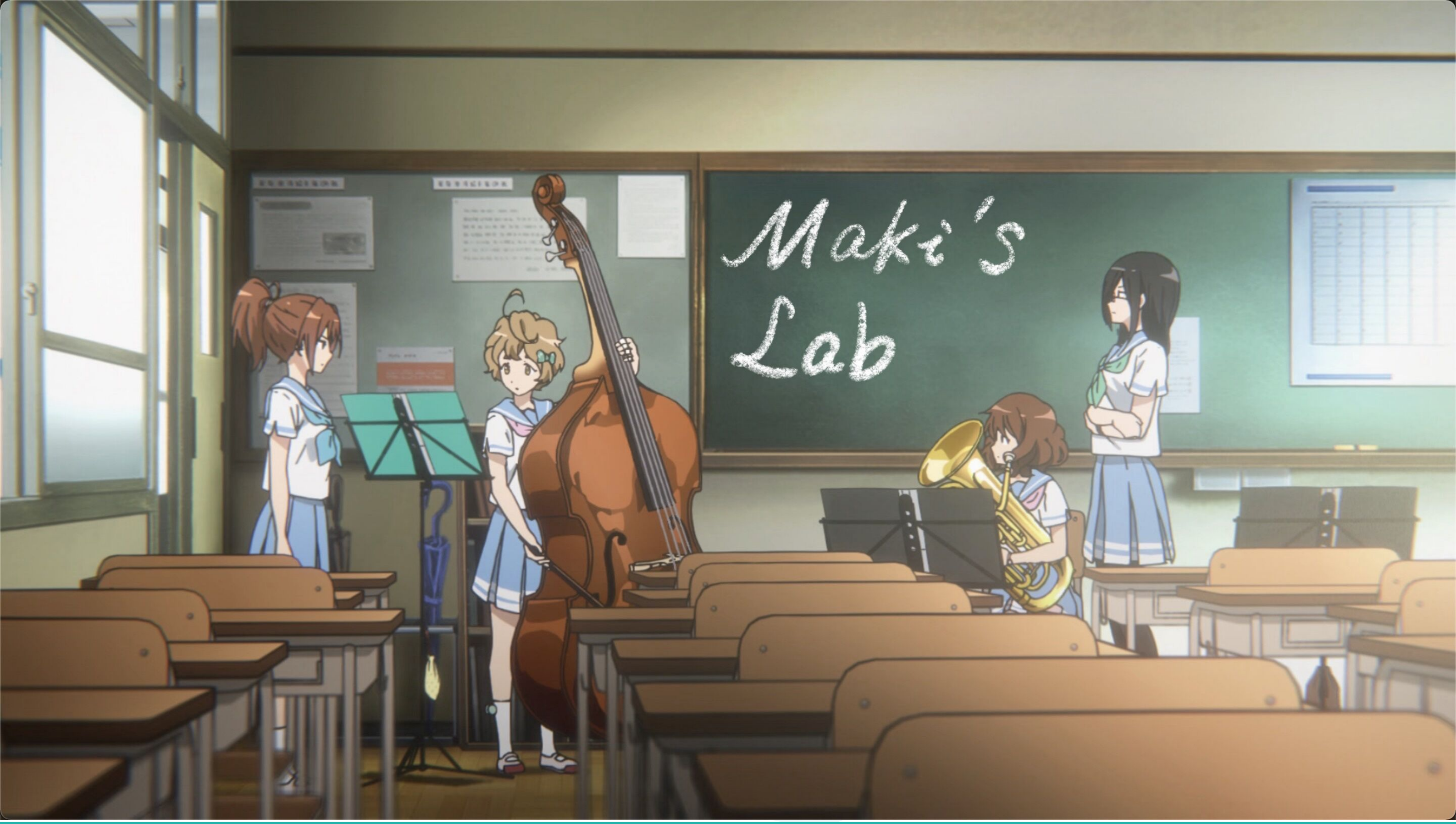


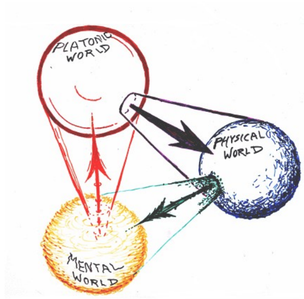
数学分析 III

作者：数学分析委员会

组织：Maki's Lab

时间：Jul 2022

版本：1.0



"九万里风鹏正举。风休住，蓬舟吹取三山去。"——【宋】李清照

写在前面

Maki 你有什么想对观众说的就写在这儿吧...

特别感谢由 Ethan Deng 和 Liam Huang 组织，ElegantLaTeX[1]社区提供的模板。“多分享，多奉献” 一直是该开源社区的目标。如果您喜欢本书的模板的话，请前往elegantlatex.org进行下载和使用。

目录

第 1 章 多重积分

内容提要

- 先介绍矩形区域上的二重积分.
- 然后把矩形区域上的二重积分推广到一般有界集合上的二重积分.
- 把二重积分推广到三重积分, 以至于 n 重积分.

1.1 矩形区域上的二重积分

我们已经用 Riemann 积分定义了平面图形的面积. 用类似的思想可以定义空间图形的体积. 设二元函数 $f : D \to \mathbb{R}$, 其中 $D \subseteq \mathbb{R}^2$ 是一个有界点集. 不妨设 f 在 D 上非负. 此时 f 的图像是位于 xOy 平面上方的一张曲面. 如图 XXX 由该曲面生成的一个曲顶柱体为:

$$\{(x, y, z) : 0 \le z \le f(x, y),\ (x, y) \in D\}.$$

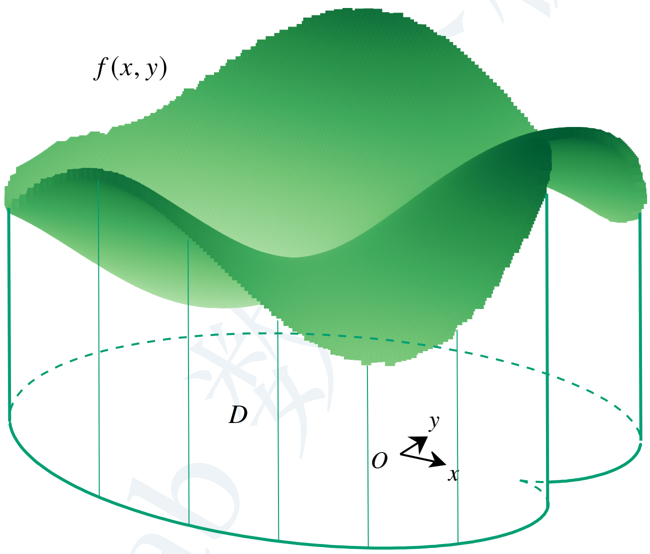


图 1.1: 二重积分产生的曲面柱体.

下面尝试用 Riemann 积分的思想来定义这个曲顶柱体的体积. 首先对 D 多一个分割: $D_1, D_2, \cdots, D_k$, 这个分割记作 π. 然后在 D_i 上取一点 ξ_i, 并把 D_i 的面积记作 $\sigma(D_i)$ $(i = 1, 2, \cdots, k)$. 于是就可以得到曲顶柱体体积的近似值

$$\sum_{i=1}^{k} f(\xi_i)\sigma(D_i).$$

以上和式依旧可以称为 Riemann 和. 它是 k 个小长方体组成的图形的体积. 随着分割不断 "变细", 小长方体组成的图形越来越接近曲顶柱体的体积. 要让分割更 "细", 只需让 $\operatorname{diam} D_i$ $(i = 1, 2, \cdots, k)$ 中最大的那个变小. 于是令

$$\|\pi\| := \max_{1 \le i \le n} \{\operatorname{diam} D_i\}.$$

$\|\pi\|$ 称为分割 π 的宽度. 当 $\|\pi\| \to 0$ 时 Riemann 和的极限 (如果存在的话) 可以用来定义该曲顶柱体的体积.

以上做法是完全照搬了一元函数 Riemann 积分的想法. 但这样做会遇到一个困难. 对于一元函数来说, 分割得到的小区间 Δx_i 的长度是很容易计算的. 但对于二元函数来说, 分割得到的小块 D_i 的面积是不容易计算的. 为此我们可以先考虑研究矩形区域 D 上的曲顶柱体.

1.1.1 矩形区域上二重积分的定义和简单性质

如果 D 是一个矩形区域 $[a,b]\times[c,d]$, 那么就可以对 $[a,b]$ 和 $[c,d]$ 分别作分割 π_x,π_y. 这样就可以得到两族平行直线, 这两族平行直线可以把矩形区域 D 分割成一系列子矩形. 对于其中某一个子矩形 I_i, $\operatorname{diam} I_i$ 就表示该子矩形的对角线. 综合以上讨论, 我们可以给出矩形区域上二重 Riemann 积分.

定义 1.1 (矩形区域上的二重积分)

设函数 f 在闭矩形 $D=[a,b]\times[c,d]$ 上有定义. 分别对闭区间 $[a,b]$ 和 $[c,d]$ 作分割

$$\pi_x : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b.$$

$$\pi_y : c = y_0 < y_1 < \cdots < y_m = d.$$

这样就得到了 $k=n\times m$ 个子矩形

$$[x_{i-1},x_i]\times[y_{i-1},y_i],\quad i=1,2,\cdots,n.\ j=1,2,\cdots,m.$$

这 k 个子矩形的全体组成了 D 的一个分割 π. 把这 k 个子矩形记作 $D_1,D_2,\cdots,D_k$. 在 D_i 中任取一点 $\boldsymbol{xi}_i$, 并把 D_i 的面积记作 $\sigma(D_i)$ $(i=1,2,\cdots,k)$.

若存在 $I\in\mathbb{R}$ 使得对任一 $\varepsilon>0$ 都存在 $\delta>0$, 当 $\|\pi\|<\delta$ 时无论 $\boldsymbol{\xi}_i$ 在 D_i $(i=1,2,\cdots,k)$ 中如何选择, 都有

$$\left|\sum_{i=1}^{n} f(\boldsymbol{\xi}_i)\sigma(D_i)-I\right|<\varepsilon.$$

即

$$\lim_{\|\pi\|\to 0}\sum_{i=1}^{k} f(\boldsymbol{\xi}_i)\sigma(D_i)=I.$$

则称 f 在 D 上 **Riemann 可积** (Riemann integrable), I 称为 f 在 D 上的**二重积分** (double integral). 记作

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \qquad 或 \qquad \int_D f\,\mathrm{d}\sigma.$$

其中 $f(x,y)$ 称为**被积函数** (integrand), $f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ 称为**被积表达式** (integrand expression). I 称为**积分区域** (domain of integration), $\mathrm{d}\sigma$ 表示**面积元素** ().

♣

例 1.1 设闭矩形 D 上的常值函数 $f\equiv c$, 则

$$\int_D f\,\mathrm{d}\sigma = c\sigma(I).$$

注 上例中的曲顶柱体实际上就是一个长方体.

容易看出, 矩形区域上的二重积分本质上和一元函数在闭区间上的一重积分没有任何区别, 因此一元函数关于 Riemann 积分的许多性质可以无需证明地平移过来.

命题 1.1 (可积的必要条件)

设函数 f 在闭矩形 D 上有定义. 若 f 在 D 上可积, 则 f 在 D 上有界.

♠

命题 1.2 (积分算子的线性性质)

设函数 f 和 g 在闭矩形 D 上可积. 则

(1) cf 在 D 上也可积. 且

$$\int_D (cf)\,\mathrm{d}\sigma = c\int_D f\,\mathrm{d}\sigma.$$

(2) $f+g$ 在 D 上也可积. 且

$$\int_D (f+g)\,\mathrm{d}\sigma = \int_D f\,\mathrm{d}\sigma + \int_D g\,\mathrm{d}\sigma.$$

♠

命题 1.3 (保号性和保序性)

设函数 f 和 g 在闭矩形 D 上可积.

(1) 若 $f \geq 0$, 则
$$\int_D f \,\mathrm{d}\sigma \geq 0.$$
(2) 若 $f \geq g$, 则
$$\int_D f \,\mathrm{d}\sigma \geq \int_D g \,\mathrm{d}\sigma.$$

1.1.2 矩形区域上二重积分的上积分和下积分

类似地, 我们需要讨论二重积分的可积条件. 为此可以在矩形区域二重积分中建立 Darboux 积分的概念.

对于矩形区域 D, 给定一个分割 π: $D_1, D_2, \cdots, D_k$. 令
$$M_i = \sup f(D_i), \qquad m_i = \inf f(D_i), \quad i = 1, 2, \cdots, k.$$
容易知道, 无论 $\boldsymbol{\xi}_i$ 在 D_i $(i = 1, 2, \cdots, k)$ 中如何选取, 都有
$$\sum_{i=1}^{k} m_i \sigma(D_i) \leq \sum_{i=1}^{k} f(\boldsymbol{\xi}_i)\sigma(D_i) \leq \sum_{i=1}^{k} M_i \sigma(D_i).$$
这样我们就找到了 Riemann 和的上确界和下确界. 且这里的上确界和下确界由函数 $f(x)$ 和分割 π 完全决定, 于是引出了以下概念.

定义 1.2 (Darboux 和)

设函数 f 在矩形区域 D 上有界. 给定 D 的一个分割 π: $D_1, D_2, \cdots, D_k$. 把 $f(D_i)$ 的上确界和下确界分别记作 M_i 和 m_i $(i = 1, 2, \cdots, k)$. 令
$$\overline{S}(f, \pi) := \sum_{i=1}^{k} M_i \sigma(D_i), \qquad \underline{S}(f, \pi) := \sum_{i=1}^{n} m_i \sigma(D_i).$$
我们把 $\overline{S}(f, \pi)$ 与 $\underline{S}(f, \pi)$ 分别称为函数 f 关于分割 π 的 **Darboux 上和** (upper Darboux sum) 与 **Darboux 下和** (lower Darboux sum), 简称上和与下和.

设 $\pi = \pi_x \times \pi_y$, $\pi' = \pi'_x \times \pi'_y$. 如果 $\pi_x \leq \pi'_x$ 且 $\pi_y \leq \pi'_y$, 则称 π' 比 π 更细, 记作 $\pi \leq \pi'$. 类似地, 有以下结论.

命题 1.4

设函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上有界. 给定 $[a, b]$ 的一个分割 π. 在它基础上增加 k 个分割点, 得到新的分割 π'. 若 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的振幅为 ω, 则
$$\underline{S}(f, \pi) \leq \underline{S}(f, \pi') \leq \overline{S}(f, \pi') \leq \overline{S}(f, \pi).$$

以上讨论表明, 在 π_x 和 π_y 上不断增加分割点的过程中, 下和单调递增, 上和单调递减.

对于任意两个分割 $\pi_1 = \pi_{1x} \times \pi_{1y}$ 和 $\pi_2 = \pi_{2x} \times \pi_{2y}$, 把它们的分割点全部利用起来得到的新分割记作 $\pi_1 + \pi_2$. 我们无法比较 π_1 和 π_2 的上和或下和的大小, 但我们可以比较它们与 $\pi_1 + \pi_2$ 的上和或下和. 因为 $\pi_1 + \pi_2$ 可以看作由 π_1 或 π_2 增加分割点得到的新分割. 由上面的命题可知
$$\underline{S}(f, \pi_1) \leq \underline{S}(f, \pi_1 + \pi_2) \leq \overline{S}(f, \pi_1 + \pi_2) \leq \overline{S}(f, \pi_2).$$
于是可知, 对于任意两个分割, 其中一个分割的下和总是不超过另一个分割的上和. 这表明矩形区域 D 上的函数 f 上的所有上和组成的集合有下界, 从而有下确界; 所有下和组成的集合有上界, 从而有上确界. 于是可以定义 "上积分" 与 "下积分".

定义 1.3 (二重积分的 Darboux 积分)

设矩形区域 D 上的函数 f. f 在 D 上的所有 Darboux 上和组成的集合的下确界称为 f 在 D 上的 **Darboux 上积分** (upper Darboux integral); 在 D 上的所有 Darboux 下和组成的集合的上确界称为 f 在 D 上的 **Darboux 下积分** (lower Darboux integral), 简称上积分与下积分, 分别记作:

$$\overline{\int_D} f \,\mathrm{d}\sigma := \inf_{\pi} \overline{S}(f,\pi). \qquad \underline{\int_D} f \,\mathrm{d}\sigma := \sup_{\pi} \underline{S}(f,\pi).$$

当 f 的上积分和下积分都等于 $I \in \mathbb{R}$ 时, 我们称 f 在 D 上 **Darboux 可积** (Darboux integrable), 称 I 是 f 在 D 上的 **Darboux 积分** (Darboux integral).

我们已经看到在 π 上不断增加分割点的过程中, 下和单调递增且有上界; 上和单调递减且有下界. 因此当 $\|\pi\| \to 0$ 时上和与下和一定有极限. 它们的极限恰好是 "上积分" 与 "下积分".

定理 1.1 (Darboux 定理)

设矩形区域 D 上的函数 f. 作 D 的一个分割 π. 则

$$\lim_{\|\pi\|\to 0} \overline{S}(f,\pi) = \overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x. \qquad \lim_{\|\pi\|\to 0} \underline{S}(f,\pi) = \underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

注 以上定理也可以作为上积分与下积分的定义.

现在可以建立 Riemann 积分和 Darboux 积分的等价性定理.

定理 1.2 (Riemann 可积的充要条件)

设矩形区域 D 上的函数 f. 则以下三个命题等价:

1° f 在 D 上 Riemann 可积.

2° 作分割 π: $D_1, D_2, \cdots, D_k$. 则

$$\lim_{\|\pi\|\to 0} \sum_{i=1}^{k} \omega_i \sigma(D_i) = 0.$$

其中 $\omega_i = \sup f(D_i) - \inf f(D_i)$

3° 对于任一 $\varepsilon > 0$ 都存在 D 的一个分割 π 使得

$$\overline{S}(f,\pi) - \underline{S}(f,\pi) < \varepsilon.$$

4° f 在 D 上 Darboux 可积.

证明 (i) 证明 1° $\Rightarrow$ 2°. 若 1° 成立, 令 $I = \int_D f\,\mathrm{d}\sigma$. 则对于任一 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$ 使得当 $\|\pi\| < \delta$ 时, 无论 $\boldsymbol{\xi}_i$ 在 D_i 中如何选取都有

$$I - \frac{\varepsilon}{3} < \sum_{i=1}^{k} f(\boldsymbol{\xi}_i)\sigma(D_i) < I + \frac{\varepsilon}{3}.$$

因而有

$$I - \frac{\varepsilon}{3} \leq \overline{S}(f,\pi) \leq \overline{S}(f,\pi) \leq I + \frac{\varepsilon}{3}.$$

因此

$$0 \leq \overline{S}(f,\pi) - \underline{S}(f,\pi) \leq \frac{2}{3}\varepsilon < \varepsilon \iff 0 \leq \sum_{i=1}^{k} \omega_i \sigma(D_i) \leq \frac{2}{3}\varepsilon < \varepsilon.$$

于是可知

$$\lim_{\|\pi\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} \omega_i \Delta x_i = 0.$$

(ii) 证明 2° ⇒ 3°. 若 2° 成立, 则对于任一 $\varepsilon > 0$ 都存在一个 D 的分割 π 使得

$$\sum_{i=1}^{k} \omega_i \sigma(D_i) = \overline{S}(f,\pi) - \underline{S}(f,\pi) < \varepsilon.$$

(iii) 证明 3° ⇒ 4°. 若 3° 成立, 则对于任一 $\varepsilon > 0$ 都有

$$0 \leq \overline{\int_D} f \,\mathrm{d}\sigma - \underline{\int_D} f \,\mathrm{d}\sigma \leq \overline{S}(f,\pi) - \underline{S}(f,\pi) < \varepsilon.$$

令 $\varepsilon \to 0$ 得

$$\overline{\int_D} f \,\mathrm{d}\sigma = \underline{\int_D} f \,\mathrm{d}\sigma.$$

于是可知 f 在 D 上 Darboux 可积.

(iv) 证明 4° ⇒ 1°. 若 4° 成立. 设

$$\overline{\int_D} f \,\mathrm{d}\sigma = \underline{\int_D} f \,\mathrm{d}\sigma = I.$$

由以上定理可以证明以下定理, 证法和一元积分完全类似.

定理 1.3

设函数 f 在矩形区域 D 上连续, 则 f 在 D 上 Riemann 可积.

例 1.2 二维 Dirichlet 函数在任一矩形区域上都不可积

1.1.3 矩形区域上二重积分的 Lebesgue 定理

矩形区域上的二重积分也可以建立 Lebesgue 定理. 为此先要定义二维的零测集.

定义 1.4 (二维零测集)

设集合 $E \subseteq \mathbb{R}^2$. 若对于任一 $\varepsilon > 0$ 都存至多可数个开矩形 $\{I_n : n = 1, 2, \cdots\}$ 满足

$$E \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i, \qquad \sum_{i=1}^{\infty} \sigma(I_i) < \varepsilon.$$

则称 E 是一个**零测集** (null set).

注 以上定义中的开矩形可以改成闭矩形.

注 若只存在有限个满足条件的开矩形, 则称 E 为**零面积集** .

二维零测集和零面积集有以下简单性质

命题 1.5

(1) 零测集的子集也是一个零测集.
(2) 零面积集的子集也是一个零面积集.
(3) 至多可数集是一个零测集.
(4) 至多可数个零测集的并集仍是一个零测集.
(5) 有限个零面积集的并集仍是一个零面积集.

命题 1.6

E 是一个零面积集当且仅当它的闭包 $\overline{E}$ 也是一个零面积集.

证明 (i) 证明充分性. 由于 $E \subseteq \overline{E}$, 因此当 $\overline{E}$ 是一个零面积集时 E 也是一个零面积集.

(ii) 证明必要性. 若 E 是一个零面积集, 则对于任一 $\varepsilon > 0$ 都存有限个闭矩形 $\{I_n : n = 1, 2, \cdots\}$ 满足

$$E \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i, \qquad \sum_{i=1}^{\infty} \sigma(I_i) < \varepsilon.$$

由于 $\bigcup_{i=1}^{\infty} I_i$ 是一个闭集, 因此

$$\overline{E} \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i.$$

于是可知 $\overline{E}$ 仍是一个零面积集. ■

注 若 E 是一个零测集, 则 $\overline{E}$ 未必是零测集. 举例说明, 设集合 $E = (\mathbb{Q} \cap [0, 1])^2$. 则 $\overline{E} = [0, 1]^2$. 此时 E 是一个零测集, 但 $\overline{E}$ 不是零测集.

命题 1.7

设有界闭集 E. 则 E 是一个零测集当且仅当 E 是一个零面积集.

证明 只需证明必要性. 若 E 是一个零测集. 则对于任一 $\varepsilon > 0$ 都存至多可数个开矩形 $\{I_n : n = 1, 2, \cdots\}$ 满足

$$E \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i, \qquad \sum_{i=1}^{\infty} \sigma(I_i) < \varepsilon.$$

由于 E 是一个有界闭集, 因此它是一个紧集, 由 Heine-Borel 定理可知可以从 $\{I_n : n = 1, 2, \cdots\}$ 中选出有限个开矩形 $I_{k_1}, I_{k_2}, \cdots, I_{k_m}$ 使得

$$E \subseteq \bigcup_{i=1}^{m} I_{k_i}, \qquad \sum_{i=1}^{m} \sigma(I_{k_i}) < \varepsilon.$$ ■

这表明 E 是一个零面积集.

例 1.3 设 $E \subseteq \mathbb{R}^2$ 是一段连续的参数曲线, 且其中至少有一个分量连续可导, 则 E 是一个零面积集.

证明

注 若 x 和 y 都不是连续可导的, 则可以构造一条连续的参数曲线, 它可以充满整个正方形区域, 此时参数曲线不是零测集.

由上例立刻可知以下结论.

例 1.4 设连续函数 $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, 则 f 的图像是一个零面积集.

证明 f 的图像为

$$G(f) = \{(x, f(x)) : x \in [a, b]\}.$$

例 1.5 光滑曲线段都是零面积集.

证明

定义 1.5 (多元函数的振幅)

设有界函数 $f : D \to \mathbb{R}$, 其中 $D \subseteq \mathbb{R}^n$. 令

$$\omega(D) := \sup f(D) - \inf f(D).$$

称 $\omega(D)$ 为 f 在 D 上的**振幅** (amplitude). 设 $\boldsymbol{x}_0 \in D$. 令

$$\omega(x_0) := \lim_{\delta \to 0+} \omega[D \cap N_\delta(\boldsymbol{x}_0)]$$

我们称 $\omega(\boldsymbol{x}_0)$ 为 f 在 $\boldsymbol{x}_0$ 处的**振幅** (amplitude).

定理 1.4

设有界函数 $f: D \to \mathbb{R}$, 其中 $D \subseteq \mathbb{R}^n$. 则 f 在 $\boldsymbol{x}_0$ 连续当且仅当 $\omega(\boldsymbol{x}_0) = 0$.

定理 1.5 (Lebesgue-Vitali 定理)

设函数 f 在闭矩形 D 上有界. 则 f 在 D 上 Riemann 可积当且仅当 f 在 D 上几乎处处连续.

证明

定理 1.6

设函数 f 在闭矩形 D 上有定义. 若 $B = \{\boldsymbol{x} \in D : f(\boldsymbol{x}) \neq 0\}$ 是一个零面积集, 则 f 在 D 上可积, 且

$$\int_D f \, \mathrm{d}\sigma = 0.$$

证明

推论 1.1

设函数 f 和 g 在闭矩形 D 上有界. 若 f 在 D 上 Riemann 可积, 且满足 $B = \{\boldsymbol{x} \in D : f(\boldsymbol{x}) \neq g(\boldsymbol{x})\}$ 为一个零面积集. 则 g 在 D 上也可积, 且

$$\int_D f \, \mathrm{d}\sigma = \int_D g \, \mathrm{d}\sigma.$$

例 1.6 设函数

$$f(x, y) = \sin \frac{1}{(1 - x^2)^2 + (1 - y^2)^2}.$$

则 f 在 $D = [-2, 2]^2$ 上 Riemann 可积.

证明

例 1.7 设函数

$$f(x, y) = \arctan \frac{1}{y - x^2}.$$

则 f 在 $D = [0, 1]^2$ 上 Riemann 可积.

证明

1.1.4 矩形区域上二重积分的计算

下面来讨论矩形区域上二重积分的计算. 我们的想法是把二重积分转化为两个一元函数的积分. 设函数 f 在闭矩形 $D = [a, b] \times [c, d]$ 上 Riemann 可积. 若对于任一给定的 $x \in [a, b]$ 关于 y 的函数 $f(x, y)$ 在 $[c, d]$ 上都可积,

则可以定义一个关于 x 的函数

$$\varphi(x)=\int_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}y,\quad a\le x\le b.$$

若 $\varphi(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积, 则

$$\int_a^b \varphi(x)\,\mathrm{d}x=\int_a^b\left[\int_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x.$$

这样的积分称为**累次积分** (repeated integral). 为了使记号简洁, 累次积分可以记作

$$\int_a^b \mathrm{d}x\int_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}y:=\int_a^b\left[\int_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x.$$

类似地, 可以定义另一种累次积分:

$$\int_c^d \mathrm{d}y\int_a^b f(x,y)\,\mathrm{d}x:=\int_c^d\left[\int_a^b f(x,y)\,\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y.$$

很自然的问题是: 二重积分是否可以化为累次积分? 即是否有以下等式

$$\int_D f\,\mathrm{d}\sigma=\int_a^b \mathrm{d}x\int_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}y=\int_c^d \mathrm{d}y\int_a^b f(x,y)\,\mathrm{d}x.$$

定理 1.7

设函数 f 在闭矩形 $D=[a,b]\times[c,d]$ 上可积. 令

$$\varphi(x)=\underline{\int_c^d} f(x,y)\,\mathrm{d}y,\qquad \psi(x)=\overline{\int_c^d} f(x,y)\,\mathrm{d}y.$$

则 φ 和 ψ 在 $[a,b]$ 上可积, 且

$$\int_D f\,\mathrm{d}\sigma=\int_a^b\varphi(x)\,\mathrm{d}x=\int_a^b\psi(x)\,\mathrm{d}x.$$

♡

证明 分别对 $[a,b]$ 和 $[c,d]$ 作分割:

$$\pi_x: a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b.$$

$$\pi_x: a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b.$$

令 $I_i=[x_{i-1},x_i]$ $(i=1,2,\cdots,n)$, J_j $(j=1,2,\cdots,m)$. 设 $\pi=\pi_x\times\pi_y$. 由于 f 在 D 上可积, 设 $\int_D f\sigma=I$, 则对于任一 $\varepsilon>0$ 存在 $\delta>0$ 当 $\|\pi\|<\delta$ 时

$$I-\varepsilon<\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^m f(\xi_i,\eta_j)\Delta x_i\Delta y_i<I+\varepsilon,$$

其中 $\xi_i\in I_i$ $(i=1,2,\cdots,n)$, $\eta_j\in J_j$ $(j=1,2,\cdots,m)$. 现取 $\|\pi_x\|<\delta/\sqrt{2}$, $\|\pi_y\|<\delta/\sqrt{2}$, 则 $\|\delta\|<\delta$, 因此此时有

$$I-\varepsilon\le\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^m \inf f(\xi_i,J_j)\Delta x_i\Delta y_i\le\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^m \sup f(\xi_i,J_j)\Delta x_i\Delta y_i\le I+\varepsilon.$$

由于 $\sum_{j=1}^m \inf f(\xi_i,J_j)\Delta y_i$ 是关于 y 的函数 $f(\xi_i,y)$ 在 $[c,d]$ 上的下和, 因此

$$\sum_{j=1}^m \inf f(\xi_i,J_j)\Delta y_i\le\underline{\int_c^d} f(\xi_i,y)\,\mathrm{d}y=\varphi(\xi_i).$$

同理可知

$$\sum_{j=1}^m \sup f(\xi_i,J_j)\Delta y_i\ge\overline{\int_c^d} f(\xi_i,y)\,\mathrm{d}y=\psi(\xi_i).$$

于是

$$I-\varepsilon\le\sum_{i=1}^n\varphi(\xi_i)\Delta x_i\le\sum_{i=1}^n\psi(\xi_i)\Delta x_i\le I+\varepsilon.$$

这表明

$$\int_D f\,\mathrm{d}\sigma = \int_a^b \varphi(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b \psi(x)\,\mathrm{d}x. \qquad \blacksquare$$

由以上定理就可以回答前面提出的问题.

定理 1.8

设函数 f 在闭矩形 $D=[a,b]\times[c,d]$ 上可积.

(1) 若对于任一给定的 $x\in[a,b]$, 关于 y 的函数 $f(x,y)$ 在 $[c,d]$ 上可积, 则

$$\int_D f\,\mathrm{d}\sigma = \int_a^b \mathrm{d}x \int_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}y.$$

(2) 若对于任一给定的 $y\in[c,d]$, 关于 x 的函数 $f(x,y)$ 在 $[a,b]$ 上可积, 则

$$\int_c^d \mathrm{d}y \int_a^b f(x,y)\,\mathrm{d}x = I. \qquad \blacksquare$$

♡

连续函数肯定满足以上定理的条件, 因此可以立刻得到以下推论.

推论 1.2

设函数 f 在闭矩形 $D=[a,b]\times[c,d]$ 上连续, 则

$$\int_c^d \mathrm{d}y \int_a^b f(x,y)\,\mathrm{d}x = \int_a^b \mathrm{d}x \int_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}y.$$

♡

通过以上讨论, 二重积分就可以转化为累次积分. 下面来看几个例子.

例 1.8 设 $D=[0,\pi]\times[0,1]$. 计算

$$\iint_D y\sin xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

解 计算累次积分:

$$\begin{aligned}\text{原式} &= \int_0^1 \mathrm{d}y \int_0^\pi y\sin xy\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \mathrm{d}y \int_0^\pi \frac{\partial}{\partial x}(-\cos xy)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 (-\cos xy)\Big|_{x=0}^{x=\pi}\mathrm{d}y \\ &= \int_0^1 (1-\cos\pi y)\,\mathrm{d}y = 1 - \frac{1}{\pi}\sin\pi y\Big|_0^1 = 1.\end{aligned} \qquad \blacksquare$$

例 1.9 设 $D=[0,1]^2$. 计算

$$\iint_D xy^3\,\mathrm{e}^{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

解

$$\begin{aligned}\text{原式} &= \int_0^1 \mathrm{d}y \int_0^1 xy^3\,\mathrm{e}^{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 y^3\,\mathrm{e}^{y^2}\,\mathrm{d}y \int_0^1 x\,\mathrm{e}^{x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^1 t\,\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t \int_0^1 x\,\mathrm{e}^{x^2}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{4}\left(t\,\mathrm{e}^t - \mathrm{e}^t\right)\Big|_0^1 \mathrm{e}^{x^2}\Big|_0^1 = \frac{\mathrm{e}-1}{4}.\end{aligned} \qquad \blacksquare$$

例 1.10 设函数 f 在矩形区域 $D=[a,b]\times[c,d]$ 上有连续的二阶偏导数. 计算

$$\iint_D \frac{\partial^2}{\partial x\partial y} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

证明

$$\text{原式} = \int_c^d \mathrm{d}y \int_a^b \frac{\partial^2}{\partial x\partial y} f(x,y)\,\mathrm{d}x = \int_c^d \frac{\partial}{\partial y} f(x,y)\Big|_{x=a}^{x=b}\mathrm{d}y$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_c^d \frac{\partial}{\partial y} f(b,y)\,\mathrm{d}y - \int_c^d \frac{\partial}{\partial y} f(a,y)\,\mathrm{d}y = f(b,y)\Big|_c^d - f(a,y)\Big|_c^d \\
&= f(b,d) - f(b,c) - f(a,d) + f(a,c).
\end{aligned}
$$
■

例 1.11 设函数

$$
f(x,y) = \begin{cases} 1-x-y, & x+y \le 1 \\ 0, & x+y > 1 \end{cases}
$$

设 $D = [0,1]^2$ 计算

$$
\int_D f\,\mathrm{d}\sigma.
$$

解 原二重积分可以转化为累次积分. 先计算:

$$
\begin{aligned}
\int_0^1 f(x,y)\,\mathrm{d}y &= \int_0^{1-x} (1-x-y)\,\mathrm{d}y + \int_{1-x}^0 0\,\mathrm{d}y = (1-x)\int_0^{1-x} \mathrm{d}y - \int_0^{1-x} y\,\mathrm{d}y + 0 \\
&= (1-x)^2 - \frac{1}{2}(1-x)^2 = \frac{1}{2}(1-x)^2.
\end{aligned}
$$

于是

$$
\int_D f\,\mathrm{d}\sigma = \int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^1 f(x,y)\,\mathrm{d}y = \frac{1}{2}\int_0^1 (1-x)^2\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{6}(1-x)^3\Big|_0^1 = \frac{1}{6}.
$$
■

注 如图1.2所示, 以上积分是一个三棱锥的体积, 它的底面 $\triangle AOB$ 面积是 $1/2$, 高 OC 为 1, 用三棱锥的体积公式也可以计算出它的体积为 $1/6$. 这表明我们定义的二重积分定义是合理的.

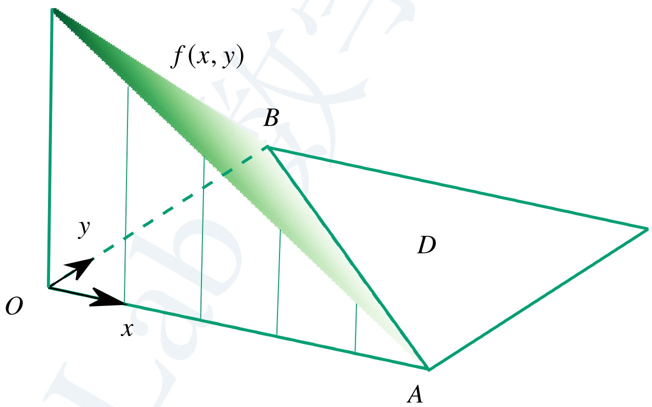


图 1.2: 三棱锥.

需要注意

例 1.12

证明

例 1.13

证明

利用二重积分转化为累次积分的结论可以证明以下重要不等式.

定理 1.9 (Minkowski 不等式)

设函数 f 在 $[a,b]\times[c,d]$ 上非负且连续, 则

$$\left\{\int_a^b\left[\int_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}y\right]^p\mathrm{d}x\right\}^{1/p}\leq\int_c^d\left[\int_a^b f^p(x,y)\,\mathrm{d}x\right]^{1/p}\mathrm{d}y.$$

♡

证明

1.2 一般有界集上的二重积分

1.2.1 二重积分的一般定义和性质

定义 1.6 (有界集上的二重积分)

设函数 $f : D \to \mathbb{R}$, 其中 $E \subseteq \mathbb{R}^2$. 令

$$f_D(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} f(\boldsymbol{x}), & \boldsymbol{x} \in D \\ 0, & \boldsymbol{x} \in D^c. \end{cases}.$$

若以上定义的函数 f_D 在一个矩形区域 $I \subseteq D$ 上 Riemann 可积, 则称函数 f 在 D 上 Riemann 可积, 并把 $\int_I f_D \,\mathrm{d}\,\sigma$ 的积分值称为 f 在 D 上的**二重积分** (double integral). 记作

$$\iint_D f(x, y)\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y \qquad 或 \qquad \int_D f\,\mathrm{d}\,\sigma.$$

♣

注 容易知道以上定义的二重积分不依赖于矩形区域 I 的选择. 但是为了方便, 我们经常会选一个足够大的矩形区域使得 $\overline{D} \subseteq I^\circ$.

注

用 Lebesgue 定理可以得到以下结论.

定理 1.10

设函数 f 在闭矩形 D 上有定义.

♡

证明

定理 1.11

设函数 f 在闭矩形 D 上有定义.

♡

证明

定理 1.12

设函数 f 在闭矩形 D 上有定义.

♡

证明

定理 1.13

设函数 f 在闭矩形 D 上有定义.

♡

证明

定理 1.14

设函数 f 在闭矩形 D 上有定义.

♡

证明

定理 1.15

设函数 f 在闭矩形 D 上有定义.

♡

证明

定理 1.16

设连续函数 $f,g:D\to\mathbb{R}$, 其中 D 是 $\mathbb{R}^2$ 中由有限条光滑曲线围成的有界闭区域. 若 g 在 D 上不变号, 则存在 $\boldsymbol{\xi}\in D$ 使得

$$\int_D fg\sigma = f(\boldsymbol{\xi})\int_D g\,\mathrm{d}\sigma.$$

证明

推论 1.3

设连续函数 $f:D\to\mathbb{R}$, 其中 D 是 $\mathbb{R}^2$ 中由有限条光滑曲线围成的有界闭区域. 则存在 $\boldsymbol{\xi}\in D$ 使得

$$\int_D f\sigma = f(\boldsymbol{\xi})\sigma(D).$$

例 1.14 设 f 为连续函数, $D=\{(x,y):x^2+y^2\le r^2\}$. 求

$$\lim_{r\to 0}\frac{1}{\pi r^2}\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

解 由积分中值定理可知, 存在 $\boldsymbol{\xi}\in D$ 使得

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = f(\boldsymbol{\xi})\sigma(D) = f(\boldsymbol{\xi})\pi r^2.$$

当 $r\to 0$ 时 $\boldsymbol{\xi}\to\mathbf{0}$. 由于 f 是连续函数, 因此

$$\lim_{r\to 0}\frac{1}{\pi r^2}\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \lim_{r\to 0} f(\boldsymbol{\xi}) = f(\mathbf{0}).$$

■

1.2.2 二重积分的计算

定理 1.17

设点集

$$D=\{(x,y):y_1(x)\le y\le y_2(x),\ a\le x\le b\},$$

其中 y_1,y_2 都在 $[a,b]$ 上连续. 设函数 f 在 D 上 Riemann 可积, 若对于任一给定的 $x\in[a,b]$, 以下积分都存在

$$\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)\,\mathrm{d}y.$$

则

$$\int_D f\,\mathrm{d}\sigma = \int_a^b \mathrm{d}x\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)\,\mathrm{d}y.$$

证明

例 1.15 设 D 是以下三条直线围成的三角形区域:

$$y=\frac{b}{a}x,\qquad y=0,\qquad x=a.$$

计算以下二重积分:

$$\iint_D x^2y^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

解 由于

$$\int_0^{\frac{b}{a}x} x^2y^2\,\mathrm{d}\,y = \frac{x^2}{3}y^3\bigg|_{y=0}^{y=\frac{b}{a}x} = \frac{b^3}{3a^3}x^5.$$

于是可知

$$\text{原式} = \frac{b^3}{3a^3}\int_0^a x^5\,\mathrm{d}\,x = \frac{b^3}{18a^3}x^6\bigg|_0^a = \frac{a^3b^3}{18}.$$ ■

有时候先求关于 x 的积分较为方便. 下面看一个例子.

例 1.16 设 D 是以下四条直线围成的平行四边形区域:

$$y = a, \qquad y = 3a, \qquad y = x, \qquad y = x + a.$$

计算以下二重积分:

$$\iint_D \left(x^2 + y^2\right)\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y.$$

解 由于

$$\int_{y-a}^{y}\left(x^2 + y^2\right)\mathrm{d}\,x = \frac{1}{3}x^3 + y^2x\bigg|_{y-a}^{y} = 2ay^2 - a^2y + \frac{a^3}{3}.$$

于是

$$\text{原式} = \int_a^{3a}\left(2ay^2 - a^2y + \frac{a^3}{3}\right)\mathrm{d}\,y = \frac{2a}{3}y^3 - \frac{a^2}{2}y^2 + \frac{a^3}{3}y\bigg|_a^{3a} = 14a^4.$$ ■

例 1.17 设 $D = \{(x, y) : |x| + |y| \le 1\}$. 计算以下二重积分:

$$\iint_D xy^2\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y.$$

解 把 D 位于 x 轴上半部分的区域记作 D_1, 下半部分区域记作 D_2. 分别计算函数 xy^2 在这两个区域的积分:

$$\iint_{D_1} xy^2\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y = \int_0^1 y^2\,\mathrm{d}\,y\int_{y-1}^{-y+1} x\,\mathrm{d}\,x = 0.$$

$$\iint_{D_2} xy^2\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y = \int_{-1}^0 y^2\,\mathrm{d}\,y\int_{-y-1}^{y+1} x\,\mathrm{d}\,x = 0.$$

于是可知

$$\text{原式} = \iint_{D_1} xy^2\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y + \iint_{D_2} xy^2\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y = 0.$$ ■

前面已经看到二重积分可以转化成累次积分来计算, 而且可以转化为两种累次积分, 既可以先算关于 x 的积分, 也可以先算关于 y 的积分. 换句话说, 累次积分是可以换序的! 有时候按原来的顺序计算累次积分不方便 (甚至无法计算), 就可以考虑换序计算. 下面来看一个例子.

例 1.18 计算以下累次积分:

$$\int_0^1 \mathrm{d}\,y\int_y^{\sqrt{y}} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}\,x.$$

解 由于 $\frac{\sin x}{x}$ 的原函数不是初等函数, 考虑换序后计算原累次积分. 先确定累次积分还原为二重积分后的积分域. 容易知道二重积分的积分域为以下曲线围成的区域:

$$x = y, \qquad x = \sqrt{y}, \qquad y = 0, \qquad y = 1.$$

于是可以将原累次积分换序:

$$\int_0^1 \mathrm{d}\,y\int_y^{\sqrt{y}} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}\,x = \int_0^1 \mathrm{d}\,x\int_{x^2}^{x} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}\,y = \int_0^1 \left(x - x^2\right)\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}\,x = \int_0^1 \sin x\,\mathrm{d}\,x - \int_0^1 x\sin x\,\mathrm{d}\,x$$

$$= -\cos x + x\cos x - \sin x \Big|_0^1 = 1 - \sin 1.$$ ■

例 1.19 改变以下累次积分的次序:

$$\int_0^{\pi} \mathrm{d}\,x \int_0^{\cos x} f(x,y)\,\mathrm{d}\,y.$$

解 还原成二重积分后, 积分域是以下四条曲线围成的区域:

$$y = \cos x, \qquad y = 0, \qquad x = \pi, \qquad x = 0.$$

于是可知

$$\int_0^{\pi} \mathrm{d}\,x \int_0^{\cos x} f(x,y)\,\mathrm{d}\,y = \int_0^1 \mathrm{d}\,y \int_0^{\frac{\pi}{2}+\arcsin x} f(x,y)\,\mathrm{d}\,x - \int_{-1}^0 \mathrm{d}\,y \int_{\frac{\pi}{2}+\arcsin x}^{\pi} f(x,y)\,\mathrm{d}\,x.$$ ■

例 1.20 牟合方盖 计算以下两个圆柱体交成的体积:

$$x^2 + y^2 \le a^2, \qquad x^2 + z^2 \le a^2.$$

解 只需计算第一卦限中的部分. 该部分体积可以看作函数 $f(x,y) = \sqrt{a^2 - x^2}$ 在积分域 $D = \{(x,y) : x^2 + y^2 \le a^2,\ x, y \ge 0\}$ 上的二重积分. 于是可知所求部分的体积为:

$$8\iint_D \sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y = 8\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}\,x \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} \mathrm{d}\,y = 8\int_0^a \left(a^2 - x^2\right)\mathrm{d}\,x = \frac{16}{3}a^3.$$ ■

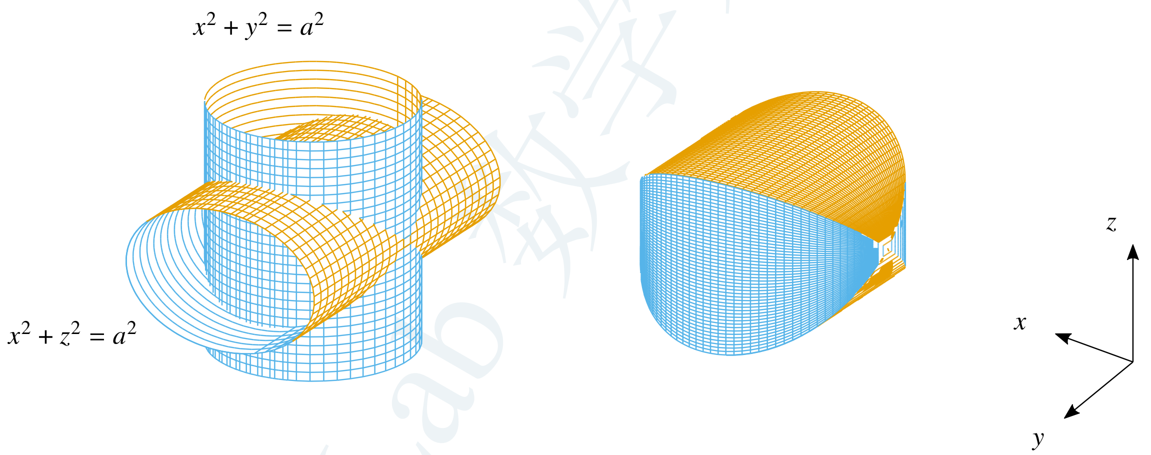


图 1.3: 牟合方合示意图.

1.2.3 二重积分的换元法

在一元函数积分中, 我们讨论过换元法. 换元后, 被积函数会变, 积分上下限也会随之改变. 二重积分也可以用换元法计算. 同样地, 换元也会导致被积函数和积分域的改变. 但通常来说, 我们更看重利用换元简化积分域. 如果能简化积分域, 哪怕会让被积函数变复杂也是值得的.

首先我们来回顾一下一元函数的换元法. 设函数 f 在闭区间 $I = [a,b]$ 上连续, 函数 g 在闭区间 $J = [a_1, b_1]$ 上连续可导. 若 $g(J) = I$, 且对于任一 $t \in J$ 都有 $g'(t) \neq 0$, 则

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\,x = \int_{a_1}^{b_1} f[g(t)]|g'(t)|\,\mathrm{d}\,t.$$

定理 1.18

设函数 f 在闭矩形 D 上有定义.

证明

例 1.21

证明

例 1.22

证明

例 1.23

证明

例 1.24

证明

例 1.25

证明

1.3 多重积分

1.3.1 三重积分

定理 1.19

设函数 f 在闭矩形 D 上有定义.

证明

定理 1.20

设函数 f 在闭矩形 D 上有定义.

证明

例 1.26

证明

例 1.27

证明

1.3.2 n 重积分

定理 1.21

设函数 f 在闭矩形 D 上有定义.

证明

定理 1.22

设函数 f 在闭矩形 D 上有定义.

证明

例 1.28

证明

例 1.29

证明

例 1.30

证明

1.3.3 多重积分的应用

例 1.31

证明

例 1.32

证明

例 1.33

证明

例 1.34

证明

第 2 章 曲线和曲面积分初步

内容提要

- 先介绍矩形区域上的二重积分.
- 然后把矩形区域上的二重积分推广到一般有界集合上的二重积分.
- 把二重积分推广到三重积分, 以至于 n 重积分.

2.1 曲线积分

2.1.1 积分

2.1.2 积分

2.2 曲面积分

2.2.1 积分

2.2.2 积分

参考文献

[1] DENG E. ElegantLaTeX Templates[Z]. https://elegantlatex.org.