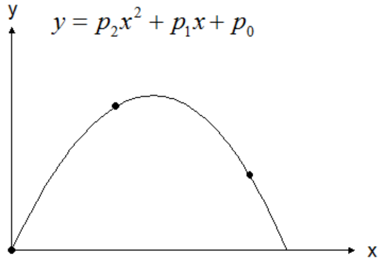
ÜBUNG: Berechnung eines Polynoms aus Meßwerten

Aufgabenstellung: Von einem physikalischen Prozess sei bekannt, daß er parabelförmig verläuft (z.B. Wurfparabel).

$$y = p_2 x^2 + p_1 x + p_0$$



An drei Punkten werden die Koordinaten (x,y) bestimmt:

$(x_1,y_1) = (0,0)$
$(x_2,y_2) = (2,6)$
$(x_3,y_3) = (5,3)$

Mit den Messwerten (x_1, y_1), (x_2, y_2) und (x_3, y_3) gilt:

$$y_1 = p_2 x_1^2 + p_1 x_1 + p_0$$
$$y_2 = p_2 x_2^2 + p_1 x_2 + p_0$$
$$y_3 = p_2 x_3^2 + p_1 x_3 + p_0$$

p_0, p_1 und p_2 sind die Unbekannten!

Im Matrixschreibweise gilt:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1^2 & x_1 & 1 \\ x_2^2 & x_2 & 1 \\ x_3^2 & x_3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_2 \\ p_1 \\ p_0 \end{pmatrix}$$

Zahlen einsetzen

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}}_{\vec{b}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 25 & 5 & 1 \end{pmatrix}}_{\underline{A}} \underbrace{\begin{pmatrix} p_2 \\ p_1 \\ p_0 \end{pmatrix}}_{\vec{\xi}}$$

Lösung lin. Gleichungssysteme mit dem Determinantenverfahren

a) Begriffseinführung: "Determinante" einer Matrix

Fall 1: $n = m = 2$

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \qquad |\underline{A}| = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{vmatrix} = A_{11} \cdot A_{22} - A_{12} \cdot A_{21}$$

Fall 2: $n = m = 3$

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix}$$

Berechnung der Determinante mit der Sarrus'schen Regel

$$\left| \begin{array}{ccc|cc} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & A_{21} & A_{22} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & A_{31} & A_{32} \end{array} \right. =$$

$$|\underline{A}| = A_{11} A_{22} A_{33} + A_{12} A_{23} A_{31} + A_{13} A_{21} A_{32}$$
$$- A_{13} A_{22} A_{31} - A_{11} A_{23} A_{32} - A_{12} A_{21} A_{33}$$

Lösen lin. Gleichungssystemen mit Determinanten

$\Rightarrow$ Cramersche Regel

Fall 1: $n = m = 2$ Aufstellen der Determinanten

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}}_{\text{Unbekannt}} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$ Gleichungssystem

$$D_H = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}$$ Hauptdeterminante

$$D_1 = \begin{vmatrix} \boxed{\begin{matrix} b_1 \\ b_2 \end{matrix}} & \begin{matrix} a_{12} \\ a_{22} \end{matrix} \end{vmatrix} = b_1 a_{22} - b_2 \cdot a_{12}$$ Nebendeterminante

$$D_2 = \begin{vmatrix} \begin{matrix} a_{11} \\ a_{21} \end{matrix} & \boxed{\begin{matrix} b_1 \\ b_2 \end{matrix}} \end{vmatrix} = a_{11} b_2 - a_{21} b_1$$ "

$$\boxed{x_1 = \frac{D_1}{D_H} \qquad x_2 = \frac{D_2}{D_H}}$$

Beispiel:

$$\begin{pmatrix} 15 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned} D_H &= 15 - 12 = 3 \\ D_1 &= 2 - 16 = -14 \\ D_2 &= 60 - 6 = 54 \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} x_1 &= \frac{D_1}{D_H} = -\frac{14}{3} = \underline{\underline{-4\tfrac{2}{3}}} \\ x_2 &= \frac{D_2}{D_H} = \frac{54}{3} = \underline{\underline{18}} \end{aligned}$$

Fall 2 : $n = m = 3$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

$D_H = \ldots\ldots\ldots$ Sarrus'sche Regel

$$D_1 = \begin{vmatrix} \boxed{\begin{matrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{matrix}} & \begin{matrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{matrix} & \begin{matrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{matrix} \end{vmatrix}$$

D_1 und D_2 analog

$$\boxed{x_1 = \frac{D_1}{D_H} \qquad x_2 = \frac{D_2}{D_H} \qquad x_3 = \frac{D_3}{D_H}}$$

<u>Beispiel:</u>

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$D_H = 4 + 8 + 36 - 4 - 12 - 24 = \underline{8}$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 2 + 16 + 12 - 2 - 4 - 48 = \underline{-24}$$

$$\Rightarrow x_1 = \frac{D_1}{D_H} = -\frac{24}{8} = \underline{\underline{-3}}$$