
Álgebra: ejercicio 1

Juan José Jarque Megías

Curso 2017/18

Índice

1. Enunciado	3
2. Solución	3

Enunciado

El DNI usado para el ejercicio es el siguiente: 49212789.

Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 9 & 2 & 1 \\ 2 & -7 & 8 & -9 \\ 3 & 10 & 1 & 2 \\ 0 & 6 & 9 & 7 \end{pmatrix}$$

- a) Aplica el algoritmo de transformaciones elementales a la matriz A y razona si tiene o no inversa.
- b) Halla con el algoritmo, el determinante de la matriz.
- c) Halla en su caso, con el mismo algoritmo, la inversa de la matriz A

Solución

Para las 3 primeras transformaciones elementales por filas, elegimos como pivote el primer elemento, no cero, de la primera fila de A y hacemos 3 ceros por debajo.

$$\begin{pmatrix} 4 & 9 & 2 & 1 \\ 2 & -7 & 8 & -9 \\ 3 & 10 & 1 & 2 \\ 0 & 6 & 9 & 7 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{21}(-\frac{1}{2})} \begin{pmatrix} 4 & 9 & 2 & 1 \\ 0 & -\frac{23}{2} & 7 & -\frac{19}{2} \\ 3 & 10 & 1 & 2 \\ 0 & 6 & 9 & 7 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{31}(-\frac{3}{4})} \begin{pmatrix} 4 & 9 & 2 & 1 \\ 0 & -\frac{23}{2} & 7 & -\frac{19}{2} \\ 0 & \frac{13}{4} & -\frac{1}{2} & \frac{5}{4} \\ 0 & 6 & 9 & 7 \end{pmatrix}$$

Para las siguientes 2 transformaciones, elegimos el $-\frac{23}{2}$ como pivote y hacemos 2 ceros por debajo.

$$\xrightarrow{E_{32}(\frac{13}{46})} \begin{pmatrix} 4 & 9 & 2 & 1 \\ 0 & -\frac{23}{2} & 7 & -\frac{19}{2} \\ 0 & 0 & \frac{34}{23} & -\frac{33}{23} \\ 0 & 6 & 9 & 7 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{42}(\frac{12}{23})} \begin{pmatrix} 4 & 9 & 2 & 1 \\ 0 & -\frac{23}{2} & 7 & -\frac{19}{2} \\ 0 & 0 & \frac{34}{23} & -\frac{33}{23} \\ 0 & 0 & \frac{291}{23} & \frac{47}{23} \end{pmatrix}$$

Posteriormente, elijo al $\frac{34}{23}$ como pivote y hago un cero por debajo.

$$\xrightarrow{E_{43}(-\frac{291}{34})} \begin{pmatrix} 4 & 9 & 2 & 1 \\ 0 & -\frac{23}{2} & 7 & -\frac{19}{2} \\ 0 & 0 & \frac{34}{23} & -\frac{33}{23} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{487}{34} \end{pmatrix}$$

Ahora tenemos que hacer ceros por encima, luego escojo $\frac{487}{34}$ como pivote y hago 3 ceros por arriba.

Solución

$$\xrightarrow{E_{34}(\frac{33}{47})} \begin{pmatrix} 4 & 9 & 2 & 1 \\ 0 & \frac{-23}{2} & 7 & -\frac{19}{2} \\ 0 & 0 & \frac{34}{23} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{487}{34} \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{24}(\frac{437}{94})} \begin{pmatrix} 4 & 9 & 2 & 1 \\ 0 & \frac{-23}{2} & 7 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{34}{23} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{487}{34} \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{14}(\frac{-23}{47})} \begin{pmatrix} 4 & 9 & 2 & 0 \\ 0 & \frac{-23}{2} & 7 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{34}{23} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{487}{34} \end{pmatrix}$$

Escogemos como nuevo pivote $\frac{34}{23}$ y hacemos 2 ceros por arriba.

$$\xrightarrow{E_{23}(\frac{-161}{34})} \begin{pmatrix} 4 & 9 & 2 & 0 \\ 0 & \frac{-23}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{34}{23} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{487}{34} \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{13}(\frac{-23}{17})} \begin{pmatrix} 4 & 9 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-23}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{34}{23} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{487}{34} \end{pmatrix}$$

Finalmente, escojo como pivote $\frac{-23}{2}$ y hago el último cero por arriba.

$$\xrightarrow{E_{12}(\frac{18}{23})} \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-23}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{34}{23} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{487}{34} \end{pmatrix}$$

Por tanto, su determinante es:

$$\det(A) = 4 * \frac{487}{34} * \frac{-23}{2} * \frac{34}{23} = -974 \neq 0$$

Como el determinante de la matriz original es distinto de 0, tiene inversa. Finalmente, obtenemos la matriz identidad.

Hacemos $E_1(\frac{1}{4})$, $E_2(\frac{-2}{23})$, $E_3(\frac{23}{34})$ y $E_4(\frac{34}{487})$ para obtener la matriz identidad:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

A continuación, hallaremos su matriz inversa a partir de la matriz identidad.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{21}(\frac{-1}{2})} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-1}{2} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{31}(\frac{-3}{4})} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-1}{2} & 1 & 0 & 0 \\ \frac{-3}{4} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Solución

$$\xrightarrow{E_{32}(\frac{13}{46})} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{41}{46} & \frac{13}{46} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \dots\dots$$

y así sucesivamente, haciendo todas las transformaciones elementales que se hicieron para hallar la forma de Hermite. La inversa que queda tras hacer las transformaciones es:

$$\begin{pmatrix} \frac{1143}{974} & \frac{-131}{974} & \frac{-556}{487} & \frac{-7}{487} \\ \frac{-433}{974} & \frac{59}{974} & \frac{269}{487} & \frac{-8}{487} \\ \frac{-101}{974} & \frac{61}{974} & \frac{47}{487} & \frac{33}{487} \\ \frac{501}{974} & \frac{-129}{974} & \frac{-291}{487} & \frac{34}{487} \end{pmatrix} = A^{-1}$$