Розділ N 1.1.

Б16 $\quad f_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x < 2 \text{ або } x > 3 \\ a \cdot x, & \text{якщо } 2 \le x \le 3 \end{cases}$

1.2 Знайти значення параметра a.

За визначенням $\int_{-\infty}^{\infty} f_\xi(x)\,dx = 1$. Отже,

$$\int_2^3 ax \cdot dx = \frac{ax^2}{2}\Big|_2^3 = a\left(\frac{9}{2} - \frac{4}{2}\right) = 1.$$

$$a \cdot \frac{5}{2} = 1$$

$$a = \frac{2}{5}.$$

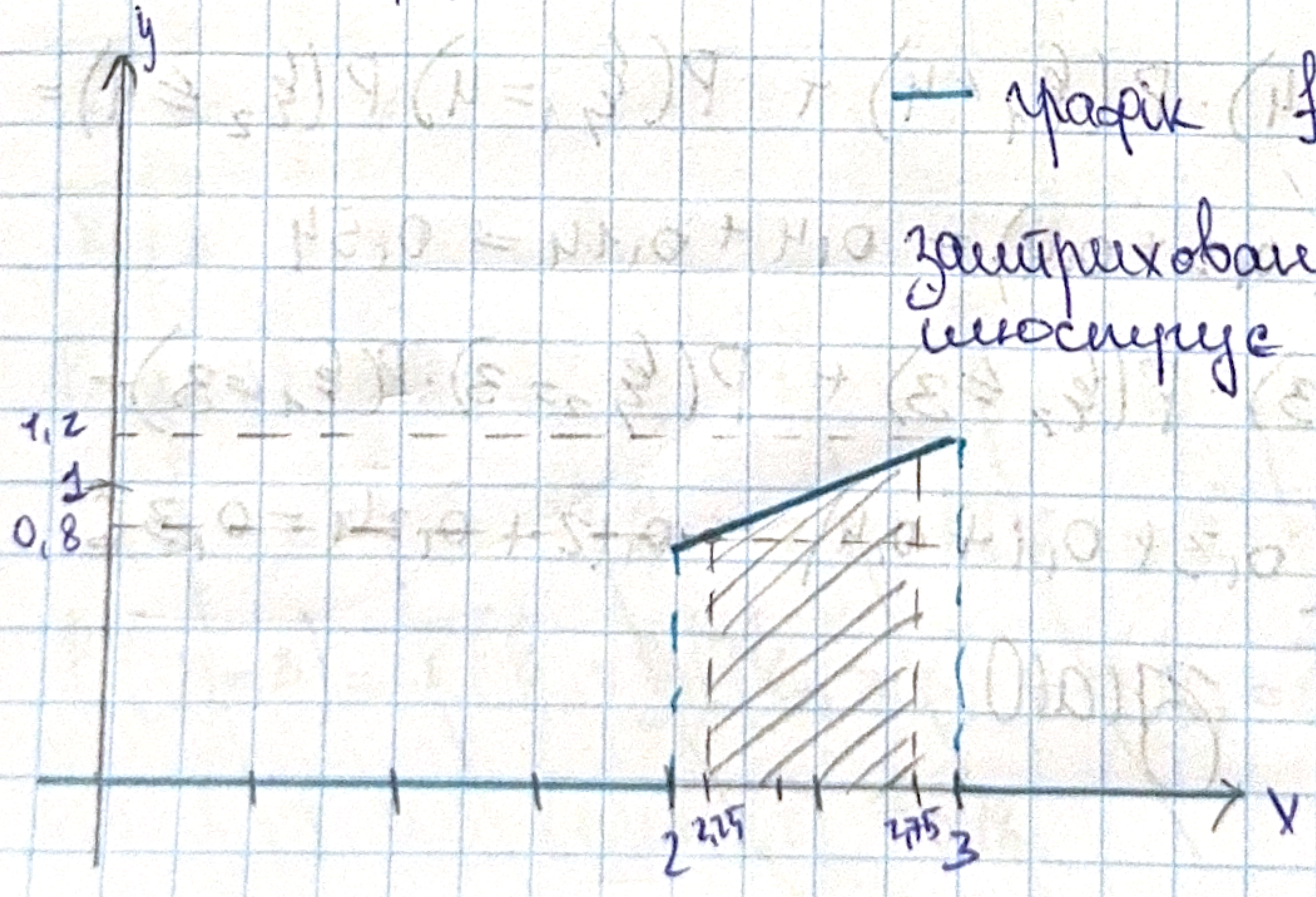
1.3 Знайти ймовірність за допомогою щільності

$$P\{c < \xi < d\} = \int_c^d f_\xi(x)\,dx$$

$$p = P\{2{,}25 < \xi < 2{,}75\} = \int_{2{,}25}^{2{,}75} \frac{2}{5} x\,dx =$$

$$= \frac{2}{2 \cdot 5} x^2 \Big|_{2{,}25}^{2{,}75} = \frac{1}{5}(7{,}5625 - 5{,}0625) = \frac{1}{5} \cdot 2{,}5 = \frac{1}{2}.$$

1.4



— графік $f_\xi(x)$

заштрихована ділянка ілюструє число p.

Перевірити отриманий результат, вик. графічну інтерпретацію 1.5

Обчислимо площу прямокутника зі

сторонами 0,8 і $2{,}75-2{,}25=0{,}5$.

$S_{\square}=0{,}8\cdot 0{,}5=0{,}4$

Обчислимо площу трикутника з катетами

0,5 і 0,4 $\quad S_{\Delta}=\frac{1}{2}\cdot 0{,}5\cdot 0{,}4=0{,}1$.

$S_{\square}+S_{\Delta}=0{,}5$, що відповідає отриманому результату

Нехай знайти дисперсію 1.6

$$\sigma^2=D(\xi)=E(\xi-E(\xi))^2.$$

$$\sigma^2=D=D(\xi)=\int_{-\infty}^{\infty}(x-m)^2 f_\xi(x)\,dx, \text{ де } m=E(\xi)=\int_{-\infty}^{\infty}x\cdot f_\xi(x)\,dx$$

$$\sigma^2=E(\xi^2)-E(\xi)^2.$$

$$m=E(\xi)=\int_2^3 x\cdot\frac{2}{5}x=\frac{2x^3}{5\cdot 3}\Big|_2^3=\frac{2}{15}(27-8)=\frac{19\cdot 2}{15}=\frac{38}{15}\approx 2{,}53$$

$$(E(\xi))^2=6{,}41.$$

$$E(\xi^2)=\int_2^3 x^2\cdot\frac{2}{5}x\cdot dx=\frac{2x^4}{5\cdot 4}\Big|_2^3=\frac{1}{10}(81-16)=6{,}5.$$

$$\sigma^2=D(\xi)=6{,}5-6{,}41=0{,}09$$

АБО Знайти $F_\xi(x)=\int_{-\infty}^{x}f(u)\,du$

$$F_\xi(x)=\begin{cases}0, & x<2\\ \frac{1}{5}(x^2-4) & x\in[2;3]\\ 1, & x>3\end{cases}$$

Б12 Впорядкувати вибірку

1.7 $x_1^* = 2{,}1$ $x_2^* = 2{,}11$ $x_3^* = 2{,}15$ $x_4^* = 2{,}2$ $x_5^* = 2{,}2$

$x_6^* = 3{,}5$ $x_7^* = 3{,}7$ $x_8^* = 3{,}7$ $x_9^* = 3{,}7$ $x_{10}^* = 3{,}9$

Обчислити значення $F_\xi(x)$ в точках x_5^* та x_9^*

$F_\xi(x_5^*) = F_\xi(2{,}2) = \frac{1}{5}(2{,}2^2 - 4) = 0{,}168$

$F_\xi(x_9^*) = F_\xi(3{,}7) = 1.$

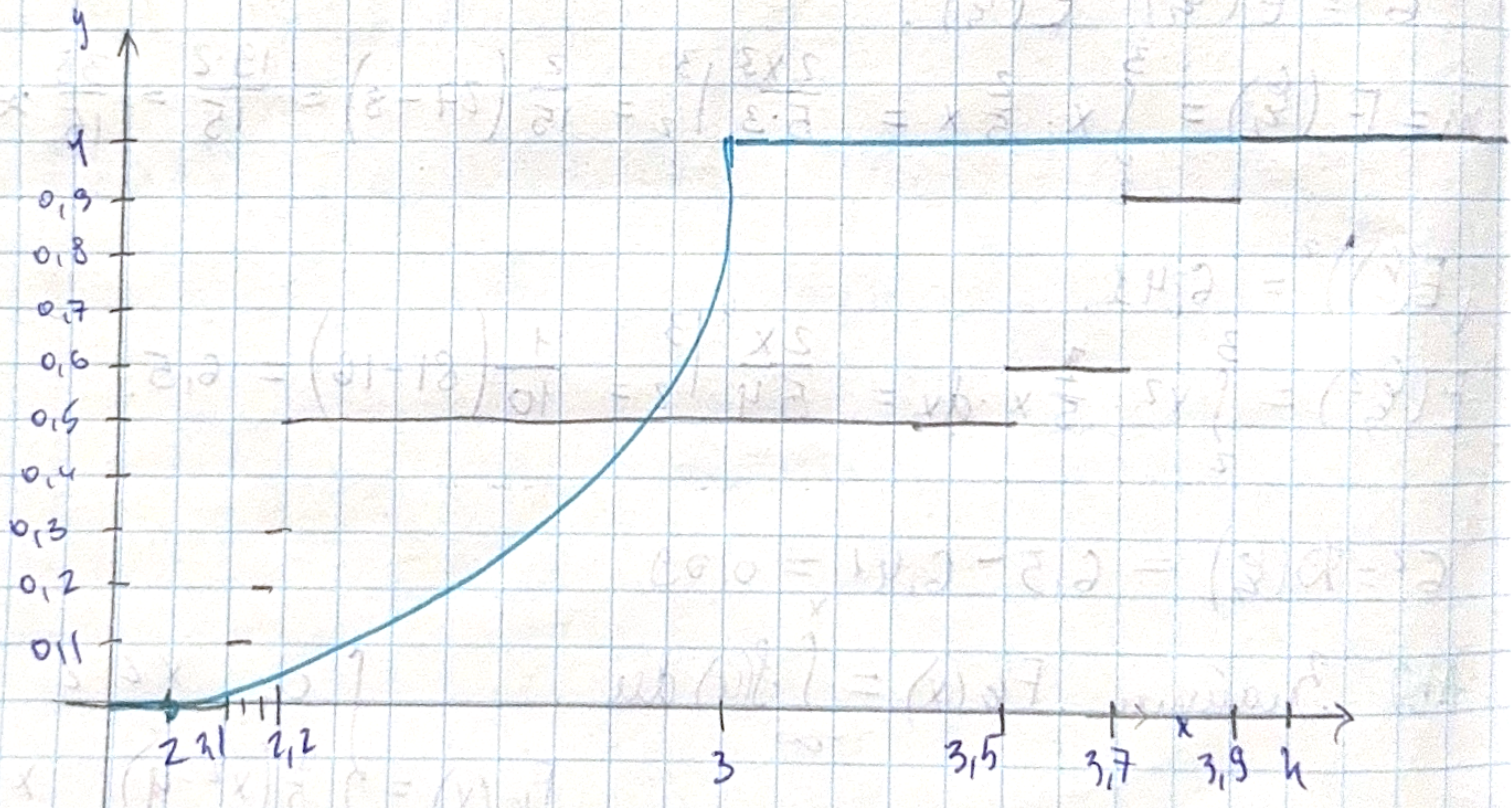
емп. ф-ія розподілу

$\hat{F}_n(x) = \frac{\nu_n}{n}$ – ν_n – к-сть ел. $< x$.

$\hat{F}_n(x_5^*) = \hat{F}_n(2{,}2) = \frac{3}{10}$

$\hat{F}_n(x_9^*) = \hat{F}_n(3{,}7) = \frac{6}{10}$

1.8



— $F_\xi(x)$ — $\hat{F}_\xi(x)$

Розбір 1.а.

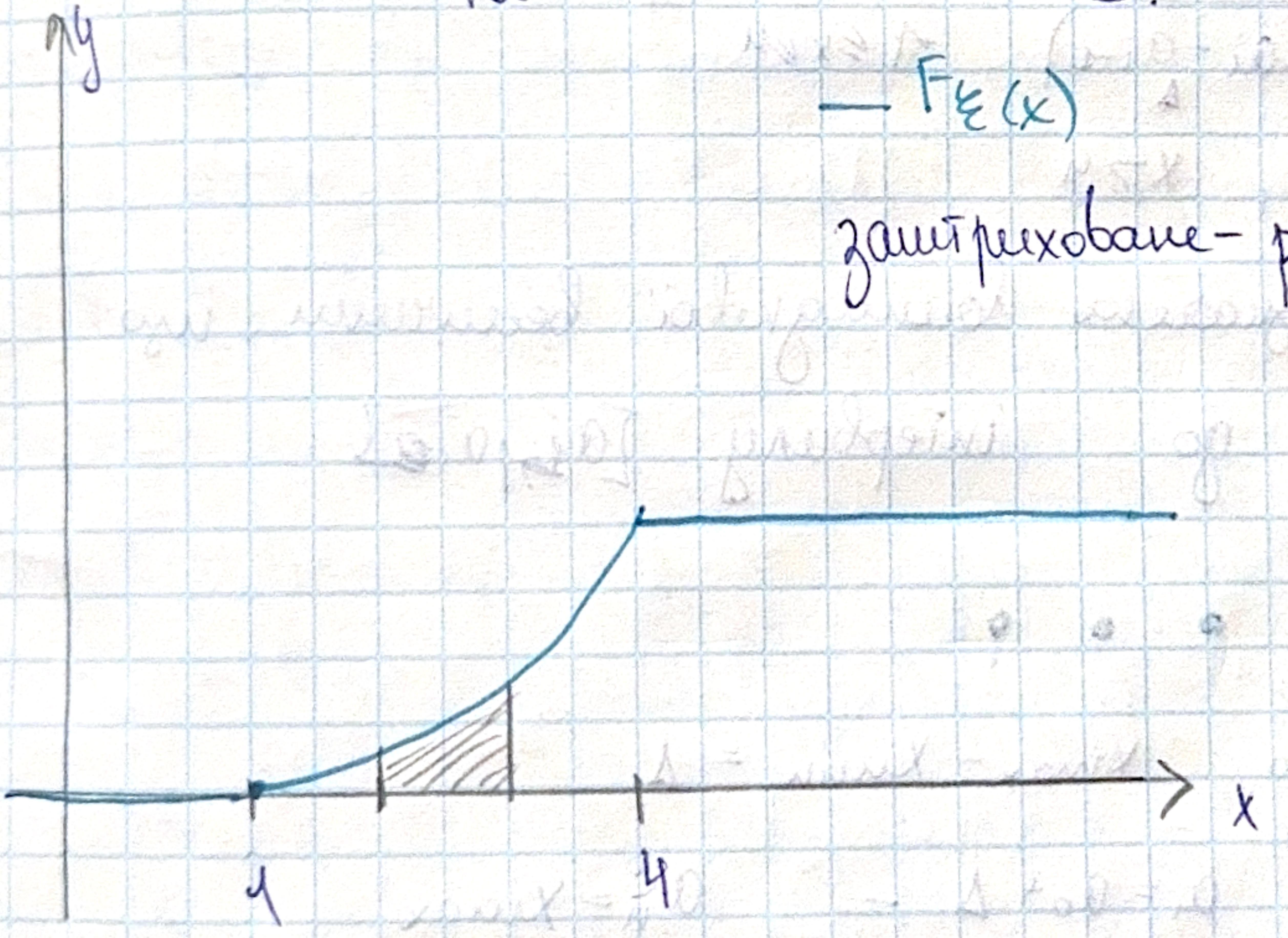
$$F_\xi(x) = \begin{cases} 1, & x > 4 \\ ax^2 + bx, & 1 \le x \le 4 \\ 0, & x < 1 \end{cases}$$ 1.2

$\begin{cases} a + b = 0 & // \text{підставляємо } x = 1 \\ 16a + 4b = 1 & // \text{підставляємо } x = 4 \end{cases}$

$\begin{cases} a = -b \\ -16b + 4b = 1 \end{cases}$ $\begin{cases} a = \frac{1}{12} \\ b = -\frac{1}{12} \end{cases}$

Знайдемо значення $p = P\{2 < \xi < 3\} =$ 1.3

$= F(3) - F(2) = \frac{1}{12}(9 - 3 - 4 + 2) = \frac{1}{3}.$



1.4

1.5.

Знайти по графіку p. ...

1.76. Шукаю щільність вип. величини ξ.

$$f_\xi(x) = \frac{d F_\xi(x)}{dx}$$

$$f_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x < 1 \text{ або } x > 4 \\ \frac{2x-1}{12}, & x \in [1;4] \end{cases}$$

Вибірка з попереднього зв.

$x_1^* = 2,1 \quad x_2^* = 2,11 \quad x_3^* = 2,15 \quad x_4^* = 2,2 \quad x_5^* = 2,2$

$x_6^* = 3,5 \quad x_7^* = 3,7 \quad x_8^* = x_9^* = 3,7 \quad x_{10}^* = 3,9.$

Наближення $f_\xi(x)$ – це гістограма

$$h(x) = \begin{cases} 0, & x < 1 \\ \frac{n_i}{n(\underbrace{a_i - a_{i-1}}_{\Delta})} & 1 \le x \le 4 \\ 1, & x > 4 \end{cases}$$

n_i – к-сть значень випадкової величини, що потрапили до інтервалу $[a_{i-1}, a_i]$

• • •

Шукаємо $x_{max} - x_{min} = \Delta$

$a_0 = x_{min} \quad a_1 = a_0 + \Delta \quad \dots \quad a_n = x_{max}$

Розбір №9.1

Невідоме мат. сподів. m. $\sigma^2 = 0{,}64$

$x_1 = 3{,}2$ $x_2 = 2{,}4$ $x_3 = 4{,}3$ $x_4 = 4{,}3$ $x_5 = 2{,}6$

$x_6 = 5{,}4$ $x_7 = 2{,}1$ $x_8 = 2{,}8$ $x_9 = 2{,}9$

3.1

Нехай для оцінки величини m будемо використовувати емпіричний естиматор $\overline{m} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \xi_i$, який має стандартний $\cancel{z = \frac{(\overline{m}-m)\sqrt{n}}{\sigma} \sim N(0,1)}$ $\overline{m} \Leftrightarrow N\left(m, \frac{\sigma^2}{n}\right)$

Вираз $[u_1, u_2]$ - надійний інтервал для m з надійність γ означає, що $m \in [u_1, u_2]$ з імовірністю γ. 3.2

Для обчислення u_1, u_2 викор. формули

$$u_1 = \overline{m} - z_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$u_2 = \overline{m} + z_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

z_α залежить від γ.

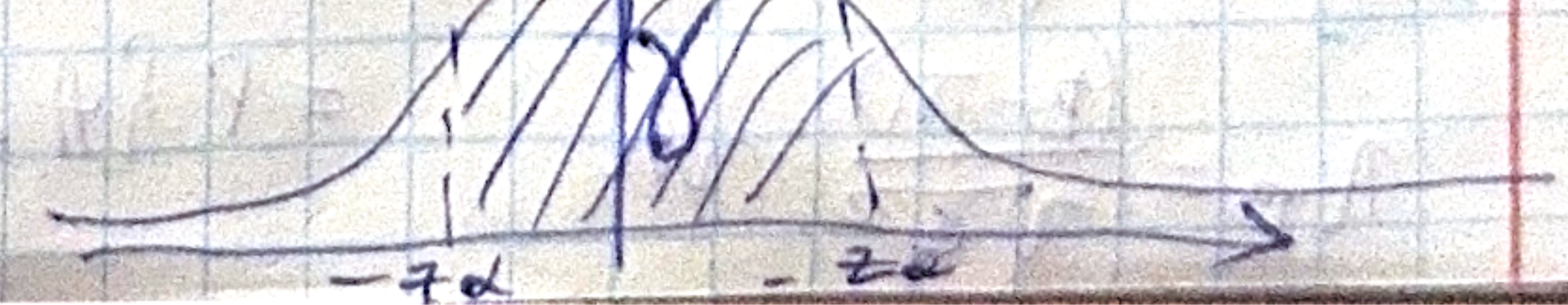
$$P\{|N(0,1)| < z_\alpha\} = \gamma \qquad // \ \gamma = 0{,}91$$

$$\Phi(z_\alpha) - \Phi(-z_\alpha) = 2\Phi(z_\alpha) - 1 = \gamma$$

$$\Phi(z_\alpha) = \frac{1+\gamma}{2} = 0{,}955$$

$$\Phi(1{,}69) = 0{,}9545 < \Phi(z_\alpha) = 0{,}955 < \Phi(1{,}7) = 0{,}9554$$

$$z_\alpha = \frac{1{,}69 + 1{,}7}{2} = 1{,}695$$



3.3 $m^* = \frac{3,2+2,4+1,3+ \dots +2,9}{9} = \frac{27}{9} = 3.$

Отже, $\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{0,64} = 0,8$

$u_1 = 3 - 1,695 \cdot \frac{0,8}{\sqrt{9}} = 2,548$

$u_2 = 3 + 1,695 \cdot \frac{0,8}{3} = 3,452.$

Так ми знайшли надійний інтервал

3.4 $|m - m^*| \le \delta$, $\delta = z_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1,695 \cdot \frac{0,8}{3} = 0,452$

$p = P\{|m - m^*| \le \delta\} = \gamma = 0,91.$

Тобто надійність дорівнює даній умові

3.5 Змінється рівень надійності $\gamma = 0,82$

і відповідно z_α. $P\{|N(0,1)| < z_\alpha\} = \gamma = 0,82.$

$\Phi(z_\alpha) = \frac{1+\gamma}{2} = 0,91$

$z_\alpha \approx 1,34.$ тому $\delta^* = z_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \dots = 0,357.$

3.6 Задано два числа $A = 2,4$ $B = 3,4$

$N(m, 1,21)$ – ~~з~~ розподіл. знайти ймовірність

події $P[A,B] = P\{A < m < B\}$

Загальна формула:

$\lambda_A = \frac{(A - \overline{m})}{\sqrt{\sigma^2}} \cdot \sqrt{n}$ $P\{A < m < B\} =$

$\lambda_B = \frac{(B - \overline{m})}{\sqrt{\sigma^2}} \cdot \sqrt{n}$ $= P\{A < Z < B\} = P\{A < N(0,1) < B\} =$

$= \Phi(\eta_B) - \Phi(\eta_A)$

$\cancel{\eta_A = \frac{2,4-2}{}}$ $m^* = \cancel{3,22...}$ $\eta_A = \frac{(2,4-3)}{1,1} \cdot 3 = -1,63.$

$\eta_B = \frac{3,4-3}{1,1} \cdot 3 = 1,091$

$\Phi(-\eta_\alpha) = \Phi(1,63) = 0,9484$

$\Phi(\eta_\alpha) = 1 - \Phi(-\eta_\alpha) = 1 - 0,9484 = \underline{0,0516}$

$\Phi(\eta_B) = \Phi(1,091) = \underline{0,8621}$

$P\{2,4 < m < 3,4\} = 0,8621 - 0,0516 = 0,8105.$

Розбір 2.2

Невідома дисперсія $m = 1$ 3.1

$x_1 = 1,4$ $x_2 = 0,8$ $x_3 = 1$ $x_4 = 0,6$ $x_5 = 1,2$ $n = 5$

Для оцінки σ^2 будемо використовувати емпіричну дисперсію $S^2_{(m)} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (\xi_i - m)^2$.

Випадкова величина $\frac{n}{\sigma^2} S^2_{(m)} \Leftrightarrow \chi^2_{(n)}$

$u_1 = \frac{n}{h_{2\alpha}} \cdot S^2_{(m)}$; $u_2 = \frac{n}{h_{1\alpha}} \cdot S^2_{(m)}$ 3.2

$S^{*2}_{(m)} = 0,08$ (пораховано)

$P\{\chi^2_{(n)} < h_{1\alpha}\} = \frac{\alpha}{2}$ $P(\chi^2_{(n)} < h_{2\alpha}\} = 1 - \frac{\alpha}{2}$ $\alpha = 1 - \gamma$

$\alpha = 1 - 0,98 = 0,02$

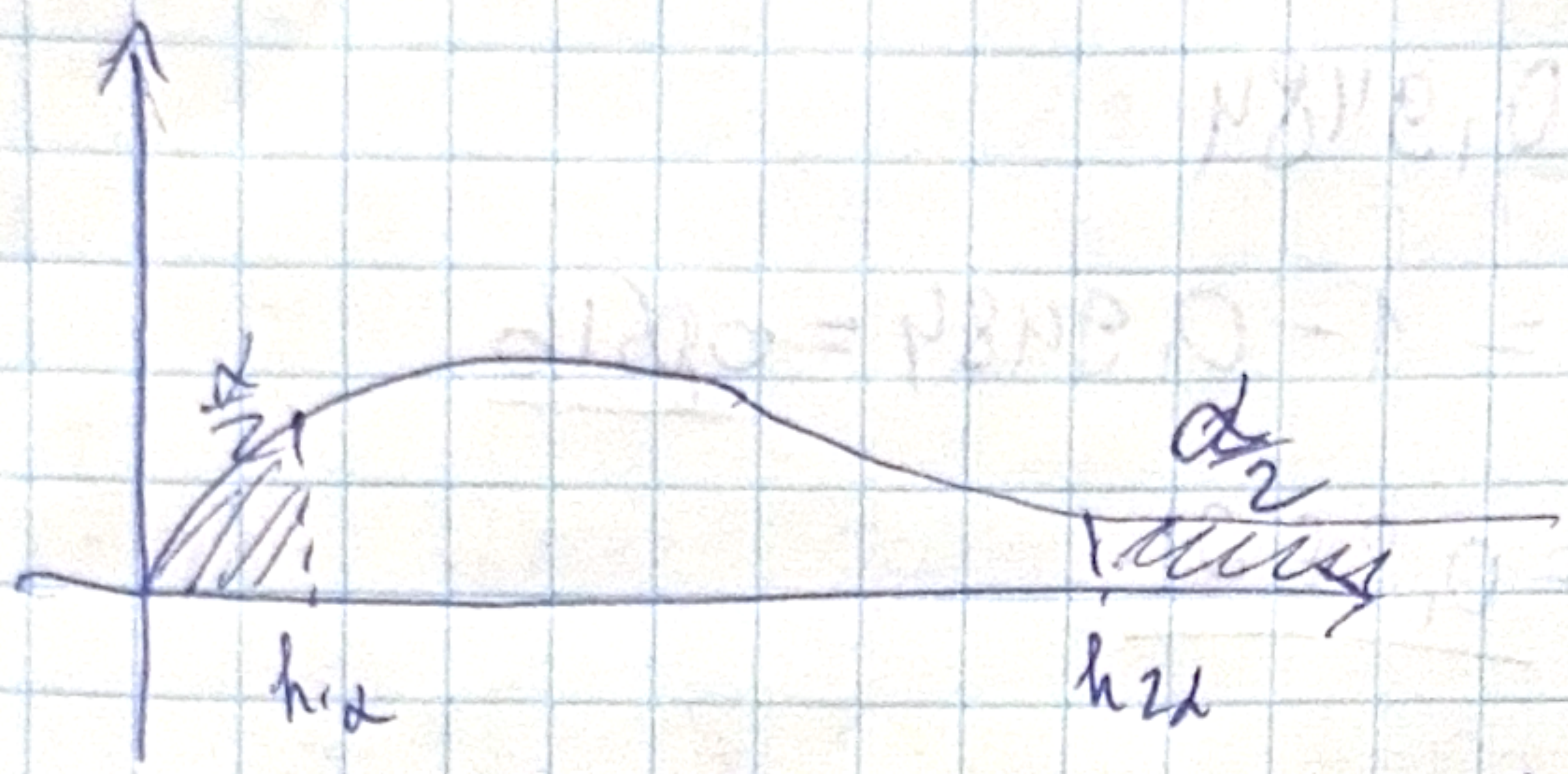
$P\{\chi^2_{(n)} < h_{1\alpha}\} = 0,01 =$

$\Rightarrow h_{1\alpha} = \frac{0,506 + 0,505}{2} = \underline{0,5055}$

3.3 $P\{\chi^2_{(n)} < h_{2\alpha}\} = 1 - 0{,}01 = 0{,}99 \Rightarrow h_{2\alpha} = \frac{15{,}08 + 15{,}09}{2} =$

$= 15{,}085$

$u_1 = \frac{5}{15{,}085} \cdot 0{,}08 \approx 0{,}0265 \qquad u_2 \approx 0{,}79$



3.4 $|\sigma^2 - S^2| \le \delta = \max\{(S^2_{(n)} - u_1); (u_2 - S^2_{(n)})\} =$

$= \max\{0{,}08 - 0{,}0265), (0{,}79 - 0{,}08)\} = \underline{0{,}71}$

3.5 $q = P\{0{,}2 < \sigma^2 < 2{,}5\}$

3.6? $\{C < \sigma^2 < D\} \Leftrightarrow \{\lambda_C < h < \lambda_D\}$ ge $h = \frac{n}{\sigma^2} S^2_{(n)}$.

Тобто

$P\{C < \sigma^2 < D\} = P\{\frac{n}{D} \cdot S^2 < \frac{n}{\sigma^2} \cdot S^2 < \frac{n}{C} \cdot S^2\} =$

$= P\{\lambda_C < h < \lambda_D\} = \Phi(\lambda_D) - \Phi(\lambda_C)$

$\lambda_C = \frac{n}{D} S^2_{(n)} \qquad \lambda_D = \frac{n}{C} S^2_{(n)}$

$\lambda_C = \frac{5}{2{,}5} \cdot 0{,}08 = 0{,}16$

$\lambda_D = \frac{5}{0{,}2} \cdot 0{,}08 = 2.$

$\Phi(\lambda_C) = \Phi(0{,}16) = 0{,}5636 \quad 0{,}5636$

$\Phi(\lambda_D) = 0{,}9772$

$P\{C < \sigma^2 < D\} = 0{,}9772 - 0{,}5636$

розв.р

~~$x_1^* = 0,0102$ x_2^*~~

2.1

$$f_0(x) = \begin{cases} \frac{2\cdot x}{25}, & 0 \le x \le 5 \\ 0, & x < 0 \text{ або } x > 5 \end{cases}$$

$$F_0(x) = \int_{-\infty}^{x} f_0(u)\,du = \int_{-\infty}^{x} \frac{2u}{25}\,du = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{x^2}{25} & 0 \le x \le 5 \\ 1, & x > 5 \end{cases}$$

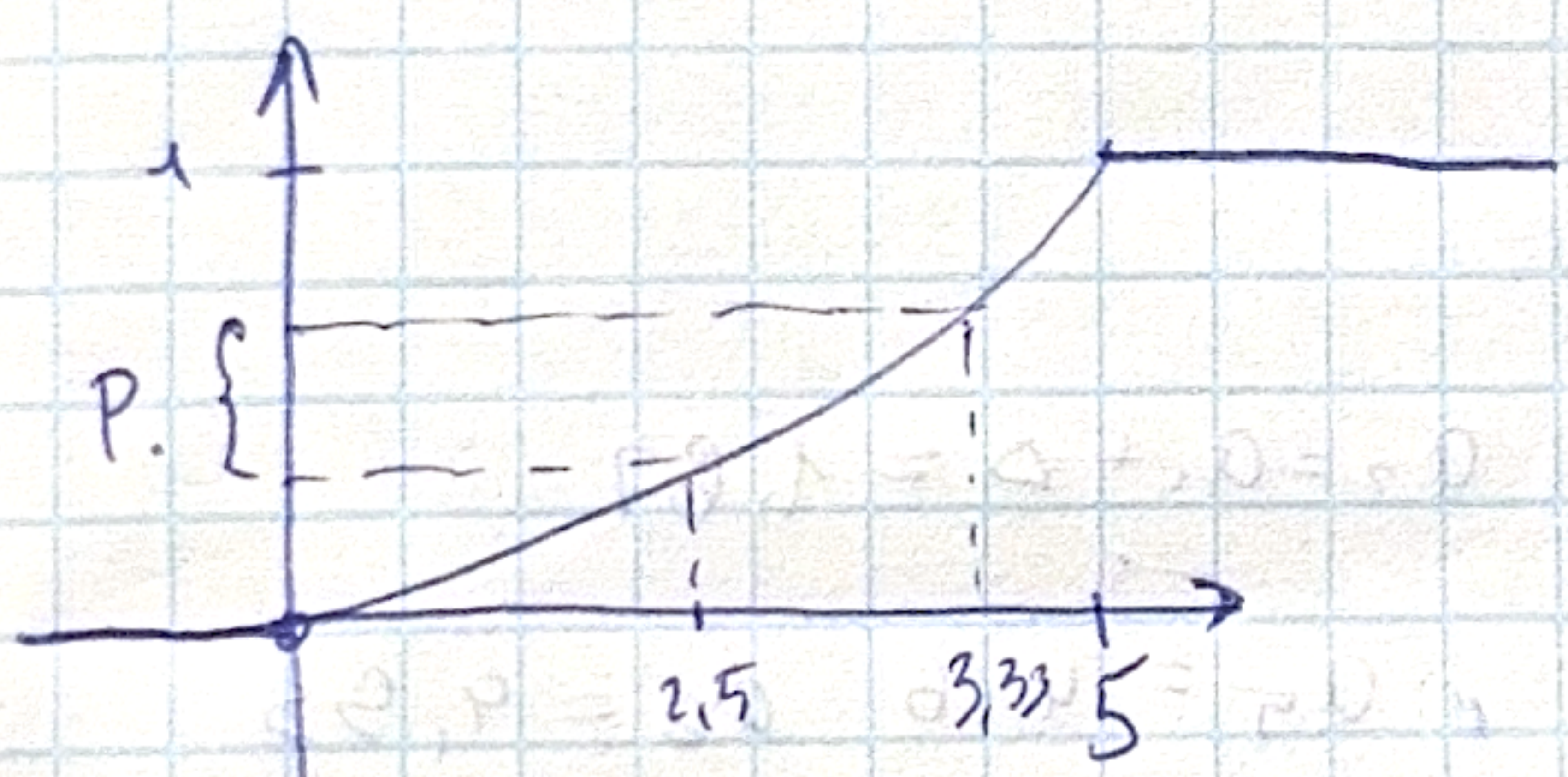
2.2.

$p = P\{2,5 < \xi < 3,33\}$

$$P\{c < \xi < d\} = \int_c^d f_\xi(x)\,dx = F(d) - F(c)$$

$$p = F(3,33) - F(2,5) = \frac{3,33^2}{25} - \frac{2,5^2}{25} = 0,194$$

2.3



2.4

$x_1^* = 0,010$ $x_2^* = 0,883$ $x_3^* = 0,929$ $x_4^* = 1,056$

$x_5^* = 1,209$ $x_6^* = 1,258$ $x_7^* = 1,328$ $x_8^* = 1,692$ $x_9^* = 1,837$

$x_{10}^* = 1,865$ $x_{11}^* = 1,991$ $x_{12}^* = 2,136$ $x_{13}^* = 2,202$ $x_{14}^* = 2,345$

$x_{15}^* = 2,379$ $x_{16} = 2,443$ $x_{17} = 2,482$ $x_{18} = 2,489$ $x_{19} = 2,757$ $x_{20} = 2,769$

$x_{21} = 3,018$ $x_{22} = 3,084$ $x_{23} = 3,261$ $x_{24} = 3,668$

$x_{25} = 3,701$ $x_{26} = 3,746$ $x_{27} = 3,755$ $x_{28} = 3,762$

$x_{29} = 3{,}809$ $x_{30} = 3{,}816$ $x_{31} = 4{,}141$ $x_{32} = 4{,}146$

$x_{33} = 4{,}147$ $x_{34} = 4{,}293$ $x_{35} = 4{,}309$ ~~x_{36} 4,375~~

$x_{36} = 4{,}314$ $x_{37} = 4{,}336$ $x_{38} = 4{,}375$ $x_{39} = 4{,}412$

$x_{40} = 4{,}416$ $x_{41} = 4{,}463$ $x_{42} = 4{,}539$ $x_{43} = 4{,}543$

$x_{44} = 4{,}798$ $x_{45} = 4{,}806$ $x_{46} = 4{,}854$

$x_{47} = 4{,}879$ $x_{48} = 4{,}931$ $x_{49} = 4{,}968$

$x_{50} = 4{,}990$

$H: F(x) = F_0(x)$

$k = 6$ $[a_0, a_1] \ldots$

$R = x_{max} - x_{min} = 4{,}99 - 0{,}01 = 4{,}98$

$\Delta = \frac{R}{k} = \frac{4{,}98}{6} = 0{,}83$

$a_0 = x_{min} = 0{,}83$

$a_1 = a_0 + \Delta = 0{,}84$ $a_2 = a_1 + \Delta = 1{,}67$

$a_3 = 2{,}5$ $a_4 = 3{,}33$ $a_5 = 4{,}16$ $a_6 = 4{,}99$

2.5 $p_i = F_0(a_{i+1}) - F_0(a_i) \Leftarrow p_i = P(a_i < \xi_i < a_{i+1})$

$p_3 = F(a_4) - F(a_3) \approx 0{,}2$

$p_4 = F(a_5) - F(a_4) \approx 0{,}25$

p_i – теоретична частота потрапляння до цієї підмножини.

n – розмір вибірки

$$\chi(3) = \frac{(n_3 - np_3)^2}{np_3}$$

$$\chi(4) = \frac{(n_4 - np_4)^2}{np_4}$$

n_i – к-сть елементів вибірки, що потрапляють до підмножини $S\{i-1\}$

2.6

$S_3 = [a_3, a_4] = S_3 [2{,}5 ; 3{,}33] = n_3 = 5$

$S_4 = [a_4, a_5] = S_4 [3{,}33 ; 4{,}16]$ $n_4 = 10$

$$(\chi)_3 = \frac{(5 - 50 \cdot 0{,}2)^2}{50 \cdot 0{,}2} \approx 2{,}5$$

$$\chi(4) = \frac{(9 - 50 \cdot 0{,}25)^2}{12{,}5} = 0{,}98$$

$\chi^2 = 6{,}23$ $\alpha = 0{,}066$ 2.7

$Q_\alpha = [\chi^*_\alpha, +\infty)$, де χ^*_α види з

~~$P\{\chi^2_{(5)} \geq \chi^*_\alpha\} =$ знайдемо з таблиці~~

Якщо

Q_α – підмножина зн статистики χ^2, для яких гіпотезу відхиляємо. Кріт. обл. будується правосторонній інтервал.

рівності $P\{\chi^2_{(5)} < \chi^*_\alpha\} = 1 - \alpha = 0{,}934$

$\chi^*_\alpha \approx 10{,}35$

~~χ^*_α потрапляє в Q_α~~

$\chi^2 \geq \chi^*_\alpha$ – від

χ^*_α $\chi^2 < \chi^*_\alpha$ – пр

Отже $Q_\alpha = (10{,}35 ; +\infty)$

$0 < 6{,}23 < 10{,}35$.

Отже, ми не відхиляємо гіпотезу.

2.8 Ймов. помил. I-го роду не пер. 0,153

За змін α змінюється і χ^2_α

$P\{\chi^2 < \chi^*_\alpha\} = 1-\alpha = 1-0,153 = 0,847$

$\chi^*_\alpha = 8,06$ – з таблиці

$\chi^2 < \chi^*_\alpha \to H$ приймається.

Розбір 3.2