Universidad de Granada

Grado en Estadística

Cálculo II: ejercicio

Miguel Anguita Ruiz

Curso 2017/18

Índice

Ejercicio 1

Ejercicio 1.1. Asociado al experimento aleatorio de extraer dos piezas sin reemplazamiento de una caja con piezas de ajedrez de ambos colores (blanco y negro), describir el vector aleatorio $X = (X_1, X_2)$ donde X_1 = Número de piezas de color blanco en la muestra. X_2 = Número de caballos en la muestra. especificando los elementos del espacio probabilístico (Ω, A, P).
Calcular los conjuntos $X^{-1}((-\infty, x_1]x(-\infty, x_2])\ \forall x_1, x_2 \in R$ y calcular la función de distribución de dicho vector aleatorio.

Solución. .
Tenemos una urna con todas las posibles piezas de ajedrez, es decir, 16 piezas blancas y 16 piezas negras, es decir, 32 piezas. Para este problema, además nos interesa el número de caballos que hay en la caja, que serán dos blancos y dos negros, en total 4 caballos. Identifico los siguientes elementos:

1. BC = caballo de color blanco.
2. B$\overline{\text{C}}$ = pieza blanca que no es caballo.
3. NC = caballo de color negro.
4. N$\overline{\text{C}}$ = pieza negra que no es caballo.

Como queremos juntar parejas de dos con esos elementos, utilizamos variaciones con repetición tomadas de dos en dos, luego el número de sucesos elementales de Ω es:

$$VR_{4,2} = 4^2 = 16$$

Por lo tanto, el espacio de probabilidad (Ω, A, P) que definiremos es el siguiente:
$\Omega = \{(BC, BC), (BC, B\overline{C}), (B\overline{C}, BC), (B\overline{C}, B\overline{C}), (NC, NC), (NC, N\overline{C}), (N\overline{C}, NC), (N\overline{C}, N\overline{C}), (BC, NC), (NC, BC), (BC, N\overline{C}), (NC, B\overline{C}), (N\overline{C}, BC), (B\overline{C}, NC), (B\overline{C}, N\overline{C}), (N\overline{C}, B\overline{C})\}$.

$A = P(\Omega)$ y la función masa de probabilidad será la siguiente:

$$P(BC, BC) = P(NC, NC) = \frac{2}{32}\frac{1}{31} = \frac{1}{496}$$
$$P(BC, B\overline{C}) = P(NC, N\overline{C}) = P(B\overline{C}, BC) = P(N\overline{C}, NC) = \frac{2}{32}\frac{14}{31} = \frac{14}{496}$$
$$P(B\overline{C}, B\overline{C}) = P(N\overline{C}, N\overline{C}) = \frac{14}{32}\frac{13}{31} = \frac{91}{496}$$
$$P(BC, NC) = P(NC, BC) = \frac{2}{32}\frac{2}{31} = \frac{2}{496}$$
$$P(BC, N\overline{C}) = P(N\overline{C}, BC) = P(NC, B\overline{C}) = P(B\overline{C}, NC) = \frac{2}{32}\frac{14}{31} = \frac{14}{496}$$
$$P(B\overline{C}, N\overline{C}) = P(N\overline{C}, B\overline{C}) = \frac{14}{32}\frac{14}{31} = \frac{98}{496}$$

Ejercicio 1

Como la suma de las probabilidades es 1, se puede definir un vector aleatorio discreto: $X = (X_1, X_2)$ donde:

$$X_1 = \begin{cases} 0 \ : \omega \in \{(NC, NC), (NC, N\overline{C}), (N\overline{C}, NC), (N\overline{C}, \overline{C})\} \\ 1 \ : \omega \in \{(BC, NC), (NC, BC), (BC, N\overline{C}), (N\overline{C}, BC), (NC, B\overline{C}), (B\overline{C}, NC), (B\overline{C}, N\overline{C}), (N\overline{C}, B\overline{C})\} \\ 2 \ : \omega \in \{(BC, BC), (BC, B\overline{C}), (B\overline{C}, BC), (B\overline{C}, B\overline{C})\} \end{cases} \tag{1}$$

$$X_2 = \begin{cases} 0 \ : \omega \in \{(B\overline{C}, B\overline{C}), (N\overline{C}, N\overline{C}), (B\overline{C}, N\overline{C}), (N\overline{C}, B\overline{C})\} \\ 1 \ : \omega \in \{(BC, B\overline{C}), (NC, N\overline{C}), (B\overline{C}, BC), (N\overline{C}, NC), (BC, N\overline{C}), (N\overline{C}, BC), (NC, B\overline{C}), (B\overline{C}, NC)\} \\ 2 \ : \omega \in \{(BC, BC), (NC, NC), (BC, NC), (NC, BC)\} \end{cases} \tag{2}$$

Por tanto, el vector aleatorio toma estos valores en $\mathbb{R}^2$:

$$X = (X_1, X_2) : \Omega \to \mathbb{R}^2$$

$$(BC, BC) \to (2, 2)$$

$$(BC, B\overline{C}) \to (2, 1)$$

$$(B\overline{C}, BC) \to (2, 1)$$

$$(B\overline{C}, B\overline{C}) \to (2, 0)$$

$$(NC, NC) \to (0, 2)$$

$$(NC, N\overline{C}) \to (0, 1)$$

$$(N\overline{C}, NC) \to (0, 1)$$

$$(N\overline{C}, N\overline{C}) \to (0, 0)$$

$$(BC, NC) \to (1, 2)$$

$$(NC, BC) \to (1, 2)$$

$$(BC, N\overline{C}) \to (1, 1)$$

$$(NC, B\overline{C}) \to (1, 1)$$

$$(N\overline{C}, BC) \to (1, 1)$$

$$(B\overline{C}, NC) \to (1, 1)$$

$$(B\overline{C}, N\overline{C}) \to (1, 0)$$

$$(N\overline{C}, B\overline{C}) \to (1, 0)$$

Por otra parte, los conjuntos $X^{-1}((-\infty, x_1]x(-\infty, x_2])\ \forall x_1, x_2 \in R$ son los siguientes:

$$X^{-1}((-\infty, x]x(-\infty, y]) = \emptyset \in A\ \forall x, y < 0$$

$$X^{-1}((-\infty, 0]x(-\infty, 0]) = \{(N\overline{C}, N\overline{C})\} \in A$$

$$X^{-1}((-\infty, 0]x(-\infty, 1]) = \{(N\overline{C}, N\overline{C}), (NC, N\overline{C}), (N\overline{C}, NC)\} \in A$$

$$X^{-1}((-\infty, 0]x(-\infty, 2]) = \{(N\overline{C}, N\overline{C}), (NC, N\overline{C}), (N\overline{C}, NC), (NC, NC)\} \in A$$

$$X^{-1}((-\infty, 1]x(-\infty, 0]) = \{(N\overline{C}, N\overline{C}), (B\overline{C}, N\overline{C}), (N\overline{C}, B\overline{C})\} \in A$$

$X^{-1}((-\infty, 1]x(-\infty, 1]) = \{(N\overline{C}, N\overline{C}), (B\overline{C}, N\overline{C}), (N\overline{C}, B\overline{C}), (BC, N\overline{C}), (NC, B\overline{C}), (N\overline{C}, BC), (B\overline{C}, NC)\} \in A$

$X^{-1}((-\infty, 1]x(-\infty, 2]) = \{(N\overline{C}, N\overline{C}), (B\overline{C}, N\overline{C}), (N\overline{C}, B\overline{C}),$
$(BC, N\overline{C}), (NC, B\overline{C}), (N\overline{C}, BC), (B\overline{C}, NC), (NC, N\overline{C}), (N\overline{C}, NC), (BC, NC), (NC, BC), (NC, NC)\} \in A$

$$X^{-1}((-\infty, 2]x(-\infty, 0]) = \{(N\overline{C}, N\overline{C}), (B\overline{C}, N\overline{C}), (N\overline{C}, B\overline{C}), (B\overline{C}, B\overline{C})\} \in A$$

$X^{-1}((-\infty, 2]x(-\infty, 1]) = \{(N\overline{C}, N\overline{C}), (B\overline{C}, B\overline{C}), (B\overline{C}, N\overline{C}), (N\overline{C}, B\overline{C}), (B\overline{C}, B\overline{C}),$
$(BC, N\overline{C}), (NC, B\overline{C}), (N\overline{C}, BC), (B\overline{C}, NC), (B\overline{C}, BC), (BC, B\overline{C}), (NC, N\overline{C}), (N\overline{C}, NC)\} \in A$

$$X^{-1}((-\infty, 2]x(-\infty, 2]) = \Omega \in A$$

Por último, la función de distribución es la siguiente:

$$F(x,y) = \begin{cases} 0 : x < 0 \vee y < 0 \\ \frac{91}{496} : 0 \leq x < 1, 0 \leq y < 1 \\ \frac{119}{496} : 0 \leq x < 1, 1 \leq y < 2 \\ \frac{120}{496} : 0 \leq x < 1, y \geq 2 \\ \frac{287}{496} : 1 \leq x < 2, 0 \leq y < 1 \\ \frac{343}{496} : 1 \leq x < 2, 1 \leq y < 2 \\ \frac{376}{496} : 1 \leq x < 2, y \geq 2 \\ \frac{378}{496} : x \geq 2, 0 \leq y < 1 \\ \frac{490}{496} : x \geq 2, 1 \leq y < 2 \\ 1 : x \geq 2, y \geq 2 \end{cases} \tag{3}$$