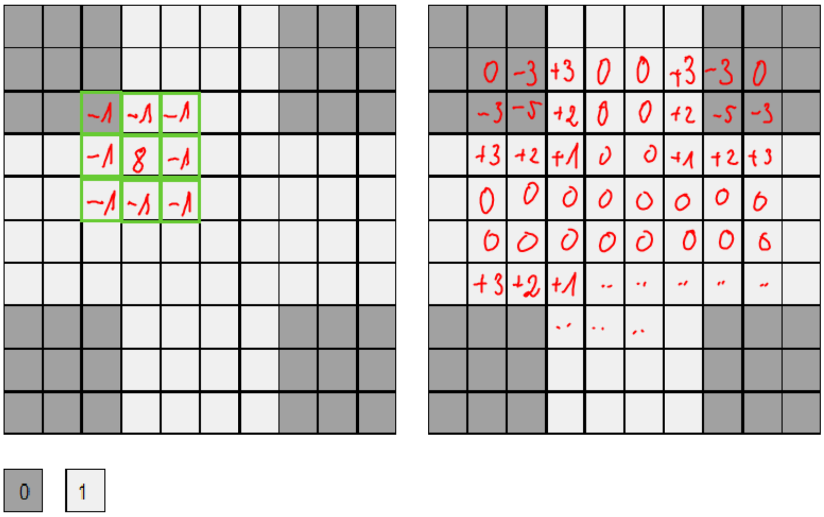
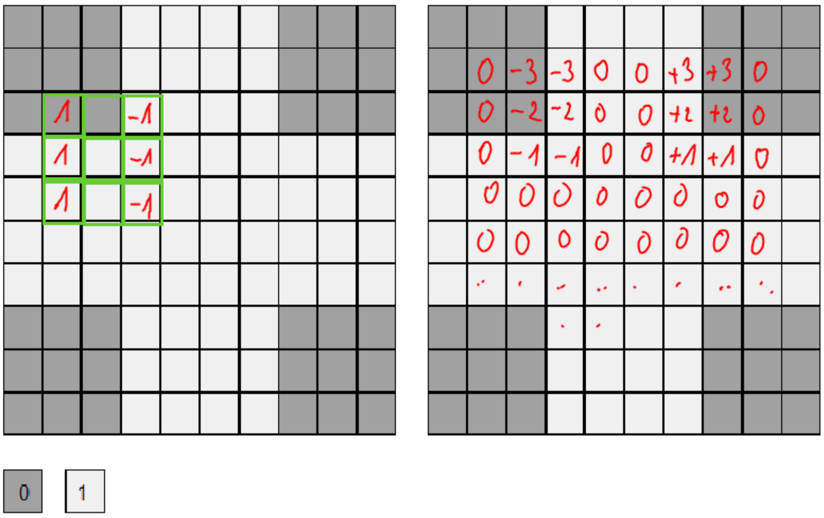
ÜBUNG: Faltung mit einem 3x3-Faltungskern





Vektorprodukte

a) Skalarprodukt

$$\begin{pmatrix} 1, & 2, & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} = 1 \cdot 3 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 2$$

$$= 3 + 8 + 6 = \underline{\underline{17}}$$

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1, & 2, & 3 \end{pmatrix} & \boxed{} \end{array}$$

b) dyadisches Produkt

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3, & 4, & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 6 & 8 & 4 \\ 9 & 12 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} & \begin{matrix} 3 & 4 & 2 \\ 6 & 8 & 4 \\ 9 & 12 & 6 \end{matrix} \end{array}$$

ÜBUNG: Separierbarkeit

Welche Faltungskerne sind separierbar?
Wie sehen die 1-dim. Kerne der separierbaren Faltungskerne aus?

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} +1 & +2 & +1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

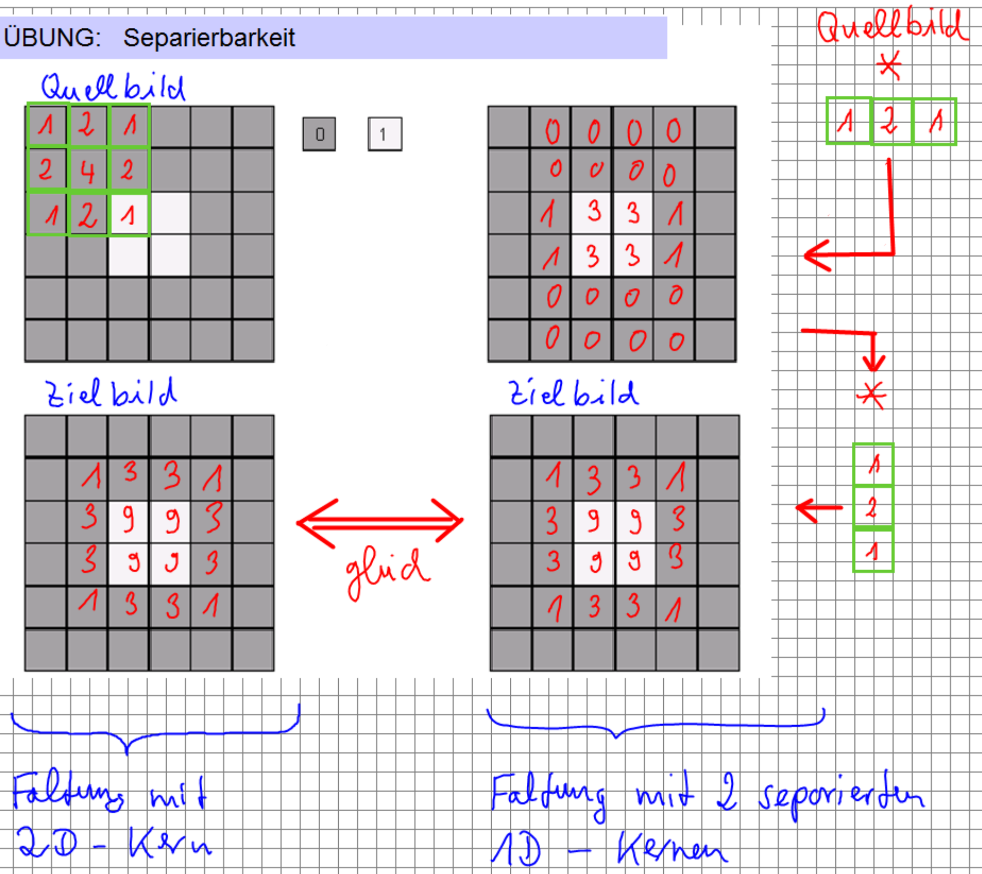
$$\underline{B} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & 8 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ nicht separierbar

$$\underline{C} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -2 & -6 & -2 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

ÜBUNG: Separierbarkeit



2)

Anm.: Bild habe die Größe 1000x1000, die Faltungsmaske sei 5x5

a) 2D – Faltungskern

$\approx 1000 \cdot 1000 \cdot 5 \cdot 5$ Multipl. $= 25 \cdot 10^6$ Multipl

$+ 1000 \cdot 1000 \cdot (5 \cdot 5 - 1)$ Add. $= 24 \cdot 10^6$ Add

b) 2×1D – Faltung

$\approx 2 \cdot 1000 \cdot 1000 \cdot 5$ Multipl. $= 10 \cdot 10^6$ Multipl.

$+ 2 \cdot 1000 \cdot 1000 \cdot 4$ Add. $= 8 \cdot 10^8$ Add

ÜBUNG: Berechnung der Laplace-Funktion

Gegeben sei folgende Funktion (zweier Variabler):

$$f(x,y) = e^{-(x^4+y^4)}$$

Berechnen Sie den Wert der Laplace-Funktion $\nabla^2 f(x,y)$ an den Stellen:

a) x=0.0, y=0
b) x=1.0, y=0

$$f(x,y) = e^{-(x^4+y^4)}$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = -4x^3 \cdot e^{-(x^4+y^4)}$$ Kettenregel

$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2} = -12x^2 \cdot e^{-(x^4+y^4)} + 4x^3 \cdot 4x^3 \cdot e^{-(x^4+y^4)}$$ Produkt- und Kettenregel

$$= 16x^6 \cdot e^{-(x^4+y^4)} - 12x^2 \cdot e^{-(x^4+y^4)}$$

analog ist:

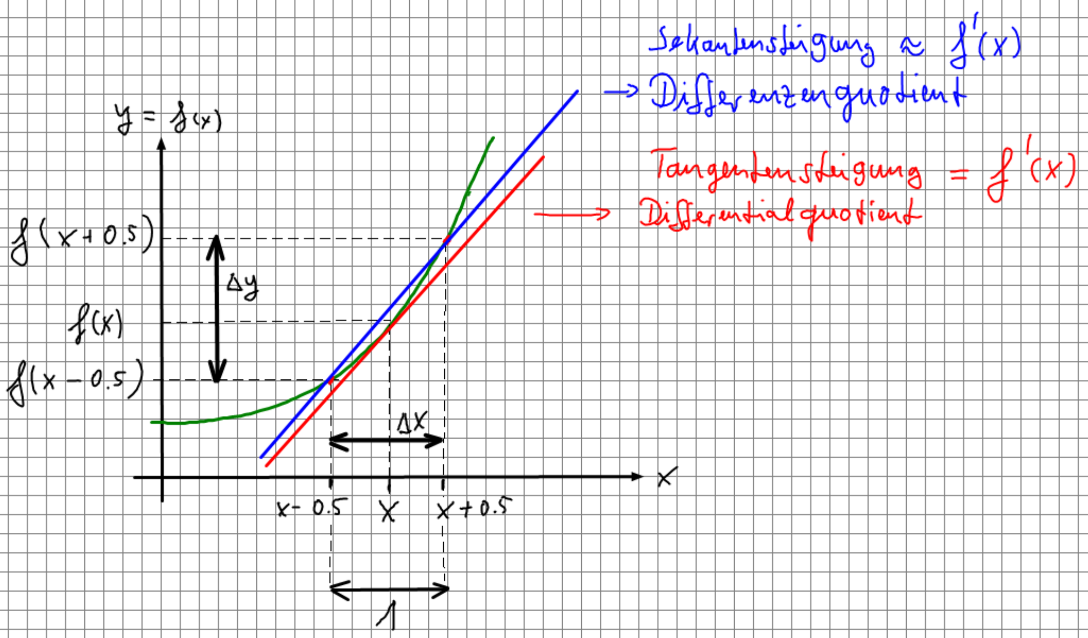
$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2} = 16y^6 \cdot e^{-(x^4+y^4)} - 12y^2 \cdot e^{-(x^4+y^4)}$$

$$\Rightarrow \boxed{\nabla^2 f(x,y) = \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2}}$$

für a) $\nabla^2 f(0,0) = 0$

b) $\nabla^2 f(1,0) = 16 \cdot e^{-1} - 12 \cdot e^{-1} = 4 \cdot e^{-1} = 1.47$

Nährung der 1. Ableitung für abgetastete Funktionen



$$\frac{df}{dx} \approx \frac{\Delta y}{\Delta x} \approx \frac{f(x+0.5)-f(x-0.5)}{\underbrace{(x+0.5)-(x-0.5)}_{=1}}$$

$$\frac{df}{dx} \approx f(x+0.5)-f(x-0.5) \qquad (1)$$

⟹ Nährung der 1. Ableitung für abgetastete Funktionen!

2. Ableitung für abgetastete Funktionen

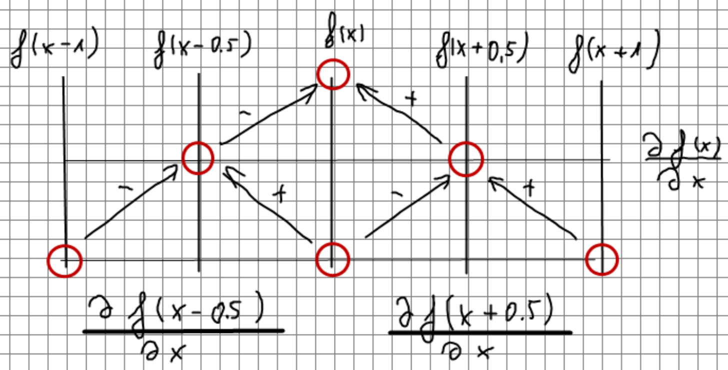
$$\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial f(x)}{\partial x}\right] \approx \quad \text{mit (1)}$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\left[f(x+0.5) - f(x-0.5)\right] \quad \text{mit (1)}$$

$$= \left(f(x+1) - f(x)\right) - \left(f(x) - f(x-1)\right)$$

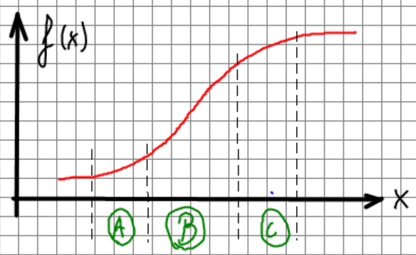
$$= \underline{\underline{f(x+1) - 2f(x) + f(x-1)}}$$

$\Rightarrow$ Näherung der 2. Ableitung für abgetastete Funktionen



Beispiele : 2. Ableitung für abgetastete Funktionen

Funktionsabschnitte mit unterschiedl. Vorzeichen in $f''(x)$:



f''_A : positiv

f''_B : ≈ 0

f''_C : negativ

zunehmende Steigg.

(A)

....	....	10	20	40	....
		x−1	x	x+1	

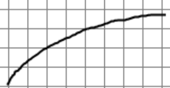
$$f''(x) \approx f(x+1) - 2f(x) + f(x-1)$$
$$= 40 - 2\cdot 20 + 10$$
$$\underline{\underline{f''(x) \approx 10}}$$ (zunehmende Steigg.)

Konstante Steigg.

(B)

....	....	10	20	30	....

$$f''(x) \approx 30 - 2\cdot 20 + 10$$
$$\underline{\underline{f''(x) \approx 0}}$$ (Konstante Steigg.)



abnehmende Steigg.

(C)

....	....	10	30	40	....

$$f''(x) \approx 40 - 2\cdot 30 + 10$$
$$\underline{\underline{f''(x) \approx -10}}$$ (abnehmende Steigg.)

ÜBUNG: Berechnung des Gradienten

Gegeben sei folgende Funktion (zweier Variabler):

$$f(x,y) = e^{-(x^8+y^8)}$$

Berechnen Sie den Gradienten $\nabla f(x,y)$ an den Stellen:

a) x=0.0, y=0.0
b) x=1.0, y=0.0
c) x=0.0, y=1.0
d) x=1.0, y=1.0

$$f(x,y) = e^{-(x^8+y^8)}$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = -8x^7 \cdot e^{-(x^8+y^8)}$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = -8y^7 \cdot e^{-(x^8+y^8)}$$

$$\nabla \vec{f}(x,y) = \begin{pmatrix} -8x^7 \cdot e^{-(x^8+y^8)} \\ -8y^7 \cdot e^{-(x^8+y^8)} \end{pmatrix} \begin{array}{l} x\text{-Komponente} \\ y\text{-Komponente} \end{array}$$

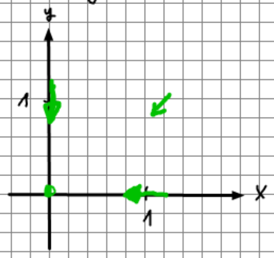
$\Rightarrow$ ein Vektor der von x- und y abhängig ist $\Rightarrow$ Vektorfeld

a) $\nabla f(0,0) = (0,0)^T$

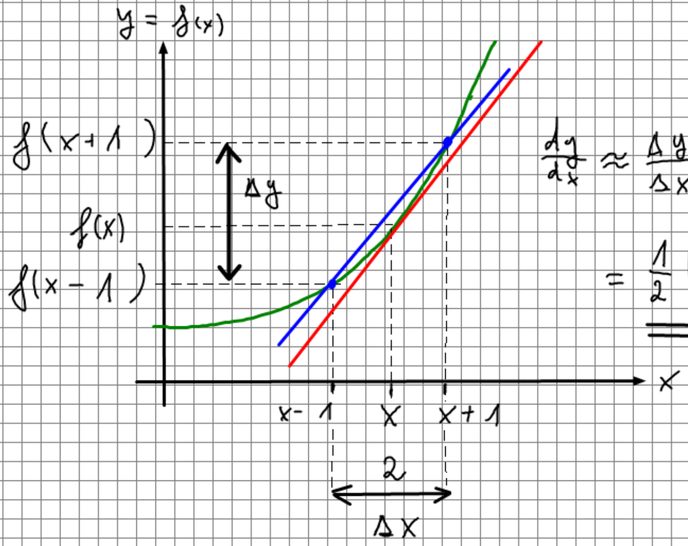
b) $\nabla f(1,0) = (-8\cdot e^{-1}, 0)^T$

c) $\nabla f(0,1) = (0, -8\cdot e^{-1})^T$

d) $\nabla f(1,1) = (-8\cdot e^{-2}, -8\cdot e^{-2})^T$



Diskrete Näherung für die 1. Ableitung



$$\frac{dy}{dx} \approx \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+1) - f(x-1)}{(x+1) - (x-1)}$$

$$= \frac{1}{2}\Big(f(x+1) - f(x-1) \Big)$$

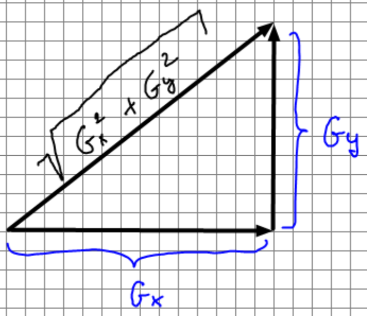
$$G_x : \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & +1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{2} \qquad G_y : \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & +1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{2}$$

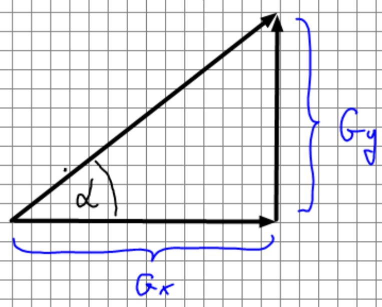
Wegen der besseren Rauschunterdrückung wird über 3 Werte gemittelt

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & +1 \\ -2 & 0 & +2 \\ -1 & 0 & +1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ +1 & +2 & +1 \end{bmatrix}$$

$\Longrightarrow$ Wertebereich beachten

Betrag und Richtung des Gradienten





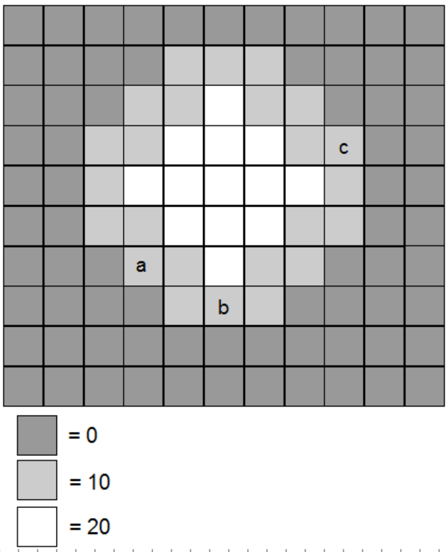
$\Rightarrow$ Betrag des Gradienten

$$\tan \alpha = \frac{G_y}{G_x}$$

$$\alpha = \arctan \frac{G_y}{G_x}$$

$\Rightarrow$ Richtung des Gradienten

ÜBUNG: Sobel-Operator



-1	0	+1
-2	0	+2
-1	0	+1

*1/4

+1	+2	+1
0	0	0
-1	-2	-1

*1/4

Geben Sie den Gradienten und die Gradientenrichtung für die Punkte a, b und c an.

Was passiert im homogenen Bereich?

a)

$$G = \sqrt{10^2 + 10^2} = 14.1$$

$$\alpha = \arctan \frac{10}{10} = 45°$$

-1 / 10	0 / 10	+1 / 20
-2 / 0	0 / 10	+2 / 10
-1 / 0	0 / 0	+1 / 10

$$\begin{array}{r} -10 \\ +20 \\ +20 \\ +10 \\ \hline G_x = 40 \end{array} \cdot \frac{1}{4} = \underline{\underline{10}}$$

1 / 10	2 / 10	1 / 20
0 / 0	0 / 10	0 / 10
-1 / 0	-2 / 0	-1 / 10

$$\begin{array}{r} 10 \\ 20 \\ 20 \\ -10 \\ \hline G_y = 40 \end{array} \cdot \frac{1}{4} = \underline{\underline{10}}$$

b)

$$G = \sqrt{0^2 + 15^2} = 15$$

$$\alpha = \arctan \frac{15}{0}$$

10 (−1)	20 (0)	10 (1)
10 (−2)	10 (0)	10 (2)
0 (−1)	0 (0)	0 (1)

−10
+10
−20
+20

$G_x = 0$

10 (1)	20 (2)	10 (1)
10 (0)	10 (0)	10 (0)
0 (−1)	0 (−2)	0 (−1)

10
40
10

$G_y = 60 \cdot \frac{1}{4} = 15$

c)

$$G = \sqrt{12.5^2 + 7.5^2} = 14.6$$

$$\alpha = \arctan\left(\frac{-7.5}{-12.5}\right) = 30^\circ$$

↓

Taschenrechner

$\Rightarrow$ 3. Quadrant

$$\alpha = 30^\circ + 180^\circ = \underline{\underline{210^\circ}}$$

10 (−1)	0 (0)	0 (1)
10 (−2)	10 (0)	0 (2)
20 (−1)	10 (0)	0 (1)

−10
−20
−20

$G_x = -50 \cdot \frac{1}{4} = -12.5$

10 (1)	0 (2)	0 (1)
10 (0)	10 (0)	0 (0)
20 (−1)	10 (−2)	0 (−1)

10
−20
−20

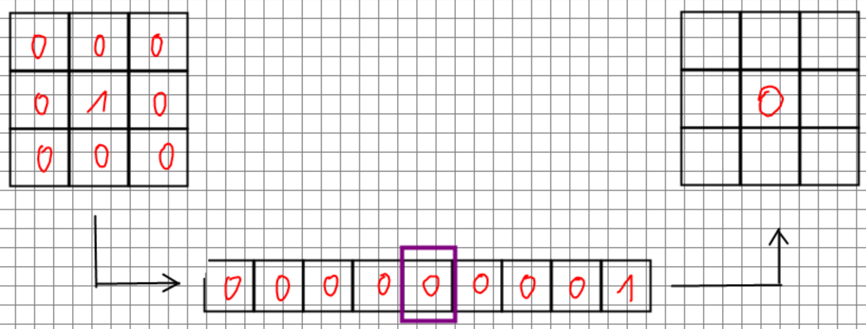
$G_y = -30 \cdot \frac{1}{4} = -7.5$

ÜBUNG: Wirkung des Medianfilters auf verschiedene Bildstrukturen

Diskutieren Sie die Wirkung des Median-Filters auf

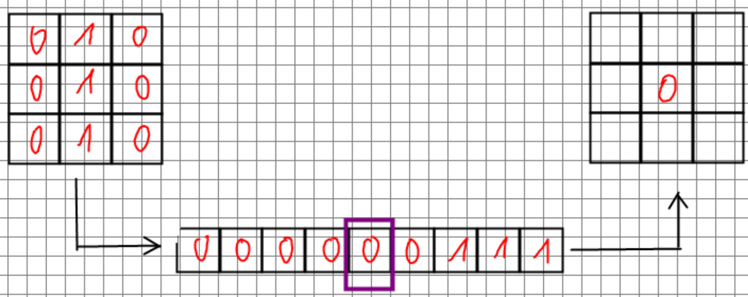
a) Einzelpunkte,
b) dünne Linien,
c) Ecken,
d) Kanten.

a) Einzelpunkte



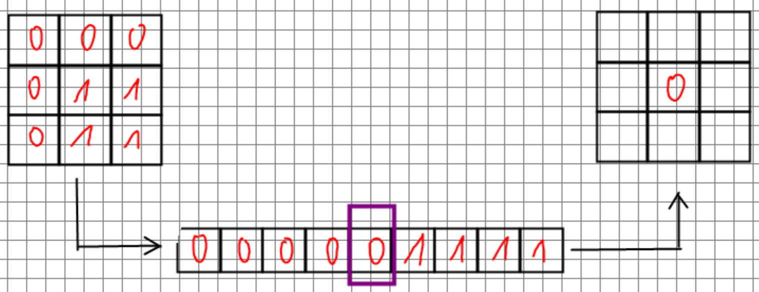
$\Rightarrow$ Einzelpunkte werden entfernt

b) dünne Linien



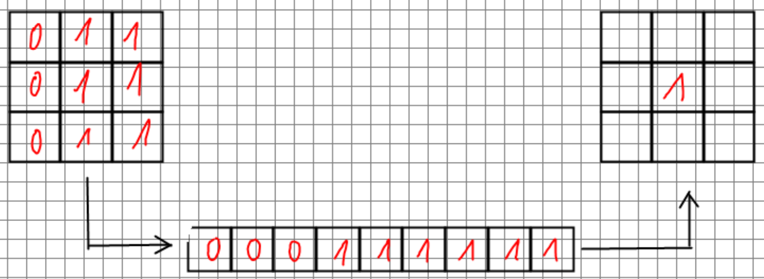
$\Rightarrow$ Dünne Linien werden entfernt

c) Ecken



⇒ Ecken werden "verrundet"

d) Kanten



⇒ Kanten bleiben erhalten

Berechnung des Median mit der Histogramm-Methode

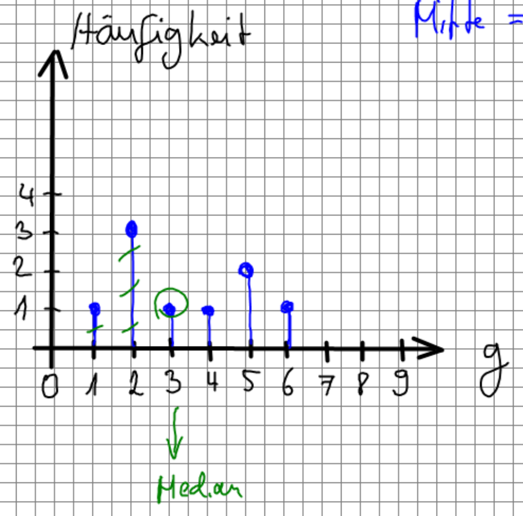
$n = m = 3$

5	6	2
2	1	3
5	4	2

1	2	2	2	$\boxed{3}$	4	5	5	6

Lokales Histogramm (Masken-Histogramm)

$$\text{Mitte} = \text{int}\left(\frac{n \cdot m}{2}\right) + 1$$



Einsortieren ist "billiger" als "sortieren".