МКР №1

з ДМ

Климчук М.В.

ІПС-12

Варіант №26

1) в), е), і), h), k)

2) $A=\{\varnothing, \{h,j\}\}$, $\beta(A)=\{\varnothing, \{\varnothing\}, \{h,j\}, \{\varnothing, \{h,j\}\}\}$

3) $A=\{1,2,4,6\}$, $B=\{2,6,7\}$

$A\cap B=\{2,6\}$ $A\cup B=\{1,2,4,6,7\}$ $B\setminus A=\{7\}$

$A\setminus B=\{1,4\}$ $A\Delta B=\{1,4,7\}$

4) $\beta(A\cap C)=\beta(A)\cap\beta(C)$

1. Нехай $\forall x\in\beta(A\cap C)\Rightarrow x\in A\cap C\Rightarrow x\in A \;\&\; x\in C\Rightarrow$
$\Rightarrow x\in\beta(A)\;\&\; x\in\beta(C)= x\in\beta(A)\cap\beta(C)$

2. $\forall x\in\beta(A)\cap\beta(C)\Rightarrow \cancel{x\in A \;\&\; x\in C\Rightarrow x\in A\cap C\Rightarrow}$
$\Rightarrow x\in\beta(A)\;\&\; x\in\beta(C)\Rightarrow x\in A\;\&\; x\in C\Rightarrow x\in A\cap C\Rightarrow$
$\Rightarrow x\in\beta(A\cap C)$ □

5) а) $A\cup(A\cap B)=A$

1. $\forall x\in A\cup(A\cap B)\Rightarrow x\in A \vee x\in A \;\&\; x\in B\Rightarrow x\in A$

2) $\forall x\in A\Rightarrow x\in A\cup(A\cap B)$ (якщо $x\in A\Rightarrow x\in A\cup X$, для $\forall X$)
□

б) $(A\cap B)\cup(A\cap B\cap C)\cup(A\cap B\cap D)=A\cap B$

1) $\forall x\in(A\cap B)\cup(A\cap B\cap C)\cup(A\cap B\cap D) \Rightarrow x\in(A\cap B) \vee x\in(A\cap B\cap C) \vee$

$\vee\, x\in(A\cap B\cap D) \Rightarrow x\in((A\cap B)\cap C)\vee x\in((A\cap B)\cap D) \Rightarrow$

$\Rightarrow x\in((A\cap B)\cap D\cap C) \Rightarrow x\in A\cap B$

2) $\forall x\in A\cap B \Rightarrow x\in A\cap B\cup X\cup Y$ для $\forall X,Y \Rightarrow$

$\Rightarrow x\in(A\cap B)\cup(A\cap B\cap C)\cup(A\cap B\cap D)$ □

6 Нехай $\exists X=\{x,y\}$ $\exists Y=\{x,y,z\}$. Тоді $X\cap Y=\{x,y\}$, $X\setminus Y=\varnothing$ $Y\setminus X=\{z\}$. Так як $X\cup Y=\{x,y,z\} \Rightarrow$ $\Rightarrow X\cup Y\neq X\setminus Y$, $X\cup Y\neq Y\setminus X$, $X\cup Y\neq X\cap Y$, що ми не можемо виразити операцію $\cup$ через $\cap$ та $\setminus$.

7 а) R_1, R_4, R_5

б) R_3

в) R_2

г) R_2, R_4

д) R_1, R_3

е) R_5

є) R_4, R_5

8 $(A\setminus B)\times C=(A\times C)\setminus(B\times C)$

1. $\forall(x,y)\in(A\setminus B)\times C \Rightarrow x\in A\setminus B \;\&\; y\in C \Rightarrow x\in A \;\&\; x\notin B \;\&\; y\in C \Rightarrow$

$\Rightarrow (x,y)\in(A\times C)\;\&\;(x,y)\notin(B\times C)\Rightarrow x\in(A\times C)/(B\times C)$

2. $\forall (x,y)\in(A\times C)\setminus(B\times C)\Rightarrow (x,y)\in A\times C \;\&\;(x,y)\notin B\times C\Rightarrow$

$\Rightarrow (x\in A\;\&\;y\in C)\;\&\;(x\notin B\times C \vee y\notin B\times C)\Rightarrow$ а) б)

а) $x\in A \,\&\, y\in C \,\&\, y\notin C \Rightarrow$ false б) $x\in A \,\&\, y\in C \,\&\, x\notin B \Rightarrow \cancel{(x,y)\in A\times C \,\&\, (x,y)\notin (B\times C) \Rightarrow}$

$\Rightarrow x\in(A\setminus B) \,\&\, y\in C \Rightarrow (x,y)\in (A\setminus B)\times C$ □

9. $R_1\subseteq R_2$, $\quad R_1\circ Q \subseteq R_2\circ Q \quad \forall Q$:

Нехай $\forall (x,y)\in R_1\circ Q \Rightarrow (x,z)\in R_1 \,\&\, (z,y)\in Q \xRightarrow{R_1\subseteq R_2}$

$\Rightarrow (x,z)\in R_2 \,\&\, (z,y)\in Q \Rightarrow (x,y)\in R_1\circ Q$ □

10. R_1, R_2 – симетр, $R_1\circ R_2$ – симетр. в. $\Leftrightarrow R_1\circ R_2 = R_2\circ R_1$

1) $\forall (x,y)\in R_1\circ R_2 \Rightarrow (x,z)\in R_1 \,\&\, (z,y)\in R_2 \xRightarrow{\text{сим.}} (z,x)\in R_1 \,\&$

$\& \, (y,z)\in R_2 \Rightarrow (y,z)\in R_2 \,\&\, (z,x)\in R_1 \Rightarrow (y,x)\in R_2\circ R_1 \xRightarrow{\text{сим.}}$

$\Rightarrow (x,y)\in R_2\circ R_1$

2) ~~$\forall (x,y)\in$~~ Нехай $R_1\circ R_2 = R_2\circ R_1$:

$\forall (x,y)\in R_1\circ R_2 \Rightarrow (x,y)\in R_2\circ R_1 \Rightarrow (y,x)\in R_1\circ R_2 \xRightarrow{\text{сим.}}$

$\Rightarrow (x,y)\in R_1\circ R_2$

11. Припустимо, що R^+ – транзитивне замикання відн. R на M. Якщо aR^+b, тоді $\exists a_1, a_2, \dots, a_k: a_1=a,\ a_k=b$ і $a_1Ra_2,\ a_2Ra_3, \dots, a_{k-1}Ra_k \Rightarrow a_1R^{k-1}a_k$. Тоді $(a,b)\in R^1\cup R^2\cup \dots \cup R^k\cup \dots$

Припустимо, $(a,b)\in R^1\cup R^2\cup R^3\cup \dots \cup R^k\cup$, тоді aR^kb і $\exists\ x_1=a,\ x_{k+1}=b \Rightarrow x_iRx_{i+1}. \Rightarrow aRb$ □

14. $A=\{a,b,c,d,e\}$ і $B=\{1,2,3,4,5\}$.

C_1 — не функ. $(a,2),(a,5)\ldots$; не всюди виз. немає $\{e\}$; не сюр'єкт - немає $\{4\}$; не ін'єктивне $(a,2)(c,2)$ не бієктивне

C_2 б), в) — не функ $(a,2)(a,3)$; не ін'єк. $(c,4)(e,4)\ldots \Rightarrow$ не бієктивне

C_3 а) — не всюди в. немає $\{d\}$, не сюр. немає $\{1\}\ldots$ не ін'єкт. $(c,3)(e,3)$ не бієкція

C_4 а), б), в), г), д)

C_5 а), б), в), г), д)

~~(12) Якщо $f \subseteq A\times B$ & $g \subseteq B\times C$ − ін'єкт. в., що $f\circ g \subseteq A\times C$ − ін.~~

~~Нехай $\forall (z_1,y) \in f\circ g$ & $(z_2,y)\in f\circ g \Rightarrow \exists x_1 : (x_1,y)\in f$ &~~

~~& (~~

(13) $f \subseteq A\times B$ − сюр'єкція $\Leftrightarrow i_B \subseteq f^{-1}\circ f$

1) Припустимо, що $f \subseteq A\times B$ − сюр'єкція: $\forall y\in B\ \exists x :$ $(x,y)\in f$. $\forall (x,y)\in f^{-1}\circ f \Rightarrow (x,z)\in f^{-1}$ & $(z,y)\in f \Rightarrow (z,x)\in f$ & & $(z,y)\in f \xRightarrow{\text{сюр.}} x=y \Rightarrow (x,x)\in f^{-1}\circ f$ & $(y,y)\in f^{-1}\circ f \Rightarrow$ $\Rightarrow i_B \subseteq f^{-1}\circ f$.

2) Нехай $i_B \subseteq f^{-1}\circ f \Rightarrow (x,x)\in f^{-1}\circ f \Rightarrow (x,z)\in f^{-1}$ & & $(z,x)\in f \Rightarrow (z,x)\in f$, $\therefore\ \exists! z :$ $f\subseteq A\times B$ − сюр.

⑮ $\forall R$ - відн. екв.

б)⇒а) $[x]_R \cap [y]_R \neq \varnothing$, тоді $\exists z \in [x]$ & $z \in [y] \Rightarrow xRz, yRz \Rightarrow$
$\Rightarrow xRz, zRy \Rightarrow xRy$.

в) $[x]=[y]$, нехай $v \in [x] = xRv$ & $xRy \Rightarrow yRx$ & $xRv \Rightarrow$
$\Rightarrow yRv \Rightarrow v \in [y] \Rightarrow [x]=[y]$

$$(xR_y) = ([x_R] \cap [y_R]) = ([x]=[y])$$ □

⑯ Нехай на множині задано відношення ділиться націло і а ділить в, в ділить с, в ділить d, а ділить с, а ділить d. Тоді „а" – мінімальний елемент, ~~„в"~~ „с" і „d" – максимальні.

$$\begin{tikzcd} & a \arrow[d] & \\ & b \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ c & & d \end{tikzcd}$$

⑰ Нехай на множині задано відношення ділиться націло $A=\{2,4,6\}$. Таким чином, „2" – мінімальний, але не найменший елемент.

⑱ Транзитивність: $\forall (x,y),(y,z) \in R \cap Q \Rightarrow (x,y),(y,z) \in R$ & $(x,y)(y,z) \in Q \Rightarrow (x,z) \in R$ & $(x,z) \in Q \Rightarrow (x,z) \in R \cap Q$.

Рефлективність: $\forall (x,y) \in R \cap Q \Rightarrow (x,y) \in R$ & $(x,y) \in Q \Rightarrow$

$\Rightarrow (x,x) \in R \,\&\, (x,x) \in Q \Rightarrow (x,x) \in R \cap Q$ (і для $(y,y) \in A \cap Q$)

Антисиметричність: $\forall (x,y) \,\&\, (y,x) \in R \cap Q \Rightarrow ((x,y) \,\&\, (y,x) \in R) \,\&$
$\& \, ((x,y) \,\&\, (y,x)) \in Q \Rightarrow x = y \,\square$

Отже, $R \cap Q$ – від. ч. п.

19 Відношення $\leq$: нехай $(a,b) \leq (c,d)$, $a \leq c \,\&\, b \leq d$

20 $\dot{J}$ – ірраціональні; R – дійсні, Q – раціональні

$\dot{J} = R \setminus Q$ – континуум, бо $\mathbb{R}$ – континуум і Q – злічена множина, а з кожного континууму можна виділити зліченну множину

25 а) $\{\emptyset\} \cap \{\emptyset\} = \{\emptyset\}$

б) $\{\emptyset, \{\emptyset\}\} \setminus \emptyset = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$

в) $\emptyset \cap \{\emptyset\} = \emptyset$

г) $\{\emptyset, \{\emptyset\}\} \setminus \{\{\emptyset\}\} = \{\emptyset\}$

д) $\emptyset \cup \{\emptyset\} = \{\emptyset\}$

е) $\{\emptyset, \{\emptyset\}\} \setminus \{\emptyset\} = \{\{\emptyset\}\}$

30 Нехай A і B – зліченні, $A = \{a_1, a_2, a_3 \ldots\}$, $B = \{b_1, b_2, \ldots\}$

Тоді $A \times B = \{(a_1, b_1), (a_2, b_2), (a_3, b_3) \ldots\}$. Множина встановлених пар злічена, очевидно, що $A \times B$ – злічена $\square$

(21) Нехай існує відрізок $[0;1]$ і числа $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_k$ належать цьому відрізку. Тоді деякій іншій нал. дійсні числа, назвемо їх $b_0, b_1, b_2, \ldots b_k$. Встановимо відповідність між парами $(a_0, b_0), (a_1, b_1), (a_2, b_2) \ldots (a_k, b_k)$. Отже, отримана відповідність бієктивна

(22) Нехай $a_1, a_2, \ldots, a_k$ і $b_1, b_2, \ldots, b_k \in \mathbb{R}$ і числа $a_1, a_2, \ldots a_k$ нал. $[0,1]$, а $b_1, b_2, \ldots, b_k$ нал. $(0,1)$. Встановимо відповідність: $(0, a_1), (b_1, a_2), (b_2, a_3) \ldots$ (b_k, a_{k+1}) $(1, b_k)$

(27) $N = \{1, 2, 3 \ldots\}$, $Z = \{0, 1, -1, 2, -2 \ldots\}$. Вст. відп. між такими парами чисел: $(1,0), (2;1), (3;-1); (4;2); (5;-2)$ і тд.
Це відповідність взаємнооднозначна.