Universidad de Granada

Grado en Estadística

Cálculo II: ejercicios

Miguel Anguita Ruiz

Curso 2017/18

Índice

Relación 1

Ejercicio 1.1. Asociado al experimento aleatorio del lanzamiento de dos monedas y la observación de sus resultados, describir el vector aleatorio $X = (X_1, X_2)$ con:

X_1 = Número de rachas de resultados iguales.

X_2 = Diferencia en valor absoluto entre número de caras y cruces.

especificando los elementos del espacio probabilístico (Ω, A, P).

Calcular los conjuntos $X^{-1}((-\infty, x_1]x(-\infty, x_2])$ $\forall x_1, x_2 \in R$

Calcular la función de distribución de dicho vector aleatorio.

Solución. .

El espacio de probabilidad (Ω, A, P) que definiremos es el siguiente:

$\Omega = \{CC, CX, XC, XX\}$ tal que C = sale cara, X = sale cruz.

$A = P(\Omega)$ y $P(\omega) = \frac{1}{4}$ $\forall\omega \in \Omega$

Definimos el vector aleatorio $X = (X_1, X_2)$ de esta forma:

$$X_1 = \begin{cases} 0 & : \omega \in \{CX, XC\} \\ 1 & : \omega \in \{CC, XX\} \end{cases} \tag{1}$$

$$X_2 = \begin{cases} 0 & : \omega \in \{CX, XC\} \\ 2 & : \omega \in \{CC, XX\} \end{cases} \tag{2}$$

Por tanto: $X = (X_1, X_2) : \Omega \to \mathbb{R}^2$

CC $\to (1, 2)$

XX $\to (1, 2)$

CX $\to (0, 0)$

XC $\to (0, 0)$

Por otra parte, los conjuntos $X^{-1}((-\infty, x_1]x(-\infty, x_2])$ $\forall x_1, x_2 \in R$ son los siguientes:

$$X^{-1}((-\infty, x]x(-\infty, y]) = \emptyset \in A \ \forall x, y < 0$$

$$X^{-1}((-\infty, 0]x(-\infty, 2]) = X^{-1}((-\infty, 1]x(-\infty, 0]) = \{CX, XC\} \in A$$

$$X^{-1}((-\infty, 1]x(-\infty, 2]) = \Omega \in A$$

Por último, la función de distribución es la siguiente:

$$F(x, y) = \begin{cases} 0 : x < 0 \lor y < 0 \\ \frac{1}{2} : x \geq 1 \land 0 \leq y < 2 \\ \frac{1}{2} : 0 \leq x < 1 \land y \geq 2 \\ 1 : x \geq 1 \land y \geq 2 \end{cases} \tag{3}$$

Ejercicio 1.2. Definir un experimento aleatorio cualquiera, especificando los elementos del espacio probabilístico (Ω, A, P), y describir adecuadamente sobre él un vector aleatorio discreto $X = (X_1, X_2, ..., X_n)$ (con n siendo una cifra a tu elección) que mida una serie de características del experimento. Asimismo, calcular la función de distribución de dicho vector aleatorio.

Solución. .

El experimento consiste en lo siguiente. Tenemos dos urnas llenas de bolas, en una urna hay 2 bolas: una blanca y una roja no numeradas. En la otra urna hay 3 bolas numeradas del 1 al 3 (color no importa). Cojo 2 bolas con reemplazamiento, una de cada urna.

El espacio de probabilidad (Ω, A, P) que definiremos es el siguiente:
$\Omega = \{1B, 2B, 3B, 1R, 2R, 3R\}$ tal que iB = cojo bola blanca y con número i, iR = cojo bola roja y con número i para i = $1, 2, 3$
$A = P(\Omega)$ y $P(\omega) = \frac{1}{6}\ \forall \omega \in \Omega$

Definimos el vector aleatorio $X = (X_1, X_2)$ de esta forma:

$$X_1 = \begin{cases} 1 \ : \omega \in \{1B, 1R\} \\ 2 \ : \omega \in \{2B, 2R\} \\ 3 \ : \omega \in \{3B, 3R\} \end{cases} \tag{4}$$

$$X_2 = \begin{cases} e \ : \omega \in \{1B, 2B, 3B\} \\ \pi \ : \omega \in \{1R, 2R, 3R\} \end{cases} \tag{5}$$

Por tanto: $X = (X_1, X_2) : \Omega \to \mathbb{R}^2$
1B $\to (1, e)$
1R $\to (1, \pi)$
2B $\to (2, e)$
2R $\to (2, \pi)$

3B $\to (3, e)$

3R $\to (3, \pi)$

Por otra parte, los conjuntos

$$X^{-1}((-\infty, x_1]x(-\infty, x_2]) = \begin{cases} \varnothing : x_1 < 1 \vee x_2 < e \\ \{1B\} : 1 \leq x_1 < 2, e \leq x_2 < \pi \\ \{1B, 1R\} : 1 \leq x_1 < 2, x_2 \geq \pi \\ \{1B, 2B\} : 2 \leq x_1 < 3, e \leq x_2 < \pi \\ \{1B, 2B, 3B\} : x_1 \geq 3, e \leq x_2 < \pi \\ \{1B, 1R, 2B, 2R\} : 2 \leq x_1 < 3, x_2 \geq \pi \\ \Omega : x_1 \geq 3, x_2 \geq \pi \end{cases} \tag{6}$$

se definen de esta manera.

Por último, la función de distribución es la siguiente:

$$P(X^{-1}((-\infty, x_1]x(-\infty, x_2])) = \begin{cases} P(\varnothing) = 0 : x_1 < 1 \vee x_2 < e \\ P(\{1B\}) = \frac{1}{6} : 1 \leq x_1 < 2, e \leq x_2 < \pi \\ P(\{1B, 1R\}) = \frac{1}{3} : 1 \leq x_1 < 2, x_2 \geq \pi \\ P(\{1B, 2B\}) = \frac{1}{3} : 2 \leq x_1 < 3, e \leq x_2 < \pi \\ P(\{1B, 2B, 3B\}) = \frac{1}{2} : x_1 \geq 3, e \leq x_2 < \pi \\ P(\{1B, 1R, 2B, 2R\}) = \frac{2}{3} : 2 \leq x_1 < 3, x_2 \geq \pi \\ P(\Omega) = 1 : x_1 \geq 3, x_2 \geq \pi \end{cases} \tag{7}$$

Ejercicio 1.3. Dar la expresión de las siguientes probabilidades en términos de la función de distribución para un vector aleatorio $X = (X_1, X_2)$.

Solución. .

$P(a < X_1 < b, c < X_2 < d) = F(b^-, d^-) - F(b^-, c) - F(a, d^-) + F(a, c)$

$P(a \leq X_1 < b, c < X_2 < d) = F(b^-, d^-) - F(b^-, c) - F(a^-, d^-) + F(a^-, c)$

$P(a < X_1 \leq b, c < X_2 < d) = F(b, d^-) - F(b, c) - F(a, d^-) + F(a, c)$

$P(a \leq X_1 \leq b, c < X_2 < d) = F(b, d^-) - F(b, c) - F(a^-, d^-) + F(a^-, c)$

$P(a < X_1 < b, c \leq X_2 < d) = F(b^-, d^-) - F(b^-, c^-) - F(a, d^-) + F(a, c^-)$

$P(a \leq X_1 < b, c \leq X_2 < d) = F(b^-, d^-) - F(b^-, c^-) - F(a^-, d^-) + F(a^-, c^-)$

$P(a < X_1 \leq b, c \leq X_2 < d) = F(b, d^-) - F(b, c^-) - F(a, d^-) + F(a, c^-)$

$P(a \leq X_1 \leq b, c \leq X_2 < d) = F(b, d^-) - F(b, c^-) - F(a^-, d^-) + F(a^-, c^-)$

$P(a < X_1 < b, c < X_2 \leq d) = F(b^-, d) - F(b^-, c) - F(a, d) + F(a, c)$

$P(a \leq X_1 < b, c < X_2 \leq d) = F(b^-, d) - F(b^-, c) - F(a^-, d) + F(a^-, c)$

$P(a < X_1 \leq b, c < X_2 \leq d) = F(b, d) - F(b, c) - F(a, d) + F(a, c)$

$$P(a \leq X_1 \leq b, c < X_2 \leq d) = F(b,d) - F(b,c) - F(a^-,d) + F(a^-,c)$$
$$P(a < X_1 < b, c \leq X_2 \leq d) = F(b^-,d) - F(b^-,c^-) - F(a,d) + F(a,c^-)$$
$$P(a \leq X_1 < b, c \leq X_2 \leq d) = F(b^-,d) - F(b^-,c^-) - F(a^-,d) + F(a^-,c^-)$$
$$P(a < X_1 \leq b, c \leq X_2 \leq d) = F(b,d) - F(b,c^-) - F(a,d) + F(a,c^-)$$
$$P(a \leq X_1 \leq b, c \leq X_2 \leq d) = F(b,d) - F(b,c^-) - F(a^-,d) + F(a^-,c^-)$$