

UNIVERSIDAD DE GRANADA

---

## Cálculo II: ejercicios

---

Miguel Anguita Ruiz

Curso 2017/18

## Índice

1. Relación 1	3
---------------	---

## Relación 1

**Ejercicio 1.1.** Asociado al experimento aleatorio del lanzamiento de dos monedas y la observación de sus resultados, describir el vector aleatorio  $X = (X_1, X_2)$  con:

$X_1$  = Número de rachas de resultados iguales.

$X_2$  = Diferencia en valor absoluto entre número de caras y cruces.

especificando los elementos del espacio probabilístico  $(\Omega, A, P)$ .

Calcular los conjuntos  $X^{-1}((-\infty, x_1] \times (-\infty, x_2]) \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$

Calcular la función de distribución de dicho vector aleatorio.

*Solución.* .

El espacio de probabilidad  $(\Omega, A, P)$  que definiremos es el siguiente:

$\Omega = \{CC, CX, XC, XX\}$  tal que C = sale cara, X = sale cruz.

$A = P(\Omega)$  y  $P(\omega) = \frac{1}{4} \forall \omega \in \Omega$

Definimos el vector aleatorio  $X = (X_1, X_2)$  de esta forma:

$$X_1 = \begin{cases} 0 & : \omega \in \{CX, XC\} \\ 1 & : \omega \in \{CC, XX\} \end{cases} \quad (1)$$

$$X_2 = \begin{cases} 0 & : \omega \in \{CX, XC\} \\ 2 & : \omega \in \{CC, XX\} \end{cases} \quad (2)$$

Por tanto:  $X = (X_1, X_2) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$

$CC \rightarrow (1, 2)$

$XX \rightarrow (1, 2)$

$CX \rightarrow (0, 0)$

$XC \rightarrow (0, 0)$

Por otra parte, los conjuntos  $X^{-1}((-\infty, x_1] \times (-\infty, x_2]) \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$  son los siguientes:

$$X^{-1}((-\infty, x] \times (-\infty, y]) = \emptyset \in A \quad \forall x, y < 0$$

$$X^{-1}((-\infty, 0] \times (-\infty, 2]) = X^{-1}((-\infty, 1] \times (-\infty, 0]) = \{CX, XC\} \in A$$

$$X^{-1}((-\infty, 1] \times (-\infty, 2]) = \Omega \in A$$

Por último, la función de distribución es la siguiente:

$$F(x, y) = \begin{cases} 0 : x < 0 \vee y < 0 \\ \frac{1}{2} : x \geq 1 \wedge 0 \leq y < 1 \\ \frac{1}{2} : 0 \leq x < 1 \wedge y \geq 2 \\ 1 : x \geq 1 \wedge y \geq 2 \end{cases} \quad (3)$$

**Ejercicio 1.2.** Definir un experimento aleatorio cualquiera, especificando los elementos del espacio probabilístico  $(\Omega, A, P)$ , y describir adecuadamente sobre él un vector aleatorio discreto  $X = (X_1, X_2, \dots, X_n)$  (con  $n$  siendo una cifra a tu elección) que mida una serie de características del experimento. Asimismo, calcular la función de distribución de dicho vector aleatorio.

*Solución.* .

El experimento consiste en lo siguiente. Tenemos dos urnas llenas de bolas, en una urna hay 2 bolas: una blanca y una roja no numeradas. En la otra urna hay 3 bolas numeradas del 1 al 3 (color no importa). Cojo 2 bolas con reemplazamiento, una de cada urna.

El espacio de probabilidad  $(\Omega, A, P)$  que definiremos es el siguiente:

$\Omega = \{1B, 2B, 3B, 1R, 2R, 3R\}$  tal que  $iB$  = cojo bola blanca y con número  $i$ ,  $iR$  = cojo bola roja y con número  $i$  para  $i = 1, 2, 3$

$A = P(\Omega)$  y  $P(\omega) = \frac{1}{6} \forall \omega \in \Omega$

Definimos el vector aleatorio  $X = (X_1, X_2)$  de esta forma:

$$X_1 = \begin{cases} 1 : \omega \in \{1B, 1R\} \\ 2 : \omega \in \{2B, 2R\} \\ 3 : \omega \in \{3B, 3R\} \end{cases} \quad (4)$$

$$X_2 = \begin{cases} e : \omega \in \{1B, 2B, 3B\} \\ \pi : \omega \in \{1R, 2R, 3R\} \end{cases} \quad (5)$$

Por tanto:  $X = (X_1, X_2) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$

$1B \rightarrow (1, e)$

$1R \rightarrow (1, \pi)$

$2B \rightarrow (2, e)$

$2R \rightarrow (2, \pi)$

## Relación 1

$$3B \rightarrow (3, e)$$

$$3R \rightarrow (3, \pi)$$

Por otra parte, los conjuntos

$$X^{-1}((-\infty, x_1] \times (-\infty, x_2]) = \begin{cases} \emptyset : x_1 < 1 \vee x_2 < e \\ \{1B\} : 1 \leq x_1 < 2, e \leq x_2 < \pi \\ \{1B, 1R\} : 1 \leq x_1 < 2, x_2 \geq \pi \\ \{1B, 2B\} : 2 \leq x_1 < 3, e \leq x_2 < \pi \\ \{1B, 2B, 3B\} : x_1 \geq 3, e \leq x_2 < \pi \\ \{1B, 1R, 2B, 2R\} : 2 \leq x_1 < 3, x_2 \geq \pi \\ \Omega : x_1 \geq 3, x_2 \geq \pi \end{cases} \quad (6)$$

se definen de esta manera.

Por último, la función de distribución es la siguiente:

$$P(X^{-1}((-\infty, x_1] \times (-\infty, x_2])) = \begin{cases} P(\emptyset) = 0 : x_1 < 1 \vee x_2 < e \\ P(\{1B\}) = \frac{1}{6} : 1 \leq x_1 < 2, e \leq x_2 < \pi \\ P(\{1B, 1R\}) = \frac{1}{3} : 1 \leq x_1 < 2, x_2 \geq \pi \\ P(\{1B, 2B\}) = \frac{1}{3} : 2 \leq x_1 < 3, e \leq x_2 < \pi \\ P(\{1B, 2B, 3B\}) = \frac{1}{2} : x_1 \geq 3, e \leq x_2 < \pi \\ P(\{1B, 1R, 2B, 2R\}) = \frac{2}{3} : 2 \leq x_1 < 3, x_2 \geq \pi \\ P(\Omega) = 1 : x_1 \geq 3, x_2 \geq \pi \end{cases} \quad (7)$$

**Ejercicio 1.3.** Dar la expresión de las siguientes probabilidades en términos de la función de distribución para un vector aleatorio  $X = (X_1, X_2)$ .

*Solución.* .

$$P(a < X_1 < b, c < X_2 < d) = F(b^-, d^-) - F(b^-, c) - F(a, d^-) + F(a, c)$$

$$P(a \leq X_1 < b, c < X_2 < d) = F(b^-, d^-) - F(b^-, c) - F(a^-, d^-) + F(a^-, c)$$

$$P(a < X_1 \leq b, c < X_2 < d) = F(b, d^-) - F(b, c) - F(a, d^-) + F(a, c)$$

$$P(a \leq X_1 \leq b, c < X_2 < d) = F(b, d^-) - F(b, c) - F(a^-, d^-) + F(a^-, c)$$

$$P(a < X_1 < b, c \leq X_2 < d) = F(b^-, d^-) - F(b^-, c^-) - F(a, d^-) + F(a, c^-)$$

$$P(a \leq X_1 < b, c \leq X_2 < d) = F(b^-, d^-) - F(b^-, c^-) - F(a^-, d^-) + F(a^-, c^-)$$

$$P(a < X_1 \leq b, c \leq X_2 < d) = F(b, d^-) - F(b, c^-) - F(a, d^-) + F(a, c^-)$$

$$P(a \leq X_1 \leq b, c \leq X_2 < d) = F(b, d^-) - F(b, c^-) - F(a^-, d^-) + F(a^-, c^-)$$

$$P(a < X_1 < b, c < X_2 \leq d) = F(b^-, d) - F(b^-, c) - F(a, d) + F(a, c)$$

$$P(a \leq X_1 < b, c < X_2 \leq d) = F(b^-, d) - F(b^-, c) - F(a^-, d) + F(a^-, c)$$

$$P(a < X_1 \leq b, c < X_2 \leq d) = F(b, d) - F(b, c) - F(a, d) + F(a, c)$$

## Relación 1

$$P(a \leq X_1 \leq b, c < X_2 \leq d) = F(b, d) - F(b, c) - F(a^-, d) + F(a^-, c)$$

$$P(a < X_1 < b, c \leq X_2 \leq d) = F(b^-, d) - F(b^-, c^-) - F(a, d) + F(a, c^-)$$

$$P(a \leq X_1 < b, c \leq X_2 \leq d) = F(b^-, d) - F(b^-, c^-) - F(a^-, d) + F(a^-, c^-)$$

$$P(a < X_1 \leq b, c \leq X_2 \leq d) = F(b, d) - F(b, c^-) - F(a, d) + F(a, c^-)$$

$$P(a \leq X_1 \leq b, c \leq X_2 \leq d) = F(b, d) - F(b, c^-) - F(a^-, d) + F(a^-, c^-)$$