第 3 章 用数列研究实数的完备性

内容提要

- ❑ 介绍数列极限的概念和简单性质.
- ❑ 从邻域的观点解释数列极限的几何意义.
- ❑ 介绍计算数列极限的几种基础方法.
- ❑ 介绍数列收敛的主要判别方法, 并引出实数的另外四个完备性定理.
- ❑ 最后介绍计算数列 ‘‘未定型’’ 的一个有效方法: Stolz 定理.

3.1 数列极限的概念和性质

在上一章中我们用 Dedekind 分割定义了实数及其序结构和代数结构, 并用三个等价的定理 (Dedekind 定理、确界定理和 Heine-Borel 定理) 刻画了实数域的完备性. 从上一章的讨论已经知道实数域和有理数域的最大差别在于完备性, 这是数学分析的重要基石. 上一章最后从集合基数的角度证明了实数域是不可数的. 为了进一步研究实数的完备性, 可以考虑从实数集中选取一列实数, 把不可数的问题转变为可数的问题来研究. 这就是用数列研究实数完备性的基本想法.

本章我们将探索实数序列的性质. 从数列极限的角度, 可以从另外四个角度刻画实数的完备性 (单调有界定理、闭区间套定理、Bolzano-Weierstrass 定理和 Cauchy 收敛准则). 最后将证明这些实数的完备性定理都是等价的.

3.1.1 数列的极限

在上一章的例2.4中讨论了集合 $E=\{1/n:n\in\mathbb{N}^*\}$ 的上确界和下确界. 虽然 $0\notin E$, 但 $\sup E=0$. 在证明过程中, 不难发现当 n 不断增大时 $1/n$‘‘无限接近于零”. 正是这个原因, 0 才能成为 E 的下确界.

在上一章的例2.5中验证了 $(0,1]$ 区间的一个开覆盖 $C=\{I_n=(1/n,2):n\in\mathbb{N}^*\}$. 中无法找到一个子覆盖. 从证明过程中, 可以看到, 主要原因也是因为 $1/n$‘‘无限接近于零”.

这两个例子中的集合 $\{1/n:n\in\mathbb{N}^*\}$ 是一个可数集, 我们可以把它排成一列:

$$1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \cdots,\ \frac{1}{n},\ \cdots.$$

然后研究它的变化趋势. 这对于研究实数的完备性非常重要. 于是引出了以下重要概念.

定义 3.1 (序列)

从自然数集 $\mathbb{N}$ 到任意非空集合 A 的一个映射称为 A 中元素的一个**序列** (sequence). 若 A 是一个数集, 则称该序列为**数项序列**, 简称**数列**. 特别地, 从自然数集 $\mathbb{N}$ 到实数集 $\mathbb{R}$ 的一个映射称为**实数序列**, 记作 $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ 或 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. 也可以列举出它的若干项:

$$a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots,$$

其中 $a_n=f(n)\ (n=1,2,\cdots)$ 称为数列的**通项公式** (general term formula). ♣

注 $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ 经常简记作 $\{a_n\}$. 把数列记成 $\{a_n\}$ 时, 是把数列看作一个集合, 显然它们都是无限集. 把数列记成 a_n $(n=1,2,\cdots)$, 是把数列看作一个函数.

注 A 中的元素是没有限定的. 如果 A 中的元素是函数, 那么构成的序列就是**函数项序列** (sequence of functions), 这是后面要详细讨论的重要主题.

生活中不乏数列的例子. 假设在某氪金手游抽到 SSR 的概率为 1%, 则抽一发抽不到的概率为 99/100, 两发抽

不到的概率为 $(99/100)^2, \cdots$ 依此类推, 可以得到一个"抽不到 SSR 概率" $P(n)$ 关于"抽卡次数" n 的数列 $\{P_n\}$.

$$P_n = P(n) = \left(\frac{99}{100}\right)^n, \quad n = 1, 2, \cdots.$$

直观来看, 只要氪金足够多 (n 趋向无穷大时), $(99/100)^n$ 会趋向于零. 这个时候, 我们称这个数列"极限"为零. 那么玩家的这个"直观感受"是否符合数学真相呢? 是否有可能它只是"接近"一个很小但不为 0 的数? "接近"又该如何定义? 现在需要一种精确的数学语言来描述数列趋向于某个实数的事实.

定义 3.2 (数列的极限)

设数列 $\{a_n\}$. 若对于任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $N \in \mathbb{N}^*$, 使得当 $n > N$ 时总有

$$|a_n - a| < \varepsilon,$$

其中 $a \in \mathbb{R}$. 则称数列 $\{a_n\}$ **收敛** (convergent) 于 a, 或称 $\{a_n\}$ 的**极限** (limit) 为 a, 记作

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \quad 或 \quad a_n \to a \ (n \to \infty).$$

否则, 称该数列**发散** (divergent).

♣

注 以上定义称为"$\varepsilon - N$ 定义". 虽然极限的思想在古希腊就已经产生, 但以上定义的想法是 1817 由波西米亚 (今捷克) 数学家 Bernard Bolzano 第一个想到的. 之后, 法国数学家 Augustin-Louis Cauchy 进一步完善了这个方法. 我们现在使用的极限定义是德国数学家 Karl Weierstrass 在 1861 年最终给出的.

注 以上定义中, $n \to \infty$ 称为极限过程. 数列的极限过程只有这一种, 因此有时候在数列极限的记号中可以把这部分省略, 记作 $\lim a_n$ 或 $a_n \to a$.

注 定义中的正数 ε 是任意给定的. 这个"任意"指的是"任意小", 因此也可以改为"任一小于某个正数的正数 ε".

注 定义中的 N 是依赖于 ε 而确定的——-也就是说, 给定一个 ε, 能找到一个 N 就可以了, 并不要求找到一个固定的 N 满足任意 ε. 所以 N 经常写成 $N(\varepsilon)$, 或 N_ε, 但这并不表示 N 是 ε 的函数. 一般来说, ε 给得越小, N 就需要取得越大.

注 "存在 $N \in \mathbb{N}^*$ 使得当 $n > N$ 时"经常说成"当 n 充分时大".

注 数列的极限和前面的有限项无关, 即去掉、增加或改变前面的有限项都不会改变数列的敛散性和极限值. 因此讨论数列的极限只需考虑 n 充分大时的情况.

注 根据 de Morgan 对偶原理可以得到以上定义的否定形式:

$$\forall a \in \mathbb{R},\ \exists \varepsilon > 0,\ \forall N \in \mathbb{N}^*,\ \exists n \geq N,\ |a_n - a| \geq \varepsilon \iff \forall a \in \mathbb{R},\ \lim_{n\to\infty} a_n \neq a.$$

数列的极限可以由很多等价的刻画方法.

例 3.1 下列陈述都可以作为 $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ 的定义:

(1) 对任意给定的正数 $\varepsilon < 1$ 都存在 $N \in \mathbb{N}^*$ 使得当 $n > N$ 时有 $|a_n - a| < \varepsilon$.

(2) 对任一 $k \in \mathbb{N}^*$ 都存在 $N \in \mathbb{N}^*$ 使得当 $n > N$ 时有 $|a_n - a| < 1/k$.

解 (1) 若对任意给定的正数 $\varepsilon_1 < 1$ 都存在 $N \in \mathbb{N}^*$ 使得当 $n > N$ 时有 $|a_n - a| < \varepsilon_1$. 则对任意 $\varepsilon_2 \geq 1$ 都存在 $N \in \mathbb{N}^*$ 使得当 $n > N$ 时有

$$|a_n - a| < \varepsilon_1 < 1 \leq \varepsilon_2.$$

于是可知对于任一 $\varepsilon > 0$ 都存在 $N \in \mathbb{N}^*$ 使得当 $n > N$ 时有 $|a_n - a| < \varepsilon$.

(2) 对于任一 $\varepsilon > 0$, 只需取 $k = [1/\varepsilon] + 1$, 则存在 $N \in \mathbb{N}^*$ 使得当 $n > N$ 时有

$$|a_n - a| < \frac{1}{k} < \varepsilon.$$

■

还有一些似是而非的"极限定义".

例 3.2 判断下列陈述是否可以作为 $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ 的定义:

(1) 对无穷多个 $\varepsilon > 0$ 都存在 $N \in \mathbb{N}^*$ 使得当 $n > N$ 时有 $|a_n - a| < \varepsilon$.

(2) 对任意给定的 $\varepsilon > 1$ 都存在 $N \in \mathbb{N}^*$ 使得当 $n > N$ 时有 $|a_n - a| < \varepsilon$.

解 设数列 $a_n = (-1)^n$. 令 $a = 0$. 由于 $|a_n - a| = 1$ $(n = 1, 2, \cdots)$. 因此对于任一 $\varepsilon > 1$ 都满足 $|a_n - a| < \varepsilon$. 这样的正数 ε 有无数个. 但数列 $\{a_n\}$ 发散. 因此以上两个陈述都不能作为数列收敛的定义. ■

现在我们可以回过头来用极限的定义来重新考察数列 $\{1/n\}$.

例 3.3 求极限:$\lim_{n\to\infty}(1/n)$.

解 对于任意的给定的 $\varepsilon > 0$, 要使

$$\left|\frac{1}{n} - 0\right| = \left|\frac{1}{n}\right| < \varepsilon. \tag{3.1}$$

只需满足 $n > 1/\varepsilon$. 因此可取 $N = [1/\varepsilon] + 1$, 那么当 $n > N$ 时就可以满足不等式3.1. 由数列极限的定义可知 $\lim_{n\to\infty}(1/n) = 0$.

注 [ ] 是 "下取整函数" (见定义1.26).

注 在利用数列极限的定义证明 $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ 时, 我们可以从 $|a_n - a| < \varepsilon$ 中反解出 n 的取值范围.

例 3.4 设数列

$$a_1 = 0.9, \quad a_2 = 0.99, \quad a_3 = 0.999, \quad \cdots \quad a_n = 0.\underbrace{99\cdots9}_{n\text{ 个}}, \quad \cdots.$$

则 $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$.

证明 由于

$$|0.\underbrace{99\cdots9}_{n\text{ 个}} - 1| = 10^{-n}.$$

因此对于任一 $\varepsilon > 0$. 若要 $10^{-n} < \varepsilon$, 只需 $n > -\lg\varepsilon$. 因此可取 $N = [-\lg\varepsilon]$, 则当 $n > N$ 时

$$|0.\underbrace{99\cdots9}_{n\text{ 个}} - 1| < \varepsilon.$$

于是就证明了 $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$. ■

注 上例解释了上一章中关于循环小数的规定的合理性 (见定义2.9).

常值数列的极限是显然的. 我们也来用定义证明一下.

例 3.5 设序列 $\{a_n\}$. 若对于任意 $n \in \mathbb{N}^*$ 都有 $a_n = C$, 则 $\lim_{n\to\infty} a_n = C$.

证明 对于任一 $\varepsilon > 0$. 由于 $a_n = C$ $(n = 1, 2, \cdots)$, 故

$$|a_n - C| = |C - C| = 0 < \varepsilon, \quad n = 1, 2, \cdots.$$

于是可知 $\lim_{n\to\infty} a_n = C$. ■

注 上例的特殊之处在于, N 的选取不依赖于 ε.

利用数列极限的定义证明数列收敛需要先 "猜出" 数列的极限值. 证明过程需要用到不少不等式的缩放技巧. 下面举一些比较典型的例子.

例 3.6 用数列极限的定义证明:

$$\lim_{x\to 0}\frac{2n+3}{5n-10}=\frac{2}{5}.$$

证明 当 $n\geq 3$ 时, 由于

$$\left|\frac{2n+3}{5n-10}-\frac{2}{5}\right|=\left|\frac{7}{5n-10}\right|=\frac{7}{5n-10}<\frac{7}{n}.$$

因此对于任一 $\varepsilon>0$, 取 $N=\max\{3,[7/\varepsilon]\}$, 则当 $n>N$ 时

$$\left|\frac{2n+3}{5n-10}-\frac{2}{5}\right|<\frac{7}{n}<\varepsilon.$$

由数列极限的定义可知

$$\lim_{x\to 0}\frac{2n+3}{5n-10}=\frac{2}{5}.$$ ■

注 分式数列收敛于非零实数当且仅当它的分子分母的次数相等, 它的极限值就等于分子最高次项系数和分母最高次项系数之比. 若分子的次数小于分母, 则数列收敛于零. 若分子的次数大于分母则数列发散.

例 3.7 用数列极限的定义证明:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}=0,\quad \alpha>0.$$

证明 (i) 当 $\alpha\geq 1$ 时. 由于

$$\left|\frac{1}{n^{\alpha}}-0\right|=\frac{1}{n^{\alpha}}\leq\frac{1}{n}.$$

因此对于任一 $\varepsilon>0$, 取 $N=[1/\varepsilon]$, 则当 $n>N$ 时

$$\left|\frac{1}{n^{\alpha}}-0\right|\leq\frac{1}{n}<\varepsilon.$$

由数列极限的定义可知 $\lim_{n\to\infty}1/n^{\alpha}=0$.

(ii) 当 $0<\alpha<1$ 时, 由 Archimedes 性质可知存在 $m\in\mathbb{N}^*$ 使得 $m\alpha>1$. 由 (i) 可知, $1/n^{m\alpha}\to 0$, 因此对于任一 $\varepsilon>0$ 都存在 $N\in\mathbb{N}^*$, 使得当 $n>N$ 时

$$\frac{1}{n^{m\alpha}}<\varepsilon^m\iff\frac{1}{n^{\alpha}}<\varepsilon.$$

这表明当 $0<\alpha<1$ 时结论仍然成立. ■

例 3.8 用数列极限的定义证明:

$$\lim_{n\to\infty}q^n=0,\quad |q|<1.$$

证明 当 $q=0$ 时显然有 $q^n\to 0$. 下设 $0<|q|<1$, 则 $1/|q|>1$. 令 $1/|q|=\alpha+1$ $(\alpha>0)$. 由二项式定理可知则

$$|q^n-0|=|q|^n=\frac{1}{(\alpha+1)^n}=\frac{1}{1+n\alpha+C_n^2\alpha^2+\cdots}<\frac{1}{n\alpha}.$$

因此对于任一 $\varepsilon>0$, 取 $N=[1/(\alpha\varepsilon)]$, 则当 $n>N$ 时

$$|q^n-0|<\frac{1}{n\alpha}<\varepsilon.$$

由数列极限的定义可知 $\lim_{n\to\infty}q^n=0$. ■

注 以上证明中得到了一个有用的不等式. 当 $\alpha>0$ 时, 对于任一 $n\in\mathbb{N}^*$ 都有

$$(1+\alpha)^n>n\alpha.$$

这个不等式称为 **Bernoulli 不等式** . 后面会看到这个不等式的成立条件可以进一步放宽.

例 3.9 用数列极限的定义证明: $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$.

解 由均值不等式可知

$$1 \le \sqrt[n]{n} = (\underbrace{1 \cdots 1}_{n-2\text{ 个 }1}\ \sqrt{n}\sqrt{n})^{1/n} \le \frac{1+\cdots+1+\sqrt{n}+\sqrt{n}}{n} = \frac{n-2+2\sqrt{n}}{n} < \frac{n+2\sqrt{n}}{n} = 1+\frac{2}{\sqrt{n}} \iff 0 \le \sqrt[n]{n}-1 < \frac{2}{\sqrt{n}}.$$

于是对于任一 $\varepsilon > 0$, 只要取 $N = [4/\varepsilon^2]$, 则当 $n > N$ 时有

$$\left|\sqrt[n]{n}-1\right| < \frac{2}{\sqrt{n}} < \varepsilon.$$

于是可知 $\lim \sqrt[n]{n} = 1$. ■

注 以上证明用到了均值不等式

$$\left(\prod_{k=1}^{n} x_k\right)^{1/n} \le \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k, \quad x_1, x_2, \cdots, x_n \ge 0.$$

3.1.2 邻域和极限的简单性质

为了进一步理解数列极限的概念, 我们可以利用数轴考察数列收敛的几何意义.

设数列 $\{a_n\}$ 收敛于 a, 则对于任一 $\varepsilon > 0$ (无论它多么小), $\{a_n\}$ 从第 N 项以后的各项都会落在 ‘‘以 a 为中心’’ 的一个开区间 $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ 中. 于是我们可以引入以下概念.

定义 3.3 (邻域)

给定 $a \in \mathbb{R}$. 令

$$N_r(a) := \{x \in \mathbb{R} : |x-a| < r\} = (a-r, a+r).$$

其中 r 是任一正实数. $N_r(a)$ 称为以 a 为中心, r 为半径的**邻域** (neighborhood). 在不强调半径的情况下 $N_r(a)$ 可以简记作 $N(a)$.

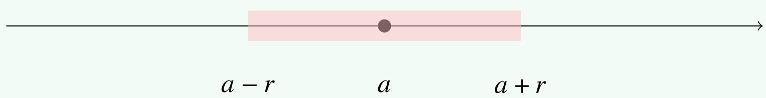

图 3.1: 以 a 为中心 r 为半径的邻域

♣

注 容易看出在实数域 $\mathbb{R}$ 中

$$x \in N_r(a) \iff |x-a| < r \iff -r < x-a < r \iff a-r < x < a+r \iff x \in (a-r, a+r).$$

因此 $N_r(a) = (a-r, a+r)$. 但我们没有直接用开区间去定义邻域. 而是使用距离来定义邻域. 后面将看到这样做的原因.

命题 3.1

设 $a \in \mathbb{R}$. 若 $\varepsilon_1 \le \varepsilon_2$, 则 $N_{\varepsilon_1}(a) \subseteq N_{\varepsilon_2}(a)$.

♠

证明 任取 $x \in N_{\varepsilon_1}(a)$, 则 $a-\varepsilon_1 < x < a+\varepsilon_1$. 由于 $\varepsilon_1 \le \varepsilon_2$, 故

$$a-\varepsilon_2 \le a-\varepsilon_1 < x < a+\varepsilon_1 \le a+\varepsilon_2.$$

因此 $x \in N_{\varepsilon_2}(a)$. 于是可知 $N_{\varepsilon_1}(a) \subseteq N_{\varepsilon_2}(a)$. ■

邻域是分析学中一个常用的概念. 使用邻域来描述 “局部性质” 是十分便利的. 下面用邻域的观点来叙述数列极限的定义: 数列 $\{a_n\}$ 收敛于 a 当且仅当 n 充分大时 $\{a_n\}$ 的各项都落在任一给定的邻域 $N_\varepsilon(a)$ 内.

命题 3.2

设数列 $\{a_n\}$. 则 $\{a_n\}$ 收敛于 $a \in \mathbb{R}$ 当且仅当 a 的任一邻域 $N(a)$ 之外都只有 $\{a_n\}$ 的有限项.

♠

证明 必要性显然成立. 任取 $\varepsilon > 0$, 则邻域 $N_\varepsilon(a)$ 外只有 $\{a_n\}$ 的有限项. 设这有限项中下标最大的一项为 a_N. 则当 $n > N$ 时 $a_n \in N_\varepsilon(a)$. 于是可知 $\lim_{n\to\infty} a_n = a$. ■

注 需要注意, 若 a 的任一邻域 $N(a)$ 内都有 $\{a_n\}$ 的无穷多项, 不能推出 $\{a_n\}$ 收敛. 举例说明. 设数列 $a_n = (-1)^n$ $(n = 1, 2, \cdots)$. 所以 1 的任一邻域和 -1 的任一邻域中都有 $\{a_n\}$ 的无穷多项. 但 $\{a_n\}$ 不收敛. 后面将看到 1 和 -1 都是 $\{a_n\}$ 的 "极限点".

邻域是一个拓扑概念 (拓扑是几何的一种), 因此从邻域的角度思考, 可以使得问题更直观. 极限是一个 "无限" 的概念. 以上命题使得我们可以把 "无限" 的问题转化为 "有限" 的问题来解决. 因此可以说极限是无限转化为有限的一个条件.

例 3.10 数列 $\{a_n\}$ 收敛于 a 当且仅当对任意给定的 $\gamma, \delta > 0$ 在区间 $(a-\gamma, a+\delta)$ 之外只有数列 $\{a_n\}$ 的有限项.

证明 (i) 证明充分性. 若任意给定的 $\gamma, \delta > 0$ 在区间 $(a-\gamma, a+\delta)$ 之外只有数列 $\{a_n\}$ 的有限项. 对于任一 $\varepsilon > 0$, 令 $\varepsilon = \gamma = \delta$. 则邻域 $N_\varepsilon(a)$ 之外都只有 $\{a_n\}$ 的有限项. 因此数列 $\{a_n\}$ 收敛于 a.

(ii) 证明必要性. 若 $a_n \to a$, 则对于任一 $\varepsilon > 0$, 邻域 $N_\varepsilon(a)$ 之外都只有 $\{a_n\}$ 的有限项. 因此对于任意给定的 $\gamma, \delta > 0$, 令 $\varepsilon = \min\{\gamma, \delta\}$. 由于 $N_\varepsilon(a)$ 之外都只有 $\{a_n\}$ 的有限项, 因此区间 $(a-\gamma, a+\delta)$ 之外只有数列 $\{a_n\}$ 的有限项. ■

注 上例暗示我们邻域的半径对于刻画数列的极限没有实际影响.

如果数列有极限, 那么一定有唯一的极限值吗?

命题 3.3 (极限的唯一性)

收敛数列的极限值是唯一的. ♠

证明 设收敛数列 $\{a_n\}$. 假设 $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim_{n\to\infty} a_n = b$, 且 $a \neq b$. 令 r 满足

$$0 < 2r < |a-b|.$$

考虑邻域 $N_r(a)$ 和 $N_r(b)$. 任取 $x \in N_r(a)$, 则

$$|x-a| < r < \frac{1}{2}|a-b| = \frac{1}{2}|(a-x)+(x-b)| \leq \frac{1}{2}|x-a| + \frac{1}{2}|x-b| \Longrightarrow |x-b| > 2r - |x-a| > r.$$

因此 $x \notin N_r(b)$. 故 $N_r(a) \cap N_r(b) = \varnothing$. 由于 $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim_{n\to\infty} a_n = b$. 因此 $N_r(a)$ 之外只有 $\{a_n\}$ 的有限项, 而 $N_r(b)$ 内有 $\{a_n\}$ 的无穷多项, 产生矛盾, 故假设不成立, 于是可知 $a = b$. ■

注 以上证明用到了三角不等式.

注 由于极限的唯一性, 当等式两边都收敛时可以对等式两边取极限.

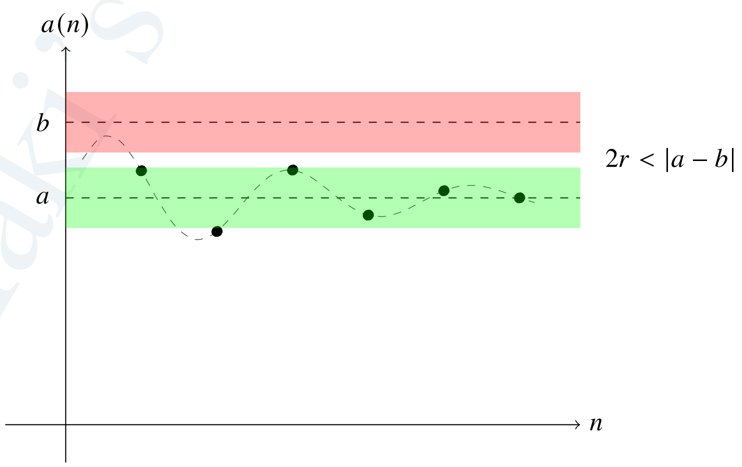

图 3.2: a_n 只能" 有限脱离"$N_r(a)$, 而不可能同时" 有限脱离" 两个中心点不同的邻域.

数列 $\{a_n\}$ 可以看作集合, 因此也可以定义有界数列. 由以上命题容易想到收敛数列总是有界的.

定义 3.4 (有界数列)

设数列 $\{a_n\}$. 若存在 $M>0$ 对于任一 $n\in\mathbb{N}^*$ 都有 $|a_n|<M$. 则称 $\{a_n\}$ 是**有界的** (bounded).

(1) 若存在 $M\in\mathbb{R}$, 使得对于任一 $n\in\mathbb{N}^*$, 都有 $a_n<M$, 则称数列 $\{a_n\}$ 有上界, M 是它的一个**上界** (upper bound). 其最小的上界称为**上确界** (supremum), 记作: $\sup_{n\geq 1} a_n$ 或 $\sup a_n$.

(2) 若存在 $m\in\mathbb{R}$, 使得对于任一 $n\in\mathbb{N}^*$, 都有 $a_n>m$, 则称数列 $\{a_n\}$ 有下界, m 是它的一个**下界** (lower bound), 其最大的下界称为**下确界** (infimum), 记作: $\inf_{n\geq 1} a_n$ 或 $\inf a_n$.

♣

注 确界原理确保了以上定义是合理的, 因为有上界的数列一定有上确界, 有下界的数列一定有下确界.

有界数列也可以用几何语言描述. 为此可以推广邻域的概念.

定义 3.5 (无穷大的邻域)

设 $E>0$. 令

$$N_E(+\infty):=(E,+\infty),\quad N_E(-\infty):=(-\infty,-E),\quad N_E(\infty):=(-\infty,-E)\cup(E,+\infty).$$

其中 $N_E(+\infty)$ 称为以 E 为半径 $+\infty$ 的邻域; $N_E(-\infty)$ 称为以 E 为半径 $-\infty$ 的邻域; $N_E(\infty)$ 称为以 E 为半径 ∞ 的邻域.

♣

命题 3.4

设数列 $\{a_n\}$.

(1) $\{a_n\}$ 有界当且仅当存在邻域 $N_E(\infty)$ 使得该邻域内只有 $\{a_n\}$ 中的有限项.

(2) $\{a_n\}$ 有上界当且仅当存在邻域 $N_E(+\infty)$ 使得该邻域内只有 $\{a_n\}$ 中的有限项.

(3) $\{a_n\}$ 有下界当且仅当存在邻域 $N_E(-\infty)$ 使得该邻域内只有 $\{a_n\}$ 中的有限项.

♠

证明 只证明 (2). 必要性显然成立. 若存在 $E>0$ 使得开区间 $(E,+\infty)$ 内至多有 $\{a_n\}$ 中的有限项. 找出这些项中最大的一项, 令 M 大于这一项, 则对于任一 $n\in\mathbb{N}^*$, 都有 $a_n\leq M$. 因此 $\{a_n\}$ 有上界. ■

由以上命题立刻可知收敛数列和有界数列的关系.

命题 3.5

收敛数列必有界.

♠

证明 设数列 $\{a_n\}$ 收敛于 a. 给定 $\varepsilon>0$, 则 $N_\varepsilon(a)$ 之外只有 $\{a_n\}$ 的有限项, 因此在 $(-\infty,a)\cup(a,+\infty)$ 中只有 $\{a_n\}$ 的有限项. 令 $E=\max\{|a-\varepsilon|,|a+\varepsilon|\}$, 则 $N_E(\infty)$ 中只有 $\{a_n\}$ 的有限项. 于是可知 $\{a_n\}$ 有界. ■

注 以上命题的逆命题不正确. 例如数列 $a_n=(-1)^n$ 有界, 但不收敛.

根据以上命题, 若能证明数列无界, 就可以断言它不收敛.

例 3.11 [调和级数] 证明以下数列发散

$$x_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n},\quad n=1,2,\cdots.$$

证明 对于任一意 $N\in\mathbb{N}^*$, 只要取 $n=2^{2N}$ 就有

$$\begin{aligned}x_n&=1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2^{2N-1}+1}+\cdots+\frac{1}{2^{2N}}\right)\\&>1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\right)+\cdots+\left(\underbrace{\frac{1}{2^{2N}}+\cdots+\frac{1}{2^{2N}}}_{2^{2N}\text{ 个}}\right)\end{aligned}$$

$$= 1 + \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{4} + 4 \cdot \frac{1}{8} + \cdots + 2^{2N-1} \cdot \frac{1}{2^{2N}} > \underbrace{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2}}_{2N\text{项}} = N.$$

由于 $x_{n+1} - x_n = 1/(n+1) > 0$, 故 $x_{n+1} > x_n$ $(n = 1, 2, \cdots)$. 因此当 $n \geq 2^{2N}$ 时 $x_n > N$. 于是可知 $\{x_n\}$ 无界, 因此它是发散的. ■

以上数列的每一项都是一个和式, 这样的数列称为**级数** (series). 后面将专门研究这个主题. 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n$ 称为**调和级数** (harmonic series).

例 3.12 发散的 p 级数 证明以下级数发散:

$$x_n = 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \cdots + \frac{1}{n^p}, \quad p < 1,\ n = 1, 2, \cdots.$$

证明 当 $p < 1$ 时

$$\frac{1}{n^p} > \frac{1}{n}, \quad n = 1, 2, \cdots.$$

于是由例3.11可知, 当 $n = 2^{2N}$ 时

$$x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^p} > \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} > N.$$

由于 $x_{n+1} - x_n = 1/(n+1)^p > 0$, 故 $x_{n+1} > x_n$ $(n = 1, 2, \cdots)$. 因此当 $n \geq 2^{2N}$ 时 $x_n > N$. 于是可知 $\{x_n\}$ 无界, 因此它是发散的.

注 以上级数称为 p 级数, 当 $p = 1$ 时 p 级数就是调和级数.

有界数列有以下简单性质.

命题 3.6 (有界数列的简单性质)

设有界数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$. 则 $\{a_n + b_n\}$ 和 $\{a_n b_n\}$ 都是有界数列.

证明 由于 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 是有界数列. 故存在正实数 M 和 N 满足

$$|a_n| < M, \quad |b_n| < N, \quad n = 1, 2, \cdots.$$

因此

$$|a_n + b_n| \leq |a_n| + |b_n| < M + N, \quad n = 1, 2, \cdots.$$
$$|a_n b_n| = |a_n||b_n| < MN, \quad n = 1, 2, \cdots.$$

于是可知 $\{a_n + b_n\}$ 和 $\{a_n b_n\}$ 都是有界的. ■

注 用数学归纳法可以将以上结论推广到有限个数列的情况.
注 令 $a_n = c \in \mathbb{R}$ $(n = 1, 2, \cdots)$, 则立刻可知数列 $\{c b_n\}$ 有界.

3.1.3 极限的运算法则

如果仅仅是利用定义去求数列的极限的话, 能做的事情非常有限, 效率也不尽如人意, 因此我们需要探索和利用数列极限的更多性质, 反过来也能利用这些性质加速其他数列极限的探索.

定理 3.1 (数列极限的运算)

设数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$. 若 $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim_{n\to\infty} b_n = b$ $(a, b \in \mathbb{R})$, 则

(1) $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n \pm b_n) = a \pm b$.

(2) $\lim_{n\to\infty} ca_n = ca, \quad c \in \mathbb{R}$.

(3) $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = ab$.

(4) $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}, \quad b \neq 0$.

(5) $\lim_{n\to\infty} |a_n| = |a|$.

证明 (1) 由于 $\lim_{n\to\infty} a_n = a, \lim_{n\to\infty} b_n = b$, 故对于任一 $\varepsilon > 0$ 存在 $N_1, N_2 \in \mathbb{N}^*$ 使得当 $n > N_1$ 时 $|a_n - a| < \varepsilon/2$, 当 $n > N_2$ 时 $|b_n - b| < \varepsilon/2$. 令 $N = \max\{N_1, N_2\}$. 则当 $n > N$ 时有

$$|(a_n \pm b_n) - (a \pm b)| = |(a_n - a) \pm (b_n - b)| \le |a_n - a| + |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

于是可知 $\lim_{n\to\infty} (a_n \pm b_n) = a \pm b$.

(2) 当 $c = 0$ 时, 命题显然成立. 下设 $c \neq 0$. 由于 $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, 故对任意的 $\varepsilon > 0$, 都存在 $N \in \mathbb{N}^*$, 使得当 $n > N$ 时 $|a_n - a| < \varepsilon/|c|$, 因此

$$|ca_n - ca| = |c||a_n - a| < \varepsilon.$$

于是可知 $\lim_{n\to\infty} ca_n = ca$.

(3) 由于 $\{b_n\}$ 收敛, 故 $\{b_n\}$ 有界. 故存在 $M > 0$ 使得 $|b_n| < M$ $(n = 1, 2, \cdots)$. 于是

$$|a_n b_n - ab| = |(a_n - a)b_n + a(b_n - b)| \le |a_n - a||b_n| + |a||b_n - b| \le M|a_n - a| + |a||b_n - b|.$$

类似 (1) 可知任一 $\varepsilon > 0$ 存在 $N \in \mathbb{N}^*$, 使得当 $n < N$ 时

$$|a_n - a| < \varepsilon/2M, \quad |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2(|a| + 1)}.$$

于是

$$|a_n b_n - ab| < \frac{M\varepsilon}{2M} + \frac{|a|\varepsilon}{2(|a| + 1)} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

于是可知 $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = ab$.

(4) 只需证明 $\lim_{n\to\infty} 1/b_n = 1/b$.

由于 $\lim_{n\to\infty} b_n = b$, 故对于 $|b|/2 > 0$ 存在 $N_1 \in \mathbb{N}^*$ 使得当 $n > N_1$ 时 $|b_n - b| < |b|/2$. 于是

$$|b_n| = |b + (b_n - b)| \ge |b| - |b_n - b| > |b| - \frac{|b|}{2} = \frac{|b|}{2} > 0.$$

于是当 $n > N_1$ 时有

$$\left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b}\right| = \frac{|b_n - b|}{|b_n b|} \le \frac{2}{b^2}|b_n - b|.$$

由于 $\lim_{n\to\infty} b_n = b$, 故对于 $\varepsilon > 0$ 存在 $N_2 \in \mathbb{N}^*$ 使得当 $n > N_2$ 时 $|b_n - b| < b^2\varepsilon/2$. 令 $N = \max\{N_1, N_2\}$. 则当 $n > N$ 时有

$$\left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b}\right| \le \frac{2}{b^2}|b_n - b| < \frac{2}{b^2} \cdot \frac{b^2\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

于是可知 $\lim_{n\to\infty} 1/b_n = 1/b$. 结合 (3) 就可知 $\lim_{n\to\infty} a_n/b_n = a/b$ 成立.

(5) 由于 $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, 故对于任一 $\varepsilon > 0$ 存在 $N \in \mathbb{N}^*$ 使得当 $n > N$ 时 $|b_n - a| < \varepsilon$. 于是

$$\big||a_n| - |a|\big| \le |a_n - a| < \varepsilon.$$

于是可知 $\lim_{n\to\infty} |a_n| = |a|$. ■

注 在证明 (3) 的过程中, 由于 $|a|$ 可能为零, 用 “$|a| + 1$” 可以避免繁琐的分类讨论.

注 设 $c \in \mathbb{R}$. 则 $\lim_{n\to\infty}(ca_n) = ca$. 这是 (3) 的特例.

注 当 $b \neq 0$ 时, $\{b_n\}$ 至多只有有限项为零, 因此当 n 充分大时 $b_n \neq 0$.

注 命题 (5) 的逆命题不成立. 设 $a_n = (-1)^n$ $(n = 1, 2, \cdots)$. 显然 $|a_n| \to 1$ 但 $\{a_n\}$ 不收敛.

以上定理表明, 两个数列都收敛时它们的和差积商数列都收敛. 如果一个数列收敛另一个不收敛或两个数列都不收敛, 是否可以断言它们的和差积数列的敛散性呢?

例 3.13 设数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$.

(1) 若 $\{a_n\}$ 收敛且 $\{b_n\}$ 发散, 则 $\{a_n + b_n\}$ 的发散.

(2) 若 $\{a_n\}$ 收敛于非零实数且 $\{b_n\}$ 发散, 则 $\{a_n b_n\}$ 的发散.

证明 (1) 令 $c_n = a_n + b_n$ $(n = 1, 2, \cdots)$. 假设 $\{c_n\}$ 收敛, 由于 $\{a_n\}$ 收敛, 由数列极限的运算法则可知 $\{c_n - a_n\}$ 收敛, 即 $\{b_n\}$ 收敛, 与条件矛盾. 因此假设不成立. 于是可知 $\{a_n + b_n\}$ 的发散.

(2) 令 $d_n = a_n b_n$ $(n = 1, 2, \cdots)$. 假设 $\{d_n\}$ 收敛, 由于 $\{a_n\}$ 收敛于非零实数, 由数列极限的运算法则可知 $\{d_n / a_n\}$ 收敛, 即 $\{b_n\}$ 收敛, 与条件矛盾. 因此假设不成立. 于是可知 $\{a_n b_n\}$ 的发散. ■

注(2) 中若 $a_n \to 0$ 且 $\{b_n\}$ 发散, 则 $\{a_n b_n\}$ 的敛散性无法确定.

$a_n \to 0$	$\{b_n\}$ 发散	$\{a_n b_n\}$	$\{a_n b_n\}$ 的敛散性
$a_n \equiv 0$	$b_n = n^2$	$a_n b_n \equiv 0$	收敛
$a_n = 1/n$	$b_n = n^2$	$a_n b_n = n$	发散

例 3.14 若数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 都发散, 判断 $\{a_n + b_n\}$ 和 $\{a_n b_n\}$ 的敛散性.

解 无法确定.

$\{a_n\}$ 发散	$\{b_n\}$ 发散	$\{a_n + b_n\}$	敛散性
$a_n = n$	$b_n = -n$	$a_n + b_n \equiv 0$	收敛
$a_n = n$	$b_n = 2n$	$a_n + b_n = 3n$	发散

$\{a_n\}$ 发散	$\{b_n\}$ 发散	$\{a_n + b_n\}$	敛散性
${}_n = (-1)^n$	${}_n = (-1)^n 2$	$a_n b_n \equiv 2$	收敛
$a_n = n$	$b_n = 2n$	$a_n + b_n = 2n^2$	发散

■

还可以证明极限的根式运算法则.

例 3.15 设非负数列 $\{a_n\}$. 若 $\lim_{n\to\infty} = a$, 则 $\lim_{n\to\infty} \sqrt{a_n} = \sqrt{a}$.

证明 当 $a = 0$ 时命题显然成立. 下设 $a \neq 0$. 由于 $\lim_{n\to\infty} a_n = a$. 故对于任一 $\varepsilon > 0$ 都存在 $N \in \mathbb{N}^*$ 使得当 $n > N$ 时 $|a_n - a| < \sqrt{a}\varepsilon$. 于是

$$\left|\sqrt{a_n} - \sqrt{a}\right| = \frac{|a_n - a|}{\sqrt{a_n} + \sqrt{a}} < \frac{|a_n - a|}{\sqrt{a}} < \frac{\sqrt{a}\varepsilon}{\sqrt{a}} = \varepsilon.$$

于是可知 $\lim_{n\to\infty} \sqrt{a_n} = \sqrt{a}$. ■

利用极限的运算法则可以让我们利用已经知道极限的数列去计算大量复杂的数列. 我们来看几个例子.

例 3.16 计算以下极限:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n^2 - 3n + 4}{5n^2 + 4n - 1}.$$

解 由例题 (3.7) 可知 $1/n^\alpha \to 0$. 由数列极限的运算法则可知

$$\text{原式} = \lim_{n\to\infty} \frac{2 - 3/n + 4/n^2}{5 + 4/n - 1/n^2} = \frac{2}{5}.$$ ■

例 3.17 几何级数 求证以下级数收敛:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} q^{i-1} = \frac{1}{1-q}, \quad |q| < 1.$$

证明 由例题3.8可知当 $|q|<1$ 时 $q^n \to 0$. 由等比数列的求和公式和数列极限的运算法则可知

$$\text{原式} = \lim_{n\to\infty}\frac{1-q^n}{1-q} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1-q}-\frac{q^n}{1-q}\right) = \frac{1}{1-q}-\frac{1}{1-q}\lim_{n\to\infty}q^n = \frac{1}{1-q}.$$ ■

极限的运算法则并不总是有效的, 当极限的运算法则无法使用时, 可以考虑用夹逼定理求极限.

定理 3.2 (夹逼定理)

设数列 $\{a_n\}, \{b_n\}, \{c_n\}$ 满足

$$a_n \le b_n \le c_n, \quad n = 1, 2, \cdots.$$

若 $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = a$, 则 $\lim_{n\to\infty} b_n = a$.

证明 由于 $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = a$, 故对于任一 $\varepsilon > 0$ 总存在 $N_1, N_2 \in \mathbb{N}^*$ 使得当 $n > N_1$ 时 $a_n \in N_\varepsilon(a)$; 当 $n > N_2$ 时 $c_n \in N_\varepsilon(a)$. 令 $N = \max\{N_1, N_2\}$. 由于 $a_n \le b_n \le c_n$ $(n = 1, 2, \cdots)$, 因此当 $n > N$ 时

$$a - \varepsilon < a_n \le b_n \le c_n < a + \varepsilon.$$

于是可知 $\lim_{n\to\infty} b_n = a$. ■

注 以上定理被形象地称为**三明治定理** (sandwich theorem).

把夹逼定理的条件减弱为 $a_n - c_n \to 0$, 则结论不再成立.

例 3.18 若数列 $a_n \le b_n \le c_n$ $(n = 1, 2, \cdots)$ 且 $\lim_{n\to\infty}(c_n - a_n) = 0$, 判断 $\{b_n\}$ 的敛散性.

解 无法确定.

$\{a_n\}$	$\{b_n\}$	$\{c_n\}$	$\{c_n - a_n\}$	$\{b_n\}$ 的敛散性
$a_n = 1/n$	$b_n = 1/(n-1)$	$c_n = 1/(n-2)$	$1/(n-2) - 1/n \to 0$	收敛
$a_n = \ln n$	$b_n = \ln(n+1)$	$c_n = \ln(n+2)$	$\ln(n+2) - \ln n \to 0$	发散

使用夹逼定理求数列的极限, 关键技巧是不等式的缩放. 下面看几个例子.

例 3.19 求极限: $\lim_{n\to\infty} a^{1/n}$ $(a > 0)$.

解 (i) 若 $a \ge 1$. 当 $n > a$ 时

$$1 \le a^{1/n} \le n^{1/n}.$$

由例题3.9可知 $n^{1/n} \to 1$. 于是由夹逼定理可知 $a^{1/n} \to 1$.

(ii) 若 $0 < a < 1$. 则 $a^{-1} > 1$. 由 (i) 的结论可知

$$\lim_{n\to\infty} a^{1/n} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(a^{-1}\right)^{1/n}} = 1.$$ ■

例 3.20 求以下极限

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 + x^{2n}\right)^{1/n}.$$

解 令 $M = \max\left\{1, x^2\right\}$, 由于

$$(M^n)^{1/n} < \left(1 + 2^{2n}\right)^{1/n} \le (M^n + M^n)^{1/n} \iff M < \left(1 + 2^{2n}\right)^{1/n} \le 2^{1/n} M.$$

令 $n \to \infty$. 由夹逼定理可知 $\left(1 + x^{2n}\right)^{1/n} \to M$. ■

例 3.21 设数列 $\{a_n\}$. 若 $\lim a_n = a$. 则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{[na_n]}{n} = a.$$

证明 由于

$$na_n - 1 < [na_n] \le na_n \iff a_n - \frac{1}{n} < \frac{[na_n]}{n} \le a_n.$$

由于 $1/n \to 0$, 故 $a_n - 1/n \to a$, 由夹逼定理可知 $\lim_{n\to\infty}([na_n]/n) = a$. ∎

下面来研究关于极限的不等式.

命题 3.7 (数列极限的保序性)

设 $\lim_{n\to\infty} a_n = a, \lim_{n\to\infty} b_n = b$.

(1) 若 $a < b$, 则存在 $N \in \mathbb{N}^*$, 使得当 $n > N$ 时 $a_n < b_n$.

(2) 若存在 $N \in \mathbb{N}^*$, 使得当 $n > N$ 时 $a_n \ge b_n$, 则 $a \ge b$.

证明 (1) 若 $a < b$. 取 $\varepsilon = (b-a)/2 > 0$. 则存在 $N_1, N_2 \in \mathbb{N}^*$ 使得当 $n > N_1$ 时

$$a - \frac{b-a}{2} < a_n < a + \frac{b-a}{2} \iff \frac{3a-b}{2} < a_n < \frac{a+b}{2}.$$

当 $n > N_2$ 时

$$b - \frac{b-a}{2} < b_n < b + \frac{b-a}{2} \iff \frac{a+b}{2} < b_n < \frac{3b-a}{2}.$$

$|b_n - b| < \varepsilon$. 令 $N = \max\{N_1, N_2\}$. 则当 $n > N$ 时

$$\frac{3a-b}{2} < a_n < \frac{a+b}{2} < b_n < \frac{3b-a}{2}.$$

(2) 用反证法. 假设 $a < b$. 由 (1) 可知当 n 充分大时 $a_n < b_n$, 出现矛盾因此假设不成立. 于是可知 $a \ge b$. ∎

注 若当 n 充分大时 $a_n \ne b_n$, 它们的极限仍可能相等. 例如 $1/n > -1/n$ $(n = 1, 2, \cdots)$ 但

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = \lim_{n\to\infty} -\frac{1}{n} = 0.$$

因此 (2) 中的条件可以是 $a_n > b_n$.

以上命题中, 令 $b_n = 0$(或 $a_n = 0$) $(n = 1, 2, \cdots)$ 则立即得到以下推论.

推论 3.1 (数列极限的保号性)

设 $\lim_{n\to\infty} a_n = a$.

(1) 若 $a < 0$ (或 $a > 0$), 则存在 $N \in \mathbb{N}^*$, 使得当 $n > N$ 时 $a_n < 0$ (或 $a_n > 0$).

(2) 若存在 $N \in \mathbb{N}^*$, 使得当 $n > N$ 时 $a_n > 0$ (或 $a_n < 0$), 则 $a \ge 0$ (或 $a \le 0$).

一般来说, 用极限来刻画数列之间的不等式关系更为方便. 在讨论级数收敛的判别法时将看到这一点.

3.1.4 无穷小、无穷大和广义实数集

收敛于零的数列是最简单的收敛数列. 处理无穷小数列比一般的收敛数列容易, 因此在解决较复杂的问题时, 经常可以利用以上命题把问题转化为无穷小来解决.

定义 3.6 (无穷小数列)

设数列 $\{a_n\}$. 若 $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, 即对于任一 $\varepsilon > 0$ 都存在 $N \in \mathbb{N}^*$ 使得当 $n > N$ 时 $|a_n| < \varepsilon$, 则称 $\{a_n\}$ 是一个**无穷小数列** (infinitesimal sequence). 简称**无穷小** (infinitesimal).

下面是几个无穷小数列的简单性质.

命题 3.8 (无穷小数列的简单性质)

设数列 $\{a_n\}, \{\alpha_n\}$ 和 $\{\beta_n\}$.

(1) 若 $\{\alpha_n\}$ 和 $\{\beta_n\}$ 是无穷小, 则 $\{\alpha_n + \beta_n\}$ 和 $\{\alpha_n\beta_n\}$ 是无穷小.

(2) α_n 是无穷小当且仅当 $\{|\alpha_n|\}$ 是无穷小.

(3) $\lim_{n\to\infty} a_n = a \iff \lim_{n\to\infty}(a_n - a) = 0 \iff$ 存在一个无穷小 α_n 满足 $a_n = a + \alpha_n$.

(4) 若 $\{a_n\}$ 是有界的且 $\{\alpha_n\}$ 是无穷小, 则 $\{a_n\alpha_n\}$ 是无穷小.

(5) 若 $|a_n| \le \alpha_n$ $(n = 1, 2, \cdots)$, 其中 α_n 是无穷小, 则 a_n 也是无穷小.

证明 (1)(2)(3) 由定理3.1立刻可知结论成立.

(4) 由于 $\{a_n\}$ 是有界的, 故存在 $M > 0$ 使得 $|a_n| < M$ $(n = 1, 2, \cdots)$. 由于 $\{\alpha_n\}$ 是无穷小, 故对于任一 $\varepsilon/M > 0$ 都存在 $N \in \mathbb{N}^*$ 使得当 $n > N$ 时 $|\alpha_n| < \varepsilon$. 于是当 $n > N$ 时

$$|a_n\alpha_n| = |a_n||\alpha_n| < M \cdot \frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon.$$

于是可知 $\{a_n\alpha_n\}$ 是无穷小.

(5) 由于 $0 \le |a_n| \le \alpha_n$, 且 $\alpha_n \to 0$, 由夹逼定理可知 $|a_n| \to 0$, 由 (2) 可知 $a_n \to 0$. ■

注 用数学归纳法可以将以上命题中的 (1) 推广到有限个无穷小的情况.

利用以上命题可以把一般收敛数列转化为无穷小数列来处理. 下面看一个例子.

例 3.22 设数列 $\{a_n\}$. 令

$$b_n = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}, \quad n = 1, 2, \cdots.$$

若 $a_n \to a$, 则 $\lim_{n\to\infty} b_n = a$.

证明 (i) 当 $a = 0$ 时. 对于任一 $\varepsilon > 0$ 存在 $N \in \mathbb{N}^*$, 当 $n > N$ 时 $|a_n| < \varepsilon/2$. 对于给定的 N, 存在正整数 $N_1 > N$ 使得当 $n > N_1$ 时

$$\frac{|a_1| + |a_2| + \cdots + |a_N|}{n} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

于是当 $n > N_1 > N$ 时

$$\begin{aligned}|b_n| &= \left|\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}\right| = \frac{|a_1 + a_2 + \cdots + a_N + a_{N+1} + \cdots + a_n|}{n}\\ &\le \frac{|a_1 + a_2 + \cdots + a_N|}{n} + \frac{|a_{N+1}| + \cdots + |a_n|}{n} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{n-N}{n}\cdot\frac{\varepsilon}{2} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.\end{aligned}$$

于是可知 $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$.

(ii) 当 $a \ne 0$ 时. 令 $\alpha_n = a_n - a$ $(n = 1, 2, \cdots)$. 则 $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0$. 由 (i) 可知

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n}{n} = 0.$$

由于

$$b_n - a = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} - a = \frac{(a_1 - a) + (a_2 - a) + \cdots + (a_n - a)}{n} = \frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n}{n}, \quad n = 1, 2, \cdots.$$

因此 $\lim_{n\to\infty}(b_n - a) = 0$. 于是可知 $\lim_{n\to\infty} b_n = a$. ■

上例表明一个数列收敛于 a 则它前 n 项的算术平均也收敛于 a. 几何平均、调和平均、平方平均都有类似结论.

例 3.23 设数列 $\{a_n\}$. 令

$$b_n = \frac{n}{1/a_1 + 1/a_2 + \cdots + 1/a_n}, \quad n = 1, 2, \cdots.$$

若 $\lim_{n\to\infty} a_n = a \ne 0$, 则 $\lim_{n\to\infty} b_n = a$.

证明 由于 $a_n \to a$, 故 $1/a_n = 1/a$. 由例3.22可知
$$\frac{1}{b_n} = \frac{1/a_1 + 1/a_2 + \cdots + 1/a_n}{n} \to \frac{1}{a}.$$
于是可知 $\lim_{n\to\infty} b_n = a$. ■

例 3.24 设数列 $\{a_n\}$. 令
$$b_n = \left(\frac{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}{n}\right)^{1/2}, \quad n = 1, 2, \cdots.$$
若 $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, 则 $\lim_{n\to\infty} b_n = a$.

证明 由于 $a_n \to a$, 故 $a_n^2 \to a^2$. 由例3.22可知
$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}{n} = a^2.$$
由例3.15可知 $\lim_{n\to\infty} b_n = a$. ■

例 3.25 设数列 $x_n > 0$ $(n = 1, 2, \cdots)$. 令
$$b_n = (x_1 x_2 \cdots x_n)^{1/n}, \quad n = 1, 2, \cdots.$$
若 $\lim_{n\to\infty} a_n = a > 0$, 则 $\lim_{n\to\infty} b_n = a$.

证明 由均值不等式可知
$$\frac{n}{1/a_1 + 1/a_2 + \cdots + 1/a_n} \leq (x_1 x_2 \cdots x_n)^{1/n} \leq \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}.$$
由于 $\lim_{n\to\infty} b_n = a > 0$, 由例3.22和3.23可知
$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{1/a_1 + 1/a_2 + \cdots + 1/a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} = a.$$
由夹逼定理可知 $\lim_{n\to\infty} b_n = a$. ■

有些数列虽然发散, 但也有一个变化趋势. 例如自然数数列 $0, 1, 2, 3, \cdots$. 我们说它趋向于“无穷大”. 我们可以类比无穷小来定义“无穷大”.

定义 3.7 (无穷大)

设数列 $\{a_n\}$. 若对于任一 $E > 0$, 都存在 $N \in \mathbb{N}^*$, 使得当 $n > N$ 时 $|a_n| > E$, 则称数列 $\{a_n\}$ 发散于**无穷大** (infinity), 或称该数列的极限是无穷大. 此时称 $\{a_n\}$ 为**无穷大** (infinity). 记作
$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty \quad 或 \quad a_n \to \infty \ (n \to \infty).$$
特别地,

(1) 当 $n > N$ 时 $a_n > E$, 称数列 $\{a_n\}$ 发散于**正无穷大** (positive infinity), 记作 $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$.

(2) 当 $n > N$ 时 $a_n < -E$, 称数列 $\{a_n\}$ 发散于**负无穷大** (negative infinity), 记作 $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$. ♣

注 以上定义中的“任一 $E > 0$”表示任意大的 E.

下面看一个例子.

例 3.26 求证: $\lim_{n\to\infty} (n^2 - 3n - 5) = +\infty$.

证明 由于
$$(n^2 - 3n - 5) - n = n^2 - 4n - 5 = (n-5)(n+1).$$

因此当 $n > 5$ 时 $n^2 - 3n - 5 > n$. 于是对于任一 $E > 0$ 只需取 $N = \max\{5, [E] + 1\}$, 则当 $n > N$ 时

$$n^2 - 3n - 5 > n > N \geq [E] + 1 > E.$$

于是可知 $\lim_{n\to\infty}(n^2 - 3n - 5) = +\infty$. ■

由无穷大的定义立刻可知以下结论.

命题 3.9

无穷大数列必无界.

注 无界的数列未必是无穷大数列. 举例说明. 设数列

$$a_n = \{1, 0, 2, 0, 3, 0, \cdots\}.$$

它是无界的, 但它不是无穷大数列.

无穷大也可以从几何意义去理解.

于是我们可以这样描述无穷大的几何意义. 设数列 $\{a_n\}$. 若对于任一 $E > 0$, 当 n 充分大时, $\{a_n\}$ 的各项都落在邻域 $N_E(+\infty)$ 内, 则 $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$. 若对于任一 $E > 0$, 当 n 充分大时, $\{a_n\}$ 的各项都落在开区间 $(-\infty, -E)$ 内, 则 $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$.

类似地有以下命题.

命题 3.10

设数列 $\{a_n\}$.

(1) $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$ 当且仅当 $+\infty$ 的任一邻域 $(E, +\infty)$ 之外都只有 $\{a_n\}$ 中的有限项.

(2) $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$ 当且仅当 $-\infty$ 的任一邻域 $(-\infty, -E)$ 之外都只有 $\{a_n\}$ 中的有限项.

无穷大与无穷小有如下关系.

命题 3.11 (无穷大和无穷小的关系)

设数列 $\{a_n\}$. 则

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = 0 \iff \lim_{n\to\infty} a_n = \infty.$$

证明 (i) 证明必要性. 若 $1/a_n \to 0$. 则对于任一 $E > 0$, 存在 $N \in \mathbb{N}^*$ 使得当 $n > N$ 时

$$\left|\frac{1}{a_n}\right| < \frac{1}{E} \iff |a_n| > E.$$

于是可知 $a_n \to \infty$.

(ii) 证明充分性. 若 $a_n \to \infty$. 则对于任一 $\varepsilon > 0$, 存在 $N \in \mathbb{N}^*$ 使得当 $n > N$ 时

$$|a_n| > \frac{1}{\varepsilon} \iff \left|\frac{1}{a_n}\right| < \varepsilon.$$

于是可知 $a_n \to 0$. ■

当数列 $\{a_n\}$ 发散于无穷大时, 我们把它极限值看作 $+\infty$ 或 $-\infty$. 因此可以考虑把 $+\infty$ 和 $-\infty$ 作为元素添入实数集 $\mathbb{R}$.

定义 3.8 (广义实数集)

在实数集 $\mathbb{R}$ 中加入元素 $-\infty, \infty$, 令

$$\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}.$$

我们称集合 $\overline{\mathbb{R}}$ 为***广义实数集*** (extended real number system). 规定任一 $x \in \mathbb{R}$ 都满足 $-\infty < x < +\infty$.

注 设 $a, b \in \mathbb{R}$. 则可以定义以下广义区间

$$(-\infty, +\infty) := \mathbb{R}. \quad [-\infty, +\infty] := \overline{\mathbb{R}}.$$
$$(a, +\infty) := \{x \in \mathbb{R} : x > a\}. \quad (-\infty, b) := \{x \in \mathbb{R} : x < b\}.$$
$$[a, +\infty) := \{x \in \mathbb{R} : x \geq a\}. \quad (-\infty, b] := \{x \in \mathbb{R} : x \leq b\}.$$

如果把 ∞ 看作广义实数集中的元素, 那么命题3.11可以看作 $1/\infty = 0$. 用无穷大的定义得到更多的关于无穷大的运算法则.

命题 3.12 (广义实数集的运算法则)

设 $a \in \mathbb{R}, b \in (0, +\infty), c \in (-\infty, 0)$, 则

(1) $a + (\pm\infty) = (\pm\infty) + a = \pm\infty$.

(2) $a - (\pm\infty) = -(\pm\infty) + a = \mp\infty$.

(3) $(+\infty) + (+\infty) = (+\infty) - (-\infty) = +\infty$.

(4) $(-\infty) + (-\infty) = (-\infty) - (+\infty) = -\infty$.

(5) $b \cdot (\pm\infty) = (\pm\infty) \cdot b = \pm\infty$.

(6) $c \cdot (\pm\infty) = (\pm\infty) \cdot c = \mp\infty$.

(7) $(+\infty) \cdot (+\infty) = (-\infty) \cdot (-\infty) = +\infty$.

(8) $(-\infty) \cdot (+\infty) = (+\infty) \cdot (-\infty) = -\infty$.

(9) $\dfrac{\pm\infty}{b} = \pm\infty$.

(10) $\dfrac{\pm\infty}{c} = \mp\infty$.

其中 0 表示无穷小.

注 广义实数集的运算法则实际上是推广了定理3.1. 例如, 若 $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$, $\lim_{n\to\infty} b_n = +\infty$, 则

$$\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n = (+\infty) + (+\infty) = +\infty.$$

为了处理问题的便利, 我们可以把 $+\infty$ 作为无上界的集合的上确界. 把 $-\infty$ 作为无下界的集合的下确界. 这样一来, 实数集 $\mathbb{R}$ 的任一子集 E 在 $\overline{\mathbb{R}}$ 中都有上确界和下确界. 类似地, 数列在 $\overline{\mathbb{R}}$ 中也都有上确界和下确界.

在 $\overline{\mathbb{R}}$ 中, 我们可以把收敛于实数 a 和发散于 ∞ 的数列统称为有极限的数列, 其中前者称为有穷极限, 后者称为无穷极限.

是否有极限	是否是有穷极限	是否收敛	是否有界
极限存在	有穷极限	收敛	有界
极限存在	无穷极限	发散	无界
极限不存在		发散	不确定

前面相关定理的结论可以推广到广义实数集. 例如夹逼定理在广义实数集下仍然成立. 设数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{c_n\}$ 满足

$$a_n \leq b_n \leq c_n, \quad n = 1, 2, \cdots.$$

若 $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = +\infty$, 则 $\lim_{n\to\infty} b_n = +\infty$; 若 $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = -\infty$, 则 $\lim_{n\to\infty} b_n = -\infty$.

3.1.5 数列未定式的定值法

我们知道在实数集中有些运算是没有定义的, 例如 $a/0$ $(a \neq 0)$. 但这个式子在广义实数集中有定义. 然而在广义实数集中, 有些算式的值依旧无法确定.

定义 3.9 (未定式)

以下类型的式子称为**未定式** (indeterminate form), 或**不定式**:

(1) $\infty - \infty$ 型: $(+\infty) - (+\infty)$, $\quad (+\infty) + (-\infty)$, $\quad (-\infty) + (+\infty)$.

(2) $0 \cdot \infty$ 型: $0 \cdot (\pm\infty)$.

(3) $\dfrac{\infty}{\infty}$ 型: $\dfrac{+\infty}{+\infty}$, $\quad \dfrac{+\infty}{-\infty}$, $\quad \dfrac{-\infty}{+\infty}$, $\quad \dfrac{-\infty}{-\infty}$.

(4) $\dfrac{0}{0}$ 型：$\dfrac{0}{0}$.

下面来讨论未定式的极限计算方法. 数列中的未定式主要是 ∞/∞ 型.

设数列 $a_n = n/2^n$ $(n = 1, 2, \cdots)$, 它是一个 ∞/∞ 型的未定式. 求未定式的极限无法用直接用极限的运算法则.

例 3.27 求极限: $\lim_{n\to\infty} n/2^n = 0$.

证明 由于

$$\left|\frac{n}{2^n}\right| = \frac{n}{2^n} = \frac{n}{(1+1)^n} = \frac{n}{1+n+\dfrac{n(n-1)}{2}+\cdots+n+1} < \frac{n}{1+n+\dfrac{n(n-1)}{2}} = \frac{2}{n+1+\dfrac{2}{n}} \to 0.$$

这表明 $\lim_{n\to\infty} n/2^n = 0$. ■

令 $a_n = n, b_n = 2^n$ $(n = 1, 2, \cdots)$. 从直观上看, 虽然 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 都趋向 $+\infty$, 但 "趋向 $+\infty$ 的速度" 不一样.

考察数列 $\{a_n\}$ 的第 n 项到第 m 项的变化情况. 其中 $m-n$ 称为**步长** (step). $a_m - a_n$ 称为**差分** (difference). 容易想到要比较 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$"增长速度", 只需比较单位步长内的差分, 即

$$\frac{a_m - a_n}{m-n}.$$

我们把它称为 $m-n$ 阶**差商** (difference quotient). 数列的差商描述了数列的 "平均变化率". 当步长逐渐减小时, 差商所描述的 "变化率" 越 "精细". 因此我们考虑用一阶差商 (也就是相邻两项的差) 来刻画数列 "趋向 $+\infty$ 的速度" . 分别计算 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的一阶差商:

$$a_n - a_{n-1} = n - (n-1) = 1, \quad n = 1, 2, \cdots.$$

$$b_n - b_{n-1} = 2^n - 2^{n-1} = 2^{n-1}, \quad n = 1, 2, \cdots.$$

这表明 $\{a_n\}$ 是 "匀速地趋向 $+\infty$" , 而 $\{b_n\}$ 是 "越来越快地趋向 $+\infty$" . 考虑它们 "趋向 $+\infty$ 的速度" 之比 (它也是一个数列):

$$\frac{a_n - a_{n-1}}{b_n - b_{n-1}} = \frac{1}{2^{n-1}} \to 0.$$

因此表明, 当两个无穷大的一阶差分之比收敛于零时, 这两个数列之比也收敛于零.

回顾例3.22. 设数列 $a_n \to a$. 令

$$b_n = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}, \quad n = 1, 2, \cdots.$$

这时 b_n 是一个 ∞/∞ 型未定式. 考察它的分子分母的差商之比:

$$\frac{(a_1 + a_2 + \cdots + a_n) - (a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1})}{n-(n-1)} = a_n \to a.$$

例3.22中已经证明 $b_n \to a$. 以上两例给了我们求 ∞/∞ 型未定式的一种思路. 下面来验证这个想法.

观察例3.22可以发现, 数列 $\{a_n\}$ 经历了一种独特的 "变换" . 这种 "变换" 可以保持 $\{a_n\}$ 的极限值不变. 我们尝试把这种 "变换" 的特点抽象出来.

定义 3.10 (Toeplitz 变换)

设无限下三角矩阵 $\boldsymbol{T} = (t_{nk})$ $(n, k = 1, 2, \cdots)$. 若它满足

(1) 对任意 $n, k \in \mathbb{N}^*$ 都有 $t_{nk} \geq 0$.

(2) 对于任一 $n \in \mathbb{N}^*$ 都有 $\sum_{k=1}^{n} t_{nk} = 1$.

(3) 对于任一 $k \in \mathbb{N}^*$ 都有 $\lim_{n\to\infty} t_{nk} = 0$.

则称 $\boldsymbol{T}$ 为一个 **Toeplitz 矩阵** (Toeplitz matrix). 设数列 $\{a_n\}$, 令

$$b_n = \sum_{k=1}^{n} t_{nk} a_k.$$

我们称以上变换为关于 $\boldsymbol{T}$ 的 **Toeplitz 变换** (Toeplitz transformation).

设 Toeplitz 矩阵 $\boldsymbol{T}_1 = (t_{nk})$, 它形如

$$\boldsymbol{T}_1 = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \cdots & \frac{1}{n} & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}. \tag{3.2}$$

容易看出例3.22中的 $\{b_n\}$ 是由 $\{a_n\}$ 经过关于 $\boldsymbol{T}_1$ 的 Toeplitz 变换而来的. 于是我们想到把例3.22推广到一般情况. 证明方法完全类似于例3.22的证法.

定理 3.3 (Silverman-Toeplitz 定理)

设 Toeplitz 矩阵 $\boldsymbol{T} = (t_{nk})$ 和数列 $\{a_n\}$. 令

$$b_n = \sum_{k=1}^{n} t_{nk} a_k.$$

若 $\lim_{n\to\infty} a_n = a \in \mathbb{R}$, 则 $\lim_{n\to\infty} b_n = a$.

证明 (i) 当 $a = 0$ 时. 由于 $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, 故对于任一 $\varepsilon > 0$ 都存在 $N \in \mathbb{N}^*$ 使得当 $n > N$ 时 $|a_n| < \varepsilon/2$. 对于给定的 N, 由于 $\lim_{n\to\infty} t_{nk} = 0\ (k = 1, 2, \cdots)$. 故

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{N} t_{nk}|a_k| = 0.$$

因此对于上取定的 ε, 存在正整数 $N_1 > N$ 使得当 $n > N_1$ 时

$$\sum_{k=1}^{N} t_{nk}|a_k| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

于是当 $n > N_1 > N$ 时

$$|b_n| = \left|\sum_{k=1}^{n} t_{nk} a_k\right| \leq \sum_{k=1}^{n} t_{nk}|a_k| = \sum_{k=1}^{N} t_{nk}|a_k| + \sum_{k=N+1}^{n} t_{nk}|a_k| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}\sum_{k=N+1}^{n} t_{nk} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}\sum_{k=1}^{n} t_{nk} = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

于是可知 $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$.

(ii) 当 $a \neq 0$ 时. 令 $\alpha_n = a_n - a\ (n = 1, 2, \cdots)$. 则 $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0$. 由 (i) 可知

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} t_{nk}\alpha_k = 0.$$

由于 $\sum_{k=1}^{n} t_{nk} = 1\ (n = 1, 2, \cdots)$. 故

$$b_n - a = \sum_{k=1}^{n} t_{nk} a_k - a = \sum_{k=1}^{n} t_{nk} a_k - \sum_{k=1}^{n} t_{nk} a = \sum_{k=1}^{n} t_{nk}(a_k - a) = \sum_{k=1}^{n} t_{nk}\alpha_k, \quad n = 1, 2, \cdots.$$

因此 $\lim_{n\to\infty}(b_n - a) = 0$. 于是可知 $\lim_{n\to\infty} b_n = a$. ■

注 以上定理由德国数学家 Otto Toeplitz 首先给出证明.

Toeplitz 定理已经可以解决一些 ∞/∞ 的未定式. 下面看两个例子.

例 3.28 设数列 $a_n \to a$. 求极限:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_1 + 2a_2 + \cdots + na_n}{n^2}.$$

解 构造 Toeplitz 矩阵. 令

$$t_{nk}=\frac{2k}{n(n+1)},\quad k=1,2,\cdots.$$

由于

$$\sum_{k=1}^{n}t_{nk}=\frac{2(1+2+\cdots+n)}{n(n+1)}=1.$$

$$\lim_{n\to\infty}t_{nk}=\lim_{n\to\infty}\frac{2k}{n(n+1)}=0.$$

由 Toeplitz 定理可知

$$\text{原式}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+2a_2+\cdots+na_n}{n(n+1)}\cdot\frac{n(n+1)}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}t_{nk}\frac{a_n}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)}{n^2}=\frac{a}{2}.$$ ■

例 3.29 若 $\lim_{n\to\infty}x_n=a$, 则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}\sum_{k=1}^{n}\mathrm{C}_n^k x_k=a.$$

证明 构造 Toeplitz 矩阵. 令 $t_{nk}=\mathrm{C}_n^k/2^n$. 由于

$$\sum_{k=1}^{n}t_{nk}=\frac{\mathrm{C}_n^1+\mathrm{C}_n^1+\cdots+\mathrm{C}_n^n}{2^n}=\frac{(1+1)^n}{2^2}=1.$$

$$\lim_{n\to\infty}t_{nk}=\lim_{n\to\infty}\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!2^n}=0.$$

由 Toeplitz 定理可知

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}\sum_{k=1}^{n}\mathrm{C}_n^k x_k=a.$$ ■

由 Silverman-Toeplitz 定理可以证明前面的猜想.

定理 3.4 (Stolz-Cesáro 定理)

设数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$, 其中 $\{b_n\}$ 严格递增, 且 $\lim_{n\to\infty}b_n=+\infty$. 若

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n-a_{n-1}}{b_n-b_{n-1}}=a\in\mathbb{R}.\tag{3.3}$$

则 $\lim_{n\to\infty}a_n/b_n=a$.

证明 令 $a_0=b_0=0$. 下面来构造一个 Toeplitz 矩阵. 设矩阵 $\boldsymbol{T}=(t_{nk})$. 令

$$t_{nk}=\frac{b_k-b_{k-1}}{b_n}.$$

显然满足

$$\sum_{k=1}^{n}t_{nk}=1,\quad n=1,2,\cdots.\quad \lim_{n\to\infty}t_{nk}=0,\quad k=1,2,\cdots.$$

因此 $\boldsymbol{T}$ 是一个 Toeplitz 矩阵. 令

$$x_n=\frac{a_n-a_{n-1}}{b_n-b_{n-1}},\quad n=1,2,\cdots.$$

则

$$\sum_{k=1}^{n}t_{nk}x_k=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{b_k-b_{k-1}}{b_n}\cdot\frac{a_k-a_{k-1}}{b_k-b_{k-1}}\right)=\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k-a_{k-1}}{b_n}=\frac{a_n}{b_n},\quad n=1,2,\cdots.$$

由于 $\lim_{n\to\infty}x_n=a$, 由 Silverman-Toeplitz 定理可知

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}x_n=a.$$ ■

注 以上定理的证明分别于 1885 年和 1888 年被 Stolz 和 Cesáro 独立发表. 但通常称为 Stolz 定理.
注 当 $a = \pm\infty$ 时 Stolz 定理仍然成立, 后面会证明这个事实.
注 需要注意 Stolz 定理的逆命题是不成立的. 举例说明. 设数列

$$a_n = n + (-1)^n, \quad b_n = n.$$

则 $a_n/b_n \to 1$. 但数列 $\{(a_n - a_{n-1})/(b_n - b_{n-1})\}$ 不收敛.
注 在函数极限中我们还会遇到未定式, 那里我们将使用 **L'Hospital 法则** (L'Hospital's rule), 届时我们会发现 L'Hospital 法则和 Stolz 定理在形式上的奇妙联系.

下面来看一个例子.

例 3.30 求极限:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1 + 1/\sqrt{2} + \cdots + 1/\sqrt{n}}{\sqrt{n}}.$$

解 原式是 ∞/∞ 型未定式. 由 Stolz 定理可知:

$$原式 = \lim_{n\to\infty} \frac{1/\sqrt{n}}{\sqrt{n} - \sqrt{n-1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n} + \sqrt{n-1}}{\sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \sqrt{1 - \frac{1}{n}}\right) = 2. \qquad \blacksquare$$

Stolz 定理只要求数列的分母趋于 $infty$, 因此不必理会分子是否趋于 ∞. 下面用 Stolz 定理重新计算例3.28.

例 3.31 设数列 $a_n \to a$. 求极限:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_1 + 2a_2 + \cdots + na_n}{n^2}.$$

解 $\boxed{解法二}$ 由于 $n^2 \to +\infty$, 因此可以用 Stolz 定理:

$$原式 = \lim_{n\to\infty} \frac{na_n}{n^2 - (n-1)^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{2 - 1/n} = a. \qquad \blacksquare$$

对于未定义 a_n/b_n, 若 $(a_n - a_{n-1})/(b_n - b_{n-1})$ 依旧是未定式, 我们可以令 $a_n = a_n - a_{n-1}$, $b_n = b_n - b_{n-1}$, 然后考虑 $(a_n - a_{n-1})/(b_n - b_{n-1})$ 是否有极限. 然后连续用两次 Stolz 定理. 下面举个例子.

例 3.32 计算极限:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n!}{n^2}.$$

解 这是一个 ∞/∞ 型未定式. 使用两次 Stolz 定理可得

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n!}{n^2} \overset{\text{Stolz 定理}}{=\!=\!=} \lim_{n\to\infty} \frac{\ln n! - \ln(n-1)!}{n^2 - (n-1)^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{2n-1} \overset{\text{Stolz 定理}}{=\!=\!=} \lim_{n\to\infty} \frac{\ln[n/(n-1)]}{2} = 0. \qquad \blacksquare$$

注 以上解法中需要计算

$$\lim_{n\to\infty} \ln \frac{n}{n-1}.$$

由于 $n/(n-1) \to 1$ 且 $\ln 1 = 0$. 因此 $\ln[n/(n-1)] \to 0$. 这里用到了对数函数的连续性. 严格证明将在下一章给出.

3.2 数列的收敛判别法

上一节我们讨论了数列极限的概念及其简单性质. 到目前为止, 如果我们要判断一个数列是否有极限, 只能从定义出发. 这样做的前提是我们必须先知道或者猜出数列的极限值. 但大部分时候我们是无法猜出数列的极限值的. 本节我们就来讨论数列极限的一些判别法.

3.2.1 单调数列

我们已经知道数列收敛的一个必要条件是数列有界. 但它不是充分条件. 是否可以加条件让有界数列收敛?

定义 3.11 (单调数列)

设数列 $\{a_n\}$.

(1) 若 $a_n \le a_{n+1}$ $(n = 1, 2, \cdots)$, 则称 $\{a_n\}$ 是**单调递增的** (monotonically increasing).

(2) 若 $a_n \ge a_{n+1}$ $(n = 1, 2, \cdots)$, 则称 $\{a_n\}$ 是**单调递减的** (monotonically decreasing).

特别地, 以上定义中的 $\le$ 改为 $<$, 则称 $\{a_n\}$ 是是**严格递增的** (strictly increasing); $\ge$ 改为 $>$, 则称 $\{a_n\}$ 是**严格递减的** (strictly decreasing).

♣

从直观上就容易想到, 单调且有界的数列是收敛的.

定理 3.5 (单调有界定理)

设数列 $\{a_n\}$.

(1) 若 $\{a_n\}$ 单调递增且有上界, 则 $\{a_n\}$ 收敛且 $\lim_{n\to\infty} a_n = \sup\{a_n\}$.

(2) 若 $\{a_n\}$ 单调递减且有下界, 则 $\{a_n\}$ 收敛且 $\lim_{n\to\infty} a_n = \inf\{a_n\}$.

♡

证明 只证明 (1). 若 $\{a_n\}$ 有上界, 由确界原理可知 $\{a_n\}$ 有上确界. 则对于任一 $\varepsilon > 0$ 都存在 $N \in \mathbb{N}^*$ 使得

$$\sup\{a_n\} - \varepsilon < a_N \le \sup\{a_n\}.$$

由于 $\{a_n\}\uparrow$, 故对于任一 $n > N$ 都有 $a_n \ge a_N$. 这表明对于任一 $\varepsilon > 0$ 都存在 $N \in \mathbb{N}^*$ 使得当 $n > N$ 时都有

$$\sup\{a_n\} - \varepsilon < a_N \le a_n \le \sup\{a_n\}.$$

于是可知 $\{a_n\}$ 收敛, 且 $\lim_{n\to\infty} a_n = \sup\{a_n\}$. ■

注 单调有界定理是第 4 个刻画实数域完备性的定理.

注 由于数列的前有限项不影响其敛散性及其极限值, 因此单调有界定理的条件可以减弱为 "当 n 充分大时数列单调递增 (递减)".

如果一个数列无上界, 那么我们可以把 $+\infty$ 看作它的上确界; 若无下界, 则可以把 $-\infty$ 看作它的下确界. 在这个意义下, 单调数列一定有极限.

定理 3.6

设数列 $\{a_n\}$.

(1) 若 $\{a_n\}$ 单调递增且无上界, 则 $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$.

(2) 若 $\{a_n\}$ 单调递减且无下界, 则 $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$.

♡

证明 只证明 (1). 由于 $\{a_n\}$ 无上界, 故对于任一 $E > 0$ 总存在 $N \in \mathbb{N}^*$ 满足 $a_N > E$. 由于 $\{a_n\}$ 单调递增, 因此当 $n < N$ 时 $a_n \ge a_N$. 这表明对于任一 $E > 0$ 都存在 $N \in \mathbb{N}^*$ 使得当 $n > N$ 时都有

$$a_n \ge a_N > E.$$

于是可知 $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$. ■

例 3.33 调和级数 调和级数发散于 $+\infty$.

证明 调和级数显然单调递增. 由例3.11可知调和级数无界. 于是可知调和级数发散于 $+\infty$. ■

3.12中已经介绍过 p 级数. 现在用单调数列的性质可以完整讨论这类级数的敛散性.

例 3.34 p 级数 讨论 p 级数的敛散性:

$$x_n = 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \cdots + \frac{1}{n^p}, \quad n = 1, 2, \cdots.$$

解 容易知道 $\{x_n\}$ 单调递增.

(i) 当 $p \leq 1$ 时, 由例3.12可知级数无界, 于是可知 $x_n \to +\infty$.

(ii) 当 $p > 1$ 时, 由于

$$x_{2^k-1} = 1 + \left(\frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p}\right) + \left(\frac{1}{4^p} + \frac{1}{5^p} + \frac{1}{6^p} + \frac{1}{7^p}\right) + \cdots + \left[\frac{1}{\left(2^{k-1}\right)^p} + \cdots + \frac{1}{\left(2^k-1\right)^p}\right] \leq 1 + \frac{2}{2^p} + \frac{4}{4^p} + \cdots + \frac{2^{k-1}}{\left(2^{k-1}\right)^p}$$

$$= 1 + \frac{1}{2^{p-1}} + \frac{1}{4^{p-1}} + \cdots + \frac{1}{\left(2^{k-1}\right)^{p-1}} = \frac{1-\left(1/2^{p-1}\right)^k}{1-1/2^{p-1}} < \frac{2^{p-1}}{2^{p-1}-1}.$$

因此当 $p > 1$ 时 $\{x_n\}$ 有界. 于是可知 $\{x_n\}$ 收敛. ■

事实上一般的收敛级数的极限值是很难求得的, 但相比于求出极限值, 我们更关心的是它的敛散性. 对于某些递推关系定义的数列, 只要能证明它们的极限存在, 就很容易求出它们的极限. 下面看一个例子.

例 3.35 设序列 $\{x_n\}$ 满足 $x_1 = \sqrt{2}$, $x_{n+1} = \sqrt{2+x_n}$ $(n = 1, 2, \cdots)$. 则 $\lim_{n\to\infty} x_n = 2$.

证明 由于对于任一 $n \in \mathbb{N}^*$ 都有

$$x_{n+1} = \underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}}_{n+1\text{ 重根号}} > \underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2+0}}}}_{n\text{ 重根号}} = x_n.$$

因此 $\{x_n\}$ 单调递增. 下面用数学归纳法证明 $\{x_n\}$ 有上界. 显然 $x_1 = \sqrt{2} < 2$. 假设 $x_n < 2$. 则 $2 + x_n < 4$. 因此

$$x_{n+1} = \sqrt{2+x_n} < 2.$$

由数学归纳原理可知 $x_n < 2$ $(n = 1, 2, \cdots)$. 由单调有界定理可知 $\{x_n\}$ 收敛. 设 $\lim x_n = a$. 由于

$$(x_{n+1})^2 = 2 + x_n.$$

两边取极限可得

$$\lim_{n\to\infty} (x_{n+1})^2 = \lim_{n\to\infty} (2+x_n) \iff a^2 = 2 + a \iff a = 2,\ a = -1.$$

由于 $x_n > 0$ $(n = 1, 2, \cdots)$, 故 $\lim_{n\to\infty} x_n > 0$, 于是可知 $\lim_{n\to\infty} x_n = 2$. ■

用单调有界定理证明第 5 个刻画实数域完备性的定理.

定理 3.7 (闭区间套定理)

设一列闭区间 $I_n = [a_n, b_n]$ $(n = 1, 2, \cdots)$. 若 $I_n \supseteq I_{n+1}$ $(n = 1, 2, \cdots)$. 且 $\lim_{n\to\infty} (b_n - a_n) = 0$, 则存在唯一 $c \in [a_n, b_n]$ $(n = 1, 2, \cdots)$, 其中

$$c = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n.$$

证明 由条件可知, 数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 都是单调有界的, 由单调有界定理可知它们都收敛. 于是

$$\lim_{n\to\infty} b_n - \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} (b_n - a_n) = 0,$$

令 $\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} a_n = c$, 则 $\inf\{b_n\} = \sup\{a_n\} = c$. 于是

$$a_n \le c \le b_n, \quad n = 1, 2, \cdots.$$

这表明 $c \in [a_n, b_n]$ $(n = 1, 2, \cdots)$. 假设存在 c' 满足 $a_n \le c' \le b_n$ $(n = 1, 2, \cdots)$. 令 $n \to \infty$ 得 $c \le c' \le c$. 因此 $c = c'$, 于是可知这样的 c 唯一存在. ■

注 **闭区间套定理** (nested intervals theorem) 是第 5 个刻画实数域完备性的定理.
注 用闭区间套定理可以立刻证明无尽小数和数轴上的点一一对应.

闭区间套定理需要满足三个条件:
1° 要确保一个区间套在一个区间之中.
2° 要确保所有区间都是闭区间.
3° 要确保闭区间序列的长度的极限是 0.
如果把闭区间套改成开区件套, 其余条件不变, 那么结论就不一定成立. 下面看两个例子.

例 3.36 对比一下两种情况:
(1) 设一列开区间 $I_n = (0, 1/n)$ $(n = 1, 2, \cdots)$. 它满足 $I_n \supseteq I_{n+1}$ $(n = 1, 2, \cdots)$, 且 $(b_n - a_n) \to 0$, 则不存在任何元素同时属于 I_n $(n = 1, 2, \cdots)$.
(2) 设一列开区间 $I_n = (-1/n, 1/n)$ $(n = 1, 2, \cdots)$. 它满足 $I_n \supseteq I_{n+1}$ $(n = 1, 2, \cdots)$, 且 $(b_n - a_n) \to 0$, 则存在唯一元素 $0 \in I_n$ $(n = 1, 2, \cdots)$.

证明 (1) 假设 $\xi \in I_n$ $(n = 1, 2, \cdots)$. 则对于任一 $n \in \mathbb{N}^*$ 都有 $0 < \xi < 1/n$. 现在令 $n = [1/\varepsilon] + 1$ 则 $\varepsilon > 1/n$, 出现矛盾. 因此假设不成立. 于是可知不存在任何元素同时属于 I_n $(n = 1, 2, \cdots)$.

(2) 由于 $-1/n < 0 < 1/n$ $(n = 1, 2, \cdots)$, 故 $0 \in I_n$. 假设存在 $\xi \ne 0$ 满足 $\xi \in I_n$ $(n = 1, 2, \cdots)$. 则对于任一 $n \in \mathbb{N}^*$ 都有 $-1/n < \xi < 1/n$. 不妨设 $\xi > 0$. 则 $0 < \xi < 1/n$. 由 (1) 的讨论可知这样的 ξ 不存在. 于是可知存在唯一元素 $0 \in I_n$ $(n = 1, 2, \cdots)$.

下面我们用单调有界定理来解决一个实际问题. 假设一家银行的每年的定期存款利率为 r. 为了简化问题, 我们不妨设 $r = 100\%$. 那么一元本金一年后的本利和为 $(1 + 100\%)^1 = 2$ 元. 现在我们和银行家商量, 能否半年结息一次 (按复利计算), 银行家同意了. 于是一元本金一年后的本利和为

$$\left(1 + \frac{100\%}{2}\right)^2 = \left(1 + \frac{1}{2}\right)^2 = 2.25(\text{元}).$$

我们发现得到的本利和增加了. 于是我们希望能进一步提高结息的频率. 我们发现

$$\left(1 + \frac{1}{3}\right)^3 \approx 2.37(\text{元}), \quad \left(1 + \frac{1}{4}\right)^4 \approx 2.44(\text{元}), \quad \left(1 + \frac{1}{5}\right)^5 \approx 2.49(\text{元}), \quad \left(1 + \frac{1}{6}\right)^6 \approx 2.52(\text{元}), \quad \cdots.$$

果然, 结息频率越高, 得到的本利和越高. 但是我们观察到每次增加的利息越来越少. 设数列

$$e_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \quad n = 1, 2, \cdots.$$

于是以上问题就归结为 $\{e_n\}$ 是否收敛. 容易看出它是单调递增的, 因此问题进一步归结为 $\{e_n\}$ 是否有上界.

命题 3.13

以下数列收敛

$$e_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \quad n = 1, 2, \cdots$$

证明 (i) 先证明 $\{e_n\}$ 是单调递增的. 由均值不等式可知

$$e_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1\cdot\underbrace{\left(1+\frac{1}{n}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{n}\right)}_{n\text{ 个}} < \left[\frac{1+n(1+1/n)}{n+1}\right]^{n+1} = \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} = e_{n+1},\quad n=1,2,\cdots.$$

于是可知 $\{e_n\}$ 严格单调递增.

(ii) 再证明 $\{e_n\}$ 有上界. 由二项式定理得

$$\begin{aligned} e_n &= \sum_{i=0}^{n}\mathrm{C}_n^i\frac{1}{n^i} = \sum_{i=0}^{n}\frac{n(n-1)\cdots(n-i+1)}{i!n^i} = \sum_{i=0}^{n}\frac{1}{i!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{i-1}{n}\right)\\ &\le \sum_{i=0}^{n}\frac{1}{i!} = 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!} \le 1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}} = 3-\frac{1}{2^{n-1}} < 3. \end{aligned}$$

故 $\{e_n\}$ 有上界.

综合 (i) 和 (ii) 由单调有界定理可知数列 $\{e_n\}$ 收敛. ■

注 单调性的证明也可以从展开式中直接观察得到.

定义 3.12 (自然常数)

令

$$\mathrm{e} := \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

我们称 e 为**自然常数** (natural constant). ♣

注 e 被称为“自然常数”，是因为很多自然规律都有这个常数的身影, 包括细胞分裂等, 著名的“黄金分割”，“Fibonacci 数列”以及金融学中的“复利”都与它有关. 后面我们还会指数函数, 对数函数, 三角函数, 双曲函数以及复数都和自然常数有密切联系. 在后面的一元微分学中我们将看到以 e 为底的指数函数和对数函数具有“非常好”的性质.

从前面的证明过程看出

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \le 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!} < 3,\quad n=1,2,\cdots.$$

令

$$\widetilde{e}_n = 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!},\quad n=1,2,\cdots.$$

以上不等式表明数列 $\widetilde{e}_n$ 也有上界, 而且 $\{\widetilde{e}_n\}$ 显然是严格单调递增的. 因此由单调有界定理立刻可知 $\{\widetilde{e}_n\}$ 也收敛. 容易想到 $\{\widetilde{e}_n\}$ 的极限值可能等于 $\{e_n\}$ 的极限值.

例 3.37 设数列

$$\widetilde{e}_n = 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!},\quad n=1,2,\cdots.$$

则 $\lim_{n\to\infty}\widetilde{e}_n = \mathrm{e}$.

证明 已经证明 $\{\widetilde{e}_n\}$ 是收敛的. 只需证明 $\lim_{n\to\infty}\widetilde{e}_n = \lim_{n\to\infty}e_n$.

(i) 由于

$$e_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \le 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!} = \widetilde{e}_n.$$

由极限的保序性可知 $\lim_{n\to\infty}e_n \le \lim_{n\to\infty}\widetilde{e}_n$.

(ii) 给定 $m \le n$, 则

$$e_n = \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{i-1}{n}\right) \ge \sum_{i=0}^{m} \frac{1}{i!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{i-1}{n}\right)$$

令 $n \to \infty$, 由保序性可知

$$\lim_{n\to\infty} e_n \ge \sum_{i=0}^{m} \frac{1}{i!}.$$

令 $m \to \infty$, 则有 $\lim_{n\to\infty} e_n \ge \lim_{n\to\infty} \widetilde{e}_n$.

综合 (i) 和 (ii) 可知 $\lim_{n\to\infty} \widetilde{e}_n = \lim_{n\to\infty} e_n = \mathrm{e}$. ■

在实际应用中我们更多地使用数列 $\{\widetilde{e}\}$ 来计算 e 的近似值. 这是因为 $\{\widetilde{e}\}$ 收敛得"更快".

n	1	2	3	4	5	6	7	8
e_n	2.00000	2.25000	2.37037	2.44140	2.48832	2.52163	2.54650	2.56578
$\widetilde{e}_n$	2.00000	2.50000	2.66667	2.70833	2.71667	2.71806	2.71825	2.71828

下面我们来估计用 $\{\widetilde{e}\}$ 计算 e 的近似值的误差.

例 3.38 估计用 $\widetilde{e}_8$ 计算 e 的近似值时的误差.

解 由于

$$\begin{aligned}\widetilde{e}_{n+m} - \widetilde{e}_n &= \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \cdots + \frac{1}{(n+m)!} = \frac{1}{(n+1)!}\left[1 + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{(n+2)\cdots(n+m)}\right] \\ &\le \frac{1}{(n+1)!}\left[1 + \frac{1}{n+2} + \cdots + \left(\frac{1}{n+2}\right)^{m-1}\right] = \frac{1}{(n+1)!} \cdot \frac{1-[1/(n+2)]^m}{1-1/(n+2)} \\ &< \frac{1}{(n+1)!} \cdot \frac{1}{1-1/(n+2)}, \quad n = 1, 2, \cdots.\end{aligned}$$

令 $m \to \infty$, 由极限的保序性可知

$$\mathrm{e} - \widetilde{e}_n \le \frac{1}{(n+1)!} \cdot \frac{1}{1-1/(n+2)} < \frac{1}{(n+1)!} \cdot \frac{1}{1-1/(n+1)} = \frac{1}{n!n}, \quad n = 1, 2, \cdots. \tag{3.4}$$

于是可以估计 $\widetilde{e}_8$ 的误差:

$$\mathrm{e} - \widetilde{e}_8 < \frac{1}{8!8} < 3.2 \times 10^{-6} < 10^{-5}.$$

这表明用 $\widetilde{e}_8$ 计算得到的近似值误差小于 10^{-5}. ■

我们已经看到 $2 < \mathrm{e} < 3$, 因此 e 一定不是整数, 下面我们来看它是不是一个有理数.

定理 3.8

自然常数 e 是一个无理数.

证明 用反证法. 假设 $\mathrm{e} = p/q$ $(p, q \in \mathbb{N}^*)$. 由于 $2 < \mathrm{e} < 3$, 故知 e 不是整数. 故 $q \ge 2$. 由不等式3.4可知

$$0 < \mathrm{e} - \widetilde{e}_q < \frac{1}{q!q} \Longrightarrow 0 < q!(\mathrm{e} - \widetilde{e}_q) < \frac{1}{q} \le \frac{1}{2}.$$

这表明 $q!(\mathrm{e} - \widetilde{e}_q)$ 不是整数. 由于 $\mathrm{e} = p/q$, 故

$$q!(\mathrm{e} - \widetilde{e}_q) = q!\left[\frac{p}{q} - \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{q!}\right)\right] = (q-1)!p - (q! + q! + 3 \cdot 4 \cdots q + \cdots + 1) \in \mathbb{Z}.$$

出现矛盾. 于是可知 e 是一个无理数. ■

综合以上讨论我们发现 $\{e_n\}$ 和 $\{\widetilde{e}_n\}$ 都是有理数数列, 但它们却收敛于一个无理数 e. 由此可见, 通过一个"无限的过程"有理数可以"跃迁为"实数. 也说明经历一个无限过程会发生"质变". 后面还将看到在无限过程发生的其它质变.

3.2.2 子列和极限点

并不是每个数列都有极限. 但可以从中取出 ‘‘一部分’’ 使得它有极限. 例如数列 $a_n = (-1)^n$ $(n = 1, 2, \cdots)$ 是发散的. 但可以分别取出它的奇数项和偶数项, 这样就可以得到两个数列

$$a_{2n} \equiv 1, \quad a_{2n-1} \equiv -1.$$

显然它们分别收敛到 1 和 −1. 虽然 $\{a_n\}$ 不收敛, 但通过 $\{a_{2n}\}$ 和 $\{a_{2n-1}\}$ 也能研究它的变化趋势. 于是引出了以下概念.

定义 3.13 (子列)

设数列 $\{a_n\}$. 若 $k_i \in \mathbb{N}^*$ $(i = 1, 2, \cdots)$ 满足 $k_1 < k_2 < \cdots$. 则称数列 $\{a_{k_n}\}$ 为 $\{a_n\}$ 的一个**子列** (subsequence). ♣

注 从一个数列中取出一个子列需要做到两点: 第一是必须取出无穷多项, 第二是取出的项需要保持原来的先后顺序.

注 子列可以看作一个复合映射

$$\mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^* \to \mathbb{R}$$
$$n \mapsto k_n \mapsto a_{k_n}.$$

注 按以上定义 $\{a_n\}$ 也可以看作它自己的一个子列.

命题 3.14

设数列 $\{a_n\}$. 若 $\{a_{k_n}\}$ 是 $\{a_n\}$ 的一个子列. 则 $k_n \geq n$ $(n = 1, 2, \cdots)$. ♠

证明 对 n 进行归纳. 显然有 $k_1 \geq 1$. 假设 $k_n \geq n$ 成立. 由子列的定义可知

$$k_{n+1} > k_n \geq n.$$

因此 $k_{n+1} \geq n + 1$. 有数学归纳原理可知对于一切 $n \in \mathbb{N}^*$ 命题都成立. ■

收敛数列的子列显然有以下结论.

定理 3.9

设数列 $\{a_n\}$. 则 $a_n \to a \in \overline{\mathbb{R}}$ 当且仅当 $\{a_n\}$ 任一子列的极限值都是 a. ♡

证明 只证明 $a \in \mathbb{R}$ 的情况.

(i) 证明必要性. 若 $\lim_{n\to\infty} a_n = a$. 则对于任一 $\varepsilon > 0$ 都存在 $N \in \mathbb{N}^*$ 使得当 $n > N$ 时 $|a_n - a| < \varepsilon$. 任取一个 $\{a_n\}$ 的子列 $\{a_{k_n}\}$. 由于 $k_n \geq n$ $(n = 1, 2, \cdots)$. 因此当 $n > N$ 时 $k_n \geq n > N$, 因此 $|a_{k_n} - a| < \varepsilon$. 于是可知 $\lim_{n\to\infty} a_{k_n} = a$.

(ii) 证明充分性. 当 $\{a_n\}$ 任一子列都收敛于 a 时, 由于 $\{a_n\}$ 本身就是 $\{a_n\}$ 的一个子列, 因此 $\lim_{n\to\infty} a_n = a$. ■

根据以上定理, 若要证明 $a_n \to a$, 就需要证明 $\{a_n\}$ 的任一子列都趋于 a. 但在实际应用中并不需要如此麻烦.

命题 3.15

设数列 $\{a_n\}$. 则

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \iff \lim_{n\to\infty} a_{2n} = \lim_{n\to\infty} a_{2n-1} = a.$$

♠

证明 只需证明充分性. 只证明 $a \in \mathbb{R}$ 的情况. 若

$$\lim_{n\to\infty} a_{2n} = \lim_{n\to\infty} a_{2n-1} = a.$$

则对于任一 $\varepsilon > 0$ 都存在 $N_1, N_2 \in \mathbb{N}^*$ 使得

$$|a_{2n} - a| < \varepsilon, \quad \forall n > N_1,$$
$$|a_{2n-1} - a| < \varepsilon, \quad \forall n > N_2.$$

令 $N = \max\{2N_1, 2N_2 - 1\}$, 则当 $n > N$ 时 $|a_n - a| < \varepsilon$. 于是可知 $\lim_{n\to\infty} a_n = a$. ■

注 更一般地, 若 a_n 的子列 $\left\{b_n^{(1)}\right\}, \left\{b_n^{(2)}\right\}, \cdots, \left\{b_n^{(k)}\right\}$ 都趋于 a, 且它们的并是 $\{a_n\}$, 则 $a_n \to a$.

利用以上性质可以证明 $\{\sin n\}$ 的发散性.

例 3.39 判断数列 $\{\sin n\}$ 的敛散性.

证明 假设 $\sin n \to a$. 由于

$$\sin(n+1) - \sin(n-1) = 2\sin 1 \cos n, \quad n = 1, 2, \cdots.$$

令 $n \to \infty$ 得

$$0 = 2\sin 1 \lim_{n\to\infty} \cos n \iff \lim_{n\to\infty} \cos n = 0.$$

由于

$$\sin 2n = 2\sin n \cos n, \quad n = 1, 2, \cdots.$$

令 $n \to \infty$ 得

$$\lim_{n\to\infty} \sin 2n = 2\lim_{n\to\infty} \sin n \cos n.$$

由于 $\sin n \to a$. 故它的子列 $\sin 2n \to a$. 于是上式变为

$$a = 2\lim_{n\to\infty} \sin n \lim_{n\to\infty} \cos n = 0.$$

由于

$$\sin^2 n + \cos^2 n = 1, \quad n = 1, 2, \cdots.$$

令 $n \to \infty$ 得 $a = 1$. 出现矛盾. 于是可知数列 $\{\sin n\}$ 发散. ■

通过收敛子列可以研究发散的数列. 那么是不是每个有界的数列都存在收敛的子列呢?

定理 3.10 (Bolzano-Weierstrass 定理)

在 $\mathbb{R}$ 中, 任一有界数列都存在收敛子列.

证明 $\boxed{\text{证法一}}$ 设有界数列 $\{a_n\}$. 若 $\{a_n\}$ 是单调的, 则命题显然成立. 下设 $\{a_n\}$ 不是单调数列. 由单调有界定理可知, 若 $\{a_n\}$ 中存在一个单调子列, 则这个子列收敛. 因此只需找到一个这样的子列. 为此先定义一个概念: 若存在 a_N, 使得当 $n > N$ 时都有 $a_n < a_N$, 则称 a_N 是 $\{a_n\}$ 中的一个 “龙头项”.

(i) 当 $\{a_n\}$ 有无穷多个 “龙头项” 时, 我们只需把它们依次取出就可以得到一个严格递减的子列.

(ii) 当 $\{a_n\}$ 只有有限个 “龙头项” 时, 我们取出最后一个龙头项的下一项 a_{k_1}. 由于它不是龙头项, 因此它后面一定存在一项 $a_{k_2} \geq a_{k_1}$. 如此依次进行下去就可以得到一个子列 $\{a_{k_n}\}$, 显然它是单调递增的.

$\boxed{\text{证法二}}$ 设有界数列 $\{a_n\}$. 则存在 $x, y \in \mathbb{R}$ 满足 $x \leq a_n \leq y$ $(n = 1, 2, \cdots)$. 取闭区间 $[x, y]$ 的中点, 则可得到两个闭子区间

$$\left[x, \frac{x+y}{2}\right], \quad \left[\frac{x+y}{2}, y\right].$$

以上两个闭区间中至少有一个含有 $\{a_n\}$ 的无穷多项. 把这个闭子区间记作 $[x_1, y_1]$(如果两个区间都含有 $\{a_n\}$ 的无穷多项, 则一律取右边的区间, 以下同此规定). 取 $[x_1, y_1]$ 的中点, 又可以得到两个闭子区间. 它们中至少有一个

含有 $\{a_n\}$ 的无穷多项. 把这个闭子区间记作 $[x_2, y_2]$. 这个过程可以无限进行下去, 依次操作可得一列闭区间

$$[x_1, y_1] \supseteq [x_2, y_2] \supseteq [x_n, y_n] \cdots.$$

其中第 n 个闭区间 $[x_n, y_n]$ 的长度为

$$y_n - x_n = \frac{b-a}{2^n} \to 0.$$

由闭区间套定理可知存在唯一 $\xi \in \mathbb{R}$ 满足 $\xi \in [x_n, y_n]$ $(n = 1, 2, \cdots)$. 下面来找一个收敛于 ξ 的子列. 在 $[x_1, y_1]$ 中选取一项记作 b_1. 由于 $[x_2, y_2]$ 中有无穷多项, 因此总能找到位于 b_1 之后的项, 把它记作 b_2. 依次下去可以得到 $\{a_n\}$ 的一个子列 $\{b_n\}$. 它满足 $b_n \in [x_n, y_n]$ $(n = 1, 2, \cdots)$. 由于

$$|b_n - \xi| \leq y_n - x_n = \frac{b-a}{2^n} \to 0.$$

因此 $b_n \to \xi$. 这表明有界数列 $\{a_n\}$ 存在一个收敛到 ξ 的子列 $\{b_n\}$. ∎

注 Bolzano-Weierstrass 定理是第 6 个刻画实数域完备性的定理.

注 1817 年 Bolzano 在证明介值定理 (将在下一章介绍) 时顺便证明了以上定理. 他用的方法就是 证法二 , 这个方法称为**二分法** (Bisection method). 大约 50 多年后 Weiersitrass 独立发现并证明这个定理, 并确立了这个定理在数分分析中的基础性地位.

Bolzano-Weiersitrass 定理可以刻画实数的完备性. 在有界的有理数数集中, 未必有收敛的子列. 例如有界数集 $[2, 3] \cap \mathbb{Q}$ 中的数列 $\{(1 + 1/n)^n\}$ 没有收敛子列. 这是因为 $\{(1 + 1/n)^n\}$ 不收敛于任何有理数.

上一章中我们用 Heine-Borel 条件定义了紧集. 现在我们用 Bolzano-Weiersitrass 条件来定义 "列紧集".

定义 3.14 (列紧集)

设集合 $E \subseteq \mathbb{R}$. 若 E 中的任一数列都有一个收敛于 E 中一点的子列, 则称 X 是 $\mathbb{R}$ 上的一个**列紧集** (sequentially compact set). ♣

注 因此 Bolzano-Weiersitrass 定理也称为**列紧性定理** .

根据以上定义我们可以把 Bolzano-Weiersitrass 定理表述为以下形式.

定理 3.11 (Bolzano-Weiersitrass 定理)

$\mathbb{R}$ 中的任一有限闭区间都是列紧集. ♡

注 $\mathbb{R}$ 中的任一有限闭区间都是紧集, 也是列紧集. 后面将证明在实数集中紧性和列紧性是等价的. 从字面上看, 所谓 "列紧", 就是用 "数列" 刻画的 "紧性". 但列紧和紧是两种不同的拓扑性质, 不能混淆. 在更深的主题中可以看出它们的差别.

Bolzano-Weierstrass 定理的结论可以推广到无界数列.

定理 3.12

在 $\mathbb{R}$ 中, 任一数列都能找到一个有极限的子列. ♡

证明 设数列 $\{a_n\}$. 只证明 $\{a_n\}$ 无上界的情况. 此时任一邻域 $N_E(+\infty)$ 中都有 $\{a_n\}$ 中的无穷多项. 我们先在 $(M+1, +\infty)$ 中取一项 a_{k_1}. 然后在 $(M+2, +\infty)$ 中取出位于 a_{k_1} 之后的一项 a_{k_2}. 归纳可知对于任一 $n \in \mathbb{N}^*$ 存在 $k_n > \cdots > k_2 > k_1$ 使得

$$M + n < a_{k_n}.$$

令 $n \to \infty$, 由夹逼定理可知 $\lim_{n\to\infty} a_{k_n} = +\infty$. 这表明无上界的数列一定存在极限是 $+\infty$ 的子列. ∎

于是我们引出了以下概念.

定义 3.15 (极限点)

在 $\mathbb{R}$ 中, 数列 $\{a_n\}$ 的子列的极限称为 $\{a_n\}$ 的**极限点** (limit point) 或**聚点** (cluster point, accumulation point). ♣

注 数列的极限点可以是 $+\infty$ 或 $-\infty$.

根据以上定义, Bolzano-Weiersitrass 定理可以写成以下形式.

定理 3.13

在 $\mathbb{R}$ 中, 任一数列都有极限点. ♡

注 因此 Bolzano-Weiersitrass 定理也称为**聚点定理**.

注 显然, 数列有极限当且仅当它只有一个极限点.

我们也可以从几何的角度来描述极限点. 为此需要先定义 "去心邻域".

定义 3.16 (去心邻域)

给定 $a \in \overline{\mathbb{R}}$. 令

$$\check{N}_r(a) := N_r(a) \backslash \{a\}.$$

其中 r 是任一正实数. 我们把 $\check{N}_r(a)$ 称为以 a 为中心, r 为半径的**去心邻域** (deleted neighborhood). 在不强调半径的情况下 $\check{N}_r(a)$ 可以简记作 $\check{N}(a)$. ♣

定理 3.14

在 $\mathbb{R}$ 中, 设数列 $\{a_n\}$. 则 a 是 $\{a_n\}$ 的一个极限点当且仅当 a 的任一去心邻域 $\check{N}(a)$ 都包含 $\{a_n\}$ 中的无穷多项. ♡

证明 必要性显然成立. 下面证明充分性. 由于 a 的任一去心邻域都包含 $\{a_n\}$ 中的无穷多项. 故可以从 $(a-1, a+1)$ 中选取一项 a_{k_1} 满足

$$a - 1 < a_{k_1} < a + 1.$$

由于 $(a - 1/2, a + 1/2)$ 中包含 $\{a_n\}$ 中的无穷多项. 于是可以从中选取位于 a_{k_1} 之后的一项 a_{k_2} 满足

$$a - \frac{1}{2} < a_{k_2} < a + \frac{1}{2}.$$

由数学归纳法可知, 对于任一 $n \in \mathbb{N}^*$ 都存在一项 a_{k_n} $(k_n > \cdots > k_2 > k_1)$ 使得

$$a - \frac{1}{n} < a_{k_n} < a + \frac{1}{n}.$$

于是我们得到了一个数列 $\{a_{k_n}\}$. 由夹逼定理可知 $\lim_{n\to\infty} a_{k_n} = a$. 于是可知 a 是 $\{a\}$ 的一个极限点. ■

注 有时候我们也可以用以上命题定义极限点.

注 容易证明 a 的任一去心邻域 $\check{N}(a)$ 都包含 $\{a_n\}$ 中的项, 当且仅当 a 的任一去心邻域 $\check{N}(a)$ 都包含 $\{a_n\}$ 中的无穷多项.

在 $\mathbb{R}$ 中, 把 $\{a_n\}$ 的所有极限点组成的集合记作 E. 由前面的讨论可知 $E \neq \varnothing$. 当 E 中只有一个元素时 $\{a_n\}$ 有极限. 当 $|E| \neq 1$ 时, $\{a_n\}$ 没有极限. 此时还可以分成三种情况.

第一种情况: E 为有限集. 设数列 $\{(-1)^n\}$, 则 $E = \{1, -1\}$. 第二种情况: E 为可数集.

例 3.40 设数列

$$\{1,\ 1,\ 2,\ 1,\ 2,\ 3,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5, \cdots\}.$$

则 $E = \mathbb{N}^*$.

第三种情况: E 为不可数集.

例 3.41 设全体有理数组成的数列

$$\left\{\frac{1}{1},\ \frac{1}{2},\ \frac{2}{1},\ \frac{1}{3},\ \frac{2}{2},\ \frac{3}{1},\ \frac{1}{4},\ \frac{2}{3},\ \frac{3}{2},\ \frac{4}{1},\ \cdots\right\}.$$

则 $E=\mathbb{R}$.

证明 任取 $x_0\in\mathbb{R}$. 由于任意两个实数之间一定存在有理数, 因此对于 x_0 的任一去心邻域 $\check{N}_\varepsilon(x_0)$, 都存在有理数 $r\in\check{N}_\varepsilon(x_0)$, 因此 $x_0\in E$. 这表明 $\mathbb{R}\subseteq E$. 显然 $E\subseteq\mathbb{R}$. 于是可知 $E=\mathbb{R}$. ■

3.2.3 上极限和下极限

前面已经看到数列的所有极限点组成的集合可以是单点集、有限集、可数集、不可数集. 但如果从极限点的角度研究数列的趋势, 那么我们并不需要关心极限点集里面的具体元素情况, 而更关心它的上确界和下确界, 即当 $n\to\infty$ 时数列最终将趋于一个多大的范围. 于是考虑引入以下概念.

定义 3.17 (数列的上极限和下极限)

设数列 $\{a_n\}$, 把 $\{a_n\}$ 的所有极限点组成的集合记作 E. 令

$$\limsup_{n\to\infty} a_n := \sup E,\quad \liminf_{n\to\infty} a_n := \inf E.$$

我们称 $\limsup_{n\to\infty} a_n$ 为 $\{a_n\}$ 的**上极限** (limit superior), 称 $\liminf_{n\to\infty} a_n$ 为 $\{a_n\}$ 的**下极限** (limit inferior). ♣

注 E 中可以包含 $+\infty$ 或 $-\infty$.

由于 $E\neq\varnothing$, 因此任一数列都存在上极限和下极限. 这一点使得上极限和下极限比极限更具 "应用优势".

一般来说, 求数列的上极限和下极限没有固定的简单方法. 对于极限点只有有限个的情况, 可以求出这有限个极限点, 从而直接看出上极限和下极限.

例 3.42 设数列

$$a_n=\frac{(-1)^n}{1+1/n},\quad n=1,2,\cdots.$$

求 $\limsup_{n\to\infty}$, $\liminf_{n\to\infty}$.

解 由于

$$a_{2n}=\frac{2n}{2n+1}\to 1,\quad a_{2n-1}=-\frac{2n-1}{2n}\to -1.$$

这表明只有 $\{a_n\}$ 只有 1 和 -1 两个极限点. 于是可知 $\limsup_{n\to\infty}=1$, $\liminf_{n\to\infty}=-1$. ■

例 3.43 设数列

$$a_n=\frac{n^2}{1+n^2}\cos\frac{2n\pi}{3},\quad n=1,2,\cdots.$$

求 $\liminf_{n\to\infty} a_n$, $\limsup_{n\to\infty} a_n$.

解 由于

$$a_{3n}=\frac{(3n)^2}{1+(3n)^2}\cos(2n\pi)=\frac{(3n)^2}{1+(3n)^2}\to 1.$$

$$a_{3n-1}=\frac{(3n-1)^2}{1+(3n-1)^2}\cos\left(2n\pi-\frac{2\pi}{3}\right)=\frac{(3n-1)^2}{1+(3n-1)^2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\to-\frac{1}{2}.$$

$$a_{3n-2}=\frac{(3n-2)^2}{1+(3n-2)^2}\cos\left(2n\pi-\frac{4\pi}{3}\right)=\frac{(3n-2)^2}{1+(3n-2)^2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\to-\frac{1}{2}.$$

因此 $\{a_n\}$ 的极限点只有 2 个. 于是可知

$$\liminf_{n\to\infty} a_n = -\frac{1}{2}, \quad \limsup_{n\to\infty} a_n = 1.$$

如果 $\{a_n\}$ 只有有限个极限点, 那么 $\{a_n\}$ 的上极限就等于最大的极限点, 下极限等于最小的极限点. 如果有无穷多个极限点, 那么上极限未必是最大的极限点, 因为上极限是极限点集的上确界, 上确界未必属于这个集合. 下面来讨论这个问题.

命题 3.16

设数列 $\{a_n\}$, 把 $\{a_n\}$ 的所有极限点组成的集合记作 E. 则 $\limsup_{n\to\infty} a_n, \liminf_{n\to\infty} a_n \in E$.

证明 只证明上极限的情况.

(i) 若 $\limsup_{n\to\infty} a_n = +\infty$. 则 E 无上界, 因此 $\{a_n\}$ 也没有上界, 故 $\{a_n\}$ 一定存在极限为 $+\infty$ 的子列. 因此 $+\infty$ 也是一个极限点, 即 $+\infty \in E$.

(ii) 若 $\limsup_{n\to\infty} a_n = -\infty$. 则 $E = \{-\infty\}$, 因此 $-\infty \in E$.

(iii) 若 $\limsup_{n\to\infty} a_n = a \in \mathbb{R}$. 只需证明有一个收敛于 a 的子列. 由于 $a = \sup E$, 故存在极限点 $l_1 \in (a-1, a+1)$. 因此存在邻域 $N(l_1) \subseteq (a-1, a+1)$ 包含 $\{a_n\}$ 中的无穷多项. 于是可以从中选取一项 a_{k_1} 满足

$$a - 1 < a_{k_1} < a + 1.$$

同理存在极限点 $l_2 \in (a - 1/2, a + 1/2)$. 因此存在邻域 $N(l_2) \subseteq (a - 1/2, a + 1/2)$ 包含 $\{a_n\}$ 中的无穷多项. 于是可以从中选取位于 a_{k_1} 之后的一项 a_{k_2} 满足

$$a - \frac{1}{2} < a_{k_2} < a + \frac{1}{2}.$$

由数学归纳法可知对于任一 $n \in \mathbb{N}^*$ 都存在一项 a_{k_n} $(k_n > \cdots > k_2 > k_1)$ 使得

$$a - \frac{1}{n} < a_{k_n} < a + \frac{1}{n}.$$

于是我们得到了一个数列 $\{a_{k_n}\}$. 由夹逼定理可知 $\lim_{n\to\infty} a_{k_n} = a$. 于是可知 $a \in E$. ∎

注 以上命题告诉我们 $\{a_n\}$ 的上极限和下极限都是数列的极限点, 因此 $\{a_n\}$ 的上极限就是最大的极限点中最大的一个, 下极限就是最小的极限点.

由上极限和下极限的定义, 很容易得到以下结论.

命题 3.17

设数列 $\{a_n\}$. 则 $\liminf_{n\to\infty} a_n \le \limsup_{n\to\infty} a_n$. 等号成立当且仅当 $\{a_n\}$ 有极限.

证明 $\liminf_{n\to\infty} a_n \le \limsup_{n\to\infty} a_n$ 显然成立. 下面来看取等条件. 由于

$$a_n \to a \iff \{a_n\} \text{ 只有一个极限点 } a \iff \limsup_{n\to\infty} a_n = \liminf_{n\to\infty} a_n$$

于是可知命题成立. ∎

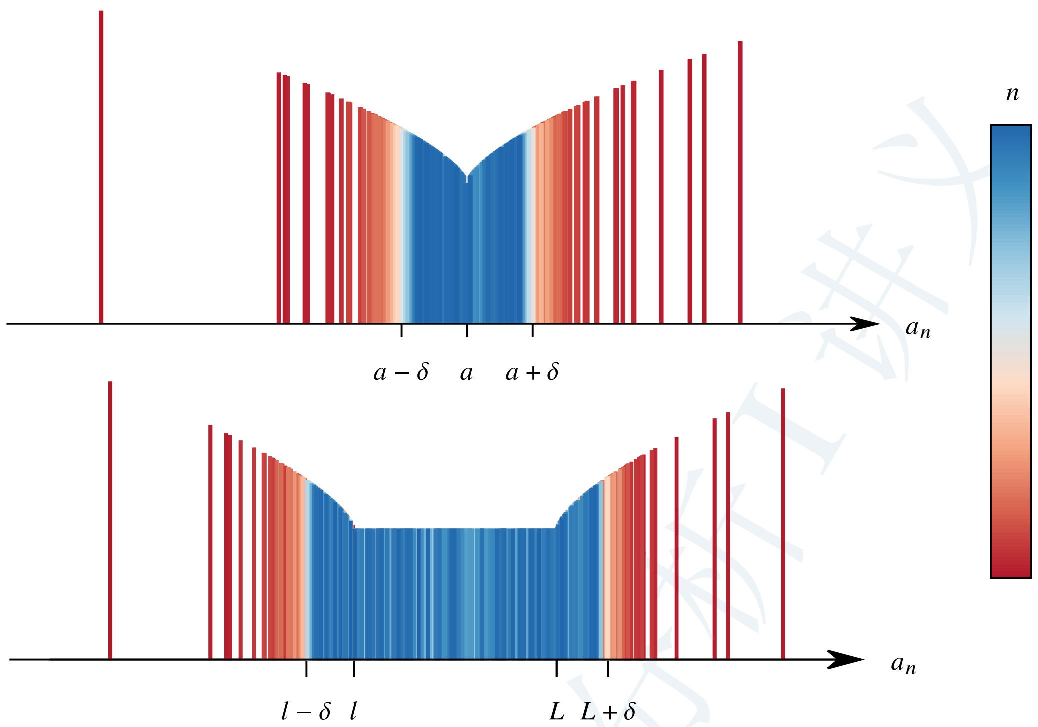

图 3.3: 极限和上下极限的区别.

数列的极限可以用 $\delta-N$ 语言 (或邻域) 来刻画. 数列的极限可以看作是上极限和下极限的特殊情况.

先来回顾一下数列的极限. 当 $a_n \to a \in \mathbb{R}$ 时, a 是 $\{a_n\}$ 的唯一极限点, 由例3.10可知对于任一 $\varepsilon > 0, \delta > 0$, 当 n 充分大时 $\{a_n\}$ 的各项都落在区间 $(a-\varepsilon, a+\delta)$ 中, 即 $(a-\varepsilon, a+\delta)$ 之外只有 $\{a_n\}$ 的有限项.

现在来看更一般的情况, 设 $\{a_n\}$ 的上极限和下极限分别为 $L, l \in \mathbb{R}$, 则 L 和 l 分别是 $\{a_n\}$ 最大的极限点和最小的极限点, 因此对于任一 $\varepsilon > 0, \delta > 0$, 当 n 充分大时 $\{a_n\}$ 的各项都落在区间 $(l-\varepsilon, L+\delta)$ 中, 即 $(l-\varepsilon, L+\delta)$ 之外只有 $\{a_n\}$ 的有限项.

因此上极限和下极限也可以用 $\delta-N$ 语言和邻域来刻画.

定理 3.15

设数列 $\{a_n\}$. 令

$$E = \left\{a \in \mathbb{R} : \text{对于任一 } \varepsilon > 0 \text{ 存在 } N \in \mathbb{N}^* \text{ 使得当 } n > N \text{ 时 } a_n < a+\varepsilon\right\}.$$

$$F = \left\{a \in \mathbb{R} : \text{对于任一 } \varepsilon > 0 \text{ 存在 } N \in \mathbb{N}^* \text{ 使得当 } n > N \text{ 时 } a_n > a-\varepsilon\right\}.$$

则 $\limsup_{n\to\infty} a_n = \inf E$, $\liminf_{n\to\infty} a_n = \sup F$.

证明 只证明上极限的情况. 设 $\limsup_{n\to\infty} a_n = L$.

(i) 证明 $L \geq \inf E$. 用反证法, 假设 $L \notin E$, 即存在 $\varepsilon > 0$ 使得对于任一 $N \in \mathbb{N}^*$ 都存在 $n > N$ 使得 $a_n \geq L+\varepsilon$. 这表明 $(L+\varepsilon, +\infty)$ 中有 $\{a_n\}$ 的无穷多项. 由 Bolzano-Weierstrass 定理可知 $(L+\varepsilon, +\infty)$ 中一定有极限点 $L' > L$, 出现矛盾. 因此 $L \in E$, 这表明 $L \geq \inf E$.

(ii) 证明 $L \leq \inf E$. 假设存在 $a \in E$ 满足 $a < L$. 则存在 $\varepsilon > 0$ 使得 $a+\varepsilon < L$. 由于 $a \in E$, 故存在 $N \in \mathbb{N}^*$ 使得当 $n > N$ 时 $a_n < a+\varepsilon$. 这表明 $(a+\varepsilon, +\infty)$ 中有 $\{a_n\}$ 的有限项, 因此 L 不是极限点, 出现矛盾. 于是可知 $a \geq L$. 这表明 $L \leq \inf E$.

综上可知 $\limsup_{n\to\infty} a_n = \inf E$. ∎

注 为了让上极限是 $+\infty$ 下极限是 $-\infty$ 的情况也能用上面的语言刻画, 可以令

$$E=\left\{a\in\overline{\mathbb{R}}:\text{对于任一 } x>a \text{ 存在 } N\in\mathbb{N}^* \text{ 使得当 } n>N \text{ 时 } a_n<x\right\}.$$
$$F=\left\{a\in\overline{\mathbb{R}}:\text{对于任一 } x<a \text{ 存在 } N\in\mathbb{N}^* \text{ 使得当 } n>N \text{ 时 } a_n>x\right\}.$$

则 $\limsup_{n\to\infty}a_n=\inf E$, $\liminf_{n\to\infty}a_n=\sup F$.

注 以上命题也可以作为数列上极限和下极限的定义.

下面看一个例子.

例 3.44 设非负数列 $\{a_n\}$. 则

$$\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}\le 1 \iff \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{l^n}=0,\ \forall l>1.$$

证明 (i) 证明必要性. 若 $\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}\le 1$, 由定理3.15可知对于任一 $\varepsilon>0$ 都存在 $N\in\mathbb{N}^*$ 使得当 $n>N$ 时 $\sqrt[n]{a_n}<1+\varepsilon$. 于是对于任一 $l>1$ 都有

$$\sqrt[n]{a_n}<1+\varepsilon \iff a_n<(1+\varepsilon)^n \iff \frac{a_n}{l^n}<\left(\frac{1+\varepsilon}{l}\right)^n$$

对于任意给定的 $l>1$, 固定 ε 使得 $\varepsilon+1<l$. 令 $n\to\infty$ 得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{l^n}=0.$$

(ii) 证明充分性. 由于 $a_n/l^n\to 0$, 故对于任一 $\varepsilon>0$ 都存在 $N\in\mathbb{N}^*$ 使得当 $n>N$ 时

$$\left|\frac{a_n}{l^n}\right|<\varepsilon \iff 0\le a_n<\varepsilon l^n \iff 0\le\sqrt[n]{a_n}<\sqrt[n]{\varepsilon}l.$$

令 $n\to\infty$ 取上极限得 $\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}\le l$. 由于 l 是任一大于 1 的数, 于是可知

$$\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}\le 1.$$

利用上极限和下极限的上述定义可以证明它们的保序性.

命题 3.18 (上极限和下极限的保序性)

设数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$. 若存在 $N\in\mathbb{N}^*$ 使得当 $n>N$ 时 $a_n\le b_n$, 则

(1) $\limsup\limits_{n\to\infty}a_n\le\limsup\limits_{n\to\infty}b_n$.

(2) $\liminf\limits_{n\to\infty}a_n\le\liminf\limits_{n\to\infty}b_n$.

证明 只证明 (1). 令 $\limsup_{n\to\infty}a_n=A$, $\limsup_{n\to\infty}b_n=B$.

(i) 当 $B=+\infty$ 或 $A=-\infty$ 时, 命题显然成立.

(ii) 当 $A=+\infty$ 时, 则 $\{a_n\}$ 中存在极限为 $+\infty$ 的子列. 由于存在 $N\in\mathbb{N}^*$ 使得当 $n>N$ 时 $a_n\le b_n$, 故 $\{b_n\}$ 中也存在极限为 $+\infty$ 的子列. 于是 $A=B$. 类似地可知当 $B=-\infty$ 时 $A=B$.

(ii) 当 $A,B\in\mathbb{R}$ 时. 假设 $A>B$. 则存在 $\varepsilon>0$ 使得 $B<B+\varepsilon<A$. 由定理3.15可知当存在 $N_1\in\mathbb{N}^*$ 使得当 $n>N_1$ 时 $b_n<B+\varepsilon$. 因此当 $n>\max\{N,N_1\}$ 时

$$a_n\le b_n<B+\varepsilon<A.$$

这表明 $(B+\varepsilon,+\infty)$ 中只有 $\{a_n\}$ 的有限项, 因此 A 不是 $\{a_n\}$ 的极限点, 出现矛盾. 于是可知 $A\le B$. ■

若要证明 $\{a_n\}$ 的极限存在, 只需用保序性证明 $\limsup_{n\to\infty}a_n\ge\liminf_{n\to\infty}a_n$. 下面看一个例子.

例 3.45 设数列 $\{a_n\}$ 对任意 $m,n\in\mathbb{N}^*$ 都满足

$$0\le a_{m+n}\le a_m+a_n.$$

则数列 $\{a_n/n\}$ 存在有限极限.

证明 给定 $k \in \mathbb{N}^*$, 对于任一 $n \in \mathbb{N}^*$ $(n \geq k)$, 都可以用 k 对 n 作带余除法

$$n = hk + r, \quad h \in \mathbb{N}^*,\ r \in \mathbb{N},\ r < k.$$

由于任意 $m, n \in \mathbb{N}^*$ 都满足 $0 \leq a_{m+n} \leq a_m + a_n$, 故

$$\begin{aligned}\frac{a_n}{n} &= \frac{a_{hk+r}}{n} \leq \frac{a_{hk}+a_r}{n} \leq \frac{ha_k + a_r}{n} = \frac{ha_k}{n} + \frac{a_r}{n} = \frac{ha_k}{hk+r} + \frac{a_r}{n} = \frac{a_k}{k+r/h} + \frac{a_r}{n} \\ &= \frac{a_k}{k + rk/(n-r)} + \frac{a_r}{n}.\end{aligned}$$

令上中的 $n \to \infty$ 取上极限得

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{a_n}{n} \leq \frac{a_k}{k}, \quad k = 1, 2, \cdots.$$

令 $k \to \infty$ 取下极限得

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{a_n}{n} \leq \liminf_{k\to\infty} \frac{a_k}{k}.$$

由于 $\limsup_{n\to\infty}(a_n/n) \geq \liminf_{n\to\infty}(a_n/n)$. 因此

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{a_n}{n} = \liminf_{n\to\infty} \frac{a_n}{n}.$$

因此 $\{a_n/n\}$ 存在极限. 由条件可知

$$0 \leq \frac{a_n}{n} \leq \frac{na_1}{n} = a_1, \quad n = 1, 2, \cdots.$$

因此 $\{a_n/n\}$ 有界, 于是可知 $\{a_n/n\}$ 存在有限极限. ■

现在我们已经给出了定义上极限和下极限的两种方式. 它们比较直观, 都没有与数列 "直接挂钩", 因此在处理某些问题时, 并不便利. 下面尝试再找一个方式描述上极限和下极限.

之前讲到, 研究数列极限并不关心数列的前面有限项, 即去掉数列的前面有限项不改变数列的极限值 (如果有极限的话). 因此研究数列 "最终趋势" 时, 也不需要关心前面的有限项. 受此启发, 对于数列 $\{a_n\}$ 我们可以定义这样一个数列:

$$L_n := \sup_{k\geq n} a_k = \sup\{a_n, a_{n+1}, \cdots\}, \quad n = 1, 2, \cdots.$$

由于

$$\{a_k : k \geq n+1\} \subseteq \{a_k : k \geq n\}, \quad n = 1, 2, \cdots.$$

因此数列 L_n 单调递减. 类似地令

$$l_n := \inf_{k\geq n} a_k = \inf\{a_n, a_{n+1}, \cdots\}, \quad n = 1, 2, \cdots.$$

则数列 $\{l_n\}$ 单调递增. 于是可知以上定义的 $\{L_n\}$ 和 $\{l_n\}$ 都有极限. 不难想到 $\{L_n\}$ 和 $\{l_n\}$ 的极限值分别是 $\{a_n\}$ 的上极限和下极限.

定理 3.16

设数列 $\{a_n\}$. 则

(1) $\limsup_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left(\sup_{k\geq n} a_k\right)$.

(2) $\liminf_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left(\inf_{k\geq n} a_k\right)$.

证明 只证明 (1). 令 $\sup_{k\geq n} a_k = s_n$, $\limsup_{n\to\infty} a_n = L$.

(i) 当 $L = +\infty$ 时. 存在一个极限为 $+\infty$ 的子列. 因此

$$s_n = \sup\{a_n, a_{n+1}, \cdots\} = +\infty, \quad n = 1, 2, \cdots.$$

于是可知 $\lim_{n\to\infty} s_n = +\infty$.

(ii) 当 $L = -\infty$ 时. $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$, 故对于任一 $E > 0$ 都存在 $N \in \mathbb{N}^*$ 使得当 $n > N$ 时 $a_n < -E$. 因此

$$s_N = \sup\{a_N, a_{N+1}, \cdots\} < -E, \quad n = 1, 2, \cdots.$$

由于 s_n 单调递减, 因此当 $n > N$ 时 $s_n \le s_N < -E$. 这表明 $\lim_{n\to\infty} s_n = -\infty$.

(iii) 当 $L \in \mathbb{R}$ 时. 任取 $\{a_n\}$ 的一个极限点 l 则存在一个子列 $\{a_{k_i}\}$ 收敛于 l. 对于给定的 n 选取 $i \ge n$, 则 $k_i \ge i \ge n$. 于是

$$a_{k_i} \le \sup\{a_n, a_{n+1}, \cdots, a_{k_i}, \cdots\} = s_n, \quad n = 1, 2, \cdots.$$

令 $i \to \infty$ 得 $l \le s_n$ $(n = 1, 2, \cdots)$. 再令 $n \to \infty$ 得 $l \le \lim_{n\to\infty} s_n$. 于是 $L \le \lim_{n\to\infty} s_n$.

由定理3.15可知, 对于任一 $\varepsilon > 0$ 都存在 $N \in \mathbb{N}^*$ 使得当 $n > N$ 时 $a_n \le L + \varepsilon$. 因此 $s_N \le L + \varepsilon$. 由于 s_n 单调递减, 因此当 $n > N$ 时 $s_n \le s_N \le L + \varepsilon$. 令 $n \to \infty$ 得 $\lim_{n\to\infty} s_n \le L + \varepsilon$. 由于 ε 是任一正数, 故 $L \ge \lim_{n\to\infty} s_n$. 于是可知 $L = \lim_{n\to\infty} s_n$. ■

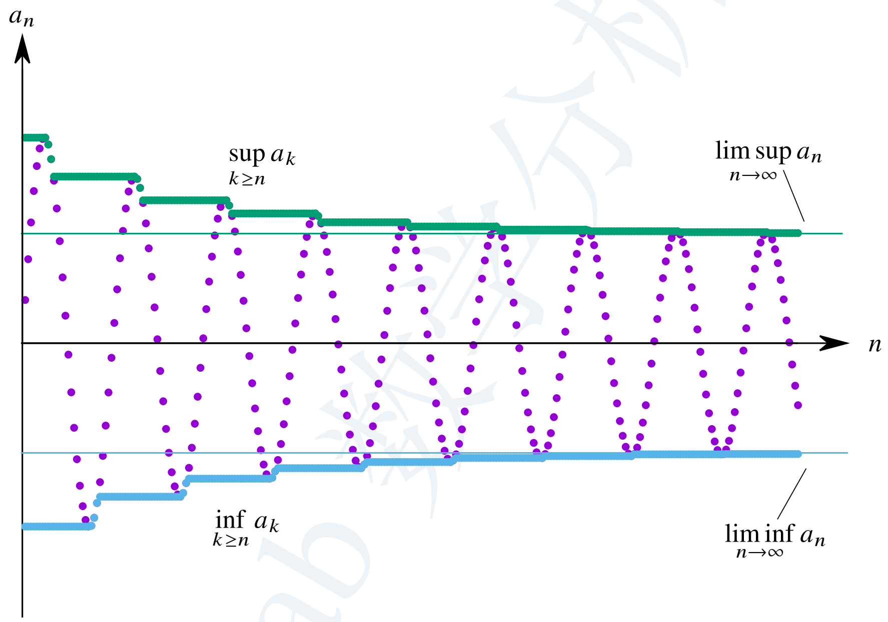

图 3.4: 上下极限的第三种定义.

注 上述定理可以看作上极限和下极限的第三种定义.

注 上极限和下极限的符号实际上来自上述定理. 数列的上极限和下极限也可以记作 $\overline{\lim}\, a_n$ 和 $\underline{\lim}\, a_n$.

用以上定理处理关于上极限和下极限的不等式较为便利.

例 3.46 设数列 $\{a_n\}$. 则

(1) $\limsup_{n\to\infty}(-a_n) = -\liminf_{n\to\infty} a_n$.

(2) $\liminf_{n\to\infty}(-a_n) = -\limsup_{n\to\infty} a_n$.

证明 只证明 (1). 由命题2.9可知 $\sup(-E) = -\inf E$, $\inf(-E) = -\sup E$. 于是

$$\sup_{k\ge n}(-a_k) = -\inf_{k\ge n} a_k, \quad \inf_{k\ge n}(-a_k) = -\sup_{k\ge n} a_k.$$

令 $n \to \infty$ 即得要证的结论. ■

上极限、下极限和极限不同的地方在于上极限、下极限不满足 “可加性”. 但它们分别满足 “次可加性” 和 “超可加性”.

命题 3.19 (上极限的次可加性和下极限的超可加性)

设数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$. 则

(1) $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n + \liminf\limits_{n\to\infty} b_n \leq \liminf\limits_{n\to\infty}(a_n+b_n) \leq \liminf\limits_{n\to\infty} a_n + \limsup\limits_{n\to\infty} b_n$.

(2) $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n + \limsup\limits_{n\to\infty} b_n \leq \limsup\limits_{n\to\infty}(a_n+b_n) \leq \limsup\limits_{n\to\infty} a_n + \limsup\limits_{n\to\infty} b_n$.

证明 只证明 (1). 由于对于任一 $l \geq n$ 都有 $\inf_{k\geq n} a_k \leq a_l$, $\inf_{k\geq n} b_k \leq b_l$. 因此

$$\inf_{k\geq n} a_k + \inf_{k\geq n} b_k \leq a_l + b_l \Longrightarrow \inf_{k\geq n} a_k + \inf_{k\geq n} b_k \leq \inf_{k\geq n}(a_k+b_k).$$

由以上不等式可知

$$\inf_{k\geq n} a_k + \sup_{k\geq n} b_k \geq \inf_{k\geq n}(a_k+b_k) + \inf_{k\geq n}(-b_k) + \sup_{k\geq n} b_k = \inf_{k\geq n}(a_k+b_k).$$

于是

$$\inf_{k\geq n} a_k + \inf_{k\geq n} b_k \leq \inf_{k\geq n}(a_k+b_k) \leq \inf_{k\geq n} a_k + \sup_{k\geq n} b_k.$$

令 $n\to\infty$, 由定理3.16即得

$$\liminf_{n\to\infty} a_n + \liminf_{n\to\infty} b_n \leq \liminf_{n\to\infty}(a_n+b_n) \leq \liminf_{n\to\infty} a_n + \limsup_{n\to\infty} b_n.$$ ■

注 以上定理中的不等式两端需要有意义, 即不能出现 $\infty-\infty$ 型不等式. 例如设 $a_n = n$, $b_n = -n$, 则等式两侧就会出现 $\infty-\infty$.

注 设定义在 A 上的映射 f.

(1) 若 $f(a+b) = f(a)+f(b)$ $(\forall a, b\in A)$, 则称 f 满足**可加性** (additivity).

(2) 若 $f(a+b) \geq f(a)+f(b)$ $(\forall a, b\in A)$, 则称 f 满足**超可加性** (superadditivity).

(3) 若 $f(a+b) \leq f(a)+f(b)$ $(\forall a, b\in A)$, 则称 f 满足**次可加性** (subadditivity).

例 3.47 举例说明数列的上极限有次可加性而下极限有超可加性.

解 设数列

$$\{a_n\} = \{0,1,2,0,1,2,\cdots\}. \quad \{b_n\} = \{2,3,1,2,3,1,\cdots\}.$$

则

$$\{a_n+b_n\} = \{2,4,3,2,4,3,\cdots\}.$$

于是

$$\liminf_{n\to\infty} a_n = 0, \quad \liminf_{n\to\infty} b_n = 1, \quad \liminf_{n\to\infty}(a_n+b_n) = 2.$$

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = 2, \quad \limsup_{n\to\infty} b_n = 3, \quad \limsup_{n\to\infty}(a_n+b_n) = 4.$$

因此

$$2 = \liminf_{n\to\infty}(a_n+b_n) \geq \liminf_{n\to\infty} a_n + \liminf_{n\to\infty} b_n = 1.$$

$$4 = \limsup_{n\to\infty}(a_n+b_n) \leq \limsup_{n\to\infty} a_n + \limsup_{n\to\infty} b_n = 5.$$

上极限的次可加性和下极限的超可加性可以证明以下结论.

例 3.48 设数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$, 若 $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, 则

(1) $\liminf\limits_{n\to\infty}(a_n+b_n) = a + \liminf\limits_{n\to\infty} b_n$.

(2) $\limsup\limits_{n\to\infty}(a_n+b_n) = a + \limsup\limits_{n\to\infty} b_n$.

证明 只证明 (1). 由于 $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, 故 $\limsup_{n\to\infty} a_n = \liminf_{n\to\infty} a_n = a$. 由下极限的超可加性可知

$$\liminf_{n\to\infty}(a_n+b_n) \geq \liminf_{n\to\infty} a_n + \liminf_{n\to\infty} b_n = a + \liminf_{n\to\infty} b_n.$$

$$a + \liminf_{n\to\infty} b_n \geq a + \liminf_{n\to\infty}(-a_n) + \liminf_{n\to\infty}(a_n+b_n) = \liminf_{n\to\infty}(a_n+b_n).$$

于是可知 $\liminf_{n\to\infty}(a_n+b_n) = a + \liminf_{n\to\infty} b_n$. ■

与上极限的次可加性和下极限的超可加性类似的还有以下结论.

命题 3.20

设非负数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$. 则

(1) $\left(\liminf\limits_{n\to\infty} a_n\right)\left(\liminf\limits_{n\to\infty} b_n\right) \leq \liminf\limits_{n\to\infty}(a_nb_n) \leq \left(\liminf\limits_{n\to\infty} a_n\right)\left(\limsup\limits_{n\to\infty} b_n\right)$.

(2) $\left(\liminf\limits_{n\to\infty} a_n\right)\left(\limsup\limits_{n\to\infty} b_n\right) \leq \limsup\limits_{n\to\infty}(a_nb_n) \leq \left(\limsup\limits_{n\to\infty} a_n\right)\left(\limsup\limits_{n\to\infty} b_n\right)$.

证明 只证明 (1). 由于对于任一 $l \geq n$ 都有 $\inf_{k\geq n} a_k \leq a_l$, $\inf_{k\geq n} b_k \leq b_l$. 由于 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 非负, 因此

$$\left(\inf_{k\geq n} a_k\right)\left(\inf_{k\geq n} b_k\right) \leq a_lb_l \Longrightarrow \left(\inf_{k\geq n} a_k\right)\left(\inf_{k\geq n} b_k\right) \leq \inf_{k\geq n}(a_kb_k).$$

对于任一 $\varepsilon > 0$ 存在 $m \geq n$ 使得 $a_m < \varepsilon + \inf_{k\geq n} a_k$. 由于 $b_m \leq \sup_{k\geq n} b_k$, 且 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 都是非负数列, 因此

$$\left(\varepsilon + \inf_{k\geq n} a_k\right)\left(\sup_{k\geq n} b_k\right) > a_mb_m \geq \inf_{k\geq n} a_kb_k.$$

令 $\varepsilon \to 0$ 得

$$\left(\inf_{k\geq n} a_k\right)\left(\sup_{k\geq n} b_k\right) \geq \inf_{k\geq n} a_kb_k.$$

于是得到不等式

$$\left(\inf_{k\geq n} a_k\right)\left(\inf_{k\geq n} b_k\right) \leq \inf_{k\geq n}(a_kb_k) \leq \left(\inf_{k\geq n} a_k\right)\left(\sup_{k\geq n} b_k\right).$$

令 $n \to \infty$ 即得要证的结论. ■

注 以上定理中的不等式两端需要有意义, 即不能出现 $0\cdot\infty$ 型不等式. 例如设 $a_n = n$, $b_n = 1/n$, 则等式两侧就会出现 $0\cdot\infty$.

类比例3.48有以下结论.

例 3.49 设数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$, 若 $\{a_n\}$ 是一个非负数列且 $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, 则

(1) $\limsup\limits_{n\to\infty}(a_nb_n) = a\limsup\limits_{n\to\infty} b_n$.

(2) $\liminf\limits_{n\to\infty}(a_nb_n) = a\liminf\limits_{n\to\infty} b_n$.

证明 设 $\limsup_{n\to\infty} b_n = L$, $\liminf_{n\to\infty} b_n = l$.

(1) (i) 当 $L > 0$ 时. 令

$$b_n^+ = \frac{|b_n| + b_n}{2}, \quad n = 1, 2, \cdots.$$

则 $\{b_n^+\}$ 是一个非负数列, 且 $\limsup_{n\to\infty} b_n^+ = L$. 由于 $\{a_n\}$ 是一个非负数列且 $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, 由命题3.20可知

$$aL = \left(\liminf_{n\to\infty} a_n\right)\left(\limsup_{n\to\infty} b_n^+\right) \le \limsup_{n\to\infty}\left(a_n b_n^+\right) \le \left(\limsup_{n\to\infty} a_n\right)\left(\limsup_{n\to\infty} b_n^+\right) = aL.$$

因此

$$\limsup_{n\to\infty}\left(a_n b_n^+\right) = aL = a\limsup_{n\to\infty} b_n.$$

由于 $\sup_{k\ge n} b_k = \sup_{k\ge n} b_k^+$ 且 $\{a_n\}$ 非负, 因此 $\sup_{k\ge n}(a_n b_k) = \sup_{k\ge n}(a_n b_k^+)$. 令 $n\to\infty$ 得

$$\limsup_{n\to\infty}(a_n b_n) = \limsup_{n\to\infty}(a_n b_n^+) = a\limsup_{n\to\infty} b_n.$$

(ii) 当 $L\le 0$ 时, 存在 $\delta>0$ 使得 $L+\delta>0$. 令 $b_n' = b_n+\delta$ $(n=1,2,\cdots)$. 由例3.48可知 $\limsup_{n\to\infty} b_n' = L+\delta>0$. 由 (i) 可知

$$\limsup_{n\to\infty}(a_n b_n') = a\limsup_{n\to\infty} b_n' \iff \limsup_{n\to\infty}(a_n b_n + \delta a_n) = a\limsup_{n\to\infty}(b_n+\delta)$$

$$\iff \delta a + \limsup_{n\to\infty}(a_n b_n) = a\left(\delta + \limsup_{n\to\infty} b_n\right) \iff \limsup_{n\to\infty}(a_n b_n) = a\limsup_{n\to\infty} b_n.$$

(2) 由 (1) 得 $\limsup_{n\to\infty}(a_n c_n) = a\limsup_{n\to\infty} c_n$. 令 $-b_n = c_n$ $(n=1,2,\cdots)$. 有例3.46可知

$$\limsup_{n\to\infty}[a_n(-b_n)] = a\limsup_{n\to\infty}(-b_n) \iff -\liminf_{n\to\infty}(a_n b_n) = -a\liminf_{n\to\infty} b_n \iff \liminf_{n\to\infty}(a_n b_n) = a\liminf_{n\to\infty} b_n. \quad\blacksquare$$

任一数列总是有上极限和下极限的, 所以利用上极限和下极限可以简化处理问题的过程. 下面尝试用上极限和下极限证明 Stolz 定理, 读者可以从中体会上极限和下极限的应用方法.

例 3.50Stolz-Cesáro 定理 设序列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$, 若 $\{b_n\}$ 严格递增, 且 $\lim_{n\to\infty} b_n = +\infty$. 则

$$\liminf_{n\to\infty}\frac{a_n-a_{n-1}}{b_n-b_{n-1}} \le \liminf_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} \le \limsup_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} \le \limsup_{n\to\infty}\frac{a_n-a_{n-1}}{b_n-b_{n-1}}.$$

证明 中间的不等号显然成立.

(i) 证明右边的不等号. 令

$$L = \limsup_{n\to\infty}\frac{a_n-a_{n-1}}{b_n-b_{n-1}}.$$

当 $L=+\infty$ 时显然成立. 下设 $L<+\infty$ (L 可以是 $-\infty$). 对于任一 $l>L$, 存在 $N\in\mathbb{N}^*$ 使得当 $n\ge N$ 时

$$\frac{a_n-a_{n-1}}{b_n-b_{n-1}} < l.$$

因此

$$\frac{a_N-a_{N-1}}{b_N-b_{N-1}} < l, \quad \frac{a_{N+1}-a_N}{b_{N+1}-b_N} < l, \quad \cdots\frac{a_n-a_{n-1}}{b_n-b_{n-1}} < l.$$

由于 $\{b_n\}$ 严格递增, 故 $b_n-b_{n-1}>0$ $(n=2,3,\cdots)$. 于是

$$\frac{a_n-a_{N-1}}{b_n-b_{N-1}} < l. \tag{3.5}$$

由于 $b_n\to+\infty$, 故 n 充分大之后 $b_n\ne 0$. 于是

$$\frac{\dfrac{a_n}{b_n}-\dfrac{a_{N-1}}{b_n}}{1-\dfrac{b_{N-1}}{b_n}} < l \iff \frac{a_n}{b_n} < l\left(1-\frac{b_{N-1}}{b_n}\right)+\frac{a_{N-1}}{b_n}.$$

由于 $b_n\to+\infty$, 令 $n\to\infty$ 取上极限可得 $\limsup_{n\to\infty}(a_n/b_n)\le l$. 由于 l 是任一大于 L 的数, 因此

$$\limsup_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} \le L = \limsup_{n\to\infty}\frac{a_n-a_{n-1}}{b_n-b_{n-1}}.$$

(ii) 证明左边的不等号. 由 (i) 结合例3.46可知

$$\limsup_{n\to\infty}\frac{(-a_n)-(-a_{n-1})}{b_n-b_{n-1}} \ge \limsup_{n\to\infty}\frac{-a_n}{b_n} \iff \liminf_{n\to\infty}\frac{a_n-a_{n-1}}{b_n-b_{n-1}} \le \liminf_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}. \quad\blacksquare$$

注 以上证明过程中,推得不等式3.5是根据以下结论. 设分数 $a_1/b_1, a_2/b_2, \cdots, a_n/b_n$ 的分母都大于零, 令则

$$\min\left\{\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, \cdots, \frac{a_n}{b_n}\right\} \leq \frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{b_1+b_2+\cdots+b_n} \leq \max\left\{\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, \cdots, \frac{a_n}{b_n}\right\}.$$

注 以上是 Stolz 定理更一般化的表述. 当 $(a_n - a_{n-1})/(b_n - b_{n-1})$ 极限存在时, 不定式两端相等因此 a_n/b_n 的极限也存在且等于 $(a_n - a_{n-1})/(b_n - b_{n-1})$ 的极限值.

3.2.4 Cauchy 收敛准则

单调有界定理可以在不知道极限值的情况下直接判断数列收敛. 但它的条件太强了, 它只是数列收敛的充分条件, 而非必要条件. 我们希望得到一个数列收敛的充要条件, 且不需要提前知道数列的极限值. 为此先来探索数列收敛的必要条件.

命题 3.21

设数列 $\{a_n\}$ 收敛. 则对于任意 $\varepsilon > 0$, 都存在 $N \in \mathbb{N}^*$, 使得当 $m, n > N$ 时

$$|a_m - a_n| < \varepsilon.$$

证明 设 $a_n \to a \in \mathbb{R}$, 则对于任一 $\varepsilon > 0$ 都存在 $N \in \mathbb{N}^*$, 使得当 $n, m > N$ 时

$$|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad |a_m - a| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

于是可知

$$|a_m - a_n| < |a_n - a| + |a_m - a| < \varepsilon.$$

■

我们把满足以上条件的数列称为 "Cauchy 列".

定义 3.18 (Cauchy 列)

设数列 $\{a_n\}$. 若对于任意 $\varepsilon > 0$, 都存在 $N \in \mathbb{N}^*$, 使得当 $m, n > N$ 时

$$|a_m - a_n| < \varepsilon.$$

则称该数列是一个 **Cauchy 列** (Cauchy sequence) 或**基本列** (fundamental sequence).

注 $\{a_n\}$ 不是 Cauchy 列当且仅当存在 $\varepsilon > 0$, 对于任一 $N \in \mathbb{N}^*$ 存在 $m, n > N$ 使得 $|a_m - a_n| \geq \varepsilon$.

下面来一个 Cauchy 列的例子.

例 3.51 数列 $\{q^n\}$ $(|q| < 1)$ 是一个 Cauchy 列.

证明 由于 $q^n \to 0$, 故对于任一 $\varepsilon > 0$ 都存在 $N \in \mathbb{N}^*$ 使得当 $n > N$ 时

$$|q^n| = |q|^n < \frac{\varepsilon}{2}.$$

因此当 $n, m > N$ $(n < m)$ 时

$$|q^n - q^m| = |1 - q^{m-n}||q|^n \leq (1 + |q|^{m-n})|q|^n < 2|q|^n < 2 \cdot \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

于是可知 $\{q^n\}$ $(|q| < 1)$ 是一个 Cauchy 列. ■

下面来看一个级数的例子.

例 3.52 设数列

$$a_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}, \quad n = 1, 2, \cdots.$$

则 $\{a^n\}$ 是一个 Cauchy 列.

证明 对于任意 $m, n \in \mathbb{N}^*$ $(m < n)$, 都有

$$\begin{aligned}|a_n - a_m| &= \frac{1}{(m+1)^2} + \frac{1}{(m+2)^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} < \frac{1}{m(m+1)} + \frac{1}{(m+1)(m+2)} + \cdots + \frac{1}{(n-1)n} \\ &= \frac{1}{m} - \frac{1}{m+1} + \frac{1}{m+1} - \frac{1}{m+2} + \cdots + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} = \frac{1}{m} - \frac{1}{n} < \frac{1}{m}.\end{aligned}$$

因此对于任一 $\varepsilon > 0$, 只需取 $N = [1/\varepsilon]$, 则当 $m, n > N$ 时就有

$$|a_n - a_m| < \frac{1}{m} < \varepsilon.$$

于是可知 $\{a_n\}$ 是一个 Cauchy 列. ■

下面看两个证明数列不是 Cauchy 列的例子.

例 3.53 数列 $\{(-1)^n\}$ 不是 Cauchy 列.

证明 取 $\varepsilon = 1$. 则对于任一 $n \in \mathbb{N}^*$ 都有

$$|(-1)^{n+1} - (-1)^n| = |(-1)^n||-1-1| = 2 > 1.$$

于是可知 $\{(-1)^n\}$ 不是 Cauchy 列. ■

例 3.54 设数列

$$a_n = 1 + \frac{1}{2^\alpha} + \cdots + \frac{1}{n^\alpha}, \quad n = 1, 2, \cdots.$$

其中 $\alpha \le 1$. 则 $\{a^n\}$ 不是 Cauchy 列.

证明 由于 $\alpha \le 1$, 故对于任一 $n \in \mathbb{N}^*$ 都有

$$\begin{aligned}|a_{2n} - a_n| &= \frac{1}{(n+1)^\alpha} + \frac{1}{(n+2)^\alpha} + \cdots + \frac{1}{(2n)^\alpha} \ge \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} \\ &\ge \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \cdots + \frac{1}{2n} = \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

于是可知 $\{a^n\}$ 不是 Cauchy 列. ■

某些条件和 Cauchy 列的条件比较相像, 需要仔细辨别.

例 3.55 设数列 $\{a_n\}$. 若对于任意 $\varepsilon > 0$, 都存在 $N \in \mathbb{N}^*$, 使得当 $n > N$ 时

$$|a_{n+1} - a_n| < \varepsilon.$$

判断 $\{a_n\}$ 是不是 Cauchy 列.

解 不一定是 Cauchy 列. 举例说明, 设 $a_n = \sqrt{n}$ $(n = 1, 2, \cdots)$. 则

$$a_{n+1} - a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} < \frac{1}{\sqrt{n}} \to 0.$$

因此对于任一 $\varepsilon > 0$, 当 n 充分大时有 $|a_{n+1} - a_n| < \varepsilon$. 但它不是 Cauchy 列. 给定 $\varepsilon = 1$, 对于任一 $N \in \mathbb{N}^*$, 只需取 $n = \left(2 + \sqrt{N}\right)^2 > N$, 就有

$$a_n - a_N = \sqrt{n} - \sqrt{N} = 2 > 1.$$

这表明 $\{\sqrt{n}\}$ 不是 Cauchy 列. ■

反过来, 如果一个数列是 Cauchy 列, 那么它是否一定收敛?

定理 3.17 (Cauchy 收敛准则)

一个数列收敛当且仅当它是一个 Cauchy 列.

证明 只证明充分性. 设数列 $\{a_n\}$ 是一个 Cauchy 列.

(i) 证明 $\{a_n\}$ 有界. 对于任一 $\varepsilon > 0$ 都存在 $N \in \mathbb{N}^*$, 使得当 $n \geq N$ 时

$$|a_n| - |a_N| < |a_n - a_N| < \varepsilon \Longrightarrow |a_n| < |a_N| + \varepsilon.$$

令 $M = \max(|a_1|, |a_2|, \cdots, |a_{N-1}|, |a_N| + \varepsilon)$. 则对于任意 $n \in \mathbb{N}^*$ 都有 $|a_n| \leq M$. 因此 $\{a_n\}$ 有界.

(ii) 证明 $\{a_n\}$ 收敛.

$\boxed{\text{证法一}}$ 由于 $\{a_n\}$ 有界, 由 Bolzano-Weierstrass 定理可知存在一个子列 $a_{k_n} \to a$. 则对于任一 $\varepsilon > 0$ 都存在 $N_1 \in \mathbb{N}^*$, 使得当 $n > N_1$ 时 $|a_{k_n} - a| < \varepsilon/2$. 由于 $\{a_n\}$ 是一个 Cauchy 列, 故对于上面给定的 $\varepsilon > 0$ 都存在 $N_2 \in \mathbb{N}^*$, 使得当 $m, n > N_2$ 时都有 $|a_m - a_n| < \varepsilon/2$. 由于 $k_n \geq n$, 因此当 $n > \max\{N_1, N_2\}$ 时有

$$|a_n - a| = |(a_n - a_{k_n}) + (a_{k_n} - a)| \leq |a_n - a_{k_n}| + |a_{k_n} - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

于是可知 $a_n \to a$.

$\boxed{\text{证法二}}$ 由于 $\{a_n\}$ 是一个 Cauchy 列, 则对于任一 $\varepsilon > 0$ 都存在 $N \in \mathbb{N}^*$, 使得当 $n \geq N$ 时

$$|a_n - a_N| < \varepsilon \iff a_N - \varepsilon < a_n < a_N + \varepsilon.$$

对以上不等式的左半部分取下极限, 对右半部分取上极限可得

$$a_N - \varepsilon \leq \liminf_{n\to\infty} a_n \leq \limsup_{n\to\infty} a_n \leq a_N + \varepsilon.$$

令 $\varepsilon \to 0$ 得 $\liminf_{n\to\infty} a_n = \limsup_{n\to\infty} a_n$. 因此 $\{a_n\}$ 极限存在. 由于 $\{a_n\}$ 有界, 于是可知 $\{a_n\}$ 收敛. ■

注 Cauchy 收敛准则是第 7 个刻画实数域完备性的定理. 1821 年 Cauchy 发表了《分析教程》(Cours d'Analyse), 书中首次给出了以上判别法.

下面看一个例子.

例 3.56 设数列 $\{a_n\}$. 令

$$b_n = |a_2 - a_1| + |a_3 - a_2| + \cdots + |a_n - a_{n-1}|, \quad n = 1, 2, \cdots.$$

若 $\{b_n\}$ 有界, 则 $\{a_n\}$ 收敛.

证明 显然 b_n 单调递增. 由于 $\{b_n\}$ 有界, 故 $\{b_n\}$ 收敛. 因此 $\{b_n\}$ 是一个 Cauchy 列. 因此对于任一 $\varepsilon > 0$, 存在 $N \in \mathbb{N}^*$ 使得当 $m, n > N$ $(m < n)$ 时

$$\varepsilon > |b_m - b_n| = |a_{m+1} - a_m| + |a_{m+2} - a_{m+1}| + \cdots + |a_n - a_{n-1}| \geq |a_{m+1} - a_m + a_{m+2} - a_{m+1} + \cdots + a_n - a_{n-1}| = |a_n - a_m|.$$

由 Cauchy 收敛准则可知 $\{a_n\}$ 收敛.

到现在为止我们已经有了 7 个刻画实数完备性的定理. 下面来证明它们的等价性.

定理 3.18 (实数的完备性定理)

以下七个定理彼此等价:

1° Dedekind 定理.

2° 确界原理.

3° Heine-Borel 定理 (有限覆盖定理、紧致性定理)

4° 单调收敛定理.

5° 闭区间套定理.

6° Bolzano-Weierstrass 定理 (聚点定理、列紧性定理).

7° Cauchy 收敛准则.

证明 (i) 由定理2.8可知 1° $\iff$ 2° $\iff$ 3°.

(ii) 由定理3.5的证明过程可知 $2^\circ \Longrightarrow 4^\circ$.

(iii) 由定理3.7的证明过程可知 $4^\circ \Longrightarrow 5^\circ$.

(iv) 由定理3.10的证法二可知 $5^\circ \Longrightarrow 6^\circ$.

(v) 由定理3.17的证法一可知 $6^\circ \Longrightarrow 7^\circ$.

(vi) 下面证明 $7^\circ \Longrightarrow 2^\circ$. 只证明上确界的情况. 设非空有上界的集合 S. 设 $a_n = 1/n\ (n = 1, 2, \cdots, n)$. 对于任一 n 一定存在唯一的 $k_n \in \mathbb{Z}$ 使得 $k_n a_n$ 是 S 的一个上界, 而 $k_n a_n - a_n$ 不是 S 的上界. 令 $\lambda_n = k_n a_n\ (n = 1, 2, \cdots, n)$. 下面证明 $\{\lambda_n\}$ 收敛. 由 $\{\lambda_n\}$ 的定义可知存在 $a, b \in S$ 满足

$$\lambda_n - \frac{1}{n} < a \leq \lambda_m \Longrightarrow \lambda_n - \lambda_m < \frac{1}{n}.$$

$$\lambda_m - \frac{1}{m} < a \leq \lambda_n \Longrightarrow \lambda_m - \lambda_n < \frac{1}{m}.$$

因此 $|\lambda_n - \lambda_m| < \max\{1/n, 1/m\}$. 于是对于任一 $\varepsilon > 0$, 存在 $N \in \mathbb{N}^*$ 使得当 $m, n > N$ 时 $|\lambda_n - \lambda_m| < \varepsilon$. 由 Cauchy 收敛准则可知 $\{\lambda_n\}$ 收敛. 设 $\lambda_n \to \lambda$.

下面证明 λ 就是 S 的上确界. 由 $\{\lambda_n\}$ 的定义可知, 对于任一 $a \in S$ 都有 $a \leq \lambda_n\ (n = 1, 2, \cdots)$. 令 $n \to \infty$ 得 $a \leq \lambda$. 因此 λ 是 S 的一个上界. 对于任一 $\delta > 0$, 当 n 充分大时满足

$$\frac{1}{n} < \frac{\delta}{2}, \quad \lambda_n > \lambda - \frac{\delta}{2}.$$

由于 $\lambda_n - 1/n$ 不是 S 的上界, 因此存在 $c \in S$ 使得

$$c > \lambda_n - \frac{1}{n} > \lambda - \frac{\delta}{2} - \frac{\delta}{2} = \lambda - \delta.$$

这表明 λ 是 S 的一个上确界.

综上可知, 它们彼此等价. ■

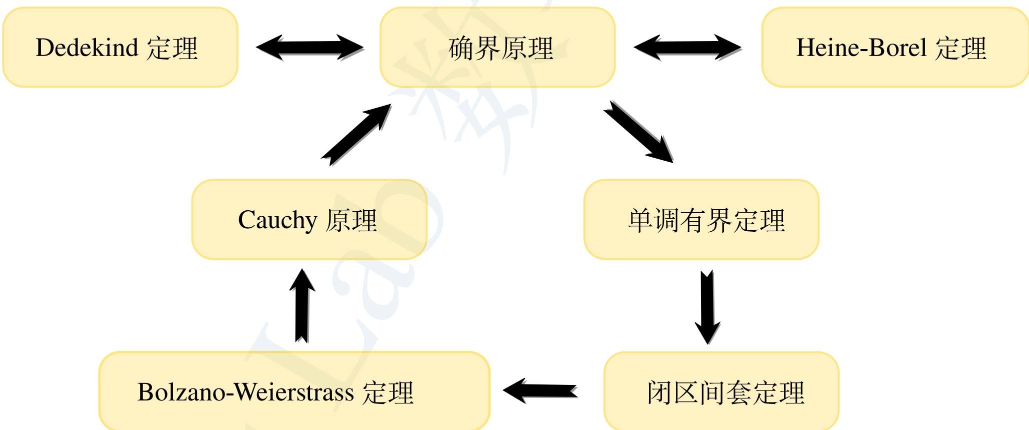

图 3.5: 实数的完备性定理.

注 以上七个命题从不同角度, 用不同模型等价地刻画了实数域的完备性. 反过来也可以通过其中的任意一个命题出发构建实数集, 我们可以用一个戴德金分割来定义一个实数, 也可以用一个基本列来定义一个实数, 也可以通过一个闭区间套定一个实数等等.

注 (vi) 的证明用到了 Archimedes 性质.

实数的七个完备性定理从不同角度, 用不同模型等价地刻画了实数域的完备性. 因此用 Dedekind 分割定义实数不是唯一的选择. 我们也可以用闭区间套 (无尽小数实际就是闭区间套模型) 或 Cauchy 列来定义实数. 将来我们还会用 Cauchy 列来定义一般 "度量空间" 的完备性.