ÜBUNG: Einfaches physikalisches Beispiel → fallender Blumentopf

x : Weg bzw. Höhe
v : Geschwindigkeit
a : Beschleunigung

Ein Blumentopf fällt von einem 120m hohen Hochhaus.
Beschreiben und diskutieren Sie die Gesetzmäßigkeiten des Falls?

Was wird nicht berücksichtigt?

pos. Richtung

x, v, a

Gewichtskraft
$G = m \cdot g$

Wirkt auf eine Masse m eine konstante Kraft F ein, so beschleunigt diese mit der Beschleunigung a.

$m \longrightarrow F$
$\longrightarrow a$

$$F = m \cdot a \qquad (1)$$

Ursache (F) Wirkung (a)

Für den Blumentopf gilt: $\underbrace{-G}_{}$ (Gewichtskraft)

$$-\cancel{m} \cdot g = \cancel{m} \cdot a \Rightarrow \boxed{a = -g}$$

Ursache ($-m \cdot g$) Wirkung (a)

$g = 9.81 \frac{m}{s^2}$
Erdbeschleunigung

Beschreibung von v und a als Zeitableitungen:

für v gilt: $v = \frac{dx}{dt} = \dot{x}$

vereinfachte Schreibweise für $\frac{d}{dt}$ (d.h. Zeitableitungen)

für a gilt: $a = \frac{dv}{dt} = \dot{v} = \ddot{x}$

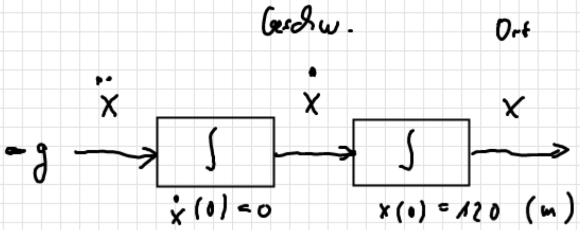
Für den Blumentopf gilt also:

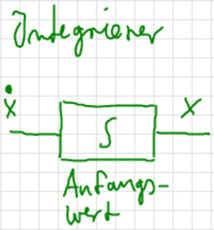
$$\boxed{\ddot{x} = -g}$$

Frage: Was folgt daraus für eine Funktion $x(t)$?

---

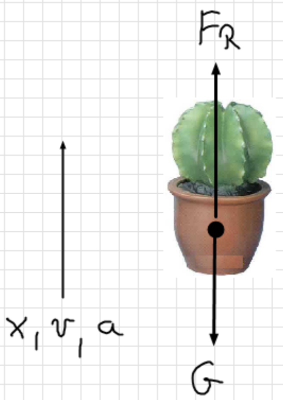
wird fortgesetzt ....





$$\boxed{\ddot{x} = -g}$$

Verbesserung: Luftreibung berücksichtigen



$$F_R = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot S \cdot v^2 = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot S \cdot \dot{x}^2$$

S': Querschnittsfläche in Bewegungsrichtung

ρ: Luftdichte

Somit gilt:

$$\underbrace{-m \cdot g + \frac{1}{2} \rho \cdot S' \cdot \dot{x}^2}_{\text{Ursache}} = \underbrace{m \ddot{x}}_{\text{Wirkung}}$$

Zusammengefasst gilt:

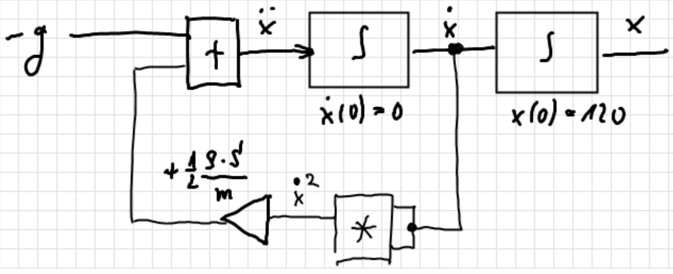
$$\ddot{x} = -g + \frac{1}{2} \frac{\rho \cdot S'}{m} \cdot \dot{x}^2$$

Frage: Was folgt daraus für eine Funktion $x(t)$?

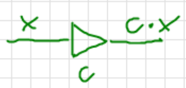
---

wird fortgesetzt ....

$$\ddot{x} = -g + \frac{1}{2} \frac{\rho \cdot S'}{m} \cdot \dot{x}^2$$



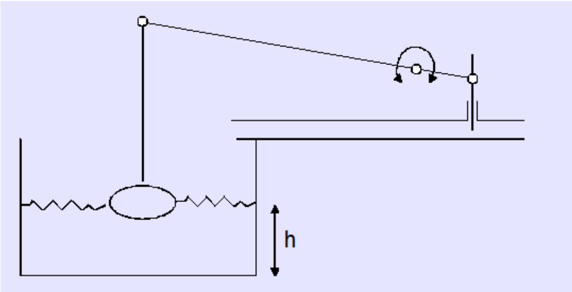
Konstantenmultipliz.



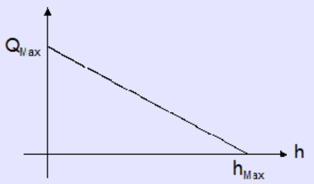
Variablenmultipliz.

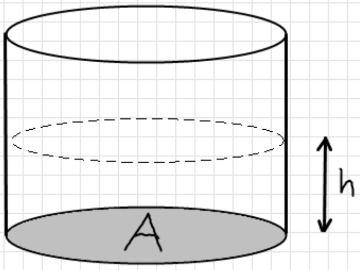
ÜBUNG: Tank mit Schwimmer (Füllstandregelung)

Geben Sie die Sytemgleichungen des folgenden Systems an:



Zwischen Zufluss und Wasserhöhe gilt folgender Zusammenhang.





Zusammenhang zwischen Volumen V und Wasserstand h

$$\boxed{V = A \cdot h} \quad (1) \qquad \text{bzw.} \quad h = \frac{1}{A} \cdot V$$

Zwischen dem Zufluss Q und dem Volumen gilt:

$$\boxed{\dot{V} = Q} \quad (2)$$

Der Zufluss ist definiert als "Volumenänderung pro Zeiteinheit"

Für die "Ventilkennlinie" gilt:

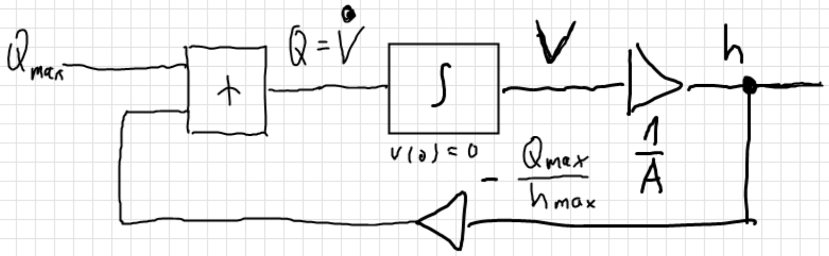
$$Q = -\frac{Q_{max}}{h_{max}} \cdot h + Q_{max} \quad (3) \qquad \text{bzw.}$$

$$\boxed{\dot{V} = -\frac{Q_{max}}{h_{max} \cdot A} \cdot V + Q_{max}}$$

<u>Frage:</u> Was folgt daraus für eine Funktion $V(t)$?

wird fortgesetzt ....

$$\boxed{\dot{V} = -\frac{Q_{max}}{h_{max} \cdot A} \cdot V + Q_{max}}$$



ÜBUNG: Hasen und Füchse (Lotka-Volterra-System 2)

Anm.:

andere Modellierung als bei System Dynamics (s.o.)

Die Änderungsrate von Hasen ist abhängig von

a) der Anzahl der Hasen H → + a*H (a berücksichtigt Geburten u. Alterstode)

b) der Freßrate → - b*H*F

c) der Eigenkonkurrenzrate. → - c*H*H

Die Änderungsrate von Füchsen ist abhängig von

a) der Anzahl der Füchse F → - d*F (mehr Tode als Geburten, es sei denn, es gibt genug zu fressen)

b) der Freßrate → +e*H*F

c) der Eigenkonkurrenzrate. → - g*F*F

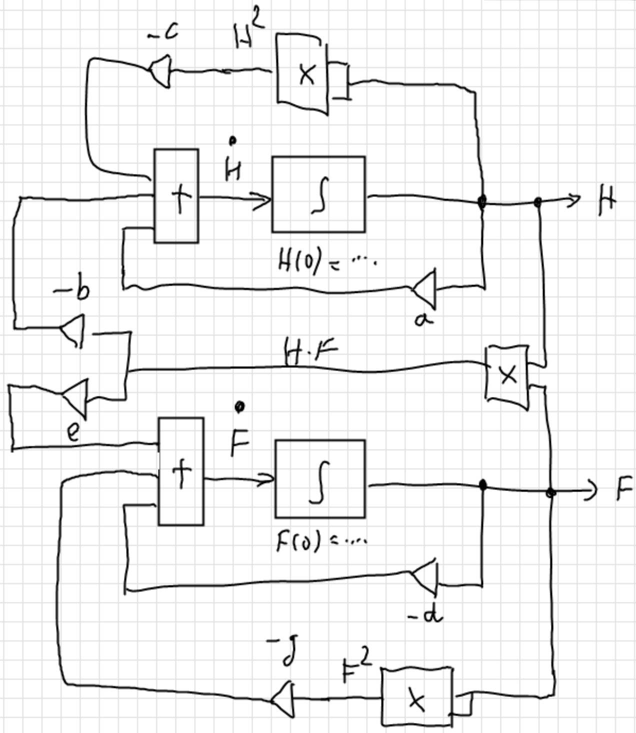
$$\dot{H} = \frac{dH}{dt} = a \cdot H - b \cdot H \cdot F - c H^2 \qquad (1)$$

$$\dot{F} = \frac{dF}{dt} = -d F + e \cdot H \cdot F - g \cdot F^2 \qquad (2)$$

$H(t) = ?$

$F(t) = ?$

wird fortgesetzt ....



ÜBUNG: Funktionen als Differentialgleichungen beschreiben

Gegeben sie die Differentialgleichung an, deren Lösung die gegebene Funktion ist.
Geben Sie die dazugehörigen Anfangsbedingungen an.

zur Erinnerung:

$$\frac{d}{dt} \sin(t) = \cos(t)$$

$$\frac{d}{dt} \cos(t) = -\sin(t)$$

$$\frac{d}{dt} e^t = e^t$$ mit Eulerzahl e

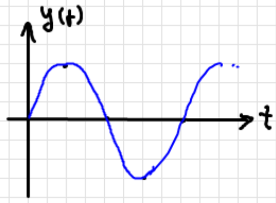
$e = 2.718281\ldots$

a) $y(t) = \sin \omega t \quad (1)$

t : unabh. Variable

$$\dot{y}(t) = \omega \cdot \cos \omega t$$

$$\ddot{y}(t) = -\omega^2 \cdot \underbrace{\sin \omega t}_{y(t)}$$ siehe (1)



$$\ddot{y}(t) = -\omega^2 \cdot y(t)$$ oder kurz

$$\ddot{y} = -\omega^2 y \quad (2)$$

$\Rightarrow$ d.h. die Funktion $y = \sin \omega t$ erfüllt die DGL (2)!

Aber: (1) ist nicht die einzige Funktion für die die DGL (2) gilt. (Beweis später)

Erst mit den "Anfangsbedingungen"

$$y(0) = 0$$

$$\dot{y}(0) = \omega$$

wird die DGL (2) eindeutig!

b) $y(t) = e^{-at}$ (1) t : unabh. Variable

$\dot{y}(t) = -a \underbrace{e^{-at}}_{y(t)}$

$\Rightarrow \dot{y}(t) = -a \cdot y(t)$ oder kurz

$\underline{\underline{\dot{y} = -a\,y}}$ (2)   d.h. die Funktion $y = e^{-at}$ erfüllt die DGL (2).

aber: Die DGL (2) hat weitere Lösungen.

Erst mit der Anfangsbedingung $y(0) = 1$ ist (1) die einzige Lösung der DGL.

c) $y(x) = x^2 + C_1 x + C_2$ unabh. Variable : X

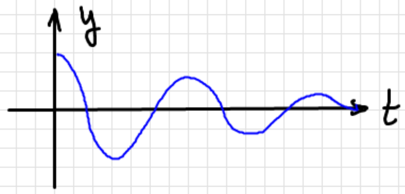
$y'(x) = 2x + C_1$

$\underline{\underline{y''(x) = 2}}$ mit den Anfangswerten

$y(0) = C_2$

$y'(0) = C_1$

d) $y(t) = e^{-at} \cdot \cos \omega t \quad (1)$



$$\dot y(t) = \underbrace{-a \cdot e^{-at} \cdot \cos \omega t}_{y} - e^{-at}\omega \sin \omega t$$

$$= -a \cdot y(t) \quad - \omega \cdot e^{-at} \sin \omega t \quad (2)$$

für später:
$\Rightarrow \omega \cdot e^{-at} \cdot \sin \omega t = -\dot y - ay$

$$\ddot y(t) = -a \cdot \dot y(t) - \omega\left[-a \cdot e^{-at} \sin \omega t + e^{-at} \cdot \omega \cdot \cos \omega t\right]$$

$$= -a\,\dot y(t) + \underbrace{a\omega \cdot e^{-at} \sin \omega t}_{-(\dot y + ay) \text{ siehe } (2)} - \omega^2 \cdot \underbrace{e^{-at} \cos \omega t}_{y(t)}$$

$$\ddot y = -a\dot y \quad - a\dot y - a^2 y - \omega^2 \cdot y$$

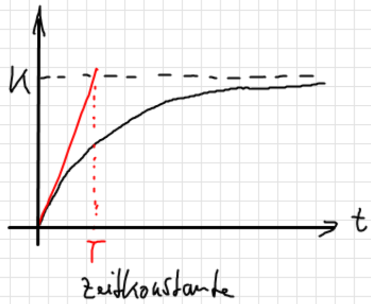
$$\ddot y = -2a\dot y \quad - (a^2 + \omega^2) \cdot y \quad (2)$$

Mit den Anfangswerten $y(0) = 1$, $\dot y(0) = -a$ ist (1) die Lösung der DGL (2).

e) $y(t) = K \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{T}}\right)$ (1)

$= K - K \cdot e^{-t/T}$

$\dot{y}(t) = \frac{1}{T} \cdot \underbrace{K \cdot e^{-t/T}}_{-(y-K)}$



$\Rightarrow \quad \dot{y} = -\frac{1}{T} \cdot (y-k) = \frac{K}{T} - \frac{1}{T} y$

$\Leftrightarrow \quad \underline{\underline{\dot{y} + \frac{1}{T} y = \frac{K}{T}}}$ (2)

Mit dem Anfangswert $y(0) = 0$ ist (1) die Lösung der DGL (2).

ÜBUNG: Klassifikation von Differentialgleichungen

Klassifizieren Sie folgende Differentialgleichungen.
Was sind die unabhängigen Variablen?

a) $\ddot{y} + a \cdot \dot{y} + \sin(2\pi \cdot t) = t^3$ → gewöhnlich, linear, 2. Ordnung

b) $\dot{y} = t^2 + y^2$ → gewöhnlich, nicht linear, 1. Ordnung

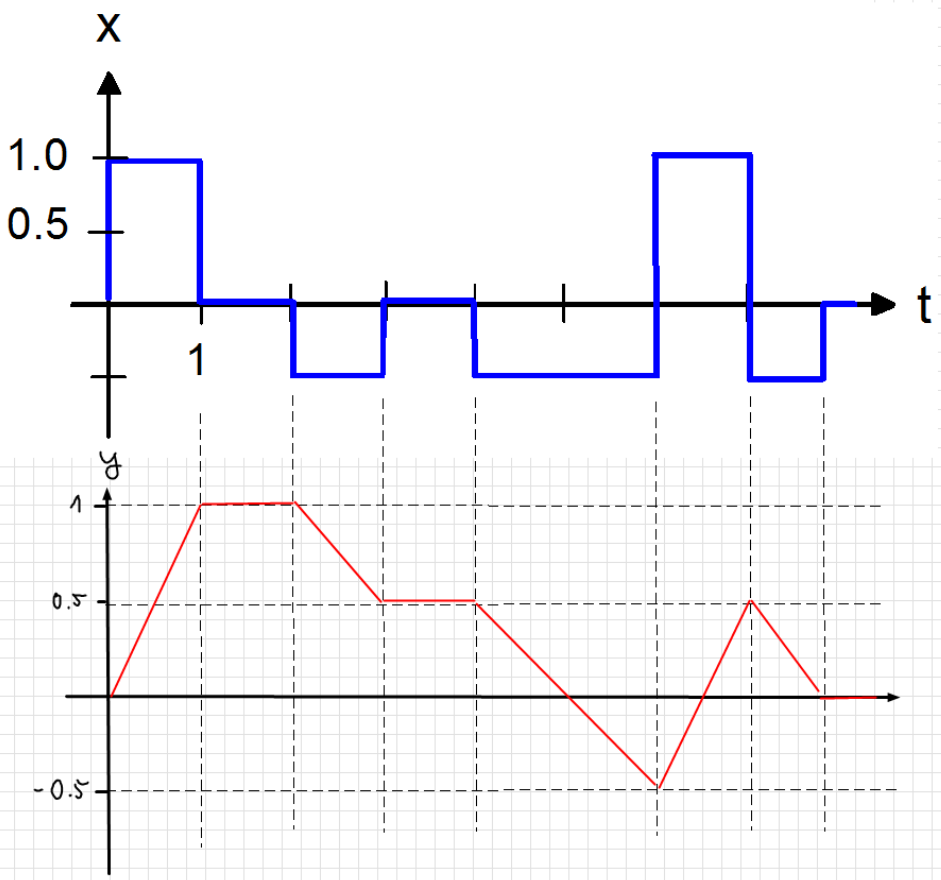
c) $\ddot{y} + \dot{y} = \frac{1}{y} + t$ → gewöhnlich, nicht lin., 2. Ordnung

d) $\frac{d^3U}{dt^3} + \frac{d^2U}{dt^2} + \frac{dU}{dt} - U = e^t$ → gewöhnlich, lin., 3. Ordnung.

e) $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0$ → partiell, lin, 2. Ordnung

ÜBUNG: Integrator

Skizzieren Sie das Ausgangssignal eines Integrators für folgendes Eingangssignal:



ÜBUNG: DGLn als Richtungsfelder

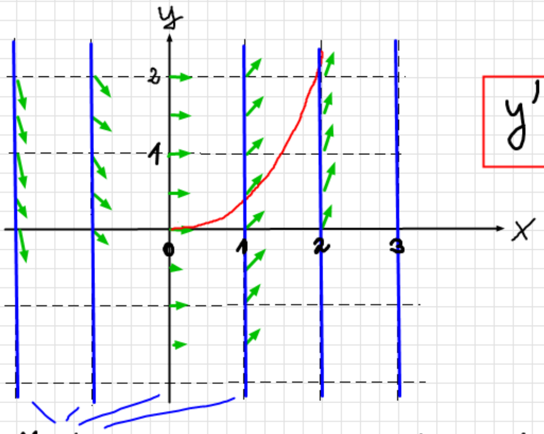
Skizzieren Sie das Richtungsfeld für folgende Differentialgleichungen:

a) $y' = x$ x : unabhängige Variable

b) $y' = -\dfrac{x}{y}$ x : unabhängige Variable

c) $\dot{y} = 1 - y$ t : unabhängige Variable

a)



$\boxed{y' = x}$ $\Rightarrow$ Steigung hängt nur von x ab!

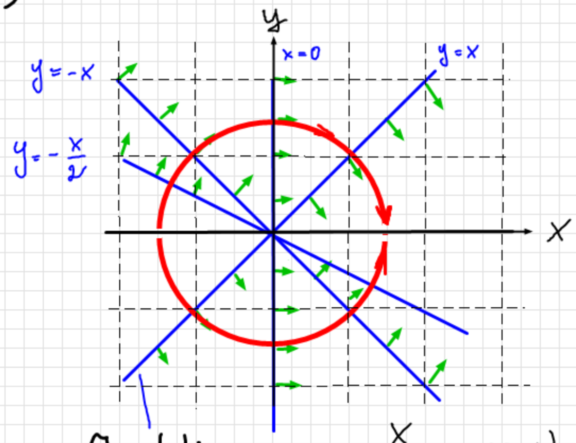
Anmerkung:

$y = \frac{1}{2}x^2 + c'$

$y' = x$

Isoklinen (Linien gleicher Steig.:

b)



Isoklinen: $-\dfrac{x}{y} = \text{const.}$

$$\boxed{y' = -\frac{x}{y}}$$

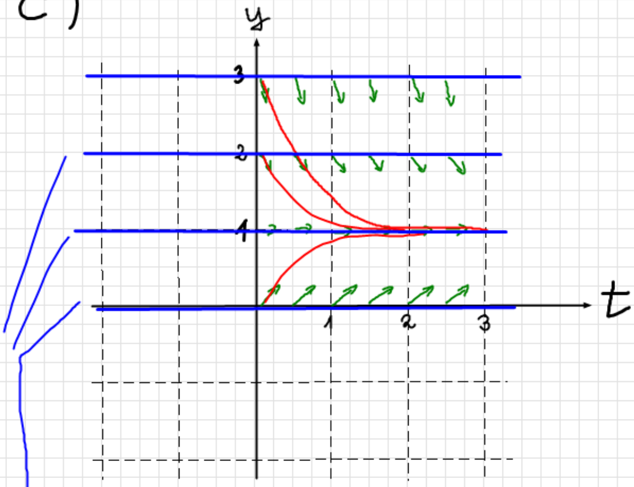
für $y = x \Rightarrow y' = -1$

" $x = 0 \Rightarrow y' = 0$

" $y = -x \Rightarrow y' = +1$

" $y = -\frac{x}{2} \Rightarrow y' = +2$

c)



$$\dot{y} = 1 - y$$

für $y = 0 \Rightarrow \dot{y} = 1$

$y = 1 \Rightarrow \dot{y} = 0$

$y = 2 \Rightarrow \dot{y} = -1$

$y = 3 \Rightarrow \dot{y} = -2$

Isoklinen : $1 - y = const.$

bzw. $y = const.$