41. Мера на многообразии. Интеграл первого рода на многообразии. Частные случаи интеграла I рода на многообразии: криволинейный и поверхностный, вычислительные формулы для них

Мера на многообразии μ_M

Пусть $M \in M_{kn}^{(1)}$, $E \in A_M$.

1. Если E малое, U — стандартная окрестность, $E \subset U$, φ — параметризация U, то
   $\mu_M E = \int_{\varphi^{-1}(E)} \sqrt{D_\varphi} d\mu_k$.
2. Если $E = \bigcup_\nu E_\nu$ (дизъюнктные малые измеримые множества), то
   $\mu_M E = \sum_\nu \mu_M E_\nu$.

Функция μ_M называется *мерой на многообразии* M.

Смысл:

Эта мера обобщает понятие длины (для кривых) или площади (для поверхностей) на произвольные гладкие многообразия. Она определяется через локальные параметризации, где $\sqrt{D_\varphi}$ корректирует искажение объёма/площади при отображении из параметрической области. Аддитивность позволяет измерять большие множества.

Криволинейный интеграл первого рода

Пусть Γ — гладкая кривая ($k = 1$), заданная параметризацией $x = \gamma(t), t \in \langle a, b \rangle$. Тогда:

- Мера (длина) кривой:
  $\mu\Gamma = \int_a^b |\gamma'(t)| dt$.
- Криволинейный интеграл первого рода:
  $\int_\Gamma f d\mu_\Gamma = \int_a^b (f \circ \gamma)(t) \cdot |\gamma'(t)| dt$.
  Классическое обозначение: $\int_\Gamma f ds$, где ds — элемент длины дуги.

Смысл:

Это интеграл скалярной функции f вдоль кривой Γ. Множитель $|\gamma'|$ (скорость движения по кривой) обеспечивает инвариантность относительно параметризации: результат зависит только от геометрии кривой и значений f. Физически может выражать массу неоднородной нити с плотностью f.

Поверхностный интеграл первого рода

Пусть S — гладкая поверхность ($k = n - 1$), заданная параметризацией $\varphi : G \subset \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}^n$. По формуле Вине–Коши:
$\sqrt{D_\varphi} = \sqrt{\sum_{j=1}^n (\det \varphi_j')^2} = |\mathcal{N}_\varphi|,$
где $\mathcal{N}_\varphi$ — вектор нормали к поверхности. Тогда:

- Мера (площадь) поверхности:
  $\mu S = \int_G |\mathcal{N}_\varphi| d\mu_{n-1}.$
- Поверхностный интеграл первого рода:
  $\int_S f d\mu_S = \int_G (f \circ \varphi) \cdot |\mathcal{N}_\varphi| d\mu_{n-1}.$

Смысл:

Это интеграл скалярной функции f по поверхности S. Величина $|\mathcal{N}_\varphi|$ задаёт элемент площади поверхности в параметрической области G, обеспечивая инвариантность относительно выбора параметризации. Применяется для вычисления массы поверхности с плотностью f или потока без учёта направления.

42. Ориентация многообразий. Понятия: одинаково ориентирующие параметризации, ориентация окрестностей, согласованные ориентации окрестностей, ориентированное многообразие, ориентируемое многообразие. Возможное количество ориентаций связного многообразия

Одинаково ориентирующие параметризации

Две параметризации φ и ψ стандартной окрестности U многообразия M называются согласованными (или одинаково ориентирующими), если для перехода $L : \Pi \to \Pi$ между ними якобиан $\det L' > 0$ на всей области Π. Если $\det L' < 0$, параметризации называются противоположно ориентирующими.

Смысл:

Знак якобиана перехода между параметризациями определяет, сохраняют ли они "направление" на многообразии. Положительный якобиан означает, что параметризации согласованы и задают одинаковую локальную ориентацию. Это важно для корректного определения глобальной ориентации.

Ориентация окрестностей

Ориентация окрестности U — это выбор класса эквивалентности параметризаций, для которых переходы имеют положительный якобиан. Параметризации этого класса называются положительно ориентирующими, а остальные — отрицательно ориентирующими.

Смысл:

Ориентация окрестности позволяет локально определить "направление" на многообразии. Например, на плоскости можно выбрать ориентацию "против часовой стрелки". Это необходимо для согласованного определения интегралов и дифференциальных форм.

Согласованные ориентации окрестностей

Две ориентированные окрестности U и V называются согласованными, если либо их пересечение пусто, либо для любых положительно ориентирующих параметризаций φ (для U) и ψ (для V) переход L между ними имеет $\det L' > 0$ в области пересечения.

Смысл:

Согласованность гарантирует, что ориентации разных окрестностей не противоречат друг другу. Это позволяет "склеить" локальные ориентации в единую глобальную структуру, что важно для работы с целым многообразием.

Ориентированное многообразие

Многообразие M называется ориентированным, если существует набор попарно согласованных ориентаций всех его стандартных окрестностей. Такой набор называется ориентацией многообразия.

Смысл:

Ориентированное многообразие имеет единое глобальное "направление". Примеры: сфера, тор. Неориентируемые многообразия (например, лист Мёбиуса) не допускают такой структуры. Ориентация критична для многих теорем анализа и топологии.

Ориентируемое многообразие

Многообразие M называется ориентируемым, если существует хотя бы одна его ориентация (т.е. если его можно превратить в ориентированное многообразие выбором подходящих локальных ориентаций).

Смысл:

Ориентируемость — это свойство многообразия "допускать" согласованную ориентацию. Например, все поверхности без "перекрутов" (как сфера) ориентируемы, а лист Мёбиуса — нет. Это фундаментальное топологическое свойство.

Количество ориентаций связного многообразия

Если многообразие M связно и ориентируемо, то оно имеет ровно две ориентации: исходную и противоположную (где во всех окрестностях выбран "обратный" класс параметризаций).

Смысл:

Связность означает, что многообразие "цельное", и выбор ориентации в одной точке однозначно распространяется на всё многообразие. Противоположная ориентация соответствует "зеркальному отражению". Например, у окружности есть только две ориентации: по и против часовой стрелки.

43. Понятие направления, лемма о существовании направлений

Кривая как одномерное многообразие

При $k = 1$ гладкое многообразие M в $\mathbb{R}^n$ называется кривой. Это означает, что локально кривая устроена как интервал числовой прямой.

Смысл:

Кривая - это одномерный геометрический объект, который в каждой своей точке выглядит как прямая линия (аналог того, как поверхность выглядит как плоскость). Примеры: прямая, окружность, спираль в пространстве.

Параметрическое задание кривой

Кривая Γ задаётся параметризацией $\gamma \in C^{(1)}((a, b) \to \mathbb{R}^n)$, где:

1. γ - инъективна (кроме, возможно, концов для замкнутых кривых)
2. γ регулярна ($\gamma'(t) \neq 0$ для всех t)
3. $\Gamma = \gamma((a, b))$

Смысл:

Кривую можно представить как траекторию движущейся точки, где параметр t - это время, а $\gamma(t)$- положение точки в момент t. Условия гарантируют, что кривая не имеет "острых углов" и самопересечений.

Определение направления на кривой

Пусть Γ — гладкая кривая в $\mathbb{R}^n$. Отображение $\tau \in C(\Gamma \to \mathbb{R}^n)$ называется *направлением* на Γ , если:

$$\forall x \in \Gamma \quad \tau(x) \in T_x\Gamma \quad \text{и} \quad |\tau(x)| = 1,$$

где $T_x\Gamma$ — касательное пространство к Γ в точке x.

Смысл:

Направление — это непрерывное поле единичных векторов, касательных к кривой в каждой её точке. Оно задает ориентацию кривой, указывая "положительное" направление движения вдоль неё (аналогично стрелке на проводе).

Лемма о существовании двух направлений

На связной гладкой кривой Γ, заданной параметризацией γ (соотношения (12.6)), существуют ровно два направления:

$$\tau_\pm = \pm \frac{\gamma'}{|\gamma'|} \circ \gamma^{-1}.$$

(Для замкнутого пути γ под $\gamma^{-1}(\gamma(a))$ можно понимать как a, так и b).

Смысл:

На связной кривой возможны только две противоположные ориентации. Они задаются единичными векторами, параллельными производной параметризации γ' (скорости), но направленными в противоположные стороны. Связность гарантирует, что нельзя "переключить" направление в какой-то точке непрерывно.

44. Сторона поверхности, лемма о существовании стороны

Определение двусторонней поверхности и Стороны

Связная поверхность S в $\mathbb{R}^n$ называется *двусторонней*, если существует непрерывное отображение $\mathcal{N} \in C(S \to \mathbb{R}^n)$ (называемое *стороной* поверхности S), такое что для всех $x \in S$:

$$\mathcal{N}(x) \perp T_x S \quad \text{и} \quad |\mathcal{N}(x)| = 1.$$

Смысл:

Поверхность двусторонняя, если можно непрерывно выбрать единичную нормаль в каждой её точке. Это означает, что поверхность имеет "две стороны", как лист бумаги.

Лемма о связи двусторонности и ориентируемости

Для того чтобы связная поверхность S была двусторонней, необходимо и достаточно, чтобы она была ориентируемой. При этом S имеет ровно две стороны.

Смысл:

Двусторонность поверхности эквивалентна её ориентируемости. Если поверхность можно ориентировать (согласованно выбрать "положительное" направление в касательных пространствах), то на ней можно задать непрерывное поле нормалей, и наоборот. Такая поверхность допускает ровно два противоположных выбора стороны (нормали).

Построение стороны через параметризацию

Если $\varphi : G \to U \subset S$ — параметризация стандартной окрестности U, то сторона U задаётся формулой:

$$\mathcal{N}_{\pm}(x) = \pm \frac{\mathcal{N}_{\varphi}}{|\mathcal{N}_{\varphi}|} \circ \varphi^{-1}(x),$$

где $\mathcal{N}_{\varphi}$ — векторное произведение частных производных:

$$\mathcal{N}_{\varphi} = \frac{\partial \varphi}{\partial u^1} \times \frac{\partial \varphi}{\partial u^2} \times \cdots \times \frac{\partial \varphi}{\partial u^{n-1}}.$$

Смысл:

В локальной карте, заданной параметризацией φ, нормаль строится как нормированное векторное произведение векторов, касательных к координатным линиям. Знак $\pm$ соответствует двум возможным согласованным ориентациям окрестности. При изменении параметризации на положительную (с положительным якобианом перехода) эта нормаль сохраняется.

45. Теорема о крае многообразия и его ориентации. Понятие ориентации края, согласованной с ориентацией многообразия. Пример согласованных ориентаций на поверхности и ограничивающей кривой.

Теорема о крае многообразия

Если M — k-мерное многообразие класса $C^{(r)}$, то его край ∂M является $(k-1)$-мерным многообразием класса $C^{(r)}$ без края.
Если M ориентируемо, то ∂M также ориентируемо.

Смысл:

Край многообразия наследует его гладкость и теряет одну размерность. Ориентация многообразия автоматически задаёт согласованную ориентацию края. Это важно для интегральных теорем (например, Стокса), где ориентация края влияет на знак результата.

Понятие ориентации края, согласованной с ориентацией многообразия

Ориентация края ∂M, заданная формулой $\tilde{\varphi}_x(\tilde{u}) = \varphi_x(0, \tilde{u})$ (где φ_x — параметризация M и $\tilde{u} \in \Pi_{k-1}$), называется индуцированной или согласованной с ориентацией M.

Смысл:

При переходе от многообразия к краю "отбрасывается" первая координата параметризации. Для согласованности нужно, чтобы матрица Якоби перехода между параметризациями сохраняла положительный определитель. Это гарантирует, что ориентация края согласована с "направлением наружу" от многообразия.

Пример согласованных ориентаций

Пусть $G \subset \mathbb{R}^2$ — область с гладкой границей S. Если G ориентирована естественным образом (якобиан > 0), то согласованная ориентация S задаётся касательным вектором τ, при котором G остаётся слева при обходе границы. Нормаль $\mathcal{N}$ направлена наружу.

Смысл:

Для поверхности в $\mathbb{R}^3$ внешняя нормаль $\mathcal{N}$ определяет ориентацию края через векторное произведение. В 2D это соответствует правилу "обход против часовой стрелки". Пример иллюстрирует, как ориентация края связана с направлением нормали и выбором параметризации.

Доп

$\Pi_{k-1} = (-1, 1)^{k-1}$ - это открытый $(k-1)$-мерный куб в пространстве параметров $\tilde{u} = (u_2, \ldots, u_k)$, используемый для параметризации края ∂M.

46. Полилинейные формы, кососимметрические формы - определения и элементарные свойства, внешнее произведение форм

Полилинейные формы

Определение полилинейной формы

Пусть X, Y — векторные пространства над полем K, $p \in \mathbb{N}$. Отображение $F : X^p \to Y$ называется p-линейным, если оно линейно по каждому аргументу. Если $Y = K$, то F называется p-формой на X. Множество всех p-форм обозначается $\mathcal{F}_p(X)$. При $p = 0$ под 0 -формами понимаются элементы Y.

Разложение по базису

Если $\dim X = n < +\infty$ и $e^1, \ldots, e^n$ — базис X, то для $F \in \mathcal{F}_p(X)$:

$$F = \sum_{i_1,\ldots,i_p=1}^{n} a_{i_1,\ldots,i_p} \pi_{i_1} \otimes \ldots \otimes \pi_{i_p},$$

где π_i — проектор на i-ю координату, а коэффициенты $a_{i_1,\ldots,i_p} = F(e^{i_1}, \ldots, e^{i_p})$.

Смысл

Полилинейные формы обобщают линейные отображения на случай нескольких аргументов. Они позволяют выражать многомерные линейные зависимости, например, объёмы или детерминанты. Коэффициенты $a_{i_1,\ldots,i_p}$ зависят от выбора базиса и полностью определяют форму.

Кососимметрические формы

Определение кососимметричности

Форма $F \in \mathcal{F}_p(X)$ называется кососимметрической, если для любых двух аргументов:

$$F(x^1, \ldots, x^i, \ldots, x^j, \ldots, x^p) = -F(x^1, \ldots, x^j, \ldots, x^i, \ldots, x^p).$$

Множество таких форм обозначается $\mathcal{E}_p(X)$. При $p > n$ все формы нулевые.

Базис в $\mathcal{E}_p(X)$

Для $p \leq n$ форма F раскладывается как:

$$F = \sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_p \leq n} a_{i_1,\ldots,i_p} \pi_{i_1} \wedge \ldots \wedge \pi_{i_p},$$

где $\wedge$ — внешнее произведение, а $\pi_{i_1} \wedge \ldots \wedge \pi_{i_p}$ вычисляется через определитель матрицы из координат векторов.

Смысл

Кососимметрические формы "чувствуют" ориентацию и линейную зависимость векторов. Например, если два вектора совпадают, форма обращается в ноль. Они тесно связаны с определителями и используются в интегрировании (дифференциальные формы).

Внешнее произведение форм

Определение внешнего произведения

Для $F \in \mathcal{E}_p(X)$ и $G \in \mathcal{E}_q(X)$ их внешнее произведение $F \wedge G \in \mathcal{E}_{p+q}(X)$ определяется на базисных формах как:

$$(\pi_{i_1} \wedge \ldots \wedge \pi_{i_p}) \wedge (\pi_{j_1} \wedge \ldots \wedge \pi_{j_q}) = \pi_{i_1} \wedge \ldots \wedge \pi_{i_p} \wedge \pi_{j_1} \wedge \ldots \wedge \pi_{j_q},$$

а затем продолжается по линейности.

Формула для коэффициентов

Если F и G заданы в виде (12.19), то:

$$F \wedge G = \sum_{1 \le i(j)_1 < \ldots < i(j)_p \le n} a_{i_1,\ldots,i_p} b_{j_1,\ldots,j_q} \pi_{i_1} \wedge \ldots \wedge \pi_{i_p} \wedge \pi_{j_1} \wedge \ldots \wedge \pi_{j_q}.$$

Смысл

Внешнее произведение комбинирует формы, увеличивая их степень. Оно аналогично векторному произведению, но для многомерных объектов. Например, в геометрии с его помощью строят формы для вычисления гиперобъёмов.

47. Дифференциальные формы; координатное представление дифференциальных форм. Внешнее дифференцирование дифференциальных форм

Определение дифференциальной формы

Пусть $G \subset \mathbb{R}^n$, $p \in \mathbb{N}$. Дифференциальной формой степени p (p-формой) на G называется функция $\omega : G \times (\mathbb{R}^n)^p \to \mathbb{R}$, такая что для всех $x \in G$ функция $\omega(x; \cdot)$ принадлежит пространству $\mathcal{E}_p(\mathbb{R}^n)$ (является кососимметрической p-линейной формой). 0-формой называется функция $f : G \to \mathbb{R}$.

Смысл:

Дифференциальная форма — это математический объект, который в каждой точке области G задает кососимметрическую многомерную "линейную меру". 0-формы — это просто обычные скалярные функции. Формы обобщают понятия функций, векторных полей и их обобщений на многомерные поверхности.

Координатное представление дифференциальных форм

Пусть $p \in \mathbb{N}$. Дифференциальная p-форма ω в открытом множестве $G \subset \mathbb{R}^n$ может быть записана в виде:

$$\omega = \sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_p \le n} a_{i_1 \ldots i_p}(x) dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_p},$$

где $a_{i_1 \ldots i_p} : G \to \mathbb{R}$ — коэффициенты формы, а $dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_p}$ — базисные внешние произведения дифференциалов координат. Для $p = n$ форма имеет вид $\omega = a(x) dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n$.

Смысл:

Это представление показывает, как форма раскладывается по базисным антисимметричным "объемам", образованным внешними произведениями дифференциалов координат. Суммирование идет только по возрастающим мультииндексам $i_1 < \cdots < i_p$ из-за кососимметричности. Запись dx_i оправдана поведением при операциях (как дифференциалы).

Внешнее дифференцирование дифференциальных форм

Пусть G открыто в $\mathbb{R}^n$, $p \in \mathbb{Z}_+$, $r \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Внешнее дифференцирование — это оператор $d : \Omega_p^{(r)}(G) \to \Omega_{p+1}^{(r-1)}(G)$, определяемый так:

1. Для 0-формы $\omega = f \in C^{(r)}(G)$:

$$df = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i.$$

2. Для p-формы $\omega = \sum_I a_I(x) dx_I$ (где $I = (i_1 < \cdots < i_p)$):

$$d\omega = \sum_I da_I \wedge dx_I = \sum_I \left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial a_I}{\partial x_j} dx_j \right) \wedge dx_I.$$

Свойства:

1. d линейно.
2. $d(\omega \wedge \lambda) = d\omega \wedge \lambda + (-1)^{\deg \omega} \omega \wedge d\lambda$ для форм ω, λ.
3. $d^2\omega = d(d\omega) = 0$.

Смысл:

Внешнее дифференцирование обобщает понятие градиента, ротора и дивергенции на формы произвольной степени. Оно увеличивает степень формы на 1 и измеряет её "локальное изменение". Свойство $d^2 = 0$ (локальная точность) является фундаментальным и лежит в основе теории де Рама и интегральных теорем (Стокса).

48. Перенос дифференциальных форм. Теорема о свойствах переноса форм

Определение переноса дифференциальных форм

Пусть G — открытое множество в $\mathbb{R}^n$, U — открытое множество в $\mathbb{R}^m$, $p \in \mathbb{Z}_+$, $\omega \in \Omega_p(G)$, $T \in C^{(1)}(U \to G)$. Перенесённая форма $T^*\omega$ определяется равенством:

$$(T^*\omega)(u; du^1, \ldots, du^p) = \omega(T(u); T'(u)du^1, \ldots, T'(u)du^p),$$

где $u \in U$, $du^1, \ldots, du^p \in \mathbb{R}^m$. Отображение T^* называется переносом форм или заменой переменных.

Смысл:

Перенос форм позволяет "перетянуть" дифференциальную форму из пространства G в пространство U с помощью отображения T. Это аналогично замене переменных в интеграле, где форма адаптируется к новым координатам через производную T'. Например, при переходе от декартовых к полярным координатам.

Свойства переноса форм

1. Линейность: $T^*(\alpha\omega + \beta\lambda) = \alpha T^*\omega + \beta T^*\lambda$.
2. Умножение на функцию: $T^*(f\omega) = (f \circ T)T^*\omega$ для $f \in C^{(r)}(G)$.
3. Внешнее произведение: $T^*(\omega \wedge \lambda) = T^*\omega \wedge T^*\lambda$ для $\lambda \in \Omega_q^{(r)}$.
4. Дифференциал: $T^* d\omega = dT^*\omega$ при $r \geq 1$.
5. Явная формула: Для $\omega = \sum a_{i_1,\ldots,i_p} dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_p}$,

$$T^*\omega = \sum (a_{i_1,\ldots,i_p} \circ T) \cdot \det\left(\frac{\partial T_{i_k}}{\partial u_{j_l}}\right) du_{j_1} \wedge \ldots \wedge du_{j_p}.$$

6. Композиция: $(T \circ S)^\omega = S^(T^*\omega)$, если V открыто в $\mathbb{R}^i$, $S \in C^{(1)}(V \to U)$.

Смысл:

Эти свойства показывают, что перенос форм согласован с базовыми операциями (линейностью, произведением, дифференцированием). Например, пункт 4 означает, что дифференцирование и перенос коммутируют, а пункт 5 обобщает правило замены переменных в интеграле через якобиан. Это удобно для вычислений в новых координатах.

49 Поверхностный интеграл второго рода. Выражением поверхностного интеграла второго рода через поверхностный интеграл первого рода. Выражения для интеграла 2го рода в случае размерностей многообразия 1 и 2. Примеры. Лемма Пуанкаре в общем случае (без док-ва)

Определение интеграла второго рода

Пусть G открыто в $\mathbb{R}^n$, $M \subset G$ — ориентированное k-мерное многообразие класса $\mathbb{M}_{k,n}^{(1)}$, $\omega \in \Omega_k(G)$ — дифференциальная форма степени k, $E \in \mathbb{A}_M$ — малое измеримое множество. Тогда интеграл второго рода определяется как:

$$\int_E \omega = \int_{\varphi^{-1}(E)} \widehat{\varphi^*\omega}\, d\mu_k,$$

где φ — положительно ориентирующая параметризация стандартной окрестности U, содержащей E, а $\varphi^*\omega$ — pullback формы ω.

Смысл:

Интеграл второго рода обобщает понятие криволинейного и поверхностного интеграла для дифференциальных форм. Он позволяет вычислять "поток" формы через многообразие, используя локальные параметризации. Для малых множеств интеграл сводится к обычному крайнему интегралу от pullback формы.

Связь с интегралом первого рода

Для малого множества E и формы $\omega = \sum a_{i_1 \dots i_k} dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$ интеграл второго рода выражается через интеграл первого рода:

$$\int_E \omega = \int_E \left\langle a, \frac{\det \varphi'}{\sqrt{\mathcal{D}_\varphi}} \circ \varphi^{-1} \right\rangle d\mu_M,$$

где $\mathcal{D}_\varphi = \sum (\det \varphi'_{j_1 \dots j_k})^2$ — грамиан параметризации.

Смысл:

Эта формула позволяет перейти от абстрактного интеграла от формы к интегралу от функции по мере на многообразии. Множитель $\frac{\det \varphi'}{\sqrt{\mathcal{D}_\varphi}}$ учитывает искажение объема и ориентацию при параметризации. Это ключ к практическим вычислениям, например, в задачах физики.

Примеры для размерностей 1 и 2:

- Для $k = 1$ (кривая): $\int_E \omega = \int_E \langle a, \tau \rangle d\mu_1$, где τ — единичный касательный вектор.
- Для $k = 2, n = 3$ (поверхность):

$$\int_S \omega = \int_S \langle F, N \rangle d\mu_S, \quad F = (P, Q, R),\ N \text{ — единичная нормаль.}$$

Теорема Пуанкаре (без доказательства):

Если G — звездная область в $\mathbb{R}^n$ и ω — замкнутая форма ($d\omega = 0$), то ω точна ($\exists \eta : \omega = d\eta$). Для форм класса C^r первообразная также C^r.

Смысл:

В размерности 2 интеграл сводится к потоку векторного поля через поверхность. Лемма Пуанкаре гарантирует существование потенциала для замкнутых форм в "хороших" областях, что важно для теории поля (например, в электродинамике).

50. Общая формула Стокса. Частные случаи и следствия общей формулы Стокса: формула Ньютона-Лейбница для криволинейных интегралов, формула Грина, классическая формула Стокса, формула Гаусса–Остроградского

Общая формула Стокса для многообразий

Пусть $M \in \mathbb{M}_{kn}^{(2)}$ — компактное u ориентированное многообразие, G — открытое множество в $\mathbb{R}^n$, $M \subset G$, $\omega \in \Omega_{k-1}^{(1)}(G)$. Тогда:

$$\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega.$$

Смысл:

Эта теорема обобщает идею связи интеграла по области с интегралом по её границе. Она показывает, что дифференцирование формы ω внутри M соответствует интегрированию самой формы по границе ∂M. Формула универсальна и применяется в многомерном анализе, например, для расчётов потоков и циркуляции полей.

Формула Грина

Пусть D — ограниченная область в $\mathbb{R}^2$ с гладкой границей ∂D, G открыто в $\mathbb{R}^2$, $\overline{D} \subset G$, $P, Q \in C^{(1)}(G)$. Тогда:

$$\iint_D (Q'_x - P'_y)\, dx\, dy = \int_{\partial D} P\, dx + Q\, dy.$$

Смысл:

Это двумерный случай формулы Стокса, связывающий двойной интеграл по области с криволинейным интегралом по её границе. Используется, например, для вычисления работы векторного поля вдоль контура или площади фигуры через граничный интеграл.

Классическая формула Стокса

Пусть S — компактная ориентированная поверхность класса $C^{(2)}$ в $\mathbb{R}^3$ с краем ∂S, G открыто в $\mathbb{R}^3$, $S \subset G$, $P, Q, R \in C^{(1)}(G)$. Тогда:

$$\iint_S (R'_y - Q'_z) dy \wedge dz + (P'_z - R'_x) dz \wedge dx + (Q'_x - P'_y) dx \wedge dy = \int_{\partial S} P\,dx + Q\,dy + R\,dz.$$

Смысл:

Это трёхмерный аналог формулы Грина. Она связывает поток ротора векторного поля через поверхность с циркуляцией поля по её границе. Применяется в физике для расчётов электромагнитных полей и гидродинамики.

Формула Гаусса–Остроградского

Пусть V — ограниченная область в $\mathbb{R}^3$ с гладкой границей ∂V, G открыто в $\mathbb{R}^3$, $V \subset G$, $P, Q, R \in C^{(1)}(G)$. Тогда:

$$\iiint_V (P'_x + Q'_y + R'_z)\, dx\, dy\, dz = \iint_{\partial V} P\, dy \wedge dz + Q\, dz \wedge dx + R\, dx \wedge dy.$$

Смысл:

Эта формула связывает тройной интеграл дивергенции поля по объёму с потоком поля через границу этого объёма. Она широко используется в теории поля для расчётов, например, потока тепла или заряда через замкнутую поверхность.

51: Неравенства Минковского и Гёльдера, существенный супремум, пространства $L_p(X, \mu)$

Теорема (Неравенство Гёльдера):

Пусть $(X, \mathbb{A}, \mu)$ — пространство с мерой, $E \in \mathbb{A}$, функции f и g измеримы на E, существует $\int_E fg\,d\mu$, $1 < p < +\infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Тогда:

$$\left|\int_E fg\,d\mu\right| \le \left(\int_E |f|^p\,d\mu\right)^{1/p} \left(\int_E |g|^q\,d\mu\right)^{1/q}.$$

Смысл:

Неравенство Гёльдера обобщает идею "взвешенного среднего" для интегралов. Оно связывает интеграл произведения двух функций с произведениями их норм в L_p и L_q. Это ключевой инструмент для доказательства сходимости и ограниченности в функциональных пространствах, например, при изучении рядов Фурье или операторов.

Неравенство Минковского для интегралов

Теорема (Неравенство Минковского):
Пусть $(X, \mathbb{A}, \mu)$ — пространство с мерой, $E \in \mathbb{A}$, функции f и g измеримы, конечны почти везде на E, $1 \le p < +\infty$. Тогда:

$$\left(\int_E |f+g|^p\,d\mu\right)^{1/p} \le \left(\int_E |f|^p\,d\mu\right)^{1/p} + \left(\int_E |g|^p\,d\mu\right)^{1/p}.$$

Смысл:

Это аналог неравенства треугольника для норм в L_p. Оно показывает, что норма суммы не превосходит суммы норм, что важно для доказательства линейности и метрических свойств пространств L_p. Доказательство часто опирается на неравенство Гёльдера.

Существенный супремум функции

Для измеримой функции $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ почти везде на пространстве с мерой $(X, \mathbb{A}, \mu)$ существенный супремум:

$$\operatorname{ess\,sup}_{x \in E} f(x) = \inf\{A \in \mathbb{R} : f(x) \le A \text{ почти везде на } E\}.$$

(Если таких A нет, полагаем $+\infty$.)

Смысл:

Существенный супремум игнорирует "выбросы" функции на множествах нулевой меры. Например, для функции, равной 1 на рациональных числах и 0 на иррациональных, $\operatorname{ess\,sup} = 0$

, так как рациональные числа имеют меру Лебега ноль. Это понятие критично для определения нормы в L_∞.

Пространства $L_p(X,\mu)$

Для $1 \le p < +\infty$:

$$L_p(E,\mu) = \left\{ f : \text{н.в. } E \to \mathbb{R} \text{ измеримы}, \int_E |f|^p \, d\mu < +\infty \right\}.$$

Для $p = +\infty$:

$$L_\infty(E,\mu) = \{ f : \text{н.в. } E \to \mathbb{R} \text{ измеримы}, \operatorname{ess\,sup} |f| < +\infty \}.$$

Норма: $\|f\|_p = \left(\int_E |f|^p \, d\mu\right)^{1/p}$ (для L_∞ — $\operatorname{ess\,sup} |f|$).

Смысл:

Пространства L_p — это множества функций с конечной "энергией" (интегралом от p-й степени). Они являются полными нормированными пространствами (банаховыми), что позволяет применять методы функционального анализа. Примеры: L_2 для рядов Фурье, L_∞ для ограниченных функций.

52: Вложения пространств Лебега $L_p(X,\mu)$ и пространств ℓ_p. Несравнимость пространств L_p

Вложение $L_q \subset L_p$ при конечной мере

Если мера пространства $\mu E < +\infty$ и индексы удовлетворяют условию $1 \le p < q \le +\infty$, то $L_q(E,\mu) \subset L_p(E,\mu)$. Более того, для любой функции $f \in L_q(E,\mu)$ выполняется неравенство:

$$\|f\|_{L_p(E,\mu)} \le (\mu E)^{1/p - 1/q} \|f\|_{L_q(E,\mu)}.$$

Смысл:

При конечной мере "более требовательные" пространства L_q (с большим q) вкладываются в "менее требовательные" L_p (с меньшим p). Множитель $(\mu E)^{1/p-1/q}$ компенсирует разницу в условиях интегрируемости. Это позволяет оценить норму функции в "слабом" пространстве через её норму в "сильном".

Несравнимость L_p при бесконечной мере

Если $\mu E = +\infty$, то пространства $L_p(E, \mu)$ могут не быть вложены друг в друга. Контрпример: $E = (0, +\infty)$ с мерой Лебега,

- $f_1(x) = \frac{1}{x+1}$: $f_1 \in L_2(E)$ но $f_1 \notin L_1(E)$.
- $f_2(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}\chi_{(0,1)}(x)$: $f_2 \in L_1(E)$ но $f_2 \notin L_2(E)$.

Смысл:

При бесконечной мере не существует общего вложения $L_q \subset L_p$ или $L_p \subset L_q$ для $p \neq q$. Функция f_1 "спадает" недостаточно быстро, чтобы быть интегрируемой в L_1, но её квадрат уже интегрируем. Функция f_2 "взрывается" в нуле, что мешает интегрируемости её квадрата на конечном интервале, но сама она интегрируема.

Пространства ℓ_p и вложение периодических L_p

Пространство ℓ_p состоит из последовательностей $x = (x_k)_{k=1}^{\infty}$ с конечной нормой:

$$\|x\|_p = \begin{cases} \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p\right)^{1/p}, & 1 \le p < +\infty, \\ \sup_{k\in\mathbb{N}} |x_k|, & p = +\infty. \end{cases}$$

Для 2π-периодических функций на $\mathbb{R}$ с мерой Лебега на $[-\pi, \pi]$ верно вложение пространств:

$$C \subset L_\infty \subset \ldots \subset L_2 \subset \ldots \subset L_1,$$

где C — пространство непрерывных 2π-периодических функций с нормой $\|f\|_\infty = \max_{x\in[-\pi,\pi]} |f(x)|$, совпадающей с L_∞-нормой для непрерывных функций.

Смысл:

Пространства ℓ_p — это дискретный аналог L_p для последовательностей. Для *периодических* функций, рассматриваемых на *конечном* интервале периода ($\mu[-\pi, \pi] = 2\pi < \infty$), работает теорема о вложении: чем строже условия (больше p), тем "меньше" пространство. Непрерывные функции (C) образуют самое узкое из этих пространств, вложенное в L_∞.

53. Полнота пространства $C(K)$

Определение полного нормированного пространства

Нормированное пространство X называется полным (банаховым), если любая фундаментальная последовательность в X сходится к некоторому элементу из X. Последовательность $(x_n) \subset X$ фундаментальна, если $\forall \epsilon > 0 \, \exists N \colon \forall n, m \geq N$ выполняется $\|x_n - x_m\|_X < \epsilon$.

Смысл:

Полнота означает, что в пространстве "хватает" пределов для всех сходящихся последовательностей. Это ключевое свойство банаховых пространств, гарантирующее корректность многих методов анализа (например, решения уравнений).

Пространство непрерывных функций $C(K)$

Пусть K — компактное топологическое пространство. Пространство $C(K)$ состоит из всех непрерывных функций $f : K \to \mathbb{C}$ (или $\mathbb{R}$), с нормой $\|f\|_{C(K)} = \sup_{x \in K} |f(x)|$. Обозначается $C_{\mathbb{C}}(K)$ или $C_{\mathbb{R}}(K)$ в зависимости от поля.

Смысл:

Это пространство функций, непрерывных на компакте K. Норма — это максимальное значение модуля функции на K. Компактность K обеспечивает существование супремума и его достижение.

Теорема о полноте $C(K)$

Пространство $C(K)$ полно.

54. Критерий полноты нормированного пространства

Определение полного нормированного пространства (банахово пространство)

Нормированное пространство $(X, \|\cdot\|)$ называется полным, если любая фундаментальная последовательность в X сходится к элементу этого пространства. Полное нормированное пространство также называют банаховым.

Смысл:

Полнота означает, что в пространстве "нет дыр" — любая последовательность, которая "хочет" сходиться (фундаментальная), действительно имеет предел внутри этого пространства. Это важно для анализа, так как гарантирует, что предельные переходы не выводят нас за рамки рассматриваемого пространства. Пример — пространство непрерывных функций $C[a, b]$ с нормой максимума полно, а пространство многочленов на отрезке — нет.

Критерий полноты через абсолютную сходимость ряда

Нормированное пространство X полно тогда и только тогда, когда любой абсолютно сходящийся ряд в X сходится, то есть:

$$x_k \in X, \sum_{n=1}^{\infty} \|x_k\| < +\infty \implies \sum_{n=1}^{\infty} x_k \text{ сходится в } X.$$

Смысл:

Этот критерий связывает полноту со сходимостью рядов. Если сумма норм членов ряда конечна (ряд "абсолютно сходится"), то сам ряд должен сходиться к элементу пространства. Это удобный инструмент для проверки полноты, так как позволяет работать с рядами вместо последовательностей. Например, в пространстве ℓ^1 (пространство абсолютно суммируемых последовательностей) этот критерий выполняется.

55 Полнота пространств $L^p(X, \mu)$ при $p \in [1, +\infty]$

Определение пространства $L^p(X, \mu)$

Пусть $(X, \mathcal{A}, \mu)$ — пространство с мерой, $p \in [1, +\infty]$. Пространство $L^p(X, \mu)$ - полное, состоит из измеримых функций $f : X \to \mathbb{R}$ (или $\mathbb{C}$), для которых конечна норма:

- при $p < +\infty$: $\|f\|_p = \left(\int_X |f|^p \, d\mu\right)^{1/p}$,
- при $p = +\infty$: $\|f\|_\infty = \operatorname{ess\,sup}_{x \in X} |f(x)|$.

Смысл:

Пространства L^p — это функциональные пространства, где "размер" функции измеряется интегралом её степени p. Они обобщают понятие $\mathbb{R}^n$ на бесконечномерный случай, позволяя работать с функциями, для которых интеграл $|f|^p$ конечен.

Критерий полноты пространства L^p

Пространство $L^p(X, \mu)$ полно при $p \in [1, +\infty]$, то есть любая фундаментальная последовательность $\{f_n\} \subset L^p$ сходится к некоторой функции $f \in L^p$ по норме $\| \cdot \|_p$.

Смысл:

Полнота означает, что если последовательность функций $\{f_n\}$ "сходится сама к себе" (фундаментальна), то её предел тоже лежит в L^p. Это аналог полноты $\mathbb{R}^n$, но для интегральных норм. Без полноты многие методы анализа (например, предельные переходы) были бы неприменимы.

Теорема Рисса-Фишера

Любое нормированное пространство $L^p(X, \mu)$ при $p \in [1, +\infty]$ является банаховым (полным). В частности, если $\{f_n\}$ — фундаментальна в L^p, то существует $f \in L^p$, такая что $\|f_n - f\|_p \to 0$.

Смысл:

Эта теорема — основа для анализа в L^p. Она гарантирует, что пределы "хороших" последовательностей не выходят за рамки пространства. Например, в матфизике это позволяет корректно решать уравнения, используя приближения. Для $p = 2$ (гильбертов случай) это особенно важно в квантовой механике.

56. Плотность ступенчатых функций в L^p

Определение плотного множества в метрическом пространстве

Подмножество K_0 метрического пространства (X, d) называется **плотным** в X, если его замыкание совпадает с X:

$$\overline{K_0} = X.$$

Смысл:

Это означает, что любая точка пространства X либо принадлежит K_0, либо является предельной точкой для K_0. Эквивалентно: каждый открытый шар в X содержит хотя бы одну точку из K_0.

Определение ступенчатой функции

Функция $g : X \to \mathbb{R}$ называется ступенчатой (обозначается $g \in \operatorname{step}(X, \mu)$), если она представима в виде:

$$g = \sum_{k=1}^{n} c_k \cdot \chi_{E_k}, \quad \text{где} \quad \mu(E_k) < \infty, \quad c_k \in \mathbb{R}.$$

Смысл:

Ступенчатые функции — простейшие "строительные блоки" анализа: они принимают конечное число значений на множествах конечной меры. Используются для аппроксимации сложных функций.

Теорема о плотности в L^p для $1 \leq p < \infty$

Пусть $(X, \mathcal{A}, \mu)$ — пространство с мерой, и $1 \leq p < \infty$. Тогда для любой $f \in L^p(X, \mu)$ и $\varepsilon > 0$ существует ступенчатая функция $g \in \operatorname{step}(X, \mu)$ такая, что:

$$\|f - g\|_p < \varepsilon, \quad \text{где} \quad \|h\|_p = \left(\int_X |h|^p d\mu \right)^{1/p}.$$

Смысл:

Функции из L^p можно сколь угодно точно приблизить ступенчатыми функциями по норме $\| \cdot \|_p$. Основная идея: для $f \geq 0$ строится $g \geq 0$ с $\int |f|^p - |g|^p d\mu < \varepsilon^p$.

57. Плотность $C_0(\mathbb{R}^n)$ в $L^p(\mathbb{R}^n)$, плотность $C_{2\pi}$ в $L^p_{2\pi}$

Аппроксимация характеристических функций ограниченных множеств

Для ограниченного измеримого множества $E \subset \mathbb{R}^n$ с $\lambda_n(E) < \infty$ и $\chi_E \in L^p(\mathbb{R}^n)$ $(1 \leq p < \infty)$, существует функция $g \in C_0(\mathbb{R}^n)$ такая, что:

$$\|\chi_E - g\|_p \leq 2\epsilon.$$

Конструкция:

$$g(x) = 1 - \frac{d(x, \mathbb{R}^n \setminus U)}{d(x, \mathbb{R}^n \setminus U) + d(x, E)},$$

где $U \supset E$ — открытое множество с $\lambda_n(U \setminus E) < \epsilon$.

Смысл:

Характеристическую функцию χ_E можно приблизить непрерывной функцией с компактным носителем, используя регуляризацию меры Лебега. Функция $g(x)$ "сглаживает" скачок на границе E, а оценка нормы следует из малой меры симметрической разности $U \setminus E$.

Аппроксимация простых функций

Любая простая функция $f = \sum_{k=1}^N c_k \chi_{E_k}$ с $\lambda_n(E_k) < \infty$ аппроксимируется функцией $g \in C_0(\mathbb{R}^n)$:

$$\|f - g\|_p < \epsilon, \quad \text{где} \quad g = \sum_{k=1}^N c_k g_k,$$

и для каждого k: $\|\chi_{E_k} - g_k\|_p < \frac{\epsilon}{N \cdot \max(|c_k|)}$.

Смысл:

Поскольку простые функции плотны в L^p, достаточно показать их аппроксимацию. Конечность меры $\lambda_n(E_k)$ позволяет применить пункт 1 к каждому χ_{E_k}. Сумма g остаётся в $C_0(\mathbb{R}^n)$, а оценка нормы следует из линейности интеграла.

Плотность $C_0(\mathbb{R}^n)$ в $L^p(\mathbb{R}^n)$ и $C_{2\pi}$ в $L^p_{2\pi}$

- Для $L^p(\mathbb{R}^n)$: $\forall f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ и $\epsilon > 0$ $\exists g \in C_0(\mathbb{R}^n) : \|f - g\|_p < \epsilon$.
- Для $L^p_{2\pi}$ (периодические функции): $\forall f \in L^p_{2\pi}$ $\exists g \in C_{2\pi} : \|f - g\|_{L^p_{2\pi}} < \epsilon$, где $C_{2\pi}$ — непрерывные 2π-периодические функции.

Смысл:

В непериодическом случае аппроксимация следует из плотности простых функций и пункта 2. Для периодических функций используется сужение f на $[-z, z]$ с последующим периодическим продолжением, где z выбирается так, чтобы норма "хвоста" f вне $[-z, z]$ была мала. Равномерная непрерывность на компакте обеспечивает близость к непрерывной периодической функции.

58 Теорема о непрерывности сдвига

Определение Оператора Сдвига

Пусть $h \in \mathbb{R}^m$. Оператор сдвига на вектор h определяется как отображение, действующее на функцию f по правилу:

$$(\tau_h f)(x) = f(x + h).$$

Смысл:

Этот оператор "передвигает" график функции f на вектор $-h$ в пространстве. Он позволяет изучать, как меняется значение функции при смещении её аргумента, что важно для анализа свойств функций, таких как непрерывность или периодичность.

Теорема о Непрерывности Сдвига в L^p

Пусть $1 \leq p < +\infty$ и $f \in L^p(\mathbb{R}^m)$. Тогда оператор сдвига непрерывен по норме пространства L^p, то есть:

$$\lim_{|h| \to 0} \|\tau_h f - f\|_p = \lim_{|h| \to 0} \left(\int_{\mathbb{R}^m} |f(x + h) - f(x)|^p dx \right)^{1/p} = 0.$$

Смысл:

Теорема утверждает, что малые сдвиги аргумента функции из L^p приводят к сколь угодно малым изменениям самой функции в среднем (в смысле нормы L^p). Это означает, что функции в L^p "непрерывны в среднем" и их поведение устойчиво к малым возмущениям аргумента.

59. Гильбертовы пространства. Непрерывность скалярного произведения. Скалярное умножение в $L^2(X, \mu)$. Примеры ортогональных систем в $L^2(X, \mu)$

Гильбертовы пространства

Полное линейное пространство H, снабженное скалярным произведением $\langle \cdot, \cdot \rangle$, относительно нормы $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$.

Смысл:

Гильбертовы пространства — это обобщение евклидовых пространств на бесконечномерный случай. Они играют ключевую роль в функциональном анализе, квантовой механике и теории приближений, так как позволяют работать с рядами Фурье и ортогональными разложениями.

Непрерывность скалярного произведения

Если $x_n \to x$ и $y_n \to y$ в H, то $\langle x_n, y_n \rangle \to \langle x, y \rangle$.

Смысл:

Непрерывность скалярного произведения означает, что малые изменения векторов приводят к малым изменениям их скалярного произведения. Это свойство критично для доказательств сходимости рядов и устойчивости численных методов.

Скалярное умножение в $L^2(X, \mu)$

Для $f, g \in L^2(X, \mu)$ скалярное произведение задается формулой:

$$\langle f, g \rangle = \int_X f(x)\overline{g(x)}\, d\mu(x).$$

$\overline{g}$ обозначает комплексно сопряжённое значение. Например, для $g = a + bi$, верно $\overline{g} = a - bi$.

Смысл:

Пространство L^2 состоит из функций с конечной энергией (интегрируемых с квадратом). Скалярное умножение здесь аналогично стандартному, но заменяет сумму на интеграл, что позволяет работать с функциями как с бесконечномерными векторами.

Ортогональные системы в $L^2(X, \mu)$

Система функций $\{\phi_k\} \subset L^2(X, \mu)$ называется ортогональной, если:

$$\langle \phi_m, \phi_n \rangle = 0 \quad \text{при} \quad m \neq n.$$

Если дополнительно $\|\phi_k\| = 1$ для всех k, система называется ортонормированной.

Примеры ортогональных систем в $L^2(X, \mu)$

1. Тригонометрическая система $\{e^{inx}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ в $L^2([-\pi, \pi])$.
2. Многочлены Лежандра $\{P_n\}$ в $L^2([-1, 1])$.
3. Функции Хаара на отрезке.

Смысл:

Ортогональные системы позволяют раскладывать функции в ряды (например, ряд Фурье), что упрощает решение дифференциальных уравнений и анализ сигналов. Каждая система выбирается под конкретную задачу, например, тригонометрическая — для периодических функций.

60. Теорема Пифагора для гильбертовых пространств и критерий сходимости ортогонального ряда

Лемма о почленном умножении сходящегося ряда

Пусть $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ — сходящийся ряд в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$. Тогда для любого вектора $y \in \mathcal{H}$ выполняется:

$$\left\langle \sum_{k=1}^{\infty} x_k, y \right\rangle = \sum_{k=1}^{\infty} \langle x_k, y \rangle.$$

Смысл:

Эта лемма утверждает, что скалярное произведение можно "разнести" по бесконечной сумме векторов. Это следует из непрерывности скалярного произведения: если ряд сходится, то его можно почленно умножать на любой вектор, и результат останется корректным.

Критерий сходимости ортогонального ряда

Ортогональный ряд $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ сходится тогда и только тогда, когда сходится числовой ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\|^2$. При этом выполняется равенство:

$$\left\| \sum_{k=1}^{\infty} x_k \right\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\|^2.$$

Смысл:

Этот критерий связывает сходимость ряда ортогональных векторов со сходимостью ряда их норм. Фактически, он обобщает теорему Пифагора на бесконечномерные пространства: квадрат нормы суммы равен сумме квадратов норм, если векторы ортогональны.

Теорема Пифагора для гильбертовых пространств

Для любого конечного набора ортогональных векторов $\{x_k\}_{k=1}^{N}$ в $\mathcal{H}$ выполняется:

$$\left\| \sum_{k=1}^{N} x_k \right\|^2 = \sum_{k=1}^{N} \|x_k\|^2.$$

Смысл:

Это прямое обобщение классической теоремы Пифагора. Если векторы ортогональны, то квадрат длины их суммы равен сумме квадратов их длин. В бесконечномерном случае это свойство сохраняется при условии сходимости ряда норм.