Universidad de Granada

Análisis Matemático II

Grado en Estadística

Curso 2017/18

Índice

El espacio euclídeo

Como punto de partida para el estudio de las funciones de varias variables reales, debemos familiarizarnos con la estructura y propiedades del espacio en el que dichas funciones tendrán su conjunto de definición, el espacio euclídeo n-dimensional, donde n es un número natural. Al tiempo que estudiamos algunas propiedades de dicho espacio, las iremos abstrayendo, para entender ciertos conceptos generales que son importantes en Análisis Matemático. Partimos de la definición de $\mathbb{R}^n$ y su estructura algebraica básica, la de espacio vectorial. Al estudiar el producto escalar en $\mathbb{R}^n$, completamos la definición del espacio euclídeo, así llamado porque formaliza analíticamente los axiomas y resultados de la geometría de Euclides.

Definición 1.1 (Espacio euclídeo). Definimos el espacio euclídeo n-dimensional como el producto cartesiano de n copias de $\mathbb{R}$, es decir, el conjunto de todas las posibles n-uplas de números reales:

$$\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \ \ x \ \ \mathbb{R} \ \ x \ \ \ldots^{(n)} \ \ x \ \ \mathbb{R} = \{(x_1, \ldots, x_n) : x_i \in R, \forall i \in 1 \ldots n\}$$

Sin embargo, no siempre es conveniente usar subíndices para denotar las componentes de los elementos de $\mathbb{R}^n$, pues podemos necesitar los subíndices para otra finalidad. Para valores concretos de n, podemos denotar las componentes con letras diferentes, siendo habitual escribir:

$$\mathbb{R}^2 = \{(x, y) : x, y \in R\}$$

$$\mathbb{R}^3 = \{(x, y, z) : x, y, z \in R\}$$

En $\mathbb{R}^n$ disponemos de las operaciones de suma y producto por escalares, definidas, para $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ y $\lambda \in \mathbb{R}$, por

$$x + y = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n)$$

$$\lambda x = (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n)$$

Proposición 1.1. Sea $n \in \mathbb{N}, x, y, z \in \mathbb{R}^n, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Entonces:

$a)$ $(x + y) + z = x + (y + z)$ (Propiedad asociativa)

$b)$ $0 = (0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^n \implies x + 0 = 0 + x = x$

$c)$ Dado $x = (x_1, \ldots, x_n) \implies \exists! v \in \mathbb{R}^n : x + v = v + x = 0 \implies v = (-x_1, \ldots, -x_n) = -x$

$d)$ $x + y = y + x$

$e)$ $1 * x = x$

$f)$ $(\lambda + \beta)x = \lambda x + \beta x$

$g)$ $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$

$h)$ $(\lambda\beta)y = \lambda(\beta y)$

Definición 1.2 (Producto escalar). Sea $n \in \mathbb{N}$. Definimos el producto escalar de $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$, $y = (y_1, ..., y_n) \in \mathbb{R}^n$ como

$$< x, y >= \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

Proposición 1.2. Sea $n \in \mathbb{N}$:

$a)$ $x, y, z \in \mathbb{R}^n \implies < x + y, z >=< x, z > + < y, z >$

$b)$ $x, y \in \mathbb{R}^n, \lambda \in \mathbb{R} \implies < \lambda x, y >= \lambda < x, y >$

$c)$ $< x, y >=< y, x > \ \forall x, y \in \mathbb{R}^n$

Proposición 1.3 (Desigualdad de Cauchy-Schwartz). Sean $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$, $y = (y_1, ..., y_n) \in \mathbb{R}^n$, entonces:

$$(< x, y >)^2 \leq (\sum_{i=1}^{n} x_i^2)(\sum_{i=1}^{n} y_i^2)$$

Demostración.
Para $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$, $y = (y_1, ..., y_n)$, es cierto que $0 \leq \sum_{i=1}^{n}(ax_i + y_i)^2 = \sum_{i=1}^{n}(a^2x_i^2 + y_i^2 + 2ax_iy_i) = a^2(\sum_{i=1}^{n} x_i^2) + (\sum_{i=1}^{n} y_i^2) + 2a(\sum_{i=1}^{n} x_iy_i)$ para todo número real y es igualdad si, y sólo si, cada término de la suma es cero. Esta desigualdad puede escribirse en la forma: $Ax^2 + Bx + C$ donde $A = \sum_{i=1}^{n} x_i^2$, $B = \sum_{i=1}^{n} x_iy_i$, $C = \sum_{i=1}^{n} y_i^2$. En particular, la desigualdad se cumple para $\frac{-B}{2A}$: $A(\frac{-B}{A})^2 + 2B(\frac{-B}{A}) + C \geq 0 \implies C \geq \frac{B^2}{2} \implies B^2 \leq AC$. □

Definición 1.3 (Norma). Dado $n \in \mathbb{N}$, $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$, se define la norma de x como:

$$||x|| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} = \sqrt{< x, x >}$$

Proposición 1.4. Sea $n \in \mathbb{N}$, $x, y \in \mathbb{R}^n$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

$a)$ $||x|| \geq 0 \wedge ||x|| = 0 \Leftrightarrow x = 0 \in \mathbb{R}^n$

$b)$ $||\lambda x|| = |\lambda| ||x||$

$c)$ $||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$ (Desigualdad triangular)

Demostración. (Desigualdad triangular)
$||x + y||^2 =< x + y, x + y >=< x, x > + < x, y > + < y, x > + < y, y >= ||x||^2 + ||y||^2 + 2 < x, y >$
$\leq ||x||^2 + ||y||^2 + 2||x|| ||y|| = (||x|| + ||y||)^2$ □

Definición 1.4 (Distancia). Sea $n \in \mathbb{N}, x, y \in \mathbb{R}^n$, se define la distancia de x a y como

$$d(x, y) = ||x - y||$$

Proposición 1.5. Sea $n \in \mathbb{N}, x, y \in \mathbb{R}^n$.

$a)$ $d(x, y) \geq 0 \wedge d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

$b)$ $d(x, y) = d(y, x)$

$c)$ $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$

Topología en $\mathbb{R}^n$

Definición 2.1 (Bola de centro a y radio r). Sea $n \in \mathbb{N}, a \in \mathbb{R}^n, r > 0$. Se definen las bolas abiertas, cerradas y esferas, respectivamente, de centro a y radio r como:

$$B(a, r) = \{x \in \mathbb{R}^n : d(x, y) < r\}$$

$$\overline{B}(a, r) = \{x \in \mathbb{R}^n : d(x, y) \leq r\}$$

$$S(a, r) = \{x \in \mathbb{R}^n : d(x, y) = r\}$$

Definición 2.2 (Sucesión convergente en $\mathbb{R}^n$). Sea $n \in \mathbb{N}$, y $\{x_n\}$ una sucesión convergente en $\mathbb{R}^n$. Diremos que $\{x_n\}$ es convergente hacia un límite $a \in \mathbb{R}^n$ si

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists m \in \mathbb{N} : n \geq m \implies d(x_n, a) < \varepsilon$$

Proposición 2.1. Sea $n \in \mathbb{N}, x, y \in \mathbb{R}^n, \{x_n\}, \{y_n\}$ dos sucesiones en $\mathbb{R}^n$.

$a)$ $\{x_n\} \to x, \{x_n\} \to y \implies x = y$ (Unicidad de límites)

$b)$ $\{x_n\} \to x, \{y_n\} \to y \implies \{x_n + y_n\} \to x + y$

$c)$ $\{x_n\} \to x, \lambda \in \mathbb{R} \implies \{\lambda x_n\} \to \lambda x$

$d)$ $\{x_n\}$ converge $\implies$ $\{x_n\}$ acotada. ($\exists M \in \mathbb{N} : ||x_n|| \leq M\ \forall n \in N$) (Acotación)

$e)$ $\{x_n\} \to x, \{y_n\} \to y \implies \{< x_n, y_n >\} \to < x, y >$

$f)$ $\{x_n\} \to x \implies \{||x_n||\} \to ||x||$

Demostración. (Unicidad de límites)

Supongamos $\{x_n\} \to x, \{x_n\} \to y$. Fijo $\varepsilon > 0$ y demuestro $||x - y|| < \varepsilon \implies ||x - y|| = 0 \implies x = y$.

Dado $\varepsilon > 0, \{x_n\} \to x \implies \exists m_1 \in \mathbb{N} : ||x_n - x|| < \frac{\varepsilon}{2}\ \forall n \geq m_1$ y $\exists m_2 \in \mathbb{N} : ||x_n - y|| < \frac{\varepsilon}{2}\ \forall n \geq m_2$. Tomo $n \geq max\{m_1, m_2\} \implies ||x - y|| = ||(x - x_n) + (x_n - y)|| \leq ||x_n - x|| + ||x_n - y|| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \implies x = y$ $\square$

Demostración. (Acotación)

Supongamos $\{x_n\} \to x \implies \exists m \in \mathbb{N} : ||x_n - x|| < 1 \ \forall n \geq m \implies ||x_n|| \leq 1 + ||x|| \implies ||x_n|| \in max\{||x_1||, ||x_2||, ..., ||x_m||, 1 + ||x|| = M\}$ □

Proposición 2.2. Sea $N \in \mathbb{N}$. Tomo $\{x_n\} \to x \in \mathbb{R}^N$con $x = (x^1, ..., x^N), x_n = (x_n^1, ..., x_n^N)$. Entonces

$$\{(x_n^1, ..., x_n^N)\} \to (x^1, ..., x^N) \Leftrightarrow \{x_n^i\} \to x^i \ \forall i \in \{1...N\}$$

Demostración. POR HACER □

Definición 2.3 (Interior, adherente y frontera). Sea $n \in \mathbb{N}, A \subseteq \mathbb{R}^n$. Entonces:

a) Un punto $x \in \mathbb{R}^n$ es adherente a A si $\forall \varepsilon > 0, B(x, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset \implies \overline{A} = \{x_n \in \mathbb{R}^n : x$ adherente a $A\}$ y A cerrado si $A = \overline{A}$.

$b)$ Un punto $a \in A$ es interior a A si $\exists r > 0 : B(a, r) \subseteq A$. Denotaremos $\mathring{A} = \{a \in A : a$ interior a $A\}$ y A abierto si $A = \mathring{A}$.

$c)$ Un punto $x \in \mathbb{R}^n$ es frontera de A si $x \in \overline{A}$ pero $x \notin \mathring{A}$. Denotaremos $Fr(A) = \{x \in \mathbb{R}^n : x$ es frontera de $A\}$

Ejemplo 2.1. .

$a)$ $A = [0, 1[\cup \{4\} \implies \overline{A} = [0, 1] \cup \{4\}, \ \mathring{A} =]0, 1[, \ Fr(A) = \{0, 1, 4\}$

$b)$ $A = B(a, r) \implies \overline{A} = \overline{B}(a, r), \ \mathring{A} = A, \ Fr(A) = \overline{B}(a, r) - B(a, r)$ DEMOSTRAR

Proposición 2.3 (Caracterización secuencial de la topología). Sea $n \in \mathbb{N}, A \subseteq \mathbb{R}^n$. Entonces:

$a)$ Un punto $x \in \mathbb{R}^n$ es adherente a A si $\Leftrightarrow \exists\{x_n\} \to x : \{x_n\} \in A \ \forall n \in \mathbb{N}$

$b)$ Un punto $a \in A$ es interior $\Leftrightarrow \ \forall\{x_n\} \to a, x_n \in \mathbb{R}^n \implies \exists m \in \mathbb{N} : \ \forall n \geq m, \ x_n \in A$

$c)$ Un punto $x \in \mathbb{R}^n$ es frontera de A si $\Leftrightarrow \exists\{x_n\} \to x : \{x_n\} \in A \ \forall n \in \mathbb{N} \wedge \{y_n\} \to x : \{y_n\} \notin A \ \forall n \in \mathbb{N}$

Demostración. . (Apartado a)

$\Rightarrow$

$\forall n \in \mathbb{N} \ \exists x_n \in B(x, \frac{1}{n}) \cap A$ por ser x adherente $\implies \{x_n\} \subseteq A$. Además, $d(x_n, x) \leq \frac{1}{n} \wedge \{\frac{1}{n}\} \to 0 \implies \{x_n\} \to x$.

$\Leftarrow$

Sea $\varepsilon > 0, \{x_n\} \to x \implies \exists n \in \mathbb{N} : d(x_n, x) < \varepsilon \implies x_n \in B(x, \varepsilon)$ y $x_n \in A$ por hipótesis $\implies x_n \in B(x, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset \implies x \in \overline{A}$.

□

Proposición 2.4. Sea $n \in \mathbb{N}$:

a) Los conjuntos abiertos cumplen las siguientes propiedades:

- $\varnothing, \mathbb{R}^n$ son abiertos
- Si $A_1, \ldots, A_n$ abiertos $\implies \bigcap_{k=1}^{n} A_k$ abierto.
- Si $\{A_\alpha : \alpha \in \wedge\}$ es una familia de abiertos $\implies \bigcup_{\alpha \in \wedge} A_\alpha$ abierto.

b) Un conjunto $A \subseteq \mathbb{R}^n$ es abierto $\Leftrightarrow \mathbb{R}^n / A$ es cerrado.

c) Los cerrados cumplen:

- $\varnothing, \mathbb{R}^n$ son cerrados
- Si $F_1, \ldots, F_n$ cerrados $\implies \bigcup_{k=1}^{n} F_k$ cerrado.
- Si $\{F_\alpha : \alpha \in \wedge\}$ es una familia de cerrados $\implies \bigcap_{\alpha \in \wedge} F_\alpha$ cerrado.

Demostración. . (Apartado b)

$\Rightarrow$

Tomo $x \in \overline{\mathbb{R}^n / A} \implies \forall \varepsilon > 0,\ B(x, \varepsilon) \cap (\mathbb{R}^n / A) \neq \varnothing \implies B(x, \varepsilon) \not\subseteq A \implies x \notin \mathring{A} = A \implies x \in \mathbb{R}^n / A \implies \mathbb{R}^n$ es cerrado.

$\Leftarrow$

Suponemos $\mathbb{R}^n / A$ cerrado y tomo $a \in A \implies a \notin \mathbb{R}^n / A = \overline{\mathbb{R}^n / A} \implies \exists r > 0 : B(a, r) \cap (\mathbb{R}^n / A) = \varnothing \implies B(a, r) \subseteq A \implies a \in \mathring{A} \implies A$ abierto. □

Definición 2.4 (Sucesión parcial). Sea $n \in \mathbb{N}$, $\{x_n\} \subseteq \mathbb{R}^n$. Una sucesión parcial de $\{x_n\}$ es otra sucesión $\{x_{\sigma(n)}\}$ donde $\sigma : N \to N$ es creciente.

Definición 2.5 (Conjunto compacto). Sea $n \in \mathbb{N}$, $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Diremos que A es compacto si $\forall \{x_n\} \subseteq A$, $\exists \{x_{\sigma(n)}\} \to x \in A$.

Proposición 2.5. Sea $n \in \mathbb{N}$, $A \subseteq \mathbb{R}^n$ compacto. Entonces A es cerrado y acotado.

Demostración. .

Demostremos que A es cerrado. Tomo $x \in \overline{A}$, hay que ver si $x \in A$. Como $x \in \overline{A} \implies \exists \{x_n\} \to x$, $\{x_n\} \in A$. Como A es compacto $\implies \exists \{x_{\sigma(n)}\} \to a \in A$. Por las propiedades de las sucesiones parciales, $\{x_{\sigma(n)}\} \to x \implies x = a \in A$ por unicidad de límites. Es decir, A es cerrado.

Demostremos que A es acotado. Supongamos, por reducción al absurdo, que A no es acotado. Entonces $\forall n \in \mathbb{N}\, \exists x_n \in A : ||x_n|| > M$, $M \in \mathbb{N}$. Tenemos que $\{x_n\}$ no tiene parciales acotadas, luego no tiene parciales convergentes, en contradicción con la definición de compacidad. Es decir, A es acotado. □

Teorema 2.1 (Teorema de Bolzano-Weirstrass n-dimensional). Sea $n \in \mathbb{N}$. Entonces, toda sucesión acotada admite una parcial convergente.

Demostración. COMPLETAR MÁS ADELANTE □

Teorema 2.2. Sea $n \in \mathbb{N}$, $A \subseteq \mathbb{R}^n$ cerrado y acotado. Entonces, A es compacto.

Demostración. Tomo $\{x_n\} \subseteq A$. Como A es acotado $\implies$ $\{x_n\}$ acotada. $\implies$ $\{x_n\}$ tiene una parcial convergente a $x \in \mathbb{R}^n$. Como x es límite de una sucesión de puntos de $A \implies x \in \overline{A} = A$ por ser A cerrado $\implies A$ es compacto. □

Ejemplo 2.2. Dado $x \in \mathbb{R}^n, r > 0 \implies A = B(x, r)$ es compacto.

Demostración. Veamos que la bola es cerrada y acotada.

A es trivialmente acotado, pues $A \subseteq \overline{B}(0, ||x|| + r)$. Demostremos que es cerrado. Sabemos que $A = \{y \in R^n : ||x - y|| \leq r\}$, veamos que $\mathbb{R}^n/A = \{y \in \mathbb{R}^n : ||x - y|| > r\}$ es abierto. Para ver que es abierto, tomo $y \in \mathbb{R}^n/A$ y $\{y_n\} \to y$, $y_n \in A$. Como $\{y_n\} \to y \implies \{y_n - x\} \to y - x \implies \{||y_n - x||\} \to ||y - x|| > r \implies \exists m : \forall n \geq m \implies ||y_n - x|| > r \implies y_n \in \mathbb{R}^n/A\ \forall n \geq m \implies \mathbb{R}^n/A$ es abierto, luego A es cerrado. □

Continuidad

Generalizando lo que conocemos para funciones reales de variable real, vamos a estudiar las nociones de límite y continuidad para funciones entre dos espacios métricos cualesquiera. Las definimos de forma que quede claro que se trata de nociones topológicas. Analizamos con detalle el carácter local de ambas nociones, aclaramos la relación entre ellas y comprobamos que la composición de aplicaciones preserva la continuidad. Al considerar el límite de una composición de funciones, obtenemos una regla de cambio de variable, útil en la práctica para el cálculo de límites. Prestamos especial atención al caso particular de funciones definidas en un subconjunto de $\mathbb{R}^n$ y con valores en $\mathbb{R}^m$ donde $m \in \mathbb{N}$, que se denominan campos escalares cuando $m = 1$, o campos vectoriales cuando $m > 1$.

Definición 3.1 (Continuidad en un punto). Sea $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}^n$. f es continua en a si

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : \|x - a\| < \delta \implies \|f(x) - f(a)\| < \varepsilon$$

Por lo tanto, f es continua en A si en continua en todos sus puntos. Tambien puede demostrarse que la suma, producto, composiciones y restricciones de funciones, entre ellas, son funciones continuas (Se deja como ejercicio al lector.)

También son continuas las funciones racionales en todo su dominio, es decir, donde el denominador sea distinto de 0.

Proposición 3.1 (Carácter local de la continuidad). Sea $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $a \in B, a \in \mathring{B}$. Si $f_{|B}$ es continua en $a \implies f$ es continua en a.

Demostración. .
Por la continuidad, $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta_1 > 0 : \|x - a\| < \delta_1 \implies \|f(x) - f(a)\| < \varepsilon\ \forall x \in B$. Tengo que ver que $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta_2 > 0 : \|x - a\| < \delta_2 \implies \|f(x) - f(a)\| < \varepsilon\ \forall x \in A$

Como $a \in \mathring{B} \implies \exists r > 0 : B(a, r) \subseteq B \implies$ Si $x \in A, \|x - a\| < r \implies x \in B$. Sea $d_2 = min\{d_1, r\} \implies$ Si $x \in A, \|x - a\| < d_2 \implies \|x - a\| < r \implies x \in B$ y $\|x - a\| < d_2 \implies \|f(x) - f(a)\| < \varepsilon$ □

Proposición 3.2 (Caracterización secuencial de la continuidad). Sean $m, n \in \mathbb{N}, A \subseteq \mathbb{R}^n$ no vacío y $f : A \to \mathbb{R}^m$ una función. Son equivalentes:

- f es continua en a.
- $\forall \{x_n\} \to a, x_n \in A \implies \{f(x_n)\} \to f(a)$

Demostración. .
$2 \implies 1$.
Por contrarrecíproco, probamos $\neg 1 \implies \neg 2$. Supongamos que f no es continua, entonces $\exists \varepsilon_0 > 0\ \forall \delta > 0 :$ $\exists x \in A\ \|x - a\| < \delta \implies \|f(x) - f(a)\| \geq \varepsilon_0$.

Para $\delta = \frac{1}{n} \implies \exists \{x_n\} : \|x_n - a\| < \frac{1}{n} \implies \|f(x_n) - f(a)\| \geq \varepsilon_0$. Tenemos que $\{x_n\} \to a$ pero $\{f(x_n)\} \nrightarrow f(a)$, como queríamos demostrar. □

Proposición 3.3 (Continuidad y compacidad). Sean $m, n \in \mathbb{N}$, $K \subseteq \mathbb{R}^n$ compacto y $f : K \to \mathbb{R}^m$ continua. Entonces $f(K) = \{f(x) : x \in K)\}$ es compacto.

Demostración. .

Sea $\{y_n\} \subseteq K$. Por definición, $\forall n \in \mathbb{N}\, \exists x_n \in K : y_n = f(x_n)$. Como $x_n \in K$ compacto $\implies \exists \{x_{\sigma(n)}\} \to x \in K$.

Por la caracterización secuencial de la continuidad $\implies \{f(x_{\sigma(n)})\} \to f(x)$. Si $y = f(x) \in f(K) \implies \{y_{\sigma(n)}\} \to y \implies f(K)$ es compacto. □

Teorema 3.1 (Teorema de Weirstrass). Sean $n \in \mathbb{N}$, $K \subseteq \mathbb{R}^n$ compacto y $f : K \to \mathbb{R}$ continua. Entonces f tiene máximo y mínimo.

Demostración. .

Como $f(K) \subseteq \mathbb{R}$ y $f(K)$ es compacto por la proposición anterior, f alcanza su máximo y mínimo. □

Ejemplo 3.1. Sea $K = \{(\frac{x^2+8}{e^{x+y^2}}, x^2 + y^3) : (x, y) \in B(0, 1)\}$ y $f : K \to \mathbb{R} : f(x, y) = y - sen(x, y)$.

Demostración. .

Sabemos que f es continua por ser suma de continuas. Por otra parte, K es compacto pues $K = G(B(0, 1))$ con $G : \overline{B} \to \mathbb{R}^2$ tal que $G(x, y) = (\frac{x^2+8}{e^{x+y^2}}, x^2 + y^3)$ continua. Por ello, $f(K)$ es compacto. □

Proposición 3.4. Sean $m, n \in \mathbb{N}$, $A \subseteq \mathbb{R}^n$ no vacío y $f : A \to \mathbb{R}^m$ una función. Son equivalentes:

- f es continua en A.
- Dado $O \subseteq \mathbb{R}^m$ abierto $\implies f^{-1}(O)$ es abierto relativo de A.

Demostración. .

$1 \implies 2$

Sea $O \subseteq \mathbb{R}^m$ abierto, veamos $f^{-1}(O)$ es abierto. Tomamos $a \in f^{-1}(O)$. Como $f(a) \in O$ y O abierto $\implies f(a) \in \mathring{O} \implies \exists \varepsilon > 0 : B(f(a), \varepsilon) \subseteq O$.

Como f es continua $\implies \exists \delta > 0 : f(B(a, \delta) \cap A) \subseteq B(f(a), \varepsilon)$. Tomando imagen inversa, entonces: $B(a, \delta) \subseteq f^{-1}(f(B(a, \delta) \cap A) \subseteq f^{-1}(B(f(a), \varepsilon)) \subseteq f^{-1}(O)$, luego $f^{-1}(O)$ es abierto relativo de A. □

Definición 3.2 (Conjunto conexo). Sea $n \in \mathbb{N}$, $A \subseteq \mathbb{R}^n$ no vacío. Diremos que A es conexo si dados dos abiertos O_1, O_2 relativos de A tal que $O_1 \cup O_2 = A$, $O_1 \cap O_2 = \varnothing \implies O_1 = \varnothing$ o $O_2 = \varnothing$.

Ejemplo 3.2. $\mathbb{R}/\{0\}$ no es conexo, pues $\mathbb{R} =]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$

Ejemplo 3.3. $\mathbb{R}^n/\{0\}$ es conexo para $n \geq 2$.

Proposición 3.5. Sea $A \in \mathbb{R}$ no vacío. Entonces A es conexo $\iff A$ es un intervalo.

Demostración. .

$\boxed{\Leftarrow}$ Trivial.

$\boxed{\Rightarrow}$ Supongamos que A no es un intervalo. Entonces $\exists x, y \in A : x < z < y, z \notin A \implies A = (]-\infty, z[\cap A) \cup (]z, +\infty[\cap A) \implies A$ no es conexo. □

Definición 3.3 (Conjunto arcoconexo). Un conjunto $A \subseteq \mathbb{R}^n$ es arcoconexo si $\forall x, y \in A$ con $x \neq y, \exists \gamma : [0, 1] \to \mathbb{R}^n$ continua tal que $\gamma(0) = x, \gamma(1) = y$ con $\gamma(t) \in A \; \forall t$.

Proposición 3.6. Los conjuntos arcoconexos son conexos.

Demostración. .

Probémoslo por el contrarrecíproco. Supongamos que A no es conexo. Si $A = O_1 \cup O_2$ es una partición no trivial, tomamos $x \in O_1, y \in O_2$ uniendo los abiertos. Tomamos $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{R}^n$ tal que $I_1 = \gamma^{-1}(O_1)$ y $I_2 = \gamma^{-1}(O_2)$. Por ser γ continua, I_1 Y I_2 son abiertos relativos de $[0, 1]$. Además, $[0, 1] = I_1 \cup I_2$ y $I_1 \cap I_2 = \emptyset$.

Si $s = sup\{t : \gamma(t) \in O_1\} \implies s \in I_1$ pero $s \notin I_2$ luego A no es arcoconexo. □

Definición 3.4 (Conjunto convexo). Un conjunto $A \subseteq \mathbb{R}^n$ es convexo si dados $x, y \in A \implies \lambda x + (1 - \lambda) y \in A \; \forall \lambda \in [0, 1]$.

Proposición 3.7. Si A es convexo, es arcoconexo, luego también es conexo.

Demostración. Dados $x, y \in A \; \exists \gamma : [0, 1] \to \mathbb{R}^n \; \gamma(t) = tx + (1 - t)y$ □

Ejemplo 3.4. Las bolas en $\mathbb{R}^n$ son convexas.

Demostración. .

Sea $A = B(z, r)$. Veamos que A es convexo. Tomemos $x, y \in A \implies \|[\lambda x + (1 - \lambda)y] - z\| = \|\lambda x + (1 - \lambda)y - (\lambda + 1 - \lambda)z\| = \|\lambda(x - z) + (1 - \lambda)(y - z\|) \leq |\lambda|\|x - z\| + |1 - \lambda|\|y - z\| < |\lambda| r + |1 - \lambda| r = r(\lambda + 1 - \lambda) = r \implies \lambda x + (1 - \lambda) y \in A$. □

Teorema 3.2. Sean $n, m \in \mathbb{N}, A \subseteq \mathbb{R}^n$ conexo, $f : A \to \mathbb{R}^m$ continua. Entonces, $f(A)$ es conexo.

Demostración. .
Tomamos O_1, O_2 abiertos tal que $f(A) = (O_1 \cap f(A)) \cup (O_2 \cap f(A))$ y $(O_1 \cap f(A)) \cap (O_2 \cap f(A)) = \varnothing$. Entonces $A = f^{-1}(O_1) \cup f^{-1}(O_2)$ con intersección vacía y $f^{-1}(O_1)$ y $f^{-1}(O_2)$ son abiertos por ser f continua.

Como A es conexo $\implies f^{-1}(O_1) = A$ y $f^{-1}(O_2) = \varnothing$ (o viceversa). Como $f^{-1}(O_2) = \varnothing \implies O_2 \cap f(A) = \varnothing \implies f(A)$ es conexo. □

Teorema 3.3 (Teorema del Valor Intermedio). Sean $n, m \in \mathbb{N}, A \subseteq \mathbb{R}^n$ conexo, $f : A \to \mathbb{R}^m$ continua. Si $\alpha, \beta \in f(A), \alpha < \gamma < \beta \implies \gamma \in f(A)$.

Demostración. Como $f(A)$ es conexo y $f(A) \subseteq \mathbb{R} \implies A$ es un intervalo. □

Límites en $\mathbb{R}^n$

Definición 4.1. Sean $n \in \mathbb{N}, A \subseteq \mathbb{R}^n$ y $x \in \mathbb{R}^n$. Diremos que x es un punto de acumulación de A si $\forall \varepsilon > 0, (B(x, \varepsilon)/\{x\}) \cap A \neq \varnothing$. Denotaremos por $A' = \{x \in \mathbb{R}^n : x \text{ es punto de acumulación}\}$.

Definición 4.2. Sean $n \in \mathbb{N}, A \subseteq \mathbb{R}^n$ y $x \in \mathbb{R}^n$. Diremos que x es un punto aislado de A si $\exists \varepsilon_0 > 0, (B(a, \varepsilon)/\{a\}) \cap A == \varnothing$.

Ejercicios

Relación 1

Ejercicio 5.1. Sea $n \in \mathbb{N}$. Demostrar que dados $x, y \in \mathbb{R}^n$ se cumple que:

$$|\, \|x\| - \|y\| \,| \leq \|x - y\|$$

Solución. .
$||x|| = ||x - y + y|| \leq ||x - y|| + ||y||$ por la propiedad triangular $\implies ||x|| - ||y|| \leq ||x - y||$. Esto es cierto para cualquier $x, y \in \mathbb{R}^n \implies ||y|| - ||x|| \leq ||y - x|| = ||x - y||$ (Fijarse que $||y|| - ||x||$ es el opuesto de $||x|| - ||y||) \implies |\, \|x\| - \|y\| \,| \leq \|x - y\|$

Ejercicio 5.2. Sea $n \in \mathbb{N}$ y $x, y, z \in \mathbb{R}^n$. Demostrar que se cumple que:
a) $d(x, y) \geq 0 \wedge d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$.

b) $d(x,y) = d(y,x)$

c) $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$

Solución. .

a) $d(x,y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2} = \sqrt{< x-y, x-y >} \geq 0$ y la igualdad a 0 es trivial.

b) $d(x,y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(y_i - x_i)^2} = d(y,x)$

c) $d(x,y)^2 =< x-y, x-y >=< x-z+z-y, x-z+z-y >=< x-z, x-z > + < z-y, z-y > +2 < x-z, z-y >$ $\leq < x-z, x-z > + < z-y, z-y > +2\|x-z\|\|z-y\|$ por la desigualdad de Cauchy-Schwarz. $\implies <$ $x-z, x-z > + < z-y, z-y > +2\|x-z\|\|z-y\| = d(x,z)^2 + d(z,y)^2 + 2d(x,z)d(z,y) = (d(x,z)+d(z,y))^2$. En definitiva, tenemos que $d(x,y)^2 \leq (d(x,z)+d(z,y))^2 \implies |d(x,y)| \leq |d(x,z)+d(z,y)|$ y como las distancias son positivas $\implies d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$

Ejercicio 5.3. Sea $n \in \mathbb{N}$ y $x, y \in \mathbb{R}^n$. Demostrar que $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 \Leftrightarrow < x, y >= 0$

Solución. .

$\|x+y\|^2 =< x+y, x+y >=< x, x > + < y, y > +2 < x, y > \implies \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2 < x, y >= \|x\|^2 + \|y\|^2 \Leftrightarrow$ $2 < x, y >= 0 \Leftrightarrow < x, y >= 0$

Ejercicio 5.4. Sea $n \in \mathbb{N}$ y $x, y \in \mathbb{R}^n$.

a) Demostrar que existe un único $\theta \in [0, \pi]$ de manera que:

$$cos(\theta) = \frac{< x, y >}{\|x\|\|y\|}$$

A este único θ lo llamaremos el ángulo entre x e y y lo denotaremos por $\theta(x,y)$.

b) Demostrar la siguiente identidad:

$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\|x\|\|y\|cos(\theta(x,y))$$

Solución. .

a) Por la desigualdad de Cauchy-Schwarz, sabemos que $| < x, y > | \leq \|x\|\|y\| \implies \frac{|<x,y>|}{\|x\|\|y\|} \leq 1 \implies -1 \leq$ $\frac{<x,y>}{\|x\|\|y\|} \leq 1$, luego puede establecerse una aplicación biyectiva $cos : [0, \pi] \to [-1, 1]$ tal que $cos(\theta) = \frac{<x,y>}{\|x\|\|y\|}$ para $\theta \in [0, \pi]$.

b) $\|x+y\|^2 =< x+y, x+y >=< x, x > + < y, y > +2 < x, y >=< x, x > + < y, y > +2\|x\|\|y\|cos(\theta(x,y))$

Ejercicio 5.5. Sea $n \in \mathbb{N}$ y $x \in \mathbb{R}^n, \{x_n\} \in \mathbb{R}^n$. Demostrar que $\{x_n\} \to x$ si, y sólamente si, todas las sucesiones parciales de $\{x_n\}$ convergen hacia x.

Solución. .

$\boxed{\Leftarrow}$

Supongamos $\sigma(n) = n \implies \{x_n\}$ es parcial de $\{x_n\} \implies \{x_n\} \to x$.

$\boxed{\Rightarrow}$

$\forall \varepsilon > 0,\ \exists m \in \mathbb{N} : n \geq m : ||x_n - x|| < \varepsilon$. Si $n \geq m \implies \sigma(n) \geq m \implies \forall \varepsilon > 0,\ \exists m \in \mathbb{N} : \sigma(n) \geq m :$ $||x_{\sigma(n)} - x|| < \varepsilon$.

Ejercicio 5.6. Sea $A \subseteq R$ compacto. Entonces, A tiene máximo y mínimo.

Solución. .
Como A compacto, es cerrado y acotado, luego tiene supremo por ser acotado, es decir, $\exists \alpha = supA \in R \implies$ $\forall \varepsilon > 0\, \exists a \in A : a > \alpha - \varepsilon$. Sea $n \in N$, $\varepsilon = \frac{1}{n} \implies \exists a_n \in A : a_n > \alpha - \frac{1}{n} \implies \alpha - a_n < \frac{1}{n} \to 0 \implies lim a_n = \alpha$. Como A es compacto, $\exists a_{\sigma(n)} \to a \in A$, pero $a_{\sigma(n)}$ converge a α por ser parcial de una convergente a α, luego $\alpha = a$ por unicidad de límites $\implies \alpha \in A \implies \alpha = maxA$.

Probariamos lo mismo para el mínimo, con un cambio adecuado de signo.

Ejercicio 5.7. Sea $n \in \mathbb{N}$ y $\{x_n\} \in \mathbb{R}^n$. Diremos que la sucesión $\{x_n\}$ es de Cauchy si dado $\varepsilon > 0\ \exists m \in \mathbb{N}$ de manera que:

$$p, q \geq m \implies \|x_p - x_q\| < \varepsilon$$

Demostrar:

(*i*) a) Las sucesiones de Cauchy están acotadas.

(*ii*) b) Si $\{x_n\}$ es una sucesión de Cauchy y tiene una parcial $\{x_{\sigma(n)}\}$ convergente hacia un punto x, entonces $\{x_n\} \to x$.

(*iii*) c) Una sucesión $\{x_n\} \in \mathbb{R}^n$ es de Cauchy si, y sólamente si, $\{x_n\}$ es convergente (Complitud de R^n).

Solución. .
a) Sea $\varepsilon = 1 \implies \exists n_0 \in \mathbb{N} : \|x_p - x_q\| < \varepsilon\ \forall p, q \geq n_0$.
Sea $n, n_0 \geq n_0 \implies \|x_n - x_{n_0}\| < 1 \implies \{x_n : n \geq n_0\} \subseteq B(x_{n_0}, 1)$.
Sean $\alpha = sup\{\|x_n\| : n \geq n_0\}, \beta = inf\{\|x_n\| : n \geq n_0\}, M = max\{\|x_n\| : n < n_0\}, m = inf\{\|x_n\| : n < n_0\} \implies min\{\beta, m\} \leq \|x_n\| \leq max\{\alpha, M\} \implies \{x_n\}$ acotada.

b) x_n es de Cauchy $\implies \forall \varepsilon > 0\, \exists n_0 \in \mathbb{N} : \|x_p - x_q\| < \frac{\varepsilon}{2}\ \forall p, q \geq n_0$
$\{x_{\sigma(n)}\} \to x \implies \forall \varepsilon > 0\, \exists n_1 \in \mathbb{N} : \|x_{\sigma(n)} - x\| < \frac{\varepsilon}{2}\ \forall n \geq n_1$.
Sea $n \geq max\{n_0, n_1\} \implies \|x_n - x\| = \|x_n - x_{\sigma(n)} + x_{\sigma(n)} - x\| \leq \|x_n - x_{\sigma(n)}\| + \|x_{\sigma(n)} - x\| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \implies$ $\{x_n\} \to x$

c) $\boxed{\Leftarrow}$
$\{x_n\}$ converge $\implies \exists x : lim x_n = x \implies \forall \varepsilon > 0\, \exists n_0 \in \mathbb{N} : \|x_n - x\| < \frac{\varepsilon}{2}\ \forall n \geq n_0$.

Por otra parte: $\forall p, q \geq n_0 : ||x_p - x_q|| \leq ||x_p - x|| + ||x - x_q|| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \implies \{x_n\}$ es de Cauchy.

$\boxed{\Rightarrow}$

$\{x_n\}$ es de Cauchy. Entonces es acotada (por el apartado a), luego admite una parcial convergente (por Bolzano-Weirstrass). Por el apartado b, la parcial converge al mismo punto que la principal.

Referencias