Equações em diferença de ordem 2

Cap. 5 Gandolfo

30 de abril de 2019

Equações em diferenças de ordem 2

Uma equação geral de ordem 2 é dada por:

$$y_{t+2} \; + \; a_1 y_{t+1} \; + \; a_0 y_t = g(t) \tag{1}$$

Neste caso, ainda temos que

$$y_t = y_t^h + y_t^p$$

A solução particular ou de equilíbrio de L.P é dada de forma similar à vista para o caso de equações de primeira ordem.

Precisamos ver os aspectos de estabilidade determinando y_t^h.

Solução da eq. homogênea

Inspirados nos casos anteriores, uma forma geral para y_t^h pode ser dada por

$$y_t^h = \lambda^t \neq 0$$

Assim, em (1):

$$\lambda^{t+2} + a_1\lambda^{t+1} + a_0\lambda^t = 0$$

Ou, fatorizando o termo comum λ^t:

$$\lambda^t(\lambda^2 + a_1\lambda + a_0) = 0$$

Assim, há dois valores possíveis para λ, iguais às raízes do polinômio característico da equação:

$$p(\lambda) = \lambda^2 + a_1\lambda + a_0 = 0$$

Equações em diferenças de ordem 2

As raízes do polinômio são dadas por

$$\lambda_1, \lambda_2 = -\frac{a_1}{2} \pm \frac{\sqrt{a_1^2 - 4a_0}}{2}$$

Onde $\Delta = a_1^2 - 4a_0$. Temos três casos possíveis:

1. Raízes reais e diferentes $(\Delta > 0)$;
2. Raízes reais e iguais $(\Delta = 0)$;
3. Raízes complexas $(\Delta < 0)$.

Caso 1: raízes reais e diferentes ($\Delta > 0$)

Sendo as raízes reais e diferentes, y_t^h é dado por

$$y_t^h = A_1\lambda_1^t + A_2\lambda_2^t$$

Por tanto, a solução geral será dada por

$$y_t = A_1\lambda_1^t + A_2\lambda_2^t + y_t^p$$

- Note-se que a solução homogênea é C.L. de todos os termos exponenciais possíveis em função dos valores obtidos para λ.
- A identificação de uma trajetória temporal específica implica no P.V.I.: conhecer dois valores iniciais (y_0, y_1), necessários para especificar as constantes arbitrárias $A_1,\ A_2$.

Estabilidade

A estabilidade do sistema e a presença de oscilações continua a depender de y_t^h. Assim,

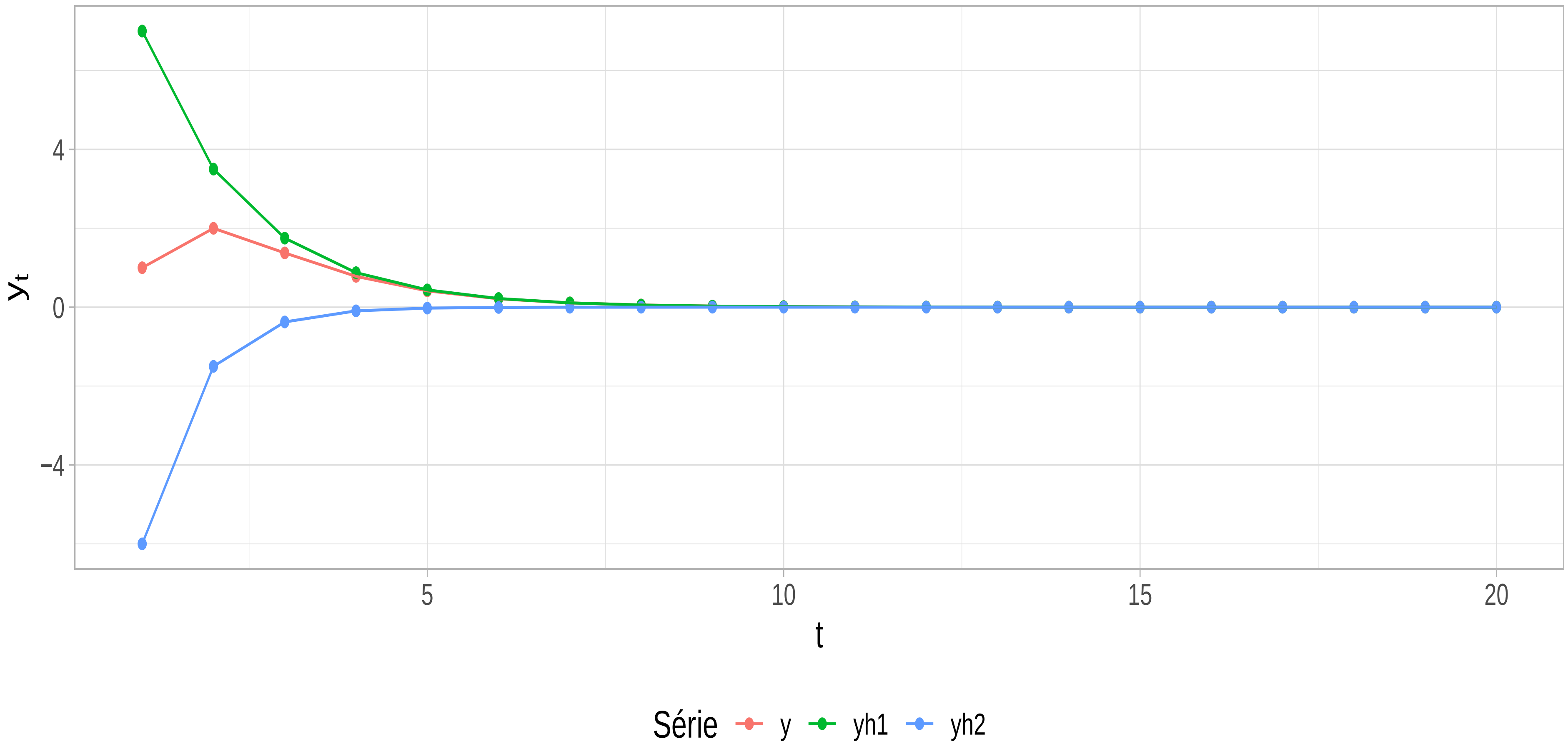
- Para y_t ter uma trajetória estável/amortecida,

$$|\lambda_1| < 1 \quad \mathbf{E} \quad |\lambda_2| < 1$$

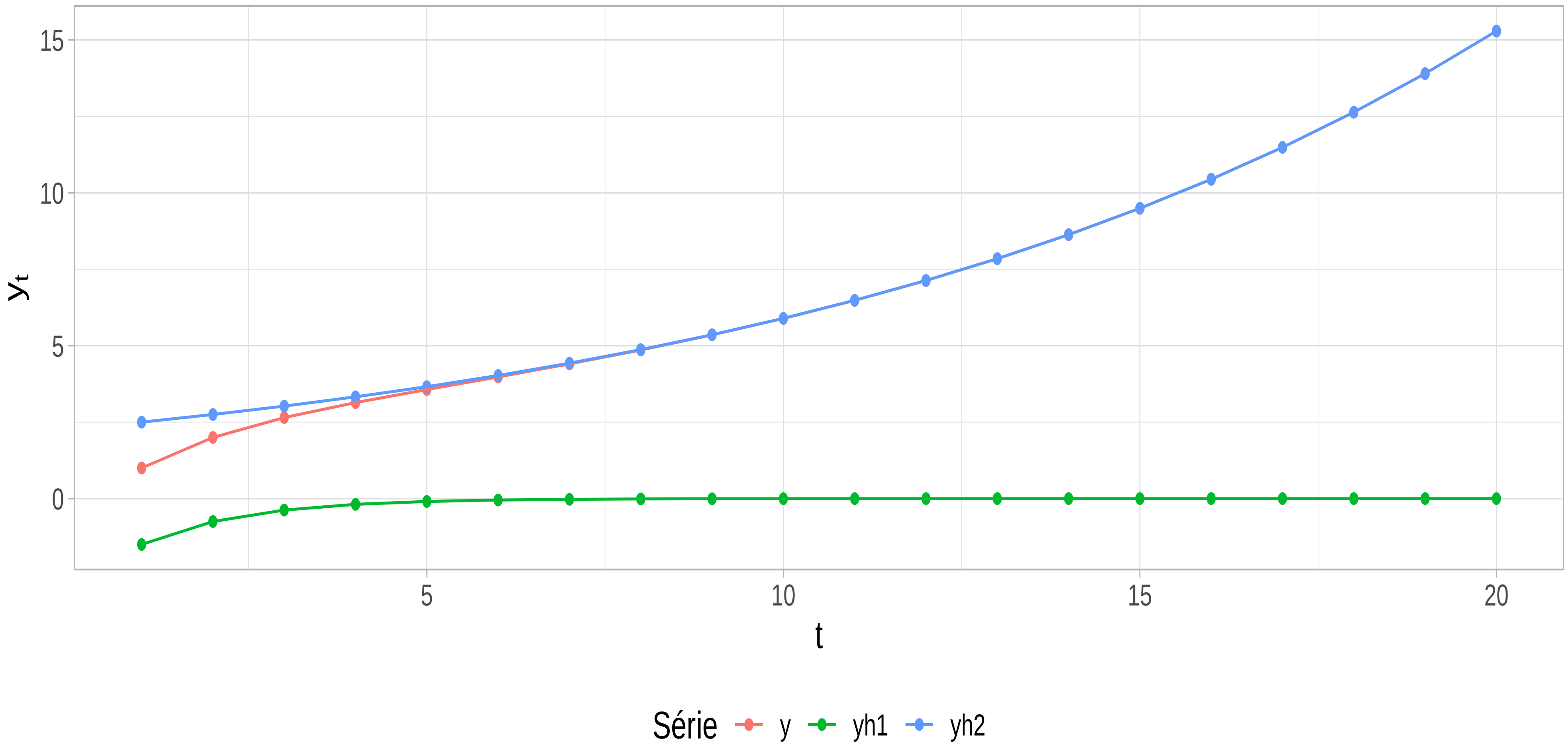
- Se $|\lambda_1| > 1$ **OU** $|\lambda_2| > 1$, a trajetória será instável/explosiva;

- Se $\lambda_1 < 0$ **OU** $\lambda_2 < 0$, então a trajetória apresentará oscilações.

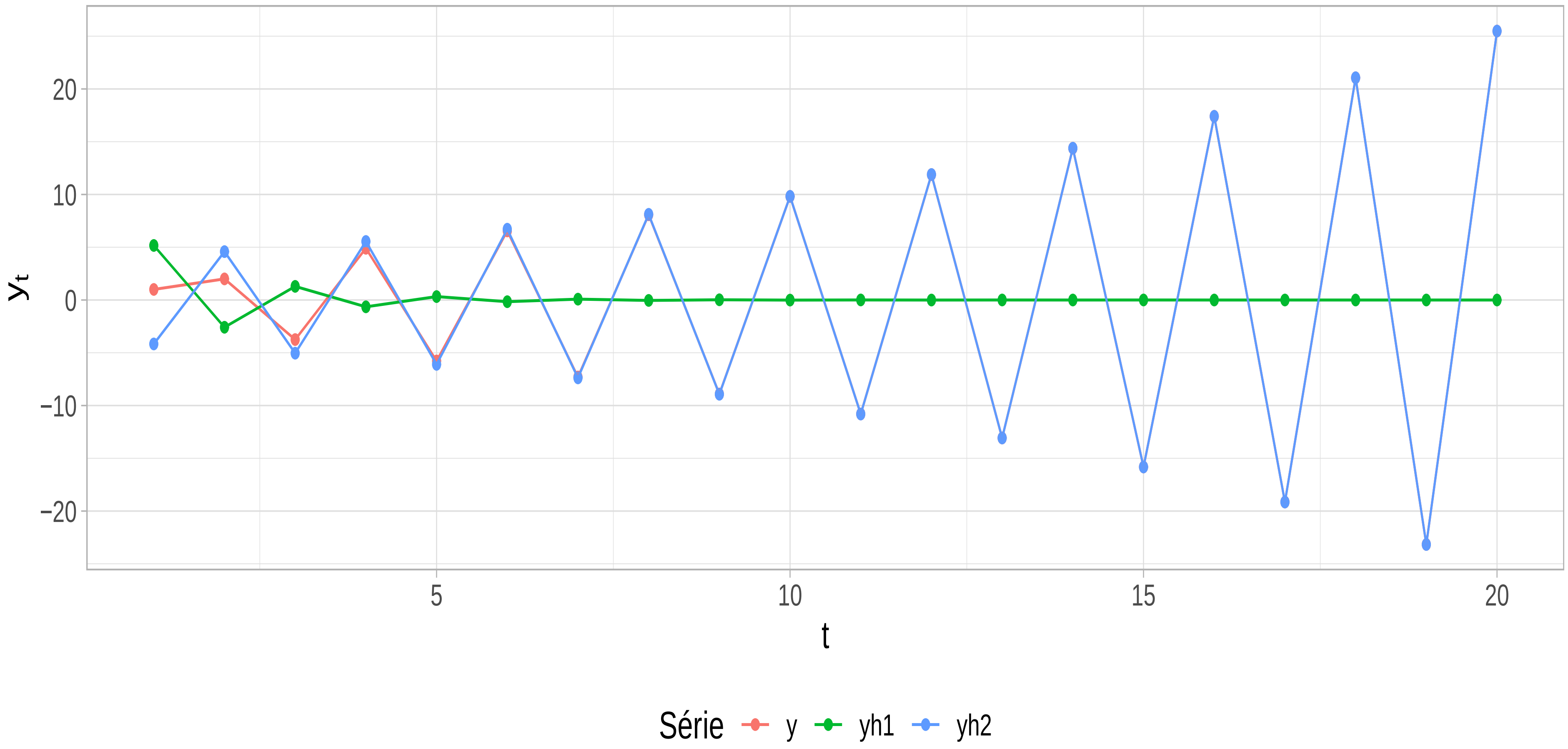
Sistema estável sem oscilações ($\lambda_1 = 0.5, \lambda_2 = 0.25$)



Sistema explosivo ($\lambda_1 = 0.5, \lambda_2 = 1.1$)



Sistema explosivo com oscilações $(\lambda_1 = -0.5, \lambda_2 = -1.1)$



Teorema de Descartes

Em toda equação linear completa ou incompleta, o número de raízes positivas não pode ser maior ao número de mudanças no sinal dos coeficientes. E em toda equação completa o número de raízes negativas não pode exceder o número de vezes que o sinal dos coeficientes se mantém igual:

- $+ + +$ Duas raízes negativas;
- $+ + -$ Uma raíz negativa e uma positiva (negativa maior em módulo);
- $+ - +$ Duas raízes positivas;
- $+ - -$ Uma raíz positiva e uma negativa (positiva maior em módulo);
- $+ 0 -$ Uma raíz positiva e uma negativa (iguais em módulo);

Exercício

Seja a equação em diferença:

$$y_t - 3y_{t-1} + 2y_{t-2} = 0 \qquad y_0 = 1;\ y_1 = -2$$

Usando o R:

1. Determine o polinômio característico e as suas raízes;
2. Determine as constantes arbitrárias;
3. Determine a trajetória temporal.

Teste a sua rotina para a equação:

$$y_t - 0.25y_{t-2} = 0 \qquad y_0 = 1;\ y_1 = 3$$

Para determinar as constantes arbitrárias

Construímos o sistema a partir das condições iniciais. Se a equação tem raízes reais e diferentes:

$$y_t = A_1\lambda_1^t + A_2\lambda_2^t$$

Logo, dadas as condições iniciais y_0 e y_1

$$y_0 = A_1 + A_2$$

$$y_1 = A_1\lambda_1 + A_2\lambda_2$$

Podemos construir um sistema $A \cdot X = B$, onde

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{bmatrix}$$

$$X = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \end{bmatrix}$$

tal que $X = A^{-1} \cdot B$. Vejamos no R.

Caso 2: raízes reais e iguais ($\Delta = 0$)

Sendo as raízes reais e iguais tal que

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda = -\frac{a_1}{2}$$

A solução homogênea é dada por

$$y_t^h = A_1 \lambda^t + A_2 t \lambda^t$$

pois $t\lambda^t$ também é solução da eq. em diferença. A solução geral será dada por

$$y_t = (A_1 + A_2 t)\lambda^t + y_t^p$$

onde A_1 e A_2 são constantes arbitrárias a serem definidas via condições iniciais.

- Condição de estabilidade: $|\lambda| < 1$. Se $\lambda < 0$ há oscilações.

Por exemplo...

$$y_{t+2} - 6y_{t+1} + 9 = 0$$

Vejamos de novo no R.

Caso 3: raízes complexas (e diferentes), $\Delta < 0$

As raízes de $\lambda^2 + a_1\lambda + a_0 = 0$ são dadas por

$$\lambda_1, \lambda_2 = \underbrace{\frac{-a_1}{2}}_{h} \pm i \underbrace{\frac{\sqrt{-\Delta}}{2}}_{v}$$

com $\Delta = a_1^2 - 4a_0 < 0$ e onde

- h é a parte real do número complexo;
- v é a parte imaginária.

Assim,

$$\lambda_1, \lambda_2 = h \pm v \cdot i$$

são raízes complexas conjugadas.

Caso 3: raízes complexas (e diferentes), $\Delta < 0$

Sendo as raízes diferentes, podemos nos inspirar no caso 1 para definir y_t^h

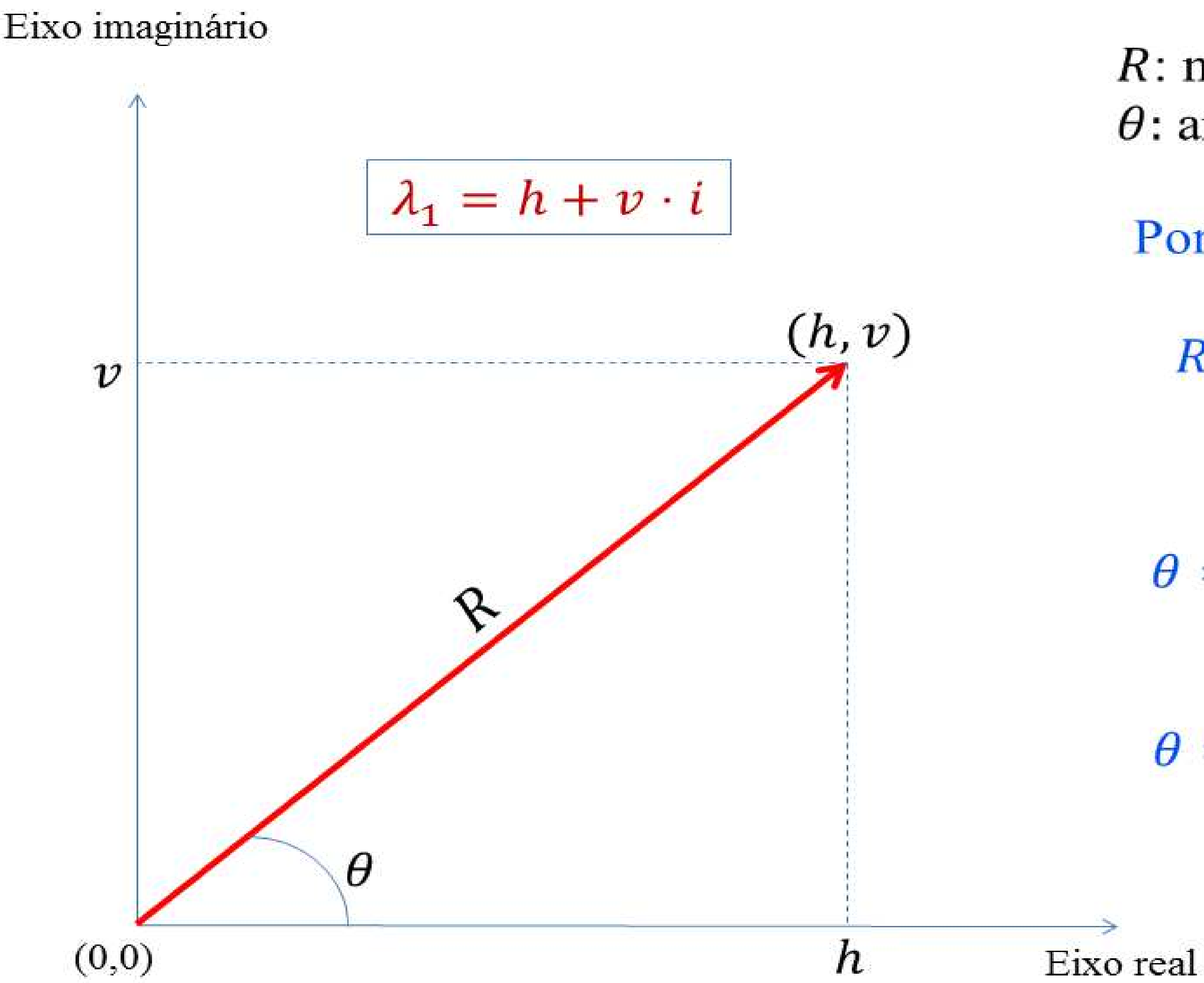
$$y_t^h = A_1 \lambda_1^t + A_2 \lambda_2^t$$

Ou seja

$$y_t^h = A_1 (h + i\, v)^t + A_2 (h - i\, v)^t$$

Tendo potência de complexos, fazemos uso da forma polar de complexos e do teorema de Moivre.

Representação gráfica de um complexo



R: módulo de λ_1
θ: argumento de λ_1

Por Pitágoras:

$$R^2 = h^2 + v^2$$

$$\theta = \arccos\left(\frac{h}{R}\right)$$

$$\theta = \operatorname{arcsen}\left(\frac{v}{R}\right)$$

Forma polar

Do gráfico, podemos reescrever o complexo usando funções trigonométricas, pois:

$$\cos(\theta) = \frac{h}{R} \quad \Rightarrow \quad h = R\cos(\theta)$$

$$\sin(\theta) = \frac{v}{R} \quad \Rightarrow \quad v = R\sin(\theta)$$

Assim, $\lambda_1 = h + vi$ pode ser reescrito como:

$$\lambda_1 = R\cos(\theta) + i\,R\sin(\theta)$$

ou seja

$$h \pm i \cdot v = R[\cos(\theta) \pm i\ \sin(\theta)] \tag{2}$$

que é a **Forma polar**.

Fórmula de Euler

Euler no diz que:

$$e^{\pm i\theta} = \cos(\theta) \pm i\ \sin(\theta) \tag{3}$$

Logo, podemos expressar o número complexo λ usando as relações trigonométricas e a fórmula de Euler:

$$\begin{aligned} \lambda = h \pm vi &= R\{\cos(\theta) \pm i\ \sin(\theta)\} \\ &= R \cdot e^{\pm i\theta} \end{aligned}$$

Teorema de Moivre: Potência de um complexo

Usando Euler, temos que

$$(h \pm iv)^t = (R \cdot e^{\pm i\theta})^t = R^t \cdot e^{\pm i\theta t}$$

Portanto,

$$(h \pm iv)^t = R^t[\cos(\theta t) \pm i \sin(\theta t)] \tag{4}$$

Exemplo

Seja

$$b = 1 \pm i\sqrt{3}$$

Identificamos que $h = 1$ e $v = \sqrt{3}$. Com isso, $R = 2$;

$$\cos(\theta) = h/R = \frac{1}{2}; \quad \sin(\theta) = v/R = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Portanto, $\theta = \pi/3$. Assim, usando a Eq. (4)

$$b^t = 2^t\{\cos(\frac{\pi t}{3}) \pm i\sin(\frac{\pi t}{3})\}$$

$\rightsquigarrow$ Voltando ao Caso 3 de raízes complexas ...

Caso 3: raízes complexas (e diferentes), $\Delta < 0$

$$y_t^h = A_1(h + i\, v)^t + A_2(h - i\, v)^t$$

Por Moivre:

$$y_t^h = A_1[R^t(\cos(\theta t) + i\ \sin(\theta t))] + A_2[R^t(\cos(\theta t) - i\ \sin(\theta t))]$$

Juntando os termos similares e fatorizando R^t

$$y_t^h = R^t\{\underbrace{(A_1 + A_2)}_{A_3}\cos(\theta t) + \underbrace{(A_1 - A_2)i}_{A_4 \in \mathbb{R}}\sin(\theta t)\}$$

E portanto:

$$y_t^h = R^t\{A_3\cos(\theta t) + A_4\sin(\theta t)\}$$

sendo y_t^h real.

Estabilidade

$$y_t^h = R^t[A_3 \cos(\theta t) + A_4 \sin(\theta t)]$$

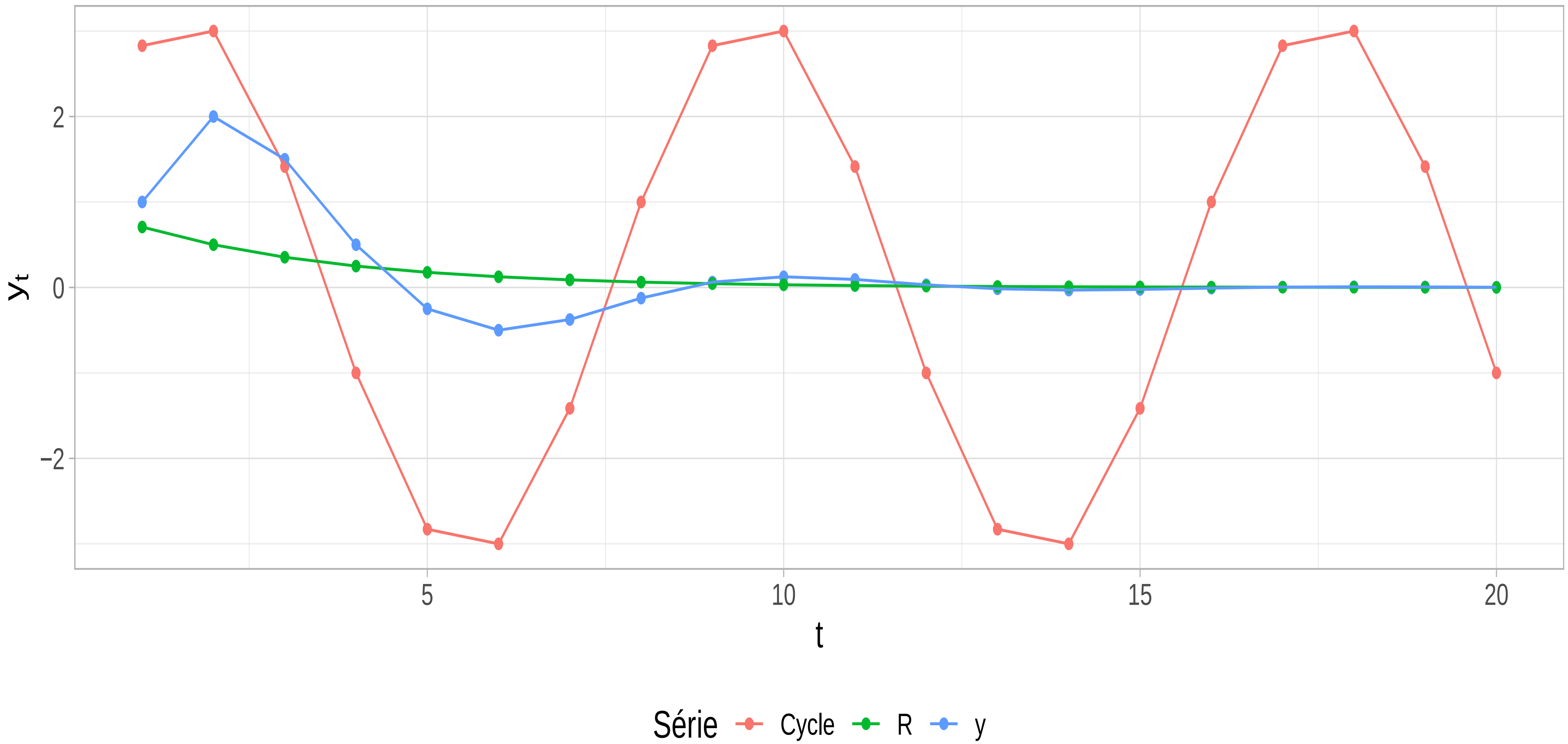
A estabilidade depende do termo

$$R^t$$

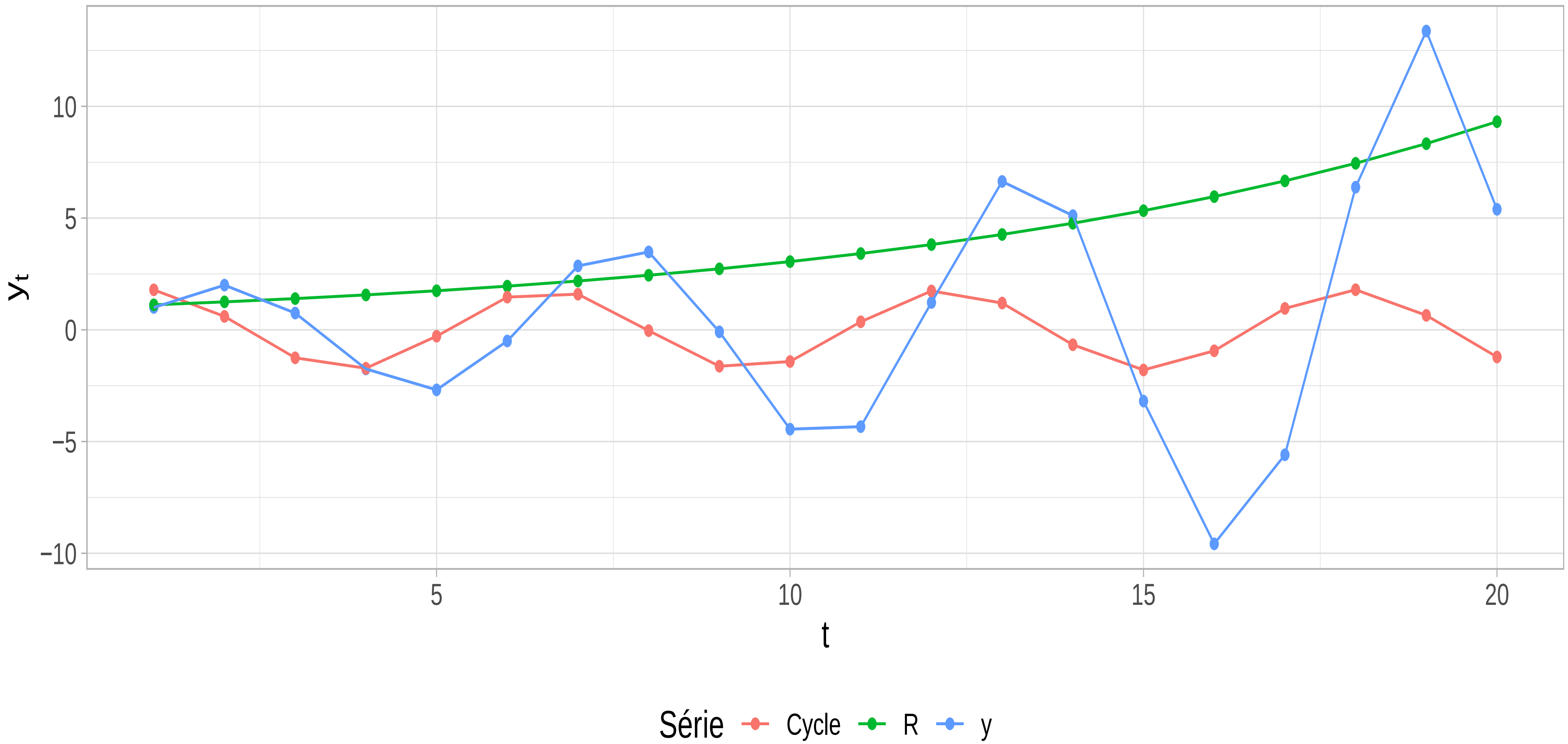
pois as funções $\sin(\omega)$ e $\cos(\omega)$ são limitadas. Assim,

- Se $R < 1$ o sistema será estável;
- Há ciclos.

Sistema estável com ciclos ($\lambda = 1/2 \pm i/2$)



Sistema explosivo com ciclos ($\lambda = 1/2 \pm i$)



Estabilidade em função dos coeficientes

Lembrando que

$$\lambda_1, \lambda_2 = \underbrace{\frac{-a_1}{2}}_{h} \pm i \underbrace{\frac{\sqrt{4a_0 - a_1^2}}{2}}_{v}$$

O módulo R pode ser reescrito como:

$$R^2 = h^2 + v^2 = (-\frac{a_1}{2})^2 + (\frac{\sqrt{4a_0 - a_1^2}}{2})^2$$

$$\Rightarrow R^2 = a_0 \qquad ou \qquad R = \sqrt{a_0}$$

Portanto, para a trajetória ser estável, é necessário que $a_0 < 1$.

Estabilidade em função dos coeficientes

Independente da natureza das raízes, a estabilidade é garantida quando

$$|\lambda_1| < 1 \quad \text{e} \quad |\lambda_2| < 1$$

A partir do polinômio característico

$$\lambda^2 + a_1\lambda + a_0 = 0$$

É possível estabelecer condições de estabilidade para o caso de raízes reais a partir da análise dos coeficienes.

Condições

A partir de

$$\lambda_1, \lambda_2 = \frac{-a_1}{2} \pm \frac{\sqrt{a_1^2 - 4a_0}}{2}$$

O caso mais simples é quando $\Delta = a_1^2 - 4a_0 = 0$. Ou seja,

$$a_0 = \frac{a_1^2}{4}$$

que relaciona os coeficientes por meio de uma parábola. Ainda, $\lambda_{1,2} = -a_1/2$. Logo, a única condição de estabilidade neste caso é

$$|\lambda| < 1 \quad \Rightarrow \quad -1 < -a_1/2 < 1$$

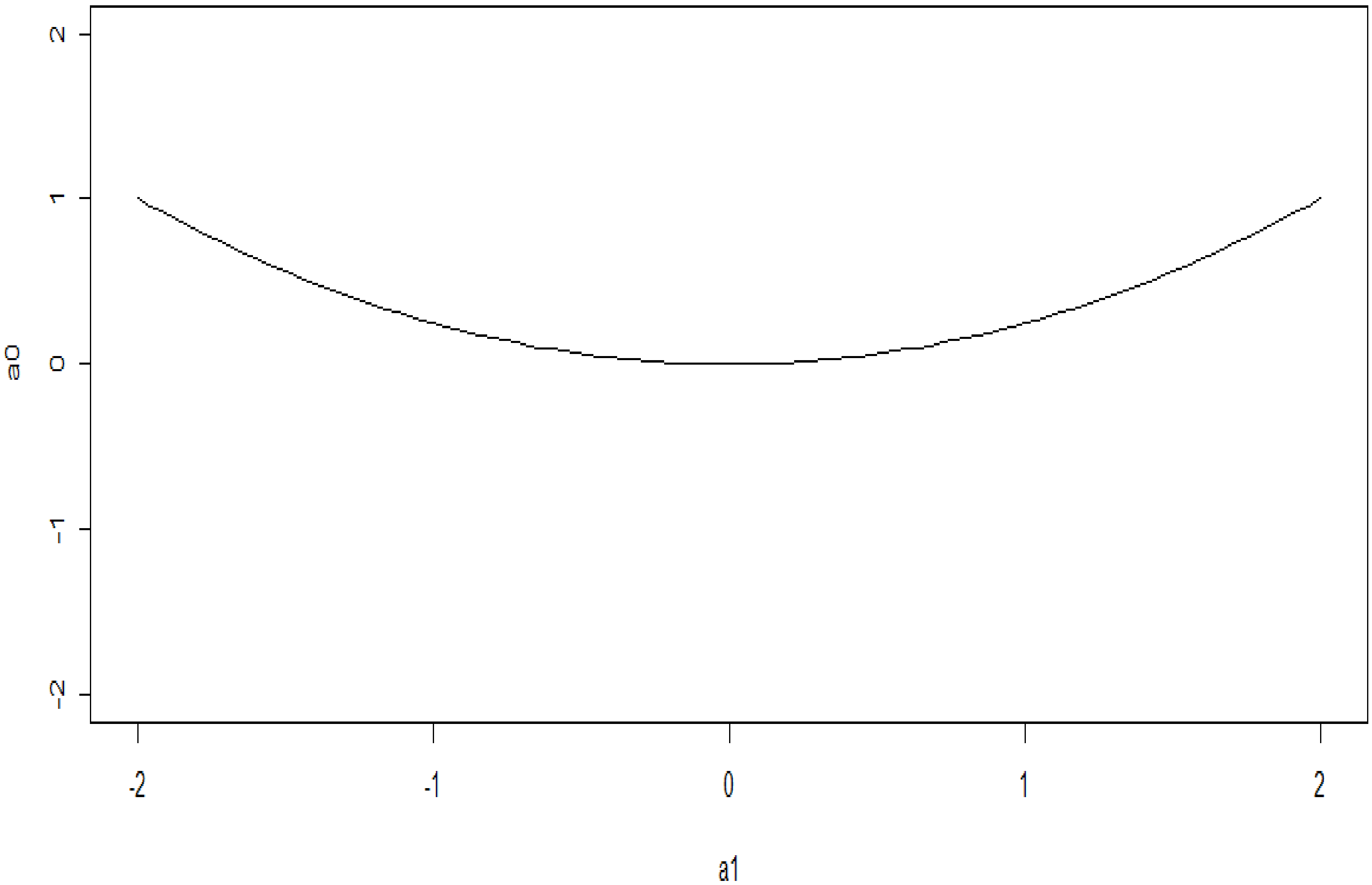
ou

$$-2 < a_1 < 2$$

Na parábola: $a_0 = a_1^2/4 < 1$. Logo:

$$a_0 < 1 \quad ou \quad 1 - a_0 > 0$$

Graficamente



Condições (2)

No caso em que $\Delta = a_1^2 - 4a_0 > 0$, temos que

$$\left|\frac{-a_1}{2} \pm \frac{\sqrt{\Delta}}{2}\right| < 1$$

Ou

$$-1 < \frac{-a_1}{2} \pm \frac{\sqrt{\Delta}}{2} < 1$$

$$-2 < -a_1 \pm \sqrt{\Delta} < 2$$

$$a_1 - 2 < \pm \sqrt{\Delta} < a_1 + 2$$

Condições (3)

$$a_1 - 2 < \pm \sqrt{\Delta} < a_1 + 2$$

Separando os sinais

$$a_1 - 2 < +\sqrt{\Delta} < a_1 + 2$$

e

$$a_1 - 2 < -\sqrt{\Delta} < a_1 + 2$$

Além disso, $-\sqrt{\Delta} < 0 < \sqrt{\Delta}$. Logo, juntando

$$a_1 - 2 < -\sqrt{\Delta} < 0 < \sqrt{\Delta} < a_1 + 2$$

Condições (4)

$$a_1 - 2 < -\sqrt{\Delta} < 0 < \sqrt{\Delta} < a_1 + 2$$

Elevando ao quadrado:

1. Pela esquerda:

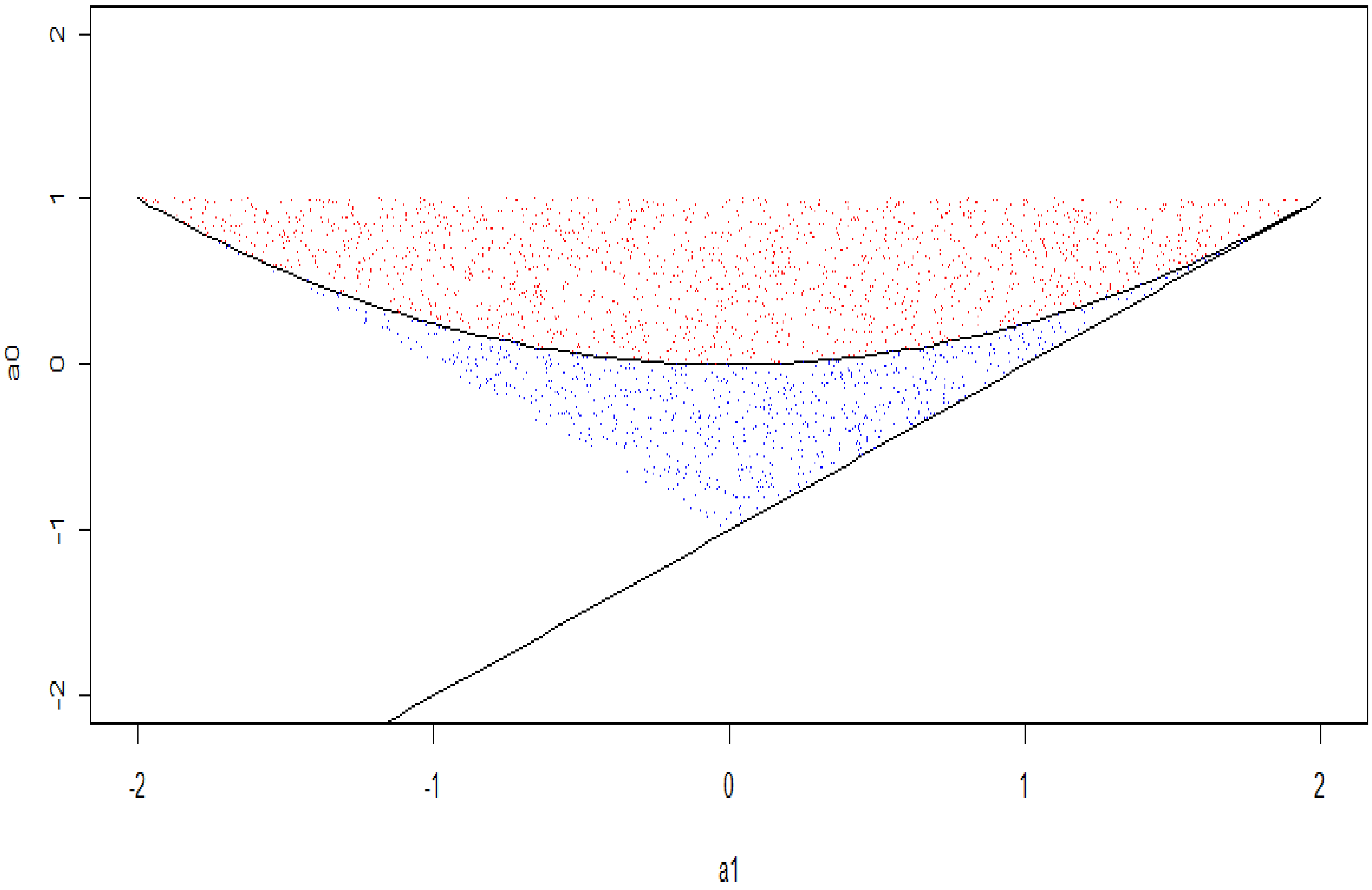
$$(a_1 - 2)^2 > \Delta = a_1^2 - 4a_0$$

   Desenvolvendo o quadrado à esquerda e simplificando:

$$a_0 > a_1 - 1$$

Lembrando também que $\Delta = a_1^2 - 4a_0 > 0$. Logo, $a_0 < a_1^2/4$. Ou seja, os pares (a_1, a_0) que atendem à condição devem estar abaixo da parábola (pontos em azul).

Graficamente



Condições (5)

$$a_1 - 2 < -\sqrt{\Delta} < 0 < \sqrt{\Delta} < a_1 + 2$$

Elevando ao quadrado:

2. Pela direita:

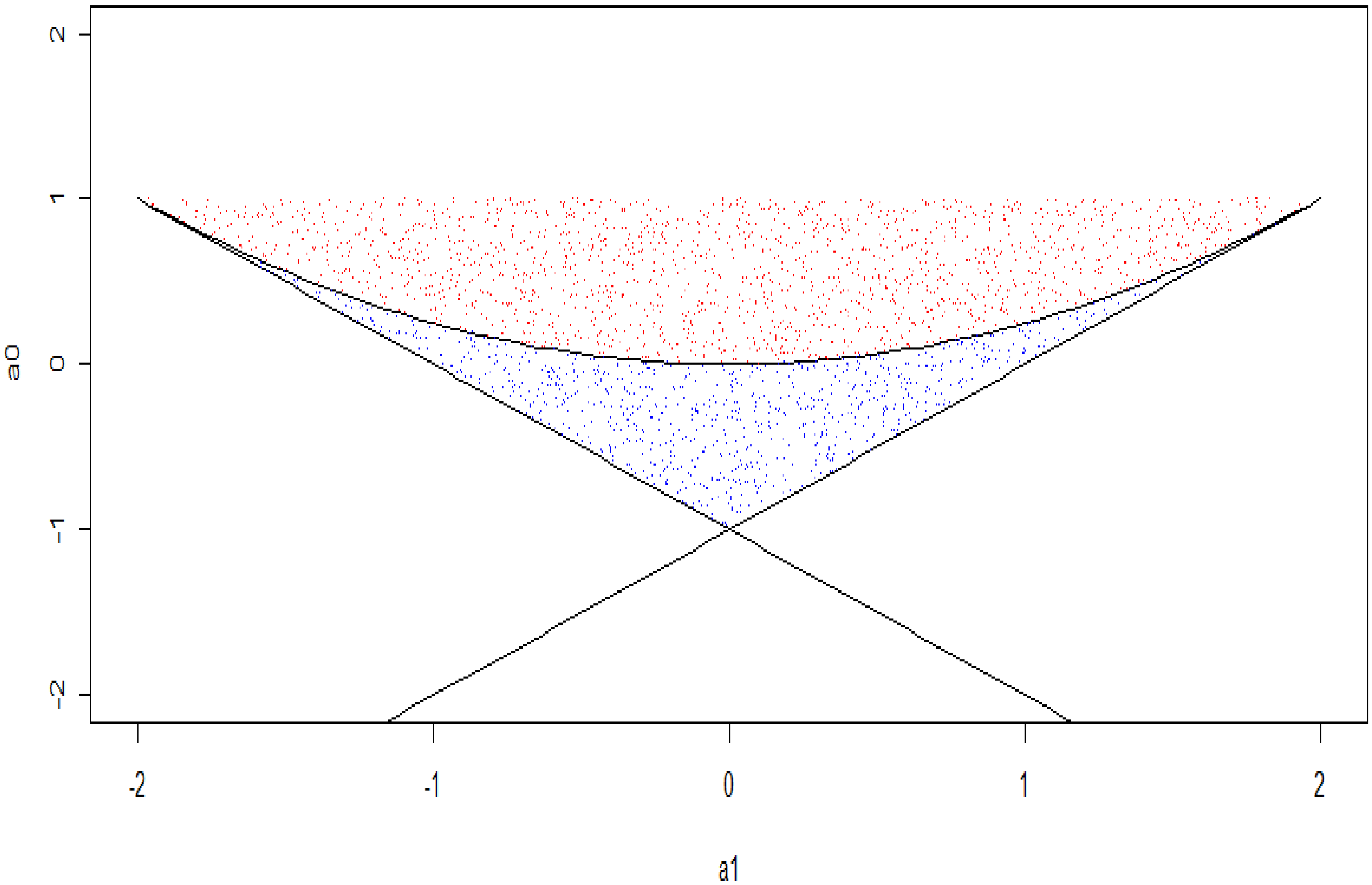
$$\Delta = a_1^2 - 4a_0 < (a_1 + 2)^2$$

Desenvolvendo o quadrado à esquerda e simplificando:

$$a_0 > -a_1 - 1$$

Lembrando também que $\Delta = a_1^2 - 4a_0 > 0$. Logo, $a_0 < a_1^2/4$. Ou seja, os pares (a_1, a_0) que atendem à condição devem estar abaixo da parábola (pontos em azul).

Graficamente



Condições (6)

O último caso é quando $\Delta = a_1^2 - 4a_0 < 0$, quando temos raízes complexas.

Como vimos, a estabilidade depende do módulo $R = \sqrt{a_0}$. Logo, a única condição é tal que

$$a_0 < 1$$

que é uma condição que já está contemplada no gráfico. Ainda, devemos lembrar que $\Delta = a_1^2 - 4a_0 < 0$. Logo, $a_0 > a_1^2/4$
Ou seja, os pares (a_1, a_0) que atendem à condição devem estar acima da parábola (pontos em vermelho).

Resumo: estabilidade em função dos coeficientes

As condições para a estabilidade de L.P. em função dos coeficientes da eq. são:

$$1 + a_1 + a_0 > 0 \tag{5}$$

$$1 - a_1 + a_0 > 0 \tag{6}$$

$$1 - a_0 > 0 \tag{7}$$

Exercícios - Gandolfo

Usando o R, analise e determine a trajetória temporal das seguintes equações:

1. $y_t - 0.8y_{t-1} + 2.4y_{t-2} = 100$
2. $y_{t+2} - 3y_{t+1} + 2y_t = 0; \;\; y_0 = 2, \; y_1 = 3$
3. $y_{t+2} - 6y_{t+1} + 9y_t = 0; \;\; y_0 = 3, \; y_1 = 2$

Método operacional

Seja a eq. em diferença:

$$y_t + a_1 y_{t-1} + a_0 y_{t-2} = X_t \tag{8}$$

A solução particular é dada por

$$y_t^p = \frac{X_t}{1 + a_1 L + a_0 L^2}$$

onde L é o operador atraso. Se $F = L^{-1}$ (operador inverso), então

$$1 + a_1 L + a_0 L^2 = L^2 (F^2 + a_1 F + a_0)$$

Note que as raízes de $F^2 + a_1 F + a_0 = 0$ são as raízes do pol. característico da eq homogênea de (8). Assim,

$$1 + a_1 L + a_0 L^2 = L^2 (F - \lambda_1)(F - \lambda_2)$$

Método operacional

$$1 + a_1 L + a_0 L^2 = L^2 (F - \lambda_1)(F - \lambda_2)$$

Reescrevendo:

$$\begin{aligned} 1 + a_1 L + a_0 L^2 &= (LF - \lambda_1 L)(LF - \lambda_2 L) \\ &= (1 - \lambda_1 L)(1 - \lambda_2 L) \end{aligned}$$

Assim

$$\frac{1}{1 + a_1 L + a_0 L^2} = \frac{\theta_1}{1 - \lambda_1 L} + \frac{\theta_2}{1 - \lambda_2 L}$$

Método operacional

Resolvendo, os valores de θ_1 e θ_2 são determinados. Assim,

$$y_t^p = \sum_{r=1}^{2} \frac{\theta_r}{(1 - \lambda_r L)} X_t$$

Usando a expansão de $(1 - \lambda_r L)^{-1}$, caso o sistema seja estável, podemos fazer uso da solução *backward*:

$$y_t^p = \sum_{r=1}^{2} \theta_r \sum_{i=0}^{\infty} \lambda_r^i X_{t-i}$$

A expansão a usar dependerá da natureza de cada raíz.