Обработка и анализ рентгеновских астрофизических данных на Python

Лекция 4: генератор пуассоновских событий

5.10.2022

Credits: maksatsat xD

Credits: Quanta Magazine

Случайные величины

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p(x_i), \;\; \sum_{i=1}^{\infty} p(x_i) = 1$$

$$\bar{x} = \int_{i=1}^{\infty} x p(x) dx, \;\; \int_{i=1}^{\infty} p(x) dx = 1$$

Распределение Пуассона

$P_i(t)$ - вероятность зафиксировать i событий за время t, n - темп

$$P_1(dt) \overset{dt \to 0}{\to} ndt$$

$$P_2(dt) \overset{dt \to 0}{\to} n^2 dt^2 \to 0$$

$$P_0(dt) \approx 1 - P_1(dt) \to 1 - ndt$$

$$\begin{cases} P_0(t + dt) = P_0(t)P_0(dt) = P_0(t)(1 - ndt) \\ P_0(t + dt) = P_0(t) + \dfrac{dP_0(t)}{dt}dt \end{cases} \Rightarrow \frac{dP_0(t)}{dt} + nP_0(t) = 0$$

$$P_0(t) = \exp(-nt), P_0(0) = 1$$

Распределение Пуассона

$$P_k(t+dt) = P_k(t)P_0(dt) + P_{k-1}P_1(dt)$$

$$\begin{cases} P_k(t+dt) = P_k(t)(1-ndt) + P_{k-1}(t)ndt \\ P_k(t+dt) = P_k(t) + \dfrac{dP_k(t)}{dt}dt \end{cases} \Rightarrow \frac{dP_k(t)}{dt} + nP_k(t) = nP_{k-1}(t)$$

$$P_0(0) = 1, P_1(0) = P_2(0) = \ldots = 0$$

$$P_K(t) = \frac{(nk)^k}{k!}\exp(-nt)$$

Распределение Пуассона

Среднее число событий за время t

$$\bar{k} = \sum_{k=1}^{\infty} kP_k(t) = \sum_{k=1}^{\infty} k\frac{(nt)^k}{k!}\exp(-nt) =$$

$$= nt\exp(-nt)\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(nt)^m}{m!} = nt\exp(-nt)\exp(nt) = nt$$

Распределение Пуассона

Дисперсия $D \equiv \sum_{i=0}^{\infty} p(x_i)(x_i - \bar{x})^2 = \sum_{i=0}^{\infty} x_i^2 p(x_i) - 2\bar{x} \sum_{i=0}^{\infty} x_i p(x_i) + \bar{x}^2 \sum_{i=0}^{\infty} p(x_i) =$

$$= \overline{x_i^2} - 2\bar{x}^2 + \bar{x}^2 = \overline{x^2} - \bar{x}^2$$

$$\overline{k^2} = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 \frac{\bar{k}^k}{k!} \exp(-\bar{k}) = \bar{k} \sum_{k=1}^{\infty} k \frac{\bar{k}^{k-1}}{(k-1)!} \exp(-\bar{k}) =$$

$$= \bar{k} \left[\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\bar{k}^{k-1}}{(k-1)!} \exp(-\bar{k}) \cdot (k-1) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\bar{k}^{k-1}}{(k-1)!} \exp(-\bar{k}) \right] = \bar{k}[\bar{k} + 1] = \bar{k}^2 + \bar{k}$$

$$\sigma^2 \equiv D = \bar{x}^2 + \bar{x} - \bar{x}^2 = \bar{x}$$

Распределение Пуассона

Распределение $P_K(t) = \frac{(nk)^k}{k!} \exp(-nt)$

Среднее $\bar{x} = nt$

Дисперсия $D = \bar{x}$

Ошибка $\sigma \equiv \sqrt{D} = \sqrt{\bar{x}}$

Распределение длительностей интервалов между событиями

$$P_0(t)P_1(dt) = \exp(-nt)ndt \equiv P_t(t)dt$$

$P_t(t) = n\exp(-nt)$ - экспоненциальное распределение

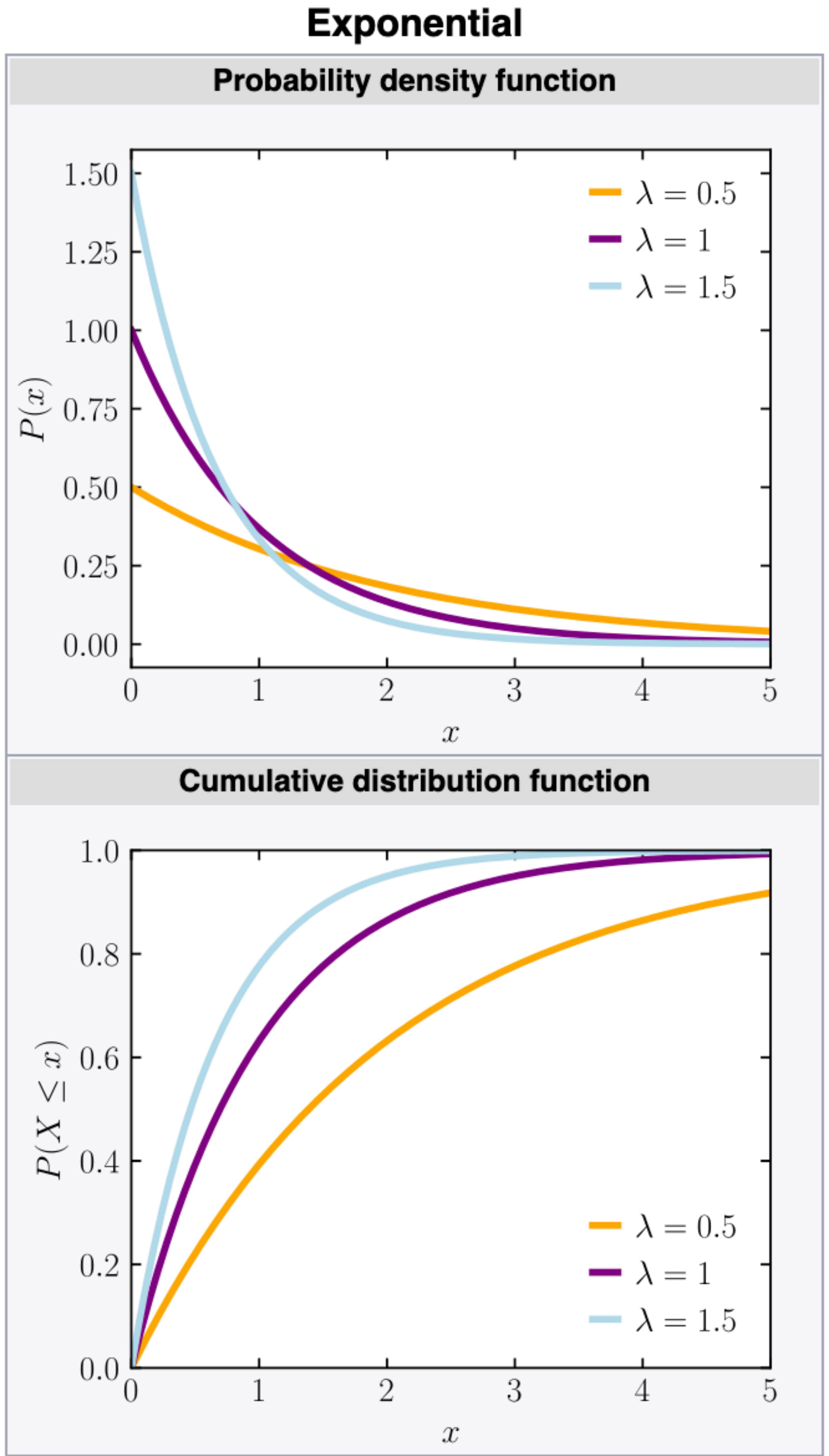
Генератор

Функция распределения

$$F_n(t) = 1 - \exp(-nt) = X$$

$$X \in [0,1]$$

Время между событиями $\Delta T = -\dfrac{1}{n}\ln(1 - X)$



Спасибо за внимание!