Sistemas de equações em diferenças
Cournot e Markov

(Cap 10 Gandolfo)

Ivette Luna

03 de junho de 2019

Simulação: Oligopólio de Cournot

Sejam n as firmas em um mercado oligopolístico de produto homogêneo, em que as firmas são maximizadoras de lucro, com curvas de demanda e custos lineares tal que a elasticidade preço da demanda e os custos marginais são constantes.
A curva de demanda:

$$p_t = a - b \sum_{i=1}^{n} x_{it}$$

onde x_{it} é a produção da $i-$ésima firma no período t; $a, b > 0$. A curva linear de custos é tal que

$$C_{it} = d + c_i x_{it}$$

em que $d, c_i > 0$.

Uma configuração básica do modelo de Cournot consiste em assumir que as firmas tem como *crença* que a produção das concorrentes no próximo período será igual à observada no período atual. Assim,

$$p_{t+1}^{i} = a - b(x_{it+1} + \sum_{j \neq i}^{n} x_{jt})$$

Sendo as firmas maximizadoras de lucro

$$\begin{aligned} \pi_{t+1}^{i} &= p_{t+1}^{i} x_{it+1} - C_{it+1} \\ &= a x_{it+1} - b x_{it+1}^{2} - b x_{it+1} \sum_{j \neq i}^{n} x_{jt} - C_{it+1} \end{aligned}$$

O nível de produção que maximiza o lucro em $t + 1$ atende às condições de otimalidade.

$$\pi^i_{t+1} = ax_{it+1} - bx^2_{it+1} - bx_{it+1}\sum_{j\neq i}^{n} x_{jt} - C_i$$

- Condição de primeira ordem: $\partial\pi^i_{t+1}/\partial x_{it+1} = 0$

$$\Rightarrow a - 2bx_{it+1} - b\sum_{j\neq i}^{n} x_{jt} - c_i = 0$$

Assim, para cada firma:

$$x_{it+1} = -\frac{1}{2}\sum_{j\neq i}^{n} x_{jt} + \frac{a - c_i}{2b}$$

- Condição de segunda ordem: Para que o ponto crítico seja máximo

$$\partial^2\pi^i_{t+1}/\partial x^2_{it+1} < 0$$

o que é atendido pois

$$\frac{\partial^2\pi^i_{t+1}}{\partial x^2_{it+1}} = -2b < 0$$

Duopólio

Neste caso $n = 2$ e para $i = 1, 2$:

$$x_{1t+1} = -\frac{1}{2}x_{2t} + \frac{a - c_1}{2b}$$

$$x_{2t+1} = -\frac{1}{2}x_{1t} + \frac{a - c_2}{2b}$$

Trata-se de um sistema não homogêneo de 2×2, com matriz A de coeficientes e de termo independente B

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1/2 \\ -1/2 & 0 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} (a - c_1)/2b \\ (a - c_2)/2b \end{bmatrix}$$

Os autovalores de A são

$$\lambda_1 = +1/2 \qquad \lambda_2 = -1/2$$

Portanto, trata-se de um sistema estável, com trajetórias que tendem ao nível de equilíbrio dado por $(I - A)^{-1}B$. E para $n > 2$?

Na simulação

1. Definir o número de firmas n e o número de períodos ($iters$);
2. Definir os parâmetros do modelo: a, b, d fixos; $c_i \in (0, 1)$;
3. Definir as variáveis necessárias x, A, B;
4. Definir as condições iniciais de x e a regra de variação.

No R ...

Modelos de Markov

- Um processo de Markov é um processo estocástico em que a probabilidade do sistema estar no estado j no período $t+1$ depende somente do estado em que o sistema esteve no período t; só interessa o passado imediato.

- Os principais elementos de um processo Markoviano são:

  a) a probabilidade p_t^j de ocorrer o estado j no t-ésimo período de tempo e

  b) as probabilidades de transição m_{ij}, ou seja, as probabilidades com que o processo estará no estado j no tempo $t+1$ se estiver no estado i no tempo t.

Modelos de Markov (2)

- As probabilidades de transição são agrupadas na matriz de transição ou matriz estocástica de Markov

$$M = \begin{bmatrix} m_{11} & \dots & m_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{k1} & \dots & m_{kk} \end{bmatrix}$$

  onde o primeiro subscrito associa-se ao período em t e o segundo subscrito indexa o período $t + 1$.

- Assim, $m_{ij} \geq 0$ é a probabilidade condicional com que o sistema estará no estado j no próximo período, dado que o período atual está no estado i.

- Logo, a soma dos m_{ij} sobre j - ou seja, a soma dos elementos de cada linha- deve ser igual à unidade. Considera-se ainda que as probabilidades m_{ij} são fixas e independentes de t.

Exemplo

Seja uma economia hipotética em que as firmas de um determinado setor de atividade são classificadas em cinco classes de acordo com o tamanho da firma, sendo a classe/estrato I composto pelas firmas pequenas e o estrato V aquele constituído pelas grandes empresas. A tabela a seguir mostra a transição das firmas de uma classe para outra, do ano de 2005 para o ano de 2010:

Estrato	I	II	III	IV	V	Total em 2005 $\rightarrow$
I	3	1	0	0	0	4
II	2	5	1	0	0	8
III	0	5	8	4	0	17
IV	0	0	7	16	11	34
V	0	0	5	32	100	137
Total em 2010 $\downarrow$	5	11	21	52	111	200

Assim, nota-se por exemplo, que das quatro firmas em 2005 no estrato I, três permaneceram nesse estrato e uma evoluiu para o estrato II.

Exemplo (2)

- Uma estimativa da probabilidade de uma firma mudar da categoria s_i para a s_j, em um período de cinco anos, pode ser obtida dividindo-se, na tabela acima, o número de firmas em cada um dos estados (S_{ij}) pelo total da respectiva linha tal que

$$a_{ij} = P(s_t = s_j | s_{t-1} = s_i)$$

ou seja,

$$a_{ij} = S_{ij} / \sum_j S_{ij}; \qquad \sum_j a_{ij} = 1$$

- Por exemplo: se uma das quatro firmas que estavam inicialmente na classe I passaram para a classe II, a probabilidade de uma firma deslocar-se de I para II em cinco anos será de 0,25 ($S_{11}/(S_{11} + S_{12})$) e a probabilidade de se manter na classe I é igual a 0,75.
- Ainda, se $X_t = [x_{1t}, \ldots, x_{5t}]^T$ denota o total de firmas por classe no ano t, temos que

$$X_{t+1} = A \cdot X_t$$

nos fornece o total de firmas para o período em $t+1$. Ou seja, se X_t denota a estrutura produtiva do setor em 2005 (em termos de tamanho), X_{t+1} nos dará a estrutura produtiva do setor em 2010.

Exemplo (3)

A partir destas informações,

(a) Proponha uma matriz de transição A e analise a dinâmica do sistema;

(b) Estime a composição das classes para 2015 e para 2020;

(c) Por simulação, mostre a evolução da estrutura e identifique o momento a partir do qual não há mais variação na estrutura produtiva do setor em termos de tamanho das firmas. Justifique a resposta. Pode ser uma aproximação. Qual é a composição das classes para $t \to \infty$? Como interpretamos esses valores?

(d) Gere uma matriz de Markov aleatória (que atenda às características da matriz de transição e para cinco classes) e a partir de uma estrutura produtiva inicial que você escolha, analise a estrutura final para $t \to \infty$. Compare a dinâmica deste sistema com o anterior (ítens a-c) e justifique as suas observações a partir da análise de estabilidade. Há características persistentes?