Cointegração

Vetor de Correção de Erros - VECM

Profa. R. Ballini

Bibliografia Básica:

- Enders, W. *Applied Econometrics*, Cap. 6.
- Bueno, R. L. S. *Econometria de Séries Temporais*, Cap. 7.

Cointegração

Definição (Engle e Granger, 1987):

Suponha que $\mathbf{x}_t \in \mathbb{R}^n$ seja um vetor de variáveis integradas de ordem d, $\mathbf{x}_t \sim I(d)$. Dizemos que $\mathbf{x}_t$ é cointegrado de ordens (d, b), caso exista um vetor não nulo β, tal que $u_t = \beta' \mathbf{x}_t \sim I(d - b), b > 0$.

- Cointegração refere-se à:

1. Combinação linear de variáveis não estacionárias;
2. Variáveis que são integradas de mesma ordem;

- As variáveis em $\mathbf{x}_t$ tem uma relação de equilíbrio de longo prazo: $\beta' \mathbf{x}_t = 0$;

Cointegração e Correção de Erro

Vamos considerar o modelo:

$$\begin{cases} y_t = a_{11}y_{t-1} + a_{12}z_{t-1} + \epsilon_{yt} \\ z_t = a_{21}y_{t-1} + a_{22}z_{t-1} + \epsilon_{zt} \end{cases} \tag{1}$$

sendo ϵ_{yt} e ϵ_{zt} são ruído branco que podem ser correlacionados.

Usando operador defasagem:

$$\begin{bmatrix} (1 - a_{11}L) & -a_{12}L \\ -a_{21}L & (1 - a_{22}L) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_t \\ z_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \epsilon_{yt} \\ \epsilon_{zt} \end{bmatrix}$$

As soluções y_t e z_t tem a mesma equação característica inversa:

$$(1 - a_{11}L)(1 - a_{22}L) - a_{12}a_{21}L^2 = 0$$

cujas raízes devem estar fora do círculo unitário. Ou da equação característica (raízes dentro do círculo unitário):

$$\lambda^2 - (a_{22} + a_{11})\lambda + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) = 0$$

Para que CI(1,1) exista é necessário que uma raiz seja unitária e a outra menor que 1 em módulo.

Cointegração e Correção de Erro

- Aplicando Báskara à equação característica, podemos expressar as restrições sobre as raízes como restrições sobre os parâmetros ($\lambda_1 = 1$):

$$a_{11} = 1 - \frac{[a_{12}a_{21}]}{(1 - a_{22})} \tag{2}$$

- Como a_{12} e/ou a_{21} deve ser diferente de zero para que ocorra CI(1,1), a segunda raiz $|\lambda_2| < 1$ requer:

$$a_{22} > -1 \ \text{ e } \ a_{12}a_{21} + a_{22}^2 < 1 \tag{3}$$

Voltando ao sistema (1):

$$\begin{bmatrix} \Delta y_t \\ \Delta z_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (a_{11}-1) & a_{12} \\ a_{21} & (a_{22}-1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{t-1} \\ z_{t-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \epsilon_{yt} \\ \epsilon_{zt} \end{bmatrix} \qquad (4)$$

De (2): $a_{11} - 1 = -\dfrac{a_{12}a_{21}}{(1-a_{22})}$. Normalizando em relação a y_t:

$$\Delta y_t = \alpha_y(y_{t-1} - \beta z_{t-1}) + \epsilon_{yt} \qquad (5)$$

$$\Delta z_t = \alpha_z(y_{t-1} - \beta z_{t-1}) + \epsilon_{zt} \qquad (6)$$

com: $\alpha_y = -\dfrac{a_{12}a_{21}}{(1-a_{22})}$; $\beta = \dfrac{(1-a_{22})}{a_{12}}$; $\alpha_z = a_{21}$

As equações (5) e (6) formam o **modelo de correção de erro**;

Exogeneidade Fraca

$$\Delta y_t = \alpha_y(y_{t-1} - \beta z_{t-1}) + \epsilon_{yt}$$

$$\Delta z_t = \alpha_z(y_{t-1} - \beta z_{t-1}) + \epsilon_{zt}$$

1. $\alpha_y = 0$: o comportamento dinâmico de y não é afetado pelo desvio do equilíbrio no período anterior, e y é fracamente exógeno;
2. $\alpha_z = 0$: o comportamento dinâmico de z não é afetado pelo desvio do equilíbrio no período anterior, e z é fracamente exógeno;

Causalidade de Granger

- Em VECM é necessário reinterpretar Causalidade de Granger (precedência temporal):

y_t: não Granger-causa z_t

1. se os valores defasados de Δy_t não afetam Δz_t;

2. e z_t: não responde aos desvios do equilíbrio anterior, ou seja, é fracamente exógena.

Cointegração - estimação e teste

- Dois métodos:

1. Procedimento de Engle-Granger: equação única;
2. Procedimento de Phillips-Ouliares: equação única;
3. Procedimento de Johansen: sistema de equações;

Cointegração e VECM – Procedimento de Johansen

Seja o modelo VAR cointegrado ou VECM:

$$\begin{cases} \Delta y_t = -\dfrac{a_{12}a_{21}}{(1-a_{22})} y_{t-1} + a_{12} z_{t-1} + \epsilon_{yt} \\ \Delta z_t = a_{21} y_{t-1} - (1-a_{22}) z_{t-1} + \epsilon_{zt} \end{cases} \quad (7)$$

Ou,

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \Delta y_t \\ \Delta z_t \end{bmatrix}}_{\Delta X_t} = \underbrace{\begin{bmatrix} -\dfrac{a_{12}a_{21}}{(1-a_{22})} & a_{12} \\ a_{21} & (1-a_{22}) \end{bmatrix}}_{\Pi} \underbrace{\begin{bmatrix} y_{t-1} \\ z_{t-1} \end{bmatrix}}_{X_{t-1}} + \underbrace{\begin{bmatrix} \epsilon_{yt} \\ \epsilon_{zt} \end{bmatrix}}_{\epsilon_t} \quad (8)$$

Cointegração e VECM

Análise da matriz Π:

1. Se $\det(\Pi) = 0$: as variáveis são cointegradas;
2. Π é uma matriz 2×2:
3. Posto da matriz Π é igual a 1: 1 vetor de cointegração

Observações

- Se $y_t \sim I(0)$ e $z_t \sim I(0)$: parâmetros de cada uma das equações podem ser etimados por MQO;
- Se $y_t \sim I(1)$ e $z_t \sim I(1)$ e não cointegradas: estimar a relação entre as variáveis como um VAR em primeira diferença:

$$\Delta x_t = \Pi_0 + \Pi_1 \Delta x_{t-1} + e_t \tag{9}$$

- Variáveis não estacionárias e não cointegradas: diferencia-se até atingir a estacionariedade e assume-se que seguem um VAR

Modelo VECM

Sejam $x_{1t} \sim I(1), x_{2t} \sim I(1), \ldots, x_{nt} \sim I(1)$ e cointegradas:

$$\Delta X_t = \Pi_0 + \Pi X_{t-1} + \sum_{i=1}^{p-1} \Pi_i \Delta X_{t-i} + \epsilon_t \tag{10}$$

em que: $X_t = \begin{bmatrix} x_{1t} \\ \vdots \\ x_{nt} \end{bmatrix}$; $\quad \Pi_0 = \begin{bmatrix} \pi_{10} \\ \vdots \\ \pi_{n0} \end{bmatrix}$;

$$\Pi_i = \begin{bmatrix} \pi_{i,11} & \cdots & \pi_{i,1n} \\ \vdots & \ddots & \ldots \\ \pi_{i,n1} & \cdots & \pi_{i,nn} \end{bmatrix}, i = 1, \ldots, (p-1); \quad \epsilon_t = \begin{bmatrix} \epsilon_{1t} \\ \vdots \\ \epsilon_{nt} \end{bmatrix}$$

Modelo VECM–Teste de Cointegração de Johansen

- Matriz fundamental para a análise de cointegração:

$$\Pi = \begin{bmatrix} \pi_{11} & \cdots & \pi_{1n} \\ \vdots & \ddots & \cdots \\ \pi_{n1} & \cdots & \pi_{nn} \end{bmatrix}_{n \times n}$$

- ΠX_t representa o **mecanismos de correção de erros.**
- Cada linha de ΠX_t representa um **vetor de cointegração**:

$$\pi_{i1} x_{1t} + \pi_{i2} x_{2t} + \ldots + \pi_{in} x_{nt} \sim I(0)$$

- Pode haver no **mínimo** um e no **máximo** $n - 1$ vetores de cointegração.

Modelo VECM–Teste de Cointegração de Johansen

- Posto de Π determina o número de vetores de cointegração
- Seja $r = Posto(\Pi)$ o número de vetores de cointegração
- Se $r = 0$: não há vetor de cointegração. O modelo deve ser considerado em diferenças, pois todas as séries são $I(1)$.
- Se $r = n$: sistema convergente e todas as séries são $I(0)$, logo não há vetores de cointegração.
- Se $0 < r < n$: há pelo menos um vetor de cointegração

Modelo VECM–Teste de Cointegração de Johansen

- Como determinar r?
- Teste de cointegração determina estatisticamente o posto de Π, empregando o número de autovalores não nulos de Π.

Teste do Traço

Hipóteses:

$$
\begin{aligned}
H_0 &: \quad Posto(\Pi) \leq r \\
H_1 &: \quad Posto(\Pi) > r
\end{aligned}
$$

Estatística do traço:

- Autovalores estimados de Π ordenados:
  $\hat{\lambda}_1 > \hat{\lambda}_2 > \ldots > \hat{\lambda}_n$

- Estatística do Teste: $\lambda_{\text{traço}}(r) = -T \sum_{i=r+1}^{n} \ln(1 - \hat{\lambda}_i)$

Teste do Traço

Regra de Decisão:

$$\begin{array}{lcccl} \lambda_{\text{traço}}(r) & > & \lambda_c & \rightarrow & \text{Rejeito } H_0 \\ \lambda_{\text{traço}}(r) & \leq & \lambda_c & \rightarrow & \text{Não Rejeito } H_0 \end{array}$$

Obs.: Aplica-se o teste sequencialmente para $r = 0,\ r = 1, \ldots$

Teste do Máximo Autovalor

Hipóteses:

$$H_0: \quad Posto(\Pi) = r$$
$$H_1: \quad Posto(\Pi) = r + 1$$

Estatística do traço:

- Autovalores estimados de Π ordenados: $\hat{\lambda}_1 > \hat{\lambda}_2 > \ldots > \hat{\lambda}_n$
- Estatística do Teste: $\lambda_{\text{máx}}(r) = -T \ln(1 - \hat{\lambda}_{r+1})$

Teste do Máximo Autovalor

Regra de Decisão:

$$\lambda_{\text{máx}}(r) \quad > \quad \lambda_c \quad \rightarrow \quad \text{Rejeito} \;\; H_0$$

$$\lambda_{\text{máx}}(r) \quad \leq \quad \lambda_c \quad \rightarrow \quad \text{Não Rejeito} \;\; H_0$$

Obs.: Aplica-se o teste sequencialmente para $r = 0, \; r = 1, \ldots$

Valores críticos λ_c

- Valores críticos dependem:
  1. da especificação determinística;
  2. do número de componentes não determinísticos sob H_0.
- Obtidos por simulação de Monte Carlo:
  ▷ Calculados e disponibilizados diretamente pelos softwares.
- Na ocorrência de discrepância entre os testes, há indicações para a preferência sobre o resultado do autovalor máximo, pois apresenta hipótese alternativa mais específica.

VECM - Procedimento de Johansen

- Após a identificação do número de vetores de cointegração, é possível reparametrizar o VAR num VECM, desmembrando a matriz Π nas matrizes de velocidade de ajustamento α e de vetores de cointegração β:

$$\Delta X_t = \Pi_0 + \alpha\beta' x_{t-1} + \sum_{i=1}^{p-1} \Pi_i \Delta X_{t-i} + \epsilon_t$$

em que, $\alpha\beta' = \Pi$.

- Teste de exogeneidade fraca: restrições sobre alfa;
- Testes de significância no vetor de cointegração: restrição sobre os parâmetros da matriz beta.

Duas questões devem ser respondidas antes da aplicação do teste de Johansen:

1. Qual a ordem do VAR?
   - Critérios de informação: AIC, BIC, HQ, FPE

2. Qual o modelo VECM usar?
   - Incluir termos determinísticos?
   - Fazer análise gráfica

Componentes Determinísticos no Modelo VAR Cointegrado

Considere como ilustração o seguinte VECM:

$$\Delta X_t = \alpha(\beta_0 + \beta_1 t + \beta X_{t-1}) + \gamma_0 + \gamma_1 t + \epsilon_t$$

Temos 5 casos possíveis:

1. Modelo sem Componentes Determinísticos
   - Somente é factível de ser especificado se, excepcionalmente, os valores iniciais de x_0 sejam zero.
   - Em geral, a constante é necessária para englobar níveis iniciais de x_t.

2. Séries x_t **sem** tendência determinística e relações de cointegração **com** intercepto:
   - Termo constante restrito ao vetor de cointegração.
   - Não há tendência linear nos dados.

3. Séries x_t **com** tendência determinística e relações de cointegração **com** intercepto
   - Tendência linear nas variáveis em nível mas não no VAR em diferenças.
   - Intercepto diferente de zero no vetor de cointegração.

4. Séries x_t **com** tendência determinística e relações de cointegração:
   - Tendência restrita somente no vetor de C.I., mas constante irrestrita: $\gamma_0 \neq 0$ e $\beta_0 \neq 0$.
   - Modelo com variáveis que são estacionárias em torno de uma tendência.
   - Tendência linear nas variáveis em nível.
5. Séries x_t **com** tendência determinística **quadrática** e relações de cointegração **com tendência linear**:
   - Tendência e constante irrestritos no modelo
   - Tendência linear para ΔX_t.
   - Tendência quadrática para X_t.
   - Procurar causas para crescimento quadrático no nível e incluir variáveis que possam explicar esse comportamento.

- Se os dados apresentam tendência linear a melhor especificação é iniciar com constante irrestrita e tendência restrita ao vetor de cointegração. Uma vez determinado o número de vetores de cointegração testar se $\beta_1 = 0$.

- Se não existe tendência linear nos dados iniciar com constante restrita ao vetor de cointegração.

- Se os dados mostram evidências de uma mudança no nível de x_t , o que implica um pulso em Δx_t , incluir uma dummy irrestrita de pulso nas equações.

Procedimentos do Teste de Johansen

1. Determinação do lag máximo p do modelo VEC: estima-se o VAR irrestrito com as séries não diferenciadas (em nível) começando com um lag "longo" e buscando reduzi-lo pelos critérios de informação;
2. Escolha do modelo para realizar o teste (itens 1 a 5);
3. Cálculo das estatísticas $\lambda_{\text{máx}}$ e $\lambda_{\text{traço}}$;
4. Escolha o número de equações de cointegração;
5. Estimação do VAR ou VEC.

Exercício

1. Arquivo: dadosSetorPublico.xlsx

   Texto: “Qualidade do instrumento de política monetária e a hipótese de dominância fiscal brasileira”

   Autor: Sívio Michael de Azevedo Costa