Руководство по работе с программой

Диаграммы Гейла

Александр Максименко

Выпуклые d-мерные многогранники. Данная программа представляет собой инструмент для изучения комбинаторных свойств выпуклых многогранников [1, 2]. Каждый такой многогранник состоит из граней различных размерностей. Грани минимальной размерности, 0-грани, называются *вершинами*. Грани максимальной размерности, $(d-1)$-грани, где d — размерность многогранника, называются *гипергранями* или *фасетами*. Грани размерности 1 называются *ребрами*, а грани размерности $d-2$ — *гребнями* или *риджами*. Комбинаторный тип многогранника однозначно определяется его *матрицей инциденций фасет-вершин*. Множество строк этой матрицы находится во взаимно-однозначном соответствии с множеством фасет многогранника, а множество её столбцов — с множеством вершин многогранника. На пересечении i-ой строки и j-го столбца этой матрицы вписана единица, если i-я фасета многогранника содержит j-ю вершину, в противном случае вписан ноль.

Диаграмма Гейла. *Диаграммой Гейла* называется конечное множество точек (векторов) $X \subset \mathbb{R}^d$. Причем одна и та же точка может присутствовать несколько раз (иметь кратность). Хорошо известно [1, 2], что каждому m-мерному выпуклому многограннику на n вершинах V может быть поставлена в соответствие диаграмма Гейла (множество точек) X со следующими свойствами:

1. Размерность d диаграммы равна $n - m - 1$.

2. Число точек в диаграмме совпадает с числом вершин многогранника, и между этими множествами установлено взаимно-однозначное соответствие $\alpha\colon V \to X$.

3. При удалении любой (одной) точки из диаграммы Гейла выпуклая оболочка остальных точек имеет размерность d и содержит начало координат в качестве внутренней точки.

4. Подмножество $F \subseteq V$ является множеством вершин некоторой грани многогранника $\mathrm{conv}(V)$ тогда, и только тогда, когда начало координат является относительной внутренней точкой выпуклой оболочки множества $Y = \alpha(V \setminus F)$, $Y \subseteq X$. В таком случае Y называют *когранью*.

Более того, каждая диаграмма Гейла, удовлетворяющая третьему свойству, соответствует некоторому выпуклому многограннику с указанными выше свойствами.

Таким образом, если число вершин многогранника не сильно отличается от его размерности, то для изучения его комбинаторных свойств удобнее перейти к рассмотрению диаграммы Гейла, которая, при таких условиях, будет иметь небольшую размерность. Кроме того, как показывает опыт, именно такие случаи (когда число вершин не сильно отличается от размерности) представляют особый интерес в рамках комбинаторной теории выпуклых многогранников.

Критерий кофасеты. Из перечисленных выше свойств диаграммы Гейла следует, что подмножество $F \subseteq V$ является множеством вершин некоторой фасеты многогранника $\mathrm{conv}(V)$ тогда, и только тогда, когда выпуклая оболочка множества $Y = \alpha(V \setminus F)$ является симплексом и содержит начало координат в качестве относительной внутренней точки. Если последнее выполнено, то Y называется *кофасетой* соответствующей диаграммы Гейла.

Примеры. Если в качестве $X \subset \mathbb{R}^3$ взять множество вершин октаэдра

$$\begin{aligned}
x_1 &= (1, 0, 0),\\
x_2 &= (-1, 0, 0),\\
x_3 &= (0, 1, 0),\\
x_4 &= (0, -1, 0),\\
x_5 &= (0, 0, 1),\\
x_6 &= (0, 0, -1),
\end{aligned}$$

то такая диаграмма Гейла будет содержать ровно три кофасеты: $\{x_1, x_2\}$, $\{x_3, x_4\}$, $\{x_5, x_6\}$. Но третье свойство для этой диаграммы не выполнено.

В частности, начало координат $(0,0,0)$ лежит на границе выпуклой оболочки множества $\{x_2, x_3, \ldots, x_6\}$. Это означает, что данная диаграмма не соответствует никакому выпуклому многограннику.

Рассмотрим теперь множество вершин шестиугольника в $\mathbb{R}^2$:

$$
\begin{aligned}
x_1 &= (2,1),\\
x_2 &= (2,-1),\\
x_3 &= (0,-2),\\
x_4 &= (-2,-1),\\
x_5 &= (-2,1),\\
x_6 &= (0,2).
\end{aligned}
$$

Такая диаграмма Гейла содержит пять кофасет: $\{x_1, x_4\}$, $\{x_2, x_5\}$, $\{x_3, x_6\}$, $\{x_1, x_3, x_5\}$, $\{x_2, x_4, x_6\}$. Соответствующий ей трехмерный многогранник является треугольной призмой.

Диаграмме Гейла, образованной вершинами треугольника с кратностью два

$$
\begin{aligned}
x_1 &= (1,1),\\
x_2 &= (1,1),\\
x_3 &= (1,-1),\\
x_4 &= (1,-1),\\
x_5 &= (-1,0),\\
x_6 &= (-1,0),
\end{aligned}
$$

соответствует трехмерный октаэдр, имеющий 6 вершин и 8 фасет: $\{x_1, x_3, x_5\}$, $\{x_1, x_3, x_6\}$, $\{x_1, x_4, x_5\}$, $\{x_1, x_4, x_6\}$, $\{x_2, x_3, x_5\}$, $\{x_2, x_3, x_6\}$, $\{x_2, x_4, x_5\}$, $\{x_2, x_4, x_6\}$.

Основная идея реализации. Рассмотрим подмножество точек $Y = \{y^1, \ldots, y^k\}$ диаграммы X. Из описанного выше критерия кофасеты следует, что Y является кофасетой тогда, и только тогда, когда система

$$
\begin{aligned}
x_1 y^1 + \cdots + x_k y^k &= 0,\\
x_1 + \cdots + x_k &= 1,
\end{aligned}
$$

имеет единственное решение и $x_i > 0$, $i \in [k]$. (Более того, никакое подмножество множества Y этому условию не удовлетворяет.) Такая проверка может быть выполнена, например, с помощью метода Гаусса для решения систем линейных уравнений.

Та же идея используется и для проверки третьего свойства диаграммы Гейла. А именно, пусть x — одна из точек диаграммы Гейла и $Y = X \setminus \{x\}$. Воспользуемся тем, что вершина $\alpha^{-1}(x)$ многогранника $\mathrm{conv}(V)$ должна быть пересечением как минимум m фасет, где $m = n - d - 1$ — размерность многогранника. Предположим, что все фасеты (точнее, множества их вершин) уже найдены на предыдущем шаге. Выберем из них те, что содержат тестируемую вершину $\alpha^{-1}(x)$. Если их число оказалось меньше $n - d - 1$, то эта диаграмма не может соответствовать выпуклому многограннику. Если же их не меньше, чем $n-d-1$, то остается убедиться в том, что система векторов из Y имеет ранг не менее d. Это можно сделать с помощью того же метода Гаусса, располагая вектора в строках соответствующей матрицы.

Формат входных данных. Во входном файле, содержащем диаграмму Гейла, первая строка содержит два целых числа: размерность диаграммы и число точек в ней. Далее идет список точек. Описание каждой точки занимает одну строку и представляет собой несколько целых чисел (координат точки), разделенных пробелами. На значения входных данных накладываются следующие ограничения:

1. Все числа целые. Никакие символы, кроме цифр и пробельных символов (переводов строки, табуляций) недопустимы.

2. Размерность диаграммы не может быть больше 16 (константа `MAX_DIM` в коде программы).

3. Число точек не может быть больше 64 (особенность реализации, связанная с разрядностью ОС).

4. Значения координат точек не могут быть по абсолютной величине больше, чем 2 (константа `MAX_NUMBERS` в коде программы). Эта константа может быть на несколько порядков увеличена, если размерность обрабатываемых диаграмм невелика.

Пример входного файла, содержащего вершины шестиугольника:

```
2 6
 2  1
 2 -1
 0 -2
```

```
-2 -1
-2  1
 0  2
```

Работа с программой. Программа написана на языке C++ и, в случае использования компилятора GNU, компилируется следующей командой:

```
g++ gale-main.cpp gale-diagram.cpp -o gale
```

Единственным параметром получившегося исполняемого файла `gale.exe` является имя файла, содержащего описание диаграммы Гейла. Пример использования:

```
gale 2d6v.g
```

Результат работы программы сохраняется в файл с расширением `.out`. Формат и способ вывода результатов работы программы может быть скорректирован вручную в основном файле `gale-main.cpp`. В текущей версии в выходной файл сохраняется:

1. Описание диаграммы в исходном виде.
2. Список множеств вершин, образующих фасеты.
3. Матрица инциденций фасет-вершин.
4. Если диаграмма не соответствует никакому выпуклому многограннику, то выводится номер первой точки, для которой не выполнено третье свойство диаграммы Гейла и файл заканчивается надписью `This is not convex polytope!`
5. Далее выводится число риджей и список ребер многогранника.

Дополнения. Специально для тестирования данной программы была написана программа `test.c`, которая по заданному числу строк и столбцов генерирует случайную матрицу, сохраняемую в файле с именем `source`. Далее для этой матрицы вычисляется лексикографически минимальный представитель и сохраняется в файл `optimum`. После этого строки и столбцы исходной матрицы переставляются случайным образом, а результат сохраняется в файл `randomized`. Для новой матрицы также вычисляется представитель (сохраняется в файл `optimum2`) и сравнивается с представителем исходной матрицы. Если алгоритм работает корректно, то представители должны совпадать и программа выдает сообщение `Congratulations!` В случае некорректной работы алгоритма должно появиться сообщение `BAD ordering!`

Скорость работы программы существенно зависит от общего числа различных перестановок строк и столбцов, приводящих к ответу, так как при поиске представителя программа перебирает все эти варианты. Так, например, для матрицы инциденций гиперграней-вершин 10-мерного симплекса это число равно $10! = 3\,628\,800$ (сама матрица имеет размер 11×11). Перебор всех этих вариантов на обычном ноутбуке занимает несколько десятков секунд. В то же время поиск представителя для случайной $0/1$-матрицы размера 100×24 занимает не более секунды.

Список литературы

[1] Grünbaum B. Convex polytopes. Second edition. Springer, 2003.

[2] Циглер Г.М. Теория многогранников: Пер. с англ. / Под ред. Н.П. Долбилина. М.: МЦНМО, 2014.