B

Theorie der Signalverarbeitung

B

1. Determinierte Signale in LTI-Systemen

- **Elementarsignale und -operationen**
- **LTI-Systeme**
- **Faltungsintegral**
- **Diracstoß – ein wichtiges Elementarsignal**

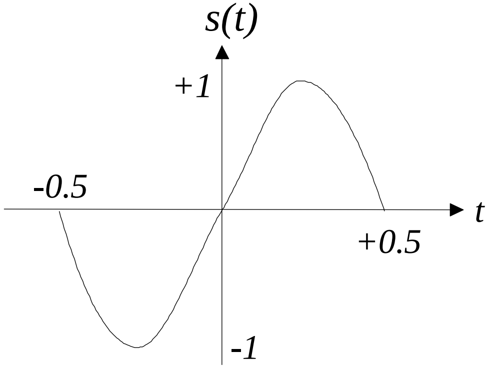
1 Grundformen

Ein *Signal s(t)* ist die Darstellung einer Information durch physikalische Größen (z.B. ein Spannungsverlauf).

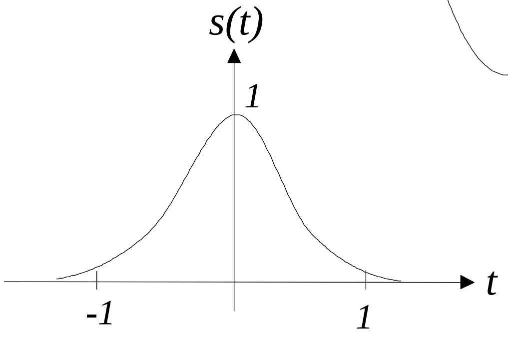
Elementarsignale zeichnen sich durch eine besonders einfache Form haben.

In der *Systemtheorie* ist die dimensionslose Beschreibung üblich.

<u>Algebraisch beschreibbare Elementarsignale:</u>



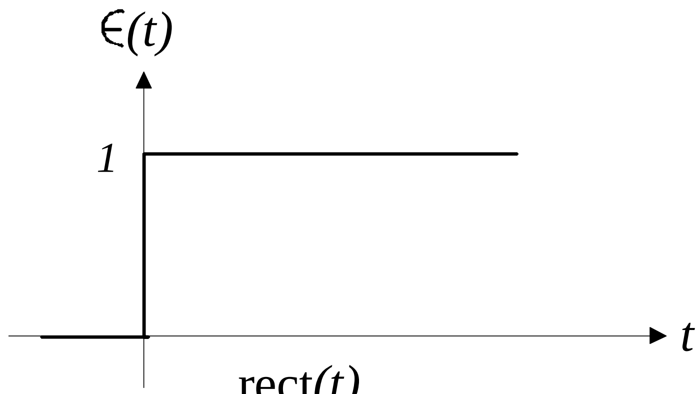
Sinussignal: $s(t) = \sin(2\pi t)$



Gaußsignal: $s(t) = e^{-\pi t^2}$

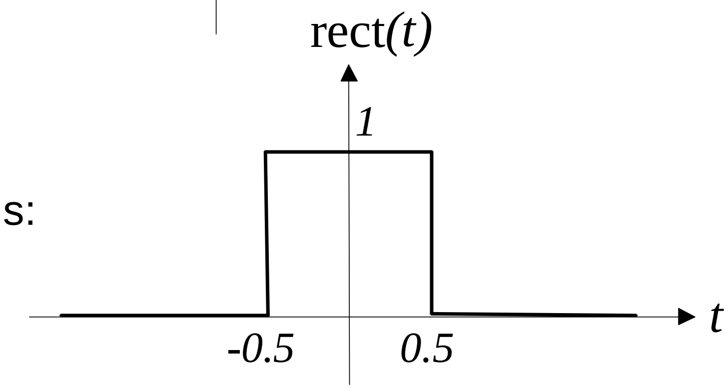
2 Stückweise beschreibbare Elementarsignale

Sprungfunktion:



$$\epsilon(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t < 0 \\ 1 & \text{für } t \geq 0 \end{cases}$$

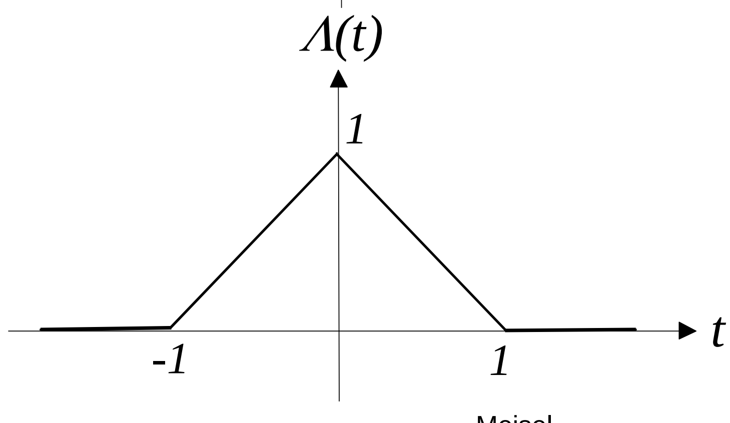
Rechteckimpuls:



$$\mathrm{rect}(t) = \begin{cases} 1 & \text{für } |t| \leq 0.5 \\ 0 & \text{für } |t| > 0.5 \end{cases}$$

Anm.: Fläche = 1

Dreieckimpuls:



$$\Lambda(t) = \begin{cases} 1 - |t| & \text{für } |t| \leq 1 \\ 0 & \text{für } |t| > 1 \end{cases}$$

Anm.: Fläche = 1

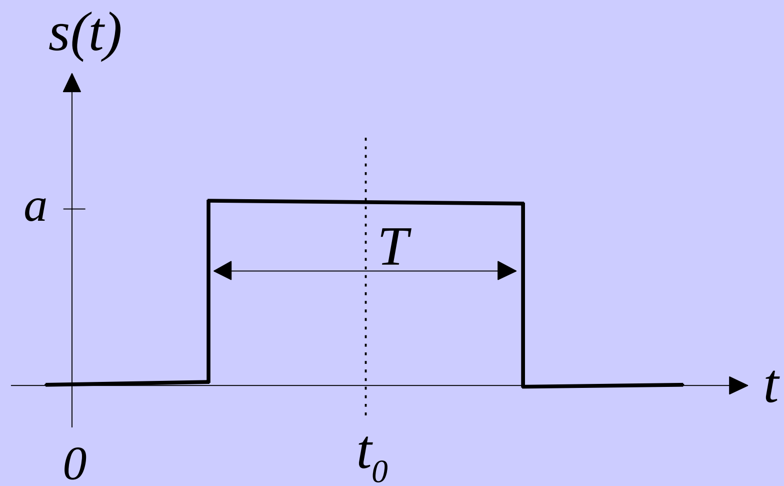
3 Signale dehnen und verschieben

Man erhält Verschiebung um t_0 nach rechts, indem die Zeit **t** durch $\mathbf{t-t_0}$ ersetzt wird.

Eine zeitliche Dehnung um den Faktor T erhält man, indem die Zeit **t** durch **t/T** ersetzt wird. für T>1 wird das Signal breiter, für T<0 wird es schmaler.

Beispiel:

$$s(t) = a \cdot \mathrm{rect}\left(\frac{t-t_0}{T}\right)$$



ÜBUNG: Elementarsignale

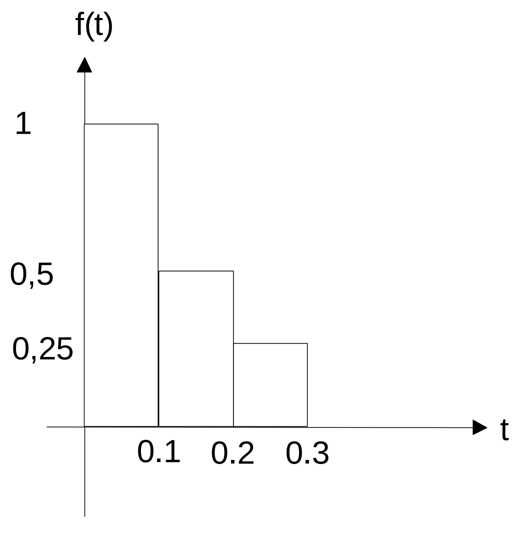
Skizzieren Sie folgende Funktionen unter Angabe von Kennwerten:

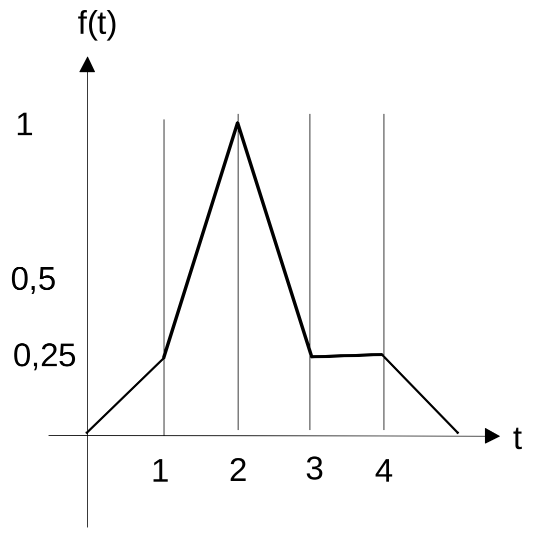
$$s(t) = 2 \cdot rect(2t - 4)$$

$$s(t) = rect(t) \cdot \cos(\pi t)$$

$$s(t) = rect(t - 1) \cdot \sin(4\pi t)$$

Beschreiben Sie die folgenden Funktion mit Hilfe von Elementarsignalen.





B

1. Determinierte Signale in LTI-Systemen

- Elementarsignale und -operationen

- **LTI-Systeme**

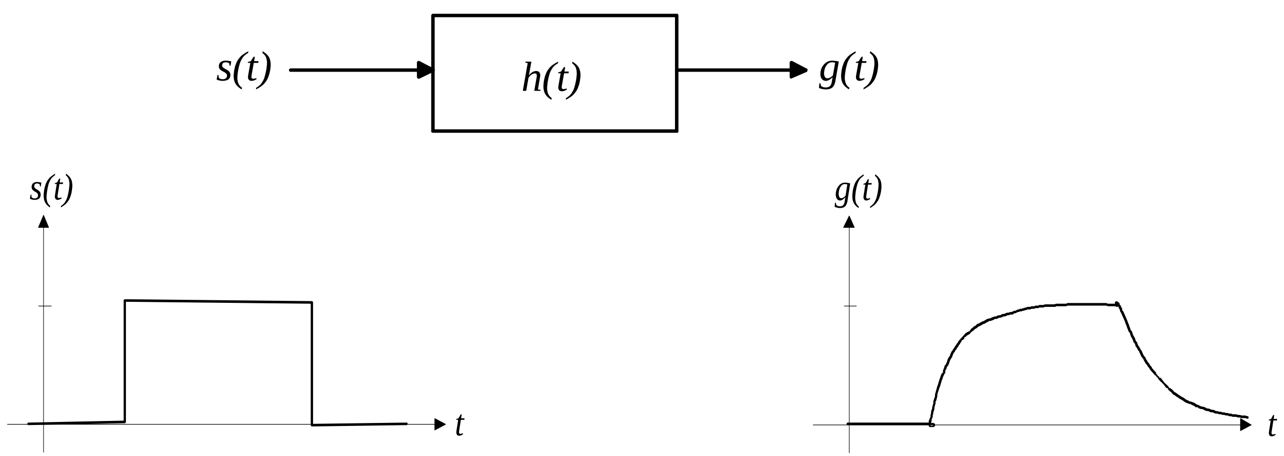
- Faltungsintegral

- Diracstoß – ein wichtiges Elementarsignal

1 Systemdefinition

Als *System* wird im folgenden ein Gebilde bezeichnet, welches ein Eingangs-signal $s(t)$ in ein Ausgangssignal $g(t)$ transformiert (z.B. ein Filter).

$$g(t) = F\{s(t)\} \qquad (1)$$



Eine in technischen Anwendungen besonders wichtige Klasse von Systemen sind die *linearen zeitinvarianten Systeme* (LTI-Systeme).

Beispiele:

- RC-Tiefpass
- Vierpol aus R, L und C
- Lautsprecher
- Klangregelung (z.B. Equalizer, …)
- Raumakustik (Hall, Echo, Frequenzbeeinflussung)
- Korpus einer Gitarre
- Audioeffekt (Chorus, Phaser, Echo, Nachhall, …)
- Störunterdrückungsfilter für EKG- oder EEG-Signale
- ….

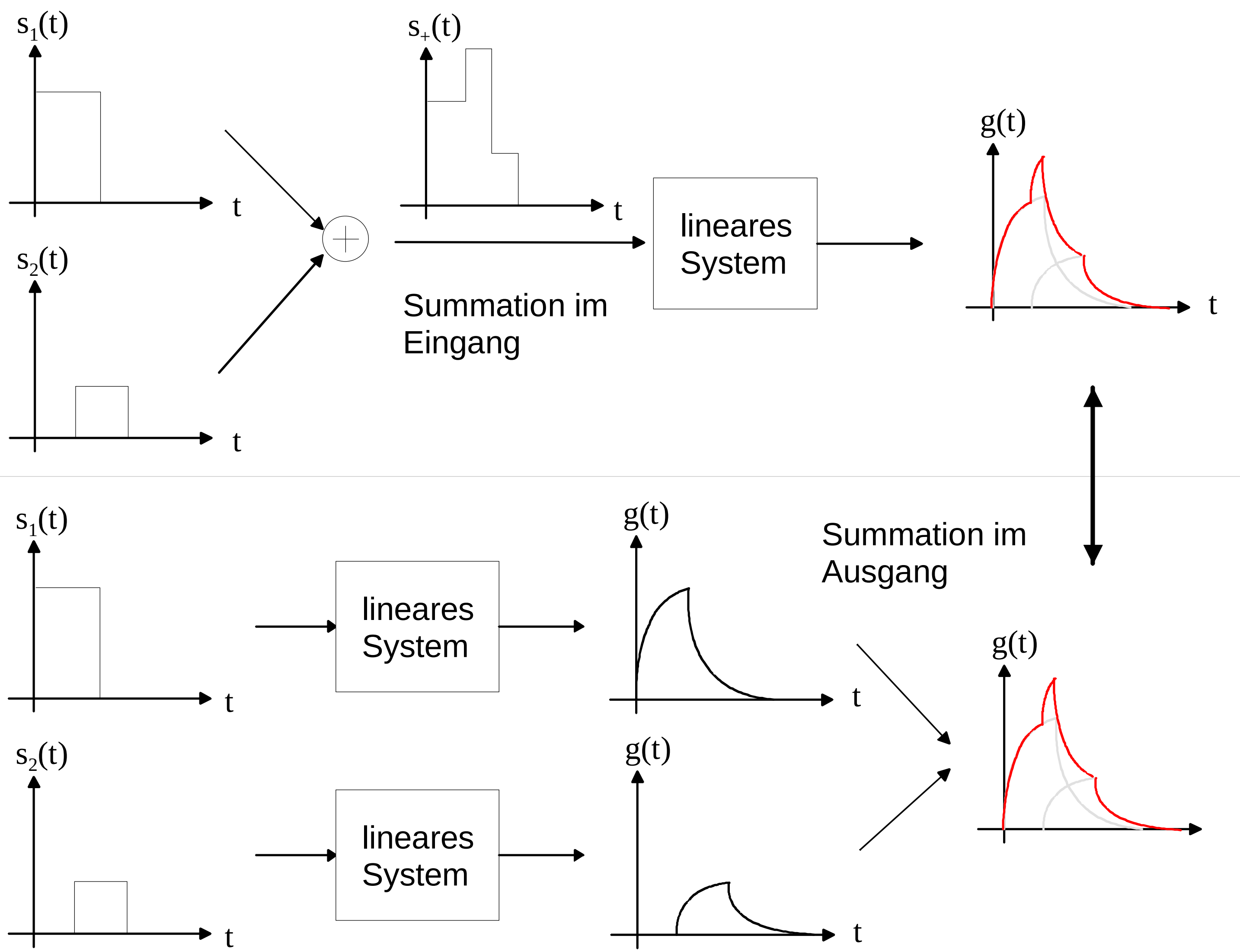
2 Lineare Systeme

Ein System heißt *linear*, wenn jede Linearkombination von Eingangssignalen $s_i(t)$ (i=1,2,...) zu einer entsprechenden Linearkombination von Ausgangssignalen $g_i(t)$ führt.

$$F\left\{\sum_i a_i s_i(t)\right\} = \sum_i a_i g_i(t) \qquad (2)$$

→ s. Beispiel auf n. Seite

Beispiel: Lineares System



3 Zeitinvariante Systeme

Ein System heißt *zeitinvariant*, wenn für jede Zeitverschiebung um t_0 gilt:

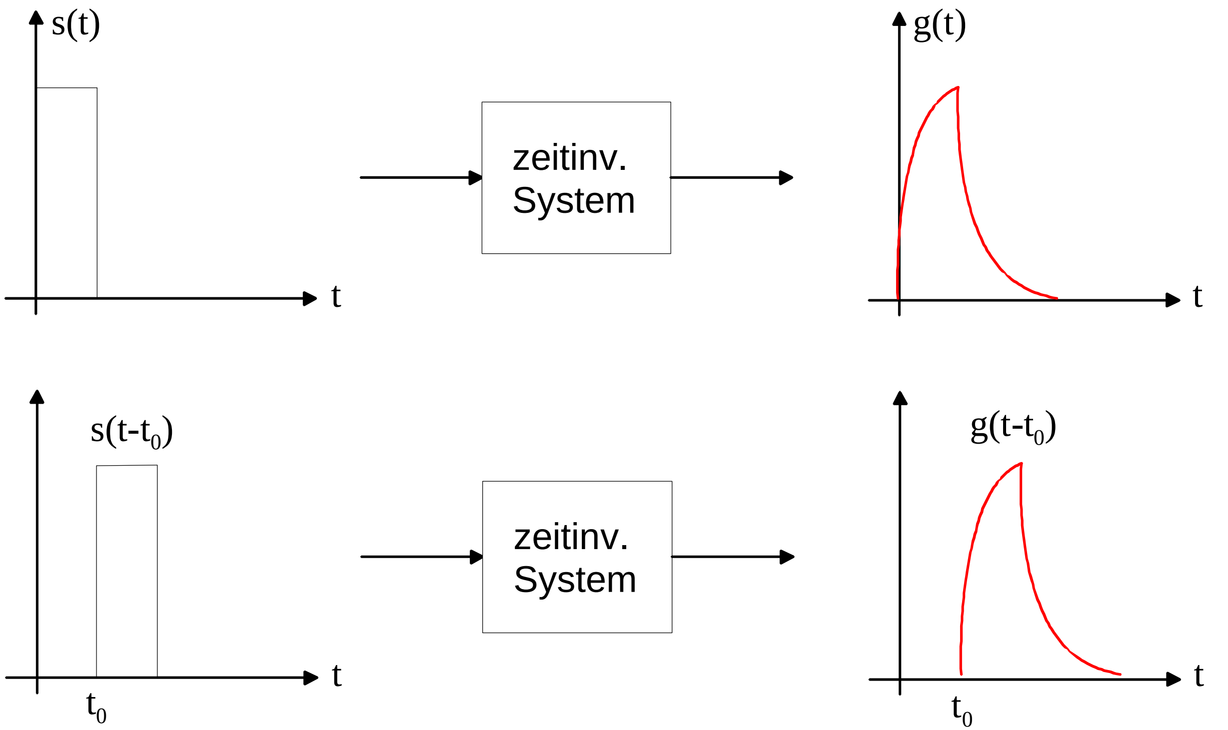
$$F\left\{s(t-t_0)\right\}=g(t-t_0) \qquad (3)$$

Dies bedeutet, bei zeitinvarianten Systemen ist die Form des Ausgangssignals unabhängig von zeitlichen Verschiebungen t_0 des Eingangssignals.

Es kommt lediglich zu einer entsprechenden Verschiebung t_0 des Ausgangssignals.

→ s. Beispiel auf n. Seite

Beispiel: Zeitinvariantes System



ÜBUNG: LTI-Systeme

Zeigen Sie am Beispiel der beiden Abtastsignale-Sequenzen $s_1(x)$ und $s_2(x)$, dass

a) Der gleitende Mittelwert über die Signale linear ist.
b) Der gleitende Median über 3 Werte (der mittlere von 3 Werten) nichtlinear ist.

Wie steht es mit der Zeitinvarianz der beiden Filter?

$s_1(x)=\{1,3,2,5,3,4,6,3,3,3,0,2\}$

$s_2(x)=\{0,3,0,1,4,2,1,0,0,1,4,3\}$

B

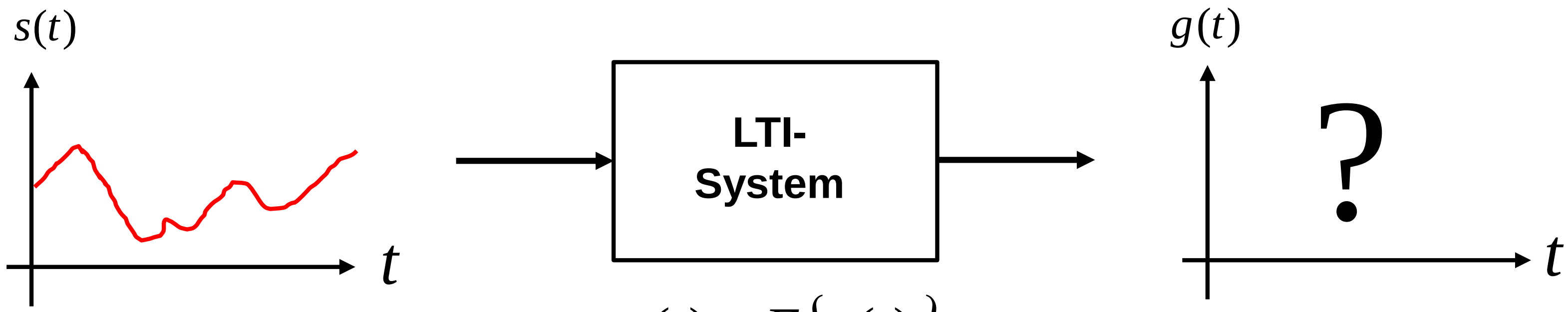
1. Determinierte Signale in LTI-Systemen

- Elementarsignale und -operationen
- LTI-Systeme
- **Faltungsintegral**
- Diracstoß – ein wichtiges Elementarsignal

1 Fragen und Problemstellungen

1.1 Wie beschreibt man mathematisch ein LTI-System ?

Welche math. Operation beschreibt die Transformation des Eingangssignals s(t) auf das Ausgangssignal g(t) ?



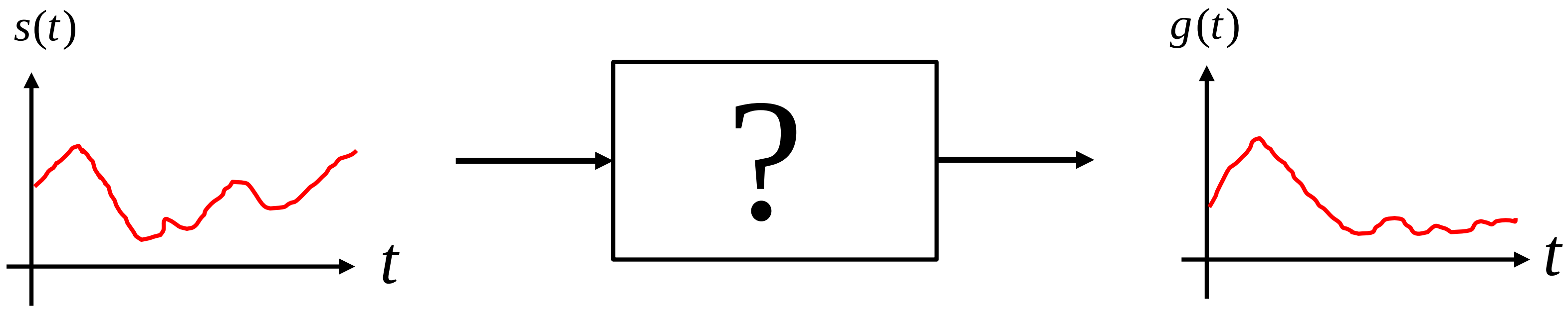
$$g(t) = F\left\{ s(t) \right\}$$

<u>Nutzen</u>: Mit einer solchen math. Operation könnte man

- zu einem gegebenen Eingangssignal das Ausgangssignal berechnen,
- Systeme simulieren,
- Systeme auf dem Rechner nachbilden (z.B. dig. Filter).

1.2 Systemidentifikation

Angenommen das Ein- und Ausgangssignal eines Systems sind gegeben.
Kann man daraus auf das System schließen?
Welche Signale sind besonders geeignet?



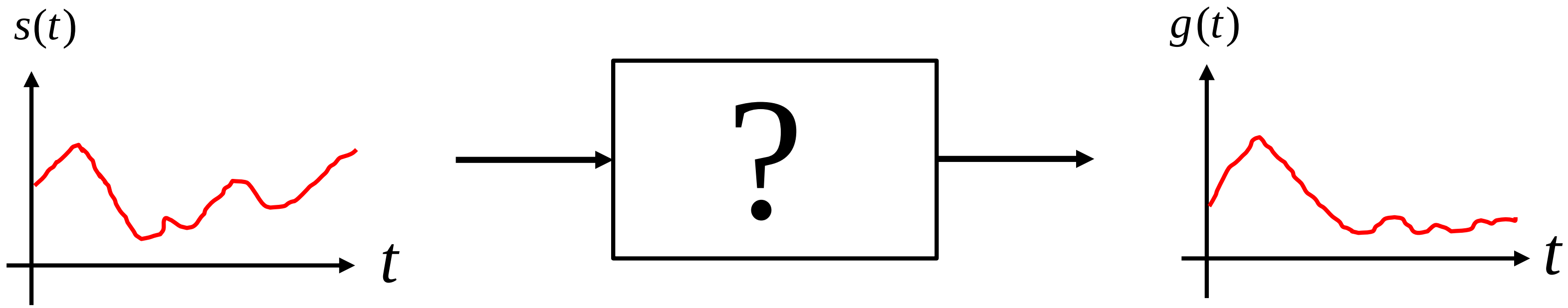
<u>Nutzen</u>:

- Identifikation eines Systems (Blackbox) anhand eines Experiments.
- Damit würde die Simulation experimentell erfasster Systeme möglich.

Beispiel: Die Akustik des Kölner Doms als Audioeffekt.

1.3 Systemmodellierung

Wie kann man ein System so festlegen, dass es ein ganz bestimmtes Verhalten aufweist?



Beispiel: Das System soll so festgelegt werden, dass

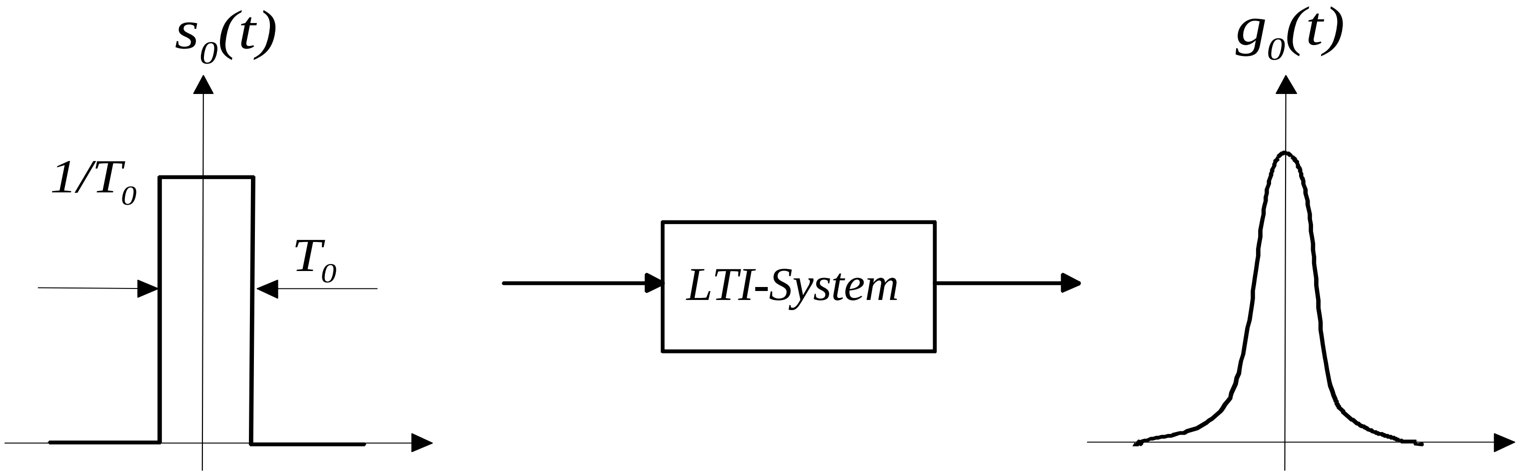
- es auf ein geg. Eingangssignal mit einem gewünschten Ausgangssignal reagiert.
- die im Signal enthaltenen Frequenzen in einer gewünschten Weise verändert werden.

2 Versuch einer math. Beschreibung von LTI-Systemen

Durch Ausnutzung der LTI-Eigenschaften läßt sich ein allgemeiner Ausdruck für die Transformationsgleichung g(t) = F{s(t)} ableiten. ➔ *Faltungsintegral*

Annahme:

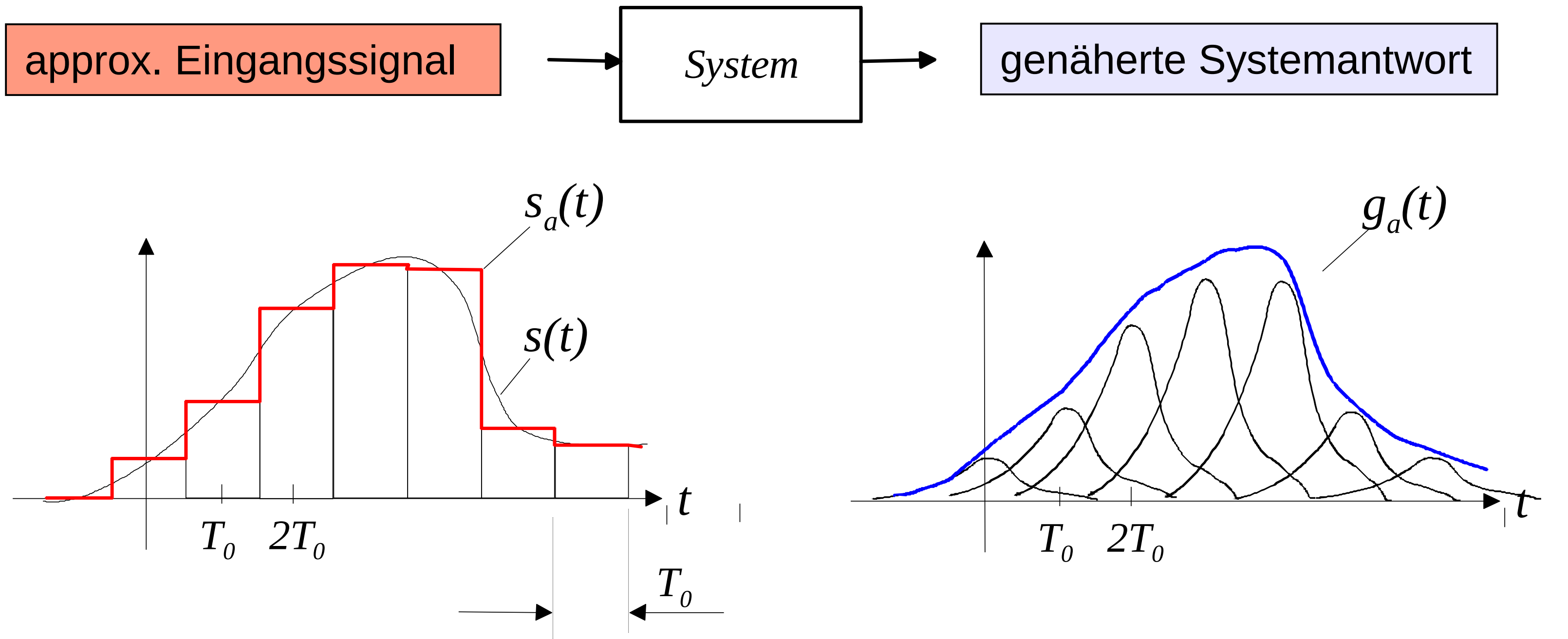
Ein System antworte auf einen Rechteckimpuls $s_0(t)$ der Dauer T_0 und der Höhe $1/T_0$ mit dem Ausgangssignal $g_0(t)$.

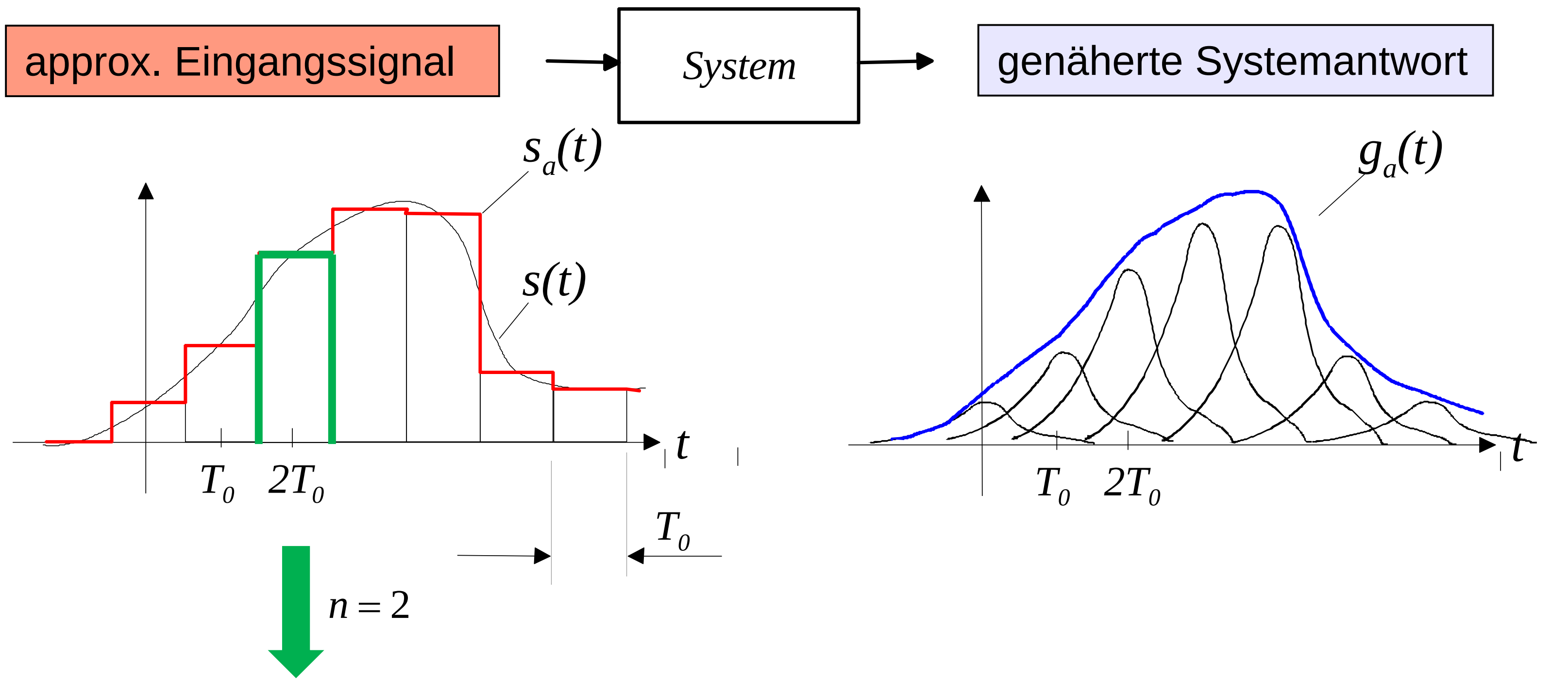


Anm.: Die Fläche des Impulses ist immer 1.

Versuch:

Die Antwort dieses Systems auf ein beliebiges Signals *s(t)* kann nun approximiert werden, indem man das Eingangssignal *s(t)* durch eine **Treppenfunktion $s_a(t)$** annähert, die sich aus amplitudengewichteten und verschobenen Rechteckimpulsen $s_0(t)$ zusammensetzt.



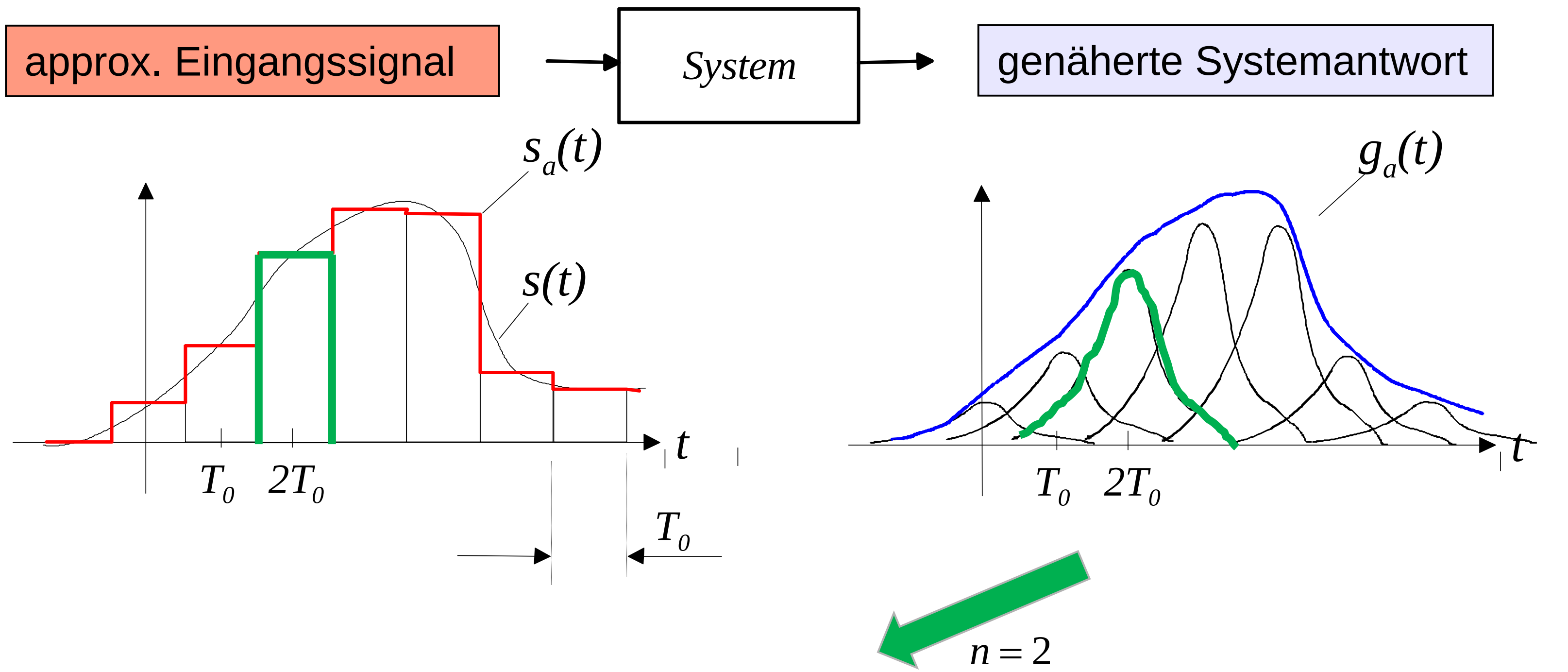


$$s_a(nT_0) = s(nT_0) \cdot T_0 \cdot s_0(t - nT_0)$$

Rechteckimpuls an der Stelle nT_0 und der Höhe $1/T_0$

Rechteckimpuls an der Stelle nT_0 und der Höhe 1

Rechteckimpuls an der Stelle nT_0 und der Höhe $s(nT_0)$

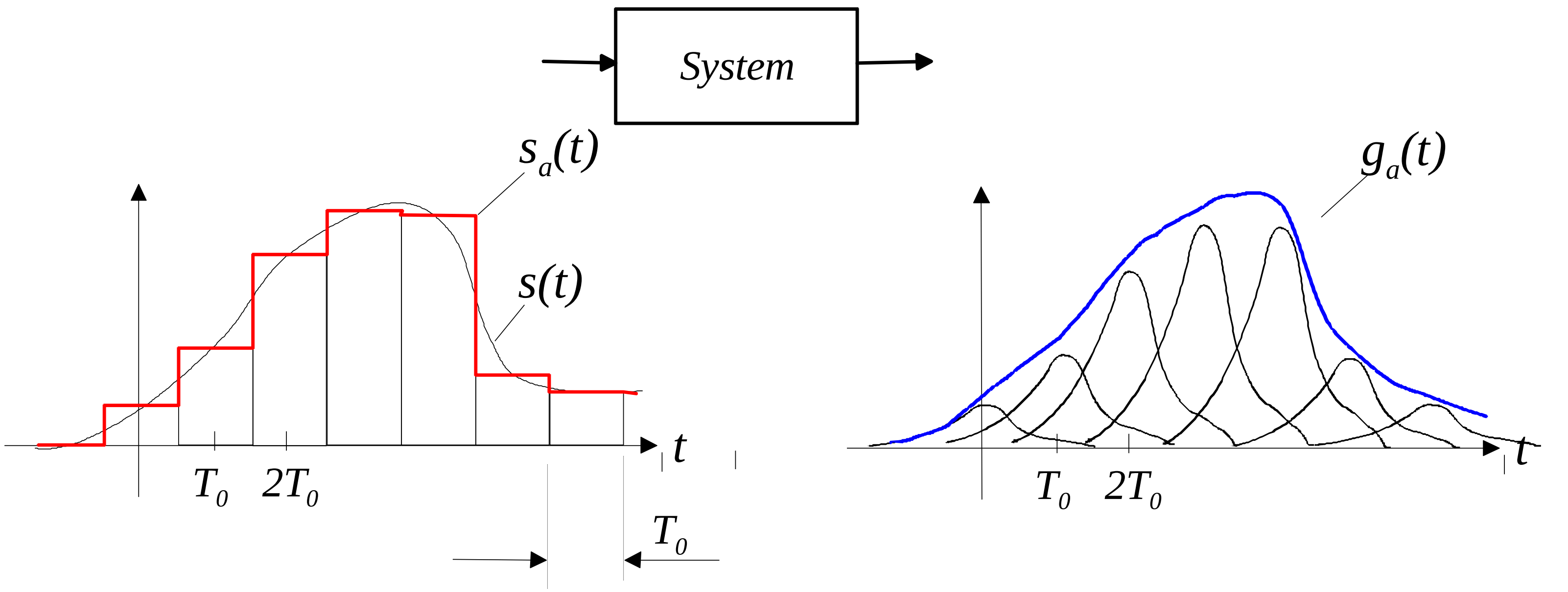


$$s(nT_0) \cdot T_0 \cdot g_0(t - nT_0)$$

Antwort auf den Rechteckimpuls an der Stelle nT_0 und der Höhe $1/T_0$

Antwort auf den Rechteckimpuls an der Stelle nT_0 und der Höhe 1

Antwort auf den Rechteckimpuls an der Stelle nT_0 und der Höhe $s(nT_0)$



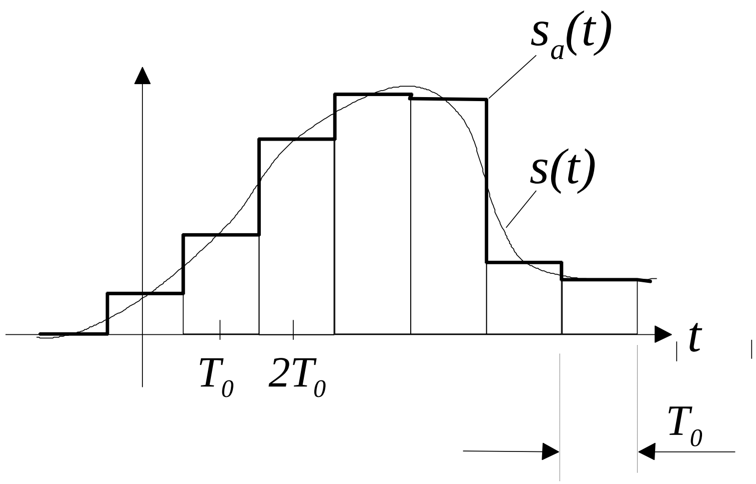
$$s(t) \approx s_a(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} s(nT_0) \cdot T_0 \cdot s_0(t - nT_0)$$

$$g_a(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} s(nT_0) \cdot T_0 \cdot g_0(t - nT_0) \approx g(t)$$

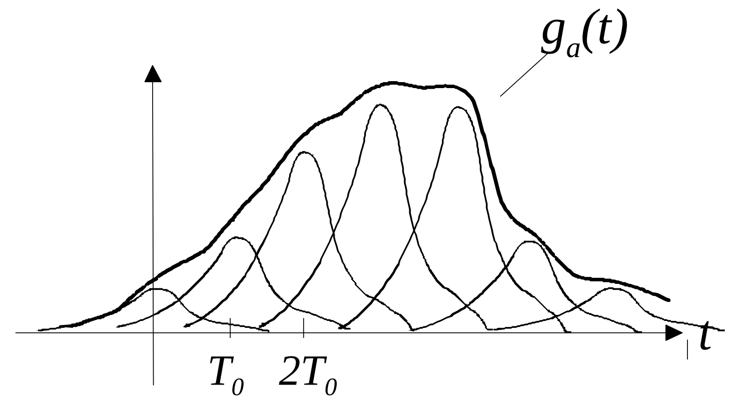
durch Rechteckimpulse approximiertes Eingangssignal

approximierte Systemantwort

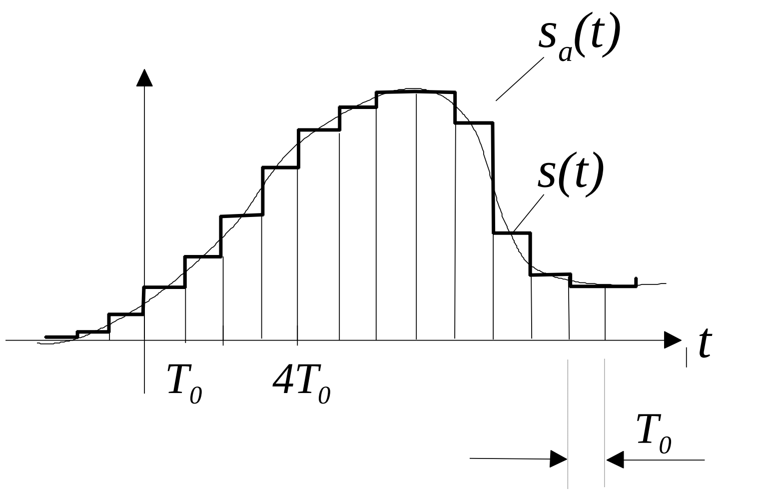
approx. Eingangssignal

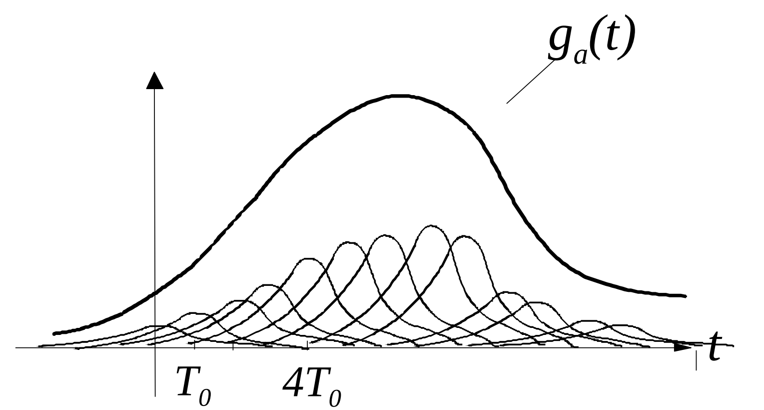


genähertes Ausgangssignal

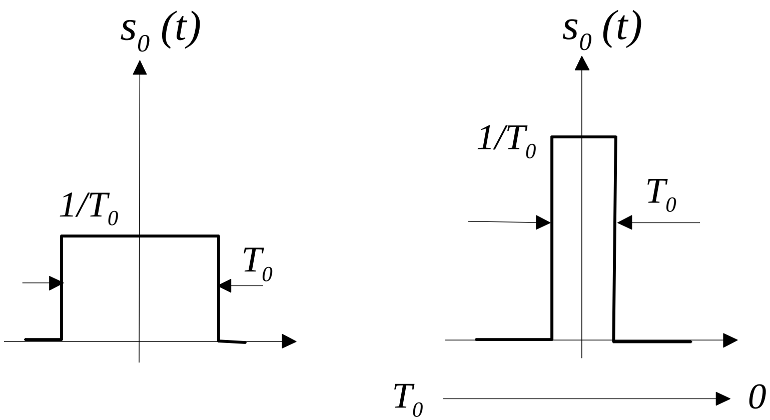


Verbesserung der Annäherung durch Verkleinerung von T_0





Im Grenzübergang $T_0 \rightarrow 0$ wird aus s_0 ein unendlich schmaler und unendlich hoher Impuls mit der Fläche 1. Dieser Impuls wird als ***Diracstoß*** bezeichnet.



Das LTI-System reagiert auf den Diracstoß mit der ***Stoßantwort*** *h(t).*

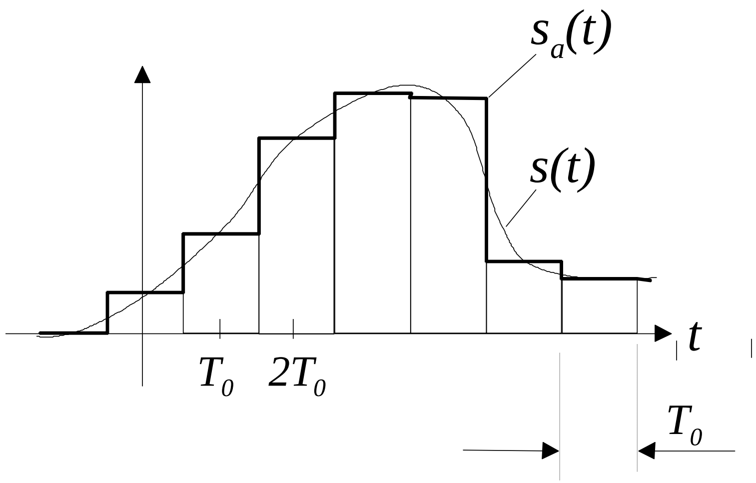
Nach dem Grenzübergang gelten dann die neuen Beziehungen:

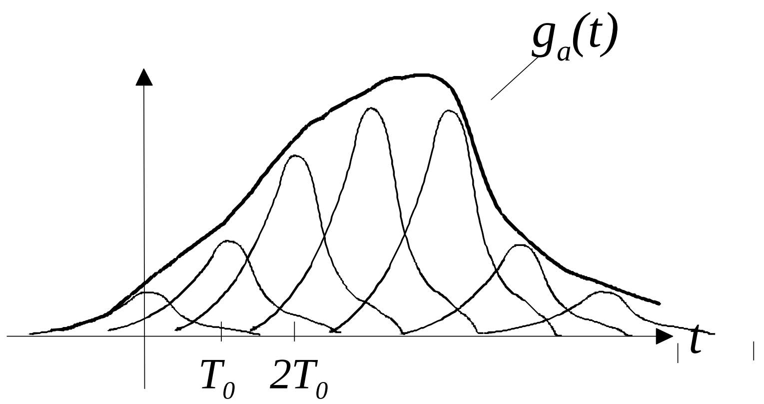
$$s_0(t) \rightarrow \delta(t) \qquad \text{(Rechteckimpuls} \rightarrow \text{Diracstoß)}$$

$$g_0(t) \rightarrow h(t) \qquad \text{(Rechteckimpulsantwort} \rightarrow \text{Stoßantwort)}$$

$$nT_0 \rightarrow \tau \qquad \text{(diskrete Zeit} \rightarrow \text{kontinuierliche Zeit)}$$

$$T_0 \rightarrow d\tau \qquad \text{(endlicher Zeitraum} \rightarrow \text{differentieller Zeitraum)}$$





$$s(t) \approx s_a(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} s(nT_0)\cdot T_0 \cdot s_0(t-nT_0)$$

$$g_a(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} s(nT_0)\cdot T_0 \cdot g_0(t-nT_0) \approx g(t)$$

$$s_0(t) \rightarrow \delta(t)$$
$$g_0(t) \rightarrow h(t)$$
$$nT_0 \rightarrow \tau$$
$$T_0 \rightarrow d\tau$$

$$s(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(\tau)\ \delta(t-\tau)\ d\tau$$

Faltungsintegral 1

$$g(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(\tau)\ h(t-\tau)\ d\tau$$

Faltungsintegral 2

3 Systembeschreibung durch die Stoßantwort

3.1 Aussagen und abkürzende Schreibweisen von Faltungsintegral 1

$$s(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(\tau)\,\delta(t-\tau)\,d\tau \quad (4)$$

Das Faltungsintegral wird oft verkürzt beschrieben mit dem Faltungsoperator : $*$

Aus (4) wird so $\boxed{s(t) = s(t) * \delta(t)}$

Anschaulich bedeutet dies: Ein Signal s(t) kann durch eine unendlich dichte Folge von gewichteten Diracstößen dargestellt werden

Die Faltung eines Signals *s(t)* mit einem Diracstoß verändert das Signal s(t) nicht !

3.2 Aussagen und abkürzende Schreibweisen von Faltungsintegral 2

$$g(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(\tau)\ h(t-\tau)\ d\tau \qquad (5)$$

oder kurz: $\boxed{g(t) = s(t) * h(t)}$

Man erhält das Ausgangssignal $g(t)$ eines Systems durch Faltung des Eingangssignals $s(t)$ mit der Stoßantwort $h(t)$ des Systems !

Anschaulich lässt sich das so darstellen $s(t) \longrightarrow \boxed{h(t)} \longrightarrow g(t)$

Ein LTI-System wird eindeutig durch seine Stoßantwort $h(t)$ beschrieben !

3.3 Zusammenfassung

Die <u>Stoßanwort</u> $h(t)$ <u>beschreibt</u> das <u>Systemverhalten</u> von LTI-Systemen.

$$\delta(t) \longrightarrow \boxed{LTI - Sys.} \longrightarrow h(t)$$

Ist die Stoßantwort bekannt, kann mit Hilfe des Faltungsintegrals (5) die Antwort des Systems auf jedes andere Eingangssignal $s(t)$ bestimmt werden.

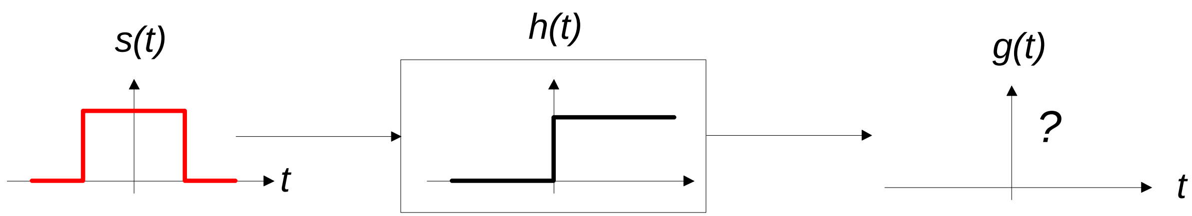
$$s(t) \longrightarrow \boxed{h(t)} \longrightarrow g(t)$$

Ein System, welches auf einen Diracstoß mit einem Diracstoß reagiert (also den Diracstoß unverändert weiterleitet), leitet auch ein beliebiges anderes Eingangssignal unverändert weiter (4).

$$s(t) \longrightarrow \boxed{\delta(t)} \longrightarrow s(t)$$

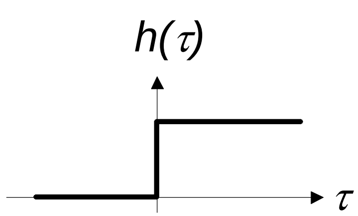
4 Anschauliche Beschreibung der Faltungsoperation

Beispiel: Eingangssignal *s(t)=rect(t)* an einem System mit der Stoßantwort $\in(t)$.

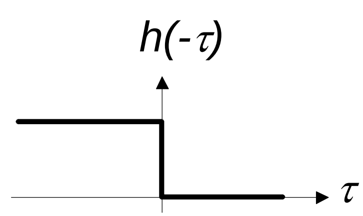


$$g(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(\tau)\ h(t-\tau)\ d\tau \quad = \quad s(t) * h(t)$$

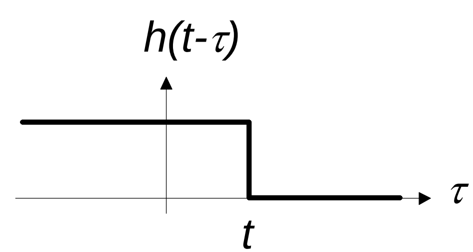
<u>Schrittweise Herleitung des Ergebnissses</u>:



Stoßantwort

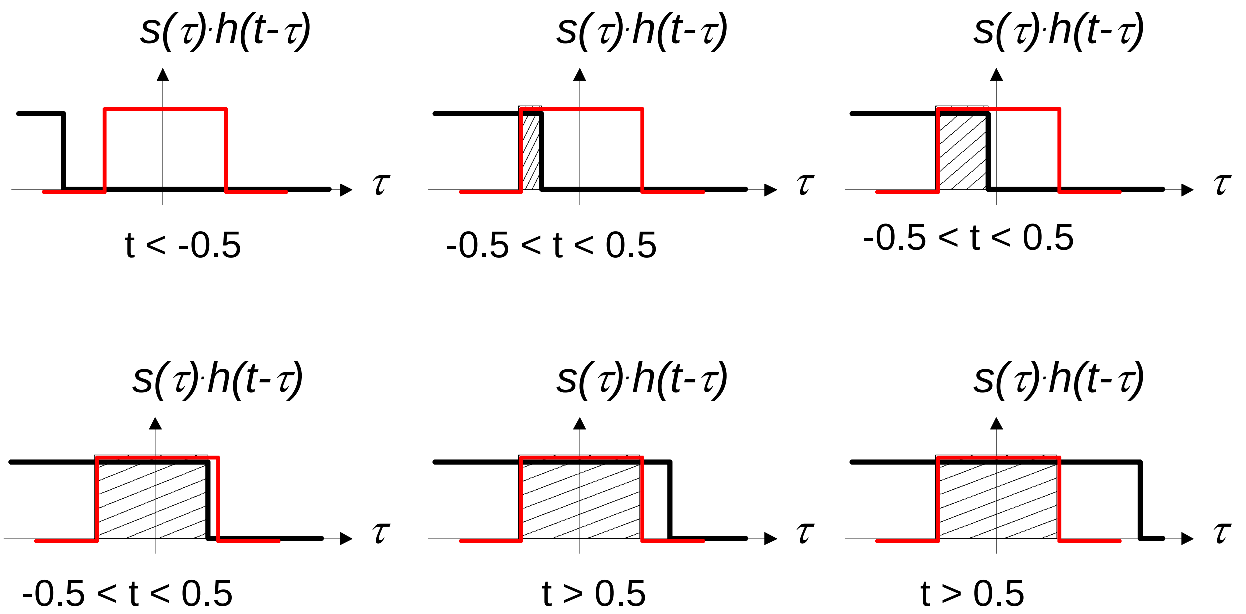


falten (=spiegeln)

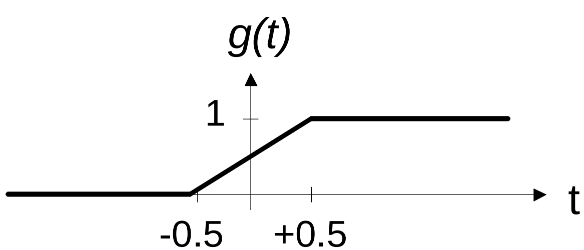


verschieben

Das Faltungsintegral entspricht der Fläche unter dem Produkt von *s(τ)* und *h(t- τ)*.



$$g(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(\tau)\ h(t-\tau)\ d\tau \quad = \quad s(t) * h(t)$$



Zum Ausprobieren gibt es verschiedene Applets …

http://www.fit.vutbr.cz/study/courses/ISS/public/demos/conv/

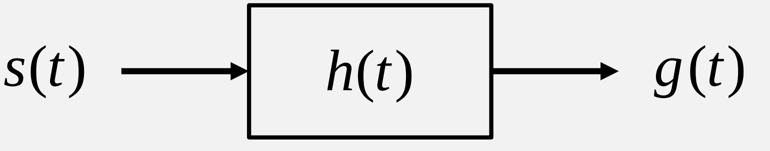
http://www.eit.hs-karlsruhe.de/mesysto/fileadmin/downloads/teilA/Apps/App_FaltungKontinuierlich/FaltungKontinuierlich.php

5 Faltungsalgebra

Die bisherigen Erkenntnisse und die sich daraus ergebenden Schlußfolgerungen werden jetzt in einer Faltungsalgebra zusammengefasst.

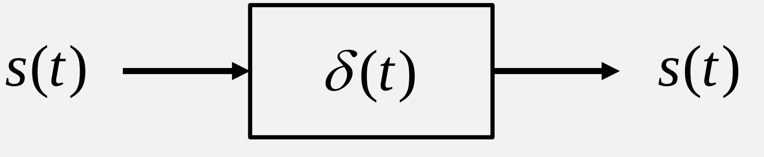
Faltungsprodukt: Das Faltungsintegral beschreibt die Reaktion *g(t)* eines Systems mit der <u>Stoßantwort</u> *h(t)* auf ein Eingangssignal *s(t)* (s. Gl. 5).

$$\boxed{g(t) = s(t) \ast h(t)} \quad (6)$$



Der <u>*Diracstoß*</u> ist das *Einselement* der Faltungsalgebra (s. Gl. 4).

$$\boxed{s(t) = s(t) \ast \delta(t)} \quad (7)$$

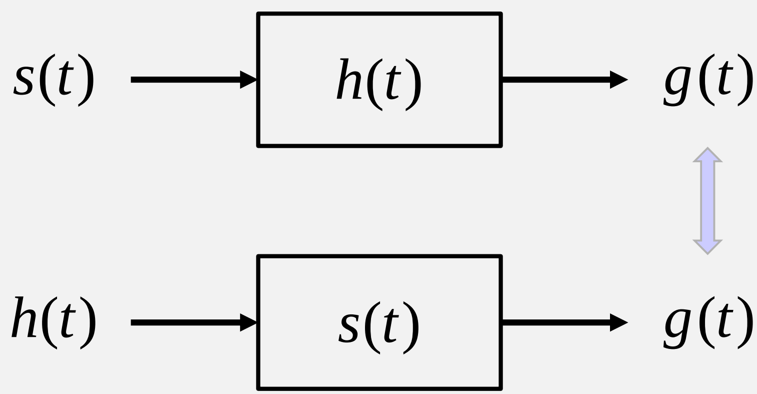


Ein System dessen Stoßantwort der Diracstoß ist, überträgt Signale verzerrungsfrei (= *ideal verzerrungsfreies System*).

Es gilt das *Kommutativgesetz* (o.Bew.), d.h. die Faktoren der Faltung dürfen vertauscht werden.

$$g(t) = s(t) * h(t) = h(t) * s(t) \qquad (8)$$

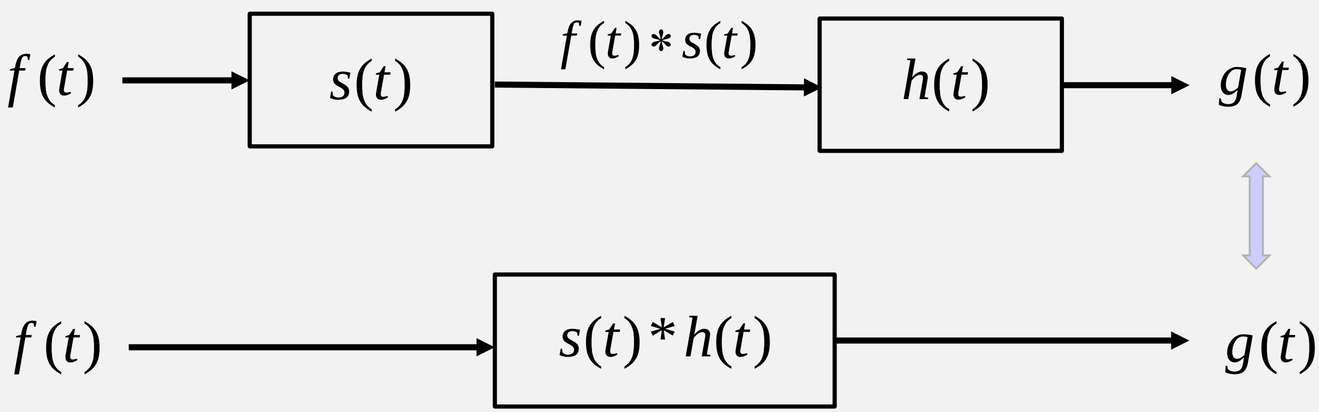
d.h., mathematisch sind Signal und System vertauschbar, das Ergebnis ist in beiden Fällen gleich !!



Es gilt das *Assoziativgesetz* (o.Bew.), d.h. bei drei Faktoren ist die Reihenfolge der Zusammenfassung ohne Einfluß auf das Ergebnis.

$$\left[f(t) * s(t)\right] * h(t) = f(t) * \left[s(t) * h(t)\right] \quad (9)$$

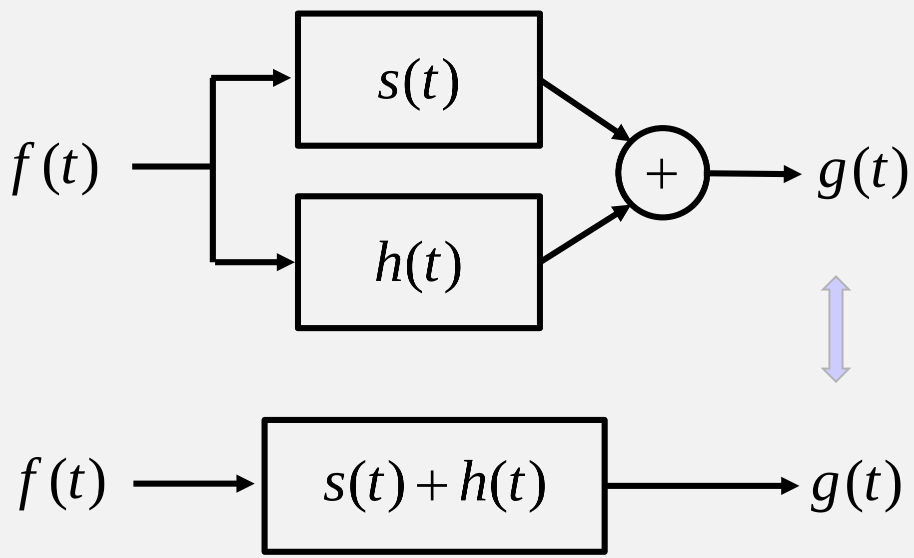
Zwei <u>in Reihe geschaltete LTI-Systeme</u> können durch <u>Faltung</u> ihrer Impulsantworten zu einem System zusammengefasst werden !!



Es gilt das *Distributivgesetz* (o. Bew.), d.h. es gilt:

$$f(t) * [s(t) + h(t)] = [f(t) * s(t)] + [f(t) * h(t)] \quad (10)$$

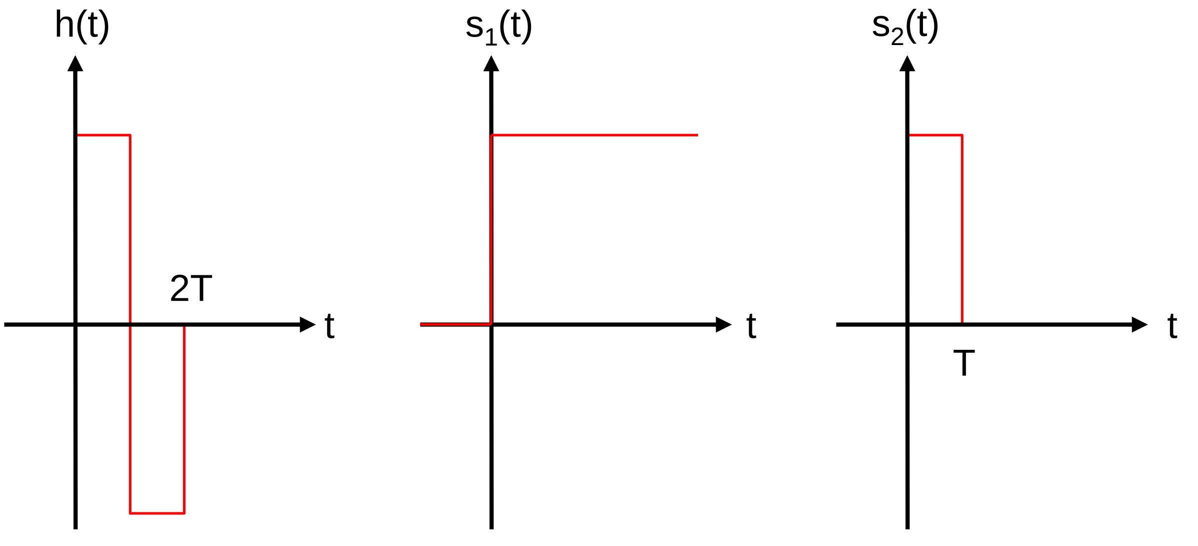
Zwei <u>parallel geschaltete LTI-Systeme</u> können durch <u>Addition</u> ihrer Impulsantworten zu einem System zusammengefasst werden !!



ÜBUNG: Faltung

1. Ein System reagiert auf einen Diracstoß mit der Stoßantwort h(t).
   a) Wie reagiert das System auf das Signal $s_1(t)$?
   b) Wie reagiert das System auf das Signal $s_2(t)$?

2. Angenommen $s_1(t)$ ist die Stoßantwort eines Systems.
   Weiter werde angenommen, dass h(t) ein Signal ist.
   Wie reagiert das System auf das Signal?



B

1. Determinierte Signale in LTI-Systemen

- Elementarsignale und -operationen
- LTI-Systeme
- Faltungsintegral
- **Diracstoß – ein wichtiges Elementarsignal**

1 Eigenschaften des Diracstoßes

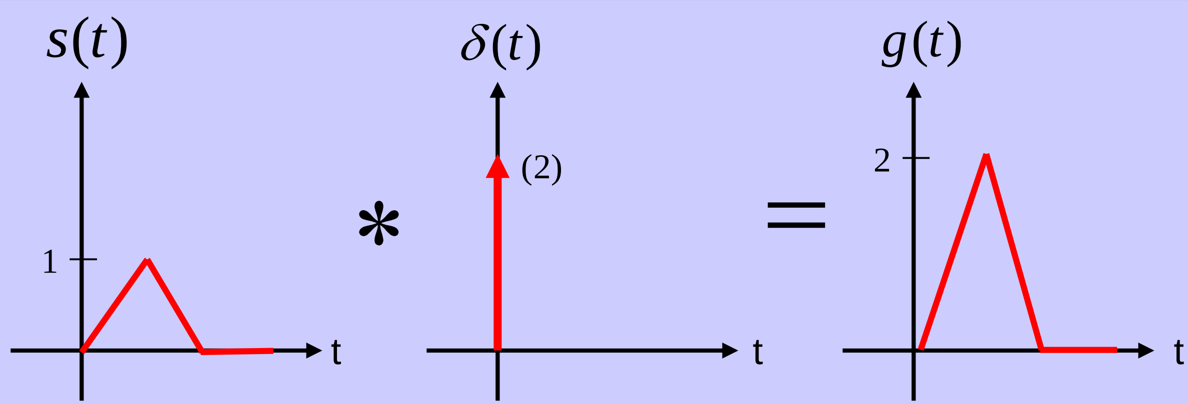
1.1 Gewichteter Diracstoß

Für den mit konstanten Faktor a gewichteten Diracstoß gilt:

$$\boxed{[a\cdot\delta(t)] * s(t)} = \int_{-\infty}^{\infty} s(\tau)\cdot a\cdot\delta(t-\tau)\,d\tau = a\cdot\int_{-\infty}^{\infty} s(\tau)\cdot\delta(t-\tau)\,d\tau = \boxed{a\cdot s(t)} \qquad (11)$$

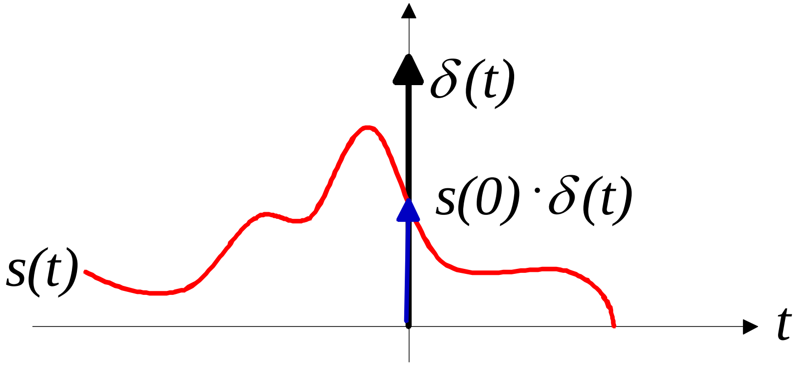
$$s(t) \longrightarrow \boxed{a\cdot\delta(t)} \longrightarrow a\cdot s(t)$$

Beispiel:



1.2 Siebeigenschaft des Diracstoßes

Aus der Anschauung folgt unmittelbar:



$$\boxed{s(t) \cdot \delta(t) = s(0) \cdot \delta(t)} \qquad (12)$$

Das Ergebnis ist also ein mit *s(0)* gewichteter Diracstoß !

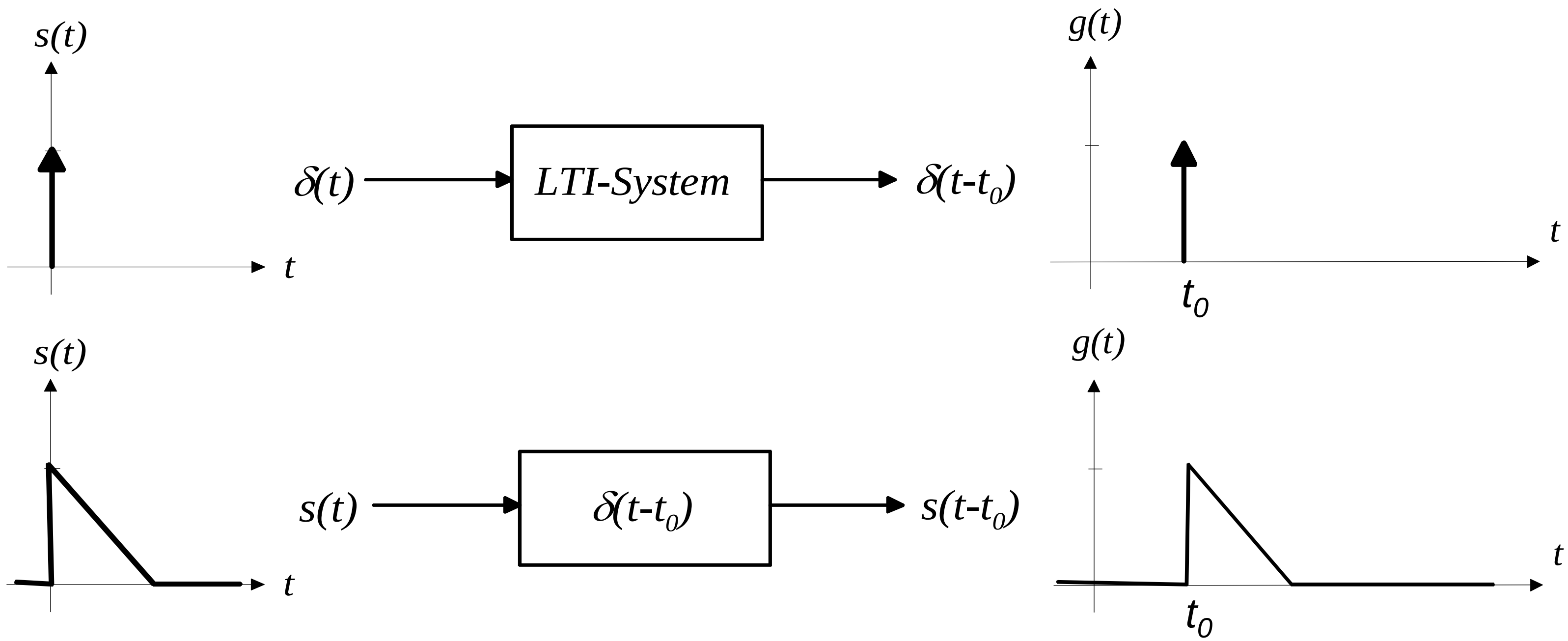
Multiplikation eines Signals mit einem Diracstoß entspricht einer Abtastung !

1.3 Verschobener Diracstoß

Für den um eine Zeit t_0 verschobenen Diracstoß gilt:

$$\boxed{\delta(t-t_0) * s(t)} = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-t_0)\, s(t-\tau)\, d\tau = \boxed{s(t-t_0)} \quad (13)$$

Beispiel: Systeme mit der Stoßantwort $h(t) = \delta(t-t_0)$ sind *Verzögerungsglieder*.

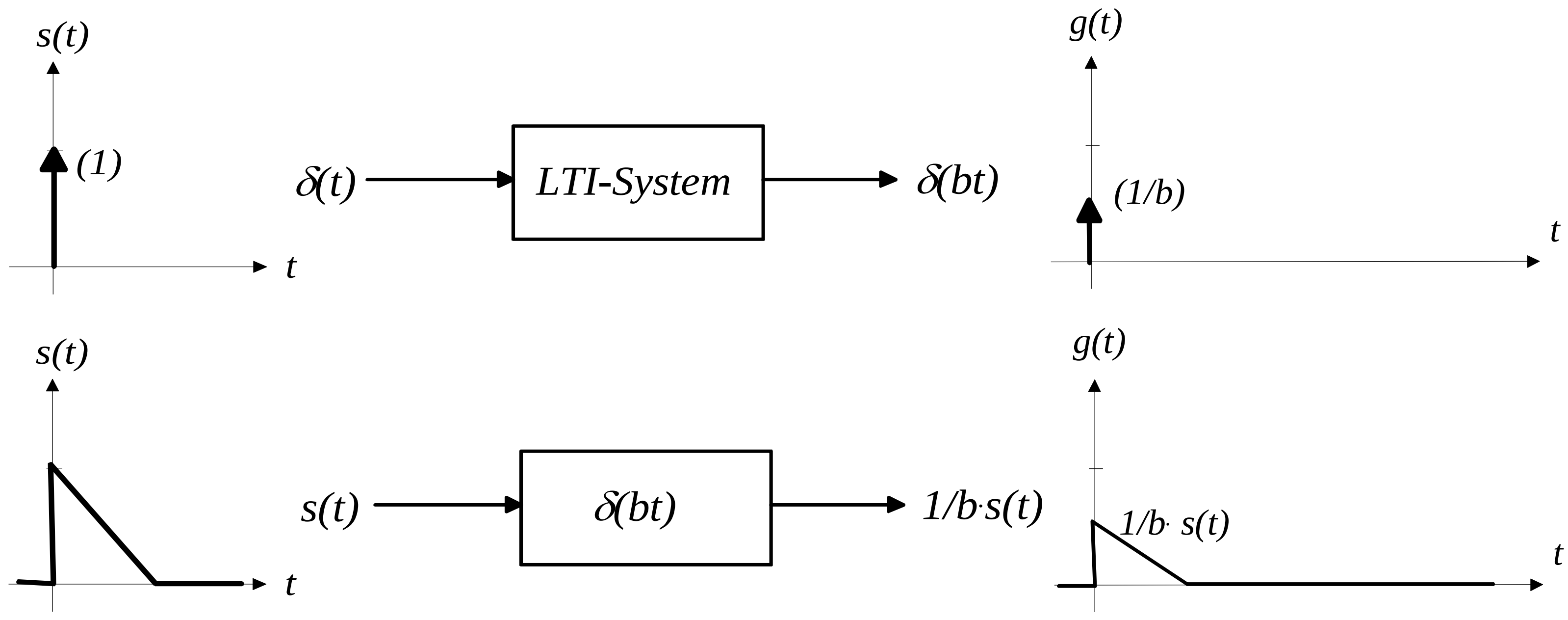


1.4 Gedehnter/gestauchter Diracstoß

Für den um den konstanten Faktor b „gestauchten“ Diracstoß gilt (o.Bew.):

$$\boxed{\delta(b\cdot t)\ *\ s(t)\ =\ \frac{1}{|b|}s(t)} \qquad (14)$$

Anschauliche Erklärung: Die Fläche des Diracstoßes beträgt 1. Die Fläche des um b gestauchten Diracstoßes ist demnach 1/|b|.

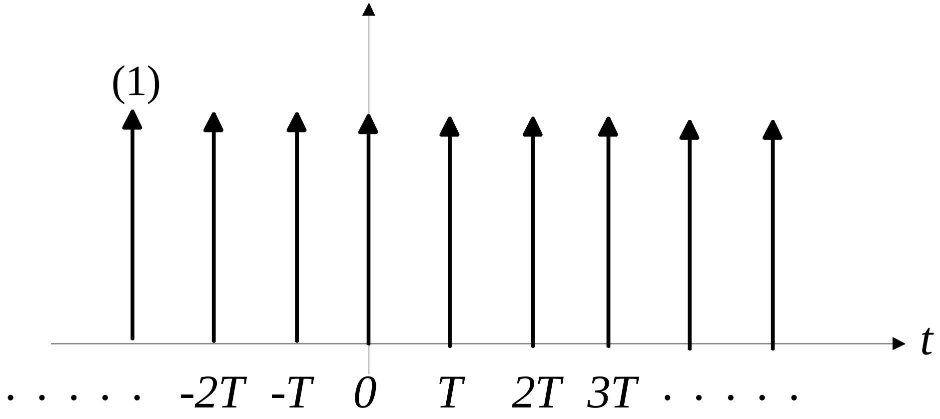


2 Diracstoßfolge und ihre Anwendung

2.1 Beschreibung

Durch Summierung unendlich vieler, jeweils um T versetzter Diracstöße erhält man eine Diracstoßfolge:

$$\boxed{\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t-nT)} \quad (15)$$

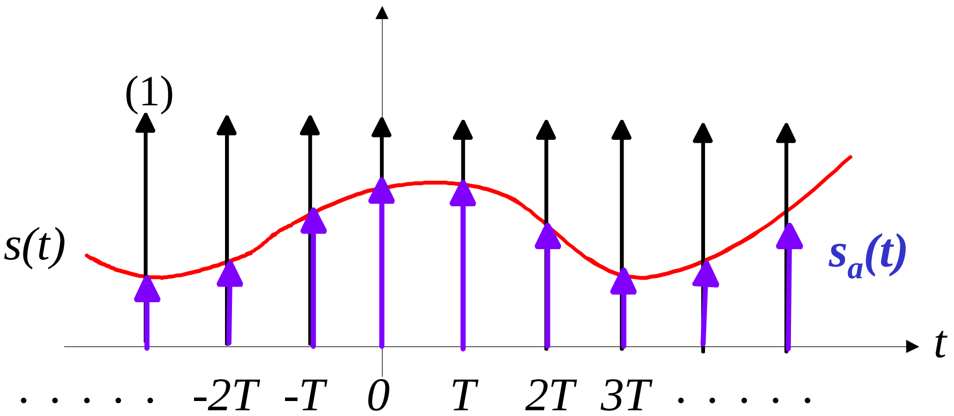


<u>Diracstoßfolgen</u> sind ein <u>wichtiges Elementarsignal</u>, da sich mit ihnen *Abtastvorgänge* und *periodische Signale* beschreiben/erzeugen lassen.

2.2 Signalabtastung

Durch Multiplikation einer Diracstoßfolge mit einem Signal s(t) und Anwendung der Siebeigenschaft des Diracstoßes (12) lassen sich Abtastvorgänge beschreiben.

$$s_a(t) = s(t) \cdot \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t-nT) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} s(nT) \cdot \delta(t-nT) \qquad (16)$$

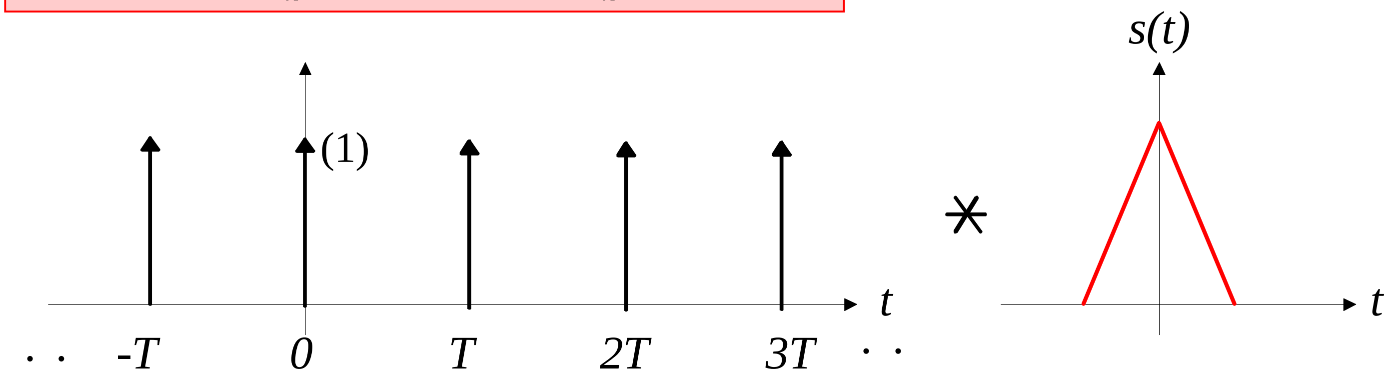


Technische Beispiele: - Analog/Digital-Wandler (z.B. Soundkarte)
- Bildabtastung durch CCD-Chip

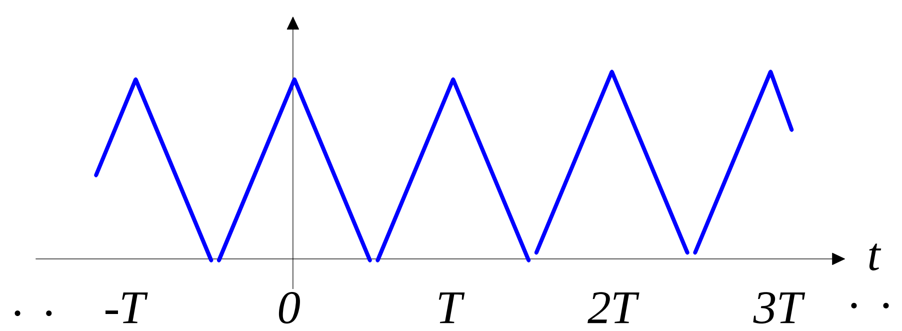
2.3 Beschreibung periodischer Signale

Durch Faltung einer Diracstoßfolge mit einem Impuls s(t) wird s(t) periodisch wiederholt [s. (13)].

$$s_p(t) = s(t) * \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t-nT) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} s(t-nT) \quad (17)$$



=



ÜBUNGEN: Faltung und Diracstoß

Zeichnen Sie:

a) $s_1(t) = rect(t) * rect(5t)$

b) $s_2(t) = rect(t) * \Lambda(5t)$

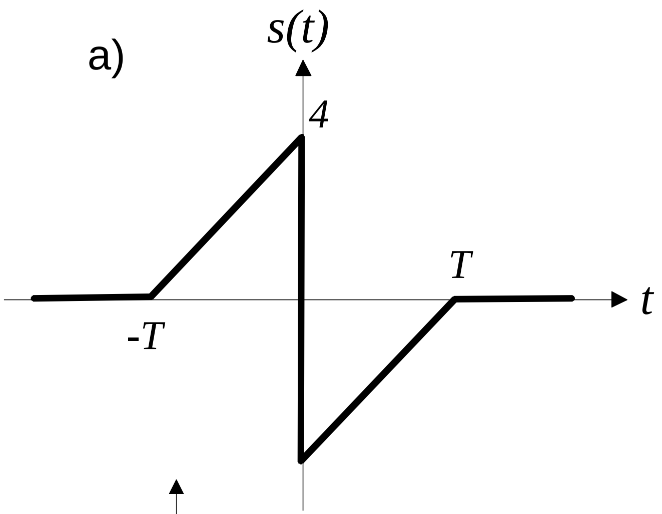
c) $s_3(t) = \left[\cos(2\pi \frac{t}{T}) \cdot rect(2\frac{t}{T})\right] * \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - n\frac{T}{2})$

d) $s_4(t) = \sin(2\pi \frac{t}{T}) \cdot \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - n\frac{T}{4})$

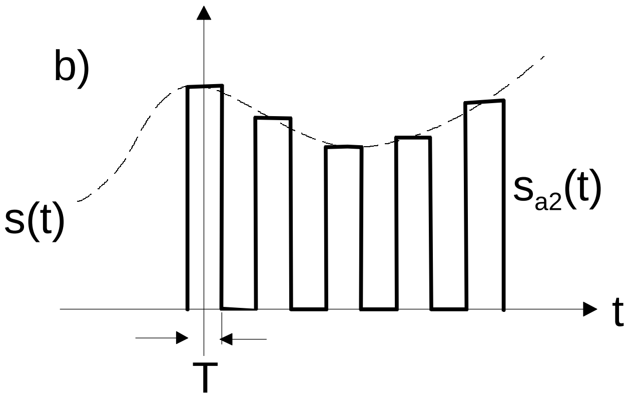
ÜBUNGEN: Faltung und Diracstoß

Geben Sie die Funktionen mit Hilfe von Elementarsignalen an.

a)



b)



c)