# Шпора матан

# 1. Интегралы от неотрицательных функций

## 1. Основные свойства

### Монотонность

Если $0 \le f(x) \le g(x)$ п.в. на $X$, то:

$$\int_X f\,d\mu \le \int_X g\,d\mu.$$

(Интеграл сохраняет неравенства.)

### Линейность

Для $a, b \ge 0$:

$$\int_X (af + bg)\,d\mu = a\int_X f\,d\mu + b\int_X g\,d\mu.$$

(Интеграл суммы = сумма интегралов.)

### Аддитивность по области

Если $A \cap B = \emptyset$, то:

$$\int_{A\cup B} f\,d\mu = \int_A f\,d\mu + \int_B f\,d\mu.$$

(Интеграл по объединению = сумма интегралов.)

### Невозрастание меры

Если $A \subseteq B$, то:

$$\int_A f\,d\mu \leq \int_B f\,d\mu.$$

(Интеграл по подмножеству ≤ интегралу по всему множеству.)

## 2. Теорема Леви для рядов

Если $f_k \geq 0$ и измеримы, то:

$$\int_E \sum_{k=1}^{\infty} f_k\,d\mu = \sum_{k=1}^{\infty} \int_E f_k\,d\mu.$$

(Можно менять местами сумму и интеграл.)

# 2. Неравенство Чебышева

### Суммируемая функция $f \in L(E, \mu)$

#### Определение

Функция `f` называется суммируемой на `E` (пишут `f ∈ L(E, μ)`), если:

$$\int_E |f|\,d\mu < +\infty$$

#### Свойство

Если `f` суммируема, то она конечна почти всюду на `E`.

## Измеримая функция $f \in S(E)$

**Определение:**

$S(E)$ — это множество всех измеримых функций $f : E \to \mathbb{R}$, принимающих конечное число значений.

$$S(E) = \{f \text{ измерима} \mid f(E) = \{c_1, \dots, c_n\},\ c_i \in \mathbb{R},\ n < \infty\}$$

**Смысл:**

Простые функции — это "кирпичики" для построения более сложных измеримых функций. Они принимают лишь конечное число значений, что упрощает анализ (например, интегрирование). Любую измеримую функцию можно приблизить последовательностью простых функций.

## Формулировка неравенства Чебышева

Для `f ∈ S(E)` (классу измеримых функций), `t > 0`:

$$\mu\{x \in E : |f(x)| \geq t\} \leq \frac{1}{t} \int_E |f| \, d\mu$$

**Смысл:**

Оценивает меру множества, где `|f(x)| ≥ t`, через интеграл от `|f|`.
Неравенство даёт гарантированную верхнюю границу для "редких событий". Чем выше порог `t`, тем меньше элементов могут его превышать.

## Следствие 1

**Формулировка:**

Если $f \in L(E, \mu)$, то $\mu(\{x \in E : |f(x)| = +\infty\}) = 0$.

**Смысл:**

Если функция `f ∈ L(E, μ)`, то множество точек, где она принимает бесконечные значения `(|f(x)| = +∞)`, имеет меру ноль:

## Следствие 2

**Формулировка:**

Если $f \geq 0$ и $\int_E f d\mu = 0$, то $f = 0$ почти всюду на $E$.

**Смысл:**

Если неотрицательная функция имеет нулевой интеграл, то она почти всюду нулевая. "Почти всюду нулевая" = нуль везде, кроме "несущественных" точек.

# 3. Приближение интеграла интегралом по множеству конечной меры

## Определение

Пусть $f \in L(E, \mu)$, где $\mu E = +\infty$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует подмножество $E_\varepsilon \subset E$ такое, что:

1. $\mu E_\varepsilon < +\infty$ (множество $E_\varepsilon$ имеет конечную меру),
2. $\int_{E \setminus E_\varepsilon} |f| \, d\mu < \varepsilon$ (интеграл от $|f|$ по дополнению $E \setminus E_\varepsilon$ меньше $\varepsilon$).

### Смысл

Это следствие показывает, что для интегрируемой функции $f$ на множестве бесконечной меры можно найти подмножество конечной меры $E_\varepsilon$, на котором интеграл $f$ "почти полностью" сосредоточен. Оставшаяся часть интеграла (по $E \setminus E_\varepsilon$) пренебрежимо мала (меньше $\varepsilon$).

Это означает, что "хвост" функции (её поведение на множествах большой меры) не вносит существенного вклада в интеграл.

## Счетная аддитивность интеграла

### Определение

Если $E = \bigcup_k E_k$, где $E_k$ измеримы и попарно не пересекаются, и интеграл $\int_E f \, d\mu$ существует, то:

$$\int_E f \, d\mu = \sum_k \int_{E_k} f \, d\mu.$$

#### Смысл

Интеграл по объединению счетного числа множеств равен сумме интегралов по каждому множеству. Это свойство аналогично счетной аддитивности меры.

# 4. Теорема Фату

## liminf

`liminf` (нижний предел) - Для числовой последовательности: наибольший предел среди всех её подпоследовательностей. Для функций: функция, которая в каждой точке равна нижнему пределу значений последовательности функций. Проще говоря: "наименьшее значение, к которому постоянно возвращается последовательность"

## Формулировка

### Для неотрицательных измеримых функций

Пусть $f_n \in S(E)$, $f_n \geq 0$. Тогда:

$$\int_E \liminf_{n\to\infty} f_n \, d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int_E f_n \, d\mu.$$

#### Смысл

Когда мы берем последовательность неотрицательных функций и смотрим на их нижний предел (самые маленькие значения, к которым они постоянно возвращаются), то интеграл от этого нижнего предела никогда не сможет оказаться больше, чем нижний предел их интегралов. Это как гарантия того, что усредненное "худшее поведение" функций не даст неожиданно большой интеграл.

### Для поточечного предела

Пусть $f_n, f \in S(E)$, $f_n \geq 0$, $f_n \to f$ почти везде на $E$. Тогда:

$$\int_E f \, d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int_E f_n \, d\mu.$$

**Смысл**

Если такие неотрицательные функции ещё и сходятся к какой-то предельной функции, то интеграл этой предельной функции тоже не превысит нижнюю границу интегралов исходной последовательности. Даже если значения функций поточечно стремятся к пределу, их интегралы могут колебаться, но теорема даёт нам контроль сверху - предельный интеграл не выскочит за нижнюю границу.

# 5. Теорема Лебега о мажорированной сходимости

## Мажоранта

Функция (или число), которая доминирует (превосходит) другую функцию (или последовательность) на заданном множестве.

## Теорема Лебега

Если последовательность измеримых функций $f_n$ сходится к $f$ почти везде на $E$, и существует суммируемая мажоранта $\phi \in L(E, \mu)$ (т.е. $|f_n| \leq \phi$ почти везде), то предельный переход под знаком интеграла корректен:

$$\lim_{n \to \infty} \int_E f_n \, d\mu = \int_E f \, d\mu.$$

**Смысл**

Теорема гарантирует, что при наличии "контроля" (мажоранты $\phi$) над функциями $f_n$, их сходимость почти везде влечёт сходимость интегралов. Это ключевой инструмент для обмена пределами и интегралами в анализе, устраняющий риск потери сходимости.

## Следствие Теоремы Лебега (для множеств конечной меры)

Если $\mu(E) < +\infty$, $f_n$ равномерно ограничены ($|f_n| \leq K$) и $f_n \to f$ почти везде, то

$$\lim_{n \to \infty} \int_E f_n \, d\mu = \int_E f \, d\mu.$$

**Смысл**

На множествах конечной меры равномерная ограниченность заменяет суммируемую мажоранту (константа $K$ суммируема), что упрощает применение теоремы Лебега в практических задачах.

# 6. Интегралы Лебега и Римана

## Определение интеграла Римана

**Определение:**

Функция $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ интегрируема по Риману, если существует предел интегральных сумм $\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$ при стремлении диаметра разбиения к нулю.

**Смысл:**

Интеграл Римана — это предел сумм площадей прямоугольников, аппроксимирующих площадь под кривой. Он существует для ограниченных функций с "небольшим" количеством разрывов.

## Критерий Лебега интегрируемости по Риману

**Определение:**

Функция $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ интегрируема по Риману ($f \in R[a, b]$), если она ограничена и множество её точек разрыва имеет нулевую меру.

**Смысл:**

Интегрируемость по Риману требует "хорошего поведения" функции — ограниченности и малости разрывов. Мера разрывов должна быть нулевой, иначе интеграл Римана не существует.

## Сравнение интегралов Римана и Лебега

**Определение:**

Если $f \in R[a, b]$, то $f \in L[a, b]$, и значения интегралов совпадают: $(L) \int_a^b f = (R) \int_a^b f$.

**Смысл:**

Интеграл Лебега обобщает интеграл Римана: все риманово-интегрируемые функции лебегово-интегрируемы, и значения совпадают. Лебег "видит" больше функций, но для "хороших" случаев результаты одинаковы.

### Несобственный интеграл и интеграл Лебега

**Определение:**

Несобственный интеграл Римана на $[a, c]$ — предел $\lim_{b \to a} \int_b^c f(t) dt$. Он абсолютно сходится, если сходится $\int_a^c |f(t)| dt$.

**Смысл:**

Абсолютная сходимость несобственного интеграла эквивалентна интегрируемости $|f|$ по Лебегу. В этом случае оба интеграла совпадают, и Лебег "улавливает" сходимость.

# 7. Вычисление меры множества по мерам сечений

### Определение сечения

Для множества $E \subset \mathbb{R}^{n+m}$ и точки $x \in \mathbb{R}^n$ сечением $E(x)$ называется множество всех $y \in \mathbb{R}^m$, таких что $(x, y) \in E$.

**Смысл:**

Сечение "вырезает" часть множества $E$, фиксируя одну координату (например, $x$), и показывает, как выглядит $E$ вдоль оставшихся измерений ($y$).

### Измеримость по Лебегу

Множество $E \subset \mathbb{R}^n$ измеримо по Лебеге, если для любого $\varepsilon > 0$ существуют:
Открытое множество $U \supset E$ и замкнутое $F \subset E$, такие что $\mu_n(U \setminus F) < \varepsilon$.

**Смысл:**

Измеримые множества — это те, которые можно "зажать" между открытыми и замкнутыми с сколь угодно малой ошибкой по мере.

# Теорема о связи меры множества с мерами его сечений

### 1. Измеримость сечений

Для множества $E \subseteq \mathbb{R}^{n+m}$ и фиксированного $x \in \mathbb{R}^n$ сечение определяется как:

$$E(x) = \{y \in \mathbb{R}^m \mid (x, y) \in E\}$$

Если $E$ - измеримо по Лебегу в $\mathbb{R}^{n+m}$, то для почти всех $x \in \mathbb{R}^n$ сечения $E(x)$ измеримы в $\mathbb{R}^m$

#### Смысл

Почти все сечения $E(x)$ измеримы по Лебегу в $\mathbb{R}^m$.

### 2. Измеримость функции мер

Для измеримого множества $E \subseteq \mathbb{R}^{n+m}$ функция меры сечений определяется как:

$$f_E : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad f_E(x) = \mu(E(x))$$

$E(x) = \{y \in \mathbb{R}^m \mid (x, y) \in E\}$ - сечение множества
$\mu$ - мера Лебега в $\mathbb{R}^m$

#### Смысл

Функция $f_e$ измеряет меру Лебега сечения $E$ в каждой точке $x$

### 3. Формула меры

Мера $\mu_{n+m}(E)$ — это стандартная мера Лебега на $\mathbb{R}^{n+m}$.

$$\mu_{n+m}(E) = \int_{\mathbb{R}^n} \mu_m(E(x))\, dx.$$

#### Смысл

Мера всего множества $E$ равна "сумме" (интегралу) мер его плоских срезов. Это позволяет сводить многомерные задачи к последовательности одномерных, упрощая вычисления и доказательства.

## Итоговый смысл теоремы

Теорема показывает, как меру сложного многомерного множества можно разложить на меры его более простых компонент (сечений), связывая анализ в $\mathbb{R}^{n+m}$ с комбинацией задач в $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{R}^m$.

# 8. Мера декартова произведения и мера Лебега как произведение мер

## Мера декартова произведения

$\mathcal{A}_n$ - $\sigma$-алгебра измеримых по Лебегу множеств в $\mathbb{R}^n$
Для измеримых множеств $A \in \mathcal{A}_n, B \in \mathcal{A}_m$ их декартово произведение $A \times B$ измеримо в $\mathbb{R}^{n+m}$, и его мера равна произведению мер:

$$\mu_{n+m}(A \times B) = \mu_n(A) \cdot \mu_m(B).$$

**Смысл:**

Мера произведения множеств равна произведению их мер, что согласуется с интуицией о "площади" прямоугольника. Доказательство использует аппроксимацию открытыми/замкнутыми множествами и свойства регулярности меры Лебега. Для бесконечных мер применяется разбиение на σ-конечные части.

## Мера Лебега как произведение мер

Мера Лебега на $\mathbb{R}^n$ — это $n$-кратное произведение одномерных мер Лебега:

$$\lambda^n = \underbrace{\lambda^1 \times \lambda^1 \times \cdots \times \lambda^1}_{n \text{ раз}}.$$

**Смысл:**

Это означает, что мера многомерного пространства строится как последовательное "умножение" мер вдоль каждой координаты. Например, площадь (2D) — произведение длин (1D), объём (3D) — произведение площадей и длины, и т.д. Свойство следует из теоремы о мере декартова произведения.

# 9. Мера графика и подграфика

## График функции (Гf)

**Определение:**

Для $f : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ график — множество точек $(x, y) \in \mathbb{R}^{n+1}$, где $y = f(x)$.

**Смысл:**

График — это "след" функции в $(n+1)$-мерном пространстве. Если $f$ измерима, её график имеет нулевую меру в $\mathbb{R}^{n+1}$, так как он "тоньше" любого слоя. Доказательство использует разбиение области значений на $\epsilon$-слои и оценку меры.

## Подграфик функции (Qf)

**Определение:**

Для $f : E \subset \mathbb{R}^n \to [0, +\infty]$ подграфик — множество точек $(x, y)$, где $0 \le y \le f(x)$.

**Смысл:**

Подграфик — это область "под" графиком. Его измеримость равносильна измеримости $f$, а мера равна интегралу от $f$ по $E$. Это связывает геометрический объём с аналитическим выражением.

## Теорема

Если $E \subset \mathbb{R}^n$, $f \in S(E)$ (измерима по Лебегу), то $\Gamma f \in \mathcal{A}_{n+1}$ и $\mu_{n+1}(\Gamma f) = 0$.

**Смысл:**

График измеримой функции всегда измерим как множество в $\mathbb{R}^{n+1}$, но его мера нулевая. Это обобщает факт, что кривая на плоскости ($n = 1$) не имеет площади. Доказательство использует разбиение области значений на $\epsilon$-слои и оценку меры объединения прямоугольников.

## Теорема

Пусть $E \in \mathcal{A}_n$, $f : E \to [0, +\infty]$. Тогда:

$$Q_f \text{ измерим} \Leftrightarrow f \text{ измерима, и } \mu_{n+1}(Q_f) = \int_E f \, d\mu_n.$$

**Смысл:**

Подграфик измерим тогда и только тогда, когда сама функция измерима. Его мера совпадает с интегралом от $f$, что обобщает понятие "площади под графиком" на многомерный случай.

Это ключевая связь между геометрией и анализом.

# 10. Теорема Тонелли и Фубини

## Интегральная функцией сечения $I(x)$

Функция, определяемая как $I(x) = \int_{E(x)} f(x,y)\,dy$, где $E(x) = \{y \in \mathbb{R}^m : (x,y) \in E\}$ – сечение множества $E$ при фиксированном $x$.

#### Смысл

Выражает "частичный" интеграл по переменным $y$, оставляя $x$ параметром.

## Теорема Тонелли

Пусть: $E \in \mathcal{A}_{n+m}$ - измеримое множество в $\mathbb{R}^{n+m}$ и $f : E \to [0, +\infty]$ - неотрицательная $\mu_{n+m}$-измеримая функция, тогда:

1. Для почти всех $x \in \mathbb{R}^n$ сечение $E_x = \{y | (x,y) \in E\}$ измеримо в $\mathbb{R}^m$
2. Функция $I(x) = \int_{E_x} f(x,y) d\mu_m(y)$ измерима
3. Имеет место равенство:

$$\int_E f d\mu_{n+m} = \int_{\mathbb{R}^n} I(x) d\mu_n(x)$$

#### Смысл:

Позволяет вычислять $(n+m)$-мерный интеграл как повторный: сначала по $y$ при фиксированном $x$, затем по $x$.

## Теорема Фубини

Если: $E \subseteq \mathbb{R}^{n+m}$ измеримо и $f \in L(E)$ (т.е. $\int_E |f| < +\infty$), то:

$$\int_E f = \int_{\mathbb{R}^n} \left( \int_{E_x} f(x,y) dy \right) dx = \int_{\mathbb{R}^m} \left( \int_{E^y} f(x,y) dx \right) dy$$

где $E_x = \{y | (x,y) \in E\}$, $E^y = \{x | (x,y) \in E\}$

**Смысл:**

Для суммируемых функций можно менять порядок интегрирования и сводить кратный интеграл к повторным

**Важно:**

Все сечения и внутренние интегралы существуют для почти всех $x$ и $y$

### Ключевые отличия:

- Тонелли: Работает с *неотрицательными измеримыми* функциями ($S(E)$). Проверка измеримости $I(x)$ достаточна.
- Фубини: Требует *суммируемости* ($L(E)$), чтобы гарантировать конечность повторных интегралов и возможность перестановки порядка интегрирования.

# 11. Интеграл Эйлера-Пуассона

### Определение:

Интеграл Эйлера-Пуассона — это несобственный интеграл вида $I = \int_0^{+\infty} e^{-x^2}\, dx$, значение которого равно $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

### Смысл:

Интеграл вычисляется с помощью перехода к полярным координатам, где замена переменных $x = r\cos\varphi, y = r\sin\varphi$ упрощает подынтегральное выражение. Квадрат интеграла $I^2$ преобразуется в двойной интеграл по плоскости, который сводится к произведению двух одномерных интегралов. Результат $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$ широко используется в теории вероятностей и математической физике.

### Ключевые шаги:

1. Замена $I^2 = \iint e^{-(x^2+y^2)}\, dx\, dy$.
2. Переход к полярным координатам: $\int_0^{+\infty} \int_0^{\pi/2} re^{-r^2}\, d\varphi\, dr$.
3. Вычисление: $\frac{\pi}{4}$, откуда $I = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

# 12. Мера n-мерного шара и сферы

### Определение:

Мера Лебега $\mu_n$ $n$-мерного шара $\overline{B}_n(a,R) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x-a| \leq R\}$ вычисляется по формуле:

$$\mu_n \overline{B}_n(a,R) = \frac{2^n}{n!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} R^n.$$

### Смысл:

Мера шара зависит от его радиуса $R$ и размерности $n$. Для $n=2$ и $n=3$ получаем классические формулы площади круга и объёма шара. Мера сферы $\mathbb{S}^{n-1}$ равна нулю, так как она является границей шара и имеет нулевой объём в $\mathbb{R}^n$.

#### Примеры:

- $\mu_2 \overline{B}_2(a,R) = \pi R^2$ (круг),
- $\mu_3 \overline{B}_3(a,R) = \frac{4}{3}\pi R^3$ (шар),
- $\mu_4 \overline{B}_4(a,R) = \frac{\pi^2}{2} R^4$.

# 13. Замена переменной в интеграле, образ и плотность меры

$\Phi$ – это измеримое отображение (функция), которое "переводит" точки из пространства $X$ в пространство $Y$.
$h$ – весовая функция, это неотрицательная измеримая функция, которая определяет, как мера $\mu$ на $X$ преобразуется в меру $v$ на $Y$.

### Общая схема замены переменной

Для пространств с мерами $(X, A, \mu)$, $(Y, B, v)$ и измеримой функции $h \geq 0$, если $vB = \int_{\Phi^{-1}(B)} h\, d\mu$ и $f$ измерима на $Y$, то:

$$\int_Y f\,dv = \int_X (f \circ \Phi)h\,d\mu.$$

**Смысл:**

Интеграл функции $f$ по мере $v$ на $Y$ сводится к интегралу её композиции с $\Phi$ и весовой функции $h$ по исходной мере $\mu$ на $X$. Это обобщение замены переменных в анализе, где $h$ играет роль якобиана.

### Образ меры

Если $h \equiv 1$, то $v = \Phi(\mu)$ (образ меры $\mu$), и:

$$\int_Y f\,dv = \int_X f \circ \Phi\,d\mu.$$

**Смысл:**

Мера $v$ "переносится" с $X$ на $Y$ через отображение $\Phi$, а интеграл преобразуется без весовой функции. Пример — замена координат без искажения объёма.

### Плотность меры

Если $vA = \int_A h\,d\mu$, то $h$ — плотность $v$ относительно $\mu$, и:

$$\int_X f\,dv = \int_X fh\,d\mu.$$

**Смысл:**

Функция $h$ показывает, как мера $v$ "перевешивает" $\mu$ в каждой точке. Критерий плотности связывает $h$ с неравенствами для значений мер на множествах.

### Ключевая идея:

Замена меры или переменных сводит сложный интеграл к исходной мере с поправочным множителем ($h$ или $f \circ \Phi$), что упрощает вычисления.

# 14. Криволинейные и поверхностные интегралы

## Криволинейный интеграл первого рода

Интеграл от функции вдоль заданной кривой.

**Формула:**

$$\int_L f\,ds = \int_a^b f(\mathbf{r}(t)) \cdot \|\mathbf{r}'(t)\|\,dt$$

Где: $\mathbf{r}(t)$ - параметризация кривой $L$, $t \in [a, b]$ — параметр, $ds = \|\mathbf{r}'(t)\|dt$ — элемент длины

**Смысл:**

Обобщение интеграла на произвольные кривые. Вычисляет "сумму" значений функции с учётом длины кривой (например, массу проволоки).

## Поверхностный интеграл первого рода

Интеграл от функции по поверхности.

**Формула:**

$$\iint_S f\,dS = \iint_D f(\mathbf{r}(u, v)) \cdot \|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v\|\,du\,dv$$

Где: $\mathbf{r}(u, v)$ — параметризация поверхности, $dS = \|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v\|du\,dv$ — элемент площади

**Смысл:**

Обобщение двойного интеграла на искривлённые поверхности (например, вычисление массы оболочки).

## Связь с мерами

1. Кривая: $ds$ — мера длины
2. Поверхность: $dS$ — мера площади
3. Объём: $dV = |J|du\,dv\,dw$ — мера объёма (с якобианом)

## Ключевая идея:

Все случаи используют "местные" меры ($ds$, $dS$, $dV$), адаптированные к геометрии объекта.

# 15. Преобразование меры Лебега при диффеоморфизме. Замена переменной в интеграле Лебега. Использование полярных, цилиндрических и сферических координат в кратных интегралах.

$\det D\varphi$ **- якобиан.**

### Определение Диффеоморфизма:

Диффеоморфизм — это обратимое гладкое отображение (функция) между областями в $\mathbb{R}^n$, у которого обратное тоже гладкое.

### Преобразование меры Лебега при диффеоморфизме

Если $\varphi : U \to V$ — диффеоморфизм открытых множеств в $\mathbb{R}^n$, то для любой измеримой функции $f$ на $V$:

$$\int_V f(y)\,dy = \int_U f(\varphi(x))|\det D\varphi(x)|\,dx.$$

**Смысл:**

Мера Лебега "растягивается" под действием $\varphi$ с множителем $|\det D\varphi|$. Это обобщение замены переменных в интеграле на многомерный случай.

### Замена переменных в интеграле Лебега

$U, V \subseteq \mathbb{R}^n$ - открытые; $\varphi : U \to V$ - $C^1$-диффеоморфизм; $f : V \to \mathbb{R}$ - $\mu$-интегрируема

$$\int_V f\,d\mu = \int_U (f \circ \varphi) \cdot |\det D\varphi|\,d\mu$$

**Смысл:**

Интеграл сохраняется, если учитывать "искажение" объема под действием $\varphi$. Якобиан корректирует меру, компенсируя деформацию области.

### Разница:

Преобразование меры Лебега описывает, как меняется объем под действием диффеоморфизма, вводя поправку на якобиан. Замена переменных — это практическое применение этого факта для пересчета интеграла при переходе к новым координатам.

Разница в акцентах: первое — о свойствах меры, второе — о технике интегрирования.

### Полярные координаты ($\mathbb{R}^2$)

Определение: $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, мера: $dxdy = r\,drd\theta$.
Смысл: Переход от декартовых координат к радиусу и углу. Множитель $r$ возникает из якобиана, учитывая "растяжение" при удалении от центра.

### Цилиндрические координаты ($\mathbb{R}^3$)

Определение: $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, $z = z$, мера: $dxdydz = r\,drd\theta dz$.
Смысл: Комбинация полярных в плоскости и линейной по $z$. Множитель $r$ аналогичен двумерному случаю, сохраняя объемные искажения.

### Сферические координаты ($\mathbb{R}^3$)

Определение: $x = r\sin\theta\cos\phi$, $y = r\sin\theta\sin\phi$, $z = r\cos\theta$, мера: $dxdydz = r^2\sin\theta\,drd\theta d\phi$.
Смысл: Учет радиуса и двух углов. Множитель $r^2\sin\theta$ отражает "растяжение" в трех измерениях, особенно у полюсов ($\theta = 0, \pi$).

# 16. Мера Лебега-Стилтьеса и дискретная мера

### Полукольцо ячеек

Полукольцо ячеек $P_\Delta$ — это семейство промежутков вида $[a, b)$ (или других типов: $(a, b]$, $[a, b]$, $(a, b)$), замкнутое относительно пересечения и таких, что разность двух ячеек представима в виде конечного объединения непересекающихся ячеек из $P_\Delta$.

**Смысл:**

Они естественно возникают при переходе от меры интервалов к мере на бо́льших классах множеств (например, при построении меры Лебега-Стилтьеса). Их свойств достаточно для применения теоремы Каратеодори о продолжении меры до $\sigma$

## Мера Лебега-Стилтьеса

Мера $\mu_g$ на полукольце ячеек $P_\Delta$, заданная через возрастающую непрерывную слева функцию $g$ как $v_g[a, b] = g(b) - g(a)$, и стандартно распространённая на $\sigma$-алгебру $A_g$.

**Смысл:**

Мера Лебега-Стилтьеса обобщает классическую меру Лебега, заменя длину интервала $b - a$ на приращение $g(b) - g(a)$, что позволяет учитывать произвольные распределения "массы". В частном случае, когда $g(x) = x$, мера Лебега-Стилтьеса превращается в обычную меру Лебега, где длина интервала измеряется линейно, без дополнительных весовых коэффициентов. Таким образом, классическая мера Лебега — это частный случай меры Лебега-Стилтьеса с линейной функцией распределения. ($g(x) = x + c$)

## Дискретная мера Лебега-Стилтьеса

Для функции $g$ со скачками $h_k$ в точках $a_k$:

$$\mu_g(A) = \sum_{a_k \in A} h_k$$

где $A$ — любое измеримое подмножество числовой прямой (например, интервал, отрезок или точечное множество).

**Смысл:**

Превращает интеграл в сумму значений в точках скачков. Описывает точечные массы (вероятности, заряды). Отличается от непрерывного случая, где масса распределена плавно. Особенно полезна для дискретных случайных величин. Дискретность $g$ меняется только скачками, постоянна между ними.

## Ключевая связь

Дискретная мера — частный случай меры Лебега-Стилтьеса, где $g$ кусочно-постоянна со скачками в точках носителя. Это позволяет единообразно работать как с непрерывными, так и дискретными распределениями.

# 17. Интеграл по мере Лебега-Стилтьеса (гладкий случай)

Если мера Лебега-Стилтьеса $\mu_g$ порождена абсолютно непрерывной функцией $g$ (т.е. $g(x) = \int_{-\infty}^{x} g'(t)\,dt$), то для измеримой функции $f$:

$$\int_X f\,d\mu_g = \int_X f(x) g'(x)\,dx.$$

### Смысл

Мера Лебега-Стилтьеса обобщает понятие "веса" на множествах, задавая его через функцию $g$. Если $g$ гладкая, то её производная $g'$ играет роль плотности, превращая интеграл Лебега-Стилтьеса в обычный интеграл с весом $g'(x)$. Это упрощает вычисления, сводя задачу к классическому анализу, и важно, например, в теории вероятностей, где $g'$ соответствует плотности распределения.

# 18. Формула Фруллани

## Формула Фруллани (строгая формулировка)

Пусть функция $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ удовлетворяет условиям: $f$ непрерывна на $[0, +\infty)$; Существует конечный предел $f(+\infty) = \lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$. Тогда для любых положительных чисел $a, b > 0$ выполняется равенство:

$$\int\limits_0^\infty \frac{f(ax) - f(bx)}{x} dx = (f(+\infty) - f(0)) \ln \frac{a}{b}.$$

## Смысл и применение (неформальное объяснение)

Эта формула помогает вычислять интегралы особого вида, где под интегралом стоит разность значений функции при разных масштабах аргумента, делённая на аргумент. Она работает благодаря тому, что особенности при нуле и бесконечности взаимно сокращаются. Главная ценность формулы - она позволяет заменить сложный на вид интеграл на простое выражение с логарифмом, что часто встречается в задачах математической физики, теории вероятностей и анализе. Формула особенно полезна при работе с преобразованиями интегралов и исследовании асимптотического поведения функций. По сути, она устанавливает связь между поведением функции на границах области (в нуле и на бесконечности) и значением интеграла от её масштабированных разностей.

# 19. Локальное условие Лебега для интегралов зависящих от параметра. Равномерная сходимостьнесобственных интегралов. Признаки Вейерштрасса, Дирихле и Абеля равномерной сходимости несобственных интегралов

$$L^1(X)$$

пространство абсолютно интегрируемых функций на $X$ (интеграл понимается в смысле Лебега):

$$L^1(X) = \left\{ f : X \to \mathbb{R} \,\middle|\, \int_X |f(x)|\, dx < +\infty \right\}$$

## Локальное условие Лебега для интегралов, зависящих от параметра

Пусть функция $f(x, y)$ интегрируема по $x$ на $[a, +\infty)$ при каждом $y \in Y$ и удовлетворяет условию:

$$\exists g(x) \in L^1([a, +\infty)) : |f(x, y)| \leq g(x) \text{ для почти всех } x \text{ и всех } y \in Y$$

Тогда интеграл $\int_a^\infty f(x, y) dx$ сходится равномерно по $y \in Y$.

**Смысл:**

Это аналог теоремы Лебега о мажорированной сходимости для интегралов с параметром. Условие гарантирует, что можно менять порядок интегрирования и предельного перехода. Нужно для обоснования законности операций с параметрическими интегралами.

## Равномерная сходимость несобственных интегралов

Интеграл $\int_a^\infty f(x, y) dx$ сходится равномерно на множестве $Y$, если:

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists A = A(\varepsilon) > a : \forall R > A, \forall y \in Y \Rightarrow \left| \int_R^\infty f(x, y) dx \right| < \varepsilon$$

**Смысл:**

Хвост интеграла должен становиться малым одновременно для всех значений параметра $y$. Это гарантирует, что предельные переходы по параметру и интегралу можно менять местами.

## Критерий Коши равномерной сходимости

Интеграл $\int_a^\infty f(x, y) dx$ сходится равномерно на $Y$ тогда и только тогда, когда:

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists A > a : \forall R_1, R_2 > A, \forall y \in Y \Rightarrow \left| \int_{R_1}^{R_2} f(x, y) dx \right| < \varepsilon$$

**Смысл:**

Аналог критерия Коши для последовательностей. Равномерная сходимость означает, что интеграл по любому достаточно большому отрезку можно сделать сколь угодно малым сразу для всех $y$.

## Признак Вейерштрасса

Если $|f(x, y)| \leq g(x)$ для всех $x \geq a$, $y \in Y$ и $\int_a^\infty g(x) dx$ сходится, то $\int_a^\infty f(x, y) dx$ сходится равномерно на $Y$.

**Смысл:**

Достаточно найти мажоранту, не зависящую от параметра $y$, интеграл от которой сходится. Самый простой, но часто слишком грубый способ доказательства равномерной сходимости.

## Признак Дирихле

Пусть:

1. $\left|\int_a^R f(x,y)dx\right| \leq M$ для всех $R > a, y \in Y$
2. При каждом $y \in Y$ функция $g(x,y)$ монотонна по $x$
3. $g(x,y) \rightrightarrows 0$ при $x \to \infty$ на $Y$

Тогда $\int_a^\infty f(x,y)g(x,y)dx$ сходится равномерно на $Y$.

**Смысл:**

Полезен для интегралов вида $\int \sin(x) \cdot \frac{1}{x^p}dx$. Первый множитель осциллирует (его интеграл ограничен), второй монотонно убывает к нулю.

## Признак Абеля

Теорема (Формально):
Пусть:

1. $\int_a^\infty f(x,y)dx$ сходится равномерно на $Y$
2. $g(x,y)$ равномерно ограничена: $|g(x,y)| \leq M$ для всех $x \geq a, y \in Y$
3. При каждом $y \in Y$ функция $g(x,y)$ монотонна по $x$

Тогда $\int_a^\infty f(x,y)g(x,y)dx$ сходится равномерно на $Y$.

## Смысл:

Обобщение признака Дирихле. Применяется, когда одна часть дает равномерно сходящийся интеграл, а другая - монотонную ограниченную функцию. Позволяет исследовать более сложные интегралы.

# 20. Связь (равномерной) сходимости несобственного интеграла с (равномерной) сходимостью ряда из определенных интегралов.

## Несобственный интеграл

$$I(y) = \int_a^\infty f(x,y)\,dx$$

**Смысл:**

Это интеграл с бесконечным верхним пределом, зависящий от параметра $y$. Его сходимость означает, что при $R \to \infty$ интеграл $\int_a^R f(x,y)\,dx$ стремится к конечному пределу $I(y)$. Равномерная сходимость требует, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ существовало такое $R_0$, что для всех $R > R_0$ и всех $y$ выполняется $\left|\int_R^\infty f(x,y)\,dx\right| < \varepsilon$.

## Ряд из кусочных интегралов

$$\sum_{k=1}^\infty u_k(y) = \sum_{k=1}^\infty \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x,y)\,dx$$

**Смысл:**

Это представление интеграла $I(y)$ в виде бесконечной суммы интегралов по отрезкам разбиения $a = x_0 < x_1 < \dots$. Каждое слагаемое $u_k(y)$ — это вклад $f(x,y)$ на $[x_{k-1}, x_k]$. Ряд сходится к $I(y)$, если частичные суммы $S_N(y) = \sum_{k=1}^N u_k(y)$ стремятся к $I(y)$ при $N \to \infty$. Равномерная сходимость ряда означает, что $S_N(y)$ приближает $I(y)$ с любой точностью сразу для всех $y$ при достаточно больших $N$.

## Критерий равномерной сходимости

1. Интеграл → Ряд:
   Если $I(y)$ сходится равномерно, то для любого разбиения ряд $\sum u_k(y)$ сходится равномерно (так как "хвост" ряда соответствует "хвосту" интеграла).
2. Ряд → Интеграл:
   Если для какого-то разбиения ряд $\sum u_k(y)$ сходится равномерно, то $I(y)$ сходится равномерно (поскольку частичные суммы ряда совпадают с интегралами $\int_a^{x_N} f(x,y)\,dx$).

### Смысл критерия

Оба объекта — несобственный интеграл и ряд — выражают одно и то же значение $I(y)$, но в разных формах. Равномерная сходимость означает, что ошибка приближения контролируется единым образом для всех $y$. Это полезно для перестановки пределов, интегрирования/дифференцирования под знаком интеграла или ряда.

# 21. Предельный переход под знаком интеграла по параметру при условии Лебега, предельный переход под знаком интеграла по параметру в случае равномерной сходимости.

### Предельный переход при условии Лебега

Пусть $(X, A, \mu)$ — пространство с мерой, $\tilde{Y}$ — метрическое пространство, $Y \subset \tilde{Y}$, $f : X \times Y \to \mathbb{R}$, при всех $y \in Y$ $f(x, y) \in L(X, \mu)$ (где y фиксирован) . Если при почти всех $x \in X$ $f(x, y) \underset{y \to y_0}{\longrightarrow} g(x)$, и существует $\Phi \in L(X, \mu)$ и окрестность $V_{y_0}$, такие что $|f(x, y)| \leq \Phi(x)$ для почти всех $x$ и $y \in V_{y_0} \cap Y$,

то $g \in L(X, \mu)$ и $\lim_{y \to y_0} \int_X f(x, y) d\mu(x) = \int_X g(x) d\mu(x)$.

#### Смысл

Эта теорема обобщает теорему Лебега о мажорированной сходимости для интегралов, зависящих от параметра. Условие гарантирует, что функции $f(\cdot, y)$ "не слишком быстро растут" при $y \to y_0$, что позволяет менять порядок предела и интеграла. Пример применения — исследование непрерывности интегралов от параметрических семейств.

### Предельный переход при равномерной сходимости

Пусть $(X, A, \mu)$ — пространство с мерой, $\mu X < +\infty$, $f : X \times Y \to \mathbb{R}$, $f(\cdot, y) \in L(X, \mu)$, и $f(\cdot, y) \underset{y \to y_0}{\rightrightarrows} g$ (равномерно на $X$). Тогда $g \in L(X, \mu)$ и $\lim_{y \to y_0} \int_X f(x, y) d\mu(x) = \int_X g(x) d\mu(x)$.

**Смысл**

Если семейство функций $f(\cdot, y)$ сходится к $g$ равномерно (т.е. "одинаково быстро" для всех $x$ ), то интеграл от предела равен пределу интегралов. Это частный случаи теоремы 1, где мажорантой служит $1 + |g|$ (так как $\mu X < +\infty$). Используется, например, при доказательстве непрерывности интегралов Фурье.

### Связь условий и примеры (Равномерная сходимость)

Семейство $\{f(\cdot, y)\}_{y \in Y}$ равномерно сходится к $g$ на $X$, если $\sup_{x \in X} |f(x, y) - g(x)| \underset{y \to y_0}{\longrightarrow} 0$.
Обозначение: $f(\cdot, y) \rightrightarrows g$.

**Смысл**

Равномерная сходимость — более строгое условие, чем поточечная, но зато она гарантирует сохранение свойств (непрерывности, интегрируемости) при предельном переходе. Например, если $f(x, y)$ — непрерывные функции и $f \rightrightarrows g$, то $g$ тоже непрерывна. В контексте интегралов это позволяет избежать "патологий", когда предельная функция неинтегрируема.

# Локальная и глобальная непрерывность интеграла по параметру

## 1. Локальная непрерывность интеграла по параметру в точке

**Теорема (Следствие 2):**
Пусть $(X, A, \mu)$ — пространство с мерой, $Y$ — метрическое пространство, $f : X \times Y \to \mathbb{R}$, при всех $y \in Y$ $f(\cdot, y) \in L(X, \mu)$, $y_0 \in Y$, при почти всех $x \in X$ функция $f(x, \cdot)$ непрерывна в точке $y_0$, и $f$ удовлетворяет локальному условию Лебега в точке $y_0$ (т.е. существует окрестность $V_{y_0}$ и функция $\Phi \in L(X, \mu)$ такие, что для почти всех $x \in X$ и всех $y \in V_{y_0} \cap Y$ выполняется $|f(x, y)| \le \Phi(x)$). Тогда интеграл $I(y) = \int_X f(x, y)\, d\mu(x)$ непрерывен в точке $y_0$.

**Смысл:**

Эта теорема гарантирует, что если подынтегральная функция $f(x, y)$ непрерывна по параметру $y$ в точке $y_0$ для почти всех $x$ и ограничена "контролирующей" функцией $\Phi(x)$, то интеграл $I(y)$ тоже будет непрерывным в $y_0$. Это важно, например, при исследовании зависимостей интегралов от параметров, таких как время или координаты, в физике или теории вероятностей.

## 2. Глобальная непрерывность интеграла по параметру на множестве

**Теорема (Теорема 2):**
Пусть $X$ — компакт в $\mathbb{R}^n$, $\mu$ — мера Лебега, $Y$ — метрическое пространство, $f \in C(X \times Y)$. Тогда интеграл $I(y) = \int_X f(x,y)\, d\mu(x)$ принадлежит $C(Y)$ (т.е. непрерывен на $Y$).

**Смысл:**
Если $f$ непрерывна на произведении компакта $X$ и метрического пространства $Y$, то интеграл $I(y)$ будет непрерывным на всём $Y$. Это следует из компактности $X$ и непрерывности $f$, что позволяет избежать проблем с расходимостями. Например, это применяется в задачах, где параметр $y$ меняется в широких пределах, а $X$ — ограниченная область.

## 3. Локальное условие Лебега и его роль

**Условие (формула 11.40):**
$\exists \Phi \in L(X, \mu), \exists V_{y_0} : \text{при почти всех } x \in X \; \forall y \in \dot{V}_{y_0} \cap Y \; |f(x,y)| \le \Phi(x).$

**Смысл:**
Это условие требует, чтобы значения $f(x,y)$ в окрестности точки $y_0$ не превосходили некоторую интегрируемую функцию $\Phi(x)$. Оно нужно для применения теоремы Лебега о мажорируемой сходимости, которая позволяет "переставлять" пределы и интегралы. Без такого условия интеграл $I(y)$ может терять непрерывность, даже если $f(x,y)$ непрерывна по $y$.

> **Примечание:** Оба результата (локальный и глобальный) опираются на идею контроля роста $f(x,y)$: в первом случае — через локальную мажоранту, во втором — через глобальную ограниченность, обеспечиваемую компактностью $X$.