Problemstellung für Ausgleichsrechnung

1. Der Funktionstyp ist bekannt (z.B. Grade, Polynom, ...).
Der konkrete Funktionsverlauf hängt von den Parametern der ($\xi_1, \xi_2, \ldots$) der Funktion ab.

Beispiel: Grade $y = ax + b$

Parameter der Funktion
a : Steigung
b : y-Achsenabschnitt

2. Die Parameter $\xi_1, \xi_2, \ldots$ der Funktion / Funktionen sind unbekannt und gesucht.

3. Die Parameter lassen sich nicht direkt messen.

4. Es gibt i fehlerbehaftete Messwerte L_i, welche über die Funktion / Funktionen mit den unbekannten Parametern verknüpft sind.

Beispiel: Grade

$$
\begin{aligned}
y_1 &= a\,x_1 + b \\
y_2 &= a\,x_2 + b \\
&\vdots \\
y_n &= a\,x_n + b
\end{aligned}
$$

$(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$ müssten idealerweise auf der Grade $y = ax + b$ liegen.

Beispiel 1: Würfelbeispiel (1 Unbekannte)

Gegeben ist ein Würfel. Die Seitenlänge a ist unbekannt und soll bestimmt werden.

Das Volumen V des Würfels wurde 3 mal mit Hilfe eines Messbechers gemessen:

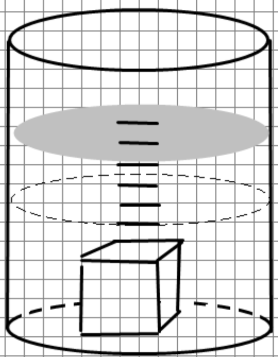
$V_1 = 125\text{cm}^3$
$V_2 = 130\text{cm}^3$
$V_3 = 110\text{cm}^3$

→ a unbekannter Parameter ξ
$V=a^3$ Funktion $f_i\,(\xi)$ mit unbekanntem Parameter ξ
V_i Beobachtungen L_i

Die Fehlergleichungen lauten in diesem Fall:

$V_1 + \varepsilon_1 = a^3$
$V_2 + \varepsilon_2 = a^3$
$V_3 + \varepsilon_3 = a^3$

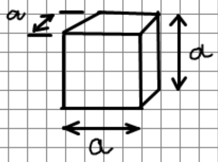
Anm.: Die ε werden nur deswegen benötigt, damit die Gleichungen sich nicht widersprechen.



$$V = \overbrace{a^3}^{\text{Funktion}}$$

Messung

unbekannte Parameter



$$V_i + \varepsilon_i = a^3$$
$$\varepsilon_i = a^3 - V_i$$
$$\Longrightarrow \varepsilon_i^2 = (a^3 - V_i)^2$$

1. $\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2 =$

$= (a^3 - V_1)^2 + (a^3 - V_2)^2 + (a^3 - V_3)^2 \Longrightarrow$ Soll minimiert werden

2. Ableitung nach a berechnen

$$\frac{d}{da}\left[(a^3 - V_1)^2 + \ldots\ldots\right] =$$

$$= 3a^2 \cdot 2(a^3 - V_1) + \ldots\ldots$$

3. Nullsetzen der Ableitung

$$\cancel{3a^2} \cdot \cancel{2}(a^3 - V_1) + \cancel{3a^2} \cdot \cancel{2}(a^3 - V_2) + \cancel{3a^2} \cdot \cancel{2}(a^3 - V_3) \overset{!}{=} 0$$

$$3a^3 = V_1 + V_2 + V_3$$

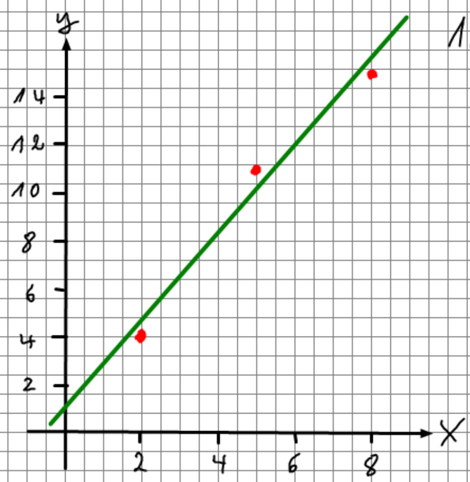
$$\underline{\underline{a = \sqrt[3]{\frac{V_1 + V_2 + V_3}{3}}}}$$

Beispiel 2: Geradenbeispiel (2 Unbekannte)

Bekannt ist, daß das phys. Modell eines Prozeses durch eine Gerade *y=ax+b* beschrieben wird. Gemessen wurden folgende Werte:

$x_1 = 2 \rightarrow y_1 = 4$
$x_2 = 5 \rightarrow y_2 = 11$
$x_3 = 8 \rightarrow y_3 = 15$

→ a, b — unbekannte Parameter ξ_1 .....
y=ax+b — Funktion $f_i(\xi_1 .....)$ mit unbekannten Parametern ξ_1 .....
y_i — Beobachtungen L_i



1. Zu jedem Messwert eine Gleichung aufstellen:

$$y_1 + \varepsilon_1 = a x_1 + b$$
$$y_2 + \varepsilon_2 = a x_2 + b$$
$$y_3 + \varepsilon_3 = a x_3 + b$$

$$\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2 =$$
$$(a x_1 + b - y_1)^2 + (a x_2 + b - y_2)^2 + (a x_3 + b - y_3)^2$$

⟹ soll minimal werden

---

2. Ableitungen nach a und b berechnen (den Parametern)

$$\frac{d}{da}\left[(a x_1 + b - y_1)^2 + \ldots\ldots\right] =$$
$$2 x_1 (a x_1 + b - y_1) + \ldots\ldots =$$
$$2 \; (a x_1^2 + b x_1 - y_1 x_1) + \ldots\ldots \qquad (1)$$

$$\frac{d}{db}\left[(ax_1 + b - y_1)^2 + \ldots\ldots\right] =$$

$$2(ax_1 + b - y_1) + \ldots\ldots \qquad (2)$$

Nullsetzen $\rightarrow$ s. Vorlesung

ÜBUNG: Berechnung einer Ausgleichsgerade

Es ist zu zeigen, dass der allg. Lösungsansatz

$$\underline{A}^T \underline{A} \cdot \vec{\xi} = \underline{A}^T \cdot \vec{L}$$

für die Ausgleichsgerade das gleiche Ergebnis liefert wie der Lösungsweg in Beispiel 2.

Aufstellen der Fehlergleichungen

$$x_1 \cdot a + b = y_1 + \varepsilon_1$$

$$x_2 \cdot a + b = y_2 + \varepsilon_2$$

$$x_3 \cdot a + b = y_3 + \varepsilon_3$$

oder in Matrixschreibweise:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} x_1 & 1 \\ x_2 & 1 \\ x_3 & 1 \end{pmatrix}}_{\underline{A}} \underbrace{\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}}_{\vec{\xi}} = \underbrace{\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}}_{\vec{L}} + \underbrace{\begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \end{pmatrix}}_{\vec{\varepsilon}}$$

$$\Downarrow \qquad \underline{A}^T \cdot \underline{A} \cdot \vec{\xi} = \underline{A}^T \cdot \vec{L}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}}_{\underline{A}^T} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 & 1 \\ x_2 & 1 \\ x_3 & 1 \end{pmatrix}}_{\underline{A}} \underbrace{\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}}_{\vec{\xi}} = \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}}_{\underline{A}^T} \underbrace{\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}}_{\vec{L}}$$

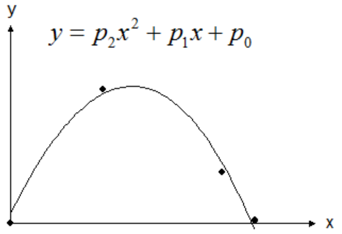
$$\underbrace{\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}}_{A^T} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 & 1 \\ x_2 & 1 \\ x_3 & 1 \end{pmatrix}}_{\underline{A}} \underbrace{\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}}_{\vec{\xi}} = \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}}_{\underline{A}^T} \underbrace{\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}}_{\vec{L}}$$

Ausmultiplizieren ergibt:

$$\begin{pmatrix} x_1^2+x_2^2+x_3^2 & x_1+x_2+x_3 \\ x_1+x_2+x_3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3 \\ y_1+y_2+y_3 \end{pmatrix}$$

ÜBUNG: Berechnung eines Polynoms aus Meßwerten

<u>Aufgabenstellung:</u> Von einem physikalischen Prozess sei bekannt, daß er parabelförmig verläuft (z.B. Wurfparabel).



$$y = p_2 x^2 + p_1 x + p_0$$

An vier Punkten werden die Koordinaten (x,y) bestimmt:

$(x_1,y_1) = (0,0)$
$(x_2,y_2) = (2,6)$
$(x_3,y_3) = (5,3)$
$(x_4,y_4) = (6,0)$

Bestimmen Sie p_0, p_1, p_2 und geben Sie die Restfehler an.

Pro Punkt eine Gleichung aufstellen:

$$\left.\begin{aligned} y_1 + \varepsilon_1 &= p_2 x_1^2 + p_1 x_1 + p_0 \\ y_2 + \varepsilon_2 &= p_2 x_2^2 + p_1 x_2 + p_0 \\ &\vdots \\ y_4 + \varepsilon_4 &= p_2 x_4^2 + p_1 x_4 + p_0 \end{aligned}\right\}$$

Unbekannte Parameter: p_0, p_1, p_2

Gleichungen: 4

In Matrixschreibweise gilt:

$$\begin{pmatrix} x_1^2 & x_1 & 1 \\ x_2^2 & x_2 & 1 \\ x_3^2 & x_3 & 1 \\ x_4^2 & x_4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1^2 & x_1 & 1 \\ x_2^2 & x_2 & 1 \\ x_3^2 & x_3 & 1 \\ x_4^2 & x_4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \end{pmatrix}$$

$(x_1,y_1) = (0,0)$
$(x_2,y_2) = (2,6)$
$(x_3,y_3) = (5,3)$
$(x_4,y_4) = (6,0)$

Zahlen einsetzen:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 25 & 5 & 1 \\ 36 & 6 & 1 \end{pmatrix}}_{\underline{A}} \underbrace{\begin{pmatrix} p_2 \\ p_1 \\ p_0 \end{pmatrix}}_{\vec{\xi}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\vec{L}} + \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \end{pmatrix}$$

Ausgleichslösung: $\boxed{\underline{A}^T \underline{A} \cdot \vec{\xi} = \underline{A}^T \vec{L}}$

$\Rightarrow$ Normalengleichungen

$$\underline{A}^T \underline{A}: \begin{pmatrix} 0 & 4 & 25 & 36 \\ 0 & 2 & 5 & 6 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 25 & 5 & 1 \\ 36 & 6 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1937 & 349 & 65 \\ 349 & 65 & 13 \\ 65 & 13 & 4 \end{pmatrix}$$

immer schiefsymmetrisch

$$\underline{A}^T \vec{L}: \begin{pmatrix} 0 & 4 & 25 & 36 \\ 0 & 2 & 5 & 6 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 99 \\ 27 \\ 9 \end{pmatrix}$$

Somit zu lösen

$$\begin{pmatrix} 1937 & 349 & 65 \\ 349 & 65 & 13 \\ 65 & 13 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_2 \\ p_1 \\ p_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 99 \\ 27 \\ 9 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ Lösung: $\underline{\underline{y = -\frac{85}{118}x^2 + \frac{503}{118}x + \frac{6}{59}}}$

ÜBUNG: Welche Funktionsparameter lassen sich linear bestimmen ?

Die Parameter sind dann mit einem lin. Gleichungs-system lösbar, wenn die Funktion als Skalarprodukt beschrieben werden kann, mit den Parametern im 2. Vektor.

a) $y = a \cdot x^4 + b \cdot \sin(\frac{\pi}{2} \cdot x^3) + c$

$$y = \underbrace{\begin{pmatrix} x^4 & \sin\left(\frac{\pi}{2} \cdot x^3\right) & 1 \end{pmatrix}}_{\text{mit den Meßwerten, werden hieraus Zahlen}} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

Wenn mind. 3 Messungen gegeben sind, dann können die Parameter mit einem lin. Gleichungssystem bestimmt werden !

b) $y = a \cdot x^b + 2 \cdot \sin (cx) + 1$

$\Longrightarrow$ nicht als Vektorprodukt mit Parametervektor beschreibbar $\Rightarrow$ nichtlin. Ausgleichsproblem

c) $$y = \frac{ax^2 + bx + c}{dx^2 + ex + 1}$$

$$y\left(dx^2 + ex + 1\right) = ax^2 + bx + c$$

$$yx^2 \cdot d + yx \cdot e + y = ax^2 + bx + c$$

$$y = ax^2 + bx + c - yx^2 \cdot d - yx \cdot e$$

$$y = \begin{pmatrix} x^2 & x & 1 & -yx^2 & -yx \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ lin. lösbar

mind. 5 Messwerte

d) $$y = \frac{ax + b}{cx + d} + f$$

$$y = \frac{ax + b}{cx + d} + \frac{f(cx + d)}{cx + d} = \frac{ax + b + fcx + fd}{cx + d}$$

$$yx \cdot \underline{\underline{c}} + y \cdot \underline{\underline{d}} = ax + b + \underline{\underline{fc}} \cdot x + \underline{\underline{fd}}$$

$\Rightarrow$ nicht lin. Ausgleichsproblem

ÜBUNG: Linearisierung einer Parabel um einen vorgegebenen Punkt

Gegeben ist die Parabel $f(x) = x^2 - 2x + 1$

Linearisieren Sie die Funktion um den Punkt $\hat{x} = 2,\ f(\hat{x}) = 1.$

Wie lautet die Linearisierungsgerade?

$$f(\bar{x}) \approx f(\hat{x}) + \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x=\hat{x}} \cdot (\bar{x} - \hat{x}) \qquad (1)$$

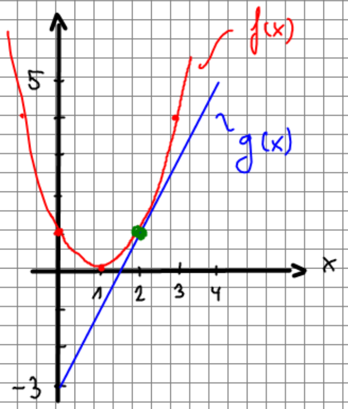
mit $$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x=2} = 2x - 2\Big|_{x=2} = 4 - 2 = \underline{\underline{2}}$$

$$f(\hat{x}) = x^2 - 2x + 1\Big|_{x=2} = 4 - 4 + 1 = \underline{\underline{1}}$$

Einsetzen in (1)

$$f(\bar{x}) \approx 1 + 2 \cdot (\bar{x} - 2)$$

$$\underline{\underline{f(\bar{x}) \approx 2\bar{x} - 3}} \qquad \text{um } \bar{x} = 2\ !$$



Näherungsgerade $\underline{\underline{g(x) = 2x - 3}}$

Wie groß ist der Fehler der Linearisierung bei $\hat{x} = 2.1$?

$$f(\hat{x} = 2.1) = 2.1^2 - 2 \cdot 2.1 + 1 = 1.21$$

$$g(\hat{x} = 2.1) = 2 \cdot 2.1 - 3 = 1.2$$

relativer Fehler $\Rightarrow$ $$F_R = \frac{g(\hat{x}) - f(\hat{x})}{f(\hat{x})} \cdot 100\,\% = \underline{\underline{-0.83\,\%}}$$

ÜBUNG: Nichtlineare Ausgleichung

Gegeben ist die Funktion $f(x) = a \cdot e^{-bx}$

Weiter sind folgende Messwerte gegeben: (0.5, 1.1), (1.0, 0.4), (2.0, 0.055)

Die initialen Schätzwerte der Parameter sind: $a_0 = 4$, $b_0=3$
Die Parameter a und b sind durch Ausgleichung zu verbessern.

Unbekannt und gesucht: a, b

3 Gleichungen für 2 Unbekannte (→ Ausgleichen)

Das nichtlin. Gleichungssystem lautet:

$$\left.\begin{aligned} 1.1 &= a \cdot e^{-b \cdot 0.5} \\ 0.4 &= a \cdot e^{-b \cdot 1.0} \\ 0.055 &= a \cdot e^{-b \cdot 2.0} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \text{linearisieren und iterativ lin. ausgleichen}$$

$$\frac{\partial f}{\partial a} = e^{-bx} \qquad \frac{\partial f}{\partial b} = -x \cdot a \cdot e^{-bx}$$

Jacobi-Matrix aufstellen

$$\left.\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial a} & \frac{\partial f_1}{\partial b} \\ \frac{\partial f_2}{\partial a} & \frac{\partial f_2}{\partial b} \\ \frac{\partial f_3}{\partial a} & \frac{\partial f_3}{\partial b} \end{pmatrix}\right|_{\hat{a},\hat{b}} = \begin{pmatrix} e^{-3 \cdot 0.5} & -0.5 \cdot 4 \cdot e^{-3 \cdot 0.5} \\ e^{-3 \cdot 1} & -1 \cdot 4 \cdot e^{-3 \cdot 1} \\ e^{-3 \cdot 2} & -2 \cdot 4 \cdot e^{-3 \cdot 2} \end{pmatrix} =$$

$$\left.\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial a} & \frac{\partial f_1}{\partial b} \\ \frac{\partial f_2}{\partial a} & \frac{\partial f_2}{\partial b} \\ \frac{\partial f_3}{\partial a} & \frac{\partial f_3}{\partial b} \end{pmatrix}\right|_{\hat{a},\hat{b}} = \begin{pmatrix} 0.2231 & -0.4463 \\ 0.0498 & -0.1991 \\ 0.0025 & -0.0198 \end{pmatrix} = \underline{J} \quad \text{Jacobi-matrix}$$

Lösungsvektor $\vec{l}$ aufstellen

$$\begin{pmatrix} y_1 - f(x_1) \\ y_2 - f(x_2) \\ y_3 - f(x_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.1 - 4\cdot e^{-3\cdot 0{,}5} \\ 0.4 - 4\cdot e^{-3\cdot 1} \\ 0.055 - 4\cdot e^{-3\cdot 2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.2075 \\ 0.2009 \\ 0.0451 \end{pmatrix}$$

berechneter Funktionswert

gemessener Funktionswert

Gleichungssystem zur Verbesserung der Parameter

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 0.2231 & -0.4463 \\ 0.0498 & -0.1991 \\ 0.0025 & -0.0198 \end{pmatrix}}_{\underline{J}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} \Delta a \\ \Delta b \end{pmatrix}}_{\Delta\vec{\xi}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0.2075 \\ 0.2009 \\ 0.0451 \end{pmatrix}}_{\vec{l}}$$

2.3. Lösen mit $\underline{J}^T \underline{J} \cdot \Delta\vec{\xi} = \underline{J}^T \cdot \vec{l}$

$$\Delta \vec{\xi} = \begin{pmatrix} -2.2361 \\ -1.5820 \end{pmatrix}$$

Bestimmung der verbesserten Parameter

$$\Delta \vec{\xi} = \vec{\bar{\xi}} - \vec{\hat{\xi}} \quad \Leftrightarrow$$

$$\vec{\bar{\xi}} = \vec{\hat{\xi}} + \Delta \vec{\xi} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2.2361 \\ -1.5820 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1.76 \\ 1.42 \end{pmatrix}$$

nächste Iteration

verbesserte Parameter als neue Schätzwerte nehmen

$\underline{J}$ aktualisieren , $\vec{l}$ aktualisieren

$\Delta \vec{\xi}$ per Ausgleichg. bestimmen ..... u.s.w.

s. Vorlesung