Universidad de Granada

Álgebra: ejercicio 5

Miguel Anguita Ruiz

Curso 2017/18

Índice

Enunciado

El DNI usado para el ejercicio es el siguiente: 77149477.

Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 7 & 7 & 1 & 4 \\ -9 & 4 & -7 & 7 \end{pmatrix}$

Halla una base, unas e.p. y unas e.c. respectivamente de:

i) Su espacio de filas, F(A).

ii) Su espacio de columnas, C(A).

iii) Su espacio nulo, N(A).

Solución

Para la matriz A, su espacio de filas está contenido en $\mathbb{R}^4$:

$A = \begin{pmatrix} 7 & 7 & 1 & 4 \\ -9 & 4 & -7 & 7 \end{pmatrix}$

$F(A) = \{\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 \in \mathbb{R}^4 : \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}\}$ y sus ecuaciones paramétricas son:

$u = (x_1, x_2, x_3, x_4) = \lambda_1(7, 7, 1, 4) + \lambda_2(-9, 4, -7, 7)$ tal que:

$$\begin{aligned} x_1 &= 7\lambda_1 - 9\lambda_2 \\ x_2 &= 7\lambda_1 + 4\lambda_2 \\ x_3 &= \lambda_1 - 7\lambda_2 \\ x_4 &= 4\lambda_1 + 7\lambda_2 \end{aligned}$$

Despejo λ_1 en la primera ecuación y λ_2 en la segunda ecuación:

$\lambda_1 = \frac{x_1+9\lambda_2}{7}, \lambda_2 = \frac{x_2-x_1}{13}$

Por lo tanto: $\lambda_1 = \frac{x_1+9(\frac{x_2-x_1}{13})}{7} = \frac{9x_2}{91} - \frac{4x_1}{91}$

Sustituyo los valores de λ_1, λ_2 en la tercera y cuarta ecuación.

$x_3 = \frac{9x_2}{91} - \frac{4x_1}{91} - 7(\frac{x_2-x_1}{13}) = \frac{-40x_2}{91} + \frac{45x_1}{91}$

$x_4 = 4(\frac{9x_2}{91} - \frac{4x_1}{91}) + 7(\frac{x_2-x_1}{13}) = \frac{85x_2}{91} - \frac{65x_1}{91}$

Por lo tanto, unas ecuaciones cartesianas de F(A) serían:

$x_3 + \frac{40x_2}{91} - \frac{45x_1}{91} = 0$

$x_4 - \frac{85x_2}{91} + \frac{65x_1}{91} = 0$

Solución

Como sabemos que A tiene rango 2, sus dos filas son independientes y forman una base de su espacio de filas.

Por tanto, tiene dimensión dos, $dim_{\mathbb{R}}(F(A)) = 2$. Sus e.p tiene 2 parámetros y sus e.c tienen 4-2 = 2 ecuaciones lineales homogéneas.

Hagamos el mismo proceso para el espacio de columnas C(A).

La misma matriz A anterior tiene 4 columnas:

$A = \begin{pmatrix} 7 & 7 & 1 & 4 \\ -9 & 4 & -7 & 7 \end{pmatrix}$ tal que $v_1 = \begin{pmatrix} 7 \\ -9 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -7 \end{pmatrix}, v_4 = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \end{pmatrix}$
pero como sabemos que tiene rango 2, con dos de ellas linealmente independientes generan el espacio entero de columnas. Si elegimos v_2 y v_3 salen l.i. y nos sirven para generar su espacio de columnas.

$C(A) = \{\mu_1 v_2 + \mu_2 v_3 \in \mathbb{R}^2 : \mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}\}$

Por tanto, unas e.p son: $u = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \mu_1 \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \end{pmatrix} + \mu_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -7 \end{pmatrix}$ tal que

$$\begin{aligned} y_1 &= 7\mu_1 + \mu_2 \\ y_2 &= 4\mu_1 - 7\mu_2 \end{aligned}$$

Observamos que no podemos eliminar totalmente los parámetros y eso es debido a que la dimensión del espacio de columnas es máxima,$dim_{\mathbb{R}}(C(A)) = 2$ coincide con la del espacio subyacente $\mathbb{R}^2$ y lo que tenemos es la igualdad C(A) = $\mathbb{R}^2$ porque v_2 y v_3 generan el espacio total $\mathbb{R}^2$. El espacio total tiene e.p. pero no tiene e.c. y eso es lo que sucede aquí. En particular, v_2, v_3 forman una base del espacio de columnas y también del espacio total $\mathbb{R}^2$.

Por último, describamos el espacio nulo N(A).

La misma matriz A anterior define el siguiente s.l. homogéneo:

$$A * X = \begin{pmatrix} 7 & 7 & 1 & 4 \\ -9 & 4 & -7 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$\begin{aligned} 7x_1 + 7x_2 &= -x_3 - 4x_4 \\ -9x_1 + 4x_2 &= 7x_3 - 7x_4 \end{aligned}$ que son las e.c de N(A). Resuelvo este sistema compatible indeterminado.

$$\begin{aligned} x_3 &= -4x_4 - 7x_1 - 7x_2 \\ x_1 &= \tfrac{53x_2 + 28x_4}{58} \end{aligned}$$

Solución

Llamando $x_2 = \lambda, x_4 = \mu$, se obtiene una solución general $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (\frac{53\lambda+28\mu}{58}, \lambda, \frac{-428\mu-777\lambda}{58}, \mu) = \lambda(\frac{53}{58}, 1, \frac{-777}{58}, 0)+\mu(\frac{14}{29}, 0, \frac{-214}{29}, 1)$ que son unas e.p de N(A). Además, las 2 soluciones particulares obtenidas del s.l. $v_1 = (\frac{53}{58}, 1, \frac{-777}{58}, 0), v_2 = (\frac{14}{29}, 0, \frac{-214}{29}, 1) \in \mathbb{R}^4$ son 2 vectores l.i. que generan a todas las soluciones. O sea, hemos encontrado una base del espacio nulo de A y por tanto su dimensión es 2.