Universidad de Granada

Grado en Estadística

Cálculo de funciones de densidad condicionadas de vectores aleatorios

---

Miguel Anguita Ruiz

Curso 2017/18

Índice

1. Ejercicios **3**

Ejercicios

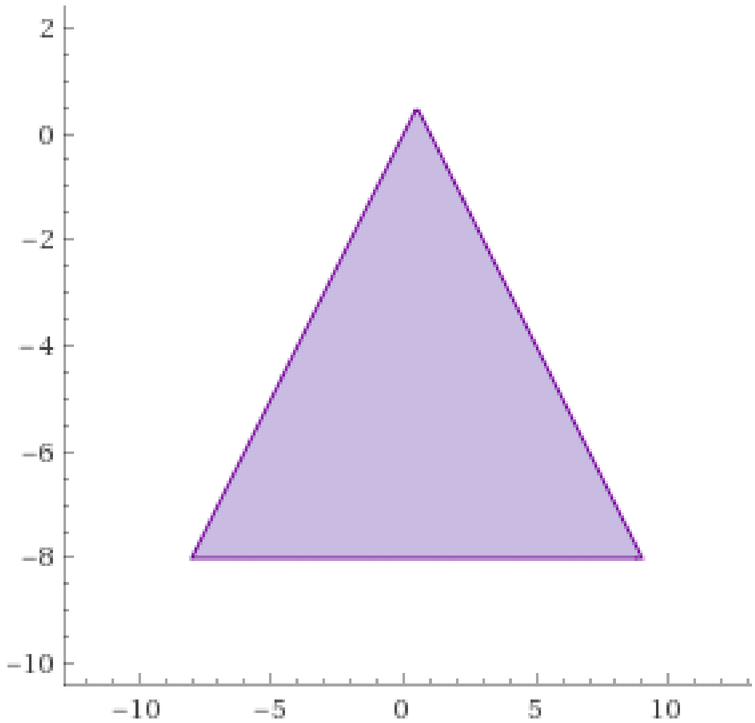
DNI: 77149477W

Ejercicio 1.1. Sea (X,Y) un vector aleatorio continuo con la función de densidad conjunta que se muestra a continuación:

$$f(x,y) = \frac{4}{289}, \quad y < x < 1-y, \quad -8 < y < 0{,}5$$

Obtener la función de densidad de y condicionada a un valor x_0 , así como la función de densidad de x condicionada a un valor y_0. A través de esas funciones de densidad condicionadas, calcular $P(Y > -3{,}38|X = 3{,}81)$ y $P(X < 3{,}81|Y = -3{,}38)$.

Solución. .



Calculo primero la función de densidad marginal de X:

$$f_1(x) = \begin{cases} \displaystyle\int_{-8}^{x} \frac{4}{289}\, dy = \frac{4}{289}\int_{-8}^{x} 1\, dy = \frac{4}{289}(x+8) = \frac{4}{289}x + \frac{32}{289}, & -8 < x < 0{,}5 \\ \displaystyle\int_{-8}^{1-x} \frac{4}{289}\, dy = \frac{4}{289}\int_{-8}^{1-x} 1\, dy = \frac{4}{289}(9-x) = \frac{36}{289} - \frac{4}{289}x, & 0{,}5 \le x < 9 \end{cases} \tag{1}$$

Por otra parte, calculo la función de densidad de Y:

$$f_2(y) = \int_y^{1-y} \frac{4}{289}\, dx = \frac{4}{289} \int_y^{1-y} 1\, dx = \frac{4}{289}(1-2y) = \frac{4}{289} - \frac{8}{289}y, \;\; -8 < y < 0{,}5 \tag{2}$$

Calculo ahora las densidades condicionadas a ciertos valores x_0, y_0.

$$f_{Y/X=x_0}(y/x_0) = \frac{f(x_0,y)}{f_X(x_0)} = \begin{cases} \frac{\frac{4}{289}}{\frac{4x_0+32}{289}} = \frac{4}{4x_0+32} = \frac{1}{x_0+8}, & -8 < x_0 < 0{,}5 \\ \frac{\frac{4}{289}}{\frac{36-4x_0}{289}} = \frac{4}{36-4x_0} = \frac{1}{9-x_0}, & 0{,}5 \leq x_0 < 9 \end{cases} \quad -8 < y < 0{,}5 \tag{3}$$

$$f_{X/Y=y_0}(x/y_0) = \frac{f(x,y_0)}{f_Y(y_0)} = \frac{\frac{4}{289}}{\frac{4-8y_0}{289}} = \frac{4}{4-8y_0} = \frac{1}{1-2y_0}, \;\; -8 < y_0 < 0{,}5, \; -8 < x < 9 \tag{4}$$

Finalmente, calculamos las probabilidades condicionadas deseadas:

$$P(Y > -3{,}38 | X = 3{,}81) = \int_{-3,38}^{+\infty} f_{Y/X=3,81}(y)\, dy = \int_{-3,38}^{1-x} \frac{1}{9-3{,}81} dy = \int_{-3,38}^{-2,81} \frac{1}{5{,}19} dy = \frac{1}{5{,}19}(-2{,}81 + 3{,}38) = 0{,}1098 \tag{5}$$

$$P(X < 3{,}81 | Y = -3{,}38) = \int_{-\infty}^{3,81} f_{X/Y=-3,38}(x)\, dx = \int_{y}^{3,81} \frac{1}{1-2*(-3{,}38)} dx = \int_{-3,38}^{3,81} \frac{1}{7{,}76} dx = \frac{1}{7{,}76}(3{,}81 + 3{,}38) = 0{,}927 \tag{6}$$