

1. Свойства интегралов от неотрицательных функций (в т.ч. теорема Леви для рядов).

1. Основные свойства

Монотонность

Если $0 \leq f(x) \leq g(x)$ п.в. на X , то:

$$\int_X f d\mu \leq \int_X g d\mu.$$

(Интеграл сохраняет неравенства.)

Линейность

Для $a, b \geq 0$:

$$\int_X (af + bg) d\mu = a \int_X f d\mu + b \int_X g d\mu.$$

(Интеграл суммы = сумма интегралов.)

Аддитивность по области

Если $A \cap B = \emptyset$, то:

$$\int_{A \cup B} f d\mu = \int_A f d\mu + \int_B f d\mu.$$

(Интеграл по объединению = сумма интегралов.)

Невозрастание меры

Если $A \subseteq B$, то:

$$\int_A f d\mu \leq \int_B f d\mu.$$

(Интеграл по подмножеству \leq интегралу по всему множеству.)

2. Теорема Леви для рядов

Если $f_k \geq 0$ и измеримы, то:

$$\int_E \sum_{k=1}^{\infty} f_k d\mu = \sum_{k=1}^{\infty} \int_E f_k d\mu.$$

(Можно менять местами сумму и интеграл.)

2. Неравенство Чебышева

Суммируемая функция $f \in L(E, \mu)$

Определение

Функция f называется суммируемой на E (пишут $f \in L(E, \mu)$), если:

$$\int_E |f| d\mu < +\infty$$

Свойство

Если f суммируема, то она конечна почти всюду на E .

Измеримая функция $f \in S(E)$

Определение:

$S(E)$ — это множество всех измеримых функций $f : E \rightarrow \mathbb{R}$, принимающих конечное число значений.

$$S(E) = \{f \text{ измерима} \mid f(E) = \{c_1, \dots, c_n\}, c_i \in \mathbb{R}, n < \infty\}$$

Смысл:

Простые функции — это "кирпичики" для построения более сложных измеримых функций. Они принимают лишь конечное число значений, что упрощает анализ (например, интегрирование). Любую измеримую функцию можно приблизить последовательностью простых функций.

Формулировка неравенства Чебышева

Для $f \in S(E)$ (классу измеримых функций), $t > 0$:

$$\mu\{x \in E : |f(x)| \geq t\} \leq \frac{1}{t} \int_E |f| d\mu$$

Смысл:

Оценивает меру множества, где $|f(x)| \geq t$, через интеграл от $|f|$.

Неравенство даёт гарантированную верхнюю границу для "редких событий". Чем выше порог t , тем меньше элементов могут его превышать.

Следствие 1

Формулировка:

Если $f \in L(E, \mu)$, то $\mu(\{x \in E : |f(x)| = +\infty\}) = 0$.

Смысл:

Если функция $f \in L(E, \mu)$, то множество точек, где она принимает бесконечные значения ($|f(x)| = +\infty$), имеет меру ноль:

Следствие 2

Формулировка:

Если $f \geq 0$ и $\int_E f d\mu = 0$, то $f = 0$ почти всюду на E .

Смысл:

Если неотрицательная функция имеет нулевой интеграл, то она почти всюду нулевая. "Почти всюду нулевая" = ноль везде, кроме "несущественных" точек.

3. Приближение интеграла интегралом по множеству конечной меры

Определение

Пусть $f \in L(E, \mu)$, где $\mu E = +\infty$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует подмножество $E_\varepsilon \subset E$ такое, что:

1. $\mu E_\varepsilon < +\infty$ (множество E_ε имеет конечную меру),
2. $\int_{E \setminus E_\varepsilon} |f| d\mu < \varepsilon$ (интеграл от $|f|$ по дополнению $E \setminus E_\varepsilon$ меньше ε).

Смысл

Это следствие показывает, что для интегрируемой функции f на множестве бесконечной меры можно найти подмножество конечной меры E_ε , на котором интеграл f "почти полностью" сосредоточен. Оставшаяся часть интеграла (по $E \setminus E_\varepsilon$) пренебрежимо мала (меньше ε).

Это означает, что "хвост" функции (её поведение на множествах большой меры) не вносит существенного вклада в интеграл.

Счетная аддитивность интеграла

Определение

Если $E = \bigcup_k E_k$, где E_k измеримы и попарно не пересекаются, и интеграл $\int_E f d\mu$ существует, то:

$$\int_E f d\mu = \sum_k \int_{E_k} f d\mu.$$

Смысл

Интеграл по объединению счетного числа множеств равен сумме интегралов по каждому множеству. Это свойство аналогично счетной аддитивности меры.

4. Теорема Фату

\liminf

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k$$

Смысл

Это множество всех элементов, которые принадлежат всем A_k , начиная с некоторого номера n .

Фату для неотрицательных измеримых функций

Пусть $f_n \in S(E)$, $f_n \geq 0$. Тогда:

$$\int_E \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n d\mu \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_E f_n d\mu.$$

Смысл

Когда мы берем последовательность неотрицательных функций и смотрим на их нижний предел (самые маленькие значения, к которым они постоянно возвращаются), то интеграл от этого нижнего предела никогда не сможет оказаться больше, чем нижний предел их интегралов. Это как гарантия того, что усредненное "худшее поведение" функций не даст неожиданно большой интеграл.

Фату для поточечного предела

Пусть $f_n, f \in S(E)$, $f_n \geq 0$, $f_n \rightarrow f$ почти везде на E . Тогда:

$$\int_E f d\mu \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_E f_n d\mu.$$

Смысл

Если такие неотрицательные функции ещё и сходятся к какой-то предельной функции, то интеграл этой предельной функции тоже не превысит нижнюю границу интегралов исходной последовательности. Даже если значения функций поточечно стремятся к пределу, их интегралы могут колебаться, но теорема даёт нам контроль сверху - предельный интеграл не выскочит за нижнюю границу.

5. Теорема Лебега о мажорированной сходимости

Мажоранта

Функция (или число), которая доминирует (превосходит) другую функцию (или последовательность) на заданном множестве.

Теорема Лебега

Если последовательность измеримых функций f_n сходится к f почти везде на E , и существует суммируемая мажоранта $\phi \in L(E, \mu)$ (т.е. $|f_n| \leq \phi$ почти везде), то предельный переход под знаком интеграла корректен:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_E f_n d\mu = \int_E f d\mu.$$

Смысл

Теорема гарантирует, что при наличии "контроля" (мажоранты ϕ) над функциями f_n , их сходимость почти везде влечёт сходимость интегралов. Это ключевой инструмент для обмена пределами и интегралами в анализе, устраняющий риск потери сходимости.

Следствие Теоремы Лебега (для множеств конечной меры)

Если $\mu(E) < +\infty$, f_n равномерно ограничены ($|f_n| \leq K$) и $f_n \rightarrow f$ почти везде, то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_E f_n d\mu = \int_E f d\mu.$$

Смысл

На множествах конечной меры равномерная ограниченность заменяет суммируемую мажоранту (константа K суммируема), что упрощает применение теоремы Лебега в практических задачах.

Ограниченность семейства функций

Свойство семейства вещественных функций $\{f_a\}_{a \in A}$, где A — некоторое множество индексов, X — произвольное множество. Означает, что все функции семейства ограничены одной константой C :

$$\exists C > 0 \quad \forall a \in A \quad \forall x \in X \quad |f_a(x)| < C.$$

6. Интеграл Лебега от функции непрерывной на замкнутом промежутке; сравнение несобственного интеграла с интегралом Лебега.

Определение интеграла Римана

Определение:

Функция $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ интегрируема по Риману, если существует предел интегральных сумм $\sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i$ при стремлении диаметра разбиения к нулю.

Смысл:

Интеграл Римана — это предел сумм площадей прямоугольников, аппроксимирующих площадь под кривой. Он существует для ограниченных функций с "небольшим" количеством разрывов.

Критерий Лебега интегрируемости по Риману

Определение:

Функция $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ интегрируема по Риману ($f \in R[a, b]$), если она ограничена и множество её точек разрыва имеет нулевую меру.

Смысл:

Интегрируемость по Риману требует "хорошего поведения" функции — ограниченности и малости разрывов. Мера разрывов должна быть нулевой, иначе интеграл Римана не существует.

Сравнение интегралов Римана и Лебега

Определение:

Если $f \in R[a, b]$, то $f \in L[a, b]$, и значения интегралов совпадают: $(L) \int_a^b f = (R) \int_a^b f$.

Смысл:

Интеграл Лебега обобщает интеграл Римана: все риманово-интегрируемые функции лебегово-интегрируемы, и значения совпадают. Лебег "видит" больше функций, но для "хороших" случаев результаты одинаковы.

Несобственный интеграл и интеграл Лебега

Определение:

Несобственный интеграл Римана на $[a, c]$ — предел $\lim_{b \rightarrow a} \int_b^c f(t) dt$. Он абсолютно сходится, если сходится $\int_a^c |f(t)| dt$.

Смысл:

Абсолютная сходимость несобственного интеграла эквивалентна интегрируемости $|f|$ по Лебегу. В этом случае оба интеграла совпадают, и Лебег "улавливает" сходимость.

7. Вычисление меры множества по мерам сечений

Теорема о связи меры множества с мерами его сечений

1. Измеримость сечений

Для множества $E \subseteq \mathbb{R}^{n+m}$ и фиксированного $x \in \mathbb{R}^n$ сечение определяется как:

$$E(x) = \{y \in \mathbb{R}^m \mid (x, y) \in E\}$$

Если E - измеримо по Лебегу в \mathbb{R}^{n+m} , то для почти всех $x \in \mathbb{R}^n$ сечения $E(x)$ измеримы в \mathbb{R}^m

Смысл

Почти все сечения $E(x)$ измеримы по Лебегу в \mathbb{R}^m .

2. Измеримость функции мер

Для измеримого множества $E \subseteq \mathbb{R}^{n+m}$ функция меры сечений определяется как:

$$f_E : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \quad f_E(x) = \mu(E(x))$$

$E(x) = \{y \in \mathbb{R}^m \mid (x, y) \in E\}$ - сечение множества
 μ - мера Лебега в \mathbb{R}^m

Смысл

Функция f_e измеряет меру Лебега сечения E в каждой точке x

3. Формула меры

Мера $\mu_{n+m}(E)$ — это стандартная мера Лебега на \mathbb{R}^{n+m} .

$$\mu_{n+m}(E) = \int_{\mathbb{R}^n} \mu_m(E(x)) dx.$$

Смысл

Мера всего множества E равна "сумме" (интегралу) мер его плоских срезов. Это позволяет сводить многомерные задачи к последовательности одномерных, упрощая вычисления и доказательства.

Измеримость по Лебегу

Множество $E \subset \mathbb{R}^n$ измеримо по Лебегу, если для любого $\varepsilon > 0$ существуют:
Открытое множество $U \supset E$ и замкнутое $F \subset E$, такие что $\mu_n(U \setminus F) < \varepsilon$.

Смысл:

Измеримые множества — это те, которые можно "зажать" между открытыми и замкнутыми с сколь угодно малой ошибкой по мере.

8. Мера декартова произведения и мера Лебега как произведение мер

Мера декартова произведения

\mathcal{A}_n - σ -алгебра измеримых по Лебегу множеств в \mathbb{R}^n

Для измеримых множеств $A \in \mathcal{A}_n$, $B \in \mathcal{A}_m$ их декартово произведение $A \times B$ измеримо в \mathbb{R}^{n+m} , и его мера равна произведению мер:

$$\mu_{n+m}(A \times B) = \mu_n(A) \cdot \mu_m(B).$$

Смысл:

Мера произведения множеств равна произведению их мер, что согласуется с интуицией о "площади" прямоугольника. Доказательство использует аппроксимацию открытыми/замкнутыми множествами и свойства регулярности меры Лебега. Для бесконечных мер применяется разбиение на σ -конечные части.

Мера Лебега как произведение мер

Мера Лебега на \mathbb{R}^n — это n -кратное произведение одномерных мер Лебега:

$$\lambda^n = \underbrace{\lambda^1 \times \lambda^1 \times \dots \times \lambda^1}_{n \text{ раз}}.$$

Смысл:

Это означает, что мера многомерного пространства строится как последовательное "умножение" мер вдоль каждой координаты. Например, площадь (2D) — произведение длин (1D), объём (3D) — произведение площадей и длины, и т.д. Свойство следует из теоремы о мере декартова произведения.

9. Мера графика и подграфика

График функции (Гf)

Определение:

Для $f : E \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ график — множество точек $(x, y) \in \mathbb{R}^{n+1}$, где $y = f(x)$.

Смысл:

График — это "след" функции в $(n + 1)$ -мерном пространстве. Если f измерима, её график имеет нулевую меру в \mathbb{R}^{n+1} , так как он "тоньше" любого слоя. Доказательство использует разбиение области значений на ϵ -слои и оценку меры.

Подграфик функции (Qf)

Определение:

Для $f : E \subset \mathbb{R}^n \rightarrow [0, +\infty]$ подграфик — множество точек (x, y) , где $0 \leq y \leq f(x)$.

Смысл:

Подграфик — это область "под" графиком. Его измеримость равносильна измеримости f , а мера равна интегралу от f по E . Это связывает геометрический объём с аналитическим выражением.

Мера графика

Если $E \subset \mathbb{R}^n$, $f \in S(E)$ (измерима по Лебегу), то $\Gamma f \in \mathcal{A}_{n+1}$ и $\mu_{n+1}(\Gamma f) = 0$.

Смысл:

График измеримой функции всегда измерим как множество в \mathbb{R}^{n+1} , но его мера нулевая. Это обобщает факт, что кривая на плоскости ($n = 1$) не имеет площади. Доказательство использует разбиение области значений на ϵ -слои и оценку меры объединения прямоугольников.

Мера подграфика

Пусть $E \in \mathcal{A}_n$, $f : E \rightarrow [0, +\infty]$. Тогда:

$$Q_f \text{ измерим} \Leftrightarrow f \text{ измерима, и } \mu_{n+1}(Q_f) = \int_E f d\mu_n.$$

Смысл:

Подграфик измерим тогда и только тогда, когда сама функция измерима. Его мера совпадает с интегралом от f , что обобщает понятие "площади под графиком" на многомерный случай. Это ключевая связь между геометрией и анализом.

Доп:

\mathcal{A}_n - σ -алгебра измеримых по Лебегу множеств в \mathbb{R}^n

10. Теорема Тонелли и Фубини

Теорема Тонелли (для неотрицательных функций)

Пусть $E \subset \mathbb{R}^{n+m}$, $f \in S(E \rightarrow [0, +\infty])$. Тогда справедливы следующие утверждения.

1. При почти всех $x \in \mathbb{R}^n$ $f(x, \cdot) \in S(E(x))$.
2. Функция I , заданная формулой $I(x) = \int_{E(x)} f(x, y) dy$, измерима на \mathbb{R}^n .
3. $\int_E f d\mu_{n+m} = \int_{\mathbb{R}^n} I(x) dx$.

Смысл:

Эта теорема позволяет вычислять интеграл от неотрицательной измеримой функции $f(x, y)$ по пространству \mathbb{R}^{n+m} как повторный интеграл: сначала интегрируя по y при фиксированном x (внутренний интеграл $I(x)$), а затем интегрируя результат $I(x)$ по x . Она гарантирует измеримость сечения функции и внутреннего интеграла для почти всех x .

Теорема Фубини (для суммируемых функций)

Пусть $E \subset \mathbb{R}^{n+m}$, $f \in L(E)$. Тогда справедливы следующие утверждения.

1. При почти всех $x \in \mathbb{R}^n$ $f(x, \cdot) \in L(E(x))$.
2. Функция I , заданная формулой $I(x) = \int_{E(x)} f(x, y) dy$, суммируема на \mathbb{R}^n .
3. $\int_E f d\mu_{n+m} = \int_{\mathbb{R}^n} I(x) dx$.

Смысл:

Эта теорема обобщает Тонелли на функции произвольного знака, но требующие суммируемости f на E . Она также позволяет сводить $(n + m)$ -мерный интеграл к повторному (сначала по y , затем по x), гарантируя при этом, что сечения $f(x, \cdot)$ суммируемы по y для почти всех x и что внутренний интеграл $I(x)$ сам суммируем по x . Ключевое отличие от Тонелли — требование $f \in L(E)$.

3. Основное отличие теорем

Теорема Тонелли применяется к неотрицательным измеримым функциям ($f \geq 0$), но не требует их суммируемости. Теорема Фубини применяется к функциям произвольного знака, но требует их суммируемости на E ($f \in L(E)$). При выполнении условий Фубини справедливо равенство повторных интегралов.

Интегральная функцией сечения $I(x)$

Функция, определяемая как $I(x) = \int_{E(x)} f(x, y) dy$, где $E(x) = \{y \in \mathbb{R}^m : (x, y) \in E\}$ — сечение множества E при фиксированном x .

Смысл

Выражает "частичный" интеграл по переменным y , оставляя x параметром.

11. Интеграл Эйлера-Пуассона

Определение:

Интеграл Эйлера-Пуассона — это несобственный интеграл вида $I = \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$, значение которого равно $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Смысл:

Интеграл вычисляется с помощью перехода к полярным координатам, где замена переменных $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$ упрощает подынтегральное выражение. Квадрат интеграла I^2 преобразуется в двойной интеграл по плоскости, который сводится к произведению двух одномерных интегралов. Результат $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$ широко используется в теории вероятностей и математической физике.

Ключевые шаги:

1. Замена $I^2 = \iint e^{-(x^2+y^2)} dx dy$.
2. Переход к полярным координатам: $\int_0^{+\infty} \int_0^{\pi/2} r e^{-r^2} d\varphi dr$.
3. Вычисление: $\frac{\pi}{4}$, откуда $I = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

12. Мера n-мерного шара и сферы

Определение:

Мера Лебега μ_n n -мерного шара $\overline{B}_n(a, R) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x - a| \leq R\}$ вычисляется по формуле:

$$\mu_n \overline{B}_n(a, R) = \frac{2^n}{n!} \left(\frac{\pi}{2} \right)^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} R^n.$$

Смысл:

Мера шара зависит от его радиуса R и размерности n . Для $n = 2$ и $n = 3$ получаем классические формулы площади круга и объёма шара. Мера сферы \mathbb{S}^{n-1} равна нулю, так как она является границей шара и имеет нулевой объём в \mathbb{R}^n .

Примеры:

- $\mu_2 \overline{B}_2(a, R) = \pi R^2$ (круг),
- $\mu_3 \overline{B}_3(a, R) = \frac{4}{3} \pi R^3$ (шар),
- $\mu_4 \overline{B}_4(a, R) = \frac{\pi^2}{2} R^4$.

13. Замена переменной в интеграле, образ и плотность меры

Общая схема замены переменной

Для пространств с мерами (X, A, μ) , (Y, B, ν) и измеримой функции $h \geq 0$, если $\nu B = \int_{\Phi^{-1}(B)} h d\mu$ и f измерима на Y , то:

$$\int_Y f d\nu = \int_X (f \circ \Phi) h d\mu.$$

Смысл:

Интеграл функции f по мере ν на Y сводится к интегралу её композиции с Φ и весовой функции h по исходной мере μ на X . Это обобщение замены переменных в анализе, где h играет роль якобиана.

Образ меры

Если $h \equiv 1$, то $\nu = \Phi(\mu)$ (образ меры μ), и:

$$\int_Y f d\nu = \int_X f \circ \Phi d\mu.$$

Смысл:

Мера ν "переносится" с X на Y через отображение Φ , а интеграл преобразуется без весовой функции. Пример — замена координат без искажения объёма.

Плотность меры

Если $\nu A = \int_A h d\mu$, то h — плотность ν относительно μ , и:

$$\int_X f d\nu = \int_X fh d\mu.$$

Смысл:

Функция h показывает, как мера ν "перевешивает" μ в каждой точке. Критерий плотности связывает h с неравенствами для значений мер на множествах.

Доп

Φ — это измеримое отображение (функция), которое "переводит" точки из пространства X в пространство Y .

h — весовая функция, это неотрицательная измеримая функция, которая определяет, как мера μ на X преобразуется в меру ν на Y .

14. Естественная мера на кривой и на поверхности. Криволинейный и поверхностный интегралы первого рода для элементарных поверхностей

1. Мера, порожденная кривой

Пусть $\gamma : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}^n$ — кривая. Для множества B определим $\mathcal{A} = \{B : \gamma^{-1}(B) \text{ измеримо}\}$ (σ -алгебра). Мера m_γ на кривой задается формулой:

$$m_\gamma(B) = \int_{\gamma^{-1}(B)} \|\gamma'(t)\| dt$$

2. Мера, порожденная поверхностью

Пусть $\varphi : U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ - параметризация поверхности (φ гладкая). Для множества B мера m_S на поверхности задается формулой:

$$m_S(B) = \int_{\varphi^{-1}(B)} \|\varphi_u \times \varphi_v\| du dv$$

3. Криволинейный интеграл первого рода

Пусть $\gamma : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}^n$ - кривая, $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $x = \gamma(t)$. Интеграл функции f по кривой γ в множестве A определяется как:

$$\int_A f d\gamma = \int_{\gamma^{-1}(A)} f(\gamma(t)) \cdot \|\gamma'(t)\| dt$$

4. Поверхностный интеграл первого рода

Пусть S - поверхность, заданная параметризацией $\varphi : U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $x = \varphi(u)$, $A \subseteq \mathbb{R}^3$. Для функции f , определенной на поверхности, интеграл по множеству A задается формулой:

$$\int_A f dS = \int_{\varphi^{-1}(A)} f(\varphi(u)) \cdot \|\varphi_u \times \varphi_v\| du dv$$

15. Преобразование меры Лебега при диффеоморфизме. Замена переменной в интеграле Лебега. Использование полярных, цилиндрических и сферических координат в кратных интегралах.

Диффеоморфизм

Пусть $G, V \subset \mathbb{R}^n$ — открытые множества. Отображение $\Phi : G \rightarrow V$ называется *диффеоморфизмом*, если:

- Φ биективно
- $\Phi \in C^{(1)}(G \rightarrow V)$

- $\Phi^{-1} \in C^{(1)}(V \rightarrow G)$.

Якобиан $\det \Phi' \neq 0$ во всех точках G .

Смысл:

Гладкое обратимое преобразование координат. Сохраняет геометрическую структуру, позволяя корректно переходить между системами координат без "склеек" или разрывов.

Преобразование меры Лебега

Пусть $G \subset \mathbb{R}^n$ открыто, $\Phi : G \rightarrow \mathbb{R}^n$ — диффеоморфизм. Тогда для $E \in \mathcal{A}_n(G)$:

$$\mu(\Phi(E)) = \int_E |\det \Phi'(x)| d\mu(x).$$

Смысл:

Мера образа множества равна интегралу от модуля якобиана по исходному множеству. Якобиан учитывает локальное изменение объема при отображении.

Замена переменных в интеграле Лебега

Пусть $G \subset \mathbb{R}^n$ открыто, $\Phi : G \rightarrow \mathbb{R}^n$ — диффеоморфизм, $E \in \mathcal{A}_n(G)$, $f \in \mathcal{S}(\Phi(E))$. Тогда:

$$\int_{\Phi(E)} f(y) d\mu(y) = \int_E f(\Phi(x)) \cdot |\det \Phi'(x)| d\mu(x).$$

Равенство выполняется, если существует один из интегралов.

Смысл:

Позволяет вычислять интегралы в новых координатах. Модуль якобиана компенсирует искажение объема элементарных областей при замене переменных.

4. Классические замены координат

Полярные (\mathbb{R}^2): $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$, $|\det \Phi'| = r$

Цилиндрические (\mathbb{R}^3): $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$, $z = h$, $|\det \Phi'| = r$

Сферические (\mathbb{R}^3): $x = r \cos \varphi \cos \psi$, $y = r \sin \varphi \cos \psi$, $z = r \sin \psi$, $|\det \Phi'| = r^2 |\cos \psi|$

Доп:

$\det D\varphi$ - якобиан.

16. Мера Лебега-Стилтьеса и дискретная мера

Полукольцо ячеек

Полукольцо ячеек P_Δ — это семейство промежутков вида $[a, b)$ (или других типов: $(a, b]$, $[a, b]$, (a, b)), замкнутое относительно пересечения и таких, что разность двух ячеек представима в виде конечного объединения непересекающихся ячеек из P_Δ .

Мера Лебега-Стилтьеса

Мера μ_g на полукольце ячеек P_Δ , заданная через возрастающую непрерывную слева функцию g как $\mu_g[a, b) = g(b) - g(a)$, и стандартно распространённая на σ -алгебру \mathcal{A}_g .

Смысл:

Мера Лебега-Стилтьеса обобщает классическую меру Лебега, заменяя длину интервала $b - a$ на приращение $g(b) - g(a)$, что позволяет учитывать произвольные распределения "массы". ($g(x) = x + c$)

Дискретная мера Лебега-Стилтьеса

Для функции g со скачками h_k в точках a_k :

$$\mu_g(A) = \sum_{a_k \in A} h_k$$

где A — любое измеримое подмножество числовой прямой (например, интервал, отрезок или точечное множество).

Смысл:

Превращает интеграл в сумму значений в точках скачков. Описывает точечные массы (вероятности, заряды). Отличается от непрерывного случая, где масса распределена плавно. Особенно полезна для дискретных случайных величин. Дискретность g меняется только скачками, постоянна между ними.

Ключевая связь

Дискретная мера — частный случай меры Лебега-Стилтьеса, где g кусочно-постоянна со скачками в точках носителя. Это позволяет единообразно работать как с непрерывными, так и

дискретными распределениями.

17. Интеграл Лебега-Стилтьеса по мере, порожденной абсолютно непрерывной функцией

1. Определение локально абсолютно непрерывной функции

Функция $g : \Delta \rightarrow \mathbb{R}$ называется локально абсолютно непрерывной на промежутке Δ ($g \in AC_{loc}(\Delta)$), если существует точка $x_0 \in \Delta$ и функция $h \in L_{loc}(\Delta)$ такие, что для всех $x \in \Delta$ выполняется:

$$g(x) = \int_{x_0}^x h d\mu + g(x_0).$$

2. Теорема об интеграле по абсолютно непрерывной функции

Пусть Δ — промежуток, $x_0 \in \Delta$, $h \in L_{loc}(\Delta)$, $h \geq 0$, $g(x) = \int_{x_0}^x h d\mu + g(x_0)$, $E \in A_1(\Delta)$ (измеримо по Лебегу), $f \in S(E)$ (измерима и знакопостоянна на E). Тогда:

$$\int_E f dg = \int_E f h d\mu,$$

причем если существует один из этих интегралов, то существует и другой, и они равны.

3. Следствие для гладкой функции (C¹-случай)

Пусть Δ — промежуток, $g \in C^{(1)}(\Delta)$ (непрерывно дифференцируема), $g' \geq 0$, $E \in A_1(\Delta)$, $f \in S(E)$. Тогда:

$$\int_E f dg = \int_E f g' d\mu,$$

причем если существует один из этих интегралов, то существует и другой, и они равны.

18. Формула Фруллани

Дано: $a, b > 0, f \in C(0; +\infty)$.

$$I(a, b) = \int_0^{\infty} (f(ax) - f(bx)) dx$$

1. Если $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \in \mathbb{R}$ (существует и конечен), то:

$$I(a, b) = - \left(\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \right) \ln \frac{a}{b}$$

2. Если $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \in \mathbb{R}$ и $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \in \mathbb{R}$, то:

$$I(a, b) = \left(\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) - \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right) \ln \frac{b}{a}$$

3. Если $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \in \mathbb{R}$ (существует и конечен), то:

$$I(a, b) = \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right) \ln \frac{a}{b}$$

19. Локальное условие Лебега для интегралов зависящих от параметра. Равномерная сходимость несобственных интегралов. Признаки Вейерштрасса, Дирихле и Абеля равномерной сходимости несобственных интегралов

Локальное условие Лебега для интегралов, зависящих от параметра

Пусть функция $f(x, y)$ интегрируема по x на $[a, +\infty)$ при каждом $y \in Y$ и удовлетворяет условию:

$$\exists g(x) \in L^1([a, +\infty)) : |f(x, y)| \leq g(x) \text{ для почти всех } x \text{ и всех } y \in Y$$

Тогда интеграл $\int_a^\infty f(x, y)dx$ сходится равномерно по $y \in Y$.

Смысл:

Это аналог теоремы Лебега о мажорированной сходимости для интегралов с параметром. Условие гарантирует, что можно менять порядок интегрирования и предельного перехода. Нужно для обоснования законности операций с параметрическими интегралами.

Равномерная сходимость несобственных интегралов

Интеграл $\int_a^{+\infty} f(x, y)dx$ сходится равномерно на множестве Y , если:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists A = A(\varepsilon) > a : \forall R > A, \forall y \in Y \Rightarrow \left| \int_R^{+\infty} f(x, y)dx \right| < \varepsilon$$

где R - это нижний предел интегрирования для остатка интеграла.

Смысл:

Хвост интеграла должен становиться малым одновременно для всех значений параметра y . Это гарантирует, что предельные переходы по параметру и интегралу можно менять местами.

Критерий Коши равномерной сходимости

Интеграл $\int_a^\infty f(x, y)dx$ сходится равномерно на Y тогда и только тогда, когда:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists A > a : \forall R_1, R_2 > A, \forall y \in Y \Rightarrow \left| \int_{R_1}^{R_2} f(x, y)dx \right| < \varepsilon$$

где R_1, R_2 - Это произвольные точки на оси x , лежащие правее A .

Смысл:

Аналог критерия Коши для последовательностей. Равномерная сходимость означает, что интеграл по любому достаточно большому отрезку можно сделать сколь угодно малым сразу для всех y .

Признак Вейерштрасса

Если $|f(x, y)| \leq g(x)$ для всех $x \geq a, y \in Y$ и $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ сходится, то $\int_a^{+\infty} f(x, y)dx$ сходится равномерно на Y .

Смысл:

Достаточно найти мажоранту, не зависящую от параметра y , интеграл от которой сходится. Самый простой, но часто слишком грубый способ доказательства равномерной сходимости.

Признак Дирихле

Пусть:

1. $\left| \int_a^R f(x, y) dx \right| \leq M$ для всех $R > a, y \in Y$
2. При каждом $y \in Y$ функция $g(x, y)$ монотонна по x
3. $g(x, y) \Rightarrow 0$ при $x \rightarrow +\infty$ на Y

Тогда $\int_a^\infty f(x, y)g(x, y)dx$ сходится равномерно на Y (\Rightarrow это сходится равномерно).

Смысл:

Полезен для интегралов вида $\int \sin(x) \cdot \frac{1}{x^p} dx$. Первый множитель осциллирует (его интеграл ограничен), второй монотонно убывает к нулю.

Признак Абеля

Пусть:

1. $\int_a^\infty f(x, y) dx \Rightarrow$ по y (сходится равномерно), при $x \rightarrow \infty$ на Y
2. $g(x, y)$ равномерно ограничена: $|g(x, y)| \leq M$ для всех $x \geq a, y \in Y$
3. При каждом $y \in Y$ функция $g(x, y)$ монотонна по x

Тогда $\int_a^{+\infty} f(x, y)g(x, y)dx \Rightarrow$ на Y .

Смысл:

Обобщение признака Дирихле. Применяется, когда одна часть дает равномерно сходящийся интеграл, а другая - монотонную ограниченную функцию. Позволяет исследовать более сложные интегралы.

Доп:

$L^1(X)$ -пространство абсолютно интегрируемых функций на X (интеграл понимается в смысле Лебега):

$$L^1(X) = \left\{ f : X \rightarrow \mathbb{R} \mid \int_X |f(x)| dx < +\infty \right\}$$

Y - произвольное множество, на котором определен параметр. $([c, d])$

20. Связь (равномерной) сходимости несобственного интеграла с (равномерной) сходимостью ряда из определенных интегралов.

Несобственный интеграл

$$I(y) = \int_a^\infty f(x, y) dx$$

Смысл:

Это интеграл с бесконечным верхним пределом, зависящий от параметра y . Его сходимость означает, что при $R \rightarrow \infty$ интеграл $\int_a^R f(x, y) dx$ стремится к конечному пределу $I(y)$. Равномерная сходимость требует, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ существовало такое R_0 , что для всех $R > R_0$ и всех y выполняется $|\int_R^\infty f(x, y) dx| < \varepsilon$.

Ряд из кусочных интегралов

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k(y) = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x, y) dx$$

Смысл:

Это представление интеграла $I(y)$ в виде бесконечной суммы интегралов по отрезкам разбиения $a = x_0 < x_1 < \dots$. Каждое слагаемое $u_k(y)$ — это вклад $f(x, y)$ на $[x_{k-1}, x_k]$. Ряд сходится к $I(y)$, если частичные суммы $S_N(y) = \sum_{k=1}^N u_k(y)$ стремятся к $I(y)$ при $N \rightarrow \infty$. Равномерная сходимость ряда означает, что $S_N(y)$ приближает $I(y)$ с любой точностью сразу для всех y при достаточно больших N .

Критерий равномерной сходимости

1. Интеграл \rightarrow Ряд:

Если $I(y)$ сходится равномерно, то для любого разбиения ряд $\sum u_k(y)$ сходится равномерно (так как "хвост" ряда соответствует "хвосту" интеграла).

2. Ряд \rightarrow Интеграл:

Если для какого-то разбиения ряд $\sum u_k(y)$ сходится равномерно, то $I(y)$ сходится равномерно (поскольку частичные суммы ряда совпадают с интегралами $\int_a^{x_N} f(x, y) dx$).

Смысл критерия

Оба объекта — несобственный интеграл и ряд — выражают одно и то же значение $I(y)$, но в разных формах. Равномерная сходимостъ означает, что ошибка приближения контролируется единым образом для всех y . Это полезно для перестановки пределов, интегрирования/ дифференцирования под знаком интеграла или ряда.