University of Campinas - UNICAMP

Economia Matemátia e Simulação

Prova HO-012

Supervisora: Ivette Luna

———————————————————

Henri Makika (211042)

———————————————————

Junho 10, 2019

Contents

Questão 1: Modelo de Hicks

A seção 6.3 do livro texto (Gandolfo, 2010) descreve a forma mais simples do modelo de Hicks. As equações básicas que definem o modelo, a partir da extensão do modelo de interação do multiplicador-acelerador de Samuelson são :

$$Y_t = C_t + I_t$$
$$C_t = bY_{t-1}$$
$$I_t = I_t^{'} + I_t^{''}$$
$$I_t^{'} = k(Y_{t-1} - Y_{t-2})$$
$$I_t^{''} = A_0(1+g)^t$$

a) Em função dos parâmetros do modelo e o discriminante do polinômio característico resultante, especifique as condições de estabilidade e analise a factibilidade de cada cenário possível;

Resposta a :

Para responder nesta quesstão precisamos reescrever a equação de condição de equilíbrio, ou seja:

$$Y_t - (b+k)Y_{t-1} + kY_{t-2} = A_0(1+g)^t$$

```r
library(tidyr)
library(ggplot2)
library(dplyr)
library(limSolve)
library(matlib)
library(mosaic)
```

Para investigar as condições de estabilidade da equação acima, ou seja equação em diferença de segunda ordem, vamos precizar de matriz jacobiana e a equação característica correspondente, pode facilmente obter suas raízes ou autovalores :

$$\lambda_{1,2} = \frac{a+c}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{(a+c) - 4a} < 0$$

O polinômio característico é dado por :

$$\lambda^2 + a_1\lambda + a_0 = 0$$

A solução homogênea da equação acima é :

$$Y_t - (b+k)Y_{t-1} + kY_{t-2} = B$$

Em que

$$a_1 = -(b+k); a_0 = k$$

Reescrevendo o polinômio característico como :

$$\lambda^2 - (b+k)\lambda + k = 0$$

Condição 1 : $1 + a_0 + a_1 > 0$; Condição 2 : $1 - a_1 + a_0 > 0$; condição 3 : $a_0 < 0$.

Isto é no caso que o determinante seja superior a zero.

No entanto, se o discriminante é menor que zero, tem-se:

$$R = \sqrt{a_0} < 1$$

```r
set.seed(12345)
k = 0.5
b = 0.9
a0 = k
a1 = -(b + k)
a2 = 1

# Analise das condições
condicao1 = 1 + a1 + a0 > 0
condicao2 = 1 - a1 + a0 > 0
condicao3 = a0 < 1

condicoes = condicao1 & condicao2 & condicao3

if (condicoes){
print("Trajetória estável")
} else {
print("Trajetória instável")
}
```

```
## [1] "Trajetória estável"
```

```r
coeficients = c(a0, a1, a2)

# calculando o discriminante
delta = a1^2 -4*a2*a0
delta
```

```
## [1] -0.04
```

```r
raizes = polyroot(coeficients)
raizes
```

```
## [1] 0.7+0.1i 0.7-0.1i
```

```r
if (delta >=0){
  raizes_reais <- Re( raizes )
  raizes_reais
  cat("Raízes reais: ", raizes_reais)
} else{R <- Mod(raizes[1])
R
cat("Raízes complexas com módulo ", R)
}
```

```
## Raízes complexas com módulo  0.7071068
```

Para que o modelo de Hicks seja estável, é necessário que o $b < 1$ que a propensão a consumir et que $0 < k < 1$ que o coeficiente de acelerador.

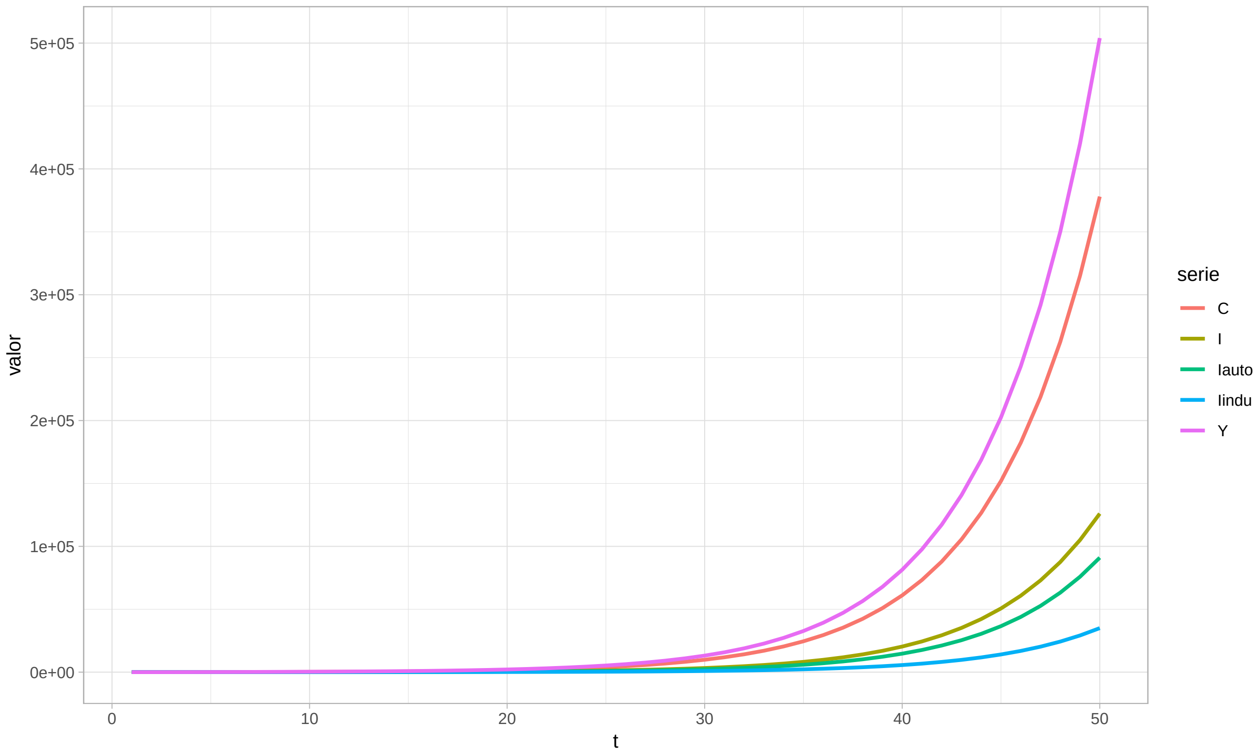
b) Implemente o modelo no R e apresente as trajetórias temporais da renda, investimento e consumo das famílias para um caso estável e um caso instável, comparando ambos os cenários;

Caso estável :

```
k = 0.5
b = 0.9
a0 = k
a1 = -(b + k)
a2 = 1
A0 = 10
g = 0.2

tmax = 50

Y = rep(0,tmax)
C = rep(0,tmax)
Iindu = rep(0,tmax)
Iauto = rep(0,tmax)
I = rep(0, tmax)

Y[1] = 1
Y[2] = 4
C[1] = 1


for (t in 3:tmax) {
  C[t] = b*Y[t-1]
  Iindu[t] = k*(Y[t-1] - Y[t-2])
  Iauto[t] = A0*(1+g)^t
  I[t] = k*(Y[t-1] - Y[t-2]) + A0*(1+g)^t
  Y[t] = C[t] + I[t]
}

t = seq(1, tmax, 1)

series.fradata = data.frame(t, C, Iindu,Iauto, I, Y)

series_tidy <- gather( series.fradata, -t, key = "serie", value = "valor" )
names(series_tidy)
```

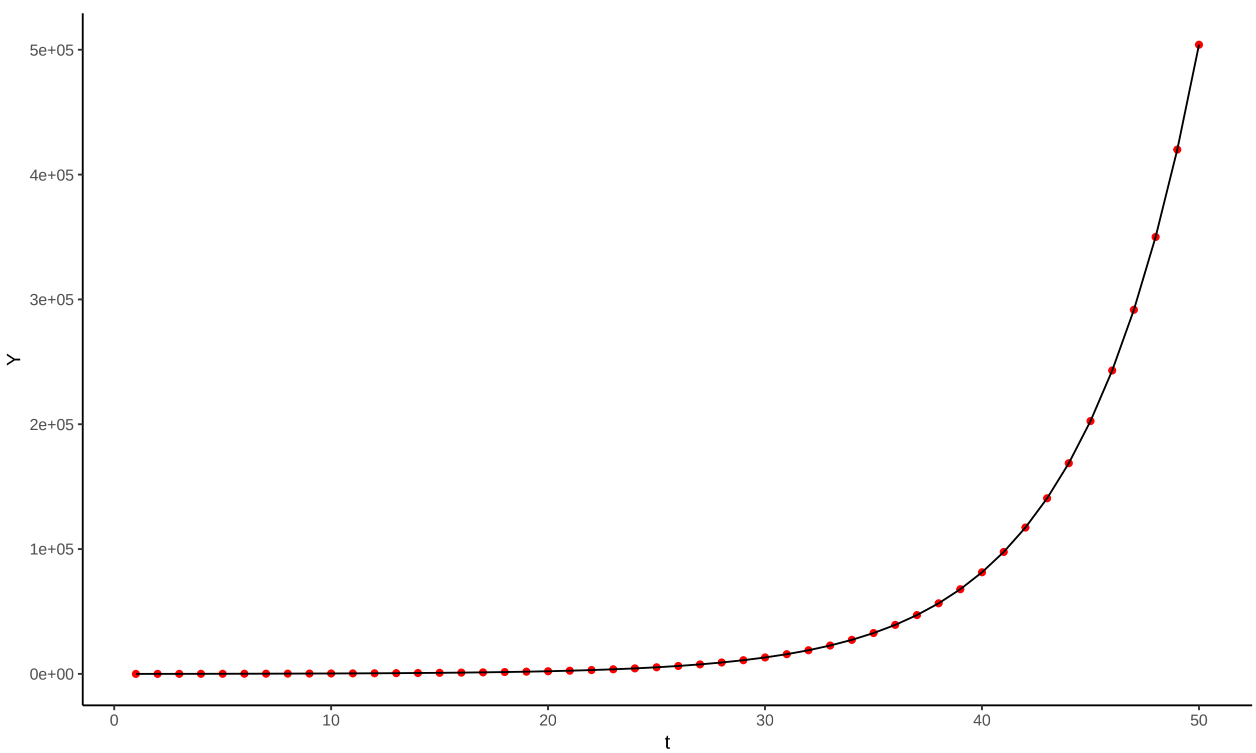
```
## [1] "t"     "serie" "valor"
```

```
ggplot(series_tidy, aes(x = t, y = valor, group = serie, color = serie) ) +
  geom_line(size=1) + theme_light()
```



Analisamos o comportamento da renda nacional :

```
ggplot(series.fradata,aes(x = t, y = Y)) + geom_point(color = "red") +
  geom_line()+ theme_classic()
```



Caso instável :

```r
set.seed(123)
k = 2
b = 0.9
a0 = k
a1 = -b + k
a2 = 1

# Analise das condições
condicao1 = 1 + a1 + a0 > 0
condicao2 = 1 - a1 + a0 > 0
condicao3 = a0 < 1

condicoes = condicao1 & condicao2 & condicao3

if (condicoes){
print("Trajetória estável")
} else {
print("Trajetória instável")
}
```

```
## [1] "Trajetória instável"
```

```r
coeficients = c(a0, a1, a2)

# calculando o discriminante
delta = a1^2 - 4*a2*a0
delta
```

```
## [1] -6.79
```

```r
raizes = polyroot(coeficients)
raizes
```

```
## [1] -0.55+1.302881i -0.55-1.302881i
```

```r
if (delta >=0){
  raizes_reais <- Re( raizes )
  raizes_reais
  cat("Raízes reais: ", raizes_reais)
} else{R <- Mod(raizes[1])
R
cat("Raízes complexas com módulo ", R)
}
```

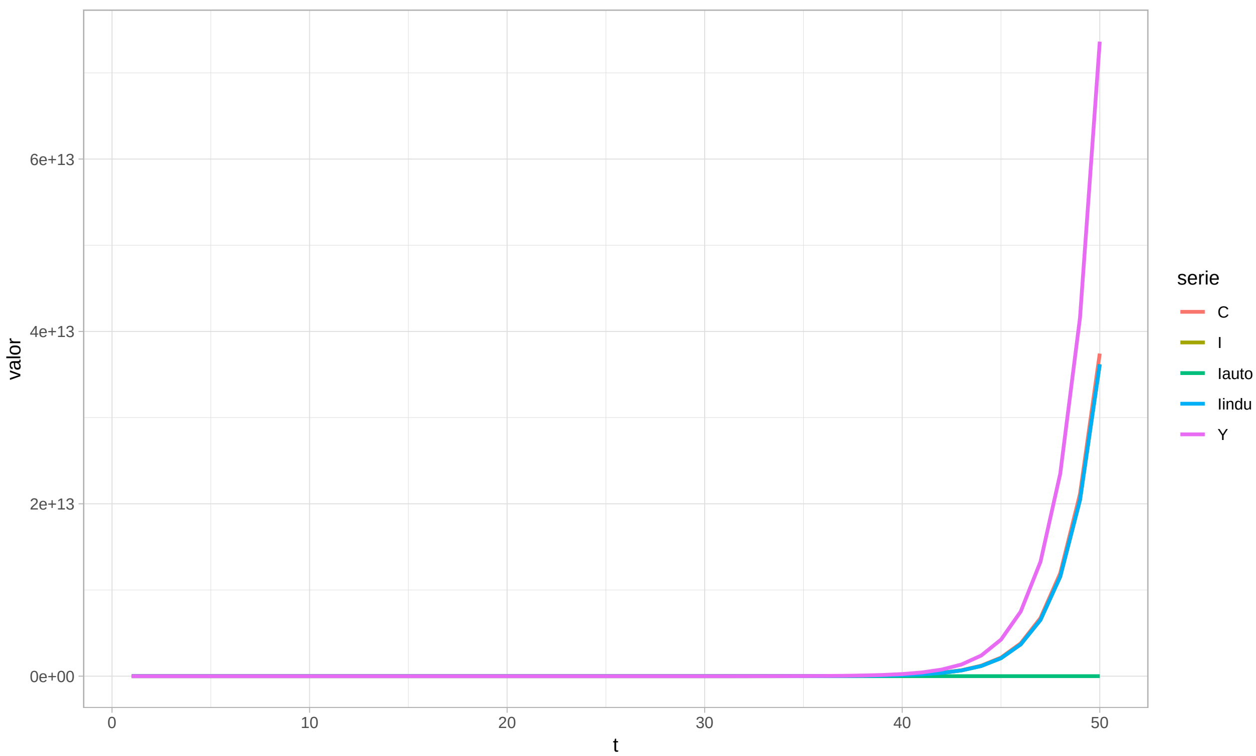
```
## Raízes complexas com módulo  1.414214
```

```r
tmax = 50

Y = rep(0,tmax)
C = rep(0,tmax)
Iindu = rep(0,tmax)
Iauto = rep(0,tmax)
I = rep(0, tmax)

Y[1] = 1
Y[2] = 4
C[1] = 1
```

```r
for (t in 3:tmax) {
  C[t] = b*Y[t-1]
  Iindu[t] = k*(Y[t-1] - Y[t-2])
  Iauto[t] = A0*(1+g)^t
  I[t] = Iindu[t] + Iauto[t]
  Y[t] = C[t] + I[t]
}

t = seq(1, tmax, 1)

series.dfr = data.frame(t, C, Iindu,Iauto, I, Y)

series_tidy = gather( series.dfr, -t, key = "serie", value = "valor" )
names(series_tidy)
```

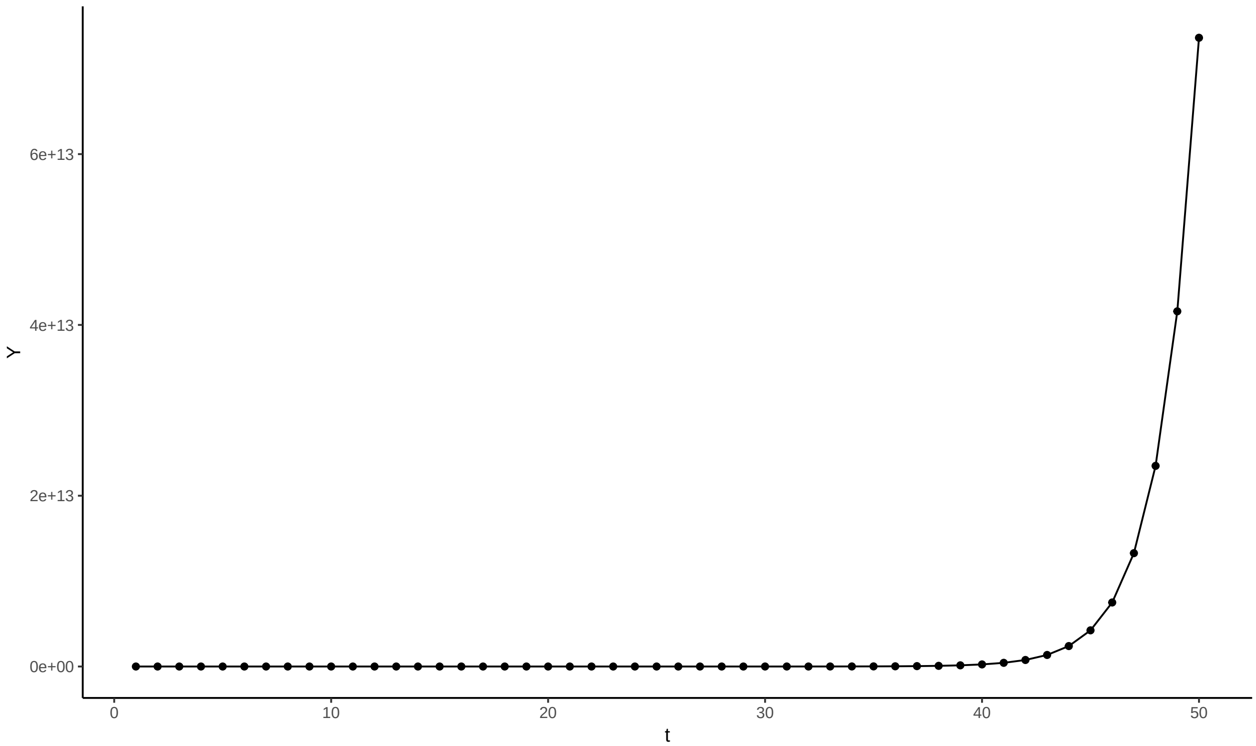
```
## [1] "t"     "serie" "valor"
```

```r
ggplot(series_tidy, aes(x = t, y = valor, group = serie, color = serie) ) +
  geom_line(size = 1) + theme_light()
```



O comportamento da renda nacional :

```r
ggplot(series.dfr, aes(x = t, y = Y)) + geom_point(color = "black") +
  geom_line() + theme_classic()
```



c) Determine a forma explícita da trajetória temporal para Y_t para um conjunto de parâmetros tal que a economia apresente ciclos amortecidos. Utilize o R para realizar os cálculos e apresente a sequência de comandos utilizada;

Resposta :

Para que a economia apresenta ciclos amortecidos é necesário que o determinante seja menor que zero : $\Delta < 0$ et o módulo $R = \sqrt{a_0} < 1$.

A teorema de Moivre é dado por : $\lambda_i = h \pm v.i$, onde

$$h = \frac{b+k}{2}, v = \sqrt{\Delta}$$

com as condições que : $\Delta < 0; v \in real$

```r
set.seed(12345)
k = 0.1
b = 0.1
a0 = k
a1 = -(b + k)
a2 = 1

delta = a1^2 - 4*a2*a0
delta
```

```
## [1] -0.36
```

```r
if (delta >=0){
  raizes_reais <- Re( raizes )
  raizes_reais
```

```
  cat("Raízes reais: ", raizes_reais)
} else{R <- Mod(raizes[1])
R
cat("Raízes complexas com módulo ", R)
}
```

```
## Raízes complexas com módulo  1.414214
```

d) Considere a abertura da economia hipotética do modelo, tal que as importações M_t dependem da renda do período anterior $(M_t = mY_{t-1}; 0 < m < 1)$. As exportações, determinadas pela demanda externa sofrem variações a uma taxa g_x tal que :

$$X_t = X_0(1 + g_x)^t$$

Por simulação, analise a balança de pagamentos (X_t, M_t) no longo prazo. Discuta sobre a condição de estabilidade. Ela foi alterada?;

Resposta :

Vamos reescrever a equação Y_t, ou seja :

$$Y_t - (b + k - m)Y_{t-1} + kY_{t+2} = A_0(1 + g)^t + X_0(1 + g_x)^t$$

```
b = 0.8
k = 0.3
m = 0.2 # propensao a importar
A0 = 0.1
g = 0.02
X0 = 0.7
gx = 0.02
a0 = k
a1 = -(b + k - m)
a2 = 1

delta = a1^2 - 4*a2*a0
delta
```

```
## [1] -0.39
```

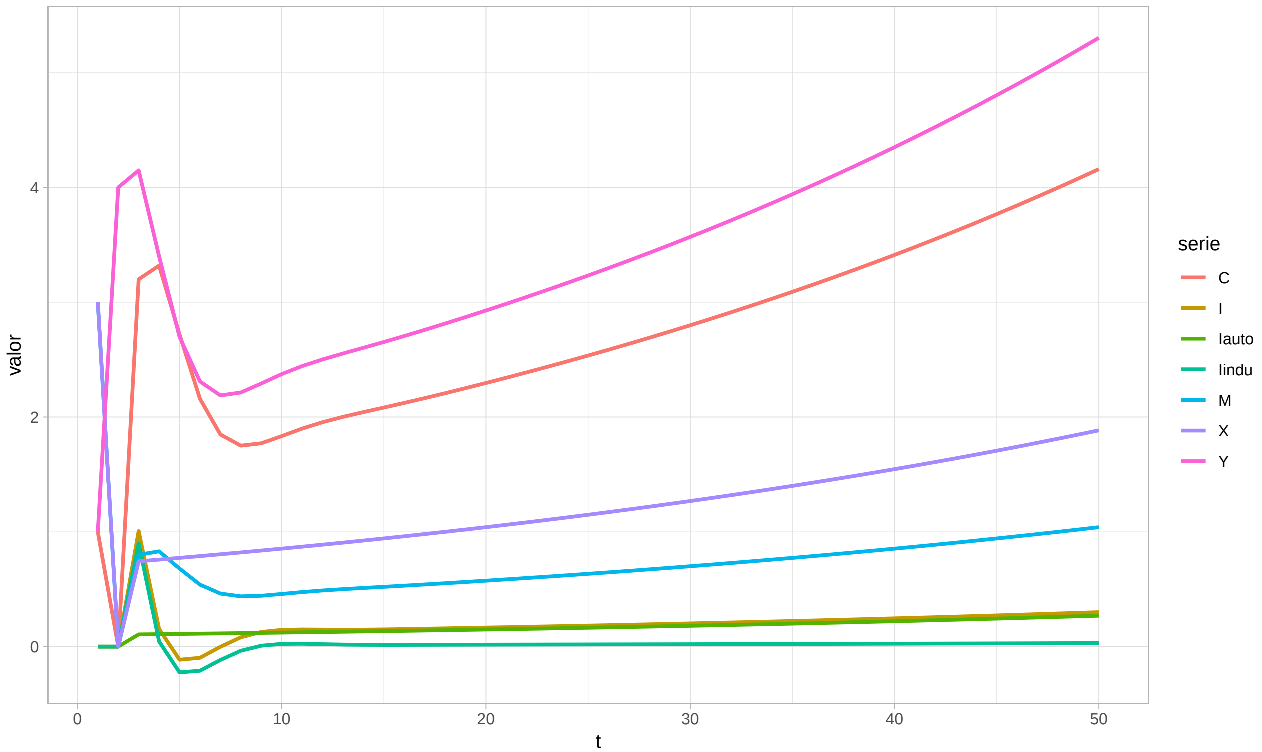
```
if (delta >= 0){
  raizes_reais <- Re( raizes )
  raizes_reais
  cat("Raízes reais: ", raizes_reais)
} else{R <- Mod(raizes[1])
R
cat("Raízes complexas com módulo ", R)
}
```

```
## Raízes complexas com módulo  1.414214
```

A resposta é positiva, a condição de estabilidade foi alterada. O sistema passa nos ciclos amortecidos.

```
tmax = 50

Y = rep(0,tmax)       #produto
C = rep(0,tmax)       #consumo
```

```r
Iindu = rep(0,tmax)   #investimento induzido
Iauto = rep(0,tmax)   #investimento autonomo
I = rep(0, tmax)      #investimento total
X = rep(0,tmax)       #exportação
M = rep(0,tmax)       #importação


Y[1] = 1
Y[2] = 4
C[1] = 1
X[1] = 3
M[1] = 3


for (t in 3:tmax){
  C[t] = b*(Y[t-1])
  Iindu[t] = k*(Y[t-1] - Y[t-2])
  Iauto[t] = A0*(1+g)^t
  I[t] = Iindu[t] + Iauto[t]
  M[t] = m*Y[t-1]
  X[t] = X0*((1+gx)^t)
  Y[t] = C[t] + I[t] + (X[t] - M[t])
}


t = seq(1, tmax, 1)

series.frame <- data.frame(t, C, Iindu,Iauto, I, M, X, Y)
series_tidy <- gather( series.frame, -t, key = "serie", value = "valor" )

ggplot(series_tidy, aes(x = t, y = valor, group = serie, color = serie) ) +
  geom_line(size=1) + theme_light()
```



Análise das condições de estabilidade e de compotamento do balanço de pagamento :

Condicão 1: $1 - b - k + m + k = 1 - b + m > 0$

Condicão 2: $1 + b_k - m + k = 1 + b + 2k - m > 0$

Condicão 3: $k < 1$

```
b = 0.7
k = 0.4
m = 0.2
A0 = 0.1
g = 0.3
X0 = 0.7
gx = 0.02
a0 = k
a1 = (b - k + m)
a2 = 1

condicao1 = 1 + a1 + a0 > 0
condicao2 = 1 - a1 + a0 > 0
condicao3 = a0 < 1

condicoes = condicao1 & condicao2 & condicao3

if (condicoes){
  print("Trajetória estável")
} else {
  print("Trajetória instável")
}
```

```
## [1] "Trajetória estável"
```

```r
delta = a1^2 - 4*a2*a0
delta
```

```
## [1] -1.35
```

```r
coeficients = c(a0, a1, a2)

raizes = polyroot(coeficients)
raizes
```

```
## [1] -0.25+0.5809475i -0.25-0.5809475i
```

```r
if (delta >=0){
  raizes_reais <- Re( raizes )
  raizes_reais
  cat("Raízes reais: ", raizes_reais)
} else{
  R <- Mod(raizes[1])
  R
  cat("Raízes complexas com módulo ", R)
}
```

```
## Raízes complexas com módulo  0.6324555
```

O valor do R em módulo é menor que um, então o sistema tem ciclos amortecidos.

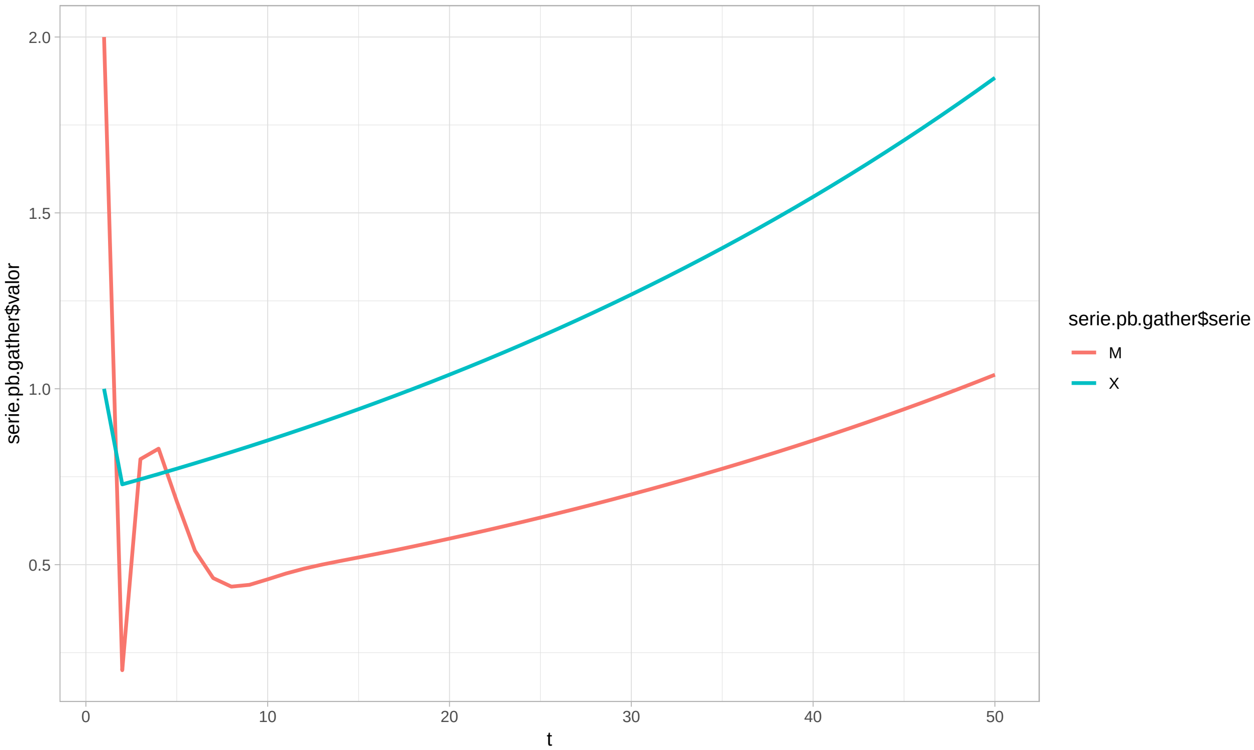
```r
tmax = 50

X = rep(0,tmax)      #exportação
M = rep(0,tmax)      #importação

X[1] = 1
X[2] = 4
M[1] = 2
M[2] = 3


for (t in 2:tmax){
  M[t] = m*Y[t-1]
  X[t] = X0*((1+gx)^t)
}

t = seq(1, tmax, 1)
serie.bp = data.frame(t, M, X)
head(serie.bp)
```

```
##   t         M         X
## 1 1 2.0000000 1.0000000
## 2 2 0.2000000 0.7282800
## 3 3 0.8000000 0.7428456
## 4 4 0.8297933 0.7577025
## 5 5 0.6800031 0.7728566
## 6 6 0.5397177 0.7883137
```

```r
serie.pb.gather = gather( serie.bp, -t, key = "serie", value = "valor" )
names(serie.pb.gather)
```

```
## [1] "t"     "serie" "valor"
```

```
ggplot(serie.pb.gather, aes(x = t, y = serie.pb.gather$valor,
                            group = serie.pb.gather$serie,
                            color = serie.pb.gather$serie) ) +
  geom_line(size = 1) + theme_light()
```



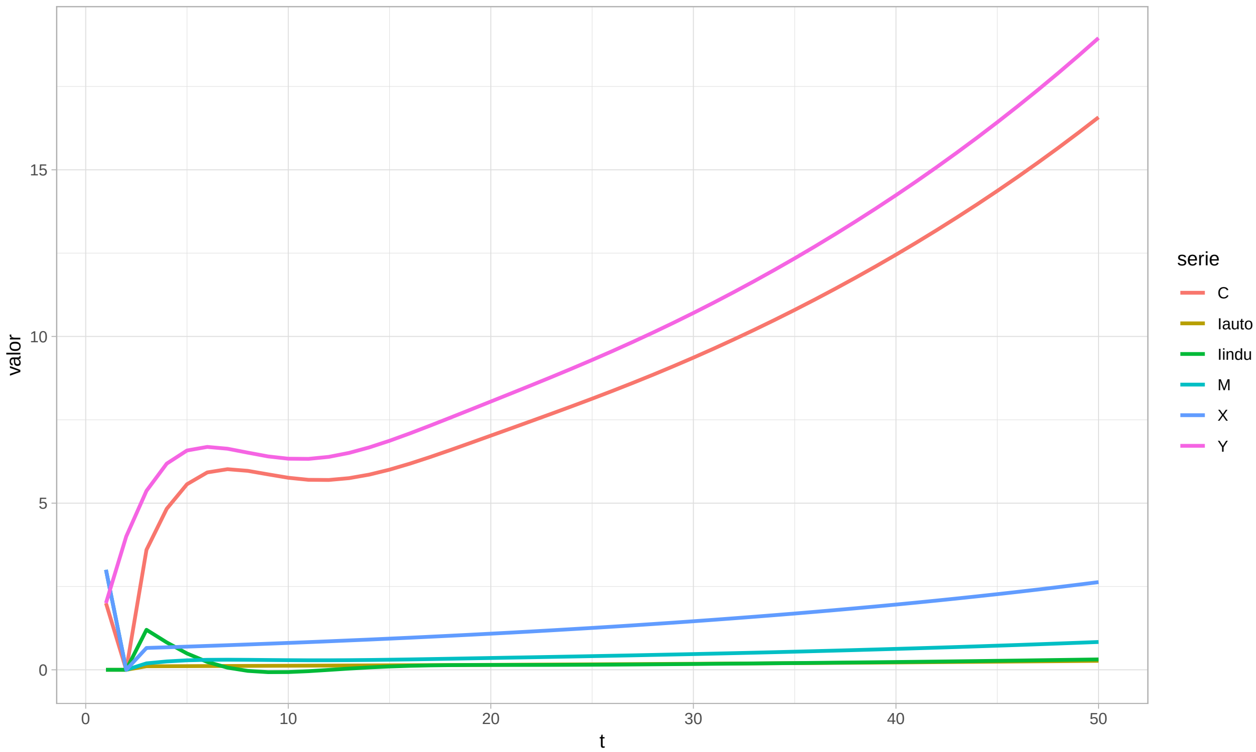
e) Se, considerando o caso anterior alteramos o modelo tal que $M_t = m_1 C_t + m_2 I_t$, $0 < m_1 < 1;\ 0 < m_2 < 1$ e $X_t = X_0(1+g_x)^t$. Analise as condições de estabilidade. Há diferença? Auxilie-se com a simulação do modelo.

```
b = 0.9
k = 0.6
m1 = 0.05
m2 = 0.01
a2 = 1
a1 = -(b + k-(m1*b)-(m2*k))
a0 = (k-(m2*k))
A0 = 0.1
X0 = 0.6
g = 0.02
gx = 0.03


tmax = 50

Y = rep(0,tmax)
C = rep(0,tmax)
Iindu = rep(0,tmax)
Iauto = rep(0,tmax)
```

```r
I = rep(0,tmax)
X = rep(0,tmax)
M = rep(0,tmax)

Y[1] = 2
Y[2] = 4
C[1] = 2
X[1] = 3
M[1] = 3

for (t in 3:tmax) {
  C[t] = b*Y[t-1]
  Iindu[t] = k*(Y[t-1] - Y[t-2])
  Iauto[t] = A0*(1+g)^t
  I[t] = Iindu[t] + Iauto[t]
  X[t] = X0*(1+gx)^t
  M[t] = m1*C[t] + m2*I[t]
  Y[t] = C[t] + I[t] + X[t] - M[t]
}

t = seq(1, tmax, 1)

series.frame1 = data.frame(t, Y, C, Iindu, Iauto, X, M)

series_tidy = gather( series.frame1, -t, key = "serie", value = "valor" )
names(series_tidy)
```

```
## [1] "t"     "serie" "valor"
```

```r
ggplot(series_tidy, aes(x=t, y = valor, group=serie, color = serie) ) +
  geom_line(size = 1) + theme_light()
```

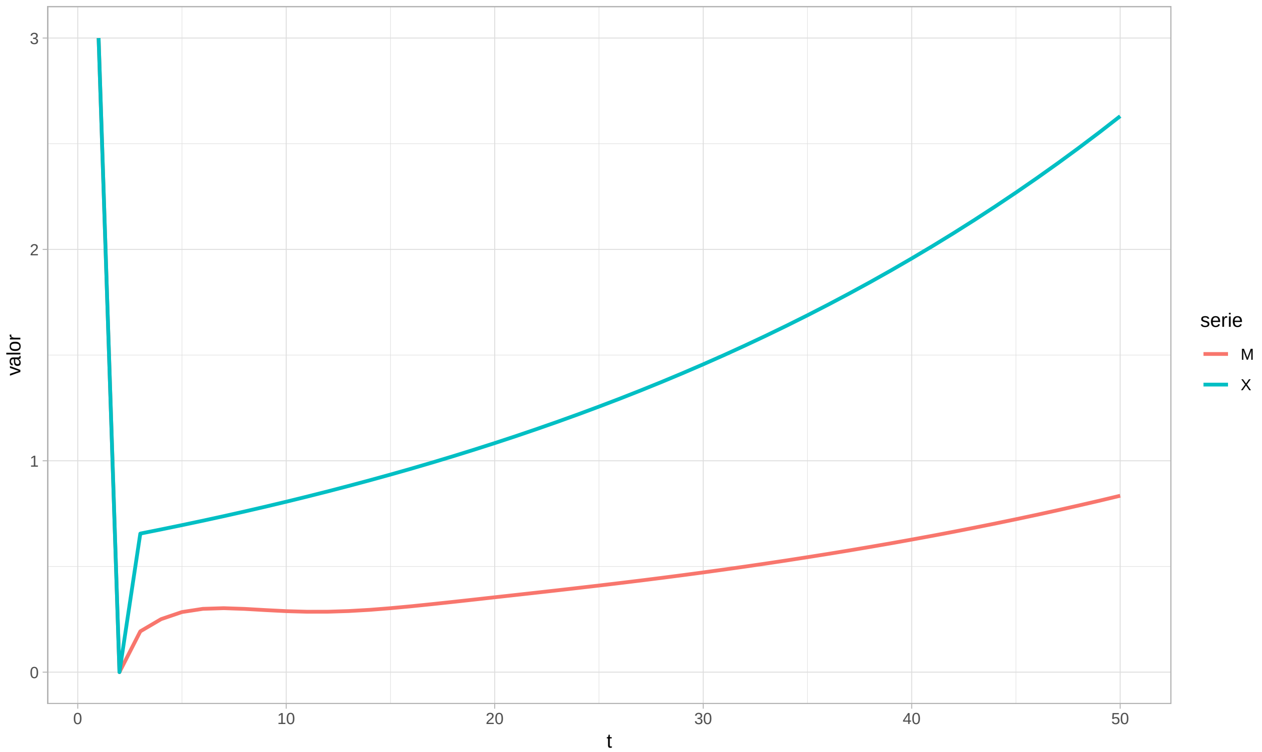


Positiva, as condições de estabilidade foi alteradas. Portanto, o polinômio característico também mudou.

```
serie.frame = data.frame(t,M,X)

pb_painel = gather(serie.frame, -t, key = "serie", value = "valor" )
names(pb_painel)
```

```
## [1] "t"     "serie" "valor"
```

```
ggplot(pb_painel, aes(x=t, y = valor, group=serie, color = serie) ) +
  geom_line(size=1) + theme_light()
```




```r
b = 0.9
k = 0.6
m1 = 0.05
m2 = 0.01
a2 = 1
a1 = -(b + k-(m1*b)-(m2*k))
a0 = (k-(m2*k))

condicao1 = 1 + a1 + a0 > 0
condicao2 = 1 - a1 + a0 > 0
condicao3 = a0 < 1

condicoes = condicao1 & condicao2 & condicao3

if (condicoes){
  print("Trajetória estável")
} else {
  print("Trajetória instável")
}
```

```
## [1] "Trajetória estável"
```

```r
delta = a1^2 - 4*a2*a0
delta
```

```
## [1] -0.276399
```

```r
coeficients = c(a0, a1, a2)

raizes = polyroot(coeficients)
raizes
```

```
## [1] 0.7245+0.2628683i 0.7245-0.2628683i
```

```r
if (delta >=0){
  raizes_reais <- Re( raizes )
  raizes_reais
  cat("Raízes reais: ", raizes_reais)
} else{
  R <- Mod(raizes[1])
  R
  cat("Raízes complexas com módulo ", R)
}
```

```
## Raízes complexas com módulo  0.770714
```

Questão 2: O modelo de ciclo econômico de Kalecki

Simule o modelo de ciclo econômico de Kalecki, considerando um modelo linear de coeficientes constantes de ordem 2. Analise as condições de estabilidade. Para se auxiliar, veja o texto de Possas e Baltar (1983) disponível em http://bibliotecadigital.fgv.br/ojs/index.php/bre/article/view/3154/2050. que resume bem aquilo que é necessário para realizar a simulação. A versão mais simples é suficiente (seção 2.1 desse artigo. A interpretação está na seção 2.2).

a) Elabore a descrição do modelo e a representação formal do mesmo (as equações);

Resposta :

O modelo do Kalecki explica basicamente o mecanismo das flutuações endógenas das economias capitalistas. O modelo considera a influência do nível da renda e da taxa de crescimento do produto sobre as flutuações na atividade econômica. A equação de lucros é dado por :

$$P_t = C_t + A_t,$$

onde A é a produção e entrega de bens de investimento, sendo $A_t = I_{t-\theta}$, em que θ é o período médio de construção e instalação dos equipamentos e t é um período de tempo discreto ($t = 1, 2, ..., n$); C é o consumo dos capitalistas, dado por :

$$C_t = B + \lambda P_t,$$

onde :

B é a parte constante do consumo dos capitalistas e λ é constante no curto prazo. I é o investimento bruto (encomendas).

As decisões de investir são dadas pela função:

$$\frac{I_t}{K_t} = f(\frac{P_t}{K_t}),$$

onde:

K = capital fixo (no início do período), $\frac{p}{k}$ é a rentabilidade real do capital existente (é tomada como estimativa da rentabilidade esperada do novo capital), . Essa função pode ser reescrita como :

$$\frac{I_t}{K_t} = \phi(\frac{B + A_t}{K_t})$$

Na forma linear, a função acima pode ser escrita :

$$I_t = m(B + A_t) - nK_t$$

com as condiçoes tais que $m > O$, sendo ϕ uma função crescente, e $n > O$ para que o modelo comporte a ocorrência de ciclos econômicos.

Em cada período do tempo t, tem se :

$$\Delta K_t = K_{t+1} - K_t = A_t - U$$

A equação do estoque de capital é determinado por :

$$K_{t+2} - (m+1)K_{t+1} + (m+n)K_t = mB + (m-1)U,$$

Seja uma equação em diferença de ordem dois.

b) Determine as condições de estabilidade do modelo em função dos parâmetros;

Resposta :

A equação em diferença pode ser escrita como :

$$Y_{t+2} - (m+1)Y_{t+1} + (m+n)Y_t = C,$$

onde $a_1 = -(m+1)$ e $a_0 = m+n$, são coeficientes. O polinômio característico é :

$$\lambda^2 - (m+1)\lambda + (m+n) = 0,$$

condição 1 : $1 + (m+n) - (m+1) > 0$

condição 2 : $1 - (m+1) + (m+n) > 0$

condição 3 : $(m+n) < 1$

Para que o sistema seja estável é necessário que $\lambda_{1,2} < 0$, para que occore ciclos: $R = \sqrt{(m+n)} < 0$

Analizando no R :

Caso estável

```
B = 20
m = 0.5
U = 5
n = 0.4
L = 0.7
a2 = 1
a1 = -(m + 1)
a0 = (m + n)

condicao1 = 1 + a1 + a0 > 0
condicao2 = 1 - a1 + a0 > 0
condicao3 = a0 < 1

condicoes = condicao1 & condicao2 & condicao3

if (condicoes){
  print("Trajetória estável")
} else {
  print("Trajetória instável")
}
```

```
## [1] "Trajetória estável"
```

```
delta = a1^2 - 4*a2*a0
delta
```

```
## [1] -1.35
```

```
coeficients = c(a0, a1, a2)

raizes = polyroot(coeficients)
raizes
```

```
## [1] 0.75+0.5809475i 0.75-0.5809475i
```

```
if (delta >=0){
  raizes_reais <- Re( raizes )
  raizes_reais
  cat("Raízes reais: ", raizes_reais)
} else{
  R <- Mod(raizes[1])
  R
  cat("Raízes complexas com módulo ", R)
}
```

```
## Raízes complexas com módulo  0.9486833
```

c) Simule um caso estável e um caso instável.

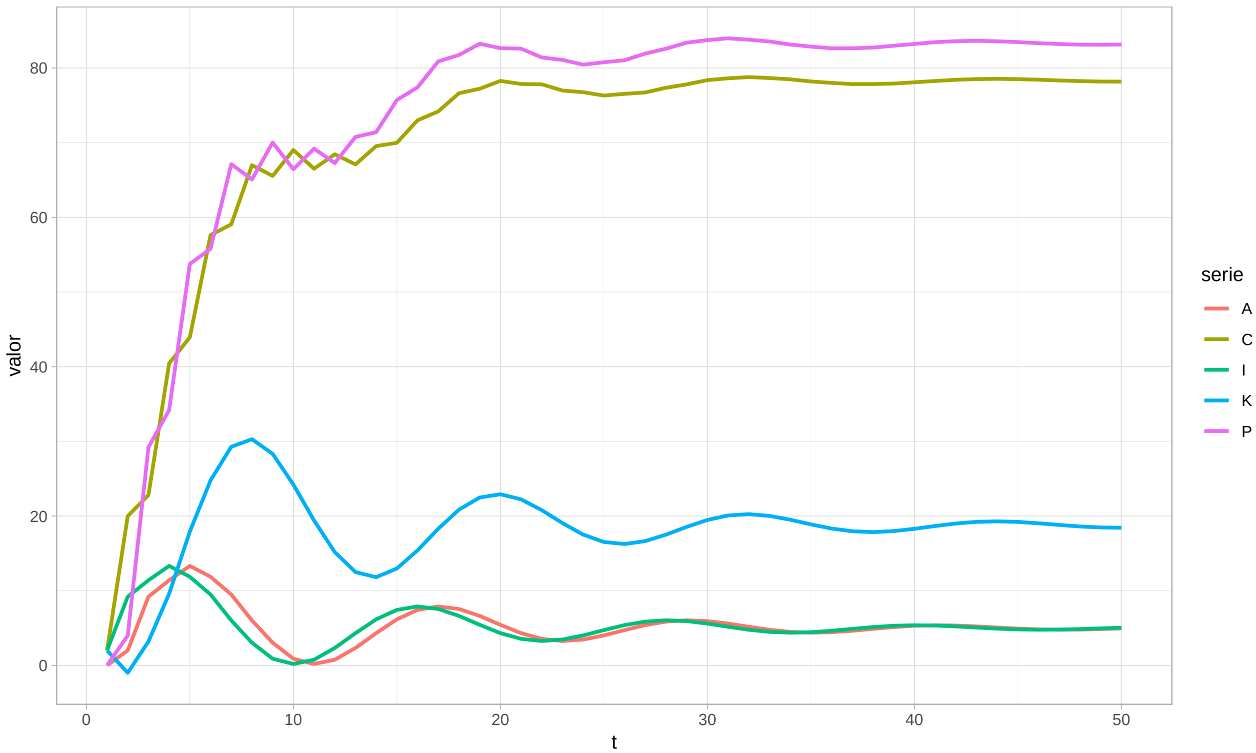
Resposta :

Caso estável :

```
tmax = 50

P = rep(0, tmax)
C = rep(0, tmax)
A = rep(0, tmax)
K = rep(0, tmax)
I = rep(0, tmax)
Y = rep(0, tmax)

K[1] = 2
I[1] = 2
C[1] = 2

for (t in 2:tmax){
I[t] = m*(A[t-1]+ B) - n*(K[t-1])
A[t] = I[t-1]
C[t] = (L*P[t-1]) + B
P[t] = A[t]+C[t-1]
K[t] = A[t]- U +K[t-1]
}

t = seq(1, tmax, 1)

seriees = data.frame(t, I, A, C, P, K)

series_tidy = gather( seriees, -t, key = "serie", value = "valor" )
names(series_tidy)
```

```
## [1] "t"     "serie" "valor"
```

```r
ggplot(series_tidy, aes(x=t, y = valor, group=serie, color = serie) ) +
  geom_line(size=1) + theme_light()
```



Caso instável :

Condições de instabilidade :

```r
B = 20
m = 1.5
U = 5
n = 1.4
L = 0.7
a2 = 1
a1 = -(m + 1)
a0 = (m + n)

condicao1 = 1 + a1 + a0 > 0
condicao2 = 1 - a1 + a0 > 0
condicao3 = a0 < 1

condicoes = condicao1 & condicao2 & condicao3

if (condicoes){
  print("Trajetória estável")
} else {
  print("Trajetória instável")
}
```

```
## [1] "Trajetória instável"
```

```r
delta = a1^2 - 4*a2*a0
delta
```

```
## [1] -5.35
```

```r
coeficients = c(a0, a1, a2)

raizes = polyroot(coeficients)
raizes
```

```
## [1] 1.25+1.156503i 1.25-1.156503i
```

```r
if (delta >= 0){
  raizes_reais <- Re( raizes )
  raizes_reais
  cat("Raízes reais: ", raizes_reais)
} else{
  R = Mod(raizes[1])
  R
  cat("Raízes complexas com módulo ", R)
}
```

```
## Raízes complexas com módulo  1.702939
```

Análise gráfica :

```r
tmax = 50

P = rep(0, tmax)
C = rep(0, tmax)
A = rep(0, tmax)
K = rep(0, tmax)
I = rep(0, tmax)
Y = rep(0, tmax)

K[1] = 2
I[1] = 2
C[1] = 2

for (t in 2:tmax){ #t começa em 3
I[t] = m*(A[t-1]+ B) - n*(K[t-1])
A[t] = I[t-1]
C[t] = (L*P[t-1]) + B
P[t] = A[t]+C[t-1]
K[t] = A[t]- U +K[t-1]
}

t = seq(1, tmax, 1)

seriees = data.frame(t, I, A, C, P, K)

series_tidy = gather( seriees, -t, key = "serie", value = "valor" )
names(series_tidy)
```

```
## [1] "t"     "serie" "valor"
```

```r
ggplot(series_tidy, aes(x=t, y = valor, group=serie, color = serie) ) +
  geom_line(size=1) + theme_light()
```