Universidad de Granada

Álgebra: ejercicio 8

Miguel Anguita Ruiz

Curso 2017/18

Índice

Enunciado

Dada la aplicación $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$, definida por:

$$f(x, y, z, t) = (7x - 7t, x - 4z, 9x - 4y + 7z + 7t)$$

i) Halla sus ecuaciones matriciales y comprueba que es una a.l.

ii) Amplía su matriz con la identidad por debajo y halla su núcleo y su imagen, aplicando transformaciones elementales de columnas.

iii) ¿ Cuánto vale la dimensión de tu núcleo mas la dimensión de tu imagen ?.

Solución

Su matriz asociada por columnas, respecto a las bases canónicas, es:

$$\begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 & -7 \\ 1 & 0 & -4 & 0 \\ 9 & -4 & 7 & 7 \end{pmatrix}$$

La aplicación lineal es equivalente al siguiente producto matricial y así definimos las ecuaciones matriciales:

$$\begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 & -7 \\ 1 & 0 & -4 & 0 \\ 9 & -4 & 7 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7x - 7t \\ x - 4z \\ 9x - 4y + 7z + 7t \end{pmatrix}$$

Sabemos que f es una aplicación lineal pues se comporta bien para la suma y el producto externo, además es evidente que es lineal pues todas sus incógnitas tienen grado uno.

A continuación, ampliamos por debajo con la identidad y realizaré transformaciones elementales a la matriz original y a la matriz identidad.

Multiplico la matriz original y la identidad por E_23 para intercambiar la segunda y la tercera columna, con el objetivo de no tener ceros en la diagonal principal.

Solución

$$\begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 & -7 \\ 1 & 0 & -4 & 0 \\ 9 & -4 & 7 & 7 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 & -7 \\ 1 & -4 & 0 & 0 \\ 9 & 7 & -4 & 7 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Multiplico ahora por $E_{23}(\frac{7}{4})$ y por $E_{13}(\frac{9}{4})$ para hacer dos ceros a la izquierda del tercer pivote.

$$\begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 & -7 \\ 1 & -4 & 0 & 0 \\ 9 & 7 & -4 & 7 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 & -7 \\ 1 & -4 & 0 & 0 \\ 9 & 0 & -4 & 7 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{7}{4} & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 & -7 \\ 1 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 7 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{9}{4} & \frac{7}{4} & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Multiplico ahora por $E_{12}(\frac{1}{4})$ para hacer un cero a la izquierda del segundo pivote.

$$\begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 & -7 \\ 1 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 7 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{9}{4} & \frac{7}{4} & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 & -7 \\ 0 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 7 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{43}{16} & \frac{7}{4} & 1 & 0 \\ \frac{1}{4} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Multiplico por $E_41(1)$ y por $E_43(\frac{7}{4})$ para hacer otros dos ceros en la cuarta columna.

$$\begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 & -7 \\ 0 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 7 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{43}{16} & \frac{7}{4} & 1 & 0 \\ \frac{1}{4} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{43}{16} & \frac{7}{4} & 1 & \frac{71}{16} \\ \frac{1}{4} & 1 & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Finalmente, multiplico por $E_1(\frac{1}{7})$, por $E_2(-\frac{1}{4})$ y por $E_3(-\frac{1}{4})$ para obtener unos en la diagonal principal.

$$\begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{43}{16} & \frac{7}{4} & 1 & \frac{71}{16} \\ \frac{1}{4} & 1 & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{7} & 0 & 0 & 1 \\ \frac{43}{112} & \frac{-7}{16} & -\frac{1}{4} & \frac{71}{16} \\ \frac{1}{28} & -\frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Hemos terminado el algoritmo por columnas y la nueva matriz C, formada por las tres primeras filas, es una forma normal de Hermite por columnas.

Además, obtenemos una matriz de cambio Q tal que

$$C = AQ = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 & -7 \\ 1 & 0 & -4 & 0 \\ 9 & -4 & 7 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{7} & 0 & 0 & 1 \\ \frac{43}{112} & \frac{-7}{16} & -\frac{1}{4} & \frac{71}{16} \\ \frac{1}{28} & -\frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 & -7 \\ 1 & 0 & -4 & 0 \\ 9 & -4 & 7 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{71}{16} \\ \frac{1}{4} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Observamos que las 4 columnas de la matriz Q son l.i. y forman una base de $\mathbb{R}^4$ (el espacio origen).

Por tanto si $u = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3 + \lambda_4 u_4 \in \mathbb{R}^4$ se tiene:

$$f(u) = \lambda_1 f(u_1) + \lambda_2 f(u_2) + \lambda_3 f(u_3) + \lambda_4 f(u_4) = \lambda_1 c_1 + \lambda_2 c_2 + \lambda_3 c_3$$

ya que hemos visto que $u_4 = (1, \frac{71}{16}, \frac{1}{4}, 1)$ satisface $f(u_4) = A * u_4 = 0$.

Ahora, como las columnas $c_1 = (1,0,0), c_2 = (0,1,0), c_3 = (0,0,1)$ de C son l.i se tiene que $f(u) = \lambda_1 c_1 + \lambda_2 c_2 + \lambda_3 c_3 = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 0$ y por tanto que $u \in N(f) \Leftrightarrow u = \lambda_4 u_4$.

O sea, hemos demostrado que una base de N(f) está formada por la columna $u_4 = (1, \frac{71}{16}, \frac{1}{4}, 1)$, luego N(f) tiene dimensión 1.

Finalmente, una base de la imagen está formada por las columnas c_1, c_2, c_3 de C ya que son un s.g. de la imagen y son l.i.. La dimensión de la imagen es 3.

$$B_{Im(f)} = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$$

En realidad, lo que hemos hecho es un cambio de base, $u' = Q * u$, en el espacio origen $\mathbb{R}^4$, de forma que la nueva base es una ampliación de una base del núcleo y por tanto las ecuaciones salen más sencillas.

$$f(u) = A * u = A * Q * u' = C * u'$$

Finalmente, observamos que $dim(N(f)) + dim(Im(f)) = 1 + 3 = 4$, que es la dimensión del espacio origen $\mathbb{R}^4$.