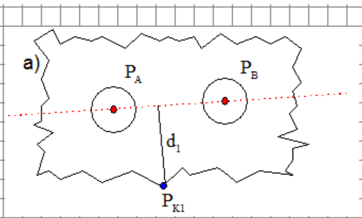
Bildmesstechnik

ÜBUNG: Anwendung in der *„Bildmesstechnik“*

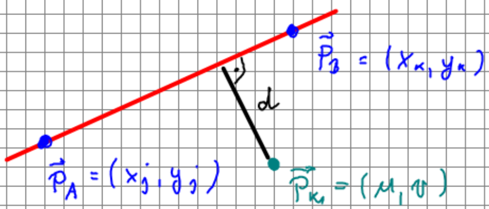
Gegeben ist das abgebildete Werkstück (Kantenrauhigkeit übertrieben gezeichnet).

a) Zu bestimmen ist der kürzeste Abstand d_1 zwischen der Verbindungsgeraden P_A-P_B (Bohrungszentren) und dem Kantenpunkt P_{K1}.

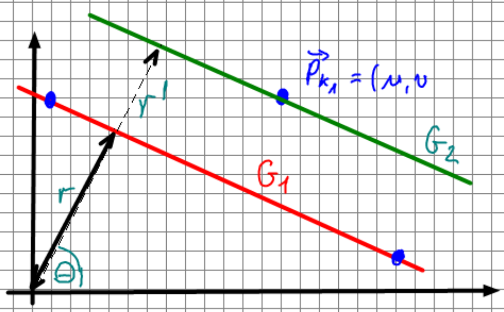


Für den Abstand eines Punktes (u,v) zu dieser Geraden gilt:

$$d = \frac{u(y_j - y_k) + v(x_k - x_j) + y_k \cdot x_j - y_j \cdot x_k}{\sqrt{(y_j - y_k)^2 + (x_k - x_j)^2}} \qquad (2)$$



Alternativ ohne Formel (2)



a) Zwei-Punkte-Form (ZPF) der Verbindungsgeraden aufstellen: G_1

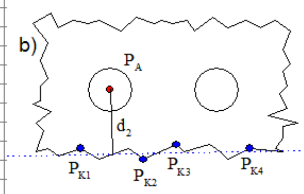
b) ZPF in Hesseform umwandeln
Parameter r, Θ

c) Gerade parallel zu G_1 aber durch $\vec{p}_{K1}$ in Hesseform aufstellen: G_2

$$r' = u \cos\Theta + v \sin\Theta$$

d) $\underline{\underline{d = |r' - r|}}$

b) Zu bestimmen ist der kürzeste Abstand d_2 zwischen der Ausgleichsgeraden durch die Kantenpunkte und dem Bohrungszentrum P_A.



<u>1. Schritt</u> : Berechnung der Ausgleichsgeraden durch die Kantenpunkte.

$$Ax + By = 1 \qquad (1)$$ Ansatz

Mit n Punkten lassen sich n Gleichungen aufstellen.

$$\underbrace{\begin{pmatrix} x_{K1} & y_{K1} \\ x_{K2} & y_{K2} \\ x_{K3} & y_{K3} \\ x_{K4} & y_{K4} \end{pmatrix}}_{\underset{\sim}{A}} \underbrace{\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}}_{\vec{\xi}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\vec{L}} \quad \Rightarrow \text{ überbestimmt}$$

↳ zu bestimmen

Lineares Ausgleichsproblem lösen mit:

$$\underset{\sim}{A}^T \underset{\sim}{A} \cdot \vec{\xi} = \underset{\sim}{A}^T \cdot \vec{L}$$

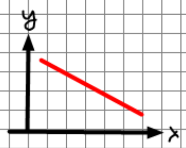
<u>Sonderfall</u>: Gerade durch den Ursprung
$\Rightarrow$ $A \to \infty$, $B \to \infty$ (bzw. sehr groß)

$\Rightarrow$ dann Geradengleichung $y = mx + b$ verwenden und die Parameter m und b mit Ausgleichsansatz bestimmen.

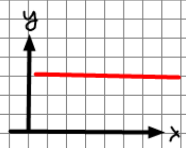
2. Schritt: $Ax + By = 1$ (bzw $y = mx + b$) umwandeln in $r = x\cos\Theta + y\sin\Theta$ (HNF)

4 Fälle sind möglich:

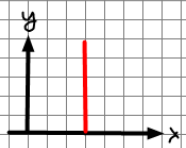
a) Standardfall



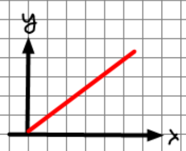
b) $A = 0$



c) $B = 0$



d) Grade durch den Ursprung



Fall a)

$$\begin{matrix} Ax & + & By & = 1 \\ \Updownarrow & & \Updownarrow & \Updownarrow \\ x\frac{\cos\Theta}{r} & + & y\frac{\sin\Theta}{r} & = 1 \end{matrix}$$

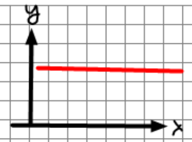
$$A = \frac{\cos\Theta}{r} \Rightarrow r = \frac{\cos\Theta}{A} \qquad (2)$$

$$B = \frac{\sin\Theta}{r} \Rightarrow r = \frac{\sin\Theta}{B} \qquad (3)$$

$$\Rightarrow \frac{\cos\Theta}{A} = \frac{\sin\Theta}{B} \Rightarrow \frac{B}{A} = \frac{\sin\Theta}{\cos\Theta} = \tan\Theta$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\Theta = \arctan\left(\frac{B}{A}\right)}} \quad \text{und mit (2)} \quad \underline{\underline{r = \frac{\cos\Theta}{A}}}$$

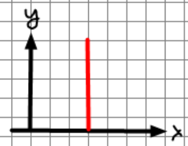
Fall b) $A = 0$



$By = 1 \Rightarrow \underline{\underline{y = \frac{1}{B}}}$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\Theta = 90^\circ \,,\quad r = \frac{1}{B}}}$$

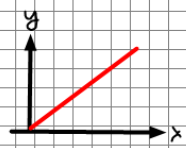
Fall c) $B = 0$



$Ax = 1 \Rightarrow \underline{\underline{x = \frac{1}{A}}}$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\Theta = 0^\circ \,,\quad r = \frac{1}{A}}}$$

Fall d) Grade durch den Ursprung



$\Rightarrow y = mx \quad (4)$

$$\Rightarrow \underline{\underline{r = 0}}$$

aus der HNF wird somit

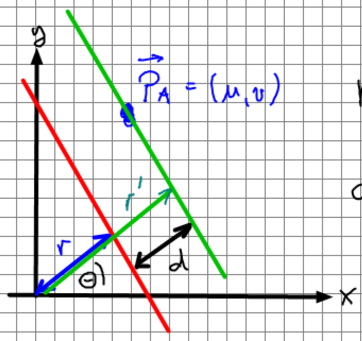
$$\Rightarrow 0 = x \cos\Theta + y \sin\Theta$$

$$-\frac{x}{y} = \frac{\sin\Theta}{\cos\Theta} = \tan\Theta$$

mit (4)

$$-\frac{\cancel{x}}{m\cancel{x}} = \tan\Theta \Rightarrow \underline{\underline{\Theta = \arctan\left(-\frac{1}{m}\right)}}$$

3. Schritt: Abstand des Punktes von der Geraden

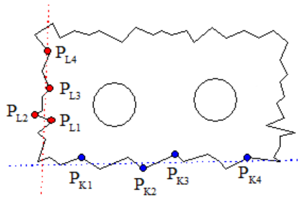


$$r' = u\cos\Theta + v\sin\Theta$$

$$d = |r' - r|$$

Anm.: auch andere Lösungswege möglich

c) Zu bestimmen ist der Winkel zwischen den beiden Ausgleichsgeraden K und L.

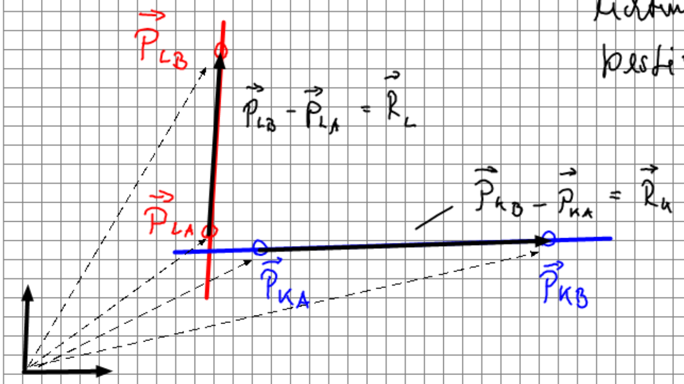


Schritt 1 :

Auf jeder Ausgleichsgrade 2 Punkte suchen $\Rightarrow$ $\vec{P}_{LA}$, $\vec{P}_{LB}$, $\vec{P}_{KA}$, $\vec{P}_{KB}$

Schritt 2 :

Richtungsvektoren der Graden bestimmen $\Rightarrow$ $\vec{R}_L$, $\vec{R}_K$



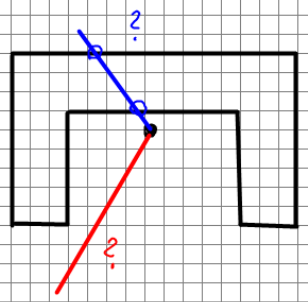
Schritt 3 : Winkel mit Skalarprodukt finden

$$\vec{R}_K \cdot \vec{R}_L = R_K \cdot R_L \cdot \cos\left(\sphericalangle(\vec{R}_K, \vec{R}_L)\right)$$

$$\Rightarrow \sphericalangle(\vec{R}_K, \vec{R}_4) = \arccos \frac{\vec{R}_K \cdot \vec{R}_L}{R_K \cdot R_L}$$

Vorüberlegungen zu Fourierdeskriptoren

Idee 1: Schwerpunktabstand



Problematisch:
Es kann Winkel geben, wo es keine oder mehrere $r(\alpha)$ gibt

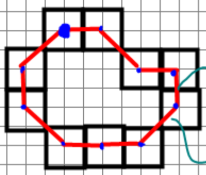
- nicht skalierungsinvariant ⊖
- nicht rotationsinvariant ⊖
- translationsinvariant ⊕

Idee 2: Krümmung

Für die Berechnung der Krümmungsfunktion muss die 1. und 2. Ableitung bestimmt werden.
Rauschminderung durch Gauss-Glättung

- Skalierungsinvariant (Konturlänge normieren!) ⊕
- Rotationsinvariant ⊕
- Startpunktabhängig ⊖
- Translationsinvariant ⊕

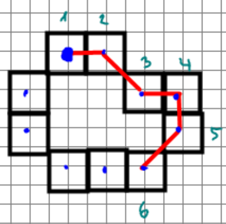
Gesamtlänge L einer Kontur:



Gesamtkonturlänge: $L = 1 + \sqrt{2} + 1 + 1 + \sqrt{2} + 1 + 1 + \sqrt{2} + 1 + \sqrt{2}$

$$= 6 + 4 \cdot \sqrt{2} = \underline{\underline{11.657}}$$

Normierte Teilkonturlänge zwischen 2 Punkten



$$l_{16} = 1 + \sqrt{2} + 1 + 1 + \sqrt{2}$$

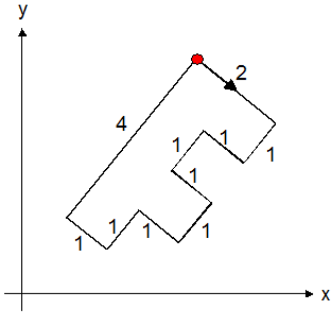
$$l_{16} = 5.828 \quad \text{(unnormiert)}$$

$$\underline{\underline{\hat{l}_{16}}} = \frac{l_{16}}{L} \cdot 2\pi = 0.5 \cdot 2\pi = \underline{\underline{3.1416}}$$

(normiert)

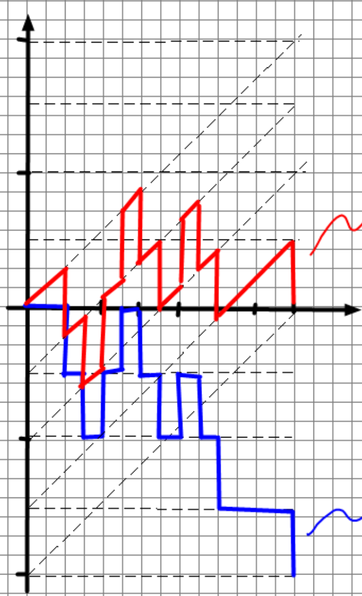
ÜBUNG: Kumulativer Tangentialwinkel und Konturfunktion $\psi^*(\hat{l})$

Zeichnen Sie den kumulativen Tangentialwinkel und die Konturfunktion.



Wie ändert sich die Funktion
a) bei Rotation,
b) bei Skalierung,
c) bei Verschiebung des Objektes,
d) bei Startpunktverschiebung.

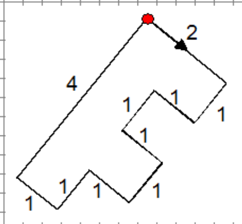
Gesamtlänge $L = 14$ (1)



$\psi^*(\hat{\ell})$

$\frac{\ell}{L} \cdot 2\pi = \hat{\ell}$ (2)

$\psi(\hat{\ell})$ (3)



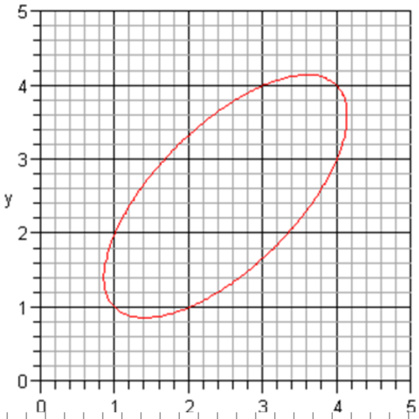
- Keine Änderung bei Rotation, Skalierung und Translation. ⊕
- Verschiebung des Startpunkts führt zu einer
  - Änderung des Mittelwerts
  - Seitliche Verschiebung der Konturfunktion $\Rightarrow$ Phasenverschiebung

ÜBUNG: Kegelschnittgleichung

$$x^2 - \tfrac{4}{3}\cdot xy + y^2 - \tfrac{5}{3}\cdot x - \tfrac{5}{3}\cdot y + \tfrac{8}{3} = 0$$

a) Ändert sich die Ellipse, wenn die Kegelschnittparameter mit einer Zahl k≠0 multipliziert wird?

b) Es ist zu zeigen, dass die obige Kegelschnittgleichung die dargestellte Ellipse beschreibt.



a) Wenn beide Seiten einer Gleichung mit einer Konstanten $k \neq 0$ multipliziert werden, ändert sich die Gleichung nicht!

b) Die Kegelschnittgleichung hat 6 Parameter:

$$\boxed{a\cdot x^2 + b\cdot xy + c\cdot y^2 + d\cdot x + e\cdot y + f = 0}$$

Durch Division der Gleichg. durch einen der Parameter (was den Kegelschnitt nicht verändert (s.o.)), verbleiben 5 Parameter.

Um die 5 Parameter zu bestimmen, werden 5 Punkte auf dem Kegelschnitt benötigt.

$\Rightarrow$ 5 Punkte legen den Kegelschnitt fest!

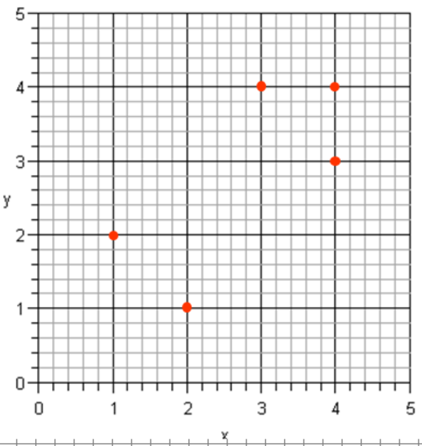
Also: 5 Punkte auf dem Kegelschnitt auswählen und prüfen, ob für alle Punkte die Gleichung aufgeht!

Beispiel: Berechnung der Kegelschnittparameter aus 5 Punkten

Gegeben sind 5 Punkte, die auf einer unbekannten Ellipse liegen.

$\mathbf{x}_1=(1,2)^T \quad \mathbf{x}_2=(2,1)^T \quad \mathbf{x}_3=(4,3)^T$

$\mathbf{x}_4=(4,4)^T \quad \mathbf{x}_5=(3,4)^T$



Die Parameter *a*....*f* der Ellipse sollen bestimmt werden:

$$a\cdot x^2+b\cdot xy+c\cdot y^2+d\cdot x+e\cdot y+f=0$$

Da ein Parameter frei gewählt werden kann (s. Aufgabe vorher), wird *a* = 1 , gesetzt.

$$\boxed{a\cdot x^2+b\cdot xy+c\cdot y^2+d\cdot x+e\cdot y+f=0}$$

$\Downarrow$ Division durch a

$$x^2+b^*\cdot xy+c^*\cdot y^2+d^*\cdot x+e^*\cdot y+f^*=0$$

Mit 5 Punkten $\Rightarrow$ 5 Gleichungen aufstellen:

$$\begin{array}{c}
x_1^2+b^*x_1y_1+c^*y_1^2+d^*x_1+e^*y_1+f^*=0\\
\vdots\\
x_5^2+b^*x_5y_5+c^*y_5^2+d^*x_5+e^*y_5+f^*=0
\end{array}$$

oder in Matrixform

$$\begin{pmatrix} x_1y_1 & y_1^2 & x_1 & y_1 & 1\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ x_5y_5 & y_5^2 & x_5 & y_5 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b^*\\ c^*\\ d^*\\ e^*\\ f^* \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -x_1^2\\ \vdots\\ -x_5^2 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ Gleichung lösen

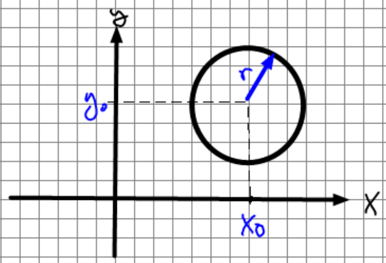
ÜBUNG: Kreis

1. Zeigen Sie den Zusammenhang zwischen der Kreisgleichung

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2 \quad (1)$$

und der Kegelschnittgleichung:

$$a\cdot x^2+b\cdot xy+c\cdot y^2+d\cdot x+e\cdot y+f=0 \quad (2)$$



Gl. (1) ausmultiplizieren:

$$x^2-2xx_0+x_0^2+y^2-2yy_0+y_0^2-r^2=0$$

$$x^2+y^2-2x_0x-2y_0y+(x_0^2+y_0^2-r^2)=0$$

$$\boxed{a\cdot x^2+b\cdot xy+c\cdot y^2+d\cdot x+e\cdot y+f=0}$$

Koeffizientenvergleich:

$a=1$	$c=1$	$e=-2y_0$
$b=0$	$d=-2x_0$	$f=x_0^2+y_0^2-r^2$

Für den Kreis gilt somit die vereinfachte Kegelschnittgl.:

$$\boxed{d\cdot x+e\cdot y+f=-(x^2+y^2)}$$

2. Geben Sie die Parameter x_0, y_0, r desjenigen Kreises an, der durch die Punkte (2,1) , (-1,1) und (0, -3) geht.

$$\boxed{d \cdot x + e \cdot y + f = -(x^2 + y^2)}$$

Gleichungen aufstellen:

$$x_1 d + y_1 e + f = -(x_1^2 + y_2^2)$$

$$\vdots$$

$$x_3 d + y_3 e + f = -(x_3^2 + y_3^2)$$

In Matrixform:

$$\begin{pmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d \\ e \\ f \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} x_1^2 + y_1^2 \\ x_2^2 + y_2^2 \\ x_3^2 + y_3^2 \end{pmatrix}$$

Mit den Zahlenwerten:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d \\ e \\ f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ -2 \\ -9 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{lösen}$$

$$\Rightarrow \quad d = -1, \quad e = 1.5, \quad f = -4.5$$

Mit (s.o.): $\quad e = -2y_0 \quad d = -2x_0 \quad f = x_0^2 + y_0^2 - r^2$

$$\Longrightarrow \quad x_0 = -\frac{d}{2} \qquad y_0 = -\frac{e}{2} \qquad r^2 = x_0^2 + y_0^2 - f$$

$$\underline{\underline{x_0 = \frac{1}{2}}} \qquad \underline{\underline{y_0 = -0.75}} \qquad \underline{\underline{r = 2.3}}$$