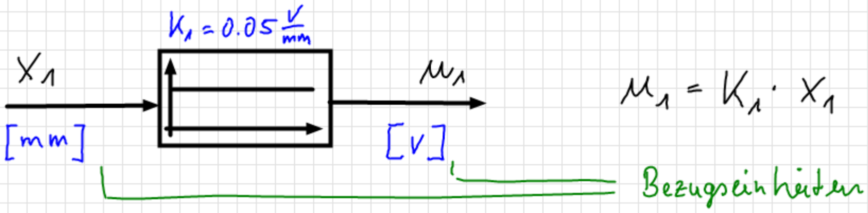
ÜBUNG: Normierung von Übertragungsblöcken

1. Gegeben ist ein Abstandssensor mit der Empfindlichkeit : $K_1 = 0.05 \frac{V}{mm}$

Normieren Sie alle Größen des folgenden Systems auf $x_N = 150mm$ $u_N = 7.5V$

→ Proportionalverhalten



$$u_1 = K_1 \cdot x_1 \qquad (1)$$

jetzt (1) normieren auf Wunschgrößen

$$\hat{u}_1 \cdot u_N = K_1 \cdot \hat{x}_1 \cdot x_N$$

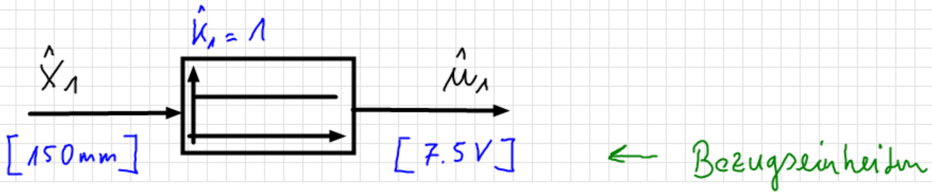
$$\hat{u}_1 = \hat{x}_1 \cdot \underbrace{\frac{K_1 \cdot x_N}{u_N}}$$

Konstanten und Normierungsgrößen zusammenfassen zu $\hat{K}_1$

$$\hat{u}_1 = \hat{x}_1 \cdot \underbrace{\frac{0.05 \frac{\cancel{V}}{\cancel{mm}} \cdot 150 \cancel{mm}}{7.5 \cancel{V}}}_{1}$$

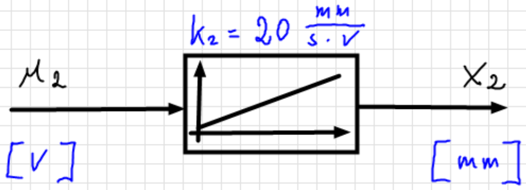
d.h. es gilt für den Sensor :

$$(2) \qquad \underline{\underline{\hat{u}_1 = \hat{x}_1}} \qquad \text{mit } u_N = 7.5V, \; x_N = 150mm$$



2. Gegeben ist ein Linearantrieb. Die Geschwindigkeit des Linearantriebs ist (linear) von der Eingangsspannung abhängig: $K_2 = \cancel{15}\,20 \frac{mm/s}{V} = \cancel{15}\,20 \frac{mm}{s \cdot V}$

$\Longrightarrow$ Integralverhalten

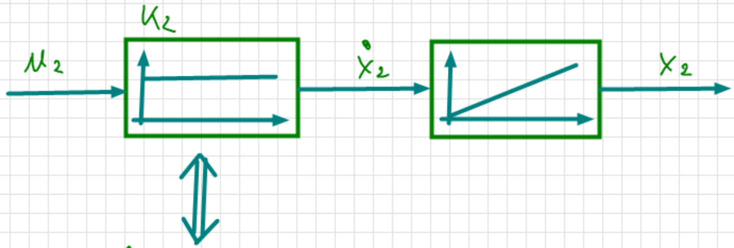


Der Integrator wird beschrieben durch:

$$\dot{x}_2 = K_2 \cdot u_2 \qquad (3)$$

· Anstieggeschwindigkeit pro Eingangsgröße

Anmerkung: Block kann auch so verstanden werden



$\dot{x}_2 = K_2 \cdot u_2$ vgl. mit (3)

jetzt (3) normieren

$$\dot{x}_2 = K_2 \cdot u_2$$

$$\frac{d\,\hat{x}_2 \cdot x_N}{d\hat{t} \cdot t_N} = K_2 \cdot \hat{u}_2 \cdot u_N$$

$$\dot{\hat{x}}_2 = \hat{u}_2 \cdot \frac{K_2 \cdot u_N \cdot t_N}{x_N}$$

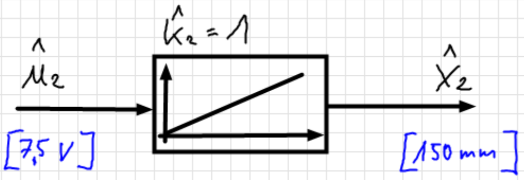
$$\dot{\hat{x}}_2 = \hat{u}_2 \cdot \frac{20 \cancel{\frac{mm}{s \cdot V}} \cdot 7{,}5 \cancel{V} \cdot 1 \cancel{s}}{150 \cancel{mm}}$$

$$\underline{\underline{\dot{\hat{x}}_2 = \hat{u}_2}}$$

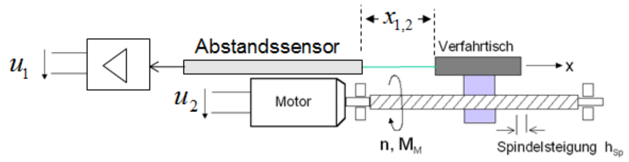
mit $x_N = 150\,mm$

$u_N = 7{,}5\,V$

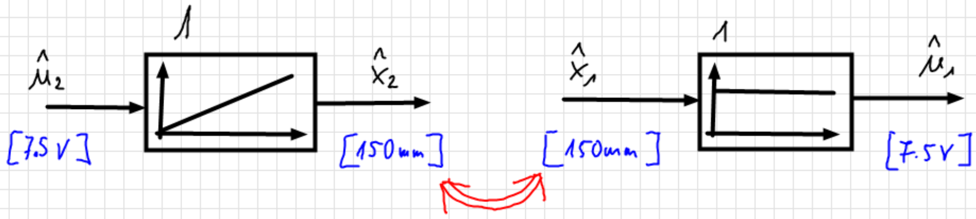
$\hat{x}_2 = \hat{u}_2$



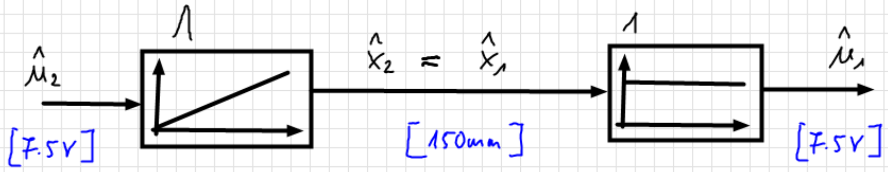
3. Schalten Sie die Blöcke (2) → (1) hintereinander.



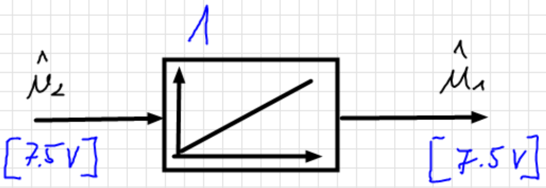
Reihenschaltung von Linearantrieb und Abstandssensor



Blöcke haben gleiche Bezugsgrößen und können daher zusammen geschaltet werden!



Fasst man alle Konstanten zusammen, kann das System auch so beschrieben werden:



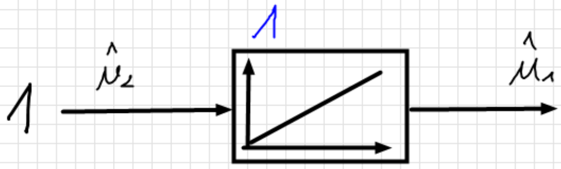
$$\underline{\underline{\dot{\hat{u}}_1 = \hat{u}_2}}$$

Eingangsspg. des Antriebs

Ausgangsspg. des Sensors

Beispiel: Angenommen $\hat{u}_2 = 1$ ($\hat{=}$ 7,5V).

Mit welcher Geschwindigkeit steigt u_1?



$$\underline{\underline{\dot{\hat{u}}_1}} = K \cdot \hat{u}_2 = 1 \cdot 1 = \underline{\underline{1}}$$

Jetzt entnormieren von $\dot{\hat{u}}_1$ mit $\hat{G} = \frac{G}{G_N}$

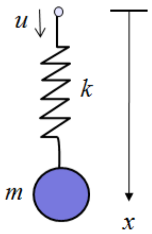
$$\dot{\hat{u}}_1 = \frac{\dot{u}_1}{u_N/t_N} = 1$$

$$\underline{\underline{\dot{u}_1}} = 1 \cdot \frac{u_N}{t_N} = \frac{7.5V}{s} = \underline{\underline{7{,}5\,\frac{V}{s}}}$$

ÜBUNG: Normierung eines dynamischen Systems (DGL)

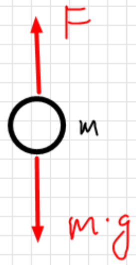
Gegeben ist das System:

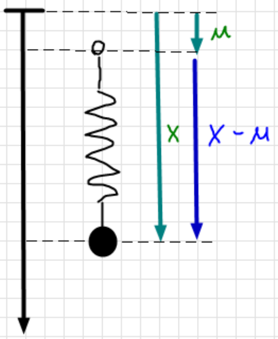
$$k = 0.2\,\frac{N}{cm} \qquad m = 200\,g \qquad l_0 = 100\,mm$$



a. Geben Sie die DGL des Systems an.

Masse freischneiden





$$F = (x - u - l_0)\cdot k$$

DGL des Systems

$$\sum F = m\ddot{x} : \quad m\cdot g - F = m\ddot{x}$$

$$m\cdot g - (x - u - l_0)\cdot k = m\ddot{x}$$

$$\Rightarrow \quad \underline{\underline{\ddot{x} = g - \frac{k}{m}(x - u - l_0)}} \qquad (1)$$

b. Geben Sie die Ruhelage des Systems an.

Ruhelage bedeutet : $\dot{x} = \ddot{x} = 0$ und $u = 0$

Damit wird aus der DGL :

$$\cancel{\ddot{x}} = g - \frac{k}{m}\left(x_0 - \cancel{u} - l_0\right)$$

$$x_0 = \frac{g \cdot m}{k} + l_0$$

$$= \frac{9.81\,\frac{m}{s^2} \cdot 200\,g}{0.2\,\frac{N}{cm}} + 100\,mm$$

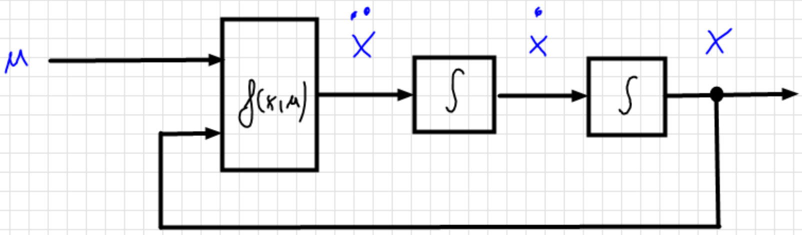
$$= \frac{9.81 \cdot 200}{0.2} \cdot \frac{\frac{\cancel{m}}{\cancel{s^2}} \cdot 0.001\,\cancel{kg}}{\frac{\cancel{kg}\,\cancel{m}}{\cancel{s^2} \cdot 0.01\,m}} + 0.1\,m$$

$$= 9810 \cdot 10^{-5}\,m + 0.1\,m$$

$$= 0.0981\,m + 0.1\,m = \underline{\underline{0.1981\,m}} \quad (2)$$

c. Geben Sie die DGL für eine Änderung u aus der Ruhelage an.

$$\ddot{x} = \underbrace{g - \frac{K}{m}(x - u - l_0)}_{f(x,u)} \quad \Rightarrow \text{lin. DGL}$$



Für die Änderung aus der Ruhelage gilt somit:

$$\Longrightarrow \Delta\ddot{x} = -\frac{K}{m}\Delta x + \frac{K}{m}\Delta u$$

mit

$$\frac{k}{m} = \frac{0.2\,\frac{N}{cm}}{200\,g} = \frac{0.2}{200}\,\frac{\frac{\cancel{kg}\,\cancel{m}}{s^2\,0.01\,\cancel{m}}}{0.001\,\cancel{kg}}$$

$$= \frac{1}{1000} \cdot 10^5 \cdot \frac{1}{s^2} = \underline{\underline{100\,\frac{1}{s^2}}}$$

$$\underline{\underline{\Delta\ddot{x} = 100\,\frac{1}{s^2}\cdot\Delta u - 100\,\frac{1}{s^2}\cdot\Delta x}} \qquad (3)$$

bzw. in der vereinfachten Schreibweise: Δ weggelassen

$$\ddot{x} = 100\,\frac{1}{s^2}\cdot u - 100\,\frac{1}{s^2}\cdot x \qquad (4)$$

d. Wie lautet die normierte DGL aus (c), wenn alle Bezugsgrößen SI-Einheiten sind ?

$$\ddot{\hat{x}} = 100 \cdot \hat{u} - 100 \cdot \hat{x}$$

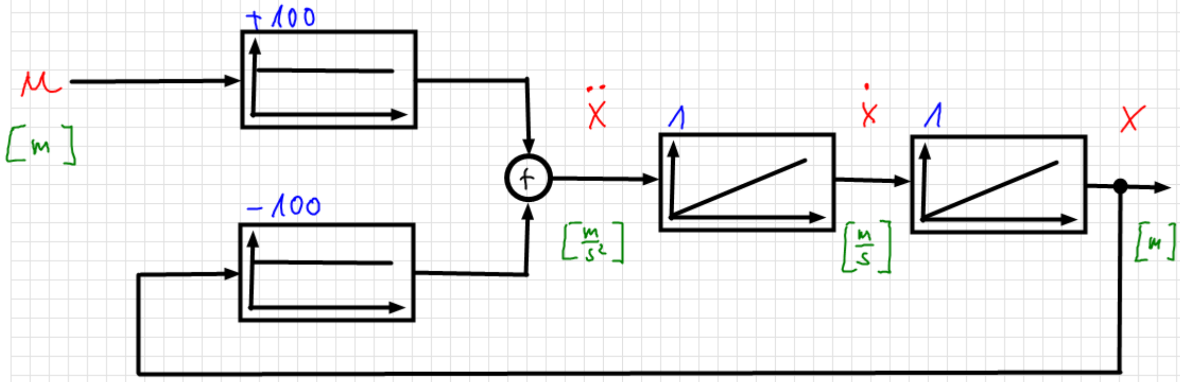
mit SI-Normierung

$\ddot{x}_N = \frac{m}{s^2}$, $x_N = m$, $u_N = m$

bzw. in vereinfachter Schreibweise : ^ weggelassen

$$\ddot{x} = 100\, u - 100\, x \qquad (5)$$

SI-Normierung Ruhelagesystem



e. Wie lautet die normierte DGL aus (c), wenn die Bezugsgrößen wie folgt festgelegt sind:

$u_N = x_N = 1cm \qquad v_N = 1\frac{m}{s} \qquad a_N = 1\frac{m}{s^2}$

Aus der unnormierten Gl. (4)

$$a = \ddot{x} = 100\,\frac{1}{s^2}\cdot u - 100\,\frac{1}{s^2}\cdot x \qquad (4)$$

wird dann

$$\hat{a}\cdot a_N = 100\cdot\hat{u}\cdot\frac{1}{s^2}\cdot u_N - 100\cdot\hat{x}\,\frac{1}{s^2}\cdot x_N$$

$$\hat{a} = 100\,\hat{u}\,\frac{u_N}{s^2\cdot a_N} - 100\,\hat{x}\cdot\frac{x_N}{s^2\cdot a_N}$$

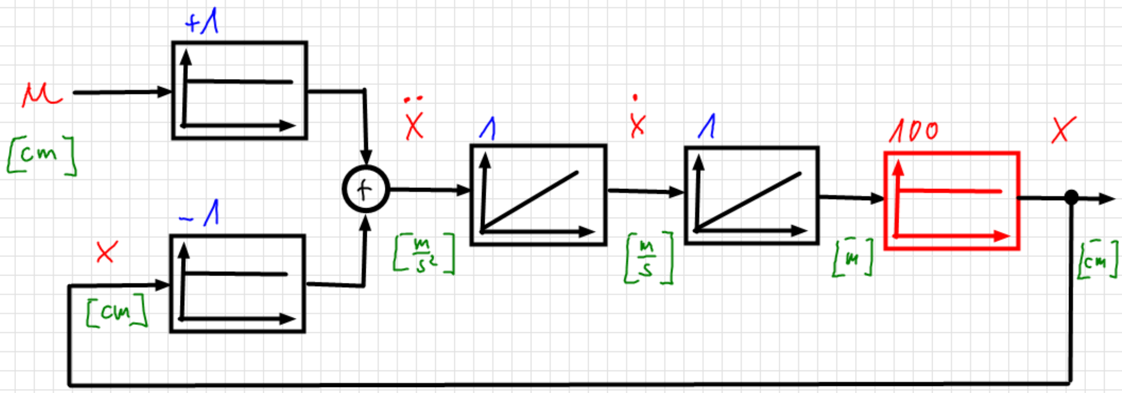
$$= 100\,\hat{u}\,\frac{cm\,\cancel{s^2}}{\cancel{s^2}\cdot m} - 100\,\hat{x}\,\frac{cm\,\cancel{s^2}}{\cancel{s^2}\cdot m}$$

$$= \underline{\underline{\hat{u} - \hat{x}}}$$

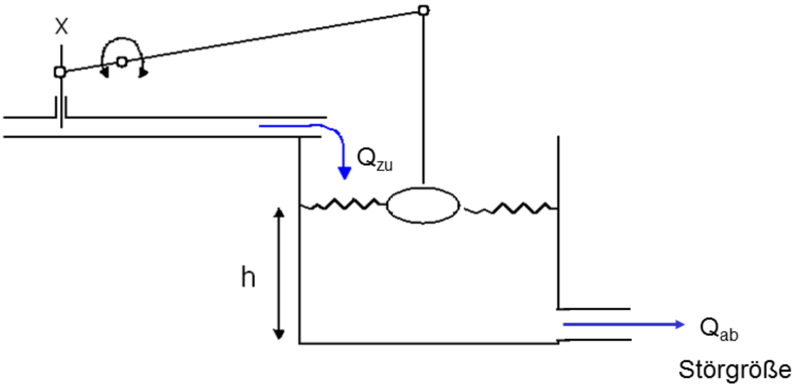
bzw. in vereinfachter Schreibweise:

$$\Rightarrow \quad \underline{\underline{\ddot{x} = u - x}} \qquad \text{mit} \quad \ddot{x}_N = \frac{m}{s^2}$$

$$x_N = u_N = cm$$



Übung: Proportionalelement



Wirkung — Ursache

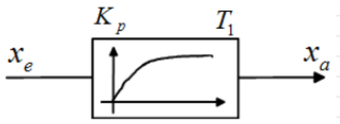
$$\Delta Q = K \cdot \Delta h$$

$$K = \frac{\Delta Q}{\Delta h} = \frac{-0.8\,\frac{dm^3}{s}}{20\,mm} = \frac{-0.8 \cdot 10^{-3}\, m^{\cancel{3}\,2}}{0.02\,\cancel{m} \quad s}$$

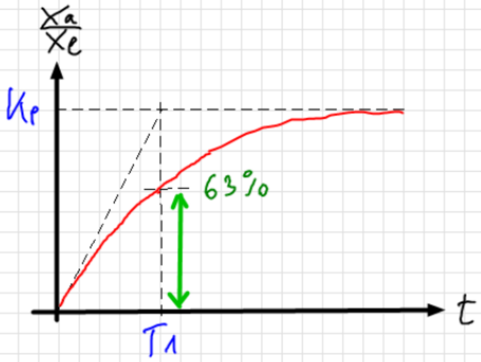
$$\underline{\underline{K}} = -40 \cdot 10^{-3}\,\frac{m^2}{s} = \underline{\underline{-0.04\,\frac{m^2}{s}}}$$

Proportional-Element mit Verzögerung 1. Ordnung (PT1)

⇒ Viele Systeme haben dieses Verhalten!



⇒ Verhalten wird durch 2 Parameter festgelegt: K_p, T_1 (= Zeitkonstante)



$$T_1 \cdot \dot{x}_a + x_a = K_p \cdot x_e$$

Lösung der DGL:

$$\boxed{x_a = x_e \cdot k_p \cdot \left(1 - e^{-t/T_1}\right)}$$

Anm.: Probe durch einsetzen der Lösung in die DGL.

Welchen Wert hat $\frac{x_a}{x_e}$ für $t \to \infty$?

$$\underline{\underline{\frac{x_a}{x_e}}} = K_p \cdot \left(1 - e^{-\infty}\right) = \underline{\underline{K_p}} \quad \text{(s. Bild)}$$

Welchen Wert hat $\frac{x_a}{x_e}$ für $t = T_1$?

$$\frac{x_a}{x_e} = K_p \cdot \left(1 - e^{-1}\right) = K_p \left(1 - 0.368\right)$$

$$= \underline{0.632\, K_p} \quad \hat{=} \ 63\% \text{ des Endwertes (s. Bild)}$$

Welche Steigung hat $\frac{x_a}{x_e}$ für $t = 0$?

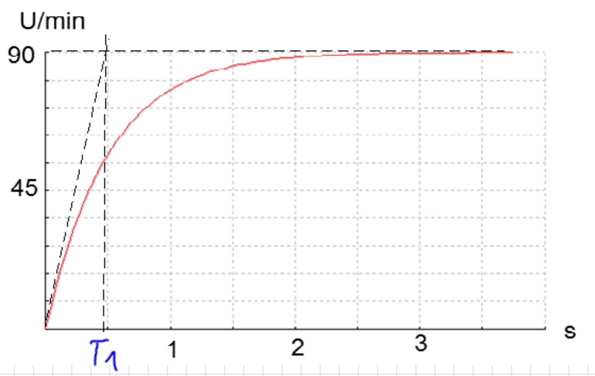
$$\frac{\dot{x}_a(t)}{x_e} = \frac{K_p}{T_1} \cdot e^{-t/T_1}\Big|_{t=0} = \underline{\frac{K_p}{T_1}}$$

Wo schneidet die Steigungsgrade $f_{Tang}(t) = \frac{K_p}{T_1} \cdot t$ den Endwert K_p?

$$K_p = \frac{K_p}{T_1} \cdot t \iff \underline{t = T_1} \quad \text{(s. Bild)}$$

Übung: Verzögerungsglied 1. Ordnung

Ein Gleichstrommotor arbeitet in seinem Arbeitspunkt (1800U/min, U=10V).
Jetzt wird die Betriebsspannung sprungartig um 0.5V erhöht.
Die gemessene Drehzahländerung hat folgenden Zeitverlauf:



Man kann ablesen:

$$\underline{\underline{T_1 = 0.5\,s}}$$

n : Drehzahl

u_e : Eingangsspannung

Für $t \to \infty$ gilt: $\frac{\Delta n}{\Delta u_e} = K_p = \frac{90\,\frac{1}{min}}{0.5\,V} = 180\,\frac{1}{V \cdot min}$

$$\Rightarrow \underline{\underline{K_p = 3\,\frac{1}{V \cdot s}}}$$

Einsetzen der Kennwerte in die DGL:

$$T_1 \cdot \dot{x}_a + x_a = K_p \cdot x_e$$

$$\updownarrow \qquad \updownarrow \qquad \updownarrow$$

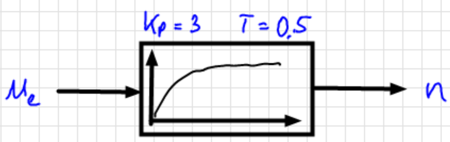
$$T_1 \cdot \dot{n} + n = K_p \cdot u_e$$

Da alle Größen in SI-Einheiten angegeben werden:

$$0.5 \cdot \dot{\hat{n}} + \hat{n} = 3\,\hat{u}_e \qquad \text{mit} \quad n_N = \frac{1}{s} \qquad u_N = V$$

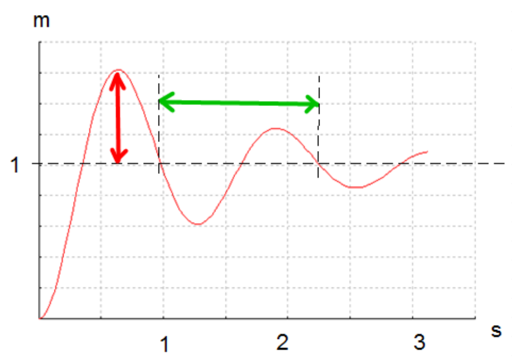
bzw. vereinfachte Schreibweise

$$\underline{\underline{0.5\,\dot{n} + n = 3\,u_e}}$$



ÜBUNG: PT2-Glied

Ein System reagiert auf eine sprungf. 1/5-Drehung der Seiltrommel mit der angegebenen Sprungantwort. Beispiel: Förderkorb an einem langen, elastischen Seil.



Aus der Sprungantwort kann man entnehmen:

$ü = 0.6 \quad (60\%)$

$T_p = 1.2\,s$

$K_p = \frac{X_a(t \to \infty)}{X_e} = \frac{1m}{\frac{1}{5} \cdot 2\pi} = 0.8m$

Damit kann D und ω_e berechnet werden:

$$D = \frac{1}{\sqrt{1 + (\pi / \ln ü)^2}} = 0.1605$$

$$\omega_e = \frac{2\pi}{T_p} = 5.236 \frac{1}{s}$$

Mit D und ω_e kann ω_0 berechnet werden.

$$\omega_0 = \frac{\omega_e}{\sqrt{1 - D^2}} = 5.305 \frac{1}{s}$$

Da alle Größen in SI-Einheiten vorliegen, kann vereinfacht normiert werden:

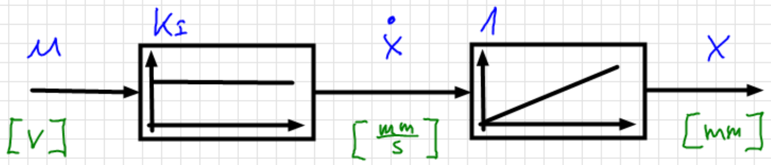
$K_p = 0.8$, $D = 0.1605$, $\omega_0 = 5.305$

mit ϕ in rad und x in m

Übung: Strecke ohne Ausgleich 1. Ordnung

Beim Anlegen einer Spannung von 10V fährt ein Verfahrtisch ein Weg von 45cm in 3s (s. Diagramm).

I-Block kann auch so gezeichnet werden:



DGL: $\dot{x} = K_I \cdot u$ (1)

aus (1) folgt: $\underline{\underline{K_I}} = \frac{\dot{x}}{u} = \frac{450\,mm}{3s \cdot 10V} = \underline{\underline{15 \frac{mm}{V \cdot s}}}$

Normieren

$$\frac{d\hat{x}\, x_N}{d\hat{t}\, t_N} = K_I \cdot \hat{u} \cdot u_N$$

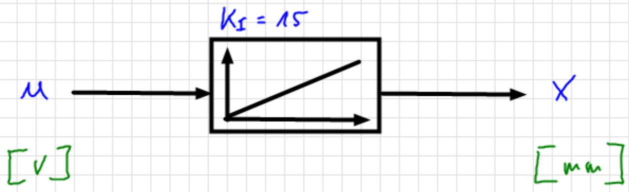
$$\frac{d\hat{x}}{d\hat{t}} = \hat{u} \cdot \frac{u_N \cdot t_N \cdot K_I}{x_N} = \hat{u} \cdot \frac{1\cancel{V} \cdot 1\cancel{s} \cdot 15 \frac{\cancel{mm}}{\cancel{V \cdot s}}}{1\cancel{mm}}$$

$$\underline{\underline{\dot{\hat{x}} = 15\, \hat{u}}}$$

mit $x_N = 1\,mm$, $t_N = 1s$

$u_N = 1V$

bzw. vereinfacht:



$$\underline{\underline{\dot{x} = 15\, u}}$$