力学与理论力学

作者：物理组

组织：Maki’s Lab

时间：February 2022

版本：0.0

“达虚知妙本，静极见天心，会得个中意，河沙总是金。”——【元】李道纯

Preface

更重要的内容...

谈一点学习的感受和教育人的职责

编写教材时, 一点小小的感悟. 今年 (2022) 年, 我个人也经历了很多事情, 从恋爱 (跑题了), (大概) 博士肄业, 找工作投简历面试试讲, 体会了很多. 在 Maki's lab 输出学术内容, 一开始是兴趣, 然后慢慢有了一点使命感, 一开始有一点点 ''这种'' 感觉, 教材写着写着 ''这种'' 感觉逐渐清晰, 再到一次面试被问及一个相关的问题, 终于在回答的时候, 把 ''这种'' 感觉, 用逻辑梳理了一遍, 用语言表达出来了.

总之, 一开始 ''这种'' 模糊的感觉体现在, 想要做一个知识的网络, 一个知识点是一个节点, 相关的就连起来, 形成一张大网, 学习的时候, 就可以凭兴趣地, 从一个知识点, 跳转到下一个, 再下一个... 有点高中的时候在电子辞典上看《不列颠百科全书》的感觉, 从一个词条转到下一个 (当然后面用维基百科也会有类似的行为, 但是《不列颠百科全书》语言更通俗, 可读性好很多, 维基百科经常写得很专业, 稍一深究便教人退却).

再后面, 开始写教材了, 参考着别人的教材, 就有感觉, 很多知识点的顺序排布很奇怪, 按照别人的顺序感觉理解上怪怪的, 但是自己硬是要重新编排呢, 常常就又陷入 ''讲 A 需要 B 的一些作为前置内容, 但是 B 里也会有需要 A 铺垫的部分'' 这样的怪圈.

于是就把 ''这样'' 的感觉, 表述为, 知识本身就是我一开始理解的那样的网 (莫名想到了神经元的结点), 很多知识点纠缠 (tangle) 在一起, 无论先接触哪一个, 都或多或少需要牵扯到一些别的知识点作为预备, 完整的知识体系就是网状的, 然而通常的教材, 通常的课程, 通常的学习过程, 只能是线性的, 从一个点讲到另一个点; 那么, 这样一来, 作为教育者的责任是什么呢, 我觉得, 是找到一条相对合适的线性路线进行推进, 当然因为每个人对于每个知识点的理解不同, 不可能有一条绝对的, 最好的路线, 但是我们可以找到一条相对合理的, 适合大多数人逻辑的线路, 一点点深入. 期间呢, 要适时适当地不停回顾-和之前的知识点建立联系, 以及 ''剧透''-和之后可能出现的知识点也预先连接, 在线性路线的基础上, 把知识这个网状地体系渐渐呈现出来. 再还有呢, 就是因为知识本身的网状特性和学习的线性, 整一个学习的路线呢, 应该是一个 ''螺旋上升'' 的过程, 是一个不断深化理解的过程, 同样的知识点, 可能会不停地出现, 看似学习地路线似乎一直在原地转圈, 但是换一个角度看, 理解在不断的拔高, 每一次回到 ''原点'', 比起上一次可能积攒了更多的相关知识, 对于这一个知识点的理解也会完全不一样.

Zibo (AHBETE) Wang
7/11/2022

更重要的内容...

目录

0.1 标记与约定

- **等价于**: $\equiv$
- **定义为**: $:=$
- **矢量**: 粗体字母, 例如:$\boldsymbol{a}$. 同样的字母, 在没有额外说明的情况下, 非粗体表粗体所示矢量的模 (在本教材中有时会口语化地称作 ‘‘大小”), 例如:$\boldsymbol{v}$ 是速度, v 则是速率.
- 在没有特别说明的情况下, 默认单位是**国际单位制** (法语: Système International d’Unités, 简称 SI).
- **关于时间的导数**: 字母上加点, 例如: $\dot{\boldsymbol{x}} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$, $\ddot{\boldsymbol{x}} = \frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}$.

0.2 阅读指南

- **加框的公式**: 一些公式会在一个框内, 就像如下所示:

$$\boxed{\boldsymbol{r} = x\hat{\imath} + y\hat{\jmath} + z\hat{k}.}$$

  这些公式通常非常重要, 需要理解和记忆.
- **笔记**: 对于前文的一些补充说明, 跳过对于内容理解不会有影响, 但为了知识点的完整性, 推荐阅读. 笔记会有一类内容属于 ‘‘剧透”, 可能在之后的章节中提及, 或者在更高阶的课程中涉及, 因此初读可能感觉不明所以也是正常现象, 这种时候不需要过于纠结理解, 只需有一点印象, 混个眼熟, 之后再次接触的时候便会 ‘‘哦~’’ 地理解.
- **带有 “*’’ 的内容**: 选读. 比较复杂或不太重要的内容, 可以选读或只记忆最终结果.

第一部分

力学

第 1 章 质点力学

内容提要

- 本章我们将先从描述质点运动开始，介绍不同坐标系下对于质点运动的描述；
- 单是描述运动还不够，为了理解质点的运动规律，我们接着便要探讨质点运动背后的原理，同时引出力的概念；
- 之后我们会比较浅显地了解一下坐标系变换；
- 再之，我们会讨论质点其他的物理量 - 能量，动量和动量矩，并讨论守恒量这个概念；
- 本章是力学最基础的内容，以质点为对象讨论了力学中大致涉及的一些内容，学习往往是一个"循环上升"的过程，类似的内容在之后的章节还会继续出现，但是讨论对象会变成更为复杂的质点组或是刚体，因此在这一章先用简单的质点将概念弄清楚，再面对更复杂的情况，理解上就会相对简单一些.

1.1 运动的描述

1.1.1 参考系和坐标系

为了描述和研究物体的运动，我们首先需要确定物体在空间的位置. 然而物体的位置只能被相对的描述，因此我们往往需要另一个物体作为参考. 这种作为参考的物体叫做**参考系** (frame of reference). 在确认了参考系之后，我们可以在此之上选择适当的**坐标系** (coordinate system)，用于描述物体在空间中的相对位置. 根据系统的对称性，为了计算便捷，常用的坐标系有**直角坐标系** (Cartesian coordinate system)，**柱坐标系** (cylindrical coordinate system) 和**球坐标系** (spherical coordinate system).

研究大多数实际问题时，物体本身的尺寸相对其运动经过的尺度很小，我们便可以将其视作一个一维的点而忽略其本身大小和形状，这个物体的质量可以被视作集中在这个点上，对于这种模型，我们称之为**质点** (point mass).

注 参考系强调的是一种"观测"的行为。现实生活中，当我们处于火车上，我们看其他乘客是静止的；而当我们处于火车外的地面上，我们看乘客这是运动的. 这里提到的"火车"和"地面"即为参考系. ■

1.1.2 运动方程

考虑一质点在二维的平面中运动，以此二维平面为参考系，在此平面上建立直角坐标系，则这个质点在各个时刻的位置，即质点的运动轨迹，可以用以下方程组表示

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t). \end{cases} \tag{1.1}$$

根据情况不同，有些时候可能使用极坐标系 (polar coordinate) 会更自然；类似的，这个质点的位置可以表示为

$$\begin{cases} r = r(t), \\ \theta = \theta(t). \end{cases} \tag{1.2}$$

类似于式(1.1)和(1.2)的方程组，描述了质点的运动规律，我们把它们叫做**运动方程** (equations of motion).

注 像(1.1)和(1.2)这样的写法其实属于滥用标记 (abuse of notation)，是不太规范的，但是理解上不会有太大问题，因此请对此比较在意的读者宽容和忍耐一下 (please bear with it). ■

笔记 一些剧透 (spoiler)：之后我们会看到，运动方程不只是简单描述物体在空间中位置的，关于时间的方程；其概念可以被推广到广义坐标，甚至更抽象的概念中. ■

一般我们要求一个物体不能从空间的某个位置突然改变到另一位置，即其运动轨迹应该是连续的，因此，式(1.1)和(1.2)都应当是关于时间 t 的单参数连续方程. 质点移动的轨迹，我们一般称之为轨道 (trajectory); 我们可以将方程组中的 t 消去，得到各个变量之间的关系式，即轨道方程式.

1.1.3 位移, 速度和加速度

对于一个质点，我们建立直角坐标系，然后可以用如 (x, y, z) 的写法来表示质点在某一时刻的位置。同时我们知道，像 (x, y, z) 这样的写法也可以表示 "一个起点在坐标系原点，终点在点 (x, y, z) 的矢量"，这样便额外附加了一个方向的概念 (这为我们下面定速度提供了方便)，我们称之为该质点所处位置的**位置矢量** (position vector), 简称 "位矢". 例如, 在直角坐标系中, 如图1.1所示, 一质点相对于原点的位置可用位矢表述为

$$\boxed{\boldsymbol{r} = x\hat{\imath} + y\hat{\jmath} + z\hat{k},} \tag{1.3}$$

这里 $\hat{\imath}$, $\hat{\jmath}$ 和 $\hat{k}$ 分别是平行于 x, y 和 z 坐标轴的单位矢量, x, y 和 z 则分别为这个矢量在 x, y 和 z 坐标轴上投影的长度. 关于矢量需要的一些基本知识, 可以参见附录B.

注 一些其他的标记 (notation): 有的教科书可能也会用 $\hat{x}$, $\hat{y}$ 和 $\hat{z}$ 来表示平行于 x, y 和 z 坐标轴的单位矢量. 我们在学习过程中, 往往会在不同教科书或是不同文章里看到类似的公式, 但是标记略有出入, 我们应该学习去理解公式背后的涵义, 而不是拘泥于标记的统一.

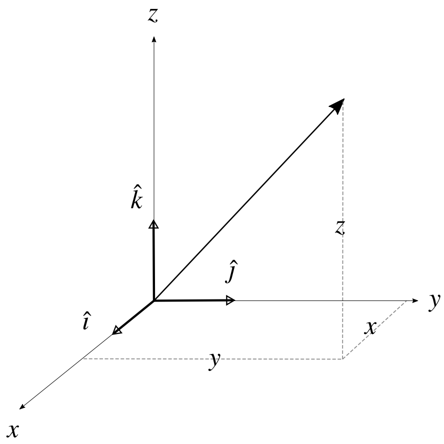

图 1.1: 笛卡尔坐标系的基矢量 $\hat{\imath}$, $\hat{\jmath}$, $\hat{k}$, 以及矢量在三个方向上的坐标 x,y, z。

当质点的位置发生变化时, 如图1.2所示, 某质点从 A 点移动至了 B 点, 类似于直接连接 A 至 B 的矢量, 我们称之为从 A 点到 P 点的**位移** (displacement), 这里我们将它记作 $\Delta\boldsymbol{r}$. 若相对原点 O, A 点的位矢是 $\boldsymbol{r}$, B 点的位矢则为 $\boldsymbol{r} + \Delta\boldsymbol{r}$.

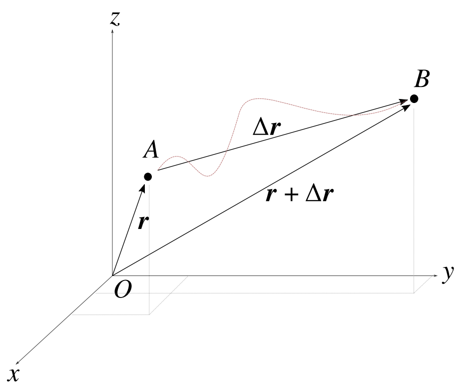

图 1.2: 连接 A 与 B 点的有向线段表示位移，暗红色弯曲虚线表示从 A 移动到 B 的其中一条路径。

注 这里需要特别注意一下 ‘‘位移’’ 和 ‘‘路程” (distance) 的区别, 前者是一个矢量, 而后者是一个标量. 例如在图1.2中, 质点通过一条曲线路径从 A 抵达 B, 那么其移动距离则会大于位移的模 $|\Delta\boldsymbol{r}| = \Delta r$. 一个更特殊的例子, 若一个质点沿封闭曲线行进一周回到起点, 其移动距离显然不为零, 但是位移的模却是零. 类似的, 接下来马上就要出现的 ‘‘速度’’ 与 ‘‘速率’’ 这两个概念也需要进行区分. ■

接下来, 我们来定义**速度** (velocity) 和**加速度** (acceleration).

定义 1.1 (速度)

我们把质点在某一点处的瞬时速度定义为此处位矢的时间变化率, 一般记作 $\boldsymbol{v}$, 即

$$\boxed{\boldsymbol{v}(t) = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\boldsymbol{r}}{\Delta t} = \frac{d\boldsymbol{r}(t)}{\mathrm{d}t} = \dot{\boldsymbol{r}}.} \tag{1.4}$$

因为位矢是一个矢量, 因而对其关于时间求导而得的结果依旧是一个矢量. 如果只考虑这个结果的大小, 不考虑方向, 这个物理量则叫做**速率** (speed).

在**国际单位制** (法语: Système International d’Unités, 简称 SI) 中, 位矢 $\boldsymbol{r}$ 的单位为 m (米), 时间 t 的单位为 s (秒), 因此速度 $\boldsymbol{v}$ 的单位为 m/s (米每秒). ([m]/[s] = [m/s]) ♣

定义 1.2 (加速度)

对速度关于时间再次求导, 得到的物理量称作瞬时加速度. 速度和加速度的关系, 与位移和速度的关系非常类似.

$$\boxed{\boldsymbol{a}(t) = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\boldsymbol{v}}{\Delta t} = \frac{d\boldsymbol{v}(t)}{\mathrm{d}t} = \dot{\boldsymbol{v}} = \ddot{\boldsymbol{r}}.} \tag{1.5}$$

加速度 $\boldsymbol{a}$ 的单位为 m/s^2 (米每秒平方). ([m/s]/[s] = [m/s^2]) ♣

当加速度是常矢量时, 以下几个关系式会很实用, 推导过程比较简单, 留给读者自行完成.

$$\boldsymbol{v}_f = \boldsymbol{v}_i + \boldsymbol{a}t, \tag{1.6}$$

$$\boldsymbol{r}_f = \boldsymbol{r}_i + \boldsymbol{v}_i t + \frac{1}{2}\boldsymbol{a}t^2, \tag{1.7}$$

$$|\boldsymbol{v}_f|^2 = |\boldsymbol{v}_i|^2 + 2\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{r}_f - \boldsymbol{r}_i), \tag{1.8}$$

$$\boldsymbol{r}_f - \boldsymbol{r}_i = \left(\frac{\boldsymbol{v}_i + \boldsymbol{v}_f}{2}\right)t. \tag{1.9}$$

这里下标 i 表起始 (initial), 下标 f 表最终 (final), 之后也会沿用这样的标识.

1.1.4 速度和加速度的分量形式

1.1.4.1 直角坐标系

根据直角坐标系中位矢的表示(1.3)以及速度的定义(1.4), 速度的分量形式可以写作

$$\boxed{\begin{aligned}\boldsymbol{v} &= \dot{x}\hat{\imath} + \dot{y}\hat{\jmath} + \dot{z}\hat{k}\\ &:= v_x\hat{\imath} + v_y\hat{\jmath} + v_z\hat{k}.\end{aligned}} \tag{1.10}$$

因而速率为

$$\begin{aligned}v &= \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}\\ &= \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}.\end{aligned} \tag{1.11}$$

类似的, 加速度是速度关于时间的求导, 或者也可看做是位矢关于时间的二次导, 其分量形式则是

$$\boxed{\begin{aligned} \boldsymbol{a} =& \ddot{x}\hat{\imath} + \ddot{y}\hat{\jmath} + \ddot{z}\hat{k} \\ =& \dot{v}_x\hat{\imath} + \dot{v}_y\hat{\jmath} + \dot{v}_z\hat{k} \\ :=& a_x\hat{\imath} + a_y\hat{\jmath} + a_z\hat{k}. \end{aligned}} \tag{1.12}$$

加速度的大小 (矢量模) 则为

$$\begin{aligned} a =& \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2} \\ =& \sqrt{\dot{v_x}^2 + \dot{v_y}^2 + \dot{v_z}^2} \\ =& \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}. \end{aligned} \tag{1.13}$$

1.1.4.2 极坐标系

在平面的情况，我们可以建立**极坐标系** (polar coordinate system) , 此时任意一点处的位矢可以用 $\boldsymbol{r} = (r, \theta)$ 来表示，其中 r 代表与原点的距离，θ 代表 $\boldsymbol{r}$ 与 x-轴正方向的顺时针方向的夹角。对于任意一点, 我们将原点出发与其连线方向定义为一个单位矢量的方向, 记作 $\hat{r}$; 垂直于这条连线, 向着极角 θ 增加的方向记作另一个单位矢量的方向, 记作 $\hat{\theta}$. 以上论述可能理解上有一定难度, 结合图1.3可能会更方便理解. $\hat{r}$ 与 $\hat{\theta}$ 的方向分别叫做**径向** (radial direction) 和**周向** (或角向 angular/transverse direction).

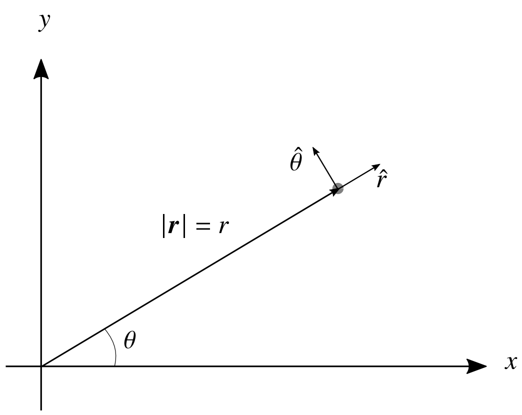

图 1.3: 极坐标系的坐标与基矢量。

显然对任意位矢 $\boldsymbol{r}$, 我们将其分解到平行于它的 $\hat{r}$ 方向, 和垂直于它的 $\hat{\theta}$ 方向, 有

$$\boldsymbol{r} = r\hat{r} + 0\hat{\theta}, \tag{1.14}$$

其中 $r = |\boldsymbol{r}|$.

注 在直角坐标系中，任意位矢是可以由其坐标和基矢量组合表示的, 如坐标为 (x, y) 的矢量 $\boldsymbol{r}$ 可以表示为 $\boldsymbol{r} = x\hat{\imath} + y\hat{\jmath}$. 而在极坐标中并不是一样的表示方式, 即坐标为 (r, θ) 的矢量 $\boldsymbol{r} \neq r\hat{r} + \theta\hat{\theta}$.

根据速度的定义(1.4), 则有

$$\begin{aligned} v =& \frac{\mathrm{d}\,\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}\,t} \\ =& \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}(r\hat{r}) \\ =& \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}r\right)\hat{r} + r\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}\hat{r}\right). \end{aligned} \tag{1.15}$$

易见第一项中, $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}r$ 是矢量长度变化的时间变化率; 第二项的存在则是因为在平面极坐标中, 单位矢量的方向并不是不变的, 那么 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}\hat{r}$ 具体是什么呢? 我们不妨从图1.4上来分析.

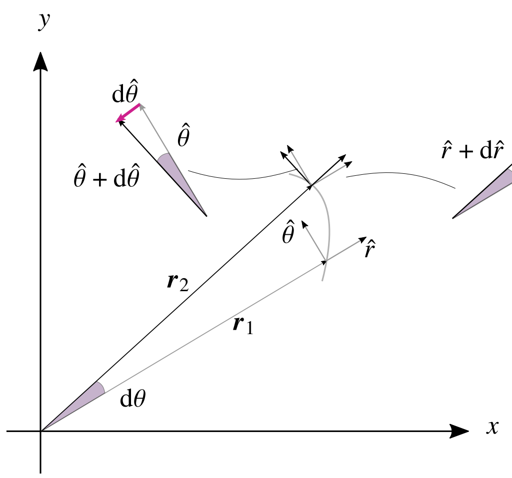

图 1.4: 极坐标系中的基矢量是会改变的。

如图1.4所示, 考虑一任意位矢 $\boldsymbol{r}_1$ 经过了一个无穷小量 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ 变为 $\boldsymbol{r}_2$, 其极角 θ 的变化记作 $\mathrm{d}\theta$. 因为 $\hat{r}$ 的指向是始终跟随 $\boldsymbol{r}$ 的指向的, 即 $\hat{r}$ 的指向与 $\boldsymbol{r_1}$ 的指向一致, $\hat{r}+\mathrm{d}\hat{r}$ 的指向与 $\boldsymbol{r_2}$ 的指向一致, 则有 $\hat{r}$ 与 $\hat{r}+\mathrm{d}\hat{r}$ 的夹角也为 $\mathrm{d}\theta$. 单位矢量长度一定, 那么这个过程可以看作是 $\hat{r}$ 画了一个圆弧, 弧长为 $\mathrm{d}\hat{r}$, 根据弧长与半径和圆心角的关系, 我们有 $\mathrm{d}\hat{r}=(\mathrm{d}\theta)\hat{\theta}$ (当然 $\mathrm{d}\hat{r}$ 也可视作一段弦长, 但在矢量变化前后的夹角是无穷小量 $\mathrm{d}\theta$ 的情况下, 两者可以不严谨地视作一致). 类似的我们也可以得到 $\mathrm{d}\hat{\theta}$ 的表达式, 思路与求 $\mathrm{d}\hat{r}$ 的过程基本一致, 这里不做过多展开; 要特别注意的是 $\mathrm{d}\hat{\theta}$ 的指向, 虽然其指向与 $\hat{\theta}$ 垂直, 但指向圆心而不是背向圆心, 所以其方向为 $(-\hat{r})$. 综上, 我们有

$$\begin{cases} \mathrm{d}\hat{r}=(\mathrm{d}\theta)\hat{\theta}, \\ \mathrm{d}\hat{\theta}=-(\mathrm{d}\theta)\hat{r}. \end{cases} \tag{1.16}$$

结合式(1.15)和(1.16)则有

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v} &=\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}r\right)\hat{r}+r\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\hat{\theta} \\ &=\dot{r}\hat{r}+r\dot{\theta}\hat{\theta} \\ &:=v_r\hat{r}+v_\theta\hat{\theta}. \end{aligned} \tag{1.17}$$

直觉上也很好理解上式, 如第二行所示, 第一项与第二项分别对应矢量长度和方向的时间变化率; 其中第二项, 如果只有 $\dot{\theta}$, 则量纲少了一个距离, 与速度的量纲对不上, 因而乘上与原点距离 r, 这样一来也很符合直觉, 因为同样时间经过同样的角度, 距离原点越远则运动越快; 最后一行里, 我们则定义了**径向速度** v_r 与**周向速度** v_θ.

接下来依旧是加速度. 根据加速的定义(1.5)以及刚刚得到的速度在极坐标下的表达式(1.17)可得

$$\boldsymbol{a}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dot{r}\hat{r}\right)+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(r\dot{\theta}\hat{\theta}\right). \tag{1.18}$$

先来看前一项, 即径向速度的变化率

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dot{r}\hat{r}\right) &=\frac{\mathrm{d}\dot{r}}{\mathrm{d}t}\hat{r}+\dot{r}\frac{\mathrm{d}\hat{r}}{\mathrm{d}t} \\ &=\ddot{r}\hat{r}+\dot{r}\dot{\theta}\hat{\theta}. \end{aligned}$$

其中第一项是由于径向速度大小的改变导致的, 而第二项则是径向速度的方向变化引起的. 再来看后一项, 即周向速度的变化率

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(r\dot{\theta}\hat{\theta}\right) &=\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\dot{\theta}\hat{\theta}+r\frac{\mathrm{d}\dot{\theta}}{\mathrm{d}t}\hat{\theta}+r\dot{r}\frac{\mathrm{d}\hat{\theta}}{\mathrm{d}t} \\ &=\dot{r}\dot{\theta}\hat{\theta}+r\ddot{\theta}\hat{\theta}+r\dot{\theta}^2\hat{r}. \end{aligned}$$

其中前两项是由周向速度的大小变化导致的,最后一项则是因为周向速度方向的变化. 将以上结论整合可得

$$\begin{aligned} \boldsymbol{a} &= \underbrace{\left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right)}\hat{r} + \underbrace{\left(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}\right)}\hat{\theta} \\ &= \underbrace{\left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right)}\hat{r} + \underbrace{\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}(r^2\dot{\theta})}\hat{\theta} \\ &:= a_r\hat{r} + a_\theta\hat{\theta}. \end{aligned} \tag{1.19}$$

最后一项里,我们定义了**径向加速度** a_r 与**周向加速度** a_θ.

在处理三维空间中的问题时,我们需要引入第三个变量来描述位置;例如,在柱坐标系中,我们引入一条垂直于平面极坐标系的 z-轴,则速度与加速度的表述中会增加含 $\dot{z}$ 与 $\ddot{z}$ 的项等;球坐标系中,在平面极坐标 (r, ϕ) 的基础上,我们再引入与正 z-轴之间的夹角-天顶角 θ.

1.1.5 切向加速度与法相加速度

在研究曲线运动时,比较方便的,我们可以分析**切向** (tangential direction) 和**法向** (normal direction). 然我们考虑加速度,因为每一点每一刻,速度是一直切于运动轨道的,因此切向加速度描述了速度大小 (速率) 的变化;法向加速度则垂直于速度,因此它不改变速度大小,只改变速度方向. 关于法相加速度,不严谨地,考虑在足够短的时间间隔内,速度大小的变化可以忽略不计,我们可以将其近似作圆周运动.

严格来讲,如图1.5所示,考虑一质点移动经过一段无穷小量 $\mathrm{d}\,l$,将 $\mathrm{d}\,l$ 视作一段弧长,其对应的圆心角记作 $\mathrm{d}\,\theta$,类似极坐标的情况(1.16),因为切向垂直于法向,我们依然有

$$\begin{cases} \mathrm{d}\,\hat{t} = (\mathrm{d}\,\theta)\hat{n}, \\ \mathrm{d}\,\hat{n} = -(\mathrm{d}\,\theta)\hat{t}. \end{cases} \tag{1.20}$$

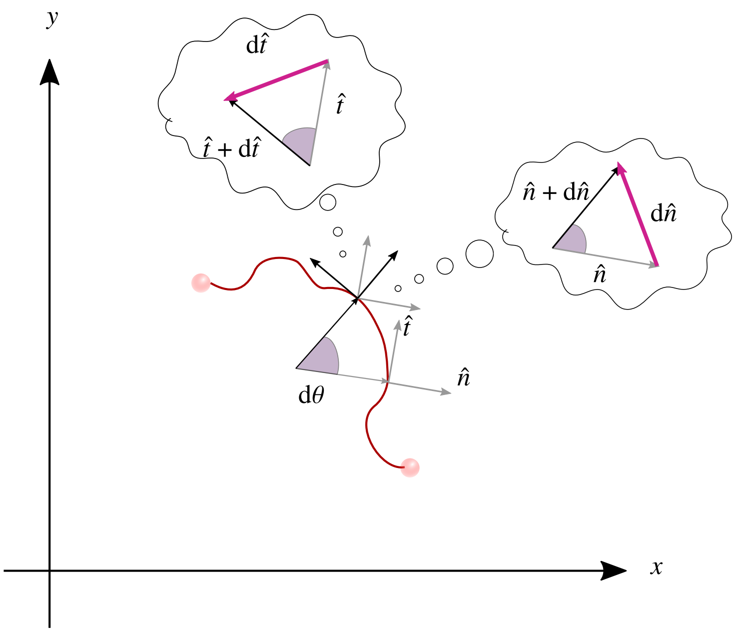

图 1.5: 切矢量和法矢量示意图.

速度是切于运动轨道的,因此

$$\boldsymbol{v} = v\hat{t} + 0\hat{n} = \frac{\mathrm{d}\,l}{\mathrm{d}\,t}\hat{t} \tag{1.21}$$

其中 $v = |\boldsymbol{v}|$, 第二个等号则是利用了速度的定义(1.4). 对上式再次求导, 则有

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{a} &= \frac{\mathrm{d}\, v}{\mathrm{d}\, t} \\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\, t}\left(\frac{\mathrm{d}\, l}{\mathrm{d}\, t}\hat{t}\right) \\
&= \frac{\mathrm{d}^2\, s}{\mathrm{d}^2\, t}\hat{t} + \frac{\mathrm{d}\, l}{\mathrm{d}\, t}\frac{\mathrm{d}\, \hat{t}}{\mathrm{d}\, t} \\
&= \frac{\mathrm{d}^2\, s}{\mathrm{d}^2\, t}\hat{t} + \frac{\mathrm{d}\, l}{\mathrm{d}\, t}\left(\frac{\mathrm{d}\, \hat{t}}{\mathrm{d}\, \theta}\frac{\mathrm{d}\, \theta}{\mathrm{d}\, t}\right) \\
&= \frac{\mathrm{d}^2\, s}{\mathrm{d}^2\, t}\hat{t} + \frac{\mathrm{d}\, l}{\mathrm{d}\, t}\left(\frac{\mathrm{d}\, \hat{t}}{\mathrm{d}\, \theta}\frac{\mathrm{d}\, \theta}{\mathrm{d}\, l}\frac{\mathrm{d}\, l}{\mathrm{d}\, t}\right) \\
&= \frac{\mathrm{d}^2\, s}{\mathrm{d}^2\, t}\hat{t} + \left(\frac{\mathrm{d}\, l}{\mathrm{d}\, t}\right)^2\frac{\mathrm{d}\, \hat{t}}{\mathrm{d}\, \theta}\frac{\mathrm{d}\, \theta}{\mathrm{d}\, l} \\
&= \frac{\mathrm{d}\, v}{\mathrm{d}\, t}\hat{t} + \frac{v^2}{\rho}\hat{n}.
\end{aligned} \tag{1.22}$$

其中最后一个等号, 我们定义 $\rho := \mathrm{d}\, l/\mathrm{d}\, \theta$, 即轨迹在此处的曲率半径. 切向加速度和法向加速度分别可以写作:

$$\begin{cases} \boldsymbol{a}_t = \dfrac{\mathrm{d}\, v}{\mathrm{d}\, t}, \\ \boldsymbol{a}_n = \dfrac{v^2}{\rho}. \end{cases} \tag{1.23}$$

观查上式, 如前面所述, 切向分量反应了速度大小的变化, 而法向分量的表述可以与向心加速度类比. 当运动在三维的空间时, 切向的定义还是清晰的; 而之前的法向, 现在称作 ‘‘主法向” (依旧可以类比成向心加速度的指向); 而同时垂直于这两个方向的指向, 广义上也可称作法向, 我们在里称它为 ‘‘副法向”, 在副法向上, 加速度分量为零.

1.2 牛顿运动定律

在前面的章节里, 我们知道了怎么描述物体的运动, 但是 ‘‘为什么’’ 物体如此运动的问题没有被解决. 因此, 在这一节里， 在之前**运动学** (kinematics) 的基础上, 我们来研究**动力学** (dynamics).

牛顿运动定律是经典动力学的基础, 其本质是经验定律 (empirical laws), 是从观察实验中总结得出的. 牛顿运动定律描述了在宏观且低速情况下的物体的机械运动, 并且将物体间的相互作用-力 (force) 和物体保持其运动状态的特性-惯性 (inertia) 联系了起来.

牛顿运动三定律可以表述为:

定律/定理 1.1 (牛顿第一定律)

任何一个物体 (质点) 如果不受力, 或受到的**合力** (resultant force) 为零, 那么它将保持静止或匀速直线运动. 反之也是正确的. 公式上, 我们可以记作

$$\sum \boldsymbol{F} = 0 \ \leftrightarrow \ v = \text{const.} \tag{1.24}$$

牛顿第一定律描述了物体不受力或受合力为零时, 物体保持运动状态不变的性质, 即惯性, 因此这一条定律又被称作的**惯性定律** .

定律/定理 1.2 (牛顿第二定律)

当物体 (质点) 受力时 (不考虑产生形变), 它将被加速. 加速度的大小与力的大小成正比, 与其质量的大小成反比, 加速度的方向与合力的方向一致. 公式上, 则有

$$\sum \boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a}. \tag{1.25}$$

这里 $\boldsymbol{F}$ 表示力, 对其求和表示合力, m 是物体的惯性质量, $\boldsymbol{a}$ 是加速度.

质量 m 的单位为 kg (千克), 力 $\boldsymbol{F}$ 的单位为 N (牛顿 <Newton>). ($[\mathrm{N}] := [\mathrm{kg}] \cdot [\mathrm{m/s^2}] = [\mathrm{kg} \cdot \mathrm{m/s^2}]$)

笔记 一些超纲: 除了惯性质量, 还有引力质量, 两者并不完全等价 (虽然在广义相对论中, 爱因斯坦通过等效性原理证明二者等效). 关于惯性质量和引力质量的讨论超过了这本教材的覆盖面, 在此不做过深的赘述, 之后我们就将两者笼统地称作 "质量".

定律/定理 1.3 (牛顿第三定律)

当物体 A 施加力 $\boldsymbol{F}_{\mathrm{A\,to\,B}}$ 在物体 B 上, 物体 B 同时会施加一反作用力 $\boldsymbol{F}_{\mathrm{B\,to\,A}}$ 在物体 A 上. 这两个力大小相等, 方向相反, 即

$$\boldsymbol{F}_{\mathrm{A\,to\,B}} = -\boldsymbol{F}_{\mathrm{B\,to\,A}}. \tag{1.26}$$

1.3 质点运动微分方程

1.3.1 构造运动微分方程

我们从牛顿第二定律(1.25)出发, 同时, 作用力一般可以表述为位矢 $\boldsymbol{r}$, 速度 $\boldsymbol{v}$ 及时间 t 的函数, 因而我们有

$$m\boldsymbol{a} = m\ddot{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{v}, t) = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}, \dot{\boldsymbol{r}}, t). \tag{1.27}$$

像上式中 $m\ddot{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}, \dot{\boldsymbol{r}}, t)$ 这样的微分方程就是质点的运动微分方程, 也叫做动力学方程. 用分量形式表述, 比如在三维直角坐标系中, 上式便为:

$$\begin{cases} m\ddot{x} = F_x(x, y, z; \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}; t), \\ m\ddot{y} = F_y(x, y, z; \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}; t), \\ m\ddot{z} = F_z(x, y, z; \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}; t), \end{cases} \tag{1.28}$$

其中 F_x, F_y, F_z 分别是 $\boldsymbol{F}$ 在 x, y, z-轴上的分量 (投影). 观查可以发现, 这是一个二阶常微分方程组, 它的解将有 6 个积分常数, 这些常数可以由**初始条件** (initial condition) $x(t=0), y(t=0), z(t=0)$ 和 $\dot{x}(t=0), \dot{y}(t=0), \dot{z}(t=0)$ 来确定.

当然, 有的时候用极坐标来描述运动更加便捷, 例如在平面直角坐标系中, 通过(1.19)中定义的横向与径向加速度, 我们有

$$\begin{cases} m\left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right) = F_r(r, \theta; \dot{r}, \dot{\theta}; t), \\ m\left(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}\right) = F_\theta(r, \theta; \dot{r}, \dot{\theta}; t), \end{cases} \tag{1.29}$$

1.3.2 解运动微分方程

这里我们分类型大致地介绍一下解微分方程的通常方法, 因为本作是物理教材, 所以一些数学推导就略去了, 感兴趣的读者可以参考 Lamar 大学 Paul Dawkins 教授的笔记: https://tutorial.math.lamar.edu/Classes/DE/DE.aspx.

1.3.2.1 一阶微分方程

例如

$$\frac{\mathrm{d}\,y(t)}{\mathrm{d}\,t} = f(y(t), t),$$

这样的微分方程, 因为其只含 $y(t)$ 的一阶导, 我们便称其为一阶 (first order) 微分方程, 其中 $f(y(t), t)$ 是关于 $y(t)$ 和 t 的方程, 有时为了方便起见 $y(t)$ 直接记作 y.

一般在物理中遇到大多的问题确实可以表述为线性的 (linear) 微分方程, 即不存在 (i) 像 $y^2(t), y(t)\frac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,t}$ 这样待

求函数或是其导数的高次项, (ii) 类似 $\cos(y(t))$ 这样关于待求函数的非线性方程, 我们可以尝试将微分方程写作

$$\frac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,t}+p(t)y=g(t),$$

的形式, 则有通解

$$\boxed{y(t)=\frac{\int\mu(t)g(t)\,\mathrm{d}\,t+C}{\mu(t)},} \tag{1.30}$$

其中 C 是积分常数, 可用初始条件判定, 而 $\mu(t)$ 叫做积分因子 (integrating factor),

$$\boxed{\mu(t)=\mathrm{e}^{\int p(t)\,\mathrm{d}\,t}\,.} \tag{1.31}$$

1.3.2.2 二阶微分方程

如果微分方程出现了待求方程的二次导, 如

$$p(t)\frac{\mathrm{d}^2\,y}{\mathrm{d}\,t^2}+q(t)\frac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,t}+r(t)y=g(t),$$

这样的微分方程便称作二阶 (second order) 微分方程. 将上式重写为

$$ay''+by'+cy=g(t).$$

注 这里撇 (', prime) 表示导数, 例如 $y'\equiv\frac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,t}$, $y''\equiv\frac{\mathrm{d}^2\,y}{\mathrm{d}\,t^2}$, 这样写主要是方便起见, 但是导数是关于哪一个变量的信息也丢失了, 因此在多元函数的情况下需要避免使用这种标记. ■

先考虑齐次 (homogeneous) 的情况, 即 $g(t)=0$. 上式的特征方程 (characteristic equation) 是

$$ar^2+br+c=0.$$

接下来有以下几种情况:

- 当特征方程由两个不同的实数解 r_1 和 r_2 ($b^2-4ac>0$), 微分方程的两个解是

  $$y_1(t)=\mathrm{e}^{r_1t},\ \ y_2(t)=\mathrm{e}^{r_2t}\,.$$

  因为两个解都满足微分方程, 所以通解可以表示为这两个解的线性叠加, 即

  $$\boxed{y(t)=C_1y_1(t)+C_2y_2(t)=C_1\,\mathrm{e}^{r_1t}+C_2\,\mathrm{e}^{r_2t}\,.}$$

  其中 C_1 和 C_2 是积分常数, 需要用初始条件来计算.

- 当特征方程由两个相同的实数解 r ($b^2-4bc=0$), 通解是

  $$\boxed{y(t)=C_1\,\mathrm{e}^{rt}+C_2\,\mathrm{e}^{rt}\,.}$$

- 当特征方程由两个虚数解 $r\pm i\omega$ ($b^2-4bc<0$), 通解是

  $$\boxed{y(t)=\mathrm{e}^{rt}\left[C_1\cos(\omega x)+C_2\cos(\omega x)\right].}$$

再考虑非齐次的情况, 非齐次的情况, 为了使得微分方程等式右边为 $g(t)$, 通解在齐次解 (homogeneous solution) $y_1(t)$ 和 $y_2(t)$ 的基础上还要加入新的项 - 特解 (particular solution)

$$\boxed{y(t)=C_1y_1(t)+C_2y_2(t)-y_1-y_1\int\frac{y_2(t)g(t)}{W(t)}\,\mathrm{d}\,t+y_2\int\frac{y_1(t)g(t)}{W(t)}\,\mathrm{d}\,t}.$$

其中 W 是朗斯基行列式 (Wronskian)

$$W(t)=\begin{vmatrix} y_1(t_0) & y_2(t_0) \\ y_1'(t_0) & y_2'(t_0) \end{vmatrix} = y_1(t_0)y_2'(t_0)-y_2(t_0)y_1'(t_0).$$

1.3.2.3 微分方程组

这里我们只讨论一阶微分方程组, 因为对于高阶的微分方程, 我们可以将其变化为微分方程组, 例如若有

$$y''(t)+y'(t)+y(t)=0$$

令 $x(t)=y'(t)$, 上式便可改写作

$$\begin{cases} x(t)-y'(t)=0, \\ x'(t)+x(t)+y(t)=0. \end{cases}$$

解微分方程组时, 我们可以参照利用线性代数的知识解方程组的思路, 对于齐次的一阶微分方程组写, 我们将其改写为下面的形式

$$\boldsymbol{x}'=A\boldsymbol{x}.$$

其中 $\boldsymbol{x}=(x_1(t),x_2(t),...,x_n(t))$, $\boldsymbol{x}'=(x_1'(t),x_2'(t),...,x_n(t))$, A 是 n 行 n 列的矩阵, 第 i 行第 j 列的元素 A_{ij} 表示第 i 个等式中 x_j 的 ‘‘系数”, 当然这个 ‘‘系数’’ 可以是含 t 的方程.

接下来便是本征值-本征矢量 (又作特征值-特征向量, eigenvalue-eigenvector) 问题了. 若情况比较理想, 微分方程组的各方程间线性无关, 本征值又都是实数且各不相等, 便有通解

$$\boldsymbol{x}=C_1\,\mathrm{e}^{\lambda_1 t}\,\boldsymbol{\xi}_1+C_2\,\mathrm{e}^{\lambda_2 t}\,\boldsymbol{\xi}_2+\ldots+C_n\,\mathrm{e}^{\lambda_n t}\,\boldsymbol{\xi}_n.$$

其中 λ_i 为第 i 个本征值, 而 $\boldsymbol{\xi}_i$ 是第 i 个本征矢量.

对于非齐次的情况, 我们可以先求出齐次解, 再用待定系数法 (undetermined coefficients) 来求特解, 这有点类似 ‘‘猜” (educated guess) 解的形式. 比如非齐次的部分若是有 n 次的多项式, 则特解应该是 $(n+1)$ 次的多项式; 非齐次的部分若是有三角函数, 则特解也应该是三角函数; 非齐次的部分若是有指数函数, 则特解也应该是指数函数.

以上三个小结综述的解法是通常解法, 即在没有 ‘‘巧解’’ 的情况下无差别地 ‘‘暴力’’ 求解, 但是大多数情况一般都会有一些讨巧的方法避免大量计算, 具体情况需要具体讨论, 这里就不作展开, 之后很多的例子中也都有很好的示范.

当然, 还有情况是, 微分方程 (组) 可能会非常复杂, 不存在巧妙地方法, 利用通常地方法也计算量过大, 这时便可以使用数值方法 (numerical method). 很多情况我们也确实不需要待求函数地准确的解析形式, 只需要其在特定取值下的函数值便可, 因此使用数值法也是完全合情合理的. 最简单的方法便是欧拉法 (Euler method), 核心思路便是将导数 $(\mathrm{d}\boldsymbol{x}/\mathrm{d}t)$ 近似作 $(\Delta\boldsymbol{x}/\Delta t)$, 然后取很小的 Δt 进行推演. 数值方法不是这门课的核心内容, 因此也不在这具体展开.

1.4 相对性原理

在研究物体运动时, 我们总是首先选定参考系. 在运动学中, 参考系的选择可以比较任意, 最坏的情况无非数学上会比较复杂; 而在动力学中, 在应用牛顿运动定律时, 参考系的选择就不那么自由. 牛顿运动定律能成立的参考系叫做**惯性参考系** (inertial reference frames).

严格一些的叙述: 惯性参考系是指可以**均匀** (homogeneous) 且**各向同性** (isotropy) 地描述空间, 并且可以均匀描述时间的参考系. 在惯性参考系内, 系统内部的物理规律与系统外的因素无关.

所有的惯性系之间都在进行匀速平移运动. 不同惯性系的测量结果可以通过**伽利略变换** (Galilean transformation) 互相转换 (当然, 这是低速非相对论性的情况; 对于要考虑相对论效应的情况下, 则是使用**洛伦兹变换**

<Lorentz transformation>). 下面是一个运动学中的例子:

例子 1.1 平移 考虑一静止参考系 S, 以及另一参考系 S', 后者相对 S 在 x-轴方向上的上速度为 u. S 系的坐标为 $\{x, y, z, t\}$, 而 S' 系的坐标为 $\{x', y', z', t'\}$. 在 $t = 0$ 时, 两坐标系重合, 且时间同步. 直觉上, 我们有

$$\begin{cases} x' = x - ut, \\ y' = y, \\ z' = z, \\ t' = t. \end{cases} \tag{1.32}$$

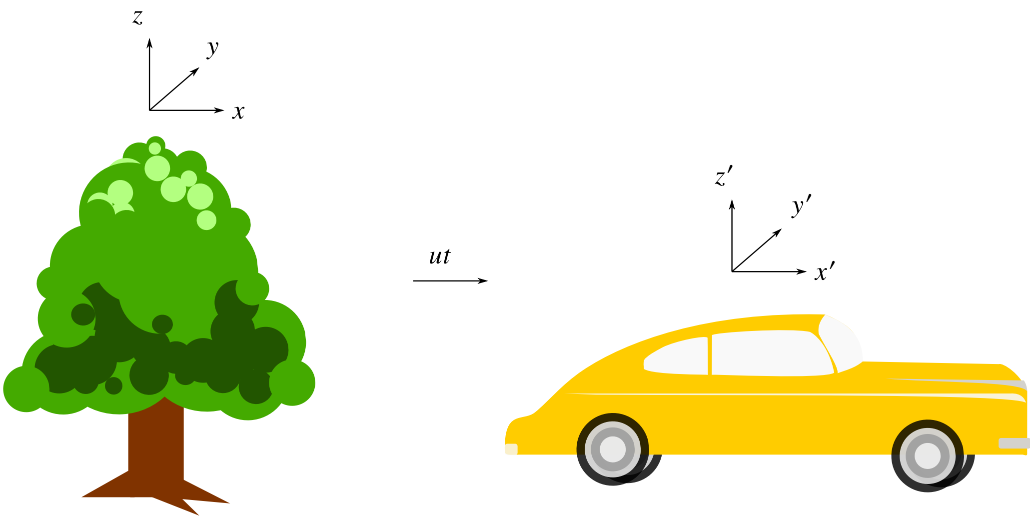

图 1.6: x 方向上的伽利略变换.

这个公式组就是伽利略变换中的沿 x-轴方向平移. 通过这套关系, 我们可以将一个参考系的测量结果与另一个系的联系起来. 例如, 两个系中, 某质点的速度在沿 x-轴方向的分量满足

$$v_x' = \frac{\mathrm{d}x'}{\mathrm{d}t'} = \frac{\mathrm{d}(x - ut)}{\mathrm{d}t} = v_x - u. \tag{1.33}$$

上面的情况中, 两个参考系的相对速度 u 是常量, 对 x-轴方向速度的分量关于时间求导则有

$$\begin{aligned} \dot{v}_x' &= \dot{v}_x - \dot{u} \\ \dot{v}_x' &= \dot{v}_x - 0 \\ a_x' &= a_x. \end{aligned}$$

然而, 当 S' 系相对 S 还有加速度, u 就不是常量了, 因为上式更通常的形式为

$$\begin{aligned} \dot{v}_x' &= \dot{v}_x - \dot{u} \\ a_x' &= a_x - \mathrm{a}, \end{aligned} \tag{1.34}$$

其中 $\mathrm{a} \equiv \dot{u}$, 也是两参考系的相对加速度. ■

上面的例子中的(1.33)和(1.34), 在其他分量也有相对速度或加速的情况下, 可以更通常地用矢量形式写作

$$\boldsymbol{v}' = \boldsymbol{v} - \boldsymbol{u}, \tag{1.35}$$

$$\boldsymbol{a}' = \boldsymbol{a} - \mathbf{a}. \tag{1.36}$$

当两参考系不存在相对加速度时, $\boldsymbol{u}$ 为常矢量, $\mathbf{a}$ 为零; 反之 $\boldsymbol{u}$ 不为常矢量, 且 $\mathbf{a}$ 不为零.

注 早先一些的教材将上述例子中这种情况称作 **"平动参考系"**, 物体相对静止参考系 S 的运动称作 **"绝对" 运动**, 相对运动参考系 S' 的运动称作**相对运动**, 而 S' 系相对 S 系的相对运动, 就称作**牵连运动**. 物体相对 S 系的速度,

例如 $\boldsymbol{v}$, 称作 **“绝对” 速度**, 物体相对 S' 系的速度, 例如 $\boldsymbol{v}'$, 称作**相对速度**, S' 系相对 S 系的相对速度 $\boldsymbol{u}$ 称作**牵连速度**.

类似的, 我们也可以定义**绝对加速度 $\boldsymbol{a}$**, **相对加速度 $\boldsymbol{a}'$**; 对于非惯性参考系, 即一个系相对另一个系有加速度, 我们还可以定义**牵连加速度 $\mathbf{a}$**. ■

不同惯性系的测量结果可以通过一些简单的变换互相转化, 也可以描述为, 物理定律在所有惯性系中形式一致. 一个日常的例子是, 如果不观察窗外, 在车厢内的我们无法感知, 或是通过实验分辨, 车厢处于静止的状态或是匀速直线运动. 这样不能通过任何力学试验来判断一个参考系是静止或是匀速直线运动, 可以更通常地表述为: 相对一个惯性参考系作匀速直线运动的参考系, 其内部所发生地一切力学过程, 都不受这个参考系本身匀速直线运动的影响. 这一原理称作**力学相对性原理**, 或是**伽利略相对性原理** (Galileo's principle of relativity).

例子 1.2 力学相对性原理 考虑牛顿第二定律:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{F}' = m'\boldsymbol{a}' &= m'\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}'}{\mathrm{d}t'^2} \\
&= m'\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t'}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}'}{\mathrm{d}t} \\
&= m\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{u}t)}{\mathrm{d}t} \\
&= m\frac{\mathrm{d}(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{u})}{\mathrm{d}t} \\
&= m\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} \\
&= m\boldsymbol{a} = \boldsymbol{F}.
\end{aligned}$$

可见牛顿第二定律不管在哪一个惯性系都是成立的. ■

1.5 非惯性参考系 (1)

在上一节中, 我们其实已经稍有接触非惯性参考系, 在运动系 S' 相对静止系 S 存在加速度时, 我们发现

$$\boldsymbol{a}' = \boldsymbol{a} - \mathbf{a}.$$

将等式两边同乘 m, 得到

$$m\boldsymbol{a}' = m\boldsymbol{a} - m\mathbf{a}$$

在上一节最后, 我们发现, 不管在哪个惯性参考系中, 牛顿第二定律始终是成立的, 即 $\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a}$, 而且 S 系静止, 的确为惯性系, 因此上式可重新写作

$$m\boldsymbol{a}' = F - m\mathbf{a}.$$

观测上式可以发现, S' 系中牛顿运动定律不再成立了, 即 $\boldsymbol{F} \neq m\boldsymbol{a}'$, 多出了额外的 $(m\mathbf{a})$ 一项; 将上式移项

$$\boldsymbol{F} + (-m\mathbf{a}) = m\boldsymbol{a}'.$$

这样一来, 我们可以依旧将 S' 系中所有 “实质” 的力定义为 $\boldsymbol{F}' := m\boldsymbol{a}'$, 从而保留牛顿第二定律的形式, 这么做的结果 (注: 英文中对于一些操作产生的效果有一个很传神描述 - artifact, 然而笔者文学修养有限, 暂时没有信雅达的翻译, 姑且写作结果) 便是

$$\boldsymbol{F} + (-m\mathbf{a}) = \boldsymbol{F}',$$

即在 S' 系中, 似乎就有了一个 “假想” 的力 $(-m\mathbf{a})$, 我们称这样的力为**假想力** (fictitious force).

定义 1.3 (假想力)

在非惯性系中牛顿运动定律不成立, 所以不能直接用牛顿运动定律处理力学问题. 若仍然希望能用牛顿运动定律处理这些问题, 则必须引入一种作用于物体上的假象力来修正. ♣

注 在更多教材中, 假象力被称作**惯性力** (inertial force). 但是这么一来, 经常会有诸如 "惯性是物体保持原有运动状态的倾向而不是力" 的争论出现, 因此这里我们还是使用 "假想力" 这个说辞. 在惯性系中, "惯性不是力" 这么表述确实没有问题; 但是在非惯性系, 例如, 当物体加速时, 若以该物体本身建立一个参考系, 看起来仿佛就有一个方向相反于加速度的力作用在其之上, 就像惯性-物体保持原有运动状态的倾向-似乎提供了一个力, 因而将这个力称为惯性力. 又因为这个力是没有实体提供的, 即它的出现是基于参考系的选择, 实际上 (在惯性系中) 并不存在, 所以也称之为假想力.

下面是一个简单的例子

例子 1.3 假想力 考虑一小车以加速度 a 向前行驶, 车厢内用质量不计的线悬挂一小球, 悬线与竖直方向夹角为 θ, 求 θ 的表达式.

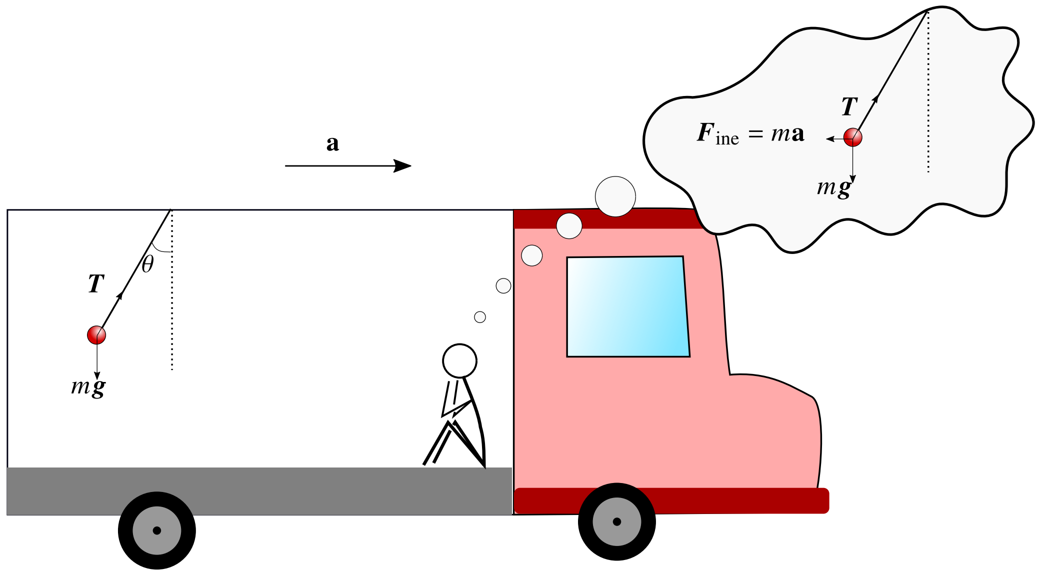

图 1.7: 非惯性参考系下的 "惯性力" .

- 首先考虑比较简单的分析方法, 以地面建立参考系, 因为参考系是惯性系, 所以只需要考虑 "实质" 的力, 小球受到两个力: 线的拉力 T 与自身重力 mg. 利用牛顿第二定律, 在水平方向和竖直方向分别分析, 不难得出
$$\begin{cases} T\sin\theta = m\mathrm{a}, \\ T\cos\theta = mg. \end{cases}$$
即拉力的竖直方向分力与重力平衡, 水平分量提供了加速度. 因而可得
$$\theta = \arctan\frac{\mathrm{a}}{g}.$$
- 接下来考虑车厢内的视角. 以车厢为参考系, 除了拉力 T 与重力 mg, 因为车厢本身处于加速, 根据前面的讨论, 在这样的非惯性系内, 存在一个方向与加速度相反的假象力 $(-m\mathrm{a})$. 相对于车厢, 小球处于静止, 所以这三个力应该三力平衡, 将三个力的矢量首尾相接绘制必定构成一闭合直角三角形, 夹角 θ 的对边与领边分别为 $m\mathrm{a}$ 与 mg, 因此可得一样的结论
$$\theta = \arctan\frac{\mathrm{a}}{g}.$$

1.6 功与能

现在, 我们知道质点在运动过程中任意时刻的速度, 位移或者加速度等, 但我们会好奇质点在这个过程中得到了或者失去了什么, 就像我们在运动过程中会感觉自己越来越累, 使用这之前定义的物理量无法描述这种 ‘‘感觉”, 于是我们接下来就要定义**功**和**能**的概念.

其中 ‘‘能’’ 代表我们原本有的部分, ‘‘功’’ 代表我们从外界获取或者向外界释放的部分.

1.6.1 功和功率

一般而言, 一个作用在质点上的力, 使质点沿其方向产生位移, 那么这个力便对这个质点做了**功** (work). 抽象点来说, 功可以理解为力在空间上的累积.

笔记 既然功可以理解为力在空间上的累积, 那么力在时间上的累积是什么呢? 这个问题我们会在下一节中解答.

定义 1.4

最简单的情况, 当力是恒定的, 且质点受力在力的方向上做直线运动, 那么功 W 便定义为力 (的大小) F 与位移 (的距离) Δr 的乘积, 即

$$W = F\Delta r. \tag{1.37}$$

若力和位移存在夹角, 则功被表述为力与位移矢量的标量积 (点积, 点乘/内积的结果), 即

$$W = \boldsymbol{F}\cdot\Delta\boldsymbol{r} = |F||\Delta r|\cos(\theta). \tag{1.38}$$

这里第二个等号利用了点乘的定义, 其中 θ 为两个矢量的夹角.

再复杂一些, 若路径是一条曲线, 质点受力从点 A 运动至点 B, 功可以表述为一个线积分 (line integral)

$$\boxed{W = \int_A^B \boldsymbol{F}(r)\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \int_A^B \boldsymbol{F}(r)\cdot\cos(\theta)|\,\mathrm{d}r|.} \tag{1.39}$$

这里为了保证一般性, 力 $\boldsymbol{F}$ 可以随位置变化; 另外要注意因为力的方向和路径的方向一直发生变化, 因此 $\boldsymbol{F}$ 与 $d\boldsymbol{r}$ 的夹角 θ 也是一个随着位置 r 变化的量.

功 W 的单位为 J (焦耳), 当 1 N 的力作用在物体上, 使物体沿力的方向移动 1 m 所做的功为 1 J. ([J]:=[N]·[m]=[kg·m^2/s^2])

式(1.39)也可写作分量形式

$$W = \int_A^B (F_x\,\mathrm{d}x + F_y\,\mathrm{d}y + F_z\,\mathrm{d}z). \tag{1.40}$$

当存在多个力时, 我们可以视情况, 根据方便程度, 先计算合理再做积分, 或将分力的功分别计算再求和; 这是利用了标量积的分配律.

$$\begin{aligned} W &= \int \sum_i \boldsymbol{F}_i\cdot \mathrm{d}r \\ &= \sum_i \int \boldsymbol{F}_i\cdot \mathrm{d}r. \end{aligned} \tag{1.41}$$

注 上式将多个力写成了求和形式, 若是觉得不够直观, 可以自行将求和 $\sum_i \boldsymbol{F}_i$ 写作 $\boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2 + \ldots$.

来衡量做功的快慢, 我们可以用**功率** (Power)

定义 1.5

单位时间内作的功定义为功率 P, 即

$$\boxed{P = \frac{\mathrm{d}\,W}{\mathrm{d}\,t}}. \tag{1.42}$$

功率 P 的单位为 W (瓦特). ([W]=[J]/[s]=[kg·m^2/s^3])

一个特殊的情况, 当力 $\boldsymbol{F}$ 恒定时, 不难看出

$$\begin{aligned} P &= \frac{\mathrm{d}\,W}{\mathrm{d}\,t} \\ &= \frac{\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\,\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}\,t} \\ &= \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{v}. \end{aligned}$$

从上式可见, 当功率 P 一定时, 力 $\boldsymbol{F}$ 与速度 $\boldsymbol{v}$ 的大小成反比.

1.6.2 能

若一个物体可以作功, 它便具有一定**能量** (energy), 能量和功的量纲是一致的, 即衡量它们的单位一样. 一物体对外界做功, 则其能量减少; 反之, 外界对一物体做功, 则这个物体能量增加.

在这本教材中, 我们主要关注**机械能** (mechanical energy). 机械能可以分为两大类: 当物体处于运动状态时具有的能量 - **动能** (kinetic energy), 一般记作 T; 当物体处于某个特定位置时所储存的能量 (例如处于高出, 处于令弹簧拉伸的位置) - **势能** (potential energy), 一般记作 V 或者 U.

1.6.3 势能与保守力

势能值得讨论的比较多, 单独作为一小节更细致地介绍一遍. 首先为了之后的描述方便, 我们需要稍稍绕一些弯路 (detour), 引入**保守力** (conservative force) 这个概念.

在1.3.1节中有提到, 一般来讲, 力可以表述为一个关于位置, 速度以及时间的函数; 这么一来, 对其进行积分求作功是非常困难的. 考虑比较简单的情况, 当力 $\boldsymbol{F}$ 只是关于位矢 $\boldsymbol{r}$ 即坐标的函数, 那么计算就会便捷许多. 考虑在三维直角坐标系内, 若如之前所说, 力只是关于坐标的**良态的** (well-behaved, 即有限的, 连续且可微的) 函数, 那么就存在 $(x, y, z) \to (F_x, F_y, F_z)$ 这样一个映射 (mapping), 即这个力实际是一个矢量场 (vector field), 物理上, 我们可以把这样的空间区域称作**力场** (force field). 一般来讲, 式(1.39)这样的线积分是需要明确路径的, 因为即使起始点一样, 路径不同会导致积分的结果不同; 但存在一些特殊情况使得积分结果只和起始点相关, 而与路径无关 (path independent).

矢量分析中, 若一矢量场的线积分是路径无关的, 则可构造一个标量场 (scalar field), 使得这个标量场的梯度为这个矢量场. 对于我们现在正在分析的力场, 即我们可以有一个**势** (potential) U 满足

$$\boxed{-\boldsymbol{F} = \nabla U.} \tag{1.43}$$

这里额外的负号是因为惯例 (convention), ∇U 表示 U 的梯度, 在三维直角坐标系中有

$$\nabla U = \frac{\mathrm{d}\,U}{\mathrm{d}\,x}\hat{\imath} + \frac{\mathrm{d}\,U}{\mathrm{d}\,y}\hat{\jmath} + \frac{\mathrm{d}\,U}{\mathrm{d}\,z}\hat{k}.$$

这样一来, 根据**微积分基本定理** (fundamental theorem of calculus) 就有

$$\int_A^B \boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\,\boldsymbol{r} = U(B) - U(A),$$

使得路径无关满足. 路径无关的一个等价描述是, 对于一闭合路径有

$$\oint \boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\,\boldsymbol{r} = 0,$$

即若起始点为同一位置, 则做功为零.

矢量分析中, 可以表述为一个标量场的梯度的矢量场是**保守的** (conservative). 因此, 对于可以表述为一个势的梯度的力场, 其中的力我们称其为**保守力** (conservative force). 对于不满足 (i) 积分路径无关; (ii) 封闭路径积分为零; (iii) 可以表述为势的梯度; 任意一条件的力场, 其中的力我们则称之为**非保守力**, 或涡旋力.

笔记 矢量分析的一些补充: 保守力场, 或者更通常地说, 保守向量场, 其实也是无旋的 (curl-less), 即对于一保守场 $\boldsymbol{F}$

$$\nabla \times \boldsymbol{F} = 0.$$

这是因为标量场的梯度没用旋度 (梯度无旋):

$$\nabla \times \nabla U = 0.$$

非保守力又可称作涡旋力, 笔者个人的推测和**亥姆霍兹定理** (Helmholtz's theorem) 有关; 根据亥姆霍兹定理, 任何一个向量场都可以表示为一个保守 (旋度为零) 向量场和一个螺线 (散度为零的) 向量场的和.

有了上面关于保守力和势的论述之后, 我们便可以更好的理解为什么势能叫做势能了, 因为势能的变化也是路径无关的. 我们来看几个例子:

例子 1.4 近地重力势能 考虑一质量为 m 的质点, 在地表附近, 其受到的力为 mg, 若其高度变化了 Δh, 则重力作功, 也等价于其重力势能的变化是,

$$\Delta U = mg\Delta h.$$

不难看出, 若起始点固定的情况下, 作功或重力势能的变化只和起始点的高度差 Δh 相关, 而和路径无关.

例子 1.5 更通常的重力势能 牛顿万有引力定律指出, 两个质点之间的吸引力和它们的质量乘积成正比, 和他们间的距离平方成反比:

$$F = \frac{Gm_1m_2}{r^2}. \tag{1.44}$$

其中 $G = 6.67 \times 10^-11\ \mathrm{m^3kg^{-1}}s^{-2}$ 是万有引力常数, m_1 和 m_2 分别是两个质点的质量, r 是两个质点之间的距离. 以质点 1 所在的位置为原点建立坐标系, 当两质点距离由 r_i 变为 r_f 时, 引力作功或重力势能的变化则是

$$\begin{aligned}\Delta U &= -\int_{r_i}^{r_f} \frac{Gm_1m_2}{r^2}dr \\ &= \left.\frac{Gm_1m_2}{r}\right|_{r_i}^{r_f} \\ &= \frac{Gm_1m_2}{r_f} - \frac{Gm_1m_2}{r_i}.\end{aligned}$$

显然作功或重力势能的变化还是路径无关的. 将重力势能定义为

$$U = \frac{Gm_1m_2}{r}. \tag{1.45}$$

则根据定义, 当两质点距离无限时, 重力势能为零 (即根据前面设定, 质点 1 在原点, 质点 2 在无穷远处, $r \to \infty \Rightarrow U \to 0$).

例子 1.6 弹簧的弹性势能 考虑一理想弹簧, 即其应力和应变成线性关系, 符合**胡克定律** (Hooke's law):

$$F = -kx. \tag{1.46}$$

这里 F 是弹簧的应力, k 是弹簧的弹性系数, x 是弹簧的长度变化. 规定弹簧在平衡位置时弹性势能为零, 则其长

度变化为 x 时, 作功或势能的变化是

$$\begin{aligned}\Delta U &= \int_0^x -kx'\,\mathrm{d}x' \\ &= \frac{1}{2}kx'^2\Big|_0^x \\ &= \frac{1}{2}kx^2.\end{aligned}$$

和之前一样, 上式也是路径无关的. ■

注 最后一个例子中, 值得注意的是突然出现了 x'. 很多初学者对于积分时, 积分对象突然变成带撇感到不理解 (或是有时对时间积分, t 会替换成 τ). 为了理解这一标记, 首先要知道**占位符/虚变量** (placeholder/dummy variable) 这个概念.

简单的例子, 比如 $\sum_{n=0}^{n} n$, 我们当然可以很自然地理解为 $0+1+2+\ldots+n$, 但是这样一来, 式子中出现了两种 n, 一个 n 只是占位符, 之后会被具体数字替代, 而另一个 n 则是具体替代的最后一个数字, 虽然理解上不存在太大问题, 但是这样书写非常不严谨, 因而 $\sum_{n=0}^{N} n$ 这样的形式会更清晰.

类似的, 积分时, 有的时候积分对象和积分的上下限字母重复了, 加撇就是将二者区分, 避免混淆. ■

那么, 给定一力场, 如何更加一般地判断这个力是否为保守力, 或其做功是否路径无关呢? 根据前面论述, 我们只需要验证 $\nabla\times\boldsymbol{F}$ 是否为零即可, 因为保守力可以写作势的梯度, 它的旋度为零.

1.6.4 动能定理与机械能守恒定律

考虑一个质点, 初始状态为静止, 之后有且仅有一个恒定的力 $\boldsymbol{F}$ 作用在其之上, 质点受力经过了一段距离 $\Delta\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_f-\boldsymbol{r}_i$. 这个力作功为

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{F}\cdot\Delta\boldsymbol{r}\\ =&m\boldsymbol{a}\cdot\Delta\boldsymbol{r}\\ =&m\frac{1}{2}|\boldsymbol{v}_f|^2.\end{aligned}$$

上式第一行到第二行利用了牛顿第二定律, 第二行到第三行利用了匀加速时加速度, 速度和位矢之间的关系(1.). 更一般的, 当力不恒定时, 我们可以从牛顿第二定律出发

$$m\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2}=\boldsymbol{F},$$

两边同时点乘 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}/\mathrm{d}t$,

$$\begin{aligned}m\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2}\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}&=\boldsymbol{F}\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\\ m\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}\cdot\boldsymbol{v}&=\boldsymbol{F}\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\\ m\,\mathrm{d}\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}&=\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}\end{aligned}$$

因为 $\mathrm{d}(\boldsymbol{v}^2)=2\boldsymbol{v}\,\mathrm{d}\cdot\boldsymbol{v}$,

$$d\left(\frac{1}{2}m\boldsymbol{v}^2\right)=\boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r}. \tag{1.47}$$

上式可以这么理解: 力作用在质点上, 使质点加速获得速度; 力作用经过一段距离, 便是做了功, 1.6.2节中提到过, 对于物体做功, 物体便获得能量, 在这个情况下, 物体获得的能量显然是动能; 因此, 等式右边是做功的无穷小量, 左边即这部分功使得质点获得动能的无穷小量. 之前我们还没有正式地定义动能, 这样一来, 我们也还原出当质点速度为 $\boldsymbol{v}$ 时动能的形式, 即 $T=m\boldsymbol{v}^2/2$. 式(6.)叫做质点的**动能定理** (kinetic energy theorem).

对式(6.)进行积分

$$\frac{1}{2}m\boldsymbol{v}_f^2-\frac{1}{2}m\boldsymbol{v}_i^2=\int_{\boldsymbol{r}_i}^{\boldsymbol{r}_f}\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}.$$

若 $\boldsymbol{F}$ 是保守力,则存在势能 V 使得 $\boldsymbol{F}=-\nabla V$,那么上式对于保守力则有

$$\frac{1}{2}mv_f^2-\frac{1}{2}mv_i^2=V(\boldsymbol{r}_i)-V(\boldsymbol{r}_f).$$

移项可得

$$\frac{1}{2}mv_f^2+V(\boldsymbol{r}_f)=\frac{1}{2}mv_i^2+V(\boldsymbol{r}_i), \tag{1.48}$$

即在保守力的作用下,质点的动能与势能之和,也就是机械能守恒.

一个违反机械能守恒的例子,摩擦力的方向总是和质点运动方向相反,所以始终作负功,将能量从质点耗散到周围环境中,类似于这样的力称作**耗散力** (dissipative force). 尽管机械能被损耗了,但是耗散的能量是以热的形式散溢,热也是能量的一种形式,因此总的能量还是守恒的.

笔记 一点剧透: 完整的能量守恒定律其实源于**时间平移对称** (temporal translation symmetry, TTS),这将在第二部分理论力学的**诺特定理** (Noether's theorem) 中讨论. ■

1.7 动量

历史上动量被提出是为了研究碰撞过程中的守恒量. 一开始人们发现,碰撞过程中,系统的各质点 $(m\boldsymbol{v})$ 或是 (mv^2) 之和都似乎守恒;然后更细致的观测发现,只有一些情况下 (mv^2) 是守恒的 (弹性碰撞),而更通常的,$(m\boldsymbol{v})$ 才是碰撞中的守恒量;因此就有了动量这一概念. 动量的定义如下:

定义 1.6

若一质点的质量是 m,以 $\boldsymbol{v}$ 的速度运动,那么它所具有的**动量** (momentum) p 定义为

$$\boxed{\boldsymbol{p}=m\boldsymbol{v}.} \tag{1.49}$$

动量是一个矢量,因为质量是一个标量,动量的方向与速度的方向一致.

动量的单位为 kg·m/s (千克米每秒). ([kg][m/s]=[kg·m/s]) ♣

1.7.1 动量定理与动量守恒

对动量进行关于时间的求导

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t}}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m\boldsymbol{v})=m\boldsymbol{a}=\boxed{\boldsymbol{F}}. \tag{1.50}$$

这是牛顿第二定律的等价描述,叫做动量定理;事实上,牛顿最早也是用上式来表述牛顿第二定律的.

笔记 一点剧透: 式(1.50)其实只在经典的低速的情况下成立,在狭义相对论中,考虑相对论效应,质量会随速度增加而变大,

$$m=\frac{m_0}{\sqrt{1-v^2/c^2}}. \tag{1.51}$$

上式中,c 是真空中的光速,m_0 是物体相对参考系静止时的质量,而当与参考系相对速率为 v 时,测得该物体的质量为 m,叫做**相对论性质量** (relativistic mass). 这样一来质量 m 不再是一常数,而可以视作一个关于速率 v 的方程,对动量求导则不会像经典情景下那么简单.

观察相对性质量的表达式,我们可以发现,当速率远小于真空光速时,即 $v\ll c\to(v/c)\ll 1$,则质量几乎是等于静止质量的. 在研究狭义相对论时,我们经常会这么操作,来观察当速度足够低时,公式能否还原为经典的形式.

(注: 当 (v/c) 项不能简单地视作趋向零时,我们也可以试其为变量进行**泰勒展开** (Taylor expansion),例如: $(1-(v/c)^2)^{1/2}=1+(v/c)^2/2+3(v/c)^4/8+\ldots$; 另注: 或许有机会我们也会接触一些量子力学,我们也要求满足量子力学的公式在趋于经典情况时还原为经典的模式). ■

式(1.50)也可写作

$$\mathrm{d}\,\boldsymbol{p} = \boldsymbol{F}\,\mathrm{d}\,t,$$

再对其积分可得,

$$\boldsymbol{p}_f - \boldsymbol{p}_i = \int_{t_i}^{t_f} \boldsymbol{F}\,\mathrm{d}\,t. \tag{1.52}$$

上式可以理解为, 动量前后的变化, 等于力对时间的积分. 力对于时间的积分定义为**冲量** (impulse), 记作 I, 和动量的量纲一致. 冲量与动量变化的关系, 和功与能量变化的关系非常相似. 那么这样一来, 我们就可以回收之前抛出的一个问题, 功可以理解为力在空间上的累计, 而力在时间上的累计是冲量.

当式(1.52)中的力 $\boldsymbol{F}$ 始终为零时, 则有前后的动量相等, 即 $\boldsymbol{p}_f - \boldsymbol{p}_i = 0$. 这样一来, 我们可以总结, 当自由质点不受外力作用时, 它的动量保持不变, 这便是**动量守恒定律** (conservation of momentum).

笔记 一点剧透: 正如能量守恒源于时间平移对称, 动量守恒本质上源于**空间平移对称** (spatial translation symmetry), 或者说是空间的均匀性.

1.8 动量矩

这一节我们将通过两种途径来了解**动量矩** (moment of momentum). 第一种途径, 我们从动量出发, 通过 ‘‘矩’’ 这个概念来引出动量矩, 中间会第一次正式用到矢量积 (叉乘), 详细可以参见附录B; 第二种途径我们从圆周运动中的运动学和动力学出发, 引入角速度等概念, 这种途径下, 可以更好的看出即将新引出的一些物理量与之前接触到的物理量的一些 ‘‘平行关系”.

1.8.1 由动量出发

1.8.1.1 力矩和动量矩

力矩 (moment of force) 这个概念相信大家都不陌生, 在初高中研究杠杆问题的时候就有接触. 在这里, 我们更加正式的重申一下这个概念.

矩 (moment) 通常通过一个固定参考点 (或一轴线) 和另一点上的一个物理量来定义. 一般来讲, 参考点和我们所关注的物理量所在点距离 (或物理量所在的点至轴线的垂直距离) 不为零, 则可用一位矢 $\boldsymbol{r}$ 来表述他们的相对位置, 那么这个物理量的矩便通常用这个位矢和它本身的某种乘积定义.

笔记 一些题外话: 数学和统计上的矩, 比如期望值 (expectation), 方差 (variance), 和偏度 (skewness), 其实是源于物理上矩的概念.

定义 1.7 (力矩)

根据上文关于矩的描述, 自然的, 若有一力 $\boldsymbol{F}$, 其作用的点相对一参考的点 (或至轴线的垂直距离) 位矢为 $\boldsymbol{r}$, 则二者的矢量积定义为力矩

$$\boxed{\boldsymbol{M} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}.} \tag{1.53}$$

根据矢量积的性质, 该力矩的模是

$$M = rF\sin\theta. \tag{1.54}$$

上式中 θ 是 $\boldsymbol{r}$ 与 $\boldsymbol{F}$ 的夹角. 力矩 $\boldsymbol{M}$ 的方向则可通过 $\boldsymbol{r}$ 和 $\boldsymbol{F}$ 的方向加之右手定则判断, 具体可以参见附录B.

动量矩 M 的单位为 N·m (牛米). ([m][N]=[N·m]=[kg·m^2·/s^2])

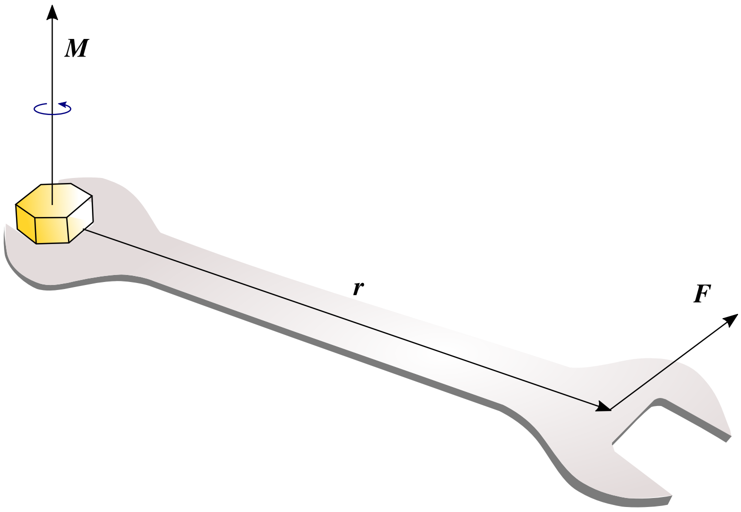

图 1.8: 力矩.

在直角坐标系里, 力矩的分量形式有:

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{M} =& \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F} \\
=& \underbrace{(yF_z - zF_y)\hat{\imath}} + \underbrace{(zF_x - xF_z)\hat{\jmath}} + \underbrace{(xF_y - yF_z)\hat{k}} \\
:=& J_x + J_y + J_z.
\end{aligned}
$$

既然力关于某一参考点或某一轴线具有力矩, 动量关于某一参考点或某一轴线也具有**动量矩** (moment of momentum).

定义 1.8 (动量矩)

类似力矩, 对于一动量 p, 若其所在的点相对参考点的位矢 (或相对轴线垂直距离的位矢) 为 r, 动量矩 J 定义如下

$$\boxed{\boldsymbol{J} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p}.} \tag{1.55}$$

动量矩更通常叫做**角动量** (angular momentum), 在本教材中, 不对二者做区分.
角动量 J 的单位为 kg·m^2/s (千克米平方每秒). ([m][kg·m/s]=[kg·m^2/s])

笔记 一些超纲: **赝矢量** (pseudo-vector). 虽然力矩和动量矩看似与一般矢量无异, 但是在一些情况下, 这样的矢量和 "一般的" 矢量变换的方式不同.

考虑两个 "一般的" 矢量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$, 以及它们矢量积的结果 $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$. 物理上, 有时我们会考虑一种变换叫做**反演变换** (inversion), 空间反演通俗来讲可以理解成镜像, 在三维直角坐标系中, 即 $(x, y, z) \mapsto (-x, -y, -z)$. 不难看出, 在空间反演变换下, "一般的" 矢量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 变化如下

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{a} = a_x\hat{\imath} + a_y\hat{\jmath} + a_z\hat{k} &\mapsto \boldsymbol{a}' = (-a_x)\hat{\imath} + (-a_y)\hat{\jmath} + (-a_z)\hat{k} = -\boldsymbol{a} \\
\boldsymbol{b} = b_x\hat{\imath} + b_y\hat{\jmath} + b_z\hat{k} &\mapsto \boldsymbol{b}' = (-b_x)\hat{\imath} + (-b_y)\hat{\jmath} + (-b_z)\hat{k} = -\boldsymbol{b}.
\end{aligned}
$$

而矢量积的结果则在空间反演变换下表现得不同

$$\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} \mapsto -\boldsymbol{a} \times -\boldsymbol{b} = \boldsymbol{c}.$$

因此, 为了区分, 像 "一般的" 矢量一样在空间反演下变为自身的逆的矢量就称作矢量或**极矢量** (polar vector), 而类似矢量积 (或是 $<$ 极 $>$ 矢量的旋度) 这样在空间反演不变的矢量就称作赝矢量或**轴矢量** (axial vector).

当然, 目前还不需要这么细分这两类向量, 只要有类似力矩或动量矩是一类特殊的向量的印象即可.

我们之前发现力可以使动量发生变化,那么力矩和动量矩是不是又类似的关系呢,我们将在下一小节中展开.

1.8.1.2 动量矩定理与动量矩守恒

对动量矩关于时间求导

$$
\begin{aligned}
\boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{J}} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[m(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{v})\right] \\
&= m(r\times a) \\
&= \boldsymbol{r}\times\boldsymbol{F} \\
&= \boxed{\boldsymbol{M}},
\end{aligned}
\tag{1.56}
$$

得到的结果是力矩,这个结果和式(1.50)非常相似,证实了之前的猜想,力对于动量的关系和力矩对于动量矩的关系是几乎一致的,可以视作是牛顿第二定律的推广. 这个关系叫做**动量矩定律理**,也叫**角动量定理** (angular momentum theorem). 对上式进行积分可得,

$$\boldsymbol{J}_f - \boldsymbol{J}_i = \int_{t_i}^{t_f} \boldsymbol{M}\,\mathrm{d}t. \tag{1.57}$$

上式可以理解为,动量矩的变化等于力矩关于时间的积分. 等式右边可以称作**冲量矩** (moment of impulse) 或 **角冲量** (angular impulse).

当 M 始终为零,式(1.57)右边为零,即 $\boldsymbol{J}_f - \boldsymbol{J}_i = 0$. 所以当质点不受力,因而关于任意点或任意轴线不存在力矩时,质点的动量矩不变,这便是**动量矩守恒定律**,或**角动量守恒定律** (conservation of angular momentum).

笔记 一点剧透:动量矩守恒也是源于一种对称性-空间的旋转对称,或者说是空间的各向同性.

1.8.2 由角速度出发 *

考虑一质点在固定的圆上做圆周运动,因为质点和圆心的距离始终为半径,质点的位移仅用角度的变化便可描述. 类似位移的概念,这里我们定义**角位移** (angular displacement),简称角移.

定义 1.9

角移可以描述一质点绕某一轴所转过的角度,二维情况下建立极坐标系,若质点从点 A 转到点 B,若两点的角坐标分别为 θ_A 和 θ_B,则质点经过的角位移 $\Delta\theta = \theta_B - \theta_A$.

角移的单位是 rad (radian, 弧度, 可以视作**无量纲** <unitless>).

类似与位移之于速度和加速度,有了角移便可定义**角速度** (angular velocity),继而是**角加速度** (angular acceleration).

定义 1.10

角移的时间变化率是角速度,有时也叫**角频率** (angular frequency),记作 ω.

$$\boxed{\omega = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t},} \tag{1.58}$$

角速度 ω 的单位为 rad/s (弧度每秒),因为弧度可以视作无量纲,所以角速度单位也可视作 Hz (赫兹 <Hertz>). ([rad]/[s]=[rad/s]~[s^{-1}]=[Hz])

注 在这一小节里,为了简单起见,我们只关注这些物理量的大小,例如角速度,尽管是矢量,但是一般来讲角移不视作矢量,因此从角移出发只能定义角速度的大小而不是完整的矢量. 当然,角速度矢量还是可以通过

$$\omega = \frac{\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{v}}{r^2}. \tag{1.59}$$

来定义, 这里 $\boldsymbol{r}$ 是质点关于旋转轴的位矢, $\boldsymbol{v}$ 是质点的速度. $\boldsymbol{\omega}$ 大小利用矢量积的性质是

$$\omega=\frac{rv\sin\theta}{r^2}=\frac{v\sin\theta}{r}, \tag{1.60}$$

这里 θ 是 $\boldsymbol{r}$ 与 $\boldsymbol{v}$ 的夹角; $\boldsymbol{\omega}$ 方向则可通过右手定则来判断. ■

定义 1.11

角加速度是角速度的时间变化率, 也是角移关于时间的二次导, 一般记作 α.

$$\boxed{\alpha=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\omega}{\Delta t}=\frac{\mathrm{d}\,\omega}{\mathrm{d}\,t}=\frac{\mathrm{d}^2\,\theta}{\mathrm{d}\,t^2},} \tag{1.61}$$

角加速度 α 的单位为 rad/s^2 (弧度每秒平方). ([rad/s]/[s]=[rad/s^2]~[s^{-2}]) ♣

和直线运动类似的, 当角加速度恒定时, 以下几个关系式会很实用.

$$\theta_f=\theta_i+\omega_i t+\frac{1}{2}\alpha t^2, \tag{1.62}$$

$$\theta_f-\theta_i=\frac{1}{2}(\omega_i+\omega_f)t, \tag{1.63}$$

$$\omega_f=\omega_i+\alpha t, \tag{1.64}$$

$$\omega_f^2=\omega_i^2+2\alpha(\theta_f-\theta_i). \tag{1.65}$$

若要将以上几个新的物理量和直线运动中的位移, 速度, 和加速度联系起来也非常容易. 就如弧度和弧长的关系, 角移 $\Delta\theta$ 和位移 Δr 的关系自然是

$$\Delta r=\Delta\theta r, \tag{1.66}$$

其中 r 是质点与旋转轴的垂直距离. 类似的

$$v=\omega r, \tag{1.67}$$

$$a=\alpha r. \tag{1.68}$$

现在我们有了解决转动问题的运动学工具, 接下来进入动力学. 考虑转动的问题时, 我们现在已经又了类似于 ''位移'', ''速度'', 和 ''加速度'' 的概念, 即角移, 角速度, 和角加速度. 我们还需要一个类似于 ''质量''‘的概念. 质量是衡量惯性的量, 是物体保持原有运动状态的特性, 对于转动的情况, 我们便定义**转动惯量** (rotational inertia) 如下:

定义 1.12

对于一绕轴旋转的质点, 若其质量为 m, 和旋转轴的垂直距离为 r, 则其转动惯量为

$$I=mr^2. \tag{1.69}$$

转动惯量 I 的单位为 kg·m^2 (千克米平方). ([kg]·[m^2]=[kg·m^2]) ♣

这样一来, 非常自然地, 动能就是 $\frac{1}{2}$ 的 ''质量'' 乘以 ''速度'' 平方的形式了,

$$\boxed{T}=\frac{1}{2}mv^2=\frac{1}{2}\left(mr^2\right)\left(\frac{v}{r}\right)^2=\boxed{\frac{1}{2}I\omega^2}, \tag{1.70}$$

然后是一个类似于 ''力'' 的概念, 类推自牛顿第二定律, ''力'' 等于 ''质量'' 乘以 ''加速度'',

$$F=ma$$

$$Fr=(mr^2)\frac{a}{r}$$

$$\boxed{\tau = I\alpha,} \tag{1.71}$$

第二行至第三行, 我们定义了**扭矩** (torque)

$$\boxed{\tau := rF.} \tag{1.72}$$

注 事实上, 扭矩和力矩可以看作是同一个概念, 扭矩矢量形式的定义也与力矩的一致, 之所以有不一样的称谓, 主要是因为力矩主要强调处于静力学的情况, 例如杠杆平衡, 而扭矩强调动力学, 如式(1.71)所展现的, 扭矩作用的效果便是使一质点关于某一旋转轴加速旋转.

再来是类似 "动量" 的概念, 仿照着 $p = mv$, 即动量等于质量乘以速度, 我们推测角动量 L 应该等于转动惯量 I 乘以角速度 ω,

$$\boxed{L = I\omega.} \tag{1.73}$$

事实上, 上式也确实应该如此, 从上式出发, 至少在大小上可以还原式(1.55)-动量矩的定义.

仿照着动量定理 $F = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}$, 则有

$$\boxed{\tau = \frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t}.} \tag{1.74}$$

上式在前一小节已经证明, 即动量矩定理, 这里不再重复.

1.9 有心力

这一节我们来介绍一类特殊的保守力 - 有心力. 首先定义有心力.

定义 1.13

一般来讲, 当一质点所受的力的作用线始终通过某一个定点, 我们便说这个质点所受的力是***有心力*** (central force), 这个定点则被称作***力心***.

有心力有以下性质:

- 在有心力作用下, 质点关于力心的动量矩守恒.

  证明 因为有心力 $\boldsymbol{F}$ 与质点和力心连线的位矢 $\boldsymbol{r}$ 共线, 根据矢量积的特性,

  $$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{J}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{M} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F} = 0,$$

  则有动量矩 $\boldsymbol{J}$ 守恒. □

- 在有心力的作用下, 质点的运动始终处于同一平面.

  证明 根据前面的论述, 动量矩 $\boldsymbol{J}$ 是一个常矢量, 那么其指向不变, 根据矢量积的特性, 位矢 $\boldsymbol{r}$ 是始终垂直于 $\boldsymbol{J}$, 则有质点始终处于一个垂直于动量矩 $\boldsymbol{J}$ 的平面内运动. □

- 大小只与 r 相关的有心力是保守力.

  证明 若有心力的大小只与 r 相关 (通常也确实如此), 即 $\boldsymbol{F} = F(r)$, 加之有心力始终与 $\boldsymbol{r}$ 共线, 若质点从 $\boldsymbol{r}_i$ 运动至 $\boldsymbol{r}_f$, 根据功的定义则有

  $$W = \int_{r_i}^{r_f} F(r),$$

  这样一来, 这个情况实际上是个一维的问题, 即质点能量变化仅和 r 一个标量相关. 上面这个积分显然是路径不相关的, 自然便有有心力一般为保守力. □

有心力 $\boldsymbol{F}$ 通常之和 r 相关, 其方向又和 $\boldsymbol{r}$ 共线, 加之质点运动被限制在一个二维平面, 因此建立平面极坐标系非常自然; 考虑一有心力 $\boldsymbol{F}(r)$, 根据极坐标系表达下的加速度(1.19), 不难看出有心力的径向和周向分量可以表述为

$$\begin{cases} m\left(\ddot{r}-r\dot{\theta}^2\right)=F_r=F(r), \\ m(r\ddot{\theta}+2\dot{r}\dot{\theta})=F_\theta=0. \end{cases} \tag{1.75}$$

上方程组的第二式还是根据式(1.19)写作

$$m\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(r^2\dot{\theta}\right)=0.$$

显然有

$$r^2\dot{\theta}=h,$$

这里 h 是一个常数, 将上式两边同乘质点质量 m 可以得到

$$mr^2\dot{\theta}=mh.$$

来看一下上式的物理意义: 等式左边 $mr\dot{\theta}$ 是动量周向分量, 又因为径向分量的方向与 $\boldsymbol{r}$ 垂直, 因此径向分量关于原点的动量矩为零, 所以等式左边便是质点关于原点的动量矩; 等式右边 m 是质量, 不考虑质量发生变化的情况, h 又是一常数, 因此等式右边守恒; 这样一来, 我们再次验证了, 在有心力的情况下, 动量矩守恒.

数学上来看, 现在这个问题其实是两个耦合在一起的常微分方程, 只需两个线性无关的含 $r(t)$ 和 $\theta(t)$ 及它们导数的关系式, 加之合适的初始条件便可求解. 因此很多时候, 为了方便起见, 我们通常将式(1.75)的第二个等式换做更简洁的形式,

$$\begin{cases} m\left(\ddot{r}-r\dot{\theta}^2\right)=F(r), \\ r^2\dot{\theta}=h. \end{cases} \tag{1.76}$$

同样的, 式(1.82)的第一个等式还可以被替换, 根据机械能守恒, 我们有

$$\frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2\right)+V(r)=E.$$

这里 E 是质点的总能量, 是一个常数, $V(r)=-\nabla\boldsymbol{F}$ 是因有心力而存在的势能.

1.9.1 比耐公式

上面的情况中, 我们可以从微分方程组加以适当的初始条件出发, 解出 $r(t)$ 与 $\theta(t)$. 但是有时解出这样的显 (explicit) 函数是很麻烦或是没有必要的, 我们只能或者只需要将 r 和 θ 表示为 t 的隐 (implicit) 函数. 以此为目的, 我们可以尝试将式(1.82)中的 t 消去, 再积分得到 r 与 θ 的关系式.

首先, 为了计算方便, 将 r 进行换元

$$u:=\frac{1}{r}.$$

笔记 这个操作还是比较常见的, 在量子力学中, 比如在研究氢原子波函数的时候, 也会做类似得替换, 同时 u 这个字母的选取也是一种约定. ■

换元后, 式(1.82)的第二个等式变为

$$\dot{\theta}=hu^2.$$

$\dot{\theta}$ 可以直接代入式(1.82)的第一个等式, 然后我们来看第一个等式中的 $\ddot{r}$, 先计算 $\dot{r}$

$$\begin{aligned}\dot{r} = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} &= \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\\&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\frac{1}{u}\right)\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\\&= \left(-\frac{1}{u^2}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\theta}\right)\dot{\theta}\\&= \left(-\frac{1}{u^2}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\theta}\right)\dot{\theta} = -h\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\theta}.\end{aligned}$$

然后再次求导

$$\begin{aligned}\ddot{r} = \frac{\mathrm{d}\dot{r}}{\mathrm{d}t} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(-h\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\theta}\right)\\&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\left(-h\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\theta}\right)\\&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(-h\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\theta}\right)\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\\&= -h\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}\theta^2}\dot{\theta}\\&= -h\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}\theta^2}\left(hu^2\right) = -h^2u^2\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}\theta^2}.\end{aligned}$$

这样, 将 $\ddot{r}$ 和 $\dot{\theta}$ 同时代入式(1.82)的第一个等式便可得到

$$\begin{aligned}m\left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right) &= F(r)\\m\left(-h^2u^2\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}\theta^2} - rh^2u^4\right) &= F(r)\\m\left(-h^2u^2\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}\theta^2} - h^2u^3\right) &= F(r)\end{aligned}$$

$$\boxed{h^2u^2\left(\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}\theta^2} + u\right) = -\frac{F(r)}{m}.} \tag{1.77}$$

这个公式叫做**比耐公式** (Binet equation), 利用这个公式, 可以在已知有心力 $F(r)$ 的情况下求轨道方程, 也可以反过来, 在知道轨道方程的情况下, 求 $F(r)$ 的具体形式.

例子 1.7 万有引力 *

考虑某行星运动, 根据牛顿万有引力, 只考虑太阳和该行星间的作用力, 有

$$F = -\frac{Gm_{\odot}m}{r^2} = -\frac{k^2m}{r^2} = -mk^2u^2. \tag{1.78}$$

上式中, G 是万有引力常数, $m_{\odot}$ 表示太阳的质量, m 是我们关注的行星的质量; 在第三个等号, 因为 G 和 $m_{\odot}$ 都是常数, 我们不妨令 $k^2 := Gm_{\odot}$.

笔记 一些题外话: 用 $\odot$ 符号表示太阳源于占星学. 再比如, 地球用 $\oplus$ 符号来表示, 这一套符号也常在天文学中被使用.

将万有引力公式代入比耐公式,

$$h^2u^2\left(\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}\,\theta^2}+u\right)=k^2u^2$$

$$\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}\,\theta^2}+u=\frac{k^2}{h^2}.$$

现在这个微分方程是非其次的, 为了简化计算, 我们令 $u=\xi+k^2/h^2$, 便有

$$\frac{\mathrm{d}^2 \xi}{\mathrm{d}\,\theta^2}+\xi=0.$$

这个微分方程有通解

$$\xi=A\cos(\theta-\theta_0),$$

于是

$$u=\xi+\frac{k^2}{h^2}=A\cos(\theta-\theta_0)+\frac{k^2}{h^2},$$

$$r=\frac{1}{u}=\frac{h^2/k^2}{1+A\left[\cos(\theta-\theta_0)\right]h^2/k^2}.$$

其中 A 和 θ_0 是积分常数. 因为极坐标在行星运动所在的平面建立是非常任意的, 因此我们可以将其旋转, 使得 $\theta_0=0$; 或者将这个过程视作, 因为动量矩守恒/系统具有旋转对称性, 我们可以进行 $\theta\mapsto\theta+\theta_0$ 这样一个变换.

$$r=\frac{h^2/k^2}{1+\left(Ah^2/k^2\right)\cos\theta}. \tag{1.79}$$

将上式与极坐标下的, 焦点在原点上的圆锥曲线 (conic section) 进行比较,

$$r=\frac{p}{1+e\cos\theta}. \tag{1.80}$$

可以看出

$$p=\frac{h^2}{k^2},\ e=\frac{Ah^2}{k^2}=Ap. \tag{1.81}$$

这里 p 是正通径 (又作正焦弦, latus rectum) 的一半, 即过焦点且平行于准线 (directrix) 的弦的一半; e 是偏心率 (eccentricity); 当 $e=0$ 时, 轨道为圆形; 当 $0<e<1$ 时, 轨道为椭圆; 当 $e=1$ 时, 轨道为抛物线; $e>1$ 时, 轨道为双曲线的一支.

若非从比耐公式出发, 我们也可以从如下的微分方程组着手

$$\begin{cases}\frac{1}{2}m\left(\dot r^2+r^2\dot\theta^2\right)+V(r)=E,\\ r^2\dot\theta=h.\end{cases} \tag{1.82}$$

其中, 因为是万有引力, $V(r)=\frac{k^2m}{r}$. 这样一来的结论如下, 留给读者自行验证

$$r=\frac{h^2/k^2}{1+\sqrt{1=2h^2E/k^4m}\left[\cos(\theta-\theta_0)\right]}. \tag{1.83}$$

用这种方法虽然稍复杂, 但是物理意义会更丰富, 因为其包含了总能量 E. 再次与标准圆锥曲线方程比较可得

$$e=\sqrt{1+\frac{2E}{m}\left(\frac{h}{k^2}\right)^2}.$$

这样便有: $E<0\rightarrow e<1$, 轨道为椭圆或圆; $E=0\rightarrow e=1$, 轨道为抛物线; $E>0\rightarrow e>1$, 轨道为双曲线. 这里总能量可以为负是因为在引力的情况下, 势能是负的, 只有在无穷远处势能定义为零.

顺带引出一下剩余速度 (residual velocity) 这个概念, 即只考虑二体的引力问题, 当我们关注的物体抵达距离另一物体无限距离时 ‘‘残余’’ 的速度; 当总能量 $E<0$, 这样若是我们关注的物体抵达无穷远处, 势能为零, 动能应该为负, 显然这是不可能的, 因此 $E<0$ 时, 它被困于闭合的椭圆或是圆形轨道里; 当总能量 $E=0$, 在无穷远处, 势能为零, 动能也恰好为零, 这是一个临界情况 (critical condition), 即物体抵达无穷远处恰好为了克服引力损失所有动能; 当总能量 $E>0$, 显然物体抵达无穷远处, 还有 ‘‘剩余’’ 的动能, 便还具有一定速度, 这个速度便是剩余速度了.

■

例子 1.8 开普勒定律 *

开普勒在他前辈第谷 · 布拉赫大量观测资料的基础上, 得出行星运动的三条定律:

定律/定理 1.4 (开普勒第一定律)

行星绕太阳作椭圆运动, 太阳位于椭圆的一个焦点上.

证明 略; 详见上一例子. □

定律/定理 1.5 (开普勒第二定律)

行星和太阳之间的连线, 在相等时间内所扫过的面积相等.

证明 设行星与太阳连线扫过的面积为 A, 若单位时间扫过的面积一定, 则应有 $\mathrm{d}A/\mathrm{d}t = \text{conts.}$

考虑行星运动时, 经过时间的无穷小量 $\mathrm{d}t$, 行星前后位置关于太阳的夹角相对的变化了 $\mathrm{d}\theta$, 因为前后位置无限接近, 扫过的面积 $\mathrm{d}A$ 可以近似为一个扇形 (或三角形) 的面积

$$\mathrm{d}A = \frac{1}{2}r^2\,\mathrm{d}\theta.$$

或者

$$\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{2}r^2\dot{\theta}.$$

两边同乘行星的质量 m

$$\frac{\mathrm{d}Am}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{2}mr^2\dot{\theta} = \frac{1}{2}J.$$

根据前面的论述, 行星运动的受到得是有心力, 那么行星关于太阳即力心所在的动量矩 J 守恒, 便有 $\mathrm{d}A/\mathrm{d}t$ 守恒, 即单位时间扫过的面积一定.

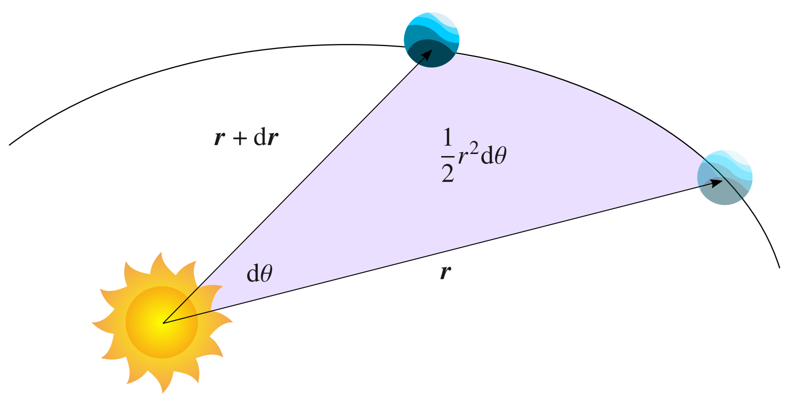

图 1.9: 开普勒第二定律.

□

定律/定理 1.6 (开普勒第三定律)

行星公转周期的平方和轨道半长轴的立方成正比.

证明 从标准圆锥曲线方程出发

$$r = \frac{p}{1 + e\cos\theta}.$$

换元 $u = 1/r$,

$$u = \frac{1}{p} + \frac{e}{p}\cos\theta.$$

将上式代入比耐公式，化简可得

$$F = -\frac{mh^2u^2}{p} = -\frac{h^2}{p}\frac{m}{r^2}.$$

在比耐公式的推导中，我们有 $r^2\dot{\theta} = h$，又在开普勒第二定律的证明中，我们有 $2\dot{A} = r^2\dot{\theta}$，因此

$$2\dot{A} = h.$$

将上式积分

$$2A = h(t - t_0).$$

当行星运行一个周期 T，它和太阳连线所扫过的面积便是椭圆的面积 $A = \pi ab$，这里 a 和 b 分别是半长轴 (semi-major axis) 和半短轴 (semi-minoraxis)，这样一来

$$2\pi ab = hT.$$

稍加变形可得

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2b^2}{h^2a}.$$

根据椭圆的性质，$b^2/a = p$，

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2p}{h^2}.$$

在上一个例子里，我们发现 $p = h^2/k^2$，因此

$$\boxed{\frac{T^2}{a^3} = 4\pi^2k^2.}$$

根据之前的定义 $k^2 := Gm_\odot$，对于一特定恒星-行星系统，等式右边为常数，因此有行星公转周期的平方和轨道半长轴的立方成正比. □

■

1.10 小结

1. 运动的描述
   - 位矢

$$\boldsymbol{r} = x\hat{\imath} + y\hat{\jmath} + z\hat{k}.$$

   - 速度

$$\boldsymbol{v}(t) = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\boldsymbol{r}}{\Delta t} = \frac{d\boldsymbol{r}(t)}{\mathrm{d}t} = \dot{\boldsymbol{r}}.$$

   - 加速度

$$\boldsymbol{a}(t) = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\boldsymbol{v}}{\Delta t} = \frac{d\boldsymbol{v}(t)}{\mathrm{d}t} = \dot{\boldsymbol{v}} = \ddot{\boldsymbol{r}}.$$

   - 匀加速时各变量关系

$$\boldsymbol{v}_f = \boldsymbol{v}_i + \boldsymbol{a}t,$$
$$\boldsymbol{r}_f = \boldsymbol{r}_i + \boldsymbol{v}_i t + \frac{1}{2}\boldsymbol{a}t^2,$$
$$|\boldsymbol{v}_f|^2 = |\boldsymbol{v}_i|^2 + 2\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{r}_f - \boldsymbol{r}_i),$$
$$\boldsymbol{r}_f - \boldsymbol{r}_i = \left(\frac{\boldsymbol{v}_i + \boldsymbol{v}_f}{2}\right)t.$$

- 极坐标系

$$\boldsymbol{r} = r\hat{r} + 0\hat{\theta},$$
$$\boldsymbol{v} = \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}r\right)\hat{r} + r\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\hat{\theta} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta} := v_r\hat{r} + v_\theta\hat{\theta},$$
$$\boldsymbol{a} = \underbrace{\left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right)}\hat{r} + \underbrace{\left(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}\right)}\hat{\theta} = \underbrace{\left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right)}\hat{r} + \underbrace{\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(r^2\dot{\theta}\right)}\hat{\theta} := a_r\hat{r} + a_\theta\hat{\theta}.$$

- 切向与法相加速度

$$\boldsymbol{a} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\hat{t} + \frac{v^2}{\rho}\hat{n} := \boldsymbol{a}_t\hat{t} + \boldsymbol{a}_n\hat{n}.$$

2. 牛顿运动定律
   - 牛顿第一定律

$$\sum \boldsymbol{F} = 0 \ \leftrightarrow \ v = \mathrm{const}.$$

   - 牛顿第二定律

$$\sum \boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a}.$$

   - 牛顿第三定律

$$\boldsymbol{F}_{\mathrm{A\ to\ B}} = -\boldsymbol{F}_{\mathrm{B\ to\ A}}.$$

3. 质点运动微分方程
   - 略.
4. 相对性原理
   - 伽利略变换下, 两坐标系速度与加速度的关系

$$\boldsymbol{v}' = \boldsymbol{v} - \boldsymbol{u},$$
$$\boldsymbol{a}' = \boldsymbol{a} - \mathbf{a}.$$

5. 非惯性参考系
   - 非惯性系下的假象力

$$\boldsymbol{F} + (-m\mathbf{a}) = \boldsymbol{F}',$$

6. 功与能
   - 功

$$W = \int_A^B \boldsymbol{F}(r)\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \int_A^B \boldsymbol{F}(r)\cdot\cos(\theta)|\,\mathrm{d}r|.$$

   - 功率

$$P = \frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t}.$$

   - 势能与保守力

$$-\boldsymbol{F} = \nabla U.$$

   - 保守力场判定

$$\nabla\times\boldsymbol{F} = 0.$$

   - 动能定理

$$d\left(\frac{1}{2}m\boldsymbol{v}^2\right) = \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r}.$$

   - 机械能守恒

$$\frac{1}{2}m\boldsymbol{v}_f^2 + V(\boldsymbol{r}_f) = \frac{1}{2}m\boldsymbol{v}_i^2 + V(\boldsymbol{r}_i),$$

7. 动量
    - 动量
$$\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v}.$$
    - 动量定理
$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{F}.$$
    - 动量守恒
$$\boldsymbol{p}_f - \boldsymbol{p}_i = 0.$$
8. 动量矩
    - 力矩
$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}.$$
    - 动量矩
$$\boldsymbol{J} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p}.$$
    - 动量矩定理
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{J} = \boldsymbol{M}.$$
    - 动量矩守恒
$$\boldsymbol{J}_f - \boldsymbol{J}_i = 0.$$
9. 有心力
    - 略.

第 2 章 质点组力学

第 3 章 刚体力学

内容提要

- abcd

3.1 刚体运动的描述

3.1.1 刚体

在前一章节，我们已经学过质点组力学。**刚体** (rigid bodies) 就是一种特殊的质点组，这种质点组里，任意两个质点之间的距离始终保持不变。也就是说不管刚体受到什么力，有着怎样的运动状态，刚体内部两点间的距离都是固定的值。当然，和质点这个概念一样，刚体也只是一种抽象的，简化的理想模型。不过在实际研究中，如果物体的大小形状的变化对我们的研究影响很小，乃至可以忽略不计时，我们可以采用刚体这个理想模型来近似真实的物体。

笔记 刚体是一个非常理想化的模型, 那么如何证明不存在理想刚体呢? 设想一很长的物体, 在一端施加力将其推动, 因为刚体无法形变, 则另一端则应瞬时也行进一样的距离. 这显然违反了狭义相对论中没有超距作用的论述, (例如: 利用这样的刚体进行往复运动, 就可以将信号由一段瞬时传播到另一端, 而实际上理论最大信息传播速度是光速). 事实上, 当一个很长的物体一端被移动时, 它就被压缩了, 被压缩的部分会像一个 “波包” 一样, 以这个物体内的声速传播向另一端.

在经典力学的框架下，我们想研究物体的运动规律，也就是确定物体的位置随时间是怎么变化的，需要首先知道这个物体有多少自由度。例如在三维空间中，确定一个质点的位置需要三个独立的坐标变量 (x, y, z)，这就是说一个质点的自由度是 3。那么我们需要多少个独立的坐标变量才能确定一个刚体的位置呢? 读者不妨先试着自己思考思考。

注 刚体的自由度是 6：我们为了确定刚体的质心位置，需要 3 个独立坐标变量 (x, y, z)。在确定刚体质心的基础上，我们发现刚体还能任意转动，所以刚体还有转动自由度。这时，我们先选定一条从质心到刚体外表面某个点的向量作为转动轴，为了确定这条转动轴的方向，我们本来需要 3 个方向余弦，即 x-轴、y-轴、z-轴的方向余弦 α, β, γ，但是我们在解析几何中学到，有恒等式 $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=1$ 作为约束, 也就是说我们只需要知道其中任意两个方向余弦就能确定第三者，所以我们只需要 2 个独立变量就能确定转动轴方向。在确定了质心和转动轴方向的基础上，我们发现绕着这个转动轴转动，所以我们还需要额外 1 个坐标变量来确定此转动角度。综上所述，我们需要 6 个独立的坐标变量才能确定刚体的位置，所以，在不对刚体的运动方式进行限制时，刚体的自由度是 6。下面我们考虑当刚体的运动方式受到限制时，不同运动方式下的自由度。

3.1.2 刚体运动的分类

定义 3.1 (平动 <translational motion>)

自由度 =3

平动的特征：如果刚体做平动，那么任意选取刚体上的一条直线，在整个运动过程中，这条直线会始终和之前时刻的自己平行或者重合。

独立坐标变量个数：刚体做平动需要的独立坐标变量是 3。因为如果刚体作平动，那么刚体的平动此时可以看成是单个质点的运动。理由是如果任取刚体的一个质点，其它所有质点的都和该质点有一样的速度和加速度。

定义 3.2 (定轴转动 <Fixed-axis rotation/Rotation around a fixed axis>)

自由度 =1

定轴转动的特征：如果刚体做定轴转动，那么刚体上会有一条直线的位置始终不变。这条固定不动的直线叫做**转动轴**（axis of rotation）

独立坐标变量个数：刚体做平动需要的独立坐标变量是 1。因为如果刚体作绕着某一已知的固定轴转动，那么只需要知道刚体绕着转动轴转过的角度一个参量就可以确定刚体的位置了。 ♣

定义 3.3 (平面平行运动 <Plane-parallel motion>)

自由度 =3

平面平行运动的特征：如果刚体做平面平行运动，那么刚体上任意一点始终在平行于某一固定平面的平面上。

独立坐标变量个数：刚体做平面平行运动需要的独立坐标变量是 3。因为如果要确定刚体的一点在平面的位置需要两个独立的坐标变量，刚体还可以绕着该平面的法向量转动，还需要知道刚体绕着转动轴转过的角度这个参量。 ♣

定义 3.4 (定点转动 <Fixed point rotation/Rotation around a fixed point>)

自由度 =3

定点转动的特征：如果刚体做定点转动，那么刚体上会有一点始终固定不动，然后刚体可以绕着通过这个固定点的某一瞬时转轴转动，而且这个瞬时转轴可以随时间变化。

独立坐标变量个数：刚体做定点转动需要的独立坐标变量是 3。因为我们需要 2 个独立变量才能确定转动轴方向，并且还需要知道刚体绕着转动轴转过的角度这 1 个参量。 ♣

3.1.3 刚体有限转动和无限小转动

为了描述刚体的运动，我们需要引入**角位移**（angular displacement）的概念。

定义 3.5 (角位移)

我们把角位移定义为一个既有大小又有方向的量，用记号 $\boldsymbol{\Delta\varphi}$ 表示。角位移的大小定义为绕着转动轴转过的角度 $\Delta\varphi$，角位移的方向定义为转动轴的方向（按照右手螺旋定则）。 ♣

3.1.3.1 刚体有限转动

在我们处理刚体定轴转动问题时，我们把角位移和角速度看成一个矢量。因为对于定轴转动，角位移满足矢量的加法交换律，而角位移和角速度的方向用右手螺旋定则决定（在转动轴上）。但是一般的刚体运动，例如刚体定点转动的转动轴一直在变化，那么读者可能会产生疑问，此时角位移和角速度还是一个矢量吗?

结论是：对于刚体的一般运动，刚体有限转动角位移和角速度不是矢量。因为它不满足矢量的加法交换律，也就是说两个角位移的相加次序不能交换。读者不妨先自己思考，然后可以结合下面的例子理解。

例子 3.1

下面，我们将看一个例子来体会为什么说两个角位移的相加不能交换次序。

假设：读者可以拿出来两本书，保持他们初始状态都是正面朝上平放在桌面。下面我们分别让书经历这样的两个角位移，假设角位移的大小都是 90 度，方向采用右手螺旋定则。

操作：对于其中一本书，第一次角位移操作的方向选择朝上，第二次朝向自己。对于另外一本书，第一次角位移操作的方向选择朝自己，第二次朝上。

结论：读者可以明显地发现这两本书虽然初始状态一致，但是最后的朝向却不一样。这说明了对于初始位形相同的物体，虽然两次有限转动是一样的，但是仅仅交换两次有限转动的次序就会导致末态位形的不同。所

以角位移不能满足矢量的加法交换律，刚体有限转动角位移不是矢量。■

3.1.3.2 刚体无限小转动

在上一小节，我们发现刚体做有限转动的角位移不是矢量。那么刚体做无限小转动呢?

下面我们将讨论刚体做无限小的定点转动的角位移是否为矢量。假设刚体做无限小转动的角位移为 $\mathrm{d}\boldsymbol{\varphi}$，其原始定义只是一个有方向和大小的量，我们不知道它是不是矢量。

给定某一坐标原点 O, 设 $\boldsymbol{r}$ 为某一质点 P 的位置矢量，R 为转动半径，$\mathrm{d}\varphi$ 为转动的小角度，θ 是位置矢量 $\boldsymbol{r}$ 和转动轴（$\mathrm{d}\boldsymbol{\varphi}$ 方向）的夹角。下面我们将表示质点 P 经过无限小转动的线位移 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$

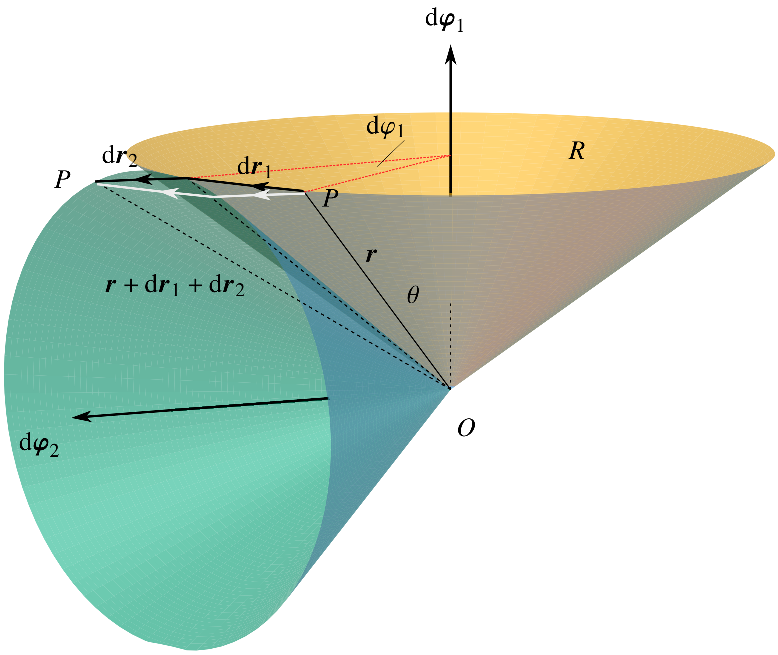

图 3.1: 刚体无限小转动.

$$|\mathrm{d}\boldsymbol{r}| = R\,\mathrm{d}\varphi = r\sin\theta\,\mathrm{d}\varphi = |\boldsymbol{r}||\mathrm{d}\boldsymbol{\varphi}|\sin\theta \tag{3.1}$$

所以

$$\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \mathrm{d}\boldsymbol{\varphi}\times\boldsymbol{r} \tag{3.2}$$

在上一小节刚体有限转动的讨论中，我们发现有限转动的角位移并不是矢量，因为它不满足矢量加法的交换律。那么接下来我们将检验刚体无限小转动的角位移是否满足矢量加法的交换律。

假设先后两次的无限小转动的角位移分别是 $d\boldsymbol{\varphi_1}$ 和 $d\boldsymbol{\varphi_2}$，如图3.1所示。质点 P 的位置矢量为

1. 转动前：$\boldsymbol{r}$
2. 转动 $\mathrm{d}\boldsymbol{\varphi}_1$ 后：$\boldsymbol{r}+\mathrm{d}\mathbf{r}_1 = \boldsymbol{r}+\mathrm{d}\boldsymbol{\varphi}_1\times\boldsymbol{r}$
3. 继续转动 $\mathrm{d}\boldsymbol{\varphi}_2$ 后：$\boldsymbol{r}+\mathrm{d}\mathbf{r}_1+\mathrm{d}\mathbf{r}_2 = \boldsymbol{r}+\mathrm{d}\boldsymbol{\varphi}_1\times\boldsymbol{r}+\mathrm{d}\boldsymbol{\varphi}_2\times(\boldsymbol{r}+\mathrm{d}\boldsymbol{\varphi}_1\times\boldsymbol{r})$

略去二阶小量后，整个转动过程的线位移是

$$\mathrm{d}\boldsymbol{\varphi}_1\times\boldsymbol{r}+\mathrm{d}\boldsymbol{\varphi}_2\times\boldsymbol{r} = (\mathrm{d}\boldsymbol{\varphi}_1+\mathrm{d}\boldsymbol{\varphi}_2)\times\boldsymbol{r} \equiv \mathrm{d}\mathbf{r}_{12} \tag{3.3}$$

如果交换两次无限小转动的次序，整个转动过程的线位移是

$$\mathrm{d}\boldsymbol{\varphi}_2\times\boldsymbol{r}+\mathrm{d}\boldsymbol{\varphi}_1\times\boldsymbol{r} = (\mathrm{d}\boldsymbol{\varphi}_2+\mathrm{d}\boldsymbol{\varphi}_1)\times\boldsymbol{r} \equiv \mathrm{d}\mathbf{r}_{21} \tag{3.4}$$

由于线位移是矢量，和先后操作的次序无关，我们有

$$\mathrm{d}\,\mathbf{r}_{12} = d\mathbf{r}_{21} \tag{3.5}$$

所以

$$(\mathrm{d}\,\varphi_1 + d\varphi_2) \times \boldsymbol{r} = (\mathrm{d}\,\varphi_2 + \mathrm{d}\,\varphi_1) \times \boldsymbol{r}$$

因为我们在讨论过程中并没有选择特定的位置矢量 $\boldsymbol{r}$ 的具体形式，也就是意味着上式对任意的位矢 $\boldsymbol{r}$ 都成立。

于是，刚体无限小转动的角位移是可以交换次序的。

$$\mathrm{d}\,\varphi_1 + \mathrm{d}\,\varphi_2 = \mathrm{d}\,\varphi_2 + \mathrm{d}\,\varphi_1$$

总结：刚体有限转动的角位移不满足矢量的加法交换律，不是矢量。但是刚体无限小转动的角位移满足矢量的加法交换律，是矢量。

3.1.4 角速度矢量

定义 3.6 (瞬时转轴 <instantaneous axis of rotation>)

研究刚体在 t 至 $t+\mathrm{d}\,t$ 时间内的定点转动，设定点为 O，当 $\mathrm{d}\,t \to 0$，刚体绕着定点的转动轴也会有一个极限位置，这个极限位置被称为刚体在瞬时时刻 t 的转动轴，即**瞬时转轴**（instantaneous axis of rotation），该无限小转动对应的角位移被称为**无限小角位移** (Infinitesimal angular displacement)，记作 $\mathrm{d}\,\boldsymbol{\varphi}$。无限小角位移的方向就是瞬时转轴的方向（规定采用右手螺旋定则）。♣

定义 3.7 (角速度矢量 <angular velocity vector>)

角速度矢量（**angular velocity vector**）

前面我们已经阐明无限小角位移是矢量，于是刚体绕瞬时转轴的角速度也是矢量。角速度矢量可以被定义为如下表达式，其中角速度矢量的方向就是无限小角位移的方向（瞬时转轴的方向）

$$\omega \equiv \frac{\mathrm{d}\,\boldsymbol{\varphi}}{\mathrm{d}\,t} \tag{3.6}$$

角速度 ω 的单位是 rad/s (弧度每秒), 弧度可视作**无量纲** (unitless), 则角速度单位可视作 s^{-1} 或 Hz (赫兹). ([rad]/[s] = [rad/s] ~ [Hz]) ♣

定义 3.8 (角加速度矢量 <Angular acceleration vector>)

角加速度被定义为角速度的时间导数

$$\alpha \equiv \frac{\mathrm{d}\,\omega}{\mathrm{d}\,t} \tag{3.7}$$

角加速 α 的单位是 $\mathrm{rad/s^2}$ (弧度每秒平方). ([rad/s]/[s] = [$\mathrm{rad/s^2}$]) ♣

于是，我们可以得到线速度和角速度之间的关系是

$$\boldsymbol{v} = \frac{\mathrm{d}\,\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}\,t} = \frac{\mathrm{d}\,\boldsymbol{\varphi} \times \boldsymbol{r}}{\mathrm{d}\,t} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}$$

3.2 刚体平面平行运动

在这一小节，我们将简单回顾一下刚体的平面平行运动。我们基本的处理手段是：把平面平行运动分解成刚体基点的平动和刚体相对基点的转动。为了方便，我们通常选质心作为基点。因为描述质心平动和绕质心转动的运动定律我们比较熟悉。

质心平动的规律

$$\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a} \tag{3.8}$$

绕质心转动的规律

$$M = I\alpha \tag{3.9}$$

刚体平面平行运动的一个典型例子是纯滚动。纯滚动指的是刚体和接触面之间不发生相对滑动的情况。这样的话，刚体和接触面之间理论上就没有滑动摩擦力，而只有静摩擦力。所以纯滚动条件是：刚体接触点的速度应和接触面对应点的速度相同，加速度也相同。

例子 3.2 圆柱体在木板上纯滚动

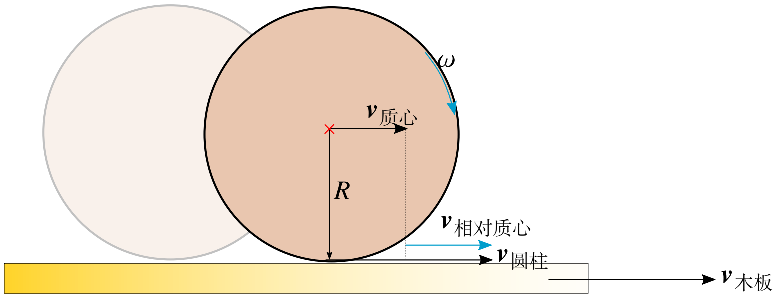

图 3.2: 圆柱体的纯滚动.

如图3.2所示, 假设木板的速度大小是 $v_{木板}$，方向向右，加速度大小是 $a_{木板}$，方向向右。设圆柱向右纯滚动，圆柱上与木板接触的点的速度为 $v_{圆柱}$，方向向右，加速度大小是 $a_{圆柱}$。请写出纯滚动条件的方程。

解 圆柱和木板的接触点的速度和加速度

$$\boldsymbol{v}_{圆柱} = \boldsymbol{v}_{质心} + \boldsymbol{v}_{相对质心} = \boldsymbol{v}_{质心} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{R} \tag{3.10}$$

$$\boldsymbol{a}_{圆柱} = \boldsymbol{a}_{质心} + \boldsymbol{a}_{相对质心} = \boldsymbol{a}_{质心} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{R}) + \boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{R} \tag{3.11}$$

选定如图所示的正方向，得到纯滚动条件的方程为

$$\begin{cases} v_{圆柱} = v_{质心} - \omega R = v_{木板} \\ a_{圆柱} = a_{质心} - \alpha R = a_{木板} \end{cases} \tag{3.12}$$

如果木板固定，那么纯滚动条件就是圆柱和木板接触点的速度和加速度始终为零。

■

3.3 刚体定轴转动

为了更好地学习刚体的定点转动，在这一节，我们将简单回顾一下刚体定轴转动的运动学和动力学。

3.3.1 刚体定轴转动的运动学方程

刚体定轴转动的自由度是 1，这意味着我们只需要知道刚体绕着转动轴转过的角度 φ 一个参量就可以确定刚体的位形。运动学方程指的是角位移 φ 和角速度 ω 的关系，对于刚体定轴转动来说，该关系非常简单，如下。

定律/定理 3.1 (刚体定轴转动的运动学方程)

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi} \tag{3.13}$$

这是刚体定轴转动角速度 ω 和刚体定轴转动广义坐标 $\varphi(t)$ 的关系。

3.3.2 刚体定轴转动的动力学方程

我们的终极目标目标是描述刚体在任意时刻的位形 $\varphi(t)$，这就需要运用刚体定轴转动的动力学方程来求解得到。为了达到该目标，我们先回顾一下质点系角动量定理。对于质点系，我们有质点系的角动量定理。

笔记 质点系的角动量定理：

$$\boldsymbol{M} = \frac{d\boldsymbol{L}}{dt} \tag{3.14}$$

其中，$\boldsymbol{M}$ 是作用在质点系上的总的外力矩，$\boldsymbol{L}$ 是质点系的总角动量。

刚体其实就是一种特殊的质点系，于是质点系的角动量定理对刚体也成立。所以我们立马得到刚体定轴转动的动力学方程-初级版。

定律/定理 3.2 (刚体定轴转动的动力学方程-初级版)

对于定轴转动的刚体，取其定轴为 z 轴方向，运用 z 方向分量的角动量定理，即可得到刚体定轴转动的动力学方程。

$$M_z = \frac{dL_z}{dt} \tag{3.15}$$

3.3.3 动力学方程与运动学方程的联系-转动惯量

我们现在遇到了一个问题：即使知道了外力矩 M_z，我们只联立刚体定轴转动的运动学方程和动力学方程也是无法解出来刚体在任意时刻的位形 $\varphi(t)$ 的。原因是我们并不知道角动量 L_z 和角速度 ω 的关系。对于我们熟悉的质点，我们知道质点动量 P 和速度 v 的关系是依靠表征惯性的一个物理量，即质量 m 联系的，我们也可以把 m 理解为惯量。

和质点的研究类似，为了研究定轴转动中角动量 L_z 和角速度 ω 的关系，我们也需要引入一个表征着转动的惯性质量的物理量，这就是转动惯量 I 的概念。对于定轴转动的刚体，取其定轴为 z 轴方向，其角动量为

$$\text{动量} = \text{惯量} \cdot \text{速度} \qquad P = mv \tag{3.16}$$

$$\text{角动量} = \text{转动惯量} \cdot \text{角速度} \qquad L_z = I\omega \tag{3.17}$$

其中 I 是转动惯量，定义如下

定义 3.9 (转动惯量)

$$I = \sum_i r_i^2 \Delta m_i \qquad \text{分立情形} \tag{3.18}$$

$$I = \int r^2 dm \qquad \text{连续情形} \tag{3.19}$$

r_i 和 r 是质点和质量微元到选定的转动轴的垂直距离。

于是我们得到了刚体角动量 L_z 和广义坐标 $\varphi(t)$ 的关系

$$L_z = I\dot{\varphi} \tag{3.20}$$

再假设转动惯量 I 是常数，我们就可以建立起刚体所受外力矩 M_z 和刚体定轴转动位形 $\varphi(t)$ 的如下关系。于是我们得到刚体定轴转动的动力学方程

定律/定理 3.3 (刚体定轴转动的动力学方程-最终版)

$$M_z = \frac{dL_z}{dt} = I\ddot{\varphi} \tag{3.21}$$

这是刚体所受外力矩 M_z 和刚体定轴转动广义坐标 $\varphi(t)$ 的关系。

我们的最终目标是描述刚体在任意时刻的位形 $\varphi(t)$，所以我们最后一步只剩下求解上面的刚体定轴转动的动力学方程，然后我们就可以解出来角位移随着时间的关系式 $\varphi(t)$。

3.4 刚体定点转动

3.4.1 刚体定点转动的广义坐标-欧拉角

从这一节开始，我们即将定量研究刚体的定点转动。在刚体运动的分类小节中，我们已经学习到刚体定点转动的自由度是 3，或者说刚体做定点转动需要的独立坐标变量是 3。

笔记 刚体定点转动的自由度为什么是 3？

间接分析：因为刚体运动的自由度是 6，我们为了确定刚体定点转动的定点的位置，需要 3 个独立坐标变量 (x, y, z)，所以剩下只 $6-3=3$ 个自由度了。

直接分析：因为给定定点位置后，我们需要 2 个独立变量才能确定转动轴方向，并且还需要知道刚体绕着转动轴转过的角度这 1 个参量。为何只需两个坐标即可确定这条转动轴的方向？我们本来需要 3 个方向余弦，即 x-轴、y-轴、z-轴的方向余弦 α, β, γ，但是我们在解析几何中学到，有恒等式 $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=1$ 作为约束，也就是说我们只需要知道其中任意两个方向余弦就能确定第三者，所以我们只需要 2 个独立变量就能确定转动轴方向。■

为了描述刚体的定点转动，我们以刚体的定点 O 作为坐标系原点，引入两个不同的坐标系。其中一个坐标系是固定在背景空间的坐标系，简称固定坐标系（Fixed coordinate system）。另一个坐标系是固定在刚体上，随着刚体一起运动的刚体本体坐标系，简称刚体坐标系（Rigid body coordinate system）。于是我们可以通过描述刚体坐标系相对于固定坐标系的运动来刻画刚体的运动。

既然已经知道只需 3 个独立坐标即可描述刚体定点转动，那么我们该如何选取这 3 个坐标呢？下面我们将一起探讨这个问题。

相比定点转动，我们已经在普通物理中学过相对容易分析的定轴转动，于是一个自然的想法就是考虑能否通过几次定轴转动来达到定点转动的任意位形？答案是肯定的。欧拉提出我们可以通过三次定轴转动来实现任意定点转动的最终位形，这三次定轴转动分别被称为进动（Precession），章动（Nutation），自转（Intrinsic rotation / Spin）。而这三次定轴转动对应的转动角它们被称为欧拉角（Euler angles）。它们分别叫：进动角 φ，章动角 θ，自转角 ψ。之后我们将运用这 3 个独立变量来描述刚体的定点转动，

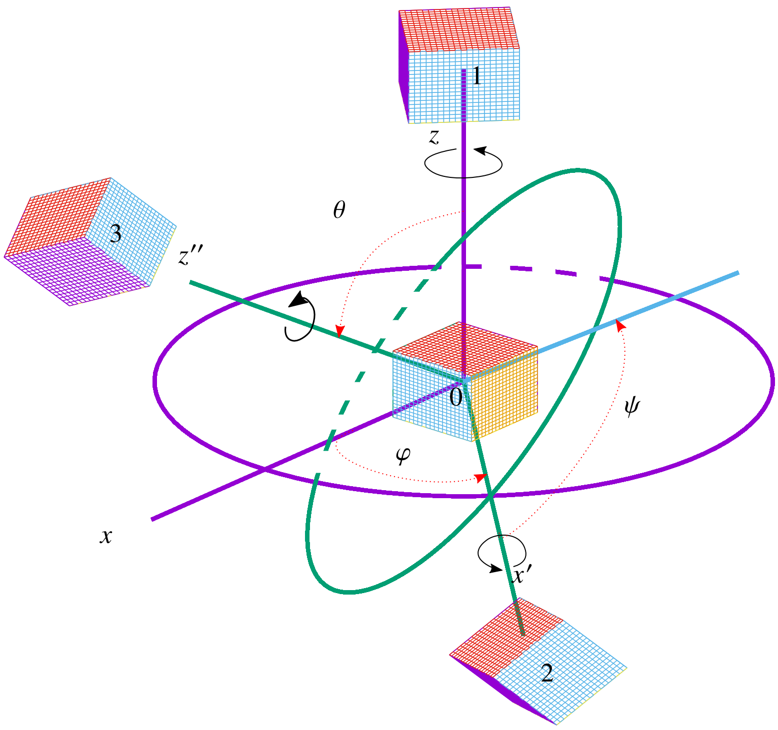

图 3.3: 欧拉角示意图.

设固定坐标系为 (x, y, z)，刚体本体坐标系为 (X, Y, Z)

进动：第一次定轴转动，绕着竖着的转动轴 z 轴转动，转动角度称为进动角 φ（图中的 α 改为 φ）

$$0 \le \varphi < 2\pi \tag{3.22}$$

章动：第二次定轴转动，绕着原本的水平转动轴 x 轴经过第一次转动之后得到的水平转动轴 x' 轴（图中的 N 改为轴 x'）转动，转动角度称为章动角 θ，（图中的 β 改为 θ）

$$0 \le \theta < \pi \tag{3.23}$$

自转：第三次定轴转动，绕着原本的竖直转动轴 z 轴经过前两次转动之后得到的转动轴 z'' 轴（图中的 Z 改为轴 z''）转动，转动角度称为自转角 ψ，（图中的 γ 改为 ψ）

$$0 \le \psi < 2\pi \tag{3.24}$$

3.4.2 刚体定点转动的运动学方程-欧拉运动学方程

回顾刚体定轴转动，我们有

定律/定理 3.4 (刚体定轴转动的运动学方程)

$$\omega = \dot{\varphi} \tag{3.25}$$

这是刚体定轴转动角速度 ω 和刚体定轴转动广义坐标 $\varphi(t)$ 的关系。

对于刚体定点转动，同样，我们也需要找到刚体定点转动角速度 $\boldsymbol{\omega}$ 和刚体定点转动广义坐标的关系。与刚体定轴转动不同的是，我们在前面已经讨论了刚体定点转动可以分解成进动，章动和自转三个定轴转动的合成，也证明了刚体定点转动角速度 $\boldsymbol{\omega}$ 是矢量。所以刚体定点转动角速度 $\boldsymbol{\omega}$ 有三个分量，最后我们得到的刚体定点转动的运动学方程其实是包含三个方程的。

刚体定点转动广义坐标也从 φ 变成了三个，即进动角 φ，章动角 θ，自转角 ψ。

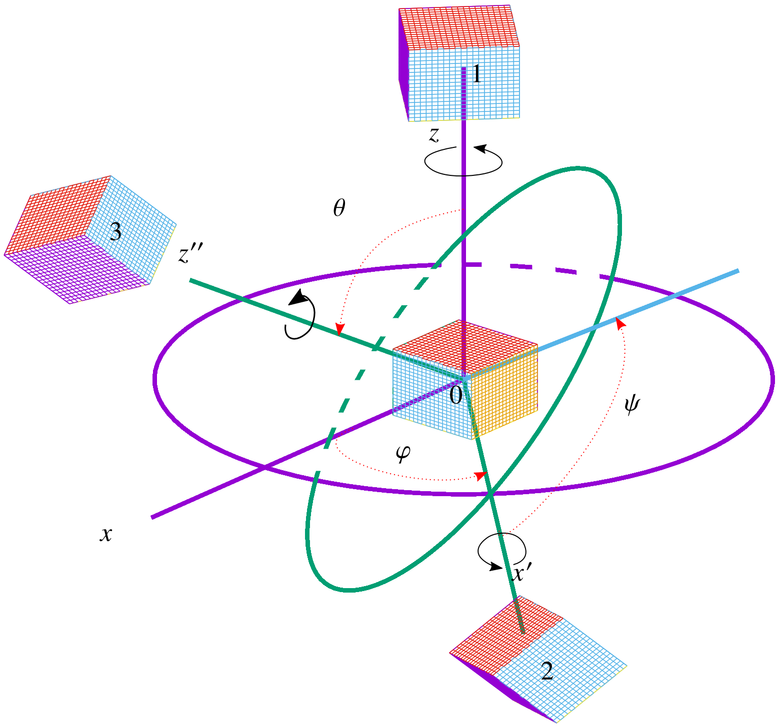

图 3.4: 欧拉角示意图.

刚体初始状态坐标系为 (x, y, z)，基矢为 $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$
刚体进动后的坐标系为 (x', y', z')，基矢为 $(\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2, \boldsymbol{e}'_3)$
刚体章动后的坐标系为 (x'', y'', z'')，基矢为 $(\boldsymbol{e}''_1, \boldsymbol{e}''_2, \boldsymbol{e}''_3)$
刚体自转后的坐标系为 (x''', y''', z''')，基矢为 $(\boldsymbol{e}'''_1, \boldsymbol{e}'''_2, \boldsymbol{e}'''_3)$
刚体定点转动的角速度为

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\omega} &= \omega_{\text{进动}}\boldsymbol{e}_3 + \omega_{\text{章动}}\boldsymbol{e}'_1 + \omega_{\text{自转}}\boldsymbol{e}''_3 && (3.26)\\
&= \dot{\varphi}\boldsymbol{e}_3 + \dot{\theta}\boldsymbol{e}'_1 + \dot{\psi}\boldsymbol{e}''_3 && (3.27)\\
&= \dot{\varphi}\boldsymbol{e}'_3 + \dot{\theta}\boldsymbol{e}'_1 + \dot{\psi}\boldsymbol{e}''_3 && (3.28)\\
& && (3.29)
\end{aligned}$$

我们可以发现该表达式有几个缺陷。一、坐标轴不在一个统一的坐标系下，有带一撇的，有带两撇的。二、不管是带一撇的坐标系 (x', y', z') 还是带两撇的 (x'', y'', z'')，它们其实都只是一个中间我们假想的过渡坐标系，不是真正的刚体坐标系，真正的刚体坐标系是刚体最终的位形这个坐标系 (x''', y''', z''')。所以我们要把上式中的基矢都变为 $(\boldsymbol{e}'''_1, \boldsymbol{e}'''_2, \boldsymbol{e}'''_3)$，这样得到的才是刚体定轴转动角速度在刚体本体坐标系的三个分量。

那么不同坐标系之间的基矢是如何联系的呢?

例子 3.3

以 $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$ 到 $(\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2, \boldsymbol{e}'_3)$ 为例

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{e}'_1\\ \boldsymbol{e}'_2\\ \boldsymbol{e}'_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\boldsymbol{e}'_1\cdot\boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}'_1\cdot\boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}'_1\cdot\boldsymbol{e}_3\\ \boldsymbol{e}'_2\cdot\boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}'_2\cdot\boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}'_2\cdot\boldsymbol{e}_3\\ \boldsymbol{e}'_3\cdot\boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}'_3\cdot\boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}'_3\cdot\boldsymbol{e}_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\cos\varphi & \sin\varphi & 0\\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{e}_1\\ \boldsymbol{e}_2\\ \boldsymbol{e}_3\end{bmatrix} \tag{3.30}$$

■

笔记

总结起来：不同坐标系之间的基矢由三维转动矩阵联系，转换式如下：

$$\begin{bmatrix} e_1' \\ e_2' \\ e_3' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix} \tag{3.31}$$

$$\begin{bmatrix} e_1'' \\ e_2'' \\ e_3'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1' \\ e_2' \\ e_3' \end{bmatrix} \tag{3.32}$$

$$\begin{bmatrix} e_1''' \\ e_2''' \\ e_3''' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\psi & \sin\psi & 0 \\ -\sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1'' \\ e_2'' \\ e_3'' \end{bmatrix} \tag{3.33}$$

以上就是不同坐标系之间的基矢的联系。 ■

于是我们可以把刚体定点转动的角速度表达式中的不同坐标系的基矢都变为 (e_1''', e_2''', e_3''')，这样得到的才是刚体定轴转动角速度在刚体本体坐标系的三个分量。计算具体过程如下

$$\omega = \dot\varphi e_3' + \dot\theta e_1' + \dot\psi e_3'' \tag{3.34}$$

$$= \begin{bmatrix} \dot\theta & 0 & \dot\varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1' \\ e_2' \\ e_3' \end{bmatrix} + \dot\psi e_3'' \tag{3.35}$$

$$= \begin{bmatrix} \dot\theta & 0 & \dot\varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1'' \\ e_2'' \\ e_3'' \end{bmatrix} + \dot\psi e_3'' \tag{3.36}$$

$$= \begin{bmatrix} \dot\theta & \sin\theta\dot\varphi & \cos\theta\dot\varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1'' \\ e_2'' \\ e_3'' \end{bmatrix} + \dot\psi e_3'' \tag{3.37}$$

$$= \begin{bmatrix} \dot\theta & \sin\theta\dot\varphi & \cos\theta\dot\varphi + \dot\psi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1'' \\ e_2'' \\ e_3'' \end{bmatrix} \tag{3.38}$$

$$= \begin{bmatrix} \dot\theta & \sin\theta\dot\varphi & \cos\theta\dot\varphi + \dot\psi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\psi & -\sin\psi & 0 \\ \sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1''' \\ e_2''' \\ e_3''' \end{bmatrix} \tag{3.39}$$

$$= \begin{bmatrix} \dot\theta\cos\psi + \dot\varphi\sin\theta\sin\psi & -\dot\theta\sin\psi + \dot\varphi\sin\theta\cos\psi & \dot\psi + \dot\varphi\cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1''' \\ e_2''' \\ e_3''' \end{bmatrix} \tag{3.40}$$

$$\tag{3.41}$$

定律/定理 3.5 (刚体定点转动的运动学方程-欧拉运动学方程)

$$\begin{cases} \omega_1 = \dot{\theta}\cos\psi + \dot{\varphi}\sin\theta\sin\psi \\ \omega_2 = -\dot{\theta}\sin\psi + \dot{\varphi}\sin\theta\cos\psi \\ \omega_3 = \dot{\psi} + \dot{\varphi}\cos\theta \end{cases} \tag{3.42}$$

这是刚体定点转动角速度 $\boldsymbol{\omega}$ 和刚体定点转动广义坐标即欧拉角的关系。

反解出欧拉角随时间的变化率，即用角速度来表示欧拉角，我们得到如下方程

$$\begin{cases} \dot{\theta} = \omega_1\cos\psi - \omega_2\sin\psi \\ \dot{\varphi} = \omega_1\csc\theta\sin\psi + \omega_2\csc\theta\cos\psi \\ \dot{\psi} = -\omega_1\cot\theta\sin\psi - \omega_2\cot\theta\cos\psi + \omega_3 \end{cases} \tag{3.43}$$

3.4.3 刚体定点转动的动力学方程-初相识

刚体也是一种特殊的质点系，所以质点系的角动量定理其实就是刚体定点转动的动力学方程。

定律/定理 3.6 (刚体定点转动的动力学方程-初级版)

$$\boldsymbol{M} = \frac{d\boldsymbol{L}}{dt} \tag{3.44}$$

其中，$\boldsymbol{M}$ 是作用在质点系上的总的外力矩，$\boldsymbol{L}$ 是质点系的总角动量。

3.4.4 动力学方程与运动学方程的联系-惯量张量

对于定轴转动，动力学方程与运动学方程的联系由转动惯量 I 所联系。

$$\text{角动量} = \text{转动惯量} \cdot \text{角速度} \qquad L_z = I\omega_z \tag{3.45}$$

那么对于定点转动呢？我们想要求解刚体定轴转动在任意时刻的位形，同样需要动力学方程与运动学方程的联系。即我们现在的目标是找到角动量和角速度的关系。而对于定点转动，它的转动轴不固定，我们采用瞬时转轴来描述刚体定点转动。没有固定轴导致我们不能用一个标量清楚描述它的角动量和角速度，它角动量 $\boldsymbol{L}$ 角速度 $\boldsymbol{\omega}$ 都有三个分量。

我们在刚体上选取一个小的体积元 dm。该体积元的角动量为

$$\begin{aligned} d\boldsymbol{L} &= \boldsymbol{r}\times\boldsymbol{P} = \boldsymbol{r}\times\boldsymbol{v}dm && (3.46)\\ &= \boldsymbol{r}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r})dm && (3.47)\\ &= [\boldsymbol{r}^2\boldsymbol{\omega} - (\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{\omega})\boldsymbol{r}]dm && (3.48)\\ &= [(r_1^2+r_2^2+r_3^2)\boldsymbol{\omega} - (r_1\omega_1+r_2\omega_2+r_3\omega_3)\boldsymbol{r}]dm && (3.49)\\ & && (3.50) \end{aligned}$$

积分表达式

$$\boldsymbol{L} = \int [(r_1^2+r_2^2+r_3^2)\boldsymbol{\omega} - (r_1\omega_1+r_2\omega_2+r_3\omega_3)\boldsymbol{r}]dm \tag{3.51}$$

分量表达式

$$L_1 = \int [(r_1^2 + r_2^2 + r_3^2)\omega_1 - (r_1\omega_1 + r_2\omega_2 + r_3\omega_3)r_1]dm \tag{3.52}$$
$$= \int (r_2^2 + r_3^2)dm\ \omega_1 + \int (-r_1r_2)dm\ \omega_2 + \int (-r_1r_3)dm\ \omega_3 \tag{3.53}$$
$$\equiv I_{11}\ \omega_1 + I_{12}\ \omega_2 + I_{13}\ \omega_3 \tag{3.54}$$
$$\tag{3.55}$$

$$L_2 = \int [(r_1^2 + r_2^2 + r_3^2)\omega_2 - (r_1\omega_1 + r_2\omega_2 + r_3\omega_3)r_2]dm \tag{3.56}$$
$$= \int (-r_1r_2)dm\ \omega_1 + \int (r_1^2 + r_3^2)dm\ \omega_2 + \int (-r_2r_3)dm\ \omega_3 \tag{3.57}$$
$$\equiv I_{21}\ \omega_1 + I_{22}\ \omega_2 + I_{23}\ \omega_3 \tag{3.58}$$
$$\tag{3.59}$$

$$L_3 = \int [(r_1^2 + r_2^2 + r_3^2)\omega_3 - (r_1\omega_1 + r_2\omega_2 + r_3\omega_3)r_3]dm \tag{3.60}$$
$$= \int (-r_1r_3)dm\ \omega_1 + \int (-r_2r_3)dm\ \omega_2 + \int (r_1^2 + r_2^2)dm\ \omega_3 \tag{3.61}$$
$$\equiv I_{31}\ \omega_1 + I_{32}\ \omega_2 + I_{33}\ \omega_3 \tag{3.62}$$
$$\tag{3.63}$$

于是我们只需要定义一个二阶张量 $\boldsymbol{I}$，它的地位等同于转动惯量，由于现在它不再是一个标量，所以我们也把它叫做惯量张量（可以用矩阵表示）。便可以将上面三个分量式子统一写成一个表达。

$$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{I}\boldsymbol{\omega} \tag{3.64}$$

即

$$\begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{11} & I_{12} & I_{13} \\ I_{21} & I_{22} & I_{23} \\ I_{31} & I_{32} & I_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{bmatrix} \tag{3.65}$$

定义 3.10

惯量张量

$$\boldsymbol{I} = \begin{bmatrix} I_{11} & I_{12} & I_{13} \\ I_{21} & I_{22} & I_{23} \\ I_{31} & I_{32} & I_{33} \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} \int (r_2^2 + r_3^2)dm & \int (-r_1r_2)dm & \int (-r_1r_3)dm \\ \int (-r_1r_2)dm & \int (r_1^2 + r_3^2)dm & \int (-r_2r_3)dm \\ \int (-r_1r_3)dm & \int (-r_2r_3)dm & \int (r_1^2 + r_2^2)dm \end{bmatrix} \tag{3.66}$$

我们可以发现，惯量张量矩阵是个实对称矩阵。

3.4.5 惯量张量的对角化-惯量主轴

惯量张量矩阵是个实对称矩阵，观察该矩阵的矩阵元，发现矩阵元数值依赖于坐标系的选取。那么，我们自然而然就会思考一个问题，有没有一个恰当的坐标系使得惯量张量变成最简单的样子以方便后续计算？大家第一个想到的可能是刚体本体坐标系，不然在刚体转动的时候，惯量张量的矩阵元还会随着时间改变。可是固定在刚体上的坐标系也有无数个，在这些坐标系中我们应该选择哪个呢？

我们在线性代数中学过，实对称矩阵一定相似于一个对角矩阵。也就是说，我们一定可以选择适当的坐标

系使得惯量张量矩阵对角化。使得惯量张量矩阵对角化的坐标系叫做**主轴坐标系**（Inertia principal axis system），主轴坐标系的三个两两正交的坐标轴叫做**惯量主轴**（Principal axis of inertia）。对角矩阵的对角元就是对惯量主轴的转动惯量 I_1, I_2, I_3，也叫做**主转动惯量**（Principal moment of inertia）。相似对角化之后的惯量张量矩阵为

$$\boldsymbol{I}' = \begin{bmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{bmatrix} \tag{3.67}$$

角动量和角速度的关系是

$$\begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{bmatrix} \tag{3.68}$$

于是角动量分量和角速度分量由主转动惯量联系。

$$L_1 = I_1\omega_1, \qquad L_2 = I_2\omega_2, \qquad L_3 = I_3\omega_3 \tag{3.69}$$

那么主转动惯量和惯量主轴应该怎么求得呢？下面就让我们来看看如果已知某坐标系下的惯量张量 I，如何求对角化之后的矩阵 I'。我们将进行线性代数中的实对称方阵的相似对角化的标准步骤。其中，假设 P 是能使得 I 对角化的可逆方阵。

$$\boldsymbol{I}' = \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{I}\boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{bmatrix} \tag{3.70}$$

等式两边同时左乘可逆方阵 P，我们得到

$$\boldsymbol{I}\boldsymbol{P} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{I}' = \boldsymbol{P}\begin{bmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{bmatrix} \tag{3.71}$$

把方阵 P 变成分块矩阵

$$\boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & P_{13} \\ P_{21} & P_{22} & P_{23} \\ P_{31} & P_{32} & P_{33} \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} \mathbf{P_1} & \mathbf{P_2} & \mathbf{P_3} \end{bmatrix} \tag{3.72}$$

则式 (3.71) 变成

$$\boldsymbol{I}\begin{bmatrix} \mathbf{P_1} & \mathbf{P_2} & \mathbf{P_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{P_1} & \mathbf{P_2} & \mathbf{P_3} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{bmatrix} \tag{3.73}$$

于是我们得到如下的三个方程，

$$\begin{cases} \boldsymbol{I}\mathbf{P_1} = I_1\mathbf{P_1} \\ \boldsymbol{I}\mathbf{P_2} = I_1\mathbf{P_2} \\ \boldsymbol{I}\mathbf{P_3} = I_1\mathbf{P_3} \end{cases} \tag{3.74}$$

我们可以发现这其实就是本征方程，I_1, I_2, I_3 就是本征值，$\mathbf{P_1}, \mathbf{P_2}, \mathbf{P_3}$ 就是对应的本征矢量。本征矢量合在一起就构成了相似变换的矩阵 $\boldsymbol{P}$。下面只需求解该本征方程就可得到其本征值和本征矢量，利用本征值即可写出对角化之后的矩阵 I'。

例子 3.4 一个均匀材质的正方体，假设其边长为 a，质量为 m，绕定点 O 转动。(1) 求立方体对 O 点在 $Oxyz$ 坐标系下的惯量张量矩阵; (2) 求立方体对 O 点的主转动惯量; (3) 求立方体对 O 点的惯量主轴。

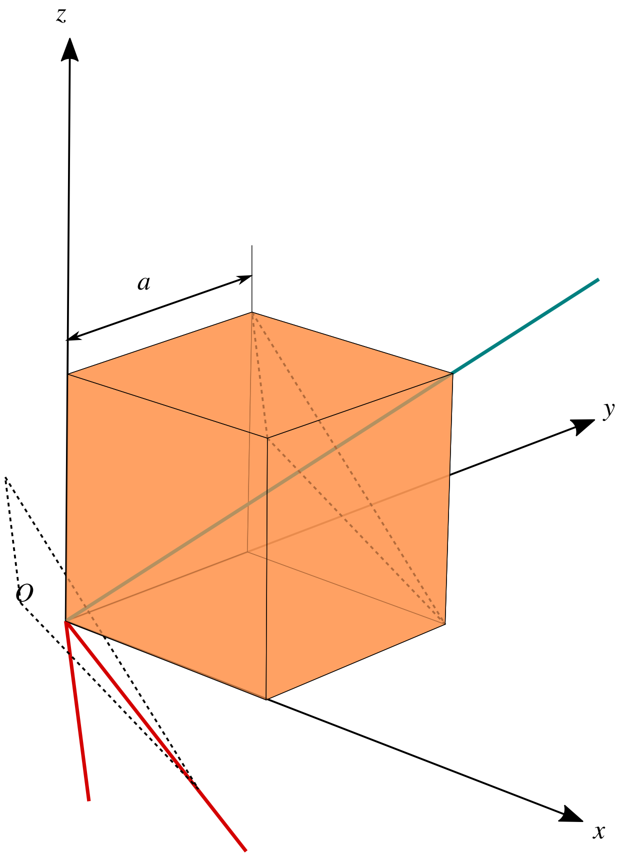

图 3.5: 立方体的惯量主轴示意图.

解 （1）求惯量张量矩阵的对角元，我们先计算正方体对 x 轴的转动惯量是，如下式

$$I_{11} = \int (y^2+z^2)dm = \int_0^a \int_0^a \int_0^a (y^2+z^2)\frac{m}{a^3}dxdydz = \frac{2}{3}ma^2 \tag{3.75}$$

同理可得，

$$I_{22} = I_{33} = \frac{2}{3}ma^2 \tag{3.76}$$

求惯量张量矩阵的非对角元，我们计算正方体对 xy 平面的惯量积，如下式

$$I_{12} = \int xydm = \int_0^a \int_0^a \int_0^a xy\frac{m}{a^3}dxdydz = \frac{1}{4}ma^2 \tag{3.77}$$

同理可得，

$$I_{13} = I_{23} = \frac{1}{4}ma^2 \tag{3.78}$$

所以惯量张量为

$$\boldsymbol{I} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{2}{3} \end{bmatrix} ma^2 \tag{3.79}$$

（2）由式3.74，写出本征方程

$$(\boldsymbol{I} - I\boldsymbol{E})\boldsymbol{P} = 0 \tag{3.80}$$

本征向量 $\boldsymbol{P}$ 有非零解的条件是

$$|\boldsymbol{I} - I\boldsymbol{E}| = 0 \tag{3.81}$$

设 $I = \lambda ma^2$，上式变为

$$\begin{vmatrix} \frac{2}{3}-\lambda & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{2}{3}-\lambda & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{2}{3}-\lambda \end{vmatrix} = 0 \tag{3.82}$$

解得 $\lambda_1 = \frac{1}{6}, \lambda_2 = \lambda_3 = \frac{11}{12}$，所以主转动惯量是

$$I_1 = \frac{1}{6}ma^2, \qquad I_2 = I_3 = \frac{11}{12}ma^2 \tag{3.83}$$

（3）首先将 $I_1 = \frac{1}{6}ma^2$ 带入本征方程，得

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} = 0 \tag{3.84}$$

解得本征向量如下，也就是其中一个惯量主轴

$$\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} \tag{3.85}$$

我们可以发现其中一个惯量主轴正是正方体的体对角线的方向。将简并的本征值 $I_2 = I_3 = \frac{11}{12}ma^2$ 带入本征方程，得

$$\begin{bmatrix} -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} = 0 \tag{3.86}$$

我们根据该本征方程无法求解出本征向量的具体形式，只能得到下式

$$\alpha + \beta + \gamma = 0 \tag{3.87}$$

可以发现满足上式的本征向量和正方体体对角线方向的坐标轴垂直。于是，以 O 为坐标原点，在与体对角线垂直的平面内任取两条互相垂直的坐标轴即可得到另外两个惯量主轴。

■

3.4.6 惯量椭球

下面我们将介绍如何求刚体对任意直线的转动惯量 I，从而引出惯量椭球的概念。在刚体中，任取一条通过转动点 O 的直线。如果假设该直线的方向余弦是 α, β, γ，那么该直线上的单位向量 $\boldsymbol{k} = (\alpha, \beta, \gamma)$，设某点的位置矢量为 $\boldsymbol{r} = (r_1, r_2, r_3)$. 转动惯量 I

$$I = \int \mathrm{d}m[\boldsymbol{r} - (\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{k})\boldsymbol{k}]^2 \tag{3.88}$$

$$= \int \mathrm{d}m[\boldsymbol{r}^2 - 2(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{k})^2 + (r\cdot\boldsymbol{k})^2\boldsymbol{k}^2] \tag{3.89}$$

$$= \int \mathrm{d}m[\boldsymbol{r}^2 - (\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{k})^2] \tag{3.90}$$

$$= \int \mathrm{d}m[r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 - (\alpha r_1 + \beta r_2 + \gamma r_3)^2] \tag{3.91}$$

$$= \int \mathrm{d}m[(\beta^2+\gamma^2)r_1^2 + (\gamma^2+\alpha^2)r_2^2 + (\alpha^2+\beta^2)r_3^2 - 2\alpha\beta r_1 r_2 - 2\alpha\gamma r_1 r_3 - 2\beta\gamma r_2 r_3] \tag{3.92}$$

$$= I_{11}\alpha^2 + I_{22}\beta^2 + I_{33}\gamma^2 - 2I_{12}\alpha\beta - 2I_{13}\alpha\gamma - 2I_{23}\beta\gamma \tag{3.93}$$

取点 $\boldsymbol{r} = (r_1, r_2, r_3) = (\frac{\alpha}{\sqrt{I}}, \frac{\beta}{\sqrt{I}}, \frac{\gamma}{\sqrt{I}})$ 我们可以得到

$$1 = I_{11}r_1^2 + I_{22}r_2^2 + I_{33}r_3^2 - 2I_{12}r_1r_2 - 2I_{13}r_1r_3 - 2I_{23}r_2r_3 \tag{3.94}$$

由解析几何的知识可知，这个方程对应的曲面是椭球面，被称为**惯量椭球**（Ellipsoid of inertia）。对于主轴坐标系，惯量椭球的方程可简化为如下表达式

$$I_1r_1^2 + I_2r_2^2 + I_3r_3^2 = 1 \tag{3.95}$$

3.4.7 刚体定点转动的动力学方程-欧拉动力学方程

我们先来回顾刚体定轴转动的动力学方程

定律/定理 3.7 (刚体定轴转动的动力学方程-最终版)

$$M_z = \frac{dL_z}{dt} = I\ddot{\varphi} = I\dot{\omega} \tag{3.96}$$

动力学方程即指刚体所受外力矩 M_z 和刚体角速度 ω 的关系。

对于刚体定点转动，我们也有

定律/定理 3.8 (刚体定点转动的动力学方程-初级版)

$$\boldsymbol{M} = \frac{d\boldsymbol{L}}{dt} \tag{3.97}$$

其中，$\boldsymbol{M}$ 是作用在质点系上的总的外力矩，$\boldsymbol{L}$ 是质点系的总角动量。

下面，我们就来具体计算 $\frac{d\boldsymbol{L}}{dt}$，以此来找到定点转动情况下刚体所受外力矩 $\boldsymbol{M}$ 和刚体角速度 $\boldsymbol{\omega}$ 的关系。选用刚体本体坐标系 (x, y, z)，假设基矢为 $(\hat{\boldsymbol{r}}_1, \hat{\boldsymbol{r}}_2, \hat{\boldsymbol{r}}_3)$。现在开始计算外力矩对时间的导数，

$$\begin{aligned}
\frac{d\boldsymbol{L}}{dt} &= \frac{d}{dt}(L_1\hat{\boldsymbol{r}}_1 + L_2\hat{\boldsymbol{r}}_2 + L_3\hat{\boldsymbol{r}}_3) \\
&= (\dot{L}_1\hat{\boldsymbol{r}}_1 + \dot{L}_2\hat{\boldsymbol{r}}_2 + \dot{L}_3\hat{\boldsymbol{r}}_3) + (L_1\dot{\hat{\boldsymbol{r}}}_1 + L_2\dot{\hat{\boldsymbol{r}}}_2 + L_3\dot{\hat{\boldsymbol{r}}}_3) \\
&= (\dot{L}_1\hat{\boldsymbol{r}}_1 + \dot{L}_2\hat{\boldsymbol{r}}_2 + \dot{L}_3\hat{\boldsymbol{r}}_3) + (L_1\boldsymbol{\omega} \times \hat{\boldsymbol{r}}_1 + L_2\boldsymbol{\omega} \times \hat{\boldsymbol{r}}_2 + L_3\boldsymbol{\omega} \times \hat{\boldsymbol{r}}_3) \\
&= (\dot{L}_1\hat{\boldsymbol{r}}_1 + \dot{L}_2\hat{\boldsymbol{r}}_2 + \dot{L}_3\hat{\boldsymbol{r}}_3) + \boldsymbol{\omega} \times (L_1\hat{\boldsymbol{r}}_1 + L_2\hat{\boldsymbol{r}}_2 + L_3\hat{\boldsymbol{r}}_3) \\
&= (\dot{L}_1\hat{\boldsymbol{r}}_1 + \dot{L}_2\hat{\boldsymbol{r}}_2 + \dot{L}_3\hat{\boldsymbol{r}}_3) + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{L} \\
&= (\dot{L}_1\hat{\boldsymbol{r}}_1 + \dot{L}_2\hat{\boldsymbol{r}}_2 + \dot{L}_3\hat{\boldsymbol{r}}_3) + (\omega_2L_3 - \omega_3L_2)\hat{\boldsymbol{r}}_1 + (\omega_3L_1 - \omega_1L_3)\hat{\boldsymbol{r}}_2 + (\omega_1L_2 - \omega_2L_1)\hat{\boldsymbol{r}}_3
\end{aligned} \tag{3.98}$$

现在我们需要知道角动量和角速度的关系才能继续计算，前面的计算是在刚体本体坐标系下进行的。为简化后续计算，现在我们选取一个特殊的刚体本体坐标系，即惯量主轴坐标系。在惯量主轴坐标系下，我们的角动量分量和角速度分量直接由主转动惯量联系，即式3.69

$$L_1 = I_1\omega_1, \qquad L_2 = I_2\omega_2, \qquad L_3 = I_3\omega_3 \tag{3.99}$$

将其带入式3.98，我们有

$$\begin{aligned}
\frac{d\boldsymbol{L}}{dt} &= (\dot{L}_1\hat{\boldsymbol{r}}_1 + \dot{L}_2\hat{\boldsymbol{r}}_2 + \dot{L}_3\hat{\boldsymbol{r}}_3) + (\omega_2L_3 - \omega_3L_2)\hat{\boldsymbol{r}}_1 + (\omega_3L_1 - \omega_1L_3)\hat{\boldsymbol{r}}_2 + (\omega_1L_2 - \omega_2L_1)\hat{\boldsymbol{r}}_3 \\
&= (I_1\dot{\omega}_1\hat{\boldsymbol{r}}_1 + I_2\dot{\omega}_2\hat{\boldsymbol{r}}_2 + I_3\dot{\omega}_3\hat{\boldsymbol{r}}_3) + (\omega_2I_3\omega_3 - \omega_3I_2\omega_2)\hat{\boldsymbol{r}}_1 + (\omega_3I_1\omega_1 - \omega_1I_3\omega_3)\hat{\boldsymbol{r}}_2 + (\omega_1I_2\omega_2 - \omega_2I_1\omega_1)\hat{\boldsymbol{r}}_3 \\
&= [I_1\dot{\omega}_1 + \omega_2\omega_3(I_3 - I_2)]\,\hat{\boldsymbol{r}}_1 + [I_2\dot{\omega}_2 + \omega_1\omega_3(I_1 - I_3)]\,\hat{\boldsymbol{r}}_2 + [I_3\dot{\omega}_3 + \omega_1\omega_2(I_2 - I_1)]\,\hat{\boldsymbol{r}}_3 \\
&= [I_1\dot{\omega}_1 - (I_2 - I_3)\omega_2\omega_3]\,\hat{\boldsymbol{r}}_1 + [I_2\dot{\omega}_2 - (I_3 - I_1)\omega_3\omega_1]\,\hat{\boldsymbol{r}}_2 + [I_3\dot{\omega}_3 - (I_1 - I_2)\omega_1\omega_2]\,\hat{\boldsymbol{r}}_3
\end{aligned} \tag{3.100}$$

力矩为

$$\boldsymbol{M} = M_1\hat{\boldsymbol{r}}_1 + M_2\hat{\boldsymbol{r}}_2 + M_3\hat{\boldsymbol{r}}_3\frac{d\boldsymbol{L}}{dt} \tag{3.101}$$

上述两式对应分量于是我们得到了刚体定点转动动力学方程的最终版，即欧拉动力学方程。

定律/定理 3.9 (刚体定点转动的动力学方程-欧拉动力学方程)

$$\begin{cases} M_1 = I_1\dot{\omega}_1 - (I_2 - I_3)\omega_2\omega_3 \\ M_2 = I_2\dot{\omega}_2 - (I_3 - I_1)\omega_3\omega_1 \\ M_3 = I_3\dot{\omega}_3 - (I_1 - I_2)\omega_1\omega_2 \end{cases} \tag{3.102}$$

这是定点转动情况下刚体所受外力矩 $\boldsymbol{M}$ 和刚体角速度 $\boldsymbol{\omega}$ 的关系

联立刚体定点转动的运动学方程（欧拉运动学方程）3.130和刚体定点转动的动力学方程（欧拉动力学方程）3.103，即

$$\begin{cases} \omega_1 = \dot{\theta}\cos\psi + \dot{\varphi}\sin\theta\sin\psi \\ \omega_2 = -\dot{\theta}\sin\psi + \dot{\varphi}\sin\theta\cos\psi \\ \omega_3 = \dot{\psi} + \dot{\varphi}\cos\theta \\ M_1 = I_1\dot{\omega}_1 - (I_2 - I_3)\omega_2\omega_3 \\ M_2 = I_2\dot{\omega}_2 - (I_3 - I_1)\omega_3\omega_1 \\ M_3 = I_3\dot{\omega}_3 - (I_1 - I_2)\omega_1\omega_2 \end{cases} \tag{3.103}$$

已知外力矩 $\boldsymbol{M}$ 和刚体的主转动惯量 $\boldsymbol{I}$ 的话，我们只剩下 6 个未知数 $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \phi, \theta, \psi$，而我们刚好有 6 个常微分方程。通常来说，我们会选择先消去 $\omega_1, \omega_2, \omega_3$，最后解出来刚体的运动情况，即位形 ϕ, θ, ψ。然而在通常情况下，该微分方程组的求解十分困难，不过我们将在下节介绍几种简单的可以求出解析解的情形。

3.5 刚体定点转动的解

3.5.1 欧拉-潘索情况

欧拉-潘索情况是指外力矩为零的定点转动。

$$\boldsymbol{M} = 0 \tag{3.104}$$

假设我们在主轴坐标系下讨论，且讨论的是对称陀螺，即主转动惯量满足

$$I_1 = I_2 \tag{3.105}$$

根据式3.103写出欧拉-潘索情况的欧拉动力学方程，

$$\begin{cases} 0 = I_1\dot{\omega}_1 - (I_2 - I_3)\omega_2\omega_3 \\ 0 = I_2\dot{\omega}_2 - (I_3 - I_1)\omega_3\omega_1 \\ 0 = I_3\dot{\omega}_3 \end{cases} \tag{3.106}$$

根据3.115的第三式可知，ω_3 是常数，而且 $I_1 = I_2$。所以我们定义常数 n

$$n = \frac{I_3 - I_1}{I_1}\omega_3 \tag{3.107}$$

于是上式变成

$$\begin{cases} 0 = \dot{\omega}_1 - \frac{I_2 - I_3}{I_1}\omega_3 \times \omega_2 \equiv \dot{\omega}_1 + n\omega_2 \\ 0 = \dot{\omega}_2 - \frac{I_3 - I_1}{I_2}\omega_3 \times \omega_1 \equiv \dot{\omega}_2 - n\omega_1 \\ \omega_3 = \text{const} \end{cases} \tag{3.108}$$

将式3.108的第一式对时间求导，根据 $\dot{\omega}_2 = n\omega_1$，我们得到

$$0 = \ddot{\omega}_1 + n\dot{\omega}_2 = \ddot{\omega}_1 + n^2\omega_1 \tag{3.109}$$

这是简谐振动方程，解是

$$\omega_1 = \omega_0 \cos(nt + \alpha) \tag{3.110}$$

再根据 $\dot{\omega}_2 = n\omega_1$，我们解出

$$\omega_2 = \omega_0 \sin(nt + \alpha) \tag{3.111}$$

综上所述，欧拉动力学方程3.115的解为，角速度矢量 $\boldsymbol{\omega}$ 在刚体本体坐标系的对称轴上的投影是常数，在与该轴垂直的平面上描绘出一个圆 $\omega_1^2 + \omega_2^2 = \omega_0^2$。

$$\begin{cases} \omega_1 = \omega_0 \cos(nt + \alpha) \\ \omega_2 = \omega_0 \sin(nt + \alpha) \\ \omega_3 = \text{const} \end{cases} \tag{3.112}$$

从物理图像上看，这代表着角速度矢量的大小不变，但方向一直在改变，且角速度矢量正是在绕着对称轴转圈而描绘出圆锥，这也被称为**本体极锥**。旋转角速度为

$$|n| = \frac{|I_3 - I_1|}{I_1}\omega_3 \tag{3.113}$$

周期为

$$T = \frac{2\pi}{|n|} = \frac{2\pi}{\omega_3}\frac{I_1}{|I_3 - I_1|} \tag{3.114}$$

由式3.69，和主转动惯量 $I_1 = I_2$，得角动量的表达式为

$$\begin{cases} L_1 = I_1\omega_0 \cos(nt + \alpha) \\ L_2 = I_1\omega_0 \sin(nt + \alpha) \\ L_1 = I_3\omega_3 \end{cases} \tag{3.115}$$

将式3.115带入式3.119，得

$$\begin{cases} \dot{\theta} = \omega_0 \cos(nt + \alpha)\cos\psi - \omega_0 \sin(nt + \alpha)\sin\psi \\ \dot{\varphi} = \omega_0 \cos(nt + \alpha)\csc\theta\sin\psi + \omega_0 \sin(nt + \alpha)\csc\theta\cos\psi \\ \dot{\psi} = -\omega_0 \cos(nt + \alpha)\cot\theta\sin\psi - \omega_0 \sin(nt + \alpha)\cot\theta\cos\psi + \omega_3 \end{cases} \tag{3.116}$$

计算得，

$$\begin{cases} \dot{\theta} = \omega_0 \cos(nt + \psi + \alpha) \\ \dot{\varphi} = \frac{1}{\sin\theta}\omega_0 \sin(nt + \psi + \alpha) \\ \dot{\psi} = -\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\omega_0 \sin(nt + \psi + \alpha) + \omega_3 \end{cases} \tag{3.117}$$

因为我们考虑的欧拉-潘索情况是指外力矩为零的定点转动，所以有总角动量守恒，我们现在选取角动量 $\boldsymbol{L}$ 的方向为空间坐标系的 z 轴，于是章动角 θ 不变，即 $\dot{\theta} = 0$，于是由上式得

$$\psi = -nt, \qquad \alpha = \frac{\pi}{2} \tag{3.118}$$

所以

$$\begin{cases} \dot{\theta} = 0(\text{无章动}) \\ \dot{\varphi} = \frac{\omega_0}{\sin\theta} = \text{const}(\text{均匀进动}) \\ \dot{\psi} = -\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\omega_0 + \omega_3 = \text{const}(\text{均匀自转}) \end{cases} \tag{3.119}$$

刚体这种章动角不变，匀速进动和自转的运动就被称为**规则进动**。并且角速度 $\boldsymbol{\omega}$ 在空间坐标系 z 轴的投影 $\omega_3 = \dot{\psi} + \dot{\varphi}\cos\theta = \text{const}$ 也是个常数。于是角速度绕着角动量方向（z 轴）也描绘出一个圆锥，称为**空间极锥**。欧拉-潘索情况的本体极锥和空间极锥如下图所示，

3.5.2 拉格朗日-泊松情况

拉格朗日-泊松情况是指外力矩不为零的定点转动。

$$\boldsymbol{M} \neq 0 \tag{3.120}$$

假设我们在主轴坐标系下讨论，且讨论的是对称陀螺，即主转动惯量满足

$$I_1 = I_2 \tag{3.121}$$

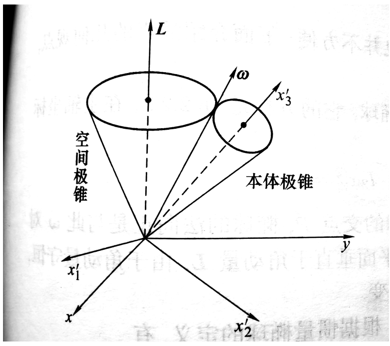

图 3.6: 1

如果考虑对称陀螺只在重力下运动，那么拉格朗日-泊松情况是指定点 O 和重心都在对称轴上，但两者不重合的情况，这样重力就会产生力矩。

根据式3.103写出该问题的欧拉动力学方程

$$\begin{cases} M_1 = I_1\dot{\omega}_1 - (I_2 - I_3)\omega_2\omega_3 \\ M_2 = I_2\dot{\omega}_2 - (I_3 - I_1)\omega_3\omega_1 \\ M_3 = I_3\dot{\omega}_3 \end{cases} \tag{3.122}$$

力矩

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F} = l\boldsymbol{e}_3''' \times (-mg\boldsymbol{e}_1) \tag{3.123}$$

$$= -mgl\sin\theta\sin\psi\boldsymbol{e}_2''' + mgl\sin\theta\cos\psi\boldsymbol{e}_1''' \tag{3.124}$$

式3.125变成

$$\begin{cases} mgl\sin\theta\cos\psi = I_1\dot{\omega}_1 - (I_2 - I_3)\omega_2\omega_3 \\ -mgl\sin\theta\sin\psi = I_2\dot{\omega}_2 - (I_3 - I_1)\omega_3\omega_1 \\ 0 = I_3\dot{\omega}_3 \end{cases} \tag{3.125}$$

由欧拉运动学方程，式3.130的第三个方程

$$\begin{cases} \omega_1 = \dot{\theta}\cos\psi + \dot{\varphi}\sin\theta\sin\psi \\ \omega_2 = -\dot{\theta}\sin\psi + \dot{\varphi}\sin\theta\cos\psi \\ \omega_3 = \dot{\psi} + \dot{\varphi}\cos\theta \end{cases} \tag{3.126}$$

得第一个运动积分

$$\frac{L_3}{I_3} = \omega_3 = \dot{\psi} + \dot{\varphi}\cos\theta = \text{const} \tag{3.127}$$

能量守恒可作为第二个运动积分方程

$$E = \frac{1}{2}I_1\omega_1^2 + \frac{1}{2}I_2\omega_2^2 + \frac{1}{2}I_3\omega_3^2 + mgl\cos\theta = \frac{1}{2}I_1(\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2\sin^2\theta) + \frac{1}{2}\frac{L_3^2}{I_3} + mgl\cos\theta \tag{3.128}$$

第三个运动积分方程是 z 方向角动量守恒

$$L_z = I_1\dot{\varphi}\sin^2\theta + L_3\cos\theta \tag{3.129}$$

于是我们只需要求解下列方程组就可以得到拉格朗日-泊松情形的解

$$\begin{cases} \frac{L_3}{I_3} = \omega_3 = \dot{\psi} + \dot{\varphi}\cos\theta \\ E = \frac{1}{2}I_1(\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2\sin^2\theta) + \frac{1}{2}\frac{L_3^2}{I_3} + mgl\cos\theta \\ L_z = I_1\dot{\varphi}\sin^2\theta + L_3\cos\theta \end{cases} \tag{3.130}$$

附录 A 物理量和单位

一个物理量是一个物体或系统的属性, 我们可以通过测量来量化它. 当测量一个物理量的时候, 我们常常将它和一些标准的参考比较. 这样的标准就叫做单位. 最常用的单位系统时国际单位制. 表A.1列出了基础物理量和它们对应的单位.

Physical Quantity	Unit
时间	秒 (Second, s)
长度	米 (Meter, m)
质量	千克 (Kilogram, kg)
电流	安培 (Ampere, A)
温度	开尔文 (Kelvin, K)
物质的量	摩尔 (Mole, mol)
光强	坎德拉 (Candela, cd)

表 A.1: 基础物理量和对应单位.

有时使用更大或更小的单位会更方便, 我们便在单位前加一个前缀. 表A.2列出了一些前缀及其含义.

10^n	前缀
10^{-24}	yocto- (y)
10^{-21}	zepto- (z)
10^{-18}	atto- (a)
10^{-15}	femto- (f)
10^{-12}	pico- (p)
10^{-9}	nano- (n)
10^{-6}	micro- (μ)
10^{-3}	milli- (m)
10^{-2}	centi- (c)
10^{3}	kilo- (k)
10^{6}	mega- (M)
10^{9}	giga- (G)
10^{12}	tera- (T)
10^{15}	peta- (P)
10^{18}	exa- (E)
10^{21}	zetta- (Z)
10^{24}	yotta- (Y)

表 A.2: 单位前缀.

附录 B 矢量

当一个量可以以一个数字表示的时候, 我们称之为标量; 相对的, 矢量同时包含了大小与方向.

B.1 矢量求和

矢量的求和满足**交换律** (commutative) 和**结合律** (associative).

$$\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} = \boldsymbol{B} + \boldsymbol{A}, \tag{B.1}$$

$$(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}) + \boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} + (\boldsymbol{B} + \boldsymbol{C}). \tag{B.2}$$

图像上来看, 以上两个特点很符合直觉.

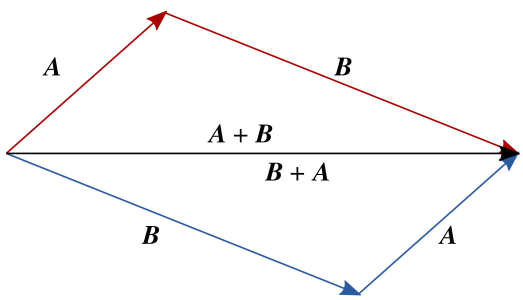

图 B.1: 矢量求和满足交换律.

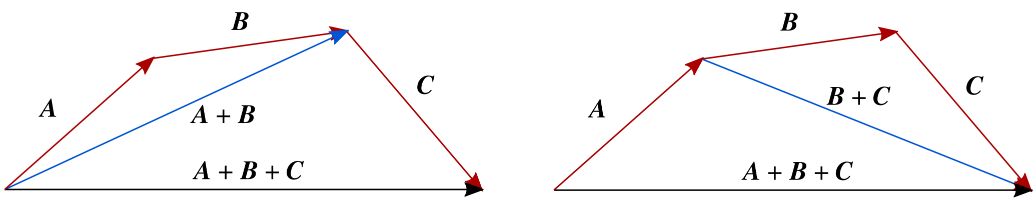

图 B.2: 矢量求和满足结合律.

对于矢量的 ‘‘减法”, 我们可以理解成加上这个矢量的**逆** (inverse, 图像上来说, 即大小相同方向相反的矢量).

$$\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B} = \boldsymbol{A} + (-\boldsymbol{B}). \tag{B.3}$$

B.2 矢量分量

有时运算时, 对于矢量的分量进行操作会更方便. 以 xy 平面上的矢量 $\boldsymbol{A}$ 为例子,

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}_x + \boldsymbol{A}_y = A_x\hat{\imath} + A_y\hat{\jmath}. \tag{B.4}$$

这里 $\boldsymbol{A}_x$ 是矢量 $\boldsymbol{A}$ 在 x 轴方向的投影, $\boldsymbol{A}_y$ 是矢量 $\boldsymbol{A}$ 在 y 轴方向的投影. 等式最右则使用了单位矢量来表示, $\hat{\imath}$ 和 $\hat{\jmath}$ 分别是 x 轴和 y 轴方向上的单位矢量, A_x 和 A_y 则是 x 轴和 y 轴方向上投影的长度. 我们也可以利用分量来计算矢量的方向和模

$$\cos\theta = \frac{A_x}{|\boldsymbol{A}|}, \sin\theta = \frac{A_y}{|\boldsymbol{A}|}, \tan\theta = \frac{A_y}{A_x}, \tag{B.5}$$

$$|\boldsymbol{A}| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2}. \tag{B.6}$$

矢量求和也可以类似的使用分量表示

$$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} \longrightarrow \begin{cases} C_x = A_x + B_x \\ C_y = A_y + B_y \end{cases}. \tag{B.7}$$

B.3 矢量乘法

在这本教材需要的范围内, 我们会接触到三种矢量乘法: **标量乘法** (scalar multiplication), **标量积/点积** (scalar product/dot product), 以及**向量积/叉积** (cross product/vector product).

B.3.0.1 标量乘法

我们可以将一个标量作用在矢量上.

$$\boldsymbol{D} = a\boldsymbol{A} \longrightarrow \begin{cases} D_x = aA_x \\ D_y = aA_y \end{cases}. \tag{B.8}$$

B.3.0.2 标量积

标量积是矢量与矢量的乘积, 其结果是一个标量.

$$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} = |\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}| \cos\theta = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z. \tag{B.9}$$

这里 θ 是两个向量的夹角.

B.3.0.3 向量积

在这本教材需要的范围内, 向量积只在三维空间内是被定义且有意义. 两个矢量经过此运算, 结果是一个同时垂直/正交于原本两个矢量的矢量.

$$\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}. \tag{B.10}$$

考虑 $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}$, 分量上有

$$C_x = A_y B_z - A_z B_y,\ C_y = A_z B_x - A_x B_z,\ C_z = A_x B_y - A_y B_x. \tag{B.11}$$

他们的模满足

$$|\boldsymbol{C}| = |\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}| \sin\theta. \tag{B.12}$$

矢量 $\boldsymbol{C}$ 的方向可以如图B.3所示用右手定则来判断

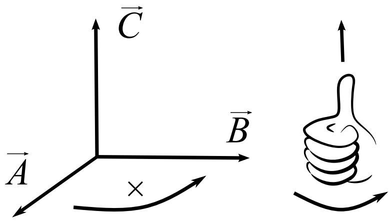

图 B.3: 将手指由矢量 $\boldsymbol{A}$ 绕向矢量 $\boldsymbol{B}$,B 拇指的指向即为矢量 $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}$ 的指向.