Universidad de Granada

Álgebra: ejercicio 3

Miguel Anguita Ruiz

Curso 2017/18

Índice

Enunciado

El DNI usado para el ejercicio es el siguiente: 77149477.

Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 7 & 7 & 9 & 4 \\ 1 & 4 & 7 & 7 \\ 6 & 8 & 8 & 5 \end{pmatrix}$

a) Halla sus FNHF y FNHC. ¿Sale el mismo rango por filas que por columnas?

b) Halla las 2 grammianas de A. Sin calcular determinantes, ¿pueden ser ambas matrices regulares?

c) Razona que A no puede tener inversas laterales por los dos lados. ¿Tiene inversa lateral tu matriz A? En caso afirmativo, ¿por qué lado tiene inversa?

Solución

A continuación realizaré transformaciones elementales para obtener las formas de Hermite por filas y por columnas. Empezaré el proceso por filas:

Multiplico A por $E_{21}(-\frac{1}{7})$ y por $E_{31}(-\frac{6}{7})$ para hacer dos ceros por debajo del primer pivote.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{7} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 7 & 7 & 9 & 4 \\ 1 & 4 & 7 & 7 \\ 6 & 8 & 8 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 7 & 9 & 4 \\ 0 & 3 & \frac{40}{7} & \frac{45}{7} \\ 6 & 8 & 8 & 5 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{6}{7} & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 7 & 7 & 9 & 4 \\ 0 & 3 & \frac{40}{7} & \frac{45}{7} \\ 6 & 8 & 8 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 7 & 9 & 4 \\ 0 & 3 & \frac{40}{7} & \frac{45}{7} \\ 0 & 2 & \frac{2}{7} & \frac{11}{7} \end{pmatrix}$$

Multiplico ahora por $E_{32}(-\frac{2}{3})$ y por $E_{23}(\frac{60}{37})$ para hacer un cero por debajo del segundo pivote y un cero por encima del tercer pivote.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{2}{3} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 7 & 7 & 9 & 4 \\ 0 & 3 & \frac{40}{7} & \frac{45}{7} \\ 0 & 2 & \frac{2}{7} & \frac{11}{7} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 7 & 9 & 4 \\ 0 & 3 & \frac{40}{7} & \frac{45}{7} \\ 0 & 0 & -\frac{74}{21} & -\frac{57}{21} \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{60}{37} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 7 & 7 & 9 & 4 \\ 0 & 3 & \frac{40}{7} & \frac{45}{7} \\ 0 & 0 & -\frac{74}{21} & -\frac{57}{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 7 & 9 & 4 \\ 0 & 3 & 0 & \frac{75}{37} \\ 0 & 0 & -\frac{74}{21} & -\frac{57}{21} \end{pmatrix}$$

Multiplico ahora por $E_{13}(\frac{189}{74})$ y por $E_{12}(-\frac{7}{3})$ para hacer otro cero por encima del tercer pivote y un último cero por encima del segundo pivote.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{189}{74} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 7 & 7 & 9 & 4 \\ 0 & 3 & 0 & \frac{75}{37} \\ 0 & 0 & -\frac{74}{21} & -\frac{57}{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 7 & 0 & -\frac{217}{74} \\ 0 & 3 & 0 & \frac{75}{37} \\ 0 & 0 & -\frac{74}{21} & -\frac{57}{21} \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -\frac{7}{3} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 7 & 7 & 0 & -\frac{217}{74} \\ 0 & 3 & 0 & \frac{75}{37} \\ 0 & 0 & -\frac{74}{21} & -\frac{57}{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 & -\frac{567}{74} \\ 0 & 3 & 0 & \frac{75}{37} \\ 0 & 0 & -\frac{74}{21} & -\frac{57}{21} \end{pmatrix}$$

Finalmente, multiplico por $E_1(\frac{1}{7})$, por $E_2(\frac{1}{3})$ y por $E_3(-\frac{21}{74})$ para obtener una diagonal principal con unos.

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{7} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{21}{74} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 & -\frac{567}{74} \\ 0 & 3 & 0 & \frac{75}{37} \\ 0 & 0 & -\frac{74}{21} & -\frac{57}{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{81}{74} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{25}{37} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{57}{74} \end{pmatrix}$$

Esta última matriz es la FNHF de A (forma normal de Hermite por filas) y puede observarse que el rango de A es 3, que es el número de filas no nulas de su FNHF.

A continuación, procedo a hallar la forma normal de Hermite por columnas de A.

Multiplico A por $E_{21}(-1)$ y por $E_{31}(-\frac{9}{7})$ para hacer dos ceros a la derecha del primer pivote.

$$\begin{pmatrix} 7 & 7 & 9 & 4 \\ 1 & 4 & 7 & 7 \\ 6 & 8 & 8 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 9 & 4 \\ 1 & 3 & 7 & 7 \\ 6 & 2 & 8 & 5 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 7 & 0 & 9 & 4 \\ 1 & 3 & 7 & 7 \\ 6 & 2 & 8 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{9}{7} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 & 4 \\ 1 & 3 & \frac{40}{7} & 7 \\ 6 & 2 & \frac{2}{7} & 5 \end{pmatrix}$$

Multiplico ahora por $E_{32}(-\frac{40}{21})$ y por $E_{23}(\frac{42}{74})$ para hacer un cero a la derecha del segundo pivote y un cero a la izquierda del tercer pivote.

$$\begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 & 4 \\ 1 & 3 & \frac{40}{7} & 7 \\ 6 & 2 & \frac{2}{7} & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{40}{21} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 & 4 \\ 1 & 3 & 0 & 7 \\ 6 & 2 & -\frac{74}{21} & 5 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 & 4 \\ 1 & 3 & 0 & 7 \\ 6 & 2 & -\frac{74}{21} & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{42}{74} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 & 4 \\ 1 & 3 & 0 & 7 \\ 6 & 0 & -\frac{74}{21} & 5 \end{pmatrix}$$

Multiplico ahora por $E_{13}(\frac{63}{37})$ y por $E_{12}(-\frac{1}{3})$ para hacer otro cero a la izquierda del tercer pivote y un último cero a la izquierda del segundo pivote.

$$\begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 & 4 \\ 1 & 3 & 0 & 7 \\ 6 & 0 & -\frac{74}{21} & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{63}{37} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 & 4 \\ 1 & 3 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & -\frac{74}{21} & 5 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 & 4 \\ 1 & 3 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & -\frac{74}{21} & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{3} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & -\frac{74}{21} & 5 \end{pmatrix}$$

Multiplico ahora por $E_{41}(-\frac{4}{7})$, por $E_{42}(-\frac{7}{3})$ y por $E_{43}(\frac{105}{74})$ para hacer ceros en la última columna.

$$\begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & -\frac{74}{21} & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{4}{7} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{7}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{105}{74} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{74}{21} & 0 \end{pmatrix}$$

Finalmente, multiplico por $E_1(\frac{1}{7})$, por $E_2(\frac{1}{3})$ y por $E_3(-\frac{21}{74})$ para obtener una diagonal principal con unos.

$$\begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{74}{21} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{7} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{21}{74} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Esta última matriz es la FNHC de A (forma normal de Hermite por columnas) y puede observarse que el rango de A es 3, que es el número de columnas no nulas de su FNHC.

Como se puede comprobar, sale el mismo rango por filas que por columnas.

A continuación, hallaré las grammianas de A.

$$G_1 = A^t A = \begin{pmatrix} 7 & 1 & 6 \\ 7 & 4 & 8 \\ 9 & 7 & 8 \\ 4 & 7 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & 7 & 9 & 4 \\ 1 & 4 & 7 & 7 \\ 6 & 8 & 8 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 86 & 101 & 118 & 65 \\ 101 & 129 & 155 & 96 \\ 118 & 155 & 194 & 125 \\ 65 & 96 & 125 & 90 \end{pmatrix}$$

$$G_2 = A A^t = \begin{pmatrix} 7 & 7 & 9 & 4 \\ 1 & 4 & 7 & 7 \\ 6 & 8 & 8 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & 1 & 6 \\ 7 & 4 & 8 \\ 9 & 7 & 8 \\ 4 & 7 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 195 & 126 & 190 \\ 126 & 115 & 129 \\ 190 & 129 & 189 \end{pmatrix}$$

Sabemos que las grammianas de una matriz conservan el rango de la propia matriz, pues multiplicar por su traspuesta no lo varía. También sabemos que las grammianas son siempre matrices cuadradas. Podemos observar, además, que la matriz A es rectangular, luego sus grammianas serán cuadradas de distintas dimensiones, luego ambas no pueden regulares a la vez pues tienen igual rango con distintas dimensiones. Como el rango de A es 3 y el rango de $G_1 = 3 < min(4, 4)$ entonces G_1 no es regular, mientras que G_2 sí lo es.

De la matriz A se observa además que tiene el mismo número de filas que el máximo rango posible para una matriz de esas dimensiones (3), luego A es de rango pleno por filas (luego no lo es de columnas). Ello implica que tiene inversa lateral por la derecha. No puede tener inversas laterales por ambos lados, porque, de ser así, A sería regular, pero A no puede ser regular ya que no es cuadrada.

A continuación, hallaré la inversa lateral por la derecha de A resolviendo la siguiente ecuación:

$$\begin{pmatrix} 7 & 7 & 9 & 4 \\ 1 & 4 & 7 & 7 \\ 6 & 8 & 8 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \\ x_4 & y_4 & z_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto, tengo que resolver tres sistemas lineales.

Solución

$7x_1 + 7x_2 + 9x_3 + 4x_4 = 1$

$x_1 + 4x_2 + 7x_3 + 7x_4 = 0$

$6x_1 + 8x_2 + 8x_3 + 5x_4 = 0$

$7y_1 + 7y_2 + 9y_3 + 4y_4 = 0$

$y_1 + 4y_2 + 7y_3 + 7y_4 = 1$

$6y_1 + 8y_2 + 8y_3 + 5y_4 = 0$

$7z_1 + 7z_2 + 9z_3 + 4z_4 = 0$

$z_1 + 4z_2 + 7z_3 + 7z_4 = 0$

$6z_1 + 8z_2 + 8z_3 + 5z_4 = 1$

Los tres sistesmas son compatibles indeterminados pues la matriz de los sistemas es la matriz A, que tiene rango igual a la ampliada pero menor que el número de incógnitas, luego los sistemas tienen infinitas soluciones y, por ello, existen infinitas inversas laterales por la derecha de A.

Habiendo realizado ya los cálculos, los resultados son los siguientes:

$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (\frac{12}{37} + \frac{81}{74}\lambda, -\frac{17}{37} - \frac{25}{37}\lambda, \frac{8}{37} - \frac{57}{74}\lambda, \lambda)$
$(y_1, y_2, y_3, y_4) = (-\frac{8}{37} + \frac{81}{74}\mu, -\frac{1}{37} - \frac{25}{37}\mu, \frac{7}{37} - \frac{57}{74}\mu, \mu)$
$(z_1, z_2, z_3, z_4) = (-\frac{13}{74} + \frac{81}{74}\beta, \frac{20}{37} - \frac{25}{37}\beta, -\frac{21}{74} - \frac{57}{74}\beta, \beta)$

Dando valores arbitrarios a λ, μ, β, podemos hallar una de las infinitas inversas laterales a la derecha. Sea B esa matriz y $\lambda = \mu = \beta = 0$, entonces:

$$B = \begin{pmatrix} \frac{12}{37} & -\frac{8}{37} & -\frac{13}{74} \\ -\frac{17}{37} & -\frac{1}{37} & \frac{20}{37} \\ \frac{8}{37} & \frac{7}{37} & -\frac{21}{74} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$