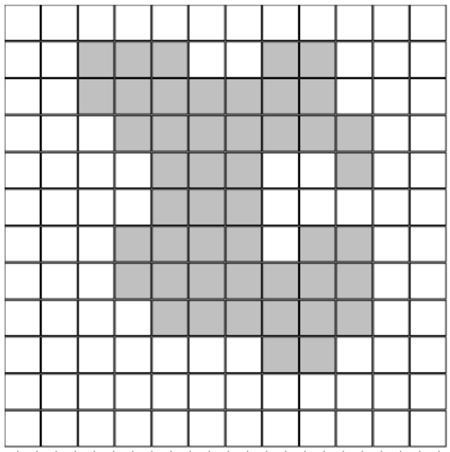
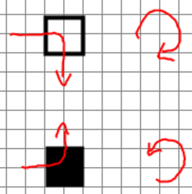
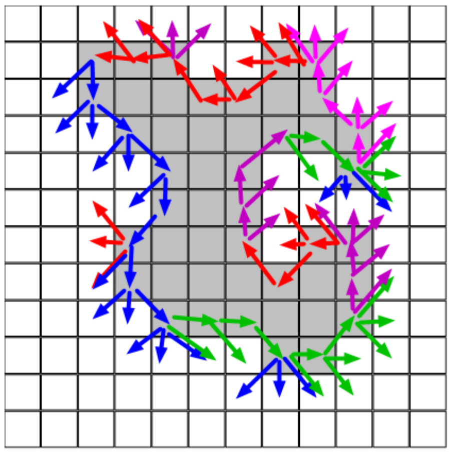
ÜBUNG: Konturextraktion 1





ÜBUNG: Konturextraktion 2



Richtungsumschaltung

if (in Richtg. (s-1) ist Punkt)

s = Richtg. (s-2)

else if (in Richtg. s ist Punkt)

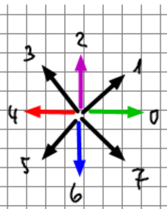
......

else if (in Richtg. (s+1) ist Punkt)

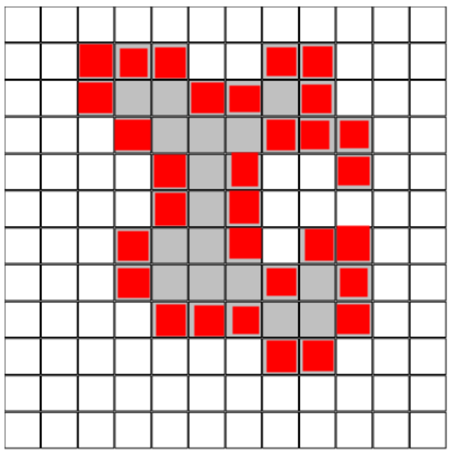
......

else

s = Richtg. (s+2)



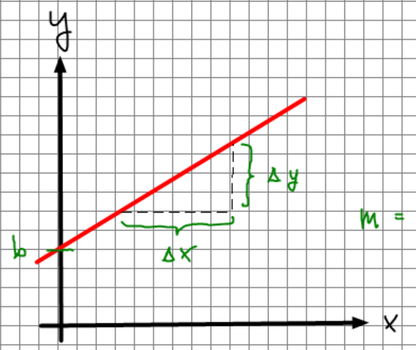
Start mit S = 6



Varianten von Geradengleichungen

a) Steigungs - Achsenabschnittsform

$y = mx + b$



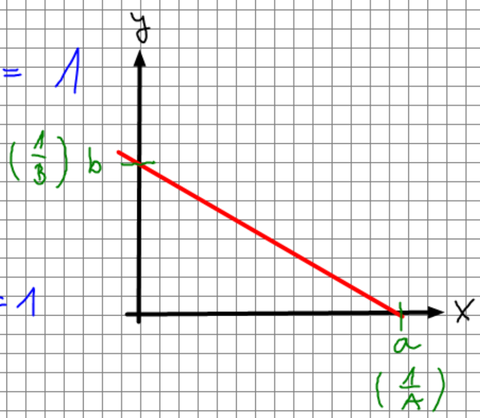
$m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$

b) Achsenabschnittsform

$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$

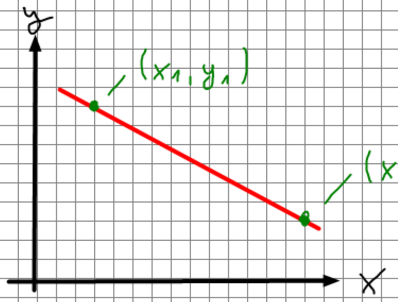
alternativ

$Ax + By = 1$



c) Zwei-Punkte-Form

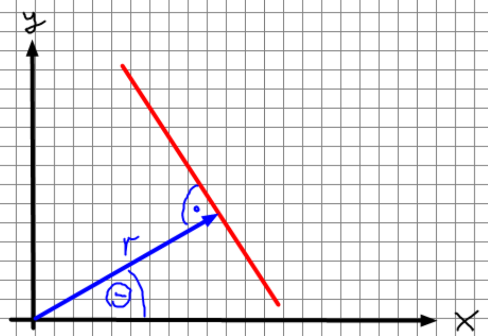
$$x(y_1 - y_2) + y(x_2 - x_1) + y_2 x_1 - y_1 x_2 = 0$$



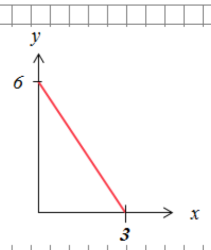
d) Hesse'sche Normalform

$$r = x \cos \Theta + y \sin \Theta$$

(r, Θ) sind die Parameter der Grade



2. Wie lautet die Geradengleichung der nebenstehenden Gerade
   a) in der Achsenabschnittsform
   b) in der Steigungs-Achsenabschnittsform?



a) $a = 3 \quad , \quad b = 6$

$\frac{1}{a} x + \frac{1}{b} y = 1$

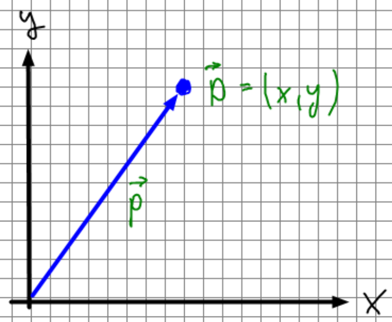
$\frac{1}{3} x + \frac{1}{6} y = 1$

b) $\frac{1}{6} y = -\frac{1}{3} x + 1$

$y = -2x + 6$

Ortsvektoren und Richtungsvektoren

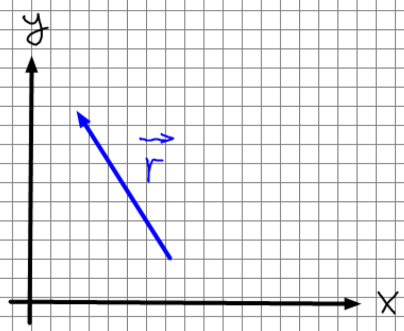
a) Ortsvektoren



Ein Ortsvektor zeigt vom Ursprung auf einen Punkt.

Ein Ortsvektor gibt die Punktkoordinate an.

b) Richtungsvektoren

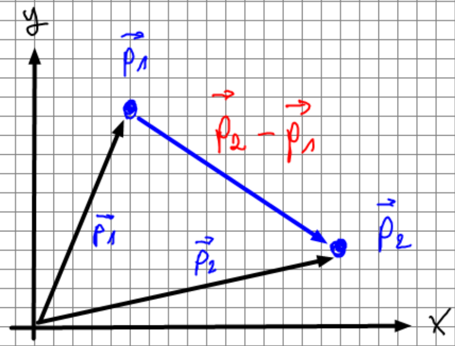


Richtungsvektoren sind nicht an einen Ort gebunden.

Sie geben eine Richtung an.

=> frei verschiebbar

Beispiel: Vektor zwischen 2 Punkten



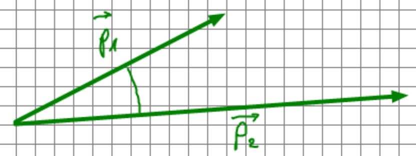
Rechnen mit Vektoren

a) Betrag $\quad \vec{p}_1 = (x_1, y_1) \Rightarrow |\vec{p}_1| = p_1 = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$

$\rightarrow$ Vektorlänge

b) Skalarprodukt $\quad$ Es sei $\vec{p}_1 = (x_1, y_1)$, $\vec{p}_2 = (x_2, y_2)$

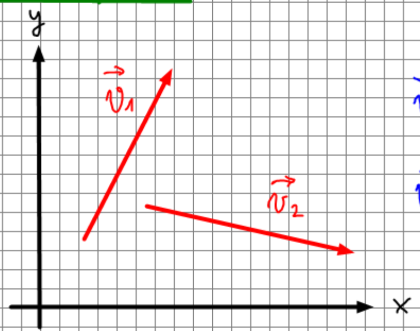
Definition: $\quad \vec{p}_1 \cdot \vec{p}_2 = p_1 \cdot p_2 \cdot \cos(\sphericalangle\, \vec{p}_1, \vec{p}_2)$



Im Koordinatendarstellung gilt (o. Bew.)

$$\vec{p}_1 \cdot \vec{p}_2 = (x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2)$$
$$= x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2$$

Beispiel: Winkel zwischen 2 Vektoren



$\vec{v}_1 = (2, 4) \Rightarrow \underline{\underline{v_1}} = \sqrt{2^2 + 4^2} = \underline{\underline{4.47}}$

$\vec{v}_2 = (8, -1) \Rightarrow \underline{\underline{v_2}} = \sqrt{8^2 + 1^2} = \underline{\underline{8.06}}$

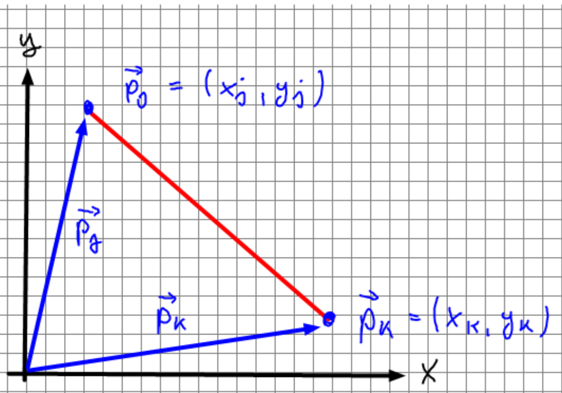
$\underline{\underline{\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2}} = 2 \cdot 8 + 4 \cdot (-1) = \underline{\underline{12}}$

Mit $\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = v_1 \cdot v_2 \cdot \cos(\sphericalangle\, \vec{v}_1, \vec{v}_2)$ folgt

$\cos(\sphericalangle\, \vec{v}_1, \vec{v}_2) = \dfrac{\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2}{v_1 \cdot v_2} = 0.333 \Rightarrow \sphericalangle\, \vec{v}_1, \vec{v}_2 = \underline{\underline{70.6^\circ}}$

3. Leiten Sie die "*2-Punkte-Form der Geradengleichung*" her, also :

$$x(y_j - y_k) + y(x_k - x_j) + y_k \cdot x_j - y_j \cdot x_k = 0$$



Die Lösung findet man mit der Achsenabschnittsform :

<u>Ansatz</u> : $\quad Ax + By = 1 \qquad (1)$

$\vec{p}_k$ und $\vec{p}_j$ in (1) einsetzen :

$$A x_j + B y_j = 1$$
$$A x_k + B y_k = 1$$

d.h. gesucht wird die Grade mit den Parametern A und B, die durch beide Punkte geht!

In Matrixform wird daraus :

$$\begin{pmatrix} x_j & y_j \\ x_k & y_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Lösen mit Determinantenmethode

$$A = \frac{y_k - y_j}{x_j y_k - x_k y_j} \quad \begin{matrix} \} D_1 \\ \} D_H \end{matrix}$$

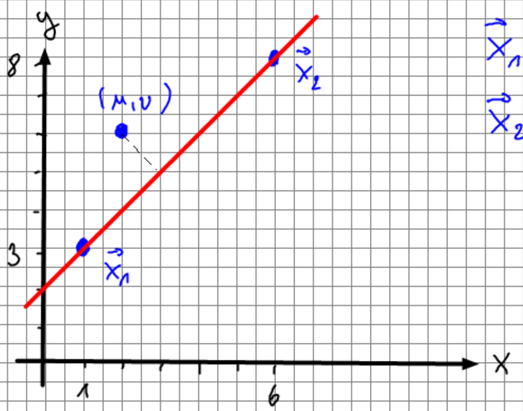
$$B = \frac{x_j - x_k}{x_j y_k - x_k y_j} \quad \begin{matrix} \} D_2 \\ \} D_H \end{matrix}$$

Einsetzen von A und B in $\quad A x + B y = 1$

$$\Rightarrow \quad (y_k - y_j)\,x + (x_j - x_k)\cdot y = x_j y_k - x_k y_j$$

bzw. $\quad (y_k - y_i)\,x + (x_j - x_k)\cdot y + x_k y_j - x_j y_k = 0$

4. Eine Gerade geht durch die Punkte $(x_1, y_1) = (1,3)$ und $(x_2, y_2) = (6, 8)$.
   a) Geben Sie die "*2-Punkte-Form der Geradengleichung*" an.
   b) Beschreiben Sie die Gerade in der Form $y=mx+b$.
   c) Wie weit ist der Punkt (u, v) = (2, 6) von der Gerade entfernt?



$$\left.\begin{array}{l} \vec{x}_1 = (1,3) \rightarrow k \\ \vec{x}_2 = (6,8) \rightarrow j \end{array}\right\}$$

Zwei-Punkte-Form:

$$(y_1 - y_2)\cdot x + (x_2 - x_1)\cdot y + x_1 y_2 - x_2 y_1 = 0$$

$$(3 - 8)\cdot x + (6 - 1)\cdot y + 1\cdot 8 - 6\cdot 3 = 0$$

$$-5x + 5y - 10 = 0$$

$$5y = 5x + 10$$

$$\underline{\underline{y = x + 2}}$$

Abstand eines Punktes von einer Gerade

$(u, v) = (2, 6)$

$$d = \frac{2(y_1 - y_2) + 6(x_2 - x_1) + y_2 x_1 - y_1 x_2}{\sqrt{(y_1 - y_2)^2 + (x_2 - x_1)^2}}$$

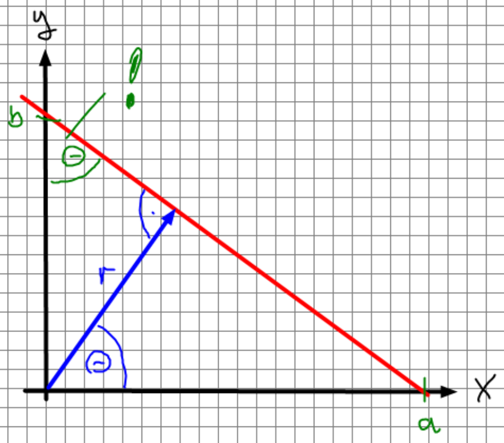
$= \ldots\ldots$ einsetzen

$$= \sqrt{2}$$

Alternativ über die Hesse'sche NF !

5 . Leiten Sie die "*Hesse'sche Normalform der Geradengleichung*" her, also :

$r = x \cdot \cos\theta + y \cdot \sin\theta$



Es gilt :

$$\cos\Theta = \frac{r}{a} \quad (1) \quad \Rightarrow \frac{1}{a} = \frac{\cos\Theta}{r}$$

$$\sin\Theta = \frac{r}{b} \quad (2) \quad \Rightarrow \frac{1}{b} = \frac{\sin\Theta}{r}$$

Mit der Achsenabschnittsform und (1) u. (2) gilt dann

$$\frac{1}{a}x + \frac{1}{b}y = 1$$

$$\frac{\cos\Theta}{r}x + \frac{\sin\Theta}{r}\cdot y = 1$$

$$\underline{\underline{x \cdot \cos\Theta + y \cdot \sin\Theta = r}} \quad \Rightarrow \text{Hesse'sche NF}$$

6. Gegeben ist eine Gerade $y = -2x+4$.

a) Beschreiben Sie die Gerade in der Form $Ax+By=1$.

b) Beschreiben Sie die Gerade in der Hesse`schen Normalform.

a) $y = -2x + 4$

$2x + y = 4$

$\underline{\underline{\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}y = 1}} \Rightarrow A = \frac{1}{2}, \; B = \frac{1}{4}$

b) $x \cos\Theta + y \sin\Theta = r \qquad / :r$

$x \underbrace{\frac{\cos\Theta}{r}}_{A = \frac{1}{2}} + y \underbrace{\frac{\sin\Theta}{r}}_{B = \frac{1}{4}} = 1$

$\Rightarrow \frac{\cos\Theta}{r} = \frac{1}{2} \; (1) \qquad \frac{\sin\Theta}{r} = \frac{1}{4} \; (2)$

(1) und (2) nach r umformen und gleichsetzen.

$2\cos\Theta = 4\sin\Theta$

$\frac{1}{2} = \frac{\sin\Theta}{\cos\Theta} = \tan\Theta$

$\Rightarrow \underline{\underline{\Theta}} = \arctan\left(\frac{1}{2}\right) = \underline{\underline{26.6^\circ}}$

Mit (1) folgt: $\frac{\cos\Theta}{r} = \frac{1}{2} \Rightarrow \underline{\underline{r}} = 2\cos\Theta = \underline{\underline{1.79}}$

$\Longrightarrow \; x \cos 26.6^\circ + y \sin 26.6^\circ = 1.79$