Grado en Estadística, curso 2017/18
Cálculo de Probabilidades II
Resolución del Examen Parcial del Tema 1

PARTE TEÓRICA

1. *1 punto* Enunciar las caracterizaciones (con demostración) de vectores aleatorios.

   $X = (X_1, ..., X_n) : (\Omega, \mathcal{A}, P) \to (\mathbb{R}^n, \mathcal{B}^n)$ es un vector aleatorio si y sólo si

   $$X^{-1}((-\infty, x]) = \{\omega \in \Omega / X(\omega) \leq x\} = \{\omega \in \Omega / X_1(\omega) \leq x_1, ..., X_n(\omega) \leq x_n\} \in \mathcal{A}, \forall x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$$

   $X = (X_1, ..., X_n) : (\Omega, \mathcal{A}, P) \to (\mathbb{R}^n, \mathcal{B}^n)$ es un vector aleatorio si y sólo si

   $$\forall i = 1, ..., n \quad X_i : (\Omega, \mathcal{A}, P) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}) \text{ es variable aleatoria}$$

   Demostraciones:
   $\Longrightarrow$]Sea $x_i \in \mathbb{R}$:

   $$X_i^{-1}((-\infty, x_i]] = \{\omega \in \Omega / X_i(\omega) \leq x_i, X_j(\omega) \in \mathbb{R} \forall j \neq i\} = X^{-1}(\mathbb{R} \times ... \times \mathbb{R} \times (-\infty, x_i] \times ... \times \mathbb{R}) \in \mathcal{A}$$

   $\Longleftarrow$]Sea $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$:

   $$X^{-1}((-\infty, x]) = \{\omega \in \Omega / X_i(\omega) \leq x_i \forall i = 1, ..., n\} = \cap_{i=1}^n X_i^{-1}((-\infty, x_i]) \in \mathcal{A}$$

2. *1 punto* Definir la función de distribución de un vector aleatorio y enunciar sus propiedades.

   Dado $X = (X_1, ..., X_n) : (\Omega, \mathcal{A}, P) \to (\mathbb{R}^n, \mathcal{B}^n, P_X)$, se define la denominada función de distribución de X como la función

   $$\begin{array}{rccl} F_X : & \mathbb{R}^n & \to & [0, 1] \\ & x & \mapsto & F_X(x) = P_X((-\infty, x]) = P(X^{-1}((-\infty, x])) = P(X \leq x) \end{array}$$

   Propiedades de F_X

   - Es monótona no decreciente en cada argumento
   - Es continua a la derecha en cada argumento
   - $\exists \lim\limits_{x_1, ..., x_n \to +\infty} F_X(x_1, ..., x_n) = F_X(+\infty, ..., +\infty) = 1$
     $\exists \lim\limits_{x_i \to -\infty} F_X(x_1, ..., x_i, ..., x_n) = F_X(x_1, ..., x_{i-1}, -\infty, x_{i+1}, ..., x_n) = 0$
     $\forall x_1, ..., x_{i-1}, x_{i+1}, ..., x_n$
   - Sean $(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ y $(\epsilon_1, ..., \epsilon_n) \in \mathbb{R}^{n+}$

   $$F_X(x_1 + \epsilon_1, ..., x_n + \epsilon_n) - \sum_{i=1}^n F_X(x_1 + \epsilon_1, ..., x_{i-1} + \epsilon_{i-1}, x_i, x_{i+1} + \epsilon_{i+1}, ..., x_n + \epsilon_n) +$$

   $$+ \sum_{i,j=1,\ i<j}^n F_X(x_1 + \epsilon_1, ..., x_{i-1} + \epsilon_{i-1}, x_i, x_{i+1} + \epsilon_{i+1}, ..., x_{j-1} + \epsilon_{j-1}, x_j, x_{j+1} + \epsilon_{j+1}, ..., x_n + \epsilon_n) +$$

   $$+ ... + (-1)^n F_X(x_1, ..., x_n) \geq 0$$

3. *0.5 puntos* Expresar las siguientes probabilidades en términos de funciones de distribución:

   $$P(X \leq a, c \leq Y < c) = F(a, c^-) - F(a, c^-) = 0$$

   $$P(a < X < b, c \leq Y \leq d) = F(b^-, d) - F(b^-, c^-) - F(a, d) + F(a, c^-)$$

4. *1 punto* Enunciar la definición de independencia de variables aleatorias, así como sus caracterizaciones.

Sean $X_1, ..., X_n$ variables aleatorias unidimensionales definidas sobre el mismo espacio de probabilidad y sea $X = (X_1, ..., X_n)$. Decimos que las variables $X_1, ..., X_n$ son mutuamente independientes o, simplemente, independientes si

$$F_X(x_1, ..., x_n) = F_{X_1}(x_1) \cdot ... \cdot F_{X_n}(x_n), \quad \forall x_1, ..., x_n \in \mathbb{R}$$

Caracterizaciones:

- **Variables aleatorias discretas**. Sean $X_1, ..., X_n$ variables aleatorias unidimensionales discretas definidas sobre el mismo espacio de probabilidad

$$X_1, ..., X_n \text{ son independientes} \Leftrightarrow P(X_1 = x_1, ..., X_n = x_n) = P(X_1 = x_1) \cdot P(X_2 = x_2) \cdot ... \cdot P(X_n = x_n), \ \forall (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$$

- **Variables aleatorias continuas**. Sean $X_1, ..., X_n$ variables aleatorias unidimensionales continuas definidas sobre el mismo espacio de probabilidad

$$X_1, ..., X_n \text{ son independientes} \Leftrightarrow \begin{cases} X = (X_1, ..., X_n) \text{ es un vector aleatorio continuo} \\ \\ f_X(x_1, ..., x_n) = f_{X_1}(x_1) \cdot f_{X_2}(x_2) \cdot ... \cdot f_{X_n}(x_n), \quad \forall (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

- **Por conjuntos de Borel**. Sean $X_1, ..., X_n$ variables aleatorias unidimensionales definidas sobre el mismo espacio de probabilidad

$$X_1, ..., X_n \text{ son independientes} \Leftrightarrow P(X_1 \in B_1, ..., X_n \in B_n) = P(X_1 \in B_1) \cdot P(X_2 \in B_2) \cdot ... \cdot P(X_n \in B_n), \ \forall B_1, ..., B_n \in \mathcal{B}$$

- **Por factorización**. Sean $X_1, ..., X_n$ variables aleatorias unidimensionales discretas definidas sobre el mismo espacio de probabilidad

$$X_1, ..., X_n \text{ son independientes} \Leftrightarrow P(X_1 = x_1, ..., X_n = x_n) = h_1(x_1) \cdot h_2(x_2) \cdot ... \cdot h_n(x_n), \quad \forall (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$$

  Sean $X_1, ..., X_n$ variables aleatorias unidimensionales continuas definidas sobre el mismo espacio de probabilidad

$$X_1, ..., X_n \text{ son independientes} \Leftrightarrow \begin{cases} X = (X_1, ..., X_n) \text{ es un vector aleatorio continuo} \\ \\ f_X(x_1, ..., x_n) = h_1(x_1) \cdot h_2(x_2) \cdot ... \cdot h_n(x_n), \quad \forall (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

PARTE PRÁCTICA

1. Se considera el experimento aleatorio de un jugador de baloncesto que lanza 3 veces a una canasta, con la misma probabilidad de fallar que de acertar, observándose el resultado del lanzamiento. Sobre el experimento se miden dos variables aleatorias:

- X_1: número de aciertos en los 3 lanzamientos
- X_2: diferencia en valor absoluto entre el número de aciertos y el de fallos

La función masa probabilidad del vector se define como se observa en la tabla de la derecha.

X_1/X_2	1	3
0	0	1/8
1	3/8	0
2	3/8	0
3	0	1/8

(a) *0.75 puntos* Describir el vector aleatorio $X = (X_1, X_2)$ especificando los elementos del espacio probabilístico $(\Omega, \mathcal{A}, P)$

Considérese que la A representa un acierto y la F un fallo. El experimento aleatorio de los tres lanzamientos a canasta especificado en el ejercicio se puede expresar en forma de espacio probabilístico $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, donde

- $\Omega = \{FFF, FFA, FAF, AFF, AFA, AAF, FAA, AAA\}$
- $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$ (colección de todos los subconjuntos que pueden formarse de Ω)
- $P(\omega) = 1/8,\ \forall \omega \in \Omega$.

Así las cosas, el vector aleatorio $X = (X_1, X_2)$ se puede describir como

$$X : \Omega \to \mathbb{R}^2$$

$$X_1(\omega) = \begin{cases} 0 & \omega \in \{FFF\} \\ 1 & \omega \in \{FFA, FAF, AFF\} \\ 2 & \omega \in \{AFA, AAF, FAA\} \\ 3 & \omega \in \{AAA\} \end{cases}, X_2(\omega) = \begin{cases} 1 & \omega \in \{FFF, AAA\} \\ 3 & \omega \in \{FFA, FAF, AFF, AFA, AAF, FAA\} \end{cases}$$

(b) *0.75 puntos* Sea $F_X(x_1, x_2)$ la función de distribución en un punto (x_1, x_2), obtener $F_X(0.5, 1.5)$ y $F_X(1.5, 2)$. Describir el conjunto de puntos de (X_1, X_2) en el que $F_X(x_1, x_2) = 0$, así como aquel en el que $F_X(x_1, x_2) = 7/8$.

$$F_X(0.5, 1.5) = P(X_1 \leq 0.5, X_2 \leq 1.5) = P(X_1 = 0, X_2 = 1) = 0$$
$$F_X(1.5, 2) = P(X_1 \leq 1.5, X_2 \leq 2) = P(X_1 = 0, X_2 = 1) + P(X_1 = 1, X_2 = 1) = 0 + 3/8 = 3/8$$
$$F_X(x_1, x_2) = 0, \quad x_1 < 0 \text{ ó } x_2 < 1 \text{ ó } 0 \leq x_1 < 1, 1 \leq x_2 < 3$$
$$F_X(x_1, x_2) = 7/8, \quad 2 \leq x_1 < 3, x_1 \geq 3$$

(c) *0.5 puntos* Tras una realización del experimento, se comprueba que la diferencia (en valor absoluto) entre el número de aciertos y fallos es de 1. Obtener la función masa de probabilidad del número de aciertos condicionada a este resultado.

Si la diferencia entre número de aciertos y fallos es de 1, se sabe entonces que $X_2 = 1$. Por tanto, hay que hallar la función masa de probabilidad de X_1 condicionada a $X_2 = 1$, esto es, $P(X_1 = x_1 | X_2 = 1)$. Esta función se describe como sigue:

$$P(X_1 = 0 | X_2 = 1) = \frac{P(X_1 = 0, X_2 = 1)}{P(X_2 = 1)}$$
$$P(X_1 = 1 | X_2 = 1) = \frac{P(X_1 = 1, X_2 = 1)}{P(X_2 = 1)}$$
$$P(X_1 = 2 | X_2 = 1) = \frac{P(X_1 = 2, X_2 = 1)}{P(X_2 = 1)}$$
$$P(X_1 = 3 | X_2 = 1) = \frac{P(X_1 = 3, X_2 = 1)}{P(X_2 = 1)}$$

Teniendo en cuenta que

$$P(X_2 = 1) = P(X_1 = 0, X_2 = 1) + P(X_1 = 1, X_2 = 1) + P(X_1 = 2, X_2 = 1) + P(X_1 = 3, X_2 = 1) = 0 + \frac{3}{8} + \frac{3}{8} + 0 = \frac{6}{8}$$

La función masa de probabilidad resulta

$$P(X_1 = 0|X_2 = 1) = \frac{P(X_1 = 0, X_2 = 1)}{P(X_2 = 1)} = \frac{0}{6/8} = 0$$
$$P(X_1 = 1|X_2 = 1) = \frac{P(X_1 = 1, X_2 = 1)}{P(X_2 = 1)} = \frac{3/8}{6/8} = 1/2$$
$$P(X_1 = 2|X_2 = 1) = \frac{P(X_1 = 2, X_2 = 1)}{P(X_2 = 1)} = \frac{3/8}{6/8} = 1/2$$
$$P(X_1 = 3|X_2 = 1) = \frac{P(X_1 = 3, X_2 = 1)}{P(X_2 = 1)} = \frac{0}{6/8} = 0$$

(d) *0.5 puntos* Calcular $P(X_1 + X_2 \leq 3)$.

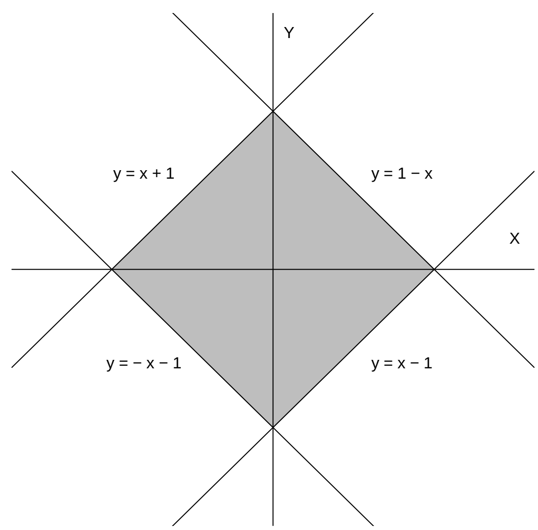
En este ejercicio, bastaba con calcular con qué probabilidad se daban los puntos (x_1, x_2) cuya suma fuese igual o menor a 3. Dado que $E_X = \{(0,1),(1,1),(2,1),(3,1),(0,3),(1,3),(2,3),(3,3)\}$, estos puntos son $\{(0,1),(1,1),(2,1),(0,3)\}$. La probabilidad de que se dé alguno de esos valores es la probabilidad buscada:

$$P(X_1+X_2 \leq 3) = P(X_1 = 0, X_2 = 1)+P(X_1 = 1, X_2 = 1)+P(X_1 = 2, X_2 = 1)+P(X_1 = 0, X_2 = 3) = 0+\frac{3}{8}+\frac{3}{8}+\frac{1}{8} = \frac{7}{8}$$

2. Sea (X, Y) un vector aleatorio continuo con la siguiente función de densidad conjunta:

$$f(x, y) = k, (x, y) \in \Delta$$

donde Δ es el rombo de vértices (1, 0), (0, 1), (-1, 0), (0, -1).



(a) *0.8 puntos* Hallar (integrando) el valor de k para que $f(x, y)$ sea una función de densidad bien definida.

(b) *0.8 puntos* Calcular (integrando) $P(|X| < Y)$.

(c) *0.8 puntos* Sea $F(x_0, y_0)$ la función de distribución del vector en un punto (x_0, y_0), hallar la expresión (sin necesidad de resolver las integrales) de $F(x_0, y_0)$ en las regiones:

- $x_0 \geq 1, 0 \leq y_0 < 1$
- $0 < x_0 < 1, 1 - x_0 < y_0 < 1$.

Describir el conjunto de puntos en el que $F(x_0, y_0) = 0$.

(d) *0.8 puntos* Hallar las distribuciones marginales de X e Y.

(e) *0.8 puntos* Hallar la distribución de X condicionada a un valor y_0 de Y.

(a) Para resolver este apartado, se ha de tener en cuenta una de las propiedades de los vectores aleatorios continuos, en concreto $\int_{-\infty}^{+\infty} ... \int_{-\infty}^{+\infty} f(x_1, ..., x_n)\ dx_1...dx_n = 1$. Por tanto, hay que hacer la integral de todo el conjunto, para lo cual hay varias formas que dan lugar a resultados correctos; se desarrolla aquí la más completa de todas, que conlleva dividir la figura en dos partes: el triángulo de la izquierda y el de la derecha, para posteriormente sumar el resultado de ambas integrales:

$$\int_{-1}^{0}\int_{-1-x}^{x+1} k\ dy\ dx+\int_{0}^{1}\int_{x-1}^{1-x} k\ dy\ dx = \int_{-1}^{0} k[2x+2]dx+\int_{0}^{1} k[2-2x]dx = k\left[x^2+2x\right]_{-1}^{0}+k\left[2x-x^2\right]_{0}^{1} = 2k = 1 \Rightarrow k = \frac{1}{2}$$

También podría llegarse a la solución utilizando las propiedades de simetría de la función de densidad del ejercicio. Por ejemplo:

- El área de uno de los dos triángulos anteriores multiplicada por 2 ha de ser igual a la unidad

$$2 \cdot \int_{-1}^{0}\int_{-1-x}^{x+1} k\ dy\ dx = 1, \text{ o bien } 2 \cdot \int_{0}^{1}\int_{x-1}^{1-x} k\ dy\ dx = 1$$

- El área de alguno de los cuatro triángulos de la figura (por ejemplo, el del primer cuadrante) multiplicada por 4 ha de ser igual a la unidad

$$4 \cdot \int_0^1 \int_0^{1-x} k \; dy \; dx = 1$$

(b) Para calcular la probabilidad de este apartado, hay que desarrollar el valor absoluto de la inecuación, y posteriormente calcular el área del recinto que existe entre las rectas $y = x$, $y = -x$, $y = x + 1$ e $y = 1 - x$. Es decir, se trataría de calcular el área del cuadrado de vértices (0,0), (-1/2, 1/2), (0,1) y (1/2, 1/2).

$$P(|X| < Y) = P(-Y < X < Y) = \int_{-\frac{1}{2}}^{0} \int_{-x}^{x+1} \frac{1}{2} \; dy \; dx + \int_{0}^{\frac{1}{2}} \int_{x}^{1-x} \frac{1}{2} \; dy \; dx = \frac{1}{2} \int_{-\frac{1}{2}}^{0} 2x + 1 \; dx + \frac{1}{2} \int_{0}^{\frac{1}{2}} 1 - 2x \; dx =$$

$$= \frac{1}{2} \left[x^2 + x\right]_{-\frac{1}{2}}^{0} + \frac{1}{2} \left[x - x^2\right]_{0}^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{4}$$

En este apartado también se pueden aplicar las propiedades de simetría vistas en el apartado anterior para llegar a la solución.

(c) La función de distribución en la región $\{x_0 \geq 1, 0 \leq y_0 < 1\}$ se calcularía como sigue:

$$F(x_0, y_0) = \int_{-1}^{0} \int_{-1-y}^{y+1} \frac{1}{2} \; dx \; dy + \int_{0}^{y_0} \int_{y-1}^{1-y} \frac{1}{2} \; dx \; dy$$

La función de distribución en la región $\{0 < x_0 < 1, 1 - x_0 \leq y_0 < 1\}$ se calcularía como sigue:

$$F(x_0, y_0) = \int_{-1}^{y_0 - 1} \int_{-x-1}^{x+1} \frac{1}{2} \; dy \; dx + \int_{y_0 - 1}^{0} \int_{-x-1}^{y_0} \frac{1}{2} \; dy \; dx + \int_{0}^{1-y_0} \int_{x-1}^{y_0} \frac{1}{2} \; dy \; dx + \int_{1-y_0}^{x_0} \int_{x-1}^{1-x} \frac{1}{2} \; dy \; dx$$

Cabe destacar que la solución de este apartado no es única. El cálculo de $F(x_0, y_0)$ para un punto en los recintos mencionados se puede realizar haciendo tantas divisiones como sea conveniente, siempre y cuando éstas tengan sentido práctico y su cálculo quede bien reflejado en los límites de las integrales.
La región en la que $F(x_0, y_0) = 0$ sí es única, y esa región es aquella en la que se cumple que $x_0 < -1$ ó $y_0 < -1$ ó $\{-1 \leq x_0 < 0, y_0 < -1 - x_0\}$. Este último recinto también puede expresarse como $\{x_0 < -1 - y_0, -1 \leq y_0 < 0\}$

(d) La función de densidad marginal de X tendría dos trozos, cuyo cálculo sería el siguiente

$$f_1(x) = \begin{cases} \int_{-1-x}^{x+1} \frac{1}{2} dy = x + 1 & -1 < x < 0 \\ \\ \int_{x-1}^{1-x} \frac{1}{2} dy = 1 - x & 0 < x < 1 \end{cases}$$

La función de densidad marginal de Y también tendría dos trozos, cuyo cálculo sería el siguiente

$$f_1(y) = \begin{cases} \int_{-1-y}^{y+1} \frac{1}{2} dy = y + 1 & -1 < y < 0 \\ \\ \int_{y-1}^{1-y} \frac{1}{2} dy = 1 - y & 0 < y < 1 \end{cases}$$

(e) La función de densidad de X condicionada a que Y tome un valor y_0 se calcularía como sigue:

$$f_{X|Y=y_0}(x|y) = \frac{f(x, y_0)}{f_Y(y_0)} = \begin{cases} \dfrac{1/2}{y_0 + 1} = \dfrac{1}{2y_0 + 2} & -1 - y_0 < x < y_0 + 1, -1 < y_0 < 0 \\ \\ \dfrac{1/2}{1 - y_0} = \dfrac{1}{2 - 2y_0} & y_0 - 1 < x < 1 - y_0, 0 < y_0 < 1 \end{cases}$$