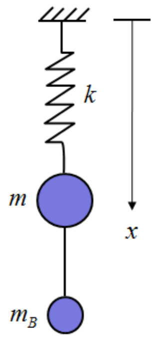
Übung: Berechnung von Anfangswerten

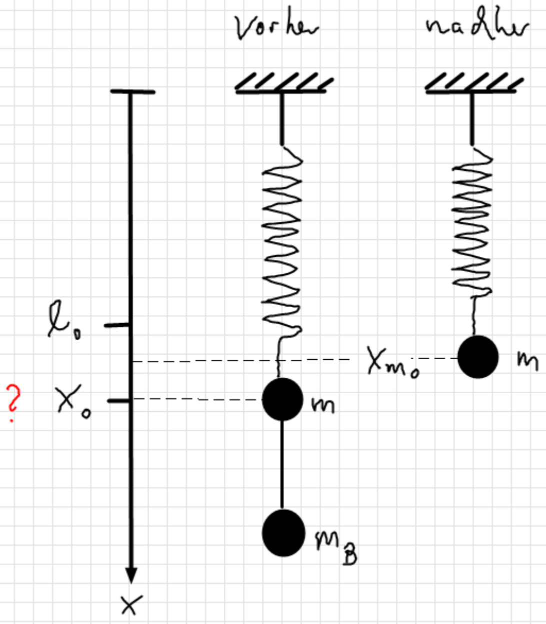
Die Masse m_B wird zum Zeitpunkt t=0 abgeschnitten.
Die Bewegung der Masse m soll modelliert werden.
Dabei soll der Strömungswiderstand berücksichtigt werden.

Gegeben: m, m_B, Radius r der Masse m,
k, Federlänge l_0 im entspannten Zustand,
c_W der Masse m, Dichte des Mediums ρ.



Mitunter ist die Ruhelage zu Simulationsbeginn nicht offensichtlich und muss erst berechnet werden.

$\Longrightarrow$ Anfangswerte



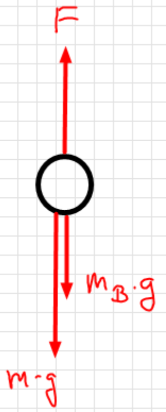
l_0: Lage der Masse m bei entspannter Feder

x_0: Ruhelage der Masse m vor dem Abschneiden

x_{m_0}: Ruhelage der Masse m nach dem Abschneiden

Situation vor dem Abschneiden

Masse freischneiden



Ruhezustand bedeutet:
$\ddot{x} = 0 \quad , \quad \dot{x} = 0$

$$F = (x_0 - \ell_0) \cdot k \qquad (1)$$

ℓ_0: Länge der entspannten Feder

x_0: unbekannte Ruhelage der Masse m

In der Ruhelage gilt:

$$\sum F = 0: \quad -F + (m + m_B) \cdot g = 0 \qquad (2)$$

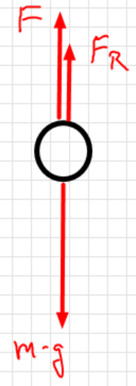
$$-k(x_0 - \ell_0) + (m + m_B) \cdot g = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad x_0 = \frac{g}{k}(m + m_B) + \ell_0$$

$\longrightarrow$ Anfangsposition der Masse m

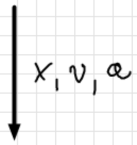
Anm.: In Simulationen möglichst automatisch berechnen und setzen.

Situation nach dem Abschneiden



Annahmen: Masse bewegt sich gerade nach unten.

Feder gerade gedehnt.



$$\sum F = m\cdot\ddot{x}:$$

$$m\cdot g - F - F_R = m\cdot\ddot{x}$$

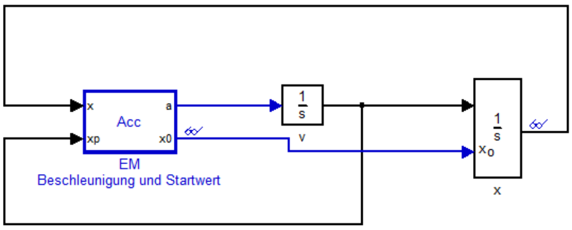
Vorzeichen der Bewegung !

$$m\cdot g - (x-l_0)\cdot k - \frac{1}{2}c_w\cdot A\cdot\rho\cdot\dot{x}^2\cdot\frac{\dot{x}}{|\dot{x}|} = m\ddot{x}$$

$$\Leftrightarrow \quad \ddot{x} = g - \frac{k}{m}(x-l_0)\cdot k - \frac{c_w A\cdot\rho}{2m}\cdot\dot{x}^2\cdot\frac{\dot{x}}{|\dot{x}|}$$

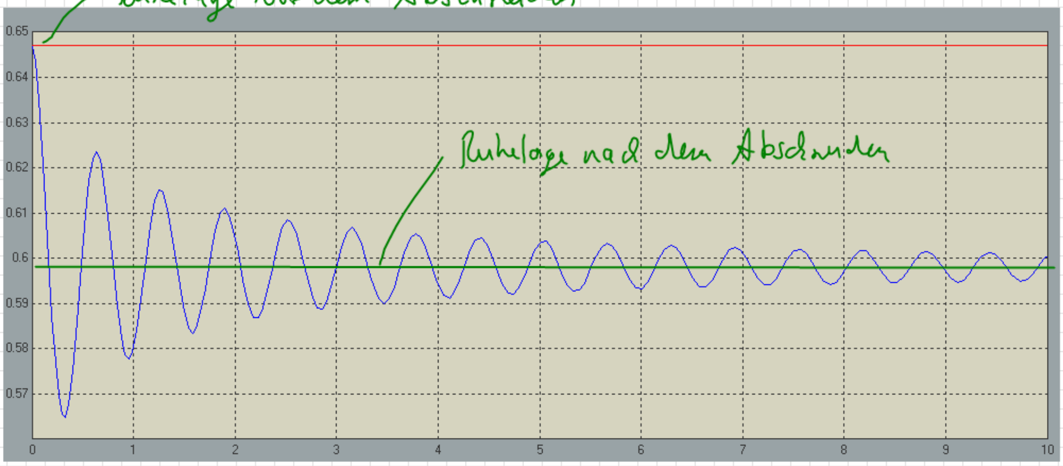
$\longrightarrow$ nichtlin. DGL 2. Ordnung

Anfangswerte.mdl

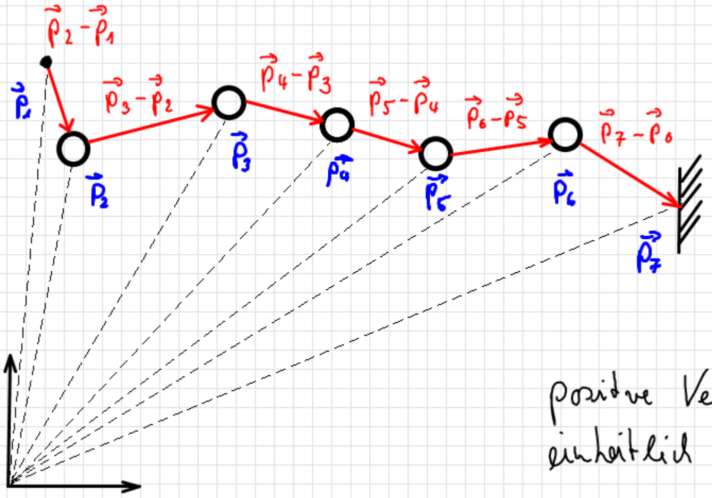



```
function [a, x0] = Acc(x, xp)

m=1;         % [kg]
mB=0.5;      % [kg]
r=0.1;       % [m]
k=100;       % [N/m]
l0=0.5;      % [m]

g=9.81;      % Gravitation      [m/s^2]
cw=0.45;     % cw-Kugel
rho=1000;    % Wasserdichte     [Kg/m^3]

A= pi*r^2; % Querschnittsfläche der Kugel

a  = g - k/m*(x-l0) - cw*A*rho/(2*m)*xp*xp*sign(xp);
% Anm.: Vorzeichenwechsel der Luftreibung berücksichtigen

x0 = g/k*(m+mB)+l0;                                      Anfangswert
```

Ruhelage vor dem Abschneiden

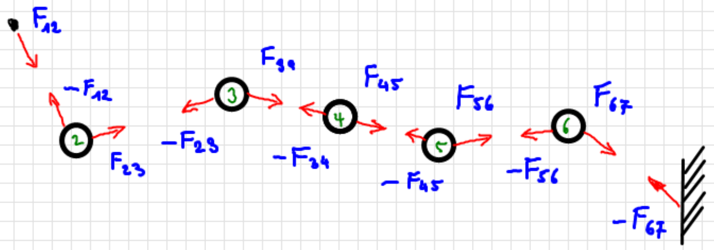


Mehrdimensionale Probleme: Transversalwelle



positive Vektorrichtungen
einheitlich festgelegt

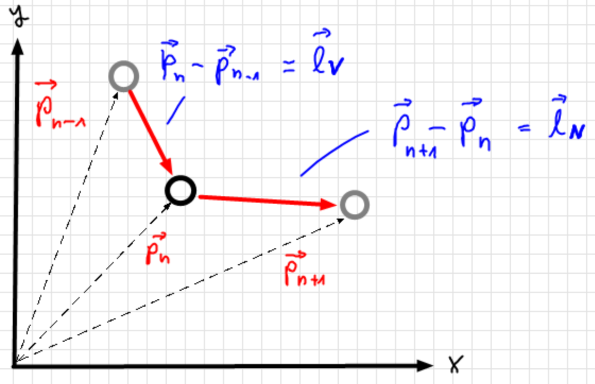
Freigeschnittene Massen (z.B. wenn alle Federn gedehnt)



- Wechselwirkungsprinzip
- Vorzeichen positiv wenn in positive Vektorrichtung
  Vorzeichen negativ wenn in negative Vektorrichtung

Mehrdimensionale Probleme : Transversalwelle

Vektorrichtungen festlegen



Index V : Vorgänger

Index N : Nachfolger

Federkräfte

$$\vec{F}_{nV} = \underbrace{\left[|\vec{\ell}_V| - \ell_0 \right]}_{\text{Federkraft (pos. bei Dehnung)}} \cdot \overset{\text{Federkonstante}}{c} \cdot \underbrace{\frac{\vec{\ell}_V}{|\vec{\ell}_V|}}_{\text{Festlegung der pos. Kraftrichtung}} \qquad (1)$$

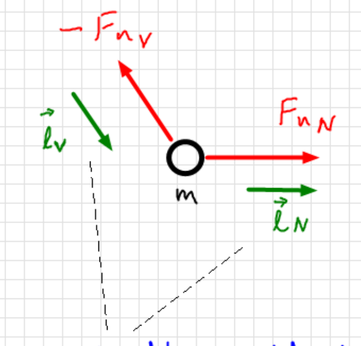
$$\vec{F}_{nN} = \left[|\vec{\ell}_N| - \ell_0 \right] \cdot c \cdot \frac{\vec{\ell}_N}{|\vec{\ell}_N|} \qquad (2)$$

Masse n freischneiden

Anm.: Federkräfte in Dehnungsrichtung antragen

V : Vorgänger

N : Nachfolger



pos. Richtungsdefinition

Aufstellen der DGL

$$\sum \vec{F} = m \cdot \ddot{\vec{x}}_n$$

$$-\vec{F}_{n_V} + \vec{F}_{n_N} = m \cdot \ddot{\vec{x}}_n$$

$$\ddot{\vec{x}} = \frac{1}{m}\left[-\vec{F}_{n_V} + \vec{F}_{n_N}\right] \qquad (3)$$

n : Massenindex

Realisierung in Matlab

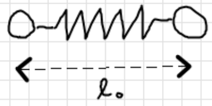
$$X = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ \vdots & \vdots \\ x_k & y_k \end{pmatrix} \qquad v = \begin{pmatrix} v_{x_1} & v_{y_1} \\ v_{x_2} & v_{y_2} \\ \vdots & \vdots \\ v_{x_k} & v_{y_k} \end{pmatrix}$$

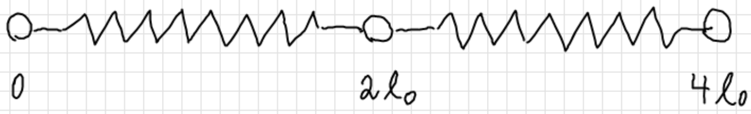
k: Anzahl der Massen

Realisierung in Stateflow

time	Input	Discrete	Inherit: Sa...	-1
v	Local	Continuous	double	k,2
x	Local	Continuous	double	k,2
x_out	Output	Discrete	double	k,2
c	Parameter	Discrete	Inherit: Sa...	-1
l0	Parameter	Discrete	Inherit: Sa...	-1
m	Parameter	Discrete	Inherit: Sa...	-1

Hier: Federn vorgespannt






```
function InitCond
% Massen auf Startpositionen Setzen
for i=1:k
    x(i,:) = [2.0*10*(i-1),   0]; % Federn vorgespannt
    v(i,:) = [0,   0];
end
```

Zum Zeitpunkt $t = 0.1\,s$ und wenn sich die Masse m_1 in Grundposition befindet $(0,0)$ soll die Masse m_1 auf die Position $(0, 0.2) \cdot l_0$ springen.

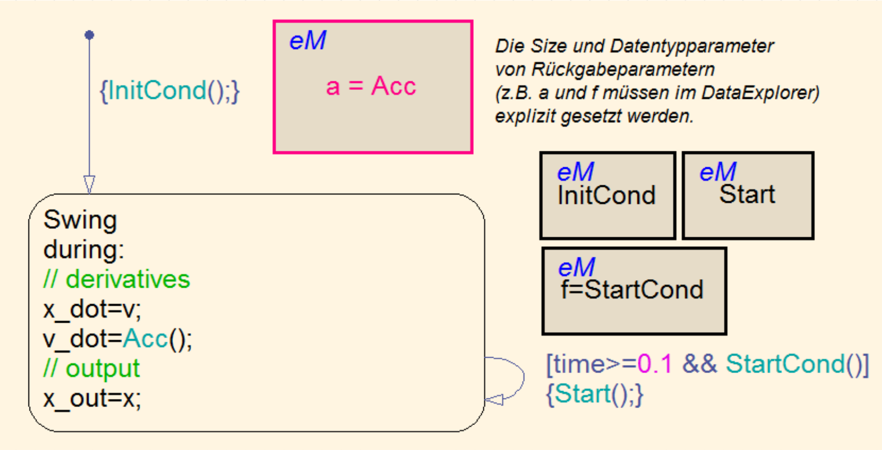

```
function f=StartCond

% F=boolean muss im Model Explorer explizit gesetzt werden
f = x(1,1)==0 && x(1,2)==0;
```

```
function Start

x(1,:)=[0.0, 0.2]*10;
```

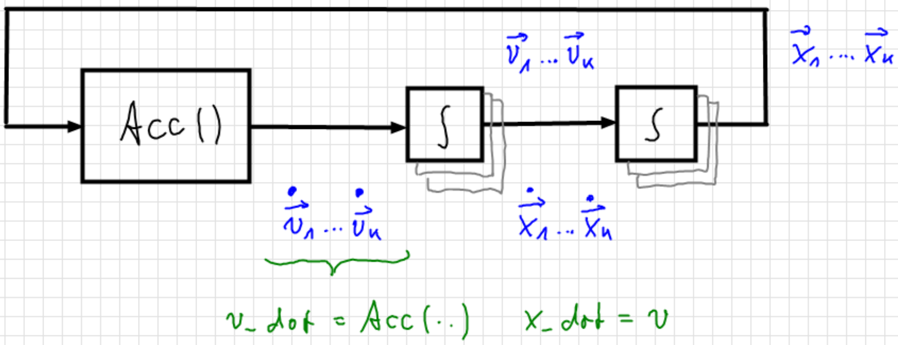
Beschleunigung

```
function a = Acc

    % Größe (size = k,2) im Data Explorer setzen !!!!
    a=zeros(k, 2);

    % Das erste und letzte Element sollen fix sein.
    a(1,:)=[0,0];      % statt  a(1,1)=0;   a(1,2)=0;
    a(k,:)=[0,0];      % statt  a(k,1)=0;   a(k,2)=0;

    for i=2:k-1
        a(i,:) = CalcAcceleration(i);
    end
end
% ----------------------------------------------------
function ai = CalcAcceleration(i)

    ai = [0,0];

    % Kraftvektor durch Vorgänger
    lV = x(i,:)-x(i-1,:);
    lVb = norm(lV);
    FVorg = c*(lVb-l0) * lV/lVb;

    % Kraftvektor durch Nachfolger
    lN = x(i+1,:)-x(i,:);
    lNb = norm(lN);
    FNach = c*(lNb-l0) * lN/lNb;

    % Gesamtkraftvektor
    F = - FVorg + FNach;                        % ungedämpft
    % F = - FVorg + FNach - 0.02*v(i,:);        % gedämpft

    % Beschleunigung
    ai = F/m;                               % ohne Gravitation
    % ai = F/m + [0,-0.01];                 % mit Gravitation
end
```

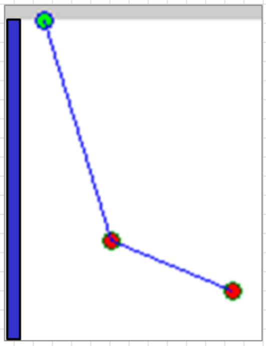
Stateflow - Automat



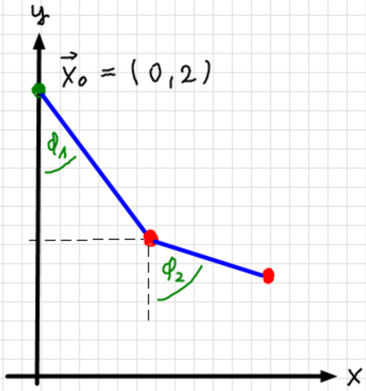
Als Analogrechnerschaltbild würde die Simulation so aussehen:



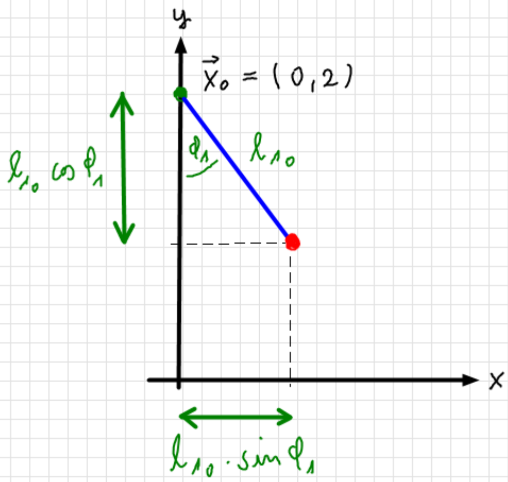
Federpendel mit Ausschlag



Festlegung des Koordinatensystems



Startposition der Masse 1 (φ_1 soll vorgegeben werden)



Startposition mit Auslenkung

$$\vec{x}_0 + l_{10} \left(\sin \varphi_1 , - \cos \varphi_1 \right)$$

Masse 2 analog

$$\vec{x}_1 + l_{20} \left(\sin \varphi_2 , - \cos \varphi_2 \right)$$

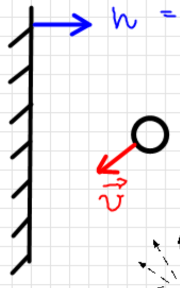
Realisierung in Matlab

$$X = \begin{pmatrix} X(1,1) & X(1,2) \\ X(2,1) & X(2,2) \end{pmatrix} \begin{matrix} \text{— Pos. } m_1 \\ \text{— Pos. } m_2 \end{matrix}$$

v analog

```
function Init

% Init. Pendelwinkel
phi1=phi1g * pi/180;
phi2=phi2g * pi/180;

% Initialisiere v
v(1)=0;
v(2)=0;

% Koordinaten des Aufhängepunktes
x0=[0,2];

% Startkoordinaten der Massen
x(1,:) = x0      +  l10*[sin(phi1), -cos(phi1)];
x(2,:) = x(1,:)  +  l20*[sin(phi2), -cos(phi2)];
```

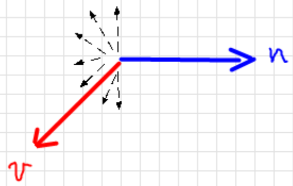
Wann bewegt sich die Masse zur Wand?



$\vec{n} = (1,0)^T$

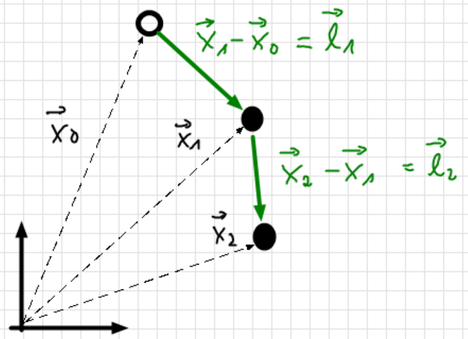
Skalarprodukt ist definiert als:

$$\vec{v}^T \cdot \vec{n} = |v| \cdot |n| \cdot \cos(\sphericalangle \vec{v}, \vec{n})$$



Wenn $\sphericalangle(n,v)$ im Bereich $90° \ldots 270°$ liegt bewegt sich die Masse zur Wand, d.h., wenn $\vec{v}^T \cdot \vec{n} < 0$ ist!

Vektorrichtungen



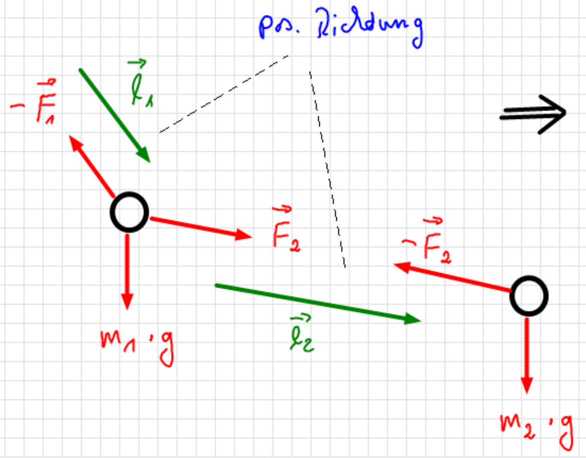
Federkräfte

$$\vec{F}_1 = \left(|\vec{\ell}_1| - \ell_{10} \right) \cdot k_1 \cdot \frac{\vec{\ell}_1}{|\vec{\ell}_1|}$$

$$\vec{F}_2 = \underbrace{\left(|\vec{\ell}_2| - \ell_{20} \right)}_{\substack{\text{Dehnung} \\ \text{(pos. bei Dehnung)}}} \cdot k_2 \cdot \underbrace{\frac{\vec{\ell}_2}{|\vec{\ell}_2|}}_{\text{Festlegg. der pos. Kraftrichtung}}$$

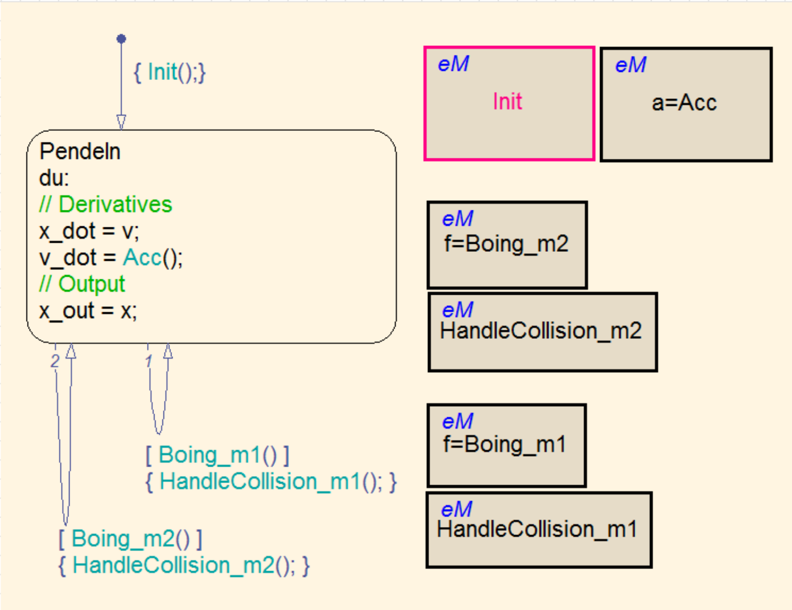
Massen einzeln freischneiden

Anm.: Federkräfte in Dehnungs-richtung antragen



$$\Longrightarrow \quad m_1 g - \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = m_1 \ddot{\vec{x}}_1$$

$$m_2 \cdot g - \vec{F}_2 = m_2 \ddot{\vec{x}}_2$$




```
function f=Boing_m1
    f=false; % Muss auf boolean gesetzt werden!
    n=[1;0]; % Wandnormale
    if(x(1,1) < Wandposition_x) && (v(1,:)*n < 0)
        % Wandkontakt UND Bewegung zur Wand !
        f=true;
    end
```

Boing_m2 analog

```
function HandleCollision_m1

% Reflexion an Wand
v(1,1)=-v(1,1);
```

x-Komponente
≙ Normalkomponente

HandleCollision_m2 analog

```
function a=Acc()

% Datentyp-Parameter in Model-Explorer
% setzen (size und first index)!!!
a=zeros(2,2);

g = [0, -9.81]; % Erdbeschleunigung

l1  = x(1,:)-x0;
l2  = x(2,:)-x(1,:);
l1b = norm(l1);
l2b = norm(l2);

F1 = k1*(l1b-l10)*l1/l1b;
F2 = k2*(l2b-l20)*l2/l2b;

a(1,:) = 1/m1 * ((m1*g)-F1+F2);
a(2,:) = 1/m2 * ((m2*g)-F2);

return
```

Vektor $\vec{x}_0 \to \vec{x}_1$

Vektor $\vec{x}_1 \to \vec{x}_2$

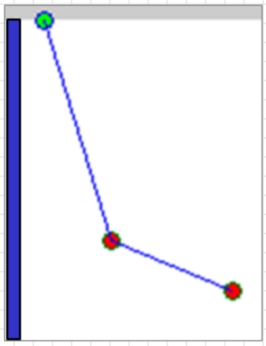
Abstand $\vec{x}_0 - \vec{x}_1$

Abstand $\vec{x}_1 - \vec{x}_2$

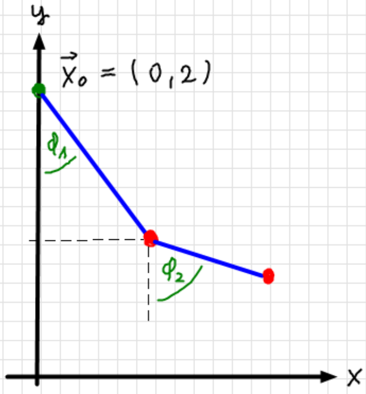
Federkraft-vektoren

Beschleunigung

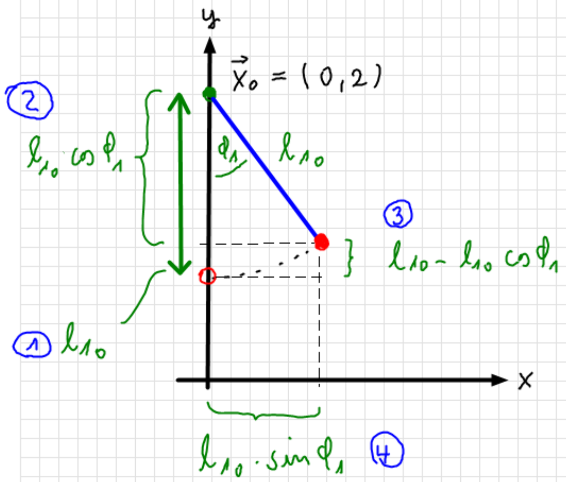
Federpendel mit Ausschlag



Festlegung des Koordinatensystems



Startposition der Masse 1 (φ_1 soll vorgegeben werden)



Startposition ohne Auslenkung

$$\vec{x}_0 + (0, -l_{10})$$

Startposition mit Auslenkung

$$\vec{x}_0 + (0, -l_{10}) + l_{10}(\sin\varphi_1, 1-\cos\varphi_1)$$

Masse 2 analog