Київський національний університет

імені Тараса Шевченка

Факультет комп’ютерних наук та кібернетики

Лабораторна робота №1

з курсу

«Управління динамічними системами»

на тему:

«Аналітичне розв’язування диференціальних рівнянь за допомогою комп’ютерних пакетів програм»

Виконала:

студентка групі ІПС-22

факультету комп’ютерних наук та кібернетики

Клевчук Марія Вячеславівна

Київ - 2024

Зміст

Згідно з номером варіанту (Клевчук) розв’язати наступні приклади

Умова Завдання №1

Розв’язати рівняння (показати вигляд загального розв’язку), побудувати поле напрямків, побудувати та показати розв’язки задач Коші (чотири різні ЗК, точки обрати самостійно, але так, щоб кожна була в окремому квадранті декартової системи координат).

$$xy' - y = x \tan \frac{y}{x}$$

M1(1, 1)
M2(1, -π)
M3(-1, -π/2)
M4(-1, π/4)

Представлення розв’язку Завдання №1 аналітично (в зошиті)

$$xy' - y = x\,tg\,\frac{y}{x}$$

$$y' = tg\,\frac{y}{x} + \frac{y}{x}$$

$$dy = \left(tg\,\frac{y}{x} + \frac{y}{x}\right)dx$$ – однорідне

Заміна $y = ux$ $\quad dy = u\,dx + x\,du$

$$u\,dx + x\,du = (tg\,u + u)\,dx$$

$$x\,du = tg\,u\,dx$$

$$\frac{du}{tg\,u} = \frac{dx}{x}\ ; \quad \ln(\sin u) = \ln x + \ln C$$

$$\sin u = Cx\,, \quad \sin\frac{y}{x} = Cx$$

$$y = x\arcsin(Cx)$$

$M_1(1, 1) \Rightarrow C = 1$

$M_2(1, -\pi/2) \Rightarrow C = \cancel{0} -1$

$M_3\left(-1, -\frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow C = -1$

$M_4\left(-1, \frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow C = \frac{-\sqrt{2}}{2}$

Код програми (Sage) для Завдання №1

```
#General solution
y = function('y')(x)
de = diff(y, x) == tan(y/x) + y/x
solution = desolve(de, y)
show('General solution')
solution.show()

#Cauchy problem solutions
show('Cauchy problem solutions')
solution = desolve(de, y, ics = [1, 1])
solution.show()
solution = desolve(de, y, ics = [1, -pi/2])
solution.show()
solution = desolve(de, y, ics = [-1, -pi/2])
solution.show()
solution = desolve(de, y, ics = [-1, pi/4])
solution.show()


#Direction fields
x, y = var('x, y')
f(x, y) = tan(y/x) + y/x
p = plot_slope_field(f, (x, -5, 5), (y, -5, 5), headaxislength=3, headlength=3,
axes_labels=['$x$', '$y(x)$'])
pi=3.14159265359
p += desolve_rk4(f, y, ics=[1, 1], ivar=x, output = 'plot',
            end_points =[-5, 5], thickness=2, rgbcolor=hue(1))
p += desolve_rk4(f, y, ics=[1,-pi/2], ivar=x, output = 'plot',
            end_points =[-5, 5], thickness=2, rgbcolor=hue(0.2))
p += desolve_rk4(f, y, ics=[-1, -pi/2], ivar=x, output = 'plot',
            end_points =[-5, 5], thickness=2, rgbcolor=hue(0.4))
p += desolve_rk4(f, y, ics=[-1, pi/4], ivar=x, output = 'plot',
            end_points =[-5, 5], thickness=2, rgbcolor=hue(0.8))
show(p, xmin=-5, xmax=5, ymin=-5, ymax=5)
```

Результат роботи програми (Sage) для Завдання №1

```
General solution
```

$$Cx = \sin\left(\frac{y(x)}{x}\right)$$

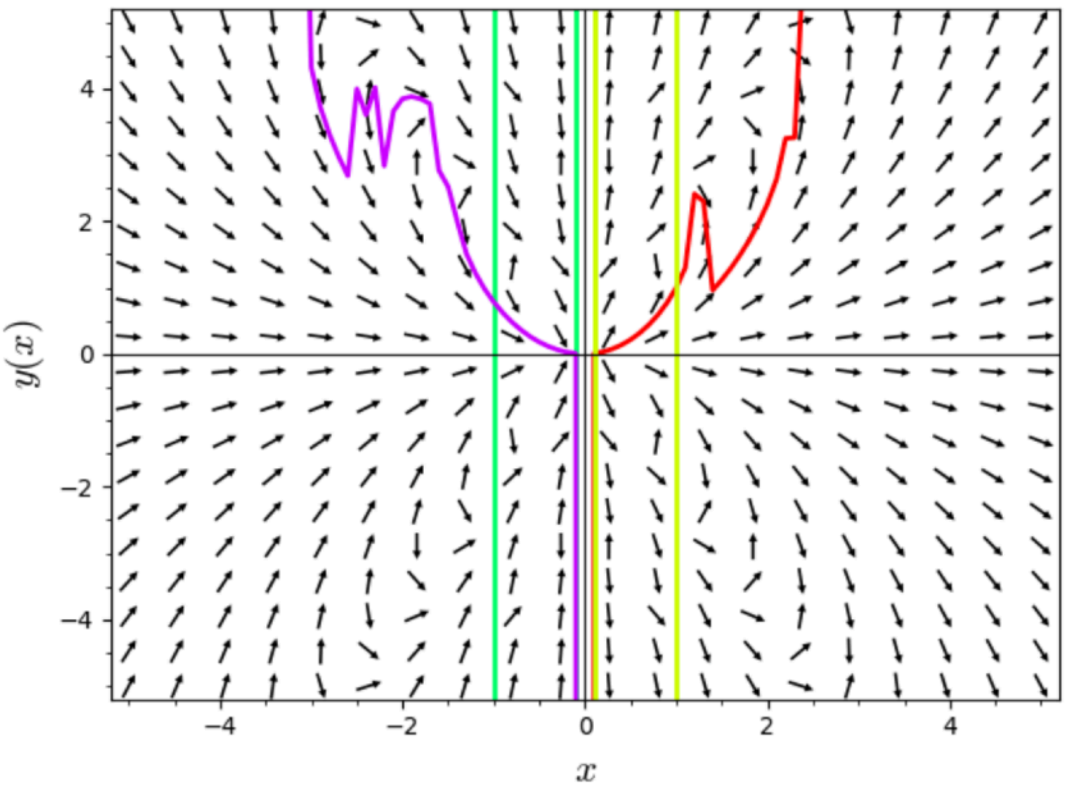
```
Cauchy problem solutions
```

$$x\sin(1) = \sin\left(\frac{y(x)}{x}\right)$$

$$-x = \sin\left(\frac{y(x)}{x}\right)$$

$$-x = \sin\left(\frac{y(x)}{x}\right)$$

$$\frac{1}{2}\sqrt{2}x = \sin\left(\frac{y(x)}{x}\right)$$



Код програми (Wolfram Mathematica) для Завдання №1

```
eqn = y'[x] == Tan[y[x]/x] + y[x]/x;
generalSolution = DSolve[eqn, y, x];
Print["General solution: "];
Print[generalSolution];
couch1 = DSolve[{eqn, y[1] == 1}, y, x];
couch2 = DSolve[{eqn, y[1] == -Pi/2}, y, x];
couch3 = DSolve[{eqn, y[-1] == -Pi/2}, y, x];
couch4 = DSolve[{eqn, y[-1] == Pi/4}, y, x];
Print["Cauchy problem solution y[1] == 1: "];
Print[couch1];
Print["Cauchy problem solution y[1] == -Pi/2: "];
Print[couch2];
Print["Cauchy problem solution y[-1] == -Pi/2: "];
Print[couch3];
Print["Cauchy problem solution y[-1] == Pi/4: "];
Print[couch4];
vplot = VectorPlot[{1, Tan[y/x] + y/x}, {x, -5, 5}, {y, -5, 5},
   VectorStyle -> {Thick, Red}, VectorScaling -> {0.03, 0.03, None},
   VectorPoints -> 25];
couchiplot1 = Plot[y[x] /. couch1[[1]], {x, 0.1, 5}, PlotStyle -> {Thick, Red},
PlotRange -> All];
couchiplot2 = Plot[y[x] /. couch2[[1]], {x, 0.1, 5}, PlotStyle -> {Thick, Yellow},
PlotRange -> All];
couchiplot3 = Plot[y[x] /. couch3[[1]], {x, -5, -0.1}, PlotStyle -> {Thick, Purple},
PlotRange -> All];
couchiplot4 = Plot[y[x] /. couch4[[1]], {x, -5, -0.1}, PlotStyle -> {Thick, Green},
PlotRange -> All];
Show[vplot, couchiplot1, couchiplot2, couchiplot3, couchiplot4,
 Frame -> False, Axes -> True, AxesLabel -> {"x", "y"},
 PlotRange -> All]
```

Результат роботи програми (Wolfram Mathematica) для Завдання №1

General solution:

{{y → Function[{x}, x ArcSin[e^{c_1} x]]}}

Cauchy problem solution y[1] == 1:

{{y → Function[{x}, x ArcSin[x Sin[1]]]}}

Cauchy problem solution y[1] == -Pi/2:

{{y → Function[{x}, -x ArcSin[x]]}}

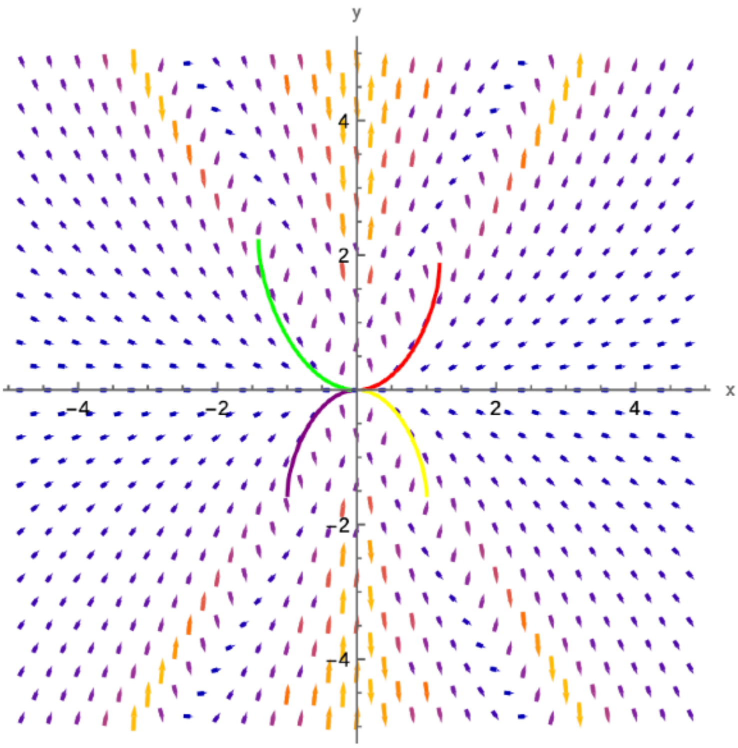
Cauchy problem solution y[-1] == -Pi/2:

{{y → Function[{x}, -x ArcSin[x]]}}

Cauchy problem solution y[-1] == Pi/4:

{{y → Function[{x}, x ArcSin[$\frac{x}{\sqrt{2}}$]]}}

Out[338]=



Умова задачі №2

Розв'язати рівняння (показати вигляд загального розв'язку), побудувати розв'язки та показати задачі Коші (чотири різні ЗК, точки обрати самостійно, але так, щоб кожна була в окремому квадранті декартової системи координат).

$$y'' - y = 4shx$$

M1(-1, 1, -2, 2)
M2(-1, -1, -2, -2)
M3(1, 1, 2, 2)
M4(1, -1, 2, -2)

Представлення розв’язку Завдання №2 аналітично (в зошиті)

Завдання №2

$y''-y=4\,\mathrm{sh}\,x$ – лінійне неодн. II порядку

$y_{з.н.}(x)=y_{з.о.}(x)+y_{ч.н.}(x)$

$\lambda^2-1=0 \qquad \lambda_{1,2}=\pm 1$

$y_{з.о.}(x)=C_1e^{x}+C_2e^{-x}$

Для пошуку частинного розв'язку використовую метод варіації довільних сталих

$$W=\begin{pmatrix} e^{x} & e^{-x} \\ e^{x} & -e^{-x} \end{pmatrix} \qquad |W|=-2$$

$$W_1=\begin{pmatrix} 0 & e^{-x} \\ 4\,\mathrm{sh}\,x & -e^{-x} \end{pmatrix} \quad |W_1|=-2e^{-x}(e^{x}-e^{-x})=-2(1-e^{-2x})$$

$$W_2=\begin{pmatrix} e^{x} & 0 \\ e^{x} & 4\,\mathrm{sh}\,x \end{pmatrix} \quad |W_2|=2e^{x}(e^{x}-e^{-x})=2(e^{2x}-1)$$

$$C_1'=\frac{|W_1|}{|W|}=1-e^{-2x}$$

$$C_1=\int(1-e^{-2x})\,dx= x+\frac{1}{2}e^{-2x}$$

$$C_2'=\frac{|W|_2}{|W|}=(1-e^{2x})$$

$$C_2=\int(1-e^{2x})\,dx=x-\frac{1}{2}e^{2x}$$

$$y_{ч.н.}(x)=C_1e^{x}+C_2e^{-x}=\left(x+\frac{1}{2}e^{-2x}\right)e^{x}+$$

$$+\left(x-\frac{1}{2}e^{2x}\right)e^{-x}=\frac{1}{2}\left(2xe^{x}+e^{-x}+2xe^{-x}-e^{x}\right)=$$

$$= \frac{1}{2}\left((2x-1)e^{x} + (2x+1)e^{-x}\right) = \frac{1}{2}\left((2x-1)e^{2x} + 2x+1\right)e^{-x}$$

$$y_{з.н.}(x) = C_1 e^{x} + C_2 e^{-x} + \frac{1}{2}\left((2x-1)e^{2x} + 2x+1\right)e^{-x}$$

Задачі Коші $y' = C_1 e^{x} - C_2 e^{-x} + \frac{1}{2}\left((2x+1)e^{x} + (1-2x)e^{-x}\right)$

1) $y(-1) = 1 \qquad y(-2) = 2$

$$\begin{cases} 1 = C_1 e^{-1} + C_2 e + \frac{1}{2}\left((-3)e^{-1} - 1e^{+1}\right) \\ 2 = C_1 e^{-2} + C_2 e^{2} + \frac{1}{2}\left(-5e^{-2} - 3e^{2}\right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_1 = -(2e^{4} - 2e^{3} + e^{2} + 5) \\ C_2 = \dfrac{(3e^{4} + 3e^{2} - 2e + 2)}{2(e^{4} - e^{2})} \end{cases}$$

2) $y(-1) = -1 \qquad y(-2) = -2$

$$\begin{cases} -1 = C_1 e^{-1} + C_2 e + \frac{1}{2}\left(-3e^{-1} - e\right) \\ -2 = C_2 e^{-2} + C_2 e^{2} + \frac{1}{2}\left(-5e^{-2} - 3e^{2}\right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_1 = -\dfrac{(2e^{4} + 2e^{3} - 7e^{2} + 5)}{2(e^{2} - 1)} \\ C_2 = \dfrac{3e^{4} - 5e^{2} + 2e + 2}{2(e^{4} - e^{2})} \end{cases}$$

3) $y(1) = 1 \qquad y(2) = 2$

$$\begin{cases} 1 = C_1 e + C_2 e^{-1} + \frac{1}{2}\left(e + 3e^{-1}\right) \\ 2 = C_1 e^{2} + C_2 e^{-2} + \frac{1}{2}\left(3e^{2} + 5e^{-2}\right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_1 = -\dfrac{(3e^{4} - 5e^{2} + 2e + 2)}{2(e^{4} - e^{2})} \\ C_2 = -\dfrac{(3e^{4} + 3e^{2} - 2e + 2)}{2(e^{4} - e^{2})} \end{cases}$$

4) $y(-1) = +1 \qquad y(-2) = +2$

$$\begin{cases} -1 = C_1 e + C_2 e^{-1} + \frac{1}{2}\left(e + 3e^{-1}\right) \\ -2 = C_1 e^{2} + C_2 e^{-2} + \frac{1}{2}\left(3e^{2} + 5e^{-2}\right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_1 = -\dfrac{(3e^{4} + 3e^{2} - 2e + 2)}{2(e^{4} - e^{2})} \\ C_2 = \dfrac{2e^{4} - 2e^{3} + e^{2} + 5}{2(e^{2} - 1)} \end{cases}$$

Код програми (Sage) для Завдання №2

```
x = var('x')
y = function('y')(x)
de = diff(y, x, 2) - y == 4 * sinh(x)

#General solution
solution = desolve(de, y)
show('General solution:')
show(solution)

#Cauchy problem solutions
show('Cauchy problem solution:')
solution_1 = desolve(de, y, ics=[-1, 1, -2, 2])
solution_2 = desolve(de, y, ics=[-1, -1, -2, -2])
solution_3 = desolve(de, y, ics=[1, 1, 2, 2])
solution_4 = desolve(de, y, ics=[1, -1, 2, -2])

show(solution_1)
show(solution_2)
show(solution_3)
show(solution_4)

#Direction fields
x, y = var('x', 'y')
f(x, y) = 4 * sinh(x) - y
plot_field = plot_slope_field(f, (x, -5, 5), (y, -5, 5),
                    headaxislength=3, headlength=3, axes_labels=['$x$', '$y(x)$'])

plot_field += desolve_rk4(f, y, ics=[-1, 1, -2, 2], ivar=x, output='plot',
                  end_points=[-5, 5], thickness=3, color='yellow', linestyle='dashed')
plot_field += desolve_rk4(f, y, ics=[1, -1, -2, -2], ivar=x, output='plot',
                  end_points=[-5, 5], thickness=3, color='blue', linestyle='solid')
plot_field += desolve_rk4(f, y, ics=[1, 1, 2, 2], ivar=x, output='plot',
                  end_points=[-5, 5], thickness=3, color='green', linestyle='dashdot')
plot_field += desolve_rk4(f, y, ics=[1, -1, 2, -2], ivar=x, output='plot',
                  end_points=[-5, 5], thickness=3, color='red', linestyle='dotted')

show(plot_field, xmin=-5, xmax=5, ymin=-5, ymax=5)
```

Результат роботи програми (Sage) для Завдання №2

```
General solution:
```

$$\frac{1}{2}\left((2\,x-1)e^{(2\,x)}+2\,x+1\right)e^{(-x)}+K_2e^{(-x)}+K_1e^{x}$$

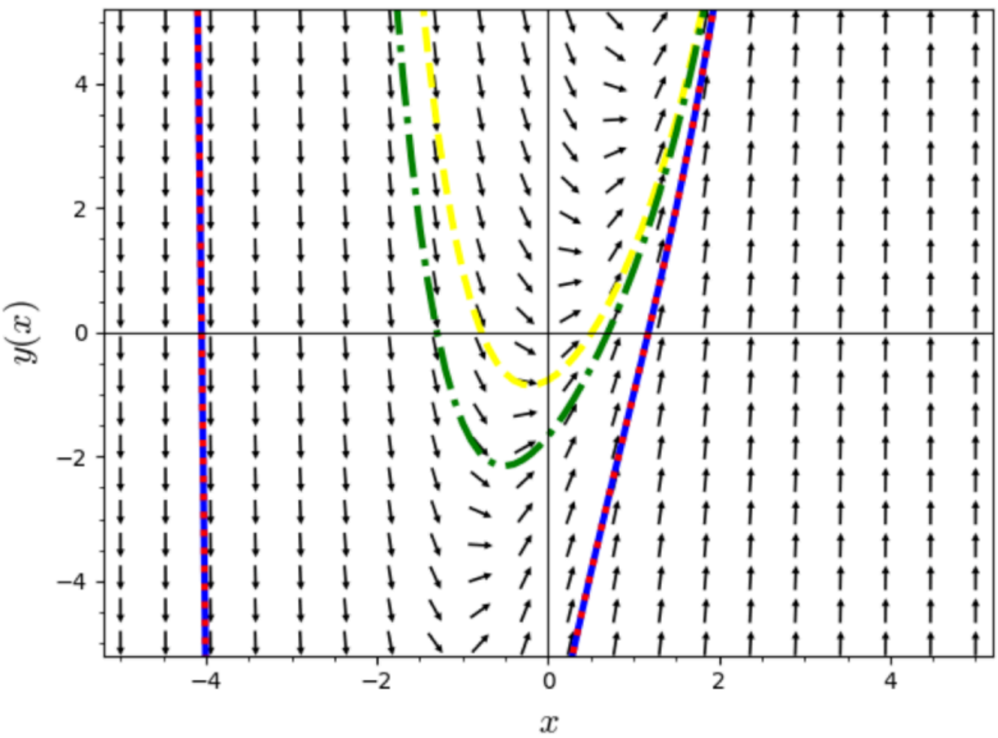
```
Cauchy problem solution:
```

$$\frac{1}{2}\left((2\,x-1)e^{(2\,x)}+2\,x+1\right)e^{(-x)}+\frac{\left(3\,e^4+3\,e^2-2\,e+2\right)e^{(-x)}}{2\,(e^4-e^2)}-\frac{\left(2\,e^4-2\,e^3+e^2+5\right)e^{x}}{2\,(e^2-1)}$$

$$\frac{1}{2}\left((2\,x-1)e^{(2\,x)}+2\,x+1\right)e^{(-x)}+\frac{\left(3\,e^4-5\,e^2+2\,e+2\right)e^{(-x)}}{2\,(e^4-e^2)}-\frac{\left(2\,e^4+2\,e^3-7\,e^2+5\right)e^{x}}{2\,(e^2-1)}$$

$$\frac{1}{2}\left((2\,x-1)e^{(2\,x)}+2\,x+1\right)e^{(-x)}+\frac{\left(2\,e^4+2\,e^3-7\,e^2+5\right)e^{(-x)}}{2\,(e^2-1)}-\frac{\left(3\,e^4-5\,e^2+2\,e+2\right)e^{x}}{2\,(e^4-e^2)}$$

$$\frac{1}{2}\left((2\,x-1)e^{(2\,x)}+2\,x+1\right)e^{(-x)}+\frac{\left(2\,e^4-2\,e^3+e^2+5\right)e^{(-x)}}{2\,(e^2-1)}-\frac{\left(3\,e^4+3\,e^2-2\,e+2\right)e^{x}}{2\,(e^4-e^2)}$$



Код програми (Wolfram Mathematica) для Завдання №2

```
eqn = y''[x] - y[x] == 4 * Sinh[x];
generalSolution = DSolve[eqn, y, x];
Print["General solution: "];
Print[generalSolution];
couch1 = DSolve[{eqn, y[-1] == 1, y[-2] == 2}, y, x];
couch2 = DSolve[{eqn, y[-1] == -1, y[-2] == -2}, y, x];
couch3 = DSolve[{eqn, y[1] == 1, y[2] == 2}, y, x];
couch4 = DSolve[{eqn, y[1] == -1, y[2] == -2}, y, x];
Print["Cauchy problem solution 1 (y[-1] == 1, y[-2] == 2): "];
Print[couch1];
Print["Cauchy problem solution 2 (y[-1] == -1, y[-2] == -2): "];
Print[couch2];
Print["Cauchy problem solution 3 (y[1] == 1, y[2] == 2): "];
Print[couch3];
Print["Cauchy problem solution 4 (y[1] == -1, y[2] == -2): "];
Print[couch4];
vplot = VectorPlot[{1, 4 * Sinh[x] - y}, {x, -5, 5}, {y, -5, 5},
  VectorStyle -> {Thick, Red}, VectorScaling -> {0.03, 0.03, None},
  VectorPoints -> 25, PlotRange -> All,
  AxesLabel -> {"x", "y(x)"}, Frame -> False];
couchiplot1 = Plot[y[x] /. couch1[[1]], {x, -5, 5}, PlotStyle -> {Thick, Blue}];
couchiplot2 = Plot[y[x] /. couch2[[1]], {x, -5, 5}, PlotStyle -> {Thick, Red}];
couchiplot3 = Plot[y[x] /. couch3[[1]], {x, -5, 5}, PlotStyle -> {Thick, Green}];
couchiplot4 = Plot[y[x] /. couch4[[1]], {x, -5, 5}, PlotStyle -> {Thick, Purple}];
Show[vplot, couchiplot1, couchiplot2, couchiplot3, couchiplot4,
  PlotRange -> All]
```

Результат роботи програми (Wolfram Mathematica) для Завдання №2

General solution:

$$\left\{\left\{y \to \text{Function}\left[\{x\}, \frac{1}{2} e^{-x} \left(1 - e^{2x} + 2x + 2 e^{2x} x\right) + e^{x} c_1 + e^{-x} c_2\right]\right\}\right\}$$

Cauchy problem solution 1 (y[-1] == 1, y[-2] == 2):

$$\left\{\left\{y \to \text{Function}\left[\{x\}, -\frac{e^{-2-x} \left(-1 + e - e^2 - 2 e^4 + 2 e^{2+2x} + e^{4+2x} - e^{5+2x} + e^{6+2x} + e^2 x - e^4 x + e^{2+2x} x - e^{4+2x} x\right)}{(-1+e)(1+e)}\right]\right\}\right\}$$

Cauchy problem solution 2 (y[-1] == -1, y[-2] == -2):

$$\left\{\left\{y \to \text{Function}\left[\{x\}, -\frac{e^{-2-x} \left(-1 - e + 3 e^2 - 2 e^4 + 2 e^{2+2x} - 3 e^{4+2x} + e^{5+2x} + e^{6+2x} + e^2 x - e^4 x + e^{2+2x} x - e^{4+2x} x\right)}{-1+e^2}\right]\right\}\right\}$$

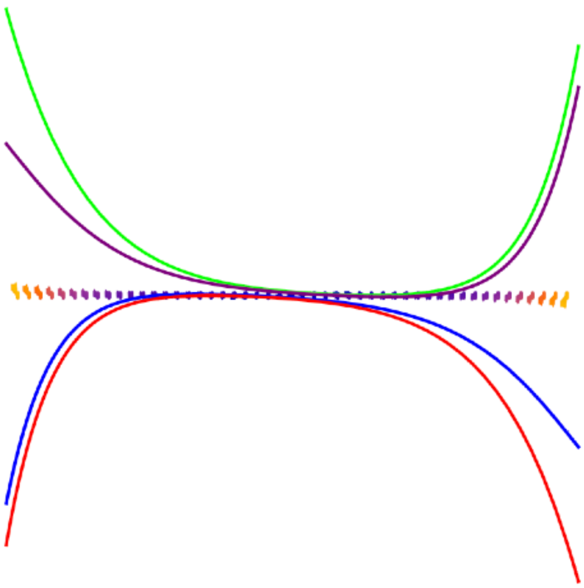
Cauchy problem solution 3 (y[1] == 1, y[2] == 2):

$$\left\{\left\{y \to \text{Function}\left[\{x\}, \frac{e^{-2-x} \left(2 e^2 - 3 e^4 + e^5 + e^6 - e^{2x} - e^{1+2x} + 3 e^{2+2x} - 2 e^{4+2x} - e^2 x + e^4 x - e^{2+2x} x + e^{4+2x} x\right)}{(-1+e)(1+e)}\right]\right\}\right\}$$

Cauchy problem solution 4 (y[1] == -1, y[2] == -2):

$$\left\{\left\{y \to \text{Function}\left[\{x\}, \frac{e^{-2-x} \left(2 e^2 + e^4 - e^5 + e^6 - e^{2x} + e^{1+2x} - e^{2+2x} - 2 e^{4+2x} - e^2 x + e^4 x - e^{2+2x} x + e^{4+2x} x\right)}{(-1+e)(1+e)}\right]\right\}\right\}$$

Out[382]=



Умова задачі №3

Розв’язати систему рівнянь (показати вигляд загального розв’язку), побудувати та показати розв’язки задач Коші (чотири різні ЗК, точки обрати самостійно, але так щоб кожна була в окремому октанті декартової системи координат).

$$\begin{cases} \dot{x} = 3x - y + v, \\ \dot{y} = 5y - x - v, \\ \dot{v} = x - y + 3v\,. \end{cases}$$

M1(0, 1, 1, 1)
M2(0, -1, -1, -1)
M3(0, 1, 1, -1)
M4(0, -1, -1, 1)

Представлення розв’язку Завдання №3 аналітично (в зошиті)

Завдання №3

$$\begin{cases} x' = 3x - y + v \\ y' = 5y - x - v \\ v' = x - y + 3v \end{cases} \qquad A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 5 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 & 1 \\ -1 & 5-\lambda & -1 \\ 1 & -1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 2-\lambda & 1 \\ 0 & 4-\lambda & 2-\lambda \\ 1 & 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (3-\lambda)^2(4-\lambda) + (2-\lambda)^2 - (4-\lambda) =$$

$$= -\lambda^3 + 11x^2 - 36x + 36 = 0$$

$$\lambda_1 = 2 \qquad \lambda_2 = 3 \qquad \lambda_3 = 6$$

Для $\lambda_1 = 2$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} h_1 = -h_3 \\ h_2 = 0 \end{matrix} \quad h^{(1)} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Для $\lambda_2 = 3$

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$h_2 = h_3$ $\qquad h^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$h_1 = h_2$

Для $\lambda_3 = 6$

$$\begin{pmatrix} -3 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -4 \\ 1 & -1 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & -4 & -8 \\ 0 & -2 & -4 \\ 1 & -1 & -3 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 \\ 1 & -1 & -3 \end{pmatrix} \qquad \begin{aligned} h_2 &= -2h_3 \\ h_1 &= h_2 + 3h_3 = h_3 \end{aligned} \qquad h^3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{3t} + C_3 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{6t} = g(t)$$

загальний розв'язок

Задачі Коші

$$g(1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow C_1 = \frac{1}{2e^2} \quad C_2 = \frac{2}{3e^3} \quad C_3 = -\frac{1}{6e^6}$$

$$g(-1) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow C_1 = -\frac{e^2}{2} \quad C_2 = -\frac{2e^3}{3} \quad C_3 = \frac{e^6}{6}$$

$$g(-1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow C_1 = \frac{e^2}{2} \quad C_2 = \frac{2e^3}{3} \quad C_3 = -\frac{e^6}{6}$$

$$g(1) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow C_1 = -\frac{1}{2e^2} \quad C_2 = -\frac{2}{3e^3} \quad C_3 = \frac{1}{6e^6}$$

Код програми (Sage) для Завдання №3

```
# General solution
t = var('t')
x = function('x')(t)
y = function('y')(t)
v = function('v')(t)
de1 = diff(x, t) == 3*x - y + v
de2 = diff(y, t) == 5*y - x - v
de3 = diff(v, t) == x - y + 3*v
solution = desolve_system([de1, de2, de3], [x, y, v], ivar=t)
show("General solution:")
solution[0].rhs().show()
solution[1].rhs().show()
solution[2].rhs().show()
# Cauchy problem solutions
show('Cauchy problem solutions:')
show('(0, 1, 1, 1)')
sol = desolve_system([de1, de2, de3], [x, y, v], ivar=t, ics=[0, 1, 1, 1])
solx = sol[0].rhs()
soly = sol[1].rhs()
solv = sol[2].rhs()
solution_matrix = matrix([[solx], [soly], [solv]])
show(solution_matrix)
show('(0, -1, -1, -1)')
sol = desolve_system([de1, de2, de3], [x, y, v], ivar=t, ics=[0, -1, -1, -1])
solx = sol[0].rhs()
soly = sol[1].rhs()
solv = sol[2].rhs()
solution_matrix = matrix([[solx], [soly], [solv]])
show(solution_matrix)
show('(0, 1, 1, -1)')
sol = desolve_system([de1, de2, de3], [x, y, v], ivar=t, ics=[0, 1, 1, -1])
solx = sol[0].rhs()
soly = sol[1].rhs()
solv = sol[2].rhs()
solution_matrix = matrix([[solx], [soly], [solv]])
show(solution_matrix)
show('(0, -1, -1, 1)')
sol = desolve_system([de1, de2, de3], [x, y, v], ivar=t, ics=[0, -1, -1, 1])
solx = sol[0].rhs()
soly = sol[1].rhs()
solv = sol[2].rhs()
solution_matrix = matrix([[solx], [soly], [solv]])
show(solution_matrix)
```

```
x, y, v = var('x y v')
dx = 3*x - y + v
dy = 5*y - x - v
dv = x - y + 3*v
show("Direction field:")
p = plot_vector_field3d((dx, dy, dv), (x, -1, 1), (y, -1, 1), (v, -1, 1))
p.show(xmin=-10, xmax=10, ymin=-10, ymax=10, vmin=-10, vmax=10)
```

Результат роботи програми (Sage) для Завдання №3

$$\frac{1}{6}\left(v(0) + x(0) - 2\,y(0)\right)e^{(6\,t)} + \frac{1}{3}\left(v(0) + x(0) + y(0)\right)e^{(3\,t)} - \frac{1}{2}\left(v(0) - x(0)\right)e^{(2\,t)}$$
$$-\frac{1}{3}\left(v(0) + x(0) - 2\,y(0)\right)e^{(6\,t)} + \frac{1}{3}\left(v(0) + x(0) + y(0)\right)e^{(3\,t)}$$
$$\frac{1}{6}\left(v(0) + x(0) - 2\,y(0)\right)e^{(6\,t)} + \frac{1}{3}\left(v(0) + x(0) + y(0)\right)e^{(3\,t)} + \frac{1}{2}\left(v(0) - x(0)\right)e^{(2\,t)}$$

```
Cauchy problem solutions:
(0, 1, 1, 1)
```

$$\begin{pmatrix} e^{(3\,t)} \\ e^{(3\,t)} \\ e^{(3\,t)} \end{pmatrix}$$

```
(0, -1, -1, -1)
```

$$\begin{pmatrix} -e^{(3\,t)} \\ -e^{(3\,t)} \\ -e^{(3\,t)} \end{pmatrix}$$

```
(0, 1, 1, -1)
```

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{3}\,e^{(6\,t)} + \frac{1}{3}\,e^{(3\,t)} + e^{(2\,t)} \\ \frac{2}{3}\,e^{(6\,t)} + \frac{1}{3}\,e^{(3\,t)} \\ -\frac{1}{3}\,e^{(6\,t)} + \frac{1}{3}\,e^{(3\,t)} - e^{(2\,t)} \end{pmatrix}$$

```
(0, -1, -1, 1)
```

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{3}\,e^{(6\,t)} - \frac{1}{3}\,e^{(3\,t)} - e^{(2\,t)} \\ -\frac{2}{3}\,e^{(6\,t)} - \frac{1}{3}\,e^{(3\,t)} \\ \frac{1}{3}\,e^{(6\,t)} - \frac{1}{3}\,e^{(3\,t)} + e^{(2\,t)} \end{pmatrix}$$