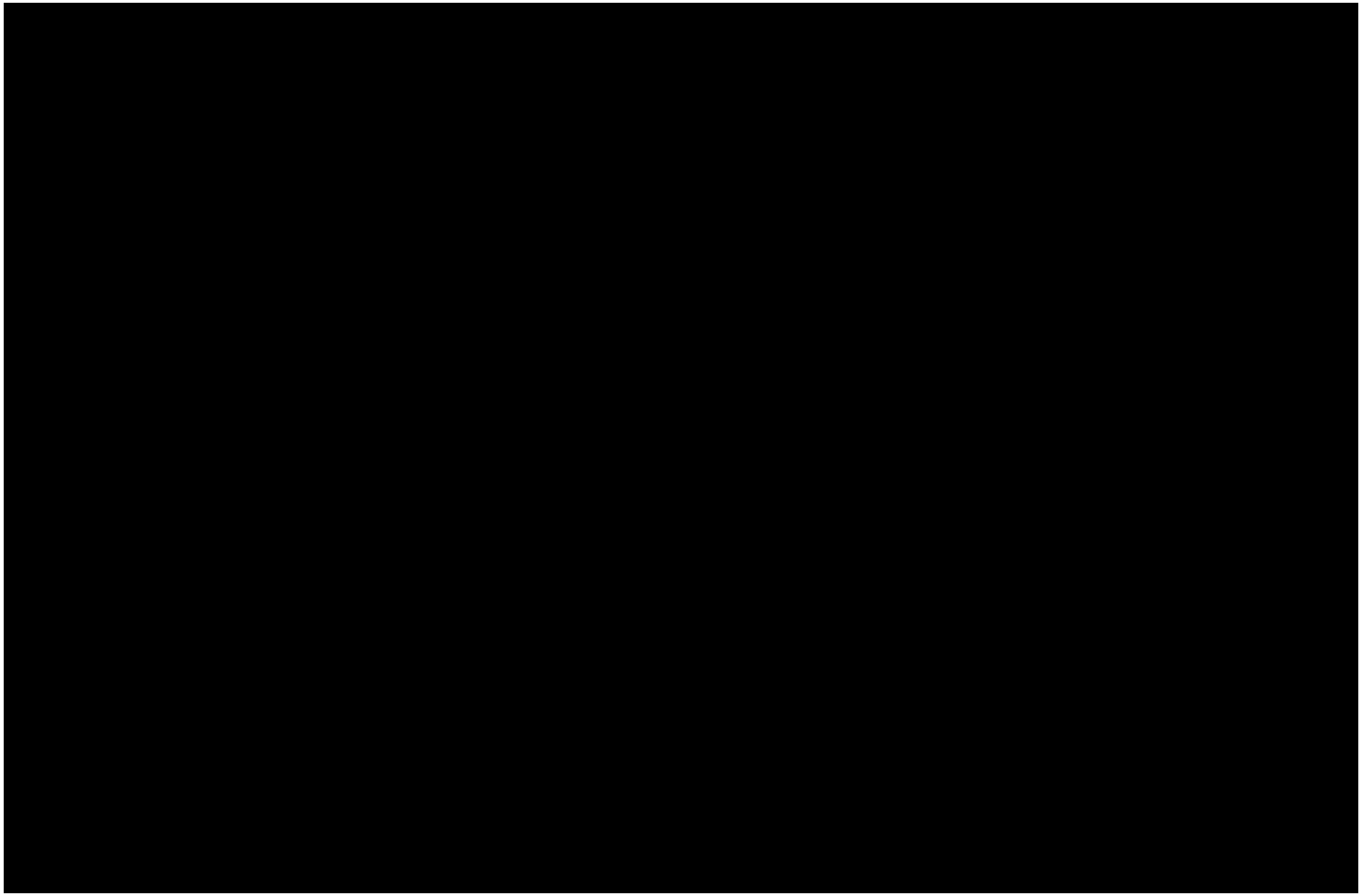
5

Physical Modelling

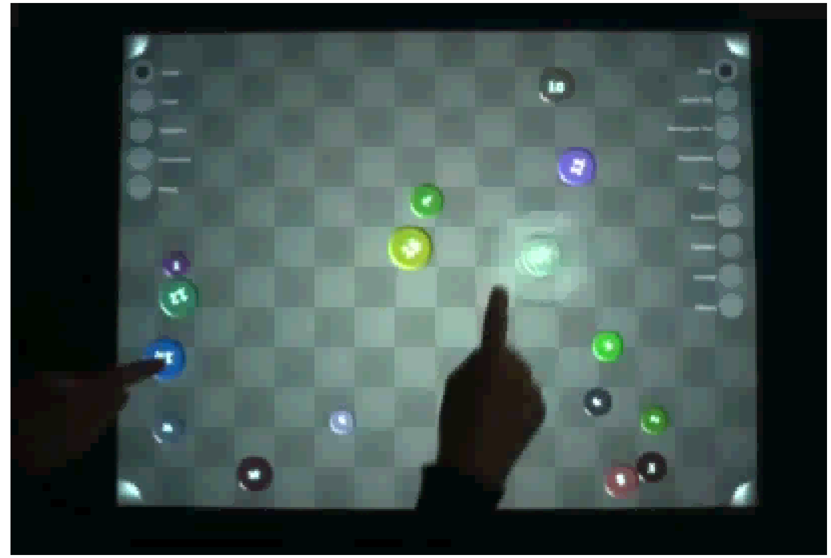
5.1.1 Ziel

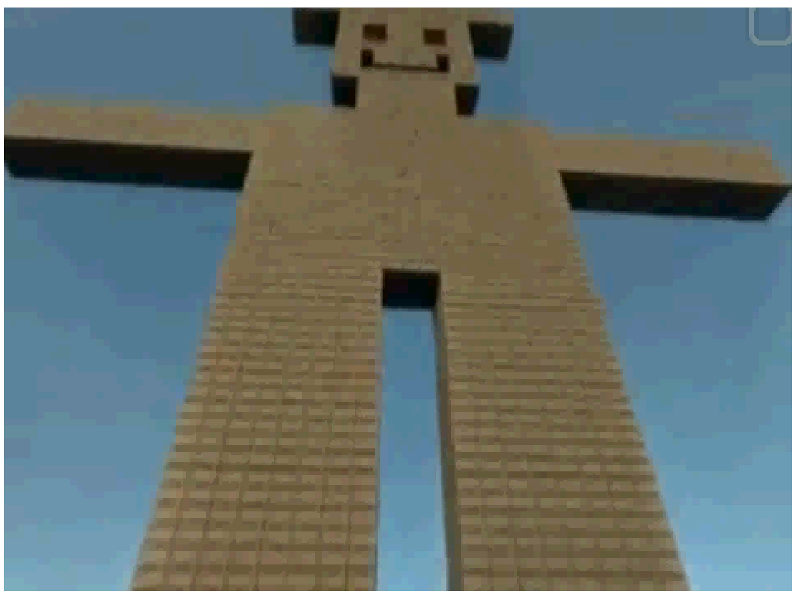
→ Die Dynamik der mechanischen Welt modellieren ……

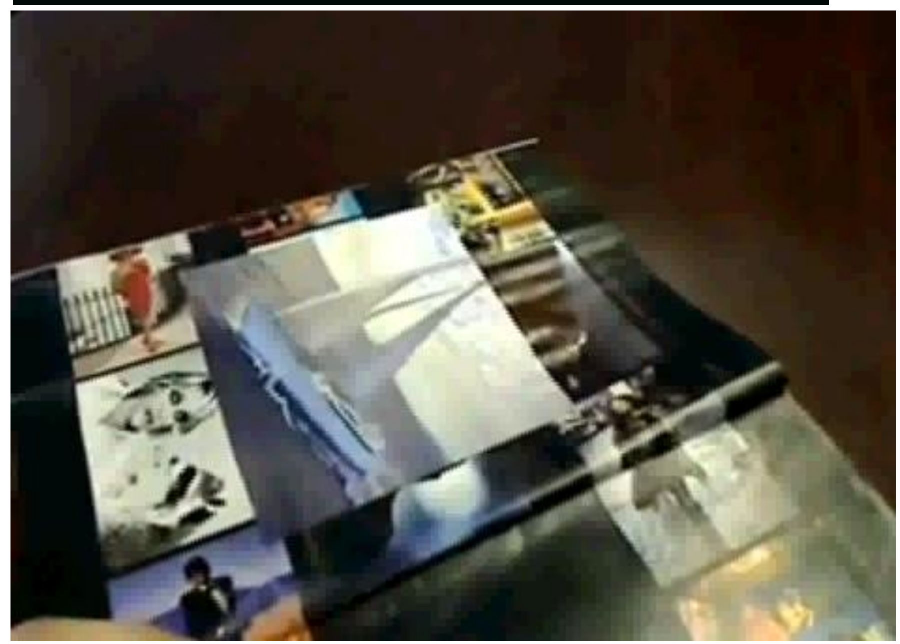


5.1.2 *Anwendungsbeispiele*

- game physics
- augmented/mixed reality
- Touchscreen-Dynamik
- Simulatoren (Kfz, Schiffe, Fluggeräte)
- ……..







5.1.3 Vorgehensweise

a) Physikalische Grundlagen

- Beschreibung von Bewegungen (*Kinematik*)
  - → geradlinige Bewegung: Ort, Geschwindigkeit, Beschleunigung
  - → rotatorische Bewegung: Winkel, Winkelgeschw. Winkelbeschl.
- Bewegung von Massepunkten und starrer Körper unter Krafteinfluss (*Kinetik*)
  - → Newtonsche Axiome
  - → Gravitation, Federkräfte, Reibung, Strömungswiderstand, Dämpfung
- Impuls und Stoß

b) Anwendung der physikalische Grundlagen am Beispiel von Partikelsystemen

Die Welt beschreiben durch Punktmassen und Kräfte.

5.1.4 Werkzeuge

→ Matlab – Simulink – Stateflow

jetzt: Wiederholung Vektoren

jetzt: Einführung in Matlab Kap. 6.1.1 ………. 6.3.5

5

Physical Modelling

5.2.1 Einheiten

5.2.1.1 Basiseinheiten

Alle physik. Größen können auf nur 7 Basiseinheiten zurückgeführt werden.

SI-Einheiten :(= Système International d'Unités)

Physikalische Größe	Formel-zeichen	Basiseinheit	Einheiten-kürzel
Länge	**l**	**Meter**	**m**
Masse	**m**	**Kilogramm**	**kg**
Zeit	**t**	**Sekunde**	**s**
el. Stromstärke	I	Ampere	A
Temperatur	T	Kelvin	K
Lichtstärke	I	Candela	cd
Stoffmenge	v	Mol	mol

5.2.1.2 Abgeleitete Einheiten

Beispiele:

	phys. Größe		Einheit	in Basiseinheiten
	Fläche	A	Quadratmeter	m^2
	Geschwindigkeit	v	Meter pro Sekunde	$\frac{m}{s}$
	Beschleunigung	a	Meter pro Sekunde²	$\frac{m}{s^2}$
1	Kraft	F	Newton	$1N = 1\,\frac{kg \cdot m}{s^2}$
2	Arbeit	W	Joule	$1J = 1\,\frac{kg \cdot m^2}{s^2}$
3	Leistung	P	Watt	$1W = 1\,\frac{kg \cdot m^2}{s^3}$

1 $$\boxed{F = m \cdot a}$$

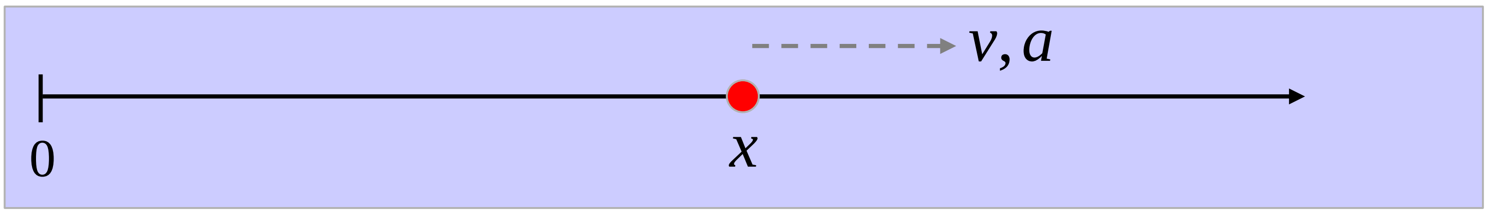
2 $$\boxed{W = F \cdot s = m \cdot a \cdot s}$$

3 $$\boxed{P = \frac{W}{t} = \frac{F \cdot s}{t} = \frac{m \cdot a \cdot s}{t}}$$

5.2.2 *Kinematik eines Punktes*

5.2.2.1 Geradlinige Bewegung in einer Raumrichtung

Ein Punkt bewegt sich entlang einer Linie. Er befindet sich am Ort x, hat die Geschwindigkeit v und die Beschleunigung a.



Definition der Geschwindigkeit v: $$v = \frac{dx}{dt}$$ oder kurz $$\boxed{v = \dot{x}}$$

Definition der Beschleunigung a: $$a = \frac{dv}{dt}$$ oder kurz $$\boxed{a = \dot{v}}$$

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}\left[\frac{dx}{dt}\right] = \frac{d^2x}{dt^2}$$ oder kurz $$\boxed{a = \ddot{x}}$$

Beispiel: Simulation mit Matlab-Simulink 1

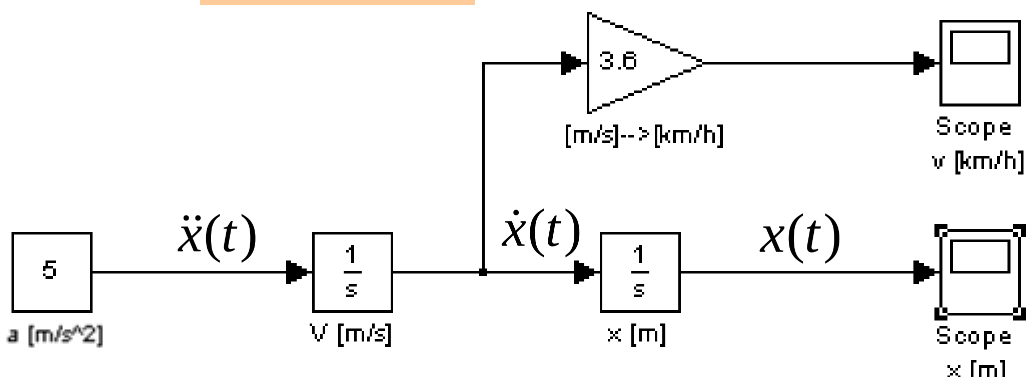
Ein Fahrzeug hat zunächst eine Geschwindigkeit von 50 km/h.
Zum Zeitpunkt t=0 beschleunigt es konstant mit a=5m/s².

v(t) und s(t) sollen simuliert werden. v(t) soll in km/h angezeigt werden.

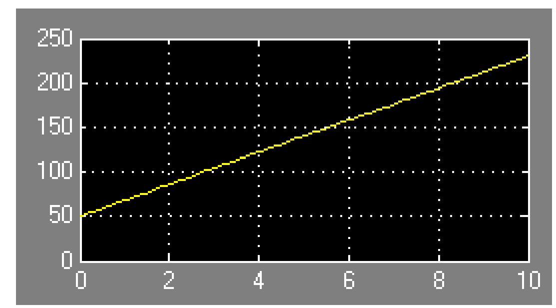
Anfangs-
wert v_0: $$v(0) = \dot{x}(0) = 50 \frac{km}{h} = 50 \frac{1000m}{3600s} = \frac{50}{3.6} \frac{m}{s}$$

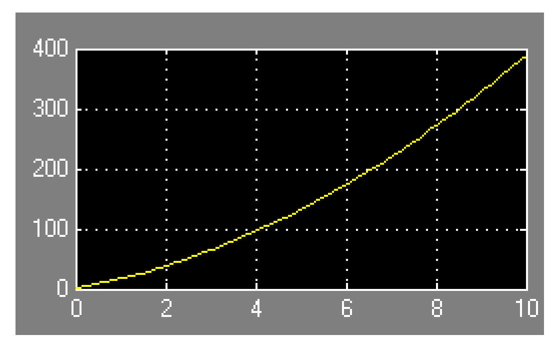
s. Fahrzeugbeschleunigung.mdl

DGL: $$a = \ddot{x} = 5 \frac{m}{s^2}$$



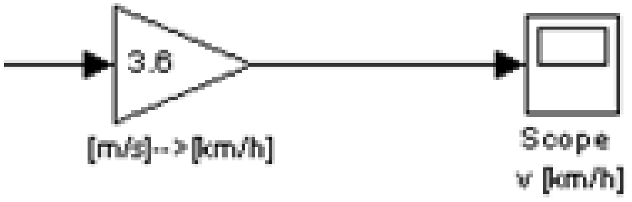
$$\dot{x}(0) = \frac{50}{3.6} \qquad x(0) = 0$$



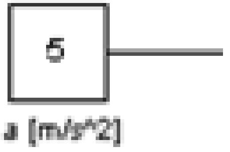


Anmerkungen zu den Simulink-Notations-Konventionen

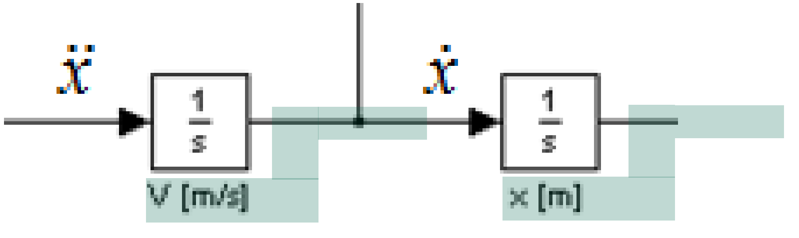
- Simulationen möglichst in SI-Einheiten durchführen
- Eingaben (z.B. Parameter) und Ausgaben (z.B. Scope) ggf. in Wunscheinheiten umformen.



- Unter die Blöcke die physikalische Größe und die Einheit schreiben.



- Die phys. Größe der Integratoren nach der Ausgabe festlegen.

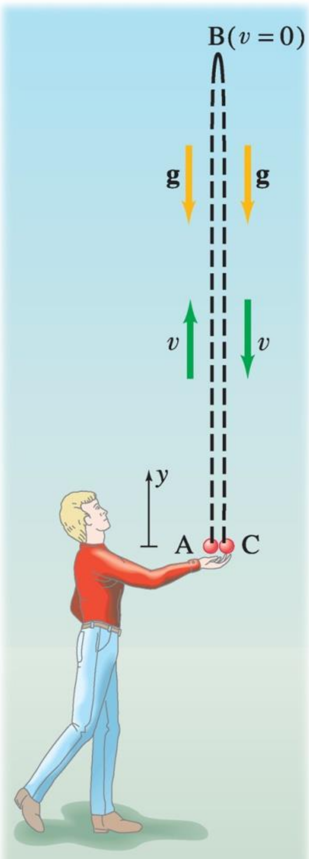


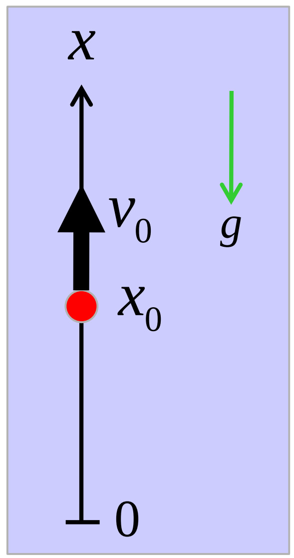
Beispiel: Simulation mit Matlab-Simulink 2

Ein Ball wird zum Zeitpunkt t=0 mit der Geschwindigkeit von v_0=5m/s senkrecht nach oben geworfen. Die Abwurfhöhe beträgt x_0=1.2m.

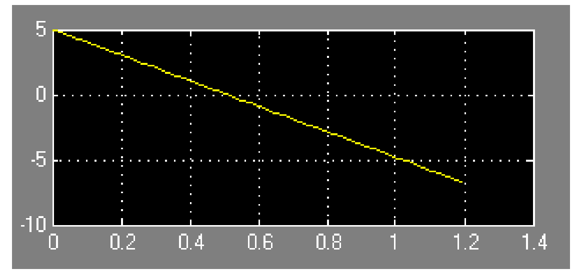
v(t) und s(t) sollen simuliert werden.

s. Physik, Giancoli, Pearson Studium

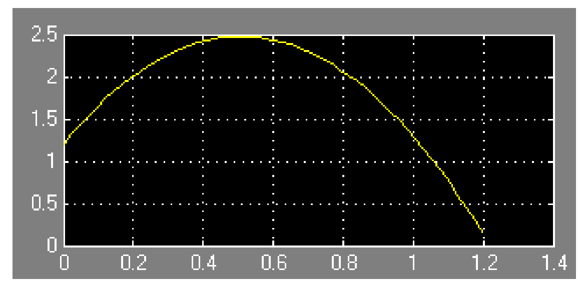




$$\ddot{x} = -g = -9.81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$$

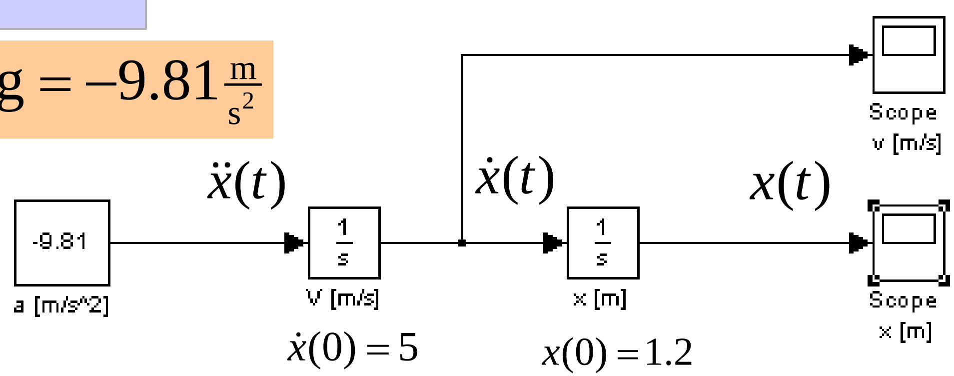


$\dot{x}(t)$



$x(t)$

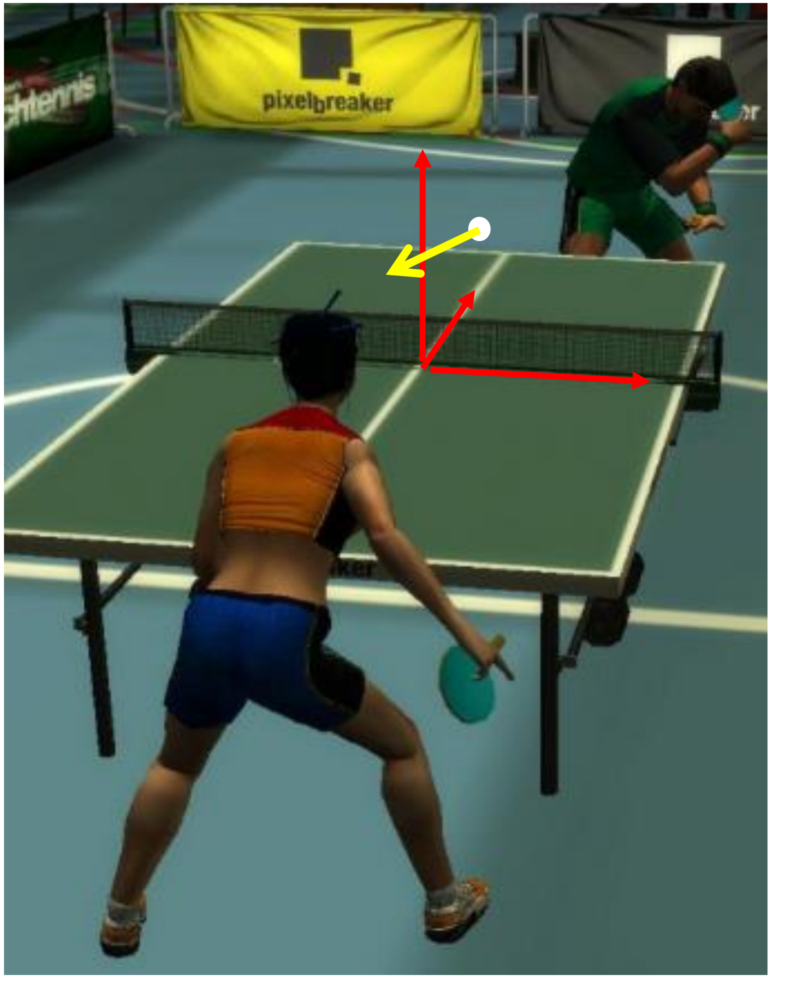
s. Steinwurf.mdl



5.2.2.2 Zusammengesetzte Bewegung in der Ebene bzw. im Raum

Bewegungen in der Ebene bzw. im Raum werden vektoriell beschrieben.
Der Ort wird dann als Koordinate angegeben:

$$\boxed{\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (x, y, z)^T}$$



Für Geschwindigkeits- und Beschleunigungsvektor gilt dann:

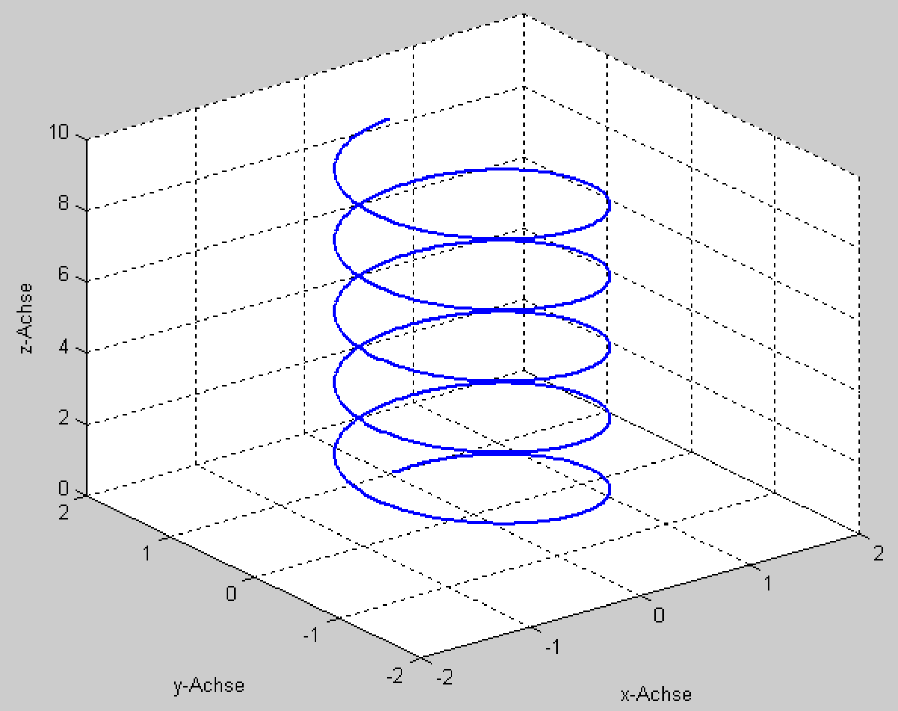
$$\boxed{\vec{v} = \dot{\vec{x}}} \quad \text{mit} \quad \vec{v} = (v_x, v_y, v_z)^T$$

$$\boxed{\vec{a} = \dot{\vec{v}} = \ddot{\vec{x}}} \quad \text{mit} \quad \vec{a} = (a_x, a_y, a_z)^T$$

Beispiel: Achterbahn-Simulation

Beispiel: Zusammengesetzte Bewegung im Raum

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin(\pi t) \\ \cos(\pi t) \\ t \end{pmatrix}$$



$$\vec{v} = \dot{\vec{x}} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} +\pi \cdot \cos(\pi t) \\ -\pi \cdot \sin(\pi t) \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{a} = \ddot{\vec{x}} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\pi^2 \cdot \sin(\pi t) \\ -\pi^2 \cdot \cos(\pi t) \\ 0 \end{pmatrix}$$

<u>Anfangswerte:</u>

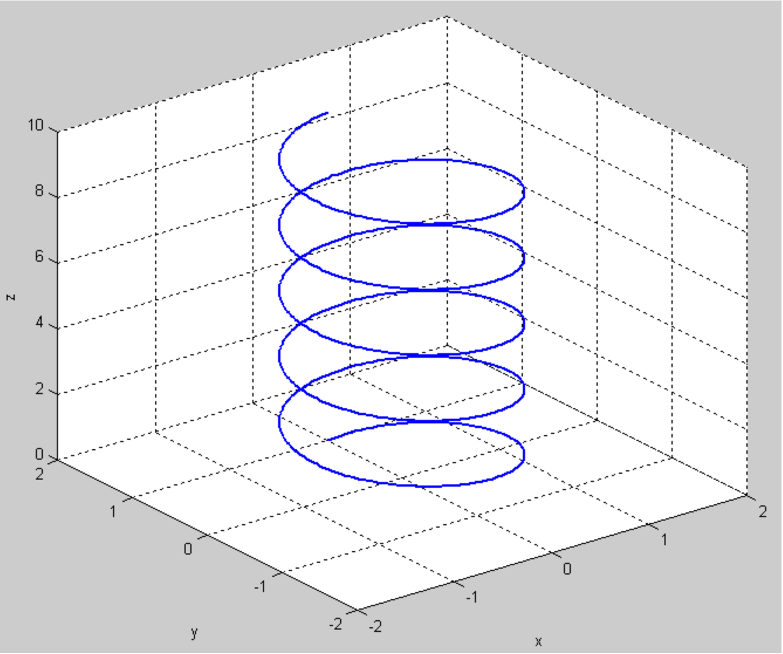
$$\vec{x}_0 = (0,\ 1,\ 0)^T$$

$$\vec{v}_0 = (\pi,\ 0,\ 1)^T$$

Übung: Zusammengesetzte Bewegung im Raum

Zu modellieren ist ein Simulink-Modell, welches die folgende Bewegung (Orts-, Geschwindigkeits- und Beschleunigungsvektor) im Raum erzeugt:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin(\pi t) \\ \cos(\pi t) \\ t \end{pmatrix}$$

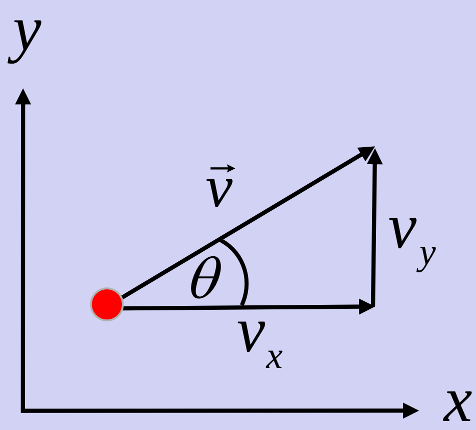


Wie müssen die Anfangswerte gesetzt werden?

5.2.2.3 Zerlegung einer Bewegung (v, θ) in Richtungskomponenten

Ebene (bzw räumliche) Bewegungen können zerlegt werden in 2 (bzw. 3) unabhängige Bewegungskomponenten in die jeweiligen Koordinatenrichtungen.

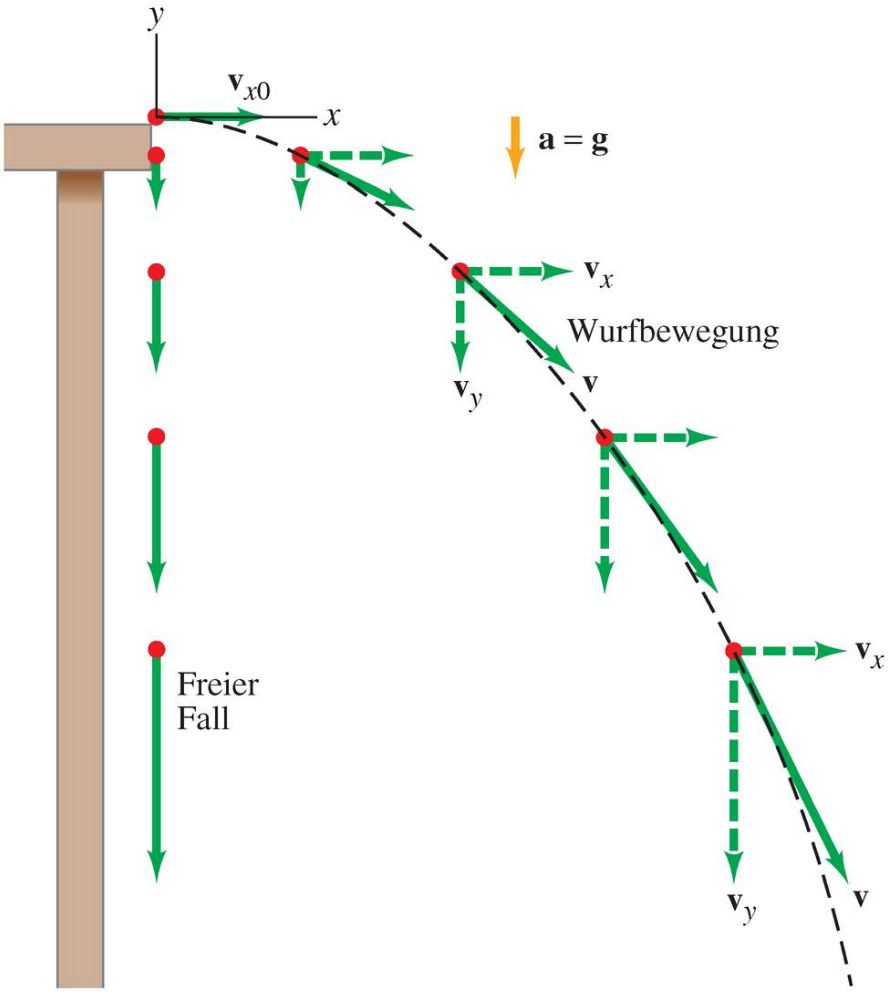
Beispiel: Zerlegung einer ebenen Bewegung $\vec{v}$ in zwei Komponenten (d.h. Polarkoordinaten → kartesische Koordinaten)

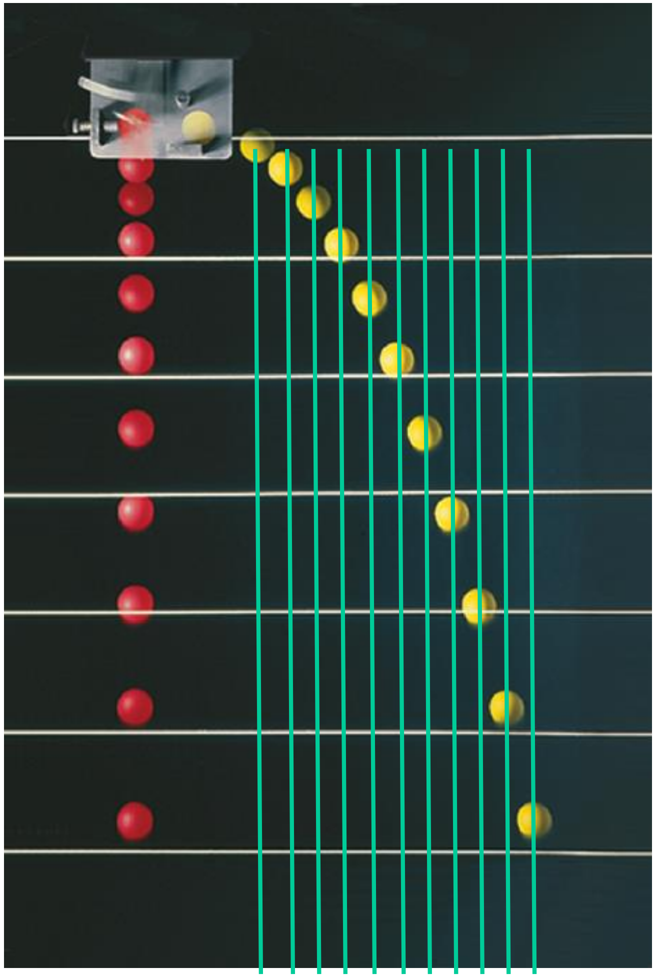


$$\cos(\theta) = \frac{v_x}{v} \quad \Rightarrow \quad \boxed{v_x = v \cdot \cos(\theta)}$$

$$\sin(\theta) = \frac{v_y}{v} \quad \Rightarrow \quad \boxed{v_y = v \cdot \sin(\theta)}$$

Beispiel: Wurfbewegung



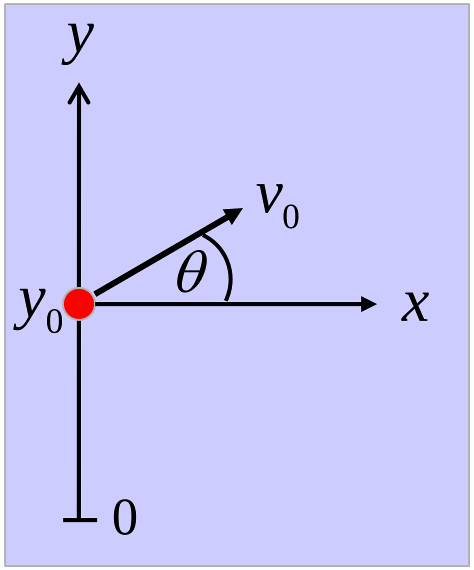


s. Physik, Giancoli, Pearson Studium

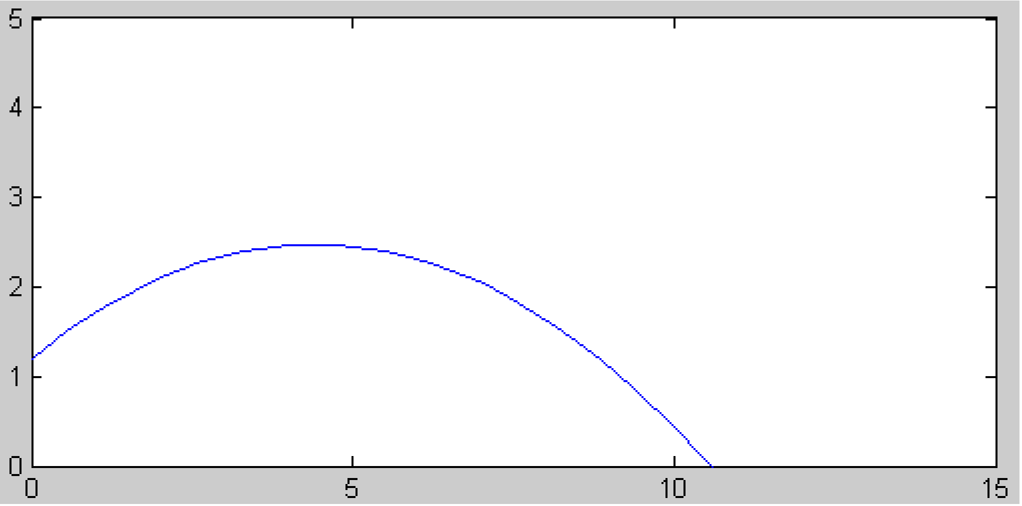
Übung: Wurfparabel – Überlagerung von Bewegungen

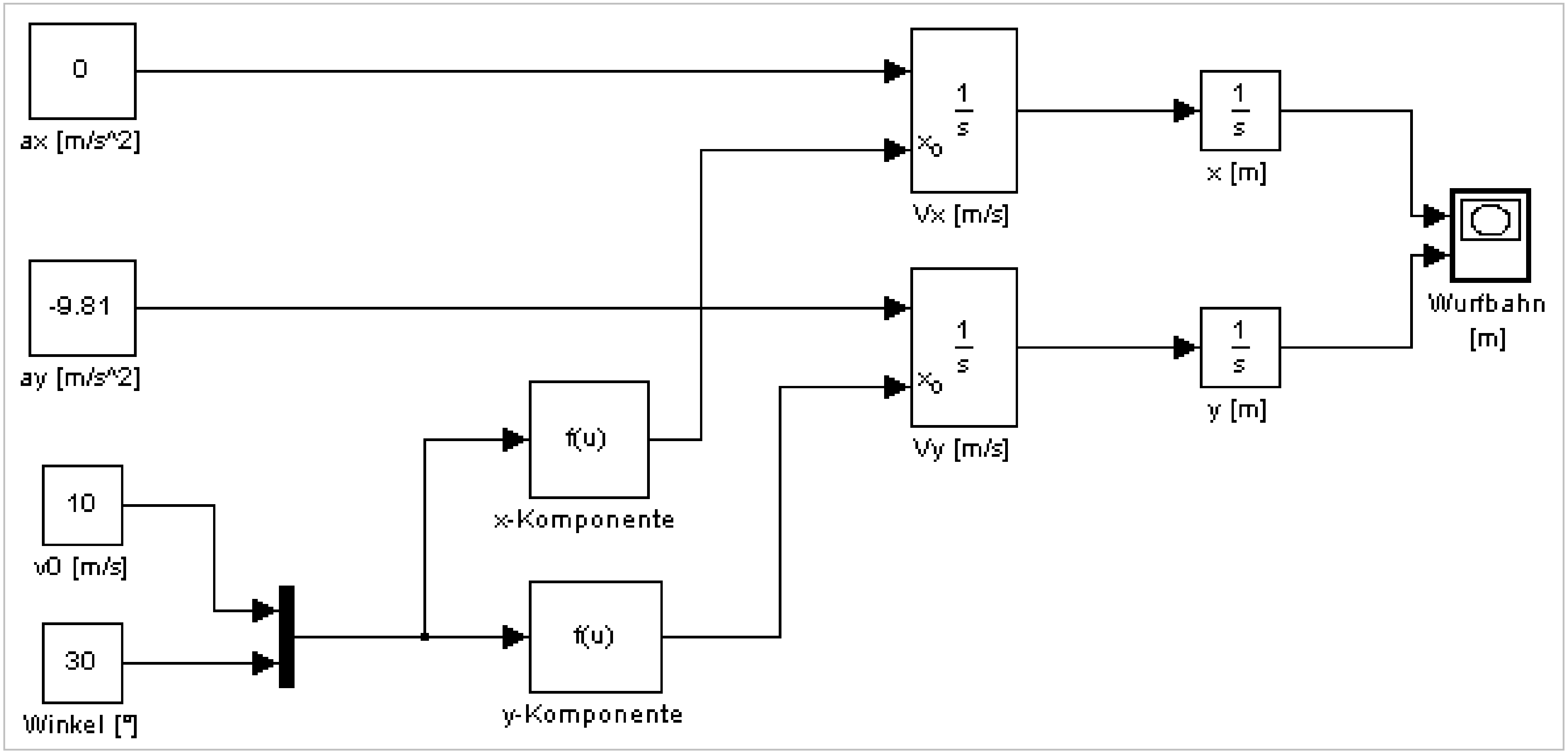
Ein Ball wird zum Zeitpunkt t=0 mit der Geschwindigkeit von v_0=10m/s unter dem Winkel θ=30° geworfen. Die Abwurfhöhe beträgt y_0=1.2m. Die Wurfparabel $y(x)$ soll simuliert werden.

Modellieren Sie die Simulation mit Matlab/Simulink.

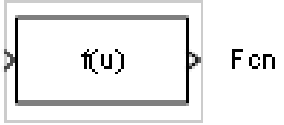


s. Steinwurf2.mdl





Funktionsblock für math. Funktionen
mit mehreren Variablen:

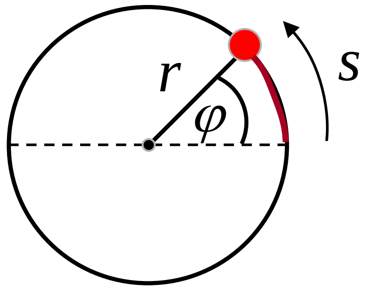


5.2.2.4 Kinematik der Kreisbewegung

Ein wichtiger Spezialfall ist die Kreisbewegung, z.B. bei

- Drehbewegungen
- Rollbewegungen

Der Ort eines Punktes auf der Kreisbahn (Radius r) kann zweckmäßig durch den Winkel φ beschrieben werden:



Besonders günstig ist die Beschreibung des Winkels φ im Bogenmaß.

Im Bogenmaß ist der Winkel φ definiert als das Verhältnis zwischen Bogenlänge s und dem Radius r:

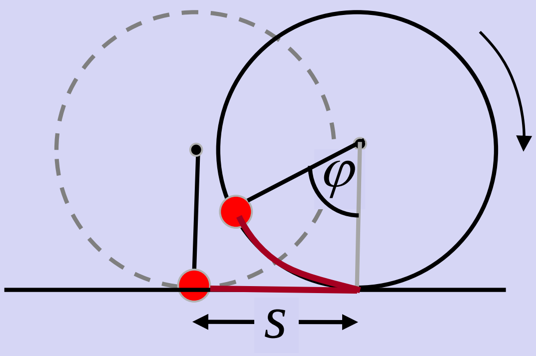
$$\boxed{\varphi = \frac{s}{r}} \qquad (1)$$

Zusammenhang zwischen dem Winkel im Gradmaß und dem Winkel im Bogenmaß:

$$\boxed{\frac{\varphi^\circ}{\widehat{\varphi}} = \frac{180^\circ}{\pi}}$$

Beispiele: $360^0 \mathrel{\hat=} 2\pi$ $180^0 \mathrel{\hat=} \pi$ $90^0 \mathrel{\hat=} \frac{\pi}{2}$ $45^0 \mathrel{\hat=} \frac{\pi}{4}$ $30^0 \mathrel{\hat=} \frac{\pi}{6}$

Beispiel: Ein Rad mit r = 0.5m fährt 1m weit. Um welchen Winkel (in °) hat sich das Rad gedreht?



Das Rad ist also 2 Radien weit gefahren.

$$\widehat{\varphi} = \frac{s}{r} = \frac{1m}{0.5m} = 2$$

$$\varphi^\circ = \widehat{\varphi} \cdot \frac{180}{\pi} = 115^\circ$$

Zur Beschreibung des Bewegungszustandes führt man ein:

Winkelgeschwindigkeit : $$\boxed{\dot{\varphi} = \frac{d\varphi}{dt}} \quad (2)$$

häufig auch kurz $\dot{\varphi} = \omega$

Zur Beschreibung von Drehgeschwindigkeiten wird oft die Zahl der Umdrehungen pro Sekunde U verwendet. Da eine Umdrehung dem Winkel 2π entspricht, gilt daher:

$$\boxed{\dot{\varphi} = \omega = U \cdot 2\pi}$$

Umrechnung U <---> ω

Beispiel: Die Drehzahl eines Motors beträgt $U=100s^{-1}$. = 100 Umdrehungen/s, d.h.
Wie groß ist die Winkelgeschwindigkeit ω? 100 mal pro s d. Winkel 2π

$$\omega = \dot{\varphi} = U \cdot 2\pi = 100\,\tfrac{1}{s} \cdot 2\pi = 628\,\tfrac{1}{s}$$

(628 Radien pro Sekunde)

… und die Winkelbeschleunigung:

Winkelbeschleunigung : $\boxed{\ddot{\varphi} = \frac{d\dot{\varphi}}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2}}$ (3)

häufig auch kurz $\ddot{\varphi} = \alpha$

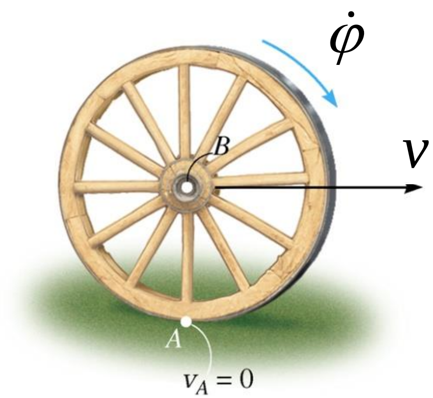
Beispiel: Die Drehzahl eines Motors steigert sich in einer 1/10 Sekunde mit konstanter Winkelbeschleunigung von 0 auf 100s^{-1} . Wie groß ist die Winkelbeschl. α?

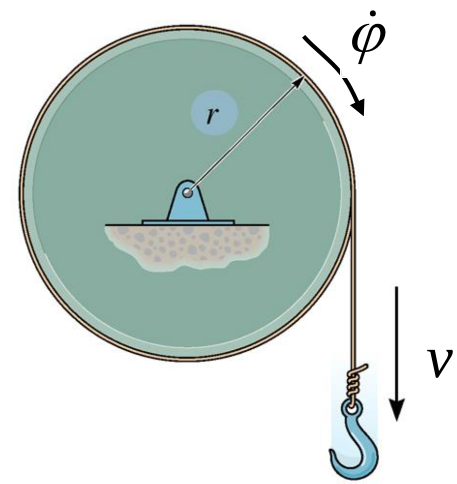
$$\alpha = \ddot{\varphi} = \frac{\Delta\dot{\varphi}}{\Delta t} = \frac{U \cdot 2\pi}{0.1s} = \frac{628\,\frac{1}{s}}{0.1s} = 6280\,\frac{1}{s^2}$$

Häufig muss ein Zusammenhang der Drehgrößen mit den tangentialen Größen auf der Kreisbahn hergestellt werden (Rollen, Schleudern, Abrollen).

Beispiele:

Linearbewegung <---> Drehbewegung





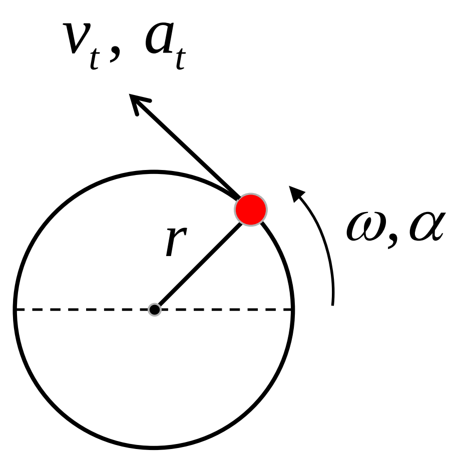
s. Technische Mechanik 3,
Hibbeler, Pearson Studium

Tangentialgeschwindigkeit
und Winkelgeschwindigkeit:

$$v_t = \frac{ds}{dt} = \frac{d\varphi \cdot r}{dt} = r\frac{d\varphi}{dt} = r\dot{\varphi}$$

mit (1) $\boxed{\varphi = \frac{s}{r}}$

$$\boxed{\omega = \dot{\varphi} = \frac{v_t}{r}} \quad (4)$$



Tangentialbeschleunigung
und Winkelbeschleunigung:

$$a_t = \frac{dv_t}{dt} = \frac{d\dot{\varphi} \cdot r}{dt} = r\frac{d\dot{\varphi}}{dt} = r\ddot{\varphi}$$

mit (4)

$$\boxed{\alpha = \ddot{\varphi} = \frac{a_t}{r}} \quad (5)$$

Übung: Drehgrößen und Tangentialgrößen

a) Ein Fahrzeug fährt mit v=120 km/h. Der Raddurchmesser beträgt d=60cm.
Wie groß ist die Winkelgeschwindigkeit ω der Räder?
Wie groß ist die Umdrehungsgeschwindigkeit U?

b) Ein zweites Fahrzeug mit gleichem Raddurchmesser beschleunigt konstant in 6s auf 100km/h. Wie groß ist die Winkelbeschleunigung α der Räder?

5.2.3 Kinetik des Massepunktes

5.2.3.1 Erstes Newton‘sches Axiom

Wirkt auf einen Körper **keine** Kraft ein, so bewegt er sich
- geradlinig und
- gleichförmig (mit konstanter Geschwindigkeit).

Die Geschwindigkeit 0 ist nur ein Sonderfall der gleichförmigen Bewegung.

Beispiel : Voyager im freien Raum.

5.2.3.2 Zweites Newton‘sches Axiom

Wirkt auf einen Körper **eine** Kraft ein, so ändert sich sein Bewegungszustand, er beschleunigt (oder beschleunigt negativ = bremsen).

Wie stark der Bewegungszustand geändert wird hängt
- von der Kraft F ab, die auf den Körper einwirkt und
- von einer Eigenschaft des Körpers, die als Masse m bezeichnet wird.

Die Masse ist ein Maß für die Trägheit eines Körpers.

s. Physik, Giancoli, Pearson Studium

Einheiten: $[F] = \frac{kg \cdot m}{s^2} = N$ Newton

$[m] = kg$

Es gilt das 2. Newtonsche Gesetz: $\boxed{\vec{F} = m \cdot \vec{a}}$

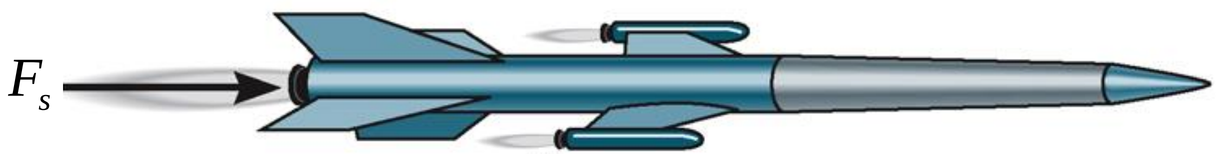
Übung: Rakete unter Schwerelosigkeit

Eine Rakete (20kg Leergewicht, 100kg Treibstoff) unter Schwerelosigkeit startet aus dem Ruhezustand. Pro Sekunde wird 1kg Treibstoff verbrannt. Dabei wird eine Schubkraft von F_S=1000N erzeugt.

Zeichnen Sie das Analogrechnerbild der Simulation (mit Anfangswerten).

Realisieren Sie die Simulation mit Simulink.

s. RaketeUnterSchwerelosigkeit.mdl



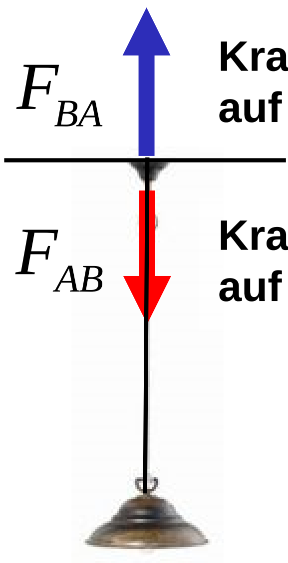
s. Physik, Giancoli, Pearson Studium

5.2.3.3 Drittes Newton‘sches Axiom - Wechselwirkungsgesetz

Übt ein Körper auf einen zweiten Körper eine Kraft aus,
so übt der zweite Körper auf den ersten Körper eine gleich große Kraft in entgegengesetzter Richtung aus (***Reaktionskraft***) .

Reaktionskraft

F_{BA} **Kraft von Decke auf Lampe**



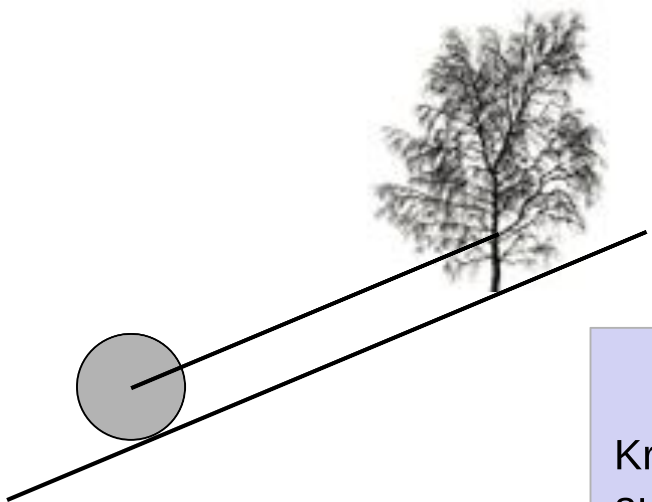
F_{AB} **Kraft von Lampe auf Decke**

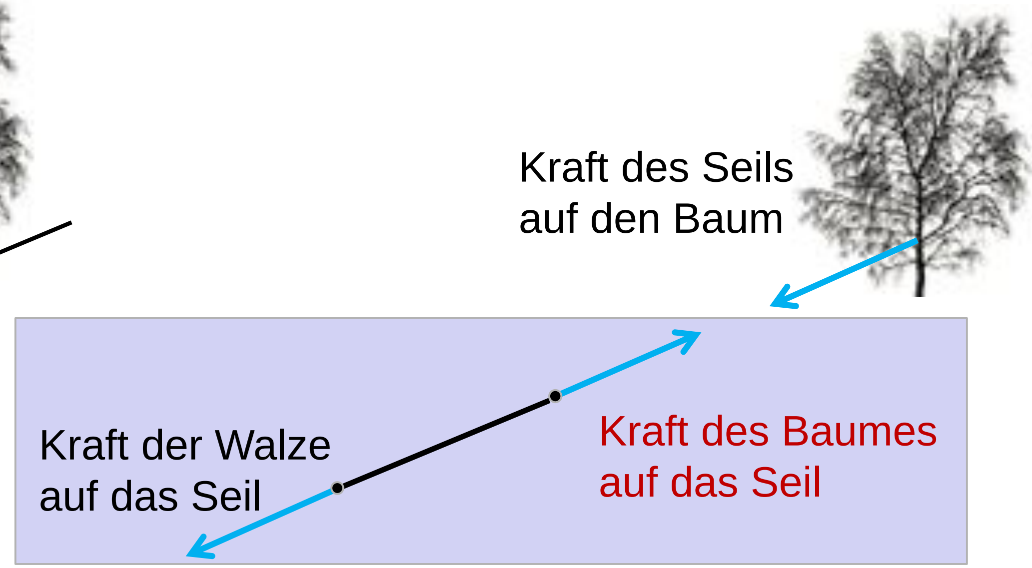
Kraft von Fahrzeug auf Wand

Kraft von Wand auf Fahrzeug

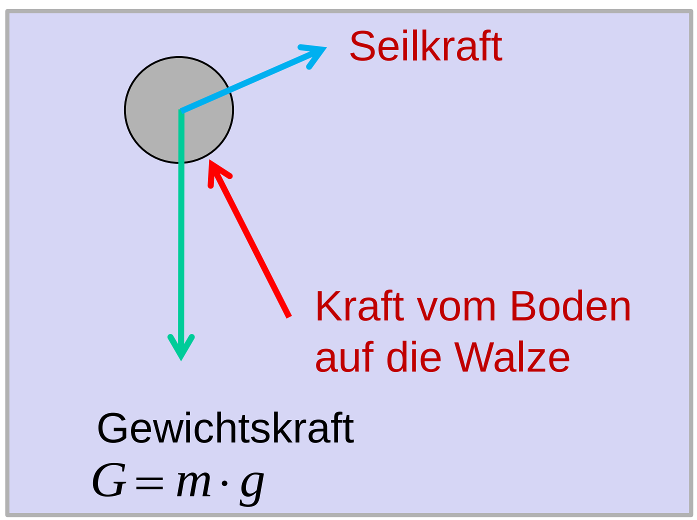
Reaktionskraft

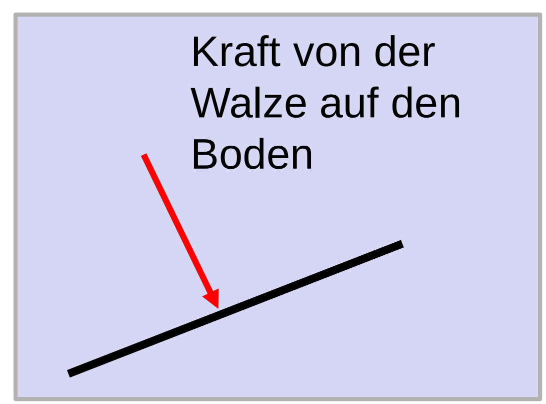
Beispiel: eine am Baum angekettete Walze





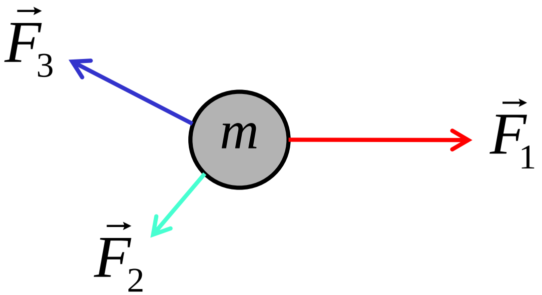
Reaktions-
kräfte →
werden gerade so groß, dass sich die Walze nicht bewegt

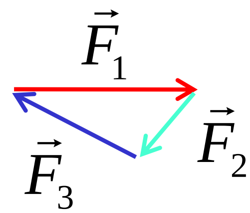




Ruhende bzw. gleichförmig bewegte Körper:

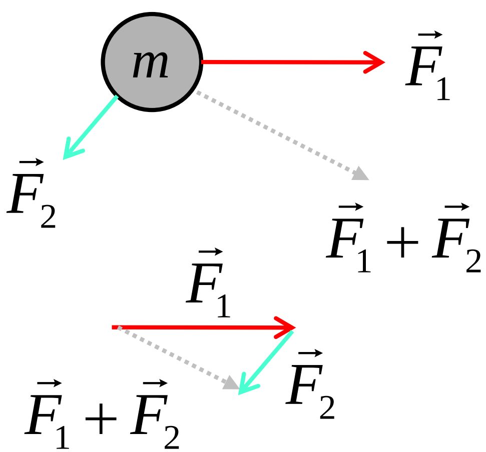
$$\sum \vec{F} = 0$$





$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = 0$$

Beschleunigende Körper:



$$\underbrace{\sum \vec{F}} = \underbrace{m \cdot \vec{a}}$$

von außen angreifende Kräfte

Trägheitskraft

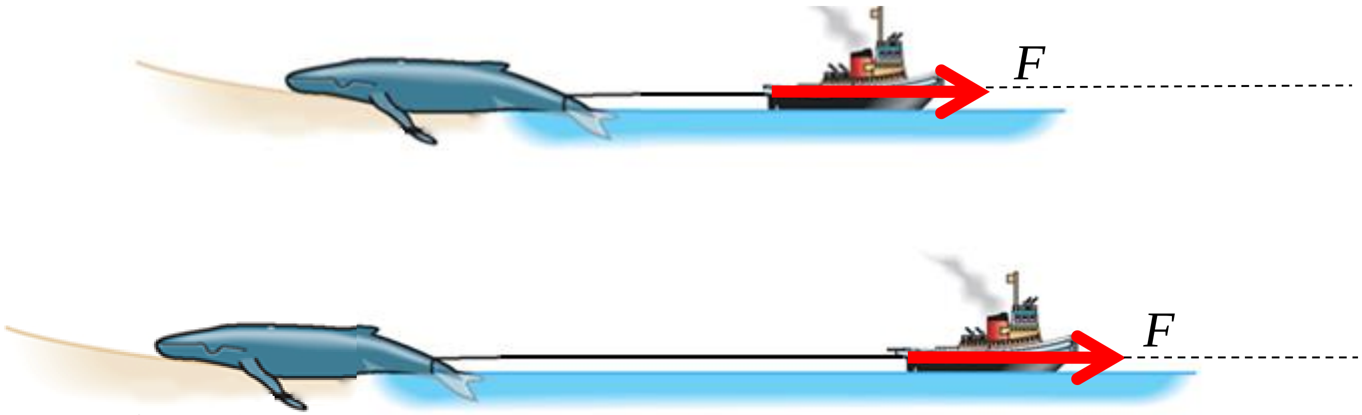
Ursache der Bewegung

Wirkung → Beschleunigung

5.2.3.4 Wirkungslinie von Kräften

Die Linie auf der ein Kraftvektor liegt, wird als Wirkungslinie bezeichnet.

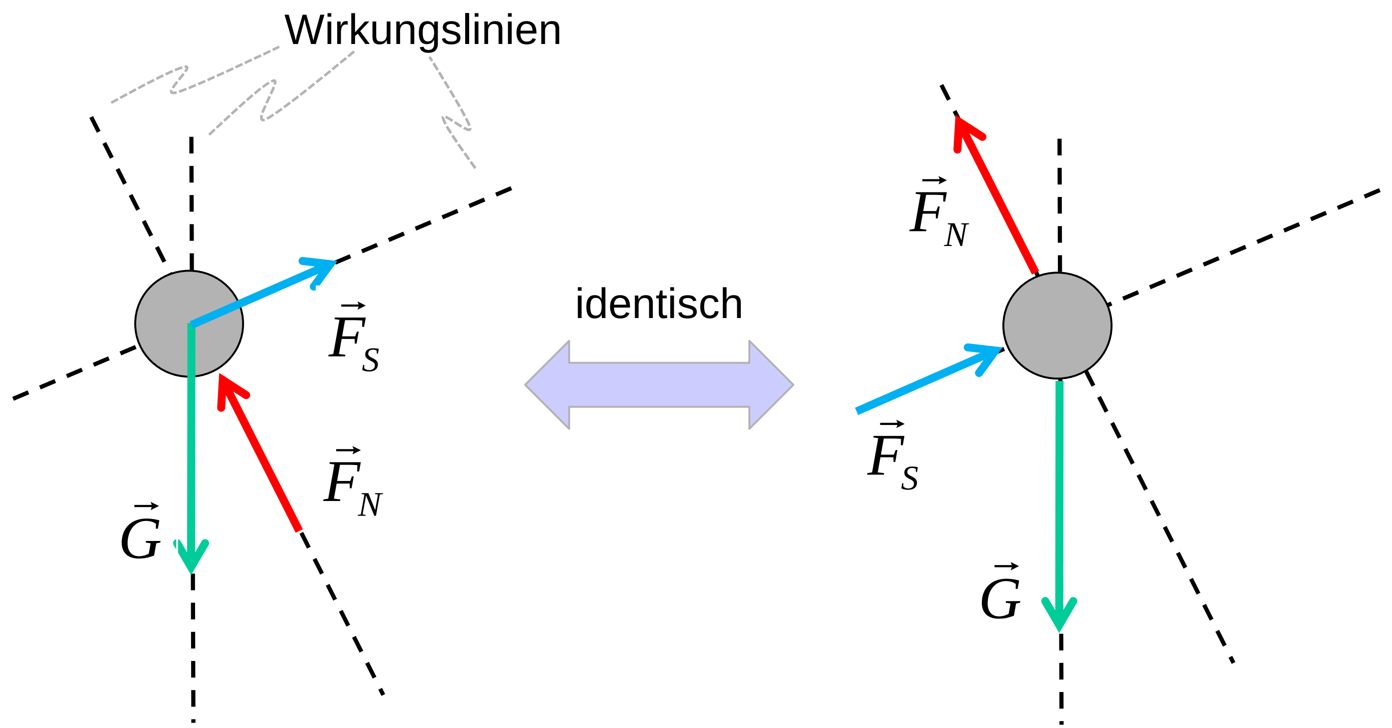
Für die unmittelbare Wirkung einer Kraft spielt es keine Rolle, an welcher Stelle der Wirkungslinie die Kraft an einem Körper angreift.



s. Physik, Giancoli, Pearson Studium

Fazit: Der Angriffspunkt der Kraft kann entlang der Wirkungslinie beliebig verschoben werden, ohne dass sich an der Kraftwirkung etwas ändert.

→ **Kraftvektoren sind *linienflüchtig***.

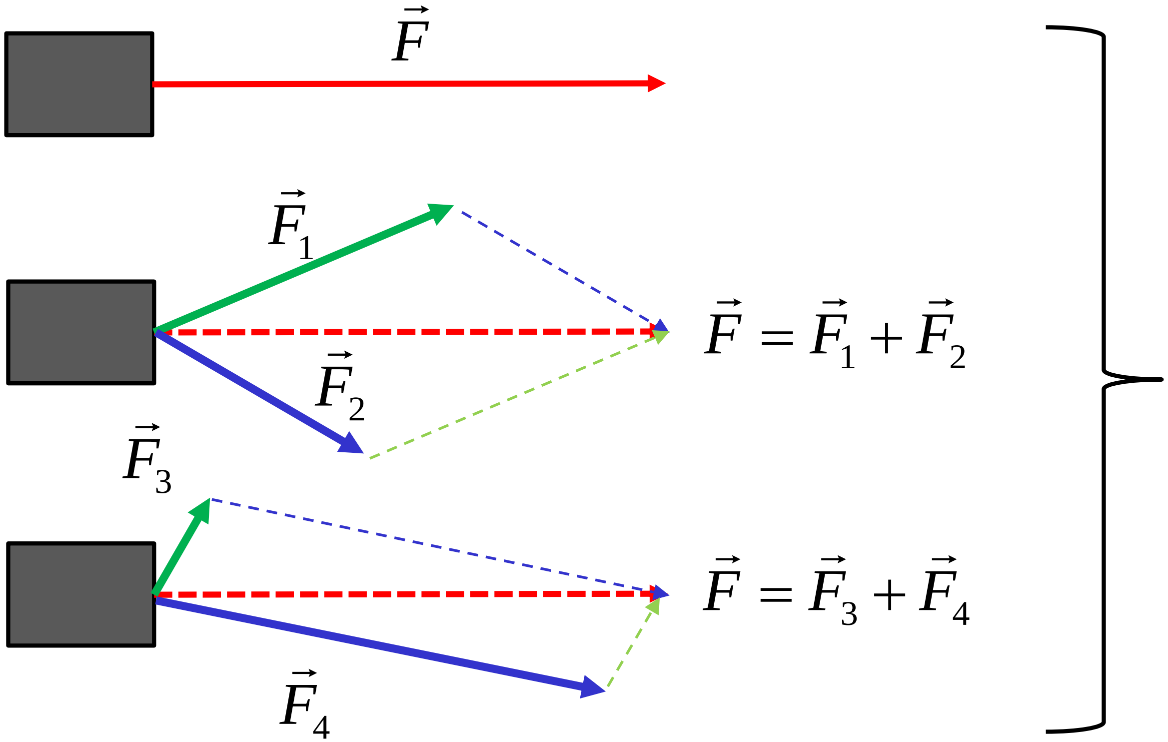


5.2.3.5 Zerlegung von Kräften - Kräfteparallelogramm

Häufig ist es vorteilhaft, wenn eine Kraft durch 2 in vorgegebene Richtungen wirkende Kraftkomponenten ersetzt wird (Kraftzerlegung).

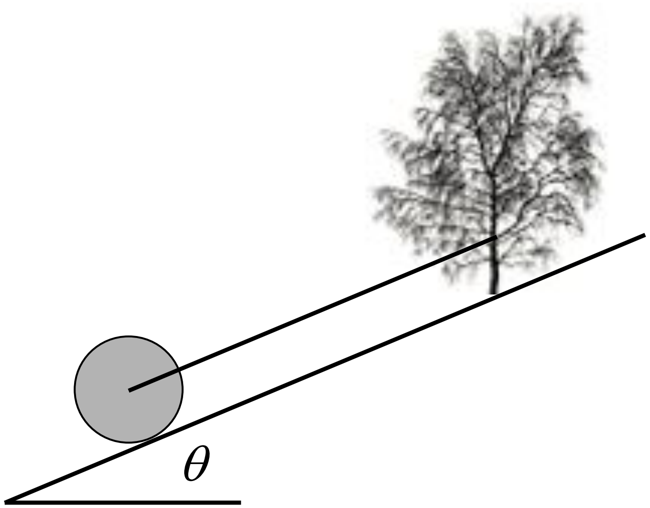
Dabei ist darauf zu achten, dass die Vektorsumme der Komponenten in Betrag und Richtung der zerlegten Kraft entspricht.

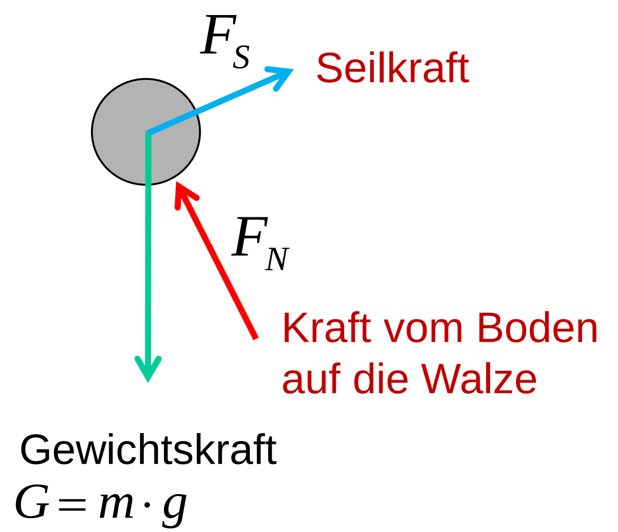
Die Resultierende (Kraft) ist gleich der der Vektorsumme der Teilkräfte.



Bezüglich der Wirkung gibt es keinen Unterschied zwischen den Beispielen !

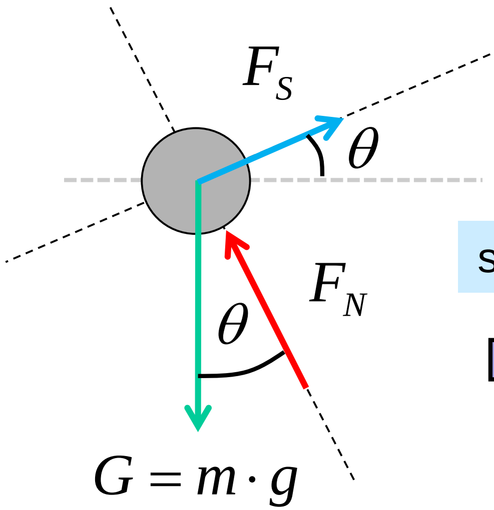
Beispiel: <u>Ruhende</u> Walze auf schiefer Ebene





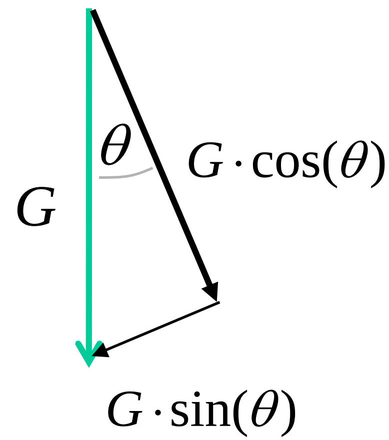
Wie groß sind die Reaktionskräfte F_S und F_N?

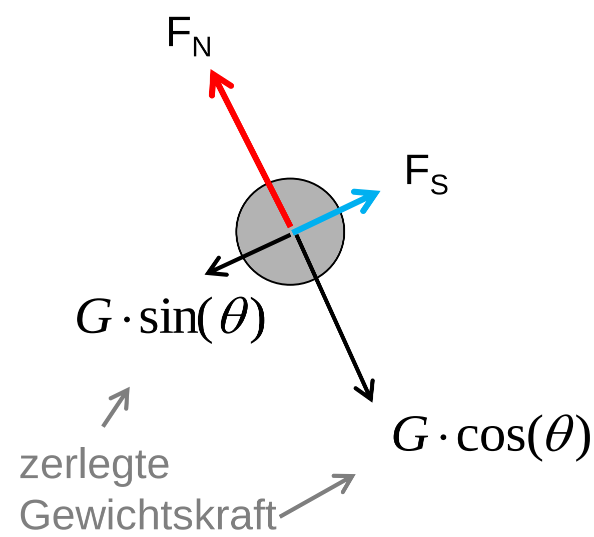
Ansatz:
- Da die Walze sich nicht bewegt, muss die Summe aller angreifenden Kräfte 0 sein !
- G ist die ursächliche Kraft, F_S und F_N sind Reaktionskräfte.



Zerlegung der **Gewichtskraft** G in eine Komponente in Bodenrichtung (F_N) und eine Komponente in Seilrichtung (F_S).

s. Tafel





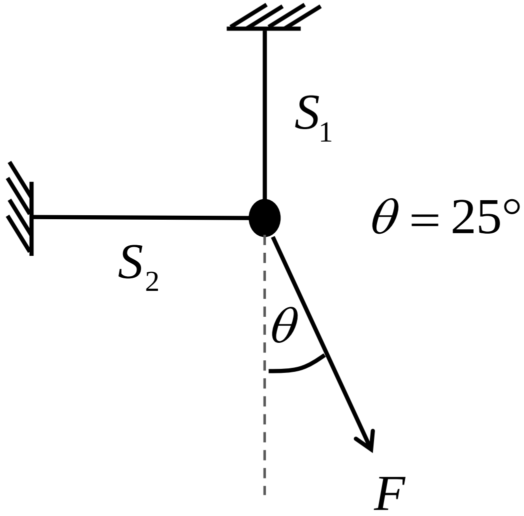
Da der Körper ruht gilt: $\sum \vec{F} = 0$

Für die Beträge von Seilkraft und Boden-kraft gilt somit:

$$F_S = G \cdot \sin(\theta)$$
$$F_N = G \cdot \cos(\theta)$$

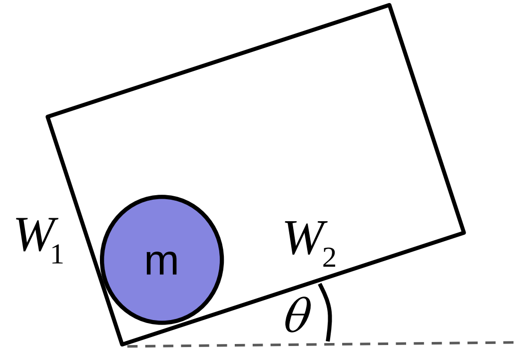
Übung: Kräfteparallelogramme (Zerlegung in senkrechte Kräftepaare)

1. Ein Massepunkt (m=0) wird von zwei Seilen gehalten. Weiter zieht eine Kraft von F=20N am Massepunkt. Mit welcher Kraft ziehen die Seile am Massepunkt?



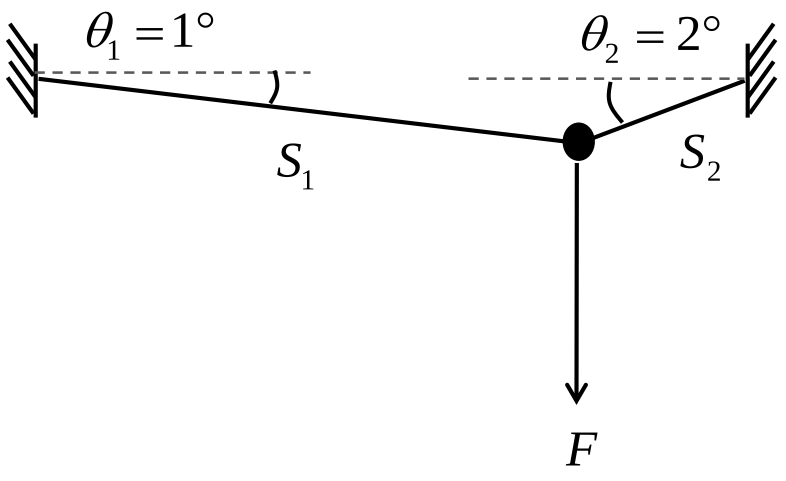
2. Eine Kreisscheibe (m=5kg) liegt in einer gekippten rechtwinkeligen Ecke. Mit welcher Kraft drücken die Seitenwände auf die Scheibe?

$\theta = 15°$



Übung: Zerlegung in nicht-senkrechte Kräftepaare

Ein Massepunkt (m=0) wird von zwei Seilen gehalten. Weiter zieht eine Kraft von F=20N am Massepunkt. Mit welcher Kraft ziehen die Seile am Massepunkt?



5.2.3.6 Klassifikation von Kräften

a) Eingeprägte Kräfte : Wirken von aussen in vorgegebener Weise einen Körper ein.

Dazu gehören:

Potentialkräfte = Bewegung gegen Potentialkräfte erzeugt potentielle Energie (*konservative Kräfte*)

Beispiele
- Gewichtskraft
- Federkraft
- Gravitationskräfte

Widerstandskräfte = Bewegung gegen Widerstandskräfte erzeugt Wärme (nicht-konservative Kräfte, *dissipative Kräfte*)

Beispiele:
- Reibungswiderstand
- Dämpfungswiderstand
- Strömungswiderstand

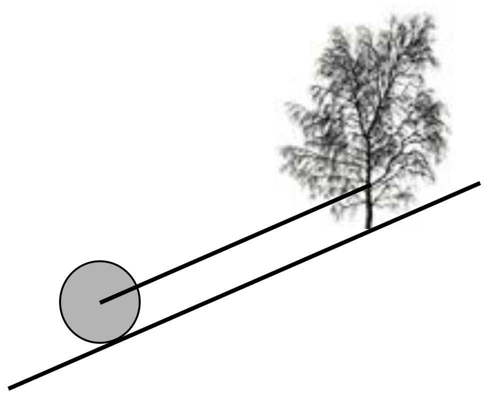
Anm.: Widerstandskräfte wirken immer gegen die Bewegungsrichtung.

b) Zwangskräfte oder auch Reaktionskräfte :

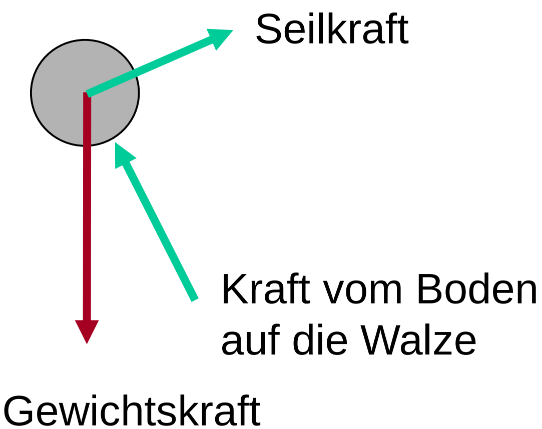
Reagieren auf die übrigen Kräfte gerade so, daß geometrische Randbedingungen eingehalten werden (z.B. dass der Körper ruht oder sich auf einer Kreisbahn bewegt).

Beispiele: Kontaktkräfte, Lagerkräfte

Anm.: Bei bewegten Körper wirken Zwangskräfte immer senkrecht zur Bewegungsrichtung (Beispiel: Fadenkraft im Fadenpendel).



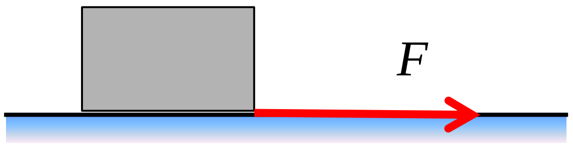
Die Zwangskräfte entstehen als Reaktion auf die **eingeprägte Gewichtskraft**, um die Ruhelage des Körpers sicherzustellen.



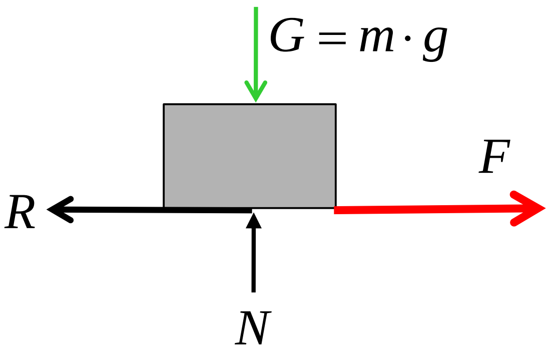
5.2.3.7 Einige wichtige eingeprägte Kräfte

a) Reibung (= Widerstandskraft)

Fall 1: ruhender Körper



Bei kleiner Zugkraft F wird der Körper die Haftreibung nicht überwinden können.

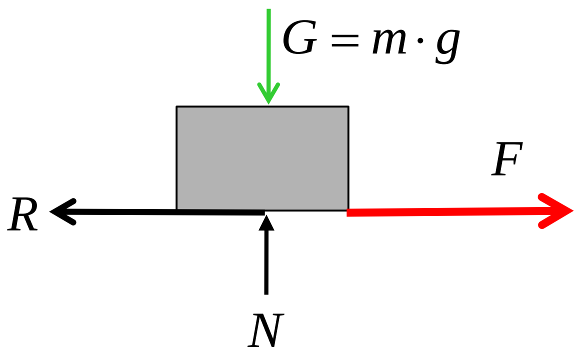


In diesem Fall gilt: $\boxed{R = F}$ (ruhender Körper)

F: von außen einwirkende Kraft
G: Gewichtskraft

N: Kraft des Bodens auf den Körper (hier gilt N=G)
R: Haft- bzw. Reibkraft

Wann beginnt der Körper zu rutschen? (Coulombsches Reibungsgesetz)



F: von außen einwirkende Kraft
G: Gewichtskraft

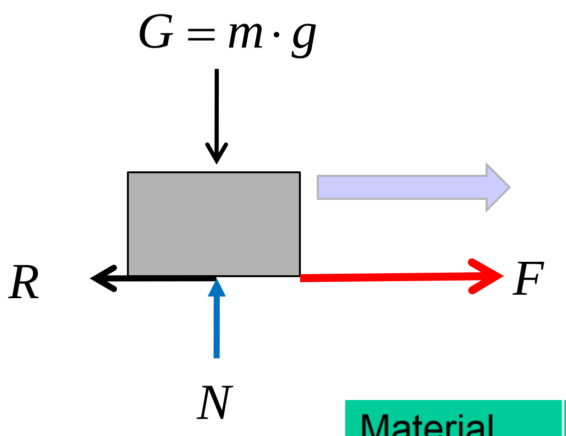
N: Kraft des Bodens auf den Körper (hier gilt N=G)
R: Haft- bzw. Reibkraft

Der Körper fängt an zu rutschen, wenn gilt: $\boxed{F \geq \mu_H \cdot N}$

μ_H : Haftreibungszahl

Material	μ_H trocken	μ_H geschmiert
Stahl -Stahl	0.15 - 0.3	0.1
Stahl - Eis	0.03	-
Holz - Holz	0.5	0.2
Leder-Metall	0.6	0.2
Gummi-Straße	0.8	0.2

<u>Fall 2</u>: rutschender Körper *(Coulomb'sches Reibungsgesetz)*



Rutscht der Körper über die Unterlage dann gilt für den Betrag der Reibung:

$$\boxed{R = \mu_G \cdot N}$$

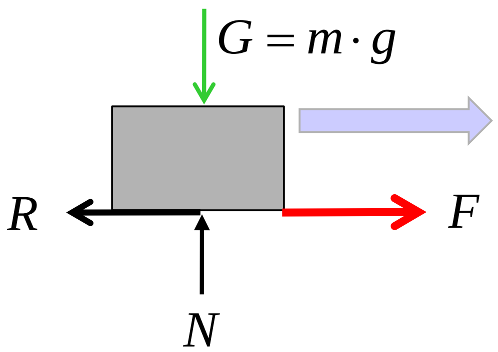
μ_G: Gleitreibungszahl

Material	μ_H trocken	μ_H geschmiert	μ_G trocken	μ_G geschmiert
Stahl -Stahl	0.15 - 0.3	0.1	0.1	0.01 - 0.07
Stahl - Eis	0.03	-	0.01	-
Holz - Holz	0.5	0.2	0.3	0.1
Leder-Metall	0.6	0.2	0.2	0.1
Gummi-Straße	0.8	0.2	0.5	0.1

Die Reibung ist der Bewegungsrichtung immer entgegen gerichtet. In vektorieller Schreibweise gilt daher:

$$\boxed{\vec{R} = -\mu_G \cdot N \cdot \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}}$$

Wann hört der Körper auf zu rutschen ?



F: von außen einwirkende Kraft
G: Gewichtskraft

N: Kraft des Bodens auf den Körper (hier gilt N=G)
R: Haft- bzw. Reibkraft

Der Körper hört auf zu rutschen, wenn gilt: $\boxed{F \leq \mu_G \cdot N}$ μ_G : Gleitreibungszahl

Material	μ_G trocken	μ_G geschmiert
Stahl -Stahl	0.1	0.01 - 0.07
Stahl - Eis	0.01	-
Holz - Holz	0.3	0.1
Leder-Metall	0.2	0.1
Gummi-Straße	0.5	0.1

Für den Bremsweg eines bei v_0 bremsenden Körpers gilt (o. Bew.):

$$\boxed{s_{Brems} = \frac{v_0^2}{2g\mu_G}}$$

Beispiel 1: Scheiben-Billiard

Beispiel 2: Wobble-Board-Games

→ Gleitscheiben und Bälle durch „kippen“ der virtuellen Ebene in das Ziel bringen

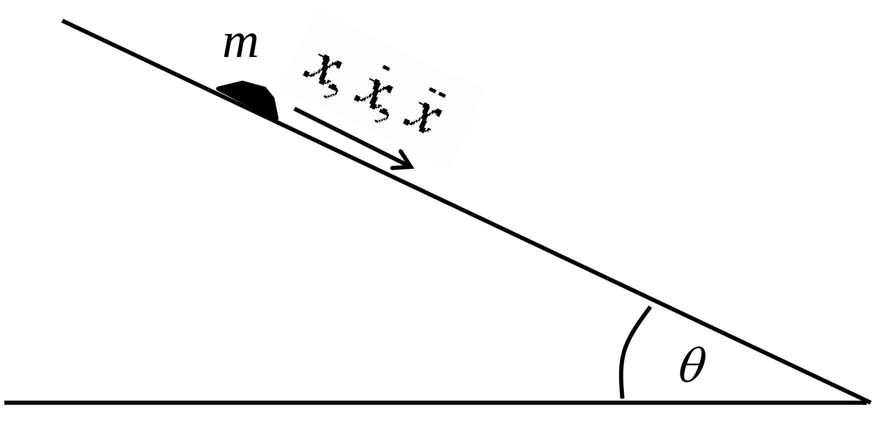
Übung: Gleitblock auf schräger Ebene

Ein Massepunkt (Masse m) gleitet eine reibungsbehaftete (μ_G=0.2) schiefe Ebene (θ=20°) hinab.

Welche Kräfte wirken auf den Massepunkt?

Zeichnen Sie das Analogrechnerbild der Simulation (mit Anfangswerten).

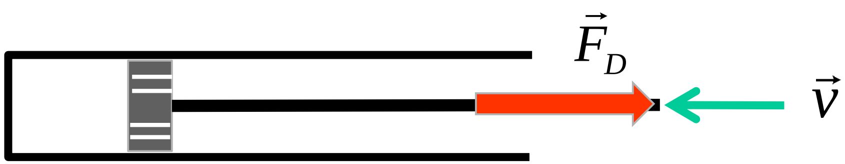
Unter welchen Voraussetzungen ist die Simulation gültig?



b) Dämpfung (= Widerstandskraft)

Ein Dämpfer ist ein Bauelement, welches eine geschwindigkeitsabhängige Gegenkraft erzeugt.

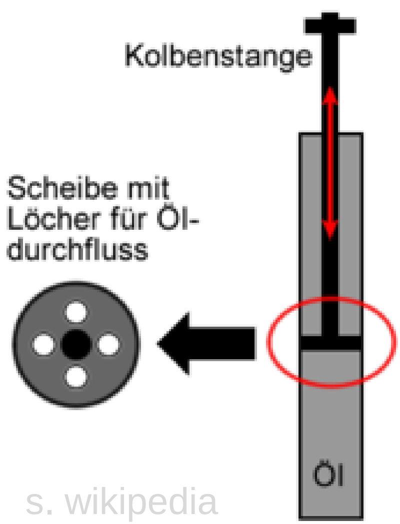
Beispiel: viskose („*flüssige*“) Dämpfung



$$\boxed{\vec{F}_D = -d \cdot \vec{v}}$$

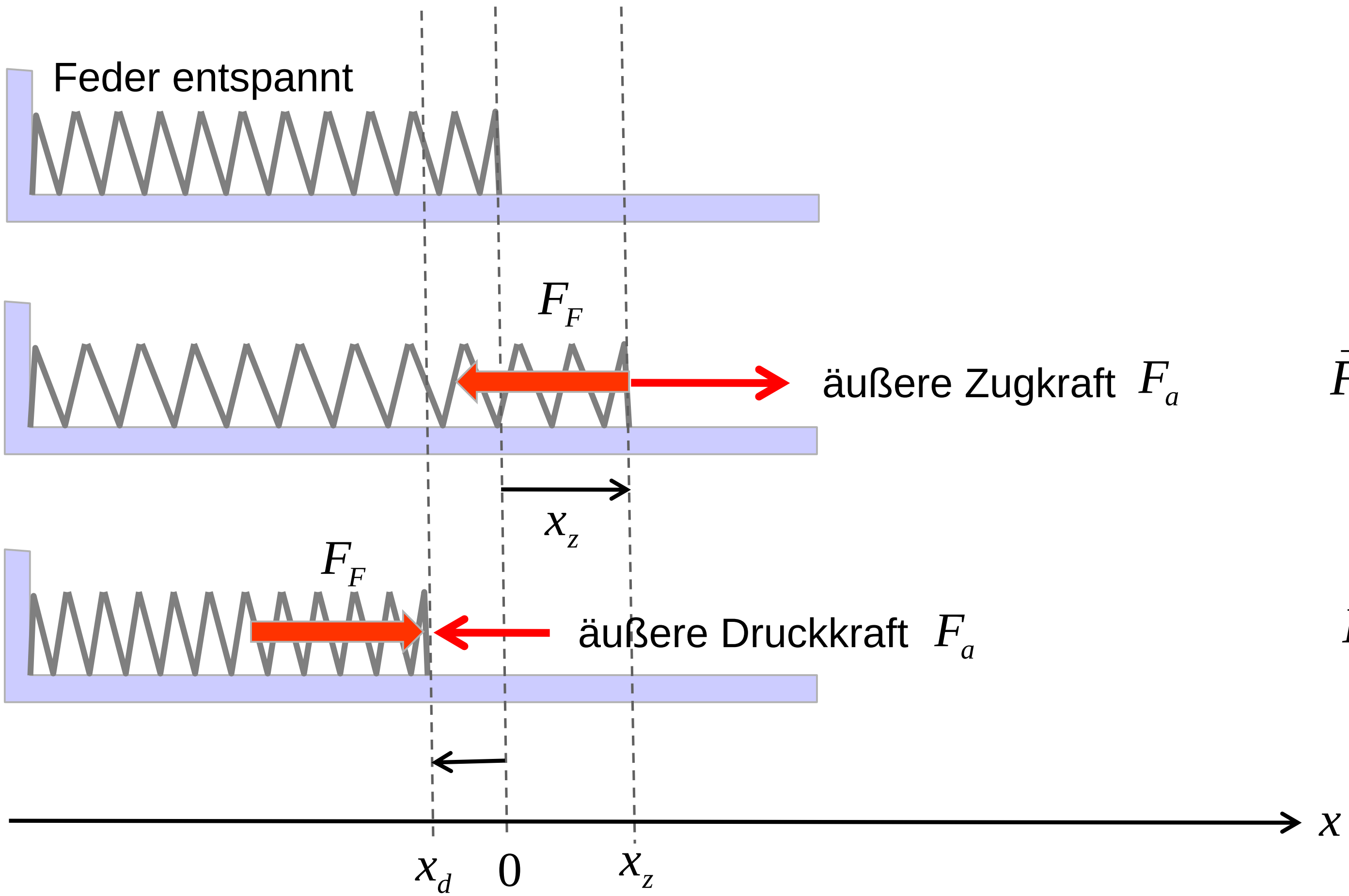
d : Dämpfungskonstante

v : Geschwindigkeit



s. wikipedia

c) Federkräfte (= Potentialkraft)



$$\vec{F}_F = -\vec{F}_a$$

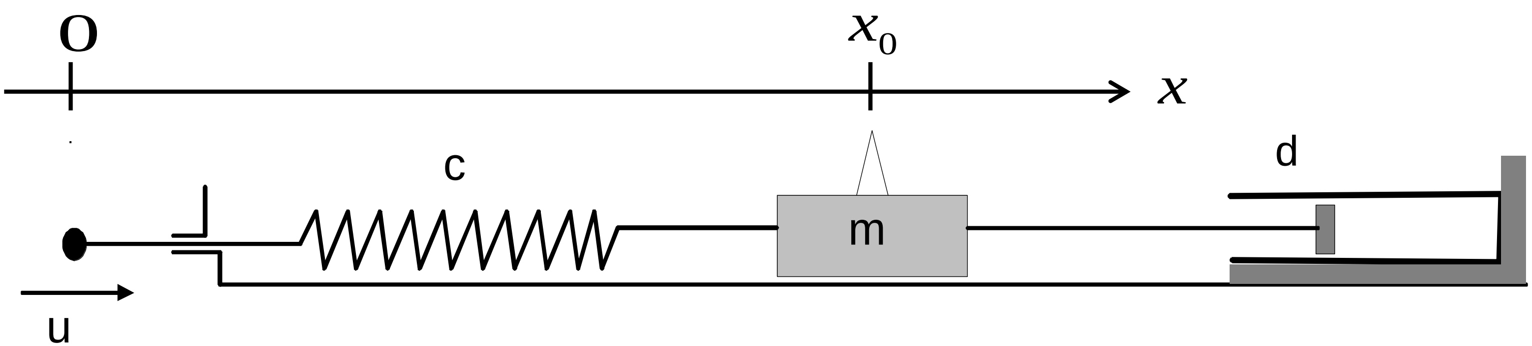
$$\vec{F}_F = -\vec{F}_a$$

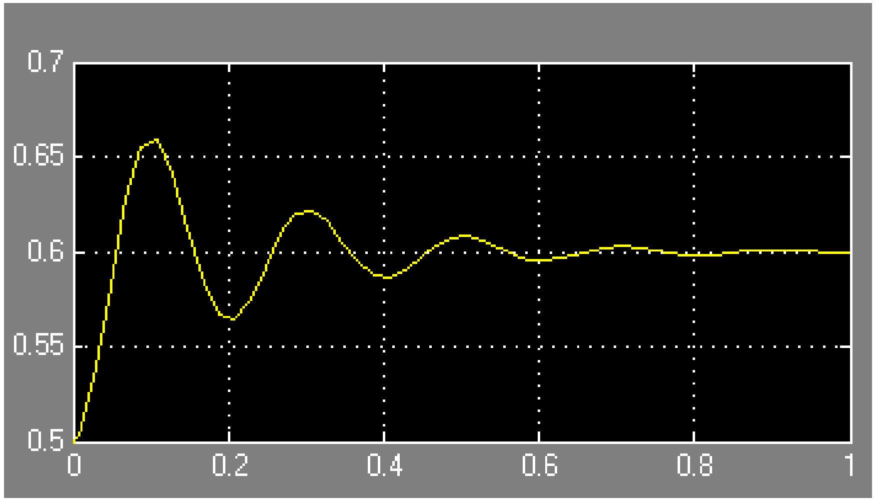
$$\boxed{\vec{F}_F = -c \cdot \vec{x}}$$

c : Federkonstante

Übung: reibungsfrei gleitende Masse an gedämpfter Feder

Das abgebildete mechanische System ist mit Simulink zu modellieren.
Zum Zeitpunkt t=0 wird u schlagartig um 10cm nach vorne bewegt.





$$c = 1000 \frac{N}{m}$$

$$d = 10 \frac{N}{m/s}$$

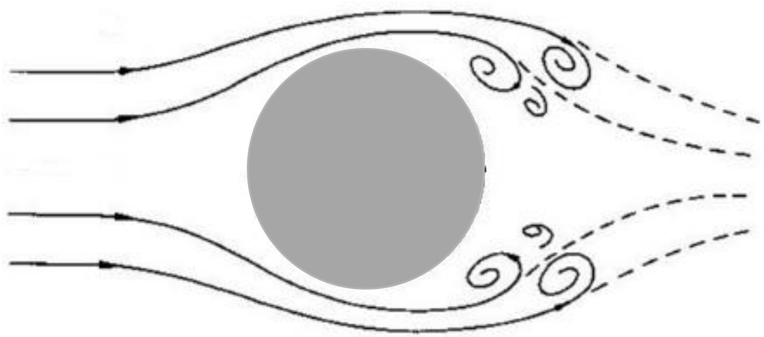
$$m = 1kg$$

$$x_0 = 0.5m$$

d) Strömungswiderstand (= Widerstandskraft)

Im Falle einer turbulenten Strömung wächst der Strömungswiderstand quadratisch mit der Geschwindigkeit.

turbulente Strömung



$$\boxed{F_S = \tfrac{1}{2} c_W A \rho \cdot v^2}$$ = Betrag

c_W Widerstandsbeiwert

A Querschnitt in Strömungsrichtung

ρ Stoffdichte (z.B. Luft 1.29 kg/m³)

v Geschwindigkeit im Medium

c_W	Form
1,33	Halbkugelschale, konkave Seite, Fallschirm
1,1	runde Scheibe, quadratische Platte
0,8	Lkw
0,78	Mensch, stehend
0,7	Motorrad, unverkleidet
0,6	Gleitschirm im Normalflug
0,5	Cabrio offen, Motorrad verkleidet
0,45	Kugel (Re<1,7*10^5)
0,18	Kugel (Re>4,1*10^5)
0,4	Durchschnittlicher Roadster
0,34	Halbkugelschale, konvexe Seite
0,30	moderner, geschlossener PKW
0,20	optimal gestaltetes Fahrzeug
0,08	Tragflügel beim Flugzeug
0,05	Tropfenform, Stromlinienform
0,03	Pinguin

s. wikipedia

Der Strömungswiderstand ist der Bewegungsrichtung immer entgegengesetzt.
In vektorieller Schreibweise gilt daher:

$$\boxed{\vec{F}_s = -\tfrac{1}{2} c_W A \rho \cdot v^2 \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}}$$

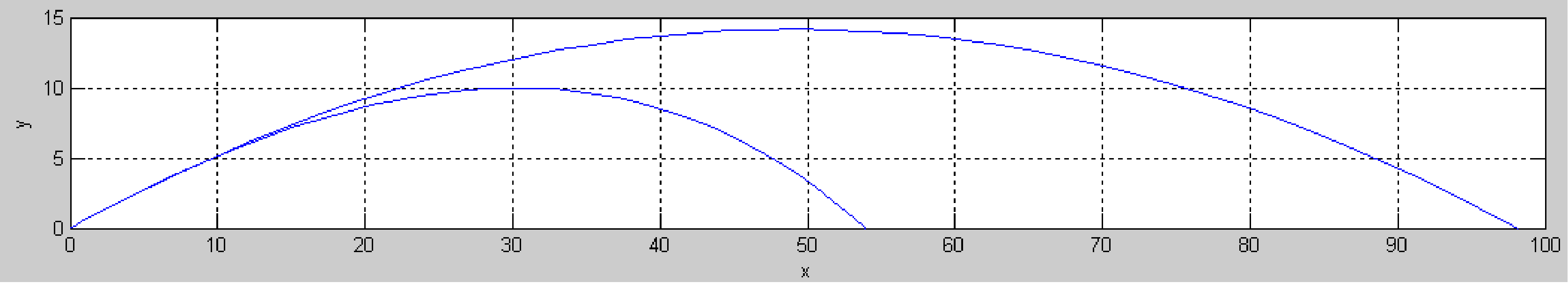
Beispiel:

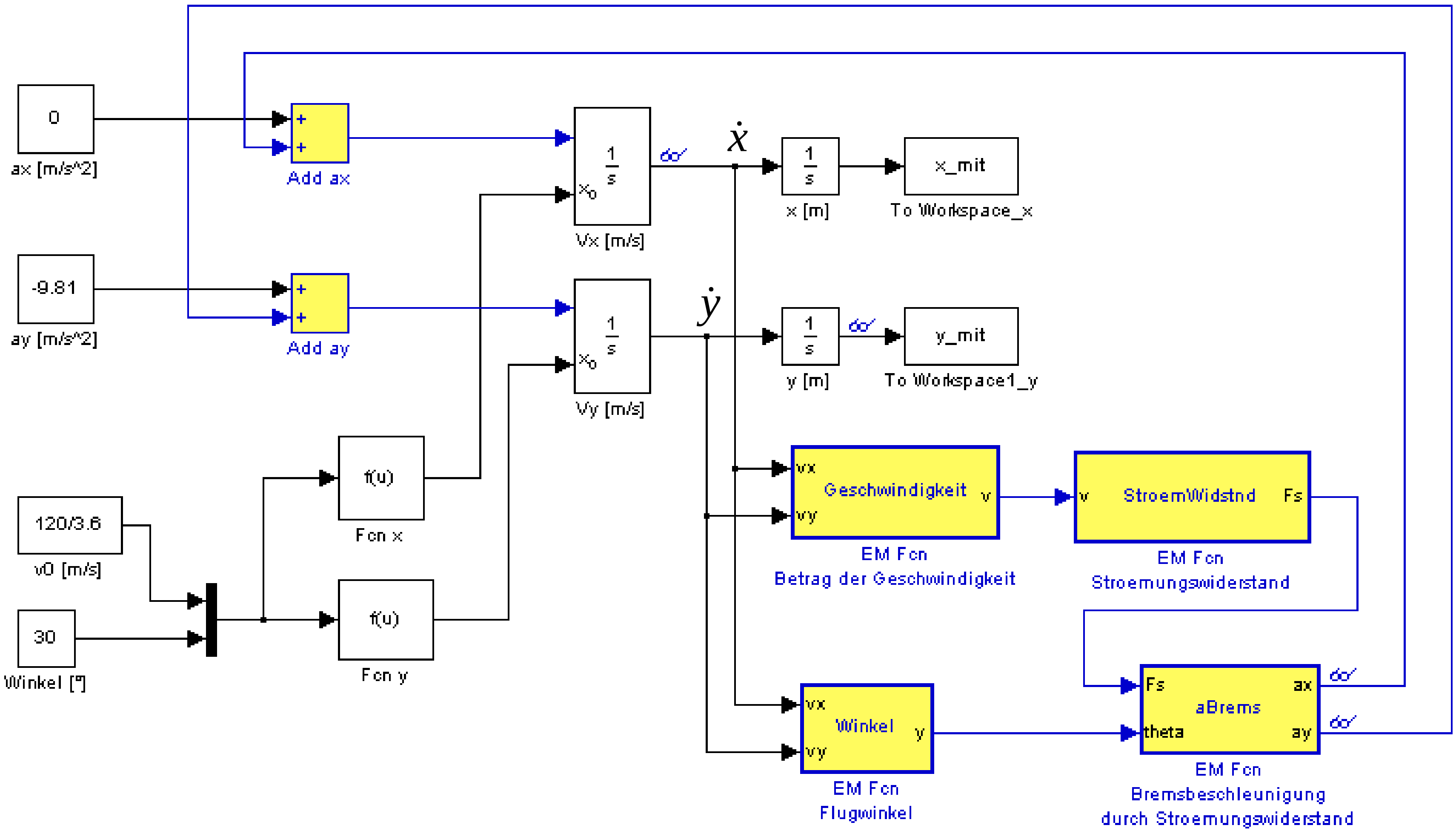
räumliche Bahnkurve eines geschossenen Fußballs

Übung: Flugbahn eines Fußballs mit/ohne Strömungswiderstand

Ein Fußball (d=22cm, m=450g, c_w=0.25) wird unter dem Winkel θ=30° mit einer Geschwindigkeit von 120km/h geschossen.

Die Flugbahn ist mit Simulink zu modellieren (als ebenes Problem).




0
ax [m/s^2]
-9.81
ay [m/s^2]
Add ax
Add ay
1
s
Vx [m/s]
Vy [m/s]
$\dot{x}$
$\dot{y}$
x [m]
y [m]
x_mit
To Workspace_x
y_mit
To Workspace1_y
120/3.6
v0 [m/s]
30
Winkel [°]
f(u)
Fcn x
Fcn y
vx
vy
Geschwindigkeit
v
EM Fcn
Betrag der Geschwindigkeit
StroemWidstnd
Fs
EM Fcn
Stroemungswiderstand
Winkel
y
EM Fcn
Flugwinkel
aBrems
theta
ax
ay
EM Fcn
Bremsbeschleunigung
durch Stroemungswiderstand

e) Gravitation untereinander (= Potentialkraft)

Zwei Massen m_1 und m_2 üben folgende gravitatorische Kraft aufeinander aus:

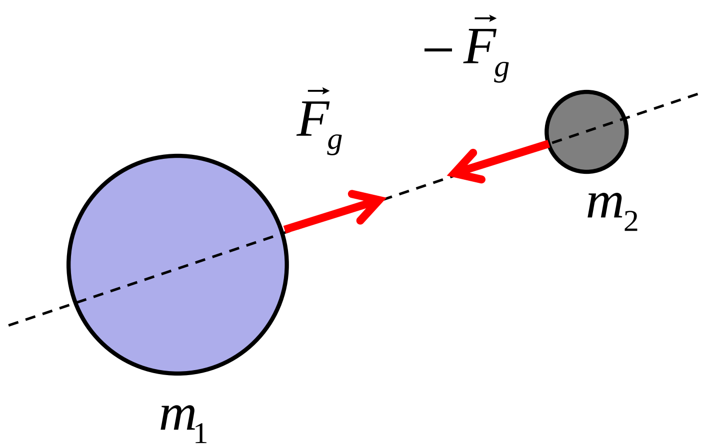
$$\boxed{\vec{F}_g = G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2} \cdot \vec{e}_{12}}$$

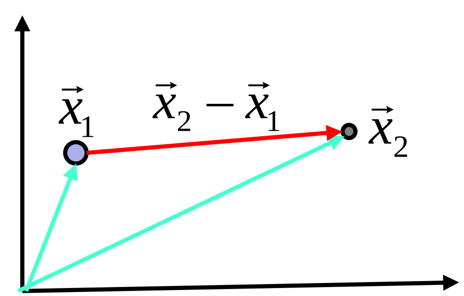
mit der Gravitations-konstante : $G = 66.743 \cdot 10^{-12} \, \frac{m^3}{kg \cdot s^2}$

Schwerpunktabstand : $r = \left| \vec{x}_2 - \vec{x}_1 \right|$

$\vec{e}_{12}$: Einheitsvektor von m_1 nach m_2

$$\vec{e}_{12} = \frac{\vec{x}_2 - \vec{x}_1}{\left| \vec{x}_2 - \vec{x}_1 \right|}$$





Übung: Erde - Mond

Es ist das System „Erde-Mond“ mit Simulink zu simulieren.

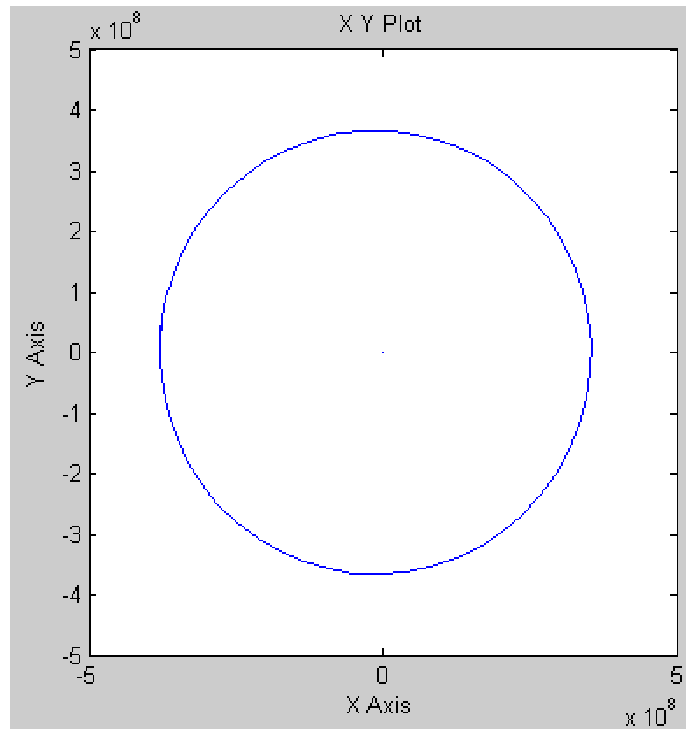
Mondmasse: ca. $7.3*10^{22}$ kg

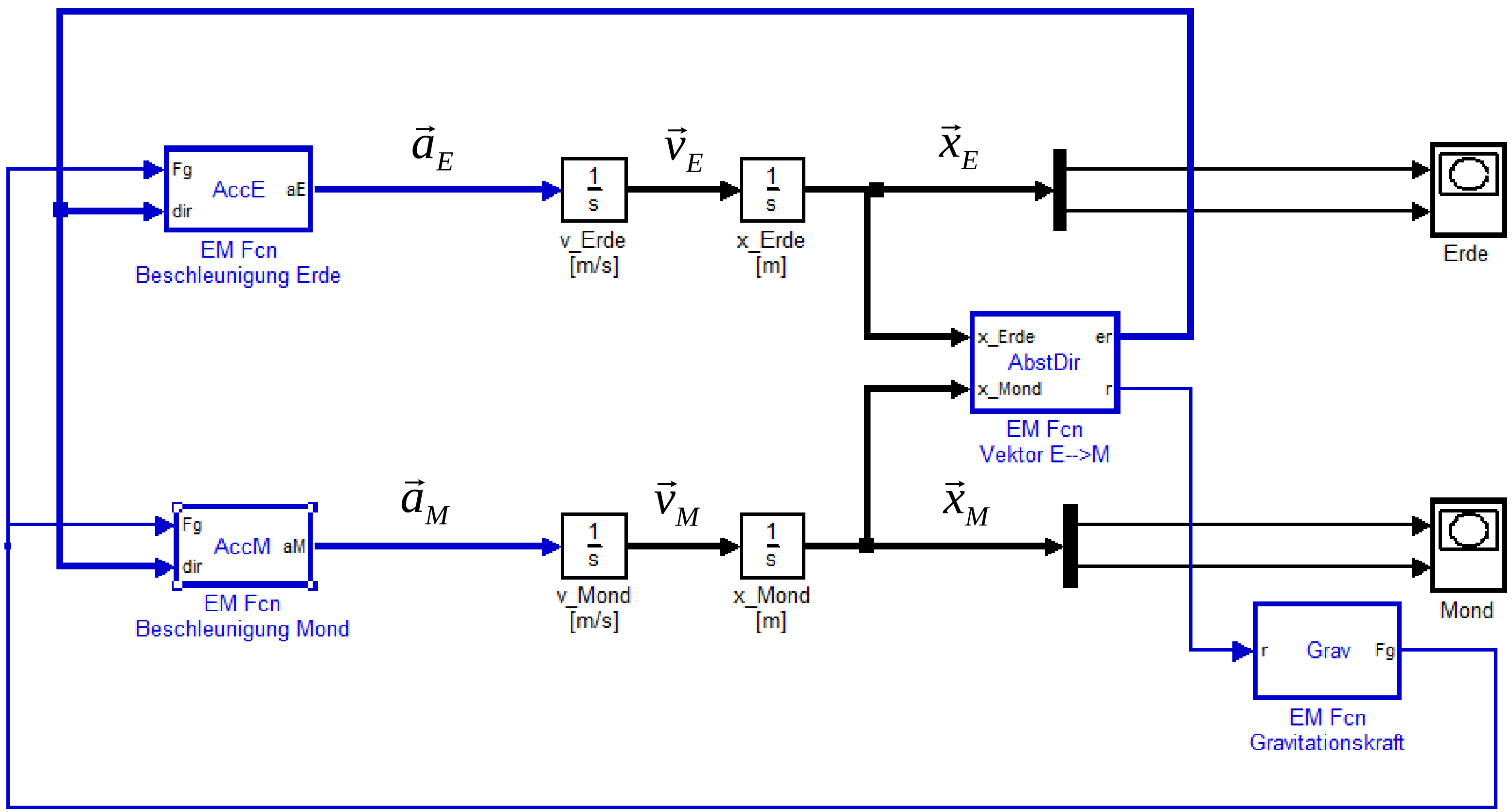
Erdmasse: ca. $5.9*10^{24}$ kg

tang. Mondgeschwindigkeit: ca. 1km/s

Abstand: ca. 380000km

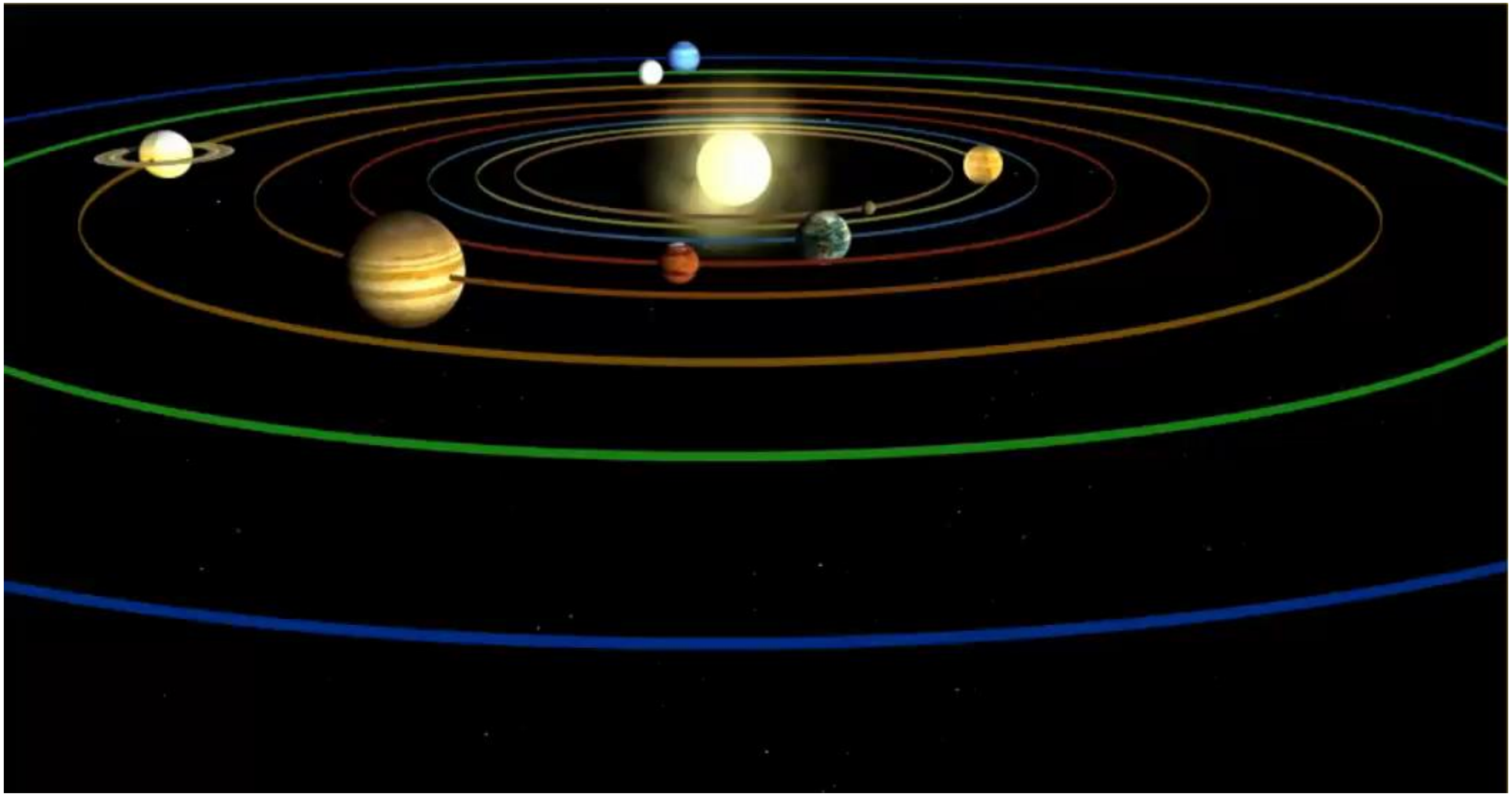
simulierte Mondbahn





$\vec{a}_E$
$\vec{v}_E$
$\vec{x}_E$
Fg
AccE
aE
dir
EM Fcn
Beschleunigung Erde
1/s
v_Erde
[m/s]
1/s
x_Erde
[m]
Erde
x_Erde
AbstDir
er
x_Mond
r
EM Fcn
Vektor E-->M
$\vec{a}_M$
$\vec{v}_M$
$\vec{x}_M$
Fg
AccM
aM
dir
EM Fcn
Beschleunigung Mond
v_Mond
[m/s]
x_Mond
[m]
Mond
r
Grav
Fg
EM Fcn
Gravitationskraft

Beispiel: Solar-System-Simulator



Bahndaten für Startwerte : http://ssd.jpl.nasa.gov/?horizons

Beispiel: Kollision von Milchstraße und Andromeda-Galaxie