

Алгоритмы и структуры данных-1

SET 1. Задача А3.

Осень 2024. Клычков М. Д.

```
1 void NestedLoops(size_t n) {
2     int x = 100;
3     int y = 0;
4     for (size_t outer = 1; outer <= n; outer *= 2) {
5         x = x + outer;
6         for (size_t inner = 2; inner < n; ++inner) {
7             if (x > y / inner) {
8                 y = y + outer / inner;
9             } else {
10                --y;
11            }
12        }
13    }
14 }
```

Пункт 1. Начнем исследование циклического алгоритма с внешнего цикла.

Легко определить количество итераций цикла, оно зависит только от n . Итак, всего будет произведено $(\lfloor \log_2(n) \rfloor + 1)$ итераций и $(\lfloor \log_2(n) \rfloor + 2)$ сравнений внутри **for**.

В теле внешнего цикла одно присваивание с арифметической операцией (итого 2 операции) и еще один (вложенный) цикл.

Теперь разберем внутренний цикл: всего будет произведено $(n - 2)$ итерации и $(n - 1)$ сравнение. В теле цикла лишь один условный оператор, который перед самым сравнением делает операцию деления.

Заметим, что количество операций в каждой ветви *отличается*:

- в ветви выполнения условия всего происходит 3 атомарные операции (присваивание и 2 арифметические операции)
- в ветви невыполнения условия всего происходит 2 операции (присваивание и уменьшение на единицу)

Достаточно трудно определить, количество вхождений в каждую ветвь, так как при недостаточно больших n , которые возможно перебрать на бумаге условие конструкции **if** выполняется всегда. Предпримем попытку усреднить значения на примере конкретных n .

Для этого посчитаем для каждого n количество вхождений в каждую из ветвей.

n	true	false
1	0	0
2	0	0
4	6	0
8	24	0
16	70	0
32	180	0
64	434	0
128	1008	0
256	2286	0
512	5100	0

Table continued from previous page

1024	11241	1
2048	24550	2
4096	53219	3
8192	114655	5
16384	245723	7
32768	524247	9
65536	1114066	12
131072	2359245	15
262144	4980680	18
524288	10485699	21
1048576	22020029	25
2097152	46137271	29
4194304	96468913	33
8388608	201326506	38
16777216	419430307	43
33554432	872415132	48
67108864	1811939220	54
134217728	3758096268	60
268435456	7784628100	66

Сравним число **true** (выполнения условия конструкции **if**) с **false** (невыполнения), заметим, что отношение этих чисел имеет порядок хотя бы 10^{-5} , так что это отличие пренебрежительно мало. Более того, несрабатывание условия **if** происходит уже на больших числах, так что отличие в одной операции между двумя ветвями компенсируется сложностью арифметических операций, которая растет с ростом порядка числа. Учитывая все вышеперечисленные факты, будем считать, что в теле внутреннего цикла выполняются следующие операции:

$$\underbrace{2}_{\text{if header}} + \underbrace{3}_{\text{if body}} = 5$$

$$\text{Подведем итог: } T(n) = \underbrace{(\lfloor \log_2(n) \rfloor + 2)}_{\text{loop compares}} + (\lfloor \log_2(n) \rfloor + 1) \cdot \left(2 + \underbrace{(n-1)}_{\text{loop compares}} + (n-2) \cdot 5 \right)$$

$$T(n) = 1 + (\lfloor \log_2(n) \rfloor + 1)(6n - 9) \quad (1)$$

Пункт 2. Хотим доказать, что $T(n) = \Theta(n \log n)$.

Согласно определению, нужно найти такие c_1 , c_2 и N_0 , что:

$$\forall n > N_0: c_1 n \log_2 n \stackrel{(2)}{\leq} 1 + (\lfloor \log_2(n) \rfloor + 1)(6n - 9) \stackrel{(3)}{\leq} c_2 n \log_2 n$$

(2):

$$\begin{aligned} T(n) &= 1 + (\lfloor \log_2(n) \rfloor + 1)(6n - 9) = \\ &= 6n \lfloor \log_2(n) \rfloor - 9 \lfloor \log_2(n) \rfloor + 6n - 8 \geq \\ &\geq 6n(\log_2(n) - 1) - 9(\log_2(n) - 1) + 6n - 8 = \\ &= 6n \log_2(n) - 9 \log_2(n) + 1 \geq c_1 n \log_2 n \end{aligned}$$

$$6 - \frac{9}{n} + \frac{1}{n \log_2 n} \geq c_1 \Rightarrow c_1 = 6 \wedge N_0 = 32$$

(3):

$$\begin{aligned}T(n) &= 1 + (\lfloor \log_2(n) \rfloor + 1)(6n - 9) = \\&= 6n \lfloor \log_2(n) \rfloor - 9 \lfloor \log_2(n) \rfloor + 6n - 8 \leq \\&\leq 6n \log_2(n) + 6n \leq c_2 n \log_2(n)\end{aligned}$$

$$c_2 \geq 6 + \frac{6}{\log_2(n)} \Rightarrow c_2 = 8 \wedge N_0 = 32$$

Итого:

$$\forall n > 32: 6n \log_2(n) \leq T(n) \leq 8n \log_2(n)$$