# 21. Предельный переход под знаком интеграла по параметру при условии Лебега, предельный переход под знаком интеграла по параметру в случае равномерной сходимости.

## Предельный переход при условии Лебега

Пусть $(X, A, \mu)$ — пространство с мерой, $\tilde{Y}$ — метрическое пространство, $Y \subset \tilde{Y}$, $f : X \times Y \to \mathbb{R}$, при всех $y \in Y$ $f(\cdot, y) \in L(X, \mu)$ (где у фиксирован) . Если при почти всех $x \in X$ $f(x, y) \underset{y \to y_0}{\longrightarrow} g(x)$, и существует $\Phi \in L(X, \mu)$ и окрестность $V_{y_0}$, такие что $|f(x, y)| \leq \Phi(x)$ для почти всех $x$ и $y \in V_{y_0} \cap Y$,

то $g \in L(X, \mu)$ и $\lim_{y \to y_0} \int_X f(x, y) d\mu(x) = \int_X g(x) d\mu(x) = \int_X \lim_{y \to y_0} f(x, y) d\mu(x)$.

#### Смысл

Эта теорема обобщает теорему Лебега о мажорированной сходимости для интегралов, зависящих от параметра. Условие гарантирует, что функции $f(\cdot, y)$ "не слишком быстро растут" при $y \to y_0$, что позволяет менять порядок предела и интеграла. Пример применения — исследование непрерывности интегралов от параметрических семейств.

## Предельный переход при равномерной сходимости

Пусть $(X, A, \mu)$ — пространство с мерой, $\tilde{Y}$ — метрическое пространство, $Y \subset \tilde{Y}$, $\mu X < +\infty$, $f : X \times Y \to \mathbb{R}$, $f(\cdot, y) \in L(X, \mu)$, и $f(\cdot, y) \underset{y \to y_0}{\rightrightarrows} g$ (равномерно на $X$), $y_0$ - предельная точка:
Тогда $g \in L(X, \mu)$ и $\lim_{y \to y_0} \int_X f(x, y) d\mu(x) = \int_X g(x) d\mu(x) = \int_X \lim_{y \to y_0} f(x, y) d\mu(x)$.

#### Смысл

Если семейство функций $f(\cdot, y)$ сходится к $g$ равномерно (т.е. "одинаково быстро" для всех $x$ ), то интеграл от предела равен пределу интегралов. Это частный случаи теоремы 1, где мажорантой служит $1 + |g|$ (так как $\mu X < +\infty$). Используется, например, при доказательстве непрерывности интегралов Фурье.

### Равномерная сходимость

Семейство $\{f(\cdot, y)\}_{y \in Y}$ равномерно сходится к $g$ на $X$, если $\sup_{x \in X} |f(x, y) - g(x)| \underset{y \to y_0}{\longrightarrow} 0$.
Обозначение: $f(\cdot, y) \rightrightarrows g$.

#### Смысл

Равномерная сходимость — более строгое условие, чем поточечная, но зато она гарантирует сохранение свойств (непрерывности, интегрируемости) при предельном переходе. Например, если $f(x, y)$ — непрерывные функции и $f \rightrightarrows g$, то $g$ тоже непрерывна. В контексте интегралов это позволяет избежать "патологий", когда предельная функция неинтегрируема.

# 22. Локальная непрерывность интеграла по параметру, глобальная непрерывность интеграла по параметру.

### Локальная непрерывность интеграла по параметру в точке

Пусть $(X, A, \mu)$ — пространство с мерой, $Y$ — метрическое пространство, $f : X \times Y \to \mathbb{R}$, при всех $y \in Y$ $f(\cdot, y) \in L(X, \mu)$, $y_0 \in Y$, при почти всех $x \in X$ функция $f(x, \cdot)$ непрерывна в точке $y_0$, и $f$ удовлетворяет локальному условию Лебега в точке $y_0$ (т.е. существует окрестность $V_{y_0}$ и функция $\Phi \in L(X, \mu)$ такие, что для почти всех $x \in X$ и всех $y \in V_{y_0} \cap Y$ выполняется $|f(x, y)| \leq \Phi(x)$).
Тогда интеграл $I(y)$ непрерывен в точке $y_0$. $(I(y) = \int_X f(x, y)\, d\mu(x))$

#### Смысл:

Эта теорема гарантирует, что если подынтегральная функция $f(x, y)$ непрерывна по параметру $y$ в точке $y_0$ для почти всех $x$ и ограничена "контролирующей" функцией $\Phi(x)$, то интеграл $I(y)$ тоже будет непрерывным в $y_0$. Это важно, например, при исследовании зависимостей интегралов от параметров, таких как время или координаты, в физике или теории вероятностей.

### Глобальная непрерывность интеграла по параметру на множестве

Пусть $X$ — компакт в $\mathbb{R}^n$, $\mu$ — мера Лебега, $Y$ — метрическое пространство, $f \in C(X \times Y)$. Тогда интеграл $I(y)$ принадлежит $C(Y)$ (т.е. непрерывен на $Y$). $(I(y) = \int_X f(x,y)\,d\mu(x))$

**Смысл:**

Если $f$ непрерывна на произведении компакта $X$ и метрического пространства $Y$, то интеграл $I(y)$ будет непрерывным на всём $Y$. Это следует из компактности $X$ и непрерывности $f$, что позволяет избежать проблем с расходимостями. Например, это применяется в задачах, где параметр $y$ меняется в широких пределах, а $X$ — ограниченная область.

### Различие

Оба результата (локальный и глобальный) опираются на идею контроля роста $f(x,y)$: в первом случае — через локальную мажоранту, во втором — через глобальную ограниченность, обеспечиваемую компактностью $X$.

### Локальное условие Лебега и его роль

$\exists \Phi \in L(X,\mu), \exists V_{y_0}$ : при почти всех $x \in X\ \forall y \in \dot{V}_{y_0} \cap Y\ |f(x,y)| \leq \Phi(x).$

**Смысл:**

Это условие требует, чтобы значения $f(x,y)$ в окрестности точки $y_0$ не превосходили некоторую интегрируемую функцию $\Phi(x)$. Оно нужно для применения теоремы Лебега о мажорируемой сходимости, которая позволяет "переставлять" пределы и интегралы. Без такого условия интеграл $I(y)$ может терять непрерывность, даже если $f(x,y)$ непрерывна по $y$.

# 23: Правило Лейбница дифференцирования интеграла по параметру в случае абсолютной суммируемости

# (!сверить!)

## Условия применимости правила Лейбница

Пусть функция $f(x, \alpha)$ определена на $[a, b] \times [\alpha_1, \alpha_2]$, интегрируема по $x$ на $[a, b]$ для любого $\alpha \in [\alpha_1, \alpha_2]$, и её частная производная $\frac{\partial f}{\partial \alpha}$ существует и абсолютно суммируема (т.е. $\int_a^b \left| \frac{\partial f}{\partial \alpha} \right| dx < \infty$).
Тогда, то для $\alpha \in [\alpha_1, \alpha_2]$ справедливо:

$$\frac{d}{d\alpha} \left( \int_a^b f(x, \alpha)\, dx \right) = \int_a^b \frac{\partial f(x, \alpha)}{\partial \alpha}\, dx.$$

**Смысл:**

Правило позволяет менять порядок дифференцирования и интегрирования. Это полезно, когда интеграл зависит от параметра $\alpha$, и нужно найти его производную. Например, в физике или теории вероятностей такие ситуации встречаются часто.

## Важность абсолютной суммируемости и условий

Абсолютная суммируемость $\frac{\partial f}{\partial \alpha}$ (т.е. $\int_a^b \left| \frac{\partial f}{\partial \alpha} \right| dx < \infty$) обеспечивает равномерную сходимость интеграла, что позволяет применять теоремы о перестановке пределов. Без этого условия производная под интегралом может "вести себя плохо" — например, интеграл может расходиться или производная может не существовать. Абсолютная суммируемость — это способ "контролировать" поведение функции, чтобы все операции были законны.

Условия гарантируют, что интеграл можно "дифференцировать под знаком интеграла". Абсолютная суммируемость производной нужна, чтобы обеспечить равномерную сходимость и избежать проблем при перестановке операций дифференцирования и интегрирования.

# 24 Правило Лейбница дифференцирования интеграла по параметру в отсутствии абсолютной суммируемости. Интегрирование интеграла по параметру

# (!сверить!)

## 1) Случай постоянного множества интегрирования

Пусть $(X, \mathbb{A}, \mu)$ — пространство с мерой, $Y = \langle c, d \rangle \subset \mathbb{R}$, $f : X \times Y \to \mathbb{R}$, при всех $y \in Y$ функция $f(\cdot, y) \in L(X, \mu)$, при почти всех $x \in X$ функция $f(x, \cdot)$ дифференцируема на $Y$, $y_0 \in Y$, и производная $f'_y$ удовлетворяет локальному условию Лебега в точке $y_0$. Тогда интеграл $I(y) = \int_X f(x, y) d\mu(x)$ дифференцируем в точке $y_0$ и выполняется равенство:

$$I'(y_0) = \int_X f'_y(x, y_0) d\mu(x).$$

**Смысл:**

Это правило позволяет "выносить" производную по параметру $y$ из-под знака интеграла по $x$, когда пределы интегрирования фиксированы. Для этого нужно, чтобы подынтегральная функция была "достаточно хорошей": интегрируемой по $x$ при каждом $y$, дифференцируемой по $y$ почти всюду по $x$, а её производная по $y$ должна удовлетворять условию, гарантирующему возможность предельного перехода (локальное условие Лебега). Это фундаментальный результат для анализа интегралов, зависящих от параметра.

## 2) Случай переменного множества интегрирования

Пусть функции $f(x, y)$ и её частная производная $\frac{\partial f}{\partial y}$ интегрируемы на прямоугольнике $[\alpha, \beta] \times [c, d]$, где отрезок $[\alpha, \beta]$ содержит все значения функций $a(y)$, $b(y)$, а функции $a(y)$, $b(y)$ дифференцируемы на $[c, d]$. Тогда интеграл $I(y) = \int_{a(y)}^{b(y)} f(x, y) dx$ дифференцируем по $y$ на $[c, d]$ и справедлива формула:

$$\frac{d}{dy} I(y) = f(b(y), y) \cdot b'(y) - f(a(y), y) \cdot a'(y) + \int_{a(y)}^{b(y)} \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) dx.$$

**Смысл:**

Эта формула учитывает **два эффекта** при дифференцировании интеграла с переменными пределами $a(y)$ и $b(y)$: 1) Изменение *площади* под кривой из-за изменения подынтегральной функции по параметру $y$ (последний интеграл с производной). 2) Изменение *самой области* интегрирования из-за движения границ $a(y)$ и $b(y)$ (первые два слагаемых). Они показывают, как "добавляется" площадь при движении правой границы $b(y)$ и "вычитается" площадь при движении левой границы $a(y)$.

### 3) Отсутствие абсолютной суммируемости

Интегрирование интеграла по параметру не требует абсолютной суммируемости подынтегральной функции или её производной в случае постоянных пределов интегрирования. Достаточно выполнения локального условия Лебега на производную $f'_y$ в точке дифференцирования $y_0$.

**Смысл:**

Локальное условие Лебега (существование интегрируемой мажоранты для $f'_y$ в некоторой окрестности точки $y_0$) является ключевым ослаблением по сравнению с требованием абсолютной суммируемости на всем $Y$. Это означает, что для вычисления производной $I'(y_0)$ достаточно контролировать поведение производной $f'_y$ лишь вблизи этой конкретной точки $y_0$, а не на всём интервале. Это делает теорему применимой в более широком классе задач.

# 25. Свойства Γ-функции Эйлера: определение, формула приведения, значения в натуральных и полуцелых точках, выражение для k-й производной, геометрические свойства.

## Определение и базовые значения

Γ-функция Эйлера задаётся интегралом:

$$\Gamma(p) = \int_0^{+\infty} x^{p-1} e^{-x}\, dx, \quad p > 0.$$

**Смысл:**

Γ-функция обобщает факториал на нецелые числа. Интегральное определение позволяет работать с дробными значениями, а базовые значения показывают связь с известными константами. Например, $\Gamma(1) = 0! = 1$, а $\Gamma(1/2)$ возникает в теории вероятностей и статистике.

## Формула приведения и значения в специальных точках

Формула приведения:

$$\Gamma(p+1) = p\Gamma(p).$$

Значения в целых и полуцелых точках:

$$\Gamma(n+1) = n!, \quad \Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) = \frac{(2n-1)!!}{2^n}\sqrt{\pi}, \quad n \in \mathbb{Z}_+.$$

**Смысл:**

Формула приведения позволяет вычислять Γ-функцию рекуррентно, сводя задачу к меньшим значениям аргумента. Значения в целых точках совпадают с факториалом, а в полуцелых — выражаются через двойные факториалы и $\pi$, что полезно в квантовой механике и интегральных преобразованиях.

### Производные Γ-функции:

$$\Gamma^{(n)}(p) = \int_0^{+\infty} x^{p-1} e^{-x} \ln^n x \, dx.$$

**Смысл:**

Производные Γ-функции выражаются через интегралы с логарифмическими множителями, что важно в анализе.

### Геометрические свойства:

1. $\Gamma(p)$ строго выпукла вниз на $(0, +\infty)$.
2. Имеет единственный минимум на $(1, 2)$.
3. $\Gamma(p) \sim \frac{1}{p}$ при $p \to 0$ и $\Gamma(p) \to +\infty$ при $p \to +\infty$.

**Смысл:**

Выпуклость и наличие минимума объясняют её "U-образный" график, а асимптотики помогают оценивать поведение на границах области определения (например, в теории вероятностей).

# 26. Связь между Γ- и B-функцией

### Определение B-функции (бета-функции Эйлера)

B-функция определяется как интеграл:

$$B(p, q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx, \quad p, q > 0.$$

**Смысл:**

B-функция описывает интеграл от произведения степенных функций на отрезке [0, 1]. Она часто используется в теории вероятностей (например, для бета-распределения) и в анализе для вычисления сложных интегралов. Параметры $p$ и $q$ контролируют форму подынтегрального выражения.

### Связь между Г- и B-функциями

Для любых $p, q > 0$ выполняется соотношение:

$$B(p, q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}.$$

**Смысл:**

Эта формула связывает B-функцию с гамма-функцией ($\Gamma$), которая обобщает факториал. Доказательство основано на замене переменных и манипуляциях с интегралами, включая теорему Тонёлли о порядке интегрирования. Связь упрощает вычисление B-функций через известные значения $\Gamma$-функции.

# 27. Формула Эйлера-Гаусса.

### Формулировка формулы Эйлера-Гаусса

$$\Gamma(p) = \lim_{n\to\infty} \frac{n^p \cdot n!}{p(p+1)(p+2)\cdot \ldots \cdot (p+n)}, \quad p \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}_-.$$

- $\Gamma(p)$ — гамма-функция, билет 25
- $n!$ — факториал числа $n$.
- $n^p$ — степенная функция.
- Знаменатель $p(p+1)...(p+n)$ — произведение линейных множителей.

**Смысл:**

Формула выражает гамма-функцию через предел последовательности, связывая факториал и степенную функцию. Она позволяет вычислять значения $\Gamma(p)$ для нецелых $p$, исключая отрицательные целые числа, где знаменатель обращается в ноль.

## Условия применимости

**Область определения:**

Формула справедлива для всех $p \in \mathbb{R}$, кроме отрицательных целых чисел ($p \notin \mathbb{Z}_-$), так как при таких $p$ знаменатель обращается в ноль для некоторого $n$.

**Связь с факториалом:**

При целых положительных $p = m \in \mathbb{N}$ формула сводится к $\Gamma(m) = (m-1)!$, согласуясь с классическим определением.

**Смысл:**

Формула Эйлера-Гаусса является альтернативным определением гамма-функции, подчеркивающим её связь с дискретными (факториал) и непрерывными (предел) математическими объектами.

# 28. Теорема о разложении функции в обобщенный степенной ряд. Ряды Лорана

## Определение ряда Лорана

Ряд вида $\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k (z-z_0)^k$, где $c_k, z, z_0 \in \mathbb{C}$, называется рядом Лорана. Числа $c_k$ называются его коэффициентами, а $z_0$ — центром ряда.

**Смысл:**

Это обобщение степенного ряда, позволяющее работать с функциями, имеющими особенности (например, полюсы). В отличие от ряда Тейлора, он содержит члены с отрицательными степенями $(z - z_0)$, что необходимо для анализа поведения функции в кольце вокруг точки $z_0$.

## Структура ряда Лорана

Главная часть ряда Лорана определяется как $\sum_{k=-\infty}^{-1} c_k(z-z_0)^k$. Правильная (регулярная) часть определяется как $\sum_{k=0}^{\infty} c_k(z-z_0)^k$. Ряд сходится тогда и только тогда, когда сходятся обе части.

**Смысл:**

Главная часть описывает "неправильное" поведение функции (особенности) вблизи центра $z_0$, а правильная часть аналогична ряду Тейлора и описывает "хорошее" поведение. Сходимость всего ряда требует сходимости обеих частей в заданном кольце.

## Теорема Лорана о разложении

Пусть $z_0 \in \mathbb{C}$, $0 \le r < R \le +\infty$, $f \in \mathcal{A}(K_{r,R}(z_0))$. Тогда $f$ раскладывается в кольце $K_{r,R}(z_0)$ в ряд Лорана: $f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k(z-z_0)^k$ для $r < |z-z_0| < R$.

**Смысл:**

Любую функцию, аналитическую в кольце между двумя окружностями, можно представить в виде суммы ряда Лорана. Это мощный инструмент для изучения функций с изолированными особенностями, так как разложение работает даже там, где ряд Тейлора неприменим.

## 4. Единственность коэффициентов Лорана

Пусть $0 \le r < R \le +\infty$ и $f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k(z-z_0)^k$ при $r < |z-z_0| < R$. Тогда коэффициенты $c_k$ определяются единственным образом по формуле:

$$c_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_\rho} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+1}} d\zeta,$$

где $\rho \in (r, R)$, $\gamma_\rho = \gamma_{\rho, z_0}$ (окружность $|\zeta - z_0| = \rho$).

**Смысл:**

Коэффициенты ряда Лорана вычисляются через интеграл, аналогичный формуле для коэффициентов Тейлора, но применимый для всех $k \in \mathbb{Z}$. Это гарантирует, что разложение функции в заданном кольце единственно, и позволяет явно находить коэффициенты.

# 29. Неравенства Коши для коэффициентов рядов Тейлора и Лорана

## Неравенство Коши для коэффициентов степенного ряда (Тейлора)

Пусть $z_0 \in \mathbb{C}$, $R \in (0, +\infty]$, и функция $f$ аналитична в круге $|z - z_0| < R$:

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - z_0)^k.$$

Тогда для любого $\rho \in (0, R)$ и всех $k \in \mathbb{Z}_+$ (т.е. $k = 0, 1, 2, \ldots$) выполняется:

$$|c_k| \leq \frac{M_f(\rho)}{\rho^k}, \quad \text{где} \quad M_f(\rho) = \max_{|\zeta - z_0| = \rho} |f(\zeta)|.$$

**Смысл:**

Это неравенство оценивает рост коэффициентов Тейлора функции $f$ через максимум её модуля на окружности радиуса $\rho$. Чем быстрее убывают коэффициенты $c_k$, тем "лучше" поведение функции (например, она может быть целой). Оно следует из интегральной формулы для коэффициентов и оценки интеграла.

## Неравенство Коши для коэффициентов ряда Лорана

Пусть $z_0 \in \mathbb{C}$, $0 \leq r < R \leq +\infty$, и функция $f$ аналитична в кольце $r < |z - z_0| < R$:

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k (z - z_0)^k.$$

Тогда для любого $\rho \in (r, R)$ и всех $k \in \mathbb{Z}$ (т.е. $k = \ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots$) выполняется:

$$|c_k| \leq \frac{M_f(\rho)}{\rho^k}, \quad \text{где} \quad M_f(\rho) = \max_{|\zeta - z_0| = \rho} |f(\zeta)|.$$

**Смысл:**

Это обобщение неравенства Коши на ряды Лорана. Оно ограничивает как положительные (регулярная часть), так и отрицательные (главная часть) коэффициенты через максимум модуля функции на окружности радиуса $\rho$ внутри кольца аналитичности. Помогает изучать особенности функции в $z_0$ (например, тип полюса).

### Обозначения

- $z_0$: центр разложения
- $R$: радиус сходимости (Тейлор) / внешний радиус кольца (Лоран)
- $r$: внутренний радиус кольца (Лоран)
- $\rho$: радиус выбранной окружности ($r < \rho < R$)
- $\zeta$: точка на окружности $|\zeta - z_0| = \rho$
- $c_k$: коэффициенты ряда
- $M_f(\rho)$: $\max |f|$ на окружности радиуса $\rho$
- $k$: индекс коэффициента ($\geq 0$ для Тейлора, $\in \mathbb{Z}$ для Лорана)

# 30. Изолированные особые точки аналитических функций, их типы. Характеризация устранимой особой точки посредством лорановского разложения

### Определение изолированной особой точки

Пусть $z_0 \in \mathbb{C}$, функция $f$ голоморфна по крайней мере в проколотой окрестности $\dot{V}(z_0)$. Тогда $z_0$ называется изолированной особой точкой однозначного характера функции $f$.

#### Смысл:

Это точка, где функция "ломается", но аналитична вокруг неё. Например, $z_0 = 0$ для $f(z) = \frac{\sin z}{z}$.

### Классификация изолированных особых точек

Выделяют три типа $z_0$ :

1. Устранимая особая точка, если $\exists$ конечный предел $\lim_{z \to z_0} f(z)$.
2. Полюс, если $\lim_{z \to z_0} f(z) = \infty$.
3. Существенно особая точка, если $\nexists$ ни конечного, ни бесконечного предела $\lim_{z \to z_0} f(z)$.

**Смысл:**

Устранимая — "дырка", которую можно "залатать" (например, доопределить $f$). Полюс — функция "взрывается" к бесконечности. Существенная — хаотичное поведение (например, $e^{1/z}$ при $z \to 0$).

### Характеризация устранимой особенности

Пусть $z_0 \in \mathbb{C}$, $f$ голоморфна в $\dot{V}(z_0)$. Эквивалентны:

1. $z_0$ — устранимая особая точка $f$.
2. $f$ ограничена в некоторой проколотой окрестности $\dot{V}(z_0)$.
3. $f$ аналитически продолжима в $z_0$ (т.е. $\exists g$ голоморфная в $V(z_0)$ с $g \equiv f$ в $\dot{V}(z_0)$).
4. В главной части ряда Лорана $f$ в $z_0$ все коэффициенты при $(z - z_0)^k$ ($k < 0$) равны нулю.

**Смысл:**

Устранимая особенность "мягкая": функция не уходит в бесконечность, её ряд Лорана не содержит отрицательных степеней, и её можно "продолжить" до аналитической в $z_0$. Доказательство использует оценку Коши для коэффициентов Лорана.

### Доп:

Функция $f : D \to \mathbb{C}$ называется голоморфной в области $D \subseteq \mathbb{C}$, если она комплексно-дифференцируема в каждой точке $D$.

# 31. Специфика лорановских разложений в окрестности полюса и существенно особой точки

### Характеристика полюсов (Теорема 3)

Пусть $z_0 \in \mathbb{C}$, $f$ аналитична в проколотой окрестности $V_{z_0}$ ($f \in A(V_{z_0})$). Тогда эквивалентны:

1. $z_0$ — полюс функции $f$.
2. Существуют номер $m \in \mathbb{N}$ и функция $\varphi \in A(V_{z_0})$, $\varphi(z_0) \neq 0$, такие что $f(z) = \frac{\varphi(z)}{(z-z_0)^m}$ для всех $z \in V_{z_0}$.
3. В главной части ряда Лорана функции $f$ с центром в $z_0$ лишь конечное число коэффициентов отлично от нуля.

**Смысл:**

Полюс характеризуется "конечным ростом" функции при приближении к $z_0$, что выражается либо через представление в виде дроби с аналитическим числителем и конечным порядком полюса в знаменателе, либо через конечность ненулевых членов в отрицательной части ряда Лорана.

## Характеристика существенно особых точек (Следствие 1)

Пусть $z_0 \in \mathbb{C}$, $f$ аналитична в проколотой окрестности $V_{z_0}$ ($f \in A(V_{z_0})$). Тогда эквивалентны:

1. $z_0$ — существенно особая точка функции $f$.
2. В главной части ряда Лорана функции $f$ с центром в $z_0$ бесконечно много коэффициентов отлично от нуля.

**Смысл:**

Существенно особая точка отличается "бесконечной сложностью" поведения функции вокруг $z_0$. Это проявляется в том, что главная часть ряда Лорана (отражающая сингулярность) требует бесконечного числа слагаемых для своего описания, в отличие от полюса.

# 32. Теорема Сохоцкого

## Формулировка теоремы

Пусть $f \in A(\dot{V}_\delta(z_0))$; $z_0$ — существенно особая точка $f$. Тогда для любого $A \in \mathbb{C}$ существует последовательность $\{z_n\}$, такая что $z_n \in V_\delta(z_0)$, $z_n \to z_0$, $f(z_n) \to A$.

**Смысл:**

Эта теорема описывает "дикое" поведение аналитической функции в окрестности существенно особой точки. Она утверждает, что в любой сколь угодно малой окрестности такой точки функция принимает значения, сколь угодно близкие к *любому* наперед заданному комплексному числу $A$, причем бесконечно много раз.

## Обозначения

1. $A(\dot{V}_\delta(z_0))$ — класс функций, аналитических в проколотой окрестности $\dot{V}_\delta(z_0) = \{z : 0 < |z - z_0| < \delta\}$ точки $z_0$.

2. $z_n \in V_\delta(z_0)$ — последовательность точек, лежащих в окрестности $|z - z_0| < \delta$.
3. $z_n \to z_0$, $f(z_n) \to A$ — последовательность сходится к особой точке $z_0$, а значения функции в этих точках сходятся к $A$.

# 33. Два определения вычета. Теорема Коши о вычетах. Теорема о полной сумме вычетов.

## Определения вычета в конечной точке и на бесконечности

1. Пусть $z_0 \in \mathbb{C}$, $f \in \mathcal{A}(\dot{V}_{z_0})$. Коэффициент $c_{-1}$ в разложении $f$ в ряд Лорана

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k (z - z_0)^k$$

называется *вычетом* функции $f$ в точке $z_0$ и обозначается $\operatorname{res}_{z_0} f$.
2. Пусть $f \in \mathcal{A}(\dot{V}_\infty)$. *Вычетом* функции $f$ в точке $\infty$ называется коэффициент $c_1$ в разложении $f$ в ряд Лорана, взятый с противоположным знаком:

$$\operatorname{res}_\infty f = -c_1.$$

**Смысл:**

Вычет в конечной точке $z_0$ — это коэффициент при $(z - z_0)^{-1}$ в ряде Лорана, связанный с интегралом по малой окружности вокруг $z_0$. Вычет на бесконечности определен через $c_1$ со знаком минус, чтобы интеграл по большой окружности (охватывающей все конечные особые точки) выражался как $-2\pi i \cdot \operatorname{res}_\infty f$, что согласуется с ориентацией контура.

## Теорема Коши о вычетах

Пусть $D$ — область в $\mathbb{C}$, $E \subset D$, $f \in \mathcal{A}(D \setminus E)$, $E$ — множество изолированных особых точек $f$, $G$ — ограниченная область с ориентированной границей, $\overline{G} \subset D$, $\partial G \cap E = \emptyset$. Тогда

$$\int_{\partial G} f(z) dz = 2\pi i \sum_{z_k \in G \cap E} \operatorname{res}_{z_k} f.$$

**Смысл:**

Интеграл от аналитической функции по замкнутому контуру $\partial G$ равен сумме вычетов внутри этого контура, умноженной на $2\pi i$. Это позволяет вычислять сложные интегралы, сводя их к алгебраической сумме коэффициентов Лорана в особых точках, лежащих в области $G$.

### Теорема о полной сумме вычетов

Пусть $E \subset \mathbb{C}$, $f \in \mathcal{A}(\mathbb{C} \setminus E)$, $E \cup \{\infty\}$ — множество изолированных особых точек $f$. Тогда

$$\sum_{z_k \in E \cup \{\infty\}} \operatorname{res}_{z_k} f = 0.$$

**Смысл:**

Сумма вычетов функции по всем изолированным особым точкам (включая бесконечность) равна нулю. Это следствие теоремы Коши и определения вычета на бесконечности: интеграл по большой окружности $\gamma_R$ выражается двумя способами (через сумму конечных вычетов и через $\operatorname{res}_\infty f$), что приводит к их взаимному уничтожению. Теорема упрощает вычисления, позволяя находить один вычет, зная остальные.

# 34. Приемы отыскания вычетов

### Вычет в устранимой особой точке

Если $z_0$ — устранимая особая точка функции $f$, то вычет в этой точке равен нулю:

$$\operatorname{res}_{z_0} f = 0.$$

**Смысл:**

В устранимой особенности функцию можно "исправить" до голоморфной, доопределив её в точке $z_0$. Ряд Лорана не содержит отрицательных степеней, поэтому коэффициент $c_{-1}$ (вычет) автоматически равен нулю.

### Вычет в простом полюсе

Пусть $z_0$ — простой полюс функции $f$. Тогда вычет вычисляется по формулам:

1. $\operatorname{res}_{z_0} f = \lim_{z \to z_0} (z - z_0) f(z)$.

2. Если $f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$, где $P, Q$ голоморфны в окрестности $z_0$, $P(z_0) \neq 0$, $Q(z_0) = 0$, $Q'(z_0) \neq 0$, то:

$$\operatorname{res}_{z_0} f = \frac{P(z_0)}{Q'(z_0)}.$$

**Смысл:**

Для простого полюса вычет — это коэффициент $c_{-1}$ в ряде Лорана. Его можно найти, "умножив" функцию на $(z - z_0)$ и устремив $z$ к $z_0$, что "снимает" особенность. Формула с $P/Q$ удобна для дробно-рациональных функций.

## Вычет в полюсе кратности $m$

Пусть $z_0$ — полюс функции $f$ кратности $m$. Тогда вычет равен:

$$\operatorname{res}_{z_0} f = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \to z_0} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} \left[ (z - z_0)^m f(z) \right]$$

или эквивалентно:

$$\operatorname{res}_{z_0} f = \frac{1}{(m-1)!} \left. \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} \left[ (z - z_0)^m f(z) \right] \right|_{z = z_0}.$$

**Смысл:**

Умножение на $(z - z_0)^m$ "убирает" полюс, делая функцию голоморфной. Дифференцирование $(m-1)$ раз "выделяет" коэффициент $c_{-1}$ из разложения Лорана, который и является вычетом.

## Определение полюса кратности $n$

Точка $z_0$ называется полюсом кратности $n$ ($n \in \mathbb{N}$), если:

1. $f(z)$ представима в виде $f(z) = \frac{\phi(z)}{(z - z_0)^n}$, где $\phi(z)$ голоморфна в окрестности $z_0$ и $\phi(z_0) \neq 0$.
2. В разложении Лорана $f(z)$ в окрестности $z_0$ главная часть конечна и имеет вид $\sum_{k=-n}^{\infty} c_k (z - z_0)^k$ с $c_{-n} \neq 0$.

**Смысл:**

Полюс кратности $n$ — это особая точка, где функция "взрывается" как $\frac{1}{(z - z_0)^n}$, умноженное на неисчезающую голоморфную функцию. Чем выше $n$, тем "сильнее" особенность.

# 35. Вычисление тригонометрических интегралов с помощью вычетов

## Основная идея метода

Интегралы вида $\int_0^{2\pi} R(\sin\varphi, \cos\varphi)d\varphi$, где $R(u, v)$ — рациональная функция двух переменных, вычисляются путём замены $z = e^{i\varphi}$ и применения теоремы о вычетах к полученному контурному интегралу по единичной окружности.

**Смысл:**

Метод позволяет свести реальный тригонометрический интеграл к комплексному контурному интегралу от рациональной функции. Это возможно благодаря тому, что при движении $\varphi$ от $0$ до $2\pi$, комплексная переменная $z = e^{i\varphi}$ пробегает единичную окружность $|z| = 1$, а тригонометрические функции выражаются рационально через $z$ и $1/z$.

## Замена переменных

Положим $z = e^{i\varphi}$. Тогда:

$$d\varphi = \frac{dz}{iz}, \quad \varphi : 0 \to 2\pi \iff z : |z| = 1 \text{ (против ч.с.)}$$
$$\sin\varphi = \frac{z - z^{-1}}{2i}, \quad \cos\varphi = \frac{z + z^{-1}}{2}$$

После подстановки интеграл преобразуется к виду:

$$\oint_{|z|=1} R\left(\frac{z - z^{-1}}{2i}, \frac{z + z^{-1}}{2}\right)\frac{dz}{iz} = \oint_{|z|=1} f(z)\frac{dz}{iz}$$

где $f(z)$ — рациональная функция от $z$, полученная после подстановки и упрощения.

**Смысл:**

Замена $z = e^{i\varphi}$ переводит отрезок $[0, 2\pi]$ в замкнутый контур (единичную окружность). Дифференциал $d\varphi$ и тригонометрические функции $\sin\varphi$, $\cos\varphi$ выражаются через $z$ и $dz$, превращая исходный интеграл в комплексный интеграл по замкнутому контуру от рациональной функции.

### Применение теоремы о вычетах

Искомый интеграл равен $2\pi i$ умноженной на сумму вычетов подынтегральной функции $\frac{f(z)}{iz}$ внутри единичного круга $|z| < 1$:

$$\int_0^{2\pi} R(\sin\varphi, \cos\varphi) d\varphi = 2\pi i \sum_{\substack{z_k \\ |z_k|<1}} \operatorname{Res}\left(\frac{f(z)}{iz}, z_k\right)$$

где $z_k$ — особые точки (полюса) функции $\frac{f(z)}{iz}$, лежащие внутри $|z| < 1$.

**Смысл:**

После замены интеграл стал равен контурному интегралу от функции $\frac{f(z)}{iz}$ по единичной окружности. По основной теореме о вычетах, такой интеграл равен $2\pi i$ умноженной на сумму вычетов подынтегральной функции во всех её особых точках, лежащих внутри контура (т.е. внутри единичного круга).

# 36. Вычисление несобственных интегралов от рациональных функций с помощью вычетов

### Условия и формула для интеграла рациональной функции по вещественной оси

Пусть $F(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ — рациональная дробь, где $\deg Q - \deg P \geq 2$, и $Q(x)$ не имеет нулей на вещественной оси $\mathbb{R}$. Тогда несобственный интеграл вычисляется по формуле:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F(x) dx = 2\pi i \sum_{\substack{\operatorname{Im} z_k > 0 \\ Q(z_k)=0}} \operatorname{res}_{z_k} F(z).$$

**Смысл:**

Интеграл по всей вещественной оси заменяется суммой вычетов функции $F(z)$ в верхней полуплоскости ($\operatorname{Im} z_k > 0$), умноженной на $2\pi i$. Это следует из применения теоремы о вычетах к замкнутому контуру, состоящему из отрезка $[-R, R]$ и полуокружности в верхней полуплоскости, при $R \to \infty$. Условие $\deg Q - \deg P \geq 2$ гарантирует стремление к нулю интеграла по полуокружности.

# 37. Лемма Жордана. Вычисление преобразований Фурье с помощью вычетов

## Формулировка леммы Жордана

Пусть $\Delta \in (0, +\infty)$, функция $f$ непрерывна в области $\{z : \operatorname{Im} z \geq 0,\ |z| \geq \Delta\}$, удовлетворяет условию $f(z) \to 0$ при $z \to \infty$ в этой области, и $C_R(t) = Re^{it}$, $t \in [0, \pi]$ – полуокружность в верхней полуплоскости. Тогда для любого $\lambda > 0$ выполняется предельное соотношение:

$$\int_{C_R} f(z)e^{i\lambda z}dz \underset{R\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

**Смысл:**

Лемма гарантирует, что интеграл от функции специального вида ($f(z)$ умноженной на $e^{i\lambda z}$) по полуокружности бесконечно большого радиуса в верхней полуплоскости стремится к нулю. Это критически важно для анализа контурных интегралов, так как позволяет "отбрасывать" вклад дуги на бесконечности при вычислениях с помощью вычетов.

## Применение к вычислению преобразований Фурье

Для вычисления интегралов вида $\hat{f}(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{i\lambda x}dx$ ($\lambda > 0$) методом вычетов: 1) Рассмотреть комплексный интеграл $\oint_\Gamma f(z)e^{i\lambda z}dz$ по замкнутому контуру $\Gamma$, состоящему из отрезка $[-R, R]$ и полуокружности $C_R$ в верхней полуплоскости; 2) Применить основную теорему о вычетах: $\oint_\Gamma = 2\pi i \sum \operatorname{res}$; 3) Перейти к пределу $R \to \infty$. В силу леммы Жордана интеграл по $C_R$ стремится к нулю, поэтому:

$$\hat{f}(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{i\lambda x}dx = \lim_{R\to\infty} \oint_\Gamma f(z)e^{i\lambda z}dz = 2\pi i \sum \text{выч}_{z_k \in \mathbb{C}^+} f(z)e^{i\lambda z},$$

где сумма берется по всем вычетам функции $g(z) = f(z)e^{i\lambda z}$ в особых точках $z_k$, лежащих в верхней полуплоскости ($\operatorname{Im} z_k > 0$).

**Смысл:**

Лемма Жордана позволяет замыкать контур интегрирования в верхней полуплоскости для интегралов Фурье при $\lambda > 0$, так как вклад дуги исчезает. Это сводит задачу вычисления несобственного интеграла по вещественной оси к нахождению суммы вычетов подынтегральной функции $f(z)e^{i\lambda z}$ только в верхней полуплоскости, что часто значительно проще. Например, для рациональных $f(z)$, убывающих на бесконечности.

# 38. Вычисление несобственных интегралов от аналитических функций с мнимым периодом

## Условия и формула для интеграла без экспоненты

Пусть функция $f(z)$ голоморфна в верхней полуплоскости $I^+ = \{z \mid \operatorname{Im} z \geq 0\}$ и на вещественной оси, за исключением конечного числа $n$ полюсов, не лежащих на вещественной оси, и $\lim_{z\to\infty} zf(z) = 0$. Тогда:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Res}_{z=z_k} f(z)$$

**Смысл:**

Если функция "хорошо себя ведет" в верхней полуплоскости (аналитична кроме изолированных полюсов над осью) и убывает достаточно быстро на бесконечности, то ее интеграл вдоль всей вещественной оси равен сумме вычетов во всех этих верхних полюсах, умноженной на $2\pi i$. Интеграл понимается в смысле главного значения по Коши.

### Условия и формула для интеграла с экспонентой $e^{i\alpha x}$

Пусть функция $f(z)$ голоморфна в верхней полуплоскости $I^+ = \{z \mid \operatorname{Im} z \geq 0\}$ и на вещественной оси, за исключением конечного числа $n$ полюсов, не лежащих на вещественной оси, $\lim_{z\to\infty} zf(z) = 0$ и $\alpha > 0$. Тогда:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{i\alpha x}dx = 2\pi i\sum_{k=1}^{n} \operatorname{Res}_{z=z_k}\left[f(z)e^{i\alpha z}\right]$$

**Смысл:**

Для интеграла, дополнительно умноженного на осциллирующую экспоненту $e^{i\alpha x}$ (где $\alpha > 0$ гарантирует затухание в верхней полуплоскости), результат также выражается через сумму вычетов, но уже функции $f(z)e^{i\alpha z}$ в полюсах верхней полуплоскости, умноженную на $2\pi i$. Интеграл также понимается в смысле главного значения.

# 39. Гладкие многообразия с краем (определение и примеры); отображение перехода, гладкость отображения перехода.

### Определение гладкого многообразия с краем

Множество $M \subset \mathbb{R}^n$ называется главным $k$-мерным многообразием класса $C^{(r)}$ (или $r$ -гладким), если для любой точки $x \in M$ существует окрестность $V_x^M$ и регулярный гомеоморфизм $\varphi : \Pi_k \to V_x^M$ класса $C^{(r)}$, где $\Pi_k$ — стандартный $k$-мерный куб $(-1,1)^k$ или полукуб $(-1,0] \times (-1,1)^{k-1}$.
Точка $x$ называется краевой, если $\varphi$ задан на полукубе, а множество таких точек образует край $\partial M$.

**Смысл.**

Гладкое многообразие — это множество, которое локально выглядит как кусок $\mathbb{R}^k$ или его "половина" (полукуб). Край $\partial M$ состоит из точек, где локальные параметризации "обрываются", как край листа бумаги. Например, отрезок $[0,1]$ — многообразие с краем $\{0,1\}$.

## Примеры гладких многообразий

1. Открытое множество $G \subset \mathbb{R}^n$ — многообразие без края ($\partial G = \varnothing$), так как любая точка имеет кубическую окрестность (например, тождественная параметризация).
2. Кривые ($k = 1$) и гиперповерхности ($k = n - 1$) — частные случаи многообразий.

**Смысл.**

Простейшие примеры — это открытые шары или интервалы (без края) и отрезки/полосы (с краем). Многообразия обобщают понятие кривых и поверхностей на многомерные случаи, позволяя изучать их гладкую структуру.

## Отображение перехода и его гладкость

**Определение.**

Пусть $M \in \mathbb{M}_{kn}^{(r)}, U, V$ — стандартные окрестности с параметризациями $\varphi : \Pi \to U$ и $\psi : \Pi' \to V$. Если $W = U \cap V \neq \varnothing$, то отображение $L = \psi^{-1} \circ \varphi : W_1 \to W_2$ (где $W_i = \varphi^{-1}(W)$) называется переходом между параметризациями и является биекцией.

**Теорема (Регулярность и гладость перехода).**

Отображение $L$ принадлежит классу $C^{(r)}$ и является регулярным (его матрица Якоби невырождена).

**Смысл.**

При смене локальных координат (например, с декартовых на полярные) переход между ними должен быть гладким и обратимым. Это гарантирует, что вычисления (например, интегралы) не зависят от выбора карт в атласе многообразия. Теорема показывает, что гладкость многообразия сохраняется при пересчёте координат.

# 40. Мера малого измеримого подмножества многообразия; независимость меры малого измеримогомножества от выбора параметризации; измеримое подмножество многообразия.

## Мера малого измеримого подмножества

Пусть $M \in \mathbb{M}_{kn}^{(1)}$, $E \subset M$ — малое измеримое множество, содержащееся в стандартной окрестности $U$ с параметризацией $\varphi : \mathbb{R}^k \to U$. Мера $\mu_M E$ определяется как:

$$\mu_M E = \int_{\varphi^{-1}(E)} \sqrt{D_\varphi} d\mu_k,$$

где $D_\varphi = \det\left(\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u_i} \cdot \frac{\partial\varphi}{\partial u_j}\right)_{i,j=1}^k\right)$, а $\mu_k$ — мера Лебега в $\mathbb{R}^k$.

**Смысл:**

Эта формула обобщает понятие площади/объёма для подмножества многообразия. Интеграл от $\sqrt{D_\varphi}$ (аналога якобиана) по прообразу $E$ в $\mathbb{R}^k$ корректно определяет меру благодаря свойствам параметризации.

## Независимость меры от параметризации

Пусть $E \subset M$ — малое измеримое множество, содержащееся в двух стандартных окрестностях $U$ и $V$ с параметризациями $\varphi$ и $\psi$. Тогда меры, вычисленные через $\varphi$ и $\psi$, совпадают:

$$\int_{\varphi^{-1}(E)} \sqrt{D_\varphi} d\mu_k = \int_{\psi^{-1}(E)} \sqrt{D_\psi} d\mu_k.$$

**Смысл:**

При замене параметризации $\varphi = \psi \circ L$ (где $L = \psi^{-1} \circ \varphi$ — диффеоморфизм) замена переменных в интеграле и связь $\sqrt{D_\varphi} = \sqrt{D_\psi \circ L} \cdot |\det L'|$ гарантируют инвариантность меры. Это делает определение корректным.

## Измеримое подмножество многообразия

Пусть $M \in \mathbb{M}_{kn}^{(1)}$, $E \subset M$.

1. $E$ называется *малым измеримым*, если $\exists$ стандартная окрестность $U \supset E$ с параметризацией $\varphi$, такая что $\varphi^{-1}(E)$ измеримо в $\mathbb{R}^k$.
2. $E$ называется *измеримым*, если оно представимо в виде $E = \bigcup_\nu E_\nu$, где $\{E_\nu\}$ — не более чем счётное семейство дизъюнктных малых измеримых множеств.

**Смысл:**

Любое "достаточно маленькое" множество на многообразии измеримо, если его прообраз в $\mathbb{R}^k$ измерим. Для произвольных множеств измеримость определяется через разбиение на счётное число "малых" частей, что согласуется со стандартным покрытием многообразия картами.