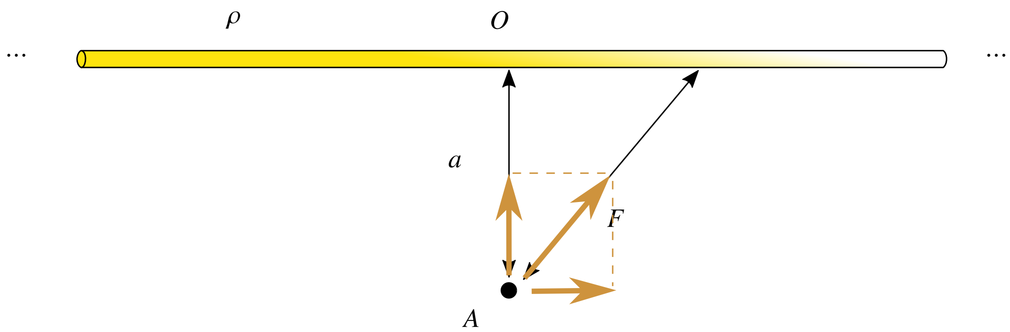



**图 6.14:** 细棍对质点的吸引力.

**解** 用微元法. 过质点 $A$ 作垂直于细棒的垂线, 垂足为 $O$. 在细棒上取一段长为 $\mathrm{d}x$ 的细棒. 它距离 $O$ 的距离为 $x$. 则这段细棒对质点的引力在 $AO$ 方向的分力大小为

$$G\frac{1\cdot\rho\,\mathrm{d}x}{a^2+x^2}\cdot\frac{a}{\sqrt{a^2+x^2}}=Ga\rho\frac{\mathrm{d}x}{(a^2+x^2)^{3/2}}.$$

由于每一小段对质点引力的 $AO$ 法向分力全部互相抵消, 因此只需计算它们在 $AO$ 方向的分力大小. 于是细棒对质点的引力大小为

$$|\boldsymbol{F}|=Ga\rho\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(a^2+x^2)^{3/2}}.$$

先计算不定积分. 令 $t=x^2$, 则

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{(a^2+x^2)^{3/2}}=\int\frac{\mathrm{d}\sqrt{t}}{(a^2+t)^{3/2}}=\frac{1}{2}\int\frac{1}{t(t+a^2)}\left(\frac{t}{t+a^2}\right)^{1/2}\mathrm{d}t.$$

令

$$u=\left(\frac{t}{t+a^2}\right)^{1/2}\iff t=\frac{a^2u^2}{1-u^2}.$$

于是

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{(a^2+x^2)^{3/2}}=\frac{1}{2}\int\frac{(1-u^2)^2}{a^4u^2}\cdot u\,\mathrm{d}\frac{a^2u^2}{1-u^2}=\frac{1}{a^2}\int 1\,\mathrm{d}u=\frac{u}{a^2}+C=\frac{x}{a^2\sqrt{x^2+a^2}}+C.$$

于是可知

$$|\boldsymbol{F}|=\frac{G\rho}{a}\frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}\bigg|_{-\infty}^{\infty}=2G\frac{\rho}{a}.$$

**注** 由以上计算可知, 当细棒无限长时, 它对质量一定的质点的引力与质点到细棒的距离成反比, 与细棒的线密度成正比.

### 6.6.2 无穷大和式的估计

我们经常会遇到单调递增且趋于 $+\infty$ 的和式. 我们希望估计出它们趋于 $+\infty$ 的速度, 也就是找到和它们同阶的无穷大. 先看几个简单的例子.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+1+\cdots+1}{n}=1.$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+2+\cdots+n}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{(1+n)n}{2n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+n}{2n}=\frac{1}{2}.$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1^2+2^2+\cdots+n^2}{n^3}=\lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2}=\frac{1}{3}.$$

通过以上例子, 我们猜测和式 $1^k+2^k+\cdots+n^k$ $(k\in\mathbb{N})$ 是 $n^{k+1}$ 的同阶无穷大. 不难验证这个猜想.

**例 6.45** 对于任一 $k\in\mathbb{N}$ 都有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1^k+2^k+\cdots+n^k}{n^{k+1}}=\frac{1}{k+1}.$$

**证明** 令 $a_n=1^k+2^k+\cdots+n^k$, $b_n=n^{k+1}$. 则

$$a_n-a_{n-1}=n^k,$$

$$b_n-b_{n-1}=n^{k+1}-(n-1)^k+1=(k+1)n^k+\cdots+(-1)^{k+1}.$$

由 Stolz 定理可知

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1^k+2^k+\cdots+n^k}{n^{k+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n-a_{n-1}}{b_n-b_{n-1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^k}{(k+1)n^k+\cdots+(-1)^{k+1}}=\frac{1}{k+1}.$$ ■

于是我们证明了

$$1^k+2^k+\cdots+n^k\sim\frac{n^{k+1}}{k+1},\quad n\to\infty.$$

我们希望得到更一般化的结论. 对于任一的 $k\geq -1$ 时, 结论是否还成立? 我们还是先看几个具体的例子.

**例 6.46** 用 Stolz 定理可以证明:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1^{1/2}+2^{1/2}+\cdots+n^{1/2}}{n^{1/2+1}}=\frac{1}{1/2+1}=\frac{2}{3}.$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1^{-1/2}+2^{-1/2}+\cdots+n^{-1/2}}{n^{-1/2+1}}=\frac{1}{-1/2+1}=2.$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1^{-1}+2^{-1}+\cdots+n^{-1}}{\ln n}=1.$$

对于更一般的情况, Stolz 定理就无能为力. 由于 Riemann 积分本来就是 Riemann 和的极限, 因此处理和式时可以考虑使用 Riemann 积分.

**命题 6.17**

对于任一 $p>-1$ 都有

$$\lim_{n\to\infty}1^p+2^p+\cdots+n^p=+\infty.$$

且

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1^p+2^p+\cdots+n^p}{n^{p+1}}=\frac{1}{p+1}.$$

**证明** 当 $p>0$ 时 $x^p$ 在 $[0,1]$ 上连续且有界. 当 $-1<p<0$ 时, $\int_0^1 x^p\,\mathrm{d}x$ 是一个收敛的瑕积分. 因此当 $p>-1$ 时 $x^p$ 在 $[0,1]$ 上 Riemann 可积. 于是我们可以利用 Riemann 积分的定义把极限转化为 Riemann 积分:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1^p+2^p+\cdots+n^p}{n^{p+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[\left(\frac{1}{n}\right)^p+\left(\frac{2}{n}\right)^p+\cdots+\left(\frac{n}{n}\right)^p\right]=\int_0^1 x^p\,\mathrm{d}x=\frac{1}{p+1}x^{p+1}\Big|_0^1=\frac{1}{p+1}.$$ ■

以上的讨论表明用 Riemann 积分是估计无穷大和式的一个有利工具. 下面我们希望研究更一般的情况. 例如, 我们想知道以下无穷大和式的阶:

$$\ln 1+\ln 2+\cdots+\ln n+\cdots.$$

为此我们需要另想办法. 如图6.15, 当函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上非负且单调递增时, 我们可以立即从图中的面积关系看出以下不等式:

$$(b-a)f(a)\le\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\le(b-a)f(b).$$

这个结论不难证明.

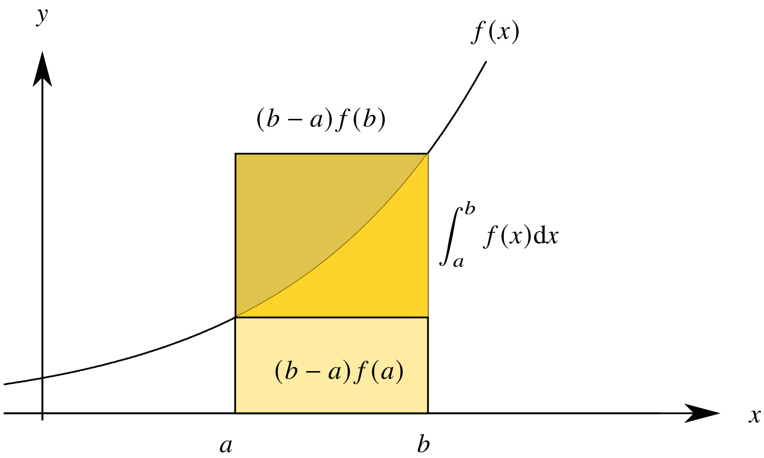



**图 6.15:** 面积不等式.

**命题 6.18 (面积原理)**

设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上非负. 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调递增, 则

$$(b-a)f(a)\le\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\le(b-a)f(b).$$

若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调递减, 则

$$(b-a)f(a)\ge\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\ge(b-a)f(b).$$

**证明** 只证明单调递增的情况. 由于对于任一 $x\in[a,b]$ 都有

$$f(a)\le f(x)\le f(b).$$

由 Riemann 的保序性可知

$$\int_a^b f(a)\le\int_a^b f(x)\le\int_a^b f(b)\iff(b-a)f(a)\le\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\le(b-a)f(b).$$ ■

特别地, 当函数 $f(x)$ 在区间 $[a,a+1]$ 上非负且单调递增时

$$f(a)\le\int_a^{a+1} f(x)\,\mathrm{d}x\le f(a+1).$$

利用这个简单的结论, 我们可以得到以下定理.

**定理 6.20**

设函数 $f(x)$ 在 $[m,+\infty)$ $(m\in\mathbb{N}^*)$ 上非负且单调递增. 则当 $\xi\ge m$ 时

$$\left|\sum_{k=m}^{[\xi]}f(k)-\int_m^{\xi}f(x)\,\mathrm{d}x\right|\le f(\xi).$$

**证明** 由于 $f(x)$ 在 $[m,+\infty)$ $(m\in\mathbb{N}^*)$ 上非负且单调递增, 由面积原理可知

$$f(k)\leq\int_k^{k+1}f(x)\,\mathrm{d}x\leq f(k+1),\quad k=m,m+1,\cdots,[\xi]-1.$$

把以上不等式全部相加得

$$f(m)+f(m+1)+\cdots+f([\xi]-1)\leq\int_m^{m+1}f(x)\,\mathrm{d}x+\cdots+\int_{[\xi]-1}^{[\xi]}f(x)\,\mathrm{d}x\leq f(m+1)+\cdots+f([\xi])$$

$$\iff f(m)+f(m+1)\cdots+f([\xi]-1)\leq\int_m^{[\xi]}f(x)\,\mathrm{d}x\leq f(m+1)+\cdots+f([\xi]).$$

另一方面

$$0\leq\int_{[\xi]}^{\xi}f(x)\,\mathrm{d}x\leq f(\xi)(\xi-[\xi])\leq f(\xi).$$

于是可知

$$f(m)+f(m+1)\cdots+f([\xi]-1)\leq\int_m^{\xi}f(x)\,\mathrm{d}x\leq f(m+1)+\cdots+f([\xi])+f(\xi)$$

$$\Longrightarrow -f(\xi)\leq -f([\xi])\leq\int_m^{\xi}f(x)\,\mathrm{d}x-\sum_{k=m}^{[\xi]}f(k)\leq f(\xi)-f(m)\leq f(\xi)$$

$$\Longrightarrow\left|\sum_{k=m}^{[\xi]}f(k)-\int_m^{\xi}f(x)\,\mathrm{d}x\right|\leq f(\xi).$$

■

**注** 以上结论也可以用 Landau 记号把不等式写成等式

$$\sum_{k=m}^{[\xi]}f(k)=\int_m^{\xi}f(x)\,\mathrm{d}x+O[f(\xi)].$$

用以上定理我们可以再来估计和式 $1^p+2^p+\cdots+p^n$.

**例 6.47** 当 $p>0$ 时函数 $f(x)=x^p$ 在 $[1,+\infty]$ 上非负且单调递增. 由定理6.20可知

$$n^p\geq\left|\sum_{k=1}^{n}k^p-\int_1^n x^p\,\mathrm{d}x\right|=\left|\sum_{k=1}^{n}k^p-\frac{n^{p+1}-1}{p+1}\right|\geq\left|\sum_{k=1}^{n}k^p-\frac{n^{p+1}}{p+1}\right|$$

以上不等式可以写成

$$\sum_{k=1}^{n}k^p=\frac{n^{p+1}}{p+1}+O\left(n^p\right).$$

我们得到了比原先更精密的结果: 不仅知道了

$$\sum_{k=1}^{n}k^p\sim\frac{n^{p+1}}{p+1},\quad n\to\infty.$$

还知道了它们的具体误差.

下面我们用定理6.20来研究一下 $\ln 1+\ln 2+\cdots+\ln n$.

**例 6.48** 研究无穷大数列

$$\ln 1+\ln 2+\cdots+\ln n,\quad n=1,2,\cdots.$$

**解** 函数 $f(x)=\ln x$ 在 $[1,+\infty]$ 上非负且单调递增. 由定理6.20可知

$$\ln n\geq\left|\sum_{k=1}^{n}\ln k-\int_1^n\ln x\,\mathrm{d}x\right|=\left|\ln n!-n\ln n+n-1\right|.$$

以上不等式可以写成

$$\ln n!=n\ln n-n+1+O(\ln n).$$

**注** 以上不等式可以整理为

$$|\ln n! - \ln n^n + \ln \mathrm{e}^n - \ln \mathrm{e}| \leq \ln n \iff \ln \frac{1}{n} \leq \ln \frac{n!\,\mathrm{e}^{n-1}}{n^n} \leq \ln n.$$

两边取指数得

$$\frac{1}{n} \leq \frac{n!\,\mathrm{e}^{n-1}}{n^n} \leq n \iff \frac{n^{n-1}}{\mathrm{e}^{n-1}} \leq n! \leq \frac{n^{n+1}}{\mathrm{e}^{n-1}}.$$

于是我们得到了阶乘 $n!$ 的一个估计式.

**定理 6.21**

设函数 $f(x)$ 在 $[m,+\infty)$ $(m \in \mathbb{N}^*)$ 上非负且单调递减. 则

$$\lim_{n\to\infty} \left[ \sum_{k=m}^{n} f(k) - \int_m^n f(x)\,\mathrm{d}x \right] = \alpha.$$

且 $0 \leq \alpha \leq f(m)$. 若 $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$, 则当 $\xi \geq m+1$ 时有

$$\left| \sum_{k=m}^{[\xi]} f(k) - \int_m^\xi f(x)\,\mathrm{d}x - \alpha \right| \leq f(\xi - 1).$$

**证明** (i) 令

$$g(\xi) = \sum_{k=m}^{[\xi]} f(k) - \int_m^\xi f(x)\,\mathrm{d}x.$$

下面来证明数列 $g(n)$ 单调递减有下界. 由面积原理可知

$$\begin{aligned} g(n) - g(n+1) &= \sum_{k=m}^{n} f(k) - \int_m^n f(x)\,\mathrm{d}x - \sum_{k=m}^{n+1} f(k) + \int_m^{n+1} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_n^{n+1} f(x)\,\mathrm{d}x - f(n+1) \\ &\leq f(n+1) - f(n+1) = 0, \quad n = m, m+1, \cdots. \end{aligned}$$

因此 $g(n)$ 单调递减. 由于

$$g(n) = \sum_{k=m}^{n-1} \left[ f(k) - \textstyle\int_k^{k+1} f(x)\,\mathrm{d}x \right] + f(n) \geq \sum_{k=m}^{n-1} [f(k) - f(x)] + f(n) = f(n) \geq 0.$$

由单调有界定理可知 $g(n)$ 收敛. 由于 $0 \leq g(n) \leq g(m) = f(m)$. 令 $n \to \infty$ 得

$$0 \leq \lim_{n\to\infty} g(n) \leq f(m).$$

(ii) 若 $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$, 则

$$\begin{aligned} g(\xi) - \alpha &= \sum_{k=m}^{[\xi]} f(k) - \int_m^\xi f(x)\,\mathrm{d}x - \lim_{n\to\infty} \left[ \sum_{k=m}^{n} f(k) - \int_m^n f(x)\,\mathrm{d}x \right] \\ &= \sum_{k=m}^{[\xi]} f(k) - \int_m^{[\xi]} f(x)\,\mathrm{d}x - \int_{[\xi]}^{\xi} f(x)\,\mathrm{d}x - \lim_{n\to\infty} \left[ \sum_{k=m}^{[\xi]} f(k) + \sum_{k=[\xi]+1}^{n} f(k) - \int_m^{[\xi]} f(x)\,\mathrm{d}x - \int_{[\xi]}^{n} f(x)\,\mathrm{d}x \right] \\ &= \lim_{n\to\infty} \left[ \int_{[\xi]}^{n} f(x)\,\mathrm{d}x - \sum_{k=[\xi]+1}^{n} f(k) \right] - \int_{[\xi]}^{\xi} f(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \lim_{n\to\infty} \left[ \sum_{k=[\xi]+1}^{n} \int_{k-1}^{k} f(x)\,\mathrm{d}x - \sum_{k=[\xi]+1}^{n} \int_{k-1}^{k} f(k)\,\mathrm{d}x \right] - \int_{[\xi]}^{\xi} f(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=[\xi]+1}^{n} \int_{k-1}^{k} [f(x) - f(k)]\,\mathrm{d}x - \int_{[\xi]}^{\xi} f(x)\,\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

下面分别估计 $g(\xi)-\alpha$ 的上界和下界.

$$g(\xi)-\alpha \le \lim_{n\to\infty}\sum_{k=[\xi]+1}^{n}\int_{k-1}^{k}[f(x)-f(k)]\,\mathrm{d}x \le \lim_{n\to\infty}\sum_{k=[\xi]+1}^{n}\int_{k-1}^{k}[f(k-1)-f(k)]\,\mathrm{d}x$$
$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=[\xi]+1}^{n}[f(k-1)-f(k)]=\lim_{n\to\infty}[f([\xi])-f(n)]=f([\xi])\le f(\xi-1).$$
$$g(\xi)-\alpha \ge -\int_{[\xi]}^{\xi}f(x)\,\mathrm{d}x \ge -(\xi-[\xi])f([\xi]) \ge -f([\xi]) \ge -f(\xi-1).$$ ■

由以上定理立刻可知以下推论.

**推论 6.11**

设函数 $f(x)$ 在 $x\in[1,+\infty)$ 上单调递减. 则无穷级数 $\sum_{n=1}^{\infty}f(n)$ 与无穷积分 $\int_1^{+\infty}f(x)\,\mathrm{d}x$ 同敛散. ♡

我们用上面的定理来研究调和级数.

**例 6.49** 求证:

$$\sum_{k=m}^{n}\frac{1}{k}=\ln n+\gamma+O\left(\frac{1}{n}\right).$$

**证明** 由于函数 $f(x)=1/x$ 在 $[1,+\infty)$ 上非负且单调递减, 由定理6.21可知

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=m}^{n}\frac{1}{k}-\int_1^n\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=m}^{n}\frac{1}{k}-\ln n\right)=\gamma.$$

这里的 $\gamma$ 是 Euler 常数. 由于 $\lim_{x\to+\infty}f(x)=0$, 因此

$$\left|\sum_{k=m}^{n}\frac{1}{k}-\ln n-\gamma\right|\le\frac{1}{n-1}\le\frac{2}{n}.$$

于是可得

$$\sum_{k=m}^{n}\frac{1}{k}=\ln n+\gamma+O\left(\frac{1}{n}\right).$$ ■

**注** 我们在例??中只得出了

$$\sum_{k=m}^{n}\frac{1}{k}=\ln n+\gamma+\varepsilon_n,$$

其中 $\varepsilon_n$ 是一个无穷小. 但我们并不知道 $\varepsilon_n$ 的具体信息. 由定理6.21我们得到了对调和级数更精确的估计.

以上结论非常有用, 我们来看一个例子.

**例 6.50** 设数列

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\frac{1}{k},\quad n=1,2,\cdots.$$

求 $\lim_{n\to\infty}S_n$.

**解** 先计算 $S_{2n}$ 的极限. 由例6.49可知

$$S_{2n}=1-\frac12+\frac13-\frac14+\cdots-\frac{1}{2n}=\left(1+\frac12+\frac13+\cdots+\frac{1}{2n}\right)-2\left(\frac12+\frac14+\cdots+\frac{1}{2n}\right)$$
$$=\left(1+\frac12+\frac13+\cdots+\frac{1}{2n}\right)-\left(1+\frac12+\cdots+\frac1n\right)$$
$$=\left[\ln 2n+\gamma+O\left(\frac1n\right)\right]-\left[\ln n+\gamma+O\left(\frac1n\right)\right]=\ln 2+O\left(\frac1n\right).$$

于是 $\lim_{n\to\infty} S_{2n} = \ln 2$. 由于

$$\lim_{n\to\infty} S_{2n+1} = \lim_{n\to\infty}\left(S_{2n} + \frac{1}{2n+1}\right) = \lim_{n\to\infty} S_{2n}.$$

故知

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} S_{2n} = \ln 2.$$

■

### 6.6.3 证明不等式

Riemann 积分和面积原理还可以用来巧妙地证明一些不等式. 我们先来看一个简单的例子

**命题 6.19 (Young 不等式)**

如图6.16所示, 设连续函数 $\varphi$ 在 $[0,+\infty)$ 上严格递增, 并且 $\varphi(0)=0$, 则存在连续的反函数 $\varphi^{-1}$, 它在 $[0,\varphi(+\infty))$ 上严格递增, 并且 $\varphi^{-1}(0)=0$. 对任何 $a>0, 0<b<\varphi(+\infty)$. 则

$$ab \le \int_0^a \varphi(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^b \varphi^{-1}(y)\,\mathrm{d}y,$$

等号成立当且仅当 $b=\varphi(a)$.

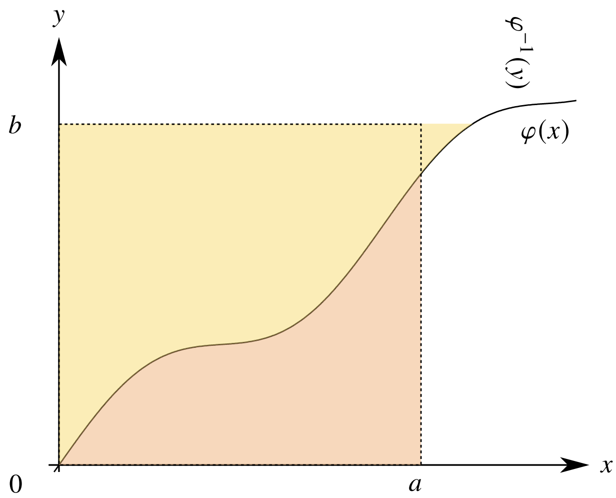



**图 6.16:** Young 不等式示意图.

**解**

**例 6.51** 设 $0<a<b$. 求证以下不等式:

$$\frac{2}{a+b} < \frac{\ln b - \ln a}{b-a} < \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right).$$

**解** 由于 $y=\ln x$ 的一个原函数是 $y=1/x$. 因此想到从函数 $y=1/x$ 入手.

(i) 设 $A_0(a,0)$, $B_0(b,0)$. 连接点 $A(a,1/a)$ 和 $B(b,1/b)$. 过点 $C((a+b)/2, 2/(a+b))$ 作 $y=1/x$ 的切线, 分别交 $AA_0$ 和 $BB_0$ 于 $A_1$ 和 $B_1$. 如图, 由于 $y=1/x$ 是一个凸函数, 因此梯形 $A_1A_0B_0B_1$ 面积严格小于 $A$ 和 $B$ 之间的曲边梯形面积, 而该曲边梯形面积又严格梯形 $AA_0B_0B$ 面积. 于是

$$\frac{2}{a+b}(b-a) < \int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{x} < \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)(b-a) \iff \frac{2}{a+b}(b-a) < \ln b - \ln a < \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)(b-a)$$
$$\iff \frac{2}{a+b} < \frac{\ln b-\ln a}{b-a} < \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right).$$

■

**注** 令 $a = n, b = n + 1$, 则有

$$\frac{1}{n+1/2} < \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) < \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}\right).$$

**命题 6.20 (Höler 不等式)**

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \le \left(\sum_{i=1} a_i^p\right)^{1/p} \left(\sum_{i=1} b_i^q\right)^{1/q}.$$

**解**

**命题 6.21 (Cauchy-Schwarz 不等式)**

$$\left(\sum_{i=1} a_i b_i\right)^2 \le \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \sum_{i=1}^{n} b_i^2.$$

**引理 6.5**

**证明**

**定理 6.22 (Stirling 公式)**

$$n! \sim \sqrt{2n\pi}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n, \quad n \to \infty.$$

**证明**

**例 6.52**

**解**

# 第 7 章 点集拓扑初步

前面我们已经讨论了极限和连续, 并在此基础上研究了一元函数的微分和 Riemann 积分. 我们发现这些概念的基础是建立在极限和连续上的. 而极限和连续的定义都是通过 $\varepsilon - \delta$ 语言描述的, 换句话说, 都是通过 ‘‘距离’’ 在描述 ‘‘邻近’’. 那么如果到了更一般的空间, 在没有 ‘‘距离’’ 这个概念下, 能否给出关于 ‘‘邻近’’ 和 ‘‘连续’’ 更本质更一般的定义呢? 这就是催生出点集拓扑学的缘起.

**点集拓扑学** (point-set topology) 又称**一般拓扑学** (general topology), 它已经渗透到现代数学的各个分支, 是处于中心位置的基础理论. 为了进一步推广和一般化分析学的理论, 我们必须先掌握点集拓扑学的基础知识. 这样做在开始时会稍显吃力, 但对于进一步的数学学习是 ‘‘磨刀不误砍柴工’’ 的.

## 7.1 度量空间

### 7.1.1 Euclid 空间

$\mathbb{R}$ 中定义的距离函数具有三条重要的性质, 分别是正定性、对称性和三角形不等式. 于是我们可以从中概念抽象出广义的距离概念, 我们称之为 ‘‘度量’’. 定义了一个度量后, 就有了一个度量空间.

**定义 7.1 (度量空间)**

设非空集合 $X$. 定义 $X \times X$ 到 $\mathbb{R}$ 的一个映射 $d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$. 若它满足

1° 正定性: $d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \geq 0$, 等号成立当且仅当 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$.

2° 对称性: $d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = d(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})$.

3° 三角形不等式: $d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}) \leq d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) + d(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})$.

则称 $d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ 为一个**度量** (metric function). 定义了一个度量 $d$ 的集合 $X$ 称为**度量空间** (metric space), 记作 $(X, d)$.

♣

注 从一般的集合到数集的映射称为**泛函** (functional). 以上定义的度量就是一个泛函.

容易看出度量空间 $(X, d)$ 的任一子集 $Y$ 在度量 $d$ 下仍然构成一个度量空间. 这是因为可以把 $d$ 看作限制在 $Y \times Y$ 的映射. 它显然保持正定性、对称性和三角形不等式.

几何空间 $\mathbb{R}^3$ 是一个度量空间. 它的度量就是其中任意两点的距离. 我们可以把几何空间的概念推广到 $n$ 维. 它是最重要的一个度量空间的例子. 度量空间的另外两个重要的例子是函数空间 $C^X$ 和 $L^2(\mu)$.

**定义 7.2 (Euclid 空间)**

设集合 $\mathbb{R}^n$. 其中的元素都是 $n$ 元有序实数组, 我们称它为**向量** (vector). 记作列向量的形式: $\boldsymbol{\alpha} = [a_1, a_2, \cdots, a_n]^T$. 其中 $a_i$ 称为向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 的第 $i$ 个**分量** (component). 规定 $\mathbb{R}^n$ 上的加法运算

$$[a_1, a_2, \cdots, a_n]^T + [b_1, b_2, \cdots, b_n]^T := [a_1 + b_1, a_2 + b_2, \cdots, a_n + b_n]^T.$$

再规定 $\mathbb{R}^n$ 中的元素与 $\mathbb{R}$ 之间的数乘运算 (scalar multiplication):

$$k[a_1, a_2, \cdots, a_n]^T := [ka_1, ka_2, \cdots, ka_n]^T.$$

容易验证以上规定的加法运算满足结合律、交换律. 且加法运算存在零元 $\mathbf{0} = [0, 0, \cdots, 0]^T$, 我们称它为零向量 (zero vector). 对于任一向量 $\boldsymbol{\alpha} = [a_1, a_2, \cdots, a_n]^T$, 都有唯一负元 $[-a_1, -a_2, \cdots, -a_n]^T$ 我们称它为 $\boldsymbol{\alpha}$ 的负向量 (negative vector), 记作 $-\boldsymbol{\alpha}$. 因此可以定义减法运算 $\boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{\beta} := \boldsymbol{\alpha} + (-\boldsymbol{\beta})$. 以上规定的数乘运算存在单位元 1. 且满足

$$(kl)\boldsymbol{\alpha} = k(l\boldsymbol{\alpha}), \quad \forall k, l \in \mathbb{R}, \ \forall \boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}^n.$$

$$(k + l)\boldsymbol{\alpha} = k\boldsymbol{\alpha} + l\boldsymbol{\alpha}, \quad \forall k, l \in \mathbb{R}, \ \forall \boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}^n.$$

$$k(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}) = k\boldsymbol{\alpha} + k\boldsymbol{\alpha}, \quad \forall k, l \in \mathbb{R},\ \forall \boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}^n.$$

于是定义了加法和数乘运算的 $\mathbb{R}^n$ 构成实数域 $\mathbb{R}$ 上的一个线性空间 (详见《高等代数》).
然后在 $\mathbb{R}^n$ 中规定一个二元实值函数

$$(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) := \boldsymbol{\alpha}^T \boldsymbol{\beta} = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i.$$

我们称 $(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})$ 为向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 的**标准内积** (standard inner product), 简称内积. 用内积可以定义向量的长度 (length)

$$|\boldsymbol{\alpha}| := \sqrt{(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\alpha})}, \quad \forall \boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}^n.$$

令

$$d(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) := |\boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{\beta}|, \quad \forall \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \in \mathbb{R}^n.$$

容易验证以上规定的 $d(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})$ 满足正定性、对称性和三角形不等式. 于是它是 $\mathbb{R}^n$ 的一个度量. 于是带有内积的线性空间 $\mathbb{R}^n$ 就是一个度量空间. 我们称它为 $n$ 维 **Euclid** 空间 (Euclidean space).

注 1 维、2 维和 3 维的 Euclid 空间通常称为**直线** (line)、**平面** (plane) 和**几何空间** (geometric space).

下面是关于 $\mathbb{R}^n$ 中内积和度量的一些性质.

**命题 7.1**

在 Euclid 空间 $\mathbb{R}^n$ 中有

(1) 正定性: $|\boldsymbol{\alpha}| = (\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\alpha}) \geq 0$. 等号成立当且仅当 $\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0}$.
(2) 对称性: $(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) = (\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\alpha})$.
(3) 对称性: $d(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) = d(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\alpha})$.
(4) 双线性: $(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\beta}) = (\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) + (\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\beta})$; $(k\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) = k(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})$.
(5) $|k\boldsymbol{\alpha}| = |k||\boldsymbol{\alpha}|$.
(6) Cauchy-Schwarz 不等式: $|(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})| \leq |\boldsymbol{\alpha}||\boldsymbol{\beta}|$.
(7) 三角形不等式: $|\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}| \leq |\boldsymbol{\alpha}| + |\boldsymbol{\beta}|$.
(8) 三角形不等式: $d(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\gamma}) \leq d(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) + d(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma})$.

证明 (1)

(2)

(3)

(4)

(5)

(6)

(7)

(8)

Euclid 空间中的元素既可以看作向量, 也可以看作 ‘‘点”. 因此 $\mathbb{N}$ 到 $\mathbb{R}^n$ 的一个映射称为**点列** (point sequence), 记作 $\{\boldsymbol{x}_n\}$. 实数序列 $x_n$ 可以看作 1 维 Euclid 空间中的点列. 于是可以定义点列的极限.

**定义 7.3 (点列的极限)**

设 Euclid 空间 $\mathbb{R}^n$ 中的一个点列 $\{\boldsymbol{x}_n\}$. 若存在一点 $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$, 对于任意给定的 $\varepsilon > 0$ 都有存在 $N > \mathbb{N}^*$ 使得当 $n > N$ 时都有 $|\boldsymbol{x}_n - \boldsymbol{a}| < \varepsilon$ 则称 $\{\boldsymbol{x}_n\}$ **收敛于**点 $\boldsymbol{a}$. 或称 $\{\boldsymbol{x}_n\}$ 的**极限** (limit) 是 $\boldsymbol{a}$. 记作

$$\lim_{n\to\infty} \boldsymbol{x}_n = \boldsymbol{a}$$

或简记作 $\lim \boldsymbol{x}_n = \boldsymbol{a}$. 也可记作 $\boldsymbol{x}_n \to \boldsymbol{a}$ $(n \to \infty)$.

♣

**定义 7.4 (开球)**

设 Euclid 空间 $\mathbb{R}^n$. 给定 $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n, r \in \mathbb{R}^+$. 令

$$B_r(\boldsymbol{x}) := \{\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n \mid |\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}| < r\}.$$

我们把 $B_r(\boldsymbol{x})$ 称为以 $\boldsymbol{x}$ 为球心, $r$ 为半径的**开球** (open ball).

♣

用开球的概念可以从几何角度理解点列的极限.

**定理 7.1 (点列的极限的运算)**

设 $\lim \boldsymbol{x}_n = \boldsymbol{a}, \lim \boldsymbol{x}_n = \boldsymbol{b}$, 则

(1) $\lim(\boldsymbol{x}_n \pm \boldsymbol{y}_n) = \boldsymbol{a} \pm \boldsymbol{b}$.

(2) $\lim(\lambda \boldsymbol{x}_n) = \lambda \boldsymbol{a}$.

♡

**证明** 证明略.

**定义 7.5 (Cauchy 序列)**

**Cauchy** 序列

♣

**定理 7.2**

♡

**证明**

由几何空间中的定比分点公式可以得到凸集的定义.

**定义 7.6 (凸集)**

设 Euclid 空间 $\mathbb{R}^n$ 的一个非空子集 $E$. 若对于任意向量 $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \in \mathbb{R}^n, 0 < \lambda < 1$, 都有

$$\lambda\boldsymbol{\alpha} + (1 - \lambda)\boldsymbol{\beta} \in E,$$

其中 $0 < \lambda < 1$. 则称 $E$ 是一个**凸集** (convex set).

♣

### 7.1.2 开集和闭集

**定义 7.7 (有界集)**

设度量空间 $(X, d)$, $E \subseteq X, \boldsymbol{x} \in E$. 若存在 $M \in \mathbb{R}^+$ 和 $\boldsymbol{x} \in X$ 使得对于任一 $\boldsymbol{y} \in E$ 都有 $d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) < M$, 则称 $E$ 是 $X$ 上的一个**有界集** (bounded set).

♣

**定义 7.8 (邻域)**

设度量空间 $(X, d)$. 给定 $\boldsymbol{x} \in X, r \in \mathbb{R}^+$. 令

$$N_r(\boldsymbol{x}) := \{\boldsymbol{y} \in X \mid d(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}) < r\}.$$

我们把 $N_r(\boldsymbol{x})$ 称为以 $\boldsymbol{x}$ 为球心, $r$ 为半径的**邻域** (neighborhood). 在不强调半径的情况下 $N_r(\boldsymbol{x})$ 可以简记作 $N(\boldsymbol{x})$.

注 有时候为了讨论问题便利, 称 $N_r(\boldsymbol{x})\backslash\{\boldsymbol{x}\}$ 为**去心邻域** (deleted neighborhood), 记作 $\check{N}_r(\boldsymbol{x})$.

注 1 维 Euclid 空间 $\mathbb{R}$ 中的邻域就是开区间; 2 维 Euclid 空间 $\mathbb{R}^2$ 中的邻域是**圆盘** (disk); $n$ 维 Euclid 空间 $\mathbb{R}^n$ 中的邻域是开球.

**定义 7.9 (开集)**

设度量空间 $(X,d)$, $E\subseteq X$, $\boldsymbol{x}\in E$. 若 $\boldsymbol{x}$ 存在一个邻域 $N(\boldsymbol{x})\subseteq E$, 则称 $\boldsymbol{x}$ 是 $E$ 的一个**内点** (interior point). $E$ 的全体内点组成的集合称为 $E$ 的**内部** (interior), 记作 $E^\circ$. 若 $E=E^\circ$. 则称 $E$ 是 $X$ 上的一个**开集** (open set).

**命题 7.2**

设度量空间 $(X,d)$, 则 $X$ 上的任一邻域都是 $X$ 上的一个开集.

证明 在 $X$ 上任取一个邻域 $E=N_r(\boldsymbol{x})$. 任取一点 $\boldsymbol{y}\in E$. 则存在正实数 $h$ 使得

$$d(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=r-h.$$

考虑邻域 $N_h(\boldsymbol{y})$. 对于任一 $\boldsymbol{z}\in N_h(\boldsymbol{y})$ 都有 $d(\boldsymbol{z},\boldsymbol{y})<h$. 于是

$$d(\boldsymbol{x},\boldsymbol{z})\le d(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})+d(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})<r-h+h=r.$$

因此对于 $E$ 中的任意一点 $\boldsymbol{y}$ 都存在一个邻域 $N_h(\boldsymbol{y})\subseteq E$. 于是可知 $E$ 是一个开集.

注 由以上命题可知, 在 Euclid 空间 $\mathbb{R}$ 中任一开区间都是开集.

**命题 7.3**

设度量空间 $(X,d)$, $E\subseteq X$. 则 $E^\circ$ 是 $X$ 上的一个开集.

证明 若 $E^\circ=\varnothing$, 则 $E^\circ$ 是一个开集. 下设 $E^\circ\ne\varnothing$. 任取 $\boldsymbol{x}\in E^\circ$. 则 $\boldsymbol{x}$ 是 $E$ 的一个内点, 故 $\boldsymbol{x}$ 存在一个邻域 $N(\boldsymbol{x})\subseteq E$. 由命题 (7.2) 可知 $N(\boldsymbol{x})$ 是 $X$ 上的一个开集, 故 $N(\boldsymbol{x})\subseteq N(\boldsymbol{x})^\circ$. 因此 $N(\boldsymbol{x})\subseteq E^\circ$. 因此 $\boldsymbol{x}\in E^\circ$. 于是可知 $E^\circ$ 是 $X$ 上的一个开集.

注 以上命题表明 $(E^\circ)^\circ=E^\circ$.

**命题 7.4**

设度量空间 $(X,d)$, $E\subseteq X$. 则 $E^\circ$ 是 $X$ 上包含于 $E$ 的最大开集.

证明 任取开集 $B\subseteq E$. 任取 $\boldsymbol{x}\in B$, 则存在一个邻域 $N(\boldsymbol{x})\subseteq B\subseteq E$. 故 $\boldsymbol{x}\in E^\circ$. 因此 $B\subseteq E^\circ$. 于是可知 $E^\circ$ 是 $X$ 上包含于 $E$ 的最大开集.

**定义 7.10 (极限点)**

设度量空间 $(X,d)$, $E\subseteq X$. 若 $\boldsymbol{x}\in X$ 的任一去心邻域 $\check{N}_r(\boldsymbol{x})$ 都满足 $\check{N}_r(\boldsymbol{x})\cap E\ne\varnothing$, 则称 $\boldsymbol{x}$ 为 $E$ 的一个**极限点** (limited point) 或**聚点** (accumulation point, cluster point). 否则称 $\boldsymbol{x}$ 为 $E$ 的一个**孤立点** (isolatied point).

注 极限点不一定在 $E$ 中.

**定理 7.3**

设度量空间 $(X,d)$ 的一个子集 $E$. 则 $\boldsymbol{x}$ 是 $E$ 的一个极限点当且仅当 $\boldsymbol{x}$ 的任一邻域与 $E$ 的交集都包含无穷多个点.

**证明** 充分性显然成立. 下面证明必要性. 假设存在一个邻域 $N(\boldsymbol{x})$ 与 $E$ 的交集只包含有限个点. 设 $\check{N}(\boldsymbol{x}) \cap E = \{\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2. \cdots, \boldsymbol{x}_n\}$. 令

$$r = \min_{1 \le i \le n} d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}_i).$$

则 $\check{N}_r(\boldsymbol{x}) \cap E = \varnothing$. 于是 $\boldsymbol{x}$ 不是 $E$ 的极限点. 产生矛盾. 假设不成立. 于是可知必要性成立.

**注** 以上定理表明 $\boldsymbol{x}$ 是 $E$ 的一个孤立点当且仅当 $\boldsymbol{x}$ 存在一个邻域只包含有限个点.

**推论 7.1**

设度量空间 $(X, d)$ 的一个子集 $E$. 若 $E$ 是一个有限集, 则 $E$ 中没有极限点.

**证明** 证明略.

**定义 7.11 (稠密集、闭集、完美集)**

设度量空间 $(X, d)$, $E \subseteq X$. 把 $E$ 的所有极限点组成的集合记作 $E'$. 我们称 $E'$ 为 $E$ 的**导集** (derived set).

(1) 若 $E' = X$, 则称 $E$ 是 $X$ 上的一个**稠密集** (dense set).

(2) 若 $E' \subseteq E$, 则称 $E$ 是 $X$ 上的一个**闭集** (closed set).

(3) 若 $E' = E$, 则称 $E$ 是 $X$ 上的一个**完美集** (perfect set).

$E \cup E'$ 称为 $E$ 的**闭包** (closure), 记作 $\overline{E}$.

**定理 7.4 (开集和闭集的关系)**

在度量空间 $(X, d)$ 中, $E$ 是一个开集, 当且仅当 $E^c$ 是一个闭集.

**证明** (i) 证明充分性. 若 $E^c$ 是一个闭集. 任取 $\boldsymbol{x} \in E$, 则 $\boldsymbol{x} \notin E^c$. 因此 $\boldsymbol{x}$ 不是 $E^c$ 的极限点. 故存在一个 $\boldsymbol{x}$ 的邻域 $N(\boldsymbol{x})$ 满足 $N(\boldsymbol{x}) \cap E^c = \varnothing$. 于是 $N(\boldsymbol{x}) \subseteq E$. 因此 $\boldsymbol{x}$ 是 $E$ 的一个内点. 于是可知 $E$ 是一个开集.

(ii) 证明必要性. 若 $E$ 是一个开集. 任取 $E^c$ 中的一个极限点 $\boldsymbol{x}$ (若 $E^c$ 中没有极限点, 则 $E^c$ 是一个闭集). 则 $\boldsymbol{x}$ 的任一去心邻域 $\check{N}(\boldsymbol{x})$ 都满足 $\check{N}(\boldsymbol{x}) \cap E^c \neq \varnothing$. 因此 $\boldsymbol{x}$ 不是 $E$ 的内点. 由于 $E$ 是一个开集. 故 $\boldsymbol{x} \notin E$, 从而 $\boldsymbol{x} \in E^c$. 于是可知 $E^c$ 是一个闭集.

**定理 7.5 (开集的性质)**

在度量空间 $(X, d)$ 中,

(1) $\varnothing$ 和 $X$ 都是开集.

(2) 设开集族 $\{E_\alpha \mid \alpha \in I\}$, 其中 $I$ 是一个指标集. 则 $\bigcup_{\alpha \in I} E_\alpha$ 仍是一个开集.

(3) 设有限个开集 $F_1, F_2, \cdots, F_n$. 则 $\bigcap_{i=1}^{n} F_i$ 仍是一个开集.

**证明** (1) 显然成立.

(2) 设 $E = \bigcup_{\alpha \in I} E_\alpha$. 任取 $\boldsymbol{x} \in E$. 则存在 $\alpha \in I$ 使得 $\boldsymbol{x} \in E_\alpha$. 因此 $\boldsymbol{x}$ 是 $E_\alpha$ 的一个内点. 于是 $E$ 也是 $E$ 的一个内点. 于是可知 $E$ 仍是一个开集.

(3) 设 $F = \bigcap_{i=1}^{n} F_i$. 对于任一 $\boldsymbol{x} \in F$ 都存在一个邻域 $N_{r_i}(\boldsymbol{x}) \subseteq F_i$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$. 令

$$r = \min\{r_1, r_2, \cdots, r_n\}.$$

则 $\boldsymbol{x}$ 的邻域 $N_r(\boldsymbol{x})$ 对于任一 $i \in \{1, 2, \cdots, n\}$ 都有 $N_r(\boldsymbol{x}) \in F_i$. 因此 $N_r(\boldsymbol{x}) \in F$. 于是可知 $F$ 仍是一个开集.

无限个开集的交集未必是开集. 我们举例说明.

**例 7.1** 在 Euclid 空间 $\mathbb{R}$ 中, 设一列开区间 $E_i = \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$ $(i = 1, 2, \cdots)$, 它们都是 $\mathbb{R}$ 上的开集. 则 $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} E_i = \{0\}$. 显然 $\{0\}$ 不是 $\mathbb{R}$ 上开集.

**推论 7.2 (闭集的性质)**

在度量空间 $(X, d)$ 中,

(1) $\varnothing$ 和 $X$ 都是闭集.

(2) 设闭集族 $\{E_\alpha \mid \alpha \in I\}$, 其中 $I$ 是一个指标集. 则 $\bigcap\limits_{\alpha \in I} E_\alpha$ 仍是一个闭集.

(3) 设有限个闭集 $F_1, F_2, \cdots, F_n$. 则 $\bigcup\limits_{i=1}^{n} F_i$ 仍是一个闭集.

**证明** (1) 显然成立.

(2) 由于 $E_\alpha$ $(\alpha \in I)$ 都是闭集, 由定理 (7.4) 可知 $E_\alpha^c$ $(\alpha \in I)$ 都是开集. 由定理 (7.5) 可知 $\bigcup\limits_{\alpha \in I} E_\alpha^c$ 是一个开集. 由定理 (0.1) 可知

$$\left(\bigcap_{\alpha \in I} E_\alpha\right)^c = \bigcup_{\alpha \in I} E_\alpha^c.$$

于是可知 $\left(\bigcap\limits_{\alpha \in I} E_\alpha\right)^c$ 是一个开集. 由定理 (7.4) 可知 $\bigcap\limits_{\alpha \in I} E_\alpha$ 是一个闭集.

(3) 由于 $F_1, F_2, \cdots, F_n$ 都是闭集, 由定理 (7.4) 可知 $F_1^c, F_2^c, \cdots, F_n^c$ 都是开集. 由定理 (7.5) 可知 $\bigcap\limits_{i=1}^{n} F_i^c$ 是一个开集. 由定理 (0.1) 可知

$$\left(\bigcup_{i=1}^{n} F_i\right)^c = \bigcap_{i=1}^{n} F_i^c.$$

于是可知 $\left(\bigcup\limits_{i=1}^{n} F_i\right)^c$ 是一个开集. 由定理 (7.4) 可知 $\bigcup\limits_{i=1}^{n} F_i$ 是一个闭集.

**定理 7.6 (闭包的性质)**

设度量空间 $(X, d)$ 的一个子集 $E$. 则

(1) $\overline{E}$ 是一个闭集.

(2) $E$ 是一个闭集当且仅当 $E = \overline{E}$.

(3) 若对于任一闭集 $F \subseteq X$ 都有 $E \subseteq F$, 则 $\overline{E} \subseteq F$.

**证明** (1) 任取 $\boldsymbol{x} \in \overline{E}^c$. 则 $\boldsymbol{x} \notin E$ 且 $\boldsymbol{x} \notin E'$, 即 $\boldsymbol{x} \notin E$ 且 $\boldsymbol{x}$ 不是 $E$ 的极限点. 因此 $\boldsymbol{x}$ 存在一个邻域 $N(\boldsymbol{x}) \cap E = \varnothing$. 因此 $\boldsymbol{x}$ 是 $\overline{E}^c$ 的一个内点. 故 $\overline{E}^c$ 是一个开集. 由定理 (7.4) 可知 $\overline{E}$ 是一个闭集.

(2) 充分性显然成立. 若 $E$ 是一个闭集, 则 $E' \subseteq E$. 于是可知 $E = E \cup E' = \overline{E}$.

(3) 由于 $F$ 是一个闭集, 故 $F' \subseteq F$. 由于 $E \subseteq F$, 故 $E' \subseteq F'$. 因此 $E' \subseteq F$. 于是可知 $\overline{E} \subseteq F$.

**注** 以上定理中的 (1) 和 (3) 表明 $X$ 中 $\overline{E}$ 是包含 $E$ 的最小闭集.

**命题 7.5**

设实数域 $\mathbb{R}$ 的一个非空子集 $E$. 若它有上界. 则 $\sup E \in \overline{E}$.

**证明** 设 $m = \sup E$. 若 $m \in E$, 则 $m \in \overline{E}$. 下设 $m \notin E$. 则对于任一 $h > 0$ 都存在 $x \in E$ 使得

$$m - h < x < m.$$

这表明 $m$ 的任一去心邻域与 $E$ 的交集都非空, 故 $m \in E'$. 于是可知 $m \in \overline{E}$.

注 若 $E$ 是一个闭集, 则 $\sup E \in E$.

设度量空间 $(X,d)$. 若 $E \subseteq Y \subseteq X$. 若 $E$ 是 $X$ 上的一个开集. 则对于任意一点 $\boldsymbol{x} \in E$ 都存在一个 $r > 0$ 使得

$$d(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}),\ \boldsymbol{y} \in X \Longrightarrow \boldsymbol{y} \in E.$$

我们已经知道 $Y$ 也是一个度量空间. 因此 $E$ 也是 $Y$ 上的一个开集. 但反过来未必成立. 例如, 开区间 $(a,b)$ 是度量空间 $\mathbb{R}$ 中的一个开集. 但它不是 2 维空间 $\mathbb{R}^2$ 上的开集. 这表明开集 (或闭集) 是对于某个度量空间来讲的. 下面我们就来讨论 $E$ 是 $Y$ 上的一个开集的条件.

**命题 7.6**

设度量空间 $(X,d)$ 的一个子集 $Y$. 则 $E$ 是 $Y$ 上的一个开集当且仅当对于任意 $X$ 中的开集 $G$ 都有 $E = Y \cap G$. ♠

证明 (i) 证明必要性. 若 $E$ 是 $Y$ 上的一个开集. 则

(ii) 证明充分性. 若对于任意 $X$ 中的开集 $G$ 都有 $E = Y \cap G$.

**定义 7.12 (外点)**

设度量空间 $(X,d)$, $E \subseteq X$. $(E^c)^\circ$ 中的点称为 $E$ 的**外点** (exterior point). $E$ 的所有外点组成的集合称为 $E$ 的**外部** (exterior), 记作 $E^e$. 既不是 $E$ 的内部, 也不是 $E$ 的外部的点称为 $E$ 的**边界点** (boundary point). $E$ 的所有边界点组成的集合称为 $E$ 的**边界** (boundary), 记作 $\partial E$. ♣

注 容易看出 $\{E^\circ, E^e, \partial E\}$ 是 $X$ 的一个划分.

实数域 $\mathbb{R}$ 中的闭区间套定理可以推广到 $n$ 维 Euclid 空间 $\mathbb{R}^n$ 上.

**定义 7.13 (集合的直径)**

设 Euclid 空间 $\mathbb{R}^n$ 的非空子集 $E$. 令

$$\operatorname{diam} E := \sup\{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}| \mid \boldsymbol{x},\boldsymbol{y} \in E\}.$$

$\operatorname{diam} E$ 称为 $E$ 的**直径** (diameter). ♣

注 容易看出 $\operatorname{diam} E \in \mathbb{R}$ 当且仅当 $E$ 是一个有界集.

**定理 7.7 (闭集套定理)**

设 Euclid 空间 $\mathbb{R}^n$ 的个闭集序列 $\{F_i\}$, 其中 $F_i \neq \varnothing\ (i = 1,2,\cdots)$. 若 $F_1 \supseteq F_2 \supseteq F_3 \supseteq \cdots$ 且 $\lim\limits_{i\to\infty} \operatorname{diam} F_i = 0$, 则 $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} F_i$ 只含唯一的一个点. ♡

证明 XXX

### 7.1.3 紧集

我们在实数理论中已经学过了有限覆盖定理. 现在我们反过来, 用满足 "有限覆盖" 来定义度量空间的**紧性** (compactness).

**定义 7.14 (紧集)**

设度量空间 $(X,d)$, $E \subseteq X$. 若 $X$ 上的一个开集族 $\{E_\alpha \mid \alpha \in I\}$ 满足 $\bigcup\limits_{\alpha\in I} E_\alpha \supseteq E$, 其中 $I$ 是一个指标集. 则称 $\{E_\alpha \mid \alpha \in I\}$ 是 $E$ 的一个**开覆盖** (open cover). 若存在 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 使得 $E \subseteq \bigcup\limits_{i=1}^{n} E_{\alpha_i}$, 则称 $E$ 是 $X$ 上的一个**紧集** (compact set). ♣

由以上定义立刻可知有限集肯定是紧集.

**定理 7.8**

设度量空间 $X, K \subseteq Y \subseteq$. 则 $K$ 是 $X$ 上的一个紧集当且仅当 $K$ 是 $Y$ 上的一个紧集.

**证明**

**定理 7.9**

任一紧集都是闭集.

**证明**

**定理 7.10**

紧集的闭子集仍是紧集.

**证明**

**定义 7.15 (列紧集)**

设度量空间 $(X, d)$, $E \subseteq X$. 若任一无限集 $F \subseteq E$ 都有一个极限点 $\boldsymbol{x} \in E$, 则称 $E$ 是一个**列紧集** (sequentially compact set).

**定理 7.11**

设 Euclid 空间 $\mathbb{R}^n$ 中的一个子集 $E$. 则以下任意两个命题成立都可以得出第三个命题成立.

$1^\circ$ $E$ 是一个有界闭集.

$2^\circ$ $E$ 是一个紧集.

$3^\circ$ $E$ 是一个列紧集.

**证明**

**定理 7.12 (Bolzano-Weierstrass 定理)**

设 Euclid 空间 $\mathbb{R}^n$. 则 $\mathbb{R}^n$ 的任一有界无限子集 $E$ 都有一个极限点 $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$.

**证明**

### 7.1.4 完备集

**定理 7.13**

**证明**

**推论 7.3**

**证明**

**Cantor 集** (Cantor set)

### 7.1.5 连通集

**定义 7.16 (连通集)**

设度量空间 $(X,d)$, $E \subseteq X$. 若 $E = A \cup B$ 且满足 $A \cap \overline{B} \neq \varnothing$ 或 $\overline{A} \cap B \neq \varnothing$, 则称 $E$ 是 $X$ 上的一个**连通集** (connected set).

**注** 若 $A \cap \overline{B} = \varnothing$ 且 $\overline{A} \cap B = \varnothing$, 则称 $A$ 和 $B$ 是**分离的** (separated). 容易看出若 $A$ 和 $B$ 是分离的则 $A \cap B = \varnothing$, 反之则未必成立. 例如在 $\mathbb{R}$ 上, 区间 $[0,1]$ 和 $(1,2)$ 的交集是空集, 但它们不是分离的.

**定理 7.14**

**证明**

## 7.2 拓扑空间

**定义 7.17 (拓扑和开集)**

设集合 $X$, 集合 $\mathcal{T} \subseteq 2^X$,$A, B$ 是指标集, 其中 $B$ 是有限集. 若 $\mathcal{T}$ 满足以下条件

$$
\begin{aligned}
&\varnothing, X \in \mathcal{T};\\
&\forall \alpha \in A\,(U_\alpha \in \mathcal{T}) \Longrightarrow \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha \in \mathcal{T};\\
&\forall \beta \in B\,(U_\beta \in \mathcal{T}) \Longrightarrow \bigcap_{\beta \in B} U_\beta \in \mathcal{T}.
\end{aligned}
$$

则称 $\mathcal{T}$ 是 $X$ 上的一个**拓扑** (topology). $X$ 和 $\mathcal{T}$ 组成的一个序对 $(X,\mathcal{T})$ 称为一个**拓扑空间** (topological space) 称 $\mathcal{T}$ 中的元素是关于拓扑 $\mathcal{T}$ 的**开集** (open set), 或集合 $X$ 上的开集. 因此拓扑也可称为**开集系** (system of open sets).

容易发现开区间实际上是 $\mathbb{R}$ 上的开集, 所以 $\mathbb{R}^n$ 上的开集实质上是 $\mathbb{R}$ 上的开区间的推广. 需要注意, 在描述某个集合是开集时, 必须明确在哪个空间上, 因为某个空间的开集在另一个空间中未必是开集. 例如 $\mathbb{R}$ 上的开区间, 到了 $\mathbb{R}^2$ 上就不再是开集.

根据以上定义, 我们发现对于一个集合 $X$, 有两种拓扑是非常显然的.

**定义 7.18 (离散拓扑)**

设集合 $X$, 显然它的幂集 $2^X$ 是 $X$ 上的一个拓扑. 我们称 $2^X$ 为 $X$ 上的**离散拓扑** (discrete topology),$(X, 2^X)$ 称为 $X$ 上的**离散拓扑空间** (discrete topological space).

**定义 7.19 (平凡拓扑)**

设集合 $X$, 显然 $\{X,\varnothing\}$ 是 $X$ 上的一个拓扑. 我们称 $\{X,\varnothing\}$ 为 $X$ 上的**平凡拓扑** (trivial topology),$(X,\{X,\varnothing\})$ 称为 $X$ 上的**平凡拓扑空间** (trivial topological space).

容易发现一个集合上的离散拓扑和平凡拓扑是两个极端——-即最强和最弱的拓扑.

**定义 7.20 (拓扑的强弱)**

设 $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2$ 是集合 $X$ 上的两个拓扑. 若

$$\mathcal{T}_1 \subset \mathcal{T}_2$$

则称 $\mathcal{T}_1$ 比 $\mathcal{T}_2$ 弱, 或称 $\mathcal{T}_2$ 比 $\mathcal{T}_1$ 强.

以上介绍的是最一般化的拓扑概念, 在实分析中真正常用的是 $\mathbb{R}^n$ 上的拓扑. 下面我们定义这样一种拓扑.

**定义 7.21 (通常拓扑)**

$\mathbb{R}^n$ 上的**通常拓扑** (usual topology)

$$\mathcal{U} := \{G \in \mathbb{R}^n : \forall \boldsymbol{x} \in G, \exists r > 0\,(B_r(\boldsymbol{x}) \subseteq G)\}.$$

我们发现根据以上定义, 在 $\mathbb{R}$ 上的通常拓扑就是: 所有可以表示为开区间的并的集合组成的集合族.

**定义 7.22 (上拓扑)**

**上拓扑** (upper topology)

**定义 7.23 (下拓扑)**

**下拓扑** (lower topology)

$\mathbb{R}^n$ 上的通常拓扑也可以推广到函数空间中.

**定义 7.24 (函数空间中的开球)**

$C[0,1]$ 表示定义在闭区间 $[0,1]$ 上的全体实值连续函数的集合. 设函数 $x(t) \in C[0,1]$, $r > 0$. 则在 $C[0,1]$ 上, 以 $x(t)$ 为球心,$r$ 为半径的开球

$$B_r(x) := \left\{ y \in C[0,1] : |y - x| = \max_{t \in [0,1]} |y(t) - x(t)| < r \right\}.$$

**定义 7.25 (一致收敛拓扑)**

$C[0,1]$ 上的**一致收敛拓扑** (topology of uniform convergence)

$$\mathcal{M} := \{G \subseteq C[0,1] : \forall x \in G, \exists r > 0\,(B_r(x) \subseteq G)\}$$

**定义 7.26 (可分)**

**可分** ()

# 参考文献

[1] DENG E. ElegantLaTeX Templates[Z]. https://elegantlatex.org.