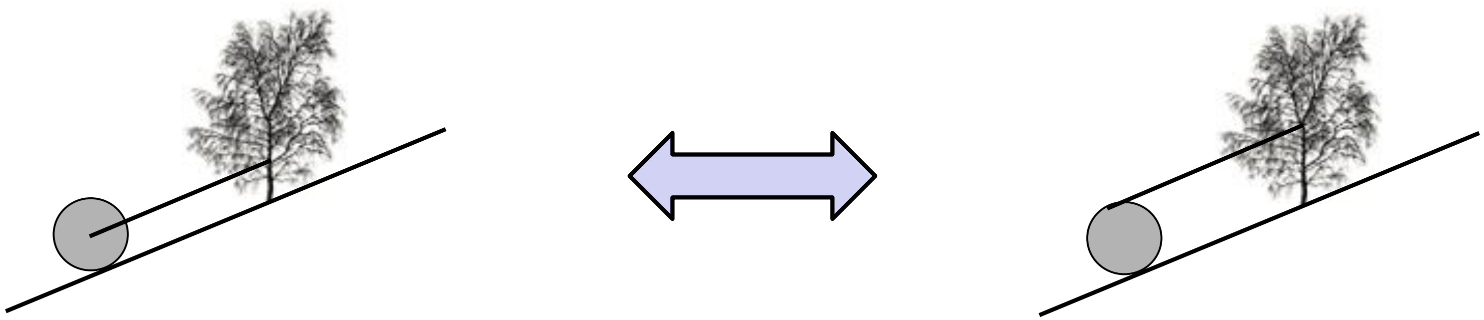
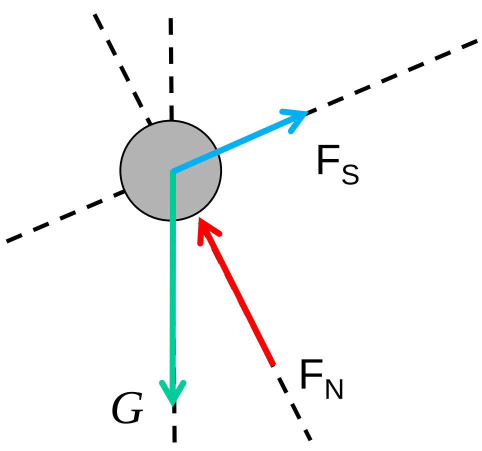
5.2.4 Drehbewegung starrer Körper um eine nichtbeschleunigte Achse

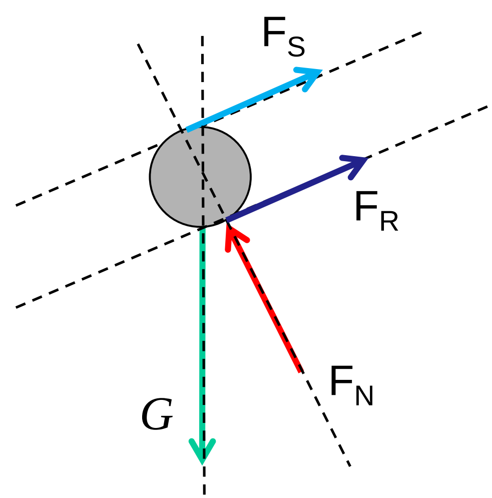
5.2.4.1 Drehmoment

Wir haben gesehen, dass ein Körper sich dann in Ruhe befindet, wenn sich die Wirkungslinien aller angreifenden Kräfte in einem Punkt schneiden und wenn die vektorielle Summe aller Kräfte 0 beträgt.

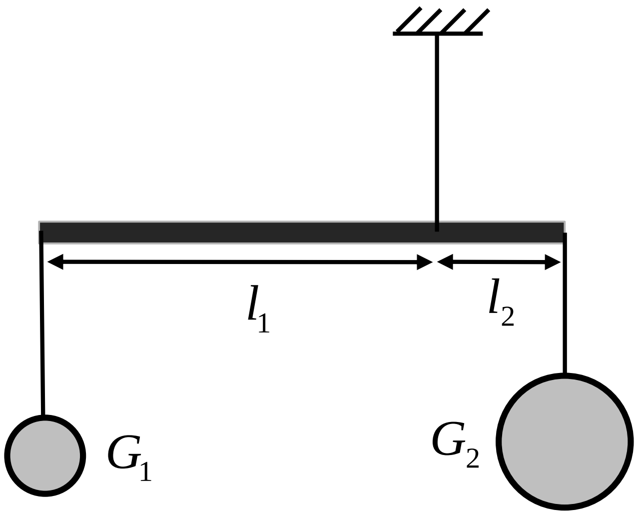


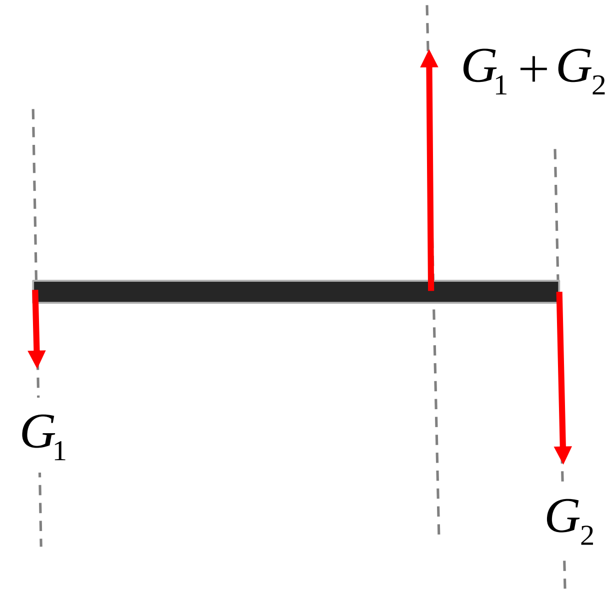


Was ist zu tun, wenn sich die angreifenden Kräfte nicht in einem Punkt zum Schnitt bringen lassen?



Beispiel: Balkenwaage





Beobachtung:

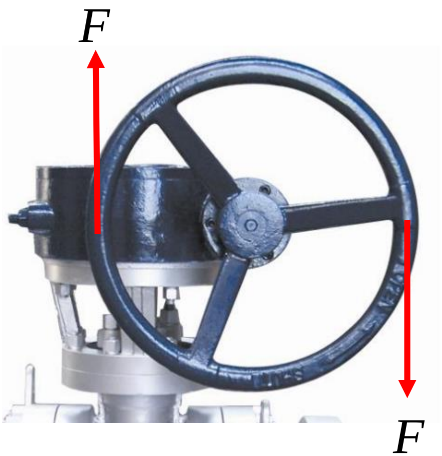
Die Balkenwaage ist dann im Gleichgewicht, wenn gilt :

$$G_1 \cdot l_1 = G_2 \cdot l_2$$

Obwohl sich die Kräfte nicht in einem Punkt schneiden, ist die Waage im Gleichgewicht.

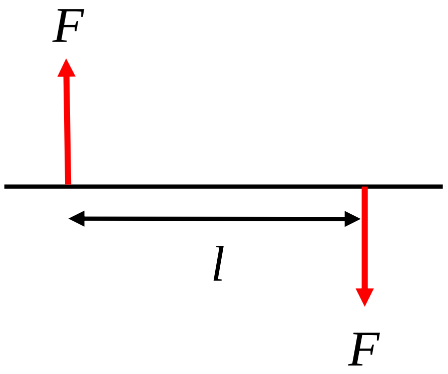
Einführung eines ***Drehmoments***:

Ein <u>paralleles</u> aber <u>entgegengesetztes Kräftepaar</u> wird als *Drehmoment* bezeichnet.

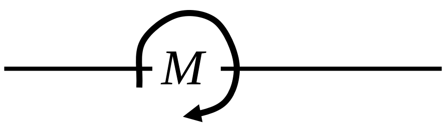


Wirkt auf ein Körper ein Kräftepaar, so kann man auch sagen:

„Am Körper greift ein Drehmoment an."



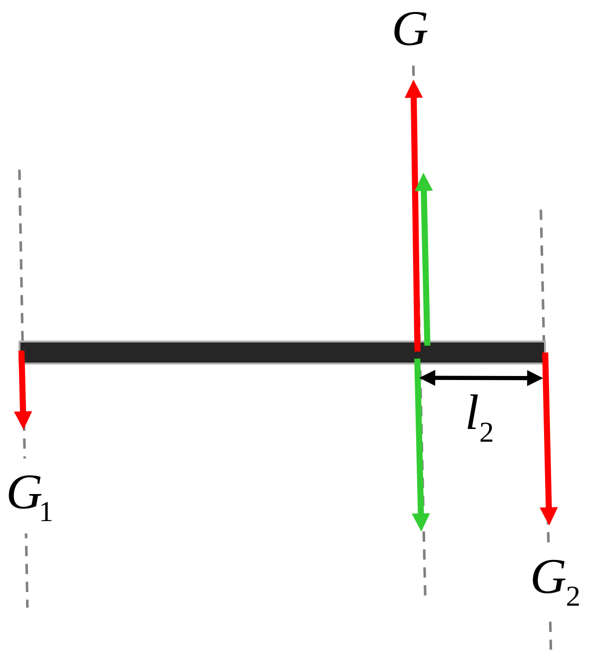
Statt das Kräftepaar zu zeichnen, trägt man dann an (Drehrichtung beachten):

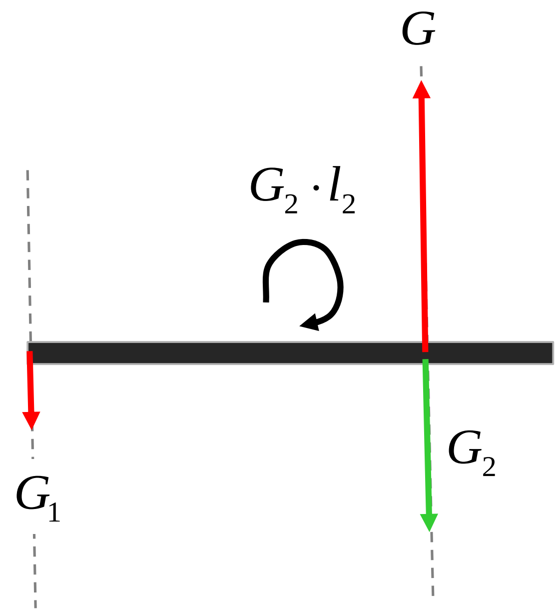


Die Größe des Drehmoments ist dann so festgelegt:

$$\boxed{M = F \cdot l}$$

Fortsetzung: Balkenwaage 2 (Gedankenexperiment)

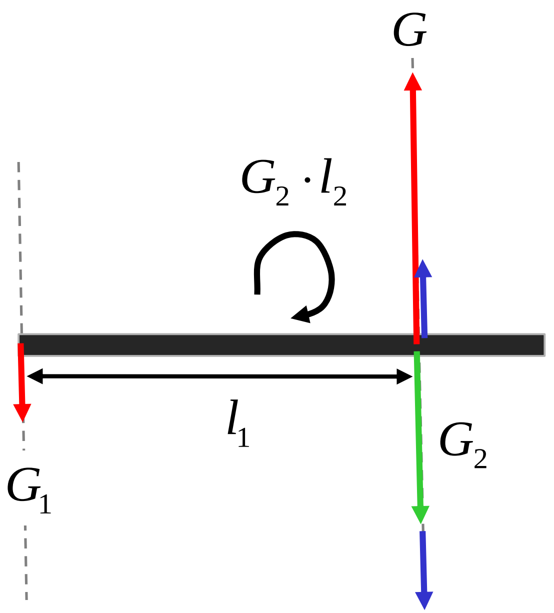


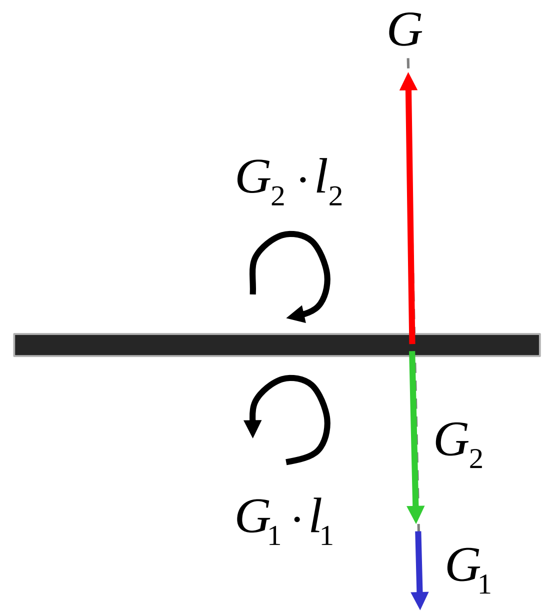


Durch hinzufügen eines sich neutralisierenden Kräftepaares in der Größe G_2 (grün) ändert sich nichts.

Kräftepaar wir durch Moment ersetzt.

Fortsetzung: Balkenwaage 3





Durch hinzufügen eines sich neutralisierenden Kräftepaares in der Größe G_1 (blau) ändert sich nichts.

Kräftepaar wir durch Moment ersetzt.

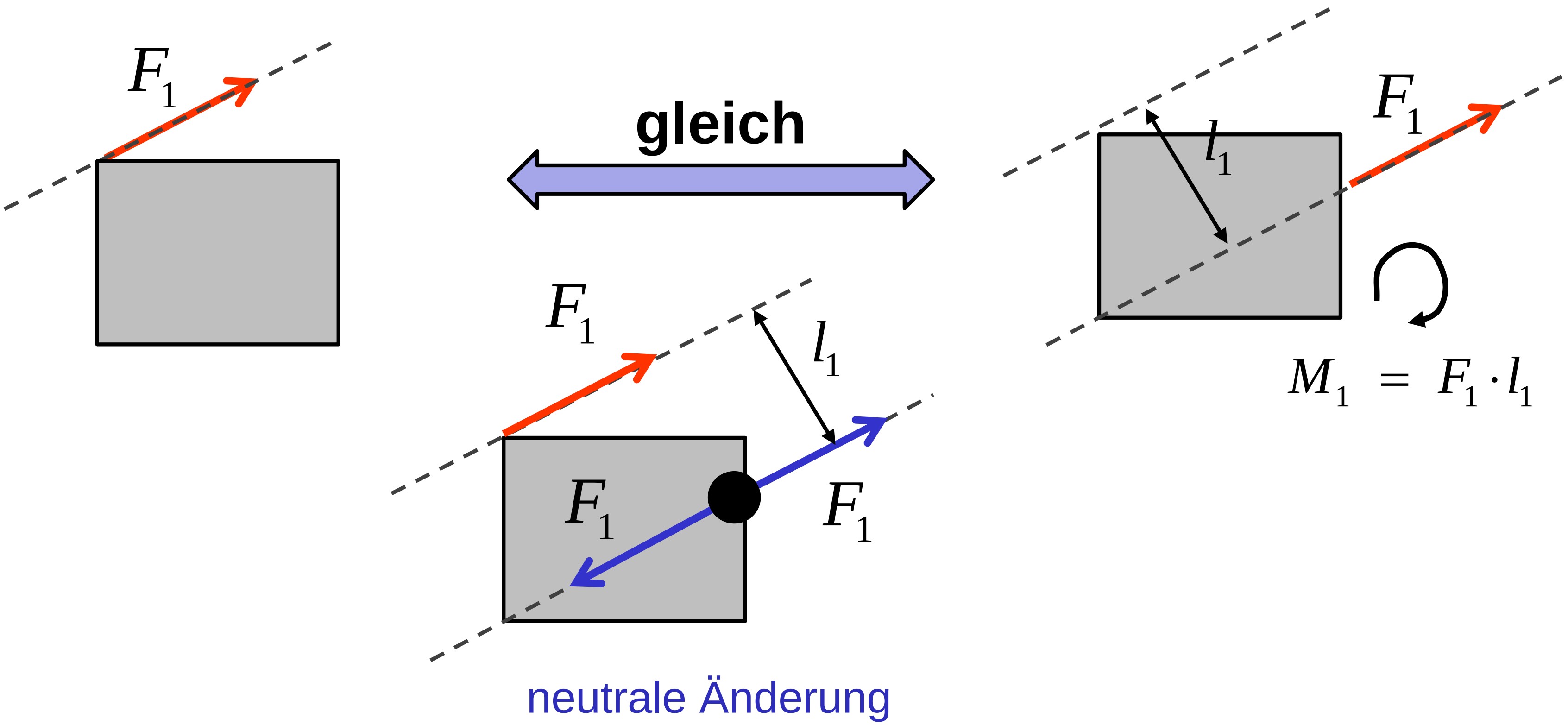
$\Rightarrow$ $$G = G_1 + G_2 \qquad G_1 \cdot l_1 = G_2 \cdot l_2$$

Ein Körper ändert seinen Bewegungs-zustand nicht, wenn gilt: $$\sum F = 0 \qquad \sum M = 0$$

Fazit: Eine Kraft F kann parallelverschoben werden, wenn ein Korrekturmoment M hinzugefügt wird (Drehrichtung des Momentes beachten !).

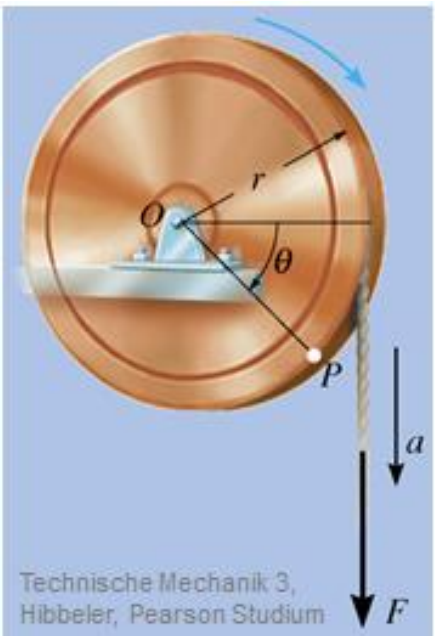
Das Korrekturmoment hat die Größe:

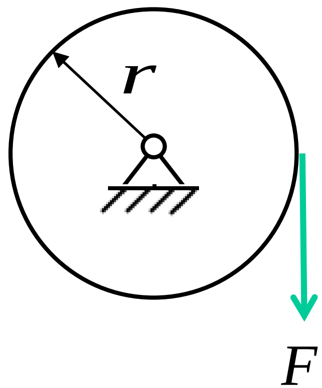
M = F · <u>senkrechter Abstand zwischen F und dem parallelverschobenen Vektor</u>



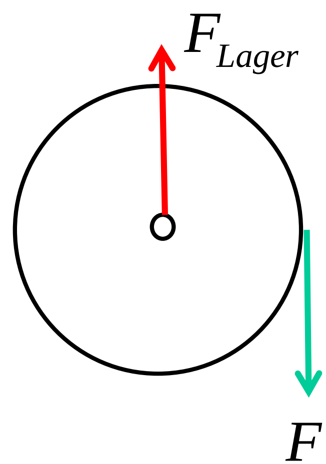
5.2.4.2 Zweites Newton'sches Axiom für Drehbewegungen

Wirkt auf einen Körper eine Drehmoment ein, so ändert sich sein Bewegungszustand, es setzt eine Winkelbeschleunigung ein.

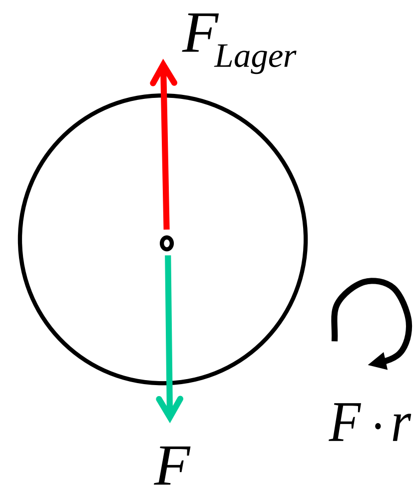




Scheibe frei-
schneiden



F verschieben



$$F_{Lager} = F \qquad M = F \cdot r$$

Durch das Drehmoment setzt eine Drehbewegung ein.

Die Größe der Winkelbeschleunigung hängt

- vom Drehmoment M ab, welches auf den Körper einwirkt und
- von einer Eigenschaft des Körpers, die als Massenträgheitsmoment J bezeichnet wird.

Das Massenträgheitsmoment ist ein Maß für die *Drehträgheit* eines Körpers.

Es gilt das 2. Newtonsche Gesetz für Drehbewegungen (= *Momentensatz*):

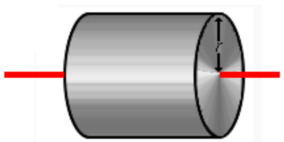
$$\boxed{M = J \cdot \ddot{\varphi}}$$ für Rotation

vergl.

$$\boxed{F = m \cdot \ddot{x}}$$ für Translation

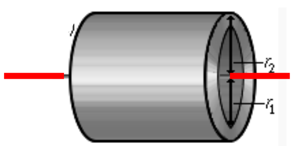
Das Massenträgheitsmoment J hängt ab

a) von der Körperform (räumlichen Masseverteilung) und
b) von der Lage der Drehachse



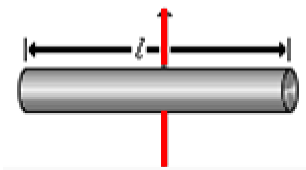
$$J_S = \frac{1}{2} m \cdot r^2$$

Vollzylinder mit Radius r



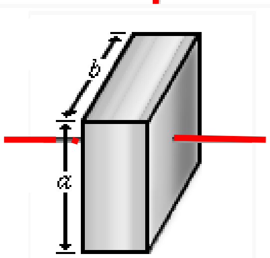
$$J_S = \frac{1}{2} m \cdot (r_2^2 + r_1^2)$$

Hohlzylinder



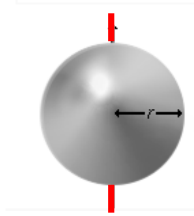
$$J_S = \frac{1}{12} m \cdot l^2$$

Stab der Länge l um Schwerpunkt



$$J_S = \frac{1}{12} m \cdot (a^2 + b^2)$$

Quader um Schwerpunkt

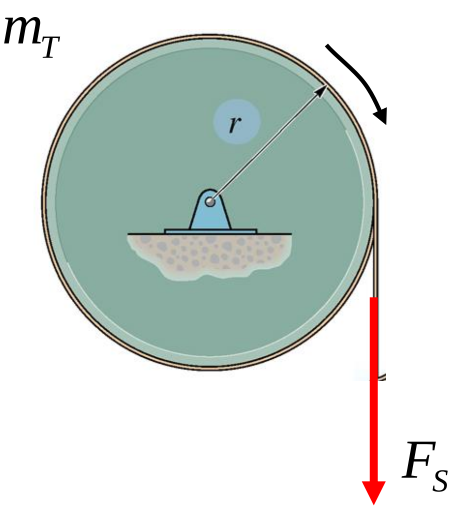


$$J_S = \frac{2}{5} m \cdot r^2$$

Vollkugel mit Radius r

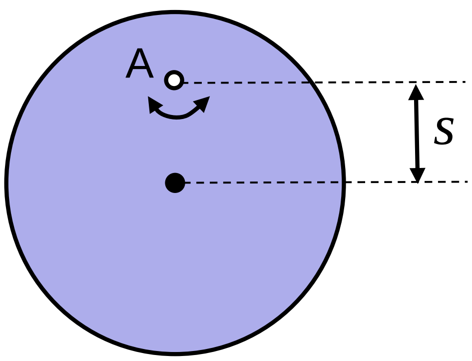
Übung: Kraft an Seiltrommel → Drehung um Schwerpunkt

An einer Seiltrommel (Vollzylinder mit der Masse m_T) wirkt eine Kraft F_S. Beschreiben Sie das System.



5.2.4.3 Massenträgheitsmoment bei Drehung um einen beliebigen Drehpunkt

Satz von Steiner : Dreht ein Körper nicht um den Schwerpunkt, sondern um einen Punkt A (mit Abstand s zum Schwerpunkt), so wird das Massenträgheitsmoment zu (parallele Achsverschiebung):



$$\boxed{J_A = J_S + m \cdot s^2}$$

Satz von Steiner

Beispiel: Ein Vollzylinder (Radius r) wird an seinem Rand pendelnd aufgehängt. Wie groß ist das Massenträgheitsmoment des Zylinderpendels?

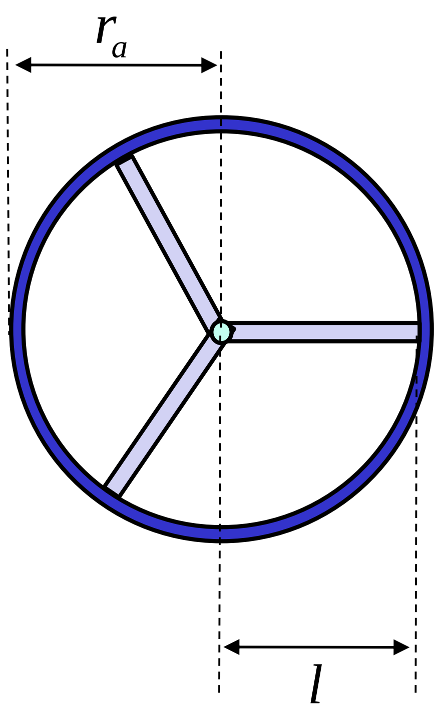
$$J_S = \frac{1}{2} m \cdot r^2 \quad \Longrightarrow \quad J_A = \frac{1}{2} m \cdot r^2 + m \cdot r^2 = \frac{3}{2} m \cdot r^2$$

Beispiel: Trebuchet-Game (crush-the-castle)

http://www.bildspielt.de/online-spiele/actionspiel/crush-the-castle/

Übung: Speichenrad

Wie groß ist das Massenträgheitsmoment J des gegebenen Speichenrades?



Masse einer Speiche $m_{Sp} = 1kg$

Masse des Reifens $m_R = 2kg$

Länge einer Speiche $l = 0.5m$

Aussenradius $r_a = 0.52m$

5.2.5 Aufstellung der Bewegungsgleichungen für Starrkörpersysteme

5.2.5.1 Vorgehensweise

Die Bewegungs-Differentialgleichungen können wie folgt bestimmt werden:

1. Schritt : Freischneiden aller Körper
2. Schritt : Schwerpunktsatz (s.u.)
3. Schritt : Momentensatz (s.u.)
4. Schritt : Kompatibilitätsbedingungen zwischen den bewegten Körpern

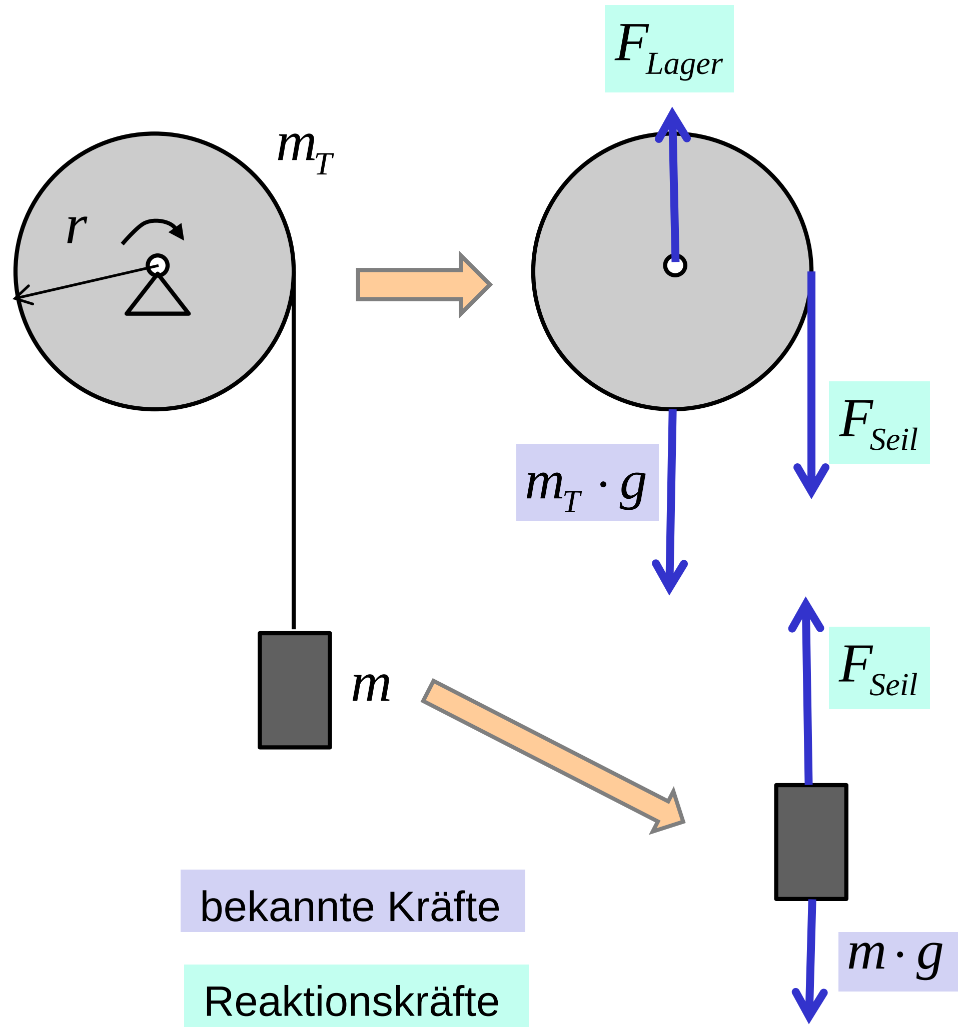
Nicht immer sind alle Schritte notwendig, z.B. bei reiner translatorischer oder rotatorischer Bewegung.

5.2.5.2 Schritt 1: Massen freischneiden

Jeden massebehafteten Teilkörper **einzeln** zeichnen (freischneiden).

An jedem massebehafteten Teilkörper die angreifenden Kräfte (eingeprägte Kräfte + Reaktionskräfte) antragen.

Kräfte die zwischen zwei Körpern wirken (z.B. F_{Seil}) den gleichen Namen geben und mit entgegengesetzten Richtungen antragen.

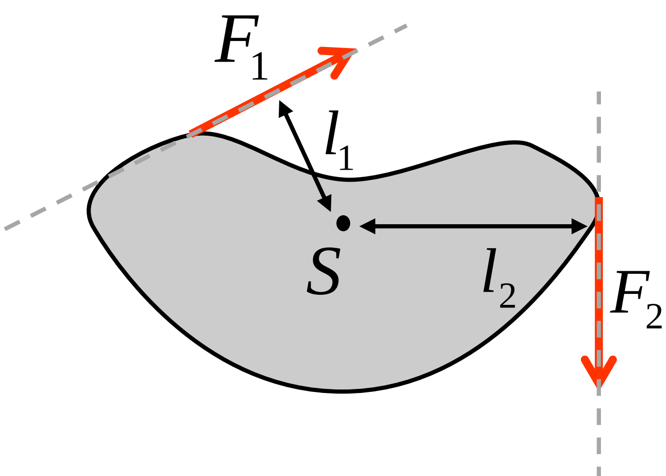


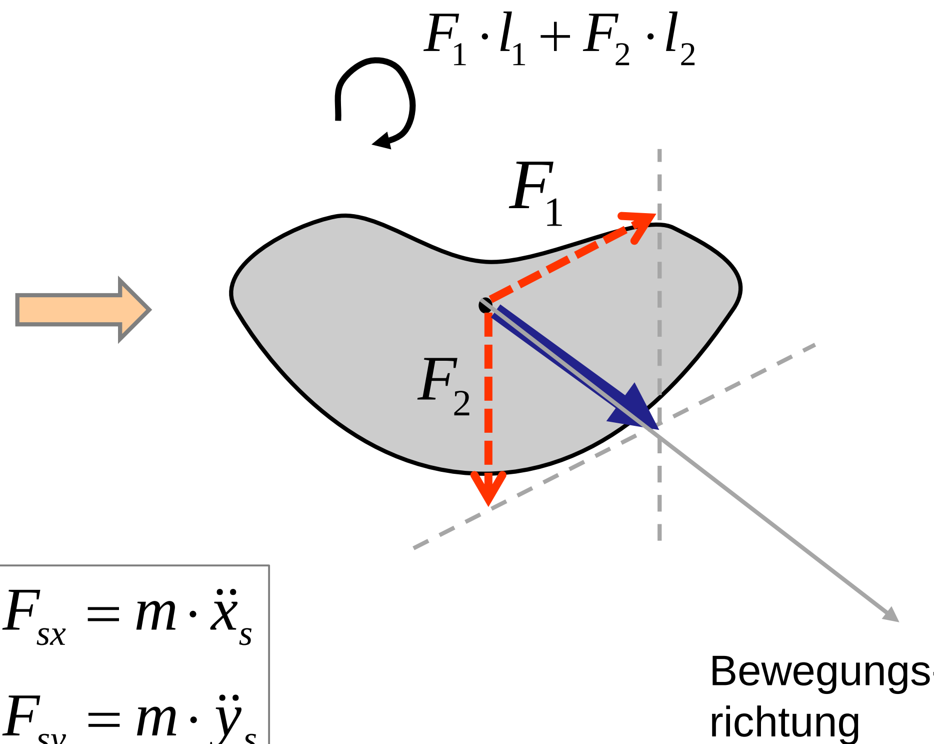
5.2.5.3 Schritt 2: Schwerpunktgleichungen aufstellen --> Translation

Grundsätzlich gilt der **Schwerpunktsatz**:

Der Schwerpunkt S eines Systems bewegt sich so, als ob die Gesamtmasse in ihm vereinigt wäre und alle äußeren Kräfte an ihm angriffen

a) Fall1 : Frei beweglicher Körper



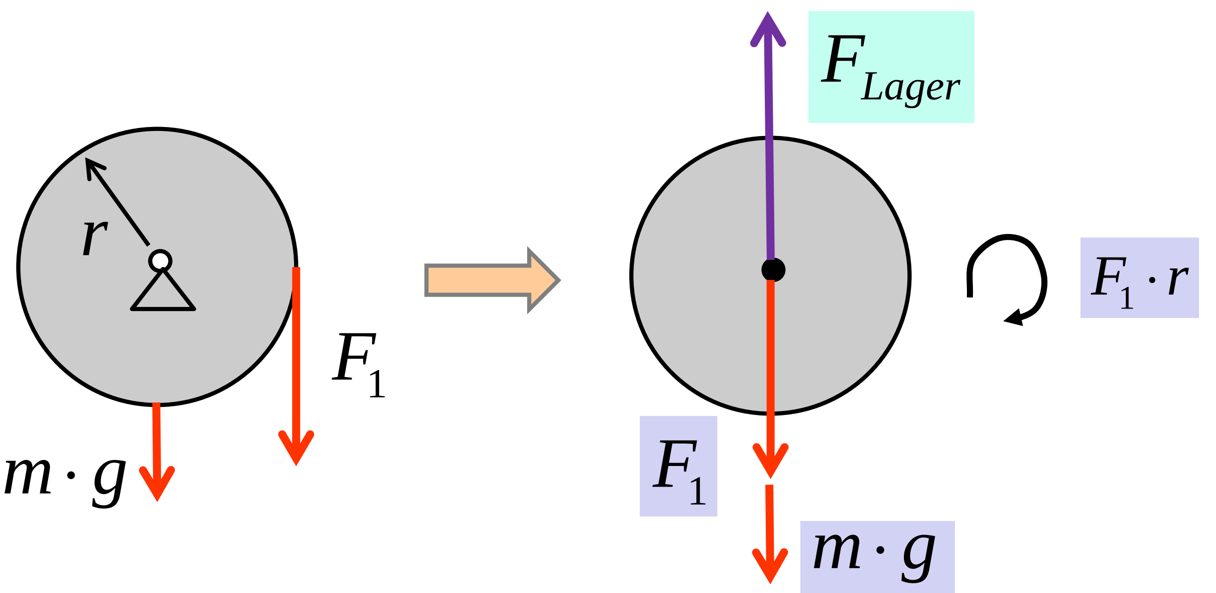


keine Reaktionskräfte !

$$\boxed{\begin{aligned} \sum F_{sx} &= m \cdot \ddot{x}_s \\ \sum F_{sy} &= m \cdot \ddot{y}_s \end{aligned}}$$

b) Fall 2 : Drehung um eine feste Achse im Schwerpunkt

Da durch die Lagerung eine translatorische Bewegung verhindert wird, stellen sich die Zwangskräfte (Lager) so ein, die Schwerpunktkräfte 0 sein müssen :



bekannte Kräfte

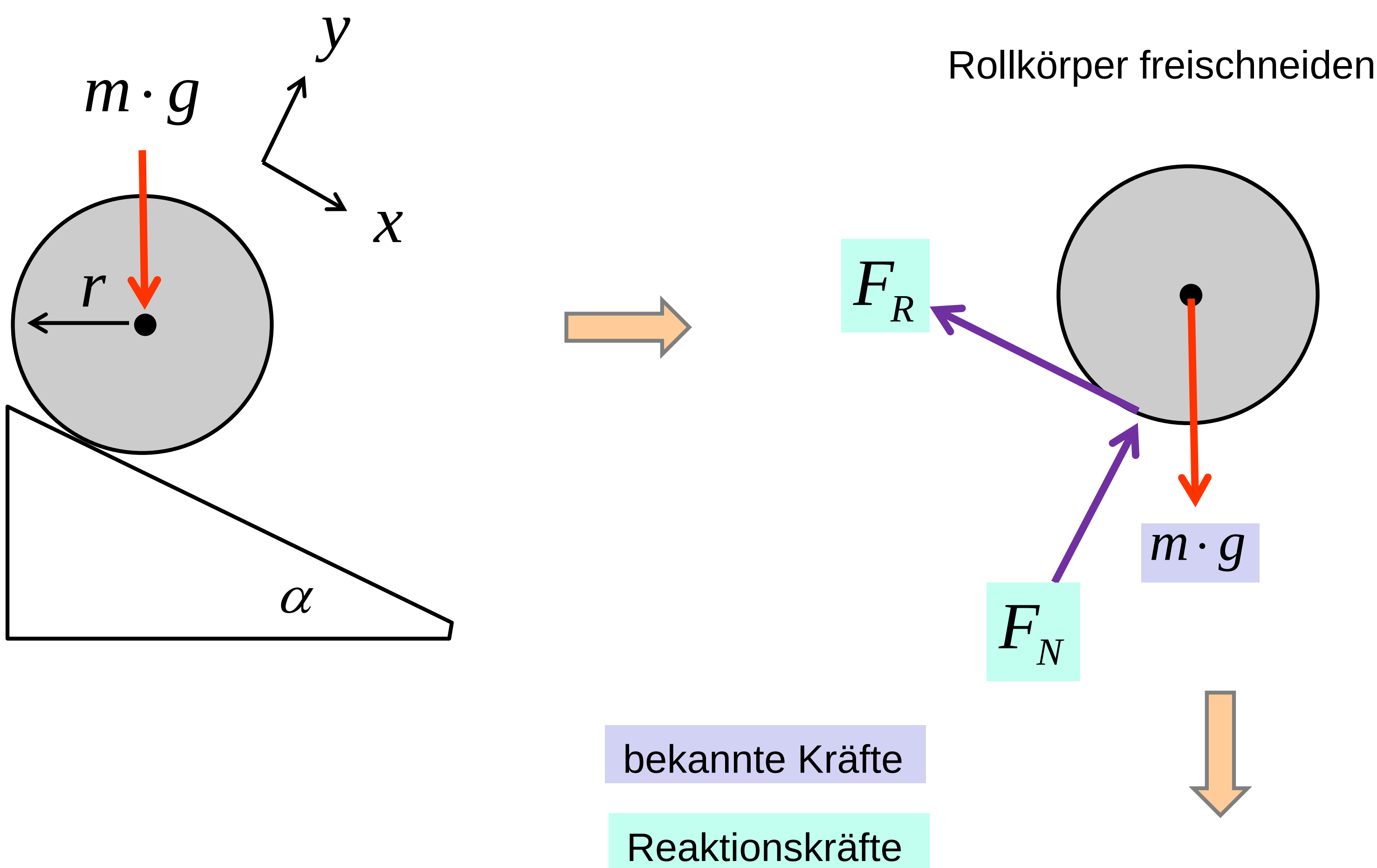
Reaktionskräfte

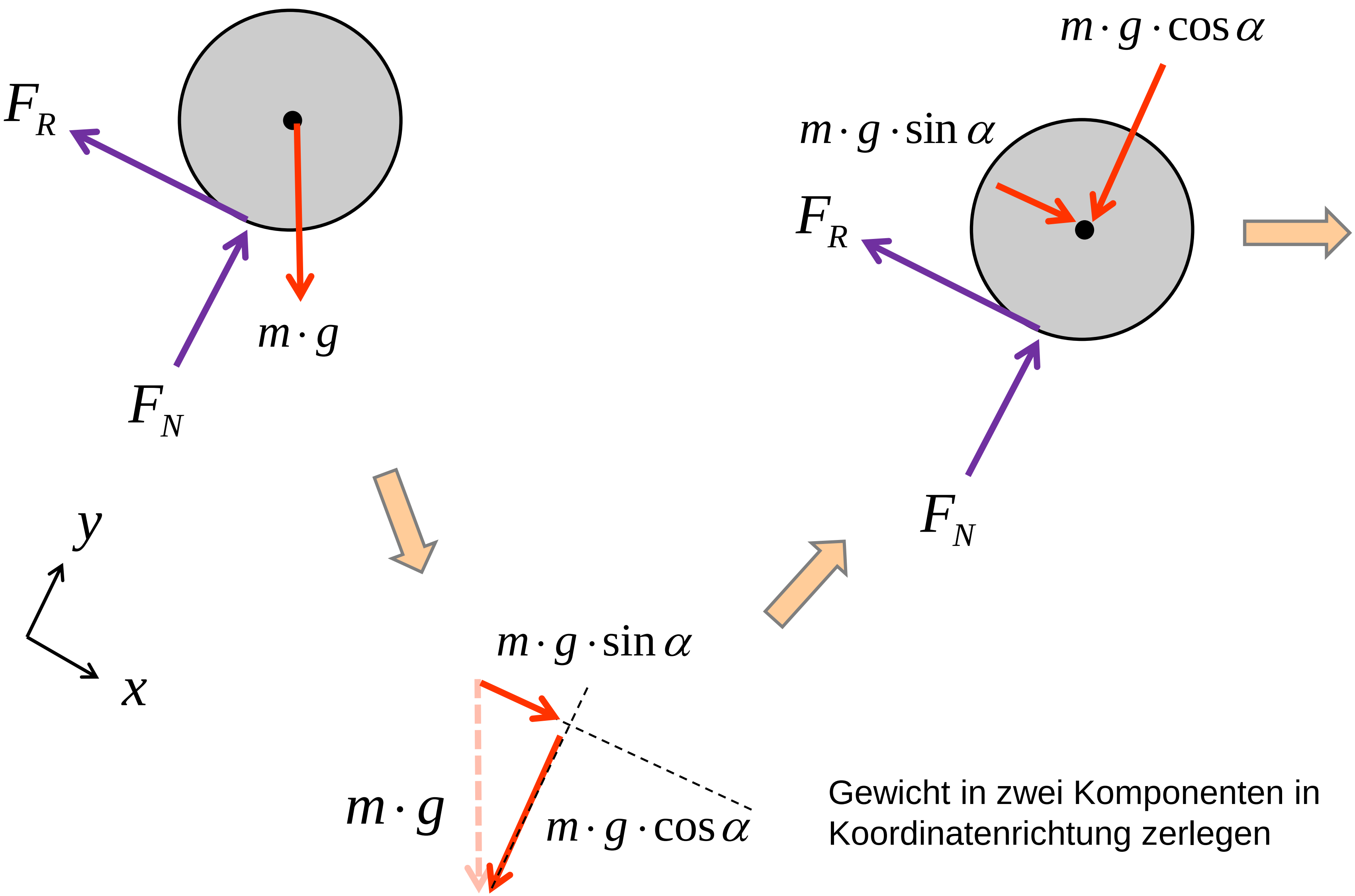
$$\sum F_{sx} = 0$$
$$\sum F_{sy} = F_{Lager} - mg - F_1 = 0$$

→ keine Translation (erzwungen)

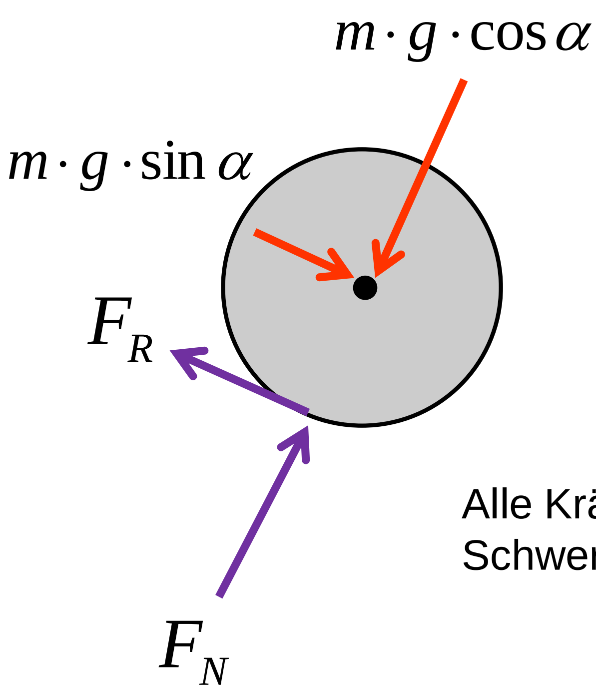
c) Fall 3 : Rollen

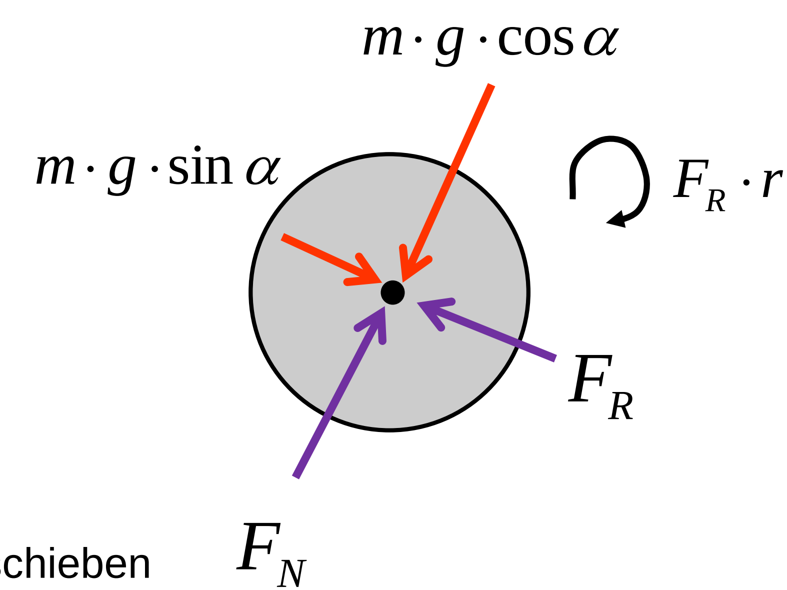
Beim Rollen findet eine Bewegung in x-Richtung statt, aber nicht in y-Richtung.





Gewicht in zwei Komponenten in Koordinatenrichtung zerlegen





Alle Kräfte in den Schwerpunkt verschieben

Da der Schwerpunkt in x-Richtung beschleunigt, in y-Richtung jedoch nicht, gilt:

$$\sum F_x = m \cdot \ddot{x}$$

$$\sum F_y = 0$$

$$\boxed{\begin{aligned} m \cdot g \cdot \sin\alpha - F_R &= m \cdot \ddot{x} \\ F_N - m \cdot g \cdot \cos\alpha &= 0 \end{aligned}}$$

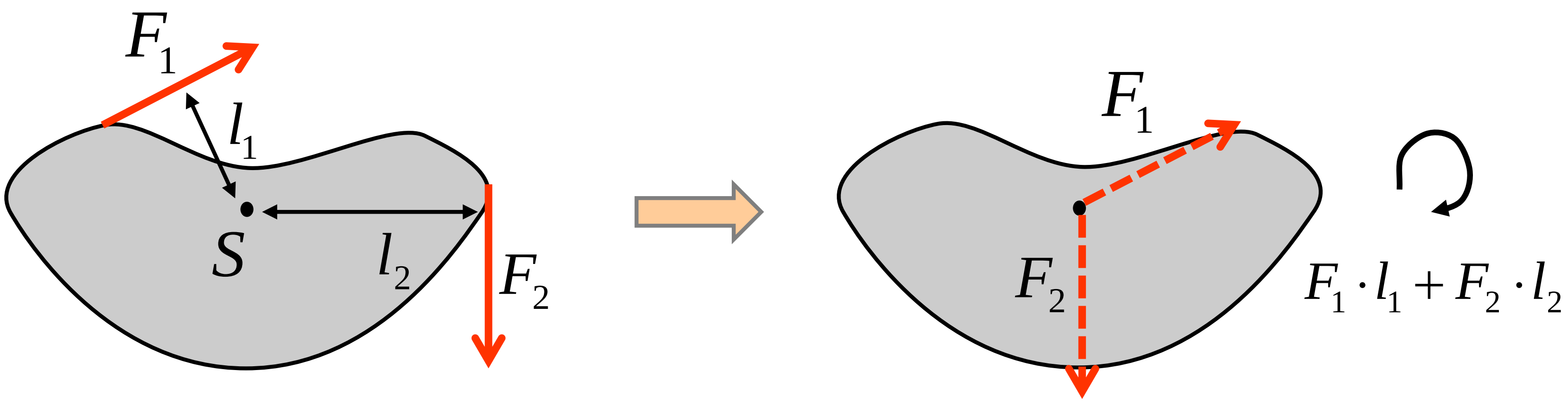
5.2.5.4 Schritt 3: Momentengleichungen aufstellen --> Rotation

Grundsätzlich gilt der **Momentensatzsatz**:

Verschiebt man alle an einen Körper angreifenden Kräfte in seinen Schwerpunkt, so ergibt sich seine Drehbewegung aus den resultierenden Momenten $M(S)$ und dem auf den Schwerpunkt bezogenen Massenträgheitsmoment J_S.

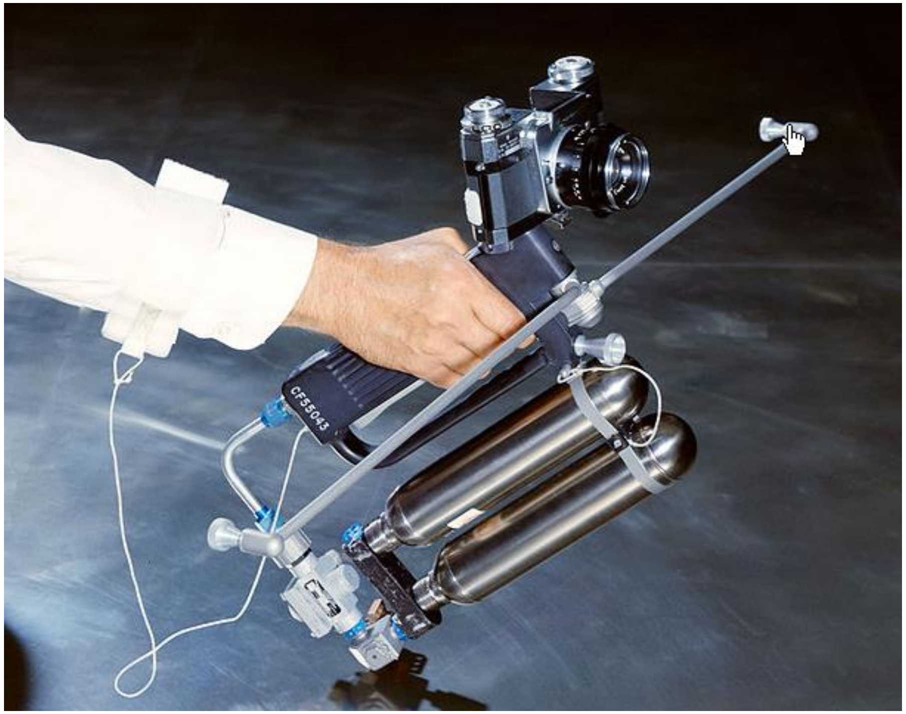
$$\boxed{\sum M(S) = J_S \cdot \ddot{\varphi}}$$

a) Fall 1 : Frei beweglicher Körper



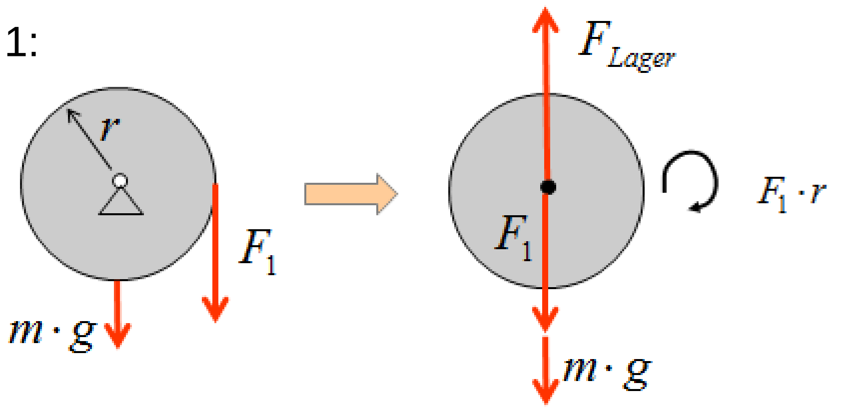
$$\boxed{\sum M(S) \;=\; F_1 \cdot l_1 + F_2 \cdot l_2 \;= J_S \cdot \ddot{\varphi}}$$

Beispiel: Hand-Manövrierpistole



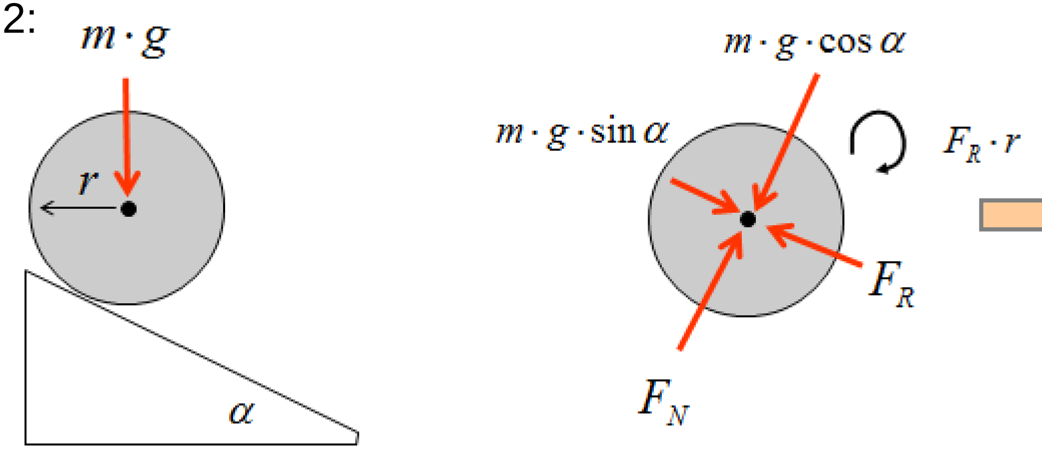
b) Fall 2 : Erzwungene Drehung um den Schwerpunkt

Bsp. 1:



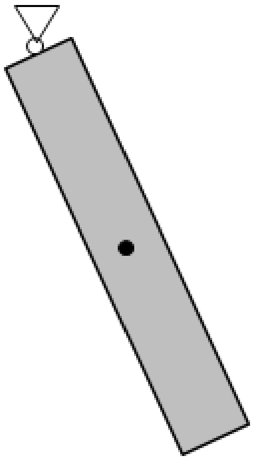
$$F_1 \cdot r = J_S \cdot \ddot{\varphi}$$

Bsp. 2:



$$F_R \cdot r = J_S \cdot \ddot{\varphi}$$

c) Fall 3 : Drehungen um **eine feststehende Achse** nicht im Schwerpunkt



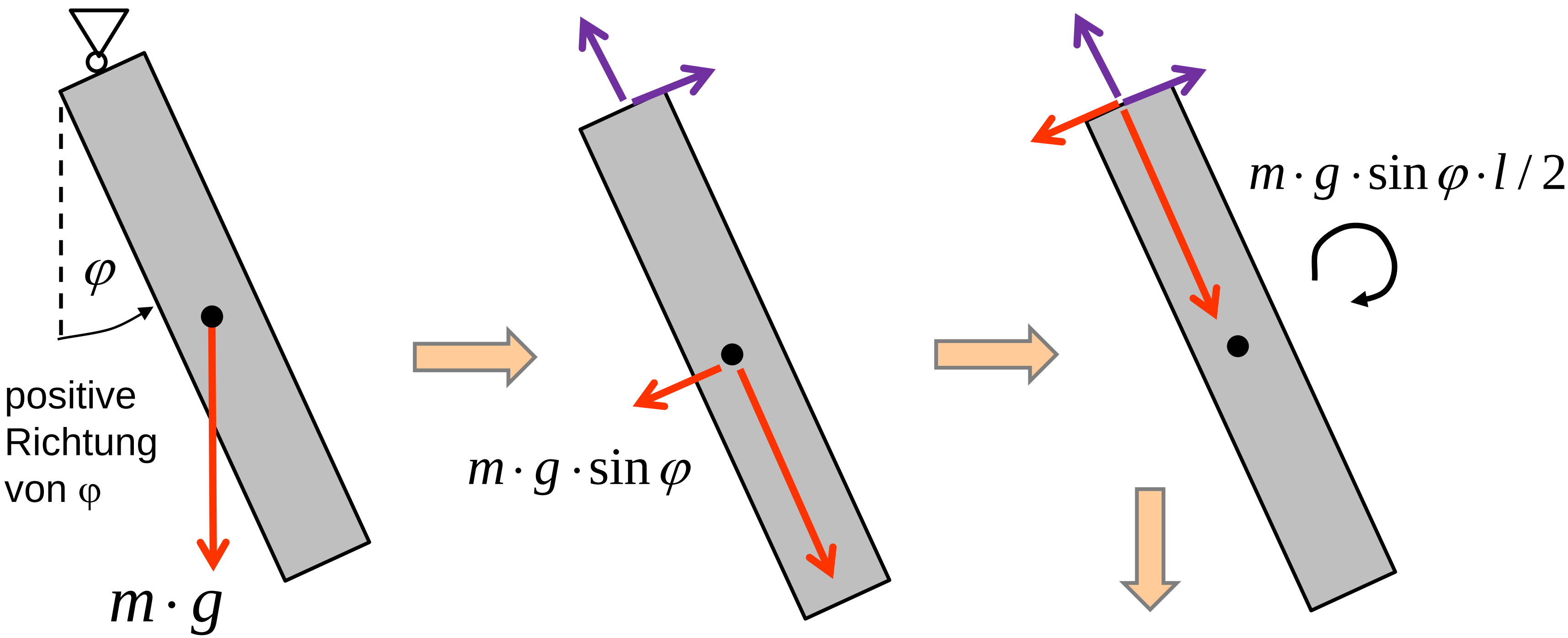
In diesem Fall ist der Momentensatz etwas ungünstig für die Berechnung der Bewegungsgleichungen, da die Momente aus zunächst unbekannten Reaktions-kräften (Lagerkräften) bestehen.

Für diesen Sonderfall (z.B. Pendel) lässt sich aber aus dem Momentensatz die für weitere Berechnung (günstigere) Beziehung herleiten (o. Bew.):

$$\boxed{\sum M(A) = J_A \cdot \ddot{\varphi}}$$

Aufstellen der Bewegungsgleichung:

1. Zunächst alle Kräfte in den Drehpunkt A verschieben. Das vereinfacht die Lösung, da Kräfte im Drehpunkt keine Wirkung auf die Drehung haben.
2. Dabei die resultierenden Momente $M(A)$ bestimmen.
3. J_A ggf. aus J_S mit Satz von Steiner berechnen.



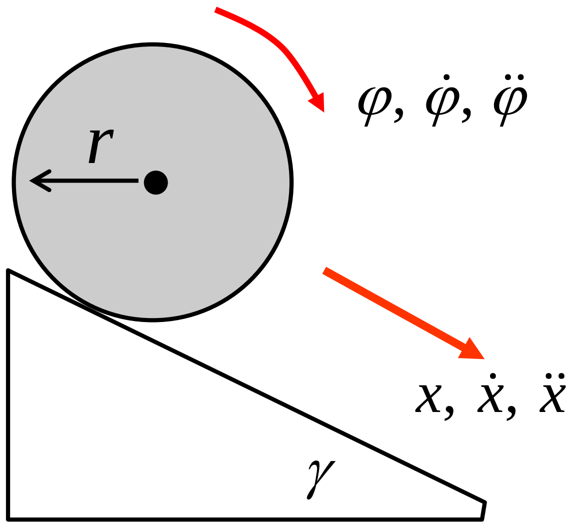
Anm.: Negatives Vorzeichen, da das Moment entgegengesetzt zur Drehrichtung von φ ist.

$$\boxed{-m \cdot g \cdot \sin\varphi \cdot \frac{l}{2} = J_A \cdot \ddot{\varphi}}$$

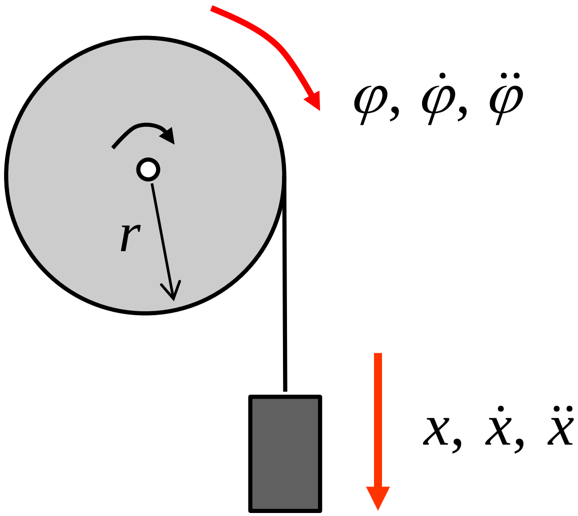
5.2.5.5 Schritt 4: Kompatibilitätsbedingungen → Translation + Rotation

Kompatibilitätsbedingungen werden dann benötigt, wenn Rotationsbewegungen mit Translationsbewegungen gekoppelt sind.

Beispiel: Rollen



Beispiel: Abrollen

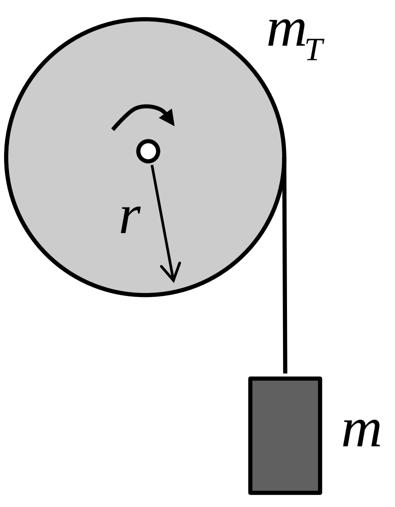


$$\boxed{\varphi = \frac{x}{r}} \qquad \boxed{\omega = \dot{\varphi} = \frac{v_t}{r}} \qquad \boxed{\alpha = \ddot{\varphi} = \frac{a_t}{r}}$$

Übung: Masse an Seiltrommel → Drehung um Schwerpunkt

An einer Seiltrommel (Vollzylinder mit der Masse m_T) hängt die Masse m.
Zum Zeitpunkt t=0 wird die Masse losgelassen, so dass sie nach unten sinkt.

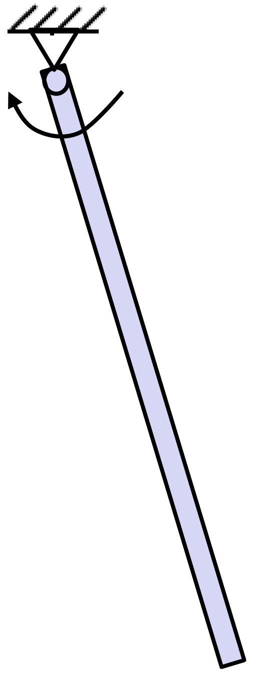
Modellieren Sie das System mit Simulink.



Übung: Stabpendel → Drehung um beliebigen festen Punkt

Ein Stab (Länge l, Masse m) pendelt an seinem Ende.

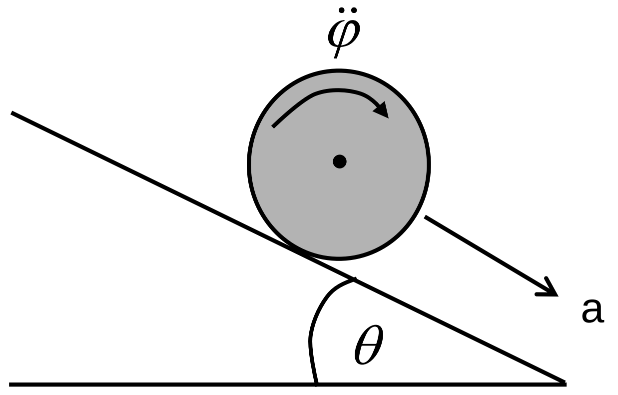
Modellieren Sie die Pendelbewegung mit Simulink.



Übung: Kugel auf schiefer Ebene

Eine Vollkugel rollt eine schiefe Ebene hinunter (θ=20°).

Die Bewegung der Kugel soll simuliert werden.



Zeichnen Sie das Analogrechnerbild der Simulation (mit Anfangswerten).

Wer ist schneller: a) Ein Zylinder der den Berg hinunter rollt?

b) Ein dünnwandiger Hohlzylinder der den Berg hinunter rollt?

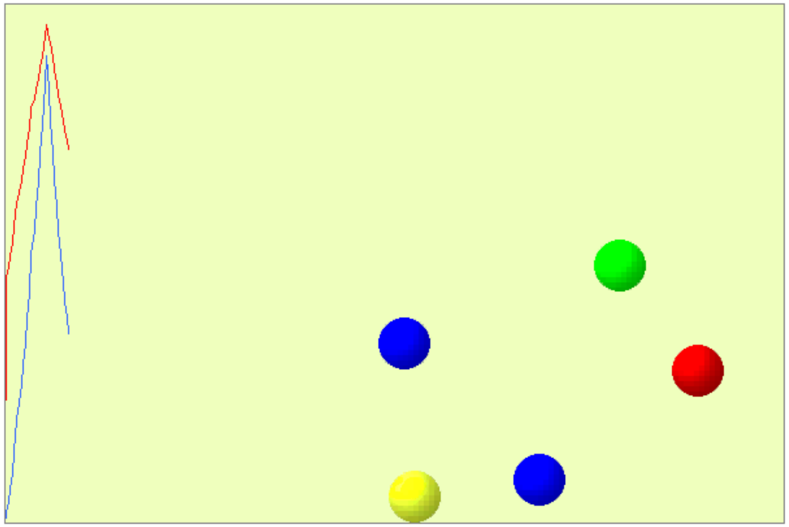
c) Ein Block der den Berg reibungsfrei hinunterrutscht?

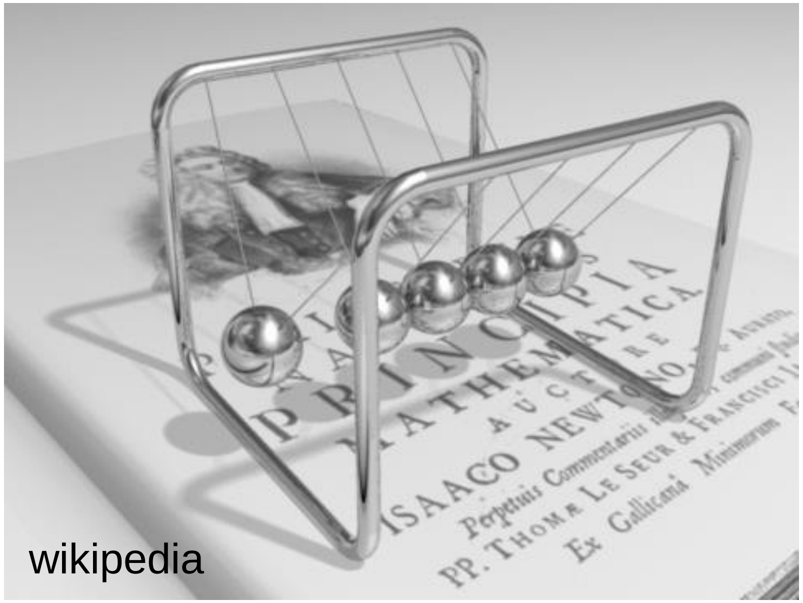
5.2.6 Impuls und Stoß

<u>5.2.6.1 Worum geht es ?</u>

Bei Zusammenstößen von bewegten Körpern, ändern sich die deren Geschwindigkeiten und Richtungen.

→ elastischer oder unelastischer Stoß





wikipedia

5.2.6.2 Impuls und Impulsänderung

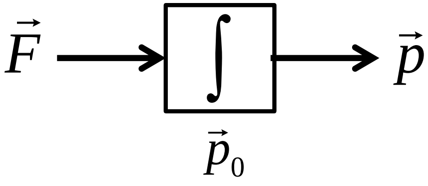
Das Produkt aus Masse und Geschwindigkeit eines Körpers bezeichnet man als Impuls p:

$$\boxed{\vec{p} = m \cdot \vec{v}}$$

Wirkt keine Kraft auf den Körper, so ändert sich sein Bewegungszustand nicht und damit ändert sich auch der Impuls nicht (konstante Masse vorausgesetzt).

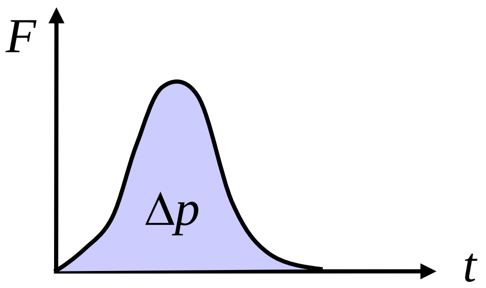
Wirkt eine Kraft auf den Körper, so ändert sich sein Bewegungszustand und damit ändert sich auch der Impuls.

$$\vec{F} = m\vec{a} = m\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dm\vec{v}}{dt} = \frac{d\vec{p}}{dt} \Rightarrow \boxed{\vec{F} = \dot{\vec{p}}} \Rightarrow$$



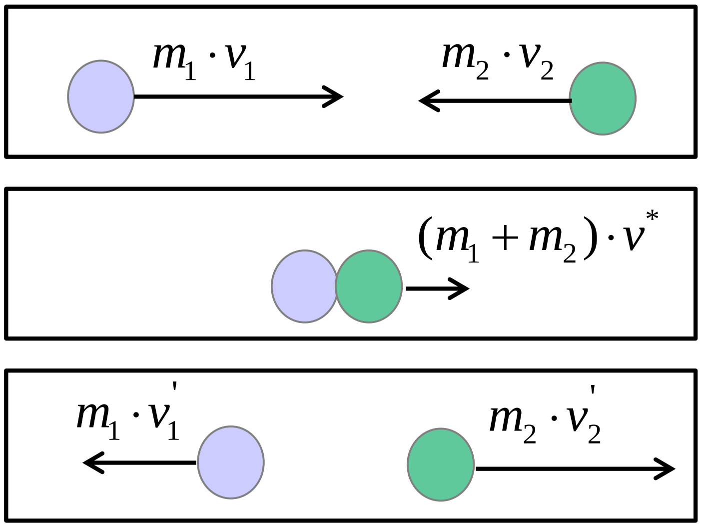
Die Impuls eines Körpers steigt mit der auf ihn einwirkenden Kraft und mit der Einwirkdauer.

→ Impulsänderung = Fläche unter der F(t)-Kurve



5.2.6.3 Impulserhaltungssatz

Der Gesamtimpuls eines geschlossenen Systems (d.h. keine äußere Krafteinwirkung) von Körpern bleibt konstant.



$$\sum \vec{p} = const.$$

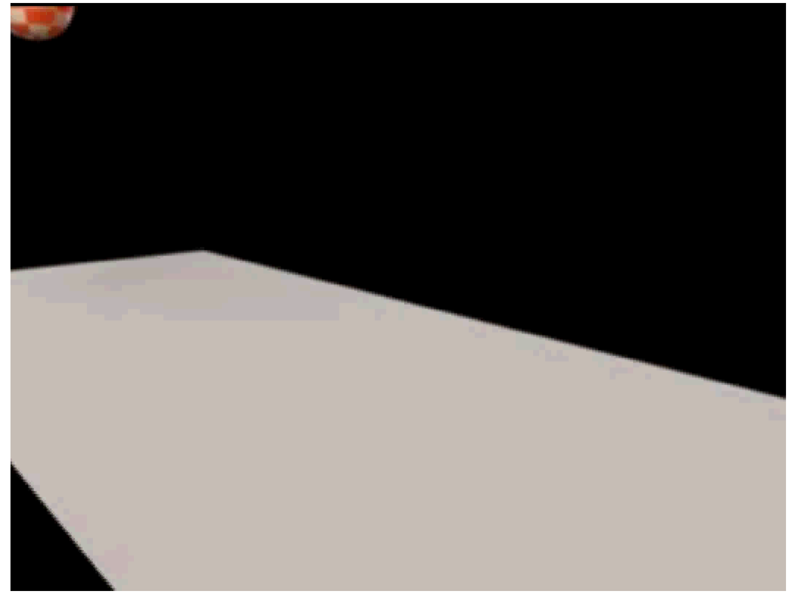
Wie ändern sich die Geschwindigkeiten?

$$\underbrace{m_1 \cdot v_1 + m_2 \cdot v_2}_{\text{Impuls vor Stoß}} = \underbrace{m_1 \cdot v_1' + m_2 \cdot v_2'}_{\text{Impuls nach Stoß}}$$

5.2.6.4 Simulation von Stoßvorgängen - Modellierungsungenauigkeiten

In der realen Welt laufen Stoßprozesse in drei Phasen ab:

1. Bewegung vor der Kollision
2. Berührung, Verformung und Impulsaustausch
3. Bewegung nach der Kollision



Zeitdauer und Verformungsgrad in Phase 2 hängen stark vom Material (z.B. Stahl, Weichgummi) ab.

In vielen Simulationen sind die in Phase 2 ablaufenden Vorgänge uninteressant (z.B. Billard-Simulation) und werden daher nicht simuliert.

Die Berücksichtigung der in Phase 2 ablaufenden Vorgänge ist besonders aufwändig.

5.2.6.5 Elastischer, teilelastischer und plastischer Stoß an einer Wand

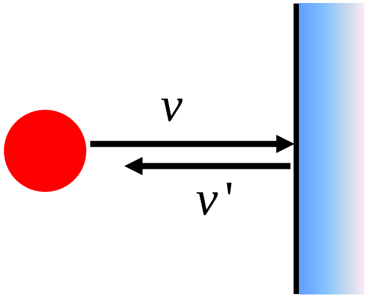
Beim Stoß kann Bewegungsenergie „verloren gehen“, d.h. in andere Energieformen umgewandelt werden (z.B. Verformungswärme, pot. Energie, Schall).

Dies kann durch die *Stoßzahl* e berücksichtigt werden.

$e = 1$ elastischer Stoß

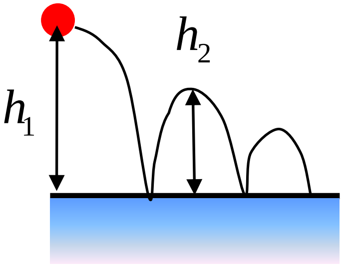
$1 > e > 0$ teilelastischer Stoß

$e = 0$ plastischer Stoß



$$\boxed{e = \frac{v'}{v}}$$

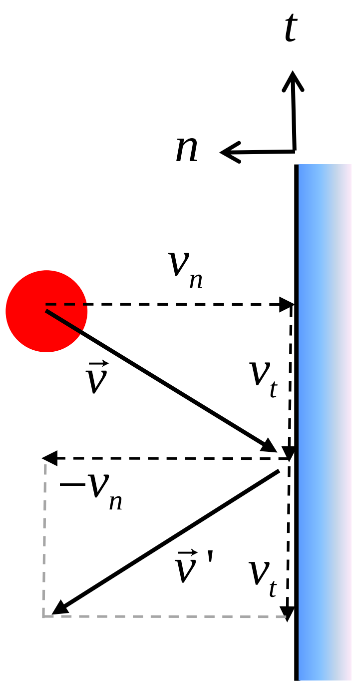
Bestimmung von e durch Hüpfversuch:



$$\boxed{e = \sqrt{\frac{h_2}{h_1}}}$$

5.2.6.6 Reflexion an einer glatten Wand

Fall 1: Waagrechte/Senkrechte Wand



vorher: $\vec{v} = (v_t, v_n)$

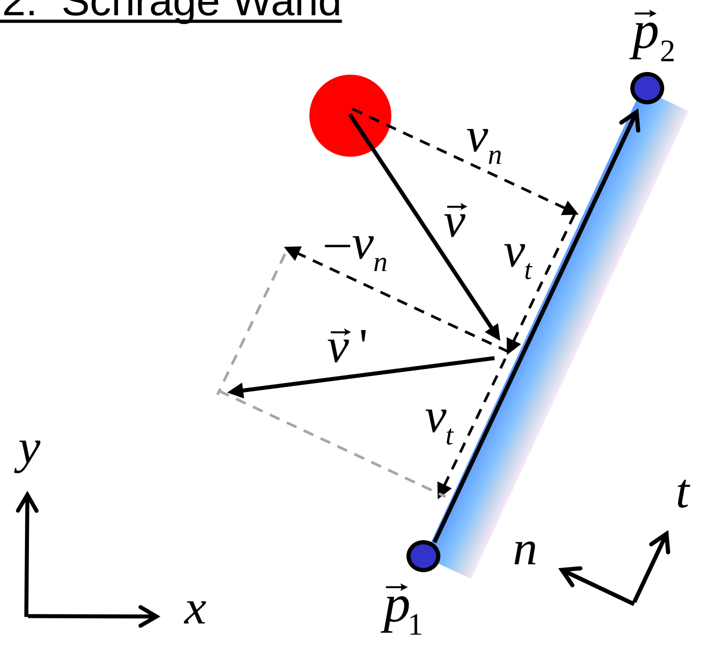
nachher: $\vec{v}\,' = (v_t, -v_n)$ rein elastischer Stoss

$\vec{v}\,' = (v_t, -e \cdot v_n)$ für e<1

Bei der <u>elastischen Reflexion</u> an einer Wand
- bleibt die Tangentialkomponente erhalten,
- die Normalkomponente kehrt ihre Richtung um.

Fall 2: Schräge Wand

Herleitung → Tafel



$\vec{p}_1\,,\ \vec{p}_2$: 2 Punkte auf der Wand

$\vec{t}\,,\ \vec{n}$: Einheitsvektoren in Tangential- und Normalrichtung

$\vec{p}_2 - \vec{p}_1$: Vektor von $\vec{p}_1$ nach $\vec{p}_2$ in Richtung von $\vec{t}$

$\vec{t}\,,\vec{n}$ lassen sich konstruieren mit : $\vec{t} = \dfrac{\vec{p}_2 - \vec{p}_1}{\left|\vec{p}_2 - \vec{p}_1\right|}$ und $\vec{n} = (-t_y, t_x)^T$

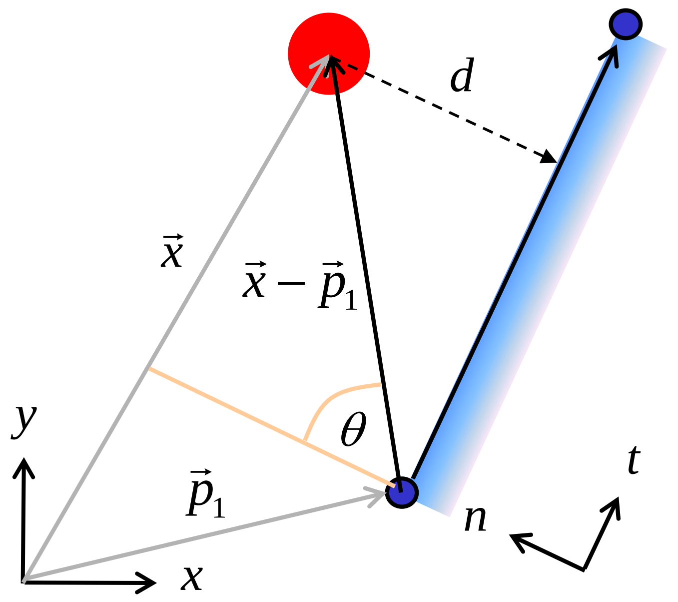
Damit können die Geschwindigkeitskomponenen in Tangential- und Normalenrichtung berechnet werden: $v_t = \vec{v}^{\,T} \cdot \vec{t}$ $\quad v_n = \vec{v}^{\,T} \cdot \vec{n}$

Für $\vec{v}\,'$ gilt dann : $\vec{v}\,' = v_t \cdot \vec{t} - v_n \cdot \vec{n}$ für rein elastischen Stoss

$\vec{v}\,' = v_t \cdot \vec{t} - e \cdot v_n \cdot \vec{n}$ für e<1

Wann berührt der Ball die Wand?

Herleitung → Tafel



$\vec{x}-\vec{p}_1$: Vektor von $\vec{p}_1$ nach $\vec{x}$

Der Abstand d ist dann: $d=(\vec{x}-\vec{p}_1)\cdot\vec{n}$

Der Ball berührt die Wand, wenn gilt: $d = Ballradius$

Beweis: $d=(\vec{x}-\vec{p}_1)\cdot\vec{n}=|(\vec{x}-\vec{p}_1)|\cdot 1\cdot\cos(\theta)$

Übung: Ballreflexion an schräger glatter Wand

Gegeben sind zwei Punkte auf einer schrägen Wand: $\vec{p}_1 = (13,\ 6)^T$

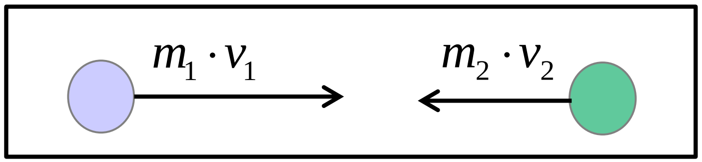
$\vec{p}_2 = (17,\ 8)^T$

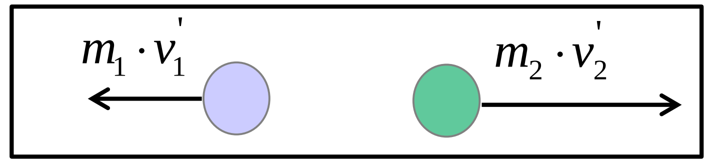
Ein Ball hat die Geschwindigkeit $\vec{v} = (-5,\ -5)^T$ und prallt auf die Wand auf.

Berechnen Sie mit Matlab den Geschwindigkeitsvektor nach der Reflexion (e=1).

5.2.6.7 Gerader zentrischer Stoß zweier Körper

Aus dem Impulserhaltungssatz lassen sich die folgenden Beziehungen für die Geschwindigkeiten zweier Körper nach dem Stoß ableiten.





$$\boxed{v_1' = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2 - e \cdot m_2 (v_1 - v_2)}{m_1 + m_2}}$$

$$\boxed{v_2' = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2 - e \cdot m_1 (v_1 - v_2)}{m_1 + m_2}}$$

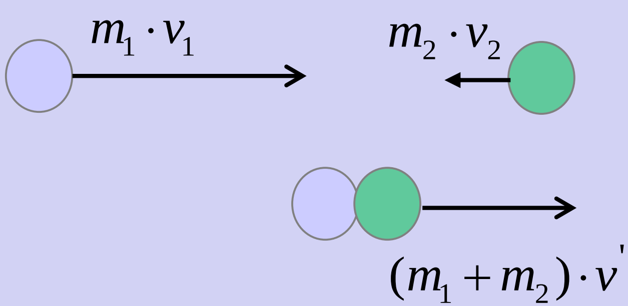
wikipedia

$e = 0$ plastischer Stoß

$e = 1$ elastischer Stoß

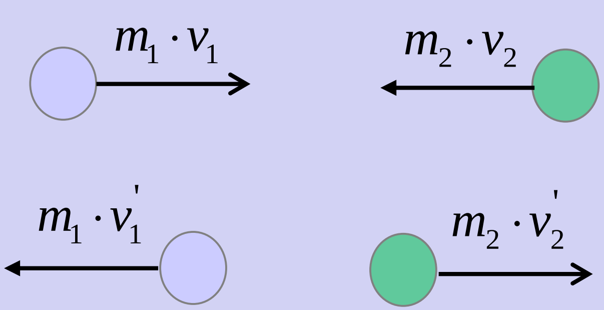
Idealfälle: Zentraler plastischer und elastischer Stoß

plastischer Stoß (e=0)



$$v' = \frac{m_1 \cdot v_1 + m_2 \cdot v_2}{m_1 + m_2}$$

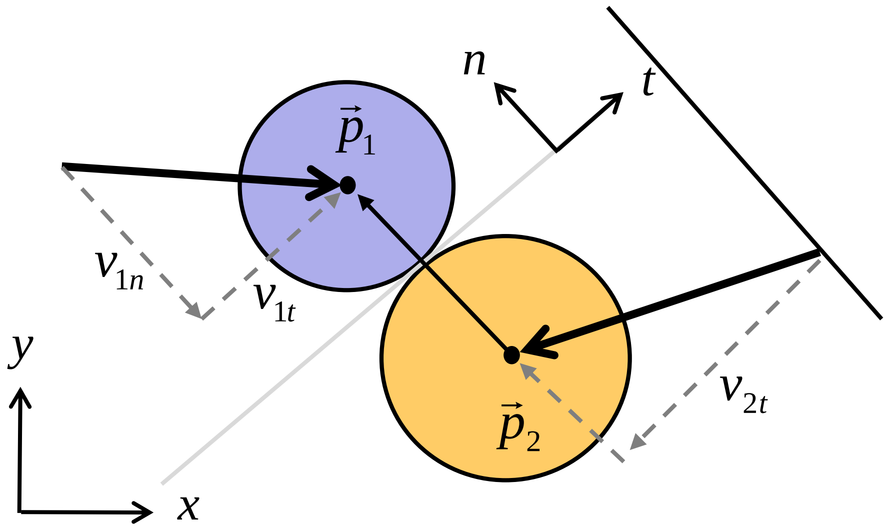
elastischer Stoß (e=1)



$$v_1' = \frac{2\left(m_1 \cdot v_1 + m_2 \cdot v_2\right)}{m_1 + m_2} - v_1$$

$$v_2' = \frac{2\left(m_1 \cdot v_1 + m_2 \cdot v_2\right)}{m_1 + m_2} - v_2$$

5.2.6.8 Schiefer zentrischer Stoß zweier glatter Kugeln/Scheiben



Herleitung → Tafel

Kugelmassen: m_1, m_2

Kugel-/Scheibenradien: r_1, r_2

Der Zusammenprall erfolgt, wenn:

$$\left|\vec{p}_1 - \vec{p}_2\right| = r_1 + r_2$$

$\vec{t}, \vec{n}$ lassen sich konstruieren mit : $\vec{n} = \dfrac{\vec{p}_1 - \vec{p}_2}{\left|\vec{p}_1 - \vec{p}_2\right|}$ und $\vec{t} = (n_y, -n_x)^T$

Für die Tangentialkomponenten der Kugelgeschwindikeiten <u>vor</u> dem Zusammenprall gilt:

$$v_{1t} = \vec{v}_1^T \cdot \vec{t}$$
$$v_{2t} = \vec{v}_2^T \cdot \vec{t}$$

Für die Tangentialkomponenten der Kugelgeschwindikeiten <u>nach</u> dem Zusammenprall gilt:

$$\left.\begin{array}{l} v_{1t}' = v_{1t} \\ v_{2t}' = v_{2t} \end{array}\right\} \text{vorher=nachher}$$

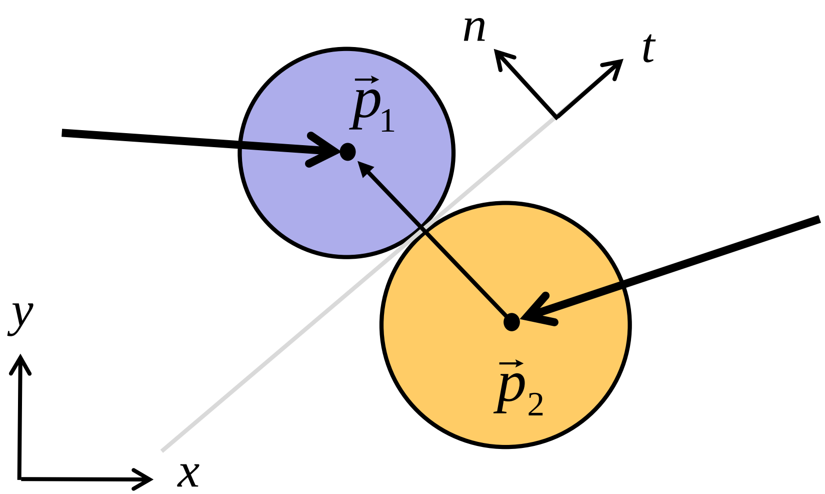
Für die Normalkomponenten der Kugel-geschwindikeiten vor dem Zusammenprall gilt:

$$v_{1n} = \vec{v}_1^T \cdot \vec{n}$$
$$v_{2n} = \vec{v}_2^T \cdot \vec{n}$$

Für die Normalkomponenten der Kugelgeschwindikeiten nach dem Zusammenprall gilt:

$$\boxed{v_{1n}' = \frac{m_1 v_{1n} + m_2 v_{2n} - e \cdot m_2 (v_{1n} - v_{2n})}{m_1 + m_2}}$$

$$\boxed{v_{2n}' = \frac{m_1 v_{1n} + m_2 v_{2n} - e \cdot m_1 (v_{1n} - v_{2n})}{m_1 + m_2}}$$



Damit sind die Geschwindigkeitsvektoren der Kugeln nach dem Zusammenprall:

$$\vec{v}_1' = v_{1t}' \cdot \vec{t} + v_{1n}' \cdot \vec{n}$$
$$\vec{v}_2' = v_{2t}' \cdot \vec{t} + v_{2n}' \cdot \vec{n}$$

Übung: Billard

Auf einem Tisch gleiten (reibungsfrei) zwei Kreisscheiben.

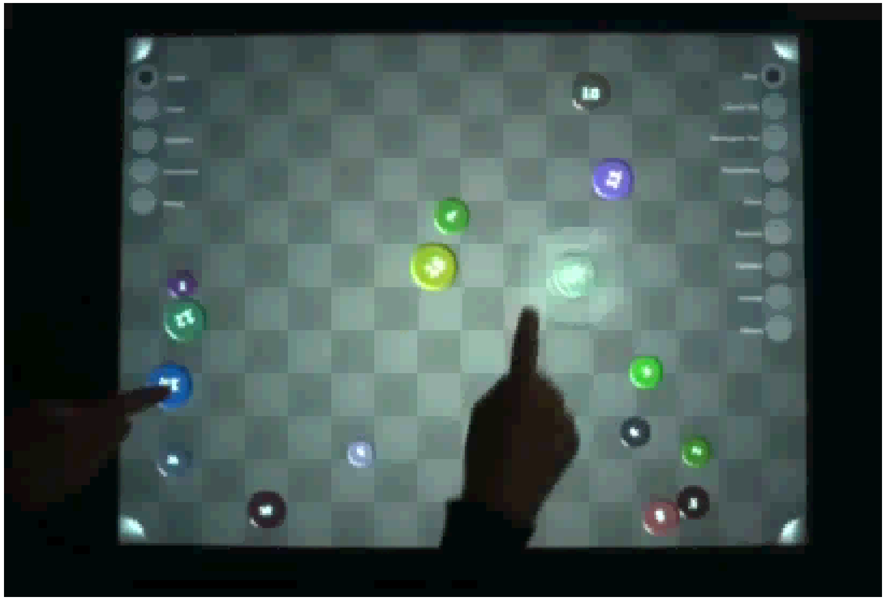
$$r_1 = 0.1m \qquad r_2 = 0.2m$$

$$m_1 = 100g \qquad m_2 = 400g$$

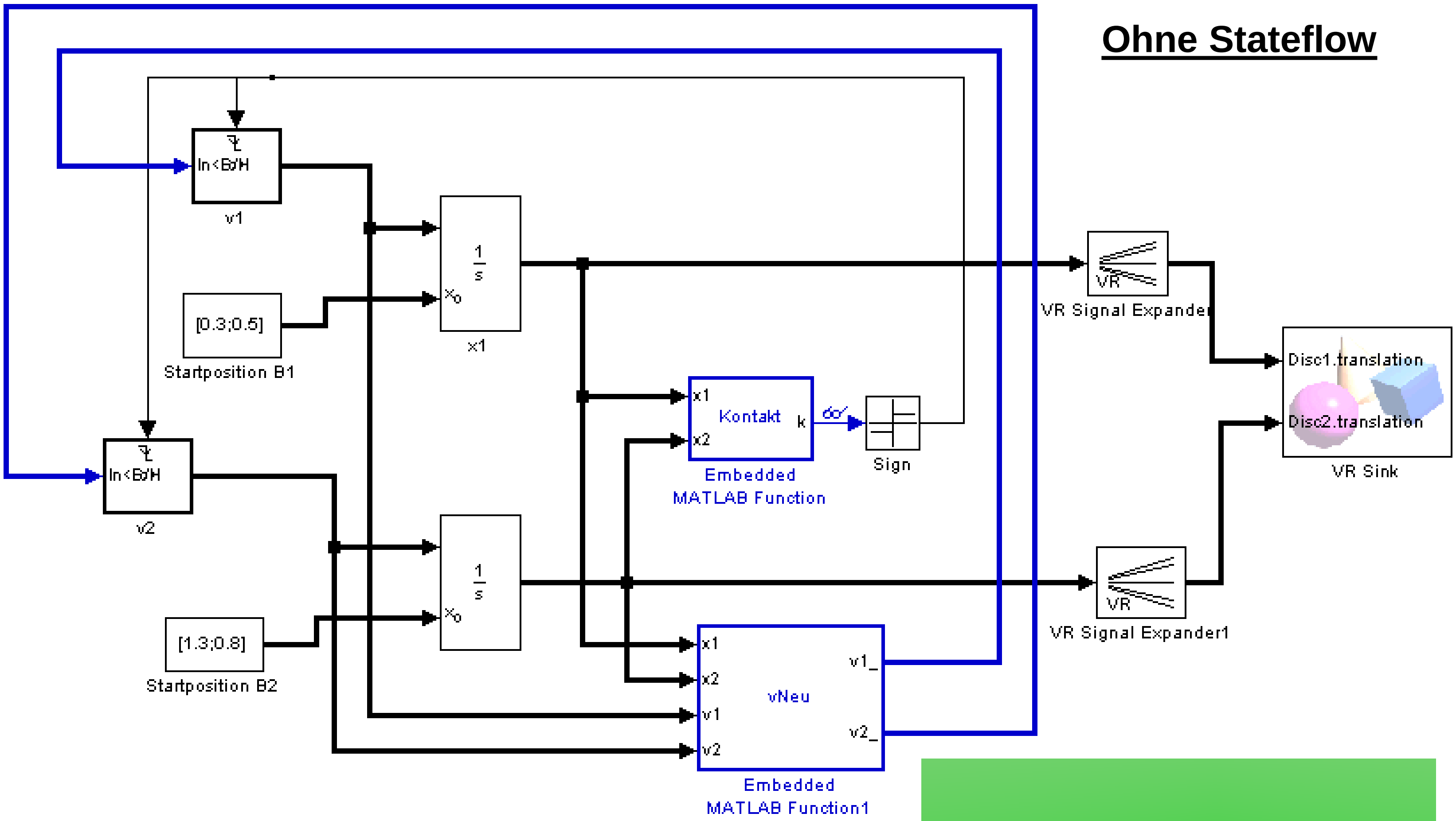
$$x_{1,0} = (0.3,\ 0.5) \qquad x_{2,0} = (1.3,\ 0.8)$$

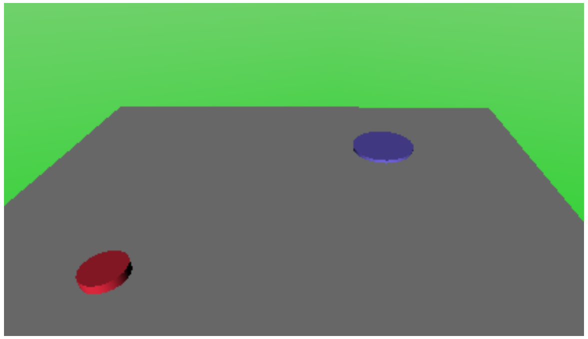
$$v_1 = (0.2,\ \ 0.1)\,\tfrac{m}{s} \qquad v_2 = (0,\ 0)\,\tfrac{m}{s}$$

Modellieren Sie den elastischen Zusammenprall mit Simulink/Stateflow.



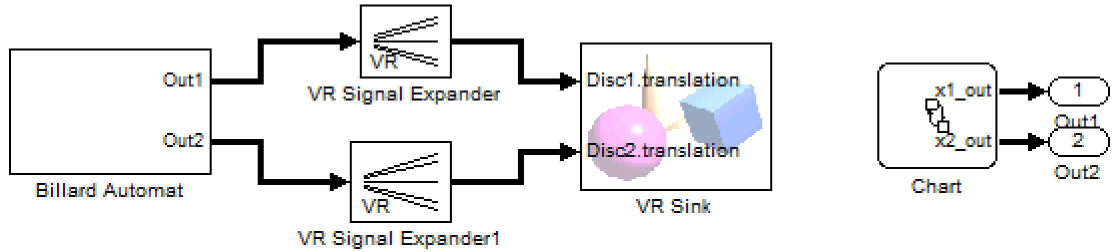
Ohne Stateflow

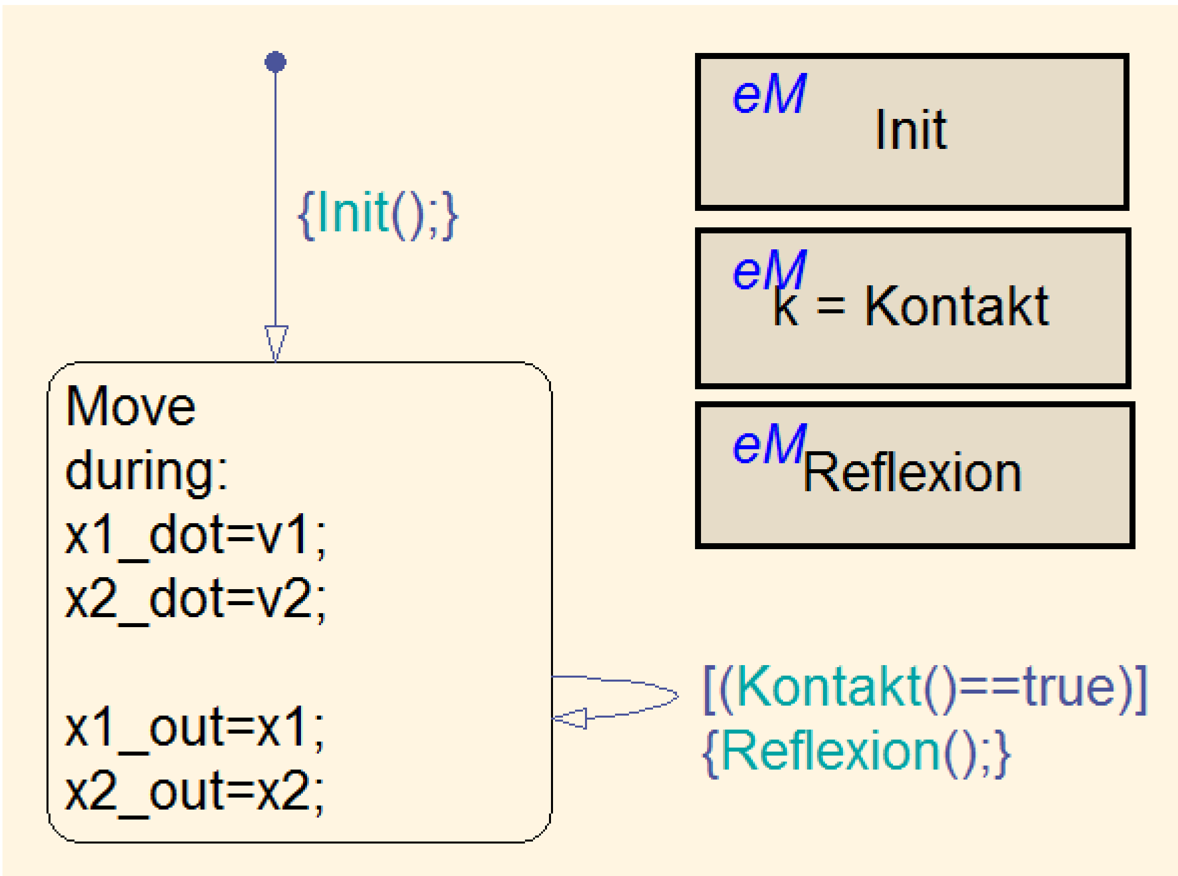




Mit Stateflow

Herleitung → Tafel





	Name	Scope	UpdateMethod	DataType	Size	InitialValue	Port
	r1	Constant	Discrete	double	1	0.1	
	r2	Constant	Discrete	double	1	0.2	
	v1	Local	Continuous	double	2		
	v2	Local	Continuous	double	2		
	x1	Local	Continuous	double	2		
	x2	Local	Continuous	double	2		
	x1_out	Output	Discrete	double	2		1
	x2_out	Output	Discrete	double	2		2
	m1	Parameter	Discrete	Inherit: Same as ...	-1		
	m2	Parameter	Discrete	Inherit: Same as ...	-1		

5

Physical Modelling

5.1 Einleitende Grundgedanken

5.2 Physikalische Grundlagen

5.3 Partikelsysteme

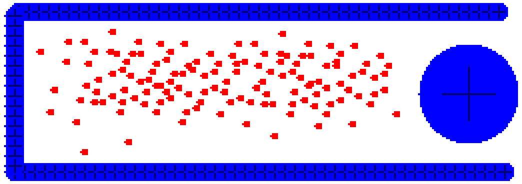
5.3.1 Einführende Grundgedanken

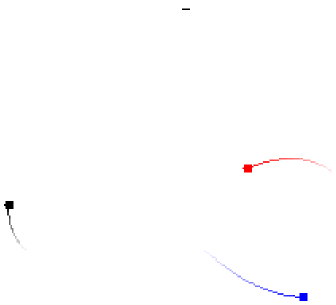
5.3.1.1 Definition

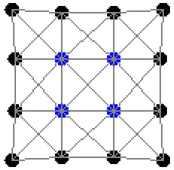
Partikelsysteme beschreiben die Welt ausschließlich durch Punktmassen (= Partikel) und Kräfte.

Punktmassen werden beschrieben durch ihre Masse und ihren Bewegungszustand (Ort, Geschwindigkeit, Beschleunigung).

Kräfte können von außen einwirken (z.B. Gravitation, el. Feld, ….) oder untereinander wirken (Federkräfte, gegenseit. Anziehung, …).







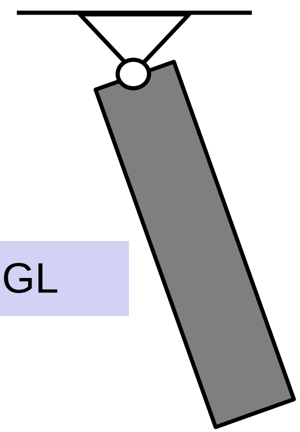
5.3.1.2 Beispielanwendungen

5.3.1.3 Unterschied: Starrkörpersysteme und Partikelsysteme

Starrkörpersysteme

- Komplexere Physik
  - Massen und Kräfte, Drehmomente, Massenträgheitsmomente
- Starre Körper stehen in Wechselwirkung miteinander.
- Keine Dehnung und Durchbiegung der Starrkörper.

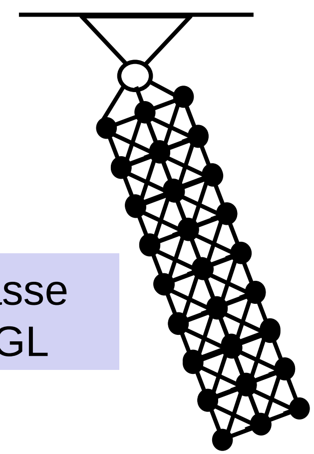
Beispiel: Stabpendel



eine DGL

Partikelsysteme

- Einfachere Physik, es gibt nur Punktmassen und Kräfte
- Starre Körper werden aus kräftigen Federn (hohe Federkonstante) und vielen Punktmassen nachgebildet.
- Die Starrkörpernachbildungen sind immer flexibel.
- Mehr Rechenaufwand, mit Tendenz zu steifen Differentialgleichungen.

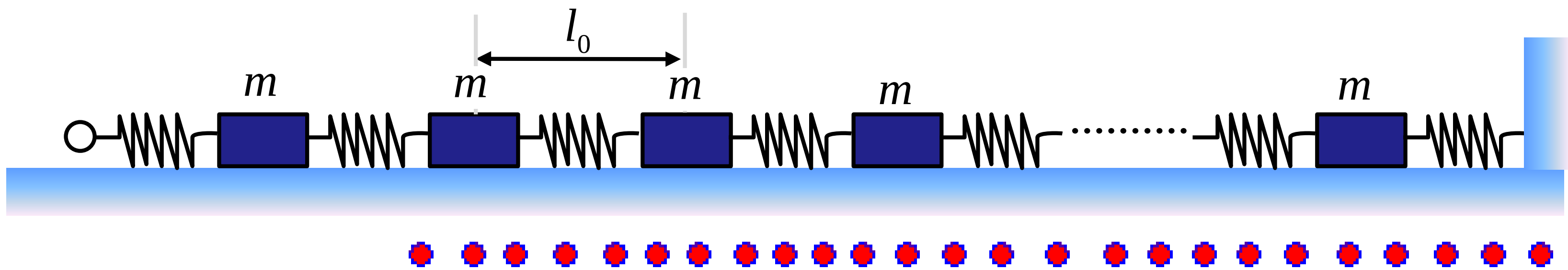


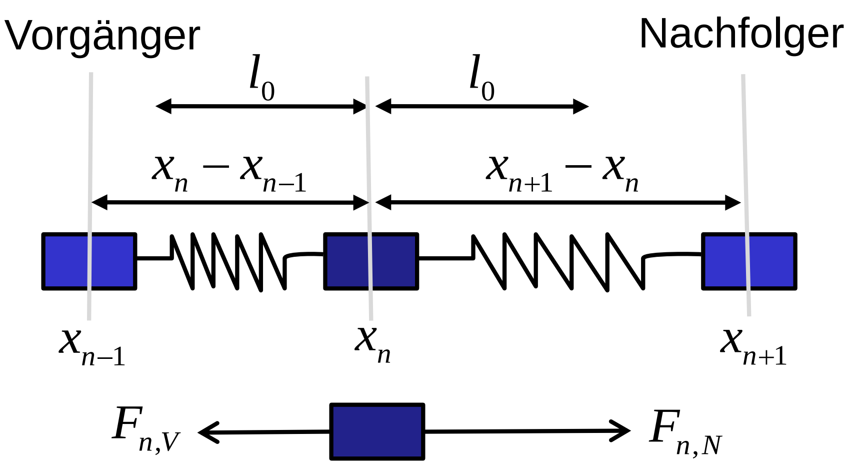
\ = Feder

pro Masse eine DGL

5.3.2 Modellierungsbeispiele

<u>5.3.2.1 Eindimensionale Probleme</u> (am Beispiel: Longitudinalwelle = Dichtewelle)





l_0 : Länge der Feder im entspannten Zustand

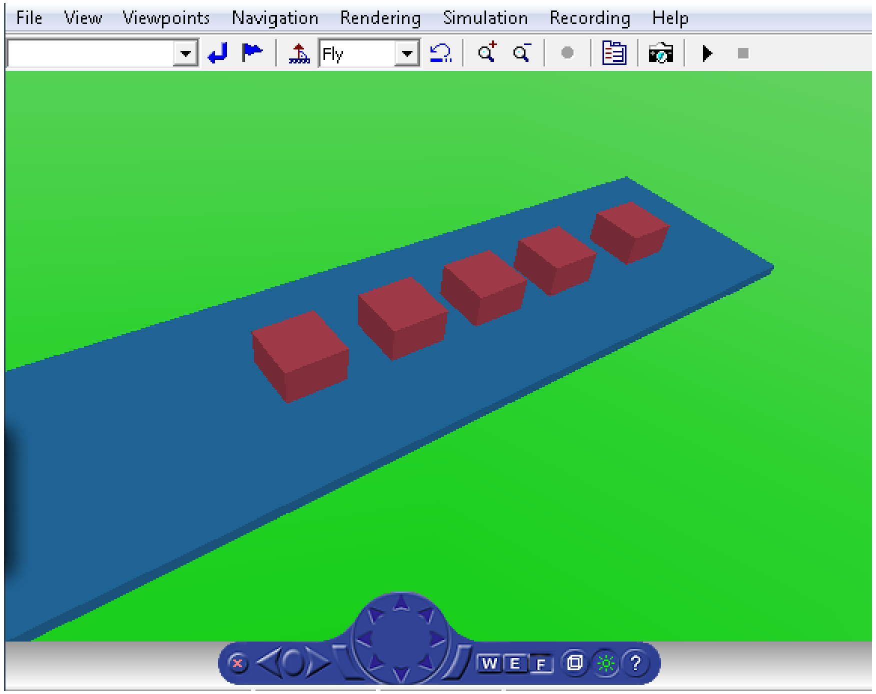
$$
\begin{aligned}
F_n &= F_{n,V} + F_{n,N} \\
&= -k\cdot(x_n - x_{n-1} - l_0) + k\cdot(x_{n+1} - x_n - l_0) \\
&= \underline{\underline{k\cdot(x_{n+1} - 2x_n + x_{n-1})}}
\end{aligned}
$$

$$F_n = m\cdot a_n \quad \Rightarrow \quad a_n = \frac{F_n}{m}$$

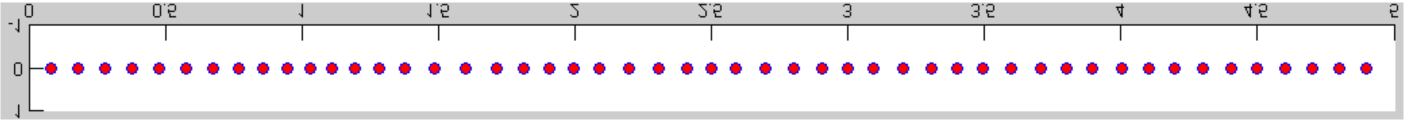
Übung: Longitudinalwelle

Modellieren Sie das Modell

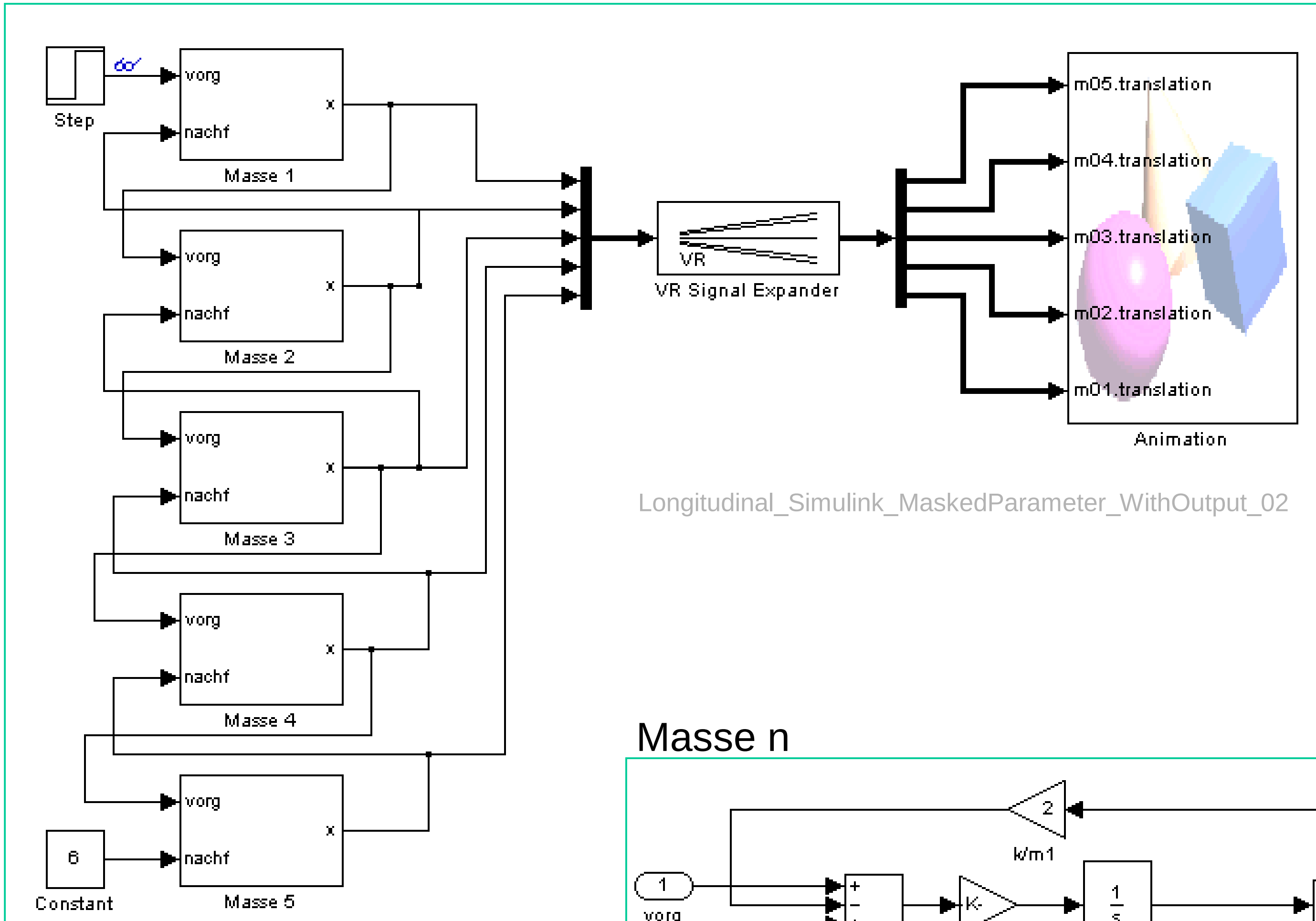
a) mit Simulink (5 Massen) und



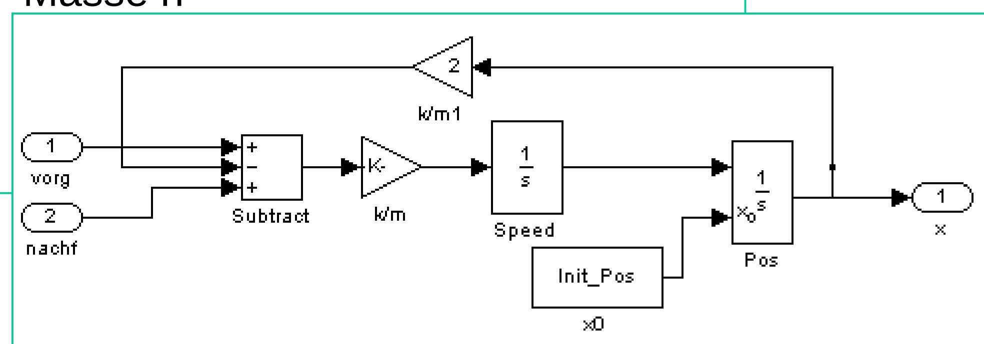
b) und flexibel konfigurierbar mit Stateflow (z.B. 50 Massen).



zu a) Realisierung mit Simulink (5 Massen)

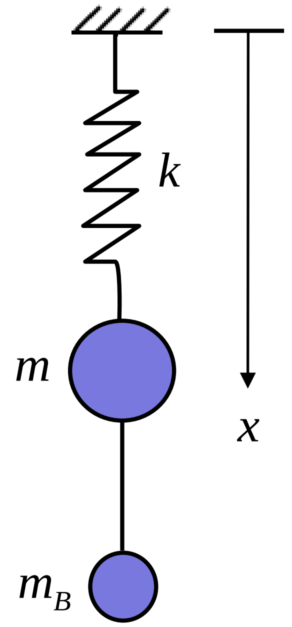


Masse n



Übung: Berechnung von Anfangswerten

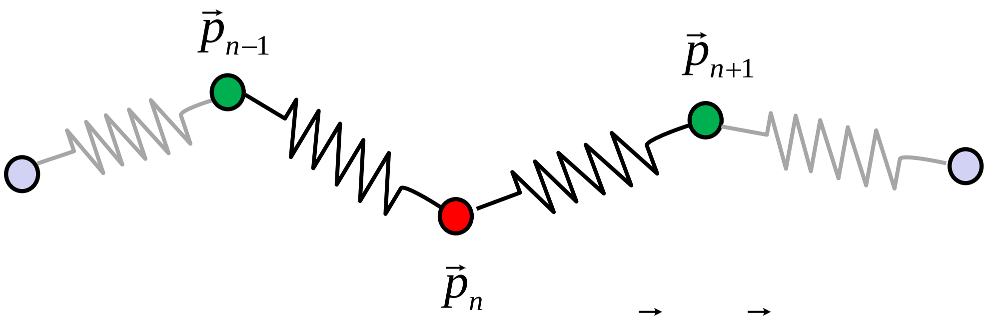
Die Masse m_B wird zum Zeitpunkt t=0 abgeschnitten.
Die Bewegung der Masse m soll modelliert werden.
Dabei soll der Strömungswiderstand berücksichtigt werden.



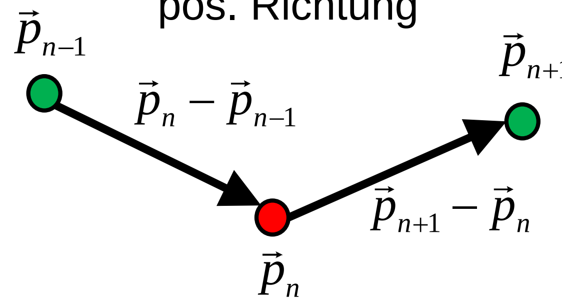
Gegeben: m, m_B, Radius r der Masse m,
k, Federlänge l_0 im entspannten Zustand,
c_W der Masse m, Dichte des Mediums ρ.

<u>5.3.2.2 Mehrdimensionale Probleme</u> (z.B.: Transversalwelle)

Herleitung → Tafel



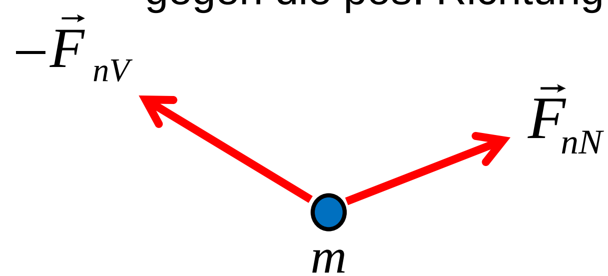
Festlegung der
pos. Richtung

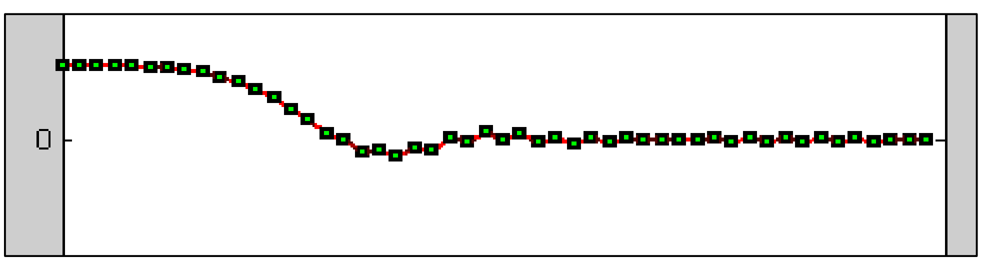


$$\vec{F}_{nV} = k \cdot \underbrace{(|\vec{p}_n - \vec{p}_{n-1}| - l_0)}_{\text{Dehnung}} \cdot \underbrace{\frac{\vec{p}_n - \vec{p}_{n-1}}{|\vec{p}_n - \vec{p}_{n-1}|}}_{\text{Richtungsvektor}}$$

$$\vec{F}_{nN} = k \cdot \overbrace{(|\vec{p}_{n+1} - \vec{p}_n| - l_0)}^{\text{Dehnung}} \cdot \overbrace{\frac{\vec{p}_{n+1} - \vec{p}_n}{|\vec{p}_{n+1} - \vec{p}_n|}}^{\text{Richtungsvektor}}$$

Zugkräfte einzeichnen,
Vorzeichen neg. wenn
gegen die pos. Richtung





$$\vec{a}_n = \frac{1}{m} \cdot \left(-\vec{F}_{nV} + \vec{F}_{nN}\right)$$

Übung: Transversalwelle

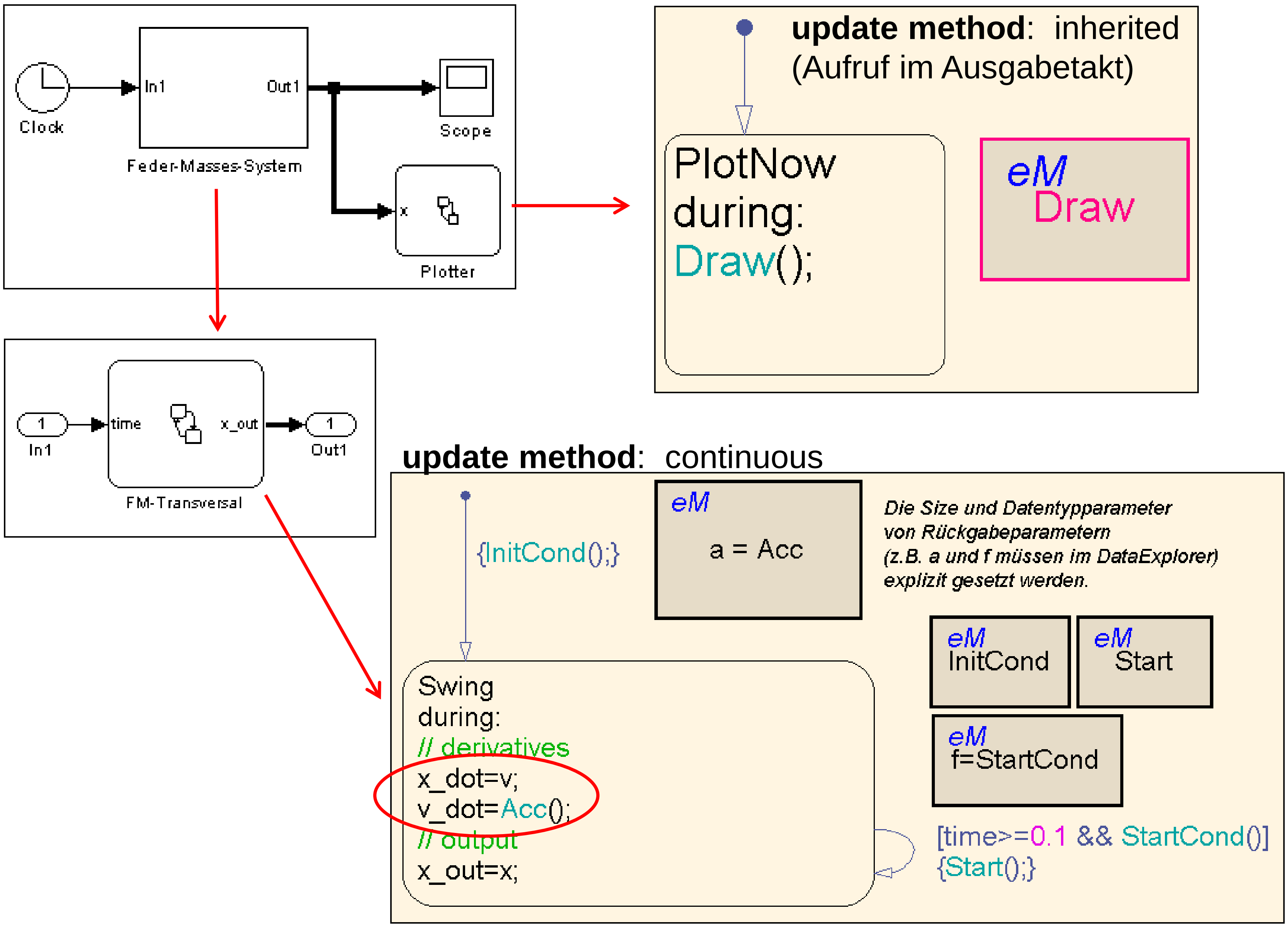
Modellieren Sie das Modell mit Stateflow (50 Massen).

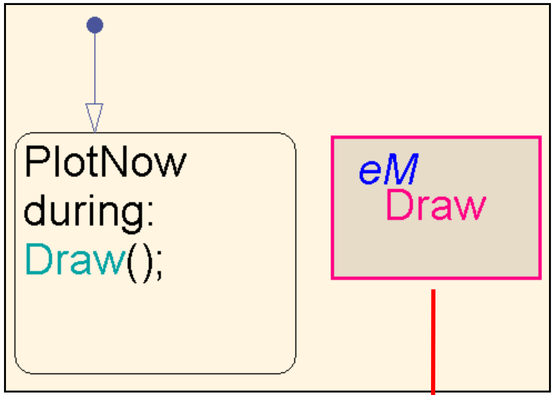
Transversal_2

time	Input	Discrete	Inherit: Sa...	-1
v	Local	Continuous	double	k,2
x	Local	Continuous	double	k,2
x_out	Output	Discrete	double	k,2
c	Parameter	Discrete	Inherit: Sa...	-1
l0	Parameter	Discrete	Inherit: Sa...	-1
m	Parameter	Discrete	Inherit: Sa...	-1

Randbedingungen:

- Federn seien auf die doppelte Länge vorgespannt
- Zum Zeitpunkt t=0.1s werde x_0 sprungartig von (0, 0) auf (0, 0.2) gezogen


Clock
In1
Out1
Feder-Masses-System
Scope
x
Plotter
update method: inherited
(Aufruf im Ausgabetakt)
PlotNow
during:
Draw();
eM
Draw
1
In1
time
x_out
1
Out1
FM-Transversal
update method: continuous
{InitCond();}
eM
a = Acc
Die Size und Datentypparameter
von Rückgabeparametern
(z.B. a und f müssen im DataExplorer)
explizit gesetzt werden.
eM
InitCond
eM
Start
eM
f=StartCond
Swing
during:
// derivatives
x_dot=v;
v_dot=Acc();
// output
x_out=x;
[time>=0.1 && StartCond()]
{Start();}

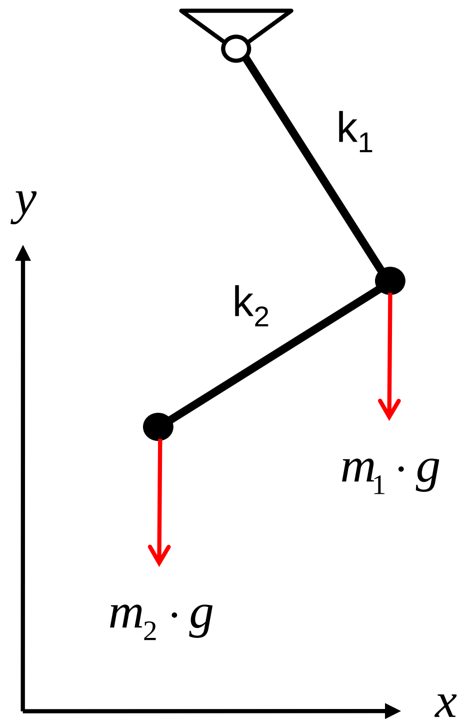


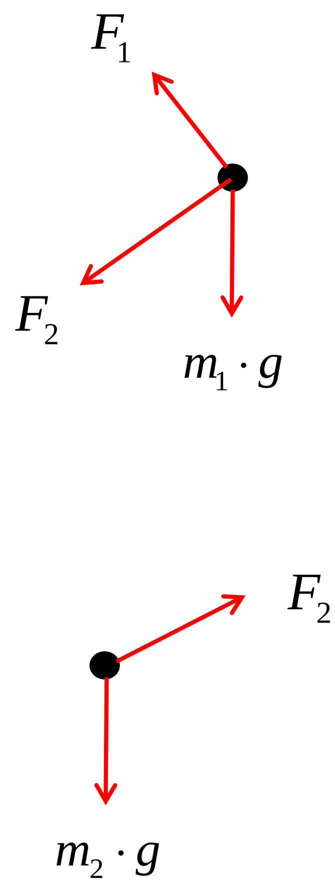

```
function Draw

  y_Bereich = [-0.01 0.03];

  eml.extrinsic('set', 'drawnow', 'plot', 'gca');

  % Scatterplot zeichnen
  plot(x(:,1), x(:,2),'-rs','LineWidth',2,...
                'MarkerEdgeColor','k',...
                'MarkerFaceColor','g',...
                'MarkerSize',3);
  set (gca,'YLim', y_Bereich );
  drawnow;     % jetzt zeichnen
end
```

5.3.2.3 Diskrete Ereignisse (am Beispiel: Doppelfederpendel mit Anschlag)

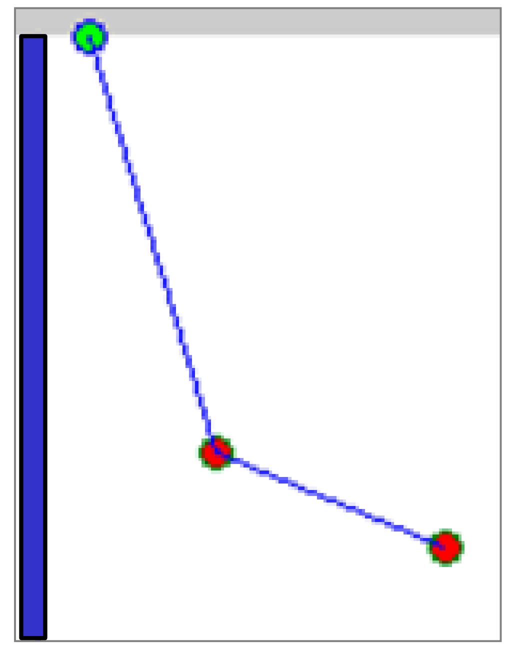
→ Zustandsgrößenumschaltung

Herleitung → Tafel

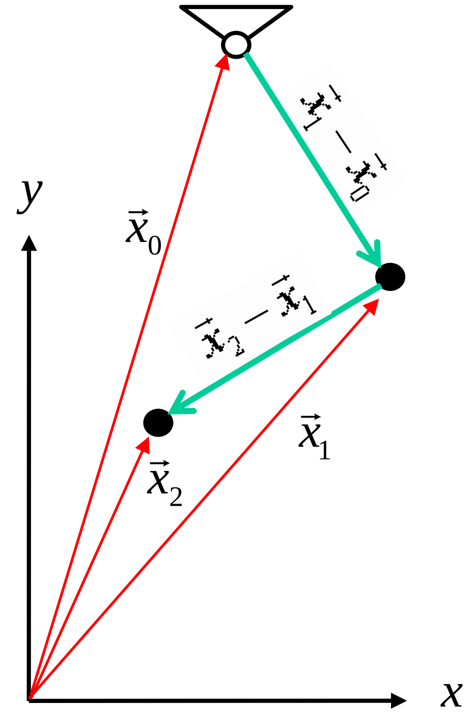




<u>Zustand</u>:
beide Federn gedehnt



Festlegung der pos. Richtung



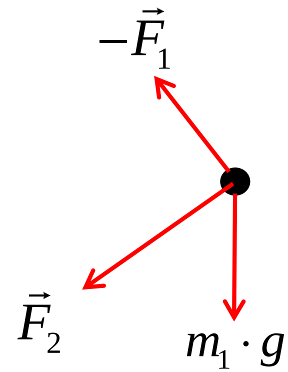
$$\vec{l}_1 = (\vec{x}_1 - \vec{x}_0)$$

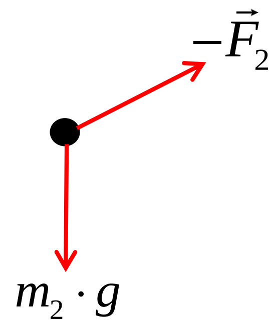
$$\vec{l}_2 = (\vec{x}_2 - \vec{x}_1)$$

$l_{10},\ l_{20}$ Länge der entspannten Federn

$$\vec{F}_1 = k_1 \cdot \overbrace{\left(|\vec{l}_1| - l_{10}\right)}^{\text{Dehnung}} \cdot \overbrace{\frac{\vec{l}_1}{|\vec{l}_1|}}^{\text{Richtungsvektor}}$$

$$\vec{F}_2 = k_2 \cdot \left(|\vec{l}_2| - l_{20}\right) \cdot \frac{\vec{l}_2}{|\vec{l}_2|}$$





Zugkräfte einzeichnen, Vorzeichen neg. wenn gegen die pos. Richtung

$$m_2 \cdot \vec{a}_2 = \underbrace{m_2 \cdot \vec{g} - \vec{F}_2}_{\text{Ursache}}$$

Wirkung

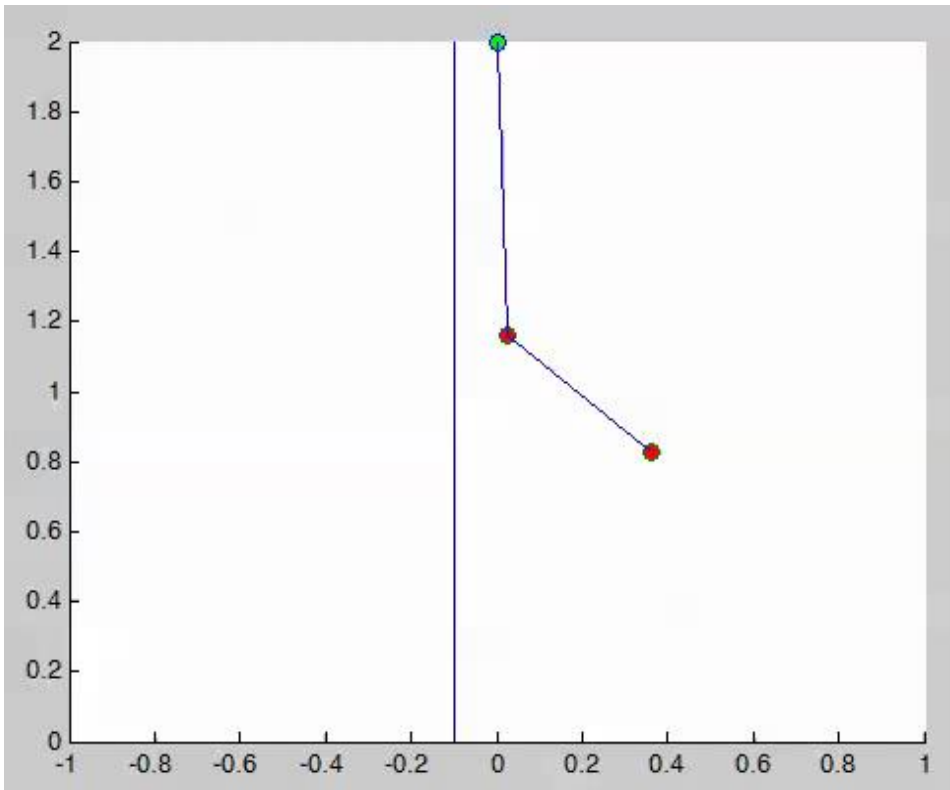
$$m_1 \cdot \vec{a}_1 = \underbrace{m_1 \cdot \vec{g} - \vec{F}_1 + \vec{F}_2}_{\text{Ursache}}$$

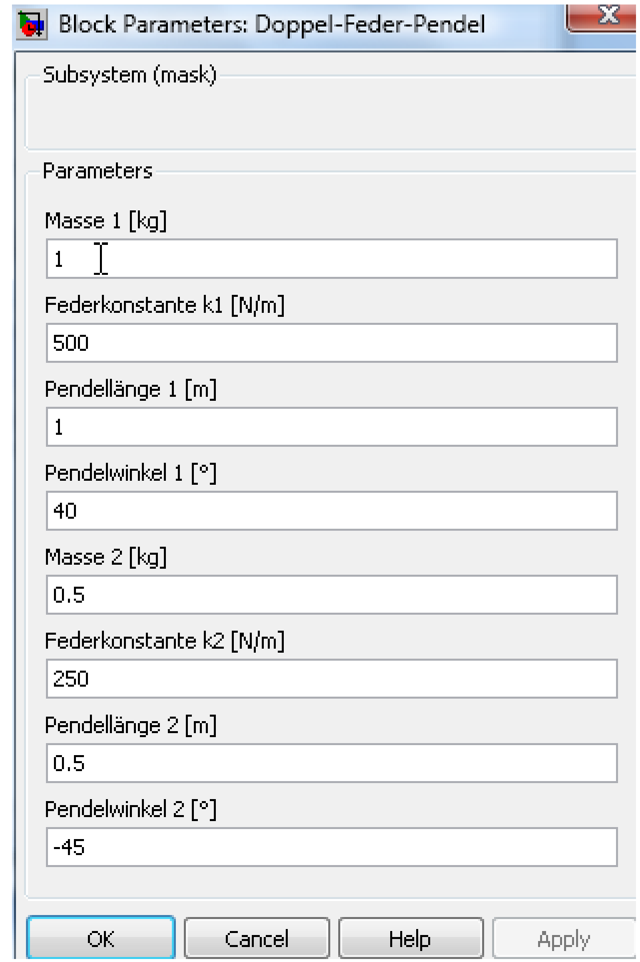
Wirkung

Übung: Doppel-Federpendel mit Anschlag

Modellieren Sie das Doppel-Federpendel mit Stateflow.
Das Pendel sei aufgehängt bei (0,2).

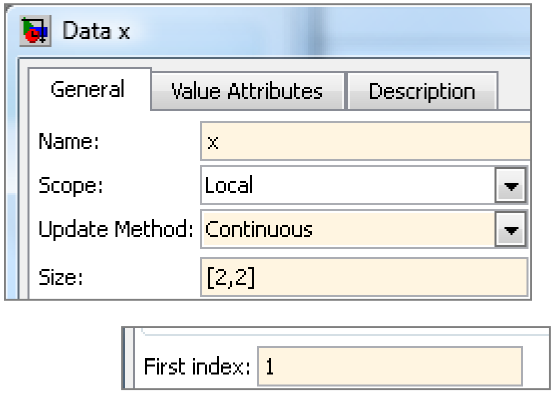
Bei x=-0.1 sei eine Wand.

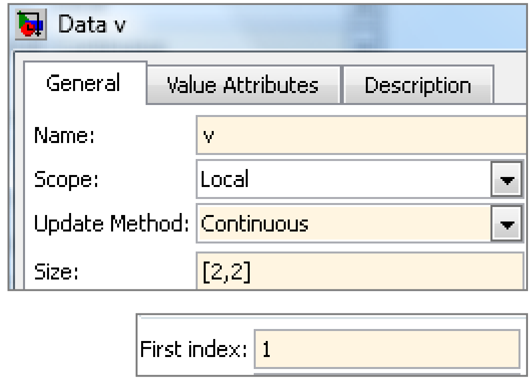




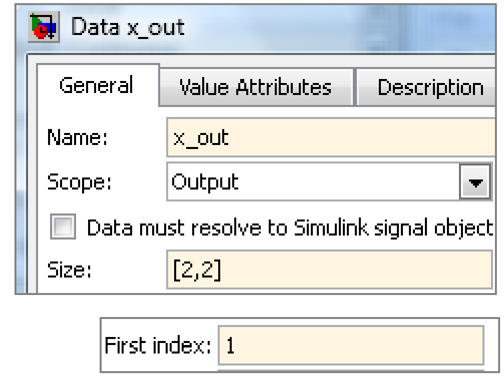
DoppelFederPendelMitAnschlag

Zustandsgrößen

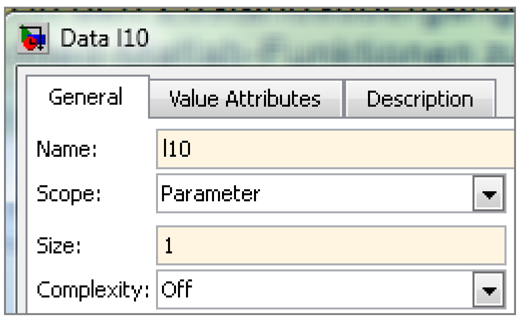


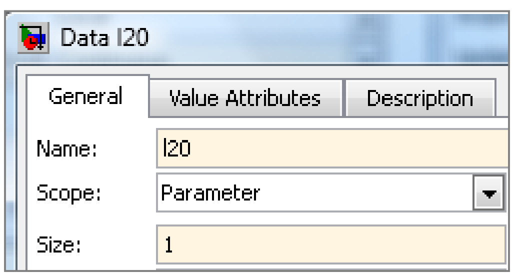


Simulink-Output

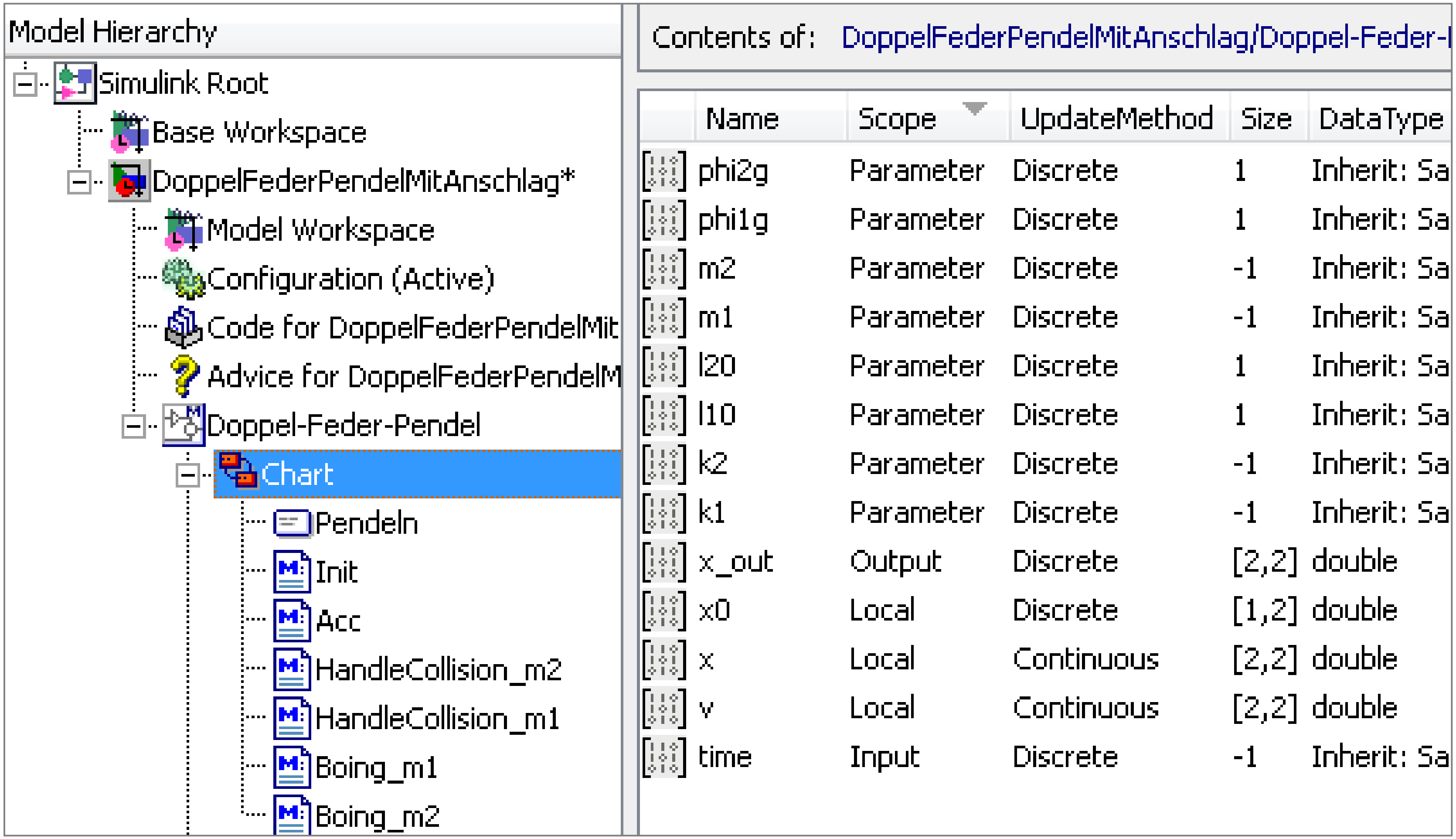


Parameter (z.B. I10, I20)

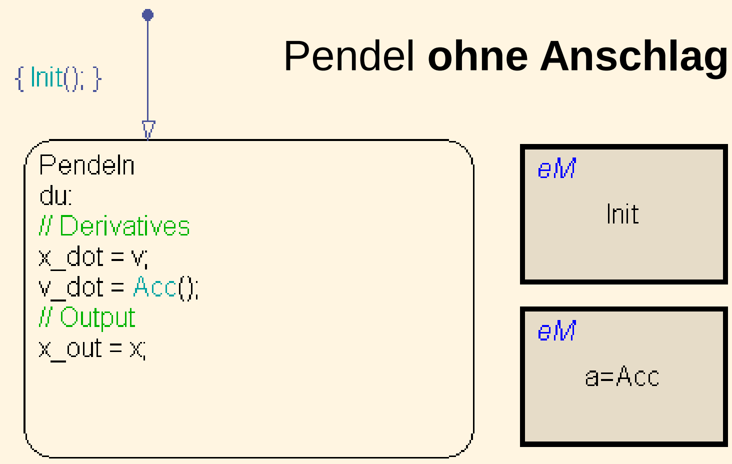




alle Größen im Model-Explorer

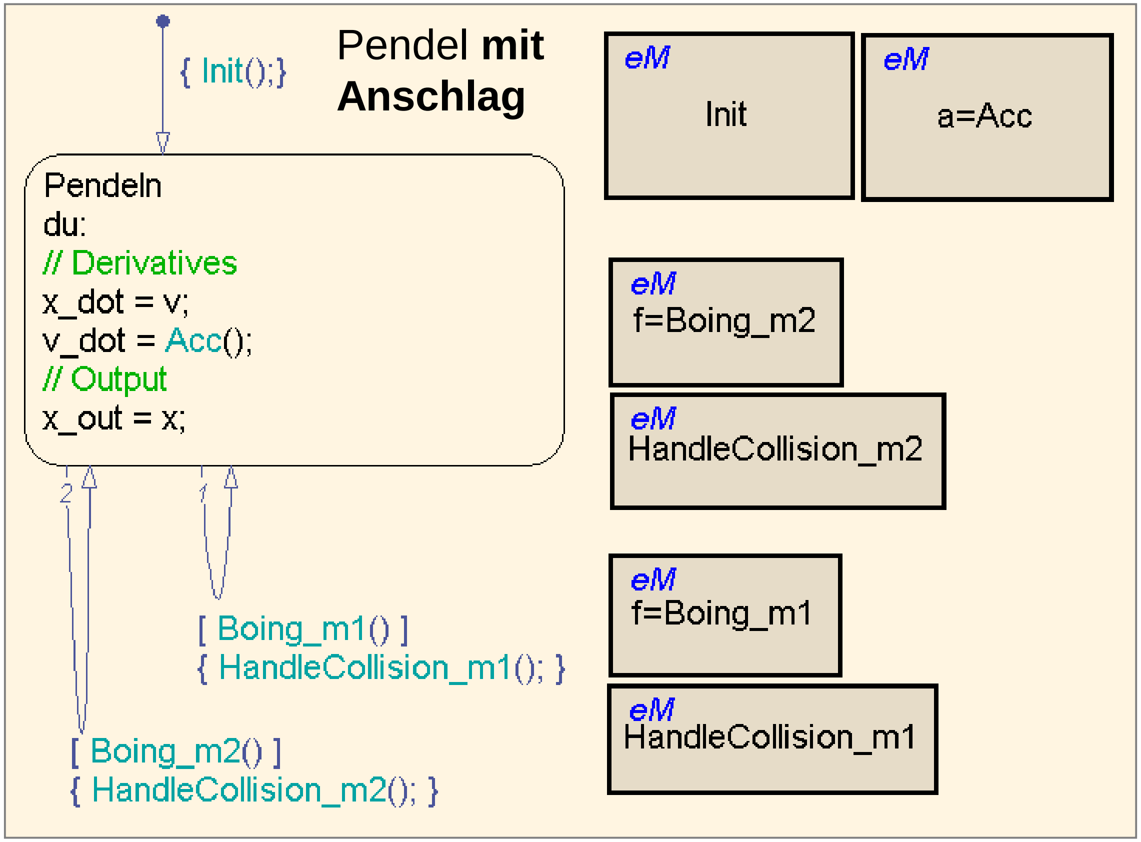


Pendel **ohne Anschlag**




```
function Init

% Init. Pendelwinkel
phi1=phi1g * pi/180;
phi2=phi2g * pi/180;

% Initialisiere v
v(1)=0;
v(2)=0;

% Koordinaten des Aufhängepunktes
x0=[0,2];

% Startkoordinaten der Massen
x(1,:) = x0      +  l10*[sin(phi1), -cos(phi1)];
x(2,:) = x(1,:)  +  l20*[sin(phi2), -cos(phi2)];
```

```
function a=Acc()

% Datentyp-Parameter in Model-Explorer
% setzen (size und first index)!!!
a=zeros(2,2);

g = [0, -9.81]; % Erdbeschleunigung

l1  = x(1,:)-x0;
l2  = x(2,:)-x(1,:);
l1b = norm(l1);
l2b = norm(l2);

F1 = k1*(l1b-l10)*l1/l1b;
F2 = k2*(l2b-l20)*l2/l2b;

a(1,:) = 1/m1 * ((m1*g)-F1+F2);
a(2,:) = 1/m2 * ((m2*g)-F2);
```



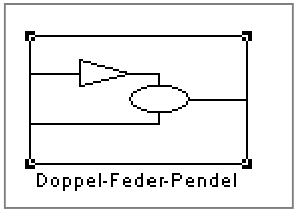
Boing_m..() stellt sicher, dass die Transition nur dann durchlaufen wird,

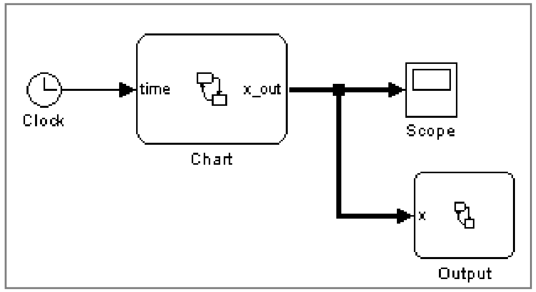
a) wenn die Masse die Wand berührt und

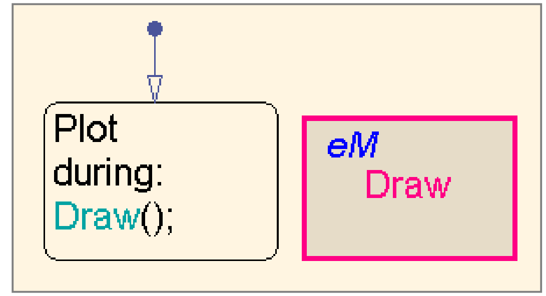
b) sich auf die Wand zubewegt.

```
function f=Boing_m1
    f=false; % Muss auf boolean gesetzt werden!
    n=[1;0]; % Wandnormale
    if(x(1,1) < Wandposition_x) && (v(1,:)*n < 0)
        % Wandkontakt UND Bewegung zur Wand !
        f=true;
    end
```

```
function HandleCollision_m1

% Reflexion an Wand
v(1,1)=-v(1,1);
```





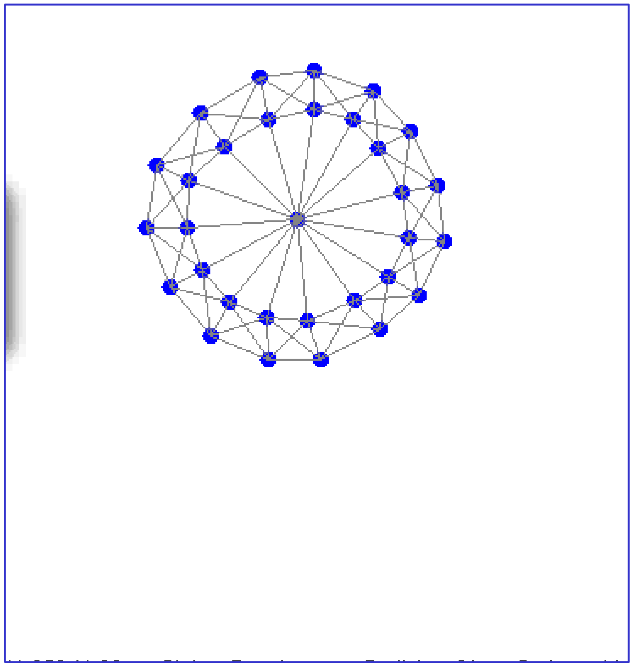



```
function Draw

  x0=[0,2];  % Position der Aufhängung
  eml.extrinsic('set', 'drawnow', 'scatter', 'gca', 'hold', 'line');

  % Aufhängung und Wand zeichnen
  scatter(x0(1), x0(2),  'o', 'MarkerFaceColor', [0 1 0]);
  line([Wandposition_x Wandposition_x], [2 0]);
  hold(gca, 'on');

  % Massen zeichnen
  scatter(x(:,1), x(:,2), 'o', 'MarkerFaceColor', [1 0 0]);

  % Pendel zeichnen
  line([x0(1), x(:,1)'], [x0(2), x(:,2)']);

  set (gca,'XLim', [-1 1] );  % x-Bereich festhalten
  set (gca,'YLim', [0  2] );  % y-Bereich festhalten

  hold(gca, 'off');
  drawnow;                          % jetzt zeichnen
end
```

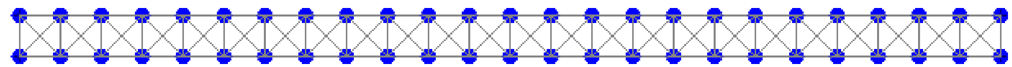
5.3.2.4 Flexible Körper

Anwendungsbeispiele: elastische Körper, Haare, Stoffe, …..

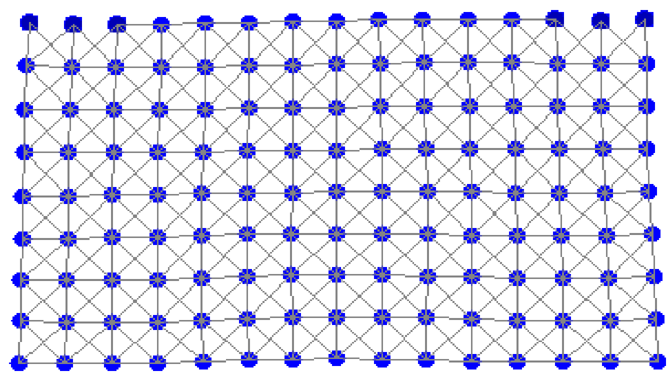
Federndes Rad



Hängebrücke



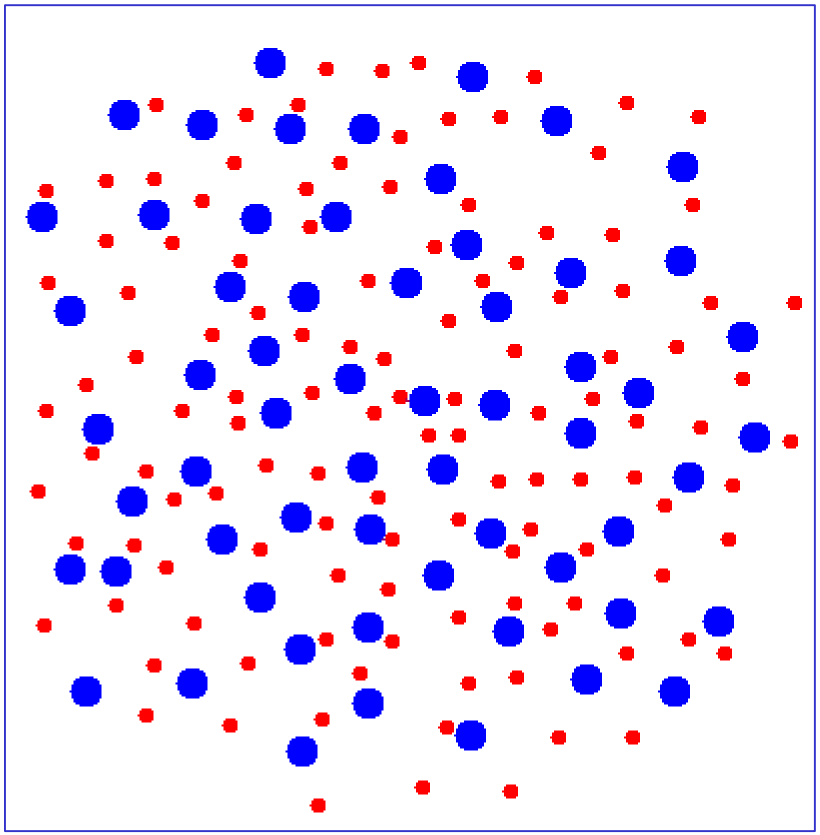
flexibles Gewebe



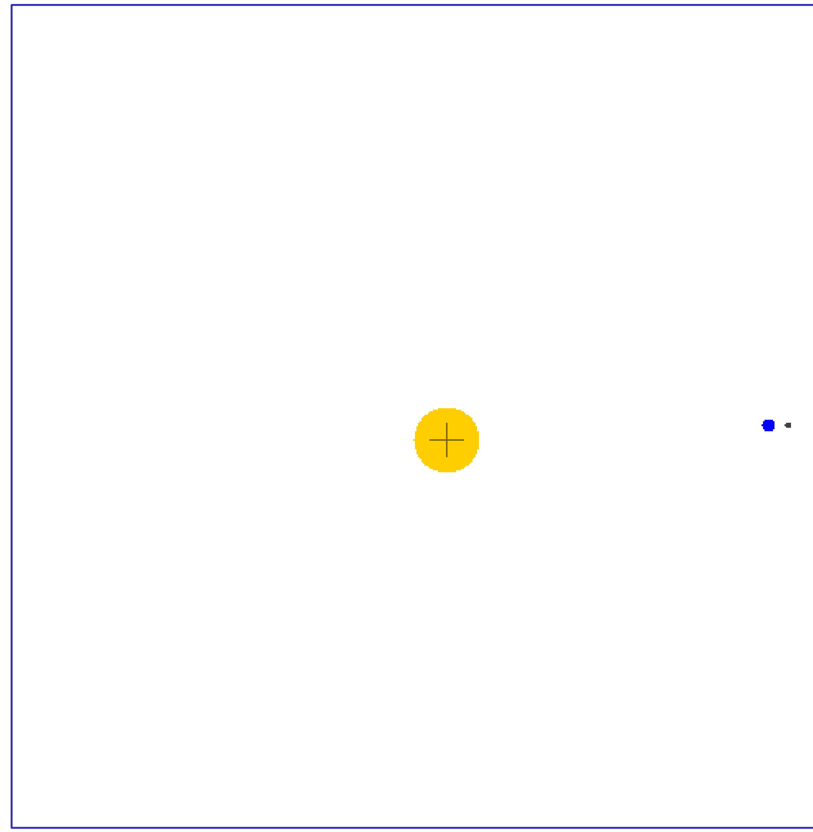
http://people.ifm.liu.se/freka/particleworld/

5.3.2.5 Gravitation und elektrische Felder

Kristallisation



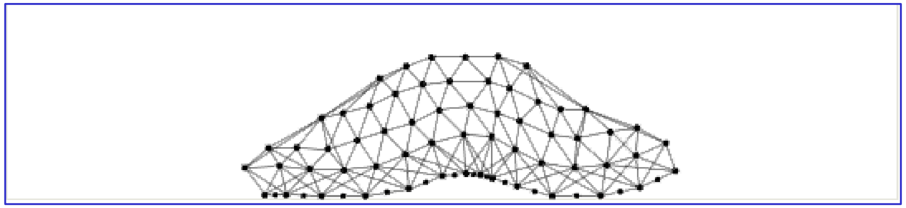
Orbit: Sonne-Erde-Mond



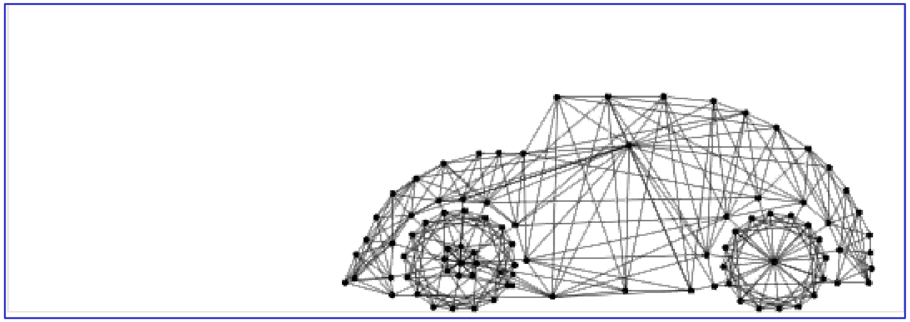
5.3.2.6 Federn mit zeitabhängiger Länge

s. http://sodaplay.com/

Raupen



Autos



allerlei Getier