Systemtheorie für Anwender

Prof. Dr-Ing. Andreas Meisel

Zum Inhalt

- Vorbereitung: Komplexe Rechnung, Eulergleichung
- Vorbereitung: Fourierreihe

- diskrete Fouriertransformation
- Filterung im Frequenzbereich

1 Komplexe Zahlen

1.1 Einführung

Es gibt <u>keine reelle Zahl</u> x, die der Gleichung $x^2 = -1$ genügt.

Um diese Einschränkung aufzulösen, wird die <u>*imaginäre Einheit*</u> j eingeführt.

(1) $j = \sqrt{-1}$ $\Rightarrow$ $j^2 = -1$

<u>Aber Achtung</u>: j ist <u>keine reelle Zahl</u>

<u>ÜBUNG</u>: Vereinfachen Sie

$j^3 =$ $\qquad$ $\frac{1}{j} =$

$j^4 =$ $\qquad$ $\frac{1}{j^2} =$

1.2 Komplexe Zahl

Komplexe Zahl = die Summe einer reellen Zahl x (*Realteil*)
und einer imaginären Zahl y (*Imaginärteil*)

$$\underline{z} = x + jy \quad \text{mit der imaginären Einheit} \quad j^2 = -1 \qquad (2)$$

Eine reelle Zahl ist somit der Spezialfall einer komplexen Zahl,
nämlich eine komplexe Zahl ohne Imaginärteil.

Komplexe Variablen werden mit einem Unterstrich gekennzeichnet, z.B.: $\underline{z}$

Beispiele:

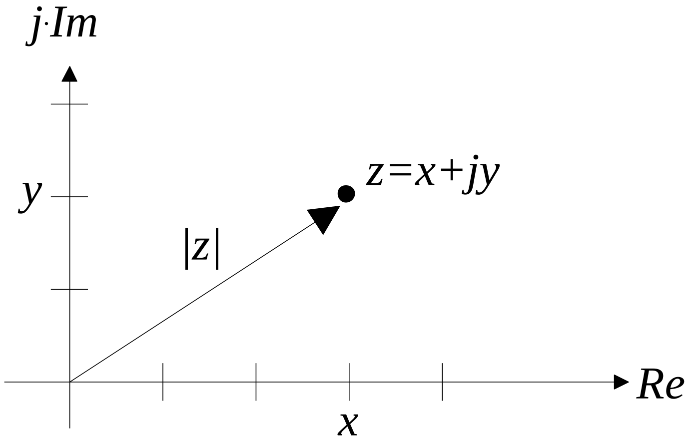
$$\underline{z} = 3 + j4$$

$$\underline{z} = 3.21 + j1.011$$

$$\underline{z} = \sqrt{3} + j\pi\sqrt{7}$$

1.3 Kartesische Darstellung

Eine komplexe Zahl $x+jy$ ist ein Punkt in der Ebene mit den kartesischen Koordinaten (x,y). Das Rechnen mit komplexen Zahlen kann geometrisch interpretiert werden.



Der **Betrag** einer komplexen Zahl $|z|$ ist durch folgende Beziehung gegeben:

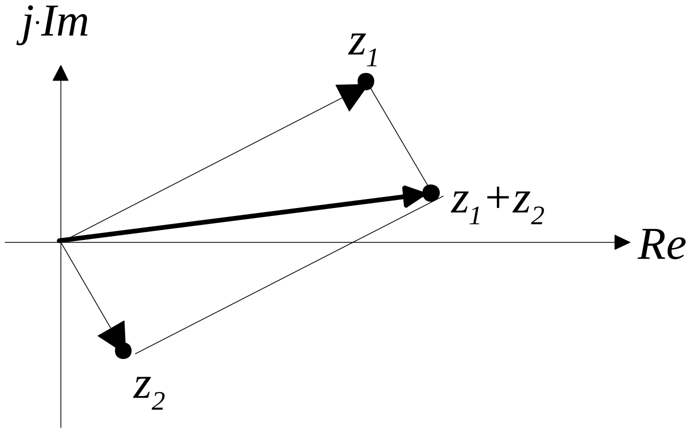
$$\left|\underline{z}\right| = \sqrt{x^2 + y^2} \qquad (3)$$

→ Ursprungsabstand

1.4 Addition/Subtraktion komplexer Zahlen

Für die Addition zweier komplexer Zahlen $\underline{z}_1 = x_1 + jy_1$ und $\underline{z}_2 = x_2 + jy_2$ gilt:

$$\underline{z}_1 + \underline{z}_2 = (x_1 + jy_1) + (x_2 + jy_2) = (x_1 + x_2) + j(y_1 + y_2) \qquad (4)$$



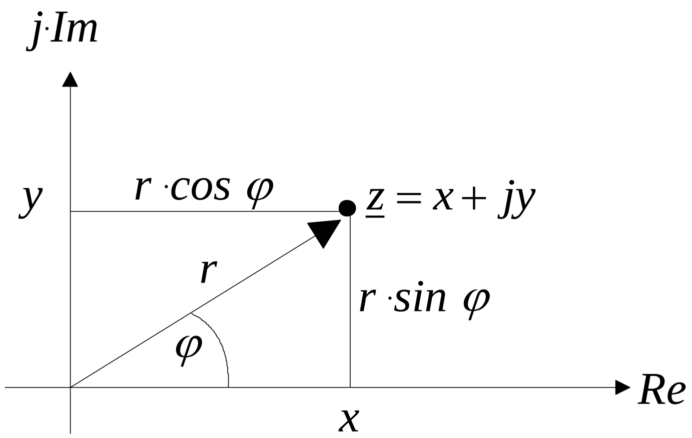
Beispiel: $\underline{z}_1$=3+j4 und $\underline{z}_2$=5+j6

$\underline{z}_1 + \underline{z}_2$ = (3+j4) + (5+j6) = 8 + j10

1.5 Darstellung in Polarkoordinaten

Eine andere Darstellungsweise für komplexe Zahlen ist die Darstellung in Polarkoordinaten (durch r und φ):

$$\underline{z} = x + jy \quad = \quad r \cdot \cos\varphi + j \cdot r \cdot \sin\varphi \quad = \quad r \cdot (\cos\varphi + j\sin\varphi) \qquad (5)$$



mit $r = |\underline{z}| = \sqrt{x^2 + y^2}$

$\varphi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$

Beispiel: $\underline{z}$ = 3+j4 ➔ $r = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5, \quad \varphi = \arctan(\frac{4}{3}) = 53.13^0$

$\underline{z}$ = 3+j4 = 5 · [cos(53.13°) + j sin(53.13°)]

1.6 Eulersche Formel

Leonhard Euler entdeckte einen (überraschenden) Zusammenhang zwischen der Exponentialfunktion und den trigonometrischen Funktionen.

$$r \cdot (\cos\varphi + j\sin\varphi) \quad = \quad r \cdot e^{j\varphi} \qquad (6)$$

- kompakte Schreibweise für kompl. Zahlen
- neue (einfache) Rechenregeln

Beispiel: $\underline{z}$ = 3+j4 ➔ $r = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5,\qquad \varphi = \arctan(\frac{4}{3}) = 53.13^0$

$$\underbrace{\underline{z} \;=\; 3 + j4}_{\text{Kartesische Form}} \;=\; \underbrace{5 \cdot [\cos(53.13°) + j\sin(53.13°)]}_{\text{Polarkoordinatenform}} \;=\; \underbrace{5 \cdot e^{j \cdot 53.13°}}_{\text{Exponentialform}}$$

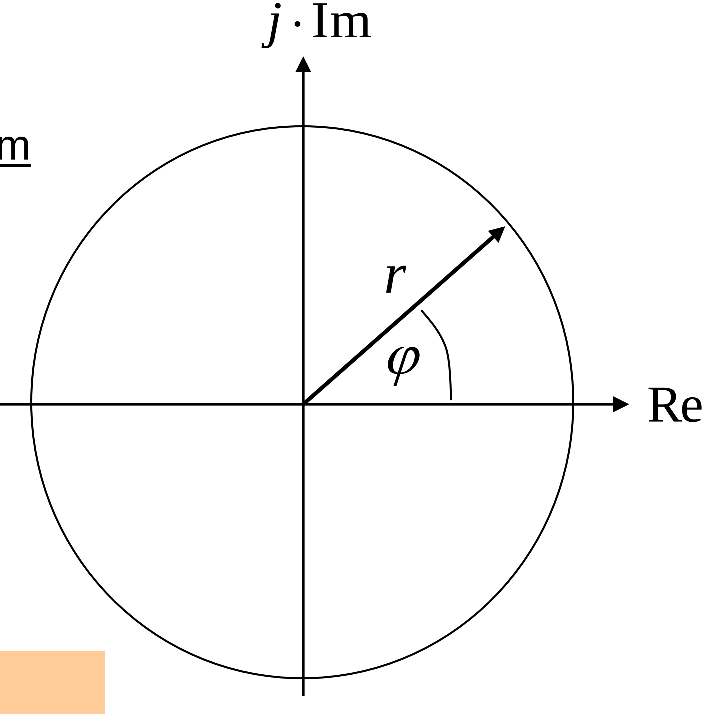
* Anm.: Dieser Zusammenhang folgt aus der Reihenentwicklung beider Funktionen (o.Bew.).

Grafische Interpretation der Eulersche Formel

Was bedeutet $r \cdot e^{j\varphi}$?

Da $r \cdot e^{j\varphi}$ nur eine andere Beschreibungsform der Polarkoordinatenschreibweise ist, gilt

1. Der Zeiger hat die Länge r
2. Der Zeiger zeigt in die Richtung φ



Fazit: Unabhängig von φ zeigt der Zeiger auf einen Punkt des Kreises mit dem Radius r.

ÜBUNG: Komplexe Zahlen

- Geben Sie folgende komplexe Zahlen in Polarkoordinatenform und Exponentialschreibweise an:

$$\underline{z} = -3 + j4$$
$$\underline{z} = 5 - j2$$

- Formen Sie folgende komplexe Zahlen in die kartesische Form um:

$$\underline{z} = 5e^{j\frac{\pi}{2}}$$

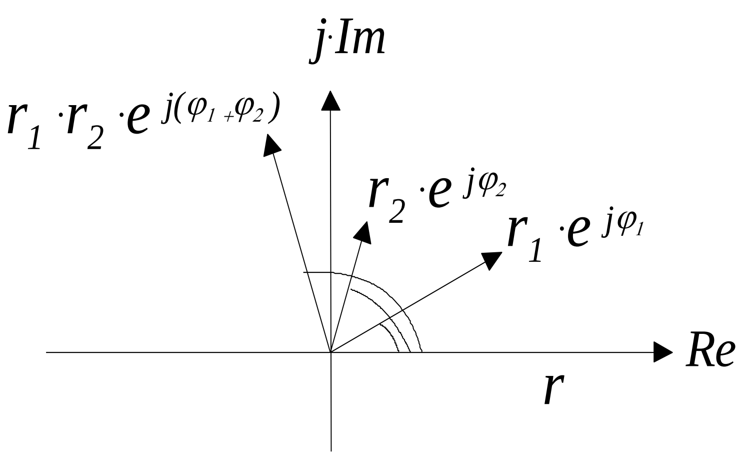
$$\underline{z} = je^{j\pi}$$

$$\underline{z} = 2e^{j30^\circ}$$

1.7 Multiplikation komplexer Zahlen

Mit Hilfe der Euler-Formel wird auch die Multiplikation komplexer Zahlen sehr einfach geometrisch interpretierbar.

$$\underline{z}_1 \cdot \underline{z}_2 = (x_1 + jy_1)\cdot(x_2 + jy_2) = r_1 e^{j\varphi_1} \cdot r_2 e^{j\varphi_2} = r_1 \cdot r_2 \cdot e^{j(\varphi_1+\varphi_2)} \quad (7)$$



Die Multiplikation zweier komplexer Zahlen ist eine *Drehsteckung*.

- Die Beträge der Vektoren werden multipliziert.
- Die Winkel werden addiert

1.8 Division komplexer Zahlen

$$\frac{\underline{z}_1}{\underline{z}_2} = \frac{(x_1 + jy_1)}{(x_2 + jy_2)} = \frac{r_1 e^{j\varphi_1}}{r_2 e^{j\varphi_2}} = \frac{r_1}{r_2} \cdot e^{j(\varphi_1 - \varphi_2)} \quad (8)$$

Die Division zweier komplexer Zahlen ist eine *Drehstauchung*.

- Die Beträge der Vektoren werden dividiert.
- Die Winkel werden subtrahiert.

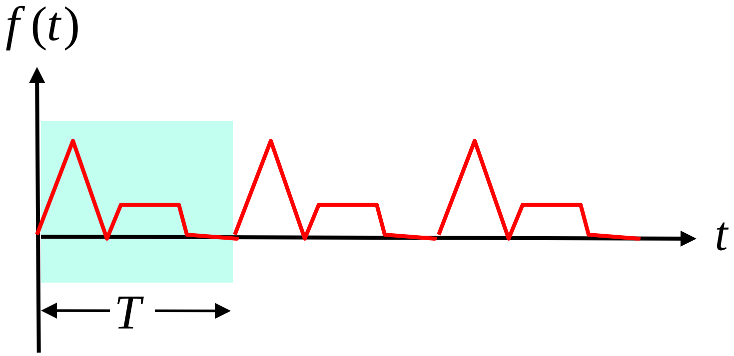
2. Fourierreihe

2.1 Synthese periodischer Funktionen

Joseph de Fourier entdeckte 1822, das sich (alle) periodischen Funktionen als trigonometrische Funktionenreihe darstellen lassen(1):

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t) \qquad (1)$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi \cdot f$$



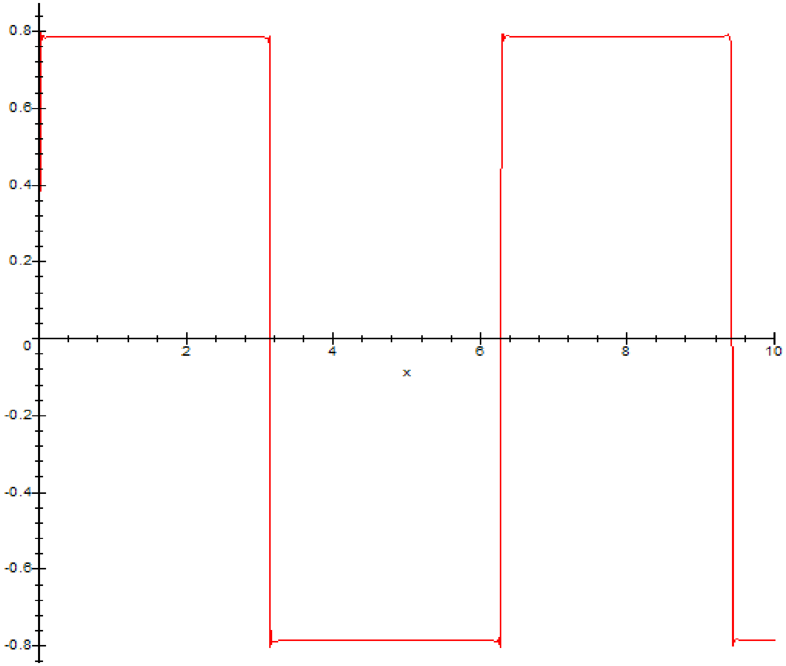
T *Periodendauer*

$f = \frac{1}{T}$ *Frequenz*

$a_n,\ b_n$ *Fourierkoeffizienten* (Wichtungsfaktoren der Vielfachen der Grundfrequenz)

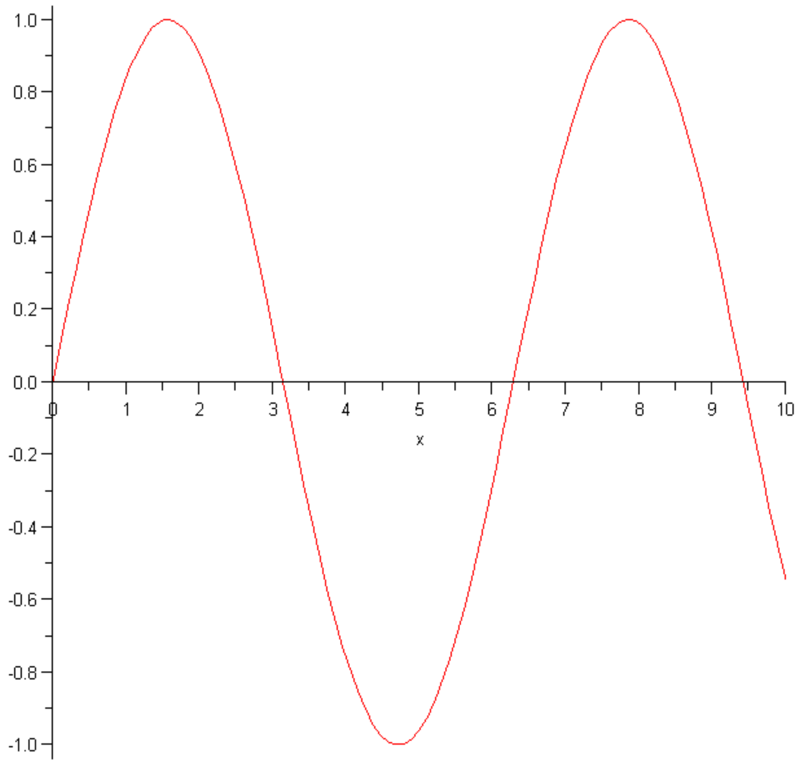
(1) Voraussetzung (Dirichletsche Bedingung): f(x) ist in allen Teilintervallen im Bereich 0..2Pi stetig und monoton.

Beispiel: Approximation der folgenden Rechteckfunktion



Grundschwingung

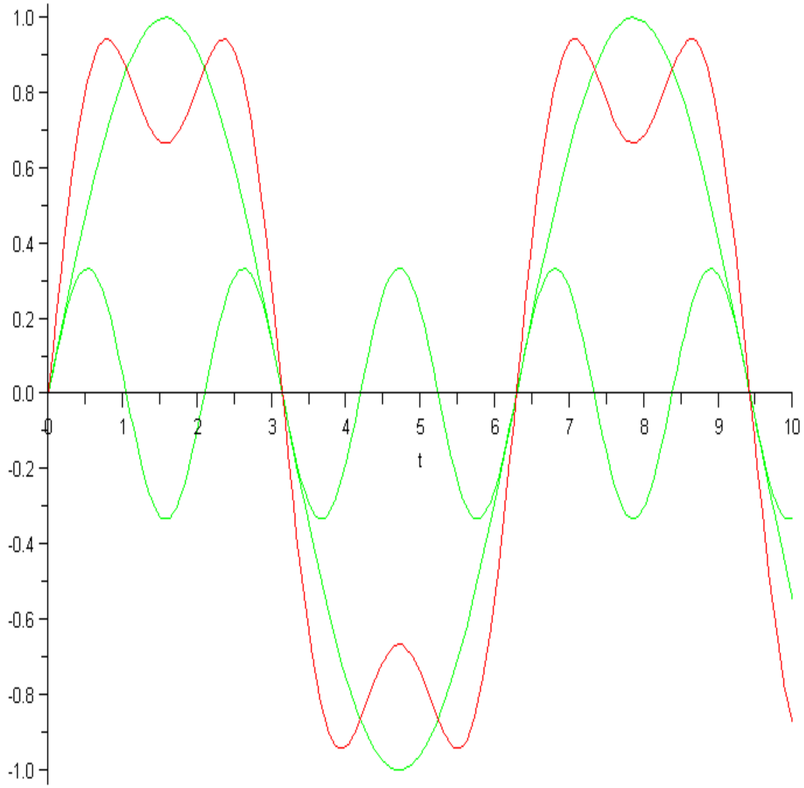
$$f(t) = \sin(t)$$



$$a_0 = 0$$

$$a_1 = 0 \qquad b_1 = 1$$

$$f(t) = \sin(t) + \frac{\sin(3t)}{3}$$



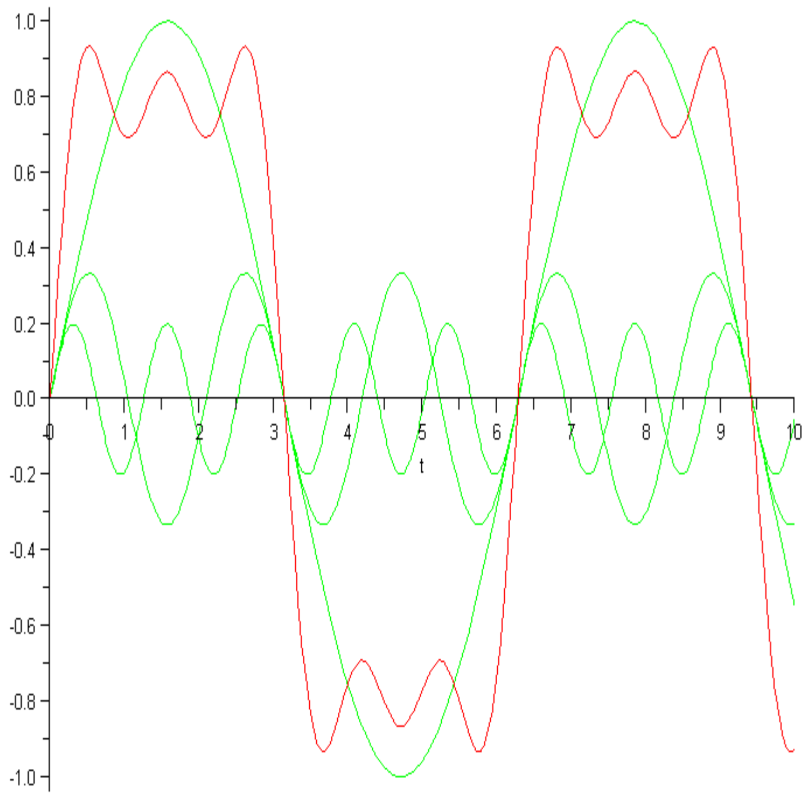
$$a_0 = 0$$

$$a_1 = 0 \qquad b_1 = 1$$

$$a_2 = 0 \qquad b_2 = 0$$

$$a_3 = 0 \qquad b_3 = \tfrac{1}{3}$$

$$f(t) = \sin(t) + \frac{\sin(3t)}{3} + \frac{\sin(5t)}{5}$$



$$a_0 = 0$$

$$a_1 = 0 \qquad b_1 = 1$$

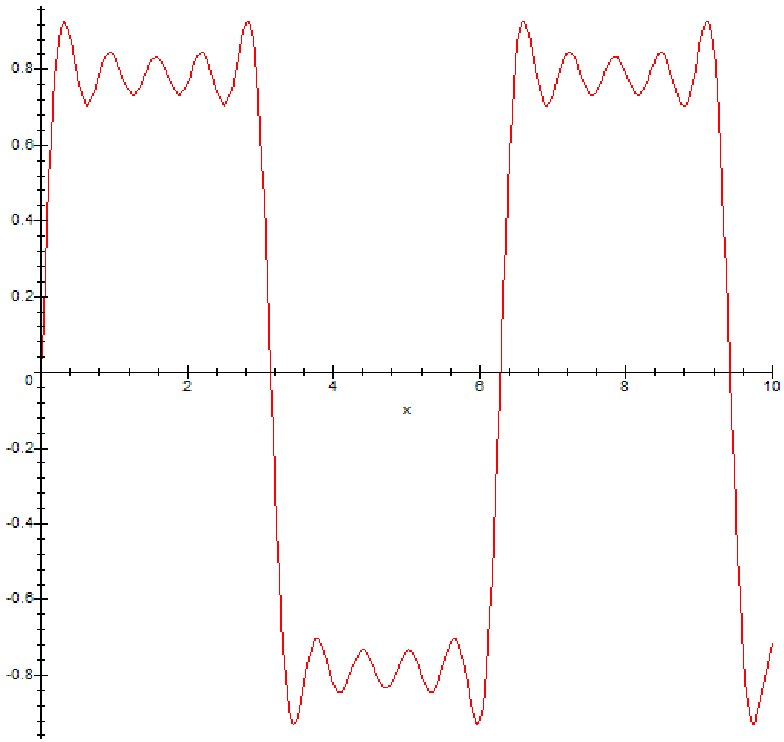
$$a_2 = 0 \qquad b_2 = 0$$

$$a_3 = 0 \qquad b_3 = \tfrac{1}{3}$$

$$a_4 = 0 \qquad b_4 = 0$$

$$a_5 = 0 \qquad b_5 = \tfrac{1}{5}$$

$$f(t) = \sin(t) + \frac{\sin(3t)}{3} + \frac{\sin(5t)}{5} + \frac{\sin(7t)}{7} + \frac{\sin(9t)}{9}$$



$$a_0 = 0$$

$$a_1 = 0 \qquad b_1 = 1$$

$$a_2 = 0 \qquad b_2 = 0$$

$$a_3 = 0 \qquad b_3 = \tfrac{1}{3}$$

$$a_4 = 0 \qquad b_4 = 0$$

$$a_5 = 0 \qquad b_5 = \tfrac{1}{5}$$

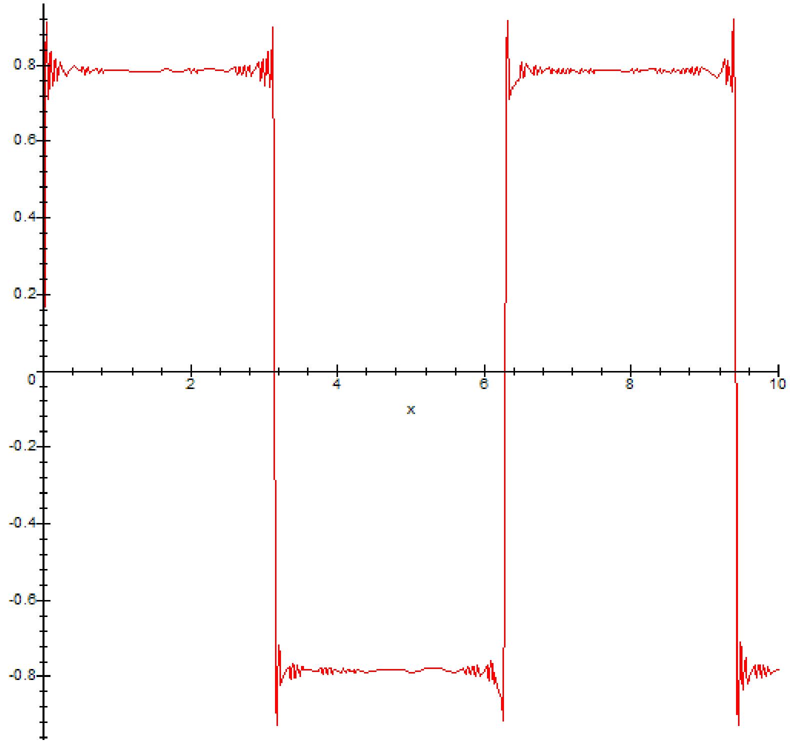
$$a_6 = 0 \qquad b_6 = 0$$

$$a_7 = 0 \qquad b_7 = \tfrac{1}{7}$$

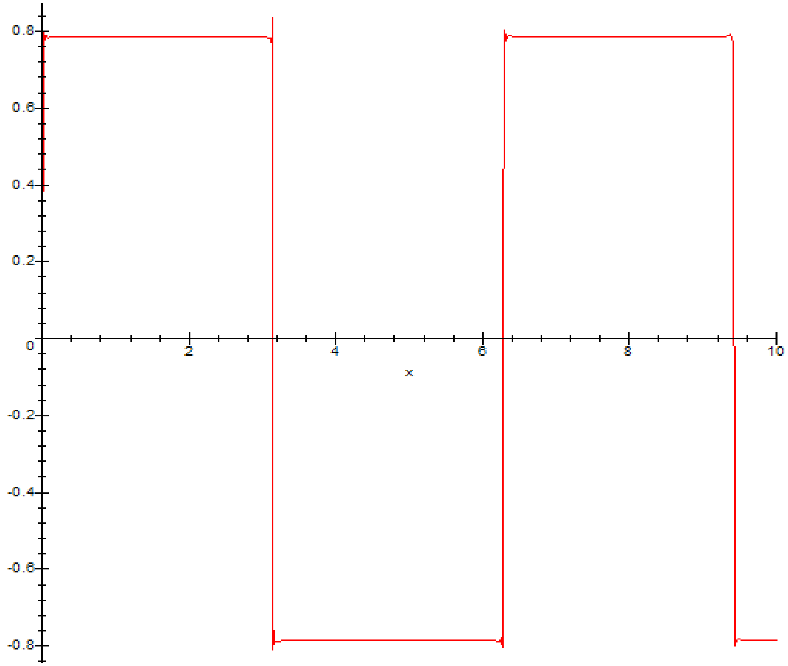
$$a_8 = 0 \qquad b_8 = 0$$

$$a_9 = 0 \qquad b_9 = \tfrac{1}{9}$$

$$f(t) = \sin(t) + \frac{\sin(3t)}{3} + \frac{\sin(5t)}{5} + \frac{\sin(7t)}{7} + \frac{\sin(9t)}{9} + ... + \frac{\sin(99t)}{99}$$



$$f(t) = \sin(t) + \frac{\sin(3t)}{3} + \frac{\sin(5t)}{5} + \frac{\sin(7t)}{7} + \frac{\sin(9t)}{9} + ... + \frac{\sin(999t)}{999}$$

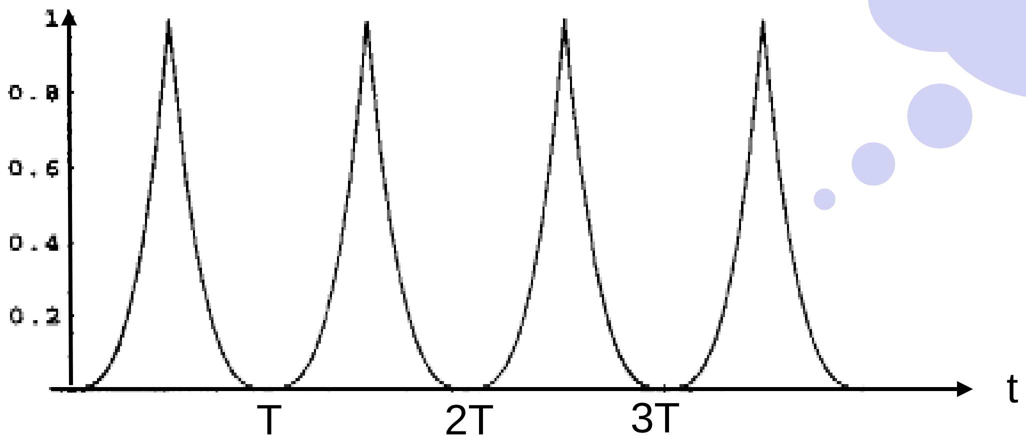


2.2 Analyse periodischer Funktionen

2.2.1 Fragestellung

Gegeben sei eine periodische Funktion.

Aus welchen sin-/cos-Funktionen ist diese Funktion zusammengesetzt ?



oder präziser gefragt:

Wie müssen die Wichtungsfaktoren der Sinusfunktionen (b_n) und der Cosinus-funktionen (a_n) gewählt werden, damit genau diese periodische Funktion entsteht ?

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + a_1 \cos(\omega t) + a_2 \cos(2\omega t) + a_3 \cos(3\omega t) + \ldots\ldots\ldots$$
$$+ b_1 \sin(\omega t) + b_2 \sin(2\omega t) + b_3 \sin(3\omega t) + \ldots\ldots\ldots$$

2.2.2 Berechnung der Fourierkoeffizienten

Die Fourierkoeffizienten einer periodischen Funktion *f(t)* können wie folgt berechnet werden (o. Bew.):

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_0^T f(t)\, dt \qquad (2)$$

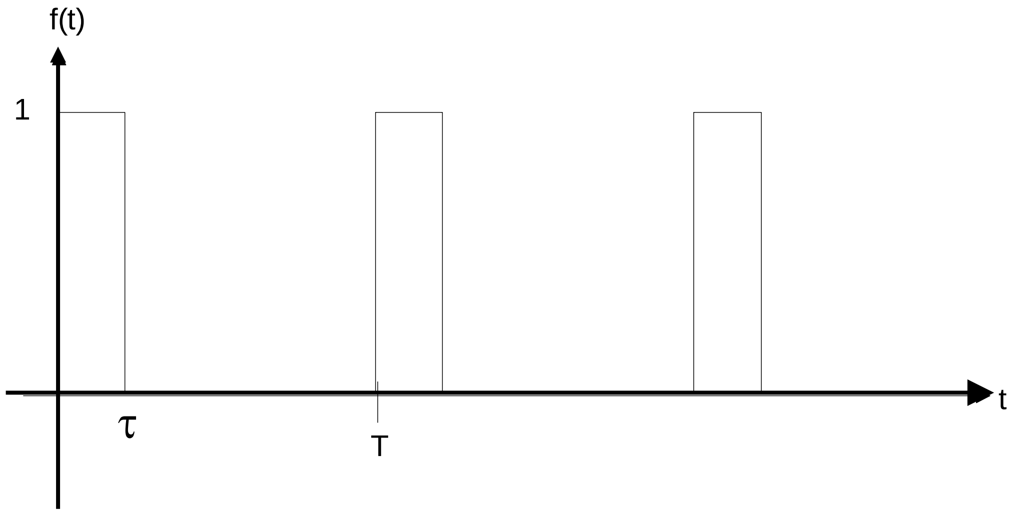
$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos(n\omega t)\, dt \qquad (3)$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin(n\omega t)\, dt \qquad (4)$$

Anm.: (2)-(4) erhält man dadurch, dass (1) mit sin($n\omega t$) bzw. cos($n\omega t$) multipliziert und anschließend von 0..T integriert wird.

BEISPIEL: Berechnung der Fourierkoeffizienten

Berechnen Sie die Fourierkoeffizienten und die Fourierreihe für folgende Impulsfolge mit MAPLE:



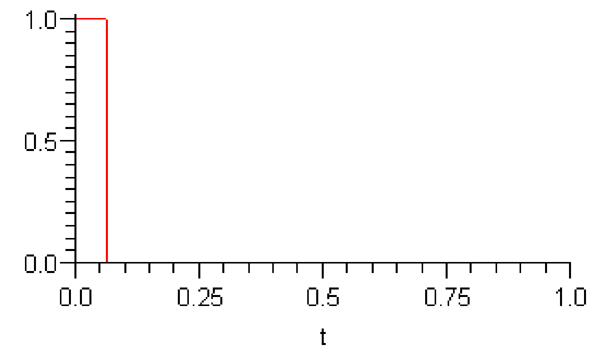
Berechnen Sie die Koeffizienten für $\tau = T/16$.

$alias(sigma = Heaviside);$ # Def.: Sprungfunktion : 0 für $t < 0$, 1 für $t >= 0$

$f := t \rightarrow \left(sigma(t) - sigma\left(t - \frac{1}{16}\right)\right);$ # Impuls der Breite $\frac{T}{16}$

$plot(f(t),\ t = 0..1);$

eine Periode der Impulsfunktion



Berechnung der Fourierkoeffizienten

$n := 40 : \quad T := 1 :$

$for\ i\ from\ 0\ to\ n\ do$

$a[i] := \frac{2}{T} \cdot evalf\left(int\left(f(t) \cdot cos\left(\frac{2 \cdot \mathrm{Pi} \cdot i \cdot t}{T}\right), t = 0..T\right)\right);$

$b[i] := \frac{2}{T} \cdot evalf\left(int\left(f(t) \cdot sin\left(\frac{2 \cdot \mathrm{Pi} \cdot i \cdot t}{T}\right), t = 0..T\right)\right);$

$od :$

Berechnung der Integrale (2) .. (4)

$eval(a)$; *# Ausgabe der Koeffizienten*
$eval(b)$;

 # Berechnung der Fourierreihe

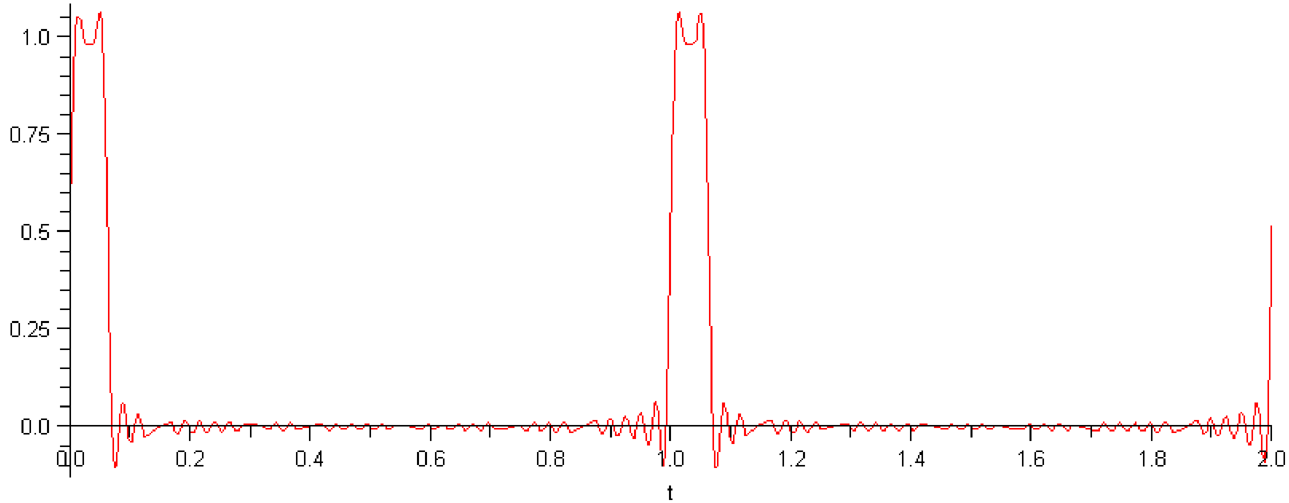
$$fr := t \rightarrow \frac{a[0]}{2} + sum(a[k] \cdot cos(2 \cdot \pi \cdot k \cdot t) + b[k] \cdot sin(2 \cdot \pi \cdot k \cdot t), \quad k = 1..39);$$

$$fr := t \rightarrow \frac{1}{2} a_0 + \sum_{k=1}^{39} (a_k \cos(2\pi k t) + b_k \sin(2\pi k t))$$

Fourierreihe für Impulsfunktion (bis n=5)

```
fr :=  0.0625000000
      +0.1218119198 * cos(2*Pi*1*t)  +  0.0242298972 * sin(2*Pi*1*t)
      +0.1125395394 * cos(2*Pi*2*t)  +  0.0466154036 * sin(2*Pi*2*t)
      +0.0980266629 * cos(2*Pi*3*t)  +  0.0654993221 * sin(2*Pi*3*t)
      +0.0795774715 * cos(2*Pi*4*t)  +  0.0795774715 * sin(2*Pi*4*t)
      +0.0588159977 * cos(2*Pi*5*t)  +  0.0880243611 * sin(2*Pi*5*t)
```

$$plot(fr(t),\ t = 0..2);$$

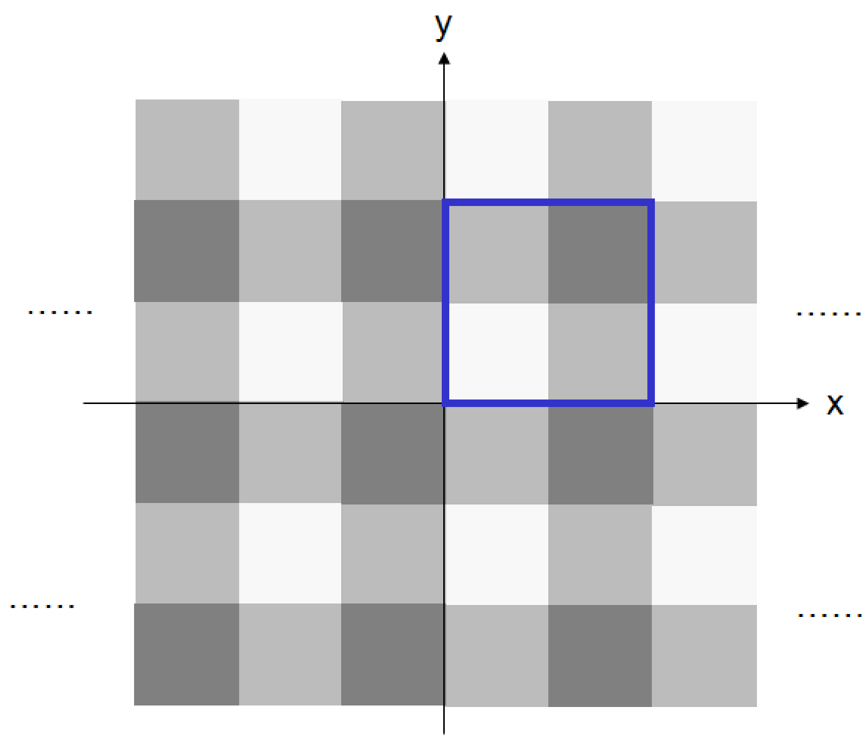


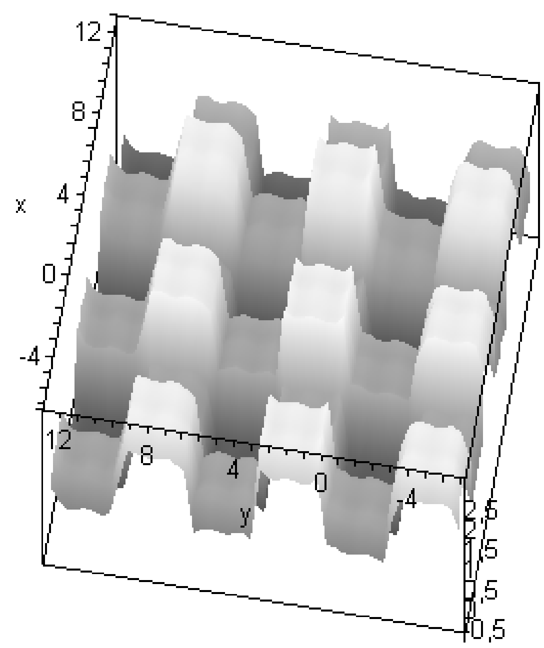
Rekonstruierte Fourierreihe für Impulsfunktion (bis n=39)

2.3 2D-Fourierreihe

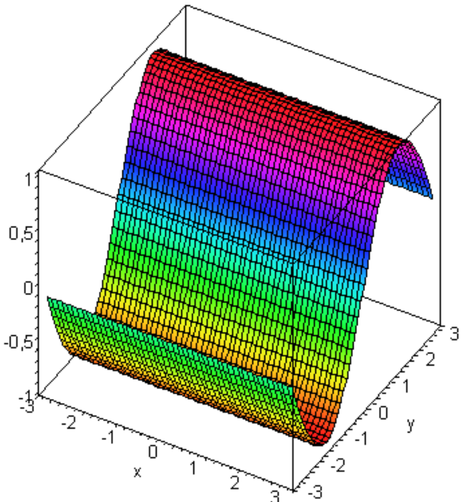
Auch periodische 2D-Funktionen lassen sich als Summe
von sin/cos-Funktionen darstellen.

Beispiel: periodisches Funktionsgebirge z = f(x,y)

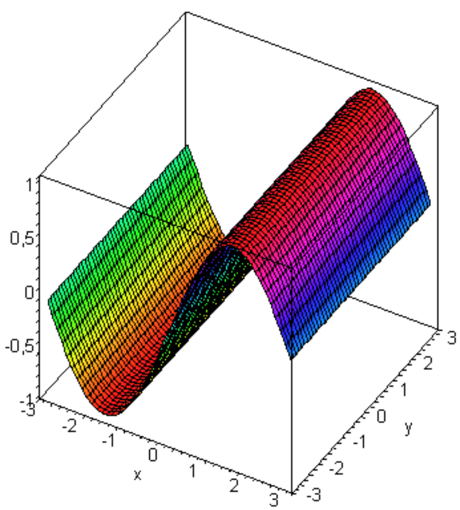




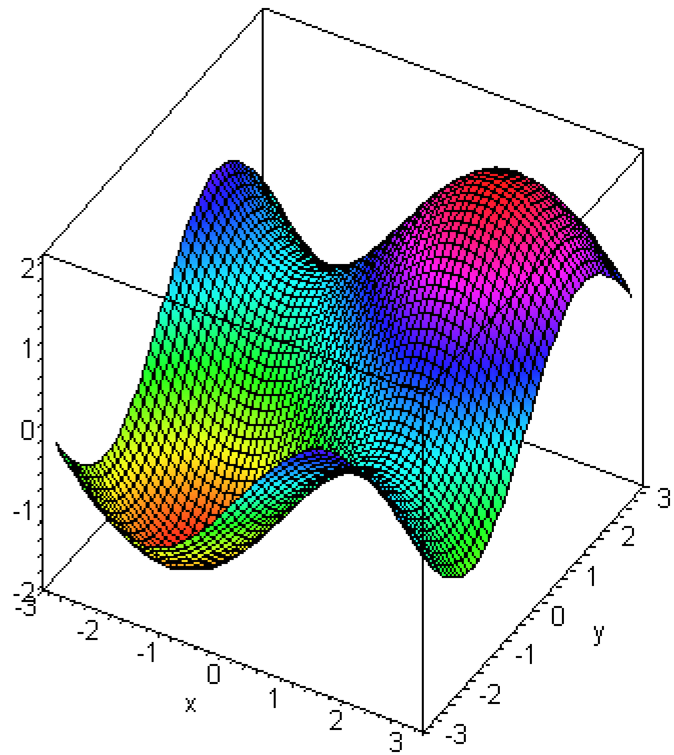
$$f(x,y) = \sin(x) + \sin(y)$$



+

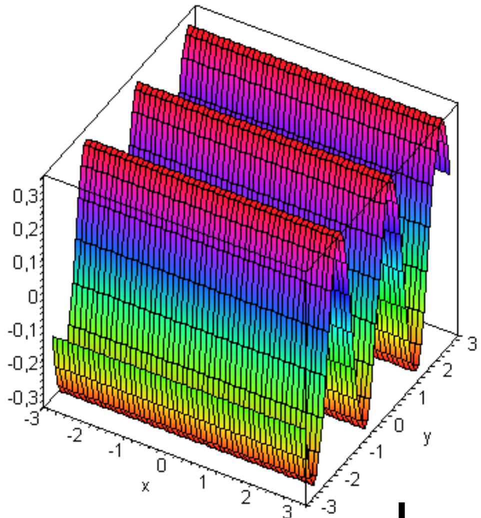


→

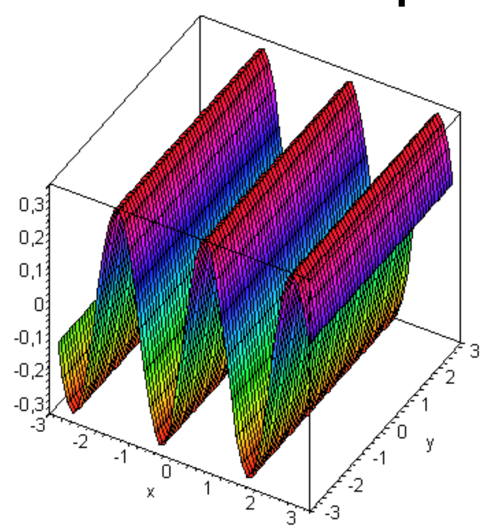


→ +

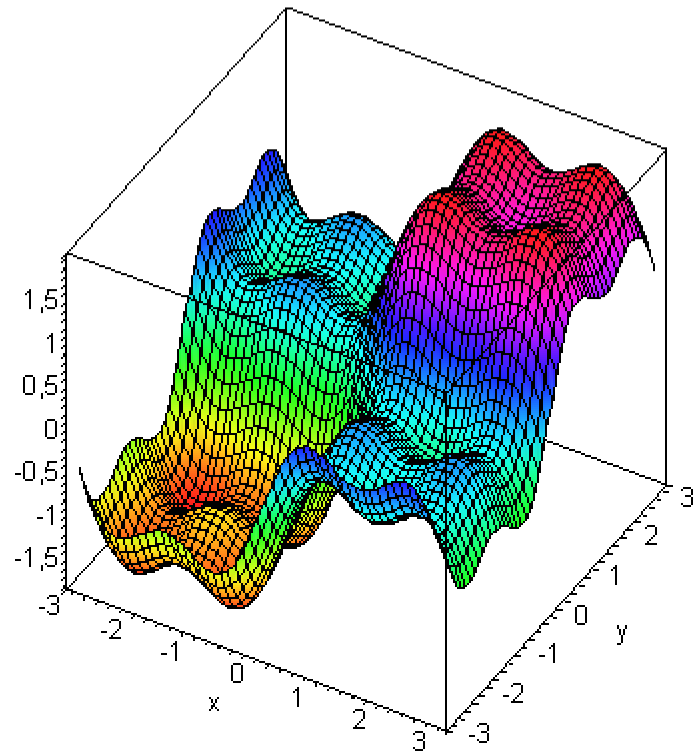
$$f(x,y) = \sin(x) + \sin(y) + \frac{1}{3}\sin(3x) + \frac{1}{3}\sin(3y)$$



+

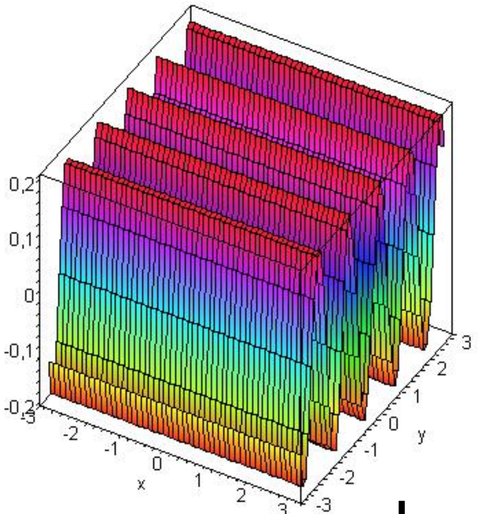


→

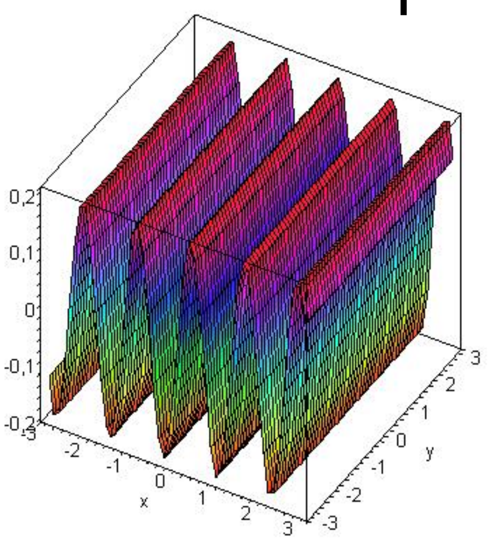


→ +

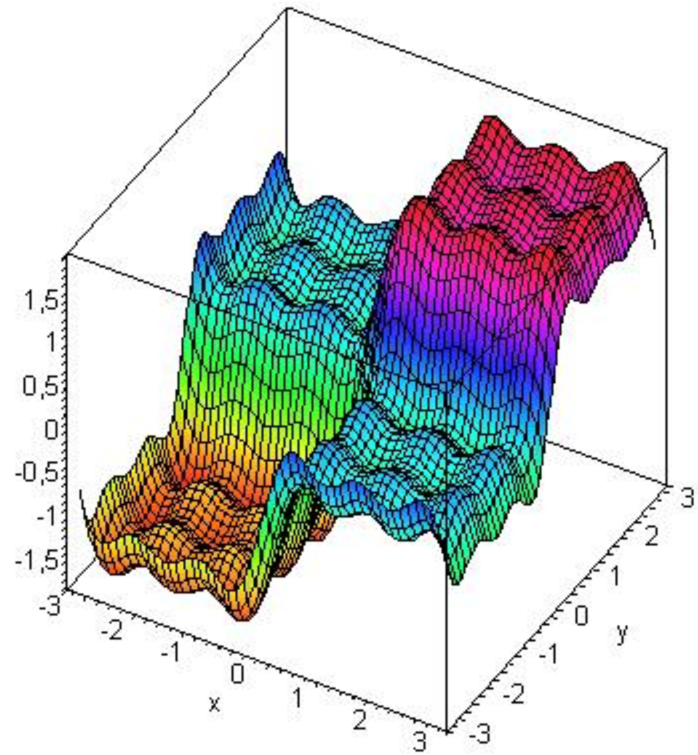
$$f(x,y) = \sin(x) + \sin(y) + \frac{1}{3}\sin(3x) + \frac{1}{3}\sin(3y) + \frac{1}{5}\sin(5x) + \frac{1}{5}\sin(5y)$$



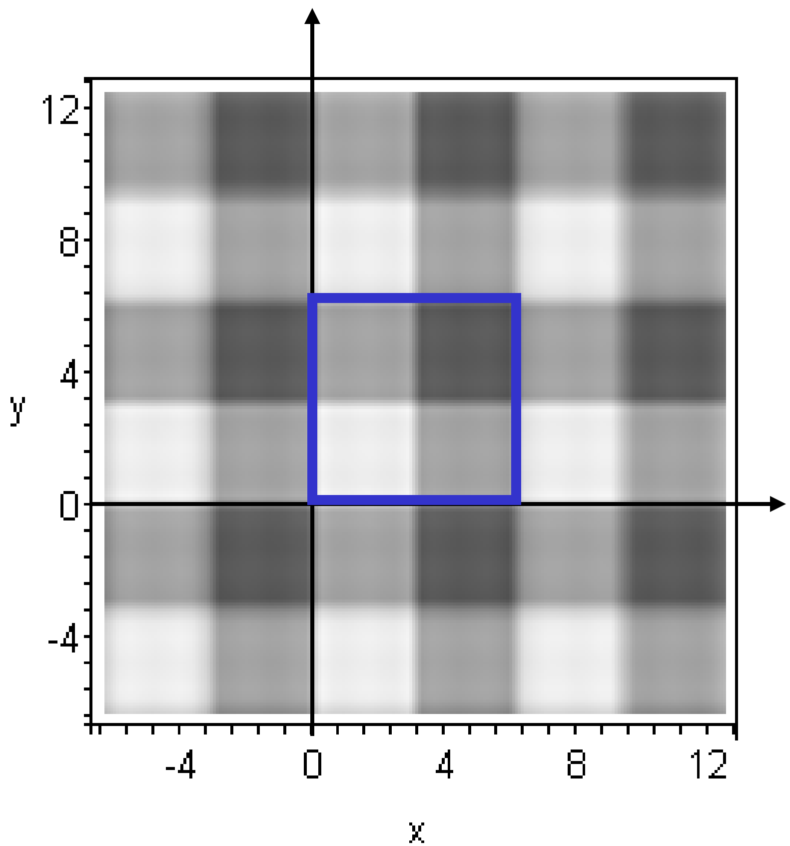
+

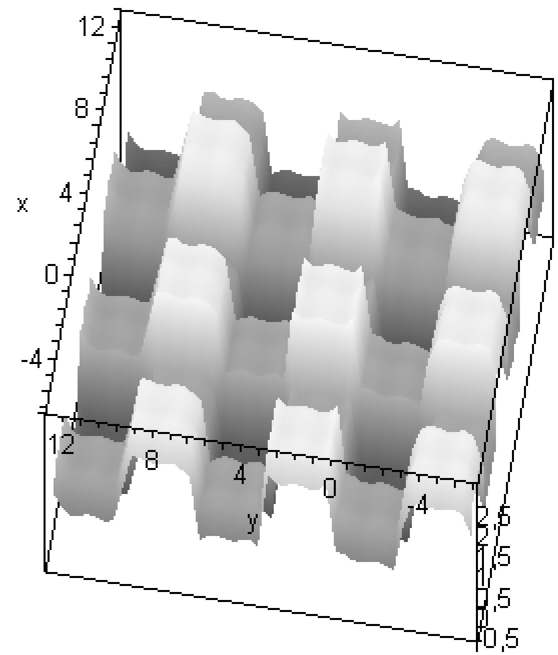


→



$$f(x,y) = \sin(x) + \sin(y) + \frac{1}{3}\sin(3x) + \frac{1}{3}\sin(3y) + \ldots\ldots\ldots\ldots + \frac{1}{11}\sin(11x) + \frac{1}{11}\sin(11y)$$

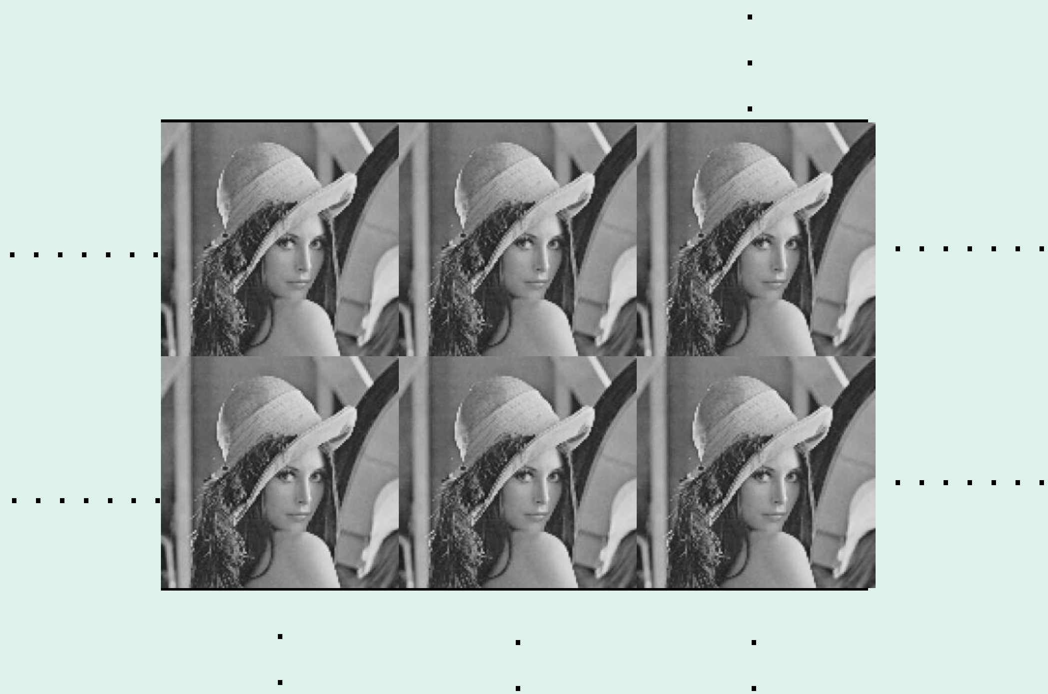




2.4 Idee: Bilder als Summe von „Wellenfunktionen“

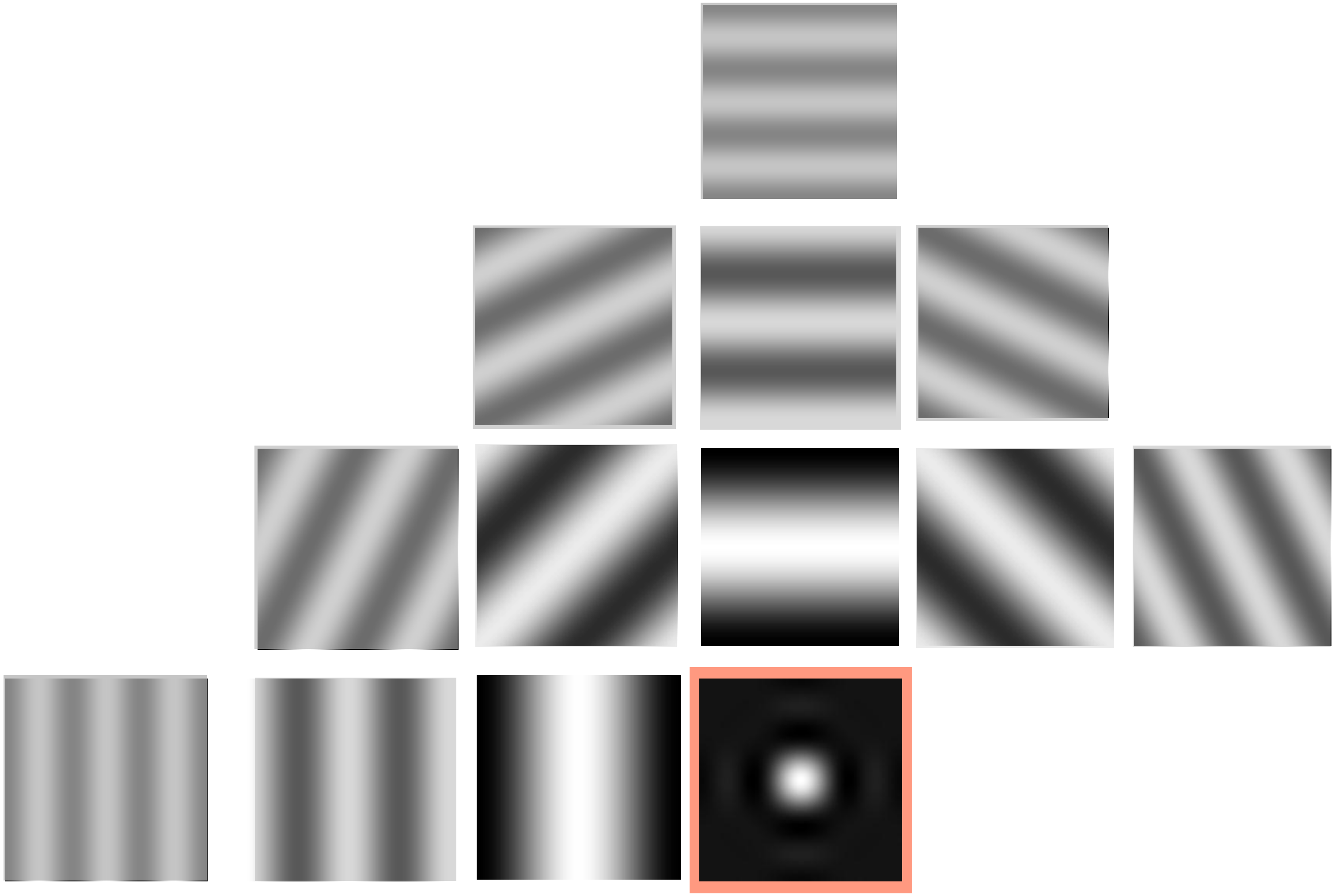
Probleme:

1. Die Fourierreihe <u>setzt periodische Funktionen voraus</u>.
   ➔ *Ein Bild kann als eine Periode einer periodischen Funktion (in der Ebene) aufgefasst werden*



2. Berechnung der Fourierkoeffizienten für abgetastete Funktionen notwendig ➔ *Diskrete Fouriertransformation*

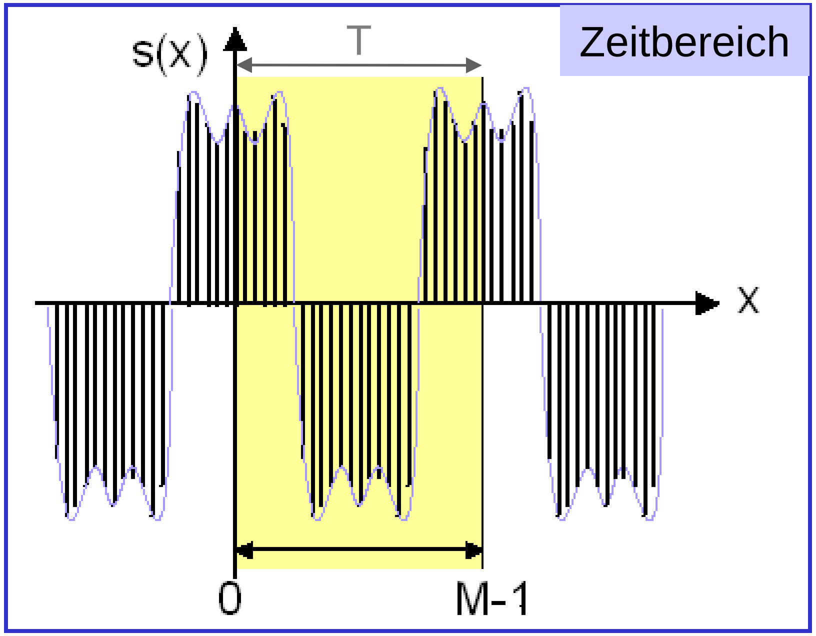
Bilder als Summe von "Wellenfunktionen"



3. Diskrete Fouriertransformation (zunächst 1-dimensional)

3.1 Problemstellung, Definition und Eigenschaften der DFT

Gegeben: eine Periode eines abgetasteten periodischen Signals s(x)
- bestehend aus M Abtastwerten und
- mit der Grundfrequenz f_0).



Zusammenhang zwischen der Periodendauer T und der Grundfrequenz f_0:

$$f_0 = \frac{1}{T}$$

Aus welchen (abgetasteten) sin-/cos-Schwingungen der Frequenz $u \cdot f_0$ (u=1,2,3,….) ist das Signal zusammengesetzt ?

…. oder anders gefragt :

Mit welchen Wichtungen $R(u)$ und $I(u)$ sind (abgetastete) cos- und sin-Schwingungen der Frequenz u (u=1,2,3,...) in einem periodischen Signal *s(x)* enthalten ?

→ diskrete Fouriertransformation

= Analyse eines abgetasteten, periodischen Signals s(x)

$$R(u) = +\frac{1}{M} \cdot \sum_{x=0}^{M-1} s(x) \cdot \cos(2\pi \frac{u}{M} \cdot x) \quad (1)$$

mit $u = 0, 1, 2, .., M-1$

$$I(u) = -\frac{1}{M} \cdot \sum_{x=0}^{M-1} s(x) \cdot \sin(2\pi \frac{u}{M} \cdot x) \quad (2)$$

M : Anzahl der Abtastwerte

$s(x)$: abgetastetes Signal (bei x)

u : Vielfache der Grundfrequenz

→ die DFT beschreibt die Zerlegung einer abgetasteten, periodischen Funktion in (abgetastete) sin-/cos-Funktionen (=Analyse)

Diskussion: M Abtastwerte der Funktion $s(x)$ → M Koeffizienten $R(u)$ und $I(u)$

ÜBUNG: Diskrete Fourier-Transformation

Geben Sie einen Algorithmus für die DFT an.

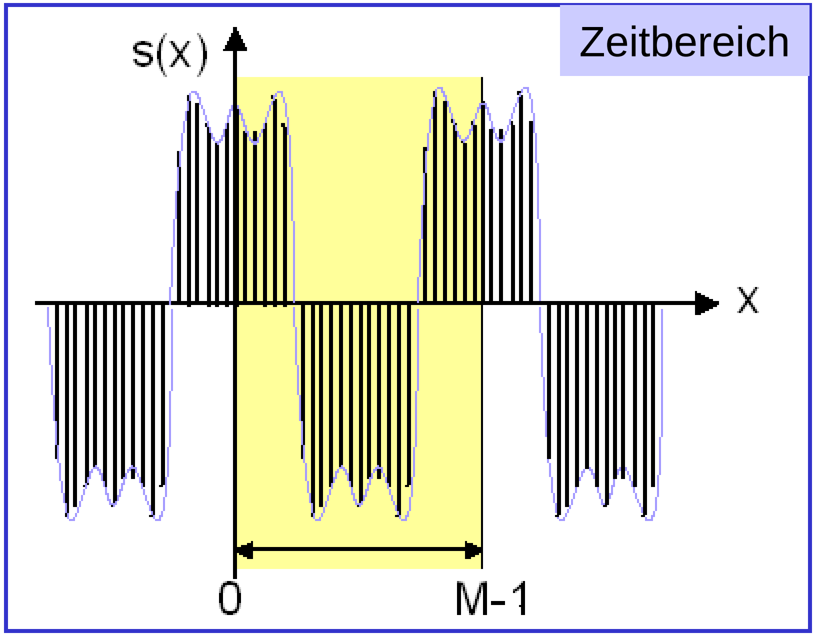
Anm.: Zusammenhang von DFT und Fourierreihe

$$\frac{a_u}{2} \mathrel{\hat{=}} +R(u) \qquad \text{(3 a)}$$

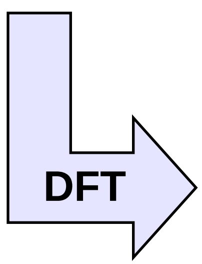
$$\frac{b_u}{2} \mathrel{\hat{=}} -I(u) \qquad \text{(3 b)}$$

für u = 1…(M-1)/2

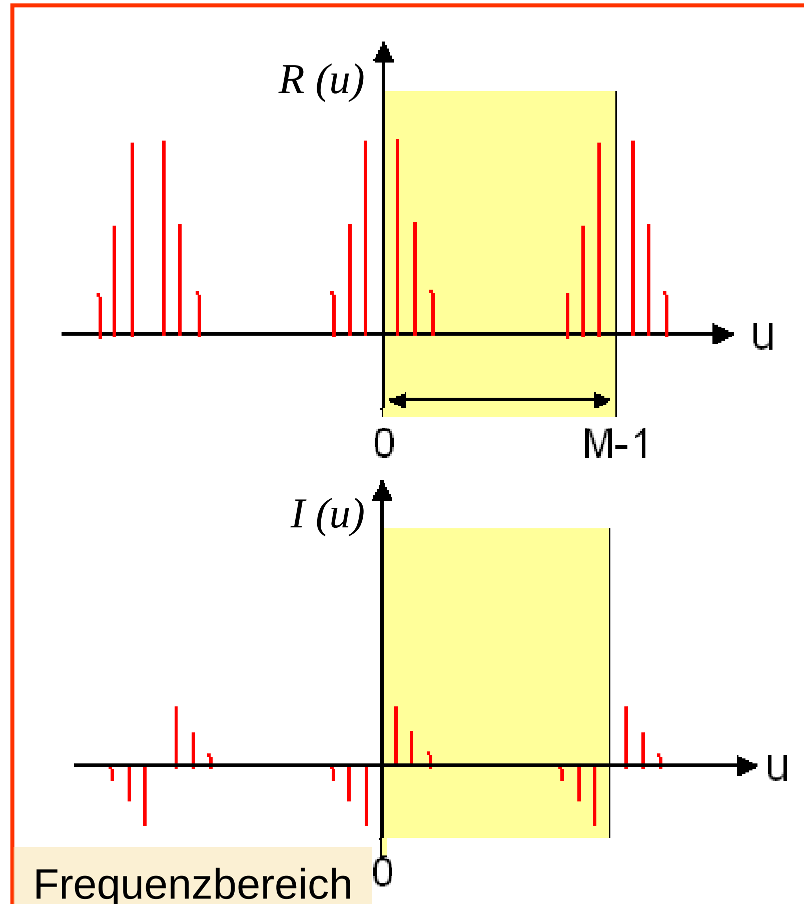
Diskussion: Eigenschaften der Fourier-Koeffizienten



s(x) ist eine periodische Funktion



Die Fouriertransformierte einer abgetasteten, periodischen Funktionen ist ebenfalls eine abgetastete, **periodische** Funktion (o. Bew.).

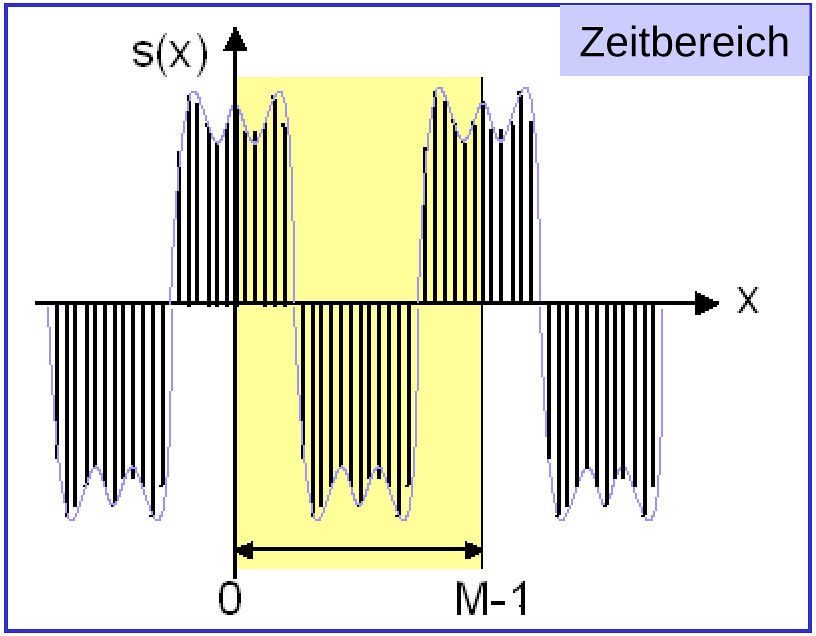


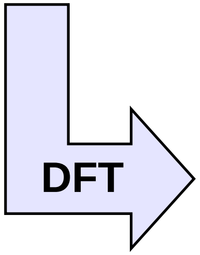
Für die weitere Berechnung ist eine um u=0 zentrierte Darstellung günstiger.

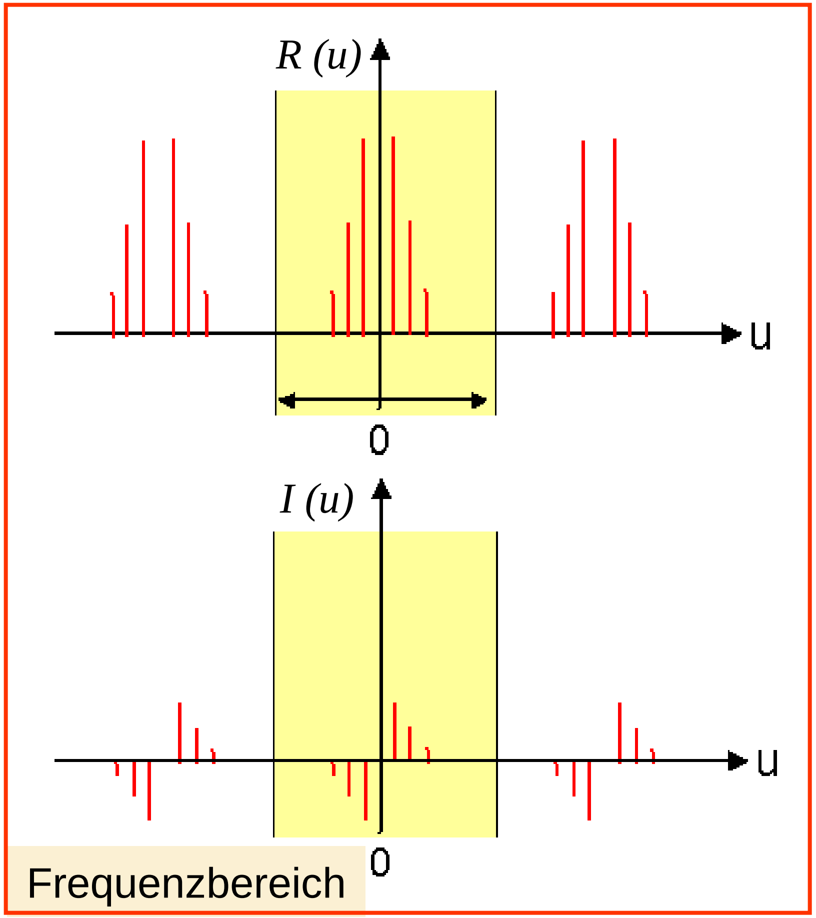
Für reelle s(x) gilt (o. Bew):

→ $R(u) = R(-u)$ gerade Funktion

$I(u) = -I(-u)$ ungerade Funktion

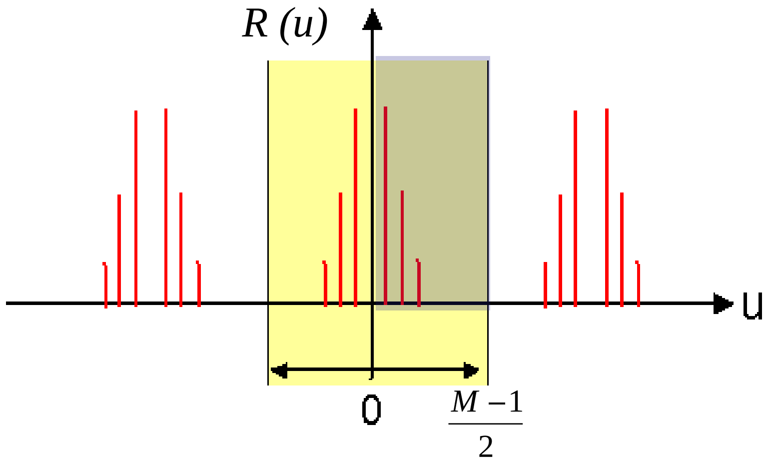


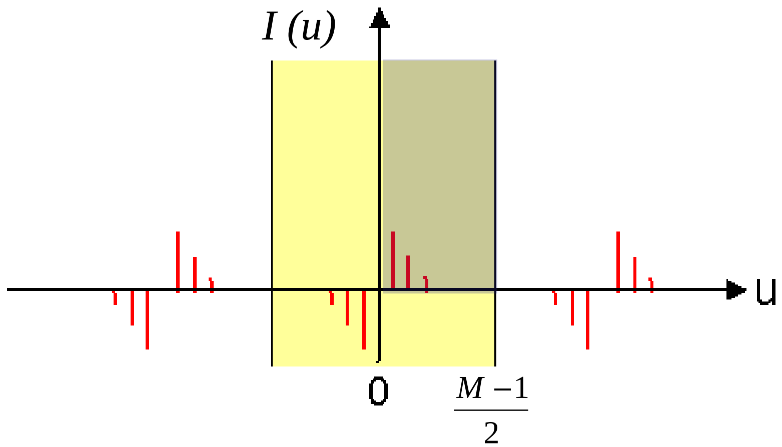




3.2 Inverse diskrete Fourier Transformation = Synthese eines periodischen abgetasteten Signals

→ Die IDFT beschreibt die Synthese einer periodischen, abgetasteten Funktion aus gewichteten (mit $R(u)$ und $I(u)$), abgetasteten cos- und sin-Funktionen.





$$s(x) = R(0) + \sum_{u=1}^{\frac{(M-1)}{2}} \left[2 \cdot R(u) \cdot \cos(2\pi \frac{x}{M} \cdot u) - 2 \cdot I(u) \cdot \sin(2\pi \frac{x}{M} \cdot u) \right]$$

$$\text{mit } x = 0, 1, 2, \ldots, M-1 \qquad (4)$$

ÜBUNG: Inverse diskrete Fourier-Transformation

Geben Sie einen Algorithmus für die IDFT an.

Fazit:

Eine reelle periodische abgetastete Funktion $s(x)$ wird durch ihre Frequenzanteile $[R(u), I(u)]$ ein-eindeutig beschrieben, mit u=0…(M-1)/2

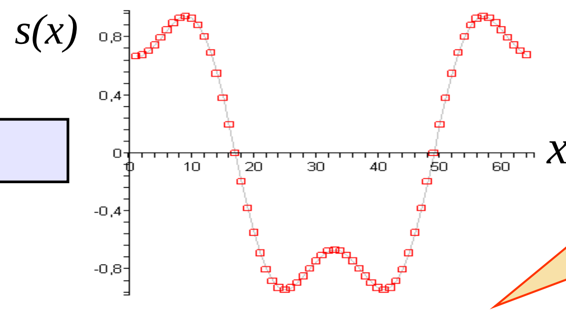
Kurzschreibweise: (Korrespondenzsymbol)

$$s(x) \circ\!\!-\!\!\bullet \left[R(u),\ I(u)\right]$$

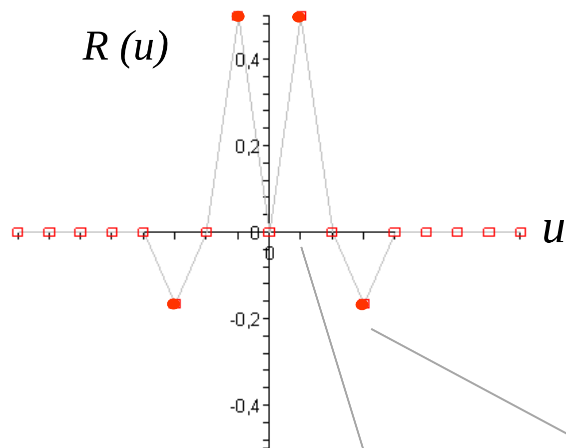
3.3 Interpretation

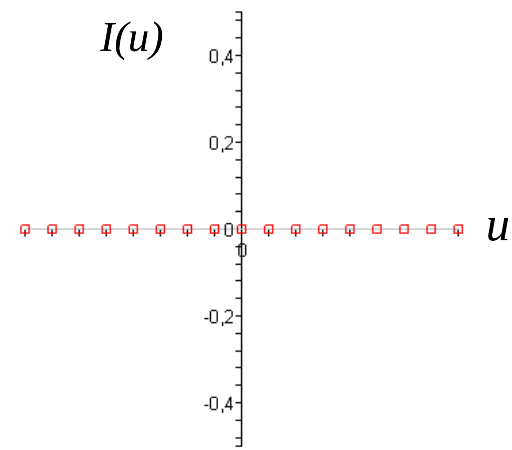
Beispiel:
gerade Funktion
Anm.: f(x)=f(-x)

DFT



Wie ist das Ergebnis der DFT zu interpretieren ?



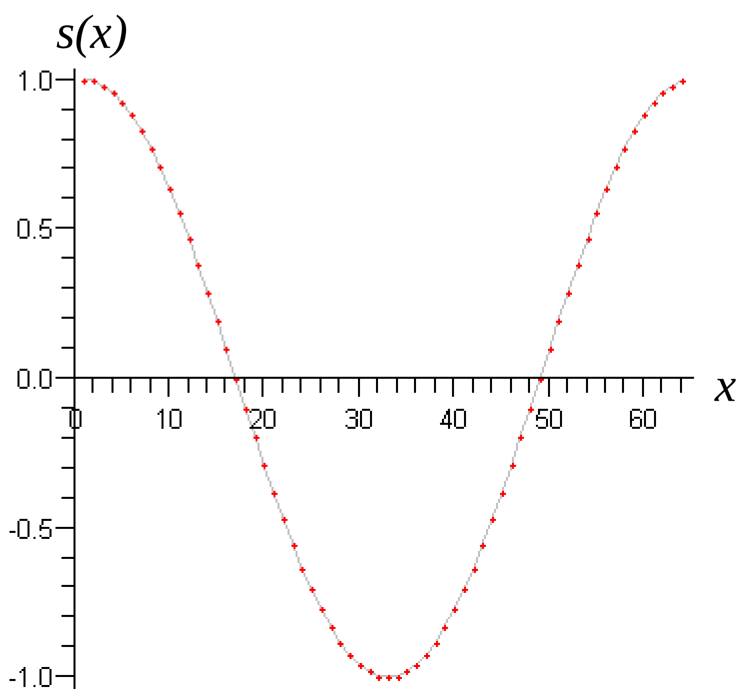


s. Gleichg. (4)

$$s(x) = \cos(2\pi \cdot 1 \cdot \frac{x}{M}) - \frac{1}{3}\cos(2\pi \cdot 3 \cdot \frac{x}{M})$$

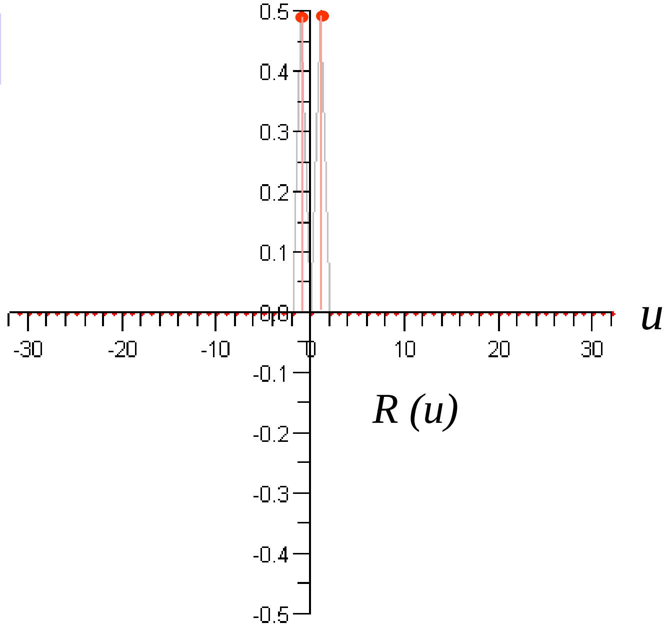
Frequenzbereich

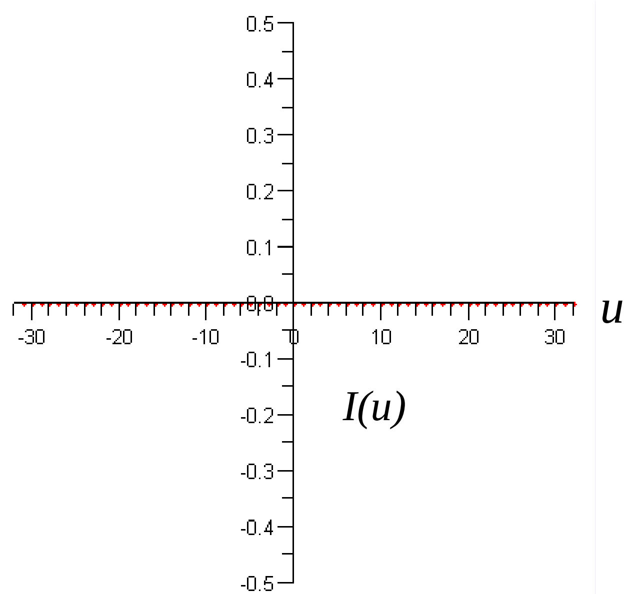
BEISPIEL: cos-Funktion (gerade)



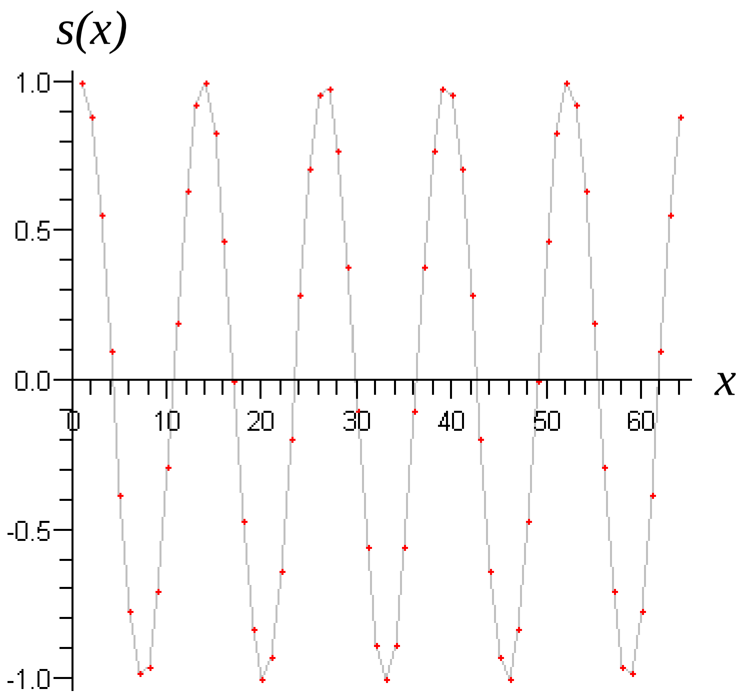
$$M = 64$$

$$\boxed{s(x) = \cos(2\pi \frac{x}{M})}$$



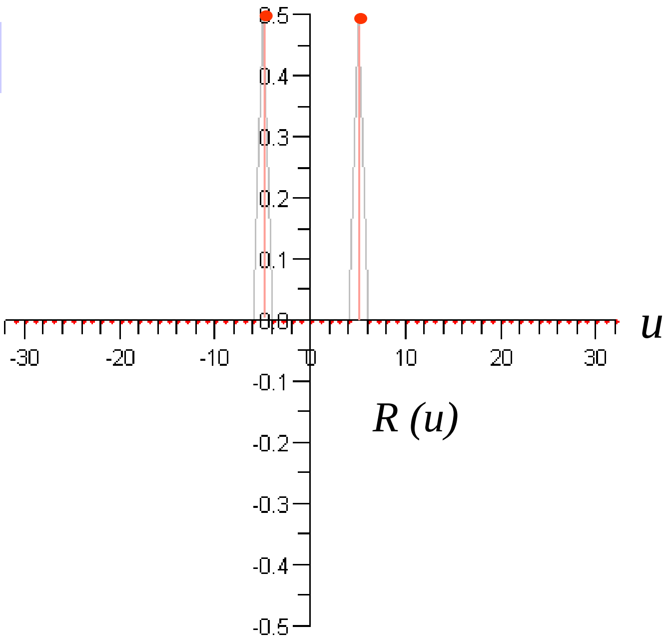


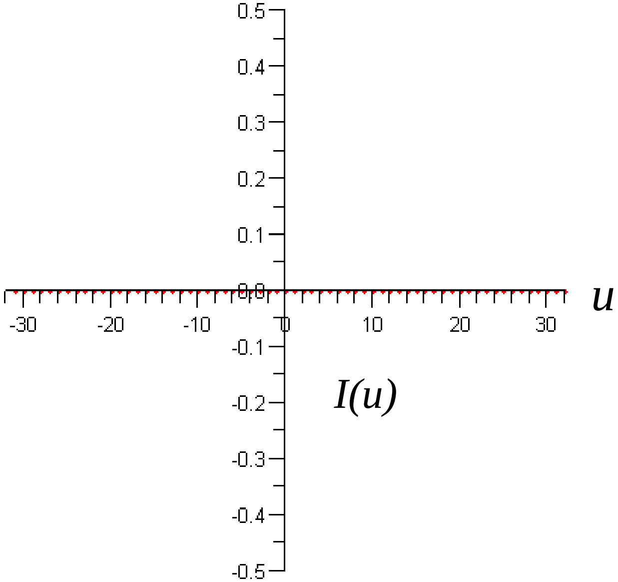
BEISPIEL: cos-Funktion (gerade)

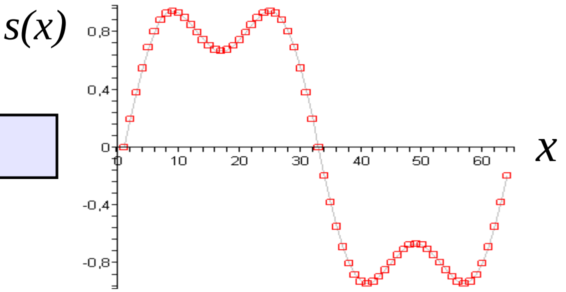


$$M = 64$$

$$\boxed{s(x) = \cos(2\pi \cdot 5 \frac{x}{M})}$$

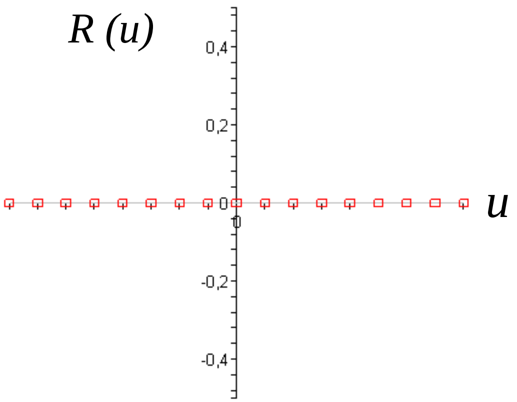


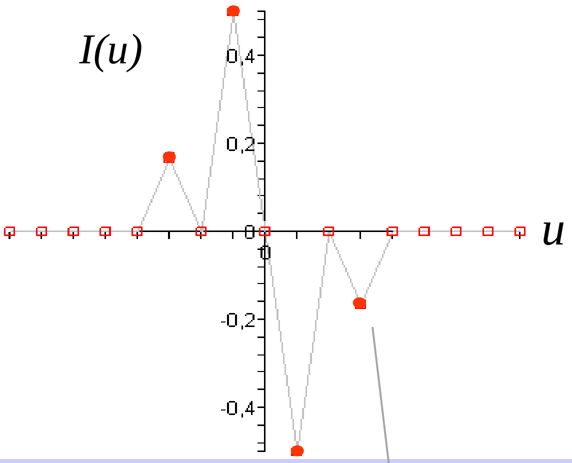




Beispiel:
ungerade Funktion
Anm.: -f(x)=f(-x)

DFT



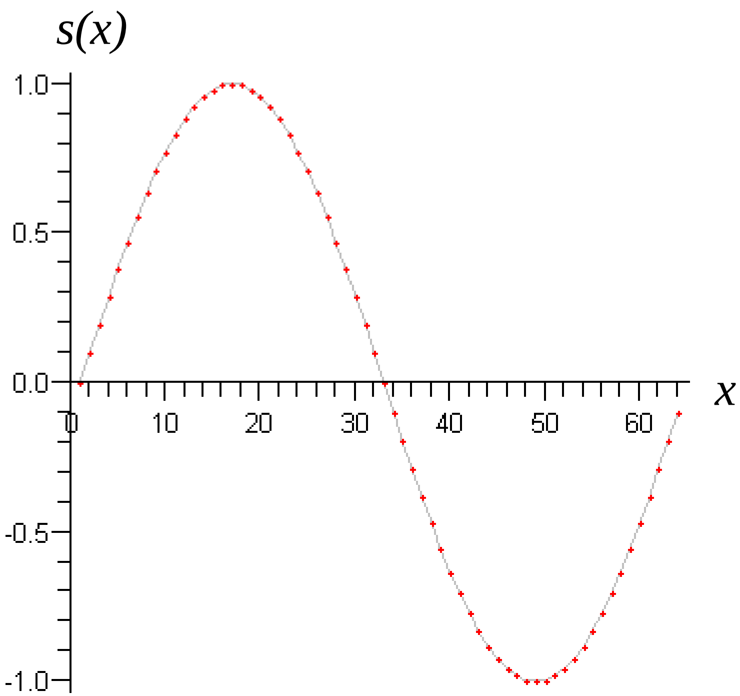


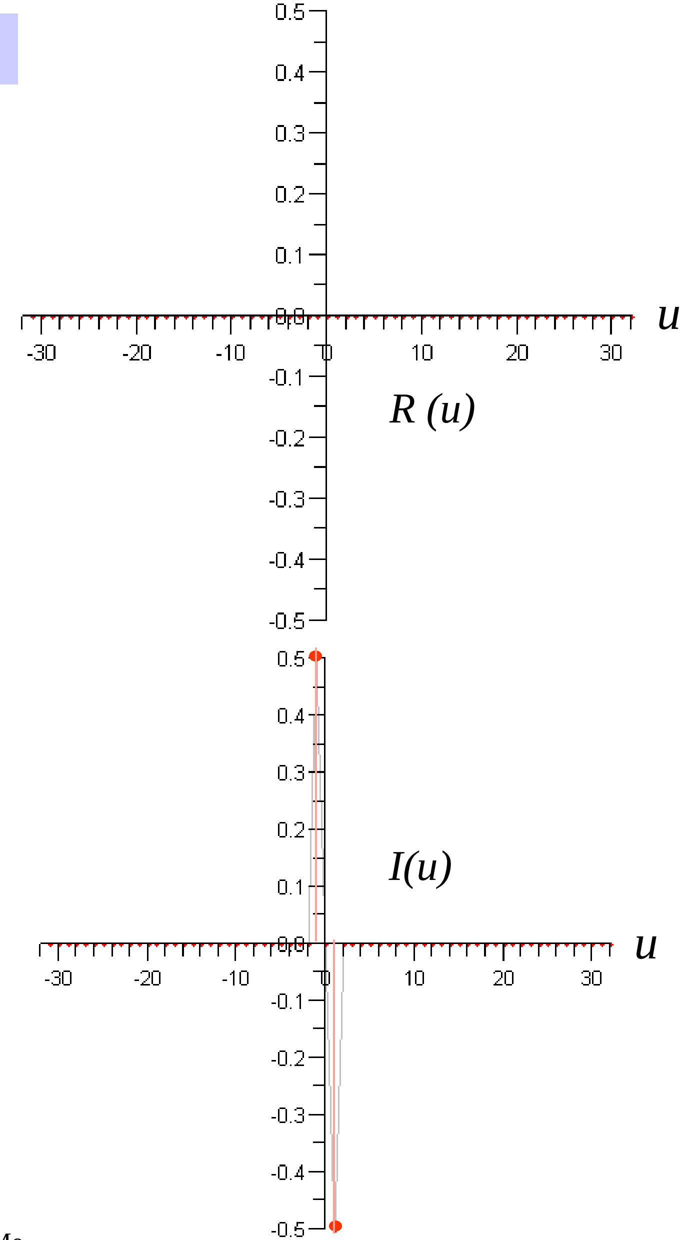
s. Gleichg. (4)

$$s(x) = \sin(2\pi \cdot 1 \cdot \frac{x}{M}) + \frac{1}{3}\sin(2\pi \cdot 3 \cdot \frac{x}{M})$$

Frequenzbereich

BEISPIEL: sin-Funktion (ungerade)

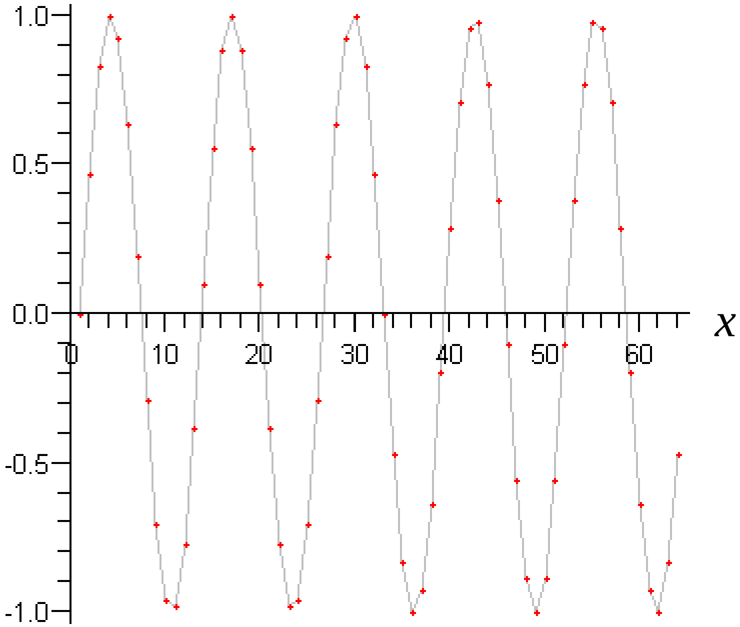




$$M = 64$$

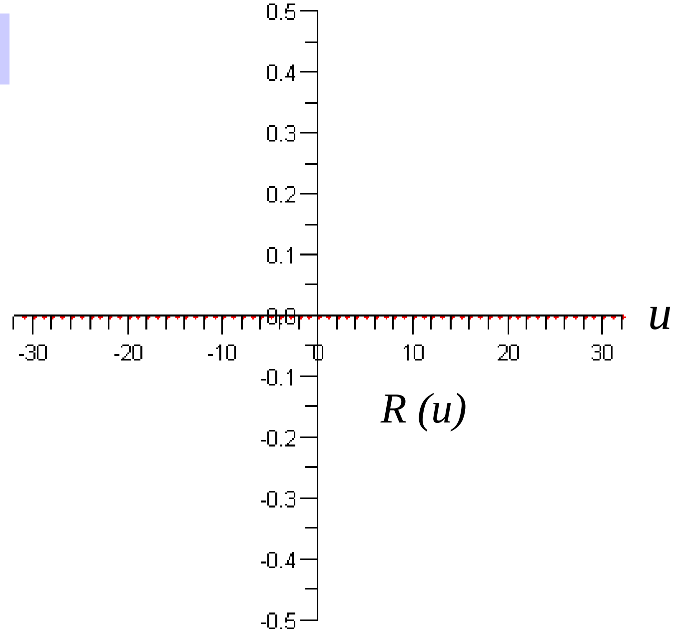
$$\boxed{s(x) = \sin(2\pi \frac{x}{M})}$$

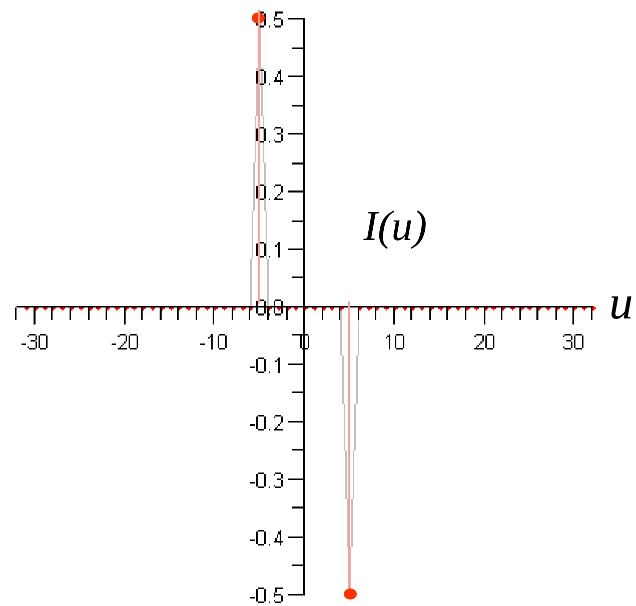
BEISPIEL: sin-Funktion (ungerade)



$$M = 64$$

$$\boxed{s(x) = \sin(2\pi \cdot 5 \frac{x}{M})}$$





3.4 Zusammenfassung

Zeitbereich	Frequenzbereich
Reelle Zeitfunktionen	$R(u) = R(-u)$, $I(u) = -I(-u)$
Gerade Zeitfunktionen	$I(u) = 0$ (keine sin-Anteile)
Ungerade Zeitfunktionen	$R(u) = 0$ (keine cos-Anteile)

$R(u)$ wichtet die im Signal $s(x)$ enthaltenen cos-Funktionen.

$I(u)$ wichtet die im Signal $s(x)$ enthaltenen sin-Funktionen.

3.5 Komplexe Darstellung der DFT

Meist fasst man $R(u)$ und $I(u)$ wie folgt zu komplexen Koeffizienten $\underline{S}(u)$ zusammen:

$$\underline{S}(u) = R(u) + j \cdot I(u) \tag{5}$$

Man erhält somit eine gemeinsame Darstellung für die sin- und cos-Komponenten des Signals

$$\underline{S}(u) = \frac{1}{M} \cdot \sum_{x=0}^{M-1} s(x) \cdot \cos(2\pi x \frac{u}{M}) - j \frac{1}{M} \cdot \sum_{x=0}^{M-1} s(x) \cdot \sin(2\pi x \frac{u}{M})$$

$$= \frac{1}{M} \cdot \sum_{x=0}^{M-1} s(x) \cdot \left[\cos(2\pi x \frac{u}{M}) - j \sin(2\pi x \frac{u}{M}) \right]$$

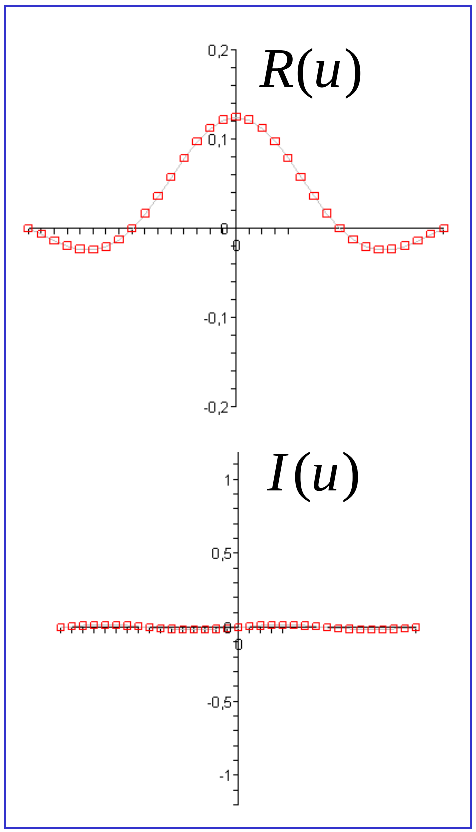
Damit gilt dann kürzer $s(x) \circ\!\!-\!\!\bullet \underline{S}(u)$

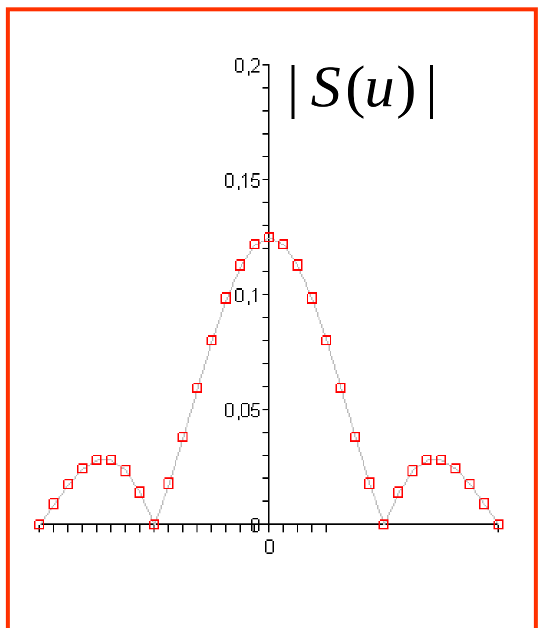
3.6 Betrags- und Phasenspektrum

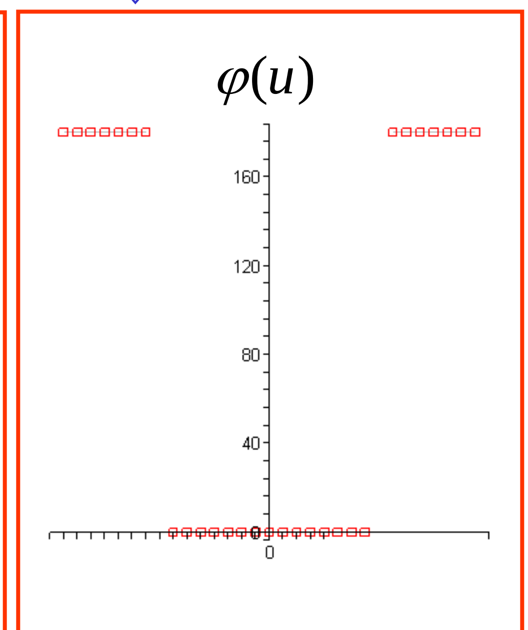
In vielen Fällen ist eine Darstellung von $\underline{S}(u)$ in Polarkoordinaten bequemer.

$$|\underline{S}(u)| = S(u) = \sqrt{R^2(u) + I^2(u)}$$

$$\varphi(u) = \arctan\left[\frac{I(u)}{R(u)}\right]$$

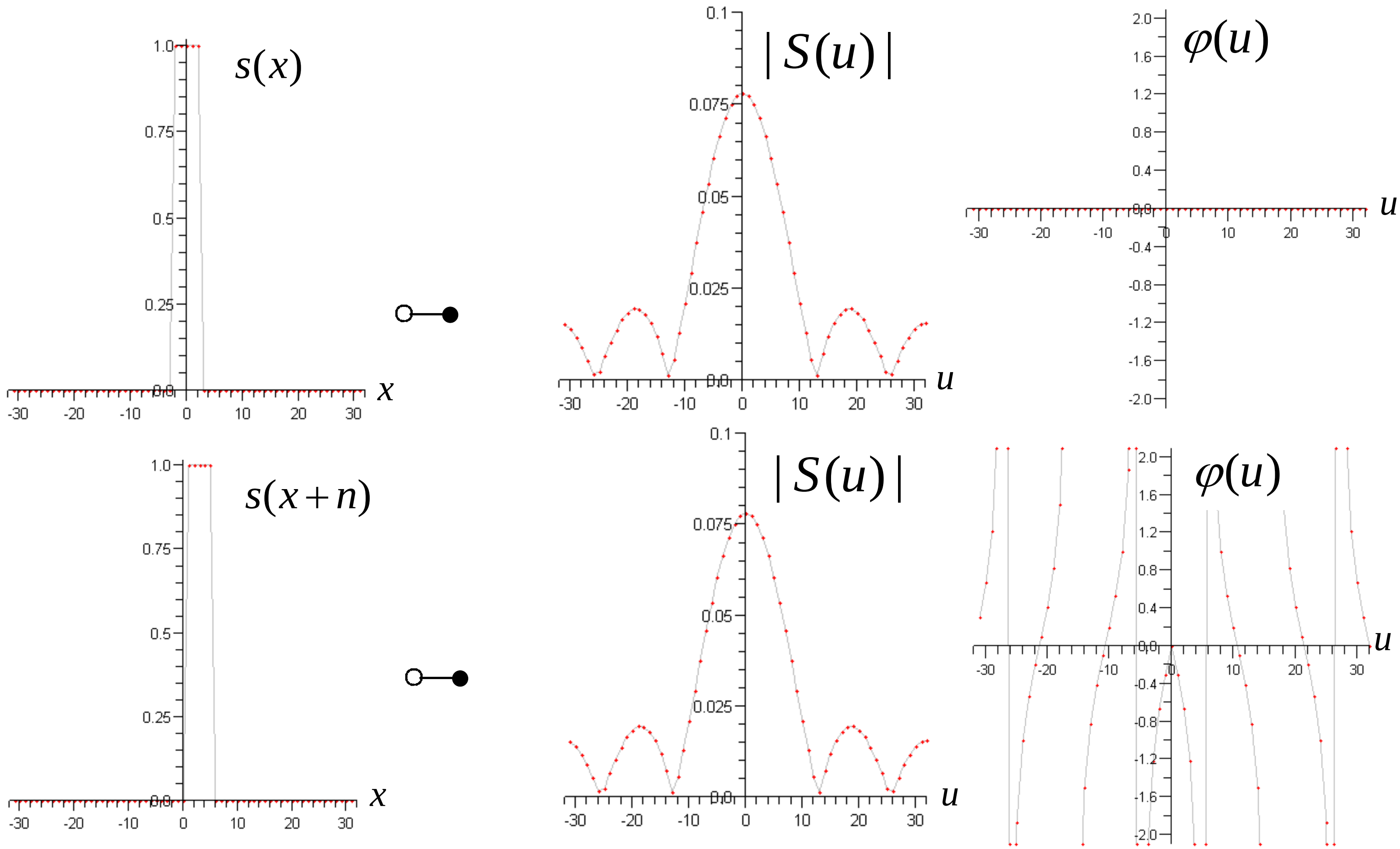






Betrag und Phase bei Verschiebung des Signals

Eine Verschiebung eines Signals im Zeitbereich verändert die Frequenzzusammensetzung nicht, sondern verursacht nur eine Phasenverschiebung (o. Bew.).

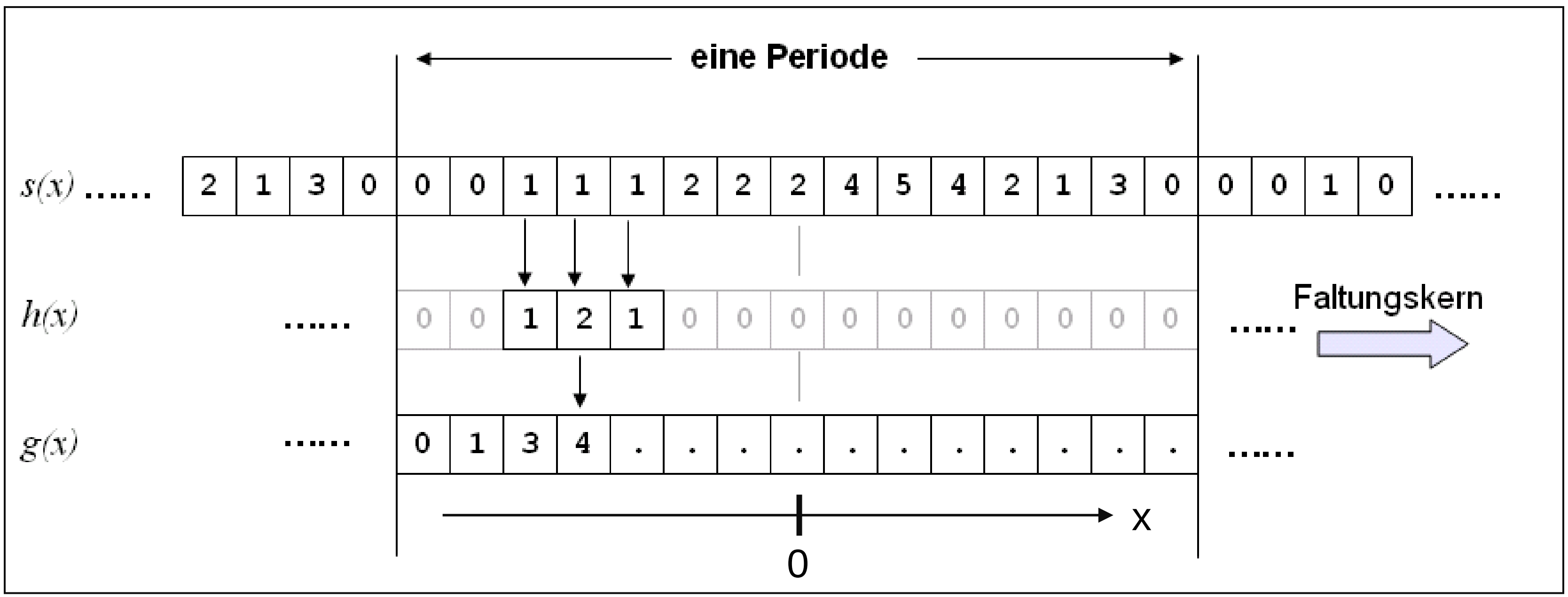


4. Filterung diskreter Signale (1-dimensional)

4.1 Diskrete Faltung

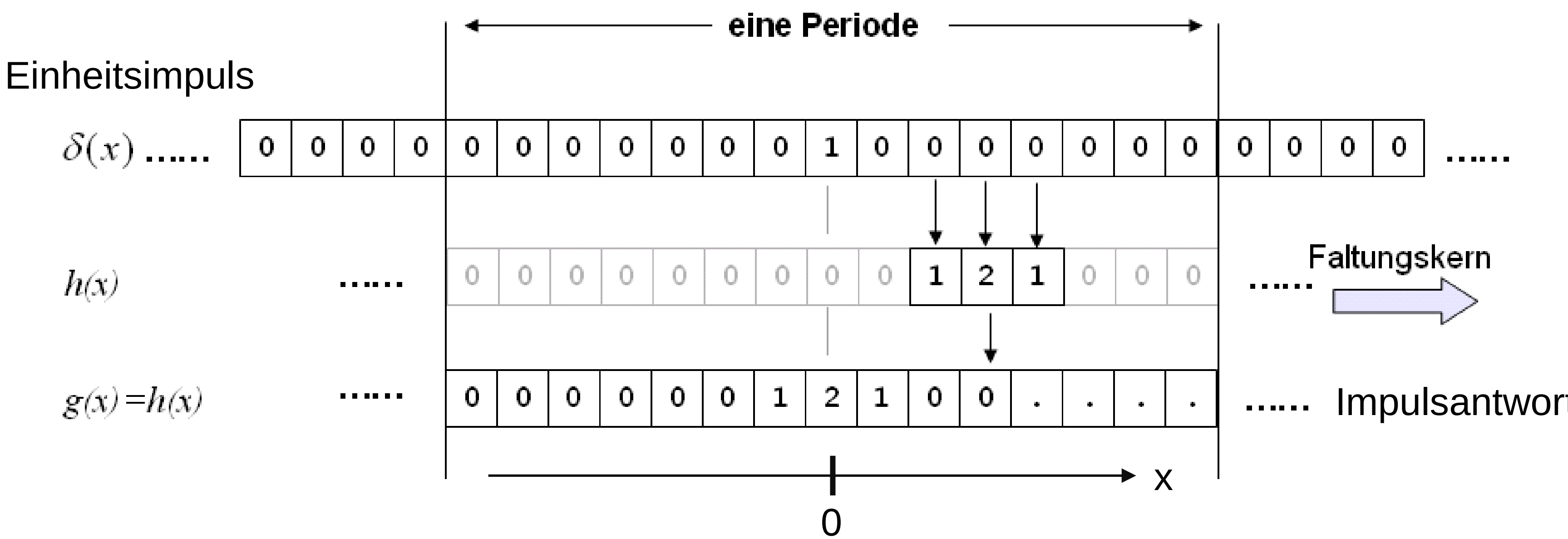
Die Faltung einer <u>diskreten,</u> <u>periodischen</u> Funktion *s(x)* (z.B. *Signalfunktion*) mit einer anderen diskreten, periodischen Funktion *h(x)* (z.B. *Filterfunktion*) ist wie folgt definiert (M=Periodenlänge):

$$g(x) = s(x) * h(x)$$



4.2 Impulsantwort eines Filters

Wie kann man den Faltungskern h(x) eines unbekannten Filters bestimmen?

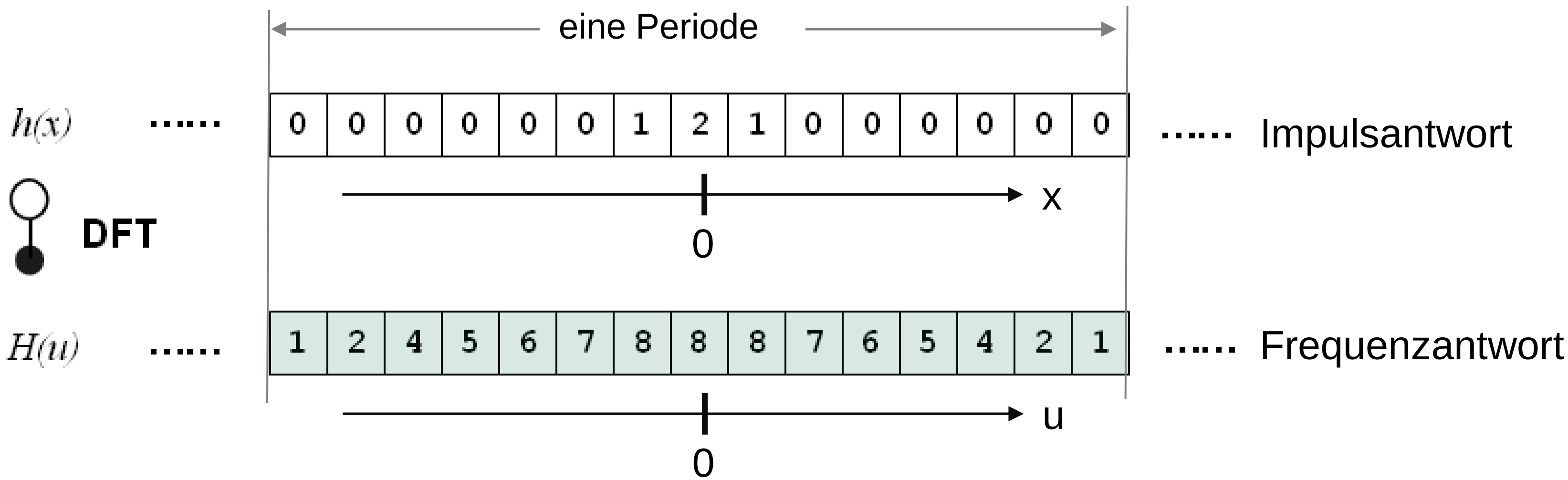


Fazit: Die Impulsantwort eines Filters sind die Koeffizienten der Faltungsmaske !

4.3 Frequenzantwort eines Filters

Die Fouriertransformierte *H(u)* der Impulsantwort *h(x)* wird als ***Frequenzantwort*** *H(u)* des Filters bezeichnet.

$$h(x) \circ\!\!-\!\!\bullet \; H(u)$$



Die Frequenzantwort beschreibt, wie stark die einzelnen Frequenzen u vom Filter verstärkt bzw. gedämpft werden.

4.4 Faltungstheorem der DFT

Durch Anwendung der DFT auf die Faltungsoperation $g(x) = s(x) * h(x)$
kann man zeigen das gilt (o.Bew.):

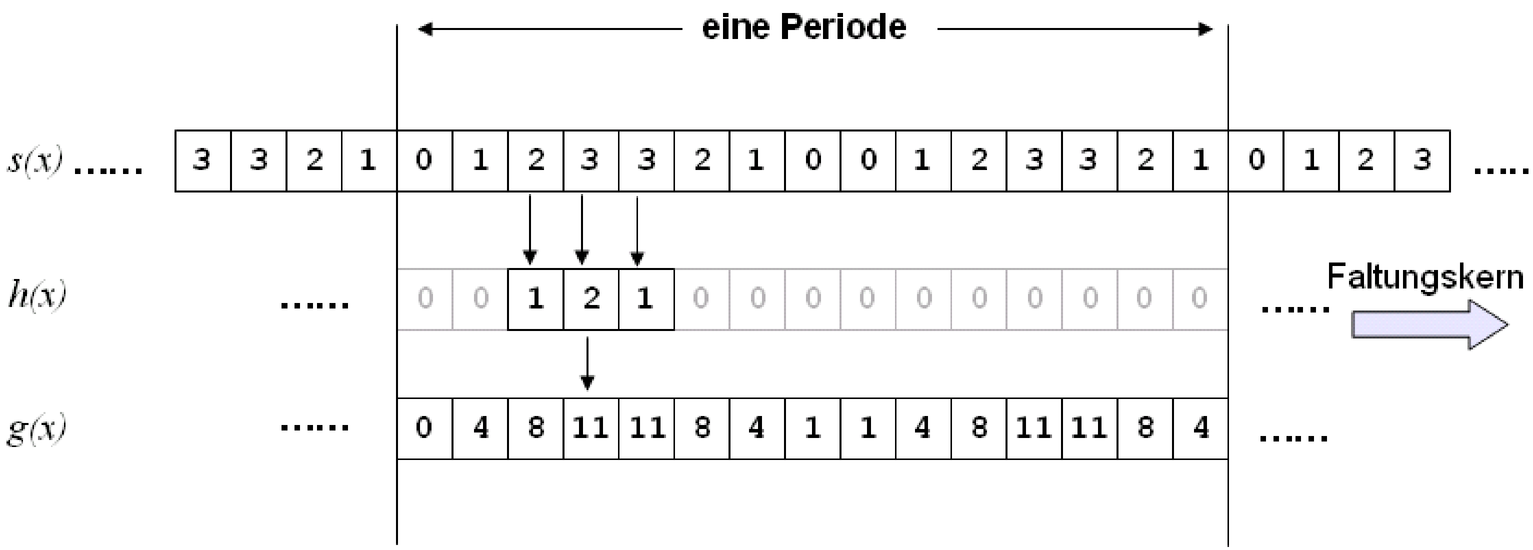
$$g(x) = s(x) * h(x) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \boxed{G(u) \;=\; S(u) \cdot H(u)}$$

Die <u>Faltung</u> eines <u>Signals *s(x)*</u> mit dem <u>Faltungskern *h(x)*</u>

kann ersetzt werden durch

die <u>**Multiplikation**</u> des <u>transformierten Signals *S(u)*</u> mit der <u>Frequenzantwort *H(u)*</u>.

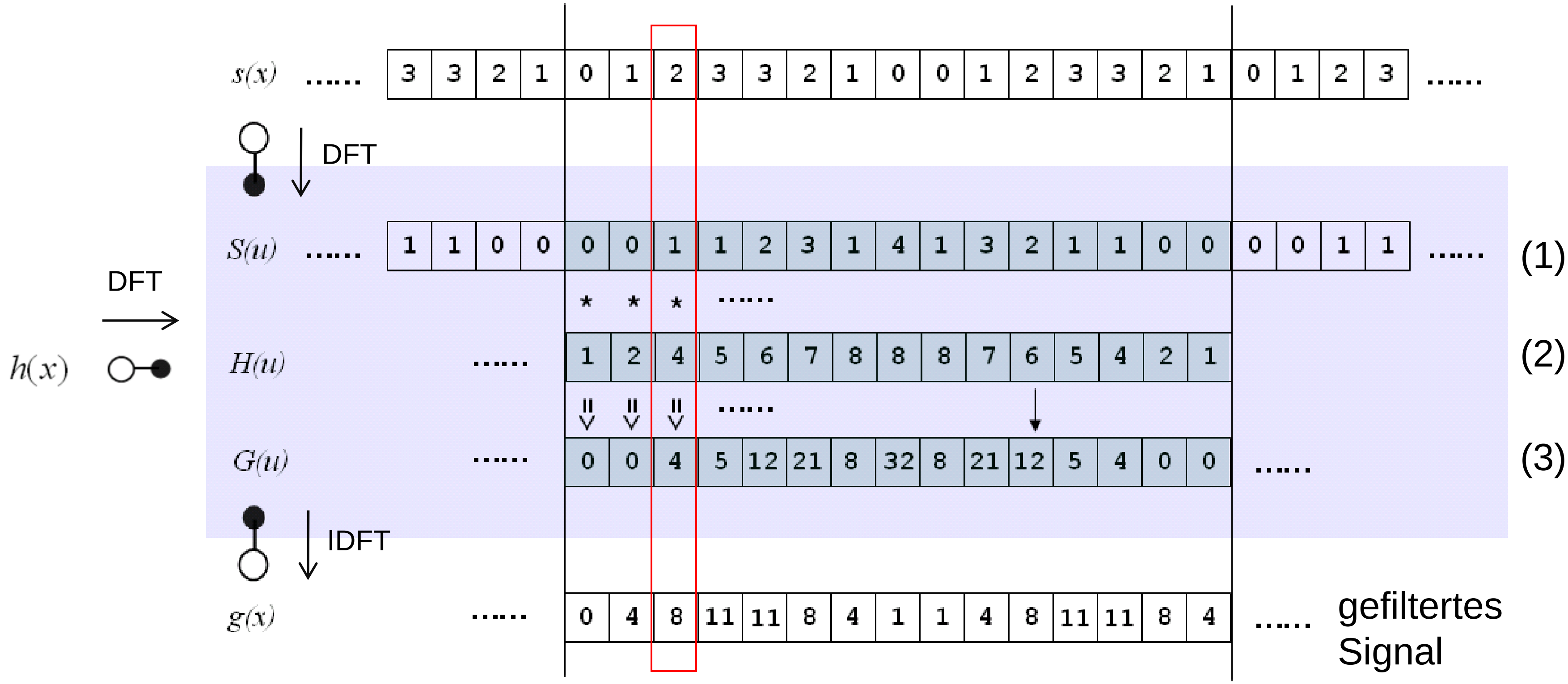
Statt …. $g(x) = s(x) * h(x)$

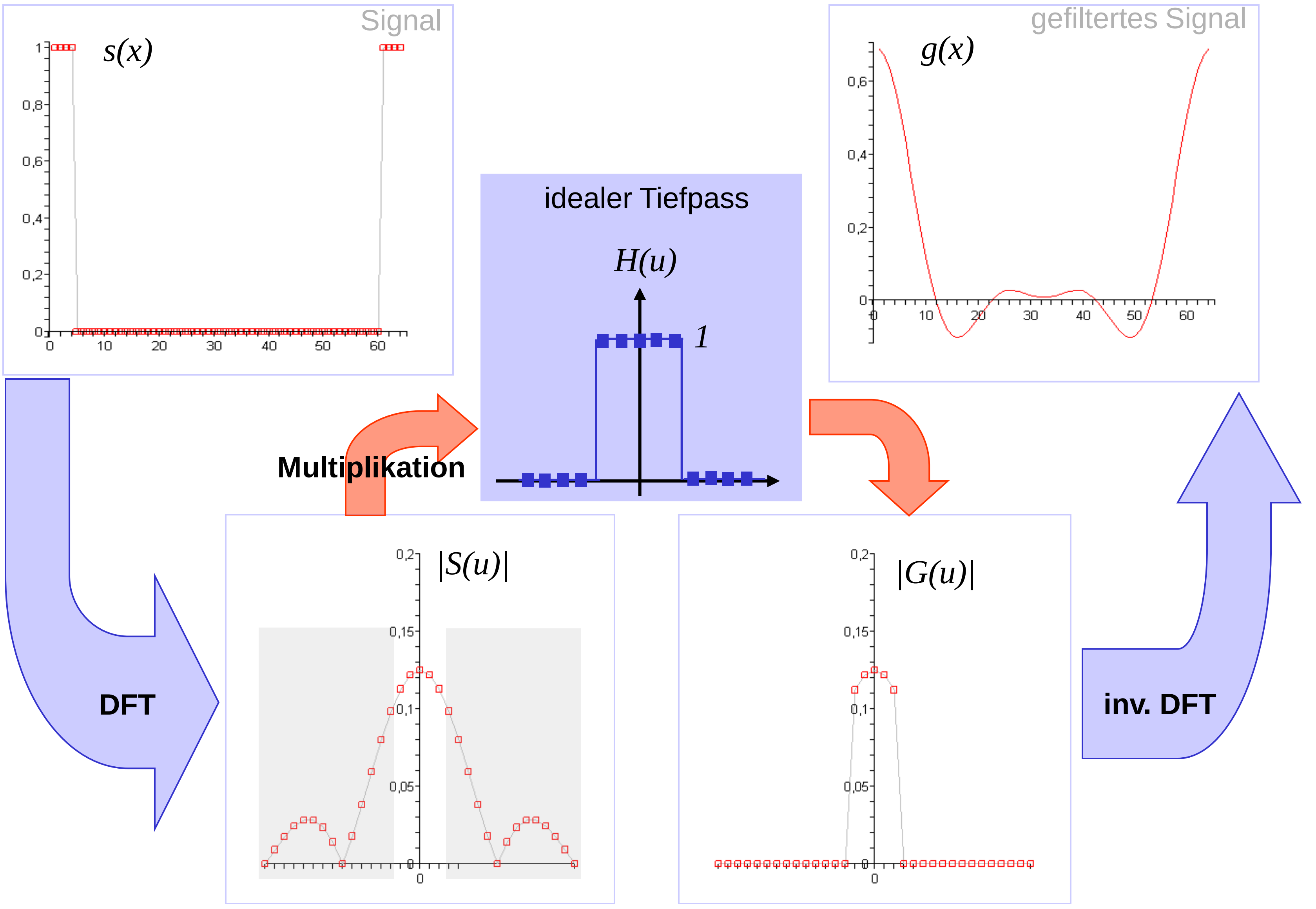


jetzt ….

$$\boxed{G(u) = S(u) \cdot H(u)}$$

(1) Frequenzverteilung im Signal
(2) Filtercharakteristik: Wie werden die Frequenzen verstärkt/gedämpft?
(3) Frequenzverteilung im gefilterten Signal



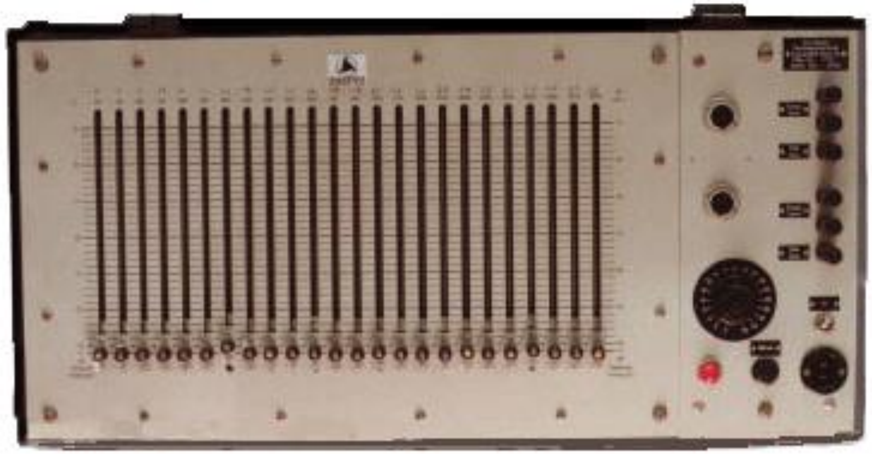

Signal
s(x)
gefiltertes Signal
g(x)
idealer Tiefpass
H(u)
1
Multiplikation
DFT
|S(u)|
|G(u)|
inv. DFT

Analogie: Filterung im Frequenzbereich

Filtern im Frequenzbereich : Anheben oder Absenken von Frequenzbereichen

➔ math. Realisierung eines Equalizers

$$G(u) = S(u) \cdot H(u)$$



S(u) : Signal im Frequenzbereich
H(u) : Filter-Frequenzantwort
G(u) : gefilt. Signal im Frequenzbereich

5. Diskrete Fouriertransformation (2-dimensional)

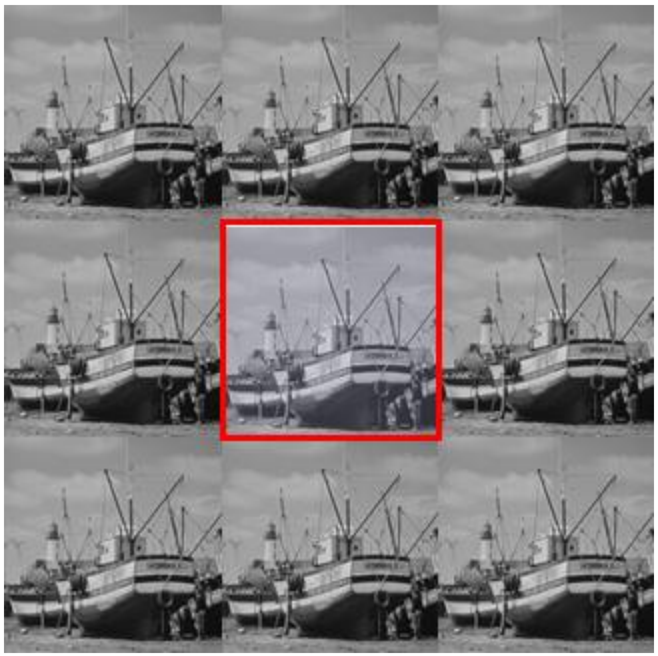
5.1 Grundlagen

5.1.1 Berechnung

Die Frequenzkomponenten *S(u)* einer diskreten, periodischen Funktion *s(x)* werden wie folgt berechnet (*diskrete Fouriertransformation*):

$$\underline{S}(u,v) = \frac{1}{M \cdot N} \cdot \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} s(x,y) \cdot e^{-j2\pi\left(u\frac{x}{M}+v\frac{y}{N}\right)} \quad \text{mit} \quad \begin{aligned} u &= 0, 1, 2, \ldots, M-1 \\ v &= 0, 1, 2, \ldots, N-1 \end{aligned}$$

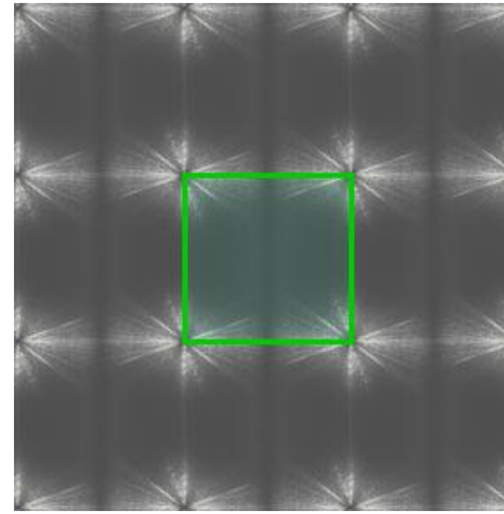
$$s(x,y) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \underline{S}(u,v)$$



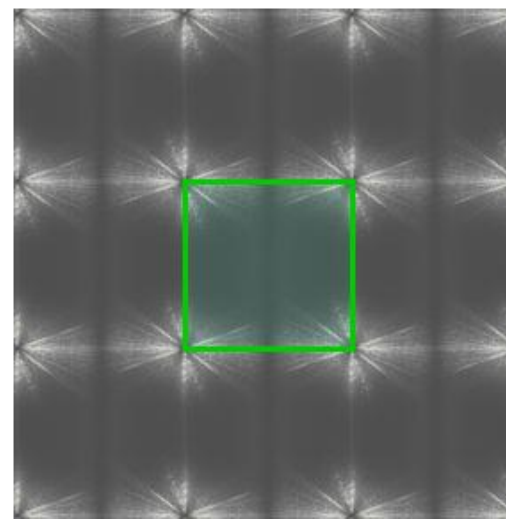
periodisch fortgesetztes Bild $s(x, y)$

$\circ\!\!-\!\!\bullet$

$Re\{S(u)\}$



$Im\{S(u)\}$

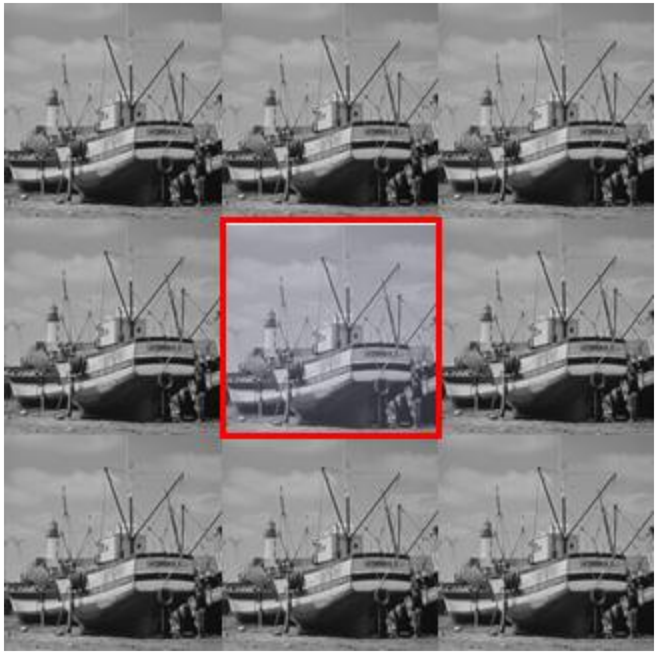


periodisch fortgesetzte FT $\underline{S}(u, v)$

Der rot umrandete Bereich geht in die Berechnung ein.

Die grün umrandeten Bereiche werden berechnet.

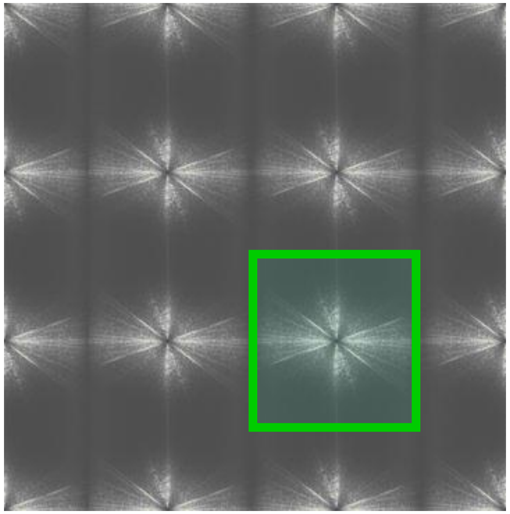
5.1.2 Zentrierung um (u,v) = (0,0)



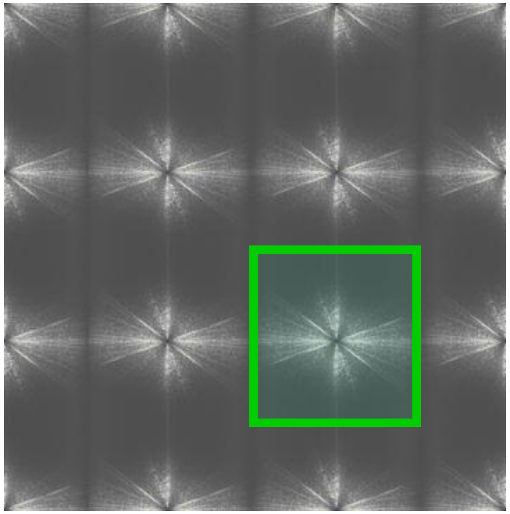
periodisch fortgesetztes Bild $s(x,y)$

$\circ\!\!-\!\!\bullet$

Re{S(u)}



Im{S(u)}



periodisch fortgesetzte FT $\underline{S}(u,v)$

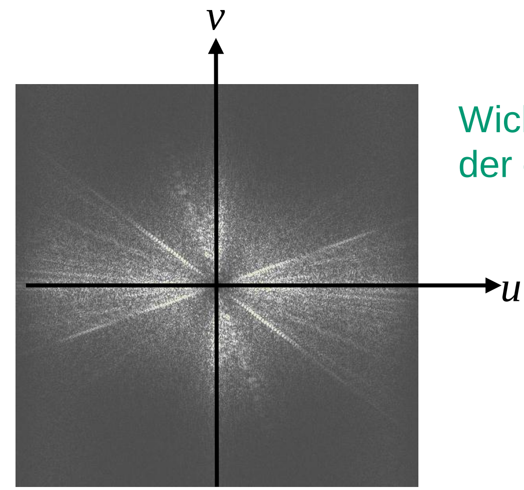
Vorteil: Einfachere Interpretation des Ergebnisses und günstiger für Filteroperationen im Frequenzbereich.

5.2 Interpretation der 2D-DFT

2D-Fourier-transformation

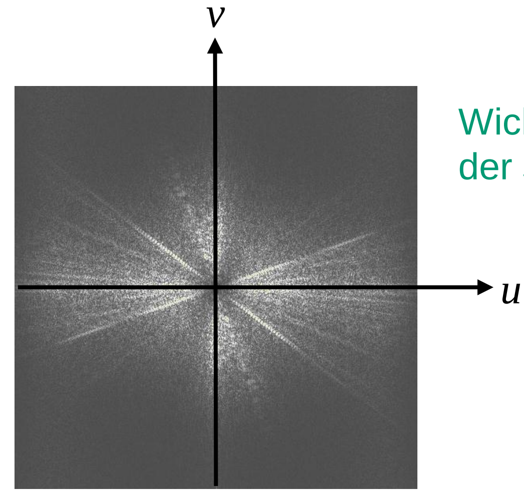
u. zentrieren

Re{S(u)}

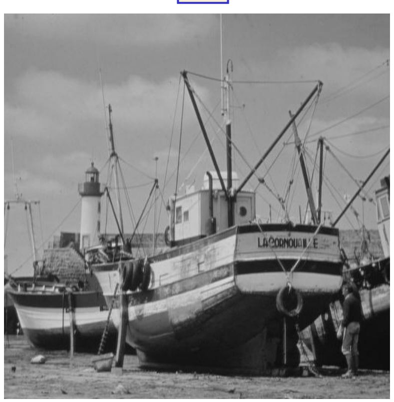


Wichtungsfaktoren der cos-Wellen

Im{S(u)}

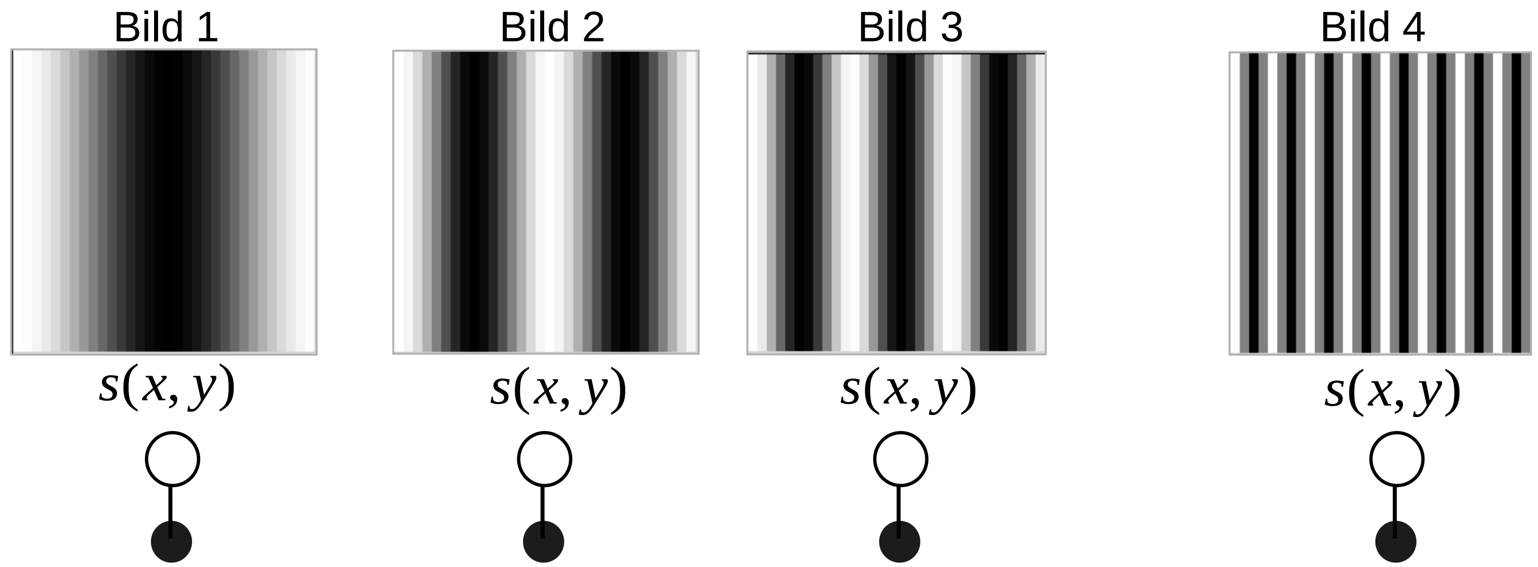


Wichtungsfaktoren der sin-Wellen



Im Ursprung ist die Frequenz (0,0).

Nach außen werden die Frequenzen immer höher.



Frequenzbereich (*Betrag der Fouriertransformierten*) $|\underline{S}(u,v)|$

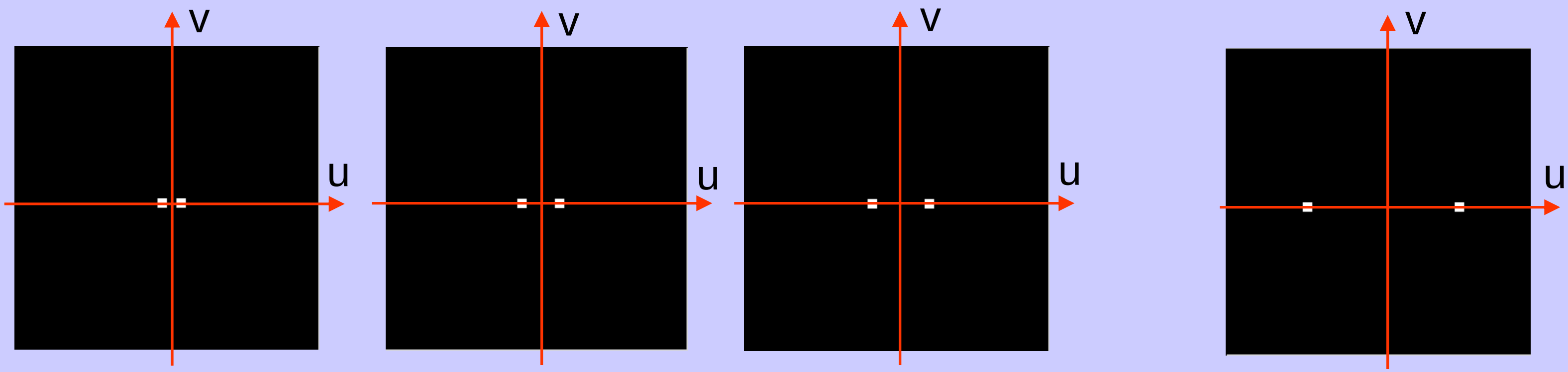
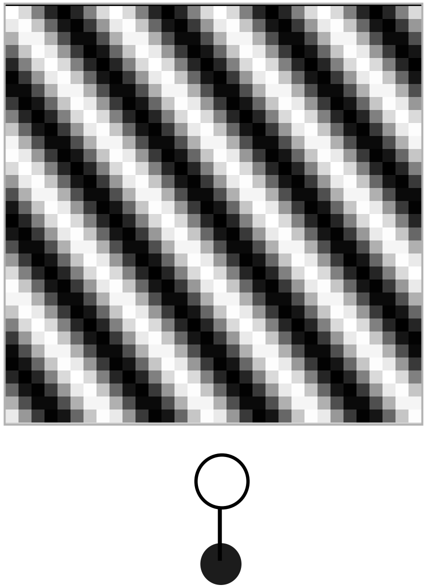
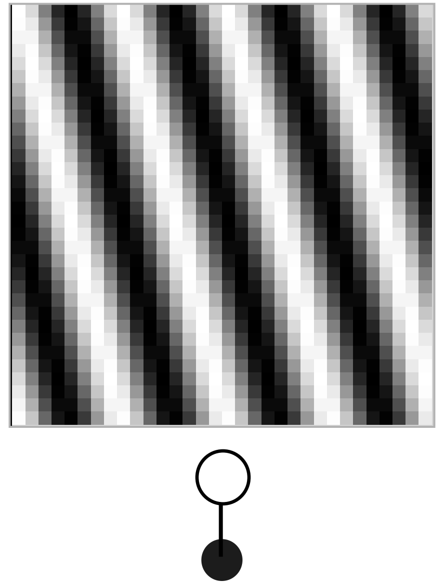


Bild 1



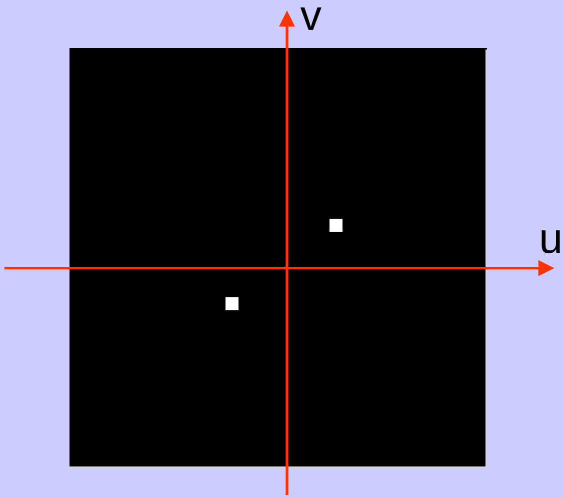
$s(x,y)$

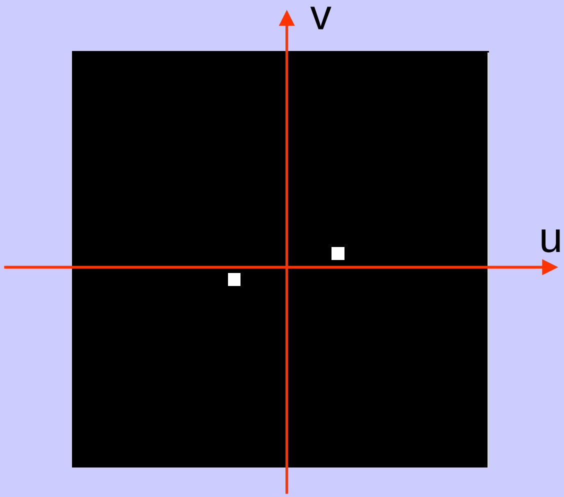
Bild 2



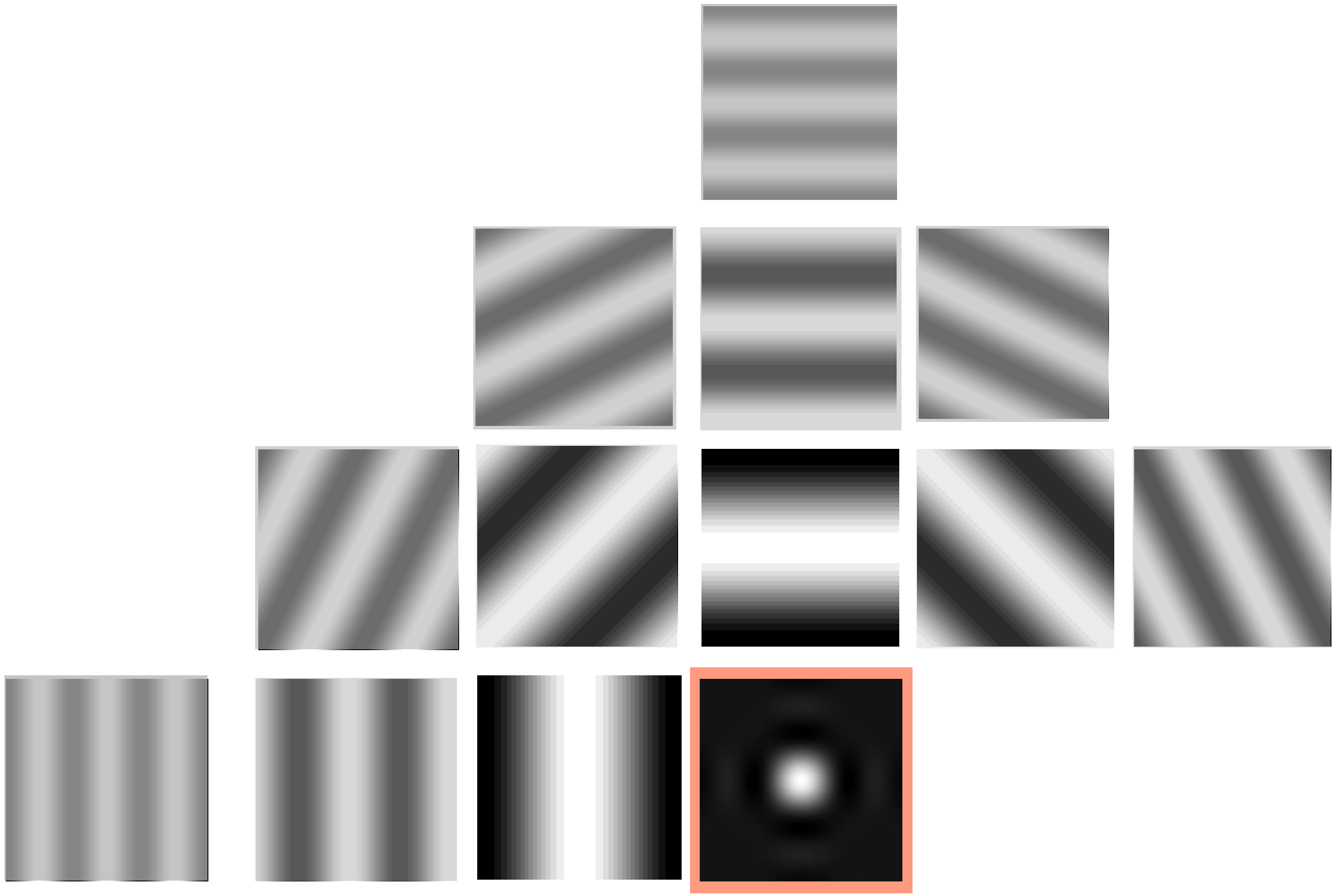
$s(x,y)$

Frequenzbereich (*Betrag der Fouriertransformierten*) $|\underline{S}(u,v)|$





Bilder als Summe von gewichteten "Wellenfunktionen"



5.3 Filterung von Bildern

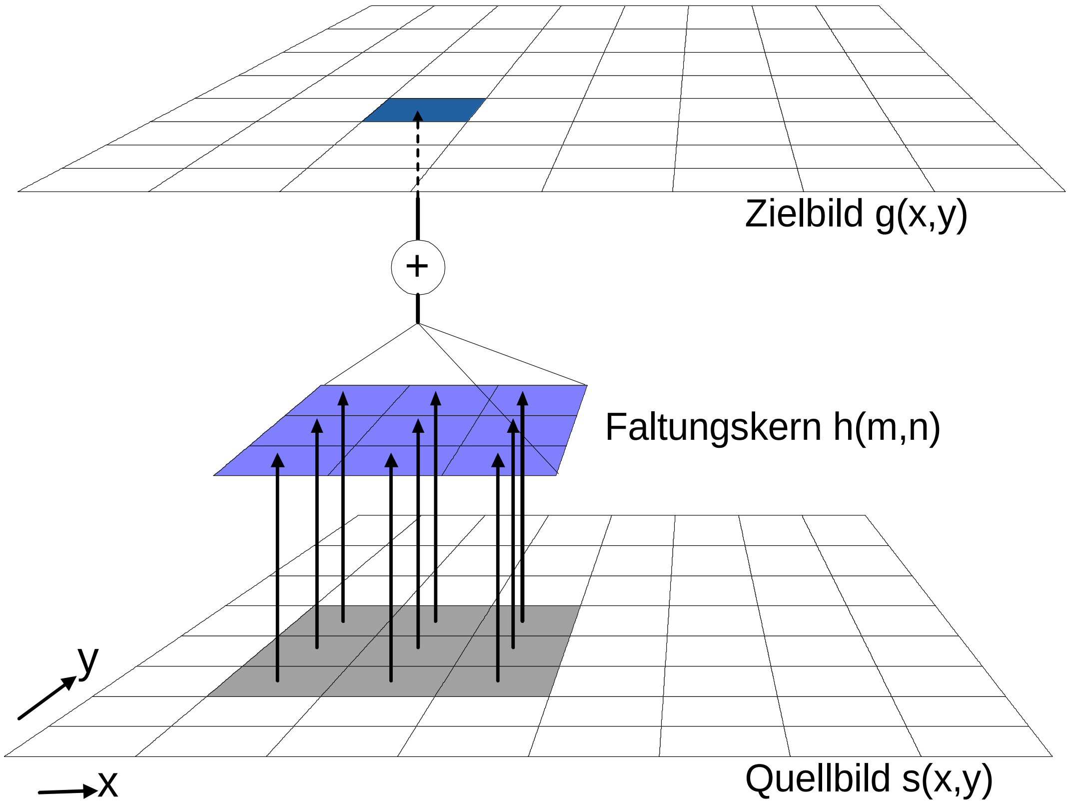
5.3.1 Faltung

$$g(x,y)=\sum_{m=-\frac{M-1}{2}}^{\frac{M-1}{2}}\ \sum_{n=\frac{N-1}{2}}^{\frac{N-1}{2}} h(m,n)\cdot s(x-m,y-n)$$

h(m,n) : Faltungskern

Anwendungsbeispiele:

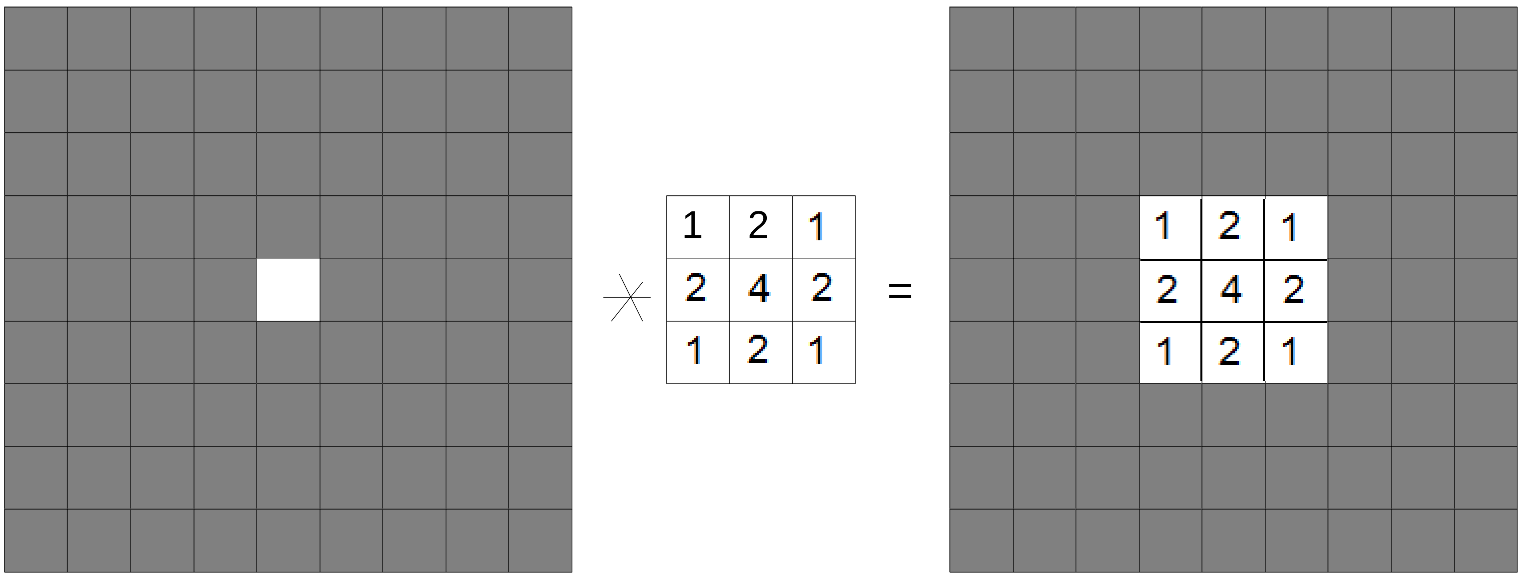
- Bildglättung
- Bildschärfung
- Kantenfilter



5.3.2 Impulsantwort

Wie kann man den Faltungskern h(x,y) eines unbekannten Filters bestimmen?

Bild mit "Einheits*impuls*"



Grauwert = 0

Grauwert = 1

Grauwert = 0

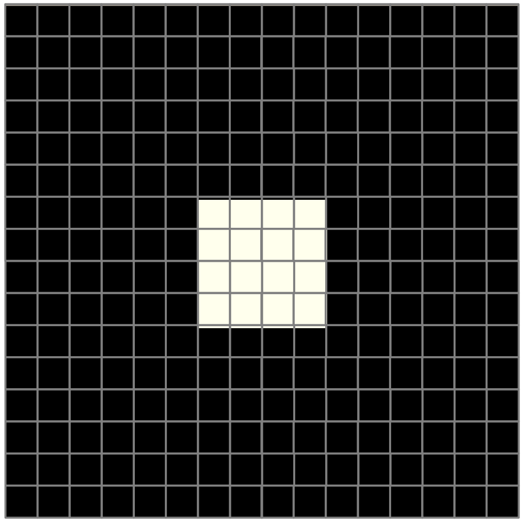
Grauwert ≠ 0

Fazit: Die Impulsantwort eines Filters ist der Faltungskern !

5.3.3 Frequenzantwort

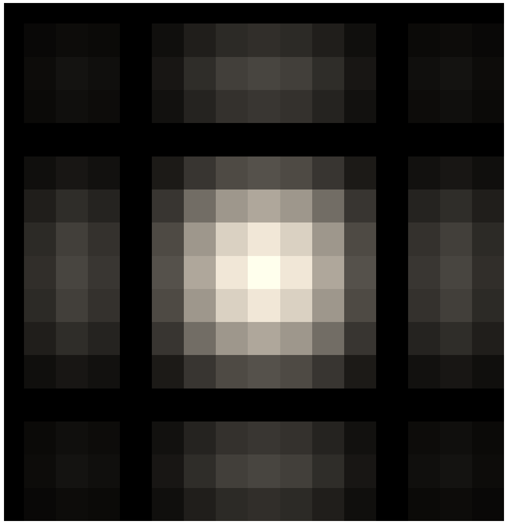
Die Fouriertransformierte der Filter-Impulsantwort *h(x,y)* wird als *Frequenzantwort* *H(u,v)* des Filters bezeichnet.

$$h(x,y) \circ\!\!-\!\!\bullet \; \underline{H}(u,v)$$



Impulsantwort des 4x4-Rechteckfilters

$\circ\!\!-\!\!\bullet$



Frequenzantwort (Betrag) des 4x4-Rechteckfilters

Die Frequenzantwort beschreibt, wie stark die einzelnen Frequenzen (u,v) vom Filter verstärkt bzw. gedämpft werden.

5.3.4 Faltungstheorem → Filterung im Frequenzbereich

Durch Anwendung der DFT auf die Faltungsoperation kann man zeigen, daß gilt (o.Bew.):

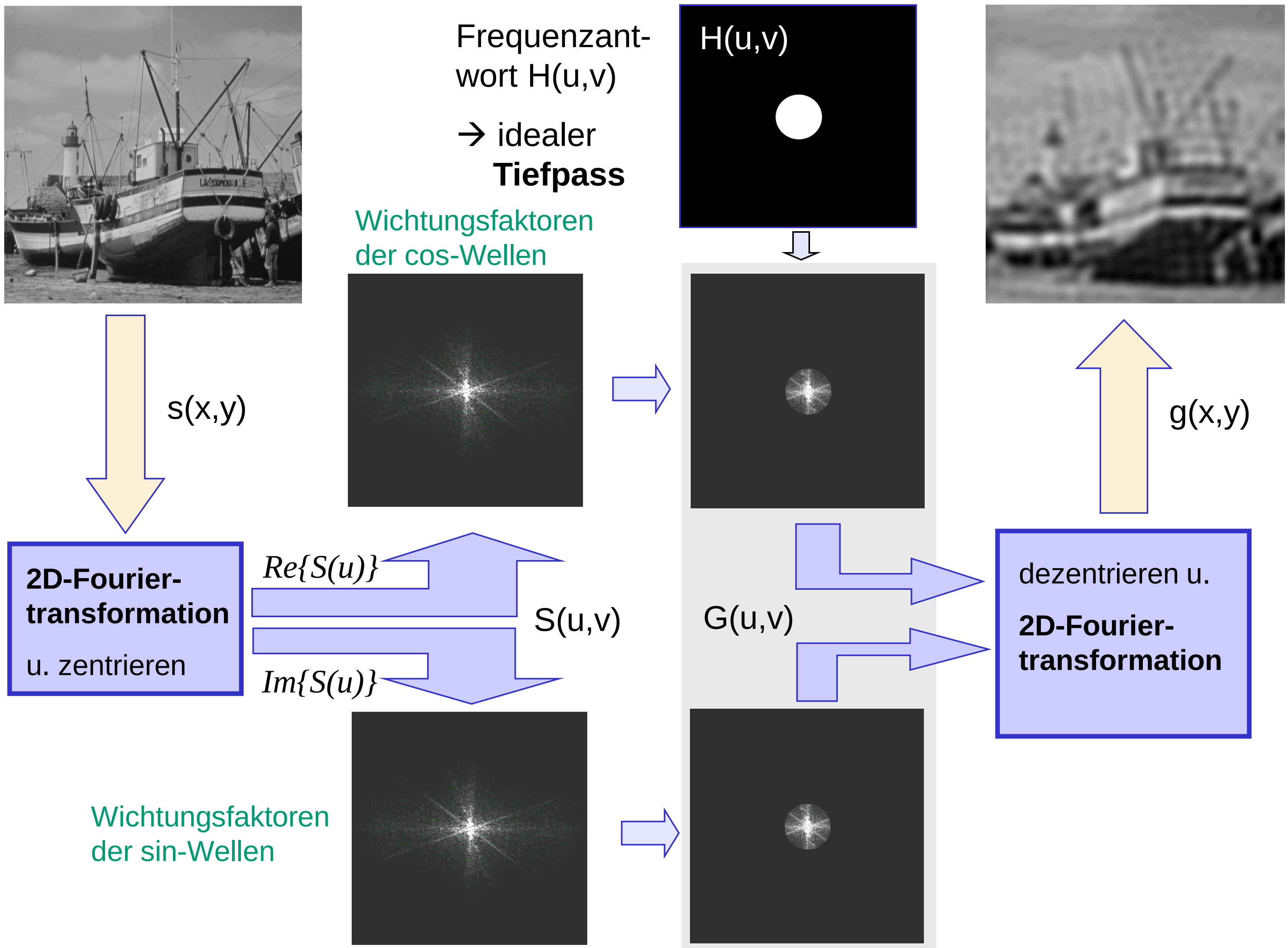
$$\boxed{g(x,y) = s(x,y) * h(x,y) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \underline{G}(u,v) = \underline{S}(u,v) \cdot \underline{H}(u,v)}$$

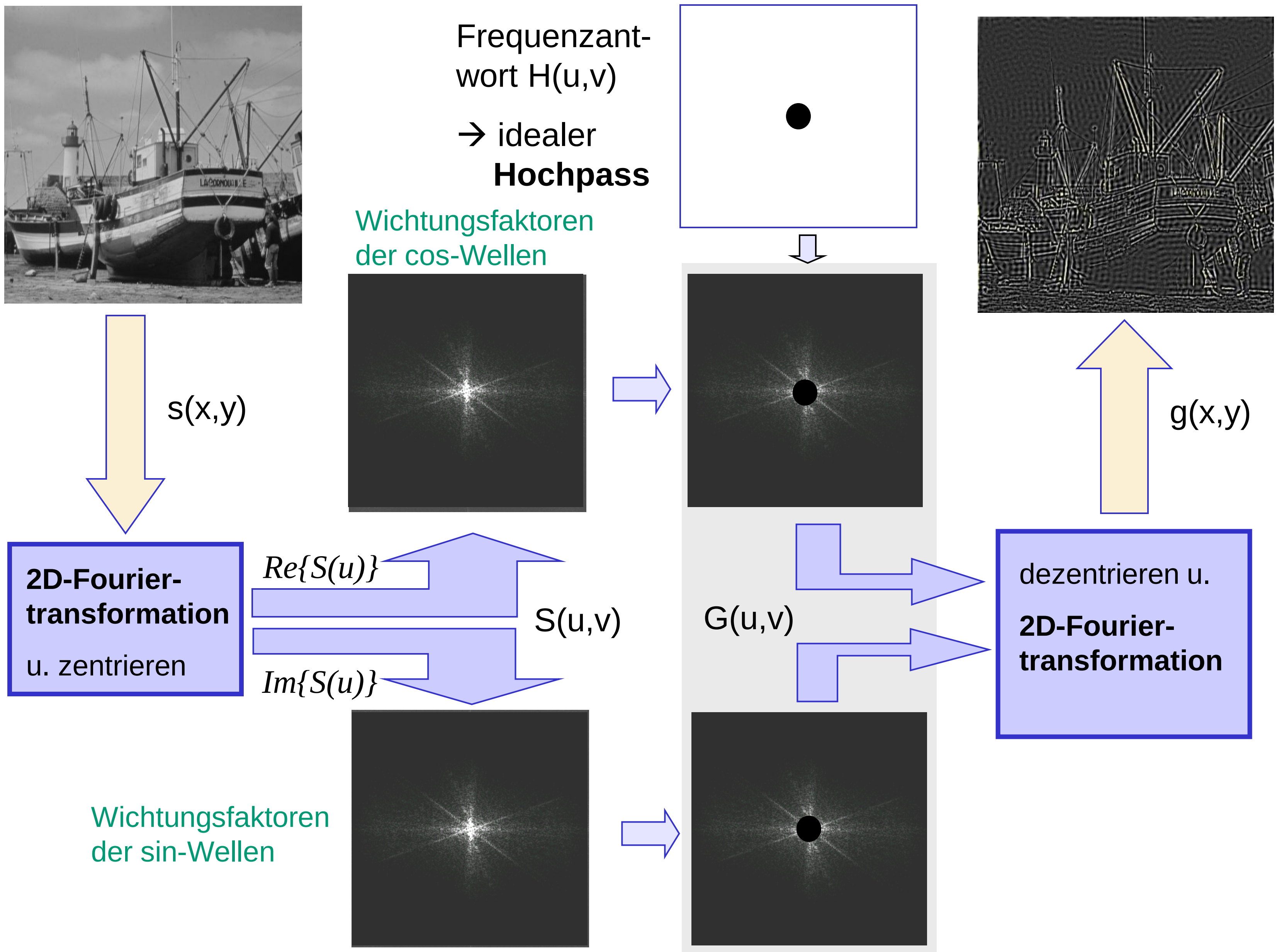
Bild s(x,y) → Fouriertrans-formation →(S(u,v)) Multipl. mit Filterfunktion H(u,v) →(G(u,v)) inverse Fourier-transformation → gefiltertes Bild g(x,y)

Die <u>Faltung</u> eines <u>Signals *s(x,y)*</u> mit dem <u>Faltungskern *h(x,y)*</u>

kann ersetzt werden durch

die **<u>Multiplikation</u>** des <u>transformierten Signals *S(u,v)*</u> mit der <u>Frequenzantwort *H(u,v)*</u>.


Frequenzantwort H(u,v)
→ idealer Tiefpass
H(u,v)
Wichtungsfaktoren der cos-Wellen
s(x,y)
g(x,y)
2D-Fourier-transformation u. zentrieren
Re{S(u)}
S(u,v)
G(u,v)
Im{S(u)}
dezentrieren u. 2D-Fourier-transformation
Wichtungsfaktoren der sin-Wellen


Frequenzantwort H(u,v)
→ idealer Hochpass
Wichtungsfaktoren der cos-Wellen
s(x,y)
g(x,y)
2D-Fourier-transformation u. zentrieren
Re{S(u)}
S(u,v)
G(u,v)
Im{S(u)}
dezentrieren u. 2D-Fourier-transformation
Wichtungsfaktoren der sin-Wellen

5.4 Zusammenhang von Bildstruktur und der Fouriertransformierten

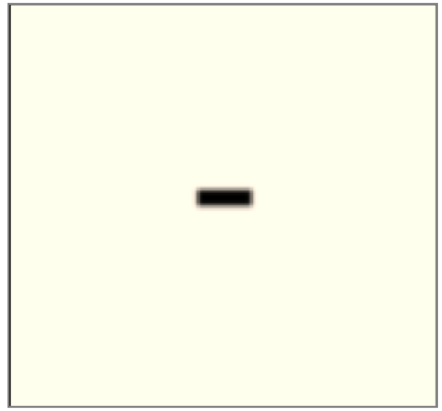
5.4.1 Rechteckige Grauwertprofile

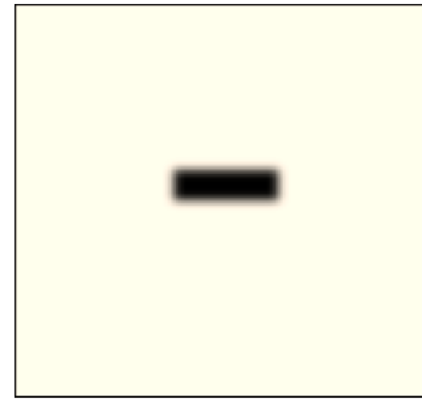
Anm.: Bilder der folgenden Seiten z.T. aus Burger u. Burge, Digitale Bildverarbeitung, Springer

Bild

Rechteckige Grauwert-profile korrespondieren ……

Schmale Bildstruk-turen korrespondieren ……

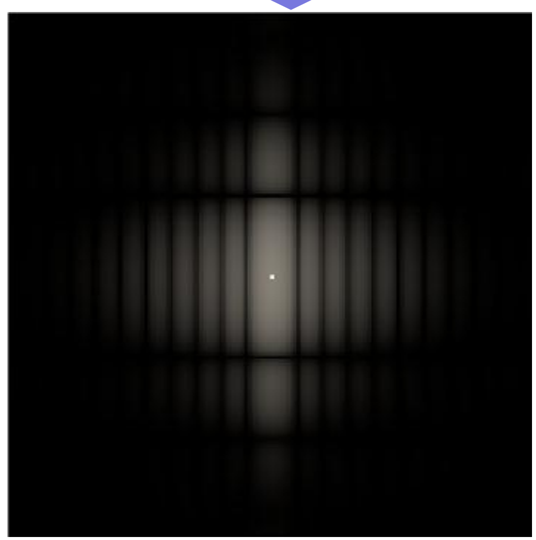


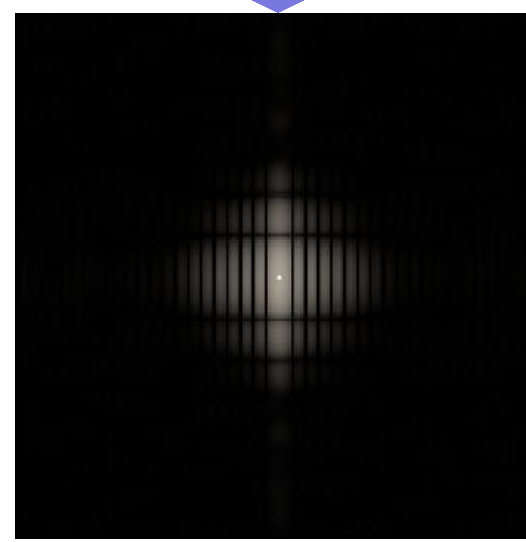


Betrag der DFT (zentriert)

….. mit Si-förmigen Grauwertprofilen im Frequenzspektrum.

….. mit breiten Struk-turen im Frequenz-spektrum (u.u.).





5.4.2 Gaussförmige Grauwertprofile (näherungsweise wie Binomialkern)

Bild

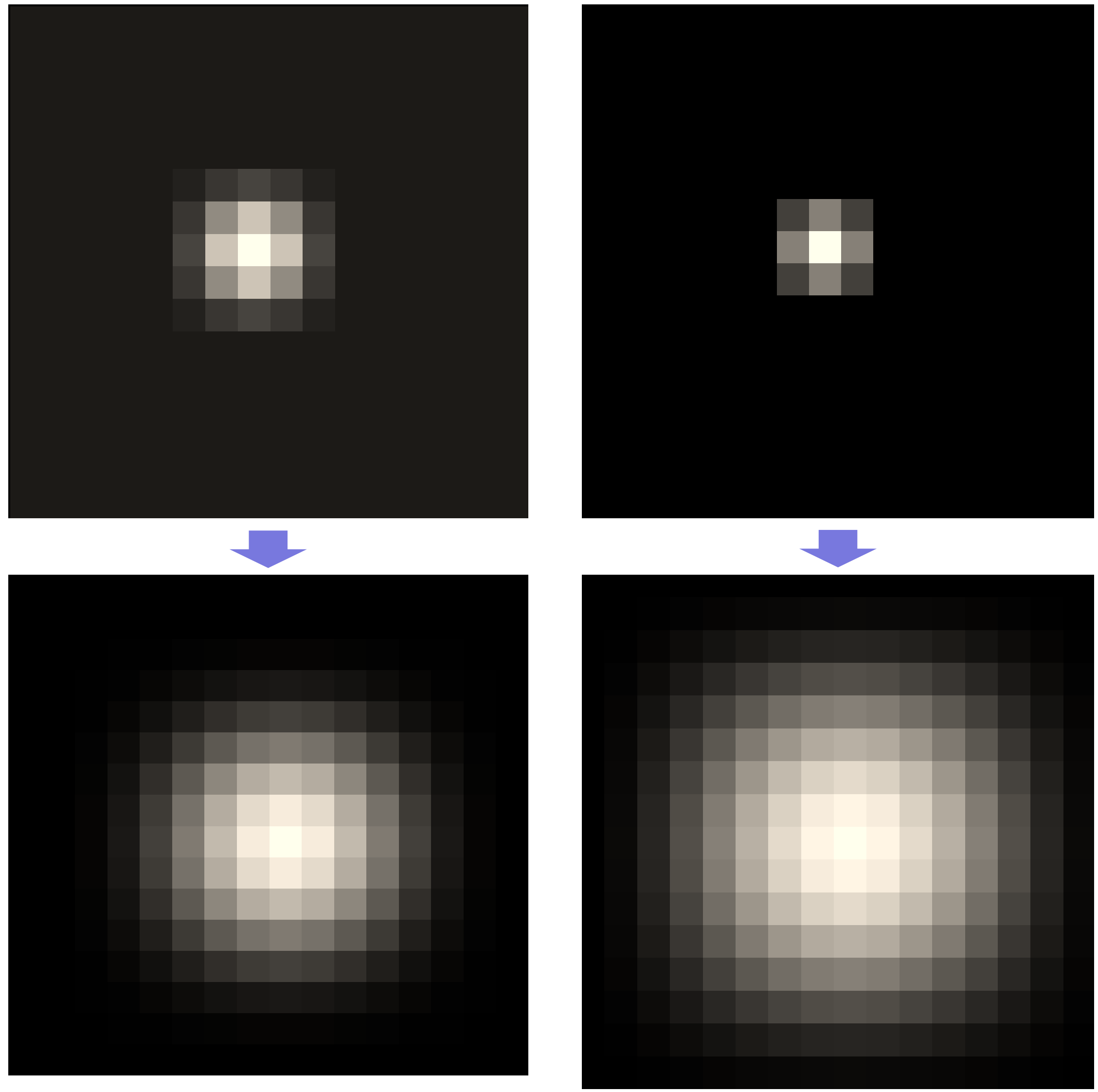
Gaussförmige Grauwert-profile korrespondieren ……

Schmale Bildstruk-turen korrespondieren ……

Betrag der DFT (zentriert)

….. mit gaussförmigen Grauwertprofilen im Frequenzspektrum.

….. mit breiten Struk-turen im Frequenz-spektrum (u.u.).

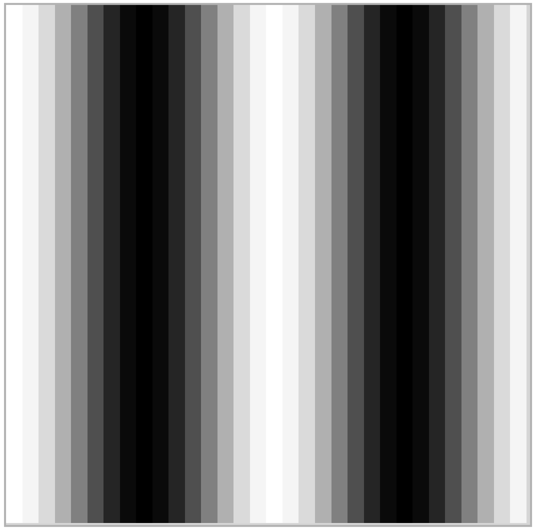


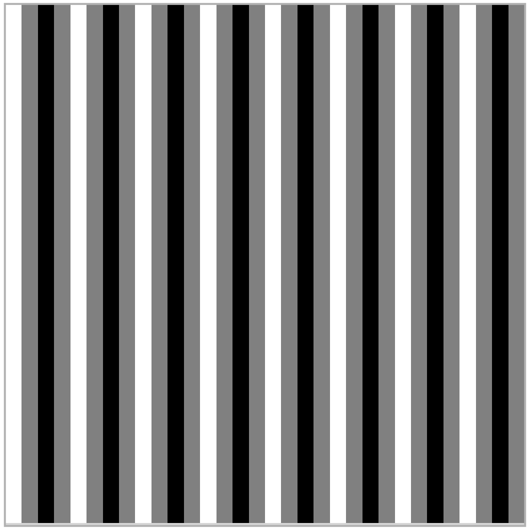
5.4.3 Sinusförmige Grauwertprofile

Bild

Sinusförmige Grauwert-profile korrespondieren mit ……

Je höher die Frequenz ……

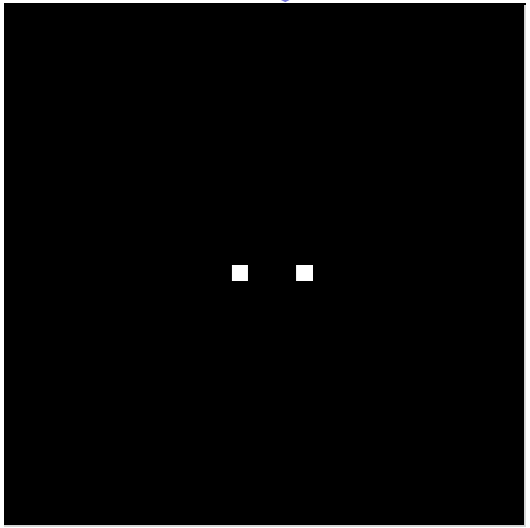


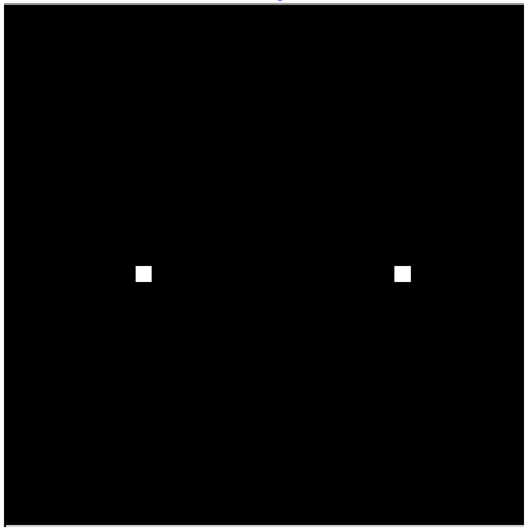


Betrag der DFT (zentriert)

….. um den Nullpunkt symm. Punktpaaren im Frequenzbereich

….. desto weiter rückt das Punktpaar nach außen.



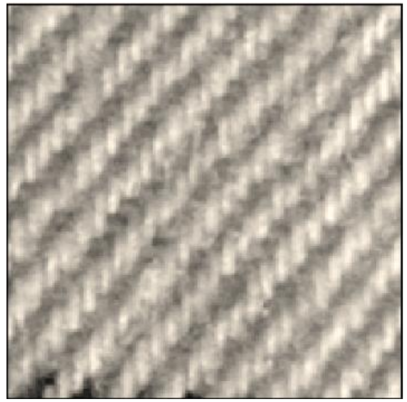


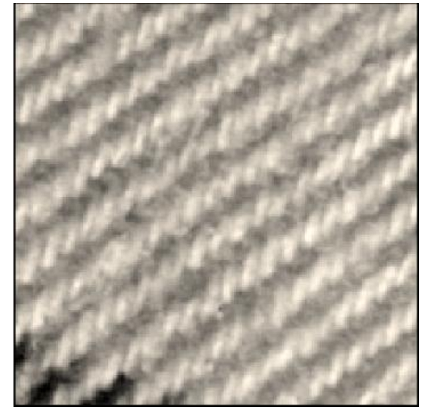
5.4.4 Näherungsweise periodische Strukturen

Bild

Näherungsweise periodische Strukturen korrespondieren ……

Eine Drehung des Bildes ……

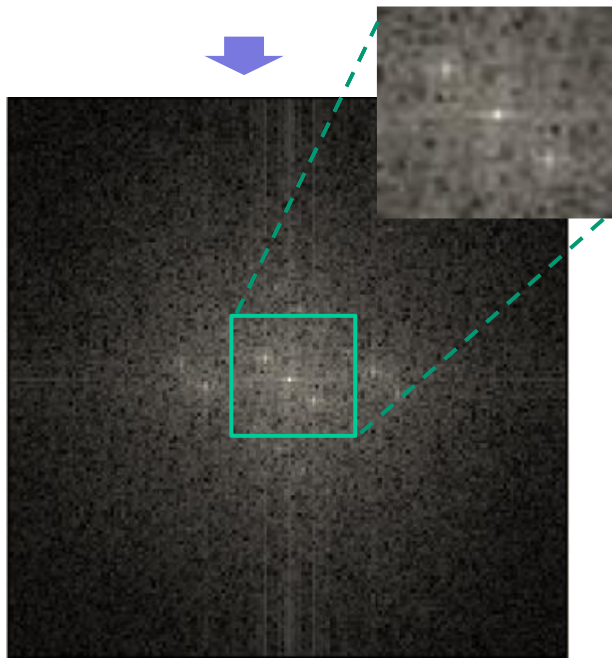


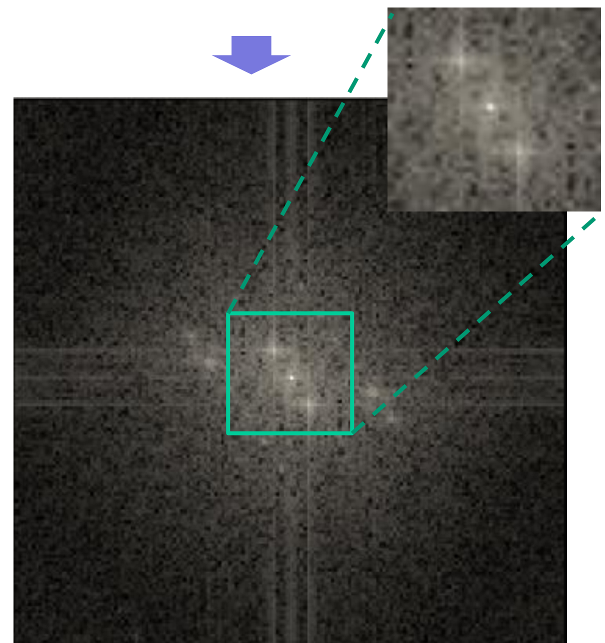


Betrag der DFT (zentriert)

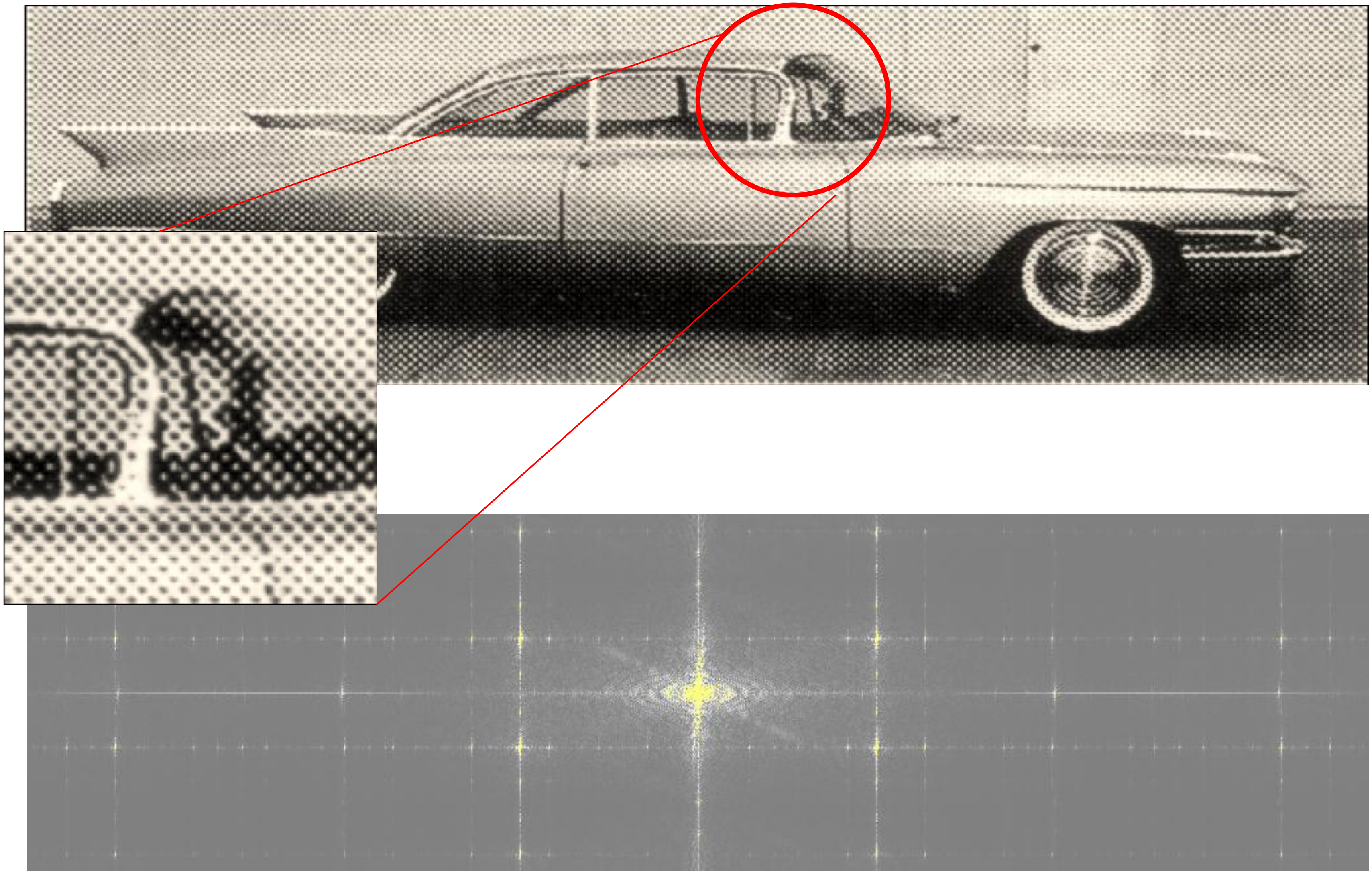
….. mit unscharfen Punktpaaren im Frequenzbereich

….. korrespondiert mit einer Drehung des Spektrums.



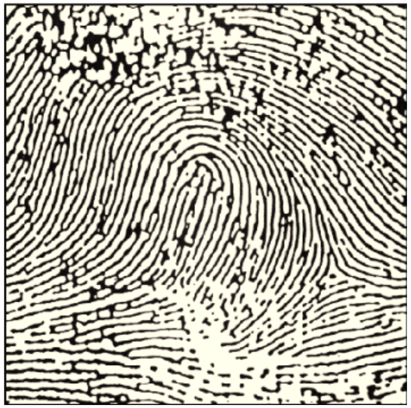


5.4.5 Abgetastete und gerasterte Strukturen



5.4.6 Weitere Beispiele

Bild



Betrag der DFT