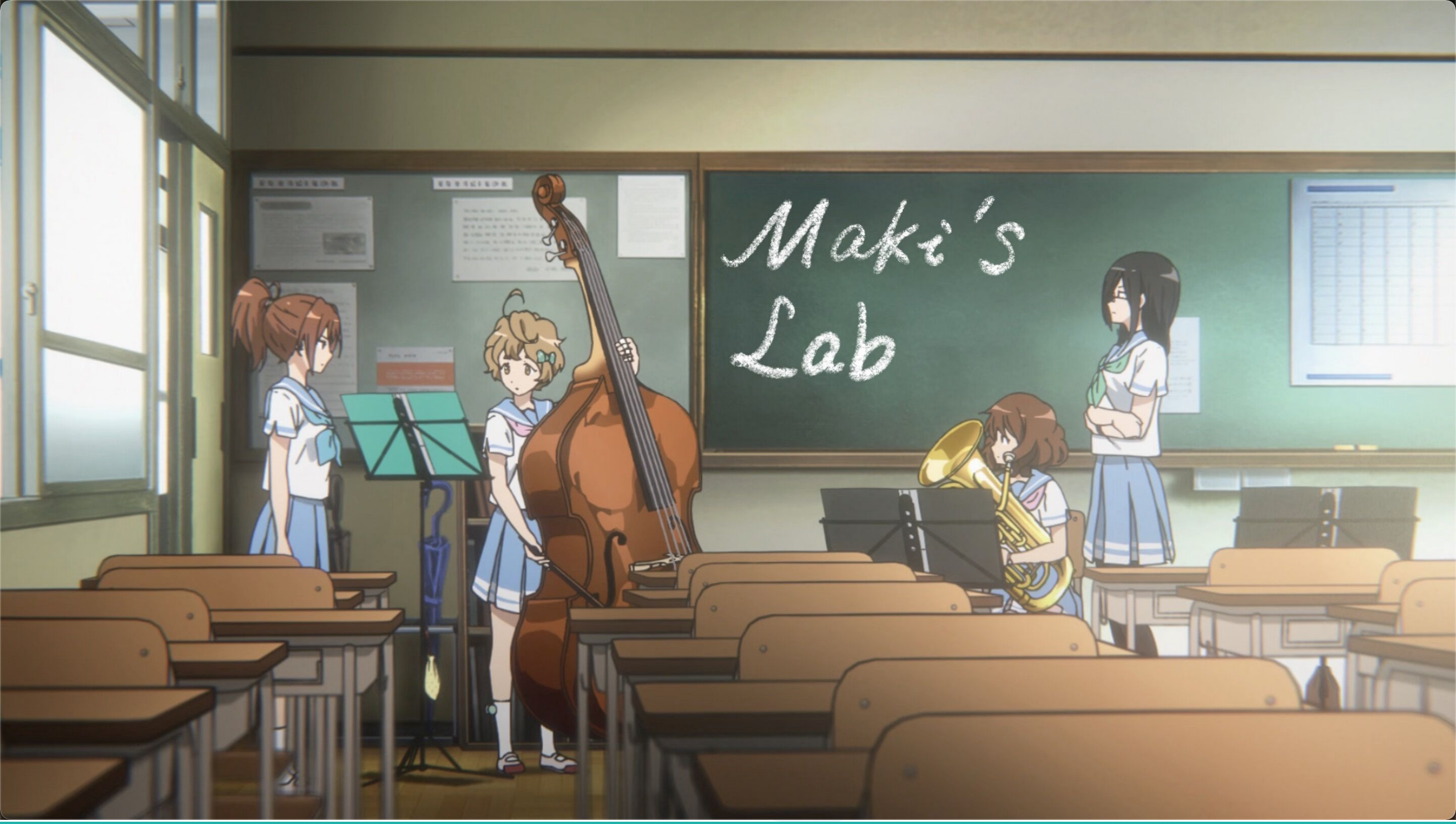


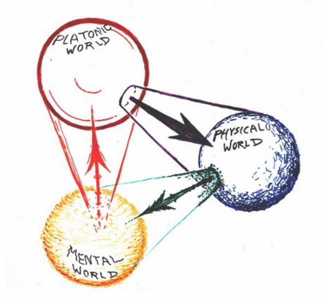

# 数学分析 II

作者：数学分析委员会

组织：Maki's Lab

时间：Apr 2022

版本：1.0




"九万里风鹏正举。风休住，蓬舟吹取三山去。"——【宋】李清照

# 写在前面

Maki 你有什么想对观众说的就写在这儿吧...

特别感谢由 Ethan Deng 和 Liam Huang 组织，ElegantLaTeX[1]社区提供的模板。“多分享，多奉献”一直是该开源社区的目标。如果您喜欢本书的模板的话，请前往elegantlatex.org进行下载和使用。

# 目录

# 第 1 章 常微分方程初步

**内容提要**

- XXX

## 1.1 常微分方程的基本概念

**定义 1.1 (微分方程)**

含有未知函数和未知函数导数 (或微分) 的方程, 称为**微分方程** (differential equation). 若未知函数是一元函数, 即

$$F\left(x, y, y', y'', \cdots, y^{(n)}\right) = 0.$$

则称为**常微分方程** (ordinary differential equation, ODE). 微分方程中出现的未知函数最高阶导数的阶数称为微分方程的**阶** (order). 若函数 $y = f(x)$ 满足

$$F\left(x, f(x), f'(x), f''(x), \cdots, f^{(n)}(x)\right) = 0.$$

则称该函数是常微分方程的一个解.

♣

**注** 一般只需要研究到二阶微分方程就够了.

**注** 若未知函数是多元函数的微分方程称作**偏微分方程** (partial differential equation, PDE).

**例 1.1** 已知自由落体运动的速度与时间成正比, 求自由运动方程.

**解** 设运动方程 $s = s(t)$. 由题意得

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = gt \iff s = \frac{1}{2}gt^2 + C.$$

其中 $C$ 是任一常数.

由以上例题可知, 微分方程的解总是不唯一的. 一般来说一阶微分方程的解集有一个常数. 二阶微分方程的解集有两个常数. 设二阶微分方程

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} = f(x).$$

连续对两边取不定积分得

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \int f(x)\,\mathrm{d}x + C_1 \iff y = \int\left(\int f(x)\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}x + C_1 x + C_2.$$

$$\begin{cases} F(x, y, y', y'') = 0 \\ y\,\big|_{x=x_0} = y_0 \\ y'\,\big|_{x=x_0} = y_1 \end{cases}.$$

通解, $y = \varphi(x, C_1, C_2)$ 或 $\Phi(x, C_1, C_2)$

## 1.2 恰当方程

恰当方程是我们能够解决的常微分方程里面较为简单的一种，我们可以写出其确切的解。恰当方程同样还意味着解决初等的常微分方程中一种标志性的思路和想法，我们对于一切并非恰当方程的方程可以采取一些手段将其化为恰当方程。

### 1.2.1 全微分

**定义 1.2 (恰当方程)**

考虑如下形式的方程

$$F(t,x,x') = P(t,x) + Q(t,x)x' = 0$$

并且存在一个 $\Phi(t,x)$ 有

$$\begin{cases} \Phi_t(t,x) = P(t,x) \\ \Phi_x(t,x) = Q(t,x) \end{cases}$$

则称这个方程是一个恰当方程

♣

在讨论恰当方程的解之前，我们首先想谈谈如何判别一个给定的方程是否是恰当方程，在证明恰当方程的判别条件的时候我们也会找到一个显式的恰当方程的解。

**定理 1.1 (恰当方程的判别)**

若方程

$$P(t,x) + Q(t,x)x' = 0$$

有 $P(t,x)$ 和 $Q(t,x)$ 都是连续的且有

$$\frac{\partial P}{\partial x}(t,x) = \frac{\partial Q}{\partial t}(t,x)$$

则该方程是恰当方程，反之亦然。

♡

**证明**

1. 由于 $P(t,x)$ 与 $Q(t,x)$ 都是连续函数，因此假若原方程构成一个恰当方程，同样记全微分的原函数为 $\Phi(t,x)$ 那么我们应当有
$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial \Phi}{\partial t \partial x}(t,x) = \frac{\partial \Phi}{\partial x \partial t}(t,x) = \frac{\partial Q}{\partial t}$$
这证明了
2. (反方向证明介绍完曲线面积分与路径无关的条件后介绍，较有几何直观) 目前我们只需要知道我们构造了如下的积分函数
$$\Phi(x,y) = \int_{t_0}^{t} P(t,x)\mathrm{d}t + \int_{x_0}^{x} Q(t_0,x)\mathrm{d}t$$

**定理 1.2 (恰当方程的解)**

1. 对于一个恰当方程，我们有其形式如下
$$\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} = P(t,x(t))\mathrm{d}t + Q(t,x(t))x'(t)\mathrm{d}t = 0$$
这意味着一个若我们能找到一个可微的 $x(t)$ 使得 $\Phi(t,x(t)) = C(C$ 是任意常数)，则显然 x(t) 是一个我们所寻找的解。

2. 进而依据上一条定理，我们有恰当方程的解如下

$$\Phi(x,y)=\int_{t_0}^{t}P(t,x)\mathrm{d}t+\int_{x_0}^{x}Q(t_0,x)\mathrm{d}t=C$$

其中 $(x_0,y_0)$ 是在 $P(t,x)$ 和 $Q(t,x)$ 定义域内的任意点，$C$ 是任意常数。

### 1.2.2 分离变量方程

分离变量方程是一种特殊的恰当方程，其形式比普通的恰当方程要更好，如下

**定义 1.3 (分离变量方程)**

若一个微分方程其参数方程 $P(t,x)$ 与 $Q(t,x)$ 可以分别拆分成只关于 t 的函数和只关于 x 的函数的乘积，如下

$$P_1(x)Q_1(y)+P_2(x)Q_2(y)y'=0$$

则我们称这样的方程为分离变量方程。

对于分离变量的方程，我们可以做如下的变形

$$P_1(t)Q_1(x)+P_2(t)Q_2(x)x'=0\Rightarrow\frac{P_1(t)}{P_2(t)}+\frac{Q_2(x)}{Q_1(x)}x'=0\quad(\text{对于}P_2(t)\neq0;Q_1(x)\neq0\text{ 的}(t,x))$$

这样的方程显然是恰当方程，因为显然有

$$\frac{\partial\frac{P_1}{P_2}}{\partial x}=\frac{\partial\frac{Q_2}{Q_1}}{\partial t}=0$$

对此方程使用我们构造的恰当方程的解，则我们有

**定理 1.3 (分离变量的方程的解)**

$$\Phi(x,y)=\int_{t_0}^{t}\frac{P_1}{P_2}(t,x)\mathrm{d}t+\int_{x_0}^{x}\frac{Q_2}{Q_1}(t_0,x)\mathrm{d}x=\int_{t_0}^{t}\frac{P_1}{P_2}(t)\mathrm{d}t+\int_{x_0}^{x}\frac{Q_2}{Q_1}(x)\mathrm{d}x=C$$

由于 $C$ 是任意常数，因此我们可以改变上式中所定义的积分限，如下

$$\Phi(t,x)=\int\frac{P_1}{P_1}\mathrm{d}t+\int\frac{Q_2}{Q_1}\mathrm{d}x=C$$

### 1.2.3 积分因子

#### 1.2.3.1 积分因子的定义

积分因子法是一种对恰当方程的解法的延伸，其基本思想在于当给定的方程不是一个恰当方程的时候，我们能否找到一个函数，使得方程两边乘上这个函数后变为恰当方程。其数学表达如下式所示

**定义 1.4 (积分因子)**

给定如下方程

$$P(t,x)+Q(t,x)x'=0$$

若是我们能够找到一个连续的 $\mu(t,x)$ 使得下式

$$\mu(t,x)P(t,x)+\mu(t,x)Q(t,x)x'=0$$

是一个恰当方程，则称 $\mu(t,x)$ 是一个上式的积分因子。

在积分因子不为 0 的 $(t,x)$ 的取值内，我们找到的

$$\mu(t,x)P(t,x)+Q(t,x)x'=0$$

的解也是

$$P(t,x)+Q(t,x)x'=0$$

的解，而上式是一个恰当方程，恰当方程的解法我们已经介绍过了。

### 1.2.3.2 积分因子的选择

若想使用积分因子法，我们的首要问题是如何找到一个合适的积分因子 $\mu(t,x)$，而其实这是一个非常平凡的问题，我们不妨梳理一下这个问题。首先，一个 $\mu(t,x)$ 是我们要的积分因子当且仅当它将原有的方程变为一个恰当方程，而在恰当方程一节中我们给出了利用 $P(t,x)$ 和 $Q(t,x)$ 判断其是否是一个恰当方程的充要条件，我们需要做的是把这个条件带入到 $\mu(t,x)P(t,x)$ 和 $\mu(t,x)Q(t,x)$ 中，如下：

$$\mu P+\mu Qx'=0\text{是恰当方程}\Leftrightarrow\frac{\partial\mu P}{\partial x}=\frac{\partial\mu Q}{\partial t}$$

这等价于 (仅仅具体的把导数写出来罢了)

$$\mu(t,x)(\frac{\partial P(t,x)}{\partial x}-\frac{\partial Q(t,x)}{\partial t})+(\frac{\partial\mu(t,x)}{\partial x}P(t,x)-\frac{\partial\mu(t,x)}{\partial t}Q(t,x))=0$$

我们得到的甚至是一个偏微分方程，在这个阶段我们更不会解了，因此我们往往考虑给这个方程中的项施加一些条件，使得这个方程变得简单，并得到一些特殊的解来充当我们的积分因子。其中最常用的是如下的一个条件

**定理 1.4 (积分因子特解的条件)**

若是下式

$$\frac{1}{Q}(\frac{\partial P}{\partial x}-\frac{\partial Q}{\partial t})$$

是一个只和 $t$ 有关的函数，则我们可以找到一个 $\mu(t)$ 做我们的积分因子

**证明**

1. 首先我们假设存在一个 $\mu(t)$ 是积分因子满足的偏微分方程的解，并且有 $\frac{1}{Q}(\frac{\partial P}{\partial x}-\frac{\partial Q}{\partial t})$ 只和 $x$，那么积分因子满足的偏微分方程可以被变形为如下形式

$$\begin{aligned}\frac{\partial\mu P}{\partial y}&=\frac{\partial\mu Q}{\partial x}\\ \Rightarrow\mu\frac{\partial P}{\partial y}&=\frac{\partial\mu}{\partial x}Q+\mu\frac{\partial Q}{\partial x}\\ \Rightarrow\frac{\mu'}{\mu}&=\frac{1}{Q}(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x})\end{aligned}$$

2. 上式中呈现的方程是一个只关于 $t$ 的方程，并且已经将未知函数 $\mu(t)$ 分解到了等式的一侧，更巧合的是我们有

$$\frac{\mathrm{d}\ln\mu(t)}{\mathrm{d}t}=\frac{\mu'}{\mu}$$

3. 这意味着

$$\ln\mu(t)=\int\frac{1}{Q}(\frac{\partial P}{\partial x}-\frac{\partial Q}{\partial t})\mathrm{d}t$$

也就是说

$$\mu(t)=e^{\int\frac{1}{Q}(\frac{\partial P}{\partial x}-\frac{\partial Q}{\partial t})\mathrm{d}t}$$

4. 在上一步中我们在第一步的假设中找到了一个只关于 $t$ 的积分因子，反代入积分因子满足的偏微分方程，验证了假设的真实性，证明结束。

我们还可以用相同的方式来构造 $\mu(t,x)$ 只和 $x$ 有关的情况，证明完全相似，验证条件也和我们证明的情形

对称, 如下

$$(\exists G(x))\ G(x) = \frac{1}{P}(\frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial Q}{\partial t})$$

具体证明留给读者进行练习。

#### 1.2.3.3 使用积分因子法

既然我们已经对一些特殊的方程找到了其积分因子, 我们解这类方程的时候只需要计算出其积分因子后, 解乘上积分因子后形成的恰当方程就好了。

### 1.2.4 线性方程

#### 1.2.4.1 齐次线性方程

**定义 1.5 (一阶齐次线性方程)**

如下形式的方程称之为一阶齐次线性方程

$$x' + p(t)t = 0$$

♣

我们首先观察到其不是恰当方程，我们尝试对其使用积分因子法，由于系数方程都只和 $t$ 有关，则我们要求的

$$(\exists G(t))G(t) = \frac{1}{Q}(\frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial Q}{\partial t})$$

是自然满足的，那么我们就可以找到一个 $\mu(t)$ 做其积分因子，按照积分因子的计算公式，我们有

$$e^{\int \frac{1}{Q}(\frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial Q}{\partial t}) = \frac{\partial p(t)x}{\partial x}\mathrm{d}t} = e^{\int p(x)\mathrm{d}t}$$

之后计算得到的恰当方程，我们有

$$\begin{aligned}\Phi(t,x) &= \int_{t_0}^{t} P(t,x)dt + \int_{x_0}^{x} Q(t_0,x) \\ &= \int_{t_0}^{t} p(t)xe^{\int_{t_0}^{t} p(s)ds}dt + \int_{x_0}^{x} e^{\int_{t_0}^{t} p(s)ds}dx \\ &= xe^{\int_{t_0}^{t} p(s)ds} - x + (x - x_0) \\ &= xe^{\int_{t_0}^{t} p(x)dt} + C_0(\text{一个常数})\end{aligned}$$

**定理 1.5 (一阶齐次线性方程的解)**

如上面的推导，我们有

$$xe^{\int_{t_0}^{t} p(x)dt} + C_0 = 0 \Rightarrow x(t) = Ce^{\int_{t_0}^{t} -P(t)\mathrm{d}t}$$

$C$ 是一个任意常数。

♡

#### 1.2.4.2 非齐次线性方程

**定义 1.6 (一阶非齐次线性方程)**

如下形式的方程称之为一阶非齐次线性方程

$$x' + P(t)t = q(t)$$

而

$$x' + P(t)t = 0$$

称为其对应的齐次线性方程

在之前介绍的无论是恰当方程还是积分因子，都没有处理过非齐次情况下的方程，也确实一般普通的非齐次方程很难解，但是对于线性方程，我们可以找到一个取巧的方式。观察我们找到的对应的齐次方程的积分因子，我们将其乘到非齐次方程之后得到

$$\mu(t)x(t)' + \mu(t)p(t)t = \mu(t)q(t)$$

两边对 $t$ 积分，我们有

$$\Phi(t,x) = xe^{\int_{t_0}^{t} p(x)dt} + C_0 = \int \mu(t)q(t)\mathrm{d}t$$

等式左侧恰好是非齐次方程对应的齐次方程的解的原因在于其对于 t 的导数等于等式左侧这件事就等价于解齐次方程。因此我们最终有

**定理 1.6 (非齐次方程的解)**

代入积分因子的显式并化简上式，我们有

$$x(t) = e^{-\int_{t_0}^{t} P(s)ds}(\int q(t)e^{\int_{t_0}^{t} P(s)ds}dt + C)$$

$C$ 是任意常数。

## 1.3 换元法

换元法是我们解决初等的一阶微分方程的另一种标志性想法，其根源在于如果我们不能很好的解决眼前的方程，那么我们能否找到一个由当前方程决定的其他变量所满足的方程，并使其具备简单的形式，最终通过解变形后的方程来解出原始方程。

### 1.3.1 齐次方程

#### 1.3.1.1 齐次方程的原型

此处我们提及的齐次方程并非我们在线性方程中所提及的齐次方程，这里我们定义如下

**定义 1.7 (齐次方程)**

对于一阶方程 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = f(t,x)$，若是其满足

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = g(\frac{x}{t})$$

则称之为齐次方程，如下式的方程是我们常见的齐次方程的形式

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{M(x,t)}{N(x,t)} = \frac{t^m M(1,\frac{x}{t})}{t^m N(1,\frac{x}{t})} = \frac{M(1,\frac{x}{t})}{N(1,\frac{x}{t})}$$

如果我们能够找到一个 $x(t)$ 是原方程的解，那么我们知道 $\frac{x(t)}{t}$ 也是一个可微函数，我们记这个函数为 $u$ 并考虑其微分方程

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} &= t\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}t}u \\ &= t\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + u = g(u) \\ \Rightarrow \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} &= \frac{1}{t}(g(u) - u)\end{aligned}$$

此时 $\frac{du}{dt} = \frac{1}{t}(g(u) - u)$ 是一个好解的变量分离方程，我们已经陈述过其解法，之后我们将解出来的 $u = u(t)$ 转化为 $x(t) = u(t)t$ 即可。

#### 1.3.1.2 可变形为变量分离方程的方程

**定义 1.8 (一个常见形式)**

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = f(\frac{a_1x + b_1t + c_1}{a_2x + b_2t + c_2})$$

对于上式的方程，我们有下面的讨论

**定理 1.7 (转化为齐次方程)**

1. $c_1 = c_2 = 0$, 此时原方程就是一个齐次方程
2. $c_1^2 + c_2^2 \neq 0$, 若是
$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$$
则由等式右边函数内的分数的分子分母的两个线性代数式对应的齐次线性方程组
$$\begin{cases} a_1x + b_1t + c_1 = 0 \\ a_2x + b_2t + c_2 = 0 \end{cases}$$
有非 0 解，记为 $(x = \alpha, t = \beta)$ 此时我们做代换
$$\begin{cases} x' = x - \alpha \\ t' = t - \beta \end{cases}$$
此时原方程变为齐次方程。
3. 若是
$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0$$
则一定存在一个系数 $\lambda$ 使得
$$\begin{cases} a_1 = \lambda a_2 \\ b_1 = \lambda b_2 \end{cases}$$
则做代换 $u = a_2x + b_2t$, 原方程化为其次方程

### 1.3.2 伯努利方程

**定义 1.9 (伯努利方程)**

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = p(t)x = q(t)x^n$$

对于这样的方程，我们做如下的换元

**定理 1.8 (伯努利方程的解法)**

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = p(t)x = q(t)x^n$$
$$x^{-n}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = p(t)x^{1-n} = q(t)$$

这等价于

$$\frac{\mathrm{d}x^{1-n}}{\mathrm{d}t} = (1-n)p(t)x^{1-n} = (1-n)q(t)$$

这是一个一阶线性微分方程，我们已经陈述过其解法

# 第 2 章 级数理论与反常积分

**内容提要**

- XXX

## 2.1 正项级数的敛散性

### 2.1.1 级数及其基本性质

**定义 2.1 (级数)**

设数列 $\{a_n\}$. 令

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots.$$

我们称 $\sum_{n=1}^{\infty}$ 为 $a_n$ 的**无穷级数** (infinite series), 简称级数. 其中 $a_n$ 称为级数的通项. 令

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + \cdots + a_n.$$

称 $S_n$ 为这个数列的前 $n$ 项和, 也称为级数 $\sum_{n=1}^{\infty}$ 的**部分和** (partial sum). 若数列 $\{S_n\}$ 收敛到 $S$, 则称级数 $\sum_{n=1}^{\infty}$ 收敛, 并称该级数的和为 $S$, 记作

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S.$$

反之我们称该级数是发散的.

下面看几个例子.

**例 2.1 几何级数** 讨论以下几何级数的敛散性:

$$\sum_{n=1}^{\infty} q^n = 1 + q + q^2 + \cdots + q^n + \cdots.$$

**解** 当 $q \neq 1$ 时

$$S_n = \frac{1-q^n}{1-q}.$$

(i) 若 $|q| < 1$, 则

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1-q^n}{1-q} = \frac{1}{1-q}.$$

(ii) 若 $|q| > 1$ 则 $\{S_n\}$ 发散.

(iii) 若 $q = -1$, 则 $S_{2n} \to 0$, $S_{2n-1} \to 1$. 因此 $\{S_n\}$ 发散.

(iv) 若 $q = 1$, 则 $\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} n = +\infty$.

综上可知只有当 $|q| < 1$ 时几何级数收敛, 此时它的和为 $1/(1-q)$. ■

我们在研究数列时, 还介绍过了 $p$ 级数.

**例 2.2** ***p* 级数** 设 $p$ 级数

$$\sum_{n=1}^{p}\frac{1}{n^p}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n},\quad n=1,2,\cdots.$$

当 $p\leq 1$ 时级数发散, 当 $p>1$ 时级数收敛. 特别地, 当 $p=1$ 时, 称它为调和级数.

**例 2.3** 计算以下级数的和:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(sn-p)(sn+q)},\quad p\geq 0,\ q>0,\ s=p+q.$$

**解** 先求级数的部分和

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(sk-p)(sk+q)}=\frac{1}{s}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{sk-p}-\frac{1}{s(k+1)-p}\right)=\frac{1}{s}\left(\frac{1}{s-p}-\frac{1}{s(k+1)-p}\right).$$

于是可知

$$\text{原式}=\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{s}\left(\frac{1}{s-p}-\frac{1}{s(k+1)-p}\right)=\frac{1}{s(s-p)}.$$

■

下面来讨论级数的敛散性. 级数本身就是一种数列, 因此判断数列敛散性的方法和结论在级数中都适用. 下面我们重点希望从通项来判断级数的敛散性.

**命题 2.1 (级数收敛的必要条件)**

级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛的必要条件是 $a_n\to 0$.

**证明** 设级数的和为 $S$. 令级数的部分和为 $S_n$, 则 $a_n=S_n-S_{n-1}$. 令 $n\to\infty$ 可知 $a_n\to 0$.

用这个必要条件可以立刻断言很多级数不收敛.

**例 2.4** 级数 $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n$ 发散.

**证明** 由于数列 $(-1)^n$ $(n=1,2,\cdots)$ 发散, 因此级数 $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n$ 发散. ■

**例 2.5** 级数 $\sum_{n=0}^{\infty}n\sin(1/n)$ 发散.

**证明** 由于

$$\lim_{n\to\infty}n\sin\frac{1}{n}=1.$$

因此级数 $\sum_{n=0}^{\infty}n\sin(1/n)$ 发散. ■

**命题 2.2 (级数的线性性质)**

设级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$. 若它们都收敛, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha a_n+\beta b_n)$ 也收敛, 且

$$\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha a_n+\beta b_n)=\alpha\sum_{n=1}^{\infty}a_n+\beta\sum_{n=1}^{\infty}b_n.$$

**证明** 由于

$$\sum_{n=1}^{k}(\alpha a_n+\beta b_n)=\alpha\sum_{n=1}^{k}a_n+\beta\sum_{n=1}^{k}b_n.$$

由于级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 都收敛，因此令上式的 $k \to \infty$ 即得

$$\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha a_n + \beta b_n) = \alpha \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \beta \sum_{n=1}^{\infty} b_n. \qquad \blacksquare$$

用以上命题可以计算比较复杂的级数.

**例 2.6** 求以下级数的和

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n + 2^n}{3^{n+2}}.$$

**证明** 容易计算以下几何级数的和

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{3}\right)^n = \frac{1}{1+1/3} = \frac{3}{4}, \quad \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n = \frac{1}{1-2/3} = 3.$$

于是

$$\text{原式} = \frac{1}{9}\left[\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{3}\right)^n + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n\right] = \frac{1}{9} \times \frac{3}{4} + \frac{1}{9} \times 3 = \frac{5}{12}. \qquad \blacksquare$$

由以上命题立刻可知以下推论.

**推论 2.1**

设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，级数 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 不收敛，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha a_n + \beta b_n)$ $(\beta \neq 0)$ 不收敛. ♡

**证明** 令 $c_n = \alpha a_n + \beta b_n$ $(n = 1, 2, \cdots)$. 假设 $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ 收敛，由于 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，故以下级数收敛

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\beta}c_n - \frac{\alpha}{\beta}a_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$

这与题设矛盾. 因此假设不成立. 于是可知级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha a_n + \beta b_n)$ $(\beta \neq 0)$ 不收敛. ■

如果 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 都发散，则 $\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha a_n + \beta b_n)$ 的敛散性无法判断. 例如:

| $a_n$ | $b_n$ | $a_n + b_n$ | $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n)$ | $a_n$ | $b_n$ | $a_n - b_n$ | $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n - b_n)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $n$ | $2n$ | $3n$ | 发散 | $2n$ | $n$ | $n$ | 发散 |
| $n$ | $-n$ | $0$ | 收敛 | $n^2 + 1/n^2$ | $n^2$ | $1/n^2$ | 收敛 |

有限个数的加法满足结合律，级数是无限个数的“加法”，它也有类似结合律的性质.

**命题 2.3 (级数的结合性)**

设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛. 若把级数项任意结合，但不改变各项的顺序，则得到的新级数仍收敛，且与原级数有相同的和. ♠

**证明** 设新的级数为

$$(a_1 + \cdots + a_{k_1}) + (a_{k_1+1} + \cdots + a_{k_2}) + \cdots + (a_{k_2+1} + \cdots + a_{k_n}) + \cdots. \tag{2.1}$$

其中 $k_1 < k_2 < \cdots < k_n < \cdots$. 若原级数的部分和数列为 $S_n$ $(n = 1, 2, \cdots)$，则新级数的部分和数列为 $S_{k_n}$ $(n = 1, 2, \cdots)$，显然它是 $S_n$ $(n = 1, 2, \cdots)$ 的一个子列. 因此新级数与原级数同敛散且有相同的和. ■

以上命题的逆命题是不成立的. 为了让逆命题成立，可以考虑加上一些条件.

**命题 2.4**

若级数2.1收敛，且在同一括号里有相同的符号，则原级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 也收敛，且两个级数有相同的和. ♠

**证明** 设级数2.1) 的部分和数列为 $A_n$ $(n = 1, 2, \cdots)$. 设 $A_n \to S$. 设原级数的部分和数列为 $S_k$. 由于括号中的项都

同号, 故当 $k$ 从 $k_{n-1}$ 变动到 $k_n$ 时, $S_k$ 将从 $A_{n-1}$ 单调地变化到 $A_n$, 即

$$A_{n-1} \le S_k \le A_n \text{ 或 } A_n \le S_k \le A_{n-1}.$$

当 $k \to \infty$ 时 $n \to \infty$, 由于 $\lim_{n\to\infty} A_{n-1} = \lim_{n\to\infty} A_n = S$. 由夹逼定理可知 $S_k \to S$. 这表明原级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 也收敛, 且两个级数有相同的和. ■

以上讨论了级数的结合性, 很自然的问题就是交换性, 这就是 ‘‘级数重排’’ 问题, 我们将在后面详细讨论.

**命题 2.5**

在级数的前面加上或去掉有限项, 不会改变级数的敛散性.

**证明** 只需证明去掉有限项的情况. 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. 去掉这个级数的前 $m$ 项后得到新级数

$$\sum_{n=m+1}^{\infty} a_n = a_{m+1} + a_{m+2} + \cdots.$$

令 $S_k = \sum_{n=1}^{k} a_n$, $A_{k-m} = \sum_{n=m+1}^{k} a_n$. 则

$$S_k - A_{k-m} = a_1 + a_2 + \cdots + a_m.$$

等式右边是一个与 $n$ 无关的常数, 故 $\{S_k\}, \{A_{k-m}\}$ 有相同的敛散性. ■

**注** 敛散性相同, 但和未必相同.

由一个数列 $\{a_n\}$ 可以得到一个级数的部分和数列 $\{S_n\}$. 反过来, 已知一个数列 $\{S_n\}$, 也可以构造一个数列 $\{a_n\}$ 使得级数 $\sum_{n=1}^{\infty}$ 的部分和数列就是 $\{S_n\}$. 只需令

$$a_1 = S_1, \quad a_2 = S_2 - S_1, \quad \cdots, \quad a_n = S_n - S_{n-1}, \quad \cdots.$$

如此就得到了数列 $\{a_n\}$. 此时级数 $\sum_{n=1}^{\infty}$ 的部分和数列就是 $\{S_n\}$. 前面我们研究了通过 $\{a_n\}$. 来判断 $\{S_n\}$ 的敛散性; 反过来有时候通过 $\{S_n\}$ 的敛散性判断 $\{a_n\}$ 的敛散性更方便. 下面举个例子.

**例 2.7**

**证明**

### 2.1.2 正项级数的比较判别法

下面开始讨论级数收敛的判别法. 为了排除符号的影响. 我们先讨论 ‘‘正项级数’’.

**定义 2.2 (正项级数)**

设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. 当 $n$ 充分大时, $a_n \ge 0$, 则称该级数为**正项级数** (series of positive terms).

**注** 由于去掉或加上级数的前面有限项不影响级数的敛散性, 所以我们对前面有限项的符号没有要求.

$n$ 充分大时, 正项级数的部分和数列单调递增, 故正项级数要么收敛要么趋于 $+\infty$. 由单调有界收敛定理，立刻可知以下命题.

**命题 2.6 (正项级数收敛的充要条件)**

正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛当且仅当它的部分和数列 $\{S_n\}$ 有界.

我们曾经在证明调和级数 $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n$ 发散时, 就是先证明它无界. 事实上就用了上述命题.

**例 2.8** 设 $a_n > 0$ $(n = 1, 2, \cdots)$. 令 $S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$. 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n/S_n^2$ 收敛.

**证明** 由于

$$\sum_{n=2}^{k}\frac{a_n}{S_n^2}=\sum_{n=2}^{k}\frac{S_n-S_{n-1}}{S_n^2}\leq\sum_{n=2}^{k}\frac{S_n-S_{n-1}}{S_nS_{n-1}}=\sum_{n=2}^{k}\left(\frac{1}{S_{n-1}}-\frac{1}{S_n}\right)=\frac{1}{S_1}-\frac{1}{S_k}=\frac{1}{a_1}-\frac{1}{S_k}<\frac{1}{a_1}.$$

因此级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n/S_n^2$ 的部分和数列有界. 于是可知该级数收敛. ■

我们在证明一个数列有界时, 基本的思路是用放大法; 反之证明一个数列无界时, 用缩小法. 这个方法在判断级数敛散性时很有用.

**定理 2.1 (正项级数的比较判别法)**

设正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$. 当 $n$ 充分大时有 $a_n\leq b_n$.

(1) 若 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ 收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 也收敛.

(2) 若 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散, 则 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ 也发散.

**证明** 不失一般性, 设 $a_n\leq b_n$ $(n=1,2,\cdots)$. 令 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ 的部分和分别为 $S_n$ 和 $T_n$. 则 $S_n\leq T_n$ $(n=1,2,\cdots)$.

(1) 若 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ 收敛, 则 $\{T_n\}$ 有界, 则 $\{S_n\}$ 也有界, 故 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 也收敛.

(2) 若 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散, 则 $\{S_n\}$ 无界, 则 $\{T_n\}$ 也无界, 故 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ 也发散. ■

**注** 去掉正项级数的条件, 结论不成立. 设 $a_n=-1/n$, $b_n=1/n^2$, 则 $a_n\leq b_n$ $(n=1,2,\cdots)$. 此时, 虽然 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ 收敛, 但 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散.

使用比较判别法, 实际上就是要找到级数通项的同阶无穷小 (或等价无穷小). 我们来看几个例子.

**例 2.9** 判断以下级数的敛散性:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n\left(n^2+1\right)}}.$$

**解** 由于

$$\frac{1}{\sqrt{n\left(n^2+1\right)}}<\frac{1}{n^{3/2}},\quad n=1,2,\cdots.$$

且级数 $\sum_{n=1}^{\infty}1/n^{3/2}$ 收敛, 由正项级数的比较判别法可知原级数也收敛. ■

**例 2.10** 判断以下级数的敛散性:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(\ln n)^{-\ln n}.$$

**解** 当 $n>\mathrm{e}^9$ 时

$$(\ln n)^{\ln n}=\mathrm{e}^{(\ln n)\ln(\ln n)}=n^{\ln(\ln n)}>n^2\Longrightarrow(\ln n)^{-\ln n}<\frac{1}{n^2}.$$

由于 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 收敛, 由正项级数的比较判别法可知原级数也收敛. ■

**例 2.11** 判断以下级数的敛散性:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}-\sqrt{\ln\frac{n+1}{n}}\right).$$

**解** $\boxed{\text{解法一}}$ 由于 $\ln(1+1/n) < 1/n$, 故知

$$\frac{1}{\sqrt{n}} - \sqrt{\ln\frac{n+1}{n}} > 0.$$

由 Taylor 公式可知当 $n \to \infty$ 时

$$\begin{aligned}\sqrt{\ln\frac{n+1}{n}} &= \sqrt{\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)} = \frac{1}{\sqrt{n}}\left[1 - \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right]^{1/2} = \frac{1}{\sqrt{n}}\left[1 - \frac{1}{4n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{4n^{3/2}} + o\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right).\end{aligned}$$

于是当 $n \to \infty$ 时

$$\frac{1}{\sqrt{n}} - \sqrt{\ln\frac{n+1}{n}} = \frac{1}{4n^{3/2}} + o\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right) \sim \frac{1}{4n^{3/2}}.$$

由于 $\sum_{n=1}^{\infty} 1/(4n^{3/2})$ 收敛, 由正项级数的比较判别法可知原级数收敛.

$\boxed{\text{解法二}}$ 由于 $1/(1+n) < \ln(1+1/n) < 1/n$. 故

$$0 < \frac{1}{\sqrt{n}} - \sqrt{\ln\frac{n+1}{n}} < \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{1+n}} = \frac{\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}}{\dfrac{1}{\sqrt{n}} + \dfrac{1}{\sqrt{1+n}}} < \frac{\dfrac{1}{n(n+1)}}{\dfrac{2}{\sqrt{n+1}}} = \frac{1}{2n\sqrt{n+1}} < \frac{1}{2n^{3/2}}.$$

由于 $\sum_{n=1}^{\infty} 1/(2n^{3/2})$ 收敛, 由正项级数的比较判别法可知原级数收敛.

比较判别法可以用极限的形式表达.

**定理 2.2 (正项级数比较判别法的极限形式)**

设正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \sum_{n=1}^{\infty} b_n$. 若

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = l$$

(1) 当 $0 < l < +\infty$ 时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 同敛散.

(2) 当 $l = 0$ 时, 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛时, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 也收敛.

(3) 当 $l = +\infty$ 时, 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 发散时, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 也发散.

♡

**证明** (1) 设 $0 < l < +\infty$. 由于 $\lim_{n\to\infty}(a_n/b_n) = l$, 故对于任一 $\varepsilon = l/2 > 0$ 当 $n$ 充分大时

$$\left|\frac{a_n}{b_n} - l\right| < \frac{l}{2} \iff \frac{1}{2}l < \frac{a_n}{b_n} < \frac{3}{2}l \iff \frac{1}{2}lb_n < a_n < \frac{3}{2}lb_n.$$

由以上不等式可知 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 同敛散.

(2) 设 $l = 0$. 由于 $\lim_{n\to\infty}(a_n/b_n) = 0$, 故对于 $\varepsilon = 1$ 当 $n$ 充分大时

$$\left|\frac{a_n}{b_n}\right| < 1 \iff 0 < a_n < b_n.$$

由以上不等式可知, 若 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 也收敛.

(3) 设 $l = +\infty$. 由于 $\lim_{n\to\infty}(a_n/b_n) = 0$, 故对于 $E = 1$ 当 $n$ 充分大时

$$\left|\frac{a_n}{b_n}\right| > 1 \iff a_n > b_n > 0.$$

由以上不等式可知, 若 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 发散, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 也发散. ■

**例 2.12** 求证以下级数发散:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{\sqrt{n^3+2n-1}}.$$

**证明** 由于

$$\frac{n+1}{\sqrt{n^3+2n-1}} \sim \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

故原级数与 $\sum_{n=1}^{\infty} 1/\sqrt{n}$ 同敛散. 由于 $1/\sqrt{n} > 1/n$, 且调和级数发散, 故 $\sum_{n=1}^{\infty} 1/\sqrt{n}$ 发散, 于是可知原级数发散. ■

**例 2.13** 判断以下级数的敛散性:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\cos\frac{x}{n}\right).$$

**解** 由于

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1-\cos(x/n)}{1/n^2}=\frac{x^2}{2}>0.$$

且级数 $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2$ 收敛, 由正项级数的比较判别法可知对于任一 $x\in\mathbb{R}$ 原级数都收敛. ■

**注** 上例表明, 级数可以定义一个函数.

比较判别法是一个十分重要的方法. 它不仅可以直接用于判断正项级数的敛散性性, 还可以派生出很多别的判别法.

**例 2.14 对数判别法** 设正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. 令

$$b_n=\frac{\ln(1/a_n)}{\ln n}.$$

当 $n$ 充分大时,

(1) 若存在 $\delta>0$ 使得 $b_n\geq 1+\delta$, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛.

(2) 若 $b_n\leq 1$, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散.

**证明** (1) 由于存在 $\delta>0$ 使得 $b_n\geq 1+\delta$, 故

$$\frac{\ln(1/a_n)}{\ln n}\geq 1+\delta \iff \ln\frac{1}{a_n}\geq \ln n^{1+\delta} \iff \frac{1}{a_n}\geq n^{1+\delta} \iff a_n\leq\frac{1}{n^{1+\delta}}.$$

由于 $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^{1+\delta}$ 收敛, 由正项级数的比较判别法可知 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛.

(2) 由于 $b_n\leq 1$, 故

$$\frac{\ln(1/a_n)}{\ln n}\leq 1 \iff \ln\frac{1}{a_n}\leq \ln n \iff a_n\geq\frac{1}{n}.$$

由于调和级数发散, 由正项级数的比较判别法可知 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散. ■

下面看两个对数判别法的例子.

**例 2.15** 判断以下级数的敛散性:

$$\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{(\ln n)^{\ln\ln n}}$$

**解** $\boxed{\text{解法一}}$ 由于 $\ln n<\sqrt{n}$, 故 $(\ln n)^2<n$. 于是当 $n$ 充分大时

$$(\ln n)^{\ln\ln n}=\mathrm{e}^{(\ln\ln n)^2}<\mathrm{e}^{\ln n}=n \Longrightarrow \frac{1}{(\ln n)^{\ln\ln n}}>\frac{1}{n}.$$

由于调和级数发散, 由正项级数的比较判别法可知原级数也收敛.

$\boxed{\text{解法二}}$ 由于

$$b_n=\frac{\ln(\ln n)^{\ln\ln n}}{\ln n}=\frac{(\ln\ln n)^2}{\ln n}\to 0.$$

因此当 $n$ 充分大时 $b_n<1$. 由对数判别法可知原级数发散. ■

**例 2.16** 判断以下级数的敛散性:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^{\ln n}}.$$

**解** 解法一 当 $n$ 充分大时

$$(\ln n)^{\ln n} = \mathrm{e}^{(\ln n)\ln(\ln n)} = n^{\ln(\ln n)} > n^2 \Longrightarrow \frac{1}{(\ln n)^{\ln n}} < \frac{1}{n^2}.$$

由于 $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2$ 收敛, 由正项级数的比较判别法可知原级数也收敛.

解法二 由于

$$b_n = \frac{\ln(\ln n)^{\ln n}}{\ln n} = \ln\ln n.$$

当 $n$ 充分大时存在 $\delta > 0$ 使得 $b_n \geq 1+\delta$. 由对数判别法可知原级数收敛.

对于通项的分母中带有对数的级数用以上方法较为方便. 但当 $b_n \to 1$ 时, 即使 $b_n > 0$ 也无法判断 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 的敛散性. 我们来看一个例子. 设 $a_n = 1/(n\ln^p n)$ $(n = 2, 3, \cdots)$, 则当 $n$ 充分大时

$$b_n = \frac{\ln(n\ln^p n)}{\ln n} = \frac{\ln n + p\ln\ln n}{\ln n} = 1 + \frac{p\ln\ln n}{\ln n}.$$

当 $p \leq 0$ 时 $b_n \leq 1$. 因此 $\sum_{n=2}^{\infty} a_n$ 发散. 当 $p > 0$ 时 $b_n > 1$ 且

$$\lim_{n\to\infty} b_n = 1 + \lim_{n\to\infty} \frac{p\ln\ln n}{\ln n} = 1.$$

因此不存在 $\delta > 0$ 使得 $b_n \geq 1+\delta$. 此时对数判别法失效.

之前我们已经用面积原理得出了以下结论: 若函数 $f(x)$ 在 $[m, +\infty)$ $(m \in \mathbb{N}^*)$ 上非负且单调递减. 则

$$\lim_{n\to\infty}\left[\sum_{k=m}^{n} f(k) - \int_m^n f(x)\,\mathrm{d}x\right] = \alpha.$$

由这个结论立刻可知正项级数的以下判别法.

**定理 2.3 (Cauchy 积分判别法)**

设函数 $f(x)$. 当 $x \geq 1$ 时 $f(x) \geq 0$ 且递减, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ 与积分 $\int_1^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 同敛散.

以上判别法对某些级数特别有用.

**例 2.17** 讨论以下级数的敛散性:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\ln^p n}.$$

**证明** 设函数 $f(x) = 1/(x\ln^p x)$, 则 $f(x)$ 在 $[2, +\infty)$ 上单调递减. 由于

$$\int_2^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x\ln^p x} = \int_2^{+\infty} \frac{\mathrm{d}\ln x}{\ln^p x} = \begin{cases} \ln\ln x\Big|_2^{+\infty}, & p = 1 \\ \dfrac{(\ln x)^{1-p}}{1-p}\Big|_2^{+\infty}, & p \neq 1 \end{cases}.$$

因此当 $p > 1$ 时 $\int_2^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛, 当 $p \leq 1$ 时发散. 由 Cauchy 积分判别法可知原级数与 $\int_2^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 有相同的敛散性. ■

从上例可以看出, 对数判别法中的 $b_n \to 1+$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 既可能发散, 也可能收敛.

### 2.1.3 正项级数的根式判别法和比值判别法

用比较判别法, 把正项级数和几何级数相比较就可以得到以下判别法.

**定理 2.4 (正项级数的 Cauchy 根式判别法)**

设正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

(1) 当 $n$ 充分大时, $\sqrt[n]{a_n} \le q$ 其中 $0 < q < 1$, 则级数收敛.

(2) 若存在无穷多个 $n$ 满足 $\sqrt[n]{a_n} \ge 1$, 则级数发散.

**证明** (1) 若 $0 < q < 1$, 则几何级数 $q^n$ 收敛. 由于当 $n$ 充分大时 $a_n \le q^n$, 有正项级数的比较判别法可知 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛.

(2) 由于存在无穷多个 $n$ 满足 $\sqrt[n]{a_n} \ge 1$, 因此 $a_n$ 不收敛于 0, 于是可知 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散. ■

**定理 2.5 (正项级数 Cauchy 根式判别法的极限形式)**

设正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. 令

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = q$$

则

(1) 当 $q < 1$ 时, 级数收敛.

(2) 当 $q > 1$ 时, 级数发散.

(3) 当 $q = 1$ 时, 无法判断敛散性.

**证明** (1) 当 $q < 1$ 时, 存在 $\varepsilon > 0$ 使得 $q + \varepsilon < 1$. 由于 $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = q$, 故当 $n$ 充分大后 $\sqrt[n]{a_n} < q + \varepsilon < 1$. 由正项级数的 Cauchy 判别法可知级数收敛.

(2) 当 $q > 1$ 时, 由于 $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = q$, 故数列 $\left\{\sqrt[n]{a_n}\right\}$ 存在一个子列收敛于 $q$. 这表明有无穷多个 $n$ 满足 $\sqrt[n]{a_n} \ge 1$. 由正项级数的 Cauchy 判别法可知级数发散.

(3) 令 $a_n = 1/n$, $b_n = 1/n^2$, 则 $\sqrt[n]{a_n} \to 1$ 和 $\sqrt[n]{b_n} \to 1$, 但级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散, 而 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛. 于是可知当 $q = 1$ 时, 无法判断敛散性. ■

**例 2.18** 判断以下级数的敛散性:

$$\sum_{n=1}^{n} \frac{1}{2^n}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2}.$$

**解** 设级数的通项为 $a_n$, 则

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \frac{\mathrm{e}}{2} > 1.$$

由正项级数的 Cauchy 根式判别法可知原级数发散. ■

**例 2.19** 判断以下级数的敛散性:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \cdots.$$

**解** $\boxed{\text{解法一}}$ 设以上级数的通项为 $a_n$. 则 $a_{2n-1} = 1/2^n$, $a_{2n} = 1/3^n$. 由于

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[2n-1]{a_{2n-1}} = \frac{1}{\sqrt{2}}. \quad \lim_{n\to\infty} \sqrt[2n]{a_{2n}} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

因此 $\limsup_{n\to\infty} a_n = 1/\sqrt{2} < 1$. 由正项级数的 Cauchy 根式判别法可知原级数收敛.

$\boxed{\text{解法二}}$ 由于几何级数 $\sum_{n=1}^{\infty} 1/2^n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} 1/3^n$ 都收敛, 故级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (1/2^n + 1/3^n)$ 也收敛. 由于 $1/2^n + 1/3^n$ 恒为正数, 因此原级数也收敛. ■

**定理 2.6 (正项级数的比值判别法)**

设正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$. 当 $n$ 充分大后, 若

$$a_{n+1}/a_n \le b_{n+1}/b_n.$$

则

(1) 当 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛时, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 也收敛.

(2) 当 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散时, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 也发散.

**证明** (1) 存在 $N$, 当 $n > N$ 时

$$\frac{a_{N+1}}{a_N} \le \frac{b_{N+1}}{b_N}, \quad \frac{a_{N+2}}{a_{N+1}} \le \frac{b_{N+2}}{b_{N+1}}, \quad \cdots, \quad \frac{a_n}{a_{n-1}} \le \frac{b_n}{b_{n-1}}.$$

把以上各式相乘得

$$\frac{a_n}{a_N} \le \frac{b_n}{b_N} \iff a_n \le \frac{a_N}{b_N} b_n \iff \frac{b_N}{a_N} a_n \le b_n.$$

由正项级数的比较判别法可知当 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛时, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 也收敛, 当 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散时, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 也发散. ■

以上定理中, 令 $b_n = q^n$ $(0 < q < 1)$. 就可以得到以下判别法.

**定理 2.7 (正项级数的 D'Alembert 比值判别法)**

设正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. 当 $n$ 充分大后

(1) 若存在 $q < 1$, 满足 $a_{n+1}/a_n \le q$, 则级数收敛.

(2) 若 $a_{n+1}/a_n \ge 1$, 则级数发散.

用证明 Cauchy 判别法的极限形式类似的方法可以证明 D'Alembert 判别法的极限形式.

**定理 2.8 (正项级数 D'Alembert 比值判别法的极限形式)**

设正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. 令

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = Q, \quad \liminf_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q.$$

(1) 若 $q < Q < 1$, 则级数收敛.

(2) 若 $1 < q < Q$, 则级数趋于 $+\infty$.

(3) 若 $Q = 1$ 或 $q = 1$, 则无法判断敛散性.

**证明** (1) 当 $Q < 1$ 时, 存在 $\varepsilon > 0$ 使得 $Q+\varepsilon < 1$. 由于 $\limsup_{n\to\infty} a_{n+1}/a_n = Q$, 故当 $n$ 充分大后 $a_{n+1}/a_n < Q+\varepsilon < 1$. 由正项级数的 D'Alembert 判别法可知级数收敛.

(2) 当 $1 < q$ 时, 存在 $\delta > 0$ 使得 $q - \delta > 1$. 由于 $\liminf_{n\to\infty} a_{n+1}/a_n = q$, 故当 $n$ 充分大后 $a_{n+1}/a_n > q - \delta > 1$. 由正项级数的 D'Alembert 判别法可知级数发散.

(3) 令 $a_n = 1/n$, $b_n = 1/n^2$, 则 $a_{n+1}/a_n \to 1$ 和 $b_{n+1}/b_n \to 1$, 但级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散, 而 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛. 于是可知当 $q = 1$ 时, 无法判断敛散性. ■

下面看两个例子.

**例 2.20** 判断以下级数的敛散性:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n! x^n, \quad x \ge 0.$$

**解** 当 $x = 0$ 时级数显然收敛, 且和为零. 当 $x > 0$ 时, 由于

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)! x^{n+1}}{n! x^n} = \lim_{n\to\infty} (n+1)x = +\infty.$$

由正项级数的 D'Alembert 判别法可知原级数趋于 $+\infty$. ■

**例 2.21** 判断以下级数的敛散性:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}x^n,\quad x\geq 0.$$

**解** 当 $x=0$ 时级数显然收敛, 且和为零. 当 $x>0$ 时, 由于

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!x^{n+1}/(n+1)^{n+1}}{n!x^n/n^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{x}{(1+1/n)^n}=\frac{x}{\mathrm{e}}.$$

由正项级数的 D'Alembert 判别法可知, 当 $x>\mathrm{e}$ 时原级数趋于 $+\infty$. 当 $0<x<\mathrm{e}$ 时原级数收敛. 当 $x=\mathrm{e}$ 时, 由 Stirling 公式可知

$$n!\sim\sqrt{2n\pi}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n\iff\frac{n!}{n^n}\mathrm{e}^n\sim\sqrt{2n\pi}$$

因此此时级数发散. ■

下面来比较一下 Cauchy 根式判别法和 D'Alembert 比值判别法的强弱. 为此我们需要比较 $\sqrt[n]{a_n}$ 和 $a_{n+1}/a_n$ 的上极限和下极限的大小关系.

**定理 2.9**

设正数列 $\{a_n\}$. 则

$$\liminf_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}\leq\liminf_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}\leq\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}\leq\limsup_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}.$$

♡

**证明** 只证明最右边的不等式. 设 $\limsup_{n\to\infty}(a_{n+1}/a_n)=q$. 当 $q=+\infty$ 时不等式显然成立. 下设 $q\in\mathbb{R}$. 对于任一 $\varepsilon>0$ 存在 $N\in\mathbb{N}^*$ 当 $n>N$ 时 $a_{n+1}/a_n<q+\varepsilon$. 于是

$$\frac{a_{N+1}}{a_N}<q+\varepsilon,\quad\frac{a_{N+2}}{a_{N+1}}<q+\varepsilon,\quad\cdots,\quad\frac{a_n}{a_{n-1}}<q+\varepsilon.$$

把以上各式相乘得

$$\frac{a_n}{a_N}<(q+\varepsilon)^{n-N}\iff a_n<a_N(q+\varepsilon)^{n-N}\iff\sqrt[n]{a_n}<\sqrt[n]{a_N(q+\varepsilon)^{-N}}(q+\varepsilon).$$

因此 $\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}\leq q+\varepsilon$. 由于 $\varepsilon$ 是任一正数, 故 $\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}\leq q$. ■

以上不等式表明凡是 D'Alembert 比值判别法可以判别的一定可以用 Cauchy 根式判别法判别, 反之不然. 因此 Cauchy 根式判别法要比 D'Alembert 比值判别法更强一些. 我们来看一个例子.

**例 2.22** 判断以下级数的敛散性:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2+(-1)^n}{2^n}.$$

**解** 设原级数的通项为 $\{a_n\}$.

$\boxed{\text{解法一}}$ 由于

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{2+(-1)^n}{2^n}}=\frac{1}{2}<1.$$

由正项级数的 Cauchy 根式判别法可知原级数收敛.

$\boxed{\text{解法二}}$ 由于

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{2n}}{a_{2n-1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{3/2^{2n}}{1/2^{2n-1}}=\frac{3}{2}.\qquad\lim_{n\to\infty}\frac{a_{2n+1}}{a_{2n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1/2^{2n+1}}{3/2^{2m}}=\frac{1}{6}.$$

因此
$$\limsup_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{3}{2},\quad \liminf_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{1}{6}.$$
故此时正项级数的 D'Alembert 比值判别法无法判断原级数收敛.

虽然根式判别法比比值判别法强一些. 但这两个判别法有一个共性, 它们都是通过与几何级数 ‘‘相比较’’ 得到的, 因此直观地可以想到, 一个比几何级数收敛地慢的级数无法用它们判别. 下面我们来严格证明这个事实.

**定理 2.10**

设正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$. 若
$$\limsup_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=q<1 \text{ 或 } \limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=q<1.$$
则对于任一 $r\in(q,1)$ 都有 $a_n/r^n\to 0$.

**证明** 由于 $q<r<1$, 故存在 $\delta>0$ 使得 $q+\delta<r$. 令 $p=(q+\delta)/r<1$. 则 $q+\delta=pr$. 若 $\limsup_{n\to\infty}(a_{n+1}/a_n)=q$ 或 $\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=q$, 由于
$$\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}\le\limsup_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}.$$
故 $\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}\le q$. 于是当 $n$ 充分大时 $\sqrt[n]{a_n}<q+\delta$, 于是
$$\sqrt[n]{a_n}<q+\delta \iff a_n<(q+\delta)^n=p^nr^n.$$
由于 $p<1$, 因此
$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{r^n}=\lim_{n\to\infty}p^n=0.$$ ■

因此我们需要更加精细的判别法, 来判断收敛速度比几何级数慢的级数.

### 2.1.4 正项级数的其它判别法

现在我们就来研究比几何级数收敛得慢的正项级数. 考虑把正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 与收敛的 $p$ 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}1/n^p$ $(p>1)$ 比较. 若
$$\frac{a_{n+1}}{a_n}\le\frac{1/(n+1)^p}{1/n^p}=\left(\frac{n}{n+1}\right)^p.$$
则由比值判别法可知 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛. 改写以上不等式得
$$\frac{a_n}{a_{n+1}}\ge\left(\frac{n+1}{n}\right)^p=\left(1+\frac{1}{n}\right)^p=1+\frac{p}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right),\quad n\to\infty.$$
因此
$$n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)\ge p+o(1)>1,\quad n\to\infty.$$
由此引出了以下判别法.

**定理 2.11 (正项级数的 Raabe 判别法)**

设正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$. 当 $n$ 充分大时

(1) 若存在 $r>1$ 满足 $n(a_n/a_{n+1}-1)\ge r$, 则级数收敛.

(2) 若 $n(a_n/a_{n+1}-1)\le 1$, 则级数发散.

**证明** (1) 由于 $r>1$, 故存在 $p\in(1,r)$. 由于
$$\lim_{n\to\infty}\frac{(1+1/n)^p-1}{1/n}=p<r.$$

因此当 $n$ 充分大时

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^p < 1+\frac{r}{n}.$$

由于 $n(a_n/a_{n+1}-1) \geq r$, 故

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} \geq 1+\frac{r}{n} > \left(1+\frac{1}{n}\right)^p = \frac{(n+1)^p}{n^p} \iff \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{1/(n+1)^p}{1/n^p}.$$

由于 $p>1$, 故 $p$ 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^p$ 收敛, 由正项级数的比值判别法可知级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛.

(2) 由于 $n(a_n/a_{n+1}-1) \leq 1$, 故

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} \leq 1+\frac{1}{n} = \frac{n+1}{n} \iff \frac{a_{n+1}}{a_n} \geq \frac{n}{n+1} = \frac{1/n+1}{1/n}.$$

由于调和级数 $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n$ 发散, 由正项级数的比值判别法可知级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散. ■

Raabe 判别法也有极限形式.

**定理 2.12 (正项级数的 Raabe 判别法的极限形式)**

设正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. 若 $n(a_n/a_{n+1}-1) \to q$, 即

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = 1+\frac{q}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right), \quad n \to \infty.$$

(1) 当 $q>1$ 时级数收敛.
(2) 当 $q<1$ 时级数发散.
(3) 当 $q=1$ 时无法判断级数的敛散性.

**证明** (1) 当 $q>1$ 时, 存在 $r \in (1,q)$. 由于 $n(a_n/a_{n+1}-1) \to q$, 故当 $n$ 充分大时 $n(a_n/a_{n+1}-1) > r > 1$. 由正项级数的 Rabbe 判别法可知级数收敛.

(2) 当 $q<1$ 时, 由于 $n(a_n/a_{n+1}-1) \to q$, 故当 $n$ 充分大时 $n(a_n/a_{n+1}-1) leq 1$. 由正项级数的 Rabbe 判别法可知级数发散.

(3) 见例2.25.

**例 2.23** 判断以下级数的敛散性:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left|\binom{\alpha}{n}\right|, \quad \alpha > 0.$$

**解** 由于

$$n\left(\left|\binom{\alpha}{n}\right| \Big/ \left|\binom{\alpha}{n+1}\right| - 1\right) = n\left(\frac{n+1}{n-\alpha}-1\right) = \frac{n(1+\alpha)}{n-\alpha} \to 1+\alpha > 1.$$

由正项级数的 Raabe 判别法可知原级数收敛. ■

**注** 从级数的形式看, 容易想到用 D'Alembert 比值判别法, 但

$$\lim_{n\to\infty} \left|\binom{\alpha}{n}\right| \Big/ \left|\binom{\alpha}{n+1}\right| = \frac{n+1}{n-\alpha} = 1.$$

这说明这个级数收敛的速度比几何级数慢, D'Alembert 判别法无能无力.

**例 2.24** 设级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{p(p+1)\cdots(p+n-1)}{n!} \cdot \frac{1}{n^q}, \quad p>0,\ q>0.$$

当 $p, q$ 取何值时级数收敛?

**解** 由于

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{n+1}{n+p}\left(1+\frac{1}{n}\right)^q = \left(1+\frac{1-p}{n+p}\right)\left[1+\frac{q}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right] = 1+\frac{q}{n}+\frac{1-p}{n+p}+o\left(\frac{1}{n}\right) = 1+\frac{q+1-p}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right), \quad n\to\infty.$$

由正项级数的 Raabe 判别法可知当 $q > p$ 时级数收敛, 当 $q < p$ 是级数发散. 当 $q = p$ 时无法判断. ∎

**例 2.25 超几何级数** 讨论以下级数的敛散性:

$$F(\alpha,\beta,\gamma,x) = 1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1)\beta(\beta+1)\cdots(\beta+n-1)}{n!\gamma(\gamma+1)\cdots(\gamma+n-1)}x^n, \quad \alpha,\beta,\gamma,x > 0.$$

**解** 由于

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{(\alpha+n)(\beta+n)}{(1+n)(\gamma+n)}x = x.$$

由正项级数的 D'Alembert 判别法可知, 但 $x < 1$ 是原级数收敛, 当 $x > 1$ 时原级数发散.

下面讨论 $x = 1$ 时的情况. 由于

$$\lim_{n\to\infty}\left(n\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{n^2(1+\gamma-\beta-\alpha)+(\gamma-\alpha\beta)n}{(\alpha+n)(\beta+n)} = 1+\gamma-\beta-\alpha.$$

由正项级数的 Rabbe 判别法可知当 $\gamma > \beta+\alpha$ 时原级数收敛, 当 $\gamma < \beta+\alpha$ 时原级数发散. ∎

**注** 以上级数定义了一个函数, 使得级数收敛的 $x$ 的取值就是这个函数的定义域.

以上例题留了个小尾巴. 当 $\gamma = \beta+\alpha$ 时 Rabbe 判别法失效. 这时需要更精细的判别法. 根据前面的经验不难想到, 我们应该拿 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 和一个比 $p$ 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^p$ $(p > 1)$ 级数收敛得更慢的级数来比较. 在例2.17中我们已经知道, 当 $p > 1$ 时级数 $\sum_{n=2}^{\infty} 1/(n\ln^p n)$ 收敛. 由于

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1/n^p}{1/(n\ln^q n)} = 0, \quad p,q > 1.$$

因此 $\sum_{n=2}^{\infty} 1/(n\ln^q n)$ $(q > 1)$ 是比 $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^p$ $(p > 1)$ 级数收敛得更慢的级数. 考虑用 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^p$ $(p > 1)$ 比较. 若

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \le \frac{\dfrac{1}{(n+1)\ln^p(n+1)}}{\dfrac{1}{n\ln^p n}} = \frac{n}{n+1}\left[\frac{\ln n}{\ln(n+1)}\right]^p.$$

则由比值判别法可知 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛. 改写以上不等式得

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \ge \frac{n+1}{n}\left[\frac{\ln(n+1)}{\ln n}\right]^p.$$

由于

$$\frac{\ln(n+1)}{\ln n} = \frac{\ln n(1+1/n)}{\ln n} = 1+\frac{1}{\ln n}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = 1+\frac{1}{\ln n}\left[\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right] = 1+\frac{1}{n\ln n}+o\left(\frac{1}{n\ln n}\right), \quad n\to\infty.$$

故

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \ge \frac{n+1}{n}\left[1+\frac{1}{n\ln n}+o\left(\frac{1}{n\ln n}\right)\right]^p = \frac{n+1}{n}\left[1+\frac{p}{n\ln n}+o\left(\frac{1}{n\ln n}\right)\right] = 1+\frac{1}{n}+\frac{p}{n\ln n}+o\left(\frac{1}{n\ln n}\right), \quad n\to\infty.$$

于是

$$n\ln n\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}-1-\frac{1}{n}\right) \ge p+o(1) > 1, \quad n\to\infty.$$

由此引出了以下判别法.

**定理 2.13 (正项级数的 Gauss 判别法)**

设正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. 当 $n$ 充分大时,

(1) 若存在 $r>1$ 满足

$$n\ln n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1-\frac{1}{n}\right)\geq r. \tag{2.2}$$

则级数收敛.

(2) 若

$$n\ln n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1-\frac{1}{n}\right)\leq 1. \tag{2.3}$$

则级数发散.

**证明** (1) 由于 $r>1$, 故存在 $p\in(1,r)$. 由于

$$\frac{n+1}{n}\left[\frac{\ln(n+1)}{\ln n}\right]^p=1+\frac{1}{n}+\frac{p}{n\ln n}+o\left(\frac{1}{n\ln n}\right),\quad n\to\infty.$$

故当 $n$ 充分大时

$$\frac{n+1}{n}\left[\frac{\ln(n+1)}{\ln n}\right]^p<1+\frac{1}{n}+\frac{r}{n\ln n}.$$

由不等式2.2可知

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}\geq 1+\frac{1}{n}+\frac{r}{n\ln n}>\frac{n+1}{n}\left[\frac{\ln(n+1)}{\ln n}\right]^p\iff\frac{a_{n+1}}{a_n}\leq\frac{n}{n+1}\left[\frac{\ln n}{\ln(n+1)}\right]^p=\frac{\frac{1}{(n+1)\ln^p(n+1)}}{\frac{1}{n\ln^p n}}.$$

当 $p>1$ 时级数 $\sum_{n=2}^{\infty}1/(n\ln^p n)$ 收敛, 故由正项级数的比值判别法可知级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛.

(2) 由不等式2.3可知

$$\frac{a_n}{a_{n+1}}\leq 1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n\ln n}\iff\frac{a_{n+1}}{a_n}\geq\frac{n\ln n}{n\ln n+\ln n+1}.$$

由于

$$\begin{aligned}&(n+1)\ln(n+1)-(n\ln n+\ln n+1)\\=&n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)+\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)-1=n\left[\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right]+\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)-1=\frac{1}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)>0.\end{aligned}$$

因此

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}\geq\frac{n\ln n}{n\ln n+\ln n+1}\geq\frac{n\ln n}{(n+1)\ln(n+1)}=\frac{\frac{1}{(n+1)\ln(n+1)}}{\frac{1}{n\ln n}}.$$

由于级数 $\sum_{n=2}^{\infty}1/(n\ln n)$ 发散, 由正项级数的比值判别法可知级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散. ■

类似地, 可以得到 Gauss 判别法的极限形式.

**定理 2.14 (正项级数的 Gauss 判别法的极限形式)**

设正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$. 若

$$\frac{a_n}{a_{n+1}}=1+\frac{1}{n}+\frac{\beta}{n\ln n}+o\left(\frac{1}{n\ln n}\right),\quad n\to\infty.$$

(1) 当 $\beta>1$ 时级数收敛.

(2) 当 $\beta<1$ 时级数发散.

(3) 当 $\beta=1$ 时无法判断级数的敛散性.

现在我们可以用 Gauss 判别法继续研究例2.25. 当 $\gamma=\alpha+\beta$ 时

$$\frac{a_n}{a_{n+1}}=1+\frac{n+\gamma-\alpha\beta}{(\alpha+n)(\beta+n)}.$$

由于

$$\frac{n+\gamma-\alpha\beta}{(\alpha+n)(\beta+n)}-\frac{1}{n}=\frac{(\gamma-\alpha\beta-\alpha-\beta)n-\alpha\beta}{n(n+\alpha)(n+\beta)}=o\left(\frac{1}{n\ln n}\right).$$

于是

$$\frac{a_n}{a_{n+1}}=1+\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n\ln n}\right).$$

由 Gauss 判别法可知此时原级数发散.

在 Gauss 判别法中, 当 $\beta=1$ 时 Gauss 判别法失效. 按之前的讨论思路, 我们可以把正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 同收敛得更慢的正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}1/[n(\ln n)^p]$ 比较. 就可以得到更精细的判别法. 但这样做的 ''边际效益'' 越来越小, 所以我们做到 Gauss 判别法就不再往下讨论了.

那么很自然的想法是, 如果能找到一个收敛得最慢的级数, 那么就可以建立一个 ''万能判别法''. 可惜这样的级数是不存在的. 换句话说,''只有更慢, 没有最慢''.

**定理 2.15 (du Bois-Reymond 定理)**

对于任一收敛的正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$, 总存在另一个收敛的正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$, 使得 $a_n/b_n\to 0$.

**证明** 设 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n=S$. 设部分和为 $S_n=a_1+\cdots+a_n$, $S_0=0$. 令 $\beta_n=S-S_{n-1}$. 令 $b_n=\sqrt{\beta_n}-\sqrt{\beta_{n+1}}$. 由于

$$\sum_{k=1}^{n}b_k=\sum_{k=1}^{n}\left(\sqrt{\beta_k}-\sqrt{\beta_{k+1}}\right)=\sqrt{\beta_1}-\sqrt{\beta_{n+1}}=\sqrt{S}-\sqrt{S-S_n}\le\sqrt{S}.$$

因此 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ 也是一个收敛的正项级数. 由于

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\frac{S_n-S_{n-1}}{\sqrt{\beta_n}-\sqrt{\beta_{n+1}}}=\frac{\beta_n-\beta_{n+1}}{\sqrt{\beta_n}-\sqrt{\beta_{n+1}}}=\sqrt{\beta_n}+\sqrt{\beta_{n+1}}=0.$$

于是可知 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ 就是满足要求的正项级数. ∎

现在我们来总结一下正项级数的判别法.

## 2.2 一般数项级数

### 2.2.1 任意项级数的收敛判别法

下面开始研究一般项级数, 也就是各项符号未必都是非负的级数. 由于级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛被定义为它的部分和数列 $\{S_n\}$ 收敛. 因此对于一个一般项级数, 总是有 Cauchy 收敛原理.

**定理 2.16**

[级数的 Cauchy 收敛原理] 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛当且仅当对于任一 $\varepsilon > 0$ 都存在 $N \in \mathbb{N}^*$ 当 $m, n > N$ $(m < n)$ 时

$$|a_{m+1} + \cdots + a_n| < \varepsilon.$$

**例 2.26** 设单调递减的非负数列 $\{a_n\}$. 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 则 $\lim_{n\to\infty} na_n = 0$.

**证明** 由 Cauchy 收敛原理可知, 对于任一 $\varepsilon > 0$ 都存在 $N \in \mathbb{N}^*$ 使得当 $n > N$ 时

$$|a_{n+1} + \cdots + a_{2n}| = a_{n+1} + \cdots + a_{2n} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

由于 $\{a_n\}$ 单调递减, 故

$$na_{2n} \leq a_{n+1} + \cdots + a_{2n} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

因此 $2na_{2n} < \varepsilon$. 故 $2na_{2n} \to 0$. 另一方面, 由于 $\{a_n\}$ 单调递减, 因此

$$(2n+1)a_{2n+1} = 2na_{2n+1} + a_{2n+1} \leq 2na_{2n} + a_{2n+1} \to 0.$$

这表明 $\{na_n\}$ 的偶子列和奇子列都是无穷小, 于是可知 $\lim_{n\to\infty} na_n = 0$. ■

**注** 上例的逆命题不成立. 设 $a_n = 1/n\ln n$, 则 $na_n \to 0$, 但级数 $\sum_{n=1}^{\infty} 1/\ln n$ 发散.

任意项级数中有一种比较特殊的级数, 它的项正负交替, 我们称之为**交错级数** (alternating series). 交错级数一般可以记作

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \cdots.$$

其中 $a_n > 0$ $(n = 1, 2, \cdots)$.

**定理 2.17 (Leibniz 判别法)**

设单调递减的正数列 $\{a_n\}$. 若 $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, 则交错级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$ 收敛.

**证明** 证法一 设部分和数列为 $\{S_n\}$. 由于 $\{a_n\}$ 单调递减, 故 $a_{2n-1} - a_{2n} \geq 0$ $(n = 1, 2, \cdots)$. 于是

$$S_{2n} = S_{2n-2} + (a_{2n-1} + a_{2n}) \geq S_{2n-2}.$$

因此 $\{S_{2n}\}$ 单调递增. 另一方面

$$S_{2n} = a_1 - (a_2 - a_3) - \cdots - (a_{2n-2} - a_{2n-1}) - a_{2n} \leq a_1.$$

因此 $\{S_{2n}\}$ 有上界. 因此 $S_{2n}$ 收敛. 设 $S_{2n} \to S$. 则

$$S_{2n+1} = S_{2n} + a_{2n+1} \to 0.$$

因此 $\{S_n\}$ 的偶子列和奇子列分别收敛且极限值相等, 因此 $\{S_n\}$ 收敛, 于是可知交错级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$ 收敛.

证法二 由于 $a_n \to 0$, 故对于任一 $\varepsilon > 0$, 存在 $N \in \mathbb{N}^*$ 使得当 $n > N$ 时 $|a_n| < \varepsilon$. 当当 $m > N$ 时,

$$\left|\sum_{k=m}^{m+p} (-1)^{k-1} a_k\right| = \left|a_m - a_{m+1} + \cdots + (-1)^p a_{m+p}\right|.$$

由于 $\{a_n\}$ 单调递减, 若 $p$ 为偶数, 则

$$\left|\sum_{k=m}^{m+p}(-1)^{k-1}a_k\right| = \left|a_m-(a_{m+1}-a_{m+2})-\cdots-(a_{m+p-1}-a_{m+p})\right| \leq |a_m| < \varepsilon.$$

若 $p$ 为奇数, 则

$$\left|\sum_{k=m}^{m+p}(-1)^{k-1}a_k\right| = \left|a_m-(a_{m+1}-a_{m+2})-\cdots-(a_{m+p-2}-a_{m+p-1})-a_{m+p}\right| \leq |a_m| < \varepsilon.$$

由 Cauchy 收敛原理可知原级数收敛. ■

注 满足以上条件的交错级数称为 **Leibniz 级数** (Leibniz series).

注在 Leibniz 判别法中, 若 $\{a_n\}$ 不是单调递减的, 则结论不成立. 例如, 设级数

$$\sum_{n=3}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{\left[\frac{n+1}{2}\right]}+(-1)^n} = \frac{1}{\sqrt{2}-1}-\frac{1}{\sqrt{2}+1}+\frac{1}{\sqrt{3}-1}-\frac{1}{\sqrt{3}+1}+\cdots.$$

令

$$a_{n-2} = \frac{1}{\sqrt{\left[\frac{n+1}{2}\right]}+(-1)^n}, \quad n=3,4,\cdots.$$

则 $a_n\to 0$, 但不是单调递减的. 令 $S_n = a_1+\cdots+a_n$ $(n=1,2,\cdots)$, 则

$$\begin{aligned} S_{2n} &= \frac{1}{\sqrt{2}-1}-\frac{1}{\sqrt{2}+1}+\frac{1}{\sqrt{3}-1}-\frac{1}{\sqrt{3}+1}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n+1}-1}-\frac{1}{\sqrt{n+1}+1} \\ &= \frac{2}{1}+\frac{2}{2}+\frac{2}{3}+\cdots+\frac{2}{n}. \end{aligned}$$

因此 $\{S_{2n}\}$ 是发散的, 于是可知原级数也是发散的.

下面看一个例子.

**例 2.27** 判断以下级数的敛散性:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sin\left(\pi\sqrt{n^2+1}\right).$$

**解** 由于

$$\sin\left(\pi\sqrt{n^2+1}\right) = (-1)^n\sin\left(\pi\sqrt{n^2+1}-n\pi\right) = (-1)^n\sin\left(\frac{\pi^2}{\pi\sqrt{n^2+1}+n\pi}\right).$$

令

$$a_n = \sin\left(\frac{\pi^2}{\pi\sqrt{n^2+1}+n\pi}\right), \quad n=1,2,\cdots.$$

当 $n$ 充分大时 $\{a_n\}$ 递减趋于零. 由 Leibniz 判别法可知原级数收敛. ■

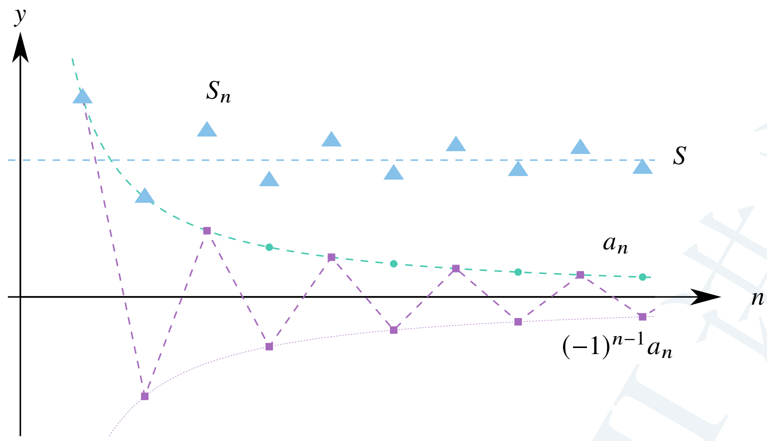



**图 2.1:** Leibniz 级数示意图.

Leibniz 级数有很好的性质.

**例 2.28** 设 Leibniz 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$. 若它的和为 $S$. 则 $|S_n - S| \le a_{n+1}$.

**证明** 由于 $\{S_{2n}\}$ 单调递增, 而

$$S_{2n+1} = S_{2n-1} - (a_{2n} - a_{2n+1}) \le S_{2n-1}, \quad n = 1, 2, \cdots.$$

因此 $\{S_{2n+1}\}$ 单调递减. 这表明 $\{S_n\}$ 的偶子列各项在 $S$ 的左侧, 奇子列各项在 $S$ 的右侧, 因此

$$|S_n - S| \le |S_n - S_{n+1}| = |a_{n+1}| = a_{n+1}.$$

■

用以上结论在估计 Leibniz 部分和的误差时很有用.

接下来我们来讨论通项形如 $\{a_n b_n\}$ 的一般项级数. 为此我们先来讨论一下数列 $\{a_n b_n\}$ 的部分和.

**定理 2.18 (Abel 分部求和公式)**

设数列 $\{a_k\}, \{b_k\}$. 则对任一 $n \in \mathbb{N}^*$ 都有

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = S_n b_n - \sum_{k=1}^{n-1} S_k (b_{k+1} - b_k).$$

其中 $S_k = a_1 + \cdots + a_k$.

♡

**证明** 令 $S_0 = 0$. 则 $a_k = S_k - S_{k-1}$ $(k = 1, 2, \cdots)$. 于是

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = \sum_{k=1}^{n} (S_k - S_{k-1}) b_k = \sum_{k=1}^{n} S_k b_k - \sum_{k=1}^{n} S_{k-1} b_k = \sum_{k=1}^{n} S_k b_k - \sum_{k=0}^{n-1} S_k b_{k+1} = \sum_{k=1}^{n-1} S_k (b_k - b_{k+1}) + S_n b_n.$$

■

**注** 若令 $\Delta S_k = S_k - S_{k-1} = a_k$, $\Delta b_k = b_{k+1} - b_k$, 则以上公式可以写成

$$\sum_{k=1}^{n} b_k \Delta S_k = S_k b_k \Big|_0^n - \sum_{k=1}^{n-1} S_k \Delta b_k.$$

这个公式在形式上与 Riemann 积分的分部积分公式很相似

$$\int_a^b u(x)\,\mathrm{d}\,v(x) = v(x)u(x)\Big|_a^b - \int_a^b v(x)\,\mathrm{d}\,u(x).$$

因此以上公式也称为数列的 Abel 分部求和公式.

要讨论通项为 $\{a_n b_n\}$ 的级数的敛散性, 先要讨论它的部分和有界的条件.

**定理 2.19 (级数的 Abel 引理)**

设数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$. 若满足

1° $\{b_n\}$ 是一个单调数列.

2° $\sum_{k=1}^{n} a_k$ 有界, 即存在 $M>0$ 使得 $\left|\sum_{k=1}^{n} a_k\right| \le M$ $(n=1,2,\cdots)$.

则

$$\left|\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right| \le M(|b_1|+2|b_n|).$$

**证明** 由于存在 $M>0$ 使得 $|S_k| \le M$ $(k=1,2,\cdots)$, 由 Abel 分部求和公式可知

$$\left|\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right| = \left|\sum_{k=1}^{n-1} S_k(b_k-b_{k+1}) + S_n b_n\right| \le \sum_{k=1}^{n-1} |S_k||b_k-b_{k+1}| + |S_n||b_n| \le M\left(\sum_{k=1}^{n-1} |b_k-b_{k+1}| + |b_n|\right).$$

若 $\{b_k\}$ 单调递减, 则

$$\sum_{k=1}^{n-1} |b_k-b_{k+1}| = \sum_{k=1}^{n-1} (b_k-b_{k+1}) = b_1-b_n = |b_1-b_n|.$$

若 $\{b_k\}$ 单调递增, 则

$$\sum_{k=1}^{n-1} |b_k-b_{k+1}| = \sum_{k=1}^{n-1} (b_{k+1}-b_k) = b_n-b_1 = |b_1-b_n|.$$

于是可知

$$\left|\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right| \le M(|b_1-b_n|+|b_n|) \le M(|b_1|+2|b_n|).$$ ■

Abel 引理告诉我们, 若要数列 $\{a_k b_k\}$ 的部分和有界只需 $\{a_k\}$ 的部分和有界且 $\{b_k\}$ 单调. 在这个基础上可以得到以下重要判别法.

**定理 2.20 (数项级数的 Dirichlet 判别法)**

设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$. 若满足

1° $\{b_k\}$ 单调趋于零.

2° $\sum_{k=1}^{n} a_k$ 有界, 即存在 $M>0$ 使得 $\left|\sum_{k=1}^{n} a_k\right| \le M$ $(n=1,2,\cdots)$.

则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 收敛.

**证明** 由 2° 可知, 对于任一 $m,n\in\mathbb{N}^*$ $(m<n)$ 都有

$$\left|\sum_{k=m+1}^{n} a_k\right| = \left|\sum_{k=1}^{n} a_k - \sum_{k=1}^{m} a_k\right| \le \left|\sum_{k=1}^{n} a_k\right| + \left|\sum_{k=1}^{m} a_k\right| \le 2M.$$

由于 $\{b_k\}$ 是一个单调数列, 由 Abel 引理可知

$$\left|\sum_{k=m+1}^{n} a_k b_k\right| \le 2M(|b_{m+1}|+2|b_m|).$$

由于 $b_n \to 0$, 故对于任一 $\varepsilon>0$ 存在 $N\in\mathbb{N}^*$ 使得当 $m>N$ 时 $|b_m|<\varepsilon/(8M)$. 于是当 $m>N$ 时

$$\left|\sum_{k=m+1}^{n} a_k b_k\right| \le 2M(|b_{m+1}|+2|b_m|) < 2M\cdot\frac{3\varepsilon}{8M} < \varepsilon.$$

由 Cauchy 收敛原理可知级数 $\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k$ 收敛. ■

用 Dirichlet 判别法可以很容易知道 Leibniz 级数收敛.

**例 2.29** 设单调递减的正数列 $\{a_k\}$. 若 $\lim_{n\to\infty} a_k = 0$, 则交错级数 $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} a_k$ 收敛.

**证明** 令 $b_k=(-1)^{k-1}\ (k=1,2,\cdots)$. 显然 $\left|\sum_{k=1}^{n}b_k\right|\leq 1$. 由于 $\{a_k\}$ 是一个单调的无穷小数列, 由 Dirichlet 判别可知 $\sum_{k=1}^{\infty}b_ka_k$ 收敛. ■

**例 2.30** 判断以下级数的敛散性:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n}.$$

**解** (i) 当 $x\neq 2k\pi$ 时. 设 $a_n=\cos nx,\ b_n=1/n\ (n=1,2,\cdots)$. 由于

$$\begin{aligned}2\sin\frac{x}{2}\sum_{n=1}^{N}\cos nx&=\left(\sin\frac{3x}{2}-\sin\frac{x}{2}\right)+\left(\sin\frac{5x}{2}-\sin\frac{3x}{2}\right)+\cdots+\left[\sin\left(N+\frac{1}{2}\right)x-\sin\left(N-\frac{1}{2}\right)x\right]\\&=\sin\left(N+\frac{1}{2}\right)x-\sin\frac{x}{2}.\end{aligned}$$

于是

$$\left|\sum_{n=1}^{N}\cos nx\right|=\left|\frac{\sin\left(N+\frac{1}{2}\right)x-\sin\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}}\right|\leq\frac{\left|\sin\left(N+\frac{1}{2}\right)x\right|+\left|\sin\frac{x}{2}\right|}{2\left|\sin\frac{x}{2}\right|}\leq\frac{1}{\left|\sin\frac{x}{2}\right|}.$$

因此 $\{a_n\}$ 的部分和有界. 由于 $\{b_n\}$ 单调递减趋于零, 由 Dirichlet 判别法可知, 原级数收敛.

(ii) 当 $x=2k\pi$ 时原级数为 $\sum_{n=1}^{\infty}1/n$, 故原级数发散. ■

**注** 类似上例, 当 $x\neq 2k\pi$ 时, 还有类似的不等式:

$$\left|\sum_{n=1}^{N}\sin nx\right|=\left|\frac{\cos\frac{x}{2}-\cos\left(N+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}}\right|\leq\frac{1}{\left|\sin\frac{x}{2}\right|}.$$

把 Dirichlet 判别法的两个条件稍加调整, 可以得到 Abel 判别法.

**定理 2.21 (数项级数的 Abel 判别法)**

设数列 $\{a_k\},\{b_k\}$. 若满足

1° $\{b_k\}$ 是一个单调有界数列.

2° $\sum_{k=1}^{\infty}a_k$ 收敛.

则级数 $\sum_{k=1}^{\infty}a_kb_k$ 收敛.

**证明** 由于 $\{b_k\}$ 单调有界, 因此 $\{b_k\}$ 收敛. 设 $b_k\to b$. 因此 $\{b_k-b\}$ 是一个单调的无穷小数列. 由于 $\sum_{k=1}^{\infty}a_k$ 收敛, 故 $\sum_{k=1}^{\infty}a_k$ 有界. 于是由 Dirichlet 判别法可知 $\sum_{k=1}^{\infty}a_k(b_k-b)$ 收敛. 由于

$$\sum_{k=1}^{\infty}a_kb_k=\sum_{k=1}^{\infty}a_k(b_k-b)+b\sum_{k=1}^{\infty}a_k.$$

且 $\sum_{k=1}^{\infty}a_k$ 收敛. 于是可知 $\sum_{k=1}^{\infty}a_kb_k$ 收敛. ■

Dirichlet 判别法和 Abel 判别法的的两个条件互有强弱. 使用时需要针对具体问题来选择.

**例 2.31** 判断以下级数的敛散性:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 3n}{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

**解** 由例2.30可知 $\sum_{n=1}^{\infty}(\cos 3n)/n$ 收敛. 而数列 $\{(1+1/n)^n\}$ 单调有界. 由 Abel 判别法可知原级数收敛. ■

**例 2.32** 判断以下级数的敛散性:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\sin^2 n}{n}.$$

**解** 由于 $\sin^2 n = (1-\cos 2n)/2$. 因此只需分别研究

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\cos 2n}{n}.$$

由于 $\{1/n\}$ 递减趋于零, 由 Leibniz 判别法可知级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}(1/n)$ 收敛. 由于

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\cos 2n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)\frac{\cos(2n+n\pi)}{n} = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)\frac{\cos n(2+\pi)}{n}.$$

由例2.30可知级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}[(\cos 2n)/n]$ 也收敛. 于是可知原级数收敛. ■

上例中的交错级数收敛但 $\frac{\sin^2 n}{n}$ 并非单调递减, 这表明 Leibniz 判别法不是交错级数收敛的必要条件.

### 2.2.2 级数的重排

**定理 2.22**

若级数 $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ 收敛, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 也收敛. ♡

**证明** 若 $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ 收敛, 由 Cauchy 收敛原理可知, 对于任一 $\varepsilon>0$ 都存在 $N\in\mathbb{N}^*$ 使得当 $m,n>N$ 时

$$|a_{m+1}|+\cdots+|a_n|<\varepsilon.$$

由三角不等式可知

$$|a_{m+1}+\cdots+a_n|\le|a_{m+1}|+\cdots+|a_n|<\varepsilon.$$

Cauchy 收敛原理可知 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 也收敛. ■

**定义 2.3 (级数的绝对收敛和条件收敛)**

设级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛.

(1) 若 $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ 也收敛, 则称 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ **绝对收敛** (absolutely convergent).

(2) 若 $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ 发散, 则称 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ **条件收敛** (conditionally convergent). ♣

容易知道以下级数都是条件收敛的:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{\sqrt{n}}, \quad \sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{\ln n}, \quad \sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n\ln n}, \quad \sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n\ln n\ln\ln n}.$$

因为它们都是满足 Leibniz 条件的收敛交错级数. 但它们对应的正项级数都发散:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}, \quad \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\ln n}, \quad \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}, \quad \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n\ln\ln n}$$

**例 2.33** 以下级数条件收敛

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\sin^2 n}{n}.$$

**证明** 由例2.32可知原级数收敛. 由例2.30可知 $\sum_{n=1}^{\infty}(\cos 2x)/n$ 收敛. 假设 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sin^2 n\right)/n$ 收敛, 由于

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2 n}{n}+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2n}{n}=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$$

因此 $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n$ 收敛, 这是不可能的, 因此假设不成立. 于是可知 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sin^2 n\right)/n$ 发散. 这表明原级数条件收敛. ■

我们已经知道级数有结合性. 但我们尚未研究它的交换性. 如果我们只交换级数中有限多项的次序, 那么既不会改变级数的敛散性, 也不会改变级数的和. 但如果交换无穷多项的次序, 情况就比较复杂了. 这时绝对收敛和条件收敛的级数就大不一样了. 我们先来看绝对收敛的级数.

**定理 2.23 (级数的重排)**

交换绝对收敛的级数中无穷多项的次序所得到的新级数仍然绝对收敛, 且它的和不变.

**证明** (i) 设 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 是一个收敛的正项级数. 交换其中无穷多项的次序后得到新级数为 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$. 由于新级数的部分和都是原级数中选出的有限项的和, 因此 $\sum_{n=1}^{N} b_n \le \sum_{n=1}^{\infty} a_n$. 因此新级数收敛. 且

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \le \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

反之原级数的部分和也可以看作是新级数中选出的有限项的和, 因此通过与上述相同的讨论可知

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \le \sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$

这表明 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

(ii) 设 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 是一个绝对收敛的变号级数. 令

$$a_n^+ = \frac{|a_n| + a_n}{2}, \quad a_n^- = \frac{|a_n| - a_n}{2}, \quad n = 1, 2, \cdots. \tag{2.4}$$

即

$$a_n^+ = \begin{cases} a_n, & a_n \ge 0 \\ 0, & a_n < 0 \end{cases}, \quad a_n^- = \begin{cases} -a_n, & a_n \le 0 \\ 0, & a_n > 0 \end{cases}.$$

这样就构造了两个正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+, \sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$. 由于

$$0 \le a_n^+ \le |a_n|, \quad 0 \le a_n^- \le |a_n|.$$

且 $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ 收敛, 由正项级数的比较判别法可知 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+, \sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$ 都收敛, 且

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^+ - \sum_{n=1}^{\infty} a_n^-.$$

设交换其中无穷多项的次序后得到新级数为 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$. 显然 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n^+$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n^-$ 分别由 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$ 改变项的次序得到. 由 (1) 的结论可知

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n^+ = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^+, \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n^- = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^-.$$

由于 $|b_n| = b_n^+ + b_n^-$, 故 $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|$ 收敛, 即 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 绝对收敛, 且

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} b_n^+ - \sum_{n=1}^{\infty} b_n^- = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^+ - \sum_{n=1}^{\infty} a_n^- = \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$ ■

由以上证明过程可知若 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 条件收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = +\infty$, 由等式2.4可知

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+ - \sum_{n=1}^{\infty} a_n^- = +\infty.$$

这是条件收敛和绝对收敛的关键区别, 由此可以证明以下重要定理.

**定理 2.24 (Riemann 定理)**

若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 条件收敛, 则适当交换各项的顺序后得到的新级数可以收敛到任一给定的实数 $S$, 也可以趋于 $\pm\infty$.

**证明** (i) 不妨设 $S>0$. 令

$$a_n^+=\frac{|a_n|+a_n}{2},\quad a_n^-=\frac{|a_n|-a_n}{2},\quad n=1,2,\cdots.$$

由于 $\sum_{n=1}^\infty a_n$ 条件收敛, 故 $\sum_{n=1}^\infty a_n^+=\sum_{n=1}^\infty a_n^-=+\infty$. 下面来构造一个收敛到 $S$ 的级数.

由于 $\sum_{n=1}^\infty a_n^+=+\infty$, 因此当 $n$ 充分大时 $\sum_{i=1}^n a_i^+$ 一定可以超过 $S$. 于是可以从 $\{a_n^+\}$ 中依次取出 $a_1^+,a_2^+,\cdots,a_{k_1}^+$, 此时所取的各项之和恰好首次超过 $S$, 即

$$\sum_{i=1}^{k_1}a_i^+-a_{k_1}^+\le S<\sum_{i=1}^{k_1}a_i^+\iff 0<\sum_{i=1}^{k_1}a_i^+-S\le a_{k_1}^+.$$

令 $A_1^+=\sum_{i=1}^{k_1}a_i^+$, 则

$$0<A_1^+-S\le a_{k_1}^+.\tag{2.5}$$

令 $A_1^-=\sum_{i=1}^{l_1}a_i^-$. 由于 $\sum_{n=1}^\infty a_n^-=+\infty$, 因此当 $n$ 充分大时总能使得 $A_1^+-A_1^-$ 小于 $S$. 于是可以从 $\{a_n^-\}$ 中依次取出 $a_1^-,a_2^-,\cdots,a_{l_1}^-$, 此时 $A_1^+-A_1^-$ 恰好首次小于 $S$, 即

$$A_1^+-A_1^-<S\le A_1^+-A_1^-+a_{l_1}^-\iff 0<S-(A_1^+-A_1^-)\le a_{l_1}^-\tag{2.6}$$

然后可以继续重复第一步的操作, 从 $\{a_n^+\}$ 中取出若干项, 令 $A_2^+=\sum_{i=k_1+1}^{k_2}a_i^+$, 使得

$$A_1^+-A_1^-+A_2^+-a_{k_2}^+\le S<A_1^+-A_1^-+A_2^+\iff 0<(A_1^+-A_1^-+A_2^+)-S\le a_{k_2}^+.\tag{2.7}$$

不断重复以上操作, 就可以得到一个无穷级数

$$A_1^+-A_1^-+A_2^+-A_2^-+\cdots.$$

设该级数的部分和为 $\{S_n\}$. 由等式2.5,2.6,2.7可知 $\{S_n\}$ 应满足

$$0<S_{2n-1}-S\le a_{k_n}^+,\quad 0<S-S_{2n}\le a_{l_n}^-.$$

由于 $\sum_{n=1}^\infty a_n$ 收敛, 故 $a_n\to0$, 因此 $\lim_{n\to\infty}a_{k_n}^+=\lim_{n\to\infty}a_{l_n}^-=0$. 令以上不等式中的 $n\to\infty$, 由夹逼定理可知

$$\sum_{n=1}^\infty S_{2n-1}=\sum_{n=1}^\infty S_{2n-1}=S.$$

这表明 $\{S_n\}$ 的奇子列和偶子列都收敛于 $S$, 于是可知 $S_n\to S$. 由于

$$S_n=(a_1^++\cdots+a_{k_1}^+)+(-a_1^--\cdots-a_{l_1}^-)+(a_{k_1+1}^+\cdots+a_{k_2}^+)+(-a_{l_1+1}^--\cdots-a_{l_2}^-)+\cdots.$$

其中每个括号内的各项符号都相同, 由命题2.4可知

$$a_1^++\cdots+a_{k_1}^+-a_1^--\cdots-a_{l_1}^-+a_{k_1+1}^+\cdots+a_{k_2}^+-a_{l_1+1}^--\cdots-a_{l_2}^-+\cdots=S.$$

显然以上级数是由原级数交换无限多项的次序后得到的, 且该级数收敛到 $S$.

(ii) 下面构造趋向于 $+\infty$ 的数列. 先从 $\{a_n^+\}$ 中依次取出若干项, 使得

$$a_1+\cdots+a_{t_1}>1.$$

然后减去 $\{a_n^-\}$ 中的第一项 $a_1^-$. 接着继续从 $\{a_n^+\}$ 中依次取出若干项, 使得

$$a_1+\cdots+a_{t_1}-a_1^-+a_{t_1+1}+\cdots+a_{t_2}>2.$$

然后减去 $\{a_n^-\}$ 中的第一项 $a_2^-$. 接着继续从 $\{a_n^+\}$ 中依次取出若干项, 使得

$$a_1+\cdots+a_{t_1}-a_1^-+a_{t_1+1}+\cdots+a_{t_2}-a_2^-+a_{t_2+1}+\cdots+a_{t_3}>3.$$

然后减去 $\{a_n^-\}$ 中的第一项 $a_3^-$. 不断重复这个过程就可以得到一个新级数, 它是由原级数交换无限多项的次序后得到的. 由于当 $n$ 充分大时 $a_n^-$ 可以任意小, 故当 $n$ 充分大时, 负项的出现并不影响级数部分和的增大, 因此构造的新级数趋向于 $+\infty$. 类似地可以构造趋向于 $-\infty$ 的级数. ■

**例 2.34** 设级数

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\cdots.$$

的项重新安排: 先依次取 $p$ 个正项, 然后依次取 $q$ 个负项, 再依次取 $p$ 个正项, 如此下去. 判断所得的新级数是否收敛? 若收敛, 求级数的和.

**解** 设重排后的新级数为 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. 对任意给定的 $N\in\mathbb{N}^*$, 令 $m=[N/(p+q)]$. 则

$$m(p+q)\le N<(m+1)(p+q).$$

于是级数的前 $N$ 项部分和可以写成

$$\sum_{n=1}^{N} a_n=\sum_{n=1}^{m(p+q)} a_n+\sum_{n=m(p+q)+1}^{N} a_n.$$

由于 $N-m(p+q)<p+q$, 因此 $\sum_{n=m(p+q)}^{N} a_n$ 总共不超过 $p+q$ 项. 当 $N\to\infty$ 时 $m\to\infty$, 因此当 $N\to\infty$ 时有

$$\left|\sum_{n=m(p+q)+1}^{N} a_n\right|\le\sum_{n=m(p+q)+1}^{N}|a_n|\le(p+q)\cdot\frac{1}{m(p+q)}=\frac{1}{m}\to 0.$$

因此

$$\lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N} a_n=\lim_{m\to\infty}\sum_{n=1}^{m(p+q)} a_n=\lim_{m\to\infty}\left(\sum_{n=1}^{mp}\frac{1}{2n-1}-\sum_{n=1}^{mq}\frac{1}{2n}\right). \tag{2.8}$$

由于

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}=\ln n+\gamma+O\left(\frac{1}{n}\right),$$

其中 $\gamma$ 是 Euler 常数. 因此

$$\sum_{n=1}^{mq}\frac{1}{2n}=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{mq}\frac{1}{n}=\frac{1}{2}\ln(mq)+\frac{1}{2}\gamma+O\left(\frac{1}{m}\right).$$

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{mp}\frac{1}{2n-1}&=\sum_{n=1}^{2mp}\frac{1}{n}-\sum_{n=1}^{mp}\frac{1}{2n}=\ln(2mp)+\gamma-\frac{1}{2}\ln(mp)-\frac{1}{2}\gamma+O\left(\frac{1}{m}\right)\\&=\ln 2+\frac{1}{2}\ln(mp)+\frac{1}{2}\gamma+O\left(\frac{1}{m}\right).\end{aligned}$$

因此

$$\sum_{n=1}^{mp}\frac{1}{2n-1}-\sum_{n=1}^{mq}\frac{1}{2n}=\ln 2+\frac{1}{2}\ln\frac{p}{q}+O\left(\frac{1}{m}\right).$$

把以上两式代入等式2.8可得

$$\lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N} a_n=\lim_{m\to\infty}\left(\sum_{n=1}^{mp}\frac{1}{2n-1}-\sum_{n=1}^{mq}\frac{1}{2n}\right)=\ln 2+\frac{1}{2}\ln\frac{p}{q}.$$

于是可知新级数收敛, 且它的和为 $\ln 2+[\ln(p/q)]/2$. ■

**注** 根据以上结果可以求出一些特殊级数的和. 当 $p=q=1$ 时

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\cdots=\ln 2.$$

当 $p=1,q=2$ 时

$$1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\frac{1}{5}-\cdots=\ln 2+\frac{1}{2}\ln\frac{1}{2}=\frac{\ln 2}{2}.$$

### 2.2.3 级数的乘法

我们中学时就已经会求两个和式的乘积:

$$\left(\sum_{i=1}^{n}a_i\right)\left(\sum_{j=1}^{m}b_j\right)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}a_ib_j.$$

由于有限个数的加法满足交换律和结合律, 因此 $a_ib_j$ $(i=1,2,n\cdots\ j=1,2,m\cdots)$ 可以按任意顺序相加, 因此有

$$\left(\sum_{i=1}^{n}a_i\right)\left(\sum_{j=1}^{m}b_j\right)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}a_ib_j=\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}a_ib_j=\sum_{\substack{1\le i\le n\\1\le j\le m}}a_ib_j$$

现在我们想研究两个无穷级数的乘积, 即 $\left(\sum_{n=1}^{\infty}a_n\right)\left(\sum_{n=1}^{\infty}b_n\right)$. 很自然地, 它应该是 $a_ib_j$ $(i,j=1,2,\cdots)$ 的和. 现在的问题是这些 $a_ib_j$ 应该以什么样的顺序相加. 我们可以把它们排成一个无穷矩阵

$$\begin{bmatrix}a_1b_1&a_1b_2&a_1b_3&\cdots\\a_2b_1&a_2b_2&a_2b_3&\cdots\\a_3b_1&a_3b_2&a_3b_3&\cdots\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots\end{bmatrix},\quad\begin{bmatrix}a_1b_1&a_1b_2&a_1b_3&\cdots\\a_2b_1&a_2b_2&a_2b_3&\cdots\\a_3b_1&a_3b_2&a_3b_3&\cdots\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots\end{bmatrix}$$

在研究如何把全体有理数排成一列时, 也遇到了类似问题. 有两种方案可以选择. 如图, 按 "三角形" 相加:

$$a_1b_1+(a_1b_2+a_2b_1)+(a_1b_3+a_2b_2+a_3b_1)+\cdots.$$

也可以按 "方形" 相加:

$$a_1b_1+(a_1b_2+a_2b_2+a_2b_1)+(a_1b_3+a_2b_3+a_3b_3+a_3b_2+a_3b_1)+\cdots.$$

若两个级数收敛, 我们希望它们的乘积恰好等于它们和的乘积, 而与它们的乘积相加方式无关. 要做到这一点, 仅仅收敛还不够, 需要绝对收敛.

**定理 2.25 (Cauchy 定理)**

设级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ 都绝对收敛. 若它们的和分别为 $A$, $B$. 则 $a_ib_j$ $(i,j=1,2,\cdots)$ 按任意方式相加所得的级数都是绝对收敛的, 且它的和为 $AB$.

**证明** 任意给定一种 $a_ib_j$ $(i,j=1,2,\cdots)$ 的排列, 把这个排列记作 $a_{i_k}b_{j_k}$ $(k=1,2,\cdots)$. 对于给定的 $n$, 令

$$N=\max\{i_1,\cdots,i_n,j_1,\cdots,j_n\}.$$

由于 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ 都绝对收敛, 于是

$$\sum_{k=1}^{n}|a_{i_k}b_{j_k}|\le\left(\sum_{i=1}^{N}|a_i|\right)\left(\sum_{j=1}^{N}|b_j|\right)\le\left(\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|\right)\left(\sum_{n=1}^{\infty}|b_n|\right).$$

因此 $\sum_{n=1}^{\infty}a_{i_n}b_{j_n}$ 绝对收敛. 由级数重排定理可知任意改变该级数各项的次序它的和不变. 现在按 "方形" 相加的方式重新排列该级数, 就得到

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_{i_n}b_{j_n}=\lim_{N\to\infty}\left(\sum_{i=1}^{N}a_i\right)\left(\sum_{j=1}^{N}b_j\right)=\left(\sum_{n=1}^{\infty}a_n\right)\left(\sum_{n=1}^{\infty}b_n\right)=AB.$$ ■

**注** 以上定理中的条件只是充分条件.

我们将看到第一种按 "三角形" 相加的方式得到的乘积 "性质较好".

**定义 2.4 (Cauchy 乘积)**

设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \sum_{n=1}^{\infty} b_n$. 令

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n := \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i+j=n+1} a_i b_j.$$

我们称 $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ 为 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 的 **Cauchy 乘积** (Cauchy product).

如果是 Cauchy 乘积, 那么 Cauchy 定理的条件可以减弱为 “一个级数绝对收敛, 一个级数条件收敛”.

**定理 2.26 (Mertens 定理)**

设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 都收敛. 若它们的和分别为 $A, B$ 且其中至少一个绝对收敛, 则它们的 Cauchy 乘积 $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ 收敛, 且 $\sum_{n=1}^{\infty} c_n = AB$.

**证明** 不妨设 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 绝对收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ 收敛, 设它的和为 $M$. 令

$$A_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n, \quad B_n = \sum_{n=1}^{\infty} b_n, \quad C_n = \sum_{n=1}^{\infty} c_n.$$

则

$$\begin{aligned} C_n &= a_1 b_1 + (a_1 b_2 + a_2 b_1) + (a_1 b_3 + a_2 b_2 + a_3 b_1) + \cdots + (a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \cdots + a_n b_1) \\ &= a_1(b_1 + b_2 + \cdots + b_n) + a_2(b_1 + b_2 + \cdots + b_{n-1}) + \cdots + a_n b_1 = a_1 B_n + a_2 B_{n-1} + \cdots + a_n B_1. \end{aligned}$$

令 $B_n = B - \beta_n$, 其中 $\beta_n \to 0$. 则

$$\begin{aligned} C_n &= a_1(B - \beta_n) + a_2(B - \beta_{n-1}) + \cdots + a_n(B - \beta_1) \\ &= (a_1 + a_2 + \cdots + a_n)B - (a_1\beta_n + a_n\beta_{n-1} + \cdots + a_n\beta_1) = A_n B - \sum_{i=1}^{n} a_i \beta_{n+1-i}. \end{aligned}$$

由于 $\beta_n \to 0$, 故任一 $\varepsilon > 0$ 都存在 $N \in \mathbb{N}^*$ 当 $n > N$ 时 $|\beta_n| < \varepsilon$. 于是

$$\left| \sum_{i=1}^{n} a_i \beta_{n+1-i} \right| \le |a_1\beta_n + \cdots + a_{n-N}\beta_{N+1}| + |a_{n-N+1}\beta_N + \cdots + a_n\beta_1| < \varepsilon M + |a_{n-N+1}\beta_N + \cdots + a_n\beta_1|.$$

对于给定的 $N$, 令 $n \to \infty$ 取上极限得

$$\limsup_{n\to\infty} \left| \sum_{i=1}^{n} a_i \beta_{n+1-i} \right| \le \varepsilon M.$$

因此 $\sum_{i=1}^{n} a_i \beta_{n+1-i} \to 0$. 于是可知

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n = \lim_{n\to\infty} C_n = \lim_{n\to\infty} \left( A_n B - \sum_{i=1}^{n} a_i \beta_{n+1-i} \right) = AB.$$

■

**注** 以上定理中的条件只是充分条件.

如果是 Cauchy 乘积且收敛, 那么 Cauchy 定理的条件可以减弱为 “两个级数都条件收敛”.

**定理 2.27**

设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 都收敛. 若它们的和分别为 $A, B$ 且它们的 Cauchy 乘积 $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ 收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} c_n = AB$.

**证明** 令 $A_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n, B_n = \sum_{n=1}^{\infty} b_n, C_n = \sum_{n=1}^{\infty} c_n$. 则

$$C_n = a_1 B_n + a_2 B_{n-1} + \cdots + a_n B_1, \quad n = 1, 2, \cdots.$$

因此

$$C_1 = a_1 B_1,$$

$$
\begin{aligned}
C_2 &= a_2B_1 + a_1B_2,\\
C_3 &= a_3B_1 + a_2B_2 + a_1B_3,\\
&\cdots\\
C_N &= a_NB_1 + a_{N-1}B_2 + \cdots + a_1B_N.
\end{aligned}
$$

于是

$$\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} C_n = \frac{A_NB_1 + A_{N-1}B_2 + \cdots + A_1B_N}{N}. \tag{2.9}$$

下面来求上式右侧当 $N \to \infty$ 时的极限. 令 $A_n = A + \alpha_n$, $B_n = B + \beta_n$, 其中 $\alpha_n \to 0, \beta_n \to 0$. 则

$$\frac{A_NB_1 + A_{N-1}B_2 + \cdots + A_1B_N}{N} - AB = \frac{\alpha_1\beta_N + \cdots + \alpha_N\beta_1}{n} + \frac{A(\beta_1 + \cdots + \beta_N)}{N} + \frac{B(\alpha_1 + \cdots + \alpha_N)}{N} \tag{2.10}$$

由于 $\alpha_n \to 0, \beta_n \to 0$. 故

$$\lim_{N\to\infty} \frac{\beta_1 + \cdots + \beta_N}{N} = \lim_{N\to\infty} \beta_N = 0. \tag{2.11}$$

$$\lim_{N\to\infty} \frac{\alpha_1 + \cdots + \alpha_N}{N} = \lim_{N\to\infty} \alpha_N = 0. \tag{2.12}$$

由于 $\{\alpha_n\}$ 有界, 可设 $|\alpha_n| < M$. 由于 $\beta_n \to 0$, 因此

$$\left|\frac{\alpha_1\beta_N + \cdots + \alpha_N\beta_1}{n}\right| \le \frac{|\alpha_1||\beta_N| + \cdots + |\alpha_N||\beta_1|}{n} < M\frac{|\beta_N| + \cdots + |\beta_1|}{n} \to 0.$$

因此

$$\lim_{N\to\infty} \frac{\alpha_1\beta_N + \cdots + \alpha_N\beta_1}{n} = 0. \tag{2.13}$$

结合等式2.10,2.11,2.12和2.13可知

$$\lim_{N\to\infty} \frac{A_NB_1 + A_{N-1}B_2 + \cdots + A_1B_N}{N} = 0.$$

于是由等式2.9可知

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n = \lim_{N\to\infty} C_N = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} C_n = \lim_{N\to\infty} \frac{A_NB_1 + A_{N-1}B_2 + \cdots + A_1B_N}{N} = AB.$$

■

设级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

则对于任一 $x \in \mathbb{R}$ 都有

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|x^{n+1}/(n+1)!|}{|x^n/n!|} = \lim_{n\to\infty} \frac{|x|}{n+1} = 0.$$

由正项级数的 D'Alembert 判别法可知, 级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ 对于任一 $x \in \mathbb{R}$ 都绝对收敛. 因此这个级数定义了一个函数 (事实上就是指数函数). 令

$$\exp x := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

用级数乘法的知识可以验证以上定义的指数函数的乘法定理.

**例 2.35** $\exp x \exp y = \exp(x + y)$.

**证明** $\exp x \exp y$ 的 Cauchy 乘积通项为

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!(n-k)!}x^k y^{n-k} = \frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k x^k y^{n-k} = \frac{(x+y)^n}{n!}.$$

于是可知

$$\exp x \exp y = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!(n-k)!} x^k y^{n-k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x+y)^n}{n!} = \exp(x+y).$$ ■

### 2.2.4 无穷乘积

我们把有限个数的和推广为无穷级数. 并定义了它的收敛, 研究了它的重排问题. 用同样的方法可以研究无穷乘积.

**定义 2.5 (无穷乘积)**

设数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_n > 0$ $(n = 1, 2, \cdots)$. 令

$$\prod_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 a_2 \cdots a_n \cdots .$$

我们称 $\sum_{n=1}^{\infty}$ 为 $a_n$ 的**无穷乘积** (infinite product). 其中 $a_n$ 称为级数的通项. 令

$$P_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 a_2 \cdots a_n.$$

称 $P_n$ 为这个无穷乘积 $\prod_{n=1}^{\infty}$ 的**部分乘积** (partial product). 若数列 $\{P_n\}$ 收敛到 $P \neq 0$, 则称无穷乘积 $\prod_{n=1}^{\infty}$ 收敛, 记作

$$\prod_{n=1}^{\infty} a_n = P.$$

其中 $P$ 称为该无穷乘积的积. 反之我们称该无穷乘积是发散的.

♣

**注** 对部分乘积取对数可以把它化为部分和, 于是无穷乘积的问题可以化为无穷级数. 为了这个操作有意义, 所以规定无穷乘积的各乘积因子都是正数.

**注** 需要注意, 当 $\{P_n\}$ 收敛到 0 时, $\prod_{n=1}^{\infty}$ 也是发散的.

**例 2.36** 设 $p_n \equiv 1/2$. 则无穷乘积 $\prod_{n=1}^{\infty} p_n$ 发散.

**证明** 设前 $n$ 项部分乘积为 $P_n$. 由于

$$P_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n \to 0.$$

因此原无穷乘积发散. ■

**例 2.37** 判断以下无穷乘积的敛散性:

$$\prod_{n=2}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n^2}\right).$$

**解** 由于

$$\begin{aligned}\prod_{k=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{k^2}\right) &= \prod_{k=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{k}\right)\left(1 + \frac{1}{k}\right) = \prod_{k=2}^{n} \frac{k-1}{k} \prod_{k=2}^{n} \frac{k+1}{k} \\ &= \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdots \frac{n-1}{n}\right)\left(\frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdots \frac{n+1}{n}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{n+1}{n} \to \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

于是可知原无穷乘积收敛. ■

**例 2.38** 求证:

$$\prod_{n=1}^{\infty}\cos\frac{x}{2^n}=\frac{\sin x}{x},\quad x\neq 0.$$

**解** 设前 $n$ 项部分乘积为 $P_n$, 则

$$\left(\sin\frac{x}{2^n}\right)P_n=\sin\frac{x}{2^n}\cos\frac{x}{2^n}\cos\frac{x}{2^{n-1}}\cdots\cos\frac{x}{2}=\frac{1}{2^n}\sin x.$$

因此

$$P_n=\frac{1}{2^n}\cdot\frac{\sin x}{\sin(x/2^n)}\to\frac{\sin x}{x}.$$ ■

**例 2.39** 求证:

$$\prod_{n=1}^{\infty}\frac{(2n)^2}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{\pi}{2}.$$

**证明** 设前 $n$ 项部分乘积为 $P_n$. 由 Wallis 公式可知

$$\begin{aligned}P_n&=\prod_{k=1}^{n}\frac{(2k)^2}{(2k-1)(2k+1)}=\prod_{k=1}^{n}\frac{1}{2k+1}\prod_{k=1}^{n}\frac{(2k)^2}{2k-1}=\frac{1}{2n+1}\prod_{k=1}^{n}\frac{1}{2k-1}\prod_{k=1}^{n}\frac{(2k)^2}{2k-1}\\&=\frac{1}{2n+1}\prod_{k=1}^{n}\frac{(2k)^2}{(2k-1)^2}\to\frac{\pi}{2}\end{aligned}$$ ■

类似级数, 无穷乘积收敛的必要条件很容易想到.

**命题 2.7**

若无穷乘积 $\prod_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛则 $\lim_{n\to\infty}a_n=1$.

**证明** 若 $\prod_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛, 可设它的积 $P$. 则

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{P_n}{P_{n-1}}=\frac{P}{P}=1.$$ ■

对连乘式取对数, 可以把连乘式变成和式. 因此无穷乘积的问题可以归结为无穷级数的问题.

**定理 2.28**

无穷乘积 $\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ 和无穷级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\ln(1+a_n)$ 同敛散. 当它们收敛时

$$\sum_{n=1}^{\infty}\ln(1+a_n)=S\iff\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)=\mathrm{e}^S.$$

**证明** 设 $\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty}\ln(1+a_n)$ 的部分乘积和部分和分别为 $P_n$ 和 $S_n$. 由于

$$P_n=\prod_{k=1}^{n}(1+a_k)=\exp\left[\sum_{k=1}^{n}\ln(1+a_k)\right]=\exp S_n\iff S_n=\ln P_n,\quad n=1,2,\cdots.$$

因此当 $P_n\to P>0$ 时则 $S_n\to\ln P$. 反之当 $S_n\to S$ 时 $P_n\to\mathrm{e}^S$. ■

从以上定理容易得到以下结论.

**命题 2.8**

设数列 $\{a_n\}$. 当 $n$ 充分大时, 若 $a_n>0$ 或 $a_n<0$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty}\ln(1+a_n)$, $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 和 $\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ 同敛散.

**证明** $\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ 收敛或 $\prod_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛都可以推得 $a_n\to 0$. 于是

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(1+a_n)}{a_n}=1.$$

由于 $a_n > 0$ 或 $a_n < 0$, 由正项级数的比较判别法可知 $\sum_{n=1}^{\infty} \ln(1+a_n)$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 同敛散. 由定理2.28可知 $\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ 和无穷级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \ln(1+a_n)$ 同敛散. 于是可知命题成立. ■

**命题 2.9**

设数列 $\{a_n\}$. 若 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ 收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} \ln(1+a_n)$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 和 $\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ 同敛散.

**证明** 由于 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ 收敛, 故 $a_n^2 \to 0$, 因此 $a_n \to 0$. 于是

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n - \ln(1+a_n)}{a_n^2} = \frac{1}{2}.$$

由正项级数的比较判别法可知 $\sum_{n=1}^{\infty} [a_n - \ln(1+a_n)]$ 收敛. 因此 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} \ln(1+a_n)$ 同敛散. 由定理2.28可知 $\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ 和无穷级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \ln(1+a_n)$ 同敛散. 于是可知命题成立. ■

当 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 = +\infty$ 时以上结论不一定成立. 下面看一个例子.

下面来看 $\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ 发散到零的情况.

**命题 2.10**

设无穷乘积 $\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ 和无穷级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \ln(1+a_n)$, 则

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln(1+a_n) = -\infty \iff \prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n) \text{ 发散到零.}$$

**证明** 设 $\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} \ln(1+a_n)$ 的部分乘积和部分和分别为 $P_n$ 和 $S_n$. 由于

$$P_n = \exp S_n \iff S_n = \ln P_n, \quad n = 1, 2, \cdots.$$

因此 $P_n \to 0$ 当且仅当 $S_n \to -\infty$. ■

**命题 2.11**

设数列 $\{a_n\}$. 若 $-1 < a_n < 0$ $(n = 1, 2, \cdots)$ 且 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散, 则 $\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ 发散到 0.

**证明** 由于 $a_n < 0$, 故 $\ln(1+a_n) < 0$ $(n = 1, 2, \cdots)$. 由于 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散. 由于 $a_n < 0$ $(n = 1, 2, \cdots)$, 由推论2.8可知 $\sum_{n=1}^{\infty} \ln(1+a_n)$ 也发散. 由于 $\ln(1+a_n) < 0$ $(n = 1, 2, \cdots)$, 故 $\sum_{n=1}^{\infty} \ln(1+a_n) = -\infty$. 于是可知 $\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ 发散到 0. ■

**命题 2.12**

设数列 $\{a_n\}$. 若 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛且 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ 发散, 则 $\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ 发散到 0.

**证明** 由于 $a_n \to 0$. 于是

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n - \ln(1+a_n)}{a_n^2} = \frac{1}{2}.$$

由于 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ 发散, 由正项级数的比较判别法可知 $\sum_{n=1}^{\infty} [a_n - \ln(1+a_n)] = +\infty$. 由于 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 故 $\sum_{n=1}^{\infty} \ln(1+a_n) = -\infty$. 于是可知 $\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ 发散到 0. ■

**例 2.40** 判断以下无穷乘积的敛散性:

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right), \quad \prod_{n=2}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right).$$

**解** 由于

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=+\infty,\quad \sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{n}\right)=-\infty$$

且 $1/n>0\ (n=1,2,\cdots)$, 因此

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)=+\infty,\quad \prod_{n=2}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)=0.$$

■

**例 2.41** 判断以下无穷乘积的敛散性:

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n^2}\right),\quad \prod_{n=2}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n^2}\right).$$

**解** 由于 $\sum_{n=1}^{\infty}1/n^2$ 收敛, 且 $1/n^2>0\ (n=1,2,\cdots)$, 故以上两个级数都收敛. ■

**例 2.42** 设 $\alpha>-1$, 则

$$\lim_{n\to\infty}\binom{\alpha}{n}=0.$$

**证明** 由于

$$(-1)^n\binom{\alpha}{n}=(-1)^n\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}=\left(1-\frac{\alpha+1}{1}\right)\left(1-\frac{\alpha+1}{2}\right)\cdots\left(1-\frac{\alpha+1}{n}\right)=\prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{\alpha+1}{k}\right).$$

由于 $\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha+1)/n$ 发散, 且 $\alpha+1>0$, 由命题2.11可知以上无穷乘积发散到零. 这表明 $\lim_{n\to\infty}\binom{\alpha}{n}=0$. ■

**例 2.43** 判断以下无穷乘积的敛散性:

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left[1+(-1)^{n-1}\frac{1}{n^\alpha}\right].$$

**解** 设 $a_n=(-1)^{n-1}(1/n^\alpha)\ (n=1,2,\cdots)$. 由 Leibniz 判别法可知 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛.

(i) 当 $\alpha>1/2$ 时 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2$ 收敛, 由命题2.9可知原无穷乘积收敛.

(ii) 当 $\alpha\le 1/2$ 时 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2$ 发散, 由命题2.12可知原无穷乘积发散到零. ■

**定义 2.6 (无穷乘积的绝对收敛)**

设无穷乘积 $\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ 收敛. 若 $\prod_{n=1}^{\infty}(1+|a_n|)$ 也收敛, 则称该无穷级数**绝对收敛** (absolutely convergent), 反之称它**条件收敛** (conditionally convergent). ♣

**命题 2.13**

无穷乘积 $\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ 绝对收敛当且仅当 $\sum_{n=1}^{\infty}\ln(1+a_n)$ 绝对收敛. ♠

**证明** 由于

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(1+a_n)}{a_n}=1\implies\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\ln(1+a_n)}{a_n}\right|=1.$$

由正项级数的比较判别法可知 $\sum_{n=1}^{\infty}|\ln(1+a_n)|$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ 同敛散. 由命题2.8可知 $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ 和 $\prod_{n=1}^{\infty}(1+|a_n|)$ 同敛散. 这表明 $\sum_{n=1}^{\infty}|\ln(1+a_n)|$ 和 $\prod_{n=1}^{\infty}(1+|a_n|)$ 同敛散. 于是可知命题成立. ■

以上命题结合定理2.28立刻可知

**推论 2.2**

无穷乘积 $\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ 条件收敛当且仅当 $\sum_{n=1}^{\infty}\ln(1+a_n)$ 条件收敛. ♡

**命题 2.14**

绝对收敛的无穷乘积一定收敛.

**证明** 设无穷乘积 $\prod_{n=1}^{\infty}(1+|a_n|)$ 收敛, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}|\ln(1+a_n)|$ 收敛. 因此 $\sum_{n=1}^{\infty}\ln(1+a_n)$ 收敛. 由定理2.28可知无穷乘积 $\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ 收敛. 于是可知命题成立. ∎

**定理 2.29**

交换绝对收敛的无穷乘积中无穷多个乘积因子的次序所得到的新无穷乘积仍然绝对收敛, 且它的积不变.

**证明** 设 $\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ 绝对收敛, 交换无穷多个乘积因子的次序所得到的新无穷乘积为 $\prod_{n=1}^{\infty}(1+b_n)$. 由命题2.13可知 $\sum_{n=1}^{\infty}\ln(1+a_n)$ 绝对收敛. 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\ln(1+b_n)$ 是由 $\sum_{n=1}^{\infty}\ln(1+a_n)$ 交换无穷多项的次序得到的, 由级数重排定理可知 $\sum_{n=1}^{\infty}\ln(1+b_n)$ 也绝对收敛, 且

$$\sum_{n=1}^{\infty}\ln(1+b_n)=\sum_{n=1}^{\infty}\ln(1+a_n).$$

由命题2.13可知 $\prod_{n=1}^{\infty}(1+b_n)$ 绝对收敛, 且

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1+b_n)=\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n).$$ ∎

**定理 2.30**

若无穷乘积 $\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ 条件收敛, 则适当交换各项的顺序后得到的新级数可以收敛到任一给定的实数 $P$, 也可以趋于 $+\infty$ 或 0.

**证明** 设 $\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ 条件收敛, 重排后得到 $\prod_{n=1}^{\infty}(1+b_n)$. 由推论2.2可知 $\sum_{n=1}^{\infty}\ln(1+a_n)$ 条件收敛. 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\ln(1+b_n)$ 是由 $\sum_{n=1}^{\infty}\ln(1+a_n)$ 重排后得到的, 由 Riemann 定理可知 $\sum_{n=1}^{\infty}\ln(1+b_n)$ 可收敛到任一给定的实数 $S$, 也可以趋于 $\pm\infty$.

若给定 $P\neq 0$, 只需让 $\sum_{n=1}^{\infty}\ln(1+a_n)$ 重排后的级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\ln(1+b_n)$ 收敛到 $\ln P$. 由定理2.28可知 $\prod_{n=1}^{\infty}(1+b_n)$ 收敛到 $P$.

若让重排后的级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\ln(1+b_n)=-\infty$ 就可以使得 $\prod_{n=1}^{\infty}(1+b_n)$ 发散到 0.

若让重排后的级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\ln(1+b_n)=+\infty$ 就可以使得 $\prod_{n=1}^{\infty}(1+b_n)$ 发散到 $+\infty$. ∎

## 2.3 函数项级数

### 2.3.1 函数列和函数项级数

**定义 2.7 (函数列和函数项级数)**

设定义在 $I$ 上的一列函数 $f_n(x)$ $(n = 1, 2, \cdots)$. 我们称它为 $I$ 上的一个**函数项序列** (), 简称函数列. 令

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) := f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_n(x) + \cdots.$$

我们称 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ 为 $I$ 上的一个**函数项级数** ().

任取 $x_0 \in I$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x_0)$ 就成了一个数项级数, 因此可以用数项级数的收敛来定义函数项级数的收敛.

**定义 2.8 (函数项级数的收敛)**

设 $I$ 上的一个函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$. 对于 $x_0 \in I$, 若数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ 收敛 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x_0)$ 收敛, 则称函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ 在 $x_0$ 处收敛, 反之称该函数项级数在这一点处发散. 若该函数项级数在 $I$ 中的每一点都收敛, 则称它在 $I$ 上**逐点收敛** (). 所有使得该级数收敛的点的集合称为该级数的收敛点集.

**例 2.44** 设定义在 $\mathbb{R}$ 上的函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} x^n$. 求它的收敛点集.

**解** 当 $|x| < 1$ 时几何级数 $\sum_{n=1}^{\infty} x^n$ 收敛, 于是可知函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} x^n$ 的收敛点集为 $(-1, 1)$. ■

类似数项级数的部分和, 函数项级数也可以定义 "(部分) 和函数".

**定义 2.9 (和函数)**

设 $I$ 上的函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$, 它的收敛点集为 $I_0 \subseteq I$. 令

$$S_n(x) := \sum_{k=1}^{n} f_k(x).$$

则称 $\{S_n(x)\}$ 为该函数项级数的**部分和序列**. 令

$$S(x) := \lim_{n\to\infty} S_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x), \quad x \in I_0.$$

则称 $S(x)$ 是该函数项级数的一个**和函数** (), 或称 $S(x)$ 为函数列 $\{S_n(x)\}$ 的一个**极限函数** ().

**注** 由于 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ 在 $I_0$ 的每一点都收敛, 因此任一 $x_0 \in I_0$ 都唯一确定一个函数值 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x_0)$. 这表明以上定义是合理的, $S(x)$ 是一个定义在 $I_0$ 上的函数.

现在我们接触到了一类新的函数, 它使用级数定义的. 很自然地, 下面要讨论它的连续、可导、可积问题.

**例 2.45** 设区间 $[0, 1]$ 上的函数列 $S_n(x) = x^n$ $(n = 1, 2, \cdots)$, 它的每个函数都在 $[0, 1]$ 上连续可导. 研究极限函数的连续性和可导性.

**解** 容易知道

$$S(x) = \lim_{n\to\infty} S_n(x) = \begin{cases} 0, & 0 \le x < 1 \\ 1, & x = 1 \end{cases}$$

显然 $S(x)$ 在 $x = 1$ 处不连续, 因此也不可导. ■

**例 2.46**

**证明**

**例 2.47** 设 $[0,1]$ 上的函数列 $\{S_n(x)\}$, 它的每个函数都在 $[0,1]$ 上都可积, 且数列 $\left\{\int_0^1 S_n(x)\,\mathrm{d}x\right\}$ 收敛. 若 $\{S_n(x)\}$ 的极限函数在 $[0,1]$ 上可积, 判断以下等式是否成立:

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 S_n(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^1 \lim_{n\to\infty} S_n(x)\,\mathrm{d}x$$

**证明** 等式不一定成立. 举例说明, 设 $[0,1]$ 上的函数列

$$S_n(x)=2n^2x\,\mathrm{e}^{-n^2x^2},\quad n=1,2,\cdots.$$

容易知道

$$\int_0^1 S(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^1 \lim_{n\to\infty} S_n(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^1 0\,\mathrm{d}x=0.$$
$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 S_n(x)\,\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\left(1-\mathrm{e}^{-n^2}\right)=1.$$

■

**例 2.48**

**证明**

## 2.3.2 一致收敛

设函数列 $\{f_n\}$ 在 $[a,b]$ 上收敛于 $f$. 收敛区间 $[a,b]$ 中有无穷多个点, 每一个点都决定了一个数列. 这些数列收敛的速度是不一样的. 任意给定 $x_0\in[a,b]$, 对于任一 $\varepsilon>0$ 都存在 $N\in\mathbb{N}^*$ 使得当 $n>N$ 时

$$|f_n(x_0)-f(x_0)|<\varepsilon.$$

一般来说, $N$ 的选取同时依赖于 $x_0$ 和 $\varepsilon$. 举例来说, 例2.45中的函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}x^n$ 对 $(0,1)$ 中的任意一点 $x_0$ 都收敛到 0. 对于任一 $\varepsilon\in(0,1)$ 若要

$$|f_n(x_0)-f(x_0)|=x_0^n<\varepsilon.$$

就需要 $n>(\ln\varepsilon/\ln x_0)$. 因此需要取

$$N=\left[\frac{\ln\varepsilon}{\ln x_0}\right].\tag{2.14}$$

现在给定 $\varepsilon=10^{-100}$, 若 $x_0=10^{-10}$, 则 $N=10$. 若 $x_0=10^{-4}$, 则 $N=25$. 若 $x_0=10^{-1}$, 则 $N=100$. 由此可见对于给定的 $\varepsilon$, $x_0$ 越靠近 0, $\{x_0^n\}$ 收敛于 0 的速度越快.

那么对于给定的 $\varepsilon$ 是否能找到一个 "统一的 (uniform)" $N$ 使得对于任一 $x_0$ 都满足条件呢? 假设存在 $N_0$ 使得对于任一 $x_0\in(0,1)$ 都有 $x^{N_0}<\varepsilon$. 令 $x=\varepsilon^{1/N_0}$ 则 $\varepsilon<\varepsilon$ 出现矛盾, 这就说明无法找到这样的 $N_0$. 事实上令等式2.14中的 $x_0\to1$ 就有 $N\to+\infty$, 这也可以说明找不到这样的 $N$.

从以上的讨论, 一定会让读者联想到 "一致连续" 的概念. 类似地, 可以建立 "一致收敛" 的概念.

**定义 2.10 (一致收敛)**

设函数列 $\{f_n\}$ 在 $I$ 上收敛于 $f$. 若对于任一 $\varepsilon>0$ 都存在 $N_\varepsilon\in\mathbb{N}^*$ 使得当 $n>N_\varepsilon$ 时对于任一 $x\in I$ 都有

$$|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon.$$

则称函数列 $\{f_n\}$ 在 $I$ 上**一致收敛** (uniformly convergent) 于 $f$.

♣

根据前面的讨论, 函数项级数 $\{x^n\}$ 不一致收敛. 下面来看一个一致收敛的例子.

**例 2.49** 设函数列

$$f_n(x) = \frac{1}{n+x}, \quad n = 1, 2, \cdots.$$

则 $\{f_n\}$ 在 $(0,1)$ 上一致收敛于 $f(x) \equiv 0$.

**证明** 由于

$$|f_n(x) - f(x)| = \frac{1}{n+x} < \frac{1}{n}, \quad \forall x \in (0,1).$$

因此对于任一 $\varepsilon \in (0,1)$, 只需取 $N_\varepsilon = [1/\varepsilon]$, 当 $n > N$ 时对于任一 $x \in (0,1)$ 都有 $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$. 于是可知 $\{f_n\}$ 在 $(0,1)$ 上一致收敛于 $f(x) \equiv 0$. ■

下面来看一下一致收敛的几何意义. 设函数列 $\{f_n(x)\}$ 在 $(0,1)$ 上一致收敛于 $f(x)$. 则对于给定的 $\varepsilon > 0$

$$f(x) - \varepsilon < f_n(x) < f(x) + \varepsilon, \quad \forall x \in (0,1), \ n = N+1, N+2, \cdots.$$

这表明曲线 $y = f_n(x)$ $(n = N+1, N+2, \cdots)$ 全部落在曲线 $y = f(x) - \varepsilon$ 和 $y = f(x) + \varepsilon$ 之间. 如图2.2, 从图中可以看出无论 $n$ 多大, 曲线 $y = x^n$ 都不会落入 $y = -\varepsilon$ 和 $y = \varepsilon$ 之间 $(\varepsilon \in (0,1))$. 从一致连续的几何意义上可以看出 $\{x^n\}$ 在 $(0,1)$ 上不一致收敛.

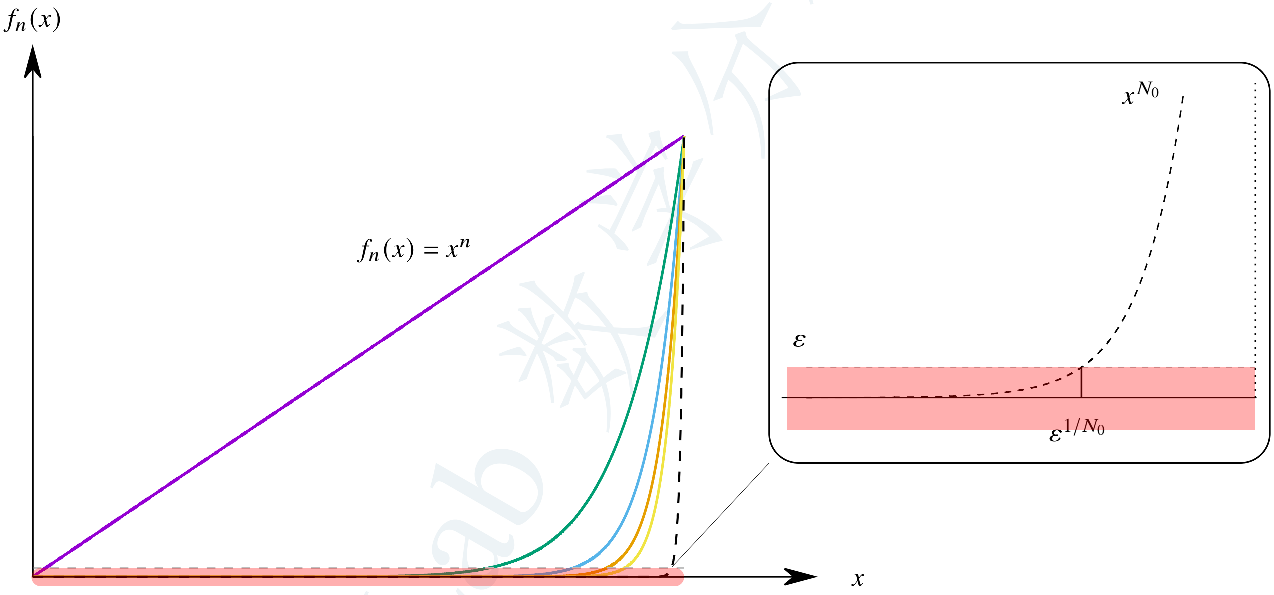



**图 2.2:** $x^n$ 不一致收敛.

从一直收敛的几何意义不难想到以下结论.

**定理 2.31**

设 $I$ 上的函数列 $\{f_n\}$. 令

$$\beta_n = \sup_{x \in I} |f_n(x) - f(x)|, \quad n = 1, 2, \cdots.$$

则 $\{f_n\}$ 在 $I$ 上一致收敛于 $f$ 当且仅当 $\beta_n \to 0$.

**证明** (i) 证明必要性. 若 $\{f_n\}$ 在 $I$ 上一致收敛于 $f$, 则对于任一 $\varepsilon > 0$ 都存在 $N_\varepsilon \in \mathbb{N}^*$ 使得当 $n > N_\varepsilon$ 时对于任一 $x \in I$ 都有 $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$. 这表明

$$|\beta_n| = \sup_{x \in I} |f_n(x) - f(x)| \le \varepsilon.$$

于是可知 $\beta_n \to 0$.

(ii) 证明充分性. 若 $\beta_n \to 0$. 则对于任一 $\varepsilon > 0$ 都存在 $N_\varepsilon \in \mathbb{N}^*$ 使得当 $n > N_\varepsilon$ 时 $|\beta_n| = \beta_n < \varepsilon$. 于是对于任一 $x \in I$ 都有

$$|f_n(x) - f(x)| \le \beta_n < \varepsilon.$$

于是可知 $\{f_n\}$ 在 $I$ 上一致收敛于 $f$. ■

**例 2.50** 设函数列

$$f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2}.$$

它在 $(0, +\infty)$ 不一致收敛, 但在 $[\delta, +\infty)$ 上一致收敛, 其中 $\delta$ 是任一正实数.

**证明** 容易知道 $\{f_n(x)\}$ 在 $(0, +\infty)$ 上收敛于 $\mathbf{0}$.

(i) 当 $x \in (0, +\infty)$ 时

$$\beta_n = \sup_{x\in(0,+\infty)} f_n(x) \ge f_n\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2}.$$

因此 $\beta_n$ 不收敛于 0. 于是可知 $\{f_n(x)\}$ 在 $(0, +\infty)$ 不一致收敛.

(ii) 当 $x \in [\delta, +\infty)$ 时, 由于

$$f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2} \le \frac{nx}{n^2x^2} = \frac{1}{nx} < \frac{1}{n\delta}.$$

因此

$$\beta_n = \sup_{x\in[\delta,+\infty)} f_n(x) \le \frac{1}{n\delta} \to 0.$$

因此 $\beta_n \to 0$. 于是可知 $\{f_n(x)\}$ 在 $[\delta, +\infty)$ 上一致收敛. ■

**例 2.51** 设 $[0, 1]$ 上的函数列

$$f_n(x) = 2n^2x\,\mathrm{e}^{-n^2x^2}, \quad n = 1, 2, \cdots.$$

则 $\{f(n)\}$ 在 $[0, 1]$ 上不一致收敛.

**证明** 容易知道 $\{f(n)\}$ 在 $[0, 1]$ 上收敛于 $f(x) \equiv 0$. 由于

$$\beta_n \ge \left|f\left(\frac{1}{n}\right) - f\left(\frac{1}{n}\right)\right| = 2n\,\mathrm{e}^{-1} \to +\infty.$$

因此 $\beta_n$ 不趋于零. 于是可知 $\{f(n)\}$ 在 $[0, 1]$ 上不一致收敛. ■

以上判断一致收敛的方法需要事先知道极限函数. 和数列类似, 在不知道极限函数的情况下, 可以用 Cauchy 收敛原理判别一致收敛.

**定理 2.32 (函数列的 Cauchy 收敛原理)**

设 $I$ 上的函数列 $\{f_n\}$. 则 $\{f_n\}$ 在 $I$ 上一致收敛当且仅当对于任一 $\varepsilon > 0$ 都存在 $N_\varepsilon$, 当 $m, n > N_\varepsilon$ 时对于任一 $x \in I$ 都有

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon.$$

♡

**证明** (i) 证明必要性. 若 $\{f_n\}$ 在 $I$ 上一致收敛于 $f(x)$. 则对于任一 $\varepsilon > 0$ 都存在 $N_\varepsilon$, 当 $m, n > N_\varepsilon$ 时对于任一 $x \in I$ 都有

$$|f_m(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

于是

$$|f_n(x) - f_m(x)| < |f_n(x) - f(x)| + |f_m(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

(ii) 证明充分性. 对于任一 $\varepsilon > 0$ 都存在 $N_\varepsilon$, 当 $m, n > N_\varepsilon$ $(n < m)$ 时对于任一 $x \in I$ 都有 $|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$. 由数列的 Cauchy 收敛原理可知 $\{f_n(x)\}$ 在 $I$ 上收敛. 设它的极限函数为 $f(x)$. 对于给定的 $n > N_\varepsilon$ 有

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon, \quad m = n+1, n+2, \cdots.$$

令 $m \to \infty$ 得

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

于是可知 $\{f_n\}$ 在 $I$ 上一致收敛. ■

下面可以开始讨论函数项级数的一致收敛.

**定义 2.11 (函数项级数的一致收敛)**

设 $I$ 上的一个函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$. 设它的部分和函数列为 $\{S_n(x)\}$. 若 $\{S_n(x)\}$ 在 $I$ 上一致收敛于 $S(x)$, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ 在 $I$ 上**一致收敛** (uniformly convergent) 于 $S(x)$. ♣

**定理 2.33 (函数项级数的 Cauchy 收敛原理)**

设 $I$ 上的函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$. 则 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ 在 $I$ 上一致收敛当且仅当对于任一 $\varepsilon > 0$ 都存在 $N_\varepsilon$, 当 $m$, $n > N_\varepsilon$ $(m < n)$ 时对于任一 $x \in I$ 都有

$$|f_{m+1}(x) + \cdots + f_n(x)| < \varepsilon.$$

♡

以上定理中, 当 $n - m = 1$ 时就有以下推论.

**推论 2.3**

设 $I$ 上的函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$. 若 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ 在 $I$ 上一致收敛, 则 $f_n(x)$ 在 $I$ 上一致收敛于 $f(x) \equiv 0$. ♡

用这个必要条件很容易看出某些函数项级数不一致收敛, 下面看一个例子.

**例 2.52** 函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} n\,\mathrm{e}^{-nx}$ 在 $(0, +\infty)$ 上不一致收敛.

**证明** 由于

$$\beta_n = \sup_{x \in (0,+\infty)} f_n(x) \geq f_n\left(\frac{1}{n}\right) = n\,\mathrm{e}^{-1} \to +\infty.$$

因此 $\{f_n(x)\}$ 在 $(0, +\infty)$ 上不一致收敛于 $f(x) \equiv 0$. 于是可知 $\sum_{n=1}^{\infty} n\,\mathrm{e}^{-nx}$ 在 $(0, +\infty)$ 上不一致收敛. ■

**定理 2.34 (Weierstrass 判别法)**

设 $I$ 上的函数列 $\{f_n\}$. 若存在收敛的正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, 且对于任一 $x \in I$ 都有

$$|f_n(x)| \leq a_n, \quad n = 1, 2, \cdots.$$

则函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ 在 $I$ 上一致收敛. ♡

**证明** 由于 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 由级数的 Cauchy 收敛原理可知对于任一 $\varepsilon > 0$ 都存在 $N \in \mathbb{N}^*$ 使得对于任意 $m, n < N$ $(m < n)$ 时都有

$$0 < a_{m+1} + \cdots + a_n < \varepsilon.$$

由于 $|f_n(x)| \leq a_n$ $(n = 1, 2, \cdots)$. 因此对于任一 $\varepsilon > 0$ 都有

$$\left|\sum_{k=m+1}^{n} f_k(x)\right| \leq \sum_{k=m+1}^{n} |f_k(x)| \leq \sum_{k=m+1}^{n} a_k < \varepsilon.$$

由函数项级数一致收敛的 Cauchy 收敛原理可知 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ 在 $I$ 上一致收敛. ■

注 以上定理中的数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 称为函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ 的一个**优级数**,因此以上判别法也称为**优级数判别法**.

下面看几个例子.

例 2.53 判断以下函数项级数在 $\mathbb{R}$ 上的一致收敛性:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}.$$

解 由于对于任一 $x \in \mathbb{R}$ 都有

$$\left|\frac{\cos nx}{n^2}\right| \le \frac{1}{n^2}, \quad n = 1, 2, \cdots.$$

由于 $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2$ 收敛, 由 Weierstrass 判别法可知原级数一致收敛. ■

例 2.54 判断以下函数项级数在 $\mathbb{R}$ 上的一致收敛性:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{1+n^4x^2}.$$

解 当 $x \neq 0$ 时, 由均值不等式可知

$$\left|\frac{x}{1+n^4x^2}\right| = \left|\frac{1}{1/x+n^4x}\right| = \frac{1}{1/|x|+n^4|x|} \le \frac{1}{2n^2}, \quad n = 1, 2, \cdots.$$

当 $x = 0$ 时以上不等式显然也成立. 因此对于任一 $x \in \mathbb{R}$ 以上不等式都成立. 由于 $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2$ 收敛, 由 Weierstrass 判别法可知原级数一致收敛. ■

和一致连续一样, 函数项级数的一致连续性不仅和通项有关还和所讨论的收敛点集有关. 例2.52已经证明函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} n\,\mathrm{e}^{-nx}$ 在 $(0, +\infty)$ 上不一致收敛. 但改变所讨论的收敛点集后可使它一致收敛.

例 2.55 函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} n\,\mathrm{e}^{-nx}$ 在 $[\delta, +\infty)$ 上一致收敛, 其中 $\delta$ 是任一正实数.

解 由于 $0 < \delta \le x$. 因此当 $n$ 充分大时

$$n\,\mathrm{e}^{-nx} \le n\,\mathrm{e}^{-n\delta} \le \frac{1}{n^2}.$$

由于 $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2$ 收敛, 由 Weierstrass 判别法可知原级数一致收敛. ■

以上例子表明, 如果一个函数列或函数项级数在区间 $I$ 的任一闭子区间上都一致收敛, 但不能推出它在 $I$ 上一致收敛, 甚至不能推出它在 $I$ 上收敛. 但反之可知, 即若一个函数列或函数项级数在区间 $I$ 上一致收敛, 则它在 $I$ 的任一子区间上都一致收敛.

**定义 2.12 (内闭一致收敛)**

函数列或函数项级数在开区间 $(a, b)$ 的任意闭子区间都一致收敛, 则称该函数列或函数项级数在 $(a, b)$ 上**内闭一致收敛** (inner closed uniformly convergent). ♣

Weierstrass 判别法虽然简单, 但条件太强. 满足 Weierstrass 判别法条件的级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 不仅一致收敛, 而且它的绝对值级数 $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ 也一致收敛.

也就是说, 如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 一致收敛, 但不绝对收敛, 即 $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ 发散, 就无法用 Weierstrass 判别法. 后面的例2.58就是这样的情况.

如果 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 一致收敛且绝对收敛, 但 $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ 不一致收敛, 也无法用 Weierstrass 判别法. 后面的例2.59就是这样的情况. 因此我们需要 “更精细” 的判别法.

在数项级数中有 Dirichlet 判别法和 Abel 判别法. 在函数项级数中也有类似的判别法. 为此需要先引入 “一致有界” 的概念.

对于数列 $\{a_n\}$, 若存在 $M>0$ 使得 $|a_n|\le M\ (n=1,2,\cdots)$, 就说它是有界的. 类似地, 可以定义有界的函数列. 设 $I$ 上的函数列 $\{f_n(x)\}$, 若对于每一个 $x_0\in I$ 都存在 $M_{x_0}>0$ 使得 $|f_n(x)|\le M_{x_0}\ (n=1,2,\cdots)$, 则称该函数列在 $I$ 上**逐点有界** (pointwise bounded). 一般而言这里的 $M$ 是依赖于 $x_0$ 的. 如果可以找到不依赖于 $x_0$ 的 $M$ 就有如下概念.

**定义 2.13 (一致有界)**

设 $I$ 上的函数列 $\{f_n\}$. 若存在 $M>0$ 对于任一 $x\in I$ 都有

$$|f_n(x)|\le M,\quad n=1,2,\cdots$$

则称该函数列在 $I$ 上**一致有界** (uniformly bounded).

通过两个例子可以帮助理解一致有界和逐点有界的差别.

**例 2.56** 函数列 $\{x^n\}$ 在 $(0,1)$ 上一致有界.

**证明** 由于对于任一 $x\in(0,1)$ 都有

$$0<f_n(x)=x^n<1,\quad n=1,2,\cdots.$$

因此 $\{x^n\}$ 在 $(0,1)$ 上一致有界. ■

**例 2.57** 函数列 $\{nx^n\}$ 在 $(0,1)$ 上逐点有界但不一致有界.

**证明** 由于 $nx^n\to0$, 因此 $\{nx^n\}$ 在 $(0,1)$ 上逐点有界. 假设它在 $(0,1)$ 上一致有界, 则存在 $M>0$ 使得对于任一 $x\in(0,1)$ 都有

$$0<nx^n\le M,\quad n=1,2,\cdots.$$

对于给定的 $n$, 令 $x\to1-$ 得 $n\le M$, 这里 $M$ 是固定的正数, 而 $n=1,2,\cdots$, 出现矛盾. 因此 $\{nx^n\}$ 在 $(0,1)$ 上不一致有界. ■

类比数项级数的 Dirichlet 判别法和 Abel 判别法不难得到函数项级数的 Dirichlet 判别法和 Abel 判别法.

**定理 2.35 (函数项级数的 Dirichlet 判别法)**

设 $I$ 上的函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}f_n(x)g_n(x)$. 若满足

1° $\{g_n(x)\}$ 对于任一 $x\in I$ 都是单调的, 且它在 $I$ 上一致收敛于 $g(x)\equiv0$.

2° $\sum_{k=1}^{n}f_k(x)$ 一致有界, 即存在 $M$ 对于任一 $x\in I$ 都满足

$$\left|\sum_{k=1}^{n}f_k(x)\right|\le M,\quad n=1,2,\cdots.$$

则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}f_n(x)g_n(x)$ 在 $I$ 上一致收敛.

**证明** 由 2° 可知, 对于任一 $m,n\in\mathbb{N}^*\ (m<n)$ 和任一 $x\in I$ 都有

$$\left|\sum_{k=m+1}^{n}f_k(x)\right|=\left|\sum_{k=1}^{n}f_k(x)-\sum_{k=1}^{m}f_k(x)\right|\le\left|\sum_{k=1}^{n}f_k(x)\right|+\left|\sum_{k=1}^{m}f_k(x)\right|\le2M.$$

$\{g_n(x)\}$ 对于任一 $x\in I$ 都是单调的, 由 Abel 引理可知

$$\left|\sum_{k=m+1}^{n}g_k(x)g_k(x)\right|\le2M(|g_{m+1}(x)|+2|g_m(x)|).$$

由于 $\{g_n(x)\}$ 在 $I$ 上一致收敛于 $f(x)\equiv0$, 故对于任一 $\varepsilon>0$ 存在 $N_\varepsilon\in\mathbb{N}^*$ 使得当 $m>N$ 时对于任一 $x\in I$ 都有

$|g_m(x)| < \varepsilon/(8M)$. 于是当 $m > N$ 时

$$\left|\sum_{k=m+1}^{n} g_k(x)g_k(x)\right| \leq 2M(|g_{m+1}(x)| + 2|g_m(x)|) < 2M \cdot \frac{3\varepsilon}{8M} < \varepsilon, \quad \forall x \in I.$$

由 Cauchy 收敛原理可知 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)g_n(x)$ 在 $I$ 上一致收敛. ■

**定理 2.36 (函数项级数的 Abel 判别法)**

设 $I$ 上的函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)g_n(x)$. 若满足

1° $\{g_n(x)\}$ 对于任一 $x \in I$ 都是单调的, 且它在 $I$ 上一致有界, 即存在 $M$ 对于任一 $x \in I$ 都满足 $|g_n(x)| \leq M$ $(n = 1, 2, \cdots)$.

2° $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ 在 $I$ 上一致收敛.

则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)g_n(x)$ 在 $I$ 上一致收敛. ♡

**证明** 由于 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ 在 $I$ 上一致收敛, 由 Cauchy 收敛原理可知, 对于任一 $\varepsilon > 0$ 都存在 $N_\varepsilon \in \mathbb{N}^*$ 使得当 $m$, $n > N_\varepsilon$ $(m < n)$ 时对于任一 $x \in I$ 都有

$$\left|\sum_{k=m+1}^{n} f_n(x)\right| < \frac{\varepsilon}{3M}.$$

由 Abel 引理可知

$$\left|\sum_{k=m+1}^{n} f_n(x)g(x)\right| \leq \frac{\varepsilon}{3M}(|b_{m+1}(x)| + 2|b_n(x)|) < \varepsilon.$$

于是可知级数 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)g_n(x)$ 在 $I$ 上一致收敛. ■

**例 2.58** 以下函数项级数在 $[\delta, 2\pi - \delta]$ $(0 < \delta < \pi)$ 上一致收敛, 但不绝对收敛:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n}.$$

**证明** (i) 令 $f_n(x) = \cos nx$, $g_n(x) = 1/n$. 则 $g_n(x)$ 递减一致趋于零. 当 $x \in [\delta, 2\pi - \delta]$ 时

$$\left|\sum_{k=1}^{n} \cos kx\right| \leq \left(\sin\frac{x}{2}\right)^{-1} \leq \left(\sin\frac{\delta}{2}\right)^{-1}.$$

因此 $\sum_{k=1}^{n} f_k(x)$ 在 $[\delta, 2\pi - \delta]$ 上一致有界. 由 Dirichlet 判别法可知原级数一致收敛.

(ii) 由于

$$\sum_{k=1}^{n}\left|\frac{\cos kx}{k}\right| \geq \sum_{k=1}^{n}\frac{\cos^2 kx}{k} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k} + \frac{\cos 2kx}{k}\right).$$

当 $x \in [\delta, 2\pi - \delta]$ 时, 由例2.30可知 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2nx}{n}$ 收敛, 而 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散. 因此以上不等式最右边的部分和发散. 于是可知原级数不绝对收敛. ■

**例 2.59** 设函数列 $a_n = (-1)^n x^n (1 - x)$ $(n = 1, 2, \cdots)$. 则函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 在 $[0, 1]$ 上绝对收敛且一致收敛, 但 $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ 在 $[0, 1]$ 上不一致收敛.

**证明** (i) 当 $x = 0$ 或 $1$ 时 $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n(x)|$ 显然收敛. 当 $x \in (0, 1)$ 时

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n(x)| = \sum_{n=1}^{\infty} x^n (1 - x) = (1 - x)\sum_{n=1}^{\infty} x^n = 1.$$

于是可知 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ 在 $[0, 1]$ 上绝对收敛.

(ii) 令 $f_n(x) = (-1)^n$, $g_n(x) = x^n(1 - x)$ $(n = 1, 2, \cdots)$. 显然 $\sum_{k=1}^{n} f_k(x)$ 一致有界. 下面来证明 $g_n(x)$ 一致趋于

零. 求导得

$$g_n'(x) = nx^{n-1}(x-1) - x^n = x^{n-1}[(n+1)x - n].$$

令 $g_n'(x) = 0$ 得 $x = 0$ 或 $n/(n+1)$. 容易知道当 $x = n/(n+1)$ 时 $g_n(x)$ 在闭区间 $[0,1]$ 上取到最大值. 于是

$$g_n(x) \leq g_n\left(\frac{n}{n+1}\right) = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n\left(1 - \frac{n}{n+1}\right) = \frac{1}{(1+1/n)^n}\cdot\frac{1}{n+1} \to 0.$$

因此 $g_n(x)$ 一致趋于零. 由 Dirichlet 判别法可知 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ 在 $[0,1]$ 上一致收敛.

(iii) 容易看出 $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n(x)|$ 在 $[0,1]$ 上的和函数为

$$S(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0,1) \\ 0, & x = 1. \end{cases}.$$

令 $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n(x)|$ 的部分和函数列

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} x^k(1-x) = (1-x)\sum_{k=0}^{n} x^k = 1 - x^{n+1}, \quad n = 1, 2, \cdots.$$

由于

$$\beta_n = \sup_{x\in[0,1]} |S_n(x) - S(x)| \geq \left|S_n\left(\frac{1}{\sqrt[n+1]{2}}\right) - S\left(\frac{1}{\sqrt[n+1]{2}}\right)\right| = \left|\frac{1}{2} - 1\right| = \frac{1}{2}.$$

因此 $\{\beta_n\}$ 不趋于零. 于是可知 $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n(x)|$ 在 $[0,1]$ 上不一致收敛. ■

以上几个例子说明绝对收敛和一致收敛是两个完全不一样的概念.

### 2.3.3 极限号积分号微分号与求和号的换序问题

前面已经看到一般来说换序总是不成立的. 但在一致收敛之下, 换序都成立.

先讨论连续.

**定理 2.37 (极限号的换序定理)**

设 $I$ 上的连续函数列 $\{f_n(x)\}$. 若 $\{f_n(x)\}$ 在 $I$ 上一致收敛于 $f$, 则 $f$ 也在 $I$ 上连续, 即

$$\lim_{x\to x_0}\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty}\lim_{x\to x_0} f_n(x), \quad \forall x_0 \in I.$$

♡

**证明** 由于 $\{f_n(x)\}$ 在 $I$ 上一致收敛于 $f$, 故对于任一 $\varepsilon > 0$, 可找到一个充分大的 $N$ 使得对于任一 $x \in I$ 都有

$$|f_N(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

任取 $x_0 \in I$, 由于 $f_N$ 在 $I$ 上连续, 故对于以上给定的 $\varepsilon$, 存在 $\delta > 0$ 使得当 $x \in I \cap N_\delta(x_0)$ 时

$$|f_N(x) - f_N(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

于是当 $x \in I \cap N_\delta(x_0)$ 时有

$$|f(x) - f(x_0)| \leq |f(x) - f_N(x)| + |f_N(x) - f_N(x_0)| + |f_N(x_0) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

于是可知 $f$ 在 $x_0$ 处连续, 这表明 $f$ 在 $I$ 上连续. 于是对于任一 $x \in I$ 都有

$$\lim_{x\to x_0}\left[\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right] = \lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0) = \lim_{n\to\infty} f_n(x_0) = \lim_{n\to\infty}\left[\lim_{x\to x_0} f_n(x)\right].$$ ■

对应到函数项级数就是以下定理.

**定理 2.38 (极限号与求和号的换序定理)**

设 $I$ 上的函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$. 若 $f_n\ (n = 1, 2, \cdots)$ 在 $I$ 上都连续, 且 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ 在 $I$ 上一致收敛于 $S(x)$,

则 $S(x)$ 也在 $I$ 上连续, 即

$$\lim_{x\to x_0}\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\lim_{x\to x_0} f_n(x),\quad \forall x_0\in I.$$

**证明** 由于 $f_n\ (n=1,2,\cdots)$ 在 $I$ 上都连续, 故 $\sum_{k=1}^{n} f_k(x)\ (n=1,2,\cdots)$ 在 $I$ 上都连续. 由于 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ 在 $I$ 上一致收敛于 $S(x)$, 因此 $S(x)$ 也在 $I$ 上连续. 于是对于任一 $x\in I$ 都有

$$\lim_{x\to x_0}\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)=\lim_{x\to x_0} S(x)=S(x_0)=\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x_0)=\sum_{n=1}^{\infty}\lim_{x\to x_0} f_n(x).$$ ■

由以上定理就可以求由级数确定的连续函数的极限.

**例 2.60** 设函数

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{3^n}\cos n\pi x^2.$$

求 $\lim_{x\to 1} f(x)$.

**证明** 当 $x\in[-2,2]$ 时

$$\left|\frac{x^n}{3^n}\cos n\pi x^2\right|\leq\left(\frac{2}{3}\right)^n.$$

由于正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(2/3)^n$ 收敛, 由 Weierstrass 判别法可知原级数在 $[-2,2]$ 上一致收敛. 于是

$$\lim_{x\to 1} f(x)=\lim_{x\to 1}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{3^n}\cos n\pi x^2=\sum_{n=1}^{\infty}\lim_{x\to 1}\frac{x^n}{3^n}\cos n\pi x^2=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}\cos n\pi=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3^n}=\frac{3}{4}.$$ ■

例2.52中已经证明 $\sum_{n=1}^{\infty} n\,\mathrm{e}^{-nx}$ 在 $(0,+\infty)$ 上不一致收敛, 但它的和函数在 $(0,+\infty)$ 上连续. 这是因为它在 $(0,+\infty)$ 上内闭一致收敛.

**例 2.61** 函数 $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} n\,\mathrm{e}^{-nx}$ 在 $(0,+\infty)$ 上连续.

**证明** 在 $(0,+\infty)$ 中任取一点 $x_0$, 则一定存在 $\delta$, 满足 $0<\delta<x_0$. 由例2.55可知 $\sum_{n=1}^{\infty} n\,\mathrm{e}^{-nx}$ 在 $[\delta,+\infty)$ 上一致收敛. 因此 $f(x)$ 在 $x_0$ 处连续. 由于 $x_0$ 是 $(0,+\infty)$ 中的任意一点, 于是可知 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上连续. ■

从上例可见, 确保连续只需要内闭一致收敛就够了.

**命题 2.15**

若开区间 $I$ 上的连续函数列在开区间 $I$ 上内闭一致收敛于 $f$, 则 $f$ 在 $I$ 上连续.

**命题 2.16**

若开区间 $I$ 上的函数项级数的每一项都在 $I$ 上连续, 且它在开区间 $I$ 上内闭一致收敛于 $S(x)$, 则 $Sx)$ 在 $I$ 上连续.

**例 2.62** 以下函数在 $\mathbb{R}$ 上连续:

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x}{\ln n}\right)^n.$$

**证明** 对于任一 $M>0$, 当 $|x|\leq M$ 时

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x}{\ln n}\right)^n\right|=\left(\frac{|x|}{\ln n}\right)^n\leq\left(\frac{M}{\ln n}\right)^n.$$

由于

$$\sqrt[n]{\left(\frac{M}{\ln n}\right)^n} = \frac{M}{\ln n} \to 0.$$

由正项级数的 Cauchy 判别法可知 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{M}{\ln n}\right)^n$ 收敛. 于是由 Weierstrass 判别法可知原级数在 $[-M, M]$ 上一致收敛. 因此 $f(x)$ 在 $[-M, M]$ 上连续. 由于 $M$ 是任一正数, 于是可知 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上连续. ■

以上讨论表明, 若 $I$ 上的连续函数列 $\{f_n\}$ 一致收敛于 $f$, 则 $f$ 在 $I$ 上也连续. 那么反过来, 若 $I$ 上的连续函数列 $\{f_n\}$ 的极限函数 $f$ 在 $I$ 上连续, 是否可以断言 $\{f_n\}$ 一致收敛于 $f$? 一般来说这是不成立的, 比较以下两个例子.

**例 2.63** 设 $(-1,1)$ 上的连续函数列 $\{x^n\}$, 它的极限函数是 $f(x) \equiv 0$, 它在 $(-1,1)$ 上连续. 但 $\{x^n\}$ 在 $(-1,1)$ 上不一致收敛.

**例 2.64** 设 $[-1+\varepsilon, 1-\varepsilon]$ $(0 < \varepsilon < 1)$ 上的连续函数列 $\{x^n\}$ 收敛到 $\mathbf{0}$, 此时 $\{x^n\}$ 在 $[-1+\varepsilon, 1-\varepsilon]$ 上一致收敛.

上例之所以能让 $\{x^n\}$ 在 $[-1+\varepsilon, 1-\varepsilon)$ 上一致收敛于 $\mathbf{0}$. 是因为对于每一个 $x \in [-1+\varepsilon, 1-\varepsilon]$ 数列 $\{x^n\}$ 都递减趋于零, 且 $[-1+\varepsilon, 1-\varepsilon]$ 是一个有限闭区间. 于是就有以下定理.

**定理 2.39 (函数列的 Dini 定理)**

设有限闭区间 $[a,b]$ 上的连续函数列 $\{f_n\}$. 若对于任一 $x \in [a,b]$, 数列 $\{f_n(x)\}$ 都递减趋于零. 则 $\{f_n\}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛于 $\mathbf{0}$.

**证明** 由于对于任一 $x_0 \in [a,b]$, 数列 $\{f_n(x)\}$ 都递减趋于零, 因此对于任一 $\varepsilon > 0$ 都存在 $N_{x_0}$ 使得 $0 \le f_{N_{x_0}}(x_0) < \varepsilon$. 由于 $f_{N_{x_0}}$ 在 $x_0$ 处连续, 故存在 $\delta_{x_0} > 0$ 使得当 $x \in [a,b] \cap (x_0 - \delta_{x_0}, x_0 + \delta_{x_0})$ 时都有 $0 \le f_{N_{x_0}}(x) < \varepsilon$. 令

$$C = \bigcup_{x \in [a,b]} (x - \delta_x, x + \delta_x).$$

显然 $C$ 是 $[a,b]$ 的一个开覆盖. 由 Heine-Borel 定理可知存在一个有限子覆盖

$$C' = \bigcup_{i=1}^{m} (x_i - \delta_{x_i}, x_i + \delta_{x_i}).$$

令 $N = \max\{N_{x_1}, N_{x_2}, \cdots, N_{x_m}\}$. 当 $n \ge N$ 时, 任取 $x \in [a,b]$, 由于 $C'$ 是 $[a,b]$ 的一个开覆盖, 故存在 $(x_i - \delta_{x_i}, x_i + \delta_{x_i}) \ni x$, 因此 $0 \le f_{N_i}(x) < \varepsilon$. 由于 $n > N \ge N_{x_i}$, 且数列 $\{f_n(x_i)\}$ 递减, 因此

$$0 \le f_n(x) \le f_{N_i}(x) < \varepsilon.$$

这表明 $\{f_n\}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛于 $\mathbf{0}$. ■

**注** 以上定理是用意大利数学家 Ulisse Dini 命名的.

从证明过程可见, 以上定理的成立依赖于有限覆盖定理的成立, 因此依赖于有限闭区间这个条件.

下面是函数项级数的 Dini 定理.

**定理 2.40 (函数项级数的 Dini 定理)**

设函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ 中的每一项都在有限闭区间 $[a,b]$ 上非负且连续. 若它的和函数 $S(x)$ 也在 $[a,b]$ 上连续, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛.

**证明** 设部分和函数列 $S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x)$ $(n = 1, 2, \cdots)$. 令

$$R_n(x) = S(x) - S_n(x), \quad n = 1, 2, \cdots.$$

由于 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ 中的每一项都非负, 因此 $\{S_n\}$ 递增趋于 $S(x)$. 因此 $\{R_n(x)\}$ 递减趋于零. 由于 $S(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续. 由函数列的 Dini 定理可知 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛. ■

**例 2.65**

**证明**

接下来讨论积分的问题.

**定理 2.41 (积分号和极限号的换序定理)**

设 $[a,b]$ 上的 Riemann 可积函数列 $\{f_n\}$. 若 $\{f_n\}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛于 $f$, 则 $f$ 也在 $[a,b]$ 上 Riemann 可积, 且

$$\int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x.$$

**证明** (i) 由于 $\{f_n\}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛于 $f$, 故存在 $N\in\mathbb{N}^*$ 对于任一 $x\in[a,b]$ 都满足

$$|f(x)-f_N(x)|\le 1.$$

由于 $f_N$ 在 $[a,b]$ 上 Riemann 可积, 因此在 $[a,b]$ 上有界, 故存在 $M>0$ 使得 $|f_N(x)|\le M$. 于是

$$|f(x)|\le |f_N(x)|+1\le M+1.$$

因此 $f$ 也在 $[a,b]$ 上有界.

把 $f$ 和 $f_n$ 在 $[a,b]$ 上的不连续点的全体记作 $D(f),D(f_n)$ $(n=1,2,\cdots)$. 任取 $x_0\in D(f)$. 若 $f_n$ $(n=1,2,\cdots)$ 都在 $x_0$ 处连续, 则 $f$ 也在 $x_0$ 处连续. 因此一定存在 $f_i$ 在 $x_0$ 处不连续, 即 $x_0\in\bigcup_{n=1}^{\infty}D(f_n)$. 因此

$$D(f)\subseteq\bigcup_{n=1}^{\infty}D(f_n).$$

由于 $f_n$ 在 $[a,b]$ 上 Riemann 可积, 由 Lebesgue 定理可知 $D(f_n)$ $(n=1,2,\cdots)$ 都是零测集. 因此 $D(f)$ 也是一个零测集. 由 Lebesgue 定理可知 $f$ 也在 $[a,b]$ 上 Riemann 可积.

(ii) 由于 $\{f_n\}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛于 $f$, 故对于任一 $\varepsilon>0$, 存在 $N_\varepsilon\in\mathbb{N}^*$ 使得当 $n>N_\varepsilon$ 时, 对于任一 $x\in[a,b]$ 都有

$$|f_n(x)-f(x)|<\frac{\varepsilon}{b-a}.$$

于是

$$\left|\int_a^b f_n(x)-\int_a^b f(x)\right|\le\int_a^b |f_n(x)-f(x)|\,\mathrm{d}x<\varepsilon.$$

于是可知

$$\int_a^b\left[\lim_{n\to\infty}f_n(x)\right]\mathrm{d}x=\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\left[\int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x\right].$$ ■

由于 $[a.b]$ 上的连续函数可积, 因此立刻可知以下推论.

**推论 2.4**

设 $[a,b]$ 上的连续函数列 $\{f_n\}$. 若 $\{f_n\}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛于 $f$, 则

$$\int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x.$$

函数项级数对应的结论如下.

**定理 2.42 (积分号和求和号的换序定理)**

设函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}f_n(x)$ 的每一项都在 $[a,b]$ 上 Riemann 可积. 若 $\sum_{n=1}^{\infty}f_n(x)$ 一致收敛于 $S(x)$, 则 $S(x)$

也在 $[a,b]$ 上 Riemann 可积, 且

$$\int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x.$$

对应地有以下推论.

**推论 2.5**

设函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ 的每一项都在 $[a,b]$ 上连续. 若 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ 一致收敛于 $S(x)$, 则 $S(x)$ 也在 $[a,b]$ 上 Riemann 可积, 且

$$\int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x.$$

**例 2.66** 设函数

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}.$$

求 $\int_0^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x$.

**解** 由于 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}$ 在 $\mathbb{R}$ 上一致收敛, 于是由积分号与求和号的换序定理可知

$$\int_0^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}\,\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\pi} \frac{\cos nx}{n^2}\,\mathrm{d}x = 0.$$ ■

接下来讨论微分的问题.

**定理 2.43 (微分号与极限号的换序定理)**

设 $[a,b]$ 上的连续可导的函数列 $\{f_n\}$. 若导函数列 $\{f_n'\}$ 在 $[a,b]$ 一致收敛于 $g$, 且存在 $x_0 \in [a,b]$ 使得数列 $\{f_n(x_0)\}$ 收敛. 则 $\{f_n\}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛于连续可导的函数 $f$. 且对于任一 $x \in [a,b]$ 都满足

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f_n(x).$$

**证明** 由于数列 $\{f_n(x_0)\}$ 收敛, 由 Cauchy 收敛原理可知, 对于任一 $\varepsilon > 0$ 都存在 $N_1 \in \mathbb{N}^*$ 使得当 $m, n > N_1$ 时

$$|f_n(x_0) - f_m(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

由于 $\{f_n'\}$ 在 $[a,b]$ 一致收敛, 由 Cauchy 收敛原理可知, 对于以上给定的 $\varepsilon$ 都存在 $N_2 \in \mathbb{N}^*$ 使得当 $m, n > N_2$ 时对于任一 $x \in [a,b]$ 都有

$$|f_n'(x) - f_m'(x)| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}.$$

由 Newton-Leibniz 公式可知, 对于任一 $x \in [a,b]$ 都有

$$f_n(x) = f_n(x_0) + \int_{x_0}^{x} f_n'(t)\,\mathrm{d}t. \tag{2.15}$$

$$f_m(x) = f_m(x_0) + \int_{x_0}^{x} f_m'(t)\,\mathrm{d}t.$$

令 $N = \max\{N_1, N_2\}$. 当 $m, n > N$ 时

$$|f_m(x) - f_n(x)| \leq |f_m(x_0) - f_n(x_0)| + \left| \int_{x_0}^{x} \left[ f_m'(t) - f_n'(t) \right] \mathrm{d}t \right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2(b-a)} |x - x_0| < \varepsilon.$$

由 Cauchy 收敛原理可知 $\{f_n\}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛. 设它的极限函数为 $f$. 由于 $\{f_n'\}$ 在 $[a,b]$ 一致收敛于 $g$, 由积分号与极限号的换序定理可知

$$\int_{x_0}^{x} g(x)\,\mathrm{d}x = \int_{x_0}^{x} \lim_{n\to\infty} f_n'(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \int_{x_0}^{x} f_n'(x)\,\mathrm{d}x.$$

令等式2.15中的 $n \to \infty$ 可得

$$f(x) = f(x_0) + \int_{x_0}^{x} g(x)\,\mathrm{d}x.$$

于是可知

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[f(x_0) + \int_{x_0}^{x} g(x)\,\mathrm{d}x\right] = g(x) = \lim_{n\to\infty}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f_n(x).$$ ■

函数项级数对应的结论如下.

**定理 2.44 (微分号与求和号的换序定理)**

设函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ 的每一项都在 $[a,b]$ 上连续可导. 若 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n'$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛于 $g$, 且存在 $x_0 \in [a,b]$ 使得级数 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x_0)$ 收敛. 则 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛于连续可导的函数 $S(x)$. 且对于任一 $x \in [a,b]$ 都满足

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f_n(x).$$

**例 2.67** 设函数

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^4}.$$

则 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上有连续的二阶导函数, 并计算 $f''(x)$.

**解** 容易看出, 原级数每一项求导后所得的级数都在 $\mathbb{R}$ 上一致收敛, 因此

$$f'(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^4} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\sin nx}{n^4}\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^3}.$$

容易看出这个每一项求导后所得的级数都在 $\mathbb{R}$ 上一致收敛, 因此

$$f''(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^3} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\cos nx}{n^3}\right) = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^2}.$$ ■

下面来总结一下本节讨论的 6 个换序定理.

| | 函数列 | 函数项级数 |
|---|---|---|
| 连续 | $\lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = \lim\limits_{n\to\infty}\lim\limits_{x\to x_0} f_n(x), \quad \forall x_0 \in I$ | $\lim\limits_{x\to x_0}\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\lim\limits_{x\to x_0} f_n(x), \quad \forall x_0 \in I$ |
| 积分 | $\int_a^b \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x = \lim\limits_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x$ | $\int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty}\int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x$ |
| 微分 | $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f_n(x)$ | $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f_n(x)$ |

19 世纪伟大的数学家 Cauchy 在他的经典名作《分析教程》中断言:'' 若连续的函数项级数收敛, 则和函数也连续.'' 根据本节的讨论, 我们知道 Cauchy 的观点是错误的. 后来 Abel 举例证明了 Cauchy 的错误, 这个例子将在后面讨论.

## 2.4 幂级数

### 2.4.1 幂级数的敛散性

**定义 2.14 (幂级数)**

设级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n = a_0 + a_1(x-x_0) + \cdots + a_n(x-x_0)^n + \cdots.$$

它的每一项都是幂函数. 这样的函数项级数称为**幂级数** (power series).

注 若 $a_{n+1} = a_{n+2} = \cdots = 0$, 则幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ 就退化为一个 $n$ 次多项式

$$\sum_{k=0}^{n} a_k(x-x_0)^k = a_0 + a_1(x-x_0) + \cdots + a_n(x-x_0)^n.$$

反之也可以把幂级数看作 "无穷次" 的多项式.

为了简便, 经常令幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ 中的 $x_0 = 0$, 得到 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^n$.
首先来研究幂级数的收敛点集.

**定理 2.45 (Abel 第一定理)**

设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.

(1) 若它在 $x = x_0 \neq 0$ 处收敛, 则它一定在区间 $(-|x_0|, |x_0|)$ 上绝对收敛.

(2) 若它在 $x = x_1$ 处发散, 则它一定在区间 $(-\infty, -|x_1|) \cup (|x_1|, +\infty)$ 上发散.

证明 (1) 由于 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在 $x = x_0 \neq 0$ 处收敛, 故存在 $M > 0$ 使得 $|a_n x_0^n| \leq M$ $(n = 1, 2, \cdots)$. 当 $|x| < |x_0|$ 时

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n x^n| = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n x_0^n| \left|\frac{x}{x_0}\right|^n \leq M \sum_{n=0}^{\infty} \left|\frac{x}{x_0}\right|^n$$

由正项级数的比较判别法可知 $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n x^n|$ 收敛. 于是可知 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在区间 $(-|x_0|, |x_0|)$ 上绝对收敛.

(2) 当 $|x| > |x_1|$ 时, 假设 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 收敛, 由 (1) 可知 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_1^n$ 绝对收敛, 出现矛盾. 于是可知 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在区间 $(-\infty, -|x_1|) \cup (|x_1|, +\infty)$ 上发散. ■

**定理 2.46 (Cauchy-Hadamard 定理)**

设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. 令

$$R = \frac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$$

(1) 当 $R = 0$ 时, 级数只在 $x = 0$ 处收敛.

(2) 当 $R = +\infty$ 时, 级数在 $\mathbb{R}$ 上收敛.

(3) 当 $R \in \mathbb{R}^+$ 时, 级数在 $(-R, R)$ 上绝对收敛, 在 $(-\infty, -R) \cup (R, +\infty)$ 上发散.

证明 (1) 级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在 $x = 0$ 处显然收敛. 任取 $x_0 \neq 0$. 不妨设 $x_0 > 0$. 假设 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n$ 收敛, 取 $x_1 \in (0, x_0)$, 由 Abel 定理可知 $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n x_1^n|$ 绝对收敛. 当 $R = 0$ 时, 对于 $x \neq 0$ 有

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n x^n|} = x \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = +\infty.$$

由正项级数的 Cauchy 判别法可知 $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n x^n|$ 发散, 出现矛盾. 于是可知 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 只在 $x = 0$ 处收敛.

(2) 当 $R=+\infty$ 时

$$\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_nx^n|}=x\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=0.$$

由正项级数的 Cauchy 判别法可知 $\sum_{n=0}^{\infty}|a_nx^n|$ 收敛. 于是可知 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 在 $\mathbb{R}$ 收敛.

(3) 当 $R\in\mathbb{R}^+$ 时, 由于

$$\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_nx^n|}=\frac{|x|}{R}.$$

由正项级数的 Cauchy 判别法可知, 当 $x\in(-R,R)$ 时 $|x|/R<1$, 因此级数绝对收敛. 任取 $x_0\in(-\infty,-R)\cup(R,+\infty)$, 则 $|x_0|>R$. 假设 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx_0^n$ 收敛. 取 $x_1\in(R,|x_0|)$. 由 Abel 定理可知 $\sum_{n=0}^{\infty}|a_nx_1^n|$ 绝对收敛. 但

$$\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_nx_1^n|}=\frac{|x_1|}{R}=\frac{x_1}{R}>1.$$

由正项级数的 Cauchy 判别法可知 $\sum_{n=0}^{\infty}|a_nx_1^n|$ 发散, 出现矛盾. 于是可知 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 在 $(-\infty,-R)\cup(R,+\infty)$ 上发散.

注 以上定理是 Cauchy 于 1821 年首次发表的, 但 Cauchy 的成果太多, 这个定理未被人注意到. 后来法国数学家 Jacques Salomon Hadamard 从 Cauchy 的故纸堆里发现了这个定理并于 1888 年再度发表. 1892 年他还将这个定理写入了自己的博士论文.

注 以上定理中的 $R$ 称为幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的**收敛半径** (radius of convergence). 区间 $(-R,R)$ 称为收敛区间.

下面来看计算收敛半径的例子.

**例 2.68** 求以下幂级数的收敛半径:

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}nx^n$.　　(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}n^nx^n$.

**解** 计算得

(1) $R=\dfrac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|n|}}=1.$　　(2) $R=\dfrac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|n^n|}}=0.$ ■

**例 2.69** 求幂级数 $\sum_{k=0}^{\infty}2^kx^{2k}$ 的收敛半径.

**解** 当 $n=2k$ 时 $a_n=2^k$, 当 $n=2k+1$ 时 $a_n=0$.

$$R=\frac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}}=\frac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty}\sqrt[2k]{2^k}}=2\sqrt{2}.$$ ■

由定理2.9可知不等式:

$$\liminf_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}z\right|\le\liminf_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}\le\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}\le\limsup_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}z\right|.$$

于是可知当 $|a_{n+1}|/|a_n|$ 收敛时, 有

$$\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|.$$

**命题 2.17**

设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$. 若

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=R.$$

则 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的收敛半径就是 $R$.

有时候 $|a_n/a_{n+1}|$ 的极限比较容易求出. 下面看两个例子.

**例 2.70** 求以下幂级数的收敛半径:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}.$$

**解** 设 $a_n = 1/n!\ (n = 1, 2, \cdots)$. 由于

$$\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \frac{1}{n!}\cdot(n+1)! = n+1 \to +\infty.$$

于是可知级数的收敛半径为 $+\infty$. ■

**例 2.71** 求以下幂级数的收敛半径:

$$\sum_{n=1}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)x^n.$$

**解** 设 $a_n = 1 + 1/2 + \cdots + 1/n\ (n = 1, 2, \cdots)$. 由于

$$\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \frac{1+1/2+\cdots+1/n}{1+1/2+\cdots+1/(n+1)} \to 1$$

于是可知级数的收敛半径为 1. ■

当 $R \in \mathbb{R}^+$ 时, Cauchy-Hadamard 定理只能确定幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在 $(-R, R)$ 上收敛, 在 $(-\infty, -R) \cup (R, +\infty)$ 上发散. 对于 $x = \pm R$ 处的情况是无法判断的. 下面举例说明.

**例 2.72** 设 3 个幂级数

(1) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n}$.　　(2) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n^2}$.　　(3) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} nx^n$.

它们的收敛半径都是 1. 因此它们都在 $(-1, 1)$ 上收敛. 但

(1) $\sum_{n=0}^{\infty} x^n/n$ 在 $x = -1$ 处收敛, 在 $x = 1$ 处发散.

(2) $\sum_{n=0}^{\infty} x^n/n^2$ 在 $x = \pm 1$ 处收敛.

(3) $\sum_{n=0}^{\infty} nx^n$ 在 $x = \pm 1$ 处发散.

由 Cauchy-Hadamard 定理可知, 幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在 $(-R, R)$ 上确定了一个函数 $S(x)$. 下面来研究幂级数在收敛区间内确定的函数的性质. 为此首先要搞清 $S(x)$ 在 $(-R, R)$ 是否一致收敛. 一般来说, 无法确保一致收敛, 例如幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ 在 $(-1, 1)$ 内不一致收敛. 虽然如此, 我们只需把 $(-R, R)$ "缩小一点点" 就可以让幂级数一致收敛.

**定理 2.47**

设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. 若它的收敛半径为 $R$, 则它在 $(-R, R)$ 上内闭一致收敛, 即对于任一 $r \in (0, R)$, 级数在 $[-r, r]$ 上都一致收敛. ♡

**证明** 当 $x \in [-r, r]$ 时,

$$|a_n x^n| \le |a_n| r^n.$$

由 Cauchy-Hadamard 定理可知 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在 $(-R, R)$ 内绝对收敛, 因此 $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| r^n$ 收敛, 由 Weierstrass 判别法可知 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在 $[-r, r]$ 上一致收敛. ■

以上定理确保了幂级数的和函数不仅在收敛区间内是连续的, 而且是任意阶可导的!

**定理 2.48 (幂级数的导数)**

设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. 若它的收敛半径为 $R$, 则和函数 $S(x)$ 在 $(-R, R)$ 内连续, 且在 $(-R, R)$ 内存在任意阶导数, 且

$$S^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-k+1) a_n x^{n-k}, \quad k = 1, 2, \cdots. \tag{2.16}$$

**证明** 由于 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在 $(-R, R)$ 上内闭一致收敛, 因此 $S(x)$ 在 $(-R, R)$ 上连续. 容易知道 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的各项连续可导, 逐项求导后得级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(a_n x^n) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}.$$

由于

$$\limsup_{n\to\infty}[n]\sqrt{|na_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}.$$

由 Cauchy-Hadamard 定理可知 $\sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ 的收敛半径仍旧是 $R$, 因此该级数也在 $(-R, R)$ 上内闭一致收敛. 于是在 $(-R, R)$ 的任一闭子区间内都有

$$S'(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(a_n x^n) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}.$$

因此上式在 $(-R, R)$ 上也成立. 继续按上述方法操作可知 $S(x)$ 在 $(-R, R)$ 内存在任意阶导数, 且等式2.16成立. ■

**定理 2.49 (幂级数的积分)**

设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. 若它的收敛半径为 $R$, 则它的和函数 $S(x)$ 对于任一 $x \in (-R, R)$ 都满足

$$\int_0^x S(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}.$$

且上式右边的幂级数的收敛半径仍是 $R$.

**证明** 不妨设 $x \in (0, R)$. 由于 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在 $(-R, R)$ 上内闭一致收敛, 因此它在 $[0, x]$ 上一致收敛, 且在 $[0, x]$ 上可以逐项积分, 因此

$$\int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x a_n x^n \,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}.$$

由于

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{a_n}{n+1}\right|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n+1}} \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}.$$

由 Cauchy-Hadamard 定理可知 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$ 的收敛半径仍旧是 $R$.

以上两个定理表明, 幂级数和多项式从导数与积分两个角度看确有相似之处.
利用幂级数的导数或积分可以求出一些幂级数的和函数.

**例 2.73** 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} n x^n$ $(|x| < 1)$ 的和函数.

**解** 当 $|x| < 1$ 时, 我们有

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}.$$

对两边求导得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{1-x}\right) \iff \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2} \iff \sum_{n=1}^{\infty} n x^n = \frac{x}{(1-x)^2}.$$ ■

利用幂级数的导数或积分也可以把一些初等函数展开成幂级数.

**例 2.74** 把函数 $\arctan x$ $(|x|<1)$ 展开成幂级数.

**解** 当 $|x|<1$ 时有等式

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}=\sum_{n=0}^{\infty}(-x^2)^n=\frac{1}{1+x^2}.$$

对两边求 $[0,x]$ 上的积分得

$$\int_0^x \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}=\int_0^x \frac{1}{1+x^2} \iff \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}=\arctan x. \qquad \blacksquare$$

**例 2.75** 把函数 $\ln(1+x)$ $(|x|<1)$ 展开成幂级数.

**解** 当 $|x|<1$ 时有等式

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n=\sum_{n=0}^{\infty}(-x)^n=\frac{1}{1+x}.$$

对两边求 $[0,x]$ 上的积分得

$$\int_0^x \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n=\int_0^x \frac{1}{1+x} \iff \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}x^{n+1}=\ln(1+x) \iff \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n=\ln(1+x). \qquad \blacksquare$$

以上例子求出了对数函数的幂级数展开式. 根据这个公式可以求出一些交错级数的和:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\left(\frac{1}{2}\right)^n=\ln\frac{3}{2}.$$

之前已经用 Euler 常数求出了以下交错级数的和:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}=\ln 2.$$

这恰好符合对数函数的幂级数展开式. 这表明 $x=1$ 时公式也成立. 下面来研究收敛区间端点处的性质.

**定理 2.50 (Abel 第二定理)**

设幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n x^n$ 的收敛半径为 $R$. 若 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n R^n$ 收敛于 $A$. 则

$$\lim_{x\to R-}\sum_{n=1}^{\infty}a_n x^n=A.$$

**证明** 我们有等式

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n x^n=\sum_{n=1}^{\infty}a_n R^n\left(\frac{x}{R}\right)^n.$$

由于 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n x^n$ 在 $x=R$ 处收敛, 故 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n R^n$ 收敛. 由于对于任一 $x\in[0,R]$ 数列 $\{(x/R)^n\}$ 都是递减的, 且 $\{(x/R)^n\}$ 一致有界. 由 Abel 判别法可知 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n x^n$ 在 $[0,R]$ 上一致收敛. 因此和函数 $S(x)$ 在 $x=R$ 处左连续. 于是可知

$$\lim_{x\to R-}\sum_{n=1}^{\infty}a_n R^n=\lim_{x\to R-}S(x)=S(R)=A. \qquad \blacksquare$$

**注** 以上定理表明, 若 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n x^n$ 在 $x=R$ 处收敛, 则它的和函数 $S(x)$ 在 $x=R$ 处左连续. 同理可知, 若 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n x^n$ 在 $x=-R$ 处收敛, 则 $S(x)$ 在 $x=-R$ 处右连续.

利用 Abel 第二定理可以再来求级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}$ 的和.

**例 2.76** 求以下级数的和:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}.$$

**解** 由例2.75可知

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n=\ln(1+x),\quad \forall x\in(-1,1).$$

由 Leibniz 判别法可知上式左边的级数在 $x=1$ 处收敛. 因此由 Abel 第二定理可知它的和函数 $S(x)$ 在 $x=1$ 处左连续. 于是可知

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}=S(1)=\lim_{x\to 1-}\ln(1+x)=\ln 2.$$

■

再看一个类似的例子.

**例 2.77** 求以下级数的和:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}.$$

**解** 由例2.74可知

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}=\arctan x,\quad \forall x\in(-1,1).$$

由 Leibniz 判别法可知上式左边的级数在 $x=1$ 处收敛. 因此由 Abel 第二定理可知它的和函数 $S(x)$ 在 $x=1$ 处左连续. 于是可知

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}=S(1)=\lim_{x\to 1-}\arctan x=\arctan 1=\frac{\pi}{4}.$$

■

受上例的启发, 有时候为了求级数的和, 可以构造类似的幂级数.

**例 2.78** 求以下级数的和:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3n+1}.$$

**解** 设幂级数

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}.$$

容易看出它的收敛半径为 1. 设它在 $(-1,1)$ 上收敛到 $S(x)$. 由 Leibniz 判别法可知以上级数在 $x=1$ 处收敛. 因此由 Abel 第二定理可知 $S(x)$ 在 $x=1$ 处左连续, 即

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3n+1}=S(1)=\lim_{x\to 1-}S(x).$$

由于 $S(0)=0$, 且

$$S'(x)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3n+1}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\frac{(-1)^n}{3n+1}\right]=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n x^{3n}=\frac{1}{1+x^3}.$$

于是可知

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3n+1}&=\lim_{x\to 1-}S(x)=\lim_{x\to 1}\int_0^x S'(t)\,\mathrm{d}t=\int_0^1\frac{1}{1+t^3}\,\mathrm{d}t=\int_0^1\left[\frac{1}{3(t+1)}+\frac{-t+2}{3\left(t^2-t+1\right)}\right]\mathrm{d}t\\&=\int_0^1\frac{1}{3(t+1)}\,\mathrm{d}t+\int_0^1\frac{-t+2}{3\left(t^2-t+1\right)}\,\mathrm{d}t=\frac{\ln 2}{3}+\frac{\pi}{3\sqrt{3}}.\end{aligned}$$

很自然地要问, Abel 第二定理的逆命题是否成立? 为了简单起见, 假设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径为 1. 若 $\lim_{x\to 1-}\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = A$ 存在, 是否可以断言 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = A$? 我们来看两个例子.

**例 2.79** 讨论以下两个幂级数是否满足 Abel 第二定理的逆命题:

(1) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n$.　　(2) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n^2}$.

**解** (1) 级数 $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n$ 的收敛半径为 1. 因此它在 $(-1,1)$ 上收敛, 且

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n = \frac{1}{1+x}.$$

因此

$$\lim_{x\to 1-}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n = \lim_{x\to 1-}\frac{1}{1+x} = \frac{1}{2}.$$

但 $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n$ 在 $x=1$ 处发散. 因此该级数不满足 Abel 第二定理的逆命题.

(2) 级数 $\sum_{n=0}^{\infty} x^n/n^2$ 的收敛半径为 1. 显然它在 $x=1$ 处收敛, 由 Abel 定理可知它在 $x=1$ 处左连续. 因此

$$\lim_{x\to 1-}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n^2} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n^2}.$$

这表明该级数满足 Abel 第二定理的逆命题.

从上面的讨论可知, Abel 定理的逆命题是不一定成立. 但适当增加条件就可以使 Abel 第二定理的逆命题成立. 观察上例, (2) 中 $a_n = 1/n^2$ 是 $1/n$ 的一个高阶无穷小. 于是得到以下定理.

**定理 2.51 (Tauber 定理)**

设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径为 1. 若 $na_n \to 0$ 且

$$\lim_{x\to 1-}\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = A,$$

则 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = A$.

**证明** 设 $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ $(0 \le x < 1)$. 则对于任一 $N \in \mathbb{N}^*$ 都有

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{N} a_n - A &= \sum_{n=0}^{N} a_n - S(x) + S(x) - A = \sum_{n=0}^{N} a_n - \sum_{n=0}^{N} a_n x^n - \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n x^n + S(x) - A \\ &= \sum_{n=0}^{N} a_n(1-x^n) - \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n x^n + [S(x) - A].\end{aligned}$$

令上式最右边三项分别 $I_1(x), I_2(x), I_3(x)$. 令 $\delta_n = \sup_{k\ge n}\{|ka_k|\}$ $(n=1,2,\cdots)$, 则 $\{\delta_n\}$ 单调递减. 由于 $na_n \to 0$, 故 $\delta_n \to 0$. 于是对于任一 $x \in [0,1)$ 都有

$$\begin{aligned}|I_1(x)| &= \left|\sum_{n=0}^{N} a_n(1-x^n)\right| \le \sum_{n=0}^{N}|a_n(1-x^n)| = (1-x)\sum_{n=0}^{N}|a_n|(1+x+\cdots+x^{n-1}) \\ &\le (1-x)\sum_{n=0}^{N} n|a_n| \le (1-x)N\delta_1.\end{aligned}$$

$$|I_2(x)| = \left|\sum_{n=N+1}^{\infty} a_n x^n\right| \le \sum_{n=N+1}^{\infty}|na_n|\frac{x^n}{n} \le \frac{\delta_N}{N}\sum_{n=N+1}^{\infty} x^n = \frac{\delta_N}{N}\cdot\frac{x^{N+1}}{1-x} \le \frac{\delta_N}{N(1-x)}.$$

令

$$x_N = 1 - \frac{\sqrt{\delta_N}}{N} \iff N(1-x_N) = \sqrt{\delta_N}.$$

当 $N\to\infty$ 时 $x_N\to 1$. 于是

$$|I_1(x)|\le \delta_0\sqrt{\delta_N},\quad |I_2(x)|\le \frac{\delta_N}{\sqrt{\delta_N}}=\sqrt{\delta_N}.$$

于是

$$\left|\sum_{n=0}^{N}a_n-A\right|=I_1(x)+I_2(x)+I_3(x)\le \delta_0\sqrt{\delta_N}+\sqrt{\delta_N}+|S(x_N)-A|.$$

令 $N\to\infty$ 即得 $\sum_{n=0}^{\infty}a_n=A$. ■

如果 $\{a_n\}$ 非负, 意味着 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 单调递增. 这时 Abel 第二定理的逆命题也成立.

**例 2.80** 设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的收敛半径为 1. 若 $\{a_n\}$ 非负, 且

$$\lim_{x\to 1-}\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=A,$$

则 $\sum_{n=0}^{\infty}a_n=A$.

**证明** 用反证法, 假设 $\sum_{n=0}^{\infty}a_n$ 发散. 由于 $\{a_n\}$ 非负, 故 $\sum_{n=0}^{\infty}a_n=+\infty$. 则对于任一正数 $E>A$, 存在 $N\in\mathbb{N}^*$ 使得

$$\sum_{n=0}^{N}a_n>E>A.$$

由于 $\{a_n\}$ 非负, 因此当 $x>0$ 时 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n\ge\sum_{n=0}^{N}a_nx^n$. 于是有

$$A=\lim_{x\to 1-}\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n\ge\lim_{x\to 1-}\sum_{n=0}^{N}a_nx^n=\sum_{n=0}^{N}a_n>E>A.$$

出现矛盾, 因此假设不成立. 故知 $\sum_{n=0}^{\infty}a_n$ 收敛, 即 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 在 $x=1$ 处收敛, 由 Abel 第二定理可知和函数 $S(x)$ 在 $x=1$ 处左连续, 于是可知

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n=S(1)=\lim_{x\to 1-}\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=A.$$

最后来看幂级数的乘积. 设幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty}b_nx^n$ 的收敛半径均为 $R$. 则它们在 $(-R,R)$ 中均绝对收敛. 因此很容易计算出它们的乘积.

**定理 2.52 (幂级数的乘积)**

设幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty}b_nx^n$ 的收敛半径均为 $R$. 则当 $x\in(-R,R)$ 时有

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n\right)\left(\sum_{n=1}^{\infty}b_nx^n\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{l=0}^{n}a_lb_{n-l}\right)x^n.$$

♡

**证明** 由定理 Cauchy-Hadamard 定理可知 $\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty}b_nx^n$ 在 $(-R,R)$ 中均绝对收敛. 因此它们的 Cauchy 乘积收敛:

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n\right)\left(\sum_{n=1}^{\infty}b_nx^n\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{l=0}^{n}\left(a_lx^l\right)\left(b_{n-l}x^{n-l}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{l=0}^{n}a_lb_{n-l}\right)x^n.$$ ■

**例 2.81** 设幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n$ 的收敛半径为 1, 则

$$\frac{1}{1-x}\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}a_k\right)x^n.$$

**证明** 当 $x\in(-1,1)$ 时

$$\sum_{n=0}^{\infty}x^n=\frac{1}{1-x}.$$

由于 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径也是 1, 由幂级数的乘积公式可知

$$\frac{1}{1-x}\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} a_k\right)x^n.$$ ■

**例 2.82** 当 $x \in (-1,1)$ 时

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+2)x^n = \frac{2}{(1-x)^3}.$$

**证明** 当 $x \in (-1,1)$ 时, 连续 2 使用2.81的结论可知

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \frac{1}{1-x}\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n.$$

$$\frac{1}{(1-x)^3} = \frac{1}{1-x}\cdot\frac{1}{(1-x)^2} = \frac{1}{1-x}\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1)(n+2)}{2}x^n.$$

于是可知

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+2)x^n = \frac{2}{(1-x)^3}.$$ ■

现在用幂级数的乘积可以使定理2.27的证明大幅简化.

**例 2.83** 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 都收敛. 若它们的 Cauchy 乘积 $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ 也收敛, 则

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n.$$

**证明** $\boxed{\text{证法二}}$ 设幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n x^n$, $\sum_{n=1}^{\infty} c_n x^n$. 由条件可知它们都在 $x=1$ 处收敛. 由 Abel 第一定理可知它们都在 $(-1,1)$ 内收敛. 因此当 $x \in (-1,1)$ 时

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n\right)\left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n x^n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n x^n.$$

由于三个幂级数都在 $x=1$ 处收敛, 由 Abel 第二定理可知它们都在 $x=1$ 处左连续. 令 $x \to 1-$ 得

$$\lim_{x\to 1-}\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n\right)\left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n x^n\right) = \lim_{x\to 1-}\sum_{n=1}^{\infty} c_n x^n.$$ ■

### 2.4.2 Taylor 级数

例2.74和2.75中, 把初等函数 $\arctan x$ 和 $\ln(1+x)$ $(-1<x<1)$ 展开成了幂级数. 下面继续研究这个问题. 设函数 $f$ 在区间 $(x_0-R, x_0+R)$ 上可以展开成幂级数

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n.$$

由定理2.48可知 $f$ 在 $(x_0-R, x_0+R)$ 内有任意阶导数. 于是得到了一个函数能在一个区间内展开成幂级数的一个必要条件. 定理2.48还告诉我们

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-k+1)a_n(x-x_0)^{n-k}, \quad k=1,2,\cdots.$$

令 $x = x_0$ 得

$$a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}, \quad k=0,1,2,\cdots.$$

这表明, 只要 $f$ 能展开成幂级数, 则一定是以下形式的幂级数:

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n.$$

容易看出 $f$ 的 $n$ 次 Taylor 多项式就是 $f$ 的幂级数展开式的前 $n$ 项. 于是引出了以下概念.

**定义 2.15 (Taylor 级数)**

设函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处有任意阶导数. 令

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n.$$

以上级数称为 $f$ 在 $x=x_0$ 处的 **Taylor 级数** (Taylor series), 记作

$$f(x)\sim\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n.$$

特别地, $f$ 在 $x=0$ 处的 Taylor 级数称为 $f$ 的 **Maclaurin 级数** (Maclaurin series).

由以上定义可知, 只要 $f$ 在 $x=x_0$ 处有任意阶导数, 就存在对应的 Taylor 级数. 但这个级数未必收敛, 即使收敛也未必收敛到 $f$. 下面看两个例子.

**例 2.84** 设函数

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin(2^n x)}{n!}$$

**解**

**例 2.85** 设函数

$$f(x)=\begin{cases}\mathrm{e}^{-1/x^2}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}.$$

**解**

我们最关心的是, 函数 $f$ 还需满足什么条件, 才能使它的 Taylor 级数收敛于自己.

可以考虑从 Taylor 公式入手. 设 $f$ 在 $(x_0-R,x_0+R)$ 上有任意阶导数, 则任意一点 $x$ 都有

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+R_n(x),$$

其中 $R_n(x)$ 是余项. 令 $n\to\infty$ 可知 $f$ 可以展开为 Taylor 级数当且仅当 $R_n(x)\to 0$. 于是引出了以下定理.

**定理 2.53**

设函数 $f$ 在 $(x_0-R,x_0+R)$ 上有任意阶导数. 若存在 $M>0$ 使得当 $n$ 充分大时对于任一 $x\in(x_0-R,x_0+R)$ 都有

$$\left|f^{(n)}(x)\right|\leq M.$$

则 $f$ 可以在 $(x_0-R,x_0+R)$ 上展开为 Taylor 级数.

**证明** 由于 $f$ 在 $(x_0-R,x_0+R)$ 上有任意阶导数, 于是当 $x\in(x_0-R,x_0+R)$ 有以下 Taylor 展开式

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+R_n(x),$$

由带 Lagrange 余项的 Taylor 公式可知, 在 $x_0$ 和 $x$ 之间存在 $\xi$ 使得当 $n$ 充分大时

$$|R_n(x)|=\left|\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n-1}\right|\leq M\frac{|x-x_0|^{n+1}}{(n+1)!}\leq M\frac{R^{n+1}}{(n+1)!}\to 0.$$

因此 $R_n \to 0$. 于是可知 $f$ 可以在 $(x_0 - R, x_0 + R)$ 上展开为 Taylor 级数. ■

下面来看几个初等函数的 Maclaurin 级数.

**例 2.86** 判断指数函数 $\mathrm{e}^x$ 是否可以展开为 Maclaurin 级数.

**解** 任取 $R > 0$, 当 $|x| < R$ 时

$$\left|(\mathrm{e}^x)^{(n)}\right| = \mathrm{e}^x < \mathrm{e}^R, \quad n = 1, 2, \cdots.$$

由定理2.53可知 $\mathrm{e}^x$ 可以在 $(-R, R)$ 上展开为 Maclaurin 级数

$$\mathrm{e}^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

由于 $R$ 是任一正数, 因此 $\mathrm{e}^x$ 可以在 $\mathbb{R}$ 上展开为 Maclaurin 级数. ■

**例 2.87** 判断三角函数 $\sin x$ 和 $\cos x$ 是否可以展开为 Maclaurin 级数.

**解** 由于

$$\left|(\sin x)^{(n)}\right| = \left|\sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)\right| \leq 1.$$

由定理2.53可知 $\sin x$ 可以在 $\mathbb{R}$ 上展开为 Maclaurin 级数

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}.$$

同理可知 $\cos x$ 可以在 $\mathbb{R}$ 上展开为 Maclaurin 级数

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}.$$ ■

**例 2.88** 判断函数 $f(x) = (1+x)^\alpha$ 是否可以展开为 Maclaurin 级数, 其中 $\alpha$ 是任一实数.

**解**

以下 10 个函数的 Maclaurin 级数展开式十分重要, 需要牢记.

**命题 2.18 (重要的 Maclaurin 级数展开式)**

(1) $\dfrac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n, \quad \forall x \in (-1, 1).$

(2) $(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n, \quad \forall x \in (-1, 1),\ \alpha \in \mathbb{R}, \quad$ 其中 $\binom{\alpha}{n} = \dfrac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}.$

(3) $\mathrm{e}^x = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^n}{n!}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$

(4) $\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}}{n} x^n, \quad \forall x \in (-1, 1].$

(5) $\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$

(6) $\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$

(7) $\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}, \quad \forall x \in [-1, 1].$

(8) $\sinh x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$

(9) $\cosh x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$

(10) $\operatorname{arctanh} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}, \quad \forall x \in [-1, 1].$

注 (2) 中, 当 $-1 < \alpha < 0$, 等式在 $x = 1$ 处也成立. 当 $\alpha > 0$, 等式在 $x = \pm 1$ 处也成立.

**例 2.89** 设函数

$$f(x) = \frac{1}{(1-x)(2-x)}.$$

求 $f(x)$ 的 Maclaurin 级数展开式.

**解** 有等式

$$\frac{1}{(1-x)(2-x)} = \frac{1}{1-x} - \frac{1}{2-x}.$$

上式两部分的展开式

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{x=0}^{\infty} x^n, \quad \forall x \in (-1, 1).$$

$$\frac{1}{2-x} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-x/2} = \frac{1}{2} \sum_{x=0}^{\infty} \left(\frac{x}{2}\right)^n = \sum_{x=0}^{\infty} \frac{x^n}{2^{n+1}}, \quad -2 < x < 2.$$

于是可知

$$f(x) = \frac{1}{1-x} - \frac{1}{2-x} = \sum_{x=0}^{\infty} x^n - \sum_{x=0}^{\infty} \frac{x^n}{2^{n+1}} = \sum_{x=0}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right) x^n, \quad -1 < x < 1.$$ ■

**例 2.90** 设函数

$$f(x) = \frac{\ln(1-x)}{1-x}.$$

求 $f(x)$ 的 Maclaurin 级数展开式.

**解** 由于

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}, \quad \forall x \in (-1, 1]$$

$$\iff \ln(1-x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(-x)^n}{n} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}, \quad \forall x \in [-1, 1)$$

由例2.81可知

$$f(x) = \frac{\ln(1-x)}{1-x} = -\frac{1}{1-x} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right) x^n, \quad \forall x \in (-1, 1).$$ ■

**例 2.91** 设函数

$$f(x) = \ln \frac{1+x}{1-x}.$$

求 $f(x)$ 的 Maclaurin 级数展开式.

**解** 由于

$$\ln(1+x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n},\quad \forall x\in(-1,1]$$

$$\ln(1-x)=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n},\quad \forall x\in[-1,1).$$

因此

$$\begin{aligned} f(x)=\ln\frac{1+x}{1-x}&=\ln(1+x)-\ln(1-x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}\\ &=\left(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots\right)+\left(x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\cdots\right)=2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n+1},\quad \forall x\in(-1,1). \end{aligned}$$

■

### 2.4.3 幂级数的应用

**定理 2.54 (Weierstrass 逼近定理)**

有限闭区间上的任一函数都能在该区间上用多项式一致逼近.

**证明**

**定义 2.16 (Bernstein 多项式)**

**引理 2.1**

**证明**

**定义 2.17 (母函数)**

**例 2.92**

**证明**

**例 2.93**

**证明**

**例 2.94**

**证明**

**例 2.95**

**证明**

## 2.5 反常积分的敛散性

在讨论 Riemann 积分时, 曾经简单介绍过两种反常积分的计算方法. 下面来讨论反常积分收敛的判别法. 之所以要在级数理论之后讨论反常积分的敛散性, 是因为反常积分收敛判别法几乎完全和级数判别法对应. 两者具有很强的可类比性. 很多定理不仅形式相同, 甚至连证明方法也完全相同.

### 2.5.1 非负函数无穷积分的收敛判别法

在讨论级数时, 首先讨论了正项级数. 类似地, 讨论反常积分时可以先讨论非负函数的反常积分.

**命题 2.19 (非负函数无穷积分收敛的充要条件)**

设 $[a,+\infty)$ 上的一个非负函数 $f(x)$. 则积分 $\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛当且仅当对于任一 $A>a$ 都有 $f$ 在区间 $[a,A]$ 上 Riemann 可积, 且 $\int_a^A f(x)\,\mathrm{d}x$ 在 $[a,+\infty)$ 上有界. ♠

**注** 以上命题对应级数中的命题2.6.

于是可以得到非负函数无穷积分的比较判别法.

**定理 2.55 (非负函数无穷积分的比较判别法)**

设 $[a,+\infty)$ 上的非负函数 $f$ 和 $g$. 当 $x$ 充分大是有 $0 \le f(x) \le g(x)$. 则

(1) 若 $\int_a^{+\infty} g(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛, 则 $\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 也收敛.

(2) 若 $\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 发散, 则 $\int_a^{+\infty} g(x)\,\mathrm{d}x$ 也发散. ♡

**注** 以上定理对应级数中的定理2.1.

在研究正项级数时, 我们最常用的 ''基准级数'' 是 $p$ 级数. 类似的有 "$p$ 积分".

**例 2.96*p* 积分** 设 $p$ 积分

$$\int_a^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^p}, \quad a>0.$$

当 $p \le 1$ 时积分发散, 当 $p>1$ 时积分收敛.

下面看一个例子.

**例 2.97** 判断以下无穷积分的敛散性:

$$\int_a^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{x^2+x^4}}, \quad a>0.$$

**证明** 由于

$$\frac{1}{\sqrt[3]{x^3+x^4}} \le \frac{1}{x^{4/3}}$$

且积分 $\int_a^{+\infty} 1/x^{4/3}$ 收敛, 由非负函数无穷积分的比较判别法可知原积分也收敛. ■

类似地有比较判别法的极限形式.

**定理 2.56 (非负函数无穷积分比较判别法的极限形式)**

设 $[a,+\infty)$ 上的非负函数 $f$ 和 $g$. 若

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = l.$$

(1) 当 $0<l<+\infty$ 时, 积分 $\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$, $\int_a^{+\infty} g(x)\,\mathrm{d}x$ 同敛散.

(2) 当 $l=0$ 时, 若积分 $\int_a^{+\infty} g(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛, 则 $\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 也收敛.
(3) 当 $l=+\infty$ 时, 若积分 $\int_a^{+\infty} g(x)\,\mathrm{d}x$ 发散, 则 $\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 也发散.

**注** 以上定理对应级数中的定理2.2.

下面看两个例子.

**例 2.98** 判断以下无穷积分的敛散性:

$$\int_1^{+\infty} \frac{x^2}{x^4-x^2+1}\,\mathrm{d}x, \quad a>0.$$

**解** 由于

$$\frac{x^2}{x^4-x^2+1} \sim \frac{1}{x^2}, \quad x\to+\infty.$$

且积分 $\int_a^{+\infty} 1/x^2$ 收敛, 由非负函数无穷积分的比较判别法可知原积分也收敛. ■

**例 2.99** 判断以下无穷积分的敛散性:

$$\int_1^{+\infty} \frac{\arctan x}{(1+x^2)^{3/2}}\,\mathrm{d}x, \quad a>0.$$

**解** 由于

$$\frac{\arctan x}{(1+x^2)^{3/2}} \sim \frac{\pi/2}{x^3}, \quad x\to+\infty.$$

且积分 $\int_a^{+\infty} 1/x^3$ 收敛, 由非负函数无穷积分的比较判别法可知原积分也收敛. ■

设无穷积分 $\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛. 现在在 $[a,+\infty)$ 取一个数列, 使得它的首项是 $a$ 且递增趋于 $+\infty$. 于是就可以把曲边梯形分割成一列小曲边梯形, 因此

$$\int_a^{a_{n+1}} f(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{n} \int_{a_k}^{a_{k+1}} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

令 $n\to\infty$ 可得

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{a_n}^{a_{n+1}} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

这表明收敛的无穷积分总是可以用一个级数表示.

反过来, 如果存在首项是 $a$ 且递增趋于 $+\infty$ 的数列 $\{a_n\}$ 使得上式右侧的级数收敛, 是否可以断言上式左侧的无穷积分收敛? 一般来说, 这是不成立的, 下面看一个例子.

**例 2.100** 设无穷积分

$$\int_0^{+\infty} \cos x\,\mathrm{d}x.$$

令 $a_n=n\pi\ (n=1,2,\cdots)$, 则

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_{a_n}^{a_{n+1}} \cos x\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \cos x\,\mathrm{d}x = 0.$$

但是

$$\lim_{a\to+\infty} \int_0^a \cos x\,\mathrm{d}x = \lim_{a\to+\infty} \sin a.$$

因此积分 $\int_0^{+\infty} \cos x\,\mathrm{d}x$ 发散.

但如果 $f(x)$ 是一个非负函数, 则结论可以成立.

**定理 2.57**

设 $[a,+\infty)$ 上的非负函数 $f$. 若存在一个递增趋于 $+\infty$ 的数列 $\{a_n\}$ $(a_1=a)$, 使得级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\int_{a_n}^{a_{n+1}}f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛, 则积分 $\int_a^{+\infty}f(x)\,\mathrm{d}x$ 也收敛. 且

$$\int_a^{+\infty}f(x)\,\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{\infty}\int_{a_n}^{a_{n+1}}f(x)\,\mathrm{d}x. \tag{2.17}$$

**证明** 由于 $\{a_n\}$ 递增趋于 $+\infty$, 故对于任一 $E>0$, 都存在 $N\in\mathbb{N}^*$ 使得 $a_N\le E<a_{N+1}$. 由于 $f(x)$ 非负, 故

$$\sum_{n=1}^{N-1}\int_{a_n}^{a_{n+1}}f(x)\,\mathrm{d}x=\int_a^{a_N}f(x)\,\mathrm{d}x\le\int_a^{E}f(x)\,\mathrm{d}x\le\int_a^{a_{N+1}}f(x)\,\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{N}\int_{a_n}^{a_{n+1}}f(x)\,\mathrm{d}x.$$

由于 $\sum_{n=1}^{\infty}\int_{a_n}^{a_{n+1}}f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛. 令上式 $N\to\infty$, 由夹逼定理可知积分 $\int_a^{+\infty}f(x)\,\mathrm{d}x$ 也收敛. 且等式2.17成立. ■

下面看一个例子.

**例 2.101** 设 $[1/2,+\infty)$ 上的函数

$$f(x)=\begin{cases}4n^2(x-n)+2, & x\in\left[n-\dfrac{1}{2n^2},n\right], \quad n=1,2,\cdots. \\ -4n^2(x-n)+2, & x\in\left(n,n+\dfrac{1}{2n^2}\right], \quad n=1,2,\cdots. \\ 0, & \text{其余情况}\end{cases}.$$

则积分 $\int_0^{+\infty}f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛, 但当 $x\to+\infty$ 时 $f(x)$ 不收敛于 0.

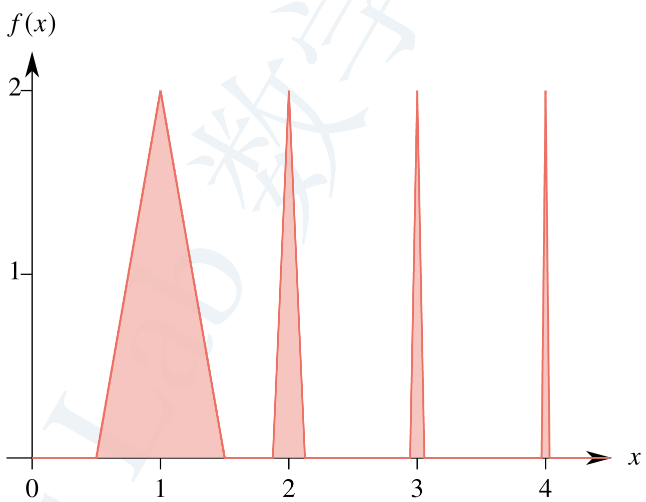



图 2.3: $\int_0^{+\infty}f(x)\,\mathrm{d}x$ 示意图.

**证明** (i) 令 $a_n=(2n-1)/2$ $(n=1,2,\cdots)$. 如图2.3可知

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int_{a_n}^{a_{n+1}}f(x)\,\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}.$$

由定理2.57可知积分 $\int_0^{+\infty}f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛, 且

$$\int_0^{+\infty}f(x)\,\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}.$$

(ii) 由于 $f(n)\equiv 2$. 由 Heine 定理可知当 $x\to+\infty$ 时 $f(x)$ 不收敛于 0. ■

如果一个无穷级数收敛, 则它的通项一定趋于零. 从上例可以看出无穷积分没有这样的结论, 即无穷积分

$\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛时, $\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$ 不一定成立. 下面在看一个例子.

**例 2.102** 设函数

$$f(x)=\frac{x}{1+x^6\sin^2 x}.$$

则积分 $\int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛, 但当 $x\to+\infty$ 时 $f(x)$ 不收敛于 0.

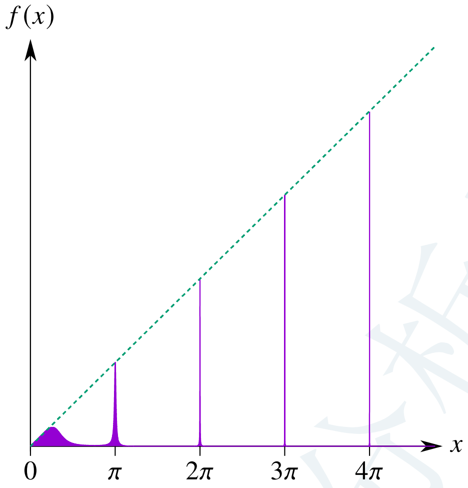



图 2.4: $x/(1+x^6\sin^2 x)$ 示意图.

**证明** (i) 由于 $\sin^2 x$ 是周期为 $\pi$ 的偶函数, 因此当 $n\geq 1$ 时

$$\begin{aligned}
\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\frac{x\,\mathrm{d}x}{1+x^6\sin^2 x} &\leq (n+1)\pi\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\frac{\mathrm{d}x}{1+n^6\sin^2 x}=2(n+1)\pi\int_0^{\pi/2}\frac{\mathrm{d}x}{1+n^6\sin^2 x}\\
&\leq 2(n+1)\pi\int_0^{\pi/2}\frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x+n^6\sin^2 x}=\frac{2(n+1)\pi}{n^3}\int_0^{\pi/2}\frac{\mathrm{d}\left(n^3\tan x\right)}{1+\left(n^3\tan x\right)^2}\\
&=\frac{2(n+1)\pi}{n^3}\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}=\frac{2(n+1)\pi}{n^3}\cdot\frac{\pi}{2}\leq\frac{2\pi^2}{n^2}.
\end{aligned}$$

由正项级数的比较判别法可知以下级数收敛:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\frac{x\,\mathrm{d}x}{1+x^6\sin^2 x}.$$

于是由定理2.57可知原积分也收敛.

(ii) 由于

$$f(n\pi)=\frac{n\pi}{1+(n\pi)^6\sin^2(n\pi)}=n\pi\to+\infty.$$

由 Heine 定理可知当 $x\to+\infty$ 时 $f(x)$ 不收敛于 0. ■

### 2.5.2 一般无穷积分的收敛判别法

**定理 2.58 (无穷积分的 Cauchy 收敛原理)**

无穷积分 $\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛当且仅当对于任一 $\varepsilon>0$ 都存在 $a_0>a$, 当 $a_1,a_2>a_0$ 时

$$\left|\int_{a_1}^{a_2} f(x)\,\mathrm{d}x\right|<\varepsilon.$$

**注** 一个无穷积分收敛当且仅当在充分远处, 不管区间多长, 积分的绝对值都可以任意小.

**注** 以上定理对应级数中的定理2.16

对照级数, 也可以定义无穷积分的条件收敛和绝对收敛.

**定义 2.18 (无穷积分的绝对收敛和条件收敛)**

设无穷积分 $\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛.

(1) 若 $\int_a^{+\infty} |f(x)|\,\mathrm{d}x$ 也收敛, 则称 $\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ **绝对收敛** (absolutely convergent).

(2) 若 $\int_a^{+\infty} |f(x)|\,\mathrm{d}x$ 发散, 则称 $\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ **条件收敛** (conditionally convergent).

♣

**定理 2.59**

若无穷积分 $\int_a^{+\infty} |f(x)|\,\mathrm{d}x$ 收敛, 则 $\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 也收敛.

♡

**证明** 若无穷积分 $\int_a^{+\infty} |f(x)|\,\mathrm{d}x$ 收敛, 则对于任一 $\varepsilon > 0$, 都存在 $a_0 > a$ 使得当 $a_1, a_2 > a_0$ 时

$$\int_{a_1}^{a_2} |f(x)|\,\mathrm{d}x < \varepsilon.$$

于是

$$\left|\int_{a_1}^{a_2} f(x)\,\mathrm{d}x\right| < \int_{a_1}^{a_2} |f(x)|\,\mathrm{d}x < \varepsilon.$$

于是可知 $\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 也收敛. ■

**注** 以上定理对应级数中的定理2.22.

以上命题的逆命题不成立.

**定理 2.60 (积分第二中值定理 I)**

设函数 $f$ 和 $g$. 若 $f$ 在 $[a,b]$ 上 Riemann 可积, $g$ 在 $[a,b]$ 上非负.

(1) 若 $g$ 在 $[a,b]$ 上单调递减, 则存在 $\xi \in [a,b]$ 使得

$$\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = g(a)\int_a^{\xi} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

(2) 若 $g$ 在 $[a,b]$ 上单调递增, 则存在 $\eta \in [a,b]$ 使得

$$\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = g(a)\int_a^{\eta} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

♡

**证明** 只证明 (1). 由于 $g$ 在 $[a,b]$ 上单调递减, 所以 $g$ 在 $[a,b]$ 上 Riemann 可积. 由于 $f$ 在 $[a,b]$ 上 Riemann 可积, 故 $fg$ 在 $[a,b]$ 上 Riemann 可积. 作 $[a,b]$ 的一个分割

$$\pi : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b.$$

则

$$\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)[g(x) - g(x_{i-1})]\,\mathrm{d}x + \sum_{i=1}^n g(x_{i-1})\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,\mathrm{d}x. \tag{2.18}$$

设 $g$ 在 $[x_{i-1}, x_i]$ 上的振幅为 $\omega_i$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$. 由于存在 $K > 0$ 使得 $|f| \le K$

$$\left|\sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)[g(x) - g(x_{i-1})]\,\mathrm{d}x\right| \le \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} |f(x)||g(x) - g(x_{i-1})|\,\mathrm{d}x \le K\sum_{i=1}^n \omega_i(x_i - x_{i-1}).$$

由于 $g$ 在 $[a,b]$ 上 Riemann 可积, 故

$$\lim_{|\pi|\to 0} K\sum_{i=1}^n \omega_i(x_i - x_{i-1}) = 0.$$

于是等式2.18可以变为

$$\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{|\pi|\to 0}\sum_{i=1}^n g(x_{i-1})\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,\mathrm{d}x. \tag{2.19}$$

令 $a_i = \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,\mathrm{d}x,\ b_i = g(x_{i-1})\ (i = 1, 2, \cdots, n)$, 再令 $S_n = a_1 + \cdots + a_n$, 则由 Abel 分部求和公式可知

$$\sum_{i=1}^n g(x_{i-1})\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{i=1}^n a_i b_i = S_n b_n + \sum_{i=1}^{n-1} S_k(b_i - b_{i+1}).$$

由于

$$S_k = a_1 + \cdots + a_k = \int_a^{x_k} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

由于 $\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ 是 $[a,b]$ 上的连续函数, 由极值定理可知它在 $[a,b]$ 可以取到最大值 $M$ 和最小值 $m$, 则 $m \le S_k \le M$. 由于 $g$ 在 $[a,b]$ 上非负递减, 故 $b_1 \ge_2 \ge \cdots \ge 0$. 于是

$$mg(a) = mb_1 \le \sum_{i=1}^n g(x_{i-1})\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,\mathrm{d}x \le Mb_1 = Mg(a).$$

令 $|\pi| \to 0$, 结合等式2.19可知

$$mg(a) \le \int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x \le Mg(a).$$

由于 $\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ 是 $[a,b]$ 上的连续函数, 由介值定理可知存在 $\xi \in [a,b]$ 使得

$$\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = g(a)\int_a^{\xi} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

■

如果以上定理中的 $g$ 在 $[a,b]$ 上保持不变号, 则积分第二中值定理可以写成以下形式.

**定理 2.61 (积分第二中值定理 II)**

设函数 $f$ 和 $g$ 在 $[a,b]$ 上 Riemann 可积, 其中 $g$ 在 $[a,b]$ 上单调, 则存在 $\xi \in [a,b]$ 使得

$$\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = g(a)\int_a^{\xi} f(x)\,\mathrm{d}x + g(b)\int_{\xi}^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

♡

**证明** 不妨设 $g$ 在 $[a,b]$ 上单调递减, 则对于任一 $x \in [a,b]$ 都有 $g(x) \ge g(b)$. 令

$$G(x) = g(x) - g(b).$$

则 $G$ 在 $[a,b]$ 上非负且单调递减. 由积分第二中值定理 I 可知, 存在 $\xi \in [a,b]$ 使得

$$\int_a^b f(x)G(x)\,\mathrm{d}x = G(a)\int_a^{\xi} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

于是可知

$$\begin{aligned}&\int_a^b f(x)[g(x) - g(b)]\,\mathrm{d}x = [g(a) - g(b)]\int_a^{\xi} f(x)\,\mathrm{d}x\\ \iff &\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = g(a)\int_a^{\xi} f(x)\,\mathrm{d}x + g(b)\int_{\xi}^b f(x)\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

■

利用积分第二中值定理可以证明无穷积分中的 Abel 引理.

**定理 2.62 (无穷积分的 Abel 引理)**

设函数 $f$ 在 $[a,b]$ 上可积, $g$ 在 $[a,b]$ 上单调. 若对任一 $x \in [a,b]$ 都有都存在 $M > 0$ 使得

$$\left|\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t\right| \le M.$$

则

$$\left|\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x\right| \le M[|g(a)| + 2|g(b)|].$$

♡

**证明** 由于 $f$ 在 $[a,b]$ 上可积, $g$ 在 $[a,b]$ 上单调, 由积分第二中值定理 II 可知, 存在 $\xi[a,b]$ 使得

$$\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = g(a)\int_a^{\xi} f(x)\,\mathrm{d}x + g(b)\int_{\xi}^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

由于对任一 $x\in[a,b]$ 都有都存在 $M>0$ 使得

$$\left|\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t\right| \le M.$$

故

$$\left|\int_{\xi}^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| = \left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^{\xi} f(x)\,\mathrm{d}x\right| \le 2M.$$

于是可知

$$\left|\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x\right| \le M(|g(a)|+2|g(b)|).$$ ∎

**注** 以上定理对应级数中的定理2.19.

类似地, 用无穷积分的 Abel 引理可以证明无穷积分的 Dirichlet 判别法.

**定理 2.63 (无穷积分的 Dirichlet 判别法)**

设函数 $f,g$. 若满足

1° $g$ 在 $[a,+\infty)$ 上单调, 且

$$\lim_{x\to+\infty} g(x)=0.$$

2° 函数 $F(x)=\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ 在 $(a,+\infty)$ 上有界, 即存在 $M>0$ 使得对于任一 $x\in(a,+\infty)$ 都有

$$\left|\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t\right| \le M.$$

则无穷积分 $\int_a^{+\infty} f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛.

**证明** 由于 $\lim_{x\to+\infty} g(x)=0$, 故对于任一 $\varepsilon>0$ 都存在 $A>0$, 只要 $x_1>A$ 就有 $|g(x_1)|<\varepsilon/(8M)$. 设 $x_2>x_1>A$, 则对于任一 $x\in[x_1,x_2]$ 都有

$$\left|\int_{x_1}^x f(t)\,\mathrm{d}t\right| = \left|\int_{x_1}^a f(t)\,\mathrm{d}t + \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t\right| \le \left|\int_a^{x_1} f(t)\,\mathrm{d}t\right| + \left|\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t\right| \le 2M.$$

由无穷积分的 Abel 引理可知

$$\left|\int_{x_1}^{x_2} f(x)g(x)\right| \le 2M[|g(x_1)|+2|g(x_2)|] < \varepsilon.$$

于是由 Cauchy 收敛原理可知 $\int_a^{+\infty} f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛. ∎

**注** 以上定理对应级数中的定理2.20和定理2.35.

下面看两个用 Dirichlet 判别法的例子.

**例 2.103Dirichlet 积分** 判断以下积分的收敛性:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x.$$

**证明** 由于 $1/x$ 递减趋于零, 且

$$\left|\int_0^x \sin x\,\mathrm{d}x\right| \le \int_0^{\pi} \sin x\,\mathrm{d}x = 2.$$

由 Dirichlet 判别法可知原积分收敛. 同理可证 $\int_0^{+\infty}\frac{\cos x}{x}\,\mathrm{d}x$ 收敛. 由于

$$\left|\frac{\sin x}{x}\right| \ge \frac{\sin^2 x}{x} = \frac{1}{2x} - \frac{\cos 2x}{2x}.$$

因此 $\int_0^{+\infty}\left|\frac{\sin x}{x}\right|\mathrm{d}x$ 发散. 综上可知原积分条件收敛. ■

注 以上无穷积分经常被称为 **Dirichlet 积分** (Dirichlet integral). 后面将多次用到这个积分.

例 2.104 判断以下积分的敛散性:

(1) $\displaystyle\int_1^{+\infty}(-1)^{[x]}\,\mathrm{d}x$,　　(2) $\displaystyle\int_1^{+\infty}(-1)^{[x^2]}\,\mathrm{d}x$.

证明 (1) 如果该积分收敛, 则

$$\int_1^{+\infty}(-1)^{[x]}\,\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{\infty}\int_n^{n+1}(-1)^{[x]}\,\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n.$$

但右侧的级数不收敛, 因此原积分也不收敛.

(2) 令 $t=x^2$, 则

$$\int_1^{+\infty}(-1)^{[x^2]}\,\mathrm{d}x=\int_1^{+\infty}(-1)^{[t]}\,\mathrm{d}\sqrt{t}=\frac{1}{2}\int_1^{+\infty}\frac{(-1)^{[t]}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t.$$

显然, 当 $t\to+\infty$ 时 $1/\sqrt{t}$ 递减趋于零. 下面来看函数 $\int_1^x(-1)^{[t]}\,\mathrm{d}t$ 的有界性. 任取 $x>1$, 都存在 $n\in\mathbb{N}^*$ 使得 $n\le x\le n+1$, 故

$$\left|\int_1^x(-1)^{[t]}\,\mathrm{d}t\right|=\left|\sum_{k=1}^{n-1}\int_k^{k+1}(-1)^{[t]}\,\mathrm{d}t+\int_n^x(-1)^n\,\mathrm{d}t\right|=\left|\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^k\,\mathrm{d}t+(-1)^n(x-n)\right|<2.$$

于是有 Dirichlet 判别法可知原积分收敛. ■

用定理2.21的证法可以得到无穷积分的 Abel 判别法.

**定理 2.64 (无穷积分的 Abel 判别法)**

设函数 $f,g$. 若满足

1° $g$ 在 $[a,+\infty)$ 上单调有界.

2° $\int_a^{+\infty}f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛.

则无穷积分 $\int_a^{+\infty}f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛.

♡

证明 由于 $g$ 在 $[a,+\infty)$ 上单调有界, 故 $\lim_{x\to+\infty}g(x)=l\in\mathbb{R}$, 即

$$\lim_{x\to+\infty}[g(x)-l]=0.$$

由于 $\int_a^{+\infty}f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛, 故 $\int_a^{+\infty}f(x)\,\mathrm{d}x$ 有界, 由无穷积分的 Dirichlet 判别法可知 $\int_a^{+\infty}f(x)[g(x)-l]\,\mathrm{d}x$ 收敛. 由于

$$\int_a^{+\infty}f(x)\,\mathrm{d}x=\int_a^{+\infty}f(x)[g(x)-l]\,\mathrm{d}x+l\int_a^{+\infty}f(x)\,\mathrm{d}x.$$

于是可知 $\int_a^{+\infty}f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛. ■

注 以上定理对应级数中的定理2.21和定理2.36.

下面看一个用 Abel 判别法的例子.

例 2.105 设 $p,q$ 满足 $\max\{p,q\}>1$. 则以下积分收敛:

$$\int_1^{+\infty}\frac{x\cos x}{x^p+x^q}\,\mathrm{d}x.$$

证明 不妨设 $p\ge q$, 则 $p>1$.

$$\text{原式}=\int_1^{+\infty}\frac{\cos x}{x^{p-1}}\cdot\frac{1}{\left(1+\frac{1}{x^{p-q}}\right)}\,\mathrm{d}x.$$

当 $x \to +\infty$ 时 $1/x^{p-1}$ 递减趋于零, 且函数 $F(x) = \int_1^x \cos t \, \mathrm{d}t$ 有界. 由 Dirichlet 判别法可知无穷积分 $\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^{p-1}} \, \mathrm{d}x$ 收敛. 另一方面 $\frac{1}{1+1/x^{p-q}}$ 在 $[1,+\infty)$ 上单调有界. 故由 Abel 判别法可以原积分收敛. ■

### 2.5.3 瑕积分的收敛判别法

另一类反常积分是瑕积分. 之前已经学过了瑕积分的计算方法. 下面来研究瑕积分收敛的判别法. 设函数 $f$ 在 $(a,b]$ 上有定义. 且当 $x \to a+$ 时 $f$ 无界. 但对于任一 $\varepsilon > 0$, 都有 $f$ 在 $[a+\varepsilon, b]$ 上 Riemann 可积, 且

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{a+\varepsilon}^b f(x) \, \mathrm{d}x$$

存在且有限, 则称瑕积分收敛, 并把以上极限值定义为瑕积分的积分值, 其中 $a$ 称为瑕点.

为了讨论简单起见, 本节讨论的瑕积分都假定积分下限 $a$ 是瑕点, 且被积函数都在 $[a+\varepsilon, b]$ 上 Riemann 可积.

**例 2.106** 判断以下瑕积分的敛散性:

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}}$$

**解** 令 $t = 1/\sqrt{x}$. 则

$$\int_\varepsilon^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}} = \int_{1/\sqrt{\varepsilon}}^1 t \, \mathrm{d}\left(\frac{1}{t^2}\right) = 2\int_1^{1/\sqrt{\varepsilon}} \frac{\mathrm{d}t}{t^2}.$$

因此

$$\lim_{\varepsilon \to 0+} \int_\varepsilon^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}} = 2 \lim_{\varepsilon \to 0+} \int_1^{1/\sqrt{\varepsilon}} \frac{\mathrm{d}t}{t^2} = 2\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2}$$

由于无穷积分 $\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2}$ 收敛, 于是可知原积分也收敛. ■

上例表明, 研究一个瑕积分的敛散性, 可以转化为研究无穷积分的敛散性. 事实上, 对于一个一般的瑕积分 $\int_a^b f(x) \, \mathrm{d}x$, 若 $a$ 是瑕点, 则可令 $x = a + 1/t$, 则

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{a+\varepsilon}^b f(x) \, \mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{1/\varepsilon}^{1/(b-a)} f\left(a + \frac{1}{t}\right) \mathrm{d}\left(\frac{1}{t}\right) = \int_{1/(b-a)}^{+\infty} f\left(a + \frac{1}{t}\right) \frac{1}{t^2} \, \mathrm{d}t.$$

以上讨论表明, 任一瑕积分都可以通过变换转化为一个无穷积分. 因此下面可以不加证明地给出和无穷积分对应的结论.

**定理 2.65 (非负函数瑕积分的比较判别法)**

设函数 $f$ 和 $g$. 当 $x$ 充分靠近 $a$ $(a < x)$ 时有 $0 \le f(x) \le g(x)$. 则

(1) 若 $\int_a^b g(x) \, \mathrm{d}x$ 收敛, 则 $\int_a^b f(x) \, \mathrm{d}x$ 也收敛.

(2) 若 $\int_a^b f(x) \, \mathrm{d}x$ 发散, 则 $\int_a^b g(x) \, \mathrm{d}x$ 也发散.

**定理 2.66 (非负函数瑕积分比较判别法的极限形式)**

设 $(a,b]$ 上的非负函数 $f$ 和 $g$. 若

$$\lim_{x \to a+} \frac{f(x)}{g(x)} = l.$$

(1) 当 $0 < l < +\infty$ 时, 积分 $\int_a^b f(x) \, \mathrm{d}x$, $\int_a^b g(x) \, \mathrm{d}x$ 同敛散.

(2) 当 $l = 0$ 时, 若积分 $\int_a^b g(x) \, \mathrm{d}x$ 收敛, 则 $\int_a^b f(x) \, \mathrm{d}x$ 也收敛.

(3) 当 $l = +\infty$ 时, 若积分 $\int_a^b g(x) \, \mathrm{d}x$ 发散, 则 $\int_a^b f(x) \, \mathrm{d}x$ 也发散.

**定理 2.67 (瑕积分的 Cauchy 收敛原理)**

瑕积分 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛当且仅当对于任一 $\varepsilon>0$ 都存在 $\delta>0$, 当 $\eta_1,\eta_2\in(0,\delta)$ 时

$$\left|\int_{a+\eta_1}^{a+\eta_2} f(x)\,\mathrm{d}x\right|<\varepsilon.$$

**定义 2.19 (瑕积分的绝对收敛和条件收敛)**

设瑕积分 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛.

(1) 若 $\int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$ 也收敛, 则称 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ **绝对收敛** (absolutely convergent).

(2) 若 $\int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$ 发散, 则称 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ **条件收敛** (conditionally convergent).

**定理 2.68**

若瑕积分 $\int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$ 收敛, 则 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ 也收敛.

和无穷积分的情况类似, 以上定理的逆命题不成立. 有趣的是, 如果 $f$Riemann 可积, 则 $|f|$ 也 Riemann 可积, 而 $|f|$ Riemann 可积无法推出 $f$ Riemann 可积. 但是反常积分的情况刚好相反. 在后面讨论 Fourier 级数时, 还会遇到这个问题.

**例 2.107** 判断以下积分的敛散性:

$$\int_0^1 \frac{\ln x}{1-x^2}\,\mathrm{d}x.$$

**解** 考虑 $x=1$ 附近的情况. 由于

$$\lim_{x\to1}\frac{\ln x}{1-x^2}=\lim_{x\to1}\frac{1/x}{-2x}=-\frac{1}{2}.$$

因此被积函数在 $x=1$ 附近有界, 故 $x=1$ 不是瑕点. 下面考虑 $x=0$ 附近的情况. 当 $x$ 充分小时, $1-x^2\geq 1/2$. 因此

$$\left|\frac{\ln x}{1-x^2}\right|\leq 2|\ln x|.$$

由于

$$\int_0^1 |\ln x|\,\mathrm{d}x=-\int_0^1 \ln x\,\mathrm{d}x=1.$$

有比较判别法可知原积分也收敛. ■

**例 2.108** 判断以下积分的敛散性:

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[4]{1-x^4}}$$

**证明** 容易看出 $x=1$ 是瑕点. 当 $x\to1$ 时

$$\frac{1}{\sqrt[4]{1-x^4}}=\frac{1}{\sqrt[4]{1-x}}\frac{1}{\sqrt[4]{(1+x)\left(1+x^2\right)}}\sim\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt[4]{1-x}}.$$

由于 $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[4]{1-x}}$ 收敛, 故原积分也收敛. ■

**例 2.109** 判断以下积分的敛散性:

$$\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,\mathrm{d}x.$$

**证明**

**例 2.110** 判断以下积分的敛散性:

$$\int_0^{+\infty} x^{s-1}\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x.$$

**证明**

**例 2.111** 判断以下积分的敛散性:

$$\int_0^1 \frac{\sin\frac{1}{x}}{x^p}\,\mathrm{d}x,\quad p>0.$$

**证明**

**例 2.112** 判断以下积分的敛散性:

$$I=\int_0^{+\infty}\left[\left(1-\frac{\sin x}{x}\right)^{-\alpha}-1\right]\mathrm{d}x,\quad \alpha>0.$$

**证明**

最后作为总结, 来介绍一下反常积分的 Cauchy 主值.

**定义 2.20 (无穷积分的 Cauchy 主值)**

设 $\mathbb{R}$ 上的函数 $f$. 令

$$P.V.\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x := \lim_{a\to+\infty}\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

若上式右边的极限存在, 则称这个极限为无穷积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 的 **Cauchy 主值** (Cauchy principal value). ♣

**定义 2.21 (瑕积分的 Cauchy 主值)**

设 $(a,b]$ 上的函数 $f$. 点 $c$ 是 $f$ 在 $[a,b]$ 上唯一的瑕点. 令

$$P.V.\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x := \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int_a^{c-\varepsilon} f(x)\,\mathrm{d}x+\int_{c+\varepsilon}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x\right).$$

若上式右边的极限存在, 则称这个极限为瑕积分 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ 的 **Cauchy 主值** (Cauchy principal value). ♣

收敛的无穷积分和瑕积分一定存在 Cauchy 主值, 反之未必.

## 2.6 Fourier 分析初步

前面说到, 用收敛的函数项级数可以表示一些函数. 然后讨论幂级数. 幂级数的性质很好, 在收敛半径内有任意阶导数, 既可以逐项求导也可以逐项积分. 但是幂级数可以表示的函数是相当 "狭小的", 起码要求函数在收敛内有任意阶导数. 这就把很多函数排除在幂级数的门外.

于是数学家们开始考虑研究另一类级数.1807 年法国数学家 Jean-Baptiste Joseph Fourier 首次提出了用三角级数表示一类函数的想法.1822 年他在《热的分析理论》中首次引入了形如

$$a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_1\cos nx+b_n\sin nx)$$

的三角级数. 他断言收敛的以上形式的三角级数可以表示非常多的函数 (比幂级数多得多).Fourier 级数的思想极大地推动了整个分析学的前进, 很多重要的分析学概念和理论都伴随着 Fourier 级数的研究而产生. 例如 Dirichlet 的函数理论, Riemann 的积分理论, Weierstrass 和 Heine 的一致收敛理论, Jordan 的有界变差函数理论, Lebesgue 的积分理论以及 Cantor 的集合理论等等都和 Fourier 级数的研究有着深刻的关联. 因此 Fourier 级数理论是数学分析中无法回避的重要内容, 也是后续课程中的重要工具. 本节就来讨论 Fourier 级数的基础知识.

### 2.6.1 周期函数的 Fourier 级数

在物理中, 最简单的周期运动称为**简谐振动** (simple harmonic vibration). 弹簧振子是简谐振动的一个经典例子. 由 Hooke's 定律和 Newton 第二运动定律可得:

$$-k\boldsymbol{x}=\boldsymbol{F}=m\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t^2}.$$

令 $\omega^2=k/m$ 得

$$\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t^2}+\omega^2\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}.$$

解这个微分方程可得

$$\boldsymbol{x}(t)=c_1\cos(\omega t)+c_2\sin(\omega t)=A\sin(\omega t+\varphi).$$

其中 $A=\sqrt{c_1^2+c_2^2}$. 从这个例子看出, 这样的周期运动都可以用以下形式的周期函数刻画:

$$f(x)=A\sin(\omega x+\phi). \tag{2.20}$$

其中 $A$ 称为**振幅** (amplitude), $\omega$ 称为**角频率** (angular frequency) 或称**圆频率** (circular frequency), $\varphi$ 称为**初相位** (initial phase). 此时函数的周期是 $T=(2\pi)/\omega$

设所有形如2.20的周期函数的集合为 $S$. 容易验证两个 $S$ 中的函数相加后仍旧是 $S$ 中的函数. 归纳可知, 有限个 $S$ 中的周期函数相加后还是 $S$ 中的函数. 于是就会产生一个想法: 给定一个较为复杂的周期函数, 是否可以分解为若干个 $S$ 中的函数. 为了达到这个目的, 可以把函数的个数放宽到无限个. 那么问题就转化为给定一个周期函数 $F(x)$ 是否可以表示为一个三角级数:

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}A_n\sin(n\omega x+\varphi_n). \tag{2.21}$$

容易知道周期为 $T$ 的函数 $f(x)$ 只需做一次简单的变量代换, 就可以化为周期为 $2\pi$ 的函数. 令

$$x=\frac{T}{2\pi}t \iff t=\frac{2\pi}{T}x.$$

把 $f\left(\frac{T}{2\pi}t\right)$ 记作 $g(t)$. 由于 $f(x+T)=f(x)$, 故

$$g(t+2\pi)=f\left[\frac{T}{2\pi}(t+2\pi)\right]=f\left(\frac{T}{2\pi}t+T\right)=f\left(\frac{T}{2\pi}t\right)=g(t)$$

这表明 $g(t)$ 是一个周期为 $2\pi$ 的周期函数. 因此后面只需要讨论周期为 $2\pi$ 的周期函数.

于是可以令等式2.21中的 $\omega = 1$:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \sin(nx + \varphi_n) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n (\sin\varphi_n \cos nx + \cos\varphi_n \sin nx)$$
$$= A_0 \sin\varphi_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \sin\varphi_n \cos nx + A_n \cos\varphi_n \sin nx).$$

令

$$a_0 = 2A_0 \sin\varphi_0, \quad a_n = A_n \sin\varphi_n, \quad b_n = A_n \cos\varphi_n, \quad n = 1, 2, \cdots.$$

则

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx). \tag{2.22}$$

以上级数的通项都是 $\cos nx$ 和 $\sin nx$ $(n = 1, 2, \cdots)$ 的线性组合. 为了研究这个级数的性质, 需要先来研究形如 $\cos nx$ 和 $\sin nx$ $(n = 1, 2, \cdots)$ 的函数的性质.

**命题 2.20 (三角函数的正交性)**

设集合

$$S = \{1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \cdots, \cos nx, \sin nx, \cdots\}.$$

任取 $S$ 中两个不同的函数 $f$ 和 $g$, 则

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) g(x) \, dx = 0.$$

**证明** 容易知道

$$\int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \cos nx \, dx = \int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \sin nx \, dx = 0.$$

由于

$$\cos mx \cos nx = \frac{1}{2}[\cos(m-n)x + \cos(m+n)x],$$
$$\sin mx \sin nx = \frac{1}{2}[\cos(m-n)x - \cos(m+n)x],$$
$$\cos mx \sin nx = \frac{1}{2}[\sin(m+n)x - \sin(m-n)x].$$

于是可知

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx \, dx = \pi\delta_{mn}, \quad \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx \, dx = \pi\delta_{mn}, \quad \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \sin nx \, dx = 0. \quad \blacksquare$$

**注** 如果把 $S$ 中的函数看作 “向量”, 它们的乘积在 $[-\pi, \pi]$ 上的 Riemann 积分看作 “内积”, 那么就可以说它们 “两两正交”. 因此集合 $S$ 中的三角函数具有 “正交性”.

**注** $\delta_{mn}$ 是 Kronecker 函数:

$$\delta_{mn} = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ 1, & m = n. \end{cases}.$$

和研究幂级数的思路一样, 对于三角级数我们主要关心以下几个问题:

(1) 如果一个函数 $f(x)$ 可以展开成形如2.22的级数, 那么系数 $a_n$ $(n = 0, 1, \cdots)$ 和 $b_n$ $(n = 1, 2, \cdots)$ 分别和 $f(x)$ 有什么关系?

(2) 在什么条件下 $f(x)$ 可以展开成形如2.22的级数?

先来讨论第一个问题. 假定等式2.22成立, 且右边的级数一致收敛于函数 $f(x)$. 对等式2.22两边作 $[-\pi, \pi]$ 上

的积分, 由三角函数的正交性可知

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2}\,\mathrm{d}x + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx\,\mathrm{d}x + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx\,\mathrm{d}x\right) = \pi a_0.$$

因此

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

在等式2.22两边乘一个有界函数 $\cos kx$. 容易验证右边的函数项级数仍然一致收敛. 对两边作 $[-\pi,\pi]$ 上的积分得

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\,\mathrm{d}x = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2}\cos kx\,\mathrm{d}x + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx\cos kx\,\mathrm{d}x + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx\cos kx\,\mathrm{d}x\right) = \pi a_k, \quad k = 1,2,\cdots.$$

因此

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\,\mathrm{d}x, \quad k = 1,2,\cdots. \tag{2.23}$$

容易看出 $a_0$ 也满足以上等式. 从中可以看出等式2.22中特意把常数项写成 $a_0/2$ 的好处. 用同样的方法可得

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx\,\mathrm{d}x, \quad k = 1,2,\cdots. \tag{2.24}$$

另一方面任给一个周期为 $2\pi$ 的周期函数 $f$, 如果它在 $[-\pi,\pi]$ 上 Riemann 可积, 那么就可以按公式2.23和2.24确定数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$. 这样就可以得到一个形如2.22的三角级数. 若 $f$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上无界, 但它的反常积分收敛, 也可以确定一个这样的三角级数.

我们知道, 若有界函数 $f$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上 Riemann 可积, 则 $|f|$ 也在 $[-\pi,\pi]$ 上 Riemann 可积. 若无界函数 $|f|$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上瑕积分收敛, 则 $f$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上瑕积分也收敛. 也就是说, 满足以上两种情况中任意一种, 都有 $f$ 和 $|f|$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上可积. 为了方便起见, 把这两种情况统一称为 "绝对可积". 区间 $[-\pi,\pi]$ 上所有绝对可积的函数组成的合集记作 $\mathbb{R}[-\pi,\pi]$.

**定义 2.22 (Fourier 级数)**

设函数 $f \in \mathbb{R}[-\pi,\pi]$. 令

$$\begin{cases} a_n = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x, & n = 0,1,\cdots. \\ b_n = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x, & n = 1,2,\cdots. \end{cases}.$$

由 $a_n$ $(n = 0,1,\cdots)$ 和 $b_n$ $(n = 1,2,\cdots)$ 确定的形如2.22的三角级数称为函数 $f$ 的 **Fourier 级数** (Fourier series), 记作

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos nx + b_n \sin nx.$$

其中 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 分别称为该级数的 Fourier 系数.

♣

**注** 和 Taylor 级数一样, 函数 $f$ 确定的 Fourier 级数不一定收敛, 如果收敛也未必收敛到 $f$. 即使收敛到 $f$, 也未必一致收敛到 $f$.

给定一个 $\mathbb{R}[a, a+2\pi]$ 的周期函数就可以确定一个 Fourier 级数. 下面看两个例子.

**例 2.113** 设函数 $f$ 是周期为 $2\pi$ 的函数, 且

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \in [-\pi,\pi) \\ -\pi, & x = \pi \end{cases}.$$

求 $f$ 的 Fourier 级数.

**解** 由于在 $(-\pi,\pi)$ 上 $f(x)$ 是一个奇函数, 故 $a_n=0\ (n=0,1,\cdots)$. 由于

$$\begin{aligned}b_n&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x\sin nx\,\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\sin nx\,\mathrm{d}x=-\frac{2}{n\pi}\int_0^{\pi}x\,\mathrm{d}\cos nx=-\frac{2}{n\pi}\left(x\cos nx\Big|_0^{\pi}-\int_0^{\pi}\cos nx\,\mathrm{d}x\right)\\&=-\frac{2}{n\pi}\cdot(-1)^n\pi=(-1)^{n+1}\frac{2}{n},\quad n=1,2,\cdots.\end{aligned}$$

于是可知

$$f(x)\sim\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2}{n}\sin nx=2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\sin nx}{n}.$$ ■

**例 2.114** 设函数 $f$ 是周期为 $2\pi$ 的函数, 且

$$f(x)=\begin{cases}x, & x\in(0,2\pi]\\ 2\pi, & x=0\end{cases}.$$

求 $f$ 的 Fourier 级数.

**解** 分别计算 Fourier 系数:

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}x\,\mathrm{d}x=2\pi.$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}x\cos nx\,\mathrm{d}x=\frac{1}{n\pi}\int_0^{2\pi}x\,\mathrm{d}\sin nx=\frac{1}{n\pi}\left(x\sin nx\Big|_0^{2\pi}-\int_0^{2\pi}\sin nx\,\mathrm{d}x\right)=0,\quad n=1,2,\cdots.$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}x\sin nx\,\mathrm{d}x=-\frac{1}{n\pi}\int_0^{2\pi}x\,\mathrm{d}\cos nx=-\frac{1}{n\pi}\left(x\cos nx\Big|_0^{2\pi}-\int_0^{2\pi}\cos nx\,\mathrm{d}x\right)=-\frac{1}{n\pi}\cdot2\pi=-\frac{2}{n},\quad n=1,2,\cdots.$$

于是可知

$$f(x)\sim\pi-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n}\sin nx.$$ ■

**例 2.115** 设函数 $f$ 是周期为 $2\pi$ 的函数, 且

$$f(x)=\begin{cases}-1, & -\pi\le x<0\\ 1, & 0\le x<\pi\end{cases}.$$

求 $f$ 的 Fourier 级数.

**解** 显然 $a_n=0\ (n=0,1,\cdots)$. 计算可知

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x=-\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}\sin nx\,\mathrm{d}x+\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin nx\,\mathrm{d}x=\frac{2}{n\pi}[1-(-1)^n]=\begin{cases}0, & n=2k\\ \dfrac{4}{n\pi}, & n=2k-1\end{cases}\quad k\in\mathbb{N}^*$$

于是可知

$$f\sim\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n-1)x}{2n-1}.$$ ■

从以上例子中的 Fourier 系数 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 都是无穷小数列. 于是引出了以下定理.

**定理 2.69 (Riemann-Lebesgue 引理)**

设函数 $f\in\mathbb{R}[a,b]$, 其中 $b$ 可以取 $+\infty$. 则

(1) $\displaystyle\lim_{\lambda\to+\infty}\int_a^b f(x)\cos\lambda x\,\mathrm{d}x=0$, (2) $\displaystyle\lim_{\lambda\to+\infty}\int_a^b f(x)\sin\lambda x\,\mathrm{d}x=0$.

♡

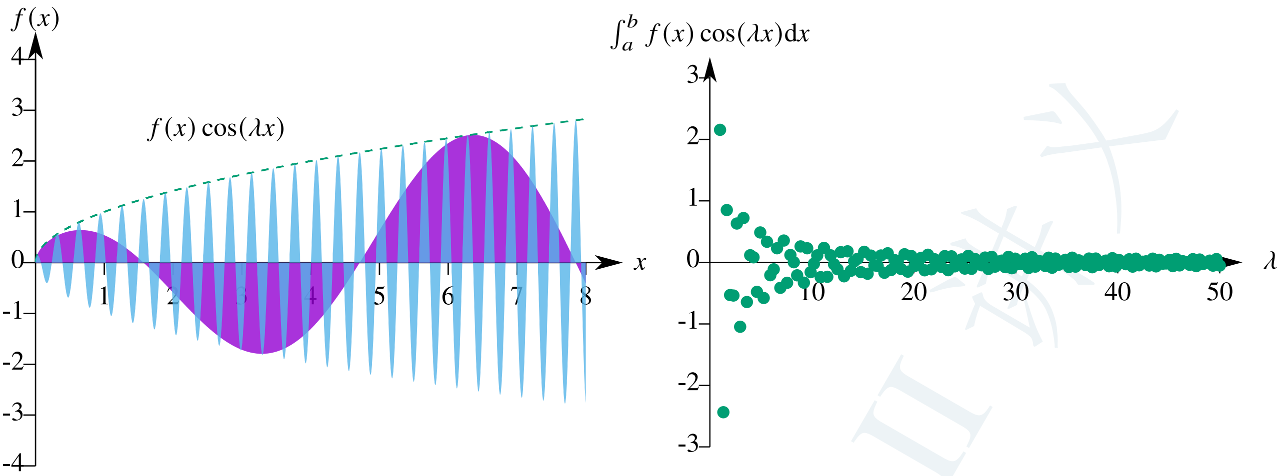



**图 2.5:** Riemann-Lebesgue 引理示意图. 左图中, 随着 $\lambda$ 不断增大, 函数 $f(x)\cos\lambda x$ 在 $x$ 下方的面积和 $x$ 上方的面积逐渐趋于相等.

**证明** 只证明 (1).

(i) 当 $b$ 有限且 $f$ 在 $[a,b]$ 上 Riemann 可积时, $f$ 有界. 因此存在 $M>0$ 使得对于任一 $x\in[a,b]$ 都有 $|f(x)|\le M$. 令 $n=\left[\sqrt{\lambda}\right]$. 则当 $\lambda\to+\infty$ 时 $n\to\infty$. 把 $[a,b]$ 分成 $n$ 等分, 则分点为

$$x_i=a+\frac{i}{n}(b-a),\quad i=0,1,\cdots,n.$$

有等式

$$\int_a^b f(x)\cos\lambda x\,\mathrm{d}x=\sum_{i=1}^n\int_{x_{i-1}}^{x_i}f(x)\cos\lambda x\,\mathrm{d}x=\sum_{i=1}^n\int_{x_{i-1}}^{x_i}[f(x)-f(x_{i-1})]\cos\lambda x\,\mathrm{d}x+\sum_{i=1}^n f(x_{i-1})\int_{x_{i-1}}^{x_i}\cos\lambda x\,\mathrm{d}x$$

上式右边的两个和式分别记作 $S_1,S_2$. 设 $f$ 在 $[x_{i-1},x_i]$ 上的振幅为 $\omega_i$ $(i=1,2,\cdots,n)$. 由于 $f$ 在 $[a,b]$ 上 Riemann 可积, 因此

$$|S_1|\le\sum_{i=1}^n\int_{x_{i-1}}^{x_i}[f(x)-f(x_{i-1})]\,\mathrm{d}x\le\sum_{i=1}^n\omega_i(x_i-x_{i-1})\to0,\quad\lambda\to+\infty.$$

于是 $S_1\to0$ $(\lambda\to\infty)$. 另一方面

$$|S_2|=\left|f(x_{i-1})\sum_{i=1}^n\frac{\sin\lambda x_i-\sin\lambda x_{i-1}}{\lambda}\right|\le\frac{2Mn}{\lambda}\le\frac{2Mn}{n^2}=\frac{2M}{n}\to0,\quad\lambda\to+\infty.$$

于是可知 $\int_a^b f(x)\cos\lambda x\,\mathrm{d}x\to0$ $(\lambda\to+\infty)$.

(ii) 当 $b$ 有限且 $f$ 在 $[a,b]$ 上的瑕积分绝对可积时, 不妨设 $b$ 时 $f$ 在 $[a,b]$ 上唯一的瑕点. 则对于任一 $\varepsilon>0$, 存在 $\eta>0$ 使得

$$\int_{b-\eta}^b|f(x)|\,\mathrm{d}x<\frac{\varepsilon}{2}.$$

由于 $f$ 在 $[a,b-\eta]$ 上 Riemann 可积, 由 (i) 可知, 对于前面取定的 $\varepsilon$, 存在 $\lambda_0>0$, 使得当 $\lambda>\lambda_0$ 时

$$\left|\int_a^{b-\eta}f(x)\cos\lambda x\,\mathrm{d}x\right|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

于是当 $\lambda>\lambda_0$ 时

$$\left|\int_a^b f(x)\cos\lambda x\,\mathrm{d}x\right|\le\left|\int_a^{b-\eta}f(x)\cos\lambda x\,\mathrm{d}x\right|+\left|\int_{\eta-b}^b f(x)\cos\lambda x\,\mathrm{d}x\right|\le\left|\int_a^{b-\eta}f(x)\cos\lambda x\,\mathrm{d}x\right|+\int_{\eta-b}^b|f(x)|\,\mathrm{d}x<\varepsilon.$$

于是可知 $\int_a^b f(x)\cos\lambda x\,\mathrm{d}x\to0$ $(\lambda\to+\infty)$.

(iii) 当 $b=+\infty$ 且 $f$ 在 $[a,+\infty]$ 上的无穷积分绝对可积时, 对于任一 $\varepsilon>0$, 存在 $a_0>a$ 使得

$$\int_{a_0}^{+\infty}|f(x)|\,\mathrm{d}x<\frac{\varepsilon}{2}.$$

由于 $f$ 在 $[a,b-\eta]$ 上 Riemann 可积, 由 (i) 可知, 对于前面取定的 $\varepsilon$, 对于前面取定的 $\varepsilon$, 存在 $\lambda_0>0$, 使得当 $\lambda>\lambda_0$ 时

$$\left|\int_a^{a_0}f(x)\cos\lambda x\,\mathrm{d}x\right|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

于是当 $\lambda>n_0$ 时

$$\left|\int_a^{+\infty}f(x)\cos\lambda x\,\mathrm{d}x\right|\le\left|\int_a^{a_0}f(x)\cos\lambda x\,\mathrm{d}x\right|+\left|\int_{a_0}^{+\infty}f(x)\cos\lambda x\,\mathrm{d}x\right|\le\left|\int_a^{a_0}f(x)\cos\lambda x\,\mathrm{d}x\right|+\int_{a_0}^{+\infty}|f(x)|\,\mathrm{d}x<\varepsilon.$$

于是可知 $\int_a^{+\infty}f(x)\cos\lambda x\,\mathrm{d}x\to0\ (\lambda\to+\infty)$. ■

**注** 以上定理于 1854 年首次发表于 Riemann 的著名论文《论函数的三角级数表示》中. 该论文中同时给出了 Riemann 积分的定义.

由以上定理立刻可知以下结论.

**定理 2.70**

设函数 $f\in\mathbb{R}[-\pi,\pi]$. 令 $f$ 的 Fourier 级数的 Fourier 系数分别是 $\{a_n\},\{b_n\}$. 则

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}b_n=0.$$

由此可见并不是每个形如2.22的三角级数都可以成为某个绝对可积函数的Fourier级数.Fourier级数的Fourier系数必须是无穷小.

如果 $f$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上可导, 则 Fourier 系数 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 会更快地趋于零.

**定理 2.71**

设函数 $f$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上可导, $f'$ 在 $[-\pi,\pi]$ 绝对可积. 若 $f(\pi)=f(-\pi)$, 则

$$\lim_{n\to\infty}na_n=\lim_{n\to\infty}nb_n=0.$$

**证明** 由于 $f$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上可导, 故在 $[-\pi,\pi]$ 上连续, 故在 $[-\pi,\pi]$ 上绝对可积, 故可设 $f$ 的 Fourier 系数为 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$. 由于 $f'$ 在 $[-\pi,\pi]$ 绝对可积, 故可设 $f'$ 的 Fourier 系数分别为 $\{a_n'\},\{b_n'\}$. 由 Fourier 系数的计算公式可得

$$\begin{aligned}a_n&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x=\frac{1}{n\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\,\mathrm{d}\sin nx=\frac{1}{n\pi}\left(f(x)\sin nx\Big|_{-\pi}^{\pi}-\int_{-\pi}^{\pi}f'(x)\sin nx\,\mathrm{d}x\right)\\&=-\frac{1}{n\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f'(x)\sin nx\,\mathrm{d}x=-\frac{b_n'}{n}.\\b_n&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x=-\frac{1}{n\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\,\mathrm{d}\cos nx=-\frac{1}{n\pi}\left(f(x)\cos nx\Big|_{-\pi}^{\pi}-\int_{-\pi}^{\pi}f'(x)\cos nx\,\mathrm{d}x\right)\\&=\frac{1}{n\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f'(x)\cos nx\,\mathrm{d}x=\frac{a_n'}{n}.\end{aligned}$$

由 Riemann-Lebesgue 引理可知

$$\lim_{n\to\infty}na_n=\lim_{n\to\infty}(-b_n')=0,\quad\lim_{n\to\infty}nb_n=\lim_{n\to\infty}a_n'=0.$$ ■

**注** 从上例还可以看出

$$a_0'=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f'(x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}(f(\pi)-f(-\pi))=0.$$

于是

$$f'(x)\sim\frac{a_0'}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n'\cos nx+b_n'\sin nx)=\sum_{n=1}^{\infty}(nb_n\cos nx-na_n\sin nx)=\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)'.$$

这表明 $f'$ 的 Fourier 系数恰好等于 $f$ 的 Fourier 系数逐项求导.

以上定理可以进一步推广.

**定理 2.72**

设函数 $f$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上有 $k+1$ 阶导数, 且 $f^{(k+1)}$ 在 $[-\pi,\pi]$ 绝对可积. 若

$$f^{(n)}(\pi)=f^{(n)}(-\pi),\quad k=0,1,\cdots,k.$$

则

$$\lim_{n\to\infty}\left(n^{k+1}a_n\right)=\lim_{n\to\infty}\left(n^{k+1}b_n\right)=0.$$

**证明** 设设 $f$ 的 Fourier 系数为 $\{a_n\},\{b_n\}$. 设 $f^{(n)}$ 的 Fourier 系数为 $\left\{a_n^{(n)}\right\},\left\{b_n^{(n)}\right\}$ $(n=1,2,\cdots,k)$. 则

$$a_n=-\frac{b_n^{(1)}}{n}=-\frac{a_n^{(2)}}{n^2}=\frac{b^{(3)}}{n^3}=\cdots.$$

$$b_n=\frac{a_n^{(1)}}{n}=-\frac{b_n^{(2)}}{n^2}=-\frac{a_n^{(3)}}{n^3}=\cdots.$$

这表明 $n^{k+1}a_n$ 和 $n^{k+1}b_n$ 等于 $a_n^{(k+1)}$ 或 $-a_n^{(k+1)}$ 或 $b_n^{(k+1)}$ 或 $-b_n^{(k+1)}$. 由 Riemann-Lebesgue 引理可知

$$\lim_{n\to\infty}\left(n^{k+1}a_n\right)=\lim_{n\to\infty}\left(n^{k+1}b_n\right)=0.$$

■

由以上讨论可知 $f$ 的 Fourier 系数是无穷小, 且 $f$ 可导的阶数越多, Fourier 系数趋于零的速度越快.

### 2.6.2 Fourier 级数的逐点收敛

下面要研究 Fourier 级数的收敛问题. 为此先要考察 Fourier 级数在 $x_0$ 处的部分和:

$$\begin{aligned}S_n(x_0)&=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kx_0+b_k\sin kx_0)\\&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\,\mathrm{d}x+\sum_{k=1}^{n}\left[\left(\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos kx\,\mathrm{d}x\right)\cos kx_0+\left(\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin kx\,\mathrm{d}x\right)\sin kx_0\right]\\&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\left[\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}(\cos kx\cos kx_0+\sin kx\sin kx_0)\right]\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\left[\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\cos k(x-x_0)\right]\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

我们有等式

$$\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\cos kx=\begin{cases}\dfrac{\sin(n+1/2)x}{2\sin(x/2)}, & x\neq 2m\pi,\ m\in\mathbb{Z}\\[2mm] \dfrac{1}{2}+n, & x=2m\pi,\ m\in\mathbb{Z}\end{cases}.$$

令

$$D_n(x)=1+2\sum_{k=1}^{n}\cos kx,\quad n=1,2,\cdots.$$

则

$$S_n(x_0)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)D_n(x-x_0)\,\mathrm{d}x.$$

这样就把 $S_n(x_0)$ 化成了一个**卷积** (convolution). 卷积是个重要的概念, 现在暂时可以简单地理解为 "两个函数乘积的积分", 后面将会详细讨论.

令 $t=x-x_0$. 容易看出被积函数是以 $2\pi$ 为周期的函数, 于是

$$S_n(x_0)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi-x_0}^{\pi-x_0}f(t+x_0)D_n(t)\,\mathrm{d}t=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t+x_0)D_n(t)\,\mathrm{d}t.$$

观察到 $D_n(t)$ $(n=1,2,\cdots)$ 都是偶函数, 因此考虑把上述积分拆成 $\int_{-\pi}^{0}$ 和 $\int_{0}^{\pi}$ 两部分, 然后在 $\int_{-\pi}^{0}$ 部分中, $t$ 用 $-t$

代入:

$$\begin{aligned}S_n(x_0) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{0} f(t+x_0)D_n(t)\,\mathrm{d}t + \int_0^{\pi} f(t+x_0)D_n(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{0} f(-t+x_0)D_n(-t)\,\mathrm{d}(-t) + \int_0^{\pi} f(t+x_0)D_n(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} [f(x_0+t)+f(x_0-t)]D_n(t)\,\mathrm{d}t.\end{aligned} \tag{2.25}$$

从上式可见, 要研究 $\{S_0(x_0)\}$, 关键是要研究函数列 $\{D_n(t)\}$.

**定义 2.23 (Dirichlet 核)**

设函数列

$$D_n(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin(n+1/2)x}{\sin(x/2)}, & x \neq 2m\pi,\ m \in \mathbb{Z} \\ 1+2n, & x = 2m\pi,\ m \in \mathbb{Z} \end{cases}, \quad n = 1, 2, \cdots.$$

该函数列称为 **Dirichlet 核** (Dirichlet kernel).

先来看一下 Dirichlet 核的简单性质.

**命题 2.21 (Dirichlet 核的简单性质)**

设 Dirichlet 核 $\{D_n(x)\}$. 则

(1) $D_n(x)$ $(n = 1, 2, \cdots)$ 都是周期为 $2\pi$ 的周期函数.

(2) $D_n(x)$ $(n = 1, 2, \cdots)$ 都是偶函数.

(3) $D_n(x)$ $(n = 1, 2, \cdots)$ 都在 $\mathbb{R}$ 上连续.

(4) $D_n(x)$ $(n = 1, 2, \cdots)$ 都在 $[0, \pi]$ 上 Riemann 可积, 且

$$\int_0^{\pi} D_n(x)\,\mathrm{d}x = \pi, \quad n = 1, 2, \cdots.$$

**证明** (1) 和 (2) 显然成立.

(3) 当 $x_0 = 2m\pi$ $(m \in \mathbb{Z})$ 时

$$\lim_{x\to x_0} D_n(x) = \lim_{x\to x_0} \frac{\sin(n+1/2)x}{\sin(x/2)} = \lim_{x\to x_0} \frac{(n+1/2)x}{x/2} = 2n+1 = D_n(x_0), \quad n = 1, 2, \cdots.$$

于是可知 $D_n(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上连续.

(4) 由于

$$2\sin\frac{t}{2}\sum_{k=1}^{n}\cos kt = \left(\sin\frac{3t}{2} - \sin\frac{t}{2}\right) + \left(\sin\frac{5t}{2} - \sin\frac{3t}{2}\right) + \cdots + \left[\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t - \sin\left(n-\frac{1}{2}\right)t\right] = \sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t - \sin\frac{t}{2}.$$

当 $t \neq 2m\pi$ 时有

$$1 + 2\sum_{k=1}^{n}\cos kt = \frac{\sin(n+1/2)t}{\sin(t/2)} = D_n(t).$$

两边积分, 由三角函数的正交性可知

$$\int_0^{\pi} D_n(x)\,\mathrm{d}x = \pi, \quad n = 1, 2, \cdots. \qquad \blacksquare$$

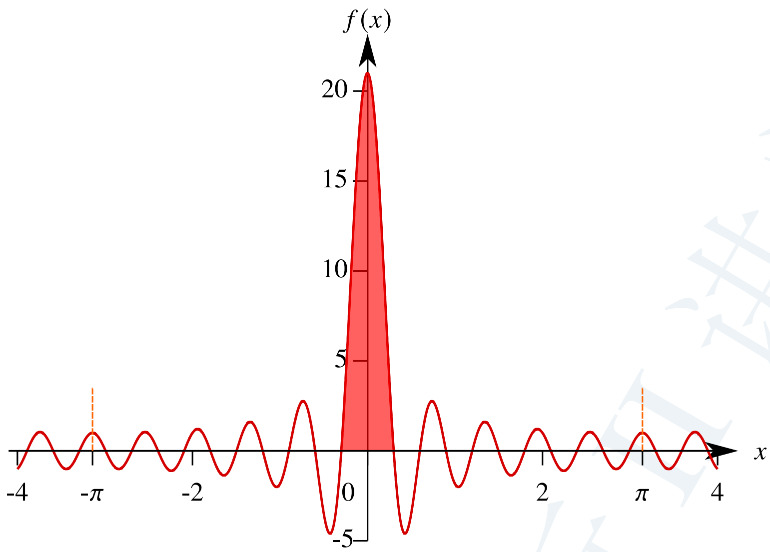



**图 2.6:** Dirichlet 核示意图 ($n = 10$).

从图像上可以更直观地看到 Dirichlet 核的性质. 如图2.6, $D_n(x)$ 关于 $y$ 轴对称周期为 $2\pi$. 下面只看区间 $[-\pi, \pi]$ 内的图像. 随着 $n$ 的增加, $D_n(0) = 1 + 2n$ 会越来越大, 函数的 "高地" 会越来越集中在小区间 $[-2\pi/(2n+1), 2\pi/(2n+1)]$ 上 (红色部分). 当 $x$ 不在这个小区间取值时, 即

$$-\frac{2\pi}{2n+1} \leq x \leq \frac{2\pi}{2n+1} \iff -\frac{\pi}{2n+1} \leq \frac{x}{2} \leq \frac{\pi}{2n+1}.$$

此时

$$|D_n(x)| = \left|\frac{\sin(n+1/2)x}{\sin(x/2)}\right| \leq \frac{1}{\left|\sin\frac{x}{2}\right|} \leq \frac{1}{\sin\dfrac{\pi}{2n+1}}.$$

因此振幅保持在一定范围内.

从前面的讨论可以看出, $S_n(x_0)$ 的表达式中, 只有 $\sin(n+1/2)t$ 和 $n$ 有关. 当 $n \to \infty$ 时, $n + 1/2 \to \infty$, 因此很容易想到研究 $\{S_0(x_0)\}$ 敛散性时, 上一节中的 Riemann-Lebesgue 引理将起到关键作用.

从 Fourier 级数的定义来看, $f$ 的 Fourier 系数与 $f$ 在 $[-\pi, \pi]$ 上的整体性质有关. 因此 $f$ 的 Fourier 级数的敛散性也应该与 $f$ 在区间上的整体性质有关. 但事实却并非如此.

**定理 2.73 (Riemann 局部化定理)**

设函数 $f \in \mathbb{R}[-\pi, \pi]$. 则 $f$ 的 Fourier 级数在点 $x_0$ 处的敛散性, 以及收敛时的和, 只和 $f$ 在 $x_0$ 附近的状态有关.

**证明** 任一给定 $\delta > 0$. 把等式2.25拆成 $\int_0^\delta$ 和 $\int_\delta^\pi$ 两部分:

$$S_n(x_0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^\delta [f(x_0+t) + f(x_0-t)]D_n(t)\,\mathrm{d}t + \frac{1}{2\pi}\int_\delta^\pi [f(x_0+t) + f(x_0-t)]D_n(t)\,\mathrm{d}t.$$

下面考察 $\int_\delta^\pi$ 部分:

$$\frac{1}{2\pi}\int_\delta^\pi [f(x_0+t) + f(x_0-t)]D_n(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_\delta^\pi \frac{f(x_0+t) + f(x_0-t)}{\sin(t/2)} \sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t\,\mathrm{d}t.$$

容易看出函数 $\frac{f(x_0+t)+f(x_0-t)}{\sin(t/2)}$ 在 $[\delta, \pi]$ 上绝对可积, 由 Riemann-Lebesgue 引理可知

$$\lim_{n\to\infty}\int_\delta^\pi \frac{f(x_0+t) + f(x_0-t)}{\sin(t/2)} \sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t\,\mathrm{d}t = 0.$$

因此当 $n \to \infty$ 时 $\{S_n(x_0)\}$ 是否收敛只取决于 $\int_0^\delta$ 部分, 即

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^\delta [f(x_0+t) + f(x_0-t)]D_n(t)\,\mathrm{d}t.$$

而以上积分的值只与 $f$ 在邻域 $N_\delta(x_0)$ 上的状态有关. ■

**注** 由以上定理可知, 若存在 $\delta > 0$ 使得函数 $f, g \in \mathbb{R}[-\pi,\pi]$ 满足

$$f(x) = g(x), \quad \forall N_\delta(x_0).$$

则 $f$ 和 $g$ 的 Fourier 级数在 $x_0$ 处有相同的敛散性, 且当它们收敛时有相同的和.

由局部化定理的证明过程立刻可以得到 Fourier 级数逐点收敛的充要条件.

**定理 2.74**

设函数 $f \in \mathbb{R}[-\pi,\pi]$. 则 $f$ 的 Fourier 级数在点 $x_0$ 收敛到 $l$ 当且仅当存在 $\delta \in (0,\delta]$ 使得

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2\pi}\int_0^\delta [f(x_0+t)+f(x_0-t)]D_n(t)\,\mathrm{d}t = l.$$

由于 $\sin x \sim x$ $(x \to 0)$. 因此想到把 Dirichlet 核中, 分母上的 $\sin(x/2)$ 替换成 $x/2$. 令

$$F_n(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin(n+1/2)x}{x/2}, & x \neq 0, \\ 1+2n, & x = 0 \end{cases}, \quad n = 1,2,\cdots.$$

该函数列称为 **Fourier 核** (Fourier kernel).

**命题 2.22 (Fourier 核的简单性质)**

设 Fourier 核 $\{F_n(x)\}$. 则

(1) $F_n(x)$ $(n = 1,2,\cdots)$ 都是偶函数.

(2) $F_n(x)$ $(n = 1,2,\cdots)$ 都在 $\mathbb{R}$ 上连续.

(3) $F_n(x)$ $(n = 1,2,\cdots)$ 都在 $[0,\pi]$ 上 Riemann 可积, 且

$$\int_0^\pi F_n(x)\,\mathrm{d}x = \pi, \quad n = 1,2,\cdots.$$

**证明** (1) 显然成立.

(2) 由于

$$\lim_{x\to 0} F_n(x) = \lim_{x\to 0}\frac{\sin(n+1/2)x}{x/2} = \lim_{x\to 0}\frac{(n+1/2)x}{x/2} = 2n+1 = F_n(0), \quad n = 1,2,\cdots.$$

于是可知 $F_n(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上连续.

(3) 由 Dirichlet 核的积分可知

$$\pi = \int_0^\pi D_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^\pi \frac{\sin(n+1/2)t}{\sin(t/2)}\,\mathrm{d}t = \int_0^\pi \left[\frac{1}{\sin(t/2)} - \frac{1}{t/2}\right]\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t\,\mathrm{d}t + \int_0^\pi \frac{\sin(n+1/2)t}{t/2}\,\mathrm{d}t.$$

由于

$$\lim_{t\to 0}\left[\frac{1}{\sin(t/2)} - \frac{1}{t/2}\right] = 0.$$

因此这个函数在 $[0,\pi]$ 上可积. 由 Riemann-Lebesgue 引理可知

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^\pi \left[\frac{1}{\sin(t/2)} - \frac{1}{t/2}\right]\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t\,\mathrm{d}t = 0.$$

于是可知

$$\int_0^\pi F_n(x)\,\mathrm{d}x = \pi, \quad n = 1,2,\cdots.$$

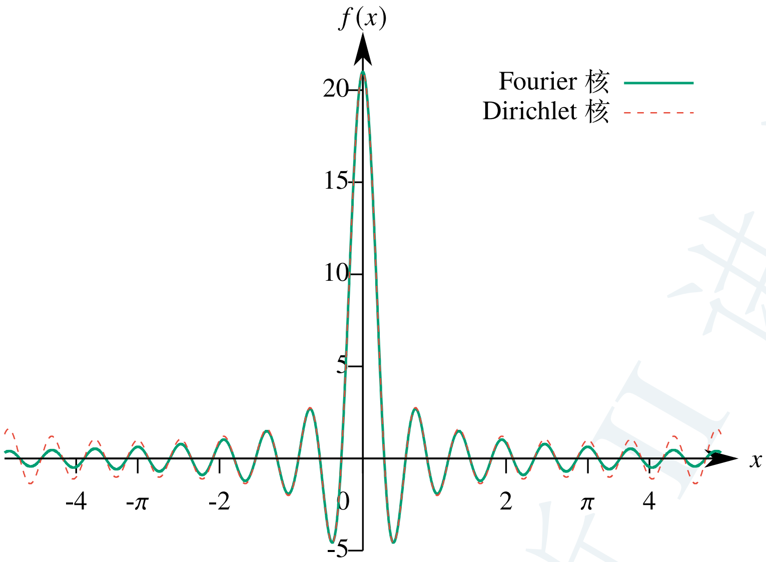



图 2.7: Fourier 核示意图 ($n = 10$).

如图2.7所示, Fourier 核关于 $y$ 轴对称, 当 $x \to \infty$ 时 $F_n(x) \to 0$. $F_n(x)$ 与 $D_n(x)$ 在 $x = 0$ 处的函数值相等. 当 $|x| \le 2\pi/(2n+1)$ 时

$$D_n(x) - F_n(x) = \sin\left(n + \frac{1}{2}\right)x\left(\frac{1}{\sin x/2} - \frac{1}{x/2}\right) > 0.$$

依次研究下去可以知道, 当 $2\pi/(2n+1) \le |x| \le 4\pi/(2n+1)$ 时 $D_n(x) < F_n(x)$. $D_n(x)$ 与 $F_n(x)$ 在远离原点的区间内的大小关系很容易在图中看出来.

利用 $F_n(x)$ 的积分, 可以求得以下重要积分.

**例 2.116Dirichlet 积分** 求以下无穷积分的积分值:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x.$$

**解** 由例2.103可知原积分收敛. 由于

$$\int_0^{\pi} F_n(t)\,\mathrm{d}t = \pi \iff \int_0^{\pi} \frac{\sin(n+1/2)t}{t}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}.$$

令 $x = (n+1/2)t$, 则

$$\int_0^{(n+1/2)\pi} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}.$$

令 $n \to \infty$ 得

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}.$$

下面来研究 $D_n(x)$ 和 $F_n(x)$ 的关系.

**命题 2.23**

设函数 $f$ 在 $[0,\pi]$ 上可积, 若以下两个极限中有一个存在:

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{\pi} f(x)D_n(x)\,\mathrm{d}x, \quad \lim_{n\to\infty}\int_0^{\pi} f(x)F_n(x)\,\mathrm{d}x.$$

则对于任一 $\delta \in (0,\pi]$, 以下极限都存在且相等

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{\delta} f(x)D_n(x)\,\mathrm{d}x, \quad \lim_{n\to\infty}\int_0^{\delta} f(x)F_n(x)\,\mathrm{d}x.$$

**证明** 令

$$g(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\sin(x/2)}-\dfrac{1}{x/2}, & 0<x\leq\pi\\ 0, & x=0\end{cases}.$$

由于

$$\lim_{x\to0+}g(x)=\lim_{x\to0+}\left[\frac{1}{\sin(x/2)}-\frac{1}{x/2}\right]=0.$$

因此 $g(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上连续. 因此 $f(x)g(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上 Riemann 可积. 由 Riemann-Lebesgue 引理可知

$$0=\lim_{n\to\infty}\int_0^\pi f(x)g(x)\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x\,\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\left[\int_0^\pi f(x)D_n(x)\,\mathrm{d}x-\int_0^\pi f(x)F(x)\,\mathrm{d}x\right].$$

由于 $\lim_{n\to\infty}\int_0^\pi f(x)D_n(x)\,\mathrm{d}x$ 和 $\lim_{n\to\infty}\int_0^\pi f(x)F_n(x)\,\mathrm{d}x$ 中至少有一个极限存在, 因此

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^\pi f(x)D_n(x)\,\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\int_0^\pi f(x)F_n(x)\,\mathrm{d}x.$$

对于任一 $\delta\in(0,\pi]$, 由 Riemann-Lebesgue 引理可知

$$0=\lim_{n\to\infty}\int_\delta^\pi f(x)g(x)\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x\,\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\left[\int_\delta^\pi f(x)D_n(x)\,\mathrm{d}x-\int_\delta^\pi f(x)F_n(x)\,\mathrm{d}x\right].$$

由 Riemann 局部化定理的证明过程可知

$$\lim_{n\to\infty}\int_\delta^\pi f(x)D_n(x)\,\mathrm{d}x=0.$$

因此

$$\lim_{n\to\infty}\int_\delta^\pi f(x)F_n(x)\,\mathrm{d}x=0.$$

于是可知

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^\delta f(x)D_n(x)\,\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\int_0^\delta f(x)F_n(x)\,\mathrm{d}x.$$

根据以上命题, 定理2.74就可以立刻改写成以下定理.

**定理 2.75 (Dini 逐点收敛准则)**

设函数 $f\in\mathbb{R}[-\pi,\pi]$. 则 $f$ 的 Fourier 级数在点 $x_0$ 收敛到 $l$ 当且仅当存在 $\delta\in(0,\pi]$ 使得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_0^\delta[f(x_0+t)+f(x_0-t)]F_n(t)\,\mathrm{d}t=l.$$

其中

$$F_n(t)=\frac{\sin(n+1/2)t}{t/2}.$$

**注** 以上定理是 Dini 于 1880 年提出的.

**引理 2.2**

设函数 $f\in\mathbb{R}[-\pi,\pi]$. 给定 $l\in\mathbb{R}$. 令

$$\varphi(t)=\frac{f(x_0+t)+f(x_0-t)-2l}{t}.$$

若存在 $\delta\in(0,\pi]$ 使得函数 $\varphi(t)$ 在 $[0,\delta]$ 上绝对可积, 则 $f$ 的 Fourier 级数在 $x_0$ 处收敛于 $l$.

**证明** 由于

$$\pi=\int_0^\pi F_n(t)\,\mathrm{d}t\Longrightarrow l=\frac{1}{2\pi}\int_0^\pi 2lF_n(t)\,\mathrm{d}t.$$

令

$$S_n'(x_0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^\pi[f(x_0+t)+f(x_0-t)]F_n(t)\,\mathrm{d}t.$$

于是

$$
\begin{aligned}
S_n'(x_0) - l &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} [f(x_0+t)+f(x_0-t)-2l]F_n(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} \frac{f(x_0+t)+f(x_0-t)-2l}{t/2}\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\varphi(t)\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t\,\mathrm{d}t.
\end{aligned}
$$

由于 $\varphi(t)$ 在 $[0,\delta]$ 上绝对可积, 故它在 $[0,\pi]$ 上也绝对可积, 于是由 Riemann-Lebesgue 引理可知

$$
0 = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\varphi(t)\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t\,\mathrm{d}t = \lim_{n\to\infty}[S_n'(x_0)-l].
$$

因此 $S_n'(x_0)\to l$. 由 Dini 逐点收敛准则可知 $f$ 的 Fourier 级数在 $x_0$ 处收敛于 $l$. ■

**定理 2.76 (Dirichlet 定理)**

设函数 $f\in\mathbb{R}[-\pi,\pi]$. 若 $f$ 在 $x_0$ 左连续、右连续, 且以下极限都存在:

$$
\lim_{t\to0+}\frac{f(x_0+t)-f(x_0+)}{t},\quad \lim_{t\to0+}\frac{f(x_0-t)-f(x_0-)}{-t}.
$$

则 $f$ 的 Fourier 级数在 $x_0$ 处收敛于

$$
\frac{f(x_0+)+f(x_0-)}{2}.
$$

**证明** 由于以下极限存在:

$$
\lim_{t\to0+}\frac{f(x_0+t)-f(x_0+)}{t},\quad \lim_{t\to0+}\frac{f(x_0-t)-f(x_0-)}{-t}
$$

故对于给定的 $M$, 存在 $\delta\in(0,\pi]$ 使得当 $t\in(0,\delta)$ 时

$$
\frac{|f(x_0+t)-f(x_0+)|}{t}\le M,\quad \frac{|f(x_0-t)-f(x_0-)|}{t}\le M.
$$

令 $2l=f(x_0+)+f(x_0-)$. 则引理2.2中的 $\varphi(t)$ 为

$$
|\varphi(t)| = \left|\frac{f(x_0+t)+f(x_0-t)-2l}{t}\right| = \frac{|f(x_0+t)-f(x_0+)|}{t}+\frac{|f(x_0-t)-f(x_0-)|}{t}\le 2M.
$$

因此 $|\varphi(t)|$ 在 $[0,\delta]$ 上有界, 故 $\varphi(t)$ 在 $[0,\delta]$ 上绝对可积, 由引理2.2可知则 $f$ 的 Fourier 级数在 $x_0$ 处收敛于 $l$.

**注** 为了叙述简单, 可以规定

$$
f'(x+) := \lim_{h\to0+}\frac{f(x+h)-f(x+)}{h},\quad f'(x-) := \lim_{h\to0+}\frac{f(x-h)-f(x-)}{-h}.
$$

显然 $f'(x+)$ 存在这个条件要比右导数 $f_+'(x)$ 存在弱一些.

**注** 以上定理于 1829 年由 Dirichlet 首次给出证明.

由 Dirichlet 定理立刻可知 $f$ 在 $x_0$ 处存在左右导数, 则 $f$ 的 Fourier 级数收敛. 如果左右导数相等, 即 $f$ 在 $x_0$ 处可导, 则 $f$ 的 Fourier 级数不仅收敛, 而且收敛到 $f(x_0)$.

**推论 2.6**

设函数 $f\in\mathbb{R}[-\pi,\pi]$. 若 $f$ 在 $x_0$ 处的左右导数都存在且有限, 则 $f$ 的 Fourier 级数在 $x_0$ 处收敛于

$$
\frac{f(x_0+)+f(x_0-)}{2}.
$$

**推论 2.7**

设函数 $f\in\mathbb{R}[-\pi,\pi]$. 若 $f$ 在 $x_0$ 处可导, 则 $f$ 的 Fourier 级数在 $x_0$ 处收敛于 $f(x_0)$.

以上两个推论经常表述为以下形式.

**定义 2.24 (逐段连续和逐段可导)**

设 $[a,b]$ 上的函数 $f$. 若 $f$ 在 $[a,b]$ 上只有有限个第一类间断点, 则称 $f$ **逐段连续** (piecewise continuous). 在间断点处 $f$ 可以随意定义, 也可以无定义. 若 $f$ 的导函数 $f'$ 在 $[a,b]$ 逐段连续, 则称 $f$ 在 $[a,b]$ 上**逐段可导** (piecewise differentiable).

♣

**推论 2.8**

设周期为 $2\pi$ 的函数 $f$. 若 $f$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上逐段可导, 则 $f$ 的 Fourier 收敛, 且

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx+b_n\sin nx=\begin{cases} f(x), & x \text{ 是连续点}. \\ \dfrac{f(x+)+f(x-)}{2}, & x \text{ 是间断点}. \end{cases}.$$

♡

从以上讨论可以, 只要函数 $f$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上可导就可以展开为 Fourier 级数. 而在 $[-\pi,\pi]$ 上任意阶可导的函数都未必能展开为幂级数. 从这个角度看 Fourier 级数可表示的函数远比幂级数多. 因此可以想象 Fourier 级数的应用范围也远比幂级数广泛.

下面来看几个例子.

**例 2.117** 求证:

$$1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots=\frac{\pi}{4}.$$

**证明** 设函数 $f(x)=x\ (-\pi<x<\pi)$. 由例2.113可知

$$x\sim\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2}{n}\sin nx.$$

由于 $f(x)$ 在 $(-\pi,\pi)$ 上连续可导, 故 $f$ 的 Fourier 级数收敛于 $f$, 即

$$x=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2}{n}\sin nx \iff \frac{x}{2}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\sin nx}{n},\quad -\pi<x<\pi.$$

令 $x=\pi/2$ 即得

$$\frac{\pi}{4}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}\sin\frac{n\pi}{2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots.$$

上例表明, 利用 Fourier 级数的展开式可以得到很多有用的级数恒等式.

**例 2.118** 求证:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}=\frac{\pi-x}{2},\quad 0<x<2\pi.$$

**证明** 设函数 $f(x)=x\ (0<x<2\pi)$, 由于 $f(x)$ 在 $(0,2\pi)$ 上连续可导, 故 $f$ 的 Fourier 级数收敛于 $f$. 由例2.114可知

$$x=\pi-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n}\sin nx \iff \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}=\frac{\pi-x}{2},\quad 0<x<2\pi.$$

**注**

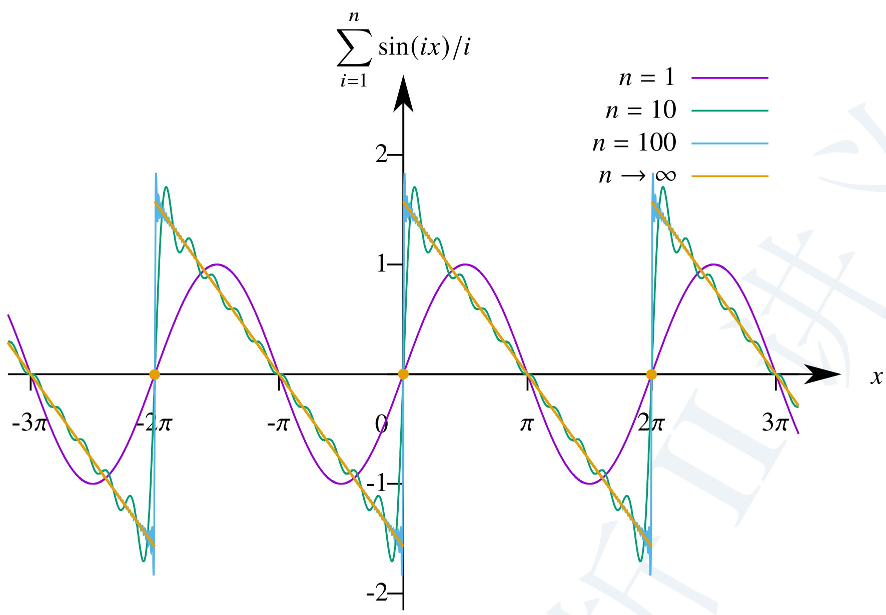



**图 2.8:** Abel 的反例.

上例中的 Fourier 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \sin(nx)/n$ 在 $\mathbb{R}$ 上收敛.

如图2.8所示, 它的和函数是周期为 $2\pi$ 的周期函数, 它在一个周期 $[0, 2\pi)$ 内的函数解析式为

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n} = \begin{cases} \dfrac{\pi - x}{2}, & 0 < x < 2\pi \\ 0, x = 0 \end{cases}.$$

容易看出级数的各项都是 $\mathbb{R}$ 上的连续函数, 但它的和函数在 $\mathbb{R}$ 上不连续. 这正是 Abel 用来反驳 Cauchy 错误观点时举出的例子! 之所以和函数不连续, 是因为这个 Fourier 级数在 $x = 2k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$ 附近不一致连续. 后面将讨论 Fourier 级数的一致连续问题.

**例 2.119** 设周期为 $2\pi$ 的函数 $f$. 当 $x \in [-\pi, \pi]$ 时 $f(x) = x^2$. 把 $f$ 展开为 Fourier 级数.

**解** 容易知道 $f$ 在 $\mathbb{R}$ 上逐段可导, 因此可以展开为 Fourier 级数. 由于 $f$ 为偶函数, 故 $b_n = 0$ $(n = 1, 2, \cdots)$. 计算得

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2 \,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2 \,\mathrm{d}x = \frac{2}{3\pi}x^3\Big|_0^{\pi} = \frac{2}{3}\pi^2.$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2 \cos nx \,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2 \cos nx \,\mathrm{d}x = \frac{2}{n\pi}\int_0^{\pi} x^2 \,\mathrm{d}\sin nx = \frac{2}{n\pi}\left(x^2 \sin nx\Big|_0^{\pi} - 2\int_0^{\pi} x \sin nx \,\mathrm{d}x\right) \\ &= -\frac{4}{n\pi}\int_0^{\pi} x \sin nx \,\mathrm{d}x = \frac{4}{n\pi}\int_0^{\pi} x \,\mathrm{d}\cos nx = \frac{4}{n^2\pi}\left(x\cos x\Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \cos nx \,\mathrm{d}x\right) = (-1)^n \frac{4}{n^2}, \quad n = 1, 2, \cdots. \end{aligned}$$

于是可知

$$f(x) = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\cos nx}{n^2}.$$

**注** 由上例可知

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\cos nx}{n^2} \iff \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\cos nx}{n^2} = \frac{3x^2 - \pi^2}{12}, \quad -\pi \le x \le \pi.$$

令 $x = \pi$ 得

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

以上 $p$ 级数的敛散性我们早就知道了. 但要求出该级数的和并不容易. 这里再次看到了 Fourier 级数的威力.

**例 2.120** 设周期为 $2\pi$ 的函数 $f$. 当 $x \in [-\pi,\pi]$ 时 $f(x) = \cos ax$ ($a \in \mathbb{Z}$). 把 $f$ 展开为 Fourier 级数.

**解** 容易知道 $f$ 是 $\mathbb{R}$ 上的连续偶函数, 故 $b_n = 0$ ($n = 1,2,\cdots$). 计算得

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \cos ax\cos nx\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi [\cos(a+n)x + \cos(a-n)x]\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{\pi}\left[\frac{\sin(a-n)\pi}{a-n} + \frac{\sin(a+n)\pi}{a+n}\right] = \frac{(-1)^n}{\pi}\cdot\frac{2a\sin a\pi}{a^2-n^2}, \quad n = 0,1,\cdots. \end{aligned}$$

由于 $f$ 在 $\mathbb{R}$ 上逐段可导, 于是可知

$$f(x) = \frac{\sin a\pi}{a\pi} + \sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^n}{\pi}\cdot\frac{2a\sin a\pi}{a^2-n^2}\cos nx = \frac{\sin a\pi}{\pi}\left[\frac{1}{a} + \sum_{n=1}^\infty (-1)^n\frac{2a}{a^2-n^2}\cos nx\right].$$

**注** 由上例可知

$$\cos ax = \frac{\sin a\pi}{\pi}\left[\frac{1}{a} + \sum_{n=1}^\infty (-1)^n\frac{2a}{a^2-n^2}\cos nx\right], \quad x \in [-\pi,\pi].$$

令 $x = 0$ 可得

$$\frac{\pi}{\sin a\pi} = \frac{1}{a} + \sum_{n=1}^\infty (-1)^n\frac{2a}{a^2-n^2}, \quad a \in \mathbb{Z}.$$

从前面的例子看出, 任给一个 $[-\pi,\pi]$(也可以是其它长度为 $2\pi$ 的区间) 的函数表达式, 就可以把它扩展为 $\mathbb{R}$ 上周期为 $2\pi$ 的函数, 且这样的函数是唯一的. 这个过程称为**延拓** (extension).

如果只给了 $(0,\pi)$ 上的函数表达式, 那么可以先补充定义 $[-\pi,0]$, 然后也可以把它延拓成 $\mathbb{R}$ 上周期为 $2\pi$ 的函数. 但显然这样的延拓可以有无数种方式. 常见的延拓方式有两种. 第一种方式是让补充定义后的函数在 $(-\pi,\pi)$ 上成为偶函数. 这样的方式称为**偶性延拓** . 此时 $b_n \equiv 0$, 因此 $f$ 的 Fourier 级数中只含余弦项, 因此称为**余弦级数** (cosine series).

类似地, 可以让补充定义后的函数在 $(-\pi,\pi)$ 上成为奇函数. 这样的方式称为**奇性延拓** . 此时 $a_n \equiv 0$, 因此 $f$ 的 Fourier 级数中只含正弦项, 因此称为**正弦级数** (sine series).

下面来看一个简单的例子.

**例 2.121** 设函数 $f(x) = x$ $x \in (0,\pi)$. 分别用偶性延拓和奇性延拓把 $f$ 延拓成余弦级数和正项级数.

**解** (1) 作偶性延拓得, 然后以 $2\pi$ 为周期延拓到 $\mathbb{R}$. 所得的函数记作 $\widetilde{f}$. 此时 $b_n \equiv 0$. 计算得

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x\,\mathrm{d}x = \pi.$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x\cos nx\,\mathrm{d}x = \frac{2}{n^2\pi}[(-1)^n - 1] = \begin{cases} 0, & n = 2k \\ -\dfrac{4}{(2k-1)^2\pi}, & n = 2k-1 \end{cases}$$

于是可知

$$\widetilde{f} = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^\infty \frac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^2}.$$

(2) 由例2.113可知, 奇性延拓得到的函数的 Fourier 为

$$2\sum_{n=1}^\infty (-1)^{n+1}\frac{\sin nx}{n}.$$

■

**注** (1) 中, 当 $x \in [0,\pi]$ 时

$$x = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^\infty \frac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^2}.$$

令 $x=0$ 得

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}=\frac{\pi^2}{8}.$$

现在来讨论一般的周期函数. 前面已经说过任一周期的周期函数都可以通过一个简单的换元化为周期为 $2T$ 的函数. 因此通过换元不难得到一般周期函数的 Fourier 系数公式.

设 $f(x)$ 是周期为 $2T$ 的函数. 令 $x=Tt/\pi$. 令 $g(t)=f(Tt/\pi)$, 则 $g(t)$ 是周期为 $2\pi$ 的函数. 若 $g(t)$ 满足 Dini 收敛准则, 则

$$g(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nt+b_n\sin nt).$$

其中

$$\begin{cases} a_n=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}g(t)\cos nt\,\mathrm{d}t, & n=0,1,\cdots. \\ b_n=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}g(t)\sin nt\,\mathrm{d}t, & n=1,2,\cdots. \end{cases}.$$

由于 $t=x\pi/T$, 于是

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi}{T}x+b_n\sin\frac{n\pi}{T}x\right).$$

其中

$$\begin{cases} a_n=\dfrac{1}{T}\displaystyle\int_{-T}^{T}f(x)\cos\frac{n\pi}{T}x\,\mathrm{d}x, & n=0,1,\cdots. \\ b_n=\dfrac{1}{T}\displaystyle\int_{-T}^{T}f(x)\sin\frac{n\pi}{T}x\,\mathrm{d}x, & n=1,2,\cdots. \end{cases}.$$

这样就得到一般的周期函数的 Fourier 展开式.

**例 2.122** 设函数

$$f(x)=\begin{cases} x, & 0\le x\le\dfrac{a}{2} \\ a-x, & \dfrac{a}{2}\le x\le a \end{cases}.$$

把 $f(x)$ 在 $(0,a)$ 上展开成正弦级数.

**解** 把 $f$ 作奇性延拓, 于是

$$\begin{aligned} b_n&=\frac{2}{a}\int_0^a f(x)\sin\frac{n\pi}{a}x\,\mathrm{d}x=\frac{2}{a}\int_0^{a/2}x\sin\frac{n\pi}{a}x\,\mathrm{d}x+\frac{2}{a}\int_{a/2}^{a}(a-x)\sin\frac{n\pi}{a}x\,\mathrm{d}x \\ &=\left(-\frac{a}{n\pi}\cos\frac{n\pi}{2}+\frac{2a}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi}{2}\right)+\left(\frac{a}{n\pi}\cos\frac{n\pi}{2}+\frac{2a}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi}{2}\right)=\frac{4a}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi}{2} \\ &=\begin{cases} b_{2k}=0 \\ b_{2k+1}=\dfrac{4a}{\pi^2}\cdot\dfrac{(-1)^k}{(2k+1)^2}, & k=0,1,\cdots. \end{cases}. \end{aligned}$$

于是可知

$$f(x)=\frac{4a}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)^2}\sin\frac{2k+1}{a}\pi x,\quad x\in[0,a].$$

### 2.6.3 Fourier 级数的一致收敛

现在我们换个角度来看 Fourier 系数. 设实数域 $\mathbb{R}$ 上的 $n$ 维线性空间 $V$. 若有一个基 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n$, 则 $V$ 中任一向量 $\boldsymbol{x}$ 都可以表示为:

$$\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{e}_n.$$

设向量 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in V$ 在上述基下的坐标为 $[a_1, a_2, \cdots, a_n]^T$ 和 $[b_1, b_2, \cdots, b_n]^T$, 则可以定义 $V$ 在基 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n$ 下的内积:

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) := a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n.$$

这样定义的内积满足以下性质:

(1) 正定性: $(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\alpha}) > 0$ $(\forall \boldsymbol{\alpha} \neq \mathbf{0})$.

(2) 对称性: $(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) = (\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\alpha})$ $(\forall \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \in V)$.

(3) 双线性: $(a\boldsymbol{\alpha} + b\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}) = a(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\gamma}) + b(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma})$ $(\forall \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma} \in V,\ \forall a, b \in \mathbb{R})$.

若 $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = 0$, 则称 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 是正交的. 利用内积可以定义 $V$ 中向量的范数:

$$\|\boldsymbol{x}\| := \sqrt{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})}.$$

范数为 1 的向量称为单位向量. 若一个基中的向量两两正交且都是单位向量, 则称这个基为标准正交基. 由于 $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n$ 的坐标分别为

$$[1, 0, \cdots, 0]^T, \quad [0, 1, \cdots, 0]^T, \quad [0, 0, \cdots, 1]^T.$$

因此基 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n$ 在以上定义的内积和范数之下是一个标准正交基. 不难看出 $\boldsymbol{x}$ 的在基于 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n$ 下的系数可以用内积表示:

$$\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{e}_1)\boldsymbol{e}_1 + (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{e}_2)\boldsymbol{e}_2 + \cdots + (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{e}_n)\boldsymbol{e}_n.$$

以上是线性代数中的基础知识. 下面通过类比来研究函数空间的情况.

设区间 $[-\pi, \pi]$ 上所有绝对可积的函数组成的集合为 $\mathbb{R}[-\pi, \pi]$. 容易验证 $\mathbb{R}[-\pi, \pi]$ 满足八条线性空间的公理 (见《高等代数》), 因此这是一个线性空间, 里面的每一个函数都可以看作向量. 进一步可以验证, 它是无穷维的 (证明见《高等代数》).

现在来定义函数空间 $\mathbb{R}[-\pi, \pi]$ 中的内积. 在 $n$ 维线性空间 $V$ 中, 一旦给定一个基 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n$, 那么任一向量 $\boldsymbol{x}$ 就有对应一个确定的数组 $[x_1, x_2, \cdots, x_n]^T$. 因此 $\boldsymbol{x}$ 可以看作一个定义在 $\{1, 2, \cdots, n\}$ 上的一个实值函数. 反过来, 函数空间 $\mathbb{R}[-\pi, \pi]$ 中的函数 $f$ 确定了区间 $[-\pi, \pi]$ 到 $f[-\pi, \pi]$ 的一个对应法则, 因此可以把 $[-\pi, \pi]$ 上每一点的函数值看作一个分量. 于是仿照 $n$ 维线性空间中内积的定义方法, 可以很自然地定义 $\mathbb{R}[-\pi, \pi]$ 中两个函数 $f$ 和 $g$ 的内积:

$$(f, g) := \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)\,\mathrm{d}x.$$

这样定义的内积恰好也满足类似的三条性质:

(1) 正定性: $(f, f) > 0$ $(\forall f \neq \mathbf{0})$.

(2) 对称性: $(f, g) = (g, f)$ $(\forall f, g \in \mathbb{R}[-\pi, \pi])$.

(3) 双线性: $(af + bg, h) = a(f, h) + b(g, h)$ $(\forall f, g, h \in \mathbb{R}[-\pi, \pi],\ \forall a, b \in \mathbb{R})$.

现在用函数组 $1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \cdots, \cos nx, \sin nx, \cdots$ 张成一个函数空间:

$$V_1 = \langle 1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \cdots, \cos nx, \sin nx, \cdots \rangle.$$

显然 $V_1$ 是 $\mathbb{R}[-\pi, \pi]$ 的一个子空间. 可以证明函数组 $1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \cdots, \cos nx, \sin nx, \cdots$ 是线性无关的 (证明见《高等代数》). 由三角函数的正交性可知 $1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \cdots, \cos nx, \sin nx, \cdots$ 中的函数两两正交. 用函数空间中的内积可以计算出它们的范数:

$$\|1\| = \left(\int_{-\pi}^{\pi} 1^2\,\mathrm{d}x\right)^{1/2} = \sqrt{2\pi}.$$

$$\|\sin nx\| = \left(\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx \,\mathrm{d}x\right)^{1/2} = \sqrt{\pi}, \quad n = 1, 2, \cdots.$$
$$\|\cos nx\| = \left(\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx \,\mathrm{d}x\right)^{1/2} = \sqrt{\pi}, \quad n = 1, 2, \cdots.$$

这样就找到了 $V_1$ 的一个标准正交基:

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}}, \cdots, \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}}, \cdots\right\}.$$

于是 $V_1$ 中的函数都可以表示为

$$f(x) = \alpha_0 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} + \sum_{k=1}^{n}\left(\alpha_k \frac{\cos kx}{\sqrt{\pi}} + \beta_k \frac{\sin kx}{\sqrt{\pi}}\right).$$

类比 $n$ 维线性空间, 就不难想到用内积表示系数 $\alpha_n$ $(n = 0, 1, \cdots)$ 和 $\beta_n$ $(n = 1, 2, \cdots)$:

$$\alpha_0 = \left(f, \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x.$$
$$\alpha_n = \left(f, \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}}\right) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x, \quad n = 1, 2, \cdots.$$
$$\beta_n = \left(f, \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}}\right) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x, \quad n = 1, 2, \cdots.$$

于是 $f(x)$ 可以表示为

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos nx + b_k \sin kx.$$

其中

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x, \quad n = 0, 1, \cdots.$$
$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x, \quad n = 1, 2, \cdots.$$

经过以上讨论, 我们从线性代数的角度, 得到了同样的结果. 需要指出, 以上是用的是类比的思维方式. 用类比可以帮助我们更快地得到结论, 但类比得到的结论依旧需要严格证明. 换言之, 类比仅仅是一个有效的思维工具, 而非证明过程.

以上定义了函数空间 $\mathbb{R}[-\pi, \pi]$ 中的内积, 然后用内积定义了范数. 模仿 $\mathbb{R}^n$, 可以继续用范数来定义空间中两个函数的距离 (也称度量). 任取两个函数 $f, g \in \mathbb{R}[-\pi, \pi]$, 可以如下规定它们的距离:

$$d(f, g) = \|f - g\| = \sqrt{(f - g, f - g)} = \left\{\int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - g(x)]^2 \,\mathrm{d}x\right\}^{1/2}.$$

接下来就可以来讨论和距离有关的问题. 为此, 还是先从我们熟悉的例子入手. 如图2.9, 在 $\mathbb{R}^3$ 空间中, 给定一个标准正交基 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$. 任取向量 $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^3$. 子空间 $\langle \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2 \rangle$ 中与 $\boldsymbol{a}$ 距离最近向量显然是 $\boldsymbol{a}$ 在 $\langle \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2 \rangle$ 上的投影. 把它记作 $\boldsymbol{b}$, 用内积可以表示为:

$$\boldsymbol{b} = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{e}_1)\boldsymbol{e}_1 + (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{e}_2)\boldsymbol{e}_2.$$

以上是解析几何或线性代数中的基础知识.

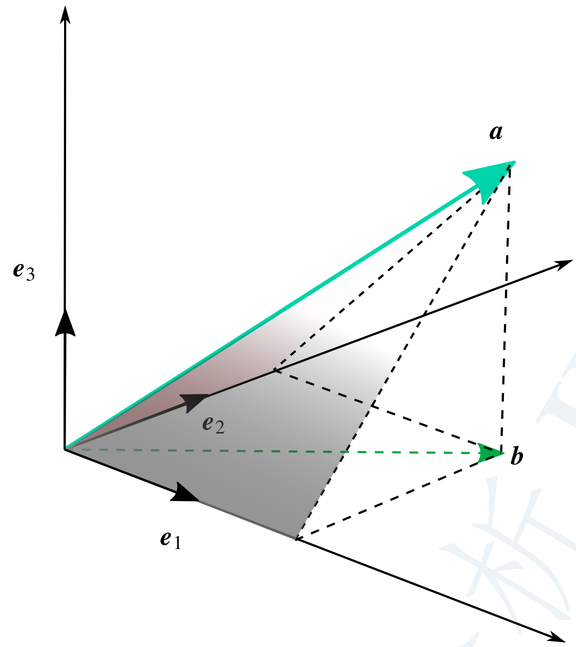



图 2.9: 三维中的投影.

现在可以对定义了距离的函数空间提出类似的问题. 设 $\mathbb{R}[-\pi,\pi]$ 的一个 $2n+1$ 维子空间

$$\mathbb{R}[-\pi,\pi]_{2n+1} := \left\langle \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}}, \cdots, \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}} \right\rangle.$$

任取 $f \in \mathbb{R}[-\pi,\pi]$, 那么在 $\mathbb{R}[-\pi,\pi]_{2n+1}$ 中与 $f$ 距离最近的向量应该是

$$\left(f, \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)\frac{1}{\sqrt{2\pi}} + \sum_{k=1}^{n}\left[\left(f, \frac{\cos kx}{\sqrt{\pi}}\right)\frac{\cos kx}{\sqrt{\pi}} + \left(f, \frac{\sin kx}{\sqrt{\pi}}\right)\frac{\sin kx}{\sqrt{\pi}}\right] = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k\cos kx + b_k \sin kx = S_n(x).$$

下面来验证这个结论.

**定理 2.77 (最佳逼近定理)**

设函数 $f \in \mathbb{R}[-\pi,\pi]$, 则

$$\|f - S_n\| = \min_{h\in\mathbb{R}[-\pi,\pi]_{2n+1}} \|f - h\|.$$

**证明** 任取 $h \in \mathbb{R}[-\pi,\pi]_{2n+1}$. 设

$$h(x) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \cos kx + \beta_k \sin kx.$$

由于

$$\begin{aligned}
\|f-h\|^2 &= (f-h, f-h) = (f,f) - 2(f,h) + (h,h) \\
&= \|f(x)\|^2 - \pi\left(a_0\alpha_0 + 2\sum_{k=1}^{n}(\alpha_k a_k + \beta_k b_k)\right) + \pi\left(\frac{\alpha_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{n}\left(\alpha_k^2 + \beta_k^2\right)\right) \\
&= \pi\left[\frac{(\alpha - a_0)^2}{2} + \sum_{k=1}^{n}(\alpha_k - a_k)^2 + \sum_{k=1}^{n}(\beta_k - b_k)^2\right] + \|f\|^2 - \pi\left(\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k^2 + b_k^2\right).
\end{aligned}$$

因此当 $\alpha_0 = a_0, \alpha_k = a_k, \beta_k = b_k\ (k = 1, 2, \cdots)$, 即 $h = S_n$ 时

$$\|f - S_n\|^2 = \min_{h \in \mathbb{R}[-\pi,\pi]_{2n+1}} \|f - h\|^2 = \|f\|^2 - \pi\left(\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k^2 + b_k^2\right). \qquad \blacksquare$$

由于 $\|f - S_n\| \geq 0$, 因此立刻可以得到以下不等式.

**推论 2.9 (Bessel 不等式)**

设函数 $f \in \mathbb{R}[-\pi, \pi]$, 则

$$\pi\left[\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{n}\left(a_k^2 + b_k^2\right)\right] \leq \|f\|^2, \quad n = 1, 2, \cdots.$$

其中 $a_n\ (n = 0, 1, \cdots)$ 和 $b_n\ (n = 1, 2 \cdots)$ 是 $f$ 的 Fourier 系数.

**注** 容易看出级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2)$ 收敛, 这是因为它有界且单调递. 于是 $a_n^2 + b_n^2 \to 0$, 从而可以证明 $a_n \to 0, b_n \to 0$.

由 Dirichlet 判别法可知, 周期为 $2\pi$ 且逐段可导的连续函数 $f$ 的 Fourier 级数在 $[-\pi, \pi]$ 上逐点收敛到 $f$, 即

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx).$$

实际上, 如果满足以上条件, 这个级数是一致收敛的.

**定理 2.78 (Heine 一致收敛定理 I)**

设函数 $f$ 是周期为 $2\pi$ 且逐段可导的连续函数. 则 $f$ 的 Fourier 级数在 $\mathbb{R}$ 上绝对一致收敛.

**证明** 由于 $f$ 逐段可导, 故 $f'$ 逐段连续, 故 $f'$Riemann 可积. 因此可设 $f'$ 的 Fourier 系数为 $a'_n\ (n = 0, 1, \cdots)$ 和 $b'_n\ (n = 1, 2, \cdots)$. 对 $[-\pi, \pi]$ 作分割:

$$-\pi \leq x_0 < x_1 < \cdots < x_m = \pi.$$

其中 $f'$ 在 $[x_{k-1}, x_k]\ (k = 1, 2, \cdots, m)$ 上连续. 于是

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{m}\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n\pi}\sum_{k=1}^{m}\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)\,\mathrm{d}\sin nx \\
&= \frac{1}{n\pi}\sum_{k=1}^{m}\left[f(x)\sin nx\Big|_{x_{k-1}}^{x_k} - \int_{x_{k-1}}^{x_k} f'(x)\sin nx\,\mathrm{d}x\right] \\
&= \frac{1}{n\pi}\sum_{k=1}^{m}\left[f(x_k)\sin nx_k - f(x_{k-1})\sin nx_{k-1}\right] - \frac{1}{n\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\sin nx\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{n\pi}\left[f(x_m)\sin nx_m - f(x_0)\sin nx_0\right] - \frac{b'_n}{n} = -\frac{b'_n}{n}, \quad n = 0, 1, \cdots.
\end{aligned}$$

类似可知

$$b_n = \frac{a'_n}{n}, \quad n = 1, 2, \cdots.$$

由均值不等式可知

$$|a_n| + |b_n| = \left|\frac{b'_n}{n}\right| + \left|\frac{a'_n}{n}\right| \leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n^2} + b_n'^2\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n^2} + a_n'^2\right) = \frac{1}{n^2} + \frac{1}{2}\left(a_n'^2 + b_n'^2\right), \quad n = 1, 2, \cdots.$$

由 Bessel 不等式可知 $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n'^2 + b_n'^2)$ 收敛, 有比较判别法可知 $\sum_{n=1}^{\infty}(|a_n| + |b_n|)$ 也收敛. 由于

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)\right| \leq \sum_{n=1}^{\infty}(|a_n| + |b_n|).$$

由 Weierstrass 判别法可知 $f$ 的 Fourier 级数绝对一致收敛. $\blacksquare$

以上定理的条件非常强, 所以得到的结论也非常强. 事实上, 即使不要求函数 $f$ 是连续函数, 只要 $f$ 在某个闭区间上连续, 则在这个区间内依旧可以保持一致收敛. 我们先来看一个简单的例子.

**例 2.123** 设周期为 $2\pi$ 的函数 $g(x)$, 它在 $[-\pi,\pi)$ 上满足 $g(x)=x$. 则 $g$ 的 Fourier 级数在 $(-\pi,\pi)$ 上内闭一致收敛到 $g$.

**证明** 由例2.113可知 $g$ 的 Fourier 级数为

$$g(x)\sim 2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\sin nx}{n}.$$

因此它的部分和为

$$S_n(x)=2\sum_{k=1}^{n}(-1)^{n-1}\frac{\sin kx}{k}.$$

于是

$$\begin{aligned}
\cos\frac{x}{2}S_n(x)=2\cos\frac{x}{2}\sum_{k=1}^{n}(-1)^{n-1}\frac{\sin kx}{k}&=\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k}\left[\sin\left(k+\frac{1}{2}\right)x+\sin\left(k-\frac{1}{2}\right)x\right]\\
&=\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k}\sin\left(k+\frac{1}{2}\right)x+\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k}\sin\left(k-\frac{1}{2}\right)x\\
&=\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k}\sin\left(k+\frac{1}{2}\right)x+\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^{k}}{k+1}\sin\left(k+\frac{1}{2}\right)x\\
&=\frac{(-1)^{n-1}}{n}\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x+\sin\frac{x}{2}+\sum_{k=1}^{n-1}\left[\frac{(-1)^{k-1}}{k}+\frac{(-1)^{k}}{k+1}\right]\sin\left(k+\frac{1}{2}\right)x\\
&=\frac{(-1)^{n-1}}{n}\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x+\sin\frac{x}{2}+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{(-1)^{k-1}}{k(k+1)}\sin\left(k+\frac{1}{2}\right)x.
\end{aligned}$$

任取 $r\in[0,\pi]$. 当 $x\in[-r,r]$ 时, 由于 $-\pi<-r\le x\le r<\pi$, 故 $\cos(x/2)\ge\cos(r/2)$. 于是对于任一 $p\in\mathbb{N}$ 都有

$$\begin{aligned}
\left|S_{n+p}(x)-S_n(x)\right|&=\frac{1}{\cos(x/2)}\left|\sum_{k=n}^{n+p-1}\frac{(-1)^{k-1}}{k(k+1)}\sin\left(k+\frac{1}{2}\right)x+\frac{(-1)^{n+p-1}}{n+p}\sin\left(n+p+\frac{1}{2}\right)x-\frac{(-1)^{n-1}}{n}\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right|\\
&\le\frac{1}{\cos(1/r)}\left[\sum_{k=n}^{n+p-1}\frac{1}{k(k+1)}+\frac{2}{n}\right].
\end{aligned}$$

由于级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$ 收敛, 由 Cauchy 收敛原理可知对于任一 $\varepsilon>0$, 存在 $N_1\in\mathbb{N}^*$, 使得当 $n<N_1$ 时

$$\sum_{k=n}^{n+p-1}\frac{1}{k(k+1)}<\frac{\varepsilon\cos(1/r)}{2}.$$

由于 $2/n$ 是无穷小, 因此存在 $N_2\in\mathbb{N}^*$, 使得当 $n<N_2$ 时

$$\frac{2}{n}<\frac{\varepsilon\cos(1/r)}{2}.$$

于是当 $n>\max\{N_1,N_2\}$ 时

$$\left|S_{n+p}(x)-S_n(x)\right|<\frac{1}{\cos(1/r)}\left[\frac{\varepsilon\cos(1/r)}{2}+\frac{\varepsilon\cos(1/r)}{2}\right]=\varepsilon.$$

由 Cauchy 收敛原理可知 $g$ 的 Fourier 级数在 $[-r,r]$ 上一致收敛, 且根据 Dirichlet 定理它一定收敛到 $g$. ■

以上例子中, $g$ 在 $(-\pi,\pi)$ 上是连续的, 如果一个函数 $f$ 在 $(-\pi,\pi)$ 有若干个间断点, 则可以借用 $g$ 构造一个函数 $G$, 使得 $f+G$ 成为 $(-\pi,\pi)$ 上的连续函数.

**定理 2.79 (Heine 一致收敛定理 II)**

设周期为 $2\pi$ 的函数 $f$. 若 $f$ 逐段可导, 则 $f$ 的 Fourier 级数在任意不含 $f$ 间断点的闭区间上都一致收敛到 $f$.

**证明** 设 $f$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上的间断点为 $x_1,x_2,\cdots,x_m$. 令 $f$ 在 $x_k$ 处的跃度为

$$d_k=f(x_k+)-f(x_k-),\quad k=1,2,\cdots,m.$$

设周期为 $2\pi$ 的函数 $g$, 它在 $[-\pi,\pi)$ 上满足 $g(x)=x$. 显然 $g$ 的间断点为 $(2k-1)\pi$ $(k\in\mathbb{Z})$, 且 $g$ 在每一个间断点的跃度都是 $-2\pi$. 将 $g(x)$ 向右平移 $x_1-\pi$, 得 $g(x-x_1+\pi)$, 此时 $x_1$ 也变成了 $g(x-x_1+\pi)$ 在 $(-\pi,\pi)$ 上的一个间断点. 于是不难知道函数 $\sum_{k=1}^m g(x-x_k+\pi)$ 在 $(-\pi,\pi)$ 上的间断点也是 $x_1,x_2,\cdots,x_m$. 于是想到构造函数

$$G(x)=\sum_{k=1}^m\frac{d_k}{2\pi}g(x-x_k+\pi),\quad x\in[-\pi,\pi]$$

并令 $h(x)=f(x)+G(x)$, 不难看出 $h$ 是周期为 $2\pi$ 的逐段可导的函数. 下面来证明 $h$ 在 $[\pi,\pi]$ 上连续. 显然 $h$ 在 $x_1$, $x_2,\cdots,x_m$ 以外的地方都是连续的. 因此只需证明 $h$ 在 $x_1,x_2,\cdots,x_m$ 处连续. 由于

$$d_1=f(x_1+)-f(x_1-)\iff f(x_1+)-\frac{d_1}{2}=f(x_1-)+\frac{d_1}{2}.$$

因此

$$\lim_{x\to x_1+}h(x)=f(x_1+)-\frac{d_1}{2}+\sum_{k=2}^m\frac{d_k}{2\pi}g(x-x_k+\pi)=f(x_1-)+\frac{d_1}{2}+\sum_{k=2}^m\frac{d_k}{2\pi}g(x-x_k+\pi)=\lim_{x\to x_1-}h(x)$$

这表明 $h(x)$ 在 $x_1$ 处连续. 同理可证 $h(x)$ 在 $x_2,\cdots,x_k$ 处都连续. 由 Heine 定理 I 可知 $h$ 的 Fourier 级数收敛到 $h$. 由例2.123可知 $G(x)$ 的 Fourier 级数在 $[-\pi,\pi]$ 的任一不含 $x_1,x_2,\cdots,x_m$ 的闭区间上一致收敛. 由于 $f(x)=h(x)-G(x)$, 因此 $f$ 的 Fourier 级数在 $\mathbb{R}$ 上任何不含 $f$ 间断点的闭区间上一致收敛. ■

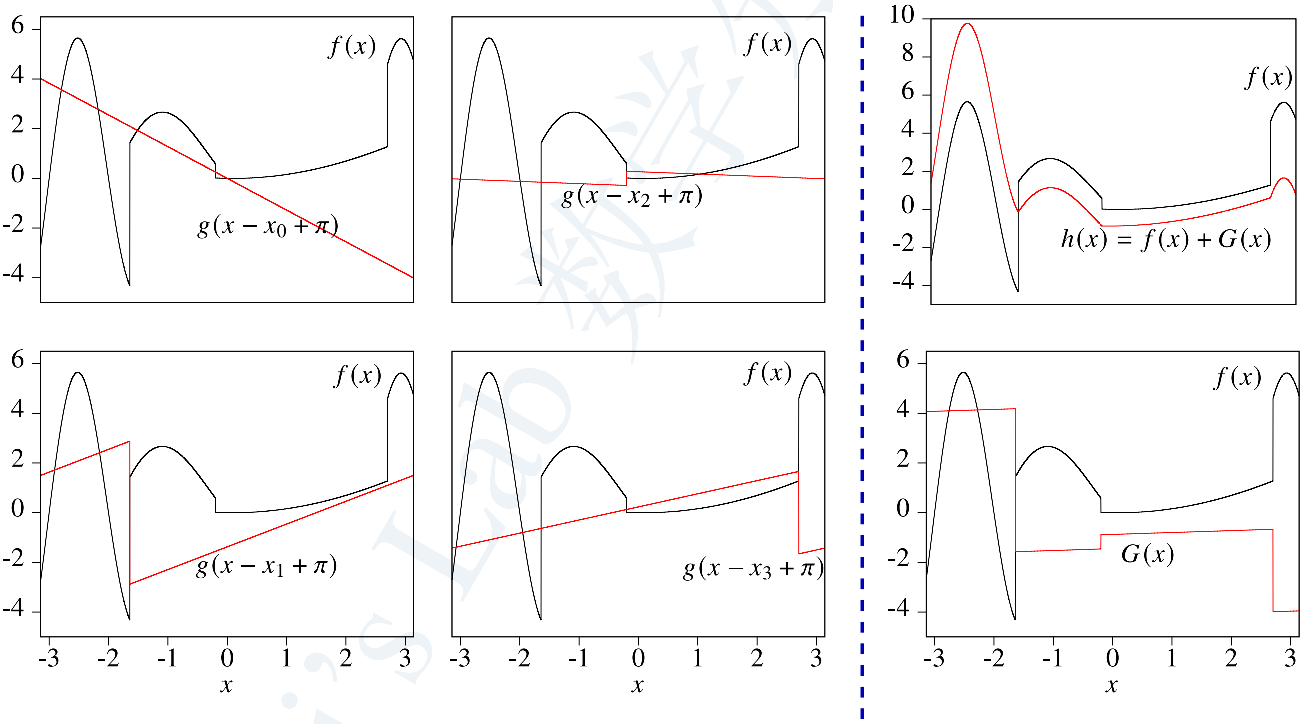



**图 2.10:** 证明图示。

从前面的讨论可知周期为 $2\pi$ 的逐段可导的函数 $f$ 的 Fourier 级数在不含 $f$ 间断点的闭区间上一致收敛到 $f$. 下面开始研究 $f$ 的 Fourier 级数在间断点附近的情形. 为此让我们重新来看例2.118.

如图 XXX, 观察函数 $f$ 以及它的 Fourier 级数的部分和 $S_n(x)$ 在 $x=0$ 附近的情况. $x=0$ 是 $f$ 的一个跳跃点, $f$ 在 $x=0$ 处的跃度为 $\pi$. 然而当 $n$ 充分大时 $S_n(x)$ 会在 $x=0$ 的右侧向上达到约 $\pi/2+0.089\pi$, 在 $x=0$ 的右侧向下达到约 $-\pi/2+0.089\pi$.

我们把 1848 年英国数学家 Henry Wilbraham 首次发现了这个现象.1899 年美国物理学家 Josiah Willard Gibbs 第一次对上例做出来具体计算.1906 年美国数学家 Maxime Bôcher 用分析的方法做了更一般的研究, 并把逐段可导函数的 Fourier 级数在间断点附近的收敛行为称为 **Gibbs 现象** (Gibbs phenomenon).

下面就来看一下 Bôcher 对 Gibbs 现象的研究结果. 首先来看一个简单的例子.

**例 2.124** 设周期为 $2\pi$ 的函数 $h$, 满足

$$h(x)=\begin{cases}-1, & -\pi\le x<0\\ 1, & 0\le x<\pi\end{cases}.$$

则 $h$ 的 Fourier 级数的部分和 $S_n$ 在 $[-\pi,\pi)$ 上满足

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\max\limits_{x\in[-\pi,\pi)} S_n(x)=\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x.$

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\min\limits_{x\in[-\pi,\pi)} S_n(x)=-\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x.$

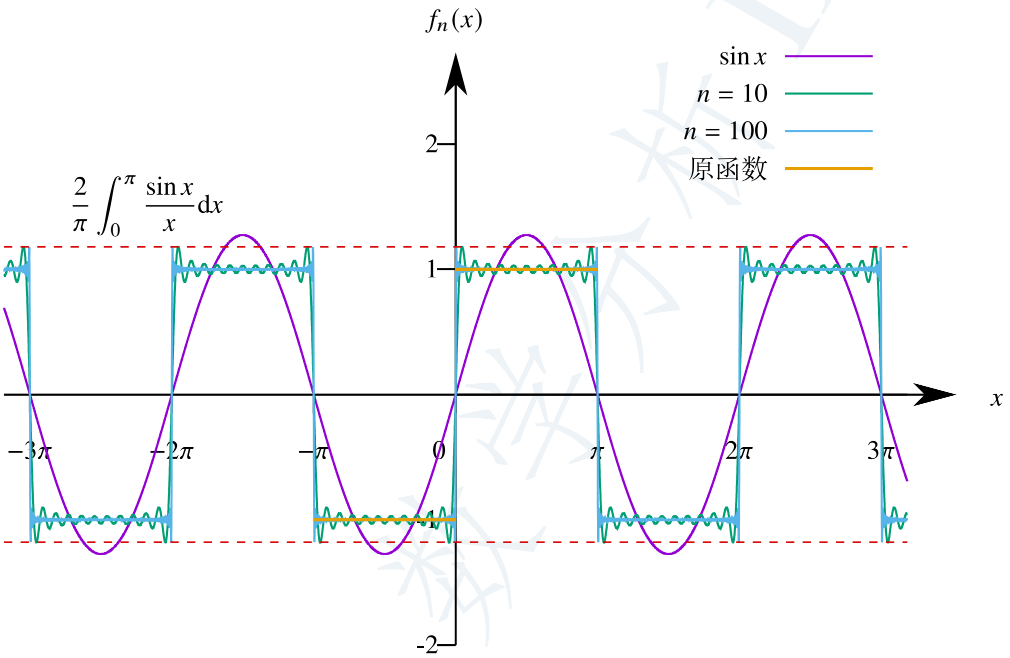



图 2.11: 超越点示意图.

**证明** 由例2.115可知 $h$ 的 Fourier 级数为

$$\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n-1)x}{2n-1}.$$

于是它的部分和以及部分和的导数分别为

$$S_n(x)=\frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin(2k-1)x}{2k-1}.$$

$$S_n'(x)=\frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\cos(2k-1)x.$$

于是

$$(\sin x)S_n'(x)=\frac{4}{\pi}\sin x\sum_{k=1}^{n}\cos(2k-1)x=\frac{4}{\pi}\sin 2nx.$$

令 $S_n'(x)=0$ 则 $x=\pm\pi/(2n)$. 容易看出 $S_n$ 在 $x=\pi/(2n)$ 处取到最大值, 在 $x=-\pi/(2n)$ 处取到最小值. 由于

$$S_n\left(\frac{\pi}{2n}\right)=\frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\frac{\left[\sin(2k-1)\frac{\pi}{2n}\right]}{2k-1}=\frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\frac{\left[\sin(2k-1)\frac{\pi}{2n}\right]}{(2k-1)\frac{\pi}{2n}}\cdot\frac{\pi}{n}.$$

因此
$$\lim_{n\to\infty}\max_{x\in[-\pi,\pi)} S_n(x) = \lim_{n\to\infty} S_n\left(\frac{\pi}{2n}\right) = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x.$$
同理可知
$$\lim_{n\to\infty}\min_{x\in[-\pi,\pi)} S_n(x) = \lim_{n\to\infty} S_n\left(-\frac{\pi}{2n}\right) = -\frac{2}{\pi}\int_0^\pi \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x.$$ ■

**注** 令
$$\mathrm{Si}(x) := \int_0^x \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t.$$
函数 Si 称为**正弦积分** (sine integral), 它不是初等函数. 由 MATLAB 计算可知
$$\int_0^\pi \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x \approx 1.852.$$
因此
$$\lim_{n\to\infty}\max_{x\in[-\pi,\pi)} S_n(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x \approx 1.179 \approx 1+0.089\times 2 = h(0+)+8.9\%[h(0+)-h(0-)].$$
同理可知
$$\lim_{n\to\infty}\max_{x\in[-\pi,\pi)} S_n(x) \approx h(0-)-8.9\%[h(0+)-h(0-)].$$
这就是说, $h$ 的 Fourier 级数在间断点 0 附近上下各有 $h$ 在此处跃度的 8.9% 超越量.

用证明 Heine 定理 II 的方法可以得到以下定理.

**定理 2.80 (Bôcher 定理)**

设周期为 $2\pi$ 的逐段可导的函数 $f$. 若 $a$ 是 $f$ 在 $[-\pi,\pi)$ 上的间断点, 且 $f(a-)<f(a+)$, 则 $f$ 的 Fourier 级数的部分和 $S_n$ 在 $a$ 附近满足

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\max\limits_{x\in[a,a+\delta]} S_n(x) = f(a+)+Kd$.

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\min\limits_{x\in[a-\delta,a]} S_n(x) = f(a-)-Kd$.

其中
$$K = \frac{\mathrm{Si}(\pi)-1}{2} = \frac{1}{2}\left(\int_0^\pi \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x - 1\right) \approx 8.9\%, \quad d = f(a+)-f(a-)$$

**证明** 只证明 (1). 设周期为 $2\pi$ 的函数 $h$, 满足
$$h(x) = \begin{cases} -1, & -\pi\le x<0 \\ 1, & 0\le x<\pi \end{cases}.$$
令
$$g(x) = \begin{cases} f(x)-\dfrac{d}{2}h(x-a), & x\ne a \\ \dfrac{f(a+)+f(a-)}{2}, & x=a \end{cases}.$$
不难看出 $g$ 是周期为 $2\pi$ 的逐段可导的函数. 下面来证明 $g$ 在 $x=a$ 处连续. 由于
$$\lim_{x\to a+} g(x) = f(a+)-\frac{d}{2} = \frac{f(a+)+f(-a)}{2} = f(a-)+\frac{d}{2} = \lim_{x\to a-} g(x)$$
这表明 $g(x)$ 在 $a$ 处连续. 于是存在 $\delta$ 使得 $f$ 在 $[a-\delta,a+\delta]$ 除了 $a$ 以外没有其他间断点, 则 $g$ 在 $[a-\delta,a+\delta]$ 上连续. 因此由 Heine 一致收敛定理可知 $g$ 在 $[a-\delta,a+\delta]$ 上一致收敛. 由例2.124可知当 $n\to\infty$ 时函数 $(d/2)h(x-a)$ 的 Fourier 级数部分和在 $a$ 附近的最大值和最小值分别是
$$\frac{d}{2}\mathrm{Si}(\pi), \quad -\frac{d}{2}\mathrm{Si}(\pi).$$

由于

$$f(x)=g(x)+\frac{d}{2}h(x-a),\quad x\neq a.$$

因此 $f$ 的 Fourier 级数部分和 $S_n$ 在 $[a-\delta,a+\delta]$ 上有

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\max_{x\in[a,a+\delta]}S_n(x)&=g(a)+\frac{d}{2}\mathrm{Si}(\pi)=\frac{f(a+)+f(a-)}{2}+\frac{f(a+)-f(a-)}{2}\mathrm{Si}(\pi)\\&=\frac{f(a+)+f(a-)}{2}+\frac{f(a+)-f(a-)}{2}+\frac{f(a+)-f(a-)}{2}[\mathrm{Si}(\pi)-1]=f(a+)+Kd.\end{aligned}$$

■

**注** 以上定理和 Dirichlet 逐点收敛定理不矛盾.XXX

**定理 2.81 (du Bois Reymond 逐项积分定理)**

设函数 $f\in\mathbb{R}[-\pi,\pi]$ 的 Fourier 级数为

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx+b_n\sin nx.$$

则

(1) 级数 $\sum_{n=1}b_n/n$ 收敛.

(2) $\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$ 就等于 $f$ 的 Fourier 级数在 $[0,x]$ 上的逐项积分, 即

$$\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t=\frac{a_0}{2}x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{n}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n}{n}\sin nx-\frac{b_n}{n}\cos nx\right).$$

且上式右侧的级数一致收敛到 $\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$.

**证明**

**定理 2.82**

设三角级数

$$\frac{\alpha_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n\cos nx+\beta_n\sin nx.$$

若该三角级数在 $\mathbb{R}$ 上一致收敛到函数 $f$. 则 $f$ 的 Fourier 级数就是这个三角级数.

**证明**

**例 2.125** 设周期为 $2\pi$ 逐段可导的连续函数 $f\in\mathbb{R}[-\pi,\pi]$

**定理 2.83 (Fourier 级数的逐项微分定理)**

设周期为 $2\pi$ 逐段可导的连续函数 $f$. 则 $f$ 的 Fourier 级数可以逐项微分, 即

$$\frac{f'(x+)+f'(x-)}{2}=\sum_{n=1}^{\infty}(nb_n\cos nx-na_n\sin nx).$$

**证明** 由于 $f$ 是周期为 $2\pi$ 逐段可导的连续函数, 由 Heine 一致收敛定理可知 $f$ 的 Fourier 级数一致收敛到 $f$. 由定理2.71可知

$$f'(x)\sim\sum_{n=1}^{\infty}(nb_n\cos nx-na_n\sin nx).$$

由 Dirichlet 逐点收敛定理可知 $f'$ 的 Fourier 级数逐点收敛到 $[f'(x+)+f'(x-)]/2$, 于是可知

$$\sum_{n=1}^{\infty}(nb_n\cos nx-na_n\sin nx)$$

### 2.6.4 Fourier 级数的 Cesàro 和

Dirichlet 定理只是 Fourier 级数逐点收敛的一个充分条件. 两百多年来, 数学家们一直在探索比 Dirichlet 定理条件更弱的充分条件. Dirichlet 定理的条件对函数 $f$ 的 ‘‘光滑性’’ 有要求. 很自然的想法是, 去掉光滑性条件, 只要求连续可以确保 Fourier 级数收敛吗? 历史上 Dirichlet, Riemann, Weierstrass, Dedekind 等数学家都相信这个观点, 直到 1876 年, 法国数学家 du Bois Reymond 给出了一个反例.

为了使连续函数的 Fourier 级数一定收敛于自己, 可以从另一个角度入手——修改级数收敛的定义! 这样的修改需要满足两个基本要求, 在 Cauchy 意义下收敛的级数在新定义下仍然收敛, 且两种定义下级数的和相等. 第二是某些在 Cauchy 意义下不收敛的级数, 在新定义下可以收敛.

在讨论数列极限时, 曾经遇到过一个很有用的结论: 若数列 $a_n \to a$, 则

$$\widetilde{a}_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k \to a.$$

反之若 $\{\widetilde{a}_n\}$ 收敛, 则 $\{a_n\}$ 未必收敛. 举例说明: 设发散数列 $a_n = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}$ $(n = 1, 2, \cdots)$, 则

$$\widetilde{a}_{2n} = \frac{n}{2n} \to \frac{1}{2}, \quad \widetilde{a}_{2n+1} = \frac{n+1}{2n+1} \to \frac{1}{2}.$$

可见 $\{\widetilde{a}_n\}$ 收敛于 1/2. 因此如果用 $\widetilde{a}_n$ 的收敛来定义 $a$, 可以满足前面提出的两个基础条件.

**定义 2.25 (Cesàro 意义下收敛)**

设数列 $\{a_n\}$. 令

$$\widetilde{a}_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k, \quad n = 1, 2, \cdots.$$

若 $\widetilde{a}_n \to a$. 则称 $\{a_n\}$ 在**在 Cesàro 意义下收敛于** $a$. ♣

于是可以定义级数在 Cesàro 意义下的收敛.

**定义 2.26 (Cesàro 和)**

设级数 $\sum_{n}^{\infty} a_n$. 若它的部分和数列 $\{S_n\}$ 在在 Cesàro 意义下收敛于 $s$. 则称该级数在 Cesàro 意义下收敛于 $s$. $s$ 称为该级数的 **Cesàro 和** (Cesàro summation), 或 **Cesàro 均值** (Cesàro mean). 此时称这个级数**可以 Cesàro 求和** (Cesàro summable). ♣

下面来讨论在 Cesàro 意义下 Fourier 级数的收敛条件. 为此先来研究 Fourier 级数部分和的均值.

设函数 $f \in \mathbb{R}[-\pi, \pi]$ 的 Fourier 级数为

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx).$$

它的部分和为

$$S_n(x_0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}[f(x_0+t) + f(x_0-t)]D_n(t)\,\mathrm{d}t.$$

因此

$$\widetilde{S}_n(x_0) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} S_k(x_0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}[f(x_0+t) + f(x_0-t)]\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} D_k(t)\,\mathrm{d}t.$$

和前面的研究方法一样, 为了研究 $\widetilde{S}_n(x_0)$ 的敛散性, 可以先研究 $\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} D_k(t)$. 由于

$$2\sin\frac{t}{2}\sum_{k=0}^{n-1}\sin\left(k+\frac{1}{2}\right)t = (\cos 0 - \cos t) + (\cos t - \cos 2t) + \cdots + [\cos(n-1)t - \cos nt] = 1 - \cos nt = 2\sin^2\frac{nt}{2}.$$

因此

$$\sum_{k=0}^{n-1} D_k(t) = \sum_{k=0}^{n-1}\frac{\sin(k+1/2)t}{\sin(t/2)} = \frac{\sin^2(nt/2)}{\sin^2(t/2)} = \frac{1-\cos nt}{1-\cos t}, \quad t \neq 2m\pi,\ m \in \mathbb{Z}.$$

**定义 2.27 (Fejèr 核)**

设函数列

$$Fe_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} D_k(x), \quad n = 1, 2, \cdots .$$

其中 $D_k(x)$ 是 Dirichlet 核. 该函数列称为 **Fejér 核** (Fejér kernel).

于是部分和的均值可以写成

$$\widetilde{S}_n(x_0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} [f(x_0+t) + f(x_0-t)] \frac{1}{n}\frac{\sin^2(nt/2)}{\sin^2(t/2)}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} [f(x_0+t) + f(x_0-t)] Fe_n(t)\,\mathrm{d}t$$

**命题 2.24 (Fejér 核的简单性质)**

设 Fourier 核 $\{Fe_n(x)\}$. 则

(1) $Fe_n(x) \geq 0$ $(n = 1, 2, \cdots)$

(2) $Fe_n(x)$ $(n = 1, 2, \cdots)$ 都是偶函数.

(3) $Fe_n(x)$ $(n = 1, 2, \cdots)$ 都在 $\mathbb{R}$ 上连续.

(4) $Fe_n(x)$ $(n = 1, 2, \cdots)$ 都在 $[0, \pi]$ 上 Riemann 可积, 且

$$\int_0^{\pi} Fe_n(x)\,\mathrm{d}x = \pi, \quad n = 1, 2, \cdots .$$

**证明** (1) (2) (3) 显然成立.

(4) 由于

$$\widetilde{S}_n(x_0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} [f(x_0+x) + f(x_0-x)] Fe_n(x)\,\mathrm{d}x, \quad n = 1, 2, \cdots .$$

令上式中的 $f(x) \equiv 1$, 则

$$1 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} 2Fe_n(t)\,\mathrm{d}t \iff \int_0^{\pi} Fe_n(x)\,\mathrm{d}x = \pi, \quad n = 1, 2, \cdots .$$ ■

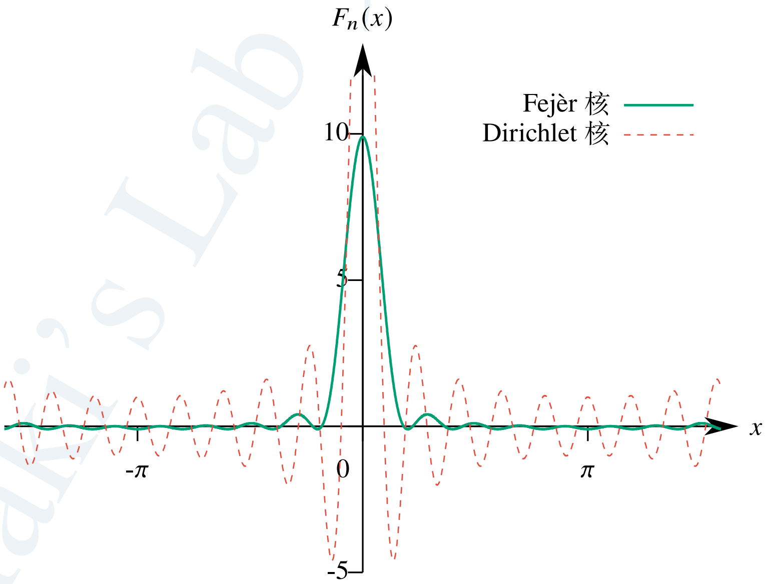



图 2.12: Fejér 核示意图 $(n = 10)$.

如图 2.12 所示,

**定理 2.84 (Fejér 引理)**

函数 $f \in \mathbb{R}[-\pi,\pi]$. 若 $f$ 在 $x_0$ 处的左右极限都存在. 则 $f$ 的 Fourier 级数在 $x_0$ 处的 Cesàro 和为
$$s=\frac{f(x_0+)+f(x_0-)}{2}.$$

**证明** 由于
$$\widetilde{S}_n(x_0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^\pi[f(x_0+t)+f(x_0-t)]Fe_n(t)\,\mathrm{d}t,\quad s=\frac{1}{2\pi}\int_0^\pi 2sFe_n(t)\,\mathrm{d}t.$$
令 $\varphi(t)=f(x_0+t)+f(x_0-t)-2s$, 则
$$\widetilde{S}_n(x_0)-s=\frac{1}{2\pi}\int_0^\pi[f(x_0+t)+f(x_0-t)-2s]Fe_n(t)\,\mathrm{d}t=\frac{1}{2\pi}\int_0^\pi\varphi(t)Fe_n(t)\,\mathrm{d}t.\tag{2.26}$$
下面来证明上式趋于零.

由于 $f(x_0+)$ 和 $f(x_0-)$ 都存在, 故对于任一 $\varepsilon>0$ 都存在 $\delta\in(0,\pi)$, 当 $t\in(0,\delta)$ 时
$$|f(x_0+t)-f(x_0+)|<\frac{\varepsilon}{2},\quad |f(x_0-t)-f(x_0-)|<\frac{\varepsilon}{2}.$$
于是
$$|\varphi(t)|=|f(x_0+t)-f(x_0+)+f(x_0-t)-f(x_0-)|\le|f(x_0+t)-f(x_0+)|+|f(x_0-t)-f(x_0-)|<\varepsilon.$$
把等式2.26右边的积分拆成 $\int_0^\delta$ 和 $\int_\delta^\pi$ 两部分
$$\widetilde{S}_n(x_0)-s=\frac{1}{2\pi}\int_0^\pi\varphi(t)Fe_n(t)\,\mathrm{d}t=\frac{1}{2\pi}\int_0^\delta\varphi(t)Fe_n(t)\,\mathrm{d}t+\frac{1}{2\pi}\int_\delta^\pi\varphi(t)Fe_n(t)\,\mathrm{d}t.$$
分别把 $\int_0^\delta$ 和 $\int_\delta^\pi$ 两部分记作 $I_1$ 和 $I_2$. 先对 $|I_1|$ 进行估计. 由于 $\int_0^\pi Fe_n(x)\,\mathrm{d}x=\pi$, 故
$$|I_1|\le\frac{1}{2\pi}\int_0^\delta|\varphi(t)|Fe_n(t)\,\mathrm{d}t<\frac{\varepsilon}{2\pi}\int_0^\delta Fe_n(t)\,\mathrm{d}t<\frac{\varepsilon}{2\pi}\int_0^\pi Fe_n(t)\,\mathrm{d}t=\frac{\varepsilon}{2}.$$
再对 $|I_2|$ 进行估计.
$$|I_2|\le\frac{1}{2\pi}\int_\delta^\pi|\varphi(t)|Fe_n(t)\,\mathrm{d}t\le\frac{1}{2n\pi\sin^2(\delta/2)}\int_\delta^\pi|\varphi(t)|\,\mathrm{d}t\le\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{2\pi\sin^2(\delta/2)}\int_0^\pi|\varphi(t)|\,\mathrm{d}t.$$
令
$$A=\left[\frac{2}{\varepsilon}\cdot\frac{1}{2\pi\sin^2(\delta/2)}\int_0^\pi|\varphi(t)|\,\mathrm{d}t\right],$$
于是当 $n>A$ 就有 $|I_2|<\varepsilon/2$. 于是可知
$$\left|\widetilde{S}_n(x_0)-s\right|\le|I_1|+|I_2|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$
这表明在 Cesàro 意义下 $f$ 的 Fourier 级数在 $x_0$ 处收敛于 $s$.

由以上定理立刻可知以下推论.

**推论 2.10**

函数 $f\in\mathbb{R}[-\pi,\pi]$. 若 $f$ 在 $x_0$ 处的左右极限都存在. 且 $f$ 的 Fourier 级数在 $x_0$ 处收敛, 则一定收敛到
$$s=\frac{f(x_0+)+f(x_0-)}{2}.$$

以上结论揭示了 Fourier 级数和 Taylor 级数的另一个重大区别. Taylor 级数如果在 $x_0$ 处收敛, 可能会收敛到与 $f$ 毫不相干的地方. 而 Fourier 级数如果在在 $x_0$ 处收敛, 则只能收敛到 $[f(x_0+)+f(x_0-)]/2$. 从这个结论也看出了定义 Cesàro 和的好处.

Fejér 引理中的 $f$ 若是周期为 $2\pi$ 的连续函数, 则可以得到以下定理.

**定理 2.85 (Fejér 定理)**

设函数 $f$ 是周期为 $2\pi$ 的连续函数. 则它的 Fourier 级数在 Cesaro 意义下一致收敛于 $f$.

**证明**

**注** 以上定理是以匈牙利数学家 Lipót Fejér 命名的.

前面已经讲过, 闭区间 $[a,b]$ 上的连续函数一定可以用多项式函数列一致逼近. 现在来看闭区间 $[a,b]$ 上的连续函数是否可以用三角多项式函数列一致逼近.

**定理 2.86 (Weierstrass 逼近定理)**

设函数 $f$ 在 $[-\pi,\pi$ 上连续, 且 $f(-\pi)=f(\pi)$, 则 $f$ 可以被三角多项式函数列一致逼近.

**证明**

### 2.6.5 平方平均逼近

**定义 2.28 (平方平均逼近)**

**定理 2.87**

**证明**

**定义 2.29 (完备的)**

**定理 2.88**

**证明**

**定理 2.89**

**证明**

**定理 2.90**

**证明**

**定理 2.91**

**证明**

**定理 2.92**

**证明**

**定理 2.93**

**证明**

### 2.6.6 Fourier 积分和 Fourier 变换

**定理 2.94**

**证明**

**定理 2.95**

**证明**

**定理 2.96**

**证明**

**定理 2.97**

**证明**

**定理 2.98**

**证明**

**定义 2.30 (Fourier 变换)**

**定理 2.99**

**证明**

**推论 2.11**

**证明**

**定义 2.31 (卷积)**

**定理 2.100**

**证明**

# 第 3 章 极限与连续的一般化

**内容提要**

- 我们首先把 $\mathbb{R}$ 推广为 $n$ 维 Euclid 空间 $\mathbb{R}^n$.
- 然后从中抽象出更一般的度量空间, 把 Euclid 空间中的点集一般化为度量空间中的开集、闭集等点集.
- 研究度量空间中的开集和闭集的性质, 并用公理化的方法把开集的性质作为公理定义一般的拓扑空间.

**内容提要**

- 把一元函数的极限概念推广到多元函数. 相关的结论可以全部类比得到.
- 对于多元函数来说, 可以定义两种不一样的极限: 重极限和累次极限. 它们的存在性和极限值都可以不一样.
- 一元函数的连续性也可以推广到多元函数. 相关结论都可以成立.
- 闭区间上连续函数的结论可以推广到紧致集或连通集上的多元连续函数.
- 最后我们还可以进一步把连续的概念推广到一般的度量空间, 和更一般的拓扑空间.

在我小学时, 曾经学过一个很有趣的 “一笔画问题”. 这个问题便是历史上著名的 “柯尼斯堡七桥问题”. 如图3.1所示, 柯尼斯堡有一条河穿过, 河上有两个小岛, 有七座桥把两个岛与河岸联系起来. 一个步行者能否不重复、不遗漏地一次走完七座桥?1735 年 Euler 断言了不可能性, 并于次年发表了论文, 把这个问题转化为了 “一笔画问题”. 并给出了可以 “一笔画” 的充要条件: 当 “奇点” 的数目是零或 2.

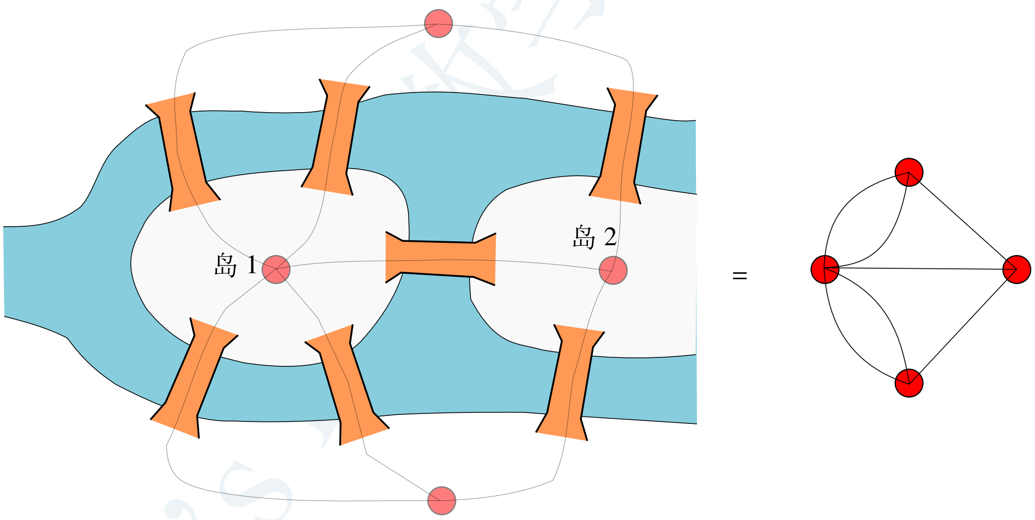



**图 3.1:** 七桥问题.

这是一个几何问题, 但却与传统 Euclid 几何迥然不同, 它并不关心图形的长度、角度等 Euclid 几何中的不变量. 不严格地说, 在一笔画问题中, 只要两个图形的 “连续性一致”,“节点的相对位置一致”, 就被认为是等价的. 类似的例子在生活中还有地铁线路图或物理学中的电路图. 这就是拓扑学的起源. 虽然拓扑的思想萌芽已经产生, 并且出现了很多著名的拓扑问题 (比如四色问题, 多面体的 Euler 定理等), 但人们尚没有找到精确刻画图形拓扑性质的方法.

十九世纪末集合论和实数理论的完善使得分析学得到了跨越式发展. Cantor 从 1873 年起系统研究了 Euclid 空间中的点集. 开集、闭集、极限点、稠密、连通这些概念被逐步确立. 这些新的思想使得分析学和几何学产生了深刻的联系. 人们逐渐意识到运用分析的方法可以刻画拓扑性质. 设两个点集 $A$ 和 $B$(任何图形都可以看作点集) 之间存在一个可逆映射 $f$. 若 $f$ 和 $f^{-1}$ 都是连续的, 那么这两个点集就保持拓扑性质, 在拓扑学中称 $A$ 和 $B$ 是**同**

**胚的** (homeomorphic), 映射 $f$ 称为**同胚** (homeomorphism). 之前我们提到的等价的地铁线路图或电路图就是同胚关系.

我们知道分析学中的连续函数或连续映射是用极限刻画的.1906 年, 法国数学家 René Maurice Fréchet 进一步从 Euclid 空间中抽象出了度量空间的概念后, 任何一个度量空间都可以用一个度量刻画连续性. 但事实, 在数分 I 中已经看到, 用邻域的概念就可以刻画连续性, 但那时我们定义的邻域中还带着度量 (我们把以一点为球心, 距离为 $r$ 的开球称为邻域). 但事实上如果愿意抛弃这个度量, 丝毫不会影响对连续性的刻画, 因为邻域的半径在问题中并不起实际作用. 我们以一元函数为例, 设一元函数 $f: D \to \mathbb{R}$, 取一点 $x_0 \in D$. 若对于点 $f(x_0)$ 的任一邻域 $N$ 都存在一个 $x_0$ 的邻域 $N_0$ 使得 $f(N_0) \subseteq N$, 则函数在 $x_0$ 连续.

我们来总结一下以上的思想. 保持图形拓扑性质的映射是连续映射. 因此刻画拓扑性质的关键是研究连续映射. 刻画映射连续性只需要用邻域, 更一般地只需要开集. 那么很自然地做法就是, 用公理化的方法把 Cantor 已经研究过的 Euclid 空间的开集的性质抽象为 ‘‘开集公理”.1914 年德国数学家 Felix Hausdorff 首次用这个思想定义了一般的拓扑空间, 这标志着用公理化方法研究连续性的一般拓扑学的正式诞生.

本章我们就要把以上探索过程重新在读者面前展示一遍. **一般拓扑学** (general topology) 又称**点集拓扑学** (point-set topology), 它已经渗透到现代数学的各个分支, 是处于中心位置的基础理论. 为了进一步推广和一般化分析学的理论, 我们必须先掌握点集拓扑学的基础知识. 这样做在开始时会稍显吃力, 但对于进一步的数学学习是 ‘‘磨刀不误砍柴工’’ 的.

## 3.1 Euclid 空间

### 3.1.1 线性空间与内积空间

在研究一元微积分时, 我们首先研究了实数集的性质. 当时已经提到, 实数的几个完备性命题刻画了实数集的拓扑性质. 为了研究多元函数的微积分, 很自然地需要把 $\mathbb{R}$ 的性质推广到 $\mathbb{R}^n$ 中.

**定义 3.1 (Euclid 空间)**

设集合 $\mathbb{R}^n$. 其中的元素都是 $n$ 元有序实数组, 我们称它为**向量** (vector). 为了方便使用, 可以记作列向量的形式: $\boldsymbol{\alpha} = (a_1, a_2, \cdots, a_n)$. 其中 $a_i$ 称为向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 的第 $i$ 个**分量** (component). 规定 $\mathbb{R}^n$ 上的加法运算

$$(a_1, a_2, \cdots, a_n) + (b_1, b_2, \cdots, b_n) := (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \cdots, a_n + b_n).$$

再规定 $\mathbb{R}^n$ 中的元素与 $\mathbb{R}$ 之间的**数乘运算** (scalar multiplication):

$$k(a_1, a_2, \cdots, a_n) := (ka_1, ka_2, \cdots, ka_n).$$

容易验证以上规定的加法运算满足结合律、交换律. 且加法运算存在零元 $\mathbf{0} = (0, 0, \cdots, 0)$, 我们称它为**零向量** (zero vector). 对于任一向量 $\boldsymbol{\alpha} = (a_1, a_2, \cdots, a_n)$, 都有唯一负元 $(-a_1, -a_2, \cdots, -a_n)$ 我们称它为 $\boldsymbol{\alpha}$ 的**负向量** (negative vector), 记作 $-\boldsymbol{\alpha}$. 因此可以定义减法运算 $\boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{\beta} := \boldsymbol{\alpha} + (-\boldsymbol{\beta})$. 以上规定的数乘运算存在单位元 1. 且满足

$$(kl)\boldsymbol{\alpha} = k(l\boldsymbol{\alpha}), \quad \forall k, l \in \mathbb{R},\ \forall \boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}^n.$$

$$(k + l)\boldsymbol{\alpha} = k\boldsymbol{\alpha} + l\boldsymbol{\alpha}, \quad \forall k, l \in \mathbb{R},\ \forall \boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}^n.$$

$$k(\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta}) = k\boldsymbol{\alpha} + k\boldsymbol{\alpha}, \quad \forall k, l \in \mathbb{R},\ \forall \boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}^n.$$

于是定义了加法和数乘运算的 $\mathbb{R}^n$ 构成实数域 $\mathbb{R}$ 上的一个线性空间 (详见《高等代数》).

然后在 $\mathbb{R}^n$ 中规定一个二元实值函数

$$(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) := \boldsymbol{\alpha}^T \boldsymbol{\beta} = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i.$$

我们称 $(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})$ 为向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 的**标准内积** (standard inner product), 简称内积. 定义了内积的线性空间 $\mathbb{R}^n$ 称之为 $n$ 维 **Euclid 空间** (Euclidean space).

♣

注 1 维、2 维和 3 维的 Euclid 空间通常称为**直线** (line)、**平面** (plane) 和**几何空间** (geometric space).
注 内积也可以记作 $\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\beta}$.
注 $\boldsymbol{\alpha}^T\boldsymbol{\beta}$ 中的 $\boldsymbol{\alpha}$ 和 $\boldsymbol{\beta}$ 都看作了列向量.
注 有时候为了方便可以把向量记成列向量的形式: $\boldsymbol{\alpha}=[a_1,a_2,\cdots,a_n]^T$. 此时也可以把列向量看作一个 $n\times 1$ 矩阵.

容易验证 $\mathbb{R}^n$ 中内积具有以下性质.

**命题 3.1 (内积的性质)**

在 Euclid 空间 $\mathbb{R}^n$ 中, 向量的内积满足

(1) 非负性: $(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha})\geq 0$, 等号成立当且仅当 $\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0}$.

(2) 对称性: $(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha})$.

(3) 双线性: $(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\beta})=(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})+(\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\beta})$; $(k\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=k(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})$.

### 3.1.2 Euclid 空间中的度量

在 Euclid 几何中, 有长度、夹角和距离的概念. 用内积可以定义 $\mathbb{R}^n$ 中的长度、夹角和距离. 基于这一点, 定义了内积的 $\mathbb{R}^n$ 被称为 Euclid 空间.

先内积定义 $\mathbb{R}^n$ 中向量的 "长度"

**定义 3.2 (向量的范数)**

在 $\mathbb{R}^n$ 中, 令

$$\|\boldsymbol{\alpha}\|:=\sqrt{(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha})},\quad \forall\boldsymbol{\alpha}\in\mathbb{R}^n.$$

我们称 $|\boldsymbol{\alpha}|$ 为 $\boldsymbol{\alpha}$ 的**长度** (length), 也称为**范数** (norm).

注 向量的范数是绝对值概念的推广.

向量的范数满足以下性质.

**命题 3.2 (向量范数的性质)**

在 Euclid 空间 $\mathbb{R}^n$ 中, 向量的长度满足

(1) 非负性: $\|\boldsymbol{\alpha}\|\geq 0$, 等号成立当且仅当 $\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0}$.

(2) $\|k\boldsymbol{\alpha}\|=|k|\|\boldsymbol{\alpha}\|$.

(3) Cauchy-Schwarz 不等式: $|(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})|\leq\|\boldsymbol{\alpha}\|\|\boldsymbol{\beta}\|$. 等号成立 z 当且仅当 $\boldsymbol{\alpha}$ 和 $\boldsymbol{\beta}$ 线性相关

(4) 三角不等式: $\|\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}\|\leq\|\boldsymbol{\alpha}\|+\|\boldsymbol{\beta}\|$. 等号成立当且仅当 $\boldsymbol{\alpha}$ 和 $\boldsymbol{\beta}$ 线性相关.

证明 只证明 (3) 和 (4).

(3) 设 $\boldsymbol{\alpha}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$, $\boldsymbol{\beta}=(b_1,b_2,\cdots,b_n)$. 由 Cauchy-Schwarz 不等式可知

$$\left(\sum_{i=1}^n a_ib_i\right)^2\leq\sum_{i=1}^n a_i^2\sum_{i=1}^n b_i^2 \iff (\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})^2\leq(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha})(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\beta}) \iff |(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})|\leq\|\boldsymbol{\alpha}\|\|\boldsymbol{\beta}\|.$$

以上不等式中的等号成立当且仅当 $\boldsymbol{\alpha}$ 和 $\boldsymbol{\beta}$ 线性相关.

(4) 由 (3) 可知

$$\|\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}\|^2=(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})=(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha})+2(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})+(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\beta})=\|\boldsymbol{\alpha}\|^2+2(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})+\|\boldsymbol{\beta}\|^2\leq\|\boldsymbol{\alpha}\|^2+2\|\boldsymbol{\alpha}\|\|\boldsymbol{\beta}\|+\|\boldsymbol{\beta}\|^2=(\|\boldsymbol{\alpha}\|+\|\boldsymbol{\beta}\|)^2.$$

于是可知 $\|\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}\|\leq\|\boldsymbol{\alpha}\|+\|\boldsymbol{\beta}\|$. 等号成立当且仅当 $\boldsymbol{\alpha}$ 和 $\boldsymbol{\beta}$ 线性相关. ■

注 $\boldsymbol{\alpha}$ 和 $\boldsymbol{\beta}$ 线性相关当且仅当存在不同时为零的实数 $\lambda,\eta$ 使得 $\lambda\boldsymbol{\alpha}+\eta\boldsymbol{\beta}=\mathbf{0}$.

如果把 $m\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 看作一个 $mn$ 维向量, 则可以定义矩阵的范数.

$$\|\boldsymbol{A}\| := \left(\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2\right)^{1/2}.$$

注意这里的 $|\cdot|$ 不表示行列式.

矩阵乘积的范数满足以下不等式.

**命题 3.3**

设 $m\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $n\times l$ 矩阵 $\boldsymbol{B}$. 则 $\|\boldsymbol{AB}\|\le\|\boldsymbol{A}\|\|\boldsymbol{B}\|$.

**证明** 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ik})$, $\boldsymbol{B}_{b_{kj}}$. 由 Cauchy-Schwarz 不等式可知

$$[\boldsymbol{AB}(i;j)]^2=\left(\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}\right)^2\le\sum_{k=1}^{n}a_{ik}^2\sum_{i=1}^{n}b_{kj}^2$$

于是

$$\|\boldsymbol{AB}\|^2=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{l}\left(\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}\right)^2\le\left(\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}a_{ik}^2\right)\left(\sum_{j=1}^{l}\sum_{i=1}^{n}b_{kj}^2\right)=\|\boldsymbol{A}\|^2\|\boldsymbol{B}\|^2.$$

于是可知 $\|\boldsymbol{AB}\|\le\|\boldsymbol{A}\|\|\boldsymbol{B}\|$. ■

若 $\boldsymbol{\alpha}$ 和 $\boldsymbol{\beta}$ 都不是零向量, 则由内积形式的 Cauchy-Schwarz 不等式可以知道

$$\frac{|(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})|}{|\boldsymbol{\alpha}||\boldsymbol{\beta}|}\le 1.$$

这表明存在唯一的 $\theta\in[0,\pi]$ 使得

$$\cos\theta=\frac{|(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})|}{|\boldsymbol{\alpha}||\boldsymbol{\beta}|}.$$

于是我们可以把向量夹角的概念推广到 $\mathbb{R}^n$ 中.

**定义 3.3 (向量的夹角)**

在 $\mathbb{R}^n$ 中, 令

$$\langle\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\rangle:=\arccos\frac{(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})}{|\boldsymbol{\alpha}||\boldsymbol{\beta}|}.$$

我们称 $\langle\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\rangle$ 为向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 和 $\boldsymbol{\beta}$ 的**夹角** (angle).

**注** 当 $(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})$ 时 $\langle\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\rangle=\pi/2$, 此时我们称向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 和 $\boldsymbol{\beta}$ **正交** (orthogonal). 因此, 零向量和任一向量都正交.

**例 3.1** 在 Euclid 空间 $\mathbb{R}^n$ 中, 向量 $\boldsymbol{x}=(1,1,\cdots,1)$ 与 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_n$ 的夹角都相等.

**证明** 设 $\boldsymbol{x}$ 与 $\boldsymbol{e}_i$ 的夹角为 $\theta_i$

$$\theta_i=\arccos\frac{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{e}_i)}{|\boldsymbol{x}||\boldsymbol{e}_i|}=\arccos\frac{1}{\sqrt{n}},\quad i=1,2,\cdots,n.$$

这表明向量 $\boldsymbol{x}$ 与 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_n$ 的夹角都相等. ■

任意 $n$ 个线性无关的向量都可以成为 $\mathbb{R}^n$ 的一个基, 空间中的任一向量都可以用一个基线性表出, 表出系数可以看作这个基下的坐标. 为了计算简便我们应选择适当的基.

**定义 3.4 (标准正交基)**

Euclid 空间 $\mathbb{R}^n$ 中 $n$ 个两两正交的向量称为 $\mathbb{R}^n$ 的一个**正交基** (orthogonal basis). 若该其中每个向量都是单位向量, 则称它是 $\mathbb{R}^n$ 的一个**标准正交基** (orthonormal basis).

最简单的标准正交基就是

$$e_1=(1,0,0,\cdots,0),\quad e_2=(0,1,0,\cdots,0),\quad \cdots,\quad e_1=(0,0,0,\cdots,1).$$

$\mathbb{R}^n$ 中的任一向量 $\boldsymbol{\alpha}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$ 都可以用这个基表示成

$$\boldsymbol{\alpha}=a_1\boldsymbol{e}_1+a_2\boldsymbol{e}_2+\cdots+\boldsymbol{e}_na_n.$$

**例 3.2 方向余弦** 在 $\mathbb{R}^n$ 中, 设单位向量 $\boldsymbol{u}$. 若它与 $\boldsymbol{e}_i$ 的夹角为 $\alpha_i$ $(i=1,2,\cdots,n)$, 则

$$\boldsymbol{u}=(\cos\alpha_1,\cos\alpha_2,\cdots,\cos\alpha_n).$$

**证明** 设 $\boldsymbol{u}=(u_1,u_2,\cdots,u_n)$. 由于 $|\boldsymbol{u}|=1$, 因此

$$\cos\alpha_i=\langle\boldsymbol{u},\boldsymbol{e}_i\rangle=\frac{(\boldsymbol{u},\boldsymbol{e}_i)}{|\boldsymbol{u}||\boldsymbol{e}_i|}=v_i,\quad i=1,2,\cdots,n.$$

于是可知 $\boldsymbol{u}=(\cos\alpha_1,\cos\alpha_2,\cdots,\cos\alpha_n)$. ■

**注** $\cos\alpha_i$ $(i=1,2,\cdots,n)$ 称为 $\boldsymbol{u}$ 的***方向余弦*** (direction cosine).

Euclid 空间 $\mathbb{R}^n$ 中的向量也可以看作点. 我们可以定义两点的距离.

**定义 3.5 (点与点的距离)**

在 Euclid 空间 $\mathbb{R}^n$ 中, $|\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}|$ 称为向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 和 $\boldsymbol{\beta}$ 的***距离*** (distance). ♣

**注** 向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 的长度 $|\boldsymbol{\alpha}|$ 也可以看作点 $\boldsymbol{\alpha}$ 到原点的距离.

容易验证 $\mathbb{R}^n$ 中的距离满足以下性质.

**命题 3.4 (距离的性质)**

在 Euclid 空间 $\mathbb{R}^n$ 中, 距离满足以下性质

(1) 非负性: $|\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}|\geq 0$. 等号成立当且仅当 $\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\beta}$.

(2) 对称性: $|\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}|=|\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{\alpha}|$.

(3) 三角形不等式: $|\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\gamma}|\leq|\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}|+|\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{\gamma}|$. ♠

**证明** 只证明 (3). 由于 $\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\gamma}=(\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta})+(\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{\gamma})$. 由向量长度的三角不等式立刻可知

$$|\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\gamma}|\leq|\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}|+|\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{\gamma}|.$$ ■

把距离的概念推广到 Euclid 空间 $\mathbb{R}^n$ 后有些原来在 $\mathbb{R}^3$ 中成立的几何定理仍可以成立.

**例 3.3 余弦定理** 在 Euclid 空间 $\mathbb{R}$ 中, 有余弦定理:

$$|\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}|^2=|\boldsymbol{\alpha}|^2+|\boldsymbol{\beta}|^2-2|\boldsymbol{\alpha}||\boldsymbol{\beta}|\cos\theta,$$

其中 $\theta=\langle\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\rangle$.

**证明** 设 $\boldsymbol{\alpha}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$, $\boldsymbol{\beta}=(y_1,y_2,\cdots,y_n)$. 于是

$$\begin{aligned}&|\boldsymbol{\alpha}|^2+|\boldsymbol{\beta}|^2-2|\boldsymbol{\alpha}||\boldsymbol{\beta}|\cos\theta=|\boldsymbol{\alpha}|^2+|\boldsymbol{\beta}|^2-2(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=\left(x_1^2+\cdots+x_n^2\right)+\left(x_1^2+\cdots+x_n^2\right)-2(x_1y_1+\cdots+x_ny_n)\\&=(x_1-y_1)^2+\cdots+(x_n-y_n)^2=|\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}|^2.\end{aligned}$$ ■

**注** 当 $\boldsymbol{\alpha}$ 和 $\boldsymbol{\beta}$ 正交时 $\cos\theta=0$, 因此立刻有 Pythagorean 定理

$$|\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}|^2=|\boldsymbol{\alpha}|^2+|\boldsymbol{\beta}|^2$$

**注** 由余弦定理可以得到

$$|\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}|^2=|\boldsymbol{\alpha}|^2+|\boldsymbol{\beta}|^2-2|\boldsymbol{\alpha}||\boldsymbol{\beta}|\cos\theta$$

$$|\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}|^2 = |\boldsymbol{\alpha}|^2 + |\boldsymbol{\beta}|^2 + 2|\boldsymbol{\alpha}||\boldsymbol{\beta}|\cos\theta.$$

两式相加即得平行四边形定理

$$|\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}|^2 + |\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}|^2 = 2\left(|\boldsymbol{\alpha}|^2 + |\boldsymbol{\beta}|^2\right).$$

## 3.2 度量空间中的点集

### 3.2.1 度量空间

$\mathbb{R}^n$ 中定义的距离具有三条性质, 分别是非负性、对称性和三角形不等式. 我们可以用公理化的方法把距离的概念一般化.

**公理 3.1 (度量空间)**

设非空集合 $X$. 定义 $X \times X$ 到 $\mathbb{R}$ 的一个二元实值函数 $d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$. 若满足

1° 非负性: $d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \geq 0$, 等号成立当且仅当 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$.

2° 对称性: $d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = d(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})$.

3° 三角形不等式: $d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}) \leq d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) + d(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})$.

则称 $d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ 为 $X$ 上的一个**距离** (distance), 也称为一个**度量** (metric). 定义了一个度量 $d$ 的集合 $X$ 称为**度量空间** (metric space), 记作 $(X, d)$.

**注** 同一个集合 $X$ 上可以定义不止一个度量. 对于每个度量都可以形成一个不同的度量空间.

**注** 若 $Y$ 是 $X$ 的一个非空子集, 则把 $d$ 限制到 $Y \times Y$ 上以后就是 $Y$ 上的一个度量, 因此 $(Y, d)$ 仍是一个度量空间.

**注** 从一般的集合到数集的映射称为**泛函** (functional). 度量就是一个泛函.

最重要的度量空间的例子就是 Euclid 空间 $\mathbb{R}^n$, 在没有特别说明的情况下, 它的度量就是通常规定的 $\mathbb{R}^n$ 中的点与点的距离.

下面来看几个度量空间的例子.

**例 3.4 离散度量** 设非空集合 $X$. 令

$$d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \begin{cases} 0, & \boldsymbol{x} = \boldsymbol{y} \\ 1, & \boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{y} \end{cases}, \quad \forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in X.$$

则 $(X, d)$ 是一个度量空间.

**证明** 非负性和对称性显然满足. 任取三点 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \in X$. 下面来验证 $d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}) \leq d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) + d(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})$. 当 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{z}$ 时, 显然成立. 设设 $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{z}$. 若 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}$ 两两不相等, 则

$$d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}) = 1 \leq 2 = d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) + d(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}).$$

若 $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}$ 或 $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{z}$, 则

$$d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}) = 1 = 1 = d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) + d(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}).$$

综上可知 $d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ 是 $X$ 上的一个度量. ■

**注** 上例中的度量 $d$ 称为**离散度量** (discrete metric), 此时 $(X, d)$ 称为**离散空间** (discrete space).

以上例子说明, 可以在任一非空集合上定义离散度量, 所以 $\mathbb{R}^n$ 上至少可以定义两种度量.

一般来说, 度量空间总是要求是线性空间, 这样便于讨论更多的问题. 但这个要求不是强制的, 离散度量就可以在任一非空集合中定义.

**例 3.5** 设正实数集 $\mathbb{R}^{+}$. 令

$$d(x, y) = \left| \ln \frac{y}{x} \right|.$$

则 $(\mathbb{R}^{+}, d)$ 是一个度量空间.

**证明** $d(x,y)\geq 0$ 显然成立. 当 $x=y$ 时

$$d(x,y)=\left|\ln\frac{y}{x}\right|=|\ln 1|=0.$$

因此满足非负性. 由于

$$d(x,y)=\left|\ln\frac{y}{x}\right|=|\ln y-\ln x|=|\ln x-\ln y|=\left|\ln\frac{x}{y}\right|=d(y,x).$$

因此满足对称性. 由于

$$d(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})+d(\boldsymbol{y},z)=\left|\ln\frac{y}{x}\right|+\left|\ln\frac{z}{y}\right|\geq\left|\ln\frac{y}{x}+\ln\frac{z}{y}\right|=\left|\ln\frac{z}{x}\right|=d(\boldsymbol{x},z).$$

因此满足三角形不等式. 综上可知 $(\mathbb{R}^+,d)$ 是一个度量空间. ∎

下面来看一个函数空间的例子.

**例 3.6** 在连续函数空间 $C[0,1]$ 中, 令

$$d_1(f,g)=\max_{x\in[0,1]}|f(x)-g(x)|.$$

$$d_2(f,g)=\int_0^1|f(x)-g(x)|\,\mathrm{d}x.$$

则 $(C[0,1],d_1)$ 和 $(C[0,1],d_2)$ 都是度量空间.

**证明** (i) 由于 $|f(x)-g(x)|$ 是连续函数, 因此它在有限闭区间 $[0,1]$ 上能取到最大值. 因此 $d_1$ 的定义是合理的. 非负性和对称性都是显然的. 只需证明三角不等式. 对于任一 $x\in[0,1]$ 都有

$$|f(x)-h(x)|\leq|f(x)-g(x)|+|g(x)-h(x)|\leq\max_{x\in[0,1]}|f(x)-g(x)|+\max_{x\in[0,1]}|g(x)-h(x)|=d_1(f,g)+d_1(g,h).$$

于是可知 $d_1(f,h)\leq d_1(f,g)+d_1(g,h)$.

(ii) $d_2(f,g)\geq 0$ 是显然的. 当 $f=g$ 时 $d_2(f,g)=0$. 反之, 当 $d_2(f,g)=\int_0^1|f(x)-g(x)|\,\mathrm{d}x=0$ 时, 由于 $|f(x)-g(x)|$ 连续且非负, 故 $f=g$. 这就证明了 $d_2$ 的非负性. 对称性是显然的. 下面证明三角不等式. 对于任一 $x\in[0,1]$ 都有 $|f(x)-h(x)|\leq|f(x)-g(x)|+|g(x)-h(x)|$, 故

$$\int_0^1|f(x)-h(x)|\,\mathrm{d}x\leq\int_0^1|f(x)-g(x)|\,\mathrm{d}x+\int_0^1|g(x)-h(x)|\,\mathrm{d}x.$$

**注** 以上, 我们在同一个函数空间中尝试定义了两种不同的度量. 但 $d_1$ 的定义只关注局部, 而 $d_2$ 是从函数的 “整体” 考虑的, 因此 $d_2$ 的定义更符合几何直观.

下面介绍一种有意思的度量. 为了简化问题, 我们只讨论 2 维的情况.

**例 3.7p 度量** 在 $\mathbb{R}^2$ 中, 对于任意两点 $\boldsymbol{a}=(x_1,y_1)$, $\boldsymbol{b}=(x_2,y_2)$, 令

$$d_p(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=\left(|x_1-x_2|^p+|y_1-y_2|^p\right)^{1/p},\quad p\geq 1.$$

则 $(\mathbb{R}^2,d)$ 是一个度量空间.

**证明** 对称性显然成立. 当 $d_p=0$ 时由于 $|x_1-x_2|^p\geq 0$, $|y_1-y_2|^p\geq 0$, 故 $x_1=x_2$, $y_1=y_2$, 即 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$. 因此非负性成立. 设 $\boldsymbol{c}=(x_3,y_3)$, 由 Minkowski 不等式可知

$$\left(|x_1-x_3|^p+|y_1-y_3|^p\right)^{1/p}\leq\left(|x_1-x_2|^p+|y_1-y_2|^p\right)^{1/p}+\left(|x_2-x_3|^p+|y_2-y_3|^p\right)^{1/p}.$$

于是 $d_p(\boldsymbol{a},\boldsymbol{c})\leq d_p(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})+d_p(\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})$. 于是可知 $(\mathbb{R}^2,d)$ 是一个度量空间. ∎

**例 3.8Chebyshev 距离** 在 $\mathbb{R}^2$ 中, 对于任意两点 $\boldsymbol{a}=(x_1,y_1)$, $\boldsymbol{b}=(x_2,y_2)$, 令

$$d(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=\max\{|x_1-x_2|,|y_1-y_2|\}.$$

则 $(\mathbb{R}^2,d)$ 是一个度量空间.

**证明** 非负性和对称性显然满足. 设 $\boldsymbol{c}=(x_3,y_3)$.

$$\lim_{p\to\infty}(a^p+b^p)^{1/p}=\max\{a,b\},\quad a,b\geq 0.$$

令 $m=\max\{a,b\}$. 则

$$m=(m^p)^{1/p}\leq(a^p+b^p)^{1/p}\leq(m^p+m^p)^{1/p}=2^{1/p}m.$$

由夹逼定理可知 $\lim_{p\to\infty}(a^p+b^p)^{1/p}=m$. 由 Minkowski 不等式可知

$$(|x_1-x_3|^p+|y_1-y_3|^p)^{1/p}\leq(|x_1-x_2|^p+|y_1-y_2|^p)^{1/p}+(|x_2-x_3|^p+|y_2-y_3|^p)^{1/p}.$$

令 $p\to\infty$ 可得

$$\max\{|x_1-x_3|,|y_1-y_3|\}\leq\max\{|x_1-x_2|,|y_1-y_2|\}+\max\{|x_2-x_3|,|y_2-y_3|\}.$$

于是 $d(\boldsymbol{a},\boldsymbol{c})\leq d(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})+d(\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})$. 于是可知 $(\mathbb{R}^2,d)$ 是一个度量空间. ■

**注** 以上度量是著名的 **Chebyshev 距离** (Chebyshev distance), 也称为**棋盘距离**. 因此国际象棋棋盘上国王从一个格子走到另一个格子所需的最少步数恰好是 Chebyshev 距离.

当 $p$ 度量的 $p=2$ 时就是通常意义的距离. 当 $p=+\infty$ 时就是 Chebyshev 度量. 以下是几种 $p$ 度量的等距图.

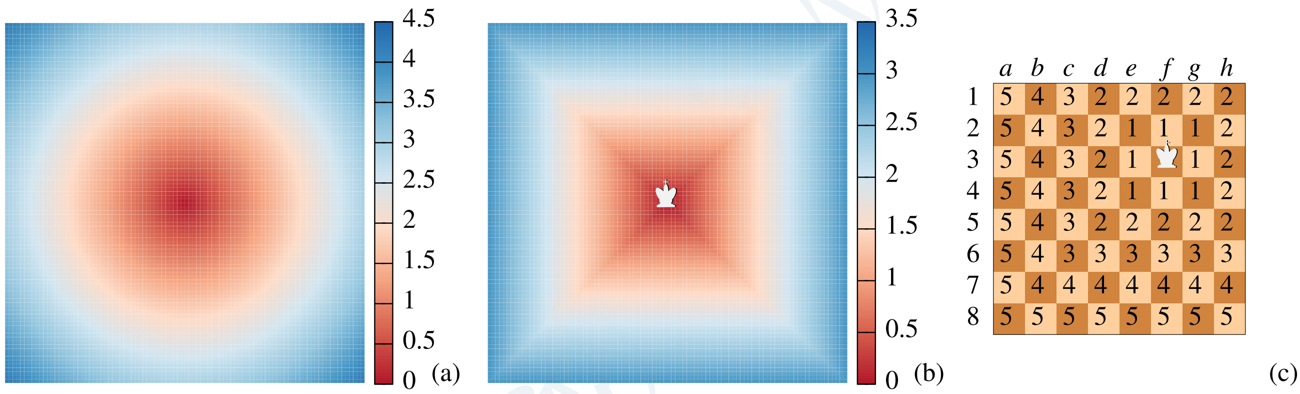



**图 3.2:** $\mathbb{R}^n$ 上通常意义下的距离和 Chevyshev 距离的 "等距图" 对比, 以及国际象棋中的 Chevyshev 距离度量的等价性.

**定义 3.6 (等价度量)**

XXX ♣

**例 3.9** Euclid 空间中的任一度量都等价.

**证明**

**例 3.10** 在连续函数空间 $C[0,1]$ 中, 令

$$d_1(f,g)=\max_{x\in[0,1]}|f(x)-g(x)|.$$

$$d_2(f,g)=\int_0^1|f(x)-g(x)|\,\mathrm{d}x.$$

则 $d_1$ 和 $d_2$ 不等价.

**证明**

用度量可以定义有界集.

**定义 3.7 (有界集)**

在度量空间 $(X,d)$ 中, 设 $E \subseteq X$. 对于任一 $\boldsymbol{x} \in X$ 都存在 $M \in \mathbb{R}^+$ 使得对于任一 $\boldsymbol{y} \in E$ 都有 $d(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) < M$, 则称 $E$ 是 $X$ 上的一个**有界集** (bounded set).

注 定义中的 $\boldsymbol{x}$ 可以任意选取. 在 $\mathbb{R}^n$ 中, 为了计算方便, 经常选取 $\mathbf{0}$.

我们还可以引入集合直径的概念来刻画有界集.

**定义 3.8 (集合的直径)**

在度量空间 $(X,d)$ 中, 设非空集合 $E$. 令

$$\operatorname{diam} E := \sup\{d(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) : \boldsymbol{x},\boldsymbol{y} \in E\}.$$

$\operatorname{diam} E$ 称为 $E$ 的**直径** (diameter).

注 规定空集的直接是零.

注 集合的直径的取值范围是 $[0,+\infty)$.

**命题 3.5**

在度量空间 $(X,d)$ 中, 集合 $E$ 有界当且仅当 $\operatorname{diam} E \in \mathbb{R}$.

### 3.2.2 开集和闭集

接下来我们要把 $\mathbb{R}$ 中邻域的概念推广到一般的度量空间上.

**定义 3.9 (球形邻域)**

在度量空间 $(X,d)$ 中, 设 $\boldsymbol{x} \in X, r \in \mathbb{R}^+$. 令

$$N_r(\boldsymbol{x}) := \{\boldsymbol{y} \in X \mid d(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x}) < r\}.$$

我们把 $N_r(\boldsymbol{x})$ 称为以 $\boldsymbol{x}$ 为球心, $r$ 为半径的**球形邻域** (spherical neighborhood).

注 类似地, $N_r(\boldsymbol{x})\backslash\{\boldsymbol{x}\}$ 为**去心邻域** (deleted neighborhood), 记作 $\check{N}_r(\boldsymbol{x})$.

注 1 维 Euclid 空间 $\mathbb{R}$ 中的邻域就是开区间; 2 维 Euclid 空间 $\mathbb{R}^2$ 中的邻域称为**开圆盘** (open disk); $n$ 维 Euclid 空间 $\mathbb{R}^n$ 中的邻域称为**开球** (open sphere).

其实半径对邻域来说是 “多余的”. 我们可以定义更一般的邻域.

**定义 3.10 (邻域)**

在度量空间 $(X,d)$ 中, 设 $\boldsymbol{x} \in U \in X$. 若存在一个球形邻域 $N_\delta(\boldsymbol{x}) \subseteq U$, 则称 $U$ 是 $\boldsymbol{x}$ 的一个**邻域** (neighborhood).

注 类似地, $U(\boldsymbol{x})\backslash\{\boldsymbol{x}\}$ 为去心邻域, 记作 $\check{U}(\boldsymbol{x})$.

显然球形邻域都是邻域.

在 $\mathbb{R}$ 中, 邻域 $N$ 中的任意一点 $x_0$ 都可以找到一个邻域 $N_0(x_0)$ 使得 $N_0(x_0) \subseteq N_0$. 邻域可以刻画函数的连续性, 和这个性质有直接关系. 满足这样性质的点 $x_0$ 称为集合的 “内点”.

**定义 3.11 (内点和内部)**

在度量空间 $(X,d)$ 中, 设非空集合 $E \subseteq X$. 若 $\boldsymbol{x} \in E$ 存在一个邻域 $N(\boldsymbol{x}) \subseteq E$, 则称 $\boldsymbol{x}$ 是 $E$ 的一个**内点** (interior point). $E$ 的全体内点组成的集合称为 $E$ 的**内部** (interior), 记作 $E^\circ$.

注 由定义可知 $E^\circ \subseteq E$.

不难证明邻域中的每个点都是内点.

**命题 3.6**

在度量空间 $(X,d)$ 中, 任取邻域 $E=N_r(\boldsymbol{x})$, 则任一 $\boldsymbol{y}\in N$ 都是 $D$ 的一个内点, 即 $E^\circ=E$.

**证明** 令 $d(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=r-h$, 其中 $h\in\mathbb{R}^+$. 考虑邻域 $N_h(\boldsymbol{y})$. 对于任一 $\boldsymbol{z}\in N_h(\boldsymbol{y})$ 都有 $d(\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})<h$. 由三角形不等式可知

$$d(\boldsymbol{x},\boldsymbol{z})\le d(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})+d(\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})<r-h+h=r.$$

因此 $\boldsymbol{z}\in N_r(\boldsymbol{x})$. 故 $N_h(\boldsymbol{y})\subseteq N_r(\boldsymbol{x})$. 这表明 $\boldsymbol{y}$ 是 $E$ 的一个内点. ■

事实上 $\mathbb{R}$ 上的开区间也满足以上性质. 我们可以把这个性质抽象出来, 定义度量空间上的一类点集.

**定义 3.12 (开集)**

在度量空间 $(X,d)$ 中, 设集合 $E\subseteq X$. 若 $E$ 中的点都是 $E$ 的内点, 即 $E=E^\circ$. 则称 $E$ 是 $X$ 上的一个**开集** (open set).

**注** 显然空集和全空间 $X$ 都是开集.

**注** 说一个集合是开集, 必须指明在什么空间上, 因为一个空间上的开集在另一个空间上未必是开集. 例如开区间是 $\mathbb{R}$ 上的开集, 但不是 $\mathbb{R}^2$ 上的开集.

由定义可知度量空间上的邻域都是开集, $\mathbb{R}$ 中的开区间都是开集. 我们再看几个例子.

**例 3.11** 设 Euclid 空间 $\mathbb{R}^2$ 的一个子集 $E=\{(x,y)\mid y>0\}$. 则 $E$ 是 $\mathbb{R}^2$ 上的一个开集.

**证明** 任取 $\boldsymbol{a}=(x,y)\in E$, 其中 $y>0$. 在邻域 $N_y(\boldsymbol{a})$ 内任取一点 $\boldsymbol{b}=(x_1,y_1)$. 则

$$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=\sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2}<y\Longrightarrow 2yy_1>(x-x_1)^2+y_1^2.$$

由于 $y>0$, 故 $y_1>0$. 因此 $\boldsymbol{b}\in E$. 从而 $N_y(\boldsymbol{a})\subseteq E$. 因此 $\boldsymbol{a}$ 是 $E$ 的一个内点. 于是可知 $E$ 是 $\mathbb{R}^2$ 上的一个开集. ■

**例 3.12** 设 Euclid 空间 $\mathbb{R}^n$. 则对于任意 $\boldsymbol{a}\in\mathbb{R}^n$ 都有 $E=\mathbb{R}^n\backslash\{\boldsymbol{a}\}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上的一个开集.

**证明** 任取 $\boldsymbol{x}\in E$. 令 $r=|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}|$. 显然 $r>0$. 任取 $\boldsymbol{y}\in N_r(\boldsymbol{x})$. 则

$$|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|<r=|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}|.$$

故 $\boldsymbol{y}\ne\boldsymbol{a}$. 因此 $\boldsymbol{y}\in E$. 因此 $N_r(\boldsymbol{x})\subseteq E$. 故知 $\boldsymbol{x}$ 是 $E$ 中的一个内点. 于是可知 $E$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上的一个开集. ■

**命题 3.7 (内部的简单性质)**

在度量空间 $(X,d)$ 中, 设集合 $E$, 则

(1) $E^\circ$ 都是 $X$ 上的一个开集, 即 $(E^\circ)^\circ=E^\circ$.

(2) $E^\circ$ 是 $X$ 上包含于 $E$ 的最大开集, 即任一开集 $F\subseteq E$ 都满足 $F\subseteq E^\circ$.

**证明** (1) 若 $E^\circ=\varnothing$, 则 $E^\circ$ 是一个开集. 下设 $E^\circ\ne\varnothing$. 任取 $\boldsymbol{x}\in E^\circ$. 则 $\boldsymbol{x}$ 是 $E$ 的一个内点, 故存在邻域 $N(\boldsymbol{x})\subseteq E$. 由于 $N(\boldsymbol{x})$ 也是 $X$ 上的一个开集, 故 $N(\boldsymbol{x})$ 中的任意一点都是 $N(\boldsymbol{x})$ 的内点, 从而也是 $E$ 的内点. 因此 $N(\boldsymbol{x})\subseteq E^\circ$. 因此 $\boldsymbol{x}\in E^\circ$. 于是可知 $E^\circ$ 是 $X$ 上的一个开集.

(2) 任取 $\boldsymbol{x}\in F$, 则存在一个邻域 $N(\boldsymbol{x})\subseteq F\subseteq E$. 故 $\boldsymbol{x}\in E^\circ$. 因此 $F\subseteq E^\circ$. ■

用以下定理, 可以得到更多的开集.

**定理 3.1 (开集的性质)**

在度量空间 $(X,d)$ 中,

(1) $\varnothing$ 和 $X$ 都是开集.

(2) 设开集族 $\{E_\alpha : \alpha \in I\}$, 其中 $I$ 是一个指标集. 则 $\bigcup\limits_{\alpha\in I} E_\alpha$ 仍是一个开集.

(3) 设有限个开集 $F_1, F_2, \cdots, F_n$. 则 $\bigcap\limits_{i=1}^{n} F_i$ 仍是一个开集.

♡

**证明** (1) 显然成立.

(2) 设 $E = \bigcup\limits_{\alpha\in I} E_\alpha$. 任取 $\boldsymbol{x} \in E$. 则存在 $\alpha \in I$ 使得 $\boldsymbol{x} \in E_\alpha$. 因此 $\boldsymbol{x}$ 是 $E_\alpha$ 的一个内点. 于是 $\boldsymbol{x}$ 也是 $E$ 的一个内点. 于是可知 $E$ 仍是一个开集.

(3) 设 $F = \bigcap\limits_{i=1}^{n} F_i$. 对于任一 $\boldsymbol{x} \in F$ 都存在一个邻域 $N_{r_i}(\boldsymbol{x}) \subseteq F_i$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$. 令

$$r = \min\{r_1, r_2, \cdots, r_n\}.$$

则 $N_r(\boldsymbol{x}) \subseteq F_i$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$. 因此 $N_r(\boldsymbol{x}) \subseteq F$. 于是可知 $F$ 仍是一个开集. ■

无限个开集的交集未必是开集, 这一点并不直观. 我们举例说明.

**例 3.13** 在 Euclid 空间 $\mathbb{R}$ 中, 设一列开区间

$$E_i = \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right), \quad i = 1, 2, \cdots.$$

它们都是 $\mathbb{R}$ 上的开集. 但 $\bigcap_{i=1}^{\infty} E_i = \{0\}$ 不是 $\mathbb{R}$ 上开集.

下面来研究闭区间的特点. 设开区间 $(a,b)$ 和闭区间 $[a,b]$, 它们的差别仅仅在于两个端点. 容易验证 $a$ 和 $b$ 都不是 $[a,b]$ 的内点, 因此 $[a,b]$ 不是开集. 另一方面在 $(a,b)$ 中可以找到两个数列:

$$a_n = a + \frac{b-a}{n+1}, \quad b_n = b - \frac{b-a}{n+1}, \quad n = 1, 2, \cdots.$$

容易看出 $a_n \to a$, $b_n \to b$. 因此 $a$ 和 $b$ 是 $(a,b)$ 的极限点. 现在我们可以来总结开区间和闭区间的差异. 对于开区间来说, 它有两个极限点不在区间内, 但区间内的所有点都是内点; 对于闭区间来说, 它的所有极限点都在区间内, 但有两个点不是内点. 因此闭区间的特征可以用极限点来刻画.

从点集的角度, 极限点可以如下定义.

**定义 3.13 (极限点和导集)**

在度量空间 $(X,d)$ 中, 设集合 $E$. 若 $\boldsymbol{x} \in X$ 任一去心邻域 $\check{N}_r(\boldsymbol{x})$ 都满足 $\check{N}_r(\boldsymbol{x}) \cap E \neq \varnothing$, 则称 $\boldsymbol{x}$ 为 $E$ 的一个**极限点** (limited point) 或**聚点** (accumulation point, cluster point). 否则称 $\boldsymbol{x}$ 为 $E$ 的一个**孤立点** (isolatied point). $E$ 的所有极限点组成集合称为 $E$ 的**导集** (derived set), 记作 $E'$. 令 $\overline{E} = E \cup E'$, 称 $\overline{E}$ 为 $E$ 的**闭包** (closure)

♣

**注** 极限点不一定在 $E$ 中.

**注** 容易验证, $\boldsymbol{x}$ 是 $E$ 的一个极限点当且仅当 $\boldsymbol{x}$ 的任一邻域与 $E$ 的交集都包含无穷多个点; $\boldsymbol{x}$ 是 $E$ 的一个孤立点当且仅当 $\boldsymbol{x}$ 存在一个邻域只包含有限个点. 因此有限集没有极限点.

**注** 用数列 (或点列) 极限定义极限点时要求 $\boldsymbol{x} \in X$ 中的一个去心邻域包含数列的无穷多项. 如果数列充分大以后常值, 则这个数列决定的极限点和以上定义中的孤立点. 否则数列定义的极限点和以上定义的极限点等价.

然后我们可以用极限点来定义度量空间上的一类点集.

**定义 3.14 (闭集)**

在度量空间 $(X,d)$ 中, 若集合 $E$ 的极限点都在 $E$ 中, 即 $E = \overline{E}$. 则称 $E$ 是 $X$ 上的一个**闭集** (closed set).

♣

**注** 说某个集合是闭集也要指明在那个度量空间上.

下面看几个闭集的例子.

**例 3.14** 设 Euclid 空间 $\mathbb{R}^2$ 的一个子集 $E = \{(x, y) \mid y \leq 0\}$. 则 $E$ 是 $\mathbb{R}^2$ 上的一个闭集.

**证明** 由例 (3.11) 可知 $E^c = \{(x, y) \mid y > 0\}$ 是一个开集. 由定理 (3.2) 可知 $E$ 是一个闭集. ■

**例 3.15** 设 Euclid 空间 $\mathbb{R}^n$. 则 $\mathbb{R}^n$ 中有限个点组成的集合 $E$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上的一个闭集.

**证明** 由例 (3.12) 可知对于任意 $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$ 都有 $E = \mathbb{R}^n \backslash \{\boldsymbol{a}\}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上的一个开集. 由定理 (3.2) 可知对于任意 $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$ 都有 $\{\boldsymbol{a}\}$ 是一个闭集. 由定理 (3.3) 可知 $E$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上的一个闭集. ■

下面来看一下开集和闭集的关系.

**定理 3.2 (开集和闭集的关系)**

在度量空间 $(X, d)$ 中, 集合 $E$ 是一个开集, 当且仅当 $E^c$ 是一个闭集. ♡

**证明** (i) 证明充分性. 设 $E^c$ 是一个闭集. 任取 $\boldsymbol{x} \in E$, 则 $\boldsymbol{x} \notin E^c$. 因此 $\boldsymbol{x}$ 不是 $E^c$ 的极限点. 故存在一个 $\boldsymbol{x}$ 的邻域 $N(\boldsymbol{x})$ 满足 $N(\boldsymbol{x}) \cap E^c = \varnothing$. 于是 $N(\boldsymbol{x}) \subseteq E$. 因此 $\boldsymbol{x}$ 是 $E$ 的一个内点. 于是可知 $E$ 是一个开集.

(ii) 证明必要性. 设 $E$ 是一个开集. 任取 $E^c$ 中的一个极限点 $\boldsymbol{x}$ (若 $E^c$ 中没有极限点, 则 $E^c$ 是一个闭集). 则 $\boldsymbol{x}$ 的任一去心邻域 $\check{N}(\boldsymbol{x})$ 都满足 $\check{N}(\boldsymbol{x}) \cap E^c \neq \varnothing$. 因此 $\boldsymbol{x}$ 不是 $E$ 的内点. 由于 $E$ 是一个开集. 故 $\boldsymbol{x} \notin E$, 从而 $\boldsymbol{x} \in E^c$. 于是可知 $E^c$ 是一个闭集. ■

**注** 从以上定理可以看出闭集和开集的地位是对称的.

与内部的性质平行, 闭包有以下两条性质.

**命题 3.8 (闭包的简单性质)**

在度量空间 $(X, d)$ 中, 设集合 $E$. 则

(1) $\overline{E}$ 是一个闭集, 即 $\overline{\overline{E}} = \overline{E}$.

(2) $\overline{E}$ 是包含 $E$ 的最小闭集, 即若对于任一闭集 $F \supseteq E$ 都满足 $F \supseteq \overline{E}$. ♠

**证明** (1) 任取 $\boldsymbol{x} \in \overline{E}^c$. 则 $\boldsymbol{x} \notin E$ 且 $\boldsymbol{x} \notin E'$, 即 $\boldsymbol{x} \notin E$ 且 $\boldsymbol{x}$ 不是 $E$ 的极限点. 因此存在一个邻域 $N(\boldsymbol{x}) \cap E = \varnothing$. 因此 $\boldsymbol{x}$ 是 $\overline{E}^c$ 的一个内点. 故 $\overline{E}^c$ 是一个开集. 于是可知 $\overline{E}$ 是一个闭集.

(2) 由于 $F$ 是一个闭集, 故 $F' \subseteq F$. 由于 $E \subseteq F$, 故 $E' \subseteq F'$. 因此 $E' \subseteq F$. 于是可知 $\overline{E} \subseteq F$. ■

类似地, 我们可以用以下定理得到更多的闭集.

**定理 3.3 (闭集的性质)**

在度量空间 $(X, d)$ 中,

(1) $\varnothing$ 和 $X$ 都是闭集.

(2) 设闭集族 $\{E_\alpha \mid \alpha \in I\}$, 其中 $I$ 是一个指标集. 则 $\bigcap\limits_{\alpha \in I} E_\alpha$ 仍是一个闭集.

(3) 设有限个闭集 $F_1, F_2, \cdots, F_n$. 则 $\bigcup\limits_{i=1}^{n} F_i$ 仍是一个闭集. ♡

**证明** (1) 显然成立.

(2) 由于 $E_\alpha$ $(\alpha \in I)$ 都是闭集, 故 $E_\alpha^c$ $(\alpha \in I)$ 都是开集. 于是 $\bigcup_{\alpha\in I} E_\alpha^c$ 是一个开集. 由 de Morgan 定律可知

$$\left(\bigcap_{\alpha\in I} E_\alpha\right)^c = \bigcup_{\alpha\in I} E_\alpha^c.$$

因此 $(\bigcap_{\alpha\in I} E_\alpha)^c$ 是一个开集. 于是可知 $\bigcap_{\alpha\in I} E_\alpha$ 是一个闭集.

(3) 由于 $F_1, F_2, \cdots, F_n$ 都是闭集, 故 $F_1^c, F_2^c, \cdots, F_n^c$ 都是开集. 于是 $\bigcap_{i=1}^n F_i^c$ 是一个开集. 由 de Morgan 定律可知

$$\left(\bigcup_{i=1}^n F_i\right)^c = \bigcap_{i=1}^n F_i^c.$$

因此 $(\bigcup_{i=1}^n F_i)^c$ 是一个开集. 于是可知 $\bigcup_{i=1}^n F_i$ 是一个闭集. ■

无限个闭集的并集未必是闭集. 例子并不难举, 只需用 de Morgan 定律改写例3.13.

**例 3.16** 在 Euclid 空间 $\mathbb{R}$ 中, 设一列闭集

$$E_i = \left(-\infty, -\frac{1}{n}\right] \cup \left[\frac{1}{n}, +\infty\right), \quad i = 1, 2, \cdots.$$

则 $\bigcup_{i=1}^\infty E_i = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ 不是 $\mathbb{R}$ 上的闭集.

为了讨论问题方便, 我们还可以定义以下概念.

**定义 3.15 (外点)**

在度量空间 $(X, d)$ 中, 设集合 $E$. 则 $(E^c)^\circ$ 中的点称为 $E$ 的**外点** (exterior point). $E$ 的所有外点组成的集合称为 $E$ 的**外部** (exterior), 记作 $E^e$. 既不是 $E$ 的内部, 也不是 $E$ 的外部的点称为 $E$ 的**边界点** (boundary point). $E$ 的所有边界点组成的集合称为 $E$ 的**边界** (boundary), 记作 $\partial E$. ♣

**注** 容易看出 $\{E^\circ, E^e, \partial E\}$ 是 $X$ 的一个划分.

下面通过几个例子来熟悉一下度量空间中的一些点集: 导集、闭包、内部、外部、边界.

**例 3.17** 在 Euclid 空间 $\mathbb{R}^n$ 中, 令 $\mathbb{R}^n = E$. 则 $E$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上的一个闭集也是一个开集, 且

$$E' = \mathbb{R}^n, \quad \overline{E} = \mathbb{R}^n, \quad E^\circ = \mathbb{R}^n, \quad E^e = \varnothing, \quad \partial E = \varnothing.$$

**例 3.18** 在 Euclid 空间 $\mathbb{R}^n$ 中, 令 $\varnothing = E$. 则 $E$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上的一个闭集也是一个开集, 且

$$E' = \varnothing, \quad \overline{E} = \varnothing, \quad E^\circ = \varnothing, \quad E^e = \mathbb{R}^n, \quad \partial E = \varnothing.$$

**例 3.19** 在 Euclid 空间 $\mathbb{R}^2$ 中, 设 $E = \{\boldsymbol{a}\}$. 则 $E$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上的一个闭集, 且

$$E' = \varnothing, \quad \overline{E} = E, \quad E^\circ = \varnothing, \quad E^e = E^c, \quad \partial E = E.$$

**例 3.20** 在 Euclid 空间 $\mathbb{R}^2$ 中设 $E$ 是一条直线. 则 $E$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上的一个闭集, 且

$$E' = E, \quad \overline{E} = E, \quad E^\circ = \varnothing, \quad E^e = E^c, \quad \partial E = E.$$

**例 3.21** 在 Euclid 空间 $\mathbb{R}^n$ 中设邻域 $E = N_r(\boldsymbol{a})$. 则 $E$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上的一个开集, 且

$$\begin{aligned}
E' &= \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n : |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}| \le r\}, \\
\overline{E} &= \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n : |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}| \le r\}, \\
E^\circ &= E, \\
E^e &= \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n : |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}| > r\}, \\
\partial E &= \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n : |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}| = r\}.
\end{aligned}$$

存在很多集合既不是开集也不是闭集. 下面举个最常见的例子.

**例 3.22** 在 Euclid 空间 $\mathbb{R}$ 中令 $E=\mathbb{Q}$. 则 $E$ 既不是 $\mathbb{R}^n$ 上的闭集, 也不是开集, 且

$$E'=\mathbb{R},\quad \overline{E}=\mathbb{R},\quad E^\circ=\varnothing,\quad E^e=\varnothing,\quad \partial E=\mathbb{R}.$$

如果把以上各例中的度量换成 Chebyshev 度量, 所有结论都不会改变. 因为把 $\mathbb{R}^n$ 中的通常度量换成 Chebyshev 度量后, 差别仅仅是邻域由 ‘‘球形’’ 变成了 ‘‘方形’’.

最后看一个极端的例子: 离散空间中的开集和闭集.

**例 3.23** 在离散度量空间 $(X,d)$ 中, 考察开集、闭集以及相关点集.

**解** 任取离散空间中的集合 $E$. 因为任一单点集都可以成为一个邻域, 故 $E$ 是开集. 因此 $E^\circ=E, E^e=E$. 既然任一集合都是开集, 则 $E$ 也是闭集. 由于 $E$ 没有极限点. 因此 $E'=\varnothing, \overline{E}=E, \partial E=\varnothing$.

### 3.2.3 度量空间中点列的极限

用 $\mathbb{R}$ 中的距离可以定义 $\mathbb{R}$ 中数列的极限. 现在可以把数列极限的概念推广到一般的度量空间上.

我们把度量空间 $(X,d)$ 上的元素看作 ‘‘点’’, 则 $\mathbb{N}$ 到 $X$ 的一个映射就是一个**点列** (point sequence), 记作 $\{\boldsymbol{x}_n\}$. 利用度量, 我们可以依样画葫芦地把极限的概念推广到一般的度量空间中.

在度量空间 $(X,d)$ 中, 点列 $\{\boldsymbol{x}_n\}$ 收敛于 $\boldsymbol{l}$ 当且仅当存在一点 $\boldsymbol{l}\in X$, 对于任意给定的 $\varepsilon>0$ 都存在 $N>\mathbb{N}^*$ 使得当 $n>N$ 时 $d(\boldsymbol{x}_n-\boldsymbol{l})<\varepsilon$.

用邻域的观点可以更加简洁的叙述这个定义.

**定义 3.16 (度量空间中点列的极限)**

在度量空间 $(X,d)$ 中, 设点列 $\{\boldsymbol{x}_n\}$. 若对于 $\boldsymbol{l}$ 的任一邻域 $U(\boldsymbol{x})$ 都存在 $N>\mathbb{N}^*$ 使得当 $n>N$ 时 $\boldsymbol{x}_n\subseteq U(\boldsymbol{l})$, 则称 $\{\boldsymbol{x}_n\}$ 收敛于点 $\boldsymbol{l}$. 或称 $\{\boldsymbol{x}_n\}$ 的极限是 $\boldsymbol{l}$. 记作

$$\lim_{n\to\infty}\boldsymbol{x}_n=\boldsymbol{l} \text{ 或 } \boldsymbol{x}_n\to\boldsymbol{l},\ (n\to\infty).$$

♣

集合 $X$ 上除了度量以外, 没有任何其它结构 (包括序结构, 域结构, 线性结构等). 因此极限的概念只需要度量就可以定义.

我们类比定义一般的度量空间上的有界点列、子列等概念.

**定义 3.17 (有界列)**

在度量空间 $(X,d)$ 中, 设点列 $\{\boldsymbol{x}_n\}$. 若对于任一 $\boldsymbol{x}\in X$ 都存在 $M>0$ 使得 $|\boldsymbol{x}_n-\boldsymbol{x}|<M$ $(n=1,2,\cdots)$. 则称点列 $\{\boldsymbol{x}_n\}$ 有界.

♣

**定义 3.18 (子列和极限点)**

在度量空间 $(X,d)$ 中, 设点列 $\{\boldsymbol{x}_n\}$. 若 $k_i\in\mathbb{N}^*$ $(i=1,2,\cdots)$ 满足 $k_1<k_2<\cdots$. 则称点列 $\{\boldsymbol{x}_{k_n}\}$ 为 $\{\boldsymbol{x}_n\}$ 的一个子列. 若 $\boldsymbol{x}_n$ 存在一个子列收敛于 $\boldsymbol{l}$, 则称 $\boldsymbol{l}$ 是 $\boldsymbol{x}_n$ 的一个极限点.

♣

数列极限中的一些结论在度量空间的点列中仍旧成立. 我们把单纯罗列出来, 证明方法完全类似于数列极限.

**命题 3.9 (点列极限的性质)**

设度量空间 $(X,d)$, 若点列 $\boldsymbol{x}_n\to\boldsymbol{l}$, 则

(1) $\boldsymbol{x}_n$ 存在唯一的极限.

(2) $\boldsymbol{x}_n$ 是有界的.

(3) $\boldsymbol{x}_n$ 的任一子列都收敛到 $\boldsymbol{l}$.

(4) $\boldsymbol{x}_n$ 有唯一的极限点.

由于一般的度量空间上没有定义线性运算和乘法运算, 也没有序关系, 因此数列极限中的四则运算法则、保序性、保号性、夹逼定理等在一般的度量空间上无从谈起.

**例 3.24** 设度量空间 $(X, d)$, 令 $X = C[a, b]$, 令 $d = \max_{x\in[0,1]} |f(x) - g(x)|$.

**证明**

**例 3.25** 设度量空间 $(X, d)$, 令 $X = C[a, b]$, 令 $d = \int_0^1 |f(x) - g(x)| \, \mathrm{d}x$.

**证明**

**定理 3.4**

在非空集合 $X$ 上定义两个不同的度量 $d_1$ 和 $d_2$. 设点列 $\{\boldsymbol{x}_n\}$. 若 $d_1 \cong d_2$. 则 $\{\boldsymbol{x}_n\}$ 在两个度量空间 $(X, d_1)$ 和 $(X, d_2)$ 中同敛散.

**证明**

**例 3.26** 在离散度量下的收敛.

**证明**

对于 Euclid 空间 $\mathbb{R}^n$ 中的点列, 我们可以把它们转化为数列极限来研究.

**定理 3.5**

在 Euclid 空间 $\mathbb{R}^n$ 中, 设点列 $\boldsymbol{x}_k = (x_{k1}, x_{k2}, \cdots, x_{kn})$ $(k = 1, 2, \cdots)$ 和点 $\boldsymbol{l} = (l_1, l_2, \cdots, l_n)$. 则

$$\lim_{k\to\infty} \boldsymbol{x}_k = \boldsymbol{l} \iff \lim_{k\to\infty} x_{ki} = l_i, \quad i = 1, 2, \cdots, n.$$

**证明** 先证明 $\boldsymbol{l} = \boldsymbol{0}$ 的情况. XXX

**例 3.27** 在 Euclid 空间 $\mathbb{R}^3$ 中设点列

$$\boldsymbol{x}_n = \left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \frac{n}{n+1}, \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n\right), \quad n = 1, 2, \cdots.$$

求点列 $\{\boldsymbol{x}_n\}$ 的极限.

**解** 由于

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e}, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = \frac{1}{1 + \dfrac{1}{n}} = 1, \quad \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e}^{-1},$$

于是可知 $\lim_{n\to\infty} \boldsymbol{x}_n = (\mathrm{e}, 1, \mathrm{e}^{-1})$. ■

### 3.2.4 度量空间的完备化

**定义 3.19 (Cauchy 列)**

在度量空间 $(X,d)$ 中, 设点列 $\{x_n\}$. 若对于任意 $\varepsilon>0$, 都存在 $N\in\mathbb{N}$, 使得当 $n>N$ 时

$$d(\boldsymbol{x}_m-\boldsymbol{x}_n)<\varepsilon.$$

则称该点列是一个 **Cauchy** 列 (Cauchy sequence) 或**基本列** (fundamental sequence).

一般的度量空间中, Cauchy 列未必收敛. 最简单的例子就是 $\mathbb{Q}$ 中的 Cauchy 列可能收敛到 $\mathbb{Q}$ 外边去. 而 $\mathbb{R}$ 中的 Cauchy 列都收敛.

**定义 3.20 (度量空间的完备化)**

在度量空间 $(X,d)$ 中, 若任一 Cauchy 列都收敛, 则称 $X$ 是**完备的** (complete).

由以上定义可知 $\mathbb{R}$ 是完备的度量空间.

**命题 3.10**

在度量空间 $(X,d)$ 中, 收敛的点列一定是 Cauchy 列.

**命题 3.11**

在度量空间 $(X,d)$ 中, Cauchy 列一定有界.

**命题 3.12**

在度量空间 $(X,d)$ 中, 存在收敛子列的 Cauchy 列一定收敛.

**命题 3.13**

在度量空间 $(X,d)$ 中, 依等价度量同为 Cauchy 列.

## 3.3 点集的拓扑性质

### 3.3.1 拓扑空间

现在我们基于定理3.1, 用公理化的方法把开集的概念进一步推广.

**公理 3.2 (拓扑空间)**

设集合 $X$, 令 $\mathcal{T} \subseteq 2^X$. 若 $\mathcal{T}$ 满足

1° $\varnothing, X \in \mathcal{T}$.

2° 若 $U_\alpha \in \mathcal{T}$ $(\alpha \in I)$, 则 $\bigcup_{\alpha\in A} U_\alpha \in \mathcal{T}$, 其中 $I$ 是一个指标集.

3° 若 $U_1, U_2, \cdots, U_n \in \mathcal{T}$, 则 $\bigcap_{i=1}^n U_i \in \mathcal{T}$.

则称 $\mathcal{T}$ 是 $X$ 上的一个**拓扑** (topology). $X$ 和 $\mathcal{T}$ 组成的一个序对 $(X, \mathcal{T})$ 称为一个**拓扑空间** (topological space). $\mathcal{T}$ 中的元素称为关于拓扑 $\mathcal{T}$ 的**开集** (open set), 或集合 $X$ 上的开集.

注 拓扑其实可以看作一个**开集系** (system of open sets).

注 如果 $\mathcal{T}$ 的构成默认读者知道时, 可以直接说 $X$ 是一个拓扑空间.

注 闭包公理

在上一节中定义了度量空间 $(X, d)$ 中的开集, 令全体开集组成的集合为 $\mathcal{T}$, 依据定理3.1, 它满足以上拓扑公理. 于是就得到了拓扑空间 $(X, \mathcal{T})$, 我们称它为度量空间 $(X, d)$ 上由度量 $d$ 诱导的拓扑空间. 如果没有特别说明, 以后我们把度量空间 $(X, d)$ 看作一个拓扑空间时都是指它诱导的拓扑空间.

下面我们来看一些拓扑空间的例子.

**例 3.28 离散拓扑** 设集合 $X$, 令 $\mathcal{T} = 2^X$. 则 $(X, \mathcal{T})$ 是一个拓扑空间. 我们称 $\mathcal{T}$ 为 $X$ 上的**离散拓扑** (discrete topology).

不难看出离散拓扑空间是离散度量空间诱导的拓扑空间.

如果定义这样一种度量: 规定 $X$ 上任一两点的距离都是零 (虽然反常, 但仍旧满足度量公理), 则得到的度量空间 $X$ 可以诱导出以下拓扑空间.

**例 3.29 平凡拓扑** 设集合 $X$, 则 $\{X, \varnothing\}$ 是 $X$ 上的一个拓扑. 我们称它为 $X$ 上的**平凡拓扑** (trivial topology).

以上两个例子是平凡的, 没有什么实质性的信息, 但它们给出了两个极端.

**定义 3.21 (拓扑的强弱)**

设 $\mathcal{T}_1$ 和 $\mathcal{T}_2$ 是集合 $X$ 上的两个拓扑. 若 $\mathcal{T}_1 \subseteq \mathcal{T}_2$, 则称 $\mathcal{T}_1$ 比 $\mathcal{T}_2$ **粗**, 或称 $\mathcal{T}_2$ 比 $\mathcal{T}_1$ **细**.

可见离散拓扑是 "最细" 的拓扑, 而平凡拓扑是 "最粗" 的拓扑.

在 Euclid 空间 $\mathbb{R}^n$ 诱导的拓扑空间称为 $\mathbb{R}^n$ 上的通常拓扑, 这是我们在数学分析中使用最多的一个拓扑空间.

### 3.3.2 XXX

**定义 3.22 (函数空间中的开球)**

$C[0,1]$ 表示定义在闭区间 $[0,1]$ 上的全体实值连续函数的集合. 设函数 $x(t) \in C[0,1]$, $r > 0$. 则在 $C[0,1]$ 上, 以 $x(t)$ 为球心,$r$ 为半径的开球

$$B_r(x) := \left\{ y \in C[0,1] : |y - x| = \max_{t\in[0,1]} |y(t) - x(t)| < r \right\}.$$

**定义 3.23 (一致收敛拓扑)**

$C[0,1]$ 上的**一致收敛拓扑** (topology of uniform convergence)

$$\mathcal{M} := \{G \subseteq C[0,1] : \forall x \in G, \exists r > 0\, (B_r(x) \subseteq G)\}$$

**定义 3.24 (稠密集、闭集、完美集)**

设度量空间 $(X,d)$, $E \subseteq X$. 把 $E$ 的所有极限点组成的集合记作 $E'$. 我们称 $E'$ 为 $E$ 的**导集** (derived set).

(1) 若 $E' = X$, 则称 $E$ 是 $X$ 上的一个**稠密集** (dense set).

(2) 若 $E' \subseteq E$, 则称 $E$ 是 $X$ 上的一个**闭集** (closed set).

(3) 若 $E' = E$, 则称 $E$ 是 $X$ 上的一个**完美集** (perfect set).

$E \cup E'$ 称为 $E$ 的**闭包** (closure), 记作 $\overline{E}$.

**命题 3.14**

设实数域 $\mathbb{R}$ 的一个非空子集 $E$. 若它有上界. 则 $\sup E \in \overline{E}$.

**证明** 设 $m = \sup E$. 若 $m \in E$, 则 $m \in \overline{E}$. 下设 $m \notin E$. 则对于任一 $h > 0$ 都存在 $x \in E$ 使得

$$m - h < x < m.$$

这表明 $m$ 的任一去心邻域与 $E$ 的交集都非空, 故 $m \in E'$. 于是可知 $m \in \overline{E}$.

**注** 若 $E$ 是一个闭集, 则 $\sup E \in E$.

设度量空间 $(X,d)$. 若 $E \subseteq Y \subseteq X$. 若 $E$ 是 $X$ 上的一个开集. 则对于任意一点 $\boldsymbol{x} \in E$ 都存在一个 $r > 0$ 使得

$$d(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}),\ \boldsymbol{y} \in X \Longrightarrow \boldsymbol{y} \in E.$$

我们已经知道 $Y$ 也是一个度量空间. 因此 $E$ 也是 $Y$ 上的一个开集. 但反过来未必成立. 例如, 开区间 $(a,b)$ 是度量空间 $\mathbb{R}$ 中的一个开集. 但它不是 2 维空间 $\mathbb{R}^2$ 上的开集. 这表明开集 (或闭集) 是对于某个度量空间来讲的. 下面我们就来讨论 $E$ 是 $Y$ 上的一个开集的条件.

**命题 3.15**

设度量空间 $(X,d)$ 的一个子集 $Y$. 则 $E$ 是 $Y$ 上的一个开集当且仅当对于任意 $X$ 中的开集 $G$ 都有 $E = Y \cap G$.

**证明** (i) 证明必要性. 若 $E$ 是 $Y$ 上的一个开集. 则

(ii) 证明充分性. 若对于任意 $X$ 中的开集 $G$ 都有 $E = Y \cap G$.

实数域 $\mathbb{R}$ 中的闭区间套定理可以推广到 $n$ 维 Euclid 空间 $\mathbb{R}^n$ 上.

**定理 3.6 (闭集套定理)**

设 Euclid 空间 $\mathbb{R}^n$ 的个闭集序列 $\{F_i\}$, 其中 $F_i \neq \varnothing\ (i = 1,2,\cdots)$. 若 $F_1 \supseteq F_2 \supseteq F_3 \supseteq \cdots$ 且 $\lim\limits_{i\to\infty} \operatorname{diam} F_i = 0$, 则 $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} F_i$ 只含唯一的一个点.

**证明** XXX

由几何空间中的定比分点公式可以得到凸集的定义.

**定义 3.25 (凸集)**

设 Euclid 空间 $\mathbb{R}^n$ 的一个非空子集 $E$. 若对于任意向量 $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \in \mathbb{R}^n$, $0 < \lambda < 1$, 都有

$$\lambda\boldsymbol{\alpha} + (1-\lambda)\boldsymbol{\beta} \in E,$$

其中 $0<\lambda<1$. 则称 $E$ 是一个**凸集** (convex set).

### 3.3.3 紧致集和列紧集

我们在实数理论中已经学过了有限覆盖定理. 现在我们反过来, 用满足 "有限覆盖" 来定义度量空间的**紧性** (compactness).

**定义 3.26 (紧集)**

设度量空间 $(X,d)$, $E\subseteq X$. 若 $X$ 上的一个开集族 $\{E_\alpha\mid\alpha\in I\}$ 满足 $\bigcup\limits_{\alpha\in I}E_\alpha\supseteq E$, 其中 $I$ 是一个指标集. 则称 $\{E_\alpha\mid\alpha\in I\}$ 是 $E$ 的一个**开覆盖** (open cover). 若存在 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 使得 $E\subseteq\bigcup\limits_{i=1}^{n}E_{\alpha_i}$, 则称 $E$ 是 $X$ 上的一个**紧集** (compact set).

由以上定义立刻可知有限集肯定是紧集.

**定理 3.7**

设度量空间 $X$, $K\subseteq Y\subseteq$. 则 $K$ 是 $X$ 上的一个紧集当且仅当 $K$ 是 $Y$ 上的一个紧集.

**证明**

**定理 3.8**

任一紧集都是闭集.

**证明**

**定理 3.9**

紧集的闭子集仍是紧集.

**证明**

**定义 3.27 (列紧集)**

设度量空间 $(X,d)$, $E\subseteq X$. 若任一无限集 $F\subseteq E$ 都有一个极限点 $\boldsymbol{x}\in E$, 则称 $E$ 是一个**列紧集** (sequentially compact set).

**定理 3.10**

设 Euclid 空间 $\mathbb{R}^n$ 中的一个子集 $E$. 则以下任意两个命题成立都可以得出第三个命题成立.

1° $E$ 是一个有界闭集.

2° $E$ 是一个紧集.

3° $E$ 是一个列紧集.

**证明**

**定理 3.11 (Bolzano-Weierstrass 定理)**

设 Euclid 空间 $\mathbb{R}^n$. 则 $\mathbb{R}^n$ 的任一有界无限子集 $E$ 都有一个极限点 $\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n$.

**证明**

### 3.3.4 连通集

**定义 3.28 (连通集)**

设度量空间 $(X, d)$, $E \subseteq X$. 若 $E = A \cup B$ 且满足 $A \cap \overline{B} \neq \varnothing$ 或 $\overline{A} \cap B \neq \varnothing$, 则称 $E$ 是 $X$ 上的一个**连通集** (connected set).

**注** 若 $A \cap \overline{B} = \varnothing$ 且 $\overline{A} \cap B = \varnothing$, 则称 $A$ 和 $B$ 是**分离的** (separated). 容易看出若 $A$ 和 $B$ 是分离的则 $A \cap B = \varnothing$, 反之则未必成立. 例如在 $\mathbb{R}$ 上, 区间 $[0, 1]$ 和 $(1, 2)$ 的交集是空集, 但它们不是分离的.

**定理 3.12**

**证明**

# 3.4 连续函数与连续映射

## 3.4.1 多元函数的极限

下面开始研究多元函数. 所谓多元函数, 就是 $\mathbb{R}^n$ 的一个子集 $D$ 到 $\mathbb{R}$ 的映射. 它的自变量是空间中的点 $\boldsymbol{x}_n = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$, 可以看作一个 $n$ 维向量. 对比一元函数极限的概念, 可以定义多元函数的极限.

**定义 3.29 (重极限)**

设函数 $f: D \to \mathbb{R}$ $(D \subseteq \mathbb{R}^n)$ 在 $\boldsymbol{x}_0 \in D$ 的一个去心邻域内有定义. 若对于 $l$ 的任一邻域 $N_\varepsilon(l)$, 都存在 $\boldsymbol{x}_0$ 的一个去心邻域 $\check{N}_\delta(\boldsymbol{x}_0)$ 使得 $f\left[\check{N}_\delta(\boldsymbol{x}_0)\right] \subseteq N_\varepsilon(l)$. 则称当 $\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{x}_0$ 时函数 $f$ 在 $\boldsymbol{x}_0$ 处的极限是 $l$, 记作

$$\lim_{\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{x}_0} f(\boldsymbol{x}) = l \quad 或 \quad f(\boldsymbol{x}) \to l \ (\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{x}_0).$$

♣

注 以上定义也可以用 $\varepsilon - \delta$ 语言写成: 若对于任一 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$ 使得当 $0 < |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0| < \delta$ 时都有 $|f(\boldsymbol{x}) - l| < \varepsilon$. 则

$$\lim_{\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{x}_0} f(\boldsymbol{x}) = l.$$

注 以上定义的极限称为 $n$ **重极限** (multiple limit), 简称重极限.

注 和一元函数一样, 讨论 $\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{x}_0$ 时的极限时, 函数 $f$ 不需要在 $\boldsymbol{x}_0$ 处有定义.

下面看一个例子.

**例 3.30** 设二元函数

$$f(x, y) = \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2}, \quad (x, y) \neq (0, 0).$$

求 $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y)$.

**解** $\boxed{\text{解法一}}$ 由于对于任一 $\varepsilon > 0$, 只需取 $\delta = \sqrt{\varepsilon}$, 则当 $(x, y) \in N_\delta((0, 0))$ 时

$$0 \leq f(x, y) = \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2} \leq x^2 + y^2 < \delta^2 = \varepsilon.$$

于是可知 $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y) = 0$.

$\boxed{\text{解法二}}$ 令 $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ $(0 \leq \theta < 2\pi)$. 则 $(x, y) \to (0, 0)$ 等价于 $r \to 0$. 由于

$$f(x, y) = r^2 \sin^2\theta \cos^2\theta = \frac{r^2}{4}\sin^2 2\theta.$$

且 $\sin^2 2\theta \in [-1, 1]$, 因此

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y) = \lim_{r \to 0} \frac{r^2}{4}\sin^2 2\theta = 0.$$

■

在讨论一元函数 $f$ 的自变量 $x \to x_0$ 时, 自变量只能从 $x_0$ 的两侧趋近 $x_0$, 因此有左极限和有极限的概念, 且极限存在当且仅当左右极限都存在且相等. 但对于多元函数 $f$, 当自变量 $\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{x}_0$ 时, 自变量可以从多个方向按不同路径趋近 $\boldsymbol{x}_0$. 因此情况复杂得多. 但一元函数中的 Heine 定理依旧是成立的. 所以我们还是可以把多元函数的极限转化为点列极限来研究.

**定理 3.13 (多元函数的 Heine 定理)**

设函数 $f: D \to \mathbb{R}$ $(D \subseteq \mathbb{R}^n)$ 在 $\boldsymbol{x}_0$ 的一个邻域内有定义. 则 $\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}_0} f(\boldsymbol{x}) = l$ 当且仅当对于任一收敛于 $\boldsymbol{x}_0$ 的点列 $\{\boldsymbol{x}_i\} \subseteq D$ $(\boldsymbol{x}_i \neq \boldsymbol{x}_0,\ i = 1, 2, \cdots)$ 都有

$$\lim_{i \to \infty} f(\boldsymbol{x}_i) = l.$$

♡

**例 3.31** 设函数
$$f(\boldsymbol{x}) = f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}, \quad \boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}.$$
则 $f$ 在 $\boldsymbol{0}$ 处的极限不存在.

**证明** 设两个点列
$$\boldsymbol{a}_i = \left(\frac{1}{i}, 0\right), \quad \boldsymbol{b}_i = \left(\frac{1}{i}, \frac{1}{i}\right), \quad i = 1, 2, \cdots.$$
容易知道 $\lim_{i\to\infty} \boldsymbol{a}_i = \lim_{i\to\infty} \boldsymbol{b}_i = \boldsymbol{0}$, 但 $f(\boldsymbol{a}_i) = 0$, $f(\boldsymbol{b}_i) = 1/2$. 由 Heine 定理可知函数 $f$ 在 $\boldsymbol{0}$ 处的极限不存在.

**例 3.32** 设函数
$$f(\boldsymbol{x}) = f(x, y) = \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}.$$
则 $f$ 在 $\boldsymbol{0}$ 处的极限不存在.

**证明** 设两个点列
$$\boldsymbol{a}_i = \left(\frac{1}{i}, 0\right), \quad \boldsymbol{b}_i = \left(\frac{1}{i}, \frac{1}{i^2}\right), \quad i = 1, 2, \cdots.$$
容易知道 $\lim_{i\to\infty} \boldsymbol{a}_i = \lim_{i\to\infty} \boldsymbol{b}_i = \boldsymbol{0}$, 但 $f(\boldsymbol{a}_i) = 0$, $f(\boldsymbol{b}_i) = 1/2$. 由 Heine 定理可知函数 $f$ 在 $\boldsymbol{0}$ 处的极限不存在.

一元函数极限的相关结论几乎都可以推广到多元函数.

**定理 3.14 (多元函数的极限运算法则)**

设函数 $f, g : D \to \mathbb{R}$ $(D \subseteq \mathbb{R}^n)$ 在点 $\boldsymbol{x}_0$ 附近有定义. 若 $\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}_0} f(\boldsymbol{x})$ 和 $\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}_0} g(\boldsymbol{x})$ 都存在, 则

(1) $\lim\limits_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}_0} (f \pm g)(\boldsymbol{x}) = \lim\limits_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}_0} f(\boldsymbol{x}) \pm \lim\limits_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}_0} g(\boldsymbol{x})$.

(2) $\lim\limits_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}_0} fg(\boldsymbol{x}) = \lim\limits_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}_0} g(\boldsymbol{x}) \lim\limits_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}_0} f(\boldsymbol{x})$.

(3) $\lim\limits_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}_0} \left(\dfrac{f}{g}\right)(\boldsymbol{x}) = \dfrac{\lim\limits_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}_0} f(\boldsymbol{x})}{\lim\limits_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}_0} f(\boldsymbol{x})}, \quad \lim\limits_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}_0} f(\boldsymbol{x}) \neq 0$.

♡

**定理 3.15 (多元函数的 Cauchy 收敛准则)**

设函数 $f : D \to \mathbb{R}$ $(D \subseteq \mathbb{R}^n)$ 在 $\check{N}_r(\boldsymbol{x}_0)$ 有定义. 则 $f$ 在 $\boldsymbol{x}_0$ 处有极限的充要条件是对于任一 $\varepsilon > 0$ 都存在 $\delta > 0$ 使得当 $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \in \check{N}_\delta(\boldsymbol{x}_0)$ 时有 $|f(\boldsymbol{x}_1) - f(\boldsymbol{x}_2)| < \varepsilon$.

♡

**定理 3.16 (多元复合函数的极限)**

设一元函数 $f$ 和 $n$ 元函数 $g$. 若
$$\lim_{x\to x_0} f(x) = l, \quad \lim_{\boldsymbol{t}\to\boldsymbol{t}_0} g(\boldsymbol{t}) = x_0.$$
且存在 $r$ 使得 $g\left[\check{N}_r(\boldsymbol{t}_0)\right] \subseteq \check{N}(x_0)$. 则 $\lim_{\boldsymbol{t}\to\boldsymbol{t}_0} f[g(\boldsymbol{t})] = l$.

♡

其余的结论包括极限的唯一性、局部有界性、局部保号性等结论不再一一赘述.

和一元函数一样, 多元函数还有其他极限过程. 设函数 $f : D \to \mathbb{R}$ $(D \subseteq \mathbb{R}^n)$ 在 $\infty$ 的一个邻域上有定义. 若对于 $l$ 的任一邻域 $N_\varepsilon(l)$, 都存在一个邻域 $N_\delta(\infty)$ 使得 $f[N_\delta(\infty)] \subseteq N_\varepsilon(l)$. 则称当 $\boldsymbol{x} \to \infty$ 时函数 $f$ 的极限是 $l$, 记作
$$\lim_{\boldsymbol{x}\to\infty} f(\boldsymbol{x}) = l \quad 或 \quad f(\boldsymbol{x}) \to l \ (\boldsymbol{x} \to \infty).$$
注意 $+\infty$ 或 $-\infty$ 是不存在的. 由于多元函数有多个自变量, 每个自变量都可以有自己的极限过程, 因此不可能枚举

每一种情况. 另外多元函数也可以定义无穷大, 方法完全类似于一元函数.

所有关于多元函数极限的结论对于不同的极限过程和无穷大也都适用. 不再逐个叙述和证明.

### 3.4.2 累次极限

我们可以从另一个角度研究多元函数的极限.

**定义 3.30 (多元函数的累次极限)**

设二元函数 $f$ 在 $\boldsymbol{x}_0=(x_0,y_0)$ 处的一个去心邻域内有定义. 对任一给定的 $y$, 若 $\lim_{x\to x_0}$ 存在, 令

$$\varphi(y)=\lim_{x\to x_0}f(x,y).$$

这个一个定义在 $y_0$ 附近的函数. 若 $\lim_{y\to y_0}\varphi(y)$ 存在, 令

$$\lim_{y\to y_0}\lim_{x\to x_0}f(x,y)=\lim_{y\to y_0}\varphi(y).$$

我们称以上极限为函数 $f$ 在点 $(x_0,y_0)$ 的一个**累次极限**. 类似地, 可以定义 $\lim_{x\to x_0}\lim_{y\to y_0}f(x,y)$. 二元以上的函数也可以类似定义累次极限.

研究累次极限的重点自然是关注两个极限的换序问题.

**引理 3.1**

设二元函数 $f(x,y)$ 在 $\boldsymbol{x}_0=(x_0,y_0)$ 的一个邻域 $N_r(\boldsymbol{x}_0)$ 内有定义. 若 $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)}f(x,y)=l\in\mathbb{R}$. 则

(1) 当 $y\neq y_0$ 时, 若 $\lim_{x\to x_0}f(x,y)$ 存在, 则 $\lim_{y\to y_0}\lim_{x\to x_0}f(x,y)=l$.

(2) 当 $x\neq x_0$ 时, 若 $\lim_{y\to y_0}f(x,y)$ 存在, 则 $\lim_{x\to x_0}\lim_{y\to y_0}f(x,y)=l$.

**证明** 只证明 (1). 任取数列 $\{x_n\}\subseteq N_r(x_0)$, $\{y_n\}\subseteq N_r(y_0)$, 它们满足 $x_n\to x_0$, $y_n\to y_0$. 由于 $\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}_0}f(x,y)=l$, 由 Heine 定理可知 $f(x_n,y_n)\to l$. 由于 $\lim_{x\to x_0}f(x,y)$ 存在, 可令

$$b_i=\lim_{x\to x_0}f(x,y_i),\quad i=1,2,\cdots.$$

由于 $x_n\to x_0$, 由 Heine 定理可知

$$\lim_{n\to\infty}f(x_n,y_i)=b_i.$$

令 $i\to\infty$, 则

$$\lim_{i\to\infty}b_i=\lim_{i\to\infty}\lim_{n\to\infty}f(x_n,y_i)=l.$$

于是再由 Heine 定理可知 $\lim_{y\to y_0}\lim_{x\to x_0}f(x,y)=l$. ■

由以上引理立刻可知以下结论.

**定理 3.17 (累次极限可交换的充分条件)**

设二元函数 $f(x,y)$ 在 $\boldsymbol{x}_0=(x_0,y_0)$ 的一个邻域 $N_r(\boldsymbol{x}_0)$ 内有定义. 若 $f$ 在 $(x_0,y_0)$ 处的两个累次极限和重极限都存在, 则

$$\lim_{y\to y_0}\lim_{x\to x_0}f(x,y)=\lim_{x\to x_0}\lim_{y\to y_0}f(x,y)=\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)}f(x,y).$$

事实上我们还得到一个重极限不存在的充分条.

**推论 3.1**

设二元函数 $f(x,y)$ 在 $\boldsymbol{x}_0=(x_0,y_0)$ 的一个邻域 $N_r(\boldsymbol{x}_0)$ 内有定义. 若当两个累次极限都存在且

$$\lim_{y\to y_0}\lim_{x\to x_0}f(x,y)\neq\lim_{x\to x_0}\lim_{y\to y_0}f(x,y).$$

则重极限一定不存在.

一般情况下, 累次极限和重极限互不相干. 下面列举了二元函数的累次极限和重极限的 6 种可能性.

| $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\y\to y_0}} f(x,y)=A$ | $\lim\limits_{y\to y_0}\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y)=B_1$<br>$\lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y)=B_2$ | | 极限点<br>$(x\to 0, y\to 0)$ |
|---|---|---|---|
| 存在 | 都存在 | $A=B_1=B_2$ | $xy$ |
| | 都不存在 | | $(x+y)\sin\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{y}$ |
| | 存在其中一个 | $A=B_1$ 或 $A=B_2$ | $\begin{cases} x\sin\dfrac{1}{y}, & y\neq 0\\ 0, & y=0\end{cases}$ |
| 不存在 | 都存在 | $B_1=B_2$ | $\dfrac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}$ |
| | 都存在 | $B_1\neq B_2$ | $\dfrac{x-y}{x+y}$ |
| | 存在其中一个 | | $\dfrac{x}{y}$ |

下面逐个看一下表中的例子.

**例 3.33** 设函数 $f(x,y)=xy$, 则

$$\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0} f(x,y)=\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} f(x,y)=\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0.$$

**例 3.34** 设函数

$$f(x,y)=(x+y)\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y}.$$

则 $f$ 在 $\mathbf{0}$ 处的两个累次极限都不存在, 但 $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0$.

**证明** (i) 设两个数列

$$a_n=\frac{1}{2n\pi},\quad b_n=\frac{1}{2n\pi+\pi/2},\quad n=1,2,\cdots.$$

则 $a_n\to 0$, $b_n\to 0$. 然而

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n,y)=\left(\frac{1}{2n\pi}+y\right)\sin(2n\pi)\sin\frac{1}{y}=0.$$

$$\lim_{n\to\infty} f(b_n,y)=\left(\frac{1}{2n\pi+\pi/2}+y\right)\sin\left(2n\pi+\frac{\pi}{2}\right)\sin\frac{1}{y}=y\sin\frac{1}{y}.$$

由 Heine 定理可知当 $y\neq 1/(k\pi)$ 时 $\lim_{x\to 0} f(x,y)$ 不存在. 同理可知 $\lim_{y\to 0} f(x,y)$ 不存在. 因此两个累次极限都不存在.

(ii) 由于

$$0\le\left|(x+y)\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y}\right|\le|x+y|\le|x|+|y|.$$

因此 $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0$. ■

**例 3.35** 设函数

$$f(x,y)=\begin{cases} x\sin\dfrac{1}{y}, & y\neq 0 \\ 0, & y=0 \end{cases}.$$

则 $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0} f(x,y)=0$, 但 $\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} f(x,y)$ 不存在.

**例 3.36** 设函数

$$f(x,y)=\frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}.$$

则 $\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} f(x,y)=\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0} f(x,y)=0$, 但 $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ 不存在.

**证明** 累次极限显然都为零. 下面证明 $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ 不存在. 设两个点列

$$\boldsymbol{a}_n=\left(\frac{1}{n},0\right),\quad \boldsymbol{b}_n=\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right),\quad n=1,2,\cdots.$$

则 $\boldsymbol{a}_n\to\mathbf{0}$, $\boldsymbol{b}_n\to\mathbf{0}$. 然而 $\lim_{n\to\infty} f(\boldsymbol{a}_n)=0$, $\lim_{n\to\infty} f(\boldsymbol{b}_n)=1$. 由 Heine 定理可知 $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ 不存在. ■

**例 3.37** 设函数

$$f(x,y)=\frac{x-y}{x+y}.$$

则 $\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} f(x,y)=1$, $\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0} f(x,y)=-1$ 且 $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ 不存在.

**例 3.38** 设函数

$$f(x,y)=\frac{x}{y}$$

则 $\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0} f(x,y)=0$ 且 $\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} f(x,y)$ 和 $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ 都不存在.

### 3.4.3 多元连续函数

首先, 我们可以毫不费力地把一元函数的连续性推广到多元函数.

**定义 3.31 (多元函数的连续性)**

设函数 $f: D \to \mathbb{R}$ $(D \subseteq \mathbb{R}^n)$ 在 $\boldsymbol{x}_0$ 处有定义. 若对于 $f(\boldsymbol{x}_0)$ 的任一邻域 $N_\varepsilon[f(\boldsymbol{x}_0)]$, 都存在 $\boldsymbol{x}_0$ 的一个邻域 $N_\delta(\boldsymbol{x}_0)$ 使得 $f[D \cap N_\delta(\boldsymbol{x}_0)] \subseteq N_\varepsilon[f(\boldsymbol{x}_0)]$. 则称 $f$ 在 $\boldsymbol{x}_0$ 处**连续** (continuous), $\boldsymbol{x}_0$ 称为 $f$ 的一个**连续点** (continuous point).

♣

注 以上定义表明 $f$ 在 $\boldsymbol{x}_0$ 处连续当且仅当

$$\lim_{\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{x}_0} f(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}_0).$$

因此 $f$ 在 $\boldsymbol{x}_0$ 处连续意味着它在这一点有定义.

注 按以上定义, 若 $D$ 是一个有限点集, 则 $f$ 在 $D$ 上连续.

下面先看两个例子.

**例 3.39** 常值函数 $f$ 在任一集合上都连续.

**例 3.40** 设定义在 $\mathbb{R}^n$ 上的投影函数

$$\mathcal{P}_i(x_1, x_2, \cdots, x_n) = x_i, \quad i = 1, 2, \cdots.$$

则 $\mathcal{P}_i$ 在 $\mathbb{R}^n$ 上连续.

**证明** 任取 $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, \cdots, a_n) \in \mathbb{R}^n$. 则

$$|f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{a})| = |x_i - a_i| \le |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}|.$$

于是可知 $\mathcal{P}_i$ 在 $\mathbb{R}^n$ 上连续. ■

与一元函数的连续性相比, 多元函数没有左右连续. 但大部分结论都可以推广到多元函数, 包括: 四则代数运算的连续性、复合函数的连续性. 有了这两条就可以直接得到一大批连续多元函数.

类似于累次极限的情况, 如果一个多元函数对每个变量都连续, 并不能断言它是一个连续函数. 下面来看一个例子.

**例 3.41** 设二元函数

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2 + y^2}, & (x, y) \ne (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}.$$

则 $f(x, y)$ 在 $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0, 0)\}$ 上都是连续的.

**证明** 显然当 $(x, y) \ne (0, 0)$ 时, 函数 $f$ 是连续的. 当由例3.31可知 $f(x, y)$ 在 $\mathbf{0}$ 的极限不存在, 因此 $f$ 在 $\mathbf{0}$ 处不连续. 于是可知 $f(x, y)$ 在 $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0, 0)\}$ 上都是连续的.

注 由于

$$\lim_{x \to 0} f(x, y) = 0, \quad \lim_{x \to 0} f(x, y) = 0.$$

因此对于每个单变量来说, 函数都是连续的. 从这个例子可以看出每个单变量都连续不足以推出多元函数连续.

一致连续的概念也可以类比一元函数.

**定义 3.32 (多元函数的一致连续)**

设函数 $f: D \to \mathbb{R}$ $(D \subseteq \mathbb{R}^n)$. 若对于任一 $\varepsilon > 0$ 都存在 $\delta > 0$ 使得对于任意 $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \in D$, 只要 $|\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2| < \delta$, 就有 $|f(\boldsymbol{x}_1) - f(\boldsymbol{x}_2)| < \varepsilon$. 则称 $f$ 在 $D$ 上**一致连续** (uniformly continuous).

如果要验证一个函数不一致连续, 我们仍旧可以用 Heine 定理把它转化为点列来证明. 我们只需找到一对点列 $\{\boldsymbol{a}_n\}$ 和 $\{\boldsymbol{b}_n\}$ 它们满足 $\boldsymbol{a}_n - \boldsymbol{b}_n \to \boldsymbol{0}$ 但不满足 $f(\boldsymbol{a}_n) - f(\boldsymbol{b}_n) \to 0$.

**例 3.42** 设二元函数

$$f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}, \quad x^2 + y^2 > 0.$$

则 $f$ 在定义域 $\mathbb{R}^2 \backslash \{\boldsymbol{0}\}$ 上不一致连续.

**证明** 设点列

$$\boldsymbol{a}_n = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right), \quad \boldsymbol{b}_n = \left(\frac{1}{n}, 0\right), \quad n = 1, 2, \cdots.$$

则

$$\boldsymbol{a}_n - \boldsymbol{b}_n = \left(0, \frac{1}{n}\right) \to \boldsymbol{0}. \quad f(\boldsymbol{a}_n) - f(\boldsymbol{b}_n) = \frac{1}{2}.$$

于是可知 $f$ 在定义域 $\mathbb{R}^2 \backslash \{\boldsymbol{0}\}$ 上不一致连续. ■

**命题 3.16**

设二元函数 $f(x, y)$. 若 $f$ 在 $D$ 上对于 $x$ 连续, 且在 $D$ 上对于 $y$ 一致连续, 则 $f$ 在 $D$ 上连续.

**证明**

由以上命题可以得到以下推论.

**推论 3.2**

设二元函数 $f(x, y)$. 若 $f$ 在 $D$ 上对于 $x$ 连续, 且在 $D$ 上对于 $y$Lipschitz 连续, 则 $f$ 在 $D$ 上连续.

**命题 3.17**

设二元函数 $f(x, y)$. 若 $f$ 在 $D$ 上对于 $x$ 和 $y$ 都连续, 且对于其中一个变量单调, 则 $f$ 在 $D$ 上连续.

**证明**

### 3.4.4 紧致集和连通集上的连续函数

我们已经知道有限闭区间上的连续函数有一些很好的性质. 我们希望把这些结论推广到多元函数中. 在上一章我们已经讲过, 有限闭区间本质上是一个连通的有界闭集. 我们还知道 $\mathbb{R}^n$ 中的有界闭集等价于紧致集. 因此我们可以考虑把有限闭区间上的结论推广到 $\mathbb{R}^n$ 中的紧致集和连通集上.

**定理 3.18 (一致连续定理)**

设函数 $Df :\to \mathbb{R}$ $(D \subseteq \mathbb{R}^n)$ 在 $D$ 上连续. 若 $D$ 是一个紧致集, 则 $f$ 在 $D$ 上一致连续.

**证明**

**定理 3.19**

设函数 $f: D \to \mathbb{R}$ $(D \subseteq \mathbb{R}^n)$ 在 $D$ 上连续. 若 $D$ 是一个紧致集, 则 $f(D)$ 也是一个紧致集.

**证明**

**定理 3.20 (极值定理)**

设函数 $f: D \to \mathbb{R}$ $(D \subseteq \mathbb{R}^n)$ 在 $D$ 上连续. 若 $D$ 是一个紧致集, 则 $f$ 在 $D$ 上可以取到最大值和最小值.

**证明**

**定理 3.21**

设函数 $f: D \to \mathbb{R}$ $(D \subseteq \mathbb{R}^n)$ 在 $D$ 上连续. 若 $D$ 是一个连通集, 则 $f(D)$ 也是一个连通集.

**证明**

**定理 3.22 (介值定理)**

设函数 $f: D \to \mathbb{R}$ $(D \subseteq \mathbb{R}^n)$ 在 $D$ 上连续. 若 $D$ 是一个连通集, 则对于 $f(\boldsymbol{a})$ 和 $f(\boldsymbol{b})$ 之间任一实数 $\gamma$ 都存在 $\boldsymbol{c} \in D$ 使得 $f(\boldsymbol{c}) = \gamma$.

**证明**

**例 3.43** 设函数 $f$ 在 $\mathbb{R}^n$ 上连续. 若 $\lim_{\boldsymbol{x}\to\infty} f(\boldsymbol{x})$ 存在且有限, 则 $f$ 在 $\mathbb{R}^n$ 上一致连续.

**证明**

### 3.4.5 映射的连续性

到目前为止我们讨论的都是实值函数, 即陪域为 $\mathbb{R}$ 的映射. 现在我们考虑把陪域也推广到有限维的 Euclid 空间.

**定义 3.33 (向量值函数)**

设映射

$$f: D \to \mathbb{R}^n$$
$$\boldsymbol{x} \mapsto \boldsymbol{y}.$$

其中 $D \in \mathbb{R}^n$. 我们称 $f$ 为**向量值函数** ((vector-valued function). 令 $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$, $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, \cdots, y_m)$. 则可以把映射 $f$ 看作 $m$ 个 $n$ 元函数:

$$\begin{cases} y_1 = f_1(x_1, x_2, \cdots, x_n) \\ y_2 = f_2(x_1, x_2, \cdots, x_n) \\ \cdots \\ y_m = f_m(x_1, x_2, \cdots, x_n) \end{cases}.$$

我们称 $f_i$ $(i = 1, 2, \cdots, m)$ 为 $f$ 的第 $i$ 个分量函数, 记作 $f = (f_1, f_2, \cdots, f_m)$.

由于 $\mathbb{R}^n$ 和 $\mathbb{R}^m$ 都有距离的定义, 因此我们可以毫不费力地把多元实值函数的相关概念和结论推广到向量值函数中.

**定义 3.34 (向量值函数的极限)**

设映射 $f : D \to \mathbb{R}^m$ $(D \in \mathbb{R}^n)$, $\boldsymbol{x}_0 \in D'$. 若对于 $\boldsymbol{p} \in \mathbb{R}^m$ 的任一邻域 $N_\varepsilon(\boldsymbol{p})$, 都存在 $\boldsymbol{x}_0$ 的一个去心邻域 $\check{N}_\delta(\boldsymbol{x}_0)$ 使得 $f\left[D \cap \check{N}_\delta(\boldsymbol{x}_0)\right] \subseteq N_\varepsilon(\boldsymbol{l})$. 则称 $f$ 在 $\boldsymbol{x}_0$ 处的极限是 $l$, 记作

$$\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}_0} f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{l} \quad \text{或} \quad f(\boldsymbol{x}) \to \boldsymbol{l}\ (\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{x}_0).$$

我们已经证明 $\mathbb{R}^n$ 中的点列收敛当且仅当它的每个分量分别收敛. 类似地, 陪域为 $\mathbb{R}^m$ 的映射的极限也可以转化为每个分量函数的极限.

**定理 3.23**

设向量值函数 $f : D \to \mathbb{R}^m$ $(D \in \mathbb{R}^n)$, $\boldsymbol{a} \in D'$, $\boldsymbol{l} = (l_1, l_2, \cdots, l_m) \in \mathbb{R}^m$, $f = (f_1, f_2, \cdots, f_m)$. 则 $\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} = \boldsymbol{l}$ 当且仅当

$$\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} f_i(\boldsymbol{x}) = l_i, \quad i = 1, 2, \cdots, m.$$

容易验证多元函数中关于极限的一些性质仍然成立.

**命题 3.18**

设向量值函数 $f, g \in D \to \mathbb{R}^m$ $(D \in \mathbb{R}^n)$. 若 $\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}_0} f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{a}$, $\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}_0} g(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{b}$, 则

(1) $\lim\limits_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} [\lambda f(\boldsymbol{x})] = \lambda\boldsymbol{a}$.

(2) $\lim\limits_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} [f(\boldsymbol{x}) + g(\boldsymbol{x})] = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$.

现在我们可以把连续函数的概念推广到向量值函数.

**定义 3.35**

设向量值函数 $f : D \to \mathbb{R}^m$ $(D \subseteq \mathbb{R}^n)$ 在 $\boldsymbol{x}_0$ 处有定义. 若对于 $f(\boldsymbol{x}_0)$ 的任一邻域 $N_\varepsilon[f(\boldsymbol{x}_0)]$, 都存在 $\boldsymbol{x}_0$ 的一个邻域 $N_\delta(\boldsymbol{x}_0)$ 使得 $f[D \cap N_\delta(\boldsymbol{x}_0)] \subseteq N_\varepsilon[f(\boldsymbol{x}_0)]$. 则称 $f$ 在 $\boldsymbol{x}_0$ 处**连续** (continuous)

由于向量值函数收敛当且仅当所有分量函数分别收敛, 因此向量组函数的连续也可以转化为分量函数的连续.

**定理 3.24**

设向量值函数 $\boldsymbol{f} : D \to \mathbb{R}^m$ $(D \in \mathbb{R}^n)$ 在 $\boldsymbol{a}$ 处有定义. 若 $\boldsymbol{f} = (f_1, f_2, \cdots, f_m)$, $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, \cdots, a_m)$, 则 $\boldsymbol{f}$ 在 $\boldsymbol{a}$ 处连续当且仅当 $f_i$ 在 $\boldsymbol{a}$ 处连续.

下面我们来看一个 “最简单的” 向量值函数.

**例 3.44 线性映射** 设向量值函数

$$\begin{aligned} \mathcal{A} : \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R}^m \\ \boldsymbol{x} &\mapsto \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}, \end{aligned}$$

其中

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

则 $\mathcal{A}$ 在 $\mathbb{R}^n$ 上连续.

**证明** 设 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$, 则 $\mathcal{A}$ 的分量函数为

$$\begin{cases}\mathcal{A}_1(x_1,x_2,\cdots,x_n)=a_{11}x_1+\cdots+a_{1n}x_n\\ \cdots\\ \mathcal{A}_m(x_1,x_2,\cdots,x_n)=a_{m1}x_1+\cdots+a_{mn}x_n\end{cases}.$$

因此每个分量函数都是连续的, 于是可知 $\mathcal{A}$ 在 $\mathbb{R}^n$ 上连续.

**注** 以上向量值函数就是线性代数中研究的线性映射. 它是最简单的向量值函数.

我们还可以类似地给出向量值函数一致连续的定义.

**定义 3.36 (向量值函数的一致连续)**

设函数 $\boldsymbol{f}:D\to\mathbb{R}^m$ $(D\subseteq\mathbb{R}^n)$. 若对于任一 $\varepsilon>0$ 都存在 $\delta>0$ 使得对于任意 $\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2\in D$, 只要 $|\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_2|<\delta$, 就有 $|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_1)-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_2)|<\varepsilon$. 则称 $\boldsymbol{f}$ 在 $D$ 上一致连续. ♣

研究向量值函数的一致连续也可以转化为分量函数的一致连续.

**定理 3.25**

设函数 $\boldsymbol{f}:D\to\mathbb{R}^m$ $(D\subseteq\mathbb{R}^n)$. 则 $\boldsymbol{f}=(f_1,f_2,\cdots,f_n)$ 在 $D$ 上一致连续当且仅当 $f_i$ $(i=1,2,\cdots,n)$ 在 $D$ 上一致连续. ♡

多元函数在紧致集和连通集的相关结论可以完全类似地推广到向量值函数中.

之前我们都是用距离的概念来刻画连续. 现在我们将从开集的角度去刻画连续.

**定理 3.26 (向量值函数连续的充要条件)**

设映射 $f:D\to\mathbb{R}^m$, 其中 $D$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上的一个开集. 则 $f$ 在 $D$ 上连续当且仅当对于任一开集 $E\in\mathbb{R}^m$, 都满足 $f^{-1}(E)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的一个开集, 其中 $f^{-1}(E)$ 表示 $E$ 在 $f$ 下的原像集. ♡

**证明** (i) 证明必要性. 设 $f$ 在 $D$ 上连续. 若 $f^{-1}(E)=\varnothing$, 则 $f^{-1}(E)$ 是开集. 下设 $f^{-1}(E)\neq\varnothing$. 任取 $\boldsymbol{x}_0\in f^{-1}(E)$, 则 $f(\boldsymbol{x}_0)\in E$. 由于 $E$ 是 $\mathbb{R}^m$ 中的一个开集, 因此存在一个邻域 $N_\varepsilon[f(\boldsymbol{x}_0)]\subseteq E$. 由于 $f$ 在 $\boldsymbol{x}_0$ 处连续, 且 $D$ 是一个开集, 故存在邻域 $N_\delta(\boldsymbol{x}_0)\subseteq D$ 使得 $f[N_\delta(\boldsymbol{x}_0)]\subseteq N_\varepsilon[f(\boldsymbol{x}_0)]\subseteq E$. 因此 $N_\delta(\boldsymbol{x}_0)\subseteq f^{-1}(E)$. 这表明 $f^{-1}(E)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的一个开集.

(ii) 证明充分性. 任取 $\boldsymbol{x}_0\in D$, 则 $f(\boldsymbol{x}_0)\in\mathbb{R}^m$, 则它的一个邻域 $E=N_\varepsilon[f(\boldsymbol{x}_0)]$ 是 $\mathbb{R}^m$ 中的一个开集. 因此 $f^{-1}(E)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的一个开集. 由于 $\boldsymbol{x}_0\in f^{-1}(E)$, 故存在 $N_\delta(\boldsymbol{x}_0)\subseteq f^{-1}(E)$, 即 $f[N_\delta(\boldsymbol{x}_0)]\subseteq E$. 这表明 $f$ 在 $\boldsymbol{x}_0$ 处连续, 于是可知 $f$ 在 $D$ 上连续. ■

以上定理给出了映射在一个开集上连续的充要条件. 我们发现这个充要条件没有用极限来描述连续, 即没有用 “距离” 来刻画连续性. 于是我们可以把连续的概念推广到更一般的拓扑空间中.

**定义 3.37 (拓扑空间中的连续映射)**

设映射 $f:X\to Y$, 其中 $X$ 和 $Y$ 都是拓扑空间. 则 $f$ 在 $X$ 上连续当且仅当对于任一开集 $E\in Y$, 都满足 $f^{-1}(E)$ 是 $X$ 中的一个开集, 其中 $f^{-1}(E)$ 表示 $E$ 在 $f$ 下的原像集. ♣

下面我们来举几个例子.

**例 3.45**

**例 3.46**

# 第 4 章 多元函数微分学

**内容提要**

- ❏ XXX

## 4.1 多元函数的导数和微分

### 4.1.1 方向导数和偏导数

**定义 4.1 (方向导数)**

设函数 $f: D \to \mathbb{R}$, 其中 $D$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上的一个开集. 给定一个方向向量 $\boldsymbol{u}$ 和一点 $\boldsymbol{x}_0$. 若存在 $l \in \mathbb{R}$ 使得

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(\boldsymbol{x}_0 + t\boldsymbol{u}) - f(\boldsymbol{x}_0)}{t} = l.$$

则称 $l$ 为 $f$ 在点 $\boldsymbol{x}_0$ 沿着 $\boldsymbol{u}$ 的**方向导数** (directional derivative), 记作

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{u}}(\boldsymbol{x}_0) := \lim_{t \to 0} \frac{f(\boldsymbol{x}_0 + t\boldsymbol{u}) - f(\boldsymbol{x}_0)}{t}.$$

♣

**注** 方向导数 $\boldsymbol{u}$ 的长度是 1.

**注** 定义中要求函数 $f$ 的定义域是一个开集, 这样做是为了使得 $\boldsymbol{x}_0$ 加上一个很小的增量 $\boldsymbol{h}$ 后 $\boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{h}$ 仍在定义域中.

若 $f$ 在 $\boldsymbol{x}_0$ 处沿方向 $\boldsymbol{u}$ 的方向导数为 $l$, 则 $f$ 在 $\boldsymbol{x}_0$ 处沿方向 $-\boldsymbol{u}$ 的方向导数为

$$\lim_{t \to 0} \frac{f[\boldsymbol{x}_0 + t(-\boldsymbol{u})] - f(\boldsymbol{x}_0)}{t} = -\lim_{t \to 0} \frac{f(\boldsymbol{x}_0 + (-t)\boldsymbol{u}) - f(\boldsymbol{x}_0)}{-t} = -\lim_{t \to 0} \frac{f(\boldsymbol{x}_0 + t\boldsymbol{u}) - f(\boldsymbol{x}_0)}{t} = -l$$

这表明 $f$ 在 $\boldsymbol{x}_0$ 处沿着 $\boldsymbol{u}$ 和 $-\boldsymbol{u}$ 的方向导数绝对值相等, 只差一个符号.

令一元函数 $\varphi(t) = f(\boldsymbol{x}_0 + t\boldsymbol{u})$, 则 $\varphi$ 在 $|t|$ 充分小时有定义, 且

$$\varphi'(0) = \lim_{t \to 0} \frac{\varphi(t) - \varphi(0)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{f(\boldsymbol{x}_0 + t\boldsymbol{u}) - f(\boldsymbol{x}_0)}{t} = \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{u}}(\boldsymbol{x}_0).$$

我们可以利用这个一元函数来计算多元函数的方向导数. 下面我们来看几个计算方向导数的例子.

**例 4.1** 设二元函数

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{2xy}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 1, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}.$$

讨论 $f(x, y)$ 在 $\boldsymbol{x}_0 = \boldsymbol{0}$ 的方向导数.

**解** 任一方向向量都可以表示为 $\boldsymbol{u} = (\cos\theta, \sin\theta)$, 其中 $\theta \in [0, 2\pi)$. 令 $\varphi(t) = f(\boldsymbol{x}_0 + t\boldsymbol{u})$. 当 $t = 0$ 时, $\varphi(t) = 1$. 当 $t \neq 0$ 时

$$\varphi(t) = f(\boldsymbol{x}_0 + t\boldsymbol{u}) = f(t\cos\theta, t\sin\theta) = \frac{2t^2 \cos\theta \sin\theta}{t^2 \cos\theta + t^2 \sin\theta} = \sin 2\theta.$$

若要 $\varphi(t)$ 在 0 处可导, 则需要 $\varphi(t)$ 在 0 处连续, 因此

$$1 = \varphi(0) = \lim_{t \to 0} \varphi(t) = \sin 2\theta.$$

故 $\theta = \pi/4$ 或 $5\pi/4$. 此时 $\varphi(t) \equiv 1$. 故 $\varphi'(0) = 0$. 于是可知 $f$ 在 $\boldsymbol{0}$ 处只有在 $\left(\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2\right)$, $\left(-\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2\right)$ 两个方向上由方向导数, 且导数为零. ■

特别地, 在 $\mathbb{R}^n$ 中, 单位坐标向量是最简单的. 因此它们的方向导数也应该是最容易计算的.

**定义 4.2 (偏导数)**

设函数 $f: D \to \mathbb{R}$, 其中 $D$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上的一个开集. 我们称 $f$ 在点 $\boldsymbol{x}_0$ 处沿第 $i$ 个单位坐标向量 $\boldsymbol{e}_i$ 的方向导数为 $f$ 在 $\boldsymbol{x}_0$ 处的第 $i$ 个**偏导数** (partial derivative), 记作

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\boldsymbol{x}_0) \text{ 或 } f'_{x_i}(\boldsymbol{x}_0) \text{或 } \mathcal{D}_i f(\boldsymbol{x}_0),$$

其中 $\mathcal{D}_i$ 称为第 $i$ 个**偏微分算子** (partial differential operator). ♣

我们来试着计算 $f$ 在 $\boldsymbol{x}_0 = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 处的偏导数 $\mathcal{D}_1 f(\boldsymbol{x}_0)$. 由定义可知

$$\mathcal{D}_1 f(\boldsymbol{x}_0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(\boldsymbol{x}_0 + t\boldsymbol{e}_1) - f(\boldsymbol{x}_0)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{f(x_1 + t, x_2, \cdots, x_n) - f(x_1, x_2, \cdots, x_n)}{t}$$

这表明计算 $\mathcal{D}_i f(\boldsymbol{x}_0)$ 时, 只需对 $x_i$ 求导, 而把除了 $x_i$ 以外的变量看作常数. 下面来看几个计算偏导数的例子.

**例 4.2** 设三元函数

$$f(x, y, z) = x^2 + y + \cos y^2 z.$$

求 $f(x, y, z)$ 的三个偏导数.

**解** 计算得

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = 2x. \qquad \frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = 1 - 2yz \sin y^2 z. \qquad \frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = -y^2 \sin y^2 z.$$ ■

**例 4.3** 设 $n$ 元函数 $f(\boldsymbol{x}) = \|\boldsymbol{x}\|$. 求 $f$ 的偏导数.

**解** 设 $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$, 则

$$f(\boldsymbol{x}) = \left(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2\right)^{1/2}$$

当 $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$ 时, $f$ 的第 $i$ 个偏导数为

$$\mathcal{D}_i f(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{2}\left(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2\right)^{-1/2} \cdot 2x_i = \frac{x_i}{\|\boldsymbol{x}\|}, \quad i = 1, 2, \cdots, n.$$

当 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 时, 对于任一方向向量都有

$$\frac{f(\boldsymbol{x} + t\boldsymbol{u}) - f(\boldsymbol{x})}{t} = \frac{\|t\boldsymbol{u}\|}{t} = \frac{|t|}{t}.$$

当 $t \to 0$ 时, 上式极限不存在. 这表明 $f$ 在 $\boldsymbol{0}$ 的任何方向都不存在偏导数. ■

对于二元函数, 偏导数有很清楚的几何意义, 如图4.1所示. 设二元函数 $f: D \to \mathbb{R}$, 其中 $D$ 是 $\mathbb{R}^2$ 上的一个区域. 此时 $z = f(x, y)$ 在 3 维 Euclid 空间 $\mathbb{R}^3$ 中的图像是点集

$$G(f) = \{(x, y, f(x, y)) \mid (x, y) \in D\}$$

我们称它是一张曲面. 平行于 $z$ 轴的直线至多与该曲面有一个交点. 任取一点 $(x_0, y_0) \in D$. 则平面 $y = y_0$ 与曲面 $z = f(x, y)$ 的交线是一条平面曲线

$$\Gamma_1 : \begin{cases} z = f(x, y) \\ y = y_0 \end{cases}$$

此时偏导数 $\frac{\partial}{\partial x} f(x_0, y_0)$ 就是曲线 $\Gamma_1$ 在点 $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ 处切线的斜率. 同理可知偏导数 $\frac{\partial}{\partial y} f(x_0, y_0)$ 就是曲线

$$\Gamma_2 : \begin{cases} z = f(x, y) \\ x = x_0 \end{cases}$$

在点 $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ 处切线的斜率.

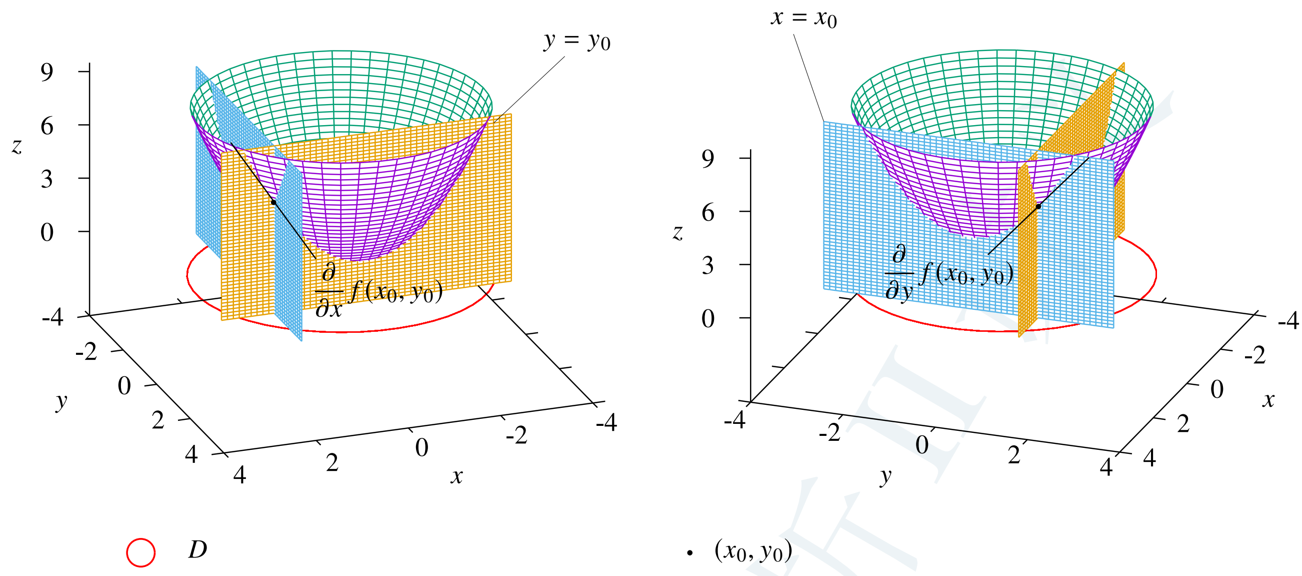



图 4.1: 偏导数的几何意义

### 4.1.2 多元函数的全微分

下面我们把一元函数的微分推广到多元函数中.

**定义 4.3 (多元函数的全微分)**

设函数 $f: D \to \mathbb{R}$, 其中 $D$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上的一个开集. 给定 $\boldsymbol{x}_0 \in D$. 若存在 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 使得

$$f(\boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{h}) - f(\boldsymbol{x}_0) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i h_i + o(\|\boldsymbol{h}\|), \quad \|\boldsymbol{h}\| \to 0,$$

其中 $\boldsymbol{h} = (h_1, h_2, \cdots, h_n)$, 则称函数 $f$ 在点 $\boldsymbol{x}_0$ 处**可微** (differentiable). 并称关于 $h_1, h_2, \cdots, h_n$ 的 $n$ 元线性函数 $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i h_i$ 为 $f$ 在 $\boldsymbol{x}_0$ 处的**全微分** (total derivative), 简称微分. 记作

$$\mathrm{d} f(\boldsymbol{x}_0) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i h_i.$$

若 $f$ 在 $D$ 上的每一点都可微, 则称 $f$ 是 $D$ 上的一个**可微函数** (differentiable function). ♣

**注** 以上定义中的 $\boldsymbol{h}$ 称为全增量.

和一元函数的微分类似, 多元函数的微分 $\mathrm{d} f(\boldsymbol{x}_0)(\boldsymbol{h})$ 表示函数 $f$ 增量 $\boldsymbol{h}$ 的主要部分, 它是 $\boldsymbol{h}$ 的各分量的 $n$ 元线性函数. 下面我们先来确定这个线性函数的系数 $\lambda_i$ $(i = 1, 2, \cdots)$.

设 $f$ 在 $\boldsymbol{x}_0$ 处可微, 为了简化问题, 我们可以令 $\boldsymbol{h} = (0, \cdots, h_i, \cdots, 0)$. 这时

$$\begin{aligned} & f(x_1, \cdots, x_i + h_i, \cdots, x_n) - f(x_1, \cdots, x_i, \cdots, x_n) = \lambda_i h_i + o(|h_i|) \\ \Longleftrightarrow\ & \mathcal{D}_i f(\boldsymbol{x}_0) = \lim_{h_i \to 0} \frac{f(x_1, \cdots, x_i + h_i, \cdots, x_n) - f(x_1, \cdots, x_i, \cdots, x_n)}{h_i} = \lambda_i, \quad i = 1, 2, \cdots, n. \end{aligned}$$

于是我们就确定了全微分 $\mathrm{d} f(\boldsymbol{x}_0) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i h_i$ 中的所有系数, 增量 $\boldsymbol{h}$ 的第 $i$ 个分量 $h_i$ 的系数恰好是 $f$ 在 $\boldsymbol{x}_0$ 处的第 $i$ 个偏导数. 因此我们才把 $\mathcal{D}_i$ 称为第 $i$ 个偏微分算子 (字面意思是 $\mathcal{D}_i$ 可以计算出全微分的一部分).

于是我们可以把 $f$ 在 $\boldsymbol{x}_0$ 的全微分写成

$$\mathrm{d} f(\boldsymbol{x}_0) = \mathcal{D}_1(\boldsymbol{x}_0) h_1 + \mathcal{D}_2(\boldsymbol{x}_0) h_2 + \cdots + \mathcal{D}_n(\boldsymbol{x}_0) h_n.$$

我们可以矩阵的乘法来表示以上等式 (这样做的好处我们会在下一节看到):

$$\mathrm{d}\, f(\boldsymbol{x}_0) = [\mathcal{D}_1(\boldsymbol{x}_0), \mathcal{D}_2(\boldsymbol{x}_0), \cdots, \mathcal{D}_n(\boldsymbol{x}_0)] \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_n \end{bmatrix}.$$

为了书写简洁, 我们可以令

$$\nabla f(\boldsymbol{x}_0) := [\mathcal{D}_1(\boldsymbol{x}_0), \mathcal{D}_2(\boldsymbol{x}_0), \cdots, \mathcal{D}_n(\boldsymbol{x}_0)].$$

这里的 $\nabla f(\boldsymbol{x}_0)$ 既可以看作行向量, 也可以看作一个 $1\times n$ 矩阵. 然后, 把 $\boldsymbol{h}$ 看作一个列向量, 记作 $\boldsymbol{h} = [h_1, h_2, \cdots, h_n]^T$. 于是 $f$ 在 $\boldsymbol{x}_0$ 的全微分就可以简洁地记作

$$\mathrm{d}\, f(\boldsymbol{x}_0) = \nabla f(\boldsymbol{x}_0)\boldsymbol{h}.$$

我们称 $\nabla f(\boldsymbol{x}_0)$ 为函数 $f$ 在 $\boldsymbol{x}_0$ 处的**梯度** (gradient), 有时候梯度也记作 $\mathrm{grad} f$. 下面我们来研究一下投影的微分.

**例 4.4** 设投影

$$f_i(x_1, x_2, \cdots, x_n) = x_i, \quad i = 1, 2, \cdots, n.$$

则 $f_i$ 在 $\mathbb{R}^n$ 上的任一点都可微, 且 $\mathrm{d}\, f_i = h_i$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$.

**证明** 任取 $\boldsymbol{x}_0 = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. 容易知道 $f_i$ 的第 $i$ 个偏导数为 1, 其余偏导数都为零, 于是

$$\lim_{\|\boldsymbol{h}\|\to 0} \frac{f(\boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{h}) - f(\boldsymbol{x}_0) - h_i}{\|\boldsymbol{h}\|} = \lim_{\|\boldsymbol{h}\|\to 0} \frac{x_i + h_i - x_i - h_i}{\|\boldsymbol{h}\|} = 0.$$

由微分的定义可知 $f_i$ 在 $\boldsymbol{x}_0$ 可微, 因此 $f_i$ 在 $\mathbb{R}^n$ 上的任一点都可微, 且 $\mathrm{d}\, f_i = \mathrm{d}\, x_i = h_i$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$.

**注** 由于 $\mathrm{d}\, x_i = h_i$, 因此全增量 $\boldsymbol{h} = (\mathrm{d}\, x_1, \mathrm{d}\, x_2, \cdots, \mathrm{d}\, x_n)$. 于是函数 $f$ 的微分可以写成

$$\mathrm{d}\, f(\boldsymbol{x}_0) = f_i'(\boldsymbol{x}_0)\, \mathrm{d}\, x_i.$$

有时候函数可微也可以用另一种形式定义.

**定理 4.1**

设函数 $f : D \to \mathbb{R}$, 其中 $D$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上的一个开集. 给定 $\boldsymbol{x}_0 \in D$. 则函数 $f$ 在 $\boldsymbol{x}_0$ 可微当且仅当

$$f(\boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{h}) - f(\boldsymbol{x}_0) = \nabla f(\boldsymbol{x}_0)\boldsymbol{h} + \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i(\boldsymbol{h}) h_i.$$

当 $\|\boldsymbol{h}\| \to 0$ 时, $\varepsilon_i(\boldsymbol{h}) \to 0$ $(i = 1, 2, \cdots)$.

♡

**证明** (i) 证明充分性. 当 $\|\boldsymbol{h}\| \to 0$ 时, 由于 $\varepsilon_i(\boldsymbol{h}) \to 0$ $(i = 1, 2, \cdots)$, 故

$$\left| \frac{1}{\|\boldsymbol{h}\|} \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i(\boldsymbol{h}) h_i \right| = \left| \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i(\boldsymbol{h}) \frac{h_i}{\|\boldsymbol{h}\|} \right| \leq \sum_{i=1}^{n} |\varepsilon_i(\boldsymbol{h})| \to 0.$$

这表明 $\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i(\boldsymbol{h}) h_i = o(\|\boldsymbol{h}\|)$.

(ii) 证明必要性. 若 $f$ 在 $\boldsymbol{x}_0$ 可微, 则

$$f(\boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{h}) - f(\boldsymbol{x}_0) = \nabla f(\boldsymbol{x}_0)\boldsymbol{h} + o(\|\boldsymbol{h}\|), \quad \|\boldsymbol{h}\| \to 0,$$

令

$$r(\boldsymbol{h}) = f(\boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{h}) - f(\boldsymbol{x}_0) - \nabla f(\boldsymbol{x}_0)\boldsymbol{h}.$$

则当 $\|\boldsymbol{h}\| \to 0$ 时, $r(\boldsymbol{h}) = o(\|\boldsymbol{h}\|)$. 由于

$$r(\boldsymbol{h}) = r(\boldsymbol{h}) \sum_{i=1}^{n} \frac{h_i^2}{\|\boldsymbol{h}\|^2} = \frac{r(\boldsymbol{h})}{\|\boldsymbol{h}\|} \sum_{i=1}^{n} \frac{h_i}{\|\boldsymbol{h}\|} h_i.$$

因此可令

$$\varepsilon_i(\boldsymbol{h}) = \frac{r(\boldsymbol{h})}{\|\boldsymbol{h}\|} \cdot \frac{h_i}{\|\boldsymbol{h}\|}.$$

由于

$$\left|\frac{h_i}{\|\boldsymbol{h}\|}\right| \le 1, \quad i = 1, 2, \cdots, n.$$

因此 $\varepsilon_i(\boldsymbol{h}) \to 0$ $(i = 1, 2, \cdots)$. 且满足

$$f(\boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{h}) - f(\boldsymbol{x}_0) = \nabla f(\boldsymbol{x}_0)\boldsymbol{h} + \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i(\boldsymbol{h}) h_i.$$ ■

以上形式的定义把微分定义式右边的 $o(|\boldsymbol{h}|)$ 写成了一个具体的量.

### 4.1.3 多元函数可微的条件

下面我们来讨论函数可微的条件. 在一元函数中, 函数在一点可微至少要求在这一点连续. 多元函数的情况也一样.

**定理 4.2 (多元函数可微的必要条件)**

设函数 $f$ 在 $\boldsymbol{x}_0$ 处可微, 则 $f$ 在 $\boldsymbol{x}_0$ 处连续.

♡

**证明** 由于 $f$ 在 $\boldsymbol{x}_0$ 处可微, 因此

$$f(\boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{h}) - f(\boldsymbol{x}_0) = \nabla f(\boldsymbol{x}_0)\boldsymbol{h} + o(\|\boldsymbol{h}\|), \quad \|\boldsymbol{h}\| \to 0.$$

因此

$$\lim_{\boldsymbol{h} \to \boldsymbol{0}} [f(\boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{h}) - f(\boldsymbol{x}_0)] = 0.$$

于是可知 $f$ 在 $\boldsymbol{x}_0$ 处连续. ■

我们已经知道一元函数 $f$ 在 $x_0$ 处可微当且仅当它在 $x_0$ 处可导. 那么如果一个多元函数在 $\boldsymbol{x}_0$ 处的偏导数都存在是否可以推出函数在这一点可微呢?

**例 4.5** 设二元函数

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2 + y^2}, & (x, y) \ne (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}.$$

则 $f$ 在 $\boldsymbol{0}$ 的两个偏导数都存在, 但 $f(x, y)$ 在 $\boldsymbol{x}_0 = \boldsymbol{0}$ 处不可微.

**证明** 由偏导数的定义可知 $f$ 在 $\boldsymbol{0}$ 的两个偏导数为:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(\boldsymbol{0}) = \lim_{t \to 0} \frac{f(0 + t, 0) - f(0, 0)}{t} = 0,$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(\boldsymbol{0}) = \lim_{t \to 0} \frac{f(0, 0 + t) - f(0, 0)}{t} = 0.$$

由例3.41可知 $f$ 在 $\boldsymbol{0}$ 处不连续. 因此 $f$ 在 $\boldsymbol{0}$ 处不可微. ■

以上例子这说明多元函数在一点的所有偏导数都存在也不足以推出在这里点可微. 事实上, 即使函数 $f$ 在一点 $\boldsymbol{x}_0$ 各个方向的方向导数都存在还是不足以推出函数在 $\boldsymbol{x}_0$ 处可微.

**例 4.6** 设函数

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^4 + y^2}, & x^2 + y^2 > 0 \\ 0, & x = y = 0 \end{cases}.$$

则 $f$ 在原点 $\mathbf{0}$ 处各个方向导数都存在, 但它在原点处不可微.

**证明** 设方向向量为 $\boldsymbol{u}=(\cos\theta,\sin\theta)$, 其中 $\theta\in[0,2\pi)$. 令

$$\varphi(t)=f(\boldsymbol{x}_0+t\boldsymbol{u})=f(t\cos\theta,t\sin\theta).$$

当 $t=0$ 时 $t^2\cos^2\theta+t^2\sin^2\theta=0$, 故 $\varphi(t)=0$. 当 $t\neq 0$ 时

$$\varphi(t)=\frac{t^3\cos^2\theta\sin\theta}{t^4\cos^4\theta+t^2\sin^2\theta}=\frac{t\cos^2\theta\sin\theta}{t^2\cos^4\theta+\sin^2\theta}.$$

当 $\cos\theta\neq 0,\sin\theta\neq 0$ 时

$$\varphi'(0)=\lim_{t\to 0}\frac{\varphi(t)-\varphi(0)}{t-0}=\lim_{t\to 0}\frac{\cos^2\theta\sin\theta}{t^2\cos^4\theta+\sin^2\theta}=\frac{\cos^2\theta}{\sin\theta}.$$

于是可知

$$\varphi'(0)=\begin{cases}\dfrac{\cos^2\theta}{\sin\theta}, & \theta\neq\dfrac{k\pi}{2},\ k=0,1,2,3.\\ 0, & \theta=\dfrac{k\pi}{2},\ k=0,1,2,3.\end{cases}.$$

于是可知 $f$ 在原点 $\mathbf{0}$ 处各个方向导数都存在.

由例3.32可知 $f$ 在 $\mathbf{0}$ 处不连续, 故它在 $\mathbf{0}$ 处不可微. ■

很自然的想法是, 把条件再加强一些, 如果偏导数连续, 是否可以确保函数可微?

**定理 4.3 (多元函数可微的充分条件)**

设函数 $f:D\to\mathbb{R}$, 其中 $D$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的一个开集. 若 $f$ 的各个偏导数 $\mathcal{D}_if(\boldsymbol{x})$ $(i=1,2,\cdots,n)$ 在 $\boldsymbol{x}_0$ 的一个邻域中都存在, 且在点 $\boldsymbol{x}_0$ 处都连续, 则 $f$ 在 $\boldsymbol{x}_0$ 处可微.

**证明** 对 $n$ 进行归纳. 当 $n=1$ 时, 显然成立, 这是因为一元函数在一点可导当且仅当这一点可微. 假设 $n-1$ 时命题成立. 下面来看 $n$ 时的情况. 令

$$f(\boldsymbol{x}_0+\boldsymbol{h})-f(\boldsymbol{x}_0)=d_1+d_2,$$

其中

$$\begin{aligned}d_1&=f(x_1+h_1,\cdots,x_{n-1}+h_{n-1},x_n+h_n)-f(x_1+h_1,\cdots,x_{n-1}+h_{n-1},x_n),\\ d_2&=f(x_1+h_1,\cdots,x_{n-1}+h_{n-1},x_n)-f(x_1,\cdots,x_{n-1},x_n).\end{aligned}$$

$d_1$ 中只有第 $n$ 个分量有变动, 因此可以对第 $n$ 个分量使用一元函数的 Lagrange 中值定理, 即存在 $\theta\in(0,1)$ 使得

$$\begin{aligned}d_1&=\mathcal{D}_nf(x_1+h_1,\cdots,x_{n-1}+h_{n-1},x_n+\theta h_n)h_n\\ &=[\mathcal{D}_nf(x_1+h_1,\cdots,x_{n-1}+h_{n-1},x_n)-\mathcal{D}_nf(\boldsymbol{x}_0)]h_n+\mathcal{D}_nf(\boldsymbol{x}_0)h_n.\end{aligned}$$

令

$$\varepsilon_n(\boldsymbol{h})=\mathcal{D}_nf(x_1+h_1,\cdots,x_{n-1}+h_{n-1},x_n)-\mathcal{D}_nf(\boldsymbol{x}_0).$$

则

$$d_1=\mathcal{D}_n(\boldsymbol{x}_0)h_n+\varepsilon_n(\boldsymbol{h})h_n.$$

由于 $f$ 的各个偏导数 $\mathcal{D}_if(\boldsymbol{x})$ $(i=1,2,\cdots,n)$ 在 $\boldsymbol{x}_0$ 的一个邻域中都存在, 且在点 $\boldsymbol{x}_0$ 处都连续, 故

$$\lim_{\|\boldsymbol{h}\|\to 0}\varepsilon_n(\boldsymbol{h})=\lim_{\|\boldsymbol{h}\|\to 0}\mathcal{D}_nf(x_1+h_1,\cdots,x_{n-1}+h_{n-1},x_n)-\mathcal{D}_nf(\boldsymbol{x}_0)=0.$$

另一方面, 由归纳假设可知

$$d_2=\sum_{i=1}^{n-1}\mathcal{D}_i(\boldsymbol{x}_0)h_i+\sum_{i=1}^{n-1}\varepsilon_i(\boldsymbol{h})h_i,$$

其中 $\varepsilon_i(\boldsymbol{h}) \to 0\ (\|\boldsymbol{h}\| \to 0)\ (i = 1, 2, \cdots, n-1)$ 于是

$$f(\boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{h}) - f(\boldsymbol{x}_0) = d_1 + d_2 = \sum_{i=1}^{n} \mathcal{D}_i(\boldsymbol{x}_0)h_i + \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i(\boldsymbol{h})h_i$$

其中 $\varepsilon_i(\boldsymbol{h}) \to 0\ (\|\boldsymbol{h}\| \to 0)\ (i = 1, 2, \cdots, n)$. 于是可知 $f$ 在 $\boldsymbol{x}_0$ 处可微.

由数学归纳原理可知对于任一 $n \in \mathbb{N}^*$ 命题都成立. ■

偏导连续虽然可以推出函数可微, 却不是必要条件. 我们来看一个例子.

**例 4.7** 设二元函数

$$f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2) \sin \dfrac{1}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}.$$

则 $f$ 在 $\mathbf{0}$ 处可微, 但它的两个偏导数在 $\mathbf{0}$ 不连续.

**证明** (i) 分别计算 $f$ 的两个偏导数. 当 $(x, y) \neq (0, 0)$ 时

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = 2x \sin \frac{1}{x^2 + y^2} - \frac{2x}{x^2 + y^2} \cos \frac{1}{x^2 + y^2}.$$
$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = 2y \sin \frac{1}{x^2 + y^2} - \frac{2y}{x^2 + y^2} \cos \frac{1}{x^2 + y^2}.$$

当 $(x, y) = (0, 0)$ 时

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = \lim_{t \to 0} \frac{f(0 + t, 0) - f(0, 0)}{t} = \lim_{t \to 0} t^2 \sin \frac{1}{t^2} = 0,$$
$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = \lim_{t \to 0} \frac{f(0, 0 + t) - f(0, 0)}{t} = \lim_{t \to 0} t^2 \sin \frac{1}{t^2} = 0.$$

设两个点列 $\boldsymbol{a}_n = \left(1/\sqrt{2n\pi}, 0\right), \boldsymbol{b}_n = \left(0, 1/\sqrt{2n\pi}\right)$ 则 $\boldsymbol{a}_n \to \mathbf{0}, \boldsymbol{b}_n \to \mathbf{0}$. 但

$$\frac{\partial f(\boldsymbol{a}_n)}{\partial x} = \frac{2}{\sqrt{2n\pi}} \sin 2n\pi - 2\sqrt{2n\pi} \cos 2n\pi = -2\sqrt{2n\pi} \to -\infty.$$
$$\frac{\partial f(\boldsymbol{b}_n)}{\partial y} = \frac{2}{\sqrt{2n\pi}} \sin 2n\pi - 2\sqrt{2n\pi} \cos 2n\pi = -2\sqrt{2n\pi} \to -\infty.$$

因此两个偏导数在 $\mathbf{0}$ 处的极限都不是 0, 因此它们在 $\mathbf{0}$ 处都不连续.

(ii) 由于

$$\lim_{\|\boldsymbol{h}\| \to 0} \frac{f(h_1, h_2) - f(0, 0) - f'_x(0, 0)h_1 - f'_y(0, 0)h_2}{\|\boldsymbol{h}\|} = \lim_{\|\boldsymbol{h}\| \to 0} \|\boldsymbol{h}\| \sin \frac{1}{\|\boldsymbol{h}\|^2} = 0.$$

因此

$$f(\mathbf{0} + \boldsymbol{h}) - f(\mathbf{0}) = f'_x(\mathbf{0})h_1 - f'_y(\mathbf{0})h_2 + o(\|\boldsymbol{h}\|), \quad \|\boldsymbol{h}\| \to 0.$$

这表明 $f$ 在 $\mathbf{0}$ 处可微. ■

现在我们可以来总结一下一元函数和多元函数中极限、连续、可导、可微这四个概念的关系了.

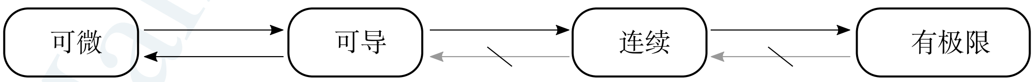



**图 4.2:** 一元函数, 可导, 可微, 连续, 有极限的关系.

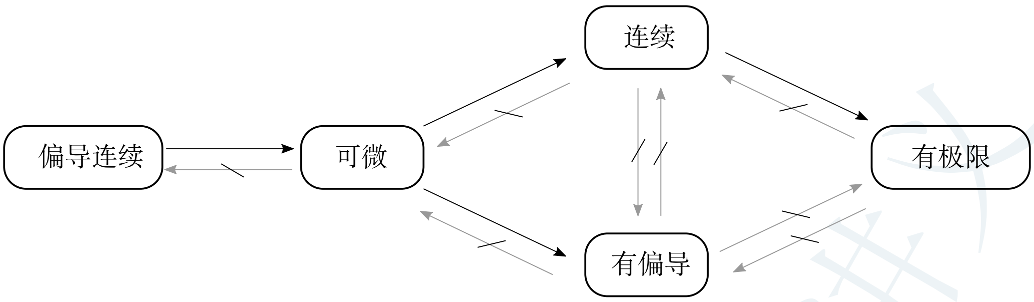



**图 4.3:** 多元函数偏导连续, 可微, 连续, 有偏导, 有极限的关系.

我们知道一元函数的微分 $df(x_0)$ 是自变量的增量 $h$ 的一个线性函数, 它的系数就是 $f$ 在 $x_0$ 的导数 $f'(x_0)$. 因此容易想到 $h_i$ 的系数 $\lambda_i$ 可能是 $\mathcal{D}_i f(\boldsymbol{x}_0)$.

计算偏导数是很容易的, 本质上就是计算一元函数的导数. 但计算一般的方向导数不太容易. 很自然地想法是把一般的方向导数分解为计算若干偏导数.

**定理 4.4 (方向导数公式)**

设函数 $f$ 在 $\boldsymbol{x}_0$ 处可微, 则 $f$ 在 $\boldsymbol{x}_0$ 处沿任一方向 $\boldsymbol{u}$ 的方向导数为

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{u}}(\boldsymbol{x}_0) = \nabla f(\boldsymbol{x}_0)\boldsymbol{u}.$$

♡

**证明** 由于 $f$ 在 $\boldsymbol{x}_0$ 处可微, 故

$$f(\boldsymbol{x}_0 + t\boldsymbol{u}) - f(\boldsymbol{x}_0) = \nabla f(\boldsymbol{x}_0)t\boldsymbol{u} + o(t).$$

于是可知

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{u}}(\boldsymbol{x}_0) = \lim_{t\to 0}\frac{f(\boldsymbol{x}_0 + t\boldsymbol{u}) - f(\boldsymbol{x}_0)}{t} = \nabla f(\boldsymbol{x}_0)\boldsymbol{u}.$$

■

**注** 对于二元函数, 方向向量通常写成 $(\cos\theta, \sin\theta)$, 而三元函数的方向通常可以用方向余弦 $(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ 表示, 其中 $\alpha, \beta, \gamma$ 分别是这一方向与 $x, y, z$ 轴的夹角.

我们来看一个例子. 我们分别用定义和以上公式求函数的一个方向导数.

**例 4.8** 设函数 $f(x, y) = (x-1)^2 - y^2$. 求 $f$ 在 $\boldsymbol{x}_0 = (0, 1)$ 处沿方向 $\boldsymbol{u} = (3/5, -4/5)$ 的方向导数.

**解** $\boxed{\text{解法一}}$ 令

$$\varphi(t) = f(\boldsymbol{x}_0 + t\boldsymbol{u}) = f\left(\frac{3t}{5}, 1 - \frac{4t}{5}\right) = \left(\frac{3t}{5} - 1\right)^2 - \left(1 - \frac{4t}{5}\right)^2 = -\frac{7}{25}t^2 + \frac{2}{5}t.$$

于是

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{u}}(\boldsymbol{x}_0) = \varphi'(0) = -\frac{14}{25}t + \frac{2}{5}\bigg|_0 = \frac{2}{5}.$$

$\boxed{\text{解法二}}$ 函数 $f$ 在 $\boldsymbol{x}_0$ 的两个偏导数为

$$\frac{\partial f}{\partial x}(\boldsymbol{x}_0) = 2(x-1)\bigg|_{(0,1)} = -2, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(\boldsymbol{x}_0) = -2y\bigg|_{(0,1)} = -2.$$

于是可知 $f$ 在 $\boldsymbol{x}_0 = (0, 1)$ 处沿方向 $\boldsymbol{u} = (3/5, -4/5)$ 的方向导数为

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{u}}(\boldsymbol{x}_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(\boldsymbol{x}_0)u_1 + \frac{\partial f}{\partial x}(\boldsymbol{x}_0)u_2 = \frac{2}{5}.$$

■

### 4.1.4 微分概念的一般化

下面我们把微分的概念推广到向量值函数中. 在此之前, 我们先来回顾一下微分的概念.

设一元实值函数 $f: D \to \mathbb{R}$ $(D \in \mathbb{R})$ 在 $x_0$ 处可微, 是指 $f$ 在 $x_0$ 附近的增量可以近似为一个 $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 的线性映射, 即

$$f(x_0+h) - f(x_0) = \lambda h + o(h), \quad h \to 0.$$

以上等式等价于

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0) - \lambda h}{h} = 0.$$

我们把关于增量 $h$ 的线性映射 $\lambda h$ 称为 $f$ 在 $x_0$ 处的微分. 其中系数 $\lambda$ 等于 $f$ 在 $x_0$ 处的导数

$$\lambda = \frac{\mathrm{d} f(x_0)}{\mathrm{d} x}.$$

设 $n$ 元实值函数 $f: D \to \mathbb{R}$ $(D \in \mathbb{R}^n)$ 在 $\boldsymbol{x}_0$ 处可微, 是指 $f$ 在 $\boldsymbol{x}_0$ 附近的增量可以近似为一个 $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 的线性映射, 即

$$f(\boldsymbol{x}_0+\boldsymbol{h}) - f(\boldsymbol{x}_0) = \boldsymbol{\lambda} \cdot \boldsymbol{h} + o(\|\boldsymbol{h}\|), \quad \|\boldsymbol{h}\| \to 0.$$

以上等式等价于

$$\lim_{\|\boldsymbol{h}\|\to 0} \frac{f(\boldsymbol{x}_0+\boldsymbol{h}) - f(\boldsymbol{x}_0) - \boldsymbol{\lambda} \cdot \boldsymbol{h}}{\|\boldsymbol{h}\|} = 0.$$

这里的增量 $\boldsymbol{h}$ 是一个 $n$ 维列向量, 为了使极限式有意义, 需要取 $\boldsymbol{h}$ 的范数. 同样, 我们把关于增量 $\boldsymbol{h}$ 的线性映射 $\boldsymbol{\lambda} \cdot \boldsymbol{h}$ 称为 $f$ 在 $\boldsymbol{x}_0$ 处的微分. 这里的 $\boldsymbol{\lambda}$ 是一个行向量, 它的第 $i$ 个分量是 $f$ 在 $\boldsymbol{x}_0$ 处的第 $i$ 个偏导数

$$\boldsymbol{\lambda} = \left( \frac{\partial f(\boldsymbol{x}_0)}{\partial x_1}, \frac{\partial f(\boldsymbol{x}_0)}{\partial x_2}, \cdots, \frac{\partial f(\boldsymbol{x}_0)}{\partial x_n} \right).$$

我们称这个行向量为 $f$ 在 $\boldsymbol{x}_0$ 的梯度, 记作 $\nabla f(\boldsymbol{x}_0)$. 梯度实际上可以看作一个多元实值函数的导数.

通过以上的复习整理, 我们可以很容易地把微分的概念推广到向量值函数函数 $\boldsymbol{f}: D \to \mathbb{R}^m$ $(D \in \mathbb{R}^n)$. 如果 $\boldsymbol{f}$ 在 $\boldsymbol{x}_0$ 处可微则应该有等式

$$\lim_{\|\boldsymbol{h}\|\to 0} \frac{\|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0+\boldsymbol{h}) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0) - \boldsymbol{A}\boldsymbol{h}\|}{\|\boldsymbol{h}\|} = 0.$$

从前面情况类比可知, 此时函数 $\boldsymbol{f}$ 的微分应该是一个 $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ 的线性映射 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{h}$, 因此 $\boldsymbol{A}$ 应该是一个 $m \times n$ 矩阵. 与前面两种情况不同的是, 此时 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0+\boldsymbol{h}) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0) - \boldsymbol{A}\boldsymbol{h}$ 是一个 $m$ 维向量, 因此也需要把它变成范数. 其中分子是 $\mathbb{R}^m$ 中的范数, 分母是 $\mathbb{R}^n$ 中的范数. 前面的一元或多元实值函数的微分与这个定义是一致的. 现在我们可以正式给出微分的定义了.

**定义 4.4 (向量值函数的微分)**

设向量值函数 $\boldsymbol{f}: D \to \mathbb{R}^m$, 其中 $D$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的一个开集. 给定 $\boldsymbol{x}_0 \in D$. 若存在 $m \times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 使得

$$\lim_{\|\boldsymbol{h}\|\to 0} \frac{\|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0+\boldsymbol{h}) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0) - \boldsymbol{A}\boldsymbol{h}\|}{\|\boldsymbol{h}\|} = 0.$$

则称 $\boldsymbol{f}$ 在 $\boldsymbol{x}_0$ 处可微, 称线性映射 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{h}$ 是 $\boldsymbol{f}$ 在 $\boldsymbol{x}_0$ 处的微分. 记作 $\mathrm{d}\,\boldsymbol{f}\boldsymbol{x}_0 = \boldsymbol{A}\boldsymbol{h}$.

♣

注 由于 $f(\boldsymbol{x}_0+\boldsymbol{h}) - f(\boldsymbol{x}_0)$ 和 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{h}$ 都是 $m$ 维向量, 因此写成以下等式是不恰当的:

$$f(\boldsymbol{x}_0+\boldsymbol{h}) - f(\boldsymbol{x}_0) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{h} + o(\|\boldsymbol{h}\|), \quad \|\boldsymbol{h}\| \to 0.$$

注 容易验证, 若函数 $\boldsymbol{f}$ 在 $\boldsymbol{x}_0$ 可微, 则它的微分是唯一的.

下面我们来看矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的元素. 设 $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$, $\boldsymbol{h} = [h_1, h_2, \cdots, h_n]^T$. 考察第 $i$ 个分量可知

$$\lim_{\|\boldsymbol{h}\|\to 0} \frac{\left| f_i(\boldsymbol{x}_0+\boldsymbol{h}) - f_i(\boldsymbol{x}_0) - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} h_j \right|}{\|\boldsymbol{h}\|} = 0.$$

因此 $\boldsymbol{f}$ 在 $\boldsymbol{x}_0$ 可微当且仅当 $f_i$ $(i=1,2,\cdots,m)$ 在 $\boldsymbol{x}_0$ 处可微. 由上式立刻可知

$$a_{ij}=\frac{\partial f_i(\boldsymbol{x}_0)}{\partial x_j},\quad i=1,2,\cdots,m,\ j=1,2,\cdots,n.$$

即

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial f_1(\boldsymbol{x}_0)}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_1(\boldsymbol{x}_0)}{\partial x_n}\\ \vdots & & \vdots\\ \dfrac{\partial f_m(\boldsymbol{x}_0)}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_m(\boldsymbol{x}_0)}{\partial x_n}\end{bmatrix}.$$

我们把矩阵 $\boldsymbol{A}$ 称为 $\boldsymbol{f}$ 在 $\boldsymbol{x}_0$ 处的 **Jacobi 矩阵** (Jacobian maxtrix), 记作 $\boldsymbol{J}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)$.

Jacobi 矩阵可以看作函数 $\boldsymbol{f}$ 在 $\boldsymbol{x}_0$ 的导数, 因此也可以记作 $\boldsymbol{g}'(\boldsymbol{x}_0)$. 容易看出, 前面定义的多元实值函数的梯度实质上可以看作一个 $1\times n$ 的 Jacobi 矩阵. 我们在一元实值函数中定义的导数实质上可以看作一个 $1\times 1$ 的 Jacobi 矩阵, 也可以看作一个 1 维的梯度, 因此这些概念都是一致的.

**例 4.9** 设线性映射 $\boldsymbol{f}:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$. 求 $\boldsymbol{J}\boldsymbol{f}$.

**证明** 设 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$, 其中 $\boldsymbol{A}$ 是一个 $m\times n$ 矩阵. 由于

$$\lim_{t\to 0}\frac{\|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}+t\boldsymbol{h})-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{A}(t\boldsymbol{h})\|}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{\|\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}+t\boldsymbol{h})-\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}-t\boldsymbol{A}\boldsymbol{h}\|}{t}=0.$$

于是可知 $\boldsymbol{J}\boldsymbol{f}=\boldsymbol{A}$. ■

以上例子说明线性映射的微分就是它本身. 下面的例子是上面的特例.

**例 4.10** 设恒等映射 $\boldsymbol{f}:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$. 则 $\boldsymbol{J}\boldsymbol{f}=\boldsymbol{I}_n$, 其中 $\boldsymbol{I}_n$ 是 $n$ 级单位矩阵.

导数推广后, 原来求导法则在形式上仍然成立.

**命题 4.1 (导数的运算法则)**

设映射 $\boldsymbol{f},\boldsymbol{g}:D\to\mathbb{R}^m$, 其中 $D$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上的一个区域. 则

(1) $(c\boldsymbol{f})'=c\boldsymbol{f}'$.

(2) $(\boldsymbol{f}+\boldsymbol{g})'=\boldsymbol{f}'+\boldsymbol{g}'$.

(3) $\langle\boldsymbol{f},\boldsymbol{g}\rangle'=\boldsymbol{g}\boldsymbol{f}'+\boldsymbol{f}\boldsymbol{g}'$.

**证明** 只证明 (3). 设 $\boldsymbol{f}=(f_1,f_2,\cdots,f_m)$, $\boldsymbol{g}=(g_1,g_2,\cdots,g_m)$. 则

$$\langle\boldsymbol{f},\boldsymbol{g}\rangle'=(f_1g_1+\cdots+f_mg_m)'=\left[\mathcal{D}_1\sum_{i=1}^m f_ig_i(\boldsymbol{x}),\cdots,\mathcal{D}_n\sum_{i=1}^m f_ig_i(\boldsymbol{x})\right].$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{g}\boldsymbol{f}'+\boldsymbol{f}\boldsymbol{g}'&=(g_1,\cdots,g_m)\begin{bmatrix}\mathcal{D}_1f_1(\boldsymbol{x}) & \cdots & \mathcal{D}_nf_1(\boldsymbol{x})\\ \vdots & & \vdots\\ \mathcal{D}_1f_m(\boldsymbol{x}) & \cdots & \mathcal{D}_nf_m(\boldsymbol{x})\end{bmatrix}+(f_1,\cdots,f_m)\begin{bmatrix}\mathcal{D}_1g_1(\boldsymbol{x}) & \cdots & \mathcal{D}_ng_1(\boldsymbol{x})\\ \vdots & & \vdots\\ \mathcal{D}_1g_m(\boldsymbol{x}) & \cdots & \mathcal{D}_ng_m(\boldsymbol{x})\end{bmatrix}\\ &=\left[\sum_{i=1}^m g_i\mathcal{D}_1f_i(\boldsymbol{x}),\cdots,\sum_{i=1}^m g_i\mathcal{D}_nf_i(\boldsymbol{x})\right]+\left[\sum_{i=1}^m f_i\mathcal{D}_1g_i(\boldsymbol{x}),\cdots,\sum_{i=1}^m f_i\mathcal{D}_ng_i(\boldsymbol{x})\right]\\ &=\left[\mathcal{D}_1\sum_{i=1}^m f_ig_i(\boldsymbol{x}),\cdots,\mathcal{D}_n\sum_{i=1}^m f_ig_i(\boldsymbol{x})\right].\end{aligned}$$

**注** 公式 (3) 的左边是 $\mathbb{R}^m$ 中的内积, 右边是 $1\times m$ 与 $m\times n$ 的矩阵乘法, 所以这里的 $\boldsymbol{g}\boldsymbol{f}'$ 和 $\boldsymbol{f}\boldsymbol{g}'$ 不能写成 $\boldsymbol{f}'\boldsymbol{g}$ 和 $\boldsymbol{g}'\boldsymbol{f}$.

至此, 微分和导数的概念都得到了推广. 在学习一元函数微分学时, 我们先介绍了导数. 但在推广到多元函数时微分的概念反而容易推广.

在多元实值函数函数中, 我们已经证明各偏导连续可以是可微的充分条件. 由于向量值函数 $\boldsymbol{f}$ 在 $\boldsymbol{x}_0$ 处可微当且仅当它的所有分量函数在 $\boldsymbol{x}_0$ 可微. 于是可以立刻得到以下结论.

**定理 4.5**

设向量值函数 $\boldsymbol{f}$. 若 $\boldsymbol{f}$ 在 $\boldsymbol{x}_0$ 的一个邻域内存在 Jacobi 矩阵 $\boldsymbol{J}\boldsymbol{f}$, 且 $\boldsymbol{J}\boldsymbol{f}$ 中的各元素在 $\boldsymbol{x}_0$ 处连续, 则 $\boldsymbol{f}$ 在 $\boldsymbol{x}_0$ 处可微. ♡

**定义 4.5 (向量值函数的连续)**

设向量值函数 $\boldsymbol{f}: D \to \mathbb{R}^m$, 其中 $D$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上的一个开集. 若 $\boldsymbol{f}$ 在 $D$ 上的每一点都连续, 则记作 $\boldsymbol{f} \in C(D)$; 若 $\boldsymbol{J}\boldsymbol{f}$ 在 $D$ 上的每一点都连续则记作 $\boldsymbol{f} \in C^1(D)$. ♣

## 4.2 导数和微分的计算

接下来讨论多元函数导数和微分的计算. 从形式上看多元函数公式和一元函数是一样的.

### 4.2.1 链式法则的一般化

先来看多元函数的连式法则.

**定理 4.6 (链式法则)**

设函数 $\boldsymbol{g}: D \to \mathbb{R}^m$ 在 $\boldsymbol{x}_0$ 处可微, 其中 $D$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的一个开集. 函数 $\boldsymbol{f}: E \to \mathbb{R}^l$ 在 $g(\boldsymbol{x}_0)$ 处可微, 其中 $E$ 是包含 $g(D)$ 的一个开集. 则 $\boldsymbol{f} \circ \boldsymbol{g}$ 在 $\boldsymbol{x}_0$ 处可微, 且

$$(\boldsymbol{f} \circ \boldsymbol{g})'(\boldsymbol{x}_0) = \boldsymbol{f}'[\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}_0)]\boldsymbol{g}'(\boldsymbol{x}_0).$$

**证明** 设 $\boldsymbol{y}_0 = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}_0)$, $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{f}'(\boldsymbol{y}_0)$, $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{g}'(\boldsymbol{x}_0)$. 只需证明 $(\boldsymbol{f} \circ \boldsymbol{g})'(\boldsymbol{x}_0) = \boldsymbol{AB}$, 即证明

$$\lim_{\|\boldsymbol{h}\| \to 0} \frac{\|(\boldsymbol{f} \circ \boldsymbol{g})(\boldsymbol{x}_0) - (\boldsymbol{f} \circ \boldsymbol{g})(\boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{h}) - \boldsymbol{ABh}\|}{\|\boldsymbol{h}\|} = 0. \tag{4.1}$$

由于 $\boldsymbol{g}$ 和 $\boldsymbol{f}$ 分别在 $\boldsymbol{x}_0$ 和 $\boldsymbol{y}_0$ 处可微, 故

$$\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{h}) - \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}_0) = \boldsymbol{Bh} + \boldsymbol{u}(\boldsymbol{h}).$$

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{y}_0 + \boldsymbol{k}) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{y}_0) = \boldsymbol{Ak} + \boldsymbol{v}(\boldsymbol{k}).$$

其中

$$\lim_{\|\boldsymbol{h}\| \to 0} \frac{\|\boldsymbol{u}(\boldsymbol{h})\|}{\|\boldsymbol{h}\|} = 0, \quad \lim_{\|\boldsymbol{k}\| \to 0} \frac{\|\boldsymbol{v}(\boldsymbol{k})\|}{\|\boldsymbol{k}\|} = 0.$$

令

$$\varepsilon(\boldsymbol{h}) = \frac{\|\boldsymbol{u}(\boldsymbol{h})\|}{\|\boldsymbol{h}\|}, \quad \delta(\boldsymbol{k}) = \frac{\|\boldsymbol{v}(\boldsymbol{k})\|}{\|\boldsymbol{k}\|}.$$

对于给定的 $\boldsymbol{h}$, 令 $\boldsymbol{k} = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{h}) - \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}_0)$.

$$\|\boldsymbol{k}\| = \|\boldsymbol{Bh} + \boldsymbol{u}(\boldsymbol{h})\| \le \|\boldsymbol{Bh}\| + \|\boldsymbol{u}(\boldsymbol{h})\| \le [\|\boldsymbol{B}\| + \varepsilon(\boldsymbol{h})]\|\boldsymbol{h}\|.$$

于是

$$\begin{aligned}
&\|(\boldsymbol{f} \circ \boldsymbol{g})(\boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{h}) - (\boldsymbol{f} \circ \boldsymbol{g})(\boldsymbol{x}_0) - \boldsymbol{ABh}\| \\
=&\|\boldsymbol{f}[\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{h})] - \boldsymbol{f}[\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}_0)] - \boldsymbol{ABh}\| = \|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{y}_0 + \boldsymbol{k}) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{y}_0) - \boldsymbol{ABh}\| = \|\boldsymbol{Ak} + \boldsymbol{v}(\boldsymbol{k}) - \boldsymbol{ABh}\| \\
=&\|\boldsymbol{A}(\boldsymbol{k} - \boldsymbol{Bh}) + \boldsymbol{v}(\boldsymbol{k})\| \le \|\boldsymbol{A}(\boldsymbol{k} - \boldsymbol{Bh})\| + \|\boldsymbol{v}(\boldsymbol{k})\| = \|\boldsymbol{Au}(\boldsymbol{h})\| + \delta(\boldsymbol{k})\|\boldsymbol{k}\| \le \|\boldsymbol{A}\|\|\boldsymbol{u}(\boldsymbol{h})\| + \delta(\boldsymbol{k})\|\boldsymbol{k}\| \\
\le&\|\boldsymbol{A}\|\varepsilon(\boldsymbol{h})\|\boldsymbol{h}\| + \delta(\boldsymbol{k})\|\boldsymbol{k}\| = \|\boldsymbol{A}\|\varepsilon(\boldsymbol{h})\|\boldsymbol{h}\| + \delta(\boldsymbol{k})\|\boldsymbol{Bh} + \boldsymbol{u}(\boldsymbol{h})\| \le \|\boldsymbol{A}\|\varepsilon(\boldsymbol{h})\|\boldsymbol{h}\| + \delta(\boldsymbol{k})[\|\boldsymbol{B}\|\|\boldsymbol{h}\| + \|\boldsymbol{u}(\boldsymbol{h})\|] \\
=&\|\boldsymbol{A}\|\varepsilon(\boldsymbol{h})\|\boldsymbol{h}\| + \delta(\boldsymbol{k})[\|\boldsymbol{B}\|\|\boldsymbol{h}\| + \varepsilon(\boldsymbol{h})\|\boldsymbol{h}\|].
\end{aligned}$$

由于 $\lim_{\|\boldsymbol{h}\| \to 0} \varepsilon(\boldsymbol{h}) = 0$, $\lim_{\|\boldsymbol{k}\| \to 0} \delta(\boldsymbol{k}) = 0$, 因此

$$\lim_{\|\boldsymbol{h}\| \to 0} \frac{\|(\boldsymbol{f} \circ \boldsymbol{g})(\boldsymbol{x}_0) - (\boldsymbol{f} \circ \boldsymbol{g})(\boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{h}) - \boldsymbol{ABh}\|}{\|\boldsymbol{h}\|} = \lim_{\|\boldsymbol{h}\| \to 0} \{\|\boldsymbol{A}\|\varepsilon(\boldsymbol{h}) + \delta(\boldsymbol{k})[\|\boldsymbol{B}\| + \varepsilon(\boldsymbol{h})]\} = 0. \qquad \blacksquare$$

**注** 以上证明用到了向量范数的三角不等式 (命题3.2) 和矩阵范数的不等式 (3.3):

$$\|\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta}\| \le \|\boldsymbol{\alpha}\| + \|\boldsymbol{\beta}\|, \quad \|\boldsymbol{AB}\| \le \|\boldsymbol{A}\|\|\boldsymbol{B}\|.$$

如果把以上定理中 $\boldsymbol{f}$ 和 $\boldsymbol{g}$ 的各个分量函数都写出来, 就可以得到 “具体的” 链式法则公式. 设 $\boldsymbol{g} = (g_1, g_2, \cdots, g_m)$, $\boldsymbol{f} = (f_1, f_2, \cdots, f_l)$. 令

$$y_i = g_i(x_1, x_2, \cdots, x_n), \quad i = 1, 2, \cdots, m.$$

$$z_j = f_j(y_1, y_2, \cdots, y_m), \quad j = 1, 2, \cdots, l.$$

则

$$z_j = f_j(g_1(x_1,x_2,\cdots,x_n), g_2(x_1,x_2,\cdots,x_n),\cdots,g_m(x_1,x_2,\cdots,x_n)),\quad j=1,2,\cdots,l.$$

其中 $z_j$ 对 $x_i$ 的偏导数为

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial z_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial z_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial z_l}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial z_l}{\partial x_n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial z_1}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial z_1}{\partial y_m} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial z_l}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial z_l}{\partial y_m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial y_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial y_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial y_m}{\partial x_n} \end{bmatrix}.$$

特别地, 当 $l=1$ 时, 立刻可得以下推论.

**推论 4.1**

设 $m$ 元可微函数 $z=f(g_1,g_2,\cdots,g_m)$, 其中每个变量都是 $n$ 元可微函数

$$g_i = g_i(x_1,x_2,\cdots,x_n),\quad i=1,2,\cdots,m.$$

则复合函数 $z=f[g_1(x_1,x_2,\cdots,x_n),\cdots,g_m(x_1,x_2,\cdots,x_n)]$ 是 $n$ 元可微函数, 且

$$\frac{\partial z}{\partial x_j} = \frac{\partial f}{\partial g_1}\frac{\partial g_1}{\partial x_j} + \frac{\partial f}{\partial g_2}\frac{\partial g_2}{\partial x_j} + \cdots + \frac{\partial f}{\partial g_m}\frac{\partial g_m}{\partial x_j},\quad j=1,2,\cdots,n.$$

下面举例说明具体的计算方法.

**例 4.11** 设有连续偏导的 2 元函数

$$u = f\left(x+y+z, x^2+y^2+z^2\right).$$

求 $u$ 的所有偏导数.

**解** 令 $\xi = x+y+z, \eta = x^2+y^2+z^2$. 由链式法则可知

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial \xi}\left(x+y+z, x^2+y^2+z^2\right) + 2x\frac{\partial f}{\partial \eta}\left(x+y+z, x^2+y^2+z^2\right).$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial \xi}\left(x+y+z, x^2+y^2+z^2\right) + 2y\frac{\partial f}{\partial \eta}\left(x+y+z, x^2+y^2+z^2\right).$$

■

**例 4.12** 设二元函数 $u(x,y)$ 在 $(x_0,y_0)$ 处可微, 其中

$$x=\varphi(s,t),\quad y=\psi(s,t).$$

它们在 $(s_0,t_0)$ 处可微, 且

$$x_0=\varphi(s_0,t_0),\quad y_0=\psi(s_0,t_0).$$

求复合函数 $u=f[\varphi(s,t),\psi(s,t)]$ 在 $(s_0,t_0)$ 处的两个偏导数.

**解** 由链式法则可知

$$\frac{\partial u}{\partial s} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s},\quad \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}.$$

把 $(s_0,t_0)$ 代入可得

$$\frac{\partial u}{\partial s}(s_0,t_0) = \frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0)\frac{\partial x}{\partial s}(s_0,t_0) + \frac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0)\frac{\partial y}{\partial s}(s_0,t_0).$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(s_0,t_0) = \frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0)\frac{\partial x}{\partial t}(s_0,t_0) + \frac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0)\frac{\partial y}{\partial t}(s_0,t_0).$$

■

**例 4.13** 设函数 $u(x,y)$ 有连续的一阶偏导数, 其中

$$x=r\cos\theta,\quad y=r\sin\theta.$$

则

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2=\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2+\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial u}{\partial \theta}\right)^2.$$

**证明** 由链式法则可知

$$\frac{\partial u}{\partial r}=\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r}=\frac{\partial u}{\partial x}\cos\theta+\frac{\partial u}{\partial y}\sin\theta.$$
$$\frac{\partial u}{\partial \theta}=\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \theta}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \theta}=-\frac{\partial u}{\partial x}r\sin\theta+\frac{\partial u}{\partial y}r\cos\theta \Longrightarrow \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}=-\frac{\partial u}{\partial x}\sin\theta+\frac{\partial u}{\partial y}\cos\theta.$$

对以上两式两边平方得

$$\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2=\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\cos^2\theta+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)\sin^2\theta+2\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y}\sin\theta\cos\theta.$$
$$\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial u}{\partial \theta}\right)^2=\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\sin^2\theta+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\cos^2\theta-2\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y}\sin\theta\cos\theta.$$

把以上两式相加得

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2=\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2+\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial u}{\partial \theta}\right)^2.$$ ■

设函数 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 可微, 则

$$\mathrm{d}f=\sum_{i=1}^n\frac{\partial f}{\partial x_i}\,\mathrm{d}x_i.$$

假设 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 不是自变量, 而是 $t_1,t_2,\cdots,t_m$ 的函数:

$$x_i=x_i(t_1,t_2,\cdots,t_m),\quad i=1,2,\cdots,n.$$

令

$$g(t_1,t_2,\cdots,t_m)=f[x_1(t_1,t_2,\cdots,t_m),x_2(t_1,t_2,\cdots,t_m),\cdots,x_n(t_1,t_2,\cdots,t_m)].$$

则

$$\mathrm{d}g=\sum_{i=1}^m\frac{\partial g}{\partial t_i}\,\mathrm{d}t_i.$$

由链式法则可知

$$\frac{\partial g}{\partial t_i}=\sum_{j=1}^n\frac{\partial f}{\partial x_j}\frac{\partial x_j}{\partial t_i},\quad i=1,2,\cdots,m.$$

因此

$$\mathrm{d}g=\sum_{i=1}^m\left(\sum_{j=1}^n\frac{\partial f}{\partial x_j}\frac{\partial x_j}{\partial t_i}\right)\mathrm{d}t_i=\sum_{j=1}^n\frac{\partial f}{\partial x_j}\sum_{i=1}^m\frac{\partial x_j}{\partial t_i}\,\mathrm{d}t_i=\sum_{j=1}^n\frac{\partial f}{\partial x_j}\,\mathrm{d}x_j.$$

这表明复合函数 $f$ 的微分是

$$\mathrm{d}f=\sum_{i=1}^n\frac{\partial f}{\partial x_i}\,\mathrm{d}x_i.$$

这表明无论 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是自变量, 还是 $t_1,t_2,\cdots,t_m$ 的函数, $f$ 作为 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的函数的一阶微分在形式上是不变的. 微分的这个性质被称为**一阶微分形式的不变形** . 在一元微分中已经见过微分的这个性质.

### 4.2.2 高阶偏导数

设函数 $f$ 在开集 $D$ 上的每一点处存在偏导数

$$\mathcal{D}_i f(\boldsymbol{x})=\frac{\partial f}{\partial x_i}(\boldsymbol{x}),\quad i=1,2,\cdots,n.$$

这称它们为 $f$ 的**一阶偏导函数**. 如果这些偏导函数还可以继续求偏导, 就可以得出 $f$ 的**二阶偏导函数**. 这样依次下去可以定义 $f$ 的各阶偏导数.

有 $n$ 个变量的函数的一阶偏导数有 $n$ 个, 因此它的二阶偏导数有 $n^2$ 个, $k$ 阶偏导数就有 $n^k$ 个. 若一阶偏导 $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ $(i=1,2,\cdots,n)$ 继续对 $x_j$ $(j=1,2,\cdots,n)$ 时, 记作

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} := \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right), \quad i,j=1,2,\cdots,n.$$

特别地, 当 $i=j$ 时

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} := \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_i}, \quad i=1,2,\cdots,n.$$

下面来看两个例子.

**例 4.14** 求函数 $z=xy^3$ 的全部二阶偏导数.

**解** 先求一阶偏导数:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=y^3, \quad \frac{\partial z}{\partial y}=3xy^2.$$

然后再分别计算它们的二阶偏导

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=0, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}=3y^2, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}=3y^2, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=6xy.$$

■

**例 4.15** 设函数

$$f(x,y)=\begin{cases} xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & x^2+y^2>0 \\ 0, & x=y=0 \end{cases}.$$

求函数 $f$ 在 $(0,0)$ 处的两个二阶偏导数

$$\frac{\partial^2 f(0,0)}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial^2 f(0,0)}{\partial y \partial x}.$$

**解** 容易验证 $f$ 在 $(0,0)$ 处连续. 先求 $f$ 的一阶导函数. 当 $x^2+y^2>0$ 时

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}=\frac{y\left(x^4+4x^2y^2-y^4\right)}{\left(x^2+y^2\right)^2}, \quad \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}=\frac{y\left(x^4-4x^2y^2-y^4\right)}{\left(x^2+y^2\right)^2}.$$

当 $x=y=0$ 时

$$\frac{\partial f(0,0)}{\partial x}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=0. \quad \frac{\partial f(0,0)}{\partial y}=\lim_{y\to 0}\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y}=0.$$

于是可以计算 $f$ 在 $(0,0)$ 处的两个二阶偏导数

$$\frac{\partial^2 f(0,0)}{\partial x \partial y}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\left[\frac{\partial f(x,0)}{\partial y}-\frac{\partial f(0,0)}{\partial y}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{x}{x}=1.$$
$$\frac{\partial^2 f(0,0)}{\partial y \partial x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{y}\left[\frac{\partial f(0,y)}{\partial x}-\frac{\partial f(0,0)}{\partial y}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{-y}{y}=-1.$$

■

从以上两例可知, 一般来说

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \neq \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}.$$

这样的偏导数称为**混合偏导数**, 对 $x$ 和 $y$ 的求导次序是不能随便交换的.

**定理 4.7 (偏微分算子的可交换性)**

设函数 $f: D \to \mathbb{R}$, 其中 $D$ 是 $\mathbb{R}^2$ 中的开集. 若 $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ 在 $(x_0,y_0)$ 的某个邻域内存在, 且 $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ 在

$(x_0,y_0)$ 处连续, 则 $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$ 在 $(x_0,y_0)$ 处存在, 且

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}.$$

**证明** 令

$$\varphi(h,k)=[f(x_0+h,y_0+k)-f(x_0+h,y_0)]-[f(x_0,y_0+k)-f(x_0,y_0)].$$

再令

$$g(x)=f(x,y_0+k)-f(x,y_0).$$

则由 Lagrange 中值定理可知, 存在 $\theta_1,\theta_2\in(0,1)$ 使得

$$\begin{aligned}\varphi(h,k)=g(x_0+h)-g(x_0)=g'(x_0+\theta_1 h)h&=\frac{\partial f}{\partial x}(x_0+\theta_1 h,y_0+k)h-\frac{\partial f}{\partial x}(x_0+\theta_1 h,y_0)h\\&=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x_0+\theta_1 h,y_0+\theta_2 k)hk.\end{aligned}$$

由于 $\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$ 在 $(x_0,y_0)$ 处连续, 因此

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{\varphi(h,k)}{hk}=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x_0,y_0).$$

由于

$$\begin{aligned}\lim_{k\to 0}\frac{\varphi(h,k)}{hk}&=\lim_{k\to 0}\frac{1}{h}\left[\frac{f(x_0+h,y_0+k)-f(x_0+h,y_0)}{k}-\frac{f(x_0,y_0+k)-f(x_0,y_0)}{k}\right]\\&=\frac{1}{h}\left[\frac{\partial f}{\partial y}(x_0+h,y_0)-\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\right].\end{aligned}$$

由引理3.1可知

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left[\frac{\partial f}{\partial y}(x_0+h,y_0)-\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\right]=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x_0,y_0).$$

这表明 $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$ 在 $(x_0,y_0)$ 处存在, 且

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}.$$

■

**注**

**例 4.16** 设函数 $f,x,y$ 都是有二阶连续偏导数的二元函数, 令

$$u=f[x(s,t),y(s,t)].$$

求以下偏导数:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial s^2},\quad\frac{\partial^2 u}{\partial t^2},\quad\frac{\partial^2 u}{\partial s\partial t}.$$

**解** 先求出一阶导

$$\frac{\partial u}{\partial s}=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s},\quad\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}.$$

再求出二阶导

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial s^2}&=\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s}\right)+\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}\right)=\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\frac{\partial x}{\partial s}+\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial^2 x}{\partial s^2}+\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{pf}{\partial y}\right)\frac{\partial y}{\partial s}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial^2 y}{\partial s^2}\\&=\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{pf}{\partial x}\right)\frac{\partial x}{\partial s}+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\frac{\partial y}{\partial s}\right]\frac{\partial x}{\partial s}+\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial^2 x}{\partial s^2}+\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\frac{\partial x}{\partial s}+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\frac{\partial y}{\partial s}\right]\frac{\partial y}{\partial s}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial^2 y}{\partial s^2}\\&=\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\frac{\partial x}{\partial s}+\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}\frac{\partial y}{\partial s}\right)\frac{\partial x}{\partial s}+\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial^2 x}{\partial s^2}+\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\frac{\partial x}{\partial s}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\frac{\partial y}{\partial s}\right)\frac{\partial y}{\partial s}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial^2 y}{\partial s^2}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(\frac{\partial x}{\partial s}\right)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\frac{\partial y}{\partial s}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial^2 x}{\partial s^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(\frac{\partial y}{\partial s}\right)^2 + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial^2 y}{\partial s^2}.\\
\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\frac{\partial y}{\partial t}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2 + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}.\\
\frac{\partial^2 u}{\partial s \partial t} &= \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t}\right) + \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}\right) = \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial^2 x}{\partial s \partial t} + \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial^2 y}{\partial s \partial t}\\
&= \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\frac{\partial y}{\partial s}\right]\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial^2 x}{\partial s \partial t} + \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\frac{\partial y}{\partial s}\right]\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial^2 y}{\partial s \partial t}\\
&= \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\frac{\partial y}{\partial s}\right]\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial^2 x}{\partial s \partial t} + \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\frac{\partial y}{\partial s}\right]\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial^2 y}{\partial s \partial t}\\
&= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\frac{\partial x}{\partial s}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\frac{\partial y}{\partial s}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial^2 x}{\partial s \partial t} + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\frac{\partial x}{\partial s}\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\frac{\partial y}{\partial s}\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial^2 y}{\partial s \partial t}.
\end{aligned}
$$

■

**注** 需要注意 $\frac{\partial f}{\partial x}$ 仍然是 $x$ 与 $s,t$ 的复合函数, 因此计算 $\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$ 时需要继续用链式法则.

**例 4.17** 解以下偏微分方程:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - y\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{1}{2}\frac{\partial z}{\partial y}, \quad y > 0.$$

**解** 设所求函数为 $z = z(x,y)$. 令

$$\xi = x - 2\sqrt{y}, \quad \eta = x + 2\sqrt{y}.$$

则

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = 1, \quad \frac{\partial \eta}{\partial x} = 1, \quad \frac{\partial \xi}{\partial y} = -y^{-1/2}, \quad \frac{\partial \eta}{\partial y} = y^{-1/2}.$$

把 $z$ 关于 $\xi$ 和 $\eta$ 的函数记作 $f(\xi,\eta)$. 由链式法则可知

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{\partial f}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial \xi} + \frac{\partial f}{\partial \eta}.\\
\frac{\partial z}{\partial y} &= \frac{\partial f}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial y} = y^{-1/2}\left(-\frac{\partial f}{\partial \xi} + \frac{\partial f}{\partial \eta}\right).
\end{aligned}
$$

再求二阶导:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial \xi}\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial \eta}\right)\\
&= \frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{\partial f}{\partial \xi}\right)\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{\partial f}{\partial \xi}\right)\frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{\partial f}{\partial \eta}\right)\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{\partial f}{\partial \eta}\right)\frac{\partial \eta}{\partial x}\\
&= \frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2} + 2\frac{\partial^2 f}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2}.\\
\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} &= -\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial \xi}\right)y^{-1/2} + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial \eta}\right)y^{-1/2} + \frac{1}{2}y^{-3/2}\frac{\partial f}{\partial \xi} - \frac{1}{2}y^{-3/2}\frac{\partial f}{\partial \eta}\\
&= -\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{\partial f}{\partial \xi}\right)\frac{\partial \xi}{\partial y}y^{-1/2} - \frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{\partial f}{\partial \xi}\right)\frac{\partial \eta}{\partial y}y^{-1/2} + \frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{\partial f}{\partial \eta}\right)\frac{\partial \xi}{\partial y}y^{-1/2} + \frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{\partial f}{\partial \eta}\right)\frac{\partial \eta}{\partial y}y^{-1/2} + \frac{1}{2}y^{-3/2}\frac{\partial f}{\partial \xi} - \frac{1}{2}y^{-3/2}\frac{\partial f}{\partial \eta}\\
&= y^{-1}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2} - 2\frac{\partial^2 f}{\partial \eta \partial \xi} + \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2}\right) + \frac{1}{2}y^{-3/2}\left(\frac{\partial f}{\partial \xi} - \frac{\partial f}{\partial \eta}\right).
\end{aligned}
$$

于是原方程变为

$$
\begin{aligned}
&\left(\frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2} + 2\frac{\partial^2 f}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2}\right) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2} - 2\frac{\partial^2 f}{\partial \eta \partial \xi} + \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2}\right) - \frac{1}{2}y^{-1/2}\left(\frac{\partial f}{\partial \xi} - \frac{\partial f}{\partial \eta}\right) = \frac{1}{2}y^{-1/2}\left(-\frac{\partial f}{\partial \xi} + \frac{\partial f}{\partial \eta}\right)\\
\iff\ & 4\frac{\partial^2 f}{\partial \xi \partial \eta} = 0 \iff \frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{\partial f}{\partial \xi}\right) = 0.
\end{aligned}
$$

$\frac{\partial f}{\partial \xi}$ 不含 $\eta$, 因此可以把它记作 $g(\xi)$, 这里的 $g$ 是任一可微函数. 于是

$$f(\xi,\eta)=\int g(\xi)\,\mathrm{d}\xi+\psi(\eta)=\varphi(\xi)+\psi(\eta).$$

这里的 $\varphi$ 和 $\psi$ 是任意两个有二阶连续导数的一元函数. 于是可知原方程的解为

$$z=\varphi(x-2\sqrt{y})+\psi(x+2\sqrt{y}).$$

■

**例 4.18** 设 $f(x,y)$ 是具有 $n$ 阶连续偏导数的函数. 令

$$\varphi(t)=f(x+th,y+tk).$$

求 $\varphi$ 的 $n$ 阶导数.

**解** 由链式法则可知

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\varphi(t)=\frac{\partial f}{\partial x}(x+th,y+tk)h+\frac{\partial f}{\partial y}(x+th,y+tk)k=\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)f(x+th,y+tk).$$

上式表明, 微分算子 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$ 对 $\varphi(t)$ 作用等价于用偏微分算子 $h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}$ 对 $f(x+th,y+tk)$ 作用. 因此

$$\begin{aligned}\varphi''(t)&=\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f(x+th,y+tk),\\ &\cdots,\\ \varphi^{(n)}(t)&=\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^n f(x+th,y+tk).\end{aligned}$$

由定理4.7可知 $\frac{\partial}{\partial x}$ 与 $\frac{\partial}{\partial y}$ 可交换, 因此算子 $\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^n$ 可以按二项式定理展开:

$$\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^n=\sum_{i=0}^{n}\mathrm{C}_n^i\left(h\frac{\partial}{\partial x}\right)^i\left(k\frac{\partial}{\partial y}\right)^{n-i}=\sum_{i=0}^{n}\mathrm{C}_n^i\,h^ik^{n-i}\frac{\partial^n}{\partial x^i\partial y^{n-i}}.$$

于是可知 $\varphi$ 的 $n$ 阶导数为

$$\varphi^{(n)}(t)\sum_{i=0}^{n}\mathrm{C}_n^i\,h^ik^{n-i}\frac{\partial^n}{\partial x^i\partial y^{n-i}}f(x+th,y+tk).$$

■

最后来研究一个常用的算子.

**定义 4.6 (Laplace 算子)**

设函数 $u=u(x,y,z)$. 令

$$\Delta u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.$$

则称 $\Delta$ 为 **Laplace 算子** (laplace operator)

♣

**例 4.19** 设函数 $p=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ $(p>0)$.

(1) 求 $\Delta p,\Delta\ln p,\Delta(1/p)$.

(2) 令 $u=f(p)$, 求 $\Delta u$.

**证明** 令 $s=x^2+y^2+z^2$.

(1) (i) 先计算所需要的各阶偏导数:

$$\begin{aligned}\frac{\partial p}{\partial x}&=xs^{-1/2}, &\quad \frac{\partial^2 p}{\partial x^2}&=s^{-1/2}-x^2s^{-3/2},\\ \frac{\partial p}{\partial x}&=ys^{-1/2}, &\quad \frac{\partial^2 p}{\partial x^2}&=s^{-1/2}-y^2s^{-3/2},\\ \frac{\partial p}{\partial x}&=zs^{-1/2}, &\quad \frac{\partial^2 p}{\partial x^2}&=s^{-1/2}-z^2s^{-3/2}.\end{aligned}$$

于是

$$\Delta p = 3s^{-1/2} - \left(x^2+y^2+z^2\right)s^{-3/2} = 3s^{-1/2} - s\cdot s^{-3/2} = 2s^{-1/2} = \frac{2}{p}.$$

(ii) 先计算所需要的各阶偏导数:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \ln p}{\partial x} &= \frac{x}{s}, & \frac{\partial^2 \ln p}{\partial x^2} &= \frac{s-2x^2}{s^2},\\
\frac{\partial \ln p}{\partial x} &= \frac{y}{s}, & \frac{\partial^2 \ln p}{\partial x^2} &= \frac{s-2y^2}{s^2},\\
\frac{\partial \ln p}{\partial x} &= \frac{z}{s}, & \frac{\partial^2 \ln p}{\partial x^2} &= \frac{s-2z^2}{s^2}.
\end{aligned}$$

于是

$$\Delta \ln p = \frac{3s-2\left(x^2+y^2+z^2\right)}{s^2} = \frac{3s-2s}{s^2} = \frac{1}{s} = \frac{1}{p^2}.$$

(iii) 先计算所需要的各阶偏导数:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{p}\right) &= -xs^{-3/2}, & \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{1}{p}\right) &= -s^{-3/2}+3x^2s^{-5/2}.\\
\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{p}\right) &= -ys^{-3/2}, & \frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{1}{p}\right) &= -s^{-3/2}+3y^2s^{-5/2}.\\
\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{p}\right) &= -zs^{-3/2}, & \frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(\frac{1}{p}\right) &= -s^{-3/2}+3z^2s^{-5/2}.
\end{aligned}$$

于是

$$\Delta p = -3s^{-3/2} + 3\left(x^2+y^2+z^2\right)s^{-5/2} = -3s^{-3/2} + 3s\cdot s^{-5/2} = -3s^{-3/2}+3s^{-3/2} = 0.$$

(2) 由链式法则可知:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial x}.$$

于是

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial p}\right)\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial p}\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{\partial f}{\partial p}\right)\frac{\partial p}{\partial x}\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial p}\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}\\
&= \frac{\partial^2 f}{\partial p^2}\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)^2 + \frac{\partial f}{\partial p}\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial p^2}\left(x^2s^{-1}\right) + \frac{\partial f}{\partial p}\left(s^{-1/2}-x^2s^{-3/2}\right).
\end{aligned}$$

类似可得

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2 f}{\partial p^2}\left(y^2s^{-1}\right) + \frac{\partial f}{\partial p}\left(s^{-1/2}-y^2s^{-3/2}\right),\\
\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} &= \frac{\partial^2 f}{\partial p^2}\left(z^2s^{-1}\right) + \frac{\partial f}{\partial p}\left(s^{-1/2}-z^2s^{-3/2}\right).
\end{aligned}$$

于是可知

$$\Delta u = \frac{\partial^2 f}{\partial p^2}\left(s\cdot s^{-1}\right) + \frac{\partial f}{\partial p}\left(3s^{-1/2}-s\cdot s^{-3/2}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial p^2} + \frac{\partial f}{\partial p}\left(\frac{2}{p}\right).$$ ■

**例 4.20** 设函数 $p=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$. 令

$$u = \frac{1}{p}[\varphi(p-at)+\psi(p+at)].$$

则

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\Delta u.$$

**证明** 设 $s=x^2+y^2+z^2, \xi=p-at, \eta=p+at$.

(i) 计算等式左边. 计算一阶导:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{p}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial \varphi}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial t}\right) = \frac{a}{p}\left(-\frac{\partial \varphi}{\partial \xi} + \frac{\partial \varphi}{\partial \eta}\right).$$

计算二阶导:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{a}{p}\left[-\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \xi}\right) + \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \eta}\right)\right] = \frac{a}{p}\left[-\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \xi}\right)\frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \eta}\right)\frac{\partial \eta}{\partial t}\right] = \frac{a^2}{p}\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \eta^2}\right).$$

(ii) 计算等式右边. 计算一阶导:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x}\left[s^{-1/2}\varphi(\xi) + s^{-1/2}\psi(\eta)\right] = -s^{-3/2}x\varphi(\xi) + s^{-1/2}\frac{\partial \varphi}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x} - s^{-3/2}x\psi(\eta) + s^{-1/2}\frac{\partial \psi}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x}\\ &= -s^{-3/2}x\varphi(\xi) + s^{-1}x\frac{\partial \varphi}{\partial \xi} - s^{-3/2}x\psi(\eta) + s^{-1}x\frac{\partial \psi}{\partial \eta}\\ &= -s^{-3/2}x[\varphi(\xi)+\psi(\eta)] + s^{-1}x\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \xi} + \frac{\partial \psi}{\partial \eta}\right).\end{aligned}$$

计算二阶导:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \left(3s^{-5/2}x^2 - s^{-3/2}\right)[\varphi(\xi)+\psi(\eta)] - s^{-3/2}x\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \xi}s^{-1/2}x + \frac{\partial \psi}{\partial \eta}s^{-1/2}x\right)\\ &\quad + \left(-2s^{-2}x^2 + s^{-1}\right)\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \xi} + \frac{\partial \psi}{\partial \eta}\right) + s^{-1}x\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi^2}s^{-1/2}x + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi^2}s^{-1/2}x\right)\\ &= \left(3s^{-5/2}x^2 - s^{-3/2}\right)[\varphi(\xi)+\psi(\eta)] + \left(-3s^{-2}x^2 + s^{-1}\right)\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \xi} + \frac{\partial \psi}{\partial \eta}\right) + s^{-3/2}x^2\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi^2}\right).\end{aligned}$$

类似可知

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \left(3s^{-5/2}y^2 - s^{-3/2}\right)[\varphi(\xi)+\psi(\eta)] + \left(-3s^{-2}y^2 + s^{-1}\right)\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \xi} + \frac{\partial \psi}{\partial \eta}\right) + s^{-3/2}y^2\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi^2}\right).$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \left(3s^{-5/2}z^2 - s^{-3/2}\right)[\varphi(\xi)+\psi(\eta)] + \left(-3s^{-2}z^2 + s^{-1}\right)\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \xi} + \frac{\partial \psi}{\partial \eta}\right) + s^{-3/2}z^2\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi^2}\right).$$

于是

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = s^{-1/2}\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi^2}\right) = \frac{1}{p}\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi^2}\right).$$

综合以上计算可知

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\Delta u.$$ ■

### 4.2.3 隐映射定理

我们在《数学分析 1》中已经看到, 不是每个函数都可以写成显式表达式, 在更多情况下函数会写成隐式表达式, 这样的函数称为 ‘‘隐函数”. 因此我们专门讨论了隐函数的求导法则. 但是这里还存在很多问题需要讨论.

设开集 $D \subseteq \mathbb{R}^2$ 上的一个二元函数 $F(x, y)$. 则二元方程 $F(x, y) = 0$ 给出了 $x$ 和 $y$ 的一个隐式关系式. 但我们无法从这个关系式中一眼看出 $y$ 是不是 $x$ 的函数——对于给定的 $x \in D$, 无法一眼看出是否存在唯一的 $y \in D$ 满足方程 $F(x, y) = 0$. 这就是隐函数存在性问题.

为了研究隐函数存在问题, 可以先从局部开始. 如果存在一点 $(x_0, y_0)$ 满足 $F(x, y) = 0$. 可以先讨论是否存在一个 $(x_0, y_0)$ 的邻域, 使得在这个邻域内 $F(x, y) = 0$ 能确定一个函数. 如果能做到这一点, 我们就可以把这个函数写成 $y = f(x)$. 这个 $f$ 表示 $x$ 到 $y$ 的对应法则, 它客观存在, 但却无法表达出来 (因为初等函数的符号有限, 并非我们的能力有限).

下面先看一个简单的例子. 设二元函数

$$F(x, y) = x^2 + y^2 - 1.$$

则方程 $F(x, y) = 0$ 确定了一个单位圆. 容易知道除了 $(1, 0)$ 和 $(-1, 0)$ 之外的每一点都存在一个邻域使得 $F(x, y) = 0$ 在这个邻域内确定了一个函数 $y = f(x)$. 很容易看出这两个的特殊之处, 在这两点的切线是平行于 $y$ 轴的, 换句

话说, 这两点的偏导数 $\mathcal{D}_y = 0$.

反之, 除了 $(0,1)$ 和 $(0,-1)$ 之外的每一点都存在一个邻域使得 $F(x,y) = 0$ 在这个邻域内确定了一个函数 $x = g(y)$. 类似地可以看出这两点的切线是平行于 $x$ 轴的, 即这两点的偏导数 $\mathcal{D}_x = 0$.

**定理 4.8 (二元函数的隐函数定理)**

设函数 $F : D \to \mathbb{R}$, 其中 $D$ 是 $\mathbb{R}^2$ 中的一个开集. 若 $F$ 满足

1° $F \in C^1(D)$.

2° 存在 $(x_0, y_0) \in D$ 使得 $F(x_0, y_0) = 0$.

3° $\frac{\partial F(x_0,y_0)}{\partial y} \neq 0$.

则存在一个包含 $(x_0, y_0)$ 的开矩形 $I \times J \subseteq D$ 使得

1° 对于任一 $x \in I$, 方程 $F(x, y) = 0$ 在 $J$ 中都有唯一的解 $f(x)$.

2° $y_0 = f(x_0)$.

3° $f \in C^1(I)$.

4° 当 $x \in I$ 时, 有

$$f'(x) = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}(x,y)}{\dfrac{\partial F}{\partial y}(x,y)},$$

其中 $y = f(x)$.

**证明**

所谓隐函数，是指如下式给定的 $F(\vec{x}, y) = 0$ 的 $\vec{x}$ 和 $y$ 的对应关系，即当我们给定一个确定的 $\vec{x}$ 的值, 利用 $F(\vec{x}, y) = 0$ 可以解出一个确定的 $y$, 也即隐含一个多元的 $f(\vec{x}) = y$ 函数。但并不是所有的定义在任意的 $G \subset \mathbb{R}^{n+1}$ 上的任意 $F(\vec{x}, y)$ 都可以给出一个隐含的 $f(\vec{x}) = y$，因此我们要讨论的问题就是给区域 $G$ 和函数 $F(\vec{x}, y)$ 施加什么样的限制可以保证隐函数的存在。

单变量情况

在这一节中我们讨论 $\vec{x}$ 是单一标量而非向量的情况下，如何保证隐函数的存在。

**定理 4.9 (隐函数定理-1 维情况)**

对于定义在给定的点 $(x_0, y_0)$ 的邻域 $U(x_0, y_0)$ 上的函数 $F(x, y) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, 若是

1. $F \in C^p(U, \mathbb{R})$
2. $F(x_0, y_0) = 0$
3. $F'_y(x_0, y_0) \neq 0$

则存在一个二维矩形 $I_x \times I_y \subset U$ 使得在这个区间上存在一个 $C^p$ 的函数 $f(x) = y$ 使得

$$F(x, y) = 0 \Leftrightarrow f(x) = y$$

并且对于这个隐函数 $f(x) = y$ 有导数

$$f'(x) = \frac{F'_x(x, f(x))}{-F'_y(x, f(x))}$$

**证明** [隐函数的存在性]

1. 首先我们证明存在这样的一个隐函数，假设 $F'_y(x_0, y_0) > 0$ 对于其小于 0 的情况，我们在后续会看到有完全相似的证明方式。
2. 因为整个函数 $F(x, y)$ 属于 $C^p$，因此我们可以断定 $F_y(x, y)$ 是连续的，因此我们可以找到一个 $(x_0, y_0)$ 的矩形邻域 $I'_x \times I_y$ 使得 $(x_0, y_0)$ 是其内点且在这个邻域里

$$F'_y(x, y) > 0$$

这意味着在这个邻域里针对任意一个固定的 $x$, 若是我们将 $F(x, y)$ 视为一个对于 y 的单变量函数，则其是

单调递增的，即 $F(x,y)$ 在这个矩形内的任意一条平行 $y$ 轴的直线都是单调递增的。

3. 在这些所有平行于 $y$ 轴的直线中，我们尤其关注经过 $(x_0y_0)$ 的那一条，由于函数 $F(x,y)$ 在这条直线上严格单调递增，因此我们可以断言 $F(x_0,y)$ 在随着 $x=x_0$ 变动到矩形的上部边界的时候有 $F(x_0,y)>0$ 而变动到矩形的下部边界的时候有 $F(x_0,y)<0$。
4. 我们暂记 $I_y=[a,b]$ 这意味着我们在上一条中所述的内容可以表述为

$$\begin{cases}F(x_0,a)<0\\F(x_0,b)>0\end{cases}$$

我们重新思考一下所谓隐函数的存在性，其本质上是说我们要找到一个矩形使得在这个矩形每一条平行于 $y$ 轴的线段都要存在一个 $y$ 使得 $F(x,y)=0$，我们现在的进展是已经找到了一个矩形使得在这个矩形上每一条平行于 $y$ 轴的线段都是对于 $y$ 严格单调递增的，同时在矩形的上边界找到了一个 $x_0$ 使得 $F(x,y)>0$ 而在下边界 $F(x,y)<0$，此时我们只要在找到的这个矩形中适当的缩小 $x$ 的取值范围，令在这个缩小后的小区间内

$$\begin{cases}F(x,a)>0\\F(x,b)<0\end{cases}$$

5. 满足这一要求是简洁且显然的，我们只需要利用在矩形 $I'_x\times I_y$ 上 $F(x,y)$ 是连续的，我们自然可以找到一个 $x_0\in I_x\subset I'_x$ 作为 $x_0$ 的邻域使得在这个邻域上有

$$\begin{cases}F(x,a)>0\\F(x,b)<0\end{cases}$$

6. 对于矩形 $I_x\times I_y$，我们有 $F(x,y)$ 对于每一个固定的 $x$ 都是针对 $y$ 的连续的严格单调递增函数，且 $F(x,y)$ 在矩形的下边界的时候始终小于 0，而在上边界的时候始终大于 0。那么由于连续函数的介值性，在这个矩形内的每一条平行于 $y$ 轴的线段，我们都可以找到一个 $y$ 使得 $F(x,y)=0$，这也意味着我们找到了一个由 x 到 y 的一个映射使得给定一个 $x$ 可以找到一个确定的 $y$。这也就证明了隐函数的存在性。

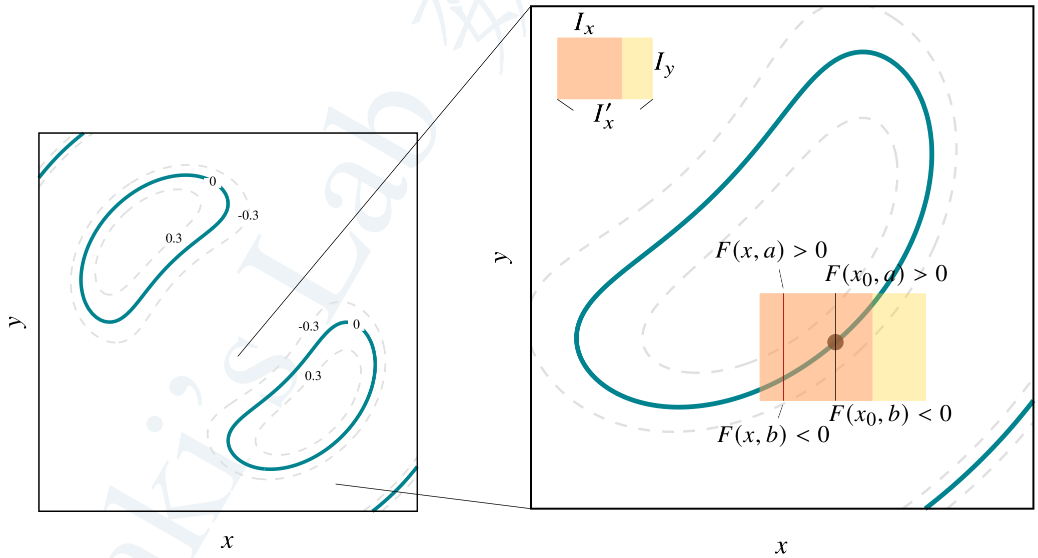



**图 4.4:** 隐函数在邻域的存在性.

**证明** [隐函数的连续性]

1. 隐函数的连续性是一个在其存在性中已经被隐形包含的性质，事实上我们在刚才的证明中已经证明了这一点，只需要换个角度思考与理解我们刚才的证明
2. 在隐函数存在的证明中我们证明了对于给定的一点 $(x_0,y_0)$ 只要其满足上述的三个条件我们都可以找到一个小矩形使得在这个小矩形中隐函数存在，需要注意的是上面证明中 $I_y$ 的给定具有极大的任意性，事实

上我们只是找了一个矩形使得 $F_y'(x,y)$ 在这个矩形里有保号性，那么我们任意缩小这个矩形，$F_y'(x,y)$ 仍然是保号的，此时对于任意给定的 $\varepsilon$ 我们要求这个矩形 $I_x' \times I_y$ 中

$$|I_y| < \varepsilon$$

3. 重复证明隐函数的连续性的后续证明，我们还是会找到一个 $I_x = [c,d]$ 使得在矩形 $I_x \times I_y$ 上隐函数是存在的，这也意味着对于任意给定的 $\varepsilon > 0$, 只要

$$|x - x_0| < \min\{|c - x_0|, |d - x_0|\}$$

这时 $x$ 的取值范围就在 $I_x'$ 中，进而隐函数 $f(x)$ 的取值就在 $I_y$ 中，这也就是连续性的原本定义。至此我们证明了隐函数在 $x_0$ 处的连续性。

4. 对于我们在存在性证明中找到的矩形中的隐函数上的任何一点，都满足定理要求的三个条件，即其可以替代定理条件中 $(x_0, y_0)$ 的地位，因此我们上述对 $x_0$ 处隐函数的连续性证明也可以迁移到任何一个存在性证明中所声明的矩形对应 $x$ 区间上的值。

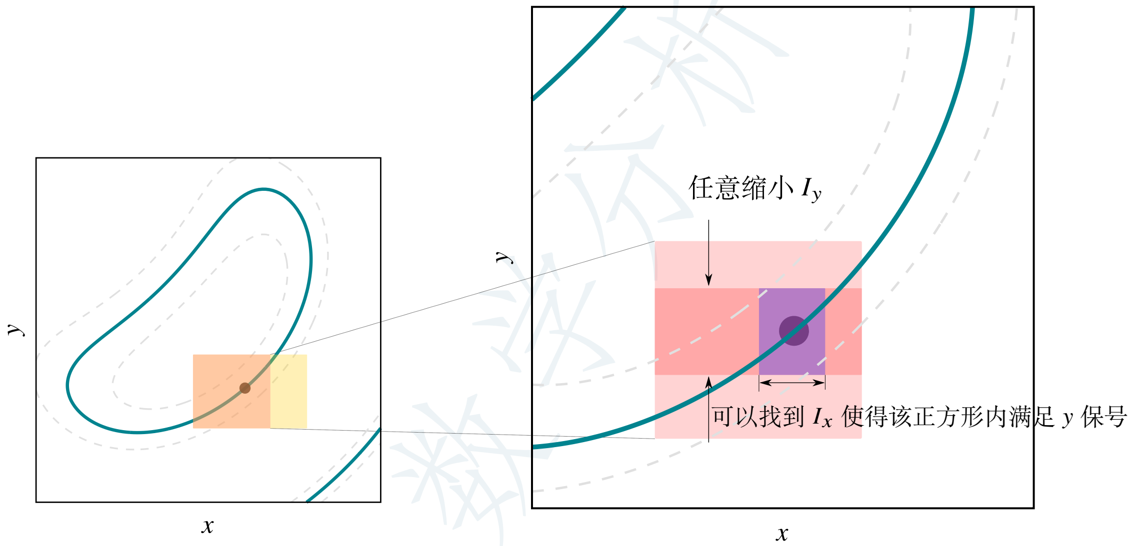



**图 4.5:** 隐函数的连续性.

**证明** [隐函数的正则性]

1. 对于常值函数 $F(x, f(x))$ 考虑其微分，我们有

$$\begin{aligned}0 = F(x+\Delta x, f(x+\Delta x)) - F(x, f(x)) &= F(x+\Delta x, f(x+\Delta x)) - F(x, f(x+\Delta x)) + F(x, f(x+\Delta x)) - F(x, f(x)) \\ &= F_x'(x+\delta_1\Delta x, f(x+\Delta x))\Delta x + F_y'(x, f(x)+\delta_2\Delta f)\Delta f\end{aligned}$$

其中 $\Delta f := f(x+\Delta x) - f(x), \delta_1, \delta_2$ 是两个由中值定理所产生的 $[0,1]$ 之间的未知但确定的数值。

2. 我们所要求的就是

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$$

显然由上面一条的证明，我们有

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{F_x'(x+\delta_1\Delta x, f(x+\Delta x))}{-F_y'(x, f(x)+\delta_2\Delta f)}$$

3. 由于 $F(x,y)$ 和 $f(x)$ 都是连续函数，因此我们有

$$f'(x) = \frac{F_x'}{-F_y'}$$

4. 若是 $F(x,y) \in C^p$，那么显然有 $F_x', F_y'$ 都属于 $C^{p-1}$，则显然有

$$f'(x) \in C^{p-1}$$

进而可以证明

$$f(x) \in C^p$$

多变量情况

在这一节中我们讨论 $\vec{x}$ 是向量的情况下，如何保证隐函数的存在。

**定理 4.10 (隐函数定理-n 维情况)**

对于定义在给定的点 $(\vec{x_0}, y_0)$ 的邻域 $U(\vec{x_0}, y_0)$ 上的函数 $F(\vec{x}, y) : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$, 若是

1. $F \in C^p(U, \mathbb{R})$
2. $F(\vec{x_0}, y_0) = 0$
3. $F'_y(\vec{x_0}, y_0) \neq 0$

则存在一个高维矩形 $I_x \times I_y \subset U$ 使得在这个区间上存在一个 $C^p$ 的函数 $f(\vec{x}) = y$ 使得

$$F(\vec{x}, y) = 0 \Leftrightarrow f(\vec{x}) = y$$

并且对于这个隐函数 $f(\vec{x}) = y$ 有导数

$$\nabla f'(\vec{x}) = \frac{\vec{F}'_x(\vec{x}, f(\vec{x}))}{-F'_y(\vec{x}, f(\vec{x}))}$$

**证明** [隐函数的存在性]

1. 本定理的证明可以完全的仿照 1 维的情况进行
2. 具体来讲就是将我们原本的矩形 $I'_x \times I_y$ 中 $I_y$ 视为矩形的高，而将 $I_x$ 由原本的底边换为一个高维矩形 $I'_x$ 做底面。
3. 我们的讨论仍然是先找一个 $I'_x \times I_y$ 使得在这个高维矩形上 $F'_y(\vec{x}, y) > 0$，后在单独考察 $x = x_0$，之后对上底面和下底面取较小的矩形 $I_x$ 使得在这些矩形上 $F(\vec{x}, y)$ 维持其符号，这就相当于我们在整个立方体 $I_x \times I_y$ 中截出唯一一个曲面使得在这个曲面上 $F(x, y) = 0$ 这便是我们的高维隐函数。

**证明** [隐函数的连续性]

1. 同 1 维情况完全相同，我们仍然可以以完全相同的方式将存在性的证明用来进行连续性的证明。

**证明** [隐函数的正则性]

1. 同样考察常值函数 $F(\vec{x}, f(\vec{x}))$ 的微分，有

$$0 = F(\vec{x} + \Delta\vec{x}, f(\vec{x} + \Delta\vec{x})) - F(\vec{x}, f(\vec{x})) = \vec{F}'_x(\vec{x} + \vec{\delta_1} * \Delta\vec{x}, f(\vec{x} + \Delta\vec{x})) \cdot \Delta\vec{x} + F'_y(\vec{x}, f(x) + \delta_2 \Delta f)\Delta f$$

其中 $*$ 运算记为两个等长的向量按照元素分别相乘，运算后仍保持原长度。而 $\cdot$ 则是普通的向量点乘。

2. 现在我们若是将上式中的 $\vec{\Delta x}$ 限制在单一的方向上，即其只有唯一的一个分量不为 0，则我们的式子就会退化回一维情况，如下在这个情况下仿照 1 维情况进行运算我们会得到

$$f'_i(x) = \frac{F'_{x_i}}{-F_y}$$

3. 同理由原函数的正则性，我们可以推的隐函数的正则性。

下面看两个例子.

**例 4.21** 设方程

$$x^2y^2 - 3y + 2x^3 = 0.$$

判断方程是否在点 $(1, 1)$ 和 $(1, 2)$ 附近确定了函数 $y = f(x)$. 如果是, 则求出 $f'(1)$.

**解** 令 $F(x,y)=x^2y^2-3y+2x^3$. 计算得 $F(1,1)=F(1,2)=0$. 由于

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x,y)=2x^2y-3.$$

故

$$\frac{\partial F}{\partial y}(1,1)=-1\neq 0,\quad \frac{\partial F}{\partial y}(1,2)=1\neq 0.$$

由隐函数定理可知方程在点 $(1,1)$ 和 $(1,2)$ 附近都可以确定函数 $y=f(x)$. 分别计算点 $(1,1)$ 和 $(1,2)$ 附近确定的函数在 $x=1$ 处的导数:

$$f'(1)=-\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}(1,1)}{\dfrac{\partial F}{\partial x}(1,1)}=-\frac{8}{-1}=8.\quad f'(1)=-\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}(1,2)}{\dfrac{\partial F}{\partial x}(1,2)}=-\frac{14}{1}=-14.$$ ■

以上例子是一个关于 $y$ 的二次方程, 因此我们可以用公式解出 $y$. 但更多情况下, 解出 $y$ 是行不通的, 这时就只能用隐函数定理解决问题.

**例 4.22** 设方程

$$\sin x+\ln y-xy^3=0.$$

判断方程是否在 $(0,1)$ 附近确定了函数 $y=f(x)$. 如果是, 则求出 $f'(0)$.

**解** 令 $F(x,y)=\sin x+\ln y-xy^3$. 计算得 $F(0,1)=0$. 由于

$$\frac{\partial F}{\partial y}(0,1)=\frac{1}{y}-3xy^2\bigg|_{(0,1)}=1\neq 0$$

由隐函数定理可知方程在点 $(0,1)$ 附近可以确定函数 $y=f(x)$. 于是

$$f'(0)=-\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}(0,1)}{\dfrac{\partial F}{\partial x}(0,1)}=-\frac{0}{1}=0.$$ ■

用完全类似地方法可以证明多元实值函数的隐函数定理.

**定理 4.11 (多元实值函数的隐函数定理)**

设函数 $F:D\to\mathbb{R}$, 其中 $D$ 是 $\mathbb{R}^2$ 中的一个开集. 若 $F$ 满足

1° $F\in C^1(D)$.

2° 存在 $(x_0,y_0)\in D$ 使得 $F(x_0,y_0)=0$.

3° $\partial F(x_0,y_0)/\partial y\neq 0$.

则存在一个包含 $(x_0,y_0)$ 的开矩形 $I\times J\subseteq D$ 使得

1° 对于任一 $x\in I$, 方程 $F(x,y)=0$ 在 $J$ 中都有唯一的解 $f(x)$.

2° $y_0=f(x_0)$.

3° $f\in C^1(I)$.

4° 当 $x\in I$ 时, 有

$$f'(x)=-\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}(x,y)}{\dfrac{\partial F}{\partial y}(x,y)},$$

其中 $y=f(x)$.

♡

下面看几个例子.

**例 4.23**

**解** XXX

**例 4.24**

**解** XXX

下面我们用数学归纳法把隐函数定理推广到向量值函数中.

**定理 4.12 (隐映射定理)**

设函数 $F: D \to \mathbb{R}$, 其中 $D$ 是 $\mathbb{R}^2$ 中的一个开集. 若 $F$ 满足

1° $F \in C^1(D)$.

2° 存在 $(x_0, y_0) \in D$ 使得 $F(x_0, y_0) = 0$.

3° $\partial F(x_0, y_0)/\partial y \neq 0$.

则存在一个包含 $(x_0, y_0)$ 的开矩形 $I \times J \subseteq D$ 使得

1° 对于任一 $x \in I$, 方程 $F(x, y) = 0$ 在 $J$ 中都有唯一的解 $f(x)$.

2° $y_0 = f(x_0)$.

3° $f \in C^1(I)$.

4° 当 $x \in I$ 时, 有

$$f'(x) = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}(x, y)}{\dfrac{\partial F}{\partial y}(x, y)},$$

其中 $y = f(x)$.

**证明**

### 4.2.4 逆映射定理

**定理 4.13 (局部逆映射定理)**

**证明**

**定理 4.14 (逆映射定理)**

**证明**

## 4.3 多元函数微分学的应用

### 4.3.1 多元函数的微分中值定理和 Taylor 公式

在多元函数中也有微分中值定理.

**定理 4.15 (多元函数的微分中值定理)**

设函数 $f: D \to \mathbb{R}$, 其中 $D \subseteq \mathbb{R}^n$ 是一个凸区域. 则对于任意 $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \in D$, 在 $\boldsymbol{x}_1$ 和 $\boldsymbol{x}_2$ 确定的线段上都存在一点 $\boldsymbol{\xi}$ 使得

$$f(\boldsymbol{x}_2) - f(\boldsymbol{x}_1) = f'(\boldsymbol{\xi})(\boldsymbol{x}_2 - \boldsymbol{x}_1). \tag{4.2}$$

♡

**证明** 令

$$\varphi(t) = f[t\boldsymbol{x}_2 + (1-t)\boldsymbol{x}_1], \quad t \in [0,1].$$

显然 $t\boldsymbol{x}_1 + (1-t)\boldsymbol{x}_2$ 是 $\boldsymbol{x}_1$ 和 $\boldsymbol{x}_2$ 确定的线段上的点, 因此 $\varphi$ 是 $[0,1]$ 上的一个可微函数. 由一元函数的 Lagrange 中值定理可知, 存在 $\theta \in (0,1)$ 使得

$$\varphi'(\theta) = \varphi(1) - \varphi(0) = f(\boldsymbol{x}_2) - f(\boldsymbol{x}_1).$$

令 $\boldsymbol{\xi} = \theta\boldsymbol{x}_2 + (1-\theta)\boldsymbol{x}_1 = \theta(\boldsymbol{x}_2 - \boldsymbol{x}_1) + \boldsymbol{x}_1$, 由链式法则可知

$$\varphi'(\theta) = f'(\boldsymbol{\xi})(\boldsymbol{x}_2 - \boldsymbol{x}_1).$$

这表明在 $\boldsymbol{x}_1$ 和 $\boldsymbol{x}_2$ 确定的线段上都存在一点 $\boldsymbol{\xi}$ 使得

$$f(\boldsymbol{x}_2) - f(\boldsymbol{x}_1) = f'(\boldsymbol{\xi})(\boldsymbol{x}_2 - \boldsymbol{x}_1).$$

■

**注** 设 $\boldsymbol{x}_1 = (a_1, a_2, \cdots, a_n)$, $\boldsymbol{x}_2 = (b_1, b_2, \cdots, b_n)$, 则等式4.2可以写成

$$f(b_1, b_2, \cdots, b_n) - f(a_1, a_2, \cdots, a_n) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(\boldsymbol{\xi})(b_1 - a_1) + \frac{\partial f}{\partial x_2}(\boldsymbol{\xi})(b_2 - a_2) + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(\boldsymbol{\xi})(b_n - a_n).$$

对于一个一元函数 $f$, 若它在开区间 $I$ 上的导数为零, 则 $f$ 在 $I$ 上为常值函数. 在多元函数中也有类似的结论.

**定理 4.16**

设函数 $f: D \to \mathbb{R}$, 其中 $D$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的一个区域. 若对于任一 $\boldsymbol{x} \in D$ 都有

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(\boldsymbol{x}) = \frac{\partial f}{\partial x_2}(\boldsymbol{x}) = \cdots = \frac{\partial f}{\partial x_n}(\boldsymbol{x}) = 0.$$

则 $f$ 是 $D$ 上的一个常值函数.

♡

**证明** (i) 当 $D$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上的一个凸区域时, 由多元函数的微分中值定理立刻可知 $f$ 是 $D$ 上的一个常值函数.

(ii) 当 $D$ 不是 $\mathbb{R}^n$ 上的一个凸区域时. 任取 $\boldsymbol{x}_0 \in D$. 令

$$A = \{\boldsymbol{x} \in D : f(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}_0)\}, \qquad B = \{\boldsymbol{x} \in D : f(\boldsymbol{x}) \neq f(\boldsymbol{x}_0)\}.$$

下面来证明 $B =\neq \varnothing$. 显然 $A \neq \varnothing$. 任取 $\boldsymbol{a} \in A \subseteq D$. 由于 $D$ 是一个开集, 因此存在邻域 $N_r(\boldsymbol{a}) \subseteq D$. 由于邻域都是凸区域, 因此 $f$ 在 $N_r(\boldsymbol{a})$ 上是常值函数. 因此对于任一 $\boldsymbol{x} \in N_r(\boldsymbol{a})$ 都有

$$f(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{a}) = f(\boldsymbol{x}_0).$$

因此 $N_r(\boldsymbol{a}) \subseteq A$, 这表明 $A$ 是一个开集. 同理可证 $B$ 也是一个开集. 由于 $A \cup B = D$, $A \cap B = \varnothing$, $A \neq \varnothing$, 且 $D$ 是一个连通集, 因此 $B = \varnothing$.

■

对于一个一元函数 $f$, 如果它有连续的高阶导数, 则可以把微分中值定理推广为 Taylor 公式. 在多元函数中也有类似的结论.

为此我们需要先把二项式定理推广为多项式定理.

**定理 4.17 (多项式定理)**

设多项式 $x_1+x_2+\cdots+x_n$. 它的 $k$ $(k\in\mathbb{N}^*)$ 次展开式为

$$(x_1+x_2+\cdots+x_n)^k=\sum_{\alpha_1+\cdots+\alpha_n=k}\frac{k!}{\alpha_1!\cdots\alpha_n!}x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}\cdots x_n^{\alpha_n}.$$

**证明** 对 $n$ 进行归纳. 当 $n=2$ 时命题就是二项式定理. 假设 $n-1$ 的情况命题成立, 下面来看 $n$ 的情况. 由归纳假设和二项式定理可知

$$\begin{aligned}(x_1+x_2+\cdots+x_n)^k&=[(x_1+x_2+\cdots+x_{n-1})+x_n]^k=\sum_{\alpha_n=0}^{k}\frac{k!}{\alpha_n!(k-\alpha_n)!}(x_1+\cdots+x_{n-1})^{k-\alpha_n}x_n^{\alpha_n}\\&=\sum_{\alpha_n=0}^{k}\frac{k!}{\alpha_n!(k-\alpha_n)!}\sum_{\alpha_1+\cdots+\alpha_{n-1}=k-\alpha_n}\frac{(k-\alpha_n)!}{\alpha_1!\cdots\alpha_{n-1}!}x_1^{\alpha_1}\cdots x_{n-1}^{\alpha_{n-1}}x_n^{\alpha_n}\\&=\sum_{\alpha_1+\cdots+\alpha_n=k}\frac{k!}{\alpha_1!\cdots\alpha_n!}x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}\cdots x_n^{\alpha_n}.\end{aligned}$$

由数学归纳原理可知对于任一 $n\in\mathbb{N}^*$ 命题都成立. ■

为了让表达式简洁, 我们可以引入**多重指标记号** (multi-index notation).

**定义 4.7 (多重指标记号)**

一组指标 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 可以记作 $n$ 维向量的形式:

$$\boldsymbol{\alpha}=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n).$$

称这样的记号为**多重指标记号** (multi-index notation). 规定如下几种记号:

$$\begin{aligned}&|\boldsymbol{\alpha}|=\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n.\\&\boldsymbol{\alpha}!=\alpha_1!\alpha_2!\cdots\alpha_n!.\\&\mathrm{C}_k^{\boldsymbol{\alpha}}=\frac{k!}{\boldsymbol{\alpha}!}=\frac{k!}{\alpha_1!\alpha_2!\cdots\alpha_n!}=\frac{k!}{\boldsymbol{\alpha}!},\quad k=|\boldsymbol{\alpha}|.\\&\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{\alpha}}=x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}\cdots x_n^{\alpha_n}.\\&\mathscr{D}^{\boldsymbol{\alpha}}=\frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1^{\alpha_1}}\frac{\partial^{\alpha_2}}{\partial x_2^{\alpha_2}}\cdots\frac{\partial^{\alpha_n}}{\partial x_n^{\alpha_n}}=\frac{\partial^{\boldsymbol{\alpha}}}{\partial x_1^{\alpha_1}\partial x_2^{\alpha_2}\cdots\partial x_n^{\alpha_n}}.\end{aligned}$$

设另一个多重指标 $\boldsymbol{\beta}=(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)$, 并规定:

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{\alpha}\pm\boldsymbol{\beta}=(\alpha_1\pm\beta_1,\alpha_2\pm\beta_2,\cdots,\alpha_n\pm\beta_n).\\&\boldsymbol{\alpha}\leq\boldsymbol{\beta}\iff\alpha_i\pm\beta_i,\quad i=1,2,\cdots,n.\\&\mathrm{C}_{\boldsymbol{\alpha}}^{\boldsymbol{\beta}}=\mathrm{C}_{\alpha_1}^{\beta_1}\mathrm{C}_{\alpha_2}^{\beta_2}\cdots\mathrm{C}_{\alpha_n}^{\beta_n}=\frac{\boldsymbol{\alpha}!}{\boldsymbol{\beta}!(\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta})!}.\end{aligned}$$

有了多重指标记号就可以把多项式定理写成

$$(x_1+x_2+\cdots+x_n)^k=\sum_{|\boldsymbol{\alpha}|=k}\frac{k!}{\boldsymbol{\alpha}!}\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{\alpha}}=\sum_{|\boldsymbol{\alpha}|=k}\mathrm{C}_k^{\boldsymbol{\alpha}}\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{\alpha}}$$

这样就在形式上与二项式定理一致了.

下面来证明多元函数的 Taylor 公式.

**定理 4.18**

**证明**

**定理 4.19**

**证明**

**定理 4.20**

**证明**

**定理 4.21**

**证明**

### 4.3.2 多元函数的极值问题

条件极值

**定理 4.22**

**证明**

### 4.3.3 曲线的曲率

下面来研究光滑曲线的 ‘‘弯曲程度’’. 我们称曲线的 ‘‘弯曲程度’’ 为 ‘‘曲率’’. 首先来看最简单的光滑曲线——圆. 圆的形状只由半径 $r$ 一个参数决定. 显然当 $r$ 越大, 圆的 ‘‘曲率’’ 越小. 当 $r \to +\infty$, 可以认为圆变成了直线, 而直线显然是不弯曲的, 因此 ‘‘曲率’’ 应定义为零. 不难想到用 $1/r$ 来定义圆的 ‘‘曲率’’. 显然, 圆的每一点有一样的 ‘‘曲率’’, 因此 $1/r$ 表示的是圆上任意一点的 ‘‘曲率’’. 当 $r \to +\infty$ 时 $1/r \to 0$, 因此在这个定义之下, 直线上任意一点的 ‘‘曲率’’ 都是零.

对于一般的光滑曲线 $\Gamma$, 如果要定义其上一点 $P$ 处的曲率, 可以先考虑这一点附近的 ‘‘平均曲率’’. 在 $P$ 的附近两侧分别取 $P_1, P_2$. 若这三点共线, 则认为 $P_1$ 到 $_2$ 这段曲线的 ‘‘平均曲率’’ 为零. 若它们不共线, 则把它们确定的圆的 ‘‘曲率’’ 定义为这段曲线的 ‘‘平均曲率’’. 当 $\max\{|PP_1|, |PP_2|\} \to 0$ 时,‘‘平均曲率’’ 的极限值可以定义为这段曲线的 ‘‘曲率’’.

以上定义 ‘‘曲率’’ 的方法虽然直观, 但不易用公式表达. 因此我们可以考虑用另一种办法刻画 ‘‘曲率’’. 还是回到圆, 不难发现圆的圆心角 $\theta$ 和它所对的弧长 $r\theta$ 的比值是

$$\frac{\theta}{r\theta} = \frac{1}{r}.$$

恰好是我们定义的圆的 ‘‘曲率’’. 而圆心角 $\theta$ 等于它所对的弧的起点和终点的切线的夹角. 对于一条直线, 它的任意两点的切线夹角都是零, 因此用这个方法定义的直线 ‘‘曲率’’ 也是零. 这个定义方法可以容易推广到一般光滑曲线中. 为此需要先研究曲线上一点的切向量.

设曲线

$$\Gamma : \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t), \quad \alpha \le t \le \beta,$$

其中 $\boldsymbol{r} = (x, y, z)$, $\boldsymbol{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$. 函数 $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ 都在 $[\alpha, \beta]$ 上连续可导. 在 $\Gamma$ 上任取定一点 $P_0(x(t_0), y(t_0), z(t_0))$. 在 $P_0$ 附近取一点 $P(x(t), y(t), z(t))$. 则 $P_0P$ 的方向向量为

$$\frac{\boldsymbol{r}(t) - \boldsymbol{r}(t_0)}{t - t_0}.$$

当 $t \to t_0$ 时, 若以上向量值函数的极限存在, 则可以定义为 "切向量".

**定义 4.8 (切向量)**

设曲线

$$\Gamma: \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t), \quad \alpha \le t \le \beta,$$

其中 $\boldsymbol{r} = (x, y, z)$, $\boldsymbol{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$. 令

$$\boldsymbol{r}'(t_0) = \lim_{t \to t_0} \frac{\boldsymbol{r}(t) - \boldsymbol{r}(t_0)}{t - t_0} = (x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0)).$$

则称 $\boldsymbol{r}'(t_0)$ 为 $\Gamma$ 在点 $\boldsymbol{r}(x_0)$ 处的**切向量** (tangent vector).

♣

注 若 $t_0 = \alpha$, 则 $\boldsymbol{r}'(t_0)$ 表示

$$\lim_{t \to t_0+)} \frac{\boldsymbol{r}(t) - \boldsymbol{r}(t_0)}{t - t_0} = \left(x'_+(t_0), y'_+(t_0), z'_+(t_0)\right).$$

若 $t_0 = \beta$, 则 $\boldsymbol{r}'(t_0)$ 表示

$$\lim_{t \to t_0-)} \frac{\boldsymbol{r}(t) - \boldsymbol{r}(t_0)}{t - t_0} = \left(x'_-(t_0), y'_-(t_0), z'_-(t_0)\right).$$

如果 $\Gamma$ 在 $\boldsymbol{r}(t_0)$ 处的切向量为 $\boldsymbol{r}'(t_0) = (x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0))$, 则可以立刻写出 $\Gamma$ 在 $\boldsymbol{r}(t_0)$ 处的切线:

$$\frac{x - x(t_0)}{x'(t_0)} = \frac{y - y(t_0)}{y'(t_0)} = \frac{z - z(t_0)}{z'(t_0)}.$$

由此可见, 如果 $x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0)$ 同时为零, 则切线不存在. 为了保证曲线每一点都有切线, 我们希望它在每一点的切向量都不为零.

**定义 4.9 (正则曲线)**

设曲线 $\Gamma: \boldsymbol{r}(t)$ $(\alpha \le t \le \beta)$. 若 $\Gamma$ 在 $t_0$ 处的切向量 $\boldsymbol{r}'(t_0) \ne \boldsymbol{0}$, 则称 $t_0$ 是 $\Gamma$ 的一个正则点. 若 $\boldsymbol{r}(t)$ 的分量函数都连续可导, 且曲线上的每一个点都是正则点, 即对于任一 $t \in [\alpha, \beta]$ 都有 $\boldsymbol{r}'(t) \ne \boldsymbol{0}$, 则称 $\Gamma$ 是一条**正则曲线** (regular curve).

♣

注 若一个点不是正则点, 则称为**奇异点** (singular point).

下面看一个例子, 虽然曲线的各分量方程都连续可导, 但曲线不是正则曲线.

**例 4.25** 设曲线

$$\Gamma: \begin{cases} x = t^3 \\ y = t^2 \end{cases}.$$

虽然 $x = t^3$, $y = t^2$ 都连续可导, 但 $t = 0$ 不是 $\Gamma$ 的正则点.

注 如图, 曲线 $\Gamma$ 在 $x = 0$ 没有切线, 因此它在 $x = 0$ 处切向量为零.

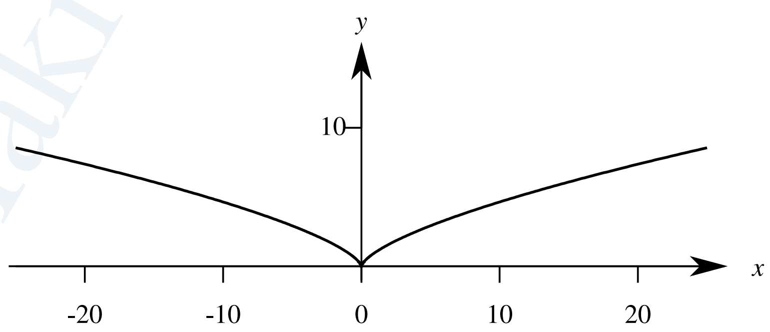


图 4.6: $\Gamma$ 曲线示意图.

现在可以用切向量和弧长来刻画曲线的 “曲率”.

**定义 4.10 (曲率)**

设正则曲线 $\Gamma: \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t)\ (\alpha \le t \le \beta)$. 令 $\boldsymbol{r}(t_0)$ 与 $\boldsymbol{r}(t_0+\Delta t)$ 之间的弧长为 $\Delta s$, 令 $\boldsymbol{r}'(t_0)$ 与 $\boldsymbol{r}'(t_0+\Delta t)$ 之间的夹角为 $\Delta\theta$. 若以下极限存在

$$\lim_{\Delta s\to 0}\left|\frac{\Delta\theta}{\Delta s}\right|.$$

则极限值称为 $\Gamma$ 在 $\boldsymbol{r}(t_0)$ 处的**曲率** (curvature), 记作 $\kappa(t_0)$. ♣

**注** $\boldsymbol{r}'(t_0)$ 与 $\boldsymbol{r}'(t_0+\Delta t)$ 之间的夹角可能是负值, 但刻画曲率的时候并不关心角度的正负.

定义了切向量以后, 曲线的弧长公式就可以表示为

$$S(\Gamma) = \int_\alpha^\beta \sqrt{[x'(t)]^2 + [{}'(t)]^2 + [z'(t)]^2}\,\mathrm{d}t = \int_\alpha^\beta \|\boldsymbol{r}'(t)\|\,\mathrm{d}t.$$

令

$$s(t) = \int_\alpha^t \|\boldsymbol{r}'(\tau)\|\,\mathrm{d}\tau. \tag{4.3}$$

则 $s(t)$ 表示从 $\boldsymbol{r}(\alpha)$ 出发沿着曲线到达 $\boldsymbol{r}(t)$ 时所路过的弧长. 由于 $\|\boldsymbol{r}'(\tau)\|$ 连续, 由微积分基本定理可知 $s(t)$ 可导, 且

$$\frac{\mathrm{d}s(t)}{\mathrm{d}t} = \|\boldsymbol{r}'(t)\|, \quad \alpha \le t \le \beta. \tag{4.4}$$

此时若 $\Gamma$ 是一条正则曲线, 则 $\|\boldsymbol{r}'(t)\| > 0$. 这表明当 $\Gamma$ 正则时, $s(t)$ 严格递增. 此时 $s(t)$ 存在反函数 $t = t(s)$. 这表明如果 $\Gamma$ 是正则的, 则弧长可以作为曲线方程的参数. 令

$$\boldsymbol{R}(s) = \boldsymbol{r}[t(s)].$$

则等式4.3变为

$$s = \int_\alpha^s \|\boldsymbol{R}'(\rho)\|\,\mathrm{d}\rho.$$

两边对 $s$ 求导可得 $1 = \|\boldsymbol{R}'(s)\|$. 这表明如果用弧长 $s$ 作参数, $\boldsymbol{R}'(s)$ 就可以成为 $\Gamma$ 上各点处的单位切向量. 反之, 若 $\|\boldsymbol{r}'(t)\| = 1$, 则由弧长公式可知

$$s = \int_\alpha^t \|\boldsymbol{r}'(\tau)\|\,\mathrm{d}\tau = t - \alpha.$$

因此 $t = s + \alpha$. 和表明 $t$ 是从 $\alpha$ 起算的弧长.

以上讨论表明用弧长作为参数可以使计算大大简化. 这是因为弧长是 “正交不变量”, 用物理学的视角看就是 “运动不变量”. 因此弧长称为曲线的**自然参数** (natural parameter). 向量值函数对自然参数的导数可以简记作:

$$\dot{\boldsymbol{r}} := \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}s}, \qquad \ddot{\boldsymbol{r}} := \frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}s^2}.$$

在实际计算时应尽量选用弧长作曲线方程的参数. 在引入弧度制时充分考虑了这一点. 我们把单位元中弧长为 1 的圆弧所对的圆心角定义为 1 弧度. 这样一来很容易写出自然参数下的圆的参数方程.

**例 4.26** 写出半径为 $r$ 的自然参数方程.

**解** 以圆心角 $\theta$ 为参数的方程为

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}.$$

在弧度制下, 弧长 $s = r\theta$, 因此圆在自然参数下的方程就是

$$\boldsymbol{r}(s) = \left(r\cos\frac{s}{r}, r\sin\frac{s}{r}\right).$$ ■

**注** 此时

$$\boldsymbol{r}'(s)=\left(-\sin\frac{s}{r},\cos\frac{s}{r}\right).$$

因此 $\|\boldsymbol{r}'(s)\|=1$.

下面很自然地要研究曲线在自然参数下的曲率公式.

**定理 4.23 (自然参数方程的曲率公式)**

设正则曲线的自然参数方程为 $\Gamma:\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(s)$. 若 $\boldsymbol{r}''(s)$ 存在, 则

$$\kappa(s)=\|\boldsymbol{r}''(s)\|.$$

**证明** 由于 $\ddot{\boldsymbol{r}}$ 存在, 故 $\dot{\boldsymbol{r}}$ 可导. 设 $\boldsymbol{r}'(s+\Delta s)$ 和 $\boldsymbol{r}'(s)$ 之间的夹角为 $\Delta\theta$. 由于 $\|\boldsymbol{r}'(s)\|=1$, 如图4.7可知:

$$\begin{aligned}\|\boldsymbol{r}''(s)\|&=\left\|\lim_{\Delta s\to 0}\frac{\boldsymbol{r}'(s+\Delta s)-\boldsymbol{r}'(s)}{\Delta s}\right\|=\lim_{\Delta s\to 0}\frac{\|\boldsymbol{r}'(s+\Delta s)-\boldsymbol{r}'(s)\|}{|\Delta s|}=\lim_{\Delta s\to 0}\left|\frac{2\sin(\Delta\theta/2)}{\Delta s}\right|\\&=\lim_{\Delta s\to 0}\left|\frac{\sin(\Delta\theta/2)}{\Delta\theta/2}\right|\left|\frac{\Delta\theta}{\Delta s}\right|=\lim_{\Delta s\to 0}\left|\frac{\Delta\theta}{\Delta s}\right|.\end{aligned}$$

■

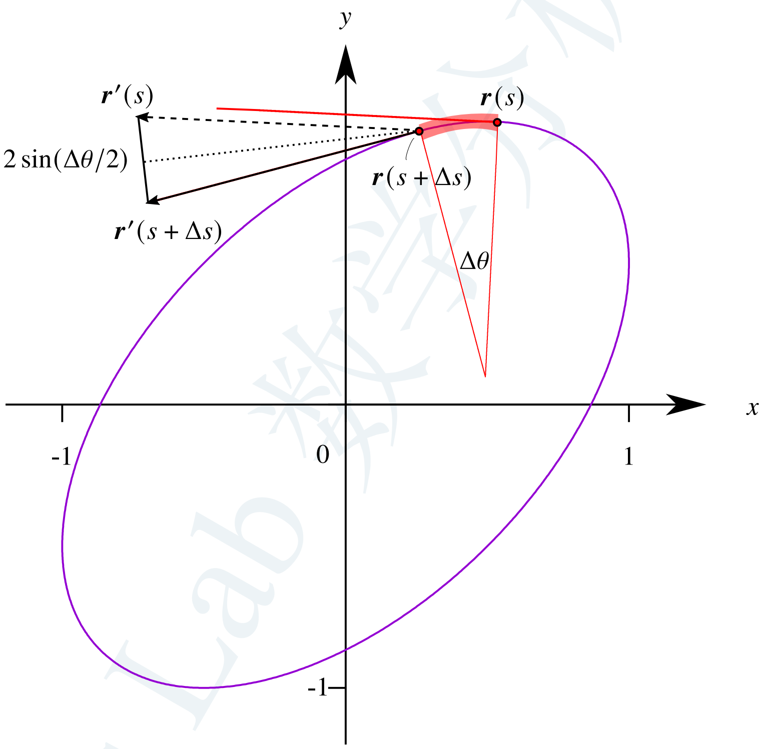



**图 4.7:** 曲率示意图.

用以上公式可以再次计算圆和直线的曲率.

**例 4.27** 设自然参数下的直线方程为

$$L:\boldsymbol{r}(s)=\boldsymbol{u}s+\boldsymbol{v},$$

其中 $\|\boldsymbol{u}\|=1$. 由于 $\boldsymbol{r}'(s)=\boldsymbol{u}$, 故 $\boldsymbol{r}''(s)=\boldsymbol{0}$. 因此直线上任何一点的曲率都是 0.

**例 4.28** 设圆的自然参数方程为

$$\boldsymbol{r}(s)=\left(r\cos\frac{s}{r},r\sin\frac{s}{r}\right).$$

由于

$$\boldsymbol{r}'(s)=\left(-\sin\frac{s}{r},\cos\frac{s}{r}\right),\qquad \boldsymbol{r}''(s)=\left(-\frac{1}{r}\cos\frac{s}{r},-\frac{1}{r}\sin\frac{s}{r}\right).$$

因此

$$\kappa(s)=\|\boldsymbol{r}''(s)\|=\frac{1}{r}.$$

于是可知圆上任何一点的曲率都是 $1/r$.

一般情况下,给出的曲线方程中的参数不一定是自然参数.下面来讨论非自然参数下曲线的曲率计算方法.

**定理 4.24 (一般参数方程的曲率公式)**

设正则曲线的参数方程为 $\Gamma:\boldsymbol{t}=\boldsymbol{r}(t)$. 若 $\boldsymbol{r}''(t)$ 存在, 则

$$\kappa(t)=\frac{\|\boldsymbol{r}'(t)\times\boldsymbol{r}''(t)\|}{\|\boldsymbol{r}'(t)\|^3}.$$

**证明** 设 $t=t(s)$. 由于 $\|\boldsymbol{r}'(s)\|=1$, 因此

$$\boldsymbol{r}'(s)\cdot\boldsymbol{r}'(s)=1.$$

对两边求导得

$$\boldsymbol{r}''(s)\cdot\boldsymbol{r}'(s)+\boldsymbol{r}'(s)\cdot\boldsymbol{r}''(s)=0\iff\boldsymbol{r}''(s)\cdot\boldsymbol{r}'(s)=0$$

因此 $\boldsymbol{r}'(s)$ 和 $\boldsymbol{r}''(s)$ 正交. 于是

$$\|\boldsymbol{r}'(s)\times\boldsymbol{r}''(s)\|=\|\boldsymbol{r}'(s)\|\|\boldsymbol{r}''(s)\|=\|\boldsymbol{r}''(s)\|=\kappa(s)=\kappa(t).$$

根据链式法则相继求出 $\boldsymbol{r}'(s)$ 和 $\boldsymbol{r}''(s)$:

$$\boldsymbol{r}'(s)=\frac{\mathrm{d}\,\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}\,s}=\frac{\mathrm{d}\,\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}\,t}\frac{\mathrm{d}\,t}{\mathrm{d}\,s}=\boldsymbol{r}'(t)t'(s).$$

$$\boldsymbol{r}''(s)=\frac{\mathrm{d}^2\,\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}\,s^2}=\frac{\mathrm{d}^2\,\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}\,t^2}\left(\frac{\mathrm{d}\,t}{\mathrm{d}\,s}\right)^2+\frac{\mathrm{d}\,\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}\,t}\frac{\mathrm{d}^2\,t}{\mathrm{d}\,s^2}=\boldsymbol{r}''(t)\,[t'(s)]^2+\boldsymbol{r}'(t)t''(s).$$

于是

$$\|\boldsymbol{r}'(s)\times\boldsymbol{r}''(s)\|=\|\boldsymbol{r}'(t)\times\boldsymbol{r}''(t)\||t'(s)|^3$$

由于 $s'(t)=\|\boldsymbol{r}'(t)\|$, 因此

$$|t'(s)|^3=\frac{1}{|s'(t)|^3}=\frac{1}{\|\boldsymbol{r}'(t)\|^3}.$$

于是可知

$$\kappa(t)=\frac{\|\boldsymbol{r}'(t)\times\boldsymbol{r}''(t)\|}{\|\boldsymbol{r}'(t)\|^3}.$$

■

下面来看一个例子.

**例 4.29** 设圆柱螺旋线:

$$\Gamma:\boldsymbol{r}(t)=(a\cos t,a\sin t,bt),\quad a>0.$$

求它的曲率.

**解** 先计算 $\boldsymbol{r}'(t)$ 和 $\boldsymbol{r}''(t)$:

$$\boldsymbol{r}'(t)=(-a\sin t,a\cos t,b),\qquad \boldsymbol{r}''(t)=(-a\cos t,-a\sin t,0)$$

因此

$$\boldsymbol{r}'(t)\times\boldsymbol{r}''(t)=\left(\begin{vmatrix}a\cos t&-a\sin t\\b&0\end{vmatrix},-\begin{vmatrix}a\sin t&-a\cos t\\b&0\end{vmatrix},\begin{vmatrix}-a\sin t&-a\cos t\\a\cos t&-a\sin t\end{vmatrix}\right)=(ab\sin t,-ab\cos t,a^2).$$

于是可知

$$\kappa(t)=\frac{\|\boldsymbol{r}'(t)\times\boldsymbol{r}''(t)\|}{\|\boldsymbol{r}'(t)\|^3}=\frac{\left(a^2b^2+a^4\right)^{1/2}}{\left(a^2+b^2\right)^{3/2}}=\frac{a}{a^2+b^2}.$$ ■

注 以上计算结果表明圆柱螺旋线每一点的曲率都相等.

如果曲线是用两个曲面方程表示的, 例如

$$\Gamma:\begin{cases}F(x,y,z)=0\\G(x,y,z)=0\end{cases}.$$

我们可以设它的参数方程为 $\boldsymbol{r}=(x,y,z)$, 其中 $x$ 和 $y$ 都看成是 $t$ 的函数. 则

$$\kappa=\frac{\|\boldsymbol{r}'\times\boldsymbol{r}''\|}{\|\boldsymbol{r}'\|^3}=\frac{\left[(y'z''-y''z')^2+(x'z''-x''z')^2+(x'y''-x''y')^2\right]^{1/2}}{\left(x'^2+y'^2+z'^2\right)^{3/2}}.$$

如果把 $x$ 看作参数, 以上公式可以简化为

$$\kappa=\frac{\left[(y'z''-y''z')^2+z''^2+y''^2\right]^{1/2}}{\left(1+y'^2+z'^2\right)^{3/2}}.$$

下面看一个例子.

**例 4.30** 设两个曲面确定的一条曲线:

$$\Gamma:\begin{cases}x^2+y^2+z^2=9\\x^2-y^2=3\end{cases}.$$

求 $\Gamma$ 在点 $\boldsymbol{p}_0=(2,1,2)$ 处的曲率.

**解** 把 $x,y$ 和 $z$ 都看作关于 $x$ 的方程. 对两个方程分别求导

$$\begin{cases}x+yy'+zz'=0\\x-yy'=0\end{cases},\qquad\begin{cases}1+y'^2+yy''+z'^2+zz''=0\\1-y'^2-yy''=0\end{cases}.$$

把 $x=2,y=1,z=2$ 代入得

$$y'=2,\qquad y''=-3,\qquad z'=-2,\qquad z''=-3.$$

于是可知

$$\kappa=\frac{\left[(y'z''-y''z')^2+z''^2+y''^2\right]^{1/2}}{\left(1+y'^2+z'^2\right)^{3/2}}=\frac{\left[(-6-6)^2+9+9\right]^{1/2}}{(1+4+4)^{3/2}}=\frac{\sqrt{2}}{3}.$$ ■

如果平面曲线, 可以得到更简洁的公式. 设平面曲线 $\boldsymbol{r}=(x,y)$. 其中 $x$ 和 $y$ 都看成是 $t$ 的函数. 则

$$\kappa=\frac{\|\boldsymbol{r}'\times\boldsymbol{r}''\|}{\|\boldsymbol{r}'\|^3}=\frac{|x'y''-x''y'|}{\left(x'^2+y'^2\right)^{3/2}}.$$

如果给出了显式方程 $y=f(x)$. 以上公式就进一步简化为

$$\kappa=\frac{|y''|}{\left(1+y'^2\right)^{3/2}}.$$

下面来看几个例子.

**例 4.31 抛物线的曲率** 设抛物线

$$y^2=2px,\quad p>0.$$

求它的曲率.

**解** 对方程两边连续两次求导得

$$yy'=p,\qquad y'^2+yy''=0.$$

因此

$$y' = \frac{p}{y}, \qquad y'' = -\frac{y'^2}{y} = -\frac{p^2}{y^3}.$$

于是可知

$$\kappa = \frac{|y''|}{(1+y'^2)^{3/2}} = \frac{\left|\frac{p^2}{y^3}\right|}{\left(1+\frac{p^2}{y^2}\right)^{3/2}} = \frac{p^2}{\left(y^2+p^2\right)^3}.$$

■

**例 4.32 椭圆的曲率** 设椭圆:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad a, b > 0.$$

求它的曲率.

**解** $\boxed{\text{解法一}}$ 对方程两边连续两次求导得

$$\frac{x}{a^2} + \frac{yy'}{b^2} = 0, \qquad \frac{1}{a^2} + \frac{y'^2 + yy''}{b^2} = 0.$$

因此

$$y'^2 = \frac{b^4x^2}{a^4y^2}, \qquad y'' = -\frac{b^2}{a^2y} - \frac{y'^2}{y} = -\frac{b^2}{a^2y} - \frac{b^4x^2}{a^4y^3}.$$

于是可知

$$\kappa = \frac{|y''|}{(1+y'^2)^{3/2}} = \frac{\frac{b^2}{a^2y} + \frac{b^4x^2}{a^4y^3}}{\left(1+\frac{b^4x^2}{a^4y^2}\right)^{3/2}} = \frac{a^4b^2y^2 + a^2b^4x^2}{\left(a^4y^2+b^4x^2\right)^{3/2}} = \frac{a^4b^4}{\left(a^4y^2+b^4x^2\right)^{3/2}}.$$

$\boxed{\text{解法二}}$ 把椭圆写成空间参数方程 $\boldsymbol{r}(t) = (a\cos t, b\sin t, 0)$. 计算 $\boldsymbol{r}'(t)$ 和 $\boldsymbol{r}''(t)$:

$$\boldsymbol{r}'(t) = (-a\sin t, b\cos t, 0), \qquad \boldsymbol{r}''(t) = (-a\cos t, -b\sin t, 0).$$

于是

$$\|\boldsymbol{r}' \times \boldsymbol{r}''\| = \sqrt{\left(ab\sin^2 t + ab\cos^2 t\right)} = ab.$$

于是可知

$$\kappa(t) = \frac{ab}{\left(a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t\right)^{3/2}} = \frac{ab}{\left(a^2\frac{y^2}{b^2} + b^2\frac{x^2}{a^2}\right)^{3/2}} = \frac{a^4b^4}{\left(a^4y^2+b^4x^2\right)^{3/2}}.$$

■

如果曲线是用极坐标方程 $r = r(\theta)$ 给出的, 则可以把它写成一般的参数方程

$$\begin{cases} x = r(\theta)\cos\theta \\ y = r(\theta)\sin\theta \end{cases},$$

其中 $r$ 看成是 $\theta$ 的函数. 计算导数

$$x' = r'\cos\theta - r\sin\theta, \qquad x'' = r''\cos\theta - 2r'\sin\theta - r\cos\theta.$$

$$y' = r'\sin\theta + r\cos\theta, \qquad y'' = r''\sin\theta + 2r'\cos\theta - r\sin\theta.$$

于是

$$x'y'' - x''y' = r^2 + 2r'^2 - rr'', \qquad x'^2 + y'^2 = r^2 + r'^2$$

于是就得到了极坐标的曲率公式

$$\kappa = \frac{|x'y'' - x''y'|}{\left(x'^2+y'^2\right)^{3/2}} = \frac{|r^2 + 2r'^2 - rr''|}{\left(r^2+r'^2\right)^{3/2}}.$$

下面看一个例子.

**例 4.33 心脏线的曲率** 设心脏线

$$r = a(1+\cos\theta), \quad a > 0.$$

求它的曲率.

**解** 计算导数

$$r'(\theta) = -a\sin\theta, \qquad r''(\theta) = -a\cos\theta.$$

于是

$$r^2(\theta) + 2r'^2(\theta) - r(\theta)r''(\theta) = a^2(1+\cos\theta)^2 + 2a^2\sin^2\theta + a^2\cos\theta(1+\cos\theta) = 3a^2 + 3a^2\cos\theta.$$
$$r^2(\theta) + r'^2(\theta) = a^2(1+\cos\theta)^2 + a^2\sin^2\theta = 2a^2 + 2a^2\cos\theta.$$

于是可知

$$\kappa = \frac{|r^2 + 2r'^2 - rr''|}{\left(r^2 + r'^2\right)^{3/2}} = \frac{\left|3a^2 + 3a^2\cos\theta\right|}{(2a^2 + 2a^2\cos\theta)^{3/2}} = \frac{3}{2^{3/2}a(1+\cos\theta)^{1/2}} = \frac{3}{4a|\cos(\theta/2)|}.$$ ■

化曲为直和化曲为圆. 在曲率大的地方化曲为圆的近似效果更好.

**定义 4.11 (密切圆)**

**密切圆** ()

♣

### 4.3.4 曲面的切平面

空间曲线的切线和曲面的切平面

**定理 4.25**

♡

**证明**

# 第 5 章 微分流形

内容提要

- XXX

## 5.1 微分流形

微分流形对我们来说并不是一个陌生的东西, 微分流形也叫光滑流形, 其中 ‘‘流形’’ 的英文是 manifold, 翻译时取了 ‘‘天地有正气, 杂然赋流形’’ 的典故. 所以从字面意思就可以知道所谓微分流形就是各种光滑的几何体. 典型例子是像 Euclid 空间 $\mathbb{R}^n$, 可以在上面做微积分的空间. 低维中比较常见的例子有: 光滑的平面曲线, 光滑的曲面. 高维中的例子包括 $n+1$ 维空间中的 $n$ 维球面, 以及 Euclid 空间之间的光滑映射等.

最简单的流形是是拓扑流形. 但流形的大部分应用都属于微积分, 例如体积和曲率, 它们分别涉及积分和微分. 在经典力学中的应用是解常微分方程组, 在广义相对论中的应用主要是解偏微分方程组.

为了使得微积分可以在流形上运行, 我们需要它 “光滑” . 在几何空间中可以很直观上地理解光滑的概念: 对于曲线而言是有切线, 且切线的斜率连续变化, 对于曲面而言是有切面且连续变化.

### 5.1.1 拓扑流形

基础拓扑的概念, 我们默认大家都知道了. 下面直接给出拓扑流形的概念.

**定义 5.1 (拓扑流形)**

设拓扑空间 $M$. 若满足

1° $M$ 是一个 Hausdorff 空间: 对于任意两点 $p, q \in M$, 存在两个分离的开子集 $U, V \in\subseteq M$ 使得 $p \in U$ 且 $q \in V$.

2° $M$ 是第二可数的: $M$ 有一个可数基.

3° $M$ 是局部 $n$ 维的: $M$ 中的任一点都有一个邻域同胚于 $\mathbb{R}^n$ 的一个开子集.

则称 $M$ 为一个 $n$ 维**拓扑流形** (topological manifold)

♣

注 $n$ 维的拓扑流形 $M$, 我们经常简写成 $M^n$.

注 对于 3°, 更具体地说就是, 对于任一 $p \in M$ 都满足

1° 存在一个开子集 $U \subseteq M$ 使得 $p \in U$.

2° 存在一个开子集 $\widetilde{U} \subseteq \mathbb{R}^n$.

3° 存在一个同胚映射 $\varphi : U \to \widetilde{U}$.

维数是一个非空拓扑流形的拓扑不变量.

**定理 5.1 (拓扑的维数不变性)**

设非空拓扑流形 $M^n$ 和 $N^m$. 则它们同胚当且仅当 $n = m$.

♡

### 5.1.2 光滑结构

### 5.1.3 有界微分流形

## 5.2 光滑映射

### 5.2.1 光滑函数和光滑映射

### 5.2.2 单位分解

## 5.3 切向量

## 5.4 子流形

## 5.5 Sard 定理

# 参考文献


[1] DENG E. ElegantLaTeX Templates[Z]. https://elegantlatex.org.