



# C

## 3. Digitale Filter

- **Einführende Gedanken**
- Nichtrekursive Filter (FIR)
- Rekursive Filter (IIR)
- Hochpaß, Bandpass, Bandsperre
- Ausgewählte Digitalfilter
- Dezimation und Interpolation
- Fehlereffekte digitaler Filter
- Vergleich der Filterkonzepte
- Digitalfilter aus Analogfiltern



# 1 Verarbeitungskette

xxxxx.  $s(t) = \sin(2\pi t)$



## 2 Diskussion

Die Übertragungsfunktion diskreter Filter ist immer periodisch.

Das Eingangssignal muss zur Vermeidung von Aliasing bandbegrenzt sein (Eingangstiefpass mit  $f_g$ ).

Das Signal muss mit mindestens  $f_T = 2f_g$  abgetastet werden.

Je höher die Abtastrate bei gegebenem  $f_g$  ist,

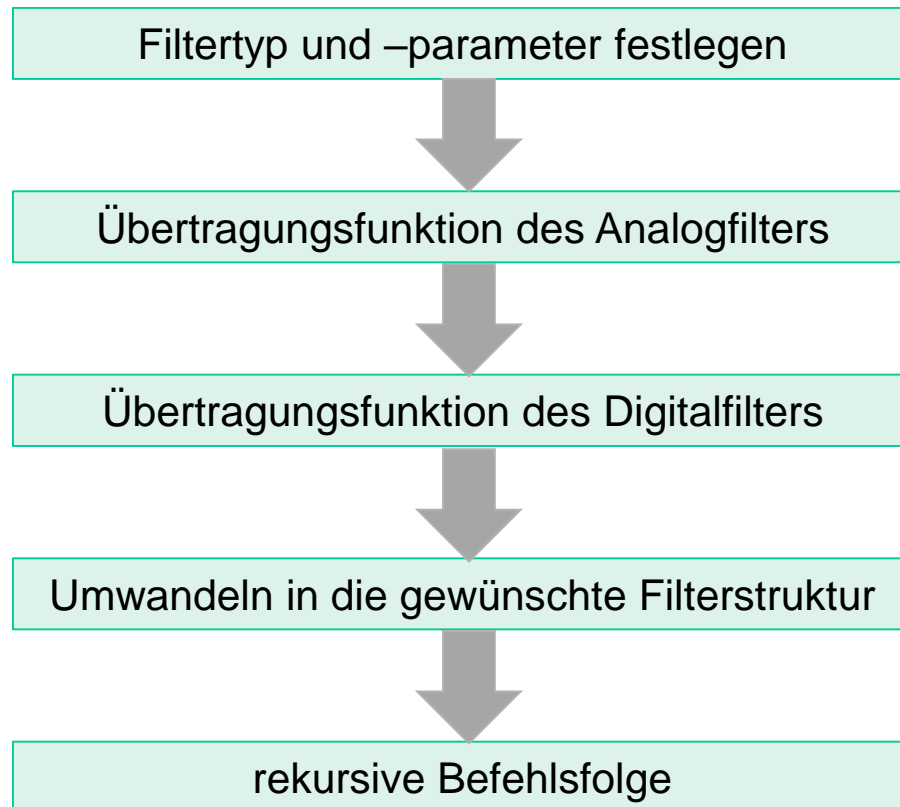
- desto geringer der Aufwand für den Eingangstiefpass,
- desto höher die Anforderungen an den Prozessor.

Der Ausgangstiefpass interpoliert (glättet) das Ausgangssignal.



### 3 Entwurf digitaler Filter

Digitale Filter werden üblicherweise in folgenden Schritten festgelegt.





# C

## 3. Digitale Filter

- Verarbeitungskette
- **Nichtrekursive Filter (FIR)**
- Rekursive Filter (IIR)
- Hochpaß, Bandpass, Bandsperre
- Ausgewählte Digitalfilter
- Dezimation und Interpolation
- Fehlereffekte digitaler Filter
- Vergleich der Filterkonzepte
- Digitalfilter aus Analogfiltern

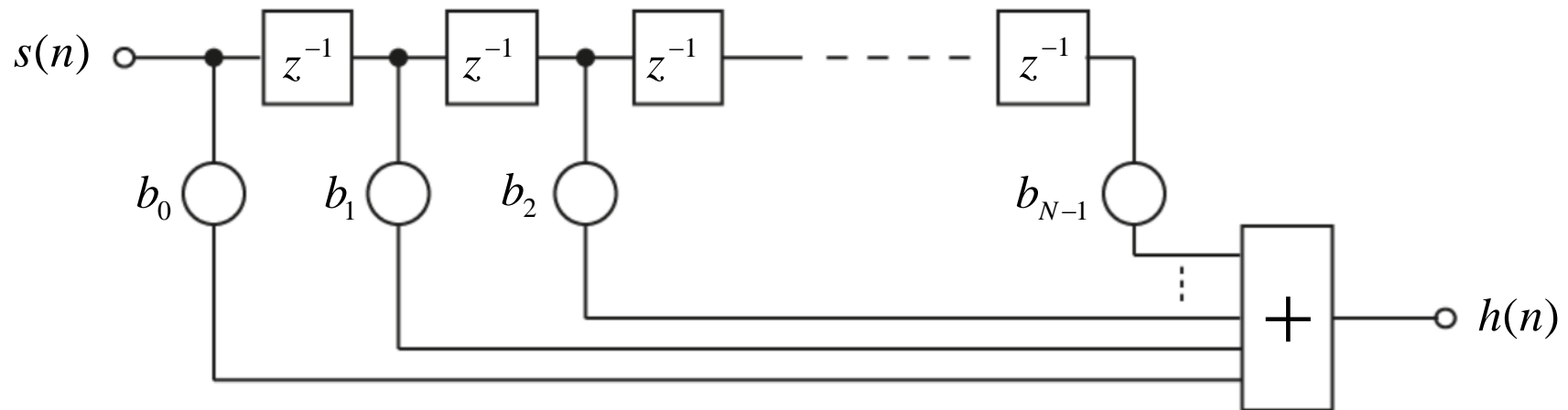


# 1 Einführung

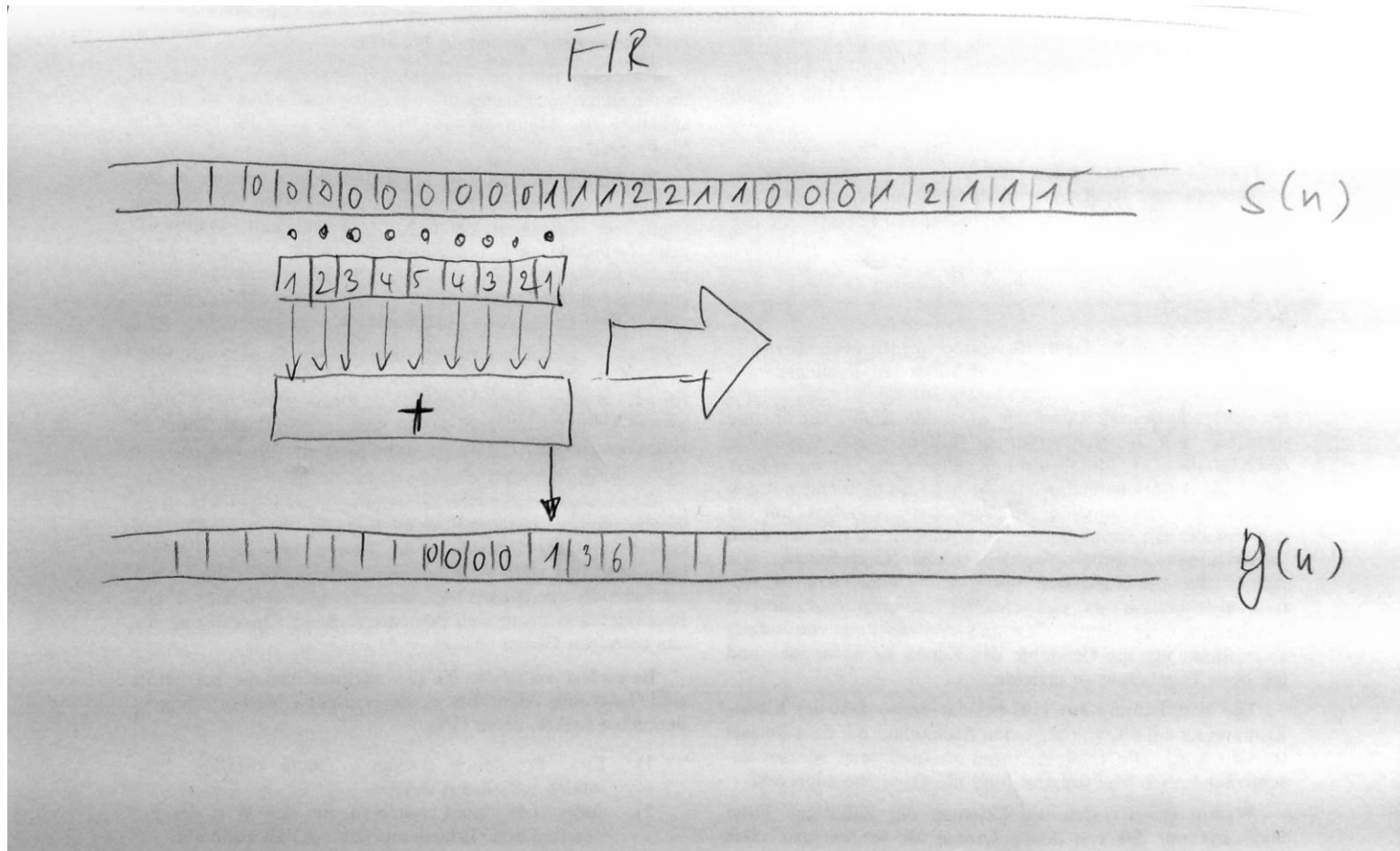
Nicht rekursive Filter = **F**inite-**i**mpulse-**r**esponse-Filter (FIR-Filter)

Kennzeichen: Antwortet auf einen Einheitsimpuls  $\delta(n)$  mit einer begrenzten Zahl von Ausgangsimpulsen

Übertragungsfunktion: 
$$H(z) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n) \cdot z^{-n}$$



## Beispiel : FIR-Filterung





## 2 Impulsantwort

Das FIR-Filter antwortet auf einen Einheitsimpuls mit

$$h(n) = b_0 \cdot \delta(n) + b_1 \cdot \delta(n-1) + b_2 \cdot \delta(n-2) + \dots + b_{N-1} \cdot \delta(n-(N-1))$$



$$H(z) = \sum_{n=0}^{N-1} b_n \cdot z^{-n}$$

Es ist somit  $b_n = h(n)$  für  $i = 0 \dots N-1$

### Mit anderen Worten:

Das FIR Filter antwortet auf den Einheitsimpuls mit den Filterkoeffizienten !

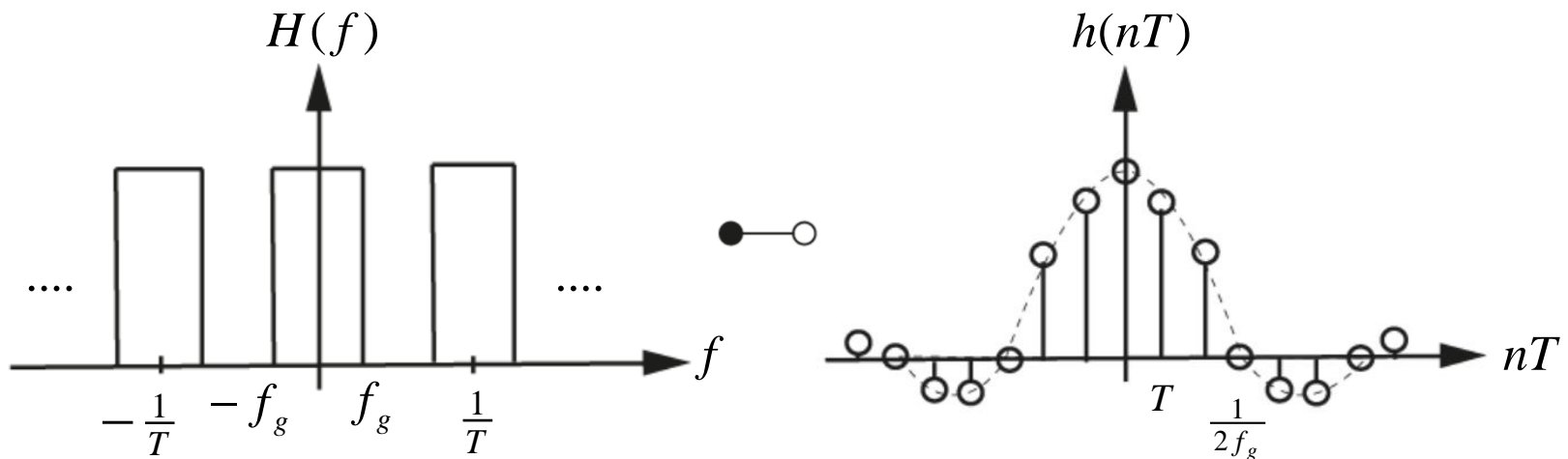
**Daraus resultierende Eigenschaft:** immer stabil  
d.h. kein Aufschaukeln, kein Aufschwingen



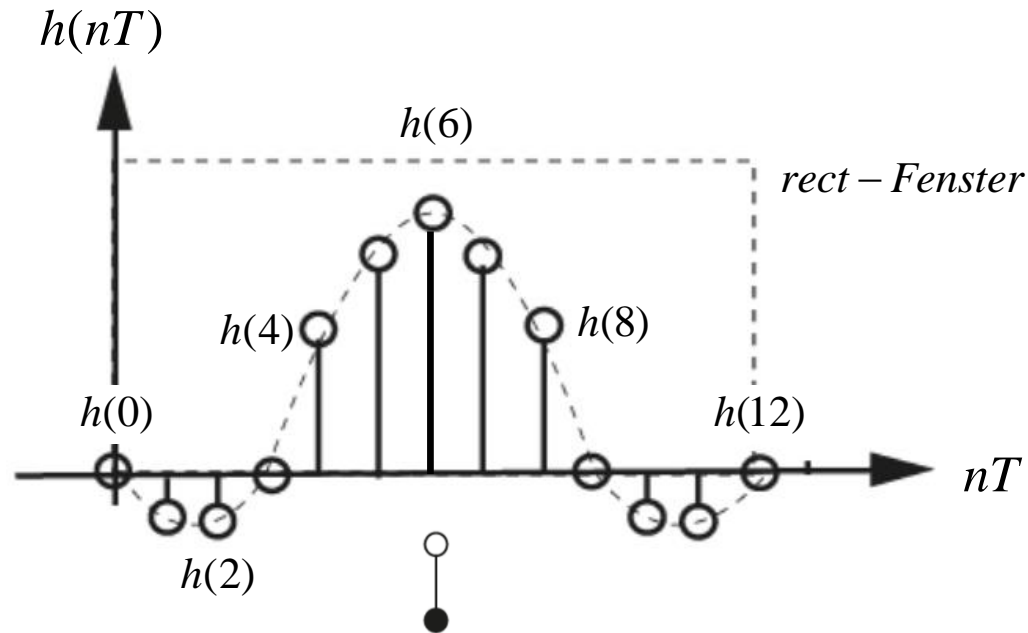
## 3 Praktische Realisierung

### 3.1 Problemstellung

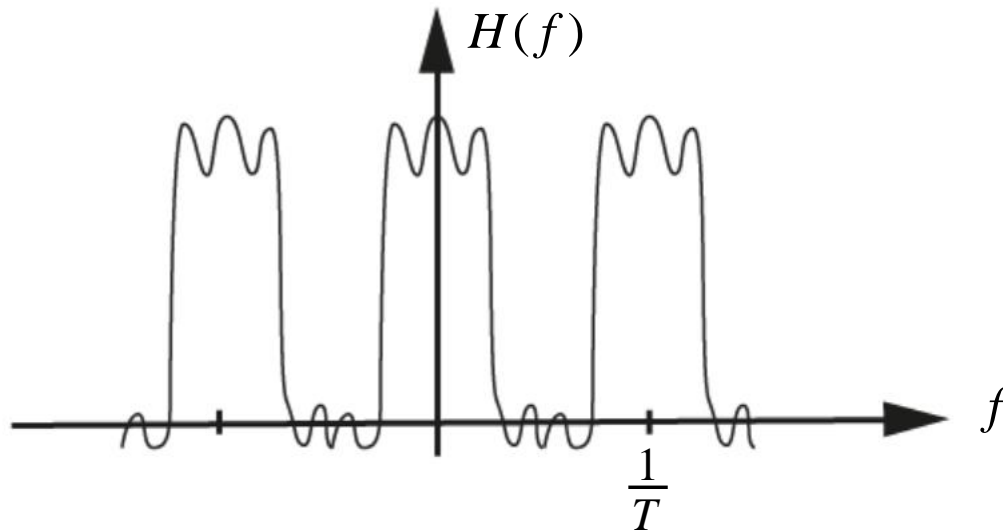
Die Impulsantwort vieler Filter ist nichtkausal und unendlich ausgedehnt.



**Lösung:** Sprungantwort mit Fensterfunktion bewerten und verschieben.



kausale und  
endliche Sprungantwort



**Allerdings:**

rect-Fenster verursacht  
stark wellige Übertragungs-  
funktion (wg. Si-Funktion)



## ***3.2 Zusammenhang zwischen Bandbreite des TP und der Abtastfrequenz***



## 4 Windowing

### 4.1 Varianten

Durch andere Fensterfunktionen können Überschwingverhalten und Flankensteilheit des Filters verändert werden.

#### Beispiele:

- rect
- Bartlett      Dreieck
- Hann      cos-Funktion
- Hamming      angehobene cos-Funktion
- Gauss      Gauss-Funktionen
- .....

## 4.2 Beispiel

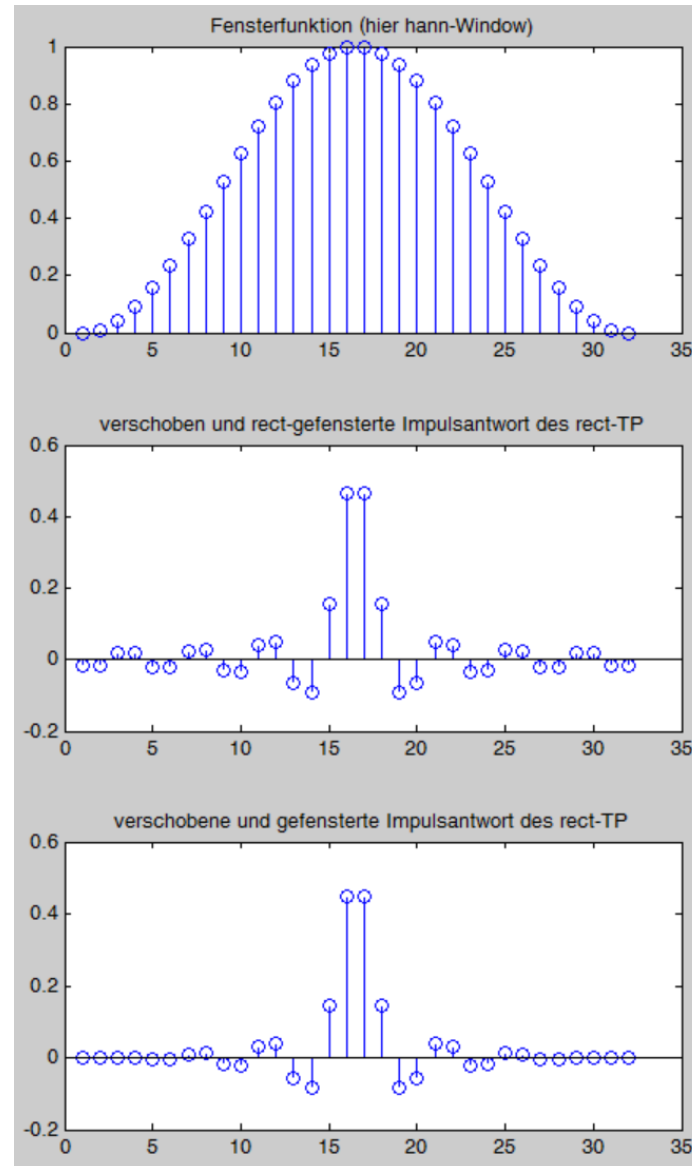
Hann-Fenster der Länge 32

•

verschobene und abgeschnittene  
Sprungantwort des rect-Tiefpasses

||

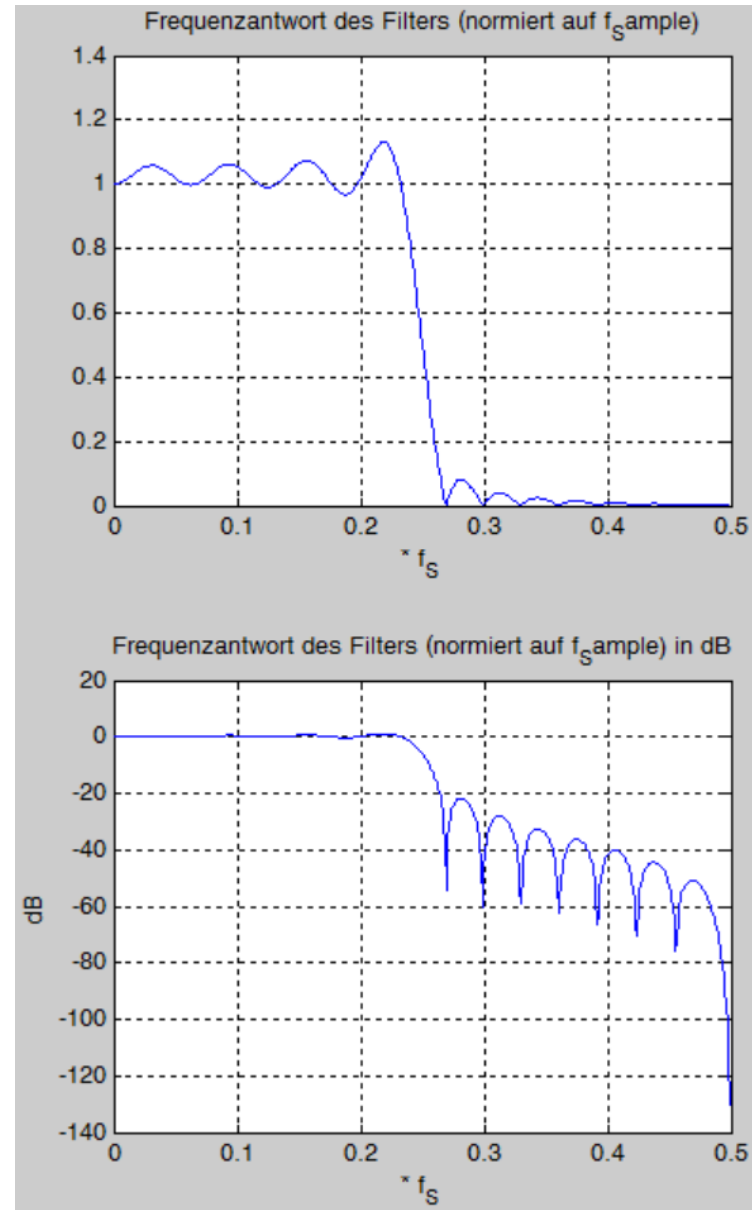
gefensterte Sprungantwort





### 4.3 FIR-Frequenzantwort

rect-Fenster ( $M=32$ )



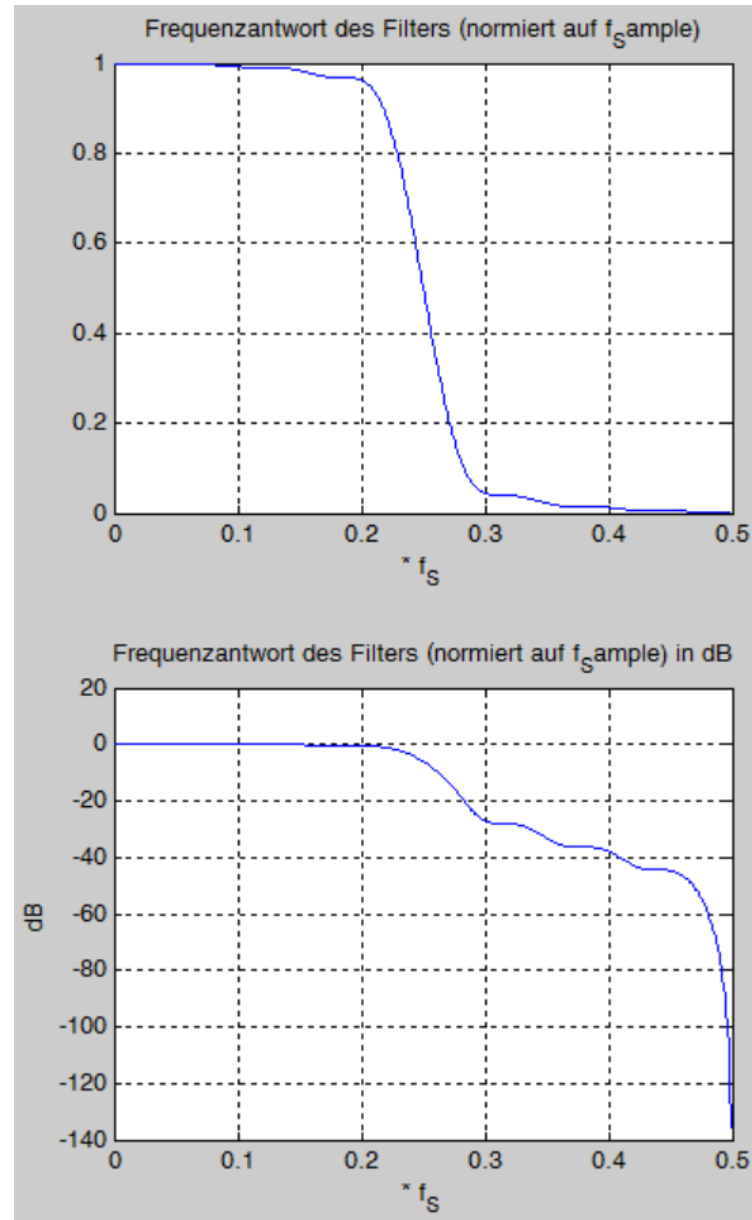
lineare Darstellung

in dB (üblich)



## FIR-Frequenzantwort

bartlett-Fenster ( $M=32$ )  
ähnlich Dreieck



lineare Darstellung

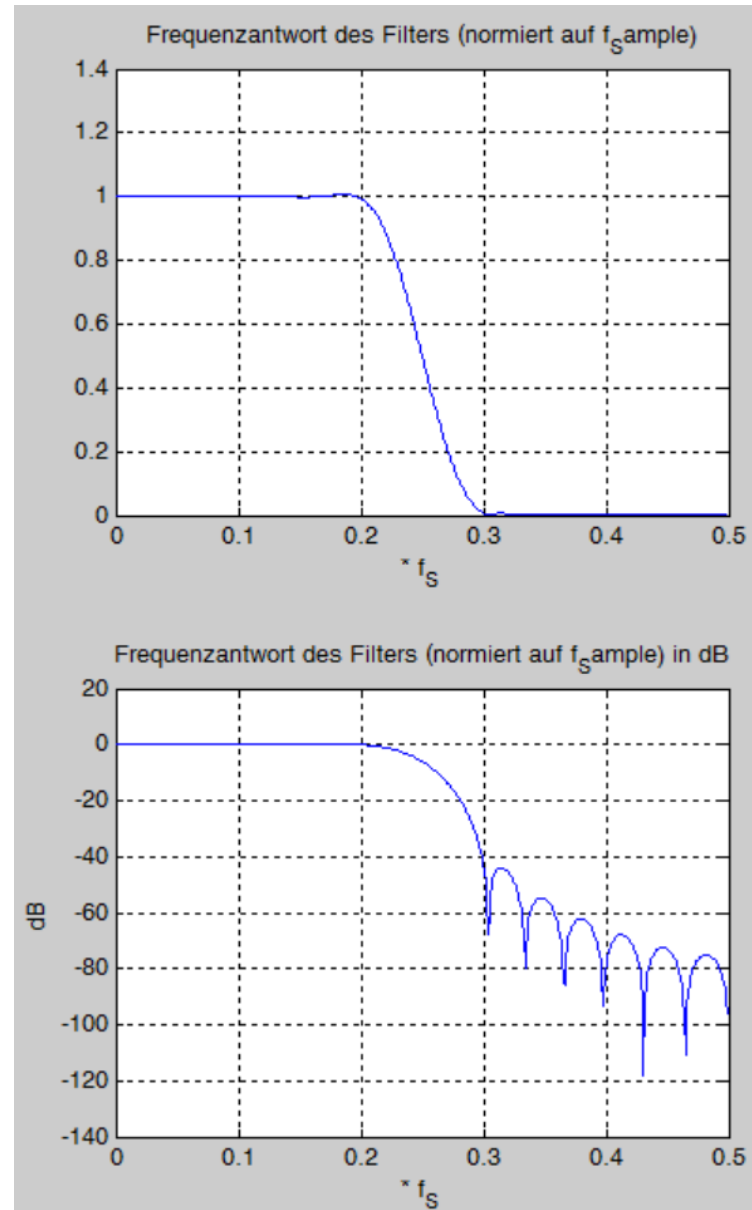
in dB (üblich)



## FIR-Frequenzantwort

hann-Fenster (M=32)

$$w(n) = \frac{1}{2} \left[ 1 - \cos\left(\frac{2\pi n}{M-1}\right) \right]$$



lineare Darstellung

in dB (üblich)

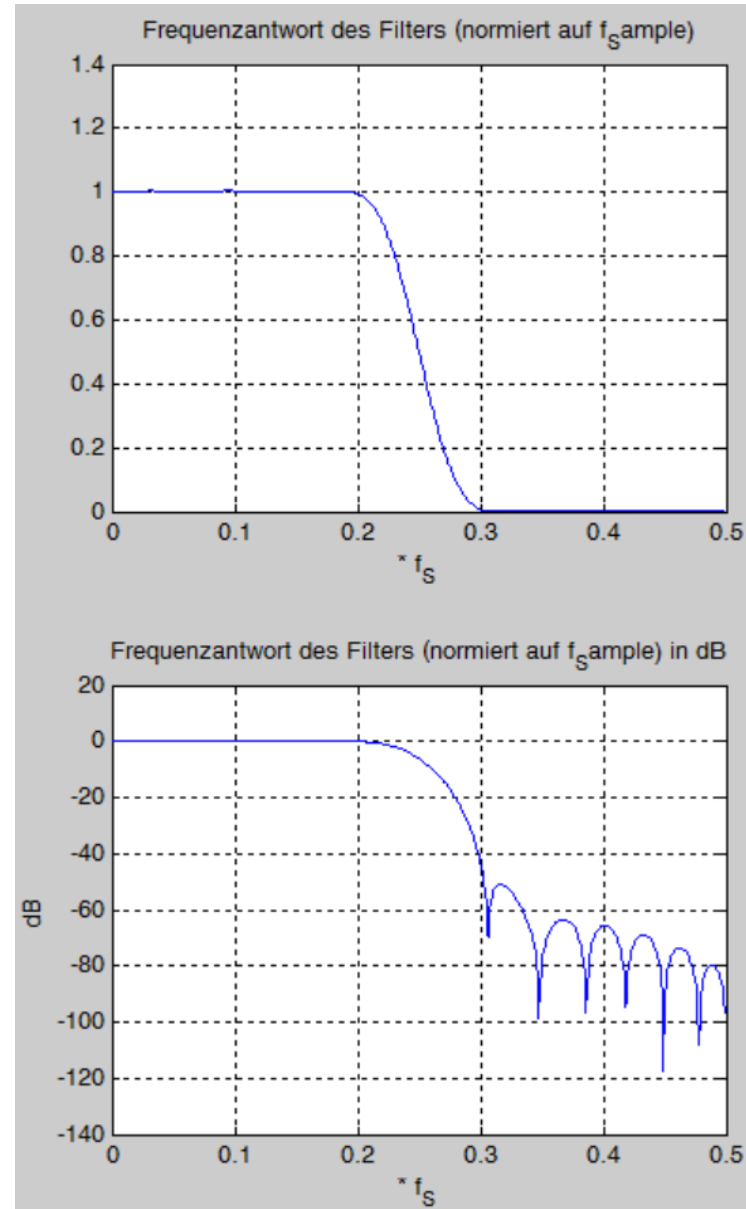




## FIR-Frequenzantwort

hamming-Fenster (M=32)

$$w(n) = 0.54 - 0.46 \cdot \cos\left(\frac{2\pi n}{M-1}\right)$$



lineare Darstellung

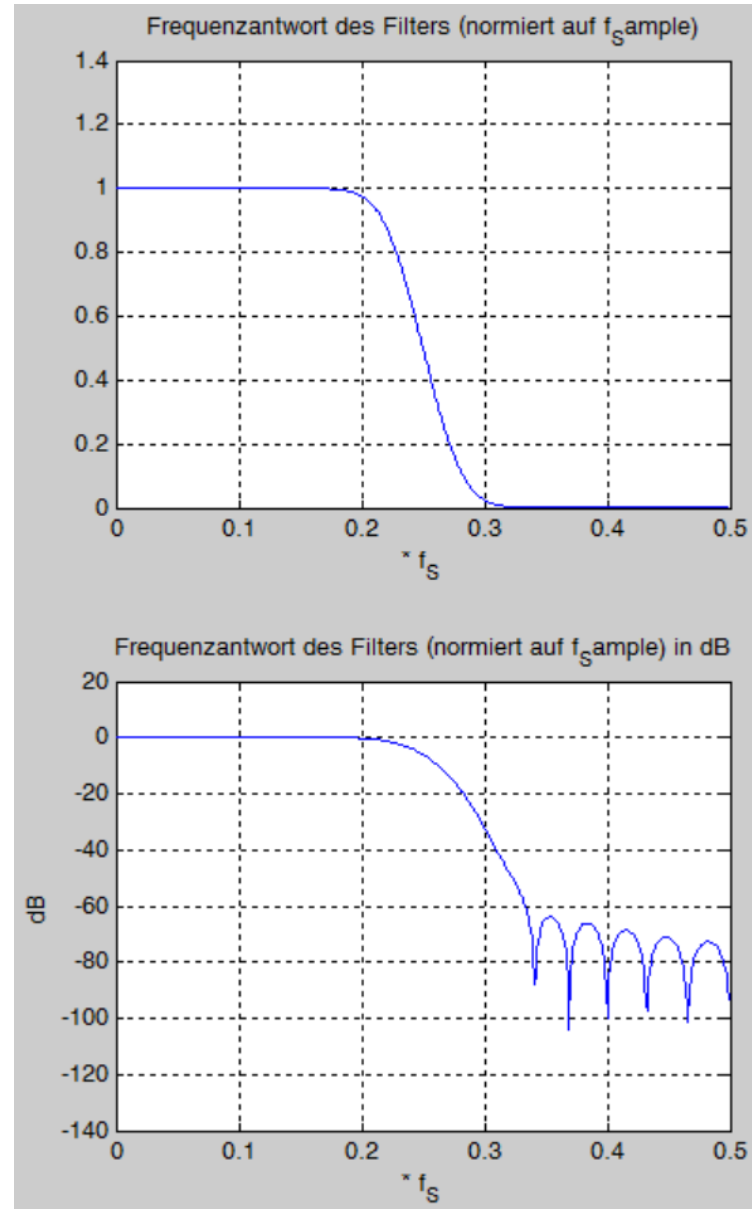
in dB (üblich)



## FIR-Frequenzantwort

gauss-Fenster ( $\sigma=2.5$ )  
( $M=32$ )

$$w(n) = e^{-\frac{1}{2} \left( \frac{n-(M-1)/2}{\sigma(M-1)/2} \right)^2}$$



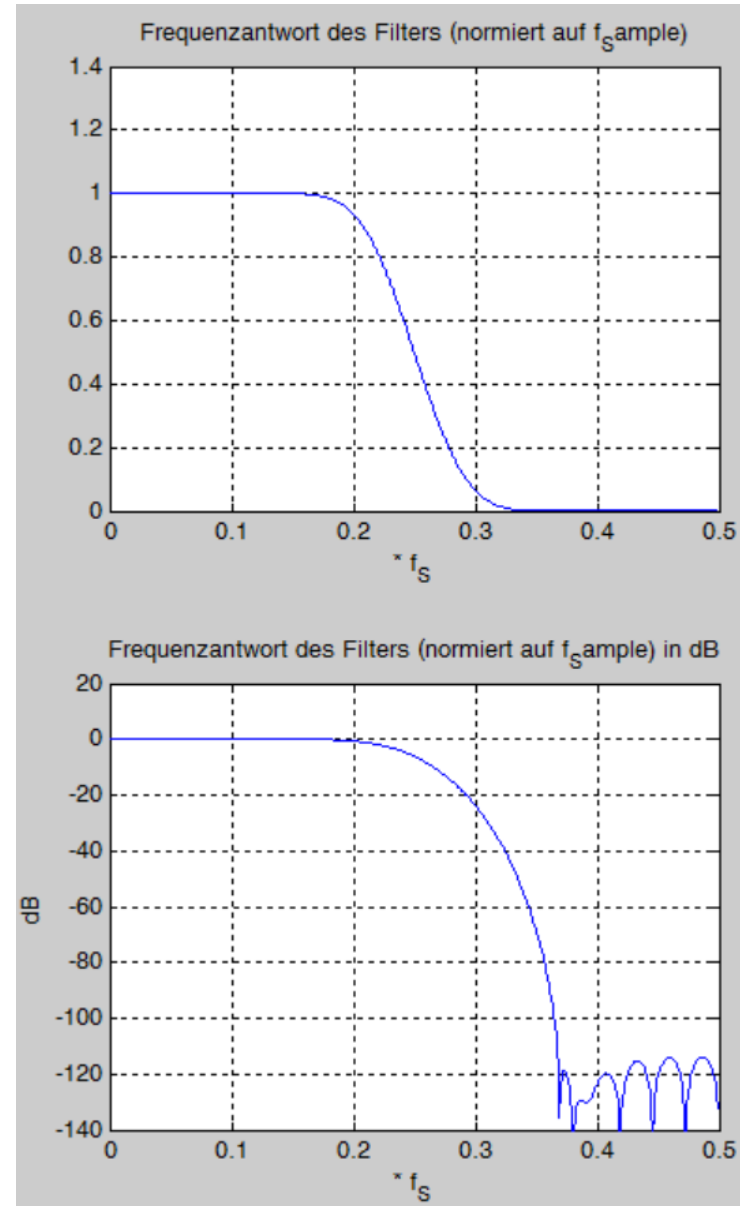
lineare Darstellung

in dB (üblich)



## FIR-Frequenzantwort

chebychev-Fenster ( $L=32$ )



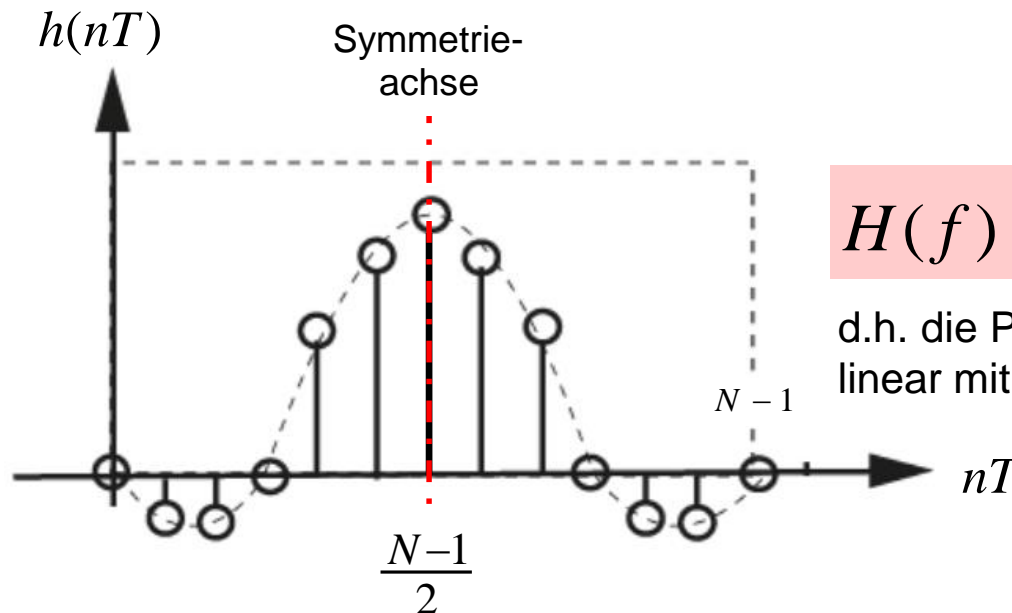
lineare Darstellung

in dB (üblich)

## 5 Linearphasige Filter

Ein Filter ist „*linearphasig*“, wenn seine Impulsantwort symmetrisch ist, d.h.

$$h(n) = h(N-1-n)$$



$$H(f) = \text{reelle Fkt.} \cdot e^{-j2\pi f \frac{N-1}{2}}$$

d.h. die Phasenverschiebung wächst linear mit der Frequenz  $f$ .

d.h. die Frequenzanteile des Eingangssignals werden entsprechend der realisierten Filtercharakteristik verändert aber alle um die gleiche Zeit  $t=(N-1)/2$  verzögert. Die Form der Einhüllenden bleiben so maximal gut erhalten.

(linearphasig = konstante Gruppenlaufzeit)



etwas mehr erläutern (:

- Phasenverlauf zeigen
- Impulserhaltung zeigen



0 Rezensionen

[Rezension schreiben](#)

Technik in der Kardiologie: Eine  
interdisziplinäre Darstellung für ...

### 14.3.1 EKG-Signalaufbereitung

Im aufgenommenen **EKG** befindet sich der Hauptteil der Information im Spektralbereich zwischen 1 Hz und 30 Hz [32]. Der Verlauf der elektrischen Erregung des Herzens ist jedoch von unterschiedlichen Störungen überlagert:

- Durch Bewegung des Patienten oder der Elektroden entstehen z. B. Nulllinien-Schwankungen im Frequenzbereich bis 0,5 Hz.
- Bis weit über den eigentlichen Frequenzbereich des EKGs hinaus finden sich Störungen durch Muskelaktivität, sogenanntes Elektromyogramm-Rauschen (EMG).
- Neben diesen beiden Hauptstörquellen wird das **EKG**-Spektrum von kapazitiven und induktiven Einstreuungen vorwiegend bei der landesüblichen Netzfrequenz (50 Hz oder 60 Hz) und ihren harmonischen Vielfachen überlagert.

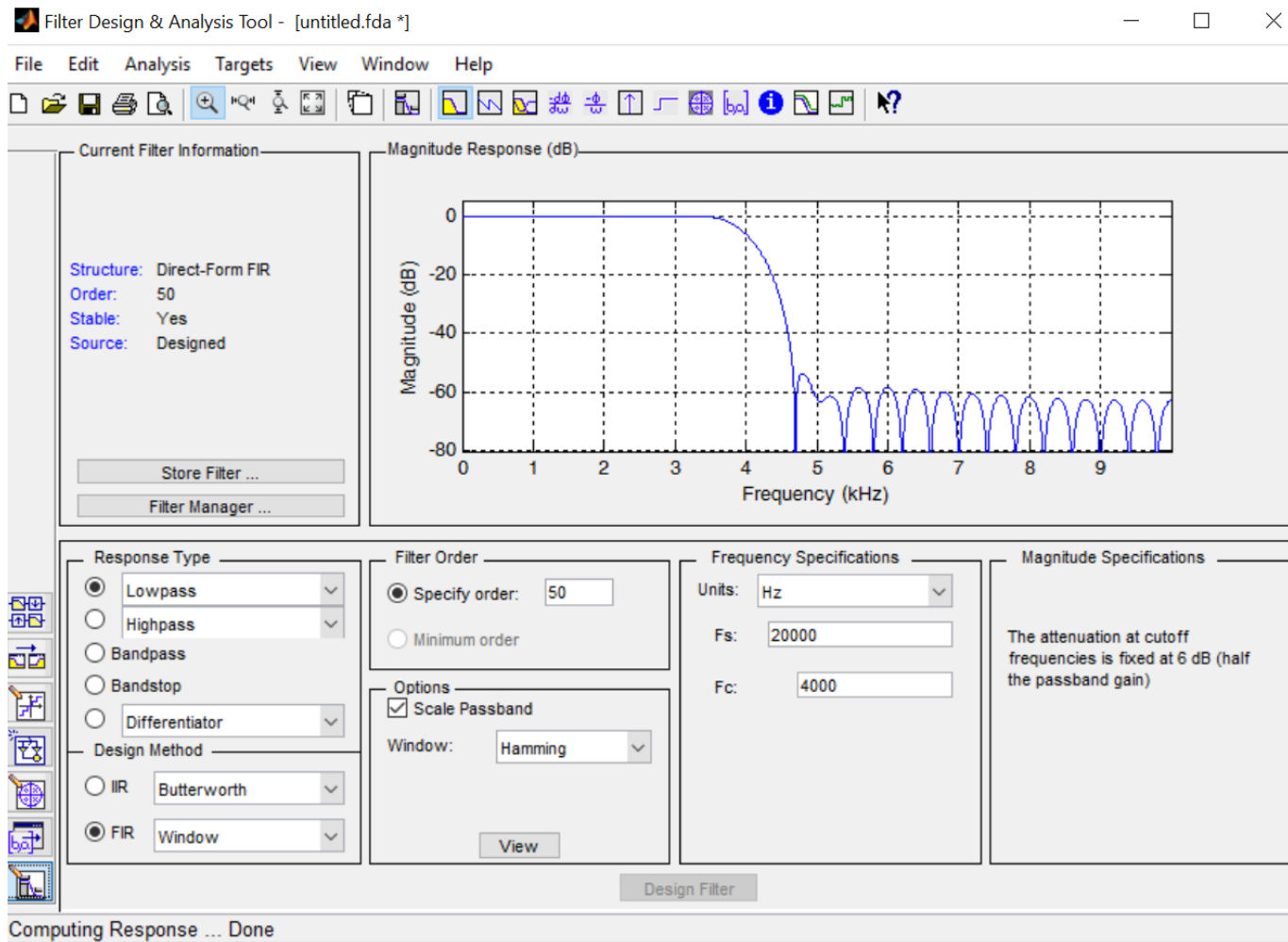
Vor allem für **EKG**-Analysemethoden im Zeitbereich werden Filter zur Signalaufbereitung vor dem eigentlichen Detektor eingesetzt. Dabei finden in der Regel zu zusammengesetzte Filter mit Bandpass-Charakteristik und Nullstellen bei 50 Hz oder 60 Hz Verwendung [27, 29, 38]. Bei hochauflösenden Frequenzbereichsverfahren sind solche Filter meist nicht notwendig, da die Störsignalanteile bei der Klassifikation ohnehin berücksichtigt werden. Unabhängig davon ist bei einer Digitalisierung der Signale das Warmhalten eines Autoaliasing-Filters zwingend erforderlich.

Verfahren zur allgemeinen Entstörung des **EKG** finden sich in [2]. Zum großen Teil handelt es sich dort um verschiedene Verfahren der Mittelwertbildung. Dem gegenüber gestellt wird die Signalaufbereitung durch eine linearphasige 32-kanalige Filterbank, die einen Frequenzgang aufweist, der an das **EKG**-Spektrum angepasst ist. Eine solche Filterbank wird durch Parallelschaltung mehrerer schmalbandiger digitaler Bandpässe mit identischer Phasenverzögerung und somit Durchlaufzeit gebildet. Es zeigt sich, dass sich mit solch einer Filterbank das mit Abstand beste Signal-Rausch-Verhältnis erreichen lässt. Allerdings entsteht durch den Einsatz auch ein beträchtlicher Rechenaufwand für die verarbeitende Elektro-



## 6 Praktischer FIR-Filterentwurf mit MATLAB

### 6.1 Mit dem „fdatool“





## 6.2 Explizite Befehle

```
fs = 20000;    % Samplefrequenz festlegen
fg = 5000;     % Grenzfrequenz des Filters festlegen

FreqNorm = fg/(fs/2);

Length = 32;           % Filterlänge festlegen

wnd = hann(Length);    % Fensterfunktion erzeugen

% Filterkoeffizienten berechnen (b = Koeff.-Vektor)
b = fir1(Length-1, FreqNorm, wnd);

% Impulsantwort anzeigen
stem(b);

% Frequenzantwort anzeigen (dB-Skala)
[H,w]=freqz(b);
plot(w/(2*pi), 20*log10(abs(H)));
```



## 6.3 Hochpass, Bandpass, Bandsperre

```
Length = 33;      % Filterordnung (Länge)
fs = 20000;      % Samplerate

fg = 5000;       % für Lowpass, Highpass
FreqNorm_g = fg / (fs/2);

fu = 2000;       % für Bandpass, Bandstop
fo = 4000;
FreqNorm_u = fu / (fs/2);
FreqNorm_o = fo / (fs/2);

b = fir1(Length-1, FreqNorm, wnd);           % TP
b = fir1(Length-1, FreqNorm, 'high', wnd);   % HP
b = fir1(Length-1, [FreqNorm_u, FreqNorm_o], wnd); % BP
b = fir1(Length-1, [FreqNorm_u, FreqNorm_o], 'stop', wnd); % BS
...
...
```

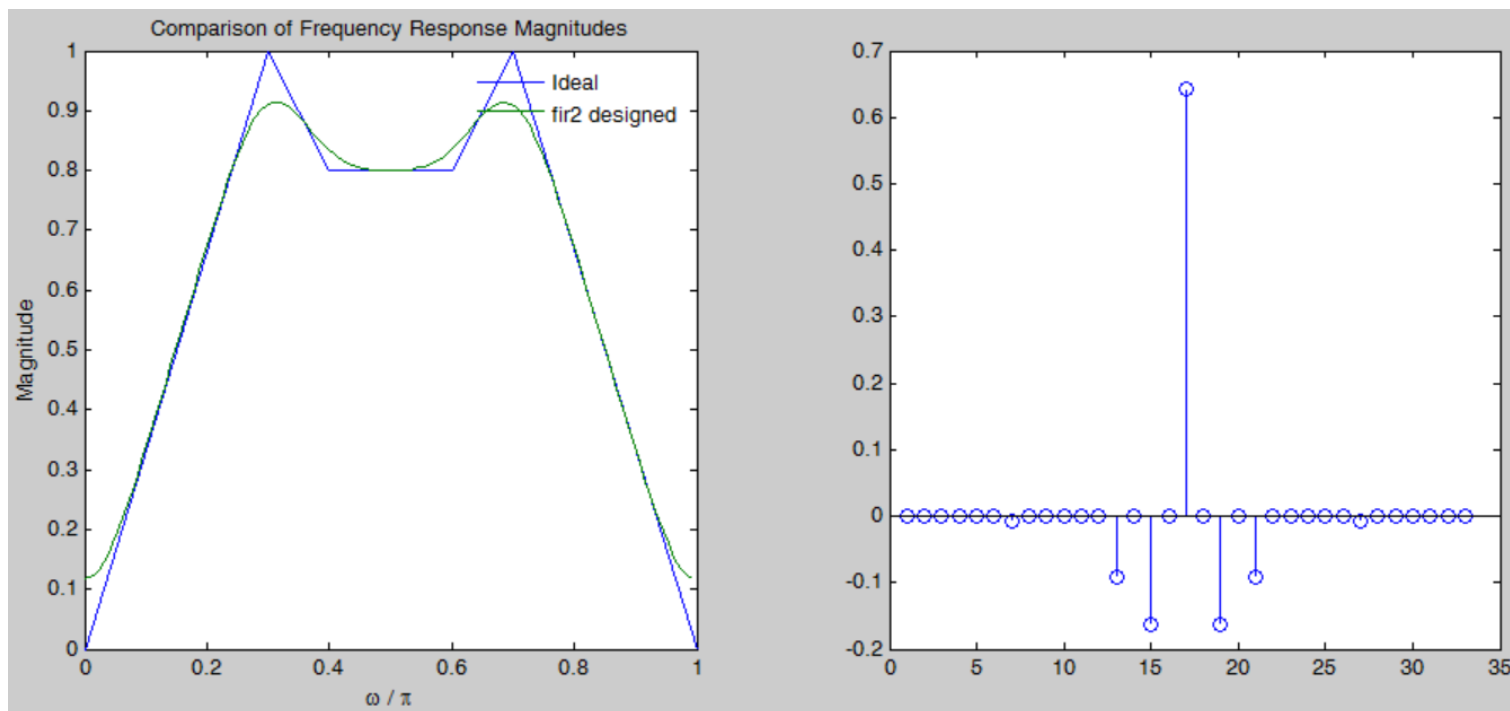


## 6.4 Weitere Möglichkeiten

MATLAB bietet viele weitere Funktionen für das Filterdesign an.

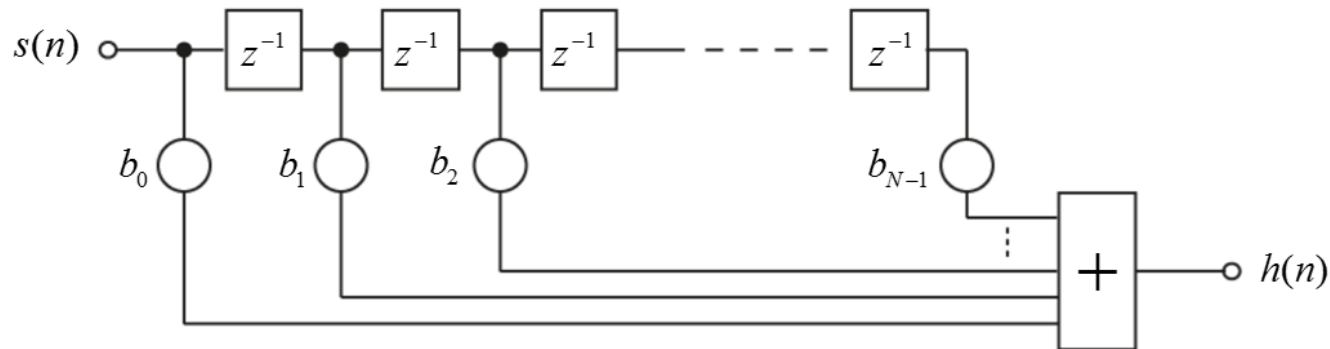
- `fir2(...)` erlaubt die Vorgabe beliebig geformter Filterfunktionen mit Frequenzabtastung.  
`fir1s(...)` erlaubt die Vorgabe beliebig geformter Filterfunktionen mit LeastSquares-Methode

u.v.m. ....





## 7 Implementierung



// Beispiel: FIR der Länge 32

```

x[31] = x[30];
x[30] = x[29];
x[29] = x[28];
...
...
x[3] = x[2];
x[2] = x[1];
x[1] = x[0];
x[0] = s;

```

- wird pro Sampletakt einmal aufgerufen
- ein Inputwert s wird zur Berechnung übergeben
- ein Outputwert h wird zurückgegeben

```

h = b0*x[0] + b1*x[1] + ... + b30*x[30] + b31*x[31];

```



# C

## 3. Digitale Filter

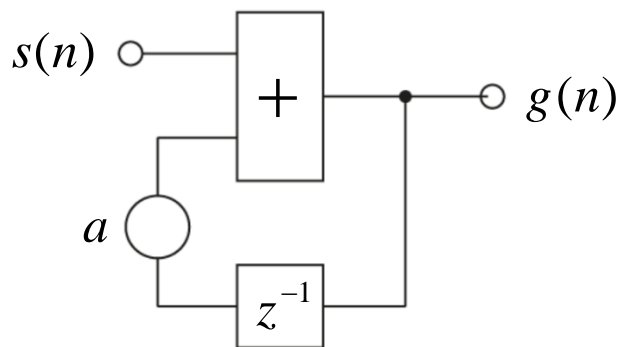
- Verarbeitungskette
- Nichtrekursive Filter (FIR)
- **Rekursive Filter (IIR)**
- Hochpaß, Bandpass, Bandsperre
- Ausgewählte Digitalfilter
- Dezimation und Interpolation
- Fehlereffekte digitaler Filter
- Vergleich der Filterkonzepte
- Digitalfilter aus Analogfiltern

# 1 Einführung

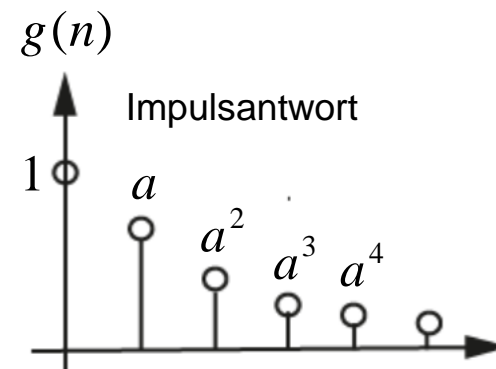
Rekursive Filter = Infinite-impulse-response-Filter (IIR-Filter)

Kennzeichen: Ausgangssignal auf Eingang rückgekoppelt

**Beispiel:** digitaler RC-Tiefpass 1. Ordnung



$$g(n) = s(n) + a \cdot g(n-1)$$



$$a = 0.7$$



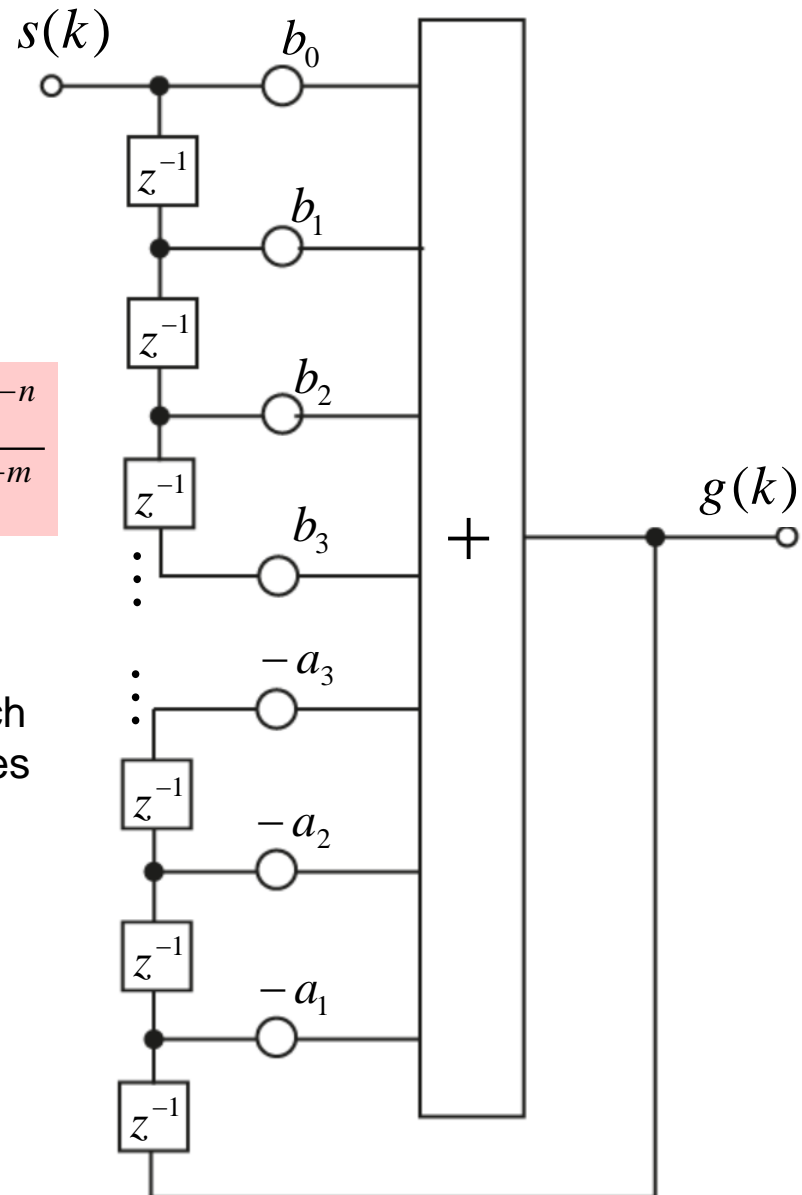
## 2 Struktur von IIR-Filtern

### 2.1 ÜF und Strukturbild (DF1)

Übertragungsfunktion:

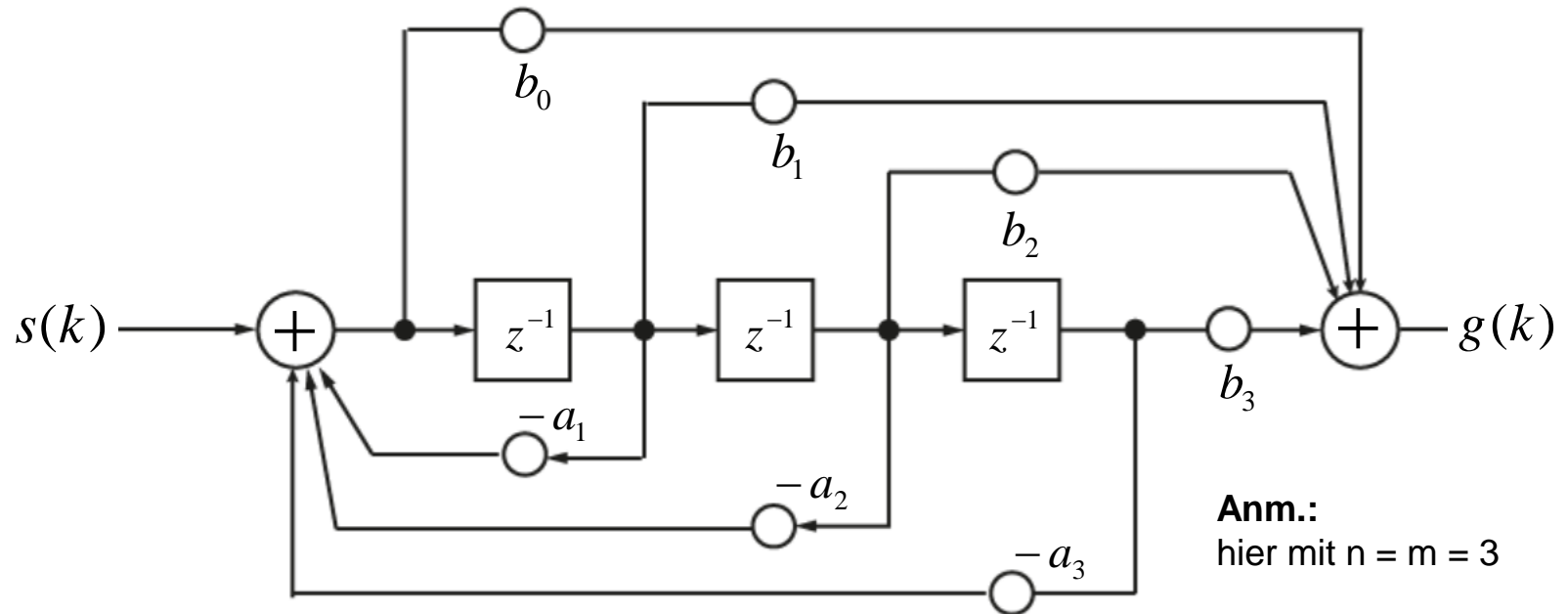
$$H(z) = \frac{G(z)}{S(z)} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_n z^{-n}}{1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_m z^{-m}}$$

Die Darstellung in „Direktform 1“ ergibt sich unmittelbar aus der Differenzgleichung des Filters.



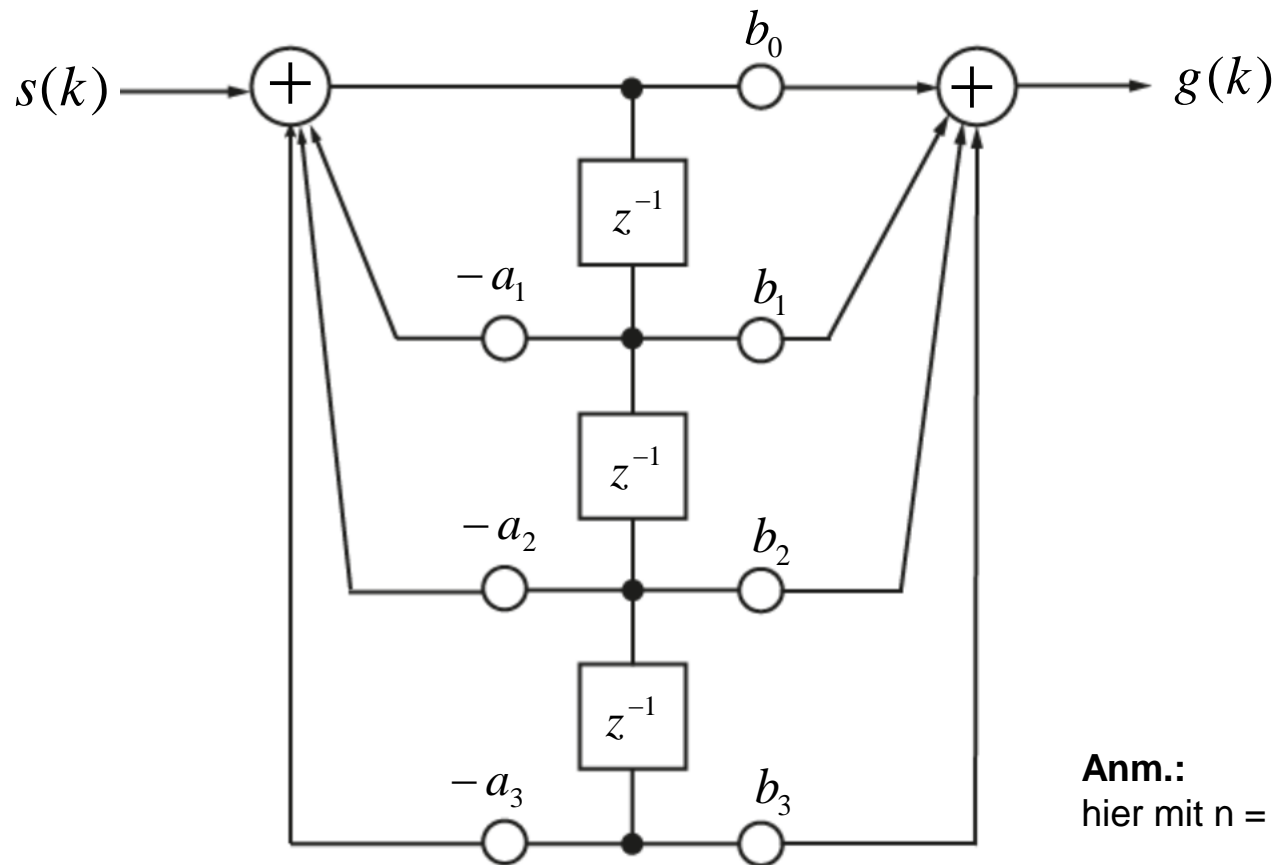


## 2.2 Darstellung in Direktform 2 (Darstellungsvariante a)





## 2.2 Darstellung in Direktform 2 (Darstellungsvariante b)



**Anm.:**  
hier mit  $n = m = 3$



## Übung: Darstellungsformen des IIR-Filters

Es ist zu zeigen, dass Direktform 1 und Direktform 2 die gleiche Übertragungsfunktion haben (also äquivalent sind).

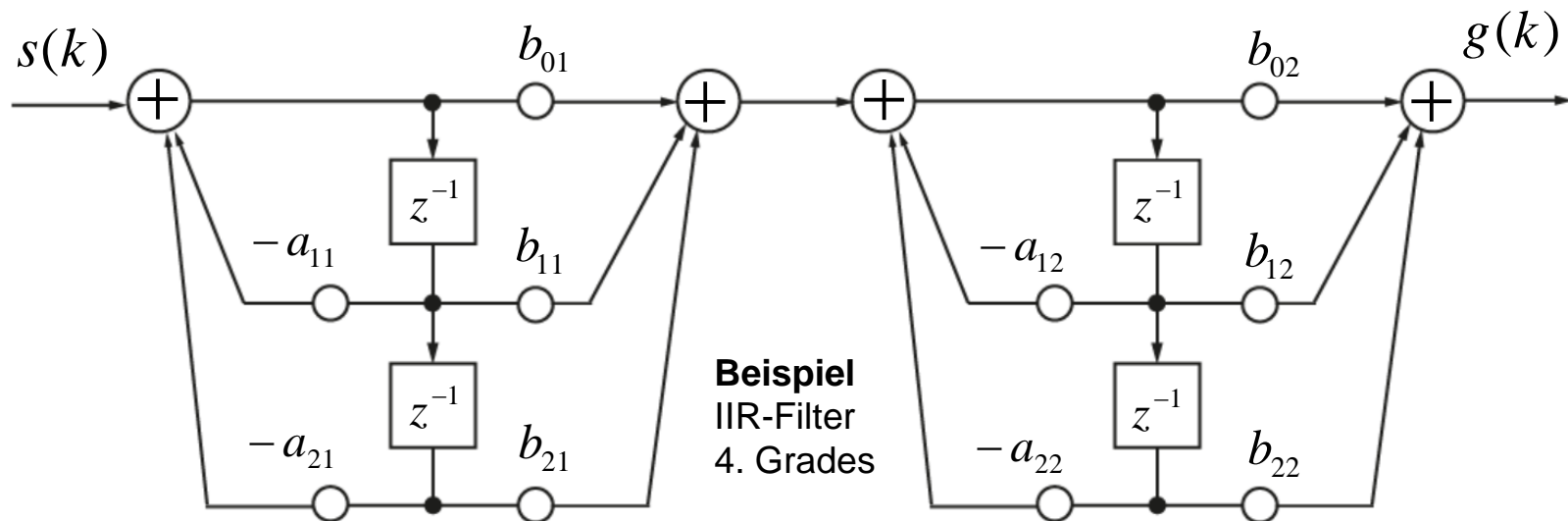


### 3 Numerisch robuste Realisierung

Digitale IIR-Filter werden i.Allg. nicht als Ganzes in der Direktform 1 oder 2 realisiert.

Für solcherart realisierte Filter müssten die Filterkoeffizienten extrem genau zur Verfügung gestellt werden, da sie schon bei kleinen Abweichungen zu Instabilitäten neigen (aufschaukelnde Fehler).

Daher wird das Gesamtsystem meist als Reihenschaltung von Filtern 1. und 2. Grades (*Second Order Sections* = SOS) realisiert.





Für die Zerlegung einer Übertragungsfunktion in Second-order-sections verwendet man die *Partialbruchzerlegung*.

$$\begin{aligned} H(z) &= \frac{G(z)}{S(z)} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_n z^{-n}}{1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_m z^{-m}} \\ &= \frac{b_{01} + b_{11} z^{-1} + b_{21} z^{-2}}{1 + a_{11} z^{-1} + a_{21} z^{-2}} \cdot \frac{b_{02} + b_{12} z^{-1} + b_{22} z^{-2}}{1 + a_{12} z^{-1} + a_{22} z^{-2}} \cdot \dots \cdot \frac{b_{0q} + b_{1q} z^{-1} + b_{2q} z^{-2}}{1 + a_{1q} z^{-1} + a_{2q} z^{-2}} \end{aligned}$$

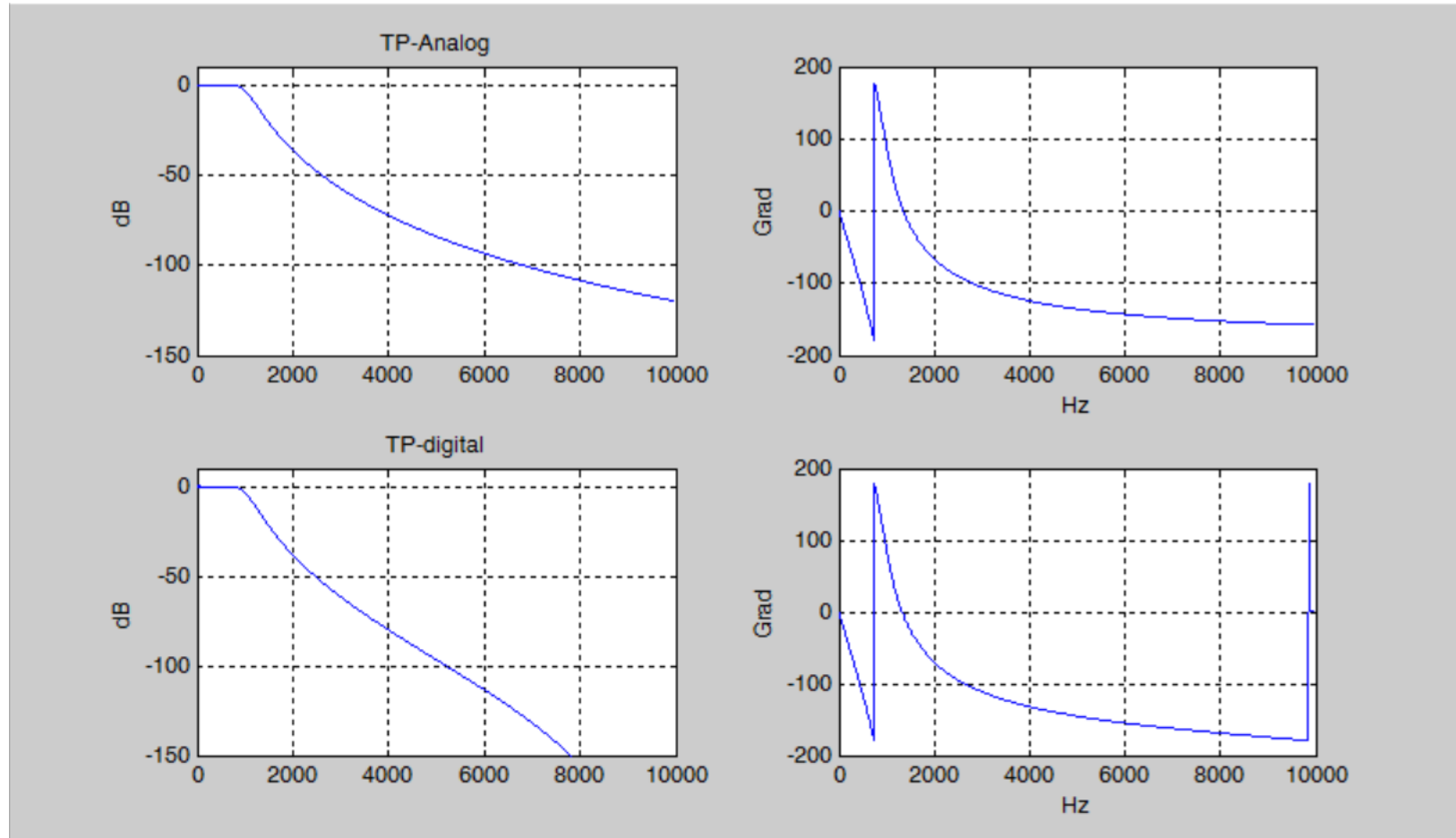
Dieser Schritt ist, manuell durchgeführt, recht arbeitsaufwendig.

In MATLAB verwendet man hierfür zweckmäßigerweise die Funktion `tf2sos(b,a)` (Transferfunction to second-order-sections).



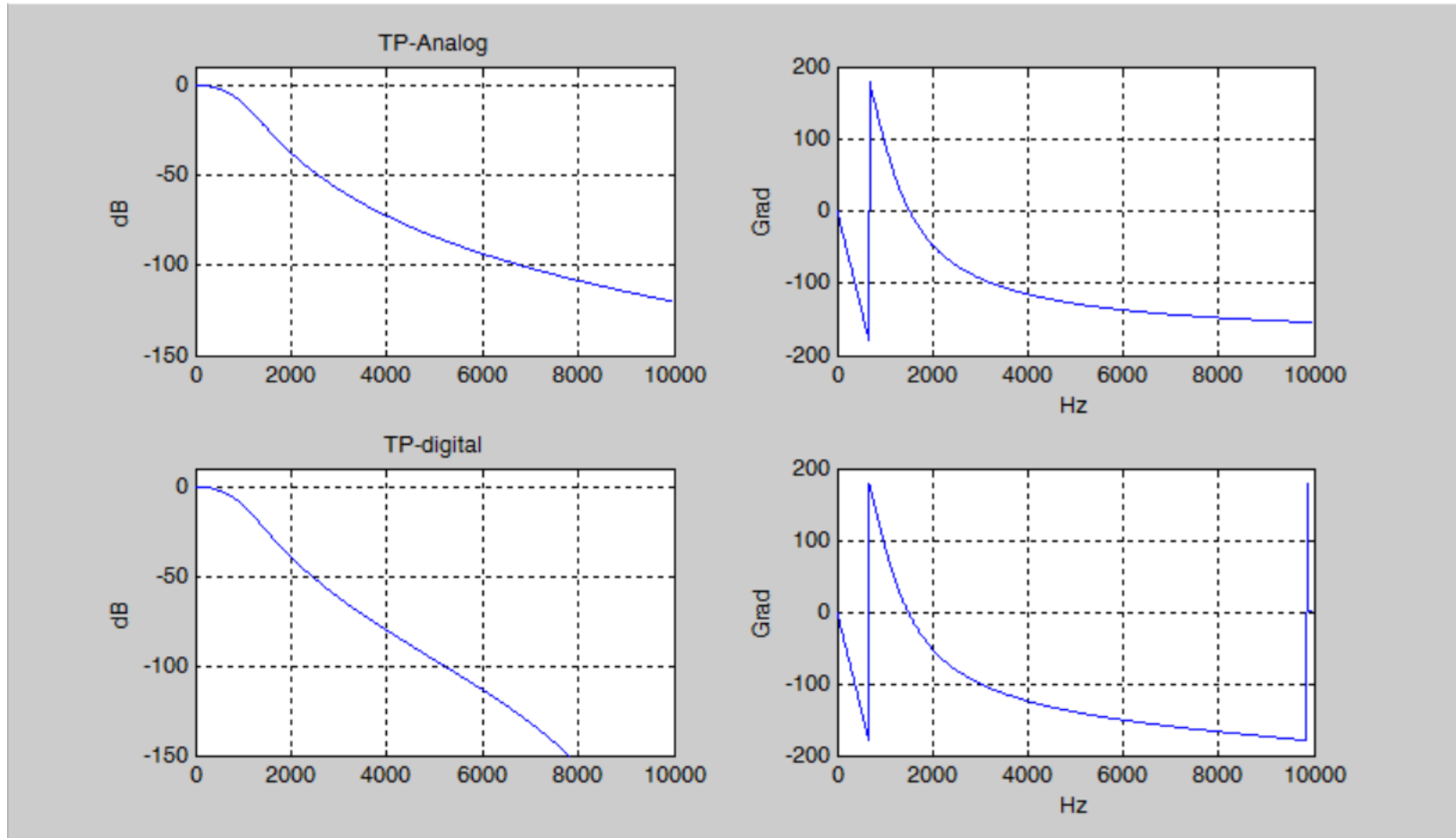
## 4 Filtertypen

### 4.1 Butterworth-Filter (6. Ordnung, $f_g=1000\text{Hz}$ , $f_s=20000\text{Hz}$ )



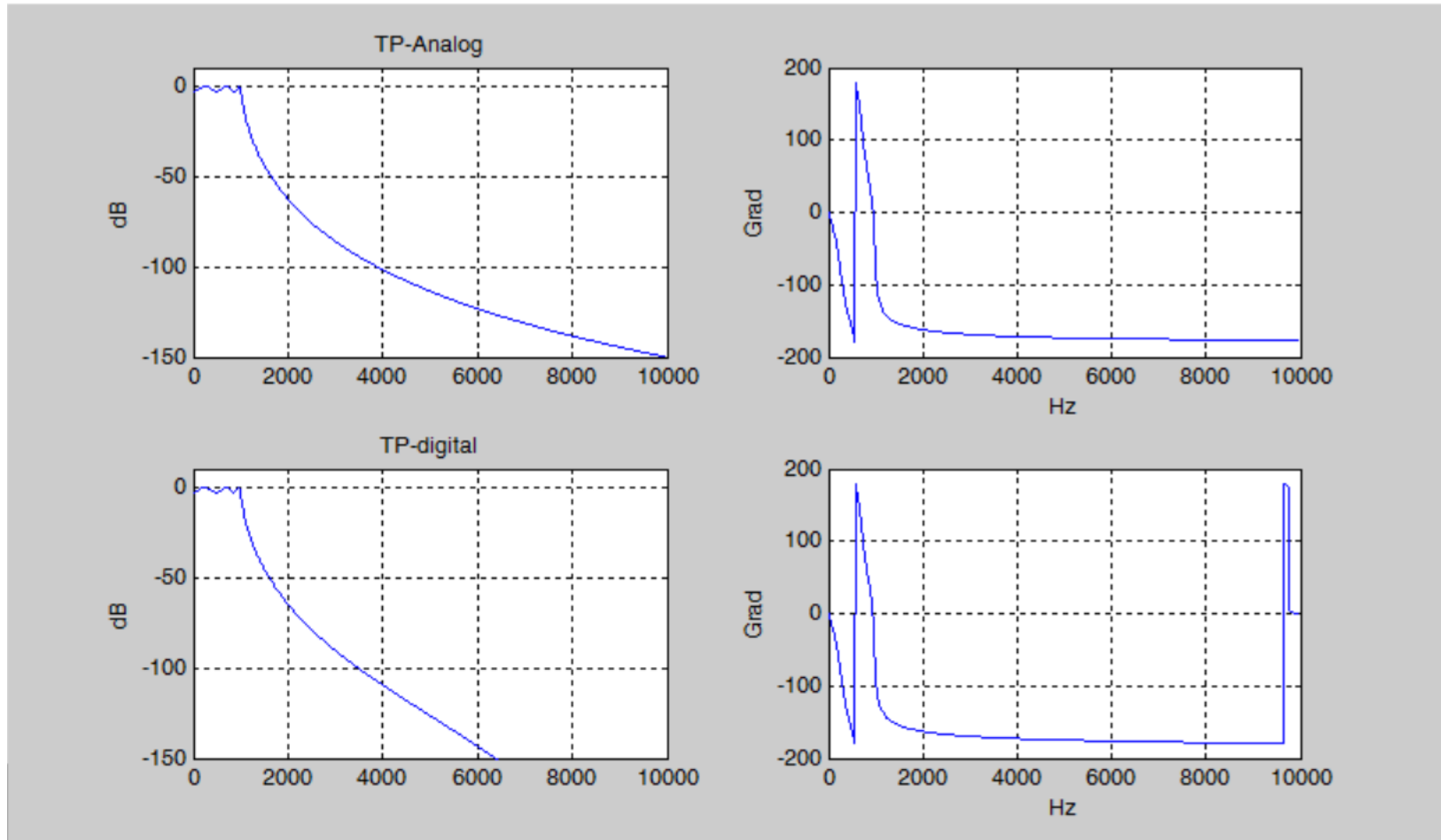


## 4.2 Bessel-Filter (6. Ordnung, $f_g=1000\text{Hz}$ , $f_s=20000\text{Hz}$ )

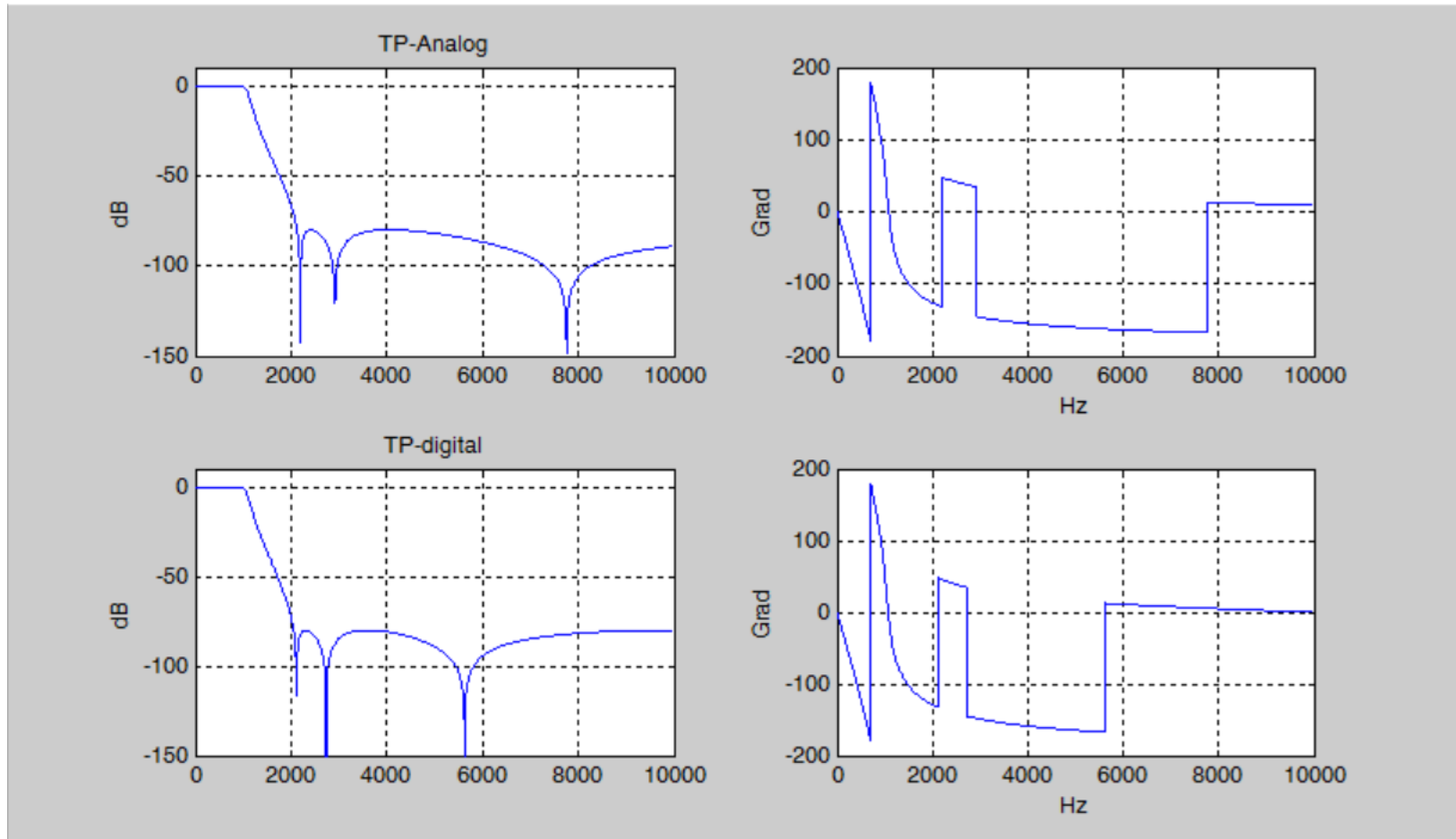




### 4.3 Chebychev-Filter (Typ 1, 6. Ordnung , $f_g=1000\text{Hz}$ , $f_s=20000\text{Hz}$ )



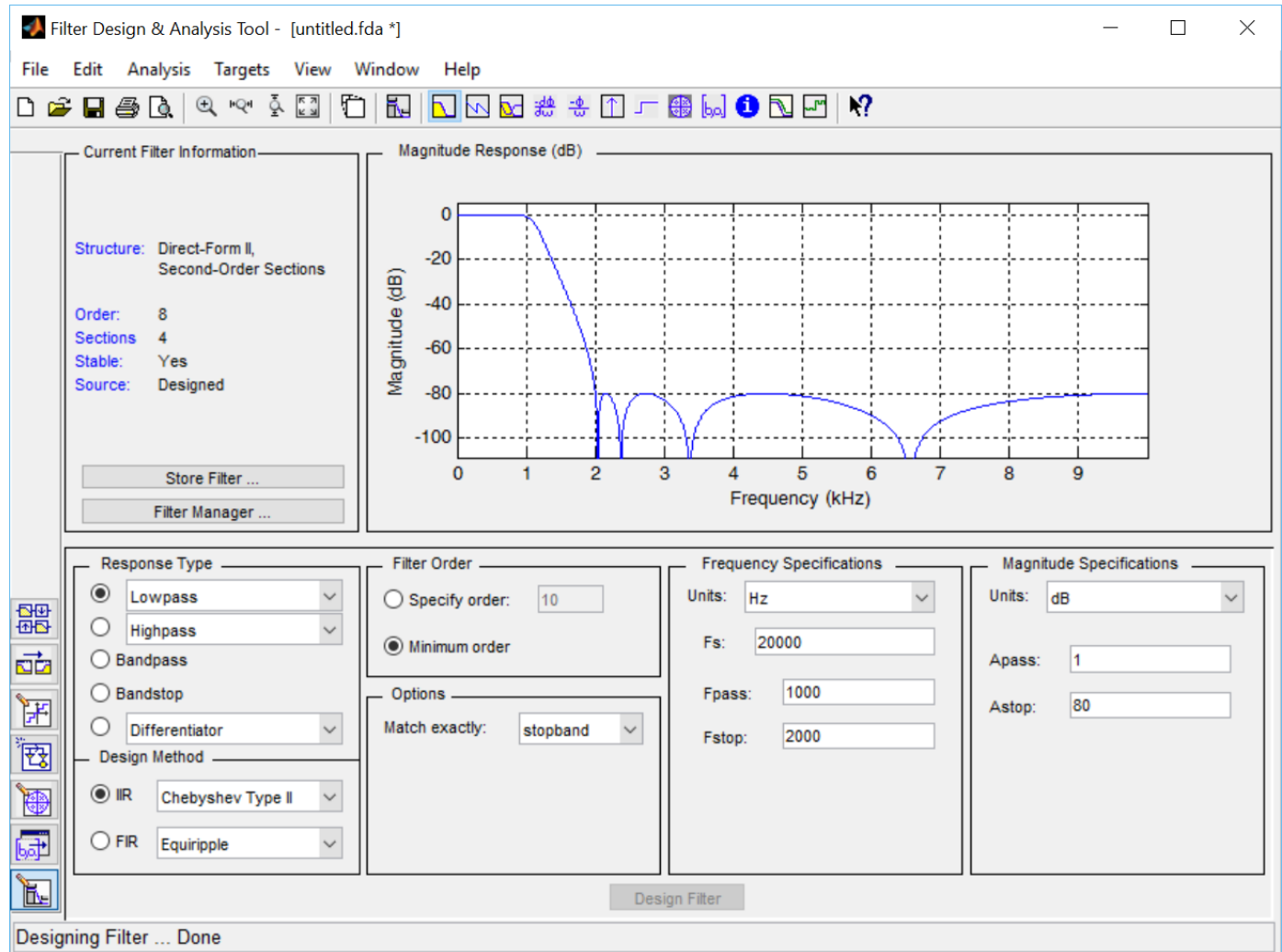
#### 4.4 Cauer-Filter (elliptic-filter , $f_g=1000\text{Hz}$ , $f_s=20000\text{Hz}$ )





# 5 Praktischer FIR-Filterentwurf mit MATLAB

## 5.1 fdatool





## 5.2 Explizite Befehle

```
order = 6;          % Filterordnung
fg      = 1000;      % Grenzfrequenz des Filters
fs      = 20000;     % Samplefrequenz

% Tiefpass-Prototyp (normiert)
[z,p,k]   = buttap(order); % Butterworth filter Prototyp
[bp,ap]   = zp2tf(z,p,k);  % in Übertragungsfkt. konvert.

% Umwandeln in realen Tiefpass (mit gewünschter Grenzfrequenz)
[b,a] = lp2lp(bp, ap, fg*2*pi);

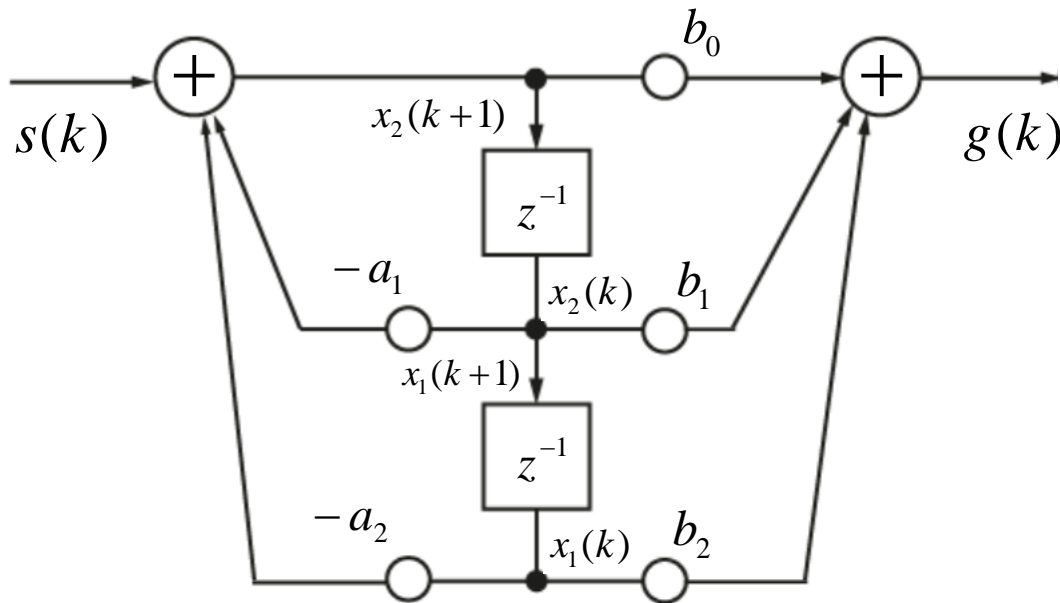
% Filter digitalisieren (Bilineare Transformation)
[b_dig,a_dig] = bilinear(b,a,fs);

% Frequenzgang erzeugen
[Hd, wd] = freqz(b_dig, a_dig, 2000);
fd       = fs*wd/(2*pi); % Winkelgeschw. in Freq. (Hz)

% Frequenzgang in dB plotten
plot(fd, 20*log10(abs(Hd)));
```



## 6 Implementierung von Second-order-sections



// Second-order-section

- wird pro Sampletakt einmal aufgerufen
- ein Inputwert s wird zur Berechnung übergeben
- ein Outputwert g wird zurückgegeben

```

x1k1 = x2k;
x2k1 = -a2*x1k - a1*x2k + s;
g      = +b0*x2k1 + b1*x2k + b2*x1k;
x1k = x1k1; // Verzögerungselement
x2k = x2k1; // Verzögerungselement

```





# C

## 3. Digitale Filter

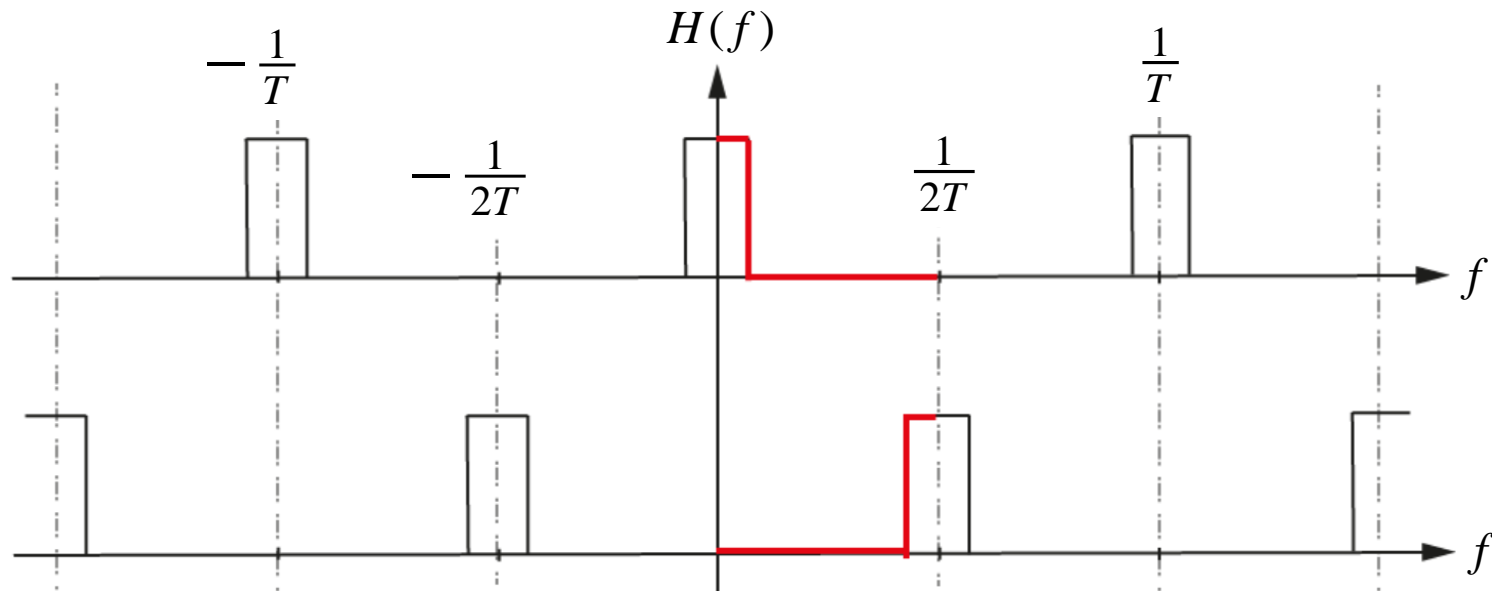
- Verarbeitungskette
- Nichtrekursive Filter (FIR)
- Rekursive Filter (IIR)
- **Hochpaß, Bandpass, Bandsperre**
- Spezielle Digitalfilter
- Dezimation und Interpolation
- Fehlereffekte digitaler Filter
- Vergleich der Filterkonzepte
- Digitalfilter aus Analogfiltern



# 1 Theorie

## 1.1 Tiefpass-Hochpass-Transformation

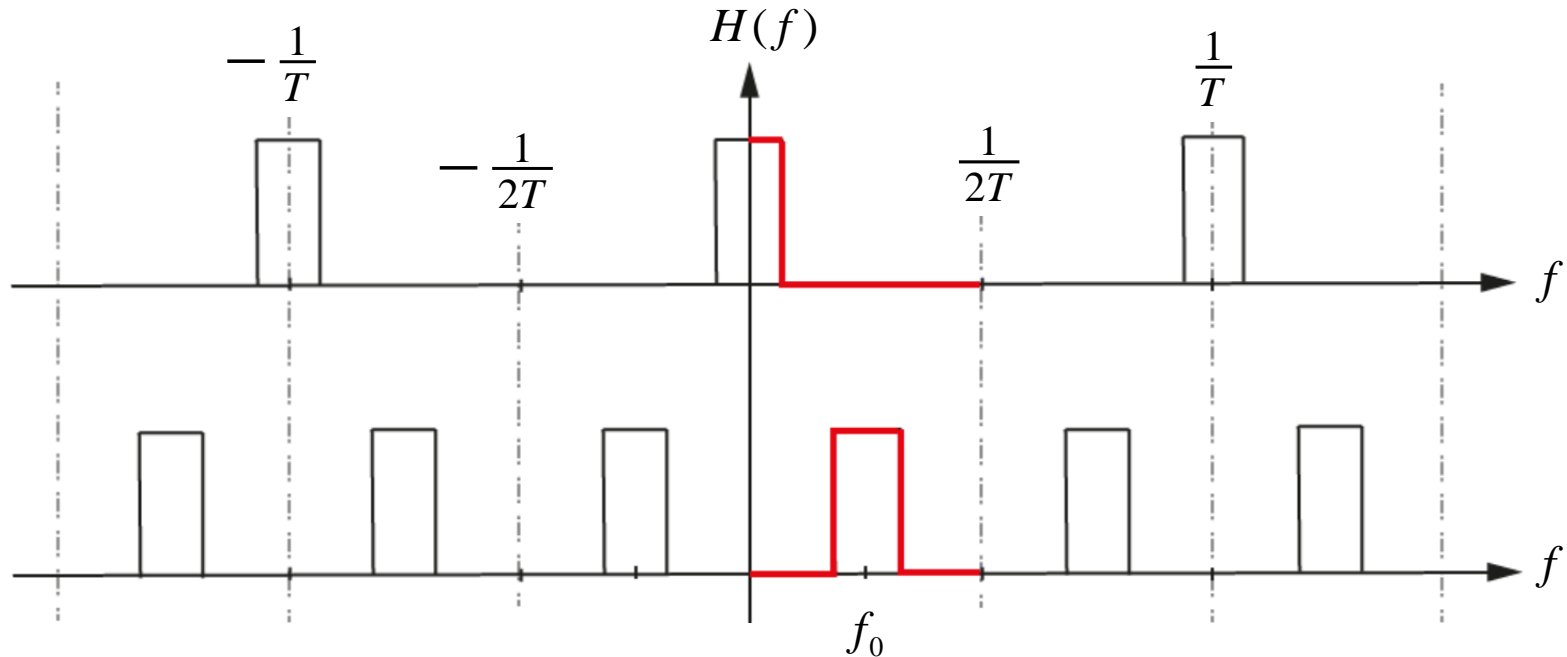
Durch einfache Transformationen lassen sich die Filterkomponenten für HP, BP und BS aus den entsprechenden TP-Filterkomponenten bestimmen.



$$H_{HP}(f) = H_{TP}(f) * \frac{1}{2} \left[ \delta\left(f - \frac{1}{2T}\right) + \delta\left(f + \frac{1}{2T}\right) \right]$$

$$h_{HP}(nT) = h_{TP}(nT) \cdot \cos(\pi n) = h_{TP}(nT) \cdot (-1)^n$$

## 1.2 Tiefpass-Bandpass-Transformation

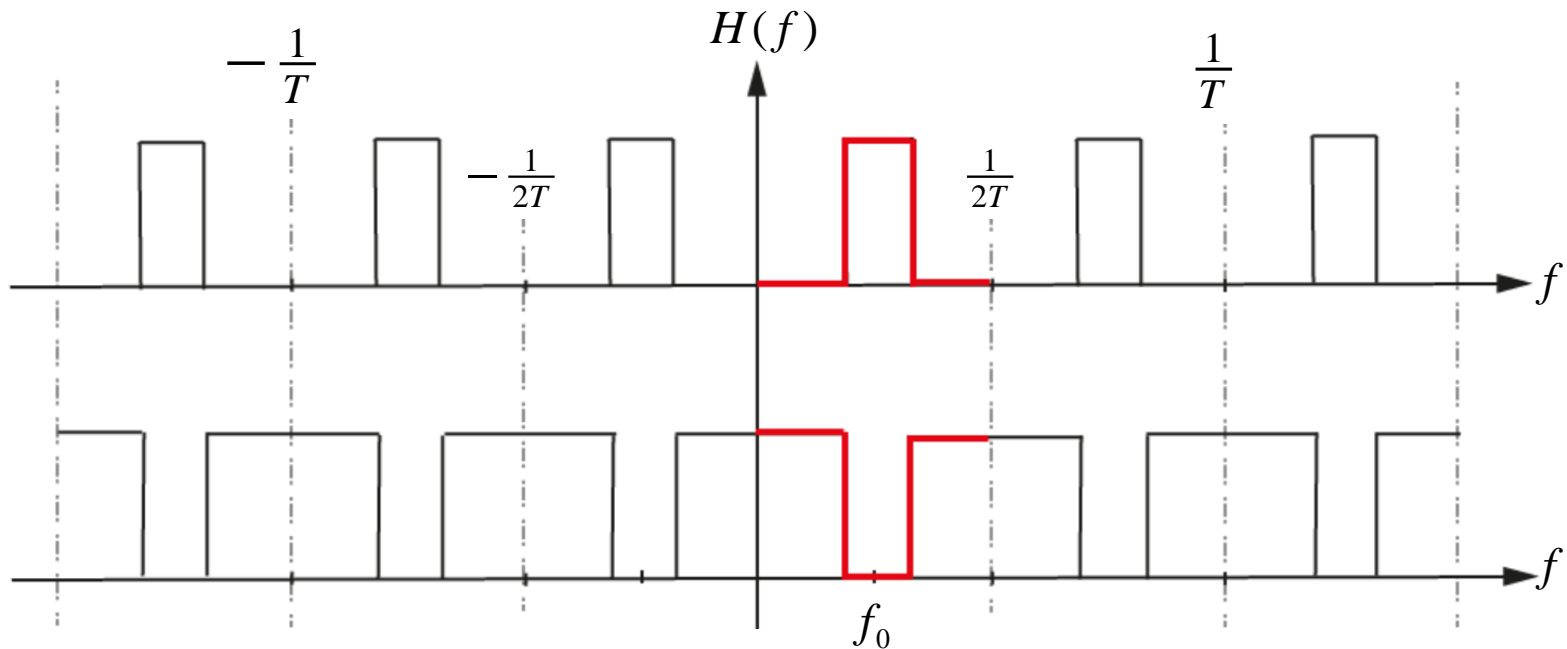


$$H_{BP}(f) = H_{TP}(f) * \frac{1}{2} [\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)]$$

$$h_{BP}(nT) = h_{TP}(nT) \cdot \cos(2\pi f_0 nT)$$



### 1.3 Bandpass-Bandsperre-Transformation



Zuerst die TP→BP-Transformation ausführen, dann ...

$$H_{BS}(f) = 1 - H_{BP}(f)$$

$$h_{BS}(nT) = \delta(nT) - h_{BP}(nT)$$



## 2 Realisierung in MATLAB



# C

## 3. Digitale Filter

- Verarbeitungskette
- Nichtrekursive Filter (FIR)
- Rekursive Filter (IIR)
- Hochpaß, Bandpass, Bandsperre
- **Spezielle Digitalfilter**
- Dezimation und Interpolation
- Fehlereffekte digitaler Filter
- Vergleich der Filterkonzepte
- Digitalfilter aus Analogfiltern

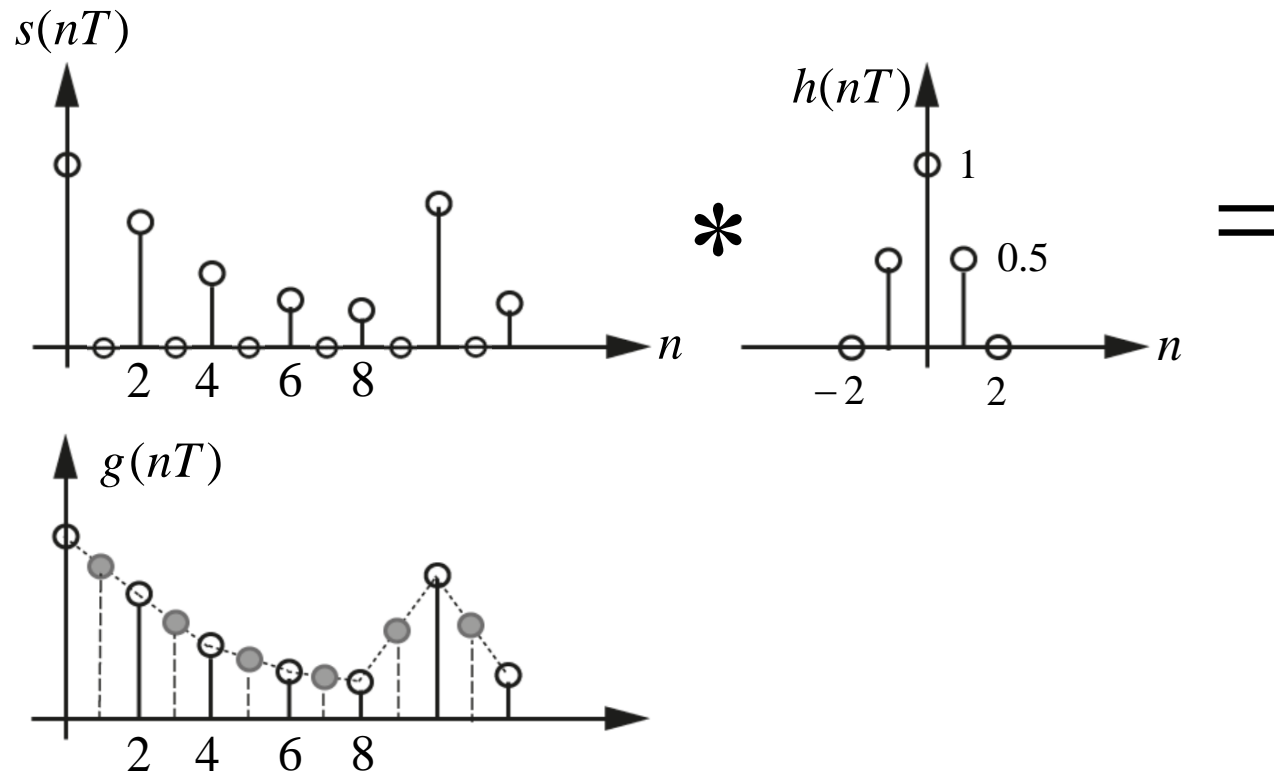




# 1 Interpolation

## 1.1 Lineare Interpolation

Eine diskrete Faltung des Signals  $s(n)$  mit der Dreiecksfunktion erzeugt das linear interpolierte Signal  $g(n)$ .





## Übung: Lineare Interpolation

Es ist zu zeigen, dass .....



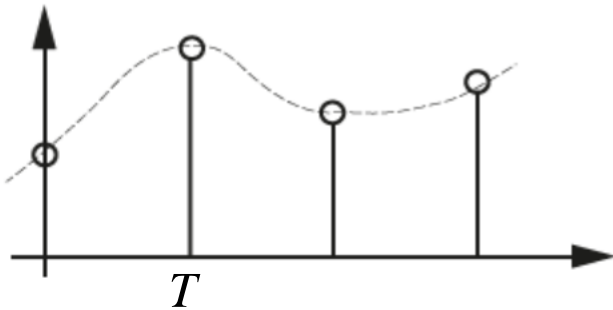
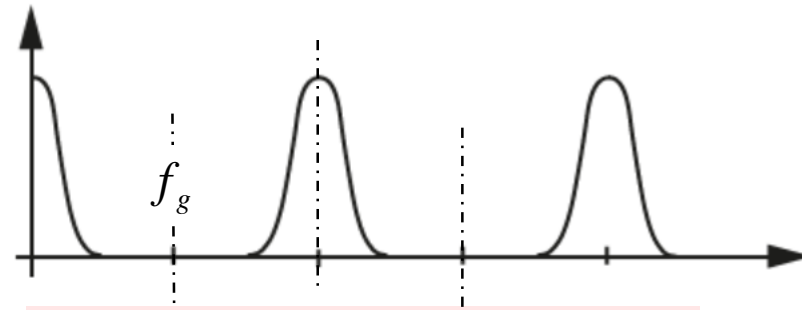
## 1.2 *Optimale Interpolation bandbegrenzter Signale*

Ist  $s(n)$  ein Tiefpasssignal bei dem das Abtasttheorem erfüllt ist, so kann  $s(n)$  durch ideale TP-Filterung fehlerfrei und somit optimal interpoliert werden.

Die Impulsantwort des abgetasteten Interpolationsfilters ist somit die abgetastete Si-Funktion.

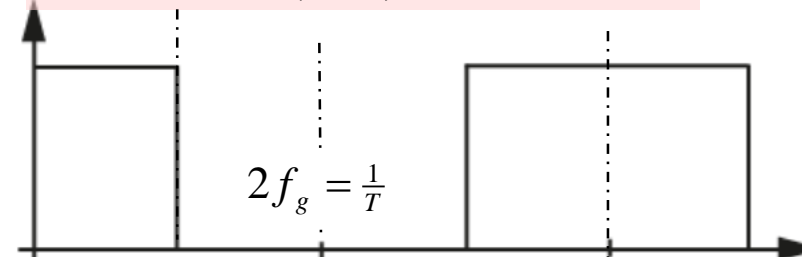
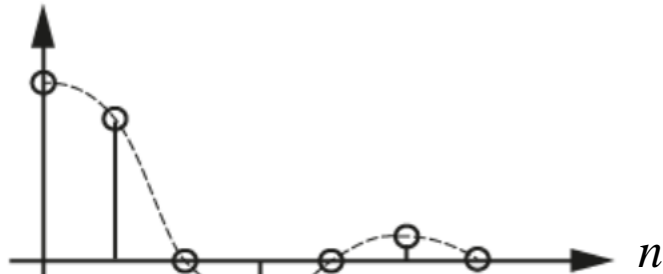
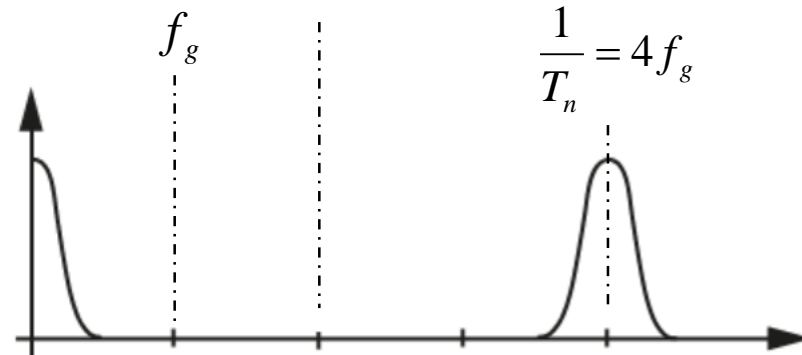
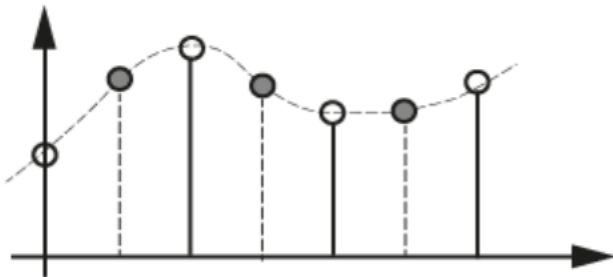
Die Realisierung ist nur näherungsweise möglich (wg. Kausalität → zeitliche Begrenzung durch Fensterfunktion)

s. nächste Seite


 $s(nT)$ 

 $S(f)$ 


$$h(nT) = 2f_g T_n \cdot \text{Si}(2\pi f_g) \cdot \sum (t - nT_n)$$

$$H(f) = \text{rect}\left(\frac{f}{2f_g}\right) * \sum \delta\left(f - \frac{n}{T_n}\right)$$


 $g(nT)$ 




## 2 Differentiation



# 3 Integration



# C

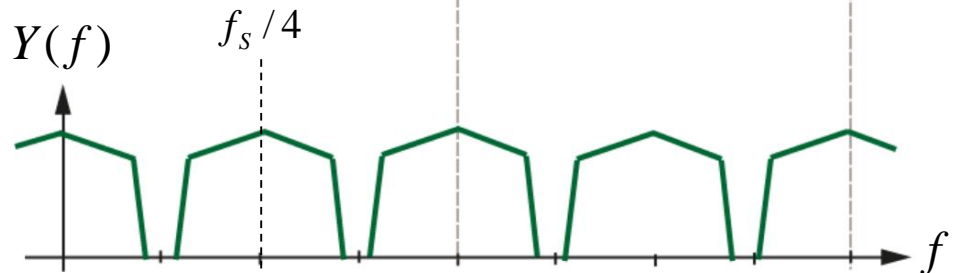
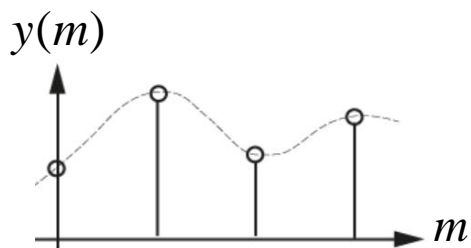
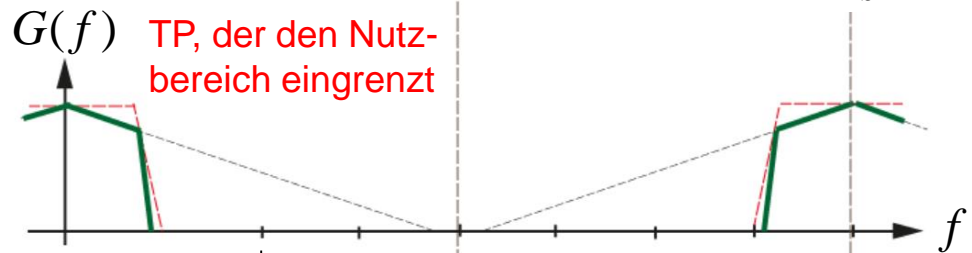
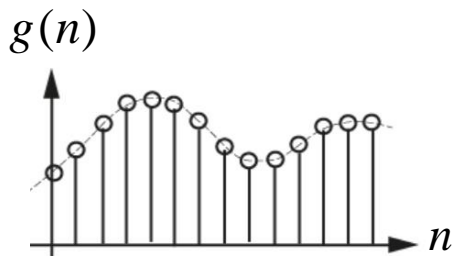
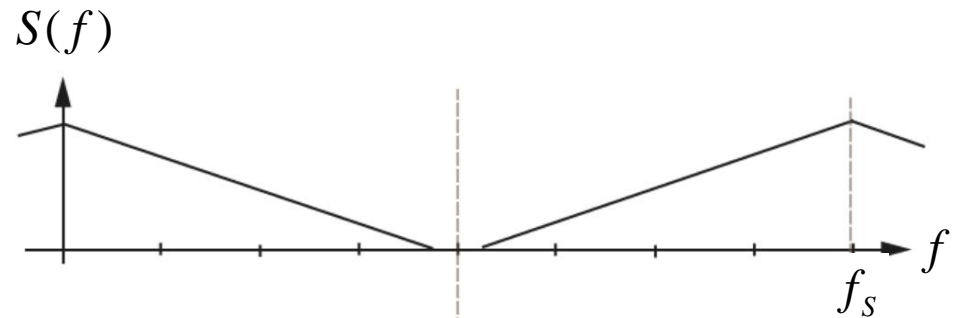
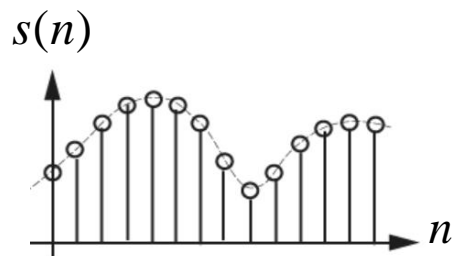
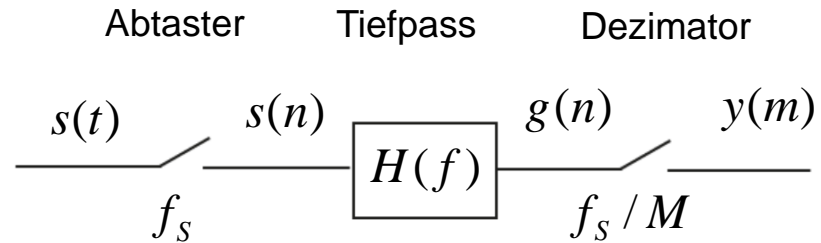
## 3. Digitale Filter

- Verarbeitungskette
- Nichtrekursive Filter (FIR)
- Rekursive Filter (IIR)
- Hochpaß, Bandpass, Bandsperre
- Spezielle Digitalfilter
- **Dezimation und Interpolation**
- Fehlereffekte digitaler Filter
- Vergleich der Filterkonzepte
- Digitalfilter aus Analogfiltern

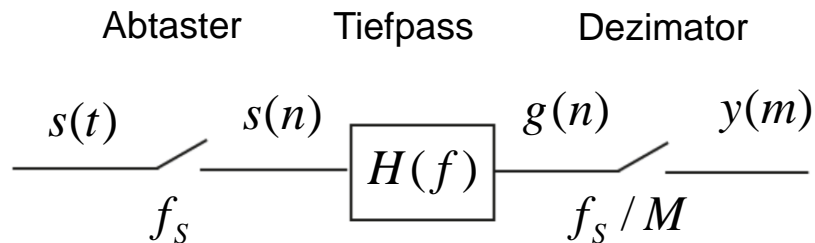


# 1 Dezimation

Dezimation =  
Reduktion der Abtastfrequenz







Zweck der Dezimation ist die Reduktion der Abtastrate zur Senkung des Rechenaufwandes (z.B. weniger Rechenaufwand für nachfolgende FIR-Filter).

Dabei ist zu beachten, dass das Abtasttheorem

- weder beim Abtaster  $s(t) \rightarrow s(n)$
- noch beim Dezimator  $g(n) \rightarrow y(m)$

verletzt wird.

Beim Abtaster muss dies (bei Bedarf) ein analoger Tiefpass sein, vor dem Dezimator verwendet man zweckmäßigerweise einen digitalen Tiefpass.

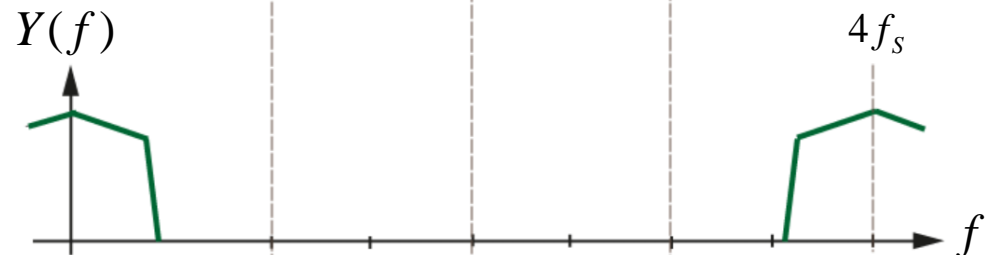
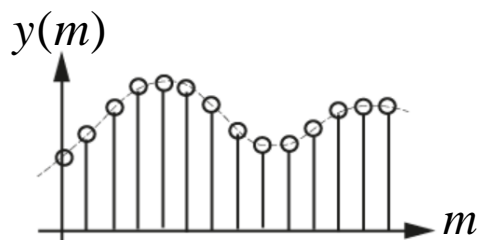
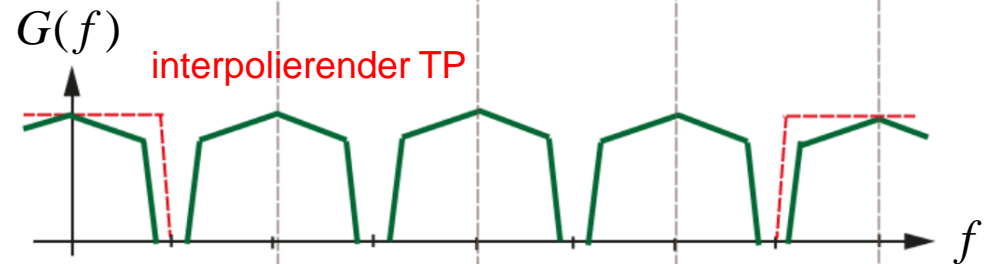
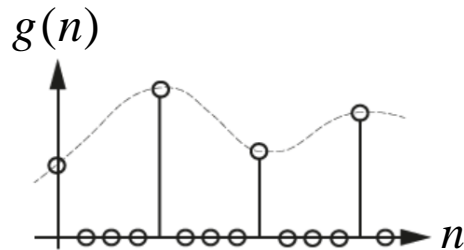
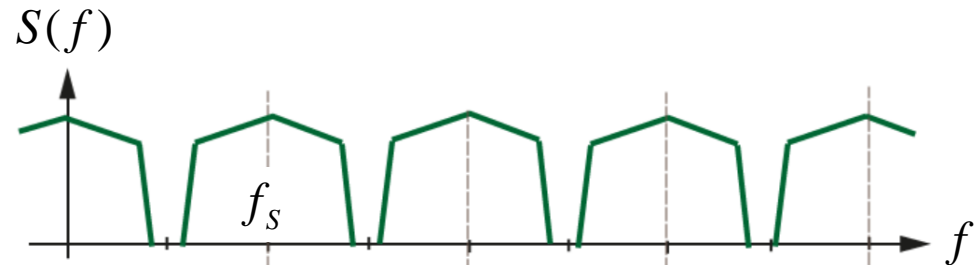
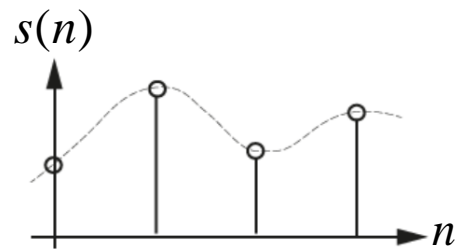
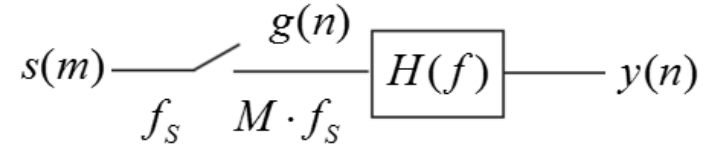


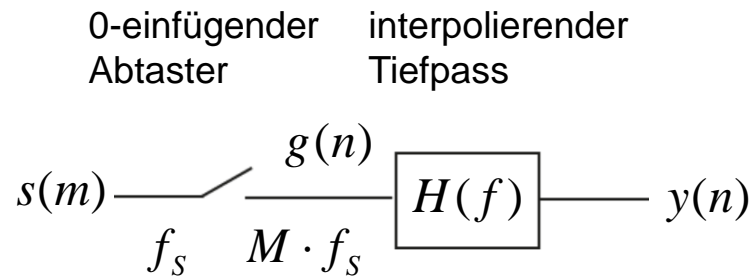
## 2 Interpolation

Interpolation =  
Erhöhung der Abtastfrequenz

0-einfügender  
Abtaster

interpolierender  
Tiefpass





Zweck der Interpolation ist die Erhöhung der Abtastrate (Rekonstruktion).

Der interpolierende Tiefpass muss so gewählt werden, dass nur das Basisband (bzw. die  $M \cdot f_s$ -Vielfachen davon passieren).

Typischerweise wird zur Interpolation ein linearphasiges FIR-Filter verwendet.

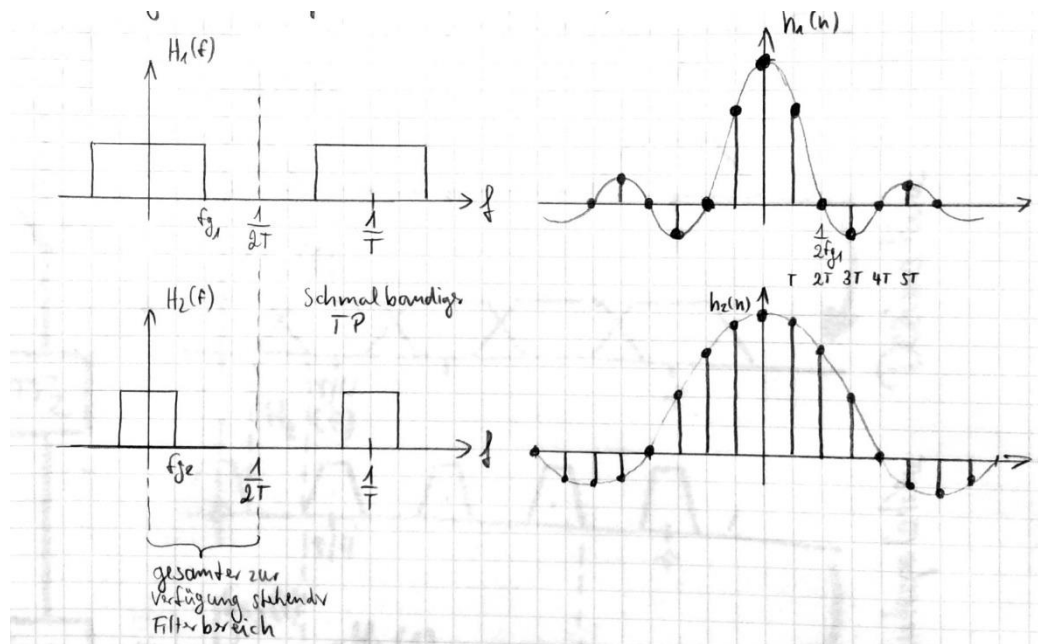


### 3 Anwendung : Abtastfrequenz-Umsetzung

Der Rechxxxxxxxxxx.

## 4 Anwendung : schmalbandige Filter

Der Rechenaufwand steigt mit der Abtastrate und bei FIR-Filtern auch mit der Länge der Filterimpulsantwort. Schmalbandige Filter benötigen bei gleicher Filterwirkung eine größere Filterlänge und somit mehr Rechenaufwand.



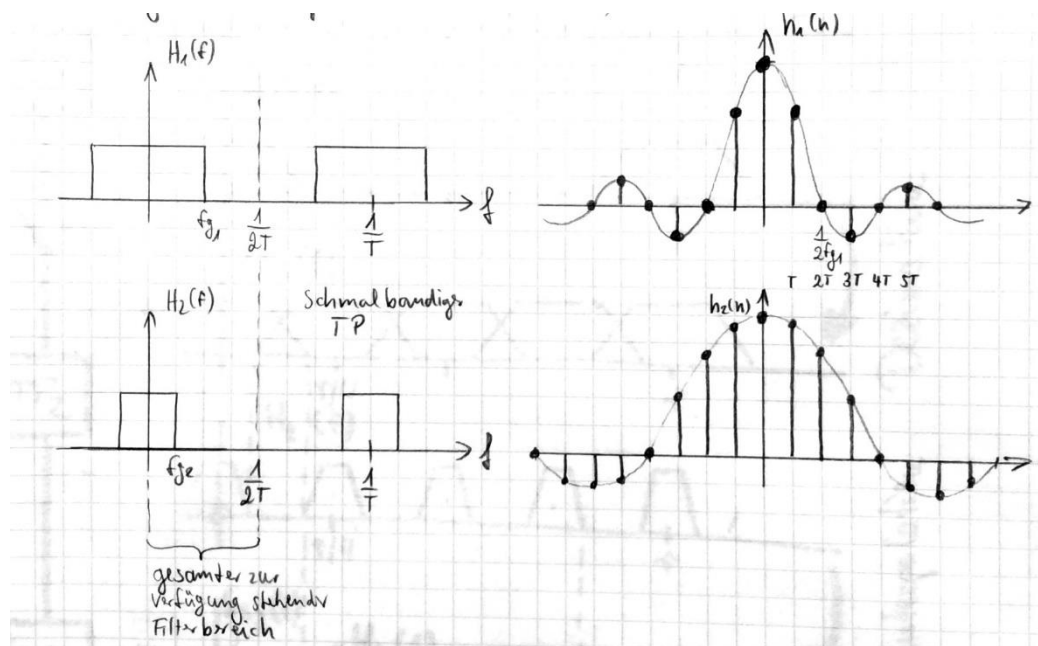
Aufwand  $r$  für FIR-Filter

$$r \propto \frac{1}{T \cdot f_g}$$

Bezogen auf einen bestimmten Ausschnitt der Si-Funktion werden für ein Schmalband-TP wesentlich mehr Filterkoeffizienten benötigt als für einen breitbandigen TP (bei gleicher Qualität).

### 3 Anwendung : schmalbandige Filter

Der Rechenaufwand steigt mit der Abtastrate und bei FIR-Filtern auch mit der Länge der Filterimpulsantwort. Schmalbandige Filter benötigen bei gleicher Filterwirkung eine größere Filterlänge und somit mehr Rechenaufwand.



Aufwand  $r$  für FIR-Filter

$$r \propto \frac{1}{T \cdot f_g}$$

Bezogen auf einen bestimmten Ausschnitt der Si-Funktion werden für ein Schmalband-TP wesentlich mehr Filterkoeffizienten benötigt als für einen breitbandigen TP (bei gleicher Qualität).





# C

## 3. Digitale Filter

- Verarbeitungskette
- Nichtrekursive Filter (FIR)
- Rekursive Filter (IIR)
- Hochpaß, Bandpass, Bandsperre
- Spezielle Digitalfilter
- Dezimation und Interpolation
- **Fehlereffekte digitaler Filter**
- Vergleich der Filterkonzepte
- Digitalfilter aus Analogfiltern





# 1 Quantisierungsrauschen



# C

## 3. Digitale Filter

- Verarbeitungskette
- Nichtrekursive Filter (FIR)
- Rekursive Filter (IIR)
- Hochpaß, Bandpass, Bandsperre
- Spezielle Digitalfilter
- Dezimation und Interpolation
- Fehlereffekte digitaler Filter
- **Vergleich der Filterkonzepte**
- Digitalfilter aus Analogfiltern



# 1 Gegenüberstellung

	FIR	IIR
Rechenaufwand	Hoch	Niedrig
Empfindlichkeit gegenüber ungenauen Koeffizienten	sehr niedrig	sehr hoch wenn am Stück in Direktform realisiert
Overflow-Gefahr	sehr niedrig	sehr hoch wenn am Stück in Direktform realisiert
Stabilität	immer	muss beim Entwurf berücksichtigt werden
Linearphasig	immer möglich durch symm. Faltungskerne	Nein





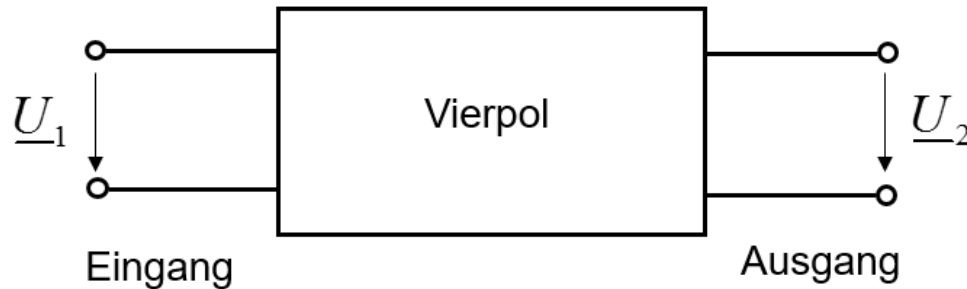
# C

## 3. Digitale Filter

- Verarbeitungskette
- Nichtrekursive Filter (FIR)
- Rekursive Filter (IIR)
- Hochpaß, Bandpass, Bandsperre
- Spezielle Digitalfilter
- Dezimation und Interpolation
- Fehlereffekte digitaler Filter
- Vergleich der Filterkonzepte
- **Digitalfilter aus Analogfiltern**

# 1 Analoge Filter und Frequenzgang

## 1.1 Frequenzgang linearer Vierpole



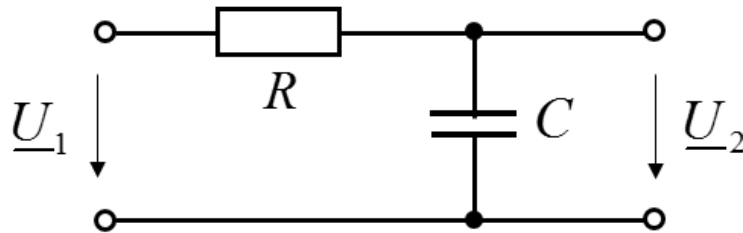
Das Wechselstromverhalten von Vierpolen wird beschrieben durch den *Frequenzgang*  $\underline{H}(j\omega)$ :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1}$$

s. GE2



## 1.2 Beispiel : RC-Tiefpass



$$H(j\omega) = \frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1} = \frac{\frac{1}{j\omega C}}{R + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{1}{1 + j\omega RC}$$

s. GE2



## 2 Bilineare Transformation

Zwischen analogen und digitalen Filtern gilt  $z = e^{j\omega T}$  s. Zusammenhang zwischen DTFT und z-Transformation

Umstellung nach  $j\omega$  ergibt  $j\omega = \frac{1}{T} \ln(z)$

Durch Beschreibung des nat. Logarithmus als unendl. Reihe erhält man:

$$\ln(z) = 2 \cdot \left[ \frac{(z-1)}{(z+1)} + \frac{(z-1)^3}{(z+1)^3} + \frac{(z-1)^5}{(z+1)^5} + \dots \right]$$

In erster Näherung gilt somit  $\ln(z) \approx 2 \cdot \frac{z-1}{z+1}$

Daraus folgt die sog. bilineare Transformation:

$$j\omega = \frac{2}{T} \frac{(z-1)}{(z+1)} = \frac{2}{T} \frac{(1-z^{-1})}{(1+z^{-1})}$$

Mit der bilin. Transf. lassen sich analoge Filter in digitale Filter überführen.

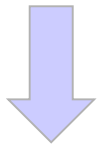




## 4 Beispiele

### 4.1 RC-Tiefpass

$$H(j\omega) = \frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1} = \frac{\frac{1}{j\omega C}}{R + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{1}{1 + j\omega RC} = \frac{1}{1 + j\omega\tau}$$



$$\begin{aligned} H(z) &= \frac{1}{1 + \frac{2}{T} \cdot \left( \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} \right) \tau} = \frac{1 + z^{-1}}{1 + z^{-1} + 2 \frac{\tau}{T} \cdot (1 - z^{-1})} = \\ &= \frac{1 + z^{-1}}{\left( 1 + 2 \frac{\tau}{T} \right) + \left( 1 - 2 \frac{\tau}{T} \right) \cdot z^{-1}} = \frac{\frac{1 + z^{-1}}{1 + 2 \frac{\tau}{T}}}{1 + \frac{1 - 2 \frac{\tau}{T}}{1 + 2 \frac{\tau}{T}} \cdot z^{-1}} \end{aligned}$$

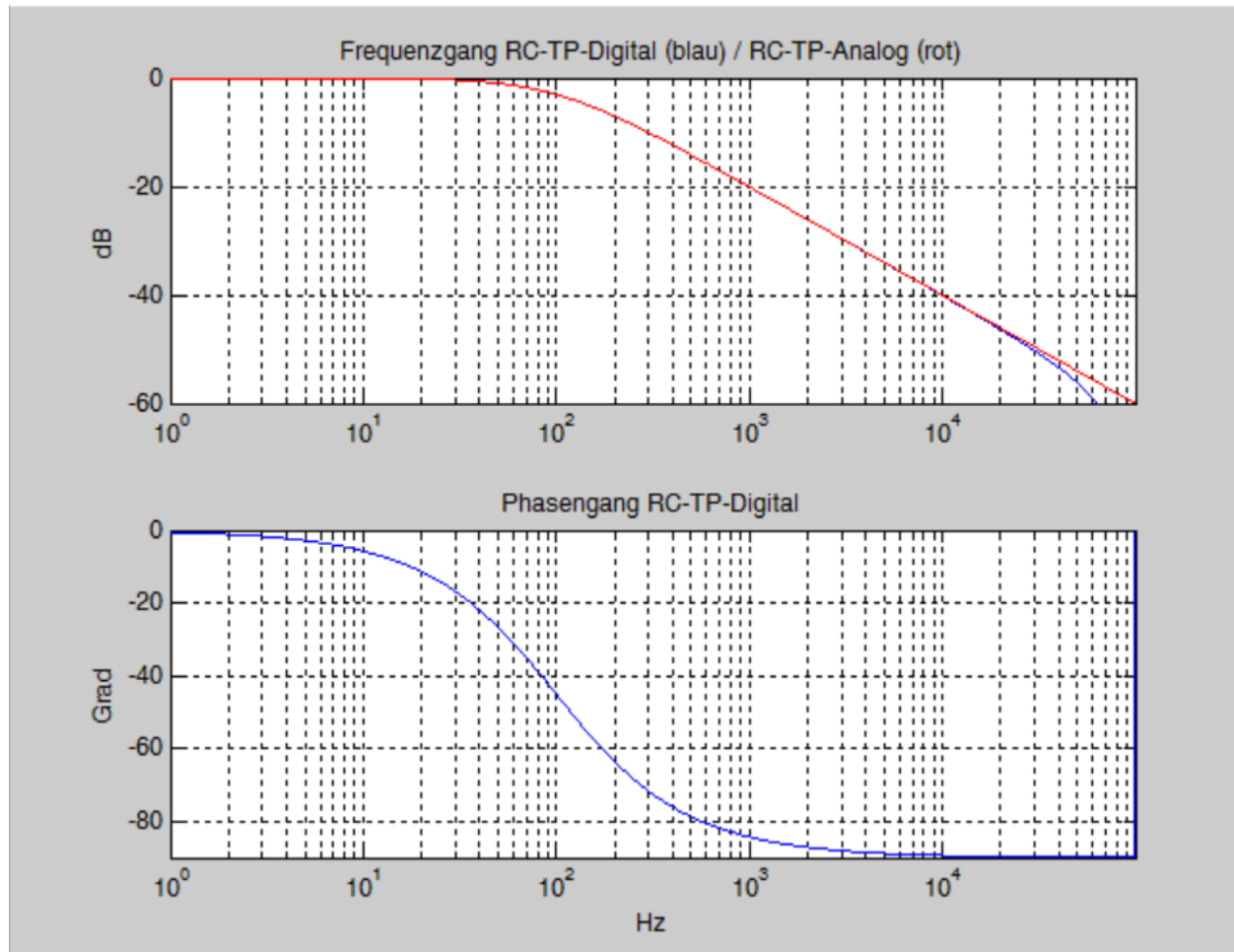


Durch Koeffizientenvergleich erhält man die Koeffizienten des Abtastfilters:

$$H(z) = \frac{\frac{1}{1+2\frac{\tau}{T}} \cdot (1+z^{-1})}{1 + \frac{1-2\frac{\tau}{T}}{1+2\frac{\tau}{T}} \cdot z^{-1}} \longleftrightarrow H(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_n z^{-n}}{1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_m z^{-m}}$$

$$\begin{aligned} b_0 &= b_1 = \frac{1}{1+2\frac{\tau}{T}} \\ a_1 &= \frac{1-2\frac{\tau}{T}}{1+2\frac{\tau}{T}} \end{aligned}$$

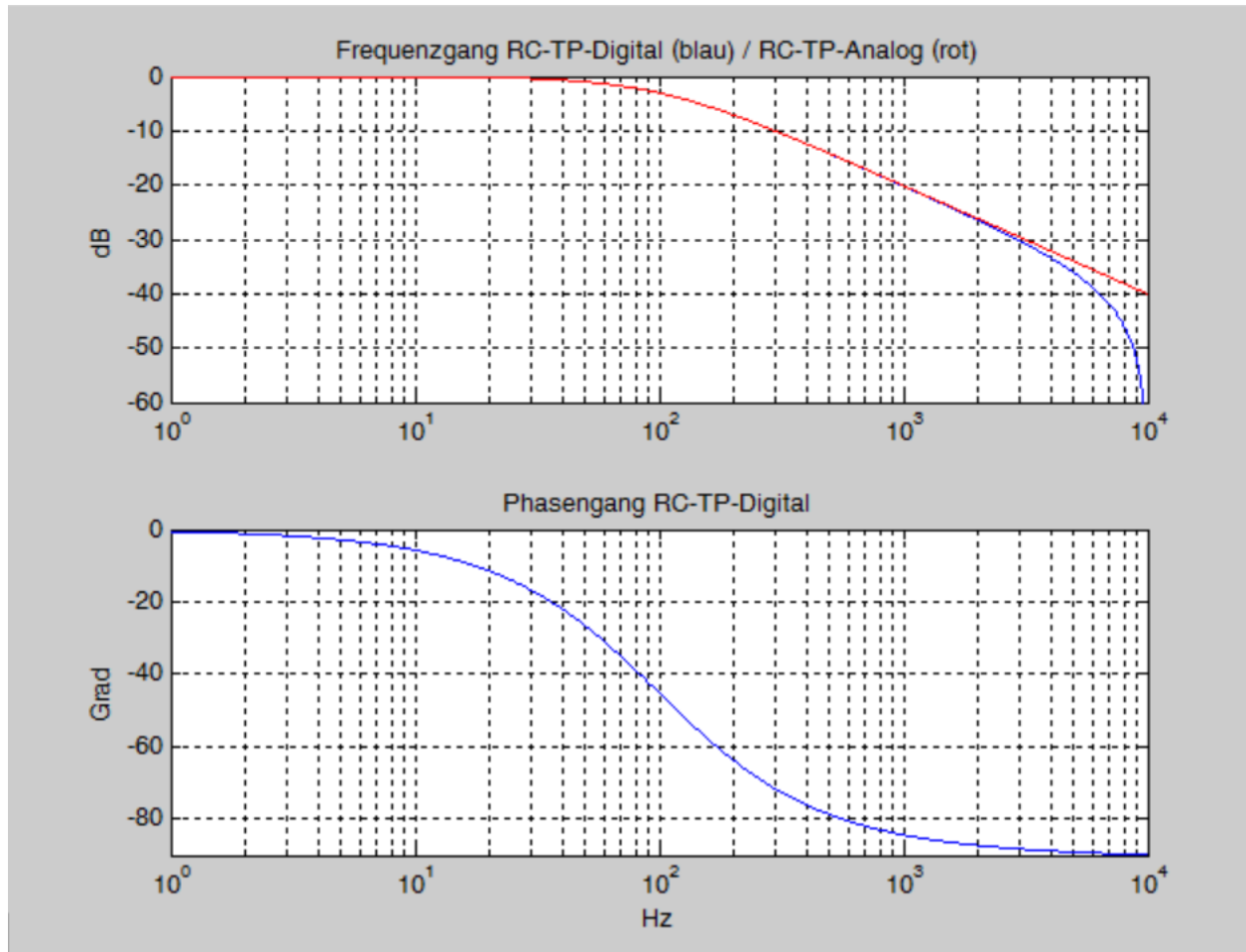
## Vergleich der Frequenzgänge des analogen/digitalen Filters



dargestellt ist der Bereich bis zur halben Samplefrequenz

$$f_g = 100 \text{ Hz}$$
$$f_s = 200 \text{ kHz}$$

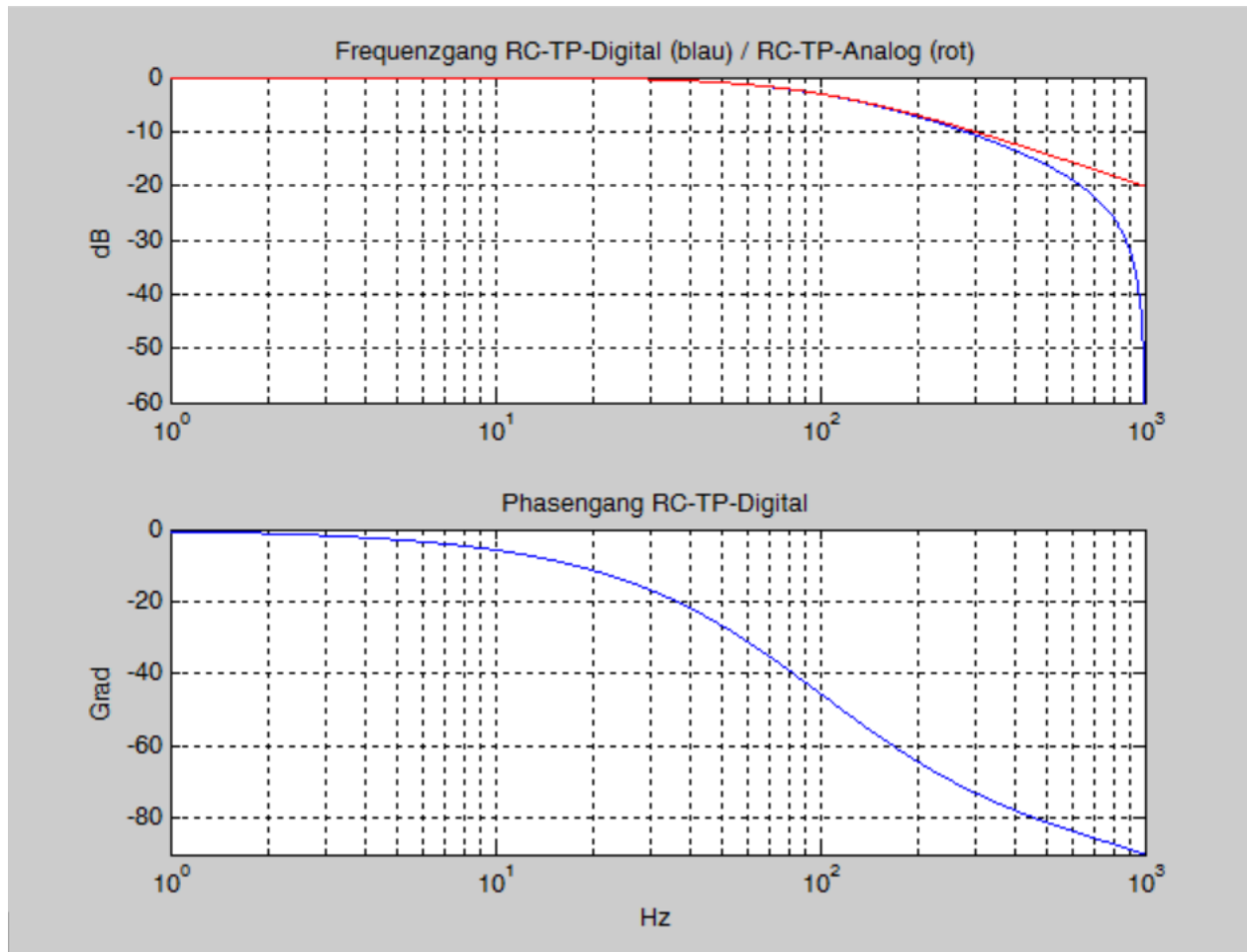
## Vergleich der Frequenzgänge des analogen/digitalen Filters



dargestellt ist der Bereich bis zur halben Samplefrequenz

$$f_g = 100 \text{ Hz}$$
$$f_s = 20 \text{ kHz}$$

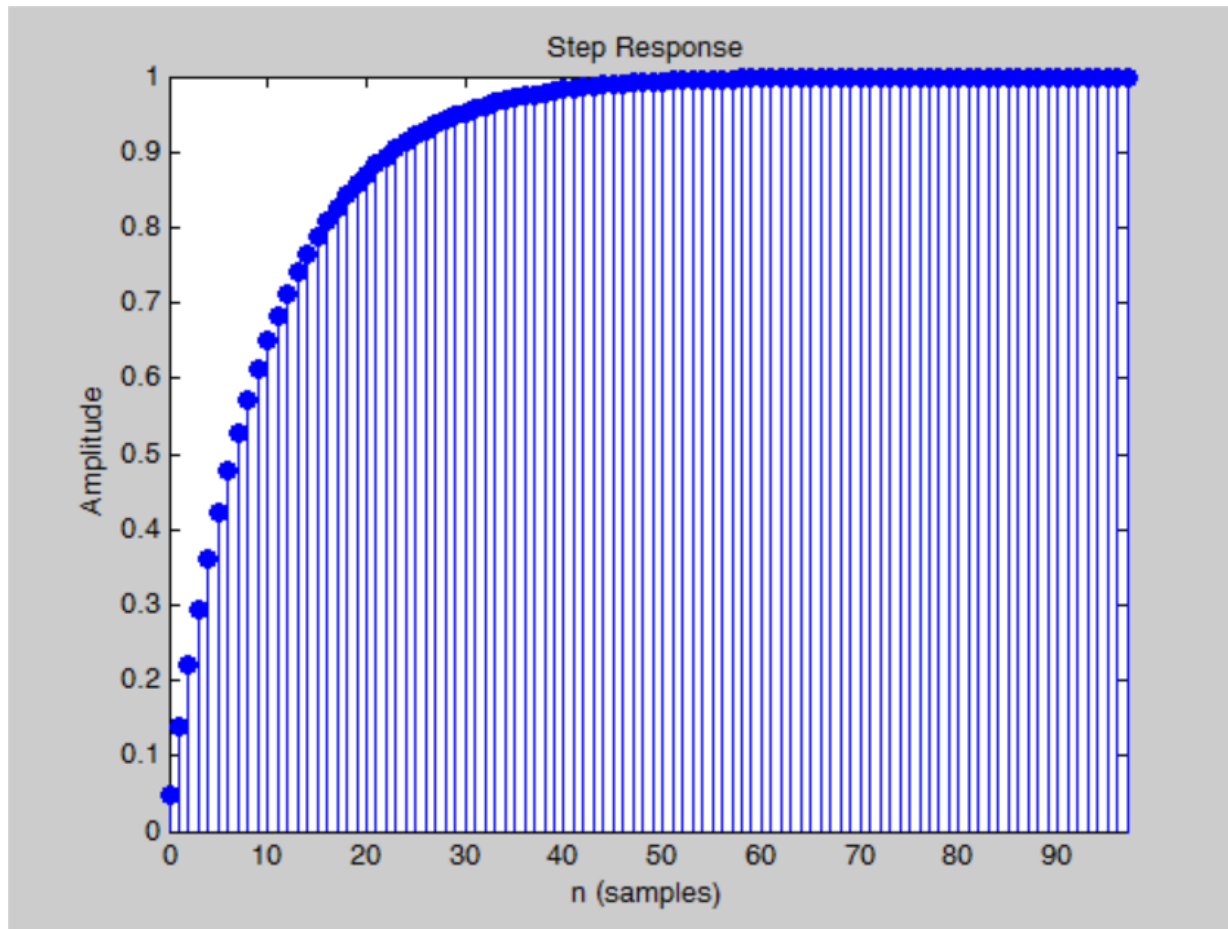
## Vergleich der Frequenzgänge des analogen/digitalen Filters



dargestellt ist der Bereich bis zur halben Samplefrequenz

$$f_g = 100 \text{ Hz}$$
$$f_s = 2 \text{ kHz}$$

## Sprungantwort des Abtastsystems für den Fall $\tau = 10T$





## ***4.2 Integrator***