Шпора матан

1. Интегралы от неотрицательных функций

1. Основные свойства

Монотонность

Если $0 \leq f(x) \leq g(x)$ п.в. на X, то:

$$\int_X f\,d\mu \leq \int_X g\,d\mu.$$

(Интеграл сохраняет неравенства.)

Линейность

Для $a, b \geq 0$:

$$\int_X (af + bg)\,d\mu = a\int_X f\,d\mu + b\int_X g\,d\mu.$$

(Интеграл суммы = сумма интегралов.)

Аддитивность по области

Если $A \cap B = \emptyset$, то:

$$\int_{A\cup B} f\,d\mu = \int_A f\,d\mu + \int_B f\,d\mu.$$

(Интеграл по объединению = сумма интегралов.)

Невозрастание меры

Если $A \subseteq B$, то:

$$\int_A f\, d\mu \le \int_B f\, d\mu.$$

(Интеграл по подмножеству ≤ интегралу по всему множеству.)

2. Теорема Леви для рядов

Если $f_k \ge 0$ и измеримы, то:

$$\int_E \sum_{k=1}^{\infty} f_k\, d\mu = \sum_{k=1}^{\infty} \int_E f_k\, d\mu.$$

(Можно менять местами сумму и интеграл.)

2. Неравенство Чебышева

Суммируемая функция $f \in L(E, \mu)$

Определение

Функция `f` называется суммируемой на `E` (пишут `f ∈ L(E, μ)`), если:

$$\int_E |f|\, d\mu < +\infty$$

Свойство

Если `f` суммируема, то она конечна почти всюду на `E`.

Измеримая функция $f \in S(E)$

Определение:

$S(E)$ — это множество всех измеримых функций $f : E \to \mathbb{R}$, принимающих конечное число значений.

$$S(E) = \{f \text{ измерима} \mid f(E) = \{c_1, \ldots, c_n\},\ c_i \in \mathbb{R},\ n < \infty\}$$

Смысл:

Простые функции — это "кирпичики" для построения более сложных измеримых функций. Они принимают лишь конечное число значений, что упрощает анализ (например, интегрирование). Любую измеримую функцию можно приблизить последовательностью простых функций.

Формулировка неравенства Чебышева

Для `f ∈ S(E)` (классу измеримых функций), `t > 0`:

$$\mu\{x \in E : |f(x)| \geq t\} \leq \frac{1}{t} \int_E |f| \, d\mu$$

Смысл:

Оценивает меру множества, где `|f(x)| ≥ t`, через интеграл от `|f|`.
Неравенство даёт гарантированную верхнюю границу для "редких событий". Чем выше порог `t`, тем меньше элементов могут его превышать.

Следствие 1

Формулировка:

Если $f \in L(E, \mu)$, то $\mu(\{x \in E : |f(x)| = +\infty\}) = 0$.

Смысл:

Если функция `f ∈ L(E, μ)`, то множество точек, где она принимает бесконечные значения `(|f(x)| = +∞)`, имеет меру ноль:

Следствие 2

Формулировка:

Если $f \geq 0$ и $\int_E f d\mu = 0$, то $f = 0$ почти всюду на E.

Смысл:

Если неотрицательная функция имеет нулевой интеграл, то она почти всюду нулевая. "Почти всюду нулевая" = нуль везде, кроме "несущественных" точек.

3. Приближение интеграла интегралом по множеству конечной меры

Определение

Пусть $f \in L(E, \mu)$, где $\mu E = +\infty$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует подмножество $E_\varepsilon \subset E$ такое, что:

1. $\mu E_\varepsilon < +\infty$ (множество E_ε имеет конечную меру),
2. $\int_{E \setminus E_\varepsilon} |f| \, d\mu < \varepsilon$ (интеграл от $|f|$ по дополнению $E \setminus E_\varepsilon$ меньше ε).

Смысл

Это следствие показывает, что для интегрируемой функции f на множестве бесконечной меры можно найти подмножество конечной меры E_ε, на котором интеграл f "почти полностью" сосредоточен. Оставшаяся часть интеграла (по $E \setminus E_\varepsilon$) пренебрежимо мала (меньше ε).

Это означает, что "хвост" функции (её поведение на множествах большой меры) не вносит существенного вклада в интеграл.

Счетная аддитивность интеграла

Определение

Если $E = \bigcup_k E_k$, где E_k измеримы и попарно не пересекаются, и интеграл $\int_E f \, d\mu$ существует, то:

$$\int_E f \, d\mu = \sum_k \int_{E_k} f \, d\mu.$$

Смысл

Интеграл по объединению счетного числа множеств равен сумме интегралов по каждому множеству. Это свойство аналогично счетной аддитивности меры.

4. Теорема Фату

liminf

`liminf` (нижний предел) - Для числовой последовательности: наибольший предел среди всех её подпоследовательностей. Для функций: функция, которая в каждой точке равна нижнему пределу значений последовательности функций. Проще говоря: "наименьшее значение, к которому постоянно возвращается последовательность"

Формулировка

Для неотрицательных измеримых функций

Пусть $f_n \in S(E)$, $f_n \geq 0$. Тогда:

$$\int_E \liminf_{n\to\infty} f_n \, d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int_E f_n \, d\mu.$$

Смысл

Когда мы берем последовательность неотрицательных функций и смотрим на их нижний предел (самые маленькие значения, к которым они постоянно возвращаются), то интеграл от этого нижнего предела никогда не сможет оказаться больше, чем нижний предел их интегралов. Это как гарантия того, что усредненное "худшее поведение" функций не даст неожиданно большой интеграл.

Для поточечного предела

Пусть $f_n, f \in S(E)$, $f_n \geq 0$, $f_n \to f$ почти везде на E. Тогда:

$$\int_E f \, d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int_E f_n \, d\mu.$$

Смысл

Если такие неотрицательные функции ещё и сходятся к какой-то предельной функции, то интеграл этой предельной функции тоже не превысит нижнюю границу интегралов исходной последовательности. Даже если значения функций поточечно стремятся к пределу, их интегралы могут колебаться, но теорема даёт нам контроль сверху - предельный интеграл не выскочит за нижнюю границу.

5. Теорема Лебега о мажорированной сходимости

Мажоранта

Функция (или число), которая доминирует (превосходит) другую функцию (или последовательность) на заданном множестве.

Теорема Лебега

Если последовательность измеримых функций f_n сходится к f почти везде на E, и существует суммируемая мажоранта $\phi \in L(E, \mu)$ (т.е. $|f_n| \leq \phi$ почти везде), то предельный переход под знаком интеграла корректен:

$$\lim_{n\to\infty} \int_E f_n \, d\mu = \int_E f \, d\mu.$$

Смысл

Теорема гарантирует, что при наличии "контроля" (мажоранты ϕ) над функциями f_n, их сходимость почти везде влечёт сходимость интегралов. Это ключевой инструмент для обмена пределами и интегралами в анализе, устраняющий риск потери сходимости.

Следствие Теоремы Лебега (для множеств конечной меры)

Если $\mu(E) < +\infty$, f_n равномерно ограничены ($|f_n| \leq K$) и $f_n \to f$ почти везде, то

$$\lim_{n\to\infty} \int_E f_n \, d\mu = \int_E f \, d\mu.$$

Смысл

На множествах конечной меры равномерная ограниченность заменяет суммируемую мажоранту (константа K суммируема), что упрощает применение теоремы Лебега в практических задачах.

6. Интегралы Лебега и Римана

Определение интеграла Римана

Определение:

Функция $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ интегрируема по Риману, если существует предел интегральных сумм $\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$ при стремлении диаметра разбиения к нулю.

Смысл:

Интеграл Римана — это предел сумм площадей прямоугольников, аппроксимирующих площадь под кривой. Он существует для ограниченных функций с "небольшим" количеством разрывов.

Критерий Лебега интегрируемости по Риману

Определение:

Функция $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ интегрируема по Риману ($f \in R[a, b]$), если она ограничена и множество её точек разрыва имеет нулевую меру.

Смысл:

Интегрируемость по Риману требует "хорошего поведения" функции — ограниченности и малости разрывов. Мера разрывов должна быть нулевой, иначе интеграл Римана не существует.

Сравнение интегралов Римана и Лебега

Определение:

Если $f \in R[a, b]$, то $f \in L[a, b]$, и значения интегралов совпадают: $(L) \int_a^b f = (R) \int_a^b f$.

Смысл:

Интеграл Лебега обобщает интеграл Римана: все риманово-интегрируемые функции лебегово-интегрируемы, и значения совпадают. Лебег "видит" больше функций, но для "хороших" случаев результаты одинаковы.

Несобственный интеграл и интеграл Лебега

Определение:

Несобственный интеграл Римана на $[a, c]$ — предел $\lim_{b \to a} \int_b^c f(t)dt$. Он абсолютно сходится, если сходится $\int_a^c |f(t)|dt$.

Смысл:

Абсолютная сходимость несобственного интеграла эквивалентна интегрируемости $|f|$ по Лебегу. В этом случае оба интеграла совпадают, и Лебег "улавливает" сходимость.

7. Вычисление меры множества по мерам сечений

Определение сечения

Для множества $E \subset \mathbb{R}^{n+m}$ и точки $x \in \mathbb{R}^n$ сечением $E(x)$ называется множество всех $y \in \mathbb{R}^m$, таких что $(x, y) \in E$.

Смысл:

Сечение "вырезает" часть множества E, фиксируя одну координату (например, x), и показывает, как выглядит E вдоль оставшихся измерений (y).

Измеримость по Лебегу

Множество $E \subset \mathbb{R}^n$ измеримо по Лебегу, если для любого $\varepsilon > 0$ существуют:
Открытое множество $U \supset E$ и замкнутое $F \subset E$, такие что $\mu_n(U \setminus F) < \varepsilon$.

Смысл:

Измеримые множества — это те, которые можно "зажать" между открытыми и замкнутыми с сколь угодно малой ошибкой по мере.

Теорема о связи меры множества с мерами его сечений

1. Измеримость сечений

Для множества $E \subseteq \mathbb{R}^{n+m}$ и фиксированного $x \in \mathbb{R}^n$ сечение определяется как:

$$E(x) = \{y \in \mathbb{R}^m \mid (x, y) \in E\}$$

Если E - измеримо по Лебегу в $\mathbb{R}^{n+m}$, то для почти всех $x \in \mathbb{R}^n$ сечения $E(x)$ измеримы в $\mathbb{R}^m$

Смысл

Почти все сечения $E(x)$ измеримы по Лебегу в $\mathbb{R}^m$.

2. Измеримость функции мер

Для измеримого множества $E \subseteq \mathbb{R}^{n+m}$ функция меры сечений определяется как:

$$f_E : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad f_E(x) = \mu(E(x))$$

$E(x) = \{y \in \mathbb{R}^m \mid (x, y) \in E\}$ - сечение множества
μ - мера Лебега в $\mathbb{R}^m$

Смысл

Функция f_e измеряет меру Лебега сечения E в каждой точке x

3. Формула меры

Мера $\mu_{n+m}(E)$ — это стандартная мера Лебега на $\mathbb{R}^{n+m}$.

$$\mu_{n+m}(E) = \int_{\mathbb{R}^n} \mu_m(E(x))\, dx.$$

Смысл

Мера всего множества E равна "сумме" (интегралу) мер его плоских срезов. Это позволяет сводить многомерные задачи к последовательности одномерных, упрощая вычисления и доказательства.

Итоговый смысл теоремы

Теорема показывает, как меру сложного многомерного множества можно разложить на меры его более простых компонент (сечений), связывая анализ в $\mathbb{R}^{n+m}$ с комбинацией задач в $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{R}^m$.

8. Мера декартова произведения и мера Лебега как произведение мер

Мера декартова произведения

$\mathcal{A}_n$ - σ-алгебра измеримых по Лебегу множеств в $\mathbb{R}^n$
Для измеримых множеств $A \in \mathcal{A}_n, B \in \mathcal{A}_m$ их декартово произведение $A \times B$ измеримо в $\mathbb{R}^{n+m}$, и его мера равна произведению мер:

$$\mu_{n+m}(A \times B) = \mu_n(A) \cdot \mu_m(B).$$

Смысл:

Мера произведения множеств равна произведению их мер, что согласуется с интуицией о "площади" прямоугольника. Доказательство использует аппроксимацию открытыми/замкнутыми множествами и свойства регулярности меры Лебега. Для бесконечных мер применяется разбиение на σ-конечные части.

Мера Лебега как произведение мер

Мера Лебега на $\mathbb{R}^n$ — это n-кратное произведение одномерных мер Лебега:

$$\lambda^n = \underbrace{\lambda^1 \times \lambda^1 \times \cdots \times \lambda^1}_{n \text{ раз}}.$$

Смысл:

Это означает, что мера многомерного пространства строится как последовательное "умножение" мер вдоль каждой координаты. Например, площадь (2D) — произведение длин (1D), объём (3D) — произведение площадей и длины, и т.д. Свойство следует из теоремы о мере декартова произведения.

9. Мера графика и подграфика

График функции (Γf)

Определение:

Для $f : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ график — множество точек $(x, y) \in \mathbb{R}^{n+1}$, где $y = f(x)$.

Смысл:

График — это "след" функции в $(n + 1)$-мерном пространстве. Если f измерима, её график имеет нулевую меру в $\mathbb{R}^{n+1}$, так как он "тоньше" любого слоя. Доказательство использует разбиение области значений на ϵ-слои и оценку меры.

Подграфик функции (Qf)

Определение:

Для $f : E \subset \mathbb{R}^n \to [0, +\infty]$ подграфик — множество точек (x, y), где $0 \leq y \leq f(x)$.

Смысл:

Подграфик — это область "под" графиком. Его измеримость равносильна измеримости f, а мера равна интегралу от f по E. Это связывает геометрический объём с аналитическим выражением.

Теорема

Если $E \subset \mathbb{R}^n$, $f \in S(E)$ (измерима по Лебегу), то $\Gamma f \in \mathcal{A}_{n+1}$ и $\mu_{n+1}(\Gamma f) = 0$.

Смысл:

График измеримой функции всегда измерим как множество в $\mathbb{R}^{n+1}$, но его мера нулевая. Это обобщает факт, что кривая на плоскости ($n = 1$) не имеет площади. Доказательство использует разбиение области значений на ϵ-слои и оценку меры объединения прямоугольников.

Теорема

Пусть $E \in \mathcal{A}_n$, $f : E \to [0, +\infty]$. Тогда:

$$Q_f \text{ измерим} \Leftrightarrow f \text{ измерима, и } \mu_{n+1}(Q_f) = \int_E f \, d\mu_n.$$

Смысл:

Подграфик измерим тогда и только тогда, когда сама функция измерима. Его мера совпадает с интегралом от f, что обобщает понятие "площади под графиком" на многомерный случай.

Это ключевая связь между геометрией и анализом.

10. Теорема Тонелли и Фубини

Интегральная функцией сечения $I(x)$

Функция, определяемая как $I(x) = \int_{E(x)} f(x,y)\,dy$, где $E(x) = \{y \in \mathbb{R}^m : (x,y) \in E\}$ – сечение множества E при фиксированном x.

Смысл

Выражает "частичный" интеграл по переменным y, оставляя x параметром.

Теорема Тонелли

Пусть: $E \in \mathcal{A}_{n+m}$ - измеримое множество в $\mathbb{R}^{n+m}$ и $f : E \to [0, +\infty]$ - неотрицательная μ_{n+m}-измеримая функция, тогда:

1. Для почти всех $x \in \mathbb{R}^n$ сечение $E_x = \{y | (x,y) \in E\}$ измеримо в $\mathbb{R}^m$
2. Функция $I(x) = \int_{E_x} f(x,y) d\mu_m(y)$ измерима
3. Имеет место равенство:

$$\int_E f d\mu_{n+m} = \int_{\mathbb{R}^n} I(x) d\mu_n(x)$$

Смысл:

Позволяет вычислять $(n+m)$-мерный интеграл как повторный: сначала по y при фиксированном x, затем по x.

Теорема Фубини

Если: $E \subseteq \mathbb{R}^{n+m}$ измеримо и $f \in L(E)$ (т.е. $\int_E |f| < +\infty$), то:

$$\int_E f = \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{E_x} f(x,y) dy \right) dx = \int_{\mathbb{R}^m} \left(\int_{E^y} f(x,y) dx \right) dy$$

где $E_x = \{y | (x,y) \in E\}$, $E^y = \{x | (x,y) \in E\}$

Смысл:

Для суммируемых функций можно менять порядок интегрирования и сводить кратный интеграл к повторным

Важно:

Все сечения и внутренние интегралы существуют для почти всех x и y

Ключевые отличия:

- Тонелли: Работает с *неотрицательными измеримыми* функциями ($S(E)$). Проверка измеримости $I(x)$ достаточна.
- Фубини: Требует *суммируемости* ($L(E)$), чтобы гарантировать конечность повторных интегралов и возможность перестановки порядка интегрирования.

11. Интеграл Эйлера-Пуассона

Определение:

Интеграл Эйлера-Пуассона — это несобственный интеграл вида $I = \int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx$, значение которого равно $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Смысл:

Интеграл вычисляется с помощью перехода к полярным координатам, где замена переменных $x = r\cos\varphi, y = r\sin\varphi$ упрощает подынтегральное выражение. Квадрат интеграла I^2 преобразуется в двойной интеграл по плоскости, который сводится к произведению двух одномерных интегралов. Результат $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$ широко используется в теории вероятностей и математической физике.

Ключевые шаги:

1. Замена $I^2 = \iint e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy$.
2. Переход к полярным координатам: $\int_0^{+\infty}\int_0^{\pi/2} re^{-r^2}\,d\varphi\,dr$.
3. Вычисление: $\frac{\pi}{4}$, откуда $I = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

12. Мера n-мерного шара и сферы

Определение:

Мера Лебега μ_n n-мерного шара $\overline{B}_n(a,R) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x-a| \le R\}$ вычисляется по формуле:

$$\mu_n \overline{B}_n(a,R) = \frac{2^n}{n!} \left(\frac{\pi}{2}\right)^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} R^n.$$

Смысл:

Мера шара зависит от его радиуса R и размерности n. Для $n = 2$ и $n = 3$ получаем классические формулы площади круга и объёма шара. Мера сферы $\mathbb{S}^{n-1}$ равна нулю, так как она является границей шара и имеет нулевой объём в $\mathbb{R}^n$.

Примеры:

- $\mu_2 \overline{B}_2(a,R) = \pi R^2$ (круг),
- $\mu_3 \overline{B}_3(a,R) = \frac{4}{3}\pi R^3$ (шар),
- $\mu_4 \overline{B}_4(a,R) = \frac{\pi^2}{2} R^4$.

13. Замена переменной в интеграле, образ и плотность меры

Φ – это измеримое отображение (функция), которое "переводит" точки из пространства X в пространство Y.
h – весовая функция, это неотрицательная измеримая функция, которая определяет, как мера μ на X преобразуется в меру v на Y.

Общая схема замены переменной

Для пространств с мерами (X, A, μ), (Y, B, v) и измеримой функции $h \ge 0$, если $vB = \int_{\Phi^{-1}(B)} h \, d\mu$ и f измерима на Y, то:

$$\int_Y f\,dv = \int_X (f \circ \Phi) h\,d\mu.$$

Смысл:

Интеграл функции f по мере v на Y сводится к интегралу её композиции с Φ и весовой функции h по исходной мере μ на X. Это обобщение замены переменных в анализе, где h играет роль якобиана.

Образ меры

Если $h \equiv 1$, то $v = \Phi(\mu)$ (образ меры μ), и:

$$\int_Y f\,dv = \int_X f \circ \Phi\,d\mu.$$

Смысл:

Мера v "переносится" с X на Y через отображение Φ, а интеграл преобразуется без весовой функции. Пример — замена координат без искажения объёма.

Плотность меры

Если $vA = \int_A h\,d\mu$, то h — плотность v относительно μ, и:

$$\int_X f\,dv = \int_X fh\,d\mu.$$

Смысл:

Функция h показывает, как мера v "перевешивает" μ в каждой точке. Критерий плотности связывает h с неравенствами для значений мер на множествах.

Ключевая идея:

Замена меры или переменных сводит сложный интеграл к исходной мере с поправочным множителем (h или $f \circ \Phi$), что упрощает вычисления.

14. Криволинейные и поверхностные интегралы

Криволинейный интеграл первого рода

Интеграл от функции вдоль заданной кривой.

Формула:

$$\int_L f\,ds = \int_a^b f(\mathbf{r}(t)) \cdot \|\mathbf{r}'(t)\|\,dt$$

Где: $\mathbf{r}(t)$ - параметризация кривой L, $t \in [a, b]$ — параметр, $ds = \|\mathbf{r}'(t)\|dt$ — элемент длины

Смысл:

Обобщение интеграла на произвольные кривые. Вычисляет "сумму" значений функции с учётом длины кривой (например, массу проволоки).

Поверхностный интеграл первого рода

Интеграл от функции по поверхности.

Формула:

$$\iint_S f\,dS = \iint_D f(\mathbf{r}(u, v)) \cdot \|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v\|\,du\,dv$$

Где: $\mathbf{r}(u, v)$ — параметризация поверхности, $dS = \|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v\|du\,dv$ — элемент площади

Смысл:

Обобщение двойного интеграла на искривлённые поверхности (например, вычисление массы оболочки).

Связь с мерами

1. Кривая: ds — мера длины
2. Поверхность: dS — мера площади
3. Объём: $dV = |J|du\,dv\,dw$ — мера объёма (с якобианом)

Ключевая идея:

Все случаи используют "местные" меры (ds, dS, dV), адаптированные к геометрии объекта.

15. Преобразование меры Лебега при диффеоморфизме. Замена переменной в интеграле Лебега. Использование полярных, цилиндрических и сферических координат в кратных интегралах.

$\det D\varphi$ **- якобиан.**

Определение Диффеоморфизма:

Диффеоморфизм — это обратимое гладкое отображение (функция) между областями в $\mathbb{R}^n$, у которого обратное тоже гладкое.

Преобразование меры Лебега при диффеоморфизме

Если $\varphi : U \to V$ — диффеоморфизм открытых множеств в $\mathbb{R}^n$, то для любой измеримой функции f на V:

$$\int_V f(y)\,dy = \int_U f(\varphi(x))|\det D\varphi(x)|\,dx.$$

Смысл:

Мера Лебега "растягивается" под действием φ с множителем $|\det D\varphi|$. Это обобщение замены переменных в интеграле на многомерный случай.

Замена переменных в интеграле Лебега

$U, V \subseteq \mathbb{R}^n$ - открытые; $\varphi : U \to V$ - C^1-диффеоморфизм; $f : V \to \mathbb{R}$ - μ-интегрируема

$$\int_V f\,d\mu = \int_U (f \circ \varphi) \cdot |\det D\varphi|\,d\mu$$

Смысл:

Интеграл сохраняется, если учитывать "искажение" объема под действием φ. Якобиан корректирует меру, компенсируя деформацию области.

Полярные координаты ($\mathbb{R}^2$)

Определение: $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, мера: $dxdy = r\,drd\theta$.
Смысл: Переход от декартовых координат к радиусу и углу. Множитель r возникает из якобиана, учитывая "растяжение" при удалении от центра.

Цилиндрические координаты ($\mathbb{R}^3$)

Определение: $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, $z = z$, мера: $dxdydz = r\,drd\theta dz$.
Смысл: Комбинация полярных в плоскости и линейной по z. Множитель r аналогичен двумерному случаю, сохраняя объемные искажения.

Сферические координаты ($\mathbb{R}^3$)

Определение: $x = r\sin\theta\cos\phi$, $y = r\sin\theta\sin\phi$, $z = r\cos\theta$, мера: $dxdydz = r^2\sin\theta\,drd\theta d\phi$.
Смысл: Учет радиуса и двух углов. Множитель $r^2\sin\theta$ отражает "растяжение" в трех измерениях, особенно у полюсов ($\theta = 0, \pi$).