Алгоритмы и структуры данных-1

SET 2. Задача A2.

Осень 2024. Клычков М. Д.

$$T(n) = 7T\left(\frac{n}{3}\right) + n^2 \tag{1}$$

$$T(n) = 4T\left(\frac{n}{2}\right) + \log_2 n \tag{2}$$

$$T(n) = 0.5T\left(\frac{n}{2}\right) + \frac{1}{n} \tag{3}$$

$$T(n) = 3T\left(\frac{n}{3}\right) + \frac{n}{2} \tag{4}$$

$$T(n) = T(n-1) + T(n-2) + n\log_2 n \tag{5}$$

Пункт 1. Будем использовать те же обозначения, что и в формулировке мастер-теоремы (в общем виде):

$$T(n) = a \cdot T\left(\frac{n}{b}\right) + O(n^k f(n))$$

$$T(n) = a \cdot T(n-b) + O(n^k \cdot f(n))$$

1. Рассмотрим (1): $a = 7 \geq 1$, $b = 3 > 1$, $k = 2 \geq 0$, $f(n) = 1$ – неубывающая функция. Мастер-теорема применима, $\log_3(7) < 2$

   $$T(n) = O(n^k \cdot f(n)) = O(n^2)$$

2. Рассмотрим (2): $a = 4 \geq 1$, $b = 2 > 1$, $k = 0 \geq 0$, $f(n) = 1$ – неубывающая функция. Мастер-теорема применима, $\log_2(4) > 0$

   $$T(n) = O(n^{\log_b a} \cdot f(n)) = O(n^2)$$

3. Рассмотрим (3): $a = 0.5$, $b = 2$, $k = -1$, $f(n) = 1$. Нельзя применить мастер-теорему, так как неверно, что $a \geq 1$ и $k > 0$

4. Рассмотрим (4): $a = 3 \geq 1$, $b = 3 > 1$, $k = 1 \geq 0$, $f(n) = 1$ – неубывающая функция. Мастер-теорема применима, $\log_3(3) = 1$

   $$T(n) = O(n^k \cdot f(n) \cdot \log_2 n) = O(n \log_2 n)$$

5. Рассмотрим (5): Нельзя применить мастер-теорему, так как вид функции $T(n)$ не подходит под «стандарт»/«шаблон» мастер-теоремы.

Пункт 2. Найдем **возможную** асимптотическую верхнюю границу для тех рекуррентных соотношений, для которых неприменима мастер-теорема.

1. Снова рассмотрим (3). Докажем, что $T(n) = O(n)$ — наша гипотеза.

   Тогда $T\left(\frac{n}{2}\right) = \frac{cn}{2}$. Подставим

   $$\begin{aligned} T(n) &\leq 0.5\frac{cn}{2} + \frac{1}{n} \\ &= \frac{cn}{4} + \frac{1}{n} \leq cn \end{aligned}$$

   $$cn^2 + 4 \leq 4cn^2 \Rightarrow c \geq \frac{4}{3n^2}$$

   Можно взять $n_0 = 1$ и $c = 2$ ■

2. Снова рассмотрим (5). Докажем, что $T(n) = O(2^n \cdot n \log_2 n)$. Нам известно, что функция $T(n)$ монотонно неубывающая, и мы хотим ограничить ее сверху. Тогда:

$$T(n) = T\left(n-1\right) + T\left(n-2\right) + n \log_2 n \leq 2T\left(n-1\right) + n \log_2 n = T'(n)$$

К функции $T'(n)$ уже можно применить мастер-теорему.

$a = 2 > 0,\ b = 1 > 0,\ k = 1 > 0,\ f(n) = \log_2 n$ – неубывающая функция

$$T'(n) = O(2^n \cdot n \log_2 n)$$

Но $T(n) \leq T'(n) = O(2^n \cdot n \log_2 n) \Longrightarrow T(n) = O(2^n \cdot n \log_2 n)$ ■