Universidad de Granada

Álgebra: ejercicio 6

Miguel Anguita Ruiz

Curso 2017/18

Índice

Enunciado

El DNI usado para el ejercicio es el siguiente: 77149477.

Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 7 & 7 & 1 & 4 \\ -9 & 4 & -7 & 7 \end{pmatrix}$

i) Usa una base ampliada de su espacio de filas para encontrar una factorización de A.

ii) Usa una base ampliada de su espacio de columnas para encontrar una factorización de A.

iii) Amplía el espacio nulo de la matriz hasta una base de $\mathbb{R}^4$. Usa esta base y la de su espacio de columnas para encontrar una factorización de A.

Solución

Para la matriz A, su espacio de filas está contenido en $\mathbb{R}^4$:

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 7 & 1 & 4 \\ -9 & 4 & -7 & 7 \end{pmatrix}$$

$F(A) = \{\lambda_1(7,7,1,4) + \lambda_2(-9,4,-7,7) : \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^4$

Como A tiene rango 2, sus dos filas son linealmente independientes y forman una base de F(A). Esta se puede ampliar hasta una base de $\mathbb{R}^4$ añadiendo dos vectores mas que sean l.i. con ellos. Por ejemplo, $(1,0,0,0)$ y $(0,1,0,0)$ sirven.

Así se obtiene una base de $\mathbb{R}^4$ o equivalentemente una matriz regular:

$$P = \begin{pmatrix} 7 & 7 & 1 & 4 \\ -9 & 4 & -7 & 7 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

que tiene la propiedad de simplificar A en una H_1 que aquí es su FNHC.

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 7 & 1 & 4 \\ -9 & 4 & -7 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & 7 & 1 & 4 \\ -9 & 4 & -7 & 7 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = H_1 P$$

obteniendose una factorización sencilla $A = H_1 P$. Las dos últimas filas de P pueden ser cualesquiera vectores pero se eligen que sean l.i. con los originales para que P tenga inversa y $H_1 = AP^{-1}$. Hay infinitas P pero una única H_1 porque A es de rango pleno por filas.

Ampliemos ahora una base de columnas.

La misma matriz A anterior tiene 4 columnas:

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 7 & 1 & 4 \\ -9 & 4 & -7 & 7 \end{pmatrix}$$

tal que $v_1 = \begin{pmatrix} 7 \\ -9 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -7 \end{pmatrix}, v_4 = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \end{pmatrix}$

pero si elegimos v_1 y v_2 sale una base de $\mathbb{R}^2$ que generan también su espacio de columnas.

$C(A) = \{\mu_1 v_1 + \mu_2 v_2 \in \mathbb{R}^2 : \mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}\}$

Así se obtiene una base de $\mathbb{R}^2$ o equivalentemente una matriz regular:

$$Q = \begin{pmatrix} 7 & 7 \\ -9 & 4 \end{pmatrix}$$

que tiene la propiedad de simplificar A en una H_2 que aquí es su FNHF.

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 7 & 1 & 4 \\ -9 & 4 & -7 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 7 \\ -9 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{53}{91} & \frac{-33}{91} \\ 0 & 1 & \frac{-40}{91} & \frac{85}{91} \end{pmatrix} = QH_2$$

obteniéndose una factprización sencilla $A = QH_2 \Leftrightarrow H_2 = Q^{-1}A$.

Pero dependiendo de la elección de la base Q pueden obtenerse distintas H_2. Si se eligen la primera y la cuarta como base de columnas se obtiene una factorización distinta donde:

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 7 & 1 & 4 \\ -9 & 4 & -7 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ -9 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{33}{85} & \frac{7}{17} & 0 \\ 0 & \frac{91}{85} & \frac{-8}{17} & 1 \end{pmatrix} = QH_3$$

La matriz H_3 no es una FNHC pero su primera y cuarta columnas son elementales.

Finalmente, ampliemos el espacio nulo.

La misma matriz A anterior define el siguiente s.l. homogéneo:

Solución

$$\begin{pmatrix} 7 & 7 & 1 & 4 \\ -9 & 4 & -7 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$7x_1 + 7x_2 + x_3 + 4x_4 = 0$$
$$-9x_1 + 4x_2 - 7x_3 + 7x_4 = 0$$

Resolviéndolo, se obtiene una solución general:

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (\frac{-53\lambda + 33\mu}{91}, \frac{40\lambda - 85\mu}{91}, \lambda, \mu) = \lambda(\frac{-53}{91}, \frac{40}{91}, 1, 0) + \mu(\frac{33}{91}, \frac{-85}{91}, 0, 1)$$

donde $(\frac{-53}{91}, \frac{40}{91}, 1, 0), (\frac{33}{91}, \frac{-85}{91}, 0, 1) \in \mathbb{R}^4$ son 2 vectores l.i. que generan a todas las soluciones y forman una base del espacio nulo N(A).

Esta base del espacio nulo se puede ampliar hasta una base de $\mathbb{R}^4$ añadiendo dos vectores que sean l.i. con ellos. Por ejemplo, nos sirven $e_1 = (1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0)$ ya que la matriz por columnas

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{-53}{91} & \frac{33}{91} \\ 0 & 1 & \frac{40}{91} & \frac{-85}{91} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

tiene determinante distinto de 0 (vale 1). Así, multiplicando a derecha por P_1 se obtiene una matriz A_1 con 2 columnas de ceros:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 7 & 7 & 0 & 0 \\ -9 & 4 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 7 & 1 & 4 \\ -9 & 4 & -7 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{-53}{91} & \frac{33}{91} \\ 0 & 1 & \frac{40}{91} & \frac{-85}{91} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = AP_1$$

Como esta matriz A_1 se puede factorizar usando su base de columnas:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 7 & 7 & 0 & 0 \\ -9 & 4 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 7 \\ -9 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = QH$$

De las dos últimas igualdades matriciales se puede despejar A:

$$AP_1 = A_1 = QH \Leftrightarrow A = QHP_1^{-1}$$

Solución

O sea, hemos obtenido la factorización:

$$\begin{pmatrix} 7 & 7 & 1 & 4 \\ -9 & 4 & -7 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 7 \\ -9 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{-53}{91} & \frac{33}{91} \\ 0 & 1 & \frac{40}{91} & \frac{-85}{91} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$

donde la matriz central H es la forma de Hermite por filas y columnas de A, la matriz izquierda Q es una base de columnas y la matriz derecha P_1^{-1} es la inversa de una base ampliada de N(A) escrita por columnas.