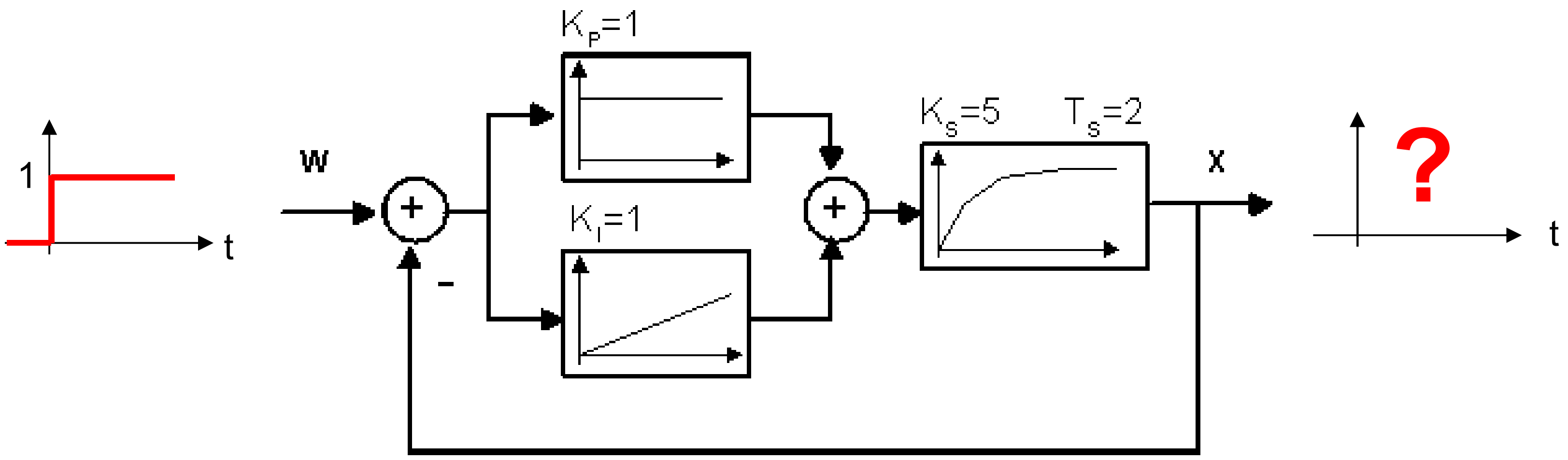
7

Regelung dyn. Systeme

7.2.1 Wie verhält sich ein System von Übertragungsblöcken

Jetzt stellt sich die Frage, wie sich ein System aus Übertragungsblöcken verhält → Sprungantwort



Diese Frage lässt sich elegant durch eine andere Beschreibungsform der Übertragungsblöcke (→ Übertragungsfunktion) beantworten !

7.2.2 Transformation in eine andere Darstellung

Was ist eine Transformation ?

Durch Transformationen können Berechnungen vereinfacht werden, wie man am Beispiel der logarithmischen Transformation sieht:

$$x = 20 \cdot 50$$

$$X = \log(x) = \log(20 \cdot 50)$$

logarith. Transformation

$$X = \log(20 \cdot 50) =$$
$$\log(20) + \log(50) =$$
$$1.301 + 1.699 = 3$$

$$10^X = 10^3$$

logarith. Rücktransformation

$$x = 1000$$

Multiplikation

Addition

7.2.3 Laplace-Transformation

7.2.3.1 Wozu ?

Differentialgleichung

algebraische Gleichung

$$f(t):\quad \dot{x}(t)+x(t)=1$$

$$F(s)=L\{f(t)\}=L\{\dot{x}+x=1\}$$

Laplace - Transformation
(Umformregeln + Tabelle)

$$s\cdot X(s)+X(s)=\frac{1}{s}$$

$$X(s)=\frac{1}{s\cdot(s+1)}$$

$$L^{-1}\{X(s)\}=L^{-1}\left\{\frac{1}{s\cdot(s+1)}\right\}$$

$$x(t)=1-e^{-t}$$

Laplace - Rücktransformation
(Umformregeln + Tabelle)

Mit der Laplace-Transformation werden gewöhnliche, lineare Differentialgleichungen **mit algebraischen Mitteln** (also: +, -, *, /) lösbar.

Durch die Laplace-Transformation wird die Lösung von DGL drastisch vereinfacht.

7.2.3.2 Wozu in der Regelungstechnik ?

Aus der Sprungantwort eines Systems erhalten wir mit Hilfe der Laplace-Transformation die sog. „***Übertragungsfunktion***“.

Mit der Übertragungsfunktion kann man leicht

- das Verhalten eines „Systems aus Übertragungsblöcken“ bestimmen
- die Stabilität eines Systems beurteilen
- Regler für dynamische Systeme entwerfen

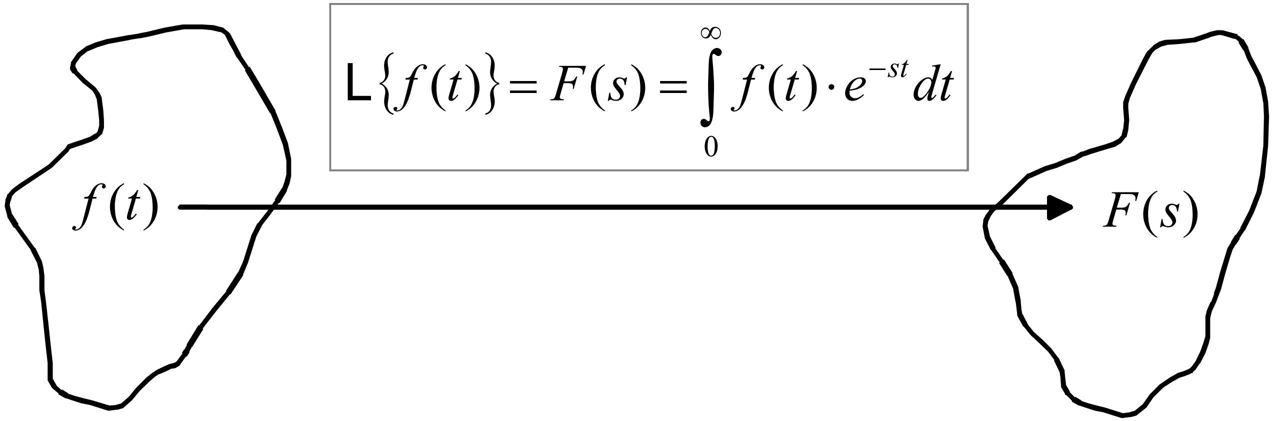
7.2.4 Einige Regeln der Laplace-Transformation

7.2.4.1 Einführung

Unter *Transformation* versteht man in der Mathematik ganz allg. eine Zuordnung.

Eine *Funktionaltransformation* ordnet 2 Funktionsmengen einander zu.

$$\mathrm{L}\{f(t)\} = F(s) = \int_0^\infty f(t) \cdot e^{-st} dt$$



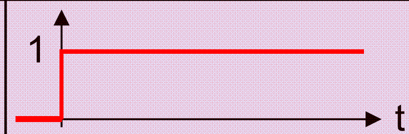
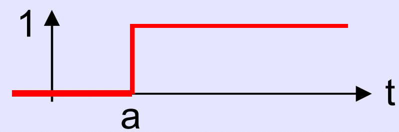
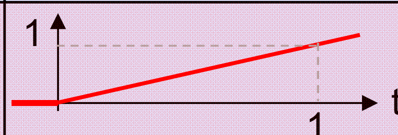
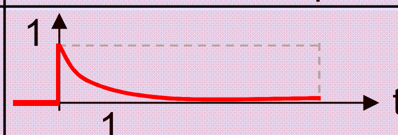
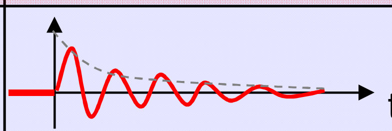
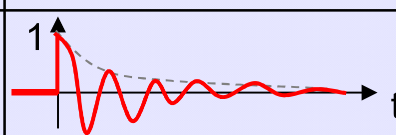
Funktionen und Differentialgleichungen

algebraische Gleichungen

Beispiel: $\frac{d}{dt}\left(t \cdot e^{at}\right) \longrightarrow \frac{s}{(s-a)^2}$

7.2.4.2 Transformation von Funktionen

In den meisten Fällen muss das Laplace-Integral nicht gelöst werden.
Viele Standardfunktionen <u>sind in Tabellen</u> aufgeführt (s. Beispiele).

Zeitfunktion	graph. Darstellung	Transformierte	
$u(t)$ Einheitssprung		$\frac{1}{s}$	(F1)
$u(t-a)$		$\frac{e^{-as}}{s}$	(F2)
$u(t)\cdot t$		$\frac{1}{s^2}$	(F3)
$u(t)\cdot e^{-at}$		$\frac{1}{s+a}$	(F4)
$u(t)\cdot e^{-at}\cdot\sin(\omega t)$		$\frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$	(F5)
$u(t)\cdot e^{-at}\cdot\cos(\omega t)$		$\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$	(F6)

7.2.4.3 Transformation von Operationen

Funktionen sind über math. Operationen (z.B. +, *, Differentiation, Integration) verknüpft. Zu diesen Operationen lassen sich ebenfalls Transformationsregeln angeben (→ Sätze der Laplace-Transformation).

Satz	Zeitbereich	Transformation	
Linearkombin.	$k_1 \cdot f_1(t) + k_2 \cdot f_2(t)$	$k_1 \cdot F_1(s) + k_2 \cdot F_2(s)$	(O1)
Verschiebungs-satz	$f(t-a)$	$e^{-as} \cdot F(s)$	(O2)
Diff. <u>ohne Anfangswerte</u>	$\frac{d^n f(t)}{dt^n}$	$s^n \cdot F(s)$	(O3)
Grenzwertsätze	$\lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{s\to 0} s \cdot F(s)$ $\lim_{t\to 0} f(t) = \lim_{s\to\infty} s \cdot F(s)$		(O4)

ÜBUNG: Laplace-Rücktransformation

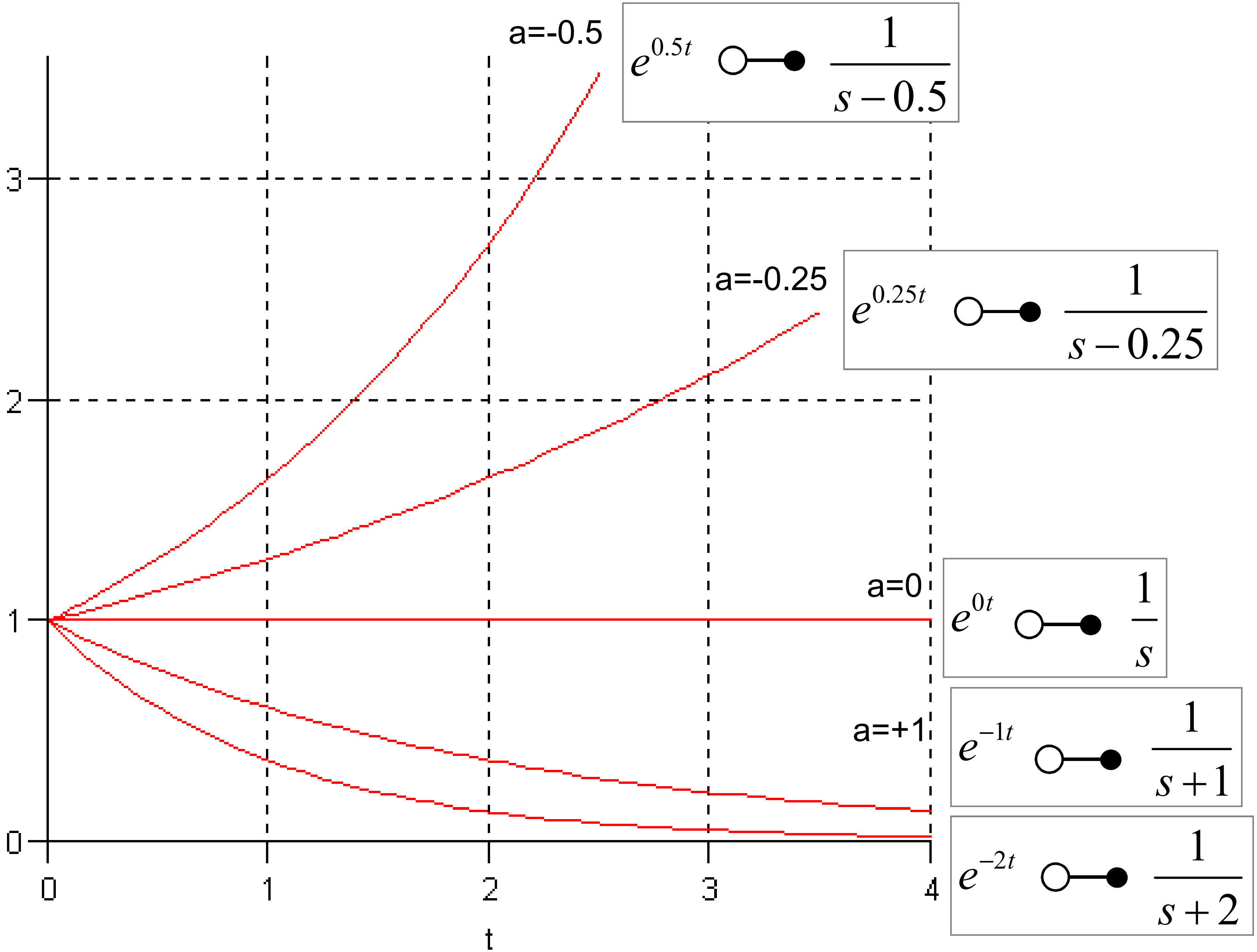
Transformieren Sie die folgenden Laplace-Transformierten in den Zeitbereich.
Handelt es sich um abklingende oder eskalierende Funktionen?

a) $$\frac{1}{s+a}$$ mit a = 2, 1, 0, -0.25, -0.5 s. nächste Seite

b) $$\frac{1}{(s+1)(s+2)}$$

c) $$\frac{1}{s^2-10s+21}$$

d) $$\frac{1}{s^2-2s+5}$$


a=-0.5
$e^{0.5t} \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{s-0.5}$
a=-0.25
$e^{0.25t} \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{s-0.25}$
a=0
$e^{0t} \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{s}$
a=+1
$e^{-1t} \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{s+1}$
$e^{-2t} \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{s+2}$
0
1
2
3
0
1
2
3
4
t

ÜBUNG: Laplacetransformation für DGLn ohne Anfangswerte

Geben Sie für folgende Differentialgleichungen die Laplace-Transformierte an:
Anm.: Die Anfangswerte werden im folgenden zu 0 angenommen.

a) $$T_1 \cdot \dot{x}_a + x_a = K_p \cdot x_e$$

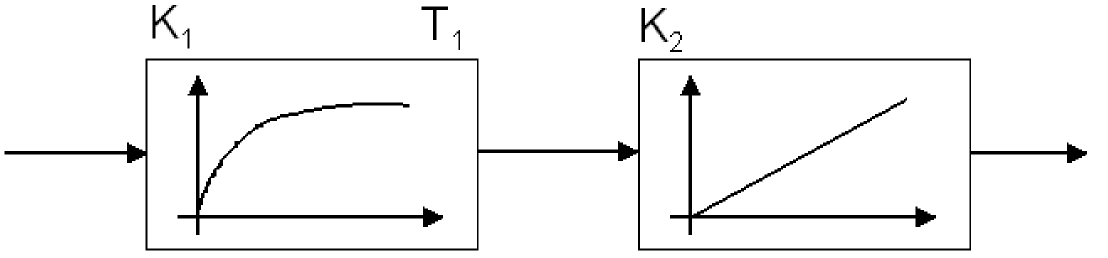
b) $$\frac{1}{\omega_0^2} \cdot \ddot{x}_a + \frac{2D}{\omega_0} \dot{x}_a + x_a = K_p \cdot x_e$$

c) $$\dot{x}_a = K_I \cdot x_e$$

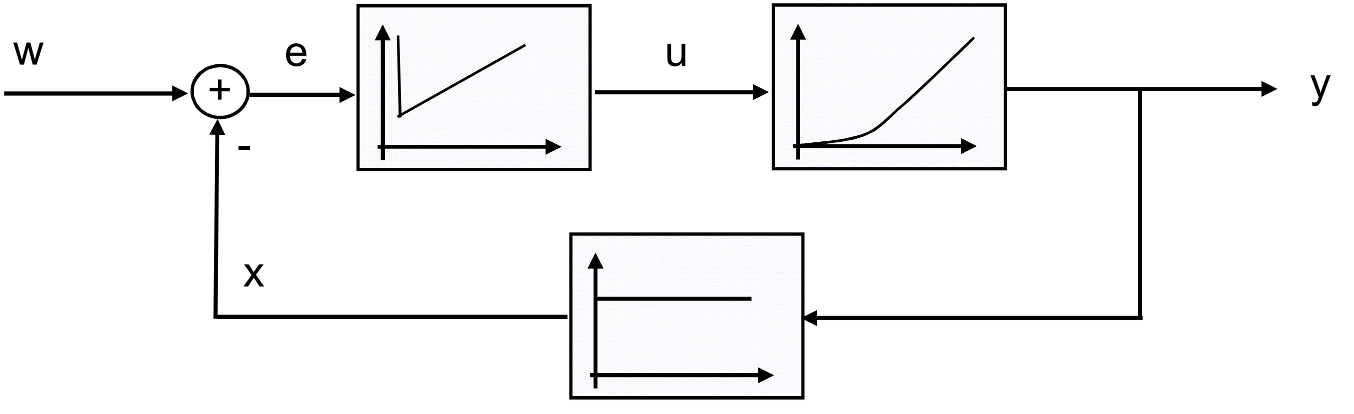
7.2.5 Übertragungsfunktion

7.2.5.1 Motivation

Was ist die Sprungantwort des Gesamtsystems ?



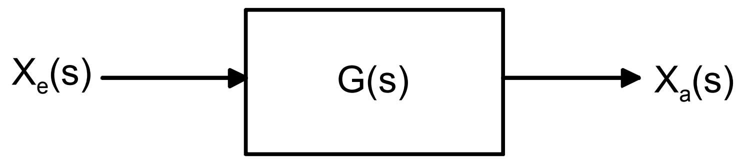
Was ist die Sprungantwort des Gesamtsystems (Regelkreises) ?



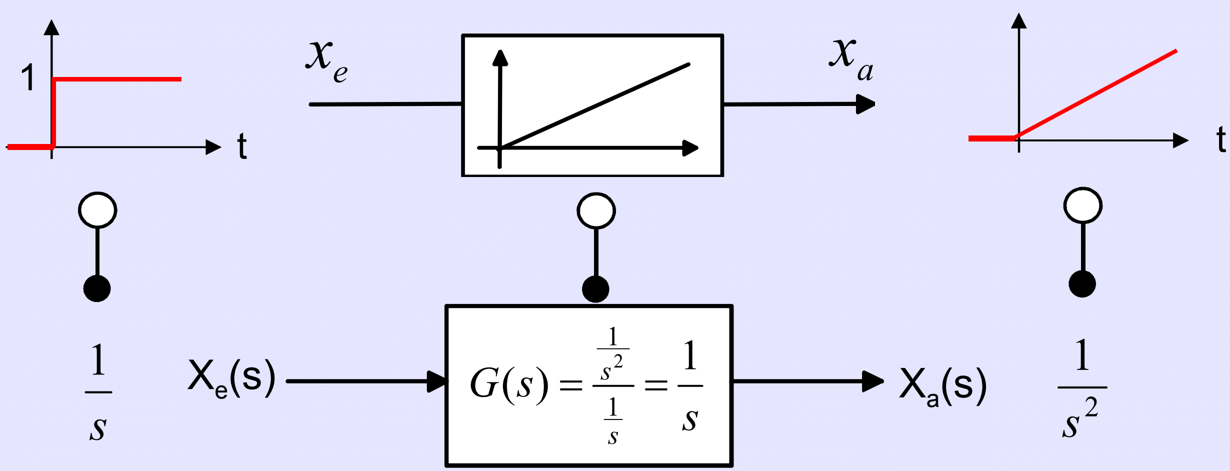
7.2.5.2 Definition der Übertragungsfunktion

Das Verhältnis vom *L{Ausgangssignal}* zum *L{Eingangssignal}* wird als ***Übertragungsfunktion*** bezeichnet.

$$G(s) = \frac{X_a(s)}{X_e(s)}$$



Beispiel : Integrierer (System ohne Ausgleich) .



ÜBUNG: Übertragungsfunktion für einige Standard-Übertragungsblöcke

Zeigen Sie, dass die u.a. Übertragungsblöcke (bzw. DGLn) die angegebene Übertragungsfunktion haben.

Typ	Differentialgleichung	Übertragungsfunktion
PT1	$T_1 \cdot \dot{x}_a + x_a = K_p \cdot x_e$	$K_p \dfrac{1}{(T_1 s + 1)}$
PT2	$\ddot{x}_a + 2D\omega_0 \cdot \dot{x}_a + \omega_0^2 x_a = K_p \omega_0^2 \cdot x_e$	$K_p \dfrac{\omega_0^2}{s^2 + 2D\omega_0 s + \omega_0^2}$
PT$_t$	$x_a = K_p \cdot x_e(t - T_t)$	$K_p e^{-sT_t}$
I	$x_a = K_I \cdot \int x_e dt$ oder $\dot{x}_a = K_I \cdot x_e$	$K_I \frac{1}{s}$

Übertragungsfunktion in Matlab

```
h1=tf([1 -1],[1 2 -1])
```

```
Transfer function:
     s - 1
-------------
s^2 + 2 s - 1
```

```
h2=zpk([1 0],[-1 -2 -3],5)
```

```
Zero/pole/gain:
    5 s (s-1)
-----------------
(s+1) (s+2) (s+3)
```

```
tf(h2)
```

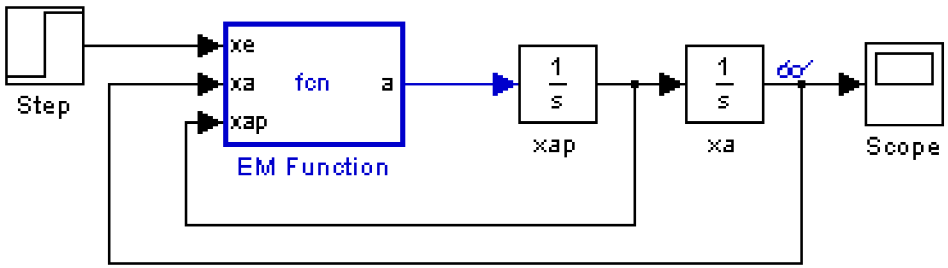
```
Transfer function:
     5 s^2 - 5 s
----------------------
s^3 + 6 s^2 + 11 s + 6
```

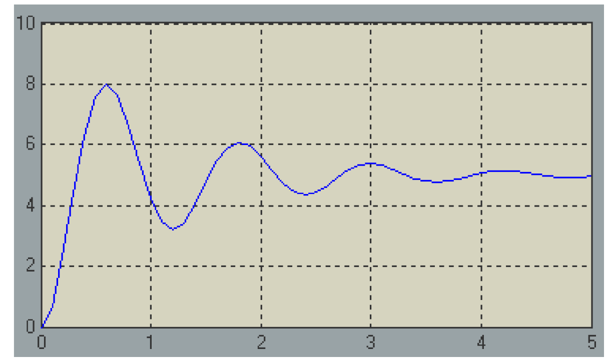
```
zpk(h1)
```

```
Zero/pole/gain:
        (s-1)
-------------------
(s+2.414) (s-0.4142)
```

Übertragungsfunktion in Simulink

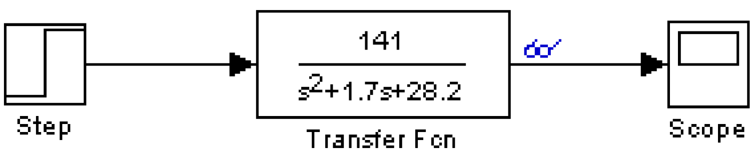
$$\ddot{x}_a + 1.7\dot{x}_a + 28.2x_a = 141 \cdot x_e \quad \Rightarrow \quad \ddot{x}_a = -1.7\dot{x}_a - 28.2x_a + 141 \cdot x_e$$






```
function a = fcn(xe, xa, xap)
a = -1.7*xap - 28.2*xa + 141*xe;
```

$$X_a(s) \cdot \left(s^2 + 1.7s + 28.2\right) = 141 \cdot X_e(s) \quad \Rightarrow \quad G(s) = \frac{141}{s^2 + 1.7s + 28.2}$$

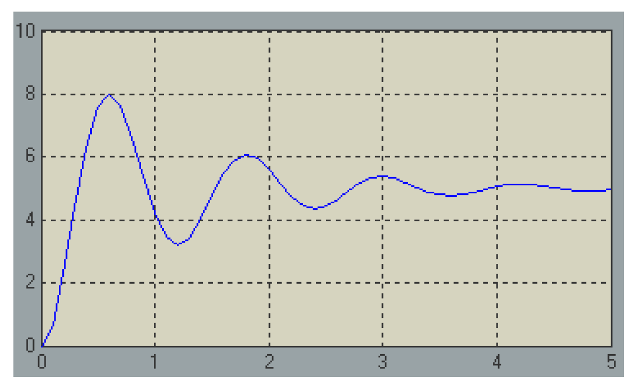


Numerator coefficient:

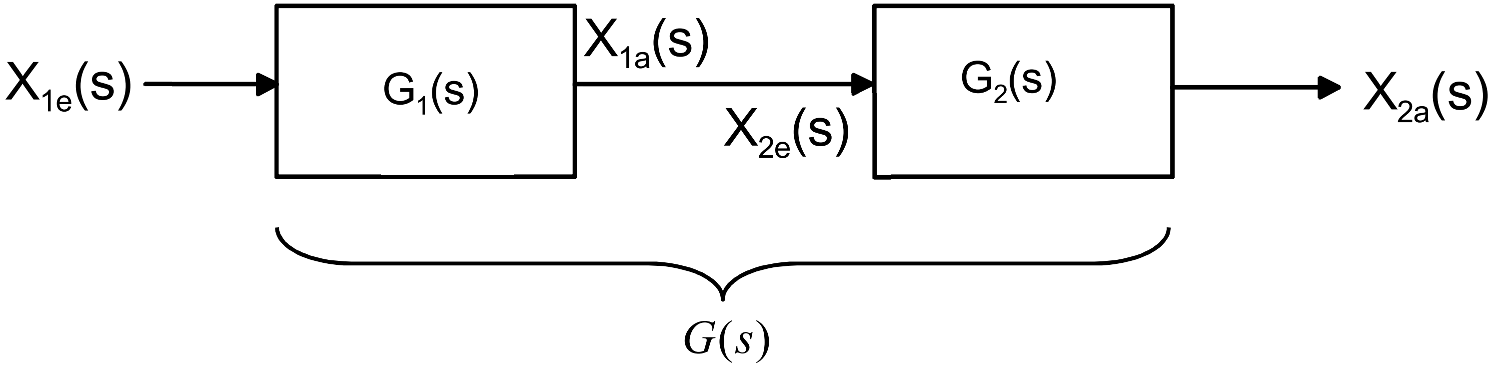
[141]

Denominator coefficient:

[1 1.7 28.2]



7.2.5.3 Überragungsfunktion in Reihe liegender Blöcke



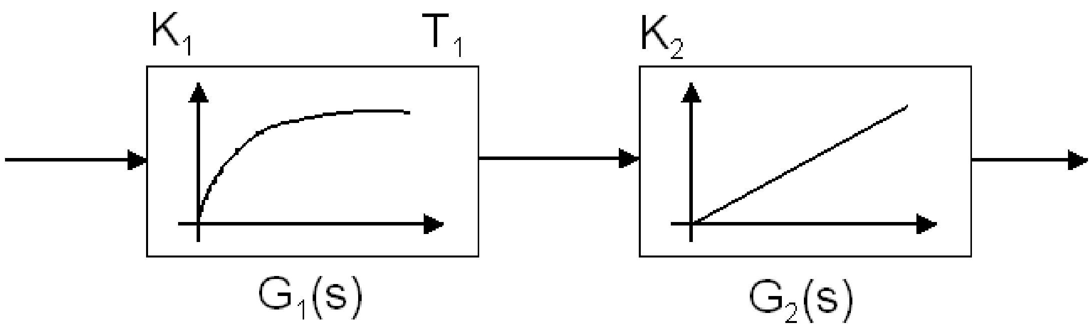
$$G(s) = \frac{X_{2a}(s)}{X_{1e}(s)} = \frac{X_{2a}(s)}{X_{1e}(s)} \cdot \underbrace{\frac{X_{1a}(s)}{X_{2e}(s)}}_{=1} = \frac{X_{1a}(s)}{X_{1e}(s)} \cdot \frac{X_{2a}(s)}{X_{2e}(s)} = G_1(s) \cdot G_2(s)$$

Die Übertragungsfunktion in Reihe liegender Übertragungsblöcke ist gleich dem Produkt der Teilübertragungsfunktionen.

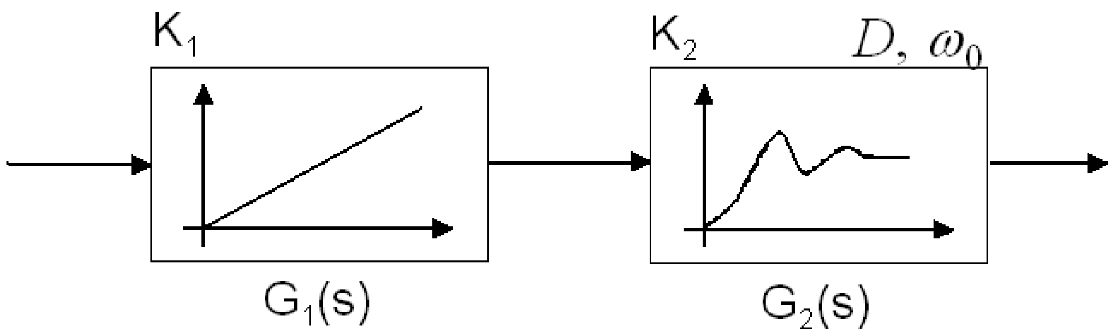
ÜBUNG: Sprungantwort → Übertragungsfunktion

Für folgende Systeme ist die Übertragungsfunktion zu bestimmen:

a)



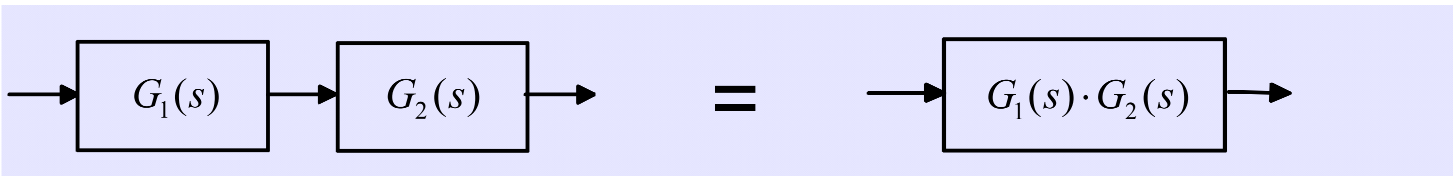
b)



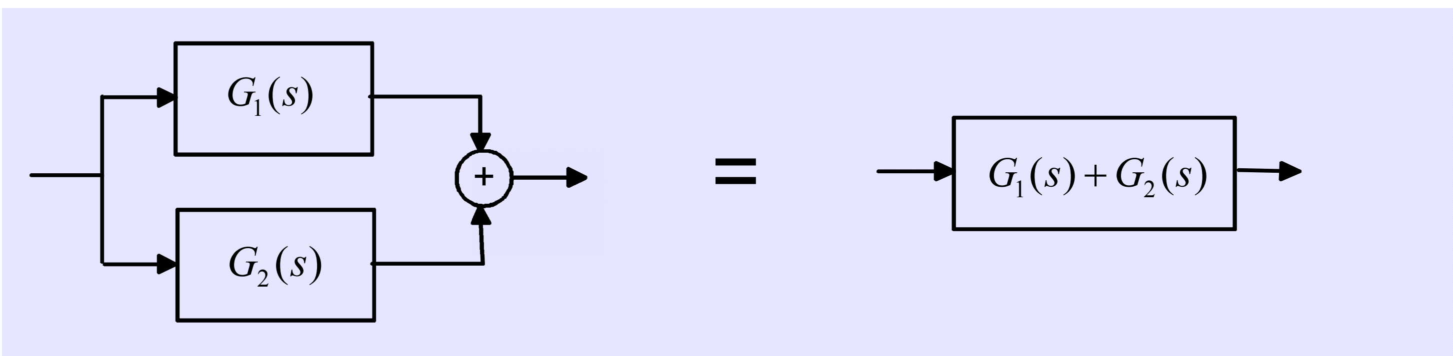
7.2.5.4 Blockschaltbild-Algebra

Die einfachen algebraischen Regeln für Systeme im Laplacebereich ermöglichen das geschickte Zusammenfassen von Systemen.

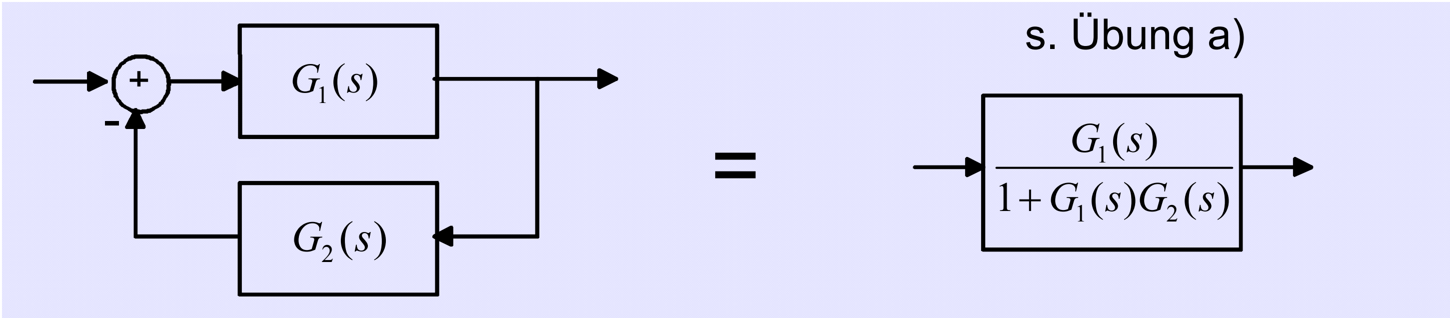
1. Serienschaltung:



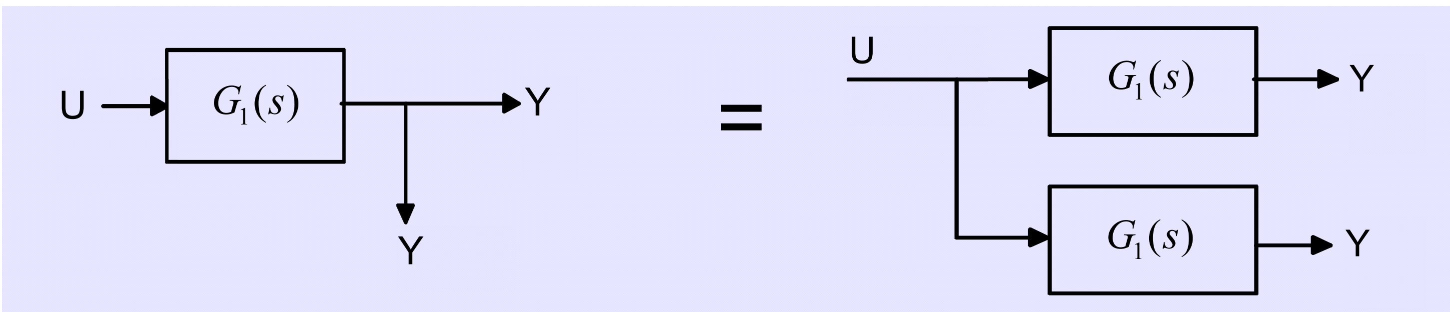
2. Parallelschaltung:



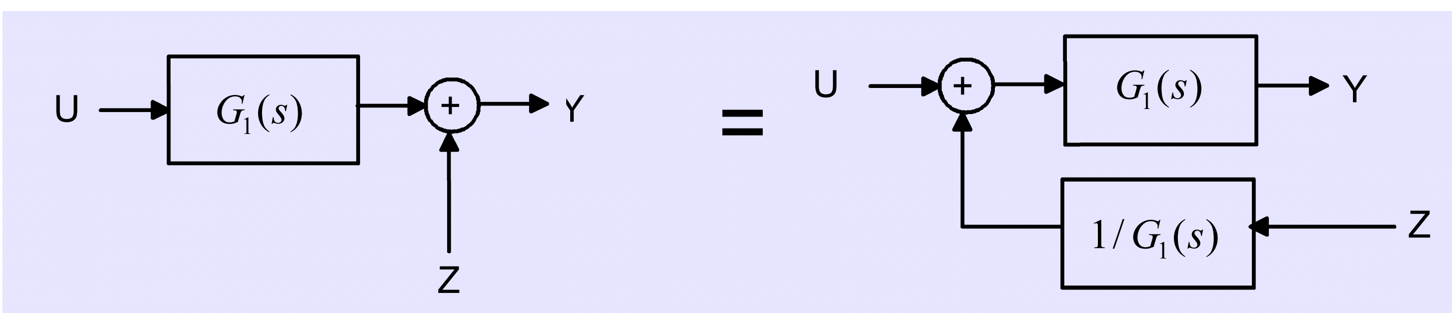
3. Rückkopplung:



4. Verschieben von Verzweigungsstellen:



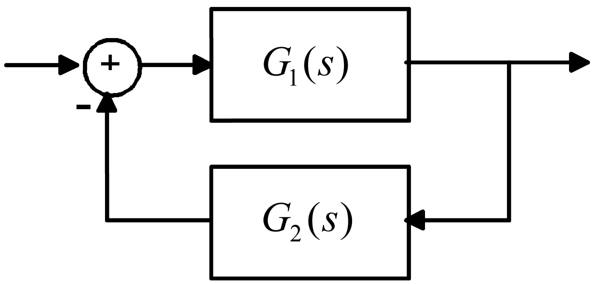
5. Verschieben von Additionsstellen:



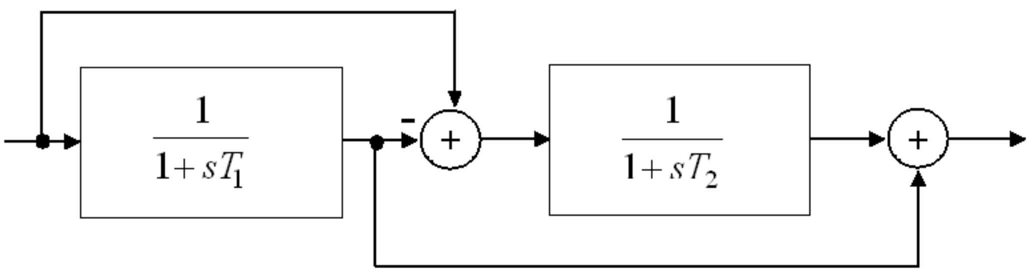
ÜBUNG: Zusammenfassung von Blöcken

Geben Sie die Gesamt-Übertragungsfunktion an.

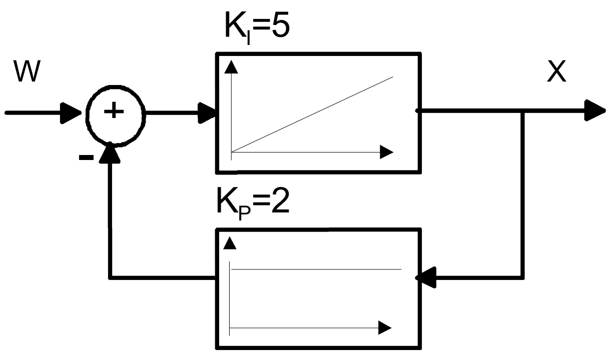
a)



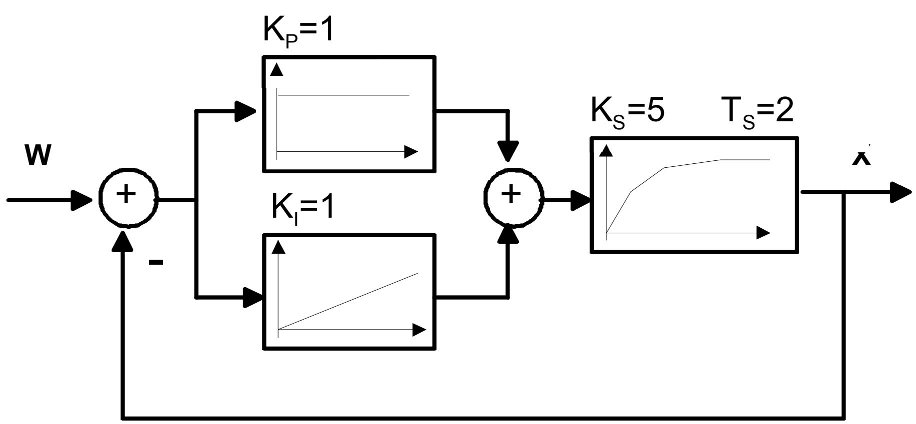
b)



c)



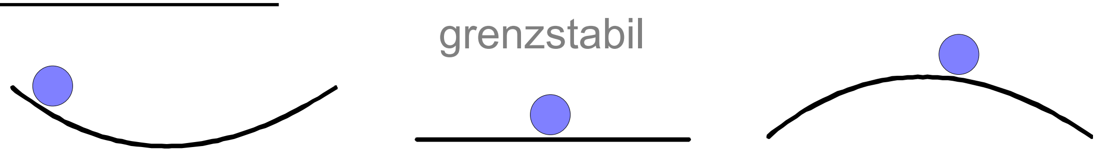
d)



7.2.6 Stabilität von Systemen

7.2.6.1 Was heißt Stabilität ?

Asymptotische Stabilität:



Ein System heißt asymptotisch stabil, wenn das System nach einer Auslenkung aus der Ruhelage wieder in die Ruhelage zurückkehrt.

BIBO-Stabilität (bounded Input – bounded Output):

Ein System heißt BIBO-stabil, wenn das Ausgangssignal y(t) für alle t beschränkt ist für alle beschränkten Eingangssignale u(t).

7.2.6.2 Stabilitätskriterium : Pole-/Nullstellen der Übertragungsfunktion

Pole und Nullstellen der Überragungsfunktion

Die Übertragungsfunktion tritt sehr häufig in folgender Form auf (lin. DGLn):

$$G(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \ldots \ b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \ldots \ a_1 s + a_0}$$

$$= k \cdot \frac{(s - z_1) \cdot (s - z_2) \ \ldots \ (s - z_m)}{(s - p_1) \cdot (s - p_2) \ \ldots \ (s - p_n)}$$

Lineare (und zeitinvariante) Systeme ohne Totzeit werden durch ihre Pole und Nullstellen vollständig beschrieben und sind eine wichtige Kenngröße von dyn. Systemen.

Pole und Nullstellen können komplex sein. → Pol-Nullstellen-Diagramm

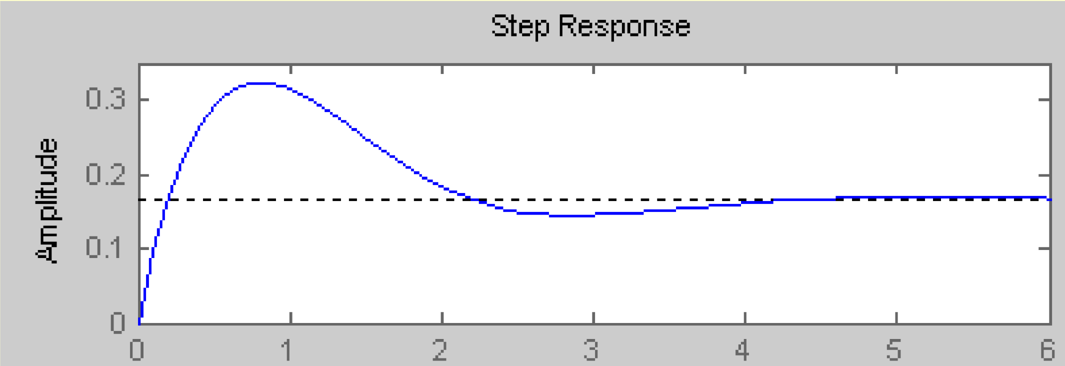
Sprungantwort und Pol-Nullstellendiagramm

System: $$G(s) = \frac{s^2 + 2s + 1}{s^3 + 4s^2 + 7s + 6}$$

```
G=tf([1 2 1],[1 4 7 6])
```

```
Transfer function:
     s^2 + 2 s + 1
---------------------
s^3 + 4 s^2 + 7 s + 6
```

```
step(G)
```




```
pole(G)
```

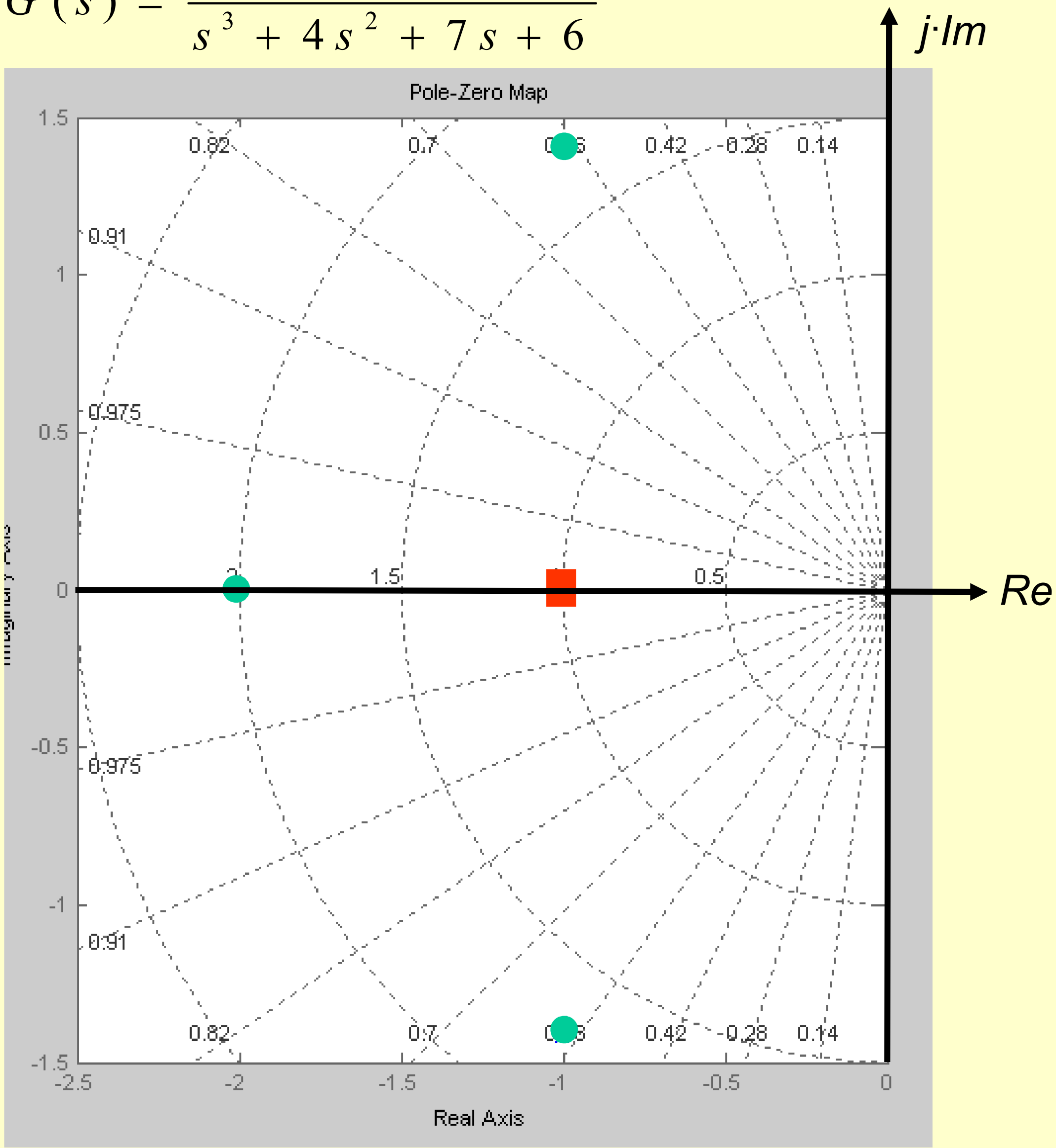
```
-2.0000
-1.0000 + 1.4142i
-1.0000 - 1.4142i
```

$$G(s) = \frac{s^2 + 2s + 1}{s^3 + 4s^2 + 7s + 6}$$

```
pzmap(G)
sgrid
```

Pole: ●

Nullst.: ■



Bedeutung der Pole für die Stabilität

Wie bereits gezeigt, lassen sich alle aus PT1-, PT2-, I- Gliedern usw. bestehenden Systeme durch folgende Übertragungsfunktion beschreiben:

$$G(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \ldots\ b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \ldots\ a_1 s + a_0} = k \cdot \frac{(s - z_1)\cdot(s - z_2)\ \ldots\ (s - z_m)}{(s - p_1)\cdot(s - p_2)\ \ldots\ (s - p_n)}$$

Für einfache Pole lässt sich G(s) in folgende Form bringen:

$$G(s) = \frac{A_1}{s - p_1} + \frac{A_2}{s - p_2} + \frac{A_3}{s - p_3} + \ \ldots..\ \frac{A_n}{s - p_n}$$

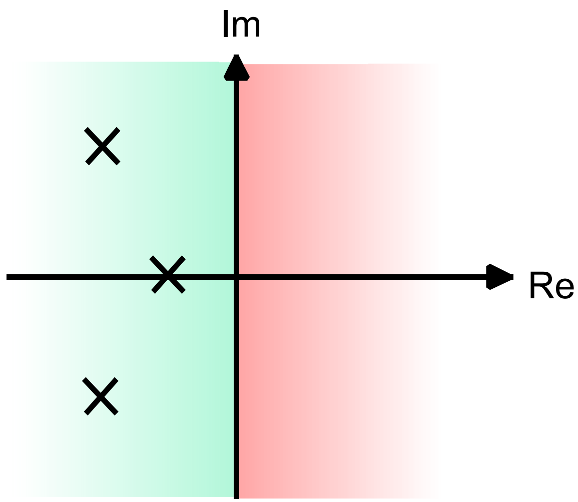
Mit dem Transformationspaar

$u(t) \cdot e^{at}$	$1/(s-a)$

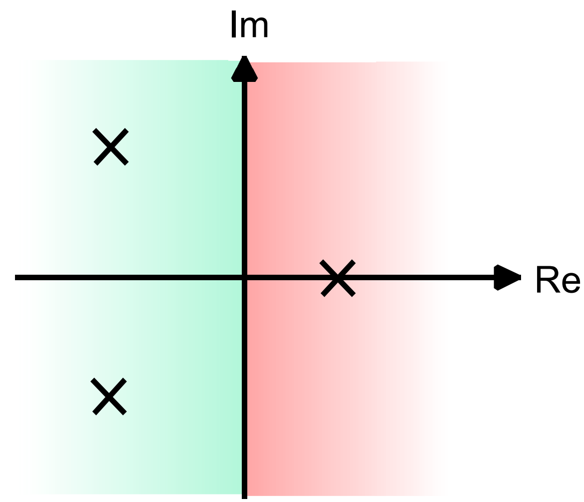
wird deutlich, dass ein solches System nur stabil sein kann, wenn <u>alle Pole negativ</u> sind, da nur so eine abklingende Gesamtfunktion entsteht.

Dieser Gedanke lässt sich auch auf Systeme mit Mehrfachpolen übertragen.

Ein lineares Sytem ist genau dann und nur dann (asymptotisch) stabil, wenn alle Pole in der linken Halbebene liegen, also einen negativen Realanteil haben.



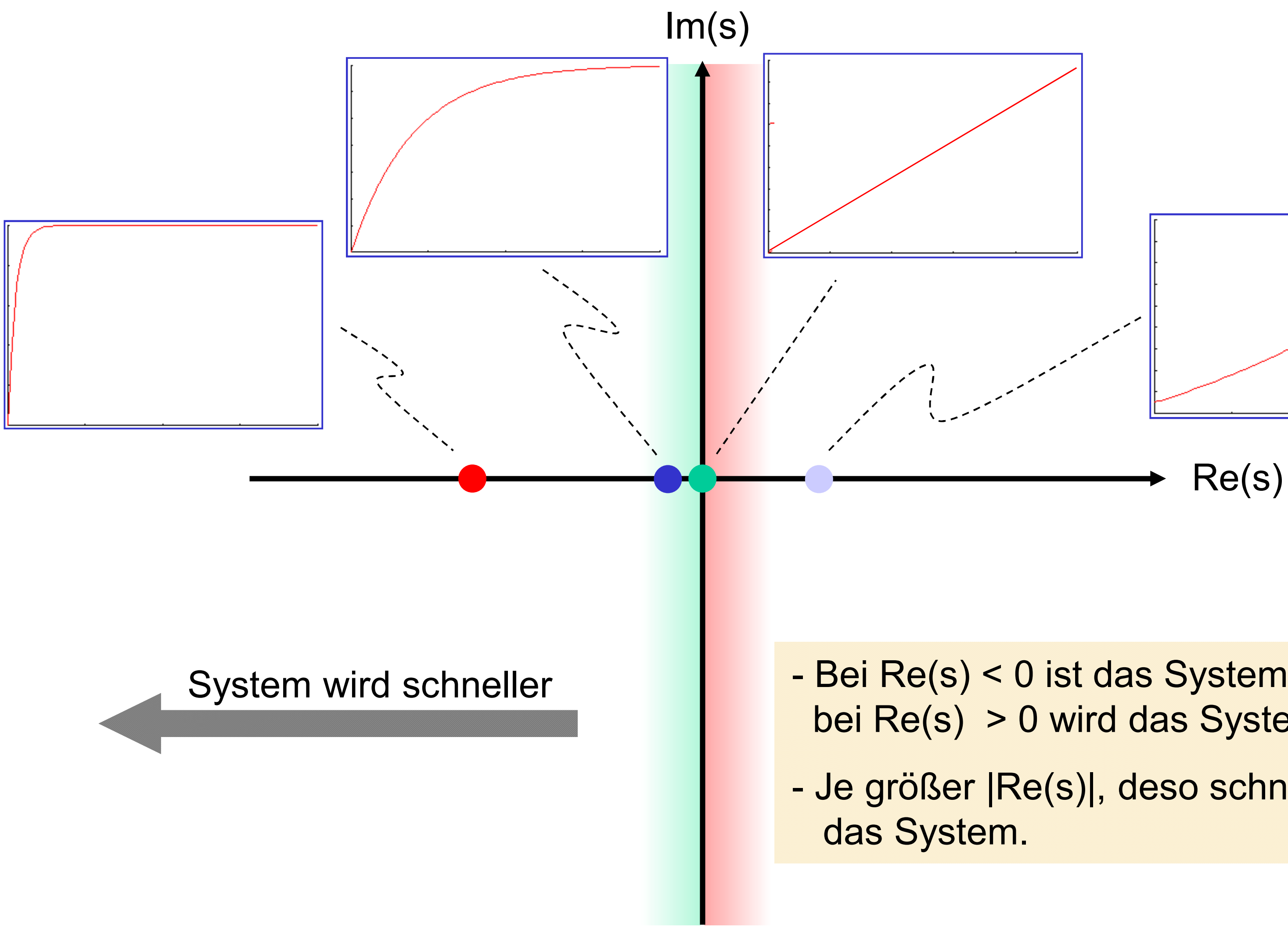
stabiles System



instabiles (eskalierendes) System

zu 1) Da der Realteil des Pols die Dämpfungskonstante ist (siehe Folie davor).

Wirkung reeller Pole (Sprungantwort)



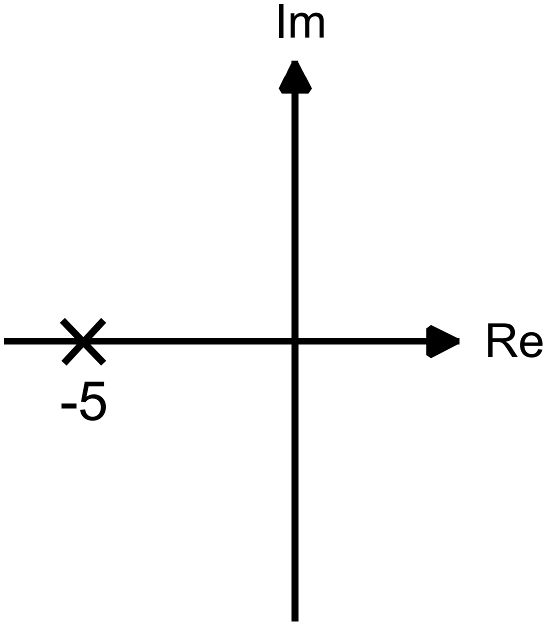
- Bei Re(s) < 0 ist das System stabil, bei Re(s) > 0 wird das System instabil.
- Je größer |Re(s)|, deso schneller ist das System.

ÜBUNG: Reelle Pole

Gegeben Sei ein System 1. Ordnung (PT1):

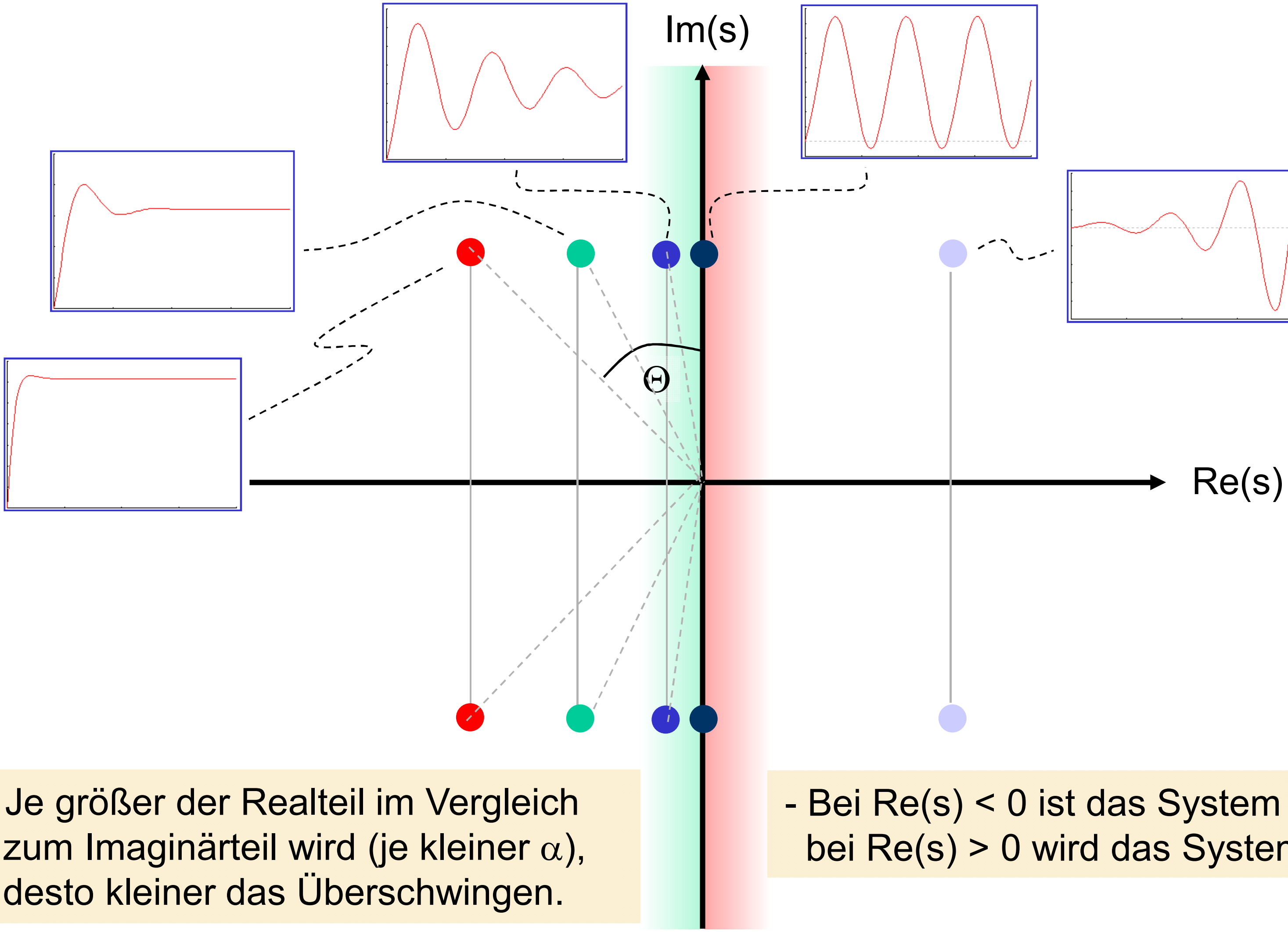
$$G(s) = K_p \frac{1}{(T_1 s + 1)}$$

Das Pol-Nullstellen-Diagramm sieht wie folgt aus:



Skizzieren Sie das Einschwingverhalten
unter Angabe von Kennwerten:

Wirkung komplexer Pole auf die Sprungantwort

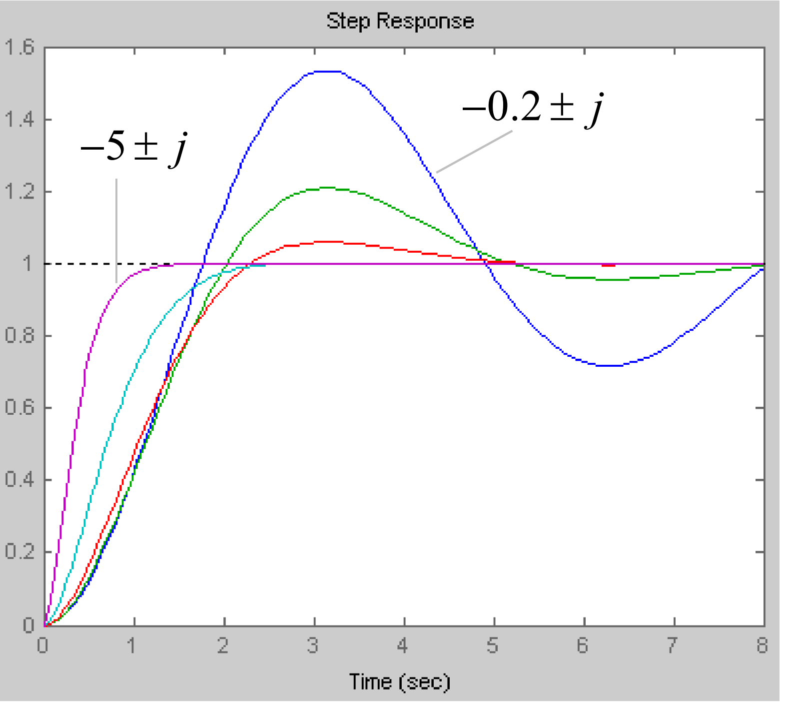


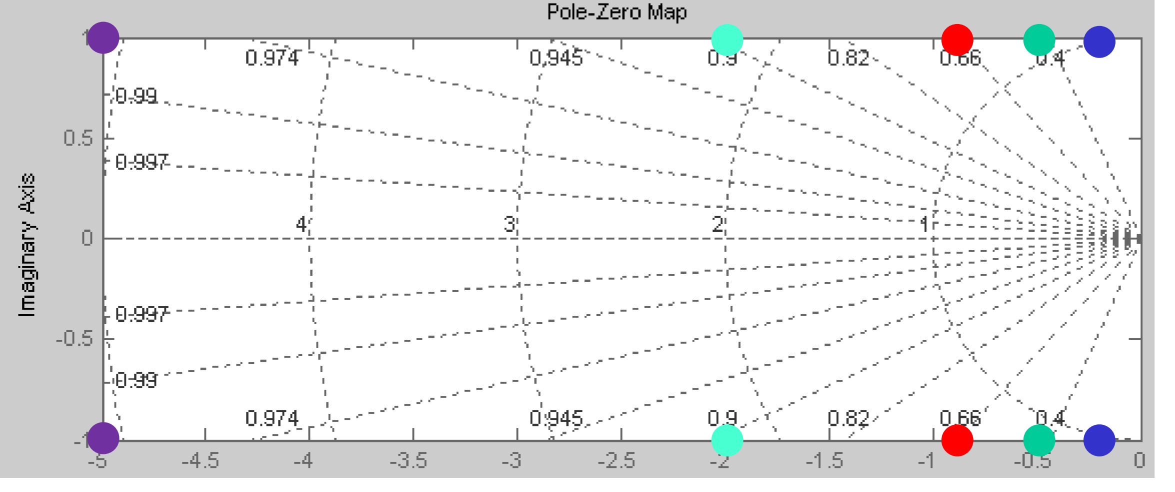
- Je größer der Realteil im Vergleich zum Imaginärteil wird (je kleiner α), desto kleiner das Überschwingen.

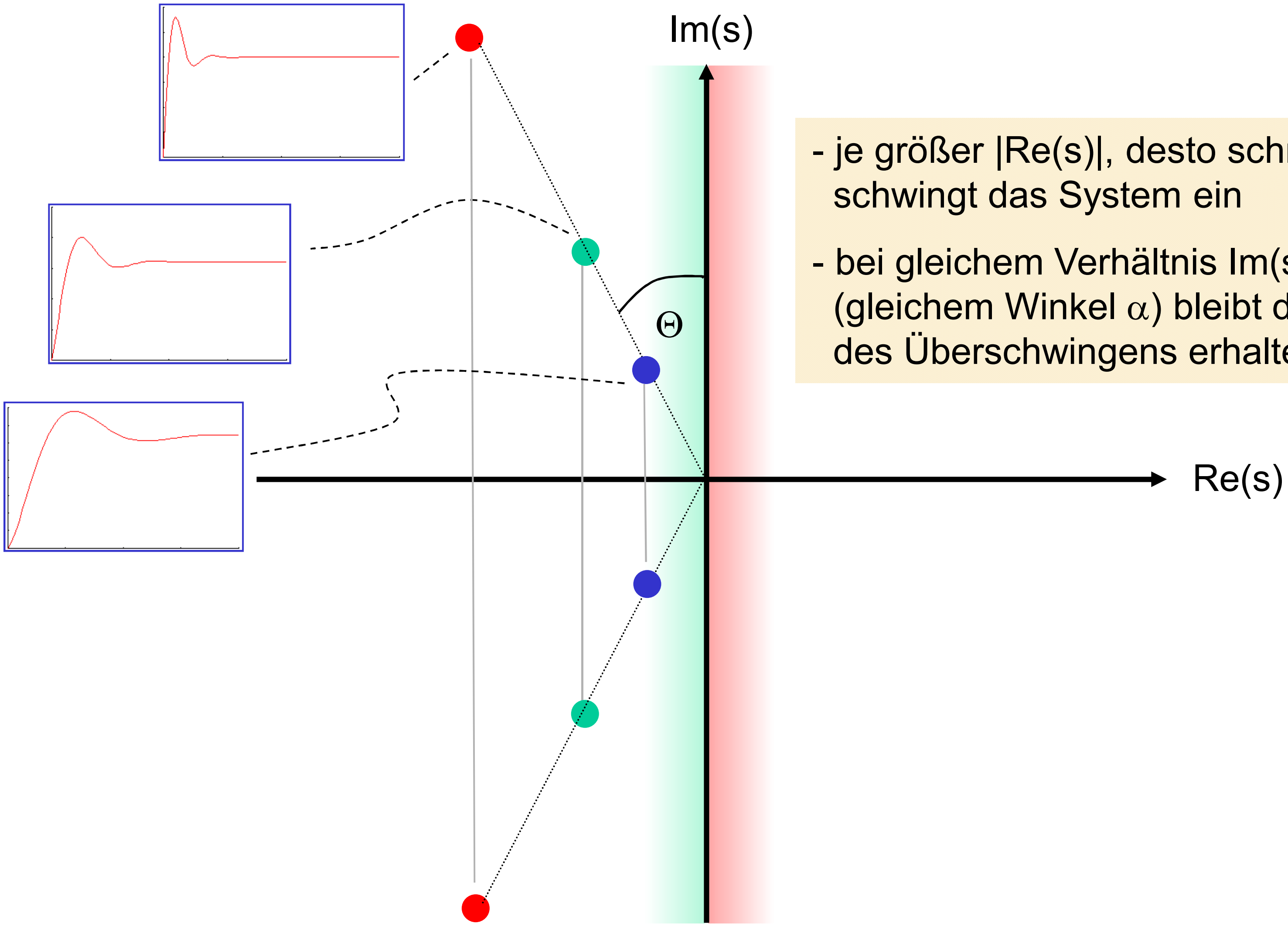
- Bei Re(s) < 0 ist das System stabil, bei Re(s) > 0 wird das System instabil.

```
figure(1)
hold on;
for k=[0.2, 0.5, 0.9, 2, 5]
    G=zpk([], [-k+j, -k-j],k*k+1);
    step(G, 8);
end
```

```
figure(3)
hold on;
for k=[0.2, 0.5, 0.9, 2, 5]
    G=zpk([], [-k+j, -k-j],k*k+1);
    pzmap(G); sgrid;
end
```

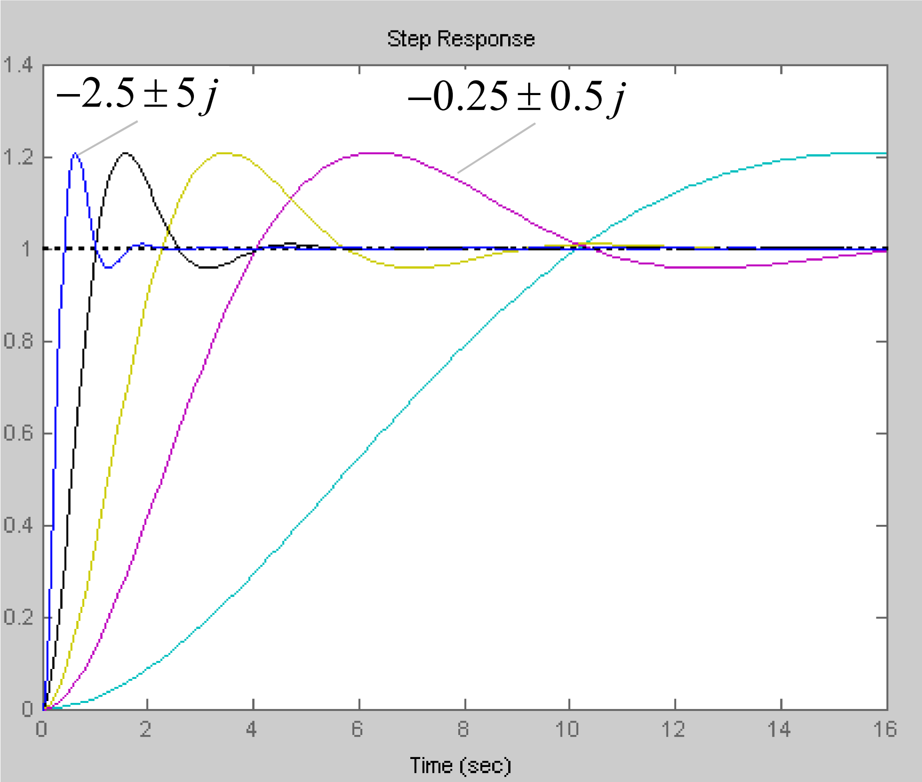


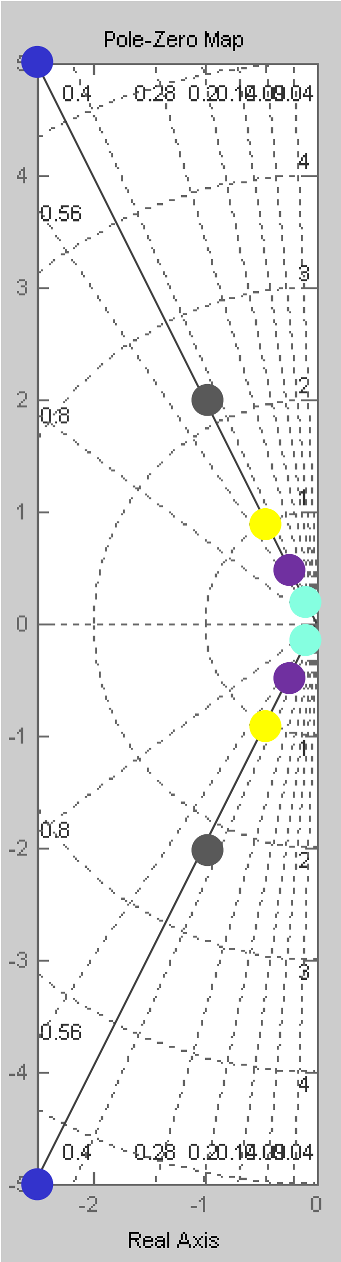




- je größer |Re(s)|, desto schneller schwingt das System ein
- bei gleichem Verhältnis Im(s)/Re(s) (gleichem Winkel α) bleibt die Form des Überschwingens erhalten

```
figure(2)
hold on;
for k=[0.2, 0.5, 0.9, 2, 5]
    G=zpk([], [k*(-0.5+j), k*(-0.5-j)],k*k*1.25);
    step(G, 16);
end
```



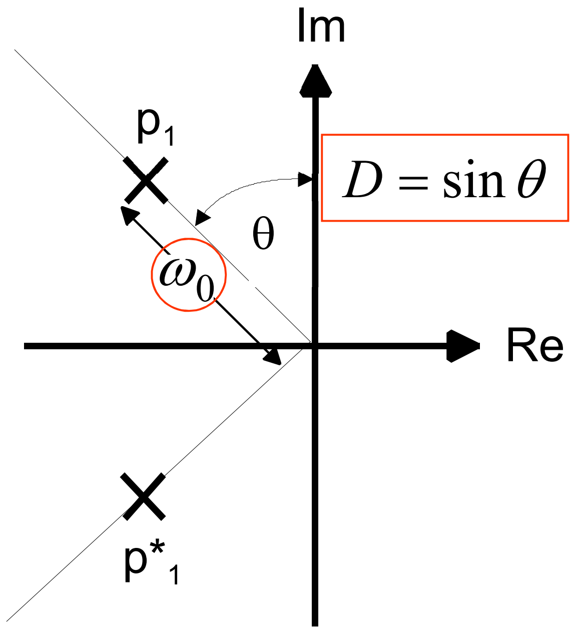


ÜBUNG: Pole eines Systems 2. Ordnung

Gegeben Sei ein System 2. Ordnung.

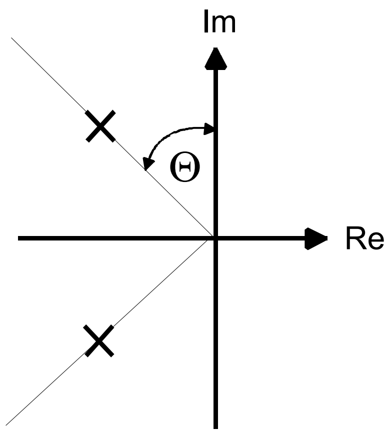
$$G(s) = \frac{\omega_0^2}{s^2 + 2D\omega_0 s + \omega_0^2}$$

Zeigen Sie, dass D und ω_0 wie folgt aus dem Pol-Nullstellendiagramm entnommen werden können:



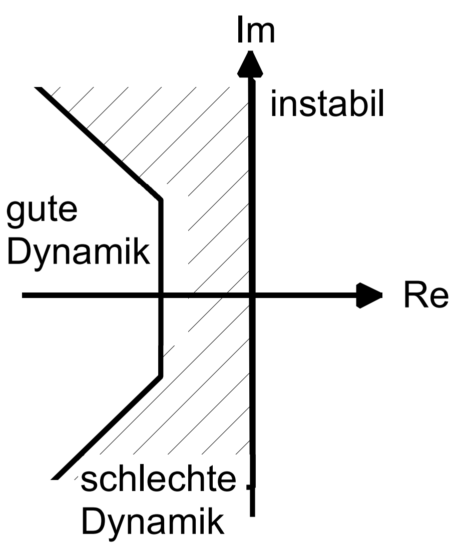
Relative Stabilität

Zusammengefasst zeigt sich folgender Zusammenhang bezüglich Polverteilung und Systemdynamik:



Je kleiner der Winkel θ, desto größer wird das Überschwingen des Systems.

Eine brauchbare Überschwingdämpfung erhält man etwa bei θ>=45°.



Eine geringe Einstellzeit erhält man erst ab einem gewissen Abstand von der Im-Achse.

Fasst man die Forderung nach geringer Einstellzeit und geringem Überschwingen zusammen, so ergibt sich nebenstehendes Bild.

Dominante Pole oder Polpaare

Angenommen ein System hat mehrere Pole bzw. Polpaare.

Unter bestimmten Bedingungen kann ein Pol oder Polpaar so dominant sein, dass es das Systemverhalten praktisch alleine bestimmt (d.h. langsam macht).

→ *dominanter Pol* bzw. *dominantes Polpaar*

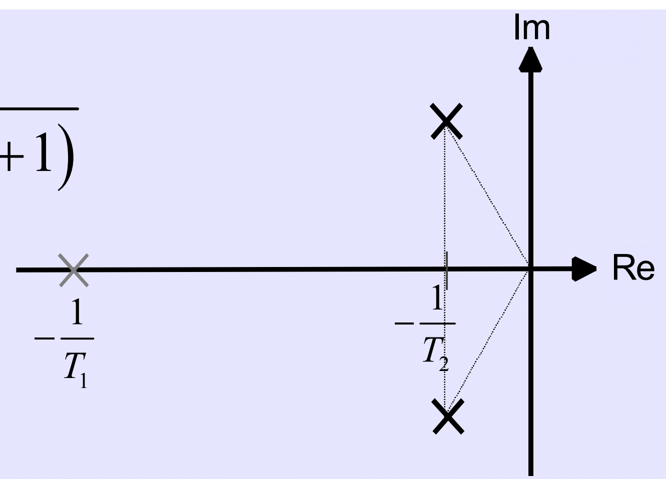
Unter folgenden Voraussetzungen haben Pole praktisch keinen Einfluss auf das Zeitverhalten eines Systems (d.h. können vernachlässigt werden):

- sie liegen <u>weit links von den dominanten Polen</u>.
- sie werden durch in der Nähe liegende Nullstellen „*kompensiert*“ (weggekürzt).

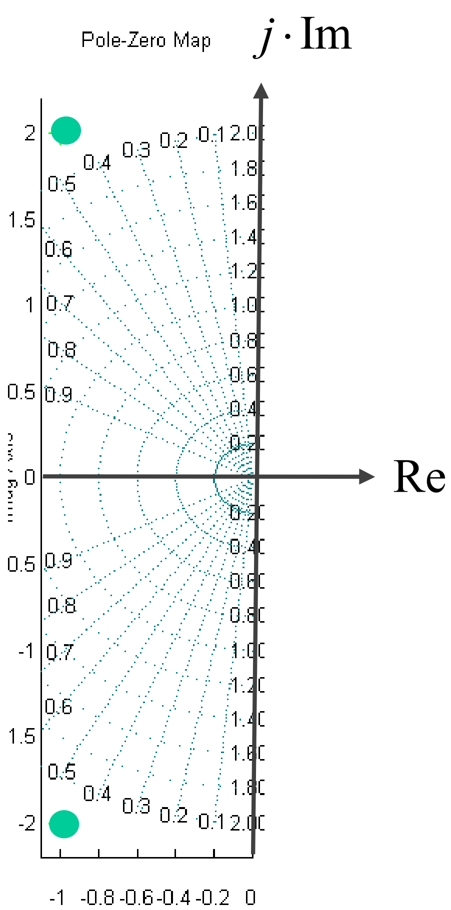
Beispiel : $G(s) = \dfrac{1}{\left(s^2 + 2D\omega_0 s + \omega_0^2\right)\cdot\left(T_1 s + 1\right)}$

Der Pol bei $-\dfrac{1}{T_1}$ kann vernachlässigt werden,

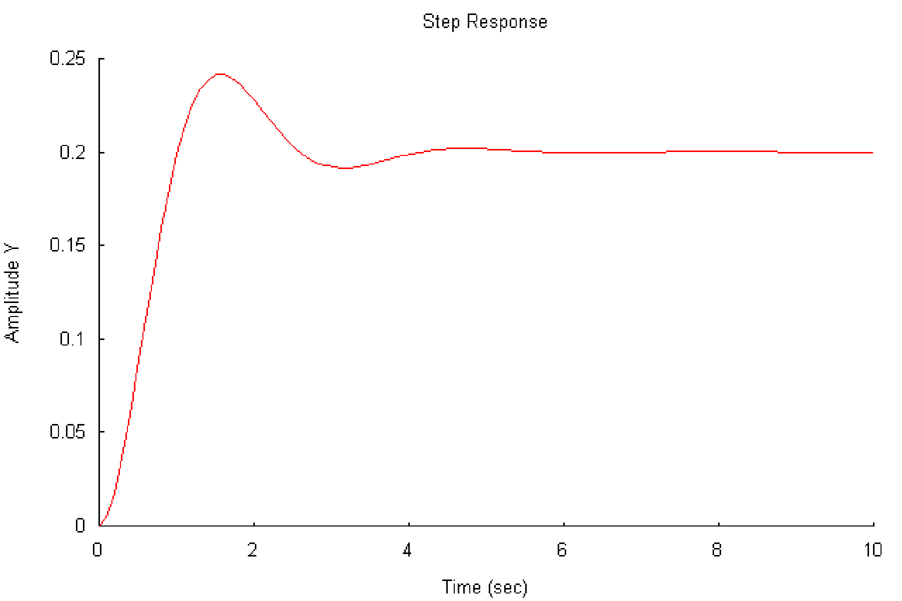
wenn gilt: $T_2 \geq 10\,T_1$



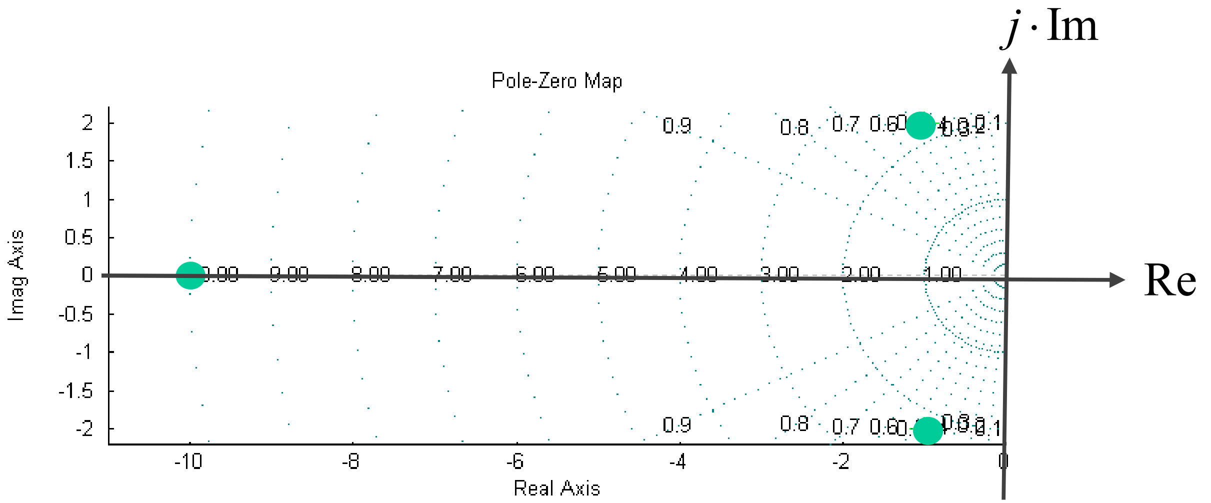
Beispiel: Dominante Pole (a)



Pole bei $-1 \pm 2j$

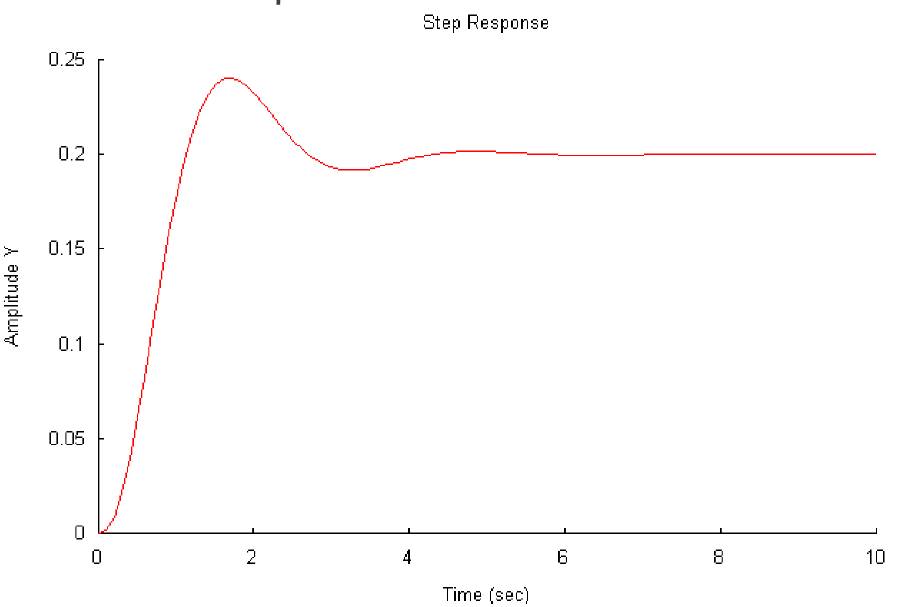


Beispiel: Dominante Pole (b)



Pole bei $-1 \pm 2j$ und -10

dominant



7.2.6.3 Algebraische Stabilitätskriterien

Notwendiges Kriterium

Wie bereits gezeigt, ist ein System dann stabil, wenn die Nullstellen des Nennerpolynoms der Übertragungsfunktion alle links der Imaginärachse liegen.

Algebraische Kriterien erlauben eine schnelle Überprüfung dieser Bedingung, ohne dass die Nullstellen des Polynoms berechnet werden müssen.

Gegeben sei ein Polynom: $\boxed{N(s) = a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \dots\ a_{n-1} s + a_n}$ mit $a_0 > 0$

Dann gilt: *Sind ein oder mehrere Koeffizienten Null oder negativ, so ist mindestens einer der Nullstellen auf oder rechts der Imaginärachse, d.h. das System ist instabil.*

Daraus folgt: **Ein System kann (muss aber nicht) nur dann stabil sein, wenn alle Koeffizienten des Nennerpolynoms ungleich 0 und positiv sind.**

Achtung: Dieses Kriterium ist nur notwendig und nicht hinreichend.
Sind alle Koeffizienten ungleich Null und positiv so heißt das noch nicht, dass das System stabil ist !

BEISPIELE:

$$G_S(s) = \frac{23}{s^3 + 5s^2 - 7s + 9}$$

➔ System instabil, da a_2 negativ ist !

$$G_S(s) = \frac{23}{s^3 + 5s + 9}$$

➔ System instabil, da a_1 Null ist !

$$G_S(s) = \frac{5}{s^3 + 9s^2 + 5s + 9}$$

➔ System könnte stabil aber auch instabil sein.

Kriterium von Hurwitz (hinreichende Bedingung)

Das Hurwitz-Kriterium geht über das notwendige Kriterium hinaus. Es erlaubt eine Stabilitätsaussage auch dann, wenn alle Koeffizienten ungleich Null und positiv sind.

$$H = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & a_7 & \ldots\ldots \\ a_0 & a_2 & a_4 & a_6 & \ldots\ldots \\ 0 & a_1 & a_3 & a_5 & \ldots\ldots \\ 0 & a_0 & a_2 & a_4 & \ldots\ldots \\ 0 & 0 & a_1 & a_3 & \ldots\ldots \\ 0 & 0 & a_0 & a_2 & \ldots\ldots \\ .. & .. & .. & .. & \ldots\ldots \end{vmatrix}$$

Gegeben sei ein Polynom:

$$N(s) = a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \ldots\; a_{n-1} s + a_n \qquad \text{mit } a_0 > 0$$

Das notwendige Kriterium sei erfüllt.

Sind alle „nordwestlichen“ Unterdeterminanten positiv, dann liegen alle Nullstellen des Polynoms auf der linken Seite der Imaginärachse.

Auszuwerten sind alle Unterdeterminanten bis H_{n-1}

Unterdeterminanten bis H_3

$$H_1 = |a_1| \qquad H_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix} \qquad H_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 \\ a_0 & a_2 & a_4 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix}$$

BEISPIELE:

$$G_S(s) = \frac{5}{s^3 + 9s^2 + 5s + 9}$$

Hurwitz-Det. ➔ $H = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 \\ a_0 & a_2 & a_4 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 9 & 9 & 0 \\ 1 & 5 & 0 \\ 0 & 9 & 9 \end{vmatrix}$

$$H_1 = 9 \qquad > 0$$

$$H_2 = \begin{vmatrix} 9 & 9 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 45 - 9 = 36 \qquad > 0$$

➔ System stabil

BEISPIELE:

$$G_S(s) = \frac{5}{s^3 + 2s^2 + 5s + 15}$$

Hurwitz-Det. ➔ $H = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 \\ a_0 & a_2 & a_4 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 15 & 0 \\ 1 & 5 & 0 \\ 0 & 2 & 15 \end{vmatrix}$

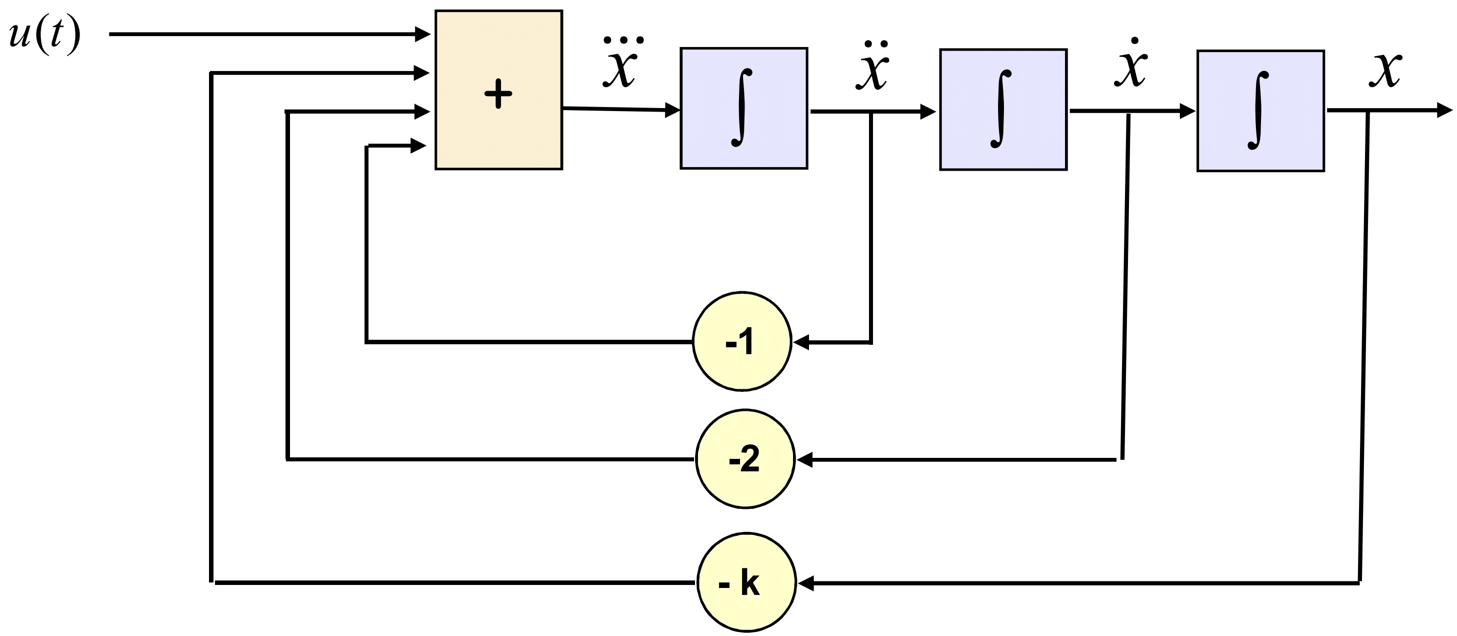
$$H_1 = 2 \qquad > 0$$

$$H_2 = \begin{vmatrix} 2 & 15 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 10 - 15 = -5 \qquad < 0$$

➔ System instabil

ÜBUNG: Stabilitätsaussage

Wie muss k eingestellt werden, damit das System stabil ist ?



Ergebnisse zur Übung