Equações em diferenças

16 de abril de 2019

Introdução

- Quando o tempo é considerado uma variável discreta, $t \in \mathbb{Z}$, o conceito de derivada perde a sua aplicabilidade para o estudo de variações de uma determinada variável no tempo: Precisamos recorrer às variações Δ propriamente ditas.

- Se t é discreto então é melhor interpretar $t = 1$ como o período 1, e $t = 2$ como o período 2 (no sentido do calendário). Assim, se x é a variável dependente, assume-se que y_t permanece inalterada no período t, pois supõe-se que no *meio termo* nada acontece.

- **Período**: analiticamente, trata-se do intervalo de tempo necessário para que x sofra variação.

- De forma geral, trata-se de uma equação que relaciona uma variável com as suas variações, sendo que a própria variável é uma incógnita.

Diferença

Dada uma função $y = f(t)$, a primeira diferença é dada pela variação de y em t e $t+h$, $(h > 0)$:

$$\Delta y = f(t+h) - f(t)$$

Ou

$$\Delta y = f(t) - f(t-h)$$

Quando o incremento é unitário e igualmente espaçado:

$$\begin{aligned}
\Delta y_t &= f(t) - f(t-1) = y_t - y_{t-1} \\
\Delta y_{t+1} &= f(t+1) - f(t) = y_{t+1} - y_t \\
\Delta y_{t+2} &= f(t+2) - f(t+1) = y_{t+2} - y_{t+1} \\
\ldots
\end{aligned}$$

etc.

Diferença

Aplicando a diferença sobre a diferença:

$$\begin{aligned} \Delta(\Delta y_t) &= \Delta(y_t - y_{t-1}) \\ &= \Delta y_t - \Delta y_{t-1} = y_t - y_{t-1} - y_{t-1} + y_{t-2} \\ \Rightarrow \Delta^2 y_t &= y_t - 2y_{t-1} + y_{t-2} \end{aligned}$$

Da mesma forma

$$\Delta^2 y_{t+1} = y_{t+1} - 2y_t + y_{t-1}$$

E assim sucessivamente, sendo cada resultado, uma equação em diferenças: uma equação em função de Δ's com relação a uma variável y, cuja forma funcional $f(t)$ é desconhecida.

Equação em diferença

- Trata-se de uma sequência numérica $\{y_t\}$ definida de forma recursiva, sendo a regra que a gera é desconhecida.

- Uma equação em diferença de primeira ordem é a sequência de números y_t para $t = 0, 1, 2, \ldots$ tal que cada o valor em $t + 1$ está relacionado com o valor em t por uma relação tal que

$$\Delta y_{t+1} = y_{t+1} - y_t = g(y_t)$$

Classificação

Uma equação em diferença pode ser classificada segundo

1. A sua natureza: **linear** ou não linear;

$$y_{t+1} = 2y_t - 4 \quad \text{ou} \quad \underbrace{y_{t+1} - y_t}_{\Delta y_{t+1}} = y_t - 4$$

$$y_{t+1} = \frac{y_t}{1 - y_t}$$

2. A sua ordem: **primeira**, **segunda**, $n-$ésima ordem;

$$y_{t+1} = 0.5y_t + 2$$

$$y_{t+2} = -3y_{t+1} + y_t - 1$$

Classificação

3. A independência da equação com t: **autônomas**, **não autônomas**.

Considere o sistema

$$y_{t+1} = f(t, y_t) = t\, h(y_t)$$

- Se o sistema depende não apenas dos seus valores anteriores mas também do próprio t, trata-se de um sistema **não autônomo**:

$$y_{t+1} = y_t + 2t$$

- Mas, se o sistema independe (explicitamente) de t, temos um sistema **autônomo**:

$$y_{t+1} = -y_t + 0.25$$

Classificação

4. A existência de termos independentes na equação: **homogênea**, **não homogênea**.

$$y_{t+2} - y_{t+1} + 2y_t = 0$$

$$y_{t+1} + 4y_t = 2$$

5. A dependência da variável com relação a um ou mais argumentos:

- Uma equação **ordinária** terá Δy_{t+1} definida apenas em função do parâmetro t
$$y_{t+1} - y_t = g(t)$$

- Quando a variação depende de mais de um parâmetro, temos uma equação **não ordinária**:

$$y_{t+1} + 4y_t = 2t \cdot i$$

E nesse caso, teremos que trabalhar com as variações *parciais*.

Equações lineares em diferença de ordem 1

São do tipo

$$y_{t+1} + a_0 y_t = g(t)$$

onde no caso $a_0 \in \mathbb{R}$ e portanto, trata-se de uma equação com coeficientes constantes.

Reescrevendo a eq.:

$$\underbrace{y_{t+1} - y_t}_{\Delta y_{t+1}} + (1 + a_0) y_t = g(t)$$

Ou seja

$$\Delta y_{t+1} = -(1 + a_0) y_t + g(t)$$

Ou ainda se $t \to t - 1$

$$y_t + a_0 y_{t-1} = g(t-1)$$

Equações lineares em diferença de ordem 1

$$y_{t+1} + a_0 y_t = g(t)$$

- Se $g(t) = b \in \mathbb{R}$ então temos uma equação autônoma.
- Já se $g(t) = b + ct$, temos uma equação não autônoma.
- Se $g(t) = 0$ temos uma equação homogênea.

Exemplo

Seja o modelo linear

$$y_{t+1} + a_0 y_t = 0$$

Qual é a solução?

Equações lineares em diferença de ordem 1

$$y_{t+1} + a_0 y_t = 0$$

Ou

$$y_{t+1} = -a_0 y_t$$

Trata-se de uma eq. **homogênea**, pois $g(t) = 0$. Suponha que para $t = 0$, y_0 é dado (*condição inicial* do problema). Iterando sucessivamente:

- Para $t = 0 \Rightarrow y_1 = -a_0 y_0$;
- Para $t = 1 \Rightarrow y_2 = -a_0 y_1$. Ou seja, $y_2 = (-a_0)^2 y_0$;
- Para $t = 2 \Rightarrow y_3 = -a_0 y_2$. Ou seja, $y_3 = (-a_0)^3 y_0$.

... Para $t = k - 1 \Rightarrow y_k = -a_k y_{k-1}$. Ou seja, $y_k = (-a_0)^k y_0$. Assim,

de forma geral:

$$y_t = (-a_0)^t y_0$$

Equações lineares em diferença de ordem 1

$$y_t = (-a_0)^t y_0$$

Ou seja, a forma geral da solução de um S.H. é dado por

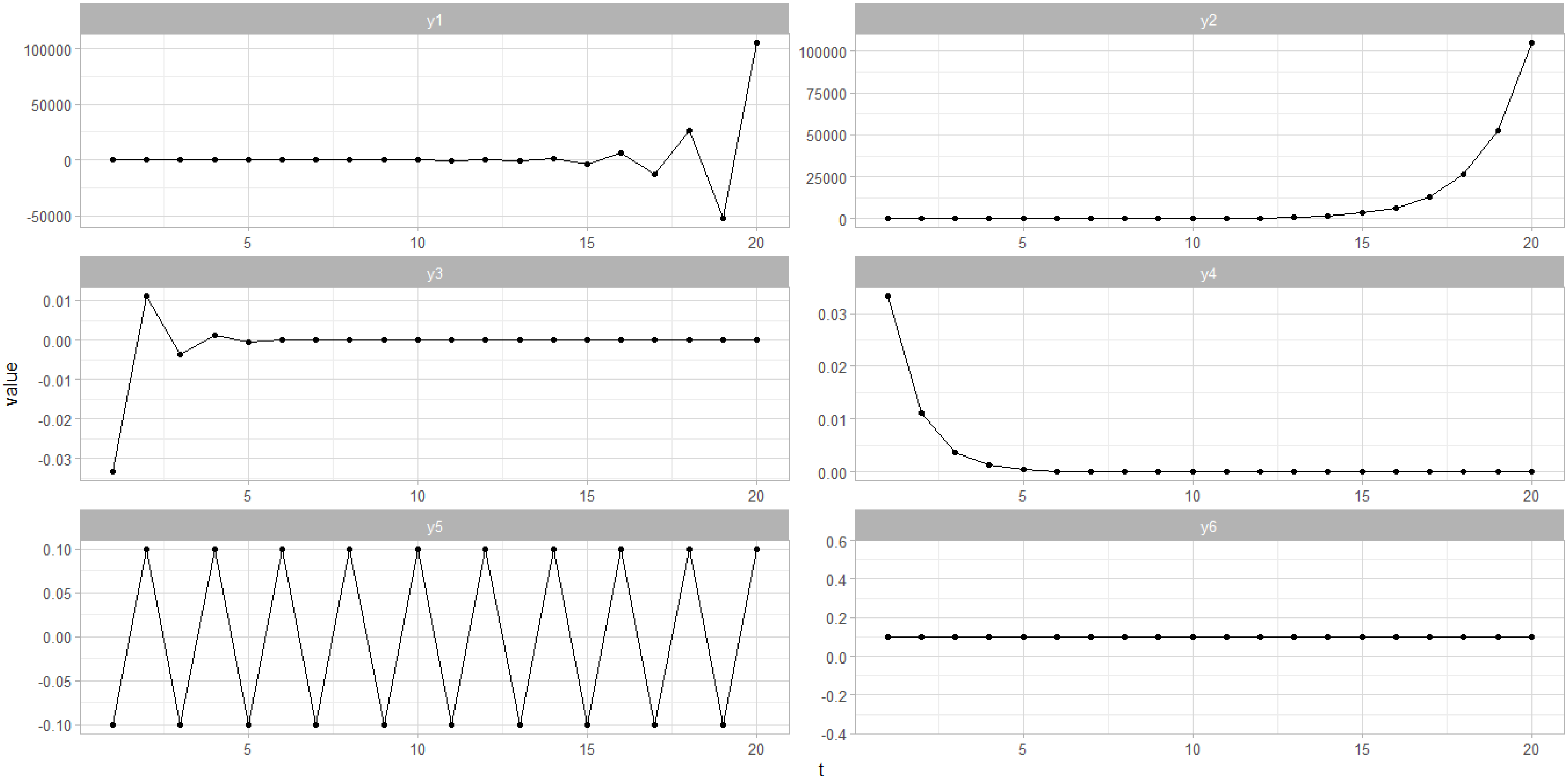
$$y_t^h = A\ r^t$$

onde A é uma constante arbitrária que depende da(s) condição(ões) inicial(is) e r é função dos coeficientes da equação.

1. **Se y_0 não for dado, como especificar uma trajetória?**
   - **Problema de valor inicial**: precisamos conhecer alguns valores prévios para *gerar* a sequência (y_0).
   - Não tendo essa informação, a solução será geral e função de uma constante arbitrária.
2. **Qual é a influência de a_0 sobre a trajetória temporal de y?**

Vejamos no R...

No R: Impacto de a_0 na dinâmica de y



Impacto de a_0 na dinâmica do sistema

Por y_0 ser um valor fixo, a dinâmica depende integralmente de do termo $(-a_0)^t$. No longo prazo (L.P.), com $t = 1, 2, 3, \ldots$

$$\lim_{t\to\infty} y^t = \lim_{t\to\infty} (-a_0)^t y_0$$

Portanto,

1. Se $a_0 > 0$ haverão oscilações $(+, -, +, -, \ldots)$;
2. Se $a_0 < 0$ não haverão oscilações;
3. Se $|a_0| < 1$ a trajetória será amortecida e tenderá a um nível equilíbrio y^*;
4. Se $|a_0| > 1$ a trajetória será explosiva e tenderá a se afastar do equilíbrio;
5. Se $a_0 = -1$, y_t é constante, enquanto que $a_0 = 1$, surgirão *saltos* regulares, $-y_0, +y_0, -y_0, +y_0, \ldots$

Equilíbrio - *steady state*

Por definição, no equilíbrio $\Delta y_{t+1} = 0$. Assim,

$$y_{t+1} = y_t = y^*$$

Portanto, na equação a diferenças:

$$y^* + a_0 y^* = 0 \Rightarrow y^*(1 + a_0) = 0$$

Assim, se por exemplo, o equilíbrio é estável, a *referência* é dada por

$y^* = 0$.

Equilíbrio (Shone)

Assim, se o sistema possui um nível de equilíbrio, este pode ser um

1. **Atrator**: se a trajetória temporal tiver um comportamento estável, convergindo no LP ao equilíbrio;

2. **Repulsor**: se a trajetória temporal tiver um comportamento instável ou explosivo, se afastando do nível de equilíbrio no LP;

3. Nada: a trajetória temporal nem se aproxima nem se afasta de forma persistente do nível de equilíbrio no LP.

E se $g(t) \neq 0$ (Eq. não homogênea)?

Suponha agora que

$$y_{t+1} + a_0 y_t = g(t)$$

Dizemos que a solução geral é dada por

$$y_t = y_t^h + y_t^p$$

onde

- y_t^h é a solução do sistema homogêneo associado e que determina a estabilidade do sistema; no caso,

$$y_t^h = A(-a_0)^t$$

- y_t^p é a solução particular que depende da forma de $g(t)$.
  1. $g(t) = b$ (constante);
  2. $g(t) = b_0 + b_1 t$ (linear).

Caso $g(t) = b$ é constante

$$y_{t+1} + a_0 y_t = b$$

Como y_t^p depende de $g(t) \Rightarrow$ uma tentativa é dada por $y_t^p = K$ (uma constante). Assim:

$$K + a_0 K = b$$

ou

$$K = \frac{b}{1 + a_0}$$

Para $a_0 \neq -1$. Portanto, a solução geral do sistema é dada por:

$$y_t = A(-a_0)^t + \frac{b}{1 + a_0}$$

Onde a constante arbitrária A é definida a partir de uma condição inicial para y_t. Por exemplo, y_0. E o equilíbrio?

No equilíbrio:

$$y_{t+1} = y_t = y^*$$

Portanto,

$$y^* + a_0 y^* = b$$

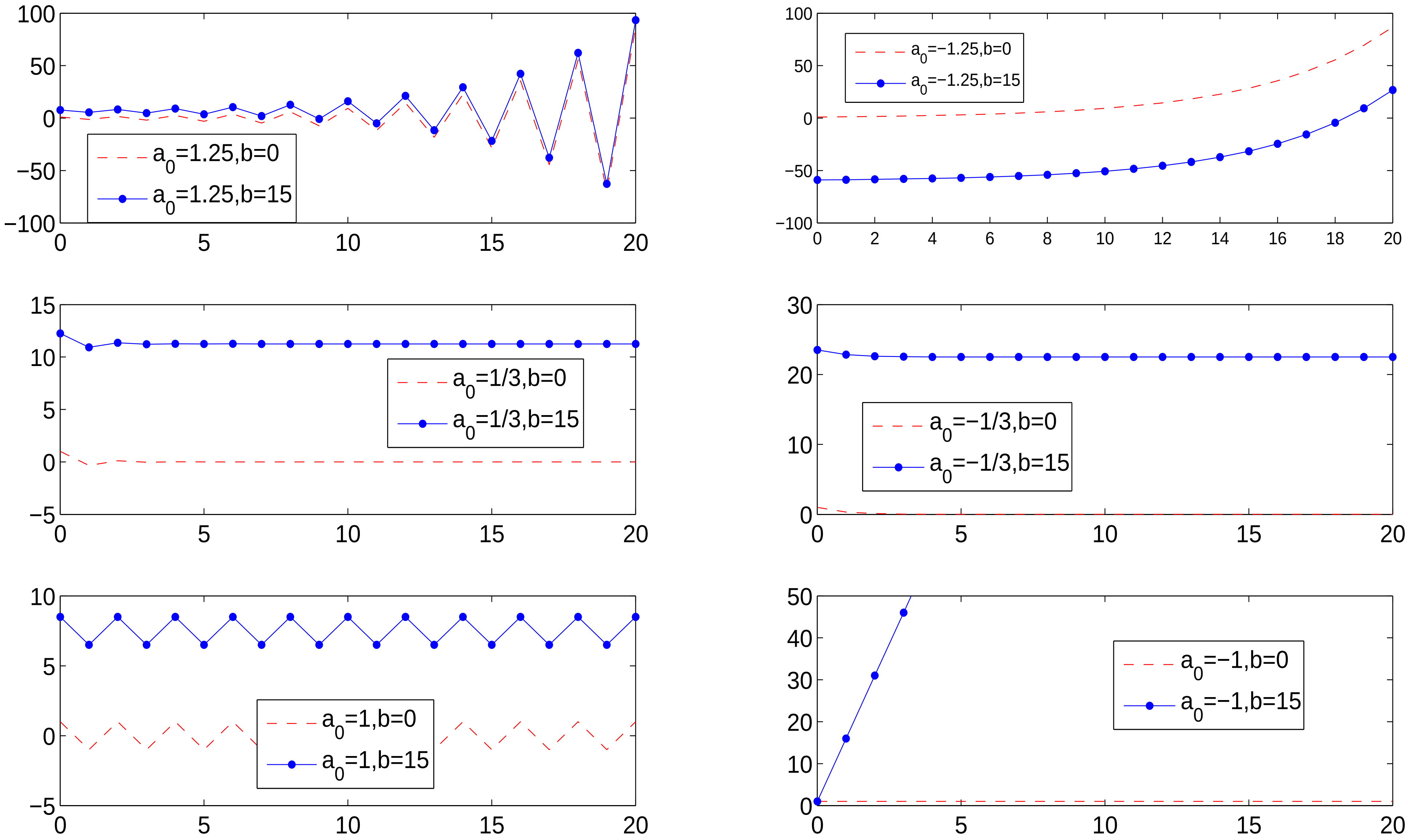
Ou seja

$$y^* = \frac{b}{1 + a_0} = y_t^p$$

Para $a_0 \neq -1$. Ou seja, quando o termo independente de y na

equação é constante, o nível de equilíbrio de L.P. também é uma constante.

Efeito de $g(t) = b$ na dinâmica de y



Condição de estacionariedade dos modelos AR(1) (Enders, 2010)

Considerando o caso particular

$$y_t = a_0 y_{t-1} + c + \epsilon_t$$

com $\epsilon_t \sim N(0, \sigma^2)$ e condição inicial y_0. Por recursão:

$$\begin{aligned}
(t=1): y_1 &= a_0 y_0 + c + \epsilon_0 \\
(t=2): y_2 &= a_0 y_1 + c + \epsilon_1 \\
&= a_0^2 y_0 + a_0 c + a_0 e_0 + \epsilon_1 \\
(t=3): y_3 &= a_0^3 y_0 + a_0^2 + a_0 c + c + a_0^2 \epsilon_1 + a_0 \epsilon_2 + \epsilon_3 \\
\dots &= \dots
\end{aligned}$$

Portanto, a solução para t será dada por

$$y_t = a_0^t y_0 + \sum_{i=0}^{t-1} a_0^i c + \sum_{i=0}^{t-1} a_0^i \epsilon_{t-i} \tag{1}$$

Tomando a esperança de y_t:

$$E(y_t) = E(a_0^t y_0) + E(c \sum_{i=0}^{t-1} a_0^i)$$

pois $E(\epsilon_t) = E(\epsilon_{t+h}) = 0$.
Nota-se que y_t não é estacionária pois $E(y_t)$ depende de t e

$$E(y_t) \neq E(y_{t+h})$$

Propriedades assintóticas

Analisando as propriedades assintóticas de cada termo, ou seja, se $t \rightarrow \infty$:

- **Primeiro termo**: Se $|a_0| < 1$, para $t \rightarrow \infty$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} a_0^t \rightarrow 0$$

Propriedades assintóticas (2)

- **Segundo termo**: Seja $w = c\sum_{i=0}^{t-1} a_0^i$, para $t \to \infty$:

$$\begin{aligned} w &= c(1 + a_0 + a_0^1 + a_0^2 + a_0^3 + \ldots) \\ &= c\, a_0(\frac{1}{a_0} + \underbrace{1 + a_0^1 + a_0^2 + \ldots}_{w/c}) \\ w &= c + a_0 w \end{aligned}$$

$$\Rightarrow w = c\sum_{i=0}^{t-1} a_0^i \to \frac{c}{1-a_0}$$

Portanto

$$\lim_{t\to\infty} c\sum_{i=0}^{t-1} a_0^i = \frac{c}{1-a_0}$$

Propriedades assintóticas (3)

Como ambos resultados, mostra-se que para $t \to \infty$ e com $|a_0| < 1$, na Eq. (1):

$$\lim\ y_t = \frac{c}{1 - a_0} + \sum_{i=0}^{t-1} a_0^i \epsilon_{t-i}$$

e portanto é finita, sendo que, no longo prazo

$$\lim_{t \to \infty} E(y_t) = \frac{c}{1 - a_0}$$

A tendência a um valor fixo para a variância de y_t com $t \to \infty$ também pode ser demonstrado e portanto, y_t sob a condição de $|a_0| < 1$ torna-se estacionária. Note que, de

$$y_t = a_0 y_{t-1} + c + \epsilon_t$$

equivale a

$$y_{t+1} = a_0 y_t + c + \epsilon_{t+1}$$

Ou a

$$y_{t+1} - a_0 y_t = \underbrace{c + \epsilon_{t+1}}_{g(t)}$$

Raízes unitárias

Se uma forma geral de solução homogênea é Ar^t, então

$$Ar^{t+1} - a_0 Ar^t = 0$$

$$\Rightarrow Ar^t(r - a_0) = 0$$

Dado que a solução arbitrária $r = 0$ não nos interessa, resta

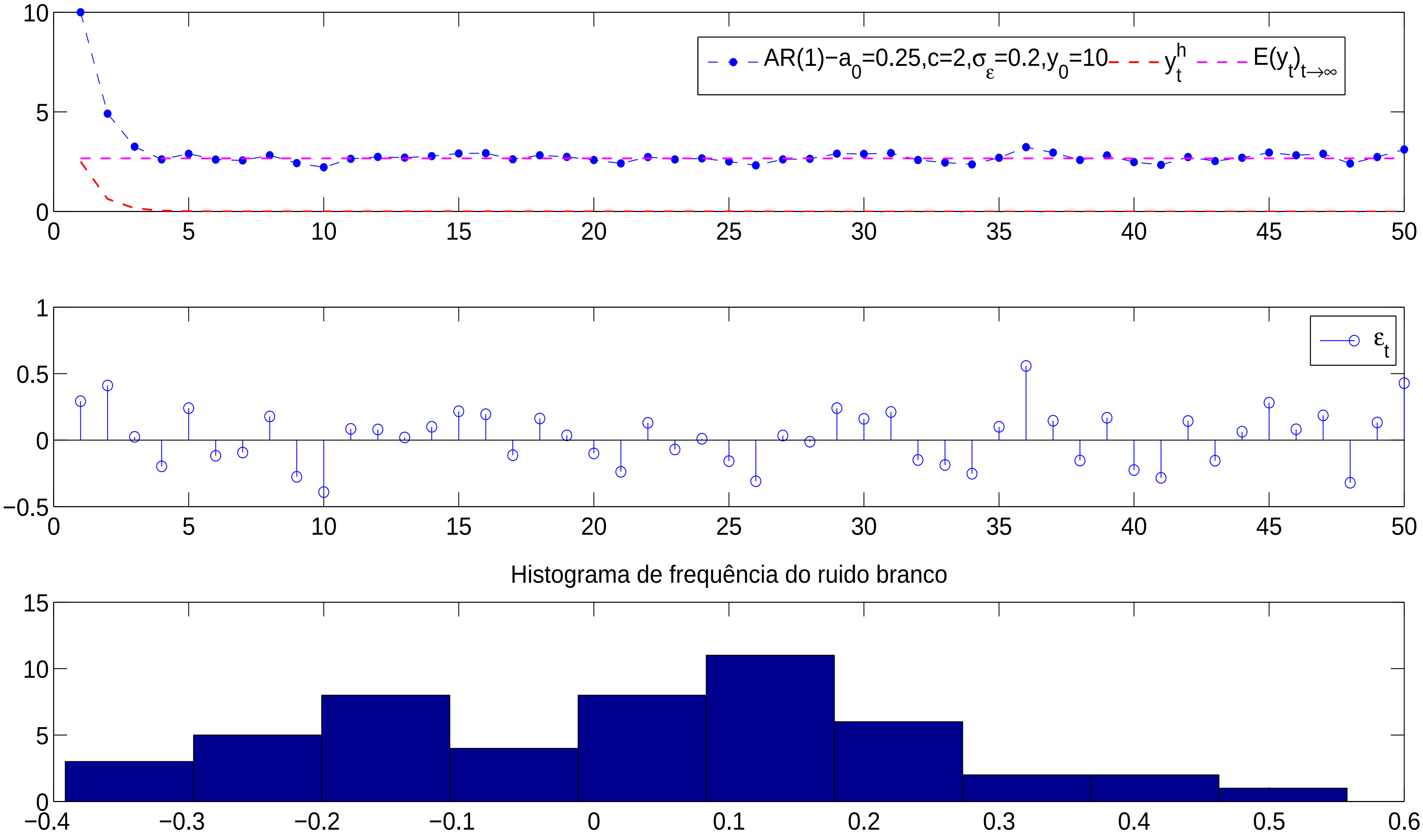
$$p(r) = r - a_0 = 0$$

e por tanto $y_t = A(a_0)^t$. Ou seja, a raíz $r = a_0$ do polinômio $p(r) = 0$ codifica a natureza dinâmica de y_t. É assim que surge a condição de estabilidade dos modelos autoregressivos de possuir raízes tal que

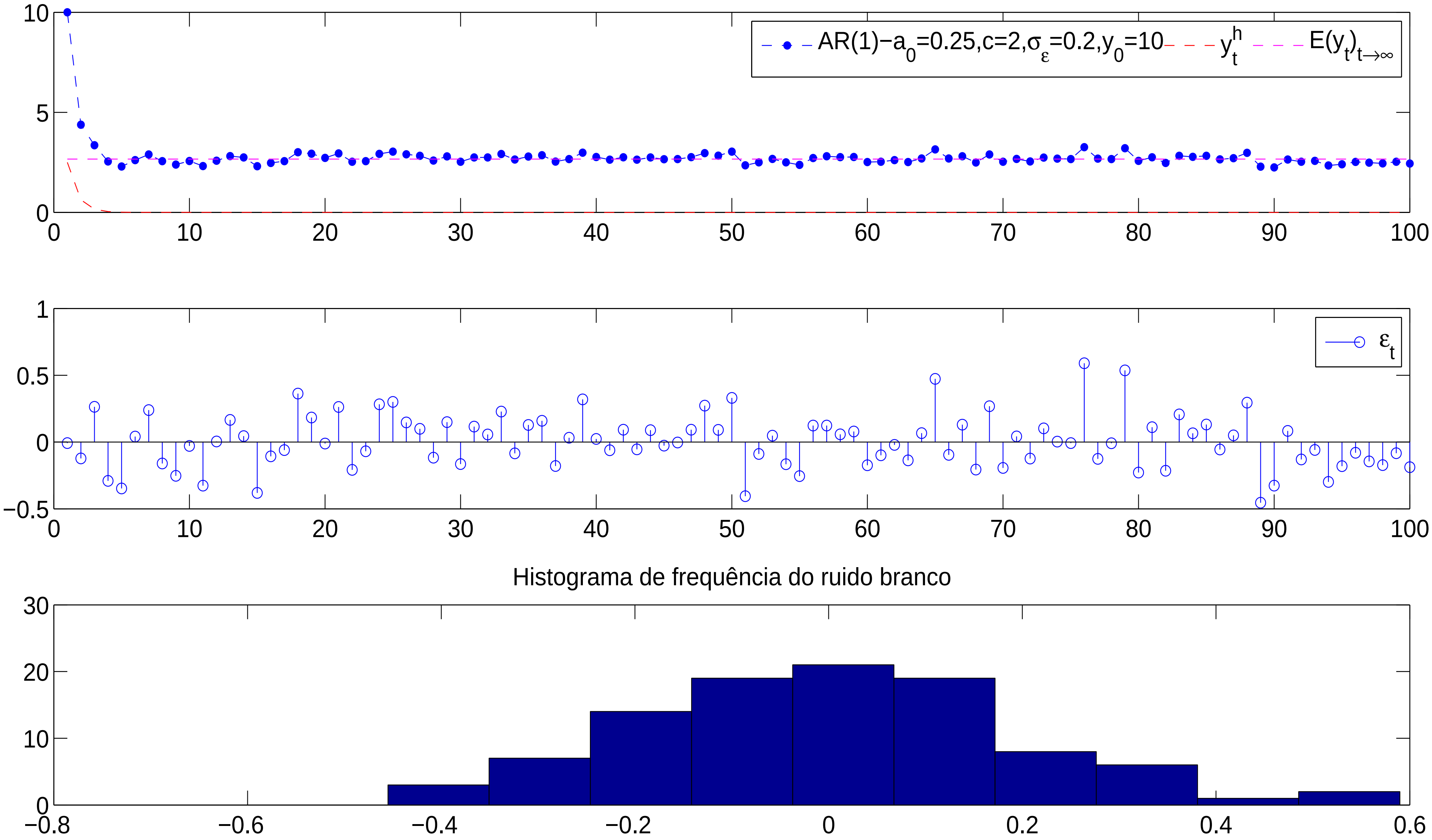
$$|r| < 1$$

ou seja, das raízes (em módulo) do *polinômio característico* $p(r)$ terem que estar **dentro do círculo unitário** (ou "*não possuir raízes unitárias*"), pois isso garante que o processo estocástico resultante (y_t) seja estacionário.

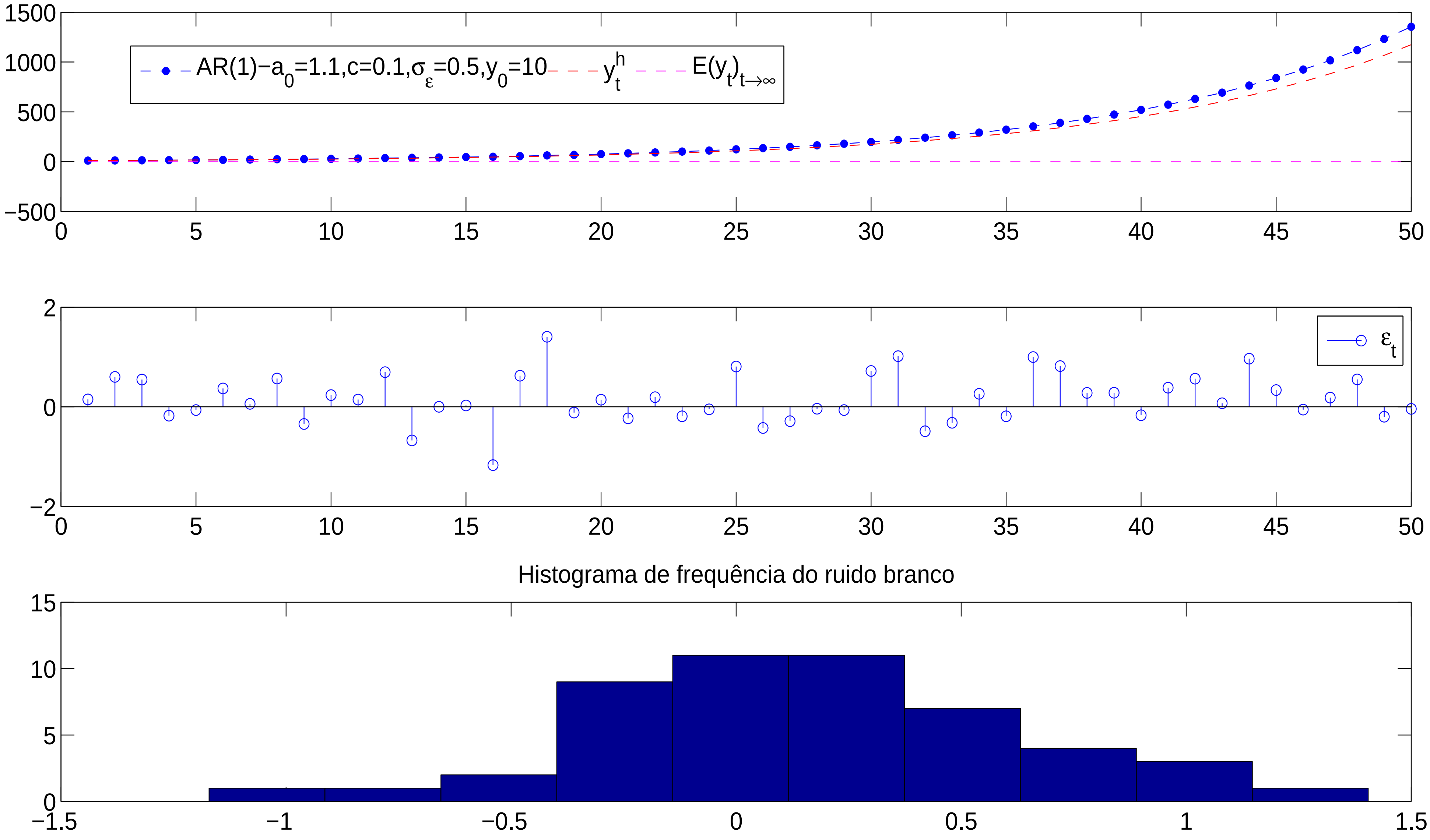
Caso estacionário, $n = 50$



Caso estacionário, $n = 100$



Caso não estacionário, $n = 50$



Caso $g(t) = b_0 + b_1 t$

$$y_{t+1} + a_0 y_t = b_0 + b_1 t$$

Como y_t^p depende de $g(t) \Rightarrow$ uma tentativa é dada por $y_t^p = K_0 + K_1 t$ (pol. de grau 1). Assim:

$$K_0 + K_1(t+1) + a_0(K_0 + K_1 t) = b_0 + b_1 t$$

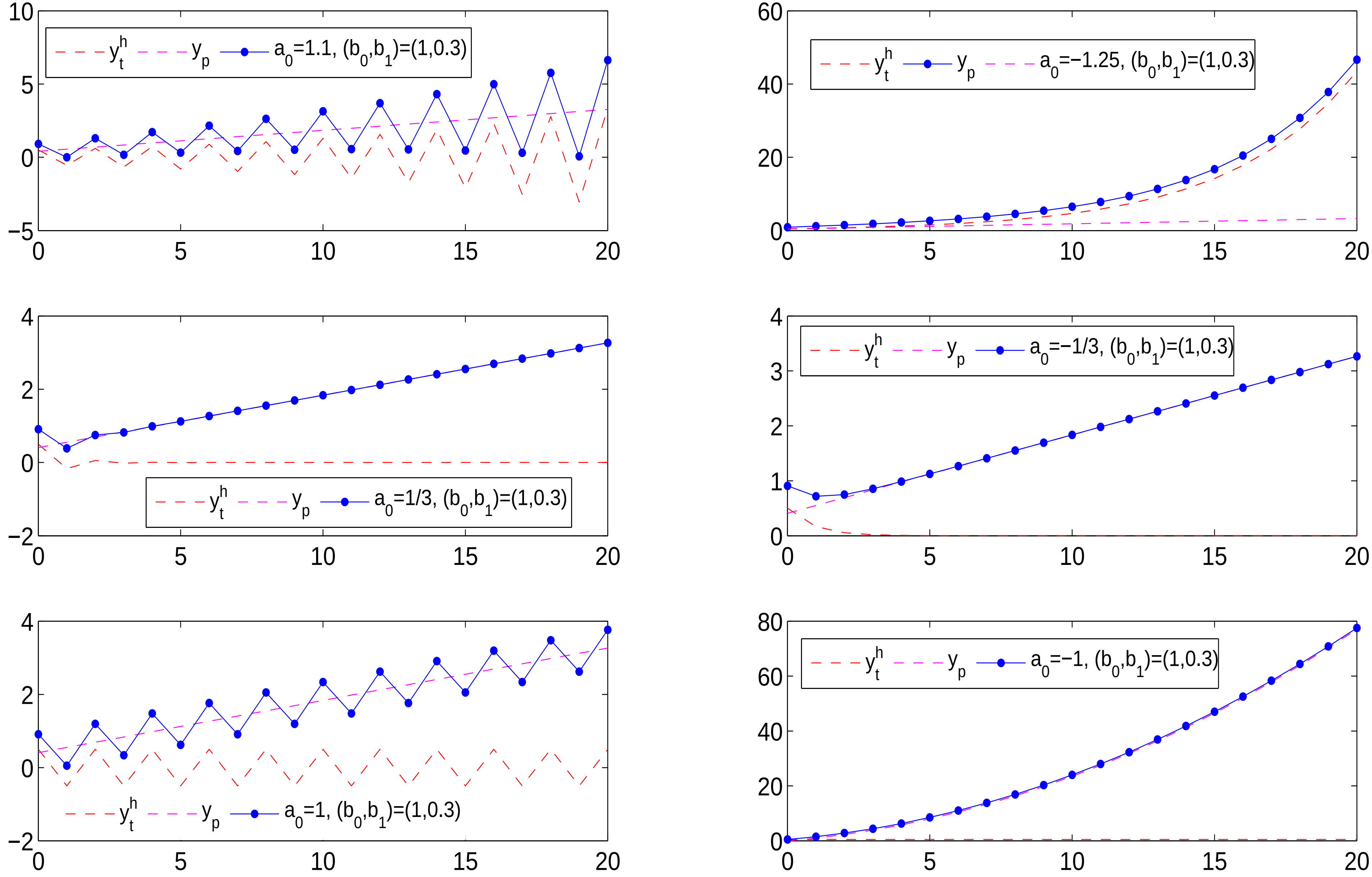
ou

$$\color{red}{(K_0 + K_1 + a_0 K_0)} + \color{blue}{(K_1 + a_0 K_1)}t = \color{red}{b_0} + \color{blue}{b_1}t$$

Portanto, por igualdade de coeficientes temos duas equações e duas incógnitas (K_0, K_1), e assim, y_t^p é definida. Com isso,

$$y_t = y_t^h + y_t^p = Aa_0^t + K_0 + K_1 \color{blue}{t}$$

Efeito de $g(t) = b_0 + b_1 t$ na dinâmica de y



Conclusões parciais

1. Uma solução geral para uma equação em diferenças de ordem 1, $y_{t+1} + a_0 y_t = g(t)$, é dado por

$$y_t = y_t^h + y_t^p = \underbrace{A \cdot (-a_0)^t}_{\text{estabilidade}} + \underbrace{y^*}_{\text{equilíbrio}}$$

2. O coeficiente do termo de ordem menor (a_0), via y_t^h, determina a estabilidade na dinâmica de y.

3. O termo independente de y, $g(t)$, determina, via y_t^p o nível de equilíbrio do sistema, seja este fixo ou móvel.

Outros casos de $g(t)$

Se $g(t) = Bd^t$ onde B e d são constantes (função exponencial), uma tentativa inicial de solução particular de

$$y_{t+1} + a_0 y_t = Bd^t$$

é dada por $y_t^p = Cd^t$, onde C é uma constante arbitrária. Substituindo a solução na equação diferencial, teremos que

$$Cd^{t+1} + a_0 Cd^t = Bd^t$$

Ou seja,

$$C(d + a_0)d^t = Bd^t$$

Assim,

$$C = \frac{B}{d + a_0} \quad \Rightarrow \quad y_t^p = \frac{B}{d + a_0} d^t$$

Outros casos de $g(t)$

- Se $g(t)$ é um polinômio de grau m, a tentativa inicial para a solução particular será dada por

$$y_t^p = K_0 + K_1 t + K_2 t^2 + \ldots + K_m t^m$$

  que será substituída na equação em diferença e os coeficientes $K_i, \; i = 0, \ldots, m$ serão identificados por igualdade de polinômios.

- Já se $g(t) = B_1 \sin(\omega t) + B_2 \cos(\omega t)$, uma tentativa inicial de solução particular será dada por

$$y_t^p = K_1 \sin(\omega t) + K_2 \cos(\omega t)$$

  onde os valores de K_1 e K_2 serão novamente obtidos a partir da igualdade de termos quando substitui-se y_t por y_t^p na equação em diferença.

Outros casos de $g(t)$

No caso em que $g(t) = X_t$, em que X_t é uma sequência de valores conhecida cuja forma funcional é desconhecida e

$$y_t + a_0 y_{t-1} = X_t$$

O método usado até agora para a identificação da solução particular não pode ser aplicado.

Seja o operador de atraso L, tal que se

$$Ly_t = y_{t-1}$$

$$L^k y_t = y_{t-k}$$

então (Resultado 1)

$$y_t = L^{-1} y_{t-1}$$

$$y_t = L^{-k} y_{t-k}$$

Seja

$$w = 1 + \alpha L + \alpha^2 L^2 + \dots$$

Ou seja,

$$w = 1 + \alpha L(1 + \alpha L + \alpha^2 L^2 + \dots)$$

E por tanto

$$w = 1 + \alpha L w$$

$$(1 - \alpha L)w = 1$$

$$\Rightarrow w = (1 - \alpha L)^{-1}$$

e portanto (Resultado 2)

$$(1 - \alpha L)^{-1} = 1 + \alpha L + \alpha^2 L^2 + \dots$$

Usando os dois resultados anteriores:

$$\begin{aligned} y_t + a_0 y_{t-1} &= X_t \\ y_t + a_0 L y_t &= X_t \\ (1 + a_0 L) y_t &= X_t \\ y_t &= (1 + a_0 L)^{-1} X_t \end{aligned} \tag{2}$$

Fazendo $\alpha = -a_0$ e aplicando a expansão (Resultado 2) temos que

$$y_t^p = (1 + (-a_0)L + (-a_0)^2 L^2 + \ldots) X_t$$

ou seja (Solução A):

$$y_t^p = \sum_{i=0}^{\infty} (-a_0)^i L^i X_t$$

ou (Solução 1 - *backward solution*):

$$y_t^p = \sum_{i=0}^{\infty} (-a_0)^i X_{t-i}$$

Que é uma soma ponderada geométrica dos valores passados de X_t, que converge se e somente se $|a_0| < 1$.

Caso $|a_0| > 1$, devemos optar por uma alternativa pois a solução anterior não seria uma soma *limitada*. Para isso, seja

$$1 - \alpha L = -\alpha L(1 - \frac{1}{\alpha L}) \qquad (*)$$

Ainda,

$$(1 - \frac{1}{\alpha L})^{-1} = 1 + (\frac{1}{\alpha L}) + (\frac{1}{\alpha L})^2 + \dots$$

Ou seja

$$(1 - \frac{1}{\alpha L})^{-1} = 1 + (\frac{1}{\alpha})L^{-1} + (\frac{1}{\alpha})^2 L^{-2} + \dots \qquad (**)$$

Assim, tomando a inversa de $(*)$ e usando $(**)$:

$$\begin{aligned}
(1-\alpha L)^{-1} &= -\frac{1}{\alpha L}\left(1-\frac{1}{\alpha L}\right)^{-1} \\
&= -\frac{1}{\alpha}L^{-1}\left(1+(\frac{1}{\alpha})L^{-1}+(\frac{1}{\alpha})^2L^{-2}+\dots\right) \\
&= -\frac{1}{\alpha}L^{-1}-(\frac{1}{\alpha})^2L^{-2}-(\frac{1}{\alpha})^3L^{-3}-\dots
\end{aligned}$$

Ou seja,

$$(1-\alpha L)^{-1} = -\sum_{i=1}^{\infty}(\frac{1}{\alpha})^i L^{-i}$$

Com isso e lembrando que

$$y_t^p = (1 + a_0 L)^{-1} X_t$$

Para $\alpha = -a_0$, segue-se que

$$y_t^p = -\sum_{i=1}^{\infty} (-\frac{1}{a_0})^i L^{-i} X_t$$

ou (Solução 2 - *forward solution*):

$$y_t^p = -\sum_{i=1}^{\infty} (-\frac{1}{a_0})^i X_{t+i}$$

que é uma sequência limitada pois $|1/a_0| < 1$ e é baseada em valores futuros de X_t.

- Assim, a solução *backward* será usada quando $|a_0| < 1$, ou seja, no caso de trajetórias estáveis.
- Quando o sistema é instável ($|a_0| > 1$), a solução particular será dada pela solução *forward*.