Universidad de Granada

Grado en Estadística

Primera relación de ejercicios propuestos

Miguel Anguita Ruiz

Curso 2018/19

Índice

Ejercicios

Ejercicio 1.1. Consideremos una población $P = \{1, 3, 5\}$. Se pide:

a) Obtener media y desviación típica poblacionales.

b) Deducir todas las posibles muestras aleatorias de tamaño 2.

c) Obtener la media muestral para cada una de las muestras.

d) Calcular la esperanza y varianza de $\overline{X}$.

Solución. .

Sea una variable aleatoria X sobre P.

a) La media poblacional es la esperanza de X:

$$\mu = E[X] = \sum_{i=1}^{3} x_i P(X = x_i) = \frac{1+3+5}{3} = 3$$

Para calcular la varianza, hallamos el momento no centrado de orden 2:

$$E[X^2] = \sum_{i=1}^{3} x_i^2 P(X = x_i) = \frac{1+9+25}{3} = \frac{35}{3}$$

Hallamos ahora la varianza poblacional:

$$\sigma^2 = E[X^2] - (E[X])^2 = \frac{35}{3} - 9 = \frac{8}{3}$$

Y la desviación típica poblacional es:

$$\sigma = \sqrt{\frac{8}{3}}$$

b) Existen $\binom{3}{2}$ combinaciones de los 3 elementos de P tomados de 2 en 2 y son:

$$P_1 = \{1, 3\}$$

$$P_2 = \{1, 5\}$$

$$P_3 = \{3, 5\}$$

c) La media muestral de cada muestra es:

$$\overline{X_1} = \frac{1}{2}(1+3) = 2$$
$$\overline{X_2} = \frac{1}{2}(1+5) = 3$$
$$\overline{X_2} = \frac{1}{2}(3+5) = 4$$

d) La media muestral coincide con la media poblacional, luego:

$$E[\overline{X}] = E[X] = 3$$

Por otra parte, la varianza muestral es:

$$Var[\overline{X}] = \frac{\sigma^2}{n} = \frac{\frac{8}{3}}{2} = \frac{4}{3}$$

Ejercicio 1.2. Sea $X_1, ..., X_n$ una muestra aleatoria de una $U(a,b)$. Encontrar la distribución de los estadísticos:

$$X_{(1)} = min\{X_1, ..., X_n\} \qquad X_{(2)} = max\{X_1, ..., X_n\}$$

Solución. La función de distribución de $X_{(1)}$ es la siguiente:

$$F_{X_{(1)}}(y) = P(X_{(1)} \leq y) = 1 - P(X_{(1)} > y) = 1 - P(X_1 > y, ..., X_n > y) =$$
$$1 - \prod_{i=1}^{n} P(X_i > y) = 1 - \prod_{i=1}^{n}[1 - P(X_i \leq y)] = 1 - [1 - F(y)]^n$$

Por lo tanto, para una $U(a,b)$, su distribución es:

$$F(x) = \begin{cases} 0, \ \ x < a \\ 1 - [1 - \frac{x-a}{b-a}]^n = 1 - [\frac{b-x}{b-a}]^n, \ \ a \leq x < b \\ 1, \ \ x \geq b \end{cases} \tag{1}$$

Por otra parte, la función de distribución de $X_{(n)}$ es la siguiente:

$$F_{X_{(n)}}(y) = P(X_{(n)} \leq y) = P(X_1 \leq y, ..., X_n \leq y) = \prod_{i=1}^{n} P(X_i \leq y) = [F(y)]^n$$

Por lo tanto, para una $U(a,b)$, su distribución es:

$$F(x) = \begin{cases} 0, \ \ x < a \\ (\frac{x-a}{b-a})^n, \ \ a \leq x < b \\ 1, \ \ x \geq b \end{cases} \tag{2}$$