Хлевчук Марія ІПС-12 12:55

Варіант 13

1. Нехай V - довільна вершина графу G, а інші 5 вершин розділимо на множини:

V_1 - вершини, суміжні з V,

V_2 - вершини, не суміжні з V.

Нехай $|V_1| \geq 3$. Тоді якщо у V є 2 попарно суміжні вершини, то із V вони утворюють 3 попарно суміжні вершини. Якщо немає жодної пари суміжних вершин, то V_1 містить 3 попарно несуміжні вершини.

Нехай $|V_2| \geq 3$. Тоді якщо у V_2 є 2 несуміжні вершини, то із V вони утворюють 3 попарно несуміжні вершини. Якщо кожні 2 вершини в V_2 суміжні, то V_2 містить 3 попарно суміжні вершини.

У висновку з обох випадків маємо, що в цьому графі є три вершини або попарно суміжні, або несуміжні.

4. Припустимо, що в K_5 є цикл довжини 9. Вилучимо всі ребра та будемо додавати їх по одному в порядку проходження по ребрах цього циклу. Приходячи до вершини, ми маємо вийти з неї, тому кожне проходження вершини додає 2 до її степеня.

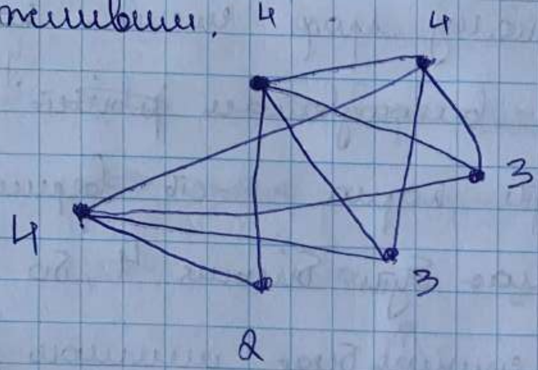
Коли додано всі 9 ребер, то одержано граф, де кожна вершина має парний степінь і число ребер на 1 менше, ніж у K_5 *, але в K_5 кожна вершина має степінь 4, тому якщо з нього вилучено 1 ребро, то дві вершини мають степінь 3. 3 - непарне, тому отримано суперечність. Відповідь: ні.

* $\frac{5(5-1)}{2} = 10$ ребер $(5-1)=4$ - степінь кожної вершини.

7. а) ні, бо $\sum_{v \in V} \deg V = 1+1+2+3+4+4 = 15$ - непарне, що протирічить лемі про рукостискання

б) ні, оскільки вершина степеня 4 повинна бути з'єднана із 4 вершинами із $\{0,0,2,3,3\}$, тобто хоча б з 1 із степенем 0. Що є неможливим.

8 б)



16. Ні. Нехай $G = G_1 \cup G_2$ і $|E| = |E_1| + |E_2|$.
За умовою, G є прямою сумою G_1 і G_2.
Із даної рівності маємо, що із будь-якої вершини G_1 V_1 існує маршрут в довільну $V_2 \in G_2$, а отже граф G є однозв'язним

15. Діаметр $K_{n,m}$ дорівнює 2. Нехай V_1, V_2 – частки, $|V_1| = n$ $|V_2| = m$. Так як вершини V_1 попарно не суміжні, а $v \in V_1$ попарно сум. із кожною з вершин у V_2, що для $v_1 \in V_1$, $v_2 \in V_2$: $d(v_1, v_2) = 1$. Але з v_2 можна прийти і до іншої вершини з V_1, тому $d(v_1, v_2) = 2$ $v_i, v_j \in V_1$ або V_2. Ця відстань є максимальною для вершини $K_{n,m}$ і є діаметром.

10. Для кубічного графа, як і для будь-якого іншого графа, має виконуватись лема $\sum\limits_{v_j \in V} deg(v_j) = 2|E|$

4) Так як в кубічному графі степінь кожної вершини 3, то щоб виконувалась умова ~~рівність~~:

1) в графі має бути парна к-сть вершин

2) к-сть вершин має бути більше 4, бо при меншій к-сті макс. степінь буде меншою за 3

~~2~~ 24. Нехай G – двод. граф виду $K_{p,m}$. Тоді він має не більше, ніж pm ребер. За нерівністю Коші: $pm \le \left(\frac{p+m}{2}\right)^2 = \frac{n^2}{4}$ бо $n = p+m$. Таким чином, якщо у графа ребер більше $\frac{n^2}{4}$, тоді він не є двочастковим.

9. Нехай дерево має n вершин. Тоді він має $n-1$ ребро.

Якщо дерево є самодоповн. графом, то к-сть ребер його доповнення:

$$p = \frac{n(n-1)}{2} - n + 1.$$

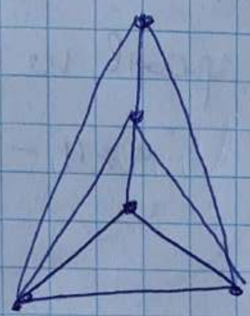
А так як дерево самодоповн., що $p = n-1$. Тоді

$$2n-2 = \frac{n(n-1)}{2}$$

$$4n-4 = n(n-1) \qquad 4(n-1) = n(n-1) \Rightarrow n = 4 -$$

кількість вершин такого дерева.

23. У графі 5 вершин. А так як графи, у яких є ≥ 3 вершина, є макс. плоскими графами $\Leftrightarrow$ граф є тріангуляцією, то такий граф може мати максимум $2 \cdot 5 - 4 = 6$ граней



25. Нехай в графі m ребер, n вершин $n \geq 3$. Так як степінь кожної грані тріангуляції $=3$, то $3|P| = 2m$, де P - множина граней. За т. Ейлера: $2m = 3|P| = 3(m-n+2) = 3m - 3n + 6$.
Звідси $3m = 3n - 6$ $m = n-2$

29. У графі K_n без 1 ребра є підграф K_{n-1} з хром. числом $n-1$ і вершина v, яка немає в K_{n-1}, і яка суміжна із $n-2$ вершинами з K_{n-1}. У K_{n-1} є колір серед $n-1$ кольора, в який пофарбовано вершину, що не суміжна з v, і в цей колір можна правильно пофарбувати v. Відповідь: $n-1$ колір.

⑥ 42. Так як графи ізоморфні тоді, коли ізоморфні їхні доповнення, то ця кількість дорівнює к-сті попарно неізоморфних доповнень до графів. К-сть їх ребер $\frac{n(n-1)}{2} - \left(\frac{n(n-1)}{2} - 2\right) = 2$.

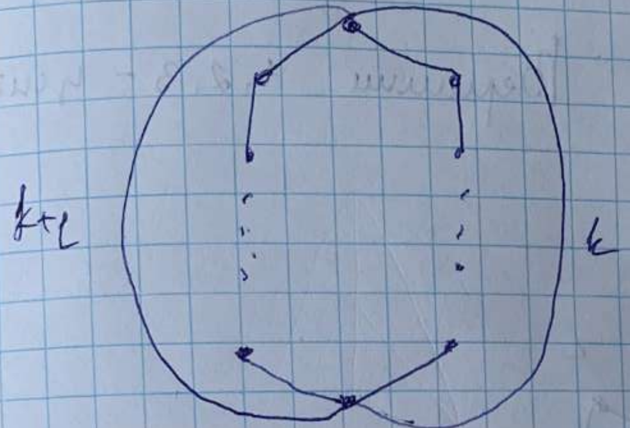
При $n < 3$ таких графів не існує, при $n = 3$ є 1 із графів, при $n \geq 4$ – 2 поп. ізоморфні графи

40. 1) Рефлексивність: граф G є ізоморфним самому собі (наприклад, коли $\varphi(V_1) = V_1$, де $\varphi: V \to V_1$, це відношення між множинами вершин графів)

2) Симетричність. Якщо граф G_1 є ізоморфним до G_2, то G_2 ізоморфний до G_1 (до відношення $\varphi: V_1 \to V_2$ існує обернене йому $\varphi^*: V_2 \to V_1$, бо для ізоморфізму це відношення біективне)

3) Транзитивність. Граф G_1 ізоморфний до G_2, а G_2 – до G_3, то G_1 є ізоморфним до G_3 (для $\varphi: V_1 \to V_2$, $\psi: V_2 \to V_3$ є композиція $(\varphi \circ \psi)$.

6. Таким графом буде C_{2k+1}. Його кіст. дерево — (7)
P_{2k}, діаметр $2k$, проте діаметр C_{2k+1} – k



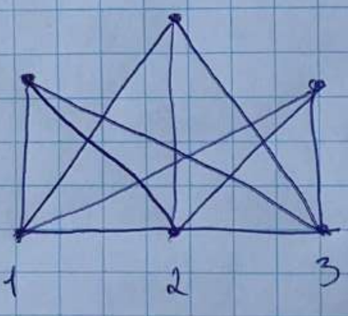
2. У матриці суміжності A графу $G = \{V, X\}$
$a_{ij} = 1$, якщо $(V_i, V_j) \in X$.
Якщо $b_{ij} \in A^2$, то b_{ii} є добутком і рядка та
і стовпця матриці A, тобто
$b_{ii} = a_{i1} \cdot a_{1i} + a_{2i} \cdot a_{i2} + \ldots + a_{in} \cdot a_{ni}$.
Матриця суміжності симетрична, тобто $a_{ij} = a_{ji}$,
тоді $b_{ii} = a_{i1}^2 + a_{i2}^2 + \ldots + a_{in}^2$.
Ця сума містить стільки 1, скільки вершин
у графі, що з'єднані з v_i, а усі інші доданки 0,
тому b_{ii} точно дорівнює степеню вершини v_i, що
і треба було довести.

~~1 3 13 14 11 12 10 17 16 15 18 19~~

~~20 24 23 22 21 25 26 27 28~~

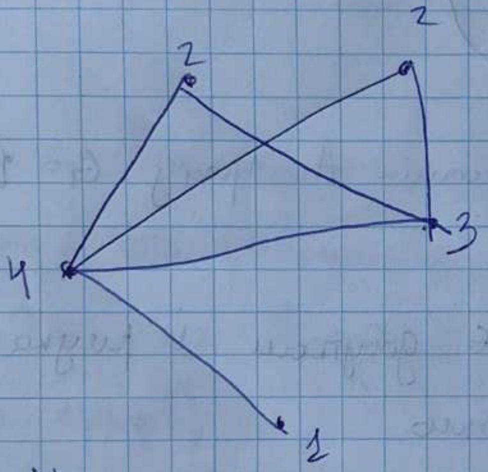
8

13



Вершини 1, 2, 3 – центр.

3.

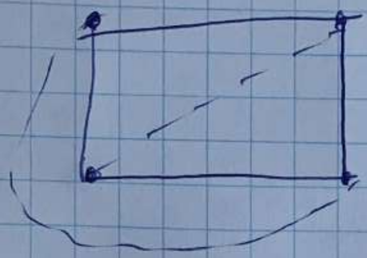


33. Найменша – 0, наприклад K_n. Очевидно, жодна з вершин повного графа не є точкою зчленування, оскільки її вилучення залишає граф K_{n-1}, що також є однозв'язним.

Найбільша – $n-2$, P_n

Усі вершини крім крайніх є точками зчленування.

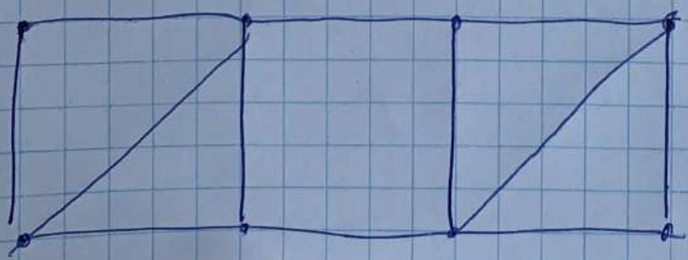
19. Так, 2 ребра до K_4



30 Для $n = 1$:  - виконується.

Нехай для $n = k$ виконується.
Тоді для $n = k+1$ розфарбуємо площину з k кольорами, малюємо $k+1$-ше і інвертуємо кольори всередині нього. Тоді області на межі кола будуть мати різний колір а всередині та зовні також будуть мати різний колір.

39 а)



(10) 29 $K(K_n) = n$ $K_n - V = K_{n-1}$ $K(K_{n-1}) = n-1$