Живчук Марія ІПС-22

МКР №1

Варіант 4

1. $xy' = \sqrt{x^2-y^2} + y$ $\quad M(1;\pi)$

$x\,dy = (\sqrt{x^2-y^2} + y)\,dx$ – однорідне диф. р-ня

Заміна $y = u \cdot x$ $\quad dy = u\,dx + x\,du$ $\quad u = \frac{y}{x}$

$x(u\,dx + x\,du) = (\sqrt{x^2-u^2x^2} + ux)\,dx$

$\cancel{x}(u\,dx + x\,du) = \cancel{x}\,dx(\sqrt{1-u^2} + u)$

$x\,du = dx(\sqrt{1-u^2} + u - u)$

$x\,du = \sqrt{1-u^2}\,dx$ розділимо за змінними

$\frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \frac{dx}{x}$; $\int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \int \frac{dx}{x}$

$\arcsin u = \ln|x| + C$

$\arcsin u = \ln|x| + C$; $\arcsin \frac{y}{x} = \ln|x| + C$

$\frac{y}{x} = \sin(\ln|x| + C)$

// Задача Коші після №2

$y = x \cdot \sin(\ln|x| + C)$

2. $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x\cos y + \sin 2y}$

$\frac{dx}{dy} = x\cos y + \sin 2y$

$\frac{dx}{dy} - x \cdot \cos y = \sin 2y$ – лінійне неоднорідне рівняння

$p(y) = -\cos y$ $\quad q(y) = \sin 2y$

$\int p(y)\,dy = \int -\cos y\,dy = -\sin y$

$\int q(y) \cdot e^{\int p(y)dy}\,dy = \int \sin 2y \cdot e^{-\sin y}\,dy = \int \frac{2\sin y \cdot \cos y}{e^{\sin y}}\,dy =$

$$= \left\{\begin{matrix} t = \sin y \\ dt = \cos y\, dy \end{matrix}\right\} = \int \frac{2t}{e^t}\, dt = 2\left(-te^{-t} + \int e^{-t} dt\right) = 2\left(-te^{-t} - e^{-t}\right) =$$

$$= -2e^{-t}(t+1) = -2e^{-\sin y}(\sin y + 1)$$

$$x(y) = e^{+\sin y}\left(C - 2e^{-\sin y}(\sin y + 1)\right) = C \cdot e^{\sin y} - 2\sin(y) - 2$$

// Задача Коші для $\pi \; 1$

$\pi = \sin(\ln 1 + C)$

$\arcsin \pi = C$

$$y = x \cdot \sin(\ln|x| + \arcsin \pi)$$

3. $\cancel{y' = \sqrt{1+(y'')^2}}$ $\quad v = y'' \quad v' = y'''$ – заміна

$\cancel{v' = \sqrt{1+v^2}\,; \quad \frac{dv}{dx} = \sqrt{1+v^2}\,; \quad \frac{dv}{\sqrt{1+v^2}} = dx}$

$\cancel{\ln|v + \sqrt{v^2+1}| = x + C_1}$

Подаємо у вигляді параметр

$$v' = \sqrt{1+v^2} \qquad \frac{dv}{dx} = \sqrt{1+v^2} \qquad \frac{dv}{\sqrt{1+v^2}} = dx$$

$$\ln|v + \sqrt{v^2+1}| = x + C_1$$

$$(y''')^2 = 1 + (y'')^2 \qquad v = y'' \qquad v' = y'''$$

$$(v')^2 = 1 + v^2 \qquad \cancel{\lambda^2 = 1}$$

4. $y^{IV} + y'' = 7x - 3\cos x$

$y_{з.н.} = y_{з.о.} + y_{ч.н.}$

• Шукаємо $y_{з.о.}$

$$\lambda^4 + \lambda^2 = 0$$

$$\lambda^2(\lambda^2 + 1) = 0$$

$$\lambda_{1,2} = 0 \qquad \lambda_{3,4} = \pm i \qquad\qquad e^{ix} = (\cos x + i\sin x)$$

$$y_{з.о.} = C_1 + C_2 \cdot x + C_3 \cos x + C_4 \sin x$$

$$y_{ч.н.} = (Ax + B) \cdot x^2 + Cx \cdot \cos x + Dx \cdot \sin x$$

$$y_{з.н.} = C_1 + C_2 x + C_3 \cos x + C_4 \sin x + (Ax+B)x^2 + Cx\cos x + Dx\sin x$$

5. $A = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \\ 3 & -2 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad \lambda_1 = -1 \quad \lambda_{2,3} = 1 \pm i$

Для $\lambda_1 = -1$

$$\begin{pmatrix} 4 & -3 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 5 & -5 & 0 \\ 0 & 5 & 5 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} h_1 = h_2 = -h_3 \\ h_2 = -h_3 \end{matrix}$$

$$h^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Для $\lambda = 1 + i$

$$\begin{pmatrix} 2-i & -3 & 1 \\ 3 & -3-i & 2 \\ -1 & 2 & -1-i \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2-i & -3 & 1 \\ 2i-1 & 3-i & 0 \\ -1 & 2 & -1-i \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 5 & -6-3i & 2+i \\ 2i-1 & 3-i & 0 \\ i & 2 & -1-i \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 0 & 4-3i & -3-4i \\ 2i-1 & 3-i & 0 \\ -1 & 2 & -1-i \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} h_1 = \frac{-3+i}{2i-1} h_2 = (1+i) h_2 \\ h_2 = \frac{3+4i}{4-3i} h_3 = i h_3 \end{matrix} \quad h^{(2)} = \begin{pmatrix} -1+i \\ i \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1+i \\ i \\ 1 \end{pmatrix} e^{(i+1)t} = \begin{pmatrix} -1+i \\ i \\ 1 \end{pmatrix} e^t (\cos t + i \sin t) = \begin{pmatrix} -\cos t + i \cos t - i \sin t - \sin t \\ i \cos t - \sin t \\ \cos t + i \sin t \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -\cos t - \sin t \\ -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} e^t + i \begin{pmatrix} \cos t - \sin t \\ \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} e^t$$

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-t} + C_2 e^t \begin{pmatrix} -\cos t - \sin t \\ -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} + C_3 e^t \begin{pmatrix} \cos t - \sin t \\ -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix}$$

6. $\begin{cases} \dot{x} = 2x - 4y + 13e^{-3t} \\ \dot{y} = 2x - 2y \end{cases}$ $\qquad A = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$

$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -4 \\ 2 & -2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 4 = 0 \qquad \lambda_{1,2} = \pm 2i$

Для $\lambda = 2i$

$\begin{pmatrix} 2-2i & -4 \\ 2 & -2-2i \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1-i & -2 \\ 1 & -1-i \end{pmatrix} \qquad h_1 = (1+i)h_2 \qquad h^{(1)} = \begin{pmatrix} 1+i \\ 1 \end{pmatrix}$

$f = \begin{pmatrix} 13e^{-3t} \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A e^{-3t} \\ B e^{-3t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -e^{-3t} \\ 2e^{-3t} \end{pmatrix}$

$\begin{cases} -3A = 2A - 4B + 13 \\ -3B = 2A - 2B \end{cases} \qquad \begin{cases} -3A = 2A + 8A + 13 \\ B = -2A \end{cases} \qquad \begin{cases} 13A = -13 \\ B = -2A \end{cases} \qquad \begin{cases} A = -1 \\ B = 2 \end{cases}$

$h^{(1)} = \begin{pmatrix} 1+i \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1+i \\ 1 \end{pmatrix} e^{2i} = \begin{pmatrix} 1+i \\ 1 \end{pmatrix}(\cos 2t + i\sin 2t) = \cancel{\cos 2t - \sin 2t}$

$= \begin{pmatrix} \cos 2t + i\cos 2t + i\sin 2t - \sin 2t \\ \cos 2t + i\sin 2t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 2t - \sin 2t \\ \cos 2t \end{pmatrix} + i\begin{pmatrix} \cos 2t + \sin 2t \\ \sin 2t \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} \cos 2t - \sin 2t \\ \cos 2t \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} \cos 2t + \sin 2t \\ \sin 2t \end{pmatrix} + e^{-3t}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

3. $y''' = \sqrt{1 + (y'')^2}$

Подамо у вигляді параметризованої системи

$\begin{cases} y'' = t \\ y''' = \sqrt{1+t^2} \end{cases}. \qquad dy'' = y''' dx \Rightarrow \qquad dt = \sqrt{1+t^2}\, dx$

$\frac{dt}{\sqrt{1+t^2}} = dx$

$x = \ln|t + \sqrt{t^2+1}| + C_1$

Отже $\begin{cases} y'' = t \\ x = \ln|t + \sqrt{t^2+1}| + C_1 \end{cases} \qquad dy' = y'' dx \qquad dy' = t \cdot \frac{1 + \frac{t}{\sqrt{t^2+1}}}{t + \sqrt{t^2+1}}\, dt =$

$= \frac{t^2}{\sqrt{t^2+1}} \cdot \frac{1}{\sqrt{t^2+1} + t} = \frac{t^2}{t^2+1+t\sqrt{t^2+1}}\, dt$