Universidad de Granada

Álgebra: ejercicio 7

Miguel Anguita Ruiz

Curso 2017/18

Índice

Enunciado

El DNI usado para el ejercicio es el siguiente: 77149477.

Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 7 & 0 & -4 & -45 \\ 7 & -4 & 0 & -21 \\ 1 & -9 & 0 & 56 \\ 1 & 0 & -7 & 0 \end{pmatrix}$

i) Halla su FNHF y úsala para encontrar unas e.p. y una base de N(A) ¿Qué dimensión tiene N(A)?

ii) Halla su FNHC y úsala para encontrar unas e.p. y una base de C(A) ¿Qué dimensión tiene C(A)?

ii) ¿Qué dimensión tiene $C(A) \cap N(A)$?

iv) Halla una base de C(A) ampliando una de $C(A) \cap N(A)$.

v) ¿Qué dimensión tiene C(A)+N(A)?. Comprueba la fórmula de las dimensiones.

Solución

A continuación realizaré transformaciones elementales para obtener las formas de Hermite por filas y por columnas. Empezaré el proceso por filas:

Multiplico A por $E_{21}(-1)$, $E_{31}(-\frac{1}{7})$ y por $E_{41}(-\frac{1}{7})$ para hacer tres ceros por debajo del primer pivote.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & 0 & -4 & -45 \\ 7 & -4 & 0 & -21 \\ 1 & -9 & 0 & 56 \\ 1 & 0 & -7 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 0 & -4 & -45 \\ 0 & -4 & 4 & 24 \\ 1 & -9 & 0 & 56 \\ 1 & 0 & -7 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{7} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & 0 & -4 & -45 \\ 0 & -4 & 4 & 24 \\ 1 & -9 & 0 & 56 \\ 1 & 0 & -7 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 7 & 0 & -4 & -45 \\ 0 & -4 & 4 & 24 \\ 0 & -9 & \frac{4}{7} & \frac{437}{7} \\ 1 & 0 & -7 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{7} & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & 0 & -4 & -45 \\ 0 & -4 & 4 & 24 \\ 0 & -9 & \frac{4}{7} & \frac{437}{7} \\ 1 & 0 & -7 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 0 & -4 & -45 \\ 0 & -4 & 4 & 24 \\ 0 & -9 & \frac{4}{7} & \frac{437}{7} \\ 0 & 0 & -\frac{45}{7} & \frac{45}{7} \end{pmatrix}$$

Multiplico ahora por $E_{32}(-\frac{9}{4})$ y por $E_{43}(-\frac{45}{59})$ para hacer un cero por debajo del segundo y del tercer pivote.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{9}{4} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & 0 & -4 & -45 \\ 0 & -4 & 4 & 24 \\ 0 & -9 & \frac{4}{7} & \frac{437}{7} \\ 0 & 0 & -\frac{45}{7} & \frac{45}{7} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 0 & -4 & -45 \\ 0 & -4 & 4 & 24 \\ 0 & 0 & -\frac{59}{7} & \frac{59}{7} \\ 0 & 0 & -\frac{45}{7} & \frac{45}{7} \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{45}{59} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & 0 & -4 & -45 \\ 0 & -4 & 4 & 24 \\ 0 & 0 & -\frac{59}{7} & \frac{59}{7} \\ 0 & 0 & -\frac{45}{7} & \frac{45}{7} \end{pmatrix} =$$

Solución

$$\begin{pmatrix} 7 & 0 & -4 & -45 \\ 0 & -4 & 4 & 24 \\ 0 & 0 & -\frac{59}{7} & \frac{59}{7} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Multiplico ahora por $E_{23}(\frac{28}{59})$ y por $E_{13}(-\frac{28}{59})$ para hacer dos ceros por encima del tercer pivote.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{28}{59} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 7 & 0 & -4 & -45 \\ 0 & -4 & 4 & 24 \\ 0 & 0 & -\frac{59}{7} & \frac{59}{7} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 0 & -4 & -45 \\ 0 & -4 & 0 & 28 \\ 0 & 0 & -\frac{59}{7} & \frac{59}{7} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{28}{59} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 7 & 0 & -4 & -45 \\ 0 & -4 & 0 & 28 \\ 0 & 0 & -\frac{59}{7} & \frac{59}{7} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} =$$
$$\begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 & -49 \\ 0 & -4 & 0 & 28 \\ 0 & 0 & -\frac{59}{7} & \frac{59}{7} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Finalmente, multiplico por $E_1(\frac{1}{7})$, por $E_2(-\frac{1}{4})$ y por $E_3(-\frac{7}{59})$ para obtener tres unos.

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{7} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{7}{59} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 & -49 \\ 0 & -4 & 0 & 28 \\ 0 & 0 & -\frac{59}{7} & \frac{59}{7} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -7 \\ 0 & 1 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Esta última matriz es la FNHF de A que llamaremos H_1 (forma normal de Hermite por filas). Obtenemos que el rango(A) = 3 y que los s.l. homogéneos que definen son equivalentes:

$$AX = \begin{pmatrix} 7 & 0 & -4 & -45 \\ 7 & -4 & 0 & -21 \\ 1 & -9 & 0 & 56 \\ 1 & 0 & -7 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow H_1X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -7 \\ 0 & 1 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - 7x_4 \\ x_2 - 7x_4 \\ x_3 - x_4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Se obtienen unas e.c. de N(A):

$$x_1 = 7x_4$$
$$x_2 = 7x_4$$
$$x_3 = x_4$$

En consecuencia, llamando $x_4 = \lambda$, se obtienen las soluciones del s.l. $AX = 0$. O sea, los vectores del espacio nulo

Solución

$$N(A) = \{X \in \mathbb{R}^4 : AX = 0\} = \{(7\lambda, 7\lambda, \lambda, \lambda) : \lambda \in \mathbb{R}\} = \{\lambda(7,7,1,1) : \lambda \in \mathbb{R}\}$$

Una base de N(A) está formada por el único vector $u_1 = (7,7,1,1)$ y su dimensión es 1.

Ahora realizo el proceso análogo por columnas.

Multiplico A por $E_{31}(\frac{4}{7})$ y $E_{41}(\frac{45}{7})$ para hacer dos ceros a la derecha del primer pivote.

$$\begin{pmatrix} 7 & 0 & -4 & -45 \\ 7 & -4 & 0 & -21 \\ 1 & -9 & 0 & 56 \\ 1 & 0 & -7 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{4}{7} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 & -45 \\ 7 & -4 & 4 & -21 \\ 1 & -9 & \frac{4}{7} & 56 \\ 1 & 0 & -\frac{45}{7} & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 & -45 \\ 7 & -4 & 4 & -21 \\ 1 & -9 & \frac{4}{7} & 56 \\ 1 & 0 & -\frac{45}{7} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{45}{7} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 & 0 \\ 7 & -4 & 4 & 24 \\ 1 & -9 & \frac{4}{7} & \frac{437}{7} \\ 1 & 0 & -\frac{45}{7} & \frac{45}{7} \end{pmatrix}$$

Multiplico ahora por $E_{32}(1)$ y por $E_{42}(6)$ para hacer dos ceros a la derecha del segundo pivote.

$$\begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 & 0 \\ 7 & -4 & 4 & 24 \\ 1 & -9 & \frac{4}{7} & \frac{437}{7} \\ 1 & 0 & -\frac{45}{7} & \frac{45}{7} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 & 0 \\ 7 & -4 & 0 & 24 \\ 1 & -9 & -\frac{59}{7} & \frac{437}{7} \\ 1 & 0 & -\frac{45}{7} & \frac{45}{7} \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 & 0 \\ 7 & -4 & 0 & 24 \\ 1 & -9 & -\frac{59}{7} & \frac{437}{7} \\ 1 & 0 & -\frac{45}{7} & \frac{45}{7} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 & 0 \\ 7 & -4 & 0 & 0 \\ 1 & -9 & -\frac{59}{7} & \frac{59}{7} \\ 1 & 0 & -\frac{45}{7} & \frac{45}{7} \end{pmatrix}$$

Multiplico ahora por $E_{43}(1)$ y por $E_{23}(-\frac{63}{59})$ para hacer otro cero a la derecha tercer pivote y un cero a la izquierda del tercer pivote.

$$\begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 & 0 \\ 7 & -4 & 0 & 0 \\ 1 & -9 & -\frac{59}{7} & \frac{59}{7} \\ 1 & 0 & -\frac{45}{7} & \frac{45}{7} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 & 0 \\ 7 & -4 & 0 & 0 \\ 1 & -9 & -\frac{59}{7} & 0 \\ 1 & 0 & -\frac{45}{7} & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 & 0 \\ 7 & -4 & 0 & 0 \\ 1 & -9 & -\frac{59}{7} & 0 \\ 1 & 0 & -\frac{45}{7} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{63}{59} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 & 0 \\ 7 & -4 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -\frac{59}{7} & 0 \\ 1 & \frac{405}{59} & -\frac{45}{7} & 0 \end{pmatrix}$$

Multiplico ahora por $E_{13}(\frac{7}{59})$ y por $E_{12}(\frac{7}{4})$ para hacer los últimos ceros.

$$\begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 & 0 \\ 7 & -4 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -\frac{59}{7} & 0 \\ 1 & \frac{405}{59} & -\frac{45}{7} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{7}{59} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 & 0 \\ 7 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{59}{7} & 0 \\ \frac{14}{59} & \frac{405}{59} & -\frac{45}{7} & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 & 0 \\ 7 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{59}{7} & 0 \\ \frac{14}{59} & \frac{405}{59} & -\frac{45}{7} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{7}{4} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{59}{7} & 0 \\ \frac{49}{4} & \frac{405}{59} & -\frac{45}{7} & 0 \end{pmatrix}$$

Finalmente, multiplico por $E_1(\frac{1}{7})$, por $E_2(-\frac{1}{4})$ y por $E_3(-\frac{7}{59})$ para obtener tres unos.

$$\begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{59}{7} & 0 \\ \frac{49}{4} & \frac{405}{59} & -\frac{45}{7} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{7} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{7}{59} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{7}{4} & -\frac{405}{236} & \frac{45}{59} & 0 \end{pmatrix}$$

Esta última matriz es la FNHC de A (forma normal de Hermite por columnas) que llamaremos H_2. Obtenemos de nuevo que el rango es 3 y que unas e.p. de C(A) son

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{7}{4} & -\frac{405}{236} & \frac{45}{59} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \frac{7}{4}\lambda_1 - \frac{405}{236}\lambda_2 + \frac{45}{59}\lambda_3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$x_1 = \lambda_1$$

$$x_2 = \lambda_2$$

$$x_3 = \lambda_3$$

$$x_4 = \frac{7}{4}\lambda_1 - \frac{405}{236}\lambda_2 + \frac{45}{59}\lambda_3$$

Por tanto, C(A) tiene 3 parámetros y eliminándolos queda una única e.c.

$$x_4 = \frac{7}{4}x_1 - \frac{405}{236}x_2 + \frac{45}{59}x_3$$

Su dim(C(A))=rango(A)=3 y una base tiene los 3 vectores siguientes:

$$B = \{(0,0,1,\frac{45}{59}),(1,1,1,\frac{47}{59}),(\frac{225}{413},1,1,0)\}$$

que se obtienen dando los valores más sencillos a los parámetros.

Si se hace la unión una base de C(A) y otra de N(A), obtenemos esto:

$$B = \begin{pmatrix} 7 & 7 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{45}{59} \\ 1 & 1 & 1 & \frac{47}{59} \\ \frac{225}{413} & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow det(B) = 0$$

Es decir, el espacio suma tiene rango y dimensión 3, ya que podemos coger tres vectores linealmente independientes (se puede coger un menor de orden 3 con determinante distinto de 0), luego una posible base es:

Solución

$$B = \{(7,7,1,1),(0,0,1,\frac{45}{59}),(1,1,1,\frac{47}{59})\}$$

Por la fórmula de las dimensiones, sabemos que

$$dim(N(A)) + dim(C(A)) - dim(N(A) + C(A)) = dim(N(A) \cap C(A)) = 1 + 3 - 3 = 1$$

Luego $C(A) \cap N(A)$ tiene dimensión 1, y una base es $\{(7,7,1,1\}$. Ampliando a una base de C(A), esta base sería $\{(7,7,1,1),(0,0,1,\frac{45}{59}),(\frac{225}{413},1,1,0)\}$