Шпора матан

1. Интегралы от неотрицательных функций

1. Основные свойства

Монотонность

Если $0 \leq f(x) \leq g(x)$ п.в. на X, то:

$$\int_X f\,d\mu \leq \int_X g\,d\mu.$$

(Интеграл сохраняет неравенства.)

Линейность

Для $a, b \geq 0$:

$$\int_X (af + bg)\,d\mu = a\int_X f\,d\mu + b\int_X g\,d\mu.$$

(Интеграл суммы = сумма интегралов.)

Аддитивность по области

Если $A \cap B = \emptyset$, то:

$$\int_{A\cup B} f\,d\mu = \int_A f\,d\mu + \int_B f\,d\mu.$$

(Интеграл по объединению = сумма интегралов.)

Невозрастание меры

Если $A \subseteq B$, то:

$$\int_A f\,d\mu \le \int_B f\,d\mu.$$

(Интеграл по подмножеству ≤ интегралу по всему множеству.)

2. Теорема Леви для рядов

Если $f_k \ge 0$ и измеримы, то:

$$\int_E \sum_{k=1}^{\infty} f_k\,d\mu = \sum_{k=1}^{\infty} \int_E f_k\,d\mu.$$

(Можно менять местами сумму и интеграл.)

2. Неравенство Чебышева

Суммируемая функция

Определение

Функция `f` называется суммируемой на `E` (пишут `f ∈ L(E, μ)`), если:

$$\int_E |f|\,d\mu < +\infty$$

Свойство

Если `f` суммируема, то она конечна почти всюду на `E`.

Формулировка неравенства Чебышева

Для `f ∈ S(E)` (классу измеримых функций), `t > 0`:

$$\mu\{x \in E : |f(x)| \geq t\} \leq \frac{1}{t} \int_E |f| \, d\mu$$

Смысл:

Оценивает меру множества, где `|f(x)| ≥ t`, через интеграл от `|f|`.
Неравенство даёт гарантированную верхнюю границу для "редких событий". Чем выше порог `t`, тем меньше элементов могут его превышать.

Следствия неравенства Чебышева

Следствие 1

Формулировка:
Если $f \in L(E, \mu)$, то $\mu(\{x \in E : |f(x)| = +\infty\}) = 0$.

Смысл:
Суммируемая функция не может принимать бесконечные значения на множестве положительной меры. "Почти все" её значения конечны.

Следствие 2

Формулировка:
Если $f \geq 0$ и $\int_E f d\mu = 0$, то $f = 0$ почти всюду на E.

Смысл:
Единственная неотрицательная функция с нулевым интегралом — это функция, тождественно равная нулю (с точностью до множества меры нуль). Иначе интеграл был бы положительным.

3. Приближение интеграла интегралом по множеству конечной меры

Определение

Пусть $f \in L(E, \mu)$, где $\mu E = +\infty$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует подмножество $E_\varepsilon \subset E$ такое, что:

1. $\mu E_\varepsilon < +\infty$ (множество E_ε имеет конечную меру),
2. $\int_{E \setminus E_\varepsilon} |f| \, d\mu < \varepsilon$ (интеграл от $|f|$ по дополнению $E \setminus E_\varepsilon$ меньше ε).

Смысл

Это следствие показывает, что для интегрируемой функции f на множестве бесконечной меры можно найти подмножество конечной меры E_ε, на котором интеграл f "почти полностью" сосредоточен. Оставшаяся часть интеграла (по $E \setminus E_\varepsilon$) пренебрежимо мала (меньше ε).

Это означает, что "хвост" функции (её поведение на множествах большой меры) не вносит существенного вклада в интеграл.

Счетная аддитивность интеграла

Определение

Если $E = \bigcup_k E_k$, где E_k измеримы и попарно не пересекаются, и интеграл $\int_E f\,d\mu$ существует, то:

$$\int_E f\,d\mu = \sum_k \int_{E_k} f\,d\mu.$$

Смысл

Интеграл по объединению счетного числа множеств равен сумме интегралов по каждому множеству. Это свойство аналогично счетной аддитивности меры.

4. Теорема Фату

liminf

`liminf` (нижний предел) - это: Для числовой последовательности: наибольший предел среди всех её подпоследовательностей. Для функций: функция, которая в каждой точке равна нижнему пределу значений последовательности функций. Проще говоря: "наименьшее значение, к которому постоянно возвращается последовательность"

Формулировка

Для неотрицательных измеримых функций

Пусть $f_n \in S(E)$, $f_n \geq 0$. Тогда:

$$\int_E \liminf_{n\to\infty} f_n \, d\mu \le \liminf_{n\to\infty} \int_E f_n \, d\mu.$$

Смысл

Когда мы берем последовательность неотрицательных функций и смотрим на их нижний предел (самые маленькие значения, к которым они постоянно возвращаются), то интеграл от этого нижнего предела никогда не сможет оказаться больше, чем нижний предел их интегралов. Это как гарантия того, что усредненное "худшее поведение" функций не даст неожиданно большой интеграл.

Для поточечного предела

Пусть $f_n, f \in S(E)$, $f_n \ge 0$, $f_n \to f$ почти везде на E. Тогда:

$$\int_E f \, d\mu \le \liminf_{n\to\infty} \int_E f_n \, d\mu.$$

Смысл

Если такие неотрицательные функции ещё и сходятся к какой-то предельной функции, то интеграл этой предельной функции тоже не превысит нижнюю границу интегралов исходной последовательности. Даже если значения функций поточечно стремятся к пределу, их интегралы могут колебаться, но теорема даёт нам контроль сверху - предельный интеграл не выскочит за нижнюю границу.

5. Теорема Лебега о мажорированной сходимости

Формулировка

Если последовательность измеримых функций f_n сходится к f почти везде на E, и существует суммируемая мажоранта $\phi \in L(E, \mu)$ (т.е. $|f_n| \le \phi$ почти везде), то предельный переход под знаком интеграла корректен:

$$\lim_{n\to\infty} \int_E f_n \, d\mu = \int_E f \, d\mu.$$

Смысл

Теорема гарантирует, что при наличии "контроля" (мажоранты ϕ) над функциями f_n, их сходимость почти везде влечёт сходимость интегралов. Это ключевой инструмент для обмена пределами и интегралами в анализе, устраняющий риск потери сходимости.

Следствие (для множеств конечной меры)

Если $\mu(E) < +\infty$, f_n равномерно ограничены ($|f_n| \leq K$) и $f_n \to f$ почти везде, то

$$\lim_{n\to\infty} \int_E f_n \, d\mu = \int_E f \, d\mu.$$

Смысл

На множествах конечной меры равномерная ограниченность заменяет суммируемую мажоранту (константа K суммируема), что упрощает применение теоремы Лебега в практических задачах.

6. Интегралы Лебега и Римана

Определение интеграла Римана

Определение:

Функция $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ интегрируема по Риману, если существует предел интегральных сумм $\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$ при стремлении диаметра разбиения к нулю.

Смысл:

Интеграл Римана — это предел сумм площадей прямоугольников, аппроксимирующих площадь под кривой. Он существует для ограниченных функций с "небольшим" количеством разрывов.

Критерий Лебега интегрируемости по Риману

Определение:

Функция $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ интегрируема по Риману ($f \in R[a, b]$), если она ограничена и множество её точек разрыва имеет нулевую меру.

Смыск:

Интегрируемость по Риману требует "хорошего поведения" функции — ограниченности и малости разрывов. Мера разрывов должна быть нулевой, иначе интеграл Римана не существует.

Сравнение интегралов Римана и Лебега

Определение:

Если $f \in R[a, b]$, то $f \in L[a, b]$, и значения интегралов совпадают: $(L) \int_a^b f = (R) \int_a^b f$.

Смысл:

Интеграл Лебега обобщает интеграл Римана: все риманово-интегрируемые функции лебегово-интегрируемы, и значения совпадают. Лебег "видит" больше функций, но для "хороших" случаев результаты одинаковы.

Несобственный интеграл и интеграл Лебега

Определение:

Несобственный интеграл Римана на $[a, c]$ — предел $\lim_{b \to a} \int_b^c f(t)dt$. Он абсолютно сходится, если сходится $\int_a^c |f(t)|dt$.

Смысл:

Абсолютная сходимость несобственного интеграла эквивалентна интегрируемости $|f|$ по Лебегу. В этом случае оба интеграла совпадают, и Лебег "улавливает" сходимость.

7. Вычисление меры множества по мерам сечений

Определение сечения

Для множества $E \subset \mathbb{R}^{n+m}$ и точки $x \in \mathbb{R}^n$ сечением $E(x)$ называется множество всех $y \in \mathbb{R}^m$, таких что $(x, y) \in E$.
Смысл: Сечение "вырезает" часть множества E, фиксируя одну координату (например, x), и показывает, как выглядит E вдоль оставшихся измерений (y).

Измеримость по Лебегу

Множество $E \subset \mathbb{R}^n$ измеримо по Лебеге, если для любого $\varepsilon > 0$ существуют:
Открытое множество $U \supset E$ и замкнутое $F \subset E$, такие что $\mu_n(U \setminus F) < \varepsilon$.

Смысл:
Измеримые множества — это те, которые можно "зажать" между открытыми и замкнутыми с сколь угодно малой ошибкой по мере.

Теорема о связи меры множества с мерами его сечений

1. Измеримость сечений

Для множества $E \subseteq \mathbb{R}^{n+m}$ и фиксированного $x \in \mathbb{R}^n$ сечение $E(x)$ — это множество:

$$E(x) = \{y \in \mathbb{R}^m \mid (x, y) \in E\}.$$

Смысл

Почти все сечения $E(x)$ измеримы по Лебегу в $\mathbb{R}^m$.

2. Измеримость функции мер

Функция $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, заданная как $f(x) = \mu_m(E(x))$, сопоставляет точке x меру Лебега соответствующего сечения $E(x)$.

Смысл

Меры сечений меняются "достаточно гладко" при изменении x, что позволяет интегрировать эту функцию.

3. Формула меры

Мера $\mu_{n+m}(E)$ — это стандартная мера Лебега на $\mathbb{R}^{n+m}$.

$$\mu_{n+m}(E) = \int_{\mathbb{R}^n} \mu_m(E(x))\, dx.$$

Смысл

Мера всего множества E равна "сумме" (интегралу) мер его плоских срезов. Это позволяет сводить многомерные задачи к последовательности одномерных, упрощая вычисления и доказательства.

Итоговый смысл теоремы

Теорема показывает, как меру сложного многомерного множества можно разложить на меры его более простых компонент (сечений), связывая анализ в $\mathbb{R}^{n+m}$ с комбинацией задач в $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{R}^m$.

8. Мера декартова произведения и мера Лебега как произведение мер

Мера декартова произведения

Определение:

Для измеримых множеств $A \in \mathcal{A}_n, B \in \mathcal{A}_m$ их декартово произведение $A \times B$ измеримо в $\mathbb{R}^{n+m}$, и его мера равна произведению мер:

$$\mu_{n+m}(A \times B) = \mu_n(A) \cdot \mu_m(B).$$

Смысл:

Мера произведения множеств равна произведению их мер, что согласуется с интуицией о "площади" прямоугольника. Доказательство использует аппроксимацию открытыми/замкнутыми множествами и свойства регулярности меры Лебега. Для бесконечных мер применяется разбиение на σ-конечные части.

Мера Лебега как произведение мер

Определение:

Мера Лебега на $\mathbb{R}^n$ — это n-кратное произведение одномерных мер Лебега:

$$\lambda^n = \underbrace{\lambda^1 \times \lambda^1 \times \cdots \times \lambda^1}_{n \text{ раз}}.$$

Смысл:

Это означает, что мера многомерного пространства строится как последовательное "умножение" мер вдоль каждой координаты. Например, площадь (2D) — произведение длин

(1D), объём (3D) — произведение площадей и длины, и т.д. Свойство следует из теоремы о мере декартова произведения.

9. Мера графика и подграфика

График функции (Гf)

Определение:

Для $f : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ график — множество точек $(x, y) \in \mathbb{R}^{n+1}$, где $y = f(x)$.

Смысл:

График — это "след" функции в $(n+1)$-мерном пространстве. Если f измерима, её график имеет нулевую меру в $\mathbb{R}^{n+1}$, так как он "тоньше" любого слоя. Доказательство использует разбиение области значений на ϵ-слои и оценку меры.

Подграфик функции (Qf)

Определение:

Для $f : E \subset \mathbb{R}^n \to [0, +\infty]$ подграфик — множество точек (x, y), где $0 \leq y \leq f(x)$.

Смысл:

Подграфик — это область "под" графиком. Его измеримость равносильна измеримости f, а мера равна интегралу от f по E. Это связывает геометрический объём с аналитическим выражением.

Теорема

Если $E \subset \mathbb{R}^n$, $f \in S(E)$ (измерима по Лебегу), то $\Gamma f \in \mathcal{A}_{n+1}$ и $\mu_{n+1}(\Gamma f) = 0$.

Смысл:

График измеримой функции всегда измерим как множество в $\mathbb{R}^{n+1}$, но его мера нулевая. Это обобщает факт, что кривая на плоскости ($n = 1$) не имеет площади. Доказательство использует разбиение области значений на ϵ-слои и оценку меры объединения прямоугольников.

Теорема

Пусть $E \in \mathcal{A}_n$, $f : E \to [0, +\infty]$. Тогда:

$$Q_f \text{ измерим} \Leftrightarrow f \text{ измерима}, \text{ и } \mu_{n+1}(Q_f) = \int_E f \, d\mu_n.$$

Смысл:

Подграфик измерим тогда и только тогда, когда сама функция измерима. Его мера совпадает с интегралом от f, что обобщает понятие "площади под графиком" на многомерный случай. Это ключевая связь между геометрией и анализом.