1. Свойства интегралов от неотрицательных функций (в т.ч. теорема Леви для рядов).

1. Основные свойства

Монотонность

Если $0 \le f(x) \le g(x)$ п.в. на X, то:

$$\int_X f \, d\mu \le \int_X g \, d\mu.$$

Линейность

Для $a, b \ge 0$:

$$\int_X (af + bg) \, d\mu = a \int_X f \, d\mu + b \int_X g \, d\mu.$$

Аддитивность по области

Если $A \cap B = \emptyset$, то:

$$\int_{A \cup B} f \, d\mu = \int_A f \, d\mu + \int_B f \, d\mu.$$

Невозрастание меры

Если $A \subseteq B$, то:

$$\int_A f \, d\mu \le \int_B f \, d\mu.$$

2. Теорема Леви для рядов

Если $f_k \ge 0$ и измеримы, то:

$$\int_E \sum_{k=1}^{\infty} f_k \, d\mu = \sum_{k=1}^{\infty} \int_E f_k \, d\mu.$$

2. Неравенство Чебышева

Суммируемая функция $f \in L(E, \mu)$

Определение

Функция `f` называется суммируемой на `E` (пишут `f ∈ L(E, μ)`), если:

$$\int_E |f| \, d\mu < +\infty$$

Свойство

Если `f` суммируема, то она конечна почти всюду на `E`.

Измеримая функция $f \in S(E)$

$S(E)$ — это множество всех измеримых функций $f : E \to \mathbb{R}$, принимающих конечное число значений.

$$S(E) = \{f \text{ измерима} \mid f(E) = \{c_1, \ldots, c_n\}, \, c_i \in \mathbb{R}, \, n < \infty\}$$

Формулировка неравенства Чебышева

Для `f ∈ S(E)` (классу измеримых функций), `t > 0`:

$$\mu\{x \in E : |f(x)| \geq t\} \leq \frac{1}{t} \int_E |f| \, d\mu$$

Следствие 1

Если $f \in L(E, \mu)$, то $\mu(\{x \in E : |f(x)| = +\infty\}) = 0$.

Следствие 2

Если $f \geq 0$ и $\int_E f d\mu = 0$, то $f = 0$ почти всюду на E.

3. Приближение интеграла интегралом по множеству конечной меры

Определение

Пусть $f \in L(E, \mu)$, где $\mu E = +\infty$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует подмножество $E_\varepsilon \subset E$ такое, что:

1. $\mu E_\varepsilon < +\infty$ (множество E_ε имеет конечную меру),
2. $\int_{E \setminus E_\varepsilon} |f| \, d\mu < \varepsilon$ (интеграл от $|f|$ по дополнению $E \setminus E_\varepsilon$ меньше ε).

Счетная аддитивность интеграла

Если $E = \bigcup_k E_k$, где E_k измеримы и попарно не пересекаются, и интеграл $\int_E f \, d\mu$ существует, то:

$$\int_E f \, d\mu = \sum_k \int_{E_k} f \, d\mu.$$

4. Теорема Фату

liminf

$$\liminf_{n \to \infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k$$

Фату для неотрицательных измеримых функций

Пусть $f_n \in S(E)$, $f_n \geq 0$. Тогда:

$$\int_E \liminf_{n \to \infty} f_n \, d\mu \leq \liminf_{n \to \infty} \int_E f_n \, d\mu.$$

Фату для поточечного предела

Пусть $f_n, f \in S(E)$, $f_n \geq 0$, $f_n \to f$ почти везде на E. Тогда:

$$\int_E f \, d\mu \leq \liminf_{n \to \infty} \int_E f_n \, d\mu.$$

5. Теорема Лебега о мажорированной сходимости

Мажоранта

Функция (или число), которая доминирует (превосходит) другую функцию (или последовательность) на заданном множестве.

Теорема Лебега

Если последовательность измеримых функций f_n сходится к f почти везде на E, и существует суммируемая мажоранта $\phi \in L(E, \mu)$ (т.е. $|f_n| \leq \phi$ почти везде), то предельный переход под знаком интеграла корректен:

$$\lim_{n \to \infty} \int_E f_n \, d\mu = \int_E f \, d\mu.$$

Следствие Теоремы Лебега (для множеств конечной меры)

Если $\mu(E) < +\infty$, f_n равномерно ограничены ($|f_n| \leq K$) и $f_n \to f$ почти везде, то

$$\lim_{n \to \infty} \int_E f_n \, d\mu = \int_E f \, d\mu.$$

Ограниченность семейства функций

Свойство семейства вещественных функций $\{f_a\}_{a \in A}$, где A — некоторое множество индексов, X — произвольное множество. Означает, что все функции семейства ограничены одной константой C:

$$\exists C > 0 \quad \forall a \in A \quad \forall x \in X \quad |f_a(x)| < C.$$

6.Интеграл Лебега от функции непрерывной на замкнутом промежутке; сравнение несобственого интеграла с интегралом Лебега.

Определение интеграла Римана

Функция $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ интегрируема по Риману, если существует предел интегральных сумм $\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$ при стремлении диаметра разбиения к нулю.

Критерий Лебега интегрируемости по Риману

Функция $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ интегрируема по Риману ($f \in R[a, b]$), если она ограничена и множество её точек разрыва имеет нулевую меру.

Сравнение интегралов Римана и Лебега

Если $f \in R[a, b]$, то $f \in L[a, b]$, и значения интегралов совпадают: $(L) \int_a^b f = (R) \int_a^b f$.

Несобственный интеграл и интеграл Лебега

Несобственный интеграл Римана на $[a, c]$ — предел $\lim_{b \to a} \int_b^c f(t)dt$. Он абсолютно сходится, если сходится $\int_a^c |f(t)|dt$.

7. Вычисление меры множества по мерам сечений

Теорема о связи меры множества с мерами его сечений

1. Измеримость сечений

Для множества $E \subseteq \mathbb{R}^{n+m}$ и фиксированного $x \in \mathbb{R}^n$ сечение определяется как:

$$E(x) = \{y \in \mathbb{R}^m \mid (x, y) \in E\}$$

Если E - измеримо по Лебегу в $\mathbb{R}^{n+m}$, то для почти всех $x \in \mathbb{R}^n$ сечения $E(x)$ измеримы в $\mathbb{R}^m$

2. Измеримость функции мер

Для измеримого множества $E \subseteq \mathbb{R}^{n+m}$ функция меры сечений определяется как:

$$f_E : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad f_E(x) = \mu(E(x))$$

$E(x) = \{y \in \mathbb{R}^m \mid (x,y) \in E\}$ - сечение множества
μ - мера Лебега в $\mathbb{R}^m$

3. Формула меры

Мера $\mu_{n+m}(E)$ — это стандартная мера Лебега на $\mathbb{R}^{n+m}$.

$$\mu_{n+m}(E) = \int_{\mathbb{R}^n} \mu_m(E(x))\, dx.$$

Измеримость по Лебегу

Множество $E \subset \mathbb{R}^n$ измеримо по Лебеге, если для любого $\varepsilon > 0$ существуют:
Открытое множество $U \supset E$ и замкнутое $F \subset E$, такие что $\mu_n(U \setminus F) < \varepsilon$.

8. Мера декартова произведения и мера Лебега как произведение мер

Мера декартова произведения

$\mathcal{A}_n$ - σ-алгебра измеримых по Лебегу множеств в $\mathbb{R}^n$
Для измеримых множеств $A \in \mathcal{A}_n$, $B \in \mathcal{A}_m$ их декартово произведение $A \times B$ измеримо в $\mathbb{R}^{n+m}$, и его мера равна произведению мер:

$$\mu_{n+m}(A \times B) = \mu_n(A) \cdot \mu_m(B).$$

Мера Лебега как произведение мер

Мера Лебега на $\mathbb{R}^n$ — это n-кратное произведение одномерных мер Лебега:

$$\lambda^n = \underbrace{\lambda^1 \times \lambda^1 \times \cdots \times \lambda^1}_{n \text{ раз}}.$$

9. Мера графика и подграфика

График функции (Гf)

Определение:

Для $f : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ график — множество точек $(x, y) \in \mathbb{R}^{n+1}$, где $y = f(x)$.

Подграфик функции (Qf)

Определение:

Для $f : E \subset \mathbb{R}^n \to [0, +\infty]$ подграфик — множество точек (x, y), где $0 \le y \le f(x)$.

Мера графика

Если $E \subset \mathbb{R}^n$, $f \in S(E)$ (измерима по Лебегу), то $\Gamma f \in \mathcal{A}_{n+1}$ и $\mu_{n+1}(\Gamma f) = 0$.

Мера подграфика

Пусть $E \in \mathcal{A}_n$, $f : E \to [0, +\infty]$. Тогда:

$$Q_f \text{ измерим} \Leftrightarrow f \text{ измерима, и } \mu_{n+1}(Q_f) = \int_E f \, d\mu_n.$$

Доп:

$\mathcal{A}_n$ - σ-алгебра измеримых по Лебегу множеств в $\mathbb{R}^n$

10. Теорема Тонелли и Фубини

Теорема Тонелли (для неотрицательных функций)

Пусть $E \subset \mathbb{R}^{n+m}$, $f \in S(E \to [0, +\infty])$. Тогда справедливы следующие утверждения.

1. При почти всех $x \in \mathbb{R}^n$ $f(x, \cdot) \in S(E(x))$.
2. Функция I, заданная формулой $I(x) = \int_{E(x)} f(x, y) dy$, измерима на $\mathbb{R}^n$.

3. $\int_E f d\mu_{n+m} = \int_{\mathbb{R}^n} I(x) dx$.

Теорема Фубини (для суммируемых функций)

Пусть $E \subset \mathbb{R}^{n+m}$, $f \in L(E)$. Тогда справедливы следующие утверждения.

1. При почти всех $x \in \mathbb{R}^n$ $f(x, \cdot) \in L(E(x))$.
2. Функция I, заданная формулой $I(x) = \int_{E(x)} f(x, y) dy$, суммируема на $\mathbb{R}^n$.
3. $\int_E f d\mu_{n+m} = \int_{\mathbb{R}^n} I(x) dx$.

Основное отличие теорем

Теорема Тонелли применяется к неотрицательным измеримым функциям $(f \geq 0)$, но не требует их суммируемости. Теорема Фубини применяется к функциям произвольного знака, но требует их суммируемости на E $(f \in L(E))$. При выполнении условий Фубини справедливо равенство повторных интегралов.

Интегральная функцией сечения $I(x)$

Функция, определяемая как $I(x) = \int_{E(x)} f(x, y)\, dy$, где $E(x) = \{y \in \mathbb{R}^m : (x, y) \in E\}$ — сечение множества E при фиксированном x.

11. Интеграл Эйлера-Пуассона

Определение:

Интеграл Эйлера-Пуассона — это несобственный интеграл вида $I = \int_0^{+\infty} e^{-x^2}\, dx$, значение которого равно $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Ключевые шаги:

1. Замена $I^2 = \iint e^{-(x^2+y^2)}\, dx\, dy$.
2. Переход к полярным координатам: $\int_0^{+\infty} \int_0^{\pi/2} r e^{-r^2}\, d\varphi\, dr$.
3. Вычисление: $\frac{\pi}{4}$, откуда $I = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

12. Мера n-мерного шара и сферы

Определение:

Мера Лебега μ_n n-мерного шара $\overline{B}_n(a, R) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x - a| \le R\}$ вычисляется по формуле:

$$\mu_n \overline{B}_n(a, R) = \frac{2^n}{n!} \left(\frac{\pi}{2}\right)^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} R^n.$$

Примеры:

- $\mu_2 \overline{B}_2(a, R) = \pi R^2$ (круг),
- $\mu_3 \overline{B}_3(a, R) = \frac{4}{3}\pi R^3$ (шар),
- $\mu_4 \overline{B}_4(a, R) = \frac{\pi^2}{2} R^4$.

13. Замена переменной в интеграле, образ и плотность меры

Общая схема замены переменной

Для пространств с мерами (X, A, μ), (Y, B, v) и измеримой функции $h \ge 0$, если $vB = \int_{\Phi^{-1}(B)} h \, d\mu$ и f измерима на Y, то:

$$\int_Y f \, dv = \int_X (f \circ \Phi) h \, d\mu.$$

Образ меры

Если $h \equiv 1$, то $v = \Phi(\mu)$ (образ меры μ), и:

$$\int_Y f \, dv = \int_X f \circ \Phi \, d\mu.$$

Плотность меры

Если $vA = \int_A h\, d\mu$, то h — плотность v относительно μ, и:

$$\int_X f\, dv = \int_X fh\, d\mu.$$

Доп

Φ – это измеримое отображение (функция), которое "переводит" точки из пространства X в пространство Y.
h – весовая функция, это неотрицательная измеримая функция, которая определяет, как мера μ на X преобразуется в меру v на Y.

14. Естественная мера на кривой и на поверхности. Криволинейный и поверхностный интегралыпервого рода для элементарных поверхностей

1. Мера, порожденная кривой

Пусть $\gamma : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}^n$ - кривая. Для множества B определим $\mathcal{A} = \{B : \gamma^{-1}(B) \text{ измеримо}\}$ (σ-алгебра). Мера m_γ на кривой задается формулой:

$$m_\gamma(B) = \int_{\gamma^{-1}(B)} \|\gamma'(t)\| dt$$

2. Мера, порожденная поверхностью

Пусть $\varphi : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ - параметризация поверхности (φ гладкая). Для множества B мера m_S на поверхности задается формулой:

$$m_S(B) = \int_{\varphi^{-1}(B)} \|\varphi_u \times \varphi_v\| dudv$$

3. Криволинейный интеграл первого рода

Пусть $\gamma : \langle a, b \rangle \to \mathbb{R}^n$ - кривая, $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $x = \gamma(t)$. Интеграл функции f по кривой γ в множестве A определяется как:

$$\int_A f d\gamma = \int_{\gamma^{-1}(A)} f(\gamma(t)) \cdot \|\gamma'(t)\| dt$$

4. Поверхностный интеграл первого рода

Пусть S - поверхность, заданная параметризацией $\varphi : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $x = \varphi(u)$, $A \subseteq \mathbb{R}^3$. Для функции f, определенной на поверхности, интеграл по множеству A задается формулой:

$$\int_A f dS = \int_{\varphi^{-1}(A)} f(\varphi(u)) \cdot \|\varphi_u \times \varphi_v\| du dv$$

15. Преобразование меры Лебега при диффеоморфизме. Замена переменной в интеграле Лебега. Использование полярных, цилиндрических и сферических координат в кратных интегралах.

Диффеоморфизм

Пусть $G, V \subset \mathbb{R}^n$ — открытые множества. Отображение $\Phi : G \to V$ называется *диффеоморфизмом*, если:

- Φ биективно
- $\Phi \in C^{(1)}(G \to V)$
- $\Phi^{-1} \in C^{(1)}(V \to G)$.
  Якобиан $\det \Phi' \neq 0$ во всех точках G.

Преобразование меры Лебега

Пусть $G \subset \mathbb{R}^n$ открыто, $\Phi : G \to \mathbb{R}^n$ — диффеоморфизм. Тогда для $E \in \mathcal{A}_n(G)$:

$$\mu(\Phi(E)) = \int_E |\det \Phi'(x)| d\mu.$$

Замена переменных в интеграле Лебега

Пусть $G \subset \mathbb{R}^n$ открыто, $\Phi : G \to \mathbb{R}^n$ — диффеоморфизм, $E \in \mathcal{A}_n(G)$, $f \in \mathcal{S}(\Phi(E))$. Тогда:

$$\int_{\Phi(E)} f(y) d\mu(y) = \int_E f(\Phi(x)) \cdot |\det \Phi'(x)| d\mu(x).$$

Равенство выполняется, если существует один из интегралов.

Классические замены координат

Полярные ($\mathbb{R}^2$): $x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi, \quad |\det \Phi'| = r$
Цилиндрические ($\mathbb{R}^3$): $x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi,\ z = h, \quad |\det \Phi'| = r$
Сферические ($\mathbb{R}^3$): $x = r\cos\varphi\cos\psi,\ y = r\sin\varphi\cos\psi,\ z = r\sin\psi, \quad |\det \Phi'| = r^2|\cos\psi|$

Доп:

$\det D\varphi$ - якобиан.

16. Мера Лебега-Стилтьеса и дискретная мера

Полукольцо ячеек

Полукольцо ячеек P_Δ — это семейство промежутков вида $[a, b)$ (или других типов: $(a, b]$, $[a, b]$, (a, b)), замкнутое относительно пересечения и таких, что разность двух ячеек представима в виде конечного объединения непересекающихся ячеек из P_Δ.

Мера Лебега-Стилтьеса

Мера μ_g на полукольце ячеек P_Δ, заданная через возрастающую непрерывную слева функцию g как $v_g[a, b] = g(b) - g(a)$, и стандартно распространённая на σ-алгебру A_g.

Дискретная мера Лебега-Стилтьеса

Для функции g со скачками h_k в точках a_k:

$$\mu_g(A) = \sum_{a_k \in A} h_k$$

где A — любое измеримое подмножество числовой прямой (например, интервал, отрезок или точечное множество).

Ключевая связь

Дискретная мера — частный случай меры Лебега-Стилтьеса, где g кусочно-постоянна со скачками в точках носителя. Это позволяет единообразно работать как с непрерывными, так и дискретными распределениями.

17. Интеграл Лебега-Стилтьеса по мере, порожденной абсолютно непрерывной функцией

1. Определение локально абсолютно непрерывной функции

Функция $g : \Delta \to \mathbb{R}$ называется локально абсолютно непрерывной на промежутке Δ ($g \in AC_{loc}(\Delta)$), если существует точка $x_0 \in \Delta$ и функция $h \in L_{loc}(\Delta)$ такие, что для всех $x \in \Delta$ выполняется:

$$g(x) = \int_{x_0}^{x} h d\mu + g(x_0).$$

2. Теорема об интеграле по абсолютно непрерывной функции

Пусть Δ — промежуток, $x_0 \in \Delta$, $h \in L_{loc}(\Delta)$, $h \geq 0$, $g(x) = \int_{x_0}^{x} h d\mu + g(x_0)$, $E \in A_1(\Delta)$ (измеримо по Лебегу), $f \in S(E)$ (измерима и знакопостоянна на E). Тогда:

$$\int_E f dg = \int_E f h d\mu,$$

причем если существует один из этих интегралов, то существует и другой, и они равны.

3. Следствие для гладкой функции (C¹-случай)

Пусть Δ — промежуток, $g \in C^{(1)}(\Delta)$ (непрерывно дифференцируема), $g' \geq 0$, $E \in A_1(\Delta)$, $f \in S(E)$. Тогда:

$$\int_E f dg = \int_E f g' d\mu,$$

причем если существует один из этих интегралов, то существует и другой, и они равны.

18. Формула Фруллани

Дано: $a, b > 0$, $f \in C(0; +\infty)$.

$$I(a,b) = \int_0^\infty (f(ax) - f(bx))\, dx$$

1. Если $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) \in \mathbb{R}$ (существует и конечен), то:

$$I(a,b) = -\left(\lim_{x \to 0^+} f(x)\right) \ln \frac{a}{b}$$

2. Если $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) \in \mathbb{R}$ и $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) \in \mathbb{R}$, то:

$$I(a,b) = \left(\lim_{x \to 0^+} f(x) - \lim_{x \to +\infty} f(x)\right) \ln \frac{b}{a}$$

3. Если $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) \in \mathbb{R}$ (существует и конечен), то:

$$I(a,b) = \left(\lim_{x \to +\infty} f(x)\right) \ln \frac{a}{b}$$

19. Локальное условие Лебега для интегралов зависящих от параметра. Равномерная

сходимостьнесобственных интегралов. Признаки Вейерштрасса, Дирихле и Абеля равномерной сходимости несобственных интегралов

Локальное условие Лебега для интегралов, зависящих от параметра

Пусть функция $f(x, y)$ интегрируема по x на $[a, +\infty)$ при каждом $y \in Y$ и удовлетворяет условию:

$$\exists g(x) \in L^1([a, +\infty)) : |f(x, y)| \leq g(x) \text{ для почти всех } x \text{ и всех } y \in Y$$

Тогда интеграл $\int_a^\infty f(x, y)dx$ сходится равномерно по $y \in Y$.

Равномерная сходимость несобственных интегралов

Интеграл $\int_a^{+\infty} f(x, y)dx$ сходится равномерно на множестве Y, если:

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists A = A(\varepsilon) > a : \forall R > A, \forall y \in Y \Rightarrow \left| \int_R^{+\infty} f(x, y)dx \right| < \varepsilon$$

где R - это нижний предел интегрирования для остатка интеграла.

Критерий Коши равномерной сходимости

Интеграл $\int_a^\infty f(x, y)dx$ сходится равномерно на Y тогда и только тогда, когда:

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists A > a : \forall R_1, R_2 > A, \forall y \in Y \Rightarrow \left| \int_{R_1}^{R_2} f(x, y)dx \right| < \varepsilon$$

где R_1, R_2 - Это произвольные точки на оси x, лежащие правее A.

Признак Вейерштрасса

Если $|f(x, y)| \leq g(x)$ для всех $x \geq a$, $y \in Y$ и $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ сходится, то $\int_a^{+\infty} f(x, y)dx$ сходится равномерно на Y.

Признак Дирихле

Пусть:

1. $\left|\int_a^R f(x,y)dx\right| \leq M$ для всех $R > a, y \in Y$
2. При каждом $y \in Y$ функция $g(x,y)$ монотонна по x
3. $g(x,y) \rightrightarrows 0$ при $x \to +\infty$ на Y

Тогда $\int_a^\infty f(x,y)g(x,y)dx$ сходится равномерно на Y ($\rightrightarrows$ это сходится равномерно).

Признак Абеля

Пусть:

1. $\int_a^\infty f(x,y)dx \rightrightarrows$ по y (сходится равномерно), при $x \to \infty$ на Y
2. $g(x,y)$ равномерно ограничена: $|g(x,y)| \leq M$ для всех $x \geq a, y \in Y$
3. При каждом $y \in Y$ функция $g(x,y)$ монотонна по x

Тогда $\int_a^{+\infty} f(x,y)g(x,y)dx \rightrightarrows$ на Y.

Доп:

$L^1(X)$ -пространство абсолютно интегрируемых функций на X (интеграл понимается в смысле Лебега):

$$L^1(X) = \left\{f : X \to \mathbb{R} \,\middle|\, \int_X |f(x)|\, dx < +\infty\right\}$$

Y - произвольное множество, на котором определен параметр. $([c,d])$

20. Связь (равномерной) сходимости несобственного интеграла с (равномерной) сходимостью ряда из определенных интегралов.

Несобственный интеграл

$$I(y) = \int_a^\infty f(x, y)\, dx$$

Ряд из кусочных интегралов

$$\sum_{k=1}^\infty u_k(y) = \sum_{k=1}^\infty \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x, y)\, dx$$

Критерий равномерной сходимости

1. Интеграл → Ряд:
   Если $I(y)$ сходится равномерно, то для любого разбиения ряд $\sum u_k(y)$ сходится равномерно (так как "хвост" ряда соответствует "хвосту" интеграла).
2. Ряд → Интеграл:
   Если для какого-то разбиения ряд $\sum u_k(y)$ сходится равномерно, то $I(y)$ сходится равномерно (поскольку частичные суммы ряда совпадают с интегралами $\int_a^{x_N} f(x, y)\, dx$).