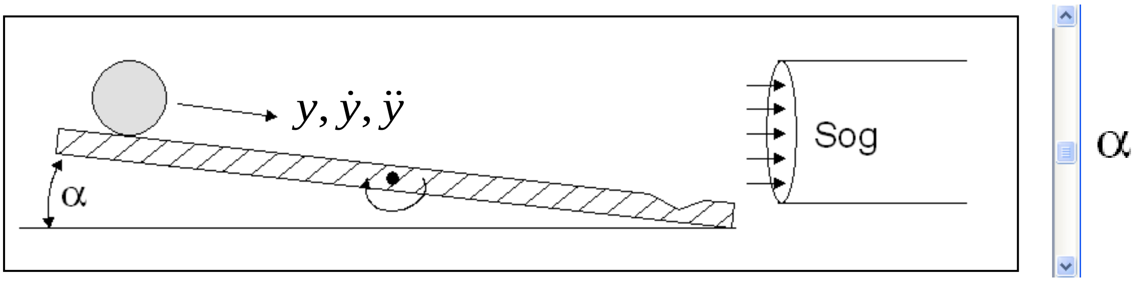
Aufgabe 1:

In einem Videospiel muss der Spieler mit Hilfe eines Schiebereglers den Kippwinkel eines Balkens so steuern, dass die Kugel von der linken Seite zur rechten Seite rollt und dort in einer kleinen Vertiefung liegen bleibt. Je näher die Kugel an der Vertiefung ist, desto größer wird der Sog auf die Kugel.



Die Bewegung der Kugel in x-Richtung wird durch folgende Differentialgleichung beschrieben:

$$G \cdot \sin(\alpha) + K_{Sog} \cdot y^2 = (m + \tfrac{J}{r^2}) \cdot \ddot{y}$$

Nach Einsetzen aller konstanten Größen, wie Gewicht G, Kugelmasse m, Radius r und Massenträgheitsmoment J der Kugel wird daraus die Differentialgleichung:

$$5\sin(\alpha) + 5y^2 = \ddot{y} \qquad (1)$$

a) Zeichnen Sie das Simulink-Schaltbild der Differentialgleichung.
Anm.: Funktionen als EM-Funktionsblock

b) Geben Sie an:

abhängige Variable = ...

unabhängige Variable = ...

Eingangsgröße = ...

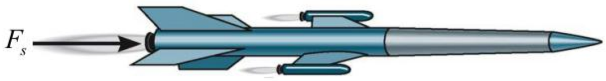
c) Zerlegen Sie Differentialgleichung (1) in zwei Differentialgleichungen 1. Ordnung.
Anm.: Indizieren Sie die Integratoren von links nach rechts. Verwenden Sie für die Zwischengrößen die Buchstaben k,l,m,…..

d) Geben Sie die Rekursionsgleichungen des Systems nach Euler an.
Die Schrittweite sei h.

e) Geben Sie die Rekursionsgleichungen des Systems nach Runge-Kutta (2. Ordng.) an.
Die Schrittweite sei h.

Aufgabe 2:

Eine Rakete startet aus dem Ruhezustand und unter Schwerlosigkeit.



Die Bewegung der Rakete wird durch folgende Differentialgleichung beschrieben:

$$\ddot{x} = \frac{F_s}{m_0 - k \cdot t}$$

Nach Einsetzen aller konstanten Größen, wie Startmasse m_0, Schubkraft F_s und Durchsatz k wird daraus die Differentialgleichung:

$$\ddot{x} = \frac{300}{600 - 2t} \qquad (1) \qquad \text{Anm.: } t = \text{Zeit}$$

a) Zeichnen Sie das Simulink-Schaltbild der Differentialgleichung (1).
Anm.: Funktionen als EM-Funktionsblock

b) Geben Sie an: abhängige Variable = ...

unabhängige Variable = ...

Eingangsgröße = ...

c) Zerlegen Sie Differentialgleichung (1) in zwei Differentialgleichungen 1. Ordnung.
Anm.: Indizieren Sie die Integratoren von links nach rechts. Verwenden Sie für die Zwischengrößen die Buchstaben k,l,m,…..

d) Geben Sie die Rekursionsgleichungen des Systems nach Euler an.
Die Schrittweite sei h.

e) Geben Sie die Rekursionsgleichungen des Systems nach Runge-Kutta (2. Ordng.) an.
Die Schrittweite sei h.

Aufgabe 3:

Gegeben ist das folgende Differentialgleichungssystem eines chaotischen Systems (Rössler-Attraktor):

$$\dot{x} = -y - z$$
$$\dot{y} = x + ay$$
$$\dot{z} = b + xz - cz$$

a) Zeichnen Sie das Simulink-Schaltbild des Differentialgleichungssystems.
Anm.: Funktionen als EM-Funktionsblock

b) Geben Sie die Rekursionsgleichungen des Systems nach Runge-Kutta (2. Ordng.) an.
Die Schrittweite sei h.

Ergebnisse:

1b) abh. Var.: y, unabh. Var.: t, Eingangsgröße: α

1c) $$\boxed{\begin{aligned}\dot{y}_1 &= 5y_2^2 + 5\sin(\alpha)\\ \dot{y}_2 &= y_1\end{aligned}}$$

1d) $$\boxed{\begin{aligned}y_{1,n+1} &= y_{1,n} + h\left[5y_{2,n}^2 + 5\sin(\alpha)\right]\\ y_{2,n+1} &= y_{2,n} + hy_{1,n}\end{aligned}}$$

1e) $$\boxed{\begin{aligned}k_1 &= h\left[5y_{2,n}^2 + 5\sin(\alpha)\right]\\ k_2 &= h\left[5\left(y_{2,n} + \frac{l_1}{2}\right)^2 + 5\sin(\alpha)\right]\\ y_{1,n+1} &= y_{1,n} + k_2\end{aligned}} \quad \boxed{\begin{aligned}l_1 &= hy_{1,n}\\ l_2 &= h\left[y_{1,n} + \frac{k_1}{2}\right]\\ y_{2,n+1} &= y_{2,n} + l_2\end{aligned}}$$

2b) abh. Var.: x, unabh. Var.: t, Eingangsgröße: t

2c)
$$\dot{x}_1 = \frac{300}{600-2t}$$
$$\dot{x}_2 = x_1$$

2d)
$$x_{1,n+1} = x_{1,n} + h \cdot \left[\frac{300}{600-2t_n} \right]$$
$$x_{2,n+1} = x_{2,n} + h \cdot x_{1,n}$$
$$t_{n+1} = t_n + h$$

2e)
$$k_1 = h\left[\frac{300}{600-2t_n} \right]$$
$$k_2 = h\left[\frac{300}{600-2\left(t_n + \frac{h}{2}\right)} \right]$$
$$x_{1,n+1} = x_{1,n} + k_2$$

$$l_1 = hx_{1,n}$$
$$l_2 = h\left[x_{1,n} + \frac{k_1}{2} \right]$$
$$x_{2,n+1} = x_{2,n} + l_2$$

$$t_{n+1} = t_n + h$$

3b)
$$k_1 = h\left[-y_n - z_n\right]$$
$$k_2 = h\left[-\left(y_n + \frac{l_1}{2} \right) - \left(z_n + \frac{m_1}{2} \right) \right]$$
$$x_{n+1} = x_n + k_2$$

$$l_1 = h\left[x_n + ay_n \right]$$
$$l_2 = h\left[(x_n + \frac{k_1}{2}) + a(y_n + \frac{l_1}{2}) \right]$$
$$y_{n+1} = y_n + l_2$$

$$m_1 = h\left[b + x_n z_n - cz_n \right]$$
$$m_2 = h\left[b + (x_n + \frac{k_1}{2})(z_n + \frac{m_1}{2}) - c(z_n + \frac{m_1}{2}) \right]$$
$$z_{n+1} = z_n + m_2$$