Vetor Auto-Regressivo - VAR

Profa. Rosângela Ballini

Bibliografia:

- Enders, W. *Applied Econometrics*, 3a. Edição, Wiley, 2010. Cap. 5: 5 a 9.
- Bueno, R. L. S..*Econometria de Séries Temporais*, 2a. Edição, Cengage Learning, 2011. Cap. 6: 6.1 a 6.8.

Introdução

Modelo univariado auto-regressivo:

$$Y_t = \alpha_1 Y_{t-1} + \alpha_2 Y_{t-2} + \ldots + \alpha_p Y_{t-p} + \epsilon_t$$

sendo $E(\epsilon_t) = 0$; $E(\epsilon_t^2) = \sigma_\epsilon^2$; e $E(\epsilon_t, \epsilon_{t-j}) = 0$

Modelo multivariado

- Estudar o comportamento individual de uma série mas também as relações entre as séries;
- Entender relações dinâmicas sob o tempo entre as séries;
- Melhorar as previsões das séries individuais utiliando informações adicionais.

Vetor Autoregressivo

Modelo VAR irrestrito ou padrão:

- Proposto por Sims (1980);
- Todas as variáveis são tratadas como sendo, a priori, endógenas;
- Busca responder qual a trajetória da série, dado um choque estrutural

VAR Irrestrito:

É um modelo auto-regressivo multivariado em que cada variável é expressa como função de suas defasagens e das defasagens das demais variáveis do modelo.

Forma Estrutural

Pode-se expressar um modelo auto-regressivo de ordem p por um vetor com n variáveis endógenas, X_t, conectadas entre si por meio de uma matriz B:

$$BX_t = \Gamma_0 + \sum_{i=1}^{p} \Gamma_i X_{t-i} + \epsilon_t \tag{1}$$

sendo:

- B matriz $n \times n$ que define as restrições contemporâneas entre as variáveis que constituem o vetor X, $n \times 1$;
- Γ_0 vetor de constantes $n \times 1$; Γ_i matrizes $n \times n$;
- ϵ_t vetor $n \times 1$ de perturbações aleatórias, $\epsilon_t \sim RB(\mathbf{0}, \sigma_n^2)$

Forma Reduzida

O modelo (1) é normalmente estimado na forma reduzida, ou seja, se existe a matriz B^{-1},

$$X_t = B^{-1}\Gamma_0 + \sum_{i=1}^{p} B^{-1}\Gamma_i X_{t-i} + B^{-1}\epsilon_t \qquad (2)$$

Ou,

$$X_t = A_0 + \sum_{i=1}^{p} A_i X_{t-i} + e_t \qquad (3)$$

em que $A_i \equiv B^{-1}\Gamma_i$ para $i = 0, 1, \ldots, p$ e $e_t \equiv B^{-1}\epsilon_t$.

Exemplo:

Vamos considerar um modelo bivariado:

$$y_t = b_{10} - b_{12} z_t + \gamma_{11} y_{t-1} + \gamma_{12} z_{t-1} + \epsilon_{yt} \tag{4}$$

$$z_t = b_{20} - b_{21} y_t + \gamma_{21} y_{t-1} + \gamma_{22} z_{t-1} + \epsilon_{zt} \tag{5}$$

sendo que:

1. y_t e z_t são estacionárias;
2. $\epsilon_{yt} \sim RB(0, \sigma_y^2)$ e $\epsilon_{zt} \sim RB(0, \sigma_z^2)$;
3. $cov(\epsilon_{yt}, \epsilon_{zt}) = 0$.

As equações (4) e (5) constituem um VAR(1), sendo denominado de VAR estrutural ou sistema primitivo.

Exemplo:

Representação matricial:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & b_{12} \\ b_{21} & 1 \end{bmatrix}}_{\equiv B} \underbrace{\begin{bmatrix} y_t \\ z_t \end{bmatrix}}_{\equiv X_t} = \underbrace{\begin{bmatrix} b_{10} \\ b_{20} \end{bmatrix}}_{\equiv \Gamma_0} + \tag{6}$$

$$+ \underbrace{\begin{bmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} \end{bmatrix}}_{\equiv \Gamma_1} \underbrace{\begin{bmatrix} y_{t-1} \\ z_{t-1} \end{bmatrix}}_{\equiv X_{t-1}} + \underbrace{\begin{bmatrix} \epsilon_{yt} \\ \epsilon_{zt} \end{bmatrix}}_{\equiv \epsilon_t}$$

Ou,

$$BX_t = \Gamma_0 + \Gamma_1 X_{t-1} + \epsilon_t$$

Exemplo:

Modelo VAR(1) na forma padrão ou reduzida:

$$X_t = A_0 + A_1 X_{t-1} + e_t \tag{7}$$

em que

- $A_0 = B^{-1}\Gamma_0$;
- $A_1 = B^{-1}\Gamma_1$;
- $e_t = B^{-1}\epsilon_t$.

Exemplo:

Podemos reescrever (7) na forma equivalente:

$$y_t = a_{10} + a_{11} y_{t-1} + a_{12} z_{t-1} + e_{yt} \tag{8}$$

$$z_t = a_{20} + a_{21} y_{t-1} + a_{22} z_{t-1} + e_{zt} \tag{9}$$

em que:

$$E(e_{yt}) = 0 \qquad E(e_{zt}) = 0$$

$$Var(e_{yt}) = \sigma_y^2 \qquad Var(e_{zt}) = \sigma_z^2$$

$$cov(e_{yt}, e_{yt-j}) = 0 \qquad cov(e_{zt}, e_{zt-j}) = 0, j \neq 0$$

Devemos notar que, em geral,

$$cov(e_{yt}, e_{zt}) \neq 0$$

Identificação

Modelo VAR(p):

$$X_t = A_0 + \sum_{i=1}^{p} A_i X_{t-i} + e_t \tag{10}$$

em que:

X_t: vetor $n \times 1$ contendo cada uma das n variáveis do modelo;

A_0: vetor $n \times 1$ de termos constantes;

A_i: matriz $n \times n$ dos coeficientes

e_t: vetor $n \times 1$ de termos de erros;

- $c = n + n^2 p$ coeficientes que devem ser estimados
- Muitas vezes os coeficientes estimados são estatisticamente insignificantes

Questão:

Como selecionar a ordem p do modelo VAR?

Considere um VAR(p), $p = 0, 1, 2, \ldots, p_{max}$.

Problema:

Escolher a ordem p que minimiza a fórmula geral do critério de informação:

$$Cr(p) = \ln(\det(\hat{\Sigma})) + c_T \varphi(p)$$

em que $\hat{\Sigma} = T^{-1} \sum_{t=1}^{T} (\hat{e}_t \hat{e}_t')$ é a matriz de covariância para um modelo de ordem p; c_T é uma sequência que depende do tamanho da amostra T; $\varphi(p)$ é uma função que penaliza VAR de grandes ordens.

Identificação – Critérios de Informação

$$AIC(p) = \ln(\det(\hat{\Sigma})) + \frac{2}{T}c \tag{11}$$

$$BIC(p) = \ln(\det(\hat{\Sigma})) + \frac{\ln T}{T}c \tag{12}$$

$$HQ(p) = \ln(\det(\hat{\Sigma})) + \frac{\ln(\ln T)}{T}2c \tag{13}$$

em que $\hat{\Sigma}$: matriz das variâncias covariâncias do modelo; $c = pn^2$: número total de parâmetros estimados em todas as equações do modelo; T: tamanho da amostra.

- Tamanho amostral deve ser mantido constante para tornar o critério comparável. Logo, o tamanho da amostra é $(T - p_{max})$.

Identificação – Final Prediction Error - FPE

O critério FPE fornece uma medida da qualidade do modelo por meio de ajustes de modelos com diferentes ordens. O modelo mais preciso tem o menor FPE de acordo com o critério:

$$FPE(p) = \ln\left(\det(\hat{\Sigma})\right) + n\ln\left(\frac{T + np + 1}{T - np - 1}\right) \tag{14}$$

Estimação

- Mínimos Quadrados Ordinários aplicados a cada equação do modelo: número de variáveis em todas as equações deve ser igual

- Propriedades dos estimadores:

    1. Consistência;
    2. Eficiência assintótica;
    3. Normalidade assintótica.

Verificação do Modelo

1. Estabilidade do modelo;
2. Correlograma;
3. Testes de Autocorrelação: Teste de Portmanteau;
4. Teste de Normalidade: ortogonalização da matriz $\hat{\Sigma}$.

Problema:

Diagnóstico de resíduos dos modelos

Estabilidade do modelo

Seja o modelo VAR(p) com n variáveis, na forma reduzida:

$$X_t = \Phi_0 + \Phi_1 X_{t-1} + \Phi_2 X_{t-2} + \ldots + \Phi_p X_{t-p} + e_t$$

Usando operadores de defasagens:

$$X_t = \Phi_0 + \left(\Phi_1 L + \Phi_2 L^2 + \ldots + \Phi_p L^p\right) X_t + e_t$$

Ou,

$$\left(\mathbf{I} - \Phi_1 L - \Phi_2 L^2 - \ldots - \Phi_p L^p\right) X_t = \Phi_0 + e_t$$

que pode ser escrito na forma resumida como:

$$\Phi(L) X_t = \Phi_0 + e_t$$

Estabilidade do modelo

- Condição de estabilidade em modelos AR(p): $|\phi_i| < 1, i = 1, \ldots, p$
- Análogo para modelos VAR

Desenvolvendo recursivamente o modelo VAR(p):

$$X_k = (I + \Phi_1 + \Phi_1^2 + \ldots + \Phi_1^{k-1})\Phi_0 + X_0\Phi_1^k + \sum_{i=0}^{k-1} \Phi_1^i e_{k-i}$$

Ou,

$$X_k = \Phi_0 \sum_{j=0}^{k-1} \Phi_1^j + X_0\Phi_1^k + \sum_{i=0}^{k-1} \Phi_1^i e_{k-i}$$

Estabilidade do modelo

Para $k \to \infty, \sum_{j=0}^{\infty} \Phi_1^j = \dfrac{1}{1-\Phi_1}$ se $|\Phi_1| < 1$. Assim,

$$X_k = \Phi_0 \frac{1}{1-\Phi_1} + \sum_{i=0}^{k-1} \Phi_1^i e_{k-i}$$

Dessa forma, tem-se:

$$\frac{\partial X_k}{\partial e_t} = \Phi_1^i$$

- Se $|\Phi_1| < 1$ o choque ocorrido em t, será menor quanto mais próximo $\Phi_1 \sim 0$ e $i \to \infty$;
- Se $|\Phi_1| = 1$ o choque é permanente;
- Se $|\Phi_1| > 1$ os efeitos serão crescentes.

Estabilidade do modelo

Retornando a equação:

$$\Phi(L)X_t = \Phi_0 + e_t$$

A condição de estabilidade impõe que as raízes de $\Phi(L) = 0$.

Fazendo $z = L$:

$$\mathbf{I} - \Phi_1 z - \Phi_2 z^2 - \ldots - \Phi_p z^p = 0$$

esta condição impõe que as raízes estejam **fora** do círculo unitário.

Ou, escrevendo $z = \dfrac{1}{\lambda}$, é o mesmo que dizer que as raízes de

$$\lambda^p - \Phi_1 \lambda^{p-1} - \Phi_2 \lambda^{p-2} - \ldots - \Phi_p = 0$$

estejam **dentro** do círculo unitário.

Estabilidade do modelo

Usando os operadores de atraso para reescrever as equações (8) e (9) do modelo VAR(1), temos:

$$(1 - a_{11}L)y_t = a_{10} + a_{12}Lz_t + e_{1t} \tag{15}$$

$$(1 - a_{22}L)z_t = a_{20} + a_{21}Ly_t + e_{2t} \tag{16}$$

Ambas soluções para y_t e z_t dependem do polinômio

$$(1 - a_{11}L)(1 - a_{22}L) - (a_{11}a_{22}L^2) \tag{17}$$

- O critério de convergência exige que as raízes devem estar fora do círculo unitário.

Estabilidade Estrutural da Regressão

Uma das forma de análise da estabilidade estrutural é a partir do Gráficos de Controle de Soma Acumulada (Cumulative Sum Control Charts - CUSUM).

O gráfico de controle CUSUM é uma ferramenta estatística que acumula informações das amostras de um processo ponderando-as igualmente, isto é, as amostras têm o mesmo peso.

No R, usamos a função `stability()`:

```
stability(x, type =
c(''OLS-CUSUM'','Rec-CUSUM'),h=0.15)
```

Correlograma

- Cálculo da correlação cruzada entre pares:

$$\rho_{ij}(k) = \frac{cov(e_{it}, e_{jt-k})}{std(e_{it})std(e_{jt})}, i = 1,2; j = 1,2$$

em que $std(e_{it})$ representa o desvio padrão para $i = 1,2$ e

$$\rho_k \to N\left(0, \frac{1}{T}\right)$$

- Tomando um intervalo com 95% de confiança em torno de zero, os limites inferiores e superiores são dados por:

$$\left[-\frac{2}{\sqrt{T}}, \frac{2}{\sqrt{T}}\right]$$

sendo T o número de observações.

Teste de Autocorrelação dos Resíduos

Teste de Portmanteau

Objetivo: Verificar se as autocorrelações multivariadas são nulas.

- Generalização dos testes de resíduos dos modelos univariados:

$$H_0 : E(e_t e'_{t-j}) = 0, \text{ para } j = 1, 2, \ldots, J > p$$

$$H_1 : E(e_t e'_{t-j}) \neq 0, \text{ para algun } j$$

- A estatística é usada para testar que as autocorrelações e correlações cruzadas não são significativas, para um dado nível de significância.

Teste de Autocorrelação dos Resíduos

Estatística do teste (Teste de Box-Pierce):

$$Q = T\sum_{j=1}^{J} tr(\hat{\Sigma}_j'\hat{\Sigma}_0^{-1}\hat{\Sigma}_j'\hat{\Sigma}_0^{-1}) \rightarrow \chi^2_{n^2(J-p)}$$

Estatística do teste (Teste de Ljung-Box):

$$Adj\_Q = T^2\sum_{j=1}^{J} \frac{1}{T-j} tr(\hat{\Sigma}_j'\hat{\Sigma}_0^{-1}\hat{\Sigma}_j'\hat{\Sigma}_0^{-1}) \rightarrow \chi^2_{n^2(J-p)}$$

sendo $\hat{\Sigma}_j = \frac{\sum_{t=j+1}^{T} \hat{e}_t\hat{e}_{t-j}}{T}$ a autocovariância na defasagem j; n o número de variáveis no modelo; p a ordem do VAR; J a defasagem; e $tr(\cdot)$ é o traço da matriz.

Autocorrelação dos Resíduos – Teste LM

Objetivo:

Testar se existe autocorrelação de resíduos no modelo:

$$\hat{e}_t = \Theta_1 \hat{e}_{t-1} + \Theta_2 \hat{e}_{t-2} + \ldots + \Theta_h \hat{e}_{t-h} + u_t$$

$$H_0 : \Theta_j = 0, \quad \text{para todo} \quad j = 1, 2, \ldots, h$$

$$H_1 : \Theta_j \neq 0, \quad \text{para algum} \quad j$$

Autocorrelação dos Resíduos – Teste LM

O teste é executado em dois estágios:

1. O modelo completo é estimado por MQO, de forma que os $\hat{e}_t$ são substituídos por zero, para $t < 0$. Calcula-se:

$$\hat{\Sigma}_u = \frac{\sum_{t=1}^{T} \hat{e}_t \hat{e}_t'}{T}$$

2. Estima-se o modelo impondo H_0 para obter os resíduos $\hat{e}_t^r$ e calcula-se:

$$\hat{\Sigma}_r = \frac{\sum_{t=1}^{T} \hat{e}_t^r (\hat{e}_t^r)'}{T}$$

Estatística do teste LM:

$$LM_h = T\left[n - tr\left(\hat{\Sigma}_u \hat{\Sigma}_r^{-1}\right)\right] \to \chi^2_{hn^2}$$

Teste ARCH-LM - Heterocedasticidade

Objetivo:

Análise de heterocedasticidade condicional.

Regredir a equação:

$$\hat{\epsilon}_t^2 = \beta_1 \hat{\epsilon}_{t-1}^2 + \beta_2 \hat{\epsilon}_{t-2}^2 + \ldots + \beta_h \hat{\epsilon}_{t-h}^2 + u_t$$

Sob as hipóteses

$$H_0 : \beta_1 = \beta_2 = \ldots = \beta_h = 0$$

$$H_1 : \beta_1 \neq 0 \ \text{ e/ou} \beta_2 \neq 0 \ \text{ e/ou} \ldots \beta_h \neq 0$$

Estatística do teste:

$$ARCH - LM = T \cdot R^2 \xrightarrow{d} \chi_h^2$$

Não rejeitar H_0 significa ausência de heterocedasticidade.

Teste de Normalidade

- Teste de Jarque-Bera Multivariado
- Devemos escolher uma fatoração dos *n* resíduos que são ortogonais entre si.

Etapas do teste:

1. Obter a matriz de covariância dos resíduos

$$\hat{\Sigma}_e = \frac{\left(\hat{e}_t - \bar{\hat{e}}_t\right)\left(\hat{e}_t - \bar{\hat{e}}_t\right)'}{T}$$

Teste de Normalidade

2. Calcular a raiz quadrada da matriz: $\hat{\Sigma}_e^{1/2}$. Para tanto, são obtidos os autovalores $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ da matriz $\hat{\Sigma}_e$ e a correspondente matriz Q composta pelos autovetores ortonormais, tal que $\hat{\Sigma}_e = Q\Lambda Q'$ com $\Lambda = diag(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$. Assim,

$$\hat{\Sigma}_e^{1/2} = Q \; diag(\lambda_1^{1/2}, \ldots, \lambda_n^{1/2}) \; Q'$$

Para o cálculo da matriz $\hat{\Sigma}_e^{1/2}$ utiliza-se a Decomposição de Cholesky, a qual depende da ordenação das variáveis;

Teste de Normalidade

O teste para não normalidade é baseado na assimetria e curtose dos resíduos padronizados $\hat{e}_t^s = \left(\hat{e}_{1t}^s, \ldots, \hat{e}_{nt}^s\right)'$:

$$\hat{e}_t^s = \hat{\Sigma}_e^{-1/2}(\hat{e}_t - \bar{\hat{e}})$$

Assimetria:

$$\hat{m}_3 = (\hat{m}_{31}, \hat{m}_{32}, \ldots, \hat{m}_{3n})' \quad \text{com} \quad \hat{m}_{3i} = \frac{\sum_{t=1}^{T} \left(e_{it}^s\right)^3}{T}$$

Curtose:

$$\hat{m}_4 = (\hat{m}_{41}, \hat{m}_{42}, \ldots, \hat{m}_{4n})' \quad \text{com} \quad \hat{m}_{4i} = \frac{\sum_{t=1}^{T} \left(e_{it}^s\right)^4}{T}$$

Teste de Normalidade

As estatísticas são dadas por:

$$s_3^2 = T\frac{\hat{m}_3'\hat{m}_3}{6} \quad s_4^2 = T\frac{(\hat{m}_4 - 3_n)'(m_4 \hat{-} 3_n)}{24}$$

sendo $3_n = (3, 3, \ldots, 3)'$ é um vetor $n \times 1$ de 3*s*. Ambas as estatísticas tem distribuição χ_n^2 sob a hipótese nula $s_3^2 = s_4^2 = 0$.. Alternativamente, pode-se usar a a distribuição conjunta de ambos os testes:

$$JB_{2n} = s_3^2 + s_4^2 \rightarrow \chi_{2n}^2$$

Teste de Normalidade

- A hipótese nula do teste é de que os resíduos são normalmente distribuídos;
- Devemos ressaltar que a rejeição da hipótese nula não impede a interpretação e análise dos resultados, apenas de sugerir cautela;
- A não normalidade dos resíduos em análises de séries macroeconômicas é comum nos estudos que realizam o teste de Jarque-Bera

Aplicações do Modelo

1. Previsão;
2. Teste de Causalidade de Granger;
3. Função Resposta ao Impulso;
4. Decomposição da Variância do Erro de Previsão.

Previsão

- Análogo aos processos univariados.

Vamos considerar o modelo VAR(1):

$$x_t = A_0 + A_1 x_{t-1} + e_t \tag{18}$$

Previsão 1 passo à frente é dada por:

$$E(x_{t+1}) = A_0 + A_1 x_t$$

Previsão 2 passos à frente:

$$E(x_{t+2}) = A_0 + A_1 E(x_{t+1})$$

Previsão h passos à frente:

$$E(x_{t+h}) = A_0 + A_1 E(x_{t+h-1})$$

Teste de Causalidade de Granger

Definição:

y 'Granger-causa' z se o valor de z em t pode ser predito com maior precisão se forem considerados valores passados de y, além dos valores passados de z.

Pergunta:

O escalar y ajuda a *prever* o escalar z?

Se isso não acontece, então diz-se que y *não Granger causa* z

- Resposta: usar um teste F convencional, válido quando os coeficientes de interesse puderem ser escritos de modo a multiplicar variáveis estacionárias.

Teste de Causalidade de Granger

Considere o sistema na forma reduzida, associado a um modelo VAR(p) bivariado:

$$\begin{bmatrix} y_t \\ z_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{10} \\ a_{20} \end{bmatrix} + \sum_{i=1}^{p} \begin{bmatrix} a_{11,i} & a_{12,i} \\ a_{21,i} & a_{22,i} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{t-i} \\ z_{t-i} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e_{1t} \\ e_{2t} \end{bmatrix} \tag{19}$$

Teste de Causalidade de Granger

Passos para o teste, considerando uma das equações:

1. Estime $z_t = a_{20} + \sum_{i=1}^{p} a_{21,i} y_{t-i} + \sum_{i=1}^{p} a_{22,i} z_{t-i} + e_{2t}$
2. Teste se y não Granger causa z usando o teste F sob as hipóteses:

$$H_0 : a_{21,1} = a_{21,2} = \ldots = a_{21,p} = 0$$

$$H_1 : a_{21,i} \neq 0, \text{para algum } i = 1, \ldots, p$$

em que a estatística do teste é dada por:

$$F = \frac{\left(\hat{e}_r^2 - \hat{e}_u^2\right)/p}{\hat{e}_u^2/(T - 2p - 1)} \rightarrow F(p, T - 2p - 1)$$

sendo $\hat{e}_r$ e $\hat{e}_u$ resíduos do modelos restrito e irrestrito. Se $F > F_c$, rejeita-se H_0 de que y não Granger causa z.

Teste de Causalidade de Granger

- Teste de causalidade de Granger não é o mesmo que teste de exogeneidade
- Para que z_t seja exógeno a y_t, é preciso que z_t não seja afetado contemporaneamente por y_t. A forma reduzida do VAR não permite que se faça esse tipo de teste. O teste de causalidade de Granger inclui valores correntes e passados de y_t sobre z_t.
- Pode-se fazer o mesmo teste em contextos de mais variáveis, e seu nome é teste de bloco-exogeneidade. Estima-se o modelo com e sem restrição e utiliza-se o teste F, como visto anteriormente.

Função de Resposta ao Impulso

Identificação

A partir da forma reduzida, consegue-se recuperar as informações contidas na forma estrutural? Ou seja, o sistema primitivo é identificável dada as estimativas de OLS do modelo VAR reduzido?

- Não, pois o número de parâmetros do sistema primitivo é diferente do número de parâmetros do sistema “recuperado” a partir do VAR estimado.
- O modelo VAR não permite identificar todos os parâmetros da forma estrutural, a menos que se imponham restrições adicionais

Identificação

Sistema reduzido:

$$y_t = a_{10} + a_{11}y_{t-1} + a_{12}z_{t-1} + e_{1t} \quad (20)$$

$$z_t = a_{20} + a_{21}y_{t-1} + a_{22}z_{t-1} + e_{2t} \quad (21)$$

Número de parâmetros a serem estimados: 9

$(a_{10}, a_{20}, a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}, Var(e_{1t}), Var(e_{2t}), cov(e_{1t}, e_{2t}))$

Sistema primitivo:

$$y_t = b_{10} - b_{12}z_t + \gamma_{11}y_{t-1} + \gamma_{12}z_{t-1} + \epsilon_{yt} \quad (22)$$

$$z_t = b_{20} - b_{21}y_t + \gamma_{21}y_{t-1} + \gamma_{22}z_{t-1} + \epsilon_{zt} \quad (23)$$

Número de parâmetros a serem estimados: 10

$\left(b_{10}, b_{20}, b_{12}, b_{21}, \gamma_{11}, \gamma_{12}, \gamma_{21}, \gamma_{22}, \sigma_y^2, \sigma_z^2\right)$

Identificação

- Sims (1980) sugere um sistema recursivo para identificar o modelo: trata-se de impor restrições no modelo primitivo.

Supor uma restrição ao sistema primitivo, tal que $b_{21} = 0$:

$$y_t = b_{10} - b_{12} z_t + \gamma_{11} y_{t-1} + \gamma_{12} z_{t-1} + \epsilon_{yt} \tag{24}$$

$$z_t = b_{20} + \gamma_{21} y_{t-1} + \gamma_{22} z_{t-1} + \epsilon_{zt} \tag{25}$$

Os erros reduzidos são:

$$\begin{bmatrix} e_{1t} \\ e_{2t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -b_{12} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_{yt} \\ \epsilon_{zt} \end{bmatrix} \tag{26}$$

- Trata-se de uma forma triangular de decompor os resíduos: decomposição de Choleski

Apresentação Alternativa do VAR

Vamos considerar o modelo VAR(1), restrito:

$$X_t = A_0 + A_1 X_{t-1} + e_t \tag{27}$$

Resolvendo recursivamente, temos:

$$\begin{aligned}
t = 1: \quad & X_1 = A_0 + A_1 X_0 + e_1 \\
t = 2: \quad & X_2 = A_0 + A_1 X_1 + e_2 = A_0 + A_1(A_0 + A_1 X_0 + e_1) + e_2 \\
& X_2 = (I + A_1)A_0 + A_1^2 X_0 + A_1 + e_2 \\
\ldots \quad & \ldots
\end{aligned}$$

$$X_n = (I + A_1 + A_1^2 + \ldots + A_1^{n-1})A_0 + A_1^n X_0 + \sum_{i=0}^{n-1} A_1^i e_{t-i}$$

Ou,

$$X_n = A_0 \sum_{i=0}^{n-1} A_1^i + A_1^n X_0 + \sum_{i=0}^{n-1} A_1^i e_{t-i}$$

para $n \to \infty$, temos $\sum_{i=0}^{\infty} A_1^i = \frac{1}{(I-A_1)}$ e $A_1^n \to 0$ se $|A_1| < 1$.

Logo,

$$X_n = \frac{A_0}{(I - A_1)} + \sum_{i=0}^{\infty} A_1^i e_{t-i}$$

- Se os autovalores da polinomial $(1 - \sum_{i=1}^{p} A_i L^i)$ estiverem fora do círculo unitário, podemos representar um $VAR(p)$ por um $VMA(\infty)$:

$$X_n = \mu + \sum_{i=0}^{\infty} A_1^i e_{t-i}$$

em que $\mu = \frac{A_0}{(I-A_1)}$.

Função Resposta ao Impulso

Lembrando que,

$$\begin{bmatrix} e_{1t} \\ e_{2t} \end{bmatrix} = \frac{1}{1 - b_{12}b_{21}} \begin{bmatrix} 1 & -b_{12} \\ -b_{21} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_{yt} \\ \epsilon_{zt} \end{bmatrix}$$

Ou, em relação ao erro $\epsilon_t = [\epsilon_{yt}, \epsilon_{zt}]'$:

$$x_t = \mu + \sum_{i=0}^{\infty} \Phi_i \epsilon_{t-i}$$

em que

$$\Phi_i = \begin{bmatrix} \phi_{11,i} & \phi_{12,i} \\ \phi_{21,i} & \phi_{22,i} \end{bmatrix} = \frac{1}{1 - b_{12}b_{21}} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}^i \begin{bmatrix} 1 & -b_{12} \\ -b_{21} & 1 \end{bmatrix}$$

Função Resposta ao Impulso

- Os elementos de Φ_i são os multiplicadores de impacto de um choque sobre as variáveis endógenas
- O impacto total de um choque ϵ_{yt} sobre y_{t+h} é dado pela soma dos coeficientes $\phi_{11,i}, i = 1, \ldots, h$;
- O impacto total de um choque ϵ_{yt} sobre z_{t+h} é dado pela soma dos coeficientes $\phi_{21,i}, i = 1, \ldots, h$;

Os coeficientes, quando desenhados em um gráfico contra i, geram a função resposta ao impulso.

A soma dos coeficientes, quando desenhados em um gráfico contra

Função Resposta ao Impulso

- Representa o mecanismo de transmissão dos choques aleatórios
  - Impulso: choque em uma variável
  - Resposta: alteração que o impulso provoca em todas as variáveis do modelo
  - Função resposta ao impulso: descreve o impacto de um terminado choque sobre uma determinada variável ao longo do tempo
  - Depende da ordenação das variáveis

Intervalo de Confiança

- A função resposta ao impulso é calculada mediante coeficientes estimados.
- Existe um intervalo de confiança a ser considerado nessas estimativas
- Esse intervalo pode ser calculado de forma analítica ou por métodos de experimentos de Monte Carlo.

Cálculo do IC:

- Forma analítica: ver Lütkerpohl (2005) ou Hamilton (1994)
  - Torna-se complicado em razão das covariâncias cruzadas.
- Simulação de Monte Carlo

Decomposição da Variância do Erro de Previsão

Objetivo

Determinar qual a porcentagem da variância do erro de previsão decorre de cada variável endógena ao longo do horizonte de previsão

- Indica a parcela com que cada choque contribui para a variação de uma determinada variável ao longo do tempo.
- Também depende da ordenação das variáveis

Decomposição da Variância do Erro de Previsão

Vamos considerar o erro de previsão dado abaixo:

$$x_{t+h} - E(x_{t+h}) = \sum_{i=0}^{h-1} \Phi_i \epsilon_{t+h-i}$$

Considerando apenas y_{t+h}:

$$\begin{aligned} y_{t+h} - E(y_{t+h}) = \quad & \phi_{11,0}\epsilon_{y_{t+h}} + \ldots + \phi_{11,h-1}\epsilon_{y_{t+1}} + \\ & +\phi_{12,0}\epsilon_{z_{t+h}} + \ldots + \phi_{12,h-1}\epsilon_{z_{t+1}} \end{aligned}$$

Logo,

$$\sigma_y^2(h) = \sigma_y^2(\phi_{11,0}^2 + \ldots + \phi_{11,h-1}^2) + \sigma_z^2(\phi_{12,0}^2 + \ldots + \phi_{12,h-1}^2)$$

Decompondo a variância do erro de previsão:

$$1 = \frac{\sigma_y^2(\phi_{11,0}^2 + \ldots + \phi_{11,h-1}^2)}{\sigma_y^2(h)} + \frac{\sigma_z^2(\phi_{12,0}^2 + \ldots + \phi_{12,h-1}^2)}{\sigma_y^2(h)}$$

- Mesmo efeito para a variável z_{t+h}, ou seja,

$$1 = \frac{\sigma_y^2(\phi_{21,0}^2 + \ldots + \phi_{21,h-1}^2)}{\sigma_z^2(h)} + \frac{\sigma_z^2(\phi_{22,0}^2 + \ldots + \phi_{22,h-1}^2)}{\sigma_z^2(h)}$$