# Equações em diferenças no R

*Ivette Luna*

*14 de maio de 2019*

## Contents

## Equação em diferença de ordem 2 - o Modelo de Hansen-Samuelson

Em função das hipóteses colocadas, o modelo econômico é dado pelas equações:

$$
\begin{aligned}
C_t &= bY_{t-1} \\
I_t &= k(C_t - C_{t-1}) \\
G_t &= G > 0 \\
Y_t &= C_t + I_t + G_t
\end{aligned}
$$

onde:

- $b \in (0, 1)$: propensão marginal a consumir;
- $k$: coeficiente de aceleração;

Substituindo as três primeiras equações na última, obtemos uma equação em diferença de ordem 2

$$Y_t - b(k+1)Y_{t-1} + bkY_{t-2} = G$$

podendo assim, analisar o comportamento da renda nacional e por substituição, de $C_t$ e de $I_t$.

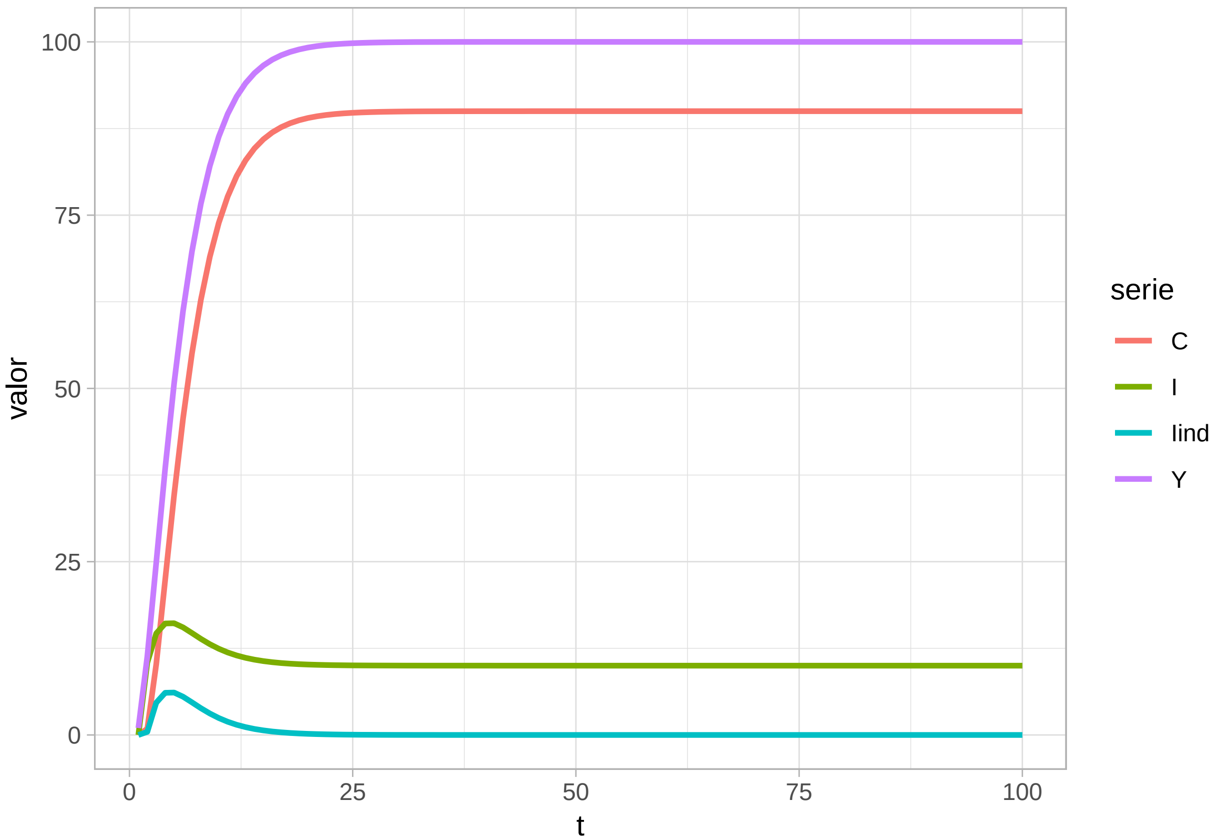
```r
b = 0.9 # propensao marginal a consumir
k = 0.5 # acelerador do investimento
G = 10  # gastos publicos (consumo autonomo)
tmax = 100

Y <- rep(0, tmax)
C <- rep(0, tmax)
Iind <- rep(0, tmax)
I <- rep(0, tmax)

Y[1] = 1 #rendanacional


# simulando as quatro equacoes do model

for (t in 2:tmax){

        C[t] = b*Y[t-1] # consumo das familias

        Iind[t] = k*(C[t] - C[t-1])

        I[t] = Iind[t] + G

        Y[t] = C[t] + I[t]


}

t = seq(1, tmax, 1)
```

Para analisar as séries geradas, fazemos uso de data frames e dos pacotes `ggplot2` e `tidyr`

```r
library(ggplot2)
library(tidyr)

series <- data.frame(t, C, Iind, I, Y)

series_tidy <- gather( series, -t, key = "serie", value = "valor"  )

names(series_tidy)
```

```
## [1] "t"      "serie" "valor"
```

```r
ggplot(series_tidy, aes(x=t, y = valor, group=serie, color = serie) ) +

  geom_line(size=1) +

  theme_light()
```




### Análise dinâmica

Para realizar a análise dinâmica, precisamos avaliar as raízes do polinômio característico:

$$p(\lambda) = \lambda^2 + a_1\lambda + a_0 = 0$$

onde

$$a_2 = 1$$

$$a_1 = -b(k+1)$$

$$a_0 = bk$$

lembrando que as condições para uma análise qualitativa são:

$$1 + a_1 + a_0 > 0$$
$$1 - a_1 + a_0 > 0$$
$$a_0 < 1$$

```r
a2 = 1
a1 = -b*(k+1)
a0 = b*k


# analisando as condicoes
cond1 = 1 + a1+a0 >0
cond2 = 1-a1+a0 >0
cond3 = a0<1

conds = cond1 & cond2 & cond3

if (conds){

  print("Trajetória estável")
} else {
  print("Trajetória instável")

}
```

```
## [1] "Trajetória estável"
```

```r
coefs = c(a0, a1, a2)

# calculando o discriminante
delta = a1^2 -4*a2*a0
delta
```

```
## [1] 0.0225
```

```r
raizes = polyroot(coefs)

raizes
```

```
## [1] 0.60+0i 0.75-0i
```

```r
if (delta >=0){
        raizes_reais <- Re( raizes )
        raizes_reais

        cat("Raízes reais: ", raizes_reais)
} else{

```

```
        R <- Mod(raizes[1])
        R
        cat("Raízes complexas com módulo ", R)

}
```

```
## Raízes reais:  0.6 0.75
```

## Equações em diferença de ordem superior

Nestes casos a solução é dada pela combinação das soluções de acordo com a natureza de cada raíz.

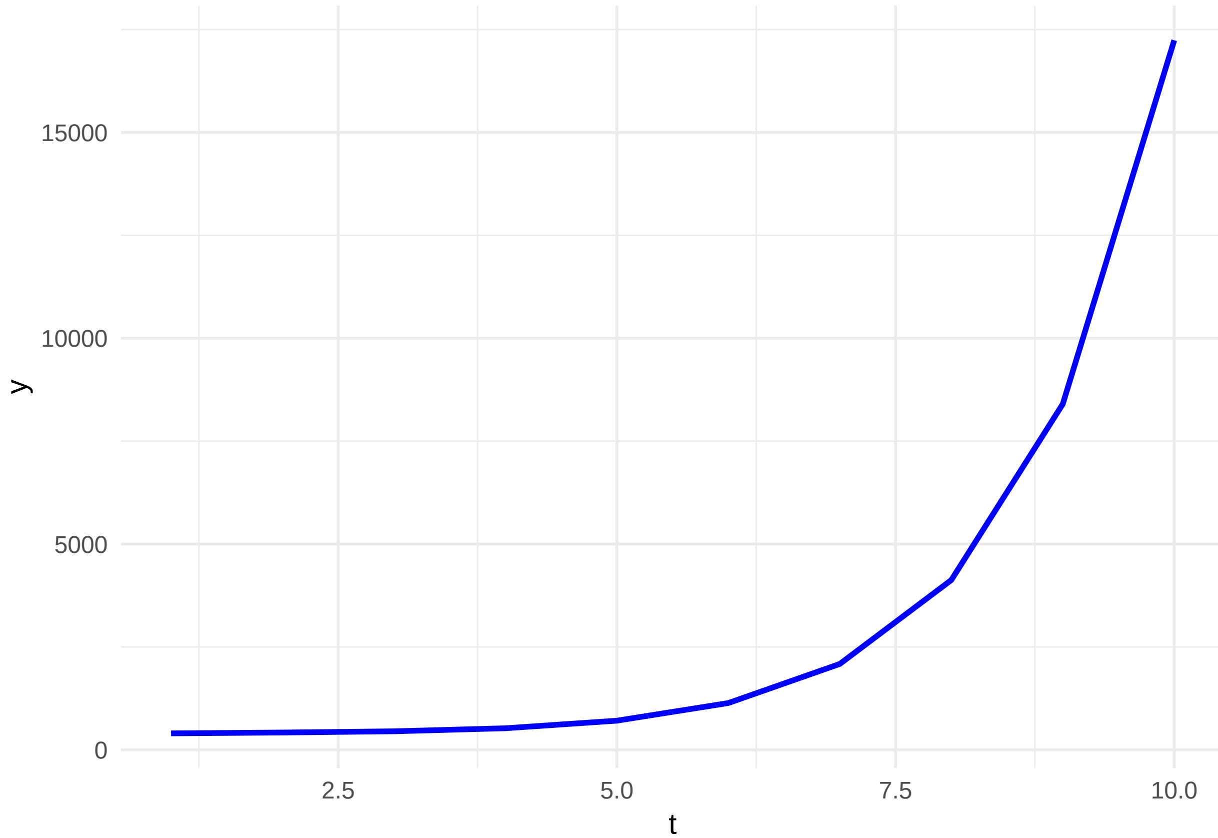
### Exercício 1

Por exemplo, a equação em diferenças

$$y_{t+3} - 4y_{t+2} + 4.8y_{t+1} - 1.6y_t = 100$$

possuirá três raízes características. Simulando, notamos que a série $y_t$ apresenta uma trajetória explosiva não oscilatória e sem ciclos. Logo, as raízes serão reais e positivas e haverá ao menos uma raíz com módulo maior que a unidade.

```
a3 = 1
a2 = -4
a1 = 4.8
a0 = -1.6

g = 100

tmax = 10
y = rep(0, tmax)
y[1] = 400 # y0
y[2] = 420 # y1
y[3] = 450 # y2

for (t in 4:tmax){
        y[t] = -a2*y[t-1] - a1*y[t-2] - a0*y[t-3] + g
}

t = seq(1, tmax, 1)

series = data.frame(t, y)

ggplot(series, aes(x=t, y=y)) +

  geom_line(size=1, colour="blue") +

  theme_minimal()
```




Analisando as raízes:

```
# analisando as raizes do polnomio caracteristico
coefs<- c(a0, a1, a2, a3)

raizes <- polyroot( coefs )
Re(raizes)
```

```
## [1] 0.5527864 1.4472136 2.0000000
```

```
if ( any(abs(raizes)>1) ){
        print("Serie instável")
} else {
        print("Serie estável")
}
```

```
## [1] "Serie instável"
```

```
# o steady state

yp = g/(a0+a1+a2+a3)
yp
```

```
## [1] 500
```

Notamos que há duas raízes unitárias, o que torna a série uma série explosiva. Logo, o ponto fixo é um repulsor. A solução explícita será dada pela combinação linear dos termos exponenciais tal que

$$y_t = A_1 \cdot 0.5528^t + A_2 \cdot 1.4472^t + A_3 \cdot 2^t + 500$$

e com as três condições iniciais, determinamos as constantes arbitrárias $A_1$, $A_2$ e $A_3$, por meio do sistema determinado resultante da substituição de $y_0, y_1, y_2$ para $t = 0, 1, 2$ na solução explícita:

```
lambda1 = Re( raizes[1] )
lambda2 = Re( raizes[2] )
lambda3 = Re( raizes[3] )

# t=0
# A1 + A2 + A3 + yp = y[1]

# t=1
# A1*lambda1 + A2*lambda2 + A3*lambda3 + yp = y[2]

# t=2
# A1*lambda1^2 + A2*lambda2^2 + A3*lambda3^2 + yp = y[3]

v = c(1, lambda1, lambda1^2, 1, lambda2, lambda2^2, 1, lambda3, lambda3^2)

A = matrix(v , ncol=3)

B = y[1:3]-yp

X = solve(A,B)
X
```

```
## [1] -49.18441 -88.31559  37.50000
```

## Exercício 2

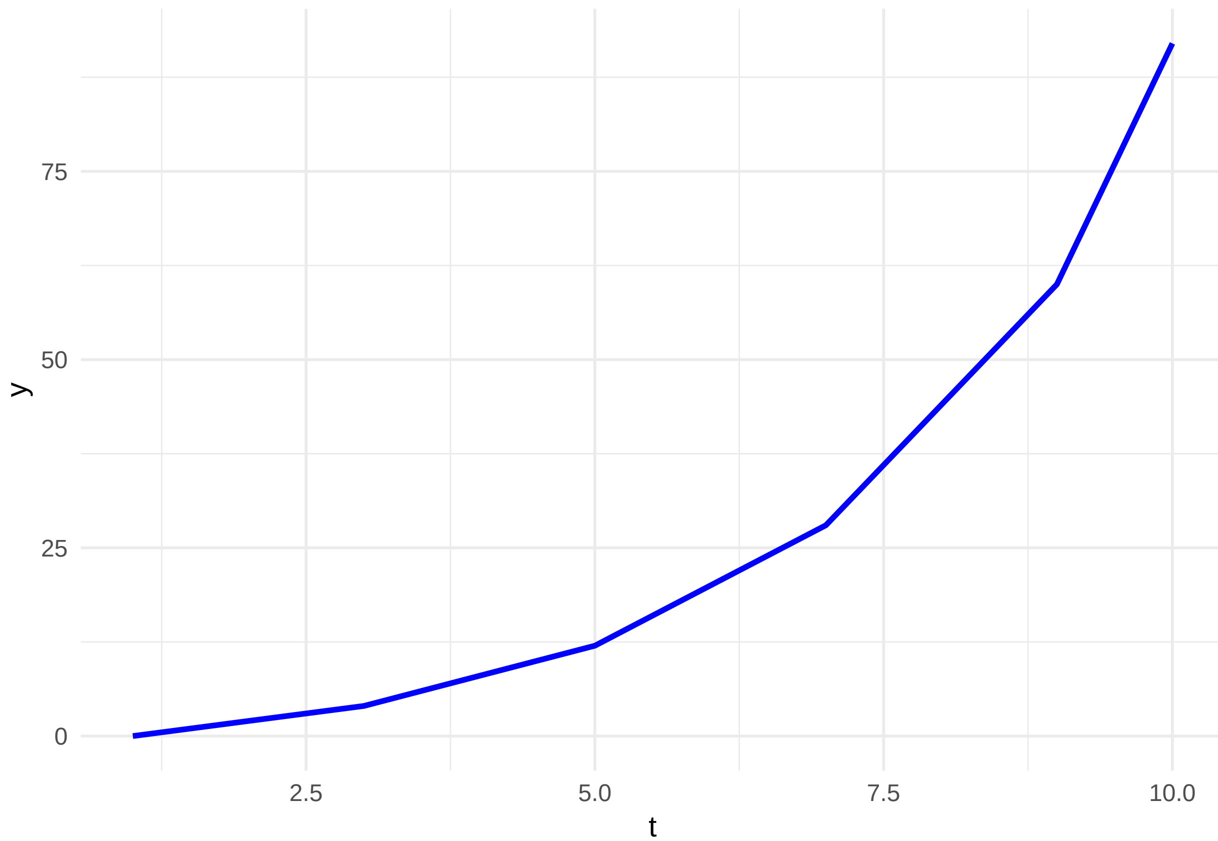
Em um segundo caso,

$$y_{t+3} - y_{t+2} - 2y_{t+1} + 2y_t = 0$$

temos novamente uma série divergente e sem oscilações nem ciclos, o que indica a presença de raízes reais e ao menos uma raíz unitária.

```
rm(list=ls(all.names = TRUE))

a3 = 1
a2 = -1
a1 = -2
a0 = 2

g = 0

tmax = 10
y = rep(0, tmax)

y[1] = 0
y[2] = 2
y[3] = 4 # tentar com 1 ou 4

for (t in 4:tmax){
        y[t] = -a2*y[t-1] - a1*y[t-2] - a0*y[t-3] + g
```

```r
}

t = seq(1, tmax, 1)

series = data.frame(t, y)

ggplot(series, aes(x=t, y=y)) +

  geom_line(size=1, colour="blue") +

  theme_minimal()
```




Analisando as raízes:

```r
# analisando as raizes do polnomio caracteristico
coefs<- c(a0, a1, a2, a3)

raizes <- polyroot( coefs )
Re(raizes)
```

```
## [1]  1.000000 -1.414214  1.414214
```

temos uma raíz com módulo unitário e outras duas raízes com módulo maior que a unidade, além de uma raíz negativa. Logo, pela raíz negativa ser maior que a unidade em módulo, teremos oscilações explosivas. Mas esas oscilaçõse não aparecem no gráfico? Haveria uma explicação?

Podemos tentar uma nova simulação, desta vez considerando `y[3]=1`. Há alguma mudança? Observe os valores das constantes arbitrárias dada essa mudança na condição inicial.

```r
lambda1 = Re( raizes[1] )
lambda2 = Re( raizes[2] )
lambda3 = Re( raizes[3] )

# t=0
# A1 + A2 + A3  = y[1]

# t=1
# A1*lambda1 + A2*lambda2 + A3*lambda3  = y[2]

# t=2
# A1*lambda1^2 + A2*lambda2^2 + A3*lambda3^2  = y[3]

v = c(1, lambda1, lambda1^2, 1, lambda2, lambda2^2, 1, lambda3, lambda3^2)

A = matrix(v , ncol=3)

B = y[1:3]

X = solve(A,B)
X # constantes arbitrarias A1, A2 e A3
```

```
## [1] -4.0000000 -0.1213203  4.1213203
```