Матан, экзаменационные вопросы для студентов КТ, 2025
Семенова О. Л.

1. Свойства интегралов от неотрицательных функций (в т.ч. теорема Леви для рядов).
2. Неравенство Чебышева и его следствия.
3. Приближение интеграла интегралом по множеству конечной меры.
4. Теорема Фату.
5. Теорема Лебега о мажорированной сходимости со следствием.
6. Интеграл Лебега от функции непрерывной на замкнутом промежутке; сравнение несобственного интеграла с интегралом Лебега.
7. Вычисление меры множества по мерам сечений.
8. Мера декартова произведения. Мера Лебега как произведение мер.
9. Мера графика. Мера подграфика.
10. Теорема Тонелли. Теорема Фубини.
11. Интеграл Эйлера-Пуассона.
12. Мера шара.
13. Общая схема замены переменной в интеграле, ее некоторые частные случаи; образ меры, плотность меры. Критерий плотности меры.
14. «Естественная» мера на кривой и на поверхности. Криволинейный и поверхностный интегралы первого рода для элементарных поверхностей.
15. Преобразование меры Лебега при диффеоморфизме. Замена переменной в интеграле Лебега. Использование полярных, цилиндрических и сферических координат в кратных интегралах.
16. Мера Лебега-Стилтьеса. Дискретная мера как мера Лебега-Стилтьеса.
17. Интеграл по мере Лебега-Стилтьеса, порожденной абсолютно непрерывной функцией, следствие о гладком случае.
18. Формулы Фруллани.
19. Локальное условие Лебега для интегралов зависящих от параметра. Равномерная сходимость несобственных интегралов. Признаки Вейерштрасса, Дирихле и Абеля равномерной сходимости несобственных интегралов.
20. Связь (равномерной) сходимости несобственного интеграла с (равномерной) сходимостью ряда из определенных интегралов.
21. Предельный переход под знаком интеграла по параметру при условии Лебега, предельный переход под знаком интеграла по параметру в случае равномерной сходимости.
22. Локальная непрерывность интеграла по параметру, глобальная непрерывность интеграла по параметру.
23. Правило Лейбница дифференцирования интеграла по параметру в случае абсолютной суммируемости.
24. Правило Лейбница дифференцирования интеграла по параметру в отсутствии абсолютной суммируемости. Интегрирование интеграла по параметру.
25. Свойства Г-функции Эйлера: определение, формула приведения, значения в натуральных и полуцелых точках, выражение для k-й производной, геометрические свойства.
26. Связь между Г- и В- функцией.
27. Формула Эйлера-Гаусса.

---

28. Теорема о разложении функции в обобщенный степенной ряд. Ряды Лорана.
29. Неравенства Коши для коэффициентов рядов Тейлора и Лорана.
30. Изолированные особые точки аналитических функций, их типы. Характеризация устранимой особой точки в посредством лорановского разложения.
31. Специфика лорановских разложений в окрестности полюса; окрестности существенно особой точки.
32. Теорема Сохоцкого.
33. Два определения вычета. Теорема Коши о вычетах. Теорема о полной сумме вычетов.
34. Приемы отыскания вычетов.
35. Вычисление тригонометрических интегралов с помощью вычетов.

36. Вычисление несобственных интегралов от рациональных функций с помощью вычетов.
37. Лемма Жордана. Вычисление преобразований Фурье с помощью вычетов.
38. Вычисление несобственных интегралов от аналитических функций с мнимым периодом.

---

39. Гладкие многообразия с краем (определение и примеры); отображение перехода, гладкость отображения перехода.
40. Мера малого измеримого подмножества многообразия; независимость меры малого измеримого множества от выбора параметризации; измеримое подмножество многообразия.
41. Мера на многообразии. Интеграл первого рода на многообразии. Частные случаи интеграла I рода на многообразии: криволинейный и поверхностный, вычислительные формулы для них.
42. Ориентация многообразий. Понятия: одинаково ориентирующие параметризации, ориентация окрестностей, согласованные ориентации окрестностей, ориентированное многообразие, ориентируемое многообразие. Возможное количество ориентаций связного многообразия.
43. Понятие направления, лемма о существовании направлений.
44. Сторона поверхности, лемма о существовании стороны.
45. Теорема о крае многообразия и его ориентации. Понятие ориентации края, согласованной с ориентацией многообразия. Пример согласованных ориентаций на поверхности и ограничивающей кривой.
46. Полилинейные формы, кососимметрические формы — определения и элементарные свойства, внешнее произведение форм.
47. Дифференциальные формы; координатное представление дифференциальных форм. Внешнее дифференцирование дифференциальных форм.
48. Перенос дифференциальных форм. Теорема о свойствах переноса форм.
49. Поверхностный интеграл второго рода. Выражением поверхностного интеграла второго рода через поверхностный интеграл первого рода. Выражения для интеграла 2го рода в случае размерностей многообразия 1 и 2. Примеры. Лемма Пуанкаре в общем случае (без док-ва).
50. Общая формула Стокса. Частные случаи и следствия общей формулы Стокса: формула Ньютона–Лейбница для криволинейных интегралов, формула Грина, классическая формула Стокса, формула Гаусса–Остроградского.
51. Неравенства Минковского и Гельдера для интегралов по мере. Существенный супремум функции. Пространства $L^p(X, \mu)$.
52. Вложения пространств Лебега $L^p(X, \mu)$ и пространств l^p. Несравнимость пространств L^p в общем случае.
53. Полнота пространства $C(K)$.
54. Критерий полноты нормированного пространства.
55. Полнота пространств $L^p(X, \mu)$ при $p \in [1, +\infty]$.
56. Плотность ступенчатых функций в L^p.
57. Плотность $C_0(\mathbb{R}^n)$ в $L^p(\mathbb{R}^n)$, плотность $C_{2\pi}$ в $L^p_{2\pi}$.
58. Теорема о непрерывности сдвига.
59. Гильбертовы пространства. Непрерывность скалярного произведения. Скалярное умножение в $L^2(X, \mu)$ Примеры ортогональных систем в $L^2(X, \mu)$.
60. Теорема Пифагора для гильбертовых пространств (критерий сходимости ортогонального ряда), его следствие.
61. Вычисление коэффициентов суммы ортогонального ряда. Коэффициенты Фурье и ряды Фурье по ортогональной системе. Геометрические свойства частичных сумм ряда Фурье. Неравенство Бесселя.
62. Теорема Рисса-Фишера. Равенство Парсеваля.
63. Характеристика базиса в гильбертовом пространстве. Процесс ортогонализации Грама-Шмидта.
64. Тригонометрический многочлен, тригонометрический ряд, тригонометрический ряд в комплексной форме. Лемма о вычислении коэффициентов тригонометрического ряда. Тригонометрический ряд Фурье функции (в т.ч. в экспоненциальной форме).
65. Теорема Римана-Лебега.
66. Свертка периодический функций и ее элементарные свойства. Ядро Дирихле. Сумма Фурье как свертка.

67. Принцип локализации Римана. Признак Дини и его следствия.
68. Примеры разложения функций в ряды Фурье. Вычисление сумм $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ и $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$.
69. Общее представление о методах суммирования рядов. Суммирование по Чезаро, суммирование методам Абеля-Пуассона (их перманентность и эффективность).
70. Аппроксимативная единица и усиленная аппроксимативная единица. Теорема о свойствах свертки с аппроксимативной единицей (без док-ва). Теорема Фейера. Полнота тригонометрической системы в $L^2_{2\pi}$.
71. Теорема Вейерштрасса о тригонометрических многочленах. Теорема Вейерштрасса об алгебраических многочленах.

ТЕРМИНЫ, ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ

! Интеграл по мере, ! пространство с мерой. Неравенство Чебышева

Обобщенный принцип Кавальери, представление кратного интеграла повторным.

Интеграл Эйлера-Пуассона. Мера шара.

Плотность меры. Криволинейный и поверхностный интегралы первого рода для элементарных поверхностей.

Преобразование меры Лебега при диффеоморфизме. ! Замена переменной в интеграле Лебега. Использование полярных, цилиндрических и сферических координат в кратных интегралах.

Мера Лебега-Стилтьеса. Интеграл по мере Лебега-Стилтьеса а) в дискретном случае; б) в абсолютно непрерывном случае.

Формулы Фруллани.

Равномерная сходимость несобственных интегралов.

Г-функция и B-функция Эйлера Формула Эйлера-Гаусса.

! Ряд Лорана. Его главная и регулярная части.

Неравенства Коши для коэффициентов рядов Тейлора и Лорана.

Изолированные особые точки аналитических функций, их типы.

Два определения вычета. ! Теорема Коши о вычетах. Теорема о полной сумме вычетов.

Гладкие многообразия с краем; отображение перехода.

Малые измеримые подмножества и измеримое подмножества многообразия.

Мера на многообразии. ! Интеграл первого рода на многообразии. ! Частные случаи интеграла I рода на многообразии: криволинейный и поверхностный, вычислительные формулы для них.

Ориентация многообразий; одинаково ориентирующие параметризации, ориентация окрестностей, согласованные ориентации окрестностей, ориентированное многообразие, ориентируемое многообразие. Направление на многообразии, сторона поверхности. Ориентации края, согласованной с ориентацией многообразия. Пример согласованных ориентаций на поверхности и ограничивающей кривой.

Полилинейные формы, кососимметрические формы. Внешнее произведение форм.

! Дифференциальные формы; координатное представление дифференциальных форм. Внешнее дифференцирование дифференциальных форм.

Перенос дифференциальных форм.

! Поверхностный интеграл второго рода. ! Выражением поверхностного интеграла второго рода через поверхностный интеграл первого рода. ! Выражения для интеграла 2го рода в случае размерностей многообразия 1 и 2.

! Общая формула Стокса. Частные случаи и следствия общей формулы Стокса: формула Ньютона–Лейбница для криволинейных интегралов, формула Грина, классическая формула Стокса, формула Гаусса–Остроградского.

Неравенства Минковского и Гельдера для интегралов по мере. Существенный супремум функции. Пространства $L^p(X, \mu)$.

Гильбертовы пространства. ! Скалярное произведение в $L^2(X, \mu)$

Теорема Пифагора для гильбертовых пространств.

Вычисление коэффициентов суммы ортогонального ряда. ! Коэффициенты Фурье и ряды Фурье по ортогональной системе. Неравенство Бесселя. Равенство Парсеваля.

Полная ортогональная система в гильбертовом пространстве; базис гильбертова пространства.

! Тригонометрический многочлен, ! тригонометрический ряд, ! тригонометрический ряд в комплексной форме. ! Тригонометрический ряд Фурье функции (в т.ч. в экспоненциальной форме).

Свертка периодический функций. Ядро Дирихле.

Сумма $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

Суммирование по Чезаро, суммирование методам Абеля-Пуассона.

Аппроксимативная единица и усиленная аппроксимативная единица.

! Преобразование Фурье, обратное преобразование Фурье.