Побудувати графік $f(x) = \frac{x^4}{(1+x)^3}$ Жмевчук М.

1. $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.
2. Не періодична; ні парна, ні непарна.

$$f(-x) = \frac{x^4}{(1-x)^3} \neq f(x) \neq -f(x)$$

3. Перетин з Ox при $y=0$

Перетин з Oy при $x=0$.

4. Шукаю асимптоти

$$\lim_{x \to -1} \frac{x^4}{(1+x)^3} = \lim_{x \to -1} \frac{1}{0} = \infty \Rightarrow$$

• вертикальна асимптота $x = -1$

Перевіряю наявність похилої асимптоти

$$k = \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{x^4}{(1+x)^3}}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{x^3}{(1+x)^3} = \lim_{x \to \infty} \frac{x^3}{1+3x^2+3x+x^3} = 1.$$

$k \neq 0$, тобто є похила асимптота

$$b = \lim_{x \to \infty} \left(\frac{x^4}{(1+x)^3} - x \right) = \lim_{x \to \infty} \left(\frac{x^4 - x(1+x)^3}{(1+x)^3} \right) =$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{\cancel{x^4} - x - 3x^3 - 3x^2 - \cancel{x^4}}{1+3x^2+3x+x^3} = \lim_{x \to \infty} \frac{-3x^3 + \bar{o}(x^3)}{x^3 + \bar{o}(x^3)} = -3$$

Отже, існує похила асимптота $y = x - 3$

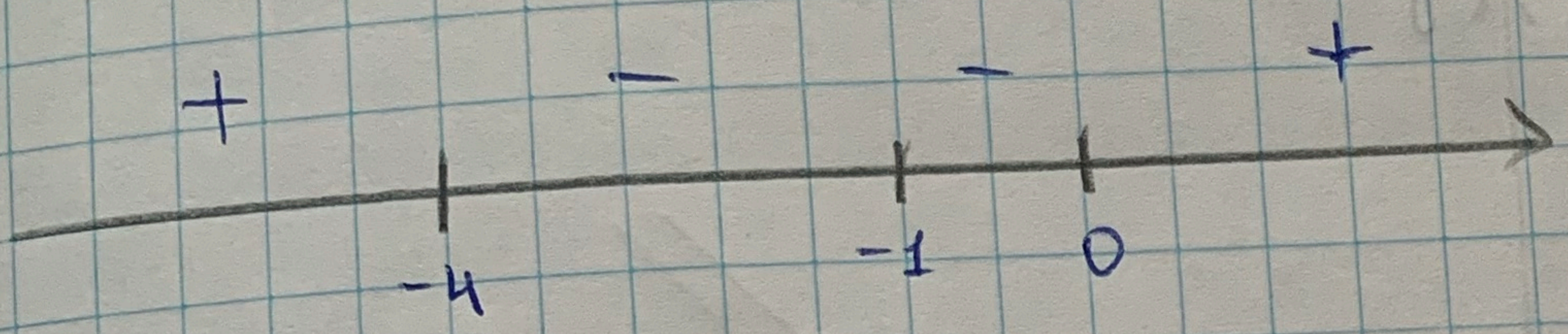
5. Проміжки монотонності, екстремуми

$$\frac{4x^3\cancel{(1+x)^3} - 3x^4\cancel{(1+x)^2}}{(1+x)^{\cancel{6}\,4}} = \frac{4x^3+4x^4-3x^4}{(1+x)^4} =$$

$$= \frac{x^4+4x^3}{(1+x)^4}$$

критична точка $x=-1$

стаціонарні точки $x=0$, $x=-4$



$x=-4$ – лок. макс

$x=0$ – лок. мін

функція $f(x)$ зростає на $(-\infty;-4)\cup(0;+\infty)$

спадає на $(-4;-1)\cup(-1,0)$

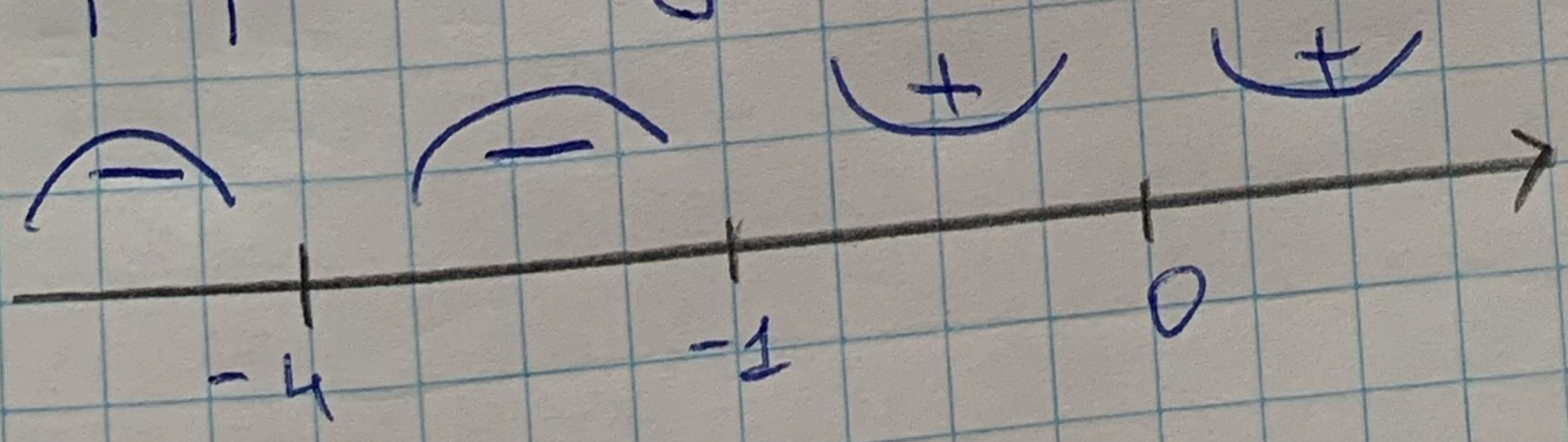
6. Опуклість, точки перегину

$$\frac{(4x^3+12x^2)(1+x)^{\cancel{4}} - 4(x^4+4x^3)\cancel{(1+x)^3}}{(1+x)^{\cancel{8}\,5}} =$$

$$= \frac{\cancel{4x^3}+12x^2\cancel{+4x^4}+\cancel{12x^3}\cancel{-4x^4}-\cancel{16x^3}}{(1+x)^5} =$$

$$= \frac{12x^2}{(1+x)^5}$$

Перевіряю опуклість в $x\in\{-4,-1,0\}$

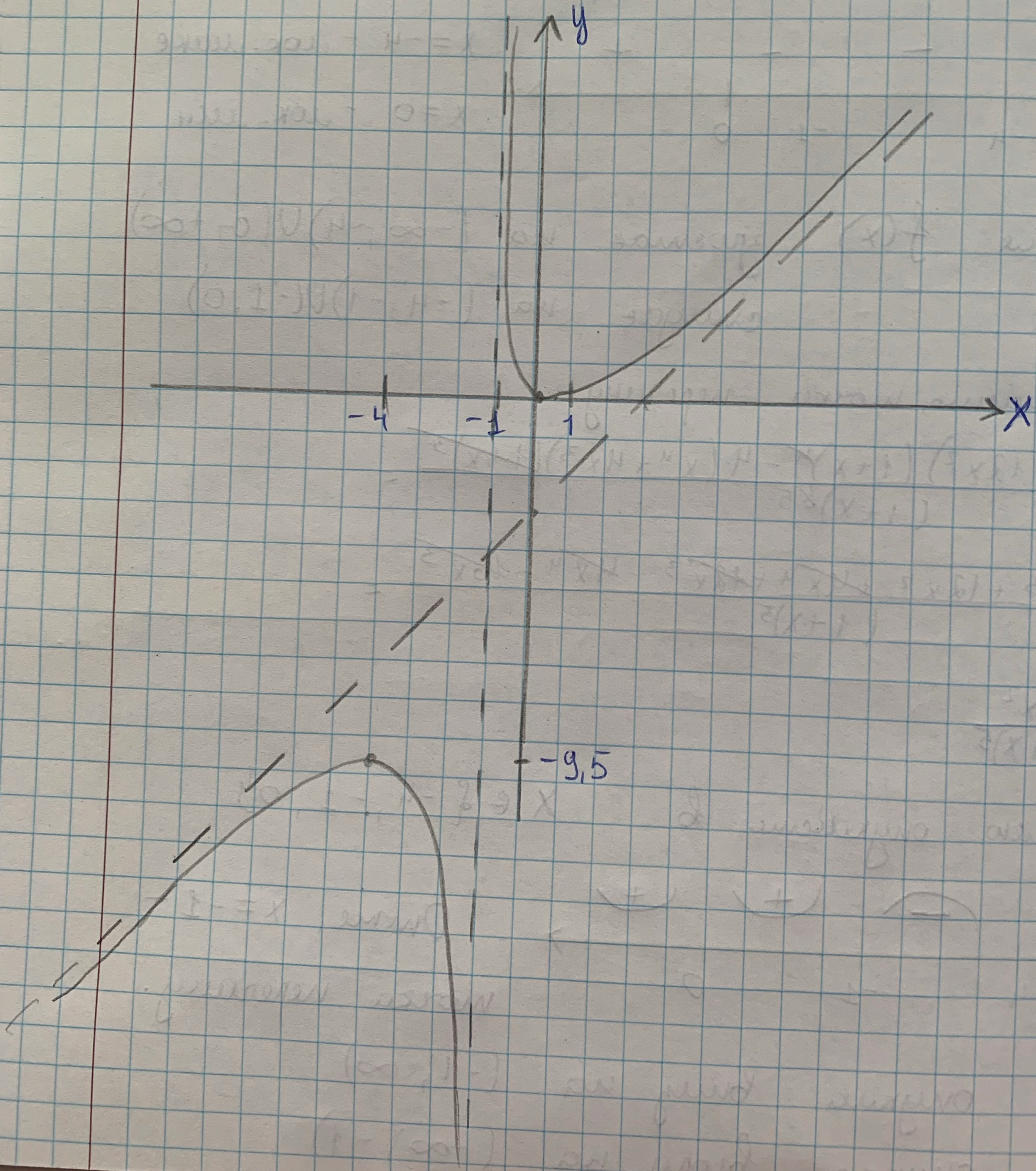


Отже, $x=-1$ – точка перегину.

$f(x)$ опукла вниз на $(-1;+\infty)$

опукла вгору на $(-\infty;-1)$

x	$(-\infty;-4)$	-4	$(-4;-1)$	-1	$(-1;0)$	0	$(0;+\infty)$
y		$\approx -9{,}5$		$\varnothing$		0	
y'	↗		↘		↘		↗
y''	⌒		⌒		◡		◡



1. Знайти похідну $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ на області її визначення за означенням похідної $f(x) = \ln x$

$D_f = (0; +\infty)$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\ln x - \ln x_0}{x - x_0} \overset{\text{def}}{=} \varphi(x), \text{ де } \varphi \text{ - похідна від } f(x)$$

$$\overset{\text{def}}{=} \left| \begin{matrix} t = x - x_0 \\ x = t + x_0 \end{matrix} \right| = \lim_{t \to 0} \frac{\ln(t + x_0) - \ln x_0}{t} =$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{\ln\left(\frac{t + x_0}{x_0}\right)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{\ln\left(1 + \frac{t}{x_0}\right)}{\frac{t}{x_0} \cdot x_0} = \frac{1}{x_0} = \varphi(x)$$

• Використана чудова границя $\lim_{\alpha \to 0} \frac{(1 + \alpha)}{\alpha} = 1.$