Universidad de Granada

Álgebra: ejercicio 10

Miguel Anguita Ruiz

Curso 2017/18

Índice

Enunciado

DNI: 77149477W

Dada la matriz:

$$\begin{pmatrix} 14 & -6 & 3 & 3 \\ 0 & 8 & 3 & 3 \\ 0 & 6 & 5 & 3 \\ 0 & 6 & -3 & 11 \end{pmatrix}$$

i) Razona que define un endomorfismo $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$. Halla el det(A) y clasifica f.

ii) Halla su polinomio característico p(x) usando transformaciones elementales. Razona que tiene raíces enteras.

iii) Halla el espectro de sus valores propios y para cada uno halla su multiplicidad algebraica.

iv) Halla la multiplicidad geométrica para cada uno de sus valores propios.¿Verifica A el teorema espectral?

v) ¿Se puede diagonalizar A por semejanza? En caso afirmativo, encuentra la matriz de cambio.

Solución

Una matriz cuadrada real A, n×n, se puede interpretar como la matriz de una a.l. de $\mathbb{R}^n$ en sí mismo, $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, definida por la igualdad matricial $f(u) = A * X$, donde $X = u^t$ es u escrito como columna.

En este caso, $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ viene definido por la siguiente matriz:

$$f(u) = \begin{pmatrix} 14 & -6 & 3 & 3 \\ 0 & 8 & 3 & 3 \\ 0 & 6 & 5 & 3 \\ 0 & 6 & -3 & 11 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}$$

O sea, el endomorfismo f viene definido por la igualdad matricial $Y = A * X$, donde $Y = v^t$ es $f(u) = v$ escrito como columna.

El determinante se puede hallar fácilmente haciendo transformaciones fila, obteniéndose la matriz:

$$\begin{pmatrix} 14 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{11}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{112}{11} \end{pmatrix}$$

cuyo determinante es 3136 y f es un isomorfismo pues la dimensión de su núcleo es 0.

Su polinomio característico es el siguiente:

$$|A-\lambda I| = 0 \rightarrow \begin{vmatrix} 14-\lambda & -6 & 3 & 3 \\ 0 & 8-\lambda & 3 & 3 \\ 0 & 6 & 5-\lambda & 3 \\ 0 & 6 & -3 & 11-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

Haciendo transformaciones $E_{32}(1)$ y $E_{23}(-1)$, por columnas y filas respectivamente, me queda:

$$\begin{vmatrix} 14-\lambda & -6 & -3 & 3 \\ 0 & 8-\lambda & 11-\lambda & 3 \\ 0 & 6 & 11-\lambda & 3 \\ 0 & 6 & 3 & 11-\lambda \end{vmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} 14-\lambda & -6 & 3 & 3 \\ 0 & 2-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 11-\lambda & 3 \\ 0 & 6 & 3 & 11-\lambda \end{vmatrix}$$

Como trabajamos con transformaciones elementales usando numeros enteros, nos quedarán valores propios enteros. Esto es igual a:

$$(14-\lambda)(2-\lambda)\begin{vmatrix} 11-\lambda & 3 \\ 3 & 11-\lambda \end{vmatrix} = 0 \rightarrow (14-\lambda)(2-\lambda)(14-\lambda)(8-\lambda) = 0$$

Por tanto, el espectro de los valores propios es:

$$\{14, 2, 8\}$$

Los autovalores 2 y 8 tienen multiplicidad algebraica 1 luego tendrán un único autovector asociado, mientras que el autovalor 14 tiene multiplicidad algebraica 2 y tenemos que calcular r = rango $(A - 14I)$ ya que $dim(V_{14}) = 4 - r$

$$\begin{pmatrix} 14-\lambda & -6 & 3 & 3 \\ 0 & 8-\lambda & 3 & 3 \\ 0 & 6 & 5-\lambda & 3 \\ 0 & 6 & -3 & 11-\lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Si sustituimos los valores propios 2 y 8 en λ, nos queda un sistema de 4 ecuaciones con 4 incógnitas, luego es compatible determinado y tiene solución única para cada valor propio. Por lo tanto, los vectores propios asociados a los autovalores 2 y 8, son, respectivamente:

$$v_1 = (-1, -1, 1, 1)$$

$$v_2 = (-1, -1, -1, 1)$$

Por otra parte, sustituimos 14 en λ para hallar el rango de $(A - 14I)$, entonces:

$$\begin{pmatrix} 0 & -6 & 3 & 3 \\ 0 & -6 & 3 & 3 \\ 0 & 6 & -9 & 3 \\ 0 & 6 & -3 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Esta matriz tiene rango 2 pues sus submatrices de órdenes 3 y 4 tienen determinante 0, y tiene submatrices de orden 2 con determinante distinto de 0. Luego $dim(V_{14}) = 4 - 2 = 2$, luego su multiplicidad algebraica es igual a la geométrica. Los autovectores asociados a $\lambda = 14$ son:

$$v_3 = (0, 1, 1, 1)$$

$$v_4 = (1, 0, 0, 0)$$

Por tanto, la multiplicidad geométrica de cada valor propio coincide con su algebraica, luego A cumple el teorema espectral, se puede diagonalizar por semejanza y puede hallarse una matriz P de cambio.

Con los 4 vectores propios escritos por columnas se puede formar una matriz de cambio P que diagonaliza A. O sea:

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 14 & -6 & 3 & 3 \\ 0 & 8 & 3 & 3 \\ 0 & 6 & 5 & 3 \\ 0 & 6 & -3 & 11 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 14 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 14 \end{pmatrix}$$