Komplexe Zahlen : Imaginäre Einheit

Beispiel : $x^2 + 1 = 0$

$\Longleftrightarrow \quad x^2 = -1$

Problem : Es gibt keine reelle Zahl, deren Quadrat negativ ist !

Aber : Definiert man $\underbrace{j}_{\text{imaginäre Einheit}} = \sqrt{-1}$,

imaginäre Einheit $\Rightarrow$ neuer Zahlentyp $\notin \mathbb{R}$

dann gilt : $j^2 = -1$.

Achtung : j ist nicht reell ,

aber man kann mit j rechnen !

Übung :

$$j^3 = j^2 \cdot j = -j$$

$$\frac{1}{j} = \frac{j}{j^2} = -j$$

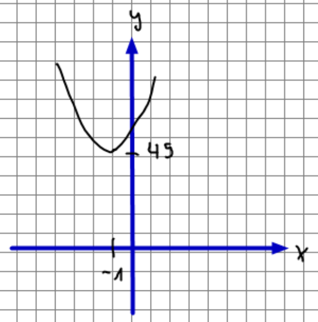
$$j^4 = j^2 \cdot j^2 = (-1) \cdot (-1) = 1$$

$$\frac{1}{j^2} = \frac{1}{(-1)} = -1$$

Komplexe Zahlen = Realteil + Imaginärteil

Beispiel: $x^2 + \overbrace{2}^{p}x + \overbrace{50}^{q} = 0$

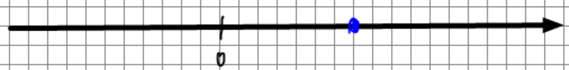
Ansatz: $x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$



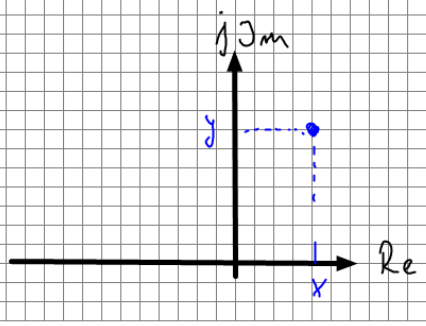
$$x_{1,2} = -1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 50}$$
$$= -1 \pm \sqrt{-49}$$
$$= -1 \pm \sqrt{(-1)\cdot 49}$$
$$= -1 \pm 7\cdot\sqrt{-1} = \underline{\underline{-1 \pm 7j}}$$

Probe: $x^2 + 2x + 50 = 0$

$$(-1 + 7j)^2 + 2(-1 + 7j) + 50 = 0$$
$$(-1 + 7j)(-1 + 7j) - 2 + 14j + 50 = 0$$
$$\cancel{1} - \cancel{14j} - \cancel{49} \quad \cancel{-2} + \cancel{14j} + \cancel{50} = 0 \qquad \text{w.z.b.w.}$$



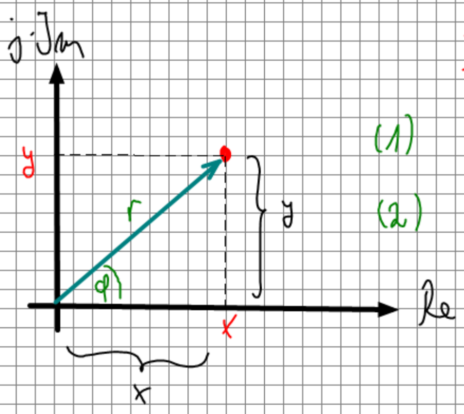
$\mathbb{R}$: Zahlenstrahl



$\underline{z} = x + jy$

$\mathbb{C}$: Kompl. Ebene

Darstellung komplexer Zahlen in Polarkoordinaten



$\underline{z} = x + jy$

(1) $r = \sqrt{x^2 + y^2}$

(2) $\tan\varphi = \frac{y}{x} \iff \varphi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$

$\sin\varphi = \frac{y}{r} \iff y = r \cdot \sin\varphi$ (3)

$\cos\varphi = \frac{x}{r} \iff x = r \cdot \cos\varphi$ (4)

$\Rightarrow \quad \underline{z} = x + jy \underset{(3),(4)}{=} r \cdot \cos\varphi + j \cdot r \cdot \sin\varphi$

$\underline{z} = r\left[\cos\varphi + j\sin\varphi\right]$ Polarform

ÜBUNG: Komplexe Zahlen

- Geben Sie folgende komplexe Zahlen in Polarkoordinatenform und Exponentialschreibweise an:

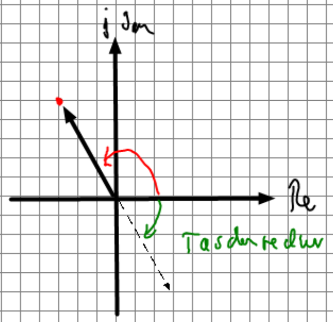
$$\underline{z} = -3 + j4$$
$$\underline{z} = 5 - j2$$

a) $\underline{z} = -3 + j4 = r(\cos\varphi + j\sin\varphi) = r e^{j\varphi}$

$\underline{\underline{r}} = \sqrt{3^2 + 4^2} = \underline{\underline{5}}$

$\varphi = \arctan\left(\frac{4}{-3}\right) = (-53.13°) = \underline{\underline{126.87°}}$

laut Taschenrechner



$\underline{\underline{\underline{z} = 5 \cdot e^{j126.87°}}}$

b) $\underline{z} = 5 - j2 = r(\cos\varphi + j\sin\varphi) = r \cdot e^{j\varphi}$

$\underline{\underline{r}} = \sqrt{5^2 + 2^2} = \underline{\underline{5.4}}$

$\varphi = \arctan\left(\frac{-2}{5}\right) = -21{,}8° = 338.2°$

$\underline{\underline{\underline{z} = 5.4 \cdot e^{j338.2°}}}$

Formen Sie folgende komplexe Zahlen in die kartesische Form um:

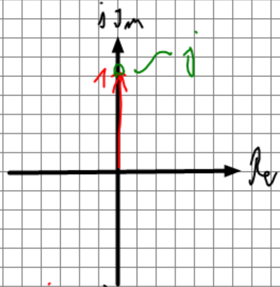
$$\underline{z} = 5e^{j\frac{\pi}{2}}$$

$$\underline{z} = je^{j\pi}$$

$$\underline{z} = 2e^{j30^\circ}$$

c) $\underline{z} = 5 \cdot e^{j\frac{\pi}{2}}$

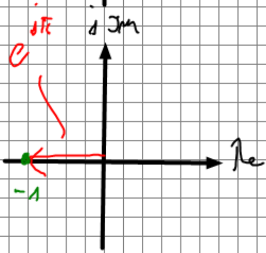
$= \underline{\underline{5 \cdot j}}$



d) $\underline{z} = j \cdot e^{j\pi}$

$= j \cdot (-1)$

$= \underline{\underline{-j}}$



$$e^{-j\pi} + 1 = 0$$

---

e) $\underline{z} = 2 \cdot e^{j30^\circ} = 2\left(\cos 30^\circ + j \sin 30^\circ\right)$

$= 2\left(0.866 + j\,0.5\right)$

$= \underline{\underline{1.73 + j}}$

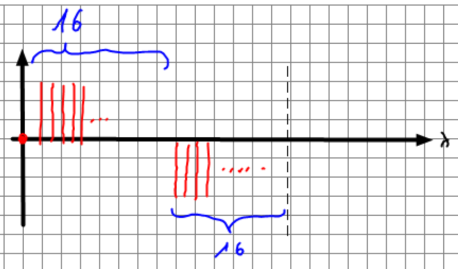
Was ist besondres an der Eulerzahl e ?

$e = 2.7182818 28459 \ldots\ldots$

$$\left.\begin{array}{l} f(x) = e^x \\ f'(x) = e^x \end{array}\right\} \quad f(x) = f'(x) \quad !$$

$$R(u) = +\frac{1}{M} \cdot \sum_{x=0}^{M-1} s(x) \cdot \cos(2\pi \frac{u}{M} \cdot x)$$

$$I(u) = -\frac{1}{M} \cdot \sum_{x=0}^{M-1} s(x) \cdot \sin(2\pi \frac{u}{M} \cdot x)$$




```
int main() {
    int i, x, u, M = 33;
    double R_u, I_u, R[M], I[M];
    double s[] = {0, 1, 1, 1, ..., -1, -1, -1, -1 ...};
    const double Pi = 3.1415926;

    // DFT = Zerlegung einer abgetasteten, periodischen Funktion
    // in ihre sin- / cos- Anteile (ebenfalls abgetastet)
    for (u=0; u<M; u++) // alle Koeffizienten berechnen
        R_u = 0;
        I_u = 0;
        for (x=0; x<M; x++) { // Σ über alle Abtastwerte
            R_u += s[x] * cos(2*Pi*u*x/M);
            I_u -= s[x] * sin(2*Pi*u*x/M);
        }
        R[u] = R_u/M;
        I[u] = I_u/M;
}
```

$$s(x) = R(0) \quad + \sum_{u=1}^{\frac{(M-1)}{2}} \left[2 \cdot R(u) \cdot \cos(2\pi \frac{x}{M} \cdot u) \quad - \quad 2 \cdot I(u) \cdot \sin(2\pi \frac{x}{M} \cdot u) \right]$$

```
⋮
// IDFT = Rekonstruktion
for (x = 0; x < M; x++) { // für jeden Abtastwert
    for (u = 1; u < (M-1)/2; u++) {
        s_Rekonst [x] += 2 * R[u] · cos(2 * PI * u * x / M)
                         - 2 * I[u] · sin(2 * PI * u * x / M);
    }
    s_Rekonst [x] += R[0];
}
```