Київський національний університет

імені Тараса Шевченка

Факультет комп’ютерних наук та кібернетики

Лабораторна робота №2

з курсу

«Управління динамічними системами»

на тему:

«Аналітичне конструювання регуляторів.

Побудова фазових портретів.»

Виконала:

студентка групи ІПС-22

факультету комп’ютерних наук та кібернетики

Клевчук Марія

Київ-2024

Зміст

Умова задачі згідно з варіантом....3

Представлення розв'язку аналітично (в зошиті) 4

Код програми (Sage) 6

Код програми (Wolfram Mathematica)....8

Умова задачі згідно з варіантом

- Дослідити на стійкість задану систему. Визначити вигляд точки спокою. Намалювати фазовий портрет.
- Розв’язати задачу модального керування. Визначити вигляд отриманої точки спокою. Намалювати фазовий портрет.
- Зобразити фазові портрети особливих точок розімкненої системи та побудованої замкненої системи за допомогою програмних пакетів.

$$\begin{cases} \dot{x} = x + y, \\ \dot{y} = 3y - 2x\,. \end{cases}$$

$$\lambda_1 = -1 + 2i;\ \lambda_2 = -1 - 2i\,.$$

$$b = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Представлення розв’язку аналітично (в зошиті)

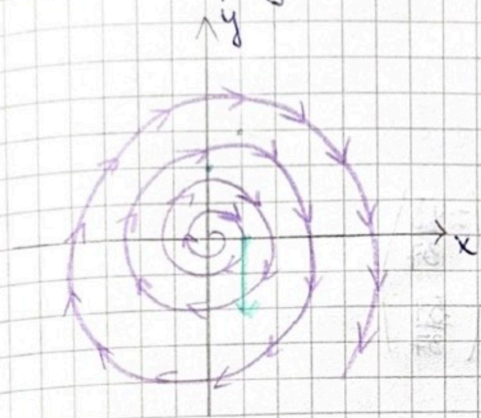
$$\begin{cases} \dot{x} = x + y \\ \dot{y} = 3y - 2x \end{cases} \qquad \lambda_{1,2} = -1 \pm 2i. \qquad b = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \end{pmatrix}$$

1) Досліджую задану систему на стійкість

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \qquad |A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ -2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)(1-\lambda) + 2 = \lambda^2 - 4\lambda + 5 = 0$$

$$D = 16 - 20 = -4 \qquad \lambda_{1,2} = \frac{4 \pm 2i}{2} = 2 \pm i$$ — комплексні, Re та Im частина, Re > 0

Нестійкий фокус.



Вектор швидкості

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = 1 \leftarrow (1,0) \\ \dot{y}(t) = -2 \end{cases}$$

2) Розв'язую задачу модального керування

① Перевірка на керованість

$$Ab = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ -8 \end{pmatrix}$$

$$S_2 = (b, Ab) = \begin{pmatrix} 7 & 9 \\ 2 & -8 \end{pmatrix}$$ — цілком керована система.

$$\begin{vmatrix} 7 & 9 \\ 2 & -8 \end{vmatrix} = -56 - 18 = -74$$

② $$(S_2)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{4}{37} & \frac{9}{74} \\ \frac{1}{37} & -\frac{7}{74} \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 7 & 9 & 1 & 0 \\ 2 & -8 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -4 & 0 & \frac{1}{2} \\ 7 & 9 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -4 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 37 & 1 & -\frac{7}{2} \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -4 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{37} & -\frac{7}{74} \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{4}{37} & \frac{9}{74} \\ 0 & 1 & \frac{1}{37} & -\frac{7}{74} \end{array}\right)$$

$$A^2 b = A\cdot(Ab) = \begin{pmatrix}1 & 1\\ -2 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}9\\ -8\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\ -42\end{pmatrix}$$

③ $$-(S^2)^{-1}\cdot A^2 b = \begin{pmatrix}-\frac{4}{37} & -\frac{9}{74}\\ -\frac{1}{37} & \frac{7}{74}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ -42\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5\\ -4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}p_2\\ p_1\end{pmatrix}$$

④ $$(\lambda+1+2i)(\lambda+1-2i) = \lambda^2+2\lambda+5 = 0 \qquad a = \begin{pmatrix}2\\ 5\end{pmatrix}$$

⑤ $$u = c^T\cdot x = (c_1, c_2)\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix} = (c_1, c_2)\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$$

$$c = \left((S_2)^{-1}\right)^T\begin{pmatrix}1 & 0\\ p_1 & 1\end{pmatrix}^{-1}\left(\begin{pmatrix}p_1\\ p_2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}a_1\\ a_2\end{pmatrix}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc}1 & 0 & 1 & 0\\ -4 & 1 & 0 & 1\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc}1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 4 & 1\end{array}\right)$$

$$c = \begin{pmatrix}\frac{4}{37} & \frac{1}{37}\\ \frac{9}{74} & -\frac{7}{74}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 4 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-6\\ 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\frac{48}{37}\\ \frac{57}{37}\end{pmatrix}$$

$$u = -\frac{48}{37}x + \frac{57}{37}y$$

$\lambda_{1,2} = -1 \pm 2i$ – комплексні, Re та Im частина,

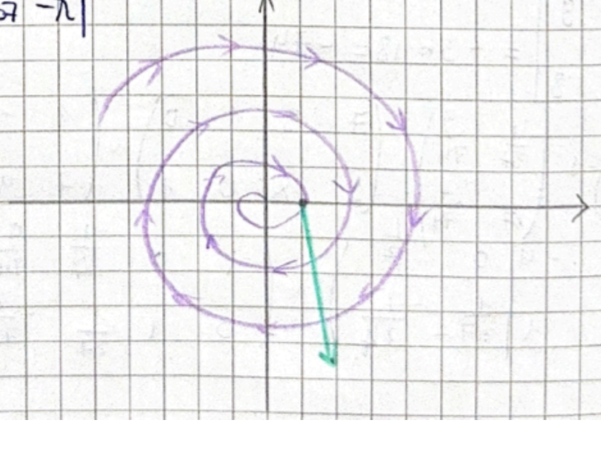
Re < 0 ⇒ стійкий фокус

Перевірка: $$\begin{cases}\dot{x} = x + y - \frac{48\cdot 7}{37}x + \frac{57\cdot 7}{37}y\\ \dot{y} = 3y - 2x - \frac{48\cdot 2}{37}x + \frac{57\cdot 2}{37}\cdot y\end{cases}$$

$$|A-\lambda E| = \begin{vmatrix}1 - \frac{48\cdot 7}{37} - \lambda & 1 + \frac{57\cdot 7}{37}\\ -2 - \frac{48\cdot 2}{37} & 3 + \frac{57\cdot 2}{37} - \lambda\end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda = -1 \pm 2i.$$

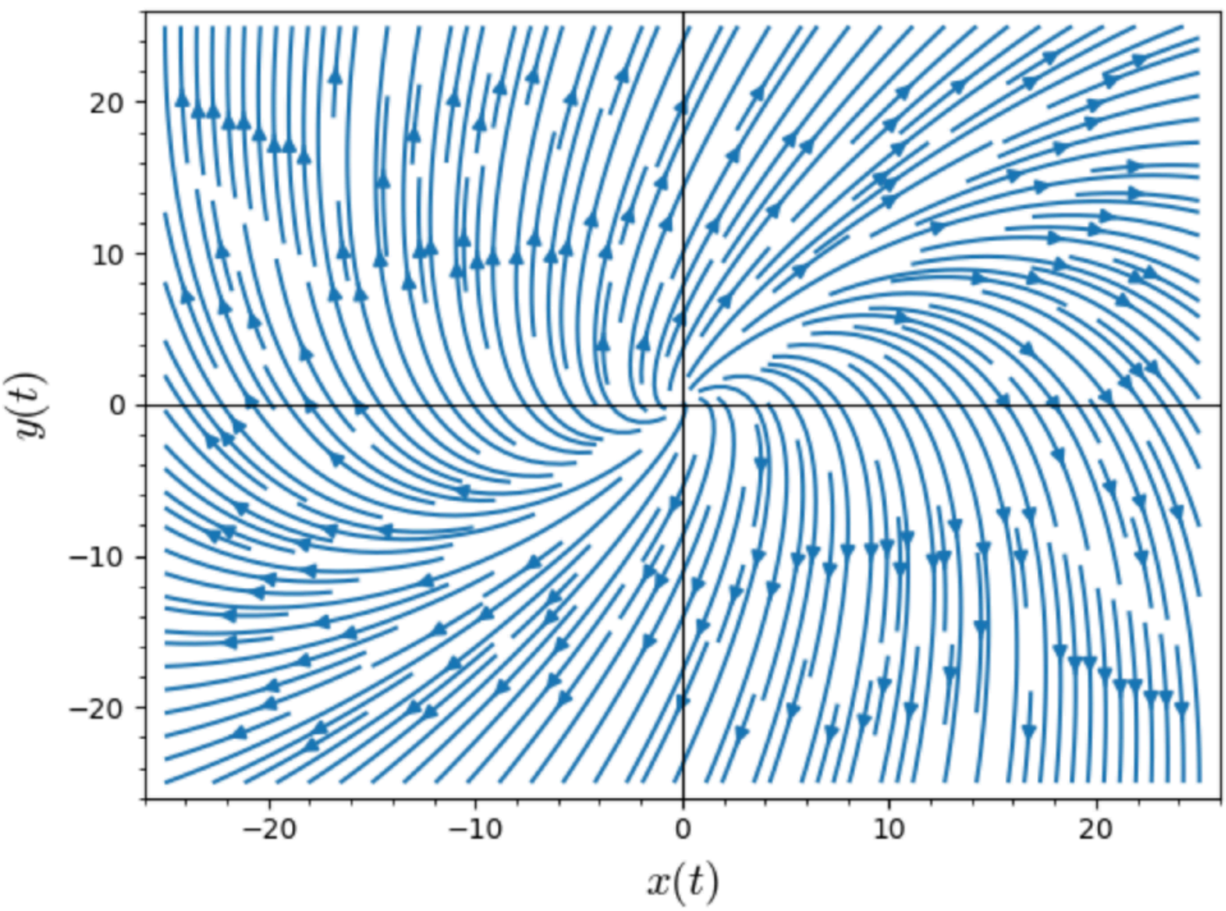
Вектор швидкості

$$(1;0) \to \begin{cases}\dot{x} = \frac{71}{37}x \approx 1{,}9\\ \dot{y} = -\frac{170}{37}x \approx -4{,}6\end{cases}$$

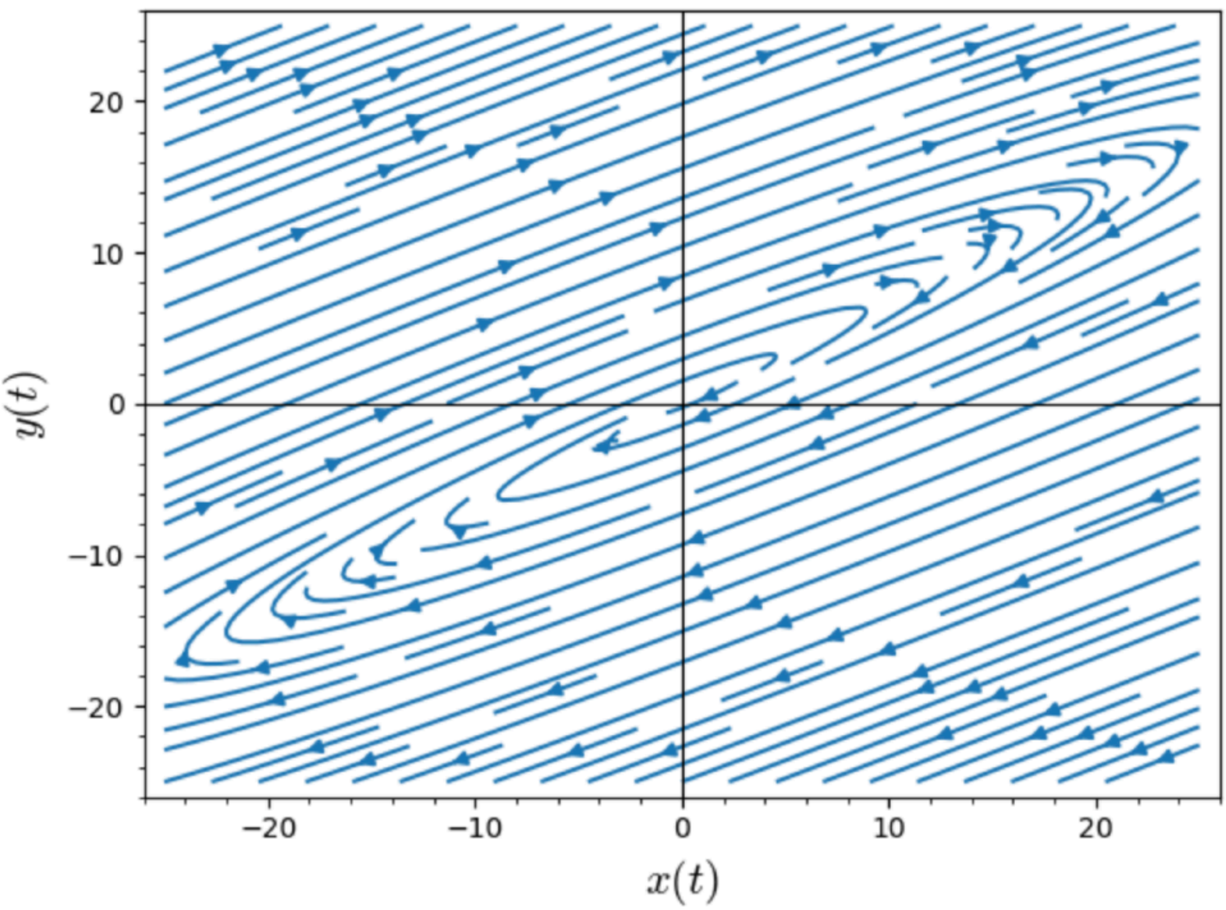


Код програми (Sage)

```
# Розімкнена система
x, y = var('x y')
f(x,y)=x+y
g(x,y)=-2*x+3*y
streamlines = streamline_plot((f,g), (x, -25, 25), (y, -25, 25),
density=2.2,
axes_labels = ["$x(t)$", "$y(t)$"])
final_plot = streamlines
final_plot.show(legend_loc='upper right’)
```



```
# Замкнена система
x, y = var('x y')
f(x, y) =  x*(-299/37) + y*(436/37)
g(x, y) = x*(-170/37) + y*(225/37)
streamlines = streamline_plot((f, g), (x, -25, 25), (y, -25, 25), density=1.5,
axes_labels=["$x(t)$", "$y(t)$"])
final_plot = streamlines
final_plot.show(legend_loc='upper right')
```

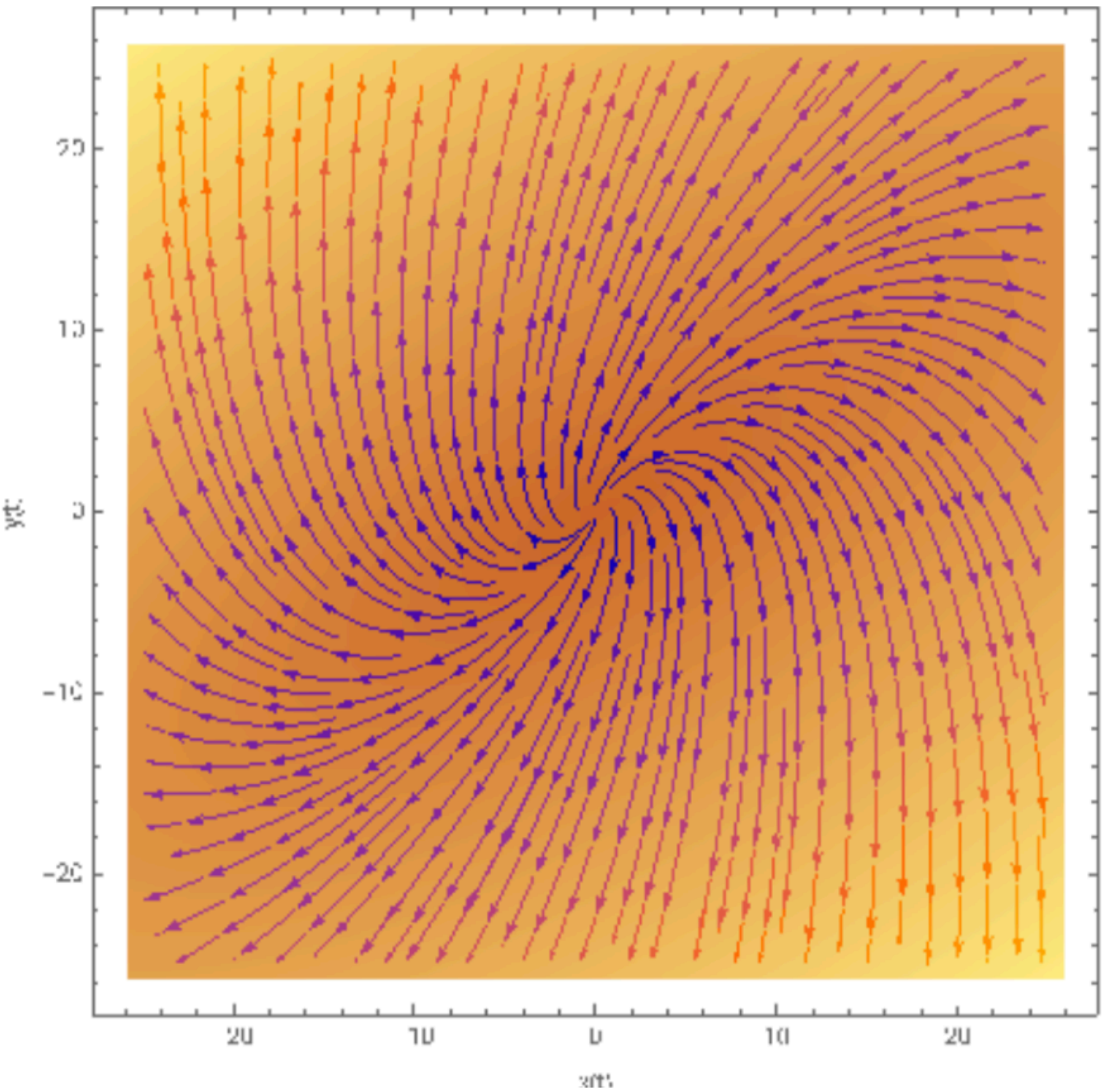


Код програми (Wolfram Mathematica)

```
//Розімкнена система
f[x_, y_] := x + y
g[x_, y_] := -2 x + 3 y

StreamDensityPlot[
 {f[x, y], g[x, y]},
 {x, -25, 25}, {y, -25, 25},
 StreamPoints -> Fine,
 StreamStyle -> Black,
 FrameLabel -> {"x(t)", "y(t)"},
 Frame -> True,
 PlotRange -> All
]
```

Out[3]=



```
(* Визначення змінних і системи рівнянь *)
f[x_, y_] := x*(-299/37) + y*(436/37)
g[x_, y_] := x*(-170/37) + y*(225/37)

StreamDensityPlot[
 {f[x, y], g[x, y]},
 {x, -25, 25}, {y, -25, 25},
 StreamPoints -> Medium,
 StreamStyle -> Black,
 FrameLabel -> {"x(t)", "y(t)"},
 Frame -> True,
 PlotRange -> All
]
```

Out[6]=