Шпора матан

1. Интегралы от неотрицательных функций

1. Основные свойства

Монотонность

Если $0 \leq f(x) \leq g(x)$ п.в. на X, то:

$$\int_X f\,d\mu \leq \int_X g\,d\mu.$$

(Интеграл сохраняет неравенства.)

Линейность

Для $a, b \geq 0$:

$$\int_X (af + bg)\,d\mu = a\int_X f\,d\mu + b\int_X g\,d\mu.$$

(Интеграл суммы = сумма интегралов.)

Аддитивность по области

Если $A \cap B = \emptyset$, то:

$$\int_{A\cup B} f\,d\mu = \int_A f\,d\mu + \int_B f\,d\mu.$$

(Интеграл по объединению = сумма интегралов.)

Невозрастание меры

Если $A \subseteq B$, то:

$$\int_A f\,d\mu \leq \int_B f\,d\mu.$$

(Интеграл по подмножеству ≤ интегралу по всему множеству.)

2. Теорема Леви для рядов

Если $f_k \geq 0$ и измеримы, то:

$$\int_E \sum_{k=1}^{\infty} f_k\,d\mu = \sum_{k=1}^{\infty} \int_E f_k\,d\mu.$$

(Можно менять местами сумму и интеграл.)

2. Неравенство Чебышева

Суммируемая функция

Определение

Функция `f` называется суммируемой на `E` (пишут `f ∈ L(E, μ)`), если:

$$\int_E |f|\,d\mu < +\infty$$

Свойство

Если `f` суммируема, то она конечна почти всюду на `E`.

Формулировка неравенства Чебышева

Для `f ∈ S(E)` (классу измеримых функций), `t > 0`:

$$\mu\{x \in E : |f(x)| \geq t\} \leq \frac{1}{t} \int_E |f| \, d\mu$$

Смысл:

Оценивает меру множества, где `|f(x)| ≥ t`, через интеграл от `|f|`.
Неравенство даёт гарантированную верхнюю границу для "редких событий". Чем выше порог `t`, тем меньше элементов могут его превышать.

Следствия неравенства Чебышева

Следствие 1

Формулировка:
Если $f \in L(E, \mu)$, то $\mu(\{x \in E : |f(x)| = +\infty\}) = 0$.

Смысл:
Суммируемая функция не может принимать бесконечные значения на множестве положительной меры. "Почти все" её значения конечны.

Следствие 2

Формулировка:
Если $f \geq 0$ и $\int_E f d\mu = 0$, то $f = 0$ почти всюду на E.

Смысл:
Единственная неотрицательная функция с нулевым интегралом — это функция, тождественно равная нулю (с точностью до множества меры нуль). Иначе интеграл был бы положительным.

3. Приближение интеграла интегралом по множеству конечной меры

Определение

Пусть $f \in L(E, \mu)$, где $\mu E = +\infty$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует подмножество $E_\varepsilon \subset E$ такое, что:

1. $\mu E_\varepsilon < +\infty$ (множество E_ε имеет конечную меру),
2. $\int_{E \setminus E_\varepsilon} |f| \, d\mu < \varepsilon$ (интеграл от $|f|$ по дополнению $E \setminus E_\varepsilon$ меньше ε).

Смысл

Это следствие показывает, что для интегрируемой функции f на множестве бесконечной меры можно найти подмножество конечной меры E_ε, на котором интеграл f "почти полностью" сосредоточен. Оставшаяся часть интеграла (по $E \setminus E_\varepsilon$) пренебрежимо мала (меньше ε).

Это означает, что "хвост" функции (её поведение на множествах большой меры) не вносит существенного вклада в интеграл.

Счетная аддитивность интеграла

Определение

Если $E = \bigcup_k E_k$, где E_k измеримы и попарно не пересекаются, и интеграл $\int_E f \, d\mu$ существует, то:

$$\int_E f \, d\mu = \sum_k \int_{E_k} f \, d\mu.$$

Смысл

Интеграл по объединению счетного числа множеств равен сумме интегралов по каждому множеству. Это свойство аналогично счетной аддитивности меры.

4. Теорема Фату

liminf

`liminf` (нижний предел) - это: Для числовой последовательности: наибольший предел среди всех её подпоследовательностей. Для функций: функция, которая в каждой точке равна нижнему пределу значений последовательности функций. Проще говоря: "наименьшее значение, к которому постоянно возвращается последовательность"

Формулировка

Для неотрицательных измеримых функций

Пусть $f_n \in S(E)$, $f_n \geq 0$. Тогда:

$$\int_E \liminf_{n\to\infty} f_n\,d\mu \le \liminf_{n\to\infty} \int_E f_n\,d\mu.$$

Смысл

Когда мы берем последовательность неотрицательных функций и смотрим на их нижний предел (самые маленькие значения, к которым они постоянно возвращаются), то интеграл от этого нижнего предела никогда не сможет оказаться больше, чем нижний предел их интегралов. Это как гарантия того, что усредненное "худшее поведение" функций не даст неожиданно большой интеграл.

Для поточечного предела

Пусть $f_n, f \in S(E)$, $f_n \ge 0$, $f_n \to f$ почти везде на E. Тогда:

$$\int_E f\,d\mu \le \liminf_{n\to\infty} \int_E f_n\,d\mu.$$

Смысл

Если такие неотрицательные функции ещё и сходятся к какой-то предельной функции, то интеграл этой предельной функции тоже не превысит нижнюю границу интегралов исходной последовательности. Даже если значения функций поточечно стремятся к пределу, их интегралы могут колебаться, но теорема даёт нам контроль сверху - предельный интеграл не выскочит за нижнюю границу.

5. Теорема Лебега о мажорированной сходимости

Формулировка

Если последовательность измеримых функций f_n сходится к f почти везде на E, и существует суммируемая мажоранта $\phi \in L(E,\mu)$ (т.е. $|f_n| \le \phi$ почти везде), то предельный переход под знаком интеграла корректен:

$$\lim_{n\to\infty} \int_E f_n\,d\mu = \int_E f\,d\mu.$$

Смысл

Теорема гарантирует, что при наличии "контроля" (мажоранты ϕ) над функциями f_n, их сходимость почти везде влечёт сходимость интегралов. Это ключевой инструмент для обмена пределами и интегралами в анализе, устраняющий риск потери сходимости.

Следствие (для множеств конечной меры)

Если $\mu(E) < +\infty$, f_n равномерно ограничены ($|f_n| \leq K$) и $f_n \to f$ почти везде, то

$$\lim_{n\to\infty} \int_E f_n \, d\mu = \int_E f \, d\mu.$$

Смысл

На множествах конечной меры равномерная ограниченность заменяет суммируемую мажоранту (константа K суммируема), что упрощает применение теоремы Лебега в практических задачах.

6. Интегралы Лебега и Римана

Определение интеграла Римана

Определение:

Функция $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ интегрируема по Риману, если существует предел интегральных сумм $\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$ при стремлении диаметра разбиения к нулю.

Смысл:

Интеграл Римана — это предел сумм площадей прямоугольников, аппроксимирующих площадь под кривой. Он существует для ограниченных функций с "небольшим" количеством разрывов.

Критерий Лебега интегрируемости по Риману

Определение:

Функция $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ интегрируема по Риману ($f \in R[a, b]$), если она ограничена и множество её точек разрыва имеет нулевую меру.

Смыск:

Интегрируемость по Риману требует "хорошего поведения" функции — ограниченности и малости разрывов. Мера разрывов должна быть нулевой, иначе интеграл Римана не существует.

Сравнение интегралов Римана и Лебега

Определение:

Если $f \in R[a, b]$, то $f \in L[a, b]$, и значения интегралов совпадают: $(L) \int_a^b f = (R) \int_a^b f$.

Смысл:

Интеграл Лебега обобщает интеграл Римана: все риманово-интегрируемые функции лебегово-интегрируемы, и значения совпадают. Лебег "видит" больше функций, но для "хороших" случаев результаты одинаковы.

Несобственный интеграл и интеграл Лебега

Определение:

Несобственный интеграл Римана на $[a, c]$ — предел $\lim_{b \to a} \int_b^c f(t)dt$. Он абсолютно сходится, если сходится $\int_a^c |f(t)|dt$.

Смысл:

Абсолютная сходимость несобственного интеграла эквивалентна интегрируемости $|f|$ по Лебегу. В этом случае оба интеграла совпадают, и Лебег "улавливает" сходимость.