Aula 2: Vetores, Matrizes e Sistemas Lineares

Ivette Luna

26 de março de 2019

Álgebra linear

"Merge"entre o cálculo vetorial e a teoria de equações lineares.

- Da primeira:
  - Soma de segmentos orientados (vetores);
  - Multiplicação de um real por um vetor.

Chegaram a três resultados:

1. No espaço tridimensional, um vetor é perfeitamente definido pelas suas coordenadas (posição e deslocamento): (x, y, z);
2. $a \cdot (x, y, z) = (ax, ay, az)$, com a escalar;
3. A soma de dois vetores implicava na soma das suas coordenadas.

Álgebra linear

Com a geometria analítica, os vetores passaram a ser vistos sob duas óticas:

1. Uma concreta, em que cada coordenada tinha uma interpretação física limitada ao espaço tridimensional

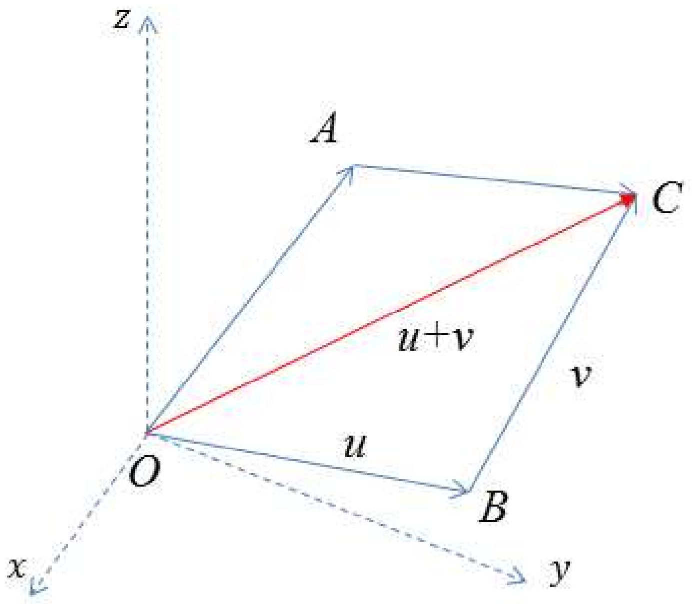
$$v = (x_1, x_2, x_3)$$

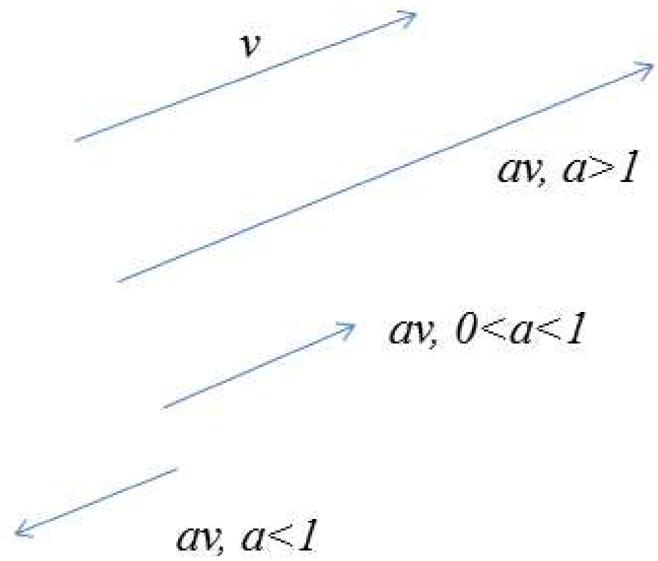
2. Uma abstrata, em que o vetor era apenas uma tripla *ordenada* de reais e portanto, o conceito e as propriedades podiam ser estendidas para o espaço $n-$dimensional

$$v = (x_1, x_2, \dots, x_n)$$

Assim surgiu o espaço $\mathbb{R}^n$.

Graficamente





Espaços euclidianos $\mathbb{R}^n$

É o universo constituído por $n-$uplas ordenadas ou vetores $n-$dimensionais $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ de números reais e no qual se definem duas operações:

- A soma de vetores: Se $u = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ e $v = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$, então

$$u + v = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, \ldots, u_n + v_n)$$

- Produto por um escalar: Se $a \in \mathbb{R}$, então

$$a \cdot v = (a \cdot v_1, a \cdot v_2, \ldots, a \cdot v_n)$$

Produto interno

- Operação que atribui a cada par de vetores um escalar: **produto escalar**
- Relacionado com o *ângulo* entre dois vetores.

Definição

Sejam $u = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ e $v = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ dois vetores em $\mathbb{R}^n$. O produto interno de u e v, denotado por $u \cdot v$, é o número real

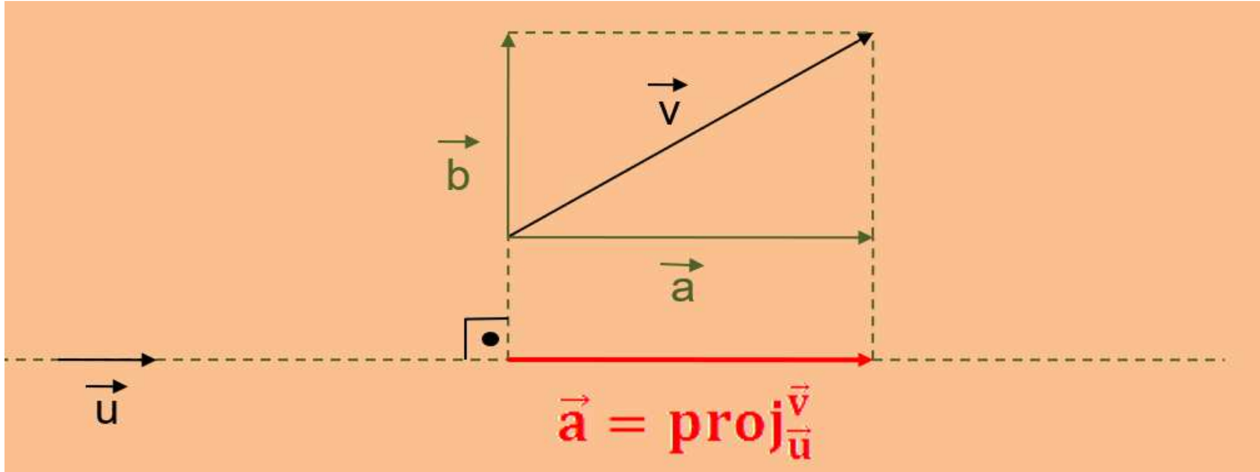
$$u \cdot v = u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2 + \ldots + u_n \cdot v_n$$

tal que

$$u \cdot v = |u| \cdot |v| cos(\theta)$$

onde θ é o ângulo entre u e v e $|u| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + \ldots + u_n^2}$ é a norma do vetor u.

Interpretação geométrica



Como a projeção é sobre o vetor u (v), logo $a = m \cdot u$.
Vetorialmente[1]:

- $u \cdot b = 0$
- $v = a + b \Rightarrow v = m \cdot u + b \Rightarrow v \cdot u = m \cdot u \cdot u + b \cdot u \Rightarrow v \cdot u = m|u|^2$
- $a = proj_u^v = m \cdot u \Rightarrow proj_u^v = \frac{u \cdot v}{|u|^2} u$

Portanto, o produto escalar nos dá o tamanho da projeção de v sobre u.

[1] Figura extraída de: http://wwwp.fc.unesp.br/~emilia/Cursos/GAAL/Aulas/Produtos.ppt

Utilidade

1. Especificação das estruturas de dados;
2. Resolução de sistemas de equações lineares
    2.1 Sistemas de equações em diferenças finitas;
    2.2 Sistemas de equações diferenciais.

Equação linear

Uma **equação linear** é uma equação da forma

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b \tag{1}$$

sendo os termos $a_i,\ 1 \leq i \leq n$, constantes reais chamadas coeficientes ou parâmetros; $x_i,\ 1 \leq i \leq n$, são variáveis (incógnitas) e b é um termo independente.

Sistemas de equações lineares

Conjunto de m relações lineares:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & + & \ldots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & \ldots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \ldots & & \ldots & & \ldots & & \ldots \\ a_{m1}x_1 & + & \ldots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{cases} \tag{2}$$

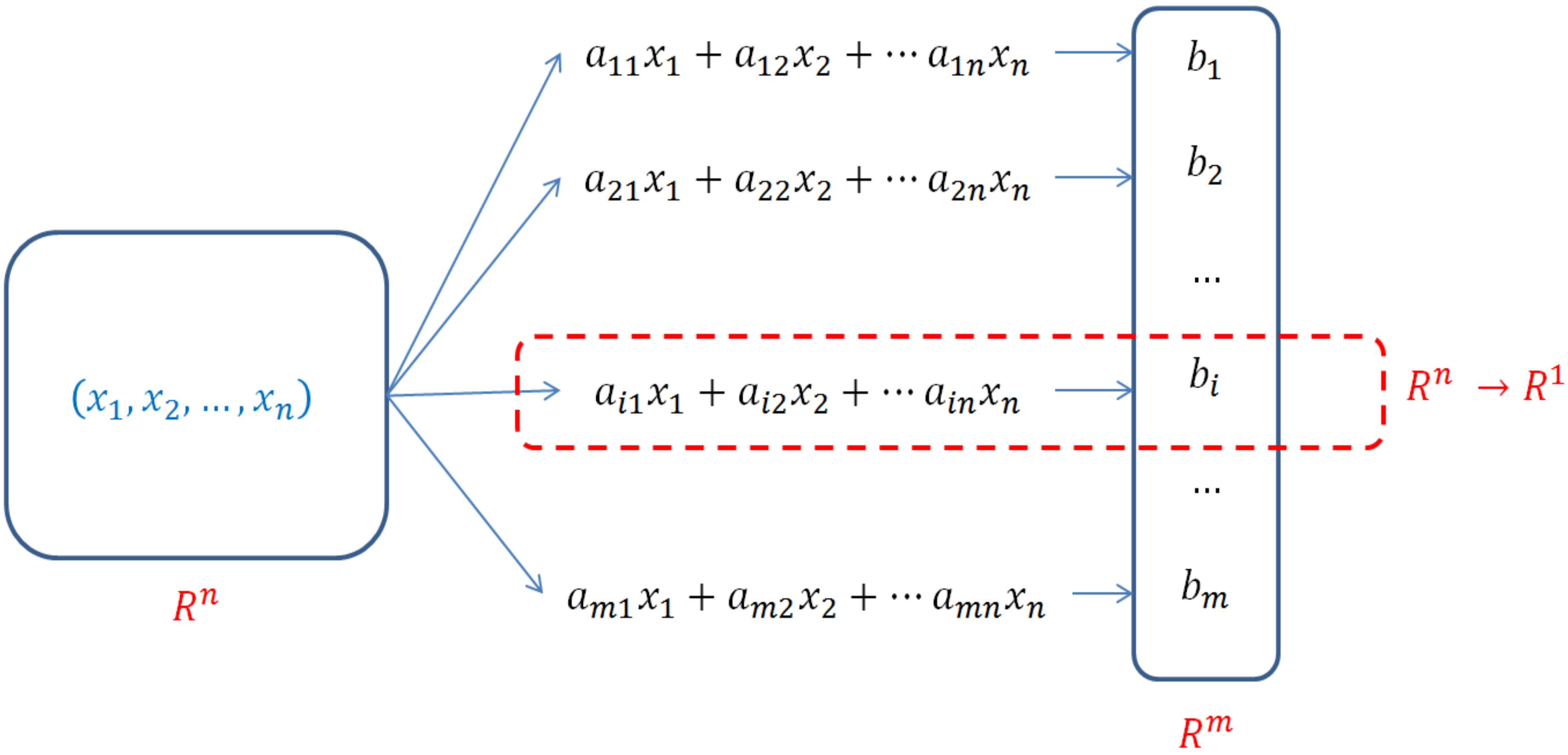
no qual a_{ij} e b_j são números reais; a_{ij} são os coeficientes da i-ésima equação e j-ésima variável x_j.

- Cada equação pode ser vista como uma função de n variáveis. Assim, se $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$:

$$b_i = f(x) = f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) = a_{i1}x_1 + \ldots + a_{in}x_n$$

- O conjunto de equações pode ser "encarado"como uma **transformação linear**, que mapeia um ponto no $\mathbb{R}^n$ ao espaço $\mathbb{R}^m$.

Transformação linear



Como manipular esse sistema?

- Precisamos "compactar"o sistema, de forma a que tratemos as m equações lineares de forma conjunta. O sistema poderia ser equivalente a:

$$A \cdot X = b$$

- Para isso, precisamos utilizar as matrizes e os vetores.

Matrizes

Chama-se matriz de ordem m por n a um quadro (ou tabela) de elementos dispostos em m linhas e n colunas, representada da seguinte maneira:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \tag{3}$$

sendo a_{ij} elemento ou termo da matriz A, $i = 1, \dots, m$ e $j = 1, \dots, n$, i denota linhas e j denota colunas.

Ou seja, é uma tabela de elementos dispostos em linhas e colunas.

Notação

- Letras maiúsculas para denotar matrizes e letras minúsculas para denotar os elementos da matriz.
- A matriz A pode ser representada abreviadamente por

$$A = [a_{ij}], i = 1, \ldots, m \quad \text{e} \quad j = 1, \ldots, n.$$

- A matriz A é dita ser de dimensão $m \times n$, podendo ser escrita como

$$A_{m \times n}.$$

Tipos especiais de matrizes

Algumas matrizes pela natureza dos seus elementos ou estrutura possuem propriedades que as diferenciam de outras matrizes, aparecendo frequentemente na prática. Seja a matriz $A_{m \times n}$:

1. Matriz retangular: matriz linha e matriz coluna.
2. Matriz quadrada;
3. Matriz nula;
4. Matriz diagonal;
5. Matriz identidade;
6. Matriz triangular: superior e inferior;
7. Matriz simétrica;

Matrizes retangulares

Uma matriz na qual $m \neq n$ é denominada matriz retangular. Um caso particular e de interesse são as matrizes com uma linha ou uma coluna: vetores.

- Uma matriz de ordem 1 por n é uma matriz-linha ou um vetor-linha:

$$A_{1\times n} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{bmatrix}$$

Ou

$$v_1 = (a_1, a_2, \dots, a_n) \quad \in \mathbb{R}^n$$

Matriz retangular

- Uma matriz de ordem m por 1 é uma matriz-coluna ou um vetor-coluna:

$$A_{m\times 1} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix}$$

Ou

$$v_1 = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix} \quad \in \mathbb{R}^m$$

Implicação

Se vetores são casos particulares de matrizes, então, será que

- Toda matriz $A_{m \times n}$ pode ser vista como um conjunto de m vetores linha ou n vetores coluna?

- E as operações matriciais? Poderiam ser baseadas nas operações vetoriais?

Matriz quadrada

Tem-se uma matriz quadrada quando o número de linhas é igual ao número de colunas $(m = n)$:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

A ordem da matriz A é n por n, ou simplesmente n, podendo ser representada por A_n.

Diagonal principal

Em uma matriz quadrada $A = [a_{ij}]$, de ordem n, os elementos a_{ij}, em que $i = j$, constituem a diagonal principal. Por exemplo, se

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 6 & 4 \end{bmatrix}$$

- A diagonal principal da matriz A é: $(a_{11}, a_{22}, a_{33}) = (2, 0, 4)$.
- O traço de A é dado pela soma dos elementos da diagonal principal:

$$tr(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} = a_{11} + a_{22} + \ldots + a_{nn}$$

Matriz nula

É a matriz cujos elementos a_{ij}, $i = 1\ldots, m, j = 1, \ldots, n$, são todos nulos.

Exemplo

$$A_{2\times 3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Exemplo

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \ldots \\ 0 \end{bmatrix}_{n\times 1}$$

Matriz diagonal

A matriz quadrada $A = [a_{ij}]$ de ordem n, que tem os elementos $a_{ij} = 0$ quando $i \neq j$ é uma *matriz diagonal*:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Exemplo

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Matriz identidade

É uma matriz diagonal de qualquer ordem que tem os elementos $a_{ij} = 1$ para $i = j$ e $a_{ij} = 0$ para $i \neq j$. Indica-se por I_n, ou simplesmente por I:

$$I_n = I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

Matriz escalar

É uma matriz diagonal onde os elementos da diagonal principal são iguais a um escalar k diferente de 1.

Exemplo

$$A_3 = A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Matriz triangular superior

É uma matriz quadrada $A = [a_{ij}]$ que tem todos os elementos abaixo da diagonal principal nulos, isto é, $a_{ij} = 0$ para $i > j$:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Exemplo

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

Na matriz triangular inferior, todos os elementos acima da diagonal principal são nulos.

Matriz simétrica

É toda matriz quadrada $A = [a_{ij}]$, de ordem n, que tem os elementos $a_{ij} = a_{ji}$ para todo $i,\ j$.

Exemplo

$$A = \begin{bmatrix} w & 0 & -3 \\ 0 & 2 & 1 \\ -3 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Este tipo de matrizes aparece regularmente em redes socioeconômicas, quando as relações são bidirecionais (redes de cooperação, por ex.).

Adição de matrizes

A soma de matrizes é definida apenas entre matrizes que têm a mesma ordem. Sejam as matrizes $A_{m\times n} = [a_{ij}]$ e $B_{m\times n} = [b_{ij}]$. A soma de $A + B$ é a matriz $C_{m\times n} = [c_{ij}]$, cujos elementos são somas dos elementos correspondentes de A e B, ou seja,

$$C = A + B \Longleftrightarrow c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}, \quad i = 1, \ldots, m;\ j = 1, \ldots, n$$

Exemplo

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}; \quad C = A + B = \begin{bmatrix} 4 & 7 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$$

Propriedades da adição

Dada as matrizes A, B, C e O de mesma ordem $m \times n$, temos as seguintes propriedades:

1. *Comutativa:* $A + B = B + A$;
2. *Associativa:* $A + (B + C) = (A + B) + C$;
3. *Elemento Neutro:* $A + 0 = 0 + A = A$;
4. *Elemento Oposto:* $A + (-A) = (-A + A) = 0$;

Multiplicação por um escalar

Seja $k \in \Re$ um escalar. O produto de uma matriz A por esse escalar consiste na multiplicação de todos os elementos da matriz pelo escalar dado.

$$B_{m\times n} = k\, A_{m\times n} \quad \Longleftrightarrow \quad [b_{ij}] = [k\; a_{ij}]\,,\; i = 1,\ldots,m;\; j = 1,\ldots,n$$

Exemplo

$$k = 4;\;\; A = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow k \cdot A = 4 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 20 \\ 12 & 4 \end{bmatrix}$$

Propriedades da multiplicação por um escalar

Dada as matrizes $A, \ B$ de mesma ordem $m \times n$ e os escalares $k, \ k_1, \ k_2$, temos:

1. $k\,(A+B) = k\,A + k\,B$;
2. $(k_1 + k_2)A = k_1 A + k_2 A$;
3. $k_1(k_2 A) = (k_1 k_2)A$;
4. $1\,A = A$;

Multiplicação de matrizes

Sejam as matrizes $A_{m\times n} = [a_{ij}]$ e $B_{n\times p} = [b_{jk}]$. O produto AB é uma matriz $C_{m\times p} = [c_{ik}]$, onde:

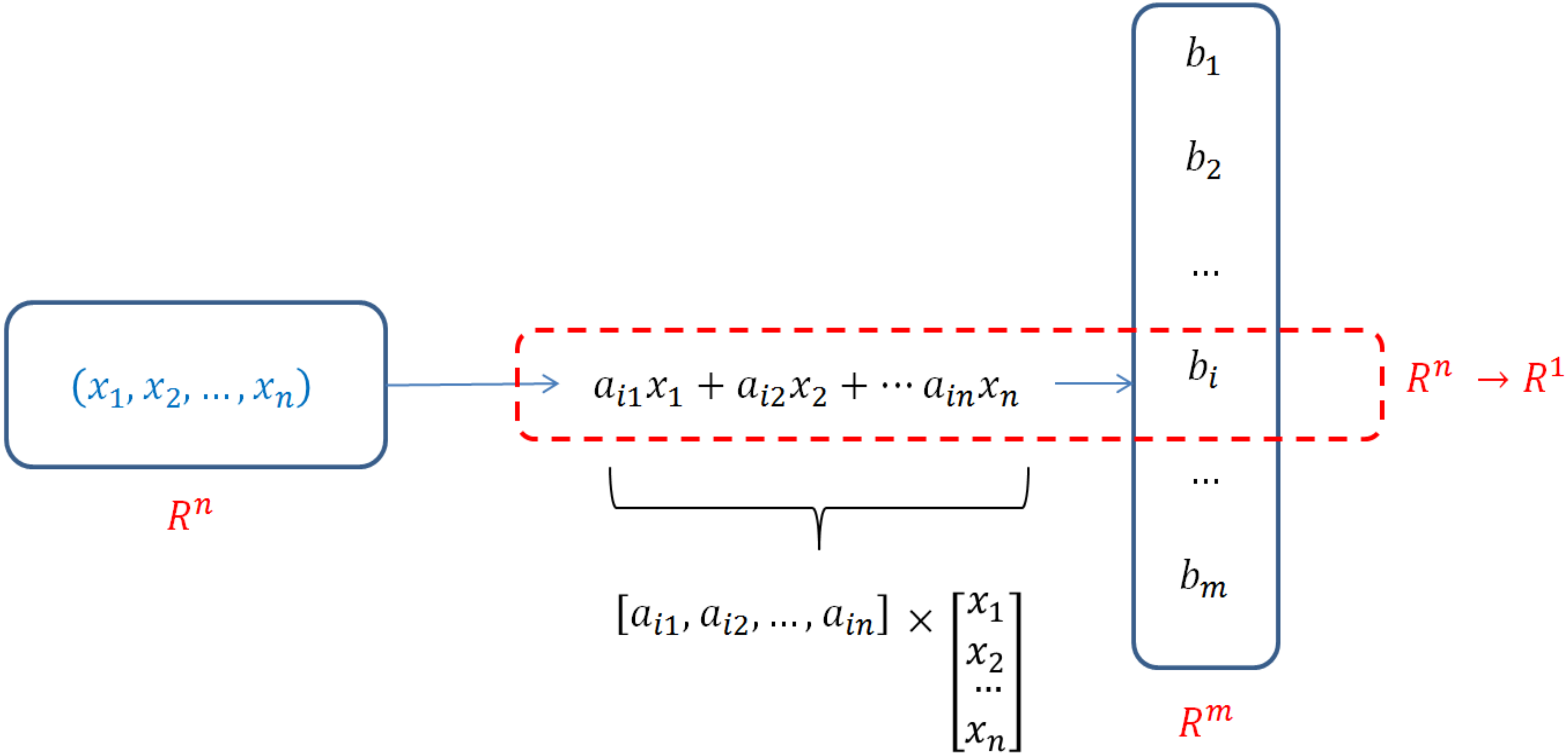
$$c_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot b_{jk} = a_{i1} \cdot b_{1k} + a_{i2} \cdot b_{2k} + \ldots + a_{in} \cdot b_{nk}$$

$$C_{m\times p} = A_{m\times n} \cdot B_{n\times p}$$

Ou seja, cada elemento de C é dado pelo produto escalar de um vetor numa matriz linha de A e um vetor numa matriz coluna de B.

No caso de um sistema linear...

Precisamos trabalhar com "objetos"no mesmo espaço. Assim, os vetores com os coeficientes da equação linear e o vetor de *entrada* devem ter a mesma dimensão n.



Propriedades da multiplicação de matrizes

1. Associativa: $(AB)C = A(BC)$, sendo $A_{m\times n}, B_{n\times p}, C_{p\times r}$.
2. Distributiva à direita: $(A+B)C = AC + BC$, sendo $A_{m\times n}, B_{m\times n}, C_{n\times p}$.
3. Distributiva à esquerda: $C(A+B) = CA + CB$, sendo $A_{m\times n}, B_{m\times n}, C_{p\times m}$;
4. $k(AB) = (kA)B = A(kB)$, sendo $A_{m\times n}, B_{n\times p}$ e k um escalar.
5. $A\, I_n = A$, sendo $A_{m\times n}$.
6. $I_m A = A$, sendo $A_{m\times n}$.
7. Lembrando que em geral $AB \neq BA$.
8. Se $AB = AC \Rightarrow$ não implica que $B = C$.
9. Ainda, $A \times 0 = 0 \times A = 0$, porém, se $AB = 0$, não implica necessariamente que $A = 0$ ou $B = 0$.

Transposição de matrizes

Dada uma matriz A de dimensão $m \times n$, a matriz transposta de A, representada por

$$A^T$$

é obtida permutando as linhas pelas colunas: A^T será de ordem $n \times m$.

Exemplo

$$A_{3\times 2} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -5 & 0 \\ 9 & 4 \end{bmatrix}$$

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & -5 & 9 \\ 3 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Propriedades da transposição de matrizes

1. Se A e B são matrizes do mesmo tipo $m \times n$, então:

$$(A+B)^T = A^T + B^T$$

2. Se k é um escalar e A é uma matriz de ordem $m \times n$, então

$$(k\,A)^T = k\,A^T$$

3. Se A é uma matriz de ordem $m \times n$ e B é uma matriz $n \times p$, então

$$(AB)^T = B^T A^T$$

4. Uma matriz A de ordem n é simétrica se, e somente se, $A = A^T$.

Sistemas de equações lineares

Em função da notação matricial vista, o sistema linear

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & \dots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \dots & & \dots & & \dots & & \dots \\ a_{m1}x_1 & + & \dots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{cases}$$

Pode ser reescrito como

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}_{m\times n} \times \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}_{n\times 1} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{bmatrix}_{m\times 1} \Rightarrow A{\cdot}X = B$$

Representação matricial

Sendo, a matriz dos coeficientes, das incógnitas e dos termos independentes:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}_{m \times n}$$

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}_{n \times 1} \quad e \quad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{bmatrix}_{m \times 1}$$

Questões

1. Existe solução?
2. Quantas soluções existem?
3. Qual o método a usar para obter as soluções, caso existam?

Resolução de sistemas lineares

A resolução de um sistema linear de m equações é baseado na eliminação de variáveis a partir de **transformações básicas**:

1. Permutação de duas equações (troca da ordem das equações);
2. Multiplicação de uma equação por um número real $\neq 0$ (constante não nula);
3. Adição de duas ou mais equações.

Eliminação de variáveis

Note-se que:

- Dado o sistema linear, qualquer uma das modificações (indicadas) que se faça recebe o nome de **operação elementar**.
- Se um sistema linear S_1 foi obtido de um sistema linear S através das operações elementares, dizemos que S_1 é equivalente a S.
- Se um sistema de equações lineares é derivado de um outro por operações elementares, então **ambos têm as mesmas soluções**, ou seja, são equivalentes.

$\leadsto$ **Gauss.**

Método de Gauss

Consiste na transformação do sistema linear original em um sistema escalonado (por *eliminação progressiva*) para logo resolver o sistema equivalente via *substituição regressiva* $\Rightarrow$ **Matriz escalonada**.

Definição

Uma **matriz escalonada** é aquela na qual:

- O primeiro elemento não nulo da linha $i + 1$ (**pivô**) ocorre à direita do pivô da linha i.
- Se uma coluna contém um pivô então todos os outros elementos abaixo desta coluna são iguais a 0.
- Todas as linhas nulas ocorrem abaixo das linhas não nulas.

Matriz escalonada

Analise as matrizes a seguir:

$$\begin{bmatrix} 6 & 2 & -1 & 7 \\ 0 & 4 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 8 & 13 \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -9 \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

Escalonamento

Dado o sistema linear, podemos trabalhar com a *Matriz ampliada* do sistema:

$$\hat{A} = [\, A \mid B \,] = \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_n \end{array}\right]$$

e proceder com a utilização das operações elementares por linhas.

Note que somente os coeficientes do sistema são alterados através das operações elementares por linhas; as variáveis permanecem inalteradas!

Exercício - Gauss

Exemplo

Obter a solução do sistema abaixo através do método de eliminação de Gauss:

$$
\begin{array}{ccccccc}
6x & + & 2y & - & z & = & 7 \\
2x & + & 4y & + & z & = & 7 \\
3x & + & 2y & + & 8z & = & 13
\end{array}
$$

(A gente resolve no R.)

Posto de uma matriz

Seja a matriz $A_{m \times n}$ e seja $S_{m \times n}$ a sua forma escalonada (escada) equivalente.

- O posto de A, p é o número de linhas não nulas de S.
- A nulidade de A é o número $n - p$ (diferença entre as colunas de A e o seu posto, também chamada de graus de liberdade do sistema).

Exemplo

Determine o posto da matriz

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 3 & -4 & 2 \\ 2 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

(Faremos no R, mas veja slide a seguir.)

Cont.

A matriz escada equivalente é dada por

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Assim, $p_A = 2$ e a nulidade é igual a 1.

Exemplo

Determine o posto da matriz de coeficientes e da matriz ampliada do sistema linear

$$\begin{cases} 2x + 4y + 6z = -6 \\ 3x - 2y - 4z = -38 \\ x + 2y + 3z = -3 \end{cases}$$

(Faremos no R, mas veja slide a seguir.)

Solução

A matriz ampliada na suas forma escada é dada por

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -3 \\ 0 & 8 & 13 & 29 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Que equivale ao sistema:

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = -3 \\ \phantom{x + {}} 8y + 13z = 29 \end{cases}$$

Temos portanto, uma equação redundante, que pode ser desprezada.

- As duas primeiras equações são independentes $\leftarrow$ o posto nos dá essa informação.
- A terceira equação é uma combinação linear das outras duas.

Cont.

Com duas equações independentes e três incógnitas, a solução é dada por

$$x = -\frac{41}{4} + \frac{1}{4}\alpha; \quad y = \frac{29}{8} - \frac{13}{8}\alpha; \quad z = \alpha$$

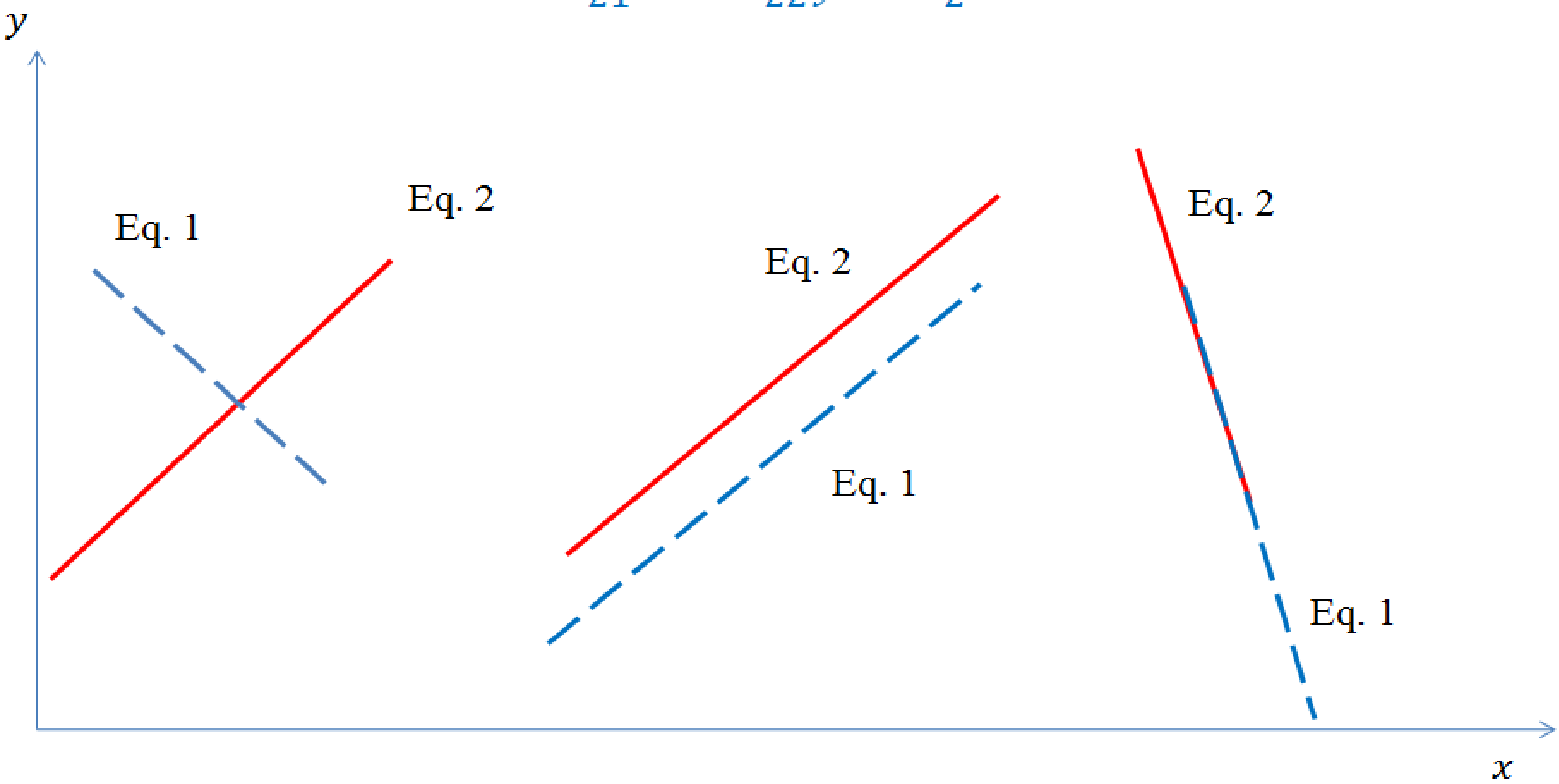
Onde consta uma variável livre (um grau de liberdade, α).

- Note-se que o posto tem relação com o número de soluções do sistema.
- A solução também pode ser escrita usando a notação vetorial/matricial:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -41/4 \\ 29/8 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1/4 \\ -13/8 \\ 1 \end{pmatrix} \alpha$$

Exemplo

$$a_{11}x + a_{12}y = b_1$$
$$a_{21}x + a_{22}y = b_2$$



Classificação de sistemas lineares

Seja n o número de incógnitas de um S.L. com m equações. Seja p_A o posto da matriz de coeficientes (A) e $p_{\hat{A}}$ o posto da matriz ampliada, tal que $\hat{A} = [A \mid B]$. Temos que:

1. Sistema Compatível ou Possível: quando admite solução.
   1.1 Sistema Determinado: Quando admite uma única solução

   $$\Rightarrow p_A = p_{\hat{A}} = n$$

   1.2 Sistema Indeterminado: Quando admite infinitas soluções

   $$\Rightarrow p_A = p_{\hat{A}} < n$$

2. Sistema Incompatível ou Impossível: quando não admite solução

$$\Rightarrow p_A \neq p_{\hat{A}}$$

Sistemas homogêneos

Um sistema homogêneo é um sistema da forma:

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} a_{11}x_1 & + & \ldots & + & a_{1n}x_n & = & 0 \\ a_{21}x_1 & + & \ldots & + & a_{2n}x_n & = & 0 \\ \ldots & & \ldots & & \ldots & & \ldots \\ a_{m1}x_1 & + & \ldots & + & a_{mn}x_n & = & 0 \end{array}\right. \tag{4}$$

- Este sistema é sempre possível: sempre admite pelo menos a solução trivial $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$.
- A matriz ampliada e a matriz dos coeficientes têm mesmo posto.

Exemplo

Determine a solução matricial dos sistemas a seguir:

1. $\hat{A} = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & -2 & 0 \end{array}\right]$

2. $\hat{A} = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 2 & 5 & -2 & 3 \end{array}\right]$

Solução

O sistema homogêneo na sua forma escalonada é dado por

$$\hat{A} = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -4 & 0 \end{array}\right]$$

Como

$$p = p_A = p_{\hat{A}} = 2 < n = 3$$

temos um S.P.I. e $n - p = 1$ grau de liberdade. Se $z = \alpha$, a solução geral será dada por

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} -7/3 \\ 4/3 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\text{Sol. básica}} \alpha$$

Cont.

O sistema NÃO homogêneo na sua forma escalonada é dado por

$$\hat{A} = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & -4 & -5 \end{array}\right]$$

Como

$$p = p_A = p_{\hat{A}} = 2 < n = 3$$

temos um S.P.I. e $n - p = 1$ grau de liberdade. Se $z = \alpha$, a solução geral será dada por

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17/3 \\ -5/3 \\ 0 \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} -7/3 \\ 4/3 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\text{Sol. básica}} \alpha$$

Cont.

Comparando as soluções:

- Sistema homogêneo:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7/3 \\ 4/3 \\ 1 \end{pmatrix} \alpha$$

- Sistema não homogêneo:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17/3 \\ -5/3 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -7/3 \\ 4/3 \\ 1 \end{pmatrix} \alpha$$

Assim, a solução geral de um sistema é dado pela solução do S.H. associado e uma solução particular.

Exercícios

Resolva os sistemas lineares a seguir:

- $\hat{A} = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 13 & 3 \\ 0 & 1 & 5 & 2 \\ 0 & -2 & -10 & -8 \end{array}\right]$

- $\hat{A} = \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & -1 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & -2 & 1 \end{array}\right]$