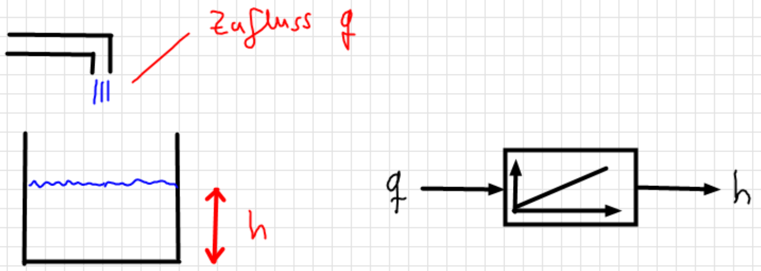
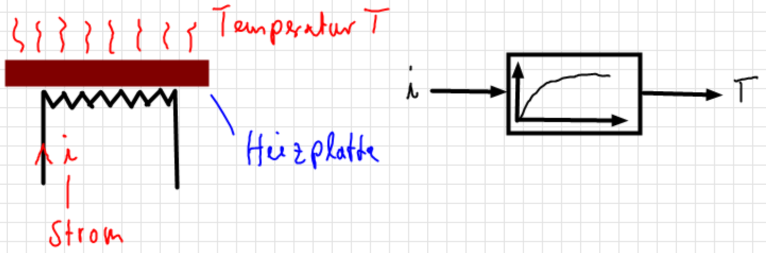
Beispiele : Sprungantwort von Systemen

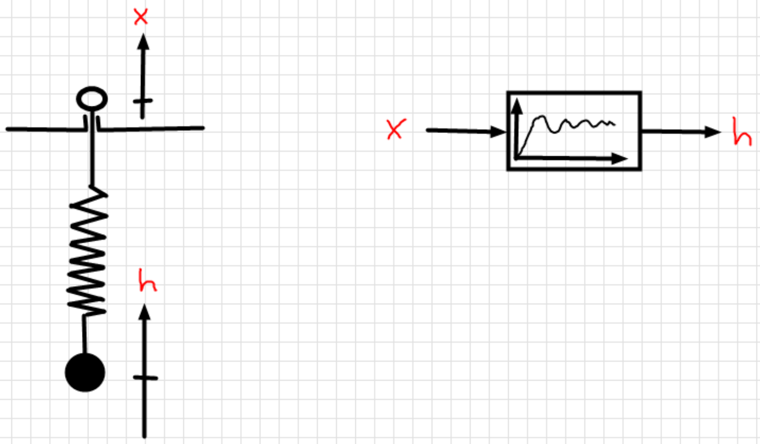
1



2

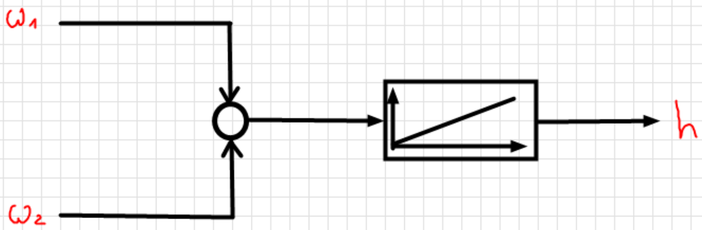


3



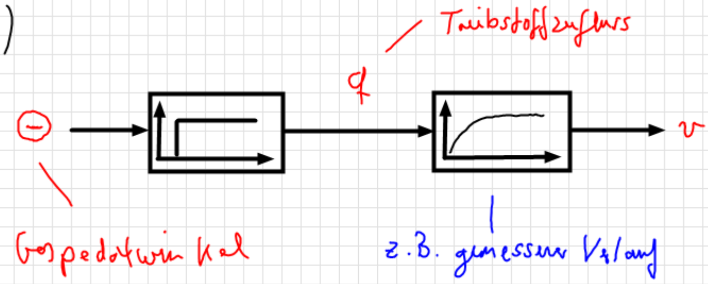
ÜBUNG: Charakterisierung von Übertragungsblöcken

a) Förderung einer Stoffbahn

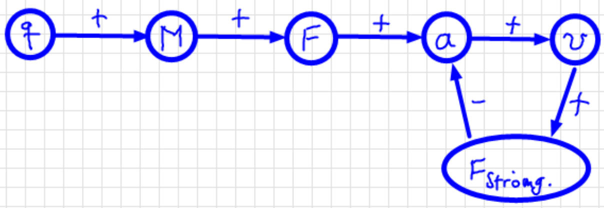


=> Integral der Drehzahldifferenz

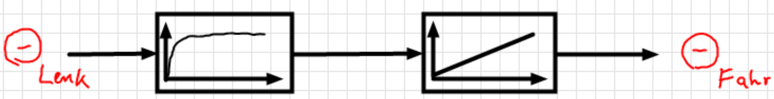
b)



Wirkungsdiagramm

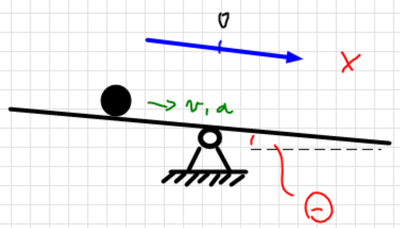


c)



=> Integralverhalten mit Verzögerung

d)



In einer früheren Übung hatten wir hergeleitet:

$$\ddot{x} = \frac{5}{7} g \cdot \sin\Theta$$

Für kleine Winkel Θ (Bogenmaß!) gilt:

$$\sin\Theta \approx \Theta$$

Beweis:

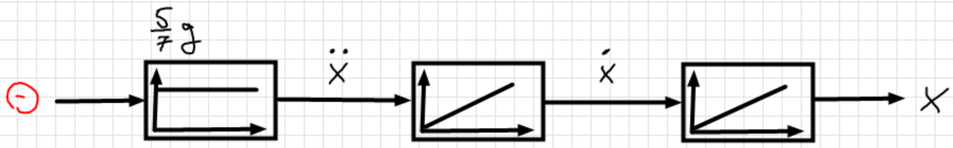
$f(\Theta) = \sin\Theta$ $\qquad$ $f^*(\Theta) = \Theta$

$f'(\Theta) = \cos\Theta$ $\qquad$ $f^{*\prime}(\Theta) = 1$

für $\Theta \approx 0 \Rightarrow \cos\Theta = 1 = f'(\Theta)$

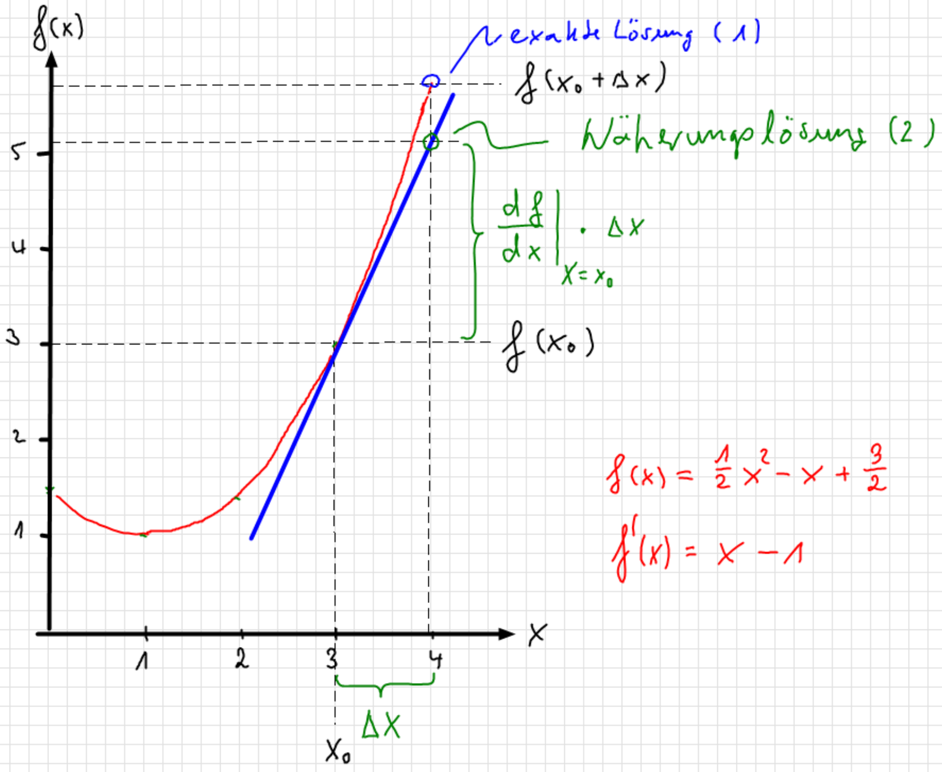
Für kleine Winkel Θ gilt somit:

$$\ddot{x} \approx \frac{5}{7} g \cdot \Theta$$



Linearisieren einer nichtlinearen Funktion um einen Arbeitspunkt

(sehr ausführliche Studie)



$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 - x + \frac{3}{2}$$

$$f'(x) = x - 1$$

Im Arbeitspunkt ($x_0 = 3$) gilt:

$$f(x_0) = 3$$

$$f'(x_0) = 2$$

In der Nähe des Arbeitspunktes gilt:

$$f(x_0 + \Delta x) = \frac{1}{2}(x_0 + \Delta x)^2 - (x_0 + \Delta x) + \frac{3}{2} \quad (1) \text{ s.o.}$$

$$\approx f(x_0) + \left.\frac{df}{dx}\right|_{x_0} \cdot \Delta x \quad (2) \text{ Näherung s.o.}$$

$f(x) = \frac{1}{2}x^2 - x + \frac{3}{2}$ $\qquad$ $f'(x) = x - 1$

Fall 1 : $x_0 + \Delta x = 3 + 0.1 = 3.1$

exakte Lösung: $f(x_0 + \Delta x) = f(3.1) = \underline{\underline{3.205}}$

Näherungslösung: $f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + \left.\frac{df}{dx}\right|_{x=3} \cdot \Delta x$

$= 3 + 2 \cdot \Delta x$

$= \underline{\underline{3.2}}$

Fall 2 : $x_0 + \Delta x = 3 + 1 = 4$

exakte Lösung: $f(x_0 + \Delta x) = f(4) = \underline{\underline{5.5}}$

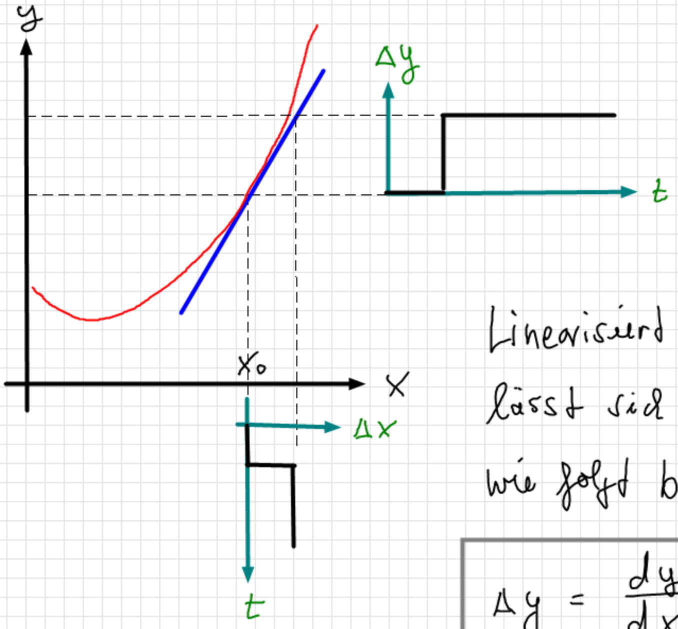
Näherungslösung: $f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + \left.\frac{df}{dx}\right|_{x=3} \cdot \Delta x$

$= 3 + 2 \cdot \Delta x$

$= \underline{\underline{5}}$

Fazit:

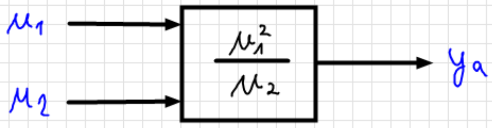
Bei der Betrachtung / Untersuchung der Systemdynamik intressieren nur die Änderungen aus der Ruhelage.
Daher ist es sinnvoll Gleichungen nur für die Änderungen aufzustellen.



Linearisiert um die Ruhelage lässt sich die Funktion wie folgt beschreiben:

$$\Delta y = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x_0} \cdot \Delta x$$
$$= f'(x_0) \cdot \Delta x$$

Beispiel: Dividierer

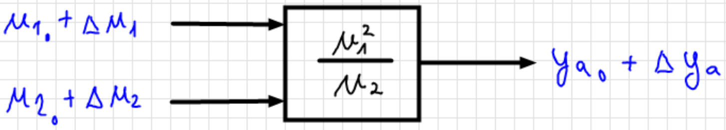


Arbeitspunkt: $u_{1_0} = 1$ $\quad u_{2_0} = 2$

Im Arbeitspunkt gilt: $\underline{\underline{y_{a_0}}} = \frac{u_{1_0}^2}{u_{2_0}} = \underline{\underline{0.5}}$

Jetzt sei $u_1 = 1.2$, $u_2 = 1.9$

$\Rightarrow \Delta u_1 = 0.2 \qquad \Delta u_2 = -0.1$



Exakte Lösung: $y_{a_0} + \Delta y_a = \frac{(u_{1_0} + \Delta u_1)^2}{(u_{2_0} + \Delta u_1)} = \frac{1.2^2}{1.9} = \underline{\underline{0.758}}$ (1)

$y_{a_0} = \underline{\underline{0.5}}$, $\Delta y_a = \underline{\underline{0.258}}$

Näherungslösung: $\left(\mu_{10} = 1,\ \mu_{20} = 2,\ \Delta\mu_1 = 0.2,\ \Delta\mu_2 = -0.1 \right)$

$$\Delta y_a \approx \left.\frac{d\,\frac{\mu_1^2}{\mu_2}}{d\mu_1}\right|_A \cdot \Delta\mu_1 + \left.\frac{d\,\frac{\mu_1^2}{\mu_2}}{d\mu_2}\right|_A \cdot \Delta\mu_2$$

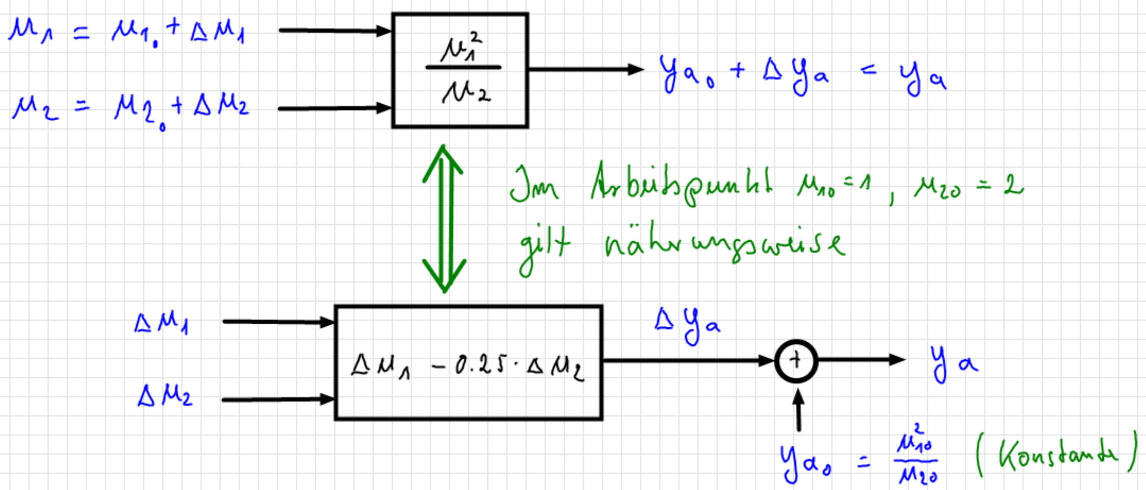
$$= \left.\frac{2\mu_1 \cdot \mu_2}{\mu_2^2}\right|_A \cdot \Delta\mu_1 + \left.\frac{-\mu_1^2}{\mu_2^2}\right|_A \cdot \Delta\mu_2$$

$$= \frac{4}{4} \cdot \Delta\mu_1 - \frac{1}{4} \cdot \Delta\mu_2$$

$$= \Delta\mu_1 - 0.25\,\Delta\mu_2 = 0.2 + 0.025 = \underline{\underline{0.225}}$$

$$\Longrightarrow \quad y_{a_0} + \Delta y_a \approx 0.5 + 0.225 = \underline{\underline{0.725}} \quad (2)$$

Man sieht: $(1) \approx (2)$



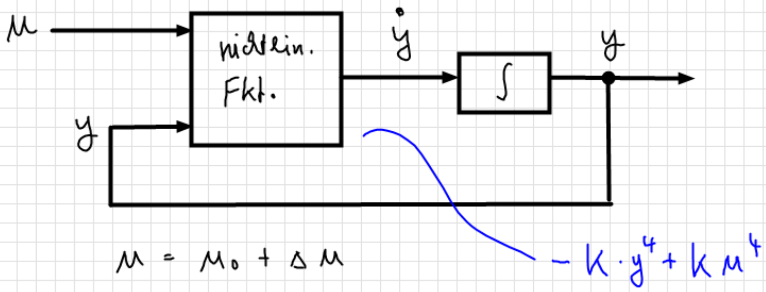
ÜBUNG: Linearisieren einer nichtlinearen DGL 1

Die Erwärmung eines Körpers in einem Strahlungsofen werde durch folgende DGL beschrieben:

$$\dot{y} = -K \cdot y^4(t) + K \cdot u^4(t)$$

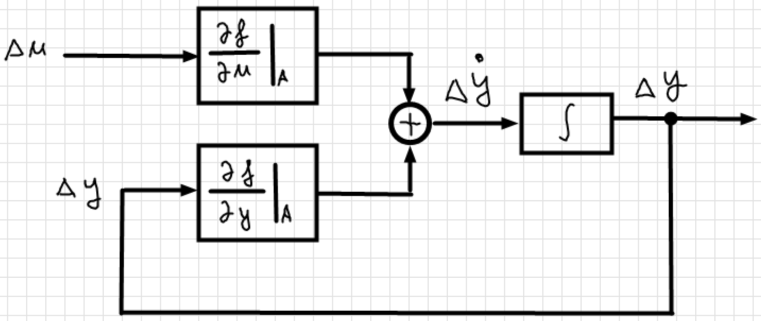
mit u(t) : Ofentemperatur
y(t) : Körpertemperatur
K : Konstante

a)



$$u = u_0 + \Delta u$$
$$y = y_0 + \Delta y$$

b)

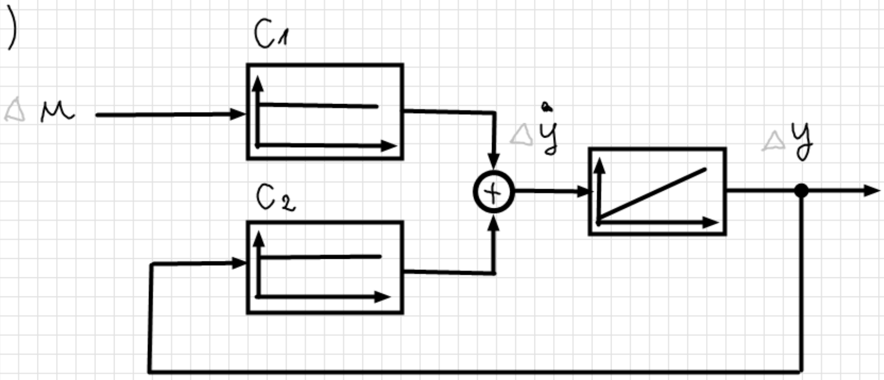


$$\left.\frac{\partial f}{\partial u}\right|_A = 4 \cdot K \cdot u_0^3 \qquad \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_A = -4 K y_0^3$$

$$\Rightarrow \quad \Delta \dot{y}(t) = \underbrace{+ 4 K u_0^3}_{C_1} \cdot \Delta u \; \underbrace{- 4 K y_0^3}_{C_2} \cdot \Delta y$$

Da in der Regelungstechnik immer nur die Änderung aus der Ruhelage interessiert, wird das Δ meist weggelassen. (Aufpassen!)

c)



$$\Delta \dot{y}(t) = -C_1 \cdot \Delta y(t) + C_2 \cdot \Delta u(t)$$

$\longrightarrow$ linearisiertes Ofenmodell

C_1 und C_2 sind Arbeitspunktabhängig!

ÜBUNG: Linearisieren einer nichtlinearen DGL 2

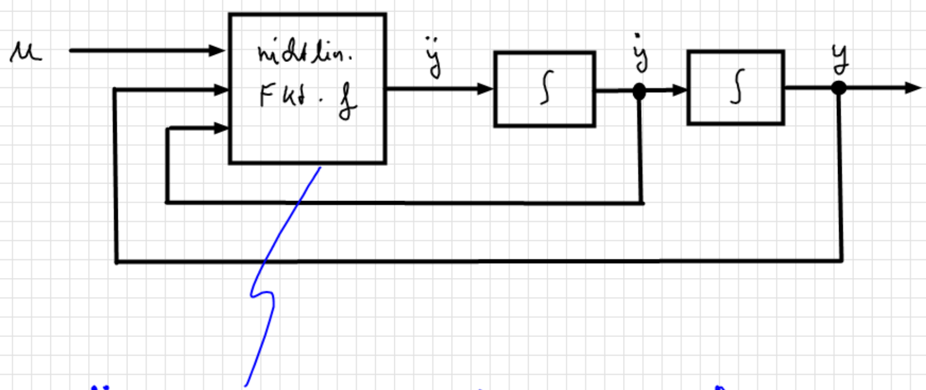
Gegeben sei die folgende nichtlineare Differentialgleichung:

$$\ddot{y} = -1000 \cdot y \; - \; 20 \cdot \dot{y} \; - \; 10000 \cdot y \cdot \dot{y} \; + \; u(t)$$

a) Zeichnen Sie das Analogrechnermodell der Differentialgleichung.

b) Linearisieren Sie die Differentialgleichung um den Punkt u_0=10.
Zeichnen Sie jetzt das (linearisierte) Analogrechnermodell.
Unter welchen Bedingungen gilt die Linearisierung?

a)



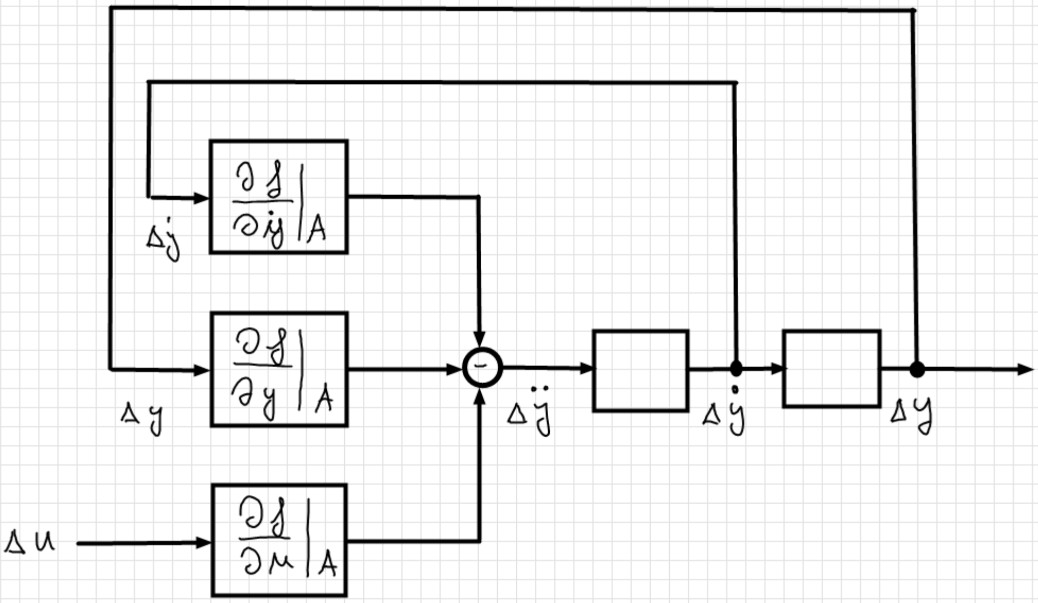
$$\ddot{y} = -1000\,y - 20\,\dot{y} - 10\,000\,y\dot{y} + u(t) \qquad (1)$$

b) Im AP gilt: $u_0 = 10$ $\qquad \dot{y}_0 = \ddot{y}_0 = 0$ $\qquad (2)$

(System ruht)

$$0 = -1000\,y_0 - 0 - 0 + u_0$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{y_0}} = \frac{1}{1000}\,u_0 = \underline{\underline{0.01}} \qquad (3)$$



Mit $\ddot{y} = -1000\,y - 20\,\dot{y} - 10\,000\,y\dot{y} + u(t)$ (1)

$$\frac{\partial f}{\partial \dot{y}}\Big|_A = -20 - 10\,000\,y_0 = -120 \qquad (4)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}\Big|_A = -1000 - 10\overset{0}{\cancel{00}}0\,\dot{y}_0 = -1000 \qquad (5)$$

$$\frac{\partial f}{\partial u}\Big|_A = 1 \qquad (6)$$

Damit erhalten wir für kleine Änderungen um die Ruhelage die linearisierte DGL:

$$\Delta \ddot{y} = -120 \cdot \Delta \dot{y} - 1000 \cdot \Delta y + \Delta u \qquad (7)$$

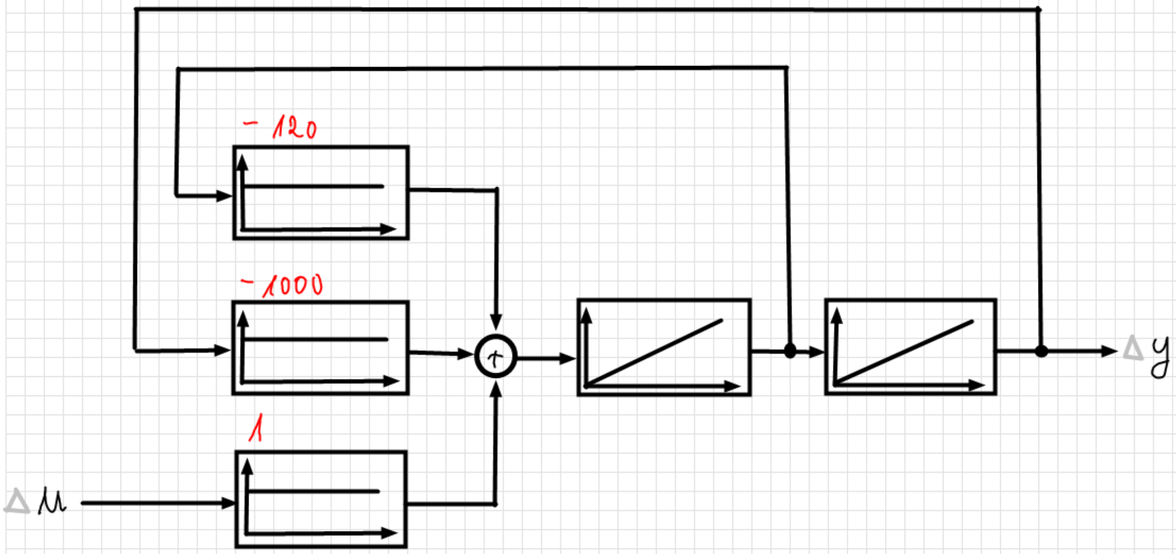
$$\Delta \ddot{y} = -120 \cdot \Delta \dot{y} - 1000 \cdot \Delta y + \Delta u \qquad (7)$$

Bzw. in der vereinfachten Darstellungsweise

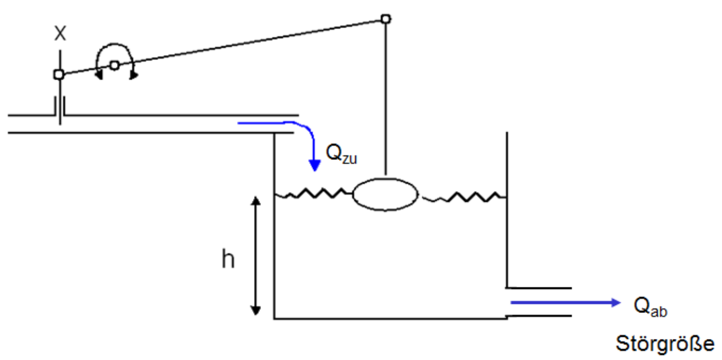
$$\ddot{y} = -120\, \dot{y} - 1000 \cdot y + u \qquad (8)$$

Anm.: (8) darf nicht mit (1) verwechselt werden!

(8) gilt nur für kleine Auslenkungen in diesem Arbeitspunkt!



ÜBUNG: Übertragungsblöcke und Wirkungsplan



A : Tankquerschnitt

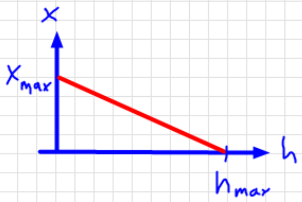
Für die einzelnen Komponenten gelten die Beziehungen :

$$\frac{dV}{dt} = \dot{V} = Q_{zu} - Q_{ab} \qquad (1)$$

$$V = A \cdot h \qquad (2)$$

$$Q_{zu} = k \cdot x \qquad (3)$$

$$x = -\frac{x_{max}}{h_{max}} \cdot h + x_{max} \qquad (4)$$



a) (2) → (1)

$$\frac{d\,A \cdot h}{dt} = Q_{zu} - Q_{ab}$$

$$A \cdot \dot{h} = Q_{zu} - Q_{ab} \qquad (5)$$

(3) → (5)

$$A \cdot \dot{h} = k \cdot x - Q_{ab} \qquad (6)$$

(4) → (6)

$$A \cdot \dot{h} = k\left(-\frac{x_{max}}{h_{max}} \cdot h + x_{max}\right) - Q_{ab} \qquad (7)$$

$$\dot{h} = -\frac{k \cdot x_{max}}{h_{max} \cdot A} \cdot h + \frac{k \cdot x_{max}}{A} - \frac{Q_{ab}}{A} \qquad (8)$$

⇒ lin. DGL 1. Ordnung

b) Ruhelage $\Rightarrow$ alle Ableitungen sind 0 !

aus (8) wird dann :

$$0 = -\frac{k \cdot x_{max}}{h_{max} \cdot \cancel{A}} \cdot h_0 + \frac{k \cdot x_{max}}{\cancel{A}} - \frac{Q_{ab}}{\cancel{A}}$$

$$h_0 \frac{k \cdot x_{max}}{h_{max}} = k \cdot x_{max} - Q_{ab}$$

$$h_0 = h_{max} - \frac{h_{max}}{k \cdot x_{max}} \cdot Q_{ab} \qquad (9)$$

$\Rightarrow$ Die Ruhelage h_0 ist von Q_{ab} abhängig .

Weiter gilt im Gleichgewichtszustand (stationärer Zustand) :

$$Q_{zu_0} = Q_{ab_0} \qquad (10) \qquad \text{wg } \dot{V} = 0$$

aus (3) folgt somit : $Q_{zu_0} = Q_{ab_0} = k \cdot x_0$

$$\Rightarrow x_0 = \frac{1}{k} \cdot Q_{ab_0} \qquad (11)$$

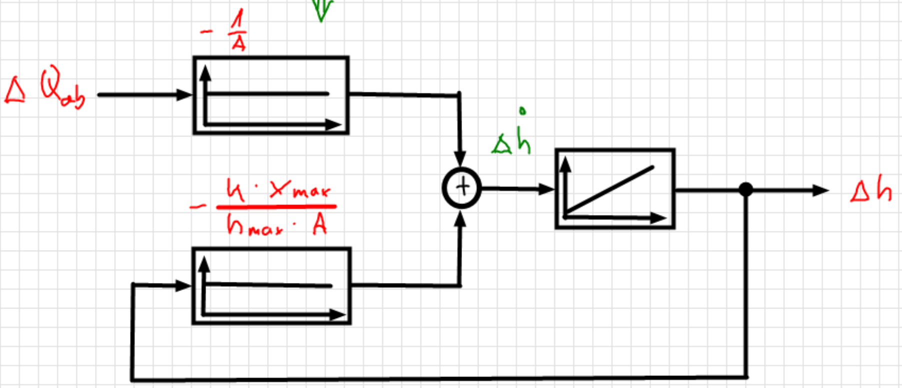
c) Da (8) eine lin. DGL ist, kann man die DGL für Änderungen aus der Ruhelage direkt hinschreiben :

$$\dot{h} = -\frac{k \cdot x_{max}}{h_{max} \cdot A} \cdot h + \underbrace{\frac{k \cdot x_{max}}{A}}_{\text{Konstant}} - \frac{Q_{ab}}{A}$$

$$\Downarrow$$

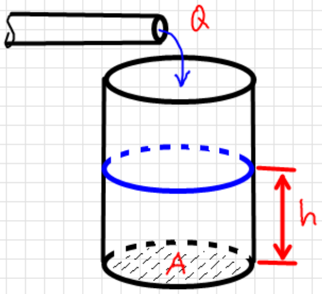
$$\Delta \dot{h} = -\frac{k \cdot x_{max}}{h_{max} \cdot A} \cdot \Delta h - \frac{1}{A} \cdot \Delta Q_{ab}$$

$$\Delta \dot{h} = -\frac{k \cdot x_{max}}{h_{max} \cdot A} \cdot \Delta h - \frac{1}{A} \cdot \Delta Q_{ab}$$



ÜBUNG: Normierung von Funktionsvariablen

$$h = \frac{Q}{A}\cdot t \qquad (1)$$



Ziel: (1) soll von den Einheiten befreit werden.

Bezugseinheiten: $h_N = 1\,cm \qquad t_N = s$

Geben Sie für die Konstanten $Q = 2\,{}^{l}/_{s}$ $\quad A = 4\cdot 10^4\,mm^2$
die normierte Gleichung an :

$$\hat{h}\cdot h_N = \frac{Q}{A}\cdot \hat{t}\cdot t_N$$

$$\hat{h} = \hat{t}\cdot \underbrace{\frac{Q\cdot t_N}{A\cdot h_N}}$$

Konstanten und Normierungsgrößen zusammenfassen

$$\underline{\underline{\hat{h}}} = \hat{t}\cdot \frac{2\,\frac{dm^3}{\cancel{s}}\cdot \cancel{1s}}{4\cdot 10^4\,mm^2\cdot 1\,cm}$$

$$= \hat{t}\cdot \frac{2\cdot 10^6\,\cancel{mm^3}}{4\cdot 10^4\,\cancel{mm^2}\cdot 10\,\cancel{mm}}$$

$$= \hat{t}\cdot \frac{2\cdot 10^6}{4\cdot 10^5} = \underline{\underline{\hat{t}\cdot 5}} \qquad \text{mit } h_N = 1\,cm,\quad t_N = 1\,s$$

Anm.: Konstanten (z.B. Q, A) zu normieren ist möglich, aber i. Allg. unnötig!