Universidad de Granada

Grado en Estadística

Cálculo de funciones de densidad marginales de vectores aleatorios

Miguel Anguita Ruiz

Curso 2017/18

Índice

Ejercicios

DNI: 77149477W

Ejercicio 1.1. En la siguiente tabla se presenta la función masa de probabilidad conjunta de un vector aleatorio (X, Y, Z), con las probabilidades de que ocurra cada uno de los posibles valores del conjunto en el que está definido. Describir las funciones masa de probabilidad de las tres distribuciones marginales que pueden obtenerse.

Z = 11				Z = 1			
Y = 15		Y = 20		Y = 15		Y = 20	
X = 17	X = 2	X = 17	X = 2	X = 17	X = 2	X = 17	X = 2
0.08	0.09	0.21	0.08	0.2	0.1	0.06	0.18

Solución. .

- Función masa de probabilidad de X:

  - $P(X = 17) = P(X = 17, Y = 15, Z = 11) + P(X = 17, Y = 20, Z = 11)$
    $+ P(X = 17, Y = 15, Z = 1) + P(X = 17, Y = 20, Z = 1) = 0{,}08 + 0{,}21 + 0{,}2 + 0{,}06 = 0{,}55$
  - $P(X = 2) = P(X = 2, Y = 15, Z = 11) + P(X = 2, Y = 20, Z = 11)$
    $+ P(X = 2, Y = 15, Z = 1) + P(X = 2, Y = 20, Z = 1) = 0{,}09 + 0{,}08 + 0{,}1 + 0{,}18 = 0{,}45$

- Función masa de probabilidad de Y:

  - $P(Y = 15) = P(X = 17, Y = 15, Z = 11) + P(X = 2, Y = 15, Z = 11)$
    $+ P(X = 17, Y = 15, Z = 1) + P(X = 2, Y = 15, Z = 1) = 0{,}08 + 0{,}09 + 0{,}2 + 0{,}1 = 0{,}47$
  - $P(Y = 20) = P(X = 17, Y = 20, Z = 11) + P(X = 2, Y = 20, Z = 11)$
    $+ P(X = 17, Y = 20, Z = 1) + P(X = 2, Y = 20, Z = 1) = 0{,}21 + 0{,}08 + 0{,}06 + 0{,}18 = 0{,}53$

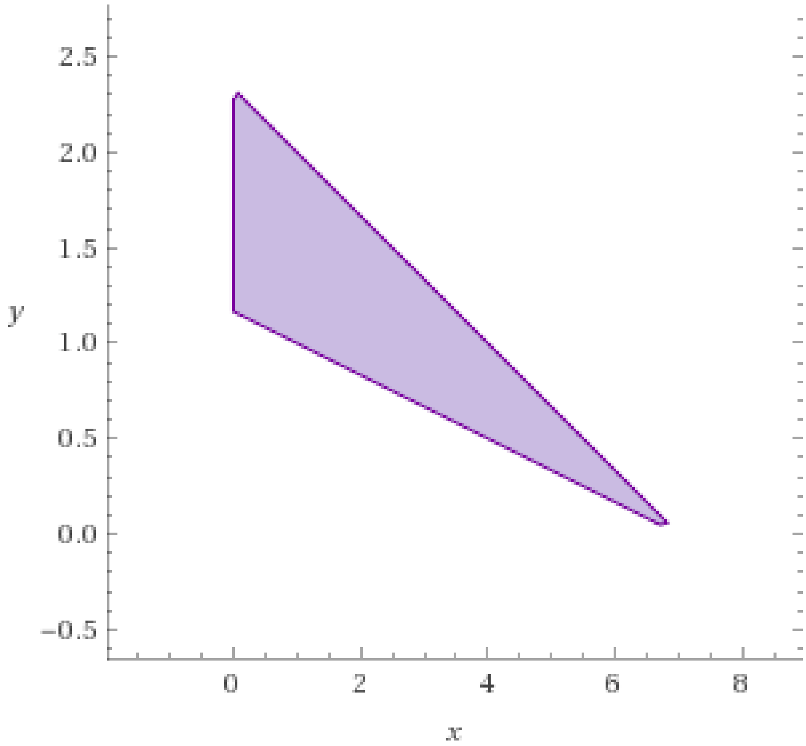
- Función masa de probabilidad de Z:

  - $P(Z = 11) = P(X = 17, Y = 15, Z = 11) + P(X = 2, Y = 15, Z = 11)$
    $+ P(X = 17, Y = 20, Z = 11) + P(X = 2, Y = 20, Z = 11) = 0{,}08 + 0{,}09 + 0{,}21 + 0{,}08 = 0{,}46$
  - $P(Z = 1) = P(X = 17, Y = 15, Z = 1) + P(X = 2, Y = 15, Z = 1)$
    $+ P(X = 17, Y = 20, Z = 1) + P(X = 2, Y = 20, Z = 1) = 0{,}2 + 0{,}1 + 0{,}06 + 0{,}18 = 0{,}54$

Ejercicio 1.2. Calcular las funciones de densidad marginales del vector aleatorio continuo (X,Y) con la función de densidad conjunta que se muestra a continuación:

$$f(x,y) = \frac{12}{49}, \;\; 0 < x < 7, \;\; \frac{7}{6} - \frac{1}{6}x < y < \frac{7}{3} - \frac{1}{3}x$$

Solución. .



Calculo primero la función de densidad marginal de X:

$$f_1(x) = \int_{\frac{7}{6}-\frac{1}{6}x}^{\frac{7}{3}-\frac{1}{3}x} \frac{12}{49}\,dy = \frac{12}{49}\int_{\frac{7}{6}-\frac{1}{6}x}^{\frac{7}{3}-\frac{1}{3}x} 1\,dy = \frac{12}{49}(\frac{7}{3}-\frac{1}{3}x-(\frac{7}{6}-\frac{1}{6}x)) = \frac{12}{49}(\frac{7}{6}-\frac{1}{6}x) = \frac{84}{294}-\frac{12}{294}x = -\frac{2}{49}(x-7), \;\; 0 < x < 7$$

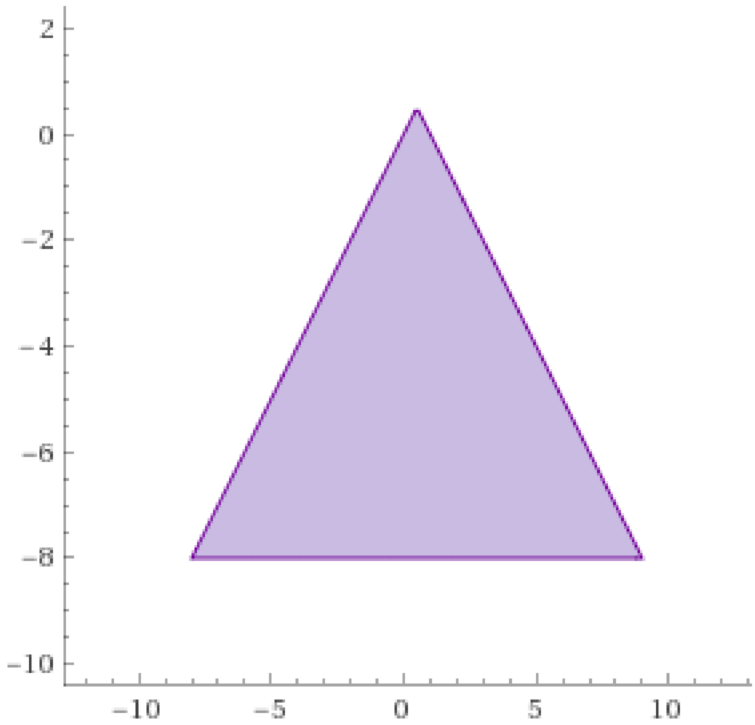
Finalmente, calculo la función de densidad de Y:

$$f_2(y) = \begin{cases} \displaystyle\int_{7-6y}^{7-3y} \frac{12}{49}\,dx = \frac{12}{49}(7-3y-7+6y) = \frac{36}{49}y, \;\; 0 < y < \frac{7}{6} \\ \displaystyle\int_{0}^{7-3y} \frac{12}{49}\,dx = \frac{12}{49}(7-3y) = \frac{12}{7} - \frac{36}{49}y, \;\; \frac{7}{6} \le y < \frac{7}{3} \end{cases} \qquad (1)$$

Ejercicio 1.3. Calcular las funciones de densidad marginales del vector aleatorio continuo (X,Y) con la función de densidad conjunta que se muestra a continuación:

$$f(x,y) = \frac{4}{289}, \;\; y < x < 1-y, \;\; -8 < y < 0{,}5$$

Solución. .



Calculo primero la función de densidad marginal de X:

$$f_1(x) = \begin{cases} \int_{-8}^{x} \frac{4}{289}\,dy = \frac{4}{289}\int_{-8}^{x} 1\,dy = \frac{4}{289}(x+8) = \frac{4}{289}x + \frac{32}{289}, & -8 < x < 0{,}5 \\ \int_{-8}^{1-x} \frac{4}{289}\,dy = \frac{4}{289}\int_{-8}^{1-x} 1\,dy = \frac{4}{289}(9-x) = \frac{36}{289} - \frac{4}{289}x, & 0{,}5 \le x < 9 \end{cases} \tag{2}$$

Finalmente, calculo la función de densidad de Y:

$$f_2(y) = \int_{y}^{1-y} \frac{4}{289}\,dx = \frac{4}{289}\int_{y}^{1-y} 1\,dx = \frac{4}{289}(1-2y) = \frac{4}{289} - \frac{8}{289}y, \quad -8 < y < 0{,}5$$