

Algebrske struktre

- **grupoid** (M, \cdot) urejen par z neprazno množico M in zaprto opreacijo \cdot .
- **polgrupa** grupoid z asociativno operacijo $\forall x, y, z \in M : (x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$.
- **monoid** polgrupa z enoto $\exists e \in M \ \forall x \in M : e \cdot x = x \cdot e = x$.
- **grupa** polgrupa v kateri ima vsak element inverz $\forall x \in M \ \exists x^{-1} \in M : x \cdot x^{-1} = x^{-1} \cdot x = e$.
- **abelova grupa** grupa s komutativno operacijo $\forall x, y \in M : x \cdot y = y \cdot x$.

Kolobarji

Kolobar je množica R skupaj z dvema operacijama (oznaka: $+$, \cdot) tako, da velja:

- $(R, +)$ je abelova grupa
- $\forall a, b, c \in R : a(b + c) = ab + ac$ (distributivnost)
- $\forall a, b, c \in R : (a + b)c = ac + bc$ (distributivnost)
- $\forall a, b \in R : ab \in R$ (zaprtost množenja)
- $\forall a, b, c \in R : (ab)c = a(bc)$ (asociativnost*)
- $\exists e \in R \ \forall a \in R : e \cdot a = a = e \cdot a$ (enota*)

Kolobar je **komutativen**, če $\forall a, b \in R : ab = ba$. Kolobar je **kolobar z deljenjem**, če $\forall a \in R - \{0\} \ \exists a^{-1} \in R : aa^{-1} = 1$ element 1 je *enota kolobarja*.

Kolobar, ki ima vse naštete lastnosti je **obseg**.

Delitelji ničā in celi kolobarji

Naj bo R komutativen kolobar.
 $a \in R, \ a \neq 0$ **delitelj ničā**, če

$$\exists b \in R, \ b \neq 0 : ab = 0$$

Če ima kolobar K enoto 1, rečemo, da je element $x \in K$ **obrnljiv**, če $\exists y \in K : xy = 1$.
Delitelji ničā niso nikoli obrnljivi.

Cel kolobar je komutativen kolobar z enoto ($1 \neq 0$), ki nima deliteljev ničā.

Razširitve kolobarjev

Naj bo K kolobar **brez enote**:

$$\begin{aligned} \mathbb{Z} \times K &= \{n \in \mathbb{Z}, a \in K \\ (n, a) + (m, b) &= (n + m, a + b) \\ (n, a) \cdot (m, b) &= (nm, nb + am + ab) \end{aligned}$$

Naj bo K komutativen kolobar *brez deliteljev ničā* vendar niso vsi elementi obrnljivi. Dodamo ulomke definirane kot ekvivalenčne razrede dvojic z ekvivalenčno (*refleksivno, simetrično, tranzitivno*) relacijo \sim .

$$\begin{aligned} K \times K - \{0\} / \sim \\ \frac{a}{b} \sim \frac{ka}{kb} \quad \forall k \in K - \{0\} \\ \frac{a}{b} + \frac{a'}{b'} = \frac{ab' + a'b}{bb'} \\ \frac{a}{b} \cdot \frac{a'}{b'} = \frac{aa'}{bb'} \end{aligned}$$

Če bi bila b in b' delitelja ničā, bi imeli težave.

Tako dobimo **obseg ulomkov za K**.

Wedderburnov izrek

Končen kolobar brez deliteljev ničā je **obseg**.

Posledica: \mathbb{Z}_n je obseg $\iff n \in \mathbb{P}$

Karakteristika kolobarja

Karakteristika kolobarja R je najmanjši $n \in \mathbb{N}$, tako da velja

$$\forall a \in R : na = \underbrace{a + a + \dots + a}_{n\text{-krat}} = 0$$

Če tak n ne obstaja je karakteristika enaka 0.

Če je $1 \in R$, je $\text{char}(R) = \text{red enote}$ oziroma najmanjši $n \in \mathbb{N}$, da je $1 \cdot n = 0$.

Če je R cel kolobar, je $\text{char} R \in \{0\} \cup \mathbb{P}$.

Homomorfizem

Naj bosta K, L kolobarja. $f : K \rightarrow L$ je **homomorfizem**, če $\forall a, b \in K$ velja:

$$\begin{aligned} f(a + b) &= f(a) + f(b) \\ f(a \cdot b) &= f(a) \cdot f(b) \end{aligned}$$

Iz aditivnosti sledi: $f(0) = 0$ in $f(-a) = -f(a)$.

Izomorfizem je bijektivni homomorfizem.

Avtomorfizem je homomorfizem $f : K \rightarrow K$.

Če je $f(1) = 1$, pravimo, da je homomorfizem **unitalen**. Če je unitelen in če je a obrnljiv, potem je $f(a^{-1}) = f(a)^{-1}$.

Slika / zaloga vrednosti

Zaloga vrednosti f je $f(K) = \{f(a) \mid a \in K\} = \text{Im} K \leq L$.

$$f \text{ je surjektiven} \iff \text{Im} f = L$$

Jedro / ničelna množica

Praslika 0 je $f^{-1}(0) = \{a \in K \mid f(a) = 0\} = \text{Ker} f \leq K$.

$$\begin{aligned} \forall a \in K, \forall x \in \text{Ker} f : f(ax) &= f(a)f(x) = 0 \\ \implies \text{Ker} f &\triangleleft K \end{aligned}$$

$\text{Ker} f = \{x \in G \mid f(x) = e\}$ je jedro homomorfizma.

Ideali

Podkolobar $I \leq K$ je ideal, če velja $I \cdot K \subseteq I$ in $K \cdot I \subseteq I$. Oznaka: $I \triangleleft K$.

V nekomutativnih kolobarjih ločimo **leve** in **desne** ideale. Primer: matrike, kjer so izbrani stolpci ničelni, so **levi** ideali. Matrike z ničelnimi vrsticami so **desni** ideali.

K in $\{0\}$ sta **neprava ideala**.

(komutativen) kolobar K je obseg \iff nima pravih idealov.

Še več, **pravi ideali** ne vsebujejo obrnljivih elementov.

Maksimalen ideal

Pravi ideal je **maksimalen**, če ni vsebovan v nobenem pravem idealu. Med njim in celim kolobarjem ni nobenega pravega ideala. Generiran je z nerazcepnim elementom. osnovni izrek algebre: **nerazcepni so linearni**, torej oblike $(x - a), \ a \in \mathbb{C}$.

Glavni ideali

Naj bo K kolobar in $x, y \in K$.

$$(x) = Kx = \{kx \mid k \in K\}$$

$$(x, y) = (x) + (y) = \{kx + ly \mid k, l \in K\}$$

Kolobar je **glavno idealski**, če se vsi njegovi ideali glavni.

Če je F obseg, je $F[x]$ glavno idealski, maksimalni ideali pa pripadajo natanko nerazcepnim polinomom.

Kvocientni ideal

Za dvostranski ideal $I \triangleleft K$ definiramo ekvivalenčno relacijo \sim :

$$\forall a, b \in K : a \sim b \iff a - b \in I$$

K razdelimo na ekvivalenčne razrede K/\sim , ki pa jih lahko označimo tudi z K/I . Ekvivalenčni razred, ki pripada $x \in K$ označimo $[x]$ ali pa $(x + I)$.

Dodamo opreaciji:

$$\begin{aligned} (x + I) + (y + I) &= (x + y + I) \\ (x + I) \cdot (y + I) &= (x \cdot y + I) \end{aligned}$$

$(K/I, +, \cdot)$ je kolobar in podeduje lastnosti K .

K/I (K komutativen kolobar) je **obseg** $\iff I$ maksimalen ideal.

Funkcija

$$f : \{\text{ideali v } K, \text{ ki vsebujejo } I\} \leftrightarrow \{\text{ideali v } K/I\}$$

je bijekcija.

Ideali v $K/(x)$ so oblike $(d + (x))$, kjer $d|x$. Če je d nerazcepen, je ideal maksimalen.

Praideal

Ideal P v kolobarju K je *praideal*, če je $P \neq K$ in če $\forall a, b \in K : ab \in P \implies a \in P \vee b \in P$.

Razširjen evklidov algoritem

```
vhod: (a, b)
(r0, x0, y0) = (a, 1, 0)
(r1, x1, y1) = (b, 0, 1)
i = 1

dokler ri ≠ 0:
  i = i+1
  ki = ri-2 // ri-1
  (ri, xi, yi) = (ri-2, xi-2, yi-2) - ki(ri-1, xi-1, yi-1)
konec zanke
vrni: (ri-1, xi-1, yi-1)
```

Trojica (d, x, y) , ki jo vrne razširjen evklidov

algoritem z vhodnim podatkomk (a, b) , zadošča:

$$ax + by = d \text{ in } d = \gcd(a, b)$$

Vodilni koeficient od gcd je 1. S tem, s čimer deliš/množiš \gcd , moraš deliti/množiti tudi s in t .

Gaussova cela števila

$$\mathbb{Z}[i] = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$$

Gaussovo celo število $x \neq 0$, ki ni obrnljivo, je

nerazcepno, če

$$x = y \cdot z \implies y \text{ obrnljivo} \vee z \text{ obrnljivo}$$

Števili x in y sta **asociativni**, če velja $y = ax$, kjer je a obrnljiv.

Liho praštevilo $p \in \mathbb{P}$ je nad $\mathbb{Z}[i]$ nerazcepno $\iff p = 4k + 3$

Norma Gaussovega celega št je $N(a + bi) = a^2 + b^2$.

Norma je multiplikativna: $N(z \cdot w) = N(z) \cdot N(w)$

$a + bi$ je obrnljivo $\implies \exists c + di \ni (a + bi) \cdot (c + di) = 1$
Na desni strani uporabimo normo in dobimo:
 $N(a + bi) \cdot N(c + di) = 1 \cdot 1 = 1$
 $a + bi$ je obrnljivo $\iff N(a + bi) = 1$
(leži na enotski krožnici)
Obrnljiva števila so $1, -1, i, -i$

Vsak par Gaussovih celih števil $z, w \in \mathbb{Z}[i]$ lahko zapišemo kot

$$z = kw + r$$

Kjer je $N(z) > N(w)$ in $N(r) < N(w)$

Obsegi

Obseg je *komutativen* kolobar v katerem so vsi neničelni elementi *obrnljivi*.

Razširitve obsegov

Če je *K* podobseg obsega *F*, pravimo, da je *F* **razširitev** obsega *K* in pišemo *K* ≤ *F*.

F je avtomatično tudi vektorski prostor nad *K* dimenzije dim_{*K*}(*F*) = [*F* : *K*].

Če je [*F* : *K*] končna, je *F* **končna razširitev**, sicer pa je **neskončna razširitev**.

$$K \leq F \leq E \implies [E : K] = [E : F] \cdot [F : K]$$

- Najmanjši podkolobar kolobarja *F*, ki vsebuje *K* ≤ *F* in *a* ∈ *F* je

$$K[a] = \{p(a) \mid p(x) \in K[x]\}$$

- Najmanjši podobseg obsega *F*, ki vsebuje *K* ≤ *F* in *a* ∈ *F* je

$$K(a) = \left\{ \frac{p(a)}{q(a)} \mid p(x), q(x) \in K[x] \right\}$$

Enostavne razširitve obsegov

Razširitev je enostavna, če je generirana z enim samim elementom.

Naj bo *K* ≤ *F* in *a* ∈ *F*. Oglejmo si homomorfizem

$$\begin{aligned} f_a : K[x] &\rightarrow F \\ p(x) &\mapsto p(a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{Im} f_a &= K[a] \\ \mathrm{Ker} f_a &= \{p(x) \in K[x] \mid p(a) = 0\} \end{aligned}$$

- a* je **transcendenten** nad *K*

$\iff a$ ni ničala nobenega neničelnega polinoma iz $K[x]$

$\iff \mathrm{Ker} f_a = (0)$

$\iff f_a$ injektivna
- a* je **algebraičen** nad *K*

$$\iff \exists p(x) \in K[x], p \neq 0 : p(a) = 0$$

Če so vsi elementi *F* algebraični nad *K*, je *F* **algebraična razširitev**. V nasprotnem primeru pa je *F* **transcendentna razširitev**.

Če je *a* ∈ *F* *transcendenten* nad *K*, je

$$K[a] \cong K[x] \qquad K(a) \cong K(x)$$

Če je *a* ∈ *F* *algebraičen* nad *K*, velja:

- ∃ natanko določen **minimalni polinom** *g_a* ∈ *K*[*x*], ki deli vse polinome z ničlo v *a*. *g_a* **moničen** (*vodilni koef.* = 1)
- Ker f_a* = (*g_a*)
- K*(*a*) = *K*[*a*] ≅ *K*[*x*]/(*g_a*)
- [*K*(*a*) : *K*] = deg *g_a*, **stopnja** *a* nad *K* (oznaka: deg_{*K*} *a*)
- Ideal (*g_a*) ≺ *K*[*x*] je maksimalen $\implies K[x]/(g_a)$ je obseg

Naj bo *F* končna razširitev *K*, potem za vsak *a* ∈ *F* velja

$$\deg_K(a) \mid [F : K]$$

Vse transcendentne razširitve so neskončne, algebraične pa so lahko končne ali pa neskončne (če dodamo več elementov).

Naj bo *K* ≤ *F* in *A* ⊆ *F* množica števil, ki so algebraična nad *K*. Potem je *K*(*A*) algebraična nad *K*.

Naj bo *K* ≤ *F* ≤ *E*, *F* algebraična nad *K*, *E* algebraična nad *F*. Potem je *E* algebraična nad *K*.

Razpadni obseg polinoma

Razpadni obseg polinoma *p*(*x*) nad obsegom *K* označimo z *K*(*p*(*x*)). To je najmanjši podobseg *K* v katerem je *p*(*x*) povsem razcepen (*K* *vsebuje vse ničle* *p*(*x*)).

Za vsak *n* obstaja razširitev stopnje *n* obsega \mathbb{Z}_p . Vsaka taka razširitev je izomorfná $\mathbb{Z}_p(x^{p^n} - x)$.

Edini (do izomorfizma) obseg moči *n^p* je **Galoisov obseg** GF(*pⁿ*).

Naj bo *K* končen kolobar (ne nujno komutativen). Če *K* nima deliteljev ničá, je |*K*| = *pⁿ* in *K* ≅ GL(*n^p*).

Galoisovi obsegi

$$\begin{aligned} \mathrm{GF}(p) &\cong \mathbb{Z}_p & p &\in \mathbb{P} \\ \mathrm{GF}(p^n) &\cong \mathbb{Z}_p[x]/(u) \end{aligned}$$

- u* ∈ $\mathbb{Z}_p[x]$ je nerazcepen polinom stopnje *n*
- elementi GF(*pⁿ*) so ostanki polinomov iz \mathbb{Z}_p pri deljenju z polinomom *u*
- seštevanje je enako kot seštevanje v $\mathbb{Z}_p[x]$
- produkt izračunamo v $\mathbb{Z}_p[x]$ nato pa vzamemo ostanek pri deljenju z *u*

Množica neničelnih/obrnljivih elementov (*GF*(*pⁿ*)*, ·) ≅ (\mathbb{Z}_{p^n-1} , ·) je vedno izomorfná neki ciklični grupi. Generatorjem te grupe rečemo **primitivni elementi** Galoisovega obsega.

Ciklotomski obseg

je oblike $\mathbb{Q}(e^{\frac{2\pi i}{n}})$ kjer je *n* ∈ ℕ.

$$[\mathbb{Q}(e^{\frac{2\pi i}{n}}) : \mathbb{Q}] = \varphi(n)$$

φ je Eulerjeva funkcija.

Konstruktibilna števila

Število *a* ∈ ℝ je konstruktibilno \iff

$$a \in F_n \qquad \mathbb{Q} = F_0 \leq \cdots \leq F_n$$

kjer je [*F_j* : *F_{j-1}*] = 2 za ∀*j* = 1, ..., *n*.

Število je konstruktibilno, če leži v zaporedju razširitev stopnje 2.

Kvaternioni

$$\mathbb{H} = \{t + xi + yj + zk \mid t, x, y, z \in \mathbb{R}\}$$

Kvaternioni so nekomutativen kolobar z deljenjem.

·	1	<i>i</i>	<i>j</i>	<i>k</i>
1	1	<i>i</i>	<i>j</i>	<i>k</i>
<i>i</i>	<i>i</i>	−1	<i>k</i>	− <i>j</i>
<i>j</i>	<i>j</i>	− <i>k</i>	−1	<i>i</i>
<i>k</i>	<i>k</i>	<i>j</i>	− <i>i</i>	−1

Prvi operand je na začetku vrstice, drugi pa na vrhu stolpca.

Vektorska oblika

$$q = t + xi + yj + zk = (t, \vec{r}) \qquad \vec{r} = (x, y, z)$$

Vektorje $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ identificiramo s kvaternioni (0, \vec{x}), ki imajo skalarni del enak 0.

Množenje izrazimo s formulo:

$$q_1q_2 = (t_1t_2 - \vec{r_1} \cdot \vec{r_2}, \; t_1\vec{r_2} + t_2\vec{r_1} + \vec{r_1} \times \vec{r_2})$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

Konjugirani kvaternion:

$$q^* = (t, -\vec{r})$$

Norma kvaterniona:

$$|q|^2 = qq^* = t^2 + x^2 + y^2 + z^2 = t^2 + \|\vec{r}\|^2$$

Inverz kvaterniona:

$$q^{-1} = \frac{q^*}{|q|^2}$$

Vrtenje vektorjev

Vektor $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$ bomo zavrteli okoli osi $\vec{e} \in \mathbb{R}^3$, | \vec{e} | = 1 za kot φ ∈ ℝ.

Enotski kvaternioni tvorijo grupo:

$$s^3 = \{(t, \vec{r}) \in \mathbb{H} \mid t^2 + \|\vec{r}\|^2 = 1\}$$

Definirajmo enotski kvaternion:

$$q = \cos \frac{\varphi}{2} + \sin \frac{\varphi}{2} \vec{e}$$

Zavrten vektor je potem:

$$R(\vec{e}, \varphi) \vec{x} = q \vec{x} q^*$$

Rotacijske matrike so ortogonalne matrike z determinanto 1 in tvorijo grupo:

$$SO(3) = \{R \in \mathbb{R}^{3 \times 3} \mid R^T R = I, \det(R) = 1\}$$

Iz rotacijske matrike *R* lahko izračunamo os rotacije:

Os vrtenja je vzporedna lastnemu vektorju

e
→

{\displaystyle {\vec {e}}}

 matrike *R*, ki ustreza lastni vrednosti λ = 1. Za

ϕ
∉
{
0
,
π
}
:

{\displaystyle \phi \notin \{0,\pi \}:}

$$\vec e=\frac{1}{2\sin\varphi}\begin{bmatrix}R_{32}-R_{23}\\R_{13}-R_{31}\\R_{21}-R_{12}\end{bmatrix}$$

Kot rotacije pa dobimo s formulo

cos
⁡
ϕ
=

sl
(
R
)
−
1

2

{\displaystyle \cos \varphi ={\frac {\mathrm {sl} (R)-1}{2}}}

Topologija

Naj bo *X* poljubna množica. Topologija na *X* je podana z družino odprtih množic *τ*, ki je zaprta za **poljubne unije** in **končne preseke**.

Prazna unija je prazna množica, prazen presek pa cela množica.

Najmanjša možna topologija je *τ* = {∅, *X*} **trivialna**.

Največja možna topologija je *τ* = *P*(*X*) **diskretna**.

Topologija glede na metriko

d : *X* × *X* → [0, ∞) je metrika, če velja:

- d*(*x*, *y*) = 0 ⇔ *x* = *y*
- d*(*x*, *y*) = *d*(*y*, *x*)
- d*(*x*, *y*) + *d*(*y*, *z*) ≥ *d*(*x*, *z*)

Topologija iz metrike na *X* je:

$$\tau _d=\{U\subseteq X\mid U\;{\rm odprta\;glede\;na}\;d\}$$

A je **odprta množica**, če so vse točke notranje (

∀
a
∈
A
∃
ε
>
0
:
K
(
a
,
ε
)
⊆
A
)
.

{\displaystyle (\forall a\in A\;\exists \varepsilon >0\,:\;K(a,\varepsilon)\subseteq A).}

A je **zaprta množica** ⇔ *A*^c odprta ⇔ vsebuje vse svoje robne točke.

Naj bo *A* ⊆ *X*.

- Notranjost** Int(*A*) =

A
˙

{\displaystyle {\dot {A}}}

 = največja odprta množica vsebovana v *A*.
- Zaprtje** Cl(*A*) =

A
¯

{\displaystyle {\bar {A}}}

 = najmanjša zaprta množica, ki še vsebuje v *A* = presek vseh zaprtih množic, ki vsebujejo *A*
- Rob** Fr(*A*) = ∂*A* =

A
˙

{\displaystyle {\dot {A}}}

 = Cl(*A*) − Int(*A*)

Metrizabilnost

(*X*, *τ*) je metrizabilen, če obstaja metrika *d* na *X*, da *τ* = *τ*_{*d*}

Zveznost

Funkcija *f* : (*X*, *τ*_{*X*}) → (*Y*, *τ*_{*Y*}) je zvezna v točki *x* ∈ *X*, če lahko za vsako odprto okolico *V* točke *f*(*x*) najdemo odprto okolico *U* točke *x*, da velja *f*(*U*) ⊂ *V*.

Funkcija *f* : (*X*, *τ*_{*X*}) → (*Y*, *τ*_{*Y*}) je zvezna, če

$$\forall x\in X\;\forall \varepsilon >0\;\forall \delta >0\;\forall x'\in X:$$

$$d(x,x')<\delta \implies d(f(x),f(x'))<\varepsilon$$

Ekvivalentna topološka definicija:

$$\forall V\in \tau _Y:f^{-1}(V)\in \tau _X$$

Funkcija je zvezva, če je praslika vsake odprte množice odprta.

Naslednje trditve so ekvivalentne:

- f* : *X* → *Y* je zvezna
- ∀

A

o
d
p

⊆

Y
:

f

−
1

(
A
)
 o
d
p
r
t
a
 v

X

{\displaystyle \forall A^{\mathrm {odp} }\subseteq Y:\;f^{-1}(A)\;{\rm odprta\;v\;X}}
- ∀

B

z
a
p

⊆

Y
:

f

−
1

(
B
)
 z
a
p
r
t
a
 v

X

{\displaystyle \forall B^{\mathrm {zap} }\subseteq Y:\;f^{-1}(B)\;{\rm zaprta\;v\;X}}
- ∀
A
⊆
X
:

f
(
A
¯
)
⊆

f
(
A
)
¯

{\displaystyle \forall A\subseteq X:\;f({\bar {A}})\subseteq {\bar {f(A)}}}

Homeomorfizmi

f : (*X*, *τ*_{*X*}) → (*Y*, *τ*_{*Y*}) je **homeomorfizem**, če je *f* bijekcija in sta *f* in *f*^{−1} zvezni.

Prostora (*X*, *τ*_{*X*}) in (*Y*, *τ*_{*Y*}) sta **homeomorfna**. Oznaka *X* ≈ *Y*.

f : *X* → *Y* je **odprta**, če je slika vsake odprte množice odprta.

f : *X* → *Y* je **zaprta**, če je slika vsake zaprte množice zaprta.

Naslednje trditve so ekvivalentne:

- f* : *X* → *Y* je homeomorfizem
- f* je zvezna bijekcija in *f*^{−1} je zvezna
- f* je zvezna in odprta bijekcija
- f* je zvezna in zaprta bijekcija

Kompaktnost

Odprto pokritje množice *X* je vsaka družina (odprtih množic) *U* ⊆ *τ*, katere unija je cel *X*.

Prostor *X* je **kompakten**, če v vsakem odprtem pokritju *X* obstaja končno podpokritje.

- Vsaka končna množica je kompaktna.

- V metričnem prostoru je vsaka kompaktna množica omejena.

$$A^{\mathrm {zap} }\subseteq X^{\mathrm {kompakten} }\implies A\;{\rm kompakten}$$

Heine-Borel-Lebesgue:

A ⊆ *ℝ*^{*n*} je kompakten ⇔ *A* zaprt in omejen

V kompaktnem prostoru ima vsaka neskončna množica vsaj eno stekališče.

Bolzano-Weierstrass:

Vsako omejeno zaporedje v *ℝ*^{*n*} ima konvergentno podzaporedje.

Zvezna slika kompakta je kompaktn.

f : *X* → *Y* zvezna, *A*^{kompkt} ⊆ *X* ⇒ *f*(*A*) kompaktn

X kompakten ⇔ v vsaki družini zap. podmnožic *X*, ki ima prazen presek, obstaja končna podmnožica, ki ima prazen presek.

Povezanost

Separacija množice *X* je razdelitev *X* = *A* ∪ *B* na dve disjunktni, neprazni, odprti podmnožici.

Prostor, ki ima separacijo je **nepovezan**, sicer pa je **povezan**.

Alternativna definicija:

- X* je povezan, če ga ni mogoče razdeliti na dve disjunktni neprazni množici

- X* je povezan, če sta njegovi edini podmnožici, ki sta zaprti in odprti hkrati, ∅ in *X*.

Povezane množice v *ℝ* so natanko intervali.

Zvezna funkcije ohranjajo povezanost.

f : *X* → *Y* zvezna, *X* povezana ⇒ *f*(*X*) povezana

X je **povezan s potmi**, če za polubna *a*, *b* ∈ *X* obstaja **pot** *p* : [0, 1] → *X*, zvezna, *p*(0) = *a*, *p*(1) = *b*.

X povezan s potmi ⇒ *X* povezan

Če je *L* povezan in je *L* ⊆ *M* ⊆

L
¯

{\displaystyle {\bar {L}}}

, je tudi *M* povezan.