Модульна контрольна робота №2

Кисвчук Марії (ІПС-12)

Варіант 3

1. а) $\lim\limits_{x\to 3}(4x-5)=7$.

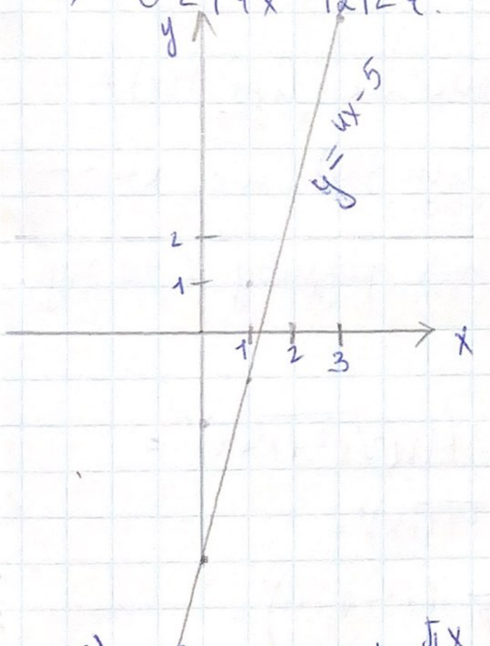
Нехай (за Коші) $0<|x-3|<\delta \Rightarrow |4x-5-7|<\varepsilon$; $|4x-12|<\varepsilon$;

$4|x-3|<\varepsilon$; $|x-3|<\frac{\varepsilon}{4}$.

Тоді $0<|x-3|<\delta \Rightarrow 4|x-3|<\varepsilon \Rightarrow |x-3|<\frac{\varepsilon}{4}$.

Нехай $\delta=\frac{\varepsilon}{4}$, $0<|x-3|<\frac{\varepsilon}{4} \Rightarrow 0<4|x-3|<\varepsilon \Rightarrow$

$\Rightarrow 0<|4x-12|<\varepsilon$. Доведено.




1.б) $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2} = \left\{\begin{array}{l} t=x-1 \\ t\to 0 \\ x=t+1 \end{array}\right\} = \lim\limits_{t\to 0} -t\cdot\operatorname{tg}\frac{\pi(t+1)}{2} =$

$= \lim\limits_{t\to 0} -t\cdot\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi t}{2}\right) = \lim\limits_{t\to 0} -t\cdot\left(-\operatorname{ctg}\frac{\pi t}{2}\right) = \lim\limits_{t\to 0} t\cdot\operatorname{ctg}\frac{\pi t}{2} =$

$= \lim\limits_{t\to 0}\frac{t}{\operatorname{tg}\frac{\pi t}{2}} = \lim\limits_{t\to 0}\frac{y}{\operatorname{tg}\frac{\pi}{2}}\cdot\frac{\pi/2}{\pi/2} = \lim\limits_{t\to 0}\frac{\frac{\pi y}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\pi y}{2}}\cdot\frac{2}{\pi} = \frac{2}{\pi}$

3. $f(x)=e^{\cos x^2}$, $f: \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ на мн. $X=\mathbb{R}$.

Дослідимо на р.н. на $(-\infty;0)\cup(0;+\infty)$

$$\left.\begin{aligned}&\lim_{x\to 0+0} e^{\cos x^2}=e.\\ &\lim_{x\to 0-0} e^{\cos x^2}=e.\\ &f(x_0)=e.\end{aligned}\right\}$$ Тоді $f(x)$ рівном. неперервна на $X$ (випливає з $\lim\limits_{x\to 0+0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0-0} f(x)=f(x_0)$))

2. $f(x)=\dfrac{3^{\frac{1}{x}}+2^{\frac{1}{x}}}{3^{\frac{1}{x}}-2^{\frac{1}{x}}}$, $f: \mathbb{R}\to\mathbb{R}$

Дослідимо на неп.

$x=0$ - сумнівна точка.

$$\left.\begin{aligned}&\lim_{x\to 0+0} f(x)=\lim_{x\to 0+0}\frac{3^{\frac{1}{x}}+2^{\frac{1}{x}}}{3^{\frac{1}{x}}-2^{\frac{1}{x}}}=1\\ &\lim_{x\to 0-0} f(x)=\lim_{x\to 0-0}\frac{3^{\frac{1}{x}}+2^{\frac{1}{x}}}{3^{\frac{1}{x}}-2^{\frac{1}{x}}}=-1.\end{aligned}\right\}$$ Так як $\lim\limits_{x\to 0+0} f(x)\neq\lim\limits_{x\to 0-0} f(x)$, то $x=0$ - точка розриву 1-го роду.

4. $y=x\ln(x+\sqrt{1+x^2})-\sqrt{(1+x^2)}$

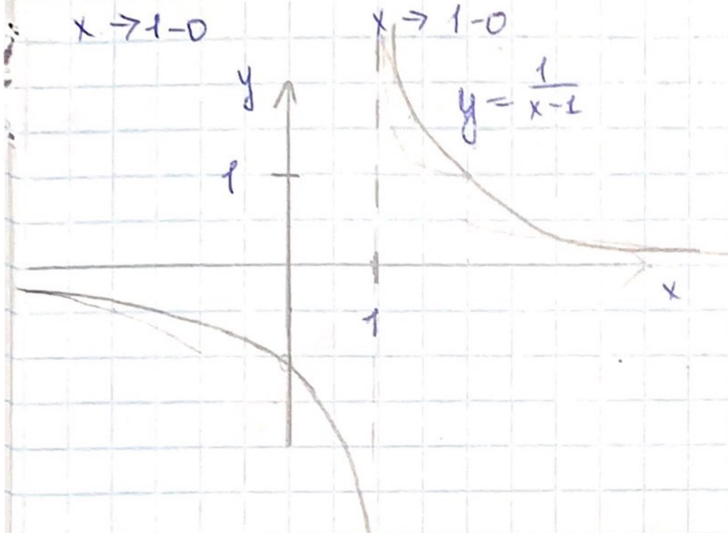
$$(x\ln(x+\sqrt{1+x^2}))'=\ln(x+\sqrt{1+x^2})+x\cdot((\ln(\sqrt{x^2+1}+x))'=$$
$$=\ln(x+\sqrt{1+x^2})+x\cdot\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}\cdot(\sqrt{x^2+1}+x)'=$$
$$=\ln(x+\sqrt{1+x^2})+\frac{x}{\sqrt{x^2+1}+x}\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\cdot(x^2+1)'+1\right)=$$
$$=\ln(x+\sqrt{1+x^2})+\frac{x}{x+\sqrt{1+x^2}}\cdot\left(\frac{1}{2\sqrt{x^2+1}}\cdot 2x+1\right)$$
$$((1+x^2)^{\frac{1}{2}})'=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\cdot(x^2+1)'=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\cdot(2x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

5. Нехай $f(x) = \frac{1}{x-1}$.

$$\lim_{x\to 1+0} f(x) = \lim_{x\to 1+0} \frac{1}{x-1} = \infty$$

$$\lim_{x\to 1-0} f(x) = \lim_{x\to 1-0} \frac{1}{x-1} = -\infty$$

Границі не є $\mathbb{R}$, тому $x=1$ – точка розриву 2-го роду




6. Нехай $f(x) = \sqrt[3]{x^2-x} + \sqrt{x}$, $g(x) = x^{\frac{2}{3}}$. Довести, що $f(x) \backsim g(x)$ при $x \to +\infty$.

Функції еквівалентні, коли $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$.

(критерій еквівалентності)

Нехай $a = 1$.

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} \sqrt[3]{x^2-x} = 1$$

$$\lim_{x\to 1} g(x) = \lim_{x\to 1} x^{\frac{2}{3}} = 1.$$

$\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{1}{1} = 1$, тому $f(x) \backsim g(x)$

Теорема: $f(x) \backsim g(x) \Leftrightarrow f(x) - g(x) = \bar{o}(g)$

(за умов $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $D_f = D_g$)

Критерій еквівалентності: якщо $\exists \varepsilon > 0: \forall x \in O_\varepsilon(x_0) \setminus \{x_0\}$ $g(x) > 0$, то $f \sim g \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$.

Доведення

$f \sim g \Rightarrow \forall \varepsilon_1 > 0 \ \exists O_\varepsilon(x_0) \setminus \{x_0\} : \forall x \in O_\varepsilon(x_0) \setminus \{x_0\} \quad 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow$

$\Rightarrow |f(x) - g(x)| < \varepsilon |g(x)| \Rightarrow g(x) - \varepsilon \cdot g(x) < f(x) < g(x) + \varepsilon g(x) \Rightarrow$

$\Rightarrow 1 - \varepsilon < \frac{f(x)}{g(x)} < 1 + \varepsilon.$