Universidad de Granada

Álgebra: ejercicio 11

Miguel Anguita Ruiz

Curso 2017/18

Índice

Enunciado

DNI: 77149477W

Dada la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 63 & -28 & 49 & 49 \\ 63 & -28 & 49 & 49 \\ 9 & -4 & 7 & 7 \\ -36 & 16 & -28 & -28 \end{pmatrix}$$

i) Halla su polinomio característico p(x) usando transformaciones elementales. Razona que tiene todas sus raíces enteras y que una de ellas es d1*d5 - d2*d6 + d3*d7 - d4*d8.

ii) Halla el determinante y clasifica el endomorfismo que define.

iii) Halla sus multiplicidades algebraicas y geométricas. ¿Verifica A el teorema espectral?

iv) Diagonaliza A por una semejanza racional. ¿Es diagonalizable A por una congruencia-semejanza?

Solución

Una matriz cuadrada real A, n×n, se puede interpretar como la matriz de una a.l. de $\mathbb{R}^n$ en sí mismo, $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, definida por la igualdad matricial $f(u) = A * X$, donde $X = u^t$ es u escrito como columna.

En este caso, $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ viene definido por la siguiente matriz:

$$f(u) = \begin{pmatrix} 63 & -28 & 49 & 49 \\ 63 & -28 & 49 & 49 \\ 9 & -4 & 7 & 7 \\ -36 & 16 & -28 & -28 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}$$

O sea, el endomorfismo f viene definido por la igualdad matricial $Y = A * X$, donde $Y = v^t$ es $f(u) = v$ escrito como columna.

La matriz A tiene dos filas linealmente dependientes, luego el determinante de A es 0 y f no es monomorfismo, epimorfismo ni isomorfismo.

Su polinomio característico es el siguiente:

Solución

$$|A-\lambda I| = 0 \rightarrow \begin{vmatrix} 63-\lambda & -28 & 49 & 49 \\ 63 & -28-\lambda & 49 & 49 \\ 9 & -4 & 7-\lambda & 7 \\ -36 & 16 & -28 & -28-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

Haciendo transformaciones $E_{21}(-1)$, $E_{13}(-7)$ y $E_{43}(4)$ por filas, me queda:

$$\begin{vmatrix} 63-\lambda & -28 & 49 & 49 \\ \lambda & -\lambda & 0 & 0 \\ 9 & -4 & 7-\lambda & 7 \\ -36 & 16 & -28 & -28-\lambda \end{vmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 7\lambda & 0 \\ \lambda & -\lambda & 0 & 0 \\ 9 & -4 & 7-\lambda & 7 \\ -36 & 16 & -28 & -28-\lambda \end{vmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 7\lambda & 0 \\ \lambda & -\lambda & 0 & 0 \\ 9 & -4 & 7-\lambda & 7 \\ 0 & 0 & -4\lambda & -\lambda \end{vmatrix}$$

A continuación, haciendo transformaciones $E_{34}(-4)$ y $E_{12}(1)$ por columnas, me queda:

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 7\lambda & 0 \\ \lambda & -\lambda & 0 & 0 \\ 9 & -4 & -21-\lambda & 7 \\ 0 & 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 7\lambda & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 & 0 \\ 5 & -4 & -21-\lambda & 7 \\ 0 & 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix}$$

Como trabajamos con transformaciones elementales usando numeros enteros, nos quedarán valores propios enteros. Esto es igual a:

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 7\lambda \\ 0 & -\lambda & 0 \\ 5 & -4 & -21-\lambda \end{vmatrix} (0+\lambda) = (-\lambda^3 + 14\lambda^2)(0-\lambda) = 0 \rightarrow (0-\lambda)(0-\lambda)(0-\lambda)(14-\lambda) = 0$$

Por tanto, el espectro de los valores propios es:

$$\{0, 14\}$$

Vemos que uno de sus autovectores es: d1*d5-d2*d6+d3*d7-d4*d8 = $63 - 28 + 7 - 28 = 14$.

El autovalor 14 tienen multiplicidad algebraica 1 luego tendrá un único autovector asociado, mientras que el autovalor 0 tiene multiplicidad algebraica 3 y tenemos que calcular r = rango $(A - 0)$ ya que $dim(V_0) = 4 - r$.

$$\begin{pmatrix} 63-\lambda & -28 & 49 & 49 \\ 63 & -28-\lambda & 49 & 49 \\ 9 & -4 & 7-\lambda & 7 \\ -36 & 16 & -28 & -28-\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Solución

Si sustituimos el valor propio 14 en λ, nos queda un sistema de 4 ecuaciones con 4 incógnitas, luego es compatible determinado y tiene solución única. Por lo tanto, el vector propios asociado al autovalor 14 es:

$$v_1 = (-7, -7, -1, 4)$$

Por otra parte, sustituimos 0 en λ para hallar el rango de $(A - 0I) = A$, entonces:

$$\begin{pmatrix} 63 & -28 & 49 & 49 \\ 63 & -28 & 49 & 49 \\ 9 & -4 & 7 & 7 \\ -36 & 16 & -28 & -28 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Esta matriz tiene rango 1 pues sus submatrices de órdenes 2, 3 y 4 tienen determinante 0, y tiene una submatriz de orden 1 con determinante distinto de 0. Luego $dim(V_0) = 4 - 1 = 3$, luego su multiplicidad algebraica es igual a la geométrica. Los autovectores asociados a $\lambda = 0$ son:

$$v_2 = (4, 9, 0, 0)$$
$$v_3 = (-7, 0, 9, 0)$$
$$v_4 = (-7, 0, 0, 9)$$

Por tanto, la multiplicidad geométrica del autovalor 14 es 1 pues tiene un único autovector asociado y la multiplicidad geométrica de 0 es 3, pues tiene tres autovectores asociados, luego A cumple el teorema espectral, se puede diagonalizar por semejanza y puede hallarse una matriz P de cambio.

Con los 4 vectores propios escritos por columnas se puede formar una matriz de cambio P que diagonaliza A. O sea:

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{3} & -\frac{7}{18} & -\frac{7}{18} \\ -\frac{1}{14} & \frac{2}{63} & \frac{1}{18} & -\frac{1}{18} \\ \frac{2}{7} & -\frac{8}{63} & \frac{2}{9} & \frac{1}{3} \\ -\frac{9}{14} & \frac{2}{7} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 63 & -28 & 49 & 49 \\ 63 & -28 & 49 & 49 \\ 9 & -4 & 7 & 7 \\ -36 & 16 & -28 & -28 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -7 & -7 & -7 \\ 9 & 0 & 0 & -7 \\ 0 & 9 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 9 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 14 \end{pmatrix}$$

A no es diagonalizable por una congruencia-semejanza pues:

$$P^t = \begin{pmatrix} 4 & 9 & 0 & 0 \\ -7 & 0 & 9 & 0 \\ -7 & 0 & 0 & 9 \\ -7 & -7 & -1 & 4 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{3} & -\frac{7}{18} & -\frac{7}{18} \\ -\frac{1}{14} & \frac{2}{63} & \frac{1}{18} & -\frac{1}{18} \\ \frac{2}{7} & -\frac{8}{63} & \frac{2}{9} & \frac{1}{3} \\ -\frac{9}{14} & \frac{2}{7} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = P^{-1}$$