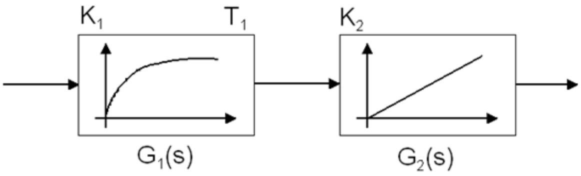
ÜBUNG: Sprungantwort → Übertragungsfunktion

Für folgende Systeme ist die Übertragungsfunktion zu bestimmen:

a)



s. Herleitung

PT1	$T_1 \cdot \dot{x}_a + x_a = K_p \cdot x_e$	$K_p \frac{1}{(T_1 s + 1)}$

$$G_1(s) = \frac{K_1}{s T_1 + 1}$$

I	$x_a = K_I \cdot \int x_e dt$ oder $\dot{x}_a = K_I \cdot x_e$	$K_I \frac{1}{s}$

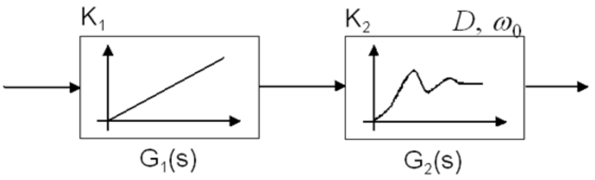
$$G_2(s) = K_2 \cdot \frac{1}{s}$$

⟹ Übertragungsfunktion der Reihenschaltung:

$$G(s) = G_1(s) \cdot G_2(s) = \frac{K_1 \cdot K_2}{s \cdot (T_1 s + 1)}$$

$$G(s) = \frac{K_1 \cdot K_2}{T_1} \cdot \frac{1}{s\,(s + \frac{1}{T_1})}$$

b)



$$G_1(s) = K_1 \cdot \frac{1}{s}$$

PT2	$\ddot{x}_a + 2D\omega_0 \cdot \dot{x}_a + \omega_0^2 x_a = K_p \omega_0^2 \cdot x_e$	$K_p \dfrac{\omega_0^2}{s^2 + 2D\omega_0 s + \omega_0^2}$

$$G_2(s) = K_2 \frac{\omega_0^2}{s^2 + 2D\omega_0 \cdot s + \omega_0^2}$$

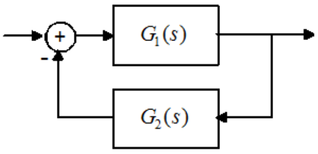
$\Rightarrow$ Gesamtübertragungsfunktion :

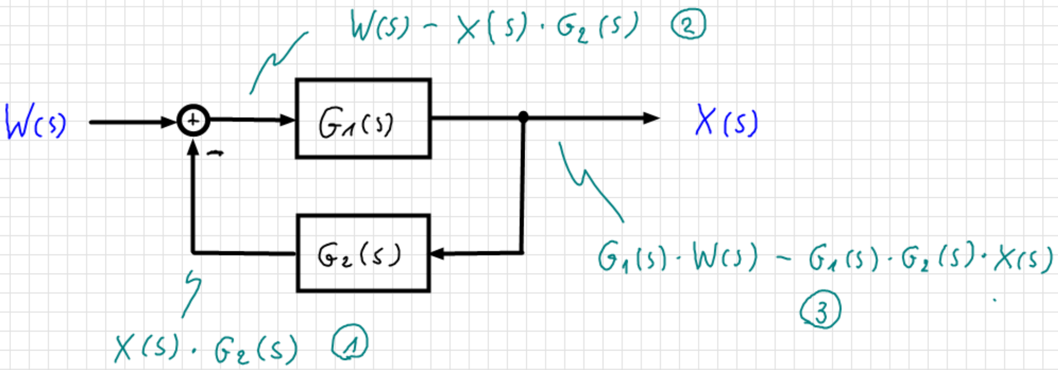
$$G(s) = G_1(s) \cdot G_2(s) = \underline{\underline{\frac{K_1 \cdot K_2 \cdot \omega_0^2}{s\left(s^2 + 2D\omega_0 \cdot s + \omega_0^2\right)}}}$$

ÜBUNG: Zusammenfassung von Blöcken

Geben Sie die Gesamt-Übertragungsfunktion an.

a)





$$\Rightarrow \quad X(s) = G_1(s) \cdot W(s) - G_1(s) \cdot G_2(s) \cdot X(s)$$

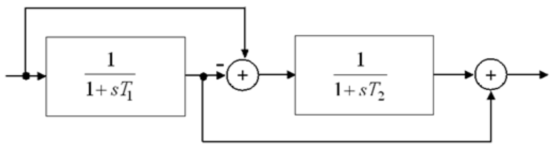
$$X(s) \cdot \left[1 + G_1(s) \cdot G_2(s) \right] = G_1(s) \cdot W(s)$$

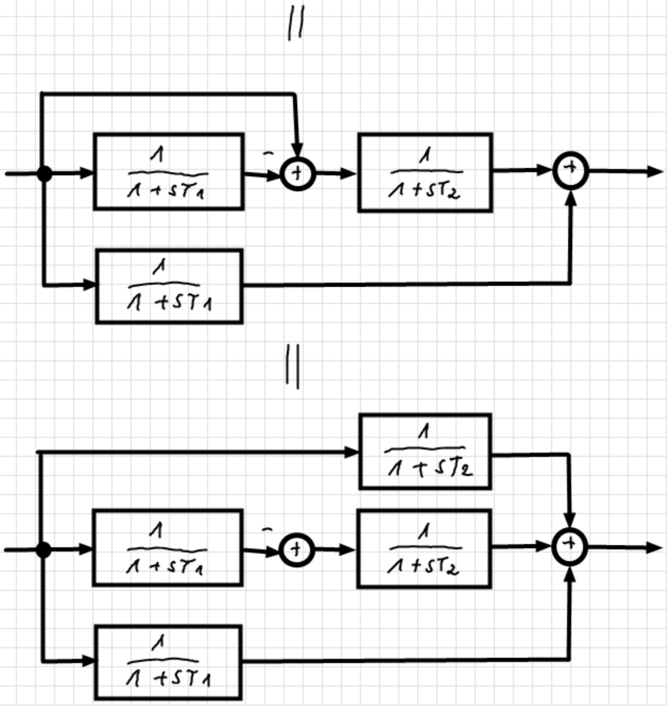
$$G(s) = \frac{X(s)}{W(s)} = \frac{G_1(s)}{1 + G_1(s) \cdot G_2(s)}$$

⟹ sehr wichtiges Ergebnis

= Übertragungsfunktion des geschlossenen Regelkreises !

b)





$$\Rightarrow \quad G(s) = \frac{1}{1+sT_1} + \frac{1}{1+sT_2} - \frac{1}{(1+sT_1)(1+sT_2)}$$

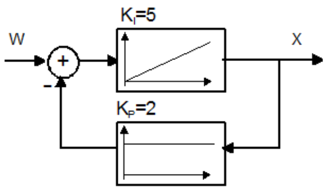
auf einen Nenner bringen

$$= \frac{(1+sT_2) + (\cancel{1}+sT_1) - \cancel{1}}{(1+sT_1)(1+sT_2)}$$

$$= \underline{\underline{\frac{1+s(T_1+T_2)}{(1+sT_1)(1+sT_2)}}}$$

<u>Anm.:</u> Pole bei $s_1 = -\frac{1}{T_1}$ und $s_2 = -\frac{1}{T_2}$

c)



$$G_1(s) = K_I \cdot \frac{1}{s}$$

$$G_2(s) = K_p$$

$$\Rightarrow \quad G(s) = \frac{G_1(s)}{1 + G_1(s) \cdot G_2(s)}$$

$$= \frac{K_I \cdot \frac{1}{s}}{1 + K_I \cdot K_p \cdot \frac{1}{s}} = \frac{K_I}{s + K_I \cdot K_p}$$

$$= \frac{5}{s + 10} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{0.1 s + 1} \quad \Rightarrow \text{PT1}$$

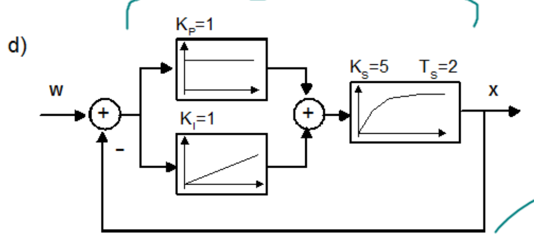
PT1	$T_1 \cdot \dot{x}_a + x_a = K_p \cdot x_e$	$K_p \frac{1}{(T_1 s + 1)}$

$K_p = \frac{1}{2}$, $T = 0.1$

Anm.: Pol bei $s = -10$

Sprungantwort: $x_a(t) = \frac{1}{2}\left(1 - e^{-\frac{t}{0.1}}\right)$

$G_1(s)$



$G_2(s) = 1$

$$G_1(s) = \left(1 + \frac{1}{s}\right) \cdot \frac{5}{2s + 1} \qquad \begin{matrix} \cdot s \\ \cdot s \end{matrix}$$

$$= 5 \cdot \frac{(s + 1)}{s\,(2s + 1)}$$

$$G(s) = \frac{G_1(s)}{1 + G_1(s) \cdot \underbrace{\cancel{G_2(s)}}_{1}}$$

$$= \frac{5 \cdot \frac{(s+1)}{s\,(2s+1)}}{1 + 5 \cdot \frac{(s+1)}{s\,(2s+1)}} \qquad \begin{matrix} \cdot s\,(2s+1) \\ \cdot s\,(2s+1) \end{matrix}$$

$$= \frac{5\,(s+1)}{s\,(2s+1) + 5s + 5}$$

$$= \frac{5\,(s+1)}{2s^2 + 6s + 5} \qquad \begin{matrix} \cdot \frac{1}{2} \\ \cdot \frac{1}{2} \end{matrix}$$

$$= \frac{2{,}5 \cdot (s+1)}{s^2 + 3s + 2.5}$$

$$s_{1,2} = -1.5 \pm \sqrt{1.5^2 - 2.5}$$

$$= -1.5 \pm \sqrt{-0.25}$$

$$= -1.5 \pm \frac{1}{2} j$$

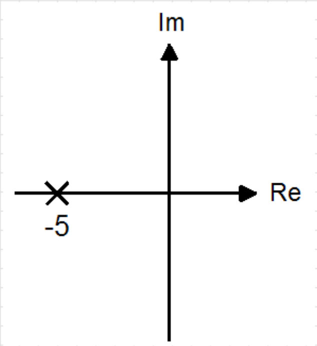
Pole des Systems ←

⇒ stabil

ÜBUNG: Reelle Pole

Gegeben Sei ein System 1. Ordnung (PT1):

$$G(s) = K_p \frac{1}{(T_1 s + 1)}$$

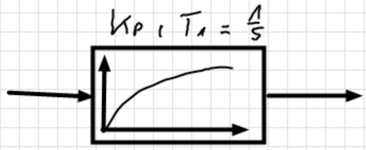


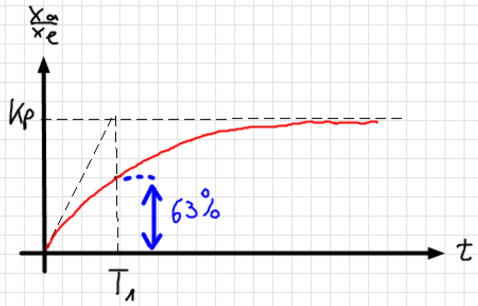
$\Rightarrow$ Pol bei $s = -5$

d.h. $T_1 \cdot (-5) + 1 = 0$

$\Rightarrow$ $\underline{\underline{T_1 = \frac{1}{5}}}$

$\Rightarrow$





$\Rightarrow$ je weiter links der Pol (von der Imaginärachse) liegt, desto kleiner die Zeitkonstante und desto schneller ist das System!

ÜBUNG: Pole eines Systems 2. Ordnung

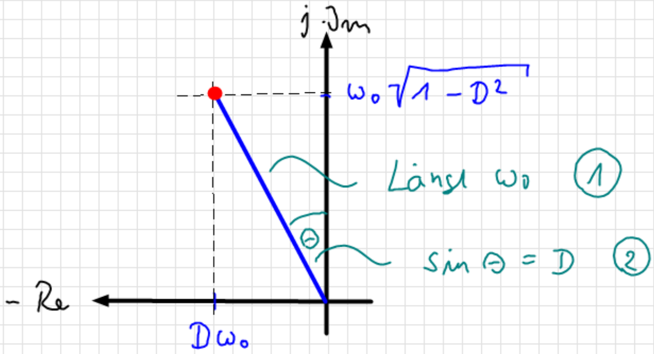
Gegeben Sei ein System 2. Ordnung.

$$G(s) = \frac{\omega_0^2}{s^2 + 2D\omega_0 s + \omega_0^2}$$

Wo liegen die Pole des Systems?

$$s_{1,2} = -D\omega_0 \pm \sqrt{D^2\omega_0^2 - \omega_0^2}$$
$$= -D\omega_0 \pm \omega_0\sqrt{D^2 - 1}$$
$$= -D\omega_0 \pm \omega_0\sqrt{(-1)(1-D^2)}$$
$$= -D\omega_0 \pm j\,\omega_0\sqrt{1-D^2}$$

Anm.: Für Systeme mit abklingender Sprungantwort gilt $D \in (0,1)$



$\Rightarrow$ je größer der Winkel, desto größer D!

(1) Die Hypothenuse hat die Länge:

$$\sqrt{(D\omega_0)^2 + \omega_0^2(1-D^2)} = \sqrt{(D\cancel{\omega_0})^2 + \omega_0^2 - (D\cancel{\omega_0})^2}$$
$$= \underline{\underline{\omega_0}}$$

(2) Für Θ gilt: $\underline{\underline{\sin\Theta}} = \frac{D\omega_0}{\omega_0} = \underline{\underline{D}}$

Anmerkungen zum notwendigen Kriterium

Das Nennerpolynom stabiler Systeme sieht immer so aus:

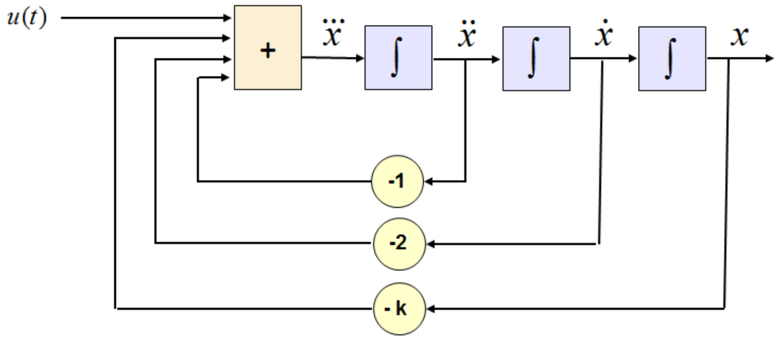
$$N(s) = (s+s_1)\cdot(s+s_2)\cdot(s+s_3)\cdot\ldots\cdot(s+s_n) \qquad \text{mit } s_i > 0$$

d.h. die Nullstellen sind bei $-s_1, -s_2, -s_3, \ldots, -s_n$

Multipliziert man $N(s)$ aus, so sind alle Koeffizienten $a_0, a_1, \ldots$ positiv und $\neq 0$!

ÜBUNG: Stabilitätsaussage

Wie muss k eingestellt werden, damit das System stabil ist ?



Aufstellen der DGL :

$$\dddot{x} = -\ddot{x} - 2\dot{x} - kx + u(t)$$

$$\dddot{x} + \ddot{x} + 2\dot{x} + kx = u(t)$$

$$s^3 X(s) + s^2 X(s) + 2s X(s) + k X(s) = U(s)$$

$$X(s) \cdot [s^3 + s^2 + 2s + k] = U(s)$$

Übertragungsfunktion :

$$G(s) = \frac{X(s)}{U(s)} = \frac{1}{s^3 + s^2 + 2s + k}$$

$\Rightarrow$ notw. Kriterium erfüllt, wenn $k > 0$!

Hurwitz-Determinante:

$$G(s) = \frac{X(s)}{U(s)} = \frac{1}{\underset{a_0}{s^3} + \underset{a_1}{s^2} + \underset{a_2}{2s} + \underset{a_3}{k}}$$

$$H = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 \\ a_0 & a_2 & a_4 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & k & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & k \end{vmatrix}$$

$$H_1 = 1 > 0 \qquad \text{o.k.}$$

$$H_2 = \begin{vmatrix} 1 & k \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 - k > 0$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{K < 2}}$$

Das System ist stabil für:

$$\underline{\underline{K \in (0,2)}}$$