Sistemas de equações diferenciais (Cap 18 Gandolfo, Cap. 2 Shone)

Ivette Luna

25 de junho de 2019

Sistemas de equações diferenciais de 2×2

O sistema de duas variáveis é tal que

$$\begin{cases} x'(t) & = & a_{11}x(t) + a_{12}y(t) + g_1(t) \\ y'(t) & = & a_{21}x(t) + a_{22}y(t) + g_2(t) \end{cases}$$

onde os coeficientes a_{ij} são constantes dadas e $g_1(t),\ g_2(t)$ são funções conhecidas. Matricialmente:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{bmatrix}}_{Z'(t)} = \underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}}_{A} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix}}_{Z(t)} + \underbrace{\begin{bmatrix} g_1(t) \\ g_2(t) \end{bmatrix}}_{B}$$

Assim, o sistema pode ser reescrito como

$$Z' = A \cdot Z + B$$

Solução do sistema

Por se tratar de equações lineares, a solução será dada por

$$Z(t) = Z^h(t) + Z^p(t)$$

onde $Z(t) = [x(t),\ y(t)]^T,\ Z^h(t) = [x^h(t),\ y^h(t)]^T$ e $Z^p(t) = [x^p(t),\ y^p(t)]^T$.

Para determinar a solução homogênea, temos dois métodos possíveis:

1. Substituição;
2. Matricialmente.

Substituição

Consiste em transformar o sistema de duas equações de ordem 1 a uma única equação de ordem 2. Seja o sistema homogêneo:

$$x'(t) = a_{11}x(t) + a_{12}y(t) \tag{1}$$

$$y'(t) = a_{21}x(t) + a_{22}y(t) \tag{2}$$

A partir de (1), escrevemos $y(t)$ em função de x. Sendo $a_{12} \neq 0$:

$$y(t) = \frac{1}{a_{12}}x'(t) - \frac{a_{11}}{a_{12}}x(t) \tag{3}$$

ou seja,

$$y'(t) = \frac{1}{a_{12}}x''(t) - \frac{a_{11}}{a_{12}}x'(t) \tag{4}$$

Substituição

Substituindo y em função de x, usando as eqs. (3) e (4) em (2):

$$\frac{1}{a_{12}}x''(t) - \frac{a_{11}+a_{22}}{a_{12}}x'(t) + \frac{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}{a_{12}}x(t) = 0$$

ou, sendo $a_{12} \neq 0$:

$$x''(t) - \underbrace{(a_{11}+a_{22})}_{tr(A)}x'(t) + \underbrace{(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})}_{det(A)}x(t) = 0$$

Resolvendo a equação de ordem 2, obtemos $x^h(t)$. A solução homogênea para a variável x será obtida por substituição na eq. (3).

Lembrando que...

- Se as raízes são reais e diferentes $(\lambda_2,\ \lambda_2)$:

$$x^h(t) = A_1 e^{\lambda_1 t} + A_2 e^{\lambda_2 t}$$

- Se as raízes são reais (λ^*) e de multiplicidade 2:

$$x^h(t) = (A_1 + A_2 t) e^{\lambda^* t}$$

- Se as raízes são complexas $(h \pm iv)$:

$$x^h(t) = e^{ht}(A_1 \cos(vt) + A_2 \sin(vt))$$

Exemplo numérico

Seja o sistema

$$\begin{aligned} x' &= -2x + 4y \\ y' &= -x + y \end{aligned}$$

Da segunda equação:

$$x = y - y'$$

e derivando

$$x' = y' - y''$$

Substituindo na primeira equação do sistema:

$$y' - y'' = -2(y - y') + 4y$$

Ou seja,

$$y'' + y' + 2y = 0$$

As raízes do polinômio:

$$\lambda_1 = -0.50 + 1.32i; \qquad \lambda_2 = -0.50 - 1.32i$$

Assim, $h = -0.5$, $v = 1.32$ e

$$y(t) = e^{-0.5t}(K_1 \cos(1.32t) + K_2 \sin(1.32t))$$

Como $x = y - y'$, logo

$$y'(t) = e^{-0.5t}[(1.32K_2 - 0.5K_1)\cos(1.32t) - (1.3229K_1 + 0.5K_2)\sin(1.32t)]$$

Subtraindo as duas últimas equações:

$$x(t) = e^{-0.5t}[(1.5K_1 - 1.32K_2)\cos(1.32t) + (1.32K_1 + 1.5K_2)\sin(1.32t)]$$

Resolução de sistemas por matrizes

A partir do sistema linear homogêneo:

$$\begin{cases} x'(t) &= a_{11}x(t) + a_{12}y(t) \\ y'(t) &= a_{21}x(t) + a_{22}y(t) \end{cases}$$

O polinômio característico cujas raízes são os autovalores de A é dado tal que

$$\begin{vmatrix} (a_{11} - \lambda) & a_{12} \\ a_{21} & (a_{22} - \lambda) \end{vmatrix} = 0$$

Desenvolvendo o determinante, obtemos novamente

$$\lambda^2 - \underbrace{(a_{11} + a_{22})}_{tr(A) < 0}\lambda + \underbrace{(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})}_{det(A) > 0} = 0$$

que coincide com o pol. característico da eq. diferencial de ordem dois em $x(t)$. Portanto, a solução do sistema depende dos autovalores de A.

Forma canônica para sistemas 2×2

Se $Z = [x_1(t),\ x_2(t)]^T$, em que $Z' = AZ$, temos um sistema com matriz de coeficientes A de ordem 2.

Se usamos o resultado para as equações diferenciais de ordem 1, por analogia, a solução para o sistema de 2 variáveis poderia ser dada por

$$Z(t) = e^{At}c?$$

onde c é uma matriz coluna não nula de constantes arbitrárias e

dimensão 2×1.

Por série de potências, o exponencial de matrizes é dado pela série infinita:

$$e^{At} = I + At + \frac{A^2t^2}{2!} + \frac{A^3t^3}{3!} + \ldots + \frac{A^nt^n}{n!} + \ldots$$

Por ser uma série convergente $\forall t$, $(n!$ cresce mais rapidamente que t^n, portanto, $\frac{A^nt^n}{n!} \to 0, \; com \; n \to \infty)$, diferenciando, temos que

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}e^{At} &= A + A^2t + \frac{A^3t^2}{2!} + \ldots + \frac{A^nt^{n-1}}{(n-1)!} + \ldots \\
&= A\left[I + At + \frac{A^2t^2}{2!} + \frac{A^3t^3}{3!} + \ldots + \frac{A^{n-1}t^{n-1}}{(n-1)!} + \ldots\right] \\
&= Ae^{At}
\end{aligned}$$

Logo,

$$Z' = \frac{d}{dt}(e^{At}c) = Ae^{At}c = AZ$$

que é a equação homogênea do sistema, e portanto, $Z = e^{At}c$ é solução do sistema.

Exponencial de matrizes

Temos dois casos,

- A é diagonalizável. Logo

$$D = P^{-1}AP \Rightarrow A = PDP^{-1}$$

  onde D é uma matriz diagonal contendo os autovalores diferentes na diagonal principal. P é a matriz de transformação não singular cujas colunas são dadas pelos respectivos autovetores L.I.;

- A é não diagonalizável pois há autovalores repetidos.

A é diagonalizável

Se $\lambda_1 \neq \lambda_2$, então $D = P^{-1}AP$ ou $A = PDP^{-1}$. Assim, na série de potências (Teorema de Sylvester):

$$
\begin{aligned}
e^{At} &= I + At + \frac{A^2t^2}{2!} + \frac{A^3t^3}{3!} + \ldots + \frac{A^nt^n}{n!} + \ldots \\
&= I + PDP^{-1}t + \frac{(PDP^{-1})^2t^2}{2!} + \frac{(PDP^{-1})^3t^3}{3!} + \ldots + \frac{(PDP^{-1})^nt^n}{n!} + \ldots \\
&= PIP^{-1} + PDtP^{-1} + P\frac{D^2t^2}{2!}P^{-1} + P\frac{D^3t^3}{3!}P^{-1} + \ldots + P\frac{D^nt^n}{n!}P^{-1} + \ldots \\
&= P\left[I + Dt + \frac{D^2t^2}{2!} + \frac{D^3t^3}{3!} + \ldots + \frac{D^nt^n}{n!} + \ldots\right]P^{-1} \\
&= Pe^{Dt}P^{-1}
\end{aligned}
$$

Portanto,

$$Z^h(t) = Pe^{Dt} \underbrace{P^{-1}c}_{K}$$

Abrindo cada termo:

$$Z^h(t) = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} K_1 \\ K_2 \end{bmatrix}$$

logo,

$$Z^h(t) = K_1 v_1 e^{\lambda_1 t} + K_2 v_2 e^{\lambda_2 t}$$

A não é diagonalizável

Quando $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ precisamos da forma canônica de Jordan:

$$J = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

- Trata-se de um bloco de Jordan: uma matriz quadrada de ordem igual à multiplicidade do autovalor com o mesmo autovalor na diagonal e todos os outros elementos nulos exceto aqueles na *superdiagonal*.

Assim, a transformação a ser usada é dada por

$$J = Q^{-1}AQ$$

onde Q é uma matriz não singular (matriz de transformação). A solução do sistema é dada por

$$Z^h(t) = Q \cdot e^{Jt} \cdot K$$

A não é diagonalizável

O bloco de Jordan pode ser escrito como

$$J = \lambda I + U = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

onde U é uma matriz com elementos nulos fora da superdiagonal e uns na mesma. Assim,

$$e^{Jt} = e^{(\lambda I + U)t} = e^{\lambda I t} e^{Ut}$$

Por série de potências:

$$e^{Ut} = I + Ut + \frac{U^2 t^2}{2!} + \dots$$

Como $U^s = 0, \ \forall s \geq j$, onde j é a dimensão do bloco (multiplicidade do autovalor), logo, para o caso de duas variáveis ($j = 2$),

$$e^{Ut} = I + Ut$$

A não é diagonalizável

Finalmente,

$$\begin{aligned} e^{Jt} &= e^{\lambda I t} e^{Ut} \\ &= \begin{bmatrix} e^{\lambda t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda t} \end{bmatrix} \cdot (I + Ut) \\ &= \begin{bmatrix} e^{\lambda t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda t} \end{bmatrix} \cdot \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & t \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right) \\ &= \begin{bmatrix} e^{\lambda t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda t} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ \Rightarrow e^{Jt} &= \begin{bmatrix} e^{\lambda t} & te^{\lambda t} \\ 0 & e^{\lambda t} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Juntando tudo ...

Com $K = [K_1,\ K_2]^T$ a matriz de constantes arbitrárias e $Q = [v_1\ \ c_1]$ a matriz não singular de transformação,

$$
\begin{aligned}
Z^h(t) &= Q \cdot e^{Jt} \cdot K \\
&= [v_1\ \ c_1] \cdot \begin{bmatrix} e^{\lambda t} & te^{\lambda t} \\ 0 & e^{\lambda t} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} K_1 \\ K_2 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

$$
\Rightarrow Z^h(t) = (K_1 + K_2 t) v_1 e^{\lambda t} + K_2 c_1 e^{\lambda t}
$$

onde v_1 é autovetor de A e c_1 é autovetor generalizado de A tal que

$$
(A - \lambda I) c_1 = v_1
$$

Exemplo numérico

Seja o sistema de eqs. diferenciais com matriz de coeficientes dada por

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Os autovalores de A são

$$\lambda_1 = 2.41; \quad \lambda_2 = -0.41$$

Assim, as trajetória serão instáveis. A matriz P:

$$P = \begin{bmatrix} 0.58 & -0.58 \\ 0.82 & 0.82 \end{bmatrix}$$

Pro serem autovalores diferentes, a solução do sistema é dada por:

$$Z(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = K_1 e^{2.41t} \begin{pmatrix} 0.58 \\ 0.82 \end{pmatrix} + K_2 e^{-0.41t} \begin{pmatrix} -0.58 \\ 0.82 \end{pmatrix}$$

No R...

Forma canônica para sistemas $n \times n$

Se $Z(t) = [x_1(t),\ x_2(t), \ldots, x_n(t)]^T$, em que $Z' = AZ$, temos um sistema com matriz de coeficientes A de ordem n.

A partir dos resultados para sistemas de duas variáveis, a solução para o sistema de n variáveis é dado por

$$Z(t) = e^{At}c = Pe^{Dt}K$$

onde K é uma matriz coluna de constantes arbitrárias de dimensão

$n \times 1$.

A não é diagonalizável

Quando há autovalores repetidos (raízes múltiplas) precisamos da forma canônica de Jordan. Por exemplo, a matriz

$$J = \left[\begin{array}{ccc|cc|c} \lambda_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & \lambda_2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_2 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_3 \end{array}\right]$$

é composta por três blocos de Jordan.

- Cada bloco é uma matriz quadrada de ordem igual à multiplicidade do autovalor.
- Cada bloco possui o mesmo autovalor na diagonal e todos os outros elementos são nulos exceto aqueles na *superdiagonal* (diagonal acima da diagonal principal).

A não é diagonalizável

Assim, a transformação a ser usada é dada por

$$J = Q^{-1}AQ \Rightarrow A = QJQ^{-1}$$

onde Q é uma matriz não singular (matriz de transformação). A solução do sistema é dada por

$$Z_t = Q \cdot e^{Jt} \cdot K$$

Assim, se por exemplo

$$J = \left[\begin{array}{c|c|c} J_1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & J_2 & 0 \\ \hline 0 & 0 & J_3 \end{array}\right]$$

logo

$$e^{Jt} = \left[\begin{array}{c|c|c} e^{J_1 t} & 0 & 0 \\ \hline 0 & e^{J_2 t} & 0 \\ \hline 0 & 0 & e^{J_3 t} \end{array}\right]$$

Cada bloco pode ser escrito como

$$J_j = \lambda_j I + U_j$$

onde U_j é uma matriz com elementos nulos fora da superdiagonal e uns na mesma tal que

$$U_j^s = 0,\ \forall s \geq m$$

onde m é a ordem do bloco J_j e a multiplicidade do $j-$ésimo autovalor. Assim

$$e^{J_j t} = e^{\lambda_j I t} e^{U_j t}$$

A não é diagonalizável

Por exemplo, se o bloco J_j é de multiplicidade 3, logo, por series de potências:

$$e^{U_j t} = I + Ut + \frac{U^2 t^2}{2!}$$

pois $U_j^3 = 0$. Portanto,

$$e^{J_j t} = e^{\lambda_j I t} e^{U_j t} = e^{\lambda_j I t} \begin{bmatrix} 1 & t & t^2/2 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Como a solução é dada em função dos blocos, na hora de compor a solução

$$Z_t = Q \cdot e^{Jt} \cdot K$$

O produto $e^{Jt} \cdot K$ fará com que cada termo exponencial $e^{\lambda_j t}$ seja multiplicado por um polinômio em t de grau $1, 2, \ldots, m-1$, onde m é a dimensão do $j-$ésimo bloco.

Estabilidade

- Se o sistema é estável, então todos os autovalores têm que ser negativos e quando houver raízes complexas, estes devem possuir parte real negativa. Assim,

$$Re(\lambda_j) < 0;\ \forall j = 1,\ \ldots,\ n$$

  Ou seja, todos os autovalores devem se localizar no lado esquerdo do plano complexo.

- Há outras duas alternativas para verificar a estabilidade do sistema:

  1. Pelos coeficientes do polinômio característico (Routh-Hurwitz);
  2. Pelo conceito de matrizes definidas negativas e quase-definidas negativas.

Condição I: matrizes simétricas

Se a matriz A é simétrica, logo $a_{ij} = a_{ji}$. Nesse caso, a matriz é definida negativa se todos os seus autovalores são negativos. Para identificar esta situação a partir dos elementos de A, precisamos de checar o sinal de n determinantes:

$$|a_{11}| < 0 \qquad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0 \qquad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} < 0$$

$$\ldots$$

$$sgn \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} = sgn(-1)^n$$

devem alternar de sinal, começando pelo sinal negativo. Estes determinantes são chamados de *menores principais líderes* de A.

Exemplo

Seja a matriz

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

A matriz é simétrica. Assim, sendo associada a um sistema de equações diferenciais de três variáveis ($n = 3$), a estabilidade pode ser verificada checando os menores principais líderes:

$$|-2| = -2 < 0; \quad \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 < 0; \quad \begin{vmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 3 > 0$$

Portanto a sequência de sinais ($<, <, >$) não é a correta ($<, >, <$) para garantir que os autovalores atendam à condição de estabilidade. O sistema é instável. Verificando os autovalores:

$$\lambda_1 = -2.8460 < 0; \quad \lambda_2 = -0.2569 < 0; \quad \lambda_3 = 4.1029 > 0$$

Outro exemplo

Seja a matriz

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 1 & -6 & 1 \\ 3 & 1 & -10 \end{bmatrix}$$

A matriz é simétrica. Os menores principais líderes são:

$$|-2| = -2 < 0; \quad \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -6 \end{vmatrix} = 11 > 0; \quad \begin{vmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 1 & -6 & 1 \\ 3 & 1 & -10 \end{vmatrix} = -48 < 0$$

Portanto a sequência de sinais $(<, >, <)$ permite afirmar que a A é definida negativa e portanto, os autovalores atendem à condição de estabilidade. O sistema é estável. Verificando os autovalores:

$$\lambda_1 = -11.0813 < 0; \quad \lambda_2 = -6.2226 < 0; \quad \lambda_3 = -0.6961 < 0$$

Condição II: matrizes *quase* definidas negativas

Não é todo sistema que terá uma matriz A simétrica. Nesses casos, analisa-se a matriz

$$B = \frac{1}{2}(A + A^T)$$

que é simétrica. Logo, aplica-e a condição I sobre B, que são condições *necessárias e suficientes*.

Exemplo

Seja a matriz

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 7 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 4 & 8 & -9 \end{bmatrix} \Rightarrow B = (A + A^T)/2 = \begin{bmatrix} -1 & 3.5 & 3 \\ 3.5 & 2 & 5.5 \\ 3 & 5.5 & -9 \end{bmatrix}$$

Os menores principais de B:

$$|-1| = -1 < 0; \quad \begin{vmatrix} -1 & 3.5 \\ 3.5 & 2 \end{vmatrix} = -14.25 < 0; \quad \begin{vmatrix} -1 & 3.5 & 3 \\ 3.5 & 2 & 5.5 \\ 3 & 5.5 & -9 \end{vmatrix} = 256 > 0$$

Portanto a sequência de sinais $(<, <, >)$ permite afirmar que a A NÃO é quase-definida negativa e portanto, os autovalores não atendem à condição de estabilidade. O sistema é instável. Verificando os autovalores de A:

$$\lambda_1 = -11 < 0; \quad \lambda_2 = -2 < 0; \quad \lambda_3 = 5 > 0$$

Outras condições

III Se $a_{ij} \geq 0, \forall i \neq j$ e todos os elementos da diagonal são negativos (matriz de Meltzer); logo, neste caso, mesmo A não sendo simétrica, podemos aplicar a condição I para checar a estabilidade do sistema.

IV Diagonal negativa dominante: Condições de estabilidade suficientes - todos os elementos da diagonal devem ser negativos e em módulo cada elemento deve ser maior que a soma dos módulos dos elementos da matriz da mesma linha ou coluna:

$$a_{ii} < 0; \qquad |a_{ii}| > \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \quad (j \neq i)$$

ou

$$a_{ii} < 0; \qquad |a_{ii}| > \sum_{j=1}^{n} |a_{ji}| \quad (j \neq i)$$

Outras condições

VI Traço: Uma condição necessária (mas não suficiente) é que o traço da matriz A deve ser negativo. Por exemplo, no caso anterior da matriz

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 1 & -6 & 1 \\ 3 & 1 & -10 \end{bmatrix}$$

$$Tr(A) = -2 - 16 - 10 = -28 < 0$$

Que é consistente com a estabilidade do sistema pois todos os autovalores de A são negativos.

Outras condições

VII Determinante: Uma condição necessária (mas não suficiente) é que o determinante da matriz A possua sinal $(-1)^n$. Por exemplo, no caso anterior da matriz

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 1 & -6 & 1 \\ 3 & 1 & -10 \end{bmatrix}$$

$$Det(A) = -48 < 0$$

Como $(-1)^3 = -1 < 0$. Logo, o sinal do $det(A)$ é consistente com a estabilidade do sistema pois todos os autovalores de A são negativos.

Estabilidade ((Parte III, caps. 21 e 22 Gandolfo, Cap. 4 Shone)

- Métodos qualitativos são ainda mais necessários na análise dinâmica em Economia, onde usualmente não temos a forma das funções envolvidas mas apenas algumas propriedades qualitativas (por exemplo, o sinal das derivadas parciais);
- Análise gráfica: diagramas/planos de fase;
- Alternativamente: linearização para análise local.
- *Equilibrium state*: ponto fixo, *rest point*, solução nula.

Estabilidade

A. **Estabilidade local** - Um sistema é:

1. **Estável** se todo choque marginal produz perturbações marginais no sistema: a trajetória temporal não se afasta muito no estado de equilíbrio;

2. Se todo movimento próximo ao equilíbrio converge a este para $t \to \infty$, logo, o sistema é **assintóticamente estável**.

B. **Estabilidade global**

3. Se a estabilidade independe da distância do estado inicial ao equilíbrio, logo, a estabilidade é **assintótica e global**.

Estabilidade no sentido de Liapunov

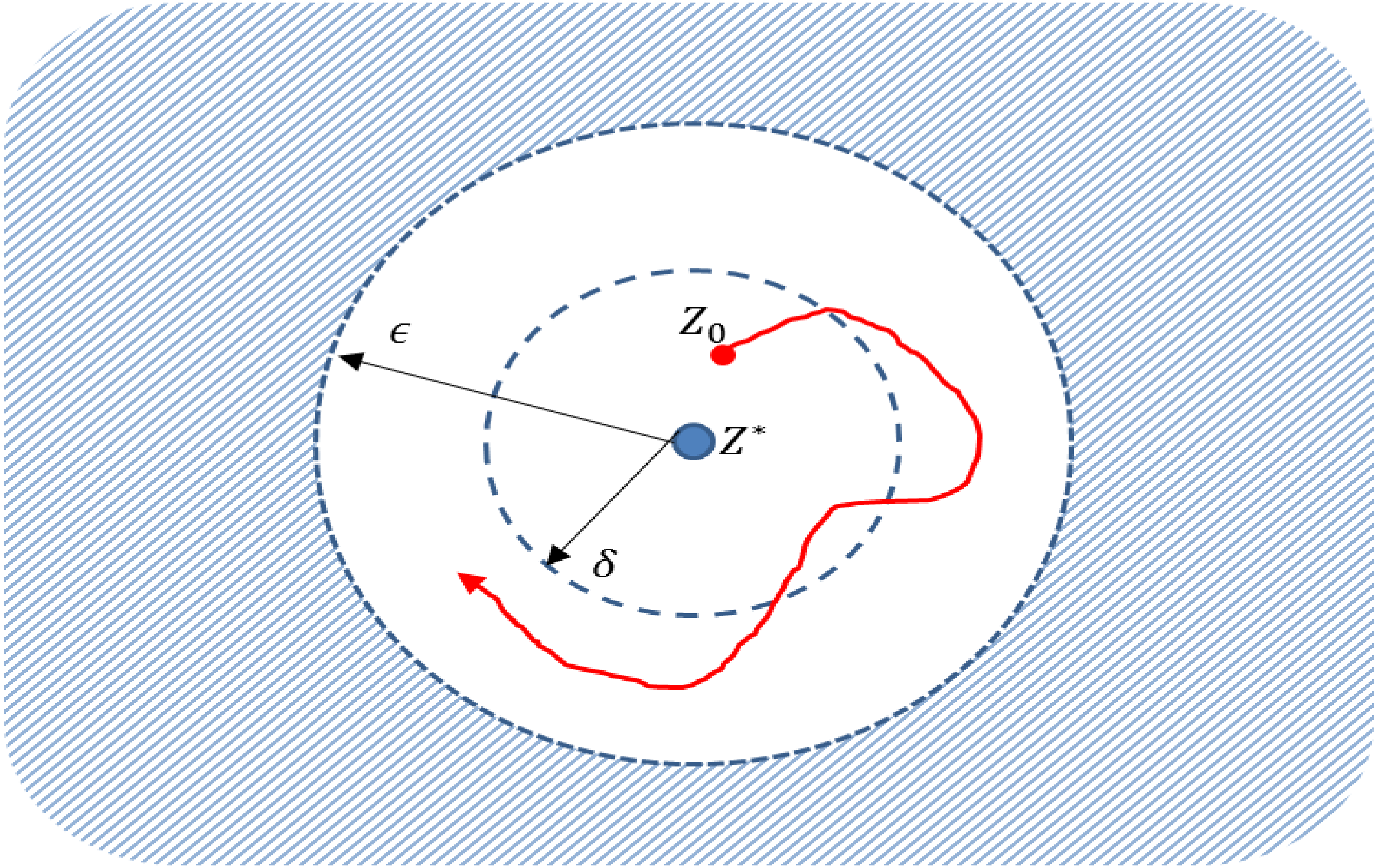
O estado de equilíbrio (local) Z^* é estável se para todo real $\epsilon > 0$ existe um real $\delta(\epsilon, t_0) > 0$ tal que a desigualdade

$$\|Z_0 - Z^*\| \leq \delta$$

implique que

$$\|\phi(t;\ Z_0,\ t_0) - Z^*\| \leq \epsilon \quad \forall\, t \geq t_0$$

Graficamente - uma variável



Estabilidade condicional

É o caso das *digressões* tanto para o caso discreto como para o contínuo.

1. Conceito intermediário entre a estabilidade no sentido de Liapunov e a instabilidade. Acontece quando o ponto fixo é estável ou instável de acordo com a condição inicial;
2. *Variedade estável*: Conjunto de condições iniciais para os quais o sistema é estável;
3. *Braço estável*: estabilidade condicional, não global.

Estabilidade condicional

4. No caso de um sistema de equações diferenciais, a dimensão da variedade estável é igual ao número de raízes com parte real negativa. Por exemplo:

   Se o sistema é de $n = 3$ variáveis, com raízes reais e uma delas é positiva (λ_1), as constantes arbitrárias

   $$(A_1,\ A_2,\ A_3) = (0,\ A_2,\ A_3)$$

   Assim, a dimensão da variedade estável é 2;

5. No caso de um sistema linear de equações em diferenças, trocamos o termo *raízes com parte real negativa* por *raízes com módulo menor que um*;

Outros conceitos de estabilidade

- Até agora os sistemas lineares (em diferença ou diferenciais) têm apresentado um único ponto fixo: se o sistema é assintoticamente estável, logo, este será globalmente estável;

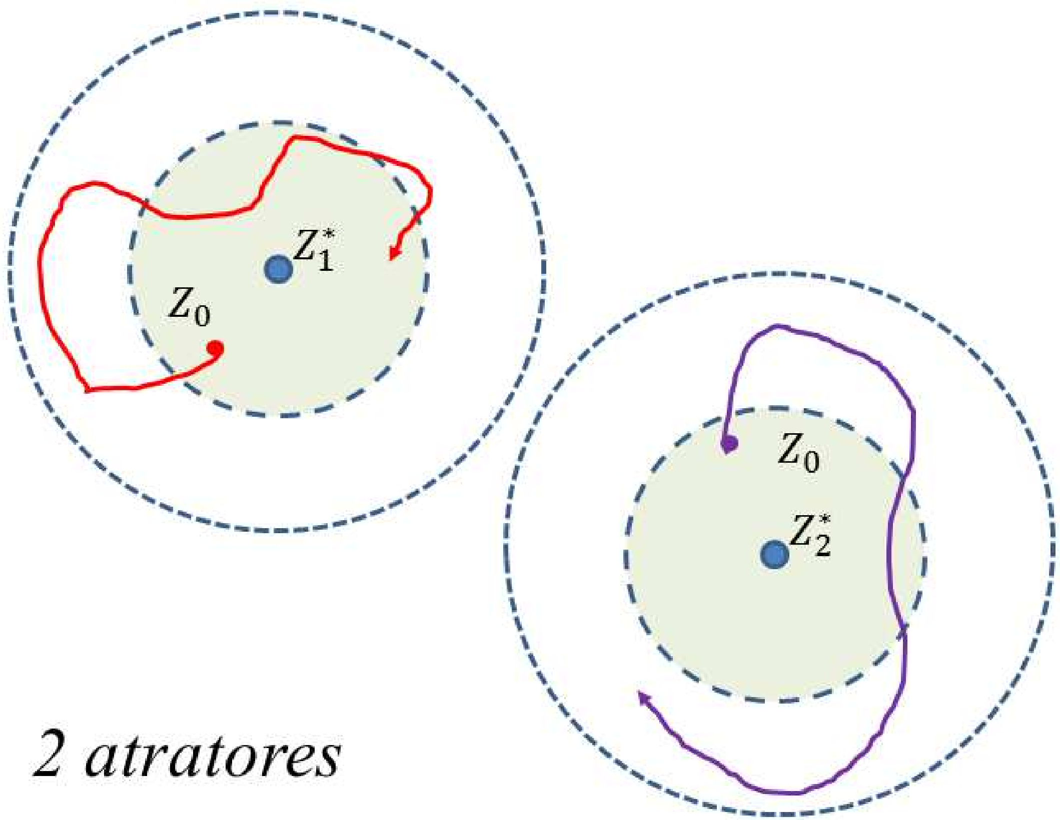
- Porém, outros tipos de sistemas podem ter mais de um ponto fixo: *multiple equilibria*.

  - Nesse caso, não podemos falar de estabilidade GLOBAL, porém, há outros dois conceitos usados na Economia:

    1. Estabilidade global do processo de ajustamento e
    2. Quase-estabilidade.

Estabilidade global do processo de ajustamento

Se para toda condição inicial, o processo de ajustamento converge a algum ponto fixo, e este pode mudar em função da condição inicial adotada.



Quase-estabilidade

Se toda sequência infinita de estados no tempo para qualquer condição inicial converge no limite, e este limite é sempre um ponto fixo.

- É associado ao problema de indeterminação do equilíbrio e ao equilíbrio e estabilidade dependente da trajetória (*path-dependent equilibrium and stability*).
- Se o estado de equilíbrio foi determinado a partir de uma determinada condição e o sistema é quase-estável, um choque no sistema pode gerar uma trajetória tal que esta trajetória no limite, atinja um nível diferente ao estimado inicialmente: **o estado de equilíbrio depende de trajetória percorrida**.
- Nesse caso, não há como analisar apenas os *steady states*.

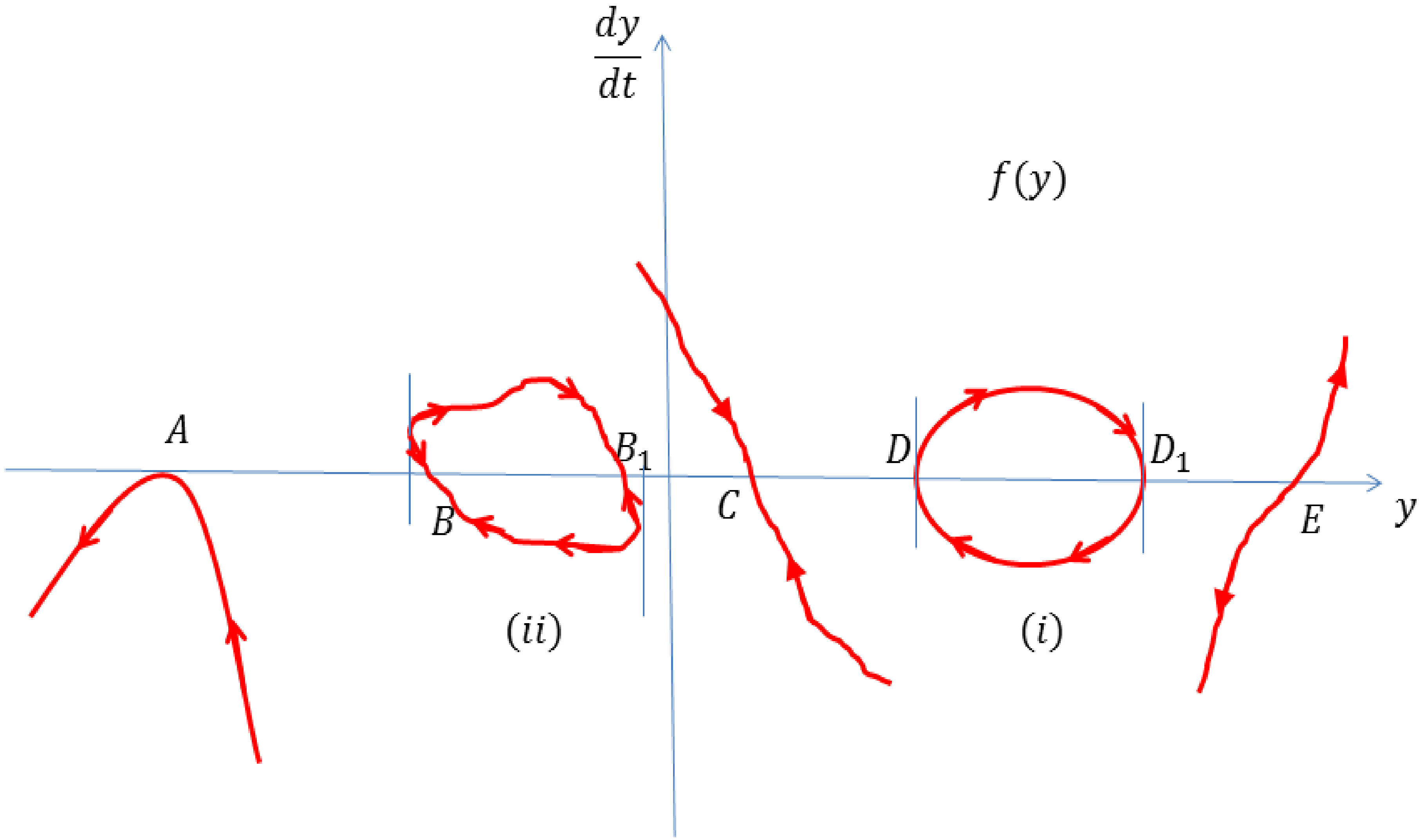
Métodos qualitativos: diagramas de fase

1. **Caso 1: uma única equação diferencial de ordem 1 e autônoma.**
   Seja a equação
   $$\frac{dy}{dt} = f(y)$$
   Por ser uma equação separável, logo
   $$\frac{dy}{f(y)} = dt$$
   $$\int \frac{dy}{f(y)} = t + A$$
   Porque usar diagramas de fase?

Métodos qualitativos: diagramas de fase

Usamos o diagrama de fase pois nem sempre será possível ter as condições matemáticas favoráveis:

- A integral $\int \frac{dy}{f(y)}$ pode não ser definida via funções conhecidas $\Rightarrow$ Métodos numéricos sobre expansão de séries de potências;
- Se $\int \frac{dy}{f(y)} = G(y) = H(y) + A$ não é inversível em t, logo não temos como obter a forma explícita de $y = y(t) \equiv H^{-1}(t)$.
- Nem sempre a forma de $f(y)$ é definida, conhecendo-se apenas algumas propriedades qualitativas;
- Nem sempre teremos uma equação separável.


$\frac{dy}{dt}$
$f(y)$
A
B_1
B
C
D
D_1
E
y
(ii)
(i)

Notas

1. Se a linha de fase cruza o eixo horizontal com inclinação **negativa**, logo, o ponto fixo é estável (atrator): C;

$$f'(y^*) = \frac{df}{dy}(y^*) < 0 \Rightarrow \ \textit{atrator}$$

2. se a linha de fase cruza o eixo horizontal com inclinação **positiva**, logo, o ponto fixo é instável (repulsor): E;

$$f'(y^*) = \frac{df}{dy}(y^*) > 0 \Rightarrow \ \textit{repulsor}$$

3. Se a linha de fase encontra-se integralmente em um dos lados do eixo horizontal e é tangente a este, logo, o ponto de tangência é um ponto que possui um braço estável (*one-sided stability-instability*): A;

Notas

4. Se a linha de fase tem inclinação paralela ao eixo vertical nos pontos de cruzamento com o eixo horizontal (D e D_1), logo, teremos novamente pontos de equilíbrio estáveis de um lado (parte superior) e instáveis do outro (parte inferior da linha de fase);

$$f'(y^*) = \frac{df}{dy}(y^*) = \infty \Rightarrow \textit{nem atrator nem repulsor}$$

5. Assim, a estabilidade global acontecerá somente quando a linha de fase encontra-se integralmente acima (abaixo) do eixo horizontal e à esquerda (direita) do ponto fixo.

Exemplo didático

Seja a equação diferencial

$$y' = f(y) = y - y^2$$

Temos dois pontos fixos:

$$y' = 0 \Rightarrow y(1 - y) = 0$$

$$\Rightarrow y_1^* = 0; \quad y_2^* = 1$$

A derivada,

$$f'(y) = 1 - 2y$$

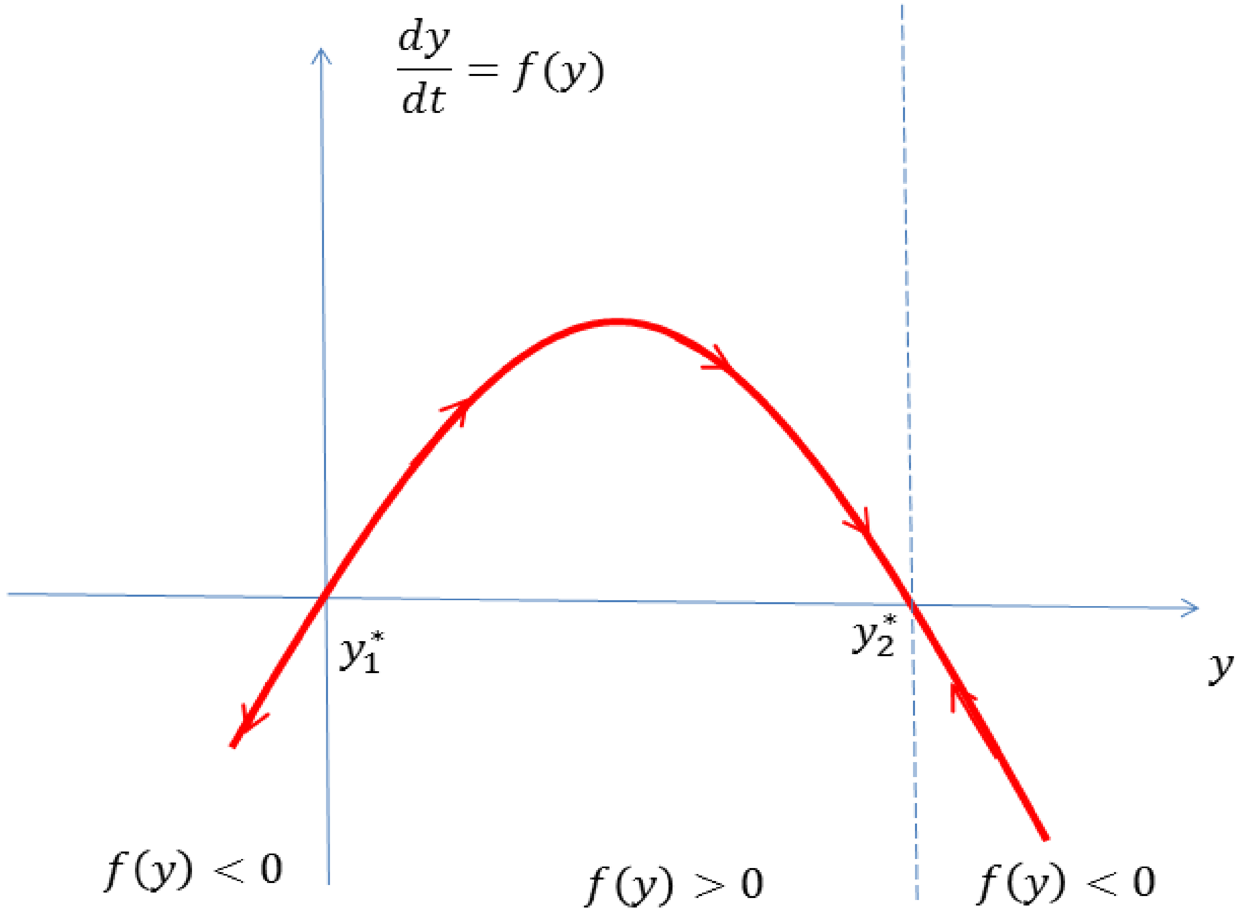
Em y_1^*:

$$f'(0) = 1 > 0 \Rightarrow \quad \textit{repulsor}$$

Em y_2^*:

$$f'(1) = -1 < 0 \Rightarrow \quad \textit{atrator}$$

Plotando o retrato de fase



No R

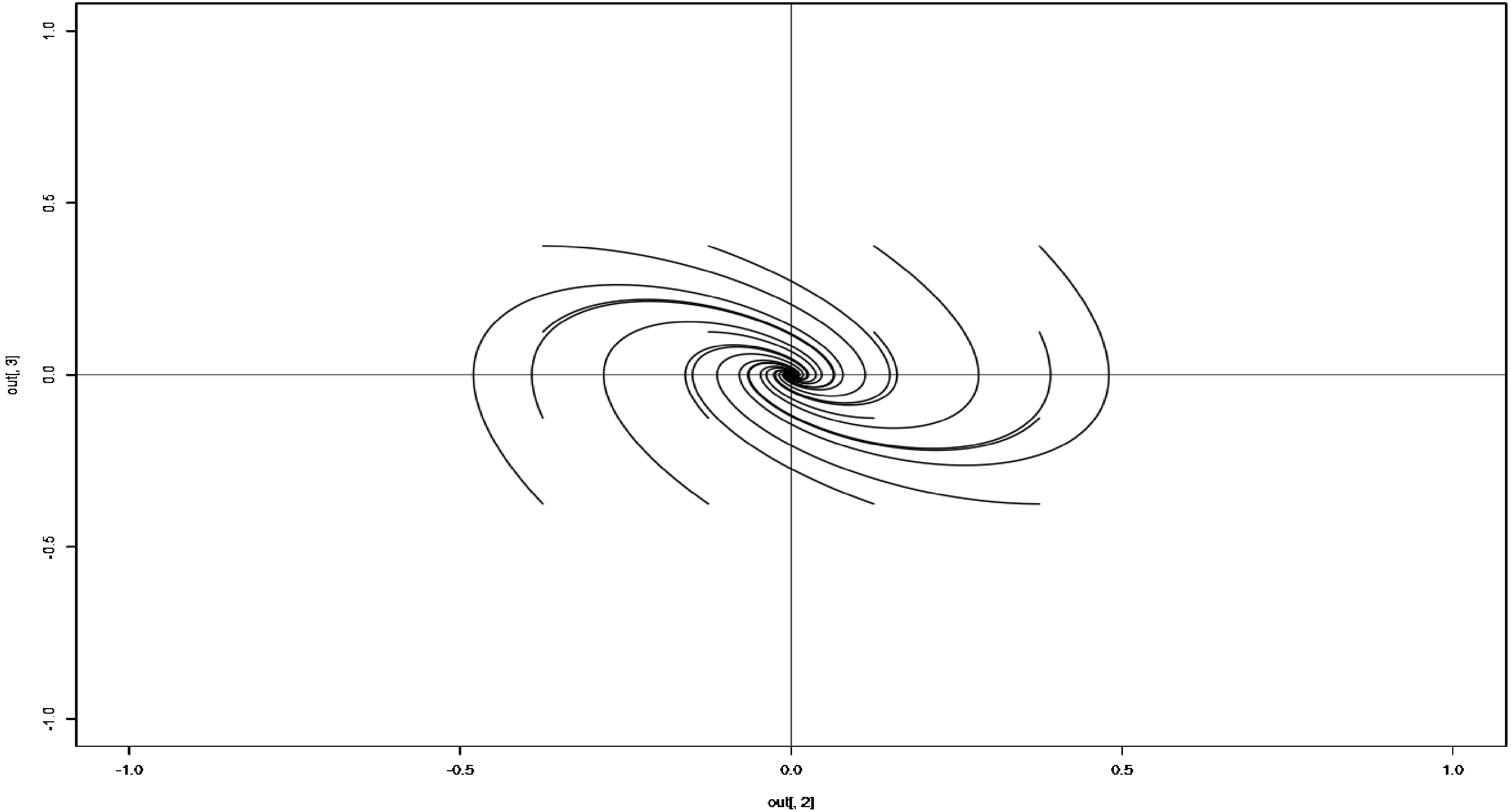
- Quando temos uma equação autônoma diferencial de ordem 1, o retrato de fase é automático pois temos apenas uma função $y' = f(y)$ a plotar.

- Para equações de ordens superiores, precisamos de transformar a equação a um sistema de **duas** variáveis. Por exemplo, seja a equação diferencial

$$x'' + x' + x = 0$$

Analise a estabilidade do sistema.

Saída da simulação: $y_1 = x(t)$; $y_2 = x'(t) = dx/dt$



Observações (Shone, sec. 4.2)

1. Um ponto do plano de fase pertence a uma e só uma trajetória;

2. A trajetória que parte de uma condição inicial que não é um ponto fixo chegará a um (se possível) apenas em $t \to \infty$;

3. As trajetórias não se cruzam, a não ser que seja uma curva fechada $\to$ periodicidade/regularidade;

Duas equações simultâneas (Shone sec. 4.2.)

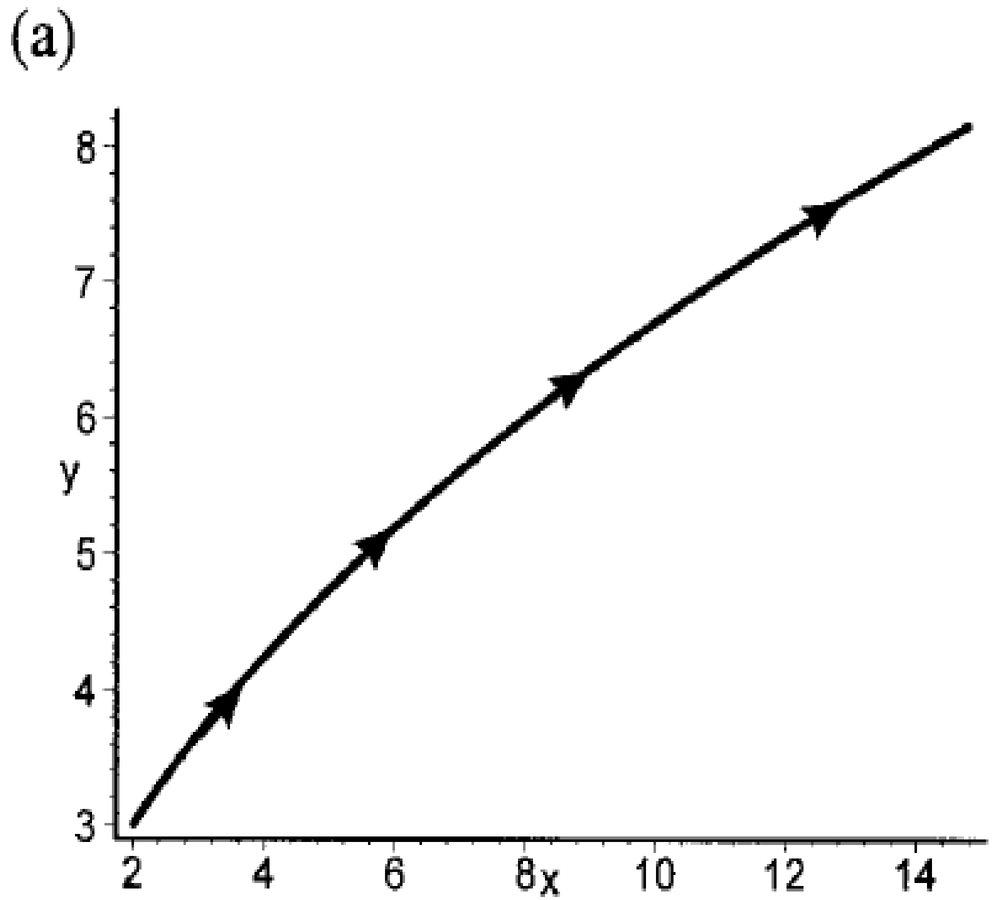
Sejam duas equações diferenciais autônomas de ordem 1:

$$\frac{dy_1}{dt} = \varphi_1(y_1, y_2)$$
$$\frac{dy_2}{dt} = \varphi_2(y_1, y_2)$$

- O plano de fase é composto pelos pares $(y_1(t), y_2(t))$ dada uma condição inicial em (t_0).
- A curva resultante é chamada de linha de fase, *curva característica* ou órbita.
- O conjunto de curvas possíveis para diferentes condições iniciais é chamado de *retrato de fase*.

Retrato de fase

Por exemplo, a figura mostra o retrato de fase de duas variáveis (x, y).
As coordenadas da curva característica são dadas por $(x(t),\ y(t))$



Como obter a curva característica sem resolver o sistema?

- Do gráfico anterior, observamos que, para um determinada condição inicial, a curva característica é única. Assim, no retrato de fase, podemos supor que

$$y_2 = y_2(y_1) = f(y_1)$$

Ou seja, podemos colocar uma das variáveis (y_2) como função da(s) outra(s). Derivando, usando a regra da cadeia

$$\frac{dy_2}{dt} = \frac{df(y_1)}{dy_1} \cdot \frac{dy_1}{dy_t} = \frac{dy_2}{dy_1} \cdot \frac{dy_1}{dt}$$

logo

$$\frac{dy_2}{dy_1} = \frac{\frac{dy_2}{dt}}{\frac{dy_1}{dt}} = \frac{\varphi_2(y_1, y_2)}{\varphi_1(y_1, y_2)}$$

- Integrando a equação em y_2, obtemos a curva paramétrica (y_1, y_2). O sentido de variação para $t \to \infty$ será dado pelas derivadas simples.

Pontos singulares

1. Ponto singular: não há mais variação $\Rightarrow$ todas as derivadas são nulas;

    - É por onde a análise gráfica começa: no mínimo precisamos identificar a priori os pontos fixos para considerar o mesmo na construção dos retratos de fase.

2. O nome dos pontos singulares varia em função da sua característica geométrica: *node*, *saddle point*, *focus or vortex*, *centre*.

Pontos singulares

3. *Node*: Ponto fixo por onde todas as curvas características passam; se as curvas no l.p. chegam a elas temos um atrator; caso contrário será um repulsor;

4. *Saddle point*: ponto singular por onde apenas DUAS curvas passam e atuam como assíntotas para todas as outras. Todas as curvas se afastam deste ponto exceto uma das assíntotas que no caso se trata do único braço estável do sistema relativo a este ponto singular;

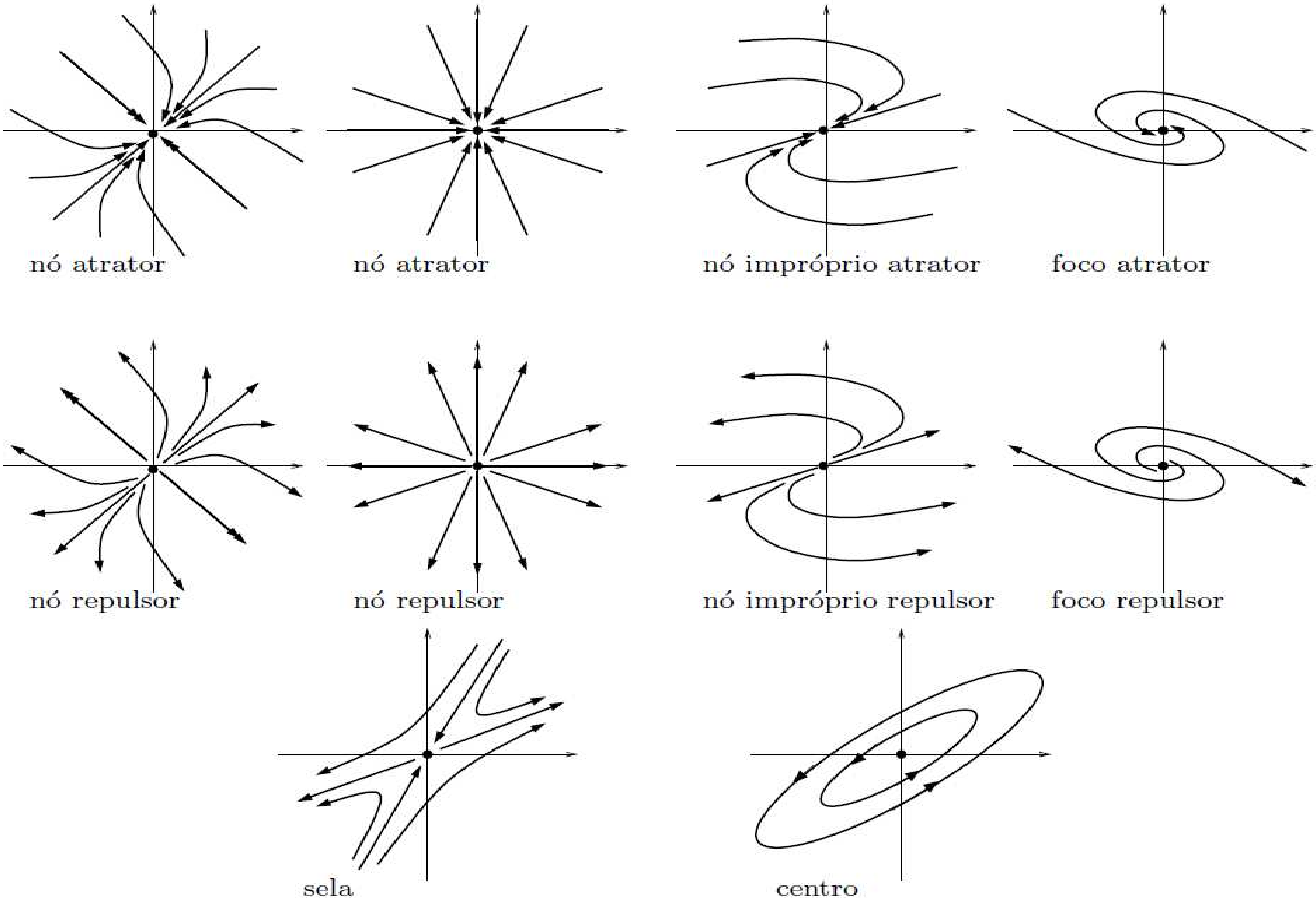
5. *Focus or vortex*: ponto que é o limite de todas as curvas (o "olho"); pode ser um atrator ou um repulsor. Há um movimento periódico com amplitudes amortecidas ou explosivas, dependendo do caso;

Pontos singulares

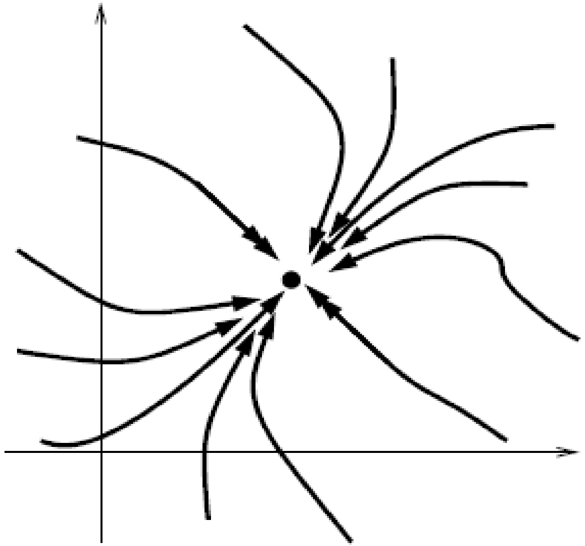
6. *Centre or focal point*: ponto por onde nenhuma curva passa e é cercado por curvas características fechadas: há um movimento periódico regular, com amplitudes fixas.

7. No geral, um sistema não linear pode ter vários pontos fixos e portanto, as características dinâmicas observadas no retrato de fase dependerá da região que estamos analisando. Estas regiões possuem *fronteiras* dadas pro trajetórias assintóticas chamadas de *separatrices*.

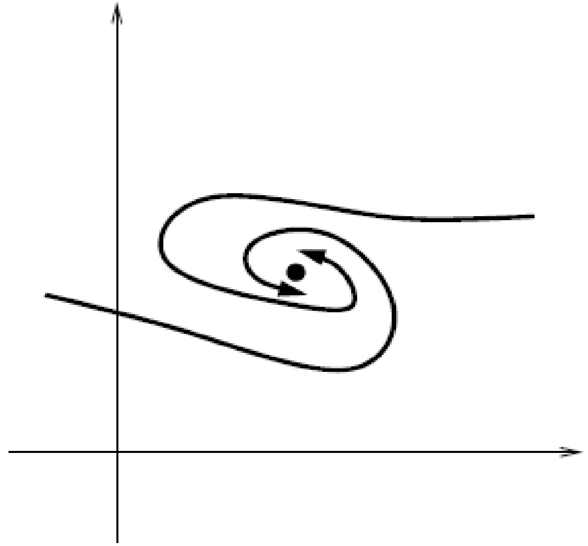
Exemplos gráficos I



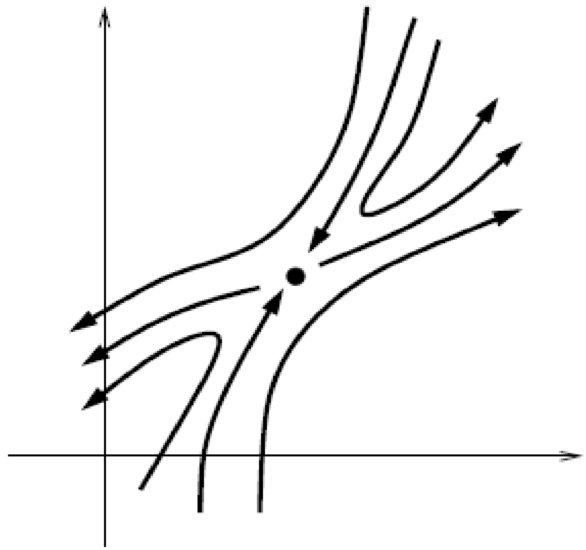
Exemplos gráficos II



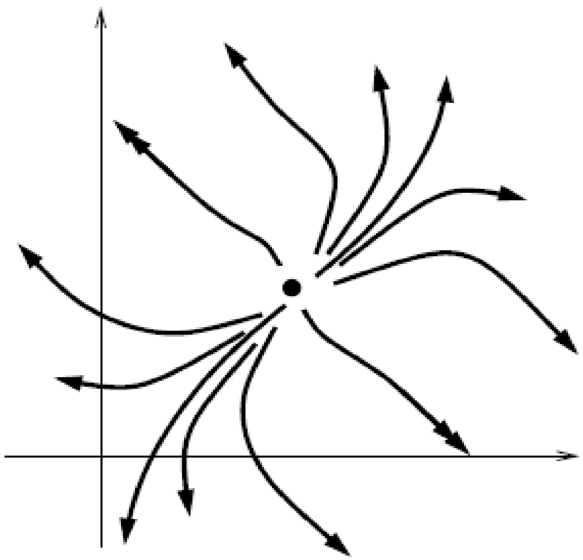
nó atrator



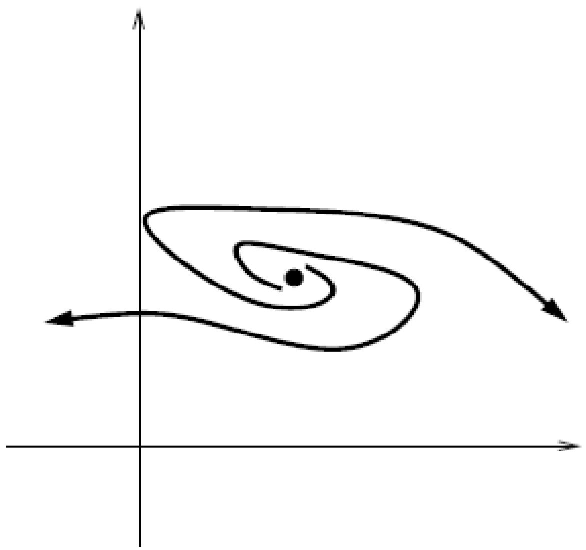
foco atrator



sela

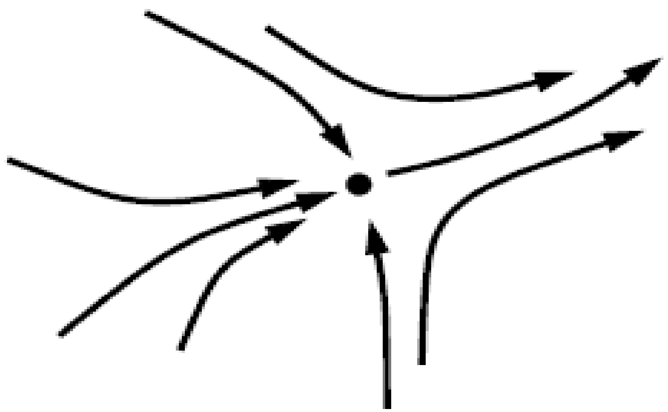


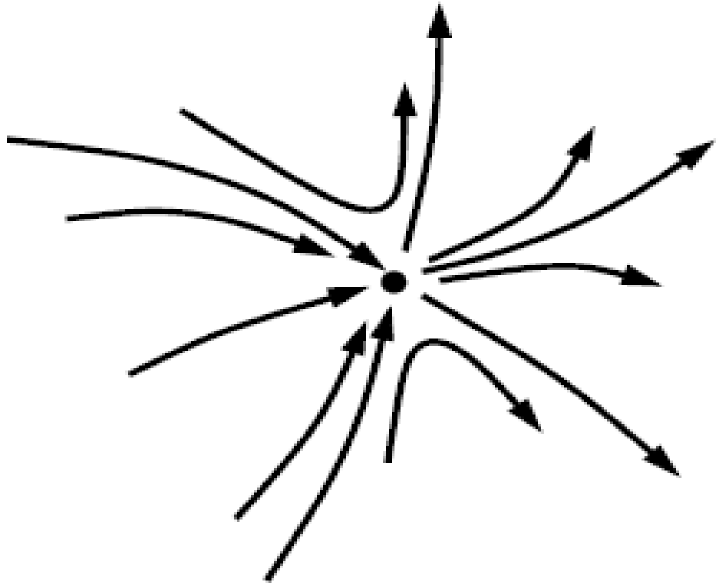
nó repulsor

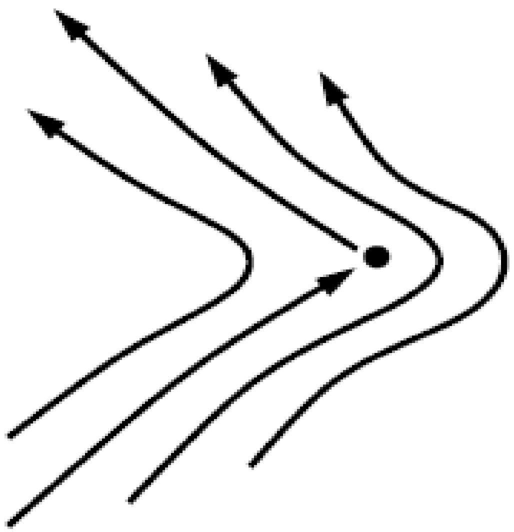


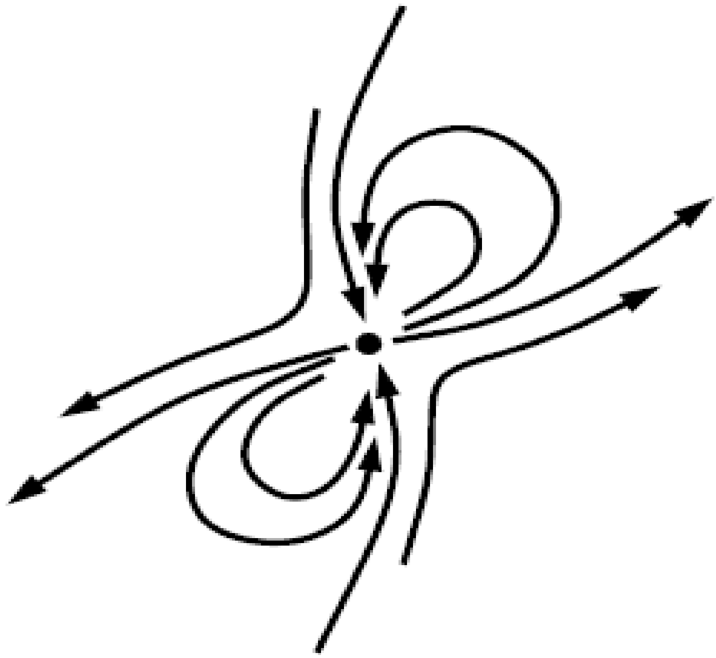
foco repulsor

Exemplos gráficos III









Simulação - sistema não linear

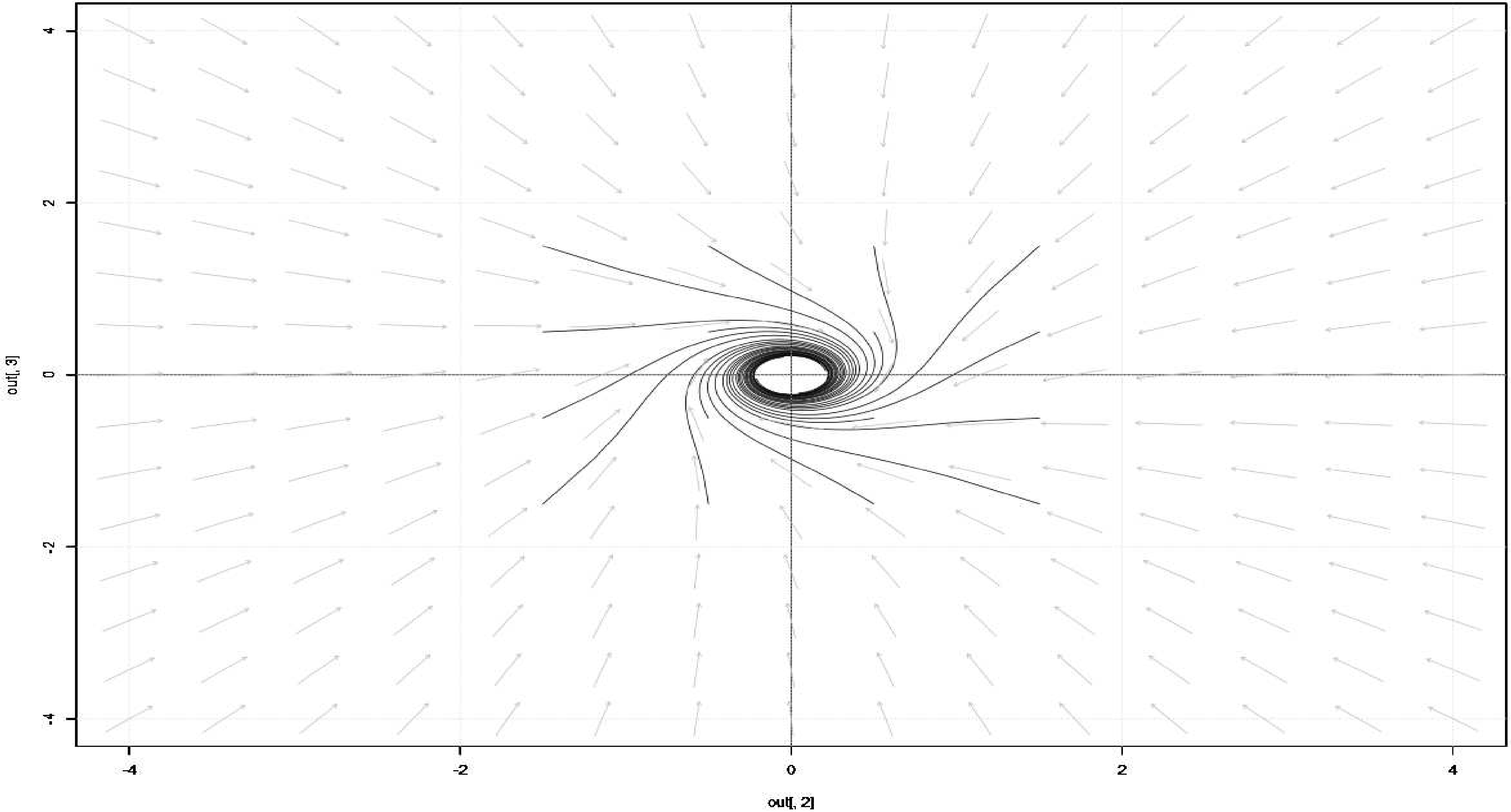
Seja o sistema:

$$x_1' = x_2 - x_1(x_1^2 + x_2^2)$$

$$x_2' = -x_1 - x_2(x_1^2 + x_2^2)$$

Analisemos a sua dinâmica.

Saída da simulação: *focus*



Sistema linear

Se agora consideramos o sistema linear:

```
linsis3 <- function (time, y, parameters) {
    dy1 <- y[1] + y[2]
    dy2 <- 2*y[1] -y [2]
    list( c(dy1, dy2 ) )
} # end
```

Os autovalores do sistema homogêneo são:

$$\lambda_1 = 1.73; \qquad \lambda_2 = -1.73$$

O sistema, com um único ponto fixo é instável e sem ciclos. Porém com condições iniciais tais que $A_1 = 0$, podemos obter uma trajetória estável.

O retrato de fase: *saddle*