Numerische Lösung von Differentialgleichungen

Explizites Euler-Verfahren

$$\boxed{y_{n+1} = y_n + h \cdot f(x_n, y_n)} \qquad \boxed{x_{n+1} = x_n + h}$$

mit $f(x_n, y_n)$: Steigung bei x_n, y_n
h: Schrittweite

x: unabhängige Variable
y: abhängige Variable

Implizites Euler-Verfahren

$$\boxed{y_{n+1} = y_n + h \cdot f(x_{n+1}, y_{n+1})} \qquad \boxed{x_{n+1} = x_n + h}$$

Runge-Kutta-Verfahren 2. Ordnung

$$\boxed{k_1 = h \cdot f(x_n, y_n)}$$

$$\boxed{k_2 = h \cdot f(x_n + \tfrac{h}{2}, y_n + \tfrac{k_1}{2})}$$

$$\boxed{y_{n+1} = y_n + k_2} \qquad \boxed{x_{n+1} = x_n + h}$$

Linearisierung um den Arbeitspunkt

1. Alle Ableitungen $\dot{x}, \ddot{x}, \dddot{x}, \ldots$ in der DGL ersetzen durch $\Delta\dot{x}, \Delta\ddot{x}, \Delta\dddot{x}, \ldots$
2. Alle linearen Terme $a \cdot u_1 + b \cdot u_2 + \ldots$ zeitvariabler Größen (Zustandsgrößen, Eingangssignale) ersetzen durch $a \cdot \Delta u_1 + b \cdot \Delta u_2 + \ldots$
3. Alle konstanten Terme entfallen.
4. Alle nichtlin. Terme $f(u_1, u_2, u_3, \ldots)$, in denen zeitvariable Größen $u_1, u_2, u_3, \ldots$ miteinander verknüpft sind, ersetzen durch $\Delta f = \left.\frac{\partial f}{\partial u_1}\right|_{AP} \cdot \Delta u_1 + \left.\frac{\partial f}{\partial u_2}\right|_{AP} \cdot \Delta u_2 + \ldots\ldots$

Normierung von Gleichungen

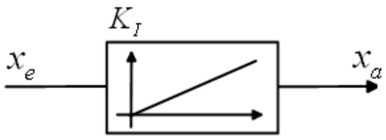
$$\boxed{G = \hat{G} \cdot G_N}$$

$\hat{G}$: Zahlenwert
G_N : Wunscheinheit

Grundlegendene Systemtypen

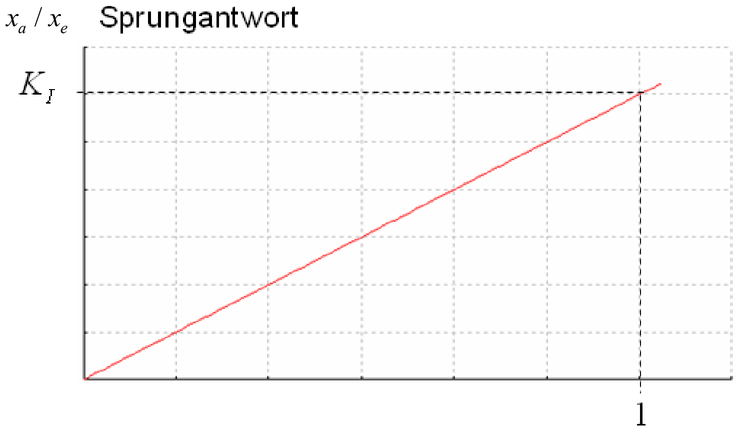
Integralglied (I)

ohne Verzögerung (=Strecke ohne Ausgleich)



Differentialgleichung:

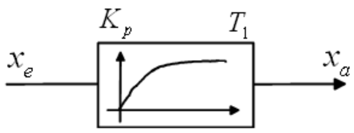
$$\boxed{\dot{x}_a = K_I \cdot x_e}$$



Übertragungsfunktion:

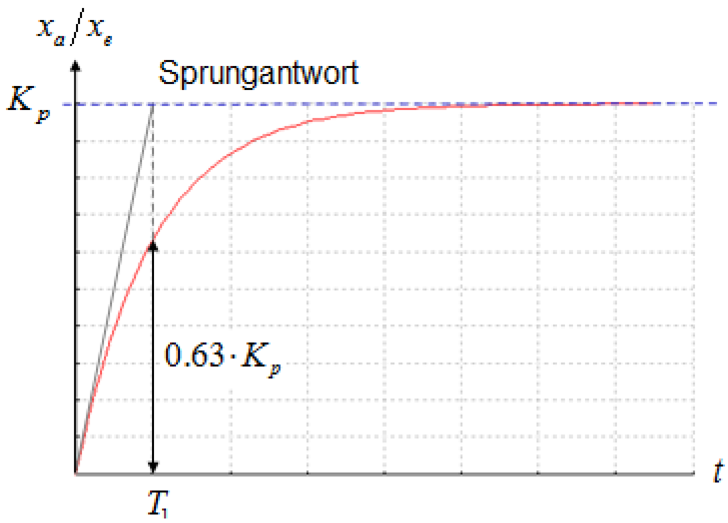
$$\boxed{G(s) = K_I \frac{1}{s}}$$

Verzögerungsglied 1. Ordnung (PT$_1$)



Differentialgleichung

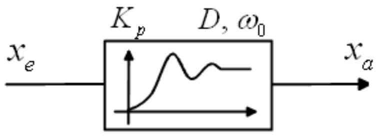
$$\boxed{T_1 \cdot \dot{x}_a + x_a = K_p \cdot x_e}$$



Übertragungsfunktion:

$$\boxed{G(s) = \frac{X_a(s)}{X_e(s)} = \frac{K_p}{(T_1 s + 1)}}$$

Verzögerungsglied 2. Ordnung (PT_2)



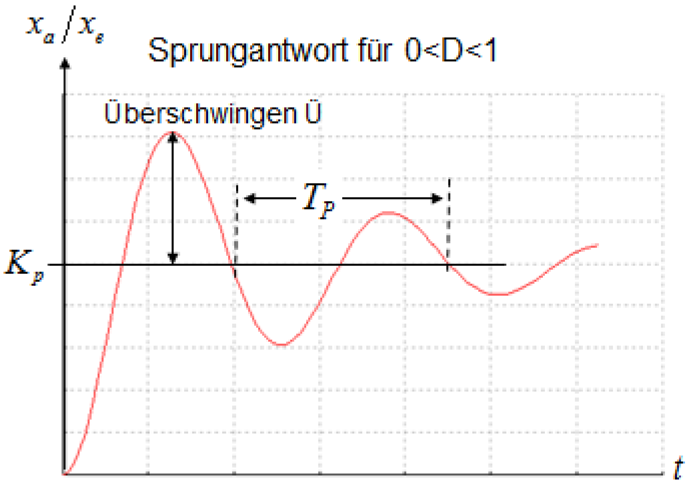
im Falle konj. komplexer Pole (0<D<1)

Differentialgleichung:

$$\frac{1}{\omega_0^2} \cdot \ddot{x}_a + \frac{2D}{\omega_0} \dot{x} + x_a = K_p \cdot x_e$$

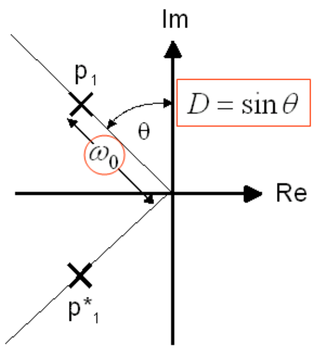
Übertragungsfunktion:

$$G(s) = K_p \cdot \frac{1}{\frac{1}{\omega_0^2} s^2 + 2 \frac{D}{\omega_0} s + 1} = K_p \cdot \frac{\omega_0^2}{s^2 + 2D\omega_0 s + \omega_0^2}$$



$$\omega_e = \frac{2\pi}{T_P} \qquad \omega_0 = \frac{\omega_e}{\sqrt{1-D^2}} \qquad D = \frac{1}{\sqrt{1 + (\pi / \ln ü)^2}}$$

Polverteilung im Falle komplexer Pole :



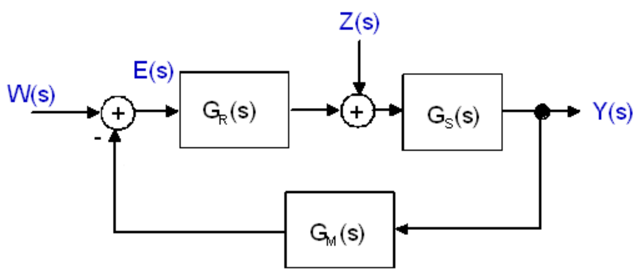
Einige Formeln zu Regelkreisen

Übertragungsfunktion eines geregelten Systems

Mit $G_O(s) = G_R(s) \cdot G_S(s) \cdot G_M(s)$

gilt für die Übertragungsfunktion

$$G_W(s) = \frac{G_R(s) \cdot G_S(s)}{1 + G_O(s)}$$



Sprungantwort Systems im eingeschwungenen Zustand

$$\lim_{t \to \infty} y(t) = \lim_{s \to 0} G(s)$$

Algebraische Stabilitätskriterien

Notwendiges Kriterium:

Gegeben sei das Polynom:

$N(s) = a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \ldots\ a_{n-1} s + a_n \qquad \text{mit} \quad a_0 > 0$

Sind ein oder mehrere Koeffizienten Null oder negativ,
so ist mindestens einer der Nullstellen auf oder rechts der Imaginärachse.

Hurwitz-Kriterium:

$$H = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & a_7 & \ldots\ldots \\ a_0 & a_2 & a_4 & a_6 & \ldots\ldots \\ 0 & a_1 & a_3 & a_5 & \ldots\ldots \\ 0 & a_0 & a_2 & a_4 & \ldots\ldots \\ 0 & 0 & a_1 & a_3 & \ldots\ldots \\ 0 & 0 & a_2 & a_4 & \ldots\ldots \\ .. & .. & .. & .. & \ldots\ldots \end{vmatrix}$$

Gegeben sei das Polynom:

$N(s) = a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \ldots\ a_{n-1} s + a_n \qquad \text{mit} \quad a_0 > 0$

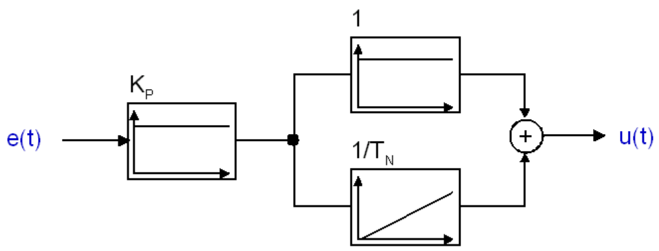
1. Das notwendige Kriterium sei erfüllt.
2. Sind alle „nordwestlichen“ Unterdeterminanten positiv, dann liegen alle Nullstellen des Polynoms auf der linken Seite der Imaginärachse.
3. Auszuwerten sind alle Unterdeterminanten bis H_{n-1}.

Standard-Regler

PI-Regler

Übertragungsfunktion:

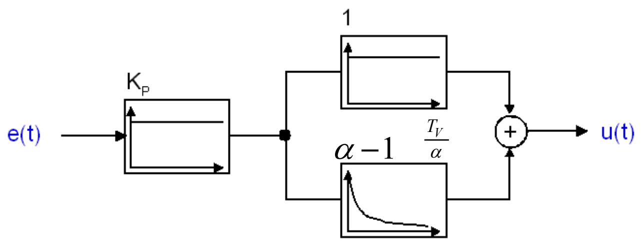
$$G_{PI}(s) = K_P \cdot \frac{sT_N + 1}{sT_N}$$



PD-Regler

Übertragungsfunktion:

$$G_{PD}(s) = K_P \cdot \frac{sT_V + 1}{s\frac{T_V}{\alpha} + 1}$$

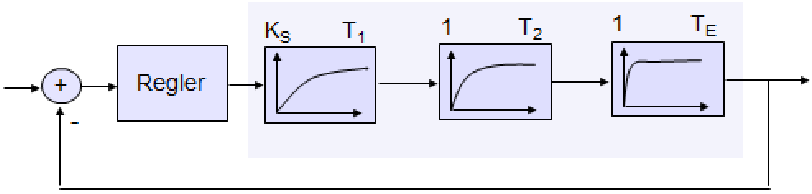


α = Impulshöhe

$\alpha > 1, \qquad typ.\ 5 - 20$

Einstellregeln

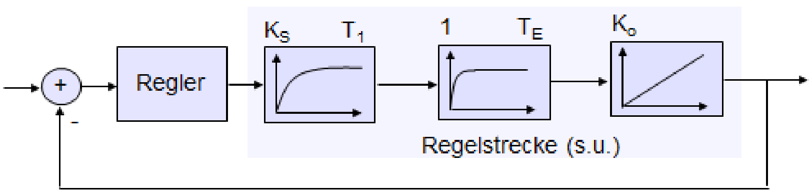
Betragsoptimum:



$$T_1 > T_2 >> T_E\,,\qquad T_E = \sum_{i=3}^{n} T_i$$

Regelstrecke	Typ	Reglerauswahl + Dimensionierung
$G_S(s) = \frac{K_S}{sT_1+1}$	I	$G_R(s) = \frac{K_I}{s}$ $K_I = \frac{1}{2T_1K_S}$
$G_S(s) = \frac{K_S}{(sT_1+1)(sT_2+1)}$ $T_1 > T_2$	PI	$G_R(s) = \frac{K_P(sT_N+1)}{sT_N}$ $T_N = T_1,\ K_p = \frac{T_N}{2K_ST_2}$
$G_S(s) = \frac{K_S}{(sT_1+1)(sT_E+1)}$ $T_1 >> T_E,\ T_E = \sum_{i=2}^{n} T_i$	PI	$G_R(s) = \frac{K_P(sT_N+1)}{sT_N}$ $T_N = T_1,\ K_P = \frac{T_N}{2K_ST_E}$
$G_S(s) = \frac{K_S}{(sT_1+1)(sT_2+1)(sT_E+1)}$ $T_1 > T_2 >> T_E,\ T_E = \sum_{i=3}^{n} T_i$	PID	$G_R(s) = \frac{K_P(sT_N+1)(sT_V+1)}{sT_N}$ 1* $T_N = T_1,\ T_V = T_2,\ K_P = \frac{T_N}{2K_ST_E}$

Symmetrisches Optimum:



$$T_1 >> T_E\,,\qquad T_E = \sum_{i=3}^{n} T_i$$

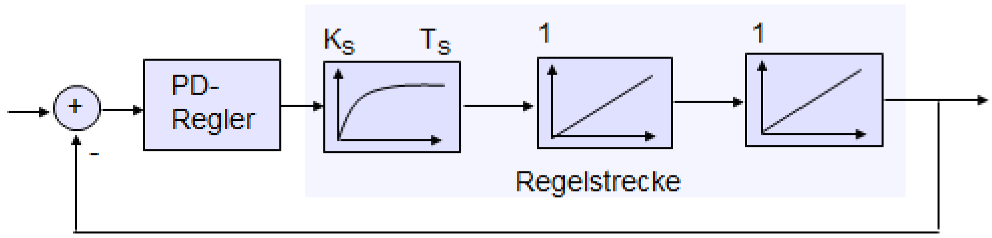
Regelstrecke	Typ	Regler
$G_S(s) = \frac{K_0K_S}{s(sT_E+1)}$ $T_E = \sum_{i=2}^{n} T_i$	PI	$G_R(s) = \frac{K_P(sT_N+1)}{sT_N}$ $T_N = \beta^2 T_E,\ K_P = \frac{1}{\beta K_S T_E K_0}$
$G_S(s) = \frac{K_0K_S}{s(sT_1+1)(sT_E+1)}$ $T_1 >> T_E,\ T_E = \sum_{i=3}^{n} T_i$	PID	$G_R(s) = \frac{K_P(sT_N+1)(sT_V+1)}{sT_N}$ 1* $T_V = T_1,\ T_N = \beta^2 T_E,\ K_P = \frac{1}{\beta K_S T_E K_0}$

β vorgebbar

$\beta = 2$ schnelleres Anregeln aber mehr Überschwingen (Standardeinstellung)

$\beta = 4$ langsameres Anregeln aber weniger Überschwingen

Einstellregel für doppelt integrierende Systeme:



$$G_{PD}(s) = K_R \cdot \frac{sT_V + 1}{s\frac{T_V}{\alpha} + 1}$$

$$T_V = 10 \cdot T_S \sqrt{\alpha} \qquad K_R = \frac{\sqrt{\alpha}}{K_S \cdot T_V^2}$$

α	Überschw. bei Eingangssprung
5	45%
10	30%
20	20%

Quasikontinuierlicher digitaler PID-Regler:

<u>Iterationsformel:</u> mit der Abtastzeit T gilt

$$u(k) = u(k-1) + q_0 \cdot e(k) + q_1 \cdot e(k-1) + q_2 \cdot e(k-2)$$

$$q_0 = K_{Pa} \cdot \left(1 + \frac{T_{Va}}{T}\right) \qquad q_1 = -K_{Pa} \cdot \left(1 - \frac{T}{T_{Na}} + 2\frac{T_{Va}}{T}\right) \qquad q_2 = K_{Pa} \cdot \frac{T_{Va}}{T}$$

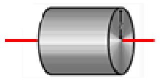
mit der Abtastzeit T.

<u>Umrechnung der PID-Parameter (multiplikative Form → additive Form):</u>

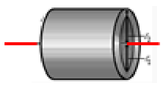
$$K_{Pa} = K_P \cdot \frac{T_N + T_V}{T_N} \qquad T_{Na} = T_N + T_V \qquad T_{Va} = K_P \cdot \frac{T_N \cdot T_V}{T_N + T_V}$$

Physikalische Tabellen

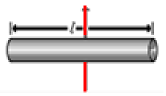
Massenträgheitsmomente für Schwerpunkdrehungen



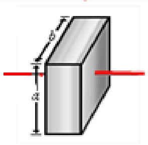
$$J_S = \frac{1}{2} m \cdot r^2$$ Vollzylinder mit Radius r



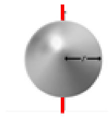
$$J_S = \frac{1}{2} m \cdot (r_2^2 + r_1^2)$$ Hohlzylinder



$$J_S = \frac{1}{12} m \cdot l^2$$ Stab der Länge l um Schwerpunkt



$$J_S = \frac{1}{12} m \cdot (a^2 + b^2)$$ Quader um Schwerpunkt

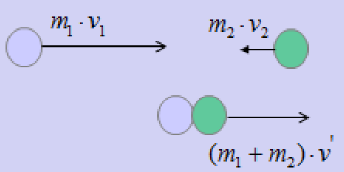


$$J_S = \frac{2}{5} m \cdot r^2$$ Vollkugel mit Radius r

Satz von Steiner $\boxed{J_A = J_S + m \cdot s^2}$

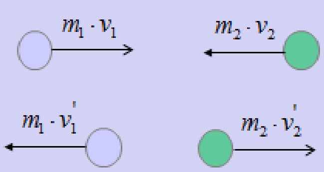
Formeln für geraden zentrischen Stoß

plastischer Stoß (e=0)



$$v' = \frac{m_1 \cdot v_1 + m_2 \cdot v_2}{m_1 + m_2}$$

elastischer Stoß (e=1)



$$v_1' = \frac{2(m_1 \cdot v_1 + m_2 \cdot v_2)}{m_1 + m_2} - v_1$$

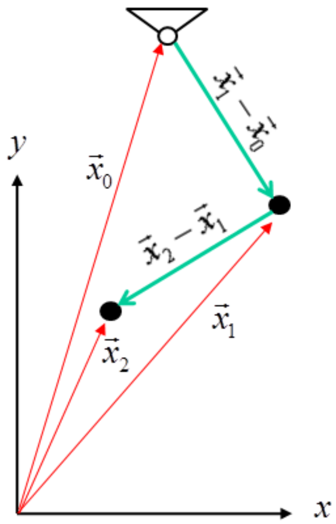
$$v_2' = \frac{2(m_1 \cdot v_1 + m_2 \cdot v_2)}{m_1 + m_2} - v_2$$

Kompatibilitätsbedingungen (zwischen Translation und Rotation)

$$\varphi = \frac{x}{r} \qquad \omega = \dot{\varphi} = \frac{v_t}{r} \qquad \alpha = \ddot{\varphi} = \frac{a_t}{r}$$

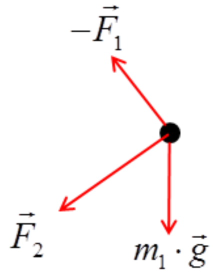
Feder-Masse-Systeme (Beispiel in vektorieller Darstellung)

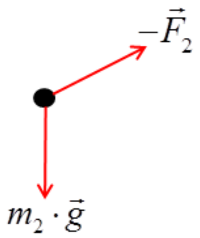
Vorgehensweise:
1. Pos. Richtung festlegen
2. irgendein Zustand einfrieren (z.B. alle Federn gedehnt)
3. Massen freischneiden die wirkenden Kräfte richtungsrichtig einzeichnen
4. Kräfte entgegen der pos. Richtung erhalten ein neg. Vorzeichen
5. Formeln für Kräfte (Betrag u. Richtung) aufstellen → Newtonansatz



$$\vec{F}_1 = k_1 \cdot \overbrace{\left(|\vec{l}_1| - l_{10}\right)}^{\text{Dehnung}} \cdot \overbrace{\frac{\vec{l}_1}{|\vec{l}_1|}}^{\text{Richtungsvektor}}$$

$$\vec{F}_2 = k_2 \cdot \left(|\vec{l}_2| - l_{20}\right) \cdot \frac{\vec{l}_2}{|\vec{l}_2|}$$





$\vec{l}_1 = (\vec{x}_1 - \vec{x}_0)$

$\vec{l}_2 = (\vec{x}_2 - \vec{x}_1)$

$l_{10},\ l_{20}$ Länge der entspannten Federn

$\vec{g} = (0, -g)^T$

$$\underbrace{m_2 \cdot \vec{a}_2}_{\text{Wirkung}} = \underbrace{m_2 \cdot \vec{g} - \vec{F}_2}_{\text{Ursache}}$$

$$\underbrace{m_1 \cdot \vec{a}_1}_{\text{Wirkung}} = \underbrace{m_1 \cdot \vec{g} - \vec{F}_1 + \vec{F}_2}_{\text{Ursache}}$$