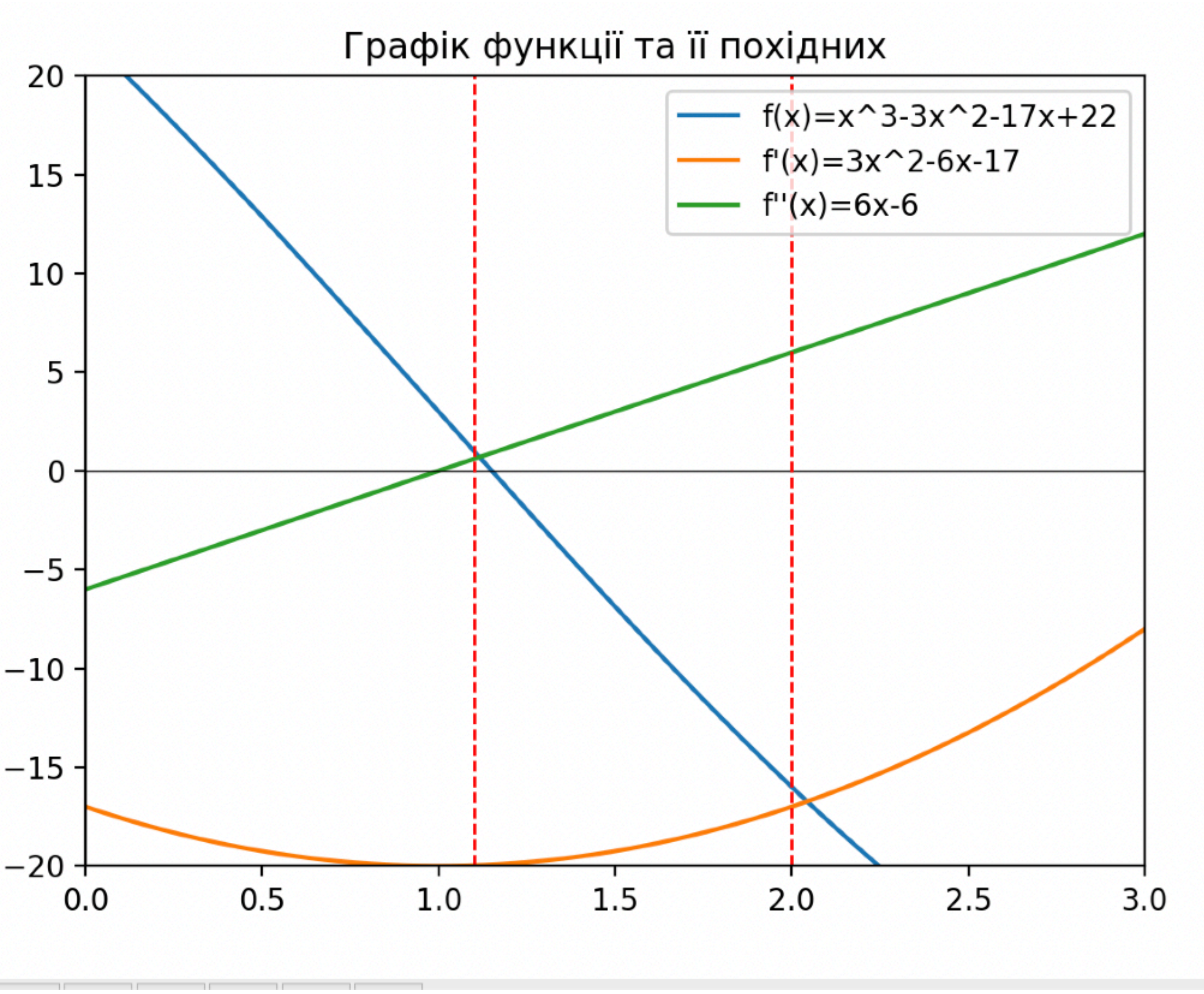
31. Знайти найменший додатній корінь нелінійного рівняння $x^3 - 3x^2 - 17x + 22 = 0$ методом Ньютона і релаксації з точністю $\varepsilon = 10^{-4}$. Знайти апріорну та апостеріорну оцінку кількості кроків. Початковий проміжок та початкове наближення обрати однакове для обох методів (якщо це можливо), порівняти результати роботи методів між собою.



Клевчук Марія, варіант 31.

$f(x) = x^3 - 3x^2 - 17x + 22$ // найменший додатній корінь

$f'(x) = 3x^2 - 6x - 17$ $\quad \varepsilon = 10^{-4}$

$f''(x) = 6x - 6$

З графіку обираю проміжок $[a, b] = [1{,}1; 2]$

Початкове наближення $x_0 = 1{,}1$.

Перевіряємо наявність кореня на проміжку $[1{,}1; 2]$

$$\left.\begin{aligned} f(1{,}1) &= 1{,}1^3 - 3 \cdot 1{,}1^2 - 17 \cdot 1{,}1 + 22 = 1{,}001 \\ f(2) &= 2^3 - 3 \cdot 2^3 - 17 \cdot 2 + 22 = -16 \end{aligned}\right\} f(1{,}1) \cdot f(2) < 0 \text{ - корінь є } \checkmark.$$

Функція $f(x)$ неперервна на $[1{,}1; 2]$.

Метод релаксації

$$\left.\begin{aligned} m_1 &= \min_{x \in [1{,}1; 2]} |f'(x)| = 17 \\ M_1 &= \max_{x \in [1{,}1; 2]} |f'(x)| = 19{,}97. \end{aligned}\right\} \quad \left.\begin{aligned} &0 < m_1 < |f'(x)| < M_1 \\ &0 < 17 < |f'(x)| < 19{,}97. \end{aligned}\right\}$$

Умова збіжності виконується

Шукаємо оптимальний параметр τ_0

$$\tau_0 = \frac{2}{M_1 + m_1} = \frac{2}{19{,}97 + 17} \approx 0{,}0541.$$

Шукаємо апріорну оцінку к-сті ітерацій

$$q = \frac{M_1 - m_1}{M_1 + m_1} = \frac{19,97 - 17}{19,97 + 17} \approx 0,08034$$

$$\left.\begin{array}{l} x_0 = 1,1 \\ x^* \in [1,1;2] \end{array}\right\} \Rightarrow |x_0 - x^*| = |1,1 - x^*| \leq 0,9 = \delta.$$

$$n \geq \left[\frac{\ln(|x_0 - x^*| / \varepsilon)}{\ln(1/q)}\right] + 1 = \left[\frac{\ln(0,9/10^{-4})}{\ln(1/0,08034)}\right] + 1 = 4.$$

Ітераційний процес

$$x_{n+1} = x_n \pm \tau f(x_n).$$

Визначимо знак. З графіку видно $f'(x) < 0$, тому „+"

I $x_1 = x_0 + 0,0541 \cdot f(x_0) = 1,1 + 0,0541 \cdot 1,001 = 1,15415$

$$|x_1 - x_0| = |1,15415 - 1,1| = 0,05415 > \varepsilon.$$

II $x_2 = x_1 + 0,0541 \cdot f(x_1) = 1,15415 + 0,0541 \cdot (-0,07934) = 1.14986.$

$$|x_2 - x_1| = |1,14986 - 1,15415| = 0,00429 > \varepsilon$$

Метод Ньютона

$f''(x) \in C^2[1{,}1;2]$ (з графіку, також знакостала)

1) $f(x_0)\cdot f''(x_0) = f(1{,}1)\cdot f''(1{,}1) = 1{,}001\cdot(6\cdot 1{,}1-6) > 0$

2) $M_2 = \max\limits_{x\in[1{,}1;2]} |f''(x)| = 6.$

$$q = \frac{M_2\cdot|x_0-x^*|}{2m_1} = \frac{6\cdot 0{,}9}{2\cdot 17} = 0{,}15882 < 1.$$

Умови збіжності виконуються.

Шукаю апріорну оцінку:

$$n \geq \left[\log_2\left(\frac{\ln(|x_0-x^*|/\varepsilon)}{\ln(1/q)}+1\right)\right]+1 = 3.$$

Ітераційний процес

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

I. $x_1 = x_0 - \dfrac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 1{,}1 - \dfrac{1{,}001}{-19{,}97} = 1{,}15016$

$$|x_1-x_0| = |1{,}15016-1{,}1| = 0{,}05016 > \varepsilon.$$

II. $x_2 = x_1 - f(x_1)/f'(x_1) = 1{,}15016 + (-0{,}00045/-19{,}93235) = 1{,}15018$

$$|x_2-x_1| = |1{,}15018-1{,}15016| = 0{,}00002 < 0{,}0001.$$

Процес завершено. Апостеріорна оцінка 2.