Кивчук Марія, ІПС-22

Варіант 6.

2. Розв'язати модифікованим симплекс-методом

$h = 2x_1 + x_2 \to max$ $\sim$ $h = -2x_1 - x_2 \to min$

$x_1 + x_2 + x_3 \leq 2$ $\quad$ $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2$

$-x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 3$ $\quad$ $-x_1 + x_2 + 2x_3 + x_5 = 3$

$x_i \geq 0, \ i = \overline{1,3}$ $\quad$ $x_i \geq 0, \ i = \overline{1,5}$

b	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	u_0	u_1
	-2	-1	0	0	0		
2	1	1	1	1	0	0	-2
3	-1	1	2	0	1	0	0
Δ^0	-2	-1	0	0	0		
Δ^1	0	1	2	2	0		

$c_б$	$x_б$	λ_0	B^{-1}		α_k	θ
0	x_4	2	1	0	1	2
0	x_5	3	0	1	-1	-3
-2	x_1	2	1	0		
0	x_5	1	-1	1		

$\Delta^1 \geq 0$, отже, оптимальний р-ок: $x^* = (2;0;0)$

$F = 4$

1. Розв'язок матричної гри у змішаних стратегіях.
Теорема Дж. фон Неймана

При відсутності сідлової точки в платіжній матриці гри гравцям не слід використовувати одну й ту ж чисту стратегію. Тому розглядається означення змішаних стратегій.

Озн. Змішаною стратегією гравця P_1 наз. вектор $x = (x_1, \dots, x_m)$, $x_i \geq 0$, $i = \overline{1,m}$, $\sum_{i=1}^{m} x_i = 1$, а змішана стратегія гравця P_2 — вектор $y = (y_1 \dots y_n)'$, $y_j \geq 0$, $j = \overline{1,n}$, $\sum_{j=1}^{n} y_i = 1$.

Величини x_i, y_j розглядаються як ймовірності, з якими гравці P_1 та P_2 обирають x_i або y_j рядок матриці C.

Покажемо:

$I' = (I_1', \dots, I_m')$, $I_i' = \begin{cases} 1 & P_1 \text{ вибирає } A_i \\ 0 & \text{в противному випадку} \end{cases}$

$P(I_i'=1) = x_i \quad i=\overline{1,m}$

$I'' = (I_1'', \dots, I_n'')$, $I_j'' = \begin{cases} 1, & P_2 \text{ вибирає } B_j \\ 0, & \text{в противному випадку} \end{cases}$

$P(I_j''=1) = y_j \quad j=\overline{1,n}$.

Тоді $V = \sum_i \sum_j I_i' I_j'' c_{ij}$ – виграш P_2

$MV = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} M I_i' I_j'' c_{ij} = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_i y_j$ – середній виграш P_2

"Принцип мінімакса" для середніх виграшів приводить до таких задач:

$P_1 \to \min\limits_{x\in X} G(x)$, (1) де $G(x) = \max\limits_{y\in Y} F(x,y)$

$P_2 \to \max H(y)$, (2) де $H(y) = \min\limits_{x\in X} F(x,y)$

Задачі (1), (2) дають оптимальні змішані стратегії гравців P_1, P_2 відповідно.

Якщо існує (x^*, y^*) сідлова точка функції $F(x,y)$, то теорема $F(x^*,y^*) = \min\limits_{x\in X} \max\limits_{y\in Y} F(x,y) = \max\limits_{y\in Y} \min\limits_{x\in X} F(x,y)$, де x^* та y^* – оптимальні змішані стратегії гравців P_1 та P_2.

$F(x^*, y^*)$ – ціна гри і кажуть, що гра має розв'язок у змішаних стратегіях

Теорема (Дж. Фон Неймана). Будь-яка матрична гра має розв'язок у змішаних стратегіях.

Зводиться до ЗЛП максиміну для гравця P_1 та мінімаксу для гравця P_2.

3. Нехай допустима область D ЗЛП обмежена і $D \neq \emptyset$. Довести, що оптимальний р-ок ЗЛП існує і досягається в одній з кутових точок.

Доведення. Цільова функція ЗЛП досягає оптимального значення у вершині многогранника розв'язків.

Нехай x^i, $i=1,\dots,r$ - вершини многогранника D і, розглядаючи задачу мінімізації, покладемо $x^* = \arg\min_{x \in D} L(x)$. Останнє співвідношення означає, що

$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j^* \leq \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$, $x \in D$; або $(c, x^*) \leq (c, x)$, $x \in D$,

де $c = (c_1, \dots, c_n)$. (1.6)

Якщо x^* - вершина D, що першу частину теореми. Нехай x^* не є вершиною D. За лемою 1.4 (з лекції) існують $\alpha_i \geq 0$, $i=1,\dots,r$, $\alpha_1 + \dots + \alpha_r = 1$, такі що

$x^* = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i x^i$. За вл. скалярного добутку маємо:

$$(c, x^*) = \left(c, \sum_{i=1}^{r} \alpha_i x^i\right) = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i (c, x^i) \geq (c, x^k) \sum_{i=1}^{r} \alpha_i = (c, x^k) \quad (1.7)$$

Із (1.6) та (1.7) випливає, що $(c, x^*) = (c, x^k)$, тобто існує вершина x^k допустимої області D, де цільова ф-ія приймає найменше значення.

Нехай цільова ф-ія досягає мін. значення у точках $x^1, \dots, x^s$, $(c, x^i) = l = \min_{x \in D} L(x)$, $i = \overline{1,s}$.

Розглянемо опуклу лінійну комбінацію

$x^* = \sum_{i=1}^{s} \alpha_i x^i$, $\alpha_i \geq 0$, $i = \overline{1,s}$, $\alpha_1 + \dots + \alpha_s = 1$.

Доведемо, що $L(x^*) = l$. Дійсно

$$L(x^*) = (c, x^*) = \left(c, \sum_{i=1}^{s} \alpha_i x^i\right) = \sum_{i=1}^{s} \alpha_i (c, x^i) = l \sum_{i=1}^{s} \alpha_i = l$$