1. Свойства интегралов от неотрицательных функций (в т.ч. теорема Леви для рядов).

1. Основные свойства

Монотонность

Если $0 \leq f(x) \leq g(x)$ п.в. на X, то:

$$\int_X f\,d\mu \leq \int_X g\,d\mu.$$

Линейность

Для $a, b \geq 0$:

$$\int_X (af + bg)\,d\mu = a\int_X f\,d\mu + b\int_X g\,d\mu.$$

Аддитивность по области

Если $A \cap B = \emptyset$, то:

$$\int_{A\cup B} f\,d\mu = \int_A f\,d\mu + \int_B f\,d\mu.$$

Невозрастание меры

Если $A \subseteq B$, то:

$$\int_A f\,d\mu \leq \int_B f\,d\mu.$$

2. Теорема Леви для рядов

Если $f_k \geq 0$ и измеримы, то:

$$\int_E \sum_{k=1}^{\infty} f_k\,d\mu = \sum_{k=1}^{\infty} \int_E f_k\,d\mu.$$

2. Неравенство Чебышева

Суммируемая функция $f \in L(E, \mu)$

Определение

Функция `f` называется суммируемой на `E` (пишут `f ∈ L(E, μ)`), если:

$$\int_E |f| \, d\mu < +\infty$$

Свойство

Если `f` суммируема, то она конечна почти всюду на `E`.

Измеримая функция $f \in S(E)$

$S(E)$ — это множество всех измеримых функций $f : E \to \mathbb{R}$, принимающих конечное число значений.

$$S(E) = \{f \text{ измерима} \mid f(E) = \{c_1, \ldots, c_n\}, \, c_i \in \mathbb{R}, \, n < \infty\}$$

Формулировка неравенства Чебышева

Для `f ∈ S(E)` (классу измеримых функций), `t > 0`:

$$\mu\{x \in E : |f(x)| \geq t\} \leq \frac{1}{t} \int_E |f| \, d\mu$$

Следствие 1

Если $f \in L(E, \mu)$, то $\mu(\{x \in E : |f(x)| = +\infty\}) = 0$.

Следствие 2

Если $f \geq 0$ и $\int_E f d\mu = 0$, то $f = 0$ почти всюду на E.

3. Приближение интеграла интегралом по множеству конечной меры

Определение

Пусть $f \in L(E, \mu)$, где $\mu E = +\infty$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует подмножество $E_\varepsilon \subset E$ такое, что:

1. $\mu E_\varepsilon < +\infty$ (множество E_ε имеет конечную меру),
2. $\int_{E \setminus E_\varepsilon} |f| \, d\mu < \varepsilon$ (интеграл от $|f|$ по дополнению $E \setminus E_\varepsilon$ меньше ε).

Счетная аддитивность интеграла

Если $E = \bigcup_k E_k$, где E_k измеримы и попарно не пересекаются, и интеграл $\int_E f \, d\mu$ существует, то:

$$\int_E f \, d\mu = \sum_k \int_{E_k} f \, d\mu.$$

4. Теорема Фату

liminf

$$\liminf_{n \to \infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k$$

Фату для неотрицательных измеримых функций

Пусть $f_n \in S(E)$, $f_n \geq 0$. Тогда:

$$\int_E \liminf_{n \to \infty} f_n \, d\mu \leq \liminf_{n \to \infty} \int_E f_n \, d\mu.$$

Фату для поточечного предела

Пусть $f_n, f \in S(E)$, $f_n \geq 0$, $f_n \to f$ почти везде на E. Тогда:

$$\int_E f \, d\mu \leq \liminf_{n \to \infty} \int_E f_n \, d\mu.$$

5. Теорема Лебега о мажорированной сходимости

Мажоранта

Функция (или число), которая доминирует (превосходит) другую функцию (или последовательность) на заданном множестве.

Теорема Лебега

Если последовательность измеримых функций f_n сходится к f почти везде на E, и существует суммируемая мажоранта $\phi \in L(E, \mu)$ (т.е. $|f_n| \leq \phi$ почти везде), то предельный переход под знаком интеграла корректен:

$$\lim_{n\to\infty} \int_E f_n \, d\mu = \int_E f \, d\mu.$$

Следствие Теоремы Лебега (для множеств конечной меры)

Если $\mu(E) < +\infty$, f_n равномерно ограничены ($|f_n| \leq K$) и $f_n \to f$ почти везде, то

$$\lim_{n\to\infty} \int_E f_n \, d\mu = \int_E f \, d\mu.$$

Ограниченность семейства функций

Свойство семейства вещественных функций $\{f_a\}_{a\in A}$, где A — некоторое множество индексов, X — произвольное множество. Означает, что все функции семейства ограничены одной константой C:

$$\exists C > 0 \quad \forall a \in A \quad \forall x \in X \quad |f_a(x)| < C.$$

6.Интеграл Лебега от функции непрерывной на замкнутом промежутке; сравнение несобственого интеграла с интегралом Лебега.

Определение интеграла Римана

Функция $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ интегрируема по Риману, если существует предел интегральных сумм $\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$ при стремлении диаметра разбиения к нулю.

Критерий Лебега интегрируемости по Риману

Функция $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ интегрируема по Риману ($f \in R[a, b]$), если она ограничена и множество её точек разрыва имеет нулевую меру.

Сравнение интегралов Римана и Лебега

Если $f \in R[a,b]$, то $f \in L[a,b]$, и значения интегралов совпадают: $(L)\int_a^b f = (R)\int_a^b f$.

Несобственный интеграл и интеграл Лебега

Несобственный интеграл Римана на $[a,c]$ — предел $\lim_{b\to a}\int_b^c f(t)dt$. Он абсолютно сходится, если сходится $\int_a^c |f(t)|dt$.

7. Вычисление меры множества по мерам сечений

Теорема о связи меры множества с мерами его сечений

1. Измеримость сечений

Для множества $E \subseteq \mathbb{R}^{n+m}$ и фиксированного $x \in \mathbb{R}^n$ сечение определяется как:

$$E(x) = \{y \in \mathbb{R}^m \mid (x,y) \in E\}$$

Если E - измеримо по Лебегу в $\mathbb{R}^{n+m}$, то для почти всех $x \in \mathbb{R}^n$ сечения $E(x)$ измеримы в $\mathbb{R}^m$

2. Измеримость функции мер

Для измеримого множества $E \subseteq \mathbb{R}^{n+m}$ функция меры сечений определяется как:

$$f_E : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad f_E(x) = \mu(E(x))$$

$E(x) = \{y \in \mathbb{R}^m \mid (x,y) \in E\}$ - сечение множества
μ - мера Лебега в $\mathbb{R}^m$

3. Формула меры

Мера $\mu_{n+m}(E)$ — это стандартная мера Лебега на $\mathbb{R}^{n+m}$.

$$\mu_{n+m}(E) = \int_{\mathbb{R}^n} \mu_m(E(x))\,dx.$$

Измеримость по Лебегу

Множество $E \subset \mathbb{R}^n$ измеримо по Лебеге, если для любого $\varepsilon > 0$ существуют:
Открытое множество $U \supset E$ и замкнутое $F \subset E$, такие что $\mu_n(U \setminus F) < \varepsilon$.

8. Мера декартова произведения и мера Лебега как произведение мер

Мера декартова произведения

$\mathcal{A}_n$ - σ-алгебра измеримых по Лебегу множеств в $\mathbb{R}^n$
Для измеримых множеств $A \in \mathcal{A}_n, B \in \mathcal{A}_m$ их декартово произведение $A \times B$ измеримо в $\mathbb{R}^{n+m}$, и его мера равна произведению мер:

$$\mu_{n+m}(A \times B) = \mu_n(A) \cdot \mu_m(B).$$

Мера Лебега как произведение мер

Мера Лебега на $\mathbb{R}^n$ — это n-кратное произведение одномерных мер Лебега:

$$\lambda^n = \underbrace{\lambda^1 \times \lambda^1 \times \cdots \times \lambda^1}_{n \text{ раз}}.$$

9. Мера графика и подграфика

График функции (Гf)

Определение:

Для $f : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ график — множество точек $(x, y) \in \mathbb{R}^{n+1}$, где $y = f(x)$.

Подграфик функции (Qf)

Определение:

Для $f : E \subset \mathbb{R}^n \to [0, +\infty]$ подграфик — множество точек (x, y), где $0 \leq y \leq f(x)$.

Мера графика

Если $E \subset \mathbb{R}^n$, $f \in S(E)$ (измерима по Лебегу), то $\Gamma f \in \mathcal{A}_{n+1}$ и $\mu_{n+1}(\Gamma f) = 0$.

Мера подграфика

Пусть $E \in \mathcal{A}_n$, $f : E \to [0, +\infty]$. Тогда:

$$Q_f \text{ измерим} \Leftrightarrow f \text{ измерима}, \text{ и } \mu_{n+1}(Q_f) = \int_E f\, d\mu_n.$$

Доп:

$\mathcal{A}_n$ - σ-алгебра измеримых по Лебегу множеств в $\mathbb{R}^n$

10. Теорема Тонелли и Фубини

Теорема Тонелли (для неотрицательных функций)

Пусть $E \subset \mathbb{R}^{n+m}$, $f \in S(E \to [0, +\infty])$. Тогда справедливы следующие утверждения.

1. При почти всех $x \in \mathbb{R}^n$ $f(x, \cdot) \in S(E(x))$.
2. Функция I, заданная формулой $I(x) = \int_{E(x)} f(x, y) dy$, измерима на $\mathbb{R}^n$.
3. $\int_E f d\mu_{n+m} = \int_{\mathbb{R}^n} I(x) dx$.

Теорема Фубини (для суммируемых функций)

Пусть $E \subset \mathbb{R}^{n+m}$, $f \in L(E)$. Тогда справедливы следующие утверждения.

1. При почти всех $x \in \mathbb{R}^n$ $f(x, \cdot) \in L(E(x))$.
2. Функция I, заданная формулой $I(x) = \int_{E(x)} f(x, y) dy$, суммируема на $\mathbb{R}^n$.
3. $\int_E f d\mu_{n+m} = \int_{\mathbb{R}^n} I(x) dx$.

Основное отличие теорем

Теорема Тонелли применяется к неотрицательным измеримым функциям $(f \geq 0)$, но не требует их суммируемости. Теорема Фубини применяется к функциям произвольного знака, но требует их суммируемости на E $(f \in L(E))$. При выполнении условий Фубини справедливо равенство повторных интегралов.

Интегральная функцией сечения $I(x)$

Функция, определяемая как $I(x) = \int_{E(x)} f(x, y)\, dy$, где $E(x) = \{y \in \mathbb{R}^m : (x, y) \in E\}$ — сечение множества E при фиксированном x.

11. Интеграл Эйлера-Пуассона

Определение:

Интеграл Эйлера-Пуассона — это несобственный интеграл вида $I = \int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx$, значение которого равно $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Ключевые шаги:

1. Замена $I^2 = \iint e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy$.
2. Переход к полярным координатам: $\int_0^{+\infty} \int_0^{\pi/2} re^{-r^2}\,d\varphi\,dr$.
3. Вычисление: $\frac{\pi}{4}$, откуда $I = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

12. Мера n-мерного шара и сферы

Определение:

Мера Лебега μ_n n-мерного шара $\overline{B}_n(a, R) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x - a| \le R\}$ вычисляется по формуле:

$$\mu_n \overline{B}_n(a, R) = \frac{2^n}{n!} \left(\frac{\pi}{2}\right)^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} R^n.$$

Примеры:

- $\mu_2 \overline{B}_2(a, R) = \pi R^2$ (круг),
- $\mu_3 \overline{B}_3(a, R) = \frac{4}{3}\pi R^3$ (шар),
- $\mu_4 \overline{B}_4(a, R) = \frac{\pi^2}{2} R^4$.

13. Замена переменной в интеграле, образ и плотность меры

Общая схема замены переменной

Для пространств с мерами (X, A, μ), (Y, B, v) и измеримой функции $h \geq 0$, если $vB = \int_{\Phi^{-1}(B)} h \, d\mu$ и f измерима на Y, то:

$$\int_Y f \, dv = \int_X (f \circ \Phi) h \, d\mu.$$

Образ меры

Если $h \equiv 1$, то $v = \Phi(\mu)$ (образ меры μ), и:

$$\int_Y f \, dv = \int_X f \circ \Phi \, d\mu.$$

Плотность меры

Если $vA = \int_A h \, d\mu$, то h — плотность v относительно μ, и:

$$\int_X f \, dv = \int_X fh \, d\mu.$$

Доп

Φ – это измеримое отображение (функция), которое "переводит" точки из пространства X в пространство Y.
h – весовая функция, это неотрицательная измеримая функция, которая определяет, как мера μ на X преобразуется в меру v на Y.

14. Естественная мера на кривой и на поверхности. Криволинейный и поверхностный интегралыпервого рода для элементарных поверхностей

1. Мера, порожденная кривой

Пусть $\gamma : \langle a, b \rangle \to \mathbb{R}^n$ - кривая. Для множества B определим $\mathcal{A} = \{B : \gamma^{-1}(B) \text{ измеримо}\}$ (σ -алгебра). Мера m_γ на кривой задается формулой:

$$m_\gamma(B) = \int_{\gamma^{-1}(B)} \|\gamma'(t)\| dt$$

2. Мера, порожденная поверхностью

Пусть $\varphi : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ - параметризация поверхности (φ гладкая). Для множества B мера m_S на поверхности задается формулой:

$$m_S(B) = \int_{\varphi^{-1}(B)} \|\varphi_u \times \varphi_v\| du dv$$

3. Криволинейный интеграл первого рода

Пусть $\gamma : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}^n$ - кривая, $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $x = \gamma(t)$. Интеграл функции f по кривой γ в множестве A определяется как:

$$\int_A f d\gamma = \int_{\gamma^{-1}(A)} f(\gamma(t)) \cdot \|\gamma'(t)\| dt$$

4. Поверхностный интеграл первого рода

Пусть S - поверхность, заданная параметризацией $\varphi : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $x = \varphi(u)$, $A \subseteq \mathbb{R}^3$. Для функции f, определенной на поверхности, интеграл по множеству A задается формулой:

$$\int_A f dS = \int_{\varphi^{-1}(A)} f(\varphi(u)) \cdot \|\varphi_u \times \varphi_v\| du dv$$

15. Преобразование меры Лебега при диффеоморфизме. Замена переменной в интеграле Лебега. Использование полярных, цилиндрических и сферических координат в кратных интегралах.

Диффеоморфизм

Пусть $G, V \subset \mathbb{R}^n$ — открытые множества. Отображение $\Phi : G \to V$ называется *диффеоморфизмом*, если:

- Φ биективно
- $\Phi \in C^{(1)}(G \to V)$
- $\Phi^{-1} \in C^{(1)}(V \to G)$.
  Якобиан $\det \Phi' \neq 0$ во всех точках G.

Преобразование меры Лебега

Пусть $G \subset \mathbb{R}^n$ открыто, $\Phi : G \to \mathbb{R}^n$ — диффеоморфизм. Тогда для $E \in \mathcal{A}_n(G)$:

$$\mu(\Phi(E)) = \int_E |\det \Phi'(x)| d\mu.$$

Замена переменных в интеграле Лебега

Пусть $G \subset \mathbb{R}^n$ открыто, $\Phi : G \to \mathbb{R}^n$ — диффеоморфизм, $E \in \mathcal{A}_n(G)$, $f \in \mathcal{S}(\Phi(E))$. Тогда:

$$\int_{\Phi(E)} f(y) d\mu(y) = \int_E f(\Phi(x)) \cdot |\det \Phi'(x)| d\mu(x).$$

Равенство выполняется, если существует один из интегралов.

Классические замены координат

Полярные ($\mathbb{R}^2$): $x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi, \quad |\det \Phi'| = r$
Цилиндрические ($\mathbb{R}^3$): $x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi,\ z = h, \quad |\det \Phi'| = r$
Сферические ($\mathbb{R}^3$): $x = r\cos\varphi\cos\psi,\ y = r\sin\varphi\cos\psi,\ z = r\sin\psi, \quad |\det \Phi'| = r^2|\cos\psi|$

Доп:

$\det D\varphi$ - якобиан.

16. Мера Лебега-Стилтьеса и дискретная мера

Полукольцо ячеек

Полукольцо ячеек P_Δ — это семейство промежутков вида $[a, b)$ (или других типов: $(a, b]$, $[a, b]$, (a, b)), замкнутое относительно пересечения и таких, что разность двух ячеек представима в виде конечного объединения непересекающихся ячеек из P_Δ.

Мера Лебега-Стилтьеса

Мера μ_g на полукольце ячеек P_Δ, заданная через возрастающую непрерывную слева функцию g как $v_g[a, b] = g(b) - g(a)$, и стандартно распространённая на σ-алгебру A_g.

Дискретная мера Лебега-Стилтьеса

Для функции g со скачками h_k в точках a_k:

$$\mu_g(A) = \sum_{a_k \in A} h_k$$

где A — любое измеримое подмножество числовой прямой (например, интервал, отрезок или точечное множество).

Ключевая связь

Дискретная мера — частный случай меры Лебега-Стилтьеса, где g кусочно-постоянна со скачками в точках носителя. Это позволяет единообразно работать как с непрерывными, так и дискретными распределениями.

17. Интеграл Лебега-Стилтьеса по мере, порожденной абсолютно непрерывной функцией

1. Определение локально абсолютно непрерывной функции

Функция $g : \Delta \to \mathbb{R}$ называется локально абсолютно непрерывной на промежутке Δ ($g \in AC_{loc}(\Delta)$), если существует точка $x_0 \in \Delta$ и функция $h \in L_{loc}(\Delta)$ такие, что для всех $x \in \Delta$ выполняется:

$$g(x) = \int_{x_0}^{x} h d\mu + g(x_0).$$

2. Теорема об интеграле по абсолютно непрерывной функции

Пусть Δ — промежуток, $x_0 \in \Delta$, $h \in L_{loc}(\Delta)$, $h \geq 0$, $g(x) = \int_{x_0}^{x} h d\mu + g(x_0)$, $E \in A_1(\Delta)$ (измеримо по Лебегу), $f \in S(E)$ (измерима и знакопостоянна на E). Тогда:

$$\int_E f dg = \int_E f h d\mu,$$

причем если существует один из этих интегралов, то существует и другой, и они равны.

3. Следствие для гладкой функции (C¹-случай)

Пусть Δ — промежуток, $g \in C^{(1)}(\Delta)$ (непрерывно дифференцируема), $g' \geq 0$, $E \in A_1(\Delta)$, $f \in S(E)$. Тогда:

$$\int_E f dg = \int_E f g' d\mu,$$

причем если существует один из этих интегралов, то существует и другой, и они равны.

18. Формула Фруллани

Дано: $a, b > 0$, $f \in C(0; +\infty)$.

$$I(a,b) = \int_0^\infty (f(ax) - f(bx))\,dx$$

1. Если $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) \in \mathbb{R}$ (существует и конечен), то:

$$I(a,b) = -\left(\lim_{x\to 0^+} f(x)\right) \ln\frac{a}{b}$$

2. Если $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) \in \mathbb{R}$ и $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) \in \mathbb{R}$, то:

$$I(a,b) = \left(\lim_{x\to 0^+} f(x) - \lim_{x\to +\infty} f(x)\right) \ln\frac{b}{a}$$

3. Если $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) \in \mathbb{R}$ (существует и конечен), то:

$$I(a,b) = \left(\lim_{x\to +\infty} f(x)\right) \ln\frac{a}{b}$$

19. Локальное условие Лебега для интегралов зависящих от параметра. Равномерная сходимостьнесобственных интегралов. Признаки Вейерштрасса, Дирихле и Абеля равномерной сходимости несобственных интегралов

Локальное условие Лебега для интегралов, зависящих от параметра

Пусть функция $f(x,y)$ интегрируема по x на $[a, +\infty)$ при каждом $y \in Y$ и удовлетворяет условию:

$$\exists g(x) \in L^1([a,+\infty)) : |f(x,y)| \le g(x) \text{ для почти всех } x \text{ и всех } y \in Y$$

Тогда интеграл $\int_a^\infty f(x,y)dx$ сходится равномерно по $y \in Y$.

Равномерная сходимость несобственных интегралов

Интеграл $\int_a^{+\infty} f(x,y)dx$ сходится равномерно на множестве Y, если:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists A = A(\varepsilon) > a : \forall R > A, \forall y \in Y \Rightarrow \left| \int_R^{+\infty} f(x,y)dx \right| < \varepsilon$$

где R - это нижний предел интегрирования для остатка интеграла.

Критерий Коши равномерной сходимости

Интеграл $\int_a^\infty f(x,y)dx$ сходится равномерно на Y тогда и только тогда, когда:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists A > a : \forall R_1, R_2 > A, \forall y \in Y \Rightarrow \left| \int_{R_1}^{R_2} f(x,y)dx \right| < \varepsilon$$

где R_1, R_2 - Это произвольные точки на оси x, лежащие правее A.

Признак Вейерштрасса

Если $|f(x,y)| \leq g(x)$ для всех $x \geq a$, $y \in Y$ и $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ сходится, то $\int_a^{+\infty} f(x,y)dx$ сходится равномерно на Y.

Признак Дирихле

Пусть:

1. $\left| \int_a^R f(x,y)dx \right| \leq M$ для всех $R > a, y \in Y$
2. При каждом $y \in Y$ функция $g(x,y)$ монотонна по x
3. $g(x,y) \rightrightarrows 0$ при $x \to +\infty$ на Y

Тогда $\int_a^\infty f(x,y)g(x,y)dx$ сходится равномерно на Y ($\rightrightarrows$ это сходится равномерно).

Признак Абеля

Пусть:

1. $\int_a^\infty f(x,y)dx \rightrightarrows$ по y (сходится равномерно), при $x \to \infty$ на Y
2. $g(x,y)$ равномерно ограничена: $|g(x,y)| \leq M$ для всех $x \geq a, y \in Y$
3. При каждом $y \in Y$ функция $g(x,y)$ монотонна по x

Тогда $\int_a^{+\infty} f(x,y)g(x,y)dx \rightrightarrows$ на Y.

Доп:

$L^1(X)$ -пространство абсолютно интегрируемых функций на X (интеграл понимается в смысле Лебега):

$$L^1(X) = \left\{ f : X \to \mathbb{R} \,\middle|\, \int_X |f(x)|\,dx < +\infty \right\}$$

Y - произвольное множество, на котором определен параметр. $([c,d])$

20. Связь (равномерной) сходимости несобственного интеграла с (равномерной) сходимостью ряда из определенных интегралов.

Несобственный интеграл

$$I(y) = \int_a^\infty f(x,y)\,dx$$

Ряд из кусочных интегралов

$$\sum_{k=1}^\infty u_k(y) = \sum_{k=1}^\infty \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x,y)\,dx$$

Критерий равномерной сходимости

1. Интеграл → Ряд:
   Если $I(y)$ сходится равномерно, то для любого разбиения ряд $\sum u_k(y)$ сходится равномерно (так как "хвост" ряда соответствует "хвосту" интеграла).
2. Ряд → Интеграл:
   Если для какого-то разбиения ряд $\sum u_k(y)$ сходится равномерно, то $I(y)$ сходится равномерно (поскольку частичные суммы ряда совпадают с интегралами $\int_a^{x_N} f(x,y)\,dx$).

21. Предельный переход под знаком интеграла по параметру при условии Лебега, предельный переход

под знаком интеграла по параметру в случае равномерной сходимости.

Предельный переход при условии Лебега

Пусть (X, A, μ) — пространство с мерой, $\tilde{Y}$ — метрическое пространство, $Y \subset \tilde{Y}$, $f : X \times Y \to \mathbb{R}$, при всех $y \in Y$ $f(\cdot, y) \in L(X, \mu)$ (где y фиксирован) . Если при почти всех $x \in X$ $f(x, y) \underset{y \to y_0}{\longrightarrow} g(x)$, и существует $\Phi \in L(X, \mu)$ и окрестность V_{y_0}, такие что $|f(x, y)| \le \Phi(x)$ для почти всех x и $y \in V_{y_0} \cap Y$,

то $g \in L(X, \mu)$ и $\lim_{y \to y_0} \int_X f(x, y) d\mu(x) = \int_X g(x) d\mu(x) = \int_X \lim_{y \to y_0} f(x, y) d\mu(x)$.

Предельный переход при равномерной сходимости

Пусть (X, A, μ) — пространство с мерой, $\tilde{Y}$ — метрическое пространство, $Y \subset \tilde{Y}$, $\mu X < +\infty$, $f : X \times Y \to \mathbb{R}$, $f(\cdot, y) \in L(X, \mu)$, и $f(\cdot, y) \underset{y \to y_0}{\rightrightarrows} g$ (равномерно на X), y_0 - предельная точка:
Тогда $g \in L(X, \mu)$ и $\lim_{y \to y_0} \int_X f(x, y) d\mu(x) = \int_X g(x) d\mu(x) = \int_X \lim_{y \to y_0} f(x, y) d\mu(x)$.

Равномерная сходимость

Семейство $\{f(\cdot, y)\}_{y \in Y}$ равномерно сходится к g на X, если $\sup_{x \in X} |f(x, y) - g(x)| \underset{y \to y_0}{\longrightarrow} 0$.
Обозначение: $f(\cdot, y) \rightrightarrows g$.

22. Локальная непрерывность интеграла по параметру, глобальная непрерывность интеграла по параметру.

Локальная непрерывность интеграла по параметру в точке

Пусть (X, A, μ) — пространство с мерой, Y — метрическое пространство, $f : X \times Y \to \mathbb{R}$, при всех $y \in Y$ $f(\cdot, y) \in L(X, \mu)$, $y_0 \in Y$, при почти всех $x \in X$ функция $f(x, \cdot)$ непрерывна в точке y_0, и f удовлетворяет локальному условию Лебега в точке y_0 (т.е. существует окрестность V_{y_0} и функция $\Phi \in L(X, \mu)$ такие, что для почти всех $x \in X$ и всех $y \in V_{y_0} \cap Y$ выполняется $|f(x, y)| \le \Phi(x)$).
Тогда интеграл $I(y)$ непрерывен в точке y_0. $(I(y) = \int_X f(x, y)\, d\mu(x))$

Глобальная непрерывность интеграла по параметру на множестве

Пусть X — компакт в $\mathbb{R}^n$, μ — мера Лебега, Y — метрическое пространство, $f \in C(X \times Y)$. Тогда интеграл $I(y)$ принадлежит $C(Y)$ (т.е. непрерывен на Y). $(I(y) = \int_X f(x, y)\, d\mu(x))$

Различие

Оба результата (локальный и глобальный) опираются на идею контроля роста $f(x, y)$: в первом случае — через локальную мажоранту, во втором — через глобальную ограниченность, обеспечиваемую компактностью X.

Локальное условие Лебега и его роль

$\exists \Phi \in L(X, \mu), \exists V_{y_0}$: при почти всех $x \in X\ \forall y \in \dot{V}_{y_0} \cap Y\ |f(x, y)| \leq \Phi(x)$.

23: Правило Лейбница дифференцирования интеграла по параметру в случае абсолютной суммируемости

Условия применимости правила Лейбница

Пусть функция $f(x, \alpha)$ определена на $[a, b] \times [\alpha_1, \alpha_2]$, интегрируема по x на $[a, b]$ для любого $\alpha \in [\alpha_1, \alpha_2]$, и её частная производная $\frac{\partial f}{\partial \alpha}$ существует и абсолютно суммируема (т.е. $\int_a^b \left|\frac{\partial f}{\partial \alpha}\right| dx < \infty$). Тогда, то для $\alpha \in [\alpha_1, \alpha_2]$ справедливо:

$$\frac{d}{d\alpha} \left(\int_a^b f(x, \alpha)\, dx \right) = \int_a^b \frac{\partial f(x, \alpha)}{\partial \alpha}\, dx.$$

Важность абсолютной суммируемости и условий

Абсолютная суммируемость $\frac{\partial f}{\partial \alpha}$ (т.е. $\int_a^b \left|\frac{\partial f}{\partial \alpha}\right| dx < \infty$) обеспечивает равномерную сходимость интеграла, что позволяет применять теоремы о перестановке пределов. Без этого условия производная под интегралом может "вести себя плохо" — например, интеграл может расходиться или производная может не существовать. Абсолютная суммируемость — это способ "контролировать" поведение функции, чтобы все операции были законны.

Условия гарантируют, что интеграл можно "дифференцировать под знаком интеграла". Абсолютная суммируемость производной нужна, чтобы обеспечить равномерную сходимость и избежать проблем при перестановке операций дифференцирования и интегрирования.

24 Правило Лейбница дифференцирования интеграла по параметру в отсутствии абсолютной суммируемости. Интегрирование интеграла по параметру

1) Случай постоянного множества интегрирования

Пусть $(X, \mathbb{A}, \mu)$ — пространство с мерой, $Y = \langle c, d \rangle \subset \mathbb{R}$, $f : X \times Y \to \mathbb{R}$, при всех $y \in Y$ функция $f(\cdot, y) \in L(X, \mu)$, при почти всех $x \in X$ функция $f(x, \cdot)$ дифференцируема на Y, $y_0 \in Y$, и производная f'_y удовлетворяет локальному условию Лебега в точке y_0. Тогда интеграл $I(y) = \int_X f(x, y) d\mu(x)$ дифференцируем в точке y_0 и выполняется равенство:

$$I'(y_0) = \int_X f'_y(x, y_0) d\mu(x).$$

2) Случай переменного множества интегрирования

Пусть функции $f(x, y)$ и её частная производная $\frac{\partial f}{\partial y}$ интегрируемы на прямоугольнике $[\alpha, \beta] \times [c, d]$, где отрезок $[\alpha, \beta]$ содержит все значения функций $a(y)$, $b(y)$, а функции $a(y)$, $b(y)$ дифференцируемы на $[c, d]$. Тогда интеграл $I(y) = \int_{a(y)}^{b(y)} f(x, y) dx$ дифференцируем по y на $[c, d]$ и справедлива формула:

$$\frac{d}{dy} I(y) = f(b(y), y) \cdot b'(y) - f(a(y), y) \cdot a'(y) + \int_{a(y)}^{b(y)} \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) dx.$$

3) Отсутствие абсолютной суммируемости

Интегрирование интеграла по параметру не требует абсолютной суммируемости подынтегральной функции или её производной в случае постоянных пределов интегрирования. Достаточно выполнения локального условия Лебега на производную f'_y в точке дифференцирования y_0.

25. Свойства Г-функции Эйлера: определение, формула приведения, значения в натуральных и полуцелых точках, выражение для k-й производной, геометрические свойства.

Определение и базовые значения

Г-функция Эйлера задаётся интегралом:

$$\Gamma(p) = \int_0^{+\infty} x^{p-1} e^{-x}\,dx, \quad p > 0.$$

Формула приведения и значения в специальных точках

Формула приведения:

$$\Gamma(p+1) = p\Gamma(p).$$

Значения в целых и полуцелых точках:

$$\Gamma(n+1) = n!, \quad \Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{(2n-1)!!}{2^n}\sqrt{\pi}, \quad n \in \mathbb{Z}_+.$$

Производные Г-функции:

$$\Gamma^{(n)}(p) = \int_0^{+\infty} x^{p-1} e^{-x} \ln^n x\,dx.$$

Геометрические свойства:

1. $\Gamma(p)$ строго выпукла вниз на $(0, +\infty)$.
2. Имеет единственный минимум на $(1, 2)$.
3. $\Gamma(p) \sim \frac{1}{p}$ при $p \to 0$ и $\Gamma(p) \to +\infty$ при $p \to +\infty$.

26. Связь между Г- и В-функцией

Определение В-функции (бета-функции Эйлера)

В-функция определяется как интеграл:

$$B(p, q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx, \quad p, q > 0.$$

Связь между Г- и В-функциями

Для любых $p, q > 0$ выполняется соотношение:

$$B(p, q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}.$$

27. Формула Эйлера-Гаусса.

Формулировка формулы Эйлера-Гаусса

$$\Gamma(p) = \lim_{n\to\infty} \frac{n^p \cdot n!}{p(p+1)(p+2)\cdot\ldots\cdot(p+n)}, \quad p \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}_-.$$

- $\Gamma(p)$ — гамма-функция, билет 25
- $n!$ — факториал числа n.
- n^p — степенная функция.
- Знаменатель $p(p+1)...(p+n)$ — произведение линейных множителей.

Условия применимости

Область определения:

Формула справедлива для всех $p \in \mathbb{R}$, кроме отрицательных целых чисел ($p \notin \mathbb{Z}_-$), так как при таких p знаменатель обращается в ноль для некоторого n.

Связь с факториалом:

При целых положительных $p = m \in \mathbb{N}$ формула сводится к $\Gamma(m) = (m-1)!$, согласуясь с классическим определением.

28. Теорема о разложении функции в обобщенный степенной ряд. Ряды Лорана

Определение ряда Лорана

Ряд вида $\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k(z-z_0)^k$, где $c_k, z, z_0 \in \mathbb{C}$, называется рядом Лорана. Числа c_k называются его коэффициентами, а z_0 — центром ряда.

Структура ряда Лорана

Главная часть ряда Лорана определяется как $\sum_{k=-\infty}^{-1} c_k(z-z_0)^k$. Правильная (регулярная) часть определяется как $\sum_{k=0}^{\infty} c_k(z-z_0)^k$. Ряд сходится тогда и только тогда, когда сходятся обе части.

Теорема Лорана о разложении

Пусть $z_0 \in \mathbb{C}$, $0 \le r < R \le +\infty$, $f \in \mathcal{A}(K_{r,R}(z_0))$. Тогда f раскладывается в кольце $K_{r,R}(z_0)$ в ряд Лорана: $f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k(z-z_0)^k$ для $r < |z-z_0| < R$.

4. Единственность коэффициентов Лорана

Пусть $0 \le r < R \le +\infty$ и $f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k(z-z_0)^k$ при $r < |z-z_0| < R$. Тогда коэффициенты c_k определяются единственным образом по формуле:

$$c_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_\rho} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+1}} d\zeta,$$

где $\rho \in (r, R)$, $\gamma_\rho = \gamma_{\rho, z_0}$ (окружность $|\zeta - z_0| = \rho$).

29. Неравенства Коши для коэффициентов рядов Тейлора и Лорана

Неравенство Коши для коэффициентов степенного ряда (Тейлора)

Пусть $z_0 \in \mathbb{C}$, $R \in (0, +\infty]$, и функция f аналитична в круге $|z-z_0| < R$:

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(z-z_0)^k.$$

Тогда для любого $\rho \in (0, R)$ и всех $k \in \mathbb{Z}_+$ (т.е. $k = 0, 1, 2, \ldots$) выполняется:

$$|c_k| \le \frac{M_f(\rho)}{\rho^k}, \quad \text{где} \quad M_f(\rho) = \max_{|\zeta - z_0| = \rho} |f(\zeta)|.$$

Неравенство Коши для коэффициентов ряда Лорана

Пусть $z_0 \in \mathbb{C}$, $0 \le r < R \le +\infty$, и функция f аналитична в кольце $r < |z-z_0| < R$:

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k (z - z_0)^k.$$

Тогда для любого $\rho \in (r, R)$ и всех $k \in \mathbb{Z}$ (т.е. $k = \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots$) выполняется:

$$|c_k| \leq \frac{M_f(\rho)}{\rho^k}, \quad \text{где} \quad M_f(\rho) = \max_{|\zeta - z_0| = \rho} |f(\zeta)|.$$

Обозначения

- z_0: центр разложения
- R: радиус сходимости (Тейлор) / внешний радиус кольца (Лоран)
- r: внутренний радиус кольца (Лоран)
- ρ: радиус выбранной окружности ($r < \rho < R$)
- ζ: точка на окружности $|\zeta - z_0| = \rho$
- c_k: коэффициенты ряда
- $M_f(\rho)$: $\max |f|$ на окружности радиуса ρ
- k: индекс коэффициента (≥ 0 для Тейлора, $\in \mathbb{Z}$ для Лорана)

30. Изолированные особые точки аналитических функций, их типы. Характеризация устранимой особой точки посредством лорановского разложения

Определение изолированной особой точки

Пусть $z_0 \in \mathbb{C}$, функция f голоморфна по крайней мере в проколотой окрестности $\dot{V}(z_0)$. Тогда z_0 называется изолированной особой точкой однозначного характера функции f.

Классификация изолированных особых точек

Выделяют три типа z_0 :

1. Устранимая особая точка, если $\exists$ конечный предел $\lim_{z \to z_0} f(z)$.
2. Полюс, если $\lim_{z \to z_0} f(z) = \infty$.
3. Существенно особая точка, если $\nexists$ ни конечного, ни бесконечного предела $\lim_{z \to z_0} f(z)$.

Характеризация устранимой особенности

Пусть $z_0 \in \mathbb{C}$, f голоморфна в $\dot{V}(z_0)$. Эквивалентны:

1. z_0 — устранимая особая точка f.
2. f ограничена в некоторой проколотой окрестности $\dot{V}(z_0)$.
3. f аналитически продолжима в z_0 (т.е. $\exists g$ голоморфная в $V(z_0)$ с $g \equiv f$ в $\dot{V}(z_0)$).
4. В главной части ряда Лорана f в z_0 все коэффициенты при $(z - z_0)^k$ ($k < 0$) равны нулю.

Доп:

Функция $f : D \to \mathbb{C}$ называется голоморфной в области $D \subseteq \mathbb{C}$, если она комплексно-дифференцируема в каждой точке D.

31. Специфика лорановских разложений в окрестности полюса и существенно особой точки

Характеристика полюсов (Теорема 3)

Пусть $z_0 \in \mathbb{C}$, f аналитична в проколотой окрестности V_{z_0} ($f \in A(V_{z_0})$). Тогда эквивалентны:

1. z_0 — полюс функции f.
2. Существуют номер $m \in \mathbb{N}$ и функция $\varphi \in A(V_{z_0})$, $\varphi(z_0) \neq 0$, такие что $f(z) = \frac{\varphi(z)}{(z-z_0)^m}$ для всех $z \in V_{z_0}$.
3. В главной части ряда Лорана функции f с центром в z_0 лишь конечное число коэффициентов отлично от нуля.

Характеристика существенно особых точек (Следствие 1)

Пусть $z_0 \in \mathbb{C}$, f аналитична в проколотой окрестности V_{z_0} ($f \in A(V_{z_0})$). Тогда эквивалентны:

1. z_0 — существенно особая точка функции f.
2. В главной части ряда Лорана функции f с центром в z_0 бесконечно много коэффициентов отлично от нуля.

32. Теорема Сохоцкого

Формулировка теоремы

Пусть $f \in A(\dot{V}_\delta(z_0))$; z_0 — существенно особая точка f. Тогда для любого $A \in \mathbb{C}$ существует последовательность $\{z_n\}$, такая что $z_n \in V_\delta(z_0)$, $z_n \to z_0$, $f(z_n) \to A$.

Обозначения

1. $A(\dot{V}_\delta(z_0))$ — класс функций, аналитических в проколотой окрестности $\dot{V}_\delta(z_0) = \{z : 0 < |z - z_0| < \delta\}$ точки z_0.
2. $z_n \in V_\delta(z_0)$ — последовательность точек, лежащих в окрестности $|z - z_0| < \delta$.
3. $z_n \to z_0$, $f(z_n) \to A$ — последовательность сходится к особой точке z_0, а значения функции в этих точках сходятся к A.

33. Два определения вычета. Теорема Коши о вычетах. Теорема о полной сумме вычетов.

Определения вычета в конечной точке и на бесконечности

1. Пусть $z_0 \in \mathbb{C}$, $f \in \mathcal{A}(\dot{V}_{z_0})$. Коэффициент c_{-1} в разложении f в ряд Лорана

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k (z - z_0)^k$$

называется *вычетом* функции f в точке z_0 и обозначается $\operatorname{res}_{z_0} f$.

2. Пусть $f \in \mathcal{A}(\dot{V}_\infty)$. *Вычетом* функции f в точке ∞ называется коэффициент c_1 в разложении f в ряд Лорана, взятый с противоположным знаком:

$$\operatorname{res}_\infty f = -c_1.$$

Теорема Коши о вычетах

Пусть D — область в $\mathbb{C}$, $E \subset D$, $f \in \mathcal{A}(D \setminus E)$, E — множество изолированных особых точек f, G — ограниченная область с ориентированной границей, $\overline{G} \subset D$, $\partial G \cap E = \emptyset$. Тогда

$$\int_{\partial G} f(z) dz = 2\pi i \sum_{z_k \in G \cap E} \operatorname{res}_{z_k} f.$$

Теорема о полной сумме вычетов

Пусть $E \subset \mathbb{C}$, $f \in \mathcal{A}(\mathbb{C} \setminus E)$, $E \cup \{\infty\}$ — множество изолированных особых точек f. Тогда

$$\sum_{z_k \in E \cup \{\infty\}} \operatorname{res}_{z_k} f = 0.$$

34. Приемы отыскания вычетов

Вычет в устранимой особой точке

Если z_0 — устранимая особая точка функции f, то вычет в этой точке равен нулю:

$$\operatorname{res}_{z_0} f = 0.$$

Вычет в простом полюсе

Пусть z_0 — простой полюс функции f. Тогда вычет вычисляется по формулам:

1. $\operatorname{res}_{z_0} f = \lim_{z \to z_0} (z - z_0) f(z)$.
2. Если $f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$, где P, Q голоморфны в окрестности z_0, $P(z_0) \neq 0$, $Q(z_0) = 0$, $Q'(z_0) \neq 0$, то:

$$\operatorname{res}_{z_0} f = \frac{P(z_0)}{Q'(z_0)}.$$

Вычет в полюсе кратности m

Пусть z_0 — полюс функции f кратности m. Тогда вычет равен:

$$\operatorname{res}_{z_0} f = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \to z_0} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} \left[(z - z_0)^m f(z) \right]$$

или эквивалентно:

$$\operatorname{res}_{z_0} f = \frac{1}{(m-1)!} \left. \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} \left[(z - z_0)^m f(z) \right] \right|_{z = z_0}.$$

Определение полюса кратности n

Точка z_0 называется полюсом кратности n ($n \in \mathbb{N}$), если:

1. $f(z)$ представима в виде $f(z) = \frac{\phi(z)}{(z - z_0)^n}$, где $\phi(z)$ голоморфна в окрестности z_0 и $\phi(z_0) \neq 0$.
2. В разложении Лорана $f(z)$ в окрестности z_0 главная часть конечна и имеет вид $\sum_{k=-n}^{\infty} c_k (z - z_0)^k$ с $c_{-n} \neq 0$.

35. Вычисление тригонометрических интегралов с помощью вычетов

Основная идея метода

Интегралы вида $\int_0^{2\pi} R(\sin\varphi, \cos\varphi)d\varphi$, где $R(u, v)$ — рациональная функция двух переменных, вычисляются путём замены $z = e^{i\varphi}$ и применения теоремы о вычетах к полученному контурному интегралу по единичной окружности.

Замена переменных

Положим $z = e^{i\varphi}$. Тогда:

$$d\varphi = \frac{dz}{iz}, \quad \varphi : 0 \to 2\pi \iff z : |z| = 1 \text{ (против ч.с.)}$$
$$\sin\varphi = \frac{z - z^{-1}}{2i}, \quad \cos\varphi = \frac{z + z^{-1}}{2}$$

После подстановки интеграл преобразуется к виду:

$$\oint_{|z|=1} R\left(\frac{z - z^{-1}}{2i}, \frac{z + z^{-1}}{2}\right) \frac{dz}{iz} = \oint_{|z|=1} f(z)\frac{dz}{iz}$$

где $f(z)$ — рациональная функция от z, полученная после подстановки и упрощения.

Применение теоремы о вычетах

Искомый интеграл равен $2\pi i$ умноженной на сумму вычетов подынтегральной функции $\frac{f(z)}{iz}$ внутри единичного круга $|z| < 1$:

$$\int_0^{2\pi} R(\sin\varphi, \cos\varphi)d\varphi = 2\pi i \sum_{\substack{z_k \\ |z_k|<1}} \operatorname{Res}\left(\frac{f(z)}{iz}, z_k\right)$$

где z_k — особые точки (полюса) функции $\frac{f(z)}{iz}$, лежащие внутри $|z| < 1$.

36. Вычисление несобственных интегралов от рациональных функций с помощью вычетов

Условия и формула для интеграла рациональной функции по вещественной оси

Пусть $F(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ — рациональная дробь, где $\deg Q - \deg P \geq 2$, и $Q(x)$ не имеет нулей на вещественной оси $\mathbb{R}$. Тогда несобственный интеграл вычисляется по формуле:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F(x)dx = 2\pi i \sum_{\substack{\operatorname{Im} z_k > 0 \\ Q(z_k)=0}} \operatorname{res}_{z_k} F(z).$$

37. Лемма Жордана. Вычисление преобразований Фурье с помощью вычетов

Формулировка леммы Жордана

Пусть $\Delta \in (0, +\infty)$, функция f непрерывна в области $\{z : \operatorname{Im} z \geq 0,\ |z| \geq \Delta\}$, удовлетворяет условию $f(z) \to 0$ при $z \to \infty$ в этой области, и $C_R(t) = Re^{it}$, $t \in [0, \pi]$ — полуокружность в верхней полуплоскости. Тогда для любого $\lambda > 0$ выполняется предельное соотношение:

$$\int_{C_R} f(z)e^{i\lambda z}dz \underset{R\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Применение к вычислению преобразований Фурье

Для вычисления интегралов вида $\hat{f}(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{i\lambda x}dx$ ($\lambda > 0$) методом вычетов: 1) Рассмотреть комплексный интеграл $\oint_\Gamma f(z)e^{i\lambda z}dz$ по замкнутому контуру Γ, состоящему из отрезка $[-R, R]$ и полуокружности C_R в верхней полуплоскости; 2) Применить основную теорему о вычетах: $\oint_\Gamma = 2\pi i \sum \operatorname{res}$; 3) Перейти к пределу $R \to \infty$. В силу леммы Жордана интеграл по C_R стремится к нулю, поэтому:

$$\hat{f}(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{i\lambda x}dx = \lim_{R\to\infty} \oint_\Gamma f(z)e^{i\lambda z}dz = 2\pi i \sum \text{выч}_{z_k \in \mathbb{C}^+} f(z)e^{i\lambda z},$$

где сумма берется по всем вычетам функции $g(z) = f(z)e^{i\lambda z}$ в особых точках z_k, лежащих в верхней полуплоскости ($\operatorname{Im} z_k > 0$).

38. Вычисление несобственных интегралов от аналитических функций с мнимым периодом

Условия и формула для интеграла без экспоненты

Пусть функция $f(z)$ голоморфна в верхней полуплоскости $I^+ = \{z \mid \operatorname{Im} z \geq 0\}$ и на вещественной оси, за исключением конечного числа n полюсов, не лежащих на вещественной оси, и $\lim_{z \to \infty} z f(z) = 0$. Тогда:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Res}_{z=z_k} f(z)$$

Условия и формула для интеграла с экспонентой $e^{i\alpha x}$

Пусть функция $f(z)$ голоморфна в верхней полуплоскости $I^+ = \{z \mid \operatorname{Im} z \geq 0\}$ и на вещественной оси, за исключением конечного числа n полюсов, не лежащих на вещественной оси, $\lim_{z \to \infty} z f(z) = 0$ и $\alpha > 0$. Тогда:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{i\alpha x} dx = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Res}_{z=z_k} \left[f(z) e^{i\alpha z} \right]$$

39. Гладкие многообразия с краем (определение и примеры); отображение перехода, гладкость отображения перехода.

Определение гладкого многообразия с краем

Множество $M \subset \mathbb{R}^n$ называется главным k-мерным многообразием класса $C^{(r)}$ (или r-гладким), если для любой точки $x \in M$ существует окрестность V_x^M и регулярный гомеоморфизм $\varphi : \Pi_k \to V_x^M$ класса $C^{(r)}$, где Π_k — стандартный k-мерный куб $(-1,1)^k$ или полукуб $(-1,0] \times (-1,1)^{k-1}$.
Точка x называется краевой, если φ задан на полукубе, а множество таких точек образует край ∂M.

Примеры гладких многообразий

1. Открытое множество $G \subset \mathbb{R}^n$ — многообразие без края ($\partial G = \varnothing$), так как любая точка имеет кубическую окрестность (например, тождественная параметризация).
2. Кривые ($k = 1$) и гиперповерхности ($k = n - 1$) — частные случаи многообразий.

Отображение перехода и его гладкость

Пусть $M \in \mathbb{M}_{kn}^{(r)}, U, V$ — стандартные окрестности с параметризациями $\varphi : \Pi \to U$ и $\psi : \Pi' \to V$. Если $W = U \cap V \neq \varnothing$, то отображение $L = \psi^{-1} \circ \varphi : W_1 \to W_2$ (где $W_i = \varphi^{-1}(W)$) называется переходом между параметризациями и является биекцией.

Теорема (Регулярность и гладость перехода).

Отображение L принадлежит классу $C^{(r)}$ и является регулярным (его матрица Якоби невырождена).

40. Мера малого измеримого подмножества многообразия; независимость меры малого измеримогомножества от выбора параметризации; измеримое подмножество многообразия.

Мера малого измеримого подмножества

Пусть $M \in \mathbb{M}_{kn}^{(1)}, E \subset M$ — малое измеримое множество, содержащееся в стандартной окрестности U с параметризацией $\varphi : \mathbb{R}^k \to U$. Мера $\mu_M E$ определяется как:

$$\mu_M E = \int_{\varphi^{-1}(E)} \sqrt{D_\varphi} d\mu_k,$$

где $D_\varphi = \det \left(\left(\frac{\partial \varphi}{\partial u_i} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial u_j} \right)_{i,j=1}^{k} \right)$, а μ_k — мера Лебега в $\mathbb{R}^k$.

Независимость меры от параметризации

Пусть $E \subset M$ — малое измеримое множество, содержащееся в двух стандартных окрестностях U и V с параметризациями φ и ψ. Тогда меры, вычисленные через φ и ψ, совпадают:

$$\int_{\varphi^{-1}(E)} \sqrt{D_\varphi} d\mu_k = \int_{\psi^{-1}(E)} \sqrt{D_\psi} d\mu_k.$$

Измеримое подмножество многообразия

Пусть $M \in \mathbb{M}_{kn}^{(1)}$, $E \subset M$.

1. E называется *малым измеримым*, если $\exists$ стандартная окрестность $U \supset E$ с параметризацией φ, такая что $\varphi^{-1}(E)$ измеримо в $\mathbb{R}^k$.
2. E называется *измеримым*, если оно представимо в виде $E = \bigcup_\nu E_\nu$, где $\{E_\nu\}$ — не более чем счётное семейство дизъюнктных малых измеримых множеств.

41. Мера на многообразии. Интеграл первого рода на многообразии. Частные случаи интеграла I рода на многообразии: криволинейный и поверхностный, вычислительные формулы для них

Мера на многообразии μ_M

Пусть $M \in M_{kn}^{(1)}$, $E \in A_M$.

1. Если E малое, U — стандартная окрестность, $E \subset U$, φ — параметризация U, то $\mu_M E = \int_{\varphi^{-1}(E)} \sqrt{D_\varphi} d\mu_k$.
2. Если $E = \bigcup_\nu E_\nu$ (дизъюнктные малые измеримые множества), то $\mu_M E = \sum_\nu \mu_M E_\nu$.

Функция μ_M называется *мерой на многообразии* M.

Криволинейный интеграл первого рода

Пусть Γ — гладкая кривая ($k = 1$), заданная параметризацией $x = \gamma(t), t \in \langle a, b \rangle$. Тогда:

- Мера (длина) кривой:
  $\mu\Gamma = \int_a^b |\gamma'(t)| dt$.
- Криволинейный интеграл первого рода:
  $\int_\Gamma f d\mu_\Gamma = \int_a^b (f \circ \gamma)(t) \cdot |\gamma'(t)| dt$.
  Классическое обозначение: $\int_\Gamma f ds$, где ds — элемент длины дуги.

Поверхностный интеграл первого рода

Пусть S — гладкая поверхность ($k = n - 1$), заданная параметризацией $\varphi : G \subset \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}^n$. По формуле Вине–Коши:

$\sqrt{D_\varphi} = \sqrt{\sum_{j=1}^n (\det \varphi_j')^2} = |\mathcal{N}_\varphi|$,
где $\mathcal{N}_\varphi$ — вектор нормали к поверхности. Тогда:

- Мера (площадь) поверхности:
  $\mu S = \int_G |\mathcal{N}_\varphi| d\mu_{n-1}$.
- Поверхностный интеграл первого рода:
  $\int_S f d\mu_S = \int_G (f \circ \varphi) \cdot |\mathcal{N}_\varphi| d\mu_{n-1}$.

42. Ориентация многообразий. Понятия: одинаково ориентирующие параметризации, ориентация окрестностей, согласованные ориентации окрестностей, ориентированное многообразие, ориентируемое многообразие. Возможное количество ориентаций связного многообразия

Одинаково ориентирующие параметризации

Две параметризации φ и ψ стандартной окрестности U многообразия M называются согласованными (или одинаково ориентирующими), если для перехода $L : \Pi \to \Pi$ между ними якобиан $\det L' > 0$ на всей области Π. Если $\det L' < 0$, параметризации называются противоположно ориентирующими.

Ориентация окрестностей

Ориентация окрестности U — это выбор класса эквивалентности параметризаций, для которых переходы имеют положительный якобиан. Параметризации этого класса называются положительно ориентирующими, а остальные — отрицательно ориентирующими.

Согласованные ориентации окрестностей

Две ориентированные окрестности U и V называются согласованными, если либо их пересечение пусто, либо для любых положительно ориентирующих параметризаций φ (для U) и ψ (для V) переход L между ними имеет $\det L' > 0$ в области пересечения.

Ориентированное многообразие

Многообразие M называется ориентированным, если существует набор попарно согласованных ориентаций всех его стандартных окрестностей. Такой набор называется ориентацией многообразия.

Ориентируемое многообразие

Многообразие M называется ориентируемым, если существует хотя бы одна его ориентация (т.е. если его можно превратить в ориентированное многообразие выбором подходящих локальных ориентаций).

Количество ориентаций связного многообразия

Если многообразие M связно и ориентируемо, то оно имеет ровно две ориентации: исходную и противоположную (где во всех окрестностях выбран "обратный" класс параметризаций).

43. Понятие направления, лемма о существовании направлений

Кривая как одномерное многообразие

При $k = 1$ гладкое многообразие M в $\mathbb{R}^n$ называется кривой. Это означает, что локально кривая устроена как интервал числовой прямой.

Параметрическое задание кривой

Кривая Γ задаётся параметризацией $\gamma \in C^{(1)}((a, b) \to \mathbb{R}^n)$, где:

1. γ - инъективна (кроме, возможно, концов для замкнутых кривых)
2. γ регулярна ($\gamma'(t) \neq 0$ для всех t)
3. $\Gamma = \gamma((a, b))$

Определение направления на кривой

Пусть Γ — гладкая кривая в $\mathbb{R}^n$. Отображение $\tau \in C(\Gamma \to \mathbb{R}^n)$ называется *направлением* на Γ, если:

$$\forall x \in \Gamma \quad \tau(x) \in T_x\Gamma \quad \text{и} \quad |\tau(x)| = 1,$$

где $T_x\Gamma$ — касательное пространство к Γ в точке x.

Лемма о существовании двух направлений

На связной гладкой кривой Γ, заданной параметризацией γ (соотношения (12.6)), существуют ровно два направления:

$$\tau_{\pm} = \pm \frac{\gamma'}{|\gamma'|} \circ \gamma^{-1}.$$

(Для замкнутого пути γ под $\gamma^{-1}(\gamma(a))$ можно понимать как a, так и b).

44. Сторона поверхности, лемма о существовании стороны

Определение двусторонней поверхности и Стороны

Связная поверхность S в $\mathbb{R}^n$ называется *двусторонней*, если существует непрерывное отображение $\mathcal{N} \in C(S \to \mathbb{R}^n)$ (называемое *стороной* поверхности S), такое что для всех $x \in S$:

$$\mathcal{N}(x) \perp T_x S \quad \text{и} \quad |\mathcal{N}(x)| = 1.$$

Лемма о связи двусторонности и ориентируемости

Для того чтобы связная поверхность S была двусторонней, необходимо и достаточно, чтобы она была ориентируемой. При этом S имеет ровно две стороны.

Построение стороны через параметризацию

Если $\varphi : G \to U \subset S$ — параметризация стандартной окрестности U, то сторона U задаётся формулой:

$$\mathcal{N}_{\pm}(x) = \pm \frac{\mathcal{N}_\varphi}{|\mathcal{N}_\varphi|} \circ \varphi^{-1}(x),$$

где $\mathcal{N}_\varphi$ — векторное произведение частных производных:

$$\mathcal{N}_\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial u^1} \times \frac{\partial \varphi}{\partial u^2} \times \cdots \times \frac{\partial \varphi}{\partial u^{n-1}}.$$

45. Теорема о крае многообразия и его ориентации. Понятие ориентации края, согласованной с ориентацией многообразия. Пример согласованных ориентаций на поверхности и ограничивающей кривой.

Теорема о крае многообразия

Если M — k-мерное многообразие класса $C^{(r)}$, то его край ∂M является $(k-1)$-мерным многообразием класса $C^{(r)}$ без края.
Если M ориентируемо, то ∂M также ориентируемо.

Понятие ориентации края, согласованной с ориентацией многообразия

Ориентация края ∂M, заданная формулой $\tilde{\varphi}_x(\tilde{u}) = \varphi_x(0, \tilde{u})$ (где φ_x — параметризация M и $\tilde{u} \in \Pi_{k-1}$), называется индуцированной или согласованной с ориентацией M.

Пример согласованных ориентаций

Пусть $G \subset \mathbb{R}^2$ — область с гладкой границей S. Если G ориентирована естественным образом (якобиан > 0), то согласованная ориентация S задаётся касательным вектором τ, при котором G остаётся слева при обходе границы. Нормаль $\mathcal{N}$ направлена наружу.

Доп

$\Pi_{k-1} = (-1, 1)^{k-1}$ - это открытый $(k-1)$-мерный куб в пространстве параметров $\tilde{u} = (u_2, \ldots, u_k)$, используемый для параметризации края ∂M.

46. Полилинейные формы, кососимметрические формы - определения и элементарные свойства, внешнее произведение форм

Полилинейные формы

Пусть X, Y — векторные пространства над полем K, $p \in \mathbb{N}$. Отображение $F : X^p \to Y$ называется p-линейным, если оно линейно по каждому аргументу. Если $Y = K$, то F называется p-формой на X. Множество всех p-форм обозначается $\mathcal{F}_p(X)$. При $p = 0$ под 0-формами понимаются элементы Y.

Разложение по базису

Если $\dim X = n < +\infty$ и $e^1, \ldots, e^n$ — базис X, то для $F \in \mathcal{F}_p(X)$:

$$F = \sum_{i_1, \ldots, i_p = 1}^{n} a_{i_1, \ldots, i_p} \pi_{i_1} \otimes \ldots \otimes \pi_{i_p},$$

где π_i — проектор на i-ю координату, а коэффициенты $a_{i_1, \ldots, i_p} = F(e^{i_1}, \ldots, e^{i_p})$.

Кососимметрические формы

Форма $F \in \mathcal{F}_p(X)$ называется кососимметрической, если для любых двух аргументов:

$$F(x^1, \ldots, x^i, \ldots, x^j, \ldots, x^p) = -F(x^1, \ldots, x^j, \ldots, x^i, \ldots, x^p).$$

Множество таких форм обозначается $\mathcal{E}_p(X)$. При $p > n$ все формы нулевые.

Базис в $\mathcal{E}_p(X)$

Для $p \leq n$ форма F раскладывается как:

$$F = \sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_p \leq n} a_{i_1, \ldots, i_p} \pi_{i_1} \wedge \ldots \wedge \pi_{i_p},$$

где $\wedge$ — внешнее произведение, а $\pi_{i_1} \wedge \ldots \wedge \pi_{i_p}$ вычисляется через определитель матрицы из координат векторов.

Внешнее произведение форм

Для $F \in \mathcal{E}_p(X)$ и $G \in \mathcal{E}_q(X)$ их внешнее произведение $F \wedge G \in \mathcal{E}_{p+q}(X)$ определяется на базисных формах как:

$$(\pi_{i_1} \wedge \ldots \wedge \pi_{i_p}) \wedge (\pi_{j_1} \wedge \ldots \wedge \pi_{j_q}) = \pi_{i_1} \wedge \ldots \wedge \pi_{i_p} \wedge \pi_{j_1} \wedge \ldots \wedge \pi_{j_q},$$

а затем продолжается по линейности.

Формула для коэффициентов

Если F и G заданы в виде (12.19), то:

$$F \wedge G = \sum_{1 \leq i(j)_1 < \ldots < i(j)_p \leq n} a_{i_1, \ldots, i_p} b_{j_1, \ldots, j_q} \pi_{i_1} \wedge \ldots \wedge \pi_{i_p} \wedge \pi_{j_1} \wedge \ldots \wedge \pi_{j_q}.$$

47. Дифференциальные формы; координатное представление дифференциальных форм. Внешнее дифференцирование дифференциальных форм

Определение дифференциальной формы

Пусть $G \subset \mathbb{R}^n$, $p \in \mathbb{N}$. Дифференциальной формой степени p (p-формой) на G называется функция $\omega : G \times (\mathbb{R}^n)^p \to \mathbb{R}$, такая что для всех $x \in G$ функция $\omega(x;\cdot)$ принадлежит пространству $\mathcal{E}_p(\mathbb{R}^n)$ (является кососимметрической p-линейной формой). 0-формой называется функция $f : G \to \mathbb{R}$.

Координатное представление дифференциальных форм

Пусть $p \in \mathbb{N}$. Дифференциальная p-форма ω в открытом множестве $G \subset \mathbb{R}^n$ может быть записана в виде:

$$\omega = \sum_{1 \le i_1 < \dots < i_p \le n} a_{i_1 \dots i_p}(x) dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_p},$$

где $a_{i_1 \dots i_p} : G \to \mathbb{R}$ — коэффициенты формы, а $dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_p}$ — базисные внешние произведения дифференциалов координат. Для $p = n$ форма имеет вид $\omega = a(x) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$.

Внешнее дифференцирование дифференциальных форм

Пусть G открыто в $\mathbb{R}^n$, $p \in \mathbb{Z}_+$, $r \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Внешнее дифференцирование — это оператор $d : \Omega_p^{(r)}(G) \to \Omega_{p+1}^{(r-1)}(G)$, определяемый так:

1. Для 0-формы $\omega = f \in C^{(r)}(G)$:

$$df = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i.$$

2. Для p-формы $\omega = \sum_I a_I(x) dx_I$ (где $I = (i_1 < \dots < i_p)$):

$$d\omega = \sum_I da_I \wedge dx_I = \sum_I \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial a_I}{\partial x_j} dx_j \right) \wedge dx_I.$$

Свойства:

1. d линейно.
2. $d(\omega \wedge \lambda) = d\omega \wedge \lambda + (-1)^{\deg \omega} \omega \wedge d\lambda$ для форм ω, λ.
3. $d^2 \omega = d(d\omega) = 0$.

48. Перенос дифференциальных форм. Теорема о свойствах переноса форм

Определение переноса дифференциальных форм

Пусть G — открытое множество в $\mathbb{R}^n$, U — открытое множество в $\mathbb{R}^m$, $p \in \mathbb{Z}_+$, $\omega \in \Omega_p(G)$, $T \in C^{(1)}(U \to G)$. Перенесённая форма $T^*\omega$ определяется равенством:

$$(T^*\omega)(u; du^1, \dots, du^p) = \omega(T(u); T'(u)du^1, \dots, T'(u)du^p),$$

где $u \in U$, $du^1, \dots, du^p \in \mathbb{R}^m$. Отображение T^* называется переносом форм или заменой переменных.

Свойства переноса форм

1. Линейность: $T^*(\alpha\omega + \beta\lambda) = \alpha T^*\omega + \beta T^*\lambda$.
2. Умножение на функцию: $T^*(f\omega) = (f \circ T)T^*\omega$ для $f \in C^{(r)}(G)$.
3. Внешнее произведение: $T^*(\omega \wedge \lambda) = T^*\omega \wedge T^*\lambda$ для $\lambda \in \Omega_q^{(r)}$.
4. Дифференциал: $T^*d\omega = dT^*\omega$ при $r \geq 1$.
5. Явная формула: Для $\omega = \sum a_{i_1, \dots, i_p} dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_p}$,

$$T^*\omega = \sum (a_{i_1, \dots, i_p} \circ T) \cdot \det \left(\frac{\partial T_{i_k}}{\partial u_{j_l}} \right) du_{j_1} \wedge \ldots \wedge du_{j_p}.$$

6. Композиция: $(T \circ S)^\omega = S^(T^*\omega)$, если V открыто в $\mathbb{R}^i$, $S \in C^{(1)}(V \to U)$.

49 Поверхностный интеграл второго рода. Выражением поверхностного интеграла второго рода через поверхностный интеграл первого рода. Выражения для интеграла 2го рода в случае размерностей многообразия 1 и 2. Примеры. Лемма Пуанкаре в общем случае (без док-ва)

Определение интеграла второго рода

Пусть G открыто в $\mathbb{R}^n$, $M \subset G$ — ориентированное k-мерное многообразие класса $\mathbb{M}_{k,n}^{(1)}$, $\omega \in \Omega_k(G)$ — дифференциальная форма степени k, $E \in \mathbb{A}_M$ — малое измеримое множество. Тогда интеграл второго рода определяется как:

$$\int_E \omega = \int_{\varphi^{-1}(E)} \widehat{\varphi^* \omega} \, d\mu_k,$$

где φ — положительно ориентирующая параметризация стандартной окрестности U, содержащей E, а $\varphi^*\omega$ — pullback формы ω.

Связь с интегралом первого рода

Для малого множества E и формы $\omega = \sum a_{i_1\ldots i_k} dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k}$ интеграл второго рода выражается через интеграл первого рода:

$$\int_E \omega = \int_E \left\langle a, \frac{\det \varphi'}{\sqrt{\mathcal{D}_\varphi}} \circ \varphi^{-1} \right\rangle d\mu_M,$$

где $\mathcal{D}_\varphi = \sum (\det \varphi'_{j_1\ldots j_k})^2$ — грамиан параметризации.

Примеры для размерностей 1 и 2:

- Для $k = 1$ (кривая): $\int_E \omega = \int_E \langle a, \tau \rangle d\mu_1$, где τ — единичный касательный вектор.
- Для $k = 2, n = 3$ (поверхность):

$$\int_S \omega = \int_S \langle F, N \rangle d\mu_S, \quad F = (P, Q, R),\ N \text{ — единичная нормаль.}$$

Теорема Пуанкаре (без доказательства):

Если G — звездная область в $\mathbb{R}^n$ и ω — замкнутая форма ($d\omega = 0$), то ω точна ($\exists \eta : \omega = d\eta$). Для форм класса C^r первообразная также C^r.

50. Общая формула Стокса. Частные случаи и следствия общей формулы Стокса: формула Ньютона-Лейбница для криволинейных интегралов, формула Грина, классическая формула Стокса, формула Гаусса–Остроградского

Общая формула Стокса для многообразий

Пусть $M \in \mathbb{M}^{(2)}_{kn}$ — компактное u ориентированное многообразие, G — открытое множество в $\mathbb{R}^n$, $M \subset G, \omega \in \Omega^{(1)}_{k-1}(G)$. Тогда:

$$\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega.$$

Формула Грина

Пусть D — ограниченная область в $\mathbb{R}^2$ с гладкой границей ∂D, G открыто в $\mathbb{R}^2$, $\overline{D} \subset G$, $P, Q \in C^{(1)}(G)$. Тогда:

$$\iint_D (Q'_x - P'_y)\, dx\, dy = \int_{\partial D} P\, dx + Q\, dy.$$

Классическая формула Стокса

Пусть S — компактная ориентированная поверхность класса $C^{(2)}$ в $\mathbb{R}^3$ с краем ∂S, G открыто в $\mathbb{R}^3$, $S \subset G$, $P, Q, R \in C^{(1)}(G)$. Тогда:

$$\iint_S (R'_y - Q'_z) dy \wedge dz + (P'_z - R'_x) dz \wedge dx + (Q'_x - P'_y) dx \wedge dy = \int_{\partial S} P\, dx + Q\, dy + R\, dz.$$

Формула Гаусса–Остроградского

Пусть V — ограниченная область в $\mathbb{R}^3$ с гладкой границей ∂V, G открыто в $\mathbb{R}^3$, $V \subset G$, $P, Q, R \in C^{(1)}(G)$. Тогда:

$$\iiint_V (P'_x + Q'_y + R'_z)\, dx\, dy\, dz = \iint_{\partial V} P\, dy \wedge dz + Q\, dz \wedge dx + R\, dx \wedge dy.$$

51: Неравенства Минковского и Гёльдера, существенный супремум, пространства $L_p(X, \mu)$

Теорема (Неравенство Гёльдера):

Пусть $(X, \mathbb{A}, \mu)$ — пространство с мерой, $E \in \mathbb{A}$, функции f и g измеримы на E, существует $\int_E fg\, d\mu$, $1 < p < +\infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Тогда:

$$\left| \int_E fg\, d\mu \right| \le \left(\int_E |f|^p\, d\mu \right)^{1/p} \left(\int_E |g|^q\, d\mu \right)^{1/q}.$$

Неравенство Минковского для интегралов

Теорема (Неравенство Минковского):
Пусть $(X, \mathbb{A}, \mu)$ — пространство с мерой, $E \in \mathbb{A}$, функции f и g измеримы, конечны почти везде на E

, $1 \le p < +\infty$. Тогда:

$$\left(\int_E |f+g|^p\,d\mu\right)^{1/p} \le \left(\int_E |f|^p\,d\mu\right)^{1/p} + \left(\int_E |g|^p\,d\mu\right)^{1/p}.$$

Существенный супремум функции

Для измеримой функции $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ почти везде на пространстве с мерой $(X, \mathbb{A}, \mu)$ существенный супремум:

$$\operatorname{ess\,sup}_{x\in E} f(x) = \inf\{A \in \mathbb{R} : f(x) \le A \text{ почти везде на } E\}.$$

(Если таких A нет, полагаем $+\infty$.)

Пространства $L_p(X, \mu)$

Для $1 \le p < +\infty$:

$$L_p(E,\mu) = \left\{f : \text{н.в. } E \to \mathbb{R} \text{ измеримы}, \int_E |f|^p\,d\mu < +\infty\right\}.$$

Для $p = +\infty$:

$$L_\infty(E,\mu) = \left\{f : \text{н.в. } E \to \mathbb{R} \text{ измеримы}, \operatorname{ess\,sup}|f| < +\infty\right\}.$$

Норма: $\|f\|_p = \left(\int_E |f|^p\,d\mu\right)^{1/p}$ (для L_∞ — $\operatorname{ess\,sup}|f|$).

52: Вложения пространств Лебега $L_p(X, \mu)$ и пространств ℓ_p. Несравнимость пространств L_p

Вложение $L_q \subset L_p$ при конечной мере

Если мера пространства $\mu E < +\infty$ и индексы удовлетворяют условию $1 \le p < q \le +\infty$, то $L_q(E,\mu) \subset L_p(E,\mu)$. Более того, для любой функции $f \in L_q(E,\mu)$ выполняется неравенство:

$$\|f\|_{L_p(E,\mu)} \le (\mu E)^{1/p-1/q}\|f\|_{L_q(E,\mu)}.$$

Несравнимость L_p при бесконечной мере

Если $\mu E = +\infty$, то пространства $L_p(E, \mu)$ могут не быть вложены друг в друга. Контрпример: $E = (0, +\infty)$ с мерой Лебега,

- $f_1(x) = \frac{1}{x+1}$: $f_1 \in L_2(E)$ но $f_1 \notin L_1(E)$.
- $f_2(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}\chi_{(0,1)}(x)$: $f_2 \in L_1(E)$ но $f_2 \notin L_2(E)$.

Пространства ℓ_p и вложение периодических L_p

Пространство ℓ_p состоит из последовательностей $x = (x_k)_{k=1}^{\infty}$ с конечной нормой:

$$\|x\|_p = \begin{cases} \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p\right)^{1/p}, & 1 \le p < +\infty, \\ \sup_{k\in\mathbb{N}} |x_k|, & p = +\infty. \end{cases}$$

Для 2π-периодических функций на $\mathbb{R}$ с мерой Лебега на $[-\pi, \pi]$ верно вложение пространств:

$$C \subset L_\infty \subset \ldots \subset L_2 \subset \ldots \subset L_1,$$

где C — пространство непрерывных 2π-периодических функций с нормой $\|f\|_\infty = \max_{x\in[-\pi,\pi]} |f(x)|$, совпадающей с L_∞-нормой для непрерывных функций.

53. Полнота пространства $C(K)$

Определение полного нормированного пространства

Нормированное пространство X называется полным (банаховым), если любая фундаментальная последовательность в X сходится к некоторому элементу из X. Последовательность $(x_n) \subset X$ фундаментальна, если $\forall \epsilon > 0\ \exists N$: $\forall n, m \ge N$ выполняется $\|x_n - x_m\|_X < \epsilon$.

Пространство непрерывных функций $C(K)$

Пусть K — компактное топологическое пространство. Пространство $C(K)$ состоит из всех непрерывных функций $f : K \to \mathbb{C}$ (или $\mathbb{R}$), с нормой $\|f\|_{C(K)} = \sup_{x\in K} |f(x)|$. Обозначается $C_{\mathbb{C}}(K)$ или $C_{\mathbb{R}}(K)$ в зависимости от поля.

Теорема о полноте $C(K)$

Пространство $C(K)$ полно.

54. Критерий полноты нормированного пространства

Определение полного нормированного пространства (банахово пространство)

Нормированное пространство $(X, \|\cdot\|)$ называется полным, если любая фундаментальная последовательность в X сходится к элементу этого пространства. Полное нормированное пространство также называют банаховым.

Критерий полноты через абсолютную сходимость ряда

Нормированное пространство X полно тогда и только тогда, когда любой абсолютно сходящийся ряд в X сходится, то есть:

$$x_k \in X, \sum_{n=1}^{\infty} \|x_k\| < +\infty \implies \sum_{n=1}^{\infty} x_k \text{ сходится в } X.$$

55 Полнота пространств $L^p(X, \mu)$ при $p \in [1, +\infty]$

Определение пространства $L^p(X, \mu)$

Пусть $(X, \mathcal{A}, \mu)$ — пространство с мерой, $p \in [1, +\infty]$. Пространство $L^p(X, \mu)$ - полное, состоит из измеримых функций $f : X \to \mathbb{R}$ (или $\mathbb{C}$), для которых конечна норма:

- при $p < +\infty$: $\|f\|_p = \left(\int_X |f|^p \, d\mu\right)^{1/p}$,
- при $p = +\infty$: $\|f\|_\infty = \text{ess sup}_{x \in X} |f(x)|$.

Критерий полноты пространства L^p

Пространство $L^p(X, \mu)$ полно при $p \in [1, +\infty]$, то есть любая фундаментальная последовательность $\{f_n\} \subset L^p$ сходится к некоторой функции $f \in L^p$ по норме $\|\cdot\|_p$.

Теорема Рисса-Фишера

Любое нормированное пространство $L^p(X, \mu)$ при $p \in [1, +\infty]$ является банаховым (полным). В частности, если $\{f_n\}$ — фундаментальна в L^p, то существует $f \in L^p$, такая что $\|f_n - f\|_p \to 0$.

56. Плотность ступенчатых функций в L^p

Определение плотного множества в метрическом пространстве

Подмножество K_0 метрического пространства (X, d) называется **плотным** в X, если его замыкание совпадает с X:

$$\overline{K_0} = X.$$

Определение ступенчатой функции

Функция $g : X \to \mathbb{R}$ называется ступенчатой (обозначается $g \in \operatorname{step}(X, \mu)$), если она представима в виде:

$$g = \sum_{k=1}^{n} c_k \cdot \chi_{E_k}, \quad \text{где} \quad \mu(E_k) < \infty, \quad c_k \in \mathbb{R}.$$

Теорема о плотности в L^p для $1 \leq p < \infty$

Пусть $(X, \mathcal{A}, \mu)$ — пространство с мерой, и $1 \leq p < \infty$. Тогда для любой $f \in L^p(X, \mu)$ и $\varepsilon > 0$ существует ступенчатая функция $g \in \operatorname{step}(X, \mu)$ такая, что:

$$\|f - g\|_p < \varepsilon, \quad \text{где} \quad \|h\|_p = \left(\int_X |h|^p d\mu\right)^{1/p}.$$

57. Плотность $C_0(\mathbb{R}^n)$ в $L^p(\mathbb{R}^n)$, плотность $C_{2\pi}$ в $L^p_{2\pi}$

Аппроксимация характеристических функций ограниченных множеств

Для ограниченного измеримого множества $E \subset \mathbb{R}^n$ с $\lambda_n(E) < \infty$ и $\chi_E \in L^p(\mathbb{R}^n)$ ($1 \leq p < \infty$), существует функция $g \in C_0(\mathbb{R}^n)$ такая, что:

$$\|\chi_E - g\|_p \leq 2\epsilon.$$

Конструкция:

$$g(x) = 1 - \frac{d(x, \mathbb{R}^n \setminus U)}{d(x, \mathbb{R}^n \setminus U) + d(x, E)},$$

где $U \supset E$ — открытое множество с $\lambda_n(U \setminus E) < \epsilon$.

Аппроксимация простых функций

Любая простая функция $f = \sum_{k=1}^{N} c_k \chi_{E_k}$ с $\lambda_n(E_k) < \infty$ аппроксимируется функцией $g \in C_0(\mathbb{R}^n)$:

$$\|f - g\|_p < \epsilon, \quad \text{где} \quad g = \sum_{k=1}^{N} c_k g_k,$$

и для каждого k: $\|\chi_{E_k} - g_k\|_p < \frac{\epsilon}{N \cdot \max(|c_k|)}$.

Плотность $C_0(\mathbb{R}^n)$ в $L^p(\mathbb{R}^n)$ и $C_{2\pi}$ в $L^p_{2\pi}$

- Для $L^p(\mathbb{R}^n)$: $\forall f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ и $\epsilon > 0$ $\exists g \in C_0(\mathbb{R}^n) : \|f - g\|_p < \epsilon$.
- Для $L^p_{2\pi}$ (периодические функции): $\forall f \in L^p_{2\pi}$ $\exists g \in C_{2\pi} : \|f - g\|_{L^p_{2\pi}} < \epsilon$, где $C_{2\pi}$ — непрерывные 2π-периодические функции.

58 Теорема о непрерывности сдвига

Определение Оператора Сдвига

Пусть $h \in \mathbb{R}^m$. Оператор сдвига на вектор h определяется как отображение, действующее на функцию f по правилу:

$$(\tau_h f)(x) = f(x + h).$$

Теорема о Непрерывности Сдвига в L^p

Пусть $1 \leq p < +\infty$ и $f \in L^p(\mathbb{R}^m)$. Тогда оператор сдвига непрерывен по норме пространства L^p, то есть:

$$\lim_{|h| \to 0} \|\tau_h f - f\|_p = \lim_{|h| \to 0} \left(\int_{\mathbb{R}^m} |f(x + h) - f(x)|^p dx \right)^{1/p} = 0.$$

59. Гильбертовы пространства. Непрерывность скалярного произведения. Скалярное умножение в

$L^2(X,\mu)$. Примеры ортогональных систем в $L^2(X,\mu)$

Гильбертовы пространства

Полное линейное пространство H, снабженное скалярным произведением $\langle\cdot,\cdot\rangle$, относительно нормы $\|x\| = \sqrt{\langle x,x\rangle}$.

Непрерывность скалярного произведения

Если $x_n \to x$ и $y_n \to y$ в H, то $\langle x_n, y_n\rangle \to \langle x,y\rangle$.

Скалярное умножение в $L^2(X,\mu)$

Для $f,g \in L^2(X,\mu)$ скалярное произведение задается формулой:

$$\langle f,g\rangle = \int_X f(x)\overline{g(x)}\,d\mu(x).$$

$\overline{g}$ обозначает комплексно сопряжённое значение. Например, для $g = a+bi$, верно $\overline{g} = a - bi$.

Ортогональные системы в $L^2(X,\mu)$

Система функций $\{\phi_k\} \subset L^2(X,\mu)$ называется ортогональной, если:

$$\langle \phi_m, \phi_n\rangle = 0 \quad \text{при} \quad m \neq n.$$

Если дополнительно $\|\phi_k\| = 1$ для всех k, система называется ортонормированной.

Примеры ортогональных систем в $L^2(X,\mu)$

1. Тригонометрическая система $\{e^{inx}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ в $L^2([-\pi,\pi])$.
2. Многочлены Лежандра $\{P_n\}$ в $L^2([-1,1])$.
3. Функции Хаара на отрезке.

60. Теорема Пифагора для гильбертовых пространств и критерий сходимости ортогонального ряда

Лемма о почленном умножении сходящегося ряда

Пусть $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ — сходящийся ряд в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$. Тогда для любого вектора $y \in \mathcal{H}$ выполняется:

$$\left\langle \sum_{k=1}^{\infty} x_k, y \right\rangle = \sum_{k=1}^{\infty} \langle x_k, y \rangle.$$

Критерий сходимости ортогонального ряда

Ортогональный ряд $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ сходится тогда и только тогда, когда сходится числовой ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\|^2$. При этом выполняется равенство:

$$\left\| \sum_{k=1}^{\infty} x_k \right\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\|^2.$$

Теорема Пифагора для гильбертовых пространств

Для любого конечного набора ортогональных векторов $\{x_k\}_{k=1}^{N}$ в $\mathcal{H}$ выполняется:

$$\left\| \sum_{k=1}^{N} x_k \right\|^2 = \sum_{k=1}^{N} \|x_k\|^2.$$

61. Вычисление коэффициентов суммы ортогонального ряда. Коэффициенты Фурье и ряды Фурье по ортогональной системе. Геометрические свойства частичных сумм ряда Фурье. Неравенство Бесселя

Вычисление коэффициентов суммы ортогонального ряда

Пусть $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ — ортогональная система (ОС) в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$, $x \in \mathcal{H}$, причём $x = \sum_{k=1}^{\infty} c_k e_k$. Тогда коэффициенты c_k определяются единственным образом по формуле:

$$c_k = \frac{\langle x, e_k \rangle}{\|e_k\|^2}.$$

Определение коэффициентов и ряда Фурье

Пусть $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ — ОС в $\mathcal{H}$, $x \in \mathcal{H}$. Коэффициентами Фурье вектора x называются числа:

$$c_k(x) = \frac{\langle x, e_k \rangle}{\|e_k\|^2}.$$

Рядом Фурье вектора x по ОС $\{e_k\}$ называется ряд:

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k(x) e_k.$$

Свойства частичных сумм ряда Фурье

Пусть $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ — ОС в $\mathcal{H}$, $x \in \mathcal{H}$, $n \in \mathbb{N}$, $S_n = \sum_{k=1}^{n} c_k(x) e_k$, $\mathcal{L} = \mathcal{L}(e_1, \ldots, e_n)$. Тогда:

1. S_n — ортогональная проекция x на $\mathcal{L}$, т.е. $x = S_n + z$, где $z \perp \mathcal{L}$.
2. S_n — элемент наилучшего приближения к x в $\mathcal{L}$, т.е. $\|x - S_n\| = \min_{y \in \mathcal{L}} \|x - y\|$, причём минимум достигается только при $y = S_n$.
3. $\|S_n\| \leq \|x\|$.

Неравенство Бесселя

Пусть $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ — ОС в $\mathcal{H}$, $x \in \mathcal{H}$. Тогда:

$$\sum_{k=1}^{\infty} |c_k(x)|^2 \|e_k\|^2 \leq \|x\|^2.$$

62. Теорема Рисса-Фишера. Равенство Паресваля.

Теорема Рисса-Фишера

Пусть $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ — ортонормированная система (ОС) в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$, $x \in \mathcal{H}$. Тогда:

1. Ряд Фурье вектора x сходится.
2. $x = \sum_{k=1}^{\infty} c_k(x) e_k + z$, где $z \perp e_k$ для всех k.
3. $x = \sum_{k=1}^{\infty} c_k(x) e_k$ тогда и только тогда, когда $\sum_{k=1}^{\infty} |c_k(x)|^2 \|e_k\|^2 = \|x\|^2$.

Равенство Парсеваля (Уравнение замкнутости)

Ряд Фурье $\sum_{k=1}^{\infty} c_k(x) e_k$ — ортогональный, $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ — ортонормированная система (ОС) в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$, $x \in \mathcal{H}$

$$\sum_{k=1}^{\infty} |c_k(x)|^2 \|e_k\|^2 = \|x\|^2$$

63. Характеристика базиса в гильбертовом пространстве. Процесс ортогонализации Грама-Шмидта.

Определение базиса и связанных понятий

Ортогональная система $\{e_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathcal{H}$ называется **базисом** (*ортогональным базисом*), если любой вектор $x \in \mathcal{H}$ раскладывается в ряд по этой системе: $x = \sum_{k=1}^{\infty} c_k(x)e_k$. Она называется **полной**, если не существует ненулевого вектора, ортогонального всем e_k. Она называется **замкнутой**, если для любого $x \in \mathcal{H}$ выполнено уравнение замкнутости.

Характеристика базиса

Пусть $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ — ОС в $\mathcal{H}$. Следующие утверждения равносильны:

1. $\{e_k\}$ — базис.
2. $\langle x, y\rangle = \sum_{k=1}^{\infty} c_k(x)c_k(y)\|e_k\|^2$ для любых $x, y \in \mathcal{H}$ (обобщенное уравнение замкнутости).
3. $\{e_k\}$ замкнута.
4. $\{e_k\}$ полна.
5. Линейная оболочка системы $\{e_k\}$ плотна в $\mathcal{H}$. $(\forall x \in \mathcal{H}$ и $\forall \mathcal{E} > 0, \exists y \in \{\{c_k\} : ||x - y|| < \mathcal{E}\})$

Процесс ортогонализации Грама-Шмидта

Пусть $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ — линейно независимая система в $\mathcal{H}$. Тогда существует ОНС $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$, такая что $\mathcal{L}(e_1, \ldots, e_n) = \mathcal{L}(x_1, \ldots, x_n)$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Эта ОНС единственна с точностью до множителей λ_k с $|\lambda_k| = 1$ (т.е. $h_k = \lambda_k e_k$ для любой другой ОНС $\{h_k\}$, удовлетворяющей тому же условию).

64. Тригонометрический многочлен, тригонометрический ряд, тригонометрический ряд в комплексной форме. Лемма о вычислении коэффициентов тригонометрического ряда. Тригонометрический ряд Фурье функции (в т.ч. в экспоненциальной форме)

Определение тригонометрического многочлена

Пусть $n \in \mathbb{Z}_+$. Функция T_n вида

$$T_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

называется тригонометрическим многочленом порядка не выше n. Если $|a_n| + |b_n| \neq 0$, то порядок ровно n. Коэффициенты a_k, b_k — вещественные или комплексные числа. T_n — множество всех таких многочленов порядка $\leq n$, $T = \bigcup_{n=0}^{\infty} T_n$.

Тригонометрический ряд и комплексная форма

Тригонометрический ряд имеет вид:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kx + b_k \sin kx).$$

С помощью формул Эйлера $\cos kx = \frac{e^{ikx}+e^{-ikx}}{2}$, $\sin kx = \frac{e^{ikx}-e^{-ikx}}{2i}$ он преобразуется в комплексную форму:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx}.$$

Лемма о вычислении коэффициентов (ортогональность)

Если тригонометрический ряд сходится к функции $f(x)$ в $L_2[-\pi, \pi]$, то его коэффициенты вычисляются по формулам:

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(kx)dx, \quad b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(kx)dx \quad (k \geq 0),$$

$$c_k = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-ikx}dx \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Тригонометрический ряд Фурье функции

Тригонометрическим рядом Фурье функции f, интегрируемой на $[-\pi, \pi]$, называется ряд:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kx + b_k \sin kx), \quad \text{где} \quad a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(kx)dx, \quad b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(kx)dx.$$

В экспоненциальной (комплексной) форме:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}, \quad \text{где} \quad c_k = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-ikx}dx.$$

65. Теорема Римана-Лебега

Теорема Римана-Лебега

1. Если E — измеримое множество ($E \in \mathbb{A}_1$) и функция f интегрируема на E ($f \in L(E)$), то:

$$\int_E f(t) \begin{bmatrix} e^{i\lambda t} \\ \cos\lambda t \\ \sin\lambda t \end{bmatrix} dt \xrightarrow{\lambda\to\infty} 0,$$

(где λ принимает вещественные значения.)

2. Если f интегрируема на основном периоде ($f \in L$), то её коэффициенты Фурье стремятся к нулю:

$$a_k(f) \xrightarrow{k\to\infty} 0, \quad b_k(f) \xrightarrow{k\to\infty} 0, \quad c_k(f) \xrightarrow{k\to\infty} 0.$$

Краткий смысл:

Теорема Римана-Лебега утверждает, что для интегрируемой функции f интеграл от её произведения с быстро осциллирующими функциями ($e^{i\lambda t}$, $\cos\lambda t$, $\sin\lambda t$) стремится к нулю при $\lambda \to \infty$. Это означает, что высокочастотные колебания "усредняют" вклад функции в интеграл. Аналогично, коэффициенты Фурье a_k, b_k, c_k периодической интегрируемой функции затухают с ростом k, что отражает отсутствие значимых высокочастотных компонент в её спектре.

66. Свертка периодических функций, ее элементарные свойства. Ядро Дирихле. Сумма Фурье как свертка

Определение свертки периодических функций

Пусть $f, K \in L[-\pi,\pi]$ (интегрируемые по Лебегу 2π-периодические функции). Сверткой $f * K$ называется функция, заданная для почти всех x формулой:

$$(f*K)(x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)K(t)dt.$$

Свертка определена почти всюду и принадлежит $L[-\pi, \pi]$ (т.е. интегрируема).

Ядро Дирихле

Для $n \in \mathbb{Z}_+$ функция

$$D_n(t) = \frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos kt\right) = \frac{\sin\left((n+\frac{1}{2})t\right)}{2\pi \sin\left(\frac{t}{2}\right)}$$

называется ядром Дирихле порядка n.

Интеграл Дирихле:

$\int_{-\pi}^{\pi} f(x-t) D_n(t) dt$

Сумма Фурье как свертка

Частичная сумма (порядка n) ряда Фурье функции $f \in L[-\pi, \pi]$ выражается через свертку с ядром Дирихле:

$$S_n(f, x) = (f * D_n)(x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t) D_n(t) dt.$$

Элементарные свойства свертки

- Измеримость и интегрируемость:
  $f * K$ измерима и $f * K \in L[-\pi, \pi]$.
- Коммутативность:
  $f * K = K * f$.
- Коэффициенты Фурье:
  $c_k(f * K) = 2\pi c_k(f) c_k(K)$.
- Непрерывность при $K \in L_q$:
  Если $1 \le p \le \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $f \in L_p$, $K \in L_q$, то $f * K$ непрерывна ($f * K \in C$) и $\|f * K\|_\infty \le \|K\|_q \|f\|_p$.
- Оценка нормы при $K \in L_1$:
  Если $1 \le p \le \infty$, $f \in L_p$, $K \in L_1$, то $f * K \in L_p$ и $\|f * K\|_p \le \|K\|_1 \|f\|_p$.

67. Принцип локализации Римана. Признак Дини и его следствия.

1) Принцип локализации Римана

Пусть $f, g \in L$, $x \in \mathbb{R}$, $\delta \in (0, \pi)$, и функции f и g совпадают на интервале $(x-\delta, x+\delta)$. Тогда разность частичных сумм их рядов Фурье в точке x стремится к нулю при $n \to \infty$:

$$S_n(f,x) - S_n(g,x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

В частности, из сходимости ряда Фурье f в точке x к сумме S следует сходимость ряда Фурье g в точке x к той же сумме S, и наоборот.

Признак Дини сходимости

Пусть $f \in L$, $x \in \mathbb{R}$, $S \in \mathbb{R}$ (или $\mathbb{C}$) и выполняется условие:

$$\int_0^\pi \frac{|f(x+t) - 2S + f(x-t)|}{t} dt < +\infty. \quad (13.11)$$

Тогда ряд Фурье функции f сходится к сумме S в точке x:

$$S_n(f,x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} S.$$

Следствия признака Дини 1

Если $x \in \mathbb{R}$, $f \in L$ и существуют конечные пределы:

$$f(x\pm) = \lim_{t\to x\pm} f(t), \quad \alpha_\pm = \lim_{t\to 0\pm} \frac{f(x+t) - f(x\pm)}{t}$$

то ряд Фурье f сходится в точке x к $S = \frac{f(x+)+f(x-)}{2}$. Если f непрерывна в x и пределы $\alpha_\pm$ существуют, то ряд сходится к $f(x)$.

Следствия признака Дини 2

Если $f \in L$ имеет конечные односторонние производные в точке x (т.е. $f'_+(x)$ и $f'_-(x)$ существуют и конечны), то её ряд Фурье сходится в x к $f(x)$. В частности, это верно, если f дифференцируема в x. $(a_\pm = f'_\pm(x))$

68. Примеры разложения функций в ряды Фурье. Вычисление сумм $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ и $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$

Разложение функции $f_z(x) = \cos zx$ в ряд Фурье на $[-\pi, \pi]$ при $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$

Функция $f_z(x) = \cos zx$, $x \in [-\pi, \pi]$, является бесконечно дифференцируемой и чётной. Её ряд Фурье сходится к $f_z(x)$ всюду на $[-\pi, \pi]$. Коэффициенты Фурье:

$$a_0(f_z) = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \cos zt\, dt = \frac{2 \sin \pi z}{\pi z},$$

$$a_k(f_z) = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \cos zt \cos kt\, dt = \frac{\sin \pi z}{\pi} (-1)^k \left(\frac{1}{z+k} + \frac{1}{z-k} \right) \quad (k \in \mathbb{N}).$$

Ряд Фурье:

$$\cos zx = \frac{\sin \pi z}{\pi z} + \frac{\sin \pi z}{\pi} \sum_{k=1}^\infty (-1)^k \left(\frac{1}{z+k} + \frac{1}{z-k} \right) \cos kx, \quad x \in [-\pi, \pi].$$

Разложение $\pi \operatorname{ctg} \pi z$ и $\frac{\pi}{\sin \pi z}$ в суммы простых дробей

При $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ из разложения $\cos zx$ подстановкой $x = \pi$ и $x = 0$ соответственно получаются разложения в ряды (в смысле главного значения):

$$\pi \operatorname{ctg} \pi z = \sum_{k=-\infty}^\infty \frac{1}{z-k}, \quad \frac{\pi}{\sin \pi z} = \sum_{k=-\infty}^\infty \frac{(-1)^k}{z-k}.$$

Вычисление сумм $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2}$ и $\sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$

1. **Сумма $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2}$:**
   - Используем тождество Парсеваля для функции $f_{\sqrt{-1}}(x) = \cosh x$ (частный случай $z = i$, но проще для $f(x) = x^2$).
   - Стандартный результат: $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.
2. **Сумма $\sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$:**
   - Подставим $x = \pi$ в разложение функции $g(x) = x^2$ в ряд Фурье на $[-\pi, \pi]$.
   - Ряд Фурье для $g(x) = x^2$: $x^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^n}{n^2} \cos nx$.
   - При $x = \pi$: $\pi^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^n}{n^2} (\cos n\pi) = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^n}{n^2} (-1)^n = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2}$.
   - Отсюда: $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.
   - Теперь подставим $x = 0$: $0 = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^n}{n^2} (1)$.
   - Отсюда: $\sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^n}{n^2} = -\frac{\pi^2}{12}$, следовательно, $\sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}$.

69. Общее представление о методах суммирования рядов. Суммирование по Чезаро, суммирование

методами Абеля-Пуассона (их перманентность и эффективность)

Суммирование по Чезаро

Пусть дан числовой ряд $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ с частичными суммами $S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$. Средние арифметические Чезаро (первого порядка) определяются как:

$$\sigma_n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} S_k$$

Ряд называется суммируемым по Чезаро к числу S, если существует предел:

$$\lim_{n \to \infty} \sigma_n = S$$

Обозначение: $(C, 1) \sum a_k = S$.

Суммирование методом Абеля-Пуассона

Пусть дан степенной ряд $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$, сходящийся при $|x| < 1$. Суммой ряда методом Абеля-Пуассона называется предел (если он существует):

$$(A) \sum_{k=0}^{\infty} a_k = \lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$$

Перманентность методов

Метод суммирования F называется перманентным (регулярным), если:

1. **Линейность**: $F \sum (\alpha a_k + \beta b_k) = \alpha F \sum a_k + \beta F \sum b_k$.
2. **Согласованность**: Если ряд $\sum a_k$ сходится классически к S, то $F \sum a_k = S$.

Эффективность методов

Метод суммирования F называется эффективным (или сильнее другого метода G), если:

- Любой ряд, суммируемый методом G, суммируем и методом F к той же сумме.
- Существует ряд, суммируемый методом F, но не суммируемый методом G.

70. Аппроксимативная единица и усиленная аппроксимативная единица. Теорема о свойствах свертки с аппроксимативной единицей (без док-ва). Теорема Фейера. Полнота тригонометрической системы в $L^2_{2\pi}$

Аппроксимативная единица

Пусть $D \subset \mathbb{R}$, h_0 — предельная точка D (в $\overline{\mathbb{R}}$). Семейство функций $\{K_h\}_{h \in D}$ называется *аппроксимативной единицей* при $h \to h_0$, если:

1. $\forall h \in D$: $K_h \in L^1[-\pi, \pi]$ и $\int_{-\pi}^{\pi} K_h(t)dt = 1$.
2. $\exists M > 0$: $\forall h \in D$, $\int_{-\pi}^{\pi} |K_h(t)|dt \le M$.
3. $\forall \delta \in (0, \pi)$: $\int_{E_\delta} |K_h(t)|dt \underset{h \to h_0}{\longrightarrow} 0$, где $E_\delta = [-\pi, \pi] \setminus [-\delta, \delta]$.

Усиленная аппроксимативная единица

Семейство $\{K_h\}_{h \in D}$ называется *усиленной аппроксимативной единицей* при $h \to h_0$, если:

1. Выполнены условия 1, 2 (из прошлого пункта) аппроксимативной единицы.
2. $\forall h \in D$: $K_h \in L^\infty[-\pi, \pi]$.
3. $\forall \delta \in (0, \pi)$: $\underset{t \in E_\delta}{\operatorname{ess\,sup}} |K_h(t)| \underset{h \to h_0}{\longrightarrow} 0$.

3) Теорема о свойствах свертки

Пусть $\{K_h\}$ — аппроксимативная единица при $h \to h_0$. Тогда:

1. Если $f \in C_{2\pi}$ (непрерывная 2π-периодическая), то $f * K_h \xrightarrow{h \to h_0} f$ *равномерно*.
2. Если $f \in L^p_{2\pi}$, $1 \le p < \infty$, то $\|f * K_h - f\|_p \xrightarrow{h \to h_0} 0$.
3. Если $\{K_h\}$ — *усиленная* аппроксимативная единица, $f \in L^1_{2\pi}$, и f непрерывна в точке x, то $(f * K_h)(x) \xrightarrow{h \to h_0} f(x)$.

Теорема Фейера

Ядра Фейера $\Phi_n(t) = \frac{1}{2\pi(n+1)} \left(\frac{\sin \frac{(n+1)t}{2}}{\sin \frac{t}{2}} \right)^2$ образуют *усиленную* аппроксимативную единицу при $n \to \infty$. Следовательно:

1. Если $f \in C_{2\pi}$, то $\sigma_n(f) \to f$ равномерно.
2. Если $f \in L^p_{2\pi}$, $1 \le p < \infty$, то $\|\sigma_n(f) - f\|_p \to 0$.

3. Если $f \in L^1_{2\pi}$ непрерывна в точке x, то $\sigma_n(f,x) \to f(x)$.

Полнота тригонометрической системы в $L^2_{2\pi}$

Тригонометрическая система $\{e^{ikx}\}_{k\in\mathbb{Z}}$ (или $\{1, \cos kx, \sin kx\}_{k=1}^{\infty}$) полна в $L^2_{2\pi}$. То есть:

$$\forall f \in L^2_{2\pi}: \quad \|S_n(f) - f\|_2 \xrightarrow{n\to\infty} 0,$$

где $S_n(f)$ — частичная сумма ряда Фурье. Эквивалентно: если все коэффициенты Фурье f равны нулю, то $f = 0$ п.в.

71. Теорема Вейерштрасса о тригонометрических многочленах. Теорема Вейерштрасса об алгебраических многочленах

Теорема Вейерштрасса о тригонометрических многочленах

Любая непрерывная периодическая функция $f \in C_{(a,b)}$ может быть равномерно приближена тригонометрическими многочленами $T(x) = \sum_{k=0}^{\infty} q_k x^k$, где остаток $\|T(x) - P_N(x)\|_{C_{at}} \to 0$ при $N \to \infty$.

Теорема Вейерштрасса об алгебраических многочленах

Для любой непрерывной функции $f \in C_{at}$ на отрезке $[a,b]$ существует последовательность алгебраических многочленов $P_N(x) = \sum_{j=0}^{N} q_j x^k$, такая что $\|f - P_N\|_{L^p} \le \epsilon$ при достаточно больших N.