Алгоритмы и структуры данных-1

SET 2. Задача А3.

Осень 2024. Клычков М. Д.

Пункт 1. Для начала стоит вспомнить, что нам известно об асимптотике алгоритма Штрассена. На лекции было доказано, что $T_{Ш} = O(n^{\log_2 7})$. От нас требуется найти алгоритм, выражающийся рекуррентным соотношением

$$T(n) = a \cdot T\left(\frac{n}{4}\right) + \Theta(n^2) \tag{1}$$

Заметим, что для данного рекуррентного соотношения возможно применение мастер-теоремы.

$$\text{при } \log_4 a = 2 \Leftrightarrow a = 16\colon T(n) = O(n^2 \log_4 n) \tag{2}$$

$$\text{при } \log_4 a > 2 \Leftrightarrow a > 16\colon T(n) = O(n^{\log_4 a}) \tag{3}$$

$$\text{при } \log_4 a < 2 \Leftrightarrow a < 16\colon T(n) = O(n^2) \tag{4}$$

На лекции отмечалось, что умножение квадратных матриц может быть реализовано только за $O(n^{2+\varepsilon})$, $\varepsilon > 0$. Воспользуемся этой информацией и уберем из рассмотрения (4), так как в этом случае $T(n) = O(n^2)$.

Покажем, что нам подходит случай (2). Достаточно, чтобы $T(n) = O(T_{Ш}(n))$ или, подставив конкретную $T(n)$, $O(n^2 \log_4 n) = O(n^{\log_2 7})$

$$n^2 \log_4 n \leq cn^{\log_2 7}$$
$$\log_4 n \leq cn^{\log_2 7 - 2}$$
$$\log_4 n \leq cn^{\log_2 1.75} \Leftrightarrow \log n = O(n^{\log_2 1.75})$$

А последнее мы принимаем за истину (знания о порядке роста функций).

Рассмотрим оставшийся случай (3). Тут все действия будут схожи с предыдущим пунктом, только остается решить уравнение с параметром. Нам нужно найти такие a, что $T(n) = O(T_{Ш}(n))$ или, подставив конкретную $T(n)$, $O(n^{\log_4 a}) = O(n^{\log_2 7}) \Leftrightarrow \log_4 a \leq \log_2 7$

$$\frac{1}{2}\log_2 a \leq \log_2 7$$
$$\log_2 a \leq \log_2 49$$
$$a \leq 49$$