61. Вычисление коэффициентов суммы ортогонального ряда. Коэффициенты Фурье и ряды Фурье по ортогональной системе. Геометрические свойства частичных сумм ряда Фурье. Неравенство Бесселя

Вычисление коэффициентов суммы ортогонального ряда

Пусть $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ — ортогональная система (ОС) в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$, $x \in \mathcal{H}$, причём $x = \sum_{k=1}^{\infty} c_k e_k$. Тогда коэффициенты c_k определяются единственным образом по формуле:

$$c_k = \frac{\langle x, e_k \rangle}{\|e_k\|^2}.$$

Определение коэффициентов и ряда Фурье

Пусть $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ — ОС в $\mathcal{H}$, $x \in \mathcal{H}$. Коэффициентами Фурье вектора x называются числа:

$$c_k(x) = \frac{\langle x, e_k \rangle}{\|e_k\|^2}.$$

Рядом Фурье вектора x по ОС $\{e_k\}$ называется ряд:

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k(x) e_k.$$

Свойства частичных сумм ряда Фурье

Пусть $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ — ОС в $\mathcal{H}$, $x \in \mathcal{H}$, $n \in \mathbb{N}$, $S_n = \sum_{k=1}^{n} c_k(x) e_k$, $\mathcal{L} = \mathcal{L}(e_1, \ldots, e_n)$. Тогда:

1. S_n — ортогональная проекция x на $\mathcal{L}$, т.е. $x = S_n + z$, где $z \perp \mathcal{L}$.
2. S_n — элемент наилучшего приближения к x в $\mathcal{L}$, т.е. $\|x - S_n\| = \min_{y \in \mathcal{L}} \|x - y\|$, причём минимум достигается только при $y = S_n$.
3. $\|S_n\| \le \|x\|$.

Неравенство Бесселя

Пусть $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ — ОС в $\mathcal{H}$, $x \in \mathcal{H}$. Тогда:

$$\sum_{k=1}^{\infty} |c_k(x)|^2 \|e_k\|^2 \le \|x\|^2.$$

62. Теорема Рисса-Фишера. Равенство Паресваля.

Теорема Рисса-Фишера

Пусть $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ — ортонормированная система (ОС) в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$, $x \in \mathcal{H}$. Тогда:

1. Ряд Фурье вектора x сходится.
2. $x = \sum_{k=1}^{\infty} c_k(x) e_k + z$, где $z \perp e_k$ для всех k.
3. $x = \sum_{k=1}^{\infty} c_k(x) e_k$ тогда и только тогда, когда $\sum_{k=1}^{\infty} |c_k(x)|^2 \|e_k\|^2 = \|x\|^2$.

Равенство Парсеваля (Уравнение замкнутости)

Ряд Фурье $\sum_{k=1}^{\infty} c_k(x) e_k$ — ортогональный, $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ — ортонормированная система (ОС) в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$, $x \in \mathcal{H}$

$$\sum_{k=1}^{\infty} |c_k(x)|^2 \|e_k\|^2 = \|x\|^2$$

63. Характеристика базиса в гильбертовом пространстве. Процесс ортогонализации Грама-Шмидта.

Определение базиса и связанных понятий

Ортогональная система $\{e_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathcal{H}$ называется **базисом** (*ортогональным базисом*), если любой вектор $x \in \mathcal{H}$ раскладывается в ряд по этой системе: $x = \sum_{k=1}^{\infty} c_k(x) e_k$. Она называется **полной**, если не существует ненулевого вектора, ортогонального всем e_k. Она называется **замкнутой**, если для любого $x \in \mathcal{H}$ выполнено уравнение замкнутости.

Характеристика базиса

Пусть $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ — ОС в $\mathcal{H}$. Следующие утверждения равносильны:

1. $\{e_k\}$ — базис.
2. $\langle x, y\rangle = \sum_{k=1}^{\infty} c_k(x)c_k(y)\|e_k\|^2$ для любых $x, y \in \mathcal{H}$ (обобщенное уравнение замкнутости).
3. $\{e_k\}$ замкнута.
4. $\{e_k\}$ полна.
5. Линейная оболочка системы $\{e_k\}$ плотна в $\mathcal{H}$. $(\forall x \in \mathcal{H}$ и $\forall \mathcal{E} > 0, \exists y \in \{\{c_k\} : ||x-y|| < \mathcal{E}\})$

Процесс ортогонализации Грама-Шмидта

Пусть $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ — линейно независимая система в $\mathcal{H}$. Тогда существует ОНС $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$, такая что $\mathcal{L}(e_1, \ldots, e_n) = \mathcal{L}(x_1, \ldots, x_n)$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Эта ОНС единственна с точностью до множителей λ_k с $|\lambda_k| = 1$ (т.е. $h_k = \lambda_k e_k$ для любой другой ОНС $\{h_k\}$, удовлетворяющей тому же условию).

64. Тригонометрический многочлен, тригонометрический ряд, тригонометрический ряд в комплексной форме. Лемма о вычислении коэффициентов тригонометрического ряда. Тригонометрический ряд Фурье функции (в т.ч. в экспоненциальной форме)

Определение тригонометрического многочлена

Пусть $n \in \mathbb{Z}_+$. Функция T_n вида

$$T_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

называется тригонометрическим многочленом порядка не выше n. Если $|a_n| + |b_n| \neq 0$, то порядок ровно n. Коэффициенты a_k, b_k — вещественные или комплексные числа. T_n — множество всех таких многочленов порядка $\leq n$, $T = \bigcup_{n=0}^{\infty} T_n$.

Тригонометрический ряд и комплексная форма

Тригонометрический ряд имеет вид:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kx + b_k \sin kx).$$

С помощью формул Эйлера $\cos kx = \frac{e^{ikx}+e^{-ikx}}{2}$, $\sin kx = \frac{e^{ikx}-e^{-ikx}}{2i}$ он преобразуется в комплексную форму:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx}.$$

Лемма о вычислении коэффициентов (ортогональность)

Если тригонометрический ряд сходится к функции $f(x)$ в $L_2[-\pi, \pi]$, то его коэффициенты вычисляются по формулам:

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(kx) dx, \quad b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(kx) dx \quad (k \geq 0),$$

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx} dx \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Тригонометрический ряд Фурье функции

Тригонометрическим рядом Фурье функции f, интегрируемой на $[-\pi, \pi]$, называется ряд:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx), \quad \text{где} \quad a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(kx) dx, \quad b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(kx) dx.$$

В экспоненциальной (комплексной) форме:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}, \quad \text{где} \quad c_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx} dx.$$

65. Теорема Римана-Лебега

Теорема Римана-Лебега

1. Если E — измеримое множество ($E \in \mathbb{A}_1$) и функция f интегрируема на E ($f \in L(E)$), то:

$$\int_E f(t) \begin{bmatrix} e^{i\lambda t} \\ \cos \lambda t \\ \sin \lambda t \end{bmatrix} dt \xrightarrow{\lambda\to\infty} 0,$$

(где λ принимает вещественные значения.)

2. Если f интегрируема на основном периоде ($f \in L$), то её коэффициенты Фурье стремятся к нулю:

$$a_k(f) \xrightarrow{k\to\infty} 0, \quad b_k(f) \xrightarrow{k\to\infty} 0, \quad c_k(f) \xrightarrow{k\to\infty} 0.$$

Краткий смысл:

Теорема Римана-Лебега утверждает, что для интегрируемой функции f интеграл от её произведения с быстро осциллирующими функциями ($e^{i\lambda t}$, $\cos \lambda t$, $\sin \lambda t$) стремится к нулю при $\lambda \to \infty$. Это означает, что высокочастотные колебания "усредняют" вклад функции в интеграл. Аналогично, коэффициенты Фурье a_k, b_k, c_k периодической интегрируемой функции затухают с ростом k, что отражает отсутствие значимых высокочастотных компонент в её спектре.

66. Свертка периодических функций, ее элементарные свойства. Ядро Дирихле. Сумма Фурье как свертка

Определение свертки периодических функций

Пусть $f, K \in L[-\pi, \pi]$ (интегрируемые по Лебегу 2π-периодические функции). Сверткой $f * K$ называется функция, заданная для почти всех x формулой:

$$(f * K)(x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)K(t)dt.$$

Свертка определена почти всюду и принадлежит $L[-\pi, \pi]$ (т.е. интегрируема).

Ядро Дирихле

Для $n \in \mathbb{Z}_+$ функция

$$D_n(t) = \frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos kt\right) = \frac{\sin\left((n+\frac{1}{2})t\right)}{2\pi \sin\left(\frac{t}{2}\right)}$$

называется ядром Дирихле порядка n.

Интеграл Дирихле:

$\int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)D_n(t)dt$

Сумма Фурье как свертка

Частичная сумма (порядка n) ряда Фурье функции $f \in L[-\pi, \pi]$ выражается через свертку с ядром Дирихле:

$$S_n(f, x) = (f * D_n)(x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t) D_n(t) dt.$$

Элементарные свойства свертки

- Измеримость и интегрируемость:
  $f * K$ измерима и $f * K \in L[-\pi, \pi]$.
- Коммутативность:
  $f * K = K * f$.
- Коэффициенты Фурье:
  $c_k(f * K) = 2\pi c_k(f) c_k(K)$.
- Непрерывность при $K \in L_q$:
  Если $1 \leq p \leq \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $f \in L_p$, $K \in L_q$, то $f * K$ непрерывна ($f * K \in C$) и $\|f * K\|_\infty \leq \|K\|_q \|f\|_p$.
- Оценка нормы при $K \in L_1$:
  Если $1 \leq p \leq \infty$, $f \in L_p$, $K \in L_1$, то $f * K \in L_p$ и $\|f * K\|_p \leq \|K\|_1 \|f\|_p$.

67. Принцип локализации Римана. Признак Дини и его следствия.

1) Принцип локализации Римана

Пусть $f, g \in L$, $x \in \mathbb{R}$, $\delta \in (0, \pi)$, и функции f и g совпадают на интервале $(x - \delta, x + \delta)$. Тогда разность частичных сумм их рядов Фурье в точке x стремится к нулю при $n \to \infty$:

$$S_n(f, x) - S_n(g, x) \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0.$$

В частности, из сходимости ряда Фурье f в точке x к сумме S следует сходимость ряда Фурье g в точке x к той же сумме S, и наоборот.

Признак Дини сходимости

Пусть $f \in L$, $x \in \mathbb{R}$, $S \in \mathbb{R}$ (или $\mathbb{C}$) и выполняется условие:

$$\int_0^{\pi} \frac{|f(x+t)-2S+f(x-t)|}{t} dt < +\infty. \quad (13.11)$$

Тогда ряд Фурье функции f сходится к сумме S в точке x:

$$S_n(f,x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} S.$$

Следствия признака Дини 1

Если $x \in \mathbb{R}$, $f \in L$ и существуют конечные пределы:

$$f(x\pm) = \lim_{t\to x\pm} f(t), \quad \alpha_\pm = \lim_{t\to 0\pm} \frac{f(x+t)-f(x\pm)}{t}$$

то ряд Фурье f сходится в точке x к $S = \frac{f(x+)+f(x-)}{2}$. Если f непрерывна в x и пределы $\alpha_\pm$ существуют, то ряд сходится к $f(x)$.

Следствия признака Дини 2

Если $f \in L$ имеет конечные односторонние производные в точке x (т.е. $f'_+(x)$ и $f'_-(x)$ существуют и конечны), то её ряд Фурье сходится в x к $f(x)$. В частности, это верно, если f дифференцируема в x. $(a_\pm = f'_\pm(x))$

68. Примеры разложения функций в ряды Фурье. Вычисление сумм $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ и $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$

Разложение функции $f_z(x) = \cos zx$ в ряд Фурье на $[-\pi,\pi]$ при $z \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}$

Функция $f_z(x) = \cos zx$, $x \in [-\pi,\pi]$, является бесконечно дифференцируемой и чётной. Её ряд Фурье сходится к $f_z(x)$ всюду на $[-\pi,\pi]$. Коэффициенты Фурье:

$$a_0(f_z) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \cos zt\, dt = \frac{2\sin \pi z}{\pi z},$$

$$a_k(f_z) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \cos zt \cos kt\, dt = \frac{\sin \pi z}{\pi}(-1)^k\left(\frac{1}{z+k}+\frac{1}{z-k}\right) \quad (k \in \mathbb{N}).$$

Ряд Фурье:

$$\cos zx = \frac{\sin \pi z}{\pi z} + \frac{\sin \pi z}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \left(\frac{1}{z+k} + \frac{1}{z-k} \right) \cos kx, \quad x \in [-\pi, \pi].$$

Разложение $\pi \operatorname{ctg} \pi z$ и $\frac{\pi}{\sin \pi z}$ в суммы простых дробей

При $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ из разложения $\cos zx$ подстановкой $x = \pi$ и $x = 0$ соответственно получаются разложения в ряды (в смысле главного значения):

$$\pi \operatorname{ctg} \pi z = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{z-k}, \quad \frac{\pi}{\sin \pi z} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^k}{z-k}.$$

Вычисление сумм $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ и $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$

1. **Сумма $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$:**
   - Используем тождество Парсеваля для функции $f_{\sqrt{-1}}(x) = \cosh x$ (частный случай $z = i$, но проще для $f(x) = x^2$).
   - Стандартный результат: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.
2. **Сумма $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$:**
   - Подставим $x = \pi$ в разложение функции $g(x) = x^2$ в ряд Фурье на $[-\pi, \pi]$.
   - Ряд Фурье для $g(x) = x^2$: $x^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos nx$.
   - При $x = \pi$: $\pi^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} (\cos n\pi) = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} (-1)^n = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.
   - Отсюда: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.
   - Теперь подставим $x = 0$: $0 = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} (1)$.
   - Отсюда: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = -\frac{\pi^2}{12}$, следовательно, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}$.

69. Общее представление о методах суммирования рядов. Суммирование по Чезаро, суммирование методами Абеля-Пуассона (их перманентность и эффективность)

Суммирование по Чезаро

Пусть дан числовой ряд $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ с частичными суммами $S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$. Средние арифметические Чезаро (первого порядка) определяются как:

$$\sigma_n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} S_k$$

Ряд называется суммируемым по Чезаро к числу S, если существует предел:

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n = S$$

Обозначение: $(C, 1) \sum a_k = S$.

Суммирование методом Абеля-Пуассона

Пусть дан степенной ряд $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$, сходящийся при $|x| < 1$. Суммой ряда методом Абеля-Пуассона называется предел (если он существует):

$$(A) \sum_{k=0}^{\infty} a_k = \lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$$

Перманентность методов

Метод суммирования F называется перманентным (регулярным), если:

1. **Линейность**: $F \sum (\alpha a_k + \beta b_k) = \alpha F \sum a_k + \beta F \sum b_k$.
2. **Согласованность**: Если ряд $\sum a_k$ сходится классически к S, то $F \sum a_k = S$.

Эффективность методов

Метод суммирования F называется эффективным (или сильнее другого метода G), если:

- Любой ряд, суммируемый методом G, суммируем и методом F к той же сумме.
- Существует ряд, суммируемый методом F, но не суммируемый методом G.

70. Аппроксимативная единица и усиленная аппроксимативная единица. Теорема о свойствах свертки с аппроксимативной единицей (без док-ва). Теорема Фейера. Полнота тригонометрической системы в $L^2_{2\pi}$

Аппроксимативная единица

Пусть $D \subset \mathbb{R}$, h_0 — предельная точка D (в $\overline{\mathbb{R}}$). Семейство функций $\{K_h\}_{h\in D}$ называется *аппроксимативной единицей* при $h \to h_0$, если:

1. $\forall h \in D$: $K_h \in L^1[-\pi, \pi]$ и $\int_{-\pi}^{\pi} K_h(t)dt = 1$.
2. $\exists M > 0$: $\forall h \in D$, $\int_{-\pi}^{\pi} |K_h(t)|dt \le M$.
3. $\forall \delta \in (0, \pi)$: $\int_{E_\delta} |K_h(t)|dt \underset{h \to h_0}{\longrightarrow} 0$, где $E_\delta = [-\pi, \pi] \setminus [-\delta, \delta]$.

Усиленная аппроксимативная единица

Семейство $\{K_h\}_{h \in D}$ называется *усиленной аппроксимативной единицей* при $h \to h_0$, если:

1. Выполнены условия 1, 2 (из прошлого пункта) аппроксимативной единицы.
2. $\forall h \in D$: $K_h \in L^\infty[-\pi, \pi]$.
3. $\forall \delta \in (0, \pi)$: $\operatorname*{ess\,sup}_{t \in E_\delta} |K_h(t)| \underset{h \to h_0}{\longrightarrow} 0$.

3) Теорема о свойствах свертки

Пусть $\{K_h\}$ — аппроксимативная единица при $h \to h_0$. Тогда:

1. Если $f \in C_{2\pi}$ (непрерывная 2π-периодическая), то $f * K_h \xrightarrow{h \to h_0} f$ *равномерно*.
2. Если $f \in L^p_{2\pi}$, $1 \le p < \infty$, то $\|f * K_h - f\|_p \xrightarrow{h \to h_0} 0$.
3. Если $\{K_h\}$ — *усиленная* аппроксимативная единица, $f \in L^1_{2\pi}$, и f непрерывна в точке x, то $(f * K_h)(x) \xrightarrow{h \to h_0} f(x)$.

Теорема Фейера

Ядра Фейера $\Phi_n(t) = \frac{1}{2\pi(n+1)} \left(\frac{\sin \frac{(n+1)t}{2}}{\sin \frac{t}{2}} \right)^2$ образуют *усиленную* аппроксимативную единицу при $n \to \infty$. Следовательно:

1. Если $f \in C_{2\pi}$, то $\sigma_n(f) \to f$ равномерно.
2. Если $f \in L^p_{2\pi}$, $1 \le p < \infty$, то $\|\sigma_n(f) - f\|_p \to 0$.
3. Если $f \in L^1_{2\pi}$ непрерывна в точке x, то $\sigma_n(f, x) \to f(x)$.

Полнота тригонометрической системы в $L^2_{2\pi}$

Тригонометрическая система $\{e^{ikx}\}_{k \in \mathbb{Z}}$ (или $\{1, \cos kx, \sin kx\}_{k=1}^\infty$) полна в $L^2_{2\pi}$. То есть:

$$\forall f \in L^2_{2\pi}: \quad \|S_n(f) - f\|_2 \xrightarrow{n \to \infty} 0,$$

где $S_n(f)$ — частичная сумма ряда Фурье. Эквивалентно: если все коэффициенты Фурье f равны нулю, то $f = 0$ п.в.

71. Теорема Вейерштрасса о тригонометрических многочленах. Теорема Вейерштрасса об алгебраических многочленах

Теорема Вейерштрасса о тригонометрических многочленах

Любая непрерывная периодическая функция $f \in C_{(a,b)}$ может быть равномерно приближена тригонометрическими многочленами $T(x) = \sum_{k=0}^{\infty} q_k x^k$, где остаток $\|T(x) - P_N(x)\|_{C_{at}} \to 0$ при $N \to \infty$.

Теорема Вейерштрасса об алгебраических многочленах

Для любой непрерывной функции $f \in C_{at}$ на отрезке $[a, b]$ существует последовательность алгебраических многочленов $P_N(x) = \sum_{j=0}^{N} q_j x^k$, такая что $\|f - P_N\|_{L^p} \leq \epsilon$ при достаточно больших N.