



**Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο
Θεσσαλονίκης
Σχολή Θετικών Επιστημών
Τμήμα Πληροφορικής**

Πτυχιακή Εργασία

**Μελέτη και Προσομοίωση του Κβαντικού Surface
Κώδικα Διόρθωσης Σφαλμάτων $[[5,1,2]]$ και
 $[[13,1,3]]$**

**Χρυσόστομος Πανής
ΑΕΜ: 3219**

Επιβλέπων καθηγητής: **Νικόλαος Κονοφάος**

Συνεπιβλέπων καθηγητής: **Ελευθέριος Αγγελής**

Σε συνεργασία με το κ. **Κωνσταντίνο Προύσαλη**

Θεσσαλονίκη 2022

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Περίληψη.....	4
1. Εισαγωγή στον Κβαντικό Υπολογισμό.....	5
1.1 Η ιδέα του Κβαντικού Υπολογισμού.....	5
1.2 Το Πρόβλημα του Κβαντικού Θορύβου.....	17
1.2.1 Ψηφιοποίηση Κβαντικού Θορύβου.....	19
1.2.2 Μοντέλο Κβαντικού Θορύβου Pauli.....	21
1.3 Κώδικες και Πρωτόκολλα Διόρθωσης Κβαντικού Σφάλματος.....	28
1.3.1 Κβαντικοί Κώδικες.....	30
1.3.1.1 Stabiliser Κώδικες.....	38
1.3.1.2 Surface Κώδικες.....	41
1.3.2 Πρωτόκολλο Διόρθωσης Σφάλματος.....	42
2. Surface Κώδικες.....	44
2.1 Ο surface code four-cycle $[[2, 1, 1]]$	44
2.2 Ο $[[5, 1, 2]]$ surface code.....	45
2.3 Κλιμάκωση του surface code.....	47
3. Μοντελοποίηση Φυσικού Συστήματος.....	49
3.1 Κβαντικές Τελείες: QBit Βασισμένο σε Στροφορμή.....	49
3.2 Αρχιτεκτονική Ημιαγώγιμης Νανοδομής.....	50
3.3 Μοντελοποίηση Κβαντικού Σφάλματος.....	53
4. Στατιστικά εργαλεία.....	55
4.1 Survival Curves.....	55
4.2 Cox Regression.....	57
5. Υλοποίηση Προσομοιωτή Θορύβου.....	60
6. Αποτελέσματα Προσομοίωσης.....	63

6.1 Survival Ανάλυση.....	63
6.1.1 Surface κώδικας $[[5,1,2]]$ με πιθανότητες σφάλματος X και Z μεταξύ (0-0,5%), (0,5-1%), (1-1,5%).....	64
6.1.2 Surface κώδικας $[[13,1,3]]$ με πιθανότητες σφάλματος X και Z μεταξύ (0-0,5%), (0,5-1%), (1-1,5%).....	65
6.1.3 Surface κώδικας $[[5,1,2]]$ και $[[13,1,3]]$ με πιθανότητες σφάλματος X και Z μεταξύ (0-1%).....	66
6.2 Cox Regression.....	67
6.2.1 Μοντέλο με και χωρίς αλληλεπιδράσεις.....	68
Συμπεράσματα.....	70
Βιβλιογραφία.....	71

Περίληψη

Ο σκοπός αυτής της εργασίας είναι να εξάγουμε κάποια συμπεράσματα σε ότι αφορά την αντοχή των surface κωδίκων $[[5,1,2]]$ και $[[13,1,3]]$ απέναντι σε σφάλματα και η δημιουργία αντίστοιχων γραφημάτων.

Στη παρούσα εργασία παρουσιάζονται αρχικά πληροφορίες σχετικά με τον κβαντικό υπολογισμό και ύστερα πιο συγκεκριμένα σε ότι αφορά τον κβαντικό θόρυβο και τα σφάλματα που αυτός δημιουργεί, καθώς και στις τεχνικές διόρθωσης κβαντικών σφαλμάτων. Στη συνέχεια εμβαθύνει περισσότερο στους surface κώδικες και παρουσιάζει ένα τέτοιο φυσικό μοντέλο.

Περνώντας στο δεύτερο σκέλος την εργασίας παρουσιάζονται τα στατιστικά εργαλεία που χρησιμοποιήθηκαν αργότερα για την εξαγωγή στατιστικών συμπερασμάτων σχετικά με τους δύο αυτούς κώδικες. Δίνεται επίσης και αναλυτική περιγραφή του προγράμματος του προσομοιωτή που δημιουργήθηκε για την παραγωγή των δεδομένων και αναπαριστά τους κώδικες και την εμφάνιση σφαλμάτων σε αυτούς.

Τέλος, εφαρμόζονται στα δεδομένα τα στατιστικά εργαλεία που προαναφέρθηκαν και εξάγονται κάποια γραφήματα και συμπεράσματα τα οποία παραθέτονται στο τελευταίο κεφάλαιο της εργασίας.

1. Εισαγωγή

Σε αυτό το κεφάλαιο θα δούμε κάποιες βασικές έννοιες της κβαντομηχανικής όπως είναι το qubit, η υπέρθεση και η διεμπλοκή. Επίσης θα παρουσιαστούν και κάποιες βασικές κβαντικές πύλες. Στη συνέχεια στην υποενότητα 1.2 περιγράφεται σχετικά απλά τι είναι ο κβαντικός θόρυβος και πώς αυτός επηρεάζει τα κβαντικά συστήματα. Ύστερα ορίζεται η ψηφιοποίηση του κβαντικού θορύβου, δηλαδή το πως ένα κβαντικό σφάλμα αναλύεται σε ένα άθροισμα από τελεστές Pauli, αλλά και τι είναι το bit flip και το phase flip σε ένα qubit. Στην υποενότητα 1.3 συνοχικά κατάλληλα της προηγούμενης υποενότητας προχωράμε στους τρόπους με του οποίους μπορούμε να αντιμετωπίσουμε τα σφάλματα που προκαλεί ο κβαντικός θόρυβος. Μπαίνοντας σταδιακά στο συγκεκριμένο ζήτημα περιγράφονται οι έννοιες του πλεονασμού της κβαντικής πληροφορίας και οι βασικοί κβαντικοί κώδικες ανίχνευσης της ύπαρξης σφάλματος αλλά και τον εντοπισμό αυτού. Επίσης σε ορίζεται και το τι εκφράζει η απόσταση ενός κβαντικού κώδικα. Στη συνέχεια εξηγείται πώς αυτοί οι βασικοί κβαντικοί κώδικες γενικεύονται για τη δημιουργία $[[n, k, d]]$ κωδίκων σταθεροποιητών. Γίνεται μια βασική εισαγωγή στους surface κώδικες που θα περιγραφούν στο επόμενο κεφάλαιο και τέλος, παρουσιάζεται η λειτουργία ενός ολοκληρωμένου πρωτοκόλλου διόρθωσης σφάλματος.

1.1 Μηχανισμός Κβαντικού Υπολογισμού

Qubit

Στους κλασικούς υπολογιστές η μονάδα πληροφορίας είναι το bit. Ένα bit πληροφορίας μπορεί να πάρει μόνο δύο τιμές την «0» και την «1». Στους κβαντικούς υπολογιστές μονάδα πληροφορίας είναι το κβαντικό bit (quantum bit) το οποίο για συντομία γράφεται ως qubit. Το qubit είναι ένα κβαντικό σύστημα δύο βασικών καταστάσεων, οι δύο βασικές καταστάσεις του qubit συμβολίζονται με $|0\rangle$ και $|1\rangle$ [4]. Υπάρχουν αρκετά κβαντικά συστήματα δύο καταστάσεων τα οποία μπορούν να χρησιμοποιηθούν ως qubits [3]. Για παράδειγμα, η κατάσταση του spin ενός σωματιδίου με spin $\frac{1}{2}$, μπορεί να θεωρηθεί ως qubit, όπου η κατάσταση spin $+\frac{1}{2}$ αντιστοιχεί στην βασική κατάσταση $|0\rangle$ και η κατάσταση spin $-\frac{1}{2}$ στη βασική κατάσταση $|1\rangle$: $|+\frac{1}{2}\rangle \rightarrow |0\rangle$ και $|-\frac{1}{2}\rangle \rightarrow |1\rangle$.

Οι δύο βασικές καταστάσεις του qubit μπορούν να γραφούν ως πίνακες:

$$|0\rangle = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad |1\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Υπέρθεση (Superposition)

Μια βασική ιδιότητα που ξεχωρίζει το qubit από το κλασικό bit είναι ότι μπορεί να βρίσκεται σε υπέρθεση (Superposition). Η υπέρθεση είναι μια από τις θεμελιώδεις αρχές της κβαντομηχανικής. Στην κλασική φυσική, ένα κύμα που περιγράφει έναν μουσικό τόνο μπορεί να θεωρηθεί ως διάφορα κύματα με διαφορετικές συχνότητες που προστίθενται μαζί, δηλαδή υπερτίθενται. Ομοίως, μια κβαντική κατάσταση σε υπέρθεση μπορεί να θεωρηθεί ως γραμμικός συνδυασμός άλλων διακριτών κβαντικών καταστάσεων. Αυτή η κβαντική κατάσταση σε υπέρθεση σχηματίζει μια νέα έγκυρη κβαντική κατάσταση και γράφεται:

$$|q\rangle = a|0\rangle + b|1\rangle \quad \text{όπου} \quad |a|^2 + |b|^2 = 1$$

Με διανύσματα:

$$|q\rangle = a|0\rangle + b|1\rangle = a \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

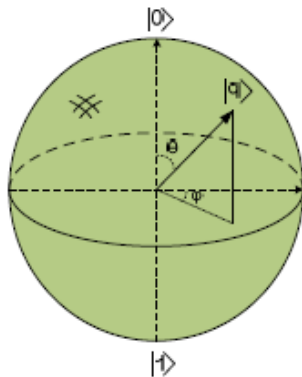
Τα qubits μπορούν να βρίσκονται σε υπέρθεση και των δύο βασικών καταστάσεων $|0\rangle$ και $|1\rangle$. Όταν ένα qubit μετράται (για να είμαστε πιο ακριβείς: μόνο τα παρατηρήσιμα στοιχεία μπορούν να μετρηθούν), το qubit θα καταρρεύσει σε μία από τις ιδιοκαταστάσεις του και η μετρούμενη τιμή θα αντικατοπτρίζει αυτή την κατάσταση. Για παράδειγμα, όταν ένα qubit βρίσκεται σε κατάσταση υπέρθεσης ίσων βαρών, μια μέτρηση θα το κάνει να καταρρεύσει σε μία από τις δύο βασικές του καταστάσεις $|0\rangle$ και $|1\rangle$ με ίση πιθανότητα 50%. Αν η κατάσταση του όταν μετρηθεί είναι $|0\rangle$ θα δίνει πάντα το αποτέλεσμα 0. Ομοίως, το $|1\rangle$ θα μετατρέπεται πάντα σε 1 [5].

Η κβαντική υπέρθεση είναι θεμελιωδώς διαφορετική από την υπέρθεση κλασικών κυμάτων. Ένας κβαντικός υπολογιστής που αποτελείται από n qubits μπορεί να υπάρξει σε μια υπέρθεση 2^n καταστάσεων: από $|000\dots 0\rangle$ έως $|111\dots 1\rangle$. Αντίθετα, η αναπαραγωγή n μουσικών ήχων με όλες τις διαφορετικές συχνότητες, μπορεί να δώσει μόνο μια υπέρθεση n συχνοτήτων. Η πρόσθεση κλασικών κυμάτων κλιμακώνεται γραμμικά, ενώ η υπέρθεση κβαντικών καταστάσεων είναι εκθετική [5].

Έχοντας υπόψιν και ότι ένα qubit μπορεί να βρίσκεται σε υπέρθεση είναι καλύτερα να φανταζόμαστε την κατάσταση ενός qubit σαν ένα διάνυσμα στη σφαίρα του Bloch.

Η σφαίρα του Bloch έχει ακτίνα ίση με τη μονάδα και διάνυσμα κατάστασης $|q\rangle$ του qubit, έχει την αρχή του στο κέντρο της σφαίρας και το τέλος του στο σημείο της επιφάνειας της σφαίρας που καθορίζεται από τις γωνίες θ και ϕ . Η γωνία θ καθορίζει τις τιμές των πλατών πιθανότητας. Η γωνία ϕ ονομάζεται γωνία φάσης. Φυσικά το μήκος του $|q\rangle$ είναι ίσο με τη μονάδα [1]. Όταν το qubit βρίσκεται στην κατάσταση του $|0\rangle$, το διάνυσμα του είναι κατακόρυφο με φορά προς τα επάνω και, όταν βρίσκεται στην κατάσταση $|1\rangle$, το διάνυσμα του είναι κατακόρυφο με φορά προς τα κάτω. Ενώ οι καταστάσεις $|0\rangle$ και $|1\rangle$ είναι ορθογώνιες μεταξύ τους στη σφαίρα του Bloch εμφανίζονται στην ίδια γραμμή [2].

Να σημειωθεί επίσης και ότι είναι αδύνατο με μια μέτρηση να ξεχωρίσουμε δύο qubits που διαφέρουν μόνο κατά γωνία φάσης. Παρά το γεγονός ότι η γωνία φάσης δεν επηρεάζει το αποτέλεσμα της μέτρησης παίζει σημαντικό ρόλο κατά την εκτέλεση των κβαντικών υπολογισμών, διότι προκαλεί αλληλεπίδραση μεταξύ των qubits.



Εικόνα 1. Το διάνυσμα $|q\rangle$ στη σφαίρα Bloch

Διεμπλοκή (Entanglement)

Ένα βασικό φαινόμενο της κβαντικής φυσικής είναι η διεμπλοκή (Entanglement). Ένα ζεύγος ή μια ομάδα σωματιδίων είναι διεμπλεκόμενα όταν η κβαντική κατάσταση κάθε σωματιδίου δεν μπορεί να περιγραφεί ανεξάρτητα από την κβαντική κατάσταση του άλλου σωματιδίου ή των άλλων σωματιδίων. Η κβαντική κατάσταση του συστήματος μπορεί να περιγραφεί μόνο σαν σύνολο. Το σύστημα βρίσκεται σε μια ορισμένη κατάσταση, αν και τα μέρη του συστήματος δεν είναι σε ορισμένη κατάσταση.

Όταν δύο qubits διεμπλέκονται, υπάρχει μια ειδική σύνδεση μεταξύ τους. Η διεμπλοκή θα γίνει σαφής από τα αποτελέσματα των μετρήσεων. Το αποτέλεσμα των μετρήσεων στα επιμέρους qubits μπορεί να είναι 0 ή 1. Ωστόσο, το αποτέλεσμα της μέτρησης στο

ένα qubit θα συσχετίζεται πάντα με τη μέτρηση στο άλλο qubit. Αυτό συμβαίνει πάντα, ακόμη και αν τα σωματίδια απέχουν μεταξύ τους μεγάλη απόσταση. Παραδείγματα τέτοιων καταστάσεων είναι οι καταστάσεις Bell.

Για παράδειγμα, δύο σωματίδια δημιουργούνται με τέτοιο τρόπο ώστε το συνολικό spin του συστήματος να είναι μηδέν. Εάν το spin του ενός σωματιδίου μετρηθεί σε έναν συγκεκριμένο άξονα και βρεθεί ότι είναι αριστερόστροφο, τότε είναι εγγυημένο ότι μια μέτρηση του spin του άλλου σωματιδίου (κατά μήκος του ίδιου άξονα) θα δείξει ότι το spin είναι δεξιόστροφο. Αυτό φαίνεται παράξενο, διότι φαίνεται ότι ένα από τα διεμπλεκόμενα σωματίδια "αισθάνεται" ότι πραγματοποιείται μια μέτρηση στο άλλο διεμπλεκόμενο σωματίδιο και "γνωρίζει" ποιο θα πρέπει να είναι το αποτέλεσμα, αλλά αυτό δεν ισχύει. Αυτό συμβαίνει, χωρίς καμία ανταλλαγή πληροφοριών μεταξύ των διεμπλεκόμενων σωματιδίων. Θα μπορούσαν ακόμη και να βρίσκονται δισεκατομμύρια χιλιόμετρα μακριά το ένα από το άλλο και αυτή η διεμπλοκή θα εξακολουθούσε να υπάρχει [5].

Μια συνήθης παρανόηση είναι ότι η διεμπλοκή μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την άμεση αποστολή πληροφοριών από ένα σημείο σε ένα άλλο. Αυτό δεν είναι δυνατό, διότι παρόλο που είναι δυνατόν να γνωρίζουμε την κατάσταση του άλλου σωματιδίου όταν μετράμε το ένα, τα αποτελέσματα των μετρήσεων των επιμέρους σωματιδίων είναι τυχαία. Δεν υπάρχει τρόπος να προκαθοριστεί το μεμονωμένο αποτέλεσμα, επομένως δεν είναι δυνατή η αποστολή μηνύματος με αυτόν τον τρόπο.

Το γεγονός ότι τα qubits μπορούν να διαμπλέκονται, καθιστά έναν κβαντικό υπολογιστή πιο ισχυρό από έναν κλασικό υπολογιστή. Με τις πληροφορίες που αποθηκεύονται σε υπέρθεση, ορισμένα προβλήματα μπορούν να επιλυθούν εκθετικά ταχύτερα [5].

Κβαντικές Πύλες

Οι επεξεργαστές των κλασικών υπολογιστών αποτελούνται από αγωγούς και λογικές πύλες οι οποίες συγκροτούν κυκλώματα. Οι αγωγοί μεταφέρουν την πληροφορία με τη μορφή τάσης ή ρεύματος από πύλη σε πύλη. Οι λογικές πύλες επεξεργάζονται και μετατρέπουν την πληροφορία που έρχεται στην είσοδό τους, σύμφωνα με τον πίνακα αληθείας τους. Οι λογικές πύλες στους κλασικούς υπολογιστές είναι φυσικά συστήματα κατασκευασμένα από πυρίτιο και, σε όλους σχεδόν τους κλασικούς υπολογιστές, αποτελούνται από τρανζίστορς που ονομάζονται MOSFETs. Δηλαδή, οι πύλες των κλασικών υπολογιστών είναι φυσικά συστήματα και η πληροφορία διέρχεται από μέσα τους [4].

Αντίθετα, στους κβαντικούς υπολογιστές οι κβαντικές πύλες δεν είναι συνήθως φυσικά συστήματα, αλλά αντιπροσωπεύουν δράσεις που ασκούνται σε qubits ή σε κβαντικούς καταχωρητές. Οι δράσεις στα κβαντικά συστήματα αντιπροσωπεύονται από τελεστές του χώρου Hilbert που περιγράφονται από πίνακες [6].

Μία άλλη σημαντική διαφορά είναι ότι η πληροφορία δεν διέρχεται μέσα από τις κβαντικές πύλες. Η πληροφορία βρίσκεται αποθηκευμένη σε qubits ή σε κβαντικούς καταχωρητές και παραμένει εκεί. Αυτό συμβαίνει σε όλες τις υλοποιήσεις στερεάς κατάστασης των κβαντικών κυκλωμάτων, όπως με παγίδες ιόντων ή με NMR. Τα qubits είναι σωματίδια που παραμένουν σταθερά στις θέσεις τους, όσο βέβαια τους το επιτρέπει η αρχή της απροσδιοριστίας. Οι κβαντικές πύλες δρουν η μία μετά την άλλη στα qubits ή στους κβαντικούς καταχωρητές αλλάζοντας την κατάστασή τους. Οι κβαντικές πύλες είναι δηλαδή, δράσεις πάνω στα σωματίδια με μαγνητικά πεδία ή παλμούς laser [4].

Τώρα μπορούμε να ορίσουμε τις κβαντικές πύλες. Οι καταστάσεις των qubits και των κβαντικών καταχωρητών είναι διανύσματα στο χώρο Hilbert. Οι κβαντικές πύλες είναι τελεστές του χώρου Hilbert που δρουν σε qubits και σε κβαντικούς καταχωρητές αλλάζοντας την κατάστασή τους. Δηλαδή οι κβαντικές πύλες περιστρέφουν τα διανύσματα κατάστασής των qubits και των κβαντικών καταχωρητών χωρίς να αλλάζουν το μήκος τους, το οποίο είναι πάντα ίσο με τη μονάδα [7].

Οι κβαντικές πύλες πρέπει να μην μεταβάλλουν το μήκος του διανύσματος κατάστασης και να μην μεταβάλουν τις τιμές των εσωτερικών γινομένων μεταξύ δύο διανυσμάτων κατάστασης. Για τον λόγο αυτό αντιπροσωπεύονται από ορθομοναδιαίους τελεστές και πίνακες.

Κβαντικές πύλες που δρουν σε ένα qubit

Εδώ θα δούμε κβαντικές πύλες που δρουν σε ένα μόνο qubit. Οι πύλες αυτές περιστρέφουν το διάνυσμα κατάστασης ενός qubit μέσα στη σφαίρα Bloch, δηλαδή μεταβάλλουν τις γωνίες θ και ϕ . Υπάρχουν άπειρες τέτοιες περιστροφές και επομένως, υπάρχουν άπειρες κβαντικές πύλες που δρουν σε ένα qubit. Δηλαδή, κάθε ορθομοναδιαίος τελεστής μπορεί να θεωρηθεί ως μία κβαντική πύλη που δρα σε ένα qubit. Υπάρχουν λοιπόν άπειρες κβαντικές πύλες που δρουν σε ένα qubit, όμως δεν χρησιμοποιούνται όλες. Χρησιμοποιούνται κυρίως τρεις πύλες οι οποίες έχουν ονομαστεί και θα τις δούμε αμέσως παρακάτω [4].

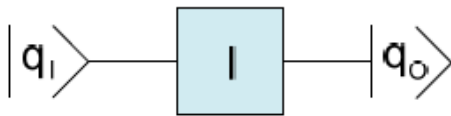
1. Η κβαντική πύλη αδρανείας

Η πύλη αδρανείας συμβολίζεται με I και περιγράφεται από έναν τελεστή που ονομάζεται τελεστής αδράνειας. Ο πίνακας που αντιστοιχεί στον τελεστή της πύλης αυτής είναι:

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Η κβαντική πύλη αδρανείας, αφήνει αμετάβλητη την κατάσταση του qubit:

$$I |q\rangle = |q\rangle$$



Εικόνα 2. «Πίνακας Αληθείας» της πύλης I

$ q_i\rangle$	$ q_o\rangle$
$ 0\rangle$	$ 0\rangle$
$ 1\rangle$	$ 1\rangle$
$ q\rangle$	$ q\rangle$

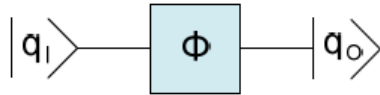
Εικόνα 3. «Πίνακας Αληθείας» της πύλης I

2. Η κβαντική πύλη μετατόπισης φάσης

Η κβαντική πύλη μετατόπισης φάσης περιγράφεται από έναν τελεστή που ονομάζεται Φ .

Ο πίνακας που αντιστοιχεί στον τελεστή της πύλης αυτής είναι [8]:

$$\Phi = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\phi} \end{bmatrix}$$



Εικόνα 4. Συμβολισμός της κβαντικής πύλης Φ

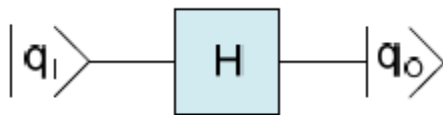
$ q_i\rangle$	$ q_o\rangle$
$ 0\rangle$	$ 0\rangle$
$ 1\rangle$	$e^{i\varphi} 1\rangle$
$a 0\rangle + b 1\rangle$	$a 0\rangle + e^{i\varphi}b 1\rangle$

Εικόνα 5. «Πίνακας Αληθείας» της πύλης Φ

3. Η κβαντική πύλη Hadamard

Η κβαντική πύλη Hadamard περιγράφεται από έναν τελεστή που ονομάζεται H. Ο πίνακας που αντιστοιχεί στον τελεστή της πύλης αυτής είναι:

$$H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$



Εικόνα 6. Συμβολισμός της κβαντικής πύλης H

$ q_i\rangle$	$ q_o\rangle$
$ 0\rangle$	$\frac{1}{\sqrt{2}}(0\rangle + 1\rangle)$
$ 1\rangle$	$\frac{1}{\sqrt{2}}(0\rangle - 1\rangle)$
$\frac{1}{\sqrt{2}}(0\rangle + 1\rangle)$	$ 0\rangle$
$\frac{1}{\sqrt{2}}(0\rangle - 1\rangle)$	$ 1\rangle$

Εικόνα 7. «Πίνακας Αληθείας» της πύλης H

Δηλαδή όταν η πύλη Hadamard δρά σε qubits που βρίσκονται σε μία από τις δύο βασικές καταστάσεις, τα θέτει σε μία κατάσταση που είναι υπέρθεση των βασικών καταστάσεων. Είτε το qubit βρίσκεται στην κατάσταση $\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)$, είτε στην κατάσταση $\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle)$ η πιθανότητα να μετρήσουμε και να το βρούμε στην βασική κατάσταση $|0\rangle$ είναι ίση με

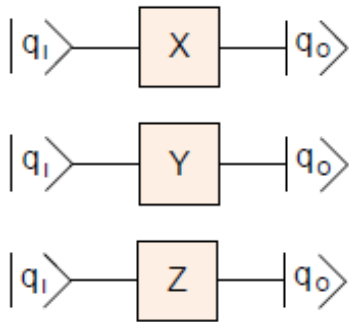
την πιθανότητα να το βρούμε στη βασική κατάσταση $|1\rangle$. Η πιθανότητα αυτή είναι ίση με 0,5.

4. Κβαντικές πύλες Pauli

Οι κβαντικές πύλες Pauli συμβολίζονται με τα γράμματα X, Y και Z. Οι πύλες Pauli περιγράφονται αντίστοιχα από τους τελεστές X, Y και Z στους οποίους αντιστοιχούν οι παρακάτω πίνακες:

$$X = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad Y = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} \quad Z = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Οι κβαντικές πύλες Pauli είναι σημαντικές διότι κάθε δυνατή κβαντική πύλη του ενός qubit μπορεί να συντεθεί από έναν γραμμικό συνδυασμό των πυλών Pauli και της πύλης αδράνειας [9]. Δηλαδή με τις πύλες αυτές μπορούμε να εκτελέσουμε όλες τις περιστροφές του διανύσματος κατάστασης ενός qubit στη σφαίρα Bloch.



Εικόνα 8. Συμβολισμός των κβαντικών πυλών Pauli

	$ q_1\rangle$	$ q_0\rangle$
X	$a 0\rangle + b 1\rangle$	$b 0\rangle + a 1\rangle$
Y	$a 0\rangle + b 1\rangle$	$-ib 0\rangle + ia 1\rangle$
Z	$a 0\rangle + b 1\rangle$	$a 0\rangle - b 1\rangle$

Εικόνα 9. «Πίνακας Αληθείας» των πυλών Pauli

Κβαντικές πύλες που δρουν σε δύο qubits

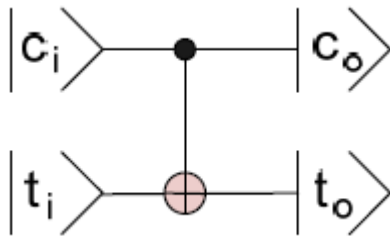
1. Η κβαντική πύλη ελεγχόμενου ΟΧΙ

Η κβαντική πύλη ελεγχόμενου ΟΧΙ (Controlled-NOT) δρα σε δύο qubits και ο τελεστής που την περιγράφει συμβολίζεται με CNOT.

Το ένα qubit ονομάζεται qubit ελέγχου και συμβολίζεται με c και το άλλο qubit στόχος και συμβολίζεται με t .

Η πύλη CNOT αλλάζει την κατάσταση του qubit στόχου, όταν η κατάσταση του qubit ελέγχου είναι $|1\rangle$, ενώ αφήνει την κατάσταση του qubit στόχου αναλλοίωτη, όταν η κατάσταση του qubit ελέγχου είναι $|0\rangle$. Η κατάσταση του qubit ελέγχου δεν μεταβάλλεται. Η πύλη CNOT περιγράφεται από τον παρακάτω πίνακα:

$$CNOT = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$



Εικόνα 10. Συμβολισμός της κβαντικής πύλης ΟΧΙ, CNOT

$ c_i t_i\rangle$	$ c_o t_o\rangle$
$ 00\rangle$	$ 00\rangle$
$ 01\rangle$	$ 01\rangle$
$ 10\rangle$	$ 11\rangle$
$ 11\rangle$	$ 10\rangle$

Εικόνα 11. «Πίνακας Αληθείας» της ελεγχόμενου πύλης CNOT

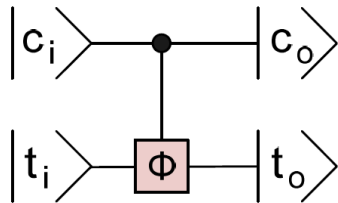
2. Η κβαντική πύλη ελεγχόμενης μετατόπισης φάσης

Η κβαντική πύλη ελεγχόμενης μετατόπισης φάσης δρα σε δύο qubits και ο τελεστής που την περιγράφει συμβολίζεται με διάφορους τρόπους, οι πιο συνηθισμένοι είναι οι S, CP, CΦ.

Το ένα qubit ονομάζεται qubit ελέγχου και συμβολίζεται με c και το άλλο qubit στόχος και συμβολίζεται με t.

Η πύλη CΦ πολλαπλασιάζει την κατάσταση του qubit στόχου με τον παράγοντα $e^{i\phi}$ μόνο όταν η κατάσταση του qubit ελέγχου και η κατάσταση του qubit στόχου είναι $|1\rangle$. Σε όλες τις άλλες περιπτώσεις οι καταστάσεις των qubits δεν μεταβάλλονται. Η πύλη CΦ περιγράφεται από τον παρακάτω πίνακα:

$$C\Phi = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{i\phi} \end{bmatrix}$$



Εικόνα 12. Συμβολισμός της κβαντικής ελεγχόμενου μετατόπισης φάσης, CΦ

$ c_i t_i\rangle$	$ c_o t_o\rangle$
$ 00\rangle$	$ 00\rangle$
$ 01\rangle$	$ 01\rangle$
$ 10\rangle$	$ 10\rangle$
$ 11\rangle$	$e^{i\phi} 11\rangle$

Εικόνα 13. «Πίνακας Αληθείας» της πύλης CΦ

Κβαντικές πύλες που δρουν σε τρία qubits

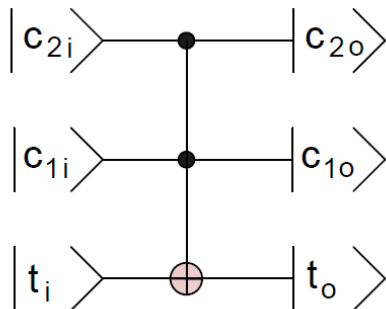
1. Η κβαντική πύλη διπλά ελεγχόμενου ΟΧΙ

Η κβαντική πύλη διπλά ελεγχόμενου ΟΧΙ (Controlled-Controlled-NOT) δρα σε τρία qubits και ο τελεστής που την περιγράφει συμβολίζεται με CCNOT.

Τα δύο qubits ονομάζονται qubits ελέγχου και συμβολίζεται με c_1 και c_2 και το άλλο qubit στόχος και συμβολίζεται με t .

Η πύλη CCNOT αλλάζει την κατάσταση του qubit στόχου, όταν και τα δύο qubits ελέγχου βρίσκονται στην κατάσταση $|1\rangle$, ενώ αφήνει την κατάσταση του qubit στόχου αναλλοίωτη σε κάθε άλλη περίπτωση. Η κατάσταση των qubits ελέγχου δεν μεταβάλλεται. Η πύλη CNOT περιγράφεται από τον παρακάτω πίνακα:

$$CCNOT = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



Εικόνα 14. Συμβολισμός της κβαντικής πύλης ελεγχόμενου ΟΧΙ, CCNOT

$ c_i t_{2i} t_{1i}\rangle$	$ c_o t_{2o} t_{1o}\rangle$
$ 000\rangle$	$ 000\rangle$
$ 001\rangle$	$ 001\rangle$
$ 010\rangle$	$ 010\rangle$
$ 011\rangle$	$ 011\rangle$
$ 100\rangle$	$ 100\rangle$
$ 101\rangle$	$ 101\rangle$
$ 110\rangle$	$ 111\rangle$
$ 111\rangle$	$ 110\rangle$

Εικόνα 15. «Πίνακας Αληθείας» της διπλά πύλης CCNOT

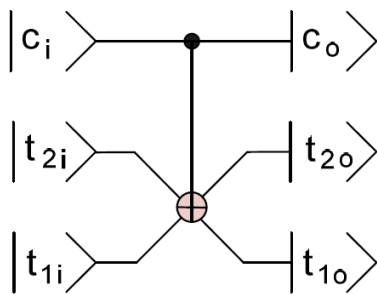
2. Η κβαντική πύλη Fredkin

Η κβαντική πύλη Fredkin δρα σε τρία qubits και ο τελεστής που την περιγράφει συμβολίζεται με F .

Το ένα qubit ονομάζεται qubit ελέγχου και συμβολίζεται με c και τα άλλα δύο qubits ονομάζονται στόχοι και συμβολίζονται με t_1 και t_2 .

Η πύλη F εναλλάσσει τις καταστάσεις των qubits στόχων, όταν το qubit ελέγχου βρίσκεται στην κατάσταση $|1\rangle$, ενώ όταν το qubit ελέγχου βρίσκεται στην κατάσταση $|0\rangle$ οι καταστάσεις των qubit στόχων δεν αλλάζει. Η κατάσταση του qubit ελέγχου δεν μεταβάλλεται. Η πύλη F περιγράφεται από τον παρακάτω πίνακα:

$$F = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



Εικόνα 16. Συμβολισμός της κβαντικής πύλης Fredkin, F

$ c_i t_{2i} t_{1i}\rangle$	$ c_o t_{2o} t_{1o}\rangle$
$ 000\rangle$	$ 000\rangle$
$ 001\rangle$	$ 001\rangle$
$ 010\rangle$	$ 010\rangle$
$ 011\rangle$	$ 011\rangle$
$ 100\rangle$	$ 100\rangle$
$ 101\rangle$	$ 110\rangle$
$ 110\rangle$	$ 101\rangle$
$ 111\rangle$	$ 111\rangle$

Εικόνα 17. «Πίνακας Αληθείας» της πύλης F

1.2 Το Πρόβλημα του Κβαντικού Θορύβου

Υπάρχουν δύο κατηγορίες κβαντικών συστημάτων, τα ανοικτά και τα κλειστά. Τα κλειστά κβαντικά συστήματα είναι συστήματα που δεν υφίστανται ανεπιθύμητες αλληλεπιδράσεις με τον εξωτερικό κόσμο. Αν και μπορούν να εξαχθούν συναρπαστικά συμπεράσματα για την επεξεργασία της πληροφορίας που μπορούν καταρχήν να πραγματοποιηθούν σε τέτοια ιδανικά συστήματα, οι παρατηρήσεις αυτές μετριάζονται από το γεγονός ότι στον πραγματικό κόσμο δεν υπάρχουν τέλεια κλειστά συστήματα, εκτός από ίσως το σύμπαν στο σύνολό του. Τα πραγματικά συστήματα υποφέρουν από ανεπιθύμητες αλληλεπιδράσεις με τον εξωτερικό κόσμο. Αυτές οι ανεπιθύμητες αλληλεπιδράσεις εμφανίζονται ως θόρυβος στα κβαντικά συστήματα επεξεργασίας πληροφορίας. Πρέπει να κατανοήσουμε και να ελέγξουμε αυτές τις διαδικασίες θορύβου προκειμένου να κατασκευάσουμε χρήσιμα συστήματα κβαντικής επεξεργασίας πληροφοριών [31].

Ποια είναι η διάκριση μεταξύ ενός ανοικτού και ενός κλειστού συστήματος;

Ένα εκκρεμές που αιωρείται όπως αυτό που βρίσκεται σε ορισμένα μηχανικά ρολόγια μπορεί να είναι ένα σχεδόν ιδανικό κλειστό σύστημα. Ένα εκκρεμές αλληλεπιδρά ελάχιστα με τον υπόλοιπο κόσμο -το περιβάλλον του- κυρίως μέσω της τριβής. Ωστόσο, για να περιγραφεί σωστά η πλήρης δυναμική του εκκρεμούς και γιατί τελικά παύει να κινείται, πρέπει να ληφθούν υπόψη τα αποτελέσματα απόσβεσης της τριβής του αέρα και οι ατέλειες στο μηχανισμό ανάρτησης του εκκρεμούς. Ομοίως, κανένα κβαντικό σύστημα δεν είναι ποτέ τέλεια κλειστό, και ειδικά οι κβαντικοί υπολογιστές, οι οποίοι πρέπει να είναι προγραμματισμένοι με λεπτότητα από ένα εξωτερικό σύστημα για να εκτελέσουν κάποιο επιθυμητό σύνολο λειτουργιών. Για παράδειγμα, αν η κατάσταση ενός qubit αντιπροσωπεύεται από δύο θέσεις ενός ηλεκτρονίου, τότε αυτό το ηλεκτρόνιο θα αλληλεπιδράσει με άλλα φορτισμένα σωματίδια, τα οποία λειτουργούν ως πηγή ανεξέλεγκτου θορύβου που επηρεάζει την κατάσταση του qubit. Ένα ανοικτό σύστημα δεν είναι τίποτα περισσότερο από ένα σύστημα που έχει αλληλεπιδράσεις με κάποιο άλλο σύστημα του περιβάλλοντος, του οποίου τη δυναμική θέλουμε να μηδενίσουμε, ή να μετριάσουμε [31].

Ο μαθηματικός φορμαλισμός των κβαντικών τελεστών είναι το βασικό εργαλείο για την περιγραφή της δυναμικής των ανοικτών κβαντικών συστημάτων. Αυτό το εργαλείο είναι πολύ ισχυρό, καθώς αντιμετωπίζει ταυτόχρονα ένα ευρύ φάσμα φυσικών σεναρίων. Μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την περιγραφή όχι μόνο σχεδόν κλειστών συστημάτων που είναι ασθενώς συνδεδεμένα με το περιβάλλον τους, αλλά και συστήματα που είναι ισχυρά συνδεδεμένα με το περιβάλλον τους, καθώς και κλειστά συστήματα που ανοίγουν ξαφνικά και υπόκεινται σε μετρήσεις. Ένα άλλο πλεονέκτημα των κβαντικών τελεστών σε εφαρμογές κβαντικών υπολογισμών και κβαντικής πληροφορίας είναι ότι

είναι ιδιαίτερα καλά προσαρμοσμένες για την περιγραφή διακριτών αλλαγών κατάστασης, δηλαδή μετασχηματισμών μεταξύ μιας αρχικής κατάστασης ρ και μιας τελικής κατάστασης ρ , χωρίς ρητή αναφορά στο πέρασμα του χρόνου. Αυτή η ανάλυση διακριτού χρόνου είναι μάλλον διαφορετική από τα εργαλεία που χρησιμοποιούνται παραδοσιακά από τους φυσικούς για την περιγραφή ανοικτών κβαντικών συστημάτων (όπως οι "κύριες εξισώσεις", οι "εξισώσεις Langevin", και "στοχαστικές διαφορικές εξισώσεις"), που τείνουν να είναι περιγραφές συνεχούς χρόνου [31].

Ας δούμε όμως λίγο πιο αναλυτικά και συγκριτικά με τους κλασικούς υπολογιστές τι είναι και τι προκαλεί το κβαντικό θόρυβο. Αρχικά είδαμε πως όπως υπάρχει θόρυβος στους κλασικούς υπολογιστές έτσι υπάρχει και στους κβαντικούς. Ο κβαντικός θόρυβος περιγράφει όλους τους παράγοντες που κάνουν έναν κβαντικό υπολογιστή να δυσλειτουργεί. Όπως μια κλήση κινητής τηλεφωνίας υποφέρει από ηλεκτρονικό θόρυβο που την οδηγεί στο να τερματιστεί, ένας κβαντικός υπολογιστής είναι αποδέκτης θορύβου από πηγές όλων των ειδών όπως π.χ. ηλεκτρομαγνητικά σήματα που προέρχονται από το Wi-Fi ή αναταράξεις στο μαγνητικό πεδίο της γης. Όταν τα qubits ενός κβαντικού υπολογιστή εκτίθενται σε τέτοιου είδους θόρυβο η πληροφορία που περιέχουν υποβαθμίζεται όπως για παράδειγμα υποβαθμίζεται η ποιότητα του ήχου μιας τηλεφωνικής κλήσης από παρεμβολές. Αυτό είναι γνωστό ως Αποσυσχετισμός ή Decoherence. Όταν ένα qubit παραμένει αδρανές, δηλαδή δεν χρησιμοποιείτε για κάποιο υπολογισμό, οι καταστάσεις του μπορούν να επηρεαστούν από τον αποσυσχετισμό. Όταν πραγματοποιούμε ένας κβαντικός λογικός τελεστής όπως ή αλλαγή ενός bit (bit flip) πάλι υποφέρουμε από σφάλματα που πραγματοποιούν λανθασμένη περιστροφή της κατάστασης του qubit. Σε κάθε περίπτωση η κατάσταση του qubit δεν καταλήγει εκεί που θα θέλαμε και με την πάροδο του χρόνου μπορεί να τυχαποιηθεί ή να χαθεί εντελώς, κάτι που προφανώς δεν επιθυμούμε από τη στιγμή που η κβαντική κατάσταση αναπαριστούσε πληροφορία. Συγκριτικά με τους κλασικούς υπολογιστές οι κβαντικοί υπολογιστές είναι υπερβολικά ευαίσθητοι σε αυτό το είδος θορύβου. Ένα τυπικό τρανζίστορ σε έναν μικροεπεξεργαστή μπορεί να τρέχει για 1 δισεκατομμύριο χρόνια κάνοντας δισεκατομμύρια υπολογισμούς το δευτερόλεπτο χωρίς υποστεί βλάβη στο υλικό του. Αντιθέτως, τυπικά κβαντικά bits τυχαιοποιούνται μια φορά σε κάθε χιλιοστό του δευτερολέπτου, οπότε βλέπουμε ότι υπάρχει τεράστια διαφορά [10].

Ας σκεφτούμε ότι εκτελούμε έναν κβαντικό αλγόριθμο που πραγματοποιεί πολλούς υπολογισμούς σε ένα μεγάλο αριθμό από qubits, ο θόρυβος προκαλεί τυχαιοποίηση στην πληροφορία των qubits και αυτό προκαλεί σφάλματα στον αλγόριθμο. Όσο μεγαλύτερη είναι η επιρροή του θορύβου τόσο μικρότερος είναι ο αλγόριθμος που μπορούμε να τρέξουμε. Στη σημερινή εποχή αντί για τρισεκατομμύρια υπολογισμούς, τυπικά μπορούμε να πραγματοποιήσουμε μόνο δεκάδες πριν ο θόρυβος προκαλέσει ένα μοιραίο σφάλμα.

Πως καταπολεμούμε αυτά τα προβλήματα;

Αρχικά, ήδη από τις προηγούμενες δύο δεκαετίες ομάδες δουλεύουν πάνω στο να κάνουν το hardware των κβαντικών υπολογιστών περισσότερο σταθερό, θωρακίζοντας το απέναντι στο θόρυβο που προκαλεί αποσυσχετισμό. Ταυτόχρονα, επιστήμονες έχουν σχεδιάσει έναν έξυπνο αλγόριθμο που αποκαλείται Quantum Error Correction που μπορεί να αναγνωρίσει και να διορθώσει σφάλματα στο hardware. Το μειονέκτημα του είναι ότι για να δουλέψει πρέπει η πληροφορία να εξαπλωθεί από το ένα qubit σε περισσότερα. Υπολογίζεται ότι για να βρεθεί ένα εσφαλμένο qubit χρειάζονται χιλιάδες φυσικά qubits και όσο χειρότερος είναι ο θόρυβος στο σύστημα τόσο περισσότερα φυσικά qubits χρειαζόμαστε. Οι σημερινές μηχανές δεν πλησιάζουν καθόλου στο να μπορούν να αξιοποιήσουν τα οφέλη του Quantum Error Correction [10].

1.2.1 Ψηφιοποίηση Κβαντικού Θορύβου

Στην κλασική πληροφορία, τα bits βρίσκονται είτε στην κατάσταση "0" είτε στην κατάσταση "1". Επομένως, ο μόνος τύπος σφάλματος που υπάρχει είναι το bit-flip που κάνει $0 \rightarrow 1$ και αντίστροφα. Αντίθετα, η γενική κατάσταση qubit μπορεί να λάβει ένα συνεχές σύνολο τιμών μεταξύ των καταστάσεων βάσης της. Από τη σκοπιά της ανάπτυξης κωδίκων διόρθωσης σφαλμάτων, η ιδιότητα αυτή είναι προβληματική, καθώς σημαίνει ότι το qubit υπόκειται σε άπειρο αριθμό σφαλμάτων. Για να γίνει αυτό σαφέστερο, είναι χρήσιμο να ξαναγράψουμε το γενικό qubit κατάσταση ως προς μια γεωμετρική αναπαράσταση που δίνεται από τη σχέση

$$|\psi\rangle = \cos \frac{\theta}{2} |0\rangle + e^{i\phi} \sin \frac{\theta}{2} |1\rangle$$

όπου τα πλάτη πιθανότητας διατηρούν τη συνθήκη ότι

$$\left| \cos \frac{\theta}{2} \right|^2 + \left| e^{i\phi} \sin \frac{\theta}{2} \right|^2 = 1$$

Σε αυτή τη μορφή, η κατάσταση του qubit αντιστοιχεί σε ένα σημείο, που καθορίζεται από τις γωνίες θ και ϕ , στην επιφάνεια της λεγόμενης σφαίρας Bloch. Τα σφάλματα του qubit μπορούν να προκύψουν από μια ποικιλία φυσικών διεργασιών. Η απλούστερη περίπτωση που πρέπει να εξεταστεί είναι τα σφάλματα τα οποία προκαλούν συνεκτική περιστροφή του qubit από ένα σημείο της σφαίρας Bloch σε ένα άλλο. Τέτοια σφάλματα του qubit θα μπορούσαν, για παράδειγμα, να προκύψουν από συστηματικά σφάλματα ελέγχου στο υλικό με το οποίο τα qubits υλοποιούνται. Μαθηματικά, τα συνεκτικά

σφάλματα περιγράφονται από μια μοναδιαία πράξη $U(\delta\theta, \delta\phi)$ η οποία εξελίσσει την κατάσταση του qubit ως εξής

$$U(\delta\theta, \delta\phi) |\psi\rangle = \cos \frac{\theta + \delta\theta}{2} |0\rangle + e^{i(\phi + \delta\phi)} \sin \frac{\theta + \delta\theta}{2} |1\rangle$$

όπου $\theta + \delta\theta$ και $\phi + \delta\phi$ είναι οι νέες συντεταγμένες στη σφαίρα Bloch. Από αυτό, βλέπουμε ότι τα qubits είναι ευαίσθητα σε ένα συνεχές σύνολο συνεκτικών σφαλμάτων που προκύπτουν μεταβάλλοντας τις παραμέτρους $\delta\theta$ και $\delta\phi$. Φαίνεται επομένως, με την πρώτη ματιά, ότι τα πρωτόκολλα διόρθωσης κβαντικών σφαλμάτων θα πρέπει να βασίζονται σε τεχνικές από τον κλασικό αναλογικό υπολογισμό για τον οποίο η θεωρία της διόρθωσης σφαλμάτων δεν είναι καλά αναπτυγμένη. Ευτυχώς, όμως, αποδεικνύεται ότι τα κβαντικά σφάλματα μπορούν να ψηφιοποιηθούν έτσι ώστε η ικανότητα διόρθωσης ενός πεπερασμένου συνόλου σφαλμάτων είναι επαρκής για τη διόρθωση οποιουδήποτε σφάλματος [44]. Για να δούμε πώς αυτό είναι δυνατό, σημειώνουμε πρώτα ότι οι διαδικασίες συνεκτικού θορύβου περιγράφονται από πίνακες που μπορούν να αναπτύσσονται ως τελεστές Pauli. Δίνονται ξανά οι τελεστές Pauli

$$\mathbb{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad Z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Η διαδικασία συνεκτικού σφάλματος ενός qubit που περιγράφεται στην προηγούμενη εξίσωση μπορεί να αναπτυχθεί με τους παραπάνω τελεστές ως εξής

$$U(\delta\theta, \delta\phi) |\psi\rangle = \alpha_I \mathbb{1} |\psi\rangle + \alpha_X X |\psi\rangle + \alpha_Z Z |\psi\rangle + \alpha_Y Y |\psi\rangle$$

όπου $\alpha_{I,X,Y,Z}$ είναι οι συντελεστές διαστολής. Παρατηρώντας ότι ο πίνακας Pauli Y είναι ισοδύναμος (μέχρι μια φάση) με το γινόμενο XZ , η έκφραση αυτή μπορεί να απλοποιηθεί περαιτέρω ως εξής

$$U(\delta\theta, \delta\phi) |\psi\rangle = \alpha_I \mathbb{1} |\psi\rangle + \alpha_X X |\psi\rangle + \alpha_Z Z |\psi\rangle + \alpha_{XZ} XZ |\psi\rangle$$

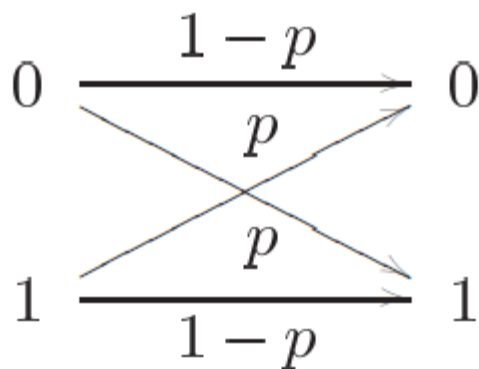
Η παραπάνω έκφραση δείχνει ότι οποιαδήποτε συνεκτική διαδικασία σφάλματος μπορεί να αναλυθεί σε ένα άθροισμα από το σύνολο Pauli $\{\mathbb{1}, X, Z, XZ\}$. Ένας κβαντικός κώδικας διόρθωσης σφαλμάτων με δυνατότητα διόρθωσης σφάλματος που περιγράφονται από τους πίνακες X - και Z -Pauli, θα μπορεί να διορθώσει οποιοδήποτε συνεκτικό σφάλμα. Αυτό το φαινόμενο, που αναφέρεται ως ψηφιοποίηση του σφάλματος, είναι ζωτικής σημασίας για την επιτυχία των κβαντικών κωδίκων διόρθωσης σφαλμάτων [45].

1.2.2. Μοντέλο Κβαντικού Θορύβου Pauli

Κλασικός θόρυβος και διαδικασίες Markov

Για την κατανόηση του θορύβου στα κβαντικά συστήματα είναι χρήσιμο να οικοδομήσουμε κάποια διαίσθηση κατανοώντας το θόρυβο στα κλασικά συστήματα. Πώς πρέπει να μοντελοποιήσουμε το θόρυβο σε ένα κλασικό σύστημα; Ας δούμε μερικά απλά παραδείγματα για να καταλάβουμε πώς γίνεται αυτό και τι μπορεί να διδάξει για το θόρυβο στα κβαντικά συστήματα.

Φανταστείτε ότι ένα bit αποθηκεύεται σε έναν σκληρό δίσκο που είναι συνδεδεμένος σε ένα συνηθισμένο κλασικό υπολογιστή. Το bit ξεκινά στην κατάσταση 0 ή 1, αλλά μετά από μεγάλο χρονικό διάστημα γίνεται πιθανό ότι τα αδέσποτα μαγνητικά πεδία θα προκαλέσουν σύγχυση του bit, πιθανώς αντιστρέφοντας του κατάσταση. Αυτό μπορούμε να το μοντελοποιήσουμε με μια πιθανότητα p για την αναστροφή του bit, και μια πιθανότητα $1-p$ για το bit να παραμείνει το ίδιο. Αυτή η διαδικασία απεικονίζεται στην Εικόνα 18.



Εικόνα 18. Μετά από μεγάλο χρονικό διάστημα ένα bit σε έναν σκληρό δίσκο μπορεί να ανατραπεί με πιθανότητα p .

Αυτό που πραγματικά συμβαίνει, φυσικά, είναι ότι το περιβάλλον περιέχει μαγνητικά πεδία τα οποία μπορούν να προκαλέσουν την αναστροφή του bit. Για να υπολογίσουμε την πιθανότητα p για να αναποδογυρίσει το bit χρειαζόμαστε να καταλάβουμε δύο πράγματα. Πρώτον, χρειαζόμαστε ένα μοντέλο για την κατανομή των μαγνητικών πεδίων στο περιβάλλον. Υποθέτοντας ότι ο χρήστης του σκληρού δίσκου δεν κάνει τίποτα ανόητο, όπως το να τοποθετεί έναν ισχυρό μαγνήτη κοντά στη μονάδα δίσκου, μπορούμε να κατασκευάσουμε ένα ρεαλιστικό μοντέλο με δειγματοληψία του μαγνητικού πεδίου σε περιβάλλοντα παρόμοια με εκείνο στο οποίο βρίσκεται ο δίσκος που λειτουργεί. Δεύτερον, χρειαζόμαστε ένα μοντέλο για το πώς τα μαγνητικά πεδία στο

περιβάλλον θα αλληλεπιδρούν με τα bits στο δίσκο. Ευτυχώς, ένα τέτοιο μοντέλο είναι ήδη γνωστό σε φυσικούς και ακούει στο όνομα "εξισώσεις του Maxwell". Με αυτά τα δύο στοιχεία στο χέρι, μπορούμε κατ' αρχήν να υπολογίσουμε την πιθανότητα p να συμβεί μια αναστροφή bit στο δίσκο κατά τη διάρκεια κάποιας προκαθορισμένης χρονικής περιόδου [31].

Αυτή η βασική διαδικασία (η εύρεση ενός μοντέλου για το περιβάλλον και για το σύστημα-περιβάλλον) είναι αυτή που ακολουθούμε επανειλημμένα στη μελέτη του θορύβου, και κλασικού και κβαντικού. Οι αλληλεπιδράσεις με το περιβάλλον είναι η θεμελιώδης πηγή θορύβου τόσο στα κλασικά όσο και στα κβαντικά συστήματα. Συχνά δεν είναι εύκολο να βρεθούν ακριβή μοντέλα για το περιβάλλον ή την αλληλεπίδραση συστήματος-περιβάλλοντος, ωστόσο, με το να είμαστε συντηρητικοί στη μοντελοποίηση και μελετώντας προσεκτικά τις παρατηρούμενες ιδιότητες ενός συστήματος για να δούμε αν υπακούει το μοντέλο μας, είναι δυνατόν να επιτύχουμε υψηλό βαθμό ακρίβειας στη μοντελοποίηση του θορύβου σε πραγματικά φυσικά συστήματα.

Η συμπεριφορά του bit στο σκληρό δίσκο μπορεί να συνοψιστεί σε μια μόνο εξίσωση. Ας υποθέσουμε ότι p_0 και p_1 είναι οι αρχικές πιθανότητες το bit να βρίσκεται στις καταστάσεις 0 και 1, αντίστοιχα. Έστω q_0 και q_1 οι αντίστοιχες πιθανότητες μετά την εμφάνιση του θορύβου. Έστω X η αρχική κατάσταση του bit και Y η τελική κατάσταση του bit. Τότε η νόμος της ολικής πιθανότητας ορίζει ότι

$$p(Y = y) = \sum_x p(Y = y|X = x)p(X = x).$$

Οι υπό συνθήκη πιθανότητες $p(Y = y|X = x)$ ονομάζονται *πιθανότητες μετάβασης*, δεδομένου ότι συνοψίζουν τις αλλαγές που μπορεί να συμβούν στο σύστημα. Γράφοντας αυτές τις εξισώσεις ρητά για το bit σε ένα σκληρό δίσκο έχουμε

$$\begin{bmatrix} q_0 \\ q_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-p & p \\ p & 1-p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_0 \\ p_1 \end{bmatrix}$$

Ας δούμε ένα ελαφρώς πιο περίπλοκο παράδειγμα θορύβου σε ένα κλασικό σύστημα. Φανταστείτε το ότι προσπαθούμε να κατασκευάσουμε ένα κλασικό κύκλωμα για την εκτέλεση κάποιας υπολογιστικής εργασίας. Δυστυχώς, μας έχουν δοθεί ελαττωματικά εξαρτήματα για την κατασκευή του κυκλώματος. Το τεχνητό μας κύκλωμα αποτελείται από ένα μόνο bit εισόδου, X , στο οποίο εφαρμόζονται δύο διαδοχικές (ελαττωματικές) *NOT* πύλες, που παράγουν ένα ενδιάμεσο bit Y , και ένα τελικό bit Z . Φαίνεται λογικό να υποθέσουμε ότι αν η δεύτερη πύλη *NOT* λειτουργεί σωστά είναι *ανεξάρτητο* από το αν η πρώτη πύλη *NOT* λειτουργήσει σωστά. Αυτή η υπόθεση -ότι οι διαδοχικές διεργασίες θορύβου ενεργούν ανεξάρτητα- είναι μια φυσική λογική υπόθεση που μπορεί να γίνει

σε πολλές περιπτώσεις. Έχει ως αποτέλεσμα μια στοχαστική διαδικασία $X \rightarrow Y \rightarrow Z$ ενός ειδικού τύπου γνωστού ως *διαδικασία Markov*. Φυσικά, αυτή η υπόθεση της μαρκοβικότητας αντιστοιχεί στην υπόθεση ότι το περιβάλλον που προκαλεί το θόρυβο στην πρώτη πύλη *NOT* δρα ανεξάρτητα από το περιβάλλον που προκαλεί το θόρυβο στη δεύτερη πύλη *NOT*, μια λογική υπόθεση δεδομένου ότι οι πύλες είναι πιθανό να βρίσκονται σε σημαντική απόσταση μεταξύ τους στο χώρο [31].

Συνοψίζοντας, ο θόρυβος στα κλασικά συστήματα μπορεί να περιγραφεί χρησιμοποιώντας τη θεωρία των στοχαστικών διαδικασιών. Συχνά, στην ανάλυση των διαδικασιών πολλαπλών σταδίων είναι καλή υπόθεση η χρήση διαδικασιών Markov. Για μια διεργασία ενός σταδίου οι πιθανότητες εξόδου \vec{q} σχετίζονται με τις πιθανότητες εισόδου \vec{p} μέσω της εξίσωσης

$$\vec{q} = E\vec{p},$$

όπου E είναι ένας πίνακας πιθανοτήτων μετάβασης, τον οποίο θα αναφέρουμε ως *πίνακα εξέλιξης*. Έτσι, η τελική κατάσταση του συστήματος σχετίζεται γραμμικά με την αρχική κατάσταση. Αυτό το χαρακτηριστικό της γραμμικότητας επαναλαμβάνεται στην περιγραφή του κβαντικού θορύβου, με πίνακες πυκνότητας που αντικαθιστούν τις κατανομές πιθανοτήτων.

Ποιες ιδιότητες πρέπει να έχει ο πίνακας εξέλιξης E ; Απαιτούμε ότι αν το \vec{p} είναι έγκυρη κατανομή πιθανότητας, τότε το $E\vec{p}$ πρέπει επίσης να είναι έγκυρη κατανομή πιθανότητας. Η ικανοποίηση της αυτής της συνθήκης αποδεικνύεται ισοδύναμη με δύο συνθήκες για τον E . Πρώτον, όλες οι καταχωρήσεις του E πρέπει να είναι μη αρνητικές, μια συνθήκη γνωστή ως *απαίτηση θετικότητας*. Εάν δεν ήταν, τότε θα ήταν δυνατόν να προκύψουν αρνητικές πιθανότητες στο $E\vec{p}$. Δεύτερον, όλες οι στήλες του E πρέπει να έχουν άθροισμα ένα, μια συνθήκη γνωστή ως *απαίτηση πληρότητας*. Ας υποθέσουμε ότι αυτό δεν ισχύει. Φανταστείτε, για παράδειγμα, ότι η πρώτη στήλη δεν έχει άθροισμα ένα. Αφήνοντας το \vec{p} να περιέχει ένα ένα στην πρώτη εγγραφή και μηδενικά παντού αλλού, βλέπουμε ότι το $E\vec{p}$ δεν θα ήταν μια έγκυρη κατανομή πιθανότητας σε αυτή την περίπτωση [31].

Συνοψίζοντας, τα βασικά χαρακτηριστικά του κλασικού θορύβου είναι τα εξής: υπάρχει μια γραμμική σχέση μεταξύ των πιθανοτήτων εισόδου και εξόδου, που περιγράφεται από έναν πίνακα μετάβασης με μη αρνητικές καταχωρήσεις (θετικότητα) και στήλες που αθροίζουν στη μονάδα (πληρότητα). Κλασικές διαδικασίες θορύβου που περιλαμβάνουν πολλαπλά στάδια περιγράφονται ως διαδικασίες Markov, υπό την προϋπόθεση ότι η θόρυβος προκαλείται από ανεξάρτητα περιβάλλοντα. Καθένα από αυτά τα βασικά χαρακτηριστικά έχει σημαντικά ανάλογα στη θεωρία του κβαντικού θορύβου. Βέβαια, υπάρχουν επίσης κάποια εκπληκτικά νέα χαρακτηριστικά του κβαντικού θορύβου!

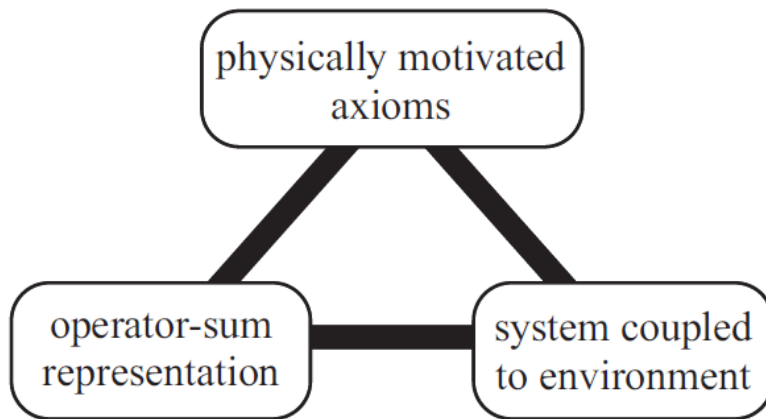
Επισκόπηση Κβαντικών Τελεστών

Ο φορμαλισμός των κβαντικών τελεστών είναι ένα γενικό εργαλείο για την περιγραφή της εξέλιξης των κβαντικών συστημάτων σε μια ευρεία ποικιλία συνθηκών, συμπεριλαμβανομένων των στοχαστικών αλλαγών σε κβαντικές καταστάσεις, όπως οι διαδικασίες Markov περιγράφουν τις στοχαστικές αλλαγές σε βασικές καταστάσεις. Ακριβώς όπως μια κλασική κατάσταση περιγράφεται από ένα διάνυσμα πιθανοτήτων, θα περιγράψουμε κβαντικές καταστάσεις με όρους του τελεστή πυκνότητας (πίνακα πυκνότητας) ρ . Οι κβαντικές καταστάσεις μετασχηματίζονται ως

$$\rho' = \mathcal{E}(\rho)$$

Ο χάρτης \mathcal{E} σε αυτή την εξίσωση είναι ένας κβαντικός τελεστής. Δύο απλά παραδείγματα κβαντικών τελεστών είναι οι μοναδιαίοι μετασχηματισμοί και οι μετρήσεις, για τις οποίες $\mathcal{E}(\rho) = U\rho U^\dagger$, και $\mathcal{E}_m(\rho) = M_m\rho M_m^\dagger$, αντίστοιχα. Ο κβαντικός τελεστής αποτυπώνει τη δυναμική μεταβολή σε μια κατάσταση που συμβαίνει ως αποτέλεσμα κάποιας φυσικής διαδικασίας, ρ είναι η αρχική κατάσταση πριν τη διαδικασία, και $\mathcal{E}(\rho)$ είναι η τελική κατάσταση μετά την πραγματοποίηση της διαδικασίας, ενδεχομένως μέχρι κάποιο παράγοντα κανονικοποίησης.

Υπάρχουν τρεις ξεχωριστοί τρόποι κατανόησης των κβαντικών τελεστών, που απεικονίζονται στην Εικόνα 19, οι οποίοι αποδεικνύονται ισοδύναμοι. Η πρώτη μέθοδος βασίζεται στην ιδέα της μελέτης της δυναμικής ως αποτέλεσμα της αλληλεπίδρασης μεταξύ ενός συστήματος και ενός περιβάλλοντος, όπως περιγράφηκε ο κλασικός θόρυβος στην προηγούμενη ενότητα. Αυτή η μέθοδος είναι συγκεκριμένη και είναι εύκολο να συνδεθεί με τον πραγματικό κόσμο. Δυστυχώς, πάσχει από το μειονέκτημα ότι δεν είναι μαθηματικά βολική. Η δεύτερη μέθοδός μας για την κατανόηση των κβαντικών τελεστών, απολύτως ισοδύναμη με την πρώτη, ξεπερνά αυτή τη μαθηματική ενόχληση παρέχοντας μια ισχυρή μαθηματική αναπαράσταση για τους κβαντικούς τελεστές, γνωστή ως η αναπαράσταση τελεστή-αθροίσματος. Αυτή η μέθοδος είναι μάλλον αφηρημένη, αλλά είναι πολύ χρήσιμη για υπολογισμούς και θεωρητικές εργασίες. Η τρίτη προσέγγισή μας για τους κβαντικούς τελεστές, ισοδύναμη με τις άλλες δύο, είναι μέσω ενός συνόλου φυσικώς αιτιολογημένων αξιωμάτων που θα περιμέναμε από ένα δυναμικό χάρτη στην κβαντομηχανική να ικανοποιεί. Το πλεονέκτημα αυτής της προσέγγισης είναι ότι είναι εξαιρετικά γενική - δείχνει ότι η κβαντική δυναμική θα περιγράφεται από κβαντικούς τελεστές κάτω από ένα εκπληκτικά ευρύ φάσμα συνθηκών. Ωστόσο, δεν προσφέρει την ευκολία υπολογισμού της δεύτερης προσέγγισης, ούτε τη συγκεκριμένη φύση της πρώτης. Μαζί, αυτές οι τρεις προσεγγίσεις στους κβαντικούς τελεστές προσφέρουν ένα ισχυρό εργαλείο με το οποίο μπορούμε να κατανοήσουμε τον κβαντικό θόρυβο και τα αποτελέσματά του [31].



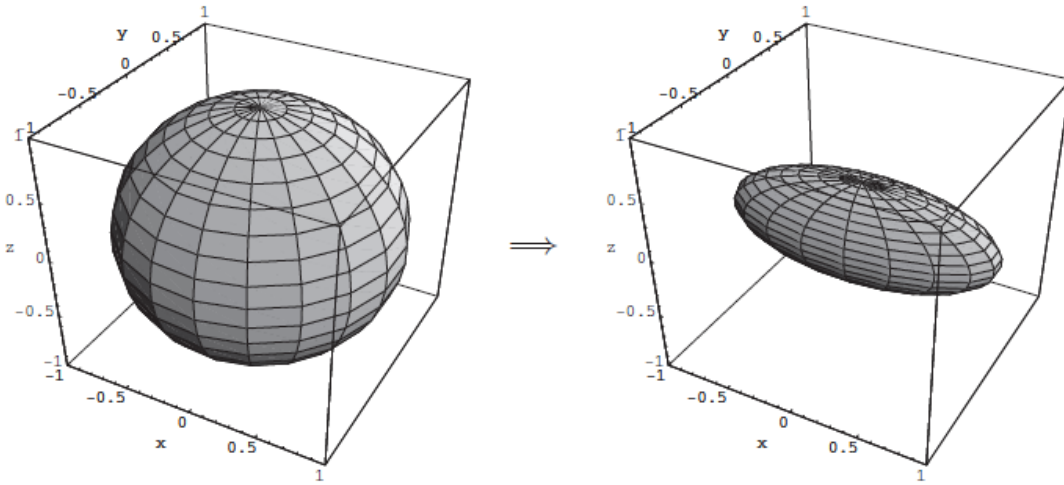
Εικόνα 19. Τρεις προσεγγίσεις για κβαντικούς τελεστές που είναι ισοδύναμες, αλλά προσφέρουν διαφορετικά πλεονεκτήματα

Bit Flip και Phase Flip Κανάλια Θορύβου

Η γεωμετρική εικόνα μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την απεικόνιση ορισμένων σημαντικών κβαντικών τελεστών σε μεμονωμένα qubits, οι οποίες θα χρησιμοποιηθούν αργότερα στη θεωρία της διόρθωσης σφαλμάτων. Το bit flip κανάλι αναστρέφει την κατάσταση ενός qubit από $|0\rangle$ σε $|1\rangle$ (και αντίστροφα) με πιθανότητα $1 - p$. Έχει στοιχεία λειτουργίας

$$E_0 = \sqrt{p}I = \sqrt{p} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad E_1 = \sqrt{1-p}X = \sqrt{1-p} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Η επίδραση του καναλιού bit flip απεικονίζεται στην Εικόνα 20.



Εικόνα 20. Η επίδραση του καναλιού bit flip στη σφαίρα Bloch, για $p = 0,3$. Η σφαίρα στα αριστερά αντιπροσωπεύει το σύνολο όλων των καθαρών καταστάσεων και η παραμορφωμένη σφαίρα στα δεξιά αντιπροσωπεύει τις καταστάσεις μετά τη διέλευση από το κανάλι. Σημειώστε ότι οι καταστάσεις στον άξονα \hat{x} αφήνονται ως έχουν, ενώ το επίπεδο $\hat{y} - \hat{z}$ συστέλλεται ομοιόμορφα κατά έναν παράγοντα $1 - 2p$.

Αυτή η γεωμετρική εικόνα καθιστά πολύ εύκολη την επαλήθευση ορισμένων γεγονότων σχετικά με αυτή τη κβαντική λειτουργία. Για παράδειγμα, είναι εύκολο να επαληθεύσουμε ότι η ποσότητα $\text{tr}(\rho^2)$ για ένα απλό qubit είναι ίση με $(1 + |r|^2)/2$, όπου $|r|$ είναι η νόρμα του διανύσματος Bloch. Η συρρίκνωση του σφαίρας Bloch που απεικονίζεται στην Εικόνα 20 δεν μπορεί να αυξήσει τη νόρμα του διανύσματος Bloch, και επομένως μπορούμε να συμπεράνουμε αμέσως ότι το $\text{tr}(\rho^2)$ μπορεί να μειωθεί μόνο για το κανάλι bit flip. Αυτό είναι μόνο ένα παράδειγμα της χρήσης της γεωμετρικής εικόνας- μόλις γίνει αρκετά οικεία, γίνεται μια μεγάλη πηγή διορατικότητας σχετικά με τις ιδιότητες των κβαντικών τελεστών σε ένα μόνο qubit [31].

Το κανάλι αναστροφής φάσης (phase flip) έχει στοιχεία λειτουργίας

$$E_0 = \sqrt{p}I = \sqrt{p} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad E_1 = \sqrt{1-p}Z = \sqrt{1-p} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

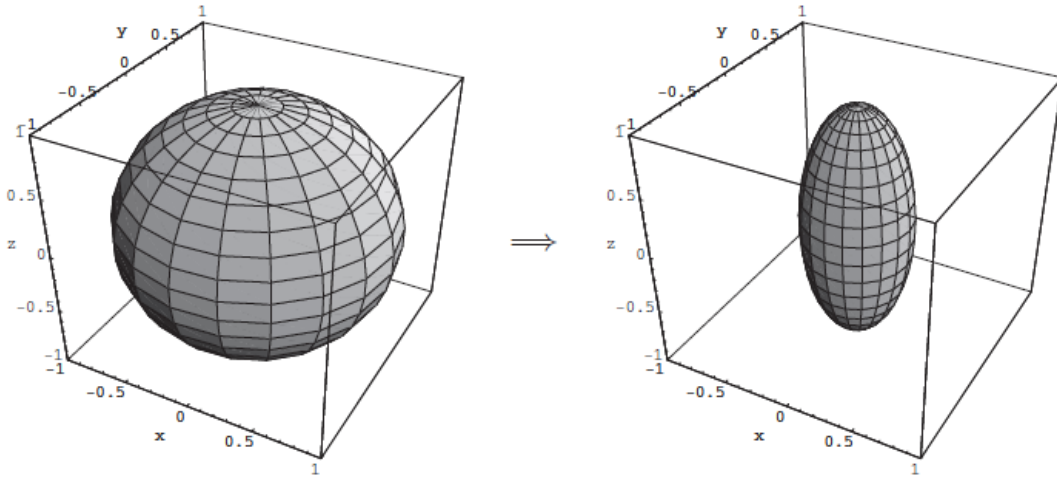
Η επίδραση του καναλιού αναστροφής φάσης απεικονίζεται στην Εικόνα 21. Ως ειδική περίπτωση του καναλιού αναστροφής φάσης, θεωρήστε την κβαντική λειτουργία που προκύπτει όταν επιλέγουμε $p = 1/2$. Χρησιμοποιώντας την ελευθερία στην αναπαράσταση τελεστή-αθροίσματος, ο τελεστής αυτός μπορεί να γραφεί ως:

$$\rho \rightarrow \mathcal{E}(\rho) = P_0 \rho P_0 + P_1 \rho P_1$$

όπου $P_0 = |0\rangle\langle 0|$, $P_1 = |1\rangle\langle 1|$, το οποίο αντιστοιχεί σε μια μέτρηση του qubit στη βάση $|0\rangle$, $|1\rangle$, με το αποτέλεσμα της μέτρησης άγνωστο. Χρησιμοποιώντας την παραπάνω συνταγή είναι εύκολο να δούμε ότι ο αντίστοιχος χάρτης στη σφαίρα Bloch δίνεται από τη σχέση

$$(r_x, r_y, r_z) \rightarrow (0, 0, r_z) .$$

Γεωμετρικά, το διάνυσμα Bloch προβάλλεται κατά μήκος του άξονα z και οι συνιστώσες x και y του διανύσματος Bloch χάνονται.

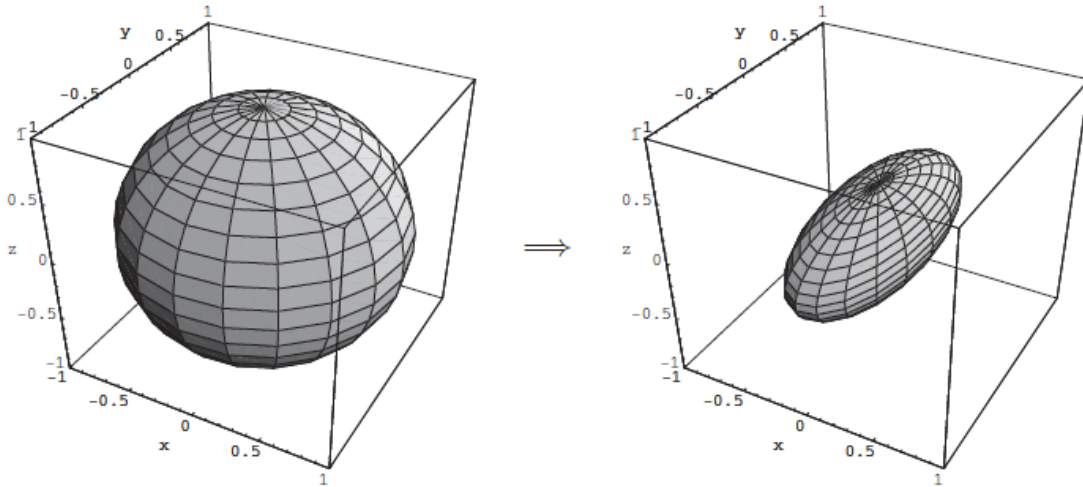


Εικόνα 21. Η επίδραση του καναλιού αναστροφής φάσης στη σφαίρα Bloch, για $p = 0,3$. Σημειώστε ότι οι καταστάσεις στον άξονα \hat{z} αφήνονται ως έχουν, ενώ το επίπεδο $\hat{x} - \hat{y}$ συστέλλεται ομοιόμορφα κατά έναν παράγοντα $1 - 2p$.

Το κανάλι *bit-phase flip* έχει στοιχεία λειτουργίας

$$E_0 = \sqrt{p} I = \sqrt{p} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad E_1 = \sqrt{1-p} Y = \sqrt{1-p} \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}$$

Όπως υποδηλώνει το όνομα, πρόκειται για συνδυασμό αναστροφής φάσης και αναστροφής bit, αφού $Y = iXZ$. Η δράση του καναλιού *bit-phase flip* απεικονίζεται στην Εικόνα 22 [31].



Εικόνα 22. Η επίδραση του καναλιού bit-phase flip στη σφαίρα Bloch, για $p = 0,3$. Σημειώστε ότι οι καταστάσεις στην \hat{y} αφήνονται μόνες τους, ενώ το επίπεδο $\hat{x} - \hat{z}$ συρρικνώνεται ομοιόμορφα κατά έναν παράγοντα $1 - 2p$.

1.3 Κώδικες και Πρωτόκολλα Διόρθωσης Κβαντικού Σφάλματος

Όπως αντιλαμβανόμαστε ο θόρυβος είναι ένα μεγάλο πρόβλημα για τα κβαντικά συστήματα επεξεργασίας πληροφορίας, για αυτό οι προσπάθειες μας εστιάζουν στην αποφυγή του θορύβου αυτού κάθε αυτού και ύστερα στον εντοπισμό και τη διόρθωση των σφαλμάτων που προκαλούνται από το θόρυβο.

Η κβαντική διόρθωση σφαλμάτων (Quantum Error Correction) χρησιμοποιείται στην κβαντική πληροφορική για την προστασία της κβαντικής πληροφορίας από σφάλματα που οφείλονται στο decoherence και σε άλλες μορφές κβαντικού θορύβου. Η διόρθωση κβαντικών σφαλμάτων είναι απαραίτητη για την επίτευξη κβαντικού υπολογισμού με ανοχή σε σφάλματα, ο οποίος μπορεί να αντιμετωπίσει όχι μόνο το θόρυβο στην αποθηκευμένη κβαντική πληροφορία, αλλά και τις ελαττωματικές κβαντικές πύλες, την ελαττωματική κβαντική προετοιμασία και τις ελαττωματικές μετρήσεις.

Η κλασική διόρθωση σφαλμάτων χρησιμοποιεί πλεονασμό (redundancy). Ο απλούστερος τρόπος είναι να αποθηκεύσουμε την πληροφορία πολλές φορές και -αν αυτά τα αντίγραφα βρεθούν αργότερα να διαφωνούν- απλά να πάρουμε μια ψηφοφορία κατά πλειοψηφία- π.χ. ας υποθέσουμε ότι αντιγράφουμε ένα bit τρεις φορές. Ας υποθέσουμε επιπλέον ότι ένα θορυβώδες σφάλμα αλλοιώνει την κατάσταση των τριών bit έτσι ώστε ένα bit να είναι ίσο με μηδέν αλλά τα άλλα δύο να είναι ίσα με ένα. Αν υποθέσουμε ότι τα θορυβώδη σφάλματα είναι ανεξάρτητα και συμβαίνουν με κάποια πιθανότητα p , το πιθανότερο είναι ότι το σφάλμα είναι ένα σφάλμα ενός bit και το μεταδιδόμενο μήνυμα είναι τρεις μονάδες. Είναι πιθανό να συμβεί σφάλμα διπλού bit και το μεταδιδόμενο μήνυμα να είναι ίσο με τρία μηδενικά, αλλά αυτό το αποτέλεσμα είναι λιγότερο πιθανό από το παραπάνω αποτέλεσμα.

Η αντιγραφή κβαντικής πληροφορίας δεν είναι δυνατή λόγω του θεωρήματος της μη κλωνοποίησης (No-cloning Theorem). Αυτό το θεώρημα φαίνεται να αποτελεί εμπόδιο στη διατύπωση μιας θεωρίας για τη διόρθωση κβαντικών σφαλμάτων. Όμως είναι δυνατόν η πληροφορία ενός qubit να εξαπλωθεί σε μια εξαιρετικά διεμπλεκόμενη κατάσταση πολλών (φυσικών) qubits. Ο Peter Shor ανακάλυψε πρώτος αυτή τη μέθοδο διατύπωσης ενός κβαντικού κώδικα διόρθωσης σφαλμάτων αποθηκεύοντας την πληροφορία ενός qubit σε μια εξαιρετικά διεμπλεκόμενη κατάσταση εννέα qubits. Ένας κβαντικός κώδικας διόρθωσης σφαλμάτων προστατεύει την κβαντική πληροφορία από σφάλματα περιορισμένης μορφής [16-21]..

Οι κλασικοί κώδικες διόρθωσης σφαλμάτων χρησιμοποιούν μια μέτρηση συνδρόμου για να διαγνώσουν ποιο σφάλμα καταστρέφει μια κωδικοποιημένη κατάσταση. Στη συνέχεια, μπορεί να αντιστρέψει ένα σφάλμα εφαρμόζοντας μια διορθωτική λειτουργία με βάση το σύνδρομο. Η κβαντική διόρθωση σφαλμάτων χρησιμοποιεί επίσης μετρήσεις συνδρόμου. Πραγματοποιεί μια μέτρηση πολλαπλών κουμπιών που δεν διαταράσσει την κβαντική πληροφορία στην κωδικοποιημένη κατάσταση, αλλά ανακτά πληροφορίες σχετικά με το σφάλμα. Μια μέτρηση συνδρόμου μπορεί να καθορίσει αν ένα qubit έχει αλλοιωθεί, και αν ναι, ποιο. Επιπλέον, το αποτέλεσμα αυτού του τελεστή (το σύνδρομο) μας λέει όχι μόνο ποιο φυσικό qubit επηρεάστηκε αλλά και με ποιον από τους διάφορους πιθανούς τρόπους επηρεάστηκε. Το τελευταίο είναι περίεργο με την πρώτη ματιά: Εφόσον ο θόρυβος είναι αυθαίρετος, πώς μπορεί η επίδραση του θορύβου να είναι μία από τις λίγες μόνο διακριτές δυνατότητες; Στους περισσότερους κώδικες, η επίδραση είναι είτε μια αναστροφή bit, είτε μια αναστροφή προσήμου (της φάσης), είτε και τα δύο (που αντιστοιχούν στους πίνακες Pauli X, Z και Y). Ο λόγος είναι ότι η μέτρηση του συνδρόμου έχει το προβολικό αποτέλεσμα μιας κβαντικής μέτρησης. Έτσι, ακόμη και αν το σφάλμα λόγω του θορύβου ήταν αυθαίρετο, μπορεί να εκφραστεί ως υπέρθεση των τελεστών βάσης - η βάση σφάλματος (η οποία εδώ δίνεται από τους πίνακες Pauli και την ταυτότητα). Η μέτρηση του συνδρόμου "αναγκάζει" το qubit να "αποφασίσει" για ένα συγκεκριμένο "σφάλμα Pauli" που "έχει συμβεί", και το σύνδρομο μας λέει ποιο,

έτσι ώστε η διόρθωση σφάλματος να αφήσει τον ίδιο τελεστή Pauli να δράσει ξανά στο αλλοιωμένο qubit για να αντιστρέψει την επίδραση του σφάλματος.

Η μέτρηση του συνδρόμου μάς λέει όσο το δυνατόν περισσότερα για το σφάλμα που συνέβη, αλλά τίποτα απολύτως για την τιμή που είναι αποθηκευμένη στο λογικό qubit - καθώς διαφορετικά η μέτρηση θα κατέστρεφε οποιαδήποτε κβαντική υπέρθεση αυτού του λογικού qubit με άλλα qubits στον κβαντικό υπολογιστή, γεγονός που θα εμπόδιζε τη χρήση του για τη μεταφορά κβαντικής πληροφορίας [16-21].

1.3.1 Κβαντικοί Κώδικες

Αρχικά πριν αναλύσουμε περαιτέρω τους κβαντικούς κώδικες διόρθωσης σφαλμάτων ας γνωρίσουμε δύο βασικές έννοιες, το φυσικό και το λογικό qubit.

Φυσικό Qubit

Το φυσικό qubit είναι ένα φυσικό σύστημα, δηλαδή μια πραγματική φυσική, κβαντική αναπαράσταση ενός qubit (π.χ. ένα ηλεκτρόνιο με spin πάνω ή κάτω, ένα φωτόνιο με πόλωση οριζόντια ή κάθετη).

Το γεγονός ότι οι καταστάσεις των φυσικών qubits είναι ιδιαίτερα ευαίσθητες οδήγησε στην ανάπτυξη της κβαντικής διόρθωσης σφάλματος (quantum error correction). Η κβαντική διόρθωση σφάλματος πραγματοποιείται με την διανομή της πληροφορίας ενός bit σε έναν μεγάλο αριθμό φυσικών συστημάτων [11].

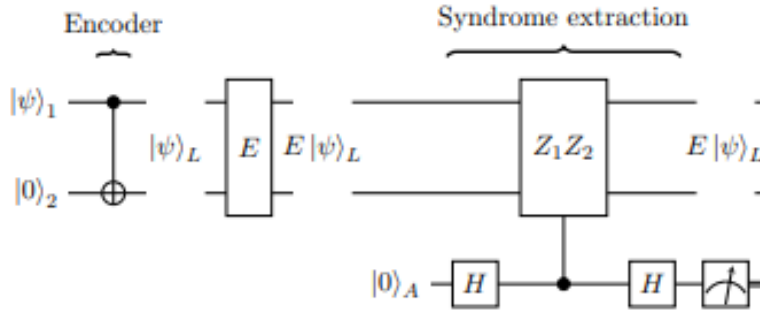
Λογικό Qubit

Το λογικό qubit είναι μια προγραμματιστική έννοια, που μπορεί να έχει φυσική ή αυθαίρετη υπόσταση, και θα μπορούσε να προσομοιωθεί σε έναν κλασσικό υπολογιστή. Το λογικό qubit αποτελείται από έναν μεγάλο αριθμό φυσικών qubits, κυρίως για τις ανάγκες κβαντικής διόρθωσης σφάλματος, και έχει αρκετά μεγάλο χρόνο συσχέτισης που το καθιστά αξιοποιήσιμο από της κβαντικές λογικές πύλες [12].

Έχοντας στο μυαλό μας αυτές τις δύο έννοιες μπορούμε να δούμε κάποιους απλούς κβαντικούς κώδικες διόρθωσης σφάλματος.

Η κβαντική διόρθωση σφαλμάτων περιπλέκεται από :

1. το θεώρημα μη κλωνοποίησης ,
2. την κατάρρευση της κυματοσυνάρτησης και
3. την ύπαρξη ενός μοναδικού κβαντικού τύπου σφάλματος, της μετατόπισης φάσης.



Εικόνα 23. Κυκλωματικό διάγραμμα για τον κώδικα δύο qubit. Στάδιο κωδικοποίησης: η πληροφορία που περιέχεται στο $|\psi\rangle_1$ περιπλέκεται με ένα qubit πλεονασμού $|0\rangle_2$ για να δημιουργηθεί μια λογική κατάσταση $|\psi\rangle_L$. Στάδιο λάθους: κατά τη διάρκεια του παραθύρου λάθους (απεικονίζεται από το κυκλωματικό στοιχείο E), τα δύο qubits του κώδικα υπόκεινται δυνητικά σε σφάλματα αναστροφής bit. Στάδιο εξαγωγής συνδρόμου: ο τελεστής Z_1Z_2 , ελεγχόμενος από το ancilla qubit A , εφαρμόζεται στα qubits κώδικα. Η επακόλουθη μέτρηση του ancilla δίνει το σύνδρομο κώδικα S .

Αντιμέτωποι λοιπόν με αυτές τις προκλήσεις, πώς προστίθεται πλεονασμός σε ένα κβαντικό σύστημα ώστε να επιτρέπεται η ανίχνευση των σφαλμάτων σε πραγματικό χρόνο; Οι κλασικοί κώδικες επανάληψης λειτουργούν αυξάνοντας τους πόρους που χρησιμοποιούνται για την κωδικοποίηση των δεδομένων πέρα από το θεωρητικό ελάχιστο. Αντίστοιχα, στους κβαντικούς κώδικες ο πλεονασμός προστίθεται με επέκταση του χώρου Hilbert στον οποίο κωδικοποιούνται τα qubits [46]. Για να δούμε πώς επιτυγχάνεται αυτό σε στην πράξη, περιγράψουμε τώρα τον κώδικα δύο qubit, έναν πρωτότυπο κβαντικό κώδικα που έχει σχεδιαστεί για την ανίχνευση ενός σφάλματος αναστροφής ενός bit. Το στάδιο κωδικοποίησης του κώδικα δύο qubit, που δρα στη γενική κατάσταση $|\psi\rangle$, έχει την ακόλουθη δράση

$$|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle \xrightarrow{\text{two-qubit encoder}} |\psi\rangle_L = \alpha|00\rangle + \beta|11\rangle = \alpha|0\rangle_L + \beta|1\rangle_L$$

όπου μετά την κωδικοποίηση οι λογικές κωδικές λέξεις είναι $|0\rangle_L = |00\rangle$ και $|1\rangle_L = |11\rangle$. Σημειώστε ότι αυτό δεν αντιστοιχεί στην κλωνοποίηση της κατάστασης ως

$$|\psi\rangle_L = \alpha|00\rangle + \beta|11\rangle \neq |\psi\rangle \otimes |\psi\rangle$$

Η πράξη της κωδικοποίησης έχει ως αποτέλεσμα τη διανομή της κβαντικής πληροφορίας της αρχικής κατάστασης $|\psi\rangle$ στην περιπλεγμένη λογική κατάσταση των δύο μερών $|\psi\rangle_L$. Αυτό εισάγει πλεονασμό στην κωδικοποίηση που μπορεί να αξιοποιηθεί για την

ανίχνευση σφαλμάτων. Για να κατανοήσουμε πώς ακριβώς λειτουργεί αυτό ως εξετάσουμε τους υπολογιστικούς χώρους Hilbert πριν και μετά την κωδικοποίηση. Πριν από την κωδικοποίηση, το μοναδικό qubit παραμετροποιείται σε ένα δισδιάστατο χώρο Hilbert

$|\psi\rangle \in H_2 = \text{span}\{|0\rangle, |1\rangle\}$. Μετά την κωδικοποίηση το λογικό qubit καταλαμβάνει έναν τετραδιάστατο χώρο Hilbert

$$|\psi\rangle_L \in \mathcal{H}_4 = \text{span}\{|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle, |11\rangle\}$$

Πιο συγκεκριμένα, το λογικό qubit ορίζεται μέσα σε ένα δισδιάστατο υποδιάστημα αυτού του διευρυμένου χώρου Hilbert

$$|\psi\rangle_L \in \mathcal{C} = \text{span}\{|00\rangle, |11\rangle\} \subset \mathcal{H}_4$$

όπου το \mathcal{C} καλείται χώρος κωδικοποίησης. Τώρα, φανταστείτε ότι το λογικό qubit υπόκειται σε σφάλμα αναστροφής bit στο πρώτο qubit με αποτέλεσμα την κατάσταση

$$X_1 |\psi\rangle_L = \alpha |10\rangle + \beta |01\rangle$$

όπου X_1 είναι ένα σφάλμα αναστροφής bit που ενεργεί στο πρώτο qubit. Η προκύπτουσα κατάσταση περιστρέφεται σε ένα νέο υποχώρο

$$X_1 |\psi\rangle_L \in \mathcal{F} \subset \mathcal{H}_4$$

όπου ονομάζουμε \mathcal{F} τον υποχώρο σφάλματος. Σημειώστε ότι ένα σφάλμα X_2 θα περιστρέψει επίσης τη λογική κατάσταση στον υποχώρο \mathcal{F} . Εάν η λογική κατάσταση $|\psi\rangle_L$ δεν έχει υποστεί βλάβη, καταλαμβάνει τον κωδικοχώρο \mathcal{C} , ενώ αν έχει υποστεί μια αναστροφή bit ενός qubit, καταλαμβάνει τον χώρο σφαλμάτων \mathcal{F} . Καθώς οι υποχώροι \mathcal{C} και \mathcal{F} είναι αμοιβαία ορθογώνια, είναι δυνατόν να διακρίνουμε ποιόν υποχώρο καταλαμβάνει το λογικό qubit μέσω μιας προβολικής μέτρησης χωρίς να διακυβεύεται η κωδικοποιημένη κβαντική πληροφορία. Στο πλαίσιο της κβαντικής κωδικοποίησης, οι μετρήσεις αυτού του τύπου ονομάζονται μετρήσεις σταθεροποιητή. Για τους σκοπούς της διαφοροποίησης μεταξύ του κωδικοχώρου \mathcal{C} και του χώρου σφαλμάτων \mathcal{F} , μια προβολική μέτρηση της μορφής $Z_1 Z_2$. Ο τελεστής $Z_1 Z_2$ δίνει μια (+1) ιδιοτιμή όταν εφαρμόζεται στη λογική κατάσταση

$$Z_1 Z_2 |\psi\rangle_L = Z_1 Z_2 (\alpha |00\rangle + \beta |11\rangle) = (+1) |\psi\rangle_L$$

Ο τελεστής Z_1Z_2 λέγεται ότι σταθεροποιεί το λογικό qubit $|\psi\rangle_L$ καθώς το αφήνει αμετάβλητο [47]. Αντίστροφα, ο τελεστής Z_1Z_2 προβάλλει τις λανθασμένες καταστάσεις, $X_1|\psi\rangle_L$ και $X_2|\psi\rangle_L$ πάνω στο (-1) ιδιοχώρο. Σημειώστε ότι για οποιοδήποτε αποτέλεσμα, η πληροφορία που κωδικοποιείται στους συντελεστές α και β της λογικής κατάστασης παραμένει αναλλοίωτη.

Στην Εικόνα 23 παρουσιάζεται η κυκλωματική υλοποίηση του κώδικα δύο qubit. Στο στάδιο κωδικοποίησης, μια πύλη CNOT χρησιμοποιείται για να εμπλέξει την κατάσταση $|\psi\rangle$ με ένα qubit πλεονασμού για να δημιουργήσει τη λογική κατάσταση $|\psi\rangle_L$. Ακολουθώντας αυτό, υποθέτουμε ότι το λογικό qubit υπόκειται σε σφάλμα bit-flip E , που εφαρμόζεται κατά το στάδιο του κυκλώματος με την ένδειξη " E ". Μετά το στάδιο του σφάλματος, ένα ancilla qubit $|0\rangle_A$ εισάγεται για να εκτελέσει το μέτρηση του σταθεροποιητή Z_1Z_2 . Το στάδιο εξαγωγής συνδρόμου του κυκλώματος μετασχηματίζει το κβαντική κατάσταση ως εξής

$$E|\psi\rangle_L|0\rangle_A \xrightarrow{\text{syndrome extraction}} \frac{1}{2}(\mathbf{1}_1\mathbf{1}_2 + Z_1Z_2)E|\psi\rangle_L|0\rangle_A + \frac{1}{2}(\mathbf{1}_1\mathbf{1}_2 - Z_1Z_2)E|\psi\rangle_L|1\rangle_A$$

όπου E είναι ένα σφάλμα από το σύνολο $\{I, X_1, X_2, X_1X_2\}$. Τώρα, θεωρήστε την περίπτωση όπου $E = X_1$ έτσι ώστε η λογική κατάσταση να καταλαμβάνει τον χώρο σφαλμάτων $E|\psi\rangle_L \in F$. Σε αυτό το σενάριο, μπορεί να παρατηρηθεί ότι ο πρώτος όρος στην προηγούμενη εξίσωση μηδενίζεται. Το ancilla qubit μετριέται επομένως ντετερμινιστικά ως '1'. Εξετάζοντας τα άλλα μοτίβα σφάλματος, βλέπουμε ότι εάν η λογική κατάσταση βρίσκεται στο χώρο κωδικοποίησης (δηλ, εάν $E = \{I, X_1X_2\}$) τότε το ancilla μετράται ως '0'. Παρομοίως, εάν η λογική κατάσταση βρίσκεται στο υποδιάστημα σφάλματος (δηλαδή, αν $E = \{X_1, X_2\}$), τότε το ancilla μετριέται ως '1'. Το αποτέλεσμα της μέτρησης του ancilla qubit αναφέρεται ως σύνδρομο και μας λέει αν η λογική κατάσταση έχει υποστεί σφάλμα ή όχι. Τα σύνδρομα για όλους τους τύπους σφαλμάτων bit-flip στον κώδικα δύο qubit παρουσιάζονται στον πίνακα 1.

I_1I_2	0
X_1I_2	1
I_1X_2	1
X_1X_2	0

Πίνακας 1. Το σύνδρομο για το δύο-qubit κώδικα. Το σύνδρομο S είναι μια συμβολοσειρά bit όπου κάθε bit αντιστοιχεί στο αποτέλεσμα ενός σταθεροποιητή μέτρησης.

Μέχρι αυτό το σημείο, υποθέσαμε ότι το σφάλμα που εισάγεται από το στοιχείο κυκλώματος με την ένδειξη "E" είναι ντετερμινιστικό. Τώρα αποδεικνύουμε πώς λειτουργεί ο κώδικας δύο qubit υπό ένα πιο γενικότερο πιθανοτικό σφάλμα. Για τους σκοπούς αυτού του παραδείγματος, θα υποθέσουμε ότι κάθε qubit στον κώδικα δύο qubit υπόκειται σε ένα συνεκτικό σφάλμα της μορφής

$$\mathcal{E} = \alpha_I \mathbb{1} + \alpha_X X$$

Όπου $|\alpha_I|^2 + |\alpha_X|^2 = 1$. Εδώ βλέπουμε ότι $|\alpha_X|^2 = p_X$ είναι η πιθανότητα εμφάνισης ενός σφάλματος X στο qubit. Επομένως, η πιθανότητα να μην εμφανιστεί κανένα σφάλμα είναι ίση με $|\alpha_I|^2 = 1 - p_X$. Η συνδυασμένη δράση του τελεστή σφάλματος \mathcal{E} που δρα και στα δύο qubits δίνεται από τη σχέση

$$E = \mathcal{E}_1 \otimes \mathcal{E}_2 = \alpha_I^2 \mathbb{1}_1 \mathbb{1}_2 + \alpha_I \alpha_X (X_1 + X_2) + \alpha_X^2 X_1 X_2$$

Με τον παραπάνω τελεστή σφάλματος E, το στάδιο εξαγωγής συνδρόμου στην εικόνα 23 μετασχηματίζει τη κβαντική κατάσταση ως εξής

$$E |\psi\rangle_L |0\rangle_A \xrightarrow{\text{syndrome extraction}} (\alpha_I^2 \mathbb{1}_1 \mathbb{1}_2 + \alpha_X^2 X_1 X_2) |\psi\rangle_L |0\rangle_A + \alpha_I \alpha_X (X_1 + X_2) |\psi\rangle_L |1\rangle_A$$

Εάν το σύνδρομο μετρηθεί ως "0", η κατάσταση καταρρέει σε ένα υποσύνολο των όρων της

$$\frac{(\alpha_I^2 \mathbb{1}_1 \mathbb{1}_2 + \alpha_X^2 X_1 X_2)}{\sqrt{|\alpha_I|^2 + |\alpha_X|^2}} |\psi\rangle_L |0\rangle_A$$

όπου ο παρονομαστής εξασφαλίζει την κανονικοποίηση. Υπολογίζοντας τον τετραγωνικό κανόνα στον πρώτο όρο στο παραπάνω, μπορούμε να υπολογίσουμε την πιθανότητα p_L ότι η λογική κατάσταση υπόκειται σε σφάλμα

$$p_L = \left| \frac{\alpha_X^2}{\sqrt{|\alpha_I|^2 + |\alpha_X|^2}} \right|^2 = \frac{p_x^2}{(1 - p_x)^2 + p_x^2} \approx p_x^2$$

όπου η παραπάνω προσέγγιση γίνεται με την παραδοχή ότι το p_X είναι μικρό. Για το ένα qubit $|\psi\rangle$, η πιθανότητα σφάλματος είναι p_X όταν υπόκειται στον τελεστή σφάλματος \mathcal{E} . Για το λογικό qubit $|\psi\rangle_L$ που υπόκειται στον τελεστή σφάλματος $\mathcal{E}_1 \otimes \mathcal{E}_2$, η πιθανότητα λογικού σφάλματος είναι $p_L = p_X^2$. Από αυτό, βλέπουμε ότι ο κώδικας δύο qubit

καταστέλλει το ποσοστό σφάλματος σε σχέση με την περίπτωση χωρίς κωδικοποίηση [45].

O three-qubit error correction code

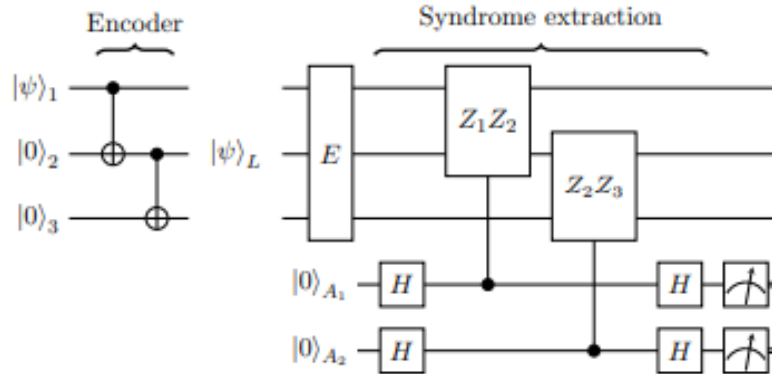
Το σύνδρομο που παράγεται από τον κώδικα δύο qubits μας ενημερώνει για την παρουσία ενός σφάλματος, αλλά δεν παρέχει αρκετές πληροφορίες ώστε να μας επιτρέψει να συμπεράνουμε σε ποιο qubit συνέβη το σφάλμα. Κατά συνέπεια, εμείς αναφερόμαστε στον κώδικα δύο qubit ως "κώδικα ανίχνευσης σφαλμάτων". Όταν υλοποιείται σε υλικό, οι κώδικες ανίχνευσης μπορούν να βοηθήσουν στη διασφάλιση έγκυρων υπολογισμών μέσω μιας στρατηγικής επανάληψης μέχρι την επιτυχία: κάθε φορά που ένα σφάλμα ανιχνεύεται, το κύκλωμα επαναφέρεται μέχρι να επιτευχθεί εκτέλεση χωρίς σφάλματα. Ως τα απλούστερα πρωτόκολλα μετριασμού των σφαλμάτων, οι κώδικες ανίχνευσης θα παίξουν ρόλο σε συσκευές μικρής κλίμακας για την απόδειξη της λειτουργίας τους. Ωστόσο, ο αριθμός των επαναλήψεων που απαιτούνται πριν επιτευχθεί επιτυχής εκτέλεση θα γίνει απαγορευτικά μεγάλος, καθώς αυξάνεται το μέγεθος των κβαντικών κυκλωμάτων. Οι κβαντικές συσκευές πλήρους κλίμακας θα απαιτούν "κώδικες διόρθωσης σφαλμάτων". Οι κώδικες διόρθωσης σφαλμάτων έχουν σχεδιαστεί για να παρέχουν αρκετές πληροφορίες συνδρόμου τόσο για την ανίχνευση όσο και για τον εντοπισμό των σφαλμάτων, επιτρέποντας έτσι την ενεργό διόρθωση του κυκλώματος σε πραγματικό χρόνο. Το πλεονέκτημα των κωδίκων διόρθωσης είναι ότι το κβαντικό κύκλωμα χρειάζεται να εκτελεστεί μόνο μία φορά. Οι κώδικες διόρθωσης σφαλμάτων περιλαμβάνουν πολλαπλές επικαλυπτόμενες μετρήσεις σταθεροποιητή. Θα περιγράψουμε τώρα τον κώδικα τριών qubits, τον απλούστερο παράδειγμα κώδικα διόρθωσης σφαλμάτων.

Ο κώδικας τριών qubits είναι η φυσική επέκταση του κώδικα δύο qubits στον οποίο η κωδικοποίηση διανέμει την κβαντική πληροφορία σε μια περιπλεγμένη κατάσταση τριών μερών για να δώσει ένα λογική κατάσταση της μορφής $|\psi\rangle_L = \alpha|000\rangle + \beta|111\rangle$. Αυτή η λογική κατάσταση καταλαμβάνει μια οκταδιάστατη χώρο Hilbert που μπορεί να χωριστεί σε τέσσερις δισδιάστατους υποχώρους ως εξής:

$$\begin{aligned} \mathcal{C} &= \text{span}\{|000\rangle, |111\rangle\}, & \mathcal{F}_1 &= \text{span}\{|100\rangle, |011\rangle\}, \\ \mathcal{F}_2 &= \text{span}\{|010\rangle, |101\rangle\}, & \mathcal{F}_3 &= \text{span}\{|001\rangle, |110\rangle\}, \end{aligned}$$

όπου \mathcal{C} είναι ο λογικός χώρος κωδικών και $\mathcal{F}_{\{1,2,3\}}$ είναι οι λογικοί χώροι σφαλμάτων. Βλέπουμε ότι κάθε single qubit σφάλμα από το σύνολο $E = \{X_1, X_2, X_3\}$ θα περιστρέψει το χώρο κωδικών σε ένα μοναδικό χώρο σφαλμάτων έτσι ώστε $X_i |\psi\rangle_L \in \mathcal{F}_i$. Προκειμένου να διαφοροποιήσουμε αυτούς τους υποχώρους, εκτελούμε δύο μετρήσεις σταθεροποιητών $Z_1 Z_2$ και $Z_2 Z_3$ μέσω του κυκλώματος που παρουσιάζεται στην εικόνα

24. Ο προκύπτων πίνακας συνδρόμων για single-qubit errors δίνεται στον πίνακα 2. Από αυτόν βλέπουμε ότι κάθε σφάλμα single-qubit παράγει ένα μοναδικό σύνδρομο δύο bit $S = S_1S_2$, που μας επιτρέπει να επιλέξουμε μια κατάλληλη λειτουργία ανάκτησης [45].



Εικόνα 24. Το κυκλωματικό διάγραμμα του κώδικα τριών qubit. Στάδιο κωδικοποίησης: Η πληροφορία που περιέχεται στο $|\psi\rangle_1$ περιπλέκεται με δύο qubits πλεονασμού $|0\rangle_2$ και $|0\rangle_3$ για να δημιουργηθεί ένα λογικό qubit $|\psi\rangle_L$. Οι σταθεροποιητές Z_1Z_2 , και Z_2Z_3 μετρώνται στο λογικό qubit μέσω δύο πράξεων που ελέγχονται στα ancilla qubits A_1 και A_2 αντίστοιχα. Η επακόλουθη μέτρηση των ancilla qubits δίνει ένα σύνδρομο S δύο bit.

Error	Syndrome, S	Error	Syndrome, S
$I_1 I_2 I_3$	00	$X_1 X_2 I_3$	01
$X_1 I_2 I_3$	10	$I_1 X_2 X_3$	10
$I_1 X_2 I_3$	11	$X_1 I_2 X_3$	11
$I_1 I_2 X_3$	01	$X_1 X_2 X_3$	00

Πίνακας 2. Ο πίνακας συνδρόμων για όλα τα σφάλματα bit-flip στον κώδικα τριών qubit. Το σύνδρομο S είναι μια δίμπιτη συμβολοσειρά που σχηματίζεται από τη συνένωση των αποτελεσμάτων των δύο μετρήσεων σταθεροποιητή.

Quantum Code Distance

Όπως συμβαίνει με τους κλασικούς κώδικες, η απόσταση ενός κβαντικού κώδικα ορίζεται ως το ελάχιστο μέγεθος σφάλματος που θα παραμείνει απαρατήρητο. Εναλλακτικά, αυτό το σφάλμα ελάχιστου μεγέθους μπορεί να θεωρηθεί ως ένα λογικό τελεστή Pauli που μετασχηματίζει μια κατάσταση κωδικής λέξης σε μια άλλη. Για τον κώδικα τριών qubits που περιγράφεται παραπάνω, βλέπουμε ότι ο λογικός τελεστής Pauli-X δίνεται από τη σχέση $\underline{X}_i = X_1 X_2 X_3$, έτσι ώστε

$$\underline{X}|0\rangle_L = |1\rangle_L \quad \text{και} \quad \underline{X}|1\rangle_L = |0\rangle_L ,$$

όπου $|0\rangle_L = |000\rangle$ και $|1\rangle_L = |111\rangle$ είναι οι λογικές κωδικές λέξεις για τον κώδικα τριών qubits. Αν ήταν η περίπτωση που τα qubits ήταν ευαίσθητα μόνο σε σφάλματα X, τότε ο κώδικας τριών qubit θα είχε απόσταση $d = 3$. Ωστόσο, δεδομένου ότι τα qubits είναι επίσης ευαίσθητα σε σφάλματα μετατόπισης φάσης, είναι επίσης απαραίτητο να εξεταστεί ο λογικός τελεστής Pauli-Z \underline{Z} κατά τον προσδιορισμό της απόστασης του κώδικα. Για να γίνει αυτό, είναι χρήσιμο να αλλάξουμε από την υπολογιστική βάση, $\{|0\rangle, |1\rangle\}$, στη συζυγή βάση, $\{|+\rangle, |-\rangle\}$, όπου ορίζουμε

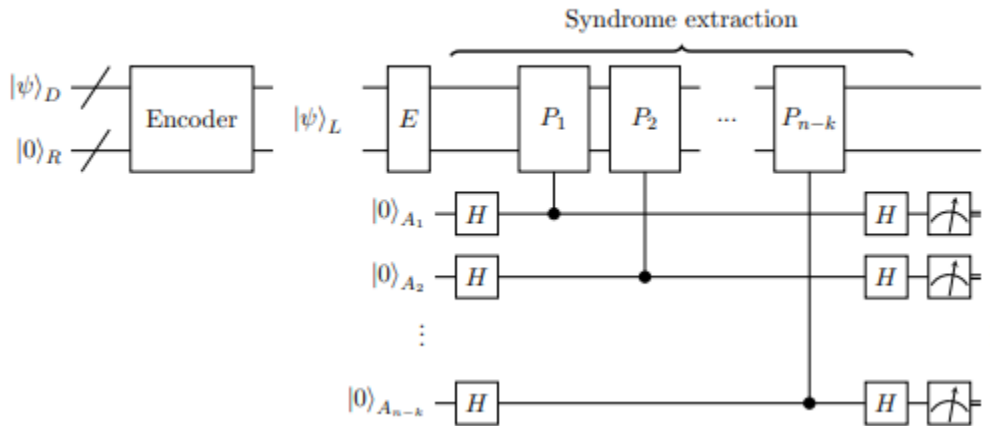
$$|+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle + |1\rangle) \quad \text{και} \quad |-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle - |1\rangle) .$$

Ένα σφάλμα Z απεικονίζει τις καταστάσεις συζυγούς βάσης ως εξής: $Z|+\rangle = |-\rangle$ και $Z|-\rangle = |+\rangle$. Τώρα, η κωδικοποίηση των καταστάσεων της συζυγούς βάσης με τον κώδικα τριών qubit δίνει τις λογικές καταστάσεις

$$|+\rangle_L = \frac{1}{\sqrt{2}} (|000\rangle + |111\rangle) \quad \text{και} \quad |-\rangle_L = \frac{1}{\sqrt{2}} (|000\rangle - |111\rangle) .$$

Ένας λογικός τελεστής Pauli-Z $\underline{Z} = Z_1$ με βάρος ένα θα μετατρέψει το $Z|+\rangle_L = |-\rangle_L$, που σημαίνει ότι ο κώδικας δεν είναι σε θέση να ανιχνεύσει την παρουσία σφαλμάτων Z σε ένα qubit. Ως αποτέλεσμα, ο κώδικας τριών qubits έχει κβαντική απόσταση $d = 1$.

1.3.1.1 Stabiliser Κώδικες



Εικόνα 25. Κύκλωμα που απεικονίζει τη δομή ενός κώδικα σταθεροποιητή $[[n, k, d]]$. Ένας κβαντικός καταχωρητής δεδομένων $|\psi\rangle_D = |\psi_1\psi_2\dots\psi_k\rangle$ περιπλέκεται με qubits πλεονασμού $|0\rangle_R = |0_10_2\dots0_{n-k}\rangle$ μέσω μιας πράξης κωδικοποίησης για τη δημιουργία ενός λογικού qubit $|\psi\rangle_L$. Μετά το κωδικοποίηση, μια ακολουθία από $n - k$ ελέγχους σταθεροποιητή P_i εκτελείται στον καταχωρητή και κάθε αποτέλεσμα αντιγράφεται σε ένα ancilla qubit A_i . Η επακόλουθη μέτρηση των ancilla qubits παρέχει ένα σύνδρομο m -bit.

Ο κώδικας τριών qubits λειτουργεί με την μεταφορά της πληροφορίας από ένα qubit σε τρία qubits. Η προκύπτουσα λογική κατάσταση στη συνέχεια κωδικοποιείται σε ένα δισδιάστατο υποδιάστημα (ο κωδικός χώρος) του διευρυμένου χώρου Hilbert. Ο κώδικας τριών qubit έχει σχεδιαστεί έτσι ώστε αν συμβεί ένα σφάλμα X , η λογική κατάσταση περιστρέφεται σε έναν ορθογώνιο χώρο σφαλμάτων, γεγονός που μπορεί να ανιχνευθεί μέσω μιας ακολουθίας δύο μετρήσεων σταθεροποιητή. Θα περιγράψουμε πώς αυτή η διαδικασία μπορεί να γενικευτεί για τη δημιουργία $[[n, k, d]]$ κωδίκων σταθεροποιητών, όπου n είναι ο συνολικός αριθμός των qubits, k είναι ο αριθμός των λογικών qubits και d η απόσταση του κώδικα. Σημειώστε τη χρήση διπλών αγκυλών για τη διαφοροποίηση των κβαντικών κωδίκων από τους κλασικούς κώδικες που χαρακτηρίζονται με μονές αγκύλες [45].

Το κύκλωμα στην εικόνα 25 δείχνει τη βασική δομή ενός σταθεροποιητικού κώδικα $[[n, k, d]]$. Ένας καταχωρητής k qubits δεδομένων $|\psi\rangle_D$, περιπλέκεται με $m = n - k$ qubits πλεονασμού $|0\rangle_R$ μέσω μιας πράξης κωδικοποίησης για να δημιουργηθεί ένα λογικό qubit $|\psi\rangle_L$. Σε αυτό το στάδιο, τα δεδομένα που προηγουμένως ήταν αποθηκευμένα αποκλειστικά στο $|\psi\rangle_D$ κατανέμονται στον διευρυμένο χώρο Hilbert. Τα σφάλματα μπορούν στη συνέχεια να ανιχνευθούν εκτελώντας m μετρήσεις σταθεροποιητή P_i όπως φαίνεται στα δεξιά της εικόνας 25. Στο κύκλωμα της εικόνας 25, κάθε ένας από τους σταθεροποιητές μετράται χρησιμοποιώντας την ίδια εξαγωγή συνδρόμου που

χρησιμοποιήθηκε για τον κώδικα δύο qubits στην εικόνα 23. Για κάθε σταθεροποιητή P_i , το κύκλωμα εξαγωγής συνδρόμου απεικονίζει τη λογική κατάσταση ως εξής

$$E|\psi\rangle_L|0\rangle_{A_i} \xrightarrow{\text{syndrome extraction}} \frac{1}{2}(\mathbb{1}^{\otimes n} + P_i)E|\psi\rangle_L|0\rangle_{A_i} + \frac{1}{2}(\mathbb{1}^{\otimes n} - P_i)E|\psi\rangle_L|1\rangle_{A_i}$$

Από τα παραπάνω, βλέπουμε ότι αν ο σταθεροποιητής P_i μεταθέτει με σφάλμα E τη μέτρηση του ancilla qubit A_i επιστρέφει '0'. Εάν ο σταθεροποιητής P_i αντι-μεταθέτει με σφάλμα E η μέτρηση επιστρέφει '1'. Το έργο της κατασκευής ενός καλού κώδικα περιλαμβάνει επομένως την εύρεση σταθεροποιητών που αντι-μετατίθενται με τα σφάλματα που πρέπει να ανιχνευθούν. Γενικά, δύο τελεστές Pauli θα μετατίθενται μεταξύ τους αν τέμνονται μη τετριμμένα σε ζυγό αριθμό qubits, και αντι-μετατίθενται αν όχι.

Τα αποτελέσματα των μετρήσεων των m σταθεροποιητών συνδυάζονται για να δώσουν ένα σύνδρομο m -bit. Για ένα καλά σχεδιασμένο κώδικα, το σύνδρομο μας επιτρέπει να συμπεράνουμε την καλύτερη λειτουργία ανάκτησης για την αποκατάσταση της λογικής κατάστασης στον χώρο κωδίκων [45].

Ιδιότητες των Stabilizers Κωδίκων

Οι σταθεροποιητές P_i ενός κώδικα $[[n, k, d]]$ πρέπει να ικανοποιούν τις ακόλουθες ιδιότητες:

1. Πρέπει να είναι στοιχεία της ομάδας Pauli, $P_i \in G_n$. Εδώ G_n είναι η ομάδα Pauli πάνω από n -qubits.
2. Πρέπει να σταθεροποιούν όλες τις λογικές καταστάσεις $|\psi\rangle_L$ του κώδικα. Αυτό σημαίνει ότι κάθε P_i έχει τη δράση $P_i|\psi\rangle_L = (+1)|\psi\rangle_L$ για όλες τις πιθανές τιμές του $|\psi\rangle_L$.
3. Όλοι οι σταθεροποιητές ενός κώδικα πρέπει να μετατίθενται μεταξύ τους, έτσι ώστε $[P_i, P_j] = 0$ για όλα τα i και j . Αυτή η ιδιότητα είναι απαραίτητη ώστε οι σταθεροποιητές να μπορούν να μετρηθούν ταυτόχρονα (ή με ένα τρόπο ανεξάρτητο από τη διάταξή τους), όπως απεικονίζεται στην εικόνα 25.

Στη γλώσσα της θεωρίας ομάδων, οι σταθεροποιητές P_i ενός κώδικα $[[n, k, d]]$ σχηματίζουν μια αβελιανή υποομάδα S της ομάδας Pauli. Οι απαιτήσεις για τους σταθεροποιητές που αναφέρονται παραπάνω ενσωματώνονται στον ορισμό του S ως εξής

$$S = \{P_i \in G_n \mid P_i|\psi\rangle_L = (+1)|\psi\rangle_L \ \forall \ |\psi\rangle_L \wedge [P_i, P_j] = 0 \ \forall \ (i, j)\}$$

Ένα σημαντικό σημείο που πρέπει να σημειωθεί είναι ότι οποιοδήποτε γινόμενο των σταθεροποιητών $P_i P_j$ θα είναι επίσης σταθεροποιητής καθώς $P_i P_j |\psi\rangle_L = P_i(+1)|\psi\rangle_L = (+1)|\psi\rangle_L$ [45]. Δεδομένου αυτού, είναι σημαντικό να διασφαλιστεί ότι το σύνολο $m = n - k$ σταθεροποιητών που πραγματικά μετριοούνται στη διαδικασία εξαγωγής συνδρόμου αποτελούν ένα ελάχιστο σύνολο της ομάδας σταθεροποιητών

$$S = \langle G_1, G_2, \dots, G_m \rangle$$

Σε ένα ελάχιστο σύνολο δεν είναι δυνατόν να προκύψει ένας σταθεροποιητής G_i ως γινόμενο οποιουδήποτε από τα άλλα στοιχεία G_j . Ως απλό παράδειγμα, θεωρήστε το ακόλουθο σύνολο σταθεροποιητών για τον κώδικα τριών qubits $S = \{Z_1 Z_2, Z_2 Z_3, Z_1 Z_3\}$. Αυτό δεν είναι ένα ελάχιστο σύνολο, καθώς είναι δυνατόν να προκύψει ο τρίτος σταθεροποιητής ως γινόμενο των δύο πρώτων. Ένα πιθανό ελάχιστο σύνολο είναι το $S = \langle Z_1 Z_2, Z_2 Z_3 \rangle$.

Οι λογικοί τελεστές των Stabilizers Κωδίκων

Ένας $[[n, k, d]]$ σταθεροποιητικός κώδικας έχει $2k$ λογικούς τελεστές Pauli που επιτρέπουν την τροποποίηση των λογικών καταστάσεων χωρίς να χρειάζεται να αποκωδικοποιηθούν και στη συνέχεια να επανακωδικοποιηθούν. Για κάθε λογικό qubit i , υπάρχει ένας λογικός τελεστής Pauli-X \underline{X}_i και ένας λογικός τελεστής Pauli-Z \underline{Z}_i . Κάθε ζεύγος λογικών τελεστών, \underline{X}_i και \underline{Z}_i , ικανοποιούν τα ακόλουθα ιδιότητες

1. Μετατίθενται με όλους τους σταθεροποιητές κώδικα στο S .
2. Αντι-μετατίθενται μεταξύ τους, έτσι ώστε $[\underline{X}_i, \underline{Z}_i] = \underline{X}_i \underline{Z}_i - \underline{Z}_i \underline{X}_i = 0$ για όλα τα qubits i .

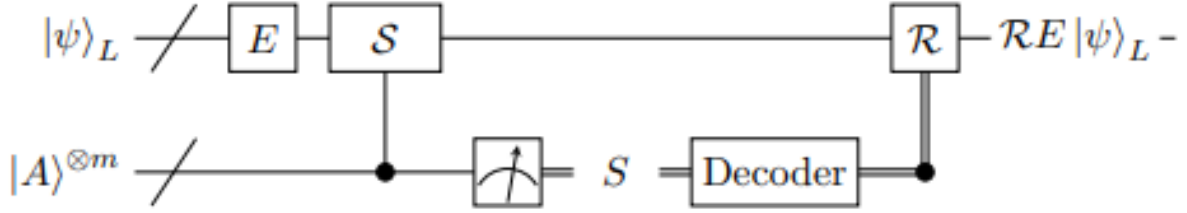
Κάθε γινόμενο ενός λογικού τελεστή \underline{L}_i και του σταθεροποιητή P_j θα είναι επίσης ένας λογικός τελεστής. Αυτό είναι σαφές από το γεγονός ότι ο σταθεροποιητής απεικονίζει τη λογική κατάσταση στον $(+1)$ ιδιοχώρο του. Οποιοδήποτε γινόμενο $\underline{L}_i P_j$ έχει επομένως την ακόλουθη δράση στη λογική κατάσταση $\underline{L}_i P_j |\psi\rangle_L = \underline{L}_i |\psi\rangle_L$ [45].

1.3.1.2 Surface Codes

Η πρόκληση στη δημιουργία κβαντικών κωδίκων διόρθωσης σφαλμάτων έγκειται στην εύρεση εναλλασσόμενων συνόλων σταθεροποιητών που επιτρέπουν την ανίχνευση σφαλμάτων χωρίς να διαταράσσεται η κωδικοποιημένη πληροφορία. Η εύρεση τέτοιων συνόλων δεν είναι τετριμμένη και απαιτούνται ειδικές κατασκευές κωδίκων για την εύρεση σταθεροποιητών με τις επιθυμητές ιδιότητες [22-23].

Η υλοποίηση ενός λογικού qubit με surface code αποτελεί βασικό στόχο για πολλά κβαντικά υπολογιστικά συστήματα [24-28]. Οι surface codes ανήκουν σε μια ευρύτερη οικογένεια των λεγόμενων τοπολογικών κωδίκων [29]. Η γενική αρχή σχεδιασμού πίσω από τους τοπολογικούς κώδικες είναι ότι ο κώδικας δημιουργείται με την "επικόλληση" επαναλαμβανόμενων στοιχείων. Θα δούμε ότι αυτή η σπονδυλωτή προσέγγιση εξασφαλίζει ότι ο surface code μπορεί να κλιμακώνεται άμεσα σε μέγεθος, ενώ παράλληλα διασφαλίζεται η αντιμεταθετικότητα των σταθεροποιητών. Όσον αφορά την πραγματική υλοποίηση, το πλεονέκτημα του surface code για τις τρέχουσες πλατφόρμες υλικού είναι ότι απαιτεί μόνο αλληλεπιδράσεις κοντινότερων γειτόνων. Αυτό είναι επωφελές καθώς πολλές κβαντικές υπολογιστικές πλατφόρμες δεν είναι σε θέση να εκτελέσουν υψηλής αξιοπιστίας αλληλεπιδράσεις μεγάλης εμβέλειας μεταξύ των qubits [45].

1.3.2 Πρωτόκολλο Διόρθωσης Σφάλματος



Εικόνα 26. Η γενική διαδικασία για την ενεργή ανάκτηση σε έναν κβαντικό κώδικα διόρθωσης σφαλμάτων. Το λογικό qubit $|\psi\rangle_L$ ενός $[[n, k, d]]$ κώδικα σταθεροποιητή υπόκειται σε μια διαδικασία σφάλματος E . Ένα σύνολο σταθεροποιητών S που δημιουργείτε μετράται στη λογική κατάσταση για να αποδώσει ένα m -bit σύνδρομο S . Αυτό το σύνδρομο επεξεργάζεται από έναν αποκωδικοποιητή για να καθορίσει την καλύτερη λειτουργία αποκατάστασης R για να επιστρέψει τη λογική κατάσταση στο χώρο κωδικοποίησης. Μετά την εφαρμογή της ανάκτησης, η έξοδος του κύκλου διόρθωσης σφάλματος είναι $RE|\psi\rangle_L$. Οι διπλές γραμμές υποδηλώνουν την κλασική ροή πληροφοριών.

Όπως συμβαίνει με τους κλασικούς κώδικες, η απόσταση ενός κβαντικού κώδικα σχετίζεται με τον αριθμό των διορθώσιμων σφαλμάτων t μέσω της σχέσης $d = 2t + 1$. Κατά συνέπεια, οι stabilizer κώδικες με $d \geq 3$ είναι κώδικες διόρθωσης σφαλμάτων για τους οποίους μπορούν να εφαρμοστούν πράξεις ενεργού ανάκτησης. Αντίθετα, τα πρωτόκολλα ανίχνευσης όπως ο κώδικας $[[4, 2, 2]]$ απαιτούν μια προσέγγιση repeat-until-success.

Η εικόνα 26 δείχνει τη γενική διαδικασία διόρθωσης σφαλμάτων για έναν ενιαίο κύκλο ενός $[[n, k, d \geq 3]]$ stabilizer κώδικα. Η κωδικοποιημένη λογική κατάσταση $|\psi\rangle_L$ υπόκειται σε μια διαδικασία σφάλματος που περιγράφεται από την E . Στη συνέχεια, οι σταθεροποιητές του κώδικα μετρούνται (με τη μέθοδο εξαγωγής συνδρόμου που απεικονίζεται στην εικόνα 25), και τα αποτελέσματα αντιγράφονται σε έναν καταχωρητή με $m = n - k$ ancilla qubits $|A\rangle_i^{\otimes m}$. Τα ancilla qubits διαβάζονται στη συνέχεια για να δώσουν ένα m -bit σύνδρομο S .

Το επόμενο βήμα στη διαδικασία διόρθωσης σφαλμάτων αναφέρεται ως αποκωδικοποίηση και περιλαμβάνει την επεξεργασία του συνδρόμου για τον προσδιορισμό της καλύτερης μοναδιαίας πράξης R για την επιστροφή της λογικής κατάστασης στο χώρο κωδικοποίησης. Μετά την εφαρμογή αυτής της πράξης αποκατάστασης, η έξοδος του κύκλου κώδικα δίνεται από την $RE|\psi\rangle_L \in C_{[[n,k,d]]}$. Το βήμα αποκωδικοποίησης είναι επιτυχές εάν η συνδυασμένη δράση της RE στην κατάσταση του κώδικα είναι η ακόλουθη

$$\mathcal{R}E|\psi\rangle_L = (+1)|\psi\rangle_L$$

Η ανωτέρω συνθήκη ικανοποιείται τετριμμένα εάν $R = E^\dagger$ έτσι ώστε $RE = I$. Ωστόσο, αυτό δεν είναι η μόνη λύση. Η εξίσωση ικανοποιείται επίσης για οποιοδήποτε γινόμενο RE που είναι στοιχείο του σταθεροποιητή κώδικα έτσι ώστε $RE = P \in S$. Το γεγονός ότι η λύση για το R δεν είναι μοναδική σημαίνει ότι είναι δυνατόν να σχεδιαστούν εκφυλισμένοι κβαντικοί κώδικες για τους οποίους πολλαπλά σφάλματα αντιστοιχούν στο ίδιο σύνδρομο.

Το βήμα αποκωδικοποίησης αποτυγχάνει εάν η λειτουργία ανάκτησης χαρτογραφεί την κατάσταση του κώδικα ως εξής

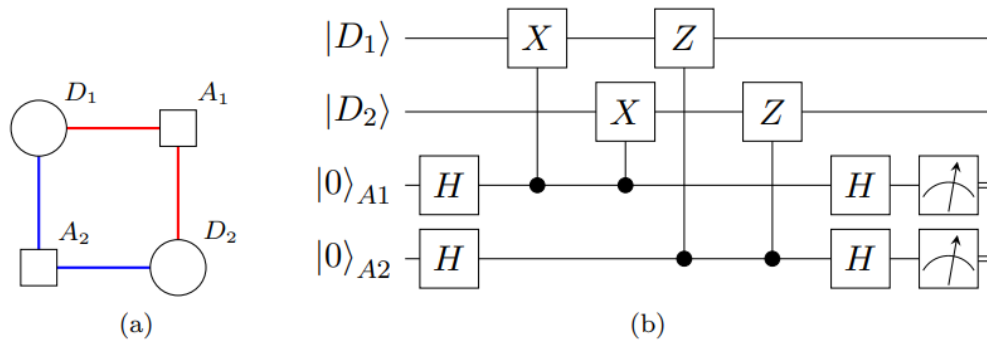
$$\mathcal{R}E|\psi\rangle_L = L|\psi\rangle_L$$

όπου L είναι ένας λογικός τελεστής του κώδικα. Σε αυτή την περίπτωση, η κατάσταση επιστρέφεται στον κωδικό χώρο, αλλά η πράξη ανάκτησης οδηγεί σε αλλαγή της κωδικοποιημένης πληροφορίας [45].

2. Surface Κώδικες

Σε αυτό το κεφάλαιο θα δούμε σε βάθος τον τρόπο λειτουργίας των surface κωδίκων και θα γνωρίσουμε τα μέρη που τους αποτελούν, τα data και τα ancilla qubits καθώς και τις σχέσεις μεταξύ τους, δηλαδή τους τελεστές που τα συνδέουν. Αρχικά θα δούμε τον κώδικα $[[2,1,1]]$ που είναι ο απλούστερος surface κώδικας αλλά όλοι οι υπόλοιποι κώδικες αποτελούν συνδυασμούς αυτού. Στη συνέχεια θα γνωρίσουμε τον $[[5,1,2]]$ αλλά και τον $[[13,1,3]]$ που είναι ο μικρότερος surface κώδικας που μπορεί να αναγνωρίσει και να διορθώσει σφάλματα.

2.1 O surface code four-cycle $[[2, 1, 1]]$



Εικόνα 24. The surface code four-cycle $[[2, 1, 1]]$. (a) Εικονογραφική αναπαράσταση. Τα qubits κώδικα, D_1 και D_2 , αναπαρίστανται από τους κυκλικούς κόμβους. Τα ancilla qubits, A_1 και A_2 , αναπαρίστανται από τους τετράγωνους κόμβους. Οι κόκκινες και μπλε ακμές απεικονίζουν τους controlled-X και controlled-Z τελεστές που ελέγχονται στα ancilla qubits και δρουν στα qubits κώδικα. (b) Ένας ισοδύναμος surface code four-cycle με συμβολισμό κυκλώματος.

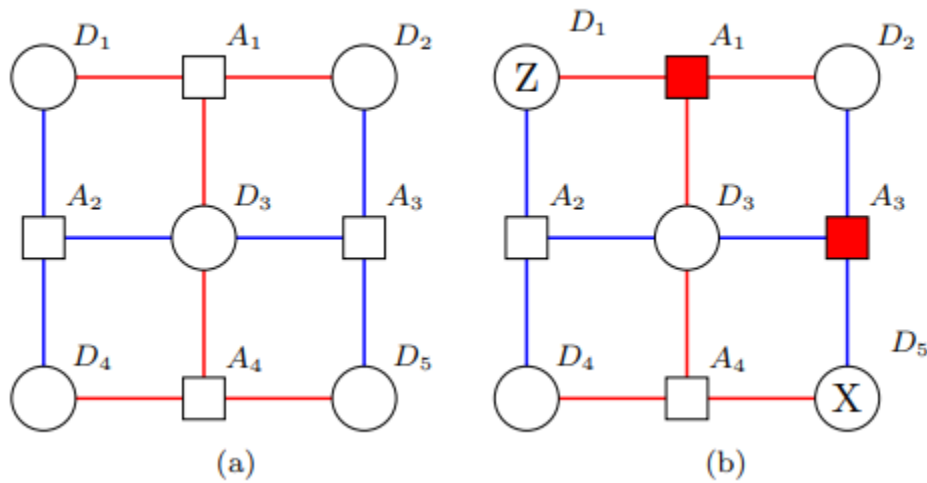
Για τους surface codes είναι ωφέλιμο να υιοθετηθεί μια εικονογραφική αναπαράσταση των qubits του κώδικα στη θέση του συμβολισμού κυκλωμάτων. Η Εικόνα 24a δείχνει έναν surface code four-cycle, το θεμελιώδες δομικό στοιχείο γύρω από το οποίο κατασκευάζονται οι surface codes. Οι κύκλοι στην εικόνα 24a αναπαριστούν τα qubits του κώδικα και τα τετράγωνα τα ancilla qubits. Οι κόκκινες ακμές αντιπροσωπεύουν τις controlled-X πύλες, καθεμία από τις οποίες ελέγχεται με ένα qubit A (ancilla) και δρα σε ένα qubit δεδομένων D. Ομοίως, οι μπλε ακμές αναπαριστούν controlled-Z τελεστές, καθεμία από τις οποίες ελέγχεται από ένα ancilla qubit και δρα σε ένα qubit δεδομένων. Αυτοί οι ελεγχόμενοι τελεστές είναι οι πύλες με τις οποίες μετρώνται οι σταθεροποιητές του four-cycle. Το ancilla qubit A_1 συνδέεται με τα qubits δεδομένων D_1 και D_2 μέσω κόκκινων ακμών και επομένως μετρά τον σταθεροποιητή $X_{D_1}X_{D_2}$. Ομοίως, το ancilla qubit

A2 μετρά τον σταθεροποιητή $Z_{D1}Z_{D2}$. Για τη σύγκριση, ο four-cycle παρουσιάζεται σε συμβολισμό κβαντικού κυκλώματος στην εικόνα 23b.

Οι σταθεροποιητές του four-cycle, $X_{D1}X_{D2}$ και $Z_{D1}Z_{D2}$, μετατίθενται μεταξύ τους καθώς τέμνονται μη τετριμμένα σε ζυγό αριθμό qubits κώδικα. Αυτό μπορεί εύκολα να επαληθευτεί με επιθεώρηση της εικόνας 24b.

Ο four-cycle έχει δύο qubits κώδικα $n = 2$ και δύο σταθεροποιητές $m = 2$, ο αριθμός των λογικών qubits που κωδικοποιεί είναι ίσος με $k = n - m = 0$. Ως αποτέλεσμα, ο four-cycle δεν είναι από μόνος του ένας χρήσιμος κώδικας. Ωστόσο, θα δούμε ότι λειτουργικοί κώδικες ανίχνευσης και διόρθωσης μπορούν να σχηματιστούν με την τοποθέτηση πολλαπλών four-cycle μαζί για να σχηματίσουν τετραγωνικά πλέγματα.

2.2 Ο $[[5, 1, 2]]$ surface code



Εικόνα 25. (a) Ο surface code $[[5, 1, 2]]$ που σχηματίζεται από την τοποθέτηση τεσσάρων four-cycles σε ένα τετραγωνικό πλέγμα. (b) Παραδείγματα σφάλματος στον surface code $[[5, 1, 2]]$. Το σφάλμα Z_{D1} στο qubit $D1$ αντι-μετατίθεται με τον σταθεροποιητή που μετράται με το ancilla qubit $A1$. Το qubit $A1$ είναι χρωματισμένο με κόκκινο χρώμα για να υποδείξει ότι θα μετρηθεί ως "1". Ομοίως, το X_{D5} σφάλμα στο qubit $D5$ ανιχνεύεται από τον σταθεροποιητή που μετράται από το qubit $A3$.

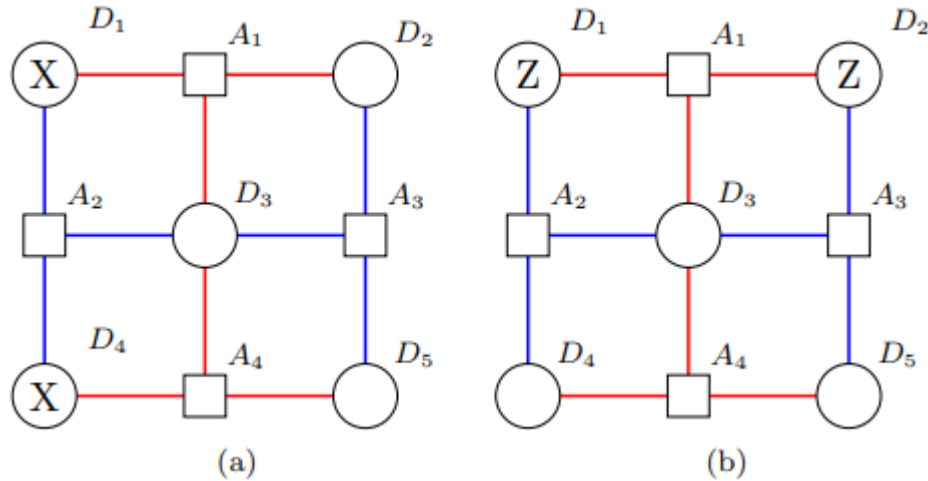
Η Εικόνα 25a δείχνει τον surface code πέντε qubit που σχηματίζεται από την τοποθέτηση τεσσάρων four-cycles σε ένα τετράγωνο πλέγμα [30]. Επιθεωρώντας με ποια qubits δεδομένων συνδέεται κάθε ancilla qubit, οι σταθεροποιητές του κώδικα στην Εικόνα 25 μπορούν να διαβαστούν για να δώσουν

$$S_{[[5,1,2]]} = \langle X_{D1}X_{D2}X_{D3}, Z_{D1}Z_{D3}Z_{D4}, Z_{D2}Z_{D3}Z_{D5}, X_{D3}X_{D4}X_{D5} \rangle$$

Ο πρώτος όρος στα παραπάνω είναι ο σταθεροποιητής που μετράται από το ancilla qubit A1, ο δεύτερος από το ancilla qubit A2 κ.λπ. Οι σταθεροποιητές στο $S_{[[5,1,2]]}$ μετατίθενται μεταξύ τους, καθώς οι σταθεροποιητές τύπου X και Z τέμνονται σε ζυγό αριθμό qubits κώδικα. Από την Εικόνα 25, βλέπουμε ότι υπάρχουν πέντε qubits κώδικα και τέσσερις σταθεροποιητές που σημαίνει ότι ο κώδικας κωδικοποιεί ένα λογικό qubit.

Στην εικόνα 25b παρουσιάζονται δύο παραδείγματα σφαλμάτων στον surface code και ο τρόπος ανίχνευσής τους. Το Z_{D1} -σφάλμα στο qubit D1 αντι-μετατίθεται με τον $X_{D1}X_{D2}X_{D3}$ σταθεροποιητή, και επομένως ενεργοποιεί ένα σύνδρομο '1'. Αυτό απεικονίζεται με κόκκινο χρώμα στο ancilla qubit A1. Ομοίως, το X_{D5} σφάλμα αντι-μετατίθεται με τον $Z_{D2}Z_{D3}Z_{D5}$ σταθεροποιητή και προκαλεί μέτρηση συνδρόμου "1" στο ancilla qubit A3.

Από την εικόνα 24 φαίνεται ότι ο surface code είναι ένα τετραγωνικό πλέγμα με δύο τύπους ορίων. Τα κατακόρυφα όρια σχηματίζονται από μπλε ακμές που αντιπροσωπεύουν μετρήσεις σταθεροποιητών τύπου Z. Τα οριζόντια όρια αποτελούνται από κόκκινες ακμές που αντιπροσωπεύουν μετρήσεις σταθεροποιητών τύπου X. Οι λογικοί τελεστές του surface code μπορούν να οριστούν ως αλυσίδες τελεστών Pauli κατά μήκος των ακμών αυτών των ορίων.



Εικόνα 26. Οι λογικοί τελεστές ενός surface code μπορούν να οριστούν ως αλυσίδες τελεστών Pauli που δρουν κατά μήκος των ορίων του πλέγματος. (a) Ο λογικός τελεστής Pauli-X $X = X_{D1}X_{D4}$ ενεργεί κατά μήκος του ορίου κατά μήκος του οποίου οι σταθεροποιητές τύπου Z είναι μετρημένοι. (b) Ο λογικός τελεστής Pauli-Z $Z = Z_{D1}Z_{D2}$ δρα κατά μήκος του ορίου κατά μήκος του οποίου μετρώνται σταθεροποιητές τύπου X. Οι δύο λογικοί τελεστές αντιμετατίθενται μεταξύ τους.

Η Εικόνα 26a δείχνει μια αλυσίδα Pauli $X_{D1}X_{D4}$ δύο qubit κατά μήκος του αριστερού ορίου του surface code των πέντε qubit. Ο τελεστής $X_{D1}X_{D4}$ μετατίθεται με όλους τους

Για παράδειγμα, ο surface code με απόσταση τρία $[[13, 1, 3]]$ απεικονίζεται στην Εικόνα 27. Ο λογικός τελεστής Pauli- X ενός surface code μπορεί να οριστεί ως μια αλυσίδα τελεστών X -Pauli κατά μήκος του ορίου του κώδικα κατά μήκος του οποίου εφαρμόζονται οι Z -σταθεροποιητές (το μπλε όριο στην εικονογραφική μας αναπαράσταση). Ομοίως, ο λογικός τελεστής Z -Pauli μπορεί να οριστεί ως μια αλυσίδα τελεστών Z κατά μήκος του γειτονικού ορίου κατά μήκος του οποίου εφαρμόζονται οι σταθεροποιητές τύπου X (οι κόκκινες ακμές στην εικονογραφική μας αναπαράσταση). Για τον κώδικα απόστασης τρία, μια επιλογή λογικών τελεστών θα ήταν $X = X_{D1}X_{D6}X_{D11}$ και $Z = Z_{D1}Z_{D2}Z_{D3}$. Ο κώδικας $[[13, 1, 3]]$ είναι ο μικρότερος surface code ικανός να ανιχνεύει και να διορθώνει σφάλματα.

3. Μοντελοποίηση Φυσικού Συστήματος

Σε αυτή την ενότητα θα περιγράψουμε με απλοποιημένο τρόπο ένα φυσικό σύστημα των εννέα qubits υλοποιημένο μέσα σε διατάξεις ημιαγωγικών υλικών. Συγκεκριμένα τα qubits εκπροσωπούνται από κβαντικές τελείες (quantum dots) που μπορούμε σήμερα να δημιουργήσουμε με διάφορες τεχνικές. Η κατηγορία των αυτοδημιούργητων κβαντικών τελειών θα είναι ο βασικός προσανατολισμός μας. Η διάταξη των qubits θα είναι σε ένα 2D επίπεδο όπως είναι ένα πλέγμα (lattice), ώστε να μπορέσουμε να εφαρμόσουμε πάνω σε αυτό τυχόν κώδικες διόρθωσης σφάλματος όπως ο [5,1,2] που μελετήσαμε σε προηγούμενο κεφάλαιο.

3.1 Κβαντικές Τελείες: Qubit Βασισμένο σε Στροφορμή

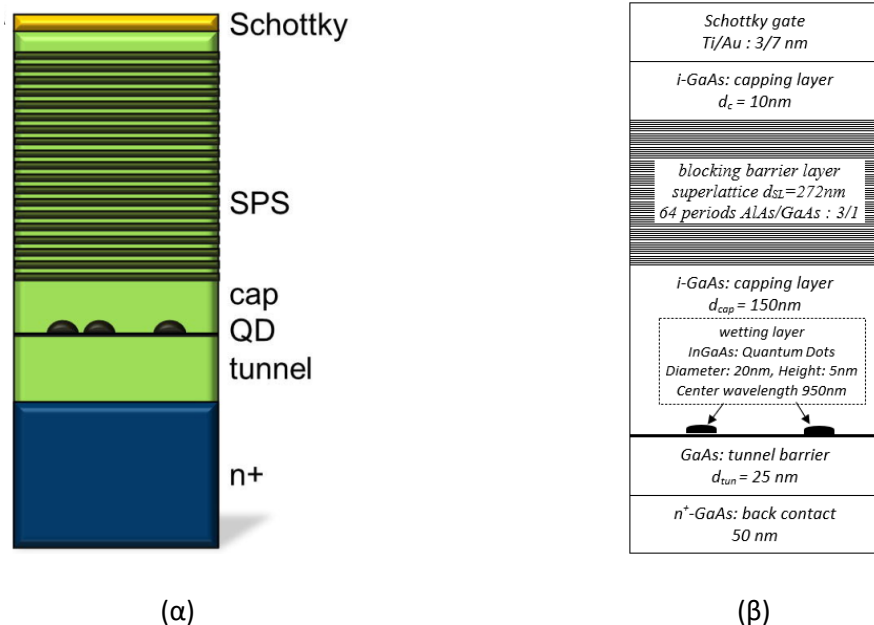
Όταν μια αυτοδημιούργητη νανοδομή κατευθύνεται για να δεσμεύσει ένα ή περισσότερα ηλεκτρόνια (ή οπές) μέσα σε υλικά στερεάς κατάστασης, όπως οι ημιαγωγοί, τότε σχηματίζεται μια κβαντική τελεία (Quantum Dot ή QD). Η οργάνωση των QDs αρκετά κοντά στο χώρο ώστε να επιτευχθεί η επικάλυψη των κυματοσυναρτήσεων είναι απαραίτητη για ορισμένες εφαρμογές, όπως η υλοποίηση της κβαντικής μνήμης. Με βάση τις αναδυόμενες τεχνικές κατασκευής [48-51], η σύζευξη αυτών των QD είναι δυνατόν να πραγματοποιηθεί σε ένα σύστημα ετεροδομημένων ημιαγωγών. Οι βαθμοί spin των ηλεκτρονίων (ή/και των οπών) μπορούν στη συνέχεια να εξεταστούν ως ένα κβαντικό σύστημα δύο καταστάσεων, το qubit. Σε ένα μαγνητικό πεδίο, τα ενεργειακά επίπεδα του spin-up και του spin-down διαχωρίζονται από την ενέργεια του φαινομένου Zeeman με μη εκφυλιστικό τρόπο, διαχωρίζοντας το μοντέλο qubit spin- $\frac{1}{2}$ από άλλα qubit με spin, όπως τα μοντέλα singlet-triplet ή τα μοντέλα μόνο ανταλλαγής. Σε αυτή την εργασία ένα qubit θεωρείται ότι είναι ένα μονό περιορισμένο ηλεκτρόνιο spin- $\frac{1}{2}$ σε μια αυτοδημιούργητη τελεία.

Το πανταχού παρόν φυσικό φαινόμενο του κβαντικού θορύβου διαταράσσει την ιδανική έννοια ενός καθαρού qubit με δύο καταστάσεις spin. Το μέρος της δυναμικής που επιφέρει τη κατάρρευση του spin μπορεί να αποδοθεί στους μηχανισμούς spin-εκφυλισμού (relaxation) και αποσυντονισμού (decoherence), οι οποίοι περιορίζουν τη διάρκεια ζωής του qubit σε T_1 και T_2 , αντίστοιχα. Σε πολλά συστήματα, ο εκφυλισμός (relaxation) είναι ο κορυφαίος μηχανισμός, ο οποίος αναπόφευκτα συμβάλλει στην παραποίηση της φάσης (dephasing) του qubit, η οποία έχει πολύ μικρότερο χρόνο ζωής T_2^* και αποτελεί σοβαρό πρόβλημα καθότι καθορίζει και το συνολικό χρόνο ζωής του qubit. Και οι δύο μηχανισμοί σχετίζονται με διαφορετικές διεργασίες.

Διάφορα πειράματα σε αυτοδημιούργητες κβαντικές τελείες InGaAs έθεσαν τις βάσεις για περαιτέρω έρευνα στον κβαντικό υπολογισμό. Ορισμένα ευρήματα-σταθμοί ενθαρρύνουν την ικανοποίηση των κριτηρίων του DiVincenzo [52]. Μέχρι στιγμής, ο χρόνος ζωής του spin T_1 είναι μεγαλύτερος από 20 ms [53], ενώ ο χρόνος dephasing T_2 εκτιμάται σε περίπου 3 μ s [54]. Ο χρόνος απόσβεσης T_2^* έχει φτάσει τα 0,1 μ s [55]. Ο χρόνος λειτουργίας των πυλών του Pauli Z και X μπορεί να επιτύχει τις εξαιρετικά χαμηλές διάρκειες των 8,1 ps [56] και 4 ps [56,57], αντίστοιχα. Η πύλη δύο qubit, όπως η πύλη ανταλλαγής, δεν διαρκεί περισσότερο από 17 ps [58]. Ακόμα, η αρχικοποίηση και η ανάγνωση είναι εφικτές επιτυγχάνοντας πιστότητες περίπου 99% και 96% ή υψηλότερες, αντίστοιχα. Ωστόσο, η επεκτασιμότητα συνεχίζει να είναι ένα σοβαρό πρόβλημα για σχεδόν δύο δεκαετίες, αν και οι προσπάθειες με υλικά υποδοχής της ομάδας IV, όπως το Si ή το Ge, τα οποία εξαλείφουν τα τυχαία πυρηνικά spin. Οι κβαντικές τελείες της ομάδας III-V, όπως το GaAs, έχουν πολύ καλύτερες οπτικές ιδιότητες λόγω του έμμεσου χάσματος ζώνης τους. Επιπλέον, ορισμένα παραδείγματα εφαρμογών δυναμικών συστημάτων αποσύνδεσης σε συστήματα qubit GaAs έδειξαν ότι μειώνουν τον θόρυβο των περιβαλλόντων πυρηνικών spin, γεγονός που αποτελεί πλεονέκτημα έναντι των αντίστοιχων της ομάδας IV. Πιο συγκεκριμένα, αυτές οι τεχνικές αποσύνδεσης χρησιμοποιούν πολύπλοκες ακολουθίες που μοιάζουν με ηχώ για να αποφύγουν τις περιβάλλουσες διακυμάνσεις.

3.2 Αρχιτεκτονική Ημιαγώγιμης Νανοδομής

Σε αυτή την εργασία εξετάζεται μια κβαντική διάταξη N αυτοδημιούργητων QDs InGaAs χρησιμοποιώντας τη δομή της διόδου Schottky [59,60]. Οι παράμετροι αυτής της δομής περιγράφονται λεπτομερώς στην Εικόνα 28α μαζί με το υιοθετημένο πάχος κάθε στρώματος. Όλα τα QDs που αναπτύχθηκαν στο πολύ λεπτό στρώμα μεταξύ των Cap και Tunnel στρωμάτων διαχωρίζονται από μια επαφή n^+ – *back* από ένα φράγμα σήραγγας GaAs πάχους d_{tun} , ενώ ακριβώς πάνω από τις κουκίδες (dots) εναποτίθεται ένα στρώμα κάλυψης GaAs πάχους d_{cap} . Το στρώμα κάλυψης ακολουθεί ένα υπερπλέγμα φραγμού AlAs/GaAs πάχους d_{sps} και ακολουθεί ένα άλλο στρώμα κάλυψης πάχους d_{c} . Στην επιφάνεια εναποτίθεται ένα ημιδιαφανές ηλεκτρόδιο πύλης για τη διόδο Schottky. Μια αρνητική τάση V_g εφαρμόζεται μεταξύ της πύλης Schottky και της ωμικής επαφής στο κάτω μέρος της δομής, ώστε να ρυθμίζεται κατάλληλα το ηλεκτροστατικό πεδίο εσωτερικά στη δομή και ειδικότερα μέσα στις τελείες.

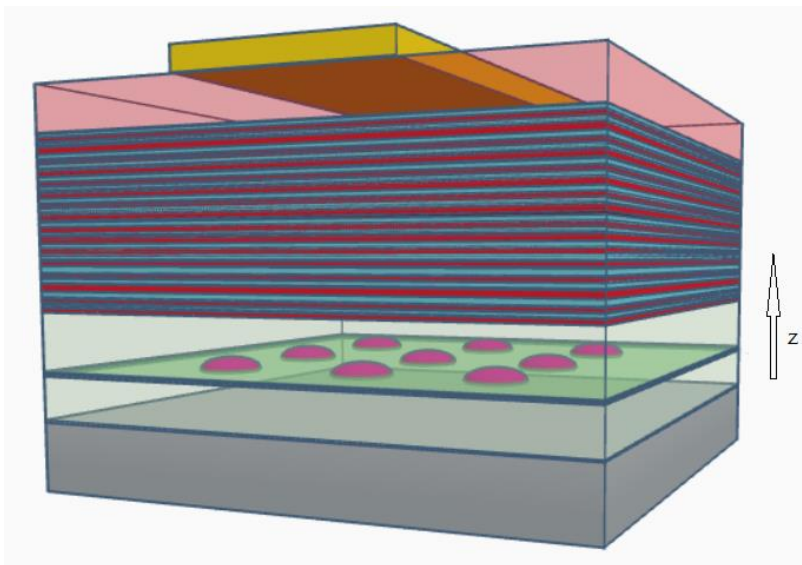


Εικόνα 28. Διάταξη N αυτοδημιούργητων QDs InGaAs χρησιμοποιώντας τη δομή της διόδου Schottky (α) Γραφική αναπαράσταση μιας νανοδομής Schottky. (β). Γραφική αναπαράσταση μιας νανοδομής Schottky με ειδικές λεπτομέρειες πάνω στα υλικά δόμησης του συστήματος.

Η θέση των αυτοδημιούργητων QDs υποτίθεται ότι είναι συμμετρική με ακρίβεια σε ένα πλέγμα $N \times N$ μέσα σε μια σταθερά πλέγματος D . Οι τρέχουσες τεχνικές κατασκευής μπορεί να μην είναι ακόμη σε θέση να επιτύχουν χωρική και φασματική ακρίβεια, αλλά οι σύγχρονες τεχνικές φαίνεται να είναι κοντά στην επίλυση αυτού του ζητήματος.

Είναι γνωστό ότι η πειραματική διαδικασία του φθορισμού συντονισμού μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την εκτίμηση του θορύβου εντός ενός QD [61]. Η λεπτή φύση ενός QD μπορεί να χρησιμοποιηθεί από μόνη της ως νανοσυσκευή αισθητήρα για την ποσοτικοποίηση των αλληλεπιδράσεων θορύβου. Ένα σύστημα συνεκτικού λέιζερ με ανιχνευτή φωτονίων μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τη διεξαγωγή ενός τέτοιου πειράματος μετρώντας τα εκπεμπόμενα φωτόνια που προκαλούνται από το εφαρμοζόμενο αποσυντονισμένο λέιζερ. Οι ενέργειες των φωτονίων του γραμμικά πολωμένου λέιζερ πρέπει να είναι πολύ κάτω από το ενεργειακό χάσμα του ημιαγωγού ξενιστή αποφεύγοντας την πρόκληση επιπλέον θορύβου. Σε πολλές περιπτώσεις, η κατάσταση χαμηλού θορύβου μπορεί να επιτευχθεί με προσωρινό φωτισμό με ένα δεύτερο μη συντονισμένο φως λέιζερ, σε πολύ χαμηλές συχνότητες. Μετά από μερικές ώρες, ο θόρυβος μειώνεται σταδιακά. Η μη συντονισμένη οπτική διέγερση στοχεύει ένα μεμονωμένο InGaAs QD στη μονοστοιβάδα (στρώμα διαβροχής) και δημιουργείται ένα ζεύγος ηλεκτρονίων-οπών. Σχεδόν αμέσως, τα ηλεκτρόνια χαλαρώνουν γρήγορα προς την οπίσθια επαφή και οι οπές καταλήγουν στη διεπιφάνεια στρώματος

κάλυψης/φραγμάτων φραγμού. Η υπόθεση ότι οι οπές παγιδεύονται στη διεπιφάνεια υποστηρίζεται σθεναρά από τους Houel et al. [62] και δικαιολογεί τα εμφανιζόμενα φορτία χώρου των οπών όπως εκτιμάται. Ειδικότερα, οι παγιδευμένες οπές θεωρούνται ως κέντρα εντοπισμού φορτίου που προκαλούν τοπικά ηλεκτρικά πεδία τα οποία διαχέονται με το χρόνο.



Εικόνα 29. Schottky Diode: Σε αυτή τη συσκευή φωλιάζουν οι 9 αυτοδημιούργητες κβαντικές τελείες σε διάταξη πλέγματος: (α) Περιγραφή της δομής της συσκευής διόδου σε αντιστοίχιση με (β) μια 3D αναπαράσταση της συσκευής.

Κάθε μία από τις τέσσερις κουκίδες InGaAs είναι ενσωματωμένη στο πολύ υψηλού ποσοστού αμιγές στρώμα GaAs που έχει ένα στρώμα αποκλεισμού/εμπόδιο υπερπλέγματος AlAs και μια πύλη διόδου Schottky στην κορυφή, όπως φαίνεται στην Εικόνα 29. Σε αυτό το σύστημα, η παγίδευση και η αποπαγίδευση ηλεκτρονίων ελέγχεται από την τάση της πύλης και τη διέγερση με μέσα οπτικής. Υποθέτουμε τις κύριες αλληλεπιδράσεις που διαλύουν τη συνεκτική κατάσταση ενός μονήρους περιορισμένου ηλεκτρονίου-spin και υπολογίζουμε το πλάτος θορύβου στη θέση ενός μεμονωμένου QD σύμφωνα με τη δυναμική που αναπτύσσεται μεταξύ των εννέα QD. Η ισχύς του θορύβου μπορεί να αποδοθεί σε μη επιθυμητούς μηχανισμούς που έχουν ως αποτέλεσμα την ενίσχυση των τοπικών ηλεκτρικών και μαγνητικών πεδίων. Ο συνολικός θόρυβος ηλεκτροστατικού και μαγνητικού πεδίου μπορούν να υπολογιστούν αριθμητικά χρησιμοποιώντας μια τεχνική προσέγγισης όπως των Kuhlmann et al. [63], η οποία επανεξετάζεται με επιτυχία από μια φασματοσκοπική πειραματική προσέγγιση που βασίζεται στον φθορισμό συντονισμού. Ωστόσο αυτή η μέθοδος θα ήταν αρκετά απαιτητική και δύσκολο να εργασμοστεί σε σύστημα περισσότερων QDs. Συνεπώς στην παρούσα εργασία θα χρησιμοποιηθεί μια πιο απλοποιημένη τεχνική προσέγγισης

θεωρώντας το μοντέλο θορύβου Pauli ώστε να μελετήσουμε τα όρια ανοχής θορύβου για δύο συστήματα διόρθωσης σφάλματος των Qubits. Η μέθοδος Monte Carlo θα εφαρμοστεί στην προσομοίωση που περιγράφεται σε επόμενο κεφάλαιο.

3.3 Μοντελοποίηση Κβαντικού Σφάλματος

Σε ρεαλιστικές υλοποιήσεις, τα φυσικά qubits αλληλεπιδρούν με μια ποικιλία περιβαλλοντικών βαθμών ελευθερίας. Για παράδειγμα, συχνά δεν μπορεί κανείς να αμελήσει την αλληλεπίδραση των qubits με μποζονικά περιβάλλοντα. Αυτά μπορεί να προέρχονται άμεσα από φωτόνια και ηλεκτρομαγνητικές διακυμάνσεις που παράγονται από ηλεκτρονικά εξαρτήματα, ή έμμεσα από αλληλεπιδράσεις με προσμίξεις spin ή φορτίου. Είναι επίσης πιθανό ότι ατέλειες στο σχεδιασμό των qubit προκαλούν λανθασμένη σύζευξη μεταξύ καταστάσεων ενός κβαντικού συστήματος.

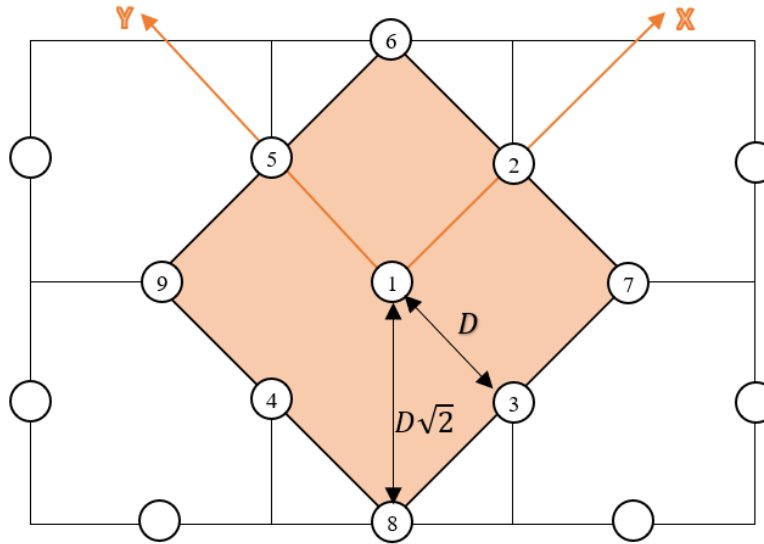
Τα qubits είναι δυνατόν να συζευχθούν με ένα περιβάλλοντα χώρο από spin (ή ψευδο-spin). Για αυτές τις περιπτώσεις και άλλες, το φαινόμενο της χρονικής εξέλιξης υπό την επίδραση του περιβάλλοντος μπορεί να αναδιατυπωθεί ως μια αποτελεσματική δράση για το φυσικό qubits με την ολοκλήρωση των περιβαλλοντικών βαθμών της ελευθερίας. Έτσι, στο τέλος ενός κύκλου QEC, ένας αποτελεσματικός τελεστής εξέλιξης μπορεί να έχει τη μορφή:

$$U_{\text{eff}} = \langle e | U(\Delta) | e \rangle = e^{-H_{\text{eff}}}$$

Ο τελεστής U_{eff} εκφράζει αυτή την επίδραση που δέχθηκε το σύστημα των φυσικών qubits για ένα συγκεκριμένο χρονικό διάστημα Δ . Η ακριβής μορφή του H_{eff} εξαρτάται από το συγκεκριμένο τύπο της αλληλεπίδρασης και τη φύση των φυσικών qubits και του περιβάλλοντος. Εδώ, εξετάζουμε την περίπτωση-έκφραση:

$$H_{\text{eff}}(\{\sigma_i^x\}) = \sum_i h_i \sigma_i^x + \sum_{i \neq j} J_{i,j} \sigma_i^x \sigma_j^x$$

Οι παράμετροι h_i και $J_{i,j}$ ενσωματώνουν τα περιβαλλοντικά πεδία και τις αλληλεπιδράσεις qubit-qubit, αντίστοιχα, και μπορούν να είναι, είτε πραγματικοί, είτε φανταστικοί αριθμοί. Τα μεγέθη τους ορίζουν την ισχύ της σύζευξης μεταξύ των φυσικών qubits και του περιβάλλοντος. Αυτή η μορφή είναι ακριβής για qubits συζευγμένα γραμμικά με ελεύθερα μποζονικά “λουτρά” (περιβάλλοντα) και τοπικά πεδία.



Εικόνα 30. Πλέγμα των 9 qubits που μπορεί να χρησιμοποιηθεί σε κάποιο κώδικα Surface. Οι αποστάσεις είναι σταθερές και έχουν σημαντικό ρόλο ως προς την αλληλεπίδραση που σχηματίζεται ανα-μεταξύ τους.

Η εκτίμηση την έντασης της αλληλεπίδρασης επίδρασης που υφίσταται πχ το 1ο qubit μέσα στο πλέγμα από το γύρω περιβάλλον του είναι σχετικά δύσκολο να εκτιμηθεί με ακρίβεια. Ένας τρόπος προσομοίωσης θα ήταν περισσότερο εφικτός και εφαρμόσιμος για την προσέγγιση αυτών των εκτιμήσεων. Η χρησιμοποίηση λοιπόν ενός απλού μοντέλου Pauli θα ήταν λιγότερο άστοχη από κάποιο αυστηρό υπολογιστικό μοντέλο.

Στο μοντέλο αυτό οι ανεπιθύμητες αλληλεπιδράσεις που συνοψίζονται στον τελεστή U_{eff} μεταφράζονται σε επιδράσεις των τελεστών Pauli X και Y. Αυτοί οι δύο τελεστές μπορεί να εφαρμόζονται με τυχαίο τρόπο σε κάθε nanosecond πάνω σε ένα qubit στον αντίστοιχο άξονα ενός 3D χώρου. Ο τρόπος πραγματοποίησης της προσομοίωσης περιγράφεται με περισσότερες λεπτομέρειες στην Ενότητα 5.

4. Στατιστικά εργαλεία

Στο κεφάλαιο αυτό θα δούμε τις μεθόδους στατιστικής ανάλυσης που χρησιμοποιήθηκαν στην παρούσα εργασία για την διεξαγωγή χρήσιμων συμπερασμάτων. Τα εργαλεία αυτά είναι οι καμπύλες επιβίωσης και η παλινδρόμηση Cox. Περιγράφονται αναλυτικά οι στόχοι που εξυπηρετεί κάθε εργαλείο από αυτά, καθώς και ο γενικός σκοπός του καθενός και σε τι συμπεράσματα μας βοηθάει να καταλήξουμε. Δίνονται επίσης και κάποιες πληροφορίες για τον τρόπο που αυτά διαχειρίζονται.

4.1 Survival Curves

Στην καθημερινή μας ζωή, συναντάμε πολλά παραδείγματα time-to-event. Τι σημαίνει όμως time-to-event; Είναι μια μεταβλητή διάρκειας πορείας για κάθε περίπτωση/υποκείμενο ενδιαφέροντος που έχει αρχή και τέλος οπουδήποτε κατά μήκος του χρονοδιαγράμματος της πλήρους μελέτης. Μερικά συνηθισμένα παραδείγματα είναι η κλινική μελέτη για ένα φάρμακο, η επισκευή ενός μηχανήματος πριν από τον παροπλισμό του κ.λπ. Παρατηρούμε ότι υπάρχει κάτι κοινό μεταξύ των παραδειγμάτων, η μελέτη της επιβίωσης.

Ένας αποτελεσματικός τρόπος για την εκτίμηση της survival συνάρτησης είναι η χρήση της ανάλυσης KM. Η καμπύλη Kaplan Meier είναι ένας εκτιμητής που χρησιμοποιείται για την εκτίμηση της survival συνάρτησης. Η καμπύλη Kaplan Meier είναι η οπτική αναπαράσταση αυτής της συνάρτησης που δείχνει την πιθανότητα ενός συμβάντος σε ένα αντίστοιχο χρονικό διάστημα. Η καμπύλη θα πρέπει να προσεγγίζει την πραγματική survival συνάρτηση για τον υπό εξέταση πληθυσμό, εφόσον το μέγεθος του δείγματος είναι αρκετά μεγάλο [32].

Survival Ανάλυση

Η ανάλυση survival είναι μια στατιστική διαδικασία για την ανάλυση δεδομένων στην οποία η μεταβλητή αποτελέσματος που ενδιαφέρει είναι ο χρόνος μέχρι την εμφάνιση ενός γεγονότος. Ο χρόνος μπορεί να είναι οποιοσδήποτε ημερολογιακός χρόνος, όπως έτη, μήνες, εβδομάδες ή ημέρες από την έναρξη της παρακολούθησης μέχρι την εμφάνιση ενός συμβάντος. Με τον όρο συμβάν εννοούμε την ανάρρωση, τον θάνατο, τη βλάβη ενός μηχανήματος ή οποιαδήποτε καθορισμένη εμπειρία ενδιαφέροντος που μπορεί να συμβεί στην περίπτωση/υποκείμενο.

Στόχοι της Survival Ανάλυσης

Η survival ανάλυση έχει τρεις στόχους:

1. να εκτιμήσει και να ερμηνεύσει τον επιζώντα ή/και τις συναρτήσεις κινδύνου από δεδομένα επιβίωσης
2. να συγκρίνει τη συνάρτησης επιβίωσης ή/και τη συνάρτηση κινδύνου
3. να αξιολογήσει τη σχέση των επεξηγηματικών μεταβλητών με το χρόνο επιβίωσης

Βασικά στοιχεία της καμπύλης Kaplan Meier

Όταν χρησιμοποιούμε την ανάλυση Kaplan Meier, πρέπει να επικεντρωνόμαστε σε τρεις μεταβλητές:

1. Ο σειριακός χρόνος του υποκειμένου
2. Την κατάστασή τους στο τέλος του σειριακού χρόνου τους (εμφάνιση συμβάντος ή censored)
3. Η ομάδα μελέτης στην οποία ανήκουν

Ο σειριακός χρόνος για τα μεμονωμένα υποκείμενα θα πρέπει να ταξινομείται από τον συντομότερο προς τον μακρύτερο, ανεξάρτητα από το πότε εισήλθαν στη μελέτη. Η διάρκεια του σειριακού χρόνου γνωστής επιβίωσης τερματίζεται από το γεγονός που ενδιαφέρει. Αυτό είναι γνωστό ως διάστημα. Μόνο η εμφάνιση του συμβάντος ορίζει τα διαστήματα γνωστού χρόνου επιβίωσης. Ενώ, τα censored άτομα δεν τερματίζουν το διάστημα. Εδώ, υπάρχει η δυνατότητα να συμβούν δύο πράγματα.

1. Ένα υποκείμενο μπορεί να έχει το γεγονός που ενδιαφέρει.
2. Να γίνουν censored.

Censored δεδομένα

Ο απλός ορισμός των censored δεδομένων είναι ότι οι πληροφορίες σχετικά με το χρόνο επιβίωσης ενός υποκειμένου είναι ελλιπείς. Αυτό είναι ένα πρόβλημα από το οποίο πάσχουν οι περισσότερες αναλύσεις επιβίωσης. Αυτό μπορεί να συμβεί όταν συμβαίνει κάτι αρνητικό για τη μελέτη, όπως π.χ:

1. Ένα άτομο δεν βιώνει το γεγονός πριν από τη λήξη της μελέτης
2. Ένα άτομο χάνεται για παρακολούθηση κατά τη διάρκεια της περιόδου μελέτης
3. Ένα άτομο αποσύρεται από τη μελέτη για κάποιο λόγο

4.2 Cox Regression

Η παλινδρόμηση Cox (ή παλινδρόμηση αναλογικών κινδύνων) είναι μέθοδος για τη διερεύνηση της επίδρασης διαφόρων μεταβλητών στο χρόνο που χρειάζεται για να συμβεί ένα συγκεκριμένο γεγονός. Στο πλαίσιο μιας έκβασης όπως ο θάνατος, αυτό είναι γνωστό ως παλινδρόμηση Cox για ανάλυση επιβίωσης. Η μέθοδος δεν προϋποθέτει κάποιο συγκεκριμένο "μοντέλο επιβίωσης", αλλά δεν είναι πραγματικά μη παραμετρική, διότι υποθέτει ότι οι επιδράσεις των μεταβλητών πρόβλεψης στην επιβίωση είναι σταθερές με την πάροδο του χρόνου και είναι προσθετικές σε μία κλίμακα.

Εφόσον πληρούνται οι παραδοχές της παλινδρόμησης Cox, η συνάρτηση αυτή θα παρέχει καλύτερες εκτιμήσεις των πιθανοτήτων επιβίωσης και του αθροιστικού κινδύνου από εκείνες που παρέχει η συνάρτηση Kaplan-Meier [43].

Επικινδυνότητα και ποσοστά επικινδυνότητας

Ο αθροιστικός κίνδυνος σε μια χρονική στιγμή t είναι ο κίνδυνος θανάτου μεταξύ της χρονικής στιγμής 0 και της χρονικής στιγμής t , και η συνάρτηση επιβίωσης τη χρονική στιγμή t είναι η πιθανότητα επιβίωσης μέχρι τη χρονική στιγμή t (βλέπε επίσης εκτιμήσεις Kaplan-Meier).

Οι συντελεστές σε μια παλινδρόμηση Cox σχετίζονται με τον κίνδυνο- ένας θετικός συντελεστής υποδηλώνει χειρότερη πρόγνωση και ένας αρνητικός συντελεστής υποδηλώνει προστατευτική επίδραση της μεταβλητής με την οποία σχετίζεται.

Ο λόγος κινδύνου που σχετίζεται με μια μεταβλητή πρόβλεψης δίνεται από τον εκθέτη του συντελεστή της. Ο λόγος κινδύνων μπορεί επίσης να θεωρηθεί ως το σχετικό ποσοστό θανάτου [34]. Η ερμηνεία του λόγου κινδύνων εξαρτάται από την κλίμακα μέτρησης της εν λόγω μεταβλητής πρόβλεψης [35].

Χρονοεξαρτώμενες και σταθερές μεταβλητές

Στις προοπτικές μελέτες, όταν τα άτομα παρακολουθούνται με την πάροδο του χρόνου, οι τιμές των μεταβλητών μπορεί να μεταβάλλονται με το χρόνο. Συνεπώς, οι μεταβλητές μπορούν να χωριστούν σε σταθερές και χρονικά εξαρτώμενες. Μια μεταβλητή είναι χρονοεξαρτώμενη εάν η διαφορά μεταξύ των τιμών της για δύο διαφορετικά υποκείμενα μεταβάλλεται με το χρόνο- π.χ. χοληστερόλη ορού. Μια μεταβλητή είναι σταθερή εάν οι τιμές της δεν μπορούν να αλλάξουν με το χρόνο, π.χ. φύλο ή φυλή. Οι παράγοντες του τρόπου ζωής και οι φυσιολογικές μετρήσεις, όπως η αρτηριακή πίεση, είναι συνήθως χρονοεξαρτώμενες. Οι αθροιστικές εκθέσεις, όπως το κάπνισμα, εξαρτώνται επίσης από το χρόνο, αλλά συχνά αναγκάζονται να μετατρέπονται σε μια ασαφή διχοτόμηση,

δηλαδή "εκτεθειμένος" έναντι "μη εκτεθειμένος" αντί για τον πιο ουσιαστικό "χρόνο έκθεσης". Δεν υπάρχουν αυστηροί και σταθεροί κανόνες σχετικά με το χειρισμό των χρονικά εξαρτώμενων μεταβλητών [43].

Ανάλυση μοντέλου και απόκλιση

Εδώ υπολογίζεται το στατιστική πιθανότητα chi-square με σύγκριση της απόκλισης του μοντέλου, με όλες τις μεταβλητές που έχουμε καθορίσει, έναντι του μοντέλου με όλες τις μεταβλητές που έχουν παραλειφθεί. Η μεμονωμένη συμβολή των μεταβλητών στο μοντέλο μπορεί να εκτιμηθεί από τον έλεγχο σημαντικότητας που δίνεται με κάθε συντελεστή στην κύρια έξοδο- αυτό προϋποθέτει ένα αρκετά μεγάλο μέγεθος δείγματος.

Η απόκλιση είναι μείον το διπλάσιο του λογαρίθμου του λόγου πιθανότητας για μοντέλα που προσαρμόζονται με μέγιστη πιθανότητα [36-39]. Η αξία της προσθήκης μιας παραμέτρου σε ένα μοντέλο Cox ελέγχεται με την αφαίρεση της απόκλισης του μοντέλου με τη νέα παράμετρο από την απόκλιση του μοντέλου χωρίς τη νέα παράμετρο, η διαφορά ελέγχεται στη συνέχεια με μια κατανομή chi-square με βαθμούς ελευθερίας ίσους με τη διαφορά μεταξύ των βαθμών ελευθερίας του παλαιού και του νέου μοντέλου. Δοκιμάζεται το μοντέλο που καθορίζετε έναντι ενός μοντέλου με μία μόνο παράμετρο, η διατομή. Έτσι δοκιμάζεται η συνδυασμένη τιμή των καθορισμένων προβλεπτικών παραγόντων/συντελεστών στο μοντέλο.

Ορισμένα στατιστικά πακέτα προσφέρουν βηματική παλινδρόμηση Cox που εκτελεί συστηματικούς ελέγχους για διαφορετικούς συνδυασμούς προβλεπτικών παραγόντων/μεταβλητών. Οι αυτόματες διαδικασίες δημιουργίας μοντέλων όπως αυτές μπορεί να είναι παραπλανητικές, καθώς δεν λαμβάνουν υπόψη την πραγματική σημασία κάθε προβλεπτικού παράγοντα [43].

Επιβίωση και αθροιστικά ποσοστά κινδύνου

Η συνάρτηση επιβίωσης και η αθροιστική συνάρτηση υπολογίζονται σε σχέση με την αρχική τιμή (χαμηλότερη τιμή των μεταβλητών) σε κάθε χρονική στιγμή. Η παλινδρόμηση Cox παρέχει καλύτερη εκτίμηση αυτών των συναρτήσεων από τη μέθοδο Kaplan-Meier όταν πληρούνται οι υποθέσεις του μοντέλου Cox και η προσαρμογή του μοντέλου είναι ισχυρή.

Σας δίνεται η δυνατότητα να "κεντράρετε τις συνεχείς μεταβλητές" - αυτό καθιστά τις συναρτήσεις επιβίωσης και κινδύνου σχετικές με το μέσο όρο των συνεχών μεταβλητών και όχι σχετικές με το ελάχιστο, το οποίο είναι συνήθως η πιο ουσιαστική σύγκριση.

Εάν έχετε δυαδικούς/διχοτομικούς προγνωστικούς παράγοντες στο μοντέλο σας, σας δίνεται η επιλογή να υπολογίσετε την επιβίωση και τους αθροιστικούς κινδύνους για κάθε μεταβλητή ξεχωριστά [43].

Προετοιμασία δεδομένων

- Χρόνος μέχρι το συμβάν, π.χ. χρόνος επιβίωσης ενός υποκειμένου σε μια δοκιμή.
- Κωδικός συμβάντος / censor - πρέπει να είναι ≥ 1 [συμβάν(τα) συνέβη(-σαν)] ή 0 [κανένα συμβάν στο τέλος της μελέτης, δηλ. "δεξιά λογοκρισία"].
- Στρώματα - π.χ. κωδικός κέντρου για πολυκεντρική δοκιμή.
- Προγνωστικοί παράγοντες - αυτοί αναφέρονται επίσης ως συνδιακυμάνσεις, οι οποίες μπορεί να είναι μια σειρά μεταβλητών που θεωρείται ότι σχετίζονται με το υπό μελέτη γεγονός. Εάν ένας προβλεπτικός παράγοντας είναι μια μεταβλητή ταξινόμησης με περισσότερες από δύο κλάσεις (π.χ. ordinal ή nominal), τότε πρέπει πρώτα να χρησιμοποιηθεί η συνάρτηση `dummy variable` (ψευδομεταβλητή) για μετατραπεί σε μια σειρά δυαδικών κλάσεων.

5. Υλοποίηση Προσομοιωτή Θορύβου

Σε αυτό το κεφάλαιο θα δοθούν πληροφορίες σχετικά με το πρόγραμμα του προσομοιωτή που δημιουργήθηκε από τον οποίο αντλήθηκαν και τα δεδομένα που χρησιμοποιήθηκαν αργότερα στη στατιστική ανάλυση. Περιγράφονται τα στοιχεία από τα οποία αποτελείται και επίσης δίνεται και ένας ψευδοαλγόριθμος ο οποίος αναπαριστά τη λειτουργία του προγράμματος.

Δημιουργήθηκε ένας προσομοιωτής θορύβου σε γλώσσα προγραμματισμού Java και στο περιβάλλον (IDE) του IntelliJ IDEA Community Edition. Ο προσομοιωτής αυτός δημιουργεί τα δεδομένα που χρησιμοποιήσαμε στο επόμενο κεφάλαιο για την στατιστική ανάλυση. Το πρόγραμμα συνολικά προσομοιώνει την αντοχή ενός Surface κώδικα (είτε του $[[5,1,2]]$, είτε του $[[13,1,3]]$) με επιλεγμένες πιθανότητες σφάλματος (X ή Z) στο χρόνο.

Αρχικά επιλέγουμε τον surface κώδικα που θέλουμε να προσομοιώσουμε. Ύστερα, διαλέγουμε ένα κάτω και ένα άνω όριο που επιθυμούμε να βρίσκονται οι πιθανότητες εμφάνισης σφάλματος X και Z αντίστοιχα σε ένα data qubit του surface κώδικα. Στη συνέχεια επιλέγουμε το χρόνο που θέλουμε να τρέξει ο προσομοιωτής σε χρονικές μονάδες αλλά και για πόσα συστήματα, δηλαδή ποιο είναι το δείγμα μας. Για κάθε σύστημα του δείγματος το πρόγραμμα επιλέγει μια πιθανότητα σφάλματος X (P_X) και μια πιθανότητα σφάλματος Z (P_Z) μεταξύ των ορίων που θέσαμε. Σε κάθε χρονική μονάδα το πρόγραμμα εφαρμόζει σφάλμα X και Z σε ένα τυχαίο data qubit ανάλογα με τις πιθανότητες που επέλεξε και εξετάζει αν το σύστημα καταρρέει ή όχι. Το σύστημα μπορεί είτε να κατέρρευσε πριν το πέρας του run time που θέσαμε είτε να επιβιώνει μέχρι το τέλος αυτού. Σε κάθε περίπτωση, για κάθε σύστημα που εξετάζει το πρόγραμμα στο τέλος γραφεί τα δεδομένα σε ένα αρχείο excel. Τα δεδομένα αυτά είναι:

- Ο χρόνος που επιβίωσε το σύστημα (σε χρονικές μονάδες)
- Η P_X (με δεκαδική μορφή π.χ. 10%=0,1)
- Η P_Z (με δεκαδική μορφή π.χ. 10%=0,1)
- Αν το σύστημα επιβίωσε μέχρι τέλος ή όχι (0 -> το σύστημα επιβίωσε, 1 -> το σύστημα κατέρρευσε)
- Το γκρουπ στο οποίο ανήκει το σύστημα μας (ποιον surface κώδικα αναπαριστούμε)

Για κάθε surface κώδικα που εξετάζουμε οι συνθήκες κατάρρευσης είναι διαφορετικές. Ο γενικός κανόνας που ισχύει είναι πως όταν η πλειοψηφία των data qubits εμφανίσει σφάλμα (είτε X είτε Z) τότε η συνολική πληροφορία του συστήματος χάνεται οριστικά και δεν υπάρχει δυνατότητα επαναφοράς της. Δηλαδή η κατάσταση που βρισκόταν το ένα qubit που αναπαριστούσε ο surface κώδικας καταρρέει. Για τους δύο surface κώδικες που εξετάζουμε (τον $[[5,1,2]]$ και τον $[[13,1,3]]$) η συνθήκη αυτή είναι διαφορετική. Ο κώδικας $[[5,1,2]]$ αποτελείται από 5 data qubits άρα η συνθήκη κατάρρευσης του είναι η

εμφάνιση σφάλματος σε 3 ή περισσότερα data qubits, αντίστοιχα για τον $[[13,1,3]]$ η συνθήκη είναι η εμφάνιση σφάλματος σε 6 ή περισσότερα data qubits. Αναλυτικότερα η λειτουργία του προσομοιωτή περιγράφεται στο παρακάτω ψευδαλγόριθμο.

ΨΕΥΔΟ ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΣ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΤΗ:

Βήμα 1ο: Επέλεξε `surface_code` (επιλέγουμε ποιον κώδικα θέλουμε να προσομοιώσουμε, τον $[[5,1,2]]$ ή τον $[[13,1,3]]$)

Βήμα 2ο: Θέσε `min_error_possibility` (επιλέγουμε την ελάχιστη τιμή που θα μπορούν να πάρουν οι πιθανότητες P_X και P_Z)

Βήμα 3ο: Θέσε `max_error_possibility` (επιλέγουμε την μέγιστη τιμή που θα μπορούν να πάρουν οι πιθανότητες P_X και P_Z)

Βήμα 4ο: Θέσε `runtime` (θέτουμε τον χρόνο της προσομοίωσης, δηλαδή για πόσες χρονικές μονάδες θα δοκιμαστεί το εκάστοτε σύστημα)

Βήμα 5ο: Θέσε `sample` (θέτουμε τον δείγμα της προσομοίωσης, δηλαδή πόσα συστήματα θα δοκιμαστούν)

Βήμα 6ο: Για κάθε $i < \text{sample}$: (λούπα που αναπαριστά κάθε δείγμα που τεστάρετε)

Βήμα 7ο: Διάλεξε τυχαίο αριθμό x , όπου $\text{min_error_possibility} < x < \text{max_error_possibility}$ (επιλέγεται η P_X μεταξύ του εύρους των δύο τιμών)

Βήμα 8ο: Διάλεξε τυχαίο αριθμό z , όπου $\text{min_error_possibility} < z < \text{max_error_possibility}$ (επιλέγεται η P_Z μεταξύ του εύρους των δύο τιμών)

Βήμα 9ο: Για κάθε $j < \text{runtime}$: (λούπα που αναπαριστά το χρόνο εκτέλεσης για κάθε σύστημα)

Βήμα 10ο: Εφάρμοσε σφάλμα X σε ένα τυχαίο data qubit ανάλογα με την πιθανότητα x

Βήμα 11ο: Εφάρμοσε σφάλμα Z σε ένα τυχαίο data qubit ανάλογα με την πιθανότητα z

Βήμα 12ο: Αν το σύστημα κατέρρευσε: (ελέγχεται αν πληρείται η συνθήκη κατάρρευσης του εκάστοτε συστήματος)

Βήμα 13ο: Γράψε δεδομένα σε αρχείο

Βήμα 14ο: Τέλος επανάληψης (τερματίζει η επανάληψη του βήματος 8)

Βήμα 15ο: Γράψε δεδομένα σε αρχείο

Στη συνέχεια τα δεδομένα του προσομοιωτή που περιέχονται σε ένα αρχείο excel τα διαχειριζόμαστε μέσω της γλώσσας R και του προγράμματος RStudio. Μέσω του ολοκληρωμένου περιβάλλοντος αυτού μπορούμε να εφαρμόσουμε μια στατιστική ανάλυση εφαρμόζοντας τα στατιστικά εργαλεία Survival Curves και Cox Regression. Μέσα από αυτή την ανάλυση μπορούμε να εξάγουμε χρήσιμα συμπεράσματα που αφορούν τους δύο αυτούς surface κώδικες αλλά και να παράγουμε χρήσιμα διαγράμματα που περιγράφουν την συμπεριφορά τους.

6. Αποτελέσματα προσομοίωσης

Σε αυτό το κεφάλαιο θα παρουσιαστούν τα αποτελέσματα των προσομοιώσεων που έγιναν καθώς και τα συμπεράσματα που παρατηρήθηκαν από την ανάλυση με καμπύλες επιβίωσης αλλά και με παλινδρόμηση Cox. Το κεφάλαιο χωρίζεται σε δύο αντίστοιχες υποενότητες στις οποίες παρατίθενται τα εκάστοτε αποτελέσματα.

Σε αυτή την εργασία τρέξαμε τον προσομοιωτή για 1000 δείγματα με runtime 1000 χρονικές μονάδες υπό τις εξής συνθήκες:

α) surface κώδικας $[[5,1,2]]$ με πιθανότητες σφάλματος X και Z μεταξύ (0-0,5%), (0,5-1%), (1-1,5%)

β) surface κώδικας $[[13,1,3]]$ με πιθανότητες σφάλματος X και Z μεταξύ (0-0,5%), (0,5-1%), (1-1,5%)

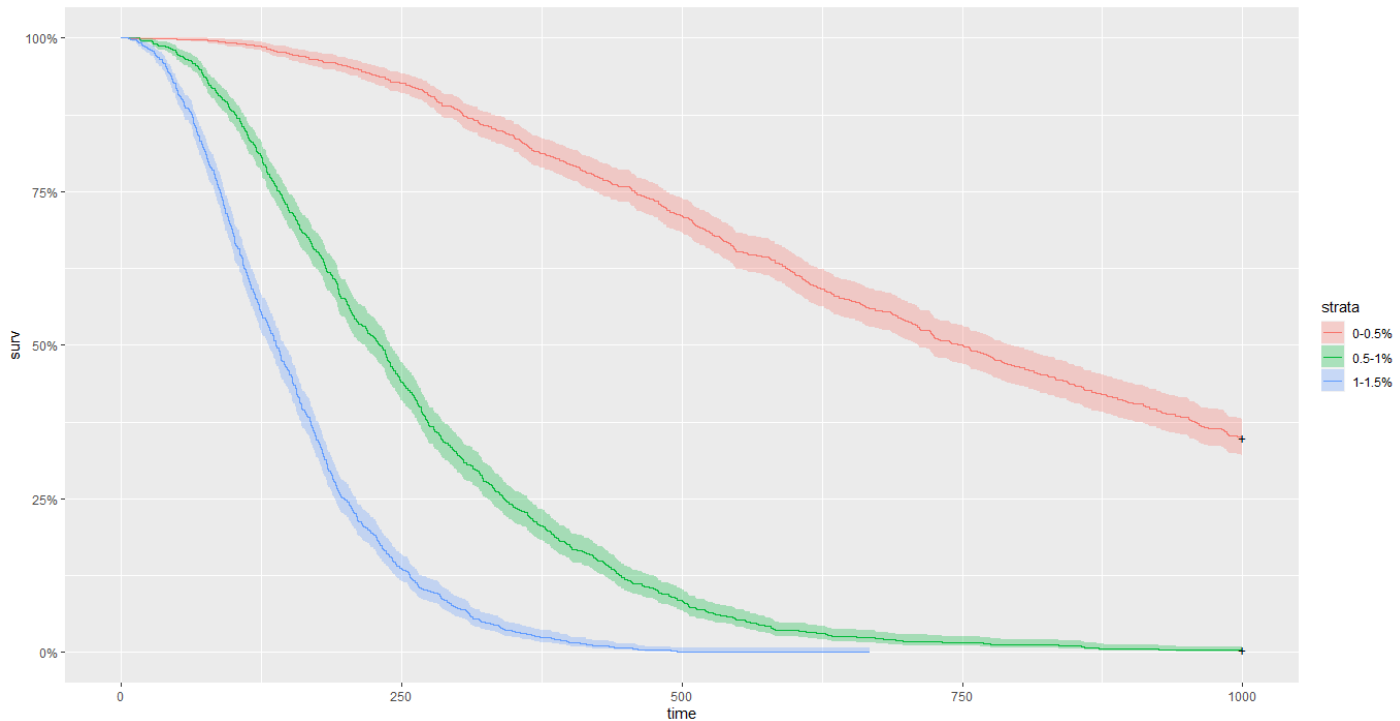
γ) surface κώδικας $[[5,1,2]]$ και $[[13,1,3]]$ με πιθανότητες σφάλματος X και Z μεταξύ (0-1%)

Τα δεδομένα συλλέχθηκαν και χρησιμοποιήθηκαν για την παραγωγή γραφημάτων και συμπερασμάτων που παρουσιάζονται στις επόμενες υποενότητες.

6.1 Survival Ανάλυση

Σε αυτή την υποενότητα θα παρουσιαστούν τα αποτελέσματα, τα γραφήματα και τα συμπεράσματα που εξήχθησαν από την ανάλυση επιβίωσης που έγινε στο πλαίσιο της παρούσας πτυχιακής εργασίας. Χωρίζεται σε τρεις ακόμα υποενότητες ανάλογα με το υποκείμενο της ανάλυσης. Στην 6.1.1 υποενότητα εξετάζεται ο κώδικας $[[5,1,2]]$ για διαφορετικά εύρη πιθανοτήτων σφάλματος, σε αυτή την περίπτωση το ρόλο του group τον έχουν τα διαφορετικά αυτά εύρη για τα οποία δημιουργούνται και οι αντίστοιχες καμπύλες επιβίωσης. Στην 6.1.2 υποενότητα εξετάζεται ο κώδικας $[[13,1,3]]$ για διαφορετικά εύρη πιθανοτήτων σφάλματος, και σε αυτή την περίπτωση το ρόλο του group τον έχουν τα διαφορετικά αυτά εύρη για τα οποία δημιουργούνται και οι αντίστοιχες καμπύλες επιβίωσης. Τέλος, στην 6.1.3 υποενότητα εξετάζεται ο κώδικας $[[5,1,2]]$ έναντι του $[[13,1,3]]$ για ίδιο εύρος πιθανοτήτων σφάλματος, σε αυτή την περίπτωση το ρόλο του group τον έχουν οι δύο κώδικες για τους οποίους δημιουργούνται και οι αντίστοιχες καμπύλες επιβίωσης.

6.1.1 Surface κώδικας $[[5,1,2]]$ με πιθανότητες σφάλματος X και Z μεταξύ (0-0,5%), (0,5-1%) και (1-1,5%)



Εικόνα 31. Καμπύλες επιβίωσης για τον κώδικα $[[5,1,2]]$ με εύρος πιθανοτήτων σφάλματος P_X και P_Z 0-0,5% (κόκκινο), 0,5-1% (πράσινο), 1-1,5% (μπλε)

Από τα 1000 δείγματα σε κάθε κατηγορία πιθανοτήτων βρίσκουμε τα εξής:

(0-0,5%): από τα 1000 συστήματα κατέρρευσαν τα 651 και ο διάμεσος χρόνος επιβίωσης είναι 750 χρονικές μονάδες

(0,5-1%): από τα 1000 συστήματα κατέρρευσαν τα 997 και ο διάμεσος χρόνος επιβίωσης είναι 231 χρονικές μονάδες

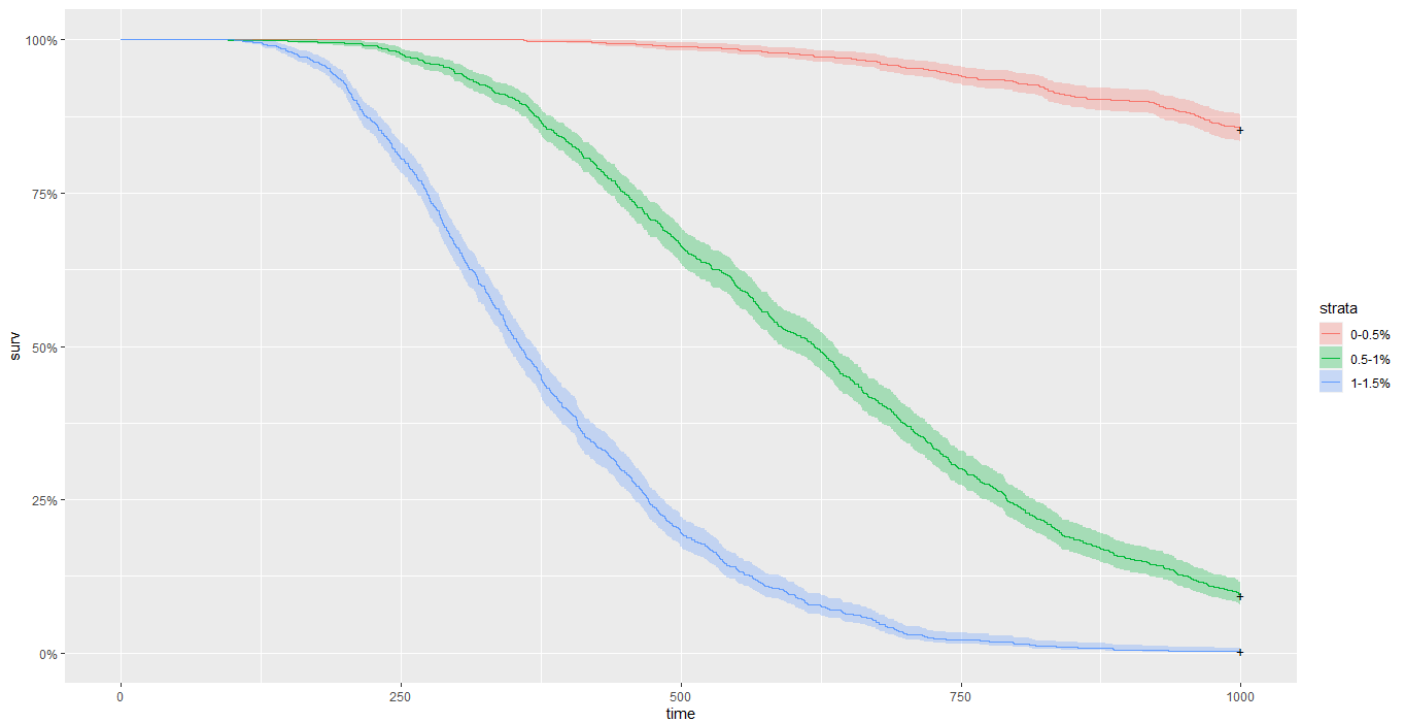
(1-1,5%): από τα 1000 συστήματα κατέρρευσαν και τα 1000 και ο διάμεσος χρόνος επιβίωσης είναι 138 χρονικές μονάδες

Το σύμβολο (+) στις καμπύλες αναπαριστά τα censored δεδομένα, δηλαδή ότι υπήρξαν συστήματα που επιβίωσαν μέχρι το πέρας των 1000 χρονικών μονάδων.

Παρατηρούμε ότι για πιθανότητες σφάλματος 0-0,5% ο κώδικας $[[5,1,2]]$ έχει μεγαλύτερη από 90% πιθανότητα επιβίωσης στις πρώτες 250 χρονικές μονάδες. Αντίστοιχα η πιθανότητα επιβίωσης είναι μικρότερη από 50% για την κατηγορία 0,5-1 και μικρότερη από 15% για την 1-1,5 στις πρώτες 250 χρονικές μονάδες. Επίσης βλέπουμε ότι μετά το πέρας των 1000 χρονικών μονάδων έχουν επιβιώσει σχεδόν το 37% των συστημάτων στη κατηγορία 0-0,5. Αντίστοιχα για την κατηγορία 0,5-1 έχουν

επιβιώσει μόλις 3 ενώ για 1-1,5, κανένα. Σημαντικό είναι επίσης ότι μετά τις 650 χρονικές μονάδες δεν έχει επιβιώσει κανένα σύστημα της κατηγορίας 1-1,5. Σε γενικότερο πλαίσιο παρατηρούμε την κατηγορία 0-0,5 να ακολουθεί μια πορεία ανάλογη της συνάρτησης $-ax$ ενώ οι κατηγορίες 0,5-1 και 1-1,5 μια πορεία ανάλογη της συνάρτησης e^{-ax} με αυξημένο a στην κατηγορία 1-1,5.

6.1.2 Surface κώδικας [[13,1,3]] με πιθανότητες σφάλματος X και Z μεταξύ (0-0,5%), (0,5-1%) και (1-1,5%)



Εικόνα 32. Καμπύλες επιβίωσης για τον κώδικα [[13,1,3]] με εύρος πιθανοτήτων σφάλματος P_X και P_Z 0-0,5% (κόκκινο), 0,5-1% (πράσινο), 1-1,5% (μπλε)

Από τα 1000 δείγματα σε κάθε κατηγορία πιθανότητων βρίσκουμε τα εξής:

(0-0,5%): από τα 1000 συστήματα κατέρρευσαν τα 145 και ο διάμεσος χρόνος επιβίωσης είναι απροσδιόριστος καθώς επιβίωσαν πάρα πολλά συστήματα

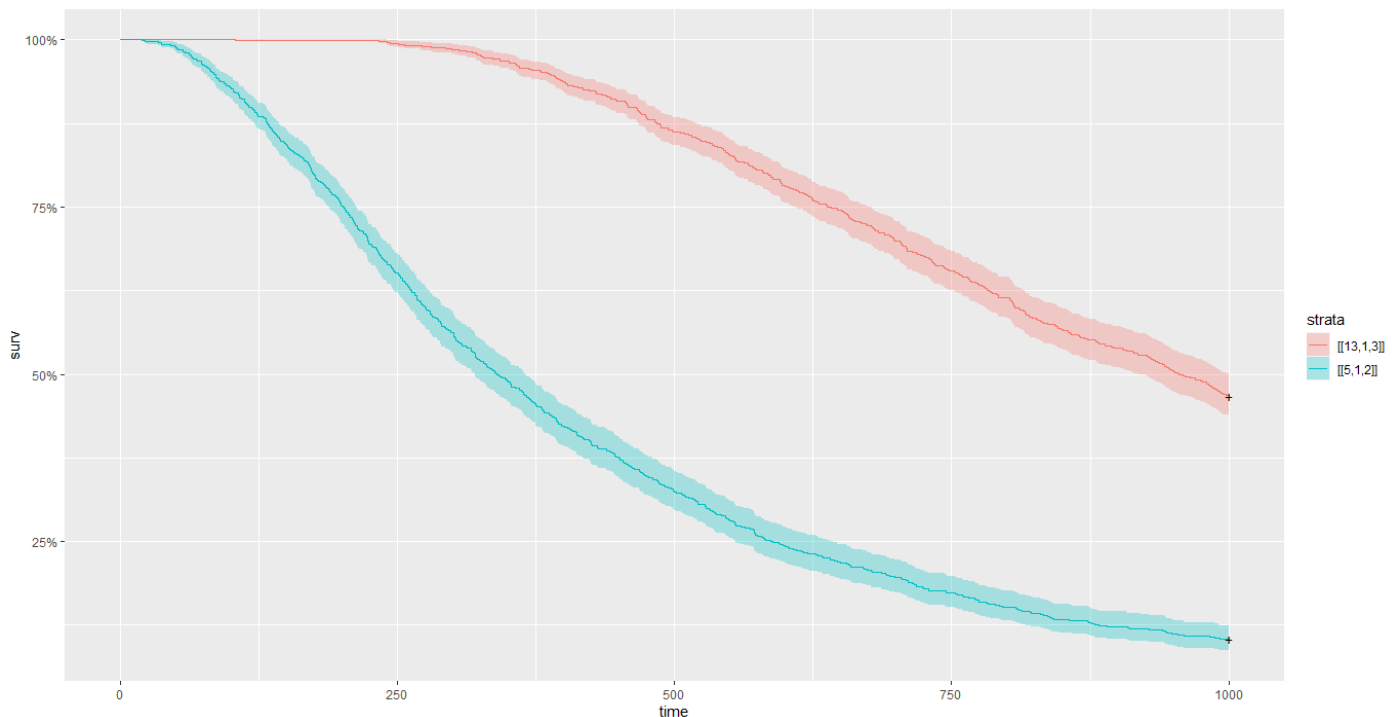
(0,5-1%): από τα 1000 συστήματα κατέρρευσαν τα 906 και ο διάμεσος χρόνος επιβίωσης είναι 619 χρονικές μονάδες

(1-1,5%): από τα 1000 συστήματα κατέρρευσαν και τα 998 και ο διάμεσος χρόνος επιβίωσης είναι 356 χρονικές μονάδες

Το σύμβολο (+) στις καμπύλες αναπαριστά τα censored δεδομένα, δηλαδή ότι υπήρξαν συστήματα που επιβίωσαν μέχρι το πέρας των 1000 χρονικών μονάδων.

Παρατηρούμε ότι για πιθανότητες σφάλματος 0-0,5% ο κώδικας $[[13,1,3]]$ επιβιώνει κατα 100% για τις πρώτες 360 χρονικές μονάδες. Για πιθανότητες σφάλματος 0,5-1% ο κώδικας έχει μεγαλύτερη από 95% πιθανότητα επιβίωσης στις πρώτες 250 χρονικές μονάδες. Αντιστοίχα η πιθανότητα επιβίωσης παραμένει πάνω από 80% για την κατηγορία 1-1,5 στις πρώτες 250 χρονικές μονάδες. Επίσης βλέπουμε ότι μετά το πέρας των 1000 χρονικών μονάδων έχουν επιβιώσει σχεδόν το 87% των συστημάτων στη κατηγορία 0-0,5. Αντίστοιχα για την κατηγορία 0,5-1 έχουν επιβιώσει λιγότερα από 12% ενώ για 1-1,5, μόλις 2 συστήματα. Σε γενικότερο πλαίσιο παρατηρούμε την κατηγορία 0-0,5 και την 0,5-1 να ακολουθούν μια πορεία ανάλογη της συνάρτησης $-ax$ με την 0-0,5 να έχει πολύ μικρή κλίση άρα και πολύ μικρό a ενώ για την 0,5-1 η κλίση αυξάνεται. Η κατηγορία και 1-1,5 ακολουθεί μια πορεία ανάλογη της συνάρτησης e^{-ax} .

6.1.3 Surface κώδικας $[[5,1,2]]$ και $[[13,1,3]]$ με πιθανότητες σφάλματος X και Z μεταξύ (0-1%)



Εικόνα 33. Καμπύλες επιβίωσης για τον κώδικα $[[5,1,2]]$ (μπλε) και τον κώδικα $[[13,1,3]]$ (κόκκινο) με εύρος πιθανοτήτων σφάλματος P_X και P_Z 0-1%

Σε ένα γενικότερο εύρος πιθανοτήτων εμφάνισης σφαλμάτων από 0 έως 1% παρατηρούμε ότι ο διάμεσος χρόνος επιβίωσης για τον κώδικα $[[13,1,3]]$ είναι σχεδόν 3 φορές μεγαλύτερος από αυτόν του κώδικα $[[5,1,2]]$. Βλέπουμε επίσης ότι για τις πρώτες 250 χρονικές μονάδες ο κώδικας $[[13,1,3]]$ αγγίζει ποσοστά επιβίωσης της τάξεως του 99% ενώ αντίστοιχα ο $[[5,1,2]]$ βρίσκεται 65%. Μετά το πέρας των 1000 χρονικών μονάδων ο $[[13,1,3]]$ επιβιώνει με σχεδόν 50% πιθανότητα ενώ ο $[[5,1,2]]$ με λιγότερο από 10%.

6.2 Cox Regression

Ο σκοπός μας εδώ είναι να δούμε πόσο πολύ επηρεάζουν οι τρεις παράγοντες, probX (P_X), probZ (P_Z) και Group (σε ποιον κώδικα αναφερόμαστε, τον $[[5,1,2]]$ ή τον $[[13,1,3]]$) το χρόνο επιβίωσης ενός συστήματος. Δηλαδή για παράδειγμα πόσο μεγάλη διαφορά έχει ως προς την επιβίωση ένα σύστημα με surface κώδικα $[[5,1,2]]$ έναντι ενός άλλου με κώδικα $[[13,1,3]]$. Εύκολα συμπεραίνουμε ότι οι παράγοντες P_X και P_Z θα είναι ιδιαίτερα σημαντικοί καθώς επηρεάζουν άμεσα την διάρκεια επιβίωσης ενός συστήματος καθώς εκφράζουν την πιθανότητα εμφάνισης σφαλμάτων σε αυτά. Επίσης όπως είδαμε ήδη από την ανάλυση επιβίωσης στην προηγούμενη υποενότητα το από ποιόν κώδικα αποτελείται ένα σύστημα έχει και αυτό μεγάλη επιρροή καθώς ο κώδικας $[[1,3,1,3]]$ έχει σημαντική υπεροχή έναντι του $[[5,1,2]]$ ωστόσο έχει αξία να επαληθεύσουμε αυτά τα συμπεράσματα με χρήση παλινδρόμησης που είναι ένα πιο εξειδικευμένο εργαλείο για τέτοιου είδους συγκρίσεις.

Σε αυτή την υποενότητα εξετάζουμε με παλινδρόμηση την υποενότητα 6.1.3 δηλαδή P_X και P_Z μεταξύ του 0-1% και ως Group το σε ποιον κώδικα αναφερόμαστε, τον $[[5,1,2]]$ ή τον $[[13,1,3]]$. Αρχικά δημιουργήθηκε σε γλώσσα R και με το πρόγραμμα RStudio ένα μοντέλο παλινδρόμησης με αλληλεπιδράσεις το οποίο περιείχε ως εξαρτημένη μεταβλητή την time (δηλαδή τον χρόνο επιβίωσης) και ως ανεξάρτητες μεταβλητές τις probX (P_X), probZ (P_Z) και Group (σε ποιον κώδικα αναφερόμαστε, τον $[[5,1,2]]$ ή τον $[[13,1,3]]$).

Επεξηγήσεις Σημειολογίας για τις παρακάτω εικόνες από το περιβάλλον του RStudio

Intercept = είναι ένας σταθερός αριθμός που βοηθάει στην καλύτερη προβλεψη του μοντέλου.

data\$ = δεν έχει κάποια αξία απλά λειτουργεί ως δείκτης στο αρχείο που περιέχει τα δεδομένα και ακολουθείται από την μεταβλητή. Για παράδειγμα το $\text{data\$probX}$ αναπαριστά τη μεταβλητή probX στο σύνολο δεδομένων data .

: = η άνω-κάτω τελεία αναπαριστά την αλληλεπίδραση, για παράδειγμα το `data$probX:data$probZ` αναπαριστά ως ξεχωριστή μεταβλητή την συσχέτιση μεταξύ του `probX` και `probZ`, δηλαδή σε αυτό το παράδειγμα θα δούμε πόσο σημαντικός παράγοντας είναι για το μοντέλο η μεταβλητή `probX` σε σχέση με την μεταβλητή `probZ`.

p = η στήλη **p** είναι που μας ενδιαφέρει περισσότερο καθώς δίνει τις τιμές **p-value** για κάθε παράγοντα. Γενικός κανόνας εδώ είναι ότι αν $p\text{-value} < 0.05$ τότε ο παράγοντας είναι στατιστικά σημαντικός ενώ αν $p\text{-value} > 0.05$ τότε ο παράγοντας είναι δεν στατιστικά σημαντικός.

Value = είναι η στήλη που περιέχει τους συντελεστές για κάθε μεταβλητή του μοντέλου.

Ως μοντέλο εννοείται μια εξίσωση που προβλέπει την τιμή της εξαρτημένης μεταβλητής (το χρόνο επιβίωσης) με ένα ποσοστό ακρίβειας. Για παράδειγμα έστω ότι ο χρόνος επιβίωσης είναι y , τότε

$$\log(y) = \text{intercept} + \text{συντελεστής}_1 * \text{μεταβλητή}_1 + \text{συντελεστής}_2 * \text{μεταβλητή}_2 \dots$$

Ως πιο συγκεκριμένο παράδειγμα ας πάρουμε την Εικόνα 35, από εκεί παίρνουμε την εξίσωση $\log(\text{time}) = 8.8738 + (-1.4892)*\text{probX} + (-1.5137)*\text{probZ} + (-1.1936)*\text{Group}$

6.2.1 Μοντέλο με και χωρίς αλληλεπιδράσεις

```
Call:
survreg(formula = Surv(data$time, data$systemStatus) ~ data$probX *
  data$probZ * data$Group, dist = "exponential")

              value std. error      z      p
(Intercept)    10.798     0.309 34.92 < 2e-16
data$probX     -3.927     0.413 -9.51 < 2e-16
data$probZ     -4.124     0.423 -9.75 < 2e-16
data$Group[[5,1,2]] (0-1%) -3.031     0.347 -8.74 < 2e-16
data$probX:data$probZ      3.158     0.588  5.37 8.0e-08
data$probX:data$Group[[5,1,2]] (0-1%)  1.932     0.480  4.02 5.7e-05
data$probZ:data$Group[[5,1,2]] (0-1%)  2.026     0.494  4.10 4.1e-05
data$probX:data$probZ:data$Group[[5,1,2]] (0-1%) -1.669     0.715 -2.33  0.02
```

Εικόνα 34. Αποτελέσματα της εντολής `summary()` για το μοντέλο με αλληλεπιδράσεις

Στο πρώτο μοντέλο μας όλες οι μεταβλητές ακόμα και οι αλληλεπιδράσεις τους εμφανίζουν $p\text{-value} < 0.05$ και επομένως είναι όλες στατιστικά σημαντικές. Αυτό σημαίνει ότι το μοντέλο δεν χαίρει απλοποίησης με την αφαίρεση κάποιας μεταβλητής ή έστω κάποιας αλληλεπίδρασης μεταξύ αυτών.

Για περαιτέρω επαλήθευση δημιουργήθηκε και ένα μοντέλο χωρίς αλληλεπιδράσεις όπου προφανώς και εδώ όλες οι μεταβλητές είναι στατιστικά σημαντικές ($p\text{-value} < 0.05$).

```
Call:
survreg(formula = Surv(data$time, data$systemStatus) ~ data$probx +
  data$probz + data$Group, dist = "exponential")

              value Std. Error      z      p
(Intercept)      8.8738    0.0857 103.6 <2e-16
data$probx       -1.4892    0.0935 -15.9 <2e-16
data$probz       -1.5137    0.0928 -16.3 <2e-16
data$Group[[5,1,2]](0-1%) -1.1936    0.0545 -21.9 <2e-16

Scale fixed at 1

Exponential distribution
Loglik(model)= -10671.5  Loglik(intercept only)= -11149.1
      Chisq= 955.14 on 3 degrees of freedom, p= 9.7e-207
Number of Newton-Raphson Iterations: 4
n= 2000
```

Εικόνα 35. Αποτελέσματα της εντολής `summary()` για το μοντέλο χωρίς αλληλεπιδράσεις

Στη συνέχεια έγινε σύγκριση *anova* μεταξύ των δύο αυτών μοντέλων όπου το $p\text{-value}$ εμφανίζεται μικρότερο του 0,05. Συμπεραίνουμε έτσι και ότι η διαφορά μεταξύ των δύο μοντέλων είναι στατιστικά σημαντική. Άρα το μοντέλο των αλληλεπιδράσεων δεν μπορεί να απλοποιηθεί σε αυτό χωρίς τις αλληλεπιδράσεις καθώς εμφανίζεται στατιστικά σημαντική διαφορά στα αποτελέσματα.

```
> anova(m1,m2,test="Chi")
              Terms Resid. Df    -2*LL Test Df  Deviance  Pr(>Chi)
1 data$probx * data$probz * data$Group    1992 21260.88      NA      NA      NA
2 data$probx + data$probz + data$Group    1996 21343.03    = -4 -82.14166 6.12557e-17
> |
```

Εικόνα 36. Αποτελέσματα της σύγκρισης *anova* μεταξύ των δύο μοντέλων

Συμπεράσματα

Τα σφάλματα στα κβαντικά υπολογιστικά συστήματα είναι ιδιαίτερα συχνό φαινόμενο, πολύ πιο συχνό από ότι στα κλασικά. Γι'αυτό οι κώδικες διόρθωσης σφαλμάτων όπως οι surface κώδικες, είναι ένα πολύ σημαντικό κομμάτι στη λειτουργία ενός κβαντικού συστήματος. Μέσα από την υλοποίηση του προγράμματος προσομοίωσης αυτών των κωδίκων ήταν προφανές το πόσο δύσκολο είναι να γίνει αυτό και πως απαραίτητη είναι η χρήση προσεγγιστικών μεθόδων. Μέσα από τα αποτελέσματα της ανάλυσης των δεδομένων που εξήχθησαν από τον προσομοιωτή έγινε επίσης ξεκάθαρη και η υπεροχή του surface κώδικα $[[13,1,3]]$ έναντι του $[[5,1,2]]$, καθώς είναι σημαντικά πιο ανθεκτικός σε σφάλματα. Ξεκάθαρο έγινε και το πόσο σημαντικό είναι για κβαντικά υπολογιστικά συστήματα να είναι όσο πιο ανθεκτικά στο θόρυβο γίνεται και σε επίπεδο hardware ώστε να διατηρείται ο θόρυβος και τα σφάλματα που αυτός προκαλεί σε διαχειρίσιμα επίπεδα τα οποία μπορούν να διαχειριστούν οι σύγχρονες τεχνικές διόρθωσης σφάλματος που διαθέτουμε.

Βιβλιογραφία

- [1] D' Espagnat B., *Conceptual foundations of quantum mechanics*, Perseus Books, 1999.
- [2] Keyl M., Fundamentals of quantum information theory, *Physics Reports*, vol. 369, pp. 431-548, 2002.
- [3] Rieffel E. G., & Polak W. H., *Quantum computing: a gentle introduction*, The MIT Press, 2014.
- [4] Καραφυλλίδης Ι., Κβαντική Υπολογιστική, Ελληνικά Ακαδημαϊκά Ηλεκτρονικά Συγγράμματα και Βοηθήματα, 2015.
- [5] QuTech. (2018). Quantum Inspire Home. Retrieved from Quantum Inspire: <https://www.quantum-inspire.com/>
- [6] Kaye P., Laflamme R., & Mosca M., *An introduction to quantum computing*, Oxford University Press, 2007.
- [7] Keyl M, Fundamentals of Quantum Information Theory, *Physics Reports*, vol. 369, pp. 431-548, 2002.
- [8] Barenco A., Bennett Ch. H., Cleve, R. et al., Elementary Gates for Quantum Computation, *Physical Review A*, vol. 52, pp. 3457-3467, 1995.
- [9] Cybenko G., Reducing Quantum Computations to Elementary Unitary Operations, *IEEE Computers*, March/April issue, pp. 27-32, 2001.
- [10] Noise in quantum computing (ep4): <https://www.youtube.com/watch?v=AUAkoEiutOE>
[q-ctrl.com](https://www.youtube.com/watch?v=AUAkoEiutOE)
- [11] Viola L, Knill E, Laflamme R. Constructing qubits in physical systems. *Journal of Physics A: Mathematical and General.*, 34(35):7067-7079, 2001.
- [12] Shaw B, Wilde M, Oreshkov O, Kremsky I, Lidar D. Encoding one logical qubit into six physical qubits. *Physical Review A.*, 78(1), 2008.
- [13] Nielsen M, Isaac L Chuang. *Quantum Computation and Quantum Information*. 10th ed: Cambridge University Press, 2010.
- [14] Γούσια Π., ΚΒΑΝΤΙΚΟΙ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΕΣ: Μέθοδοι υλοποίησης κβαντικών πυλών., Διπλωματική εργασία, Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης, Τμήμα Πληροφορικής, 2015.
- [15] Wiesner S., Conjugate coding., *ACM SIGACT News.*, 15(1):78-88, 1983
- [16] [Daniel Lidar](#) and Todd Brun, *Quantum Error Correction*, Cambridge University Press, ed. (2013)
- [17] La Guardia, Giuliano Gadioli, *Quantum Error Correction: Symmetric, Asymmetric, Synchronizable, and Convolutional Codes.*, Springer Nature, ed. (2020)

- [18] Frank Gaitan., Quantum Error Correction and Fault Tolerant Quantum Computing., Taylor & Francis., (2008)
- [19] Freedman, Michael H., Meyer, David A., Luo, Feng: [Z₂-Systolic freedom](#) and quantum codes. Mathematics of quantum computation, 287–320, Comput. Math. Ser., Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, FL, 2002.
- [20] Freedman, Michael H., Meyer, David A. (1998). ["Projective plane and planar quantum codes"](#). Found. Comput. Math, (3): 325–332, 2001. [arXiv:quant-ph/9810055](#). [Bibcode:1998quant.ph.10055F](#).
- [21] Lassen, Mikael, Sabuncu, Metin, Huck, Alexander, Niset, Julien, Leuchs, Gerd, Cerf, Nicolas J., Andersen, Ulrik L. (2010). ["Quantum optical coherence can survive photon losses using a continuous-variable quantum erasure-correcting code"](#). [Nature Photonics](#). 4 (1): 10. [Bibcode:2010NaPho...4...10W](#). [doi:10.1038/nphoton.2009.243](#).
- [22] Bravyi SB, Kitaev AY., Quantum codes on a lattice with boundary., arXiv:quant-ph/9811052., 1998.
- [23] Freedman MH, Meyer DA. Projective plane and planar quantum codes, 1998.
- [24] Nickerson NH, Fitzsimons JF, Benjamin SC. Freely scalable quantum technologies using cells of 5-to-50 qubits with very lossy and noisy photonic links, Physical Review X., 4(4):041041, 2014
- [25] Kelly J, Barends R, Fowler A, et al. Scalable in situ qubit calibration during repetitive error detection. Physical Review A., 94(3):032321., 2016
- [26] Sete EA, Zeng WJ, Rigetti CT. A functional architecture for scalable quantum computing. In: IEEE International Conference on Rebooting Computing (ICRC), IEEE,p. 1–6, 2016.
- [27] O’Gorman J, Nickerson NH, Ross P, et al. A silicon-based surface code quantum computer. npj Quantum Information., 2(1), 2016.
- [28] Takita M, Cross AW, C’orcoles A, et al. Experimental demonstration of fault-tolerant state preparation with superconducting qubits. Physical review letters., 119(18):180501, 2017
- [29] Kitaev A., Fault-tolerant quantum computation by anyons, Annals of Physics., 303(1):2–30, 2003
- [30] Horsman D, Fowler A, Devitt S, et al. Surface code quantum computing by lattice surgery., New Journal of Physics., 14(12):123011, 2012
- [31] Michael A. Nielsen, Isaac L. Chuang, Quantum Computation and Quantum Information 10th Anniversary Edition, 2000
- [32] <https://www.mygreatlearning.com/blog/kaplan-meier-curve-explained/#:~:text=The%20Kaplan%20Meier%20Curve%20is%20the%20visual%20representation%20of%20this,sample%20size%20is%20large%20enough>.

- [33] Lawless, 1982, Kalbfleisch and Prentice, 1980, Harris, 1991, Cox and Oakes, 1984, Le, 1997, Hosmer and Lemeshow, 1999
- [34] Armitage P, Berry G., Statistical Methods in Medical Research (3rd edition)., Blackwell, 1994
- [35] Sahai H, Kurshid A., Statistics in epidemiology: methods techniques and applications., CRC Press, 1996
- [36] Hosmer DW, Lemeshow S., Applied Logistic Regression., New York: Wiley, 1989.
- [37] Hosmer DW, Lemeshow S., Applied Survival Analysis., New York: Wiley, 1999.
- [38] Cox DR, Snell EJ., The Analysis of Binary Data (2nd edition)., Chapman and Hall, 1989
- [39] Pregibon D., Logistic Regression Diagnostics., Annals of Statistics, 9:705-724, 1981
- [40] Cox DR, Regression models and life tables (with discussion)., J R Statist Soc, B 34: 187–220, (1972)
- [41] MJ Bradburn, TG Clark, SB Love and DG Altman. Survival Analysis Part II: Multivariate data analysis – an introduction to concepts and methods. British Journal of Cancer 89, 431 – 436, (2003)
- [42] <http://www.sthda.com/english/wiki/cox-proportional-hazards-model>
- [43] [StatsDirect Limited](#)
- [44] Knill E, Laflamme R., Theory of quantum error-correcting codes, Physical Review A., 55(2):900– 911., 1997
- [45] Joschka Roffe. [Quantum Error Correction: An Introductory Guide](#). 2019/10/9.
- [46] Shor PW., Scheme for reducing decoherence in quantum computer memory., Phys Rev A. 52:R2493, 1995
- [47] Gottesman D., An introduction to quantum error correction and fault-tolerant quantum computation., arXiv:09042557. 2009.
- [48] C. Schneider, M. Strauß, T. Sünner, A. Huggenberger, D. Wiener, S. Reitzenstein, M. Kamp, S. Hofling, and A. Forchel, “Lithographic alignment to site-controlled quantum dots for device integration,” Appl. Phys. Lett. **92**, 183101 (2008).
- [49] H. Lee, J. A. Johnson, M. Y. He, J. S. Speck, and P. M. Petroff, “Strain-engineered self-assembled semiconductor quantum dot lattices,” Appl. Phys. Lett. **78**, 105-107 (2001).
- [50] M. Gschrey, F. Gericke, A. Schüßler, R. Schmidt, J.-H. Schulze, T. Heindel, S. Rodt, A. Strittmatter, and S. Reitzenstein, “In situ electron-beam lithography of deterministic single-quantum-dot mesa-structures using low-temperature cathodoluminescence spectroscopy,” Appl. Phys. Lett. **102**, 251113 (2013).

- [51] Kathryn E. Sautter, Kevin D. Vallejo, and Paul J. Simmonds, "Strain-driven quantum dot self-assembly by molecular beam epitaxy" , *Journal of Applied Physics* **128**, 031101 (2020).
- [52] D. P. DiVincenzo, "The Physical Implementation of Quantum Computation," *Fortschritte der Physik* 48 (9–11), 771 (2000).
- [53] M. Kroutvar, Y. Ducommun, D. Heiss, M. Bichler, D. Schuh, G. Abstreiter & J. J. Finley, "Optically programmable electron spin memory using semiconductor quantum dots," *Nature* 432, 81 (2004).
- [54] A. Greilich, D. R. Yakovlev, A. Shabaev, Al. L. Efros, I. A. Yugova, R. Oulton, V. Stavarache, D. Reuter, A. Wieck, M. Bayer, "Mode Locking of Electron Spin Coherences in Singly Charged Quantum Dots," *Science* 313, 5785:341 (2006).
- [55] X Xu, W Yao, B Sun, D. G. Steel, A. S. Bracker, D. Gammon, L. J. Sham, "Optically controlled locking of the nuclear field via coherent dark-state spectroscopy," *Nature* 459, 1105 (2009).
- [56] D. Press, K. De Greve, P. McMahon, et al., "Ultrafast optical spin echo in a single quantum dot," *Nature Photon* 4, 367 (2010).
- [57] D. Press, T. Ladd, B. Zhang, Y. Yamamoto , "Complete quantum control of a single quantum dot spin using ultrafast optical pulses," *Nature* 456, 218–221 (2008).
- [58] D. Kim, S. Carter, A. Greilich, A.S. Bracker, D. Gammon, "Ultrafast optical control of entanglement between two quantum-dot spins," *Nature Phys* 7, 223 (2011).
- [59] H. Drexler, D. Leonard, W. Hansen, J. P. Kotthaus, and P. M. Petroff, "Spectroscopy of Quantum Levels in Charge-Tunable InGaAs Quantum Dots," *Phys. Rev. Lett.* **73**, 2252 (1994).
- [60] R. J. Warburton, C. Schäfflein, D. Haft, F. Bickel, A. Lorke, K. Karrai, J. M. Garcia, W. Schoenfeld & P. M. Petroff, "Optical emission from a charge-tunable quantum ring," *Nature* **405**, 926 (2000).
- [61] Prousalis, Konstantinos, et al. "Noise investigation in a spin-based four-qubit GaAs block of self-assembled quantum dots." *AIP Advances* 11.6 (2021): 065126.
- [62] J. Houel, A. V. Kuhlmann, L. Greuter, F. Xue, M. Poggio, B. D. Gerardot, P. A. Dalgarno, A. Badolato, P. M. Petroff, A. Ludwig, D. Reuter, A. D. Wieck, and R. J. Warburton, "Probing Single-Charge Fluctuations at a GaAs/AlAs Interface Using Laser Spectroscopy on a Nearby InGaAs Quantum Dot," *Phys. Rev. Lett.* **108**, 107401 – Published 2012; Erratum *Phys. Rev. Lett.* 108, 119902 (2012).
- [63] Kuhlmann, A., Houel, J., Ludwig, A. et al. Charge noise and spin noise in a semiconductor quantum device. *Nature Phys* 9, 570–575 (2013).