Wiederholung für

Modellierung dynamischer Systeme

Vektoren

Prof. Dr.-Ing. Andreas Meisel

1. Begriffseinführung

Vektor : Zusammenfassung von Zahlen

- in einer Zeile (*Zeilenvektor*) oder
- in einer Spalte (*Spaltenvektor*).

$$\vec{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Transponierte eines Vektors : - aus Zeilenvektor wird Spaltenvektor
- aus Spaltenvektor wird Zeilenvektor

$$\vec{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \Leftrightarrow \vec{y}^T = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \ldots \\ y_n \end{pmatrix}$$

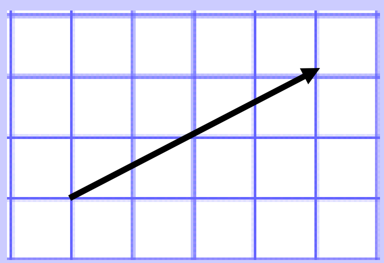
$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix} \Leftrightarrow \vec{x}^T = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

<u>Deutung als *freier Vektor / Verschiebungsvektor* :</u>

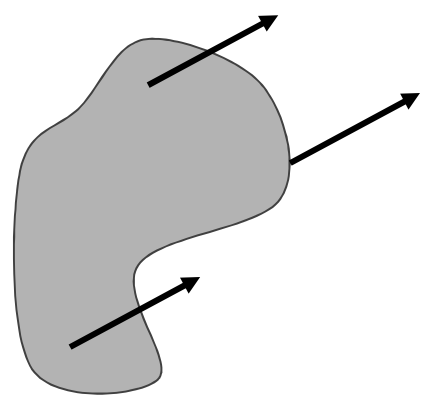
- Richtung und Länge einer <u>Verschiebung</u>
- Die Komponenten geben an, aus welchen Basisverschiebungen sich die Bewegung zusammensetzt.

Beispiel: 2-dimens. <u>freier</u> Vektor
→ Verschiebungsvektor

$$\vec{v} = (4,\ 2)$$



Es spielt keine Rolle, wo der Vektor angetragen wird. Die Verschiebung ist immer dieselbe.

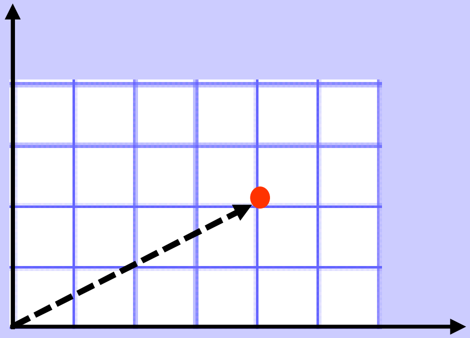


Deutung als *Ortsvektor* :

- Lage eines Punktes in einem Koordinatensystem
- Die Koordinaten geben an, wie weit der Punkt vom Ursprung aus in Richtung der Koordinatenachsen verschoben ist.

Beispiel: 2-dimensionaler Punkt
→ Ortsvektor

$$\vec{v} = (4,\ 2)$$

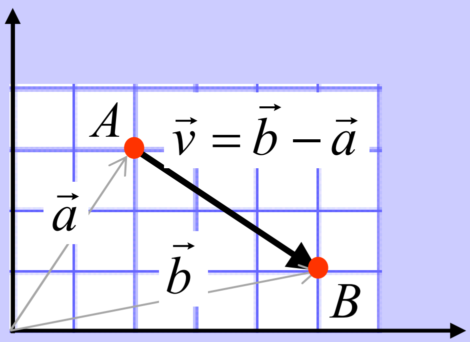


<u>Deutung als *Verbindungsvektor* </u>:

- <u>Verbindet</u> zwei Punkte
- Die Koordinaten geben an, wie weit der Zielpunkt B vom Startpunkt A aus in Richtung der Koordinatenachsen verschoben ist.

Beispiel: 2-dimensionaler Verbindungsvektor

$\vec{v} = (3, -2)$



Es gibt kein Unterschied zwischen der Schreibweise von Verschiebungs- , Orts- und Verbindungsvektoren.

Wie ein Vektor zu deuten ist und wie mit ihm umzugehen ist <u>wird durch den Kontext festgelegt</u>.

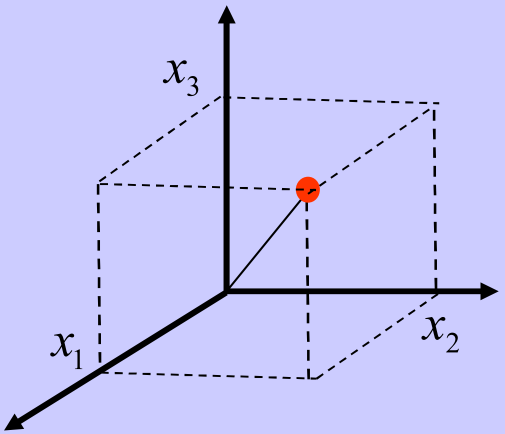
2. Punkte in euklidischen Koordinaten

Jeder n-dimensionale Punkt $\vec{p} \in \mathbb{R}^n$ wird durch n Koordinaten beschrieben.

Im Rahmen der Vorlesung werden Punkte (Ortsvektoren) durch Spaltenvektoren beschrieben.

Beispiel: Ein Punkt im 3-dimensionalen euklidischen Raum wird beschrieben durch einen Spaltenvektor mit 3 Koordinaten.

$$\vec{p} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}$$



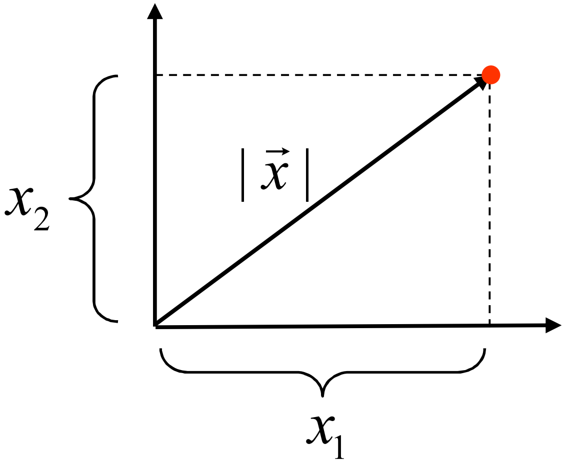
3. Vektorbetrag und Einsvektor

3.1 Vektorbetrag = Länge

Math. Beschreibung des *Vektorbetrages*

= - Länge des Vektors
- Abstand eines Punktes vom Ursprung

$$\boxed{|\vec{x}| = x = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}}$$



Beispiel: $\vec{x} = (2,\ 4,\ 4)^T$

$$|\vec{x}| = x = \sqrt{2^2 + 4^2 + 4^2} = \sqrt{4+16+16} = \sqrt{36} = 6$$

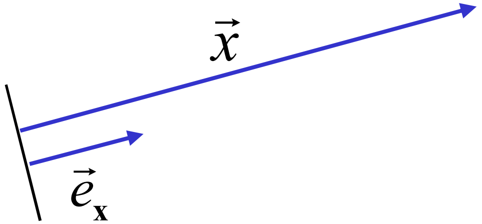
3.2 Einheitsvektor

Teilt man einen Vektor $\vec{x}$ durch seinen Betrag $|\vec{x}|$, so erhält man den *Einheitsvektor* $\vec{e}_{\mathbf{x}}$:

$$\boxed{\vec{e}_{\mathbf{x}} = \frac{\vec{x}}{|\vec{x}|}}$$

$$\boxed{|\vec{e}_{\mathbf{x}}| = 1}$$

Der Einsvektor $\vec{e}_{\mathbf{x}}$ hat die <u>gleiche Richtung</u> wie der Vektor $\vec{x}$ und die Länge 1 .



$$\boxed{\vec{x} = |\vec{x}| \cdot \vec{e}_{\mathbf{x}}}$$

<u>Beispiel:</u> $\vec{x} = (2,\ 4,\ 4)^T$ $\qquad |\vec{x}| = 6$

$$\vec{e}_x = \left(\tfrac{2}{6},\ \tfrac{4}{6},\ \tfrac{4}{6}\right)^T = \left(\tfrac{1}{3},\ \tfrac{2}{3},\ \tfrac{2}{3}\right)^T$$

4. Vektoroperationen

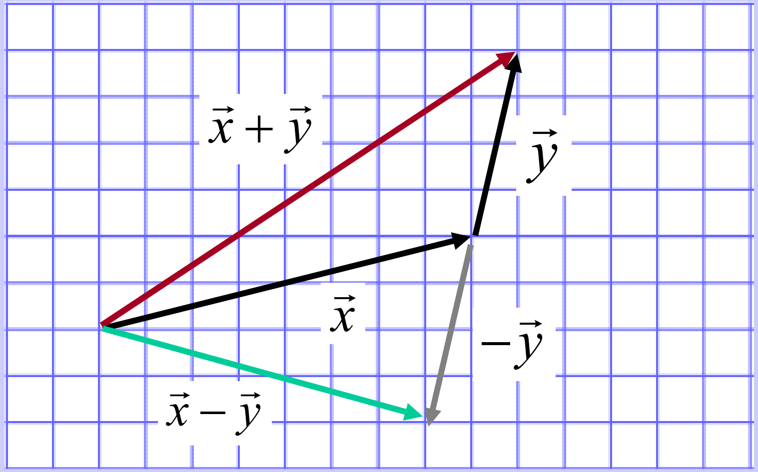
4.1 Addition und Subtraktion

Gegeben seien zwei Vektoren $\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots x_n)^T$ und $\vec{y} = (y_1, y_2, \ldots. y_n)^T$

Dann gilt für die Summe
$$\vec{x} + \vec{y} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ \cdots\cdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}$$

Beispiel:

$$\vec{x} = (8,\ 2)^T$$
$$\vec{y} = (1,\ 4)^T$$
$$\vec{x} + \vec{y} = (9,\ 6)^T$$
$$\vec{x} - \vec{y} = (7,\ -2)^T$$



Anwendung : Abstand zweier Punkte

Mit $\vec{x}-\vec{y} = \left(x_1-y_1,\ x_2-y_2,\ \ldots.\ x_n-y_n\right)^T$

ist der Betrag $|\vec{x}-\vec{y}| = \sqrt{(x_1-y_1)^2 + (x_2-y_2)^2 + \ldots\ldots(x_n-y_n)^2}$

Aus der Anschauung folgt:

Der Abstand zweier Punkte ist gleich dem Betrag des Differenzvektors $\boxed{|\vec{x}-\vec{y}|}$.

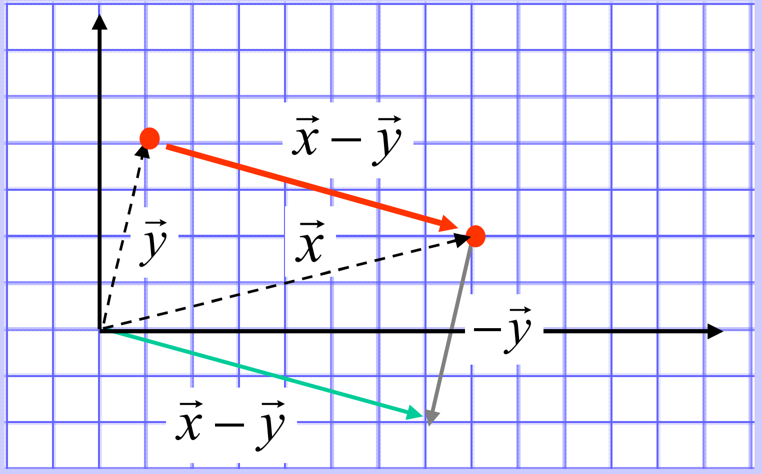
Beispiel:

$$\vec{x}=(8,\ 2)^T$$

$$\vec{y}=(1,\ 4)^T$$

$$\vec{x}-\vec{y}=(7,\ -2)^T$$

$$|\vec{x}-\vec{y}|=\sqrt{7^2+(-2)^2}=7.28$$



Anwendung : Einsvektor in Richtung der Verbindungslinie zweier Punkte

Mit $\vec{x} - \vec{y} = (x_1 - y_1,\ x_2 - y_2,\ \ldots.\ x_n - y_n)^T$ Vektor von Punkt $\vec{y}$ nach Punkt $\vec{x}$

$$\vec{e}_{xy} = \frac{\vec{x} - \vec{y}}{|\vec{x} - \vec{y}|}$$

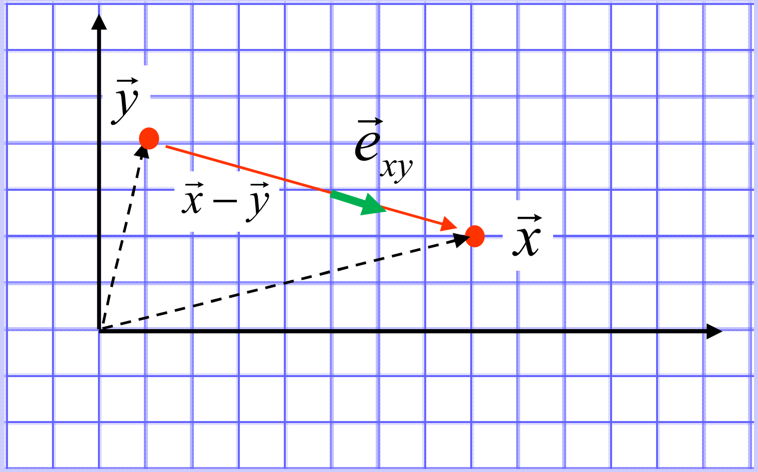
ist somit ein Einsvektor in Richtung der Verbindungslinie der beiden Punkte.

Beispiel: $\vec{x} = (8,\ 2)^T \qquad \vec{y} = (1,\ 4)^T$

$$\vec{x} - \vec{y} = (7,\ -2)^T$$

$$|\vec{x} - \vec{y}| = \sqrt{7^2 + (-2)^2} = 7.28$$

$$\vec{e}_{xy} = \frac{\vec{x} - \vec{y}}{|\vec{x} - \vec{y}|} = (0.96,\ -0.27)^T$$



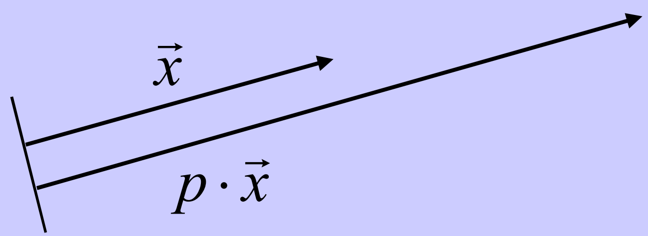
4.2 Multiplikation eines Vektors mit einem Skalar

p sei ein Skalar (z.B. eine reelle Zahl).

Das Produkt $p \cdot \vec{x}$
ist ein Vektor der Länge $p \cdot |\vec{x}|$
und der gleichen Richtung wie $\vec{x}$:

$$\boxed{p \cdot \vec{x} = p \cdot |\vec{x}| \cdot \vec{e}_{\mathbf{x}}}$$

Beispiel: $p = 2$



4.3 Skalarprodukt zweier Vektoren (inneres Produkt)

Gegeben seien zwei Vektoren $\vec{x} = \left(x_1, x_2, \ldots x_n\right)^T$ und $\vec{y} = \left(y_1, y_2, \ldots . y_n\right)^T$

Das Skalarprodukt ist definiert als $\boxed{\vec{x}^T \cdot \vec{y} = x_1 \cdot y_1 \;+\; x_2 \cdot y_2 \;+\; \ldots\ldots x_n \cdot y_n}$

Das Ergebnis des Skalarproduktes ist ein **Skalar** !

Beispiel: $\vec{x} = (8,\ 2)^T$ $\qquad \vec{y} = (1,\ 4)^T$

$$\underline{\underline{\vec{x}^T \cdot \vec{y}}} = (8,\ 2) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} = 8 \cdot 1 + 2 \cdot 4 = \underline{\underline{16}}$$

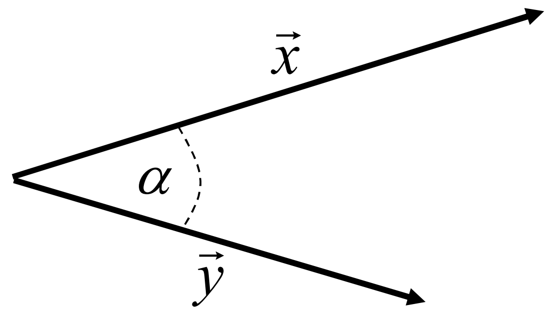
Beispiel: Beschreibung des Vektorbetrages mit Hilfe des Skalarproduktes

$$|\,\vec{x}\,| = \sqrt{\vec{x}^T \vec{x}} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots . x_n^2}$$

Das Skalarprodukt zweier Vektoren entspricht dem Produkt der Vektorlängen multipliziert mit dem Kosinus des eingeschlossenen Winkels α.

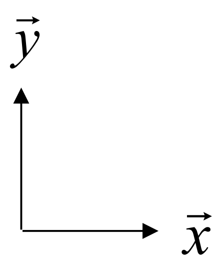
Anm.: Beweis über Kosinussatz

$$\boxed{\vec{x}^T \cdot \vec{y} = |\vec{x}| \cdot |\vec{y}| \cdot \cos(\alpha)}$$



<u>Sonderfall:</u> Vektoren sind *senkrecht* zueinander

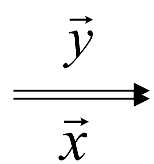
$$\cos(90°) = 0$$



$$\vec{x}^T \cdot \vec{y} = 0$$

<u>Sonderfall:</u> Vektoren sind *parallel* zueinander

$$\cos(0°) = 1$$

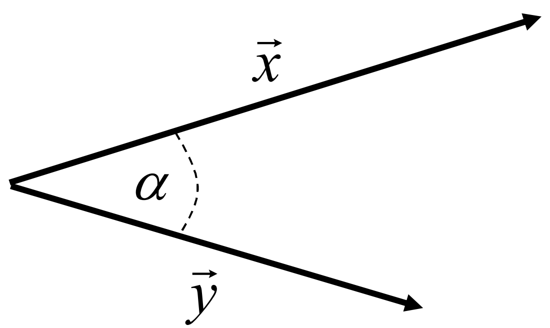


$$\vec{x}^T \cdot \vec{y} = |\vec{x}| \cdot |\vec{y}|$$

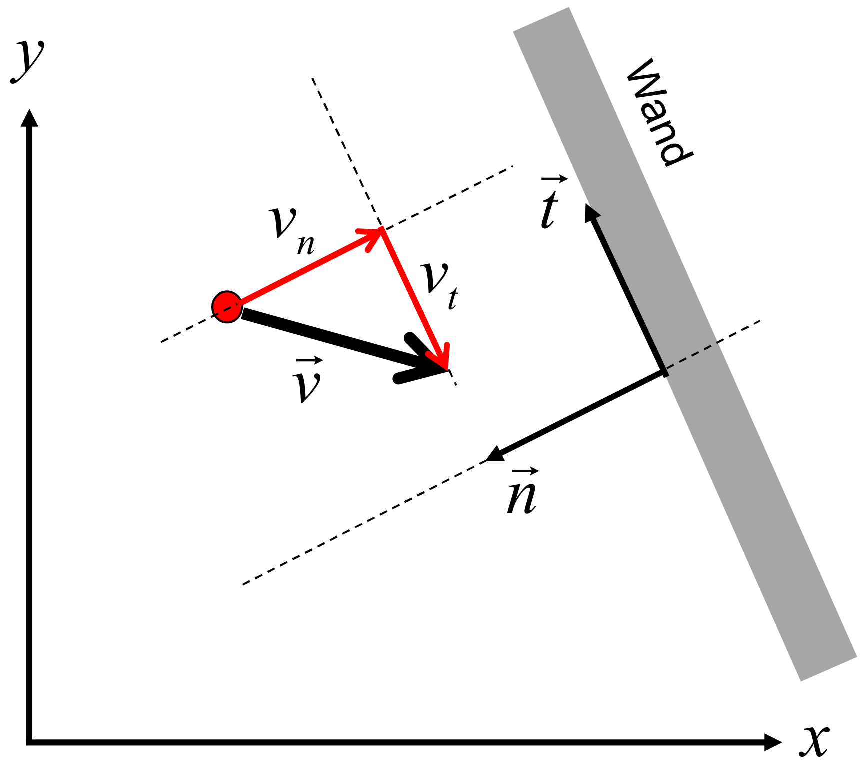
Anwendung : Winkel zwischen zwei Vektoren

Mit $\vec{x}^T \cdot \vec{y} = |\vec{x}| \cdot |\vec{y}| \cdot \cos(\alpha)$

gilt für den Winkel $\boxed{\alpha = \arccos\left(\frac{\vec{x}^T \cdot \vec{y}}{|\vec{x}| \cdot |\vec{y}|} \right)}$



Fragestellung: Zerlegen von Bewegungen



Ein Massepunkt bewegt sich auf eine Wand zu : $\vec{v}$

Wie groß sind die Geschwindigkeits-komponenten des Massepunktes senktecht (Normalenrichtung) v_n und parallel (Tangentialrichtung) v_t zur Wand?

Gegeben:

$$\vec{v} = (v_x, v_y)^T$$

$$\vec{n} = (n_x, n_y)^T \qquad |\vec{n}| = 1$$

$$\vec{t} = (t_x, t_y)^T \qquad |\vec{t}| = 1$$

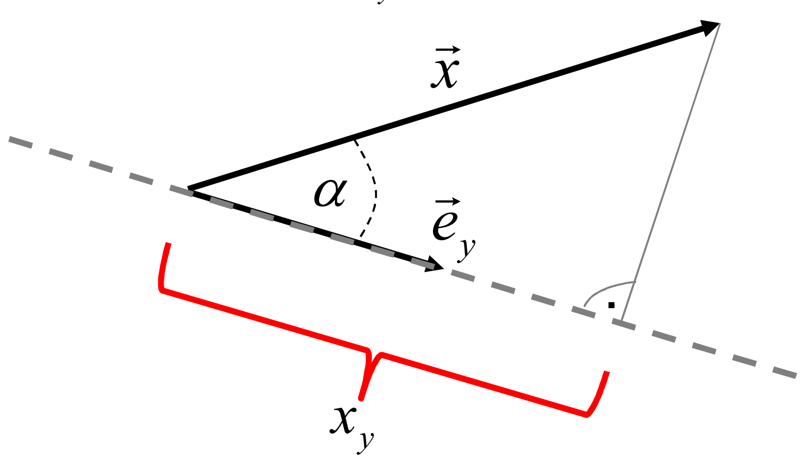
s. nächste Seite

Anwendung : Komponente eines Vektors in Richtung eines anderen Vektors

$\vec{e}_y$ sei ein Einheitsvektor in y-Richtung.

Dann gilt für das Skalarprodukt $\vec{x}^T \cdot \vec{e}_y \;=\; |\vec{x}| \cdot 1 \cdot \cos(\alpha) \;=\; x \cdot \cos(\alpha)$

Aus der Anschauung gilt für x_y:

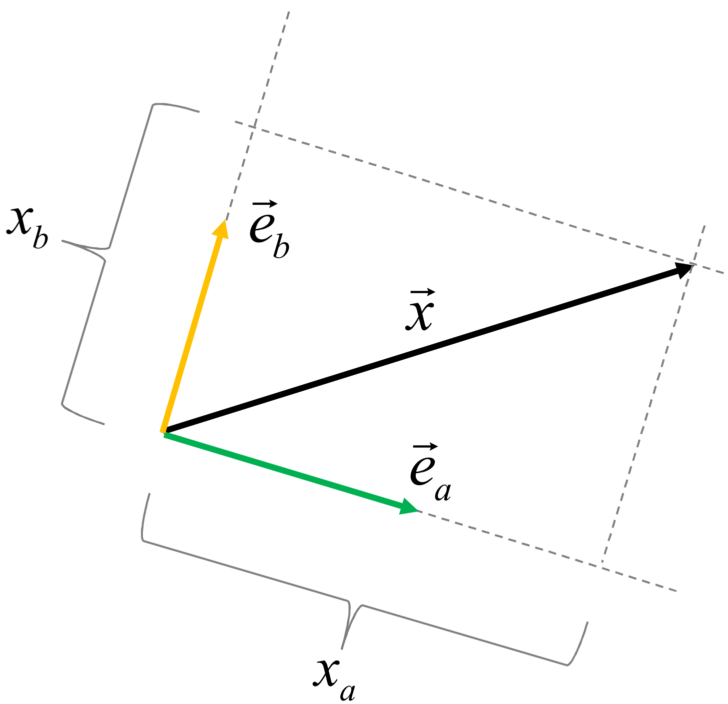


$$\cos(\alpha) = \frac{x_y}{x}$$

$$x_y = x \cdot \cos(\alpha)$$

$\boxed{\vec{x}^T \cdot \vec{e}_y \;=\; x_y}$ ist die Komponente des Vektors $\vec{x}$ in y-Richtung.

Anwendung : Zerlegung eines Vektors in die Koordinaten eines gedrehten Koordinatensystems (=Koordinatentransformation)



Gegeben sei ein Vektor: $\vec{x} = (x_1, x_2)^T$

Die Komponenten des Vektors in a- und b-Richtung sind :

$$x_a = \vec{x}^T \cdot \vec{e}_a$$

$$x_b = \vec{x}^T \cdot \vec{e}_b$$

Im gedrehten Koordinatensystem wird der Vektor beschrieben durch:

$$\vec{x}_{gedreht} = (x_a, x_b)^T$$

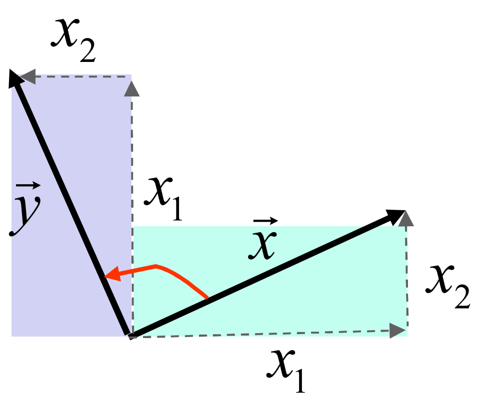
Anwendung : Konstruktion senkrechter Vektorpaare

Gegeben sei ein Vektor $\vec{x} = (x_1, x_2)^T$

Man erhält einen zu x senkrechten Vektor gleicher Länge mit: $\boxed{\vec{y} = (-x_2, x_1)^T}$

Anm.: im Gegenuhrzeigersinn

anschaulicher Beweis



Beweis über Skalarprodukt

$$
\begin{aligned}
\vec{x}^{\,T} \cdot \vec{y} &= (x_1, x_2) \cdot (-x_2, x_1)^T \\
&= -x_1 \cdot x_2 + x_1 \cdot x_2 = 0
\end{aligned}
$$

Beispiel: Koordinatentransformation

Ein Punkt $\vec{p}$ ist im (x,y)-Koordinatensystem gegeben: $\vec{p} = (1,1)^T$
Geben Sie den Punkt in den Koordinaten des 30° gedrehten Koordinatensystems (x_g, y_g) an.