ÜBUNG: Laplace-Rücktransformation

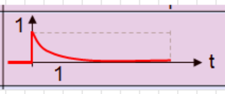
Transformieren Sie die folgenden Laplace-Transformierten in den Zeitbereich.
Handelt es sich um abklingende oder eskalierende Funktionen?

Zweck der Übung:

- Zusammenhang zwischen Zeitfunktion $f(t)$ und der Laplace-Transformierten $F(s)$ erkennen.
- Einfache Stabilitätsaussagen anhand der Pole von $F(s)$ gewinnen können.
- Prototyp. Funktionen der Regelungstechnik und ihre Laplace-Transformierte kennenlernen.
- Nicht Rücktransformation können (für uns unwichtig).

a) $\dfrac{1}{s+a}$ mit a = 2, 1, 0, -0.25, -0.5 s. nächste Seite

In der Transformationstabelle findet man:

$u(t) \cdot e^{-at}$		$\dfrac{1}{s+a}$	(F4)

$$\Longrightarrow \underbrace{\frac{1}{s+a}}_{\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)} \;\bullet\!\!-\!\!\circ\; \underbrace{\mu(t)}_{\text{Einheitssprung}} \cdot e^{-at}$$

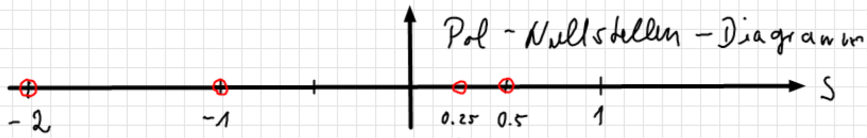
Einheitssprung — setzt alle Werte von $f(t)$ für $t<0$ zu 0!

$f(t)$

s ist die freie Variable im Laplacebereich.
Im Gegensatz zu t hat s keine physikal. Bedeutung.

$F(s) = \frac{1}{s+a}$ hat einen Pol bei $s = -a$,

d.h. $F(s \to -a) \to \infty$.



$\frac{1}{s+2}$ $\quad$ $\frac{1}{s+1}$ $\quad$ $\frac{1}{s-0.25}$ $\quad$ $\frac{1}{s-0.5}$

$u(t)\cdot e^{-2t}$ $\quad$ $u(t)\cdot e^{-t}$ $\quad$ $u(t)\cdot e^{\frac{1}{4}t}$ $\quad$ $u(t)\cdot e^{\frac{1}{2}t}$

$f(t \to \infty) = 0$ $\quad$ $f(t \to \infty) \to \infty$

⇒ abklingend $\quad$ ⇒ eskalierend

b) $\frac{1}{(s+1)(s+2)}$ Problem: so nicht in der Tabelle!

aber: einfache Pole können auf diese Form gebracht werden!

$$\underbrace{\frac{A_1}{(s+1)} + \frac{A_2}{(s+2)}}_{\text{beide Pole bei } s<0} \quad \bullet\!\!-\!\!\circ \quad \underbrace{A_1 \cdot u(t) \cdot e^{-1t} + A_2 \cdot u(t) \cdot e^{-2t}}_{\text{2 abklingende Funktionen}}$$

$\Rightarrow$ abklingendes $f(t)$

wg.

Linearkombin.	$k_1 \cdot f_1(t) + k_2 \cdot f_2(t)$	$k_1 \cdot F_1(s) + k_2 \cdot F_2(s)$	(O1)

c) $\frac{1}{s^2-10s+21}$ Problem: So nicht in der Tabelle

Lösungsansatz: Nullstellen des Nennerpolynoms suchen

$$\underbrace{s^2 - 10s}_{p} + \underbrace{21}_{q} = 0$$

Mit $s_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$ erhält man:

$$s_{1,2} = 5 \pm \sqrt{5^2 - 21} = 5 \pm \sqrt{4} = 5 \pm 2$$

$$\Rightarrow s_1 = 7 \quad , \quad s_2 = 3$$

$$\Rightarrow s^2 - 10s + 21 = (s-7)(s-3)$$

Damit kann man schreiben:

$$\frac{1}{s^2 - 10s + 21} = \frac{1}{(s-7)(s-3)}$$

$$= \underbrace{\frac{A_1}{(s-7)} + \frac{A_2}{(s-3)}}_{\text{Pole bei } s=3 \text{ und } s=7 \Rightarrow \text{eskalierend}} \quad \bullet\!\!-\!\!\circ \quad \underbrace{A_1 \cdot u(t) \cdot e^{7t} + A_2 \cdot u(t) \cdot e^{3t}}_{\text{beide Teilfunktionen eskalieren}}$$

d) $\frac{1}{s^2 - 2s + 5}$ Problem: so nicht in der Tabelle

Nullstellen des Nennerpolynoms suchen:

$$s^2 \underbrace{-2s}_{p} + \underbrace{5}_{q} = 0$$

$$s_{1,2} = +1 \pm \sqrt{1^2 - 5} = +1 \pm \sqrt{-4}$$

$$= +1 \pm \sqrt{4 \cdot (-1)} = +1 \pm \sqrt{4} \cdot \sqrt{-1}$$

$$= +1 \pm 2 \cdot \sqrt{-1}$$

Mit der Abkürzung $\sqrt{-1} = j$ (imaginäre Einheit)

$\underline{s_1 = 1 + 2j}$ $\underline{s_2 = 1 - 2j}$ $\Rightarrow$ komplexe Zahlen

(s. nächste Seite)

Fortsetzung: s. übernächste Seite

Kurze Erläuterung zu komplexen Zahlen

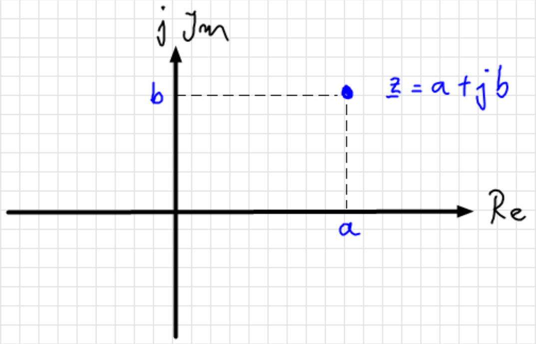
Ausdrücke der Form $a + jb$ heißen komplexe Zahlen.

a : Realteil $\qquad$ b : Imaginärteil

Mit komplexen Zahlen kann man rechnen:

Beispiel: $j^2 = -1$, $j^3 = j^2 \cdot j = -j$, ...

Komplexe Zahlen können nicht auf einem Zahlenstrahl dargestellt werden (wie z.B. die reellen Zahlen), aber in der Komplexen Ebene



$$\Rightarrow \quad s - 2s + 5 = [s - s_1][s - s_2]$$

$$= [s - (1 + 2j)][s - (1 - 2j)]$$

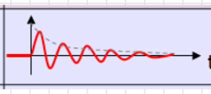
$$= [(s-1) - 2j][(s-1) + 2j]$$

$$= (s-1)^2 - 4j^2 = (s-1)^2 + 4$$

Damit gilt also:

$$\frac{1}{s^2 - 2s + 5} = \frac{1}{(s-1)^2 + 4}$$

Für die Rücktransformation muss die Funktion noch etwas umgeformt werden:

$u(t)\cdot e^{-at}\cdot\sin(\omega t)$		$\frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$	(F5)

$$\frac{1}{(s-1)^2 + 4} = \frac{1}{(s-1)^2 + 2^2}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{(s-1)^2 + 2^2} \qquad \omega = 2, \quad a = -1$$

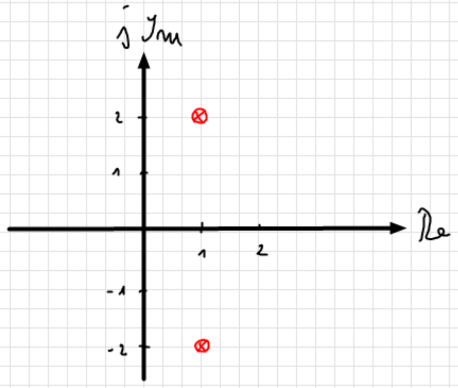
$$\bullet\!\!-\!\!\circ$$

$$f(t) = u(t) \cdot e^{1\cdot t} \cdot \sin(2t)$$

eskalierende Funktion!

Pol - Nullstellen - Diagramm von $\mathcal{L}\{f(t)\}$:

$\underline{s_1 = 1 + 2j}$ $\underline{s_2 = 1 - 2j}$



Auch hier gilt: Liegen die Pole von $\mathcal{L}\{f(t)\}$ im Bereich $Re(s) > 0$, ist die Funktion $f(t)$ eskalierend!

ÜBUNG: Laplacetransformation für DGLn ohne Anfangswerte

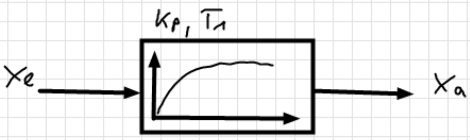
Geben Sie für folgende Differentialgleichungen die Laplace-Transformierte an:
Anm.: Die Anfangswerte werden im folgenden zu 0 angenommen.

Zweck der Übung:

- Typ. DGL'n in den Laplacebereich transformieren können.

  $\Rightarrow$ Wichtig, da Stabilitätsaussagen und Reglerentwurf im Laplacebereich vorgenommen werden!

a) $T_1 \cdot \dot{x}_a + x_a = K_p \cdot x_e$ $\Rightarrow$ PT_1 - Element



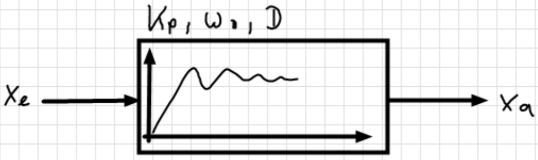
Diff. ohne Anfangswerte	$\frac{d^n f(t)}{dt^n}$	$s^n \cdot F(s)$	(O3)

$$T_1 \cdot \dot{x}_a + x_a = K_p \cdot x_e$$

$$T_1 \cdot s \cdot X_a(s) + X_a(s) = K_p \cdot X_e(s)$$

$$\underline{\underline{(s \cdot T_1 + 1) \cdot X_a(s) = K_p \cdot X_e(s)}}$$

b) $\frac{1}{\omega_0^2}\cdot\ddot{x}_a+\frac{2D}{\omega_0}\dot{x}_a+x_a=K_p\cdot x_e$



$\circ\!\!-\!\!\bullet$

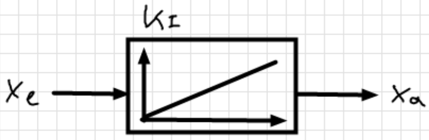
$$\frac{1}{\omega_0^2}\cdot s^2\cdot X_a(s)+\frac{2D}{\omega_0}\cdot s\cdot X_a(s)+X_a(s)=K_p\cdot X_e(s)$$

$$s^2\cdot X_a(s)+2D\omega_0\cdot X_a(s)\cdot s+\omega_0^2\,X_a(s)=K_p\cdot\omega_0^2\,X_e(s)$$

$$\underline{\underline{\left(s^2+2D\omega_0\cdot s+\omega_0^2\right)X_a(s)=K_p\cdot\omega_0^2\cdot X_e(s)}}$$

c) $\dot{x}_a=K_I\cdot x_e$

$\Rightarrow$ I - Element



$\circ\!\!-\!\!\bullet$

$$s\cdot X_a(s)=K_I\cdot X_e(s)$$

ÜBUNG: Übertragungsfunktion für einige Standard-Übertragungsblöcke

Zeigen Sie, dass die u.a. Übertragungsblöcke (bzw. DGLn) die angegebene Übertragungsfunktion haben.

a)

PT1	$T_1 \cdot \dot{x}_a + x_a = K_p \cdot x_e$	$K_p \frac{1}{(T_1 s + 1)}$

In der vorangehenden Übung hatten wir hergeleitet:

$$X_a(s)\left(T_1 s + 1\right) = K_p \cdot X_e(s)$$

$$\Rightarrow \quad G(s) = \frac{X_a(s)}{X_e(s)} = \frac{K_p}{s T_1 + 1} = \underline{\underline{\frac{\frac{K_p}{T_1}}{\left(s + \frac{1}{T_1}\right)}}}$$

b)

PT2	$\ddot{x}_a + 2D\omega_0 \cdot \dot{x}_a + \omega_0^2 x_a = K_p \omega_0^2 \cdot x_e$	$K_p \frac{\omega_0^2}{s^2 + 2D\omega_0 s + \omega_0^2}$

In der vorangehenden Übung hatten wir hergeleitet:

$$X_a(s) \cdot \left(s^2 + 2D\omega_0 \cdot s + \omega_0^2\right) = K_p \cdot \omega_0^2 \cdot X_e(s)$$

$$\Rightarrow \quad G(s) = \frac{X_a(s)}{X_e(s)} = \underline{\underline{K_p \cdot \frac{\omega_0^2}{s^2 + 2D\omega_0 s + \omega_0^2}}}$$

d)

I	$x_a = K_I \cdot \int x_e dt$ oder $\dot{x}_a = K_I \cdot x_e$	$K_I \frac{1}{s}$

In der vorangehenden Übung hatten wir hergeleitet:

$$s\, X_a(s) = K_I \cdot X_e(s) \Rightarrow \underline{\underline{G(s) = K_I \cdot \frac{1}{s}}}$$