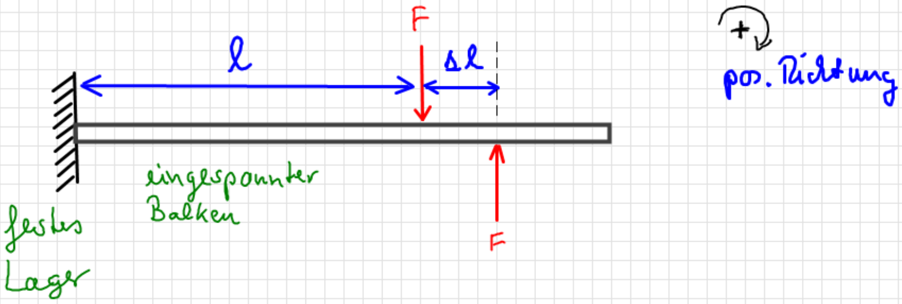
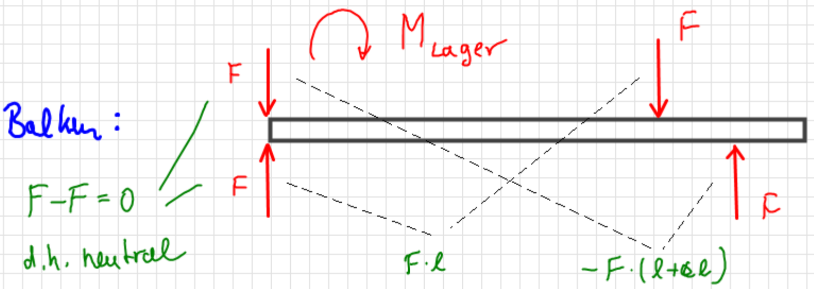
Warum ist ein Moment ortsungebunden?



Freigeschnittener Balken:



M_{Lager} : Durch das Lager aufgebrachtes Reaktionsmoment.

Da der Balken sich nicht bewegen kann, muss gelten:

$$\sum M = 0 : \quad F \cdot l - F \cdot (l + \Delta l) + M_{Lager} = 0$$

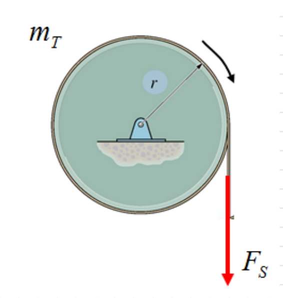
$$\cancel{F \cdot l} - \cancel{F \cdot l} - F \cdot \Delta l + M_{Lager} = 0$$

$$\underline{\underline{M_{Lager} = F \cdot \Delta l}}$$

Fazit: Das Lagermoment ist unabhängig vom Ort des Kräftepaares (= Drehmoments).

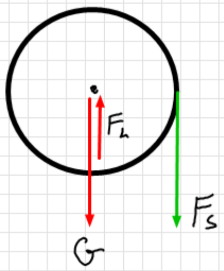
Übung: Kraft an Seiltrommel → Drehung um Schwerpunkt

An einer Seiltrommel (Vollzylinder mit der Masse m_T) wirkt eine Kraft F_S.
Beschreiben Sie das System.



$\Rightarrow$

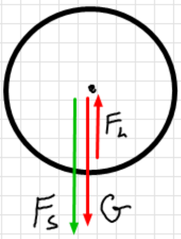
<u>Seiltrommel frei schneiden</u>



Ursächliche Kräfte: G Gewicht (bekannt)
F_S Seilkraft (bekannt)

Reaktionskräfte: F_L Lagerkraft (unbekannt)

<u>Seilkraft in den Drehpunkt verschieben</u>



$(+\circlearrowleft)\quad M = F_S \cdot r$

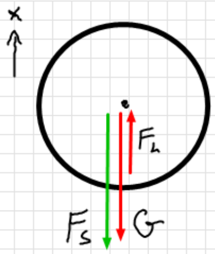
Da der Schwerpunkt ruht gilt:

$$\sum F = 0$$

$$\sum M = J \cdot \ddot{\varphi}$$

Somit gilt:

$$F_L - G - F_S = 0$$



$$\circlearrowleft + \quad M = F_S \cdot r$$

$$\Longrightarrow \quad F_L = F_S + G$$
$$= F_S + m_T \cdot g$$

$$M = J \cdot \ddot{\varphi}$$
$$F_S \cdot r = J \cdot \ddot{\varphi} \qquad \text{mit} \quad J = \frac{1}{2} m_T \cdot r^2$$
$$F_S \cdot \cancel{r} = \frac{1}{2} m_T r^{\cancel{2}} \cdot \ddot{\varphi}$$
$$\ddot{\varphi} = \frac{2 F_S}{m_T \cdot r}$$

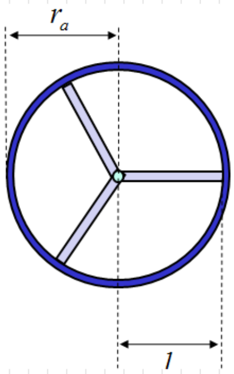
Für die Tangentialbeschleunigung a_t der Trommel gilt:

$$\ddot{\varphi} = \frac{a_t}{r} \quad \Longleftrightarrow \quad a_t = \ddot{\varphi} \cdot r$$

$$a_t = \frac{2 F_S}{m_T \cdot \cancel{r}} \cdot \cancel{r} = \frac{2 F_S}{m_T}$$

Übung: Speichenrad

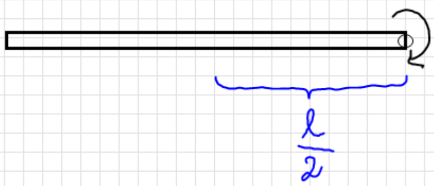
Wie groß ist das Massenträgheitsmoment J des gegebenen Speichenrades?



Masse einer Speiche	$m_{Sp} = 1kg$
Masse des Reifens	$m_R = 2kg$
Länge einer Speiche	$l = 0.5m$
Aussenradius	$r_a = 0.52m$

Massenträgheitsmoment eine Speiche :

$$J_s = \frac{1}{12} m_s \cdot l^2$$



$$J_A = \frac{1}{12} m_s \cdot l^2 + m_s \cdot \left(\frac{l}{2}\right)^2$$

$$= \frac{1}{12} m_s \cdot l^2 + \frac{3}{12} m_s\, l^2$$

$$J_A = \frac{1}{3} m_s\, l^2$$

Massenträgheitsmoment des Speichenrades

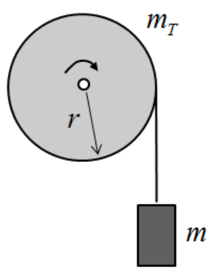
$$J_{Rad} = 3\, J_A + J_{Reifen}$$

$$= m_s\, l^2 + \frac{1}{2} m_R \left(l^2 + r_a^2 \right)$$

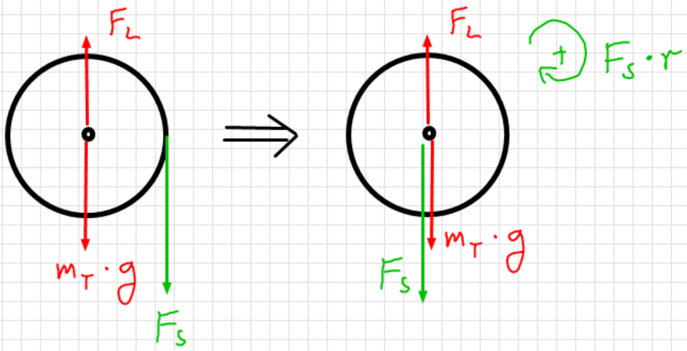
$$= 1kg \cdot 0.5^2 m^2 + \frac{1}{2}\, 2kg \left(0.5^2 m^2 + 0{,}52^2 m^2 \right) = 0.77\, kg\, m^2$$

Übung: Masse an Seiltrommel → Drehung um Schwerpunkt

An einer Seiltrommel (Vollzylinder mit der Masse m_T) hängt die Masse m.
Zum Zeitpunkt t=0 wird die Masse losgelassen, so dass sie nach unten sinkt.
Modellieren Sie das System mit Simulink.



Körper einzeln freischneiden

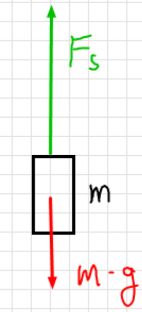


Verwendete Koordinatensysteme

x, v, a

φ, ω, α

pos. Drehrichtung



Rolle:

Schwerpunktsatz:

Da sich der Schwerpunkt nicht bewegen kann gilt:

$$\Sigma F = 0 \quad : \quad F_L - F_S - m_T \cdot g = 0 \qquad (1)$$

~~ = unbekannt

Momentensatz:

Da sich die Rolle drehen kann gilt

$$\Sigma M = J_S \cdot \ddot{\varphi} \quad : \quad F_S \cdot \cancel{r} = \frac{1}{2} m_T r^{\cancel{2}} \cdot \ddot{\varphi} \qquad (2)$$

Masse : Schwerpunktsatz

Da die Masse beweglich ist gilt :

$$\Sigma F_y = m \cdot a : \quad -m \cdot g + F_S = m \cdot \ddot{x} \qquad (3)$$

Kompatibilitätsbedingung : $\alpha = \ddot{\varphi} = -\frac{a_t}{r} = -\frac{\ddot{x}}{r}$ (4)

Ziel : Gl. (1) ... (4) so umformen, dass man $\ddot{x}$ bzw $\ddot{\varphi}$ erhält !

(4) in (2) einsetzen : $F_S = \frac{1}{2} m_T r \ddot{\varphi}$

$$= -\frac{1}{2} m_T \cancel{r} \cdot \frac{\ddot{x}}{\cancel{r}} = -\frac{1}{2} m_T \ddot{x} \qquad (5)$$

(3) nach F_S umstellen : $F_S = m \cdot g + m \cdot \ddot{x}$ (6)

(5) und (6) gleichsetzen : $-\frac{1}{2} m_T \ddot{x} = m \cdot g + m \ddot{x}$

$$-\left(\frac{1}{2} m_T + m\right) \ddot{x} = m \cdot g$$

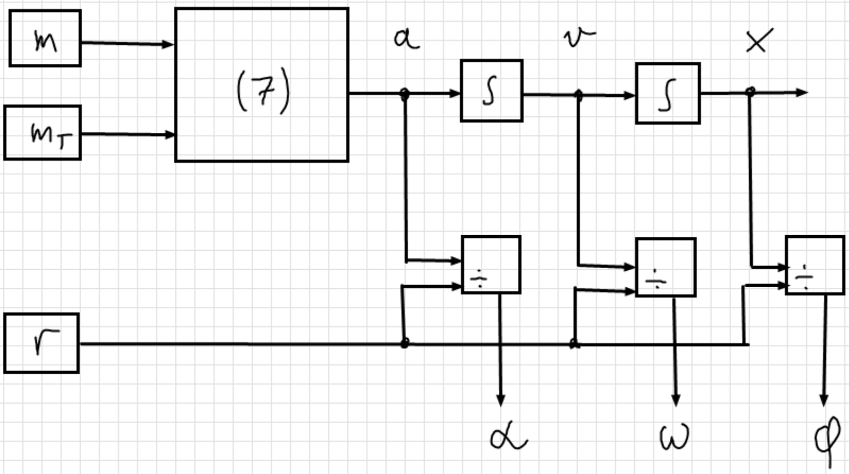
Beschleunigung der Masse

$$\ddot{x} = -\frac{m \cdot g}{\frac{1}{2} m_T + m} \qquad (7)$$

Winkelbeschleunigung der Trommel

$$\ddot{\varphi} = -\frac{\ddot{x}}{r} = \frac{m \cdot g}{r \left[\frac{1}{2} m_T + m\right]}$$

Simulink :

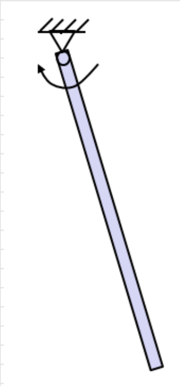


Mit (2) kann F_S berechnet werden.

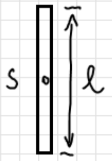
Mit (1) kann F_L berechnet werden.

Übung: Stabpendel → Drehung um beliebigen festen Punkt

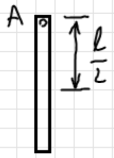
Ein Stab (Länge l, Masse m) pendelt an seinem Ende.
Modellieren Sie die Pendelbewegung mit Simulink.



Keine Drehung um den Schwerpunkt
→ Satz von Steiner



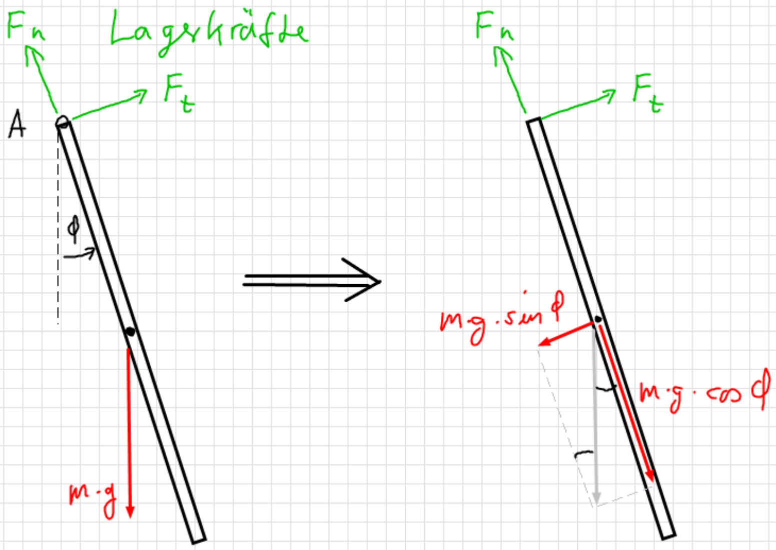
$$J_S = \frac{1}{12} m l^2$$



$$J_A = J_S + m\left(\frac{l}{2}\right)^2 = \frac{1}{12} m l^2 + \frac{1}{4} m l^2$$

$$\underline{\underline{J_A}} = \frac{4}{12} m l^2 = \underline{\underline{\frac{1}{3} m l^2}}$$

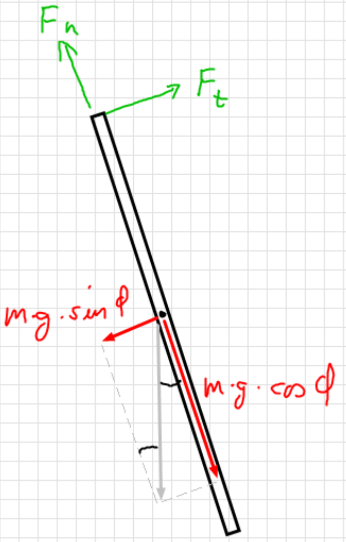
Stabpendel freischneiden

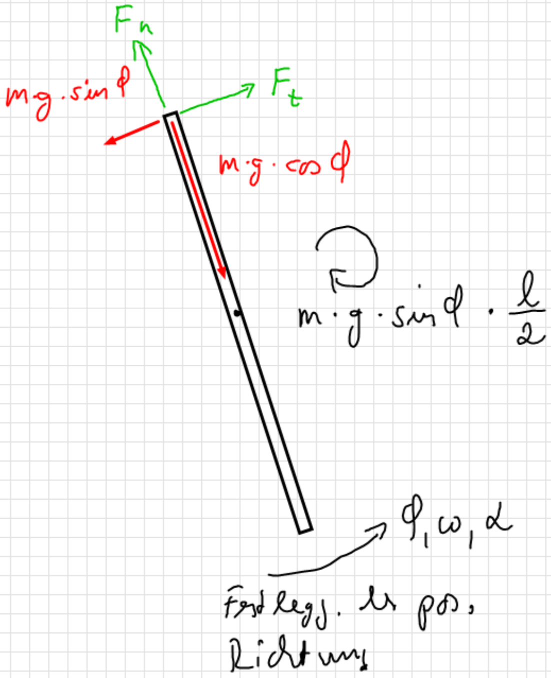


Momentensatz:

alle Kräfte in den Drehpunkt verschieben

(Anm.: günstig für die Analyse, da diese Kräfte auf die Drehung keinen Einfluss mehr haben!)





$$\sum M = J_A \cdot \ddot{\varphi} \quad ; \quad -\cancel{m} \cdot g \cdot \sin\varphi \cdot \frac{\cancel{l}}{2} = \underbrace{\frac{1}{3} \cancel{m} l^{\cancel{2}}}_{J_A} \cdot \underbrace{\ddot{\varphi}}_{\alpha}$$

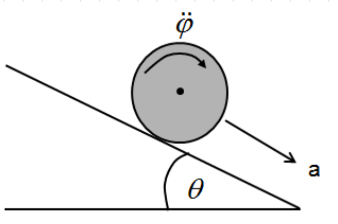
$$\ddot{\varphi} = -\frac{3}{2} \frac{g}{l} \cdot \sin\varphi$$

$\Rightarrow$ nichtlin. DGL 2. Ordnung

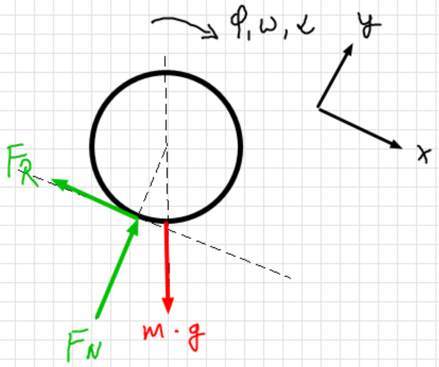
Mit dem Schwerpunktsatz könnte man die Lagerkräfte berechnen (hier nicht gefragt).

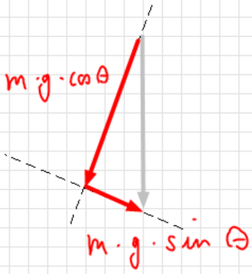
Übung: Kugel auf schiefer Ebene

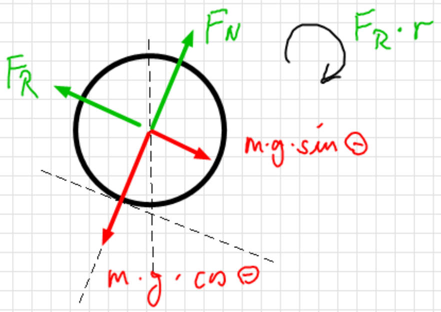
Eine Vollkugel rollt eine schiefe Ebene hinunter (θ=20°). Die Bewegung der Kugel soll simuliert werden.



Kugel freischneiden







Schwerpunktsatz:

Schwerpunkt bewegt sich in x-Richtung

$$\sum F_x = m \cdot \ddot{x} \quad : \quad m \cdot g \cdot \sin\Theta - F_R = m\,\ddot{x} \qquad (1)$$

$$\sum F_y = 0 \quad : \quad F_N - m \cdot g \cdot \cos\Theta = 0 \qquad (2)$$

Momentensatz:

$$\sum M = J_s \cdot \ddot{\varphi} \quad : \quad F_R \cdot \cancel{r} = \frac{2}{5} m r^{\cancel{2}} \cdot \ddot{\varphi}$$

$$F_R = \frac{2}{5} m r \cdot \ddot{\varphi} \qquad (3)$$

Kompatibilitätsbedingung:

$$\alpha = \underline{\underline{\ddot{\varphi}}} = \frac{a_t}{r} = \underline{\underline{\frac{\ddot{x}}{r}}} \qquad (4)$$

(4) in (3) einsetzen: $$F_R = \frac{2}{5} m \cancel{r} \frac{\ddot{x}}{\cancel{r}} = \frac{2}{5} m \ddot{x} \qquad (5)$$

(5) in (1) einsetzen: $$\cancel{m} \cdot g \cdot \sin\Theta - \frac{2}{5} \cancel{m} \ddot{x} = \cancel{m} \ddot{x}$$

$$g \cdot \sin\Theta = \frac{7}{5} \ddot{x}$$

$$\underline{\underline{\ddot{x} = \frac{5}{7} \cdot g \cdot \sin\Theta}}$$

$$\underline{\underline{\ddot{\varphi} = \frac{\ddot{x}}{r} = \frac{5}{7} \frac{g}{r} \cdot \sin\Theta}}$$

$\Longrightarrow$ lin. DGL 2. Ordnung