Vetor de Correção de Erros - VECM

Profa. R. Ballini

Bibliografia:

- Enders, W. *Applied Econometrics*, 3a. Edição, Wiley, 2010.
- Bueno, R. L. S..*Econometria de Séries Temporais*, 2a. Edição, Cengage Learning, 2011.

Cointegração

Definição (Engle e Granger, 1987):

Suponha que $\mathbf{x}_t \in \mathbb{R}^n$ seja um vetor de variáveis integradas de ordem d. Dizemos que $\mathbf{x}_t$ é cointegrado de ordens (d, b), caso exista um vetor não nulo β, tal que $u_t = \beta' \mathbf{x}_t \sim I(d - b), b > 0$.

- β é chamado de **vetor de cointegração**

Cointegração

Pontos importantes:

- Cointegração refere-se à:
  1. Combinação linear de variáveis não estacionárias;
  2. Variáveis que são integradas de mesma ordem;
- As variáveis em $\mathbf{x}_t$ tem uma relação de equilíbrio de longo prazo: $\beta'\mathbf{x}_t = 0$;
- No curto prazo, há desvios da tendência comum, de modo que o termo u_t é o erro de equilíbrio.

Cointegração

Considere o vetor de cointegração dado por $\beta = \left(\tilde{\beta}_1, \tilde{\beta}_2\right)$ que define a relação de longo prazo entre y_t e z_t, ou seja,

$$\begin{bmatrix} \tilde{\beta}_1 & \tilde{\beta}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_t \\ z_t \end{bmatrix} = \tilde{\beta}_1 y_t + \tilde{\beta}_2 z_t = 0$$

Vetor de cointegração não é único. Para resolver essa questão, multiplica-se ambos os lados da equação por $\dfrac{1}{\tilde{\beta}_1}$, de forma a "normalizar" o vetor de cointegração:

$$\begin{bmatrix} 1 & \beta_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_t \\ z_t \end{bmatrix} = y_t + \frac{\tilde{\beta}_2}{\tilde{\beta}_1} z_t = y_t + \beta_2 z_t = 0$$

Cointegração e Correção de Erro

Vamos considerar o modelo VAR(1):

$$\begin{cases} y_t = a_{11}y_{t-1} + a_{12}z_{t-1} + \epsilon_{yt} \\ z_t = a_{21}y_{t-1} + a_{22}z_{t-1} + \epsilon_{zt} \end{cases} \tag{1}$$

sendo ϵ_{yt} e ϵ_{zt} são ruído branco que podem ser correlacionados.

Usando operador defasagem:

$$\begin{bmatrix} (1 - a_{11}L) & -a_{12}L \\ -a_{21}L & (1 - a_{22}L) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_t \\ z_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \epsilon_{yt} \\ \epsilon_{zt} \end{bmatrix}$$

As soluções y_t e z_t tem a mesma equação característica inversa:

$$(1 - a_{11}L)(1 - a_{22}L) - a_{12}a_{21}L^2 = 0$$

cujas raízes devem estar fora do círculo unitário. Ou da equação característica (raízes dentro do círculo unitário):

$$\lambda^2 - (a_{22} + a_{11})\lambda + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) = 0$$

- A solução do sistema (1) depende das raízes da equação característica de 2a. ordem:

  1. (λ_1, λ_2) dentro do círculo unitário: séries estacionárias;
  2. Uma delas fora do círculo unitário: soluções explosivas;
  3. Se $a_{12} = a_{21} = 0$ a solução é trivial. Para que y_t e z_t sejam processos RU é necessário que $a_{12} = a_{21} = 1$ e as duas séries evoluem sem qualquer relação de longo prazo;
  4. Para que CI(1,1) exista é necessário que uma raiz seja unitária e a outra menor que 1 em módulo.

- Aplicando Báskara à equação característica, podemos expressar as restrições sobre as raízes como restrições sobre os parâmetros ($\lambda_1 = 1$):

$$a_{11} = \frac{[(1 - a_{22}) - a_{12}a_{21}]}{(1 - a_{22})} \tag{2}$$

- Como a_{12} e/ou a_{21} deve ser diferente de zero para que ocorra CI(1,1), a segunda raiz $|\lambda_2| < 1$ requer:

$$a_{22} > -1 \;\text{ e }\; a_{12}a_{21} + a_{22}^2 < 1 \tag{3}$$

Voltando ao sistema (1):

$$\begin{bmatrix} \Delta y_t \\ \Delta z_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (a_{11}-1) & a_{12} \\ a_{21} & (a_{22}-1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{t-1} \\ z_{t-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \epsilon_{yt} \\ \epsilon_{zt} \end{bmatrix} \quad (4)$$

De (2): $a_{11} - 1 = -\dfrac{a_{12}a_{21}}{(1-a_{22})}$

Substituindo no sistema (4):

$$\Delta y_t = -\frac{a_{12}a_{21}}{(1 - a_{22})} y_{t-1} + a_{12} z_{t-1} + \epsilon_{yt} \tag{5}$$

$$\Delta z_t = a_{21} y_{t-1} - (1 - a_{22}) z_{t-1} + \epsilon_{zt} \tag{6}$$

- As equações (5) e (6) formam o **modelo de correção de erro**;
- Se a_{12} e a_{21} são diferentes de zero, podemos normalizar o vetor de cointegração em relação a qualquer série.

Normalizando em relação a y_t:

$$\Delta y_t = \alpha_y(y_{t-1} - \beta z_{t-1}) + \epsilon_{yt} \tag{7}$$

$$\Delta z_t = \alpha_z(y_{t-1} - \beta z_{t-1}) + \epsilon_{zt} \tag{8}$$

com: $\alpha_y = -\dfrac{a_{12}a_{21}}{(1 - a_{22})}$; $\beta = \dfrac{(1 - a_{22})}{a_{12}}$; $\alpha_z = a_{21}$

- As demais restrições são suficientes para que β seja não nulo;
- **Teorema da Representação de Granger:** para qualquer conjunto de séries I(1), correção de erro e cointegração são representações equivalentes.

Exogeneidade Fraca

$$\Delta y_t = \alpha_y(y_{t-1} - \beta z_{t-1}) + \epsilon_{yt}$$

$$\Delta z_t = \alpha_z(y_{t-1} - \beta z_{t-1}) + \epsilon_{zt}$$

- Em VECM, sendo uma das velocidades de ajustamento (α_y, α_z) nulas:

  1. $\alpha_y = 0$: o comportamento dinâmico de y não é afetado pelo desvio do equilíbrio no período anterior, e y é fracamente exógeno;
  2. $\alpha_z = 0$: o comportamento dinâmico de z não é afetado pelo desvio do equilíbrio no período anterior, e z é fracamente exógeno;

Causalidade de Granger

- Em VECM é necessário reinterpretar Causalidade de Granger (precedência temporal):

  y_t: não Granger-causa z_t se:

  1. os valores defasados de Δy_t não entram na equação de Δz_t;

  2. z_t: não responde aos desvios do equilíbrio anterior, ou seja, é fracamente exógena.

Cointegração - estimação e teste

- Três métodos:

1. Metodologia de Engle-Granger: equação única;
2. Metodologia de Phillips e Ouliares: equação única;
3. Metodologia de Johansen: sistema de equações;

Metodologia de Engle-Granger

Considere um modelo de duas variáveis y_t e z_t.

Passos para o teste:

1. Testar a não estacionariedade da série: analisar a ordem de integração

- Faça o teste ADF para inferir o número de raízes unitárias em cada uma das variáveis;
- Se ambas são estacionárias: usar métodos padrão de séries temporais;
- Se as variáveis são integradas de diferentes ordens: elas não são cointegradas.

2. Estime a relação de longo prazo. Se y_t e z_t são I(1), o próximo passo é estimar a relação usando MQO:

$$y_t = \beta_0 + \beta_1 z_t + \epsilon_t$$

- Analisar os resíduos estimados $\hat{e}_t$: se os desvios são estacionários, y_t e z_t são cointegradas de ordem (1,1);
- Usar o teste ADF nos resíduos para determinar a ordem de integração. Ou seja,

$$\Delta\hat{e}_t = a_1\hat{e}_{t-1} + \sum_{i=1}^{p-1}\lambda_{i+1}\Delta\hat{e}_{t-i} + u_t$$

Não rejeição de $H_0 : a_1 = 0$: os resíduos têm raiz unitária, de modo que as variáveis não cointegram.

- Devemos usar tabela apropriada para analisar a H_0 (tabela C, livro Enders (2010).

Table C **Critical Values for the Engle–Granger Cointegration Test**

T	1%	5%	10%	1%	5%	10%
	Two Variables			**Three Variables**		
50	–4.123	–3.461	–3.130	–4.592	–3.915	–3.578
100	–4.008	–3.398	–3.087	–4.441	–3.828	–3.514
200	–3.954	–3.368	–3.067	–4.368	–3.785	–3.483
500	–3.921	–3.350	–3.054	–4.326	–3.760	–3.464
	Four Variables			**Five Variables**		
50	–5.017	–4.324	–3.979	–5.416	–4.700	–4.348
100	–4.827	–4.210	–3.895	–5.184	–4.557	–4.240
200	–4.737	–4.154	–3.853	–5.070	–4.487	–4.186
500	–4.684	–4.122	–3.828	–5.003	–4.446	–4.154

The critical values are for cointegrating relations (with a constant in the cointegrating vector) estimated using the Engle–Granger methodology.

Source: Critical values are interpolated using the response surface in MacKinnon (1991).

3. Estime o modelo de correção de erro. Se y_t e z_t são I(1), os resíduos a partir da regressão de equilíbrio podem ser usados para estimar o VECM:

$$\Delta y_t = \alpha_1 + \alpha_y \hat{e}_{t-1} + \sum_{i=1}^{p-1} \alpha_{11}(i) \Delta y_{t-1} + \sum_{i=1}^{p-1} \alpha_{12}(i) \Delta z_{t-1} + \epsilon_{yt} \quad (9)$$

$$\Delta z_t = \alpha_2 + \alpha_z \hat{e}_{t-1} + \sum_{i=1}^{p-1} \alpha_{21}(i) \Delta y_{t-1} + \sum_{i=1}^{p-1} \alpha_{22}(i) \Delta z_{t-1} + \epsilon_{zt} \quad (10)$$

- Além do termo $\hat{e}_{t-1}$, (9) e (10) representam um VAR em 1a diferença;
- Os termos de (9) e (10) são estacionários, os testes estatísticos usados em um VAR são apropriados.

4. Avaliar a adequação do modelo:

1. Verificar se os resíduos aproximam de ruído branco: resíduos não correlacionados;
   - Se correlacionados serialmente: aumentar as defasagens e reestimar o modelo.
   - Pode ser necessário considerar defasagens maiores de algumas variáveis: usar o método SUR.
2. Verificar α_y e α_z: os valores devem ser significativamente diferentes de zero se as variáveis são cointegradas;
3. Obter as funções resposta ao impulso e decomposição das variâncias: como em (9) e (10) as variáveis são I(0), a resposta ao impulso devem convergir a zero.

Problemas da Metodologia de Engle-Granger

- A estimação da relação de longo prazo requer que se escolha uma variável dependente (normalização);
- Para 3 ou mais variáveis, pode haver mais de um vetor de cointegração;
- Utiliza valores estimados em dois passos.

Metodologia de Phillips e Ouliares

Abordagem baseada em dois testes nos resíduos: Variância e Traço Multivariado.

Diferença entre os testes: teste usando a estatística do Traço Multivariado tem a propriedade de ser invariante à normalização, isto é, qual é a variável explicada e qual é a explicativa.

Hipóteses do teste:

$$\begin{aligned} H_0 &: \quad \text{não há cointegração entre as séries temporais;} \\ H_1 &: \quad \text{As séries são cointegradas.} \end{aligned}$$

Procedimento

1. Teste de Raiz Unitária para as séries x_t e y_t;

2. Verificada RU, estima-se um modelo autoregressivo para o par (y_t, x_t) e obtém-se os resíduos.

Procedimento

3. Cálculo das estatísticas:

3.1 Variância: depende da matriz de covariância dos resíduos, sendo obtida de forma robusta.

3.2 Traço Multivariado: também depende da matriz de covariância, mas a estatística é calculada a partir do traço.