1. Свойства интегралов от неотрицательных функций (в т.ч. теорема Леви для рядов).

1. Основные свойства

Монотонность

Если $0 \leq f(x) \leq g(x)$ п.в. на X, то:

$$\int_X f\,d\mu \leq \int_X g\,d\mu.$$

(Интеграл сохраняет неравенства.)

Линейность

Для $a, b \geq 0$:

$$\int_X (af + bg)\,d\mu = a\int_X f\,d\mu + b\int_X g\,d\mu.$$

(Интеграл суммы = сумма интегралов.)

Аддитивность по области

Если $A \cap B = \emptyset$, то:

$$\int_{A\cup B} f\,d\mu = \int_A f\,d\mu + \int_B f\,d\mu.$$

(Интеграл по объединению = сумма интегралов.)

Невозрастание меры

Если $A \subseteq B$, то:

$$\int_A f\,d\mu \leq \int_B f\,d\mu.$$

(Интеграл по подмножеству ≤ интегралу по всему множеству.)

2. Теорема Леви для рядов

Если $f_k \geq 0$ и измеримы, то:

$$\int_E \sum_{k=1}^{\infty} f_k \, d\mu = \sum_{k=1}^{\infty} \int_E f_k \, d\mu.$$

(Можно менять местами сумму и интеграл.)

2. Неравенство Чебышева

Суммируемая функция $f \in L(E, \mu)$

Определение

Функция `f` называется суммируемой на `E` (пишут `f ∈ L(E, μ)`), если:

$$\int_E |f| \, d\mu < +\infty$$

Свойство

Если `f` суммируема, то она конечна почти всюду на `E`.

Измеримая функция $f \in S(E)$

Определение:

$S(E)$ — это множество всех измеримых функций $f : E \to \mathbb{R}$, принимающих конечное число значений.

$$S(E) = \{f \text{ измерима} \mid f(E) = \{c_1, \ldots, c_n\},\, c_i \in \mathbb{R},\, n < \infty\}$$

Смысл:

Простые функции — это "кирпичики" для построения более сложных измеримых функций. Они принимают лишь конечное число значений, что упрощает анализ (например, интегрирование). Любую измеримую функцию можно приблизить последовательностью простых функций.

Формулировка неравенства Чебышева

Для `f ∈ S(E)` (классу измеримых функций), `t > 0`:

$$\mu\{x \in E : |f(x)| \geq t\} \leq \frac{1}{t} \int_E |f| \, d\mu$$

Смысл:

Оценивает меру множества, где `|f(x)| ≥ t`, через интеграл от `|f|`.
Неравенство даёт гарантированную верхнюю границу для "редких событий". Чем выше порог `t`, тем меньше элементов могут его превышать.

Следствие 1

Формулировка:

Если $f \in L(E, \mu)$, то $\mu(\{x \in E : |f(x)| = +\infty\}) = 0$.

Смысл:

Если функция `f ∈ L(E, μ)`, то множество точек, где она принимает бесконечные значения `(|f(x)| = +∞)`, имеет меру ноль:

Следствие 2

Формулировка:

Если $f \geq 0$ и $\int_E f d\mu = 0$, то $f = 0$ почти всюду на E.

Смысл:

Если неотрицательная функция имеет нулевой интеграл, то она почти всюду нулевая. "Почти всюду нулевая" = нуль везде, кроме "несущественных" точек.

3. Приближение интеграла интегралом по множеству конечной меры

Определение

Пусть $f \in L(E, \mu)$, где $\mu E = +\infty$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует подмножество $E_\varepsilon \subset E$ такое, что:

1. $\mu E_\varepsilon < +\infty$ (множество E_ε имеет конечную меру),

2. $\int_{E\setminus E_\varepsilon} |f|\, d\mu < \varepsilon$ (интеграл от $|f|$ по дополнению $E \setminus E_\varepsilon$ меньше ε).

Смысл

Это следствие показывает, что для интегрируемой функции f на множестве бесконечной меры можно найти подмножество конечной меры E_ε, на котором интеграл f "почти полностью" сосредоточен. Оставшаяся часть интеграла (по $E \setminus E_\varepsilon$) пренебрежимо мала (меньше ε).

Это означает, что "хвост" функции (её поведение на множествах большой меры) не вносит существенного вклада в интеграл.

Счетная аддитивность интеграла

Определение

Если $E = \bigcup_k E_k$, где E_k измеримы и попарно не пересекаются, и интеграл $\int_E f\, d\mu$ существует, то:

$$\int_E f\, d\mu = \sum_k \int_{E_k} f\, d\mu.$$

Смысл

Интеграл по объединению счетного числа множеств равен сумме интегралов по каждому множеству. Это свойство аналогично счетной аддитивности меры.

4. Теорема Фату

liminf

$$\liminf_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k$$

Смысл

Это множество всех элементов, которые принадлежат всем A_k, начиная с некоторого номера n.

Фату для неотрицательных измеримых функций

Пусть $f_n \in S(E)$, $f_n \geq 0$. Тогда:

$$\int_E \liminf_{n\to\infty} f_n\, d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int_E f_n\, d\mu.$$

Смысл

Когда мы берем последовательность неотрицательных функций и смотрим на их нижний предел (самые маленькие значения, к которым они постоянно возвращаются), то интеграл от этого нижнего предела никогда не сможет оказаться больше, чем нижний предел их интегралов. Это как гарантия того, что усредненное "худшее поведение" функций не даст неожиданно большой интеграл.

Фату для поточечного предела

Пусть $f_n, f \in S(E)$, $f_n \geq 0$, $f_n \to f$ почти везде на E. Тогда:

$$\int_E f\,d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int_E f_n\,d\mu.$$

Смысл

Если такие неотрицательные функции ещё и сходятся к какой-то предельной функции, то интеграл этой предельной функции тоже не превысит нижнюю границу интегралов исходной последовательности. Даже если значения функций поточечно стремятся к пределу, их интегралы могут колебаться, но теорема даёт нам контроль сверху - предельный интеграл не выскочит за нижнюю границу.

5. Теорема Лебега о мажорированной сходимости

Мажоранта

Функция (или число), которая доминирует (превосходит) другую функцию (или последовательность) на заданном множестве.

Теорема Лебега

Если последовательность измеримых функций f_n сходится к f почти везде на E, и существует суммируемая мажоранта $\phi \in L(E, \mu)$ (т.е. $|f_n| \leq \phi$ почти везде), то предельный переход под знаком интеграла корректен:

$$\lim_{n\to\infty} \int_E f_n\,d\mu = \int_E f\,d\mu.$$

Смысл

Теорема гарантирует, что при наличии "контроля" (мажоранты ϕ) над функциями f_n, их сходимость почти везде влечёт сходимость интегралов. Это ключевой инструмент для обмена пределами и интегралами в анализе, устраняющий риск потери сходимости.

Следствие Теоремы Лебега (для множеств конечной меры)

Если $\mu(E) < +\infty$, f_n равномерно ограничены ($|f_n| \leq K$) и $f_n \to f$ почти везде, то

$$\lim_{n \to \infty} \int_E f_n \, d\mu = \int_E f \, d\mu.$$

Смысл

На множествах конечной меры равномерная ограниченность заменяет суммируемую мажоранту (константа K суммируема), что упрощает применение теоремы Лебега в практических задачах.

Ограниченность семейства функций

Свойство семейства вещественных функций $\{f_a\}_{a \in A}$, где A — некоторое множество индексов, X — произвольное множество. Означает, что все функции семейства ограничены одной константой C:

$$\exists C > 0 \quad \forall a \in A \quad \forall x \in X \quad |f_a(x)| < C.$$

6.Интеграл Лебега от функции непрерывной на замкнутом промежутке; сравнение несобственого интеграла с интегралом Лебега.

Определение интеграла Римана

Определение:

Функция $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ интегрируема по Риману, если существует предел интегральных сумм $\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \Delta x_i$ при стремлении диаметра разбиения к нулю.

Смысл:

Интеграл Римана — это предел сумм площадей прямоугольников, аппроксимирующих площадь под кривой. Он существует для ограниченных функций с "небольшим" количеством разрывов.

Критерий Лебега интегрируемости по Риману

Определение:

Функция $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ интегрируема по Риману ($f \in R[a, b]$), если она ограничена и множество её точек разрыва имеет нулевую меру.

Смысл:

Интегрируемость по Риману требует "хорошего поведения" функции — ограниченности и малости разрывов. Мера разрывов должна быть нулевой, иначе интеграл Римана не существует.

Сравнение интегралов Римана и Лебега

Определение:

Если $f \in R[a, b]$, то $f \in L[a, b]$, и значения интегралов совпадают: $(L) \int_a^b f = (R) \int_a^b f$.

Смысл:

Интеграл Лебега обобщает интеграл Римана: все римановo-интегрируемые функции лебегово-интегрируемы, и значения совпадают. Лебег "видит" больше функций, но для "хороших" случаев результаты одинаковы.

Несобственный интеграл и интеграл Лебега

Определение:

Несобственный интеграл Римана на $[a, c]$ — предел $\lim_{b \to a} \int_b^c f(t)dt$. Он абсолютно сходится, если сходится $\int_a^c |f(t)|dt$.

Смысл:

Абсолютная сходимость несобственного интеграла эквивалентна интегрируемости $|f|$ по Лебегу. В этом случае оба интеграла совпадают, и Лебег "улавливает" сходимость.

7. Вычисление меры множества по мерам сечений

Теорема о связи меры множества с мерами его сечений

1. Измеримость сечений

Для множества $E \subseteq \mathbb{R}^{n+m}$ и фиксированного $x \in \mathbb{R}^n$ сечение определяется как:

$$E(x) = \{y \in \mathbb{R}^m \mid (x, y) \in E\}$$

Если E - измеримо по Лебегу в $\mathbb{R}^{n+m}$, то для почти всех $x \in \mathbb{R}^n$ сечения $E(x)$ измеримы в $\mathbb{R}^m$

Смысл

Почти все сечения $E(x)$ измеримы по Лебегу в $\mathbb{R}^m$.

2. Измеримость функции мер

Для измеримого множества $E \subseteq \mathbb{R}^{n+m}$ функция меры сечений определяется как:

$$f_E : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad f_E(x) = \mu(E(x))$$

$E(x) = \{y \in \mathbb{R}^m \mid (x, y) \in E\}$ - сечение множества
μ - мера Лебега в $\mathbb{R}^m$

Смысл

Функция f_e измеряет меру Лебега сечения E в каждой точке x

3. Формула меры

Мера $\mu_{n+m}(E)$ — это стандартная мера Лебега на $\mathbb{R}^{n+m}$.

$$\mu_{n+m}(E) = \int_{\mathbb{R}^n} \mu_m(E(x))\, dx.$$

Смысл

Мера всего множества E равна "сумме" (интегралу) мер его плоских срезов. Это позволяет сводить многомерные задачи к последовательности одномерных, упрощая вычисления и доказательства.

Измеримость по Лебегу

Множество $E \subset \mathbb{R}^n$ измеримо по Лебеге, если для любого $\varepsilon > 0$ существуют:
Открытое множество $U \supset E$ и замкнутое $F \subset E$, такие что $\mu_n(U \setminus F) < \varepsilon$.

Смысл:

Измеримые множества — это те, которые можно "зажать" между открытыми и замкнутыми с сколь угодно малой ошибкой по мере.

8. Мера декартова произведения и мера Лебега как произведение мер

Мера декартова произведения

$\mathcal{A}_n$ - σ-алгебра измеримых по Лебегу множеств в $\mathbb{R}^n$
Для измеримых множеств $A \in \mathcal{A}_n$, $B \in \mathcal{A}_m$ их декартово произведение $A \times B$ измеримо в $\mathbb{R}^{n+m}$, и его мера равна произведению мер:

$$\mu_{n+m}(A \times B) = \mu_n(A) \cdot \mu_m(B).$$

Смысл:

Мера произведения множеств равна произведению их мер, что согласуется с интуицией о "площади" прямоугольника. Доказательство использует аппроксимацию открытыми/замкнутыми множествами и свойства регулярности меры Лебега. Для бесконечных мер применяется разбиение на σ-конечные части.

Мера Лебега как произведение мер

Мера Лебега на $\mathbb{R}^n$ — это n-кратное произведение одномерных мер Лебега:

$$\lambda^n = \underbrace{\lambda^1 \times \lambda^1 \times \cdots \times \lambda^1}_{n \text{ раз}}.$$

Смысл:

Это означает, что мера многомерного пространства строится как последовательное "умножение" мер вдоль каждой координаты. Например, площадь (2D) — произведение длин (1D), объём (3D) — произведение площадей и длины, и т.д. Свойство следует из теоремы о мере декартова произведения.

9. Мера графика и подграфика

График функции (Гf)

Определение:

Для $f : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ график — множество точек $(x, y) \in \mathbb{R}^{n+1}$, где $y = f(x)$.

Смысл:

График — это "след" функции в $(n+1)$-мерном пространстве. Если f измерима, её график имеет нулевую меру в $\mathbb{R}^{n+1}$, так как он "тоньше" любого слоя. Доказательство использует разбиение области значений на ϵ-слои и оценку меры.

Подграфик функции (Qf)

Определение:

Для $f : E \subset \mathbb{R}^n \to [0, +\infty]$ подграфик — множество точек (x, y), где $0 \le y \le f(x)$.

Смысл:

Подграфик — это область "под" графиком. Его измеримость равносильна измеримости f, а мера равна интегралу от f по E. Это связывает геометрический объём с аналитическим выражением.

Мера графика

Если $E \subset \mathbb{R}^n$, $f \in S(E)$ (измерима по Лебегу), то $\Gamma f \in \mathcal{A}_{n+1}$ и $\mu_{n+1}(\Gamma f) = 0$.

Смысл:

График измеримой функции всегда измерим как множество в $\mathbb{R}^{n+1}$, но его мера нулевая. Это обобщает факт, что кривая на плоскости ($n = 1$) не имеет площади. Доказательство использует разбиение области значений на ϵ-слои и оценку меры объединения прямоугольников.

Мера подграфика

Пусть $E \in \mathcal{A}_n$, $f : E \to [0, +\infty]$. Тогда:

$$Q_f \text{ измерим} \Leftrightarrow f \text{ измерима, и } \mu_{n+1}(Q_f) = \int_E f \, d\mu_n.$$

Смысл:

Подграфик измерим тогда и только тогда, когда сама функция измерима. Его мера совпадает с интегралом от f, что обобщает понятие "площади под графиком" на многомерный случай. Это ключевая связь между геометрией и анализом.

Доп:

$\mathcal{A}_n$ - σ-алгебра измеримых по Лебегу множеств в $\mathbb{R}^n$

10. Теорема Тонелли и Фубини

Теорема Тонелли (для неотрицательных функций)

Пусть $E \subset \mathbb{R}^{n+m}$, $f \in S(E \to [0, +\infty])$. Тогда справедливы следующие утверждения.

1. При почти всех $x \in \mathbb{R}^n$ $f(x, \cdot) \in S(E(x))$.
2. Функция I, заданная формулой $I(x) = \int_{E(x)} f(x, y) dy$, измерима на $\mathbb{R}^n$.
3. $\int_E f d\mu_{n+m} = \int_{\mathbb{R}^n} I(x) dx$.

Смысл:

Эта теорема позволяет вычислять интеграл от неотрицательной измеримой функции $f(x, y)$ по пространству $\mathbb{R}^{n+m}$ как повторный интеграл: сначала интегрируя по y при фиксированном x (внутренний интеграл $I(x)$), а затем интегрируя результат $I(x)$ по x. Она гарантирует измеримость сечения функции и внутреннего интеграла для почти всех x.

Теорема Фубини (для суммируемых функций)

Пусть $E \subset \mathbb{R}^{n+m}$, $f \in L(E)$. Тогда справедливы следующие утверждения.

1. При почти всех $x \in \mathbb{R}^n$ $f(x, \cdot) \in L(E(x))$.
2. Функция I, заданная формулой $I(x) = \int_{E(x)} f(x,y)dy$, суммируема на $\mathbb{R}^n$.
3. $\int_E f d\mu_{n+m} = \int_{\mathbb{R}^n} I(x)dx$.

Смысл:

Эта теорема обобщает Тонелли на функции произвольного знака, но требующие суммируемости f на E. Она также позволяет сводить $(n+m)$-мерный интеграл к повторному (сначала по y, затем по x), гарантируя при этом, что сечения $f(x, \cdot)$ суммируемы по y для почти всех x и что внутренний интеграл $I(x)$ сам суммируем по x. Ключевое отличие от Тонелли — требование $f \in L(E)$.

3. Основное отличие теорем

Теорема Тонелли применяется к неотрицательным измеримым функциям $(f \geq 0)$, но не требует их суммируемости. Теорема Фубини применяется к функциям произвольного знака, но требует их суммируемости на E $(f \in L(E))$. При выполнении условий Фубини справедливо равенство повторных интегралов.

Интегральная функцией сечения $I(x)$

Функция, определяемая как $I(x) = \int_{E(x)} f(x,y)\, dy$, где $E(x) = \{y \in \mathbb{R}^m : (x,y) \in E\}$ — сечение множества E при фиксированном x.

Смысл

Выражает "частичный" интеграл по переменным y, оставляя x параметром.

11. Интеграл Эйлера-Пуассона

Определение:

Интеграл Эйлера-Пуассона — это несобственный интеграл вида $I = \int_0^{+\infty} e^{-x^2}\, dx$, значение которого равно $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Смысл:

Интеграл вычисляется с помощью перехода к полярным координатам, где замена переменных $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$ упрощает подынтегральное выражение. Квадрат интеграла I^2 преобразуется в двойной интеграл по плоскости, который сводится к произведению двух одномерных интегралов. Результат $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$ широко используется в теории вероятностей и математической физике.

Ключевые шаги:

1. Замена $I^2 = \iint e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy$.
2. Переход к полярным координатам: $\int_0^{+\infty} \int_0^{\pi/2} re^{-r^2}\,d\varphi\,dr$.
3. Вычисление: $\frac{\pi}{4}$, откуда $I = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

12. Мера n-мерного шара и сферы

Определение:

Мера Лебега μ_n n-мерного шара $\overline{B}_n(a, R) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x - a| \le R\}$ вычисляется по формуле:

$$\mu_n \overline{B}_n(a, R) = \frac{2^n}{n!} \left(\frac{\pi}{2}\right)^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} R^n.$$

Смысл:

Мера шара зависит от его радиуса R и размерности n. Для $n = 2$ и $n = 3$ получаем классические формулы площади круга и объёма шара. Мера сферы $\mathbb{S}^{n-1}$ равна нулю, так как она является границей шара и имеет нулевой объём в $\mathbb{R}^n$.

Примеры:

- $\mu_2 \overline{B}_2(a, R) = \pi R^2$ (круг),
- $\mu_3 \overline{B}_3(a, R) = \frac{4}{3}\pi R^3$ (шар),
- $\mu_4 \overline{B}_4(a, R) = \frac{\pi^2}{2} R^4$.

13. Замена переменной в интеграле, образ и плотность меры

Общая схема замены переменной

Для пространств с мерами (X, A, μ), (Y, B, v) и измеримой функции $h \ge 0$, если $vB = \int_{\Phi^{-1}(B)} h\,d\mu$ и f измерима на Y, то:

$$\int_Y f\,dv = \int_X (f\circ\Phi)h\,d\mu.$$

Смысл:

Интеграл функции f по мере v на Y сводится к интегралу её композиции с Φ и весовой функции h по исходной мере μ на X. Это обобщение замены переменных в анализе, где h играет роль якобиана.

Образ меры

Если $h\equiv 1$, то $v=\Phi(\mu)$ (образ меры μ), и:

$$\int_Y f\,dv = \int_X f\circ\Phi\,d\mu.$$

Смысл:

Мера v "переносится" с X на Y через отображение Φ, а интеграл преобразуется без весовой функции. Пример — замена координат без искажения объёма.

Плотность меры

Если $vA=\int_A h\,d\mu$, то h — плотность v относительно μ, и:

$$\int_X f\,dv = \int_X fh\,d\mu.$$

Смысл:

Функция h показывает, как мера v "перевешивает" μ в каждой точке. Критерий плотности связывает h с неравенствами для значений мер на множествах.

Доп

Φ – это измеримое отображение (функция), которое "переводит" точки из пространства X в пространство Y.
h – весовая функция, это неотрицательная измеримая функция, которая определяет, как мера μ на X преобразуется в меру v на Y.

14. Естественная мера на кривой и на поверхности. Криволинейный и поверхностный интегралыпервого рода для элементарных поверхностей

1. Мера, порожденная кривой

Пусть $\gamma : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}^n$ - кривая. Для множества B определим $\mathcal{A} = \{B : \gamma^{-1}(B) \text{ измеримо}\}$ (σ -алгебра). Мера m_γ на кривой задается формулой:

$$m_\gamma(B) = \int_{\gamma^{-1}(B)} \|\gamma'(t)\| dt$$

2. Мера, порожденная поверхностью

Пусть $\varphi : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ - параметризация поверхности (φ гладкая). Для множества B мера m_S на поверхности задается формулой:

$$m_S(B) = \int_{\varphi^{-1}(B)} \|\varphi_u \times \varphi_v\| dudv$$

3. Криволинейный интеграл первого рода

Пусть $\gamma : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}^n$ - кривая, $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $x = \gamma(t)$. Интеграл функции f по кривой γ в множестве A определяется как:

$$\int_A f d\gamma = \int_{\gamma^{-1}(A)} f(\gamma(t)) \cdot \|\gamma'(t)\| dt$$

4. Поверхностный интеграл первого рода

Пусть S - поверхность, заданная параметризацией $\varphi : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $x = \varphi(u)$, $A \subseteq \mathbb{R}^3$. Для функции f, определенной на поверхности, интеграл по множеству A задается формулой:

$$\int_A f dS = \int_{\varphi^{-1}(A)} f(\varphi(u)) \cdot \|\varphi_u \times \varphi_v\| dudv$$

15. Преобразование меры Лебега при диффеоморфизме. Замена переменной в интеграле Лебега. Использование полярных, цилиндрических и сферических координат в кратных интегралах.

Диффеоморфизм

Пусть $G, V \subset \mathbb{R}^n$ — открытые множества. Отображение $\Phi : G \to V$ называется *диффеоморфизмом*, если:

- Φ биективно
- $\Phi \in C^{(1)}(G \to V)$
- $\Phi^{-1} \in C^{(1)}(V \to G)$.
  Якобиан $\det \Phi' \neq 0$ во всех точках G.

Смысл:

Гладкое обратимое преобразование координат. Сохраняет геометрическую структуру, позволяя корректно переходить между системами координат без "склеек" или разрывов.

Преобразование меры Лебега

Пусть $G \subset \mathbb{R}^n$ открыто, $\Phi : G \to \mathbb{R}^n$ — диффеоморфизм. Тогда для $E \in \mathcal{A}_n(G)$:

$$\mu(\Phi(E)) = \int_E |\det \Phi'(x)| d\mu(x).$$

Смысл:

Мера образа множества равна интегралу от модуля якобиана по исходному множеству. Якобиан учитывает локальное изменение объема при отображении.

Замена переменных в интеграле Лебега

Пусть $G \subset \mathbb{R}^n$ открыто, $\Phi : G \to \mathbb{R}^n$ — диффеоморфизм, $E \in \mathcal{A}_n(G)$, $f \in \mathcal{S}(\Phi(E))$. Тогда:

$$\int_{\Phi(E)} f(y) d\mu(y) = \int_E f(\Phi(x)) \cdot |\det \Phi'(x)| d\mu(x).$$

Равенство выполняется, если существует один из интегралов.

Смысл:

Позволяет вычислять интегралы в новых координатах. Модуль якобиана компенсирует искажение объема элементарных областей при замене переменных.

4. Классические замены координат

Полярные ($\mathbb{R}^2$): $x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi, \quad |\det \Phi'| = r$
Цилиндрические ($\mathbb{R}^3$): $x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi,\ z = h, \quad |\det \Phi'| = r$
Сферические ($\mathbb{R}^3$): $x = r\cos\varphi\cos\psi,\ y = r\sin\varphi\cos\psi,\ z = r\sin\psi, \quad |\det \Phi'| = r^2|\cos\psi|$

Доп:

$\det D\varphi$ - якобиан.

16. Мера Лебега-Стилтьеса и дискретная мера

Полукольцо ячеек

Полукольцо ячеек P_Δ — это семейство промежутков вида $[a, b)$ (или других типов: $(a, b]$, $[a, b]$, (a, b)), замкнутое относительно пересечения и таких, что разность двух ячеек представима в виде конечного объединения непересекающихся ячеек из P_Δ.

Мера Лебега-Стилтьеса

Мера μ_g на полукольце ячеек P_Δ, заданная через возрастающую непрерывную слева функцию g как $v_g[a, b] = g(b) - g(a)$, и стандартно распространённая на σ-алгебру A_g.

Смысл:

Мера Лебега-Стилтьеса обобщает классическую меру Лебега, заменяя длину интервала $b - a$ на приращение $g(b) - g(a)$, что позволяет учитывать произвольные распределения "массы". ($g(x) = x + c$)

Дискретная мера Лебега-Стилтьеса

Для функции g со скачками h_k в точках a_k:

$$\mu_g(A) = \sum_{a_k \in A} h_k$$

где A — любое измеримое подмножество числовой прямой (например, интервал, отрезок или точечное множество).

Смысл:

Превращает интеграл в сумму значений в точках скачков. Описывает точечные массы (вероятности, заряды). Отличается от непрерывного случая, где масса распределена плавно. Особенно полезна для дискретных случайных величин. Дискретность g меняется только скачками, постоянна между ними.

Ключевая связь

Дискретная мера — частный случай меры Лебега-Стилтьеса, где g кусочно-постоянна со скачками в точках носителя. Это позволяет единообразно работать как с непрерывными, так и дискретными распределениями.

17. Интеграл Лебега-Стилтьеса по мере, порожденной абсолютно непрерывной функцией

1. Определение локально абсолютно непрерывной функции

Функция $g : \Delta \to \mathbb{R}$ называется локально абсолютно непрерывной на промежутке Δ ($g \in AC_{loc}(\Delta)$), если существует точка $x_0 \in \Delta$ и функция $h \in L_{loc}(\Delta)$ такие, что для всех $x \in \Delta$ выполняется:

$$g(x) = \int_{x_0}^{x} h d\mu + g(x_0).$$

2. Теорема об интеграле по абсолютно непрерывной функции

Пусть Δ – промежуток, $x_0 \in \Delta$, $h \in L_{loc}(\Delta)$, $h \geq 0$, $g(x) = \int_{x_0}^{x} h d\mu + g(x_0)$, $E \in A_1(\Delta)$ (измеримо по Лебегу), $f \in S(E)$ (измерима и знакопостоянна на E). Тогда:

$$\int_E f dg = \int_E f h d\mu,$$

причем если существует один из этих интегралов, то существует и другой, и они равны.

3. Следствие для гладкой функции (C¹-случай)

Пусть Δ – промежуток, $g \in C^{(1)}(\Delta)$ (непрерывно дифференцируема), $g' \geq 0$, $E \in A_1(\Delta)$, $f \in S(E)$. Тогда:

$$\int_E f dg = \int_E f g' d\mu,$$

причем если существует один из этих интегралов, то существует и другой, и они равны.

18. Формула Фруллани

Дано: $a, b > 0$, $f \in C(0; +\infty)$.

$$I(a,b) = \int_0^{\infty} \left(f(ax) - f(bx)\right) dx$$

1. Если $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) \in \mathbb{R}$ (существует и конечен), то:

$$I(a,b) = -\left(\lim_{x\to 0^+} f(x)\right) \ln\frac{a}{b}$$

2. Если $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) \in \mathbb{R}$ и $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) \in \mathbb{R}$, то:

$$I(a,b) = \left(\lim_{x\to 0^+} f(x) - \lim_{x\to +\infty} f(x)\right) \ln\frac{b}{a}$$

3. Если $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) \in \mathbb{R}$ (существует и конечен), то:

$$I(a,b) = \left(\lim_{x\to +\infty} f(x)\right) \ln\frac{a}{b}$$

19. Локальное условие Лебега для интегралов зависящих от параметра. Равномерная сходимостьнесобственных интегралов. Признаки Вейерштрасса, Дирихле и Абеля равномерной сходимости несобственных интегралов

Локальное условие Лебега для интегралов, зависящих от параметра

Пусть функция $f(x,y)$ интегрируема по x на $[a,+\infty)$ при каждом $y \in Y$ и удовлетворяет условию:

$$\exists g(x) \in L^1([a,+\infty)) : |f(x,y)| \le g(x) \text{ для почти всех } x \text{ и всех } y \in Y$$

Тогда интеграл $\int_a^\infty f(x,y)dx$ сходится равномерно по $y \in Y$.

Смысл:

Это аналог теоремы Лебега о мажорированной сходимости для интегралов с параметром. Условие гарантирует, что можно менять порядок интегрирования и предельного перехода. Нужно для обоснования законности операций с параметрическими интегралами.

Равномерная сходимость несобственных интегралов

Интеграл $\int_a^{+\infty} f(x,y)dx$ сходится равномерно на множестве Y, если:

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists A = A(\varepsilon) > a : \forall R > A, \forall y \in Y \Rightarrow \left| \int_R^{+\infty} f(x,y)dx \right| < \varepsilon$$

где R - это нижний предел интегрирования для остатка интеграла.

Смысл:

Хвост интеграла должен становиться малым одновременно для всех значений параметра y. Это гарантирует, что предельные переходы по параметру и интегралу можно менять местами.

Критерий Коши равномерной сходимости

Интеграл $\int_a^\infty f(x,y)dx$ сходится равномерно на Y тогда и только тогда, когда:

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists A > a : \forall R_1, R_2 > A, \forall y \in Y \Rightarrow \left| \int_{R_1}^{R_2} f(x,y)dx \right| < \varepsilon$$

где R_1, R_2 - Это произвольные точки на оси x, лежащие правее A.

Смысл:

Аналог критерия Коши для последовательностей. Равномерная сходимость означает, что интеграл по любому достаточно большому отрезку можно сделать сколь угодно малым сразу для всех y.

Признак Вейерштрасса

Если $|f(x,y)| \leq g(x)$ для всех $x \geq a, y \in Y$ и $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ сходится, то $\int_a^{+\infty} f(x,y)dx$ сходится равномерно на Y.

Смысл:

Достаточно найти мажоранту, не зависящую от параметра y, интеграл от которой сходится. Самый простой, но часто слишком грубый способ доказательства равномерной сходимости.

Признак Дирихле

Пусть:

1. $\left|\int_a^R f(x,y)dx\right| \leq M$ для всех $R > a, y \in Y$
2. При каждом $y \in Y$ функция $g(x,y)$ монотонна по x
3. $g(x,y) \rightrightarrows 0$ при $x \to +\infty$ на Y

Тогда $\int_a^\infty f(x,y)g(x,y)dx$ сходится равномерно на Y ($\rightrightarrows$ это сходится равномерно).

Смысл:

Полезен для интегралов вида $\int \sin(x) \cdot \frac{1}{x^p} dx$. Первый множитель осциллирует (его интеграл ограничен), второй монотонно убывает к нулю.

Признак Абеля

Пусть:

1. $\int_a^\infty f(x,y)dx \rightrightarrows$ по y (сходится равномерно), при $x \to \infty$ на Y
2. $g(x,y)$ равномерно ограничена: $|g(x,y)| \le M$ для всех $x \ge a, y \in Y$
3. При каждом $y \in Y$ функция $g(x,y)$ монотонна по x

Тогда $\int_a^{+\infty} f(x,y)g(x,y)dx \rightrightarrows$ на Y.

Смысл:

Обобщение признака Дирихле. Применяется, когда одна часть дает равномерно сходящийся интеграл, а другая - монотонную ограниченную функцию. Позволяет исследовать более сложные интегралы.

Доп:

$L^1(X)$ -пространство абсолютно интегрируемых функций на X (интеграл понимается в смысле Лебега):

$$L^1(X) = \left\{ f : X \to \mathbb{R} \,\middle|\, \int_X |f(x)| \, dx < +\infty \right\}$$

Y - произвольное множество, на котором определен параметр. $([c,d])$

20. Связь (равномерной) сходимости несобственного интеграла с (равномерной) сходимостью ряда из определенных интегралов.

Несобственный интеграл

$$I(y) = \int_a^\infty f(x,y) \, dx$$

Смысл:

Это интеграл с бесконечным верхним пределом, зависящий от параметра y. Его сходимость означает, что при $R \to \infty$ интеграл $\int_a^R f(x, y)\, dx$ стремится к конечному пределу $I(y)$. Равномерная сходимость требует, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ существовало такое R_0, что для всех $R > R_0$ и всех y выполняется $\left|\int_R^\infty f(x, y)\, dx\right| < \varepsilon$.

Ряд из кусочных интегралов

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k(y) = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x, y)\, dx$$

Смысл:

Это представление интеграла $I(y)$ в виде бесконечной суммы интегралов по отрезкам разбиения $a = x_0 < x_1 < \ldots$. Каждое слагаемое $u_k(y)$ — это вклад $f(x, y)$ на $[x_{k-1}, x_k]$. Ряд сходится к $I(y)$, если частичные суммы $S_N(y) = \sum_{k=1}^N u_k(y)$ стремятся к $I(y)$ при $N \to \infty$. Равномерная сходимость ряда означает, что $S_N(y)$ приближает $I(y)$ с любой точностью сразу для всех y при достаточно больших N
.

Критерий равномерной сходимости

1. Интеграл → Ряд:
   Если $I(y)$ сходится равномерно, то для любого разбиения ряд $\sum u_k(y)$ сходится равномерно (так как "хвост" ряда соответствует "хвосту" интеграла).
2. Ряд → Интеграл:
   Если для какого-то разбиения ряд $\sum u_k(y)$ сходится равномерно, то $I(y)$ сходится равномерно (поскольку частичные суммы ряда совпадают с интегралами $\int_a^{x_N} f(x, y)\, dx$).

Смысл критерия

Оба объекта — несобственный интеграл и ряд — выражают одно и то же значение $I(y)$, но в разных формах. Равномерная сходимость означает, что ошибка приближения контролируется единым образом для всех y. Это полезно для перестановки пределов, интегрирования/дифференцирования под знаком интеграла или ряда.

21. Предельный переход под знаком интеграла по параметру при условии Лебега, предельный переход под знаком интеграла по параметру в случае равномерной сходимости.

Предельный переход при условии Лебега

Пусть (X, A, μ) — пространство с мерой, $\tilde{Y}$ — метрическое пространство, $Y \subset \tilde{Y}$, $f : X \times Y \to \mathbb{R}$, при всех $y \in Y$ $f(\cdot, y) \in L(X, \mu)$ (где y фиксирован) . Если при почти всех $x \in X$ $f(x, y) \underset{y \to y_0}{\longrightarrow} g(x)$, и существует $\Phi \in L(X, \mu)$ и окрестность V_{y_0}, такие что $|f(x, y)| \leq \Phi(x)$ для почти всех x и $y \in V_{y_0} \cap Y$,

то $g \in L(X, \mu)$ и $\lim_{y \to y_0} \int_X f(x, y) d\mu(x) = \int_X g(x) d\mu(x) = \int_X \lim_{y \to y_0} f(x, y) d\mu(x)$.

Смысл

Эта теорема обобщает теорему Лебега о мажорированной сходимости для интегралов, зависящих от параметра. Условие гарантирует, что функции $f(\cdot, y)$ "не слишком быстро растут" при $y \to y_0$, что позволяет менять порядок предела и интеграла. Пример применения — исследование непрерывности интегралов от параметрических семейств.

Предельный переход при равномерной сходимости

Пусть (X, A, μ) — пространство с мерой, $\tilde{Y}$ — метрическое пространство, $Y \subset \tilde{Y}$, $\mu X < +\infty$, $f : X \times Y \to \mathbb{R}$, $f(\cdot, y) \in L(X, \mu)$, и $f(\cdot, y) \underset{y \to y_0}{\rightrightarrows} g$ (равномерно на X), y_0 - предельная точка:
Тогда $g \in L(X, \mu)$ и $\lim_{y \to y_0} \int_X f(x, y) d\mu(x) = \int_X g(x) d\mu(x) = \int_X \lim_{y \to y_0} f(x, y) d\mu(x)$.

Смысл

Если семейство функций $f(\cdot, y)$ сходится к g равномерно (т.е. "одинаково быстро" для всех x), то интеграл от предела равен пределу интегралов. Это частный случаи теоремы 1, где мажорантой служит $1 + |g|$ (так как $\mu X < +\infty$). Используется, например, при доказательстве непрерывности интегралов Фурье.

Равномерная сходимость

Семейство $\{f(\cdot, y)\}_{y \in Y}$ равномерно сходится к g на X, если $\sup_{x \in X} |f(x, y) - g(x)| \underset{y \to y_0}{\longrightarrow} 0$.
Обозначение: $f(\cdot, y) \rightrightarrows g$.

Смысл

Равномерная сходимость — более строгое условие, чем поточечная, но зато она гарантирует сохранение свойств (непрерывности, интегрируемости) при предельном переходе. Например, если $f(x, y)$ — непрерывные функции и $f \rightrightarrows g$, то g тоже непрерывна. В контексте интегралов это позволяет избежать "патологий", когда предельная функция неинтегрируема.

22. Локальная непрерывность интеграла по параметру, глобальная непрерывность интеграла по параметру.

Локальная непрерывность интеграла по параметру в точке

Пусть (X, A, μ) — пространство с мерой, Y — метрическое пространство, $f : X \times Y \to \mathbb{R}$, при всех $y \in Y$ $f(\cdot, y) \in L(X, \mu)$, $y_0 \in Y$, при почти всех $x \in X$ функция $f(x, \cdot)$ непрерывна в точке y_0, и f удовлетворяет локальному условию Лебега в точке y_0 (т.е. существует окрестность V_{y_0} и функция $\Phi \in L(X, \mu)$ такие, что для почти всех $x \in X$ и всех $y \in V_{y_0} \cap Y$ выполняется $|f(x, y)| \leq \Phi(x)$).
Тогда интеграл $I(y)$ непрерывен в точке y_0. $(I(y) = \int_X f(x, y)\, d\mu(x))$

Смысл:

Эта теорема гарантирует, что если подынтегральная функция $f(x, y)$ непрерывна по параметру y в точке y_0 для почти всех x и ограничена "контролирующей" функцией $\Phi(x)$, то интеграл $I(y)$ тоже будет непрерывным в y_0. Это важно, например, при исследовании зависимостей интегралов от параметров, таких как время или координаты, в физике или теории вероятностей.

Глобальная непрерывность интеграла по параметру на множестве

Пусть X — компакт в $\mathbb{R}^n$, μ — мера Лебега, Y — метрическое пространство, $f \in C(X \times Y)$. Тогда интеграл $I(y)$ принадлежит $C(Y)$ (т.е. непрерывен на Y). $(I(y) = \int_X f(x, y)\, d\mu(x))$

Смысл:

Если f непрерывна на произведении компакта X и метрического пространства Y, то интеграл $I(y)$ будет непрерывным на всём Y. Это следует из компактности X и непрерывности f, что позволяет избежать проблем с расходимостями. Например, это применяется в задачах, где параметр y меняется в широких пределах, а X — ограниченная область.

Различие

Оба результата (локальный и глобальный) опираются на идею контроля роста $f(x, y)$: в первом случае — через локальную мажоранту, во втором — через глобальную ограниченность, обеспечиваемую компактностью X.

Локальное условие Лебега и его роль

$\exists \Phi \in L(X, \mu), \exists V_{y_0} :$ при почти всех $x \in X$ $\forall y \in \dot{V}_{y_0} \cap Y$ $|f(x, y)| \leq \Phi(x)$.

Смысл:

Это условие требует, чтобы значения $f(x, y)$ в окрестности точки y_0 не превосходили некоторую интегрируемую функцию $\Phi(x)$. Оно нужно для применения теоремы Лебега о мажорируемой сходимости, которая позволяет "переставлять" пределы и интегралы. Без такого условия интеграл $I(y)$ может терять непрерывность, даже если $f(x, y)$ непрерывна по y.

23: Правило Лейбница дифференцирования интеграла по параметру в случае абсолютной суммируемости

(!сверить!)

Условия применимости правила Лейбница

Пусть функция $f(x, \alpha)$ определена на $[a, b] \times [\alpha_1, \alpha_2]$, интегрируема по x на $[a, b]$ для любого $\alpha \in [\alpha_1, \alpha_2]$, и её частная производная $\frac{\partial f}{\partial \alpha}$ существует и абсолютно суммируема (т.е. $\int_a^b \left|\frac{\partial f}{\partial \alpha}\right| dx < \infty$). Тогда, то для $\alpha \in [\alpha_1, \alpha_2]$ справедливо:

$$\frac{d}{d\alpha}\left(\int_a^b f(x, \alpha)\, dx\right) = \int_a^b \frac{\partial f(x, \alpha)}{\partial \alpha}\, dx.$$

Смысл:

Правило позволяет менять порядок дифференцирования и интегрирования. Это полезно, когда интеграл зависит от параметра α, и нужно найти его производную. Например, в физике или теории вероятностей такие ситуации встречаются часто.

Важность абсолютной суммируемости и условий

Абсолютная суммируемость $\frac{\partial f}{\partial \alpha}$ (т.е. $\int_a^b \left|\frac{\partial f}{\partial \alpha}\right| dx < \infty$) обеспечивает равномерную сходимость интеграла, что позволяет применять теоремы о перестановке пределов. Без этого условия производная под интегралом может "вести себя плохо" — например, интеграл может расходиться или производная может не существовать. Абсолютная суммируемость — это способ "контролировать" поведение функции, чтобы все операции были законны.

Условия гарантируют, что интеграл можно "дифференцировать под знаком интеграла". Абсолютная суммируемость производной нужна, чтобы обеспечить равномерную сходимость и избежать проблем при перестановке операций дифференцирования и интегрирования.

24 Правило Лейбница дифференцирования интеграла по параметру в отсутствии абсолютной суммируемости. Интегрирование интеграла по параметру

(!сверить!)

1) Случай постоянного множества интегрирования

Пусть $(X, \mathbb{A}, \mu)$ — пространство с мерой, $Y = \langle c, d \rangle \subset \mathbb{R}$, $f : X \times Y \to \mathbb{R}$, при всех $y \in Y$ функция $f(\cdot, y) \in L(X, \mu)$, при почти всех $x \in X$ функция $f(x, \cdot)$ дифференцируема на Y, $y_0 \in Y$, и производная f'_y удовлетворяет локальному условию Лебега в точке y_0. Тогда интеграл $I(y) = \int_X f(x, y) d\mu(x)$ дифференцируем в точке y_0 и выполняется равенство:

$$I'(y_0) = \int_X f'_y(x, y_0) d\mu(x).$$

Смысл:

Это правило позволяет "выносить" производную по параметру y из-под знака интеграла по x, когда пределы интегрирования фиксированы. Для этого нужно, чтобы подынтегральная функция была "достаточно хорошей": интегрируемой по x при каждом y, дифференцируемой по y почти всюду по x, а её производная по y должна удовлетворять условию, гарантирующему возможность предельного перехода (локальное условие Лебега). Это фундаментальный результат для анализа интегралов, зависящих от параметра.

2) Случай переменного множества интегрирования

Пусть функции $f(x, y)$ и её частная производная $\frac{\partial f}{\partial y}$ интегрируемы на прямоугольнике $[\alpha, \beta] \times [c, d]$, где отрезок $[\alpha, \beta]$ содержит все значения функций $a(y)$, $b(y)$, а функции $a(y)$, $b(y)$ дифференцируемы на $[c, d]$. Тогда интеграл $I(y) = \int_{a(y)}^{b(y)} f(x, y) dx$ дифференцируем по y на $[c, d]$ и справедлива формула:

$$\frac{d}{dy} I(y) = f(b(y), y) \cdot b'(y) - f(a(y), y) \cdot a'(y) + \int_{a(y)}^{b(y)} \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) dx.$$

Смысл:

Эта формула учитывает **два эффекта** при дифференцировании интеграла с переменными пределами $a(y)$ и $b(y)$: 1) Изменение *площади* под кривой из-за изменения подынтегральной функции по параметру y (последний интеграл с производной). 2) Изменение *самой области* интегрирования из-за движения границ $a(y)$ и $b(y)$ (первые два слагаемых). Они показывают, как "добавляется" площадь при движении правой границы $b(y)$ и "вычитается" площадь при движении левой границы $a(y)$.

3) Отсутствие абсолютной суммируемости

Интегрирование интеграла по параметру не требует абсолютной суммируемости подынтегральной функции или её производной в случае постоянных пределов интегрирования. Достаточно выполнения локального условия Лебега на производную f'_y в точке дифференцирования y_0.

Смысл:

Локальное условие Лебега (существование интегрируемой мажоранты для f'_y в некоторой окрестности точки y_0) является ключевым ослаблением по сравнению с требованием абсолютной суммируемости на всем Y. Это означает, что для вычисления производной $I'(y_0)$ достаточно контролировать поведение производной f'_y лишь вблизи этой конкретной точки y_0, а не на всём интервале. Это делает теорему применимой в более широком классе задач.

25. Свойства Г-функции Эйлера: определение, формула приведения, значения в натуральных и полуцелых точках, выражение для k-й производной, геометрические свойства.

Определение и базовые значения

Г-функция Эйлера задаётся интегралом:

$$\Gamma(p) = \int_0^{+\infty} x^{p-1} e^{-x}\, dx, \quad p > 0.$$

Смысл:

Г-функция обобщает факториал на нецелые числа. Интегральное определение позволяет работать с дробными значениями, а базовые значения показывают связь с известными константами. Например, $\Gamma(1) = 0! = 1$, а $\Gamma(1/2)$ возникает в теории вероятностей и статистике.

Формула приведения и значения в специальных точках

Формула приведения:

$$\Gamma(p+1) = p\Gamma(p).$$

Значения в целых и полуцелых точках:

$$\Gamma(n+1) = n!, \quad \Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) = \frac{(2n-1)!!}{2^n}\sqrt{\pi}, \quad n \in \mathbb{Z}_+.$$

Смысл:

Формула приведения позволяет вычислять Γ-функцию рекуррентно, сводя задачу к меньшим значениям аргумента. Значения в целых точках совпадают с факториалом, а в полуцелых — выражаются через двойные факториалы и π, что полезно в квантовой механике и интегральных преобразованиях.

Производные Γ-функции:

$$\Gamma^{(n)}(p) = \int_0^{+\infty} x^{p-1} e^{-x} \ln^n x \, dx.$$

Смысл:

Производные Γ-функции выражаются через интегралы с логарифмическими множителями, что важно в анализе.

Геометрические свойства:

1. $\Gamma(p)$ строго выпукла вниз на $(0, +\infty)$.
2. Имеет единственный минимум на $(1, 2)$.
3. $\Gamma(p) \sim \frac{1}{p}$ при $p \to 0$ и $\Gamma(p) \to +\infty$ при $p \to +\infty$.

Смысл:

Выпуклость и наличие минимума объясняют её "U-образный" график, а асимптотики помогают оценивать поведение на границах области определения (например, в теории вероятностей).

26. Связь между Γ- и B-функцией

Определение B-функции (бета-функции Эйлера)

B-функция определяется как интеграл:

$$B(p,q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1} \, dx, \quad p, q > 0.$$

Смысл:

B-функция описывает интеграл от произведения степенных функций на отрезке [0, 1]. Она часто используется в теории вероятностей (например, для бета-распределения) и в анализе для вычисления сложных интегралов. Параметры p и q контролируют форму подынтегрального выражения.

Связь между Γ- и B-функциями

Для любых $p, q > 0$ выполняется соотношение:

$$B(p,q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}.$$

Смысл:

Эта формула связывает B-функцию с гамма-функцией (Γ), которая обобщает факториал. Доказательство основано на замене переменных и манипуляциях с интегралами, включая теорему Тонёлли о порядке интегрирования. Связь упрощает вычисление B-функций через известные значения Γ-функции.

27. Формула Эйлера-Гаусса.

Формулировка формулы Эйлера-Гаусса

$$\Gamma(p) = \lim_{n\to\infty} \frac{n^p \cdot n!}{p(p+1)(p+2)\cdot \ldots \cdot (p+n)}, \quad p \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}_-.$$

- $\Gamma(p)$ — гамма-функция, билет 25
- $n!$ — факториал числа n.
- n^p — степенная функция.
- Знаменатель $p(p+1)...(p+n)$ — произведение линейных множителей.

Смысл:

Формула выражает гамма-функцию через предел последовательности, связывая факториал и степенную функцию. Она позволяет вычислять значения $\Gamma(p)$ для нецелых p, исключая отрицательные целые числа, где знаменатель обращается в ноль.

Условия применимости

Область определения:

Формула справедлива для всех $p \in \mathbb{R}$, кроме отрицательных целых чисел ($p \notin \mathbb{Z}_-$), так как при таких p знаменатель обращается в ноль для некоторого n.

Связь с факториалом:

При целых положительных $p = m \in \mathbb{N}$ формула сводится к $\Gamma(m) = (m-1)!$, согласуясь с классическим определением.

Смысл:

Формула Эйлера-Гаусса является альтернативным определением гамма-функции, подчеркивающим её связь с дискретными (факториал) и непрерывными (предел) математическими объектами.

28. Теорема о разложении функции в обобщенный степенной ряд. Ряды Лорана

Определение ряда Лорана

Ряд вида $\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k (z - z_0)^k$, где $c_k, z, z_0 \in \mathbb{C}$, называется рядом Лорана. Числа c_k называются его коэффициентами, а z_0 — центром ряда.

Смысл:

Это обобщение степенного ряда, позволяющее работать с функциями, имеющими особенности (например, полюсы). В отличие от ряда Тейлора, он содержит члены с отрицательными степенями $(z - z_0)$, что необходимо для анализа поведения функции в кольце вокруг точки z_0.

Структура ряда Лорана

Главная часть ряда Лорана определяется как $\sum_{k=-\infty}^{-1} c_k (z - z_0)^k$. Правильная (регулярная) часть определяется как $\sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - z_0)^k$. Ряд сходится тогда и только тогда, когда сходятся обе части.

Смысл:

Главная часть описывает "неправильное" поведение функции (особенности) вблизи центра z_0, а правильная часть аналогична ряду Тейлора и описывает "хорошее" поведение. Сходимость всего ряда требует сходимости обеих частей в заданном кольце.

Теорема Лорана о разложении

Пусть $z_0 \in \mathbb{C}$, $0 \le r < R \le +\infty$, $f \in \mathcal{A}(K_{r,R}(z_0))$. Тогда f раскладывается в кольце $K_{r,R}(z_0)$ в ряд Лорана: $f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k (z - z_0)^k$ для $r < |z - z_0| < R$.

Смысл:

Любую функцию, аналитическую в кольце между двумя окружностями, можно представить в виде суммы ряда Лорана. Это мощный инструмент для изучения функций с изолированными особенностями, так как разложение работает даже там, где ряд Тейлора неприменим.

4. Единственность коэффициентов Лорана

Пусть $0 \le r < R \le +\infty$ и $f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k (z - z_0)^k$ при $r < |z - z_0| < R$. Тогда коэффициенты c_k определяются единственным образом по формуле:

$$c_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_\rho} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+1}} d\zeta,$$

где $\rho \in (r, R)$, $\gamma_\rho = \gamma_{\rho, z_0}$ (окружность $|\zeta - z_0| = \rho$).

Смысл:

Коэффициенты ряда Лорана вычисляются через интеграл, аналогичный формуле для коэффициентов Тейлора, но применимый для всех $k \in \mathbb{Z}$. Это гарантирует, что разложение функции в заданном кольце единственно, и позволяет явно находить коэффициенты.

29. Неравенства Коши для коэффициентов рядов Тейлора и Лорана

Неравенство Коши для коэффициентов степенного ряда (Тейлора)

Пусть $z_0 \in \mathbb{C}$, $R \in (0, +\infty]$, и функция f аналитична в круге $|z - z_0| < R$:

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - z_0)^k.$$

Тогда для любого $\rho \in (0, R)$ и всех $k \in \mathbb{Z}_+$ (т.е. $k = 0, 1, 2, \ldots$) выполняется:

$$|c_k| \le \frac{M_f(\rho)}{\rho^k}, \quad \text{где} \quad M_f(\rho) = \max_{|\zeta - z_0| = \rho} |f(\zeta)|.$$

Смысл:

Это неравенство оценивает рост коэффициентов Тейлора функции f через максимум её модуля на окружности радиуса ρ. Чем быстрее убывают коэффициенты c_k, тем "лучше" поведение функции (например, она может быть целой). Оно следует из интегральной формулы для коэффициентов и оценки интеграла.

Неравенство Коши для коэффициентов ряда Лорана

Пусть $z_0 \in \mathbb{C}, 0 \leq r < R \leq +\infty$, и функция f аналитична в кольце $r < |z - z_0| < R$:

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k (z - z_0)^k.$$

Тогда для любого $\rho \in (r, R)$ и всех $k \in \mathbb{Z}$ (т.е. $k = \ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots$) выполняется:

$$|c_k| \leq \frac{M_f(\rho)}{\rho^k}, \quad \text{где} \quad M_f(\rho) = \max_{|\zeta - z_0| = \rho} |f(\zeta)|.$$

Смысл:

Это обобщение неравенства Коши на ряды Лорана. Оно ограничивает как положительные (регулярная часть), так и отрицательные (главная часть) коэффициенты через максимум модуля функции на окружности радиуса ρ внутри кольца аналитичности. Помогает изучать особенности функции в z_0 (например, тип полюса).

Обозначения

- z_0: центр разложения
- R: радиус сходимости (Тейлор) / внешний радиус кольца (Лоран)
- r: внутренний радиус кольца (Лоран)
- ρ: радиус выбранной окружности ($r < \rho < R$)
- ζ: точка на окружности $|\zeta - z_0| = \rho$
- c_k: коэффициенты ряда
- $M_f(\rho)$: $\max |f|$ на окружности радиуса ρ
- k: индекс коэффициента (≥ 0 для Тейлора, $\in \mathbb{Z}$ для Лорана)

30. Изолированные особые точки аналитических функций, их типы. Характеризация устранимой особой точки посредством лорановского разложения

Определение изолированной особой точки

Пусть $z_0 \in \mathbb{C}$, функция f голоморфна по крайней мере в проколотой окрестности $\dot{V}(z_0)$. Тогда z_0 называется изолированной особой точкой однозначного характера функции f.

Смысл:

Это точка, где функция "ломается", но аналитична вокруг неё. Например, $z_0 = 0$ для $f(z) = \frac{\sin z}{z}$.

Классификация изолированных особых точек

Выделяют три типа z_0 :

1. Устранимая особая точка, если $\exists$ конечный предел $\lim_{z \to z_0} f(z)$.
2. Полюс, если $\lim_{z \to z_0} f(z) = \infty$.
3. Существенно особая точка, если $\nexists$ ни конечного, ни бесконечного предела $\lim_{z \to z_0} f(z)$.

Смысл:

Устранимая — "дырка", которую можно "залатать" (например, доопределить f). Полюс — функция "взрывается" к бесконечности. Существенная — хаотичное поведение (например, $e^{1/z}$ при $z \to 0$).

Характеризация устранимой особенности

Пусть $z_0 \in \mathbb{C}$, f голоморфна в $\dot{V}(z_0)$. Эквивалентны:

1. z_0 — устранимая особая точка f.
2. f ограничена в некоторой проколотой окрестности $\dot{V}(z_0)$.
3. f аналитически продолжима в z_0 (т.е. $\exists g$ голоморфная в $V(z_0)$ с $g \equiv f$ в $\dot{V}(z_0)$).
4. В главной части ряда Лорана f в z_0 все коэффициенты при $(z - z_0)^k$ ($k < 0$) равны нулю.

Смысл:

Устранимая особенность "мягкая": функция не уходит в бесконечность, её ряд Лорана не содержит отрицательных степеней, и её можно "продолжить" до аналитической в z_0. Доказательство использует оценку Коши для коэффициентов Лорана.

Доп:

Функция $f : D \to \mathbb{C}$ называется голоморфной в области $D \subseteq \mathbb{C}$, если она комплексно-дифференцируема в каждой точке D.

31. Специфика лорановских разложений в окрестности полюса и существенно особой точки

Характеристика полюсов (Теорема 3)

Пусть $z_0 \in \mathbb{C}$, f аналитична в проколотой окрестности V_{z_0} ($f \in A(V_{z_0})$). Тогда эквивалентны:

1. z_0 — полюс функции f.
2. Существуют номер $m \in \mathbb{N}$ и функция $\varphi \in A(V_{z_0})$, $\varphi(z_0) \neq 0$, такие что $f(z) = \frac{\varphi(z)}{(z-z_0)^m}$ для всех $z \in V_{z_0}$.
3. В главной части ряда Лорана функции f с центром в z_0 лишь конечное число коэффициентов отлично от нуля.

Смысл:

Полюс характеризуется "конечным ростом" функции при приближении к z_0, что выражается либо через представление в виде дроби с аналитическим числителем и конечным порядком полюса в знаменателе, либо через конечность ненулевых членов в отрицательной части ряда Лорана.

Характеристика существенно особых точек (Следствие 1)

Пусть $z_0 \in \mathbb{C}$, f аналитична в проколотой окрестности V_{z_0} ($f \in A(V_{z_0})$). Тогда эквивалентны:

1. z_0 — существенно особая точка функции f.
2. В главной части ряда Лорана функции f с центром в z_0 бесконечно много коэффициентов отлично от нуля.

Смысл:

Существенно особая точка отличается "бесконечной сложностью" поведения функции вокруг z_0. Это проявляется в том, что главная часть ряда Лорана (отражающая сингулярность) требует бесконечного числа слагаемых для своего описания, в отличие от полюса.

32. Теорема Сохоцкого

Формулировка теоремы

Пусть $f \in A(\dot{V}_\delta(z_0))$; z_0 — существенно особая точка f. Тогда для любого $A \in \mathbb{C}$ существует последовательность $\{z_n\}$, такая что $z_n \in V_\delta(z_0)$, $z_n \to z_0$, $f(z_n) \to A$.

Смысл:

Эта теорема описывает "дикое" поведение аналитической функции в окрестности существенно особой точки. Она утверждает, что в любой сколь угодно малой окрестности такой точки функция принимает значения, сколь угодно близкие к *любому* наперед заданному комплексному числу A, причем бесконечно много раз.

Обозначения

1. $A(\dot{V}_\delta(z_0))$ — класс функций, аналитических в проколотой окрестности $\dot{V}_\delta(z_0) = \{z : 0 < |z - z_0| < \delta\}$ точки z_0.
2. $z_n \in V_\delta(z_0)$ — последовательность точек, лежащих в окрестности $|z - z_0| < \delta$.
3. $z_n \to z_0$, $f(z_n) \to A$ — последовательность сходится к особой точке z_0, а значения функции в этих точках сходятся к A.

33. Два определения вычета. Теорема Коши о вычетах. Теорема о полной сумме вычетов.

Определения вычета в конечной точке и на бесконечности

1. Пусть $z_0 \in \mathbb{C}$, $f \in \mathcal{A}(\dot{V}_{z_0})$. Коэффициент c_{-1} в разложении f в ряд Лорана

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k (z - z_0)^k$$

называется *вычетом* функции f в точке z_0 и обозначается $\operatorname{res}_{z_0} f$.
2. Пусть $f \in \mathcal{A}(\dot{V}_\infty)$. *Вычетом* функции f в точке ∞ называется коэффициент c_1 в разложении f в ряд Лорана, взятый с противоположным знаком:

$$\operatorname{res}_\infty f = -c_1.$$

Смысл:

Вычет в конечной точке z_0 — это коэффициент при $(z - z_0)^{-1}$ в ряде Лорана, связанный с интегралом по малой окружности вокруг z_0. Вычет на бесконечности определен через c_1 со знаком минус, чтобы интеграл по большой окружности (охватывающей все конечные особые точки) выражался как $-2\pi i \cdot \operatorname{res}_\infty f$, что согласуется с ориентацией контура.

Теорема Коши о вычетах

Пусть D — область в $\mathbb{C}$, $E \subset D$, $f \in \mathcal{A}(D \setminus E)$, E — множество изолированных особых точек f, G — ограниченная область с ориентированной границей, $\overline{G} \subset D$, $\partial G \cap E = \emptyset$. Тогда

$$\int_{\partial G} f(z)dz = 2\pi i \sum_{z_k \in G \cap E} \operatorname{res}_{z_k} f.$$

Смысл:

Интеграл от аналитической функции по замкнутому контуру ∂G равен сумме вычетов внутри этого контура, умноженной на $2\pi i$. Это позволяет вычислять сложные интегралы, сводя их к алгебраической сумме коэффициентов Лорана в особых точках, лежащих в области G.

Теорема о полной сумме вычетов

Пусть $E \subset \mathbb{C}$, $f \in \mathcal{A}(\mathbb{C} \setminus E)$, $E \cup \{\infty\}$ — множество изолированных особых точек f. Тогда

$$\sum_{z_k \in E \cup \{\infty\}} \operatorname{res}_{z_k} f = 0.$$

Смысл:

Сумма вычетов функции по всем изолированным особым точкам (включая бесконечность) равна нулю. Это следствие теоремы Коши и определения вычета на бесконечности: интеграл по большой окружности γ_R выражается двумя способами (через сумму конечных вычетов и через $\operatorname{res}_\infty f$), что приводит к их взаимному уничтожению. Теорема упрощает вычисления, позволяя находить один вычет, зная остальные.

34. Приемы отыскания вычетов

Вычет в устранимой особой точке

Если z_0 — устранимая особая точка функции f, то вычет в этой точке равен нулю:

$$\operatorname{res}_{z_0} f = 0.$$

Смысл:

В устранимой особенности функцию можно "исправить" до голоморфной, доопределив её в точке z_0. Ряд Лорана не содержит отрицательных степеней, поэтому коэффициент c_{-1} (вычет) автоматически равен нулю.

Вычет в простом полюсе

Пусть z_0 — простой полюс функции f. Тогда вычет вычисляется по формулам:

1. $\operatorname{res}_{z_0} f = \lim_{z \to z_0} (z - z_0) f(z)$.
2. Если $f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$, где P, Q голоморфны в окрестности z_0, $P(z_0) \neq 0$, $Q(z_0) = 0$, $Q'(z_0) \neq 0$, то:

$$\operatorname{res}_{z_0} f = \frac{P(z_0)}{Q'(z_0)}.$$

Смысл:

Для простого полюса вычет — это коэффициент c_{-1} в ряде Лорана. Его можно найти, "умножив" функцию на $(z - z_0)$ и устремив z к z_0, что "снимает" особенность. Формула с P/Q удобна для дробно-рациональных функций.

Вычет в полюсе кратности m

Пусть z_0 — полюс функции f кратности m. Тогда вычет равен:

$$\operatorname{res}_{z_0} f = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \to z_0} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} \left[(z - z_0)^m f(z) \right]$$

или эквивалентно:

$$\operatorname{res}_{z_0} f = \frac{1}{(m-1)!} \left. \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} \left[(z - z_0)^m f(z) \right] \right|_{z=z_0}.$$

Смысл:

Умножение на $(z - z_0)^m$ "убирает" полюс, делая функцию голоморфной. Дифференцирование $(m - 1)$ раз "выделяет" коэффициент c_{-1} из разложения Лорана, который и является вычетом.

Определение полюса кратности n

Точка z_0 называется полюсом кратности n ($n \in \mathbb{N}$), если:

1. $f(z)$ представима в виде $f(z) = \frac{\phi(z)}{(z-z_0)^n}$, где $\phi(z)$ голоморфна в окрестности z_0 и $\phi(z_0) \neq 0$.
2. В разложении Лорана $f(z)$ в окрестности z_0 главная часть конечна и имеет вид $\sum_{k=-n}^{\infty} c_k (z - z_0)^k$ с $c_{-n} \neq 0$.

Смысл:

Полюс кратности n — это особая точка, где функция "взрывается" как $\frac{1}{(z-z_0)^n}$, умноженное на неисчезающую голоморфную функцию. Чем выше n, тем "сильнее" особенность.

35. Вычисление тригонометрических интегралов с помощью вычетов

Основная идея метода

Интегралы вида $\int_0^{2\pi} R(\sin\varphi, \cos\varphi)d\varphi$, где $R(u, v)$ — рациональная функция двух переменных, вычисляются путём замены $z = e^{i\varphi}$ и применения теоремы о вычетах к полученному контурному интегралу по единичной окружности.

Смысл:

Метод позволяет свести реальный тригонометрический интеграл к комплексному контурному интегралу от рациональной функции. Это возможно благодаря тому, что при движении φ от 0 до 2π, комплексная переменная $z = e^{i\varphi}$ пробегает единичную окружность $|z| = 1$, а тригонометрические функции выражаются рационально через z и $1/z$.

Замена переменных

Положим $z = e^{i\varphi}$. Тогда:

$$d\varphi = \frac{dz}{iz}, \quad \varphi : 0 \to 2\pi \iff z : |z| = 1 \text{ (против ч.с.)}$$
$$\sin\varphi = \frac{z - z^{-1}}{2i}, \quad \cos\varphi = \frac{z + z^{-1}}{2}$$

После подстановки интеграл преобразуется к виду:

$$\oint_{|z|=1} R\left(\frac{z - z^{-1}}{2i}, \frac{z + z^{-1}}{2}\right) \frac{dz}{iz} = \oint_{|z|=1} f(z)\frac{dz}{iz}$$

где $f(z)$ — рациональная функция от z, полученная после подстановки и упрощения.

Смысл:

Замена $z = e^{i\varphi}$ переводит отрезок $[0, 2\pi]$ в замкнутый контур (единичную окружность). Дифференциал $d\varphi$ и тригонометрические функции $\sin\varphi, \cos\varphi$ выражаются через z и dz, превращая исходный интеграл в комплексный интеграл по замкнутому контуру от рациональной функции.

Применение теоремы о вычетах

Искомый интеграл равен $2\pi i$ умноженной на сумму вычетов подынтегральной функции $\frac{f(z)}{iz}$ внутри единичного круга $|z| < 1$:

$$\int_0^{2\pi} R(\sin\varphi, \cos\varphi)d\varphi = 2\pi i \sum_{\substack{z_k \\ |z_k|<1}} \operatorname{Res}\left(\frac{f(z)}{iz}, z_k\right)$$

где z_k — особые точки (полюса) функции $\frac{f(z)}{iz}$, лежащие внутри $|z| < 1$.

Смысл:

После замены интеграл стал равен контурному интегралу от функции $\frac{f(z)}{iz}$ по единичной окружности. По основной теореме о вычетах, такой интеграл равен $2\pi i$ умноженной на сумму вычетов подынтегральной функции во всех её особых точках, лежащих внутри контура (т.е. внутри единичного круга).

36. Вычисление несобственных интегралов от рациональных функций с помощью вычетов

Условия и формула для интеграла рациональной функции по вещественной оси

Пусть $F(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ — рациональная дробь, где $\deg Q - \deg P \geq 2$, и $Q(x)$ не имеет нулей на вещественной оси $\mathbb{R}$. Тогда несобственный интеграл вычисляется по формуле:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F(x)dx = 2\pi i \sum_{\substack{\operatorname{Im} z_k > 0 \\ Q(z_k)=0}} \operatorname{res}_{z_k} F(z).$$

Смысл:

Интеграл по всей вещественной оси заменяется суммой вычетов функции $F(z)$ в верхней полуплоскости ($\operatorname{Im} z_k > 0$), умноженной на $2\pi i$. Это следует из применения теоремы о вычетах к замкнутому контуру, состоящему из отрезка $[-R, R]$ и полуокружности в верхней полуплоскости, при $R \to \infty$. Условие $\deg Q - \deg P \geq 2$ гарантирует стремление к нулю интеграла по полуокружности.

37. Лемма Жордана. Вычисление преобразований Фурье с помощью вычетов

Формулировка леммы Жордана

Пусть $\Delta \in (0, +\infty)$, функция f непрерывна в области $\{z : \operatorname{Im} z \geq 0,\ |z| \geq \Delta\}$, удовлетворяет условию $f(z) \to 0$ при $z \to \infty$ в этой области, и $C_R(t) = Re^{it}$, $t \in [0, \pi]$ — полуокружность в верхней полуплоскости. Тогда для любого $\lambda > 0$ выполняется предельное соотношение:

$$\int_{C_R} f(z)e^{i\lambda z}dz \underset{R\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Смысл:

Лемма гарантирует, что интеграл от функции специального вида ($f(z)$ умноженной на $e^{i\lambda z}$) по полуокружности бесконечно большого радиуса в верхней полуплоскости стремится к нулю. Это критически важно для анализа контурных интегралов, так как позволяет "отбрасывать" вклад дуги на бесконечности при вычислениях с помощью вычетов.

Применение к вычислению преобразований Фурье

Для вычисления интегралов вида $\hat{f}(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{i\lambda x}dx$ ($\lambda > 0$) методом вычетов: 1) Рассмотреть комплексный интеграл $\oint_\Gamma f(z)e^{i\lambda z}dz$ по замкнутому контуру Γ, состоящему из отрезка $[-R, R]$ и полуокружности C_R в верхней полуплоскости; 2) Применить основную теорему о вычетах: $\oint_\Gamma = 2\pi i \sum \text{res}$; 3) Перейти к пределу $R \to \infty$. В силу леммы Жордана интеграл по C_R стремится к нулю, поэтому:

$$\hat{f}(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{i\lambda x}dx = \lim_{R\to\infty} \oint_\Gamma f(z)e^{i\lambda z}dz = 2\pi i \sum \text{выч}_{z_k \in \mathbb{C}^+} f(z)e^{i\lambda z},$$

где сумма берется по всем вычетам функции $g(z) = f(z)e^{i\lambda z}$ в особых точках z_k, лежащих в верхней полуплоскости ($\operatorname{Im} z_k > 0$).

Смысл:

Лемма Жордана позволяет замыкать контур интегрирования в верхней полуплоскости для интегралов Фурье при $\lambda > 0$, так как вклад дуги исчезает. Это сводит задачу вычисления несобственного интеграла по вещественной оси к нахождению суммы вычетов подынтегральной функции $f(z)e^{i\lambda z}$ только в верхней полуплоскости, что часто значительно проще. Например, для рациональных $f(z)$, убывающих на бесконечности.

38. Вычисление несобственных интегралов от аналитических функций с мнимым периодом

Условия и формула для интеграла без экспоненты

Пусть функция $f(z)$ голоморфна в верхней полуплоскости $I^+ = \{z \mid \operatorname{Im} z \geq 0\}$ и на вещественной оси, за исключением конечного числа n полюсов, не лежащих на вещественной оси, и $\lim_{z\to\infty} zf(z) = 0$. Тогда:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Res}_{z=z_k} f(z)$$

Смысл:

Если функция "хорошо себя ведет" в верхней полуплоскости (аналитична кроме изолированных полюсов над осью) и убывает достаточно быстро на бесконечности, то ее интеграл вдоль всей вещественной оси равен сумме вычетов во всех этих верхних полюсах, умноженной на $2\pi i$. Интеграл понимается в смысле главного значения по Коши.

Условия и формула для интеграла с экспонентой $e^{i\alpha x}$

Пусть функция $f(z)$ голоморфна в верхней полуплоскости $I^+ = \{z \mid \mathrm{Im}\, z \geq 0\}$ и на вещественной оси, за исключением конечного числа n полюсов, не лежащих на вещественной оси, $\lim_{z\to\infty} zf(z) = 0$ и $\alpha > 0$. Тогда:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{i\alpha x}dx = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Res}_{z=z_k} \left[f(z)e^{i\alpha z}\right]$$

Смысл:

Для интеграла, дополнительно умноженного на осциллирующую экспоненту $e^{i\alpha x}$ (где $\alpha > 0$ гарантирует затухание в верхней полуплоскости), результат также выражается через сумму вычетов, но уже функции $f(z)e^{i\alpha z}$ в полюсах верхней полуплоскости, умноженную на $2\pi i$. Интеграл также понимается в смысле главного значения.

39. Гладкие многообразия с краем (определение и примеры); отображение перехода, гладкость отображения перехода.

Определение гладкого многообразия с краем

Множество $M \subset \mathbb{R}^n$ называется главным k-мерным многообразием класса $C^{(r)}$ (или r-гладким), если для любой точки $x \in M$ существует окрестность V_x^M и регулярный гомеоморфизм $\varphi : \Pi_k \to V_x^M$ класса $C^{(r)}$, где Π_k — стандартный k-мерный куб $(-1,1)^k$ или полукуб $(-1,0] \times (-1,1)^{k-1}$. Точка x называется краевой, если φ задан на полукубе, а множество таких точек образует край ∂M.

Смысл.

Гладкое многообразие — это множество, которое локально выглядит как кусок $\mathbb{R}^k$ или его "половина" (полукуб). Край ∂M состоит из точек, где локальные параметризации "обрываются", как край листа бумаги. Например, отрезок $[0,1]$ — многообразие с краем $\{0,1\}$.

Примеры гладких многообразий

1. Открытое множество $G \subset \mathbb{R}^n$ — многообразие без края ($\partial G = \varnothing$), так как любая точка имеет кубическую окрестность (например, тождественная параметризация).
2. Кривые ($k = 1$) и гиперповерхности ($k = n - 1$) — частные случаи многообразий.

Смысл.

Простейшие примеры — это открытые шары или интервалы (без края) и отрезки/полосы (с краем). Многообразия обобщают понятие кривых и поверхностей на многомерные случаи, позволяя изучать их гладкую структуру.

Отображение перехода и его гладкость

Определение.

Пусть $M \in \mathbb{M}_{kn}^{(r)}, U, V$ — стандартные окрестности с параметризациями $\varphi : \Pi \to U$ и $\psi : \Pi' \to V$. Если $W = U \cap V \neq \varnothing$, то отображение $L = \psi^{-1} \circ \varphi : W_1 \to W_2$ (где $W_i = \varphi^{-1}(W)$) называется переходом между параметризациями и является биекцией.

Теорема (Регулярность и гладость перехода).

Отображение L принадлежит классу $C^{(r)}$ и является регулярным (его матрица Якоби невырождена).

Смысл.

При смене локальных координат (например, с декартовых на полярные) переход между ними должен быть гладким и обратимым. Это гарантирует, что вычисления (например, интегралы) не зависят от выбора карт в атласе многообразия. Теорема показывает, что гладкость многообразия сохраняется при пересчёте координат.

40. Мера малого измеримого подмножества многообразия; независимость меры малого измеримогомножества от выбора параметризации; измеримое подмножество многообразия.

Мера малого измеримого подмножества

Пусть $M \in \mathbb{M}_{kn}^{(1)}$, $E \subset M$ — малое измеримое множество, содержащееся в стандартной окрестности U с параметризацией $\varphi : \mathbb{R}^k \to U$. Мера $\mu_M E$ определяется как:

$$\mu_M E = \int_{\varphi^{-1}(E)} \sqrt{D_\varphi} d\mu_k,$$

где $D_\varphi = \det \left(\left(\frac{\partial \varphi}{\partial u_i} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial u_j} \right)_{i,j=1}^k \right)$, а μ_k — мера Лебега в $\mathbb{R}^k$.

Смысл:

Эта формула обобщает понятие площади/объёма для подмножества многообразия. Интеграл от $\sqrt{D_\varphi}$ (аналога якобиана) по прообразу E в $\mathbb{R}^k$ корректно определяет меру благодаря свойствам параметризации.

Независимость меры от параметризации

Пусть $E \subset M$ — малое измеримое множество, содержащееся в двух стандартных окрестностях U и V с параметризациями φ и ψ. Тогда меры, вычисленные через φ и ψ, совпадают:

$$\int_{\varphi^{-1}(E)} \sqrt{D_\varphi} d\mu_k = \int_{\psi^{-1}(E)} \sqrt{D_\psi} d\mu_k.$$

Смысл:

При замене параметризации $\varphi = \psi \circ L$ (где $L = \psi^{-1} \circ \varphi$ — диффеоморфизм) замена переменных в интеграле и связь $\sqrt{D_\varphi} = \sqrt{D_\psi \circ L} \cdot |\det L'|$ гарантируют инвариантность меры. Это делает определение корректным.

Измеримое подмножество многообразия

Пусть $M \in \mathbb{M}_{kn}^{(1)}$, $E \subset M$.

1. E называется *малым измеримым*, если $\exists$ стандартная окрестность $U \supset E$ с параметризацией φ, такая что $\varphi^{-1}(E)$ измеримо в $\mathbb{R}^k$.
2. E называется *измеримым*, если оно представимо в виде $E = \bigcup_\nu E_\nu$, где $\{E_\nu\}$ — не более чем счётное семейство дизъюнктных малых измеримых множеств.

Смысл:

Любое "достаточно маленькое" множество на многообразии измеримо, если его прообраз в $\mathbb{R}^k$ измерим. Для произвольных множеств измеримость определяется через разбиение на счётное число "малых" частей, что согласуется со стандартным покрытием многообразия картами.

41. Мера на многообразии. Интеграл первого рода на многообразии. Частные случаи интеграла I рода на многообразии: криволинейный и поверхностный, вычислительные формулы для них

Мера на многообразии μ_M

Пусть $M \in M_{kn}^{(1)}$, $E \in A_M$.

1. Если E малое, U — стандартная окрестность, $E \subset U$, φ — параметризация U, то
   $\mu_M E = \int_{\varphi^{-1}(E)} \sqrt{D_\varphi} d\mu_k$.
2. Если $E = \bigcup_\nu E_\nu$ (дизъюнктные малые измеримые множества), то
   $\mu_M E = \sum_\nu \mu_M E_\nu$.

Функция μ_M называется *мерой на многообразии* M.

Смысл:

Эта мера обобщает понятие длины (для кривых) или площади (для поверхностей) на произвольные гладкие многообразия. Она определяется через локальные параметризации, где $\sqrt{D_\varphi}$ корректирует искажение объёма/площади при отображении из параметрической области. Аддитивность позволяет измерять большие множества.

Криволинейный интеграл первого рода

Пусть Γ — гладкая кривая ($k = 1$), заданная параметризацией $x = \gamma(t)$, $t \in \langle a, b \rangle$. Тогда:

- Мера (длина) кривой:
  $\mu\Gamma = \int_a^b |\gamma'(t)| dt$.
- Криволинейный интеграл первого рода:
  $\int_\Gamma f d\mu_\Gamma = \int_a^b (f \circ \gamma)(t) \cdot |\gamma'(t)| dt$.
  Классическое обозначение: $\int_\Gamma f ds$, где ds — элемент длины дуги.

Смысл:

Это интеграл скалярной функции f вдоль кривой Γ. Множитель $|\gamma'|$ (скорость движения по кривой) обеспечивает инвариантность относительно параметризации: результат зависит только от геометрии кривой и значений f. Физически может выражать массу неоднородной нити с плотностью f.

Поверхностный интеграл первого рода

Пусть S — гладкая поверхность ($k = n - 1$), заданная параметризацией $\varphi : G \subset \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}^n$. По формуле Вине–Коши:
$\sqrt{D_\varphi} = \sqrt{\sum_{j=1}^n (\det \varphi_j')^2} = |\mathcal{N}_\varphi|$,
где $\mathcal{N}_\varphi$ — вектор нормали к поверхности. Тогда:

- Мера (площадь) поверхности:
  $\mu S = \int_G |\mathcal{N}_\varphi| d\mu_{n-1}$.
- Поверхностный интеграл первого рода:
  $\int_S f d\mu_S = \int_G (f \circ \varphi) \cdot |\mathcal{N}_\varphi| d\mu_{n-1}$.

Смысл:

Это интеграл скалярной функции f по поверхности S. Величина $|\mathcal{N}_\varphi|$ задаёт элемент площади поверхности в параметрической области G, обеспечивая инвариантность относительно выбора параметризации. Применяется для вычисления массы поверхности с плотностью f или потока без учёта направления.

42. Ориентация многообразий. Понятия: одинаково ориентирующие параметризации, ориентация окрестностей, согласованные ориентации окрестностей, ориентированное многообразие, ориентируемое многообразие. Возможное количество ориентаций связного многообразия

Одинаково ориентирующие параметризации

Две параметризации φ и ψ стандартной окрестности U многообразия M называются согласованными (или одинаково ориентирующими), если для перехода $L : \Pi \to \Pi$ между ними якобиан $\det L' > 0$ на всей области Π. Если $\det L' < 0$, параметризации называются противоположно ориентирующими.

Смысл:

Знак якобиана перехода между параметризациями определяет, сохраняют ли они "направление" на многообразии. Положительный якобиан означает, что параметризации согласованы и задают одинаковую локальную ориентацию. Это важно для корректного определения глобальной ориентации.

Ориентация окрестностей

Ориентация окрестности U — это выбор класса эквивалентности параметризаций, для которых переходы имеют положительный якобиан. Параметризации этого класса называются положительно ориентирующими, а остальные — отрицательно ориентирующими.

Смысл:

Ориентация окрестности позволяет локально определить "направление" на многообразии. Например, на плоскости можно выбрать ориентацию "против часовой стрелки". Это необходимо для согласованного определения интегралов и дифференциальных форм.

Согласованные ориентации окрестностей

Две ориентированные окрестности U и V называются согласованными, если либо их пересечение пусто, либо для любых положительно ориентирующих параметризаций φ (для U) и ψ (для V) переход L между ними имеет $\det L' > 0$ в области пересечения.

Смысл:

Согласованность гарантирует, что ориентации разных окрестностей не противоречат друг другу. Это позволяет "склеить" локальные ориентации в единую глобальную структуру, что важно для работы с целым многообразием.

Ориентированное многообразие

Многообразие M называется ориентированным, если существует набор попарно согласованных ориентаций всех его стандартных окрестностей. Такой набор называется ориентацией многообразия.

Смысл:

Ориентированное многообразие имеет единое глобальное "направление". Примеры: сфера, тор. Неориентируемые многообразия (например, лист Мёбиуса) не допускают такой структуры. Ориентация критична для многих теорем анализа и топологии.

Ориентируемое многообразие

Многообразие M называется ориентируемым, если существует хотя бы одна его ориентация (т.е. если его можно превратить в ориентированное многообразие выбором подходящих локальных ориентаций).

Смысл:

Ориентируемость — это свойство многообразия "допускать" согласованную ориентацию. Например, все поверхности без "перекрутов" (как сфера) ориентируемы, а лист Мёбиуса — нет. Это фундаментальное топологическое свойство.

Количество ориентаций связного многообразия

Если многообразие M связно и ориентируемо, то оно имеет ровно две ориентации: исходную и противоположную (где во всех окрестностях выбран "обратный" класс параметризаций).

Смысл:

Связность означает, что многообразие "цельное", и выбор ориентации в одной точке однозначно распространяется на всё многообразие. Противоположная ориентация соответствует "зеркальному отражению". Например, у окружности есть только две ориентации: по и против часовой стрелки.

43. Понятие направления, лемма о существовании направлений

Кривая как одномерное многообразие

При $k = 1$ гладкое многообразие M в $\mathbb{R}^n$ называется кривой. Это означает, что локально кривая устроена как интервал числовой прямой.

Смысл:

Кривая - это одномерный геометрический объект, который в каждой своей точке выглядит как прямая линия (аналог того, как поверхность выглядит как плоскость). Примеры: прямая, окружность, спираль в пространстве.

Параметрическое задание кривой

Кривая Γ задаётся параметризацией $\gamma \in C^{(1)}((a, b) \to \mathbb{R}^n)$, где:

1. γ - инъективна (кроме, возможно, концов для замкнутых кривых)
2. γ регулярна ($\gamma'(t) \neq 0$ для всех t)
3. $\Gamma = \gamma((a, b))$

Смысл:

Кривую можно представить как траекторию движущейся точки, где параметр t - это время, а $\gamma(t)$- положение точки в момент t. Условия гарантируют, что кривая не имеет "острых углов" и самопересечений.

Определение направления на кривой

Пусть Γ — гладкая кривая в $\mathbb{R}^n$. Отображение $\tau \in C(\Gamma \to \mathbb{R}^n)$ называется *направлением* на Γ, если:

$$\forall x \in \Gamma \quad \tau(x) \in T_x\Gamma \quad \text{и} \quad |\tau(x)| = 1,$$

где $T_x\Gamma$ — касательное пространство к Γ в точке x.

Смысл:

Направление — это непрерывное поле единичных векторов, касательных к кривой в каждой её точке. Оно задает ориентацию кривой, указывая "положительное" направление движения вдоль неё (аналогично стрелке на проводе).

Лемма о существовании двух направлений

На связной гладкой кривой Γ, заданной параметризацией γ (соотношения (12.6)), существуют ровно два направления:

$$\tau_\pm = \pm \frac{\gamma'}{|\gamma'|} \circ \gamma^{-1}.$$

(Для замкнутого пути γ под $\gamma^{-1}(\gamma(a))$ можно понимать как a, так и b).

Смысл:

На связной кривой возможны только две противоположные ориентации. Они задаются единичными векторами, параллельными производной параметризации γ' (скорости), но направленными в противоположные стороны. Связность гарантирует, что нельзя "переключить" направление в какой-то точке непрерывно.

44. Сторона поверхности, лемма о существовании стороны

Определение двусторонней поверхности и Стороны

Связная поверхность S в $\mathbb{R}^n$ называется *двусторонней*, если существует непрерывное отображение $\mathcal{N} \in C(S \to \mathbb{R}^n)$ (называемое *стороной* поверхности S), такое что для всех $x \in S$:

$$\mathcal{N}(x) \perp T_xS \quad \text{и} \quad |\mathcal{N}(x)| = 1.$$

Смысл:

Поверхность двусторонняя, если можно непрерывно выбрать единичную нормаль в каждой её точке. Это означает, что поверхность имеет "две стороны", как лист бумаги.

Лемма о связи двусторонности и ориентируемости

Для того чтобы связная поверхность S была двусторонней, необходимо и достаточно, чтобы она была ориентируемой. При этом S имеет ровно две стороны.

Смысл:

Двусторонность поверхности эквивалентна её ориентируемости. Если поверхность можно ориентировать (согласованно выбрать "положительное" направление в касательных пространствах), то на ней можно задать непрерывное поле нормалей, и наоборот. Такая поверхность допускает ровно два противоположных выбора стороны (нормали).

Построение стороны через параметризацию

Если $\varphi : G \to U \subset S$ — параметризация стандартной окрестности U, то сторона U задаётся формулой:

$$\mathcal{N}_{\pm}(x) = \pm \frac{\mathcal{N}_\varphi}{|\mathcal{N}_\varphi|} \circ \varphi^{-1}(x),$$

где $\mathcal{N}_\varphi$ — векторное произведение частных производных:

$$\mathcal{N}_\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial u^1} \times \frac{\partial \varphi}{\partial u^2} \times \cdots \times \frac{\partial \varphi}{\partial u^{n-1}}.$$

Смысл:

В локальной карте, заданной параметризацией φ, нормаль строится как нормированное векторное произведение векторов, касательных к координатным линиям. Знак $\pm$ соответствует двум возможным согласованным ориентациям окрестности. При изменении параметризации на положительную (с положительным якобианом перехода) эта нормаль сохраняется.

45. Теорема о крае многообразия и его ориентации. Понятие ориентации края, согласованной с ориентацией многообразия. Пример согласованных ориентаций на поверхности и ограничивающей кривой.

Теорема о крае многообразия

Если M — k-мерное многообразие класса $C^{(r)}$, то его край ∂M является $(k-1)$-мерным многообразием класса $C^{(r)}$ без края.

Если M ориентируемо, то ∂M также ориентируемо.

Смысл:

Край многообразия наследует его гладкость и теряет одну размерность. Ориентация многообразия автоматически задаёт согласованную ориентацию края. Это важно для интегральных теорем (например, Стокса), где ориентация края влияет на знак результата.

Понятие ориентации края, согласованной с ориентацией многообразия

Ориентация края ∂M, заданная формулой $\tilde{\varphi}_x(\tilde{u}) = \varphi_x(0, \tilde{u})$ (где φ_x — параметризация M и $\tilde{u} \in \Pi_{k-1}$), называется индуцированной или согласованной с ориентацией M.

Смысл:

При переходе от многообразия к краю "отбрасывается" первая координата параметризации. Для согласованности нужно, чтобы матрица Якоби перехода между параметризациями сохраняла положительный определитель. Это гарантирует, что ориентация края согласована с "направлением наружу" от многообразия.

Пример согласованных ориентаций

Пусть $G \subset \mathbb{R}^2$ — область с гладкой границей S. Если G ориентирована естественным образом (якобиан > 0), то согласованная ориентация S задаётся касательным вектором τ, при котором G остаётся слева при обходе границы. Нормаль $\mathcal{N}$ направлена наружу.

Смысл:

Для поверхности в $\mathbb{R}^3$ внешняя нормаль $\mathcal{N}$ определяет ориентацию края через векторное произведение. В 2D это соответствует правилу "обход против часовой стрелки". Пример иллюстрирует, как ориентация края связана с направлением нормали и выбором параметризации.

Доп

$\Pi_{k-1} = (-1, 1)^{k-1}$ - это открытый $(k-1)$-мерный куб в пространстве параметров $\tilde{u} = (u_2, \ldots, u_k)$, используемый для параметризации края ∂M.

46. Полилинейные формы, кососимметрические формы - определения и элементарные свойства, внешнее произведение форм

Полилинейные формы

Определение полилинейной формы

Пусть X, Y — векторные пространства над полем K, $p \in \mathbb{N}$. Отображение $F : X^p \to Y$ называется p-линейным, если оно линейно по каждому аргументу. Если $Y = K$, то F называется p-формой на X. Множество всех p-форм обозначается $\mathcal{F}_p(X)$. При $p = 0$ под 0-формами понимаются элементы Y.

Разложение по базису

Если $\dim X = n < +\infty$ и $e^1, \dots, e^n$ — базис X, то для $F \in \mathcal{F}_p(X)$:

$$F = \sum_{i_1,\dots,i_p=1}^{n} a_{i_1,\dots,i_p} \pi_{i_1} \otimes \dots \otimes \pi_{i_p},$$

где π_i — проектор на i-ю координату, а коэффициенты $a_{i_1,\dots,i_p} = F(e^{i_1}, \dots, e^{i_p})$.

Смысл

Полилинейные формы обобщают линейные отображения на случай нескольких аргументов. Они позволяют выражать многомерные линейные зависимости, например, объёмы или детерминанты. Коэффициенты $a_{i_1,\dots,i_p}$ зависят от выбора базиса и полностью определяют форму.

Кососимметрические формы

Определение кососимметричности

Форма $F \in \mathcal{F}_p(X)$ называется кососимметрической, если для любых двух аргументов:

$$F(x^1, \dots, x^i, \dots, x^j, \dots, x^p) = -F(x^1, \dots, x^j, \dots, x^i, \dots, x^p).$$

Множество таких форм обозначается $\mathcal{E}_p(X)$. При $p > n$ все формы нулевые.

Базис в $\mathcal{E}_p(X)$

Для $p \leq n$ форма F раскладывается как:

$$F = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq n} a_{i_1,\dots,i_p} \pi_{i_1} \wedge \dots \wedge \pi_{i_p},$$

где $\wedge$ — внешнее произведение, а $\pi_{i_1} \wedge \dots \wedge \pi_{i_p}$ вычисляется через определитель матрицы из координат векторов.

Смысл

Кососимметрические формы "чувствуют" ориентацию и линейную зависимость векторов. Например, если два вектора совпадают, форма обращается в ноль. Они тесно связаны с определителями и используются в интегрировании (дифференциальные формы).

Внешнее произведение форм

Определение внешнего произведения

Для $F \in \mathcal{E}_p(X)$ и $G \in \mathcal{E}_q(X)$ их внешнее произведение $F \wedge G \in \mathcal{E}_{p+q}(X)$ определяется на базисных формах как:

$$(\pi_{i_1} \wedge \ldots \wedge \pi_{i_p}) \wedge (\pi_{j_1} \wedge \ldots \wedge \pi_{j_q}) = \pi_{i_1} \wedge \ldots \wedge \pi_{i_p} \wedge \pi_{j_1} \wedge \ldots \wedge \pi_{j_q},$$

а затем продолжается по линейности.

Формула для коэффициентов

Если F и G заданы в виде (12.19), то:

$$F \wedge G = \sum_{1 \le i(j)_1 < \ldots < i(j)_p \le n} a_{i_1, \ldots, i_p} b_{j_1, \ldots, j_q} \pi_{i_1} \wedge \ldots \wedge \pi_{i_p} \wedge \pi_{j_1} \wedge \ldots \wedge \pi_{j_q}.$$

Смысл

Внешнее произведение комбинирует формы, увеличивая их степень. Оно аналогично векторному произведению, но для многомерных объектов. Например, в геометрии с его помощью строят формы для вычисления гиперобъёмов.

47. Дифференциальные формы; координатное представление дифференциальных форм. Внешнее дифференцирование дифференциальных форм

Определение дифференциальной формы

Пусть $G \subset \mathbb{R}^n$, $p \in \mathbb{N}$. Дифференциальной формой степени p (p-формой) на G называется функция $\omega : G \times (\mathbb{R}^n)^p \to \mathbb{R}$, такая что для всех $x \in G$ функция $\omega(x; \cdot)$ принадлежит пространству $\mathcal{E}_p(\mathbb{R}^n)$ (является кососимметрической p-линейной формой). 0-формой называется функция $f : G \to \mathbb{R}$.

Смысл:

Дифференциальная форма — это математический объект, который в каждой точке области G задает кососимметрическую многомерную "линейную меру". 0-формы — это просто обычные скалярные функции. Формы обобщают понятия функций, векторных полей и их обобщений на многомерные поверхности.

Координатное представление дифференциальных форм

Пусть $p \in \mathbb{N}$. Дифференциальная p-форма ω в открытом множестве $G \subset \mathbb{R}^n$ может быть записана в виде:

$$\omega = \sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_p \le n} a_{i_1 \ldots i_p}(x) dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_p},$$

где $a_{i_1 \ldots i_p} : G \to \mathbb{R}$ — коэффициенты формы, а $dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_p}$ — базисные внешние произведения дифференциалов координат. Для $p = n$ форма имеет вид $\omega = a(x) dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n$.

Смысл:

Это представление показывает, как форма раскладывается по базисным антисимметричным "объемам", образованным внешними произведениями дифференциалов координат. Суммирование идет только по возрастающим мультииндексам $i_1 < \cdots < i_p$ из-за кососимметричности. Запись dx_i оправдана поведением при операциях (как дифференциалы).

Внешнее дифференцирование дифференциальных форм

Пусть G открыто в $\mathbb{R}^n$, $p \in \mathbb{Z}_+$, $r \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Внешнее дифференцирование — это оператор $d : \Omega_p^{(r)}(G) \to \Omega_{p+1}^{(r-1)}(G)$, определяемый так:

1. Для 0-формы $\omega = f \in C^{(r)}(G)$:

$$df = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i.$$

2. Для p-формы $\omega = \sum_I a_I(x) dx_I$ (где $I = (i_1 < \cdots < i_p)$):

$$d\omega = \sum_I da_I \wedge dx_I = \sum_I \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial a_I}{\partial x_j} dx_j \right) \wedge dx_I.$$

Свойства:

1. d линейно.
2. $d(\omega \wedge \lambda) = d\omega \wedge \lambda + (-1)^{\deg \omega} \omega \wedge d\lambda$ для форм ω, λ.
3. $d^2 \omega = d(d\omega) = 0$.

Смысл:

Внешнее дифференцирование обобщает понятие градиента, ротора и дивергенции на формы произвольной степени. Оно увеличивает степень формы на 1 и измеряет её "локальное изменение". Свойство $d^2 = 0$ (локальная точность) является фундаментальным и лежит в основе теории де Рама и интегральных теорем (Стокса).

48. Перенос дифференциальных форм. Теорема о свойствах переноса форм

Определение переноса дифференциальных форм

Пусть G — открытое множество в $\mathbb{R}^n$, U — открытое множество в $\mathbb{R}^m$, $p \in \mathbb{Z}_+$, $\omega \in \Omega_p(G)$, $T \in C^{(1)}(U \to G)$. Перенесённая форма $T^*\omega$ определяется равенством:

$$(T^*\omega)(u; du^1, \dots, du^p) = \omega(T(u); T'(u)du^1, \dots, T'(u)du^p),$$

где $u \in U$, $du^1, \dots, du^p \in \mathbb{R}^m$. Отображение T^* называется переносом форм или заменой переменных.

Смысл:

Перенос форм позволяет "перетянуть" дифференциальную форму из пространства G в пространство U с помощью отображения T. Это аналогично замене переменных в интеграле, где форма адаптируется к новым координатам через производную T'. Например, при переходе от декартовых к полярным координатам.

Свойства переноса форм

1. Линейность: $T^*(\alpha\omega + \beta\lambda) = \alpha T^*\omega + \beta T^*\lambda$.
2. Умножение на функцию: $T^*(f\omega) = (f \circ T)T^*\omega$ для $f \in C^{(r)}(G)$.
3. Внешнее произведение: $T^*(\omega \wedge \lambda) = T^*\omega \wedge T^*\lambda$ для $\lambda \in \Omega_q^{(r)}$.
4. Дифференциал: $T^*d\omega = dT^*\omega$ при $r \geq 1$.
5. Явная формула: Для $\omega = \sum a_{i_1,\dots,i_p} dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_p}$,

$$T^*\omega = \sum (a_{i_1,\dots,i_p} \circ T) \cdot \det\left(\frac{\partial T_{i_k}}{\partial u_{j_l}}\right) du_{j_1} \wedge \dots \wedge du_{j_p}.$$

6. Композиция: $(T \circ S)^\omega = S^(T^*\omega)$, если V открыто в $\mathbb{R}^i$, $S \in C^{(1)}(V \to U)$.

Смысл:

Эти свойства показывают, что перенос форм согласован с базовыми операциями (линейностью, произведением, дифференцированием). Например, пункт 4 означает, что дифференцирование и перенос коммутируют, а пункт 5 обобщает правило замены переменных в интеграле через якобиан. Это удобно для вычислений в новых координатах.

49 Поверхностный интеграл второго рода. Выражением поверхностного интеграла второго рода через поверхностный интеграл первого рода. Выражения для интеграла 2го рода в случае размерностей многообразия 1 и 2. Примеры. Лемма Пуанкаре в общем случае (без док-ва)

Определение интеграла второго рода

Пусть G открыто в $\mathbb{R}^n$, $M \subset G$ — ориентированное k-мерное многообразие класса $\mathbb{M}_{k,n}^{(1)}$, $\omega \in \Omega_k(G)$ — дифференциальная форма степени k, $E \in \mathbb{A}_M$ — малое измеримое множество. Тогда интеграл второго рода определяется как:

$$\int_E \omega = \int_{\varphi^{-1}(E)} \widehat{\varphi^* \omega} \, d\mu_k,$$

где φ — положительно ориентирующая параметризация стандартной окрестности U, содержащей E, а $\varphi^* \omega$ — pullback формы ω.

Смысл:

Интеграл второго рода обобщает понятие криволинейного и поверхностного интеграла для дифференциальных форм. Он позволяет вычислять "поток" формы через многообразие, используя локальные параметризации. Для малых множеств интеграл сводится к обычному крайнему интегралу от pullback формы.

Связь с интегралом первого рода

Для малого множества E и формы $\omega = \sum a_{i_1 \dots i_k} dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$ интеграл второго рода выражается через интеграл первого рода:

$$\int_E \omega = \int_E \left\langle a, \frac{\det \varphi'}{\sqrt{\mathcal{D}_\varphi}} \circ \varphi^{-1} \right\rangle d\mu_M,$$

где $\mathcal{D}_\varphi = \sum (\det \varphi'_{j_1 \dots j_k})^2$ — грамиан параметризации.

Смысл:

Эта формула позволяет перейти от абстрактного интеграла от формы к интегралу от функции по мере на многообразии. Множитель $\frac{\det \varphi'}{\sqrt{\mathcal{D}_\varphi}}$ учитывает искажение объема и ориентацию при параметризации. Это ключ к практическим вычислениям, например, в задачах физики.

Примеры для размерностей 1 и 2:

- Для $k = 1$ (кривая): $\int_E \omega = \int_E \langle a, \tau \rangle d\mu_1$, где τ — единичный касательный вектор.
- Для $k = 2, n = 3$ (поверхность):

$$\int_S \omega = \int_S \langle F, N \rangle d\mu_S, \quad F = (P, Q, R),\ N \text{ — единичная нормаль.}$$

Теорема Пуанкаре (без доказательства):

Если G — звездная область в $\mathbb{R}^n$ и ω — замкнутая форма ($d\omega = 0$), то ω точна ($\exists \eta : \omega = d\eta$). Для форм класса C^r первообразная также C^r.

Смысл:

В размерности 2 интеграл сводится к потоку векторного поля через поверхность. Лемма Пуанкаре гарантирует существование потенциала для замкнутых форм в "хороших" областях, что важно для теории поля (например, в электродинамике).

50. Общая формула Стокса. Частные случаи и следствия общей формулы Стокса: формула Ньютона-Лейбница для криволинейных интегралов, формула Грина, классическая формула Стокса, формула Гаусса–Остроградского

Общая формула Стокса для многообразий

Пусть $M \in \mathbb{M}_{kn}^{(2)}$ — компактное u ориентированное многообразие, G — открытое множество в $\mathbb{R}^n$, $M \subset G, \omega \in \Omega_{k-1}^{(1)}(G)$. Тогда:

$$\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega.$$

Смысл:

Эта теорема обобщает идею связи интеграла по области с интегралом по её границе. Она показывает, что дифференцирование формы ω внутри M соответствует интегрированию самой формы по границе ∂M. Формула универсальна и применяется в многомерном анализе, например, для расчётов потоков и циркуляции полей.

Формула Грина

Пусть D — ограниченная область в $\mathbb{R}^2$ с гладкой границей ∂D, G открыто в $\mathbb{R}^2$, $\overline{D} \subset G$, $P, Q \in C^{(1)}(G)$. Тогда:

$$\iint_D (Q'_x - P'_y)\, dx\, dy = \int_{\partial D} P\, dx + Q\, dy.$$

Смысл:

Это двумерный случай формулы Стокса, связывающий двойной интеграл по области с криволинейным интегралом по её границе. Используется, например, для вычисления работы векторного поля вдоль контура или площади фигуры через граничный интеграл.

Классическая формула Стокса

Пусть S — компактная ориентированная поверхность класса $C^{(2)}$ в $\mathbb{R}^3$ с краем ∂S, G открыто в $\mathbb{R}^3$, $S \subset G$, $P, Q, R \in C^{(1)}(G)$. Тогда:

$$\iint_S (R'_y - Q'_z) dy \wedge dz + (P'_z - R'_x) dz \wedge dx + (Q'_x - P'_y) dx \wedge dy = \int_{\partial S} P\, dx + Q\, dy + R\, dz.$$

Смысл:

Это трёхмерный аналог формулы Грина. Она связывает поток ротора векторного поля через поверхность с циркуляцией поля по её границе. Применяется в физике для расчётов электромагнитных полей и гидродинамики.

Формула Гаусса–Остроградского

Пусть V — ограниченная область в $\mathbb{R}^3$ с гладкой границей ∂V, G открыто в $\mathbb{R}^3$, $V \subset G$, $P, Q, R \in C^{(1)}(G)$. Тогда:

$$\iiint_V (P'_x + Q'_y + R'_z)\, dx\, dy\, dz = \iint_{\partial V} P\, dy \wedge dz + Q\, dz \wedge dx + R\, dx \wedge dy.$$

Смысл:

Эта формула связывает тройной интеграл дивергенции поля по объёму с потоком поля через границу этого объёма. Она широко используется в теории поля для расчётов, например, потока тепла или заряда через замкнутую поверхность.

51: Неравенства Минковского и Гёльдера, существенный супремум, пространства $L_p(X, \mu)$

Теорема (Неравенство Гёльдера):

Пусть $(X, \mathbb{A}, \mu)$ — пространство с мерой, $E \in \mathbb{A}$, функции f и g измеримы на E, существует $\int_E fg\, d\mu$, $1 < p < +\infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Тогда:

$$\left|\int_E fg\, d\mu\right| \leq \left(\int_E |f|^p\, d\mu\right)^{1/p} \left(\int_E |g|^q\, d\mu\right)^{1/q}.$$

Смысл:

Неравенство Гёльдера обобщает идею "взвешенного среднего" для интегралов. Оно связывает интеграл произведения двух функций с произведениями их норм в L_p и L_q. Это ключевой инструмент для доказательства сходимости и ограниченности в функциональных пространствах, например, при изучении рядов Фурье или операторов.

Неравенство Минковского для интегралов

Теорема (Неравенство Минковского):
Пусть $(X, \mathbb{A}, \mu)$ — пространство с мерой, $E \in \mathbb{A}$, функции f и g измеримы, конечны почти везде на E, $1 \leq p < +\infty$. Тогда:

$$\left(\int_E |f+g|^p\, d\mu\right)^{1/p} \leq \left(\int_E |f|^p\, d\mu\right)^{1/p} + \left(\int_E |g|^p\, d\mu\right)^{1/p}.$$

Смысл:

Это аналог неравенства треугольника для норм в L_p. Оно показывает, что норма суммы не превосходит суммы норм, что важно для доказательства линейности и метрических свойств пространств L_p. Доказательство часто опирается на неравенство Гёльдера.

Существенный супремум функции

Для измеримой функции $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ почти везде на пространстве с мерой $(X, \mathbb{A}, \mu)$ существенный супремум:

$$\operatorname{ess\,sup}_{x \in E} f(x) = \inf\{A \in \mathbb{R} : f(x) \leq A \text{ почти везде на } E\}.$$

(Если таких A нет, полагаем $+\infty$.)

Смысл:

Существенный супремум игнорирует "выбросы" функции на множествах нулевой меры. Например, для функции, равной 1 на рациональных числах и 0 на иррациональных, $\operatorname{ess\,sup} = 0$, так как рациональные числа имеют меру Лебега ноль. Это понятие критично для определения нормы в L_∞.

Пространства $L_p(X, \mu)$

Для $1 \le p < +\infty$:

$$L_p(E, \mu) = \left\{ f : \text{н.в. } E \to \mathbb{R} \text{ измеримы}, \int_E |f|^p \, d\mu < +\infty \right\}.$$

Для $p = +\infty$:

$$L_\infty(E, \mu) = \left\{ f : \text{н.в. } E \to \mathbb{R} \text{ измеримы}, \operatorname{ess\,sup} |f| < +\infty \right\}.$$

Норма: $\|f\|_p = \left(\int_E |f|^p \, d\mu \right)^{1/p}$ (для L_∞ — $\operatorname{ess\,sup} |f|$).

Смысл:

Пространства L_p — это множества функций с конечной "энергией" (интегралом от p-й степени). Они являются полными нормированными пространствами (банаховыми), что позволяет применять методы функционального анализа. Примеры: L_2 для рядов Фурье, L_∞ для ограниченных функций.

52: Вложения пространств Лебега $L_p(X, \mu)$ и пространств ℓ_p. Несравнимость пространств L_p

Вложение $L_q \subset L_p$ при конечной мере

Если мера пространства $\mu E < +\infty$ и индексы удовлетворяют условию $1 \le p < q \le +\infty$, то $L_q(E, \mu) \subset L_p(E, \mu)$. Более того, для любой функции $f \in L_q(E, \mu)$ выполняется неравенство:

$$\|f\|_{L_p(E,\mu)} \le (\mu E)^{1/p - 1/q} \|f\|_{L_q(E,\mu)}.$$

Смысл:

При конечной мере "более требовательные" пространства L_q (с большим q) вкладываются в "менее требовательные" L_p (с меньшим p). Множитель $(\mu E)^{1/p-1/q}$ компенсирует разницу в условиях интегрируемости. Это позволяет оценить норму функции в "слабом" пространстве через её норму в "сильном".

Несравнимость L_p при бесконечной мере

Если $\mu E = +\infty$, то пространства $L_p(E, \mu)$ могут не быть вложены друг в друга. Контрпример: $E = (0, +\infty)$ с мерой Лебега,

- $f_1(x) = \frac{1}{x+1}$: $f_1 \in L_2(E)$ но $f_1 \notin L_1(E)$.
- $f_2(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}\chi_{(0,1)}(x)$: $f_2 \in L_1(E)$ но $f_2 \notin L_2(E)$.

Смысл:

При бесконечной мере не существует общего вложения $L_q \subset L_p$ или $L_p \subset L_q$ для $p \neq q$. Функция f_1 "спадает" недостаточно быстро, чтобы быть интегрируемой в L_1, но её квадрат уже интегрируем. Функция f_2 "взрывается" в нуле, что мешает интегрируемости её квадрата на конечном интервале, но сама она интегрируема.

Пространства ℓ_p и вложение периодических L_p

Пространство ℓ_p состоит из последовательностей $x = (x_k)_{k=1}^{\infty}$ с конечной нормой:

$$\|x\|_p = \begin{cases} \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p\right)^{1/p}, & 1 \leq p < +\infty, \\ \sup_{k \in \mathbb{N}} |x_k|, & p = +\infty. \end{cases}$$

Для 2π-периодических функций на $\mathbb{R}$ с мерой Лебега на $[-\pi, \pi]$ верно вложение пространств:

$$C \subset L_\infty \subset \ldots \subset L_2 \subset \ldots \subset L_1,$$

где C — пространство непрерывных 2π-периодических функций с нормой $\|f\|_\infty = \max_{x \in [-\pi,\pi]} |f(x)|$, совпадающей с L_∞-нормой для непрерывных функций.

Смысл:

Пространства ℓ_p — это дискретный аналог L_p для последовательностей. Для *периодических* функций, рассматриваемых на *конечном* интервале периода ($\mu[-\pi, \pi] = 2\pi < \infty$), работает теорема о вложении: чем строже условия (больше p), тем "меньше" пространство. Непрерывные функции (C) образуют самое узкое из этих пространств, вложенное в L_∞.

53. Полнота пространства $C(K)$

Определение полного нормированного пространства

Нормированное пространство X называется полным (банаховым), если любая фундаментальная последовательность в X сходится к некоторому элементу из X. Последовательность $(x_n) \subset X$ фундаментальна, если $\forall \epsilon > 0\ \exists N\colon \forall n, m \geq N$ выполняется $\|x_n - x_m\|_X < \epsilon$.

Смысл:

Полнота означает, что в пространстве "хватает" пределов для всех сходящихся последовательностей. Это ключевое свойство банаховых пространств, гарантирующее корректность многих методов анализа (например, решения уравнений).

Пространство непрерывных функций $C(K)$

Пусть K — компактное топологическое пространство. Пространство $C(K)$ состоит из всех непрерывных функций $f : K \to \mathbb{C}$ (или $\mathbb{R}$), с нормой $\|f\|_{C(K)} = \sup_{x \in K} |f(x)|$. Обозначается $C_{\mathbb{C}}(K)$ или $C_{\mathbb{R}}(K)$ в зависимости от поля.

Смысл:

Это пространство функций, непрерывных на компакте K. Норма — это максимальное значение модуля функции на K. Компактность K обеспечивает существование супремума и его достижение.

Теорема о полноте $C(K)$

Пространство $C(K)$ полно.

54. Критерий полноты нормированного пространства

Определение полного нормированного пространства (банахово пространство)

Нормированное пространство $(X, \|\cdot\|)$ называется полным, если любая фундаментальная последовательность в X сходится к элементу этого пространства. Полное нормированное пространство также называют банаховым.

Смысл:

Полнота означает, что в пространстве "нет дыр" — любая последовательность, которая "хочет" сходиться (фундаментальная), действительно имеет предел внутри этого пространства. Это важно для анализа, так как гарантирует, что предельные переходы не выводят нас за рамки рассматриваемого пространства. Пример — пространство непрерывных функций $C[a, b]$ с нормой максимума полно, а пространство многочленов на отрезке — нет.

Критерий полноты через абсолютную сходимость ряда

Нормированное пространство X полно тогда и только тогда, когда любой абсолютно сходящийся ряд в X сходится, то есть:

$$x_k \in X, \sum_{n=1}^{\infty} \|x_k\| < +\infty \implies \sum_{n=1}^{\infty} x_k \text{ сходится в } X.$$

Смысл:

Этот критерий связывает полноту со сходимостью рядов. Если сумма норм членов ряда конечна (ряд "абсолютно сходится"), то сам ряд должен сходиться к элементу пространства. Это удобный инструмент для проверки полноты, так как позволяет работать с рядами вместо последовательностей. Например, в пространстве ℓ^1 (пространство абсолютно суммируемых последовательностей) этот критерий выполняется.

55 Полнота пространств $L^p(X, \mu)$ при $p \in [1, +\infty]$

Определение пространства $L^p(X, \mu)$

Пусть $(X, \mathcal{A}, \mu)$ — пространство с мерой, $p \in [1, +\infty]$. Пространство $L^p(X, \mu)$ - полное, состоит из измеримых функций $f : X \to \mathbb{R}$ (или $\mathbb{C}$), для которых конечна норма:

- при $p < +\infty$: $\|f\|_p = \left(\int_X |f|^p \, d\mu\right)^{1/p}$,
- при $p = +\infty$: $\|f\|_\infty = \operatorname{ess\,sup}_{x \in X} |f(x)|$.

Смысл:

Пространства L^p — это функциональные пространства, где "размер" функции измеряется интегралом её степени p. Они обобщают понятие $\mathbb{R}^n$ на бесконечномерный случай, позволяя работать с функциями, для которых интеграл $|f|^p$ конечен.

Критерий полноты пространства L^p

Пространство $L^p(X, \mu)$ полно при $p \in [1, +\infty]$, то есть любая фундаментальная последовательность $\{f_n\} \subset L^p$ сходится к некоторой функции $f \in L^p$ по норме $\|\cdot\|_p$.

Смысл:

Полнота означает, что если последовательность функций $\{f_n\}$ "сходится сама к себе" (фундаментальна), то её предел тоже лежит в L^p. Это аналог полноты $\mathbb{R}^n$, но для интегральных норм.

Без полноты многие методы анализа (например, предельные переходы) были бы неприменимы.

Теорема Рисса-Фишера

Любое нормированное пространство $L^p(X, \mu)$ при $p \in [1, +\infty]$ является банаховым (полным). В частности, если $\{f_n\}$ — фундаментальна в L^p, то существует $f \in L^p$, такая что $\|f_n - f\|_p \to 0$.

Смысл:

Эта теорема — основа для анализа в L^p. Она гарантирует, что пределы "хороших" последовательностей не выходят за рамки пространства. Например, в матфизике это позволяет корректно решать уравнения, используя приближения. Для $p = 2$ (гильбертов случай) это особенно важно в квантовой механике.

56. Плотность ступенчатых функций в L^p

Определение плотного множества в метрическом пространстве

Подмножество K_0 метрического пространства (X, d) называется **плотным** в X, если его замыкание совпадает с X:

$$\overline{K_0} = X.$$

Смысл:

Это означает, что любая точка пространства X либо принадлежит K_0, либо является предельной точкой для K_0. Эквивалентно: каждый открытый шар в X содержит хотя бы одну точку из K_0.

Определение ступенчатой функции

Функция $g : X \to \mathbb{R}$ называется ступенчатой (обозначается $g \in \mathrm{step}(X, \mu)$), если она представима в виде:

$$g = \sum_{k=1}^{n} c_k \cdot \chi_{E_k}, \quad \text{где} \quad \mu(E_k) < \infty, \quad c_k \in \mathbb{R}.$$

Смысл:

Ступенчатые функции — простейшие "строительные блоки" анализа: они принимают конечное число значений на множествах конечной меры. Используются для аппроксимации сложных функций.

Теорема о плотности в L^p для $1 \le p < \infty$

Пусть $(X, \mathcal{A}, \mu)$ — пространство с мерой, и $1 \le p < \infty$. Тогда для любой $f \in L^p(X, \mu)$ и $\varepsilon > 0$ существует ступенчатая функция $g \in \mathrm{step}(X, \mu)$ такая, что:

$$\|f - g\|_p < \varepsilon, \quad \text{где} \quad \|h\|_p = \left(\int_X |h|^p d\mu\right)^{1/p}.$$

Смысл:

Функции из L^p можно сколь угодно точно приблизить ступенчатыми функциями по норме $\|\cdot\|_p$. Основная идея: для $f \ge 0$ строится $g \ge 0$ с $\int |f|^p - |g|^p d\mu < \varepsilon^p$.

57. Плотность $C_0(\mathbb{R}^n)$ в $L^p(\mathbb{R}^n)$, плотность $C_{2\pi}$ в $L^p_{2\pi}$

Аппроксимация характеристических функций ограниченных множеств

Для ограниченного измеримого множества $E \subset \mathbb{R}^n$ с $\lambda_n(E) < \infty$ и $\chi_E \in L^p(\mathbb{R}^n)$ ($1 \le p < \infty$), существует функция $g \in C_0(\mathbb{R}^n)$ такая, что:

$$\|\chi_E - g\|_p \le 2\epsilon.$$

Конструкция:

$$g(x) = 1 - \frac{d(x, \mathbb{R}^n \setminus U)}{d(x, \mathbb{R}^n \setminus U) + d(x, E)},$$

где $U \supset E$ — открытое множество с $\lambda_n(U \setminus E) < \epsilon$.

Смысл:

Характеристическую функцию χ_E можно приблизить непрерывной функцией с компактным носителем, используя регуляризацию меры Лебега. Функция $g(x)$ "сглаживает" скачок на границе E, а оценка нормы следует из малой меры симметрической разности $U \setminus E$.

Аппроксимация простых функций

Любая простая функция $f = \sum_{k=1}^N c_k \chi_{E_k}$ с $\lambda_n(E_k) < \infty$ аппроксимируется функцией $g \in C_0(\mathbb{R}^n)$:

$$\|f - g\|_p < \epsilon, \quad \text{где} \quad g = \sum_{k=1}^{N} c_k g_k,$$

и для каждого k: $\|\chi_{E_k} - g_k\|_p < \frac{\epsilon}{N \cdot \max(|c_k|)}$.

Смысл:

Поскольку простые функции плотны в L^p, достаточно показать их аппроксимацию. Конечность меры $\lambda_n(E_k)$ позволяет применить пункт 1 к каждому χ_{E_k}. Сумма g остаётся в $C_0(\mathbb{R}^n)$, а оценка нормы следует из линейности интеграла.

Плотность $C_0(\mathbb{R}^n)$ в $L^p(\mathbb{R}^n)$ и $C_{2\pi}$ в $L^p_{2\pi}$

- Для $L^p(\mathbb{R}^n)$: $\forall f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ и $\epsilon > 0$ $\exists g \in C_0(\mathbb{R}^n) : \|f - g\|_p < \epsilon$.
- Для $L^p_{2\pi}$ (периодические функции): $\forall f \in L^p_{2\pi}$ $\exists g \in C_{2\pi} : \|f - g\|_{L^p_{2\pi}} < \epsilon$, где $C_{2\pi}$ — непрерывные 2π-периодические функции.

Смысл:

В непериодическом случае аппроксимация следует из плотности простых функций и пункта 2. Для периодических функций используется сужение f на $[-z, z]$ с последующим периодическим продолжением, где z выбирается так, чтобы норма "хвоста" f вне $[-z, z]$ была мала. Равномерная непрерывность на компакте обеспечивает близость к непрерывной периодической функции.

58 Теорема о непрерывности сдвига

Определение Оператора Сдвига

Пусть $h \in \mathbb{R}^m$. Оператор сдвига на вектор h определяется как отображение, действующее на функцию f по правилу:

$$(\tau_h f)(x) = f(x + h).$$

Смысл:

Этот оператор "передвигает" график функции f на вектор $-h$ в пространстве. Он позволяет изучать, как меняется значение функции при смещении её аргумента, что важно для анализа свойств функций, таких как непрерывность или периодичность.

Теорема о Непрерывности Сдвига в L^p

Пусть $1 \leq p < +\infty$ и $f \in L^p(\mathbb{R}^m)$. Тогда оператор сдвига непрерывен по норме пространства L^p, то есть:

$$\lim_{|h| \to 0} \|\tau_h f - f\|_p = \lim_{|h| \to 0} \left(\int_{\mathbb{R}^m} |f(x+h) - f(x)|^p dx \right)^{1/p} = 0.$$

Смысл:

Теорема утверждает, что малые сдвиги аргумента функции из L^p приводят к сколь угодно малым изменениям самой функции в среднем (в смысле нормы L^p). Это означает, что функции в L^p "непрерывны в среднем" и их поведение устойчиво к малым возмущениям аргумента.

59. Гильбертовы пространства. Непрерывность скалярного произведения. Скалярное умножение в $L^2(X, \mu)$. Примеры ортогональных систем в $L^2(X, \mu)$

Гильбертовы пространства

Полное линейное пространство H, снабженное скалярным произведением $\langle \cdot, \cdot \rangle$, относительно нормы $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$.

Смысл:

Гильбертовы пространства — это обобщение евклидовых пространств на бесконечномерный случай. Они играют ключевую роль в функциональном анализе, квантовой механике и теории приближений, так как позволяют работать с рядами Фурье и ортогональными разложениями.

Непрерывность скалярного произведения

Если $x_n \to x$ и $y_n \to y$ в H, то $\langle x_n, y_n \rangle \to \langle x, y \rangle$.

Смысл:

Непрерывность скалярного произведения означает, что малые изменения векторов приводят к малым изменениям их скалярного произведения. Это свойство критично для доказательств сходимости рядов и устойчивости численных методов.

Скалярное умножение в $L^2(X, \mu)$

Для $f, g \in L^2(X, \mu)$ скалярное произведение задается формулой:

$$\langle f, g \rangle = \int_X f(x)\overline{g(x)}\, d\mu(x).$$

$\overline{g}$ обозначает комплексно сопряжённое значение. Например, для $g = a + bi$, верно $\overline{g} = a - bi$.

Смысл:

Пространство L^2 состоит из функций с конечной энергией (интегрируемых с квадратом). Скалярное умножение здесь аналогично стандартному, но заменяет сумму на интеграл, что позволяет работать с функциями как с бесконечномерными векторами.

Ортогональные системы в $L^2(X, \mu)$

Система функций $\{\phi_k\} \subset L^2(X, \mu)$ называется ортогональной, если:

$$\langle \phi_m, \phi_n \rangle = 0 \quad \text{при} \quad m \neq n.$$

Если дополнительно $\|\phi_k\| = 1$ для всех k, система называется ортонормированной.

Примеры ортогональных систем в $L^2(X, \mu)$

1. Тригонометрическая система $\{e^{inx}\}_{n \in \mathbb{Z}}$ в $L^2([-\pi, \pi])$.
2. Многочлены Лежандра $\{P_n\}$ в $L^2([-1, 1])$.
3. Функции Хаара на отрезке.

Смысл:

Ортогональные системы позволяют раскладывать функции в ряды (например, ряд Фурье), что упрощает решение дифференциальных уравнений и анализ сигналов. Каждая система выбирается под конкретную задачу, например, тригонометрическая — для периодических функций.

60. Теорема Пифагора для гильбертовых пространств и критерий сходимости ортогонального ряда

Лемма о почленном умножении сходящегося ряда

Пусть $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ — сходящийся ряд в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$. Тогда для любого вектора $y \in \mathcal{H}$ выполняется:

$$\left\langle \sum_{k=1}^{\infty} x_k, y \right\rangle = \sum_{k=1}^{\infty} \langle x_k, y \rangle.$$

Смысл:

Эта лемма утверждает, что скалярное произведение можно "разнести" по бесконечной сумме векторов. Это следует из непрерывности скалярного произведения: если ряд сходится, то его можно почленно умножать на любой вектор, и результат останется корректным.

Критерий сходимости ортогонального ряда

Ортогональный ряд $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ сходится тогда и только тогда, когда сходится числовой ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\|^2$. При этом выполняется равенство:

$$\left\| \sum_{k=1}^{\infty} x_k \right\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\|^2.$$

Смысл:

Этот критерий связывает сходимость ряда ортогональных векторов со сходимостью ряда их норм. Фактически, он обобщает теорему Пифагора на бесконечномерные пространства: квадрат нормы суммы равен сумме квадратов норм, если векторы ортогональны.

Теорема Пифагора для гильбертовых пространств

Для любого конечного набора ортогональных векторов $\{x_k\}_{k=1}^{N}$ в $\mathcal{H}$ выполняется:

$$\left\| \sum_{k=1}^{N} x_k \right\|^2 = \sum_{k=1}^{N} \|x_k\|^2.$$

Смысл:

Это прямое обобщение классической теоремы Пифагора. Если векторы ортогональны, то квадрат длины их суммы равен сумме квадратов их длин. В бесконечномерном случае это свойство сохраняется при условии сходимости ряда норм.

61. Вычисление коэффициентов суммы ортогонального ряда. Коэффициенты Фурье и ряды Фурье по ортогональной системе. Геометрические свойства частичных сумм ряда Фурье. Неравенство Бесселя

Вычисление коэффициентов суммы ортогонального ряда

Пусть $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ — ортогональная система (ОС) в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$, $x \in \mathcal{H}$, причём $x = \sum_{k=1}^{\infty} c_k e_k$. Тогда коэффициенты c_k определяются единственным образом по формуле:

$$c_k = \frac{\langle x, e_k \rangle}{\|e_k\|^2}.$$

Смысл:

Эта формула позволяет найти коэффициенты разложения вектора x по ортогональной системе. Она гарантирует, что если вектор можно представить в виде ряда по ортогональным векторам, то коэффициенты вычисляются через скалярное произведение. Это прямое обобщение проекции вектора на координатные оси в ортогональном базисе.

Определение коэффициентов и ряда Фурье

Пусть $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ — ОС в $\mathcal{H}$, $x \in \mathcal{H}$. Коэффициентами Фурье вектора x называются числа:

$$c_k(x) = \frac{\langle x, e_k \rangle}{\|e_k\|^2}.$$

Рядом Фурье вектора x по ОС $\{e_k\}$ называется ряд:

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k(x) e_k.$$

Смысл:

Коэффициенты Фурье показывают "вклад" каждого элемента ортогональной системы e_k в вектор x. Сам ряд Фурье — это попытка восстановить x как бесконечную линейную комбинацию элементов ОС. Геометрически $c_k(x)e_k$ — это проекция x на прямую, порождённую вектором e_k.

Свойства частичных сумм ряда Фурье

Пусть $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ — ОС в $\mathcal{H}$, $x \in \mathcal{H}$, $n \in \mathbb{N}$, $S_n = \sum_{k=1}^{n} c_k(x) e_k$, $\mathcal{L} = \mathcal{L}(e_1, \ldots, e_n)$. Тогда:

1. S_n — ортогональная проекция x на $\mathcal{L}$, т.е. $x = S_n + z$, где $z \perp \mathcal{L}$.
2. S_n — элемент наилучшего приближения к x в $\mathcal{L}$, т.е. $\|x - S_n\| = \min_{y \in \mathcal{L}} \|x - y\|$, причём минимум достигается только при $y = S_n$.
3. $\|S_n\| \leq \|x\|$.

Смысл:

Частичная сумма ряда Фурье S_n обладает ключевыми геометрическими свойствами. Во-первых, это проекция x на подпространство $\mathcal{L}$, натянутое на первые n векторов системы — значит, разность $x -$

S_n ортогональна этому подпространству. Во-вторых, S_n даёт наилучшее приближение к x векторами из $\mathcal{L}$. В-третьих, норма проекции не превосходит нормы самого вектора.

Неравенство Бесселя

Пусть $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ — ОС в $\mathcal{H}$, $x \in \mathcal{H}$. Тогда:

$$\sum_{k=1}^{\infty} |c_k(x)|^2 \|e_k\|^2 \leq \|x\|^2.$$

Смысл:

Неравенство Бесселя утверждает, что сумма квадратов коэффициентов Фурье (взвешенных по нормам $\|e_k\|^2$) не превосходит квадрата нормы вектора x. Оно следует из свойства $\|S_n\| \leq \|x\|$ и равенства $\|S_n\|^2 = \sum_{k=1}^{n} |c_k(x)|^2 \|e_k\|^2$ при переходе к пределу $n \to \infty$. Это гарантирует сходимость ряда из квадратов коэффициентов.

62. Теорема Рисса-Фишера. Равенство Пaресваля.

Теорема Рисса-Фишера

Пусть $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ — ортонормированная система (ОС) в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$, $x \in \mathcal{H}$. Тогда:

1. Ряд Фурье вектора x сходится.
2. $x = \sum_{k=1}^{\infty} c_k(x) e_k + z$, где $z \perp e_k$ для всех k.
3. $x = \sum_{k=1}^{\infty} c_k(x) e_k$ тогда и только тогда, когда $\sum_{k=1}^{\infty} |c_k(x)|^2 \|e_k\|^2 = \|x\|^2$.

Смысл:

Эта теорема гарантирует сходимость ряда Фурье для любого вектора в гильбертовом пространстве. Она также утверждает, что вектор можно разложить в этот ряд плюс остаток, ортогональный всей системе. Критерий точного представления вектора рядом Фурье — равенство Парсеваля.

Равенство Парсеваля (Уравнение замкнутости)

Ряд Фурье $\sum_{k=1}^{\infty} c_k(x) e_k$ — ортогональный, $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ — ортонормированная система (ОС) в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$, $x \in \mathcal{H}$

$$\sum_{k=1}^{\infty} |c_k(x)|^2 \|e_k\|^2 = \|x\|^2$$

Смысл:

Это равенство означает, что квадрат нормы вектора x равен сумме квадратов модулей его коэффициентов Фурье (с учетом норм базисных элементов). Оно выполняется, когда ортонормированная система является полной (базисом), и не выполняется, если в системе "не хватает" элементов для точного представления вектора.

63. Характеристика базиса в гильбертовом пространстве. Процесс ортогонализации Грама-Шмидта.

Определение базиса и связанных понятий

Ортогональная система $\{e_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathcal{H}$ называется **базисом** (*ортогональным базисом*), если любой вектор $x \in \mathcal{H}$ раскладывается в ряд по этой системе: $x = \sum_{k=1}^{\infty} c_k(x)e_k$. Она называется **полной**, если не существует ненулевого вектора, ортогонального всем e_k. Она называется **замкнутой**, если для любого $x \in \mathcal{H}$ выполнено уравнение замкнутости.

Смысл:

Базис позволяет представить любой вектор пространства как бесконечную сумму (ряд) по базисным элементам. Полнота означает, что система "охватывает" всё пространство — нет ненулевых векторов, "спрятанных" от неё. Замкнутость формально связывает норму вектора с суммой квадратов его коэффициентов в разложении (уравнение Парсеваля).

Характеристика базиса

Пусть $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ — ОС в $\mathcal{H}$. Следующие утверждения равносильны:

1. $\{e_k\}$ — базис.
2. $\langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} c_k(x)c_k(y)\|e_k\|^2$ для любых $x, y \in \mathcal{H}$ (обобщенное уравнение замкнутости).
3. $\{e_k\}$ замкнута.
4. $\{e_k\}$ полна.
5. Линейная оболочка системы $\{e_k\}$ плотна в $\mathcal{H}$. $(\forall x \in \mathcal{H}$ и $\forall \mathcal{E} > 0, \exists y \in \{\{c_k\} : ||x - y|| < \mathcal{E}\})$

Смысл:

Эта теорема даёт пять разных взглядов на то, когда ортогональная система становится базисом. Ключевые идеи: возможность разложения любого вектора (1), обобщение теоремы Пифагора на скалярные произведения (2), выполнение уравнения Парсеваля (3), отсутствие "пропущенных" направлений (4) и возможность сколь угодно точно приблизить любой вектор конечными комбинациями базисных (5). Все они оказываются одинаково сильными условиями.

Процесс ортогонализации Грама-Шмидта

Пусть $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ — линейно независимая система в $\mathcal{H}$. Тогда существует ОНС $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$, такая что $\mathcal{L}(e_1, \ldots, e_n) = \mathcal{L}(x_1, \ldots, x_n)$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Эта ОНС единственна с точностью до множителей λ_k с $|\lambda_k| = 1$ (т.е. $h_k = \lambda_k e_k$ для любой другой ОНС $\{h_k\}$, удовлетворяющей тому же условию).

Смысл:

Процесс Грама-Шмидта позволяет преобразовать любую линейно независимую систему векторов в ортонормированную систему (ОНС), которая порождает те же самые конечномерные подпространства на каждом шаге. Это как построение "перпендикулярных осей" из исходных "косых" направлений. Единственность с точностью до фазового множителя ($\lambda_k = e^{i\phi_k}$) означает, что базисные векторы можно повернуть в их собственной плоскости, не меняя натянутое подпространство и ортонормированность.

64. Тригонометрический многочлен, тригонометрический ряд, тригонометрический ряд в комплексной форме. Лемма о вычислении коэффициентов тригонометрического ряда. Тригонометрический ряд Фурье функции (в т.ч. в экспоненциальной форме)

Определение тригонометрического многочлена

Пусть $n \in \mathbb{Z}_+$. Функция T_n вида

$$T_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

называется тригонометрическим многочленом порядка не выше n. Если $|a_n| + |b_n| \neq 0$, то порядок ровно n. Коэффициенты a_k, b_k — вещественные или комплексные числа. T_n — множество всех таких многочленов порядка $\leq n$, $T = \bigcup_{n=0}^{\infty} T_n$.

Смысл:

Тригонометрический многочлен — это конечная сумма синусов и косинусов кратных углов с коэффициентами. Он приближает периодические функции. Множество T_n содержит все многочлены сложности не выше n, а T — все возможные тригонометрические многочлены. Деление $a_0/2$ упрощает формулы для коэффициентов Фурье.

Тригонометрический ряд и комплексная форма

Тригонометрический ряд имеет вид:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kx + b_k \sin kx).$$

С помощью формул Эйлера $\cos kx = \frac{e^{ikx}+e^{-ikx}}{2}$, $\sin kx = \frac{e^{ikx}-e^{-ikx}}{2i}$ он преобразуется в комплексную форму:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx}.$$

Смысл:

Это бесконечная версия тригонометрического многочлена. Комплексная форма использует экспоненты e^{ikx} вместо синусов и косинусов, что часто упрощает вычисления. Переход между формами осуществляется через формулы Эйлера. Частичные суммы в обеих формах совпадают, обеспечивая эквивалентность представлений.

Лемма о вычислении коэффициентов (ортогональность)

Если тригонометрический ряд сходится к функции $f(x)$ в $L_2[-\pi, \pi]$, то его коэффициенты вычисляются по формулам:

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(kx)dx, \quad b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(kx)dx \quad (k \geq 0),$$

$$c_k = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-ikx}dx \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Смысл:

Эти формулы следуют из ортогональности системы функций $\{1, \cos(kx), \sin(kx)\}$ или $\{e^{ikx}\}$ на отрезке $[-\pi, \pi]$. Если ряд сходится к $f(x)$ в смысле L_2, то он обязан быть её рядом Фурье, и коэффициенты находятся интегрированием f с соответствующей базисной функцией. Равномерная сходимость гарантирует сходимость в L_2, но условие можно ослабить.

Тригонометрический ряд Фурье функции

Тригонометрическим рядом Фурье функции f, интегрируемой на $[-\pi, \pi]$, называется ряд:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kx + b_k \sin kx), \quad \text{где} \quad a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(kx)dx, \quad b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(kx)dx.$$

В экспоненциальной (комплексной) форме:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}, \quad \text{где} \quad c_k = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-ikx}dx.$$

Смысл:

Это способ разложить периодическую функцию в сумму гармоник (синусов и косинусов) или комплексных экспонент. Коэффициенты Фурье a_k, b_k или c_k показывают "вклад" гармоники с частотой k. Ряд Фурье функции может сходиться к ней (в L_2, поточечно и т.д.) при определенных условиях, что позволяет анализировать и аппроксимировать периодические сигналы.

65. Теорема Римана-Лебега

Теорема Римана-Лебега

1. Если E — измеримое множество ($E \in \mathbb{A}_1$) и функция f интегрируема на E ($f \in L(E)$), то:

$$\int_E f(t) \begin{bmatrix} e^{i\lambda t} \\ \cos \lambda t \\ \sin \lambda t \end{bmatrix} dt \xrightarrow{\lambda \to \infty} 0,$$

(где λ принимает вещественные значения.)

2. Если f интегрируема на основном периоде ($f \in L$), то её коэффициенты Фурье стремятся к нулю:

$$a_k(f) \xrightarrow{k\to\infty} 0, \quad b_k(f) \xrightarrow{k\to\infty} 0, \quad c_k(f) \xrightarrow{k\to\infty} 0.$$

Краткий смысл:

Теорема Римана-Лебега утверждает, что для интегрируемой функции f интеграл от её произведения с быстро осциллирующими функциями ($e^{i\lambda t}$, $\cos \lambda t, \sin \lambda t$) стремится к нулю при $\lambda \to \infty$. Это означает, что высокочастотные колебания "усредняют" вклад функции в интеграл. Аналогично, коэффициенты Фурье a_k, b_k, c_k периодической интегрируемой функции затухают с ростом k, что отражает отсутствие значимых высокочастотных компонент в её спектре.

66. Свертка периодических функций, ее элементарные свойства. Ядро Дирихле. Сумма Фурье как свертка

Определение свертки периодических функций

Пусть $f, K \in L[-\pi, \pi]$ (интегрируемые по Лебегу 2π-периодические функции). Сверткой $f * K$ называется функция, заданная для почти всех x формулой:

$$(f * K)(x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)K(t)dt.$$

Свертка определена почти всюду и принадлежит $L[-\pi, \pi]$ (т.е. интегрируема).

Смысл:

Свертка "смешивает" функции f и K: для каждой точки x она усредняет значения f вблизи x, взвешенные ядром K. Это фундаментальная операция в анализе Фурье, позволяющая изучать интегральные преобразования (как суммы Фурье) единообразно.

Элементарные свойства свертки

- Измеримость и интегрируемость:
  $f * K$ измерима и $f * K \in L[-\pi, \pi]$.
- Коммутативность:
  $f * K = K * f$.
- Коэффициенты Фурье:
  $c_k(f * K) = 2\pi c_k(f) c_k(K)$.
- Непрерывность при $K \in L_q$:
  Если $1 \le p \le \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $f \in L_p$, $K \in L_q$, то $f * K$ непрерывна ($f * K \in C$) и $\|f * K\|_\infty \le \|K\|_q \|f\|_p$.
- Оценка нормы при $K \in L_1$:
  Если $1 \le p \le \infty$, $f \in L_p$, $K \in L_1$, то $f * K \in L_p$ и $\|f * K\|_p \le \|K\|_1 \|f\|_p$.

Смысл:

Эти свойства показывают, как свертка взаимодействует с основными операциями анализа. Коммутативность (C2) дает гибкость. C3 означает, что свертка превращает умножение коэффициентов Фурье в умножение функций. C4 и C5 гарантируют "хорошее" поведение свертки (непрерывность, ограниченность) при условиях на ядро K, что критично для сходимости рядов Фурье.

Ядро Дирихле

Для $n \in \mathbb{Z}_+$ функция

$$D_n(t) = \frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos kt\right) = \frac{\sin\left((n+\frac{1}{2})t\right)}{2\pi \sin\left(\frac{t}{2}\right)}$$

называется ядром Дирихле порядка n.

Смысл:

Ядро Дирихле $D_n(t)$ кодирует информацию о частичной сумме ряда Фурье до номера n.

Сумма Фурье как свертка

Частичная сумма (порядка n) ряда Фурье функции $f \in L[-\pi, \pi]$ выражается через свертку с ядром Дирихле:

$$S_n(f, x) = (f * D_n)(x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t) D_n(t) dt.$$

Интеграл Дирихле:

$\int_{-\pi}^{\pi} f(x-t) D_n(t) dt$

Смысл:

Представление суммы $S_n(f, x)$ как свертки $f * D_n$ (доказанное в Лемме 3) позволяет применять общую теорию свертки (свойства C1-C5) к изучению сходимости рядов Фурье, сводя задачу к анализу свойств ядра D_n.

67. Принцип локализации Римана. Признак Дини и его следствия.

1) Принцип локализации Римана

Пусть $f, g \in L$, $x \in \mathbb{R}$, $\delta \in (0, \pi)$, и функции f и g совпадают на интервале $(x-\delta, x+\delta)$. Тогда разность частичных сумм их рядов Фурье в точке x стремится к нулю при $n \to \infty$:

$$S_n(f, x) - S_n(g, x) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

В частности, из сходимости ряда Фурье f в точке x к сумме S следует сходимость ряда Фурье g в точке x к той же сумме S, и наоборот.

Смысл:

Поведение ряда Фурье функции в конкретной точке x зависит только от значений этой функции в сколь угодно малой окрестности x. Если две функции совпадают "рядом" с x (даже если сильно отличаются вдали), их ряды Фурье в x либо оба сходятся к одному значению, либо оба расходятся. Это позволяет анализировать сходимость, "забывая" о поведении функции вне малой окрестности точки.

Признак Дини сходимости

Пусть $f \in L$, $x \in \mathbb{R}$, $S \in \mathbb{R}$ (или $\mathbb{C}$) и выполняется условие:

$$\int_0^\pi \frac{|f(x+t) - 2S + f(x-t)|}{t} dt < +\infty. \quad (13.11)$$

Тогда ряд Фурье функции f сходится к сумме S в точке x:

$$S_n(f, x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} S.$$

Смысл:

Признак Дини дает достаточное условие сходимости ряда Фурье в точке x к конкретному числу S. Условие (13.11) требует, чтобы среднее значение $\frac{f(x+t)+f(x-t)}{2}$ "достаточно быстро" приближалось к S при $t \to 0^+$. Интеграл проверяет "скорость" этого приближения: если разность $|f(x+t) + f(x-t) - 2S|$ убывает быстрее, чем t, то ряд гарантированно сходится к S.

Следствия признака Дини 1

Если $x \in \mathbb{R}$, $f \in L$ и существуют конечные пределы:

$$f(x\pm) = \lim_{t\to x\pm} f(t), \quad \alpha_\pm = \lim_{t\to 0\pm} \frac{f(x+t) - f(x\pm)}{t}$$

то ряд Фурье f сходится в точке x к $S = \frac{f(x+)+f(x-)}{2}$. Если f непрерывна в x и пределы $\alpha_\pm$ существуют, то ряд сходится к $f(x)$.

Следствия признака Дини 2

Если $f \in L$ имеет конечные односторонние производные в точке x (т.е. $f'_+(x)$ и $f'_-(x)$ существуют и конечны), то её ряд Фурье сходится в x к $f(x)$. В частности, это верно, если f дифференцируема в x. $(a_\pm = f'_\pm(x))$

Смысл:

Эти следствия упрощают применение признака Дини. Следствие 1 говорит: если функция в точке x имеет скачок (левое и правое предельные значения) и "кусочно-гладкая" (существуют односторонние производные), то ряд сходится к среднему арифметическому пределов. Если функция непрерывна и имеет односторонние производные, то ряд сходится к $f(x)$. Следствие 2 — частный случай: существование обычной или односторонних производных в точке гарантирует сходимость ряда к значению функции в этой точке, так как производные автоматически обеспечивают выполнение условий Следствия 1.

68. Примеры разложения функций в ряды Фурье. Вычисление сумм $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ и $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$

Разложение функции $f_z(x) = \cos zx$ в ряд Фурье на $[-\pi, \pi]$ при $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$

Функция $f_z(x) = \cos zx$, $x \in [-\pi, \pi]$, является бесконечно дифференцируемой и чётной. Её ряд Фурье сходится к $f_z(x)$ всюду на $[-\pi, \pi]$. Коэффициенты Фурье:

$$a_0(f_z) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \cos zt \, dt = \frac{2 \sin \pi z}{\pi z},$$

$$a_k(f_z) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \cos zt \cos kt \, dt = \frac{\sin \pi z}{\pi} (-1)^k \left(\frac{1}{z+k} + \frac{1}{z-k} \right) \quad (k \in \mathbb{N}).$$

Ряд Фурье:

$$\cos zx = \frac{\sin \pi z}{\pi z} + \frac{\sin \pi z}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \left(\frac{1}{z+k} + \frac{1}{z-k} \right) \cos kx, \quad x \in [-\pi, \pi].$$

Смысл:

Показано разложение непериодической функции $\cos(zx)$ (где z не целое) в ряд по ортогональной системе $\{\cos(kx)\}$ на интервале $[-\pi, \pi]$. Чётность функции упрощает вычисления, обнуляя коэффициенты b_k. Сходимость ряда гарантирована гладкостью функции и её продолжения.

Разложение $\pi \operatorname{ctg} \pi z$ и $\frac{\pi}{\sin \pi z}$ в суммы простых дробей

При $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ из разложения $\cos zx$ подстановкой $x = \pi$ и $x = 0$ соответственно получаются разложения в ряды (в смысле главного значения):

$$\pi \operatorname{ctg} \pi z = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{z-k}, \quad \frac{\pi}{\sin \pi z} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^k}{z-k}.$$

Смысл:

Подстановка конкретных значений $x = 0$ и $x = \pi$ в ряд Фурье для $\cos(zx)$ позволяет выразить трансцендентные функции (ctg и $\csc$) через бесконечные суммы рациональных дробей (простейших дробей). Эти разложения широко используются в комплексном анализе и теории специальных функций.

Вычисление сумм $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ и $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$

1. **Сумма $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$:**
   - Используем тождество Парсеваля для функции $f_{\sqrt{-1}}(x) = \cosh x$ (частный случай $z = i$, но проще для $f(x) = x^2$).
   - Стандартный результат: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.
2. **Сумма $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$:**
   - Подставим $x = \pi$ в разложение функции $g(x) = x^2$ в ряд Фурье на $[-\pi, \pi]$.
   - Ряд Фурье для $g(x) = x^2$: $x^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos nx$.
   - При $x = \pi$: $\pi^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} (\cos n\pi) = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} (-1)^n = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.
   - Отсюда: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.
   - Теперь подставим $x = 0$: $0 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}(1)$.
   - Отсюда: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = -\frac{\pi^2}{12}$, следовательно, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}$.

Смысл:

Знаменитые суммы вычисляются с помощью свойств рядов Фурье. Тождество Парсеваля (равенство энергии сигнала и суммы квадратов коэффициентов) даёт $\sum \frac{1}{n^2}$. Для знакопеременной суммы используется разложение простой функции (например, x^2) и подстановка точки сходимости ряда ($x = 0$ или $x = \pi$).

69. Общее представление о методах суммирования рядов. Суммирование по Чезаро, суммирование

методами Абеля-Пуассона (их перманентность и эффективность)

Суммирование по Чезаро

Пусть дан числовой ряд $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ с частичными суммами $S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$. Средние арифметические Чезаро (первого порядка) определяются как:

$$\sigma_n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} S_k$$

Ряд называется суммируемым по Чезаро к числу S, если существует предел:

$$\lim_{n \to \infty} \sigma_n = S$$

Обозначение: $(C, 1) \sum a_k = S$.

Смысл:

Метод Чезаро обобщает понятие сходимости ряда. Если ряд сходится классически к S, то он суммируем по Чезаро к тому же S. Но метод позволяет приписать сумму некоторым расходящимся рядам, например, знакопеременному ряду $1 - 1 + 1 - 1 + \ldots$, для которого $\sigma_n \to \frac{1}{2}$.

Суммирование методом Абеля-Пуассона

Пусть дан степенной ряд $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$, сходящийся при $|x| < 1$. Суммой ряда методом Абеля-Пуассона называется предел (если он существует):

$$(A) \sum_{k=0}^{\infty} a_k = \lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$$

Смысл:

Метод использует аналитическое продолжение степенного ряда на границу круга сходимости ($x = 1$). Если ряд сходится классически, его сумма по Абелю-Пуассону совпадает с обычной суммой. Метод суммирует ряды, где классический предел не существует, например, для ряда $1 - 2 + 3 - 4 + \ldots$ сумма по Абелю равна $\frac{1}{4}$.

Перманентность методов

Метод суммирования F называется перманентным (регулярным), если:

1. **Линейность**: $F\sum(\alpha a_k + \beta b_k) = \alpha F \sum a_k + \beta F \sum b_k$.
2. **Согласованность**: Если ряд $\sum a_k$ сходится классически к S, то $F\sum a_k = S$.

Смысл:

Перманентность гарантирует, что метод не противоречит обычной сходимости и "работает" корректно с линейными комбинациями. Оба метода (Чезаро и Абеля-Пуассона) являются перманентными. Это делает их полезными: они расширяют классическое суммирование, не нарушая его там, где оно уже работает.

Эффективность методов

Метод суммирования F называется эффективным (или сильнее другого метода G), если:

- Любой ряд, суммируемый методом G, суммируем и методом F к той же сумме.
- Существует ряд, суммируемый методом F, но не суммируемый методом G.

Смысл:

Эффективность показывает "мощность" метода. Метод Абеля-Пуассона эффективнее (сильнее) метода Чезаро $(C, 1)$: любой ряд, суммируемый по Чезаро, суммируем и по Абелю к той же сумме, но существуют ряды (например, $\sum k(-1)^k$), суммируемые по Абелю, но не по Чезаро. Это позволяет Абелю "суммировать" более широкий класс расходящихся рядов.

70. Аппроксимативная единица и усиленная аппроксимативная единица. Теорема о свойствах свертки с аппроксимативной единицей (без док-ва). Теорема Фейера. Полнота тригонометрической системы в $L^2_{2\pi}$

Аппроксимативная единица

Пусть $D \subset \mathbb{R}$, h_0 — предельная точка D (в $\overline{\mathbb{R}}$). Семейство функций $\{K_h\}_{h\in D}$ называется *аппроксимативной единицей* при $h \to h_0$, если:

1. $\forall h \in D$: $K_h \in L^1[-\pi, \pi]$ и $\int_{-\pi}^{\pi} K_h(t)dt = 1$.
2. $\exists M > 0$: $\forall h \in D$, $\int_{-\pi}^{\pi} |K_h(t)|dt \le M$.
3. $\forall \delta \in (0, \pi)$: $\int_{E_\delta} |K_h(t)|dt \xrightarrow[h\to h_0]{} 0$, где $E_\delta = [-\pi, \pi] \setminus [-\delta, \delta]$.

Смысл:

Аппроксимативная единица — это семейство "сглаживающих" ядер, сосредоточенных около нуля. Их интеграл равен 1 (условие нормировки), они не слишком большие в среднем (ограниченность нормы), а вне малой окрестности нуля их влияние стремится к нулю. Это позволяет аппроксимировать функцию её сдвигами.

Усиленная аппроксимативная единица

Семейство $\{K_h\}_{h\in D}$ называется *усиленной аппроксимативной единицей* при $h \to h_0$, если:

1. Выполнены условия 1, 2 (из прошлого пункта) аппроксимативной единицы.
2. $\forall h \in D$: $K_h \in L^\infty[-\pi, \pi]$.
3. $\forall \delta \in (0, \pi)$: $\operatorname*{ess\,sup}_{t\in E_\delta} |K_h(t)| \underset{h\to h_0}{\longrightarrow} 0$.

Смысл:

Это более сильный вариант аппроксимативной единицы, где ядра ограничены равномерно (не только в L^1), а их *максимальные значения* вне малой окрестности нуля стремятся к нулю. Это гарантирует сходимость свертки в индивидуальных точках непрерывности функции.

3) Теорема о свойствах свертки

Пусть $\{K_h\}$ — аппроксимативная единица при $h \to h_0$. Тогда:

1. Если $f \in C_{2\pi}$ (непрерывная 2π-периодическая), то $f * K_h \xrightarrow{h\to h_0} f$ *равномерно*.
2. Если $f \in L^p_{2\pi}, 1 \le p < \infty$, то $\|f * K_h - f\|_p \xrightarrow{h\to h_0} 0$.
3. Если $\{K_h\}$ — *усиленная* аппроксимативная единица, $f \in L^1_{2\pi}$, и f непрерывна в точке x, то $(f * K_h)(x) \xrightarrow{h\to h_0} f(x)$.

Смысл:

Свертка функции с аппроксимативной единицей приближает саму функцию. Для непрерывных функций сходимость равномерная, для L^p-функций — в норме L^p, а для усиленных ядер есть поточечная сходимость в точках непрерывности. Это обобщает интуицию о "сглаживании".

Теорема Фейера

Ядра Фейера $\Phi_n(t) = \frac{1}{2\pi(n+1)} \left(\frac{\sin\frac{(n+1)t}{2}}{\sin\frac{t}{2}} \right)^2$ образуют *усиленную* аппроксимативную единицу при $n \to \infty$. Следовательно:

1. Если $f \in C_{2\pi}$, то $\sigma_n(f) \to f$ равномерно.
2. Если $f \in L^p_{2\pi}, 1 \le p < \infty$, то $\|\sigma_n(f) - f\|_p \to 0$.
3. Если $f \in L^1_{2\pi}$ непрерывна в точке x, то $\sigma_n(f, x) \to f(x)$.

Смысл:

Средние Фейера (суммы Фурье, усреднённые по первым n частичным суммам) сходятся к функции в различных смыслах. Ключевое — ядро Фейера неотрицательно и явно оценивается, что доказывает его "усиленность". Это решает проблемы расходимости рядов Фурье.

Полнота тригонометрической системы в $L^2_{2\pi}$

Тригонометрическая система $\{e^{ikx}\}_{k\in\mathbb{Z}}$ (или $\{1, \cos kx, \sin kx\}_{k=1}^{\infty}$) полна в $L^2_{2\pi}$. То есть:

$$\forall f \in L^2_{2\pi}: \quad \|S_n(f) - f\|_2 \xrightarrow{n\to\infty} 0,$$

где $S_n(f)$ — частичная сумма ряда Фурье. Эквивалентно: если все коэффициенты Фурье f равны нулю, то $f = 0$ п.в.

Смысл:

Любую функцию из L^2 можно сколь угодно точно приблизить в среднем квадратичном её частичными суммами Фурье. Это следует из теоремы Фейера (п.2 при $p = 2$) и того, что $\sigma_n(f)$ есть проекция на тригонометрические многочлены. Система образует ортогональный базис.

71. Теорема Вейерштрасса о тригонометрических многочленах. Теорема Вейерштрасса об алгебраических многочленах

Теорема Вейерштрасса о тригонометрических многочленах

Любая непрерывная периодическая функция $f \in C_{(a,b)}$ может быть равномерно приближена тригонометрическими многочленами $T(x) = \sum_{k=0}^{\infty} q_k x^k$, где остаток $\|T(x) - P_N(x)\|_{C_{at}} \to 0$ при $N \to \infty$.

Смысл:

Теорема позволяет заменять сложные периодические функции на суммы простых тригонометрических слагаемых. Это полезно в анализе и численных методах, так как многочлены легче вычислять и интегрировать.

Теорема Вейерштрасса об алгебраических многочленах

Для любой непрерывной функции $f \in C_{at}$ на отрезке $[a, b]$ существует последовательность алгебраических многочленов $P_N(x) = \sum_{j=0}^{N} q_j x^k$, такая что $\|f - P_N\|_{L^p} \leq \epsilon$ при достаточно больших N.

Смысл:

Теорема утверждает, что даже "неудобные" непрерывные функции можно сколь угодно точно приблизить обычными многочленами. Это основа для аппроксимации в вычислительной математике и физике.