Algebrske struktre

- **grupoid** $(M, \cdot)$ urejen par z neprazno množico M in zaprto opreacijo $\cdot$.
- **polgrupa** grupoid z asociativno operacijo $\forall x, y, z \in M : (x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$.
- **monoid** polgrupa z enoto $\exists e \in M \ \forall x \in M : e \cdot x = x \cdot e = x$.
- **grupa** polgrupa v kateri ima vsak element inverz $\forall x \in M \ \exists x^{-1} \in M : x \cdot x^{-1} = x^{-1} \cdot x = e$.
- **abelova grupa** grupa s komutativno operacijo $\forall x, y \in M : x \cdot y = y \cdot x$.

Kolobarji

Kolobar je množica R skupaj z dvema operacijama (oznaka: $+, \cdot$) tako, da velja:

- $(R, +)$ je abelova grupa
- $\forall a, b, c \in R \ : \ a(b + c) = ab + ac$ (distrubutivnost)
- $\forall a, b, c \in R \ : \ (a + b)c = ac + bc$ (distrubutivnost)
- $\forall a, b \in R \ : \ ab \in R$ (zaprtost množenja)
- $\forall a, b, c \in R \ : \ (ab)c = a(bc)$ (asociativnost*)
- $\exists e \in R \ \forall a \in R \ : \ e \cdot a = a = e \cdot a$ (enota*)

Kolobar je **komutativen**, če $\forall a, b \in R \ : \ ab = ba$. Kolobar je **kolobar z deljenjem**, če $\forall a \in R - \{0\} \ \exists a^{-1} \in R : \ aa^{-1} = 1$ element 1 je *enota kolobarja.*

Kolobar, ki ima vse naštete lastnosti je **obseg**.

Delitelji niča in celi kolobarji

Naj bo R komutativen koloboar. Tedaj je $a \in R, \ a \neq 0$ **delitelj niča**, če

$$\exists b \in R, \ b \neq 0 \ : \ ab = 0$$

Cel kolobar je komutativen kolobar z enoto $(1 \neq 0)$, ki nima deliteljev niča.

Razširitve kolobarjev

Naj bo K kolobar **brez enote**:

$$\mathbb{Z} \times K = \{n \in \mathbb{Z}, a \in K$$
$$(n, a) + (m, b) = (n + m, a + b)$$
$$(n, a) \cdot (m, b) = (nm, nb + am + ab)$$

Naj bo K komutativen kolobar *brez deliteljev niča* vendar niso vsi elementi obrnljivi. Dodamo ulomke definirane kot ekvivalenčne razrede dvojic z ekvivalenčno (*refleksivno, simetrično, tranzitivno*) relacijo $\sim$.

$$K \times K - \{0\} \Big/ _{\sim}$$

$$\frac{a}{b} \sim \frac{ka}{kb} \quad \forall k \in K - \{0\}$$

$$\frac{a}{b} + \frac{a'}{b'} = \frac{ab' + a'b}{bb'}$$

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{a'}{b'} = \frac{aa'}{bb'}$$

Če bi bila b in b' delitelja niča, bi imeli težave.

Tako dobimo **obseg ulomkov za** K.

Wedderburnov izrek

Končen kolobar brez deliteljev niča je **obseg**.

Posledica: $\mathbb{Z}_n$ je obseg $\iff n \in \mathbb{P}$

Karakteristika kolobarja

Karakteristika kolobarja R je najmanjši $n \in \mathbb{N}$, tako da velja

$$\forall a \in R \ : \ na = \underbrace{a + a + ... + a}_{n\text{-krat}} = 0$$

Če tak n ne obstaja je karakteristika enaka 0.

Če je $1 \in R$, je $\text{char}(R) =$ red enote oziroma najmanjši $n \in \mathbb{N}$, da je $1 \cdot n = 0$.

Če je R cel kolobar, je $\text{char}R \in \{0\} \cup \mathbb{P}$.

Homomorfizem

Naj bosta K, L kolobarja. $f : K \to L$ je **homomorfizem**, če $\forall a, b \in K$ velja:

$$f(a + b) = f(a) + f(b)$$
$$f(a \cdot b) = f(a) \cdot f(b)$$

Izomorfizem je bijektivni homomorfizem.

Če je $f(1) = 1$, pravimo, da je homomorfizem **unitalen**. Če je unitelen in če je a obrnljiv, potem je $f(a^{-1}) = f(a)^{-1}$.

Zaloga vrednosti f je $f(K) = \{f(a) \mid a \in K\} = \text{Im}K \leq L$.

$$f \text{ je surjektiven} \iff \text{Im}f = L$$

Praslika 0 je $f^{-1}(0) = \{a \in K \mid f(a) = 0\} = \text{Ker}f \leq K$.

$$\forall a \in K, \forall x \in \text{Ker}f : \ f(ax) = f(a)f(x) = 0$$

1 Kolobarji polinomov

Računanje s kompleksnimi števili

$$z = x + iy = re^{i\varphi} = r\left(\cos\varphi + i\sin\varphi\right)$$

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2} \qquad\qquad \varphi = \arg z = \arctan\frac{y}{x}$$

De Moivreova formula

$$z^n = r^n\left(\cos\varphi n + i\sin\varphi n\right)$$

Osnovni izrek algebre

Vsak nekonstanten polinom $a_n x^n + \cdots + a_0$ ima natanko n kompleksnih ničel (štetih z večkratnostjo).

Trigonometrične identitete

$$\begin{aligned}
\sin(x \pm y) &= \sin(x)\cos(y) \pm \cos(x)\sin(y)\\
\cos(x \pm y) &= \cos(x)\cos(y) \mp \sin(x)\sin(y)\\
\tan(x \pm y) &= \frac{\tan(x) \pm \tan(y)}{1 \mp \tan(x)\tan(y)}\\
\cot(x \pm y) &= \frac{\cot(x)\cot(y) \mp 1}{\tan(x) \pm \tan(y)}\\
\sin^2(x) + \cos^2(x) &= 1\\
1 + \cot^2(x) &= \frac{1}{\sin^2(x)}\\
1 + \tan^2(x) &= \frac{1}{\cos^2(x)}\\
\sin\frac{x}{2} &= \pm\sqrt{\frac{1-\cos x}{2}}\\
\cos\frac{x}{2} &= \pm\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}
\end{aligned}$$

Mali Fermantov izrek

$$\forall a \in \mathbb{Z}, p \in \mathbb{P}:\ a^p \equiv_p a$$

Polinomi

Polinom je **razcepen**, če ga lahko zapišemo kot produkt dveh nekonstantnih polinomov. Nekonstanten polinom, ki ni razcepen je **nerazcepen**.

Polinom $a_n x^n + \cdots + a_0$ je **primitiven**, če velja $\gcd(a_0, \ldots, a_n) = 0$

Gaussova lema

$$p(x) \in \mathbb{Z}[x] \text{ razcepen nad } \mathbb{Z} \iff p(x) \text{ razcepen nad } \mathbb{Q}$$

Hornerjev algoritem

$$a_n x^n + ... + a_0 = 0$$

- možne cele ničle: $\pm$delitelji a_0
- možne racionalne ničle: $\pm\frac{\text{delitelji } a_0}{\text{delitelji } a_n} = k$

	a_n	a_{n-1}	...	a_0
k		ka_n	...	
	a_n	$ka_n - a_{n-1}$	...	ostanek

Eisensteinov kriterij

Naj bo $a(x) = a_n x^n + \cdots + a_0 \in \mathbb{Z}[x]$ polinom. Če $\exists p \in \mathbb{P} : p | a_0, \ldots, a_{n-1} \wedge p \nmid a_n \wedge p^2 \nmid a_0$, potem je $a(x)$ nerazcepen nad $\mathbb{Q}$.

Rodovne funkcije

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q} \quad \sum_{n=0}^{b} q^n = \frac{1-q^{b+1}}{1-q}$$

$$\sum_{n=a}^{\infty} q^n = \frac{q^a}{1-q} \quad \sum_{n=a}^{b} q^n = \frac{q^a - q^{b+1}}{1-q}$$

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + ... + ab^{n-2} + b^{n-1})$$

$$\frac{a_0 + ... + a_{k-1}x^{k-1}}{1-x^k} = a_0 + ... + a_{k-1}x^{k-1} + a_0^k + ... + a_{k-1}x^{2k-1} + ...$$

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$$

$$\frac{1}{(1-x)^n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n+k-1}{k} x^k$$

$$B_\lambda(x) = \sum_n \binom{\lambda}{n} x^n = (1+x)^\lambda; \qquad \binom{\lambda}{n} = \frac{\lambda^{\underline{n}}}{n!}$$

Mobiusova formula

$$\mu(n) = \begin{cases} 1 & ;\ n = 1, \\ 0 & ;\ n \text{ je deljiv s kvadratom nekega praštevila}, \\ (-1)^k & ;\ n \text{ je produkt } k \text{ različnih praštevil}. \end{cases}$$

Število nerazcepnih polinomov v $\mathbb{Z}_p[x]$ stopnje n je enako

$$N_p(n) = \frac{p-1}{n} \sum_{d|n} \mu(\frac{n}{d}) p^d$$

Eulerjeva funkcija

$$\begin{aligned} \varphi(n) &= |\{k \in [n] : D(n,k) = 1\}| \\ &= \text{št. proti } n \text{ tujih števil, ki so} \leq n \\ \varphi(p) &= p - 1 \qquad\qquad p \in \mathbb{P} \\ \varphi(p^k) &= p^k - p^{k-1} = p^k(1 - \frac{1}{p}) \end{aligned}$$

$$\sum_{d|n} \varphi(d) = n$$