Equações diferenciais - parte 1

(Cap 11, 12 e 14 do Gandolfo, Cap. 2 Shone)

Ivette Luna

11 de junho de 2019

Conceitos gerais

1) **Equação diferencial:** Equação que relaciona as derivadas de uma variável, cuja forma funcional é desconhecida porém diferenciável.

2) **Equação diferencial ordinária:** Quando a variável depende apenas de um argumento:

$$y = f(t)$$

$$y'' + a_1 y' + a_0 y = g(t)$$

3) **Equação diferencial parcial:** A variável de análise depende de mais de um argumento:

$$y = f(t, r)$$

$$\frac{\partial y}{\partial t} + \alpha \frac{\partial y}{\partial r} + \beta y = g(t)$$

Conceitos gerais

4) **Ordem da equação:**
É dada pela derivada de maior ordem na equação.

5) **A solução:**
Consistem em identificar a forma funcional de $f(t)$ que atenda à equação diferencial.

6) **Métodos de solução:**

- Depende da natureza da variável. Se as equações são lineares nas derivadas, a técnica vista para equações em diferença ainda pode ser utilizada;
- Se a equação é não linear, nem sempre será possível obter a forma funcional de $y = f(t)$.

Equações diferenciais ordinárias lineares com coeficientes constantes

Possui uma forma funciona geral dada por

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_1 y' + a_0 y = g(t)$$

onde $y^{(n)}$ denota a derivada de ordem n. Os coeficientes $a_i, \ i = 0, \ \ldots, \ n$ são constantes, com $a_n \neq 0$ se a equação é de ordem n.

Por ser uma equação diferencial linear, a solução é dada por

$$y(t) = y^h(t) + y^p(t)$$

Solução da equação diferencial

O caso homogêneo é dado por:

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + a_1 y' + a_0 y = 0$$

1) Teorema 1 – Se $y(t)$ é solução da equação diferencial, então se A é um escalar, $Ay(t)$ também será solução da equação:

$$Ay^{(n)} + a_{n-1}Ay^{(n-1)} + \ldots + a_1 Ay' + a_0 Ay = 0$$

$$\Rightarrow A[y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + a_1 y' + a_0 y] = 0$$

Solução da equação diferencial

2) Teorema 2 – Se $y_1(t),\ y_2(t),\ \ldots, y_m(t)$ são soluções L.I. da equação diferencial, logo, a C.L. das soluções

$$A_1 y_1(t) + A_2 y_2(t) + \ldots + A_m y_m(t)$$

com $A_1,\ A_2,\ A_m$ sendo escalares, também será solução da equação diferencial.

Os dos teoremas são utilizados para especificar a solução da equação homogênea.

Equações diferenciais de ordem 1

Seja $a_1 y' + a_0 y = 0$. Dividindo por $a_1 \neq 0$

$$y' + c_0 y = 0$$

com $c_0 = a_0/a_1$. Reescrevendo:

$$\frac{dy}{dt} = -c_0 y \qquad \Rightarrow \qquad \frac{dy}{y} = -c_0 dt$$

Integrando ambos os lados:

$$\ln y = -c_0 t + K$$
$$e^{\ln y} = e^{-c_0 t + K} = \underbrace{e^K}_{\text{cte.}=A} \cdot e^{-c_0 t}$$

E portanto,

$$y(t) = Ae^{-c_0 t}$$

onde A é a constante arbitrária definida via condição inicial.

$\rightsquigarrow$ Há semelhanças com as eqs. em diferença de ordem 1?

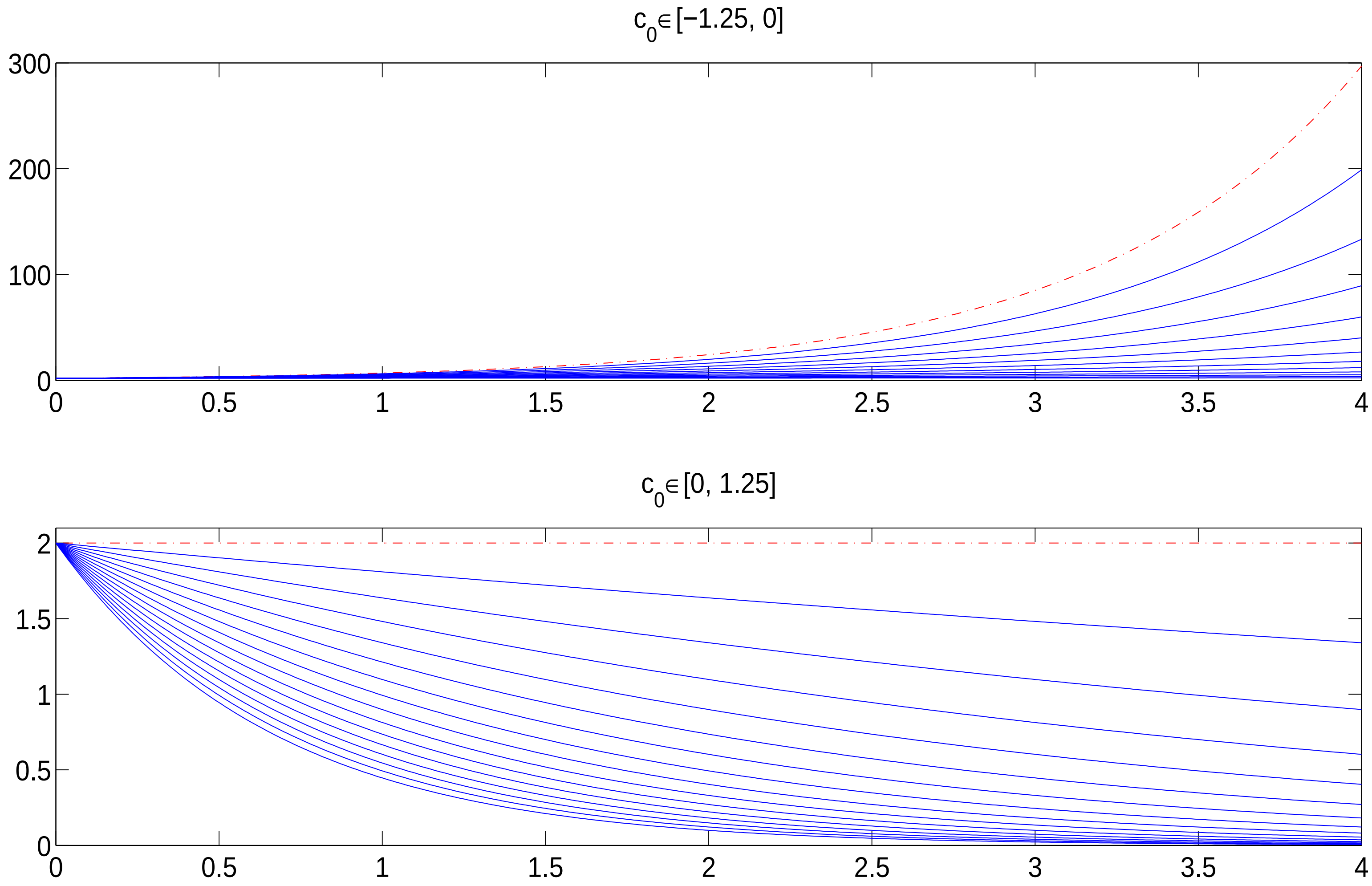
Impacto de c_0 na dinâmica da trajetória temporal

A solução geral para a equação **homogênea**:

$$y(t) = A \cdot e^{-c_0 t}$$

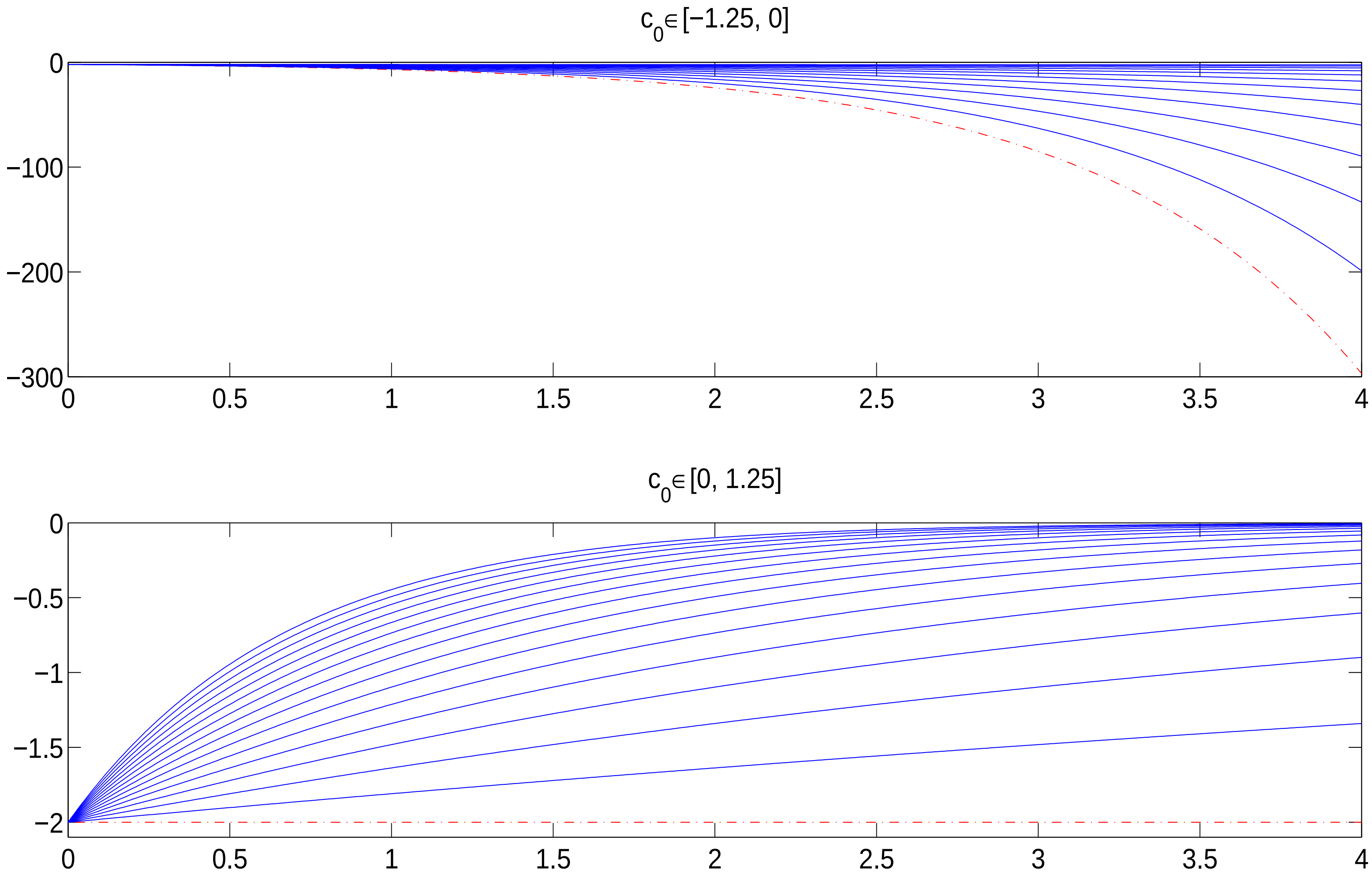
1. A base do termo exponencial é constante (exp), portanto, não há oscilações;
2. Se $c_0 > 0 \Rightarrow y(t) \to 0$ (trajetória estável/convergente);
3. Se $c_0 < 0 \Rightarrow y(t) \to \infty$ (trajetória explosiva/divergente);
4. Se $A < 0$ há um efeito de *espelhamento*, além do efeito de escala.

Exemplos, $A > 0$



c0∈[−1.25, 0]
300
200
100
0
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3
3.5
4
c0∈[0, 1.25]
2
1.5
1
0.5
0
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3
3.5
4

Exemplos, $A < 0$



$c_0 \in [-1.25, 0]$
0
−100
−200
−300
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3
3.5
4
$c_0 \in [0, 1.25]$
0
−0.5
−1
−1.5
−2
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3
3.5
4

Outra forma de *enxergar* a solução

Se $y' + c_0 y = 0$, logo

$$y' = -c_0 y$$

Uma função cuja derivada é função linear dela mesma é a função exponencial:

$$y = e^{kt} \Rightarrow y' = ke^{kt}$$

Logo, uma solução possível é dada por

$$y = Ae^{\lambda t} \Rightarrow y' = A\lambda e^{\lambda t}$$

Substituindo na equação diferencial,

$$A\lambda e^{\lambda t} + c_0 A e^{\lambda t} = 0$$

$$\Rightarrow Ae^{\lambda t}(\lambda + c_0) = 0$$

$$\Rightarrow Ae^{\lambda t}(\lambda + c_0) = 0$$

Como a solução arbitrária da equação homogênea não nos interessa, logo,

$$\lambda + c_0 = 0 \Rightarrow \lambda = -c_0$$

que é a **equação característica** da equação diferencial. Assim, a solução homogênea é dada por

$$y(t) = Ae^{-c_0 t}$$

Equação não homogênea

Seja $y' + c_0 y = g(t)$, onde $c_0 \in \mathbb{R}$. A solução é dada por

$$y(t) = y^h(t) + y^p(t)$$

Para isso, o método geral de resolução e análise dos resultados são os vistos para as equações em diferença.

- $y^h(t)$ é dado por $y^h(t) = A \cdot e^{-c_0 t}$
- $y^p(t)$ incorpora o efeito de $g(t)$ na solução geral.

Solução particular

a) Caso $g(t) = a$:

$$y' + c_0 y = a$$

Se $y^p(t) = K \Rightarrow y^{p\prime} = 0$. Substituindo na equação:

$$0 + c_0 K = a \quad \Rightarrow \quad K = \frac{a}{c_0}$$

Assim,

$$y(t) = A \cdot e^{-c_0 t} + \frac{a}{c_0}$$

Dadas a condição inicial $y(0) = y_0$ sobre y, podemos determinar A.

$\rightsquigarrow$ E se $c_0 = 0$?

Exemplo numérico

Seja a equação diferencial $y' - 3y = 9$. Para determinar a forma funciona de $y = f(t)$:

1. Identificamos a solução homogênea: $y^h(t) = Ae^{3t}$ (instável);
2. Especificamos uma tentativa de solução particular. Sendo $g(t) = 9$, uma possibilidade é $y^p(t) = K$. Por ser constante, $y'^p(t) = 0$. Assim, substituindo na equação diferencial,

$$0 - 3K = 9 \Rightarrow K = -3$$

3. Finalmente, a solução geral é dada por

$$y(t) = Ae^{3t} - 3$$

4. Dada uma condição inicial, como $y(0) = 3$, especificamos uma única trajetória temporal dentro das possíveis, definindo o valor para a constate A. Neste caso,

$$y(0) = A - 3 = 3 \Rightarrow A = 6$$

$$\therefore y(t) = 6e^{3t} - 3$$

Solução particular

b) Caso $g(t) = bv^t$:

$$y' + c_0 y = bv^t$$

Se $y^p(t) = Kv^t$

$$\Rightarrow y^{p\prime} = K\ln(v)v^t$$

Substituindo na equação:

$$K\ln(v)v^t + c_0 K v^t = bv^t \quad \Rightarrow \quad K(\ln(v) + c_0)v^t = bv^t$$

$$\Rightarrow K = \frac{b}{\ln(v) + c_0}$$

desde que $c_0 \neq -\ln(v)$. Nesse caso, tentamos uma segunda possibilidade $y^p(t) = Ktv^t$

(Cont.) Assim,

$$y(t) = \underbrace{A \cdot e^{-c_0 t}}_{y^h(t)} + \underbrace{\frac{bv^t}{\ln(v) + c_0}}_{y^p(t)}$$

Dada a condição inicial $y(0) = y_0$ sobre $y(t)$, podemos determinar A.

$\rightsquigarrow$ E se $c_0 = -\ln(v)$?

Solução particular

c) Caso $g(t)$ é uma função trigonométrica:Se

$$g(t) = b_1 \cos(\theta t) + b_2 \sin(\theta t)$$

logo, uma tentativa de solução particular será tal que

$$y^p(t) = K_1 \cos(\theta t) + K_2 \sin(\theta t)$$

$$y^{p\prime}(t) = -K_1\theta \sin(\theta t) + K_2\theta \cos(\theta t)$$

Substituindo na equação diferencial e agrupando os termos, chegamos ao sistema linear:

$$\begin{aligned} c_0K_1 + \theta K_2 &= b_1 \\ -\theta K_1 + c_0K_2 &= b_2 \end{aligned}$$

a partir do qual se obtém os valores de K_1 e K_2.

Solução particular

d) Caso $g(t)$ é um polinômio:
   $y^p(t)$ será (como tentativa inicial) um polinômio da mesma ordem que $g(t)$.

e) Caso $g(t)$ é uma combinação dos casos anteriores:
   Nesse caso, a solução particular também será combinação das funções. Por exemplo, se

$$g(t) = e^{bt}\cos(\theta t)$$

   Logo, uma tentativa de solução particular será

$$y^p(t) = e^{bt}[K_1\cos(\theta t) + K_2\sin(\theta t)]$$

Harrod-Domar (Shone, exemplo 2.8)

- A poupança S é função proporcional à renda Y;
- O investimento $I = \Delta K$ é proporcional à variação da renda no tempo;
- No L.P., $I = S$; Se s é a propensão marginal a poupar, logo,

$$S = sY$$
$$I = K' = vY'$$
$$I = S$$

Por substituição,

$$vY' = sY$$
$$Y' - \frac{s}{v}Y = 0$$

onde s/v é a taxa *garantida* de crescimento. Logo, Se, para $t = 0$, $I_0 = S_0 = sY_0$

$$Y(t) = Y_0 e^{s/v\ t}$$

Solow (Shone, exemplo 2.9)

Seja uma função contínua de função de produção $Y = F(K,L)$, continuamente diferenciável (pelo menos duas vezes) e homogênea de grau um. Seja $k = K/L$ a relação capital-trabalho e $y = Y/L$ a relação produto-trabalho. Logo,

$$\frac{Y}{L} = \frac{F(K,L)}{L} = F(\frac{K}{L}, 1) = f(k)$$

ou seja,

$$y = f(k)$$

com $f(0) = 0$, $f'(k) > 0$; $f''(k) < 0$, $k > 0$.

- Taxa constante de crescimento de L, n, exógena; logo,

$$L' = nL; \qquad L(0) = L_0$$

- Taxa de poupança constante tal que $S = sY = I$.

Logo, as equações de especificação do modelo são:

$$\begin{aligned} I &= K' + \delta K \\ S &= sY \\ K' + \delta K &= sY \\ K(0) &= K_0 \end{aligned}$$

Derivando k com relação ao tempo,

$$\frac{dk}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{K}{L}\right) = \frac{K'L - KL'}{L^2}$$

$$k' = k\left(\frac{K'}{K} - \frac{L'}{L}\right)$$

Mas, do sistema inicial,

$$\frac{K'}{K} = \frac{sY - \delta K}{K} = \frac{sY}{L}\frac{L}{K} - \delta = \frac{sf(k)}{k} - \delta$$

Ainda, como $L' = nL$, logo

$$k' = sf(k) - (n+\delta)k$$

com condição inicial $k(0) = K_0/L_0 = k_0$. Para resolver a equação é necessário assumir uma forma explícita para a função de produção. Quando assume-se uma Cobb-Douglas,

$$Y = aK^{\alpha}L^{1-\alpha} \qquad 0 < \alpha < 1$$

Dividindo por L,

$$y = f(k) = f(k) = ak^{\alpha}$$

logo,

$$k' = sak^{\alpha} - (n+\delta)k$$

ou

$$k' + (n+\delta)k = sak^{\alpha}$$

que é uma equação não linear (Bernoulli), a qual, fazendo a transformação de variável $v = k^{1-\alpha}$, torna-se linear e portanto, podemos determinar a solução geral sobre k.

Fazendo a transformação obtemos a equação linear

$$v' + (1-\alpha)(n+\delta)v = sa(1-\alpha)$$

Assim, a solução geral será dada por

$$v(t) = k^{1-\alpha}(t) = Ae^{-(1-\alpha)(n+\delta)t} + \frac{sa}{n+\delta}$$

onde A é definido via as condições iniciais. Finalmente,

$$k(t) = \left(Ae^{-(1-\alpha)(n+\delta)t} + \frac{sa}{n+\delta}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

No R ...

Equações diferenciais lineares de ordem 2

Uma equação diferencial linear de ordem 2 é dada pela forma geral:

$$a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = g^*(t) \tag{1}$$

onde $a_2 \neq 0$; a_2, a_1, a_0 são constantes e $g(t)$ é uma função conhecida. Dividindo por a_2:

$$y'' + c_1 y' + c_0 y = g(t) \tag{2}$$

onde $c_1 = a_1/a_2$, $c_0 = a_0/a_2$ e $g(t) = g^*(t)/a_2$. A solução geral é dada por

$$y(t) = y^h(t) + y^p(t)$$

A solução particular é dada de forma similar à vista para o caso de equações de primeira ordem.

Determinando $y^h(t)$

Uma forma geral para $y^h(t)$ pode ser dada por

$$y^h(t) = A \cdot e^{\lambda t} \neq 0$$

Ainda,

$$y^{h\prime}(t) = A\lambda e^{\lambda t} \qquad \text{e} \qquad y_h{}''(t) = A\lambda^2 e^{\lambda t}$$

Assim, substituindo em (2):

$$A\lambda^2 e^{\lambda t} + c_1 A\lambda e^{\lambda t} + c_0 A e^{\lambda t} = 0$$

Ou, fatorizando o termo comum $Ae^{\lambda t}$:

$$Ae^{\lambda t}(\lambda^2 + c_1\lambda + c_0) = 0$$

Assim, há dois valores possíveis para λ, iguais às raízes do polinômio característico

$$p(\lambda) = \lambda^2 + c_1\lambda + c_0 = 0$$

Determinando $y^h(t)$

As raízes do polinômio $p(\lambda)$ são dadas por

$$\lambda_1, \lambda_2 = -\frac{c_1}{2} \pm \frac{\sqrt{c_1^2 - 4c_0}}{2}$$

Dado $\Delta = c_1^2 - 4c_0$, temos três casos possíveis:

1. Caso 1: Raízes reais e diferentes ($\Delta > 0$);
2. Caso 2: Raízes reais e iguais ($\Delta = 0$);
3. Caso 3: Raízes complexas ($\Delta < 0$).

Caso 1: raízes reais e diferentes

Sendo as raízes reais e diferentes, usando os teoremas 1 e 2, $y^h(t)$ é dada por

$$y_h(t) = A_1 e^{\lambda_1 t} + A_2 e^{\lambda_2 t}$$

Por tanto, a solução geral será dada por

$$y(t) = A_1 e^{\lambda_1 t} + A_2 e^{\lambda_2 t} + y^p(t)$$

onde A_1 e A_2 são constantes arbitrárias a serem definidas via condições iniciais (2).

Caso 2: raízes reais e iguais

Sendo as raízes reais e iguais tal que $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$, a solução homogênea é dada por

$$y^h(t) = A_1 e^{\lambda t} + A_2 t e^{\lambda t}$$

Por tanto, a solução geral será dada por

$$y(t) = (A_1 + A_2 t)e^{\lambda t} + y^p(t)$$

onde A_1 e A_2 são constantes arbitrárias a serem definidas via condições iniciais.

Caso 3: raízes complexas

Neste caso, temos que

$$\lambda_1, \lambda_2 = \underbrace{\frac{-c_1}{2}}_{h} \pm i \underbrace{\frac{\sqrt{-\Delta}}{2}}_{v}$$

com $\Delta = c_1^2 - 4c_0$.

Sendo as raízes diferentes, podemos nos inspirar no caso 1 para definir $y^h(t)$

$$y^h(t) = A_1 e^{\lambda_1 t} + A_2 e^{\lambda_2 t}$$

Caso 3: raízes complexas

Ou seja

$$y^h(t) = A_1 e^{(h+i\ v)t} + A_2 e^{(h-i\ v)t}$$

$$y^h(t) = A_1 e^{h\ t} \cdot e^{i\ v\ t} + A_2 e^{h\ t} \cdot e^{-i\ v\ t}$$

$$= e^{h\ t}\left[A_1 e^{i\ v\ t} + A_2 e^{-i\ v\ t}\right]$$

Caso 3: raízes complexas

Por Moivre:

$$e^{i\ v\ t} = \cos(vt) + i\sin(vt)$$

$$e^{-i\ v\ t} = \cos(vt) - i\sin(vt)$$

Substituindo os termos exponenciais e manipulando algebricamente:

$$y^h(t) = e^{h\ t}\,[A_3\cos(vt) + A_4\sin(vt)]$$

Estabilidade

$$\lambda^2 + c_1\lambda + c_0 = 0$$

- Raízes reais e diferentes: As raízes de um polinômio de grau 2 são tais que:

$$\lambda^2 \underbrace{-(\lambda_1 + \lambda_2)}_{c_1}\lambda + \underbrace{(\lambda_1 \cdot \lambda_2)}_{c_0} = 0$$

A estabilidade depende do sinal das raízes. Assim, comparando os coeficientes das equações, a trajetória temporal de $y(t)$ será estável, se e somente se

$$\lambda_1 + \lambda_2 < 0 \Rightarrow c_1 > 0$$

e

$$\lambda_1 \cdot \lambda_2 > 0 \Rightarrow c_0 > 0$$

Estabilidade

$$\lambda^2 + c_1\lambda + c_0 = 0$$

$$\lambda_1, \lambda_2 = -\frac{c_1}{2} \pm \frac{\sqrt{c_1^2 - 4c_0}}{2}$$

- Raízes iguais: Se $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$, então $\Delta = 0$ e

$$\lambda = -\frac{c_1}{2}$$

A estabilidade depende do sinal de λ. Assim, a trajetória temporal de $y(t)$ será estável, se e somente se

$$\lambda < 0 \Rightarrow c_1 > 0$$

Ainda, como $\Delta = 0 \Rightarrow c_1^2 - 4c_0 = 0$

$$\Rightarrow c_o = c_1^2/4 > 0$$

Estabilidade

$$\lambda^2 + c_1\lambda + c_0 = 0$$

$$\lambda_1, \lambda_2 = -\frac{c_1}{2} \pm \frac{\sqrt{c_1^2 - 4c_0}}{2}$$

- Raízes complexas: Se $\Delta < 0$ então

$$\lambda_1, \lambda_2 = \underbrace{\frac{-c_1}{2}}_{h} \pm i \underbrace{\frac{\sqrt{-\Delta}}{2}}_{v}$$

A estabilidade depende do termo $e^{h\,t}$. Assim, a trajetória temporal de $y(t)$ será estável, se e somente se

$$h < 0 \Rightarrow -\frac{c_1}{2} < 0 \Rightarrow c_1 > 0$$

Ainda, como $c_1^2 - 4c_0 < 0$

$$\Rightarrow c_1^2 < 4c_0 \Rightarrow c_0 > 0$$

Equação diferencial de ordem superior

A forma geral é dada por

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_1 y^{'} + a_0 y = g(t)$$

onde $y^{(i)}; i = 1, 2, \ldots, n$ denota a $i-$éssima derivada, com $a_n \neq 0$.
O polinômio característico:

$$p(\lambda) = a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \ldots + a_1 \lambda + a_0 = 0$$

Casos possíveis

- No caso de n raízes reais

$$y_h(t) = A_1 e^{\lambda_1 t} + A_2 e^{\lambda_2 t} + \ldots + A_n e^{\lambda_n t}$$

- Se λ^* é uma raiz de multiplicidade $m \leq n$, logo

$$(A_1 + A_2 t + \ldots + A_m t^{m-1}) e^{\lambda t}$$

  também será solução.
- Se a raíz λ^* é complexa e de multiplicidade $m \leq n$, logo,

$$e^{ht}[(A_{11} + A_{12}t + \ldots + A_{1m}t^{m-1}) \cos(vt) + \\ + (A_{21} + A_{22}t + \ldots + A_{2m}t^{m-1}) \sin(vt)]$$

  também será solução do sistema.