Шпора матан

1. Интегралы от неотрицательных функций

1. Основные свойства

Монотонность

Если $0 \leq f(x) \leq g(x)$ п.в. на X, то:

$$\int_X f\,d\mu \leq \int_X g\,d\mu.$$

(Интеграл сохраняет неравенства.)

Линейность

Для $a, b \geq 0$:

$$\int_X (af + bg)\,d\mu = a\int_X f\,d\mu + b\int_X g\,d\mu.$$

(Интеграл суммы = сумма интегралов.)

Аддитивность по области

Если $A \cap B = \emptyset$, то:

$$\int_{A\cup B} f\,d\mu = \int_A f\,d\mu + \int_B f\,d\mu.$$

(Интеграл по объединению = сумма интегралов.)

Невозрастание меры

Если $A \subseteq B$, то:

$$\int_A f\,d\mu \le \int_B f\,d\mu.$$

(Интеграл по подмножеству ≤ интегралу по всему множеству.)

2. Теорема Леви для рядов

Если $f_k \ge 0$ и измеримы, то:

$$\int_E \sum_{k=1}^{\infty} f_k\,d\mu = \sum_{k=1}^{\infty} \int_E f_k\,d\mu.$$

(Можно менять местами сумму и интеграл.)

2. Неравенство Чебышева

Суммируемая функция $f \in L(E, \mu)$

Определение

Функция `f` называется суммируемой на `E` (пишут `f ∈ L(E, μ)`), если:

$$\int_E |f|\,d\mu < +\infty$$

Свойство

Если `f` суммируема, то она конечна почти всюду на `E`.

Измеримая функция $f \in S(E)$

Определение:

$S(E)$ — это множество всех измеримых функций $f : E \to \mathbb{R}$, принимающих конечное число значений.

$$S(E) = \{f \text{ измерима} \mid f(E) = \{c_1, \ldots, c_n\},\ c_i \in \mathbb{R},\ n < \infty\}$$

Смысл:

Простые функции — это "кирпичики" для построения более сложных измеримых функций. Они принимают лишь конечное число значений, что упрощает анализ (например, интегрирование). Любую измеримую функцию можно приблизить последовательностью простых функций.

Формулировка неравенства Чебышева

Для `f ∈ S(E)` (классу измеримых функций), `t > 0`:

$$\mu\{x \in E : |f(x)| \geq t\} \leq \frac{1}{t} \int_E |f| \, d\mu$$

Смысл:

Оценивает меру множества, где `|f(x)| ≥ t`, через интеграл от `|f|`.
Неравенство даёт гарантированную верхнюю границу для "редких событий". Чем выше порог `t`, тем меньше элементов могут его превышать.

Следствие 1

Формулировка:

Если $f \in L(E, \mu)$, то $\mu(\{x \in E : |f(x)| = +\infty\}) = 0$.

Смысл:

Если функция `f ∈ L(E, μ)`, то множество точек, где она принимает бесконечные значения `(|f(x)| = +∞)`, имеет меру ноль:

Следствие 2

Формулировка:

Если $f \geq 0$ и $\int_E f d\mu = 0$, то $f = 0$ почти всюду на E.

Смысл:

Если неотрицательная функция имеет нулевой интеграл, то она почти всюду нулевая. "Почти всюду нулевая" = нуль везде, кроме "несущественных" точек.

3. Приближение интеграла интегралом по множеству конечной меры

Определение

Пусть $f \in L(E, \mu)$, где $\mu E = +\infty$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует подмножество $E_\varepsilon \subset E$ такое, что:

1. $\mu E_\varepsilon < +\infty$ (множество E_ε имеет конечную меру),
2. $\int_{E \setminus E_\varepsilon} |f| \, d\mu < \varepsilon$ (интеграл от $|f|$ по дополнению $E \setminus E_\varepsilon$ меньше ε).

Смысл

Это следствие показывает, что для интегрируемой функции f на множестве бесконечной меры можно найти подмножество конечной меры E_ε, на котором интеграл f "почти полностью" сосредоточен. Оставшаяся часть интеграла (по $E \setminus E_\varepsilon$) пренебрежимо мала (меньше ε).

Это означает, что "хвост" функции (её поведение на множествах большой меры) не вносит существенного вклада в интеграл.

Счетная аддитивность интеграла

Определение

Если $E = \bigcup_k E_k$, где E_k измеримы и попарно не пересекаются, и интеграл $\int_E f \, d\mu$ существует, то:

$$\int_E f \, d\mu = \sum_k \int_{E_k} f \, d\mu.$$

Смысл

Интеграл по объединению счетного числа множеств равен сумме интегралов по каждому множеству. Это свойство аналогично счетной аддитивности меры.

4. Теорема Фату

liminf

`liminf` (нижний предел) - Для числовой последовательности: наибольший предел среди всех её подпоследовательностей. Для функций: функция, которая в каждой точке равна нижнему пределу значений последовательности функций. Проще говоря: "наименьшее значение, к которому постоянно возвращается последовательность"

Формулировка

Для неотрицательных измеримых функций

Пусть $f_n \in S(E)$, $f_n \geq 0$. Тогда:

$$\int_E \liminf_{n\to\infty} f_n \, d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int_E f_n \, d\mu.$$

Смысл

Когда мы берем последовательность неотрицательных функций и смотрим на их нижний предел (самые маленькие значения, к которым они постоянно возвращаются), то интеграл от этого нижнего предела никогда не сможет оказаться больше, чем нижний предел их интегралов. Это как гарантия того, что усредненное "худшее поведение" функций не даст неожиданно большой интеграл.

Для поточечного предела

Пусть $f_n, f \in S(E)$, $f_n \geq 0$, $f_n \to f$ почти везде на E. Тогда:

$$\int_E f \, d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int_E f_n \, d\mu.$$

Смысл

Если такие неотрицательные функции ещё и сходятся к какой-то предельной функции, то интеграл этой предельной функции тоже не превысит нижнюю границу интегралов исходной последовательности. Даже если значения функций поточечно стремятся к пределу, их интегралы могут колебаться, но теорема даёт нам контроль сверху - предельный интеграл не выскочит за нижнюю границу.

5. Теорема Лебега о мажорированной сходимости

Мажоранта

Функция (или число), которая доминирует (превосходит) другую функцию (или последовательность) на заданном множестве.

Теорема Лебега

Если последовательность измеримых функций f_n сходится к f почти везде на E, и существует суммируемая мажоранта $\phi \in L(E, \mu)$ (т.е. $|f_n| \leq \phi$ почти везде), то предельный переход под знаком интеграла корректен:

$$\lim_{n\to\infty} \int_E f_n \, d\mu = \int_E f \, d\mu.$$

Смысл

Теорема гарантирует, что при наличии "контроля" (мажоранты ϕ) над функциями f_n, их сходимость почти везде влечёт сходимость интегралов. Это ключевой инструмент для обмена пределами и интегралами в анализе, устраняющий риск потери сходимости.

Следствие Теоремы Лебега (для множеств конечной меры)

Если $\mu(E) < +\infty$, f_n равномерно ограничены ($|f_n| \leq K$) и $f_n \to f$ почти везде, то

$$\lim_{n\to\infty} \int_E f_n \, d\mu = \int_E f \, d\mu.$$

Смысл

На множествах конечной меры равномерная ограниченность заменяет суммируемую мажоранту (константа K суммируема), что упрощает применение теоремы Лебега в практических задачах.

6. Интегралы Лебега и Римана

Определение интеграла Римана

Определение:

Функция $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ интегрируема по Риману, если существует предел интегральных сумм $\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$ при стремлении диаметра разбиения к нулю.

Смысл:

Интеграл Римана — это предел сумм площадей прямоугольников, аппроксимирующих площадь под кривой. Он существует для ограниченных функций с "небольшим" количеством разрывов.

Критерий Лебега интегрируемости по Риману

Определение:

Функция $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ интегрируема по Риману ($f \in R[a, b]$), если она ограничена и множество её точек разрыва имеет нулевую меру.

Смысл:

Интегрируемость по Риману требует "хорошего поведения" функции — ограниченности и малости разрывов. Мера разрывов должна быть нулевой, иначе интеграл Римана не существует.

Сравнение интегралов Римана и Лебега

Определение:

Если $f \in R[a, b]$, то $f \in L[a, b]$, и значения интегралов совпадают: $(L) \int_a^b f = (R) \int_a^b f$.

Смысл:

Интеграл Лебега обобщает интеграл Римана: все риманово-интегрируемые функции лебегово-интегрируемы, и значения совпадают. Лебег "видит" больше функций, но для "хороших" случаев результаты одинаковы.

Несобственный интеграл и интеграл Лебега

Определение:

Несобственный интеграл Римана на $[a, c]$ — предел $\lim_{b \to a} \int_b^c f(t)dt$. Он абсолютно сходится, если сходится $\int_a^c |f(t)|dt$.

Смысл:

Абсолютная сходимость несобственного интеграла эквивалентна интегрируемости $|f|$ по Лебегу. В этом случае оба интеграла совпадают, и Лебег "улавливает" сходимость.

7. Вычисление меры множества по мерам сечений

Определение сечения

Для множества $E \subset \mathbb{R}^{n+m}$ и точки $x \in \mathbb{R}^n$ сечением $E(x)$ называется множество всех $y \in \mathbb{R}^m$, таких что $(x, y) \in E$.

Смысл:

Сечение "вырезает" часть множества E, фиксируя одну координату (например, x), и показывает, как выглядит E вдоль оставшихся измерений (y).

Измеримость по Лебегу

Множество $E \subset \mathbb{R}^n$ измеримо по Лебегу, если для любого $\varepsilon > 0$ существуют:
Открытое множество $U \supset E$ и замкнутое $F \subset E$, такие что $\mu_n(U \setminus F) < \varepsilon$.

Смысл:

Измеримые множества — это те, которые можно "зажать" между открытыми и замкнутыми с сколь угодно малой ошибкой по мере.

Теорема о связи меры множества с мерами его сечений

1. Измеримость сечений

Для множества $E \subseteq \mathbb{R}^{n+m}$ и фиксированного $x \in \mathbb{R}^n$ сечение определяется как:

$$E(x) = \{y \in \mathbb{R}^m \mid (x, y) \in E\}$$

Если E - измеримо по Лебегу в $\mathbb{R}^{n+m}$, то для почти всех $x \in \mathbb{R}^n$ сечения $E(x)$ измеримы в $\mathbb{R}^m$

Смысл

Почти все сечения $E(x)$ измеримы по Лебегу в $\mathbb{R}^m$.

2. Измеримость функции мер

Для измеримого множества $E \subseteq \mathbb{R}^{n+m}$ функция меры сечений определяется как:

$$f_E : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad f_E(x) = \mu(E(x))$$

$E(x) = \{y \in \mathbb{R}^m \mid (x, y) \in E\}$ - сечение множества
μ - мера Лебега в $\mathbb{R}^m$

Смысл

Функция f_e измеряет меру Лебега сечения E в каждой точке x

3. Формула меры

Мера $\mu_{n+m}(E)$ — это стандартная мера Лебега на $\mathbb{R}^{n+m}$.

$$\mu_{n+m}(E) = \int_{\mathbb{R}^n} \mu_m(E(x))\, dx.$$

Смысл

Мера всего множества E равна "сумме" (интегралу) мер его плоских срезов. Это позволяет сводить многомерные задачи к последовательности одномерных, упрощая вычисления и доказательства.

Итоговый смысл теоремы

Теорема показывает, как меру сложного многомерного множества можно разложить на меры его более простых компонент (сечений), связывая анализ в $\mathbb{R}^{n+m}$ с комбинацией задач в $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{R}^m$.

8. Мера декартова произведения и мера Лебега как произведение мер

Мера декартова произведения

$\mathcal{A}_n$ - σ-алгебра измеримых по Лебегу множеств в $\mathbb{R}^n$
Для измеримых множеств $A \in \mathcal{A}_n, B \in \mathcal{A}_m$ их декартово произведение $A \times B$ измеримо в $\mathbb{R}^{n+m}$, и его мера равна произведению мер:

$$\mu_{n+m}(A \times B) = \mu_n(A) \cdot \mu_m(B).$$

Смысл:

Мера произведения множеств равна произведению их мер, что согласуется с интуицией о "площади" прямоугольника. Доказательство использует аппроксимацию открытыми/замкнутыми множествами и свойства регулярности меры Лебега. Для бесконечных мер применяется разбиение на σ-конечные части.

Мера Лебега как произведение мер

Мера Лебега на $\mathbb{R}^n$ — это n-кратное произведение одномерных мер Лебега:

$$\lambda^n = \underbrace{\lambda^1 \times \lambda^1 \times \cdots \times \lambda^1}_{n \text{ раз}}.$$

Смысл:

Это означает, что мера многомерного пространства строится как последовательное "умножение" мер вдоль каждой координаты. Например, площадь (2D) — произведение длин (1D), объём (3D) — произведение площадей и длины, и т.д. Свойство следует из теоремы о мере декартова произведения.

9. Мера графика и подграфика

График функции (Гf)

Определение:

Для $f : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ график — множество точек $(x, y) \in \mathbb{R}^{n+1}$, где $y = f(x)$.

Смысл:

График — это "след" функции в $(n+1)$-мерном пространстве. Если f измерима, её график имеет нулевую меру в $\mathbb{R}^{n+1}$, так как он "тоньше" любого слоя. Доказательство использует разбиение области значений на ϵ-слои и оценку меры.

Подграфик функции (Qf)

Определение:

Для $f : E \subset \mathbb{R}^n \to [0, +\infty]$ подграфик — множество точек (x, y), где $0 \leq y \leq f(x)$.

Смысл:

Подграфик — это область "под" графиком. Его измеримость равносильна измеримости f, а мера равна интегралу от f по E. Это связывает геометрический объём с аналитическим выражением.

Теорема

Если $E \subset \mathbb{R}^n$, $f \in S(E)$ (измерима по Лебегу), то $\Gamma f \in \mathcal{A}_{n+1}$ и $\mu_{n+1}(\Gamma f) = 0$.

Смысл:

График измеримой функции всегда измерим как множество в $\mathbb{R}^{n+1}$, но его мера нулевая. Это обобщает факт, что кривая на плоскости ($n = 1$) не имеет площади. Доказательство использует разбиение области значений на ϵ-слои и оценку меры объединения прямоугольников.

Теорема

Пусть $E \in \mathcal{A}_n$, $f : E \to [0, +\infty]$. Тогда:

$$Q_f \text{ измерим} \Leftrightarrow f \text{ измерима, и } \mu_{n+1}(Q_f) = \int_E f \, d\mu_n.$$

Смысл:

Подграфик измерим тогда и только тогда, когда сама функция измерима. Его мера совпадает с интегралом от f, что обобщает понятие "площади под графиком" на многомерный случай.

Это ключевая связь между геометрией и анализом.

10. Теорема Тонелли и Фубини

Интегральная функцией сечения $I(x)$

Функция, определяемая как $I(x) = \int_{E(x)} f(x,y)\,dy$, где $E(x) = \{y \in \mathbb{R}^m : (x,y) \in E\}$ – сечение множества E при фиксированном x.

Смысл

Выражает "частичный" интеграл по переменным y, оставляя x параметром.

Теорема Тонелли

Пусть: $E \in \mathcal{A}_{n+m}$ - измеримое множество в $\mathbb{R}^{n+m}$ и $f : E \to [0, +\infty]$ - неотрицательная μ_{n+m}-измеримая функция, тогда:

1. Для почти всех $x \in \mathbb{R}^n$ сечение $E_x = \{y | (x,y) \in E\}$ измеримо в $\mathbb{R}^m$
2. Функция $I(x) = \int_{E_x} f(x,y) d\mu_m(y)$ измерима
3. Имеет место равенство:

$$\int_E f d\mu_{n+m} = \int_{\mathbb{R}^n} I(x) d\mu_n(x)$$

Смысл:

Позволяет вычислять $(n+m)$-мерный интеграл как повторный: сначала по y при фиксированном x, затем по x.

Теорема Фубини

Если: $E \subseteq \mathbb{R}^{n+m}$ измеримо и $f \in L(E)$ (т.е. $\int_E |f| < +\infty$), то:

$$\int_E f = \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{E_x} f(x,y) dy \right) dx = \int_{\mathbb{R}^m} \left(\int_{E^y} f(x,y) dx \right) dy$$

где $E_x = \{y | (x,y) \in E\}$, $E^y = \{x | (x,y) \in E\}$

Смысл:

Для суммируемых функций можно менять порядок интегрирования и сводить кратный интеграл к повторным

Важно:

Все сечения и внутренние интегралы существуют для почти всех x и y

Ключевые отличия:

- Тонелли: Работает с *неотрицательными измеримыми* функциями ($S(E)$). Проверка измеримости $I(x)$ достаточна.
- Фубини: Требует *суммируемости* ($L(E)$), чтобы гарантировать конечность повторных интегралов и возможность перестановки порядка интегрирования.

11. Интеграл Эйлера-Пуассона

Определение:

Интеграл Эйлера-Пуассона — это несобственный интеграл вида $I = \int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx$, значение которого равно $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Смысл:

Интеграл вычисляется с помощью перехода к полярным координатам, где замена переменных $x = r\cos\varphi, y = r\sin\varphi$ упрощает подынтегральное выражение. Квадрат интеграла I^2 преобразуется в двойной интеграл по плоскости, который сводится к произведению двух одномерных интегралов. Результат $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$ широко используется в теории вероятностей и математической физике.

Ключевые шаги:

1. Замена $I^2 = \iint e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy$.
2. Переход к полярным координатам: $\int_0^{+\infty}\int_0^{\pi/2} re^{-r^2}\,d\varphi\,dr$.
3. Вычисление: $\frac{\pi}{4}$, откуда $I = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

12. Мера n-мерного шара и сферы

Определение:

Мера Лебега μ_n n-мерного шара $\overline{B}_n(a, R) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x-a| \leq R\}$ вычисляется по формуле:

$$\mu_n \overline{B}_n(a, R) = \frac{2^n}{n!} \left(\frac{\pi}{2}\right)^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} R^n.$$

Смысл:

Мера шара зависит от его радиуса R и размерности n. Для $n = 2$ и $n = 3$ получаем классические формулы площади круга и объёма шара. Мера сферы $\mathbb{S}^{n-1}$ равна нулю, так как она является границей шара и имеет нулевой объём в $\mathbb{R}^n$.

Примеры:

- $\mu_2 \overline{B}_2(a, R) = \pi R^2$ (круг),
- $\mu_3 \overline{B}_3(a, R) = \frac{4}{3}\pi R^3$ (шар),
- $\mu_4 \overline{B}_4(a, R) = \frac{\pi^2}{2} R^4$.

13. Замена переменной в интеграле, образ и плотность меры

Φ – это измеримое отображение (функция), которое "переводит" точки из пространства X в пространство Y.
h – весовая функция, это неотрицательная измеримая функция, которая определяет, как мера μ на X преобразуется в меру v на Y.

Общая схема замены переменной

Для пространств с мерами (X, A, μ), (Y, B, v) и измеримой функции $h \geq 0$, если $vB = \int_{\Phi^{-1}(B)} h \, d\mu$ и f измерима на Y, то:

$$\int_Y f\,dv = \int_X (f \circ \Phi) h\,d\mu.$$

Смысл:

Интеграл функции f по мере v на Y сводится к интегралу её композиции с Φ и весовой функции h по исходной мере μ на X. Это обобщение замены переменных в анализе, где h играет роль якобиана.

Образ меры

Если $h \equiv 1$, то $v = \Phi(\mu)$ (образ меры μ), и:

$$\int_Y f\,dv = \int_X f \circ \Phi\,d\mu.$$

Смысл:

Мера v "переносится" с X на Y через отображение Φ, а интеграл преобразуется без весовой функции. Пример — замена координат без искажения объёма.

Плотность меры

Если $vA = \int_A h\,d\mu$, то h — плотность v относительно μ, и:

$$\int_X f\,dv = \int_X fh\,d\mu.$$

Смысл:

Функция h показывает, как мера v "перевешивает" μ в каждой точке. Критерий плотности связывает h с неравенствами для значений мер на множествах.

Ключевая идея:

Замена меры или переменных сводит сложный интеграл к исходной мере с поправочным множителем (h или $f \circ \Phi$), что упрощает вычисления.

14. Криволинейные и поверхностные интегралы

Криволинейный интеграл первого рода

Интеграл от функции вдоль заданной кривой.

Формула:

$$\int_L f\,ds = \int_a^b f(\mathbf{r}(t)) \cdot \|\mathbf{r}'(t)\|\,dt$$

Где: $\mathbf{r}(t)$ - параметризация кривой L, $t \in [a, b]$ — параметр, $ds = \|\mathbf{r}'(t)\| dt$ — элемент длины

Смысл:

Обобщение интеграла на произвольные кривые. Вычисляет "сумму" значений функции с учётом длины кривой (например, массу проволоки).

Поверхностный интеграл первого рода

Интеграл от функции по поверхности.

Формула:

$$\iint_S f\,dS = \iint_D f(\mathbf{r}(u, v)) \cdot \|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v\|\,du\,dv$$

Где: $\mathbf{r}(u, v)$ — параметризация поверхности, $dS = \|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v\| du\,dv$ — элемент площади

Смысл:

Обобщение двойного интеграла на искривлённые поверхности (например, вычисление массы оболочки).

Связь с мерами

1. Кривая: ds — мера длины
2. Поверхность: dS — мера площади
3. Объём: $dV = |J| du\,dv\,dw$ — мера объёма (с якобианом)

Ключевая идея:

Все случаи используют "местные" меры (ds, dS, dV), адаптированные к геометрии объекта.

15. Преобразование меры Лебега при диффеоморфизме. Замена переменной в интеграле Лебега. Использование полярных, цилиндрических и сферических координат в кратных интегралах.

$\det D\varphi$ **- якобиан.**

Определение Диффеоморфизма:

Диффеоморфизм — это обратимое гладкое отображение (функция) между областями в $\mathbb{R}^n$, у которого обратное тоже гладкое.

Преобразование меры Лебега при диффеоморфизме

Если $\varphi : U \to V$ — диффеоморфизм открытых множеств в $\mathbb{R}^n$, то для любой измеримой функции f на V:

$$\int_V f(y)\,dy = \int_U f(\varphi(x))|\det D\varphi(x)|\,dx.$$

Смысл:

Мера Лебега "растягивается" под действием φ с множителем $|\det D\varphi|$. Это обобщение замены переменных в интеграле на многомерный случай.

Замена переменных в интеграле Лебега

$U, V \subseteq \mathbb{R}^n$ - открытые; $\varphi : U \to V$ - C^1-диффеоморфизм; $f : V \to \mathbb{R}$ - μ-интегрируема

$$\int_V f\,d\mu = \int_U (f \circ \varphi) \cdot |\det D\varphi|\,d\mu$$

Смысл:

Интеграл сохраняется, если учитывать "искажение" объема под действием φ. Якобиан корректирует меру, компенсируя деформацию области.

Разница:

Преобразование меры Лебега описывает, как меняется объем под действием диффеоморфизма, вводя поправку на якобиан. Замена переменных — это практическое применение этого факта для пересчета интеграла при переходе к новым координатам.

Разница в акцентах: первое — о свойствах меры, второе — о технике интегрирования.

Полярные координаты ($\mathbb{R}^2$)

Определение: $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, мера: $dxdy = r\,drd\theta$.
Смысл: Переход от декартовых координат к радиусу и углу. Множитель r возникает из якобиана, учитывая "растяжение" при удалении от центра.

Цилиндрические координаты ($\mathbb{R}^3$)

Определение: $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, $z = z$, мера: $dxdydz = r\,drd\theta dz$.
Смысл: Комбинация полярных в плоскости и линейной по z. Множитель r аналогичен двумерному случаю, сохраняя объемные искажения.

Сферические координаты ($\mathbb{R}^3$)

Определение: $x = r\sin\theta\cos\phi$, $y = r\sin\theta\sin\phi$, $z = r\cos\theta$, мера: $dxdydz = r^2\sin\theta\,drd\theta d\phi$.
Смысл: Учет радиуса и двух углов. Множитель $r^2\sin\theta$ отражает "растяжение" в трех измерениях, особенно у полюсов ($\theta = 0, \pi$).

16. Мера Лебега-Стилтьеса и дискретная мера

Полукольцо ячеек

Полукольцо ячеек P_Δ — это семейство промежутков вида $[a, b)$ (или других типов: $(a, b]$, $[a, b]$, (a, b)), замкнутое относительно пересечения и таких, что разность двух ячеек представима в виде конечного объединения непересекающихся ячеек из P_Δ.

Смысл:

Они естественно возникают при переходе от меры интервалов к мере на бóльших классах множеств (например, при построении меры Лебега-Стилтьеса). Их свойств достаточно для применения теоремы Каратеодори о продолжении меры до σ

Мера Лебега-Стилтьеса

Мера μ_g на полукольце ячеек P_Δ, заданная через возрастающую непрерывную слева функцию g как $v_g[a,b] = g(b) - g(a)$, и стандартно распространённая на σ-алгебру A_g.

Смысл:

Мера Лебега-Стилтьеса обобщает классическую меру Лебега, заменя длину интервала $b - a$ на приращение $g(b) - g(a)$, что позволяет учитывать произвольные распределения "массы". В частном случае, когда $g(x) = x$, мера Лебега-Стилтьеса превращается в обычную меру Лебега, где длина интервала измеряется линейно, без дополнительных весовых коэффициентов. Таким образом, классическая мера Лебега — это частный случай меры Лебега-Стилтьеса с линейной функцией распределения. ($g(x) = x + c$)

Дискретная мера Лебега-Стилтьеса

Для функции g со скачками h_k в точках a_k:

$$\mu_g(A) = \sum_{a_k \in A} h_k$$

где A — любое измеримое подмножество числовой прямой (например, интервал, отрезок или точечное множество).

Смысл:

Превращает интеграл в сумму значений в точках скачков. Описывает точечные массы (вероятности, заряды). Отличается от непрерывного случая, где масса распределена плавно. Особенно полезна для дискретных случайных величин. Дискретность g меняется только скачками, постоянна между ними.

Ключевая связь

Дискретная мера — частный случай меры Лебега-Стилтьеса, где g кусочно-постоянна со скачками в точках носителя. Это позволяет единообразно работать как с непрерывными, так и дискретными распределениями.

17. Интеграл по мере Лебега-Стилтьеса (гладкий случай)

Если мера Лебега-Стилтьеса μ_g порождена абсолютно непрерывной функцией g (т.е. $g(x) = \int_{-\infty}^{x} g'(t)\,dt$), то для измеримой функции f:

$$\int_X f\,d\mu_g = \int_X f(x)g'(x)\,dx.$$

Смысл

Мера Лебега-Стилтьеса обобщает понятие "веса" на множествах, задавая его через функцию g. Если g гладкая, то её производная g' играет роль плотности, превращая интеграл Лебега-Стилтьеса в обычный интеграл с весом $g'(x)$. Это упрощает вычисления, сводя задачу к классическому анализу, и важно, например, в теории вероятностей, где g' соответствует плотности распределения.

18. Формула Фруллани

Формула Фруллани (строгая формулировка)

Пусть функция $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ удовлетворяет условиям: f непрерывна на $[0, +\infty)$; Существует конечный предел $f(+\infty) = \lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$. Тогда для любых положительных чисел $a, b > 0$ выполняется равенство:

$$\int\limits_0^\infty \frac{f(ax) - f(bx)}{x} dx = (f(+\infty) - f(0)) \ln \frac{a}{b}.$$

Смысл и применение (неформальное объяснение)

Эта формула помогает вычислять интегралы особого вида, где под интегралом стоит разность значений функции при разных масштабах аргумента, делённая на аргумент. Она работает благодаря тому, что особенности при нуле и бесконечности взаимно сокращаются. Главная ценность формулы - она позволяет заменить сложный на вид интеграл на простое выражение с логарифмом, что часто встречается в задачах математической физики, теории вероятностей и анализе. Формула особенно полезна при работе с преобразованиями интегралов и исследовании асимптотического поведения функций. По сути, она устанавливает связь между поведением функции на границах области (в нуле и на бесконечности) и значением интеграла от её масштабированных разностей.

19. Локальное условие Лебега для интегралов зависящих от параметра. Равномерная сходимостьнесобственных интегралов. Признаки Вейерштрасса, Дирихле и Абеля равномерной сходимости несобственных интегралов

$$L^1(X)$$

пространство абсолютно интегрируемых функций на X (интеграл понимается в смысле Лебега):

$$L^1(X) = \left\{ f : X \to \mathbb{R} \,\middle|\, \int_X |f(x)|\, dx < +\infty \right\}$$

Локальное условие Лебега для интегралов, зависящих от параметра

Пусть функция $f(x, y)$ интегрируема по x на $[a, +\infty)$ при каждом $y \in Y$ и удовлетворяет условию:

$$\exists g(x) \in L^1([a, +\infty)) : |f(x, y)| \le g(x) \text{ для почти всех } x \text{ и всех } y \in Y$$

Тогда интеграл $\int_a^\infty f(x, y) dx$ сходится равномерно по $y \in Y$.

Смысл:

Это аналог теоремы Лебега о мажорированной сходимости для интегралов с параметром. Условие гарантирует, что можно менять порядок интегрирования и предельного перехода. Нужно для обоснования законности операций с параметрическими интегралами.

Равномерная сходимость несобственных интегралов

Интеграл $\int_a^\infty f(x,y)dx$ сходится равномерно на множестве Y, если:

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists A = A(\varepsilon) > a : \forall R > A, \forall y \in Y \Rightarrow \left| \int_R^\infty f(x,y)dx \right| < \varepsilon$$

Смысл:

Хвост интеграла должен становиться малым одновременно для всех значений параметра y. Это гарантирует, что предельные переходы по параметру и интегралу можно менять местами.

Критерий Коши равномерной сходимости

Интеграл $\int_a^\infty f(x,y)dx$ сходится равномерно на Y тогда и только тогда, когда:

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists A > a : \forall R_1, R_2 > A, \forall y \in Y \Rightarrow \left| \int_{R_1}^{R_2} f(x,y)dx \right| < \varepsilon$$

Смысл:

Аналог критерия Коши для последовательностей. Равномерная сходимость означает, что интеграл по любому достаточно большому отрезку можно сделать сколь угодно малым сразу для всех y.

Признак Вейерштрасса

Если $|f(x,y)| \le g(x)$ для всех $x \ge a, y \in Y$ и $\int_a^\infty g(x)dx$ сходится, то $\int_a^\infty f(x,y)dx$ сходится равномерно на Y.

Смысл:

Достаточно найти мажоранту, не зависящую от параметра y, интеграл от которой сходится. Самый простой, но часто слишком грубый способ доказательства равномерной сходимости.

Признак Дирихле

Пусть:

1. $\left|\int_a^R f(x,y)dx\right| \le M$ для всех $R > a, y \in Y$
2. При каждом $y \in Y$ функция $g(x,y)$ монотонна по x
3. $g(x,y) \rightrightarrows 0$ при $x \to \infty$ на Y

Тогда $\int_a^\infty f(x,y)g(x,y)dx$ сходится равномерно на Y.

Смысл:

Полезен для интегралов вида $\int \sin(x) \cdot \frac{1}{x^p}dx$. Первый множитель осциллирует (его интеграл ограничен), второй монотонно убывает к нулю.

Признак Абеля

Теорема (Формально):
Пусть:

1. $\int_a^\infty f(x,y)dx$ сходится равномерно на Y
2. $g(x,y)$ равномерно ограничена: $|g(x,y)| \le M$ для всех $x \ge a, y \in Y$
3. При каждом $y \in Y$ функция $g(x,y)$ монотонна по x

Тогда $\int_a^\infty f(x,y)g(x,y)dx$ сходится равномерно на Y.

Смысл:

Обобщение признака Дирихле. Применяется, когда одна часть дает равномерно сходящийся интеграл, а другая - монотонную ограниченную функцию. Позволяет исследовать более сложные интегралы.

20. Связь (равномерной) сходимости несобственного интеграла с (равномерной) сходимостью ряда из определенных интегралов.

Несобственный интеграл

$$I(y) = \int_a^\infty f(x,y)\,dx$$

Смысл:

Это интеграл с бесконечным верхним пределом, зависящий от параметра y. Его сходимость означает, что при $R \to \infty$ интеграл $\int_a^R f(x,y)\,dx$ стремится к конечному пределу $I(y)$. Равномерная сходимость требует, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ существовало такое R_0, что для всех $R > R_0$ и всех y выполняется $\left|\int_R^\infty f(x,y)\,dx\right| < \varepsilon$.

Ряд из кусочных интегралов

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k(y) = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x,y)\,dx$$

Смысл:

Это представление интеграла $I(y)$ в виде бесконечной суммы интегралов по отрезкам разбиения $a = x_0 < x_1 < \dots$. Каждое слагаемое $u_k(y)$ — это вклад $f(x,y)$ на $[x_{k-1}, x_k]$. Ряд сходится к $I(y)$, если частичные суммы $S_N(y) = \sum_{k=1}^N u_k(y)$ стремятся к $I(y)$ при $N \to \infty$. Равномерная сходимость ряда означает, что $S_N(y)$ приближает $I(y)$ с любой точностью сразу для всех y при достаточно больших N.

Критерий равномерной сходимости

1. Интеграл → Ряд:
   Если $I(y)$ сходится равномерно, то для любого разбиения ряд $\sum u_k(y)$ сходится равномерно (так как "хвост" ряда соответствует "хвосту" интеграла).
2. Ряд → Интеграл:
   Если для какого-то разбиения ряд $\sum u_k(y)$ сходится равномерно, то $I(y)$ сходится равномерно (поскольку частичные суммы ряда совпадают с интегралами $\int_a^{x_N} f(x,y)\,dx$).

Смысл критерия

Оба объекта — несобственный интеграл и ряд — выражают одно и то же значение $I(y)$, но в разных формах. Равномерная сходимость означает, что ошибка приближения контролируется единым образом для всех y. Это полезно для перестановки пределов, интегрирования/дифференцирования под знаком интеграла или ряда.

21. Предельный переход под знаком интеграла по параметру при условии Лебега, предельный

переход под знаком интеграла по параметру в случае равномерной сходимости.

Предельный переход при условии Лебега

Пусть (X, A, μ) — пространство с мерой, $\tilde{Y}$ — метрическое пространство, $Y \subset \tilde{Y}$, $f : X \times Y \to \mathbb{R}$, при всех $y \in Y$ $f(x,y) \in L(X,\mu)$ (где y фиксирован) . Если при почти всех $x \in X$ $f(x,y) \underset{y \to y_0}{\longrightarrow} g(x)$, и существует $\Phi \in L(X,\mu)$ и окрестность V_{y_0}, такие что $|f(x,y)| \leq \Phi(x)$ для почти всех x и $y \in V_{y_0} \cap Y$,

то $g \in L(X,\mu)$ и $\lim_{y \to y_0} \int_X f(x,y) d\mu(x) = \int_X g(x) d\mu(x)$.

Смысл

Эта теорема обобщает теорему Лебега о мажорированной сходимости для интегралов, зависящих от параметра. Условие гарантирует, что функции $f(\cdot, y)$ "не слишком быстро растут" при $y \to y_0$, что позволяет менять порядок предела и интеграла. Пример применения — исследование непрерывности интегралов от параметрических семейств.

Предельный переход при равномерной сходимости

Пусть (X, A, μ) — пространство с мерой, $\mu X < +\infty$, $f : X \times Y \to \mathbb{R}$, $f(\cdot, y) \in L(X,\mu)$, и $f(\cdot, y) \underset{y \to y_0}{\rightrightarrows} g$ (равномерно на X). Тогда $g \in L(X,\mu)$ и $\lim_{y \to y_0} \int_X f(x,y) d\mu(x) = \int_X g(x) d\mu(x)$.

Смысл

Если семейство функций $f(\cdot, y)$ сходится к g равномерно (т.е. "одинаково быстро" для всех x), то интеграл от предела равен пределу интегралов. Это частный случаи теоремы 1, где мажорантой служит $1 + |g|$ (так как $\mu X < +\infty$). Используется, например, при доказательстве непрерывности интегралов Фурье.

Связь условий и примеры (Равномерная сходимость)

Семейство $\{f(\cdot, y)\}_{y \in Y}$ равномерно сходится к g на X, если $\sup_{x \in X} |f(x,y) - g(x)| \underset{y \to y_0}{\longrightarrow} 0$.

Обозначение: $f(\cdot, y) \rightrightarrows g$.

Смысл

Равномерная сходимость — более строгое условие, чем поточечная, но зато она гарантирует сохранение свойств (непрерывности, интегрируемости) при предельном переходе. Например, если $f(x, y)$ — непрерывные функции и $f \rightrightarrows g$, то g тоже непрерывна. В контексте интегралов это позволяет избежать "патологий", когда предельная функция неинтегрируема.

22. Локальная непрерывность интеграла по параметру, глобальная непрерывность интеграла по параметру.

Локальная непрерывность интеграла по параметру в точке

Пусть (X, A, μ) — пространство с мерой, Y — метрическое пространство, $f : X \times Y \to \mathbb{R}$, при всех $y \in Y$ $f(\cdot, y) \in L(X, \mu)$, $y_0 \in Y$, при почти всех $x \in X$ функция $f(x, \cdot)$ непрерывна в точке y_0, и f удовлетворяет локальному условию Лебега в точке y_0 (т.е. существует окрестность V_{y_0} и функция $\Phi \in L(X, \mu)$ такие, что для почти всех $x \in X$ и всех $y \in V_{y_0} \cap Y$ выполняется $|f(x, y)| \leq \Phi(x)$). Тогда интеграл $I(y) = \int_X f(x, y)\, d\mu(x)$ непрерывен в точке y_0.

Смысл:

Эта теорема гарантирует, что если подынтегральная функция $f(x, y)$ непрерывна по параметру y в точке y_0 для почти всех x и ограничена "контролирующей" функцией $\Phi(x)$, то интеграл $I(y)$ тоже будет непрерывным в y_0. Это важно, например, при исследовании зависимостей интегралов от параметров, таких как время или координаты, в физике или теории вероятностей.

Глобальная непрерывность интеграла по параметру на множестве

Пусть X — компакт в $\mathbb{R}^n$, μ — мера Лебега, Y — метрическое пространство, $f \in C(X \times Y)$. Тогда интеграл $I(y) = \int_X f(x, y)\, d\mu(x)$ принадлежит $C(Y)$ (т.е. непрерывен на Y).

Смысл:

Если f непрерывна на произведении компакта X и метрического пространства Y, то интеграл $I(y)$ будет непрерывным на всём Y. Это следует из компактности X и непрерывности f, что позволяет избежать проблем с расходимостями. Например, это применяется в задачах, где параметр y меняется в широких пределах, а X — ограниченная область.

Различие

Оба результата (локальный и глобальный) опираются на идею контроля роста $f(x, y)$: в первом случае — через локальную мажоранту, во втором — через глобальную ограниченность, обеспечиваемую компактностью X.

Локальное условие Лебега и его роль

$\exists \Phi \in L(X, \mu), \exists V_{y_0}$: при почти всех $x \in X\ \forall y \in \dot{V}_{y_0} \cap Y\ |f(x, y)| \leq \Phi(x)$.

Смысл:

Это условие требует, чтобы значения $f(x, y)$ в окрестности точки y_0 не превосходили некоторую интегрируемую функцию $\Phi(x)$. Оно нужно для применения теоремы Лебега о мажорируемой сходимости, которая позволяет "переставлять" пределы и интегралы. Без такого условия интеграл $I(y)$ может терять непрерывность, даже если $f(x, y)$ непрерывна по y.

23: Правило Лейбница дифференцирования интеграла по параметру в случае абсолютной суммируемости

Условия применимости правила Лейбница

Пусть функция $f(x, \alpha)$ определена на $[a, b] \times [\alpha_1, \alpha_2]$, интегрируема по x на $[a, b]$ для любого $\alpha \in [\alpha_1, \alpha_2]$, и её частная производная $\frac{\partial f}{\partial \alpha}$ существует и абсолютно суммируема (т.е. $\int_a^b \left|\frac{\partial f}{\partial \alpha}\right| dx < \infty$).
Тогда, то для $\alpha \in [\alpha_1, \alpha_2]$ справедливо:

$$\frac{d}{d\alpha}\left(\int_a^b f(x, \alpha)\, dx\right) = \int_a^b \frac{\partial f(x, \alpha)}{\partial \alpha}\, dx.$$

Смысл:

Правило позволяет менять порядок дифференцирования и интегрирования. Это полезно, когда интеграл зависит от параметра α, и нужно найти его производную. Например, в физике или теории вероятностей такие ситуации встречаются часто.

Важность абсолютной суммируемости и условий

Абсолютная суммируемость $\frac{\partial f}{\partial \alpha}$ (т.е. $\int_a^b \left|\frac{\partial f}{\partial \alpha}\right| dx < \infty$) обеспечивает равномерную сходимость интеграла, что позволяет применять теоремы о перестановке пределов. Без этого условия производная под интегралом может "вести себя плохо" — например, интеграл может расходиться или производная может не существовать. Абсолютная суммируемость — это способ "контролировать" поведение функции, чтобы все операции были законны.

Условия гарантируют, что интеграл можно "дифференцировать под знаком интеграла". Абсолютная суммируемость производной нужна, чтобы обеспечить равномерную сходимость и избежать проблем при перестановке операций дифференцирования и интегрирования.

24 Правило Лейбница дифференцирования интеграла по параметру в отсутствии абсолютной суммируемости. Интегрирование интеграла по параметру

Условия применимости правила Лейбница без абсолютной суммируемости

Теорема (Ослабленные условия):

Пусть функция $f(x, \alpha)$ и её частная производная $\frac{\partial f}{\partial \alpha}$ непрерывны на прямоугольнике $[a, b] \times [\alpha_1, \alpha_2]$. Тогда для $\alpha \in (\alpha_1, \alpha_2)$ справедливо:

$$\frac{d}{d\alpha} \int_a^b f(x, \alpha)\, dx = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial \alpha}\, dx.$$

Смысл:

Позволяет «проносить» производную под интеграл, если выполнены условия гладкости. Это экономит время и упрощает анализ параметрических интегралов.

Интегрирование интеграла по параметру

Теорема (Фубини для параметрических интегралов):

Если $f(x, \alpha)$ непрерывна на $[a, b] \times [\alpha_1, \alpha_2]$, то:

$$\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \left(\int_a^b f(x, \alpha)\, dx \right) d\alpha = \int_a^b \left(\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} f(x, \alpha)\, d\alpha \right) dx.$$

Смысл:

Эта формула позволяет менять порядок интегрирования, что полезно при вычислении двойных интегралов или при решении задач, где параметр α влияет на область интегрирования. Условие непрерывности гарантирует, что оба интеграла существуют и равны.

25. Свойства Г-функции Эйлера: определение, формула приведения, значения в натуральных и полуцелых точках, выражение для k-й производной, геометрические свойства.

Определение и базовые значения

Г-функция Эйлера задаётся интегралом:

$$\Gamma(p) = \int_0^{+\infty} x^{p-1} e^{-x}\, dx, \quad p > 0.$$

Смысл:

Г-функция обобщает факториал на нецелые числа. Интегральное определение позволяет работать с дробными значениями, а базовые значения показывают связь с известными константами. Например, $\Gamma(1) = 0! = 1$, а $\Gamma(1/2)$ возникает в теории вероятностей и статистике.

Формула приведения и значения в специальных точках

Формула приведения:

$$\Gamma(p+1) = p\Gamma(p).$$

Значения в целых и полуцелых точках:

$$\Gamma(n+1) = n!, \quad \Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) = \frac{(2n-1)!!}{2^n}\sqrt{\pi}, \quad n \in \mathbb{Z}_+.$$

Смысл:

Формула приведения позволяет вычислять Γ-функцию рекуррентно, сводя задачу к меньшим значениям аргумента. Значения в целых точках совпадают с факториалом, а в полуцелых — выражаются через двойные факториалы и π, что полезно в квантовой механике и интегральных преобразованиях.

Производные и геометрические свойства

Производные Γ-функции:

$$\Gamma^{(n)}(p) = \int_0^{+\infty} x^{p-1} e^{-x} \ln^n x \, dx.$$

Геометрические свойства:

1. $\Gamma(p)$ строго выпукла вниз на $(0, +\infty)$.
2. Имеет единственный минимум на $(1, 2)$.
3. $\Gamma(p) \sim \frac{1}{p}$ при $p \to 0$ и $\Gamma(p) \to +\infty$ при $p \to +\infty$.

Смысл:

Производные Γ-функции выражаются через интегралы с логарифмическими множителями, что важно в анализе. Выпуклость и наличие минимума объясняют её "U-образный" график, а асимптотики помогают оценивать поведение на границах области определения (например, в теории вероятностей).

26. Связь между Г- и В-функцией

Определение В-функции (бета-функции Эйлера)

В-функция определяется как интеграл:

$$B(p,q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx, \quad p,q > 0.$$

Смысл:

В-функция описывает интеграл от произведения степенных функций на отрезке [0, 1]. Она часто используется в теории вероятностей (например, для бета-распределения) и в анализе для вычисления сложных интегралов. Параметры p и q контролируют форму подынтегрального выражения.

Связь между Г- и В-функциями

Для любых $p, q > 0$ выполняется соотношение:

$$B(p,q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}.$$

Смысл:

Эта формула связывает В-функцию с гамма-функцией (Γ), которая обобщает факториал. Доказательство основано на замене переменных и манипуляциях с интегралами, включая теорему Тонёлли о порядке интегрирования. Связь упрощает вычисление В-функций через известные значения Γ-функции.

27. Формула Эйлера-Гаусса.

Формулировка формулы Эйлера-Гаусса

$$\Gamma(p) = \lim_{n\to\infty} \frac{n^p \cdot n!}{p(p+1)(p+2)\cdot \ldots \cdot (p+n)}, \quad p \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}_-.$$

- $\Gamma(p)$ — гамма-функция, билет 25
- $n!$ — факториал числа n.
- n^p — степенная функция.
- Знаменатель $p(p+1)...(p+n)$ — произведение линейных множителей.

Смысл:

Формула выражает гамма-функцию через предел последовательности, связывая факториал и степенную функцию. Она позволяет вычислять значения $\Gamma(p)$ для нецелых p, исключая отрицательные целые числа, где знаменатель обращается в ноль.

Условия применимости

Область определения:

Формула справедлива для всех $p \in \mathbb{R}$, кроме отрицательных целых чисел ($p \notin \mathbb{Z}_-$), так как при таких p знаменатель обращается в ноль для некоторого n.

Связь с факториалом:

При целых положительных $p = m \in \mathbb{N}$ формула сводится к $\Gamma(m) = (m-1)!$, согласуясь с классическим определением.

Смысл:

Формула Эйлера-Гаусса является альтернативным определением гамма-функции, подчеркивающим её связь с дискретными (факториал) и непрерывными (предел) математическими объектами.

28. Теорема о разложении функции в обобщенный степенной ряд. Ряды Лорана

Обобщенный степенной ряд

Обобщенным степенным рядом называется ряд вида:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z-a)^n,$$

где c_n — коэффициенты, a — центр разложения, z — комплексная переменная.

Смысл:

Это расширение обычного степенного ряда, которое включает отрицательные степени. Оно позволяет описывать функции, имеющие особенности (например, полюсы) в точке a. Используется в комплексном анализе для изучения поведения функций в окрестности особых точек.

Теорема о разложении в ряд Лорана

Если функция $f(z)$ аналитична в кольце $r < |z-a| < R$, то она может быть представлена в виде ряда Лорана:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z-a)^n,$$

где коэффициенты c_n вычисляются по формуле:

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{n+1}} d\zeta,$$

а γ — произвольный контур внутри кольца.

Смысл:

Эта теорема обобщает ряд Тейлора на случаи, когда функция не аналитична в точке a. Ряд Лорана разделяется на две части: регулярную (неотрицательные степени) и главную (отрицательные степени). Главная часть показывает тип особенности функции (например, полюс или существенную особенность).

Применение рядов Лорана

Ряды Лорана используются для:

1. Классификации особых точек (устранимые, полюсы, существенные особенности).
2. Вычисления вычетов функций в комплексном анализе.

3. Решения задач в физике и инженерии, где встречаются сингулярности.

Смысл:

Благодаря разложению в ряд Лорана можно понять, как ведет себя функция около "плохих" точек. Например, если в главной части конечное число членов, то это полюс; если бесконечное — существенная особенность. Это важно для интегрирования таких функций и анализа их поведения.

29. Неравенства Коши для коэффициентов рядов Тейлора и Лорана

$$f(z)$$

это комплекснозначная функция, аналитическая (голоморфная) в кольцевой области $r < |z - z_0| < R$, где z_0 — центр кольца, а r и R — его внутренний и внешний радиусы.

Формула коэффициентов Тейлора

Если функция $f(z)$ аналитична в круге $|z - z_0| < R$, то её коэффициенты Тейлора a_n в разложении

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

выражаются через интеграл:

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z-z_0|=r} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz, \quad 0 < r < R.$$

Смысл:

Коэффициенты ряда Тейлора показывают, как функция "раскладывается" на степенные компоненты. Интегральная формула связывает значение функции на границе круга с её поведением внутри. Это позволяет оценивать коэффициенты через максимум функции на окружности.

Неравенства Коши для Тейлора

Если $|f(z)| \leq M$ для всех z, таких что $|z - z_0| = r$, то коэффициенты a_n удовлетворяют неравенству:

$$|a_n| \leq \frac{M}{r^n}.$$

Смысл:

Неравенства Коши ограничивают рост коэффициентов Тейлора: чем дальше от центра (больше r), тем быстрее должны убывать a_n. Это важно для анализа сходимости ряда и оценки "скорости" приближения функции её многочленами Тейлора.

Формула коэффициентов Лорана

Если $f(z)$ аналитична в кольце $r < |z - z_0| < R$, то её коэффициенты Лорана c_n в разложении

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$$

вычисляются как:

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z-z_0|=\rho} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz, \quad r < \rho < R.$$

Смысл:

Ряд Лорана обобщает Тейлора для функций с особенностями (например, полюсами). Коэффициенты c_n при $n < 0$ отвечают за "сингулярную" часть, а при $n \geq 0$ — за регулярную. Интегральная формула аналогична Тейлору, но применяется в кольце.

Неравенства Коши для Лорана

Если $|f(z)| \leq M$ на окружности $|z - z_0| = \rho$, то коэффициенты Лорана удовлетворяют:

$$|c_n| \leq \frac{M}{\rho^n} \quad \text{для всех } n \in \mathbb{Z}.$$

Смысл:

Неравенства контролируют как главную ($n < 0$), так и правильную ($n \geq 0$) части ряда Лорана. Например, для полюса порядка k коэффициент c_{-k} будет доминировать, а остальные c_n

убывают с ростом $|n|$. Это помогает классифицировать особенности функции.

30. Изолированные особые точки аналитических функций, их типы. Характеризация устранимой особой точки посредством лорановского разложения

Понятие изолированной особой точки

Точка $z = a$ называется изолированной особой точкой функции $f(z)$, если:

1. $f(z)$ не аналитична в a,
2. Существует проколотая окрестность $0 < |z - a| < R$, где $f(z)$ аналитична.

Смысл:

Особая точка — это место, где функция "ломается" (например, стремится к бесконечности). "Изолированная" означает, что вблизи этой точки других проблемных точек нет. Пример: $\frac{1}{z}$ в точке $z = 0$.

Типы изолированных особых точек

Изолированные особые точки делятся на три типа:

1. Устранимая: $\lim_{z \to a} f(z)$ конечен.
2. Полюс: $\lim_{z \to a} f(z) = \infty$.
3. Существенно особая: $\lim_{z \to a} f(z)$ не существует или бесконечен, но не стремится к конкретному ∞.

Смысл:

Тип точки зависит от поведения функции при приближении к ней. Устранимую можно "починить" (например, доопределить), полюс — это "бесконечность" определённого порядка, а существенная особенность — хаотичное поведение (например, $e^{1/z}$ в нуле).

Характеризация устранимой особой точки через ряд Лорана

Точка $z = a$ является устранимой особой точкой функции $f(z)$ тогда и только тогда, когда в её лорановском разложении:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n$$

отсутствуют отрицательные степени ($c_n = 0$ для всех $n < 0$).

Смысл:

Ряд Лорана — это "разложение" функции в окрестности особой точки. Если в нём нет членов с $\frac{1}{(z-a)^n}$, значит функция не "взрывается" в точке a, и её можно сделать аналитической, переопределив $f(a) = c_0$. Пример: $\frac{\sin z}{z}$ в нуле.

31. Специфика лорановских разложений в окрестности полюса и существенно особой точки

Лорановское разложение в окрестности полюса

Если функция $f(z)$ имеет полюс порядка m в точке z_0, то её лорановское разложение в проколотой окрестности $0 < |z - z_0| < R$ имеет вид:

$$f(z) = \sum_{k=-m}^{\infty} c_k (z - z_0)^k,$$

где главная часть содержит конечное число членов ($c_{-m} \neq 0$).

Смысл:

В окрестности полюса функция "взрывается" до бесконечности, но делает это предсказуемо — как многочлен степени m в знаменателе. Лорановское разложение здесь отражает, что основное поведение функции определяется главной частью (отрицательные степени), а регулярная часть (неотрицательные степени) играет второстепенную роль.

Лорановское разложение в окрестности существенно особой точки

Если z_0 — существенно особая точка функции $f(z)$, то её лорановское разложение в проколотой окрестности $0 < |z - z_0| < R$ содержит бесконечное число отрицательных степеней:

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k (z - z_0)^k.$$

Смысл:

В отличие от полюса, в существенно особой точке функция ведёт себя хаотично (по теореме Сохоцкого-Вейерштрасса она приближается к любому значению при $z \to z_0$). Бесконечная главная часть в разложении отражает эту "неуправляемость" — никакая конечная комбинация степеней не может описать поведение функции.

Теорема Сохоцкого-Вейерштрасса (для связи с существенно особыми точками)

Если z_0 — существенно особая точка функции $f(z)$, то для любого комплексного числа w существует последовательность $z_n \to z_0$ такая, что $\lim_{n\to\infty} f(z_n) = w$.

Смысл:

Эта теорема показывает, что в окрестности существенно особой точки функция принимает значения, сколь угодно близкие к любому наперёд заданному числу (и даже к бесконечности). Это объясняет, почему лорановское разложение здесь должно содержать бесконечную главную часть — иначе поведение функции было бы "слишком простым".

Теорема Сохоцкого

Формулировка теоремы Сохоцкого

Теорема Сохоцкого утверждает, что если функция $f(z)$ аналитична в проколотой окрестности точки $z = a$ и имеет там существенную особенность, то для любого комплексного числа A (конечного или бесконечного) существует последовательность $\{z_n\}$, сходящаяся к a, такая что $\lim_{n\to\infty} f(z_n) = A$.

Смысл:

Эта теорема показывает, что в окрестности существенной особенности функция $f(z)$ может принимать значения, сколь угодно близкие к любому наперед заданному комплексному числу. Другими словами, поведение функции вблизи существенной особенности крайне нерегулярно и "хаотично". Теорема важна в комплексном анализе, так как описывает один из самых "диких" типов особенностей аналитических функций.

33. Два определения вычета. Теорема Коши о вычетах. Теорема о полной сумме вычетов.

Два определения вычета

Аналитическое определение:

Вычетом функции $f(z)$ в изолированной особой точке $z = a$ называется коэффициент c_{-1} в разложении Лорана функции $f(z)$ в окрестности этой точки:

$$\operatorname{res}(f, a) = c_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma f(z)\, dz,$$

где γ — замкнутый контур вокруг a, не содержащий других особых точек.

Интегральное определение:

Вычет — это величина, характеризующая поведение интеграла от $f(z)$ вокруг особой точки. Формально:

$$\operatorname{res}(f, a) = \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma f(z)\, dz.$$

Смысл:

Вычет показывает "вес" особенности функции в точке a. Первое определение связано с разложением в ряд Лорана, второе — с интегралом по контуру. Оба подхода эквивалентны и нужны для вычисления интегралов от комплексных функций.

Теорема Коши о вычетах

Пусть $f(z)$ аналитична в области D, за исключением конечного числа изолированных особых точек $z_1, z_2, \ldots, z_n$, и γ — простой замкнутый контур в D, не проходящий через особые точки. Тогда:

$$\oint_\gamma f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname{res}(f, z_k) \cdot n(\gamma, z_k),$$

где $n(\gamma, z_k)$ — число оборотов контура γ вокруг точки z_k.

Смысл:

Теорема связывает интеграл по контуру с суммой вычетов внутри него. Это мощный инструмент для вычисления сложных интегралов: вместо интегрирования достаточно найти вычеты в особых точках.

Теорема о полной сумме вычетов

Если $f(z)$ мероморфна в расширенной комплексной плоскости $\overline{\mathbb{C}}$ (т.е. имеет конечное число полюсов и не имеет других особенностей), то сумма всех вычетов (включая вычет на бесконечности) равна нулю:

$$\sum_{k=1}^{n} \operatorname{res}(f, z_k) + \operatorname{res}(f, \infty) = 0.$$

Вычет на бесконечности определяется как:

$$\operatorname{res}(f, \infty) = -\frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=R} f(z)\,dz, \quad R \gg 1.$$

Смысл:

Теорема показывает "баланс" вычетов: если функция ведет себя хорошо на всей комплексной плоскости, то её особенности компенсируют друг друга. Например, это помогает вычислять вычеты на бесконечности, если известны остальные.

34. Приемы отыскания вычетов

Определение вычета функции в изолированной особой точке

Вычетом функции $f(z)$ в изолированной особой точке $z = a$ называется коэффициент c_{-1} при $(z-a)^{-1}$ в разложении функции в ряд Лорана в окрестности этой точки. Обозначается:

$$\operatorname{res}_{z=a} f(z) = c_{-1}.$$

Смысл:

Вычет — это "вес" особенности функции в точке a. Он нужен для вычисления интегралов по замкнутым контурам (теорема о вычетах). По сути, вычет показывает, как сильно функция "закручивается" вокруг особой точки.

Теорема о вычетах (основная)

Если функция $f(z)$ аналитична в области D, за исключением конечного числа изолированных особых точек $z_1, z_2, \ldots, z_n$, а C — простой замкнутый контур в D, не проходящий через особые точки, то:

$$\oint_C f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname{res}_{z=z_k} f(z).$$

Смысл:

Эта теорема связывает интеграл по контуру с суммой вычетов внутри него. Вместо трудоемкого вычисления интеграла можно просто найти вычеты в особых точках — это часто гораздо проще. Например, так считают интегралы в комплексном анализе или физике.

Правило вычисления вычета в полюсе первого порядка (простом полюсе)

Если $z = a$ — полюс первого порядка функции $f(z)$, то:

$$\operatorname{res}_{z=a} f(z) = \lim_{z\to a}(z-a)f(z).$$

Если $f(z) = \frac{\varphi(z)}{\psi(z)}$, где $\varphi(a) \neq 0$, а $\psi(z)$ имеет простой ноль в a, то:

$$\operatorname{res}_{z=a} f(z) = \frac{\varphi(a)}{\psi'(a)}.$$

Смысл:

Для простых полюсов вычет можно найти через предел или производную знаменателя. Это удобно, например, для дробно-рациональных функций. Метод работает, потому что в полюсе первого порядка "главная" особенность — это $\frac{1}{z-a}$, а её коэффициент легко выделить.

Вычет в устранимой особой точке

Если $z = a$ — устранимая особая точка функции $f(z)$, то:

$$\operatorname{res}_{z=a} f(z) = 0.$$

Смысл:

Устранимая особенность — это "дырка" в функции, которую можно "залатать" (доопределить). Ряд Лорана в такой точке не содержит отрицательных степеней $(z-a)$, поэтому $c_{-1} = 0$. Например, $\frac{\sin z}{z}$ в нуле имеет устранимую особенность, и её вычет равен нулю.

Метод выделения главной части для полюсов высшего порядка

Если $z = a$ — полюс порядка m, то вычет находится через производные:

$$\operatorname{res}_{z=a} f(z) = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \to a} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} \left((z-a)^m f(z) \right).$$

Смысл:

Для кратных полюсов нужно "вытащить" коэффициент c_{-1} из ряда Лорана, раскрыв скобки и продифференцировав. Например, для полюса второго порядка ($m = 2$) придется брать первую производную. Это аналог разложения в ряд Тейлора, но для отрицательных степеней.

Вычет в бесконечно удаленной точке

Вычетом функции $f(z)$ на бесконечности называется:

$$\operatorname{res}_{z=\infty} f(z) = -\frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=R} f(z)\, dz, \quad R \gg 1.$$

Если $f(z)$ аналитична в окрестности ∞, то:

$$\operatorname{res}_{z=\infty} f(z) = -c_{-1},$$

где c_{-1} — коэффициент при z^{-1} в разложении $f(z)$ в ряд Лорана при $|z| > R$.

Смысл:

Бесконечность можно рассматривать как "особую точку". Вычет там связан с поведением функции при больших z. Например, для многочленов вычет на бесконечности нулевой, а для $f(z) = 1/z$ он равен -1. Это нужно для обобщения теоремы о вычетах на всю комплексную плоскость.

Вычисление тригонометрических интегралов с помощью вычетов

Общий вид интеграла и замена переменной

Формулировка:

Рассмотрим интеграл вида:

$$\int_0^{2\pi} R(\cos\theta, \sin\theta)\, d\theta,$$

где R — рациональная функция от $\cos\theta$ и $\sin\theta$.

Теорема/замена:

С помощью замены $z = e^{i\theta}$ интеграл преобразуется в контурный интеграл по единичной окружности:

$$\oint_{|z|=1} R\left(\frac{z + z^{-1}}{2}, \frac{z - z^{-1}}{2i}\right) \frac{dz}{iz}.$$

Смысл:

Замена позволяет свести тригонометрический интеграл к комплексному, где можно применить теорию вычетов. Это упрощает вычисление, так как рациональные функции часто имеют полюса, а вычеты в них легко найти.

Применение теоремы о вычетах

Формулировка:

Если подынтегральная функция $f(z)$ имеет конечное число изолированных особых точек z_k внутри контура $|z| = 1$, то:

$$\oint_{|z|=1} f(z)\,dz = 2\pi i \sum \operatorname{Res}(f, z_k).$$

Теорема:

Интеграл вычисляется как сумма вычетов в особых точках, умноженная на $2\pi i$.

Смысл:

Теорема о вычетах позволяет заменить трудоемкое интегрирование простой алгебраической операцией — суммированием вычетов. Особые точки (полюса) определяются знаменателем рациональной функции после замены.

36. Вычисление несобственных интегралов от рациональных функций с помощью вычетов

Условия применимости метода вычетов

Для вычисления интеграла вида $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx$, где $P(x)$ и $Q(x)$ — многочлены, должны выполняться условия:

1. Степень $Q(x)$ должна быть хотя бы на 2 больше степени $P(x)$: $\deg Q(x) \geq \deg P(x) + 2$.
2. $Q(x)$ не имеет вещественных корней (знаменатель не обращается в ноль на действительной оси).

Смысл:

Это гарантирует сходимость интеграла. Если степень знаменателя недостаточно велика, интеграл может расходиться. Отсутствие вещественных корней у $Q(x)$ упрощает применение теории вычетов, так как исключает особые точки на пути интегрирования.

Основная теорема (формула через вычеты)

Если условия выше выполнены, то:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx = 2\pi i \cdot \sum_{\mathrm{Im}(z_k)>0} \mathrm{Res}\left(\frac{P(z)}{Q(z)}, z_k\right),$$

где z_k — полюсы функции $\frac{P(z)}{Q(z)}$ в верхней полуплоскости ($\mathrm{Im}(z_k) > 0$).

Смысл:

Интеграл по вещественной оси заменяется суммой вычетов в особых точках верхней полуплоскости. Это следует из леммы Жордана и замкнутого контура, включающего полуокружность в верхней полуплоскости. Вычеты в нижней полуплоскости не учитываются, так как их вклад стремится к нулю.

37. Лемма Жордана. Вычисление преобразований Фурье с помощью вычетов

Формулировка леммы Жордана

Пусть функция $f(z)$ аналитична в верхней полуплоскости $\mathrm{Im}\, z \geq 0$, за исключением конечного числа особых точек, и удовлетворяет условию $|f(z)| \leq \frac{M}{|z|}$ при $|z| \geq R_0$, где $M > 0$. Тогда для $\lambda > 0$:

$$\lim_{R\to\infty} \int_{C_R} f(z) e^{i\lambda z} dz = 0,$$

где C_R — полуокружность $|z| = R$ в верхней полуплоскости.

Смысл:

Лемма Жордана позволяет "отбрасывать" интегралы по бесконечно большим полуокружностям при вычислении несобственных интегралов с помощью теории вычетов. Это особенно полезно для преобразований Фурье, где часто возникают интегралы вида

$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{i\lambda x}dx$. Условие $\lambda > 0$ гарантирует затухание экспоненты на верхней полуплоскости.

Связь преобразования Фурье и вычетов

Если $f(z)$ аналитична всюду, кроме изолированных особых точек z_k в верхней полуплоскости, и удовлетворяет условиям леммы Жордана, то:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{i\lambda x}dx = 2\pi i \sum_{\operatorname{Im} z_k>0} \operatorname{res}\left(f(z)e^{i\lambda z}, z_k\right).$$

Смысл:

Преобразование Фурье часто сводится к интегралу по вещественной оси, который можно вычислить через сумму вычетов в верхней полуплоскости. Лемма Жордана гарантирует, что вклад от "дуги на бесконечности" равен нулю, и интеграл определяется только особыми точками внутри контура. Это мощный инструмент для задач физики и техники, где преобразования Фурье встречаются часто.

38. Вычисление несобственных интегралов от аналитических функций с мнимым периодом

Понятие несобственного интеграла от аналитической функции

Несобственный интеграл от аналитической функции $f(z)$ с мнимым периодом iT (где $T > 0$) — это интеграл вида:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx,$$

где $f(z)$ аналитична в верхней полуплоскости $\operatorname{Im}(z) \geq 0$, за исключением конечного числа особых точек, и удовлетворяет условию $f(z+iT) = f(z)$.

Смысл:

Такой интеграл возникает при изучении периодических процессов в комплексной плоскости, например, в квантовой механике или теории сигналов. Мнимый период означает, что функция повторяется при сдвиге вдоль мнимой оси. Интеграл вычисляется с помощью методов контурного интегрирования, учитывая периодичность.

Метод вычисления с помощью теоремы о вычетах

Если $f(z)$ аналитична в верхней полуплоскости, кроме изолированных особых точек $z_1, z_2, \ldots, z_n$, и убывает быстрее $\frac{1}{|z|}$ при $|z| \to \infty$, то:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Res}(f, z_k).$$

Для функций с периодом iT контур интегрирования выбирается как прямоугольник с высотой T.

Смысл:

Теорема о вычетах позволяет свести сложный интеграл к сумме вычетов в особых точках. Периодичность $f(z)$ помогает выбрать подходящий контур, "накрывающий" один период. Это упрощает вычисления, особенно когда прямое интегрирование невозможно.

Условия сходимости и роль мнимого периода

Интеграл сходится абсолютно, если существует $C > 0$ такое, что $|f(z)| \leq \frac{C}{|z|^2}$ для $\mathrm{Im}(z) \geq 0$ и $|z| \gg 1$. Периодичность $f(z + iT) = f(z)$ гарантирует, что поведение функции повторяется на каждом "слое" комплексной плоскости.

Смысл:

Мнимый период влияет на расположение особых точек и выбор контура. Если функция растёт или осциллирует слишком сильно, интеграл может расходиться. Условие убывания $\frac{C}{|z|^2}$ обеспечивает сходимость, а периодичность позволяет использовать симметрию для упрощения задачи.

39. Гладкие многообразия с краем (определение и примеры); отображение перехода, гладкость отображения перехода.

Определение гладкого многообразия с краем

Множество $M \subset \mathbb{R}^n$ называется главным k-мерным многообразием класса $C^{(r)}$ (или r -гладким), если для любой точки $x \in M$ существует окрестность V_x^M и регулярный гомеоморфизм $\varphi : \Pi_k \to V_x^M$ класса $C^{(r)}$, где Π_k — стандартный k-мерный куб $(-1, 1)^k$ или полукуб $(-1, 0] \times (-1, 1)^{k-1}$. Точка x называется краевой, если φ задан на полукубе, а множество таких точек образует край ∂M.

Смысл.

Гладкое многообразие — это множество, которое локально выглядит как кусок $\mathbb{R}^k$ или его "половина" (полукуб). Край ∂M состоит из точек, где локальные параметризации "обрываются", как край листа бумаги. Например, отрезок $[0, 1]$ — многообразие с краем $\{0, 1\}$.

Примеры гладких многообразий

1. Открытое множество $G \subset \mathbb{R}^n$ — многообразие без края ($\partial G = \varnothing$), так как любая точка имеет кубическую окрестность (например, тождественная параметризация).
2. Кривые ($k = 1$) и гиперповерхности ($k = n - 1$) — частные случаи многообразий.

Смысл.

Простейшие примеры — это открытые шары или интервалы (без края) и отрезки/полосы (с краем). Многообразия обобщают понятие кривых и поверхностей на многомерные случаи, позволяя изучать их гладкую структуру.

Отображение перехода и его гладкость

Определение.

Пусть $M \in \mathbb{M}_{kn}^{(r)}, U, V$ — стандартные окрестности с параметризациями $\varphi : \Pi \to U$ и $\psi : \Pi' \to V$. Если $W = U \cap V \neq \varnothing$, то отображение $L = \psi^{-1} \circ \varphi : W_1 \to W_2$ (где $W_i = \varphi^{-1}(W)$) называется переходом между параметризациями.

Теорема (Регулярность перехода).

Отображение L принадлежит классу $C^{(r)}$ и является регулярным (его матрица Якоби невырождена).

Смысл.

При смене локальных координат (например, с декартовых на полярные) переход между ними должен быть гладким и обратимым. Это гарантирует, что вычисления (например, интегралы) не зависят от выбора карт в атласе многообразия. Теорема показывает, что гладкость многообразия сохраняется при пересчёте координат.

40. Мера малого измеримого подмножества многообразия; независимость меры малого измеримогомножества от выбора параметризации; измеримое подмножество многообразия.

Мера малого измеримого подмножества многообразия

Пусть $M \in \mathbb{M}_{kn}^{(1)}$, $E \subset M$ — малое измеримое множество, содержащееся в стандартной окрестности U с параметризацией φ. Мера $\mu_M E$ определяется как:

$$\mu_M E = \int_{\varphi^{-1}(E)} \sqrt{D_\varphi}\, d\mu_k,$$

где $D_\varphi = \det((D_i\varphi, D_j\varphi))_{i,j=1}^k$ — определитель Грама матрицы Якоби φ.

Смысл:

Мера малого подмножества многообразия вычисляется через интеграл от корня определителя Грама, который отражает "искажение" объема при отображении из параметрического пространства $\mathbb{R}^k$ в многообразие. Это обобщение понятия площади поверхности для произвольных k-мерных многообразий.

Независимость меры от выбора параметризации

Мера $\mu_M E$ малого измеримого множества E не зависит от выбора параметризации. Если φ и ψ — две параметризации одной окрестности, то:

$$\mu_M^\varphi E = \mu_M^\psi E = \int_{\varphi^{-1}(E)} \sqrt{D_\varphi}\, d\mu_k = \int_{\psi^{-1}(E)} \sqrt{D_\psi}\, d\mu_k.$$

Смысл:

При замене параметризации $\varphi = \psi \circ L$ интеграл преобразуется по правилу замены переменных, а определители Грама согласуются через якобиан L. Это гарантирует, что мера инвариантна и корректно определена для любых координатных систем.

Измеримое подмножество многообразия

1. Множество $E \subset M$ называется малым измеримым, если оно содержится в стандартной окрестности U и $\varphi^{-1}(E)$ измеримо в $\mathbb{R}^k$.
2. Множество E измеримо, если представимо в виде $E = \bigcup_\nu E_\nu$ (счётное объединение дизъюнктных малых измеримых множеств). Мера $\mu_M E$ определяется аддитивно:

$$\mu_M E = \sum_\nu \mu_M E_\nu.$$

Смысл:

Измеримость позволяет разбивать сложные множества на простые "кусочки", для которых мера уже определена. Это аналогично конструкции меры Лебега в $\mathbb{R}^n$, но адаптировано для многообразий с помощью локальных параметризаций.

41. Мера на многообразии. Интеграл первого рода на многообразии. Частные случаи интеграла I рода на многообразии: криволинейный и поверхностный, вычислительные формулы для них

Мера на многообразии

Пусть $M \in \mathbb{M}^{(1)}_{k,n}$, $E \in \mathbb{A}_M$.

1. Если E малое и $E \subset U$ (стандартная окрестность с параметризацией φ), то:

$$\mu_M E = \int_{\varphi^{-1}(E)} \sqrt{D_\varphi}\, d\mu_k.$$

2. Если $E = \bigcup_\nu E_\nu$ (дизъюнктивные малые множества), то:

$$\mu_M E = \sum_{\nu} \mu_M E_{\nu}.$$

Функция μ_M называется *мерой на многообразии* M.

Смысл.

Мера μ_M обобщает понятие длины (для кривых) и площади (для поверхностей) на произвольные гладкие многообразия. Она строится через локальные параметризации и интегралы от корня из определителя Грама D_φ, что гарантирует инвариантность относительно выбора координат. Это позволяет измерять "размер" подмножеств многообразия.

Интеграл первого рода на многообразии

Интеграл по мере μ_M называется *интегралом первого рода* на M. Для $f : E \to \mathbb{R}$ и малого $E \subset U$:

$$\int_E f \, d\mu_M = \int_{\varphi^{-1}(E)} (f \circ \varphi) \sqrt{D_\varphi} \, d\mu_k.$$

Смысл.

Этот интеграл позволяет вычислять величины (например, массу, заряд) распределенные по многообразию. Он сводится к обычному крайнему интегралу в локальных координатах, умноженному на "поправочный множитель" $\sqrt{D_\varphi}$, который учитывает искривление многообразия. Условие $f \circ \varphi \in \mathcal{L}_1$ гарантирует корректность.

Частные случаи и вычислительные формулы

Криволинейный интеграл ($k = 1$, кривая Γ: $x = \gamma(t)$):

$$\mu\Gamma = \int_a^b |\gamma'| \, dt, \quad \int_\Gamma f \, d\mu_\Gamma = \int_a^b (f \circ \gamma)|\gamma'| \, dt.$$

Поверхностный интеграл ($k = n - 1$, поверхность S: $\varphi : G \subset \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}^n$):

$$\mu S = \int_G \sqrt{\sum_{j=1}^{n} (\det \varphi_j')^2} \, d\mu_{n-1}, \quad \int_S f \, d\mu_S = \int_G (f \circ \varphi) \sqrt{D_\varphi} \, d\mu_{n-1}.$$

Смысл.

Для кривых интеграл сводится к одномерному с множителем $|\gamma'|$ (длина вектора скорости), что соответствует длине дуги. Для поверхностей $D_\varphi = |\mathcal{N}_\varphi|^2$ (нормаль), и интеграл учитывает площадь элемента поверхности через определители подматриц Якобиана. Классические обозначения: ds (кривая) и $d\sigma$ (поверхность).