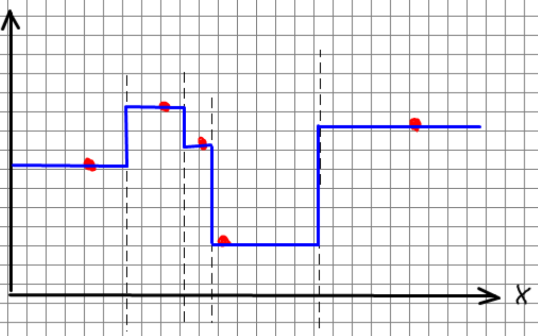
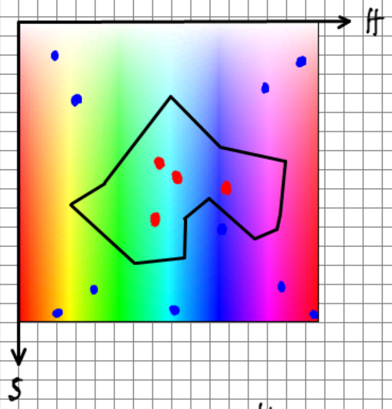
Nearest-Neighbour-"Interpolation"

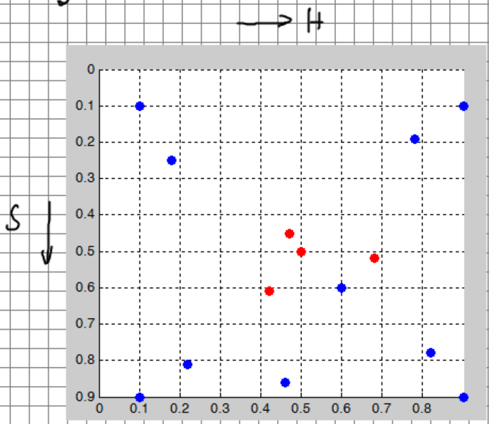
a) $y = f(x)$

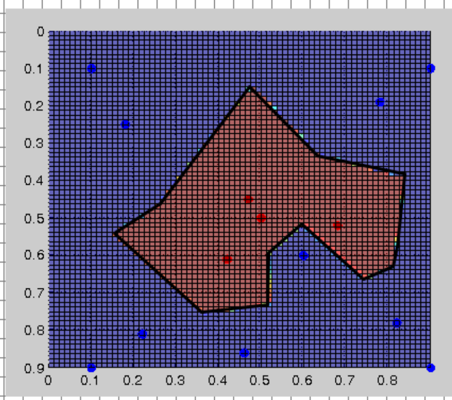


b) $C_{ou} = f(H, S)$

Anmerkung Hue (Farbton)
Saturation (Farbsättigung)







Erläuterungen zu den Radialen Basisfunktionen

Quadrat eines Vektors

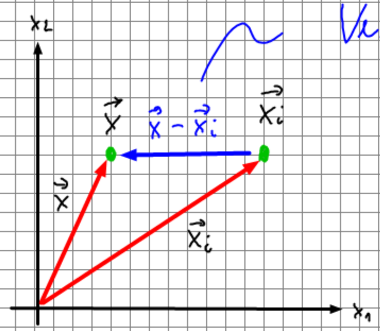
$$\vec{z} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} \qquad \vec{z}^{\,T} = (z_1, z_2, z_3, \ldots, z_n)$$

$$\vec{z}^{\,2} = \vec{z}^{\,T} \cdot \vec{z} = (z_1, z_2, \ldots z_n) \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}$$ (= Skalarprodukt)

$$= z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 \cdots + z_n^2$$

= Quadrat der Vektorlänge (= Skalar, kein Vektor)

Abstandsvektor zweier Punkte



Vektor von Repräsentant $\vec{x}_i$ zu Muster $\vec{x}$

$\vec{x}_i$: Ort des Repräsentanten i

$\vec{x}$: Ort des Musters (Mustervektor)

$\Longrightarrow$ $(\vec{x} - \vec{x}_i)^2$ $\Rightarrow$ Quadrat der euklidischen Distanz zwischen Repräsentant $\vec{x}_i$ und Muster $\vec{x}$

Differenz zweier Vektoren

Vektorkomponenten (n-dim. Vektor)

$$\vec{x} - \vec{x}_i = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_{i1} \\ x_{i2} \\ \vdots \\ x_{in} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - x_{i1} \\ x_2 - x_{i2} \\ \vdots \\ x_n - x_{in} \end{pmatrix}$$

Damit kann man für $(\vec{x} - \vec{x}_i)$ auch schreiben:

$$\Longrightarrow \quad (\vec{x} - \vec{x}_i)^2 = (x_1 - x_{i1})^2 + (x_2 - x_{i2})^2 + \ldots + (x_n - x_{in})^2$$

$\Rightarrow$ Quadrat der euklidischen Distanz zwischen Repräsentant $\vec{x}_i$ und Muster $\vec{x}$

Damit gilt für die Basisfunktion $h_i(\vec{x})$:

Quadrat des Abstandes zwischen Repräsentant i und dem Eingangsvektor (Muster) $\vec{x}$.

$$h_i(\vec{x}) = e^{-\frac{(\vec{x} - \vec{x}_i)^2}{2\sigma^2}}$$

$$= e^{-\frac{(x_1 - x_{i1})^2 + (x_2 - x_{i2})^2 + \ldots (x_n - x_{in})^2}{2\sigma^2}}$$

Komponentenschreibweise

Diskussion der Eigenschaften

$\Rightarrow$ $h_i(\vec{x})$ ist eine Funktion, deren Wert abhängt vom Abstand des Eingangsvektors (Muster) $\vec{x}$ vom Repräsentant i $(\vec{x}_i)$.

$\Rightarrow$ Für $\vec{x} = \vec{x}_i$ (Abstand $= 0$) ist $h_i(\vec{x}) = e^{-0} = 1$.

Je größer der Abstand $\vec{x} - \vec{x}_i$ wird, desto kleiner wird $h_i(\vec{x})$.

Gewichtete Basisfunktionen

y_i: Wert des Repräsentanten i (Wichtungsfaktor)

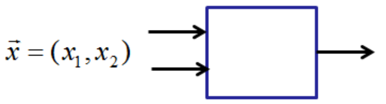
$y_i \cdot h_i(\vec{x})$ $\Rightarrow$ Funktion die an der Stelle $\vec{x}_i$ den Wert y_i hat (Maximum)

$h_i(\vec{x})$: Funktion die an der Stelle $\vec{x}_i$ den Wert 1 hat (Maximum)

ÜBUNG: Gauss-RBF

Welchen Wert hat die Funktion $r(\vec{x})$ bei den Eingangswerten:

$\vec{x} = (0.1,\ 0.1)$ A
$\vec{x} = (0.2,\ 0.6)$ B
$\vec{x} = (0.3,\ 0.7)$ C



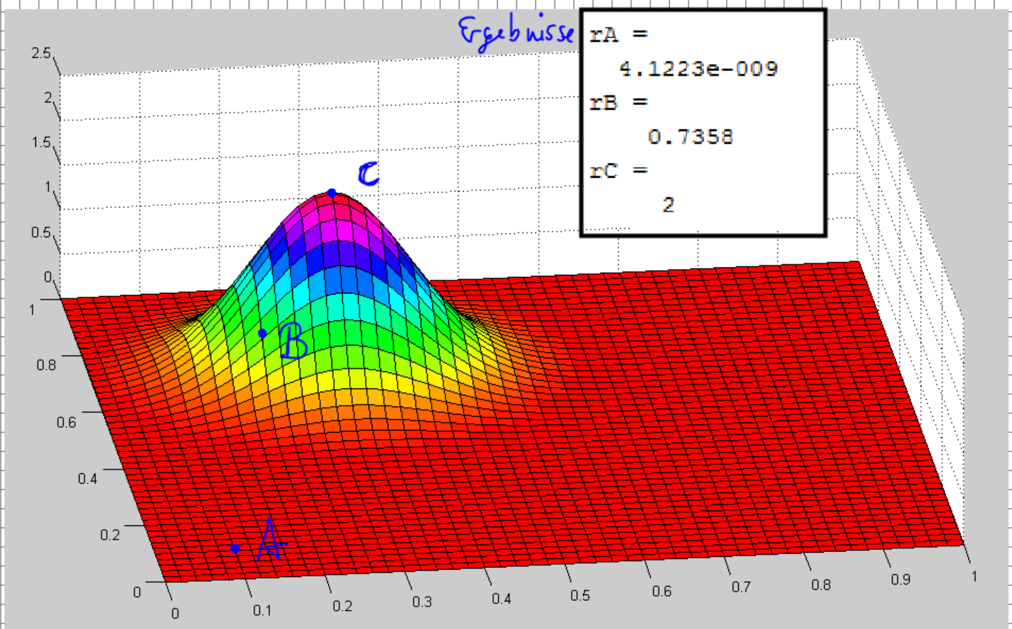
Parameter des Repräsentanten i

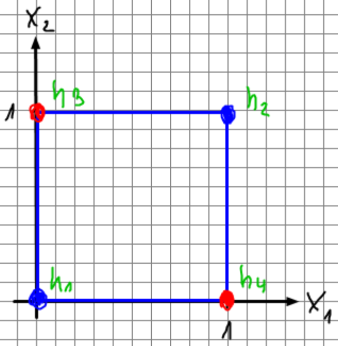
$\vec{x}_1 = (0.3,\ 0.7)$
$y_1 = 2$
$\sigma = 0.1$

$$r(\vec{x}) = 2 \cdot e^{-\frac{(\vec{x} - \vec{x}_i)^2}{2\sigma^2}}$$

$$= 2 \cdot e^{-\frac{(x_1 - x_{i1})^2 + (x_2 - x_{i2})^2}{2 \cdot 0.1^2}}$$

$$= 2 \cdot e^{-\frac{(x_1 - 0.3)^2 + (x_2 - 0.7)^2}{0.02}}$$



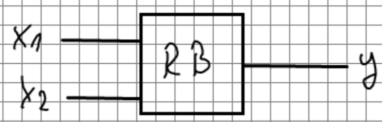


● : 0 – Werte

● : 1 – Werte

Eingangsvektor (Muster):

$\vec{x} = (x_1, x_2)$



$$h_1(x_1, x_2) = e^{-\frac{\left((x_1-0.0)^2+(x_2-0.0)\right)^2}{2\sigma^2}}$$

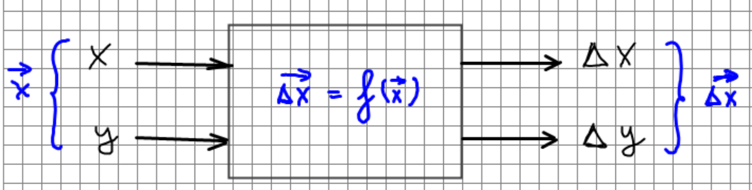
$$h_2(x_1, x_2) = e^{-\frac{\left((x_1-1.0)^2+(x_2-1.0)\right)^2}{2\sigma^2}}$$

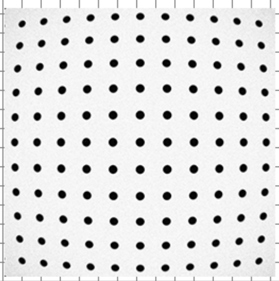
$$h_3(x_1, x_2) = e^{-\frac{\left((x_1-0.0)^2+(x_2-1.0)\right)^2}{2\sigma^2}}$$

$$h_4(x_1, x_2) = e^{-\frac{\left((x_1-1.0)^2+(x_2-0.0)\right)^2}{2\sigma^2}}$$

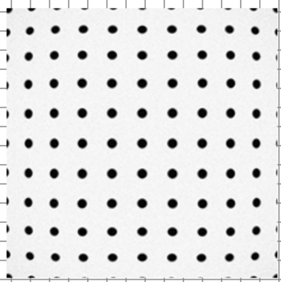
$$\underline{\underline{y(x_1, x_2) = \frac{0 \cdot h_1(x_1, x_2) + 0 \cdot h_2(..) + 1 \cdot h_3(..) + 1 \cdot h_4(..)}{h_1(x_1, x_2) + h_2(..) + h_3(..) + h_4(..)}}}$$

a) modellfreie Linsenverzeichnungskorrektur





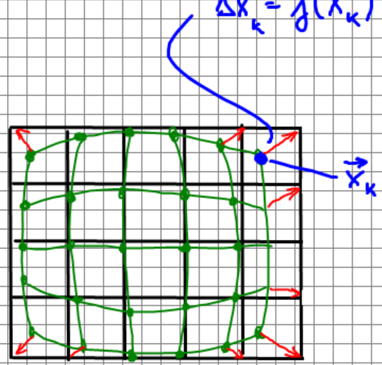
vorher



nachher

Repräsentant

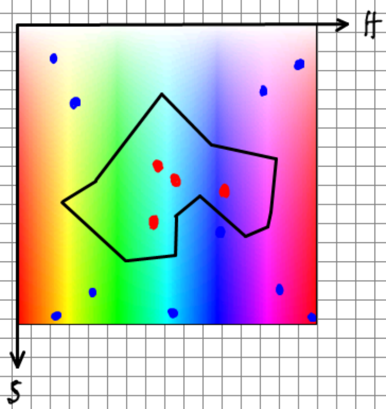
$\vec{\Delta x}_k = f(\vec{x}_k)$

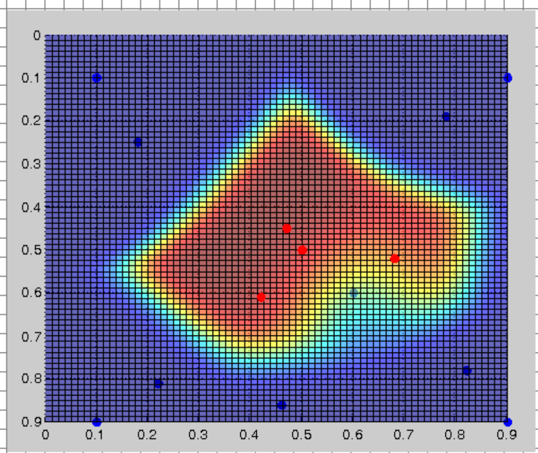


b) Farbklassifikation

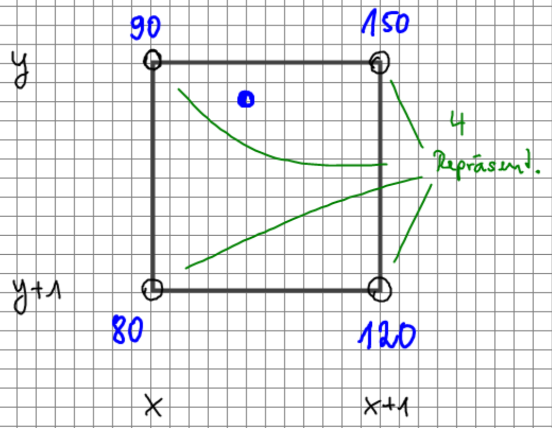
Anmerkung Hue (Farbton)
Saturation (Farbsättigung)

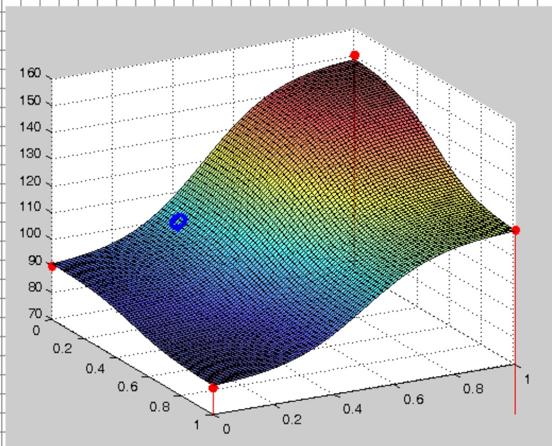
$C_{ok} = f(H, S)$



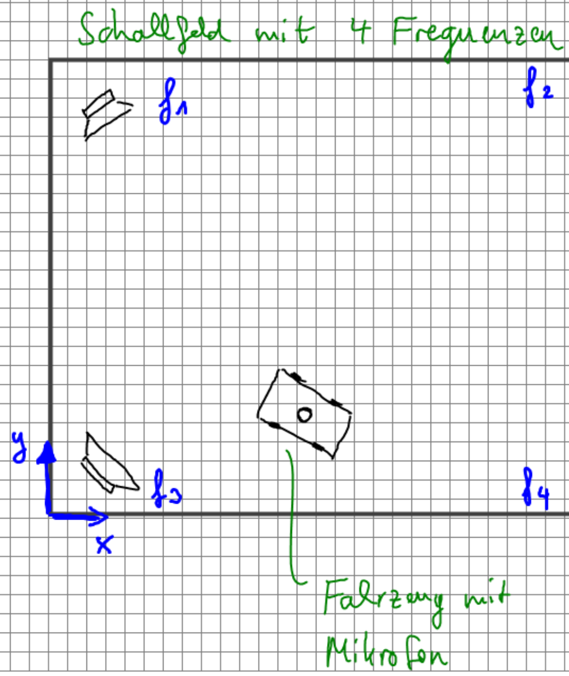


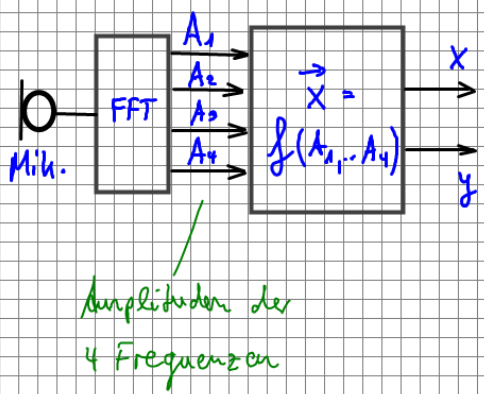
c) Grauwertinterpolation





d) akustische Navigation





ÜBUNG : XOR mit Polynom-LBF

XOR-Verhalten

0.0 / 0.0 → 0.0
1.0 / 1.0 → 0.0
1.0 / 0.0 → 1.0
0.0 / 1.0 → 1.0

$$y = a_0 + a_1 \cdot x_2 + a_2 \cdot x_1 + a_3 \cdot x_1 x_2$$

4 Gleichungen :

$$0 = a_0 + a_1 \cdot 0 + a_2 \cdot 0 + a_3 \cdot 0 \cdot 0$$

$$0 = a_0 + a_1 \cdot 1 + a_2 \cdot 1 + a_3 \cdot 1 \cdot 1$$

$$1 = a_0 + a_1 \cdot 0 + a_2 \cdot 1 + a_3 \cdot 1 \cdot 0$$

$$1 = a_0 + a_1 \cdot 1 + a_2 \cdot 0 + a_3 \cdot 0 \cdot 1$$

in Matrixform :

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} (1) \\ (2) \\ (3) \\ (4) \end{array}$$

aus (1) folgt : $1 \cdot a_0 = 0 \Rightarrow \underline{\underline{a_0 = 0}}$

aus (4) folgt : $1 \cdot \cancelto{0}{a_0} + a_1 = 1 \Rightarrow \underline{\underline{a_1 = 1}}$

aus (3) folgt : $1 \cdot \cancelto{0}{a_0} + a_2 = 1 \Rightarrow \underline{\underline{a_2 = 1}}$

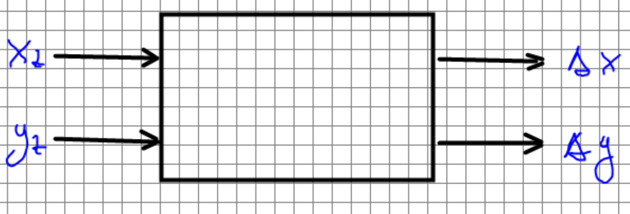
aus (2) folgt : $1 \cdot \cancelto{0}{a_0} + \cancelto{1}{a_1} + \cancelto{1}{a_2} + a_3 = 0$

$$\Rightarrow \underline{\underline{a_3 = -2}}$$

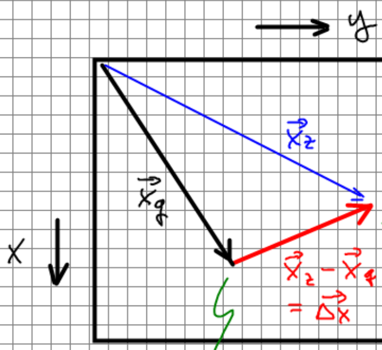
$$\underline{\underline{y = x_1 + x_2 - 2\, x_1 \cdot x_2}}$$ XOR-Polynom

ÜBUNG: Image-Warping mit Thin-Plate-Splines

Diskutieren Sie Realisierungsmöglichkeiten eines Image-Warping-Verfahrens auf Basis der Thin-Plate-Splines.



Koordinatenversatz zwischen Quell- und Zielbild



diese Quell-koordinate ....

... soll im Zielbild hier liegen

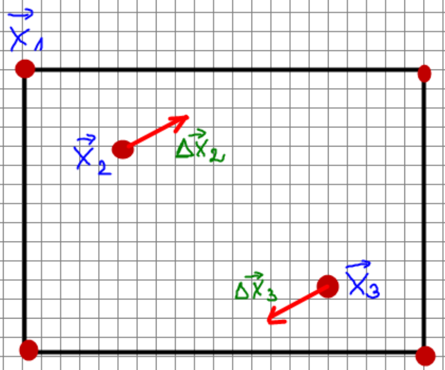
$$\vec{\Delta x} = \vec{x}_z - \vec{x}_q$$

Target-to-source-Mapping

$$\boxed{\vec{x}_q = \vec{x}_z - \vec{\Delta x}}$$

Quellbildkoordinate, von welcher der Grauwert geholt wird.

Grundidee :



6 Repräsentanten an den ● markierten Stellen

Repräsentantenindex $j = 1 \ldots 6$

Festlegung der W-Parameter so, dass an den ● markierten Stellen gerade die gewünschten $\vec{\Delta x}$ ausgegeben werden.

6 Basisfunktionen mit Index $k = 1 \ldots 6$

Mit

$$r_k(\vec{x}) = \| \vec{x} - \vec{x}_k \| = \sqrt{(\vec{x} - \vec{x}_k)^2}$$

$$= \sqrt{(\vec{x} - \vec{x}_k)^T (\vec{x} - \vec{x}_k)}$$

Abstand des Eingangswertes $\vec{x}$ vom Repräsentanten $\vec{x}_k$

und der Abkürzung

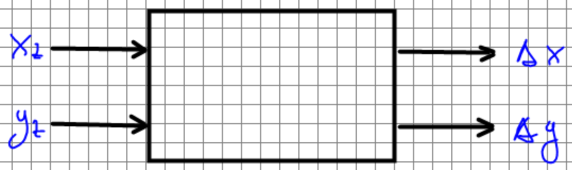
$$\phi_k(\vec{x}_j) = r_k^2(x_j) \cdot \ln[r_k(\vec{x}_j)]$$ → Wert der RBF k bei $\vec{x}_j$

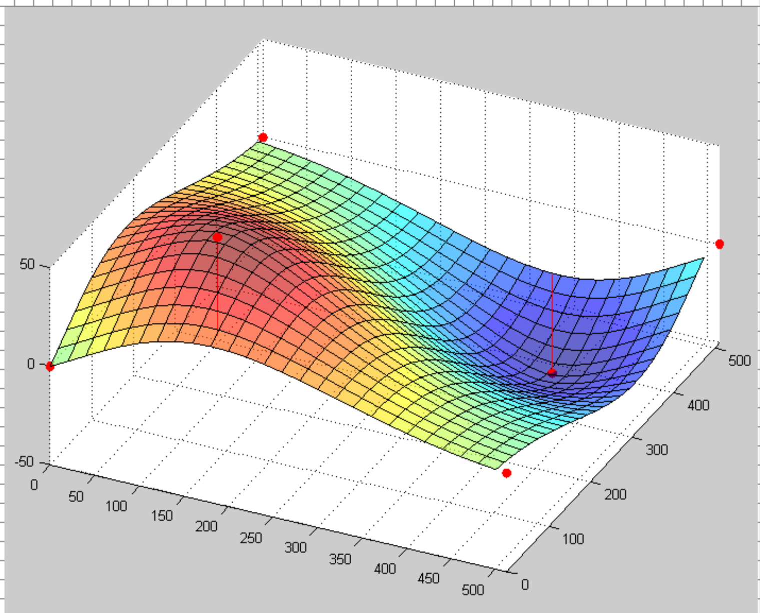
erhält man die beiden Gleichungssysteme : (eins pro Ausgang)

$$\Delta x_j = v_1 \cdot \phi_1(\vec{x}_j) + \ldots\ldots v_6 \cdot \phi_6(\vec{x}_j)$$

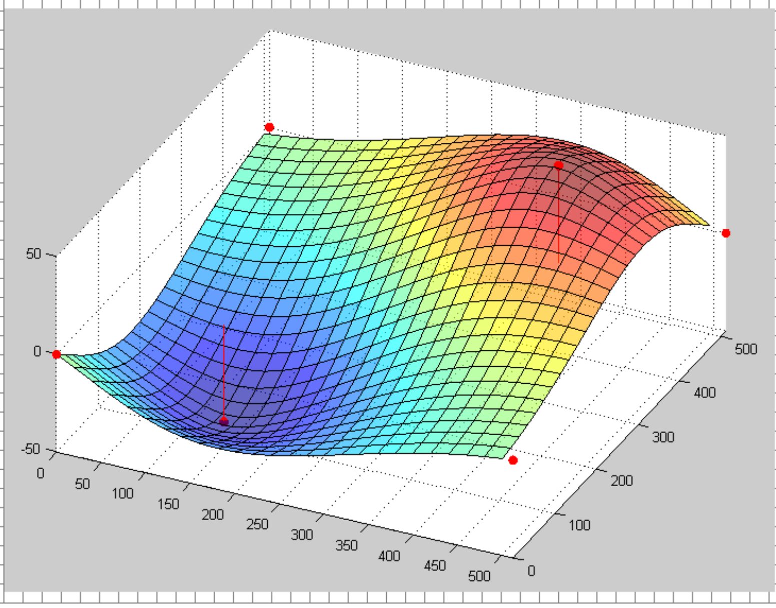
$$\Delta y_j = w_1 \cdot \phi_1(\vec{x}_j) + \ldots\ldots w_6 \cdot \phi_6(\vec{x}_j) \qquad j = 1 \ldots 6$$

$\Rightarrow$ 2×6 Gleichungen für 2×6 Unbekannte v_k und w_k



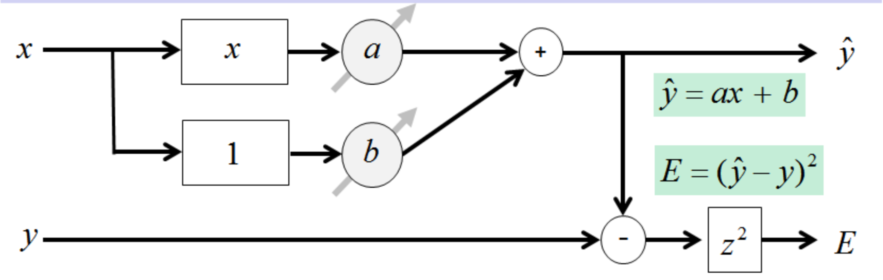


$\Delta x\ (x_z, y_z)$



$\Delta y\ (x_z, y_z)$

Fortsetzung ....: Berechnung des Gradienten



$= \hat{y}(a,b)$

$= E(\hat{y})$

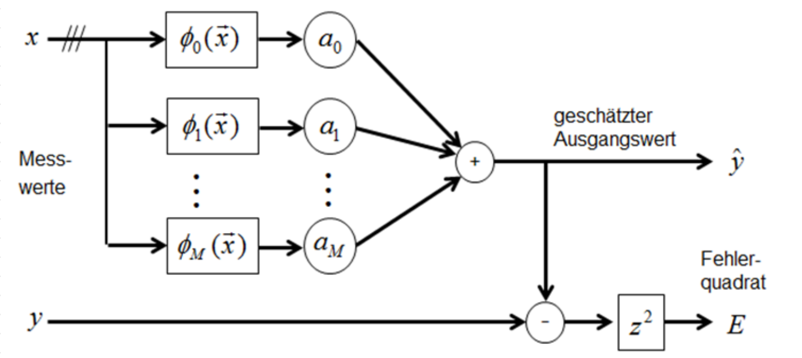
Gradient : $\vec{\nabla} E(a,b) = \left(\frac{\partial E}{\partial a} , \frac{\partial E}{\partial b} \right)^T$

$$\frac{\partial E}{\partial a} = \underbrace{\frac{\partial E}{\partial \hat{y}} \cdot \frac{\partial \hat{y}}{\partial a}}_{\text{Kettenregel}} = 2(\hat{y} - y) \cdot x$$

$$\frac{\partial E}{\partial b} = \frac{\partial E}{\partial \hat{y}} \cdot \frac{\partial \hat{y}}{\partial b} = 2(\hat{y} - y) \cdot 1$$

$$\boxed{\vec{\nabla} E = 2(\hat{y} - y) \cdot \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix}}$$

ÜBUNG : Herleitung der allg. Lösung



$$E(\hat{y}) = (\hat{y} - y)^2$$

$$\hat{y}(a_0, a_1, a_2, \ldots) = a_0 \cdot \phi_0(\vec{x}) + a_1 \cdot \phi_1(\vec{x}) + a_2 \cdot \phi_2(\vec{x}) + \ldots$$

$$\frac{\partial E}{\partial a_i} = \frac{\partial E}{\partial \hat{y}} \cdot \frac{\partial \hat{y}}{\partial a_i}$$

$$= \underline{\underline{2(\hat{y} - y) \cdot \phi_i(\vec{x})}}$$

$$\boxed{\vec{\nabla} E = 2(\hat{y} - y) \cdot \begin{pmatrix} \phi_0(\vec{x}) \\ \phi_1(\vec{x}) \\ \vdots \\ \phi_M(\vec{x}) \end{pmatrix}}$$