Universidad de Granada

Grado en Estadística

Segunda relación de ejercicios propuestos

Miguel Anguita Ruiz

Curso 2018/19

Índice

Ejercicios

Ejercicio 1.1. Dos máquinas se dedican a producir tornillos. La primera produce tornillos con longitud media de 150 mm y desviación típica de 10 mm, y la segunda con longitud media de 100 mm y desviación típica de 5 mm. Se toman muestras aleatorias de tamaño 10. Suponiendo que las poblaciones son normales, se pide:

(a) Distribución muestral de la diferencia de medias.
(b) La probabilidad de que la longitud media de los tornillos fabricados por la primera máquina no sea superior en más de 45 mm a la longitud media de los tornillos fabricados por la segunda máquina.

Solución. .
(a) Sabemos que dada $X_1...X_m$ una muestra aleatoria de una variable aleatoria $X \rightsquigarrow N(\mu_1, \sigma_1^2)$ e $Y_1...Y_n$ una muestra aleatoria de una variable aleatoria $Y \rightsquigarrow N(\mu_2, \sigma_2^2)$ se verifica que la variable aleatoria

$$Z = \frac{(\overline{X} - \overline{Y}) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{m} + \frac{\sigma_2^2}{n}}}$$

es una normal estándar ($Z \rightsquigarrow N(0, 1)$).

Z es la variable aleatoria de la diferencia de medias, por lo tanto:

$$Z = \frac{(\overline{X} - \overline{Y}) - (150 - 100)}{\sqrt{\frac{100}{10} + \frac{25}{10}}} = \frac{(\overline{X} - \overline{Y}) - 50}{3{,}5355} = \frac{(\overline{X} - \overline{Y})}{3{,}5355} - 10\sqrt{2}$$

donde $\overline{X}$ y $\overline{Y}$ son las medias muestrales de las muestras aleatorias anteriormente mencionadas.

(b) Hay que hallar lo siguiente:

$$P(Z \leq \frac{45}{3{,}5355} - 10\sqrt{2}) = P(Z \leq -1{,}414) = P(Z > 1{,}414) = 1 - P(Z \leq 1{,}414) = 1 - 0{,}9207 = 0{,}078$$

Por lo tanto, la probabilidad de que la longitud media de los tornillos fabricados por la primera máquina no sea superior en más de 45 mm a la longitud media de los tornillos fabricados por la segunda máquina es del 7.8 %.

Ejercicio 1.2. El gasto anual per cápita en ocio en Andalucía puede modelizarse por una v.a. $N(1200, 500)$, medidas ambas en euros, mientras que en Extremadura podría modelizarse por una v.a. $N(300, 60)$. Si en Andalucía se observa el gasto en ocio de 61 personas elegidas al azar, y en Extremadura el de 21 personas, ¿por qué número habrá que multiplicar la varianza muestral de Extremadura para superar la de Andalucía con probabilidad 0.1?

Solución. Sean S_1^2 y S_2^2 las varianzas muestrales de las muestras recogidas en Andalucía y Extremadura respectivamente, queremos hallar $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que:

$$P(S_1^2 < \alpha S_2^2) = 0{,}1$$

.

Por lo tanto, tenemos:

$$P(\frac{S_1^2}{S_2^2} < \alpha) = P(\frac{S_1^2\sigma_2^2}{S_2^2\sigma_1^2} < \alpha\frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2}) = 0{,}1$$

Por la normalidad de las variables aleatorias, entonces:

$$Z = \frac{S_1^2\sigma_2^2}{S_2^2\sigma_1^2} \rightsquigarrow F_{m-1,n-1} = F_{60,20}$$

se distribuye como una F de Snedecor con 60 y 20 grados de libertad. Entonces:

$$P(F_{60,20} < \alpha\frac{60^2}{500^2}) = P(F_{60,20} < 0{,}0144\alpha) = 0{,}1$$

Hay que mirar la tabla de colas a la derecha de la Snedecor y la abscisa que deja a su derecha una probabilidad 0.1, siendo Z una v.a. con distribución $F_{60,20}$ es 1.6768.

Finalmente, deducimos α:

$$P(F_{60,20} < 1{,}6768) = 0{,}1 \Longrightarrow 1{,}6768 = 0{,}0144\alpha \Longrightarrow \alpha = 116{,}444$$