Equações em diferenças - parte 2
R: dataframes e funções

23 de abril de 2019

Equações lineares em diferença de ordem 1

São do tipo

$$y_{t+1} + a_0 y_t = g(t)$$

- Se $g(t) = b \in \mathbb{R}$ então temos uma equação autônoma.
- Já se $g(t) = b + ct$, temos uma equação não autônoma.
- Se $g(t) = 0$ temos uma equação homogênea.

Assim, no caso da equação homogênea

$$y_{t+1} + a_0 y_t = 0$$

A solução explícita será dada por

$$y_t = A(-a_0)^t$$

onde A -e ima constante arbitrária que depende da condição inicial.

Impacto de a_0 na dinâmica do sistema

Por y_0 ser um valor fixo, a dinâmica depende integralmente de do termo $(-a_0)^t$. No longo prazo (L.P.), com $t = 1, 2, 3, \ldots$

$$\lim_{t\to\infty} y^t = \lim_{t\to\infty} (-a_0)^t y_0$$

Portanto,

1. Se $a_0 > 0$ haverão oscilações $(+, -, +, -, \ldots)$;
2. Se $a_0 < 0$ não haverão oscilações;
3. Se $|a_0| < 1$ a trajetória será amortecida e tenderá a um nível equilíbrio y^*;
4. Se $|a_0| > 1$ a trajetória será explosiva e tenderá a se afastar do equilíbrio;
5. Se $a_0 = -1$, y_t é constante, enquanto que $a_0 = 1$, surgirão *saltos* regulares, $-y_0, +y_0, -y_0, +y_0, \ldots$

E se $g(t) \neq 0$ (Eq. não homogênea)?

Suponha agora que

$$y_{t+1} + a_0 y_t = g(t)$$

Dizemos que a solução geral é dada por

$$y_t = y_t^h + y_t^p$$

onde

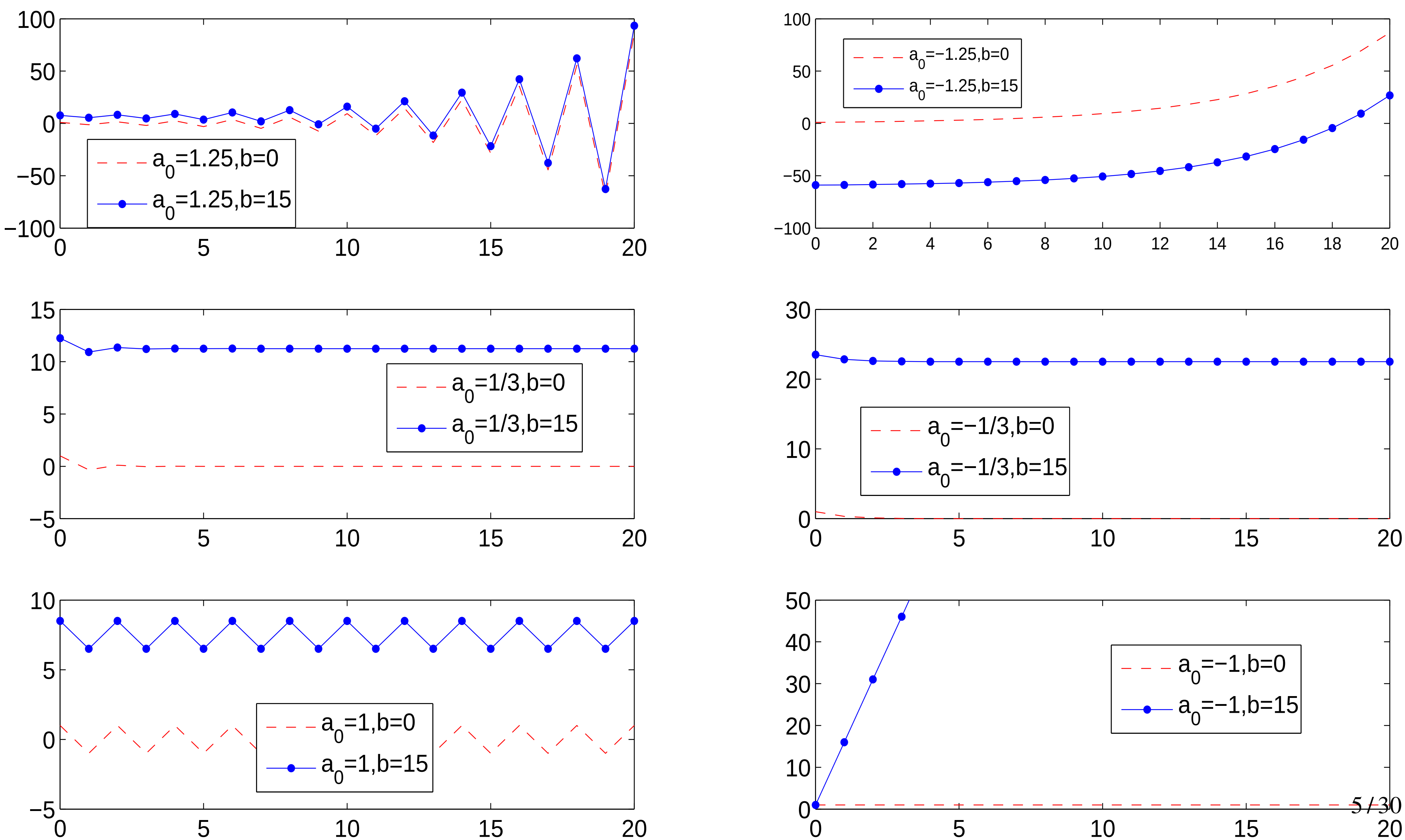
- y_t^h é a solução do sistema homogêneo associado e que determina a estabilidade do sistema; no caso,

$$y_t^h = A(-a_0)^t$$

- y_t^p é a solução particular que depende da forma de $g(t)$.

Efeito de $g(t) = b$ na dinâmica de y

Afeta apenas o *steady state*, mas as características dinâmicas continuam a depender da solução homogênea.



Conclusões parciais

1. Uma solução geral para uma equação em diferenças de ordem 1, $y_{t+1} + a_0 y_t = g(t)$, é dado por

$$y_t = y_t^h + y_t^p = \underbrace{A \cdot (-a_0)^t}_{\text{estabilidade}} + \underbrace{y^*}_{\text{equilíbrio}}$$

2. O coeficiente do termo de ordem menor (a_0), via y_t^h, determina a estabilidade na dinâmica de y.

3. O termo independente de y, $g(t)$, determina, via y_t^p o nível de equilíbrio do sistema, seja este fixo ou móvel.

Outros casos de $g(t)$

Se $g(t) = Bd^t$ onde B e d são constantes (função exponencial),

$$y_t^p = \frac{B}{d + a_0} d^t$$

Se $g(t)$ é um polinômio de grau m, a tentativa inicial para a solução particular será dada por

$$y_t^p = K_0 + K_1 t + K_2 t^2 + \ldots + K_m t^m$$

que será substituída na equação em diferença e os coeficientes $K_i, \; i = 0, \ldots, m$ serão identificados por igualdade de polinômios.
Já se $g(t) = B_1 \sin(\omega t) + B_2 \cos(\omega t)$, uma tentativa inicial de solução particular será dada por

$$y_t^p = K_1 \sin(\omega t) + K_2 \cos(\omega t)$$

onde os valores de K_1 e K_2 serão novamente obtidos a partir da igualdade de termos quando substitui-se y_t por y_t^p na equação em diferença.

Outros casos de $g(t)$

No caso em que $g(t) = X_t$, em que X_t é uma sequência de valores conhecida cuja forma funcional é desconhecida e

$$y_t + a_0 y_{t-1} = X_t$$

O método usado até agora para a identificação da solução particular não pode ser aplicado.

Seja o operador de atraso L, tal que se

$$Ly_t = y_{t-1}$$

$$L^k y_t = y_{t-k}$$

então (Resultado 1)

$$y_t = L^{-1} y_{t-1}$$

$$y_t = L^{-k} y_{t-k}$$

Seja

$$w = 1 + \alpha L + \alpha^2 L^2 + \dots$$

Ou seja,

$$w = 1 + \alpha L(1 + \alpha L + \alpha^2 L^2 + \dots)$$

E por tanto

$$w = 1 + \alpha L w$$

$$(1 - \alpha L) w = 1$$

$$\Rightarrow w = (1 - \alpha L)^{-1}$$

e portanto (Resultado 2)

$$(1 - \alpha L)^{-1} = 1 + \alpha L + \alpha^2 L^2 + \dots$$

Usando os dois resultados anteriores:

$$\begin{aligned}
y_t + a_0 y_{t-1} &= X_t \\
y_t + a_0 L y_t &= X_t \\
(1 + a_0 L) y_t &= X_t \\
y_t &= (1 + a_0 L)^{-1} X_t \qquad (1)
\end{aligned}$$

Fazendo $\alpha = -a_0$ e aplicando a expansão (Resultado 2) temos que

$$y_t^p = (1 + (-a_0)L + (-a_0)^2 L^2 + \ldots) X_t$$

ou seja (Solução A):

$$y_t^p = \sum_{i=0}^{\infty} (-a_0)^i L^i X_t$$

ou (Solução 1 - *backward solution*):

$$y_t^p = \sum_{i=0}^{\infty} (-a_0)^i X_{t-i}$$

Que é uma soma ponderada geométrica dos valores passados de X_t, que converge se e somente se $|a_0| < 1$.

Caso $|a_0| > 1$, devemos optar por uma alternativa pois a solução anterior não seria uma soma *limitada*. Para isso, seja

$$1 - \alpha L = -\alpha L + 1 = -\alpha L(1 - \frac{1}{\alpha L}) \qquad (*)$$

Ainda,

$$(1 - \frac{1}{\alpha L})^{-1} = 1 + (\frac{1}{\alpha L}) + (\frac{1}{\alpha L})^2 + \dots$$

Ou seja

$$(1 - \frac{1}{\alpha L})^{-1} = 1 + (\frac{1}{\alpha})L^{-1} + (\frac{1}{\alpha})^2 L^{-2} + \dots \qquad (**)$$

Assim, tomando a inversa de $(*)$ e usando $(**)$:

$$\begin{aligned}
(1-\alpha L)^{-1} &= -\frac{1}{\alpha L}\left(1-\frac{1}{\alpha L}\right)^{-1} \\
&= -\frac{1}{\alpha}L^{-1}\left(1+(\frac{1}{\alpha})L^{-1}+(\frac{1}{\alpha})^2L^{-2}+\dots\right) \\
&= -\frac{1}{\alpha}L^{-1}-(\frac{1}{\alpha})^2L^{-2}-(\frac{1}{\alpha})^3L^{-3}-\dots
\end{aligned}$$

Ou seja,

$$(1-\alpha L)^{-1} = -\sum_{i=1}^{\infty}(\frac{1}{\alpha})^iL^{-i}$$

Com isso e lembrando que

$$y_t^p = (1 + a_0 L)^{-1} X_t$$

Para $\alpha = -a_0$, segue-se que

$$y_t^p = -\sum_{i=1}^{\infty} (-\frac{1}{a_0})^i L^{-i} X_t$$

ou (Solução 2 - *forward solution*):

$$y_t^p = -\sum_{i=1}^{\infty} (-\frac{1}{a_0})^i X_{t+i}$$

que é uma sequência limitada pois $|1/a_0| < 1$ e é baseada em valores futuros de X_t.

- Assim, a solução *backward* será usada quando $|a_0| < 1$, ou seja, no caso de trajetórias estáveis.
- Quando o sistema é instável ($|a_0| > 1$), a solução particular será dada pela solução *forward*.

No R

Para simular estes modelos, precisamos

1. Especificar os parâmetros necessários;
2. Especificar uma forma de armazenar os resultados: matrizes, vetores e **dataframes**;
3. Usar estruturas de controle: *if-else*, ***for***
4. Especificar funções: **function**

Vejamos no R.

Sugestão de exercícios computacionais

Refaça a simulação anterior, considerando que desejamos gerar

1. n séries temporais para um determinado número de iterações *num_iter* e para um determinado conjunto de valoes para coeficientes da equação em diferença de ordem 1, tendo como termo independente um termo constante $b \in \mathbb{R}$;

2. Uma série temporal para um dado coeficiente da equação em diferença de ordem 1, tendo como termo independente um termo constante $b \in \mathbb{R}$ e para um conjunto m de condições iniciais diferentes.

Comente/explique o seu código e elabore o gráfico mais apropriado.

Cobweb model

Modelo dinâmico de oferta e demanda

- A oferta reage ao preço com um atraso de um período: a produção requer de um período fixo de tempo (agricultura);
- Os produtores *acreditam* que o preço se manterá no período seguinte e assim, a nova "safra" de produção será iniciada a partir desse preço
- A demanda depende do preço atual;
- Funções lineares;
- Market clearing: a cada período o mercado determina o preço tal que a demanda absorva o produto ofertado.

$$D_t = a + bp_t \tag{2}$$

$$S_t = a_1 + b_1 p_{t-1} \tag{3}$$

$$D_t = S_t \tag{4}$$

Ou seja:

$$a + bp_t = a_1 + b_1 p_{t-1}$$

com

$$b, a_1 < 0; \qquad a, b_1 > 0$$

Temos uma equação em diferença de ordem 1:

$$p_t - \frac{b1}{b} p_{t-1} = \frac{a_1 - a}{b}$$

A sol. homogênea e a particular:

$$p_t^h = A\left(\frac{b_1}{b}\right)^t \qquad\qquad p_t^p = \frac{a1 - a}{b - b_1} = p^*$$

Assim,

$$p_t = A\left(\frac{b}{b_1}\right)^t + p^* \tag{5}$$

Supondo uma condição inicial p_0, para $t = 0$ em (5):

$$p_0 = A + p^* \Rightarrow A = p_0 - p^*$$

Ou seja,

$$p_t = (p_0 - p^*)\left(\frac{b_1}{b}\right)^t + p^*$$

Equilíbrio estático

$$p_t = (p_0 - p^*) \left(\frac{b_1}{b} \right)^t + p^*$$

$$b, a_1 < 0; \qquad a, b_1 > 0$$

- Se $p_0 = p^* \Rightarrow p_t = p^*$. Ou seja, não há alteração em p (sob condições normais de operação): Equilíbrio estático, pois se trata da solução do sistema de equações na sua versão estática.

Análise dinâmica

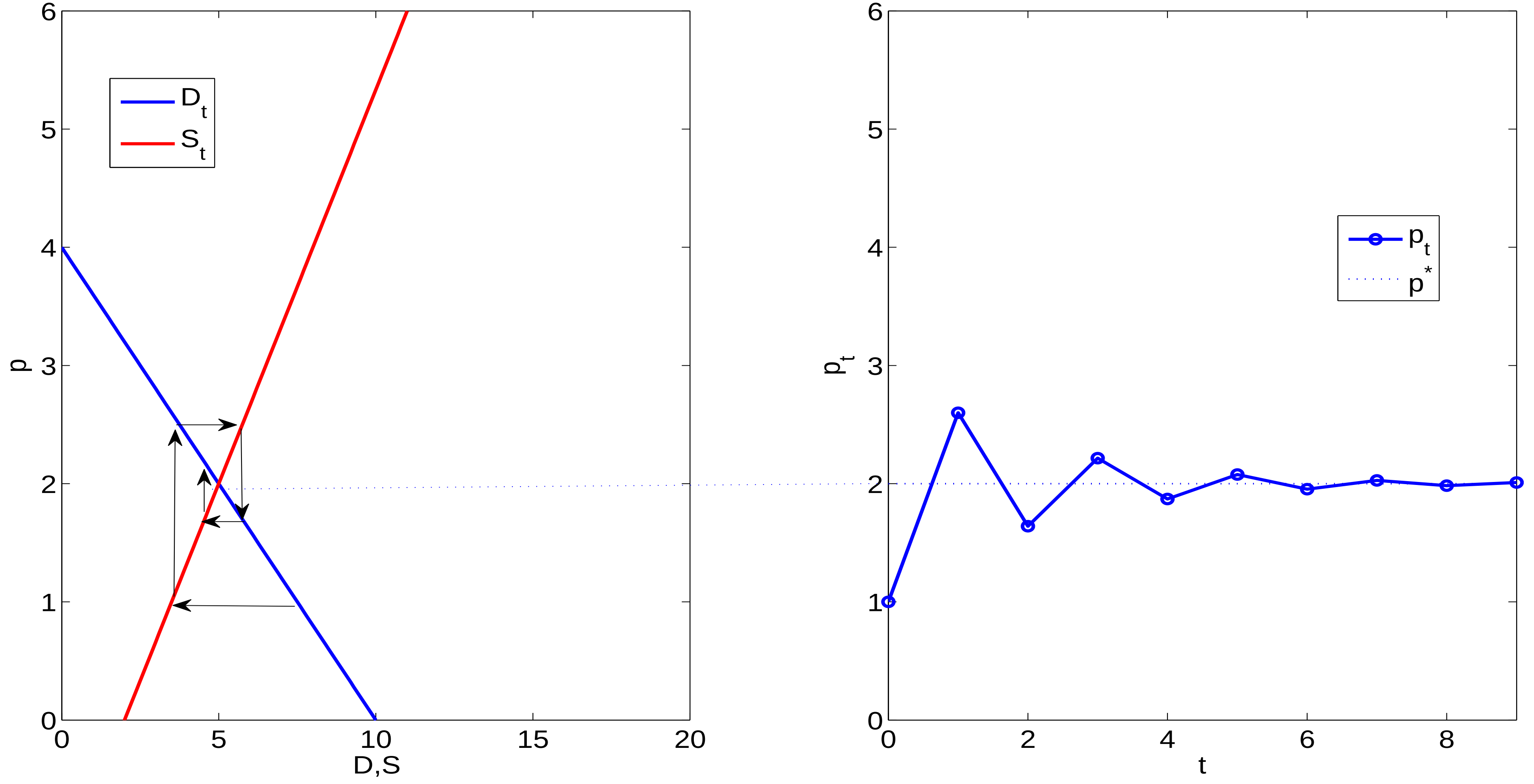
$$p_t = (p_0 - p^*)\left(\frac{b_1}{b}\right)^t + p^*$$

$$b, a_1 < 0; \qquad a, b_1 > 0$$

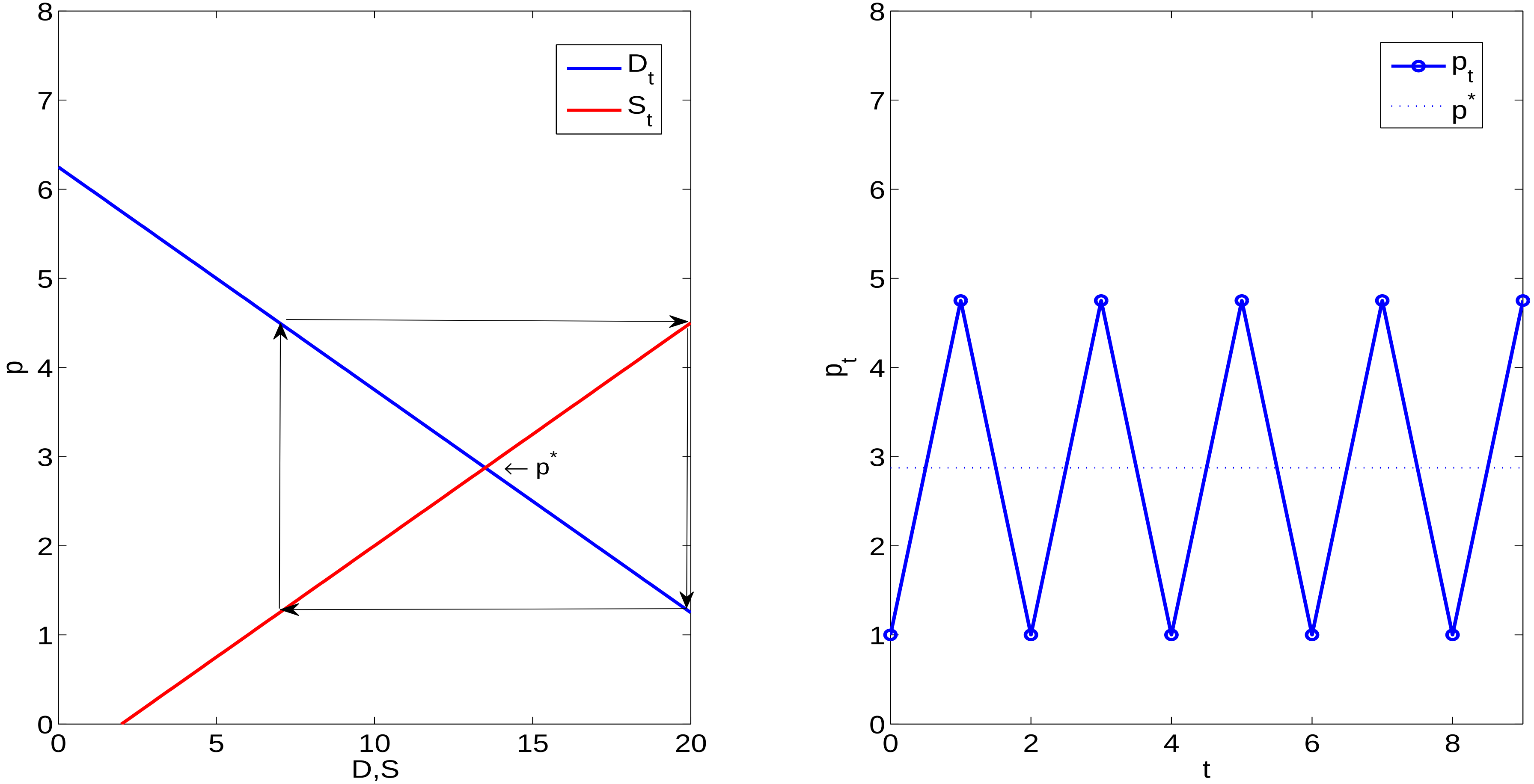
- $b_1/b < 0 \Rightarrow$ há oscilações;
- As oscilações terão amplitudes amortecidas, constantes ou explosivas dependendo de

$$\left|\frac{b_1}{b}\right| \lesseqqgtr 1 \qquad \rightsquigarrow \qquad |b_1| \lesseqqgtr |b|$$

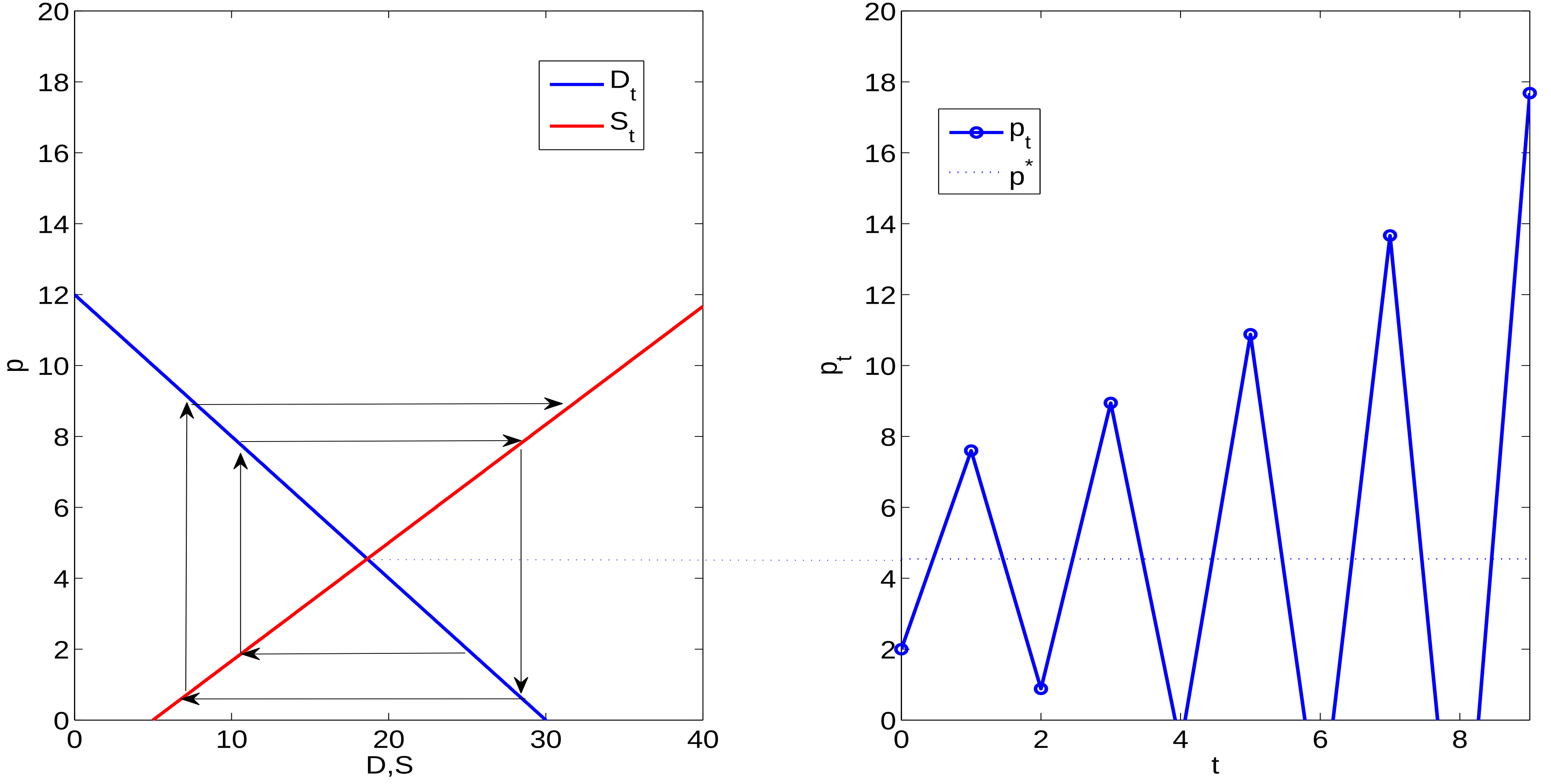
$$a = 10; b = -2.5; a_1 = -2; b_1 = 1.5$$



$$a = 25; b = -4; a_1 = -2; b_1 = 4$$



$$a = 30; b = -2.5; a_1 = 5; b_1 = 3$$



Expectativas adaptativas

Os produtores têm uma expectativa de preço p^e, a partir da qual determinam os seus níveis de produção:

$$S_t = a_1 + b_1 p_t^e$$

Estas expectativas são ajustadas a cada período de acordo com a discrepância entre o valor observado (realizado) e o valor esperado, com regra de variação dada por:

$$p_t^e = p_{t-1}^e + \beta(p_{t-1} - p_{t-1}^e)$$

onde $0 < \beta < 1$ é o fator de ajustamento. Reescrevendo:

$$p_t^e - (1 - \beta)p_{t-1}^e = \beta p_{t-1}$$

$$p_t^e - (1-\beta)p_{t-1}^e = \beta p_{t-1}$$

A solução homogênea:

$$p_t^{eh} = A(1-\beta)^t$$

onde $|1-\beta| < 1$. A solução particular surge de reescrever a equação em diferença tal que:

$$[1-(1-\beta)L]p_t^e = \beta p_{t-1}$$

Ou seja,

$$p_t^{ep} = [1-(1-\beta)L]^{-1}\beta p_{t-1}$$

Ao desconhecer a forma funcional de p_{t-1}, podemos usar o fato já conhecido de, se uma variável y_t possui uma regra de variação que depende de outra variável X_t, de forma funcional desconhecida, com $|a_0| < 1$ tal que

$$y_t^p = (1 + a_0 L)^{-1} X_t$$

então (*solução backward*):

$$y_t^p = \sum_{i=0}^{\infty} (-a_0)^i X_{t-i} \tag{6}$$

$$p_t^{ep} = [1 - (1-\beta)L]^{-1}\beta p_{t-1}$$

Aplicando a Eq. (6):

$$p_t^{ep} = \sum_{i=0}^{\infty}(1-\beta)^i \beta p_{t-1-i}$$

E portanto, a solução geral da equação é dada por:

$$p_t^e = A(1-\beta)^t + \beta\sum_{i=0}^{\infty}(1-\beta)^i p_{t-1-i}$$

- Note-se que, quando se trata de um sistema estável, a solução homogênea tende a ser não significativa no L.P.
- Analisando a sol. particular, ela nos indica que no L. P. a expectativa de preço é uma média ponderada (com pesos geometricamente decrescentes) de todos os preços passados observados.

Método alternativo de resolução

Do sistema

$$
\begin{aligned}
D_t &= a + bp_t \\
S_t &= a_1 + b_1 p_t^e \\
D_t &= S_t && (7) \\
p_t^e &= (1-\beta)p_{t-1}^e + \beta p_{t-1} && (8)
\end{aligned}
$$

Podemos colocar p_t^e em função de S_t:

$$p_t^e = \frac{S_t - a_1}{b_1} \quad \Rightarrow \quad p_{t-1}^e = \frac{S_{t-1} - a_1}{b_1}$$

e da Eq. (7), podemos colocar S_t em função de p_t:

$$S_t = a + bp_t \quad \Rightarrow \quad S_{t-1} = a + bp_{t-1}$$

Assim, colocando p_t^e em função de p_t na Eq. (8) temos que:

$$p_t - (\frac{(b_1 - b)\beta}{b} + 1)p_{t-1} = \frac{a_1 - a}{b}\beta$$

$$p_t - (\frac{(b_1 - b)\beta}{b} + 1)p_{t-1} = \frac{a_1 - a}{b}\beta$$

A sol. homogênea:

$$p_t^h = A(\frac{(b_1 - b)\beta}{b} + 1)^t$$

A condição de estabilidade é tal que

$$\left| \frac{(b_1 - b)\beta}{b} + 1 \right| < 1$$

Ou seja:

$$-1 < \frac{(b_1 - b)\beta}{b} + 1 < 1$$

$$-2 < \frac{(b_1 - b)\beta}{b} < 0$$

Manipulando e reescrevendo, temos que:

$$1 - \frac{2}{\beta} < \frac{b_1}{b} < 1$$

Mas $1 - \frac{2}{\beta} < -1$. Assim, a condição de estabilidade deste modelo é menos rigorosa que o modelo original à esquerda da desigualdade. Portanto, a introdução de expectativas do modelo o torna *mais estável*.