Universidad de Granada

Álgebra: ejercicio 9

Miguel Anguita Ruiz

Curso 2017/18

Índice

Enunciado

DNI: 77149477W

Dada la matriz:

$$\begin{pmatrix} \frac{11}{2} & 0 & 0 & \frac{5\sqrt{5}}{2} \\ 0 & \frac{2}{13} & \frac{\sqrt{165}}{13} & 0 \\ 0 & -\frac{\sqrt{165}}{13} & \frac{2}{13} & 0 \\ \frac{5\sqrt{5}}{2} & 0 & 0 & \frac{11}{2} \end{pmatrix}$$

i) Razona que define un endomorfismo $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$. Halla el det(A) y clasifica f.

ii) Factoriza su polinomio característico p(x) en dos polinomios cuadráticos.

iii) Halla sus valores propios.

iv) Halla sus vectores propios.

Solución

Una matriz cuadrada real A, n×n, se puede interpretar como la matriz de una a.l. de $\mathbb{R}^n$ en sí mismo, $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, definida por la igualdad matricial $f(u) = A * X$, donde $X = u^t$ es u escrito como columna.

En este caso, $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ viene definido por la siguiente matriz:

$$f(u) = \begin{pmatrix} \frac{11}{2} & 0 & 0 & \frac{5\sqrt{5}}{2} \\ 0 & \frac{2}{13} & \frac{\sqrt{165}}{13} & 0 \\ 0 & -\frac{\sqrt{165}}{13} & \frac{2}{13} & 0 \\ \frac{5\sqrt{5}}{2} & 0 & 0 & \frac{11}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}$$

O sea, el endomorfismo f viene definido por la igualdad matricial $Y = A * X$, donde $Y = v^t$ es $f(u) = v$ escrito como columna.

El determinante se puede hallar fácilmente haciendo transformaciones fila, obteniéndose la matriz:

$$\begin{pmatrix} \frac{11}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{13} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{13}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{2}{11} \end{pmatrix}$$

cuyo determinante es -1 y f es un isomorfismo pues la dimensión de su núcleo es 0.

Su polinomio característico es el siguiente:

Solución

$$|A-\lambda I|=0\rightarrow\begin{vmatrix}\frac{11}{2}-\lambda & 0 & 0 & \frac{5\sqrt{5}}{2}\\ 0 & \frac{2}{13}-\lambda & \frac{\sqrt{165}}{13} & 0\\ 0 & -\frac{\sqrt{165}}{13} & \frac{2}{13}-\lambda & 0\\ \frac{5\sqrt{5}}{2} & 0 & 0 & \frac{11}{2}-\lambda\end{vmatrix}=0$$

Los valores propios son

$$(\lambda^2-11\lambda-1)(\lambda^2-\frac{4}{13}\lambda+1)=0\rightarrow\lambda=\frac{11+5\sqrt{5}}{2},\lambda=\frac{11-5\sqrt{5}}{2},\lambda=\frac{2-i\sqrt{165}}{13},\lambda=\frac{2+i\sqrt{165}}{13}$$

Como hay 4 valores propios distintos, con multiplicidad algebraica 1 cada uno, sabemos que la matriz es diagonalizable, luego cada valor propio tiene asociado un solo vector propio.

$$\begin{pmatrix}\frac{11}{2}-\lambda & 0 & 0 & \frac{5\sqrt{5}}{2}\\ 0 & \frac{2}{13}-\lambda & \frac{\sqrt{165}}{13} & 0\\ 0 & -\frac{\sqrt{165}}{13} & \frac{2}{13}-\lambda & 0\\ \frac{5\sqrt{5}}{2} & 0 & 0 & \frac{11}{2}-\lambda\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$$

Si sustituimos cada valor propio en λ, nos queda un sistema de 4 ecuaciones con 4 incógnitas, luego es compatible determinado y tiene solución única para cada valor propio. Por lo tanto, los vectores propios asociados a los autovalores, son, respectivamente:

$$v_1=(1,0,0,1)$$

$$v_2=(-1,0,0,1)$$

$$v_3=(0,i,1,0)$$

$$v_4=(0,-i,1,0)$$