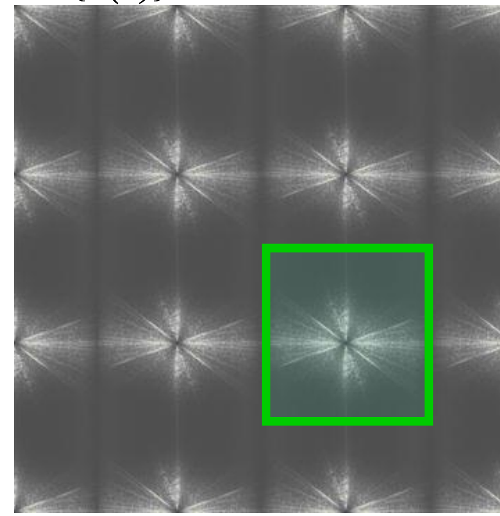
3.8 Filterung im Ortsfrequenzbereichbereich

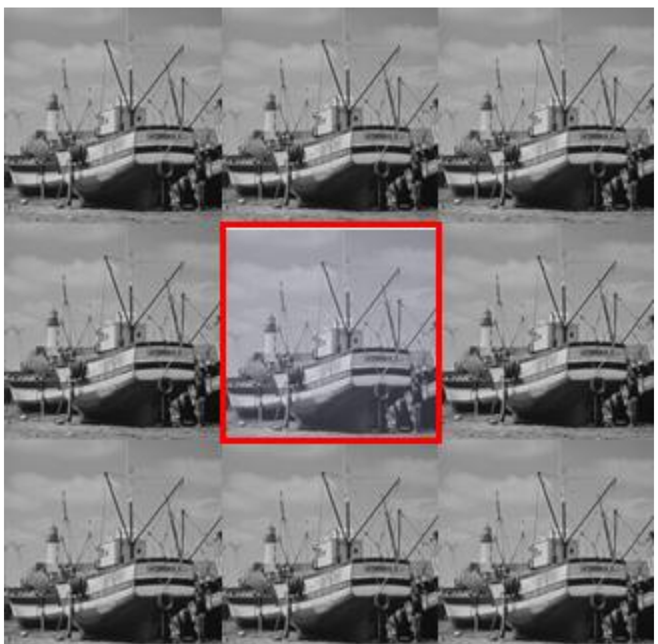
3.8.1 Einführung

Ein Bild wird aufgefasst als eine Periode
einer abgetasteten Funktion $s(x,y)$.

1. Durch eine diskrete 2D- Fouriertransformation werden die Frequenzanteile (und Richtung) bestimmt, aus denen sich das Bild zusammensetzt.

$Re\{S(u)\}$

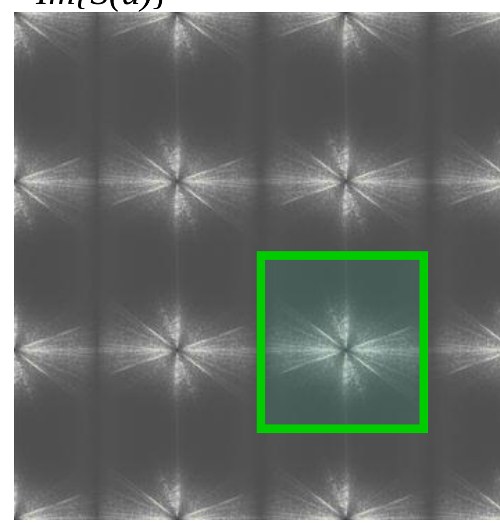




○—●

\+ zentrieren

$Im\{S(u)\}$



2. Die Filterung des Bildes besteht darin, die ursprüngliche Frequenzzusammensetzung des Bildes zu verändern. Dies entspricht einer Multiplikation mit der Filterfunktion $H(u,v)$.
3. Das gefilterte Bild erhält man durch Rücktransformation (IDFT).

Dabei gilt der Zusammenhang:

$$g(x,y) = s(x,y) * h(x,y) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \underline{G}(u,v) = \underline{S}(u,v) \cdot \underline{H}(u,v)$$

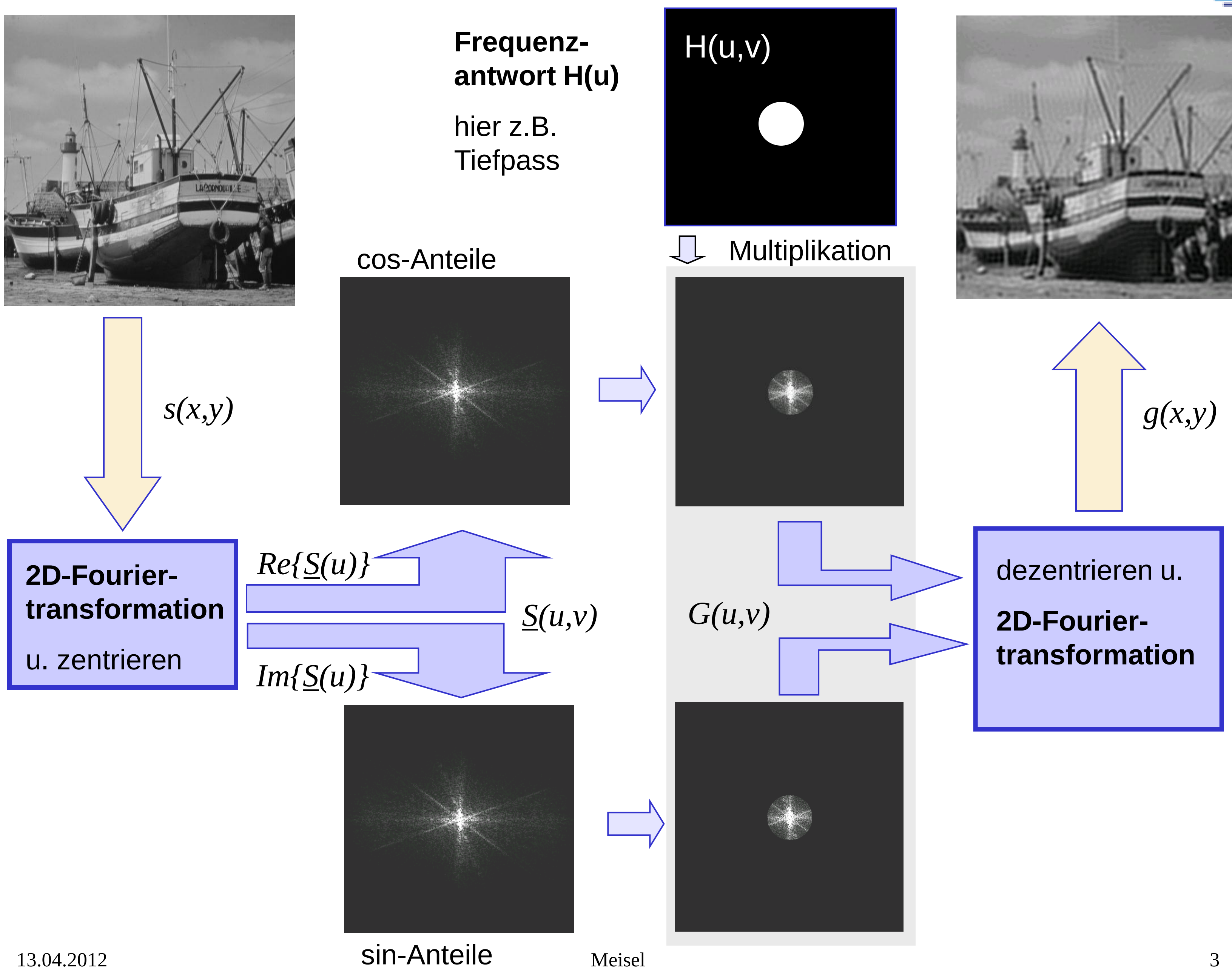
Faltung im Ortsbereich

Multiplikation im Frequenzbereich

Die Faltung eines Signals $s(x,y)$ mit dem Faltungskern $h(x,y)$

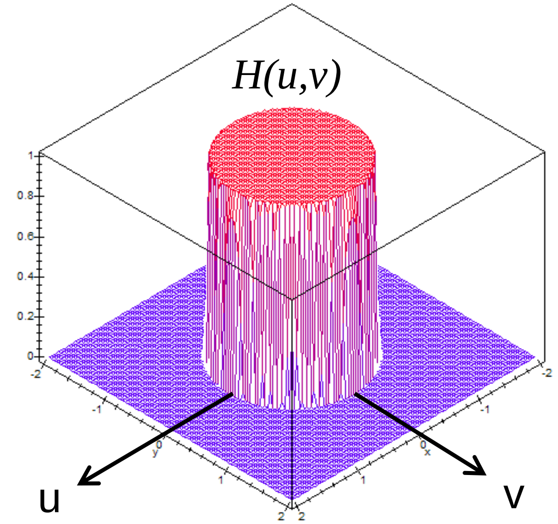
kann ersetzt werden durch

die Multiplikation des transformierten Signals $S(u,v)$ mit der Frequenzantwort $H(u,v)$ des Faltungskerns (und umgekehrt).


Frequenz-
antwort H(u)
hier z.B.
Tiefpass
H(u,v)
Multiplikation
cos-Anteile
s(x,y)
g(x,y)
2D-Fourier-
transformation
u. zentrieren
Re{S(u)}
S(u,v)
Im{S(u)}
G(u,v)
dezentrieren u.
2D-Fourier-
transformation
sin-Anteile

3.8.2 Tiefpaßfilter

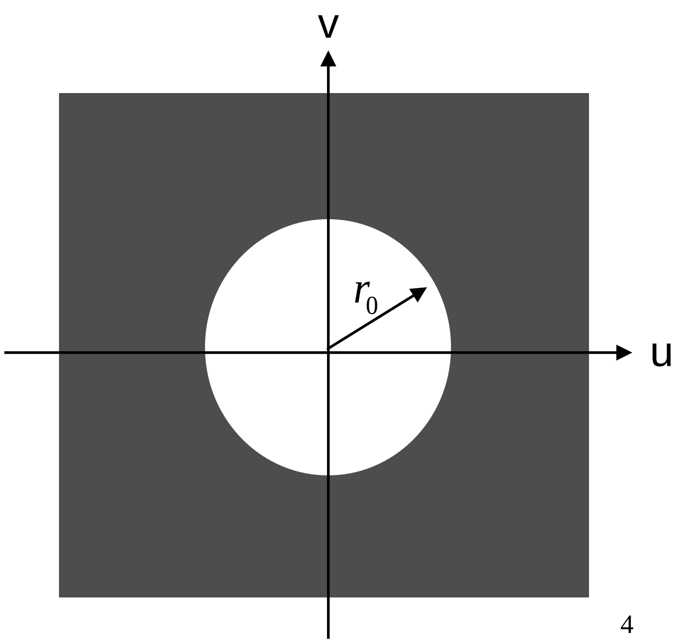
3.8.2.1 Idealer Tiefpass



Frequenzantwort des *idealen Tiefpasses*:

$$H(u,v) = \begin{cases} 1 & wenn \;\; r \le r_0 \\ 0 & wenn \;\; r > r_0 \end{cases}$$

$$r = \sqrt{u^2 + v^2} \quad : \text{ euklid.Ursprungsdistanz}$$



Wirkung:

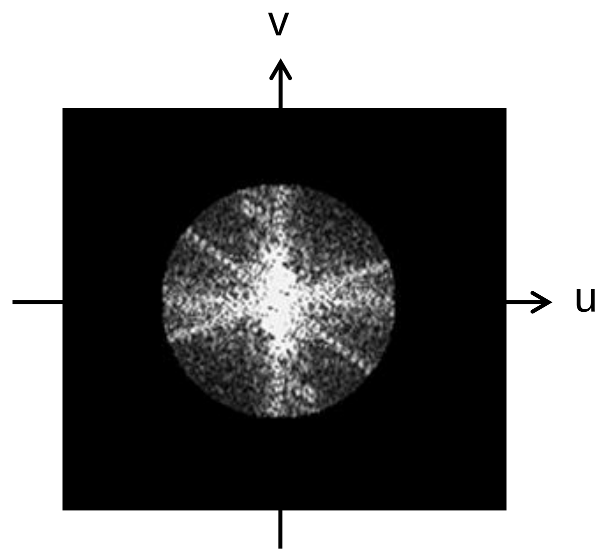
Alle Frequenzen innerhalb des Kreises (niedrige Frequenzanteile) werden unverändert in das Zielbild übernommen.

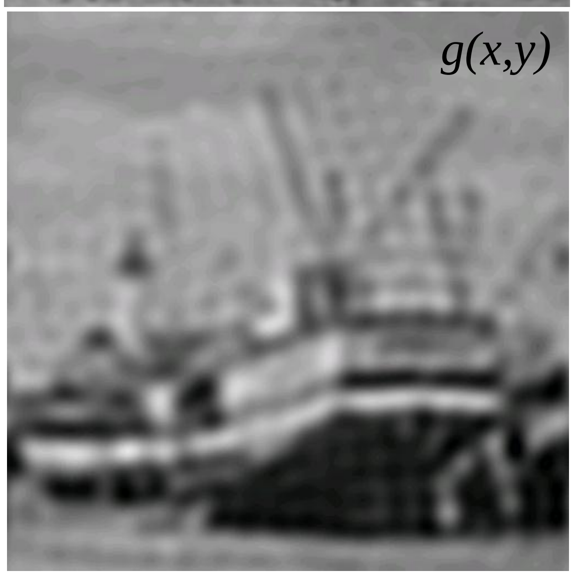
Frequenzanteile ausserhalb des Kreises (hohe Frequenzen) werden vollständig unterdrückt.

Je kleiner r_0, desto unschärfer das Ergebnisbild.

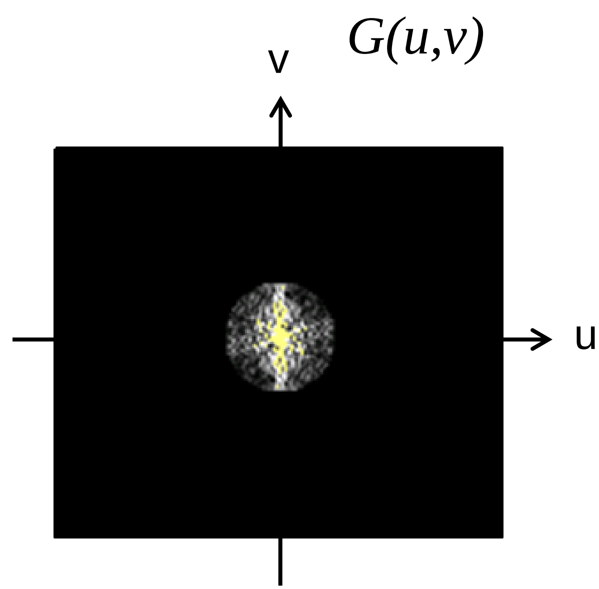
Beispiele: idealer Tiefpass

Filtergröße r_0=50

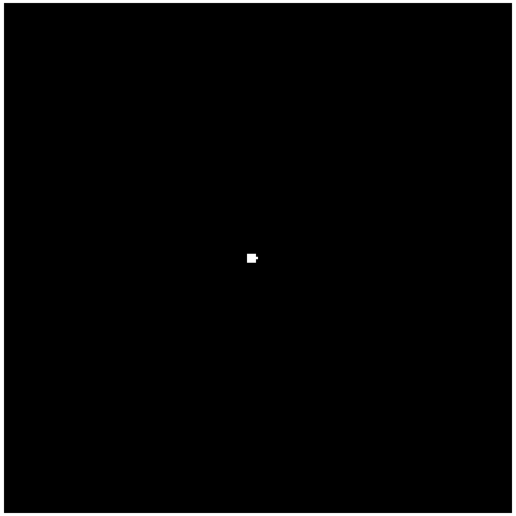




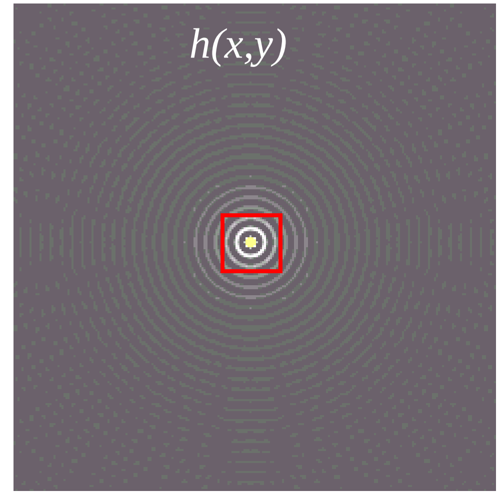
Filtergröße r_0=20



Anwendung des idealen Tiefpass auf den Einheitsimpuls (Impulsantwort)



idealer Tiefpass



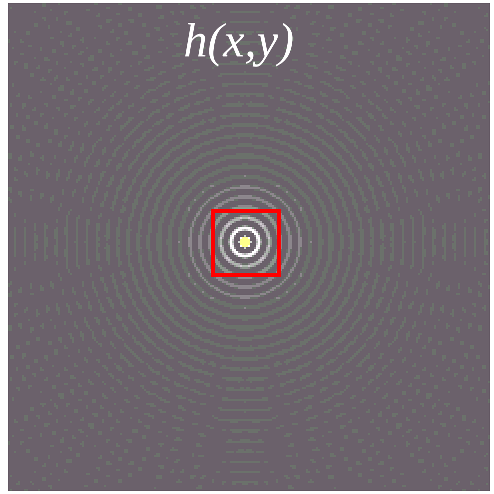
h(x,y)

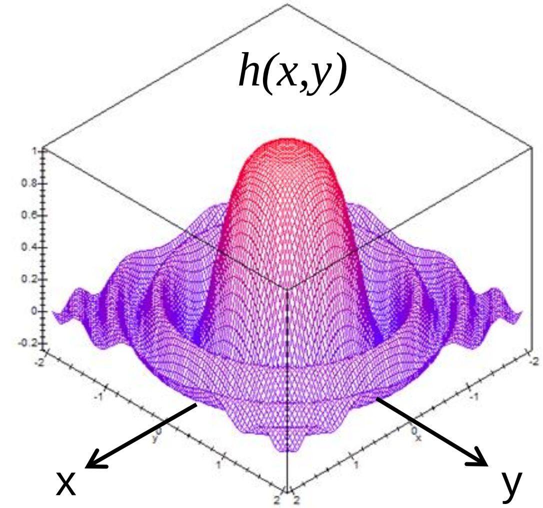
										1	1	1	1	0	0							
										1	1	1	2	2	1							
										0	0	0	0	0	1							
								-1	-2	-2	-2	-2	-2	-1	-1							
								-2	-1	-1	-1	-1	-1	-2	-2							
								0	1	1	1	1	1	0	0							
								3	3	3	3	3	3	3	2							
								2	1	0	0	0	1	2	2							
								-2	-3	-3	-4	-3	-3	-2	0							
								-4	-4	-4	-4	-4	-4	-4	-4							
								-1	0	1	2	1	0	-1	-3	-4	-3	0	2	3	2	0
1	3	2	0	-4	-4	-2	1	5	6	7	7	7	6	5	1	-2	-4	-4	0	2	3	1
2	2	0	-3	-4	-1	3	6	7	5	3	3	3	5	7	6	3	-1	-4	-3	0	2	2
3	1	-2	-4	-2	3	7	6	1	-4	-8	-9	-8	-4	1	6	7	3	-2	-4	-2	1	3
2	0	-4	-3	1	6	6	0	-9	-14	-15	-15	-15	-14	-9	0	6	6	1	-3	-4	0	2
2	-2	-4	-1	5	7	1	-9	-15	-11	-1	4	-1	-11	-15	-9	1	7	5	-1	-4	-2	2
1	-3	-4	0	6	5	-4	-14	-11	10	37	49	37	10	-11	-14	-4	5	6	0	-4	-3	1
0	-3	-4	1	7	3	-8	-15	-1	37	79	98	79	37	-1	-15	-8	3	7	1	-4	-3	0
0	-4	-4	2	7	3	-9	-15	4	49	98	119	98	49	4	-15	-9	3	7	2	-4	-4	0
0	-3	-4	1	7	3	-8	-15	-1	37	79	98	79	37	-1	-15	-8	3	7	1	-4	-3	0
1	-3	-4	0	6	5	-4	-14	-11	10	37	49	37	10	-11	-14	-4	5	6	0	-4	-3	1
2	-2	-4	-1	5	7	1	-9	-15	-11	-1	4	-1	-11	-15	-9	1	7	5	-1	-4	-2	2
2	0	-4	-3	1	6	6	0	-9	-14	-15	-15	-15	-14	-9	0	6	6	1	-3	-4	0	2
3	1	-2	-4	-2	3	7	6	1	-4	-8	-9	-8	-4	1	6	7	3	-2	-4	-2	1	3
2	2	0	-3	-4	-1	3	6	7	5	3	3	3	5	7	6	3	-1	-4	-3	0	2	2
1	3	2	0	-4	-4	-2	1	5	6	7	7	7	6	5	1	-2	-4	-4	0	2	3	1
0	2	3	2	0	-3	-4	-3	-1	0	1	2	1	0	-1	-3	-4	-3	0	2	3	2	0
-2	0	2	3	2	0	-2	-4	-4	-4	-4	-4	-4	-4	-4	-4	-2	0	2	3	2	0	-2
-2	-2	0	2	3	2	1	0	-2	-3	-3	-4	-3	-3	-2	0	1	2	3	2	0	-2	-2
-1	-2	-2	0	1	2	3	2	2	1	0	0	0	1	2	2	3	2	1	0	-2	-2	-1
0	-1	-2	-2	-1	0	1	2	3	3	3	3	3	3	3	2	1	0	-1	-2	-2	-1	0
1	1	0	-1	-2	-2	-1	0	0	1	1	1	1	1	0	0	-1	-2	-2	-1	0	1	1
1	1	1	0	0	-1	-2	-2	-2	-1	-1	-1	-1	-1	-2	-2	-2	-1	0	0	1	1	1
0	1	1	1	1	0	0	-1	-1	-2	-2	-2	-2	-2	-1	-1	0	0	1	1	1	1	0
														0	1	1	1	1	1	0	0	-1
														2	1	1	1	0	0	-1	-1	-1
														0	0	0	0	-1	-1	-1	0	0

Anm.: auf ganzzahlige Werte gerundet

äquivalente Faltungsoperation

Die <u>Impulsantwort</u> eines Filters ist der Faltungskern des äquivalenten Faltungsoperators.





s(x,y)

Näherung von *h(x,y)*

$\ast$  $\approx$

g(x,y)

nach Grauwertnormierung

Nachteil des idealen Tiefpasses ist die "Welligkeit" des gefilterten Bildes.

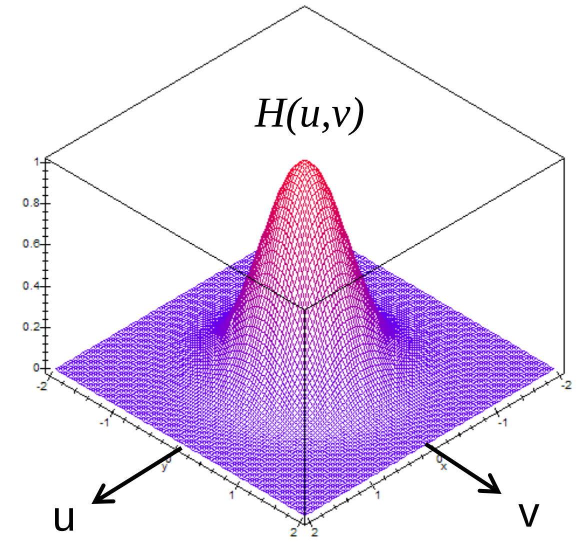
3.8.2.2 Gauss-Tiefpass

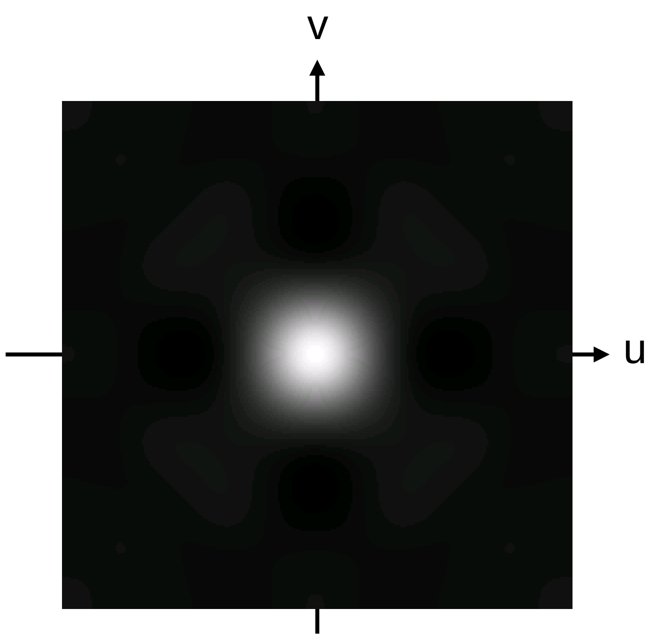
Frequenzantwort des Gauss-Tiefpasses:

$$H(u,v) = e^{-2\pi^2\sigma^2\cdot w^2}$$

$$w = \sqrt{\left(\frac{u}{M}\right)^2 + \left(\frac{v}{N}\right)^2}$$

$M, N:$ Bildbreite, Bildhöhe

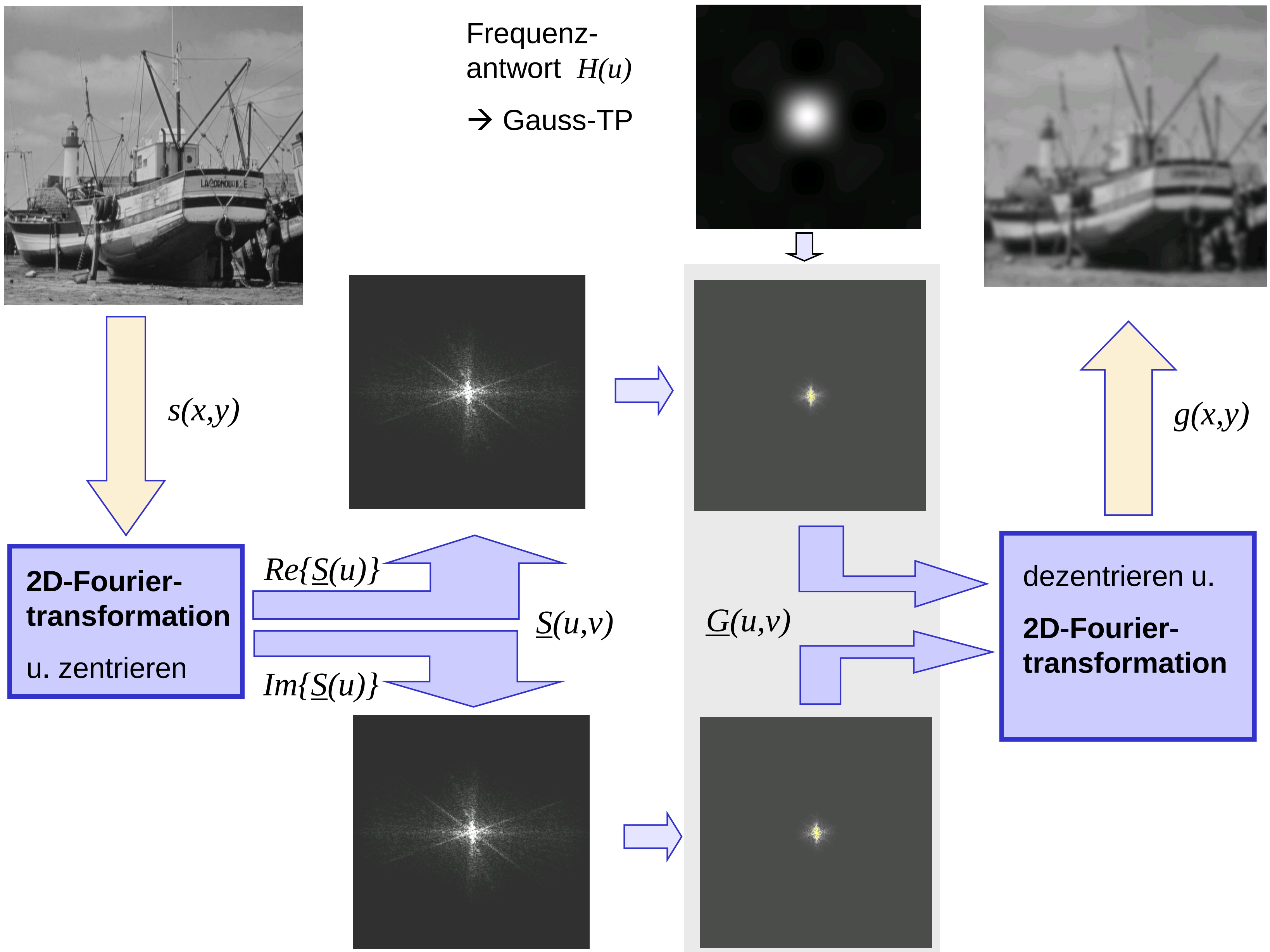




Wirkung:

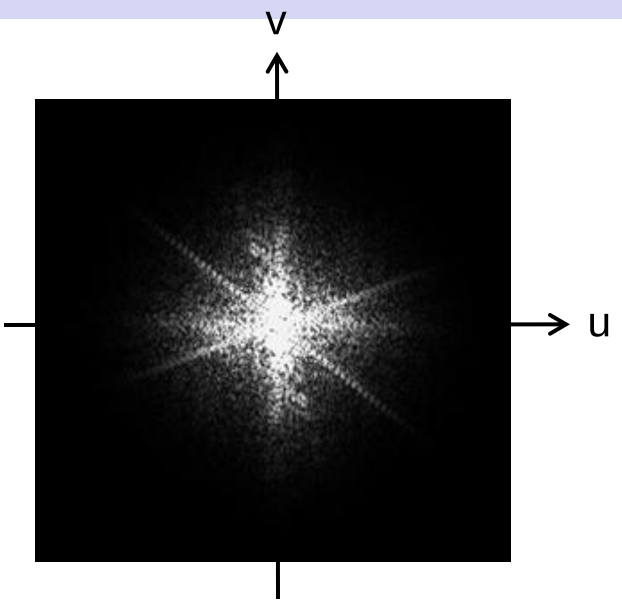
Mit zunehmender Frequenz nimmt die Dämpfung (gaussförmig) zu.

Mit σ wird der gewünschte Unschärfegrad eingestellt.


Frequenz-
antwort H(u)
→ Gauss-TP
s(x,y)
g(x,y)
2D-Fourier-
transformation
u. zentrieren
Re{S(u)}
S(u,v)
Im{S(u)}
G(u,v)
dezentrieren u.
2D-Fourier-
transformation

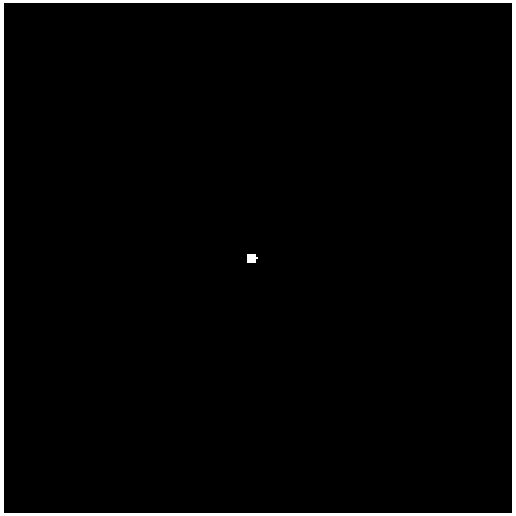
Beispiel: Filtergröße σ=2

gefiltertes Bild

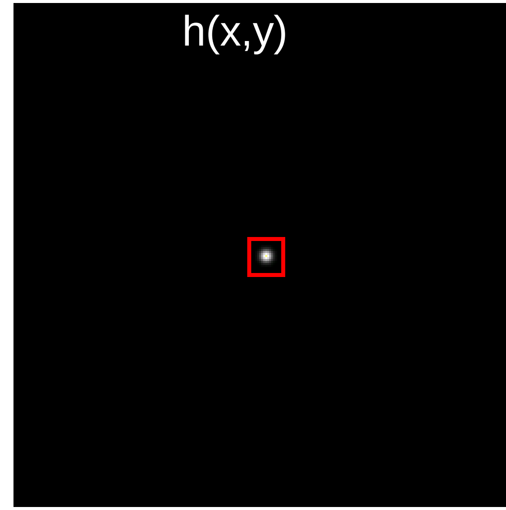


$G(u,v)$

Anwendung des Gauss-Tiefpass auf den Einheitsimpuls (Impulsantwort)



Gauss-Tiefpass



h(x,y)

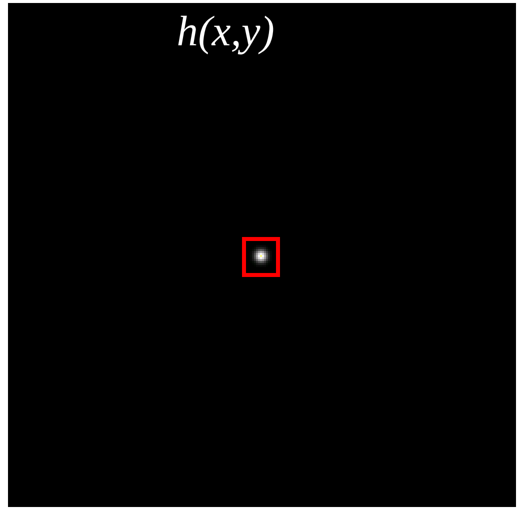
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	1	2	3	3	3	2	1	0	0	0	0
0	0	0	2	6	10	15	17	15	10	6	2	0	0	0
0	0	2	7	18	33	48	54	48	33	18	7	2	0	0
0	1	6	18	43	80	115	130	115	80	43	18	6	1	0
0	2	10	33	80	147	213	241	213	147	80	33	10	2	0
0	3	15	48	115	213	308	348	308	213	115	48	15	3	0
0	3	17	54	130	241	348	393	348	241	130	54	17	3	0
0	3	15	48	115	213	308	348	308	213	115	48	15	3	0
0	2	10	33	80	147	213	241	213	147	80	33	10	2	0
0	1	6	18	43	80	115	130	115	80	43	18	6	1	0
0	0	2	7	18	33	48	54	48	33	18	7	2	0	0
0	0	0	2	6	10	15	17	15	10	6	2	0	0	0
0	0	0	0	1	2	3	3	3	2	1	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

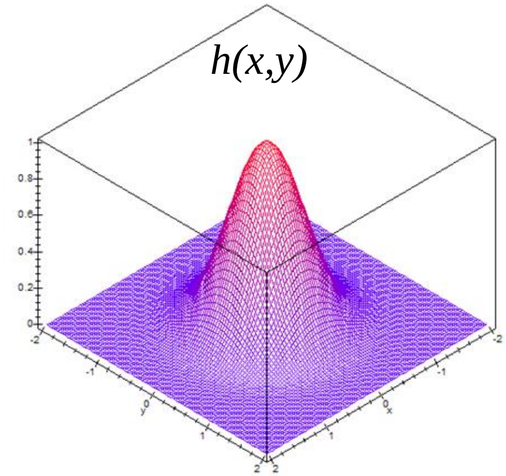
Anm.: auf ganzzahlige Werte skaliert

äquivalente Faltungsoperation

Die Impulsantwort eines Filters ist der Faltungs-kern des äquivalenten Faltungsoperators.

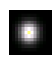
$h(x,y)$





$s(x,y)$

Näherung von $h(x,y)$

$\ast$  $\approx$

$g(x,y)$

nach Grauwertnormierung

Der Gauss-Tiefpasses verursacht keine "Welligkeit" im gefilterten Bild. Erkauft wird dieser Vorteil mit einer geringeren Flankensteilheit des Filters im Ortsfrequenzbereich.

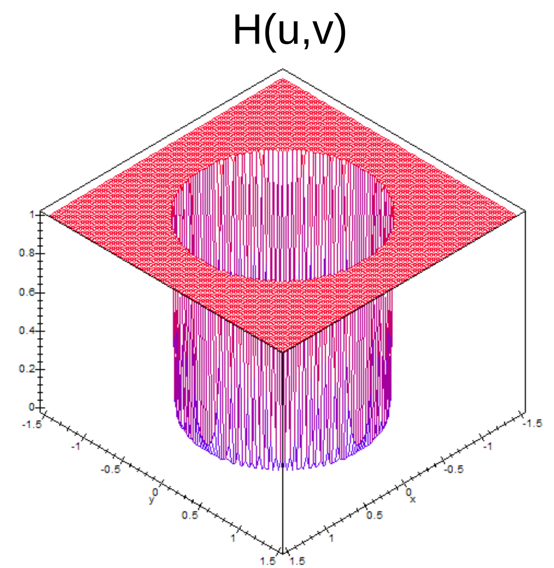
3.8.3 Hochpaßfilter

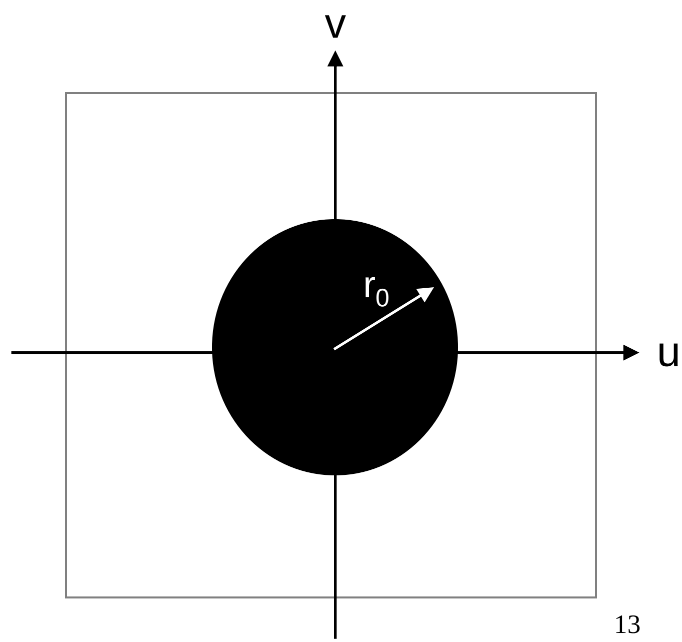
3.8.3.1 Idealer Hochpass

Frequenzantwort des idealen Hochpasses:

$$H(u,v) = \begin{cases} 0 & \mathit{wenn}\ \ r \le r_0 \\ 1 & \mathit{wenn}\ \ r > r_0 \end{cases}$$

$$r = \sqrt{u^2 + v^2} \quad : \text{ euklid.Ursprungsdistanz}$$

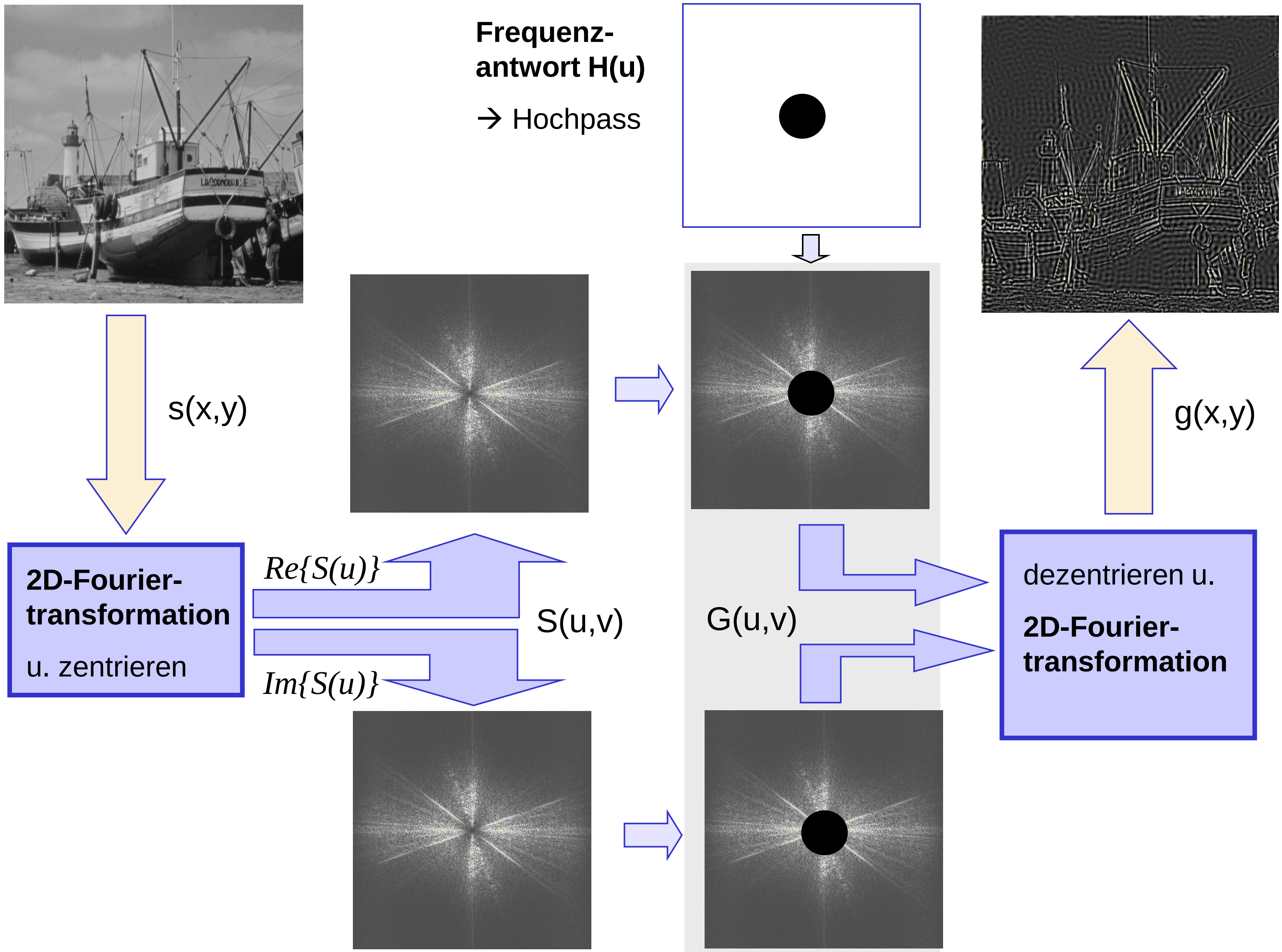




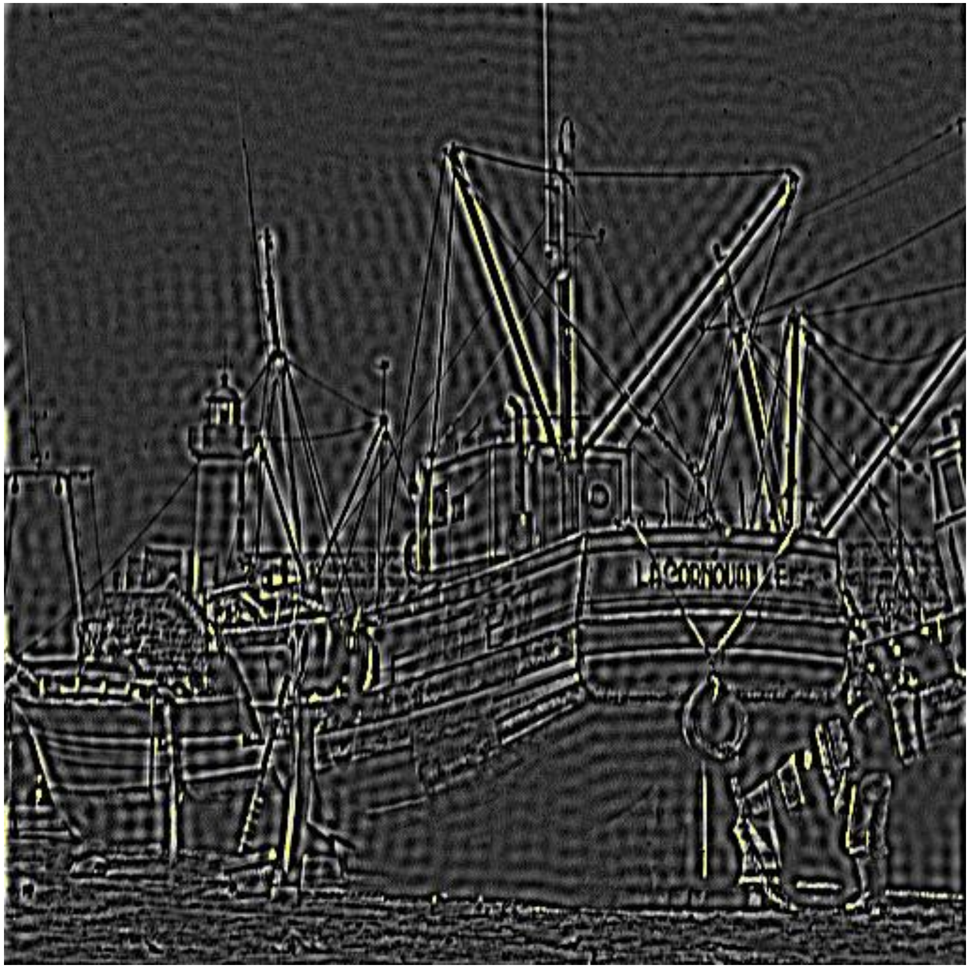
Wirkung:

Alle Frequenzen ausserhalb des Kreises (hohe Frequenzen) werden unverändert in das Zielbild übernommen.

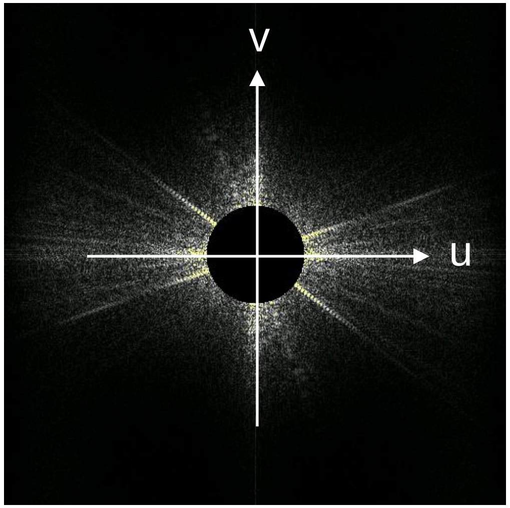
Frequenzen innerhalb des Kreises (tiefe Frequenzen) werden vollständig unterdrückt.


Frequenz-
antwort H(u)
→ Hochpass
s(x,y)
g(x,y)
2D-Fourier-
transformation
u. zentrieren
Re{S(u)}
Im{S(u)}
S(u,v)
G(u,v)
dezentrieren u.
2D-Fourier-
transformation

Beispiel: Filtergröße r_0=50



gefiltertes Bild



Spektrum des gefilterten Bildes

Nachteil des idealen Hochpasses ist (wie beim id. TP) die "Welligkeit" des gefilterten Bildes.

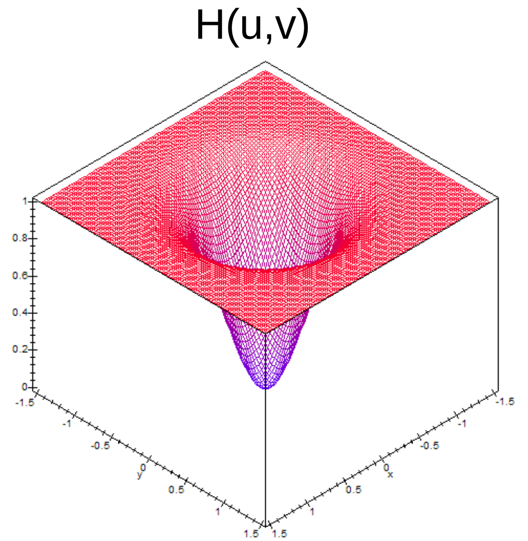
3.8.3.2 Gauss-Hochpass

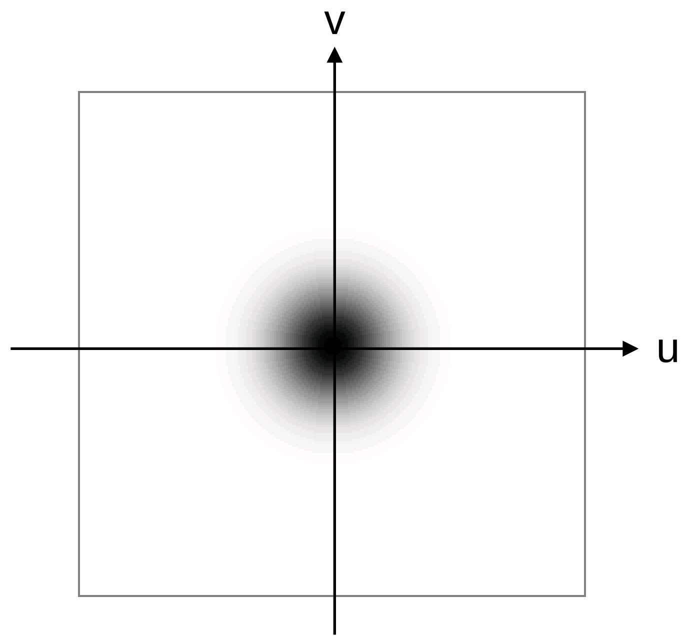
Frequenzantwort des Gauss-Hochpasses:

$$H(u,v) = 1 - e^{-2\pi^2\sigma^2 \cdot w^2}$$

$$w = \sqrt{\left(\frac{u}{M}\right)^2 + \left(\frac{v}{N}\right)^2}$$

$M, N:$ Bildbreite, Bildhöhe



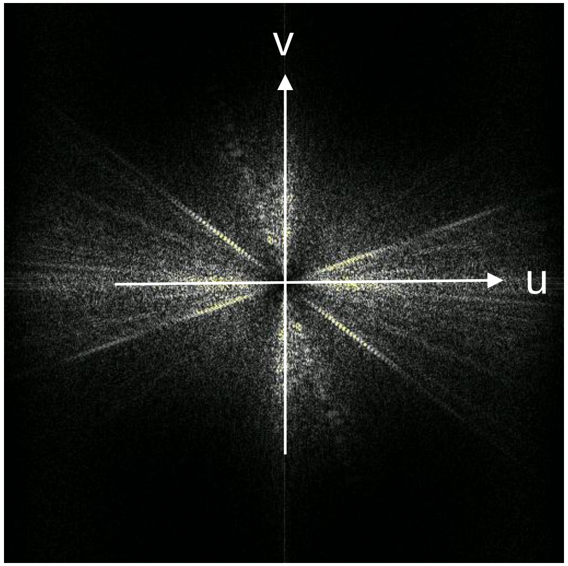


Wirkung:

Mit zunehmender Frequenz nimmt die Dämpfung (gaussförmig) ab.

Mit σ wird die gewünschte Filterwirkung eingestellt.

Beispiel: Filtergröße $\sigma = 2$



Spektrum des gefilterten Bildes

Der Gauss-Hochpasses verursacht keine "Welligkeit" im gefilterten Bild. Erkauft wird dieser Vorteil mit einer geringeren Flankensteilheit des Filters im Frequenzbereich.

= 0, hell. Werte +, dunklere Werte -

3.8.3.3 Schärfungsfilter: "High-frequency-emphasis-Filter" (HFE-Filter)

Beim HFE-Filter werden das Originalbild sowie das Hochpass-gefilterte Bild mit vorgebbaren Anzeilen gemischt.

$$H(u,v) = a + b \cdot H_{HP}(u,v)$$

a: Anteil des Originalbildes
b: HP-Anteil

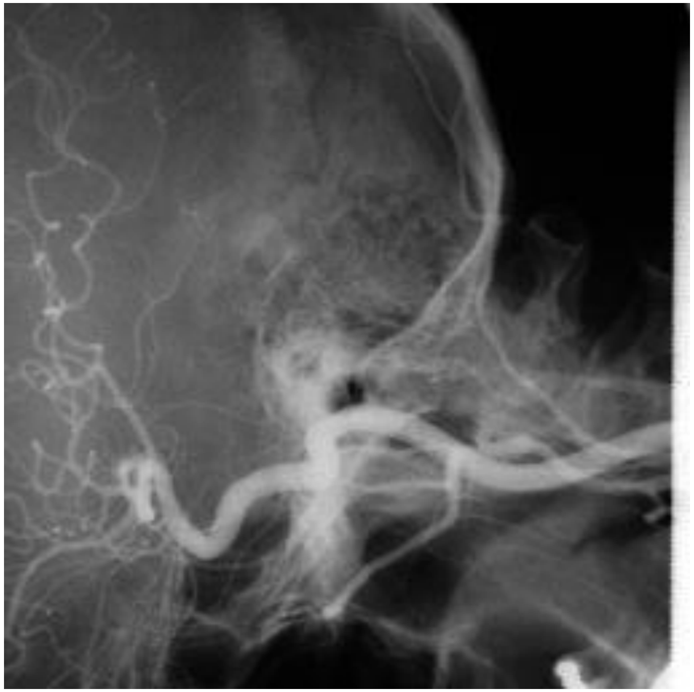
mit $$H(u,v) = 1 - e^{-2\pi^2\sigma^2 \cdot w^2}$$

$$w = \sqrt{\left(\frac{u}{M}\right)^2 + \left(\frac{v}{N}\right)^2}$$

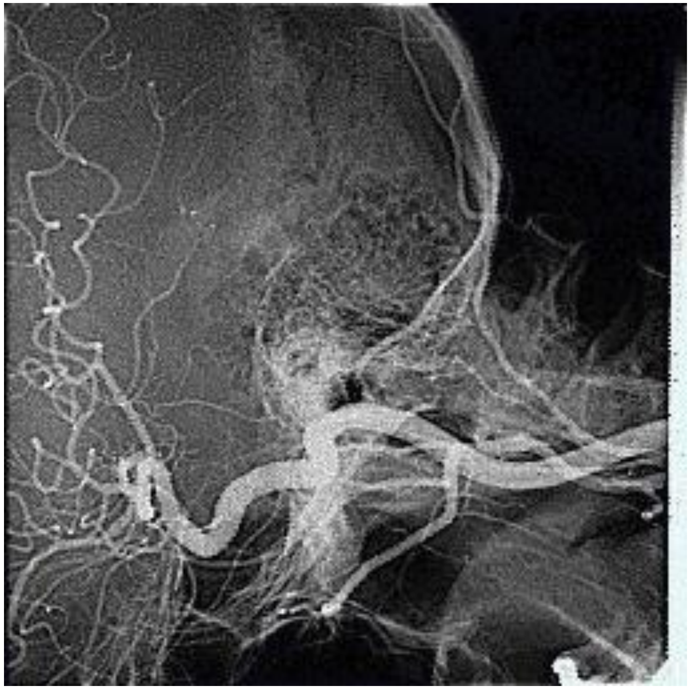
$M, N:$ Bildbreite, Bildhöhe

Mit dem HFE-Filter lassen sich aufnahmebedingte Bildunschärfen korrigieren und Details eines vorgebbaren Detailgrößenbereiches hervorheben (mit σ).

Beispiel: $\sigma = 2$, a=0.9, b=2.0



Originalbild



gefiltertes Bild

3.8.4 Bandpaßfilter

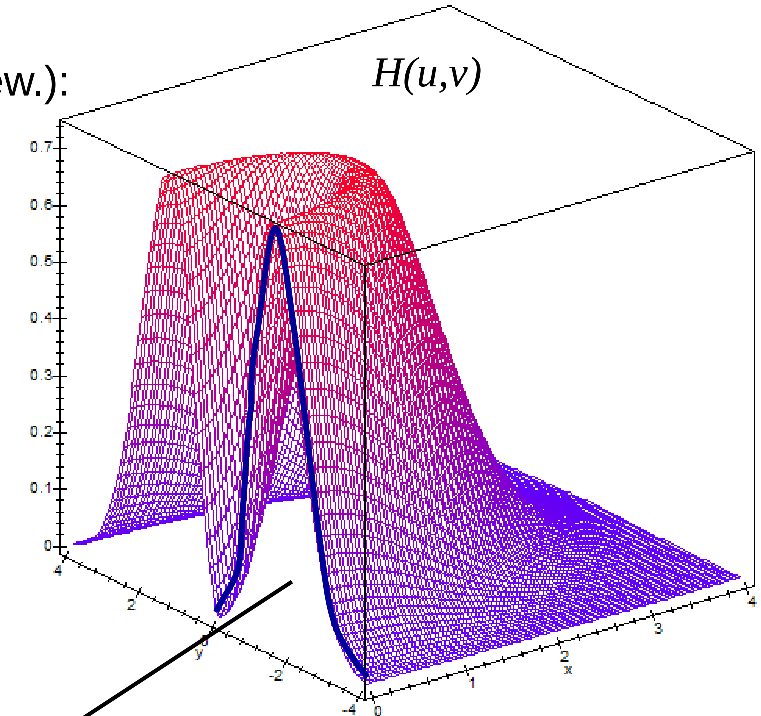
3.8.4.1 LoG-Filter (mexican-hat-Operator)

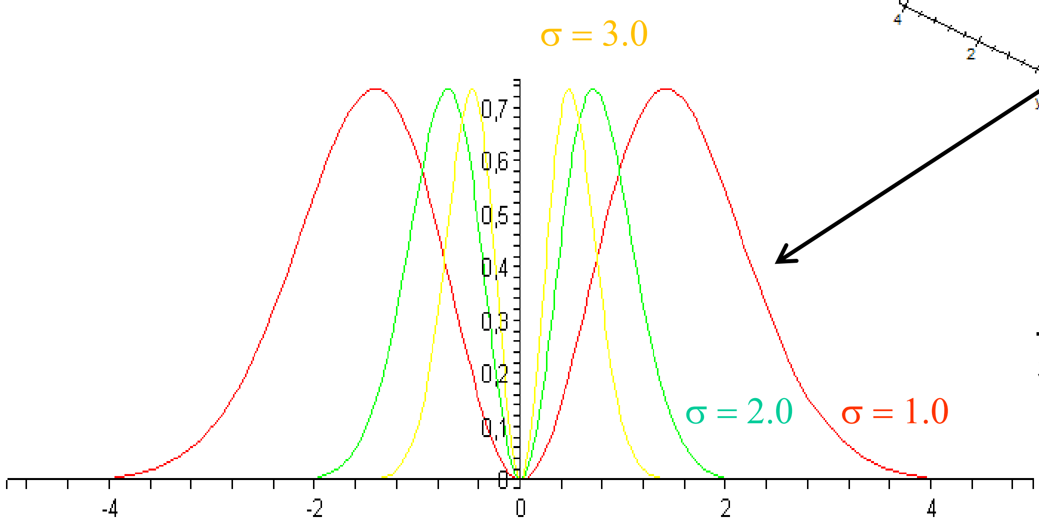
Die Frequenzantwort des LoG-Filters ist (o. Bew.):

$$H_{LoG}(u,v) = -4\pi^2 \cdot w^2 \cdot e^{-2\pi^2\sigma^2 w^2}$$

$$w = \sqrt{\left(\frac{u}{M}\right)^2 + \left(\frac{v}{N}\right)^2}$$

$M, N:$ Bildbreite, Bildhöhe



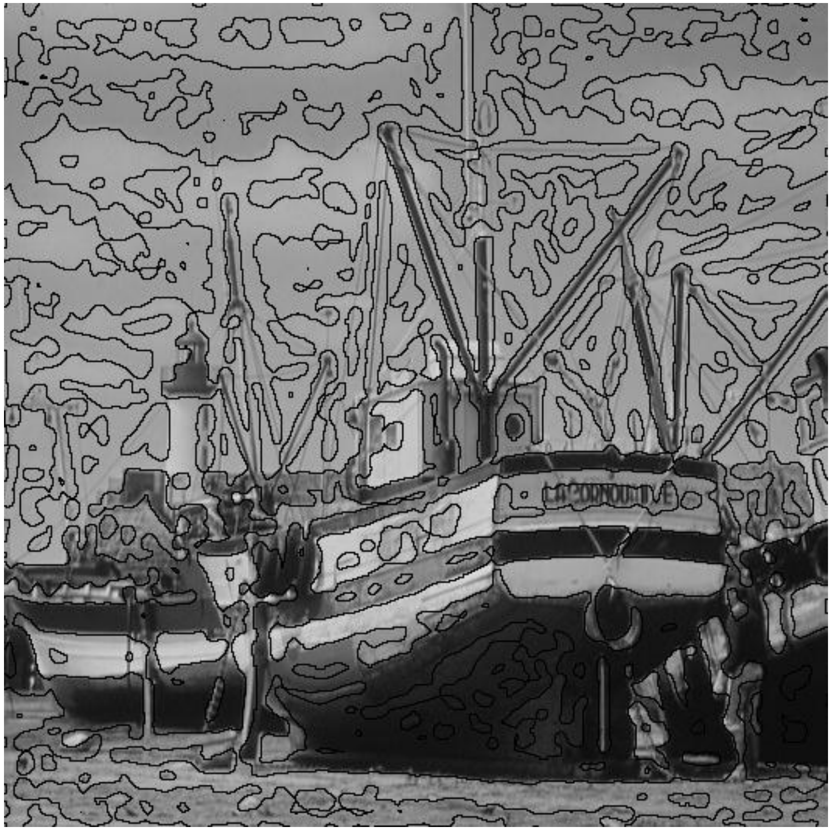


Der LoG-Filter kann als Band-pass inter-pretiert werden, des-sen Breite und Mittenfrequenz über σ eingestellt werden kann.

Beispiele

σ=2.0

σ=1.0



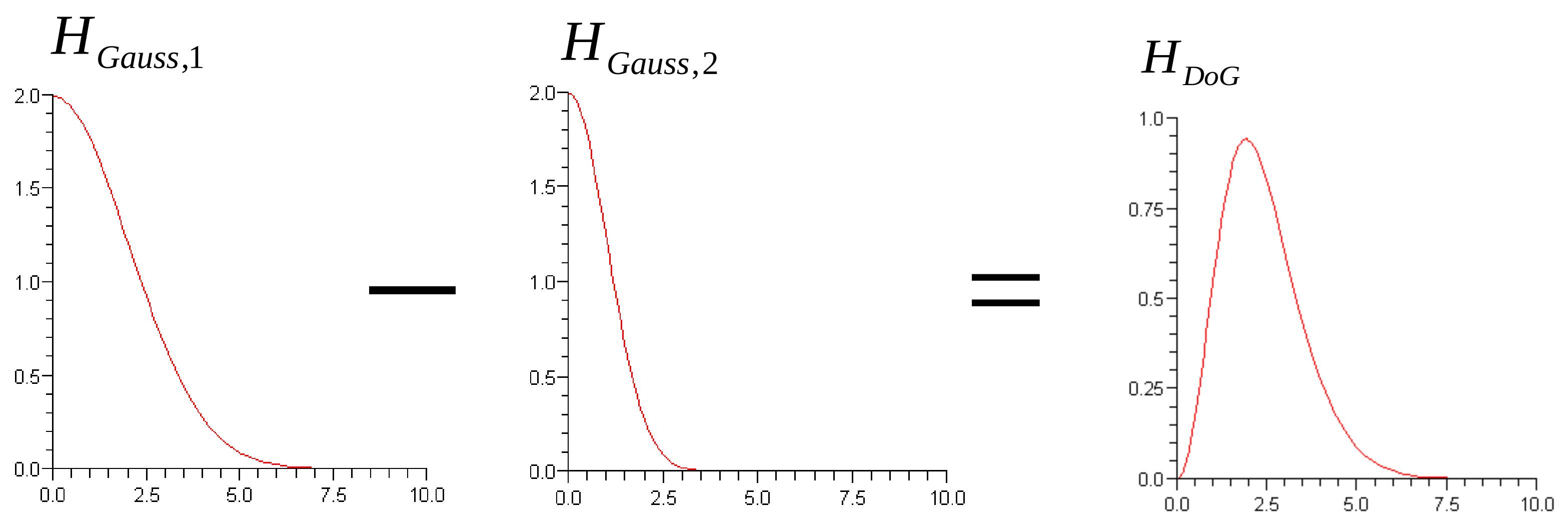
Original mit eingezeichneten *Zerocrossings* = Helligkeitswendepunkte im Bild

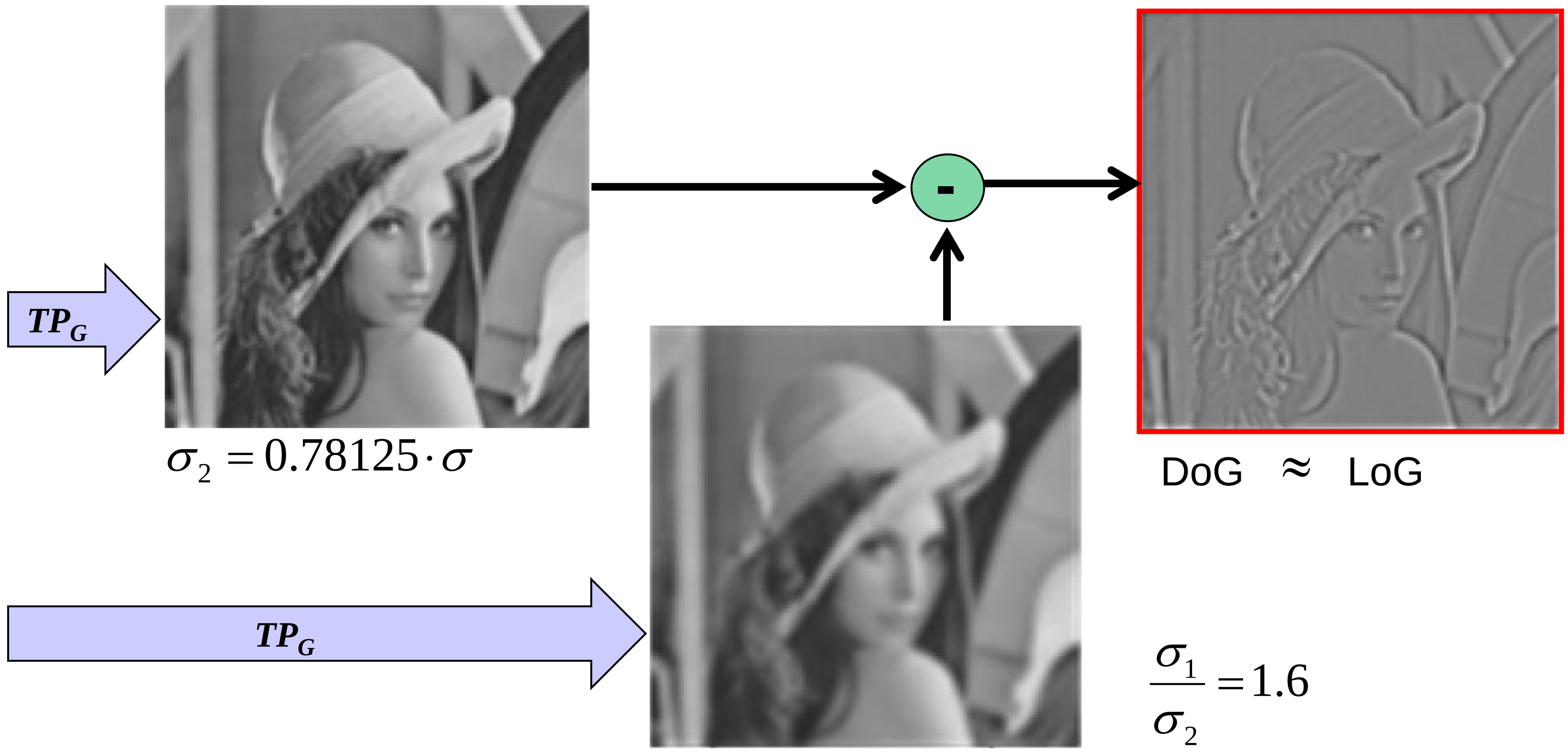
3.8.4.2 DoG-Filter (Difference - of - Gaussians) statt LoG-Operator

Eine gute Annäherung an das LoG-Filter erhält man durch Subtraktion zweier Gaussfilter mit unterschiedlichem σ.

Dabei sollte etwa gelten: $\sigma_1 \approx 1.6 \cdot \sigma_2$

Vorteil: In manchen Anwendungsfällen effizienter (z.B. *LoG-Pyramide*).





$$\sigma_1 = 1.25 \cdot \sigma$$

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_2} = 1.6$$

$$H(u,v) = e^{-2\pi^2 \sigma_1{}^2 \cdot w^2} - e^{-2\pi^2 \sigma_2{}^2 \cdot w^2}$$

$$w = \sqrt{\left(\frac{u}{M}\right)^2 + \left(\frac{v}{N}\right)^2}$$

$M, N:$ Bildbreite, Bildhöhe

LoG

$\sigma = 5.0$

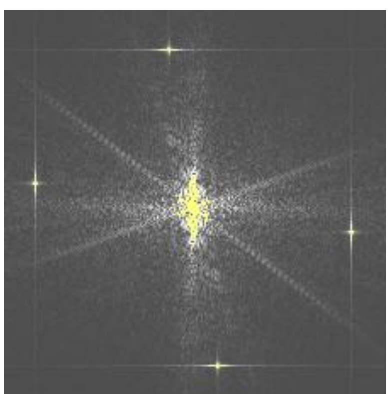
DoG

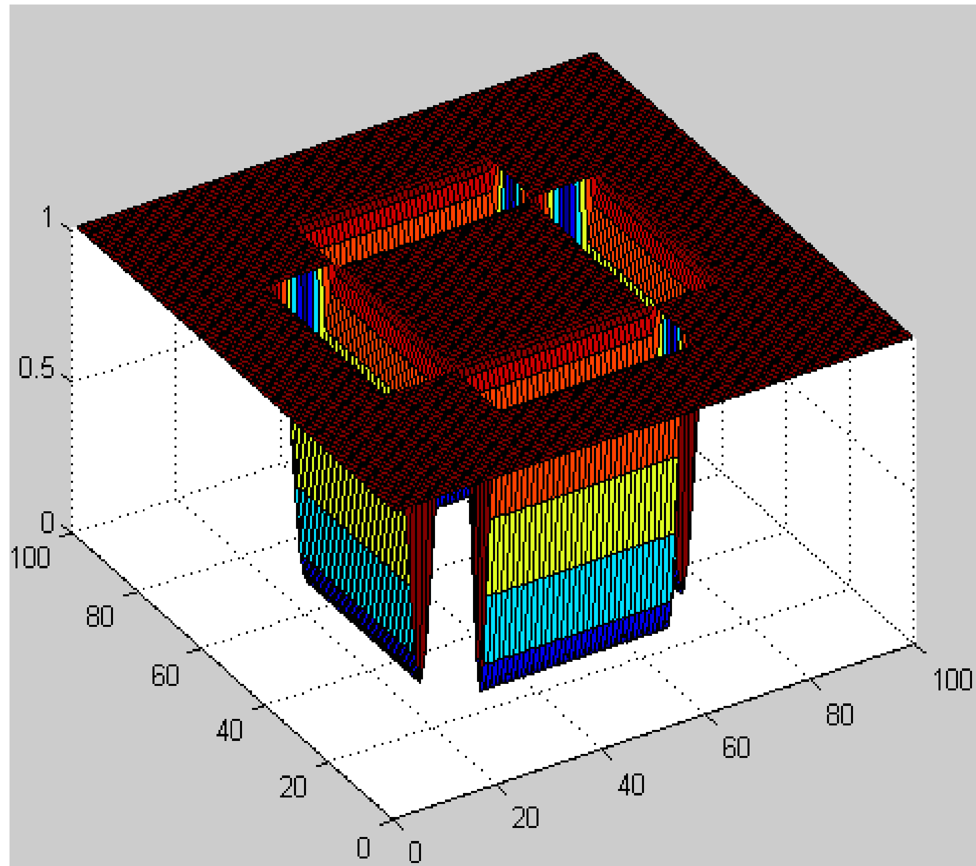
$\sigma = 5.0$

3.8.5 Bandsperre

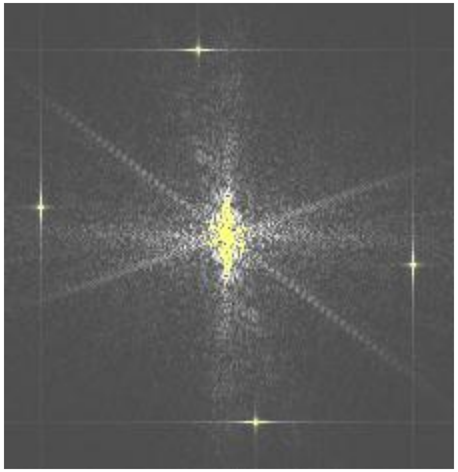
3.8.5.1 Beseitigung periodischer Störungen oder Bildrasterungen

Die Frequenzantwort des Filters ist :

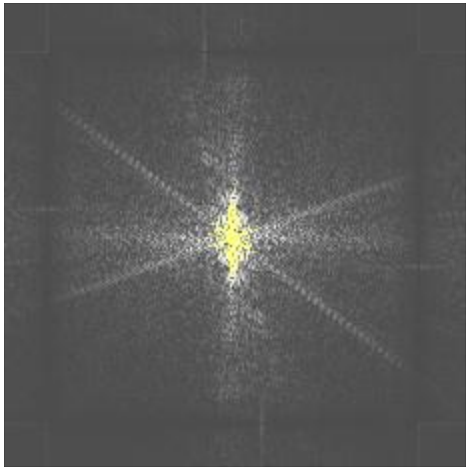


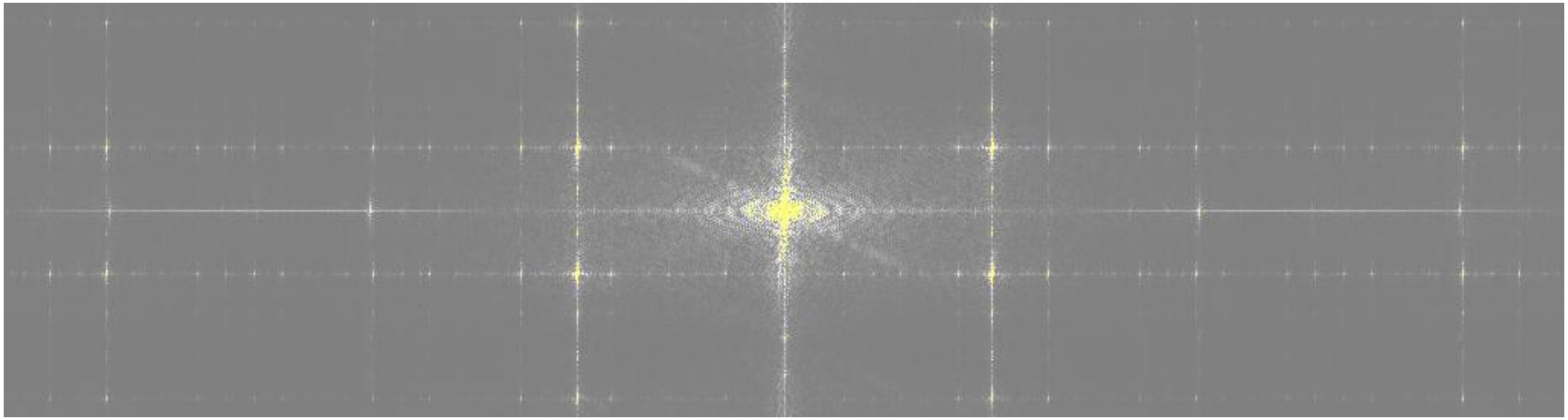


periodisch gestörtes Bild + DFT

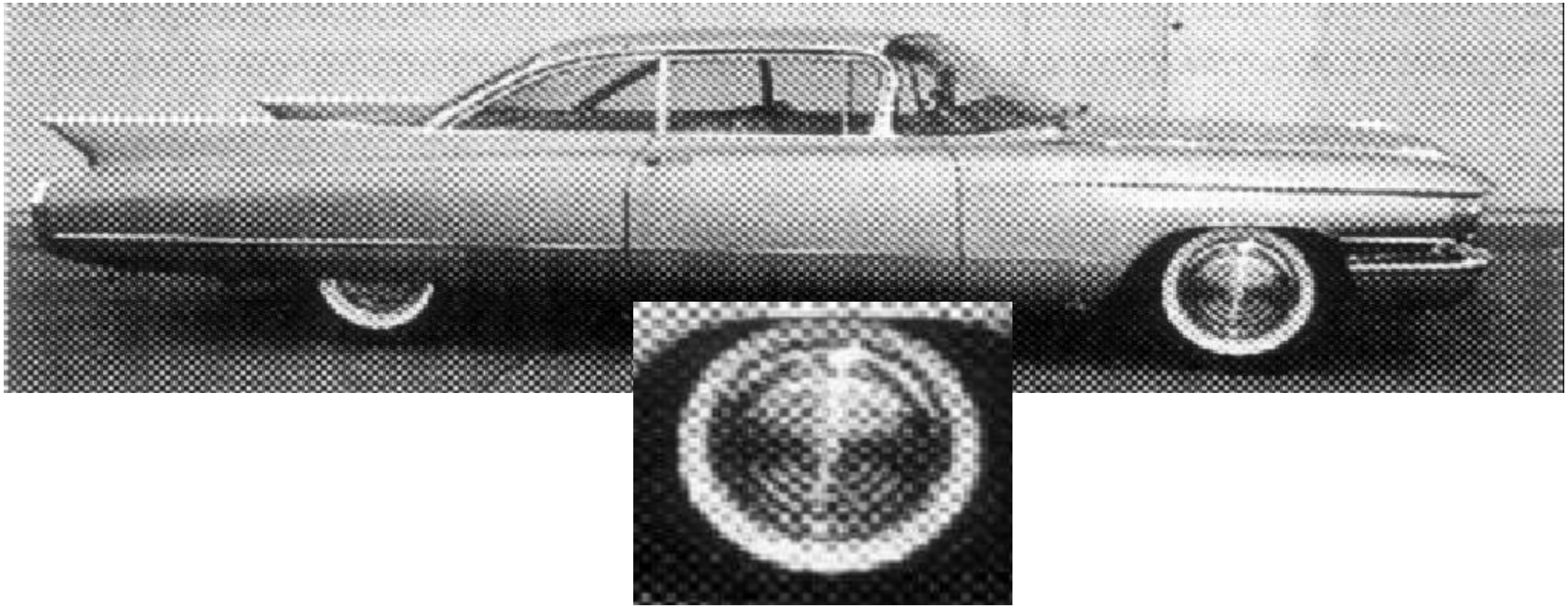


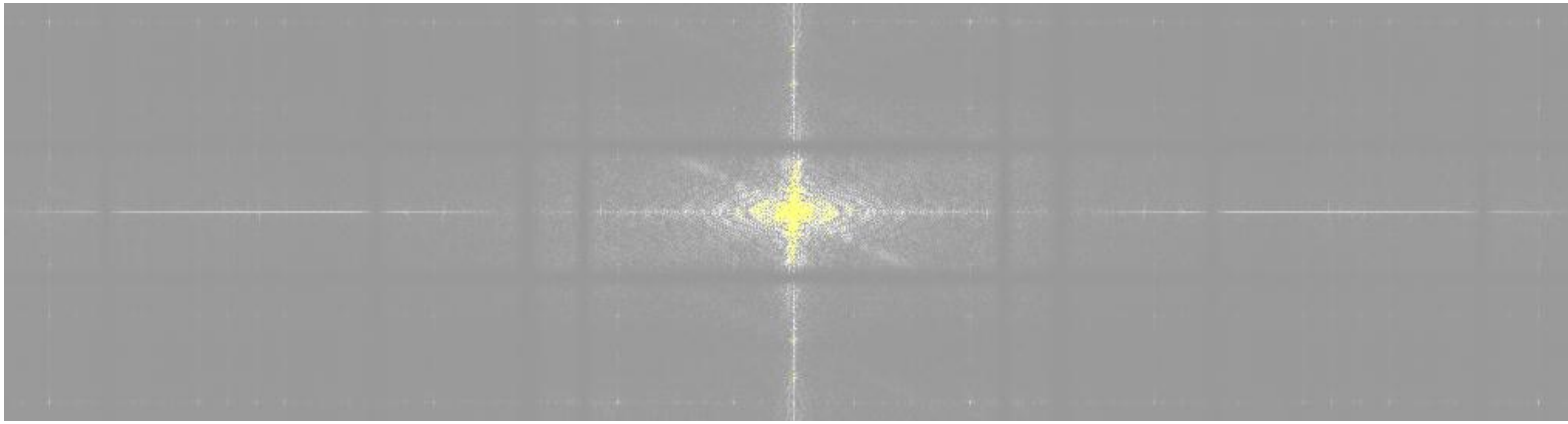
entstörtes Bild + DFT



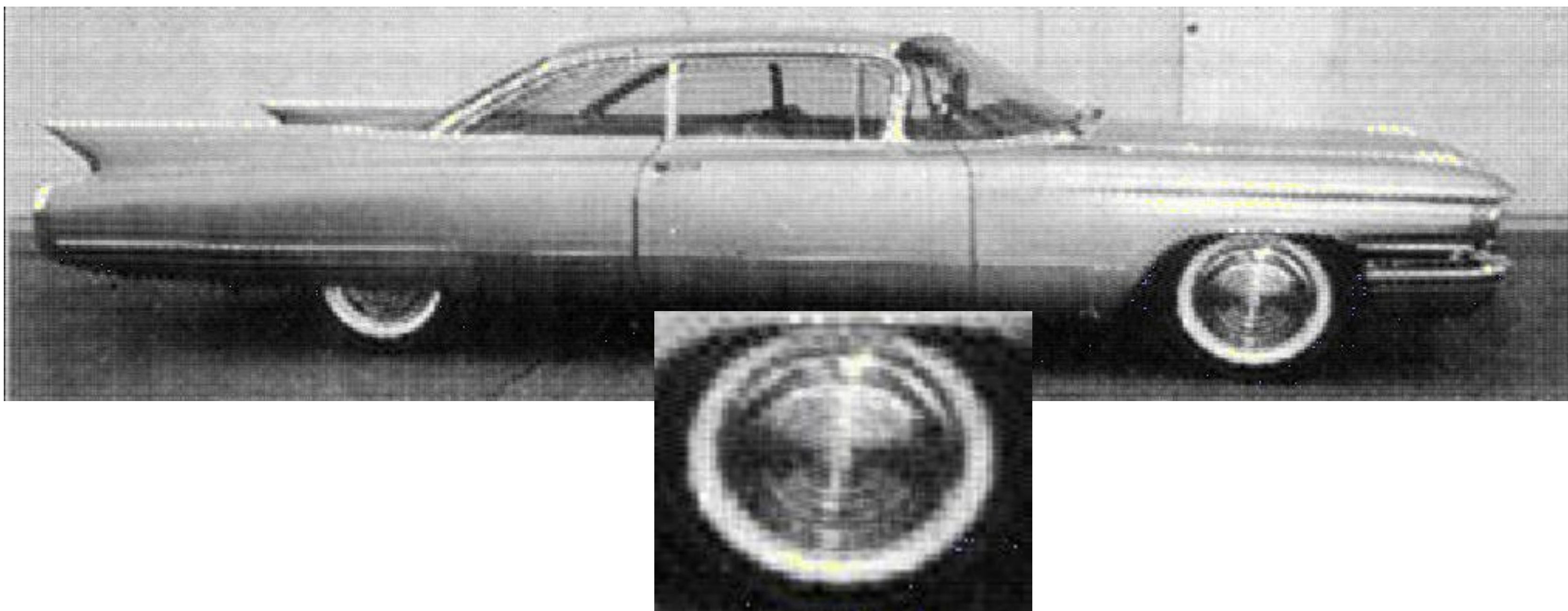


Betragsspektrum des geditherten Bildes





Entfernung der Hauptstörungen und Ergebnisbild



3.8.6 Anwendungen

3.8.6.1 Bildverkleinerung

Eine Bildverkleinerung entspricht einer Abtastung des Bildes.
Bei einer Bildverkleinerung ist das ***Abtasttheorem*** zu beachten.

Abtasttheorem:

Ein bandbegrenztes Signal der Maximalfrequenz f_{max} muss mit einer Abtastfrequenz größer als $2 \cdot f_{max}$ äquidistant abgetastet werden, damit man aus dem so erhaltenen Signal das Ursprungssignal wieder beliebig genau approximieren kann.

$$f_{Abtast} > 2 \cdot f_{Signal,\max}$$

Angewendet auf die Abtastung:

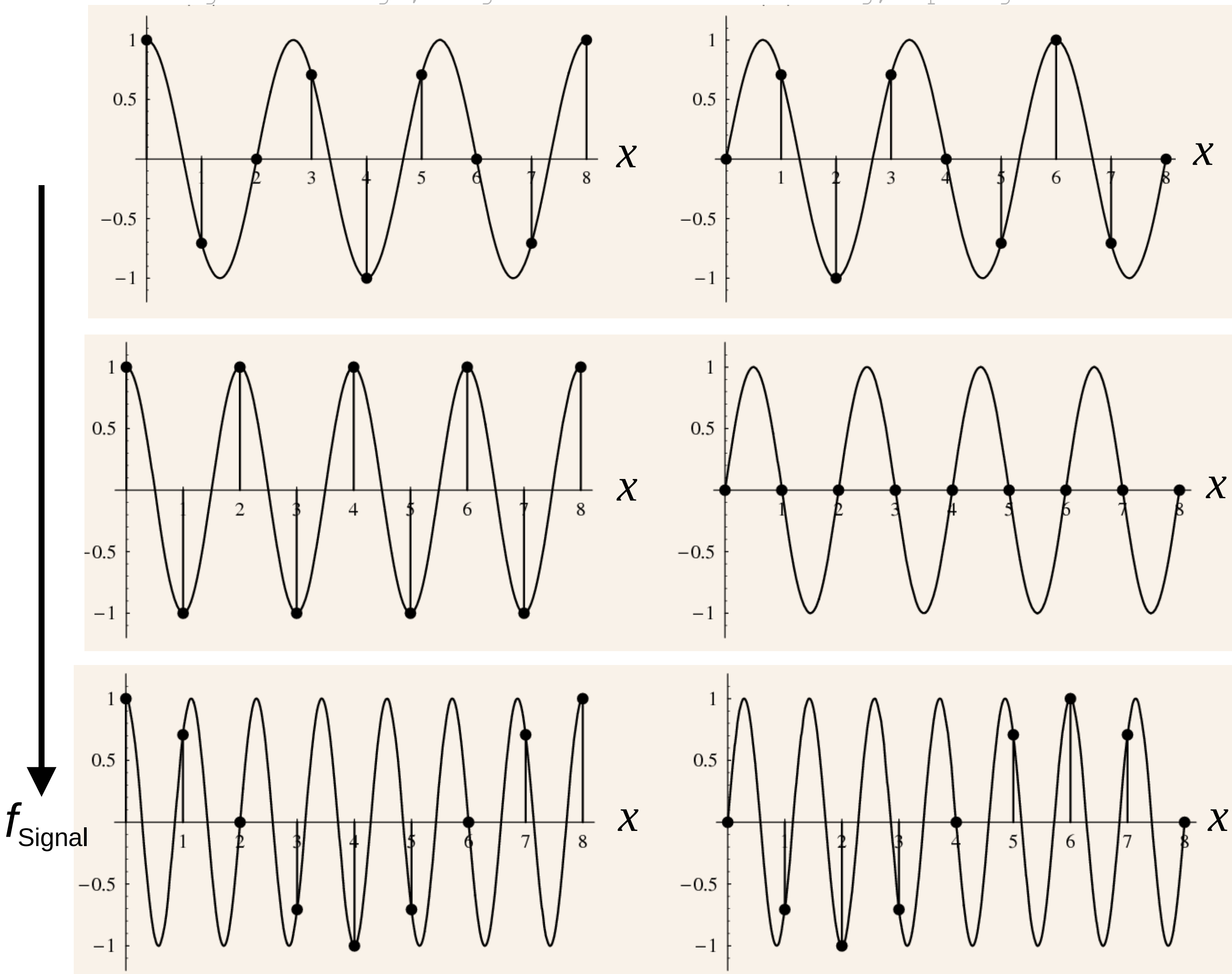
Ist die Abtastfrequenz vorgegeben, so ist darauf zu achten, dass für die maximal im Signal enthaltene Frequenz gilt :

$$f_{Signal,\max} < \frac{f_{Abtast}}{2}$$

Das Signal muss daher evtl. vor der Abtastung durch eine Tiefpassfilterung bandbegrenzt werden.

Warum muss vor der Abtastung eine Tiefpass-Filterung vorgenommen werden ?

s. Burger u. Burge, Digitale Bildverarbeitung, Springer



$$f_{Abtast} > 2 \cdot f_{Signal}$$

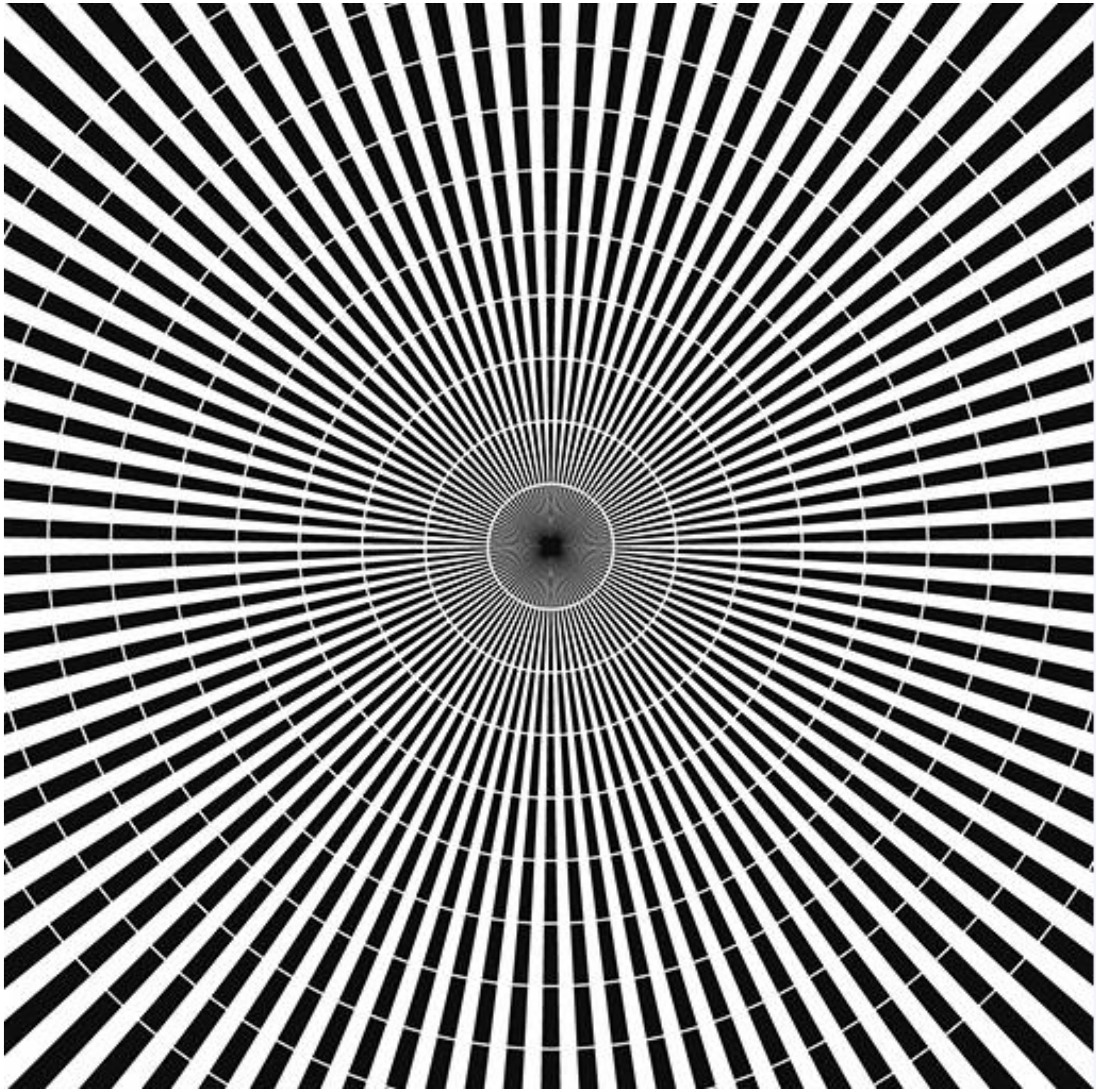
d.h. mehr als 2 Abtastwerte pro Signalperiode

$$f_{Abtast} = 2 \cdot f_{Signal}$$

$$f_{Abtast} < 2 \cdot f_{Signal}$$

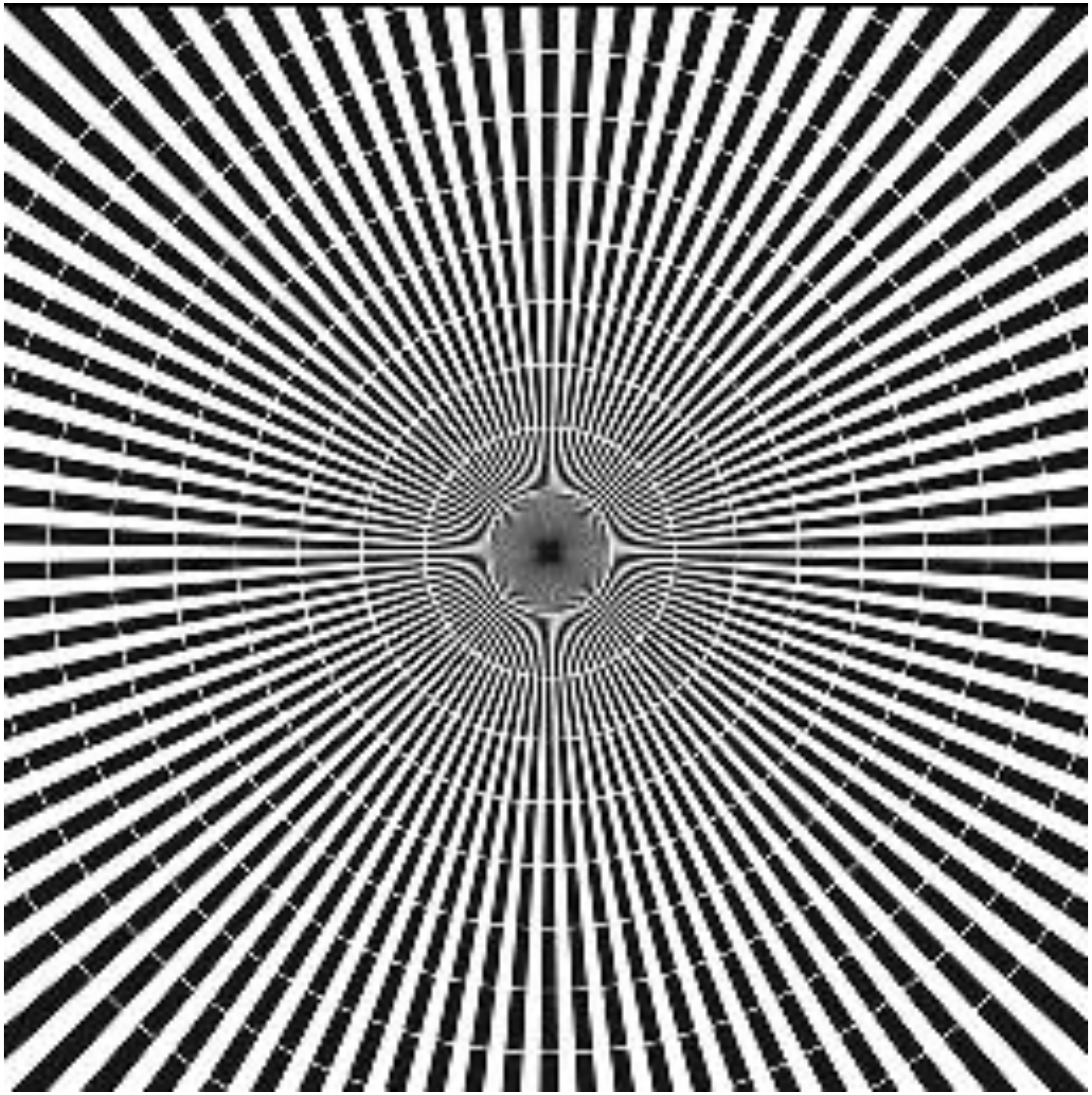
d.h. weniger als 2 Abtastwerte pro Signalperiode

Aliasing !!



Siemensstern-Muster

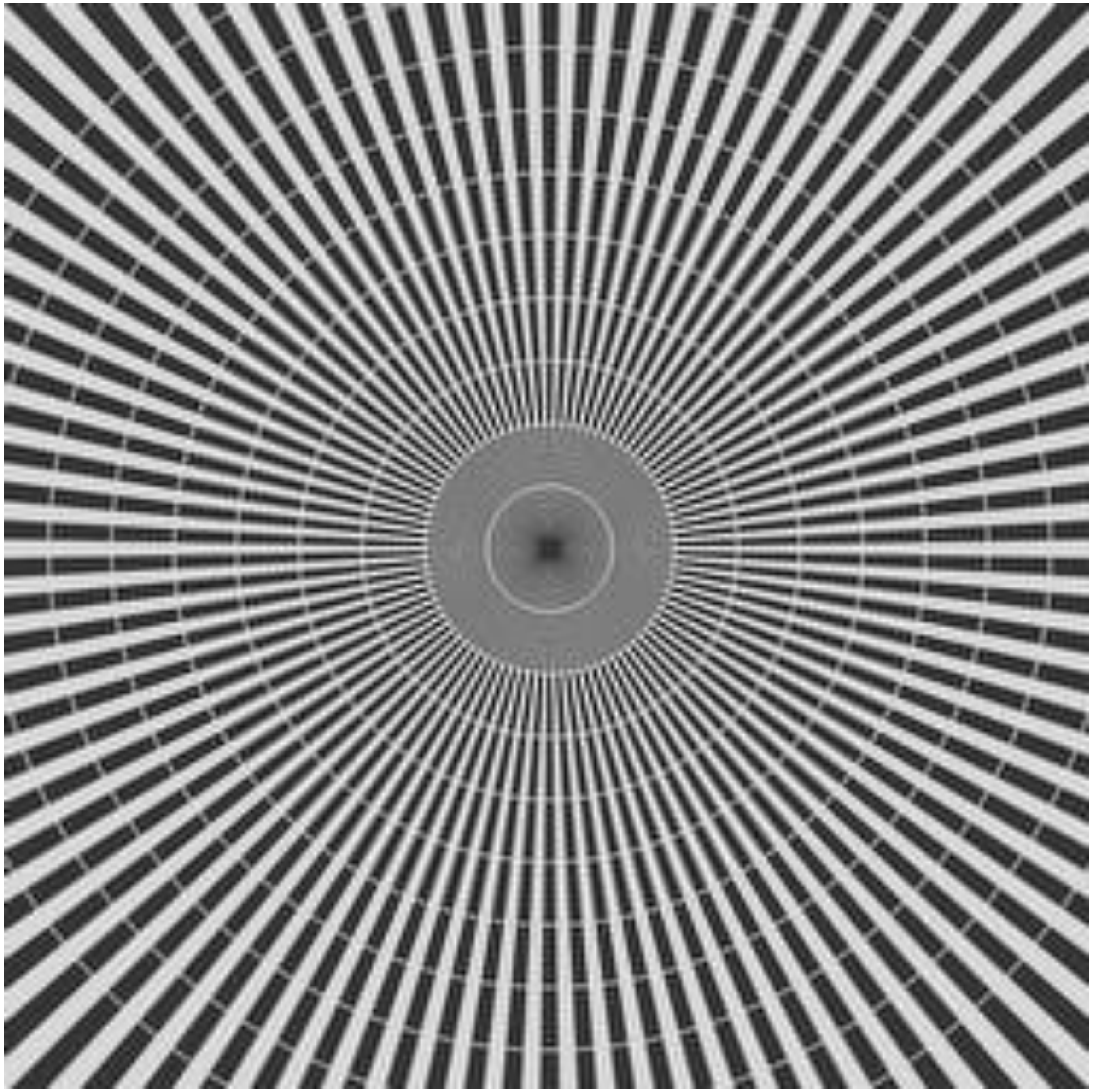
in Originalgröße



Siemensstern-Muster

ohne Bandbegrenzung
2:1 abgetastet

(und wieder
hochvergrößert)



Siemensstern-Muster

mit Bandbegrenzung
2:1 abgetastet

(und wieder
hochvergrößert)

Bandbegrenzung mit
idealem Tiefpass

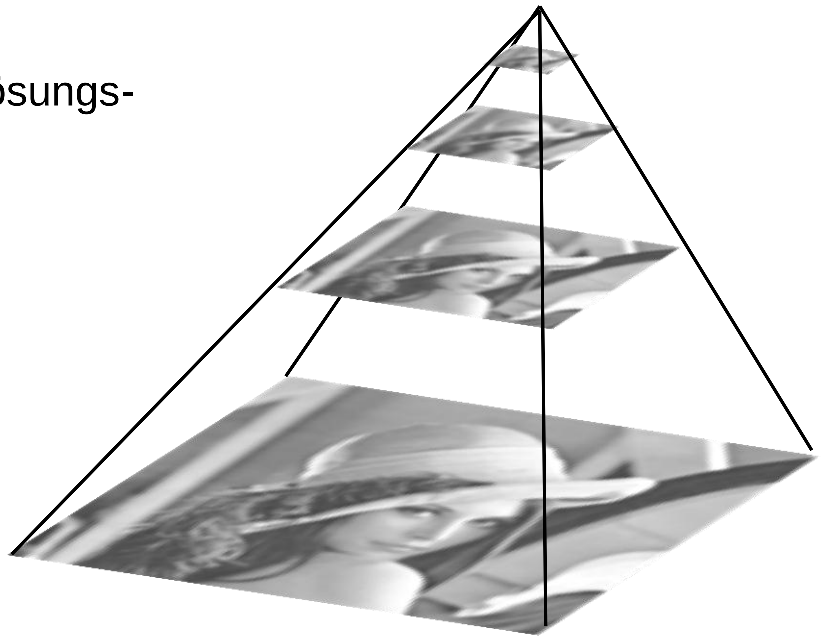
Beispiel: Aliasing in Bildern

Bildverkleinerung
2:1 mit
Tiefpassfilterung

Bildverkleinerung
2:1 **ohne**
Tiefpassfilterung

3.8.6.2 Bild-Pyramide

= Datenstruktur , bei der verschiedene Auflösungs-stufen des Bildes zusammengefasst sind



Zweck: → effiziente Bildanalyse

feine Strukturen werden bei hoher Auflösung analysiert,

grobe Strukturen werden bei geringer Auflösung analysiert.

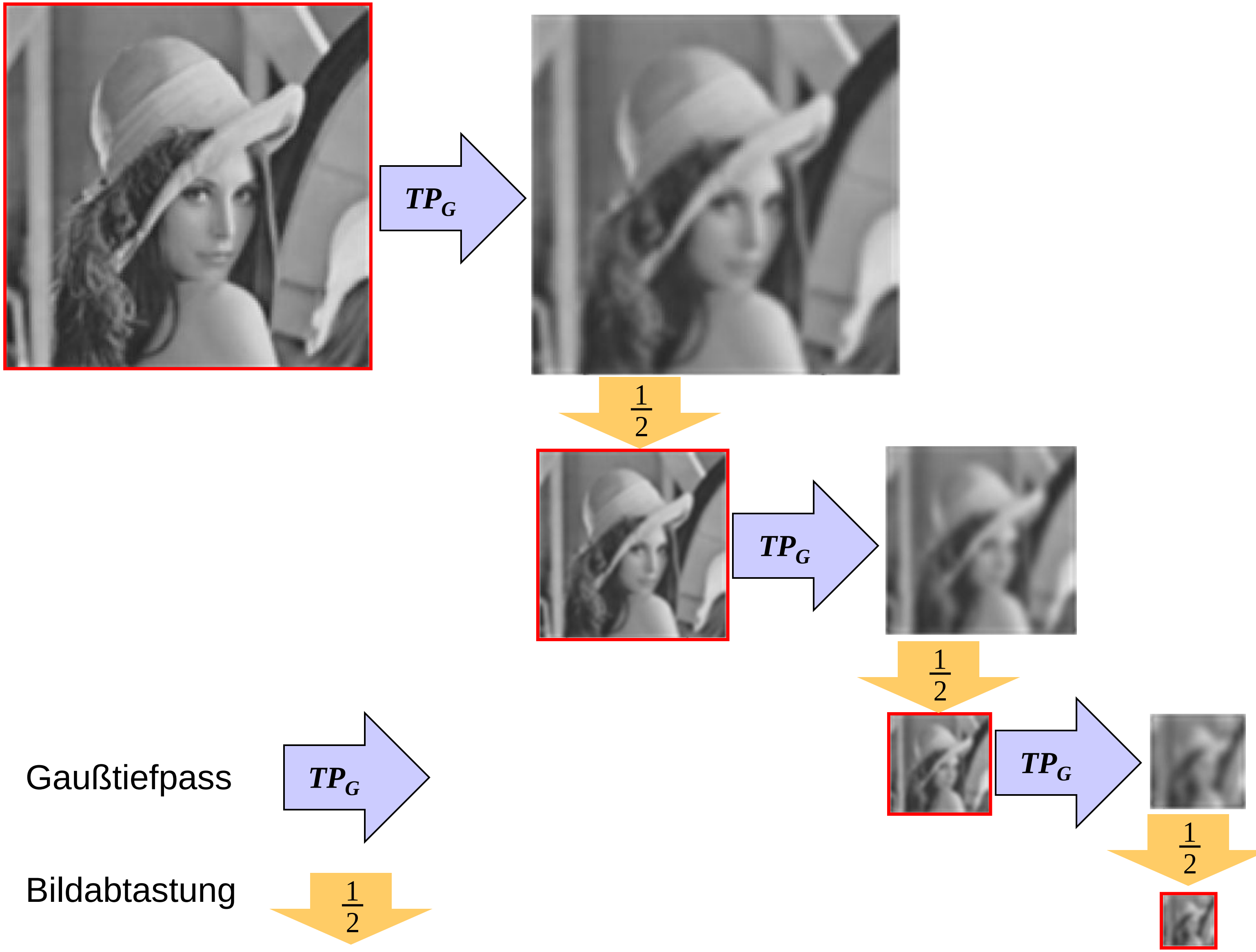
Eigenschaften:

- Gegenüber dem Originalbild wird nur 1/3 mehr Speicherplatz benötigt.

$$1+\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{64}+\ldots\ldots \quad < \quad 1\frac{1}{3}$$

- Mit geringem Aufwand berechenbar.

Erzeugung einer Bildpyramide

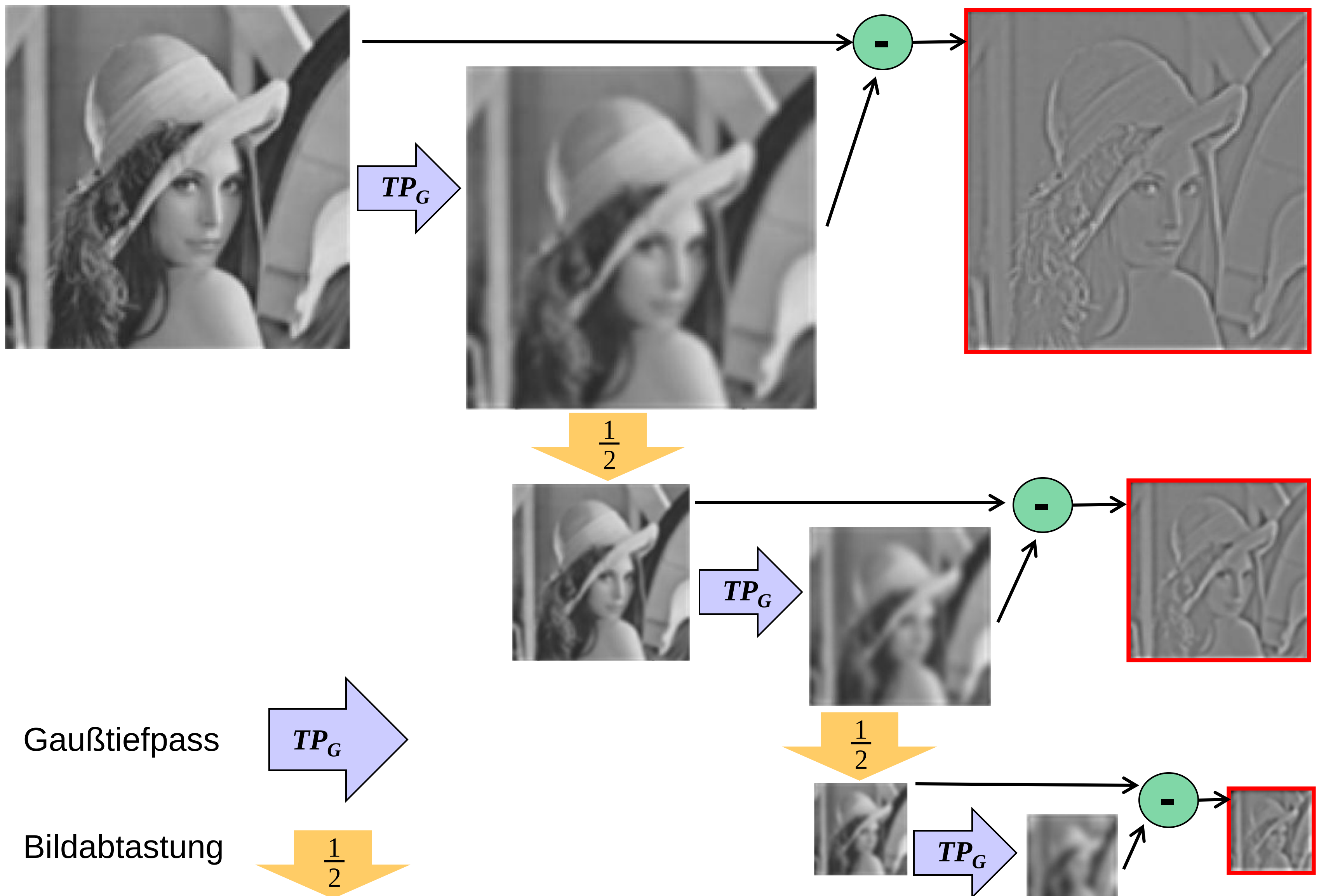


3.8.6.3 Laplace-Pyramide

= Datenstruktur , bei der verschiedene Auflösungs-stufen des Laplacebildes zusammengefasst sind

Zweck: → effiziente Bildanalyse

- Texturanalyse
- „*coarse-to-fine*"-Strategie zur Bestimmung von markanten Punkten in Bildern
- Suche korrespondierender Bildpunkte in Stereobildern und Bildfolgen


TP_G
$\frac{1}{2}$
-
TP_G
$\frac{1}{2}$
-
TP_G
-
Gaußtiefpass
TP_G
Bildabtastung
$\frac{1}{2}$