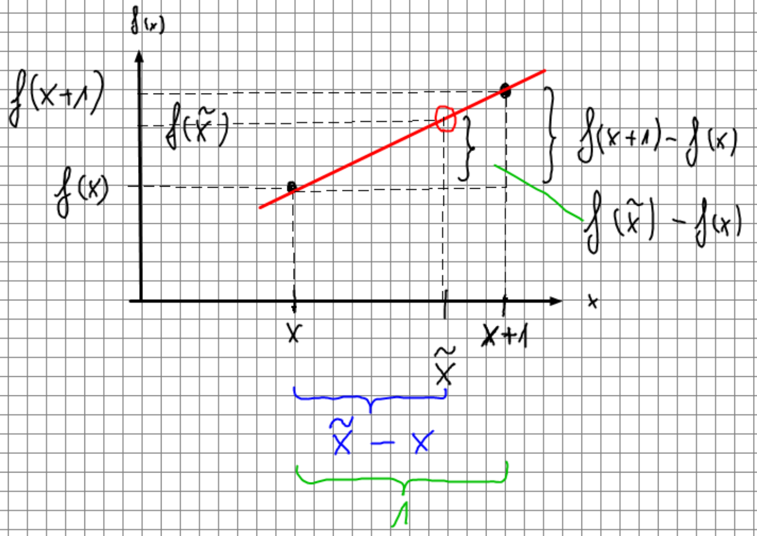
ÜBUNG: Bilineare Interpolation

1. Gegeben seien die Grauwerte f(x) und f(x+1) zweier aufeinanderfolgender Bildpunkte in einem 1-dimensionalen Bild (Zeilenkamera).
   Geben Sie eine Formel an, mit der für die Position

   $$\tilde{x} \ (\text{mit} \quad x <= \tilde{x} <= x+1, \quad \tilde{x} \in R, \quad x \in N)$$

   der Grauwert interpoliert werden kann.



$x \in \mathbb{N}$

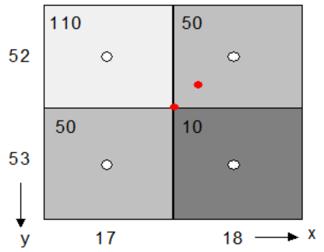
$\tilde{x} \in \mathbb{R}$

Strahlensatz: $\dfrac{f(x+1) - f(x)}{1} = \dfrac{f(\tilde{x}) - f(x)}{\tilde{x} - x}$

$$\Rightarrow \boxed{f(\tilde{x}) = f(x) + (\tilde{x} - x) \cdot \left[f(x+1) - f(x) \right]}$$

→ Grauwertinterpolation

2. Gegeben sei folgender Quellbildausschnitt (4 Bildpunkte).



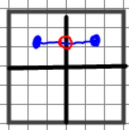
Geben Sie für die Positionen

a) $(\tilde{x}, \tilde{y}) = (17.5,\ 52.5)$

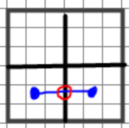
b) $(\tilde{x}, \tilde{y}) = (17.7,\ 52.4)$

mit Hilfe der *bilinearen Interpolation* den interpolierten Grauwert an.

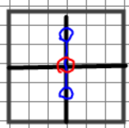
2. $f_{x_1}(\tilde{x}, \tilde{y}) = 110 + (17.5 - 17)(50 - 110)$
$= 110 + 0.5 \cdot (-60) = \underline{80}$



$f_{x_2}(\tilde{x}, \tilde{y}) = 50 + (17.5 - 17)(10 - 50)$
$= \underline{30}$

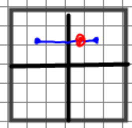


$f_{y}(\tilde{x}, \tilde{y}) = 80 + (52.5 - 52) \cdot (30 - 80)$
$= \underline{\underline{55}}$



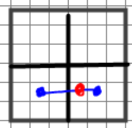
b) $f_{x_1}(\tilde{x},\tilde{y}) = 110 + (17.7-17)(50-110)$

$= \underline{68}$



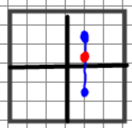
$f_{x_2}(\tilde{x},\tilde{y}) = 50 + (17.7-17)(10-50)$

$= \underline{22}$

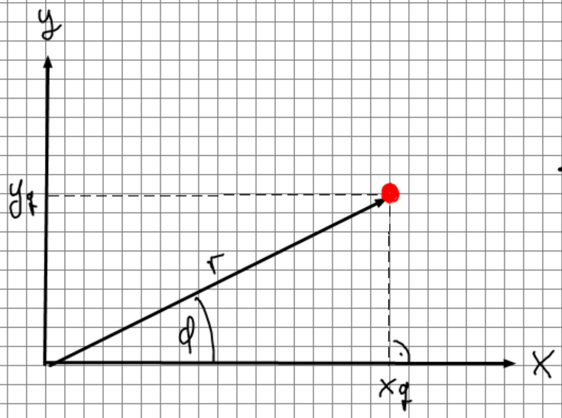


$f_y(\tilde{x},\tilde{y}) = 68 + (52.4-52)(22-68)$

$= \underline{\underline{49{,}6}}$



Affine Transformation : Rotation



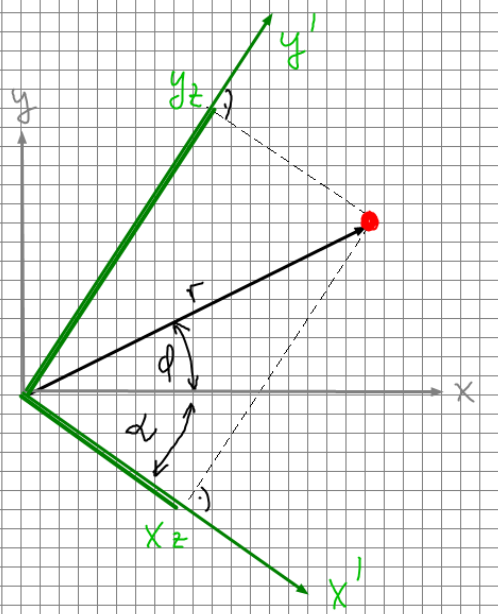
Punkt in Polarkoordinaten

⇒ Quellkoordinaten

$$\cos\varphi = \frac{x_q}{r} \iff x_q = r \cdot \cos\varphi \quad (1)$$

$$\sin\varphi = \frac{y_q}{r} \iff y_q = r \cdot \sin\varphi \quad (2)$$

} Quellkoordinaten durch r und φ beschrieben



Punkt in gedrehten Koordinaten

⇒ Zielkoordinaten

$$\cos(\varphi+\alpha) = \frac{x_z}{r} \quad \Longleftrightarrow \quad x_z = r \cdot \cos(\varphi+\alpha)$$

Additionstheoreme

$$= r \cdot [\cos\varphi \cdot \cos\alpha - \sin\varphi \sin\alpha]$$

mit (1) und (2) $\Longrightarrow$ $x_z = \underline{\underline{x_q \cos\alpha - y_q \cdot \sin\alpha}}$

analog

Additionstheoreme

$$\sin(\varphi+\alpha) = \frac{y_z}{r} \quad \Longleftrightarrow \quad y_z = r \cdot \sin(\varphi+\alpha)$$

$$= r \cdot [\sin\varphi \cos\alpha + \cos\varphi \sin\alpha]$$

mit (1) und (2) $\Longrightarrow$ $y_z = \underline{\underline{y_q \cdot \cos\alpha + x_q \cdot \sin\alpha}}$

$$\boxed{\begin{pmatrix} x_z \\ y_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_q \\ y_q \end{pmatrix}}$$

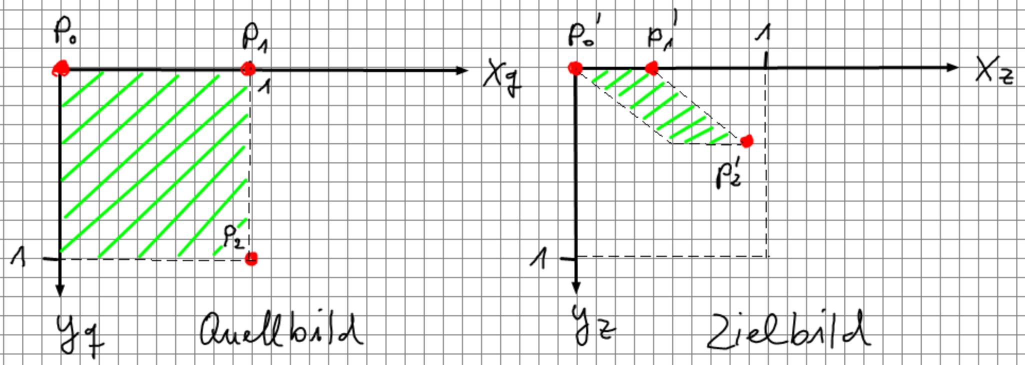
ÜBUNG: Affine Transformation 1

Geben Sie die Transformationsparameter so an, dass die Quellbildpunkte wie folgt auf die Zielbildpunkte abgebildet werden (Bildgröße auf 1 normiert):

$$(x_{q1}, y_{q1}) = (0{,}0) \quad \Rightarrow \quad (x_{z1}, y_{z1}) = (0{,}0)$$
$$(x_{q2}, y_{q2}) = (1{,}0) \quad \Rightarrow \quad (x_{z2}, y_{z2}) = (0.4\ ,\ 0)$$
$$(x_{q3}, y_{q3}) = (1{,}1) \quad \Rightarrow \quad (x_{z3}, y_{z3}) = (0.9\ ,\ 0.4)$$

a) für das Source-to-target-Mapping

$$\begin{bmatrix} x_z \\ y_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_q \\ y_q \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_0 \\ b_0 \end{bmatrix}$$



a) Vorwärtstransformation

$$\left.\begin{array}{lll} (1) & x_z = a_1 x_q + a_2 y_q + a_0 & (1) \\ (2) & y_z = b_1 x_q + b_2 y_q + b_0 & (2) \end{array}\right\} \text{affine Transformation}$$

mit (1) und den 3 Punktkorrespondenzen

$$\begin{pmatrix} x_{z1} \\ x_{z2} \\ x_{z3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x_{q1} & y_{q1} \\ 1 & x_{q2} & y_{q2} \\ 1 & x_{q3} & y_{q3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0.4 \\ 0.9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

$\underline{a_0 = 0}$

$\underline{a_1 = 0.4}$

$0.9 = 0.4 + a_2$

$\Rightarrow \underline{a_2 = 0.5}$

analog mit Gleichung (2)

$$\underline{b_0 = 0}$$

$$\underline{b_1 = 0}$$

$$\underline{b_2 = 0.4}$$

Insgesamt:

$$\underline{\underline{\begin{pmatrix} x_z \\ y_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.4 & 0.5 \\ 0.0 & 0.4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_q \\ y_q \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}}}$$

ÜBUNG: Affine Transformation 1

Geben Sie die Transformationsparameter so an, dass die Quellbildpunkte wie folgt auf die Zielbildpunkte abgebildet werden (Bildgröße auf 1 normiert):

$$(x_{q1}, y_{q1}) = (0,0) \quad \Rightarrow \quad (x_{z1}, y_{z1}) = (0,0)$$
$$(x_{q2}, y_{q2}) = (1,0) \quad \Rightarrow \quad (x_{z2}, y_{z2}) = (0.4\ ,\ 0)$$
$$(x_{q3}, y_{q3}) = (1,1) \quad \Rightarrow \quad (x_{z3}, y_{z3}) = (0.9\ ,\ 0.4)$$

b) für das Target-to-source-Mapping

$$\begin{bmatrix} x_q \\ y_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ B_1 & B_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_z \\ y_z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A_0 \\ B_0 \end{bmatrix}$$

b) Rückwärtstransformation

$$x_q = A_1 x_z + A_2 y_z + A_0 \qquad (3)$$
$$y_q = B_1 x_z + B_2 y_z + B_0 \qquad (4)$$

mit (3) und den 3 Punktkorrespondenzen

$$\begin{pmatrix} x_{q1} \\ x_{q2} \\ x_{q3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x_{z1} & y_{z1} \\ 1 & x_{z2} & y_{z2} \\ 1 & x_{z3} & y_{z3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_0 \\ A_1 \\ A_2 \end{pmatrix}$$

$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$

analog lösen

Die Gesamtlösung lautet dann:

$$\begin{pmatrix} x_q \\ y_q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.5 & -3.125 \\ 0.0 & 2.5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_z \\ y_z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ÜBUNG: Affine Transformation 2

Gegeben seien die Parameter des Source-to-target-Mappings (a_0, a_1, … b_2):

$$\begin{bmatrix} x_z \\ y_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0.5 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_q \\ y_q \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 \\ 10 \end{bmatrix}$$

Bestimmen Sie daraus die Parameter des Target-to-source-Mappings.

$$\begin{pmatrix} x_z - 5 \\ y_z - 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0.5 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_q \\ y_q \end{pmatrix}$$

hierfür ist die Lösung gesucht!

Lösen mit der Determinantenmethode

$$D_H = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0.5 & 4 \end{vmatrix} = 8 + 0.5 = \underline{\underline{8.5}}$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} (x_z - 5) & -1 \\ (y_z - 10) & 4 \end{vmatrix} = 4(x_z - 5) + (y_z - 10)$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 2 & (x_z - 5) \\ 0.5 & (y_z - 10) \end{vmatrix} = 2(y_z - 10) - 0.5(x_z - 5)$$

$$x_q = \frac{D_1}{D_H} = \frac{4x_z + y_z - 30}{8.5} = \frac{4}{8.5}x_z + \frac{1}{8.5}y_z - \frac{30}{8.5}$$

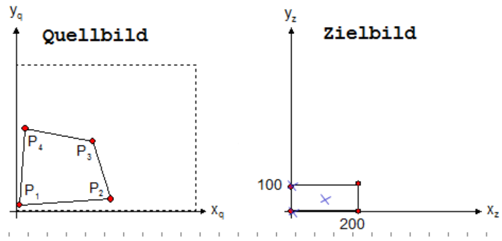
$$y_q = \frac{D_2}{D_H} = \frac{-0.5x_z + 2y_z - 17.5}{8.5} = -\frac{0.5}{8.5}x_z + \frac{2}{8.5}y_z - \frac{17.5}{8.5}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x_q \\ y_q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{8.5} & \frac{1}{8.5} \\ -\frac{0.5}{8.5} & \frac{2}{8.5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_z \\ y_z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{30}{8.5} \\ \frac{17.5}{8.5} \end{pmatrix}$$

ÜBUNG: Vier-Punkte-Transformation

Gegeben sei ein Quellbild der Größe 600x500.
Das Zielbild soll die Größe 200x100 haben.

Die Quellbildpunkte (10,20), (300,40), (250,220) und (30, 280) markieren den Quellbildbereich, welcher auf das Zielbild abgebildet werden soll.



a) Berechnen Sie die Parameter $\Phi_1 \ldots \Phi_4$ für die Zielbild-Koordinaten

- a1) (0, 0)
- a2) (0, 99)
- a3) (100, 50)

b) Aus welcher Quellbildpunkt-Koordinate wird der Grauwert des Zielbildpunktes (100, 50) genommen?

$$\Phi_1(\hat{x}_z,\hat{y}_z) = (1-\hat{x}_z)\cdot(1-\hat{y}_z)$$
$$\Phi_2(\hat{x}_z,\hat{y}_z) = \hat{x}_z\cdot(1-\hat{y}_z)$$
$$\Phi_3(\hat{x}_z,\hat{y}_z) = \hat{x}_z\cdot\hat{y}_z$$
$$\Phi_4(\hat{x}_z,\hat{y}_z) = (1-\hat{x}_z)\cdot\hat{y}_z$$

Zielkoordinatennormierung

$$\hat{x}_z = x_z / 199$$
$$\hat{y}_z = y_z / 99$$

a1) $\hat{x}_z = 0, \quad \hat{y}_z = 0$

$$\phi_1 = (1-0)(1-0) = 1$$
$$\phi_2 = 0\cdot(1-0) = 0$$
$$\phi_3 = 0\cdot 0 = 0$$
$$\phi_4 = (1-0)\cdot 0 = 0$$

a2) $\hat{x}_z = 0, \quad \hat{y}_z = 1$

$$\phi_1 = (1-0)\cdot(1-1) = 0$$
$$\phi_2 = 0\cdot(1-1) = 0$$
$$\phi_3 = 0\cdot 1 = 0$$
$$\phi_4 = (1-0)\cdot 1 = 1$$

a3) $\hat{x}_z \approx 0.5$, $\hat{y}_z \approx 0.5$

$$\Phi_1(\hat{x}_z, \hat{y}_z) = (1-\hat{x}_z)\cdot(1-\hat{y}_z)$$
$$\Phi_2(\hat{x}_z, \hat{y}_z) = \hat{x}_z\cdot(1-\hat{y}_z)$$
$$\Phi_3(\hat{x}_z, \hat{y}_z) = \hat{x}_z\cdot\hat{y}_z$$
$$\Phi_4(\hat{x}_z, \hat{y}_z) = (1-\hat{x}_z)\cdot\hat{y}_z$$

$$\Phi_1 = (1-0.5)(1-0.5) = 0.25$$

$$\Phi_2 = 0.5\cdot(1-0.5) = 0.25$$

$$\Phi_3 = 0.5\cdot 0.5 = 0.25$$

$$\Phi_4 = (1-0.5)\cdot 0.5 = 0.25$$

ÜBUNG: Vier-Punkte-Transformation

Gegeben sei ein Quellbild der Größe 600x500.
Das Zielbild soll die Größe 200x100 haben.
Die Quellbildpunkte (10,20), (300,40), (250,220) und (30, 280) markieren den Quellbildbereich, welcher auf das Zielbild abgebildet werden soll.

b) Aus welcher Quellbildpunkt-Koordinate wird der Grauwert des Zielbildpunktes (100, 50) genommen?

$$x_q = \sum_{i=1}^{4} \Phi_i(\hat{x}_z, \hat{y}_z) \cdot x_{q_i} \quad \text{und}$$

$$y_q = \sum_{i=1}^{4} \Phi_i(\hat{x}_z, \hat{y}_z) \cdot y_{q_i}$$

b)

$$x_q = \underbrace{0.25}_{\phi_1} \cdot \underbrace{10}_{x_{q_1}} + \underbrace{0.25}_{\phi_2} \cdot \underbrace{300}_{x_{q_2}} + \underbrace{0.25}_{\phi_3} \cdot \underbrace{250}_{x_{q_3}} + \underbrace{0.25}_{\phi_3} \cdot \underbrace{30}_{x_{q_4}}$$

$$= \underline{\underline{147.5}}$$

$$y_q = \underbrace{0.25}_{\phi_1} \cdot \underbrace{20}_{y_{q_1}} + \underbrace{0.25}_{\phi_2} \cdot \underbrace{40}_{y_{q_2}} + \ldots\ldots$$

$$= \underline{\underline{140}}$$