Universidad de Granada

# Álgebra: ejercicio 2

Juan José Jarque Megías

Curso 2017/18

# Índice

## Enunciado

El DNI usado para el ejercicio es el siguiente: 49212789.

Dado el sistema lineal de ecuaciones:

$$4x + 9y + 2z = 8$$

$$x + 2y + 7z = 9$$

$$5x + 8y + 3z = 7$$

a) Escribe sus 4 matrices asociadas y lo interpretas matricialmente.
b) Clasifica el s.l. con el algoritmo de transformaciones elementales. O sea, qué tipo de sistema es según el número de sus soluciones.
c) Halla en su caso, la solución o soluciones del s.l.

## Solución

Las matrices asociadas son: la matriz de coeficientes (A), la matriz ampliada (C), la matriz de soluciones (X) y la matriz de términos independientes (B). Por tanto:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 9 & 2 \\ 1 & 2 & 7 \\ 5 & 8 & 3 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 4 & 9 & 2 & 8 \\ 1 & 2 & 7 & 9 \\ 5 & 8 & 3 & 7 \end{pmatrix},\ X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 8 \\ 9 \\ 7 \end{pmatrix}$$

.

Por tanto, el sistema de ecuaciones lineal anterior puede expresarse como la ecuación matricial $AX = B$, tal que:

$$\begin{pmatrix} 4 & 9 & 2 \\ 1 & 2 & 7 \\ 5 & 8 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 9 \\ 7 \end{pmatrix}$$

El objetivo es calcular las posibles soluciones de la ecuación, realizando para ello transformaciones elementales a la matriz asociada.

Multiplico C por $E_{21}(-\frac{1}{4})$ y por $E_{31}(-\frac{5}{4})$ para hacer dos ceros por debajo del primer pivote.

Solución

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\-\frac{1}{4}&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4&9&2&8\\1&2&7&9\\5&8&3&7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&9&2&8\\0&-\frac{1}{4}&\frac{13}{2}&7\\5&8&3&7\end{pmatrix}\Longrightarrow\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\-\frac{5}{4}&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4&9&2&8\\0&-\frac{1}{4}&\frac{13}{2}&7\\5&8&3&7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&9&2&8\\0&-\frac{1}{4}&\frac{13}{2}&7\\0&-\frac{13}{4}&\frac{1}{2}&-3\end{pmatrix}$$

Multiplico ahora por $E_{32}(-13)$ y por $E_{23}(\frac{13}{168})$ para hacer un cero por debajo del segundo pivote y un cero por encima del tercer pivote.

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&-13&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4&9&2&8\\0&-\frac{1}{4}&\frac{13}{2}&7\\0&-\frac{13}{4}&\frac{1}{2}&-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&9&2&8\\0&-\frac{1}{4}&\frac{13}{2}&7\\0&0&-84&-94\end{pmatrix}\Longrightarrow\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&\frac{13}{168}\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4&9&2&8\\0&-\frac{1}{4}&\frac{13}{2}&7\\0&0&-84&-94\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&9&2&8\\0&-\frac{1}{4}&0&-\frac{23}{84}\\0&0&-84&-94\end{pmatrix}$$

Multiplico ahora por $E_{13}(\frac{1}{42})$ y por $E_{12}(36)$ para hacer otro cero por encima del tercer pivote y un último cero por encima del segundo pivote.

$$\begin{pmatrix}1&0&\frac{1}{42}\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4&9&2&8\\0&-\frac{1}{4}&0&-\frac{23}{84}\\0&0&-84&-94\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&9&0&\frac{121}{21}\\0&-\frac{1}{4}&0&-\frac{23}{84}\\0&0&-84&-94\end{pmatrix}\Longrightarrow\begin{pmatrix}1&36&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4&9&0&\frac{121}{21}\\0&-\frac{1}{4}&0&-\frac{23}{84}\\0&0&-84&-94\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&0&0&-\frac{86}{21}\\0&-\frac{1}{4}&0&-\frac{23}{84}\\0&0&-84&-94\end{pmatrix}$$

Finalmente, multiplico por $E_1(\frac{1}{4})$, por $E_2(-4)$ y por $E_3(\frac{-1}{84})$ para obtener una diagonal principal con unos.

$$\begin{pmatrix}\frac{1}{4}&0&0\\0&-4&0\\0&0&-\frac{1}{84}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4&0&0&-\frac{86}{21}\\0&-\frac{1}{4}&0&-\frac{23}{84}\\0&0&-84&-94\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0&-\frac{43}{42}\\0&1&0&\frac{23}{21}\\0&0&1&\frac{47}{42}\end{pmatrix}$$

Esta última matriz es una FNHF (forma normal de Hermite por filas) y su última columna tiene una interpretación como solución única a un s.l. de 3 ecuaciones con 3 incógnitas. El sistema tiene solución ya que los pivotes corresponden a variables y la solución es única ya que el número de pivotes coincide con el de variables. Luego el sistema es compatible determinado y la matriz de soluciones X es:

$$X=\begin{pmatrix}-\frac{43}{42}\\\frac{23}{21}\\\frac{47}{42}\end{pmatrix}$$