61. Вычисление коэффициентов суммы ортогонального ряда. Коэффициенты Фурье и ряды Фурье по ортогональной системе. Геометрические свойства частичных сумм ряда Фурье. Неравенство Бесселя

Вычисление коэффициентов суммы ортогонального ряда

Пусть $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ — ортогональная система (ОС) в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$, $x \in \mathcal{H}$, причём $x = \sum_{k=1}^{\infty} c_k e_k$. Тогда коэффициенты c_k определяются единственным образом по формуле:

$$c_k = \frac{\langle x, e_k \rangle}{\|e_k\|^2}.$$

Смысл:

Эта формула позволяет найти коэффициенты разложения вектора x по ортогональной системе. Она гарантирует, что если вектор можно представить в виде ряда по ортогональным векторам, то коэффициенты вычисляются через скалярное произведение. Это прямое обобщение проекции вектора на координатные оси в ортогональном базисе.

Определение коэффициентов и ряда Фурье

Пусть $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ — ОС в $\mathcal{H}$, $x \in \mathcal{H}$. Коэффициентами Фурье вектора x называются числа:

$$c_k(x) = \frac{\langle x, e_k \rangle}{\|e_k\|^2}.$$

Рядом Фурье вектора x по ОС $\{e_k\}$ называется ряд:

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k(x) e_k.$$

Смысл:

Коэффициенты Фурье показывают "вклад" каждого элемента ортогональной системы e_k в вектор x. Сам ряд Фурье — это попытка восстановить x как бесконечную линейную комбинацию элементов ОС. Геометрически $c_k(x)e_k$ — это проекция x на прямую, порождённую вектором e_k.

Свойства частичных сумм ряда Фурье

Пусть $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ — ОС в $\mathcal{H}$, $x \in \mathcal{H}$, $n \in \mathbb{N}$, $S_n = \sum_{k=1}^{n} c_k(x) e_k$, $\mathcal{L} = \mathcal{L}(e_1, \ldots, e_n)$. Тогда:

1. S_n — ортогональная проекция x на $\mathcal{L}$, т.е. $x = S_n + z$, где $z \perp \mathcal{L}$.
2. S_n — элемент наилучшего приближения к x в $\mathcal{L}$, т.е. $\|x - S_n\| = \min_{y \in \mathcal{L}} \|x - y\|$, причём минимум достигается только при $y = S_n$.
3. $\|S_n\| \le \|x\|$.

Смысл:

Частичная сумма ряда Фурье S_n обладает ключевыми геометрическими свойствами. Во-первых, это проекция x на подпространство $\mathcal{L}$, натянутое на первые n векторов системы — значит, разность $x - S_n$ ортогональна этому подпространству. Во-вторых, S_n даёт наилучшее приближение к x векторами из $\mathcal{L}$. В-третьих, норма проекции не превосходит нормы самого вектора.

Неравенство Бесселя

Пусть $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ — ОС в $\mathcal{H}$, $x \in \mathcal{H}$. Тогда:

$$\sum_{k=1}^{\infty} |c_k(x)|^2 \|e_k\|^2 \le \|x\|^2.$$

Смысл:

Неравенство Бесселя утверждает, что сумма квадратов коэффициентов Фурье (взвешенных по нормам $\|e_k\|^2$) не превосходит квадрата нормы вектора x. Оно следует из свойства $\|S_n\| \le \|x\|$ и равенства $\|S_n\|^2 = \sum_{k=1}^{n} |c_k(x)|^2 \|e_k\|^2$ при переходе к пределу $n \to \infty$. Это гарантирует сходимость ряда из квадратов коэффициентов.

62. Теорема Рисса-Фишера. Равенство Паресваля.

Теорема Рисса-Фишера

Пусть $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ — ортонормированная система (ОС) в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$, $x \in \mathcal{H}$. Тогда:

1. Ряд Фурье вектора x сходится.
2. $x = \sum_{k=1}^{\infty} c_k(x) e_k + z$, где $z \perp e_k$ для всех k.
3. $x = \sum_{k=1}^{\infty} c_k(x) e_k$ тогда и только тогда, когда $\sum_{k=1}^{\infty} |c_k(x)|^2 \|e_k\|^2 = \|x\|^2$.

Смысл:

Эта теорема гарантирует сходимость ряда Фурье для любого вектора в гильбертовом пространстве. Она также утверждает, что вектор можно разложить в этот ряд плюс остаток, ортогональный всей системе. Критерий точного представления вектора рядом Фурье — равенство Парсеваля.

Равенство Парсеваля (Уравнение замкнутости)

Ряд Фурье $\sum_{k=1}^{\infty} c_k(x)e_k$ — ортогональный, $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ — ортонормированная система (ОС) в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$, $x \in \mathcal{H}$

$$\sum_{k=1}^{\infty} |c_k(x)|^2 \|e_k\|^2 = \|x\|^2$$

Смысл:

Это равенство означает, что квадрат нормы вектора x равен сумме квадратов модулей его коэффициентов Фурье (с учетом норм базисных элементов). Оно выполняется, когда ортонормированная система является полной (базисом), и не выполняется, если в системе "не хватает" элементов для точного представления вектора.

63. Характеристика базиса в гильбертовом пространстве. Процесс ортогонализации Грама-Шмидта.

Определение базиса и связанных понятий

Ортогональная система $\{e_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathcal{H}$ называется **базисом** (*ортогональным базисом*), если любой вектор $x \in \mathcal{H}$ раскладывается в ряд по этой системе: $x = \sum_{k=1}^{\infty} c_k(x)e_k$. Она называется **полной**, если не существует ненулевого вектора, ортогонального всем e_k. Она называется **замкнутой**, если для любого $x \in \mathcal{H}$ выполнено уравнение замкнутости.

Смысл:

Базис позволяет представить любой вектор пространства как бесконечную сумму (ряд) по базисным элементам. Полнота означает, что система "охватывает" всё пространство — нет ненулевых векторов, "спрятанных" от неё. Замкнутость формально связывает норму вектора с суммой квадратов его коэффициентов в разложении (уравнение Парсеваля).

Характеристика базиса

Пусть $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ — ОС в $\mathcal{H}$. Следующие утверждения равносильны:

1. $\{e_k\}$ — базис.
2. $\langle x, y\rangle = \sum_{k=1}^{\infty} c_k(x)c_k(y)\|e_k\|^2$ для любых $x, y \in \mathcal{H}$ (обобщенное уравнение замкнутости).
3. $\{e_k\}$ замкнута.
4. $\{e_k\}$ полна.
5. Линейная оболочка системы $\{e_k\}$ плотна в $\mathcal{H}$. $(\forall x \in \mathcal{H}$ и $\forall \mathcal{E} > 0, \exists y \in \{\{c_k\} : ||x - y|| < \mathcal{E}\})$

Смысл:

Эта теорема даёт пять разных взглядов на то, когда ортогональная система становится базисом. Ключевые идеи: возможность разложения любого вектора (1), обобщение теоремы Пифагора на скалярные произведения (2), выполнение уравнения Парсеваля (3), отсутствие "пропущенных" направлений (4) и возможность сколь угодно точно приблизить любой вектор конечными комбинациями базисных (5). Все они оказываются одинаково сильными условиями.

Процесс ортогонализации Грама-Шмидта

Пусть $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ — линейно независимая система в $\mathcal{H}$. Тогда существует ОНС $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$, такая что $\mathcal{L}(e_1, \ldots, e_n) = \mathcal{L}(x_1, \ldots, x_n)$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Эта ОНС единственна с точностью до множителей λ_k с $|\lambda_k| = 1$ (т.е. $h_k = \lambda_k e_k$ для любой другой ОНС $\{h_k\}$, удовлетворяющей тому же условию).

Смысл:

Процесс Грама-Шмидта позволяет преобразовать любую линейно независимую систему векторов в ортонормированную систему (ОНС), которая порождает те же самые конечномерные подпространства на каждом шаге. Это как построение "перпендикулярных осей" из исходных "косых" направлений. Единственность с точностью до фазового множителя ($\lambda_k = e^{i\phi_k}$) означает, что базисные векторы можно повернуть в их собственной плоскости, не меняя натянутое подпространство и ортонормированность.

64. Тригонометрический многочлен, тригонометрический ряд, тригонометрический ряд в комплексной форме. Лемма о вычислении коэффициентов тригонометрического ряда. Тригонометрический ряд Фурье функции (в т.ч. в экспоненциальной форме)

Определение тригонометрического многочлена

Пусть $n \in \mathbb{Z}_+$. Функция T_n вида

$$T_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

называется тригонометрическим многочленом порядка не выше n. Если $|a_n| + |b_n| \neq 0$, то порядок ровно n. Коэффициенты a_k, b_k — вещественные или комплексные числа. T_n — множество всех таких многочленов порядка $\leq n$, $T = \bigcup_{n=0}^{\infty} T_n$.

Смысл:

Тригонометрический многочлен — это конечная сумма синусов и косинусов кратных углов с коэффициентами. Он приближает периодические функции. Множество T_n содержит все многочлены сложности не выше n, а T — все возможные тригонометрические многочлены. Деление $a_0/2$ упрощает формулы для коэффициентов Фурье.

Тригонометрический ряд и комплексная форма

Тригонометрический ряд имеет вид:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kx + b_k \sin kx).$$

С помощью формул Эйлера $\cos kx = \frac{e^{ikx}+e^{-ikx}}{2}$, $\sin kx = \frac{e^{ikx}-e^{-ikx}}{2i}$ он преобразуется в комплексную форму:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx}.$$

Смысл:

Это бесконечная версия тригонометрического многочлена. Комплексная форма использует экспоненты e^{ikx} вместо синусов и косинусов, что часто упрощает вычисления. Переход между формами осуществляется через формулы Эйлера. Частичные суммы в обеих формах совпадают, обеспечивая эквивалентность представлений.

Лемма о вычислении коэффициентов (ортогональность)

Если тригонометрический ряд сходится к функции $f(x)$ в $L_2[-\pi, \pi]$, то его коэффициенты вычисляются по формулам:

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(kx)dx, \quad b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(kx)dx \quad (k \geq 0),$$

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx} dx \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Смысл:

Эти формулы следуют из ортогональности системы функций $\{1, \cos(kx), \sin(kx)\}$ или $\{e^{ikx}\}$ на отрезке $[-\pi, \pi]$. Если ряд сходится к $f(x)$ в смысле L_2, то он обязан быть её рядом Фурье, и коэффициенты находятся интегрированием f с соответствующей базисной функцией. Равномерная сходимость гарантирует сходимость в L_2, но условие можно ослабить.

Тригонометрический ряд Фурье функции

Тригонометрическим рядом Фурье функции f, интегрируемой на $[-\pi, \pi]$, называется ряд:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx), \quad \text{где} \quad a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(kx) dx, \quad b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(kx) dx.$$

В экспоненциальной (комплексной) форме:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}, \quad \text{где} \quad c_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx} dx.$$

Смысл:

Это способ разложить периодическую функцию в сумму гармоник (синусов и косинусов) или комплексных экспонент. Коэффициенты Фурье a_k, b_k или c_k показывают "вклад" гармоники с частотой k. Ряд Фурье функции может сходиться к ней (в L_2, поточечно и т.д.) при определенных условиях, что позволяет анализировать и аппроксимировать периодические сигналы.

65. Теорема Римана-Лебега

Теорема Римана-Лебега

1. Если E — измеримое множество ($E \in \mathbb{A}_1$) и функция f интегрируема на E ($f \in L(E)$), то:

$$\int_E f(t) \begin{bmatrix} e^{i\lambda t} \\ \cos \lambda t \\ \sin \lambda t \end{bmatrix} dt \xrightarrow{\lambda \to \infty} 0,$$

(где λ принимает вещественные значения.)

2. Если f интегрируема на основном периоде ($f \in L$), то её коэффициенты Фурье стремятся к нулю:

$$a_k(f) \xrightarrow{k\to\infty} 0, \quad b_k(f) \xrightarrow{k\to\infty} 0, \quad c_k(f) \xrightarrow{k\to\infty} 0.$$

Краткий смысл:

Теорема Римана-Лебега утверждает, что для интегрируемой функции f интеграл от её произведения с быстро осциллирующими функциями ($e^{i\lambda t}$, $\cos \lambda t$, $\sin \lambda t$) стремится к нулю при $\lambda \to \infty$. Это означает, что высокочастотные колебания "усредняют" вклад функции в интеграл. Аналогично, коэффициенты Фурье a_k, b_k, c_k периодической интегрируемой функции затухают с ростом k, что отражает отсутствие значимых высокочастотных компонент в её спектре.

66. Свертка периодических функций, ее элементарные свойства. Ядро Дирихле. Сумма Фурье как свертка

Определение свертки периодических функций

Пусть $f, K \in L[-\pi, \pi]$ (интегрируемые по Лебегу 2π-периодические функции). Сверткой $f * K$ называется функция, заданная для почти всех x формулой:

$$(f * K)(x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)K(t)dt.$$

Свертка определена почти всюду и принадлежит $L[-\pi, \pi]$ (т.е. интегрируема).

Смысл:

Свертка "смешивает" функции f и K: для каждой точки x она усредняет значения f вблизи x, взвешенные ядром K. Это фундаментальная операция в анализе Фурье, позволяющая изучать интегральные преобразования (как суммы Фурье) единообразно.

Элементарные свойства свертки

- Измеримость и интегрируемость:
  $f * K$ измерима и $f * K \in L[-\pi, \pi]$.
- Коммутативность:
  $f * K = K * f$.
- Коэффициенты Фурье:
  $c_k(f * K) = 2\pi c_k(f) c_k(K)$.

- Непрерывность при $K \in L_q$:
  Если $1 \le p \le \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $f \in L_p$, $K \in L_q$, то $f * K$ непрерывна ($f * K \in C$) и $\|f * K\|_\infty \le \|K\|_q \|f\|_p$.
- Оценка нормы при $K \in L_1$:
  Если $1 \le p \le \infty$, $f \in L_p$, $K \in L_1$, то $f * K \in L_p$ и $\|f * K\|_p \le \|K\|_1 \|f\|_p$.

Смысл:

Эти свойства показывают, как свертка взаимодействует с основными операциями анализа. Коммутативность (C2) дает гибкость. C3 означает, что свертка превращает умножение коэффициентов Фурье в умножение функций. C4 и C5 гарантируют "хорошее" поведение свертки (непрерывность, ограниченность) при условиях на ядро K, что критично для сходимости рядов Фурье.

Ядро Дирихле

Для $n \in \mathbb{Z}_+$ функция

$$D_n(t) = \frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos kt\right) = \frac{\sin\left((n+\frac{1}{2})t\right)}{2\pi \sin\left(\frac{t}{2}\right)}$$

называется ядром Дирихле порядка n.

Смысл:

Ядро Дирихле $D_n(t)$ кодирует информацию о частичной сумме ряда Фурье до номера n.

Сумма Фурье как свертка

Частичная сумма (порядка n) ряда Фурье функции $f \in L[-\pi, \pi]$ выражается через свертку с ядром Дирихле:

$$S_n(f, x) = (f * D_n)(x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t) D_n(t) dt.$$

Интеграл Дирихле:

$\int_{-\pi}^{\pi} f(x-t) D_n(t) dt$

Смысл:

Представление суммы $S_n(f, x)$ как свертки $f * D_n$ (доказанное в Лемме 3) позволяет применять общую теорию свертки (свойства C1-C5) к изучению сходимости рядов Фурье, сводя задачу к анализу свойств ядра D_n.

67. Принцип локализации Римана. Признак Дини и его следствия.

1) Принцип локализации Римана

Пусть $f, g \in L$, $x \in \mathbb{R}$, $\delta \in (0, \pi)$, и функции f и g совпадают на интервале $(x - \delta, x + \delta)$. Тогда разность частичных сумм их рядов Фурье в точке x стремится к нулю при $n \to \infty$:

$$S_n(f, x) - S_n(g, x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

В частности, из сходимости ряда Фурье f в точке x к сумме S следует сходимость ряда Фурье g в точке x к той же сумме S, и наоборот.

Смысл:

Поведение ряда Фурье функции в конкретной точке x зависит только от значений этой функции в сколь угодно малой окрестности x. Если две функции совпадают "рядом" с x (даже если сильно отличаются вдали), их ряды Фурье в x либо оба сходятся к одному значению, либо оба расходятся. Это позволяет анализировать сходимость, "забывая" о поведении функции вне малой окрестности точки.

Признак Дини сходимости

Пусть $f \in L$, $x \in \mathbb{R}$, $S \in \mathbb{R}$ (или $\mathbb{C}$) и выполняется условие:

$$\int_0^\pi \frac{|f(x+t) - 2S + f(x-t)|}{t} dt < +\infty. \quad (13.11)$$

Тогда ряд Фурье функции f сходится к сумме S в точке x:

$$S_n(f, x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} S.$$

Смысл:

Признак Дини дает достаточное условие сходимости ряда Фурье в точке x к конкретному числу S. Условие (13.11) требует, чтобы среднее значение $\frac{f(x+t)+f(x-t)}{2}$ "достаточно быстро" приближалось к S при $t \to 0^+$. Интеграл проверяет "скорость" этого приближения: если разность $|f(x+t) + f(x-t) - 2S|$ убывает быстрее, чем t, то ряд гарантированно сходится к S.

Следствия признака Дини 1

Если $x \in \mathbb{R}$, $f \in L$ и существуют конечные пределы:

$$f(x\pm) = \lim_{t\to x\pm} f(t), \quad \alpha_\pm = \lim_{t\to 0\pm} \frac{f(x+t) - f(x\pm)}{t}$$

то ряд Фурье f сходится в точке x к $S = \frac{f(x+)+f(x-)}{2}$. Если f непрерывна в x и пределы $\alpha_\pm$ существуют, то ряд сходится к $f(x)$.

Следствия признака Дини 2

Если $f \in L$ имеет конечные односторонние производные в точке x (т.е. $f'_+(x)$ и $f'_-(x)$ существуют и конечны), то её ряд Фурье сходится в x к $f(x)$. В частности, это верно, если f дифференцируема в x. $(a_\pm = f'_\pm(x))$

Смысл:

Эти следствия упрощают применение признака Дини. Следствие 1 говорит: если функция в точке x имеет скачок (левое и правое предельные значения) и "кусочно-гладкая" (существуют односторонние производные), то ряд сходится к среднему арифметическому пределов. Если функция непрерывна и имеет односторонние производные, то ряд сходится к $f(x)$. Следствие 2 — частный случай: существование обычной или односторонних производных в точке гарантирует сходимость ряда к значению функции в этой точке, так как производные автоматически обеспечивают выполнение условий Следствия 1.

68. Примеры разложения функций в ряды Фурье. Вычисление сумм $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ и $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$

Разложение функции $f_z(x) = \cos zx$ в ряд Фурье на $[-\pi, \pi]$ при $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$

Функция $f_z(x) = \cos zx$, $x \in [-\pi, \pi]$, является бесконечно дифференцируемой и чётной. Её ряд Фурье сходится к $f_z(x)$ всюду на $[-\pi, \pi]$. Коэффициенты Фурье:

$$a_0(f_z) = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \cos zt\, dt = \frac{2\sin \pi z}{\pi z},$$

$$a_k(f_z) = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \cos zt \cos kt\, dt = \frac{\sin \pi z}{\pi} (-1)^k \left(\frac{1}{z+k} + \frac{1}{z-k} \right) \quad (k \in \mathbb{N}).$$

Ряд Фурье:

$$\cos zx = \frac{\sin \pi z}{\pi z} + \frac{\sin \pi z}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \left(\frac{1}{z+k} + \frac{1}{z-k} \right) \cos kx, \quad x \in [-\pi, \pi].$$

Смысл:

Показано разложение непериодической функции $\cos(zx)$ (где z не целое) в ряд по ортогональной системе $\{\cos(kx)\}$ на интервале $[-\pi, \pi]$. Чётность функции упрощает вычисления, обнуляя коэффициенты b_k. Сходимость ряда гарантирована гладкостью функции и её продолжения.

Разложение $\pi \operatorname{ctg} \pi z$ и $\frac{\pi}{\sin \pi z}$ в суммы простых дробей

При $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ из разложения $\cos zx$ подстановкой $x = \pi$ и $x = 0$ соответственно получаются разложения в ряды (в смысле главного значения):

$$\pi \operatorname{ctg} \pi z = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{z-k}, \quad \frac{\pi}{\sin \pi z} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^k}{z-k}.$$

Смысл:

Подстановка конкретных значений $x = 0$ и $x = \pi$ в ряд Фурье для $\cos(zx)$ позволяет выразить трансцендентные функции (ctg и $\csc$) через бесконечные суммы рациональных дробей (простейших дробей). Эти разложения широко используются в комплексном анализе и теории специальных функций.

Вычисление сумм $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ и $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$

1. **Сумма $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$:**
   - Используем тождество Парсеваля для функции $f_{\sqrt{-1}}(x) = \cosh x$ (частный случай $z = i$, но проще для $f(x) = x^2$).
   - Стандартный результат: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.
2. **Сумма $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$:**
   - Подставим $x = \pi$ в разложение функции $g(x) = x^2$ в ряд Фурье на $[-\pi, \pi]$.
   - Ряд Фурье для $g(x) = x^2$: $x^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos nx$.
   - При $x = \pi$: $\pi^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} (\cos n\pi) = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} (-1)^n = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.
   - Отсюда: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.
   - Теперь подставим $x = 0$: $0 = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} (1)$.
   - Отсюда: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = -\frac{\pi^2}{12}$, следовательно, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}$.

Смысл:

Знаменитые суммы вычисляются с помощью свойств рядов Фурье. Тождество Парсеваля (равенство энергии сигнала и суммы квадратов коэффициентов) даёт $\sum \frac{1}{n^2}$. Для знакопеременной суммы используется разложение простой функции (например, x^2) и подстановка точки сходимости ряда ($x = 0$ или $x = \pi$).

69. Общее представление о методах суммирования рядов. Суммирование по Чезаро, суммирование методами Абеля-Пуассона (их перманентность и эффективность)

Суммирование по Чезаро

Пусть дан числовой ряд $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ с частичными суммами $S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$. Средние арифметические Чезаро (первого порядка) определяются как:

$$\sigma_n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} S_k$$

Ряд называется суммируемым по Чезаро к числу S, если существует предел:

$$\lim_{n \to \infty} \sigma_n = S$$

Обозначение: $(C, 1) \sum a_k = S$.

Смысл:

Метод Чезаро обобщает понятие сходимости ряда. Если ряд сходится классически к S, то он суммируем по Чезаро к тому же S. Но метод позволяет приписать сумму некоторым расходящимся рядам, например, знакопеременному ряду $1 - 1 + 1 - 1 + \ldots$, для которого $\sigma_n \to \frac{1}{2}$.

Суммирование методом Абеля-Пуассона

Пусть дан степенной ряд $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$, сходящийся при $|x| < 1$. Суммой ряда методом Абеля-Пуассона называется предел (если он существует):

$$(A) \sum_{k=0}^{\infty} a_k = \lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$$

Смысл:

Метод использует аналитическое продолжение степенного ряда на границу круга сходимости ($x = 1$). Если ряд сходится классически, его сумма по Абелю-Пуассону совпадает с обычной суммой. Метод суммирует ряды, где классический предел не существует, например, для ряда $1 - 2 + 3 - 4 + \ldots$ сумма по Абелю равна $\frac{1}{4}$.

Перманентность методов

Метод суммирования F называется перманентным (регулярным), если:

1. **Линейность**: $F\sum(\alpha a_k+\beta b_k)=\alpha F\sum a_k+\beta F\sum b_k$.
2. **Согласованность**: Если ряд $\sum a_k$ сходится классически к S, то $F\sum a_k=S$.

Смысл:

Перманентность гарантирует, что метод не противоречит обычной сходимости и "работает" корректно с линейными комбинациями. Оба метода (Чезаро и Абеля-Пуассона) являются перманентными. Это делает их полезными: они расширяют классическое суммирование, не нарушая его там, где оно уже работает.

Эффективность методов

Метод суммирования F называется эффективным (или сильнее другого метода G), если:

- Любой ряд, суммируемый методом G, суммируем и методом F к той же сумме.
- Существует ряд, суммируемый методом F, но не суммируемый методом G.

Смысл:

Эффективность показывает "мощность" метода. Метод Абеля-Пуассона эффективнее (сильнее) метода Чезаро $(C,1)$: любой ряд, суммируемый по Чезаро, суммируем и по Абелю к той же сумме, но существуют ряды (например, $\sum k(-1)^k$), суммируемые по Абелю, но не по Чезаро. Это позволяет Абелю "суммировать" более широкий класс расходящихся рядов.

70. Аппроксимативная единица и усиленная аппроксимативная единица. Теорема о свойствах свертки с аппроксимативной единицей (без док-ва). Теорема Фейера. Полнота тригонометрической системы в $L^2_{2\pi}$

Аппроксимативная единица

Пусть $D\subset\mathbb{R}$, h_0 — предельная точка D (в $\overline{\mathbb{R}}$). Семейство функций $\{K_h\}_{h\in D}$ называется *аппроксимативной единицей* при $h\to h_0$, если:

1. $\forall h\in D$: $K_h\in L^1[-\pi,\pi]$ и $\int_{-\pi}^{\pi}K_h(t)dt=1$.

2. $\exists M > 0$: $\forall h \in D$, $\int_{-\pi}^{\pi} |K_h(t)|dt \le M$.
3. $\forall \delta \in (0, \pi)$: $\int_{E_\delta} |K_h(t)|dt \underset{h\to h_0}{\longrightarrow} 0$, где $E_\delta = [-\pi, \pi] \setminus [-\delta, \delta]$.

Смысл:

Аппроксимативная единица — это семейство "сглаживающих" ядер, сосредоточенных около нуля. Их интеграл равен 1 (условие нормировки), они не слишком большие в среднем (ограниченность нормы), а вне малой окрестности нуля их влияние стремится к нулю. Это позволяет аппроксимировать функцию её сдвигами.

Усиленная аппроксимативная единица

Семейство $\{K_h\}_{h\in D}$ называется *усиленной аппроксимативной единицей* при $h \to h_0$, если:

1. Выполнены условия 1, 2 (из прошлого пункта) аппроксимативной единицы.
2. $\forall h \in D$: $K_h \in L^\infty[-\pi, \pi]$.
3. $\forall \delta \in (0, \pi)$: $\underset{t\in E_\delta}{\operatorname{ess\,sup}} |K_h(t)| \underset{h\to h_0}{\longrightarrow} 0$.

Смысл:

Это более сильный вариант аппроксимативной единицы, где ядра ограничены равномерно (не только в L^1), а их *максимальные значения* вне малой окрестности нуля стремятся к нулю. Это гарантирует сходимость свертки в индивидуальных точках непрерывности функции.

3) Теорема о свойствах свертки

Пусть $\{K_h\}$ — аппроксимативная единица при $h \to h_0$. Тогда:

1. Если $f \in C_{2\pi}$ (непрерывная 2π-периодическая), то $f * K_h \xrightarrow{h\to h_0} f$ *равномерно*.
2. Если $f \in L^p_{2\pi}$, $1 \le p < \infty$, то $\|f * K_h - f\|_p \xrightarrow{h\to h_0} 0$.
3. Если $\{K_h\}$ — *усиленная* аппроксимативная единица, $f \in L^1_{2\pi}$, и f непрерывна в точке x, то $(f * K_h)(x) \xrightarrow{h\to h_0} f(x)$.

Смысл:

Свертка функции с аппроксимативной единицей приближает саму функцию. Для непрерывных функций сходимость равномерная, для L^p-функций — в норме L^p, а для усиленных ядер есть поточечная сходимость в точках непрерывности. Это обобщает интуицию о "сглаживании".

Теорема Фейера

Ядра Фейера $\Phi_n(t) = \frac{1}{2\pi(n+1)} \left(\frac{\sin \frac{(n+1)t}{2}}{\sin \frac{t}{2}} \right)^2$ образуют *усиленную* аппроксимативную единицу при $n \to \infty$. Следовательно:

1. Если $f \in C_{2\pi}$, то $\sigma_n(f) \to f$ равномерно.

2. Если $f \in L^p_{2\pi}, 1 \leq p < \infty$, то $\|\sigma_n(f) - f\|_p \to 0$.
3. Если $f \in L^1_{2\pi}$ непрерывна в точке x, то $\sigma_n(f, x) \to f(x)$.

Смысл:

Средние Фейера (суммы Фурье, усреднённые по первым n частичным суммам) сходятся к функции в различных смыслах. Ключевое — ядро Фейера неотрицательно и явно оценивается, что доказывает его "усиленность". Это решает проблемы расходимости рядов Фурье.

Полнота тригонометрической системы в $L^2_{2\pi}$

Тригонометрическая система $\{e^{ikx}\}_{k\in\mathbb{Z}}$ (или $\{1, \cos kx, \sin kx\}_{k=1}^{\infty}$) полна в $L^2_{2\pi}$. То есть:

$$\forall f \in L^2_{2\pi}: \quad \|S_n(f) - f\|_2 \xrightarrow{n\to\infty} 0,$$

где $S_n(f)$ — частичная сумма ряда Фурье. Эквивалентно: если все коэффициенты Фурье f равны нулю, то $f = 0$ п.в.

Смысл:

Любую функцию из L^2 можно сколь угодно точно приблизить в среднем квадратичном её частичными суммами Фурье. Это следует из теоремы Фейера (п.2 при $p = 2$) и того, что $\sigma_n(f)$ есть проекция на тригонометрические многочлены. Система образует ортогональный базис.

71. Теорема Вейерштрасса о тригонометрических многочленах. Теорема Вейерштрасса об алгебраических многочленах

Теорема Вейерштрасса о тригонометрических многочленах

Любая непрерывная периодическая функция $f \in C_{(a,b)}$ может быть равномерно приближена тригонометрическими многочленами $T(x) = \sum_{k=0}^{\infty} q_k x^k$, где остаток $\|T(x) - P_N(x)\|_{C_{at}} \to 0$ при $N \to \infty$.

Смысл:

Теорема позволяет заменять сложные периодические функции на суммы простых тригонометрических слагаемых. Это полезно в анализе и численных методах, так как многочлены легче вычислять и интегрировать.

Теорема Вейерштрасса об алгебраических многочленах

Для любой непрерывной функции $f \in C_{at}$ на отрезке $[a, b]$ существует последовательность алгебраических многочленов $P_N(x) = \sum_{j=0}^{N} q_j x^k$, такая что $\|f - P_N\|_{L^p} \leq \epsilon$ при достаточно больших N.

Смысл:

Теорема утверждает, что даже "неудобные" непрерывные функции можно сколь угодно точно приблизить обычными многочленами. Это основа для аппроксимации в вычислительной математике и физике.