Equações em diferenças no R

Henri Makika

May 14, 2019

Comandos principais para este análise

```
suppressMessages(library(ggplot2))
suppressMessages(library(tidyr))
```

Equação em diferença de ordem 2 - o Modelo de Hansen-Samuelson

Em função das hipóteses colocadas, o modelo econômico é dado pelas equações:

$$c_t = bY_{t-1}$$
$$I_t = k(C_t - C_{t-1})$$
$$G_t = G > 0$$
$$Y_t = C_t + T_t - G_t$$

Onde :

$b\epsilon(0, 1)$: propensão marginal a consumir; k : coeficiente de aceleração;

Substituindo as três primeiras equações na última, obtemos uma equação em diferença de ordem 2.

$$Y_t - b(k+1)Y_{t-1} + bkY_{t-2} = G$$

Podendo assim, analisar o comportamento da renda nacional e por substituição, C_t et I_t

```
b = 0.9 # propensao marginal a consumir
k = 0.5 # acelerador do investimento
G = 10 # gastos publicos (consumo autonomo)
tmax = 100

Y <- rep(0, tmax)
C <- rep(0, tmax)
Iind <- rep(0, tmax)
I <- rep(0, tmax)

Y[1] = 1 #rendanacional
```

Simulando as quatro equacoes do model

```
for (t in 2:tmax){
  C[t] = b*Y[t-1]
  Iind[t] = k*(C[t] - C[t-1])
  I[t] = Iind[t] + G
  Y[t] = C[t] + I[t]
```

```
}

t = seq(1, tmax, 1)
```

Para analisar as séries geradas, fazemos uso de data frames e dos pacotes ggplot2 e tidyr.

```
series <- data.frame(t, C, Iind, I, Y)
series
```

```
##       t        C         Iind        I         Y
## 1     1  0.00000 0.000000e+00  0.00000   1.00000
## 2     2  0.90000 4.500000e-01 10.45000  11.35000
## 3     3 10.21500 4.657500e+00 14.65750  24.87250
## 4     4 22.38525 6.085125e+00 16.08512  38.47037
## 5     5 34.62334 6.119044e+00 16.11904  50.74238
## 6     6 45.66814 5.522403e+00 15.52240  61.19055
## 7     7 55.07149 4.701674e+00 14.70167  69.77317
## 8     8 62.79585 3.862179e+00 13.86218  76.65803
## 9     9 68.99222 3.098188e+00 13.09819  82.09041
## 10   10 73.88137 2.444573e+00 12.44457  86.32594
## 11   11 77.69335 1.905989e+00 11.90599  89.59934
## 12   12 80.63941 1.473028e+00 11.47303  92.11243
## 13   13 82.90119 1.130892e+00 11.13089  94.03208
## 14   14 84.62887 8.638420e-01 10.86384  95.49272
## 15   15 85.94344 6.572852e-01 10.65729  96.60073
## 16   16 86.94066 4.986061e-01 10.49861  97.43926
## 17   17 87.69534 3.773399e-01 10.37734  98.07268
## 18   18 88.26541 2.850361e-01 10.28504  98.55044
## 19   19 88.69540 2.149958e-01 10.21500  98.91040
## 20   20 89.01936 1.619781e-01 10.16198  99.18133
## 21   21 89.26320 1.219223e-01 10.12192  99.38512
## 22   22 89.44661 9.170498e-02 10.09170  99.53832
## 23   23 89.58448 6.893668e-02 10.06894  99.65342
## 24   24 89.68808 5.179728e-02 10.05180  99.73988
## 25   25 89.76589 3.890482e-02 10.03890  99.80479
## 26   26 89.82431 2.921273e-02 10.02921  99.85353
## 27   27 89.86817 2.193002e-02 10.02193  99.89010
## 28   28 89.90109 1.645979e-02 10.01646  99.91755
## 29   29 89.92580 1.235222e-02 10.01235  99.93815
## 30   30 89.94434 9.268583e-03 10.00927  99.95360
## 31   31 89.95824 6.954090e-03 10.00695  99.96520
## 32   32 89.96868 5.217159e-03 10.00522  99.97390
## 33   33 89.97651 3.913824e-03 10.00391  99.98042
## 34   34 89.98238 2.935941e-03 10.00294  99.98531
## 35   35 89.98678 2.202300e-03 10.00220  99.98898
## 36   36 89.99009 1.651931e-03 10.00165  99.99174
## 37   37 89.99256 1.239072e-03 10.00124  99.99380
## 38   38 89.99442 9.293784e-04 10.00093  99.99535
## 39   39 89.99582 6.970783e-04 10.00070  99.99651
## 40   40 89.99686 5.228355e-04 10.00052  99.99739
## 41   41 89.99765 3.921427e-04 10.00039  99.99804
## 42   42 89.99824 2.941166e-04 10.00029  99.99853
## 43   43 89.99868 2.205932e-04 10.00022  99.99890
## 44   44 89.99901 1.654484e-04 10.00017  99.99917
## 45   45 89.99926 1.240884e-04 10.00012  99.99938
```

```
## 46   46 89.99944 9.306753e-05 10.00009  99.99953
## 47   47 89.99958 6.980139e-05 10.00007  99.99965
## 48   48 89.99969 5.235149e-05 10.00005  99.99974
## 49   49 89.99976 3.926389e-05 10.00004  99.99980
## 50   50 89.99982 2.944808e-05 10.00003  99.99985
## 51   51 89.99987 2.208616e-05 10.00002  99.99989
## 52   52 89.99990 1.656468e-05 10.00002  99.99992
## 53   53 89.99993 1.242354e-05 10.00001  99.99994
## 54   54 89.99994 9.317677e-06 10.00001  99.99995
## 55   55 89.99996 6.988270e-06 10.00001  99.99997
## 56   56 89.99997 5.241210e-06 10.00001  99.99997
## 57   57 89.99998 3.930912e-06 10.00000  99.99998
## 58   58 89.99998 2.948187e-06 10.00000  99.99999
## 59   59 89.99999 2.211142e-06 10.00000  99.99999
## 60   60 89.99999 1.658357e-06 10.00000  99.99999
## 61   61 89.99999 1.243769e-06 10.00000  99.99999
## 62   62 89.99999 9.328268e-07 10.00000 100.00000
## 63   63 90.00000 6.996203e-07 10.00000 100.00000
## 64   64 90.00000 5.247154e-07 10.00000 100.00000
## 65   65 90.00000 3.935366e-07 10.00000 100.00000
## 66   66 90.00000 2.951525e-07 10.00000 100.00000
## 67   67 90.00000 2.213644e-07 10.00000 100.00000
## 68   68 90.00000 1.660233e-07 10.00000 100.00000
## 69   69 90.00000 1.245175e-07 10.00000 100.00000
## 70   70 90.00000 9.338812e-08 10.00000 100.00000
## 71   71 90.00000 7.004110e-08 10.00000 100.00000
## 72   72 90.00000 5.253082e-08 10.00000 100.00000
## 73   73 90.00000 3.939812e-08 10.00000 100.00000
## 74   74 90.00000 2.954859e-08 10.00000 100.00000
## 75   75 90.00000 2.216144e-08 10.00000 100.00000
## 76   76 90.00000 1.662109e-08 10.00000 100.00000
## 77   77 90.00000 1.246582e-08 10.00000 100.00000
## 78   78 90.00000 9.349364e-09 10.00000 100.00000
## 79   79 90.00000 7.012019e-09 10.00000 100.00000
## 80   80 90.00000 5.259018e-09 10.00000 100.00000
## 81   81 90.00000 3.944258e-09 10.00000 100.00000
## 82   82 90.00000 2.958195e-09 10.00000 100.00000
## 83   83 90.00000 2.218641e-09 10.00000 100.00000
## 84   84 90.00000 1.663985e-09 10.00000 100.00000
## 85   85 90.00000 1.247990e-09 10.00000 100.00000
## 86   86 90.00000 9.359979e-10 10.00000 100.00000
## 87   87 90.00000 7.019949e-10 10.00000 100.00000
## 88   88 90.00000 5.264980e-10 10.00000 100.00000
## 89   89 90.00000 3.948699e-10 10.00000 100.00000
## 90   90 90.00000 2.961471e-10 10.00000 100.00000
## 91   91 90.00000 2.221086e-10 10.00000 100.00000
## 92   92 90.00000 1.665867e-10 10.00000 100.00000
## 93   93 90.00000 1.249418e-10 10.00000 100.00000
## 94   94 90.00000 9.370638e-11 10.00000 100.00000
## 95   95 90.00000 7.027978e-11 10.00000 100.00000
## 96   96 90.00000 5.271517e-11 10.00000 100.00000
## 97   97 90.00000 3.953460e-11 10.00000 100.00000
## 98   98 90.00000 2.965095e-11 10.00000 100.00000
## 99   99 90.00000 2.223288e-11 10.00000 100.00000
```

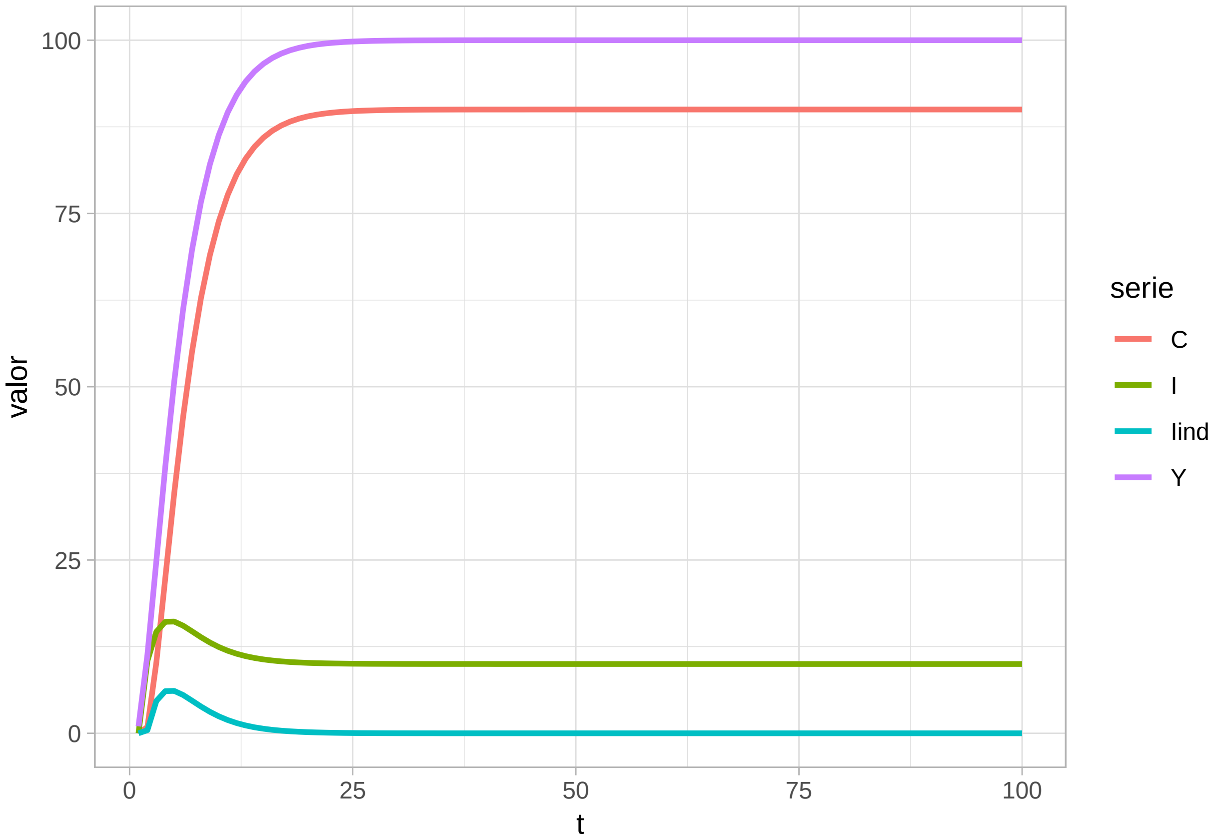
```
## 100 100 90.00000 1.667644e-11 10.00000 100.00000
```

```
series_tidy <- gather( series, -t, key = "serie", value = "valor")
names(series_tidy)
```

```
## [1] "t"     "serie" "valor"
```

Gráfico no ggplot :

```
ggplot(series_tidy, aes(x = t, y = valor, group = serie, color = serie) ) +
  geom_line(size = 1) +
  theme_light()
```



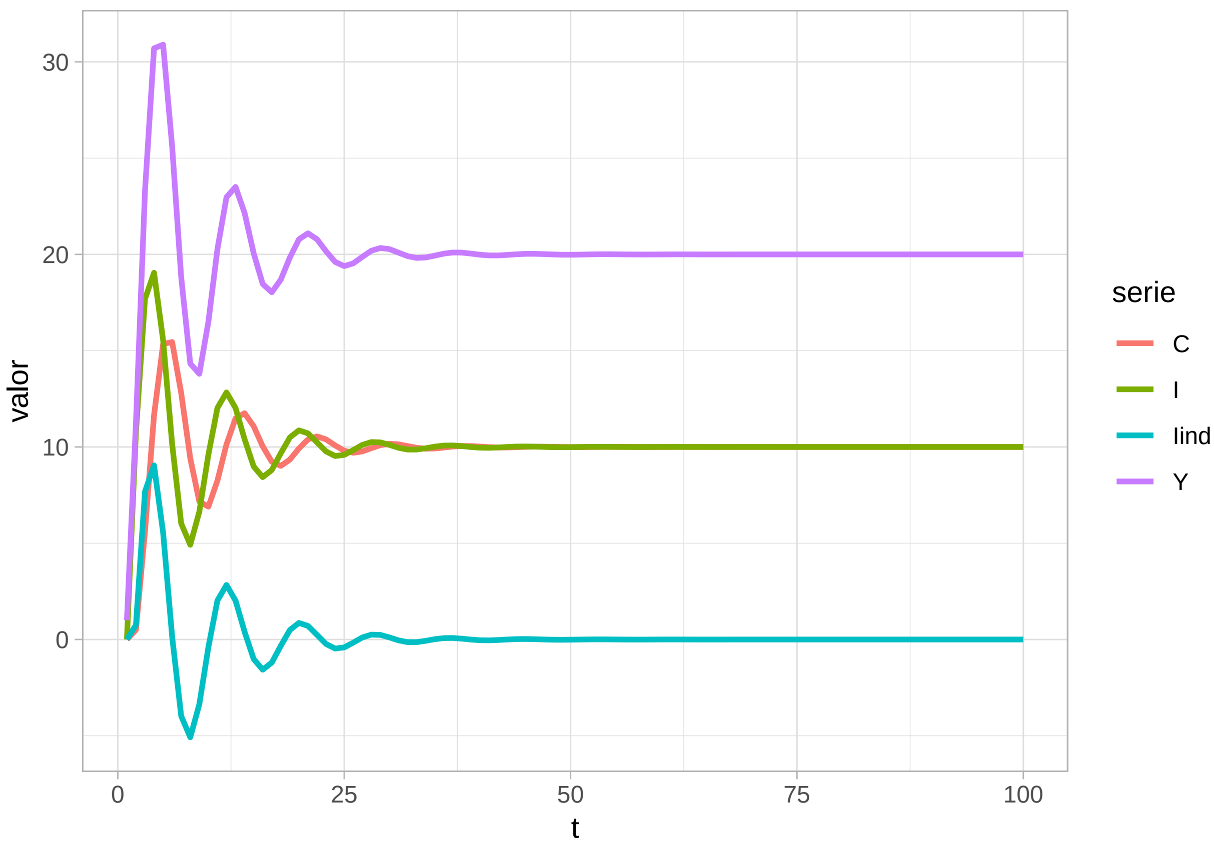
Vamos fazer agora os cenários. Supondo que $b = 0,5$ et $k = 1.5$ vamos ver essa mudança graficamente.

```
b = 0.5 # propensao marginal a consumir
k = 1.5 # acelerador do investimento
G = 10 # gastos publicos (consumo autonomo)
tmax = 100

Y <- rep(0, tmax)
C <- rep(0, tmax)
Iind <- rep(0, tmax)
I <- rep(0, tmax)

Y[1] = 1 #rendanacional

for (t in 2:tmax){
  C[t] = b*Y[t-1]
  Iind[t] = k*(C[t] - C[t-1])
```

```r
  I[t] = Iind[t] + G
  Y[t] = C[t] + I[t]
}

t = seq(1, tmax, 1)

series <- data.frame(t, C, Iind, I, Y)
series_tidy <- gather( series, -t, key = "serie", value = "valor")
names(series_tidy)
```

```
## [1] "t"     "serie" "valor"
```

```r
ggplot(series_tidy, aes(x = t, y = valor, group = serie, color = serie) ) +
  geom_line(size = 1) +
  theme_light()
```



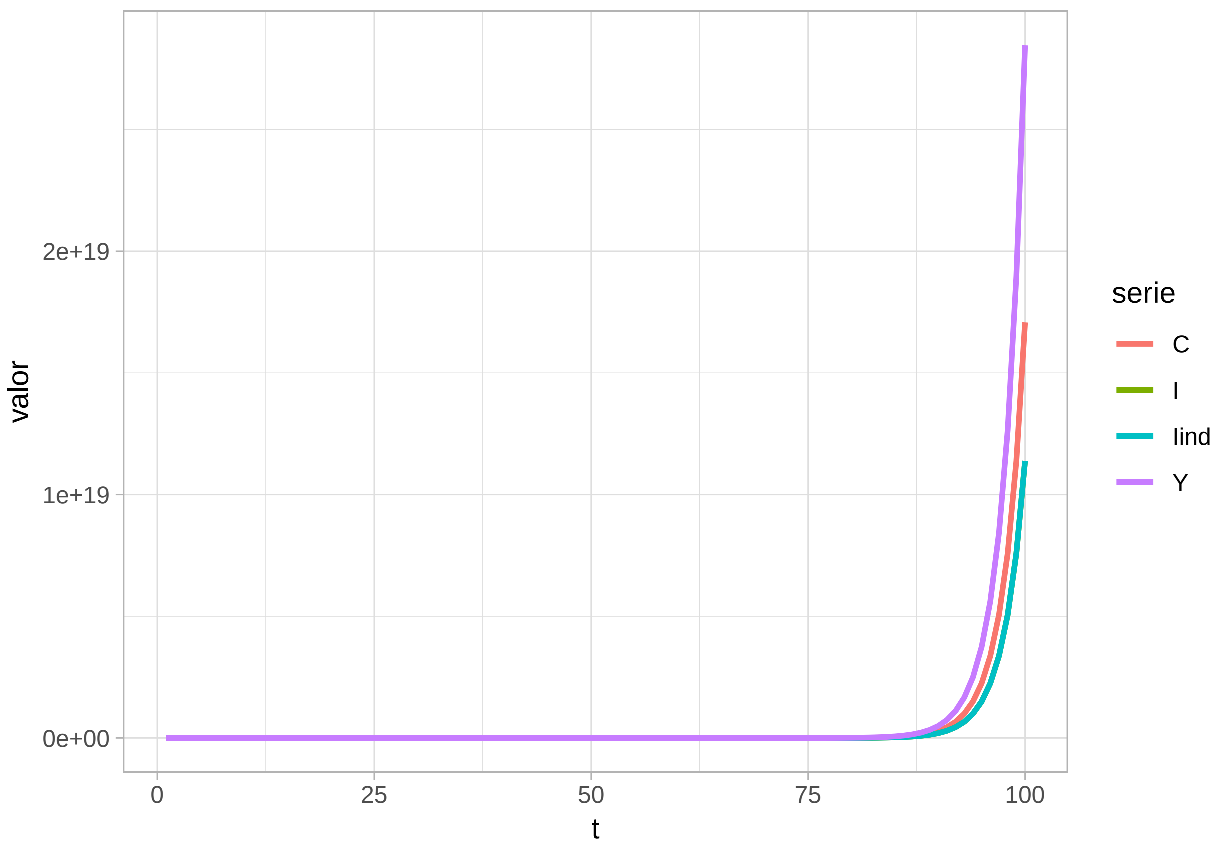
Supondo ainda que $b = 0.9$ et $k = 2$:

```r
b = 0.9 # propensao marginal a consumir
k = 2 # acelerador do investimento
G = 10 # gastos publicos (consumo autonomo)
tmax = 100

Y <- rep(0, tmax)
C <- rep(0, tmax)
Iind <- rep(0, tmax)
I <- rep(0, tmax)
```

```r
Y[1] = 1 #rendanacional

for (t in 2:tmax){
  C[t] = b*Y[t-1]
  Iind[t] = k*(C[t] - C[t-1])
  I[t] = Iind[t] + G
  Y[t] = C[t] + I[t]
}

t = seq(1, tmax, 1)

series <- data.frame(t, C, Iind, I, Y)
series_tidy <- gather( series, -t, key = "serie", value = "valor")
names(series_tidy)
```

```
## [1] "t"     "serie" "valor"
```

```r
ggplot(series_tidy, aes(x = t, y = valor, group = serie, color = serie) ) +
  geom_line(size = 1) +
  theme_light()
```



Análise dinâmica

Para realizar a análise dinâmica, precisamos avaliar as raízes do polinômio característico:

$$p(\lambda) = \lambda^2 + a_1\lambda + a_0 = 0$$

Onde :

$$a_2 = 1$$

$$a_1 = -b(k+1)$$

$$a_0 = bk$$

Lembrando que as condições para uma análise qualitativa são:

$$1 + a_1 + a_0 > 0$$

$$1 - a_1 + a_0 > 0$$

$$a_0 < 1$$

```
a2 = 1
a1 = -b*(k+1)
a0 = b*k

# analisando as condicoes

cond1 = 1 + a1+a0 >0
cond2 = 1-a1+a0 >0
cond3 = a0<1
conds = cond1 & cond2 & cond3

if (conds){
  print("Trajetória estável")
} else {
  print("Trajetória instável")
}
```

```
## [1] "Trajetória instável"
```

Calcula de discriminante

```
coefs = c(a0, a1, a2)

# calculando o discriminante

delta = a1^2 -4*a2*a0
delta
```

```
## [1] 0.09
```

```
raizes = polyroot(coefs)
raizes
```

```
## [1] 1.2+0i 1.5-0i
```

```
if (delta >=0){
  raizes_reais <- Re( raizes )
  raizes_reais
  cat("Raízes reais: ", raizes_reais)
} else{
  R <- Mod(raizes[1])
```

```
  R
  cat("Raízes complexas com módulo ", R)
}
```

```
## Raízes reais:  1.2 1.5
```

Equações em diferença de ordem superior

Nestes casos a solução é dada pela combinação das soluções de acordo com a natureza de cada raíz.

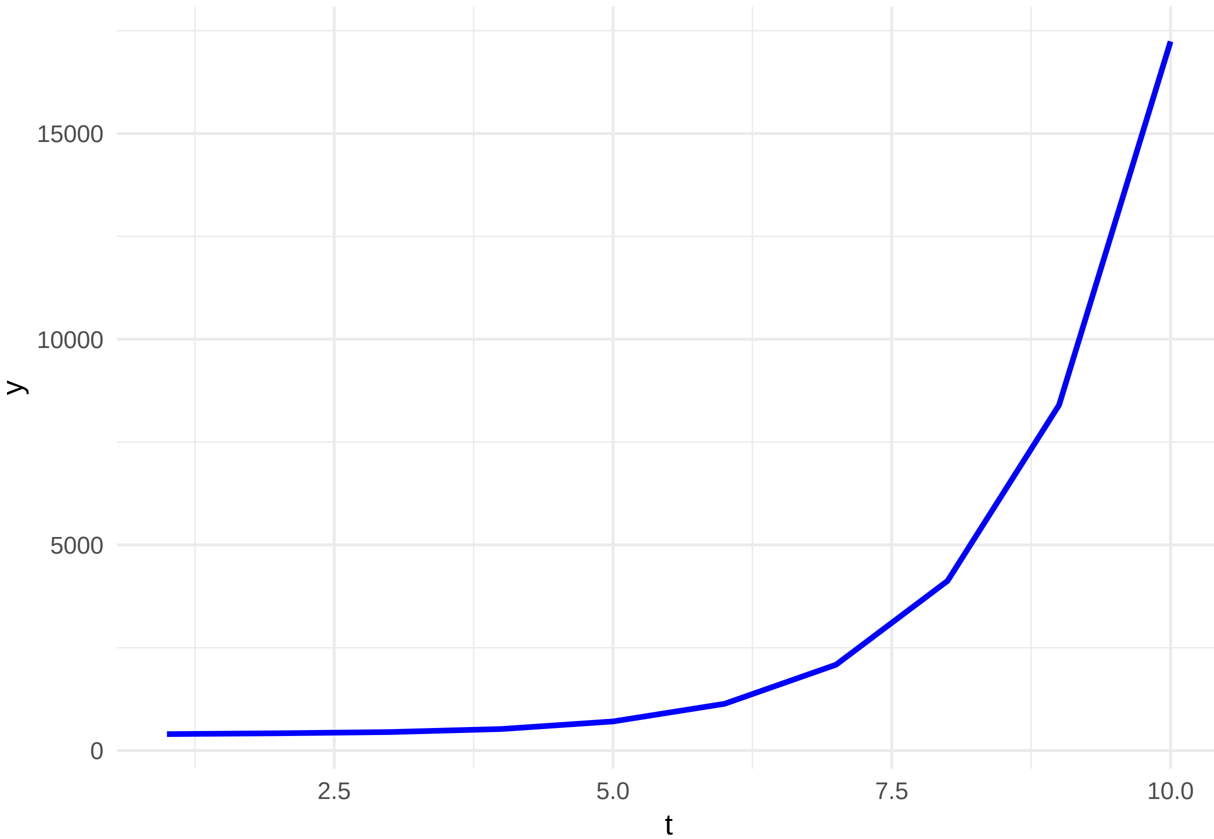
Exercício 1

Por exemplo, a equação em diferenças :

$$y_{t+3} - 4y_{t+2} + 4.8y_{t+1} - 1.6y_t = 100$$

possuirá três raízes características. Simulando, notamos que a série y t apresenta uma trajetória explosiva não oscilatória e sem ciclos. Logo, as raízes serão reais e positivas e haverá ao menos uma raíz com módulo maior que a unidade.

```
a3 = 1
a2 = -4
a1 = 4.8
a0 = -1.6
g = 100
tmax = 10

y = rep(0, tmax)
y[1] = 400 # y0
y[2] = 420 # y1
y[3] = 450 # y2

for (t in 4:tmax){
  y[t] = -a2*y[t-1] - a1*y[t-2] - a0*y[t-3] + g
}

t = seq(1, tmax, 1)

series = data.frame(t, y)

ggplot(series, aes(x = t, y = y)) + geom_line(size = 1, colour = "blue") +
  theme_minimal()
```



Analisando as raises

```
# analisando as raizes do polnomio caracteristico

coefs<- c(a0, a1, a2, a3)
raizes <- polyroot( coefs )
Re(raizes)
```

```
## [1] 0.5527864 1.4472136 2.0000000
```

```
if ( any(abs(raizes)>1) ){
  print("Serie instável")
} else {
  print("Serie estável")
}
```

```
## [1] "Serie instável"
```

```
# o steady state

yp = g/(a0 + a1 + a2 + a3)
yp
```

```
## [1] 500
```

Notamos que há duas raízes unitárias, o que torna a série uma série explosiva. Logo, o ponto fixo é um repulsor. A solução explícita será dada pela combinação linear dos termos exponenciais tal que

$$y_t = A_1.0.5588^t + A_2.1,4472^t + A_3.2^t + 500$$

E com as três condições iniciais, determinamos as constantes arbitrárias A_1 , A_2 e A_3, por meio do sistema determinado resultante da substituição de y_0 , y_1 , y_2 para $t = 0, 1, 2$ na solução explícita:

```
lambda1 = Re( raizes[1] )
lambda2 = Re( raizes[2] )
lambda3 = Re( raizes[3] )

# t=0
# A1 + A2 + A3 + yp = y[1]
# t=1
# A1*lambda1 + A2*lambda2 + A3*lambda3 + yp = y[2]
# t=2
# A1*lambda1^2 + A2*lambda2^2 + A3*lambda3^2 + yp = y[3]

v = c(1, lambda1, lambda1^2, 1, lambda2, lambda2^2, 1, lambda3, lambda3^2)
A = matrix(v , ncol=3)
B = y[1:3]-yp
X = solve(A,B)
X
```

```
## [1] -49.18441 -88.31559  37.50000
```

Exercício 2

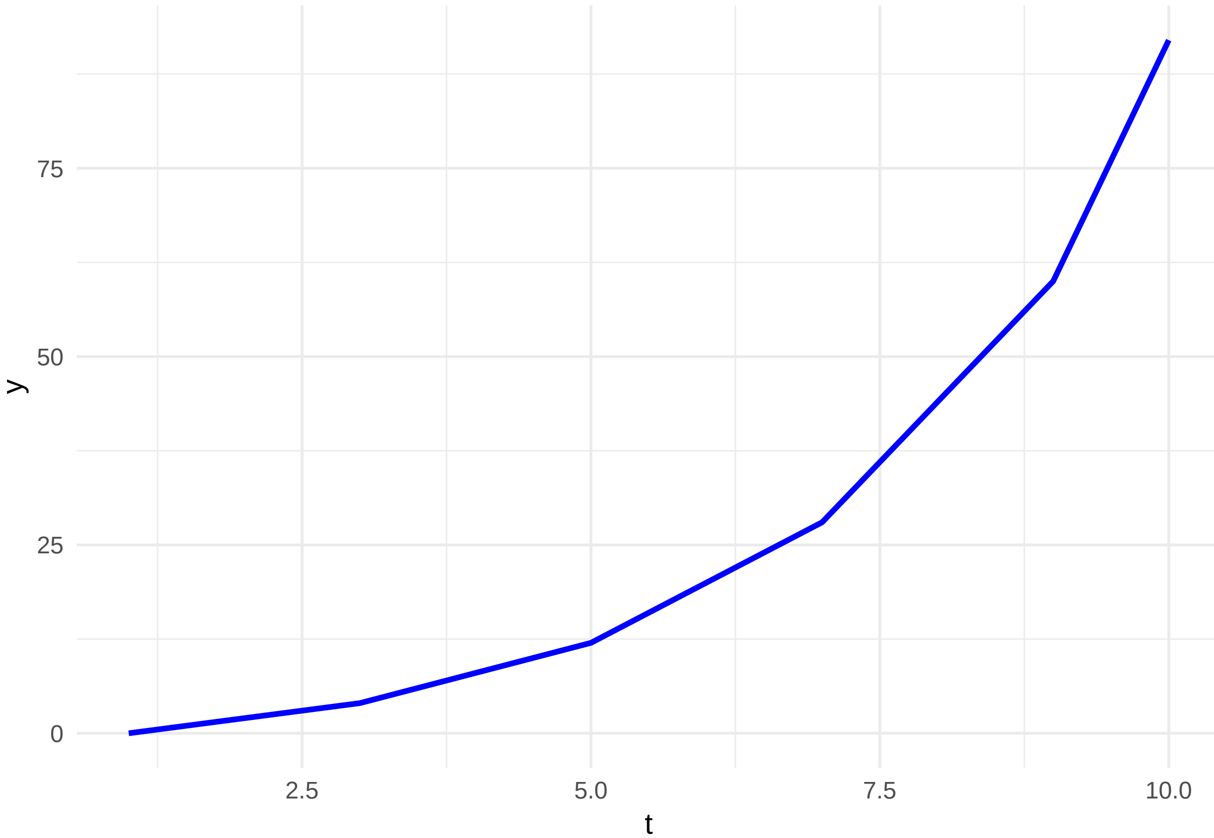
Em um segundo caso,

$$y_{t+3} - y_{t+2} - 2y_{t+1} + 2y_t = 0$$

temos novamente uma série divergente e sem oscilações nem ciclos, o que indica a presença de raízes reais e ao menos uma raíz unitária.

```
rm(list=ls(all.names = TRUE))
a3 =  1
a2 = -1
a1 = -2
a0 = 2

g = 0

tmax = 10
y = rep(0, tmax)

y[1] = 0
y[2] = 2
y[3] = 4 # tentar com 1 ou 4

for (t in 4:tmax){
  y[t] = -a2*y[t-1] - a1*y[t-2] - a0*y[t-3] + g
}

t = seq(1, tmax, 1)

series = data.frame(t, y)
```

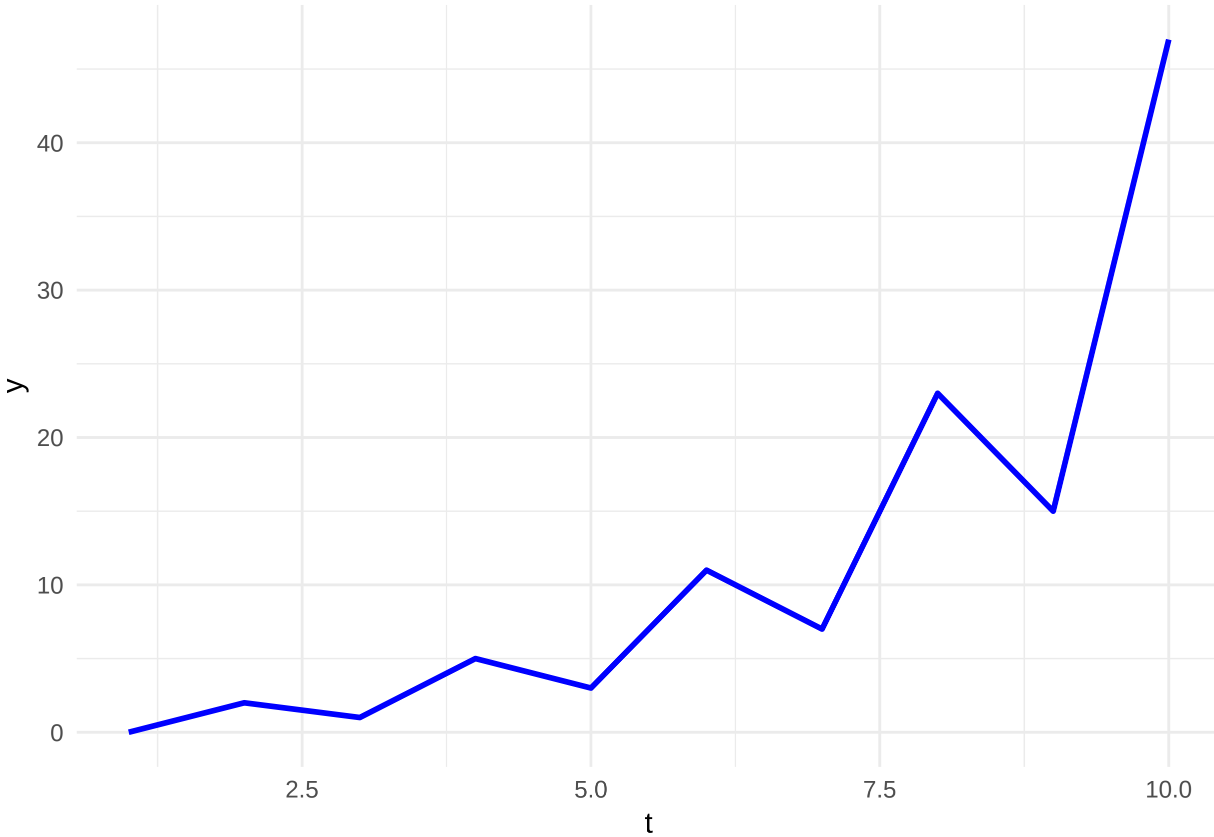
```r
ggplot(series, aes(x=t, y=y)) + geom_line(size=1, colour="blue") +
theme_minimal()
```



Se mudamos um dos coeficientes, teremos :

```r
rm(list=ls(all.names = TRUE))
a3 =  1
a2 = -1
a1 = -2
a0 = 2

g = 0

tmax = 10
y = rep(0, tmax)

y[1] = 0
y[2] = 2
y[3] = 1 # tentar com 1 ou 4

for (t in 4:tmax){
  y[t] = -a2*y[t-1] - a1*y[t-2] - a0*y[t-3] + g
}

t = seq(1, tmax, 1)

series = data.frame(t, y)
```

```r
ggplot(series, aes(x=t, y=y)) + geom_line(size=1, colour="blue") +
theme_minimal()
```



Analisando as raises.

```r
# analisando as raizes do polnomio caracteristico

coefs<- c(a0, a1, a2, a3)
raizes <- polyroot( coefs )
Re(raizes)
```

```
## [1]  1.000000 -1.414214  1.414214
```

Temos uma raíz com módulo unitário e outras duas raízes com módulo maior que a unidade, além de uma raíz negativa. Logo, pela raíz negativa ser maior que a unidade em módulo, teremos oscilações explosivas. Mas esas oscilaçõse não aparecem no gráfico? Haveria uma explicação? Podemos tentar uma nova simulação, desta vez considerando $y[3] = 1$. Há alguma mudança? Observe os valores das constantes arbitrárias dada essa mudança na condição inicial.

```r
lambda1 = Re( raizes[1] )
lambda2 = Re( raizes[2] )
lambda3 = Re( raizes[3] )
# t = 0
# A1 + A2 + A3 = y[1]

# t = 1
# A1*lambda1 + A2*lambda2 + A3*lambda3 = y[2]
```

```r
# t = 2
# A1*lambda1^2 + A2*lambda2^2 + A3*lambda3^2 = y[3]

v = c(1, lambda1, lambda1^2, 1, lambda2, lambda2^2, 1, lambda3, lambda3^2)
A = matrix(v , ncol=3)
B = y[1:3]
X = solve(A,B)
X # constantes arbitrarias A1, A2 e A3
```

```
## [1] -1.0000000 -0.5606602  1.5606602
```