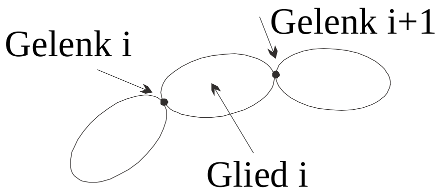
14 Lösung der kinematischen Probleme (English)

14.1 Beschreibung von Denavit-Hartenberg

Bisher wurden die verwendeten Koordinatensysteme „ad hoc“ gewählt, z.B. beim Scararoboter die x-Achsen längs der Armachsen. Es ist zweckmäßig, eine Vereinheitlichung vorzunehmen, damit auch verschiedene Anwender stets zur gleichen Beschreibung kommen. Im Prinzip geht es darum, vom (i-1)-ten Koordinatensystem zum i-ten voranzuschreiten.

Beschränkt man sich auf Drehachsen und Linearachsen (letztere auch prismatische Achsen genannt), so gibt es beim i-ten Glied einer kinematischen Kette, falls diese zu zwei kinematischen Paaren gehört (Normalfall beim Roboter), nach Bild 14-1 folgende vier Möglichkeiten:



Gelenk i	Gelenk i+1
Drehgelenk	Drehgelenk
Drehgelenk	Linearachse
Linearachse	Drehgelenk
Linearachse	Linearachse

Bild 14-1: Bezeichnung der Gelenke beim i-ten Glied einer kinematischen Kette. Kombinationsmöglichkeiten, falls man sich auf Drehgelenke und Linearachsen beschränkt.

Die Vereinheitlichung der Bezeichnungen folgt einem Vorschlag von Denavit und Hartenberg [15].

Danach läßt man die Gelenkachsen von Gelenk i und von Gelenk (i+1) mit den z-Achsen der Koordinatensysteme (i-1) und i zusammenfallen. Bild 14-2 stellt die Situation für den Fall zweier Drehgelenke dar.

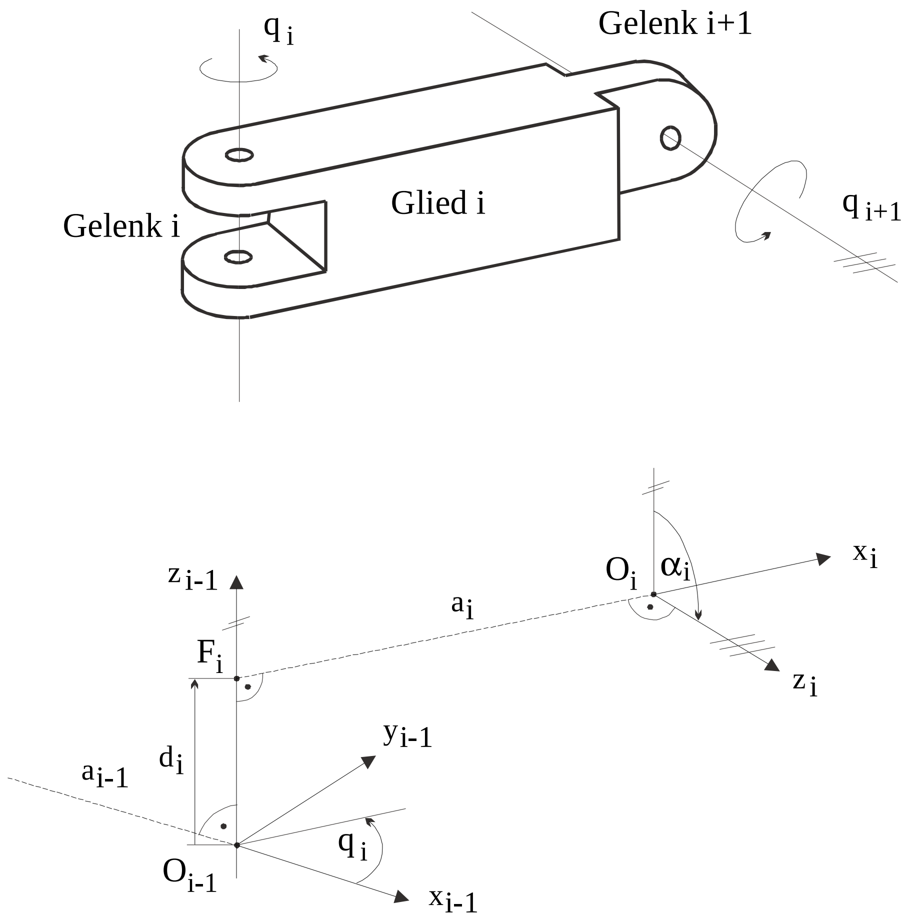


Bild 14-2: Koordinatensysteme nach Denavit-Hartenberg bei zwei Drehgelenken. Der besseren Lesbarkeit wegen sind die Koordinatensysteme nach unten gezogen.

Bild 14-2 zeigt, daß die Werte a_i und α_i durch die Gelenkkonstruktion festgelegt sind. Der kleinste Abstand der beiden Achsen des Gliedes wird definiert durch die gemeinsame Normale der Achsen und heißt a_i. Der Winkel, um den man die erste Achse drehen muß, damit sie parallel zur zweiten wird, heißt α_i. Da a_i ein Abstand ist, gilt $a_i \geq 0$.

Der Winkel α_i dagegen ist vorzeichenbehaftet. Man mißt ihn in einer Ebene senkrecht zur gemeinsamen Normale der Achsen. Dabei geht man längs der Normalen von der (i-1)-ten Achse zur i-ten, was die Richtung von x_i bestimmt. Schaut man von der Pfeilspitze von x_i aus auf die genannte Ebene, so kann man dort den mathematisch positiven Sinn wie üblich als Gegenuhrzeigersinn definieren. Dementsprechend wird das Vorzeichen von α_i festgelegt. Falls ausnahmsweise $a_i = 0$ ist (und die Achsen dann nicht parallel sind), steht die x_i - Achse senkrecht zu den Gelenkachsen z_{i-1} und z_i, wobei z_{i-1}, z_i und x_i ein Rechtssystem bilden.

Die Parameter a_i und α_i beschreiben ein beliebiges Glied des Roboters, das nicht Anfangs- oder Endglied der offenen kinematischen Kette ist, durch Abstand und Winkel zwischen seinen beiden Achsen.

Zur Beschreibung der Gelenkkoordinatensysteme (i-1), i usw. genügen diese beiden Parameter noch nicht. Man benötigt zusätzlich die vorzeichenbehaftete Verschiebung von O_{i-1} (bestimmt durch a_{i-1}) zum Fußpunkt F_i längs der z_{i-1} - Achse.

Damit läßt sich nun das i-te Koordinatensystem aus dem (i-1)-ten ableiten, sobald q_i bekannt ist. Bild 14-2 stellt dies dar. Die y_i - Achse wurde nicht eingezeichnet, weil sie in diesem Beispiel mit der Parallelen zur z_{i-1} - Achse zusammenfällt. Ganz allgemein wird sie so bestimmt, daß das x_i - y_i - z_i - System ein Rechtssystem bildet. Im Sonderfall, daß die beiden Gelenkachsen parallel sind, könnte man den Fußpunkt F_i beliebig wählen. Man wählt ihn dann so, daß $d_i = 0$ wird.

Im Beispiel von Bild 14-2 mit zwei Drehachsen kann der Übergang vom (i-1)-ten zum i-ten Koordinatensystem in drei aufeinanderfolgenden Schritten erfolgen:

1. Drehung um die Achse z_{i-1} um den Winkel q_i
2. Translation $O_{i-1} \rightarrow O_i$
3. Drehung um die Achse x_i um den Winkel α_i

Dem entsprechen die Matrizen

$$\begin{pmatrix} \cos q_i & -\sin q_i & 0 & 0 \\ \sin q_i & \cos q_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & a_i \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha_i & -\sin\alpha_i & 0 \\ 0 & \sin\alpha_i & \cos\alpha_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Deren Produkt liefert die Matrix für die Koordinatentransformation vom (i-1)-ten zum i-ten System

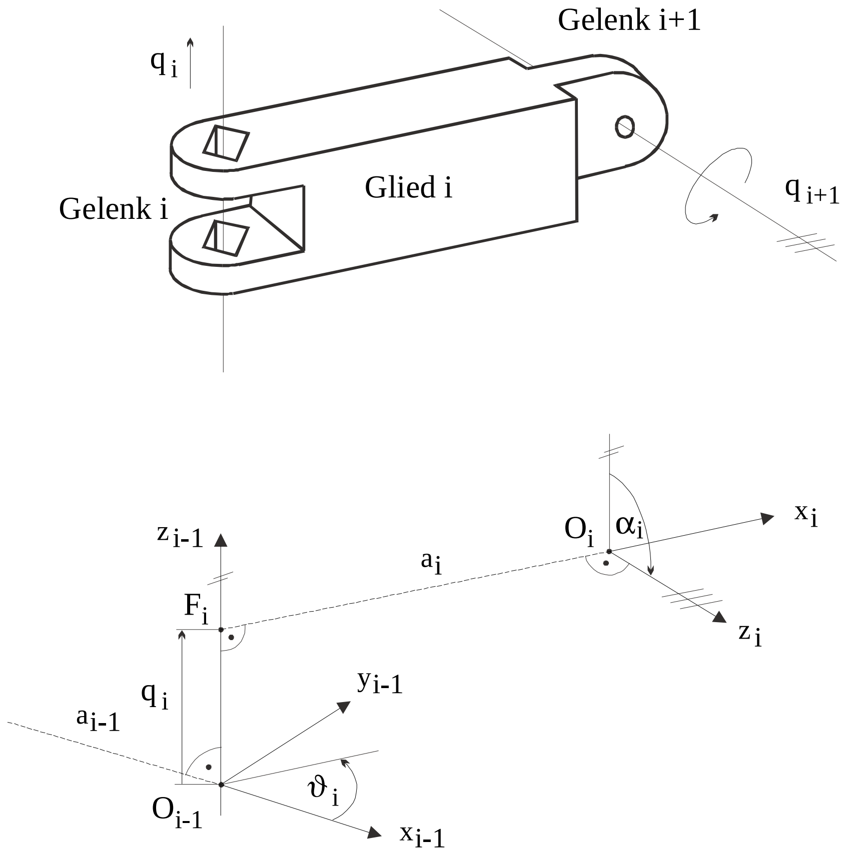
$$^{i-1}T_i = \begin{pmatrix} \cos q_i & -\sin q_i \cos\alpha_i & \sin q_i \sin\alpha_i & a_i \cos q_i \\ \sin q_i & \cos q_i \cos\alpha_i & -\cos q_i \sin\alpha_i & a_i \sin q_i \\ 0 & \sin\alpha_i & \cos\alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad (14.1)$$

Wie man sieht, hängt die Koordinatentransformation von vier Parametern ab, auch „link parameter“ genannt. Dies sind a_i, α_i, d_i und q_i.

Die Parameter a_i und α_i sind konstruktiv durch das i-te Glied gegeben. Dagegen sind q_i und d_i abhängig von der Verbindung der Glieder (i-1) und i über Gelenk i.

Ist Gelenk i eine <u>Drehachse</u>, so ist d_i entsprechend Bild 14-2 konstruktiv gegeben und folglich konstant, während der Drehwinkel zwischen den Gliedern (i-1) und i variabel ist. Er ist die Gelenkkoordinate und wird deshalb mit q_i bezeichnet.

Ist dagegen Gelenk i eine <u>Linearachse</u> (prismatische Achse), so ist d_i variabel und wird deshalb als q_i bezeichnet. Der Winkel zwischen den Gliedern (i-1) und i ist wegen der prismatischen Führung konstruktiv festgelegt und somit konstant. Er wird mit ϑ_i bezeichnet. Bild 14-3 deutet dies an.



<u>Bild 14-3:</u> Koordinatensysteme nach Denavit-Hartenberg, falls das i-te Gelenk ein prismatisches Gelenk (Linearachse) ist.

Die Überlegungen von oben sind ansonsten dieselben. Nur erhält man jetzt

$$ {}^{i-1}T_i = \begin{pmatrix} \cos\vartheta_i & -\sin\vartheta_i \cos\alpha_i & \sin\vartheta_i \sin\alpha_i & a_i \cos\vartheta_i \\ \sin\vartheta_i & \cos\vartheta_i \cos\alpha_i & -\cos\vartheta_i \sin\alpha_i & a_i \sin\vartheta_i \\ 0 & \sin\alpha_i & \cos\alpha_i & q_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{14.2} $$

Man kann die Gleichungen (14.1) und (14.2) zusammenfassen zu

$$ {}^{i-1}T_i = \begin{pmatrix} \cos\vartheta_i & -\sin\vartheta_i \cos\alpha_i & \sin\vartheta_i \sin\alpha_i & a_i \cos\vartheta_i \\ \sin\vartheta_i & \cos\vartheta_i \cos\alpha_i & -\cos\vartheta_i \sin\alpha_i & a_i \sin\vartheta_i \\ 0 & \sin\alpha_i & \cos\alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{14.3} $$

wobei gilt:

$\vartheta_i = q_i$ falls das i-te Gelenk eine <u>Dreh</u>achse

$d_i = q_i$ falls das i-te Gelenk eine <u>Linear</u>achse

Weiter gilt: ϑ_i = Orientierter Winkel zwischen den Achsen $x_{(i-1)}$ und x_i

α_i = Orientierter Winkel zwischen den Achsen $z_{(i-1)}$ und z_i

Bemerkungen:

- Mit Gleichung (14.3) lassen sich alle 4 Fälle behandeln, die zu Beginn von Abschnitt 14.1 erwähnt wurden. Vorausgesetzt wird dabei, daß das (i-1)-te System bereits festgelegt ist.
- Der Sockel eines Industrieroboters ist Glied 0. Das 0-te Koordinatensystem ist mit diesem Sockel fest verbunden und heißt Bezugssystem (reference frame) oder auch „Weltkoordinatensystem“. Es wird bei einer <u>Dreh</u>achse so gewählt, daß sich $d_1 = 0$ ergibt. Entsprechend wählt man bei einer <u>Linear</u>achse $\vartheta_1 = 0$.
- Als n-tes Glied wählt man den Greifer, dessen „Handwurzel“ (auch „Tool Center Point“ oder TCP) im Ursprung O_{n-1} und dessen „Werkzeugspitze“ (tooltip) in O_n sitzt.

Unter diesen Voraussetzungen enthält jede der Matrizen (14.3) genau eine der Gelenkkoordinaten $q_1, q_2, ..., q_n$. Die Multiplikation aller n Matrizen ${}^{i-1}T_i$ führt dann zu

$$ T = {}^0T_n = {}^0T_1 \cdot {}^1T_2 \cdot {}^2T_3 \cdot .... \cdot {}^{(n-1)}T_n \tag{14.4} $$

sowie

$$ X = X_0 = T \cdot X_n \tag{14.5} $$

wobei T die Gestalt

$$ T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} $$

annimmt (warum?). Die a_{ik} hängen von den Gelenkkoordinaten $q_1, \ldots, q_n$ ab.

Wählt man nun $X_n = (0, 0, 0, 1)^T$ als Koordinaten von Tooltip im n-ten Koordinatensystem, so erhält man wegen (14.5) die Koordinaten von Tooltip im Weltkoordinatensystem zu

$$X_{Tooltip} = (a_{14}, a_{24}, a_{34}, 1)^T \tag{14.6}$$

(nachrechnen!). Die Orientierung des Greifers bzw. des Greiferkoordinatensystems wird durch die Matrix

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

bestimmt. Die a_{ik} sind nicht unabhängig, weil die Matrix orthogonal ist. Deshalb kann man die Eulerwinkel ψ, ϑ, φ auf verschiedene Weise berechnen. Eine Möglichkeit zeigt Vukobratovic [2]:

$$\begin{aligned} \psi &= \operatorname{atan2}(a_{21}, a_{11}) \\ \vartheta &= \operatorname{atan2}(-a_{31}, (a_{11} \cos\psi + a_{21} \sin\psi)) \\ \varphi &= \operatorname{atan2}(a_{32}, a_{33}) \end{aligned} \tag{14.7}$$

Damit ist das direkte kinematische Problem vollständig gelöst. Folgende Schritte waren erforderlich:

1. Bestimmen der Koordinatensysteme, z.B. nach Denavit-Hartenberg,
2. Bestimmen der Matrizen ${}^{(i-1)}T_i$, die von den jeweils gegebenen Gelenkkoordinaten abhängen,
3. Berechnen von T nach Gleichung (4) durch Matrizenmultiplikation,
4. Berechnen der externen Koordinaten (Tooltip) x, y, z aus (14.6) und
5. Berechnen der Eulerwinkel ψ, ϑ, φ nach (14.7).

Bemerkung: Verschieden Autoren haben Bezeichnungen, die leicht von den hier verwendeten abweichen So wählt z.B. Craig [3] jeweils um 1 verminderte Indizes und Vukobratovic [2] setzt bei prismatischen Achsen stets $a_i = 0$, was zwar die Matrix etwas vereinfacht, aber zu Fallunterscheidungen führt.

14.2 Direktes kinematisches Problem am Beispiel

Gegeben sei ein System nach Bild 14-4. Für bekannte Gelenkkoordinaten sind die externen Koordinaten $(x, y, z, \psi, \vartheta, \varphi)^T$ zu bestimmen. Dabei wird sich zeigen, daß die Hauptschwierigkeit in der richtigen Anordnung der Koordinatensysteme und der Bestimmung der Parameter a_i, α_i, d_i. ϑ_i liegt. Das dargestellte System ist kein bekannter Standardtyp eines Roboters. Es enthält aber Dreh- und Linearachsen und ist deshalb als Übungsbeispiel für die Behandlung des direkten kinematischen Problems geeignet.

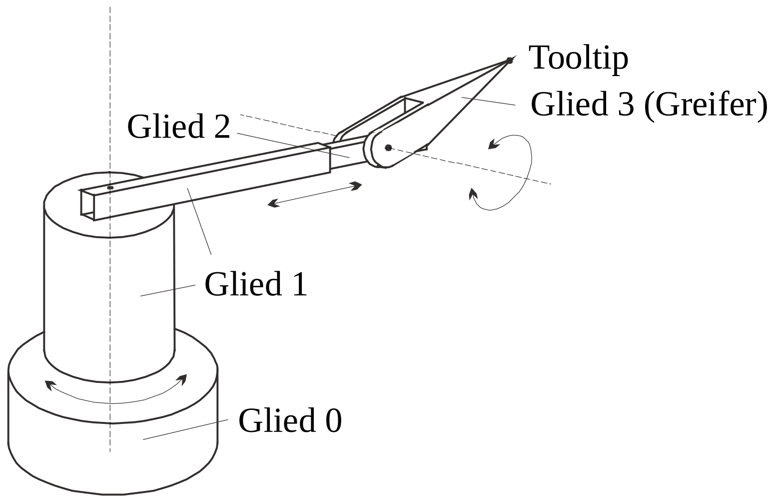


Bild 14-4: System mit zwei Drehachsen und einer Linearachse.

Dem Rezept von Seite 14-6 folgend werden zunächst geeignete Koordinatensysteme bestimmt. Das Weltkoordinatensystem (reference frame) x_0-y_0-z_0 wird gemäß der zweiten Bemerkung von Seite 14-5 so gewählt, daß $d_1 = 0$ wird. Siehe Bild 14-5.

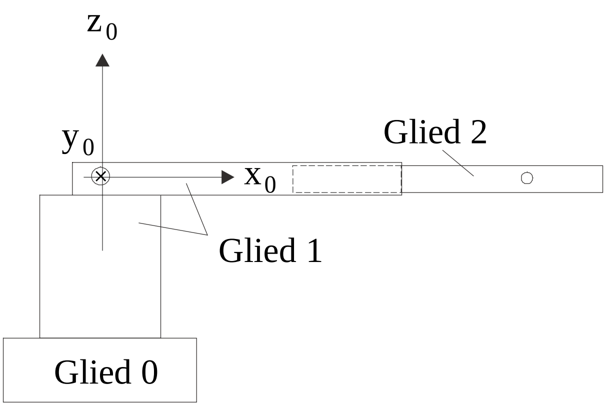


Bild 14-5: Wahl von x_0-y_0-z_0. Dabei zeigt y_0 nach hinten. In dieser Skizze ist zunächst angenommen, daß die Linearachse von Glied 1 mit der x-Achse x_0 des Weltkoordinatensystems zusammenfällt.

Glied 1 wird durch die Drehachse z_0 und die Linearachse z_1 bestimmt. Die Orientierung von z_1 ist beliebig. Da sich beide Achsen schneiden, ist x_1 rechtwinklig zu z_0 und z_1 in der Weise zu wählen, daß z_0, z_1, x_1 ein Rechtssystem bilden. Bild 14-6 zeigt das von oben.

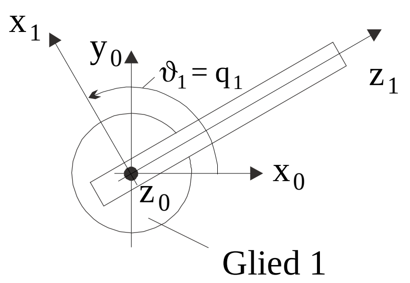


Bild 14-6: z_0, z_1 und x_1 bilden ein Rechtssystem. Beachten Sie, daß q_1 der Winkel zwischen x_0 und x_1 ist und nicht etwa zwischen x_0 und z_1 !

Glied 2 wird durch die Linearachse z_1 und die Drehachse z_2 bestimmt. Auch hier schneiden sich beide Achsen. Somit ist auch x_2 rechtwinklig zu z_1 und z_2 in der Weise zu wählen, daß z_1, z_2, x_2 ein Rechtssystem bilden. Bild 14-7 zeigt dies ebenfalls von oben.

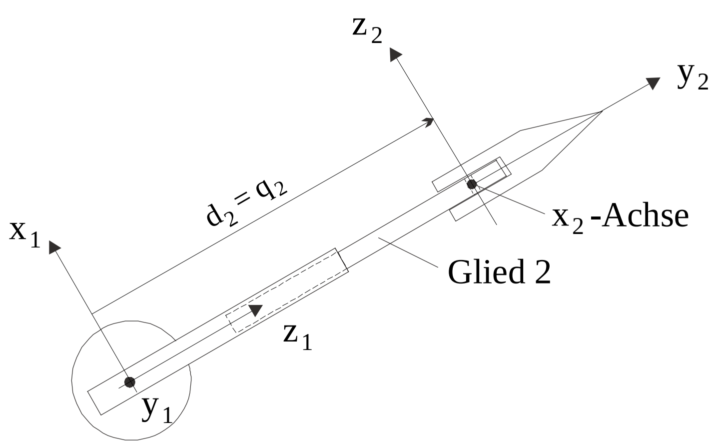


Bild 14-7: Die Orientierung von z_2 in der Achse des Drehgelenks ist willkürlich. Danach aber ist x_2 so zu wählen, daß z_1, z_2 und x_2 ein Rechtssystem bilden. Daher weist die x_2 -Achse nach vorn. Die Gelenkkoordinate q_2 ist eine Verschiebung, also ist hier $q_2 = d_2$.

Glied 3 schließlich ist der Greifer, dessen Länge von der Handwurzel zur Greiferspitze (tooltip) mit L_3 bezeichnet werde. Das x_3-y_3-z_3-System wird mit seinem Ursprung in Tooltip gewählt. Eine weitere reale Achse existiert dort nicht, also wird man die z_3-Achse am einfachsten parallel und gleichgerichtet zu z_2 wählen. Die Orientierung von x_2 ist durch $a_3 = L_3$ gegeben, genauer: durch den Vektor von der Handwurzel zu Tooltip. Damit ergibt sich auch y_3. Bild 14-8 zeigt das, diesmal in Seitenansicht.

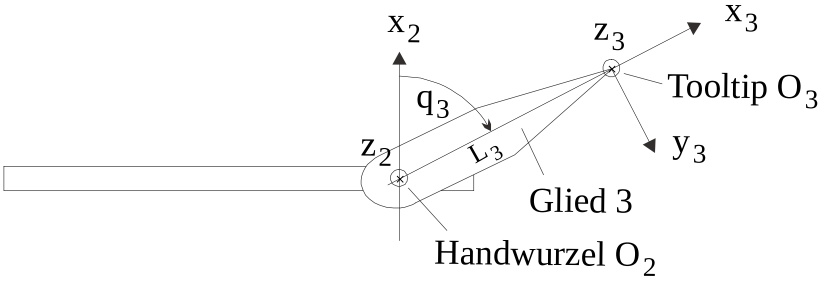


Bild 14-8: Koordinatensysteme für Glied 3, den Greifer. Die Achsen z_2 und z_3 weisen beide nach hinten.

Aus den Bildern 14-5 bis 14-8 liest man nun die Werte für a_i, α_i, d_i und ϑ_i ab. Am besten trägt man sie in eine Tabelle nach dem Muster von Tabelle 14-1 ein.

Tabelle 14-1: Werte für a_i, α_i, d_i und ϑ_i für den Roboter aus Bild 14-4

i	a_i	α_i	d_i	ϑ_i
1	0	90^0	0	q_1
2	0	90^0	q_2	90^0
3	L_3	0^0	0	q_3

Mit Hilfe von Formel (14.3) und den Werten aus Tabelle 14-1 bestimmt man nun die Matrizen ${}^{(i-1)}T_i$:

$$
{}^0T_1 = \begin{pmatrix} \cos q_1 & 0 & \sin q_1 & 0 \\ \sin q_1 & 0 & -\cos q_1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad {}^1T_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & q_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und}
$$

$$
{}^2T_3 = \begin{pmatrix} \cos q_3 & -\sin q_3 & 0 & L_3 \cos q_3 \\ \sin q_3 & \cos q_3 & 0 & L_3 \sin q_3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
$$

Daraus erhält man mit Matrizenmultiplikation nach dem Falkschen Schema

	$\overbrace{\qquad\qquad}^{^1T_2}$	$\overbrace{\qquad\qquad}^{^2T_3}$
	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & q_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \cos q_3 & -\sin q_3 & 0 & L_3\cos q_3 \\ \sin q_3 & \cos q_3 & 0 & L_3\sin q_3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} \cos q_1 & 0 & \sin q_1 & 0 \\ \sin q_1 & 0 & -\cos q_1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & \sin q_1 & \cos q_1 & q_2\sin q_1 \\ 0 & -\cos q_1 & \sin q_1 & -q_2\cos q_1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} sq_1sq_3 & sq_1cq_3 & cq_1 & sq_1(L_3sq_3+q_2) \\ -cq_1sq_3 & -cq_1cq_3 & sq_1 & -cq_1(L_3sq_3+q_2) \\ cq_3 & -sq_3 & 0 & L_3cq_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
$\underbrace{\qquad\qquad}_{^0T_1}$	$\underbrace{\qquad\qquad}_{^0T_1\cdot{}^1T_2}$	$\underbrace{\qquad\qquad}_{T\ =\ {}^0T_3\ =\ {}^0T_1\cdot{}^1T_2\cdot{}^2T_3}$

Die Elemente von T sind abgekürzt geschrieben: sq_i für $\sin q_i$ und cq_i für $\cos q_i$.

Bei längeren allgemeinen Rechnungen ist es zweckmäßig, eine Probe mit einem Zahlenbeispiel zu machen: Wählt man z.B. $L_3 = 1$ (m) sowie

$q_1 = 120^0$ (siehe Bild 14-6),
$q_2 = 1$ (m) (siehe Bild 14-7),
$q_3 = 30^0$ (siehe Bild 14-8),

so überzeugt man sich anhand von kleinen Skizzen auch ohne Rechnung, daß

$$X_{Tooltip} = \left(\frac{3}{4}\sqrt{3},\ \frac{3}{4},\ \frac{1}{2}\sqrt{3},\ 1\right)^T$$

ist. Die Berechnung von T mit diesen Werten führt zu

$$T = \begin{pmatrix} \frac{1}{4}\sqrt{3} & \frac{1}{4} & \frac{-1}{2} & \frac{3}{4}\sqrt{3} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4}\sqrt{3} & \frac{1}{2}\sqrt{3} & \frac{3}{4} \\ \frac{1}{2}\sqrt{3} & \frac{-1}{2} & 0 & \frac{1}{2}\sqrt{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Man erkennt, daß die rechte Spalte offenbar den Vektor $X_{Tooltip}$ darstellt.

Die Eulerwinkel errechen sich nach Gleichung (14.7) zu

$$\psi \;=\; \mathrm{atan2}\,(\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}\sqrt{3}) \;=\; \mathrm{atan}\,(1/\sqrt{3}) \;=\; 30^0$$

$$\vartheta \;=\; \mathrm{atan2}\,(-\frac{1}{2}\sqrt{3},\; (\frac{1}{4}\sqrt{3}\cos 30^0 + \frac{1}{4}\sin 30^0)) \;=\mathrm{atan2}\,(-\frac{1}{2}\sqrt{3},\; \frac{1}{2})$$

$$=\; \mathrm{atan}\,(-\sqrt{3}) \;=\; 60^0$$

$$\varphi \;=\; \mathrm{atan2}\,(-1/2,\; 0) \;=\; -90^0$$

Auch hier überzeugt man sich ohne allzugroße Mühe, daß diese Ergebnisse den Skizzen entsprechen.

Aufgabe 14-1: Berechnen sie die Matrix $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$, wenn für ein System die Eulerwinkel ψ, ϑ und φ gegeben sind.

Anleitung: ψ, ϑ und φ sind durch drei Drehungen definiert, denen Matrizen zugeordnet sind. Bestimmen Sie diese. Das Produkt der drei Matrizen bestimmt die Transformation von einem zum Weltkoordinatensystem parallelen Bezugssystem zum System der Greiferkoordinaten, muß also gleich der gegebenen Matrix sein. Die Lösung kann bei Vukobratovic [2] nachgelesen werden.

Aufgabe 14-2: Berechnen Sie die Matrix T für den Roboter in Bild 14-9. Lösung siehe Abschnitt 17.3.2.

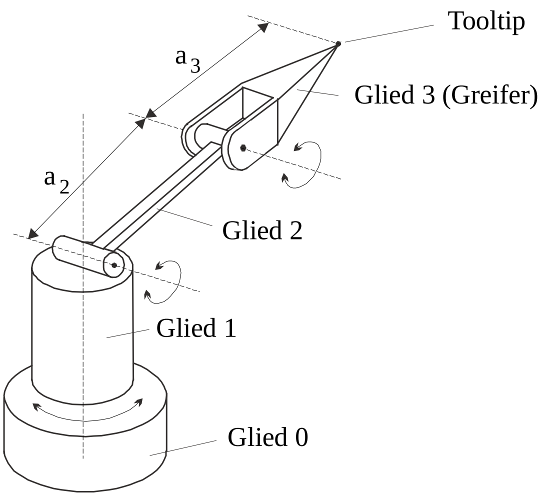


Bild 14-9: Roboter mit drei Drehachsen.

14.3 Inverses kinematisches Problem

Das Beispiel des Scara hat gezeigt (Vorlesung 13.1.2), daß die Lösung des inversen kinematischen Problems schwieriger sein kann als die Lösung des direkten Problems. Dies gilt überwiegend auch für andere Robotertypen. In manchen Fällen läßt sich überhaupt keine analytische Lösung finden, und man ist auf numerische Verfahren angewiesen. Man unterscheidet also auch auf dem Gebiet der Roboterkinematik

- analytische Verfahren und
- numerische Verfahren.

Eines dieser numerischen Verfahren soll anschließend erläutert werden, und zwar ebenfalls am Beispiel des Scara:

Zur Vereinfachung beschränken wir uns auf die Berechnung von $(q_1, q_2, ..., q_n)$ als Funktion von (x, y, z) ohne Berücksichtigung des Rollwinkels. Es seien (x, y, z) die Koordinaten der Greiferhandwurzel. Dann gilt nach Gleichung (13.1)

$$\begin{aligned} x &= L_1 \cos\vartheta_1 + L_2 \cos(\vartheta_1 + \vartheta_2) &&= f_1(q_1,q_2,q_3) \\ y &= L_1 \sin\vartheta_1 + L_2 \sin(\vartheta_1 + \vartheta_2) &&= f_2(q_1,q_2,q_3) \end{aligned} \tag{14.8}$$

sowie $z = q_3 \quad = f_3(q_1,q_2,q_3)$

mit $q_1 = \vartheta_1$ und $q_2 = \vartheta_2$.

Kennt man nun für <u>einen</u> Punkt (x_0,y_0,z_0) die Lösung (q_{10},q_{20},q_{30}), so kann man die Lösung für einen benachbarten Punkt $(x,y,z) = (x_0+dx,y_0+dy,z_0+dz)$ näherungsweise numerisch errechnen. Dazu verwendet man den Satz von Taylor für Funktionen von mehreren Variablen:

$$dx = x - x_0 = f_1(q_1,q_2,q_3)-f_1(q_{10},q_{20},q_{30}) \approx \left(\frac{\partial f_1}{\partial q_1}dq_1 + \frac{\partial f_1}{\partial q_2}dq_2 + \frac{\partial f_1}{\partial q_3}dq_3\right)_{(q_1,q_2,q_3)=(q_{10},q_{20},q_{30})} \tag{14.9}$$

Entsprechend

$$dy = y - y_0 = f_2(q_1,q_2,q_3) - f_2(q_{10},q_{20},q_{30}) \approx \left(\frac{\partial f_2}{\partial q_1}dq_1 + \frac{\partial f_2}{\partial q_2}dq_2 + \frac{\partial f_2}{\partial q_3}dq_3\right)_{(q_1,q_2,q_3)=(q_{10},q_{20},q_{30})}$$

$$dz = z - z_0 = f_3(q_1,q_2,q_3) - f_3(q_{10},q_{20},q_{30}) \approx \left(\frac{\partial f_3}{\partial q_1}dq_1 + \frac{\partial f_3}{\partial q_2}dq_2 + \frac{\partial f_3}{\partial q_3}dq_3\right)_{(q_1,q_2,q_3)=(q_{10},q_{20},q_{30})}$$

Das schreibt man wie folgt in Matrizenform:

$$\begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial q_1} & \frac{\partial f_1}{\partial q_2} & \frac{\partial f_1}{\partial q_3} \\ \frac{\partial f_2}{\partial q_1} & \frac{\partial f_2}{\partial q_2} & \frac{\partial f_2}{\partial q_3} \\ \frac{\partial f_3}{\partial q_1} & \frac{\partial f_3}{\partial q_2} & \frac{\partial f_3}{\partial q_3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} dq_1 \\ dq_2 \\ dq_3 \end{pmatrix} \qquad (14.10)$$

oder

$$dX = J(q_1,q_2,q_3)\cdot dQ$$

mit $dQ = (dq_1,dq_2,dq_3)^T$ und der **Jacobi-Matrix** (englisch: Jacobian)

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial q_1} & \frac{\partial f_1}{\partial q_2} & \frac{\partial f_1}{\partial q_3} \\ \frac{\partial f_2}{\partial q_1} & \frac{\partial f_2}{\partial q_2} & \frac{\partial f_2}{\partial q_3} \\ \frac{\partial f_3}{\partial q_1} & \frac{\partial f_3}{\partial q_2} & \frac{\partial f_3}{\partial q_3} \end{pmatrix} \qquad (14.11)$$

Beim Scara ist wegen der Gleichungen (14.8)

$$J = \begin{pmatrix} -L_1\sin q_1 - L_2\sin(q_1+q_2) & -L_2\sin(q_1+q_2) & 0 \\ L_1\cos q_1 + L_2\cos(q_1+q_2) & L_2\cos(q_1+q_2) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad (14.12)$$

Die Determinante D(J) läßt sich relativ einfach berechnen. Man erhält

$$D(J) = L_1 L_2 \sin q_2 \qquad (14.13)$$

D(J) verschwindet also nur für $q_2 = 0 + k\cdot\pi$. Wegen der mechanischen Einschränkungen ist für uns nur $q_2 = 0$ von Interesse. Für alle anderen Werte von $q_2 = \vartheta_2$ ist D(J) ungleich Null, sodaß die Inverse J^{-1} existiert. Es gilt

$$J^{-1} = \frac{1}{D(J)} \begin{pmatrix} L_2\cos(q_1+q_2) & L_2\sin(q_1+q_2) & 0 \\ -L_1\cos q_1 - L_2\cos(q_1+q_2) & -L_1\sin q_1 - L_2\sin(q_1+q_2) & 0 \\ 0 & 0 & D(J) \end{pmatrix} \qquad (14.14)$$

Aufgabe 14-3: Bestätigen Sie durch Bilden der partiellen Ableitungen in (14.8) die Gleichung (14.12) für die Jacobi-Matrix.

Aufgabe 14-4: Bestätigen Sie Gleichung (14.13) für die Determinante der Jacobi-Matrix.

Aufgabe 14-5: Invertieren Sie die Jacobi-Matrix (14.12) für $D(J) \neq 0$ und bestätigen Sie Gleichung (14.14). Benutzen Sie dabei den Satz über Matrizen, wonach für

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad D(A) \neq 0 \text{ gilt}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{D(A)} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix}^T$$

Darin sind die A_{ik} die Adjunkten von A. Beachten Sie, daß die Matrix mit den Elementen A_{ik} noch zu transponieren ist !!!

Mit Hilfe der Jacobi-Matrix und ihrer Inversen kann man von einem Punkt P_0, für den sowohl die externen Koordinaten als auch die Gelenkkoordinaten bekannt sind, die Gelenkkoordinaten eines Punktes P berechnen, der sich in einer gewissen Nachbarschaft von P_0 befindet. Diese Nachbarschaft muß so klein sein, daß die Taylorschen Näherungen (14.9) nicht zu ungenau sind. Man formt dann (14.10) um zu

$$dQ = J^{-1}(q_1,q_2,q_3) \cdot dX$$

oder

$$Q = Q_0 + J^{-1}(q_1,q_2,q_3) \cdot (X - X_0) \tag{14.15}$$

Ist der Abstand $|X - X_0|$ zu groß, kann man die Strecke zerlegen und Gleichung (14.15) mehrfach anwenden. Damit sich die Fehler nicht addieren, kann man nach jedem Schritt die direkte kinematische Transformation durchführen und von dem korrigierten Punkt aus weiter arbeiten.

Zahlenbeispiel: An einem der IBM 7575 im Robotik-Labor hat die Homeposition die Koordinaten X_0 = (213.46 mm, 51.98 mm) mit $Q_0 = (-30^0, 137.59^0)$. Möchte man auf einer <u>Geraden</u> zum Punkt X_{end} = (300 mm, 400 mm) fahren, so benötigt die Steuerung das zugehörige Q_{end} und verschiedene Zwischenwerte zwischen Q_0 und Q_{end}, damit eine hinreichend genaue Gerade durchlaufen wird.

Die z-Koordinate wird im Beispiel außer acht gelassen, weil ohnehin $q_3 = z$ ist. Das vereinfacht die Rechnung. Die Strecke zwischen X_0 und X_{end} wird in 5 gleich lange Teilstrecken mit den Zwischenpunkten $X_1, X_2, X_3, X_4, X_5 = X_{end}$ unterteilt. Die Koordinaten der Punkte sind dann

$$
\begin{aligned}
X_0 &= (213.46, 51.98) &&= (x_0, y_0)\\
X_1 &= (230.77, 121.58) &&= (x_0 + 17.31, y_0 + 69.60)\\
\\
X_2 &= (248.08, 191.18)\\
X_3 &= (265.39, 260.79)\\
X_4 &= (282.70, 330.39)\\
X_5 &= (300.00, 400.00) &&= X_{end}
\end{aligned}
$$

Setzt man nun $L_1 = 325$ und $L_2 = 225$ (Armlängen des IBM 7575), und folgt dem oben vorgeschlagenen Verfahren, indem man wiederholt die Gleichungen (14.15) und (14.8) benutzt, erhält man das Rechenschema Tabelle 14-2 und die Werte von Tabelle 14-3.

Tabelle 14-2: Schema der numerischer Näherungsrechnung von X_i und Q_i für den IBM 7575 im Falle eines Weges von der Home-Position zum Punkte (300, 400) in 5 Schritten.

					nach Gl. (14.8)		für Gl. (14.15)	
i	x_i	y_i	q_{1i}	q_{2i}	x_{ireal}	y_{ireal}	dx	dy
0	x_0	y_0	q_{10}	q_{20}	x_0	y_0	$x_1 - x_0$	$y_1 - y_0$
1	x_1	y_1	q_{11}	q_{21}	x_{1real}	y_{1real}	$x_2 - x_{1real}$	$y_2 - y_{1real}$
2	x_2	y_2	q_{12}	q_{22}	x_{2real}	y_{2real}	$x_3 - x_{2real}$	$y_3 - y_{2real}$
...	...	...	...	...	...	...	...	...
4	x_4	y_4	q_{14}	q_{24}	x_{4real}	y_{4real}	$x_5 - x_{4real}$	$y_5 - y_{4real}$
5	x_5	y_5	q_{15}	q_{25}	x_{5real}	y_{5real}	$x_5 - x_{5real}$	$y_5 - y_{5real}$
Weitere Iterationen mit festem x_5 und y_5, falls (x_{5real}, y_{5real}) zu weit von (x_5, y_5) entfernt.								

Tabelle 14-3: Werte für X_i und Q_i bei numerischer Näherungsrechnung für den IBM 7575 im Falle eines Weges von der Home-Position zum Punkte (300, 400) in 5 Schritten. Ab Schritt 5 wird nachiteriert, um exakt die Gelenkkordinaten von Punkt (300,400) zu erhalten. Alle Winkel q_{ik} im Bogenmaß. Die Zeile mit dem Index 0 ist gegeben.

i	x_i	y_i	q_{1i}	q_{2i}	nach Gl. (14.8)		für Gl. (14.15)	
					x_{ireal}	y_{ireal}	dx	dy
0	213.46	51.98	-0.5236	2.4014	213.46	51.98	17.310	69.605
1	230.77	121.59	-0.2448	2.2531	219.97	125.05	28.106	66.142
2	248.08	191.19	-0.0545	1.9984	242.49	191.82	22.904	68.970
3	265.39	260.80	+0.1493	1.7270	253.70	262.92	28.998	67.477
4	282.70	330.40	0.3326	1.3796	278.77	326.09	21.245	73.914
5	300.01	400.01	0.5435	0.9614	292.99	392.58	7.011	7.417
5a	300.00	400.00	0.5730	0.8785	299.85	399.61	0.147	0.393
5b	300.00	400.00	0.5746	0.8750	300.00	399.99	0.0004	0.0007
5c	300.00	400.00	0.5746	0.8750	300.00	400.00	-	-

In Bild 14-10 sind die Ergebnisse aus Tabelle 14-3 grafisch dargestellt. Man sieht, daß die Näherungswerte (q_{1i}, q_{2i}) nur recht ungenau die Zielpunkte (x_i, y_i) treffen.

Andererseits sieht man, daß am Endpunkt Nummer 5 die Iteration ziemlich rasch konvergiert. Die Werte (dx,dy) verringern sich in zwei Schritten von (7.011, 7.417) mm auf die zu vernachlässigenden Werte von (0.0004, 0.0007) mm. Die Durchführung dieser Iteration ist nichts anderes als die Anwendung des bekannten Newtonschen Näherungsverfahren in einer verallgemeinerten Form.

Doch sind die analytischen Verfahren in allen Fällen vorzuziehen, in denen sie durchführbar sind. Das trifft z.B. auch für den Scara zu. In anderen Fällen aber muß man eine numerische Methode wählen, z.B. so wie oben gezeigt.

Kreutzer u.a. [22] haben in "Industrieroboter", S. 55, Rechenzeiten für verschiedene Verfahren gegenübergestellt. Dabei zeigt sich, daß das modifizierte Newton-Verfahren bis zu 20 mal soviel Zeit für die inverse kinematische Transformation benötigt, wie verschiedene analytische Methoden. Doch gibt es in manchen Fällen und speziell bei redundanten Robotern keine analytischen Verfahren. Dann muß man numerisch rechnen.

Auf das Problem der Singularität der Jacobi-Matrix, d.h. das Nullwerden von D(J), wird in Vorlesung 15 näher eingegangen.

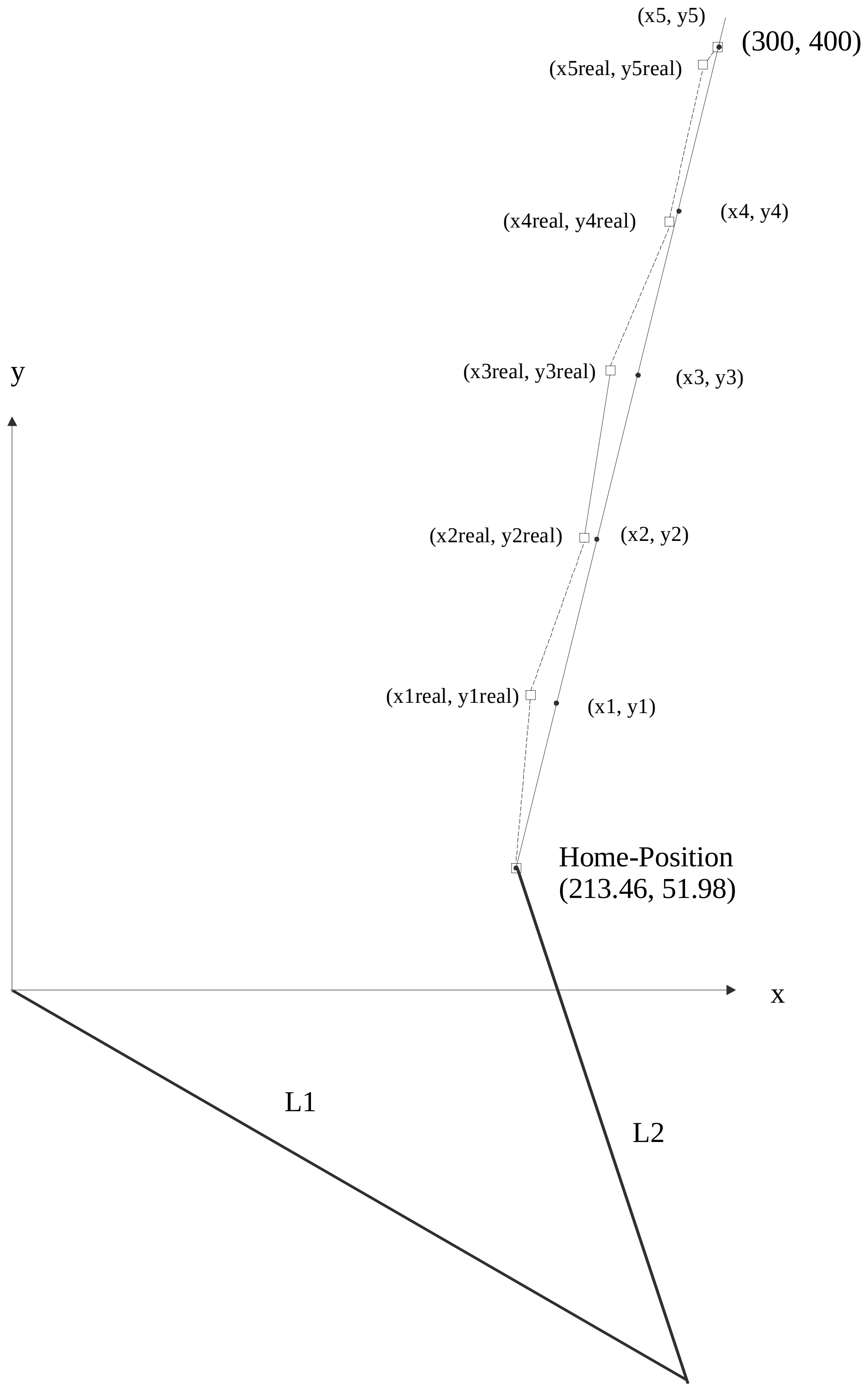


Bild 14-10: Ergebnisse der Näherungsrechnung aus Tabelle 14-3.